



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΕ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΜΙΚΡΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΦΥΣΙΚΗ ΡΩΓΜΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΙΚΟΛΑΣ Δ. ΚΑΛΑΝΔΡΑΝΗΣ

Επιβλέποντες: Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Ε.Μ.Π, Δρ. Χρήστος Φ. Μαρκίδης

Αθήνα, Ιούλιος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΣΕ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΜΙΚΡΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΦΥΣΙΚΗ ΡΩΓΜΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΙΚΟΛΑΣ Δ. ΚΑΛΑΝΔΡΑΝΗΣ

Επιβλέποντες: Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Ε.Μ.Π, Δρ. Χρήστος Φ. Μαρκίδης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τον Ιούνιο του 2023

.....
Σταύρος Κ. Κουρκουλής

Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Χρήστος Φ. Μαρκίδης

Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

.....
Άννα Δ. Ζερβάκη

Επ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

.....
Νικόλας Δ. Καλανδράνης

Διπλωματούχος Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π

Copyright © Νικόλας Δ. Καλανδράνης

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ποσοτικοποίηση και παραμετρική μελέτη των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων που αναπτύσσονται σε επίπεδη μεταλλική πλάκα, με προϋπάρχουσα μικρή κεντρική, ευθύγραμμη, φυσική ρωγμή 2α. Επίσης, εκτιμάται η τιμή των συντελεστών εντάσεως των τάσεων στο άκρο της ρωγμής και μελετάται η εξάρτησή τους από το υλικό της πλάκας. Τέλος, συγκρίνονται τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων της ρηγματωμένης και της αντίστοιχης αρηγμάτωτης πλάκας και εκτιμάται η διατάραξη αυτών των πεδίων παρουσία μικρής κεντρικής φυσικής ρωγμής.

Οι συνθήκες φορτίσεως στα σύνορα της πλάκας θα θεωρούνται τέτοιες ώστε η ρωγμή να είναι συνεχώς κλειστή, με τα χείλη αυτής υπό σύνθλιψη, ώστε κατά μήκος της ρωγμής να αναπτύσσονται τάσεις επαφής, θλιπτικές και εφαπτομενικές στην περίπτωση παρουσίας τριβής. Αυτό ισχύει πάντα όταν η πλάκα με τη μικρή κεντρική ρωγμή υποβάλλεται σε μονοαξονική ομοιόμορφη θλιπτική τάση στα απομακρυσμένα σύνορά της, που η διεύθυνσή της δεν είναι παράλληλη προς τη ρωγμή.

Η ποσοτικοποίηση τάσεων και μετατοπίσεων στη ρηγματωμένη πλάκα βοηθά επίσης και στο σαφή καθορισμό του μεγέθους της διατάραξης των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων της αντίστοιχης αρηγμάτωτης πλάκας λόγω της εισαγωγής της ρωγμής.

Η παρούσα μελέτη είναι θεωρητική και βασίζεται σε μια υπάρχουσα προσεγγιστική λύση του προβλήματος της άπειρης ρηγματωμένης πλάκας, που έχει επιτευχθεί στα πλαίσια της κλασικής επίπεδης θεωρίας της γραμμικής ελαστικότητας με τη χρήση της μεθόδου των μιγαδικών δυναμικών Kolosov-Muskhelishvili. Η υιοθέτηση της λύσης αυτής δικαιολογείται υπό τη θεώρηση πολύ μικρής μαθηματικής ρωγμής σε σχέση με την πλάκα, έτσι ώστε η τελευταία να μπορεί να θεωρηθεί απείρων διαστάσεων.

Στη συγκεκριμένη λύση αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα τη μη φυσικής αλληλοεπικάλυψης των χεϊλών της ρωγμής, που εμφανίζεται πάντα στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης της πλάκας στο άπειρο (με εξαίρεση την περίπτωση που η φόρτιση είναι παράλληλη στη ρωγμή), όταν η ρωγμή θεωρείται ευθύς εξαρχής ελευθέρως τάσεων. Στην ίδια λύση, αντί της αλληλοεπικάλυψης, υπολογίστηκαν προσεγγιστικά οι τάσεις επαφής που αναπτύσσονται στα χείλη της ρωγμής, θλιπτικές και εν γένει και τριβής, οι αναλυτικές εκφράσεις των οποίων χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Επίσης για τον προσδιορισμό της επίδρασης της παρουσίας της ρωγμής στα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων της αρηγμάτωτης πλάκας, γίνεται μία σύγκριση ρηγματωμένης και αντίστοιχης αρηγμάτωτης πλάκας. Προς τούτο, και για λόγους ομοιομορφίας, λύνεται και το απλό πρόβλημα της αρηγμάτωτης πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη στο άπειρο με τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών. Από τα αποτελέσματα της σύγκρισης προκύπτει ότι, οι τάσεις επαφής στα υπό σύνθλιψη χείλη της ρωγμής 2α, ορθές και διατμητικές (τριβής), είναι κατά

κανόνα μεγαλύτερες, ωστόσο συγκρίσιμες, των αντίστοιχων τάσεων που αναπτύσσονται στο αντίστοιχο υλικό ευθύγραμμο τμήμα 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα. Επίσης προκύπτει ότι η διατάραξη του τασικού πεδίου εντός της πλάκας λόγω ρωγμής, μειώνεται γρήγορα με την απομάκρυνση από τη ρωγμή. Ανάλογα συμπεράσματα εξάγονται και για το πεδίο των μετατοπίσεων, στη ρωγμή και εντός της πλάκας. Η επίδραση του υλικού της πλάκας στο πεδίο των τάσεων περιορίζεται κυρίως στο λόγο Poisson, με το μέτρο ελαστικότητας να έχει αμελητέα επίδραση. Επίσης σημαντική είναι η διαφοροποίηση στις τάσεις στο εσωτερικό της πλάκας, μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης - επίπεδης έντασης συνυπολογιζόμενου και παράγοντα τριβής στα χείλη της ρωγμής.

Στην αιχμή της ρωγμής, που οι τάσεις απειρίζονται λόγω της υπόθεσης μαθηματικής ρωγμής, μελετώνται παραμετρικά, οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων K_I και K_{II} , που συνδέονται με τον τύπο I και II φόρτισης του υλικού, αντίστοιχα. Για τη μονοαξονική θλίψη στο άπειρο, που εξετάζεται εδώ, χρησιμοποιούνται οι γενικές διορθωμένες εκφράσεις των K_I και K_{II} , που παρουσιάστηκαν στην προαναφερθείσα λύση. Με τη βοήθεια αυτών των εκφράσεων, μελετάται η εξάρτηση των συντελεστών εντάσεως των τάσεων από διάφορες παραμέτρους του προβλήματος όπως το υλικό και η κλίση της ρωγμής ως προς την εξωτερική φόρτιση. Όπως προκύπτει, το υλικό έχει μικρή, ωστόσο υπαρκτή επίδραση και μόνο στην τιμή του K_I . Ο K_{II} είναι πάντα ανεξάρτητος του υλικού (σύμφωνα με την προαναφερθείσα λύση) συνοδεύεται δε κατά κανόνα από μία πολύ μικρή θετική τιμή του K_I , που εξασφαλίζει τη συνθήκη συνεχούς επαφής - χωρίς αλληλοεπικάλυψη, αλλά και χωρίς, συνολικά, άνοιγμα των χειλέων της ρωγμής.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία δεν θα ήταν δυνατή εάν δεν είχα, προηγουμένως, ανακαλύψει το γνωστικό πεδίο της Μηχανικής των Θραύσεων μέσω του προπτυχιακού μαθήματος “Μηχανική των Θραύσεων”. Οφείλω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στον Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Κουρκουλή Σταύρο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας.

Τις ευχαριστίες μου επίσης θα ήθελα να εκφράσω στον κύριο Μαρκίδη Χρήστο για την άρτια συνεργασία μας, για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε όποτε τη χρειάστηκα, ενώ με την καθοδήγηση του κατάφερα να διαχειριστώ την παρούσα εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και κάθε άνθρωπο που ήταν δίπλα μου μέχρι να φθάσω εδώ. Η συνεισφορά τους ήταν πολύτιμη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	11
1.1 Αντικείμενο της παρούσας εργασίας	11
1.2 Γενικά περί Μηχανικής των Θραύσεων	12
1.3 Ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα της αλληλοεπικάλυψης (overlapping) των χειλέων της ρωγμής	15
Κεφάλαιο 2: Θεωρητική μέθοδος	17
2.1 Η θεωρητική αλληλοεπικάλυψη και η αντιμετώπισή της	17
2.2 Η μέθοδος των μιγαδικών δυναμικών Kolosov-Muskhelishvili	17
2.3 Η κλασική λύση του Πρώτου Θεμελιώδους Προβλήματος (‘αρχικό πρόβλημα’) της Γραμμικής Επίπεδης Ελαστικότητας για την άπειρη ρηγματωμένη πλάκα και το πρόβλημα της αλληλοεπικάλυψης	21
2.4 Η αντιμετώπιση της αλληλοεπικάλυψης των χειλέων της ρωγμής	25
2.5 Τα πεδία μετατοπίσεων και τάσεων και οι φυσικά αποδεκτοί συντελεστές εντάσεως των τάσεων στη ρηγματωμένη άπειρη πλάκα υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της	33
2.6 Τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων στην αρηγμάτωτη άπειρη πλάκα υπό μονοαξονική θλίψη στο άπειρο	35
Κεφάλαιο 3: Εφαρμογές και αποτελέσματα σε προ-ρηγματωμένη μεταλλική πλάκα	39
3.1 Εφαρμογές στην περίπτωση ρηγματωμένης μεταλλικής πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της	39
3.2 Η φυσικά αποδεκτή κλειστή παραμορφωμένη ρωγμή στην περίπτωση παρουσίας τριβής	41
3.3 Το πεδίο των μετατοπίσεων στο εσωτερικό της ρηγματωμένης μεταλλικής πλάκας και η επίδραση της ρωγμής	64
3.4 Οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής στη ρηγματωμένη μεταλλική πλάκα και η στερεά στροφή της ρωγμής καθώς και το αντίστοιχο τασικό πεδίο και στερεά στροφή στην υλική γραμμή 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα	69
3.5 Το πεδίο των τάσεων στο εσωτερικό της ρηγματωμένης μεταλλικής πλάκας και η επίδραση της ρωγμής	96
3.6 Οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων	101
Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα	111
Αναφορές	116

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της παρούσας εργασίας

Η παρούσα εργασία είναι θεωρητική και το αντικείμενό της είναι η ποσοτικοποίηση των τάσεων επαφής που αναπτύσσονται στα χείλη μικρής, κεντρικής, φυσικής ρωγμής μήκους $2a$ σε μεταλλική πλάκα που υποβάλλεται σε μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της. Επίσης, γίνεται ποσοτικοποίηση των αντίστοιχων μετατοπίσεων και της στερεάς στροφής της ρωγμής. Τέλος, υπολογίζονται οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων (ΣΕΤ) στο άκρο της ρωγμής. Για τα παραπάνω μεγέθη, γίνεται μία παραμετρική ανάλυση της εξάρτησής τους από τις διάφορες παραμέτρους του προβλήματος όπως, το υλικό της πλάκας (μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson), την κλίση της ρωγμής σε σχέση με τη φόρτιση, την παρουσία ή μη τριβής στα χείλη της ρωγμής, αλλά και τις επικρατούσες συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ή έντασης.

Η μελέτη βασίζεται στην υπόθεση ρωγμής μικρών διαστάσεων σε σχέση με τις διαστάσεις της πλάκας που ως εκ τούτου θεωρείται άπειρη. Υπό αυτήν την υπόθεση γίνεται χρήση μίας υπάρχουσας προσεγγιστικής λύσης για την άπειρη πλάκα με ευθύγραμμη μαθηματική ρωγμή μήκους $2a$, υπό τυχαία διαξονική φόρτιση στο άπειρο [1]. Στη λύση αυτή έχει αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της μη φυσικά αποδεκτής αλληλοεπικάλυψης (overlapping) των χειλέων της ρωγμής, που προκύπτει στην κλασική λύση της γραμμικής ελαστικότητας για ρωγμή ελευθέρων τάσεων και έχει γίνει μία πρώτη προσέγγιση των τάσεων επαφής που αναπτύσσονται στα χείλη της ρωγμής, αντί της αλληλοεπικάλυψης. Επίσης, έχουν εξαχθεί οι εκφράσεις των αντίστοιχων φυσικά αποδεκτών ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής. Επισημαίνεται ότι, η παρούσα μελέτη αφορά στην περίπτωση που στα σύνορα της πλάκας ασκείται μονοαξονική ομοιόμορφη θλιπτική τάση, κάτι που οδηγεί πάντα σε συνθήκες σύνθλιψης των χειλέων της ρωγμής (πλην της ειδικής περίπτωσης που η φόρτιση είναι παράλληλη στη ρωγμή). Για αυτήν την περίπτωση και λαμβάνοντας υπόψη τη λύση [1], υπολογίζεται το μέγεθος των τάσεων επαφής (θλιπτικών και τριβής) στα χείλη της ρωγμής $2a$ και προσδιορίζεται το μέγεθος της διατάραξης των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων της αρηγμάτωτης πλάκας λόγω της εισαγωγής της ρωγμής.

Εκ των σημαντικότερων αποτελεσμάτων είναι ότι, οι τάσεις επαφής στη ρωγμή $2a$ προκύπτουν πάντα μεγαλύτερες, ωστόσο συγκρίσιμες των αντίστοιχων που αναπτύσσονται στην υλική γραμμή $2a$ στην αρηγμάτωτη πλάκα, με το λόγο Poisson να επηρεάζει αρκετά την τιμή τους. Ο φυσικά αποδεκτός ΣΕΤ K_{II} , που αντιστοιχεί στο συνεπίπεδο διατμητικό τύπο φόρτισης, είναι ανεξάρτητος του υλικού και βρίσκεται ότι συνοδεύεται κατά κανόνα από έναν πάρα πολύ μικρό, ωστόσο πεπερασμένο, θετικό ΣΕΤ K_I , για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής χωρίς αλληλοεπικάλυψη. Ο K_I εξαρτάται, αλλά πολύ ασθενώς από το υλικό.

Επίσης δείχνεται ότι η διατάραξη των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων μειώνεται γρήγορα με την απομάκρυνση από τη ρωγμή, συγκλίνοντας στα αντίστοιχα της αρηγμάτωτης πλάκας.

Ενώ προκειμένου η εισαγωγή της ρωγμής να μην επηρεάζει τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων της αρηγμάτωτης πλάκας θα πρέπει είτε η ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση να είναι παράλληλη στη ρωγμή είτε η τριβή στη ρωγμή να είναι τέτοια που να μην επιτρέπει τη σχετική ολίσθηση των χειλέων της και η ομοιόμορφη θλιπτική τάση να ισούται με το αντίστοιχο όριο διαρροής του υλικού.

1.2 Γενικά περί Μηχανικής των Θραύσεων

Η μελέτη των πεδίων των τάσεων και των μετατοπίσεων στη ρηγματωμένη πλάκα και ο υπολογισμός των ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής εντάσσονται στο γενικότερο αντικείμενο της Μηχανικής των Θραύσεων. Ειδικότερα δε, λόγω της μεθόδου που υιοθετήθηκε για τη λύση που χρησιμοποιείται [1], η παρούσα εργασία εντάσσεται στα πλαίσια της Γραμμικής Ελαστικής Μηχανικής των Θραύσεων (ΓΕΜΘ). Σημειώνεται πάντως ότι η παρούσα εργασία περιορίζεται στον υπολογισμό των τάσεων, μετατοπίσεων και των ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, χωρίς να υπεισέρχεται περαιτέρω στην εφαρμογή κριτηρίων διάδοσης της προϋπάρχουσας ρωγμής και φόρτισης της πλάκας. Ωστόσο, παρακάτω γίνεται μια αρκετά διεξοδική αναφορά στη Μηχανική των Θραύσεων σε σχέση με τη περαιτέρω δυνατότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της παρούσας παραμετρικής ανάλυσης στη μελέτη της πλάκας λόγω της γεωμετρικής ασυνέχειας που εισάγει η παρουσία της κεντρικής ρωγμής.

Η Μηχανική των Θραύσεων είναι ο κλάδος της εφαρμοσμένης Μηχανικής του συνεχούς μέσου, ο οποίος θεωρεί όχι ιδανικά αλλά πραγματικά υλικά, που περιέχουν τόσο δομικές όσο και γεωμετρικές ατέλειες, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται συγκεντρώσεις τάσεων όταν αυτά καταπονούνται. Έτσι μπορεί να εξηγήσει την αστοχία κατασκευών και υλικών, όπου για μεν τα γνωστά δομικά υλικά (ως ιδανικά), η θεωρητική αντοχή τους παρουσιάζεται συνήθως τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη της αντίστοιχης πραγματικής, για δε τις κατασκευές η αστοχία οφείλεται σε μια κυρίαρχη ρωγμή όταν αυτή φθάσει σε ένα κρίσιμο μήκος (κυρίως λόγω κόπωσης). Τέτοιες αστοχίες δεν μπορούν να προβλεφθούν με την κλασική Αντοχή των Υλικών και τα γενικά κριτήρια αστοχίας, αλλά μπορούν να αντιμετωπιστούν μόνο στα πλαίσια της Μηχανικής των Θραύσεων με την εφαρμογή κριτηρίων αστοχίας που λαμβάνουν υπόψη γεωμετρικές και δομικές ατέλειες, όπως η παρουσία ρωγμής στο παρόν πρόβλημα.

Η ανάπτυξη της Μηχανικής των Θραύσεων ξεκίνησε από τον Irwin [2] το δεύτερο ήμισυ του 20^{ου} αιώνα, στην προσπάθεια ερμηνείας φαινομένων αστοχίας κατασκευών, πλοίων, αεροπλάνων κλπ., που είχαν μορφή ψαθυρής θραύσης, και εξακολουθεί να αναπτύσσεται μέχρι και σήμερα.

Πρώτος ο Griffith [3] στη δεκαετία του 1920, έχοντας αντιληφθεί ότι υπεύθυνες για την αστοχία ενός υλικού ήταν οι διάσπαρτες συχνά μη ορατές μικρορωγμές στη μάζα του και διότι τότε ήταν ανέφικτη η ανάλυση σε επίπεδο ατόμου ή μορίου, θεώρησε μια ρωγμή σε ένα σώμα μεγαλύτερη από τις μη ορατές ατέλειές του. Έτσι δημιούργησε κατά προσέγγιση ένα ομοιογενές υλικό με μία και μόνη ασυνέχεια, το οποίο μπορούσε πλέον να μελετηθεί ευκολότερα υπό την υπόθεση του συνεχούς μέσου όπως στην Αντοχή των Υλικών. Προς τούτο χρησιμοποίησε τη λύση του Inglis [4] για την άπειρη γραμμικά ελαστική πλάκα με ελλειπτική οπή (a , b) υπό τυχαία φόρτιση στο άπειρο, αφήνοντας το μικρό ημιάξονα b της έλλειψης να τείνει στο μηδέν και την ελλειπτική οπή να τείνει στην μαθηματική ρωγμή μήκους $2a$, η οποία και προς τιμήν του ονομάζεται ρωγμή Griffith. Παραπέρα, θεώρησε ότι η

ρωγμή θα επεκτεινόταν με συνέπεια την αστοχία, όταν η ενέργεια που προσφερόταν στο υλικό από την εξωτερική φόρτιση, αυξανόταν τόσο που να επαρκούσε για τη δημιουργία νέων επιφανειών και δη των επεκτεινόμενων παρειών των χειλέων της ρωγμής λόγω επέκτασής της. Ο Griffith θεώρησε ως θραύση τη δημιουργία των νέων αυτών επιφανειών. Αυτή η θεώρηση, γνωστή ως ενεργειακό κριτήριο θραύσης του Griffith, ήταν η βάση ανάπτυξης της ΓΕΜΘ. Το πρόβλημα όμως λόγω της θεώρησης της ρωγμής Griffith ήταν ο απειρισμός των τάσεων στα άκρα της ρωγμής που προέβλεπε η μαθηματική λύση και η διαφαινόμενη μη γραμμικότητα των πεδίων στα σημεία αυτά, με συνέπεια τη δυσκολία διατύπωσης ενός αξιόπιστου κριτηρίου θραύσης στην περίπτωση μιας προϋπάρχουσας ρωγμής.

Το πρόβλημα αυτό προσπάθησε να αντιμετωπίσει ο Irwin το 1957 [5] εισάγοντας την έννοια του ΣΕΤ, που συμβόλισε με το γράμμα K (K_I , K_{II} , K_{III}), για μία ρωγμή, χρησιμοποιώντας τις λύσεις του Westergaard [6]. Ο K , που ο Irwin ονόμασε και “crack driving force”, έδινε το μέτρο της έντασης της τάσης πλησιάζοντας στο άκρο της ρωγμής και εξ ορισμού παράκαμπε την ιδιομορφία της θεωρητικής λύσης. Παρείχε δε ένα νέο κριτήριο θραύσης στα πλαίσια της ΓΕΜΘ. Συγκεκριμένα ο Irwin, γνωρίζοντας ότι το ιδιόμορφο εντατικό πεδίο στο άκρο της ρωγμής και η θραύση είναι αποτελέσματα της σχετικής μετατόπισης των χειλέων της, εισήγαγε τα τρία είδη ρωγμών, αναλόγως των τριών πιθανών φυσικών ανεξαρτήτων μετατοπίσεων των χειλέων της ρωγμής, δύο εντός και μίας εκτός επιπέδου της και τους αντίστοιχους τρόπους θραύσης. Τις ρωγμές τύπου I (εφελκυστικός τύπος), όπου έχουμε άνοιγμα των χειλέων της ρωγμής εντός του επιπέδου της, τις ρωγμές τύπου II (συνεπίπεδος διατμητικός τύπος), όπου έχουμε σχετική μετακίνηση των χειλέων της ρωγμής κατά τη διεύθυνση αυτής και εντός του επιπέδου της και τις ρωγμές τύπου III (αντεπίπεδος διατμητικός τύπος), όπου έχουμε σχετική μετακίνηση των χειλέων της ρωγμής κάθετα στο επίπεδό της. Αντίστοιχα όρισε τους ΣΕΤ: K_I , K_{II} και K_{III} . Σύμφωνα με το κριτήριο του Irwin μια προϋπάρχουσα ρωγμή επεκτείνεται όταν κάποιος εκ των K ξεπεράσει την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή του K_C . Πειραματικά βρίσκεται ότι η μεταβολή της τιμής K_C μεταβάλλεται για το ίδιο υλικό από την επίπεδη ένταση στην επίπεδη παραμόρφωση, εξαρτώμενη από το πάχος του δοκιμίου κάτι που μειώνει την ισχύ του κριτηρίου. Ωστόσο, λόγω της σχετικά σταθερής συμπεριφοράς του K_C για την κατάσταση της επίπεδης παραμόρφωσης, παραμένει ως σήμερα ένα από τα σημαντικότερα κριτήρια θραύσης, κυρίως για ψαθυρά υλικά. Στην παρούσα εργασία πέραν της ποσοτικοποίησης των ΣΕΤ, μελετάται και η εξάρτησή τους από το υλικό της πλάκας (μέτρο ελαστικότητας E και λόγο Poisson ν), όπως προκύπτει από τη λύση [1].

Η έννοια του K διευκόλυνε και συστηματοποίησε τη θεωρητική και πειραματική έρευνα στη ΓΕΜΘ [7], [8], και συντέλεσε στην ανάπτυξη σημαντικών πειραματικών μεθόδων όπως οι Κανστικές [9], [10], αλλά και διαδικασιών και προτύπων (ASTM Standard E-399), για τον υπολογισμό της κρίσιμης τιμής του K_C .

Ως επέκταση του κριτηρίου Griffith, ακολούθησε το ενεργειακό κριτήριο Ρυθμού Εκροής Ελαστικής Ενέργειας (Energy Release Rate), με G το ρυθμό εκροής ελαστικής ενέργειας. Κατά το κριτήριο αυτό η ρωγμή αρχίζει να επεκτείνεται όταν ο ρυθμός εκροής ελαστικής ενέργειας G από τη ρηγματωμένη πλάκα λάβει μια κρίσιμη τιμή G_C , ικανή να καλύψει τις

αναγκαίες δαπάνες για την δημιουργία νέων επιφανειών (των παρειών των χειλέων της ρωγμής) από την επέκταση της ρωγμής.

Τα K_C και G_C δεν είναι σταθερές του υλικού. Αν ήταν, το αποκλειστικό ενεργειακό κόστος επέκτασης μιας ρωγμής θα αναλωνόταν στη δημιουργία νέων επιφανειών, κάτι που δεν συμβαίνει (παρά μόνο στα πολύ ψαθυρά υλικά) λόγω της ανελαστικής συμπεριφοράς των περισσότερων υλικών προ της θραύσης και άρα της συνεπαγόμενης εξάρτησης των K_C και G_C από το πλαστικό έργο. Επίσης τα αλληλοσυγκρουόμενα αποτελέσματα για τα K_C και G_C , ακόμα και στα τελείως ψαθυρά υλικά (π.χ. [11]), έδειχναν κάποια αδυναμία των κριτηρίων K και G .

Μοιάζοντας τα προβλήματα αυτά να οφείλονται στην ίδια αρχική υπόθεση περί γραμμικών πλήρως αντιστρεπτών φαινομένων, που το πείραμα δεν επιβεβαίωνε ποτέ, οι Irwin [5, 12] και Orowan [13], ανεξάρτητα, επέκτειναν το κριτήριο G συμπεριλαμβάνοντας και το πλαστικό έργο στο κόστος εκκίνησης της ρωγμής. Ωστόσο και πάλι η πειραματική μελέτη έδειξε ότι το πραγματικό ποσοστό ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης που μετατρέπεται σε πλαστικό έργο, είναι κατά πολύ μεγαλύτερο του ποσοστού που αναλωνόταν στη δημιουργία νέων επιφανειών, δηλαδή για την επέκταση της ρωγμής. Κατά πάσα πιθανότητα το πρόβλημα έγκειται στην υπόθεση επιπέδων τασικών πεδίων στο άκρο μιας ρωγμής αντί της πραγματικής τριδιάστατης εντατικής κατάστασης.

Κατόπιν των παραπάνω ακολούθησαν νέες προσπάθειες από τους Irwin, Kies και Smith [14], Dugdale [15] και Barenblatt [16], με εφαρμογή των κριτηρίων διαρροής για τον υπολογισμό της πλαστικής ζώνης γύρω από το άκρο της ρωγμής για τον καθορισμό της περιοχής ισχύος της ΓΕΜΘ. Τα αποτελέσματα έδειχναν ότι το φαινόμενο της θραύσης δεν είναι γραμμικά ελαστικό, κάτι που οδήγησε, στο δεύτερο ήμισυ του εικοστού αιώνα, στην ανάπτυξη του δεύτερου τμήματος της Μηχανικής των Θραύσεων, την Ελαστοπλαστική Μηχανική των Θραύσεων (ΕΠΜΘ).

Η ΕΠΜΘ βασίστηκε κυρίως στην πειραματική μελέτη, που οδήγησε το 1960 τον Wells [17] στην εισαγωγή της έννοιας του Ανοίγματος των Χειλέων της Ρωγμής (Crack Opening Displacement) και το σχετικό κριτήριο COD. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό η ρωγμή επεκτείνεται όταν το άνοιγμά της λάβει μια κρίσιμη χαρακτηριστική για το υλικό τιμή. Το κριτήριο COD είναι πολύ σημαντικό σε εφαρμογές της μηχανικής που αναφέρονται σε κατασκευές από όλκιμα υλικά (μέταλλα κλπ.). Αργότερα το 1968, ο J. Rice [18] εισήγαγε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα J , που είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης, που περιλαμβάνει το άκρο της ρωγμής. Το J ισούται με το ρυθμό εκροής ελαστικής ενέργειας σε ελαστικό μη γραμμικό υλικό, σε αντιστοιχία με το G που αναφέρεται αποκλειστικά σε γραμμικά ελαστικό υλικό. Αναλόγως διατυπώθηκε το κριτήριο J που χρησιμοποιείται ευρέως και σήμερα.

Στις μέρες μας η Μηχανική των Θραύσεων συνεχίζει να είναι μια περιοχή με μεγάλη δυναμική. Νέες θεωρήσεις εμφανίζονται στην ανάγκη να φθάσουμε στην καλύτερη δυνατή μοντελοποίηση των φυσικών προβλημάτων και νέες επιστημονικές περιοχές (ιατρική, κλπ.) ζητούν τη συνεισφορά της Μηχανικής των Θραύσεων.

1.3 Ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα της αλληλοεπικάλυψης (overlapping) των χειλέων της ρωγμής

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η παρούσα παραμετρική μελέτη των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων στην πλάκα με την κεντρική, φυσική ρωγμή βασίζεται στα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης [1] στην οποία αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα της μη φυσικά αποδεκτής αλληλοεπικάλυψης (overlapping) των χειλέων της ρωγμής, που προκύπτει στην κλασική λύση της γραμμικής ελαστικότητας για ρωγμή ελευθέρων τάσεων [19] και έγινε μια προσπάθεια υπολογισμού των τάσεων επαφής που αναπτύσσονται στα χείλη της ρωγμής, αντί της αλληλοεπικάλυψης. Ειδικά για τη μονοαξονική θλίψη της πλάκας στο άπειρο, που θεωρείται εδώ, η κλασική λύση δίνει πάντα, πλην της περίπτωσης που η φόρτιση είναι παράλληλη στη ρωγμή, αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής και κατ' επέκταση η 'διορθωμένη' λύση [1] δίνει πάντα ρωγμή κλειστή, δηλαδή με χείλη σε πλήρη επαφή, υπό τάσεις επαφής (θλιπτικές και εν γένει και τριβής).

Προς τούτο κρίνεται σκόπιμη μία σύντομη αναδρομή στο πρόβλημα της αλληλοεπικάλυψης και των προσπαθειών για την αντιμετώπισή του από την επιστημονική κοινότητα.

Το πρόβλημα της μη φυσικά αποδεκτής αλληλοεπικάλυψης των χειλέων της ρωγμής απασχόλησε τους επιστήμονες, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πειραματικό επίπεδο, ήδη από τις αρχές της δεκαετίας 1970. Ο Barenblatt [16], κατά τη συστηματική μελέτη προβλημάτων ρωγμών, ήταν από τους πρώτους ερευνητές που διαπίστωσαν το φαινόμενο της αλληλοεπικάλυψης των χειλέων της ρωγμής και των προβλημάτων που δημιουργούσε στη μαθηματική λύση και έδειξε πως με την επιβολή σημειακών φορτίων στη ρωγμή ήταν δυνατόν να εξαλειφθούν οι αρνητικοί K_I (αρνητικός K_I συνεπάγεται αλληλοεπικάλυψη).

Αργότερα ο Burniston [20] έδειξε επίσης ότι αντίθετα σημειακά φορτία στα χείλη της ρωγμής μπορούσαν να μειώσουν το άνοιγμα της ρωγμής υπό την προϋπόθεση ότι δεν θα έχουμε αλληλοεπικάλυψη και έκανε λόγο για τμηματική επαφή των χειλέων μιας ρωγμής. Ο Tweed [21] με τη βοήθεια της μεθόδου των μετασχηματισμών Fourier έφτασε σε αναλυτικές εκφράσεις για την παραμορφωμένη μορφή της ρωγμής στην περίπτωση της τμηματικής επαφής των χειλέων της, αλλά και για τους αντίστοιχους ΣΕΤ. Οι Thresher και Smith [22] υπολόγισαν τις τάσεις και τις μετατοπίσεις σε μία ρωγμή με τμηματική επαφή των χειλέων της, ξεκινώντας από μία αυθαίρετη πολυωνυμική κατανομή φόρτισης στα χείλη της ρωγμής. Ο Aksogan [23] επίσης μελέτησε διάφορες γεωμετρικές τμηματικά κλειστών ρωγμών και υπολόγισε τις αντίστοιχες τιμές του K_I . Οι Paris και Tada [24] μελέτησαν τον K_I σε μία άπειρη λωρίδα με ακραία ρωγμή, υπό επαναληπτική αντιστρεφόμενη κάμψη (κόπωση). Οι Bowie και Freese [25] έδειξαν ότι η κλασική θεωρητική λύση με την αλληλοεπικάλυψη υποεκτιμά την τιμή του K_I σε σχέση με το φυσικά αποδεκτό πρόβλημα μιας ρηγματωμένης πλάκας ή λωρίδας υπό κάμψη στο άπειρο. Οι Κομνηνού και Dundurs [26], με τη βοήθεια της μεθόδου των εξαρμώσεων, έδειξαν ότι οι ρωγμές κατά μήκος της διεπιφάνειας δύο ελαστικών σωμάτων εμφανίζουν τμηματική επαφή, παρουσία διάτμησης, και μελέτησαν την επίδραση της εξωτερικής φόρτισης και του πεπερασμένου του ελαστικού μέσου στην τμηματική επαφή των χειλέων της ρωγμής. Οι Banks-Sills, Arcan, Gabay [27] εισήγαγαν μια νέα πειραματική διαδικασία, με τη χρήση ειδικής γεωμετρίας και διάταξης αρπαγών,

προκειμένου να αποφύγουν έναν αρνητικό K_I , ουσιαστικά δηλαδή την επαφή των χειλέων πλάκας με ακραία ρωγμή, στην προσπάθειά τους να δημιουργήσουν πειραματικά συνθήκες καθαρού K_{II} . Οι Woo, Cheung, Chen, Wang [28] προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν θεωρητικά την αλληλοεπικάλυψη σε άπειρη λωρίδα με κεντρική ρωγμή υπό κάμψη, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους επίλυσης. Οι Theocaris, Pazis, Konstantellos [29] και Pazis, Theocaris, Konstantellos [30] χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών Muskhelishvili [19] υπολόγισαν την ακριβή μορφή της παραμορφωμένης ρωγμής σε άπειρη ελαστική πλάκα υπό διαξονική φόρτιση στο άπειρο και έδωσαν τις συνθήκες επαφής των χειλέων της ρωγμής. Οι Becker και Gross [31, 32] έδειξαν την αλληλοεπικάλυψη για ρωγμές τύπου II και μικτού τύπου I και II, όπως προκύπτει από τη μαθηματική λύση για τη ρωγμή Dugdale. Οι Theocaris και Sakellariou [33] πρότειναν ένα μαθηματικό μοντέλο για τις ρωγμές τύπου II στο οποίο η ρωγμή, αντί της αλληλοεπικάλυψης, θα παρουσιάζει συνολική στροφή και σχετική μετατόπιση των χειλέων της. Επίσης οι Theocaris και Panagiotopoulos [34] προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν την αλληλοεπικάλυψη με μη κλασικό τρόπο, εισάγοντας μια ανισότητα για τις μετατοπίσεις στα χείλη της ρωγμής, που αποκαθιστούσε τη συνθήκη απαγόρευσης του φαινομένου της αλληλοεπικάλυψης στην πράξη και οδηγούσε στην επίλυση ενός μη γραμμικού προβλήματος. Αργότερα ο Pazis [35] πρότεινε μια θεωρητική αντιμετώπιση της αλληλοεπικάλυψης με την υπόθεση κατάλληλης στερεάς στροφής της άπειρης ρηγματωμένης πλάκας στο άπειρο (στο πνεύμα της πειραματικής προσπάθειας των Banks-Sills, Arcan, Gabay [27]). Οι Kalthoff και Podleschny [36] αντιμετωπίζοντας επίσης τις απρόβλεπτες συνέπειες της αλληλοεπικάλυψης κατά τον πειραματικό υπολογισμό του K_{IIc} , άλλαξαν τη γωνία φόρτισης του συστήματος αρπαγών των Banks-Sills, Arcan, Gabay [27] και κατάφεραν να αποφύγουν την αλληλοεπικάλυψη και να υπολογίσουν τον K_{IIc} σε ρωγμές μικτού τελικά τύπου I και II, με ένα πολύ μικρό θετικό ποσοστό του K_I σε σχέση με το K_{II} . Πιο πρόσφατα ο Markides [1] χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών Muskhelishvili [19] πρότεινε μια διαδικασία για την αντιμετώπιση της αλληλοεπικάλυψης στο πρόβλημα των Theocaris, Pazis, Konstantellos [29], στα αποτελέσματα της οποίας βασίζεται και η παρούσα διπλωματική εργασία. Στα πλαίσια της διατριβής [1], παρουσιάστηκε επίσης ένας τρόπος αντιμετώπισης της αλληλοεπικάλυψης στο Βραζιλιανό δίσκο με μικρή κεντρική ρωγμή. Για την περίπτωση του Βραζιλιανού δίσκου ακολούθησαν και σχετικές δημοσιεύσεις Markides, Pazis, Kourkoulis [37], και Kourkoulis και Markides [38] όπου δόθηκαν επίσης οι φυσικά αποδεκτές εκφράσεις των ΣΕΤ σε πολύ καλή συμφωνία με αυτούς που υπολογίστηκαν από τους Atkinson, Smelser, Sanchez [39], κάτι που ενισχύει και την ορθότητα της λύσης [1], όπου βασίζεται η παρούσα εργασία. Το ενδιαφέρον για το πρόβλημα της επαφής των χειλέων της ρωγμής και των αντίστοιχων ΣΕΤ παραμένει συνεχώς αμείωτο μέχρι και σήμερα όπως για παράδειγμα φαίνεται από τις εργασίες των Albrecht και Lenwari [40] και Lenwari και Ma [41], με την παρούσα εργασία να αποτελεί μια ακόμα προσπάθεια σε αυτήν την κατεύθυνση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Η θεωρητική αλληλοεπικάλυψη και η αντιμετώπισή της

Η αναλυτική λύση [1], στην οποία βασίζεται η παρούσα εργασία επέκτεινε τα αποτελέσματα των εργασιών της επιστημονικής ομάδας των Theocaris και Pazis [29,30,33], στην περιοχή της αντιμετώπισης της μη φυσικά αποδεκτής αλληλοεπικάλυψης των χειλέων μιας ρωγμής σε άπειρο μέσο. Προς τούτο ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας που υιοθετήθηκε στις παραπάνω εργασίες καθώς και τα βασικά σημεία αυτών των εργασιών, για την απόκτηση μιας ολοκληρωμένης εικόνας του προβλήματος της αλληλοεπικάλυψης και της αντιμετώπισής του.

2.2 Η μέθοδος των μιγαδικών δυναμικών Kolosov-Muskhelishvili [19]

Στις εργασίες των Theocaris, Pazis, Konstantellos [29,30,35] και τη διατριβή Markides [1], έγινε χρήση της μεθόδου των μιγαδικών δυναμικών Kolosov και Muskhelishvili [19], η οποία γενικά είναι μια πολύ ισχυρή μέθοδος στην επίλυση επίπεδων προβλημάτων γραμμικής ελαστικότητας για ισότροπα υλικά. Η μέθοδος συνίσταται στον υπολογισμό των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων σε επίπεδα προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας για ομογενή και ισότροπα υλικά με τη βοήθεια αναλυτικών συναρτήσεων της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy=re^{i\theta}$ (με i τη φανταστική μονάδα $i^2=-1$). Προς τούτο, το πρόβλημα υπολογισμού της διαρμονικής πραγματικής τασικής συνάρτησης Airy, $U(x,y)$, ανάγεται στον υπολογισμό των τασικών αναλυτικών συναρτήσεων $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$. Η μέθοδος των μιγαδικών δυναμικών θεωρείται πιο ισχυρή έναντι της μεθόδου Airy, λόγω εύκολης ικανοποίησης των συνοριακών συνθηκών μέσω απλών αλγεβρικών εκφράσεων, δυνατότητα εισαγωγής σύμμορφων απεικονίσεων που μετατρέπουν περίπλοκα γεωμετρικά χωρία σε απλά ή όπως εδώ, την αναγωγή του προβλήματος σε ένα πρόβλημα μιας γραμμικής σχέσης των τιμών της ζητούμενης τασικής συνάρτησης κατά τα μήκος της ρωγμής και της μεγάλης ανάπτυξης αριθμητικών μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων που προκύπτουν.

Αναγωγή, από τη μέθοδο της τασικής συνάρτησης Airy $U(x,y)$, στα μιγαδικά δυναμικά $\Phi(z)$, $\Psi(z)$

Κατά τη μέθοδο Airy το πρόβλημα της ελαστικής ισορροπίας γραμμικά ελαστικού, ομογενούς και ισότροπου, επίπεδου μέσου, ανάγεται στην εύρεση της τασικής συνάρτησης $U(x,y)$, που πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω διαρμονική εξίσωση Εξ. (1) και να ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες στα σύνορα του σώματος:

$$\Delta U = 0 \quad (1)$$

Ορίζοντας τη συνάρτηση $P = P(x, y)$, έτσι ώστε:

$$P = \Delta U \quad (2)$$

φαίνεται αμέσως ότι:

$$\Delta P = 0 \quad (3)$$

δηλαδή η συνάρτηση $P(x, y)$ είναι αρμονική. Αν $Q = Q(x, y)$ είναι η αρμονική συζυγή της P τότε θα ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4)$$

Σε απλά συνεκτικό χωρίο, υπάρχει τότε μια αναλυτική συνάρτηση $F(z)$, άπειρες φορές διαφορίσιμη και μονότιμη στο χωρίο (ολόμορφη), τέτοια ώστε:

$$F(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (5)$$

Περαιτέρω, ορίζεται στο απλά συνεκτικό χωρίο η επίσης αναλυτική συνάρτηση:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4} \int F(z) dz = \frac{1}{4} \int (P + iQ) dz \quad (6)$$

η οποία σε αναλογία με την $F(z)$ θα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\varphi(z) = p(x, y) + iq(x, y) \quad (7)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ. (7) ως προς x , προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(z) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4} \int (P + iQ) dz = \frac{\partial}{\partial x} (p + iq) \Rightarrow \\ \frac{d}{dx} \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{4} \int \frac{d}{dz} (P + iQ) dz \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} \Rightarrow \\ \varphi'(z) &= \frac{1}{4} (P + iQ) = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} - i \frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \\ P &= 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 4 \frac{\partial p}{\partial y}, \quad Q = 4 \frac{\partial q}{\partial x} = -4 \frac{\partial p}{\partial y} \quad (8) \end{aligned}$$

Ορίζοντας τη συνάρτηση:

$$p_1(x, y) = U - px - qy \quad (9)$$

φαίνεται, με τη βοήθεια των Εξν. (2), (3), (4), (8) και (9) ότι αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\Delta p_1(x, y) = 0 \quad (10)$$

δηλαδή η $p_1(x, y)$ είναι αρμονική. Άρα θα υπάρχει στο απλά συνεκτικό χωρίο η αρμονική συζυγής της $q_1(x, y)$ και κατ' επέκταση και μία ολόμορφη συνάρτηση $\chi(z)$, τέτοια ώστε:

$$\chi(z) = p_1 + iq_1 \quad (11)$$

Από τις Εξς. (11), (7) και (9), προκύπτει ότι:

$$U = \frac{\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}}{2} \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}}{2i} \frac{z - \bar{z}}{2i} + \frac{\chi(z) + \overline{\chi(z)}}{2}$$

$$= \frac{\varphi(z)\bar{z} + \overline{\varphi(z)}z}{2} + \frac{\chi(z) + \overline{\chi(z)}}{2} = \operatorname{Re}\{\varphi(z)\bar{z} + \chi(z)\} \quad (12)$$

ή αλλιώς

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad (13)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, η μπάρα πάνω από τη συνάρτηση ή τη μεταβλητή σημαίνει τη αντίστοιχη συζυγή τιμή. Το Re σημαίνει το πραγματικό μέρος της συνάρτησης.

Παραγωγίζοντας την Εξ. (13) ως προς x και y , προκύπτουν οι εκφράσεις (ο τόνος σημαίνει την παράγωγο ως προς z):

$$2 \frac{\partial U}{\partial x} = \varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) + \overline{\chi'(z)} \quad (14)$$

$$2 \frac{\partial U}{\partial y} = i[-\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} - z\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) - \overline{\chi'(z)}] \quad (15)$$

Εισάγοντας δε την $\psi(z)$, ως:

$$\psi(z) = \chi'(z) \quad (16)$$

και γράφοντας τις Εξς. (14) και (15) σε ενιαία μιγαδική μορφή, προκύπτει:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f(z) \quad (17)$$

όπου οι αναλυτικές συναρτήσεις $\varphi(z)$ και $\psi(z)$ είναι τα γνωστά μιγαδικά δυναμικά Kolosov - Muskhelishvili.

Οι συνιστώσες της μετατόπισης συναρτήσεως των ως άνω συναρτήσεων $\varphi(z)$ και $\psi(z)$

Ο γενικευμένος νόμος του Hooke στο επίπεδο πρόβλημα ελαστικής ισορροπίας, γραμμικά ελαστικού και ισότροπου υλικού είναι:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (18\alpha)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (18\beta)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (18\gamma)$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (18\delta)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις το μ είναι η δεύτερη σταθερά Lamé και ισούται με το μέτρο διάτμησης G του υλικού, $\mu=E/2(1+\nu)$, με E το μέτρο ελαστικότητας και ν το λόγο Poisson του υλικού.

Εκ των Εξ. (18α), (18β), (18δ), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta U, & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta U \xrightarrow{P:=\Delta U, \text{ Εξ.}(2)} \\ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P, & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P \xrightarrow{\text{Εξ.}(8\alpha)} \\ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} 4 \frac{\partial p}{\partial x}, & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} 4 \frac{\partial q}{\partial y} \quad (19) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τις Εξ. (19) προκύπτουν:

$$u = \frac{1}{2\mu} \left[-\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p + f_1(y) \right], \quad v = \frac{1}{2\mu} \left[-\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q + f_2(x) \right] \quad (20)$$

Αντικαθιστώντας από τις Εξ. (20) στην Εξ. (18γ) προκύπτει:

$$f_1'(y) + f_2'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_2(x) = 2\mu(\epsilon x + \beta) \\ f_1(y) = -2\mu(\epsilon y + \alpha) \end{cases} \quad (21)$$

δηλαδή οι $f_1(y), f_2(x)$ συνδέονται μόνο με μετατοπίσεις στερεού σώματος. Οπότε παραλείποντας τις $f_1(y), f_2(x)$ από τις Εξ. (20) και γράφοντάς τες σε ενιαία μιγαδική μορφή προκύπτει:

$$2\mu(u + iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} (p + iq) \quad (22)$$

Αντικαθιστώντας από τις Εξ. (7) και (17) στην Εξ. (22), προκύπτει τελικά ότι:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (23)$$

Το κ είναι η σταθερά Muskhelishvili η οποία ισούται με $3-4\nu$ και $(3-\nu)/(\nu+1)$ για επίπεδη παραμόρφωση και επίπεδη ένταση, αντίστοιχα.

Οι συνιστώσες της τάσης συναρτήσεως των ως άνω συναρτήσεων $\varphi(z)$ και $\psi(z)$

Ξεκινώντας από τις συνοριακές συνθήκες των τάσεων:

$$X_n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, y)$$

$$Y_n = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos(n, y)$$

και λαμβάνοντας υπόψη τις γεωμετρικές σχέσεις:

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds}$$

προκύπτουν:

$$X_n = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \left(-\frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{ds} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dx \right] = \frac{1}{ds} d \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$Y_n = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \left(-\frac{dx}{ds} \right) = -\frac{1}{ds} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dx \right] = -\frac{1}{ds} d \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

οι οποίες σε ενιαία μιγαδική μορφή γράφονται:

$$X_n + iY_n = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = -i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Rightarrow$$

$$(X_n + iY_n) ds = -id \left[\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] \quad (24)$$

Όταν είναι: $ds \equiv dy$, $dx = 0$, $dz = idy$, $X_n = \sigma_x$, $Y_n = \tau_{xy}$, τότε από την Εξ.(24) προκύπτει:

$$\sigma_x + i\tau_{xy} = -i \frac{d}{dy} \varphi \left[(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - \overline{z\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \quad (25\alpha)$$

Όταν είναι: $ds \equiv dx$, $dy = 0$, $dz = d\bar{z} = dx$, $X_n = -\tau_{xy}$, $Y_n = -\sigma_y$, τότε από την Εξ.(24) προκύπτει:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \overline{z\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \quad (25\beta)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις Εξς. (25α) και (25β) προκύπτουν τελικά οι εκφράσεις:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4Re\Phi(z), \quad \Phi(z) = \varphi'(z) \quad (26)$$

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = 2Re\Phi(z) + \overline{z\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \Psi(z) = \psi'(z) \quad (27)$$

2.3 Η κλασική λύση του Πρώτου Θεμελιώδους Προβλήματος ('αρχικό πρόβλημα') της Γραμμικής Επίπεδης Ελαστικότητας για την άπειρη ρηγματωμένη πλάκα και το πρόβλημα της αλληλοεπικάλυψης (overlapping)

Στις εργασίες των Theocaris, Pazis, Konstantellos [29,30,35] χρησιμοποιήθηκε η γενική λύση Muskhelishvili [19], που αφορά στον υπολογισμό των συναρτήσεων $\Phi_1(z)$ και $\Psi_1(z)$ ως λύσης του Πρώτου Θεμελιώδους Προβλήματος της Επίπεδης Ελαστικότητας για την άπειρη γραμμικά ελαστική και ισότροπη πλάκα με ευθύγραμμη ρωγή υπό τυχαία φόρτιση στο

άπειρο. Ο δείκτης 1 θα συμβολίζει αυτό το πρόβλημα που θα καλείται ‘**αρχικό πρόβλημα**’. Στη [19] και τις [29,30,35] η λύση του προβλήματος δόθηκε κατόπιν αναγωγής του σε ένα πρόβλημα γραμμικής σχέσης των συνοριακών τιμών των τμηματικά ολόμορφων συναρτήσεων-λύσης κατά μήκος της ρωγμής. Επισημαίνεται ότι, σε αυτήν την περίπτωση η ρωγμή θεωρήθηκε αρχικά ελευθέρα τάσεων.

Με τη βοήθεια της γενικής λύσης [19], οι Theocaris, Pazis, Konstantellos [29,30,35] προχώρησαν στην ενδελεχή μελέτη του πεδίου των μετατοπίσεων της ρωγμής σε άπειρη πλάκα υπό διαξονική φόρτιση στο άπειρο και ασχολήθηκαν με την ακριβή μορφή της παραμορφωμένης ρωγμής, που είναι πάντα έλλειψη, είτε η ρωγμή ανοίγει είτε τα χείλη της αλληλεπικαλύπτονται. Στην περίπτωση αυτή, η γενική λύση Muskhelishvili [19], σε καρτεσιανό σύστημα στο μέσο της ρωγμής και με τον άξονα x κατά μήκος της ρωγμής γίνεται [29,30]:

$$\Phi_1(z) = \frac{\sigma_0[(1 - e^{2i\beta}) + k(1 + e^{2i\beta})]}{4\sqrt{z^2 - a^2}}z + \frac{\sigma_0(1 - k)e^{2i\beta}}{4} \quad (28)$$

$$\Omega_1(z) = \frac{\sigma_0[(1 - e^{2i\beta}) + k(1 + e^{2i\beta})]}{4\sqrt{z^2 - a^2}}z - \frac{\sigma_0(1 - k)e^{2i\beta}}{4} \quad (29)$$

$$\varphi_1(z) = \int \Phi_1(z)dz = \frac{\sigma_0[(1 - e^{2i\beta}) + k(1 + e^{2i\beta})]}{4}\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{\sigma_0(1 - k)e^{2i\beta}}{4}z \quad (30)$$

$$\omega_1(z) = \int \Omega_1(z)dz = \frac{\sigma_0[(1 - e^{2i\beta}) + k(1 + e^{2i\beta})]}{4}\sqrt{z^2 - a^2} - \frac{\sigma_0(1 - k)e^{2i\beta}}{4}z \quad (31)$$

με:

$$\Omega_1(z) = \overline{\Phi_1(z)} + z\overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Psi_1(z)} \quad (32)$$

όπου η μπάρα μόνο πάνω από τη συνάρτηση δηλώνει τη συζυγή τιμή της συνάρτησης στο συζυγές σημείο. Στις παραπάνω σχέσεις, a είναι το ήμισυ του μήκους της ρωγμής, σ_0 είναι η κύρια τάση στο άπειρο, k είναι ο συντελεστής διαξονικότητας της τάσης στο άπειρο και β είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας της κύριας τάσης σ_0 με τη διεύθυνση της ρωγμής (Σχήμα 1α).

Οι συνιστώσες της μετατόπισης δίνονται, συναρτήσει των $\varphi_1(z)$, $\Phi_1(z)$ και $\omega_1(z)$, από την έκφραση [19]:

$$2\mu(u_1 + iv_1) = \kappa\varphi_1(z) - \omega_1(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_1(z)} \quad (33)$$

Αντικαθιστώντας από τις Εξ. (23), (25) και (26) στην Εξ. (28) και με το σημείο z τείνοντος στο x : $-a \leq x \leq a$, πάνω και κάτω από τη ρωγμή, οι συνιστώσες της μετατόπισης για τα άνω (+) και το κάτω (-) χείλος της ρωγμής προκύπτουν ως [29,30]:

$$u_1^\pm(x) = c \left[(1 - k) \cos(2\beta) x \pm (1 - k) \sin(2\beta) \sqrt{a^2 - x^2} \right] \quad (34)$$

$$v_1^\pm(x) = c \left\{ (1 - k) \sin(2\beta) x \pm [1 + k - (1 - k) \cos(2\beta)] \sqrt{a^2 - x^2} \right\} \quad (35)$$

όπου:

$$c = \frac{(\kappa + 1)}{8\mu} \sigma_0 \quad (36)$$

Όπως φαίνεται από τις Εξς. (34) και (35), η κάθε συνιστώσα της μετατόπισης αποτελείται από δύο όρους: το γραμμικό, που συμβολίζεται παρακάτω με τον κάτω δείκτη *lin* (*linear*) και τον ελλειπτικό, που συμβολίζεται με τον κάτω δείκτη *ell* (*elliptic*).

Οι γραμμικοί όροι των συνιστωσών της μετατόπισης είναι:

$$u_{1,lin}^{\pm} = c(1 - k) \cos(2\beta) x \quad (37)$$

$$v_{1,lin}^{\pm} = c(1 - k) \sin(2\beta) x \quad (38)$$

Οι ελλειπτικοί όροι των συνιστωσών της μετατόπισης είναι:

$$u_{1,ell}^{\pm} = \pm c(1 - k) \sin(2\beta) \sqrt{a^2 - x^2} \quad (39)$$

$$v_{1,ell}^{\pm} = \pm c[(1 + k) - (1 - k)\cos(2\beta)] \sqrt{a^2 - x^2} \quad (40)$$

Λόγω των γραμμικών όρων των συνιστωσών της μετατόπισης τα δύο χείλη της ρωγμής μετατοπίζονται με μια κοινή μετατόπιση $v_{1,lin} = u_{1,lin}^{\pm} + iv_{1,lin}^{\pm}$ από την αρχική θέση τους (κόκκινη και μπλε οριζόντια διακεκομμένη γραμμή κατά μήκος του άξονα x) στην ενδιάμεση παραμορφωμένη θέση (μαύρη διακεκομμένη ευθεία γραμμή $-α'α'$ που ο Theocaris [20] ονόμασε ‘**ψευδορωγμή**’). Σε αυτή τη θέση η ρωγμή έχει διαγράψει μία στερεά στροφή κατά γωνία λ γύρω από το μέσο της, όπου (Σχήμα 1β) [29,30]:

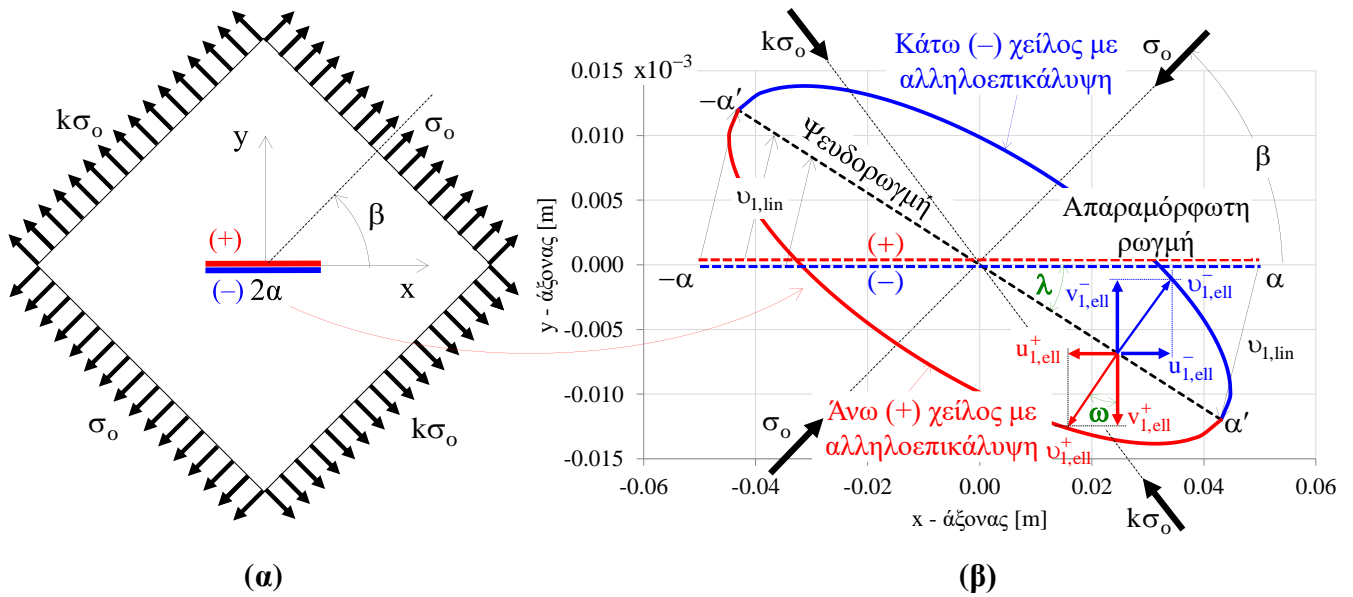
$$\tan\lambda = \left| \frac{c(1 - k)\sin(2\beta)}{1 + c(1 - k)\cos(2\beta)} \right| \quad (41)$$

και έχει υποστεί μία μεταβολή του μήκους της, αύξηση ή μείωση, αναλόγως του είδους και της διεύθυνσης της φόρτισης. Από τη θέση της ‘ψευδορωγμής’ η εφαρμογή των ελλειπτικών όρων των συνιστωσών της μετατόπισης $v_{1,ell}^{\pm} = u_{1,ell}^{\pm} + iv_{1,ell}^{\pm}$, οδηγεί στο άνοιγμα ή την αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής, αναλόγως πάλι της φόρτισης (δηλαδή του προσήμου της τάσης στο άπειρο σ_0 , της γωνίας β , και του συντελεστή διαξονικότητας k). Για τη σταθερή οξεία γωνία ω , που σχηματίζει το διάνυσμα του ελλειπτικού όρου της μετατόπισης με την κατακόρυφο, ισχύει [29,30]:

$$\tan\omega = \frac{(1 - k)\sin(2\beta)}{1 + k - (1 - k)\cos(2\beta)} \quad (42)$$

Στο Σχήμα 1β παρουσιάζεται η περίπτωση της μη φυσικά αποδεκτής αλληλοεπικάλυψης (που ενδιαφέρει την παρούσα εργασία που πραγματεύεται τις συνεπαγόμενες τάσεις επαφής), το πώς δηλαδή το ένα χείλος περνάει πάνω (ή κάτω) από το άλλο, σε θεωρητικό πάντα επίπεδο, ώστε να προκύψει η αλληλεπικαλυμμένη παραμορφωμένη ρωγμή-έλλειψη. Στο ίδιο

σχήμα, για λόγους ευκρίνειας το άνω (+) χείλος φαίνεται με κόκκινο χρώμα ενώ το κάτω (-) χείλος με μπλε χρώμα.



Σχήμα 1. (α) Άπειρη πλάκα με ρωγμή μήκους $2a$, υπό διαξονική φόρτιση στο άπειρο, (β) μηχανισμός αλληλοεπικάλυψης των χειλέων της ρωγμής.

Επισημαίνεται ότι το θεωρητικό αποτέλεσμα της αλληλοεπικάλυψης, που είναι αποτέλεσμα της υπόθεσης ρωγμής ελευθέρων τάσεων στην κλασική λύση, δεν μπορεί να συμβεί στην πράξη λόγω υπαρκτού πάχους του υλικού, που εμποδίζει την αλληλοεπικάλυψη και οδηγεί τελικά, αντί της αλληλοεπικάλυψης, στη σύνθλιψη των χειλέων της ρωγμής και την ανάπτυξη αντίστοιχων τάσεων επαφής, ορθών - θλιπτικών και εν γένει και εφραπτομενικών - τριβής, που η κλασική λύση αδυνατεί να υπολογίσει. Οι Theocaris, Pazis, Konstantellos [29,30,35], έδωσαν επίσης τη συνθήκη επαφής των χειλέων της ρωγμής ως:

$$1 + k - (1 - k) \cos(2\beta) - c(1 - k)^2 + c(1 - k)^2 \cos(2\beta) = 0 \quad (43)$$

Πράγματι, λύνοντας την Εξ. (43) ως προς k , προκύπτει:

$$k = \frac{2c + 1 + \cos 2\beta}{2c(1 - \cos 2\beta)} - \frac{\sqrt{8c + 1 + 2(c + 1)\cos 2\beta + [(1 - 2c)\cos(2\beta)]^2}}{2(c + 1)\cos 2\beta} \quad (44)$$

από όπου φαίνεται ότι για μια σταθερή τιμή του $c < 0$, η Εξ. (44) έχει πραγματική λύση για γωνίες β μικρότερες από κάποια συγκεκριμένη τιμή, πέραν της οποίας η υπόριζος ποσότητα στο δεύτερο μέλος της Εξ. (44) γίνεται αρνητική και σηματοδοτεί την πρώτη εμφάνιση αλληλοεπικάλυψης των χειλέων της ρωγμής. Επίσης οι ΣΕΤ σε αυτό το πρόβλημα υπολογίστηκαν ως [29,30,35]:

$$K_{I(1)} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{2} [(1 + k) - (1 - k) \cos(2\beta)] \quad (45)$$

$$K_{II(1)} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{2} (1 - k) \sin(2\beta) \quad (46)$$

Επισημαίνεται ότι, αναλόγως των τιμών των παραμέτρων του προβλήματος (σ_0 , β , k), η παραπάνω λύση μπορεί να οδηγεί σε αρνητικές τιμές για τον ΣΕΤ K_I , που συνδέονται με την αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής, οπότε σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορεί αυτές οι τιμές να είναι φυσικά αποδεκτές. Η αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων λόγω αλληλοεπικάλυψης, όπως έγινε στα πλαίσια της λύσης [1], παρουσιάζεται σύντομα στην επόμενη παράγραφο.

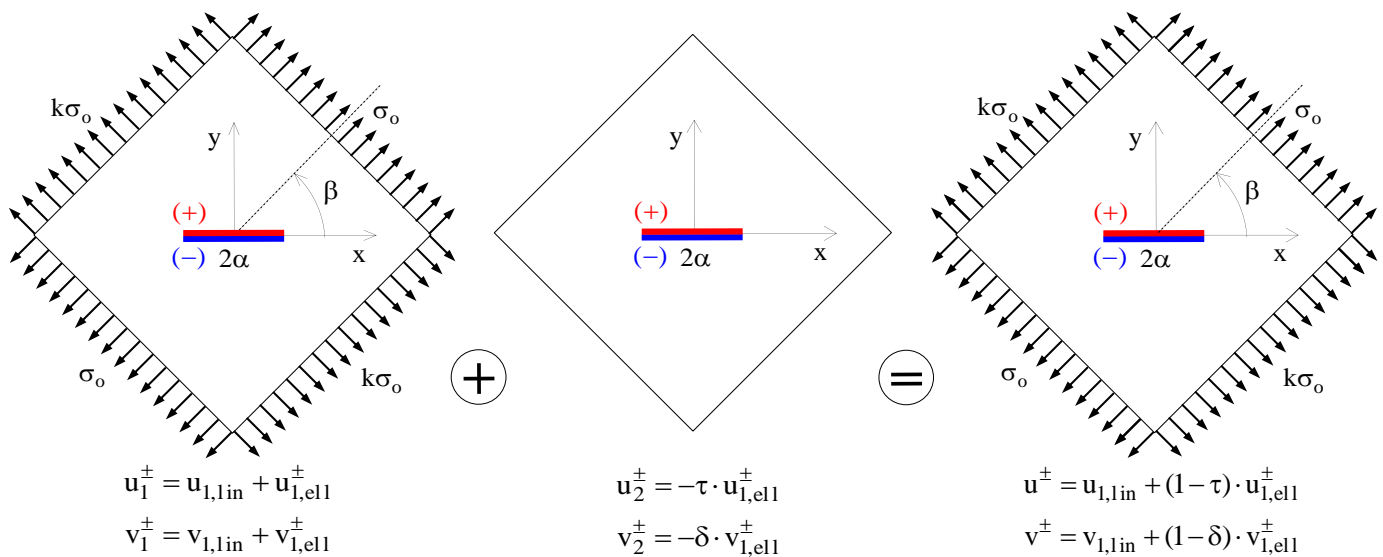
2.4 Η αντιμετώπιση της αλληλοεπικάλυψης των χειλέων της ρωγμής [1]

Στην [1] προτάθηκε μία θεωρητική διαδικασία αντιμετώπισης της αλληλοεπικάλυψης. Η εν λόγω διαδικασία βασίζεται στην καταρχάς αποδοχή της θεωρητικής αλληλοεπικάλυψης ως την πραγματική τάση που έχει το σώμα για παραμόρφωση στην περιοχή της ρωγμής (αν η ρηγματωμένη πλάκα δεν είχε πάχος θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι η αλληλοεπικάλυψη θα μπορούσε να συμβεί στην πράξη). Αν αυτό ευσταθεί, τότε οι πραγματικές τάσεις επαφής που αναπτύσσονται στα χείλη της ρωγμής λόγω του πάχους του υλικού που εμποδίζει την αλληλοεπικάλυψη, θα πρέπει να είναι ανάλογες του μεγέθους της αλληλοεπικάλυψης. Και αυτές οι τάσεις (επαφής) θα μπορούσαν να είναι εκείνες που απαιτούνται για την άρση της αλληλοεπικάλυψης - επαναφοράς της ρωγμής σε κατάσταση με χείλη σε επαφή. Μένει λοιπόν να υπολογιστούν οι τάσεις που απαιτούνται για να επαναφέρουν τα αλληλοεπικαλυμμένα χείλη της ρωγμής πίσω σε κατάσταση επαφής και αυτές οι τάσεις θα είναι οι τάσεις επαφής, που αν αρχικά επιβάλλονταν στα χείλη της ρωγμής θα εμπόδιζαν την εκδήλωση της αλληλοεπικάλυψης.

Σημειώνεται ότι, καθώς οι γραμμικοί όροι της μετατόπισης ευθύνονται για τη στερεά στροφή και μεταβολή του μήκους της ρωγμής, δηλαδή φαινόμενα που δεν προκαλούν κάποια μη φυσική παραμόρφωση, γίνονται πλήρως αποδεκτοί. Αντίθετα, οι ελλειπτικοί όροι της μετατόπισης, που ευθύνονται για τη μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής δεν μπορεί να γίνουν αποδεκτοί και είναι αυτοί οι οποίοι πρέπει οπωσδήποτε να τροποποιούνται κατάλληλα για την άρση της αλληλοεπικάλυψης (στη γενική περίπτωση μπορούν να τροποποιούνται και οι γραμμικοί όροι - ποσοστιαία μείωση στερεάς στροφής και μεταβολής του μήκους της ρωγμής).

Έτσι, για την άρση της αλληλοεπικάλυψης, γίνεται μερική ή ολική αντιστροφή των ελλειπτικών όρων $u_{1,ell}^{\pm}$, $v_{1,ell}^{\pm}$, της μετατόπισης κατά κάποια συγκεκριμένα ποσοστά τ και δ , αντίστοιχα. Αυτό επιτυγχάνεται με την υπέρθεση στη λύση του ‘αρχικού προβλήματος’ με τη μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικάλυψη [29,30], της λύσης ενός βοηθητικού, Μικτού Θεμελιώδους Προβλήματος, που καλείται ‘αντίστροφο πρόβλημα’ και θα υποδηλώνεται με το δείκτη 2. Στο ‘αντίστροφο πρόβλημα’ οι τάσεις και η στροφή στο άπειρο είναι μηδέν, ενώ στα χείλη της ρωγμής θεωρούνται οι αντίστροφες μετατοπίσεις $u_2^{\pm} = -\tau \cdot u_{1,ell}^{\pm}$, $v_2^{\pm} = -\delta \cdot v_{1,ell}^{\pm}$. Επισημαίνεται ότι στο ‘αντίστροφο πρόβλημα’ προκύπτουν, λόγω των ως άνω αντίστροφων μετατοπίσεων, τάσεις στα χείλη της ρωγμής οι οποίες αφού είναι αυτές που απαιτούνται για την άρση της αλληλοεπικάλυψης και στο ‘αρχικό πρόβλημα’ η ρωγμή είναι ελεύθερα

τάσεων, θα θεωρούνται οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής (που εμποδίζουν την τάση της πλάκας να εκδηλώσει την αλληλοεπικάλυψη). Το αποτέλεσμα της υπέρθεσης είναι ένα Μικτό Θεμελιώδες Πρόβλημα, το οποίο παρέχει σε κάθε περίπτωση (επικείμενης ή μη αλληλοεπικάλυψης) φυσικά αποδεκτά αποτελέσματα, για αυτό καλείται ‘γενικό πρόβλημα’. Εάν οι συνθήκες φόρτισης οδηγούν σε άνοιγμα των χειλέων της ρωγμής τότε αρκεί στο ‘γενικό πρόβλημα’ να τίθενται $\tau=\delta=0$, οπότε αυτό μεταπίπτει στο ‘αρχικό πρόβλημα’ που σε αυτήν την περίπτωση είναι φυσικά αποδεκτό. Εάν οι συνθήκες φόρτισης οδηγούν σε επικείμενη αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής τότε πρέπει στο ‘γενικό πρόβλημα’ να τίθενται κατάλληλες τιμές στα τ και δ που να οδηγούν στη φυσικά αποδεκτή συνθήκη επαφής των χειλέων της ρωγμής και τις αντίστοιχες τάσεις επαφής (επισημαίνεται πάλι ότι οι τάσεις είναι προϊόν αποκλειστικά του ‘αντιστρόφου προβλήματος’ το οποίο μετά την υπέρθεση είναι τμήμα του ‘γενικού προβλήματος’). Η παραπάνω διαδικασία αντιμετώπισης της αλληλοεπικάλυψης φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2. (α) Το ‘αρχικό πρόβλημα’ με την πιθανή αλληλοεπικάλυψη, (β) το ‘αντίστροφο πρόβλημα’ και (γ) το ‘γενικό πρόβλημα’.

Όσον αφορά στους συντελεστές τ και δ , που είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί, αυτοί πρέπει να ικανοποιούν τις γεωμετρικές συνθήκες [1]:

$$0 \leq \tau \leq 1 \quad (47)$$

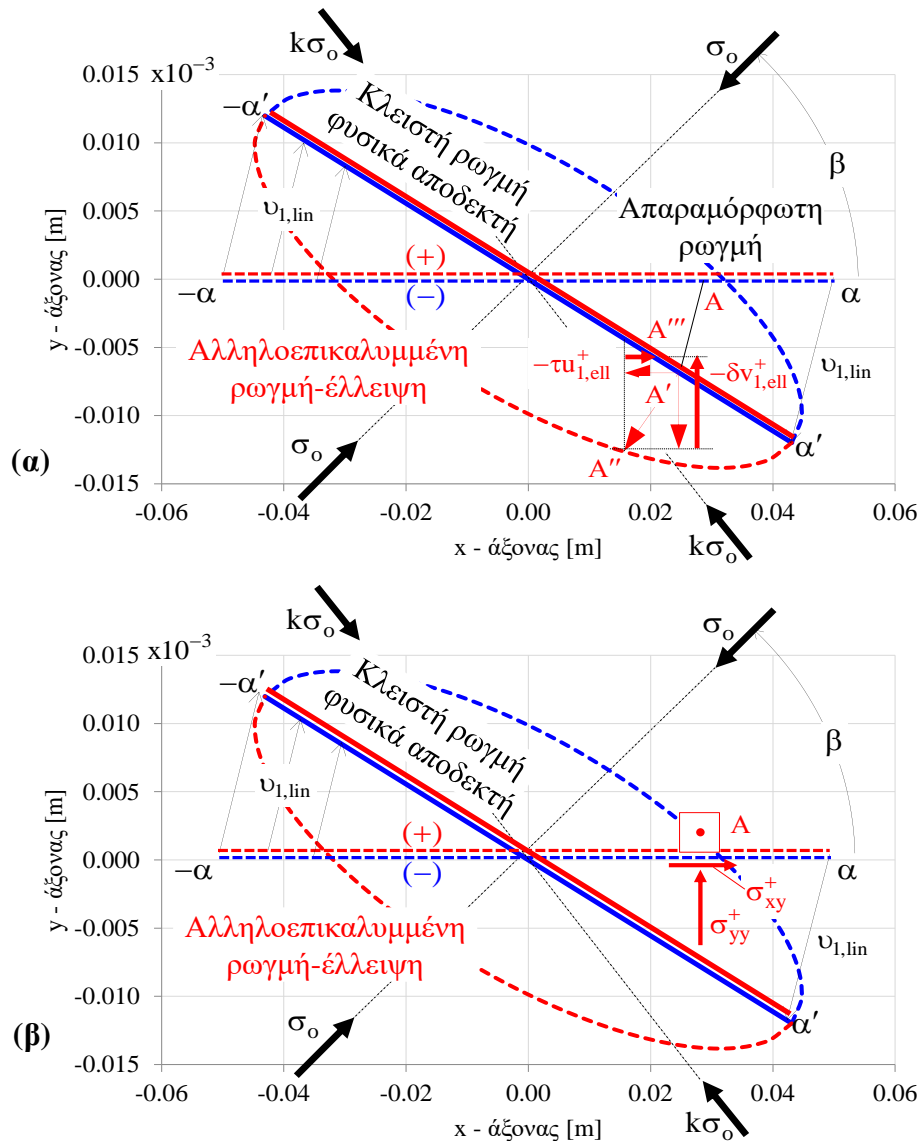
$$\delta = (1 - \tau) * \tan\lambda * \tan\omega + 1 \quad (48)$$

$$1 \leq \delta \leq \tan\lambda * \tan\omega + 1 \quad (49)$$

με τις γωνίες λ και ω να δίνονται από τις Εξς. (41) και (42) [29,30,35].

Ο μηχανισμός της ως άνω διαδικασίας αντιμετώπισης της αλληλοεπικάλυψης, με την εφαρμογή των αντιστρόφων μετατοπίσεων $-\tau \cdot u_{1,el1}^\pm$ και $-\delta \cdot v_{1,el1}^\pm$, φαίνεται στο Σχήμα 3α, μόνο για το άνω χείλος για λόγους ευκρίνειας. Το αρχικό σημείο A στο άνω χείλος της

ρωγμής (οριζόντια κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) μετατοπίζεται λόγω των γραμμικών όρων της μετατόπισης στο σημείο A' στη ψευδορωγμή (κεκλιμένη κόκκινη συνεχής γραμμή) και από εκεί λόγω των ελλειπτικών όρων της μετατόπισης στο A'' στην αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή). Με την εφαρμογή των $-\tau \cdot u_{1,ell}^+$, $-\delta \cdot v_{1,ell}^+$ το σημείο A'' μετατοπίζεται στο A''' πάνω στη φυσικά αποδεκτή θέση της ρωγμής που είναι κλειστή δηλαδή με τα χείλη σε επαφή και υπό τάσεις επαφής. Στο Σχήμα 3β φαίνονται οι αντίστοιχες τάσεις επαφής στο A , που ασκούνται, στην απαραμόρφωτη κατάσταση, στο άνω χείλος από το κάτω χείλος.



Σχήμα 3. (α) Ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης και (β) οι αντίστοιχες τάσεις επαφής που ασκούνται στο άνω χείλος από το κάτω χείλος της ρωγμής.

Από τα παραπάνω φαίνεται η σημασία του ‘αντίστροφου προβλήματος’, από το οποίο προκύπτουν ουσιαστικά οι τάσεις επαφής, η παραμετρική μελέτη των οποίων είναι ένα εκ των αντικειμένων της παρούσας εργασίας. Οι συνοριακές συνθήκες στο ‘αντίστροφο

πρόβλημα' είναι: μηδενικές τάσεις και μηδενική στροφή στο άπειρο και οι κάτωθι αντιστροφές μετατοπίσεις στα χείλη της ρωγμής:

$$u_2^\pm = -\tau * u_{1,ell}^\pm = \mp \tau \frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8\mu} (1 - k) \sin 2\beta \sqrt{a^2 - x^2} \quad (50)$$

$$v_2^\pm = -\delta * v_{1,ell}^\pm = \mp \delta \frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8\mu} [(1 + k) - (1 - k) \cos(2\beta)] \sqrt{a^2 - x^2} \quad (51)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω μετατοπίσεις στη γενική έκφραση [19]:

$$2\mu(u_2 + iv_2) = \kappa\varphi_2(z) - \omega_2(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_2(z)} \quad (52)$$

προκύπτουν οι κάτωθι γραμμικές σχέσεις των συνοριακών τιμών των τμηματικά ολόμορφων συναρτήσεων $\varphi_2(z)$ και $\omega_2(z)$ κατά μήκος της ρωγμής:

$$2\mu(u_2^+ + iv_2^+) = \kappa\varphi_2^+(x) - \omega_2^-(x) \quad (53)$$

$$2\mu(u_2^- + iv_2^-) = \kappa\varphi_2^-(x) - \omega_2^+(x) \quad (54)$$

Με πρόσθεση των Εξν. (48) και (49) κατά μέλη, προκύπτει:

$$\left[\frac{\kappa\varphi_2(x) - \omega_2(x)}{X_0(x)} \right]^+ - \left[\frac{\kappa\varphi_2(x) - \omega_2(x)}{X_0(x)} \right]^- = 0 \quad (55)$$

όπου

$$X_0^\pm(x) = \frac{1}{\pm i\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (56)$$

είναι οι τιμές της δίτιμης (λόγω τετραγωνικής ρίζας) πάνω στη ρωγμή, τμηματικά ολόμορφης συνάρτησης:

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (57)$$

Από την Εξ. (55) φαίνεται ότι πρέπει να ισχύει:

$$\omega_2(z) = \kappa\varphi_2(z) \quad (58)$$

Με αφαίρεση των Εξν. (53) και (54) κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη τις Εξς. (50), (51) και (58) προκύπτει:

$$\varphi_2^+(x) - \varphi_2^-(x) = \frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{4\kappa} \left[\tau(k - 1) \sin 2\beta \sqrt{a^2 - x^2} - i\delta[(1 + k) - (1 - k) \cos 2\beta] \sqrt{a^2 - x^2} \right] \quad (59)$$

Γενικά δε ισχύει ότι για μεγάλο z [19]:

$$\varphi_2(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \Gamma_2 z + \varphi_{2,0}(z) \quad (60)$$

όπου $X + iY$ είναι η συνισταμένη δύναμη των εξωτερικών δυνάμεων πάνω στη ρωγμή, Γ_2 είναι η φόρτιση (και η στροφή) στο άπειρο και η $\varphi_{2,0}$ είναι μια συνάρτηση ολόμορφη (μονότιμη και διαφορίσιμη) παντού στην άπειρη πλάκα.

Στην παρούσα περίπτωση εξ υποθέσεως $X = Y = 0$, $\Gamma_2 = 0$ και $\varphi_{2,0}(z = \infty) = 0$ αφού όλα τα πεδία στο άπειρο μηδενίζονται. Άρα η λύση της Εξ. (59) θα είναι:

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} -\frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{4\kappa} \left\{ \tau(1 - k) \sin 2\beta \sqrt{a^2 - x^2} + i\delta[(1 + k) - (1 - k)\cos 2\beta] \sqrt{a^2 - x^2} \right\} \frac{dx}{x - z} \quad (61)$$

Από την Εξ. (61), προκύπτει με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων Cauchy, ότι:

$$\varphi_2(z) = -\frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8\kappa} \left\{ \delta[1 + k - (1 - k)\cos(2\beta)] - i\tau(1 - k)\sin(2\beta) \right\} (\sqrt{z^2 - \alpha^2} - z) \quad (62)$$

και από τις Εξς. (58) και (62), ότι:

$$\omega_2(z) = -\frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8} \left\{ \delta[1 + k - (1 - k)\cos(2\beta)] - i\tau(1 - k)\sin(2\beta) \right\} (\sqrt{z^2 - \alpha^2} - z) \quad (63)$$

και με παραγωγήσι των παραπάνω:

$$\Phi_2(z) = -\frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8\kappa} \left\{ \delta[1 + k - (1 - k)\cos(2\beta)] - i\tau(1 - k)\sin(2\beta) \right\} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - \alpha^2}} - 1 \right) \quad (64)$$

$$\Omega_2(z) = -\frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8} \left\{ \delta[1 + k - (1 - k)\cos(2\beta)] - i\tau(1 - k)\sin(2\beta) \right\} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - \alpha^2}} - 1 \right) \quad (65)$$

Λόγω των ανωτέρω αντιστρόφων μετατοπίσεων και προκυπτουσών μιγαδικών δυναμικών, οι τάσεις στα χείλη της ρωγμής προκύπτουν, από τη γενική έκφραση [19]:

$$\sigma_{yy,2} - i\sigma_{xy,2} = \Phi_2(z) + \Omega_2(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_2'(z)} \quad (66)$$

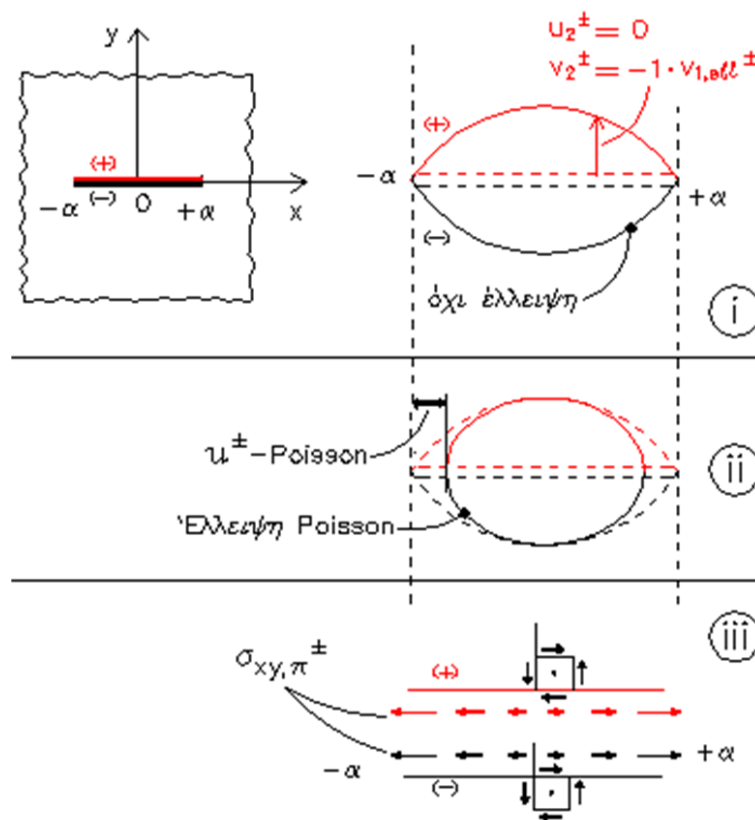
και για z τείνοντος στο x : $-\alpha \leq x \leq \alpha$, από πάνω και κάτω από τη ρωγμή, ως εξής:

$$\sigma_{yy,2}^{\pm} = \mp \frac{(\kappa^2 - 1)\sigma_0}{8\kappa} \tau(1 - k)\sin(2\beta) \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} + \frac{(\kappa + 1)^2\sigma_0}{8\kappa} \delta[(1 + k) - (1 - k)\cos(2\beta)] \quad (67)$$

$$\sigma_{xy,2}^{\pm} =$$

$$\pm \frac{(\kappa^2 - 1)\sigma_0}{8\kappa} \delta[(1 + k) - (1 - k) \cos(2\beta)] \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \tau(1 - k) \sin(2\beta) \quad (68)$$

Οι παραπάνω τάσεις κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής (Εξς. (67) και (68)) θα μπορούσαν σύμφωνα με τις προηγούμενες υποθέσεις να ήταν οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής. Ωστόσο, όπως δείχθηκε στη λύση [1] μόνο τμήμα αυτών των εκφράσεων μπορεί να αποτελεί τάσεις επαφής. Πράγματι, ένα μέρος αυτών των τάσεων ονομάστηκαν στην [1] παρασιτικές, διότι απαιτούνται από τη λύση μόνο και μόνο για να διατηρηθεί το μη απολύτως φυσικό πεδίο μετατοπίσεων στα χείλη της ρωγμής που εισάγουν οι αντίστροφες μετατοπίσεις στο ‘αντίστροφο πρόβλημα’. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό στην ειδική περίπτωση φόρτισης που φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 4.



Σχήμα 4. (i) Το μη απολύτως φυσικό πεδίο των αντίστροφων μετατοπίσεων, (ii) η φυσική ελαστική παραμόρφωση, (iii) οι τάσεις παρασιτικές τάσεις που προκύπτουν από το μη απολύτως φυσικό πεδίο των αντίστροφων μετατοπίσεων.

Πράγματι, το Σχήμα 4 αναφέρεται στην περίπτωση μονοαξονικής θλιπτικής τάσης στο άπειρο ($k=0$), κάθετα στη ρωγμή ($\beta=90^\circ$). Σε αυτήν την περίπτωση ο ελλειπτικός όρος της οριζόντιας συνιστώσας της μετατόπισης είναι μηδέν και ως εκ τούτου για την αντιμετώπιση της αλληλοεπικάλυψης απαιτείται η θεώρηση $\tau=0$ και $\delta=-1$, δηλαδή των συνοριακών τιμών των μετατοπίσεων $u_2^\pm = 0$ και $v_2^\pm = -1 \cdot v_{1,ell}^\pm$ (Σχ. 4(i)). Όπως φαίνεται η επιβολή αυτών των συνοριακών τιμών των μετατοπίσεων εμποδίζει την κατά Poisson φυσική οριζόντια συρρίκνωση του υλικού στην περιοχή της ρωγμής που θα οδηγούσε σε μια ελλειπτικού σχήματος παραμορφωμένη ρωγμή (Σχ. 4(ii)). Αυτή η παρεμπόδιση της φυσικής

παραμόρφωσης του υλικού επιτυγχάνεται με την ανάπτυξη στη λύση του ‘αντιστρόφου προβλήματος’ των απαραίτητων προς τούτο τάσεων, που προφανώς δεν αντιστοιχούν σε τάσεις επαφής (Σχ. 4(iii)).

Όπως δείχτηκε στην [1], στη γενική περίπτωση της διαξονικής φόρτισης στο άπειρο ($k \neq 0$) υπό τυχαία γωνία $\beta \neq 0^\circ$ και 90° , οι παρασιτικές τάσεις προκύπτουν να είναι της μορφής:

$$\sigma_{yy,\pi}^\pm = \mp \frac{(\kappa^2 - 1)\sigma_0}{8\kappa} \tau(1 - k) \sin 2\beta \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad (69)$$

$$\sigma_{xy,\pi}^\pm = \pm \frac{(\kappa^2 - 1)\sigma_0}{8\kappa} \delta[1 + k - (1 - k)\cos 2\beta] \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad (70)$$

Μετά την αφαίρεση των παρασιτικών τάσεων, Εξς. (69), (70), από τις τάσεις στη ρωγμή Εξς. (67), (68), προκύπτουν οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής, στο ‘αντίστροφο’ και άρα και στο ‘γενικό πρόβλημα’ ως εξής [1]:

$$\sigma_{yy}^\pm = \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \delta[(1 + k) - (1 - k)\cos(2\beta)] \quad (71)$$

$$\sigma_{xy}^\pm = \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \tau(1 - k) \sin 2\beta \quad (72)$$

Οι φυσικά αποδεκτές μετατοπίσεις των χειλίων της ρωγμής στο ‘γενικό πρόβλημα’ που παρέχουν τη μορφή της παραμορφωμένης ρωγμής είτε στην περίπτωση που αυτή είναι μία ανοιχτή έλλειψη είτε που στην περίπτωση της επικείμενης αλληλοεπικάλυψης είναι μια κλειστή ρωγμή υπό τις παραπάνω τάσεις επαφής, εύκολα προκύπτουν από την υπέρθεση του ‘αντιστρόφου’ στο ‘αρχικό πρόβλημα’:

$$u^\pm = u_{1,lin} + u_{1,ell}^\pm + u_2^\pm = u_{1,lin} + (1 - \tau)u_{1,ell}^\pm \quad (73)$$

$$v^\pm = v_{1,lin} + v_{1,ell}^\pm + v_2^\pm = v_{1,lin} - (\delta - 1)v_{1,ell}^\pm \quad (74)$$

που με τη βοήθεια των Εξν. (48) και (49) οδηγούν στις αναλυτικές εκφράσεις [1]:

$$u^\pm = \frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8\mu} \left\{ (1 - k)\cos(2\beta)x \pm (1 - \tau)(1 - k)\sin 2\beta \sqrt{\alpha^2 - x^2} \right\} \quad (75)$$

$$v^\pm = \frac{(\kappa + 1)\sigma_0}{8\mu} \left\{ (1 - k)\sin(2\beta)x \mp (\delta - 1)[(1 + k) - (k - 1)\cos 2\beta] \sqrt{\alpha^2 - x^2} \right\} \quad (76)$$

Αναλόγως, με υπέρθεση, προκύπτουν και οι τάσεις εκτός ρωγμής κατά μήκος του άξονα x στο ‘γενικό πρόβλημα’ ως εξής (απαραίτητες για τον ορισμό των ΣΕΤ):

$$\sigma_{yy} = [1 + k - (1 - k)\cos 2\beta] \left[\frac{\sigma_0}{2} \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \delta \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - 1 \right) \right] \quad (77)$$

$$\sigma_{xy} = (1 - k)\sin 2\beta \left[\frac{\sigma_0}{2} \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \tau \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - 1 \right) \right] \quad (78)$$

Ομοίως δε προκύπτουν και τα αντίστοιχα μιγαδικά δυναμικά του ‘γενικού προβλήματος’ ως εξής [1]:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma_0[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta - i(1-k)\sin 2\beta]z}{4\sqrt{z^2 - \alpha^2}} + \frac{\sigma_0(1-k)(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)}{4} - \frac{(\kappa+1)\sigma_0}{8} \{ \delta[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta] - i\tau(1-k)\sin 2\beta \} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - \alpha^2}} - 1 \right) \quad (79)$$

$$\Omega(z) = \frac{\sigma_0[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta - i(1-k)\sin 2\beta]z}{4\sqrt{z^2 - \alpha^2}} - \frac{\sigma_0(1-k)(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)}{4} - \frac{(\kappa+1)\sigma_0}{8} \{ \delta[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta] - i\tau(1-k)\sin 2\beta \} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - \alpha^2}} - 1 \right) \quad (80)$$

$$\varphi(z) = \frac{\sigma_0[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta - i(1-k)\sin 2\beta]\sqrt{z^2 - \alpha^2}}{4} + \frac{\sigma_0(1-k)(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)z}{4} - \frac{(\kappa+1)\sigma_0}{8\kappa} \{ \delta[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta] - i\tau(1-k)\sin 2\beta \} \left(\sqrt{z^2 - \alpha^2} - z \right) \quad (81)$$

$$\omega(z) = \frac{\sigma_0[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta - i(1-k)\sin 2\beta]\sqrt{z^2 - \alpha^2}}{4} - \frac{\sigma_0(1-k)(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)z}{4} - \frac{(\kappa+1)\sigma_0}{8} \{ \delta[(1+k) - (1-k)\cos 2\beta] - i\tau(1-k)\sin 2\beta \} \left(\sqrt{z^2 - \alpha^2} - z \right) \quad (82)$$

Τέλος, είτε με τη βοήθεια των εκφράσεων των τάσεων κατά τον άξονα x εκτός ρωγμής, Εξς. (74), (75), είτε με τη βοήθεια της $\Phi(z)$, Εξ. (76), οι φυσικά αποδεκτές εκφράσεις για τους ΣΕΤ στο ‘γενικό πρόβλημα’ προκύπτουν ως εξής [1]:

$$K_I = (1 - \delta) \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi \alpha}}{2} [(1+k) - (1-k)\cos 2\beta] \quad (83)$$

$$K_{II} = (1 - \tau) \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi \alpha}}{2} (1-k)\sin 2\beta \quad (84)$$

όπου επισημαίνεται η εξάρτηση του K_I από το υλικό, μέσω του συντελεστή δ (πρβλ. Εξς. (31), (36), (43)).

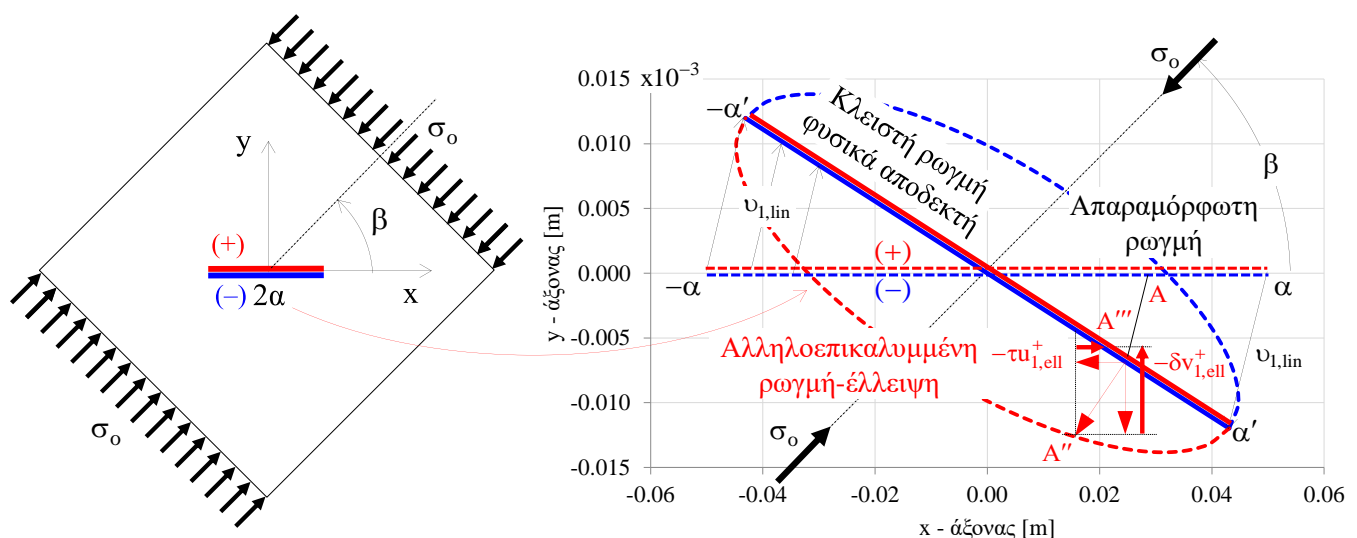
2.5 Τα πεδία μετατοπίσεων και τάσεων και οι φυσικά αποδεκτοί συντελεστές εντάσεως των τάσεων στη ρηγματωμένη άπειρη πλάκα υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στις τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής, ουσιαστικά δηλαδή και σύμφωνα με τα όσα ελέγχθησαν παραπάνω, αφορά αποκλειστικά στις περιπτώσεις που η ρωγμή είναι πάντα υπό θεωρητικές συνθήκες αλληλοεπικάλυψης.

Δείχνεται εύκολα, ότι η θεωρητική αλληλοεπικάλυψη επίκειται πάντα στην περίπτωση που η άπειρη ρηγματωμένη πλάκα υπόκειται σε μονοαξονική θλίψη στο άπειρο που δεν είναι παράλληλη στη διεύθυνση της ρωγμής. Δηλαδή, όταν η ομοιόμορφη τάση στο άπειρο είναι θλιπτική $\sigma_0 < 0$, ο δείκτης διαξονικότητας είναι μηδέν $k=0$, και η γωνία φόρτισης είναι $\beta \neq 0^\circ$ (ή 180°). Σε αυτήν την περίπτωση ακόμα και το ελάχιστο φορτίο προκαλεί τη θεωρητική αλληλοεπικάλυψη. Στην ειδική περίπτωση $\beta \neq 0^\circ$ (ή 180°), όπως για παράδειγμα φαίνεται από τις εκφράσεις των ΣΕΤ, για $k=0$ και για $\tau=0$ και γωνία $\lambda=0^\circ$ λόγω συμμετρίας, προκύπτει από την Εξ. (46) ότι $\delta=1$, οπότε οι Εξς. (83) και (84) δίνουν $K_I = K_{II} = 0$, δηλαδή η παρουσία μια κεντρικής ρωγμής παράλληλης στη φόρτιση, δεν επηρεάζει τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων ούτε στην εγγύς της ρωγμής περιοχή.

Στη συνέχεια θα θεωρείται μόνο αυτή η περίπτωση $\{\sigma_0 < 0 \text{ και } k=0\}$, η οποία και χρησιμοποιείται για τη μελέτη τάσεων, παραμορφώσεων και ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, στη ρηγματωμένη μεταλλική πλάκα, στην περιοχή της ρωγμής. Προφανώς η περίπτωση αυτή αποτελεί μια ειδική περίπτωση της άπειρης πλάκας υπό διαξονική φόρτιση στο άπειρο και άρα μια φυσικά αποδεκτή λύση της μπορεί να προκύψει από τη λύση του ‘γενικού προβλήματος’ [1], που παρουσιάστηκε παραπάνω, θέτοντας απλά σε αυτή $\sigma_0 < 0$ και $k=0$.

Η γεωμετρία του προβλήματος και η φυσικά αποδεκτή παραμορφωμένη ρωγμή, με χείλη σε επαφή και τάσεις επαφής (αντί της αλληλοεπικάλυψης) φαίνονται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5. Η άπειρη πλάκα υπό μονοαξονική θλίψη στο άπειρο και ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης.

Αντικατάσταση του $k=0$ στις Εξς. (71, 72), (77, 78), (75, 76) και (83, 84), δίνει αντίστοιχα τις συνιστώσες της τάσης εντός και εκτός ρωγμής, τις συνιστώσες της μετατόπισης στα χείλη της ρωγμής, καθώς και των ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, για την περίπτωση πλάκας μεγάλων διαστάσεων με κεντρική ρωγή υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της (Σχ. 5), για το φυσικά αποδεκτό ‘γενικό πρόβλημα’, ως εξής:

Οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \delta (1 - \cos 2\beta) \quad (85)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm} = \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \tau \sin 2\beta \quad (86)$$

Οι τάσεις εκτός ρωγμής κατά μήκος του άξονα x

$$\sigma_{yy} = (1 - \cos 2\beta) \left[\frac{\sigma_0}{2} \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \delta \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - 1 \right) \right] \quad (87)$$

$$\sigma_{xy} = \sin 2\beta \left[\frac{\sigma_0}{2} \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \tau \frac{(\kappa + 1)^2 \sigma_0}{8\kappa} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - 1 \right) \right] \quad (88)$$

Διορθωμένες μετατοπίσεις των χειλέων της ρωγμής (με τα τ και δ) χωρίς αλληλοεπικάλυψη, αλλά με τα χείλη της ρωγμής πάντα σε επαφή.

$$u^{\pm} = c \left[\cos 2\beta x \pm (1 - \tau) \sin 2\beta \sqrt{\alpha^2 - x^2} \right] \quad (89)$$

$$v^{\pm} = c \left[\sin 2\beta x \mp (\delta - 1)(1 + \cos 2\beta) \sqrt{\alpha^2 - x^2} \right] \quad (90)$$

όπου ειδικότερα:

$$u_{lin}^{\pm}(x) = c \cos 2\beta x \quad (91)$$

$$u_{ell}^{\pm}(x) = c \left[\pm (1 - \tau) \sin 2\beta \sqrt{\alpha^2 - x^2} \right] \quad (92)$$

$$v_{lin}^{\pm}(x) = c \sin 2\beta x \quad (93)$$

$$v_{ell}^{\pm}(x) = c \left[\mp (\delta - 1)(1 + \cos 2\beta) \sqrt{\alpha^2 - x^2} \right] \quad (94)$$

$$\left(c = \frac{\kappa + 1}{8\mu} \sigma_0 \quad (36) \right)$$

Φυσικά αποδεκτοί ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής

$$K_I = (1 - \delta) \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi \alpha}}{2} (1 - \cos 2\beta) \quad (95)$$

$$K_{II} = (1 - \tau) \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi \alpha}}{2} \sin 2\beta \quad (96)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις εφαρμόζονται στη συνέχεια για διάφορες κατηγορίες μεταλλικών υλικών και για διάφορες γωνίες φόρτισης. Αυτό γίνεται αφενός για την ποσοτικοποίηση των τιμών των μέχρι τώρα θεωρητικών τάσεων, παραμορφώσεων (και μετατοπίσεων) και ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, αλλά και τη μελέτη της επιρροής των παραμέτρων του προβλήματος (γωνία β , μέτρο ελαστικότητας E , λόγος Poisson ν , επίπεδη παραμόρφωση ή επίπεδη ένταση), στις τιμές των φυσικών αυτών μεγεθών.

Πριν ωστόσο, την παρουσίαση των αριθμητικών εφαρμογών και των αποτελεσμάτων τους, ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση της λύσης της άπειρης αρηγμάτωτης πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη στο άπειρο και η εξαγωγή των αντίστοιχων πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων κατά μήκος υλικής γραμμής μήκους $2a$, αντίστοιχης της ρωγμής $2a$ της ρηγματωμένης πλάκας, για λόγους σύγκρισης και ποσοτικοποίησης της επίδρασης της παρουσίας κεντρικής ρωγμής στην πλάκα χάλυβα.

2.6 Τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων στην αρηγμάτωτη άπειρη πλάκα υπό μονοαξονική θλίψη στο άπειρο

Καίτοι τα πεδία των τάσεων και μετατοπίσεων στο Πρώτο Θεμελιώδες Πρόβλημα στην επίπεδη αρηγμάτωτη πλάκα προκύπτουν αμέσως υπό την εύλογη υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής τους, για λόγους ομοιομορφίας με την προηγούμενη ανάλυση, οι τάσεις και μετατοπίσεις εξάγονται εδώ συναρτήσει των μιγαδικών δυναμικών Kolosov-Muskhelishvili [19]. Καθώς δε το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην υλική γραμμή $2a$ της αρηγμάτωτης άπειρης πλάκας, ως προς τη οποία η εξωτερική φόρτιση θα έχει τυχαίο προσανατολισμό β , τα μιγαδικά δυναμικά υπολογίζονται, κατ' αναλογία της ρηγματωμένης πλάκας, σε καρτεσιανό σύστημα με αρχή στο μέσο της υλικής γραμμής $2a$ και με τον άξονα x κατά τη γραμμή αυτή. Τα μιγαδικά δυναμικά υπολογίζονται αρχικά για καρτεσιανό σύστημα με αρχή στο μέσο της υλικής γραμμής $2a$ με τον άξονα y παράλληλο στη φόρτιση στο άπειρο και μετά η λύση ανάγεται στο στραμμένο σύστημα αναφοράς x_1Oy_1 (Σχήμα 6).

Εύκολα προκύπτει, με τη βοήθεια της έκφρασης [19]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = 2\operatorname{Re}\Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad (97)$$

ότι τα μιγαδικά δυναμικά που αποτελούν τη λύση της άπειρης αρηγμάτωτης πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη σ_0 στο άπειρο, στο σύστημα xOy , είναι:

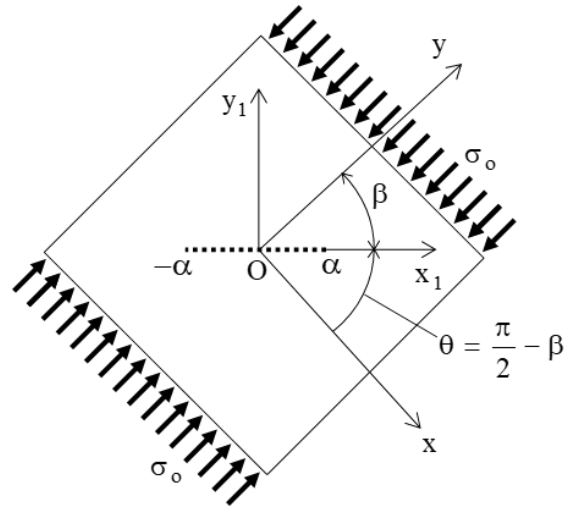
$$\Phi(z) = \frac{\sigma_0}{4} \quad (98)$$

$$\Psi(z) = \frac{\sigma_0}{2} \quad (99)$$

από τα οποία με ολοκλήρωση προκύπτουν και οι $\varphi(z)$ και $\psi(z)$, οι οποίες παραλείποντας κάποιους σταθερούς όρους που συνδέονται με μετατοπίσεις στερεού σώματος, δίνονται ως:

$$\varphi(z) = \frac{\sigma_0}{4} z \quad (100)$$

$$\psi(z) = \frac{\sigma_o}{2} z \quad (101)$$



Σχήμα 6. Η άπειρη αρηγμάτωτη πλάκα υπό μονοαξονική θλίψη στο άπειρο και η στροφή του συστήματος αναφοράς.

Οι εκφράσεις των ως άνω μιγαδικών δυναμικών στο σύστημα αναφοράς x_1Oy_1 το στραμμένο ως προς το xOy κατά θετική γωνία θ , προκύπτουν εύκολα λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις μετασχηματισμού [19]:

$$\Phi_1(z_1) = \Phi(z) \quad (102)$$

$$\Psi_1(z_1) = \Psi(z)e^{2i\theta} \quad (103)$$

$$\varphi_1(z_1) = \varphi(z)e^{-i\theta} \quad (104)$$

$$\psi_1(z_1) = \psi(z)e^{i\theta} \quad (105)$$

όπου

$$z_1 = z e^{-i\theta} \quad \text{ή} \quad z = z_1 e^{i\theta} \quad (106)$$

Αντικαθιστώντας από τις Εξς. (98–100) και τη δεύτερη των Εξν. (106) στις Εξς. (102–105) και λαμβάνοντας υπόψη ότι (Σχήμα 6):

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (107)$$

η λύση του προβλήματος στο σύστημα αναφοράς x_1Oy_1 προκύπτει ως:

$$\Phi_1(z_1) = \frac{\sigma_o}{4} \quad (108)$$

$$\Psi_1(z_1) = -\frac{\sigma_o}{2} e^{-2i\beta} \quad (109)$$

$$\varphi_1(z_1) = \frac{\sigma_o}{4} z_1 \quad (110)$$

$$\psi_1(z_1) = -\frac{\sigma_o}{2} e^{-2i\beta} z_1 \quad (111)$$

(Ο δείκτης 1 στην παρούσα παράγραφο δεν πρέπει να συγχέεται με το δείκτη 1 που χρησιμοποιήθηκε στη λύση του ‘αρχικού προβλήματος’ της ρηγματωμένης άπειρης πλάκας με την αλληλοεπικάλυψη της παραγράφου 2.2). Αντικατάσταση των Εξν. (108) και (109) στις γενικές εκφράσεις για τις τάσεις [19]:

$$\sigma_{x_1x_1} + \sigma_{y_1y_1} = 4\text{Re}\Phi_1(z_1) \quad (112)$$

$$\sigma_{y_1y_1} - i\sigma_{x_1y_1} = 2\text{Re}\Phi_1(z_1) + z_1\overline{\Phi_1'(z_1)} + \overline{\Psi_1(z_1)} \quad (113)$$

δίνει τις καρτεσιανές συνιστώσες της τάσεως στο σύστημα x_1Oy_1 , που προφανώς είναι ομοιόμορφες παντού στην αρηγμάτωτη πλάκα και άρα και πάνω στην υλική γραμμή $2a$, ως:

$$\sigma_{x_1x_1} = \frac{\sigma_o}{2} (1 + \cos 2\beta) \quad (114)$$

$$\sigma_{y_1y_1} = \frac{\sigma_o}{2} (1 - \cos 2\beta) \quad (115)$$

$$\sigma_{x_1y_1} = \frac{\sigma_o}{2} \sin 2\beta \quad (116)$$

με τις δύο τελευταίες εκφράσεις να δίνουν την κάθετη και τη διατμητική τάση στην υλική γραμμή $2a$.

Επίσης, αντικαθιστώντας από τις Εξν. (110) και (111) στη γενική εκφράση για τις μετατοπίσεις [19]:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi_1(z_1) - z_1\overline{\varphi_1'(z_1)} - \overline{\psi_1(z_1)} \quad (117)$$

οι καρτεσιανές συνιστώσες της μετατόπισης σε κάθε σημείο της αρηγμάτωτης πλάκας προκύπτουν ως:

$$u = \frac{\sigma_o}{4\mu} \left(\frac{\kappa - 1}{2} x_1 + x_1 \cos 2\beta + y_1 \sin 2\beta \right) \quad (118)$$

$$v = \frac{\sigma_o}{4\mu} \left(\frac{\kappa - 1}{2} y_1 - y_1 \cos 2\beta + x_1 \sin 2\beta \right) \quad (119)$$

Θέτοντας δε στις παραπάνω εκφράσεις $y_1=0$, οι συνιστώσες της μετατόπισης κατά μήκος του άξονα x_1 και άρα των σημείων της υλικής γραμμής $2a$, προκύπτουν ως:

$$u = \frac{\sigma_o}{4\mu} \left(\frac{\kappa - 1}{2} x_1 + x_1 \cos 2\beta \right) \quad (120)$$

$$v = \frac{\sigma_o}{4\mu} x_1 \sin 2\beta \quad (121)$$

Οι παραπάνω μετατοπίσεις αποτελούν και το πλήρες πεδίο μετατοπίσεων καθόσον στην παρούσα περίπτωση η αοριστία $\{C, \gamma \text{ και } \gamma'\}$ στα μιγαδικά δυναμικά, που συνδέεται με μετατοπίσεις στερεού σώματος, είναι μηδενική:

$$\Phi_1(z_1) = \phi_1(z_1) + iC \quad (122)$$

$$C = -Im\phi_1(0) \xrightarrow{\text{Εξ. (108)}} C = 0 \quad (123)$$

$$\varphi_1(z_1) = \phi_1(z_1) + iCz_1 + \gamma \quad (124)$$

$$\gamma = -\varphi_1(0) \xrightarrow{\text{Εξ. (110)}} \gamma = 0 \quad (125)$$

$$\psi_1(z_1) = \phi_1(z_1) + \gamma' \quad (126)$$

$$\gamma' = -\psi_1(0) \xrightarrow{\text{Εξ. (111)}} \gamma' = 0 \quad (127)$$

Τα παραπάνω πεδία τάσεων και μετατοπίσεων χρησιμοποιούνται στις παρακάτω εφαρμογές για τη σύγκριση με τη ρηγματωμένη πλάκα.

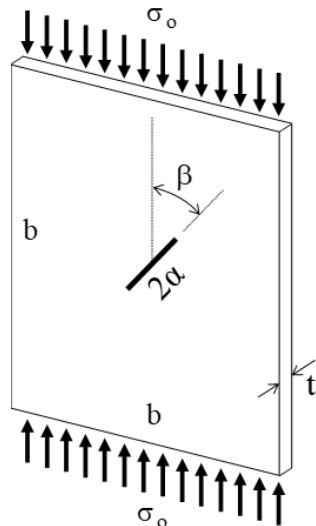
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εφαρμογές και αποτελέσματα σε προ-ρηγματωμένη μεταλλική πλάκα

3.1 Εφαρμογές στην περίπτωση ρηγματωμένης μεταλλικής πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορα της

Στην παρούσα ενότητα, χρησιμοποιώντας τα θεωρητικά πεδία τάσεων και μετατοπίσεων (και ΣΕΤ για παρουσία ρωγμής) της ρηγματωμένης άπειρης πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη στο άπειρο καθώς των αντίστοιχων πεδίων στην αντίστοιχη αρηγμάτωτη άπειρη πλάκα, παρουσιάζεται μια παραμετρική μελέτη αυτών των πεδίων σε μεταλλική πλάκα υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της, παρουσία, και μη, μικρής κεντρικής, ευθύγραμμης, μαθηματικής ρωγμής (Σχήμα 7). Εκτός της ποσοτικοποίησης των τάσεων επαφής στα χείλη της ρωγμής και, στερεάς στροφής της ρωγμής και τιμών των ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, η σύγκριση των αντίστοιχων αποτελεσμάτων μεταξύ της ρηγματωμένης και της αρηγμάτωτης πλάκας δίνει το βαθμό επιρροής της παρουσίας της ρωγμής στην ελαστική ισορροπία της πλάκας.

Για την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων, σε όλες τις ακόλουθες περιπτώσεις, θα θεωρείται μία τετραγωνική πλάκα, μήκους πλευράς $b=1.00$ m και πάχους $t=0.01$ m. Στην περίπτωση της ρηγματωμένης πλάκας, η ευθύγραμμη κεντρική ρωγμή θα έχει μήκος $2a=0.10$ m και η απόσταση των χειλέων της θα είναι μηδενική (φυσική ρωγμή). Ο προσανατολισμός της ρωγμής ως προς την εξωτερική φόρτιση, β , θα είναι τυχαίος σε σχέση με τα σύνορα της πλάκας. Στο φορτισμένο σύνορο της πλάκας θα θεωρείται ομοιόμορφα κατανεμημένη πίεση ($\sigma_0 < 0$), μέτρου $\sigma_0=10$ MPa. Αυτό, σύμφωνα με τις παραπάνω διαστάσεις της πλάκας, συνεπάγεται ένα συνολικό θλιπτικό φορτίο P στο φορτισμένο σύνορο, μέτρου $P=\sigma_0 A=\sigma_0 b t=10 \times 10^3 (\text{kN/m}^2) \times 1 (\text{m}) \times 0.01 (\text{m})=100 \text{Kn}$ (10tn). Φαινόμενα λυγισμού αγνοούνται. Το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν του υλικού της πλάκας θα μεταβάλλονται, σε λογικά όρια. Επίσης, καθώς λόγω της μορφής της λύσης, το υλικό εμφανίζεται πέραν των εκφράσεων των μετατοπίσεων και στις εκφράσεις των τάσεων (και έμμεσα και του K_I), γίνεται διαχωρισμός και μεταξύ των περιπτώσεων επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης. Η μεσαία διατομή της πλάκας θα θεωρείται ως συνήθως υπό κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, ενώ οι επιφανειακές διατομές υπό κατάσταση επίπεδης έντασης.



Σχήμα 7. Η τετραγωνική μεταλλική πλάκα με κεντρική, κεκλιμένη, ευθύγραμμη ρωγμή $2a$, υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της.

Σε σχέση με τη μορφή της παραμορφωμένης ρωγμής, που στην παρούσα περίπτωση $\{\sigma_0 < 0, k=0\}$ θα είναι πάντα κλειστή (υπό κατάσταση σύνθλιψης των χειλέων), και σε σχέση με τις αντίστοιχες τάσεις επαφής, θα θεωρούνται οι δύο παρακάτω ακραίες περιπτώσεις, που απορρέουν από τις συνθήκες επαφής των Εξν. (45), (46), (47) [1]:

1^η περίπτωση: Για $\tau = 0$, που αντιστοιχεί στην περίπτωση απουσίας τριβής μεταξύ των χειλέων της ρωγμής. Σε αυτήν την περίπτωση το δ , Εξ. (46), λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του:

$$\delta = \tan\lambda \cdot \tan\omega + 1 \quad (128\alpha)$$

2^η περίπτωση: Για $\tau = 1$, που αντιστοιχεί στην περίπτωση ενός μεγάλου συντελεστή τριβής μεταξύ των χειλέων της ρωγμής, που απαγορεύει κάθε σχετική ολίσθηση μεταξύ τους. Σε αυτήν την περίπτωση το δ , Εξ. (46), λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του:

$$\delta = 1 \quad (128\beta)$$

(σημειωτέου βέβαια ότι λόγω των μικρών τιμών των γωνιών λ και ω , η διαφορά μεταξύ των τιμών των Εξν. (128α) και (128β) θα είναι εν γένει μικρή).

Η 1^η περίπτωση εξασφαλίζει ότι οι αλλαγές στο σώμα κατά την παραμόρφωσή του γίνονται ισόθερμα, κάτι που θεωρήθηκε δεδομένο στη διατύπωση του καταστατικού νόμου (Lamé) που υιοθετήθηκε σε όλη την παραπάνω ανάλυση. Δεν θα θεωρηθούν δηλαδή παραμορφωμένες μορφές της ρωγμής όπου θα έχει υπάρξει σχετική ολίσθηση των χειλέων της παρουσία τριβής, διότι αυτό θα υπονοούσε απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας.

3.2 Η φυσικά αποδεκτή κλειστή παραμορφωμένη ρωγμή στην περίπτωση παρουσίας τριβής

Σε αυτήν την παράγραφο, με τη βοήθεια των διορθωμένων εκφράσεων των μετατοπίσεων που δίνονται από τις Εξς. (88) έως (94), υπολογίζεται η φυσικά αποδεκτή μορφή της παραμορφωμένης ρωγμής σύμφωνα με το διορθωμένο ‘γενικό πρόβλημα’, που αντί αλληλοεπικάλυψης θα παρουσιάζει χείλη σε πλήρη επαφή, στερεά στροφή γύρω από το κέντρο της και μεταβολή του μήκους της. Η εικόνα αυτή της κλειστής παραμορφωμένης ρωγμής παρουσιάζεται, για διάφορες περιπτώσεις, στα Σχήματα 8 έως 49, που ακολουθούν, σε αντιδιαστολή με την αρχική απαραμόρφωτη γεωμετρία, αλλά και τη μη φυσική μορφή της αλληλεπικαλυμμένης ρωγμής-έλλειψης πριν τη διόρθωση του ‘αρχικού προβλήματος’.

Η χάραξη των Σχημάτων 8 έως 49 έγινε για διάφορους λόγους Poisson, $\nu=0.1, 0.2, 0.3$ και 0.4 και γωνίες φόρτισης $\beta=30^\circ, 60^\circ$ και 90° , θεωρώντας ένα σταθερό μέτρο ελαστικότητας $E=235$ GPa. Η γωνία $\beta=0^\circ$, δηλαδή όταν η φόρτιση είναι παράλληλη στη ρωγμή, δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον αφού όπως προαναφέρθηκε η πλάκα συμπεριφέρεται τότε σαν να μην υπάρχει η ρωγμή.

Ειδικότερα, η χάραξη των σχημάτων 8 έως 19 έγινε για την περίπτωση $\tau=\delta=1$ (2^η περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου), δηλαδή για παρουσία τριβής και μηδενικής σχετικής ολίσθησης μεταξύ των χειλέων της ρωγμής. Ειδικά για φόρτιση κάθετα στη ρωγμή ($\beta=90^\circ$) θεωρήθηκε $\tau=0, \delta=1$ (παρουσία τριβής). Τα Σχήματα 20 έως 31 χαράχθηκαν για την περίπτωση $\tau=0, \delta = \tan\lambda \cdot \tan\omega + 1$ (1^η περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου), δηλαδή για απουσία τριβής και της μέγιστης σχετικής ολίσθησης μεταξύ των χειλέων της ρωγμής. Ξανά, για φόρτιση κάθετα στη ρωγμή ($\beta=90^\circ$) θεωρήθηκε $\tau=0, \delta=1$ (απουσία τριβής).

Η χάραξη των Σχημάτων 32 έως 49 έγινε για διάφορα μέτρα ελαστικότητας χάλυβα $E=190, 220$ και 250 GPa και γωνίες φόρτισης $\beta=30^\circ, 60^\circ$ και 90° , θεωρώντας ένα σταθερό λόγο Poisson, $\nu=0.3$. Ειδικότερα, η χάραξη των Σχημάτων 32 έως 40 έγινε για την περίπτωση $\tau=\delta=1$ (2^η περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου), δηλαδή για παρουσία τριβής και μηδενικής σχετικής ολίσθησης μεταξύ των χειλέων της ρωγμής. Ειδικά για φόρτιση κάθετα στη ρωγμή ($\beta=90^\circ$) θεωρήθηκε $\tau=0, \delta=1$ (παρουσία τριβής). Τα Σχήματα 41 έως 49 χαράχθηκαν για την περίπτωση $\tau=0, \delta = \tan\lambda \cdot \tan\omega + 1$ (1^η περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου), δηλαδή για απουσία τριβής και της μέγιστης σχετικής ολίσθησης μεταξύ των χειλέων της ρωγμής. Ξανά, για φόρτιση κάθετα στη ρωγμή ($\beta=90^\circ$) θεωρήθηκε $\tau=0, \delta=1$ (απουσία τριβής).

Για τους υπολογισμούς και τη χάραξη των διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα EXCEL. Η απαραμόρφωτη ρωγμή ($-a, a$) φαίνεται με την οριζόντια διπλή διακεκομμένη γραμμή κατά τον άξονα x , κόκκινη για το άνω χείλος και μπλε για το κάτω χείλος. Η μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή - έλλειψη φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή ανάλογου χρώματος. Η τελική φυσικά αποδεκτή κλειστή παραμορφωμένη ρωγμή φαίνεται με κόκκινη συνεχή γραμμή (άνω χείλος) και μπλε τετράγωνους δείκτες (κάτω χείλος). Υπενθυμίζεται ότι εξ’ υποθέσεως η φυσικά αποδεκτή κλειστή παραμορφωμένη ρωγμή έχει τη διεύθυνση της ψευδορωγμής.

Σημειώνεται ότι, σε όλες τις περιπτώσεις θεωρήθηκε ότι η πλάκα είναι σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης. Ειδικά, ο λόγος Poisson ν δύναται να επηρεάσει την παραμόρφωση της ρωγμής μόνο για την κατάσταση της επίπεδης παραμόρφωσης. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, που η σταθερά κ του Muskhelishvili λαμβάνει την τιμή $3-4\nu$, η Εξ. (31) για τη σταθερά c , που εισέρχεται άμεσα αλλά και έμμεσα μέσω $\delta=\delta(\lambda)$ (πρβλ. Εξς. (31), (36), (43)) στο πεδίο των μετατοπίσεων της ρωγμής (Εξς. (86) έως (91)) γίνεται:

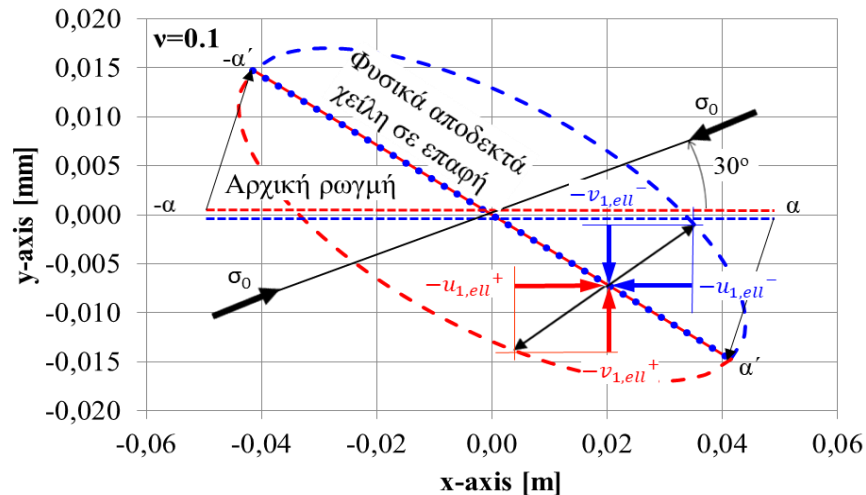
$$c = \frac{\kappa + 1}{8\mu} \sigma_0 = \frac{3 - 4\nu + 1}{8 \frac{E}{2(1+\nu)}} \sigma_0 = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_0 \quad (129)$$

από όπου φαίνεται η εμφάνιση του ν στις αναλυτικές εκφράσεις των μετατοπίσεων. Ενώ στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, δηλαδή για σταθερά Muskhelishvili $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$, η c από την Εξ. (36) γίνεται:

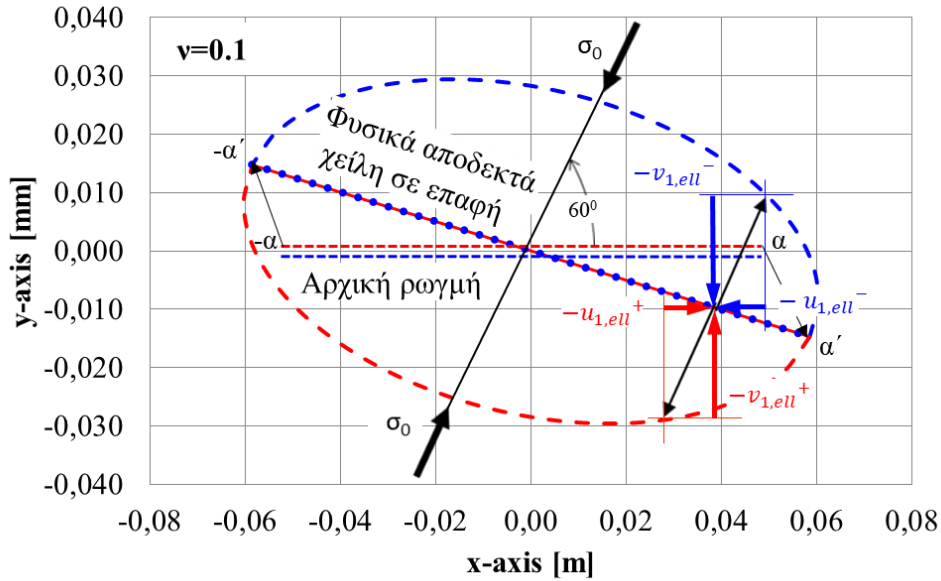
$$c^* = \frac{\kappa + 1}{8\mu} \sigma_0 = \frac{\frac{3-\nu}{1+\nu} + 1}{8 \frac{E}{2(1+\nu)}} \sigma_0 = \frac{1}{E} \sigma_0 \quad (130)$$

δηλαδή προκύπτει ανεξάρτητη του λόγου Poisson ν οπότε σε αυτήν την περίπτωση οι μετατοπίσεις των χειλέων της ρωγμής δεν επηρεάζονται καθόλου από το λόγο Poisson ν , αλλά μόνο από το μέτρο ελαστικότητας E . Ωστόσο, όπως φαίνεται από την Εξ. (129), η επιρροή του λόγου Poisson ν θα είναι πολύ μικρή αφού ο όρος $1-\nu^2$ είναι πολύ κοντά στη μονάδα.

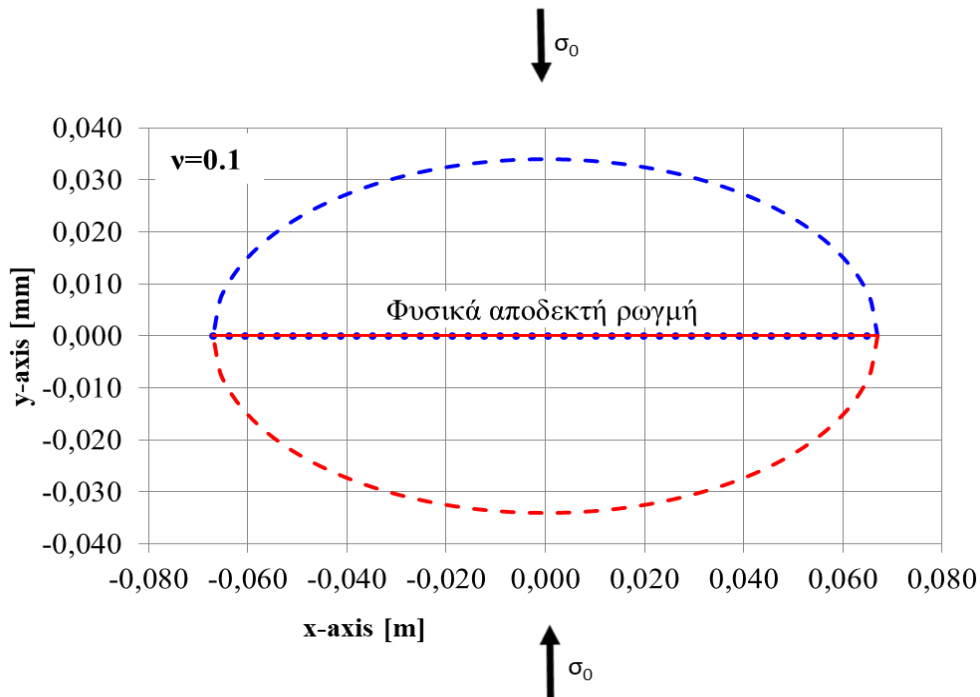
Παραμορφωμένη ρωγμή για διάφορους λόγους Poisson $\nu=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, και γωνίες φόρτισης $\beta=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, για σταθερό μέτρο ελαστικότητας $E=235 \text{ GPa}$, παρουσία τριβής



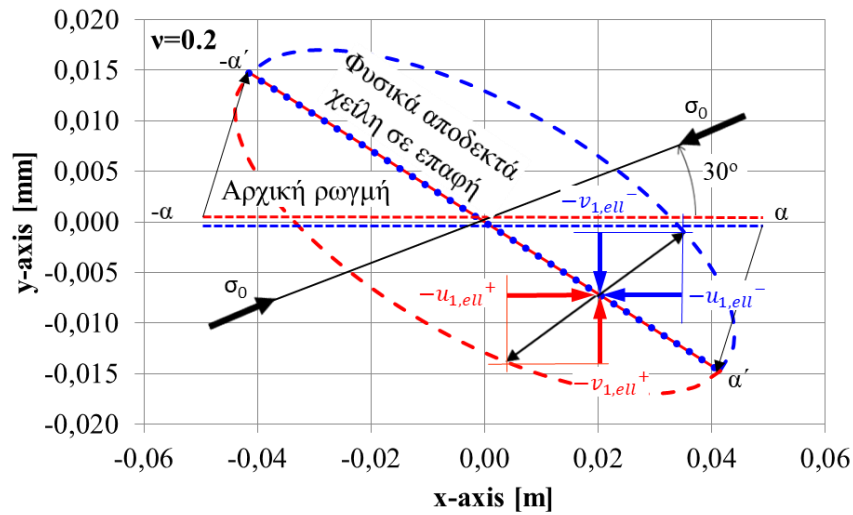
Σχήμα 8. Αρχική-απαραμορφωτή ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.1$, $E=235 \text{ GPa}$ και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



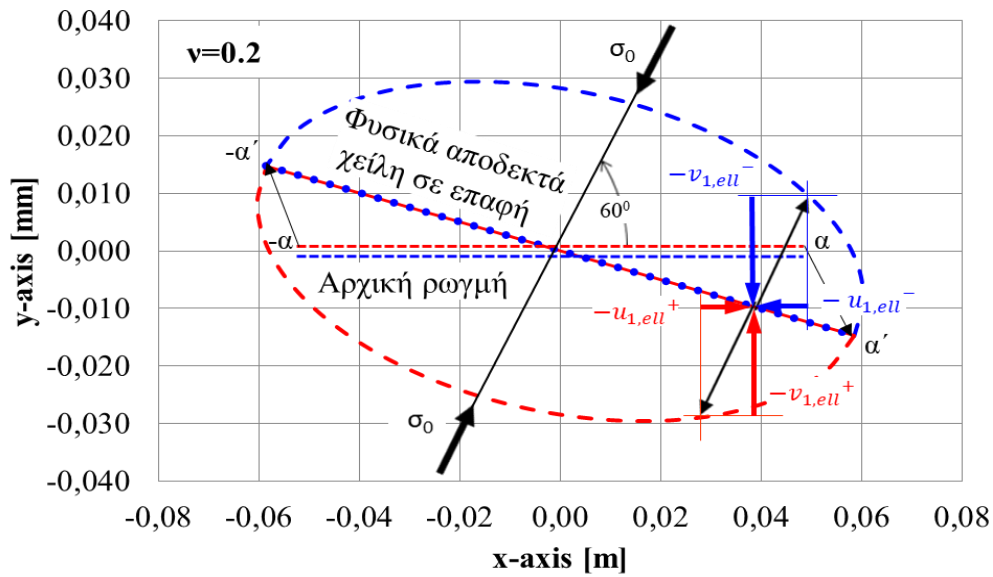
Σχήμα 9. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.1$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



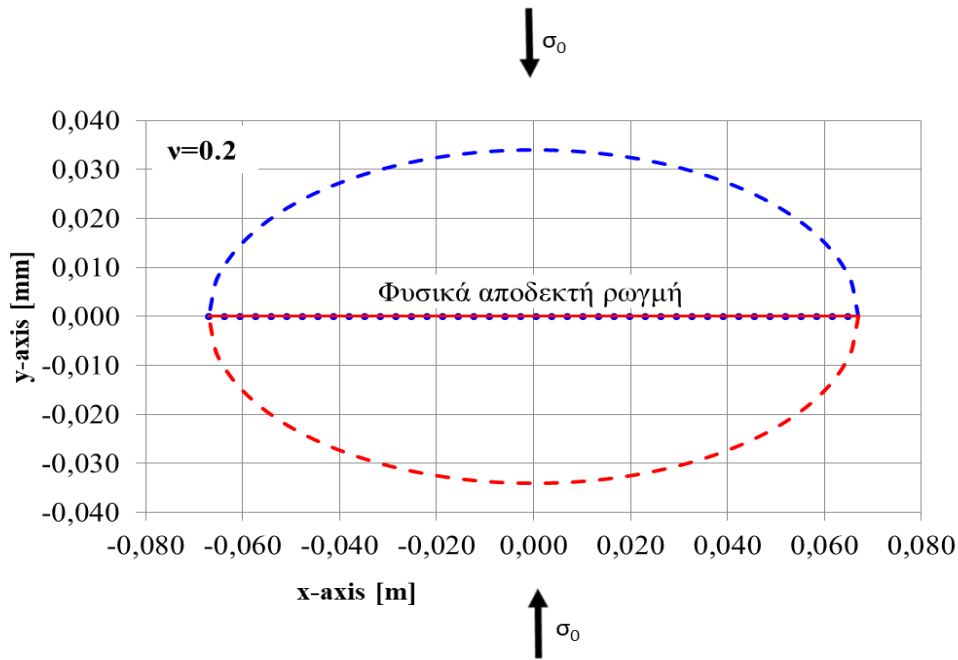
Σχήμα 10. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=1$ (**παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.1$, $E=235$ GPa, και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



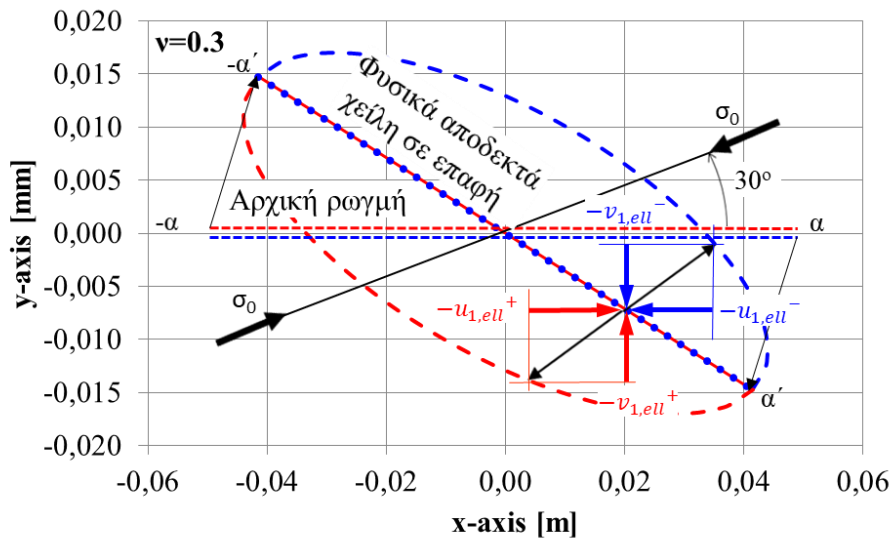
Σχήμα 11. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.2$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



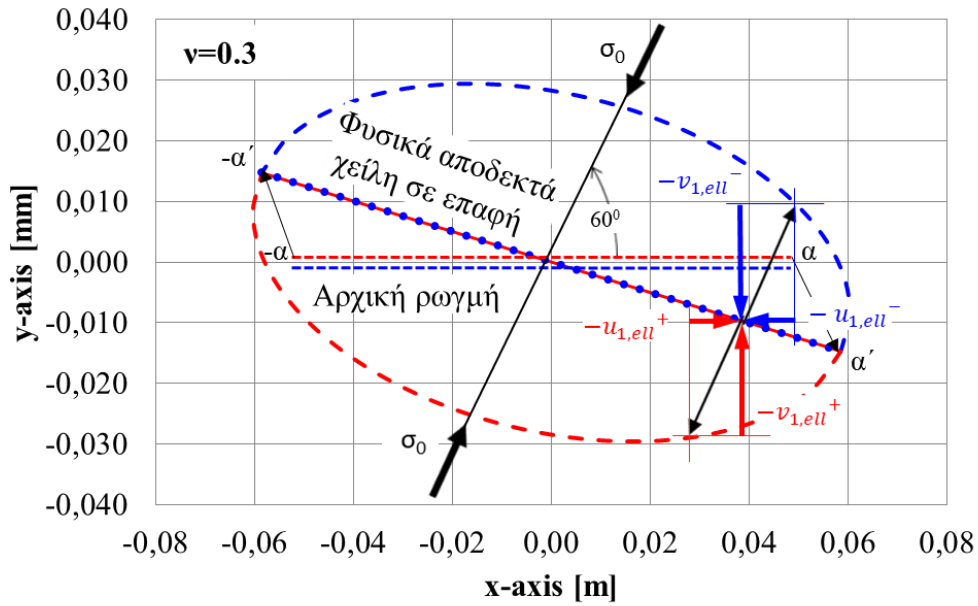
Σχήμα 12. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.2$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



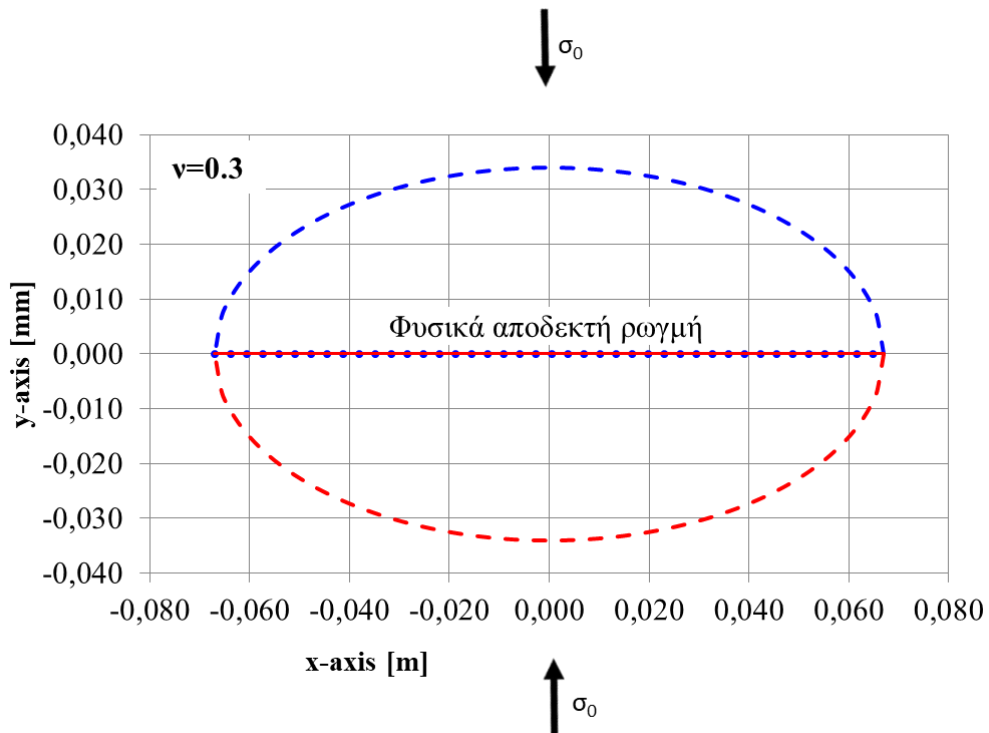
Σχήμα 13. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=1$ (**παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.2$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



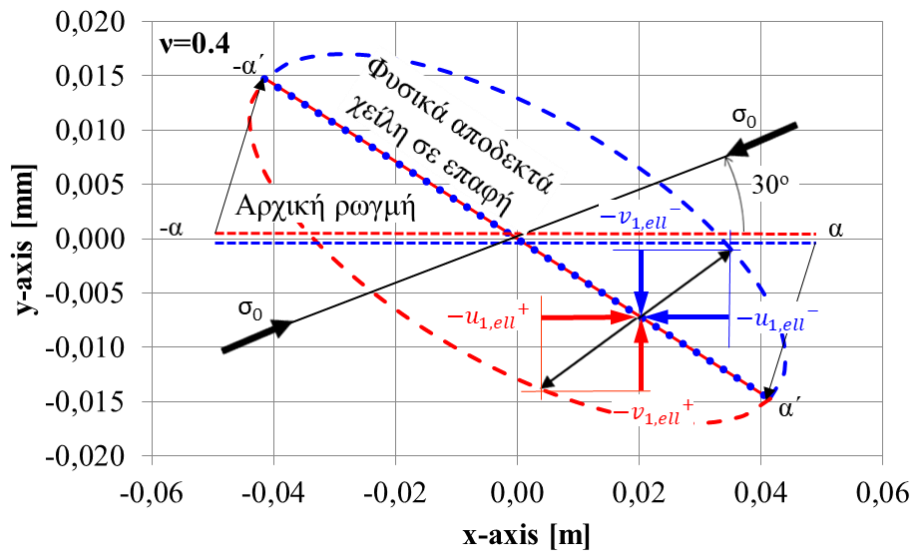
Σχήμα 14. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.3$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



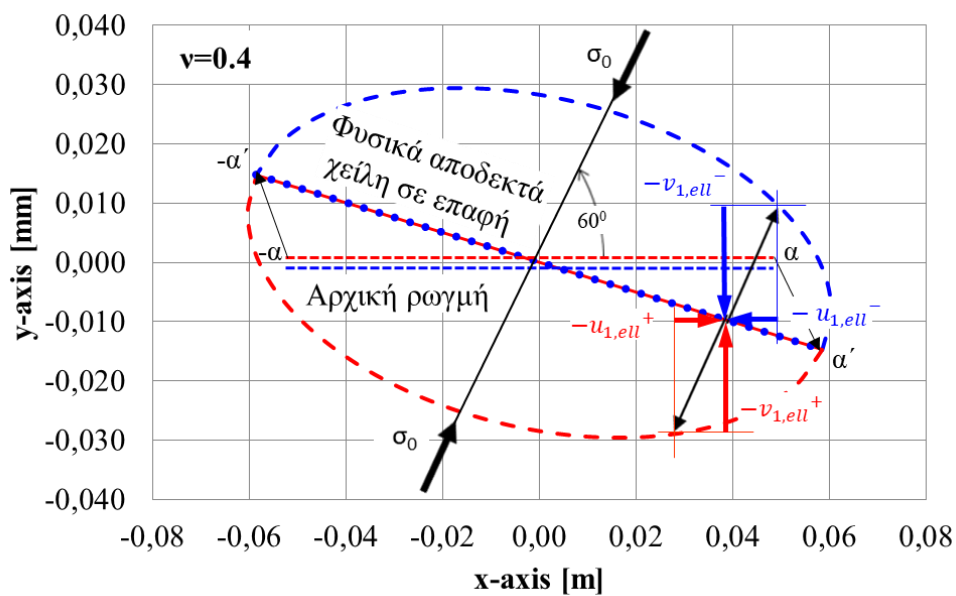
Σχήμα 15 Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.3$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



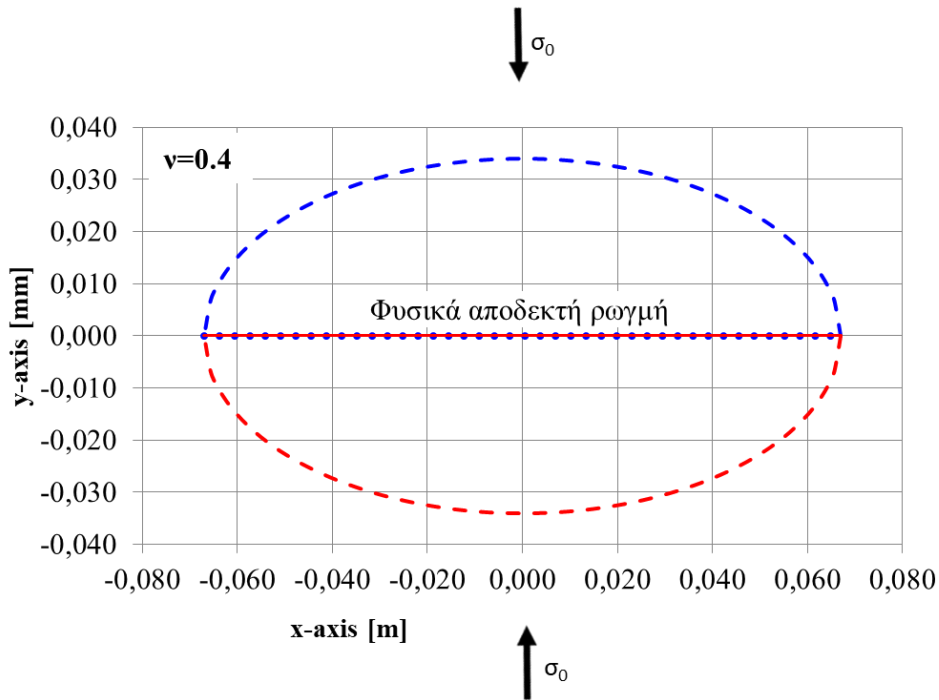
Σχήμα 16. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=1$ (**παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.3$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



Σχήμα 17. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.4$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.

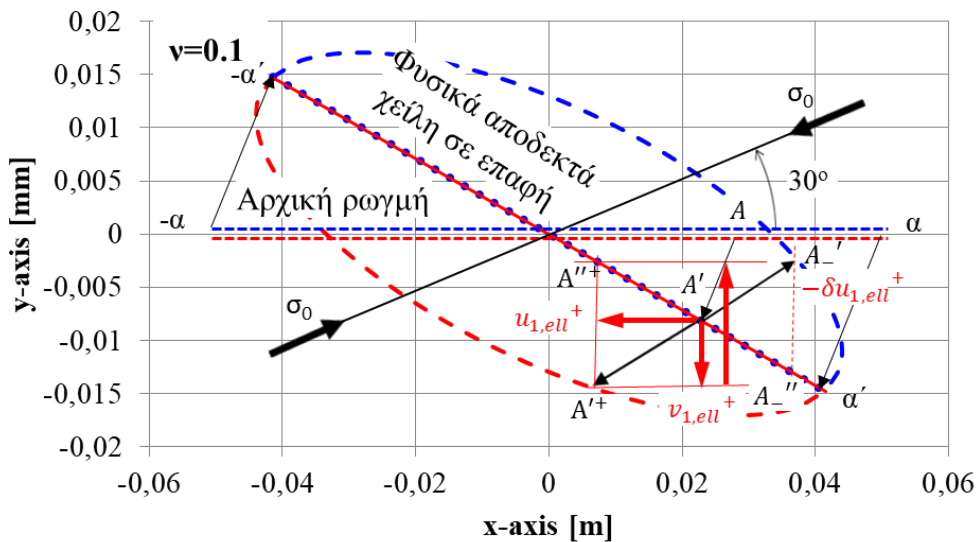


Σχήμα 18. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.4$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.

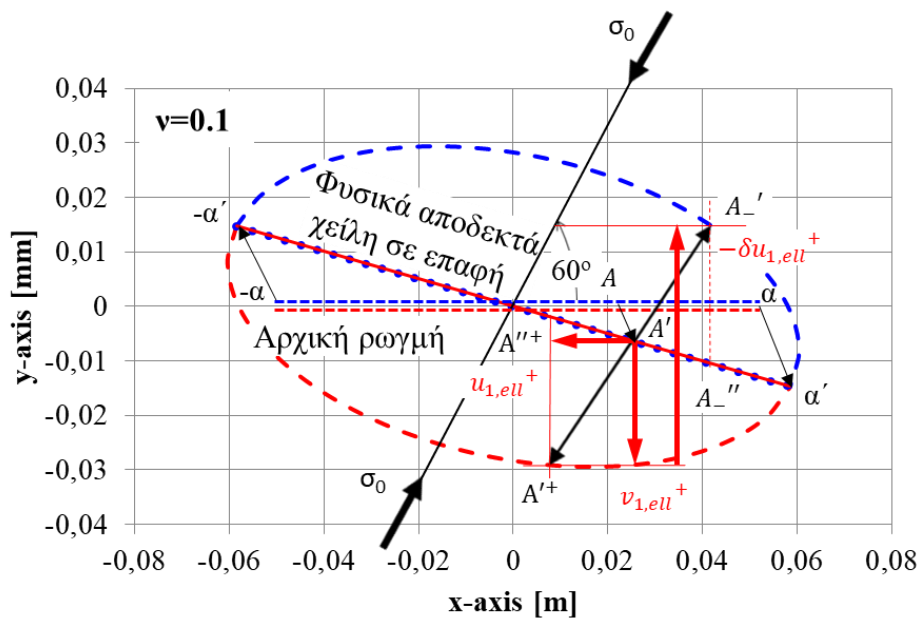


Σχήμα 19. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=1$ (παρουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.4$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.

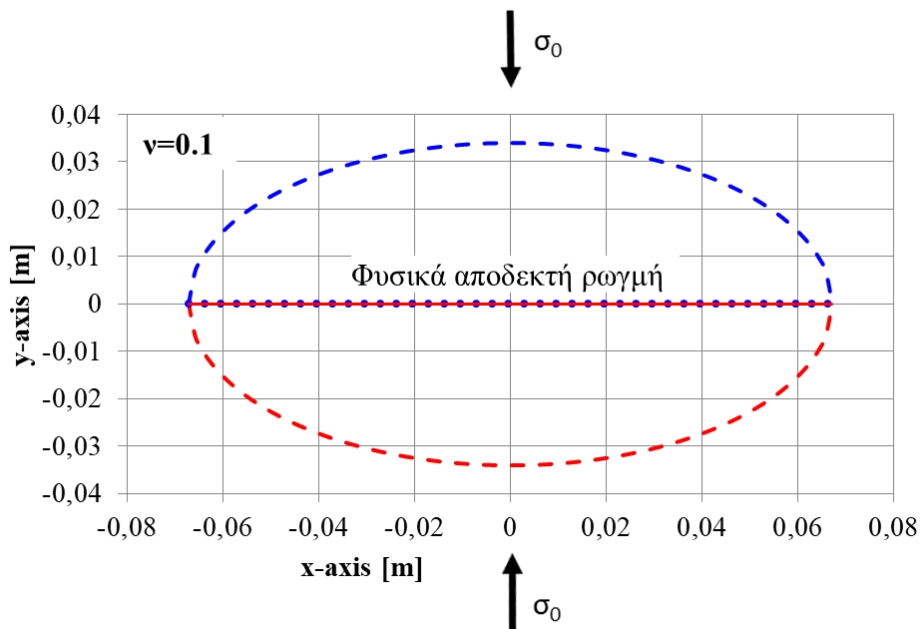
Παραμορφωμένη ρωγμή για διάφορους λόγους Poisson $\nu=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, και γωνίες φόρτισης $\beta=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, για σταθερό μέτρο ελαστικότητας $E=235$ GPa, **απουσία τριβής**



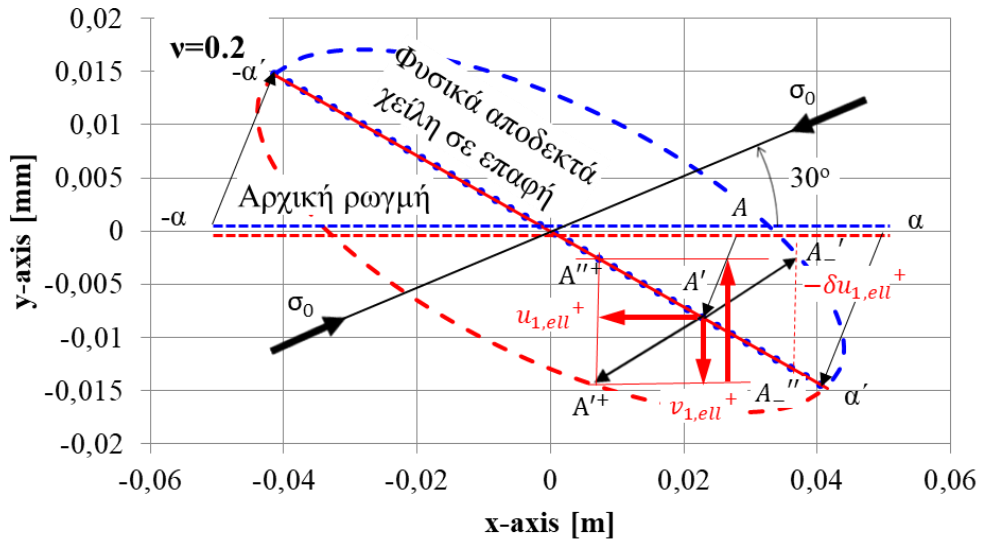
Σχήμα 20. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.1$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



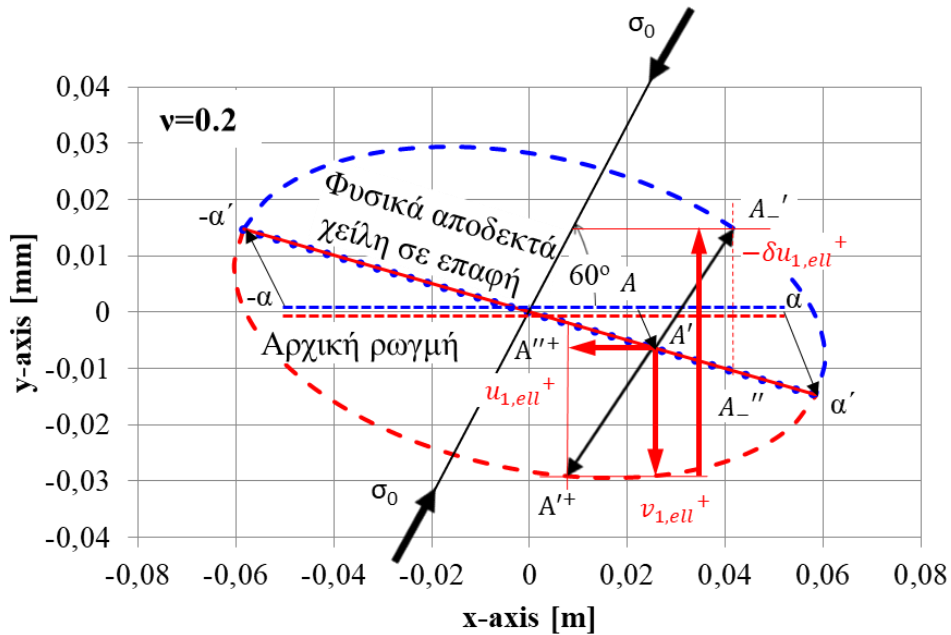
Σχήμα 21. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτά αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναιρέσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτά κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.1$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



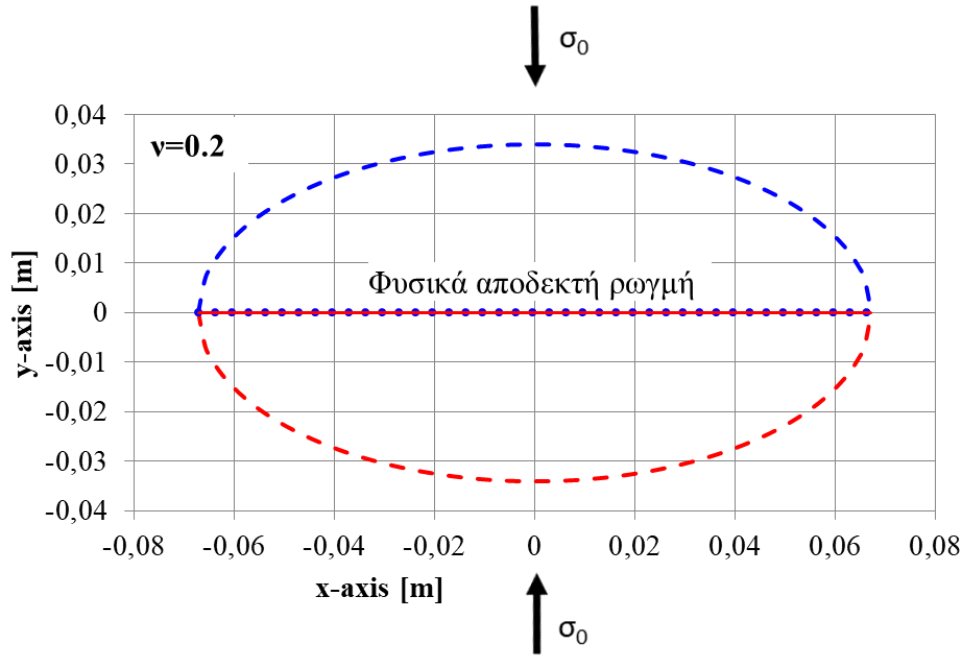
Σχήμα 22. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτά αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναιρέσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1=1$ (**απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτά κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.1$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



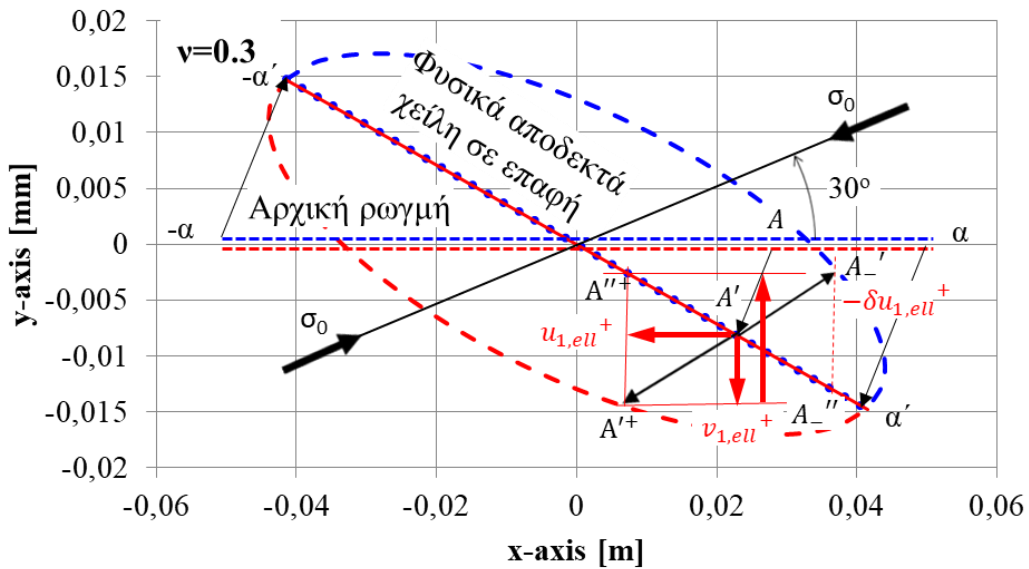
Σχήμα 23. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.2$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



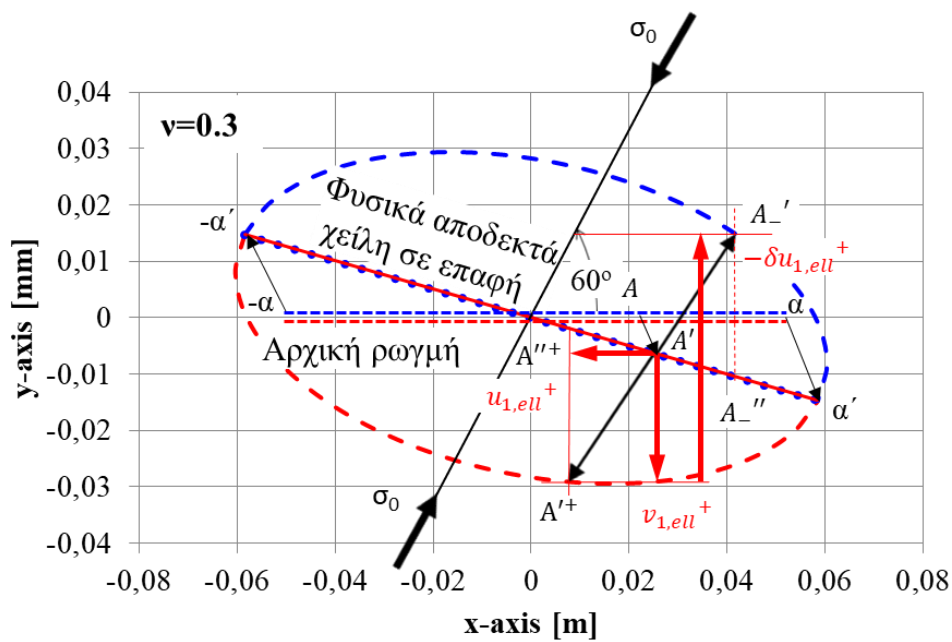
Σχήμα 24. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.2$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



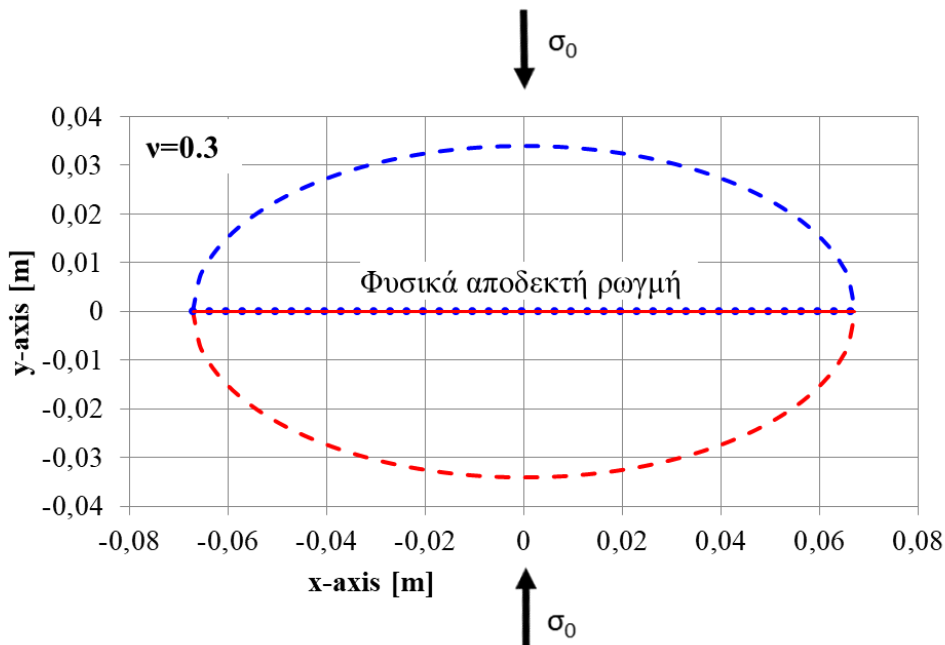
Σχήμα 25. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1=1$ (απουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.2$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



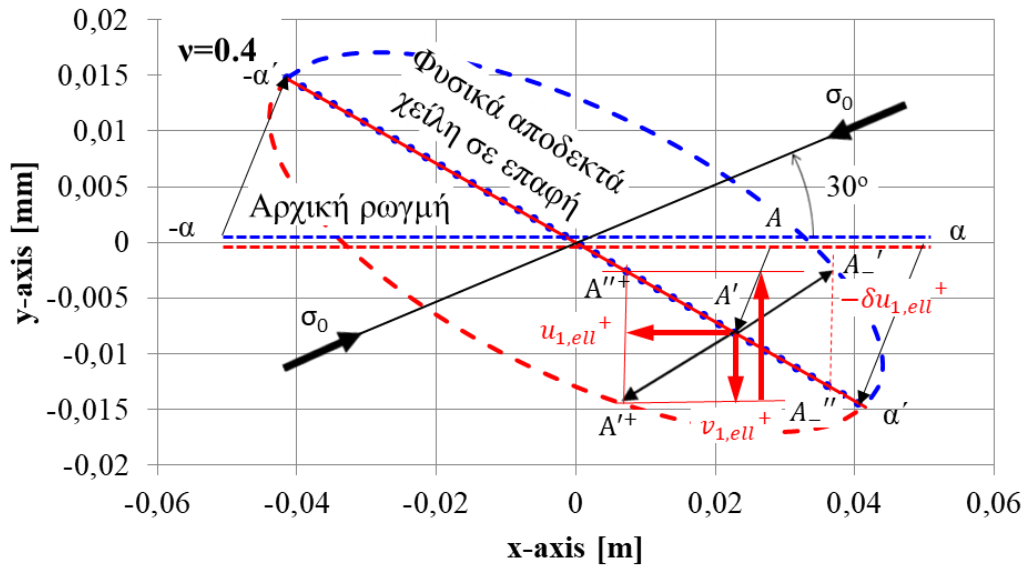
Σχήμα 26. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.3$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



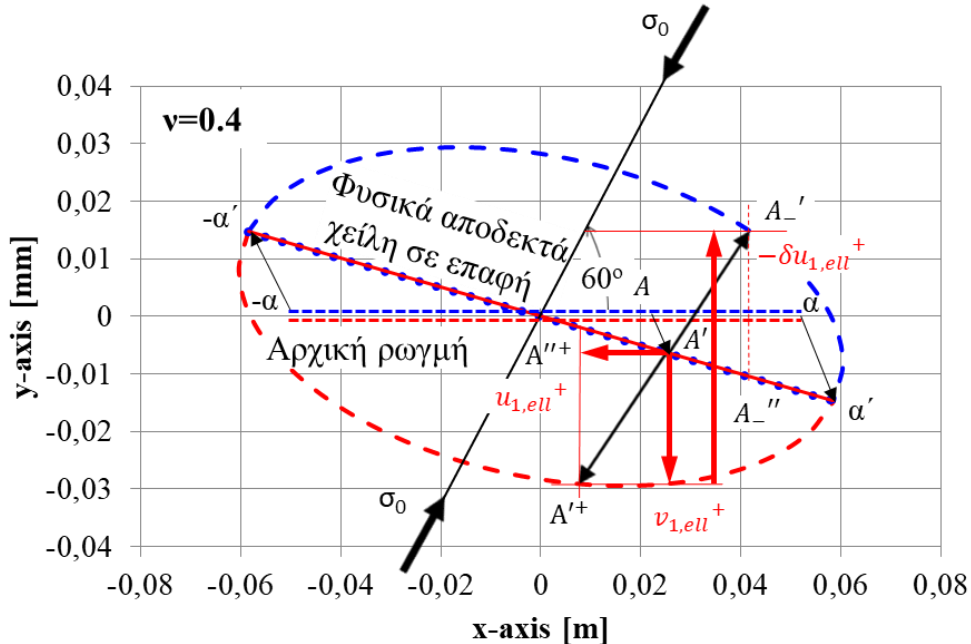
Σχήμα 27. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτά αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτά κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.3$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



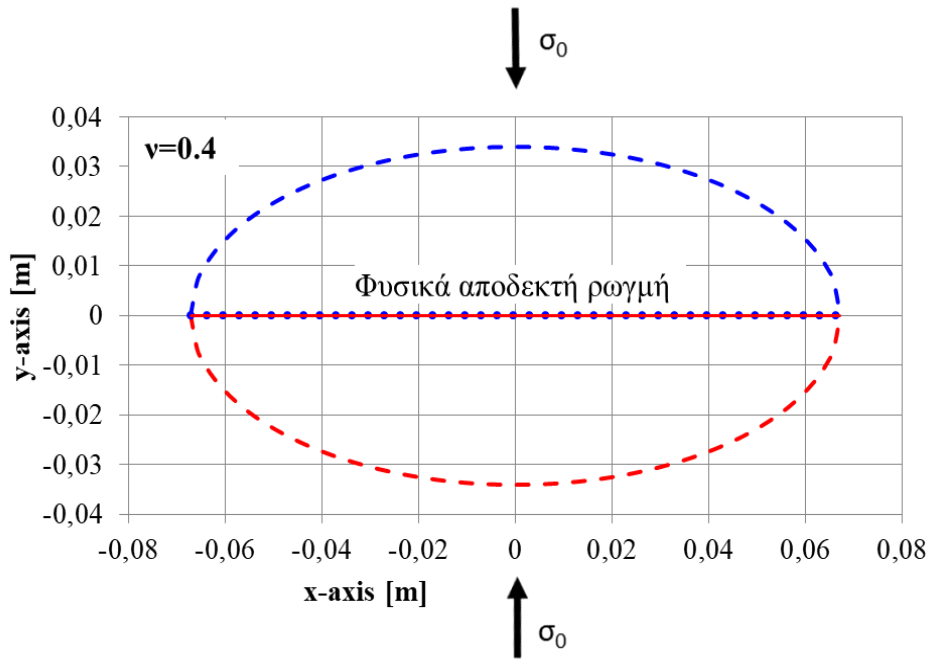
Σχήμα 28. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτά αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (**απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτά κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.3$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



Σχήμα 29. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.4$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.

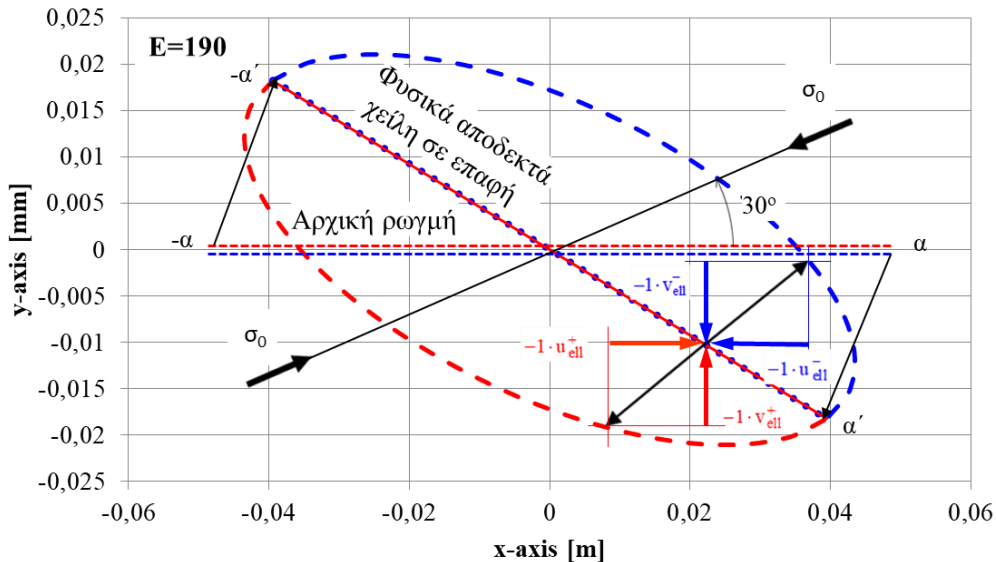


Σχήμα 30. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.4$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.

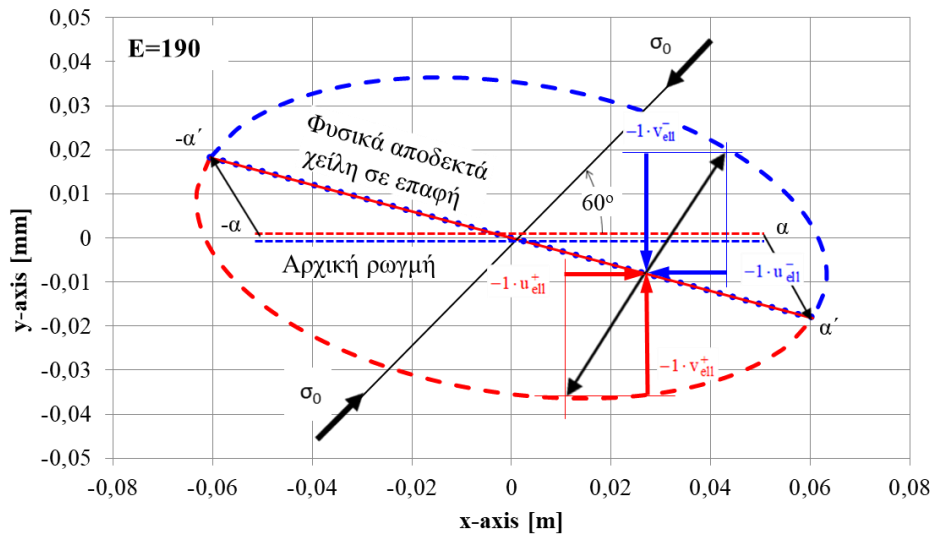


Σχήμα 31. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1=1$ (απουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $\nu=0.4$, $E=235$ GPa και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.

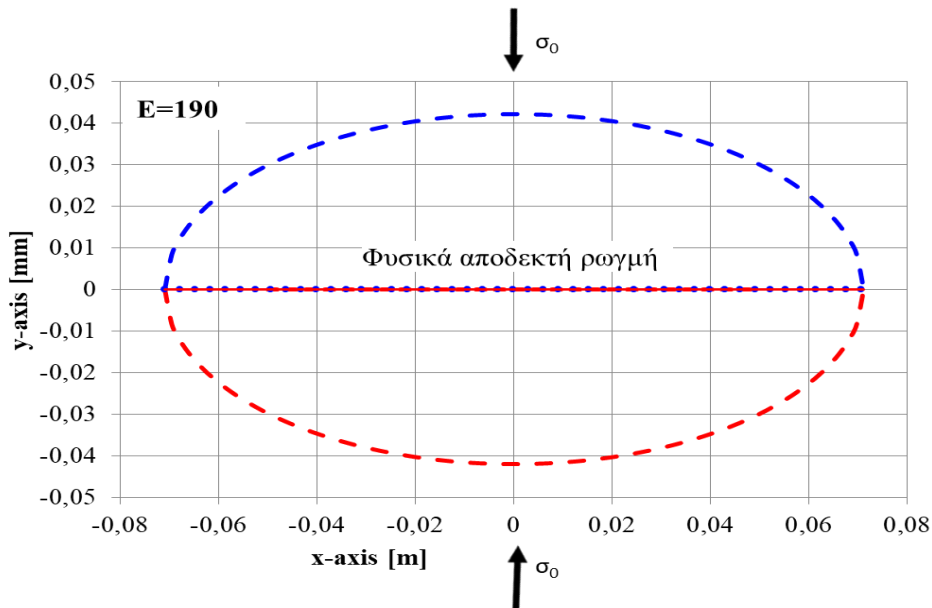
Παραμορφωμένη ρωγμή για διάφορα μέτρα ελαστικότητας $E=190, 220, 250$ GPa και γωνίες φόρτισης $\beta=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, για σταθερό λόγο Poisson $\nu=0.3$, παρουσία τριβής



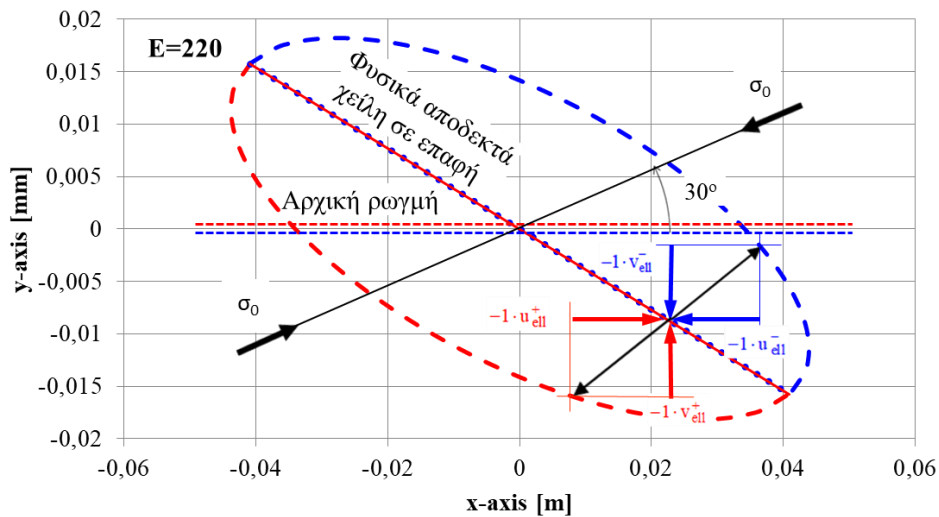
Σχήμα 32. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση παρουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=190$ GPa $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



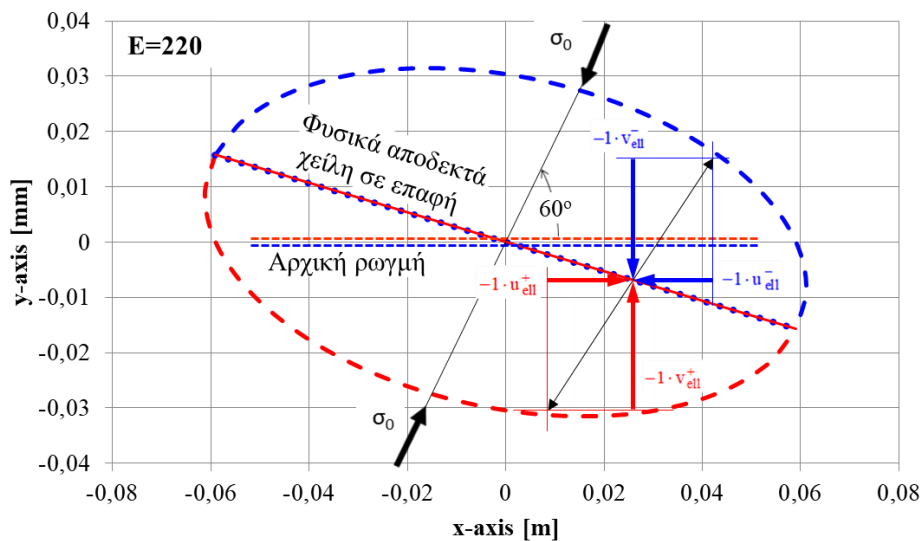
Σχήμα 33. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=190$ GPa $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



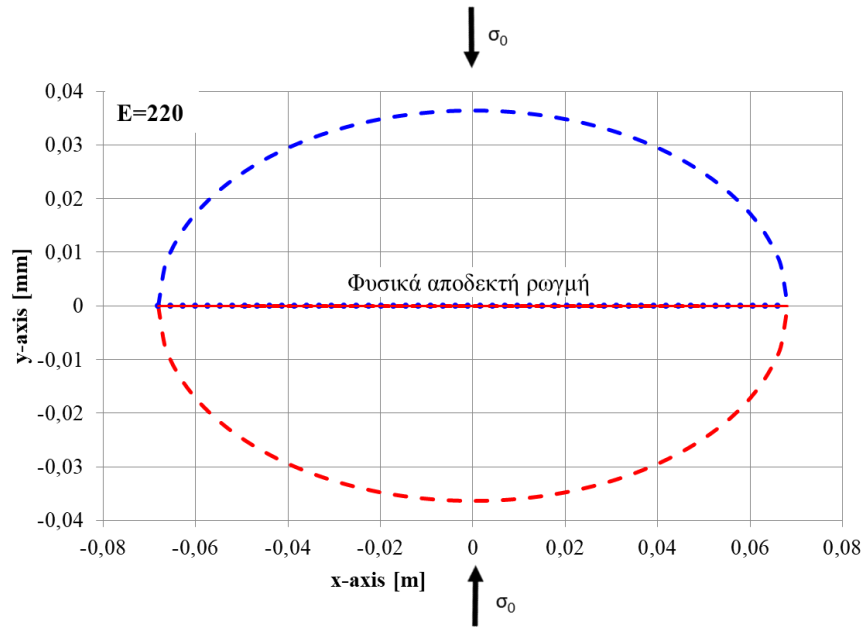
Σχήμα 34. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=1$ (**παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=190$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



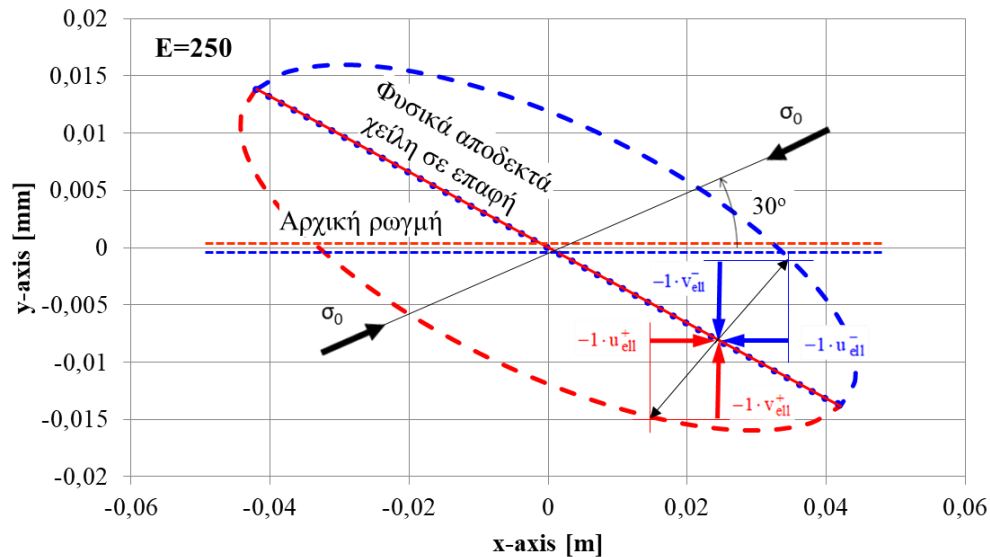
Σχήμα 35. Αρχική-απαρμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=220$ GPa $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



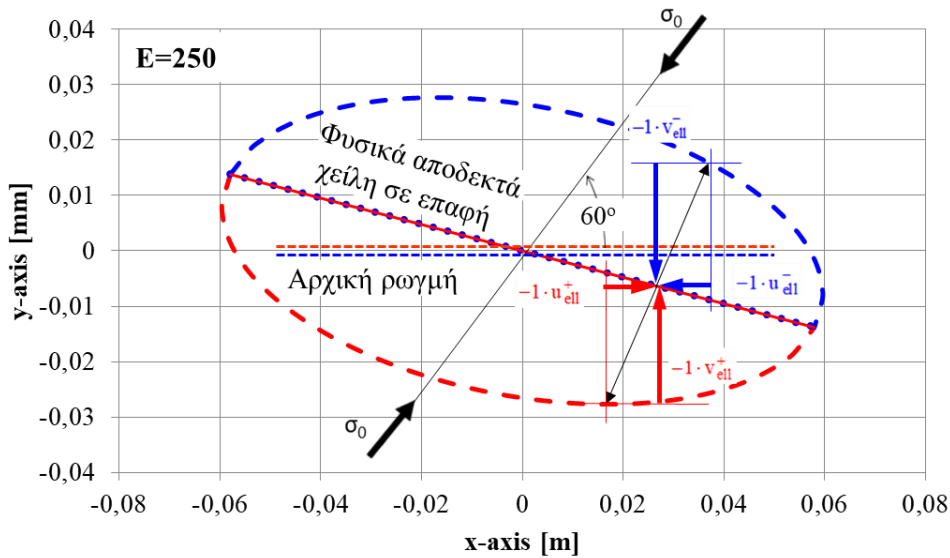
Σχήμα 36. Αρχική-απαρμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=220$ GPa $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



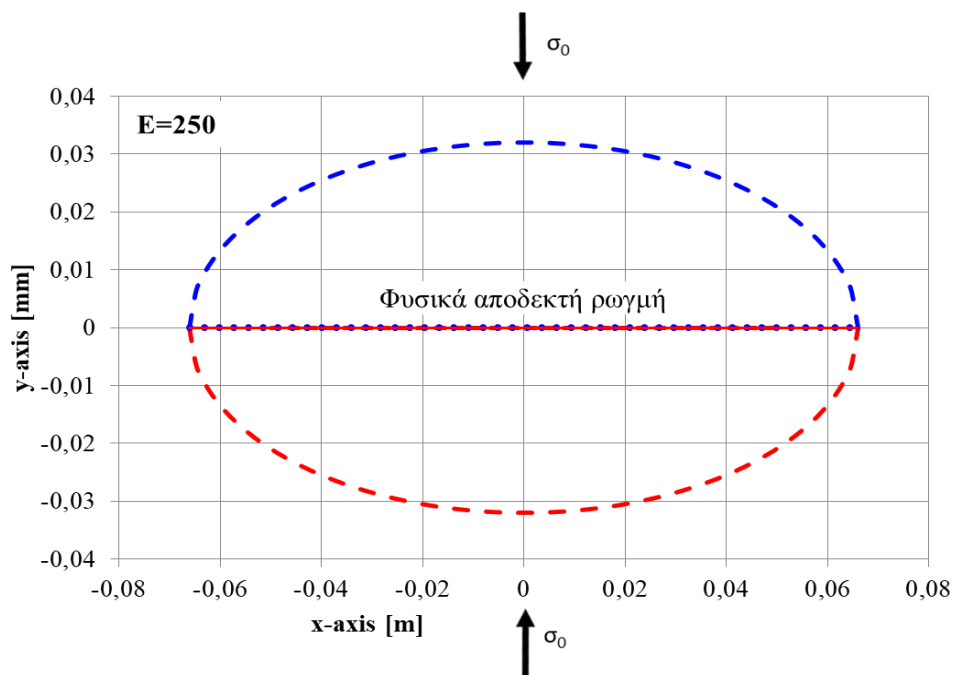
Σχήμα 37. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=1$ (παρουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=220$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



Σχήμα 38. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση παρουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=250$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.

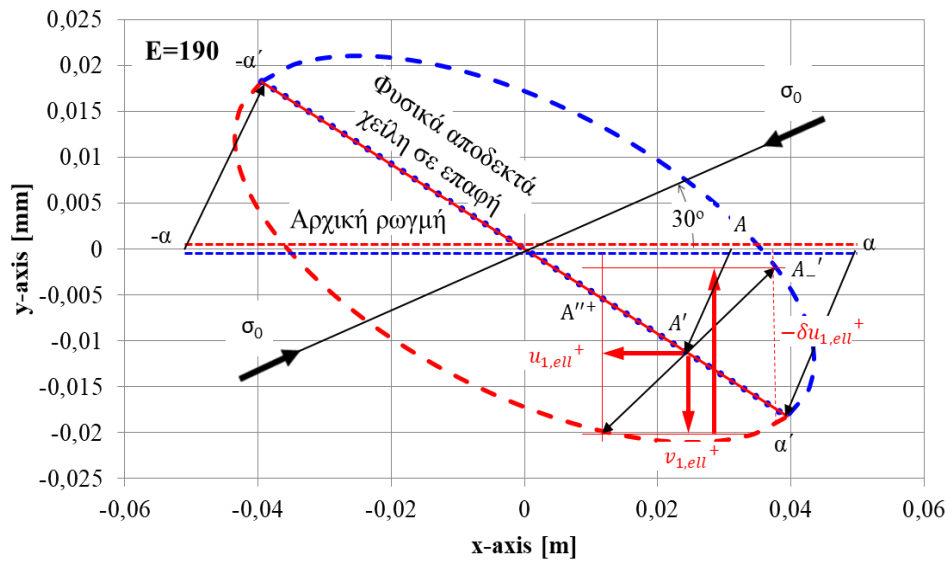


Σχήμα 39. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=\delta=1$ (μηδενική σχετική ολίσθηση **παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=250$ GPa $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.

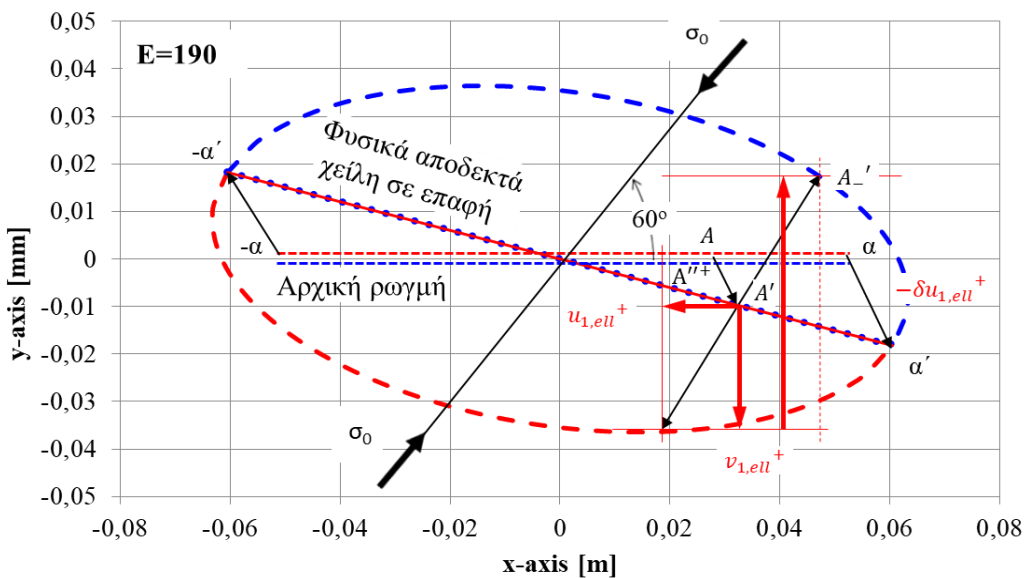


Σχήμα 40. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=1$ (**παρουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=250$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.

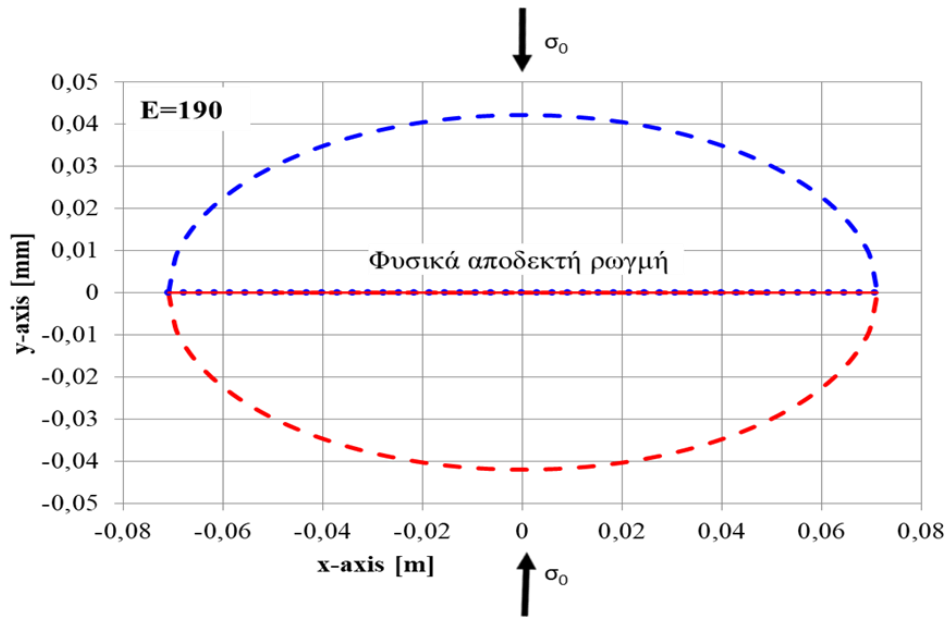
Παραμορφωμένη ρωγμή για διάφορα μέτρα ελαστικότητας $E=190, 220, 250$ GPa και γωνίες φόρτισης $\beta=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, για σταθερό λόγο Poisson $\nu=0.3$, απουσία τριβής



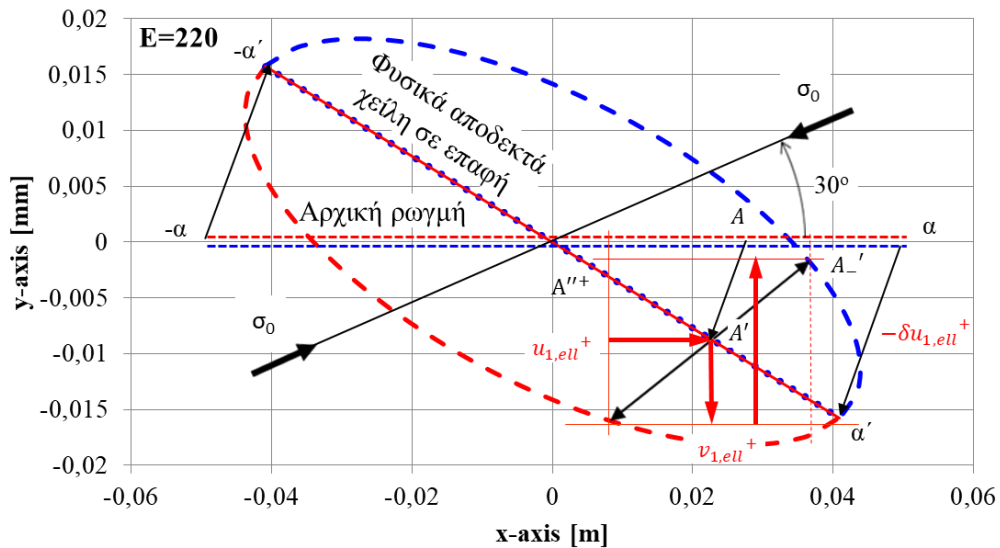
Σχήμα 41. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0, \delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=190$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



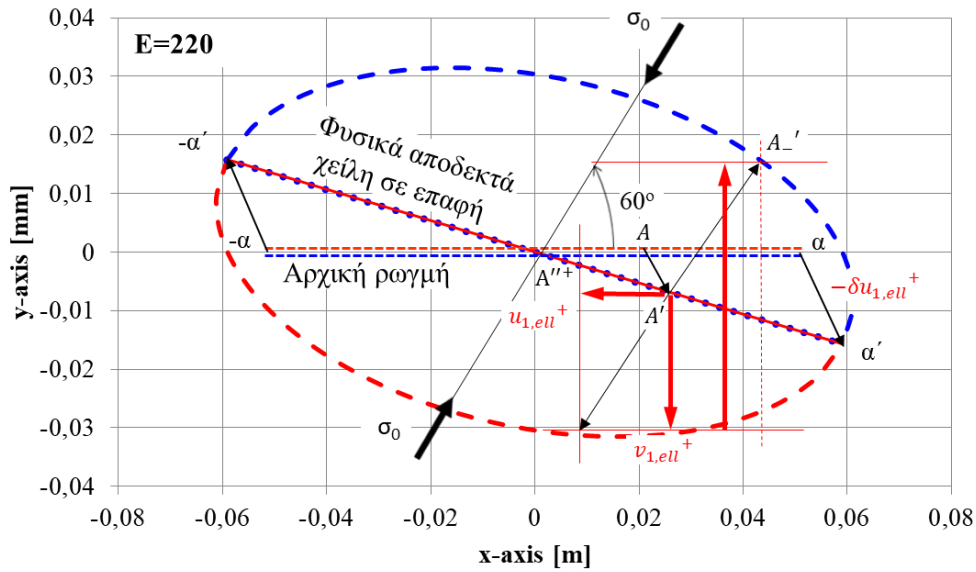
Σχήμα 42. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0, \delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=190$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



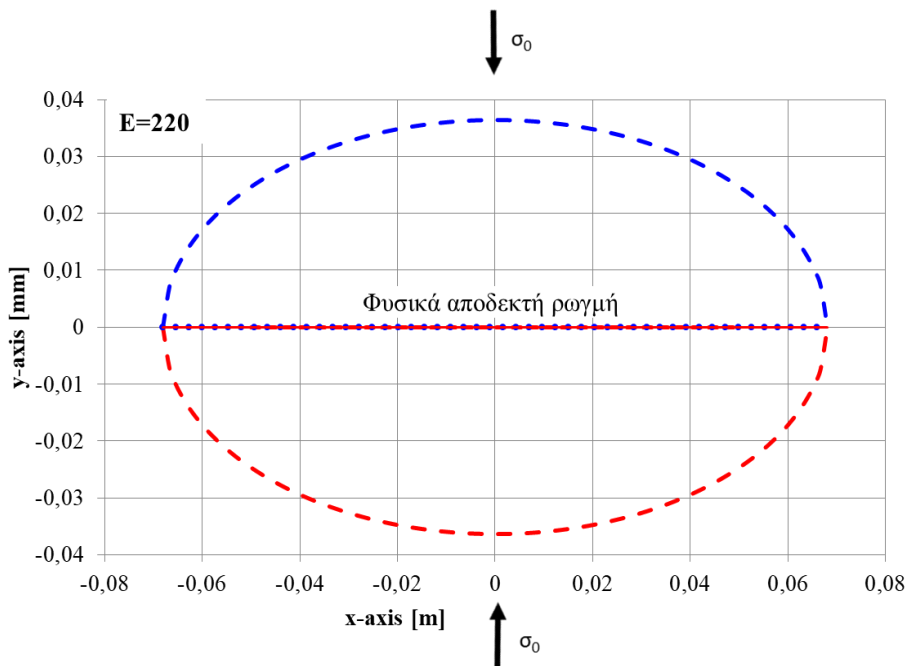
Σχήμα 43. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1=1$ (απουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=190$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



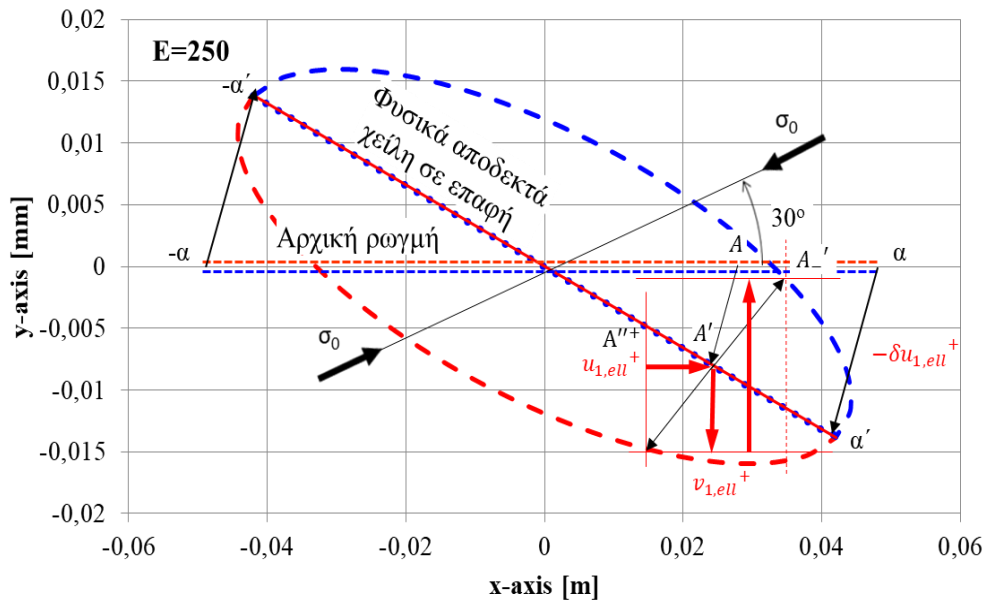
Σχήμα 44. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=220$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



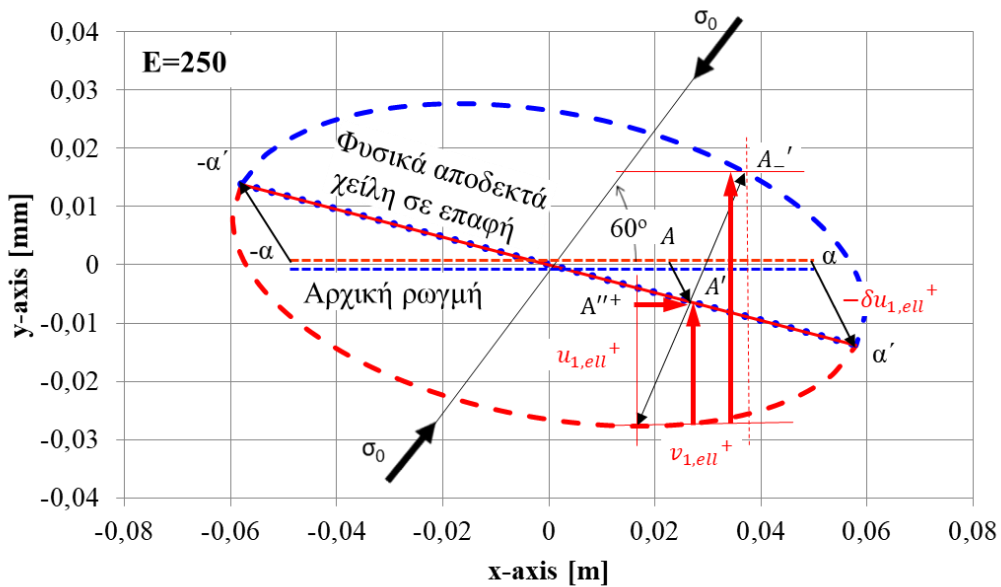
Σχήμα 45. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=220$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



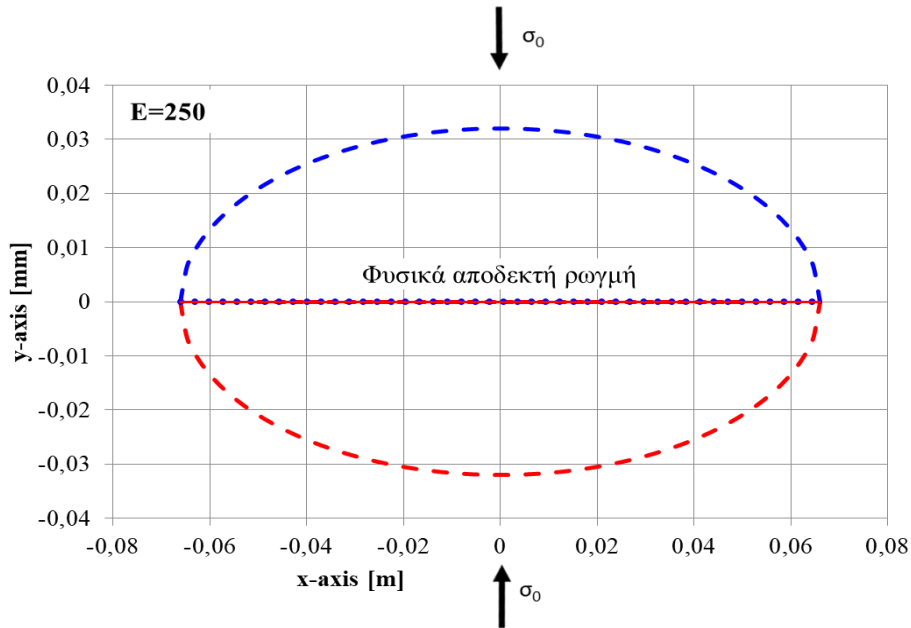
Σχήμα 46. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1=1$ (**απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=220$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.



Σχήμα 47. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=250$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



Σχήμα 48. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση **απουσία τριβής**) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=250$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.



Σχήμα 49. Αρχική-απαραμόρφωτη ρωγμή, μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικαλυμμένη ρωγμή-έλλειψη, ο μηχανισμός αναίρεσης της αλληλοεπικάλυψης για $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1=1$ (απουσία τριβής) και η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή, για $E=250$ GPa, $\nu=0.3$ και γωνία φόρτισης $\beta=90^\circ$.

Μια γενική παρατήρηση που προκύπτει από τα παραπάνω σχήματα, ως αποτέλεσμα της υποθέσεως ότι η φυσικά αποδεκτή κλειστή παραμορφωμένη ρωγμή έχει τη διεύθυνση της ‘ψευδορωγμής’, αλλά και λόγω της πολύ μικρής ενδοτικότητας του υπό μελέτη υλικού, είναι ότι, η παρουσία τριβής μεταξύ των χειλέων της ρωγμής έχει μικρή επίδραση στο πεδίο των μετατοπίσεων στη ρωγμή. Πράγματι, και στις δύο περιπτώσεις (απουσία και παρουσία τριβής) η διεύθυνση της τελικής παραμορφωμένης ρωγμής, δηλαδή η γωνία λ είναι η ίδια αφού εξ’ υποθέσεως ταυτίζεται με τη διεύθυνση της ‘ψευδορωγμής’. Η δε τελική θέση της αιχμής της ρωγμής στην παραμορφωμένη γεωμετρία διαφέρει πολύ λίγο μεταξύ των δύο ακραίων περιπτώσεων, 1^{ης} (πλήρης σχετική ολίσθηση απουσία τριβής) και 2^{ης} (μηδενική σχετική ολίσθηση παρουσία τριβής), λόγω του μεγάλου μέτρου ελαστικότητας E του υλικού. Όσον αφορά στην επίδραση του λόγου Poisson ν (μόνο στην επίπεδη παραμόρφωση) και του μέτρου ελαστικότητας E (και στην επίπεδη παραμόρφωση και στην επίπεδη ένταση) στη μορφή της παραμορφωμένης ρωγμής και δη στη μεταβολή του μήκους της ρωγμής, αλλά και της στερεάς στροφής λ της ρωγμής (ουσιαστικά της ‘ψευδορωγμής’), σημειώνονται τα εξής.

Το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής είναι:

$$\text{μήκος παραμορφωμένης ρωγμής} = 2\sqrt{[\alpha + u(\alpha)]^2 + v(\alpha)^2} \quad (131)$$

με τις συνιστώσες της μετατόπισης $u(\alpha)$ και $v(\alpha)$ να δίνονται από Εξς. (89) και (90). Θεωρώντας σταθερό μέτρο ελαστικότητας $E=235$ GPa, ομοιόμορφη τάση στα σύνορα της πλάκας $\sigma_0 = -10$ MPa, υπό γωνία $\beta=60^\circ$ ως προς τη ρωγμή και κατάσταση επίπεδης

παραμόρφωσης, όταν ο λόγος Poisson είναι $\nu=0.1$, το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής ισούται με 100.002 mm, δηλαδή παρατηρείται αύξηση 2‰ σε σχέση με την αρχικά απαραμόρφωτη ρωγμή $2a=100$ mm.

Για λόγο Poisson $\nu=0.2$, το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής γίνεται 100.003 mm, δηλαδή παρατηρείται μια αύξηση 3‰ σε σχέση με την αρχικά απαραμόρφωτη ρωγμή $2a=100$ mm.

Για λόγο Poisson $\nu=0.3$, το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής γίνεται 100.004 mm, δηλαδή παρατηρείται μια αύξηση 4‰ σε σχέση με την αρχικά απαραμόρφωτη ρωγμή $2a=100$ mm.

Για λόγο Poisson $\nu=0.4$, το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής γίνεται 100.005 mm, δηλαδή παρατηρείται μια αύξηση 5‰ σε σχέση με την αρχικά απαραμόρφωτη ρωγμή $2a=100$ mm.

Δηλαδή, μεταξύ των τιμών του λόγου Poisson $\nu=0.1$ και $\nu=0.4$, παρατηρείται μια αύξηση στην αύξηση του μήκους της ρωγμής κατά 50%, ωστόσο κατά απόλυτο τιμή η αύξηση στο μήκος της ρωγμής είναι αμελητέα.

Ανάλογα, για σταθερό λόγο Poisson $\nu=0.3$, όταν το μέτρο ελαστικότητας είναι $E=190$ GPa, το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής ισούται με 100.0024 mm, δηλαδή παρατηρείται αύξηση 24‰ σε σχέση με την αρχικά απαραμόρφωτη ρωγμή $2a=1000$ mm.

Για μέτρο ελαστικότητας $E=220$ GPa, το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής γίνεται 100.0021 mm, δηλαδή παρατηρείται μια αύξηση 21‰ σε σχέση με την αρχικά απαραμόρφωτη ρωγμή $2a=100$ mm.

Για δε μέτρο ελαστικότητας $E=250$ GPa, το μήκος της παραμορφωμένης ρωγμής γίνεται 100.0018mm, δηλαδή παρατηρείται αύξηση 18‰ σε σχέση με την αρχικά απαραμόρφωτη ρωγμή $2a=100$ mm.

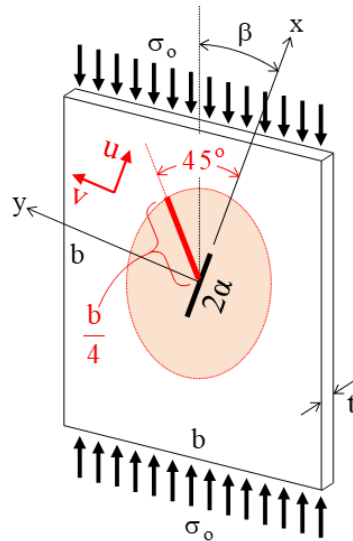
Δηλαδή, μεταξύ των τιμών του μέτρου ελαστικότητας $E=190$ και 250 GPa, παρατηρείται μια μείωση στην αύξηση του μήκους της ρωγμής κατά περίπου 30%, ωστόσο κατά απόλυτο τιμή η αύξηση στο μήκος της ρωγμής είναι αμελητέα.

Όσον αφορά στην επίδραση του λόγου Poisson ν και του μέτρου ελαστικότητας E στη στερεά στροφής λ της ρωγμής, αυτή μελετάται στη μεθεπόμενη παράγραφο 3.3, σε αντιδιαστολή με τη στερεά στροφή της υλικής γραμμής $2a$ της αντίστοιχης αρηγμάτωτης πλάκας.

3.3 Το πεδίο των μετατοπίσεων στο εσωτερικό της ρηγματωμένης μεταλλικής πλάκας και η επίδραση της ρωγμής

Στη συνέχεια, παρατίθενται διαγράμματα κατανομής των καρτεσιανών συνιστωσών της μετατόπισης $u(x,y)$ και $v(x,y)$ κατά μήκος της τυχαίας διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή,

από την αρχή των αξόνων και έως τυχαία απόσταση $b/4=0.25$ m (υπενθυμίζεται ότι, $a=0.05$ m), Σχήμα 50.

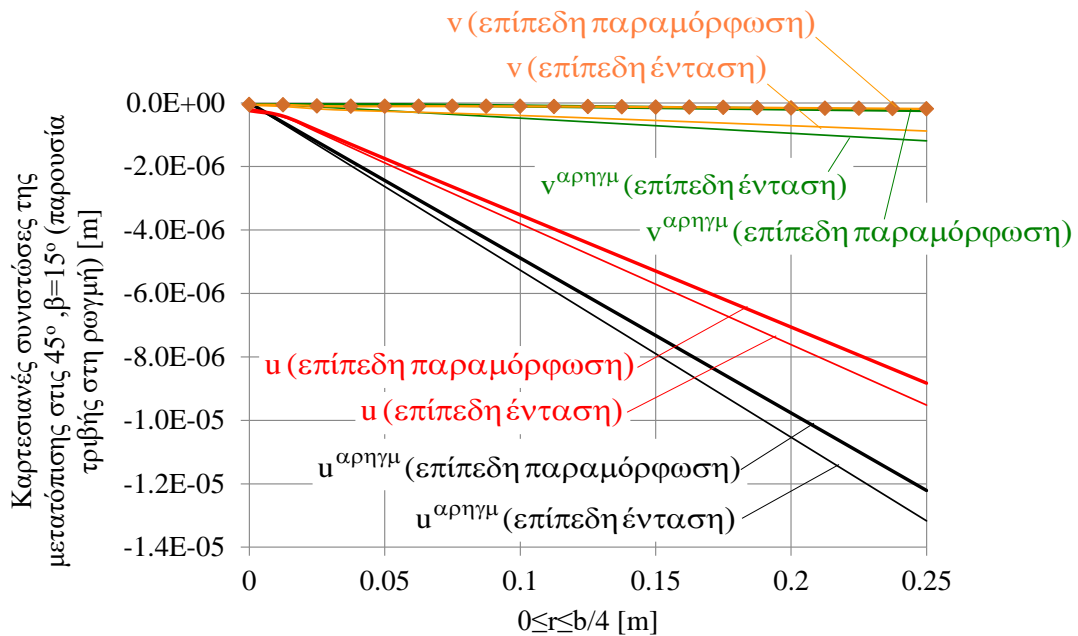


Σχήμα 50. Το τμήμα ($0 \leq r \leq b/4$, κόκκινη έντονη γραμμή) υπολογισμού των μετατοπίσεων.

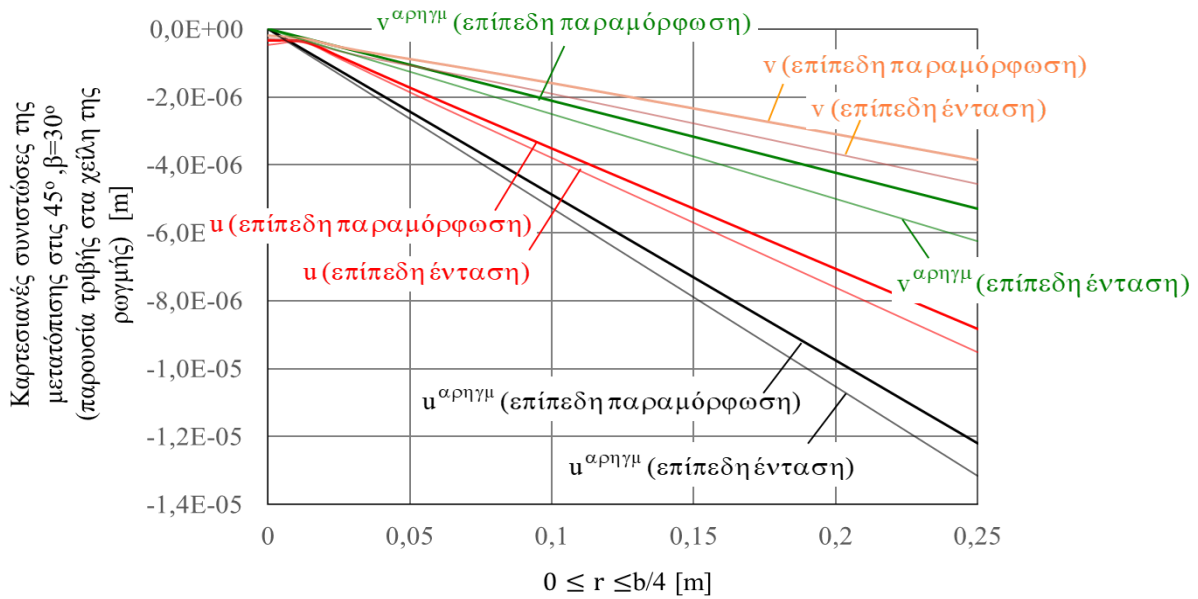
Για τη χάραξη των διαγραμμάτων θεωρήθηκε χάλυβας μέτρου ελαστικότητας $E=235$ GPa και λόγου Poisson $\nu=0.3$. Επίσης, θεωρήθηκαν οι γωνίες φόρτισης $\beta=15^\circ, 30^\circ$ και 60° . Στα διαγράμματα αυτά φαίνονται οι αντίστοιχες κατανομές των συνιστωσών της μετατόπισης τόσο στη ρηγματωμένη όσο και στην αρηγμάτωτη μεταλλική πλάκα, για την εκτίμηση της επίδρασης μιας μικρής ρωγμής, για τη περίπτωση παρουσίας ($\tau=\delta=1$) και απουσίας ($\tau=0, \delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$) τριβής μεταξύ των χειλέων της ρωγμής. Όσον αφορά στις μετατοπίσεις στη ρηγματωμένη πλάκα, χρησιμοποιήθηκε το πεδίο των μετατοπίσεων όπως προκύπτει από την αντικατάσταση των εκφράσεων των μιγαδικών δυναμικών του ‘γενικού προβλήματος’ (Εξς. (79), (81), (82)), στη γνωστή σχέση [19]:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} \quad (132)$$

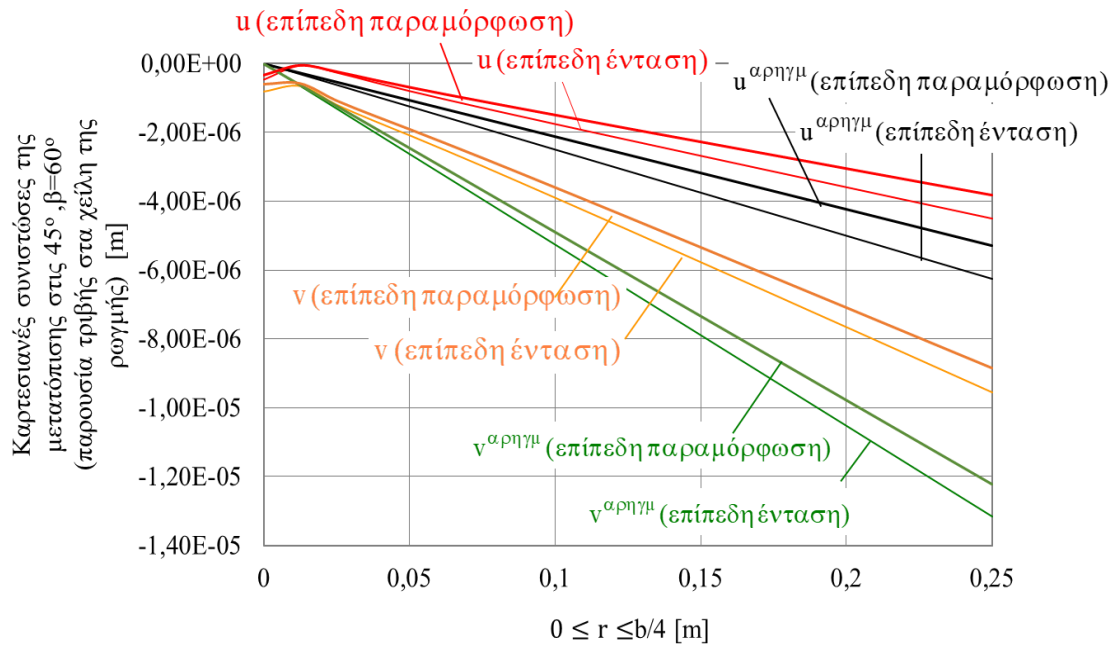
Για τα διαγράμματα των μετατοπίσεων για την αντίστοιχη αρηγμάτωτη πλάκα, χρησιμοποιήθηκαν οι Εξς. (118) και (119). Επίσης, οι υπολογισμοί έγιναν με το πρόγραμμα WOLFRAM MATHEMATICA 10 και η χάραξη των διαγραμμάτων με το πρόγραμμα EXCEL (αυτόματη εξαγωγή αποτελεσμάτων από το MATHEMATICA στο EXCEL).



Σχήμα 51. Οι κατανομές των μετατοπίσεων u και v κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, παρουσία τριβής ($\tau=\delta=1$ και μηδενική σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, για γωνία φόρτισης $\beta=15^\circ$.

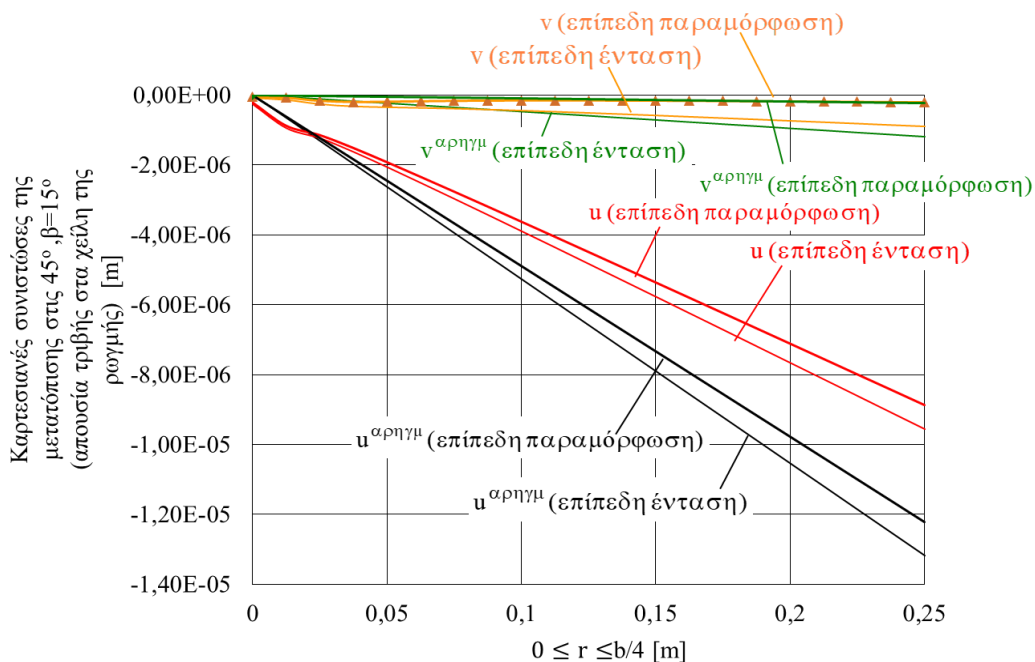


Σχήμα 52. Οι κατανομές των μετατοπίσεων u και v κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, παρουσία τριβής ($\tau=\delta=1$ και μηδενική σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, για γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.

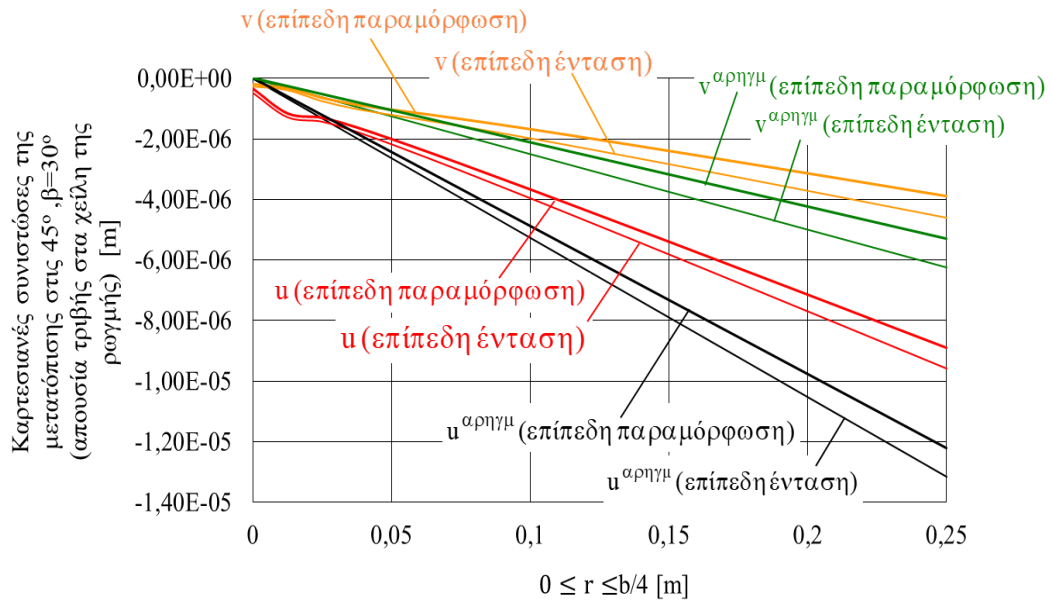


Σχήμα 53. Οι κατανομές των μετατοπίσεων u και v κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, παρουσία τριβής ($\tau=\delta=1$ και μηδενική σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, για γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.

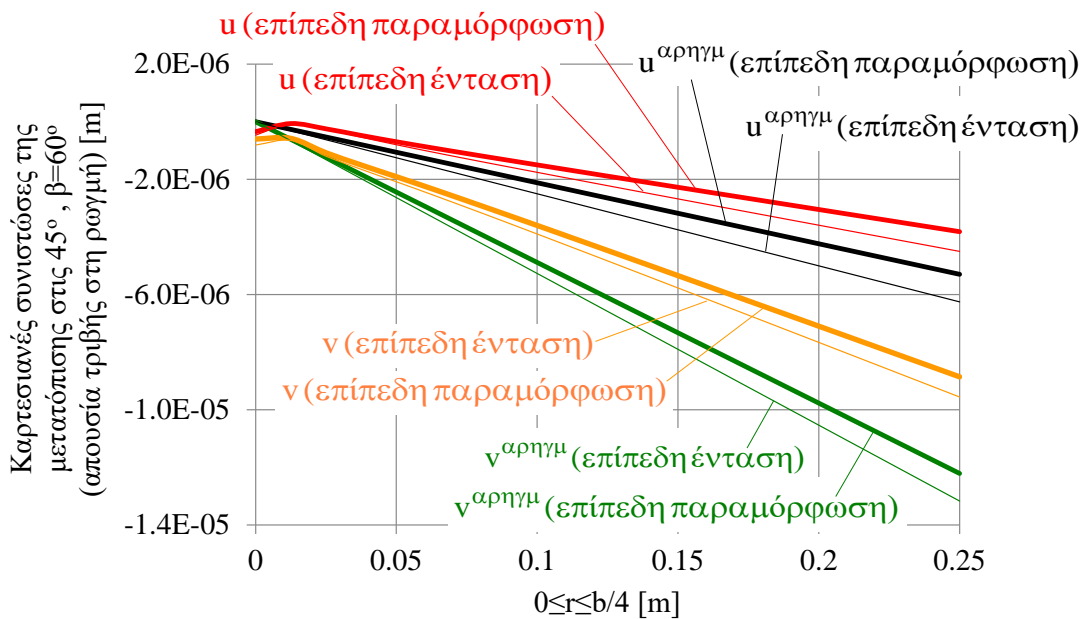
Στα Σχήματα 54, 55 και 56, φαίνονται τα ανάλογα διαγράμματα στην περίπτωση απουσίας τριβής ($\tau=0$, $\delta=tan\lambda \cdot tan\omega+1$) και μέγιστης σχετικής ολίσθησης των χειλέων της κλειστής ρωγμής.



Σχήμα 54. Οι κατανομές των μετατοπίσεων u και v κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, απουσία τριβής $\tau=0$, $\delta=tan\lambda \cdot tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για γωνία φόρτισης $\beta=15^\circ$.



Σχήμα 55. Οι κατανομές των μετατοπίσεων u και v κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, απουσία τριβής $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



Σχήμα 56. Οι κατανομές των μετατοπίσεων u και v κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, απουσία τριβής $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα στα Σχήματα 51, 52 και 53, στην περίπτωση παρουσίας τριβής ($\tau=\delta=1$), υπάρχει η μικρότερη επίδραση της ρωγμής στο πεδίο των μετατοπίσεων. Οι διαφορές σε αυτήν την περίπτωση μεταξύ ρηγματωμένης και αρηγμάτωτης πλάκας οφείλονται στη στερεά στροφή λ και τη μεταβολή του μήκους της ρωγμής λόγω των μη μηδενικών γραμμικών όρων της μετατόπισης (οι ελλειπτικοί όροι της μετατόπισης μηδενίζονται για $\tau=\delta=1$), που στην περίπτωση παρουσίας ρωγμής οι τιμές τους είναι μεγαλύτερες σε σύγκριση με τα αντίστοιχα μεγέθη για την υλική γραμμή 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα.

Ενώ όπως φαίνεται από τα διαγράμματα στα Σχήματα 54, 55 και 56, στην περίπτωση απουσίας τριβής, υπάρχει η μέγιστη επίδραση της ρωγμής στο πεδίο των μετατοπίσεων. Οι διαφορές σε αυτήν την περίπτωση μεταξύ ρηγματωμένης και αρηγμάτωτης πλάκας δεν οφείλονται μόνο στη στερεά στροφή και τη μεταβολή του μήκους της ρωγμής λόγω των μη μηδενικών γραμμικών όρων της μετατόπισης, αλλά και στους μη μηδενικούς σε αυτήν την περίπτωση ελλειπτικούς όρους της μετατόπισης που προκαλούν τη μέγιστη σχετική ολίσθηση των χειλέων της κλειστής κατά τα άλλα ρωγμής.

Επισημαίνεται πάντως ότι, αυξανόμενη της απόστασης από την αρχή των αξόνων, οι καμπύλες των μετατοπίσεων της ρηγματωμένης πλάκας συγκλίνουν στις αντίστοιχες της αρηγμάτωτης και θεωρητικά ταυτίζονται απόλυτα στο άπειρο όπου χάνεται η επίδραση της ρωγμής στο πεδίο των μετατοπίσεων (αυτό δεν φαίνεται στα παραπάνω σχήματα που η μεταβολή των μετατοπίσεων περιορίζεται, για λόγους ευκρίνειας, στην εγγύς στη ρωγμή περιοχή ακτίνας $b/4$).

3.4 Οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής στη ρηγματωμένη μεταλλική πλάκα και η στερεά στροφή της ρωγμής καθώς και το αντίστοιχο τασικό πεδίο και στερεά στροφή στην υλική γραμμή 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα

Όπως προκύπτει από τις Εξς. (85) και (86), οι τάσεις επαφής σ_{yy} και σ_{xy} στα χείλη της ρωγμής είναι ομοιόμορφα κατανομημένες κατά μήκος της ρωγμής 2α, όπως ομοιόμορφα κατανομημένες είναι και η κάθετη και διατμητική τάση στην υλική ευθεία 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα, σύμφωνα με τις Εξς. (115) και (116), αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκφράσεις και για τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος που ορίζονται παρακάτω, παρατίθενται πίνακες με αριθμητικά αποτελέσματα για τις τιμές των τάσεων επαφής στα χείλη της ρωγμής, παράλληλα με τις αντίστοιχες τάσεις στην υλική ευθεία 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα. Επίσης, παρατίθενται οι τιμές της γωνίας λ της στερεάς στροφής της ρωγμής σε αντιδιαστολή με τη στροφή της αντίστοιχης υλικής γραμμής 2α της αρηγμάτωτης πλάκας.

Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων έγινε ο βασικός διαχωρισμός μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης, δηλαδή για $\kappa=3-4\nu$ (Πίνακες 1 έως 8), και επίπεδης έντασης, δηλαδή για $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ (Πίνακες 9 έως 16). Σημειώνεται ότι, όσον αφορά στα πεδία των τάσεων η παραπάνω διάκριση δεν επηρεάζει την αρηγμάτωτη πλάκα, αφού το υλικό δεν υπεισέρχεται στις σχετικές εκφράσεις των τάσεων. Ωστόσο, η διαφοροποίηση μεταξύ κατάστασης επίπεδης

παραμόρφωσης - επίπεδης έντασης επηρεάζει το πεδίο των τάσεων στη ρηγματωμένη πλάκα, όπως φαίνεται από τις Εξς. (85) και (86). Πράγματι, το υλικό και δη ο λόγος Poisson ν υπεισέρχεται άμεσα στις Εξς. (85) και (86) για τις τάσεις μέσω της σταθεράς κ του Muskhelishvili, αλλά και έμμεσα μέσω του συντελεστή $\delta = \delta(\lambda)$ (πρβλ. Εξς. (34), (39), (46)).

Περαιτέρω, έγινε ο διαχωρισμός μεταξύ των περιπτώσεων απουσίας τριβής, 1^η περίπτωση παραγράφου 3, για $\tau=0$ και $\delta = \tan\lambda \cdot \tan\omega + 1$ (Πίνακες 1 έως 4 και 9 έως 12), και παρουσίας τριβής, 2^η περίπτωση παραγράφου 3, με $\tau = \delta = 1$ (Πίνακες 5 έως 8 και 13 έως 16). Οι τάσεις και οι γωνίες στροφής υπολογίστηκαν για ομοιόμορφη θλιπτική τάση στα σύνορα της πλάκας ίση με $\sigma_0 = -10$ MPa, για γωνίες φόρτισης $\beta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ και 90° ως προς τη διεύθυνση της ρωγμής. Για τους υπολογισμούς των τιμών των πινάκων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα EXCEL.

Πίνακας 1

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0, \delta = \tan\lambda \cdot \tan\omega + 1$								
Λόγος Poisson: $\nu=0.1$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0.67	-2.5	0.00067	-0.84	0	0.0012
		30	-2.5	-4.33	0.0011	-3.12	0	0.0021
		45	-5	-5	0.0013	-6.23	0	0.0024
		60	-7.5	-4.33	0.0011	-9.35	0	0.0021
		75	-9.33	-2.5	0.00067	-11.63	0	0.0012
		90	-10	0	0	-12.46	0	0

Πίνακας 2

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0, \delta = \tan\lambda \cdot \tan\omega + 1$								

$\nu=0.2$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
MPa	GPa	deg	σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
			MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00067	-0,78	0	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0013	-2,91	0	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,82	0	0,0023
		60	-7,5	-4,33	0,0013	-8,73	0	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00067	-10,86	0	0,0012
		90	-10	0	0	-11,64	0	0

Πίνακας 3

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
$\nu=0.3$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
MPa	GPa	deg	σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
			MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00079	-0,73	0	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,72	0	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,44	0	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,17	0	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00079	-10,16	0	0,0012
		90	-10	0	0	-10,89	0	0

Πίνακας 4

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
$\nu=0.4$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00085	-0,69	0	0,0013
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,57	0	0,0016
		45	-5	-5	0,0018	-5,14	0	0,0017
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-7,71	0	0,0016
		75	-9,33	-2,5	0,0009	-9,57	0	0,0013
		90	-10	0	0	-10,29	0	0

Πίνακας 5

Επίπεδη παραμόρφωση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0.1$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00067	-0,84	-3,12	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0011	-3,12	-5,40	0,0021
		45	-5	-5	0,0013	-6,23	-6,23	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0011	-9,35	-5,40	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00067	-11,63	-3,12	0,0012
		90	-10	0	0	-12,54	0	0

Πίνακας 6

Επίπεδη παραμόρφωση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0.2$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
			-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00073
		30	-2,5	-4,33	0,0013	-2,91	-5,04	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,82	-5,82	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0013	-8,73	-5,04	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00073	-10,86	-2,91	0,0012
		90	-10	0	0	-11,91	0	0

Πίνακας 7

Επίπεδη παραμόρφωση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0.3$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
			-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00079
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,72	-4,72	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,44	5,44	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,17	-4,72	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00079	-10,16	-2,72	0,0012
		90	-10	0	0	-11,40	0	0

Πίνακας 8

Επίπεδη παραμόρφωση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0.4$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00085	-0,69	-2,57	0,0013
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,57	-4,45	0,0016
		45	-5	-5	0,0018	-5,14	5,14	0,0017
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-7,71	-4,45	0,0016
		75	-9,33	-2,5	0,00085	-9,57	-2,57	0,0013
		90	-10	0	0	-10,99	0	0

Πίνακας 9

Επίπεδη ένταση								
Απουσία τριβής: $\tau=0, \delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
$\nu=0.1$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00067	-0,84	0	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0012	-3,14	0	0,0021
		45	-5	-5	0,0013	-6,27	0	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0012	-9,4	0	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00067	-11,69	0	0,0012
		90	-10	0	0	-12,54	0	0

Πίνακας 10

Επίπεδη ένταση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
$\nu=0.2$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00073	-0,80	0	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0013	-2,98	0	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,93	0	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0013	-8,93	0	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00073	-11,11	0	0,0012
		90	-10	0	0	-11,91	0	0

Πίνακας 11

Επίπεδη ένταση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
$\nu=0.3$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00079	-0,76	0	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,85	0	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,70	0	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,55	0	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00079	-10,63	0	0,0012

		90	-10	0	0	-11,40	0	0
--	--	----	-----	---	---	--------	---	---

Πίνακας 12

Επίπεδη ένταση								
Απουσία τριβής: $\tau=0, \delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
$\nu=0,4$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00085	-0,74	0	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,75	0	0,0021
		45	-5	-5	0,0018	-5,50	0	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,24	0	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00085	-10,25	0	0,0012
		90	-10	0	0	-10,99	0	0

Πίνακας 13

Επίπεδη ένταση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0,1$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00067	-0,84	-3,13	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0011	-3,13	-5,43	0,0021
		45	-5	-5	0,0013	-6,27	-6,27	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0012	-9,4	-5,43	0,0021

		75	-9,33	-2,5	0,00067	-11,69	-3,13	0,0012
		90	-10	0	0	-12,54	0	0

Πίνακας 14

Επίπεδη ένταση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0.2$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00073	-0,80	-2,98	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0013	-2,98	-5,15	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,95	-5,95	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0013	-8,93	-5,15	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00073	-11,11	2,98	0,0012
		90	-10	0	0	-11,91	0	0

Πίνακας 15

Επίπεδη ένταση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0.3$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
		15	-0,67	-2,5	0,00079	-0,76	-2,85	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,85	-4,94	0,0021
		45	-5	-5	0,0015	-5,70	-5,70	0,0024

-10	235	60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,54	-4,94	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00079	-10,63	-2,85	0,0012
		90	-10	0	0	-11,39	0	0

Πίνακας 16

Επίπεδη ένταση								
Παρουσία τριβής: $\tau=\delta=1$								
$\nu=0.4$								
σ_0	E	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	GPa	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	235	15	-0,67	-2,5	0,00085	-0,74	-2,75	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,75	-4,76	0,0021
		45	-5	-5	0,0018	-5,50	-5,50	0,0024
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,24	-4,76	0,0021
		75	-9,33	-2,5	0,00085	-10,25	-2,75	0,0012
		90	-10	0	0	-10,99	0	0

Στους επόμενους Πίνακες 17 έως 24, παρουσιάζονται ανάλογα αποτελέσματα για τα πεδία των τάσεων και τη στερεά στροφή της ρωγμής λ καθώς και της υλικής γραμμής $2a$ στην αρηγμάτωτη πλάκα, για διάφορα μέτρα ελαστικότητας χάλυβα $E=190, 210, 230$ και 250 GPa, θεωρώντας ένα σταθερό το λόγο Poisson $\nu=0.3$. Το μέτρο ελαστικότητας E υπεισέρχεται έμμεσα στο τασικό πεδίο της ρηγματωμένης πλάκας μόνο στην 1^η περίπτωση της παρ. 3, δηλαδή απουσίας τριβής και για $\tau=0$ και $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$, μέσω του συντελεστή $\delta=\delta(\lambda)$ (πρβλ. Εξς. (34), (39), (46)). Πράγματι, στην περίπτωση που $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$, έχει ήδη δειχθεί (Εξς. (129) και (130), παρ. 3.1) ότι, η σταθερά c (Εξ. (31)), που εμφανίζεται στην έκφραση της εφαπτομένης της γωνίας λ (Εξ. (36)) γράφεται συναρτήσει του E , ως:

$$c = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_0 \quad (133)$$

για επίπεδη παραμόρφωση, και ως:

$$c^* = \frac{1}{E} \sigma_0 \quad (134)$$

και για επίπεδη ένταση.

Στην περίπτωση παρουσίας τριβής και δη για $\tau=\delta=1$, το δ και κατ' επέκταση η ορθή τάση επαφής σ_{yy} δεν εξαρτώνται από το μέτρο ελαστικότητας E , αλλά μόνο από το λόγο Poisson ν .

Πίνακας 17

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
E=190 GPa								
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	-	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	0.3	15	-2,5	-0,67	0,00098	-0,72985	0	0,0015
		30	-2,5	-4,33	0,0017	-2,72242	0	0,0024
		45	-5	-5	0,002	-5,44475	0	0,003
		60	-7,5	-4,33	0,0020	-8,16686	0	0,0024
		75	-2,5	-9,33	0,00098	-10,15954	0	0,0015
		90	-10	0	0	-10,88889	0	0

Πίνακας 18

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
E=210 GPa								
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	-	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
		15	-0,67	-2,5	0,00089	-0,72948	0	0,0012

-10	0.3	30	-2,5	-4,33	0,0015	-2,72240	0	0,0022
		45	-5	-5	0,0018	-5,44468	0	0,0025
		60	-4,33	-7,5	0,0015	-8,16684	0	0,0022
		75	-9,33	-2,5	0,00089	-10,1595	0	0,0012
		90	-10	0	0	-10,8888	0	0

Πίνακας 19

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
E=230 GPa								
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	-	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	0.3	15	-0,67	-2,5	0,00081	-0,72947	0	0,0011
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,72238	0	0,0020
		45	-5	-5	0,0016	-5,44466	0	0,0023
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,16683	0	0,0020
		75	-9,33	-2,5	0,00081	-10,1595	0	0,0011
		90	-10	0	0	-10,8888	0	0

Πίνακας 20

Επίπεδη παραμόρφωση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
E=250 GPa								
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	-	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg

-10	0.3	15	-0,67	-2,5	0,0007	-0,72947	0	0,0011
		30	-2,5	-4,33	0,0013	-2,72237	0	0,0018
		45	-5	-5	0,0015	-5,44464	0	0,0021
		60	-7,5	-4,33	0,0013	-8,16682	0	0,0018
		75	-9,33	-2,5	0,0007	-10,1595	0	0,0010
		90	-10	0	0	-10,8888	0	0

Πίνακας 21

Επίπεδη ένταση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
E=190 GPa								
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	-	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	0.3	15	-0,67	-2,5	0,00098	-0,76346	0	0,0015
		30	-2,5	-4,33	0,0017	-2,84923	0	0,0026
		45	-5	-5	0,00196	-5,69831	0	0,0027
		60	-7,5	-4,33	0,0017	-8,54723	0	0,0026
		75	-9,33	-2,5	0,00098	-10,6327	0	0,0015
		90	-10	0	0	-11,3960	0	0

Πίνακας 22

Επίπεδη ένταση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
E=210 GPa								
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	-	deg	σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ

			MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	0.3	15	-0,67	-2,5	0,00089	-0,76346	0	0,0014
		30	-2,5	-4,33	0,0015	-2,84921	0	0,0024
		45	-5	-5	0,0018	-5,69828	0	0,0027
		60	-7,5	-4,33	0,0015	-8,54721	0	0,0024
		75	-9,33	-2,5	0,00089	-10,63269	0	0,0014
		90	-10	0	0	-11,39601	0	0

Πίνακας 23

Επίπεδη ένταση								
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$								
E=230 GPa								
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα			Ρηγματωμένη πλάκα		
			σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
MPa	-	deg	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	0.3	15	-0,67	-2,5	0,00081	-0,76345	0	0,0012
		30	-2,5	-4,33	0,0014	-2,84919	0	0,0022
		45	-5	-5	0,0016	-5,69825	0	0,0025
		60	-7,5	-4,33	0,0014	-8,54720	0	0,0022
		75	-9,33	-2,5	0,00081	-11,6326	0	0,0012
		90	-10	0	0	-11,3960	0	0

Πίνακας 24

Επίπεδη ένταση						
Απουσία τριβής: $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$						
E=250 GPa						
σ_0	ν	Γωνία φόρτισης β	Αρηγμάτωτη πλάκα		Ρηγματωμένη πλάκα	
			σ_y	τ_{xy}	σ_y	τ_{xy}

MPa	-	deg	σ_y	τ_{xy}	λ	σ_y	τ_{xy}	λ
			MPa	MPa	deg	MPa	MPa	deg
-10	0.3	15	-0,67	-2,5	0,0007	-0,76344	0	0,0011
		30	-2,5	-4,33	0,0013	-2,84917	0	0,0020
		45	-5	-5	0,0015	-5,69823	0	0,0023
		60	-7,5	-4,33	0,0013	-8,54718	0	0,0020
		75	-9,33	-2,5	0,0007	-10,6326	0	0,0011
		90	-10	0	0	-11,3960	0	0

Οι γενικές παρατηρήσεις που προκύπτουν από τους παραπάνω Πίνακες 1 έως 24 μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Οι τάσεις επαφής (κάθετη θλιπτική και η εφαπτομενική τάση τριβής) στα χείλη της ρωγμής, εμφανίζονται σταθερά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες (ομοιόμορφες), ορθή και διατμητική τάση κατά μήκος της υλικής γραμμής $2a$ στην αρηγμάτωτη πλάκα.
- Οι τάσεις επαφής, είτε για επίπεδη παραμόρφωση είτε για επίπεδη ένταση, αυξάνονται κατ' απόλυτο τιμή με τη μείωση του λόγου Poisson ν .
- Η διαφορά στην τιμή των τάσεων, ορθών και διατμητικών, μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης είναι γενικά μικρή με αυτήν στη δεύτερη περίπτωση να είναι μεγαλύτερη.
- Η επιρροή της τριβής είναι αμελητέα στην τιμή της θλιπτικής τάσης επαφής σ_{yy} , είτε στην επίπεδη παραμόρφωση είτε στην επίπεδη ένταση.
- Οι τάσεις επαφής τριβής και οι αντίστοιχες διατμητικές τάσεις στην αρηγμάτωτη πλάκα, είναι ίδιες στις συμπληρωματικές γωνίες β και μεγιστοποιούνται, κατ' απόλυτο τιμή, για $\beta=45^\circ$.
- Ακριβώς ανάλογη συμπεριφορά με τις διατμητικές τάσεις εμφανίζει και η στερεά γωνία στροφής λ της ρωγμής και της αντίστοιχης υλικής γραμμής $2a$.
- Η γωνία στροφής λ (δηλαδή η κλίση της 'ψευδορωγμής') μειώνεται με την αύξηση του λόγου Poisson ν , και παρουσιάζει πολύ μικρή διαφορά μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης, λαμβάνοντας πάντως τις μεγαλύτερες τιμές της για επίπεδη παραμόρφωση, απουσία τριβής.
- Η γωνία στροφής λ (δηλαδή η κλίση της 'ψευδορωγμής') μειώνεται με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας E , με το ρυθμό μείωσης να είναι εντονότερος στην επίπεδη ένταση.
- Η παρουσία τριβής δεν επηρεάζει την τιμή της γωνίας στροφής λ (αφού εξ' υποθέσεως η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή έχει πάντα - παρουσία ή απουσία τριβής, τη διεύθυνση της 'ψευδορωγμής').
- Το μέτρο ελαστικότητας E επηρεάζει ασθενώς το πεδίο των τάσεων και μόνο την κάθετη θλιπτική τάση επαφής σ_{yy} και μόνο στην περίπτωση απουσίας τριβής, με την

εν λόγω τάση να εμφανίζεται, για την ίδια τιμή του E , πιο αυξημένη στην επίπεδη ένταση.

Ειδικότερα και όσον αφορά στην ορθή θλιπτική τάση επαφής σ_{yy} και την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, απουσία τριβής, για $\tau=0$ και $\delta=\tan\lambda\cdot\tan\omega+1$, η ορθή τάση επαφής για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 25.37% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 24.8%, 24.6%, 24.67%, 24.65% και 24.6%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 25%.

Από τον Πίνακα 2 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 16.42% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 16.33%, 16.4%, 16.33%, 16.42%, 16.31%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 16%.

Από τον Πίνακα 3 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 8.96% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 8.8%, 9%, 8.93%, 8.9%, 8.9%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 9%.

Από τον Πίνακα 4 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 2.99% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 2.8%, 2.8%, 2.8%, 2.89%, 2.9%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 3%.

Από τον Πίνακα 5, στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, παρουσία τριβής, για $\tau=\delta=1$, η ορθή τάση επαφής για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 25.37% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 24.8%, 24.6%, 24.67%, 24.65% και 25.4%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 25%.

Από τον Πίνακα 6 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 16.42% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 16.34%, 16.4%, 16.34%, 16.42%, 19.1%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα ποσοστό αύξησης γύρω στο 17%.

Από τον Πίνακα 7 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 8.96% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την

ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 8.8%, 8.8%, 8.93%, 8.9%, 14%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 10%.

Από τον Πίνακα 8 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 2.99% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 2.8%, 2.8%, 2.8%, 2.57%, 9.9%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 4%.

Από τον Πίνακα 9 φαίνεται ότι, στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, απουσία τριβής, για $\tau=0$ και $\delta=\tan\lambda\cdot\tan\omega+1$, η ορθή τάση επαφής για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 25.37% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 25.6%, 25.4%, 25.33%, 25.3% και 25.4%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 25%.

Από τον Πίνακα 10 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 19.40% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 19.2%, 18.6%, 19.1%, 19.08%, 19.1%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 19%.

Από τον Πίνακα 11 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 13.43% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 14%, 14%, 13.87%, 13.93%, 13.9%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 14%.

Από τον Πίνακα 12 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 10.45% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 10%, 10%, 9.87%, 9.87%, 9.9%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 10%.

Από τον Πίνακα 13, στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, παρουσία τριβής, για $\tau=\delta=1$, η ορθή τάση επαφής για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 25.37% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 25.2%, 25.4%, 25.33%, 25.3% και 25.4%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 25%.

Από τον Πίνακα 14 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 19.40% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 19.2%, 19%, 19.1%, 19.08%, 19.1%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 19%.

Από τον Πίνακα 15 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 13.43% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 14%, 14%, 13.87%, 13.93%, 13.9%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 14%.

Από τον Πίνακα 16 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η ορθή τάση επαφής είναι κατά 10.45% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η ορθή τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με την ορθή τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 10%, 10%, 9.87%, 9.87%, 9.9%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 10%.

Όσον αφορά στην εφαπτομενική τάση τριβής τ_{xy} και την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5, στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, παρουσία τριβής, για $\tau=\delta=1$, η τάση επαφής τριβής για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 24.8% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 24.71%, 24.6%, 24.71%, 24.8% και 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 25%.

Από τον Πίνακα 6 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η τάση επαφής τριβής είναι κατά 16.4% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 16.4%, 16.4%, 16.4%, 16.4%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 16%.

Από τον Πίνακα 7 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η τάση επαφής τριβής είναι κατά 8.8% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 9%, 8.8%, 9%, 8.8%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 9%.

Από τον Πίνακα 8 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η τάση επαφής τριβής είναι κατά 2.8% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 2.77%, 2.8%, 2.77%, 2.8%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 3%.

Από τον Πίνακα 13, στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, παρουσία τριβής, για $\tau=\delta=1$, η τάση επαφής τριβής για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 25.2% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 25.4%, 25.4%, 25.4%, 25.2% και 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 25%.

Από τον Πίνακα 14 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η τάση επαφής τριβής είναι κατά 19.20% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 18.94%, 19%, 18.94%, 19.20%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 19%.

Από τον Πίνακα 15 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η τάση επαφής τριβής είναι κατά 14% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 14.09%, 14%, 14.09%, 14%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 14%.

Από τον Πίνακα 16 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η τάση επαφής τριβής είναι κατά 14% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η διατμητική τάση επαφής παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη διατμητική τάση στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 14.09%, 14%, 14.09%, 14%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 14%.

Όσον αφορά στη γωνία λ στερεάς στροφής της ρωγμής, σε αντιδιαστολή με τη γωνία λ στροφής της υλικής γραμμής 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, απουσία τριβής, για $\tau=0$ και $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$, η γωνία λ για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 79.1% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 90.91%, 84.62%, 75%, 213.43% και 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 90%.

Από τον Πίνακα 2 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η γωνία λ είναι κατά 64.38% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 65.35%, 53.33%, 65.35%, 64.38%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 62%.

Από τον Πίνακα 3 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η γωνία λ είναι κατά 51.90% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 50%, 60%, 50%, 51.90%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 52%.

Από τον Πίνακα 4 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η γωνία λ είναι κατά 25% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 21.43%, 15.55%, 21.43%, 25%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 20%.

Από τον Πίνακα 5, στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, παρουσία τριβής, για $\tau=\delta=1$, η γωνία λ για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 79.11% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 90.91%, 84.62%, 90.91%, 79.11% και 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 84%.

Από τον Πίνακα 6 φαίνεται ότι, για $\nu=0.2$ και $\beta=15^\circ$ η γωνία λ είναι κατά 64.38% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 61.54%, 60%, 61.54%, 64.38%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 60%.

Από τον Πίνακα 7 φαίνεται ότι, για $\nu=0.3$ και $\beta=15^\circ$ η γωνία λ είναι κατά 51.90% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 50%, 60%, 35.71%, 39.24%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 45%.

Από τον Πίνακα 8 φαίνεται ότι, για $\nu=0.4$ και $\beta=15^\circ$ η γωνία λ είναι κατά 17.65% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 21.43%, 22.48%, 21.43%, 17.65%, 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 20%.

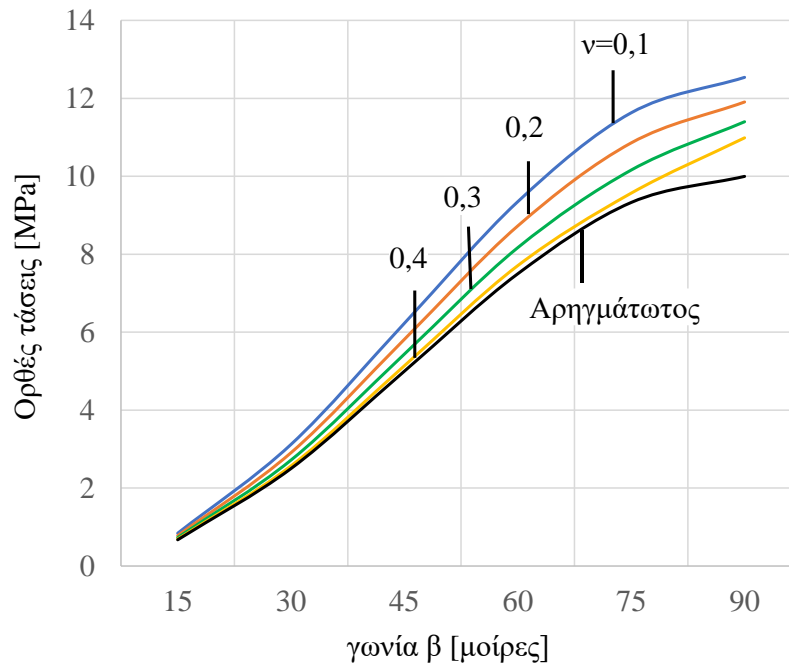
Από τον Πίνακα 9, στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, απουσία τριβής, για $\tau=0$ και $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$, η γωνία λ για $\nu=0.1$ και $\beta=15^\circ$ είναι κατά 79.11% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα. Ανάλογα, για τις γωνίες $\beta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, η γωνία λ παρουσιάζεται αυξημένη σε σχέση με τη γωνία λ στην αρηγμάτωτη πλάκα κατά 75%, 84.62%, 75%, 79.11% και 0%, αντίστοιχα, δηλαδή παρατηρείται ένα μέσο ποσοστό αύξησης γύρω στο 78%.

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των παραπάνω πινάκων, παρατίθενται στη συνέχεια, για λόγους εποπτείας, αλλά και περαιτέρω παραμετρικής μελέτης, διαγράμματα κατανομών των τάσεων επαφής στα χείλη της ρωγμής σε αντιδιαστολή με τα διαγράμματα κατανομών των αντίστοιχων τάσεων κατά μήκος της αντίστοιχης υλικής γραμμής 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα.

Βάσει των αποτελεσμάτων των πινάκων, οι κατανομές των τάσεων γίνονται συναρτήσεων των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος, ήτοι της γωνίας φόρτισης β , του λόγου Poisson ν και του μέτρου ελαστικότητας E , για τις καταστάσεις επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης, για παρουσία και απουσία τριβής. Για τη χάραξη των διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα EXCEL.

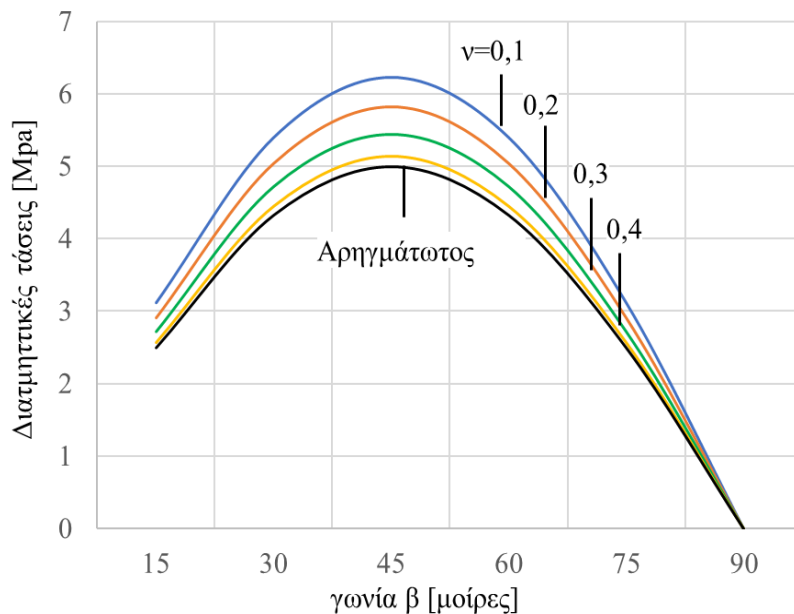
Στο Σχήμα 57, φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της ομοιόμορφης ορθής θλιπτικής τάσης επαφής σ_{yy} στα χείλη της ρωγμής συναρτήσεων της γωνίας φόρτισης β , για διάφορους λόγους Poisson ν . Επίσης, θεωρήθηκε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης και παρουσία τριβής στα

χείλη της ρωγμής ($\tau=\delta=1$). Στο ίδιο σχήμα φαίνεται η μεταβολή της αντίστοιχης ομοιόμορφης ορθής τάσης στην υλική ευθεία 2α της αρηγμάτωτης πλάκας (μαύρη γραμμή) για λόγους σύγκρισης. Όπως φαίνεται, η μείωση του λόγου Poisson ν έχει ως συνέπεια την αύξηση της ομοιόμορφης πίεσης στα χείλη της ρωγμής, η οποία αυξάνεται επίσης με την αύξηση της γωνίας φόρτισης β . Συγκεκριμένα, ενώ για γωνία φόρτισης $\beta=15^\circ$, οι διαφορές μεταξύ της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής στα χείλη της ρωγμής μεταξύ τους για οποιοδήποτε λόγο Poisson ν , αλλά και σε σχέση με την αρηγμάτωτη πλάκα είναι αμελητέες, για $\beta=90^\circ$ και $\nu=1$ η ομοιόμορφη ορθή τάση επαφής στη ρωγμή γίνεται έως και 25% μεγαλύτερη της αντίστοιχης ορθής τάσης στην αρηγμάτωτη πλάκα.



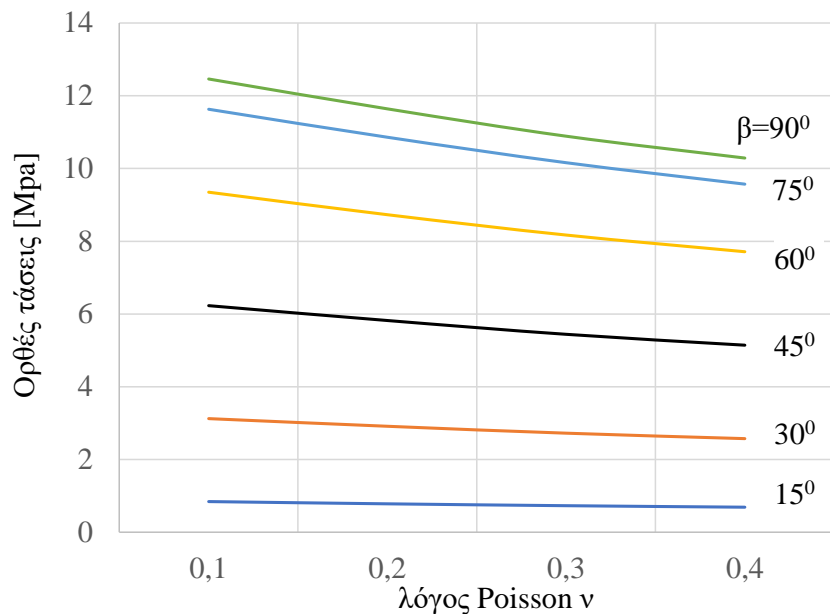
Σχήμα 57. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή και την υλική γραμμή 2α συναρτήσει της γωνίας β , για διάφορους λόγους Poisson ν και κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.

Στο Σχήμα 58, φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της ομοιόμορφης διατμητικής τάσης επαφής-τριβής τ_{xy} , στα χείλη της ρωγμής συναρτήσει της γωνίας φόρτισης β , για διάφορους λόγους Poisson ν . Και εδώ θεωρήθηκε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης και παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής ($\tau=\delta=1$). Στο ίδιο σχήμα φαίνεται η μεταβολή της αντίστοιχης ομοιόμορφης διατμητικής τάσης στην υλική ευθεία 2α της αρηγμάτωτης πλάκας (μαύρη γραμμή) για λόγους σύγκρισης. Όπως φαίνεται, η μείωση του λόγου Poisson ν έχει ως συνέπεια την αύξηση της τάσης τριβής στα χείλη της ρωγμής, η οποία αυξάνεται επίσης με την αύξηση της γωνίας φόρτισης β μέχρι τις 45° όπου και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της και μετά μειώνεται. Συγκεκριμένα, για γωνία φόρτισης $\beta=45^\circ$ και $\nu=1$ η ομοιόμορφη τάση τριβής στη ρωγμή γίνεται έως και 25% μεγαλύτερη της αντίστοιχης της αρηγμάτωτης πλάκας.



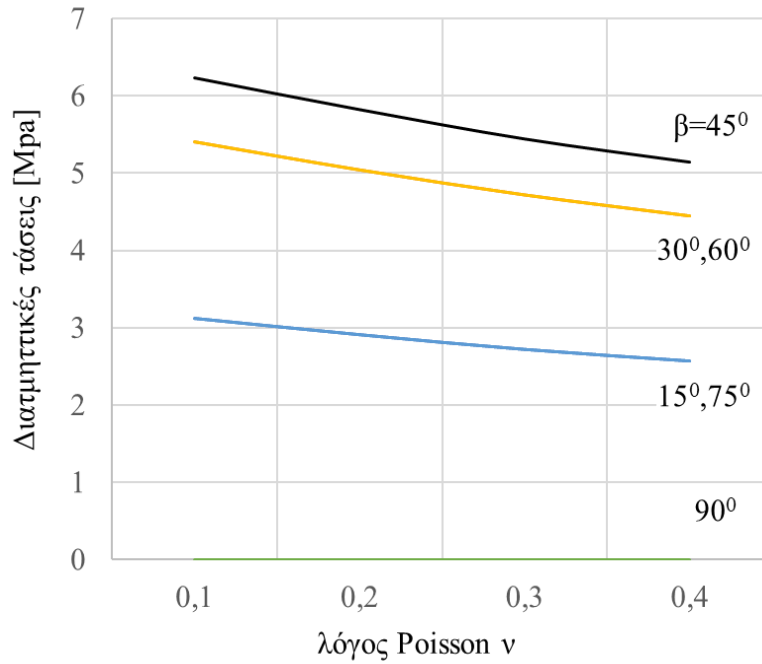
Σχήμα 58. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης διαμητητικής τάσης τριβής τ_{xy} στη ρωγμή και την υλική γραμμή 2α συναρτήσει της γωνίας β , για διάφορους λόγους Poisson ν και κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.

Στο Σχήμα 59, φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της ομοιόμορφης θλιπτικής τάσης επαφής σ_{yy} στα χείλη της ρωγμής συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες φόρτισης β . Και εδώ θεωρήθηκε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης και παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής ($\tau=\delta=1$). Όπως προκύπτει, από το σχήμα, η επίδραση του λόγου Poisson ν στην ομοιόμορφη πίεση στα χείλη της ρωγμής αυξάνει με την αύξηση της γωνίας β . Έτσι, ενώ για $\beta=15^\circ$ η μεταβολή του ν δεν έχει σχεδόν καμία επίδραση στην ομοιόμορφη θλιπτική τάση επαφής, η τελευταία μειώνεται κατ' απόλυτο τιμή κατά περίπου 25% για $\beta=90^\circ$.



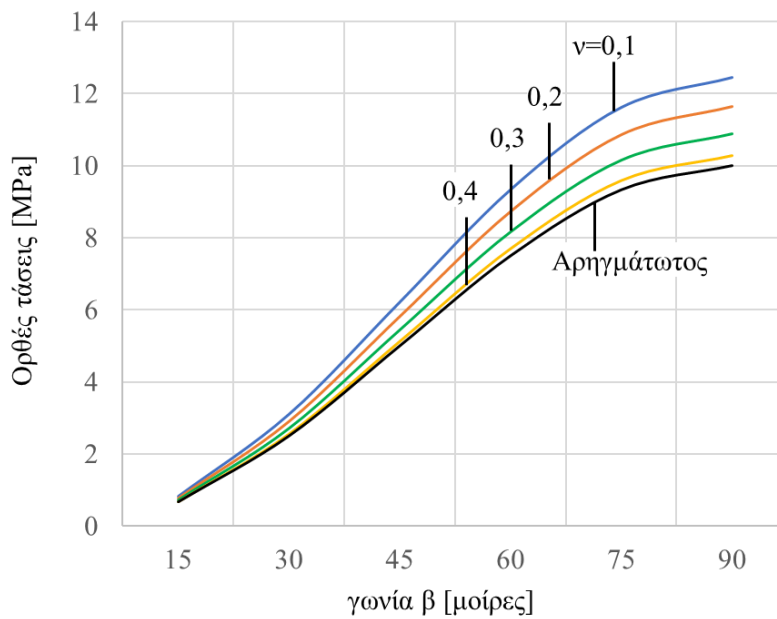
Σχήμα 59. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες β και κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.

Στο Σχήμα 60, φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της ομοιόμορφης διατμητικής τάσης επαφής-τριβής τ_{xy} , στα χείλη της ρωγμής συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες φόρτισης β . Και εδώ θεωρήθηκε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης και παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής ($\tau=\delta=1$). Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο σημείο, η ομοιόμορφη διατμητική τάση επαφής στα χείλη της ρωγμής έχει ίδια τιμή για συμπληρωματικές γωνίες φόρτισης β (εξ ου και η σύμπτωση των καμπυλών $\beta=15^\circ$, 75° και $\beta=30^\circ$, 60° στο σχήμα). Η μέγιστη επίδραση του λόγου Poisson ν στην ομοιόμορφη τάση τριβής στα χείλη της ρωγμής εμφανίζεται στις 45° (η καμπύλη με τη μέγιστη κλίση) όπου μείωση του ν οδηγεί επίσης σε αύξηση του μέτρου της τάσης τριβή έως και 25% για $\nu=0.1$. Όπως αναμενόταν, για $\beta=90^\circ$ δεν υπάρχει καμία επίδραση του λόγου Poisson ν , αφού τότε η τάση τριβής είναι ούτως ή άλλως μηδενική.

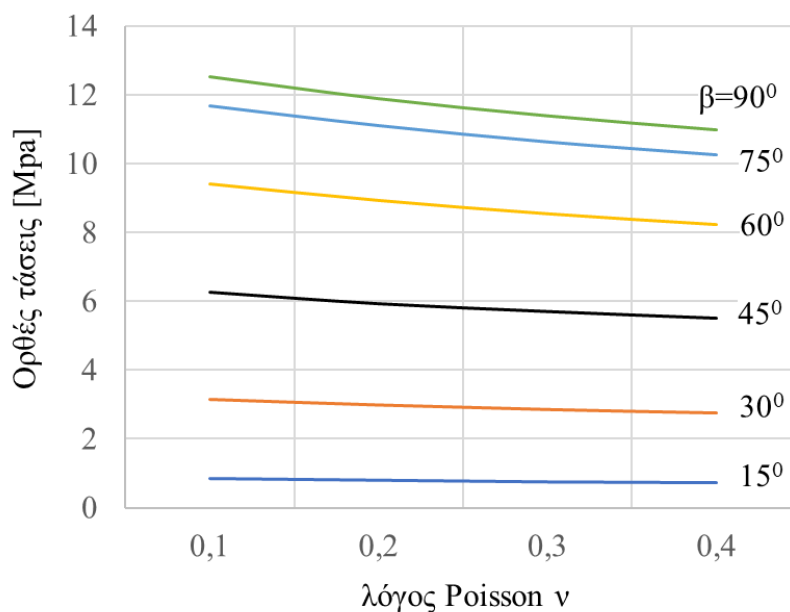


Σχήμα 60. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης διαμηττικής τάσης τριβής τ_{xy} στη ρωγμή συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες β και κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.

Στα Σχήματα 61 και 62, φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της ομοιόμορφης ορθής θλιπτικής τάσης επαφής σ_{yy} στα χείλη της ρωγμής συναρτήσει της γωνίας φόρτισης β , για διάφορους λόγους Poisson ν και για διάφορες γωνίες φόρτισης, για επίπεδη παραμόρφωση και απουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής ($\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$). Σε σύγκριση με τα αντίστοιχα διαγράμματα στα Σχήματα 57 και 59 φαίνεται ότι η επίδραση της τριβής στο μέγεθος της ομοιόμορφης θλιπτικής τάσης επαφής στα χείλη της ρωγμής είναι αμελητέα.



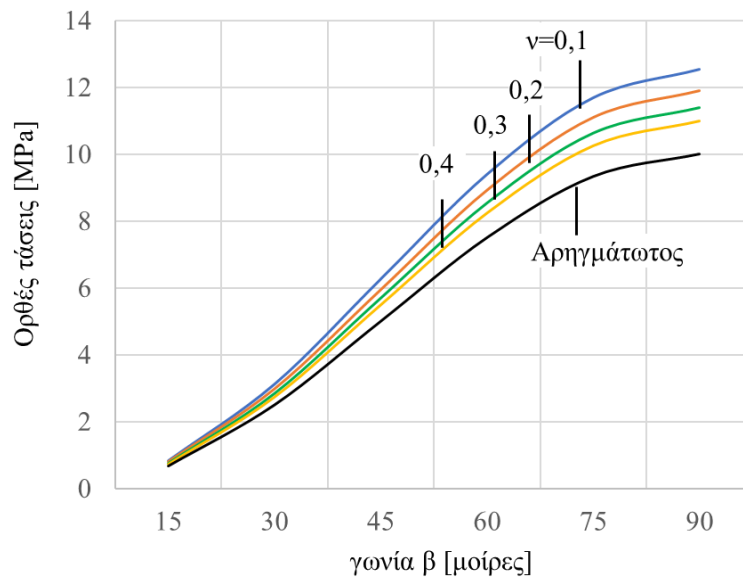
Σχήμα 61. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή και την υλική γραμμή 2α συναρτήσει της γωνίας β , για διάφορους λόγους Poisson ν και κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, απουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.



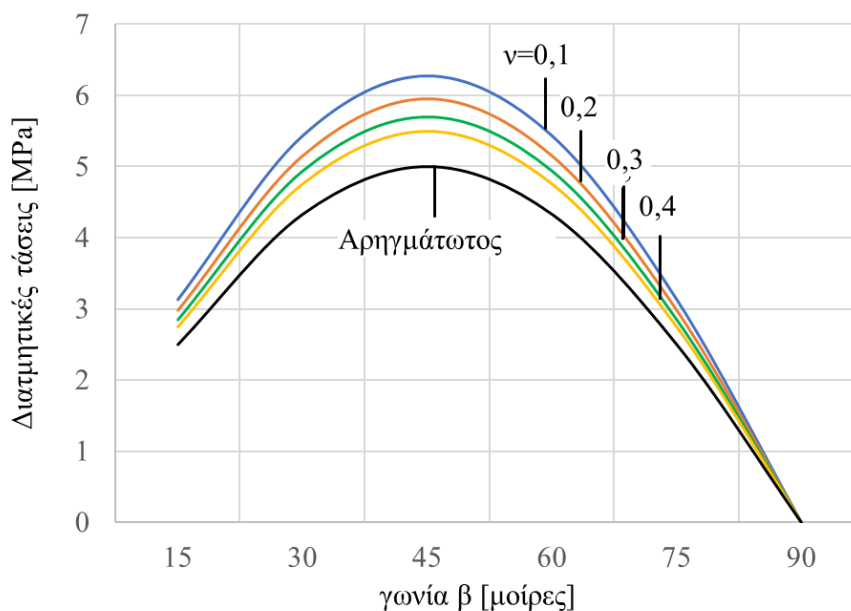
Σχήμα 62. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης θλιπτικής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες β και κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, απουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.

Τα παρακάτω Σχήματα 63 έως 68 αναφέρονται στην περίπτωση επίπεδης έντασης, παρουσία (Σχ. 63 έως 66) και απουσία (Σχ. 67, 68) τριβής. Όπως φαίνεται σε σύγκριση με τα προηγούμενα σχήματα που αναφέρονται στην κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης, οι διαφορές μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης κυμαίνονται μεταξύ λίγων

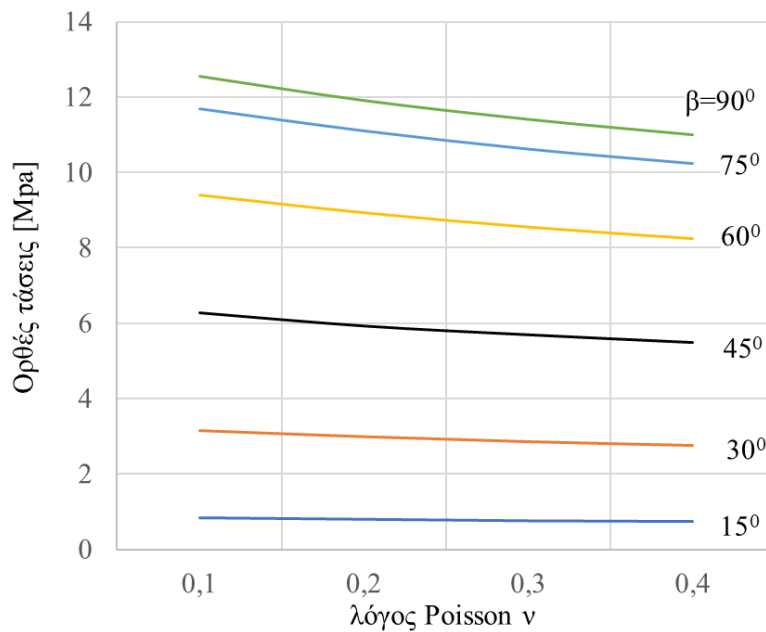
ποσοστιαίων μονάδων, με το μέτρο των τάσεων να είναι (ως συνήθως) μεγαλύτερο στην περίπτωση της επίπεδης έντασης.



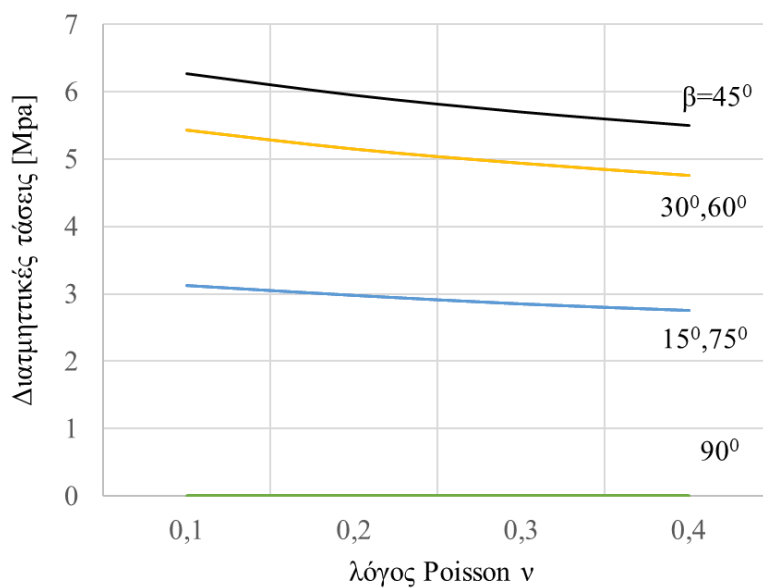
Σχήμα 63. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή και την υλική γραμμή 2α συναρτήσει της γωνίας β , για διάφορους λόγους Poisson ν και κατάσταση επίπεδης έντασης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.



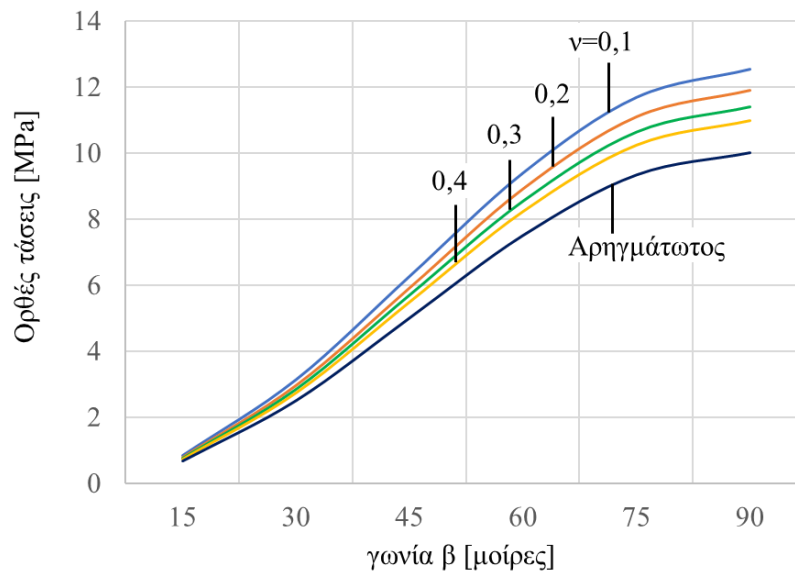
Σχήμα 64. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης διατμητικής τάσης τριβής τ_{xy} στη ρωγμή και την υλική γραμμή 2α συναρτήσει της γωνίας β , για διάφορους λόγους Poisson ν και κατάσταση επίπεδης έντασης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.



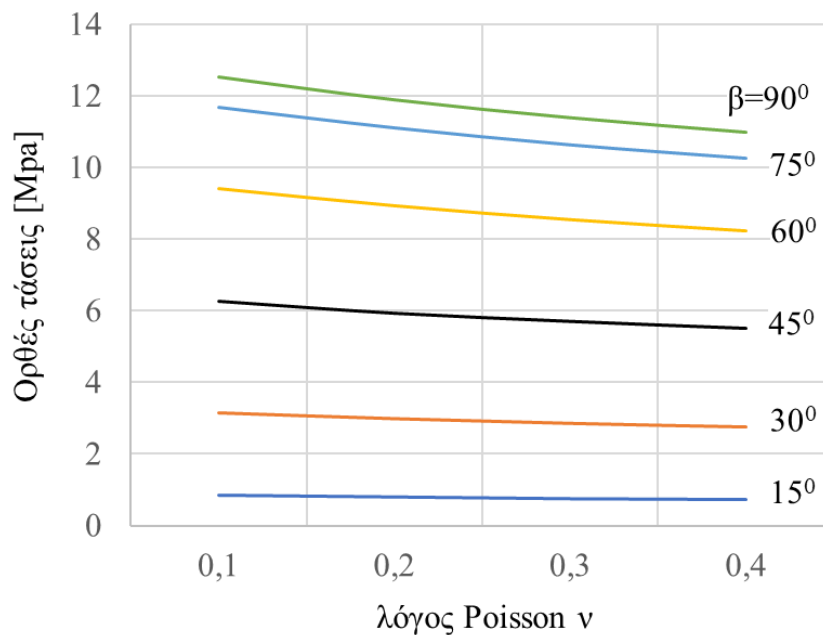
Σχήμα 65. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες β και κατάσταση επίπεδης έντασης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.



Σχήμα 66. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης διατμητικής τάσης τριβής τ_{xy} στη ρωγμή συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες β και κατάσταση επίπεδης έντασης, παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.



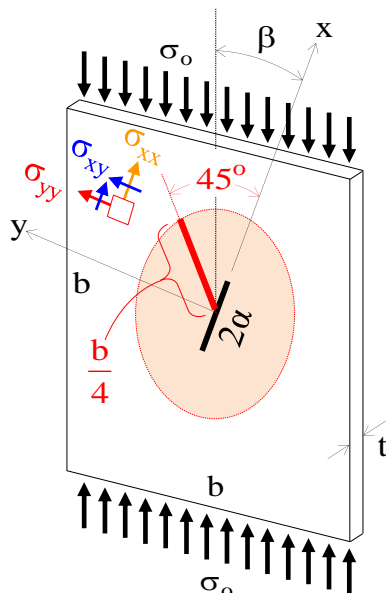
Σχήμα 67. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή και την υλική γραμμή 2α συναρτήσει της γωνίας β , για διάφορους λόγους Poisson ν και κατάσταση επίπεδης έντασης, απουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.



Σχήμα 68. Η μεταβολή της τιμής της ομοιόμορφης ορθής τάσης επαφής σ_{yy} στη ρωγμή συναρτήσει του λόγου Poisson ν , για διάφορες γωνίες β και κατάσταση επίπεδης έντασης, απουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής.

3.5 Το πεδίο των τάσεων στο εσωτερικό της ρηγματωμένης μεταλλικής πλάκας και η επίδραση της ρωγμής

Σε αναλογία με τη μελέτη της επίδρασης της μικρής κεντρικής ρωγμής στο πεδίο των μετατοπίσεων εντός της μεταλλικής πλάκας, στην παρούσα παράγραφο μελετάται η επίδραση της ρωγμής στο πεδίο των τάσεων εντός της πλάκας. Επιλέγεται δε, όπως και για τις μετατοπίσεις στην παράγραφο 3.2, το ευθύγραμμο τμήμα με διεύθυνση 45° ως προς της ρωγμή, κατά την οποία, από την αρχή των αξόνων και έως την απόσταση $r=b/4$ (Σχήμα 69), ελέγχεται η διατάραξη του πεδίου των τάσεων της αρηγμάτωτης πλάκας από την παρουσία της ρωγμής.



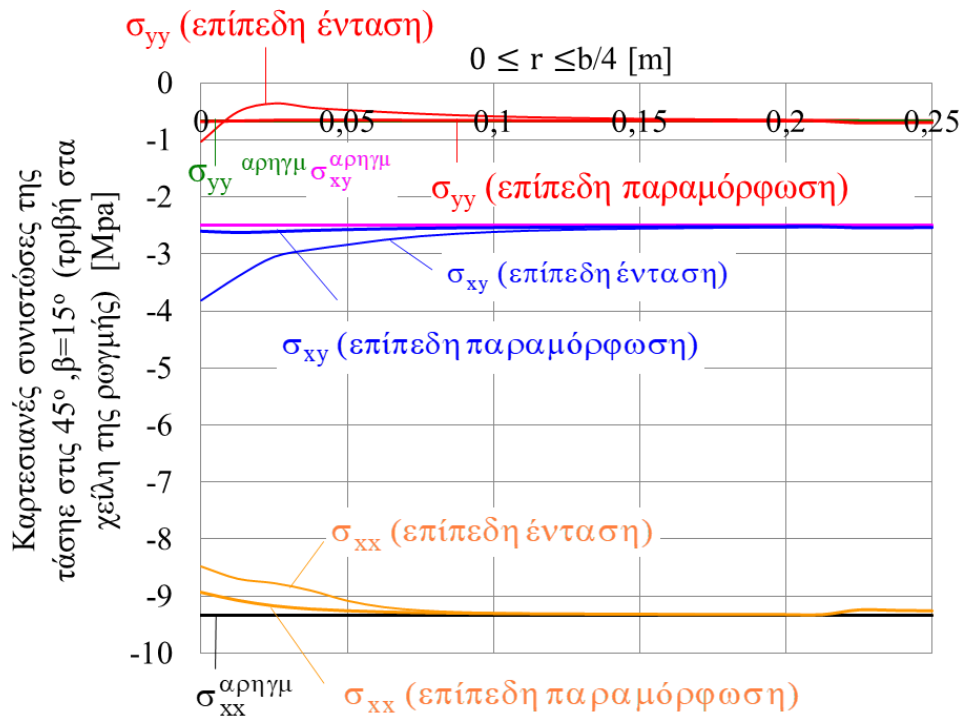
Σχήμα 69. Το τμήμα ($0 \leq r \leq b/4$, κόκκινη έντονη γραμμή) υπολογισμού των τάσεων.

Για τη χάραξη των διαγραμμάτων θεωρήθηκαν οι ίδιες τιμές των παραμέτρων και οι γωνίες φόρτισης $\beta=15^\circ, 30^\circ$ και 60° , που θεωρήθηκαν και για τις κατανομές των μετατοπίσεων εντός της πλάκας στην παράγραφο 3.2. Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι κατανομές των συνιστωσών της τάσης στη ρηγματωμένη και την αρηγμάτωτη μεταλλική πλάκα, για την εκτίμηση της διατάραξης του τασικού πεδίου μιας αρηγμάτωτης πλάκας, λόγω παρουσίας μιας μικρής ρωγμής, για τη περίπτωση παρουσίας ($\tau=\delta=1$) και απουσίας ($\tau=0, \delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$) τριβής μεταξύ των χειλέων της ρωγμής. Όσον αφορά στις τάσεις στη ρηγματωμένη πλάκα, χρησιμοποιήθηκε το πεδίο των τάσεων όπως προκύπτει από την αντικατάσταση των εκφράσεων των μιγαδικών δυναμικών του ‘γενικού προβλήματος’ (Εξς. (76) και (77)), στις γνωστές σχέσεις [19]:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\Phi(z) \quad (135)$$

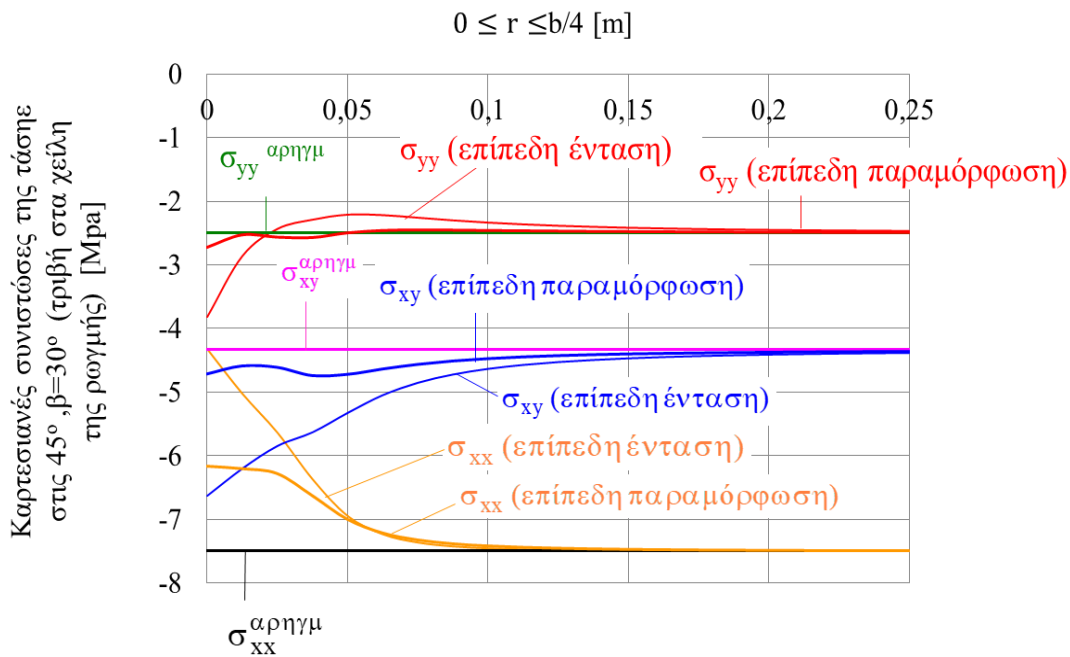
$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (136)$$

Για την αρηγμάτωτη πλάκα, για τα διαγράμματα των τάσεων χρησιμοποιήθηκαν οι Εξς. (105), (106) και (110). Για τους υπολογισμούς και τη χάραξη των διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκαν τα προγράμματα WOLFRAM MATHEMATICA 10 και EXCEL.



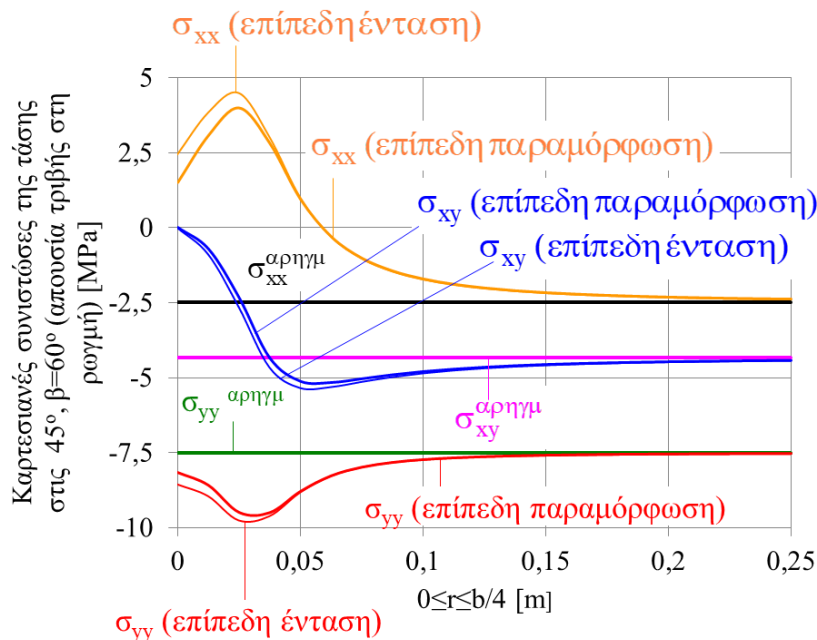
Σχήμα 70. Οι κατανομές των τάσεων κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, παρουσία τριβής ($\tau=\delta=1$ και μηδενική σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για γωνία φόρτισης $\beta=15^\circ$.

Από το Σχήμα 70 φαίνεται ότι για μικρή γωνία φόρτισης, $\beta=15^\circ$, δηλαδή φόρτιση σχεδόν παράλληλη στη ρωγμή, για επίπεδη παραμόρφωση και παρουσία τριβής στα χείλη της ρωγμής, η διατάραξη που προκαλεί η παρουσία ρωγμής στο τασικό πεδίο της αρηγμάτωτης πλάκας είναι πολύ μικρή, ενώ η διατάραξη αυτή αυξάνεται για συνθήκες επίπεδης έντασης, με εντονότερη διατάραξη στη διατμητική τάση.



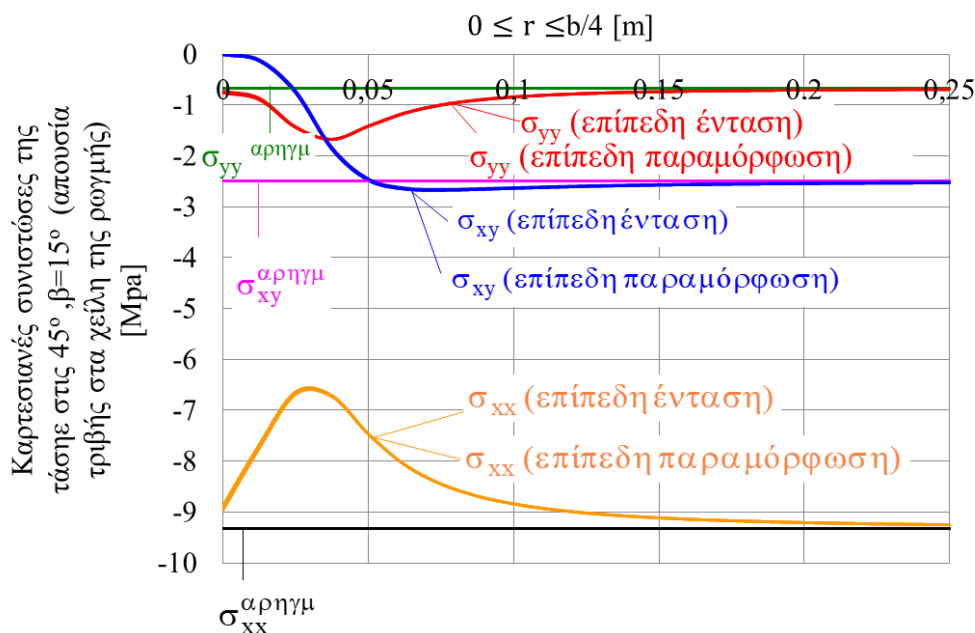
Σχήμα 71. Οι κατανομές των τάσεων κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, παρουσία τριβής ($\tau=\delta=1$ και μηδενική σχετική ολίσθηση των χεϊλέων της ρωγμής), για γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.

Από το Σχήμα 71 φαίνεται ότι για μεγαλύτερη γωνία φόρτισης, $\beta=30^\circ$, παρουσία τριβής, η διατάραξη του τασικού πεδίου γίνεται πολύ εντονότερη ιδίως στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, με εντονότερη διατάραξη στη ορθή τάση σ_{xx} .

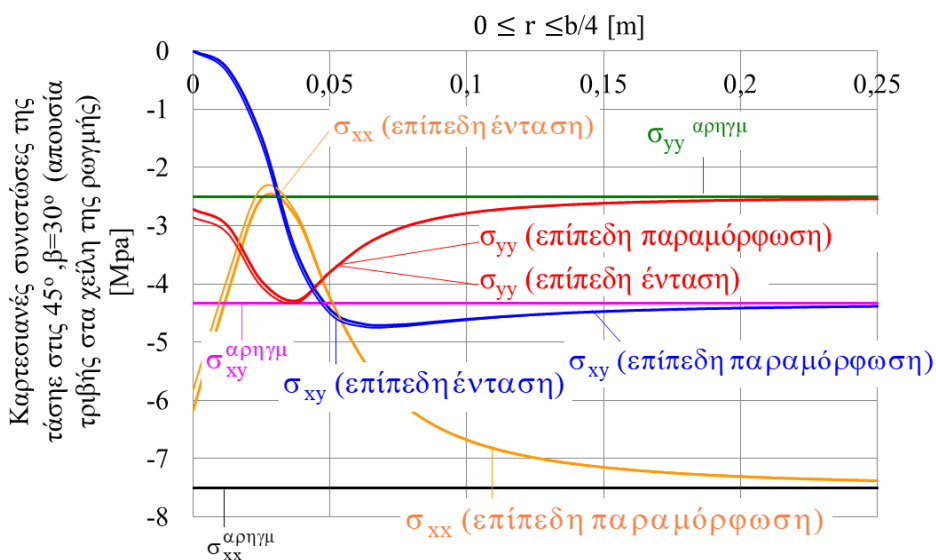


Σχήμα 72. Οι κατανομές των τάσεων κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, παρουσία τριβής ($\tau=\delta=1$ και μηδενική σχετική ολίσθηση των χεϊλέων της ρωγμής), για γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.

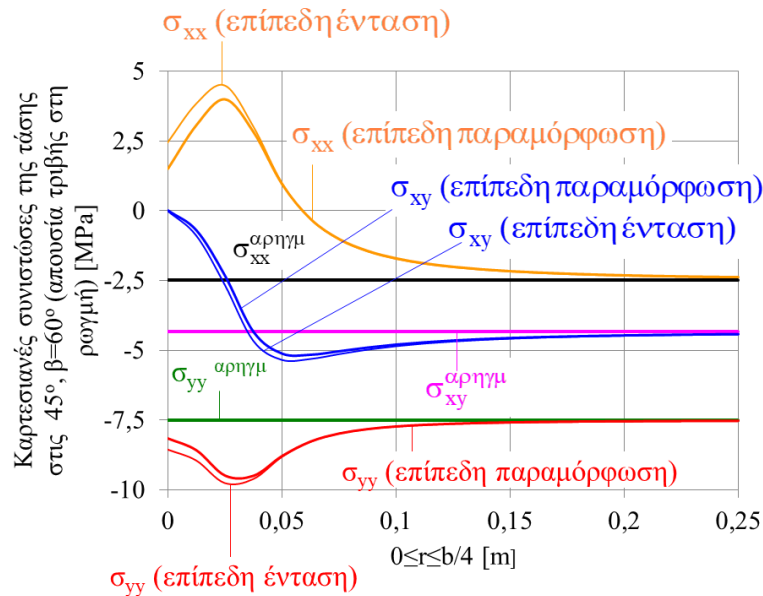
Από το Σχήμα 72 φαίνεται ότι για ακόμα μεγαλύτερη γωνία φόρτισης, $\beta=60^\circ$, η διατάραξη του τασικού πεδίου είναι επίσης πολύ εντονότερη με αλλαγή προσήμου των ορθών τάσεων σ_{xx} .



Σχήμα 73. Οι κατανομές των τάσεων κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή 2a στη μεταλλική πλάκα, για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, απουσία τριβής $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), γωνία φόρτισης $\beta=15^\circ$.



Σχήμα 74. Οι κατανομές των τάσεων κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή 2a στη μεταλλική πλάκα, για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, απουσία τριβής $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), γωνία φόρτισης $\beta=30^\circ$.



Σχήμα 75. Οι κατανομές των τάσεων κατά μήκος της διεύθυνσης 45° ως προς της ρωγμή και την υλική γραμμή $2a$ στη μεταλλική πλάκα, για επίπεδη παραμόρφωση - επίπεδη ένταση, απουσία τριβής $\tau=0$, $\delta=\tan\lambda \cdot \tan\omega+1$ (μέγιστη σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής), για γωνία φόρτισης $\beta=60^\circ$.

Τα Σχήματα 73 έως 75 αφορούν στις αντίστοιχες με τις παραπάνω περιπτώσεις που φαίνονται στα Σχήματα 70 έως 72, αλλά για απουσία τριβής. Για απουσία τριβής μεταξύ των χειλέων της ρωγμής φαίνεται ότι η διαφοροποίηση μεταξύ των τιμών των τάσεων στο εσωτερικό της πλάκας, μεταξύ επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης, γίνεται πάρα πολύ μικρή ιδίως για $\beta=15^\circ$, τα αντίστοιχα διαγράμματα των τάσεων επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης ταυτίζονται. Όπως και πριν (παρουσία τριβής), η μέγιστη διατάραξη του τασικού πεδίου εντός της πλάκας λόγω ρωγμής εμφανίζεται στην ορθή τάση σ_{xx} . Επίσης, σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, λόγω υπόθεσης απουσίας τριβής στη ρωγμή, η διατμητική τάση ξεκινάει από μηδενική τιμή στα χείλη της ρωγμής.

Όπως φαίνεται από όλα τα παραπάνω Σχήματα 70 έως 75, η μεγαλύτερη διατάραξη στο τασικό πεδίο από την παρουσία της ρωγμής παρουσιάζεται στην περίπτωση παρουσίας τριβής και δη μηδενικής σχετικής ολίσθησης των χειλέων της ρωγμής ($\tau=\delta=1$). Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί και με τη φυσική αντίληψη ότι ο περιορισμός στη μετατόπιση (επιβαλλόμενη μηδενική σχετική ολίσθηση) οδηγεί στην ανάπτυξη αυξημένων τιμών των τάσεων. Επίσης, γενικά οι τάσεις εμφανίζουν πιο υψηλές απόλυτες τιμές στην κατάσταση επίπεδης έντασης σε σχέση με την επίπεδη παραμόρφωση. Τέλος, σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρείται η ταχεία σύγκλιση των τασικών πεδίων ρηγματωμένης και αρηγμάτωτης πλάκας, εντός της απόστασης του $r=b/4$, με τα αντίστοιχα τασικά πεδία να ταυτίζονται θεωρητικά στο άπειρο.

3.6 Οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων

Στην παρούσα παράγραφο γίνεται μια ποσοτικοποίηση και συγκριτική παρουσίαση των ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, βάσει των διορθωμένων εκφράσεων των Εξν. (95) και (96), που παρέχουν τους φυσικά αποδεκτούς ΣΕΤ, σε αντιδιαστολή με τις μη φυσικά αποδεκτές (αρνητικές) τιμές για τον K_I (Εξ. (45) για $k=0$ ή Εξ. (95) για $\delta=0$).

Επισημαίνεται ότι σε όλα τα παρακάτω σχήματα, το ζεύγος τιμών ($\tau=0, \delta=0$), αναφέρεται στο μη φυσικά αποδεκτό αποτέλεσμα για αρνητικούς K_I δηλαδή στην μη φυσικά αποδεκτή αλληλοεπικάλυψη των χειλέων της ρωγμής, που προκύπτει πάντα στην παρούσα περίπτωση της πλάκας υπό μονοαξονική θλίψη στα σύνορά της (πλην της γωνίας $\beta=0^\circ$). Αντιθέτως, τα ζεύγη τιμών ($\tau=0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0, \delta=(1-\tau)\tan\omega\cdot\tan\lambda+1$) (Εξ. (43)) θα οδηγούν πάντα σε μία φυσικά αποδεκτή, πάρα πολύ μικρή θετική τιμή ή μηδέν για τον K_I , αναγκαία για την εξασφάλιση ρωγμής με χείλη συνεχώς σε επαφή (χωρίς αλληλοεπικάλυψη) και υπό τάσεις επαφής.

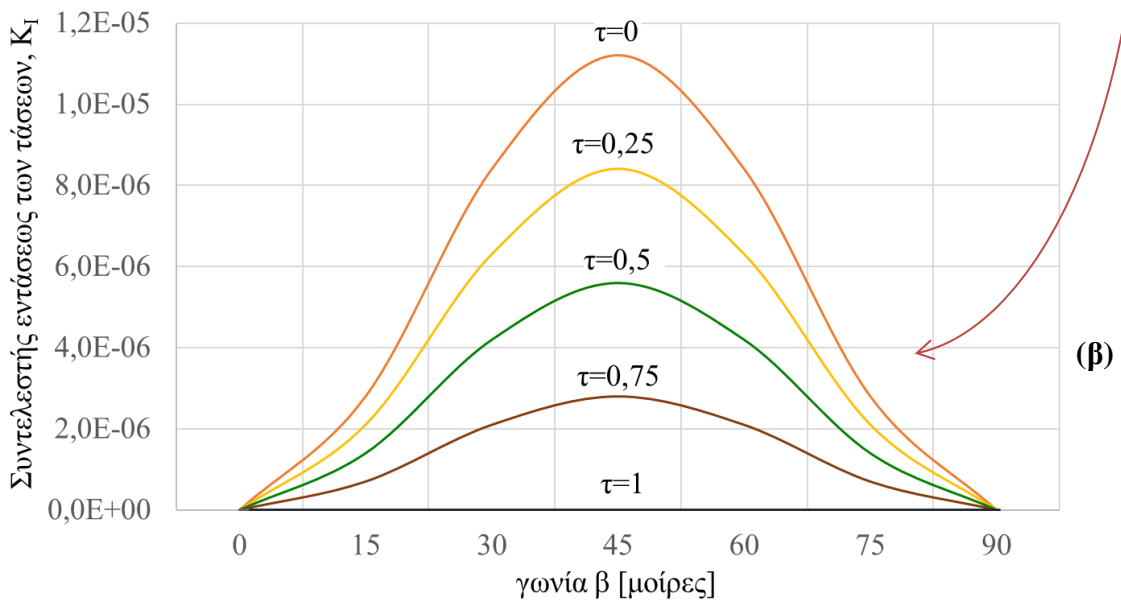
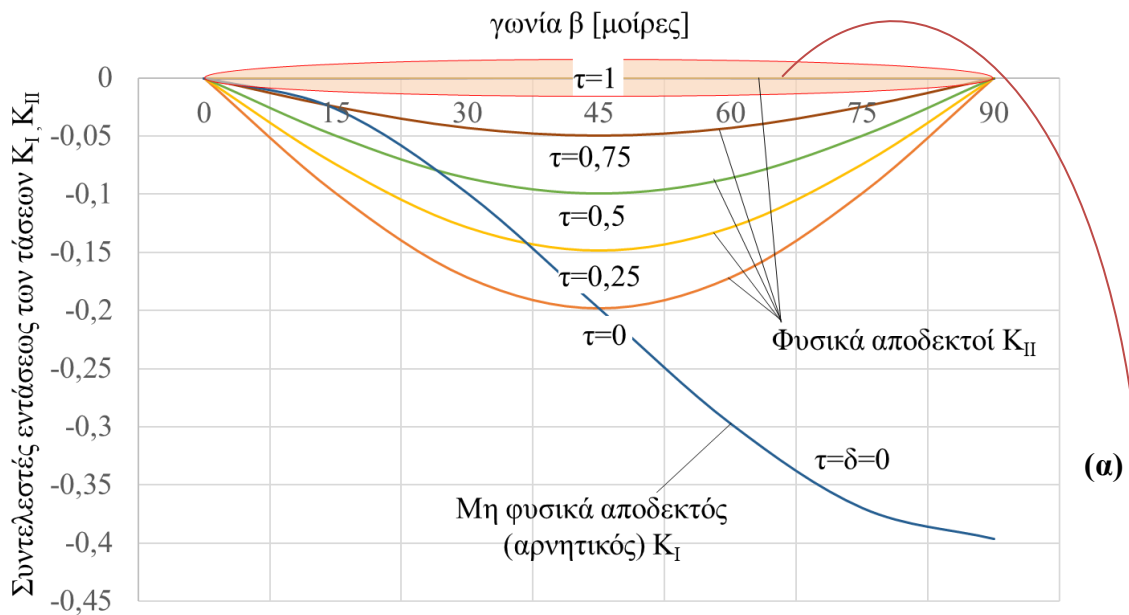
Για τους υπολογισμούς και τη χάραξη των καμπυλών των ΣΕΤ έγινε χρήση του προγράμματος EXCEL.

Επίσης για λόγους ευκρίνειας, επειδή οι τιμές των φυσικά αποδεκτών K_I που προκύπτουν όπως φαίνεται από τα παρακάτω σχήματα είναι πάρα πολύ μικρές θετικές ποσότητες (ή μηδέν), κάθε σχήμα των κατανομών των ΣΕΤ συνοδεύεται από ένα μεγεθυμένο απόσπασμά του με την περιοχή των κατανομών των φυσικά αποδεκτών θετικών (ή μηδέν) K_I .

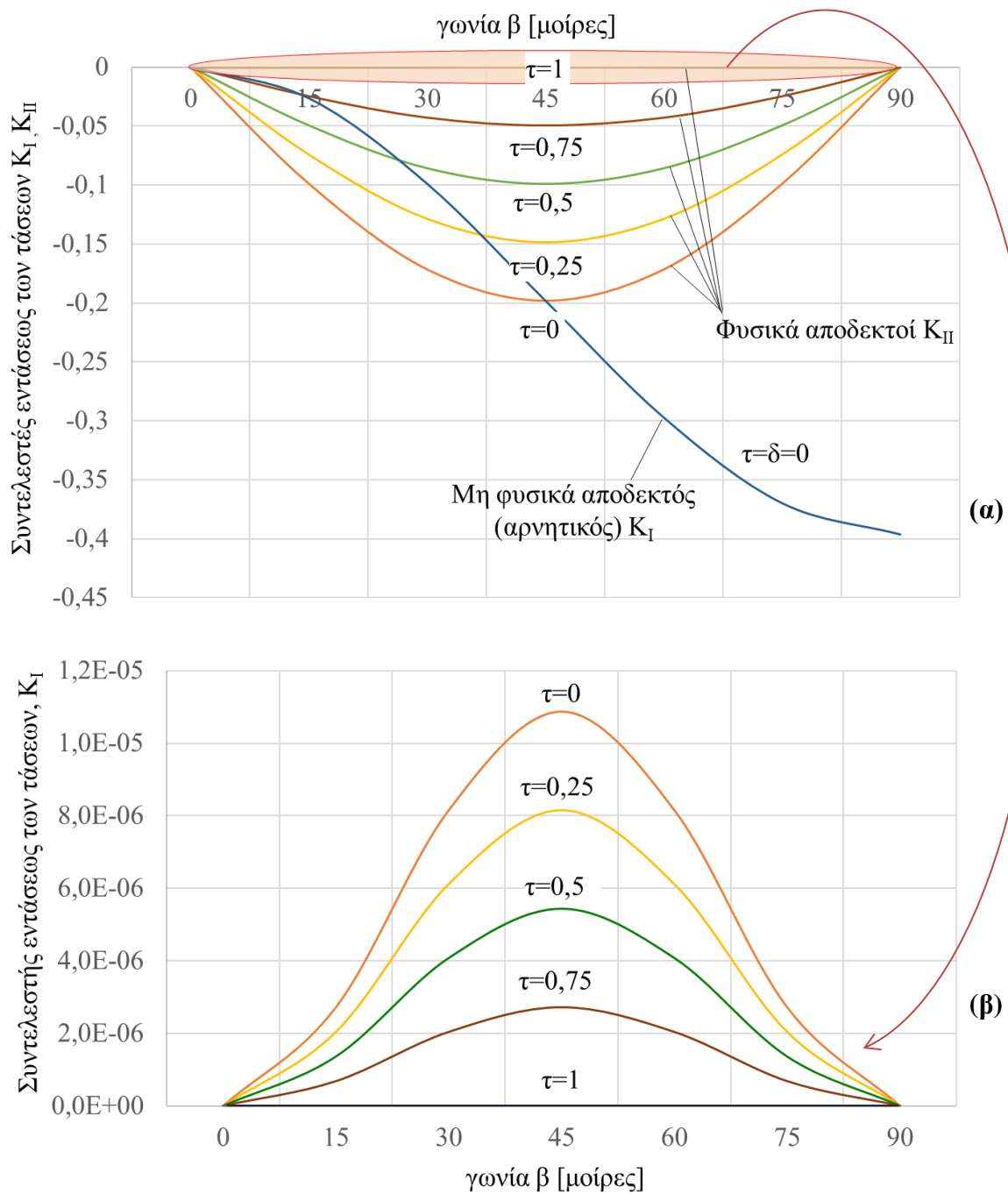
Για παράδειγμα, έστω το Σχήμα 76, που αναφέρεται στους ΣΕΤ για $E=175$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0.1$, συναρτήσει της γωνίας β . Στο Σχήμα 76α φαίνεται, καταρχάς, η κατανομή του K_{II} (κόκκινο χρώμα) και του αντίστοιχου αρνητικού μη φυσικά αποδεκτού K_I (μπλε χρώμα) πριν τη διόρθωση του προβλήματος, που προκύπτει ή από το 'αρχικό πρόβλημα' ή από το 'γενικό πρόβλημα' θέτοντας $\tau=\delta=0$. Επίσης, φαίνονται και οι κατανομές των διορθωμένων K_{II} για $\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ στο 'γενικό πρόβλημα'. Σημειώνεται ότι ενώ η επιλογή $\tau=\delta=0$ οδηγεί (Εξ. (94), (95)) σε αρνητικό, μη φυσικά αποδεκτό K_I , η επιλογή $\tau=0, \delta=\tan\omega\cdot\tan\lambda+1$ οδηγεί σε θετικό φυσικά αποδεκτό K_I . Ωστόσο, το μέγεθος αυτού του K_I , όπως και των υπολοίπων K_I για $\tau=0.25, 0.5, 0.75$, είναι έως και τέσσερις τάξεις μεγέθους μικρότερο των αντίστοιχων K_{II} , οπότε απαιτείται η μεγεθυμένη εικόνα του Σχήματος 76β, ώστε να φανεί η μεταβολή του K_I .

Τα ακόλουθα διαγράμματα των ΣΕΤ στα Σχήματα 76 έως 79, χαράχθηκαν συναρτήσει της γωνίας φόρτισης β , για ένα σταθερό μέτρο ελαστικότητας $E=175$ GPa και διάφορους λόγους Poisson $\nu=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

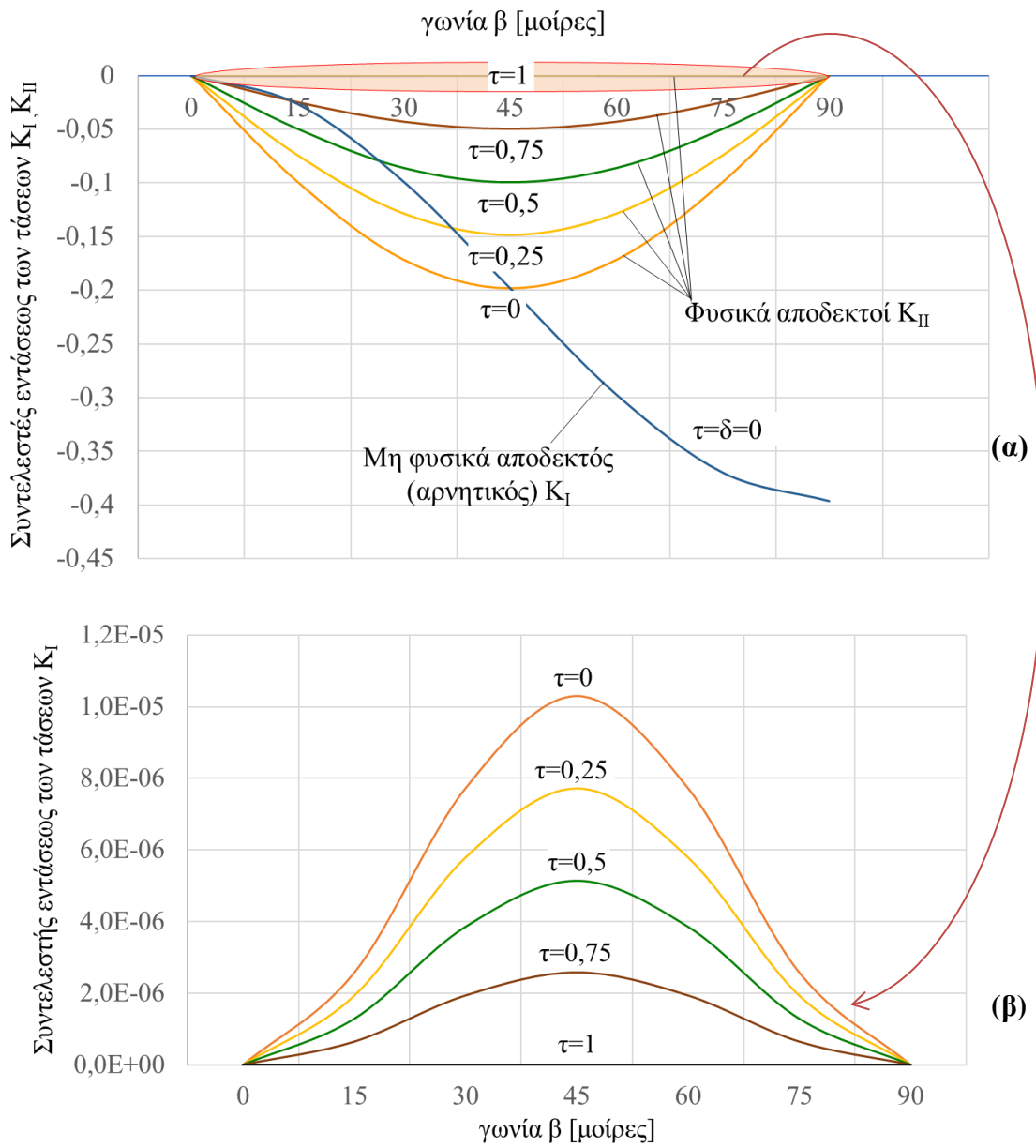
Τα διαγράμματα των ΣΕΤ στα Σχήματα 80 έως 82, χαράχθηκαν συναρτήσει της γωνίας φόρτισης β , για ένα σταθερό λόγο Poisson $\nu=0.3$ και διάφορα μέτρα ελαστικότητας $E=200, 225, 250$ GPa.



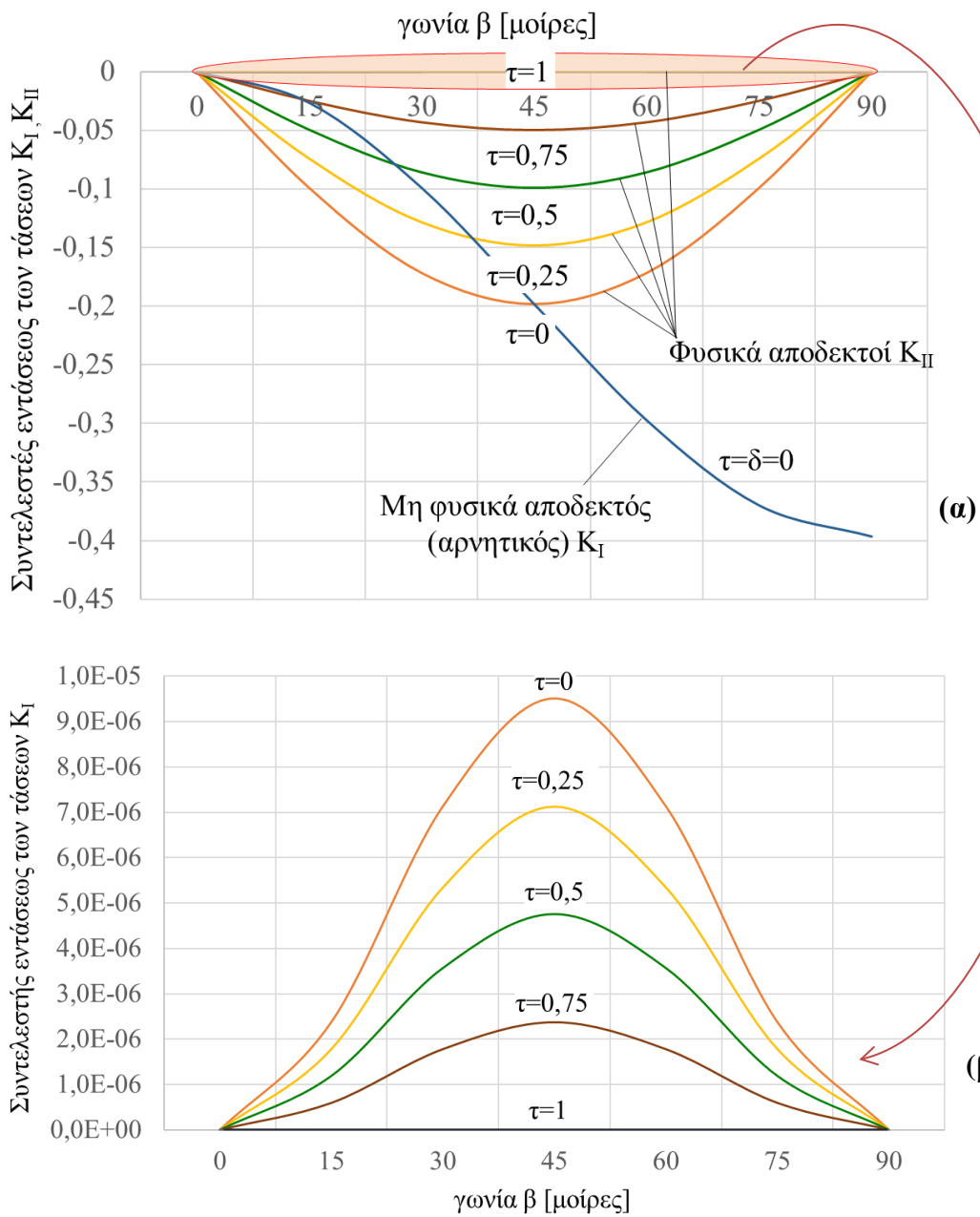
Σχήμα 76. (α) Οι ΣΕΤ συναρτήσει της γωνίας β , για $E=175$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0.1$, πριν ($\tau=\delta=0$) και μετά ($\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, \delta=(1-\tau)\tan\omega \cdot \tan\lambda+1$) τη διόρθωση του προβλήματος. (β) Λεπτομέρεια των διορθωμένων φυσικά αποδεκτών K_I που λαμβάνουν πάρα πολύ μικρές θετικές τιμές για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής.



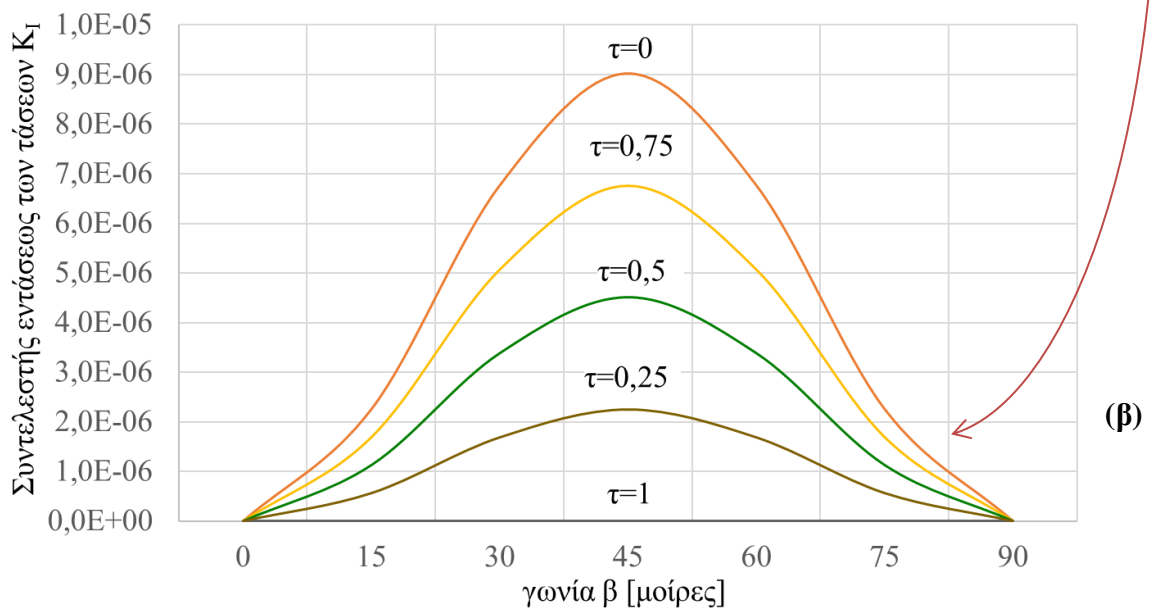
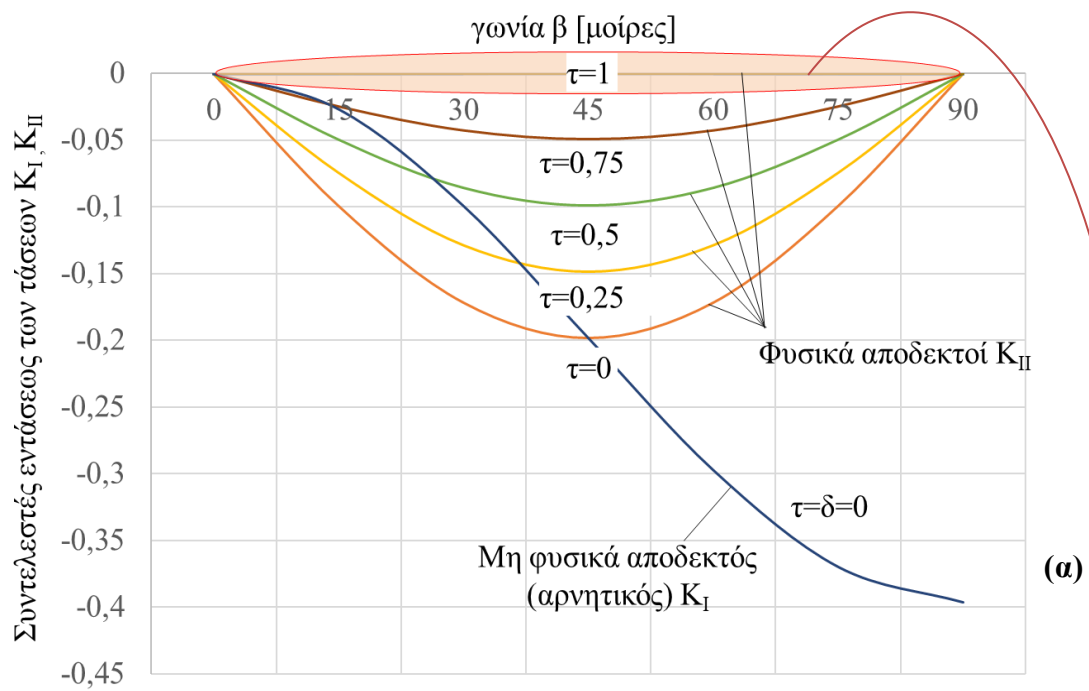
Σχήμα 77. (α) Οι ΣΕΤ συναρτήσει της γωνίας β , για $E=175$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0.2$, πριν ($\tau=\delta=0$) και μετά ($\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, \delta=(1-\tau)\tan\omega\cdot\tan\lambda+1$) τη διόρθωση του προβλήματος. (β) Λεπτομέρεια των διορθωμένων φυσικά αποδεκτών K_I που λαμβάνουν πάρα πολύ μικρές θετικές τιμές για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής.



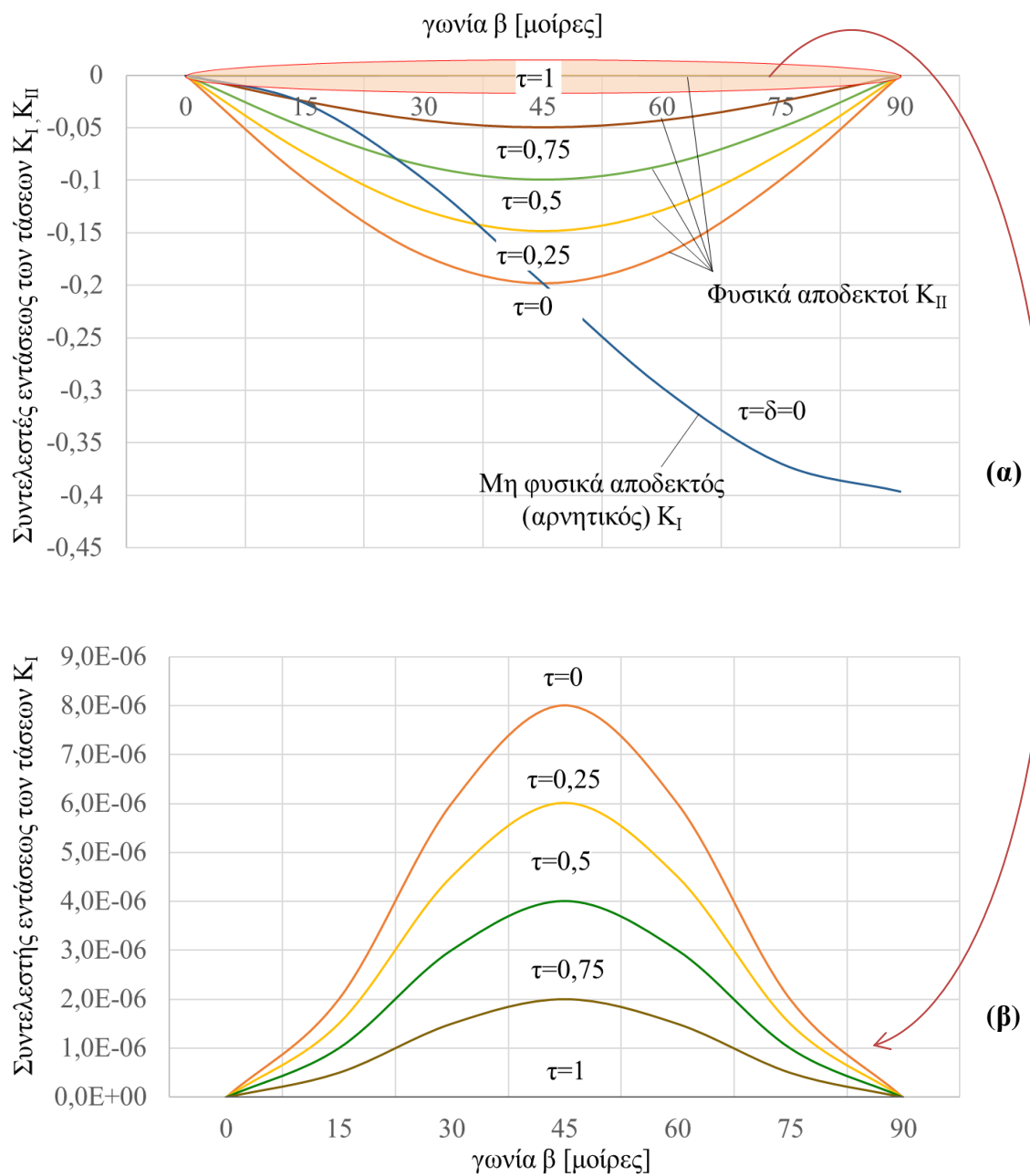
Σχήμα 78. (α) Οι ΣΕΤ συναρτήσει της γωνίας β , για $E=175$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0.3$, πριν ($\tau=\delta=0$) και μετά ($\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, \delta=(1-\tau)\tan\omega \cdot \tan\lambda+1$) τη διόρθωση του προβλήματος. (β) Λεπτομέρεια των διορθωμένων φυσικά αποδεκτών K_I που λαμβάνουν πάρα πολύ μικρές θετικές τιμές για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής.



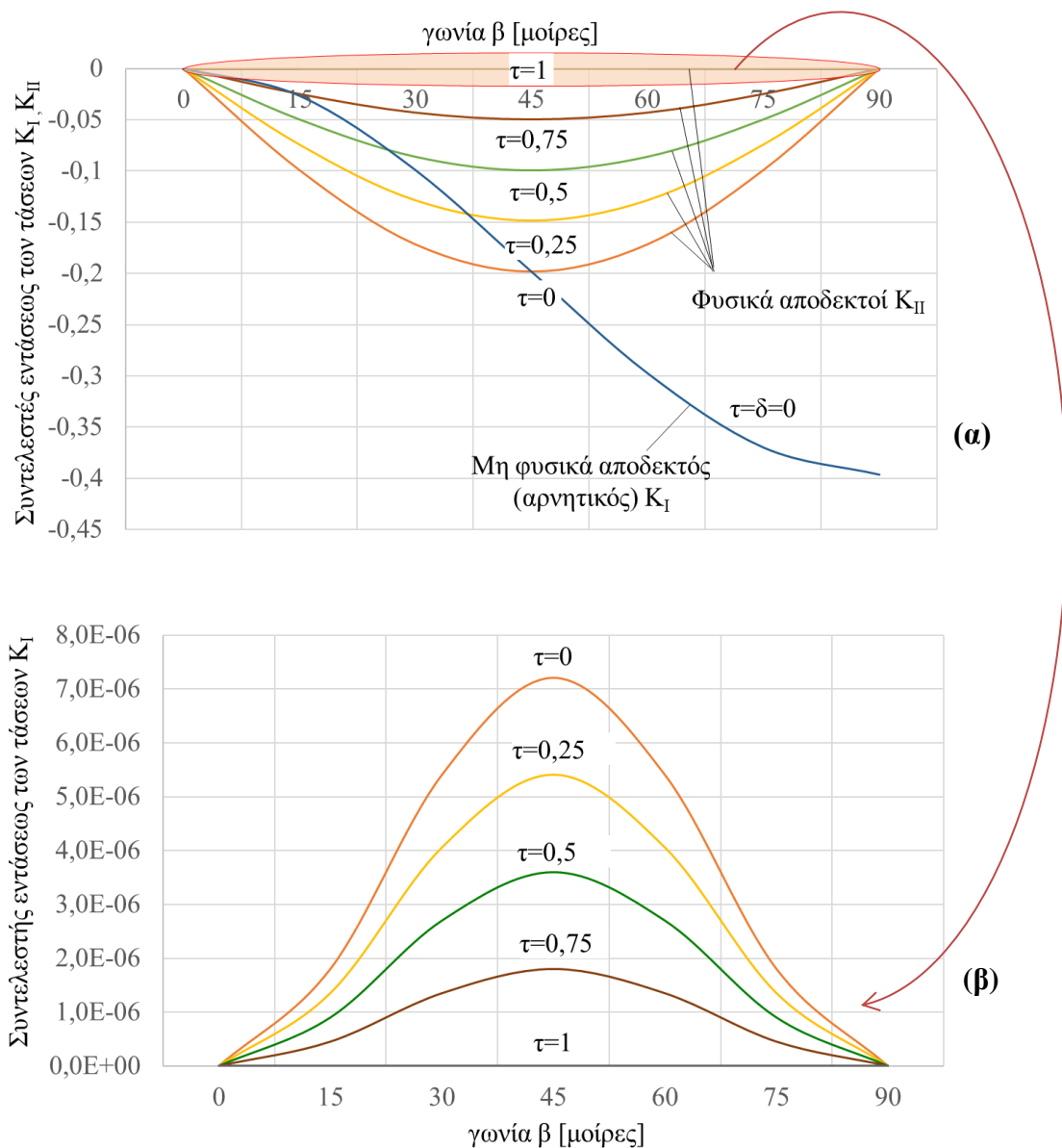
Σχήμα 79. (α) Οι ΣΕΤ συναρτήσει της γωνίας β , για $E=175$ GPa και λόγο Poisson $\nu=0.4$, πριν ($\tau=\delta=0$) και μετά ($\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, \delta=(1-\tau)\tan\omega \cdot \tan\lambda+1$) τη διόρθωση του προβλήματος. (β) Λεπτομέρεια των διορθωμένων φυσικά αποδεκτών K_I που λαμβάνουν πάρα πολύ μικρές θετικές τιμές για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής.



Σχήμα 80. (α) Οι ΣΕΤ συναρτήσει της γωνίας β , για λόγο Poisson $\nu=0.3$ και $E=200 \text{ GPa}$, πριν ($\tau=\delta=0$) και μετά ($\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, \delta=(1-\tau)\tan\omega \cdot \tan\lambda+1$) τη διόρθωση του προβλήματος. (β) Λεπτομέρεια των διορθωμένων φυσικά αποδεκτών K_I που λαμβάνουν πάρα πολύ μικρές θετικές τιμές για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής.



Σχήμα 81. Οι ΣΕΤ συναρτήσει της γωνίας β , για λόγο Poisson $\nu=0.3$ και $E=225 \text{ GPa}$, πριν ($\tau=\delta=0$) και μετά ($\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, \delta=(1-\tau)\tan\omega \cdot \tan\lambda+1$) τη διόρθωση του προβλήματος. (β) Λεπτομέρεια των διορθωμένων φυσικά αποδεκτών K_I που λαμβάνουν πάρα πολύ μικρές θετικές τιμές για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής.



Σχήμα 82. (α) Οι ΣΕΤ συναρτήσει της γωνίας β , για λόγο Poisson $\nu=0.3$ και $E=250$ GPa, πριν ($\tau=\delta=0$) και μετά ($\tau=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, \delta=(1-\tau)\tan\omega \cdot \tan\lambda+1$) τη διόρθωση του προβλήματος. (β) Λεπτομέρεια των διορθωμένων φυσικά αποδεκτών K_I που λαμβάνουν πάρα πολύ μικρές θετικές τιμές για την εξασφάλιση της επαφής των χειλέων της ρωγμής.

Όπως φαίνεται (και ήταν αναμενόμενο λόγω της Εξ. (93)), οι ΣΕΤ K_{II} είναι ανεξάρτητοι του υλικού, οπότε οι κατανομές τους συναρτήσει της γωνίας β είναι ίδιες σε όλα τα διαγράμματα. Αντιθέτως, οι ΣΕΤ K_I , λόγω παρουσίας στις εκφράσεις τους του συντελεστή $\delta=\delta(\lambda)$ (πρβλ. Εξς. (31), (36), (43)), εξαρτώνται από το υλικό και δη το E τόσο για επίπεδη παραμόρφωση

όσο και για επίπεδη ένταση, αλλά και το ν στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης (πρβλ. Εξς. (36), (129), (130)).

Όπως φαίνεται από τα Σχήματα 76 έως 79, αύξηση του λόγου Poisson ν , για σταθερό μέτρο ελαστικότητας E , οδηγεί σε μείωση της τιμής του θετικού ΣΕΤ K_I . Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο ότι, όσο αυξάνεται η παραμόρφωση του υλικού εγκάρσια στη φόρτιση (αυξανόμενου του λόγου Poisson ν) το τασικό πεδίο και άρα και η ένταση αυτού είναι λογικό να μειώνονται.

Από τα Σχήματα 80 έως 82, φαίνεται ότι αύξηση του μέτρου ελαστικότητας E για σταθερό λόγο Poisson ν , οδηγεί επίσης σε μείωση της τιμής του θετικού φυσικά αποδεκτού ΣΕΤ K_I . Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο ότι, όσο μειώνεται η ενδοτικότητα του υλικού (αυξανόμενου του μέτρου ελαστικότητας E) η αλληλοεπικάλυψη και άρα και η αρνητική αλληλοεπικάλυψη που αντιστοιχεί στο θετικό ΣΕΤ K_I , ως παραμόρφωση, επίσης μειώνεται.

Γενικά, από όλα τα παραπάνω σχήματα προκύπτουν τα εύλογα συμπεράσματα ότι οι ΣΕΤ: μεγιστοποιούνται για γωνία φόρτισης $\beta=45^\circ$ ως προς τη ρωγμή, μηδενίζονται για $\beta=0^\circ$ και 90° , είναι πάντα (για κάθε β) μηδέν για $\tau=\delta=1$ καθώς τότε δεν υπάρχει καθόλου σχετική κίνηση των χειλέων της ρωγμής παρά μόνο στερεά στροφή και μεταβολή του μήκους της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία έγινε μία παραμετρική μελέτη των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων και των ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, σε μεταλλική πλάκα με μικρή κεντρική μαθηματική ρωγμή. Για την παραμετρική μελέτη χρησιμοποιήθηκε η λύση [1]. Επίσης, τα αποτελέσματα αξιολογήθηκαν συγκριτικά με την αντίστοιχη αρηγμάτωση, για την οποία παρουσιάστηκε η λύση με τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών.

Ειδικότερα, τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψισθούν ως εξής:

Πεδίο μετατοπίσεων στη ρωγμή και η μορφή της παραμορφωμένης ρωγμής

Ο λόγος Poisson ν επηρεάζει την παραμορφωμένη μορφή της ρωγμής μόνο στην επίπεδη παραμόρφωση (όχι στην επίπεδη ένταση). Ωστόσο, η επιρροή είναι ανάλογη του όρου $1-\nu^2$ οπότε είναι πολύ μικρή. Όπως δείχθηκε, η κατά απόλυτη τιμή μεταβολή στο μήκος της ρωγμής λόγω φαινομένου Poisson είναι ούτως ή άλλως αμελητέα.

Η διαφορά στη στερεά στροφή λ μεταξύ ρωγμής και υλικής γραμμής $2a$ στην αρηγμάτωση πλάκα, επηρεάζεται από το λόγο Poisson ν . Για επίπεδη παραμόρφωση, απουσία τριβής, και $\nu=0.1$, παρατηρείται αύξηση 90% της στροφής της ‘ψευδορωγμής’ σε σχέση με την υλική γραμμή $2a$. Η διαφορά μειώνεται με την αύξηση του λόγου Poisson ν , με τη διαφοροποίηση μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης να είναι πολύ μικρή.

Και στις δύο περιπτώσεις, επίπεδη παραμόρφωση και επίπεδη ένταση, το πεδίο μετατοπίσεων στη ρωγμή εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας E , το οποίο επηρεάζει τόσο τη στροφή λ όσο και το τελικό μήκος της ρωγμής. Η γωνία στροφής λ μειώνεται με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας E , με το ρυθμό μείωσης να είναι εντονότερος στην επίπεδη ένταση. Η επίδραση στο τελικό μήκος της ρωγμής είναι πολύ μικρή. Ωστόσο, η επίδραση του μέτρου ελαστικότητας E στο σχήμα της παραμορφωμένης ρωγμής είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την επίδραση του λόγου Poisson ν .

Η τριβής δεν επηρεάζει την τιμή της γωνίας στροφής λ (αφού εξ’ υποθέσεως η φυσικά αποδεκτή κλειστή ρωγμή έχει πάντα - παρουσία ή απουσία τριβής, τη διεύθυνση της ‘ψευδορωγμής’) και η τελική θέση της αιχμής της ρωγμής στην παραμορφωμένη γεωμετρία διαφέρει πολύ λίγο μεταξύ των δύο ακραίων περιπτώσεων, 1^{ns} (πλήρης σχετική ολίσθηση απουσία τριβής) και 2^{ns} (μηδενική σχετική ολίσθηση παρουσία τριβής), λόγω του μεγάλου μέτρου ελαστικότητας E του υλικού.

Λόγω της γεωμετρίας της φόρτισης, οι γωνίες στερεάς στροφής λ στις συμπληρωματικές γωνίες β είναι ίσες, τόσο όσον αφορά στη ρωγμή όσο και όσον αφορά στην αντίστοιχη υλική γραμμή $2a$.

Επίδραση της ρωγμής στο πεδίο μετατοπίσεων στο εσωτερικό της πλάκας

Η μικρότερη επίδραση στο πεδίο των μετατοπίσεων στο εσωτερικό της πλάκας λόγω της εισαγωγής της ρωγμής, εμφανίζεται στην περίπτωση παρουσίας τριβής στα χείλη της ρωγμής ($\tau=\delta=1$). Αντίθετα, απουσία τριβής, υπάρχει η μέγιστη επίδραση της ρωγμής επί του πεδίου των μετατοπίσεων.

Τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής συγκριτικά με τις αντίστοιχες τάσεις στην αρηγμάτωτη πλάκα

Οι τάσεις επαφής (κάθετη θλιπτική και εφαπτομενική τάση τριβής) στα χείλη της ρωγμής, εμφανίζονται σταθερά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες (ομοιόμορφες), ορθή και διατμητική τάση κατά μήκος της υλικής γραμμής 2α στην αρηγμάτωτη πλάκα.

Οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής, είτε για επίπεδη παραμόρφωση είτε για επίπεδη ένταση, αυξάνονται κατ' απόλυτο τιμή με τη μείωση του λόγου Poisson ν .

Έτσι μείωση του ν έχει ως συνέπεια την αύξηση της ομοιόμορφης πίεσης στα χείλη της ρωγμής (που αυξάνεται επίσης με την αύξηση της γωνίας φόρτισης β) η οποία εμφανίζεται σε ποσοστό έως και 25% μεγαλύτερη της αντίστοιχης ορθής τάσης στην αρηγμάτωτη πλάκα (για $\beta=90^\circ$).

Αναλόγως αυξημένη εμφανίζεται η τάση τριβή στα χείλη της ρωγμής, σε σχέση με εκείνην στην αρηγμάτωτη πλάκα, με τη συνεχή μείωση του λόγου Poisson ν . Η μέγιστη επίδραση του ν στην ομοιόμορφη τάση τριβής εμφανίζεται στις 45° όπου μείωση του ν οδηγεί σε αύξηση του μέτρου της τάσης τριβή έως και κατά 25% για $\nu=0.1$.

Το μέτρο ελαστικότητας E επηρεάζει ασθενώς το πεδίο των τάσεων και μόνο την κάθετη θλιπτική τάση επαφής σ_{yy} και μόνο στην περίπτωση απουσίας τριβής, με την εν λόγω τάση να εμφανίζεται, για την ίδια τιμή του E , πιο αυξημένη στην επίπεδη ένταση.

Η διαφορά στην τιμή των τάσεων, ορθών και διατμητικών/τριβής, μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης είναι γενικά μικρή, με τις τιμές των τάσεων αυτών να λαμβάνουν μεγαλύτερες απόλυτες τιμές στην περίπτωση της επίπεδης έντασης.

Οι τάσεις επαφής τριβής και οι αντίστοιχες διατμητικές τάσεις στην αρηγμάτωτη πλάκα, είναι ίδιες στις συμπληρωματικές γωνίες β και μεγιστοποιούνται, κατ' απόλυτο τιμή, για $\beta=45^\circ$.

Η επιρροή της τριβής είναι αμελητέα στην τιμή της ορθής θλιπτικής τάσης επαφής σ_{yy} , είτε στην επίπεδη παραμόρφωση είτε στην επίπεδη ένταση.

Στην περίπτωση παρουσίας τριβής και δη για $\tau=\delta=1$, το δ και κατ' επέκταση η ορθή τάση επαφής σ_{yy} δεν εξαρτώνται από το μέτρο ελαστικότητας E , αλλά μόνο από το λόγο Poisson ν .

Τάσεις στο εσωτερικό της ρηγματωμένης πλάκας συγκριτικά με τις αντίστοιχες τάσεις στην αρηγμάτωτη πλάκα

Η διατάραξη που προκαλεί η παρουσία ρωγμής, παρουσία τριβής στα χείλη της, στο τασικό πεδίο της αρηγμάτωτης πλάκας είναι σημαντική. Εντονότερη διατάραξη εμφανίζεται στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, στη διατμητική τάση και την ορθή τάση σ_{xx} .

Για απουσία τριβής μεταξύ των χειλέων της ρωγμής φαίνεται ότι η διατάραξη του τασικού πεδίου από την εισαγωγή της ρωγμής είναι ασθενέστερη σε σχέση με την παρουσία τριβής (αφού η μείωση των περιορισμών στη μετατόπιση οδηγεί σε πιο μειωμένες τάσεις). Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, πιο μικρή είναι και η διαφοροποίηση στις απόλυτες τιμές των τάσεων επαφής μεταξύ επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης έντασης.

Σε κάθε περίπτωση οι αντίστοιχες τάσεις ρηγματωμένης και αρηγμάτωτης πλάκας συγκλίνουν γρήγορα και σε κάποιες περιπτώσεις αρκετά κοντά στη ρωγμή.

Οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων (ΣΕΤ) στο άκρο της ρωγμής

Ο ΣΕΤ K_{II} είναι ανεξάρτητος του υλικού, ενώ ο K_I εξαρτώνται από το E , αλλά και το ν στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης.

Αύξηση του λόγου Poisson ν , οδηγεί σε μείωση της τιμής (του πάντα) θετικού K_I .

Ομοίως, αύξηση του E , οδηγεί επίσης σε μείωση της τιμής (του πάντα) θετικού K_I .

Οι ΣΕΤ μεγιστοποιούνται για γωνία φόρτισης $\beta=45^\circ$ ως προς τη ρωγμή, μηδενίζονται για $\beta=0^\circ$ και 90° και είναι πάντα, για κάθε β , μηδέν παρουσία τριβής, δηλαδή για $\tau=\delta=1$, καθώς τότε δεν υπάρχει καθόλου σχετική κίνηση των χειλέων της ρωγμής παρά μόνο στερεά στροφή και μεταβολή του μήκους της.

Περιπτώσεις που η ρωγμή δεν επηρεάζει τη μηχανική συμπεριφορά της πλάκας

Η εισαγωγή μίας ρωγμής στην πλάκα δεν επηρεάζει τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων στην ειδική περίπτωση που η θλιπτική ομοιόμορφη τάση στο άπειρο είναι παράλληλη στη ρωγμή.

Επίσης, μπορεί ναδειχθεί ότι, η ρωγμή δεν επηρεάζει τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων στην πλάκα στην ακραία περίπτωση που ο συντελεστής τριβής στα χείλη της ρωγμής είναι τέτοιος ώστε να μην επιτρέπει τη σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής ($\tau=\delta=1$) και η ομοιόμορφη θλιπτική τάση στα σύνορα της πλάκας προσεγγίζει το αντίστοιχο όριο διαρροής του υλικού. Πράγματι, προκειμένου να μην υπάρχει σχετική ολίσθηση των χειλέων της ρωγμής πρέπει να τίθενται $\tau=\delta=1$. Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση, λόγω μηδενικών ΣΕΤ (πρβλ. Εξς. (95), (96) για $\tau=\delta=1$), δεν πρέπει να εμφανίζεται ιδιομορφία του τασικού πεδίου στο άκρο της ρωγμής. Για να ισχύει κάτι τέτοιο (σε συνδυασμό με την θεώρηση $\tau=\delta=1$), θα πρέπει οι εκφράσεις με τις ρίζες στο δεξιό μέλος των Εξν. (87) και (88) (τάσεις κατά τον άξονα x εκτός ρωγμής) να αλληλοαναιρούνται. Όπως φαίνεται από τις Εξς. (87) και (88), οι όροι με τις ρίζες αλληλοαναιρούνται εάν ισχύει ότι:

$$\frac{(\kappa + 1)^2}{4\kappa} = 1 \quad (137)$$

$$\text{ή} \quad \kappa^2 + 1 + 2\kappa - 4\kappa = 0 \Rightarrow \kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \Rightarrow (\kappa - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\kappa = 1 \quad (138)$$

Στην περίπτωση της επίπεδης τάσης αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} = 1 \Rightarrow$$

$$\nu = 1 \quad (139)$$

που δεν είναι μια αποδεκτή τιμή για το λόγο Poisson ν . Στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\kappa = 3 - 4\nu = 1 \Rightarrow$$

$$\nu = 0.5 \quad (140)$$

που σημαίνει ότι το υλικό πρέπει να είναι σε κατάσταση διαρροής. Άρα η θλιπτική τάση σ_o στα σύνορα της πλάκας θα πρέπει να ισούται με το όριο διαρροής του υλικού σε θλίψη. Σε αυτήν την περίπτωση, οι Εξς. (87) και (88) δίνουν για τις τάσεις κατά τον άξονα x εκτός ρωγμής:

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_o}{2}(1 - \cos 2\beta), \quad \sigma_{xy} = \frac{\sigma_o}{2} \sin 2\beta \quad (141)$$

Επίσης, λόγω της Εξ. (138) και της θεώρησης $\tau=\delta=1$, οι τάσεις επαφής στα χείλη της ρωγμής γίνονται:

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \frac{\sigma_o}{2}(1 - \cos 2\beta), \quad \sigma_{xy}^{\pm} = \frac{\sigma_o}{2} \sin 2\beta \quad (142)$$

δηλαδή ίδιες με τάσεις κατά τον άξονα x εκτός ρωγμής (Εξς. (141)). Επίσης, οι Εξς. (141) ή (142), ταυτίζονται με τις Εξς. (115) και (116), που δίνουν όντως τις αντίστοιχες τάσεις στην αρηγμάτωτη πλάκα.

Κατά ανάλογο τρόπο, σε αυτήν την περίπτωση ($\tau=\delta=1$, $\kappa=1$, επίπεδη παραμόρφωση, $\nu=0.5$.) οι Εξς. (89) και (90) δίνουν για τις μετατοπίσεις στα χείλη της ρωγμής:

$$u = \frac{\sigma_o \cos 2\beta}{4\mu} x, \quad v = \frac{\sigma_o}{4\mu} x_1 \sin 2\beta \quad (143)$$

που ταυτίζονται με τις Εξς. (120) και (121), που δίνουν όντως το αντίστοιχο ομοιόμορφο πεδίο των μετατοπίσεων στην αρηγμάτωτη πλάκα.

Κλείνοντας, επισημαίνεται ότι η παρούσα εργασία ως μια προσπάθεια ποσοτικοποίησης των αναλυτικών αποτελεσμάτων για τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων και ΣΕΤ στο άκρο της ρωγμής, της λύσης [1], σε θεωρητικό επίπεδο, αποτελεί μόνο ένα μέρος μιας γενικότερης εργασίας που απαιτεί περαιτέρω διεύρυνση και επαλήθευση σε πειραματικό επίπεδο, κάτι που αποτελεί και το επόμενο μελλοντικό βήμα, για την επαλήθευση των παρόντων αποτελεσμάτων και την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Markides, Ch. F., Ph.D. Thesis, National Technical University of Athens, School of Applied Mathematical and Physical Sciences, Department of Mechanics (2009).
- [2] Irwin, G. R., “Fracture Dynamics,” *Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, pp. 147-166 (1948).
- [3] Griffith, A. A., “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A221**, pp. 163-197, 1921; and “The Theory of Rupture,” *Proceedings of the First International Conference of Applied Mechanics*, Delft (1924).
- [4] Inglis, C. E., “Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners,” *Transactions of the Institute of Naval Architects*, **55**, pp. 219-241 (1913).
- [5] Irwin, G. R., “Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate,” *Journal of Applied Mechanics*, **24**, pp. 361-364 (1957).
- [6] Westergaard, H. M., “Bearing Pressures and Cracks,” *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **61**, pp. A49-A53 (1939).
- [7] Sih, G. C., Paris, P. C., and Erdogan, F., “Crack Tip, Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems,” *Journal of Applied Mechanics*, **29**, pp. 306-312 (1962).
- [8] Sih, G. C., Paris, P. C., and Irwin, G. R., “On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies,” *International Journal of Fracture Mechanics*, **1**, pp. 189-203 (1965).
- [9] Theocaris, P. S., “Elastic SIFs Evaluated by Caustics, in Mechanics of Fracture,” (Ed. G. C. Sih), **7**, Ch. 3, Sijthoff and Noordhoff, pp. 189-252 (1981).
- [10] Kalthoff, J. F., *Handbook on Experimental Mechanics*, (Ed. A. S. Kobayashi), Ch. 9, VCH, pp. 407-476 (1993).
- [11] Kanninen, M. F. and Popelar, C. H., “Advanced Fracture Mechanics,” Oxford University Press, New York, (1985).
- [12] Irwin, G. R. and Paris, P. C., “Fundamental Aspects of Crack Growth and Fracture,” *Fracture*, H. Liebowitz (ed.), **III**, Academic, New York, pp. 1-46 (1971).
- [13] Orowan, E., “Fracture and Strength of Solids,” *Reports on Progress in Physics*, **XII**, p. 185 (1948).
- [14] Irwin, G. R., Kies, J. A., and Smith, H. L., “Fracture Strengths Relative to Onset and Arrest of Crack Propagation,” *Proceedings of the American Society for Testing Materials*, **58**, pp. 640-657 (1958).
- [15] Dugdale, D. S., “Yielding of Steel Sheets Containing Slits,” *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **8**, pp. 100-108 (1960).

- [16] Barenblatt, G. I., “The Mathematical Theory of Equilibrium of Crack in Brittle Fracture,” *Advances in Applied Mechanics*, **7**, pp. 55-129 (1962).
- [17] Wells, A. A., “Application of Fracture Mechanics at and Beyond General Yielding,” *British Welding Journal*, **10**, pp. 563-570 (1963).
- [18] Rice, J. R., “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks,” *Journal of Applied Mechanics*, **35**, pp. 379-386 (1968).
- [19] Muskhelishvili, N. I., “Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity,” Noordhoff The Netherlands, (1954).
- [20] Burniston, E. E. and Gurley, W. Q., *International Journal of Fracture*, **9**, pp. 9-19, (1973).
- [21] Tweed, J., *International Journal of Engineering Science*, **8**, pp. 793-803, (1970).
- [22] Thresher, R. W. and Smith, F. W., *International Journal of Fracture*, **9**, pp. 33-41, (1973).
- [23] Aksogan, O., *International Journal of Fracture*, **11**, pp. 659-670, (1975).
- [24] Paris, P.C., Tada, H. (1975). The stress intensity factors for cyclic reversed bending of a single edge cracked strip including crack surface interference. *International Journal of Fracture* 11:1070–1072.
- [25] Bowie, O. L. and Freese, C. E., *Engineering Fracture Mechanics*, **8**, pp. 373-379, (1976).
- [26] Dundurs, J. and Komninou, M., *International Journal of Engineering Science*, **21**, pp. 223-230, (1983).
- [27] Banks-Sills, L., Arcan, M., and Gabay, H., “A Mode II Fracture Specimen –Finite Element Analysis,” *Engineering Fracture Mechanics*, **19**, p.p. 739-750, (1984).
- [28] C.W. Woo, Y.K Cheung, Y.Z. Chen, Y.H. Wang. A simple model for the contact problem of a finite cracked plate in bending. *Engineering Fracture Mechanics* 29(2):227–231(1988) .
- [29] Theocaris, P. S., Papis, D., and Konstantellos, B. D., “The Exact Shape of a Deformed Internal Slant Crack Under Biaxial Loading,” *International Journal of Fracture*, **30**, pp. 135-153, (1986).
- [30] Papis, D., Theocaris, P. S., and Konstantellos, B. D., “Elastic Overlapping of the Crack Flanks Under Mixed-Mode Loading,” *International Journal of Fracture*, **37**, pp. 303-319, (1988).
- [31] Becker, W. and Gross, D., “About the Mode II Dugdale Crack Solution”, *International Journal of Fracture*, **34**, pp. 65-70, (1987).

- [32] Becker, W. and Gross, D., “About the Dugdale Crack Under Mixed Mode Loading”, *International Journal of Fracture*, **37**, pp. 163-170, (1988).
- [33] Theocaris, P. S. and Sakellariou, M., “A Correction Model for the Incompatible Deformations of the Shear Internal Crack”, *Engineering Fracture Mechanics*, **38**, pp. 231-240, (1991).
- [34] Theocaris, P. S. and Panagiotopoulos, P. D., “On the Consideration of Unilateral Contact and Friction in Cracks. The Boundary Integral Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, pp. 1697-1708, (1992).
- [35] Pazis, D. N., “On the Experimental Realization of Mode-II Cracks,” *Proceedings of the 11th Biennial European Conference on Fracture (ECF 11)*, **I**, Poitiers-Futuroscope, France, pp. 277–282 (1996).
- [36] Podleschny, R., Ph.D., Thesis, Ruhr-University, Bochum, Germany, (1993).
- [37] Ch.F. Markides, D.N. Pazis, S.K. Kourkoulis (2014). The centrally cracked Brazilian disc: implications and solutions in case of closing cracks. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 23(3–4):59–77.
- [38] S.K. Kourkoulis, Ch.F. Markides (2014). Fracture Toughness determined by the Centrally Cracked Brazilian-Disc Test: Some critical issues in the light of an alternative analytic solution. *Materials Performance & Characterization*, 3(3):45–86.
- [39] C. Atkinson, R.E. Smelser, J. Sanchez (1982). Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test, *International Journal of Fracture Mechanics*, 18: 279–291.
- [40] P. Albrecht, A. Lenwari (2006). Stress intensity factor for center-cracked plate with crack surface interference. *Eng. Fract. Mech.*, 73(8): 1035–1045.
- [41] A. Lenwari, Hieu C. Ma (2019). Stress intensity factor for wide-flange steel member with crack surface interference. *Journal of Constructional Steel Research*, 153: 310–319.