



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Φαινόμενα Κβαντικής Συμβολής κοντά σε Επιφάνεια Τοπολογικού Μονωτή

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ Σ. ΣΤΕΡΓΙΟΥ

Επιβλέπων: Βασίλειος Γιαννόπουλος
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Φαινόμενα Κβαντικής Συμβολής κοντά σε Επιφάνεια Τοπολογικού Μονωτή

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ Σ. ΣΤΕΡΓΙΟΥ

Επιβλέπων: Βασίλειος Γιαννόπαπας
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 26η Ιουνίου 2023.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Βασίλειος Γιαννόπαπας
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Γεώργιος Τσιγαρίδας
Επικουρος Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Λεωνίδας Τσέτσερης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.
Βασιλική Στεργίου, 2023.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

.....
Βασιλική Στεργίου

Ιούνιος 2023

Περίληψη

Οι τοπολογικοί μονωτές είναι μια κατηγορία μοντέρνων υλικών που στον όγκο τους εμφανίζουν ενεργειακό χάσμα όπως οι συνήθεις μονωτές, αλλά παρουσιάζουν προστατευμένες αγώγιμες καταστάσεις στην επιφάνεια τους. Εμφανίζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, μεταξύ των οποίων η διηλεκτρική τους συνάρτηση που εμφανίζει υψηλές τιμές, γεγονός που οδηγεί σε ισχυρές αλληλεπιδράσεις ύλης-φωτός. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, διαπιστώθηκε ότι η ύπαρξη γενικευμένου κβαντικού εκπομπού τριών επιπέδων κοντά στον τοπολογικό μονωτή Bi_2Se_3 επηρεάζει το ρυθμό αποδιέγερσης του εκπομπού και ενισχύει σημαντικά τη κβαντική συμβολή μεταξύ των δυο καναλιών αυθόρμητης εκπομπής.

Λέξεις Κλειδιά

Αυθόρμητη αποδιέγερση, κβαντική συμβολή, φαινόμενο Purcell, τρισταθμικός εκπομπός, Bi_2Se_3 , τοπολογικοί μονωτές

Abstract

Topological insulators is a category of novel materials that have a bulk energy gap like normal insulators, but have protected conductive states on their surface. They have interesting properties; among others, their dielectric function displays high maxima values, leading to strong light-matter interactions. In this thesis, it was numerically demonstrated that the spontaneous decay rate of a generic three-level quantum emitter is affected when it is placed close to the surface of the topological insulator Bi_2Se_3 and the quantum interference between the two spontaneous emission channels of the emitter is greatly enhanced.

Keywords

Spontaneous emission, quantum interference, Purcell effect, three-level emitter, Bi_2Se_3 , topological insulators

σε αυτούς που έδωσαν το κάτι παραπάνω

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Βασίλειο Γιαννόπαπα για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας και για την ευκαιρία που μου έδωσε να γνωρίσω και να ασχοληθώ στα πλαίσια αυτής με ενδιαφέρουσα φυσική και φαινόμενα του πεδίου της κβαντικής οπτικής. Επίσης, ευχαριστώ τους καθηγητές κ. Λεωνίδα Τσέτσερη και κ. Γεώργιο Τσιγαρίδα που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής. Πολλοί είναι οι άνθρωποι με τους οποίους οι κοσμικές γραμμές μας διασταυρώθηκαν με τρόπο καθοριστικό, και τους οποίους ευγνωμονώ για τη συνεισφορά τους στην ολοκλήρωση της εργασίας μου, αλλά και στο ποια είμαι σήμερα. Ξεχωρίζω τη συνδρομή του Δρ. Νίκου Χαριτωνίδη, της Χρυστάλλας, και του Γιάννη ΠΜ, για την πολύτιμη βοήθεια, την πίστη στις δυνατότητές μου και την υποστήριξη της προσπάθειάς μου σε κάθε πτυχή αυτού του ταξιδιού. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς και την αδελφή μου, που με τη συνεχή υποστήριξή τους και την αμέριστη αγάπη τους μου έδωσαν τον κόσμο.

Γενεύη, Ιούνιος 2023

Βασιλική Στεργίου

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	2
Ευχαριστίες	4
1 Εισαγωγή	7
1.1 Αλληλεπίδραση Υλης-Φωτός	7
1.1.1 Αλληλεπίδραση Φωτός με Μεταλλικές Δομές	8
1.2 Κβαντικοί Εκπομποί	8
1.3 Τοπολογικοί Μονωτές	9
1.3.1 Χαλκογενίδια Βισμούθιου	10
1.4 Αντικείμενο και σκοπός παρούσας διπλωματικής εργασίας	13
1.5 Οργάνωση του τόμου	14
2 Θεωρητικό & Μαθηματικό Υπόβαθρο	15
2.1 Εξισώσεις Maxwell & HM Κυματική Εξίσωση	15
2.2 Επίλυση της Helmholtz με Συναρτήσεις Green	17
2.2.1 Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με Συναρτήσεις Green	17
2.2.2 Η Εξίσωση Helmholtz	17
2.2.3 Λύσεις της Ηλεκτρομαγνητικής (HM) Κυματικής Εξίσωσης	18
2.3 Κβαντικός Εκπομπός ως Δίπολο	19
2.4 Ανάκλαση HM Κυμάτων σε Επίπεδη Διεπιφάνεια	20
2.4.1 Θεωρητική Διάταξη	22
2.5 Ισχύς και Ρυθμός Αποδιέγερσης Κβαντικού Εκπομπού	23
2.6 Αλληλεπίδραση Διπόλου-Ακτινοβολίας	25
2.6.1 Εισάγοντας Στοιχεία Κβαντικής Φυσικής	25
2.6.2 Πίνακας Πυκνότητας Φωτονίων	27
2.6.3 Εξισώσεις Κίνησης Heisenberg	27
2.6.4 Δυναμική Εξέλιξη Πληθυσμών	29
2.7 Μεθοδολογία και σκοπός της παρούσας εργασίας	29
3 Μεθοδολογία & Αποτελέσματα	31
3.1 Μεθοδολογία	31
3.2 Αποτελέσματα	33
3.2.1 Διηλεκτρική Συνάρτηση	33

3.2.2 Ρυθμοί Αποδιέγερσης	35
3.2.3 Μέτρο Κβαντικής Συμβολής	37
3.2.4 Δυναμική Πληθυσμών	40
4 Συμπεράσματα & Επόμενες Μελέτες	45
4.1 Συμπεράσματα	45
4.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις	45
4.3 Τεχνολογικές Εφαρμογές	46
Παραρτήματα	47
Α΄ Χρήσιμοι ορισμοί	48
Α.1 Συνάρτηση δέλτα Dirac	48
Α.1.1 Ορισμός	48
Α.2 Δέλτα του Kronecker	48
Β΄ Σχέσεις	49
Β.1 ΤΕ και ΤΜ διανύσματα πόλωσης	49
Βιβλιογραφία	54

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

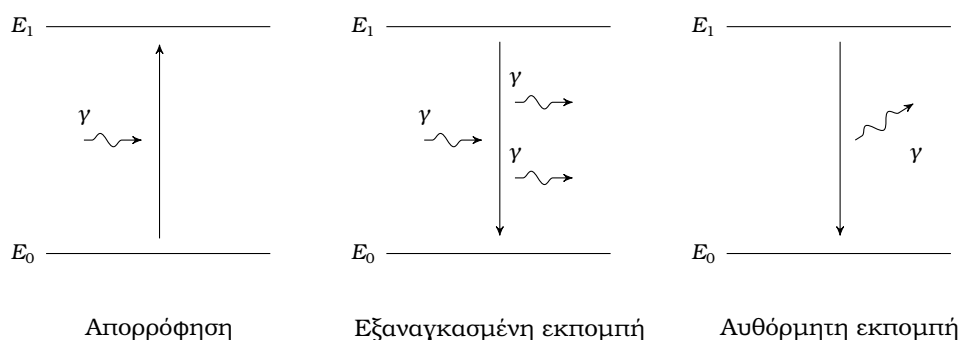
Η ταχεία εξέλιξη της τεχνολογίας και οι διαρκώς αυξανόμενες τεχνολογικές δυνατότητες σπρώχνουν συνεχώς τα όρια της ανθρώπινης γνώσης. Καθώς οι διαστάσεις γίνονται όλο και μικρότερες, περνώντας πλέον στην μικρο- και νανοκλίμακα, τα κβαντικά φαινόμενα ενισχύονται και η βαθύτερη κατανόηση της φυσικής είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη νέων εφαρμογών. Η ανάγκη αυτή γεννά και τροφοδοτεί εξειδικευμένα πεδία μελέτης των φαινομένων αυτών, των οποίων η κατανόηση και τελικά ο έλεγχος δείχνουν το δρόμο για την εξέλιξη της κβαντικής τεχνολογίας. Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί ένα βήμα προς την κατανόηση των κβαντικών φαινομένων αλληλεπίδρασης ύλης-φωτός, και συγκεκριμένα εμβαθύνει στις ιδιότητες των χαλκογενιδίων βισμούθιου όσον αφορά την κβαντική αλληλεπίδρασή τους με κβαντικούς εκπομπούς.

1.1 Αλληλεπίδραση Ύλης-Φωτός

Η μελέτη φαινομένων αλληλεπίδρασης ύλης-φωτός στη νανοκλίμακα αποτελεί το αντικείμενο της νανο-οπτικής, η οποία συνδυάζει τις αρχές της οπτικής με τα επιτεύγματα της νανοεπιστήμης. Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας αφορά την αλληλεπίδραση μιας δομής από σεληνιούχο βισμούθιο - Bi_2Se_3 με ένα διεγερμένο κβαντικό εκπομπό και την επίδραση στην αυθόρμητη αποδιέγερσή του.

Η αυθόρμητη αποδιέγερση ή εκπομπή είναι φαινόμενο κατά το οποίο ένα κβαντικό σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση υψηλότερης ενέργειας σε μία κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας, χωρίς την αλληλεπίδραση με κάποιο εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, γι' αυτό και ο χαρακτηρισμός ως 'αυθόρμητη'. Κατά τη μετάβαση εκπέμπεται ένα φωτόνιο ενέργειας ίσης με την ενεργειακή διαφορά των δύο ενεργειακών καταστάσεων προς τυχαία κατεύθυνση [1, 2].

Σε αντίθεση με την εξαναγκασμένη εκπομπή ή την απορρόφηση, διαδικασίες που πυροδοτούνται μόνο παρουσία φωτονίων, η αυθόρμητη εκπομπή ακτινοβολίας από διεγερμένα άτομα συμβαίνει ακόμα και στο κενό, απουσία εξωτερικών αλληλεπιδράσεων, και για την περιγραφή της δεν αρκεί η κλασική φυσική. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα αμιγώς κβαντομηχανικό φαινόμενο, το οποίο μπορεί να περιγραφεί πλήρως με τις αρχές της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Θεωρώντας κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, η αυθόρμητη αποδιέγερση των ατόμων τελικά πυροδοτείται από τις πεδιακές διακυμάνσεις γύρω από τη μηδενική ενέργεια, οι οποίες συμβαίνουν και στον κενό χώρο [2, 3].



Σχήμα 1.1: Αναπαραστάσεις ατομικών μεταβάσεων: Απορρόφηση, Εξαναγκασμένη και Αυθόρμητη εκπομπή. Για τα ενεργειακά επίπεδα E_0 και E_1 ισχύει $\Delta E = E_1 - E_0 = \hbar\omega$, που ισούται με την ενέργεια του απορροφούμενου ή εκπεμπόμενου φωτονίου γ . Στην εξαναγκασμένη εκπομπή, το εκπεμπόμενο φωτόνιο είναι ακριβές αντίγραφο του προσπίπτοντος, με ίδια κατεύθυνση και φάση. Στην αυθόρμητη εκπομπή, το εκπεμπόμενο φωτόνιο μπορεί να έχει οποιαδήποτε κατεύθυνση.

1.1.1 Αλληλεπίδραση Φωτός με Μεταλλικές Δομές

Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι η αυθόρμητη αποδιέγερση κβαντικών εκπομπών, δηλαδή για παράδειγμα ατόμων ή μορίων, επηρεάζεται σημαντικά παρουσία μεταλλικών δομών ή κοιλοτήτων κοντά στον εκπομπό [4]. Πιο συγκεκριμένα, επηρεάζουν τον ρυθμό της αποδιέγερσης, ένα φαινόμενο που είναι γνωστό ως Φαινόμενο Purcell [2, 5]. Στις πειραματικές υλοποιήσεις χρησιμοποιούνται διατάξεις με ευγενή μέταλλα, στην επιφάνεια των οποίων προσπίπτουσες ακτινοβολίες διεγείρουν συλλογικές ταλαντώσεις φορτίων, ή αλλιώς επιφανειακά πλάσμονια. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη συσσώρευση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων κοντά στην επιφάνειά τους, και σε αυτή την περιοχή μπορούν να πυροδοτηθούν έντονα φαινόμενα αλληλεπίδρασης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων με κβαντικούς εκπομπούς, όπως το φαινόμενο Purcell.

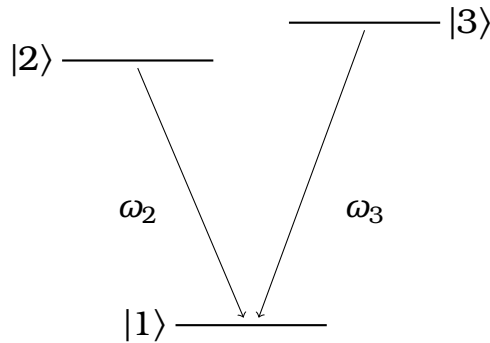
Για τη θεωρητική περιγραφή του φαινομένου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έννοια της φωτονικής πυκνότητας καταστάσεων, που είναι αντίστοιχη της πυκνότητας καταστάσεων ενέργειας των ηλεκτρονίων στα στερεά και αφορά τα εκπεμπόμενα φωτόνια. Η παρουσία ανακλαστικών δομών κοντά στον εκπομπό επηρεάζει την πυκνότητα των φωτονικών καταστάσεων και κατά συνέπεια την αυθόρμητη αποδιέγερση των εκπομπών [6, 7]. Αυτό ακριβώς το φαινόμενο έχει μελετηθεί στην παρούσα εργασία, όπου αντί να υπολογιστούν οι πυκνότητες καταστάσεων έχουν αξιοποιηθεί οι ιδιότητες της συνάρτησης Green παρέχοντας μια ισοδύναμη και πιο κομψή λύση σε ένα δύσκολο υπολογιστικά πρόβλημα [8].

1.2 Κβαντικοί Εκπομποί

Ένας 'κβαντικός εκπομπός' (quantum emitter) είναι ένα φυσικό σύστημα το οποίο πραγματοποιεί ενεργειακές μεταβάσεις, από υψηλότερη σε χαμηλότερη ενέργεια (ή το αντίστροφο), εκπέμποντας (ή απορροφώντας) μεμονωμένα φωτόνια [2, 4]. Ένα τέτοιο κβαντικό σύστημα μπορεί να αποτελείται από ένα άτομο, ένα μόριο ή μια κβαντική τελεία. Οι διαστάσεις ενός εκπομπού μπορούν να θεωρηθούν αρκετά μικρότερες από το μήκος κύματος των φωτο-

νίων, και συνεπώς το πεδίο που νιώθει ο εκπομπός μπορεί να προσεγγιστεί ως ομογενές και σταθερό στο χώρο. Λόγω της υπόθεσης αυτής, για την κβαντομηχανική περιγραφή του συστήματος μπορεί να εφαρμοστεί η διπολική προσέγγιση, και ο εκπομπός να μοντελοποιηθεί ως ένα αρμονικά ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο [9, 10].

Στην παρούσα εργασία θεωρείται γενικευμένος κβαντικός εκπομπός τύπου V ή τρισταθμικός. Το συγκεκριμένο σύστημα αποτελείται από δυο ανώτερες ενεργειακές στάθμες, κοντινές μεταξύ τους, και μία χαμηλότερη, όπως απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 1.2.



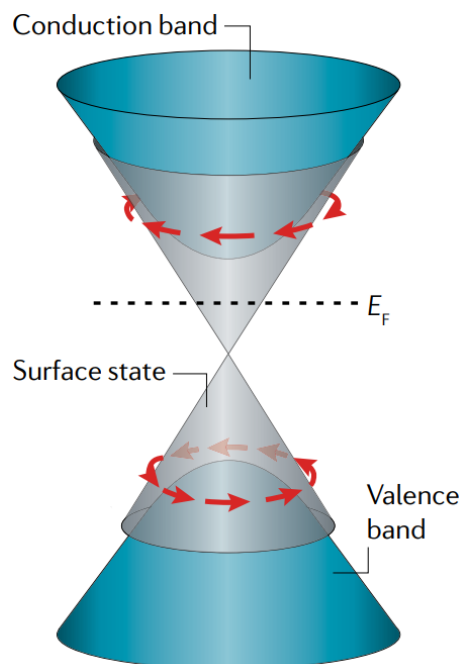
Σχήμα 1.2: Φάσμα κβαντικού εκπομπού τύπου V ή τριών επιπέδων ή τρισταθμικός.

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται τα δύο κανάλια αυθόρμητης εκπομπής του συστήματος που μελετήθηκε. Οι υψηλότερες στάθμες $|2\rangle$ και $|3\rangle$ αποδιεγείρονται αυθόρμητα στη χαμηλότερη στάθμη $|1\rangle$, με εκπομπή φωτονίου συχνότητας ω_2 και ω_3 αντίστοιχα.

Η παρουσία ενός διεγερμένου τρισταθμικού εκπομπού κοντά σε υλικό που επιτρέπει επιφανειακούς συντονισμούς μπορεί να οδηγήσει στην ανάδυση φαινομένων κβαντικής συμβολής μεταξύ των καναλιών αυθόρμητης εκπομπής. Απόρροια αυτού του φαινομένου είναι η παγίδευση εκπομπών σε διεγερμένη κατάσταση και η ενίσχυση ή καταστολή του ρυθμού της αυθόρμητης αποδιέγερσής τους [6, 7, 8, 11, 12]. Η παρούσα εργασία μελετά αυτά ακριβώς τα φαινόμενα. Πιο συγκεκριμένα, έγινε μελέτη τους στην περίπτωση που ο εκπομπός βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια, όχι μετάλλου, αλλά ενός τοπολογικού μονωτή.

1.3 Τοπολογικοί Μονωτές

Οι τοπολογικοί μονωτές είναι υλικά που στον κύριο όγκο τους είναι μονωτές, δηλαδή η ζώνη αγωγιμότητας και η ζώνη σθένους διαχωρίζονται με ενεργειακό χάσμα, αλλά εμφανίζουν αγωγίμες μεταλλικές καταστάσεις στην επιφάνειά τους ή στις ακμές τους (αν είναι τρισδιάστατοι-3D ή διςδιάστατοι-2D, αντίστοιχα). Συγκεκριμένα, οι καταστάσεις αυτές σχηματίζονται στο σύνορο που διαχωρίζει τους τοπολογικούς μονωτές από υλικά διαφορετικής τοπολογικής κλάσης, που δηλαδή εμφανίζουν διαφορετικές συμμετρίες στις ενεργειακές τους ζώνες, όπως είναι οι συνήθεις μονωτές και το κενό. Η μορφή αυτή των ενεργειακών ζωνών των στο σύνορο ενός τοπολογικού μονωτή οφείλεται στην ισχυρή σύζευξη σπιν-τροχιάς, που προκαλεί το σχηματισμό σημείων τομής των ζωνών, ή του λεγόμενου 'κόνου Dirac', και οι επιφανειακές καταστάσεις παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από συμμετρία αντιστροφής χρόνου (time-reversal symmetry). [13, 14, 15]



Σχήμα 1.3: Γραφική αναπαράσταση των ζωνών αγωγιμότητας και σθένους στον όγκο ενός τοπολογικού μονωτή (μπλε χρώμα) και του κώνου Dirac που σχηματίζουν οι επιφανειακές καταστάσεις (γκρι χρώμα). [16]

Στο σχήμα 1.3 αναπαρίστανται γραφικά η ζώνη σθένους (valence band) και η ζώνη αγωγιμότητας (conduction band) στον κύριο όγκο (bulk) ενός τοπολογικού μονωτή, σημειωμένες με μπλε χρώμα, ενώ με γκρι χρώμα αναπαριστώνται οι ενεργειακές ζώνες των επιφανειακών καταστάσεων [16]. Διακρίνεται ότι στον όγκο οι ζώνες διαχωρίζονται με ενεργειακό χάσμα, ενώ οι επιφανειακές καταστάσεις σχηματίζουν έναν κώνο Dirac και εφάπτονται στο λεγόμενο σημείο Dirac, γεφυρώνοντας το χάσμα και καθιστώντας δυνατή την κινητικότητα των ηλεκτρονίων από τη ζώνη σθένους στη ζώνη αγωγιμότητας όπως συμβαίνει στα μέταλλα.

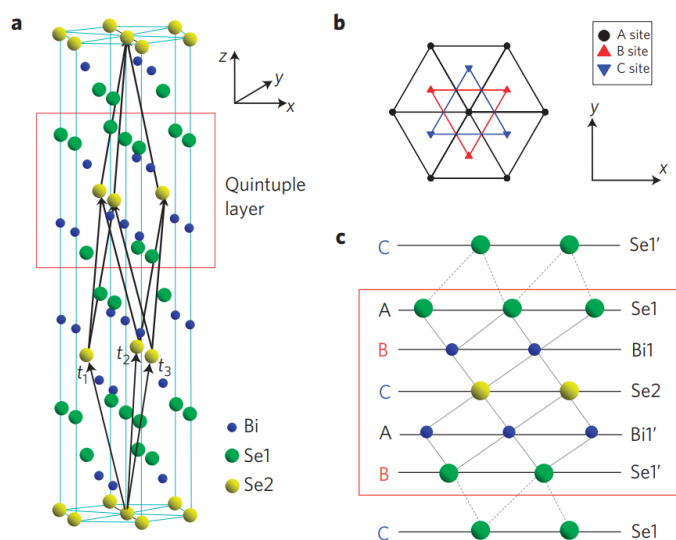
Τα ιδιαίτερα τοπολογικά χαρακτηριστικά των ενεργειακών ζωνών, στα οποία τα υλικά αυτά οφείλουν και το όνομά τους, τους προσδίδουν ιδιαίτερες ηλεκτρονικές ιδιότητες που τα τοποθετούν στο επίκεντρο ενδιαφέροντος μεγάλου μέρους της επιστημονικής κοινότητας. Το ερευνητικό ενδιαφέρον επικεντρώνεται μεταξύ άλλων στις εφαρμογές των τοπολογικών μονωτών στην ανάπτυξη ηλεκτρονικών και οπτικών συσκευών, σε εφαρμογές σπιντρονικής [17] και στην υλοποίηση κβαντικών υπολογιστών [18].

Το υλικό που μελετήθηκε στην παρούσα εργασία ανήκει στην οικογένεια των χαλκογενιδίων βισμούθιου. Τα χαλκογενίδια βισμούθιου είναι 3D τοπολογικοί μονωτές και οι βασικές ιδιότητες τους σχολιάζονται παρακάτω.

1.3.1 Χαλκογενίδια Βισμούθιου

Ο τοπολογικός μονωτής του οποίου οι κβαντικές ιδιότητες μελετήθηκαν σε αυτή την εργασία είναι το σεληνιούχο βισμούθιο, με χημικό τύπο Bi_2Se_3 . Πρόκειται για ένα κρυσταλλικό υλικό ρομβοεδρικής δομής, με παρεμβάλλοντα τριγωνικά πλέγματα, στο οποίο τα άτομα βισμούθιου και σεληνίου είναι οργανωμένα σε πενταπλά στρώματα - quintuple layers (QL)

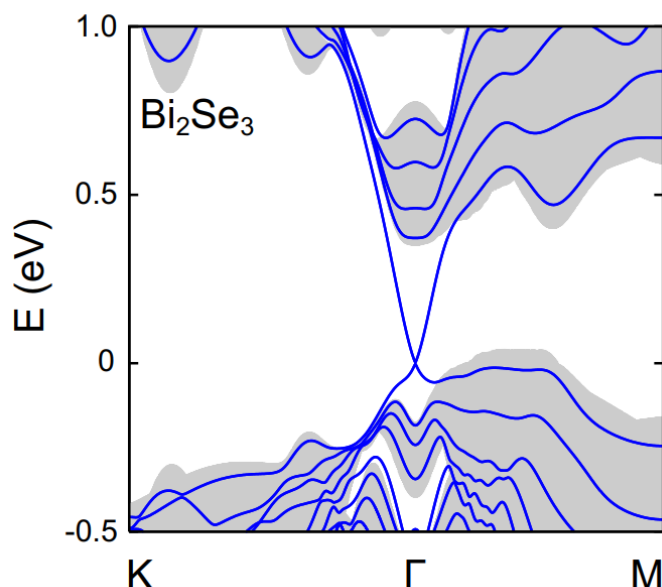
που επαναλαμβάνονται. Εντός των QL τα άτομα σχηματίζουν ισχυρούς δεσμούς, ενώ τα QL συνδέονται μεταξύ τους με πιο ασθενείς δυνάμεις Van der Waals [19]. Η δομή του Bi_2Se_3 απεικονίζεται στο σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4: *a.* Η κρυσταλλική δομή του Bi_2Se_3 . *b.* Κάτοψη του κρυστάλλου κατά τον άξονα z . Διακρίνονται κατόψεις του ρομβοεδρικού και των τριγωνικών πλεγμάτων. *c.* Λεπτομέρεια των ατομικών στρωμάτων του κρυστάλλου. Τα άτομα οργανώνονται σε πενταπλά στρώματα - quintuple layers (QL). Ένα QL περιλαμβάνεται στο κόκκινο τετράγωνο του σχήματος *c.* [19]

Όπως αναφέραμε παραπάνω, το Bi_2Se_3 είναι τρισδιάστατος τοπολογικός μονωτής. Οι ιδιαίτερες ηλεκτρονικές του ιδιότητες που τον κατατάσσουν στην κατηγορία αυτή διακρίνονται στο διάγραμμα ενεργειακών ζωνών του, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 1.5. Στο διάγραμμα αυτό αναπαριστώνται οι επιτρεπτές ενέργειες των ηλεκτρονίων στο χώρο των κυματανυσμάτων, δηλαδή οι ενεργειακές ζώνες του Bi_2Se_3 , όπως προκύπτουν από υπολογισμούς DFT - Density Functional Theory [20]. Με γκρι χρώμα επισημαίνονται οι ζώνες που έχουν υπολογιστεί για τον κύριο όγκο του υλικού, με χρήση περιοδικών συνοριακών συνθηκών. Για τον κύριο όγκο διακρίνονται η ζώνη αγωγιμότητας και η ζώνη σθένους, οι οποίες διαχωρίζονται με το ενεργειακό χάσμα. Λαμβάνοντας υπόψιν συνοριακές συνθήκες για το σύνορο του υλικού, δηλαδή για την επιφάνειά του, προκύπτουν ενεργειακές καταστάσεις μέσα στο χάσμα, οι οποίες στο σχήμα απεικονίζονται με τις μπλε γραμμές που κείτονται εντός του χάσματος. Οι επιφανειακές αυτές καταστάσεις σχηματίζουν έναν κώνο Dirac. [20, 21, 22]

Συμπερασματικά, στο διάγραμμα ζωνών του Bi_2Se_3 φαίνεται ότι στον κύριο όγκο του υλικού μεταξύ της ζώνης σθένους και της ζώνης αγωγιμότητας υπάρχει ένα ενεργειακό χάσμα, ενώ οι ενεργειακές ζώνες που αντιστοιχούν στις επιφανειακές καταστάσεις τέμνονται, αποδεικνύοντας τη μεταλλική τους φύση. Η δομή των ενεργειακών ζωνών του Bi_2Se_3 παίζει σημαντικό ρόλο μεταξύ άλλων και στις οπτικές ιδιότητες του υλικού, δηλαδή στον τρόπο που αυτό αλληλεπιδρά με το φως. Μια ποσότητα που σχετίζεται στενά με τις οπτικές ιδιότητες ενός υλικού είναι η διηλεκτρική συνάρτηση.



Σχήμα 1.5: Διάγραμμα των ενεργειακών ζωνών του Bi_2Se_3 . Στον οριζόντιο άξονα σημειώνονται τα σημεία υψηλής συμμετρίας του κρυστάλλου. Με γκρι χρώμα είναι σημειωμένες οι ζώνες με τις επιτρεπτές ενέργειες των ηλεκτρονίων στον κύριο όγκο, ενώ οι καταστάσεις εκτός της γκρι ζώνης αντιστοιχούν στις καταστάσεις της επιφάνειας του υλικού. [20]

Διηλεκτρική συνάρτηση Bi_2Se_3

Η διηλεκτρική συνάρτηση ενός υλικού περιγράφει την απόκρισή του όταν σε αυτό προσπίπτει ηλεκτρικό πεδίο. Θεωρώντας γραμμικό υλικό¹, η διηλεκτρική συνάρτηση ϵ συνδέει τη διηλεκτρική μετατόπιση \mathbf{D} με το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} μέσω της σχέσης 1.1:

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (1.1)$$

Στην πραγματικότητα, η διηλεκτρική συνάρτηση είναι τανυστής, δηλαδή η απόκριση του υλικού είναι διαφορετική για διαφορετικές κρυσταλλογραφικές διευθύνσεις, ωστόσο, θεωρώντας το υλικό ιστροπικό, τελικά παίρνει τη μορφή μιγαδικής βαθμωτής ποσότητας: $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$. Το πραγματικό μέρος της διηλεκτρικής συνάρτησης είναι ενδεικτικό της ικανότητας ενός υλικού να πολώνεται λόγω πρόσπτωσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Το φανταστικό μέρος σχετίζεται με τις απώλειες ενέργειας στο υλικό λόγω απορρόφησης. Οι περιοχές των ακροτάτων της διηλεκτρικής συνάρτησης υποδεικνύουν περιοχές συχνοτήτων όπου μπορούν να παρατηρηθούν συντονισμοί και πολαριτονικές διεγέρσεις, δηλαδή συζεύξεις ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με μηχανικές ταλαντώσεις πλέγματος ή και επιφανειακών φορέων, με αποτέλεσμα να μη διεισδύει ηλεκτρικό πεδίο στο υλικό. Αυτό οδηγεί σε ενίσχυση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του υλικού και κατά συνέπεια κάνει εφικτή την ανάδυση έντονων φαινομένων αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας και ύλης. Πειραματικά, η διηλεκτρική συνάρτηση ενός υλικού προσδιορίζεται από τις διεγέρσεις που αυτό μπορεί να φιλοξενήσει. Αυτές περιλαμβάνουν ταλαντώσεις πλέγματος (οπτικά φωνόνια), απορρόφηση

¹ Βλ. Κεφάλαιο 2

ελευθέρων φορέων, εξιτόνια (σύζευξη ηλεκτρονίου-οπής), πλασμόνια, δια- και ενδοζωνικές μεταβάσεις κ.ά. [9, 23]

Στην περίπτωση του Bi_2Se_3 , για το φάσμα συχνοτήτων με το οποίο ασχοληθήκαμε (THz), η διηλεκτρική συνάρτησή του δίνεται από τη βιβλιογραφία [24, 25] στη σχέση 1.2:

$$\epsilon = \epsilon_{phonon} + \epsilon_{Drude} = \epsilon_{\infty} + \sum_{x=a,\beta,f} \frac{\omega_{px}^2}{\omega_{0x}^2 - \omega^2 - i\gamma_x\omega} + \frac{\omega_{p,D}^2}{\omega_{0,D}^2 - \omega^2 - i\gamma_D\omega} \quad (1.2)$$

Οι παράμετροι της παραπάνω σχέσης δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$\omega_{p,x}[cm^{-1}]$	$\omega_{0,x}[cm^{-1}]$	$\gamma_x[cm^{-1}]$
α	675.9	63.03	17.5
β	100	126.94	10
bandgap contributions	11249	2029.5	3920.5
Dirac carriers	1227	0	7.43

Πίνακας 1.1: Παράμετροι υπολογισμού της διηλεκτρικής συνάρτησης του Bi_2Se_3 της σχέσης 1.2. Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων έχουν συνυπολογιστεί πειραματικά οι συνεισφορές οπτικών φωνονίων και διαζωνικών μεταβάσεων, ενώ ο τελευταίος όρος αφορά τα ηλεκτρόνια της επιφάνειας (φορείς Dirac). [24]

Για το Bi_2Se_3 , η διηλεκτρική συνάρτηση (σχέση 1.2) εξαρτάται κυρίως από τις συνεισφορές οπτικών φωνονίων (α και β), διαζωνικών μεταβάσεων και φορέων Dirac στην επιφάνεια. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, παίρνει πολύ υψηλές τιμές σε ένα εύρος συχνοτήτων στο υπέρυθρο, κάτι που ενθαρρύνει την ανάδυση φαινομένων κβαντικής συμβολής όταν ένας διεγερμένος κβαντικός εκπομπός με φάσμα εκπομπής κοντά στα ακρότατα της διηλεκτρικής συνάρτησης τοποθετείται κοντά στην επιφάνεια του υλικού².

1.4 Αντικείμενο και σκοπός παρούσας διπλωματικής εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής είναι η μελέτη της επίδρασης της αλληλεπίδρασης ενός γενικευμένου κβαντικού εκπομπού με την επίπεδη επιφάνεια ενός πλακιδίου Bi_2Se_3 στην αυθόρμητη εκπομπή του εκπομπού.

Η κβαντική συμβολή που αναδύεται λόγω αυτής της αλληλεπίδρασης μπορεί να πυροδοτήσει πληθώρα εξωτικών φαινομένων κβαντικής οπτικής και να αξιοποιηθεί σε ενδιαφέρουσες εφαρμογές, όπως είναι, μεταξύ άλλων, το λέιζερ χωρίς αναστροφή [26], η παγίδευση πληθυσμών [27, 28], η ελεγχόμενη αυθόρμητη εκπομπή [29, 30], η οπτική διαφάνεια [31] και η ενίσχυση του μη γραμμικού φαινομένου Kerr [32].

² Βλ. Κεφάλαιο 3.

1.5 Οργάνωση του τόμου

Η εργασία αυτή είναι οργανωμένη σε τέσσερα κεφάλαια :

- Στο Κεφάλαιο 1 δόθηκε η εισαγωγή και η γενική εποπτεία των συστατικών στοιχείων και της θεωρίας του φαινομένου που μελετήθηκε.
- Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το θεωρητικό υπόβαθρο και εξάγονται οι απαραίτητες εξισώσεις που πλαισιώνουν το φαινόμενο και χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική μελέτη του.
- Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών.
- Στο Κεφάλαιο 4 συνοψίζονται τα συμπεράσματα και προτείνονται μελλοντικές μελέτες που θα συμπλήρωναν την παρούσα εργασία.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό & Μαθηματικό Υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την ανάλυση που έλαβε χώρα στην παρούσα εργασία. Οι βασικές εξισώσεις και ο τρόπος εξαγωγής τους εμφανίζονται παρακάτω.

2.1 Εξισώσεις Maxwell & ΗΜ Κυματική Εξίσωση

Προκειμένου να μελετήσουμε τα φαινόμενα κβαντικής συμβολής κοντά σε τοπολογικούς μονωτές, ξεκινάμε από τις εξισώσεις Maxwell στην ύλη [33, 34].

Ο νόμος του Gauss συσχετίζει τοπικά την τιμή της πυκνότητας εξωτερικών φορτίων ρ_{ext} με την απόκλιση της διηλεκτρικής μετατόπισης \mathbf{D} :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext}. \quad (2.1)$$

Η διηλεκτρική μετατόπιση ισούται με $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$, όπου ϵ_0 η ηλεκτρική επιδεκτικότητα (permittivity) του κενού και ϵ_r η σχετική επιδεκτικότητα, με το τελευταίο μέλος της ισότητας να ισχύει σε γραμμικά μέσα¹.

Ο νόμος του Faraday συσχετίζει τη χρονική μεταβολή ενός μαγνητικού πεδίου με το στροβιλισμό του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται τοπικά από αυτή τη μεταβολή:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

όπου \mathbf{E} είναι το ηλεκτρικό και \mathbf{B} το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου.

Ο νόμος του Ampère σε γραμμικά μέσα, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως:

¹ Στα γραμμικά υλικά, η απόκλιση του υλικού, ως πόλωση \mathbf{P} και μαγνήτιση \mathbf{M} , σε εξωτερικά εφαρμοζόμενα πεδία \mathbf{E} και \mathbf{H} , με $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, σχετίζεται γραμμικά με τα πεδία αυτά:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

όπου ϵ_0 η ηλεκτρική επιδεκτικότητα, μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, χ_e η ηλεκτρική και χ_m η μαγνητική επιτρεπτότητα (susceptibility) [9, 34]. Τα ϵ και μ συνδέονται με τα ϵ_0 και μ_0 με τις σχέσεις:

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad \mu_r \equiv 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}$$

όπου ϵ και μ η επιδεκτικότητα και η διαπερατότητα του υλικού και ϵ_r και μ_r η σχετική επιδεκτικότητα και διαπερατότητα αντίστοιχα. Η ϵ_r χαρακτηρίζεται και ως **διηλεκτρική συνάρτηση** του υλικού.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα και ϵ η ηλεκτρική επιδεκτικότητα του υλικού, συνδέει τον στροβιλισμό του \mathbf{B} με την πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} και τη χρονική μεταβολή του \mathbf{E} .

Η αναφορά στους νόμους του Maxwell ολοκληρώνεται με τη σχέση:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

που εκφράζει την ανυπαρξία μαγνητικών μονόπολων. Στη συνέχεια της ανάλυσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρούμε πως τα πεδία έχουν μορφή επιπέδου κύματος, και επομένως το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.5)$$

όπου το μέτρο του κυματανύσματος $k (\equiv \frac{2\pi}{\lambda})$ και η γωνιακή συχνότητα ω του κύματος συνδέονται με τη σχέση $k = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c}$, όπου $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Λαμβάνοντας τον στροβιλισμό της 2.2 και εφαρμόζοντας τη σχέση 2.3 προκύπτει η ηλεκτρομαγνητική κυματική εξίσωση:

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Με ορισμένους επιπλέον αλγεβρικούς χειρισμούς, η παραπάνω εξίσωση είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σε μια πιο “διαχειρίσιμη” μορφή, ώστε να εξαγάγουμε τις λύσεις του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει του \mathbf{J} τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά εκφράζουμε το ηλεκτρικό πεδίο μέσω του διανυσματικού και του βαθμωτού δυναμικού ως:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V = i\omega \mathbf{A} - \nabla V \quad (2.7)$$

και, εκμεταλλευόμενοι την ελευθερία των μετασχηματισμών βαθμίδας στον καθορισμό του βαθμωτού και του διανυσματικού δυναμικού [33], επιλέγουμε τη βαθμίδα Lorenz:

$$\nabla \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \nabla V \Leftrightarrow \nabla \mathbf{A} = i\omega \epsilon \mu V \quad (2.8)$$

όπου έχουμε θεωρήσει δυναμικά μορφής επιπέδων κυμάτων. Εισάγοντας τις σχέσεις 2.7 και 2.8 στην κυματική εξίσωση 2.6, προκύπτει η παρακάτω σχέση που συνδέει το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} με την πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} :

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}. \quad (2.9)$$

Η παραπάνω σχέση που απορρέει από την κυματική εξίσωση 2.6 έχει τη χαρακτηριστική μορφή της εξίσωσης Helmholtz. Βρίσκοντας λύσεις της 2.9 για το \mathbf{A} συναρτήσει του \mathbf{J} , θα μπορούσαμε να εκφράσουμε το \mathbf{E} συναρτήσει της πυκνότητας ρεύματος, έκφραση την οποία θα χρειαστούμε για τη μελέτη της αλληλεπίδρασης κβαντικού εκπομπού με μια απλή μορφή μικροδομής, όπως θα συζητηθεί παρακάτω. Οι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz [9] μπορούν

να υπολογιστούν εύκολα με τη βοήθεια των συναρτήσεων Green. Στο επόμενο υποκεφάλαιο ακολουθεί μια σύντομη ανάλυση της συγκεκριμένης μεθοδολογίας.

2.2 Επίλυση της Helmholtz με Συναρτήσεις Green

2.2.1 Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με Συναρτήσεις Green

Έστω μια αυθαίρετη διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$L(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

όπου $L(\mathbf{r})$ είναι ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής ² και $Q(\mathbf{r})$ μια δοθείσα συνάρτηση του \mathbf{r} που χαρακτηρίζεται ως “όρος πηγής”. Η συνάρτηση Green για την παραπάνω διαφορική εξίσωση ορίζεται από τη σχέση:

$$L(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.11)$$

όπου $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ είναι η Green και δ η συνάρτηση δέλτα του Dirac ³ εκπεφρασμένη ως συνάρτηση ενός διανύσματος \mathbf{r} . Υπολογίζοντας την $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, υπολογίζεται η απόκριση του συστήματος σε σημειακή πηγή στο \mathbf{r}_0 , αξιοποιώντας την κρουστική συνάρτηση.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Green [9], η λύση της διαφορικής μπορεί να γραφεί κατευθείαν ως:

$$f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (2.12)$$

όπου $f_0(\mathbf{r})$ η λύση της ομογενούς.

Πράγματι, δρώντας με τον τελεστή $L(\mathbf{r})$ στην 2.12:

$$L(\mathbf{r})\left(f_0(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'\right) = 0 - \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = -Q(\mathbf{r})$$

δηλαδή η $f(\mathbf{r})$ της 2.12 είναι πράγματι λύση της διαφορικής 2.10.

Οι συναρτήσεις Green παρέχουν έναν κοινό τρόπο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες πολλές φορές θα ήταν δύσκολο να επιλυθούν αλλιώς. Επίσης, εκ κατασκευής τους ικανοποιούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, και αυτή τους η ιδιότητα αξιοποιείται στην παρούσα εργασία.

2.2.2 Η Εξίσωση Helmholtz

Η γενική μορφή της μη ομογενούς εξίσωσης Helmholtz είναι:

$$(\nabla^2 + k^2)f(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

² Ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής είναι συνάρτηση του τελεστή ∇ και φέρει την ιδιότητα της γραμμικότητας: $L(\lambda x + \mu y) = L(\lambda x) + L(\mu y)$.

³ βλ. παράρτημα A

όπου k μια σταθερά, που όταν η Helmholtz περιγράφει συμπεριφορά κυμάτων ταυτίζεται με τον κυματαριθμό, και $G(\mathbf{r})$ μια δοθείσα συνάρτηση του r .

Από τον ορισμό της (σχέση 2.11), η συνάρτηση Green για τη συγκεκριμένη εξίσωση ορίζεται μέσω της:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14)$$

Θεωρώντας ομογενές μέσο⁴, σφαιρικές συντεταγμένες και σφαιρική συμμετρία, και ολοκληρώνοντας ως προς \mathbf{r}' , η συνάρτηση Green για την εξίσωση Helmholtz τελικά είναι:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.15)$$

και εκφράζει σφαιρικό κύμα που διαδίδεται από το \mathbf{r}' στον ελεύθερο χώρο. Έχοντας την Green της 2.15, η λύση της Helmholtz δίνεται από τη σχέση 2.12.

2.2.3 Λύσεις της Ηλεκτρομαγνητικής (ΗΜ) Κυματικής Εξίσωσης

Έχοντας κάνει την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε να επιστρέψουμε στην εξίσωση Helmholtz για το διανυσματικό δυναμικό ενός ηλεκτρομαγνητικού συστήματος (σχ. 2.9):

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

Κατ' αντιστοιχία λοιπόν με την 2.12, η λύση μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mu \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (2.16)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό στη σχέση 2.8 (βαθμίδα Lorenz) παίρνουμε το βαθμωτό δυναμικό συναρτήσει της Green:

$$V = \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{i\omega\epsilon\mu} \Leftrightarrow V = V_0(\mathbf{r}) - \frac{i\omega\mu}{k^2} \nabla \cdot \left(\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \right) \quad (2.17)$$

Τελικά, εισάγοντας τις 2.16 και 2.17 για τα δυναμικά στην έκφραση 2.7 του \mathbf{E} , παίρνουμε την ακόλουθη σχέση για την i -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E_i = i\omega A_i - \partial_i V = E_{0,i}(\mathbf{r}) + i\omega\mu \int \left(\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.18)$$

όπου οι δείκτες $i, j = x, y, z$, με $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ μοναδιαία διανύσματα ορθοκανονικής βάσης στον \mathbb{R}^3 , ∂_i η μερική παράγωγος ως προς την αντίστοιχη συνιστώσα και δ_{ij} το δέλτα του Kronecker⁵. Η παραπάνω σχέση μας δίνει το ηλεκτρικό πεδίο στην κατεύθυνση i για πηγή ρεύματος στην κατεύθυνση j , και ο όρος $\left(\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ δίνει τα στοιχεία του δυαδικού τανυστή Green που ορίζεται ως:

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{\bar{\mathbb{1}}} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{\bar{\mathbb{1}}} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.19)$$

⁴ Τοπική ομοιογένεια: σε κάθε σημείο του μέσου απαντώνται οι ίδιες ιδιότητες, και οι ποσότητες ως συναρτήσεις της θέσης \mathbf{r} γράφονται ως $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, όπου \mathbf{r}' η θέση ενός σημείου αναφοράς στο μέσο.

⁵ βλ. παράρτημα Α'

για την εξίσωση Helmholtz, στον ελεύθερο χώρο, όπου \mathbb{I} ο μοναδιαίος πίνακας και ο όρος $\nabla\nabla$ είναι πίνακας με στοιχεία $(\nabla\nabla)_{ij} = \partial_i\partial_j$. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα ο δυαδικός τανυστής Green έρχεται στη μορφή [2]:

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left[\left(1 + \frac{ikR - 1}{k^2 R^2} \right) \bar{\mathbf{I}} + \frac{3 - 3ikR - k^2 R^2}{k^2 R^2} \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right] \quad (2.20)$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ και $(\mathbf{R}\mathbf{R})_{ij} = R_i R_j$.

Χρησιμοποιώντας τον δυαδικό τανυστή Green που ορίσαμε στη σχ. 2.19, το ηλεκτρικό πεδίο τελικά σχετίζεται με την πυκνότητα ρεύματος μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + i\omega\mu \int \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.21)$$

Στην ως τώρα ανάλυση, όλες οι σχέσεις είναι γενικές. Συγκεκριμένα η 2.21 δίνει το ηλεκτρικό πεδίο για μια οποιαδήποτε πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} . Στη συνέχεια, θα παρουσιασθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του συστήματος προς μελέτη και θα δείξουμε την ειδική μορφή που παίρνουν οι σχέσεις στην περίπτωση που έχουμε έναν κβαντικό εκπομπό κοντά στην επιφάνεια τοπολογικού μονωτή.

2.3 Κβαντικός Εκπομπός ως Δίπολο

Ένας κβαντικός εκπομπός μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά ως ταλαντούμενο δίπολο αμελητέων διαστάσεων [2, 9]. Για να πάρουμε την έκφραση της κατανομής ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_1 \hat{\mathbf{x}} + J_2 \hat{\mathbf{y}} + J_3 \hat{\mathbf{z}}$ ενός τέτοιου σημειακού διπόλου, χρειαζόμαστε την εξίσωση συνέχειας, που προκύπτει δρώντας με τον τελεστή ∇ στο νόμο του Ampère (σχέση 2.3) και εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss (σχέση 2.1):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho \quad (2.22)$$

όπου έχει θεωρηθεί αρμονικά χρονοεξαρτώμενη πυκνότητα φορτίου. Η εξίσωση συνέχειας εκφράζει τη διατήρηση του φορτίου τοπικά και έχει καθολική ισχύ. [2, 9, 33]

Η σχέση 2.22 θα συνδυαστεί στη συνέχεια με την παρακάτω έκφραση:

$$\nabla \cdot x\mathbf{J} = \partial_i x J_i = \delta_{i1} J_i + x \nabla \cdot \mathbf{J} \Rightarrow \delta_{i1} J_i = \nabla \cdot x\mathbf{J} - x \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.23)$$

όπου δ το δέλτα του Kronecker και έχει χρησιμοποιηθεί η σύμβαση άθροισης Einstein. Στην σχέση 2.23, x είναι η μεταβλητή της χωρικής συντεταγμένης κατά τον οριζόντιο άξονα x .

Ολοκληρώνοντας τη συνιστώσα J_1 ($i = 1$) σε μικρό όγκο V με σύνορο την κλειστή επιφάνεια $\partial V = S$ (πρώτο μέλος σχέσης 2.24) μέσα στον οποίο περιλαμβάνεται το δίπολο, στη συνέχεια αντικαθιστώντας διαδοχικά τις σχέσεις 2.23 και 2.22 (δεύτερο μέλος), και μετά εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss για τα ολοκληρώματα (τρίτο μέλος)⁶, τελικά παίρνουμε:

⁶ Θεώρημα Gauss: Για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ με καλά ορισμένη απόκλιση και σε κάθε χώρο V που έχει σύνορο την κλειστή επιφάνεια S ισχύει ότι

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) d^3r = \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα της απόκλισης του πεδίου στο χώρο V ισούται με τη ροή του πεδίου από την κλειστή

$$\int_V J_1(\mathbf{r}) d^3r = \int_V (\nabla \cdot x\mathbf{J} - x\nabla \cdot \mathbf{J}) d^3r = \oint_S x\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} - i\omega \int_V x\rho d^3r = -i\omega p_1 \quad (2.24)$$

όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται διότι το \mathbf{J} περικλείεται στο εσωτερικό του V και είναι μηδέν στο σύνορο, και $p_i = \int_V x\rho d^3r$ η i -συνιστώσα του διανύσματος της διπολικής ροπής \mathbf{p} .

Ακολουθώντας παρόμοιο συλλογισμό, οι ποσότητες $\nabla \cdot y\mathbf{J}$ και $\nabla \cdot z\mathbf{J}$ υπολογίζονται κατά την 2.23 και οι συνιστώσες του \mathbf{J} ολοκληρώνονται όπως στην 2.24. Στο τέλος, παίρνουμε ότι η κατανομή ρεύματος ενός σημειακού διπόλου στη θέση \mathbf{r}_0 δίνεται από τη σχέση [2, 9]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.25)$$

Εισάγοντας την έκφραση 2.25 για το $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ στην 2.21 προκύπτει το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο παρουσία κβαντικού εκπομπού πυκνότητας ρεύματος \mathbf{J} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu \int \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \mu\omega^2 \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \mathbf{p} \quad (2.26)$$

όπου $\bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \bar{\bar{G}}_{rel}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, $\bar{\bar{G}}$ η Green στον ελεύθερο χώρο και $\bar{\bar{G}}_{rel}$ ο όρος που αφορά τα ανακλώμενα πεδία από τη διάταξη και προσδιορίζει τη γεωμετρία της. Στην παραπάνω έκφραση έχει θεωρηθεί ότι η μοναδική πηγή ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο είναι το δίπολο, και επομένως $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$.

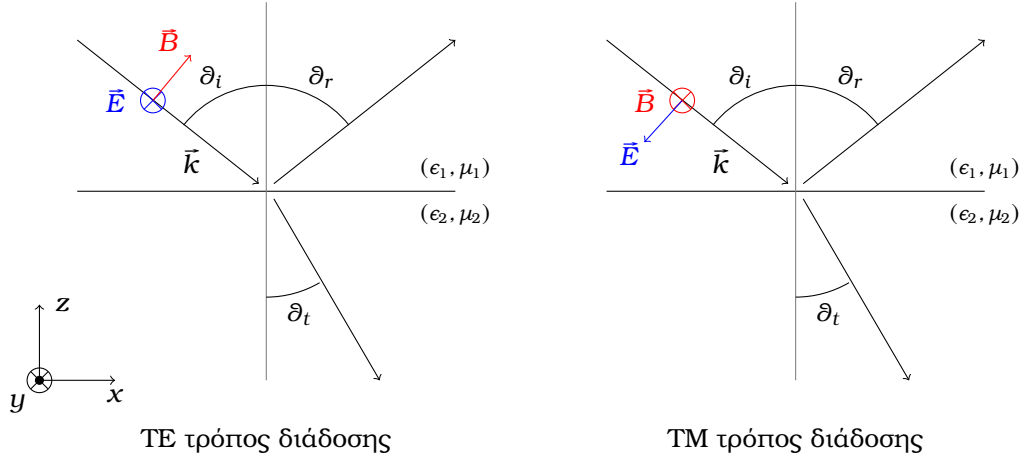
2.4 Ανάκλαση ΗΜ Κυμάτων σε Επίπεδη Διεπιφάνεια

Έχοντας αναφερθεί πλέον στην ύπαρξη ανακλώμενων πεδίων από τη διάταξη, ακολουθεί μια σύντομη ανάλυση της θεωρίας της ανάκλασης και διέλευσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από μια επίπεδη επιφάνεια. Θεωρούμε ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται σε μέσο με χαρακτηριστικά (ϵ_1, μ_1) και προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια μέσου (ϵ_2, μ_2) , όπου (ϵ_i, μ_i) η ηλεκτρική επιδεκτικότητα και η μαγνητική διαπερατότητα του i -μέσου αντίστοιχα. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις κυμάτων, ανάλογα με την πόλωση:

- Εγκάρσια ηλεκτρικά - TE (transverse electric), στα οποία το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο με τη διεπιφάνεια ή εγκάρσιο στον άξονα συμμετρίας z του συστήματος, δηλαδή $\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{y}}$.
- Εγκάρσια μαγνητικά - TM (transverse magnetic), στα οποία το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο με τη διεπιφάνεια, δηλαδή $\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{y}}$.

Οι παραπάνω τρόποι διάδοσης κυμάτων αναπαριστώνται στο σχήμα 2.1 που ακολουθεί. Αποδεικνύεται ότι κάθε ηλεκτρομαγνητικό κύμα μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες πεδίων TE και TM. [9]

επιφάνεια που ορίζει τον V .



Σχήμα 2.1: Πρόσπτωση ηλεκτρομαγνητικού κύματος με διεύθυνση διάδοσης \vec{k} στη διεπιφάνεια των μέσων 1 και 2 στην περίπτωση που είναι εγκάρσια ηλεκτρικό (TE) και εγκάρσια μαγνητικό (TM). Σε κάθε περίπτωση, σημειώνονται οι διευθύνσεις του ηλεκτρικού (μπλε) και του μαγνητικού πεδίου (κόκκινο). Το κύμα εν μέρει ανακλάται με γωνία $\theta_r = \theta_i$ και εν μέρει διαδίδεται στο μέσο 2 με γωνία θ_t .

Το προσπίπτον κύμα εν μέρει ανακλάται κι εν μέρει διαδίδεται στο μέσο (ϵ_2, μ_2) . Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συνθήκες για την κατεύθυνση των πεδίων στις αντίστοιχες κυματικές εξισώσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις Maxwell - για το \mathbf{E} έχουμε ήδη δείξει την 2.6 - και εφαρμόζοντας συνθήκες διατήρησης των παράλληλων συνιστωσών στη διεπιφάνεια, προκύπτουν οι συντελεστές Fresnel ανάκλασης R και διέλευσης T για πεδία TE και TM που διαδίδονται από το μέσο 1 στο μέσο 2 [9, 34]:

$$\begin{aligned} R^{TE} &= \frac{\mu_2 k_{1z} - \mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}}, & T^{TE} &= \frac{2\mu_2 k_{1z}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}} \\ R^{TM} &= \frac{\epsilon_2 k_{1z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}}, & T^{TM} &= \frac{2\epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}} \frac{Z_2}{Z_1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

όπου μ_i η μαγνητική διαπερατότητα, ϵ_i η ηλεκτρική επιδεκτικότητα, k_{iz} η z-συνιστώσα του κυματαριθμού k_i και $Z_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$, για $i = 1, 2$.

Στην περίπτωση πολυστρωματικού μέσου, δομημένο από n στρώματα υλικών με χαρακτηριστικά $(\epsilon_2, \mu_2), \dots, (\epsilon_{n+1}, \mu_{n+1})$ και πεπερασμένο πάχος, το προσπίπτον κύμα μερικώς ανακλάται και μερικώς διέρχεται από κάθε διεπιφάνεια ξεχωριστά, ενώ υφίσταται και πολλαπλές ανακλάσεις μέσα στο κάθε στρώμα. Προκειμένου οι συντελεστές 2.27 να γενικευτούν για ένα τέτοιο μέσο, χρησιμοποιείται ο πίνακας μεταφοράς $\bar{M}_{1,n}^{tot}$:

$$\bar{M}_{1,n}^{tot} = \bar{M}_{1,2} \cdot \prod_{m=2}^{n-1} \bar{P}_m \cdot \bar{M}_{m,m+1} \quad (2.28)$$

που γράφεται ως γινόμενο των πινάκων:

$$\bar{M}_{m,m+1} = \frac{1}{T_{m,m+1}} \begin{pmatrix} 1 & R_{m,m+1} \\ R_{m,m+1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_m = \begin{pmatrix} e^{-ik_m z^{d_m}} & 0 \\ 0 & e^{ik_m z^{d_m}} \end{pmatrix}.$$

Ο $\bar{M}_{m,m+1}$ περιγράφει τη διέλευση πεδίου από τη διεπιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων $(m, m+1)$ σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες, ενώ ο \bar{P}_m εισάγει φάσεις $e^{\pm ik_m z^{d_m}}$ κατά τη διάδοση

πεδίου στο m -οστό στρώμα πάχους d_m . R και T είναι οι συντελεστές Fresnel της σχέσης 2.27 για ανάκλαση και διέλευση από το μέσο m στο $m + 1$.

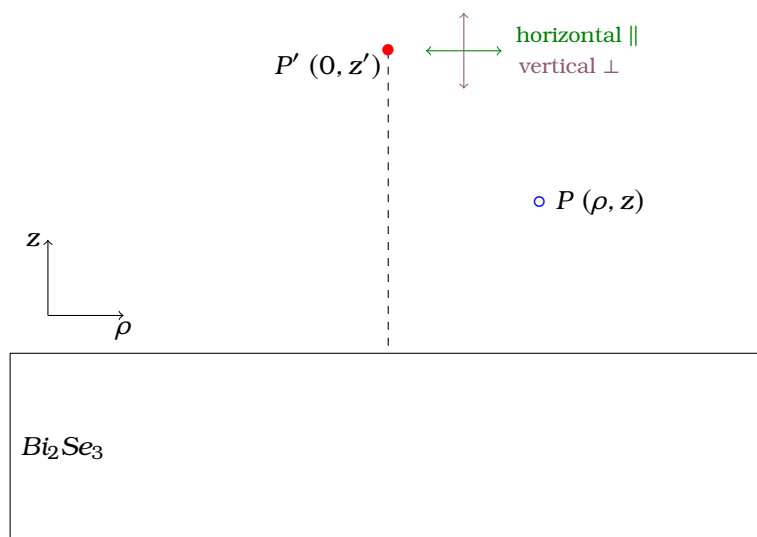
Ο πίνακας μεταφοράς 2.28 διαδίδει το κύμα από το στρώμα 1 στο στρώμα n μέσα στο πολυστρωματικό μέσο, λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες κάθε διεπιφάνειας και τις αλλαγές φάσης των κυμάτων καθώς διαδίδονται από το ένα μέσο στο άλλο. Οι γενικευμένοι συντελεστές Fresnel ανάκλασης και διέλευσης του κύματος στο συνολικό πάχος του πολυστρωματικού μέσου συναρτήσει του πίνακα μεταφοράς είναι:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{1,n} &= [\bar{M}_{1,n}^{tot}]_{21} [\bar{M}_{1,n}^{tot}]_{11}^{-1} \\ \tilde{T}_{1,n} &= [\bar{M}_{1,n}^{tot}]_{11}^{-1}\end{aligned}\quad (2.29)$$

όπου $[\bar{M}_{1,n}^{tot}]_{ij}$ εννοείται το στοιχείο (i,j) του $\bar{M}_{1,n}^{tot}$.

2.4.1 Θεωρητική Διάταξη

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε θεωρητικά η περίπτωση που το δίπολο βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}' , σε απόσταση z' πάνω από την επιφάνεια ενός πλακιδίου Bi_2Se_3 . Μεταξύ διπόλου και πλακιδίου θεωρείται κενός χώρος και θεωρώντας πλακίδιο αρκούντως παχύ (μm) η διάταξη προσεγγίζεται ικανοποιητικά ως μια διεπιφάνεια και μπορούν να αγνοηθούν φαινόμενα τοπολογικής φύσεως (τα οποία θα ενισχύονταν αν το υλικό είχε διαστάσεις της τάξης των nm). Αναπαράσταση της διάταξης φαίνεται στο σχήμα 2.2 που ακολουθεί.



Σχήμα 2.2: Δίπολο κοντά στην επιφάνεια τοπολογικού μονωτή. Το δίπολο βρίσκεται στο σημείο $P' (0, z')$ και το σημείο παρατήρησης στο $P (\rho, z)$. Η αναπαράσταση γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Τα βέλη απεικονίζουν τους διαφορετικούς προσανατολισμούς του διανύσματος της διπολικής ροπής του διπόλου, που είναι είτε κατακόρυφος είτε παράλληλος στην επιφάνεια του πλακιδίου Bi_2Se_3 .

Θεωρώντας ότι το δίπολο και το σημείο παρατήρησης P βρίσκονται σε κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του υλικού $z, z' > 0$, τα στοιχεία της \bar{G}_{rel} παίρνουν τη μορφή [9]:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij}^{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ik_{nz}(z+z'-2z_n)}}{k_{nz}} \\ & \times \left\{ \tilde{R}_{n,1}^{TE} \langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_n^+) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_n^\pm) \rangle + \tilde{R}_{n,1}^{TM} \langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_n^+) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^\pm) \rangle \right\} k_\rho dk_\rho \end{aligned} \quad (2.30)$$

όπου ϵ_i^{TE} , ϵ_i^{TM} διανύσματα πόλωσης εγκάρσιου ηλεκτρικού κύματος και εγκάρσιου μαγνητικού αντίστοιχα ⁷, $\tilde{R}_{n,1}^{TE}$, $\tilde{R}_{n,1}^{TM}$ οι γενικευμένοι συντελεστές ανάκλασης του προβλήματος (σχέση 2.27), k_{nz} η z-συνιστώσα του κυματαριθμού \mathbf{k}_n στο μέσο που βρίσκεται η πηγή, και η ολοκλήρωση γίνεται ως προς την ακτινική συνιστώσα $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ του κυματαριθμού k . Για το \mathbf{k}_n^\pm επιλέγεται θετικό πρόσημο για $z > z'$ και αρνητικό για $z < z'$.

Από τη μορφή της σχέσης 2.30 φαίνεται ότι η \bar{G}_{refl} αναλύεται σε συνιστώσες TE και TM. Οι συνιστώσες αυτές αντιστοιχούν σε TE και TM πεδία, τα οποία αφορούν σε πεδία που εκπέμπονται από κβαντικό εκπομπό με προσανατολισμένο διάνυσμα διπολικής ροπής κατακόρυφο και παράλληλο αντίστοιχα ως προς το επίπεδο της επιφάνειας του πλακιδίου [2, 8, 35]. Το γεγονός αυτό, καθώς και το ότι οι $G_{refl,\perp}$ και $G_{refl,\parallel}$ μπορεί να έχουν πολύ διαφορετικές τιμές, έχει μεγάλη σημασία, καθώς φαίνεται πως φέρει μετρήσιμες επιπτώσεις στη συμπεριφορά και τα χαρακτηριστικά του εκπομπού όταν αυτός βρίσκεται κοντά, αλλά χωρίς να εφάπτεται, στο πλακίδιο Bi_2Se_3 .

2.5 Ισχύς και Ρυθμός Αποδιέγερσης Κβαντικού Εκπομπού

Ένα ταλαντούμενο δίπολο απάγει ενέργεια στο περιβάλλον, η οποία κατά ένα μέρος ακτινοβολείται με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, και κατά ένα άλλο απορροφάται από το φωτονικό περιβάλλον, π.χ. ως σύζευξη με κάποια ταλάντωση και με μετατροπή σε θερμότητα [2, 9]. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την έκφραση για την ισχύ που απάγεται από δίπολο πυκνότητας ρεύματος \mathbf{J} .

Ξεκινάμε θεωρώντας σημειακό φορτίο q που κινείται με ταχύτητα \mathbf{v} παρουσία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, και το αποτέλεσμα θα γενικευτεί για την περίπτωση κατανομής ρεύματος. Το απειροστό έργο dW που παράγεται από τα πεδία στο φορτίο όταν αυτό κινείται κατά μήκος του $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$ για χρονικό διάστημα dt είναι:

$$\begin{aligned} dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dW}{dt} &= q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dW}{dt} &= \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3r \end{aligned} \quad (2.31)$$

όπου $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ η δύναμη Lorentz που ασκείται από τα πεδία στο φορτίο, γενικεύοντας το αποτέλεσμα για μεμονωμένο κινούμενο σημειακό φορτίο q σε κατανομή ρεύματος \mathbf{J} σε μικρό όγκο V . [36, 37]

Ο ρυθμός της απαγωγής ενέργειας από την κατανομή \mathbf{J} στα πεδία, δηλαδή η απαγόμενη ισχύς, εκφράζεται αντιστρέφοντας το πρόσημο της σχέσης 2.31:

⁷ Αναγράφονται σε αναλυτική μορφή στο Παράρτημα Β'.

$$\frac{dW}{dt} = - \int \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r \quad (2.32)$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας μορφή επιπέδων κυμάτων για τα \mathbf{E} και \mathbf{J} , συχνότητας ω , η μέση ισχύς σε χρόνο μιας περιόδου $T = \frac{2\pi}{\omega}$ δίνεται από τη σχέση⁸:

$$P = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{2} \int \Re \left\{ \mathbf{J}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right\} d^3r = -\frac{1}{2} \Re \left\{ (i\omega \mathbf{p}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \right\} \quad (2.33)$$

Εισάγοντας την έκφραση 2.26 για το $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ στη σχέση 2.33, τελικά παίρνουμε τη μέση ισχύ P σε χρόνο T που απάγεται από τον εκπομπό:

$$P = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^3}{2c^2 \epsilon} \Im \left\{ \mathbf{p}^* \cdot \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \mathbf{p} \right\}. \quad (2.34)$$

Στον ελεύθερο χώρο, όπου $\bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ και ο όρος $\bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ είναι μηδενικός, η ισχύς είναι [2, 9]:

$$P_0 = \frac{\mu\omega^4 p^2}{12\pi c} \quad (2.35)$$

ενώ η ενίσχυση (ή καταστολή) της ισχύος σε σχέση με τον ελεύθερο χώρο λόγω της παρουσίας μη τετριμμένου φωτονικού περιβάλλοντος εκφράζεται ως:

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{6\pi}{k} \Im \left\{ \mathbf{p}^* \cdot \bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \mathbf{p} \right\}. \quad (2.36)$$

Ο ρυθμός της αυθόρμητης αποδιέγερσης ενός εκπομπού που αποδιεγείρεται εκπέμποντας φωτόνια ενέργειας $\hbar\omega$ είναι:

$$\Gamma = \frac{P}{\hbar\omega} \quad (2.37)$$

και για τον ελεύθερο χώρο μέσω της 2.35 παίρνουμε:

$$\Gamma_0 = \frac{\mu\omega^3}{3\pi\hbar c} \left(\frac{p}{2} \right)^2. \quad (2.38)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ενίσχυση του Γ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{P}{P_0} \quad (2.39)$$

επομένως συνδέεται με σχέση αναλογίας με την ενίσχυση της ισχύος. Αξιοποιώντας την σχέση 2.36 και την ανάλυση της $\bar{\bar{G}}_{refl} = \bar{\bar{G}}_{refl,\perp} + \bar{\bar{G}}_{refl,\parallel}$, όπως σχολιάστηκε στην σχέση 2.30

⁸ Αποδεικνύεται ότι το μέσο γινόμενο σε χρόνο μιας περιόδου T δυο χρονικά αρμονικών πεδίων $F = fe^{-i\omega t}$ και $G = ge^{-i\omega t}$, με $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$, που ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T}$ είναι:

$$\begin{aligned} \langle F \cdot G \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \Re \left\{ fe^{-i\omega t} \right\} \Re \left\{ ge^{-i\omega t} \right\} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[(f = f_1 + if_2) \cos \omega t + (g = g_1 + ig_2) \cos \omega t \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{fe^{-i\omega t} + f^* e^{i\omega t}}{2} \right) \left(\frac{ge^{-i\omega t} + g^* e^{i\omega t}}{2} \right) dt = \frac{1}{4T} \int_0^T (fg^* + f^*g) dt = \\ &= \frac{1}{4} (fg^* + f^*g) = \frac{\Re \left\{ fg^* \right\}}{2} \end{aligned}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. [9]

της προηγούμενης ενότητας, ο ρυθμός μπορεί να αναλυθεί με παρόμοιο τρόπο:

$$\Gamma = \Gamma_{\perp} + \Gamma_{\parallel} \quad (2.40)$$

και συνεπώς παίρνουμε τις παρακάτω εκφράσεις για την ενίσχυση του ρυθμού αποδιέγερσης του κβαντικού εκπομπού, αναλόγως με τον προσανατολισμό του σε σχέση με την επιφάνεια του πλακιδίου:

$$\frac{\Gamma_{\perp}}{\Gamma_0} = 1 + \frac{6\pi}{k} \Im \left\{ \mathbf{p}^* \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\perp}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \mathbf{p} \right\} \quad (2.41\alpha)$$

$$\frac{\Gamma_{\parallel}}{\Gamma_0} = 1 + \frac{6\pi}{k} \Im \left\{ \mathbf{p}^* \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\parallel}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \mathbf{p} \right\} \quad (2.41\beta)$$

όπου \mathbf{p} το διάνυσμα της διπολικής ροπής, για το οποίο ισχύει $\mathbf{p} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ ή $\mathbf{p} \perp \hat{\mathbf{z}}$. Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε πως για εκπομπό που ζει στο κενό, όπου $\bar{\mathbf{G}}_{refl} = 0$, ισχύει $\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel}$. Ο λόγος $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ της ενίσχυσης του ρυθμού αυθόρμητης αποδιέγερσης ενός κβαντικού εκπομπού είναι γνωστός και ως συντελεστής Purcell.

Μέχρι την ανάλυση του Purcell [5] το 1946, η αυθόρμητη αποδιέγερση θεωρείτο πως ήταν μια εγγενής και απαραίλακτη ιδιότητα ενός ατόμου ή μορίου. Η δουλειά του Purcell ανέδειξε ότι ο ρυθμός αυθόρμητης αποδιέγερσης ενός διπόλου σε περιβάλλον που επιτρέπει συντονισμούς μπορεί να ενισχυθεί σε σχέση με τον ρυθμό αποδιέγερσης στον ελεύθερο χώρο. Αυτό υποδεικνύει ότι το περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται ένα άτομο προκαλεί αλλαγές στις ιδιότητές του. Το φαινόμενο ενίσχυσης του ρυθμού αυθόρμητης εκπομπής ενός ατόμου όταν αυτό βρίσκεται σε οπτική κοιλότητα ή σε μη τριμημένο φωτονικό περιβάλλον που επιτρέπει συντονισμούς είναι γνωστό ως Φαινόμενο Purcell [2, 5, 9].

2.6 Αλληλεπίδραση Διπόλου-Ακτινοβολίας

2.6.1 Εισάγοντας Στοιχεία Κβαντικής Φυσικής

Σύμφωνα με τα αξιώματα της κβαντομηχανικής, η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\mathbf{r}, t)$, μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη⁹ μιγαδική συνάρτηση ενός χώρου Hilbert¹⁰ που περιέχει όλη τη γνωστή πληροφορία του συστήματος [38, 39, 40, 41]. Η κυματοσυνάρτηση αποτελεί λύση της εξίσωσης Schrödinger, η οποία δίνει τη χρονική εξέλιξη του συστήματος:

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.42)$$

⁹ Μια συνάρτηση $\psi : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι **τετραγωνικά ολοκληρώσιμη** στο $[a, \beta]$ αν:

$$\int_a^{\beta} \overline{\psi(x)} \psi(x) dx = \int_a^{\beta} |\psi(x)|^2 dx < +\infty,$$

δηλαδή το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, όπου $\overline{\psi(x)} = \psi(x)^*$ ο συζυγής μιγαδικός του $\psi(x) \in \mathbb{C}$.

¹⁰ Ένας χώρος Hilbert είναι διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Οι κυματοσυναρτήσεις αντιστοιχούν σε διανύσματα στον χώρο Hilbert και συμβολίζονται ως ket κατά τον συμβολισμό Dirac, π.χ. $|\Psi\rangle$.

Η Χαμιλτονιανή \hat{H} είναι ερμιτιανός τελεστής ¹¹ που αντιστοιχεί στη συνολική ενέργεια του συστήματος. Στη γενική περίπτωση ενός συστήματος σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με ακτινοβολία, η Χαμιλτονιανή μπορεί να αναλυθεί ως εξής [2, 39]:

$$\hat{H} = \hat{H}_{par} + \hat{H}_{rad} + \hat{H}_{int} \quad (2.43)$$

με

$$\begin{aligned} \hat{H}_{par} &= \sum_{n,m} \left[\frac{\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_m}{2m_n} + V(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) \right], \\ \hat{H}_{rad} &= \frac{1}{2} \int [\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2] dV, \\ \hat{H}_{int} &= \sum_n \left[-\frac{q_n}{m_n} \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{p}_n + \frac{q_n^2}{2m_n} \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t) + q_n \phi(\mathbf{r}_n, t) \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

όπου το n -οστό σωματίδιο καθορίζεται από το φορτίο του q_n , τη μάζα του m_n , τη θέση του \mathbf{r}_n και την ορμή του \mathbf{p}_n , $V(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n)$ τα δυναμικά μεταξύ των φορτίων λόγω αλληλεπίδρασης Coulomb, $E^2 = |\mathbf{E}|^2$, $B^2 = |\mathbf{B}|^2$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t)$ το διανυσματικό και $\phi(\mathbf{r}_n, t)$ το βαθμωτό δυναμικό. Η \hat{H}_{par} περιλαμβάνει τους όρους κινητικής ενέργειας των φορτίων και της αλληλεπίδρασης Coulomb μεταξύ τους απουσία των πεδίων. Η \hat{H}_{rad} είναι η Χαμιλτονιανή των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων απουσία σωματιδίων και προκύπτει ολοκληρώνοντας την πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας των πεδίων στο χώρο. Τέλος, η \hat{H}_{int} περιγράφει την αλληλεπίδραση φορτίων και ακτινοβολίας.

Καθώς η αυθόρμητη αποδιέγερση είναι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο, στην ανάλυση εισάγονται στοιχεία κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Συγκεκριμένα, θεωρείται κβάντωση των πεδίων όπου τα μεγέθη εκφράζονται ως ερμιτιανοί τελεστές, αναπτύσσοντας τα με ταλαντωτικούς όρους θετικών και αρνητικών συχνοτήτων, ή όρους τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Για την έκφραση των δυναμικών, βολεύει η επιλογή της βαθμίδας Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.45)$$

η οποία υπαγορεύει πως το διανυσματικό δυναμικό έχει μόνον εγκάρσια συνιστώσα \mathbf{A}^\perp . Ως συνέπεια των παραπάνω, το διανυσματικό δυναμικό έρχεται στη μορφή [9]:

$$\hat{\mathbf{A}}^\perp(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\frac{\hbar}{2\Omega\epsilon_0\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}s} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \quad (2.46)$$

όπου το \mathbf{k} αναφέρεται σε κυματόνισμα φωτονίου, το s ορίζει τις δυο ορθογώνιες πολώσεις (\pm /δεξιόστροφη και αριστερόστροφη) με μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\pm} = (\mathbf{e}_z \pm i\mathbf{e}_x)/\sqrt{2}$, το Ω είναι χώρος κβάντωσης, $\omega = kc$ η συχνότητα της φωτονικής κατάστασης και $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονικών καταστάσεων, αντίστοιχα. Η διαφορετική επιλογή βαθμίδας για τα δυναμικά δεν επιφέρει καμία διαφορά στα μετρήσιμα μεγέθη, και

¹¹ Ένας ερμιτιανός τελεστής \hat{A} ισούται με τον αυτοσυζυγή του, δηλαδή $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int \Phi^*(x) (\hat{A}\Psi(x)) dx = \int (\hat{A}\Phi^*(x)) \Psi(x) dx$$

για Φ , Ψ συναρτήσεις ενός χώρου Hilbert. Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού τελεστή κατά τη δράση του σε ιδιοσυναρτήσεις του είναι πραγματικές, δηλαδή $\hat{A}\psi_n = a\psi_n$, όπου ψ_n ιδιοσυνάρτηση του \hat{A} και $a \in \mathbb{R}$.

αποδεικνύεται ότι και με τη βαθμίδα Coulomb προκύπτει η ίδια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο που είχαμε βρει με τη βαθμίδα Lorenz (σχέση 2.26). Εν συνεχεία, κατά τα παραπάνω προκύπτουν και οι μετασχηματισμένοι όροι της Χαμιλτονιανής των σχέσεων 2.44.

Το σύστημα που μελετάται στην παρούσα εργασία αποτελείται από ένα γενικευμένο κβαντικό εκπομπό 3 επιπέδων, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 1.2, και η μελέτη θα περιοριστεί στο φαινόμενο αυθόρμητης αποδιέγερσης. Οι δυνατές διεγερμένες καταστάσεις του εκπομπού είναι οι κοντινές μεταξύ τους στάθμες $|2\rangle$ και $|3\rangle$, οι οποίες φθίνουν στην βασική κατάσταση $|1\rangle$ με ρυθμό αποδιέγερσης γ_2 , γ_3 αντίστοιχα. Ο τελεστής της διπολικής ροπής αναλύεται σε δεξιόστροφη και αριστερόστροφη συνιστώσα πόλωσης και γράφεται ως:

$$\mathbf{d} = d(A_{21}\hat{e}_- + A_{31}\hat{e}_+) + H.c., \quad (2.47)$$

όπου $A_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ο ατομικός τελεστής μετάβασης ($i \neq j$) ή κατάληψης ($i = j$) και \hat{e}_\pm τα μοναδιαία διανύσματα πόλωσης. Ο πρώτος όρος της 2.47 αναφέρεται στη μετάβαση $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ και ο δεύτερος στη μετάβαση $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$. [8]

2.6.2 Πίνακας Πυκνότητας Φωτονίων

Η δυναμική αυθόρμητης αποδιέγερσης του συστήματος θα μελετηθεί χρησιμοποιώντας τον πίνακα πυκνότητας, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.48)$$

και τα στοιχεία του οποίου είναι:

$$\rho_{ij} = \langle\phi_i|\rho|\phi_j\rangle = \langle\phi_i|\Psi\rangle\langle\Psi|\phi_j\rangle = c_i c_j^* \quad (2.49)$$

όπου $\Psi = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$ μια κυματοσυνάρτηση Ψ αναπτυγμένη σε βάση ιδιοκαταστάσεων ϕ_i του χώρου Hilbert όπου ζει η Ψ .

Στην περίπτωση του κβαντικού εκπομπού που αφορά την εργασία, ο πίνακας πυκνότητας παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* & c_1 c_3^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 & c_2 c_3^* \\ c_3 c_1^* & c_3 c_2^* & |c_3|^2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

όπου $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1$ και $\rho_{nm} = \rho_{mn}^*$. Οι διαγώνιοι όροι ρ_{ii} του πίνακα είναι οι πιθανότητες $|c_i|^2$ να βρεθεί ο εκπομπός στην κατειλημμένη κατάσταση i , ενώ οι μη διαγώνιοι συμβολίζουν την πιθανή συμβολή του πλάτους πιθανότητας διαφορετικών καταστάσεων. [1, 9, 42]

2.6.3 Εξισώσεις Κίνησης Heisenberg

Η συνέχεια της ανάλυσης θα γίνει στην εικόνα Heisenberg, κατά την οποία οι τελεστές εξελίσσονται χρονικά ενώ οι κυματοσυναρτήσεις μένουν 'παγωμένες' στο χρόνο. Αξιοποιώντας την παράγωγο ενός τέτοιου τελεστή \hat{A} , προκύπτει η εξίσωση κίνησης Heisenberg για έναν τελεστή \hat{A}_H :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \hat{A}_H(t) \hat{H}(t) - \hat{H}(t) \hat{A}_H(t) = \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}(t) \right] \quad (2.51)$$

όπου οι αγκύλες συμβολίζουν τον μεταθέτη των μεγεθών $\hat{A}_H(t)$, $\hat{H}(t)$. [38, 41]

Στην εξίσωση 2.51 εισάγονται οι μέσες τιμές των ατομικών τελεστών $\langle A_{ij} \rangle^{12}$. Αγνοώντας τους όρους με μεγαλύτερης συχνότητας εκθετικά στα πεδία (προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος - rotating wave approximation) και θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα μνήμης (προσέγγιση Wigner-Weisskopf), όπως αναλύεται εκτεταμένα στις βιβλιογραφικές αναφορές [43, 44], προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν τη δυναμική της αυθόρμητης αποδιέγερσης:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} &= -2\gamma_2 \rho_{22} - \kappa_3 \rho_{23} - \kappa_2 \rho_{32}, \\ \dot{\rho}_{33} &= -2\gamma_3 \rho_{33} - \kappa_2 \rho_{32} - \kappa_3 \rho_{23}, \\ \dot{\rho}_{23} &= -[\gamma_2 + \gamma_3 + i(\omega_2 - \omega_3)] \rho_{23} - \kappa_2 \rho_{22} - \kappa_3 \rho_{33} \end{aligned} \quad (2.52)$$

όπου $\omega_{2,3}$, $\gamma_{2,3}$ η συχνότητα και ο ρυθμός αυθόρμητης αποδιέγερσης των καταστάσεων 2,3 αντίστοιχα, ενώ οι συντελεστές $\kappa_{2,3}$ περιγράφουν, όπως θα δούμε, την κβαντική συμβολή μεταξύ των καναλιών αποδιέγερσης [6, 7, 8, 11, 12]. Θεωρώντας ότι οι καταστάσεις είναι σχεδόν εκφυλισμένες, και επομένως $\omega_2 \approx \omega_3 = \omega$, οι εξισώσεις 2.52 έρχονται στη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} &= -2\gamma \rho_{22} - \kappa(\rho_{23} + \rho_{32}) \\ \dot{\rho}_{33} &= -2\gamma \rho_{33} - \kappa(\rho_{32} + \rho_{23}) \\ \dot{\rho}_{23} &= -2\gamma \rho_{23} - \kappa(\rho_{22} + \rho_{33}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon} \Im \left\{ \mathbf{p}^* \cdot (\bar{\mathbf{G}}_{\perp} + \bar{\mathbf{G}}_{\parallel}) \cdot \mathbf{p} \right\} = \Gamma_{\perp} + \Gamma_{\parallel} \\ \kappa &= \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon} \Im \left\{ \mathbf{p}^* \cdot (\bar{\mathbf{G}}_{\perp} - \bar{\mathbf{G}}_{\parallel}) \cdot \mathbf{p} \right\} = \Gamma_{\perp} - \Gamma_{\parallel}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Με βάση τα παραπάνω, ορίζεται το μέτρο της κβαντικής συμβολής p , που εκφράζεται ως το πηλίκο [8]:

$$p = \frac{\kappa}{\gamma} \Rightarrow p = \frac{\Gamma_{\perp} - \Gamma_{\parallel}}{\Gamma_{\perp} + \Gamma_{\parallel}}. \quad (2.55)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει το γεγονός ότι η κβαντική συμβολή μπορεί να παρατηρηθεί όταν το φωτονικό περιβάλλον του εκπομπού επιδρά στον ρυθμό αποδιέγερσής του αναλόγως με τον προσανατολισμό της διπολικής ροπής του. Συγκεκριμένα, το p μπορεί να πάρει τιμές από 0 μέχρι 1, ενώ μεγιστοποιείται όταν ο ρυθμός αποδιέγερσης του ενός προσανατολισμού καταστέλλεται σημαντικά σε σχέση με την ενίσχυση του άλλου. Για κβαντικό εκπομπό στο κενό, όπου $\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel}$, θα ισχύει $\kappa = 0$ και ακολούθως $p = 0$, επομένως δεν εμφανίζονται φαινόμενα κβαντικής συμβολής.

¹² Η μέση τιμή ενός τελεστή A πάνω σε μια κυματοσυνάρτηση $|\psi\rangle$ ορίζεται ως: $\langle A_{ij} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi | A | \psi \rangle = \int \psi^*(x) A \psi(x) dx$.

2.6.4 Δυναμική Εξέλιξη Πληθυσμών

Η κβαντική συμβολή κατά τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο μπορεί να δειχθεί και να μελετηθεί εφαρμόζοντας συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες στις εξισώσεις 2.53.

Στην περίπτωση όπου αρχικά είναι κατειλημμένη μόνο η μια από τις διεγερμένες καταστάσεις του εκπομπού, έστω ότι είναι η $|2\rangle$, οι αρχικές συνθήκες έχουν τη μορφή:

$$\rho_{22}(0) = 1, \rho_{33}(0) = 0, \rho_{23}(0) = 0 \quad (2.56)$$

και οι αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων 2.53 προκύπτουν [7, 8]:

$$\rho_{22}(t) = \frac{1}{4}(e^{-\Gamma_{\parallel}t} + e^{-\Gamma_{\perp}t})^2 \quad (2.57\alpha)$$

$$\rho_{33}(t) = \frac{1}{4}(e^{-\Gamma_{\parallel}t} - e^{-\Gamma_{\perp}t})^2 \quad (2.57\beta)$$

Αν υποθέσουμε ότι ο κβαντικός εκπομπός υπάρχει στο κενό, και επομένως $p = 0$, η δυναμική των πληθυσμών περιγράφεται από τις:

$$\rho_{22}(t) = e^{-\Gamma_0 t} \quad (2.58\alpha)$$

$$\rho_{33}(t) = 0 \quad (2.58\beta)$$

Παρατηρούμε ότι η εξέλιξη των πληθυσμών στο χρόνο είναι πολύ διαφορετική στις δύο περιπτώσεις, με και χωρίς κβαντική συμβολή.

2.7 Μεθοδολογία και σκοπός της παρούσας εργασίας

Στην παρούσα εργασία ακολουθήθηκε η εξής μέθοδος :

1. Αναπτύχθηκε κώδικας για τον υπολογισμό της διηλεκτρικής συνάρτησης του Bi_2Se_3 (σχέση 1.2), αποσπάσματα του οποίου φαίνονται στο κεφ. 3.
2. Αξιοποιήθηκαν υπολογιστικές τεχνικές για τον υπολογισμό της συνάρτησης *Green* (σχέση 2.30) που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σύστημα κβαντικού εκπομπού-πλακιδίου Bi_2Se_3 (διάταξη 2.2).
3. Εκτιμήθηκε η ενίσχυση των ρυθμών αποδιέγερσης Γ_{\perp} , Γ_{\parallel} σύμφωνα με τις σχέσεις 2.41, συναρτήσει της συχνότητας της ακτινοβολίας εκπομπής και της απόστασης εκπομπού-πλακιδίου.
4. Αναπτύχθηκε κώδικας για τις σχέσεις 2.57 και 2.58 που περιγράφουν τη δυναμική της εξέλιξης πληθυσμών κβαντικών εκπομπών για $p \neq 0$ και $p = 0$.
5. Συγκρίνεται η εξέλιξη των πληθυσμών που περιγράφεται από τις παραπάνω σχέσεις, ώστε να ποσοτικοποιηθεί η συνεισφορά της κβαντικής συμβολής (ενότητα 2.6.4).

6. Προτείνονται μελλοντικές μελέτες που θα συμπληρώσουν την παρούσα εργασία.

Κεφάλαιο **3**

Μεθοδολογία & Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά γίνεται μια περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε για την υλοποίηση των υπολογισμών που πλαισιώνουν τη μελέτη των φαινομένων κβαντικής συμβολής. Κατόπιν, παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας.

3.1 Μεθοδολογία

Για τη μελέτη του φαινομένου Purcell, της κβαντικής συμβολής και του φαινομένου της παγίδευσης πληθυσμών χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MATLAB [45], καθώς και το Octave [46]. Στο εξής η αναφορά στο ένα λογισμικό θα είναι ισοδύναμη με αναφορά στο άλλο.

Για να υπολογιστούν οι λόγοι Γ/Γ_0 , ή συντελεστές Purcell, αξιοποιήθηκε και τροποποιήθηκε κώδικας για τον υπολογισμό της συνάρτησης Green [9] που αντιστοιχεί στη γεωμετρία του προβλήματος (σχέση 2.30). Επίσης, γράφτηκε κώδικας για τον αναλυτικό υπολογισμό δύο διαφορετικών προσεγγίσεων της διηλεκτρικής συνάρτησης που αναφέρονται στη βιβλιογραφία (σχέσεις 1.2 [24] και 3.1 [47, 48]) και για τη σύγκριση μεταξύ τους. Τέλος, γράφτηκε κώδικας για τον τελικό υπολογισμό και την γραφική αναπαράσταση των Γ/Γ_0 - συντελεστών Purcell, σύμφωνα με τις σχέσεις 2.41. Οι λόγοι Γ/Γ_0 υπολογίζονται και αναπαριστώνται συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ κβαντικού εκπομπού και πλακιδίου, αλλά και συναρτήσει της απόστασης για διαφορετικές συχνότητες εκπομπής. Ενδεικτικά, τμήμα του κώδικα που υπολογίζει τη διηλεκτρική συνάρτηση παρατίθεται στο σχήμα 3.1.

Επίσης, αναπτύχθηκε κώδικας για τον υπολογισμό των σχέσεων 2.57 και 2.58 που περιγράφουν τη δυναμική των πληθυσμών με και χωρίς κβαντική συμβολή αντίστοιχα, στον οποίο αξιοποιούνται τα δεδομένα που παράγονται από τα προηγούμενα προγράμματα. Όπως θα δειχτεί στη συνέχεια, αναπαριστώντας γραφικά τις παραπάνω σχέσεις, διαπιστώνεται το φαινόμενο της παγίδευσης πληθυσμών ως συνέπεια της κβαντικής συμβολής που αναδύεται στο συγκεκριμένο σύστημα, κάτι το οποίο δε συμβαίνει θεωρώντας τον κβαντικό εκπομπού στο κενό απουσία πλακιδίου. Τμήμα του σχετικού κώδικα παρατίθεται στο σχήμα 3.2.

```

1 function eps = bettereps( key )
2 % EPSTOP - Topological Insulator dielectric function - "more exact version"
3 %
4 % Usage :
5 % eps = epstop( key )
6 % Init
7 % key : "Bi_2Se_3"
8 % Output
9 % eps : function handle for evaluation of Topological Insulator dielectric function
10
11 switch key
12 case "Bi_2Se_3"
13     wpj = [ 1227, 11249, 675.9, 100];
14     w0j = [ 0, 2029.5, 63.03, 126.94];
15     gj = [ 7.43, 3920.5, 17.5, 10];
16 end
17
18 % dielectric function
19 eps = @( w ) epscalc( w, wpj, w0j, gj );
20
21
22 function eps = epscalc( w, wpj, w0j, gj )
23 c = 299792458; # [m/s]
24 cm2THz = c * 1e-10;
25 wpj = wpj * cm2THz;
26 w0j = w0j * cm2THz;
27 gj = gj * cm2THz;
28 eV2THz = 0.004135665538536;
29 w = w / eV2THz;
30 eps = 1;
31 for i=1:4
32     val = wpj(i).^2 ./ (w0j(i).^2 - w.^2 - 1i*gj(i)*w);
33     eps = eps + val;
34 endfor

```

Σχήμα 3.1: Τμήμα του κώδικα που υπολογίζει τη διηλεκτρική συνάρτηση της σχέσης 3.2.

```

30
31 n = 6000;
32 z = reshape( linspace( 10, 20000, n ), [], 1 );
33
34 p = zeros( length(z),1);
35 p1 = zeros( length(z),1);
36 p2 = zeros( length(z),1);
37 gamma = zeros( length(z),1);
38 kappa = zeros( length(z),1);
39
40 [p,p1,p2,gamma,kappa] = quantint(mat, epsfun, freq, z);
41
42 % Calculations
43 t = (0:0.01:4); % \Gamma_0 * t
44
45 k = floor ( (6000*z0 - 40 - 0.001) / (20 - 0.001) ); % index where p_k = p(z0)
46
47 rho22 = zeros(length(t),1);
48 rho33 = zeros(length(t),1);
49 rho22_noqi = zeros(length(t),1); % rho_22 without quantum interference
50 rho33_noqi = zeros(length(t),1);
51
52 for i = 1:length(t)
53     rho22(i) = 1/4 * ( exp(-p1(k) * t(i)) + exp(-p2(k) * t(i)) )^2;
54     rho33(i) = 1/4 * ( exp(-p1(k) * t(i)) - exp(-p2(k) * t(i)) )^2;
55     rho22_noqi(i) = exp( -(p1(k) + p2(k)) * t(i));
56 end
57

```

Σχήμα 3.2: Τμήμα του κώδικα που υπολογίζει τους πληθυσμούς ρ_{22} , ρ_{33} των σχέσεων 2.57 και 2.58.

3.2 Αποτελέσματα

3.2.1 Διηλεκτρική Συνάρτηση

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας χρησιμοποιεί ως εισόδο τη διηλεκτρική συνάρτηση του Bi_2Se_3 ως συνάρτηση της συχνότητας εκπομπής. Με τη διηλεκτρική συνάρτηση περιγράφεται η απόκριση του υλικού όταν σε αυτό προσπίπτει ακτινοβολία. Πραγματοποιήθηκαν υπολογισμοί για δύο διαφορετικές προσεγγίσεις που παρέχονται στη βιβλιογραφία, βασική διαφορά των οποίων είναι η συμπερίληψη ή όχι ενός όρου συνεισφοράς των ηλεκτρονίων της επιφάνειας στην έκφραση της διηλεκτρικής συνάρτησης.

Στη δημοσιευμένη εργασία των Batch et al. [48], το Bi_2Se_3 προσεγγίζεται ως απλός ('normal') μονωτής και η διηλεκτρική του συνάρτηση προσδιορίζεται μετρώντας πειραματικά το φάσμα ανάκλασης του υλικού και συνυπολογίζοντας συνεισφορές από τη διέγερση φωνονίων και από ελεύθερους φορείς στον όγκο του υλικού:

$$\epsilon_{nor}(\omega) = \sum_{j=a,\beta,f} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \quad (3.1)$$

όπου

j	$\omega_{p,j}[\text{THz}]$	$\omega_{0,j}[\text{THz}]$	$\gamma_j[\text{THz}]$
α	9.2	2.0	0.15
β	2.3	3.72	0.06
f	11.5	0	0.24

Πίνακας 3.1: Τιμές των παραμέτρων στην έκφραση της διηλεκτρικής συνάρτησης του Bi_2Se_3 της σχέσης 3.1. Οι όροι με δείκτες α και β αντιστοιχούν στη συνεισφορά των αντιστοιχών φωνονίων, α και β , ενώ με δείκτη f στους φορείς στον όγκο του Bi_2Se_3 . [47, 48]

Μια πιο ακριβή προσέγγιση για τη διηλεκτρική συνάρτηση του Bi_2Se_3 αναφέρουν οι Deshko et al. [25]. Για τον προσδιορισμό της παρακάτω αναλυτικής μορφής έχουν συνυπολογιστεί πειραματικά οι συνεισφορές οπτικών φωνονίων και διαζωνικών μεταβάσεων (bg - bandgap contributions), ενώ ο τελευταίος όρος είναι ένας όρος Drude που αφορά τα ηλεκτρόνια της επιφάνειας (φορείς Dirac) [24, 25]:

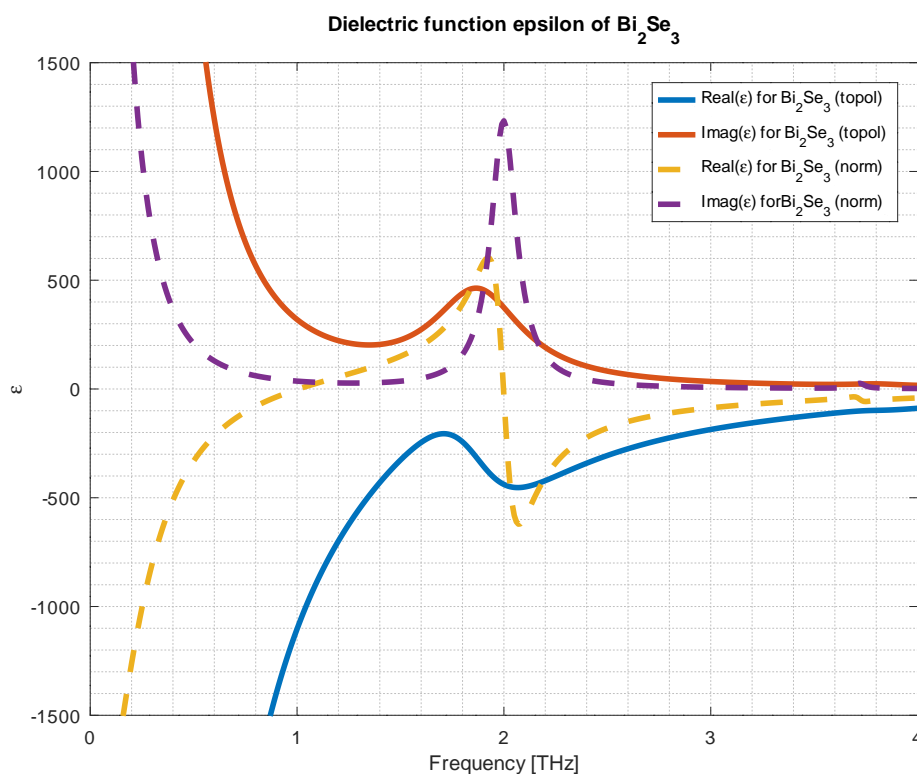
$$\epsilon_{top}(\omega) = 1 + \sum_{x=a,\beta,f} \frac{\omega_{p,x}^2}{\omega_{0,x}^2 - \omega^2 - i\gamma_x\omega} - \frac{\omega_{p,D}^2}{\omega^2 + i\gamma_D\omega} \quad (3.2)$$

όπου

x	$\omega_{p,x}[\text{cm}^{-1}]$	$\omega_{0,x}[\text{cm}^{-1}]$	$\gamma_x[\text{cm}^{-1}]$
α	675.9	63.03	17.5
β	100	126.94	10
bg	11249	2029.5	3920.5
D	1227	0	7.43

Πίνακας 3.2: Τιμές των παραμέτρων στην έκφραση της διηλεκτρικής συνάρτησης του Bi_2Se_3 της σχέσης 3.2. Ο τελευταίος όρος με δείκτη D αντιστοιχεί στη συνεισφορά των ηλεκτρονίων της επιφάνειας. [24, 25]

Οι δυο προσεγγίσεις της διηλεκτρικής συνάρτησης των σχέσεων 3.1 και 3.2 αναπαριστούνται γραφικά στο σχήμα 3.3 που ακολουθεί (αναφέρονται ως ‘norm’ [normal] και ‘topol’ [topological], αντίστοιχα ¹). Έχουν χαραχθεί χωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, σύμφωνα με τη σύμβαση $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$.



Σχήμα 3.3: Διηλεκτρική συνάρτηση Bi_2Se_3 συναρτήσει της συχνότητας. Με συνεχή γραμμή (‘topol’) έχει σημειωθεί η συνάρτηση που λαμβάνει υπόψη τις συνεισφορές των ηλεκτρονίων της επιφάνειας (σχέση 3.2).

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3, συναθροίζοντας και τη συνεισφορά των φορέων Dirac τα ακρότατα της διηλεκτρικής συνάρτησης αμβλύνονται. Ωστόσο, στην περιοχή των 2 THz η διηλεκτρική συνάρτηση εξακολουθεί να παίρνει υψηλές τιμές ($\sim 10^2$). Αυτό σημαίνει ότι σε αυτή την περιοχή συχνοτήτων μπορούν να σημειωθούν πολαριτονικές διεγέρσεις και ενίσχυση του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια του υλικού. Το γεγονός αυτό καθιστά αυτή την περιοχή συχνοτήτων ενδιαφέρουσα για την μελέτη φαινομένων αλληλεπίδρασης

¹ Οι χαρακτηρισμοί ‘norm’ (normal) και ‘topol’ (topological) επιλέχθηκαν για το διαχωρισμό των δυο προσεγγίσεων διότι οι Batch et al. [48] προσδιόρισαν την πρώτη έκφραση μοντελοποιώντας το Bi_2Se_3 ως απλό μονωτή, ενώ οι Deshko et al. [25] αναφέρουν μια πιο ακριβή προσέγγιση για το συγκεκριμένο υλικό, στην οποία λαμβάνονται υπόψη συγκεκριμένα τα επιφανειακά ηλεκτρόνια Dirac της επιφάνειας του υλικού. Το πλακίδιο της διάταξης που θεωρήθηκε σε αυτήν την εργασία έχει αρκετά μεγάλες διαστάσεις και δεν εκδηλώνονται τοπολογικές ιδιότητες στα φαινόμενα που μελετώνται. Ο χαρακτηρισμός ‘topol’ για τη διηλεκτρική συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε για να ξεχωρίσει τη δεύτερη προσέγγιση από την πρώτη για την οποία αξιοποιήθηκαν τα ηλεκτρόνια Dirac (αριθμητικά, ως επιπλέον όρος).

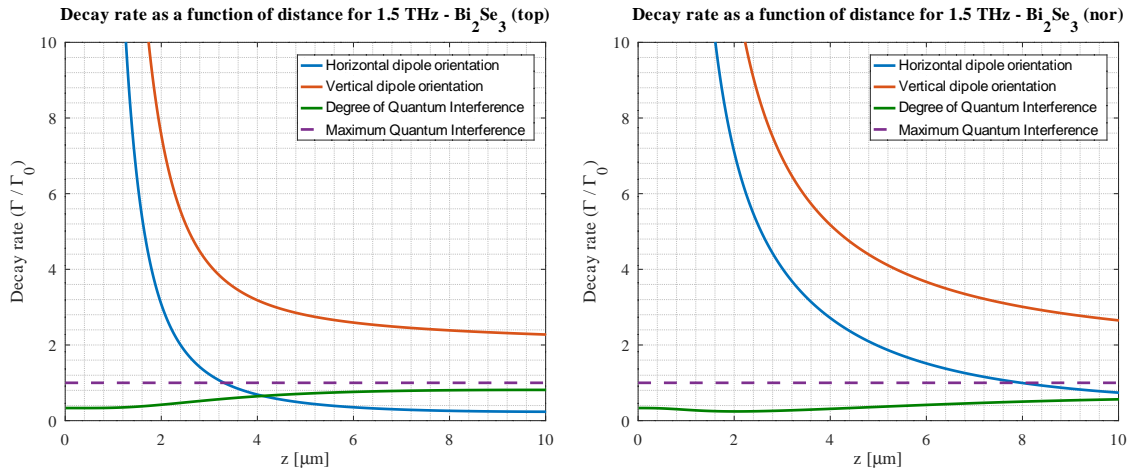
φωτός-ύλης.

3.2.2 Ρυθμοί Αποδιέγερσης

Στα σχήματα 3.4, 3.5 και 3.6 που ακολουθούν αναπαρίσταται γραφικά ο λόγος Γ/Γ_0 , ή συντελεστής Purcell, συναρτήσει της απόστασης μεταξύ εκπομπού και πλακιδίου, σύμφωνα με τη σχέση 2.41, για συχνότητα εκπομπής 1.5, 2.5 και 4 THz αντίστοιχα. Ο λόγος αυτός αντιστοιχεί στην ενίσχυση, θετική ή αρνητική, του ρυθμού αποδιέγερσης ενός διεγερμένου κβαντικού εκπομπού κοντά στην επιφάνεια πλακιδίου Bi_2Se_3 σε σχέση με το ρυθμό αν ο εκπομπός βρισκόταν στο κενό. Οι μπλε και οι κόκκινες καμπύλες αντιστοιχούν στον οριζόντιο και στον κατακόρυφο προσανατολισμό της διπολικής ροπής του κβαντικού εκπομπού. Το γεγονός ότι ο λόγος αυτός δεν έχει σταθερή τιμή ίση με 1 φανερώνει την εκδήλωση του φαινομένου Purcell. Επίσης, έχει χαρακτηί το μέτρο της κβαντικής συμβολής (πράσινη καμπύλη), όπως ορίζεται από τη σχέση 2.55:

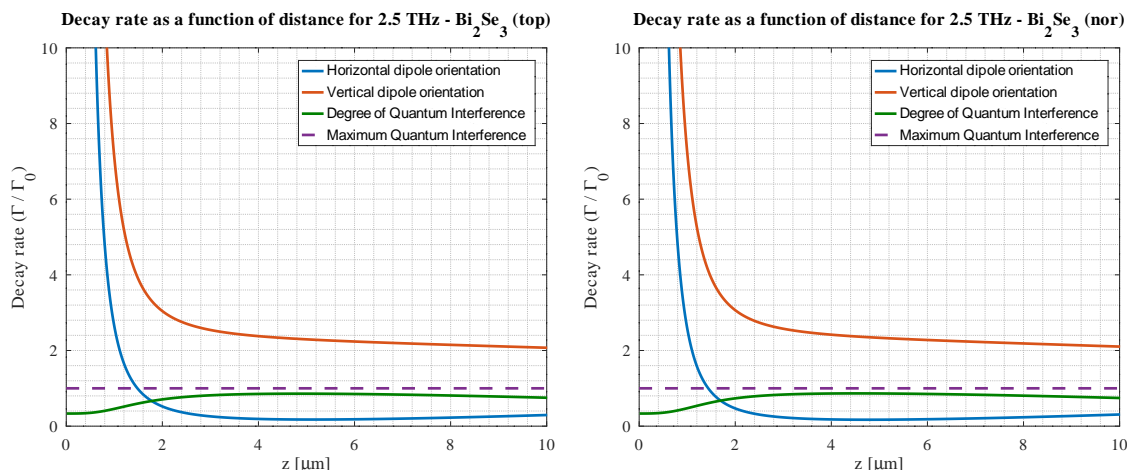
$$p = \frac{\Gamma_{\perp} - \Gamma_{\parallel}}{\Gamma_{\perp} + \Gamma_{\parallel}}$$

Στα αριστερά, βλέπουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών θεωρώντας την πιο ακριβή προσέγγιση του υλικού, χρησιμοποιώντας την έκφραση της διηλεκτρικής συνάρτησης της σχέσης 3.2 που συνυπολογίζει τα ηλεκτρόνια της επιφάνειας ('top' - topological), ενώ στα δεξιά τα αποτελέσματα αντιστοιχούν στην σχέση 3.1 που δεν λαμβάνει υπόψιν το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό του υλικού ('nor' - normal).

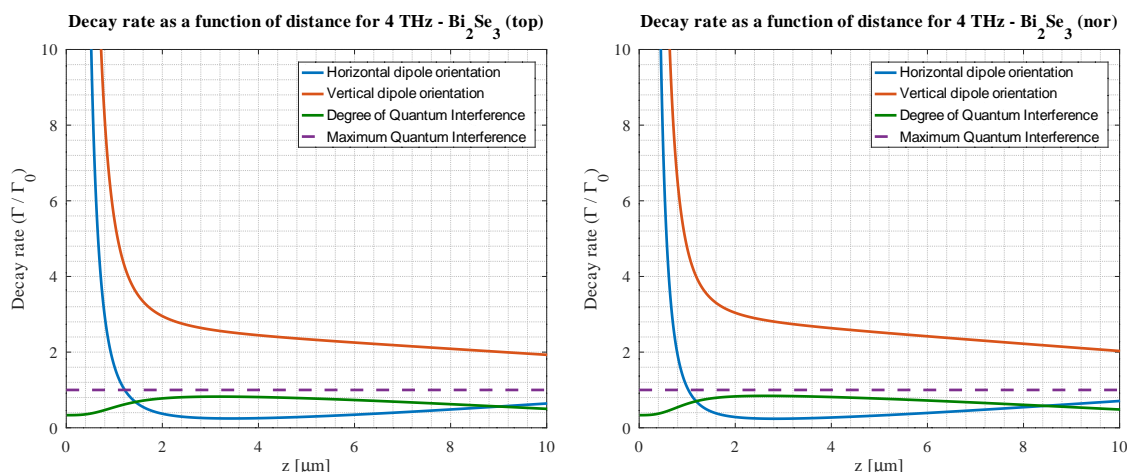


Σχήμα 3.4: Ρυθμοί αποδιέγερσης κβαντικού εκπομπού κοντά σε πλακίδιο Bi_2Se_3 συναρτήσει της απόστασης για συχνότητα εκπομπής 1.5 THz, για τις δυο προσεγγίσεις της διηλεκτρικής συνάρτησης. Αριστερά: με συνεισφορά ηλεκτρονίων επιφάνειας (σχέση 3.2). Δεξιά: μοντελοποίηση Bi_2Se_3 ως απλός μονωτής (σχέση 3.1).

Τα διαγράμματα των σχημάτων 3.4, 3.5 και 3.6 έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά. Μια παρατήρηση κοινή σε όλα τα διαγράμματα είναι το ότι ο λόγος Γ/Γ_0 φαίνεται πως εκτοξεύεται για $z \rightarrow 0$, στη συνέχεια φθίνει εκθετικά και στο τέλος, καθώς η απόσταση μεγαλώνει, φαίνεται να μεταβάλλεται εξαιρετικά αργά και να αποκτά σχεδόν σταθερή τιμή, που όπως θα σχολιαστεί παρακάτω είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη του 1. Οι τεράστιες



Σχήμα 3.5: Ρυθμοί αποδιέγερσης κβαντικού εκπομπού κοντά σε πλακίδιο Bi_2Se_3 συναρτήσει της απόστασης για συχνότητα εκπομπής 2.5 THz, για τις δυο προσεγγίσεις της διηλεκτρικής συνάρτησης. Αριστερά: με τη συνεισφορά ηλεκτρονίων επιφάνειας (σχέση 3.2). Δεξιά: μοντελοποίηση Bi_2Se_3 ως απλός μονωτής (σχέση 3.1).



Σχήμα 3.6: Ρυθμοί αποδιέγερσης κβαντικού εκπομπού κοντά σε πλακίδιο Bi_2Se_3 συναρτήσει της απόστασης για συχνότητα εκπομπής 4 THz, για τις δυο προσεγγίσεις της διηλεκτρικής συνάρτησης. Αριστερά: με συνεισφορά ηλεκτρονίων επιφάνειας (σχέση 3.2). Δεξιά: μοντελοποίηση Bi_2Se_3 ως απλός μονωτής (σχέση 3.1).

τιμές του λόγου για $z \rightarrow 0$ υποδηλώνουν πως, όταν ο διεγερμένος εκπομπός βρίσκεται σε αποστάσεις μικρότερες των 2-3 μικρομέτρων από το πλακίδιο, πυροδοτούνται φαινόμενα που τον ωθούν να αποδιεγερθεί με δραματικά γρηγορότερο ρυθμό.

Επίσης, ο ρυθμός αποδιέγερσης του εκπομπού επηρεάζεται διαφορετικά ανάλογα με τον προσανατολισμό της διπολικής ροπής του εκπομπού σε σχέση με την επιφάνεια του πλακιδίου. Συγκεκριμένα, θεωρώντας κατακόρυφο προσανατολισμό της διπολικής ροπής του εκπομπού ο λόγος Γ/Γ_0 παραμένει μεγαλύτερος του 1 καθώς ο εκπομπός απομακρύνεται από το πλακίδιο, δηλαδή ο ρυθμός αποδιέγερσης ενισχύεται σε σχέση με την τιμή του στο κενό. Αντίθετα, για οριζόντιο προσανατολισμό της διπολικής ροπής του εκπομπού ο λόγος αυτός μειώνεται πολύ γρήγορα σχεδόν στο 0, κάτι που υποδηλώνει καταστολή του ρυθμού

αποδιέγερσης.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι το γεγονός ότι ο εκπομπός φαίνεται πως μπορεί να διατηρεί αυτή τη συμπεριφορά αποδιέγερσης σε ένα εύρος αποστάσεων από το πλακίδιο, για το οποίο εύρος η τιμή του ρυθμού μεταβάλλεται με πολύ αργό ρυθμό. Το εύρος αφορά μερικά μικρόμετρα, αλλά έχει σημασία καθώς θεωρητικά επιτρέπει ένα βαθμό ελευθερίας σε σχέση με την ακρίβεια της τοποθέτησης του εκπομπού σε κάποια σχετική πειραματική εφαρμογή. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται πιο έντονα σε συχνότητες κοντά στα 2-2.5 THz, που όπως είδαμε απαντώνται και τα ακρότατα της διηλεκτρικής συνάρτησης και για τις δύο προσεγγίσεις.

Παρά τα κοινά ποιοτικά χαρακτηριστικά, τα παραπάνω διαγράμματα εμφανίζουν διαφορές στις λεπτομέρειες. Τα διαγράμματα των ρυθμών εμφανίζουν διαφορές ανάλογα με τη συχνότητα εκπομπής (σύγκριση 1.5 με 2.5 THz), αλλά και από τη μια διηλεκτρική συνάρτηση στην άλλη (σύγκριση 'top' με 'nor'). Οι διαφορές μεταξύ των δύο προσεγγίσεων εντοπίζονται κυρίως για συχνότητες μεγαλύτερες και μικρότερες από αυτές που εντοπίζονται τα ακρότατα (στα σχήματα 3.4 και 3.6), ενώ κοντά στα ακρότατα οι διαφορές είναι απειροελάχιστα (σχήμα 3.5). Για τη συνέχεια της μελέτης μεγαλύτερη σημασία δεν έχουν οι απόλυτες τιμές των λόγων Γ/Γ_0 , αλλά το μέτρο της κβαντικής συμβολής p που ορίζεται στη σχέση 2.55 και ουσιαστικά εμπεριέχει το πώς επηρεάζεται ο ρυθμός για τον έναν προσανατολισμό σε σχέση με τον άλλο. Η συγκεκριμένη ποσότητα έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον, καθώς αποτελεί δείκτη για την εκδήλωση των φαινομένων που σχολιάζονται στην παρούσα εργασία.

3.2.3 Μέτρο Κβαντικής Συμβολής

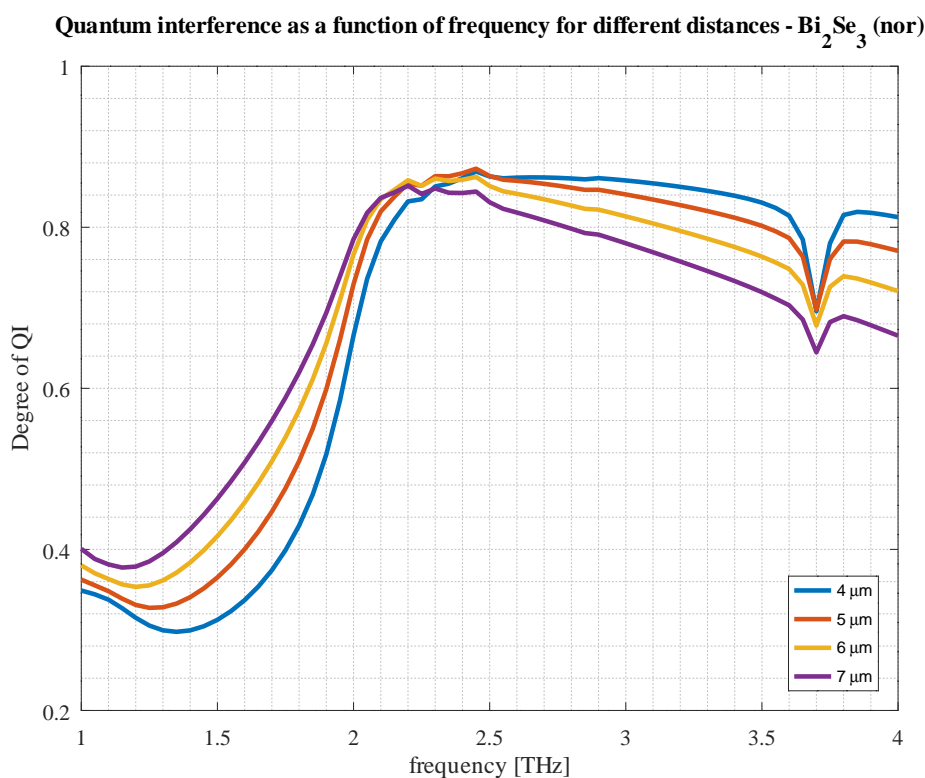
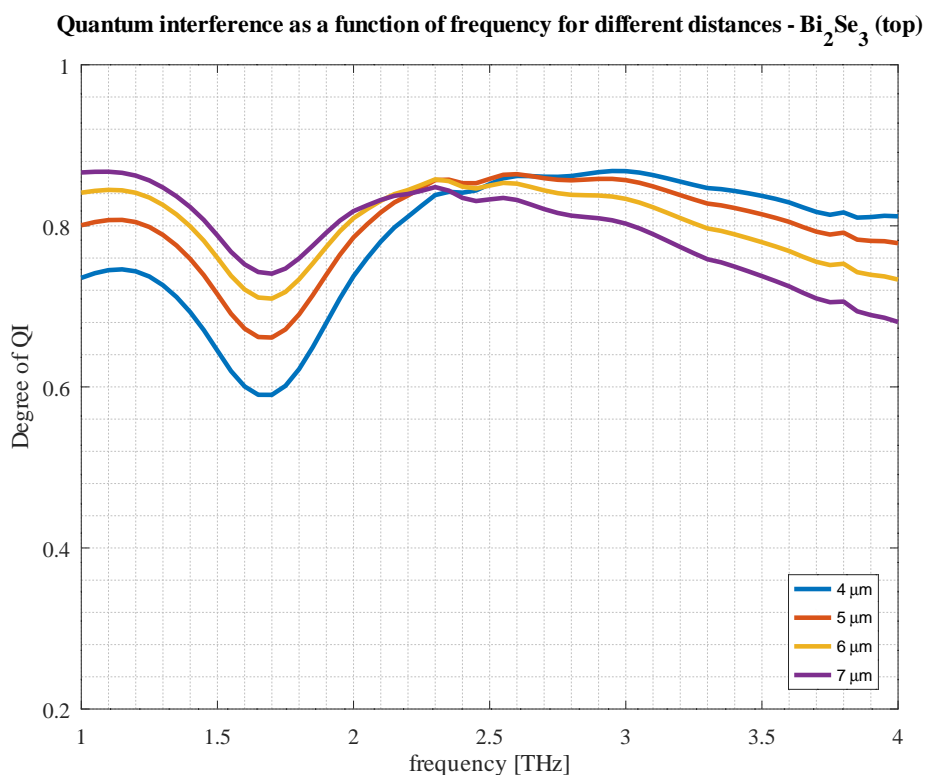
Όπως έχουμε αναφέρει, το μέτρο της κβαντικής συμβολής ορίζεται ως (σχέση 2.55):

$$p = \frac{\Gamma_{\perp} - \Gamma_{\parallel}}{\Gamma_{\perp} + \Gamma_{\parallel}}.$$

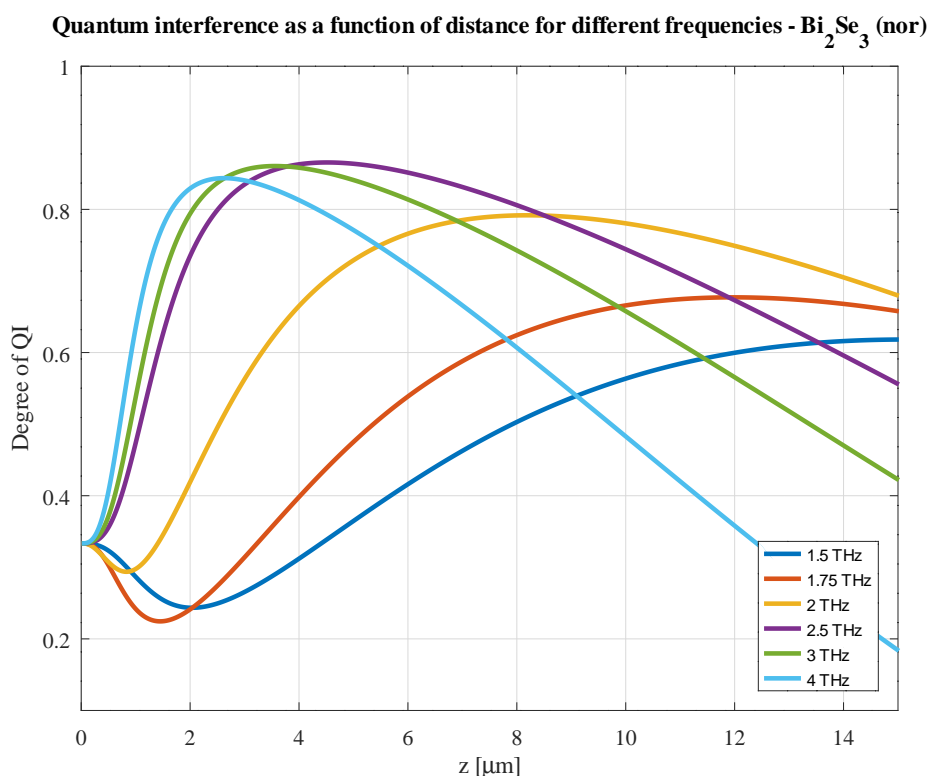
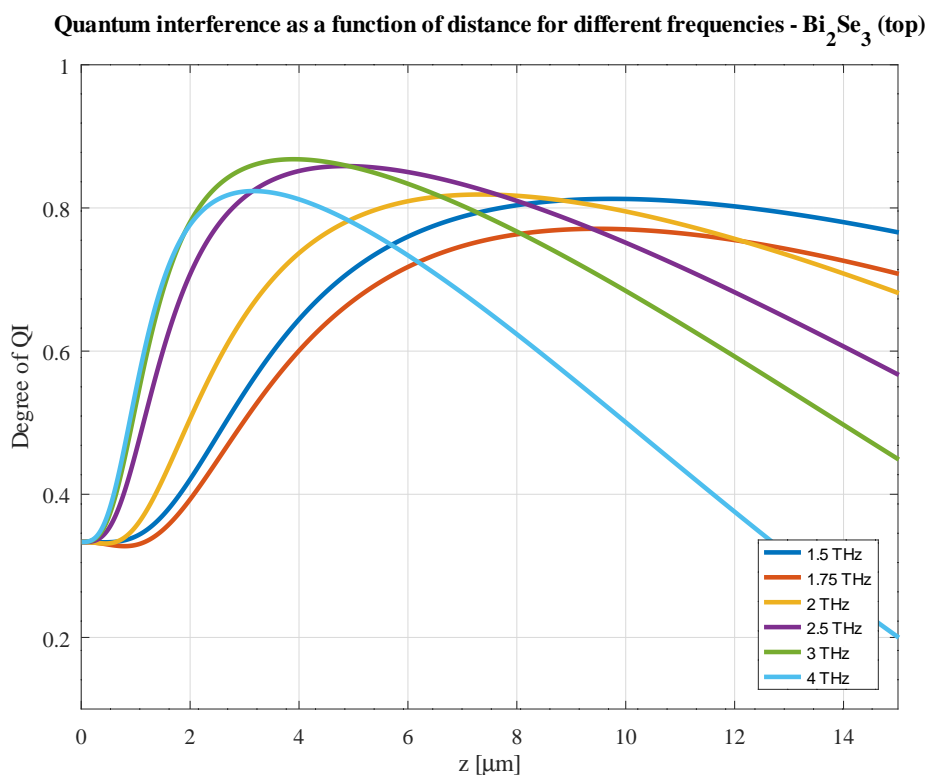
Το παραπάνω μέγεθος εκφράζει την διαφορετική επίδραση που έχει το φωτονικό περιβάλλον ενός εκπομπού στον ρυθμό αποδιέγερσής του ανάλογα με τον προσανατολισμό της διπολικής του ροπής. Στα διαγράμματα 3.7 και 3.8 που ακολουθούν αποτυπώνεται το p συναρτήσει της συχνότητας και συναρτήσει της απόστασης από το πλακίδιο αντίστοιχα, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα για τις δύο εκφράσεις της διηλεκτρικής συνάρτησης.

Στα διαγράμματα 3.7 του p συναρτήσει της συχνότητας φαίνεται πιο έντονα ο ρόλος της διηλεκτρικής συνάρτησης. Λαμβάνοντας υπόψιν τα ηλεκτρόνια της επιφάνειας, ειδικά στις χαμηλές συχνότητες (1-2 THz), το μέτρο της κβαντικής συμβολής είναι σημαντικά υψηλότερο. Από αυτήν την παρατήρηση μπορεί να προκύψει η υπόθεση ότι ο όρος που συνυπολογίζεται στη διηλεκτρική συνάρτηση της σχέσης 3.2 έχει σημαντική συνεισφορά στη συμπεριφορά του υλικού στις χαμηλές συχνότητες. Στα διαγράμματα 3.8 του p συναρτήσει της απόστασης παρατηρείται επίσης ελαφρώς διαφορετική συμπεριφορά, πάλι κυρίως όσον αφορά τις χαμηλές συχνότητες εκπομπής.

Τέλος, στο διάγραμμα 3.9 που ακολουθεί αναπαρίσταται ο λόγος των μέτρων κβαντικής συμβολής των δυο διηλεκτρικών συναρτήσεων, για καλύτερη σύγκριση και οπτικοποίηση της διαφοράς τους. Το QI_{top} , που αντιστοιχεί στο μέτρο της κβαντικής συμβολής για τη διηλεκτρική συνάρτηση της σχέσης 3.2 με τον όρο $drude$ των επιφανειακών ηλεκτρονίων,

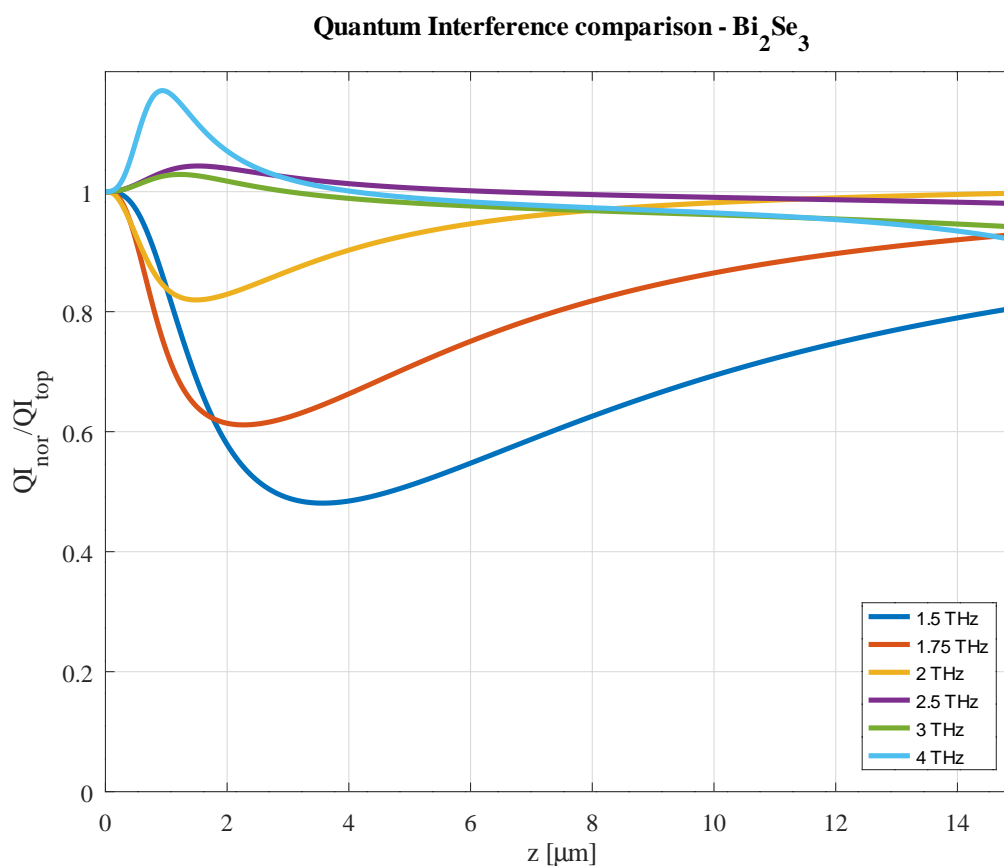


Σχήμα 3.7: Μέτρο της κβαντικής συμβολής συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές αποστάσεις εκπομπού-πυλακιδίου. Πάνω, στους υπολογισμούς έχει χρησιμοποιηθεί η διηλεκτρική συνάρτηση 3.2 που συνοψολογίζει τα επιφανειακά ηλεκτρόνια. Κάτω, το Bi_2Se_3 έχει μοντελοποιηθεί ως απλός μονωτής.



Σχήμα 3.8: Μέτρο της κβαντικής συμβολής συναρτήσει της απόστασης για διαφορετικές συχνότητες. Πάνω, στους υπολογισμούς έχει χρησιμοποιηθεί η διηλεκτρική συνάρτηση 3.2 που συσυμπολογίζει τα επιφανειακά ηλεκτρόνια. Κάτω, το Bi_2Se_3 έχει μοντελοποιηθεί ως απλός μωωτής.

είναι εν γένει μεγαλύτερο. Η διαφορετική συμπεριφορά εκδηλώνεται πιο έντονα στις χαμηλές συχνότητες, όπου η διαφορά στα ρ αγγίζει το 50%.



Σχήμα 3.9: Σύγκριση του μέτρου κβαντικής συμβολής για τις δυο προσεγγίσεις διηλεκτρικής συνάρτησης του Bi_2Se_3 .

Στις παραπάνω υποενότητες διαπιστώθηκε ότι θεωρώντας έναν γενικευμένο κβαντικό εκπομπού κοντά σε πλακίδιο Bi_2Se_3 πράγματι εκδηλώνεται το φαινόμενο Purcell και το μέτρο της κβαντικής συμβολής λαμβάνει υψηλές τιμές κοντά στο 1. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας την πιο ακριβή προσέγγιση της διηλεκτρικής συνάρτησης του Bi_2Se_3 , το ρ ξεπερνά το 0.8 για μεγάλο εύρος αποστάσεων και συχνοτήτων εκπομπής. Στην επόμενη υποενότητα, χρησιμοποιώντας πια αυτή την προσέγγιση της διηλεκτρικής συνάρτησης στους υπολογισμούς, θα δούμε την εκδήλωση του φαινομένου παγίδευσης πληθυσμών (population trapping) που προκύπτει ως συνέπεια της κβαντικής συμβολής των καναλιών αυθόρμητης αποδιέγερσης του εκπομπού.

3.2.4 Δυναμική Πληθυσμών

Στα επόμενα διαγράμματα αποτυπώνεται η δυναμική εξέλιξη πληθυσμών των εξισώσεων 2.53, τη μορφή των οποίων θα υπενθυμίσουμε παρακάτω, με αρχικές συνθήκες: $\rho_{22}(0) = 1$, $\rho_{33}(0) = 0$, $\rho_{23}(0) = 0$. Όταν $\rho \neq 0$, δηλαδή το μέτρο της κβαντικής συμβολής είναι μη

μηδενικό, οι λύσεις έρχονται στη μορφή 3.3:

$$\rho_{22}(t) = \frac{1}{4}(e^{-\Gamma_{\parallel}t} + e^{-\Gamma_{\perp}t})^2 \quad (3.3\alpha)$$

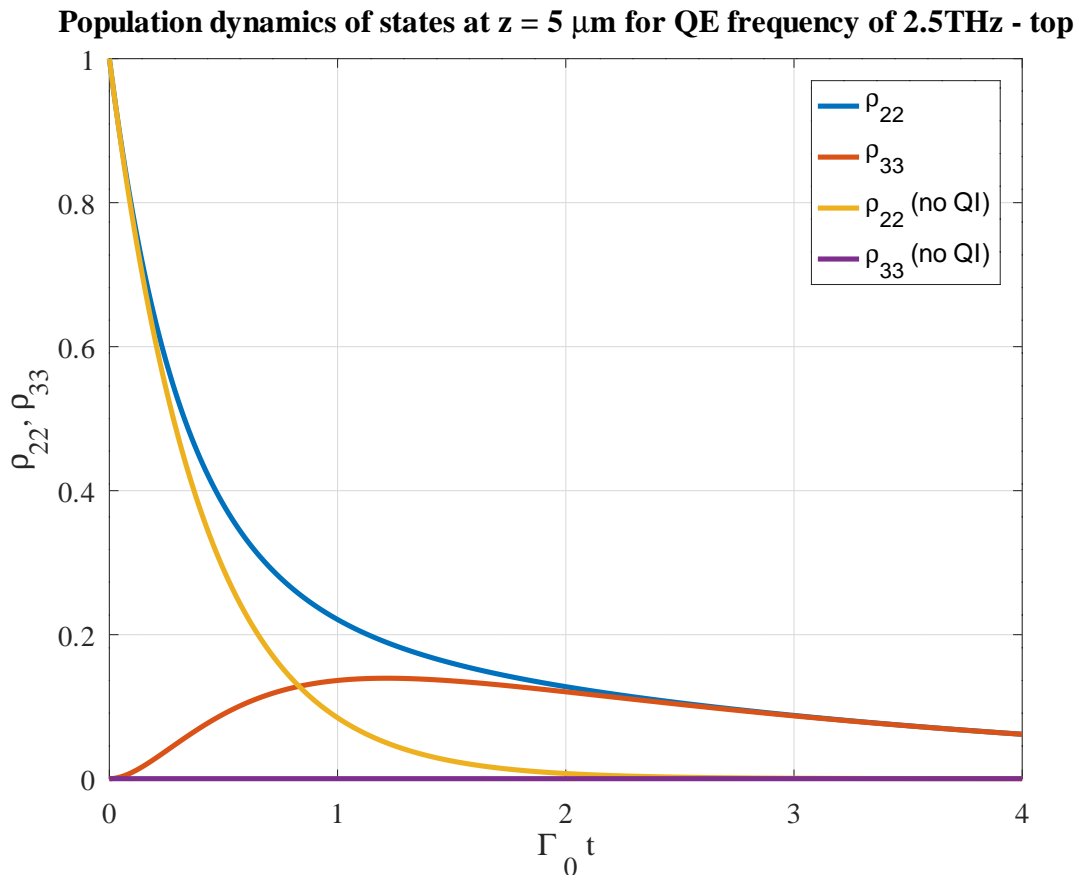
$$\rho_{33}(t) = \frac{1}{4}(e^{-\Gamma_{\parallel}t} - e^{-\Gamma_{\perp}t})^2 \quad (3.3\beta)$$

ενώ για $p = 0$, δηλαδή απουσία κβαντικής συμβολής, η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από τις 3.4:

$$\rho_{22}(t) = e^{-\Gamma_0 t} \quad (3.4\alpha)$$

$$\rho_{33}(t) = 0 \quad (3.4\beta)$$

Στο διάγραμμα 3.10 που ακολουθεί, αποτυπώνεται η εξέλιξη των πληθυσμών των σταθμών $|2\rangle$ και $|3\rangle$ για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, για συχνότητα εκπομπής 2.5 THz και απόσταση μεταξύ εκπομπού και πλακιδίου ίση με 5 μm .



Σχήμα 3.10: Η δυναμική πληθυσμών των $|2\rangle$ και $|3\rangle$ για συχνότητα εκπομπής 2.5 THz και απόσταση 5 μm , με και χωρίς κβαντική συμβολή.

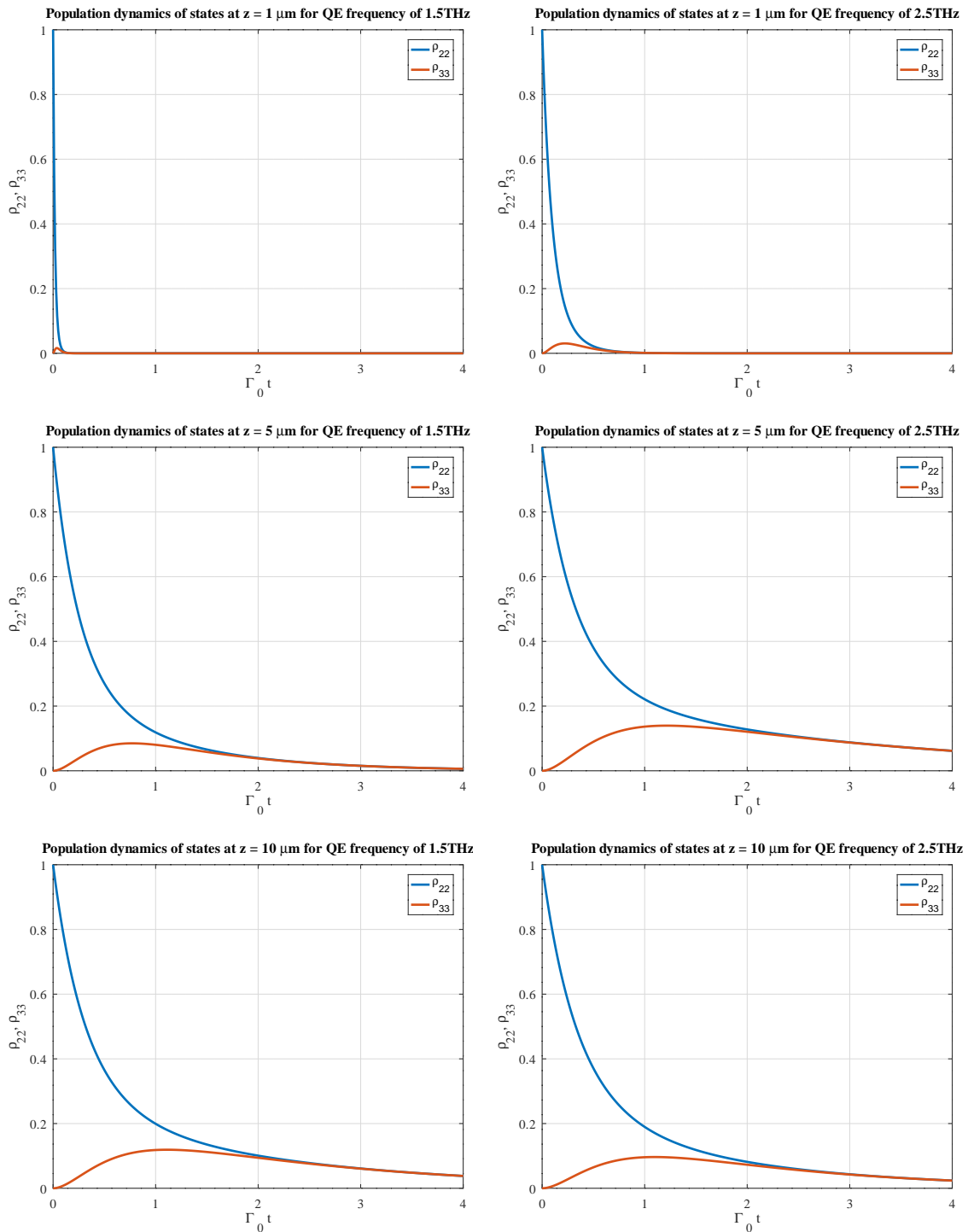
Στο διάγραμμα 3.10 απεικονίζεται ουσιαστικά η επίδραση του φαινομένου της κβαντικής συμβολής στο σύστημα εκπομπών-πλακιδίου. Απουσία κβαντικής συμβολής, η αναμενόμενη συμπεριφορά είναι ο πληθυσμός της στάθμης $|2\rangle$, που ήταν αρχικά διεγερμένη με πιθανότη-

τα 1, να φθίνει εκθετικά στο μηδέν (κίτρινη καμπύλη), τροφοδοτώντας τον πληθυσμό της βασικής κατάστασης $|1\rangle$ (δεν απεικονίζεται στο διάγραμμα), ενώ ο πληθυσμός της στάθμης $|3\rangle$ είναι αρχικά μηδενικός και παραμένει μηδενικός (μωβ καμπύλη).

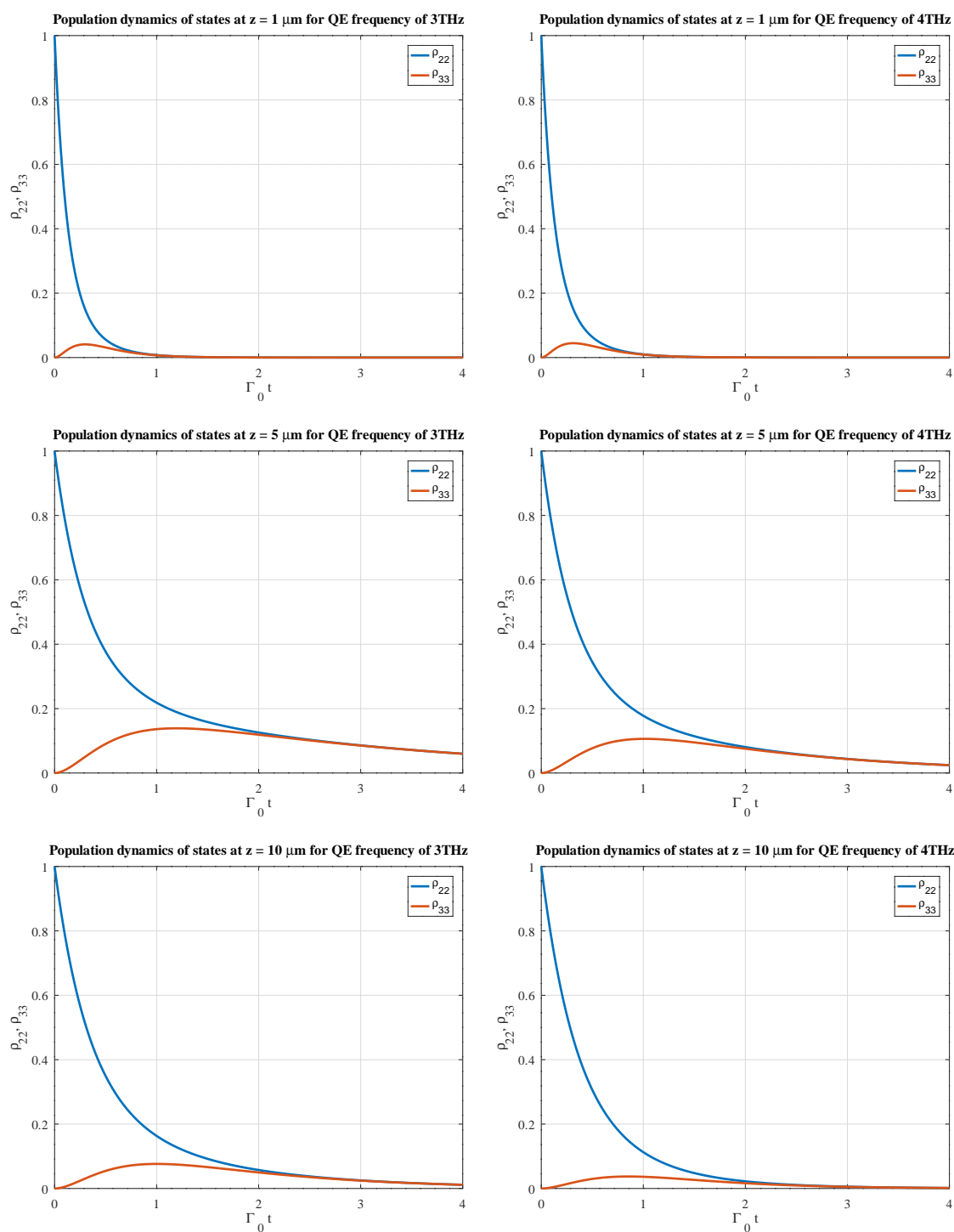
Όταν όμως $p \neq 0$, ο πληθυσμός της αρχικά διεγερμένης στάθμης $|2\rangle$ φθίνει εκθετικά αλλά προσεγγίζει το μηδέν με πολύ αργότερο ρυθμό (μπλε καμπύλη). Ταυτόχρονα, φαίνεται πως τροφοδοτεί τον πληθυσμό της $|3\rangle$ (κόκκινη καμπύλη), ο οποίος αυξάνεται σε μη μηδενικές τιμές καθώς φθίνει ο πληθυσμός της $|2\rangle$. Στη συνέχεια, οι πληθυσμοί των δυο σταθμών φαίνεται να φθίνουν μαζί στο μηδέν. Φαίνεται λοιπόν πως, αφενός η αρχικά διεγερμένη στάθμη τροφοδοτεί τον -αρχικά μηδενικό- πληθυσμό της άλλης στάθμης, αφετέρου ο συνολικός πληθυσμός των εκπομπών που είναι διεγερμένοι, είτε στη μία είτε στην άλλη στάθμη, παραμένει μη μηδενικός για σημαντικά μεγαλύτερο διάστημα και φθίνει στη βασική κατάσταση πολύ πιο αργά.

Τα παραπάνω προκύπτουν ως μοναδικό αποτέλεσμα της κβαντικής συμβολής μεταξύ των δυο καναλιών αυθόρμητης εκπομπής του εκπομπού όταν αυτός βρίσκεται κοντά στο πλακίδιο Bi_2Se_3 . Στα διαγράμματα 3.11 και 3.12 που ακολουθούν, αναπαρίσταται η δυναμική των πληθυσμών των καταστάσεων $|2\rangle$ και $|3\rangle$ παρουσία κβαντικής συμβολής για διαφορετικές συνθήκες.

Βλέπουμε πως οι παραπάνω παρατηρήσεις εμφανίζονται σε διαφορετικό βαθμό για διαφορετικές αποστάσεις εκπομπού-πλακιδίου και για διαφορετικές συχνότητες εκπομπής. Σε όλα τα διαγράμματα παρατηρείται, έστω και μικρή, τροφοδότηση της στάθμης $|3\rangle$ από την $|2\rangle$. Παρατηρούμε πως για συχνότητες 2.5-3 THz και για απόσταση περίπου 5 μm , το φαινόμενο εκδηλώνεται πιο έντονα, δηλαδή ο πληθυσμός της $|3\rangle$ αυξάνεται περισσότερο και οι διεγερμένοι πληθυσμοί φθίνουν με πιο αργό ρυθμό. Ο βαθμός εκδήλωσης του φαινομένου σχετίζεται με την τιμή του p , τους συντελεστές Purcell και τις τιμές της διηλεκτρικής συνάρτησης στις συγκεκριμένες συνθήκες συχνότητας εκπομπής και απόστασης.



Σχήμα 3.11: Η δυναμική πληθυσμών των $|2\rangle$ και $|3\rangle$, για διαφορετικές συχνότητες εκπομπής και αποστάσεις 1-5-10 μm μεταξύ εκπομπού-πλακιδίου, λαμβάνοντας υπόψιν κβαντική συμβολή μεταξύ των δυο καναλιών αυθόρμητης αποδιέγερσης. Αριστερά: συχνότητα εκπομπής 1.5 THz. Δεξιά: συχνότητα εκπομπής 2.5 THz.



Σχήμα 3.12: Η δυναμική πληθυσμών των $|2\rangle$ και $|3\rangle$, για διαφορετικές συχνότητες εκπομπής και αποστάσεις 1-5-10 μm μεταξύ εκπομπού-πλακιδίου, λαμβάνοντας υπόψη κβαντική συμβολή μεταξύ των δυο καναλιών αυθόρμητης αποδιέγερσης. Αριστερά: συχνότητα εκπομπής 3 THz. Δεξιά: συχνότητα εκπομπής 4 THz.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα & Επόμενες Μελέτες

4.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε το φαινόμενο της κβαντικής συμβολής μεταξύ δύο καναλιών αυθόρμητης αποδιέγερσης ενός κβαντικού εκπομπού τριών επιπέδων, όταν αυτός βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια ενός πλακιδίου Bi_2Se_3 , που ανήκει στην οικογένεια των τοπολογικών μονωτών. Πιο συγκεκριμένα, στα πλαίσια της μελέτης αξιοποιήθηκαν δυο προσεγγίσεις της διηλεκτρικής συνάρτησης του Bi_2Se_3 και διαπιστώθηκε ότι, θεωρώντας την πιο ακριβή μορφή της, που συμπεριλαμβάνει τη συνεισφορά των επιφανειακών ηλεκτρονίων, επιτυγχάνεται μεγαλύτερο μέτρο κβαντικής συμβολής, που είναι το μέγεθος που ποσοτικοποιεί την εκδήλωση του φαινομένου. Επίσης, επιβεβαιώθηκε η εκδήλωση του φαινομένου Purcell, δηλαδή η ενίσχυση του ρυθμού αυθόρμητης αποδιέγερσης του εκπομπού κοντά στο πλακίδιο Bi_2Se_3 , και υπολογίστηκαν οι αντίστοιχοι συντελεστές. Τέλος, υπολογίστηκε η εξέλιξη της δυναμικής πληθυσμών διεγερμένων κβαντικών εκπομπών με συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες και διαπιστώθηκε το φαινόμενο της παγίδευσης πληθυσμών, ως αποτέλεσμα της επίδρασης της κβαντικής συμβολής στην εξέλιξη του συστήματος.

4.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Υπάρχουν πολλές μελλοντικές μελέτες που μπορούν να συμπληρώσουν την παρούσα εργασία και να εμβαθύνουν στα συμπεράσματά της. Στη συγκεκριμένη εργασία, θεωρήθηκε απλή διάταξη, αποτελούμενη από έναν εκπομπού κοντά σε ένα πλακίδιο Bi_2Se_3 πάχους μερικών μικρομέτρων. Εναλλακτικές μελέτες θα μπορούσαν να μελετήσουν τα παραπάνω φαινόμενα υποθέτοντας διαφορετική ή/και πιο σύνθετη γεωμετρία, όπως είναι τα διαφορετικά πάχη πλακιδίου, υλικό σε μορφή κυλίνδρων ή νανοσφαιρών, ή ακόμα και πολυστρωματική γεωμετρία. Οι εναλλακτικές διατάξεις μπορούν να περιλαμβάνουν είτε Bi_2Se_3 , είτε και συνδυαστικά άλλα υλικά. Επίσης, θα μπορούσαν να εξεταστούν επιμέρους οι συνεισφορές των όρων της διηλεκτρικής συνάρτησης του υλικού στο φαινόμενο, ώστε να επιτευχθεί καλύτερη κατανόηση της φυσικής και των συνθηκών εκδήλωσής του. Τέλος, ενδιαφέρουσα θα ήταν και η μελέτη άλλων φαινομένων που απορρέουν από την κβαντική συμβολή στην αυθόρμητη εκπομπή.

4.3 Τεχνολογικές Εφαρμογές

Τα φαινόμενα κβαντικής συμβολής που αναδύονται όταν ένας κβαντικός εκπομπός βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια ανακλαστικού υλικού, όπως ένα πλακίδιο Bi_2Se_3 , μπορούν να πυροδοτήσουν ενδιαφέροντα φαινόμενα κβαντικής οπτικής, αξιοποιήσιμα σε πληθώρα εφαρμογών, όπως είναι, μεταξύ άλλων, το λέιζερ χωρίς αναστροφή [26], η παγίδευση πληθυσμών που διαπιστώθηκε και στην παρούσα εργασία [27, 28], η ελεγχόμενη αυθόρμητη εκπομπή [29, 30], η οπτική διαφάνεια [31] και η ενίσχυση του μη γραμμικού φαινομένου Kerr [32]. Τα φαινόμενα αυτά μπορούν να αξιοποιηθούν στην υλοποίηση υψηλής τεχνολογίας συσκευών και οργάνων, όπως είναι οι ανιχνευτές και οι πηγές μεμονωμένων φωτονίων, υψηλής αποδοτικότητας και χαμηλού θορύβου. [49]

Παραρτήματα

Χρήσιμοι ορισμοί

A'.1 Συνάρτηση δέλτα Dirac

A'.1.1 Ορισμός

Η συνάρτηση δέλτα Dirac, ή *κρουστική συνάρτηση*, $\delta(x)$ ορίζεται ως :

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta(x - a)f(x)dx = \begin{cases} f(a) & \text{αν } a \in (x_0, x_1) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (\text{A'.1})$$

Πρόκειται για μια κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση με την ιδιαίτερη ιδιότητα να είναι παντού μηδενική εκτός από το κέντρο της όπου απειρίζεται. Χρησιμοποιείται στην περιγραφή φαινομένων που έχουν χαρακτηριστικά κρούσης, δηλαδή έχουν μεγάλη επίδραση σε ένα σύστημα και πολύ μικρή διάρκεια.

Η συνάρτηση δέλτα έχει θεμελιώδη ρόλο στη θεωρία των συναρτήσεων Green, οι οποίες ορίζονται μέσω αυτής (σχέση 2.11). Αξιοποιώντας τις ιδιότητες της δέλτα και ενσωματώνοντας τα χαρακτηριστικά ενός γραμμικού συστήματος, οι συναρτήσεις Green περιγράφουν την απόκριση του συστήματος σε μια σημειακή πηγή, επιτρέποντας τον υπολογισμό της απόκρισης σε κάθε σημείο και καθιστώντας εν τέλει δυνατή την επίλυση πολύπλοκων διαφορικών εξισώσεων και την περιγραφή σύνθετων φυσικών συστημάτων. [9]

A'.2 Δέλτα του Kronecker

Το δέλτα του Kronecker αποτελεί τη διακριτή εκδοχή της συνάρτησης δέλτα του Dirac και ορίζεται ως :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (\text{A'.2})$$

για $i, j \in \mathbb{N}$.

Πρόκειται για ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο με το οποίο μεταξύ άλλων μπορούν να οριστούν τα στοιχεία πινάκων και καθίσταται δυνατή η έκφραση αθροισμάτων και σχέσεων μεταξύ δεικτών με συμπαγή και συνοπτικό τρόπο.

Παράρτημα **B'**

Σχέσεις

Στο παρόν κεφάλαιο γράφονται στην πλήρη τους μορφή μακροσκελείς όροι που δεν έχουν γραφεί αναλυτικά στο κυρίως κείμενο. Για εκτεταμένες μαθηματικές αποδείξεις γίνονται παραπομπές στη σχετική βιβλιογραφία.

B'.1 TE και TM διανύσματα πόλωσης

Θεωρείται τριαξονικό ορθοκανονικό σύστημα που ορίζεται από τον κυματαριθμό:

$$\mathbf{k}_1^\pm = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} \pm k_z \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{B'.1})$$

και τα διανύσματα πόλωσης:

$$\epsilon^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_1^\pm \times \hat{\mathbf{z}}}{|\hat{\mathbf{k}}_1^\pm \times \hat{\mathbf{z}}|} = \frac{1}{k_\rho} (k_y \hat{\mathbf{x}} - k_x \hat{\mathbf{y}}) \quad (\text{B'.2a})$$

$$\epsilon^{TM}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) = \hat{\mathbf{k}}_1^\pm \times \epsilon^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) = \pm \frac{k_{1z}}{k_1 k_\rho} (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}) - \frac{k_z h_0}{k_1} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{B'.2β})$$

με $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Κατά την ανάλυση της \bar{G}_{ij}^{refl} σε συνιστώσες TE και TM, προκύπτουν τα παρακάτω μέσα γινόμενα ως προς την αζιμουθιακή γωνία κυλινδρικών συντεταγμένων (ϕ, ρ, z) , θεωρώντας γενική περίπτωση όπου $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ διαφέρουν μόνο ως προς τη z -συνιστώσα [9]:

$$\langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_0 + J_2 \cos 2\phi & J_2 \sin 2\phi & 0 \\ J_2 \sin 2\phi & J_0 - J_2 \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \quad (\text{B'.3a})$$

$$\langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{1}{2k_1 k_2} \begin{bmatrix} k_{1z} k_{2z} (J_0 - J_2 \cos 2\phi) & -k_{1z} k_{2z} J_2 \sin 2\phi & -2ik_\rho k_{1z} J_1 \cos \phi \\ -k_{1z} k_{2z} J_2 \sin 2\phi & k_{1z} k_{2z} (J_0 + J_2 \cos 2\phi) & -2ik_\rho k_{1z} J_1 \sin \phi \\ -2ik_\rho k_{2z} J_1 \cos \phi & -2ik_\rho k_{2z} J_1 \sin \phi & 2k_\rho^2 J_0 \end{bmatrix}_{ij} \quad (\text{B'.3β})$$

όπου $J_n(k_\rho \rho)$ οι συναρτήσεις Bessel.

Βιβλιογραφία

- [1] Mark Fox. *Quantum Optics: An Introduction*. Oxford University Press, 2006.
- [2] Lukas Novotny και Bert Hecht. *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] Theodore A. Welton. *Some Observable Effects of the Quantum-Mechanical Fluctuations of the Electromagnetic Field*. *Phys. Rev.*, 74:1157–1167, 1948.
- [4] Denis G. Baranov, Martin Wersäll, Jorge Cuadra, Tomasz J. Antosiewicz και Timur Shegai. *Novel Nanostructures and Materials for Strong Light-Matter Interactions*. *ACS Photonics*, 5(1):24–42, 2018.
- [5] E. M. Purcell. *Proceedings of the American Physical Society: Spontaneous Emission Probabilities at Ratio Frequencies*. *Phys. Rev.*, 69:681, 1946.
- [6] Vassilios Yannopoulos, Emmanuel Paspalakis και Nikolay V. Vitanov. *Plasmon-Induced Enhancement of Quantum Interference near Metallic Nanostructures*. *Phys. Rev. Lett.*, 103:063602, 2009.
- [7] Sofia Evangelou, Vassilios Yannopoulos και Emmanuel Paspalakis. *Simulating quantum interference in spontaneous decay near plasmonic nanostructures: Population dynamics*. *Phys. Rev. A*, 83:055805, 2011.
- [8] Dimitrios Karaoulanis, Emmanuel Paspalakis και Vassilios Yannopoulos. *Quantum interference near bismuth-chalcogenide microstructures*. *J. Opt. Soc. Am. B*, 38(11):3301–3308, 2021.
- [9] Ulrich Hohenester. *Nano and Quantum Optics: An Introduction to Basic Principles and Theory*. Graduate Texts in Physics. Springer International Publishing, 2019.
- [10] Lea Boßmann. *On the Dipole Approximation*. Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2016.
- [11] Gao Xiang Li, Fu Li Li και Shi Yao Zhu. *Quantum interference between decay channels of a three-level atom in a multilayer dielectric medium*. *Phys. Rev. A*, 64:013819, 2001.
- [12] Jing Ping Xu και Ya Ping Yang. *Quantum interference of V-type three-level atom in structures made of left-handed materials and mirrors*. *Phys. Rev. A*, 81:013816, 2010.
- [13] Joel E. Moore. *The birth of topological insulators*. *Nature*, 464, 2010.

- [14] M. Z. Hasan και C. L. Kane. *Colloquium: Topological insulators*. *Rev. Mod. Phys.*, 82:3045–3067, 2010.
- [15] Xiao Liang Qi και Shou Cheng Zhang. *Topological insulators and superconductors*. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057–1110, 2011.
- [16] Yoshinori Tokura, Kenji Yasuda και Atsushi Tsukazaki. *Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator*. *Nature Reviews Physics*, 1:126, 2019.
- [17] Ion Garate και M. Franz. *Inverse Spin-Galvanic Effect in the Interface between a Topological Insulator and a Ferromagnet*. *Phys. Rev. Lett.*, 104:146802, 2010.
- [18] Liang Fu και C. L. Kane. *Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator*. *Phys. Rev. Lett.*, 100:096407, 2008.
- [19] Haijun Zhang, Chao Xing Liu, Xiao Liang Qi, Xi Dai, Zhong Fang και Shou Cheng Zhang. *Topological insulators in Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 and Sb_2Te_3 with a single Dirac cone on the surface*. *Nature Physics*, 5, 2009.
- [20] Oleg V. Yazyev, Joel E. Moore και Steven G. Louie. *Spin Polarization and Transport of Surface States in the Topological Insulators Bi_2Se_3 and Bi_2Te_3 from First Principles*. *Phys. Rev. Lett.*, 105:266806, 2010.
- [21] J. Betancourt, S. Li, X. Dang, J. D. Burton, E. Y. Tsympal και J. P. Velev. *Complex band structure of topological insulator Bi_2Se_3* . *Journal of Physics: Condensed Matter*, 28(39):395501, 2016.
- [22] Y. Xia, D. Qian, D. Hsieh, L. Wray, A. Pal, H. Lin, A. Bansil, D. Grauer, Y. S. Hor, R. J. Cava και M. Z. Hasan. *Observation of a large-gap topological-insulator class with a single Dirac cone on the surface*. *Nature Physics*, 5(6):398–402, 2009.
- [23] Hans Kuzmany. *The Dielectric Function*, σελίδες 101–120. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [24] Shu Chen, Andrei Bylinkin, Zhengtianye Wang, Martin Schnell, Greeshma Chandan, Peining Li, Alexey Y. Nikitin, Stephanie Law και Rainer Hillenbrand. *Real-space nanoimaging of THz polaritons in the topological insulator Bi_2Se_3* . *Nature Communications*, 13:1374, 2022.
- [25] Yury Deshko, Lia Krusin-Elbaum, Vinod Menon, Alexander Khanikaev και Jacob Trevino. *Surface plasmon polaritons in topological insulator nano-films and superlattices*. *Opt. Express*, 24(7):7398–7410, 2016.
- [26] Peng Zhou και S. Swain. *Quantum Interference in Probe Absorption: Narrow Resonances, Transparency, and Gain without Population Inversion*. *Phys. Rev. Lett.*, 78:832–835, 1997.

- [27] Shi Yao Zhu, Ricky C. F. Chan και Chin Pang Lee. *Spontaneous emission from a three-level atom*. *Phys. Rev. A*, 52:710–716, 1995.
- [28] Shi Yao Zhu και Marlan O. Scully. *Spectral Line Elimination and Spontaneous Emission Cancellation via Quantum Interference*. *Phys. Rev. Lett.*, 76:388–391, 1996.
- [29] P. R. Berman. *Analysis of dynamical suppression of spontaneous emission*. *Phys. Rev. A*, 58:4886–4891, 1998.
- [30] E. Paspalakis, C. H. Keitel και P. L. Knight. *Fluorescence control through multiple interference mechanisms*. *Phys. Rev. A*, 58:4868–4877, 1998.
- [31] E. Paspalakis, N. J. Kylstra και P. L. Knight. *Transparency Induced via Decay Interference*. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2079–2082, 1999.
- [32] Yueping Niu και Shangqing Gong. *Enhancing Kerr nonlinearity via spontaneously generated coherence*. *Phys. Rev. A*, 73:053811, 2006.
- [33] John David Jackson. *Classical electrodynamics; 2nd ed.* Wiley, New York, NY, 1975.
- [34] David J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017.
- [35] Ronald R. Chance, Alfred Prock και Robert J. Silbey. *Molecular Fluorescence and Energy Transfer Near Interfaces*. *Advances in Chemical Physics*, 2007.
- [36] G. Russakoff. *A Derivation of the Macroscopic Maxwell Equations*. *American Journal of Physics*, 38(10):1188–1195, 1970.
- [37] A. Shevchenko και B. J. Hoenders. *Microscopic derivation of electromagnetic force density in magnetic dielectric media*. *New Journal of Physics*, 12(5):053020, 2010.
- [38] Στέφανος Α. Τραχανάς. *Κβαντομηχανική Ι*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 3η έκδοση, 2021.
- [39] Στέφανος Α. Τραχανάς. *Κβαντομηχανική ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 10η έκδοση, 2019.
- [40] David J. Griffiths και Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 3η έκδοση, 2018.
- [41] James Binney και David Skinner. *The Physics of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 2013.
- [42] Harold J. Metcalf και Petervan der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer New York, New York, NY, 1999.
- [43] L. Knöll, W. Vogel και D. G. Welsch. *Action of passive, lossless optical systems in quantum optics*. *Phys. Rev. A*, 36:3803–3818, 1987.

- [44] Roy J. Glauber και M. Lewenstein. *Quantum optics of dielectric media*. *Phys. Rev. A*, 43:467–491, 1991.
- [45] MATLAB. *version 7.10.0 (R2010a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2010.
- [46] John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg και Rik Wehbring. *GNU Octave version 5.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*, 2020.
- [47] G. Siroki, D.K.K. Lee, P. D. Haynes και V. Giannini. *Single-electron induced surface plasmons on a topological nanoparticle*. *Nature Communications*, 7:12375, 2016.
- [48] N. P. Butch, K. Kirshenbaum, P. Syers, A. B. Sushkov, G. S. Jenkins, H. D. Drew και J. Paglione. *Strong surface scattering in ultrahigh-mobility Bi_2Se_3 topological insulator crystals*. *Phys. Rev. B*, 81:241301, 2010.
- [49] Catalin D. Spataru και François Léonard. *Quantum dynamics of single-photon detection using functionalized quantum transport electronic channels*. *Phys. Rev. Res.*, 1:013018, 2019.