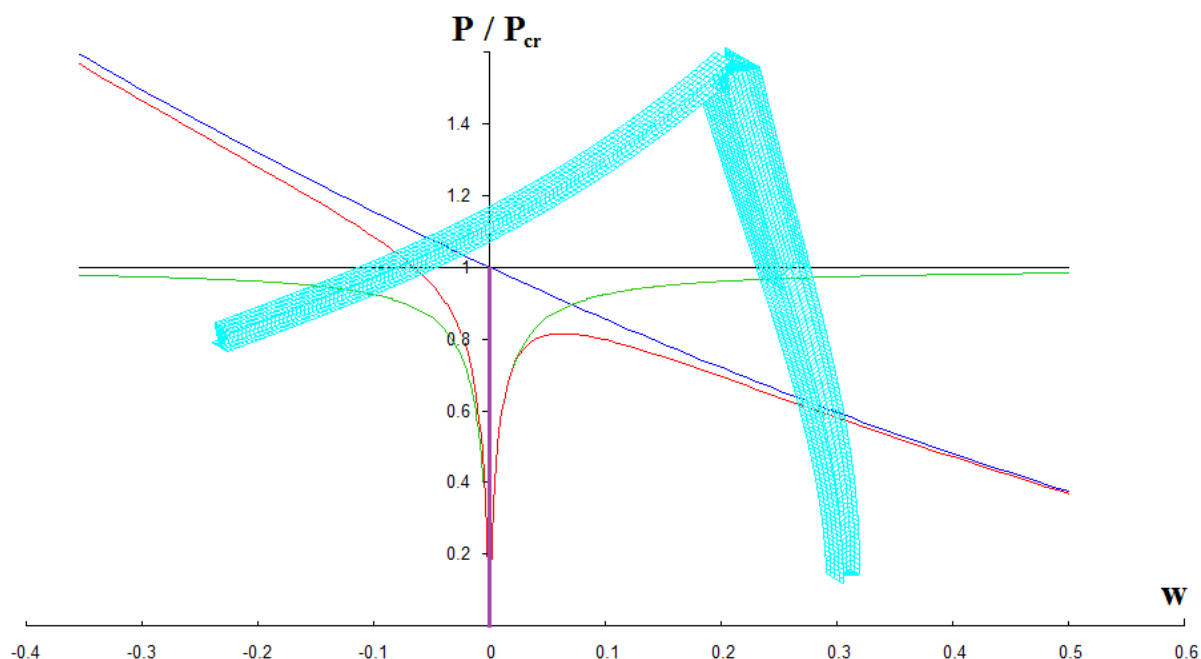




**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**«ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ»**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**  
**Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών**

**Μεταπτυχιακή Εργασία**

**«ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ  
ΜΕ ΜΕΛΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ»**



**Ζαχαρίας Χ. Φασουλάκης**

Επιβλέποντες: κ. Ιωαννίδης Γεώργιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

κ. Αβραάμ Τάσος, Λέκτορας Ε.Μ.Π.

**ΑΘΗΝΑ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2012**

## *Ευχαριστίες*

Από τη θέση αυτή θεωρώ χρέος μου, ως μία ελάχιστη μόνο αναγνώριση, να ευχαριστήσω τα πρόσωπα που συνέβαλαν επιστημονικά και ηθικά για τη διεκπαιρέωση της παρούσας εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή κύριο Ιωαννίδη Γεώργιο για τον σωστό προσανατολισμό καθώς και τον Λέκτορα κύριο Αβραάμ Τάσο για τη συνεχή καθοδήγηση. Θα ήθελα να επισημάνω ότι με το ήθος που τους διακρίνει και την προθυμία που επέδειξαν οδήγησαν στη σωστή κατάρτισή μου στα επιστημονικά θέματα.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου εκ βάθους καρδιάς προς την οικογένειά μου, της οποίας η υποστήριξη επέτρεψε την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος, ένα εγκάρδιο χαιρετισμό στους φίλους, που, εν αγνοία τους, συντελούν στη δημιουργικότητα και την πρόοδό μου.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία Ζαχαρία Χ. Φασουλάκη

**Μη Γραμμική Ανάλυση Ευστάθειας Πλαισίων με Μέλη Μεταβλητής Δυσκαμψίας**

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Η παρούσα εργασία εξετάζει προβλήματα μη γραμμικής συμπεριφοράς επίπεδων πλαισιακών φορέων από χάλυβα με βάση τη θεωρία της ελαστικής ευστάθειας. Η φέρουσα συμπεριφορά των κατασκευών έναντι ευστάθειας επισημαίνεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως μείζονος σημασίας. Επιπλέον, όταν εισάγονται κατασκευαστικές διατάξεις ή ατέλειες το πρόβλημα γίνεται περισσότερο απαιτητικό και συνάμα αρκετά ενδιαφέρον. Στόχος της εργασίας είναι να εμβαθύνει στα φαινόμενα μη γραμμικής συμπεριφοράς ατελών φορέων με μέλη μεταβλητής δυσκαμψίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο κυβικός νόμος μεταβολής της ροπής αδρανείας διατομών διπλού ταυ και η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης μέλους υπό θλίψη με τις συναρτήσεις Bessel. Έπειτα, εξάγονται οι αναλυτικές σχέσεις σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας για διάφορες περιπτώσεις λυγισμού πλαισίων με ή χωρίς μετάθεση και τα αποτελέσματα συνοψίζονται στα αντίστοιχα διαγράμματα κρίσιμων φορτίων καθώς και μηκών λυγισμού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αφού γίνει αναφορά στην ενεργειακή μέθοδο, αναπτύσσεται η θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων και εξάγονται οι σχέσεις που περιγράφουν τη μη γραμμική συμπεριφορά του πλαισιακού φορέα έναντι καμπτικού λυγισμού. Εν συνεχεία, επισυνάπτονται παραμετρικές συγκρίσεις μεταξύ των δρόμων ισορροπίας, οι οποίοι εξήχθησαν μέσω αλγορίθμων στη γλώσσα προγραμματισμού Fortran, ενώ γίνεται και η σύγκριση με τις αντίστοιχες γραμμικές λύσεις. Τέλος, διερευνάται η επιρροή αρχικών ατελειών και συγκεκριμένα της έκκεντρης φόρτισης στη φέρουσα ικανότητα του πλαισίου, απ' όπου λαμβάνονται ενδιαφέροντα συμπεράσματα που αφορούν συστήματα που χάνουν την ευστάθειά τους μέσω σημείου διακλάδωσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο βελτιώνεται η προσομοίωση του μοντέλου με την εισαγωγή ενός στροφικού και έπειτα ενός μετακνησιακού ελατηρίου. Με τον τρόπο αυτό δύναται να μελετηθεί φορέας με ακριβής συνοριακές συνθήκες ώστε να προσεγγίζεται η πραγματική φέρουσα ικανότητα ενός πλαισίου μιας κατασκευής. Ακόμα, επισημαίνονται οι δυσκολίες της επίλυσης του προβλήματος, οπότε προτείνεται μία απλοποιητική προσέγγιση που, όμως, δεν πρέπει να εισάγει σημαντικά σφάλματα.

Στο τελευταίο κεφάλαιο ερευνάται η αξιοπιστία της ενεργειακής μεθόδου καθώς και του κυβικού νόμου μεταβολής της δυσκαμψίας μέσω λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων (Sap2000 και Adina) με γραμμικές και μη γραμμικές αναλύσεις. Περιγράφονται οι τρόποι προσομοίωσης των φορέων και ακολουθούν οι συγκρίσεις για ένα ευρύ φάσμα διάφορων παραμέτρων. Τα αποτελέσματα επισυνάπτονται σε συγκριτικούς πίνακες και διαγράμματα δρόμων ισορροπίας των μη γραμμικών αναλύσεων, όπου γίνεται εμφανέστερη η πραγματική συμπεριφορά της κατασκευής.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING  
DEPARTMENT OF STRUCTURAL ENGINEERING  
LABORATORY OF METAL STRUCTURES

MSc Diploma Thesis by Zacharias Ch. Fasoulakis

**Non-linear Postbuckling Analysis of Frames with Varying Cross Sections**

**ABSTRACT**

The present thesis examines problems related to the non-linear behaviour of plane steel frames according to the theory of elastic stability. In the literature the load behaviour of structures against stability is noted as major importance. Furthermore, when construction provisions or defects are imported the problem becomes more challenging and also more interesting. The aim of this thesis is to deepen the effects of non-linear behavior of imperfect frames with members of variable stiffness.

The first chapter presents the cubic law variation of the moment of inertia of double tee sections and the solution of the differential equation of a member under compression with Bessel functions. Then the analytical relations are exported according to the linear theory of elastic stability for various buckling cases of frames with or without transfer. The results are summarized in the respectively diagrams of critical loads and effective buckling lengths.

In the second chapter, after a reference to the energy method, the theory of moderately large displacements is developed and the relations describing the nonlinear behaviour of the frame under flexural buckling are exported. Subsequently, parametric comparisons between the entire (prebuckling and postbuckling) equilibrium paths are attached. Those were exported via algorithms in Fortran programming language. Also, the comparison with the corresponding linear solutions were made. Finally, the influence of initial imperfections, specifically the loading eccentricity, is investigated about the frames load behaviour. There we obtain interesting results concerning systems which lose their stability through a bifurcational point.

In the third chapter we improve the simulation of the model by introducing a torsional and then a translational spring. In this way frames with accurate boundary conditions may be considered so that the actual load carrying capacity of a plane-frame -which is included in a structure- can be approximated. Furthermore, the difficulties of solving this problem are highlighting, so a simplified approach is proposed, which, however, should not introduce significant errors.

The last chapter presents the investigation about the reliability of both the energy method and the cubic law of stiffness variation, through finite element software (Sap2000 and Adina) with linear and nonlinear analysis. Herein the simulation of the plane-frames is described, and the comparisons are following with a wide range of various parameters. The comparative results are attached in both tabular and graphical form. Especially, from the non-linear equilibrium paths becomes apparent the actual behaviour of the construction.

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ..... 1

1.1	Πρόλογος.....	1
1.2	Βασικές Έννοιες.....	3
1.2.1	Καμπτικός Λυγισμός Ευθύγραμμων Ράβδων.....	3
1.2.2	Σχέση Ροπής Κάμψεως – Καμπυλότητας.....	4
1.3	Μορφές Μεταβολής της Δυσκαμψίας.....	6
1.3.1	Κυβική Μεταβολή Δυσκαμψίας.....	7
1.4	Περίπτωση Αντισυμμετρικού Λυγισμού με Μετάθεση.....	10
1.4.1	Περιγραφή του Πλαισίου.....	12
1.4.2	Εξίσωση Λυγισμού.....	13
1.5	Περίπτωση Συμμετρικού Λυγισμού Άνευ Μεταθέσεως.....	17
1.5.1	Περιγραφή του Πλαισίου.....	17
1.5.2	Εξίσωση Λυγισμού.....	18
1.6	Εξαγωγή Διαγραμμάτων.....	22

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ..... 25

2.1	Βασικές Έννοιες.....	25
2.1.1	Ενεργειακή Μέθοδος.....	27
2.1.2	Η Επιρροή των Αρχικών Ατελειών.....	29
2.2	Μη Γραμμική Ανάλυση Ορθογωνικού Πλαισίου με τη Μέθοδο των Μετρίως Μεγάλων Μετατοπίσεων.....	30
2.2.1	Περιγραφή του Πλαισίου.....	31
2.2.2	Διαφορικές Εξισώσεις Ισορροπίας.....	33
2.2.3	Εξίσωση Λυγισμού.....	37
2.3	Αριθμητική Επίλυση Εξίσωσης Λυγισμού.....	40
2.3.1	Αριθμητική Ολοκλήρωση.....	40
2.3.2	Προγραμματισμός.....	41
2.3.3	Συσχετισμός του Φορτίου Λυγισμού με τη Στροφή του Υποστυλώματος.....	42
2.4	Αποτελέσματα Μη Γραμμικής Ανάλυσης – Διαγράμματα.....	42
2.4.1	Διαγράμματα Βέλους Κάμψεως.....	42
2.4.2	Διαγράμματα ως προς $\epsilon'$ .....	45

2.4.3	Διαγράμματα ως προς την Εκκεντρότητα.....	47
2.4.4	Διερεύνηση της Επιρροής Ατελειών.....	49
2.4.4.1	Ασύμμετρο Σημείο Διακλάδωσης.....	49
2.4.4.2	Αριθμητικό Παράδειγμα.....	52
2.4.4.3	Διακλαδική Ανάλυση.....	56

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

#### **ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ**

#### **ΣΥΝΘΗΚΕΣ..... 60**

3.1	Πλαίσια με Δύσκαμπτες Στροφικές Συνδέσεις Υποστυλωμάτων.....	61
3.1.1	Διαφορικές Εξισώσεις Ισορροπίας.....	62
3.1.2	Εξίσωση Λυγισμού.....	69
3.1.3	Προγραμματισμός.....	76
3.1.4	Αποτελέσματα – Διαγράμματα.....	77
3.1.5	Ασύμμετρο Σημείο Διακλάδωσης.....	83
3.2	Πλαίσια με Περιορισμένη Μετάθεση.....	83
3.2.1	Επίλυση του Συστήματος.....	87
3.2.2	Απλοποίηση του Προβλήματος.....	90
3.2.3	Εξίσωση Λυγισμού.....	92
3.2.4	Προγραμματισμός.....	94
3.2.5	Αποτελέσματα – Διαγράμματα.....	95

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

#### **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ..... 98**

4.1	Επιλογή Πλαισιακών Φορέων.....	98
4.2	Αναλύσεις με το Λογισμικό Sap2000.....	100
4.3	Αναλύσεις με το Λογισμικό ADINA.....	102
4.4	Συγκρίσεις Κρίσιμων Φορτίων.....	106
4.4.1	Μεταθετοί Φορείς χωρίς Στροφική Δέσμευση.....	106
4.4.2	Μεταθετοί Φορείς με Στροφική Δέσμευση.....	109
4.4.3	Μερικώς Μεταθετοί Φορείς με Στροφική Δέσμευση.....	110
4.4.4	Πραγματική Ακρίβεια της Μεθόδου.....	117
4.5	Συγκρίσεις Διαγραμμάτων μη Γραμμικών Αναλύσεων.....	119
4.6	Συμπεράσματα εν Περιλήψει.....	124

#### **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ..... 125**

#### **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....**

*Μου είπε ότι το βιβλίο του  
ονομαζόταν η Βίβλος της Άμμου,  
διότι όπως η άμμος ούτε το βιβλίο  
είχε αρχή ή τέλος*

ΧΟΡΧΕ ΛΟΥΙΣ ΜΠΟΡΧΕΣ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

### 1.1 Πρόλογος

Οι αστοχίες των συνήθων κατασκευών πολιτικού μηχανικού εμπίπτουν σε μία από δύο απλές κατηγορίες: (1) στην αστοχία υλικών και (2) στην έλλειψη ευστάθειας. Ο πρώτος τύπος αστοχίας, μπορεί συνήθως να προβλεφθεί επαρκώς, αναλύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής για την αρχική μη παραμορφωμένη κατάσταση αυτής.

Αντιθέτως, η πρόβλεψη της αστοχίας λόγω αστάθειας της κατασκευής απαιτεί τη διαμόρφωση εξισώσεων ισορροπίας ή κινηματικών εξισώσεων στην παραμορφωμένη κατάσταση της κατασκευής. Εφόσον η παραμορφωμένη αυτή κατάσταση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή για μία κατασκευή, αλλά εξαρτάται στις προς επίλυση παραμορφώσεις, το πρόβλημα που προκύπτει είναι μη γραμμικό.

Ο χάλυβας ως δομικό υλικό συνδυάζει την υψηλή αντοχή και την κατεργασία, επιτρέποντας την παραγωγή δομικών μελών με κάθε επιθυμητό σχήμα και πάχος διατομής. Αυτό δίνει την ευκαιρία στον μελετητή για καινοτόμες λύσεις και περίτεχνα σχήματα, συνεπώς σε ελαφρύτερα δομικά στοιχεία, με περισσότερο οριακή εκμετάλλευση του υλικού. Ωστόσο, αυτή η ευελιξία στον σχεδιασμό κάνει την κατασκευή περισσότερο εύκαμπτη, τόσο σε επίπεδο φορέα όσο και τοπικά, σε επίπεδο μέλους ή διατομής, και επομένως παραμορφώνεται εντονότερα όταν φορτίζεται. Μ' αυτόν τον τρόπο η κατασκευή ενδέχεται να οδηγηθεί σε φαινόμενα αστάθειας (ή αλλιώς λυγισμού) τα οποία συνδέονται με απότομη και έντονη αύξηση της παραμόρφωσης για μικρή αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου.

**“Όλα τα φυσικά φαινόμενα είναι μεταβολές της ενέργειας... Το αντικείμενο που έπεσε πήγε στη θέση ελαχίστης ενέργειας. Αυτή είναι η λεγόμενη «ευστάθεια» που έχουν τα συστήματα... Γι' αυτό λέμε η ενέργεια είναι παντού.”**

**Δ. Νανόπουλος**



Η «ευστάθεια» -που αποκαλεί ο διακεκριμένος Φυσικός- μεταφράζεται στην Ελαστική Ευστάθεια των Κατασκευών ως στατική ισορροπία η οποία διακρίνεται σε:

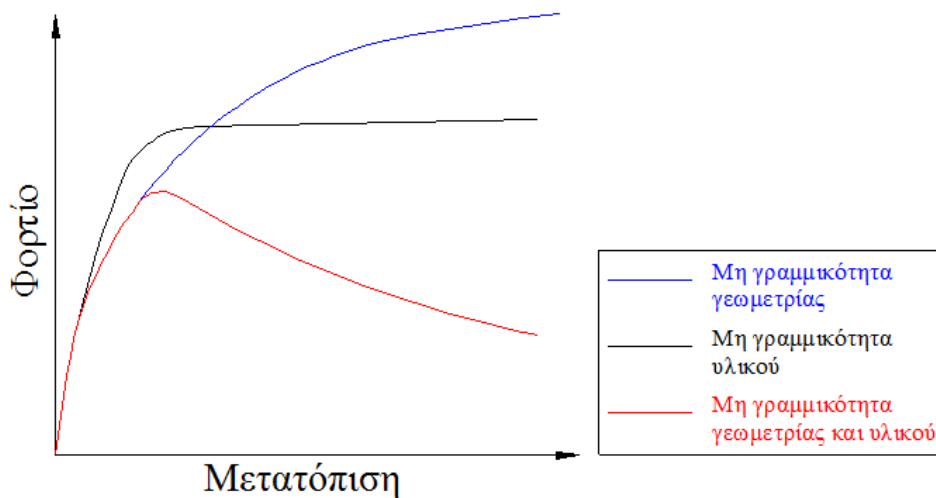
- α) ευσταθή,
- β) ασταθή και
- γ) ουδετέρα ισορροπία.

Τα τελευταία χρόνια, με τη ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων, έχει μειωθεί αισθητά ο υπολογιστικός χρόνος. Με τον τρόπο αυτό καθίσταται ευκολότερη η ανάλυση ενός φορέα τόσο με τη γραμμική όσο και με τη μη γραμμική θεωρία. Η πρώτη αντιπροσωπεύει την απλούστερη δυνατή συμπεριφορά μιας κατασκευής, ενώ με τη δεύτερη είμαστε σε θέση να εισάγουμε γεωμετρικές ή μη γραμμικούς νόμους των υλικών ώστε να επιτύχουμε πιο ακριβή αποτελέσματα.

Πιο συγκεκριμένα, όταν οι παραμορφώσεις του υπό μελέτη φορέα αυξάνουν αρκετά, η γραμμική θεωρία απέχει από την πραγματική συμπεριφορά και η σχέση που συνδέει τα εξωτερικά φορτία με τις αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις γίνεται μη γραμμική (μη γραμμικότητα γεωμετρίας). Ακόμα, από ένα επίπεδο έντασης και πάνω η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται από μία μη γραμμική σχέση τάσεων – παραμορφώσεων (μη γραμμικότητα υλικού).

Σε αρκετές, πάντως, περιπτώσεις η γραμμική ανάλυση πλησιάζει ικανοποιητικά την πραγματική κατάσταση, ενώ είναι προφανές ότι δεν απαιτούνται οι ειδικές γνώσεις και ο υπολογιστικός φόρτος. Απ' την άλλη η εφαρμογή μιας μη γραμμικής ανάλυσης έχει ως πλεονέκτημα την κατανόηση της πραγματικής συμπεριφοράς της κατασκευής.

Οι μέθοδοι ανάλυσης που χρησιμοποιούνται διακρίνονται σε αυτές που θεωρούν ότι η σχέση τάσεων – παραμορφώσεων είναι γραμμική και σε αυτές που θεωρούν ότι είναι μη γραμμική από κάποιο επίπεδο τάσης και πάνω. Αναφέρονται αντίστοιχα ως ελαστικές ή ανελαστικές μέθοδοι ανάλυσης. Ομοίως υπάρχουν μέθοδοι στις οποίες οι εξισώσεις διατυπώνονται στην απαραμόρφωτη ή παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα, γνωστές αντίστοιχως ως μέθοδοι ανάλυσης 1<sup>ης</sup> ή 2<sup>ης</sup> τάξης. Μπορεί να έχουμε και συνδυασμό των παραπάνω αναφερόμενων μεθόδων, λαμβάνοντας υπόψη και τις δύο μη γραμμικότητες, υλικού και γεωμετρίας. Ακόμα δύναται οι μέθοδοι ανάλυσης να συμπεριλαμβάνουν τις ατέλειες, είτε προσομοιώνοντας την αρχική γεωμετρία του πλαισίου, είτε εφαρμόζοντας κάποια οριζόντια φορτία στις διάφορες στάθμες του πλαισίου.



Σχήμα 1.1

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ασχοληθούμε με την διερεύνηση πλαισιακών φορέων σε φαινόμενα λυγισμού. Τα πλαίσια που μας απασχολούν είναι ορθογωνικής μορφής και αποτελούνται από υποστυλώματα διατομής μεταβλητού εμβαδού και δυσκαμψίας. Οι μέθοδοι ανάλυσης που χρησιμοποιούνται αφορούν την ελαστική περιοχή του υλικού (γραμμική σχέση τάσεων – παραμορφώσεων), ενώ οι φυσικές συνθήκες διατυπώνονται στην παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα. Ακόμα, λαμβάνονται υπόψη γεωμετρικές ατέλειες (έκκεντρη φόρτιση) οι οποίες σχετίζονται με σημαντικές αποκλίσεις της παραμορφωμένης γεωμετρίας από την απαραμόρφωτη. Τα τελευταία προκύπτουν από τη Μη Γραμμική Ανάλυση Ελαστικής Ευστάθειας και περιγράφονται εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια. Ακολουθεί η Γραμμική Ανάλυση Ελαστικής Ευστάθειας.

## 1.2 Βασικές Έννοιες

### 1.2.1 Καμπτικός Λυγισμός Ευθύγραμμων Ράβδων

Τα προβλήματα της ευστάθειας παρουσιάζονται σε περίπτωση θλιβομένων μελών.

Από την αντοχή των υλικών γνωρίζουμε ότι όταν μία ευθύγραμμη ράβδος πρισματικής (σταθερής) διατομής, θλίβεται αξονικά, η αύξηση της φορτίσεως μέχρι κάποιας ορισμένης κρίσιμης τιμής προκαλεί συνεχώς αυξανόμενη αξονική βράχυνση. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι όταν μία **ελαστική ράβδος** έχει λυγηρότητα μεγαλύτερη κάποιας ορισμένης (ελάχιστης) τιμής, η ένταση αυτή βρίσκεται εντός ελαστικής περιοχής και η αξονική βράχυνση είναι ανάλογη της φορτίσεως. Εάν η φόρτιση υπερβεί την προαναφερθείσα κρίσιμη τιμή, η ράβδος εγκαταλείπει την ευθύγραμμη μορφή αξονικής παραμορφώσεως λαμβάνουσα μία ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή (λόγω κάμψεως). Η συμπεριφορά αυτή της ράβδου είναι γνωστή ως **καμπτικός λυγισμός**, ο οποίος λαμβάνει χώρα ως προς τον κύριο άξονα της διατομής με τη μικρότερη ροπή αδρανείας και ως εκ τούτου με τη μεγαλύτερη λυγηρότητα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η λυγηρή αυτή ράβδος ισορροπεί τόσο σε ευθύγραμμη μορφή (για φόρτιση μικρότερη της κρίσιμης), όσο και σε ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή (για φόρτιση ίση ή μεγαλύτερη της κρίσιμης). Μικρή αύξηση της φόρτισης, πάνω από την κρίσιμη τιμή, προκαλεί σημαντικά μεγαλύτερη και δυσανάλογη καμπτική παραμόρφωση. Σε κάποια δε δεδομένη τιμή της φορτίσεως αρχίζει η διαρροή (στην ακραία ίνα της περισσότερο εντεινόμενης από κάμψη διατομής), η οποία αυξανόμενης περαιτέρω της φορτίσεως επεκτείνεται, οδηγούσα ακολούθως σε ανελαστικό ή πλαστικό λυγισμό. Επειδή για φόρτιση μεγαλύτερη της κρίσιμης τα περιθώρια μεταλυγισμικής αντοχής της ράβδου είναι πρακτικώς περιορισμένα, θεωρούμε ότι η κρίσιμη φόρτιση συνδέεται με τη μέγιστη φέρουσα ικανότητα αξονικά θλιβομένων ράβδων και ως εκ τούτου η φόρτιση αυτή κατά την οποία λαμβάνει χώρα ο ελαστικός λυγισμός αποτελεί κριτήριο σχεδιασμού. Η αντιστοιχούσα στην παραπάνω κρίσιμη φόρτιση λυγισμού είναι, εν γένει, πολύ μικρότερη της τάσεως αναλογίας του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένη η ράβδος.

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι οι ευθύγραμμες λυγηρές ράβδοι μεγάλου σχετικά μήκους συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής τους από γραμμικά ελαστικό υλικό θλιβόμενες αξονικά, εντείνονται γραμμικά αυξανόμενης της φορτίσεως μέχρι ορισμένης κρίσιμης τιμής (στάδιο προλυγισμικής συμπεριφοράς). Όταν η φόρτιση λάβει την κρίσιμη τιμή της, η ράβδος εγκαταλείπει την ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας, υποκείμενη σε πολύ μικρή κάμψη ως προς τον κύριο άξονα με την μικρότερη ροπή αδρανείας (φαινόμενο ελαστικού λυγισμού). Ακολούθως, η ράβδος εντεινόμενη μη γραμμικά, μπορεί να φέρει φόρτιση μεγαλύτερη της κρίσιμης (στάδιο μεταλυγισμικής συμπεριφοράς) φθάνουσα σε κατάσταση αστοχίας για ορισμένη τιμή της φορτίσεως μετά από διαρροή στην περιοχή της μέγιστης ροπής κάμψεως (φαινόμενο ανελαστικού λυγισμού). Εν τούτοις, επειδή τα περιθώρια μεταλυγισμικής αντοχής είναι πολύ περιορισμένα, θεωρούμε ότι η φέρουσα (σε αξονική θλίψη) ικανότητα της ράβδου από πρακτικής πλευράς αντιστοιχεί στην κρίσιμη φόρτιση ελαστικού φορτίου λυγισμού.



Εικόνα 1.1

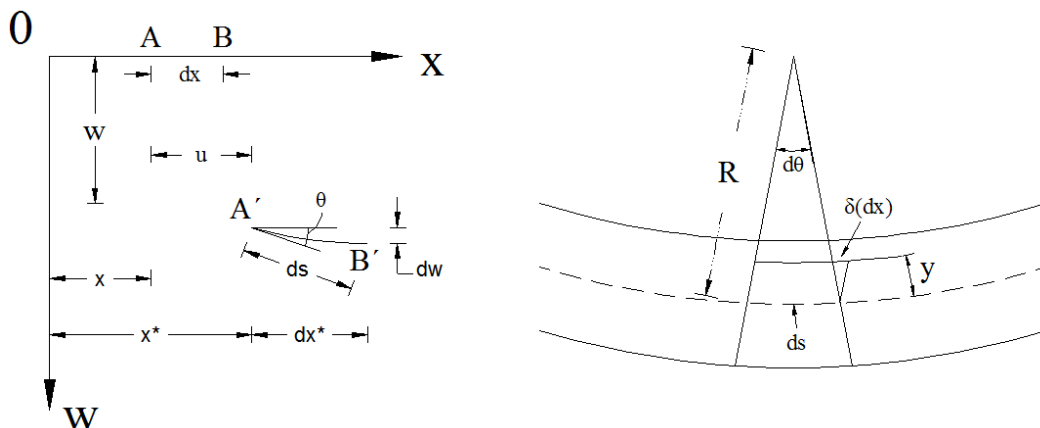
Οι βασικές παραδοχές της γραμμικής (κλασικής) θεωρίας ελαστικής ευστάθειας για ελαστικά συστήματα, αποτελούμενα από ράβδους με πρισματική διατομή και ευθύγραμμο άξονα είναι οι ακόλουθες :

1. Το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο το ελαστικό σύστημα είναι ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό, ακολουθεί δηλαδή το νόμο του Hooke.
2. Το διάγραμμα τάσεως –ανηγμένης παραμορφώσεως θεωρείται ταυτόσημο τόσο για τη θλίψη όσο και τον εφελκυσμό.
3. Επίπεδες διατομές κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα της ράβδου προ της κάμψεως, παραμένουν επίπεδες μετά την κάμψη και στον παραμορφωμένο άξονα αυτής (παραδοχή Bernoulli).
4. Τα εξωτερικά εγκάρσια φορτία ενεργούν επί επιπέδου διερχομένου από το κέντρο διατήσεως της διατομής και παραλλήλου προς τον κύριο άξονα αδρανείας αυτής. Αυτό αποκλείει οποιαδήποτε στροφή ή στρέψη της διατομής περί τον άξονα του μέλους, η οποία επομένως υπόκειται σε κάμψη ενός εκ των κυρίων επιπέδων της.
5. Οι συνιστώσες των μετακινήσεων κατά τον άξονα της ράβδου και εγκάρσιως προς αυτόν είναι μικρές, σε σύγκριση με τις διαστάσεις της διατομής.
6. Η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης επί του βέλους κάμψεως αμελείται.
7. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού υπολογίζονται θεωρώντας ότι η στατική παραμόρφωση οφείλεται μόνο στην κάμψη, αμελείται δηλαδή η αξονική παραμόρφωση που τυχόν προηγήθηκε.

Στη μηχανική των παραμορφωσίμων σωμάτων η μη γραμμικότητα οφείλεται είτε στη φύση του υλικού είτε σε καθαρά γεωμετρικούς λόγους. Η γραμμική θεωρία ευστάθειας ή λυγισμού φορέων από γραμμικώς ελαστικό υλικό είναι μη γραμμική ανάλυση (στατική δευτέρας τάξεως), διότι η ισορροπία τούτων, αντίθετα από ότι συμβαίνει στην κλασική στατική λαμβάνεται στην παραμορφωμένη κατάσταση. Συνεπώς η ανάλυση ευστάθειας ή λυγισμού είναι αυτή καθ'εαυτή μη γραμμική ανάλυση. Εξ' άλλου η μη γραμμικότητα στη μη γραμμική θεωρία ευστάθειας συνδέεται με τις ακριβέστερες εκφράσεις των σχέσεων ροπών καμπυλοτήτων, η αναφορά των οποίων γίνεται στην παράγραφο 2.1. Επειδή θα ασχοληθούμε με γραμμικώς ελαστικό υλικό (χάλυβας), η μη γραμμική θεωρία ευστάθειας είναι γεωμετρικής φύσεως.

### 1.2.2 Σχέση Ροπής Κάμψεως – Καμπυλότητας

Θεωρώντας, όπως στο σχήμα, τον θετικό άξονα  $x$  να κατευθύνεται προς τα δεξιά και τον θετικό άξονα  $w$  προς τα κάτω, η καμπυλότητα του άξονα της δοκού  $\kappa(x)$  είναι θετική, εάν η δοκός καμπτόμενη στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, ενώ αρνητική εάν η δοκός στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.



Σχήμα 1.2

Συνεπώς, η δοκός του σχήματος κάμπτεται με αρνητική καμπυλότητα, η οποία συνδέεται με θετική ροπή κάμψεως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα. Τότε, όπως γνωρίζουμε από την Αντοχή των Υλικών, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \quad (1.1)$$

, όπου  $\kappa(x)$  η καμπυλότητα του άξονα της δοκού στη θέση  $x$ ,  $M(x)$  η αναπτυσσόμενη ροπή κάμψεως στη θέση αυτή και  $EI$  η κάμπτική αντίσταση της διατομής, θεωρούμενη σταθερή καθ' όλο το μήκος της δοκού, εφ' όσον η δοκός έχει διατομή πρισματική (σταθερή). Ο τύπος (1.1) που ισχύει για υλικό γραμμικά ελαστικό (υλικό Hooke) εξάγεται ως ακολούθως.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπό την επίδραση θετικών ροπών κάμψεως το στοιχείο  $dx$  κάμπτεται σύμφωνα με τόξο κύκλου με διατομές  $\mu\mu'$  και  $\nu\nu'$  που παραμένουν – σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές – επίπεδες και κάθετες στις διαμήκειες ίνες της δοκού. Αυτό ισχύει ανεξάρτητα του κατά πόσο το υλικό είναι γραμμικά ελαστικό ή όχι. Σημειώνεται ότι οι προεκτάσεις των ανωτέρω δύο διατομών (που απέχουν μεταξύ τους κατά  $dx$ ) τέμνονται σ' ένα σημείο  $O'$  που είναι το κέντρο καμπυλότητας με αντίστοιχη ακτίνα καμπυλότητας  $R$ . Η γωνία μεταξύ των επιπέδων διατομών  $\mu\mu'$  και  $\nu\nu'$  ισούται με  $d\theta$ .

Λόγω της καμπτικής παραμόρφωσης του στοιχείου  $dx$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διατομή  $\nu\nu'$  στρέφεται κατά  $d\theta$  ως προς τη διατομή  $\mu\mu'$  (ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο  $xw$ ) με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού. Η στροφή αυτή είναι αρνητική σύμφωνα με την προεκτεθείσα σήμανση. Συνεπώς για μια ίνα που βρίσκεται σε απόσταση  $y$  κάτω από την κεντροβαρική (ουδέτερη) γραμμή (δηλαδή  $y > 0$ ) ισχύει η σχέση:

$$\Delta(dx) = -y \cdot d\theta$$

, όπου το πρόσημο οφείλεται στο ότι η αύξηση του  $x$  κατά την θετική (δεξιά) κατεύθυνση συνεπάγεται αρνητική γωνία  $d\theta$ . Εξ άλλου, ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon_y = \varepsilon$  (χάριν απλότητας) της παραπάνω ίνας μεταξύ διατομών  $\mu\mu'$  και  $\nu\nu'$  (που είναι θετική σε περίπτωση επιμήκυνσης) ισούται με

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = -y \cdot \frac{d\theta}{dx}.$$

Για υλικό γραμμικά ελαστικό ισχύει η σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M(x) \cdot y}{E \cdot I}$$

, ή λόγω της προηγούμενης έκφρασης

$$\frac{M(x)}{E \cdot I} = -\frac{d\theta}{dx} \quad (1.2)$$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι  $dx = R d\theta$  και άρα η (1.2) ταυτίζεται με την (1.1). Επιπλέον, ισχύει:

$$\tan \theta = \frac{dw}{dx} = w'.$$

Μέσω, όμως, της γραμμικής θεωρίας ελαστικής ευστάθειας (θεωρία μικρών βελών) μπορούμε για μικρές γωνίες  $\theta$  να γράψουμε την προσεγγιστική σχέση:

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{dw}{dx}$$

και συνεπώς

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (1.3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση ροπής κάμψεως  $M(x)$  – καμπυλότητας  $\kappa(x)$  για γραμμικά ελαστικό υλικό.

$$M(x) = -E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -E \cdot I \cdot w''(x) \quad (1.4)$$

### 1.3 Μορφές Μεταβολής της Δυσκαμψίας

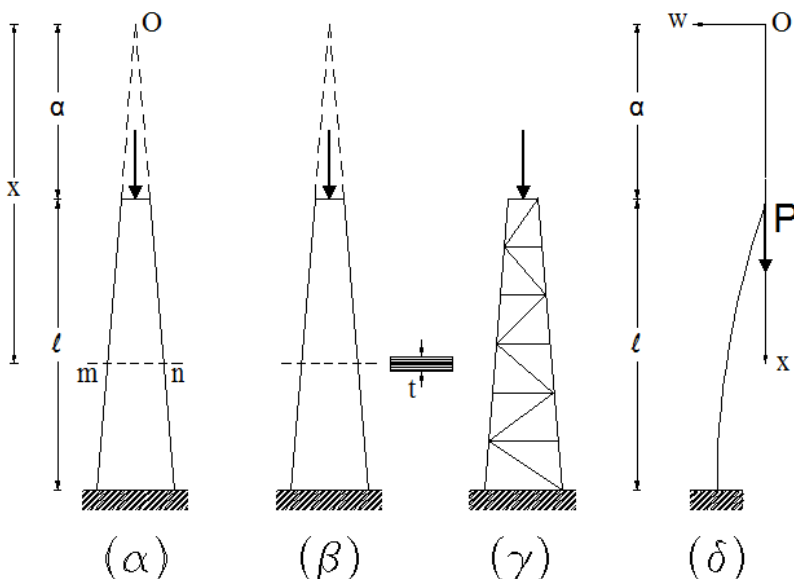
Μερικές φορές προκύπτει η ανάγκη, από πρακτικό ενδιαφέρον, να βρούμε το σχήμα υποστυλώματος του οποίου το βάρος, για δεδομένη τιμή κρίσιμου φορτίου λυγισμού, θα είναι το ελάχιστο. Πρώτος ο **Lagrange** καταπιάστηκε με την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Ανέφερε ότι το πρόβλημα ήταν να βρεθεί η καμπύλη η οποία καθορίζει το υποστύλωμα με τη μέγιστη αποδοτικότητα. Το (λανθασμένο) συμπέρασμά του ήταν ότι το αποδοτικότερο υποστύλωμα θα αποτελείται από σταθερή κυκλική διατομή.

Περαιτέρω έρευνα για το ίδιο θέμα έγινε από τον **Clausen**, ο οποίος άφησε απροσδιόριστη τη διατομή των ράβδων και υπέθεσε μόνο ότι ήταν όμοιες και με ίδιες δεσμεύσεις. Το αποτέλεσμα της έρευνάς του ήταν ότι το αποδοτικότερο υποστύλωμα είναι  $\sqrt{3}/2$  φορές πιο ικανό από το αντίστοιχο κυκλικό με την ίδια αντοχή.

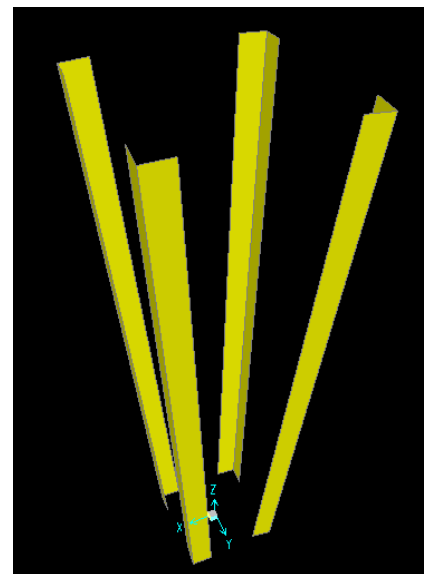
Ο **A. Ono** επίσης έφτασε περίπου στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας διάφορες τιμές του μεγέθους  $n$  στην εξίσωση (1.5). Βρήκε ότι η τιμή  $n$  για τον ελάχιστο όγκο της δοκού είναι  $n = 0.93$  και ότι ο αντίστοιχος όγκος ήταν το 87% της ράβδου σταθερής διατομής με ίδια αντοχή.

Με σκοπό να μειωθεί το βάρος μελών υπό θλίψη, μερικές φορές χρησιμοποιούνται στύλοι μεταβλητής διατομής. Η διαφορική εξίσωση της παρεκκλινόμενης καμπύλης για αυτές τις περιπτώσεις εξήχθη από τον **Euler**, ο οποίος διερεύνησε στύλους με διάφορα σχήματα, συμπεριλαμβανομένων αυτά του κολοβού κώνου και της πυραμίδας. Η ευστάθεια ράβδων οι οποίες οριοθετούνται από επιφάνεια περιστροφής συζητήθηκε από τον Lagrange.

Επίσης, έχει μελετηθεί μια αξιοσημείωτη περίπτωση πρακτικού ενδιαφέροντος, στην οποία η ροπή αδρανείας της διατομής ποικίλει σύμφωνα με την απόσταση κατά μήκος μιας ράβδου υψωμένη σε κάποια δύναμη. Από το βιβλίο των **Timoshenko and Gere** παρατηρούμε στο Σχήμα 1.3 τις μορφές που μπορούν να πάρουν μέλη υπό θλίψη.



Σχήμα 1.3



Εικόνα 1.2

Αν η ροπή αδρανείας (δυσκαμψία) της διατομής ποικίλει ως η δύναμη της απόστασης από το σημείο δέσμευσης  $O$ , τότε μπορούμε να εκφράσουμε τη ροπή αδρανείας σε κάθε σημείο της ράβδου  $mn$  στη μορφή:

$$I_{(x)} = I_1 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^n \quad (1.5)$$

, όπου  $I_1$  είναι η δυσκαμψία στην κορυφή του στύλου. Λαμβάνοντας διάφορες τιμές του  $n$ , παρατηρούμε ποικίλα σχήματα του υποστυλώματος.

Όταν  $n = 1$  παρατηρούμε την περίπτωση στύλου από ορθογωνική διατομή με σταθερό πάχος  $t$  και μεταβαλλόμενο πλάτος (Σχ. 1.3.β).

Η υπόθεση  $n = 2$  αναπαριστά με επαρκή ακρίβεια, την περίπτωση σύνθετου υποστυλώματος που αποτελείται από τέσσερα γωνιακά που ενώνονται με διαγωνίους (Σχ. 1.3.γ και Εικόνα 1.2). Εδώ το εμβαδόν του στύλου παραμένει σταθερό και η ροπή αδρανείας της διατομής είναι ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης του κέντρου βάρους των γωνιακών από την αρχή των αξόνων της διατομής. Η περίπτωση αυτή έχει μελετηθεί από τον **Ερμόπουλο Ι.** (1984) καθώς και μεταγενέστερα από τους **Raftoyiannis I.** and **Ermpouros J.**(2005). Επίσης, με την παραπάνω μεταβολή μπορεί να προσομοιωθεί σύνθετο υποστυλώμα αποτελούμενο από δύο διπλά ταυ τα οποία απομακρύνονται από το κέντρο βάρους της διατομής ή ακόμα από ένα διπλό ταυ με μεταβαλλόμενο ύψος κορμού (χωρίς ο κορμός να λαμβάνεται υπόψη στη δυσκαμψία της διατομής).

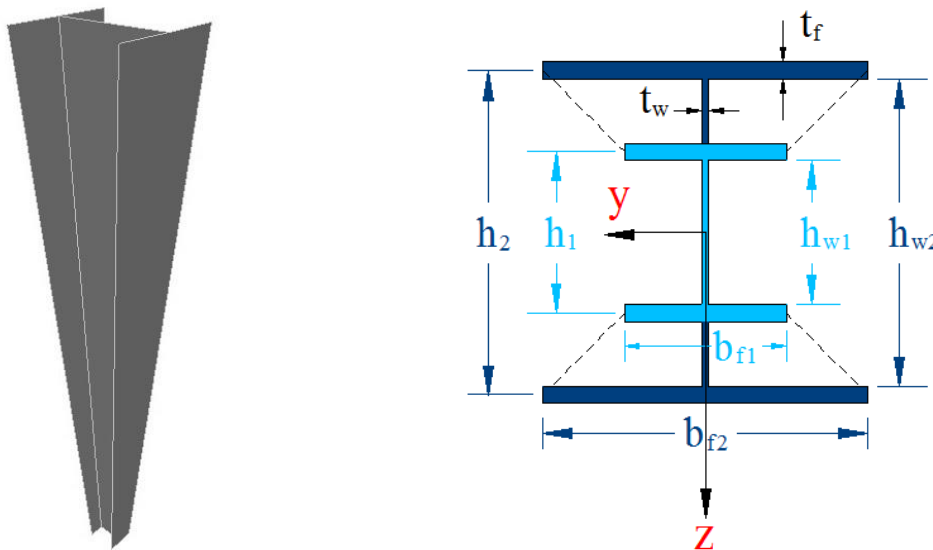
Τέλος, λαμβάνοντας  $n = 4$ , παρατηρούμε περιπτώσεις συμπαγούς διατομής κόλουρου κώνου ή πυραμίδας.

Η διαφορική εξίσωση της παρεκκλινόμενης καμπύλης (Σχ. 1.3.δ) λαμβάνει τη μορφή:

$$E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^n \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -P \cdot w, \text{ η οποία επιλύεται μέσω των συναρτήσεων Bessel για κάθε τιμή του } n.$$

### 1.3.1 Κυβική Μεταβολή Δυσκαμψίας

Μια περίπτωση μεταβολής της δυσκαμψίας που δεν περιγράφεται στις παραπάνω αναφορές και που δεν έχει μελετηθεί έως τώρα είναι η κυβική μεταβολή. Η περίπτωση αυτή απαντάται σε κατασκευές με μέλη των οποίων η διατομή διπλού ταυ μεταβάλλεται με τον ίδιο γραμμικό ρυθμό στους δύο άξονες,  $y$  και  $z$ . Η μεταβολή αυτή γίνεται περισσότερο κατανοητή στα παρακάτω σχήματα, όπου παρατηρούμε μεταβάλλεται το ύψος του κορμού καθώς και τα πλάτη των πελμάτων ενώ παραμένουν σταθερά όλα τα πάχη.



Σχήμα 1.4

Ακολουθώντας γίνεται αναφορά στη διαδικασία με την οποία προκύπτει ο νόμος μεταβολής της δυσκαμψίας της διατομής.

Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα  $y$  στον πόδα του μέλους είναι:

$$I_1 = 2 \cdot \left[ I_{b,1} + t_f \cdot b_1 \cdot \left( \frac{h_1}{2} \right)^2 \right] + I_{w,1} = \frac{t_f^3 \cdot b_1}{6} + \frac{t_f \cdot b_1 \cdot h_1^2}{2} + \frac{t_w \cdot h_{w,1}^3}{12} \approx \frac{t_f \cdot b_1 \cdot h_1^2}{2} + \frac{t_w \cdot h_{w,1}^3}{12}$$

, όπου  $h_1$  και  $h_2$  τα ύψη των διατομών από τα μέσα των πελμάτων.

Παραλείποντας τον πρώτο όρο, καθώς συνεισφέρει κατά πολύ μικρό ποσοστό στη συνολική ροπή, η συνολική ροπή αδρανείας στην ακραία διατομή (κεφαλή) του μέλους είναι:

$$I_2 = \frac{t_f \cdot b_2 \cdot h_2^2}{2} + \frac{t_w \cdot h_{w,2}^3}{12}$$

Εισάγοντας τη γραμμική μεταβολή των αξόνων  $y$  και  $z$  κατά μήκος του δομικού μέλους

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{h_{w,2}}{h_{w,1}} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{L_1}{a}, \quad \text{όπου } \frac{L_1}{a} = \frac{l_1 + a}{a} = l_1' + 1$$

, η ροπή σε τυχαίο σημείο  $x$  θα παίρνει τη μορφή:

$$I(x) = \frac{t_f}{2} \cdot \left( b_1 \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \left( h_1 \cdot \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{t_w}{12} \cdot \left( h_{w,1} \cdot \frac{x}{a} \right)^3 \Rightarrow \boxed{I(x) = I_1 \cdot \left( \frac{x}{a} \right)^3} \quad (1.6)$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει τη μεταβολή της ροπής αδρανείας και για τον άξονα  $z$ .

### Σημαντική Παρατήρηση!

Να σημειωθεί εντόνως η παρατήρηση ότι οι λόγοι των διαστάσεων της διατομής που αναφέρουμε δεν είναι απολύτως ίσοι μεταξύ τους.

Συγκεκριμένα, δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα η ισότητα:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{h_{w,2}}{h_{w,1}}, \quad \text{στην πραγματικότητα οι λόγοι είναι περίπου ίσοι: } \frac{h_2}{h_1} \approx \frac{h_{w,2}}{h_{w,1}}.$$

Έτσι, αφήνεται στον μελετητή να εκλέγει ποιος λόγος θα καθορίζει το μέγεθος  $l_1' = l_1 / a$ .

Εδώ απλώς επιβάλλεται να διατυπώσουμε ότι η **δυσμενέστερη παραδοχή** αναφορικά με την μεταβολή λαμβάνεται μέσω της ισότητας:

$$\frac{h_{o\lambda,2}}{h_{o\lambda,1}} = \frac{L_1}{a}$$

, που αναφέρεται στα εξωτερικά ύψη των διατομών διπλού ταυ.

Επίσης, η **μεγαλύτερη ακρίβεια** της μεθόδου διαπιστώνεται όταν τα πλάτη των πελμάτων της διατομής του μέλους μεταβάλλονται με ίδιο ρυθμό μεταβολής με τις διαστάσεις  $h_1$ ,  $h_2$ :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{L_1}{a}.$$

Στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε ροπές αδρανείας με απόκλιση από την πραγματική της τάξεως του  $10^{-3}$  για τον άξονα  $y$  και  $10^{-4}$  για τον άξονα  $z$ . Περισσότερη αναφορά θα γίνει στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.



Αν αφήσουμε  $I_1$  τη ροπή αδρανείας του μέλους στη θέση  $x = 0$ , η ροπή κάμψεως γίνεται:

$$M(x) = -E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3 \cdot w''(x)$$

- Από την ισορροπία ροπών κάμψεως παίρνουμε:

$$M - (M + dM) - q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + (V + dV) \cdot dx - (N + dN) \cdot \frac{dw}{dx} \cdot dx = 0$$

Αμελώντας διαφορικούς όρους ανώτερης τάξης λαμβάνουμε:

$$V = \frac{dM}{dx} + N \cdot \frac{dw}{dx} \quad (1.7)$$

- Από την ισορροπία των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση του άξονα  $w$  λαμβάνουμε:

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (1.8)$$

- Από την ισορροπία των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  λαμβάνουμε:

$$N + dN - N = 0 \Rightarrow dN = 0 \Rightarrow N(x) = \text{σταθ.} \quad (1.9)$$

Έτσι, παραγωγίζοντας τη σχέση (1.7) και χρησιμοποιώντας τις (1.8) και (1.9) καταλήγουμε:

$$\frac{d^2}{dx^2} M(x) + N \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = -q(x)$$

Ακόμα, για μία δοκό υπό θλίψη και μηδενικό κατανεμημένο φορτίο  $q$  παίρνουμε:

$$\frac{d^2}{dx^2} M(x) - P \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0$$

Η τελευταία σχέση με αντικατάσταση του νόμου μεταβολής της δυσκαμψίας γίνεται:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3 \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right] + P \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0$$

Με αυτό τον τρόπο σχηματίζεται η διαφορική εξίσωση της οποίας η επίλυση μάς δίνει τη μορφή της εξίσωσης του βέλους κάμψεως στοιχείου με κυβική μεταβολή δυσκαμψίας υπό αξονική θλίψη.

$$6x \cdot w''(x) + \frac{P \cdot a^3}{E \cdot I_1} \cdot w''(x) + 6x^2 \cdot w'''(x) + x^3 \cdot w''''(x) = 0$$

Η επίλυση γίνεται μέσω των εξισώσεων Bessel καταλήγοντας στο ζητούμενο βέλος κάμψεως:

$$w_1(x) = A_1 \cdot \sqrt{x} \cdot \text{Bessel}J \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x}} \right) + B_1 \cdot \sqrt{x} \cdot \text{Bessel}Y \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x}} \right) + C_1 \cdot x + D_1 \quad (1.10)$$

, όπου

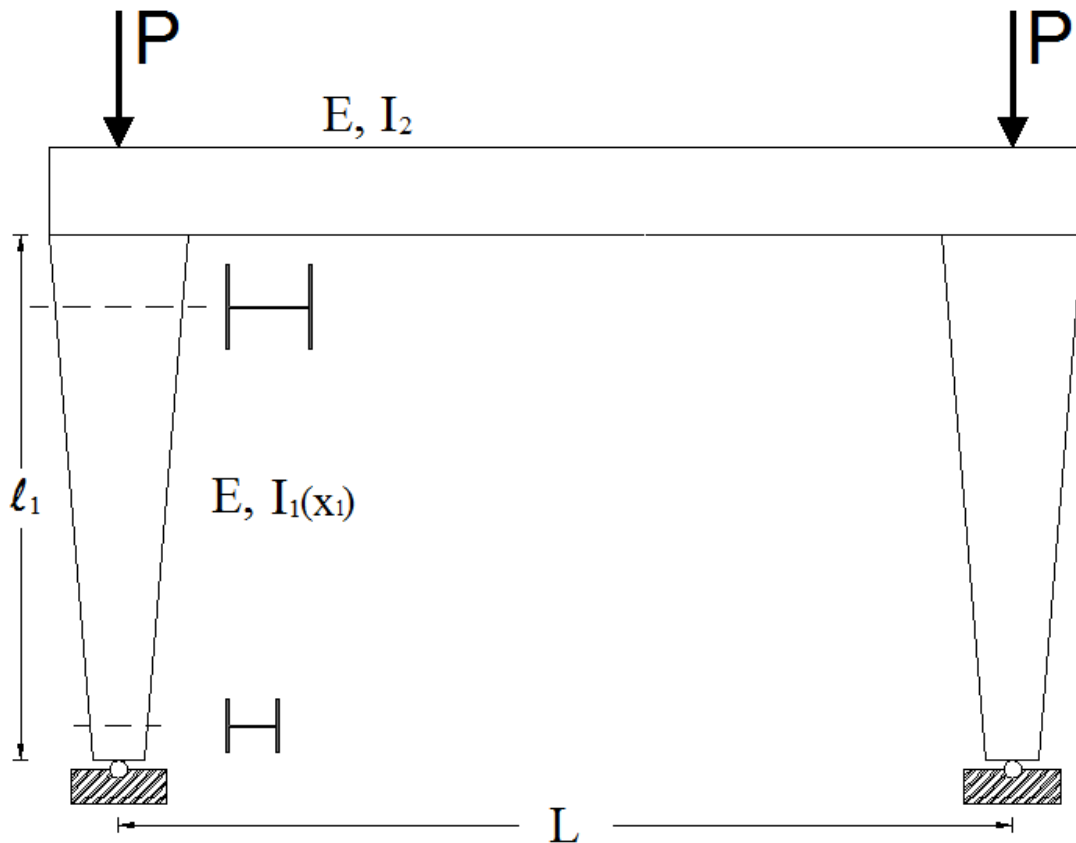
$$\mu^2 = \frac{P \cdot a^2}{E \cdot I_1} \cdot \frac{\alpha}{l_1} = \beta^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l'} \right)^3 \quad (1.11)$$

και

$$\beta = \frac{P \cdot l_1^2}{E \cdot I_m} \text{, όπου } I_m \text{ η ροπή αδρανείας στο μέσον της ράβδου: } I_m = I_1 \cdot \left( \frac{a + l_1/2}{a} \right)^3$$

Βασίζόμενοι στις προηγούμενες εξισώσεις θα προχωρήσουμε στις αναλύσεις των πλαισιακών φορέων έναντι λυγισμού.

#### 1.4 Περίπτωση Αντισυμμετρικού Λυγισμού με Μετάθεση

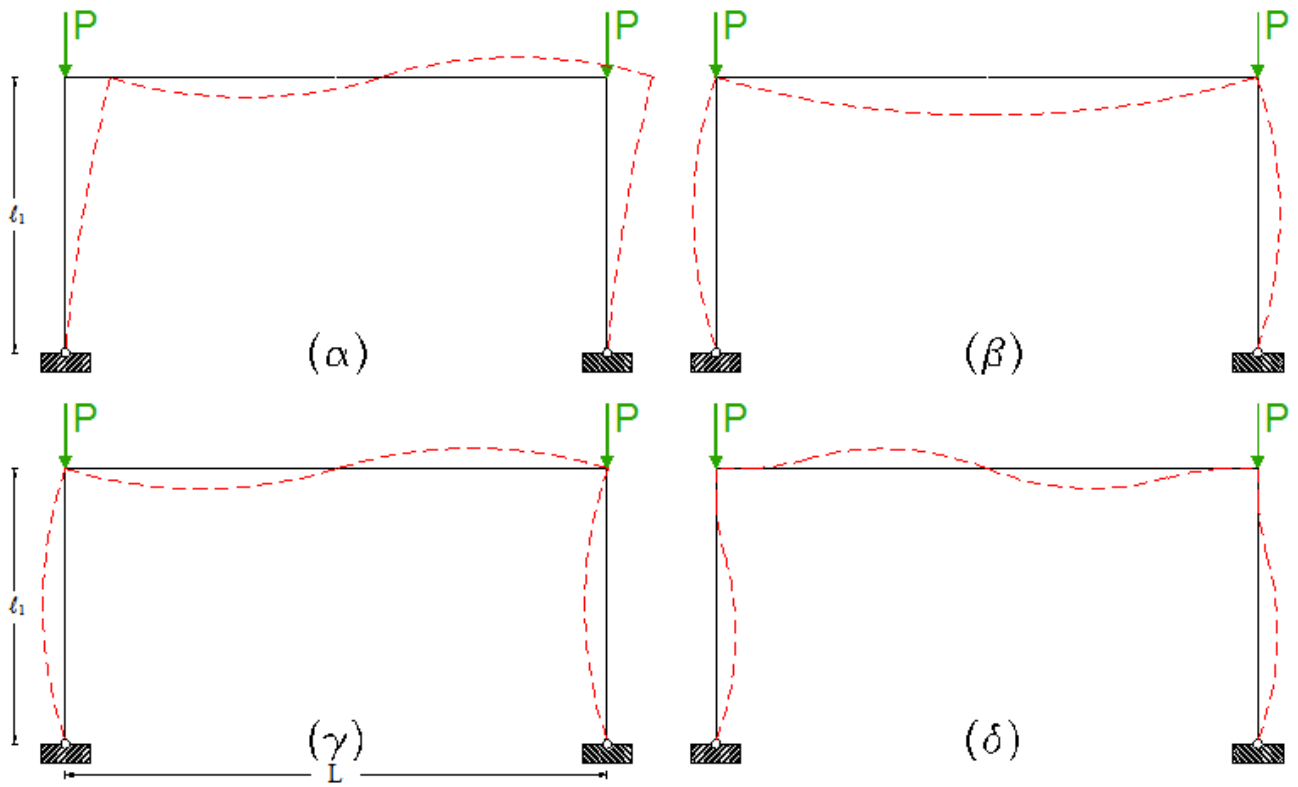


Σχήμα 1.5

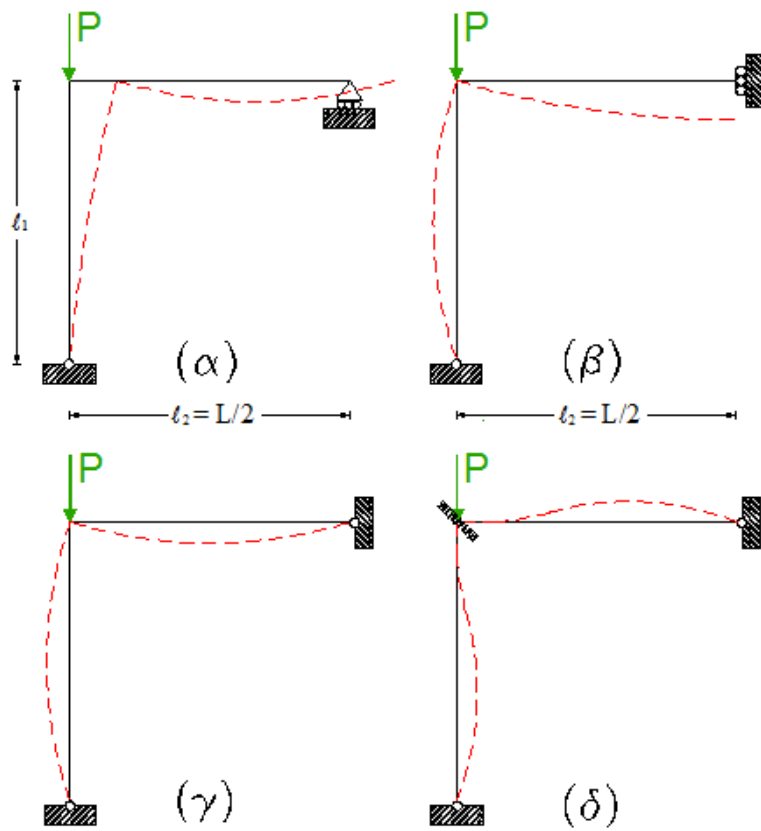
Το συμμετρικό αμφιαρθρωτό ορθογωνικό πλαίσιο του παραπάνω σχήματος θεωρούμε ότι φορτίζεται στους κόμβους από δύο ίσα φορτία  $P$ . Είναι εύλογο ότι από την έναρξη της φόρτισης κάθε σημείου του δρόμου ισορροπίας αντιστοιχεί σε συμμετρική παραμόρφωση. Όταν το φορτίο φτάσει μια ορισμένη κρίσιμη τιμή, τότε το πλαίσιο απότομα θα μετακινηθεί προς τα αριστερά (ή δεξιά), παραμορφούμενο κατά ασύμμετρο τρόπο. Η μορφή αυτή λυγισμού που συνδέεται με μετάθεση καλείται **λυγισμός με μετάθεση** (sway buckling). Αν παρεμποδίζεται η οριζόντια μετάθεση του πλαισίου, τότε αυτό θα μπορεί να φέρει ακόμα μεγαλύτερο φορτίο μέχρι να χάσει την ευστάθειά του με συμμετρική όμως παραμόρφωση. Η τελευταία μορφή ονομάζεται **λυγισμός άνευ μεταθέσεως** (non sway buckling).

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας μελετάται ένα διμελές ορθογωνικό πλαίσιο εντατικώς ισοδύναμο με το αμφιαρθρωτό πλαίσιο του παραπάνω σχήματος και αποτελείται από ένα υποστύλωμα μεταβλητής δυσκαμψίας και εμβადού και μία δοκό σταθερής διατομής. Πρόκειται να αναζητήσουμε τα κρίσιμα φορτία λυγισμού υπό τα οποία το πλαίσιο χάνει την ευστάθειά του στις δύο κατηγορίες λυγισμού: με και χωρίς μετάθεση.

Στην πρώτη περίπτωση εξετάζουμε το πλαίσιο του Σχήματος (1.6.α) με οριζόντια κύλιση στο μέσον του ζυγώματος και στη δεύτερη περίπτωση (Σχ. 1.6.β) με κατακόρυφη κυλιόμενη πάκτωση στον αντίστοιχο κόμβο. Η τελευταία προσομοίωση αντιπροσωπεύει την περίπτωση συμμετρικού λυγισμού άνευ μεταθέσεως, στην οποία αντιστοιχεί το μικρότερο φορτίο λυγισμού. Οι υπόλοιπες μορφές λυγισμού άνευ μεταθέσεως επισυνάπτονται στο σχήμα που ακολουθεί, ενώ οι εντατικώς ισοδύναμοι φορείς στο Σχήμα (1.7).

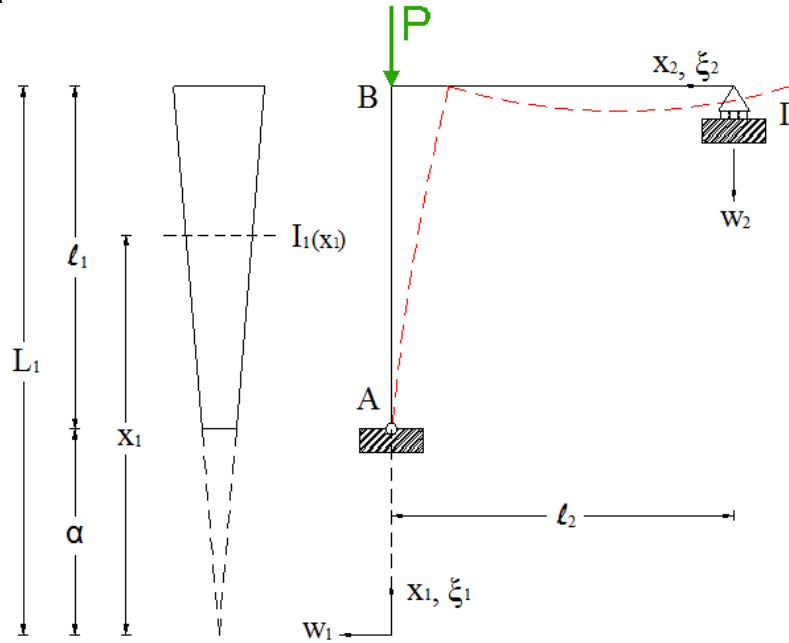


Σχήμα 1.6



Σχήμα 1.7

### 1.4.1 Περιγραφή του Πλαισίου



Σχήμα 1.8

Συνάρτηση βέλους κάμψεως του υποστυλώματος:

$$w_1(x_1) = A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + C_1 \cdot x_1 + D_1$$

$$\mu^2 = \frac{P \cdot \alpha^2}{E \cdot I_1} \cdot \frac{\alpha}{l_1} = \beta^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'}\right)^3$$

Παράγωγοι βέλους κάμψεως:

$$w_1(x_1)' = x_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot x_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselJ\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + \right.$$

$$\left. B_1 \cdot x_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselY\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) \right] + C_1$$

$$w_1(x_1)'' = -\frac{\mu^2 \cdot l_1}{x_1^{5/2}} \left[ A_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) \right]$$

$$w_1(x_1)''' = \frac{\mu^2 \cdot l_1}{x_1^{7/2}} \left[ 2A_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \cdot BesselJ\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + \right.$$

$$\left. 2B_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \cdot BesselY\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) \right]$$

Εξίσωση βέλους κάμψεως μέλους διατομής σταθερού εμβαδού και ροπής αδρανείας στο οποίο δεν υποβάλλεται αξονική δύναμη:

$$w_2(x_2) = A_2 \cdot x_2^3 + B_2 \cdot x_2^2 + C_2 \cdot x_2 + D_2$$

Γεωμετρικές Συνθήκες (Κινηματικές):

- Συνοριακές

I.  $w_1(a) = 0$

II.  $w_2(0) = 0$

- Συνέχειας

III.  $w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$

IV.  $w_2(l_2) = 0$

Φυσικές Συνθήκες:

- Συνοριακές

V.  $-E \cdot I_1 \cdot w_1''(\alpha) = 0$

VI.  $-E \cdot I_2 \cdot w_2''(0) = 0$

- ✚ Ισορροπία ροπών στον κόμβο

VII.  $E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) = 0$

- ✚ Ισορροπία οριζοντίων δυνάμεων

VIII.  $-E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1'''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) - P \cdot w_1'(L_1) = 0$

**1.4.2 Εξίσωση Λυγισμού**

Από τις παραπάνω εξισώσεις προχωρούμε στην επίλυση του συστήματος καταλήγοντας στην εξίσωση που περιγράφει το φορτίο λυγισμού. Αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθείται περιγράφεται παρακάτω.

Προκειμένου να έχουμε καλύτερη εποπτεία των υπολογισμών ακολουθούν οι εξής αντικαταστάσεις:

$$J_{a,1} = BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right), \quad Y_{a,1} = BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right)$$

$$J_1 = BesselJ\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}\right), \quad Y_1 = BesselY\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}\right)$$

$$J_0 = BesselJ\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}\right), \quad Y_0 = BesselY\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}\right)$$

$$(I). \quad w_1(a) = A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{a}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{a}}\right) + C_1 \cdot a + D_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right) + B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right) + C_1 \cdot a + D_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} + C_1 \cdot a + D_1 = 0$$

Ομοίως αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις Bessel και για τις επόμενες συνθήκες.

$$(V). w_1''(a) = -\frac{\mu^2 \cdot l_1}{a^{5/2}} [A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}] = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1 \cdot \frac{Y_{a,1}}{J_{a,1}} \Rightarrow B_1 = -A_1 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}}$$

$$(II). w_2(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

$$(VI). w_2''(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$(IV). w_2(l_2) = 0 \Rightarrow C_2 = -A_2 \cdot l_2^2$$

Έτσι, η συνάρτηση του βέλους κάμψεως της δοκού γίνεται:

$$w_2(x) = A_2 \cdot x^3 - A_2 \cdot l_2^2 \cdot x$$

$$(III). w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$$

$$\begin{aligned} w_1'(L_1) &= L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) - A_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot BesselJ\left(0, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) \right. \\ &\quad \left. + B_1 \cdot L_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) - B_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot BesselY\left(0, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) \right] + C_1 \\ &= L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot BesselJ\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right) - A_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot BesselJ\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right) \right. \\ &\quad \left. + B_1 \cdot L_1 \cdot BesselY\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right) - B_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot BesselY\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right) \right] + C_1 \\ &= L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right] + C_1 \\ &= L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot \left[ J_1 - \mu\sqrt{l_1 / L_1} \cdot J_0 + B_1 / A_1 \cdot Y_1 - B_1 / A_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 / L_1} \cdot Y_0 \right] + C_1 \\ &= L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot \left[ J_1 - \mu\sqrt{l_1 / L_1} \cdot J_0 \right] + L_1^{-1/2} \cdot B_1 \cdot \left[ Y_1 - \mu\sqrt{l_1 / L_1} \cdot Y_0 \right] + C_1 \end{aligned}$$

$$w_2(x)' = 3A_2 \cdot x^2 - A_2 \cdot l_2^2$$

$$\Rightarrow w_2'(l_2) = 3A_2 \cdot l_2^2 - A_2 \cdot l_2^2 = 2A_2 \cdot l_2^2$$

$$2A_2 \cdot l_2^2 = L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot \left[ J_1 - \mu\sqrt{l_1 / L_1} \cdot J_0 \right] + L_1^{-1/2} \cdot B_1 \cdot \left[ Y_1 - \mu\sqrt{l_1 / L_1} \cdot Y_0 \right] + C_1$$

$$(VII). E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) = 0$$

$$\Rightarrow -E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{5/2}} [A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1] + E \cdot I_2 \cdot 6A_2 \cdot l_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{I_1 \cdot \mu^2 \cdot l_1}{I_2 \cdot 6 \cdot l_2} \cdot \frac{L_1^{1/2}}{a^3} [A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1]$$

ή

$$A_2 = \frac{I_1 \cdot \mu^2 \cdot l_1}{I_2 \cdot 6 \cdot l_2} \cdot \frac{L_1^{1/2}}{a^3} \cdot A_1 \left[ J_1 - \frac{J_a}{Y_a} \cdot Y_1 \right]$$

$$(VIII). -E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) - P \cdot w_1'(L_1) = 0$$

$$w_1''''(L_1) = \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{7/2}} \left[ 2A_1 \cdot J_1 + A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + 2B_1 \cdot Y_1 + B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right]$$

$$= \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{7/2}} \left[ 2A_1 \cdot J_1 + A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + 2B_1 \cdot Y_1 + B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right]$$

$$w_1''(L_1) = -\frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{5/2}} [A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1]$$

Έτσι, η τελευταία συνθήκη γίνεται

$$L_1 \cdot w_1''''(L_1) + 3w_1''(L_1) + \frac{P \cdot a^3}{L_1^2 \cdot E \cdot I_1} \cdot w_1'(L_1) = 0$$

$$\Rightarrow \left[ 2A_1 \cdot J_1 + A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + 2B_1 \cdot Y_1 + B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] - 3[A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1]$$

$$+ \frac{P \cdot a^3}{E \cdot I_1 \cdot \mu^2 \cdot l_1} \left[ A_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + B_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] + \frac{P \cdot a^3 \cdot L_1^{-1/2} \cdot C_1}{E \cdot I_1 \cdot \mu^2 \cdot l_1} = 0$$

Αντικαθιστώντας το  $\mu^2 = \frac{P \cdot \alpha^3}{E \cdot I_1 \cdot l_1}$ , έχουμε

$$\left[ 2A_1 \cdot J_1 + A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + 2B_1 \cdot Y_1 + B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] - 3[A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1]$$

$$+ \left[ A_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + B_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] + L_1^{-1/2} \cdot C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

Έτσι, από τις Συνθήκες (III), (V) και (VII) έχουμε

$$\frac{I_1 \cdot \mu^2 \cdot l_1}{I_2 \cdot 3} \cdot \frac{L_1^{1/2}}{a^3} \cdot A_1 \left[ J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right] \cdot l_2 = L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 \right] - L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \left[ Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{I_1 \cdot \mu^2 \cdot l_1}{I_2 \cdot 3} \cdot \frac{L_1}{a^3} \cdot \left[ J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right] \cdot l_2 = J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 - \mu \sqrt{l_1/L_1} \cdot J_0 + \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \mu \sqrt{l_1/L_1} \cdot Y_0$$

$$\frac{I_1 \cdot \mu^2 \cdot l_1}{I_2 \cdot 3} \cdot \frac{L_1}{a^3} \cdot l_2 = 1 - \mu \sqrt{l_1/L_1} \cdot \left[ \frac{J_0 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_0}{J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1} \right]$$

$$\Rightarrow -\frac{I_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{l_1}}{I_2 \cdot 3} \cdot \frac{L_1^{3/2}}{a^3} \cdot l_2 + \frac{1}{\mu \sqrt{l_1/L_1}} = \frac{J_0 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_0}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1}$$

, έτσι ώστε να έχουμε όλες τις συναρτήσεις Bessel στο 2<sup>ο</sup> μέλος.

Από τον νόμο μεταβολής της δυσκαμψίας έχουμε:

$$I_m = I_1 \cdot \left( \frac{a + l_1/2}{a} \right)^3 = I_1 \cdot (1 + l_1'/2)^3 \Rightarrow I_1 = \frac{I_m}{(1 + l_1'/2)^3}$$

Η εξίσωση λυγισμού γίνεται:

$$-\frac{I_m \cdot \mu \cdot \sqrt{l_1}}{I_2 \cdot 3 \cdot (1 + l_1'/2)^3} \cdot \frac{L_1^{3/2}}{a^3} \cdot \frac{l_2 \cdot l_1}{l_1} + \frac{1}{\mu \sqrt{l_1/L_1}} = \frac{J_0 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_0}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1}$$

$$\Rightarrow -\frac{I_m \cdot \mu}{I_2 \cdot 3 \cdot (1 + l_1'/2)^3} \cdot \frac{l_1^{3/2} \cdot L_1^{3/2}}{a^3} \cdot \frac{l_2}{l_1} + \frac{1}{\mu \sqrt{l_1/L_1}} = \frac{J_0 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_0}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1}$$

Ακολούθως αντικαθιστούμε τα αδιαστατοποιημένα αδρανειακά και γεωμετρικά μεγέθη:

$$\rho = \frac{I_m}{I_2}, \quad r = \frac{l_2}{l_1}, \quad l_1' = \frac{l_1}{a}, \quad \text{καθώς και το αδιάστατο φορτίο λυγισμού } \mu^2 = \beta^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^3.$$

$$-\frac{\rho \cdot \beta}{3 \cdot (1 + l_1'/2)^3} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2} \cdot l_1'^{3/2} \cdot (1 + l_1')^{3/2} \cdot r + \frac{\sqrt{1 + 1/l_1'}}{\beta \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2}} = \frac{J_0 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_0}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1}$$

Τελικώς η εξίσωση λυγισμού λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{J_0 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_0}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}{\beta} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{-3/2} - \frac{\rho \cdot r \cdot \beta}{3} \cdot \left( \frac{1 + l_1'}{1 + l_1'/2} \right)^{3/2}$$

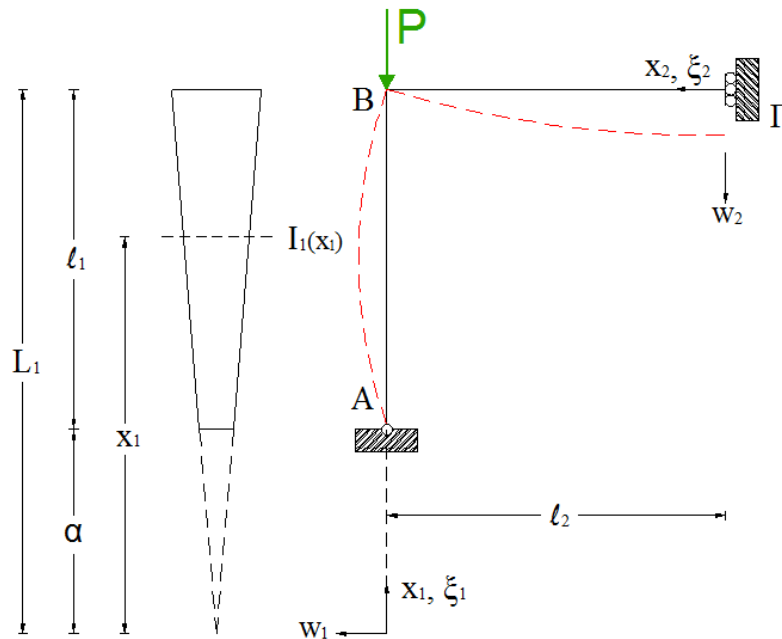
, ή αλλιώς

$$\boxed{\frac{J_0 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_0}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}{\beta \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{\beta^2 \cdot r \cdot \rho}{3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \right]} \quad (1.12)$$



## 1.5 Περίπτωση Συμμετρικού Λυγισμού Άνευ Μεταθέσεως

### 1.5.1 Περιγραφή του Πλαισίου



Σχήμα 1.9

Γεωμετρικές Συνθήκες (Κινηματικές):

- Συνοριακές
  - I.  $w_1(a) = 0$
  - II.  $w_2'(0) = 0$
- Συνέχειας
  - III.  $w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$
  - IV.  $w_1(L_1) = 0$
  - V.  $w_2(l_2) = 0$

Φυσικές Συνθήκες:

- Συνοριακές
  - VI.  $-E \cdot I_1 \cdot w_1''(\alpha) = 0$
- ✚ Ισορροπία ροπών στον κόμβο
  - VII.  $E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) = 0$
- ✚ Ισορροπία κατακορύφων δυνάμεων
  - VIII.  $-E \cdot I_2 \cdot w_2'''(0) = 0$

Η συνάρτηση καθώς και οι παράγωγοι του βέλους κάμψεως του υποστυλώματος ισχύουν και εδώ ακριβώς όπως αναφέρονται στο κεφάλαιο (1.1). Ομοίως πραγματοποιούνται οι ίδιες αντικαταστάσεις των συναρτήσεων Bessel.

Ακολουθεί η επίλυση του συστήματος.

### 1.5.2 Εξίσωση Λυγισμού

$$(I). w_1(a) = A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{a}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{a}}\right) + C_1 \cdot a + D_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right) + B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right) + C_1 \cdot a + D_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} + C_1 \cdot a + D_1 = 0$$

$$(IV). w_1(L_1) = A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) + C_1 \cdot L_1 + D_1$$

$$= A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot BesselJ\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot BesselY\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right) + C_1 \cdot L_1 + D_1$$

$$\Rightarrow w_1(L_1) = A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_1 + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1 + C_1 \cdot L_1 + D_1 = 0$$

$$(VI). w_1''(a) = -\frac{\mu^2 \cdot l_1}{a^{5/2}} [A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}] = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1 \cdot \frac{Y_{a,1}}{J_{a,1}} \Rightarrow B_1 = -A_1 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}}$$

$$(II). w_2'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(VIII). w_2'''(0) = 0 \Rightarrow 6A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$(V). w_2(l_2) = 0 \Rightarrow B_2 \cdot l_2^2 + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = -B_2 \cdot l_2^2$$

Έτσι, η συνάρτηση του βέλους κάμψεως της δοκού γίνεται:

$$w_2(x_2) = B_2 \cdot (x_2^2 - l_2^2)$$

$$(III). w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$$

$$w_1'(L_1) = L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) - A_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot BesselJ\left(0, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) + \right.$$

$$\left. B_1 \cdot L_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) - B_1 \cdot \mu\sqrt{l_1 L_1} \cdot BesselY\left(0, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{L_1}}\right) \right] + C_1$$

$$= L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot [J_1 - \mu\sqrt{l_1/L_1} \cdot J_0] + L_1^{-1/2} \cdot B_1 \cdot [Y_1 - \mu\sqrt{l_1/L_1} \cdot Y_0] + C_1$$

$$w_2'(l_2) = 2B_2 \cdot l_2$$

$$2B_2 \cdot l_2 = L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot \left[ J_1 - \mu \sqrt{l_1/L_1} \cdot J_0 \right] + L_1^{-1/2} \cdot B_1 \cdot \left[ Y_1 - \mu \sqrt{l_1/L_1} \cdot Y_0 \right] + C_1$$

$$(VII). E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) = 0$$

$$I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{5/2}} (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) = I_2 \cdot 2B_2 \Rightarrow I_1 \frac{\mu^2 \cdot l_1 \cdot L_1^{1/2}}{a^3} A_1 \cdot \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right) = I_2 \cdot 2B_2$$

Αντικαθιστώντας το  $C_1$  στην εξίσωση της Συνθήκης (III) από τις Συνθήκες (I) και (IV) έχουμε:

$$D_1 = -A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot J_{a,1} - B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} - C_1 \cdot a$$

$$A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_1 + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1 + C_1 \cdot L_1 - A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot J_{a,1} - B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} - C_1 \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_1 + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1 - A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot J_{a,1} - B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} = C_1 \cdot (a - L_1) = -C_1 \cdot l_1$$

$$\Rightarrow C_1 = A_1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot J_1 + \frac{\sqrt{a}}{l_1} \cdot J_{a,1} \right) + B_1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot Y_1 + \frac{\sqrt{a}}{l_1} \cdot Y_{a,1} \right)$$

$$2B_2 \cdot l_2 = L_1^{-1/2} \cdot A_1 \cdot \left( J_1 - \mu \sqrt{l_1/L_1} \cdot J_0 \right) + L_1^{-1/2} \cdot B_1 \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{l_1/L_1} \cdot Y_0 \right) + A_1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot J_1 + \frac{\sqrt{a}}{l_1} \cdot J_{a,1} \right) + B_1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot Y_1 + \frac{\sqrt{a}}{l_1} \cdot Y_{a,1} \right)$$

Το δεύτερο μέλος τροποποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} & A_1 \cdot \left( \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} \cdot J_1 - \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot J_0 \right) + B_1 \cdot \left( \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} \cdot Y_1 - \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot Y_0 \right) + A_1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot J_1 + \frac{\sqrt{a}}{l_1} \cdot J_{a,1} \right) \\ & + B_1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot Y_1 + \frac{\sqrt{a}}{l_1} \cdot Y_{a,1} \right) = A_1 \cdot \left( \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} \cdot J_1 - \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot J_0 - \frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot J_1 - \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} \cdot Y_1 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} + \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot Y_0 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \cdot Y_1 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \right) = A_1 \cdot J_1 \cdot \left( \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} - \frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \right) + A_1 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \cdot \left( -\frac{\sqrt{L_1}}{L_1} + \frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \right) + A_1 \cdot \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot \left( Y_0 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} - J_0 \right) \\ & = A_1 \cdot \left[ \left( \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} - \frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \right) \cdot \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right) - \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot \left( J_0 - Y_0 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \right) \right] \end{aligned}$$

Έτσι, οι εξισώσεις των Συνθηκών (III) και (VII) σχηματίζουν την ζητούμενη εξίσωση λυγισμού.

$$\left. \begin{aligned} 2B_2 \cdot l_2 &= A_1 \cdot \left[ \left( \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} - \frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \right) \cdot \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right) - \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot \left( J_0 - Y_0 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \right) \right] \\ 2B_2 \cdot I_2 &= I_1 \frac{\mu^2 \cdot l_1 \cdot L_1^{1/2}}{a^3} A_1 \cdot \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left( \frac{\sqrt{L_1}}{L_1} - \frac{\sqrt{L_1}}{l_1} \right) - \mu \frac{\sqrt{l_1}}{L_1} \cdot \frac{\left( J_0 - Y_0 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \right)}{\left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} = \frac{I_1}{I_2} \frac{\mu^2 \cdot l_1 \cdot L_1^{1/2} \cdot l_2}{a^3} \\
&\Rightarrow \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1} = \frac{I_1}{I_2} \frac{\mu \cdot l_1 \cdot L_1^{3/2} \cdot l_2}{a^3 \cdot \sqrt{l_1}} - \left( \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{l_1}} - \frac{L_1^{3/2}}{l_1^{3/2}} \right) \cdot \mu^{-1} \\
&\Rightarrow \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{\mu \cdot l_1^{3/2} \cdot L_1^{3/2} \cdot l_2}{a^3 \cdot l_1} + \left[ \left( \frac{L_1}{l_1} \right)^{3/2} - \sqrt{\frac{L_1}{l_1}} \right] \cdot \mu^{-1}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη ροπή αδρανεΐας στο μέσον του στύλου  $I_m$

$$I_m = I_1 \cdot \left( \frac{a + l_1/2}{a} \right)^3 = I_1 \cdot (1 + l_1'/2)^3 \Rightarrow I_1 = \frac{I_m}{(1 + l_1'/2)^3}$$

καθώς και το αδιάστατο φορτίο λυγισμού  $\beta^2$

$$\mu^2 = \beta^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^3, \text{ για το δεύτερο μέλος έχουμε:}$$

$$\frac{I_m}{I_2 \cdot (1 + l_1'/2)^3} \cdot \beta \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2} \cdot \frac{l_1^{3/2} \cdot L_1^{3/2} \cdot l_2}{a^3 \cdot l_1} + \left[ \left( \frac{L_1}{l_1} \right)^{3/2} - \sqrt{\frac{L_1}{l_1}} \right] \cdot \beta^{-1} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{-3/2}$$

Επιπλέον, εισάγουμε τα αδιάστατα μεγέθη που αφορούν τα μήκη και τις ροπές αδρανεΐας των μελών:

$$r = \frac{l_2}{l_1}, \quad l_1' = \frac{l_1}{a}, \quad \rho = \frac{I_m}{I_2}.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{(1 + l_1'/2)^3} \cdot \beta \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2} \cdot l_1'^{3/2} \cdot (1 + l_1')^{3/2} \cdot r + \left[ \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2} - \sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}} \right] \cdot \beta^{-1} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{-3/2} \\
&= \rho \cdot r \cdot \beta \cdot \left( \frac{1 + l_1'}{1 + l_1'/2} \right)^{3/2} + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}{\beta \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2} \cdot l_1'} = \rho \cdot r \cdot \beta \cdot \left( \frac{1 + 1/l_1'}{1 + l_1'/2} \right)^{3/2} + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}} \cdot \sqrt{l_1'}}{\beta \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'} \right)^{3/2} \cdot l_1'^{3/2}} \\
&= \rho \cdot r \cdot \beta \cdot \left( \frac{1 + l_1'}{1 + l_1'/2} \right)^{3/2} + \frac{\sqrt{l_1' + 1}}{\beta \cdot \left( \frac{l_1'}{2} + 1 \right)^{3/2}} = \beta^{-1} \cdot \left( \frac{l_1'}{2} + 1 \right)^{-3/2} \cdot \sqrt{l_1' + 1} \cdot [1 + \rho \cdot r \cdot \beta^2 \cdot (1 + l_1')]
\end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση λυγισμού σχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{J_1 \cdot Y_{a,1} - J_{a,1} \cdot Y_1} = \frac{\sqrt{l'_1 + 1} \cdot [\rho \cdot r \cdot \beta^2 \cdot (1 + l'_1) + 1]}{\beta \cdot \left(\frac{l'_1}{2} + 1\right)^{3/2}} \quad (1.13)$$

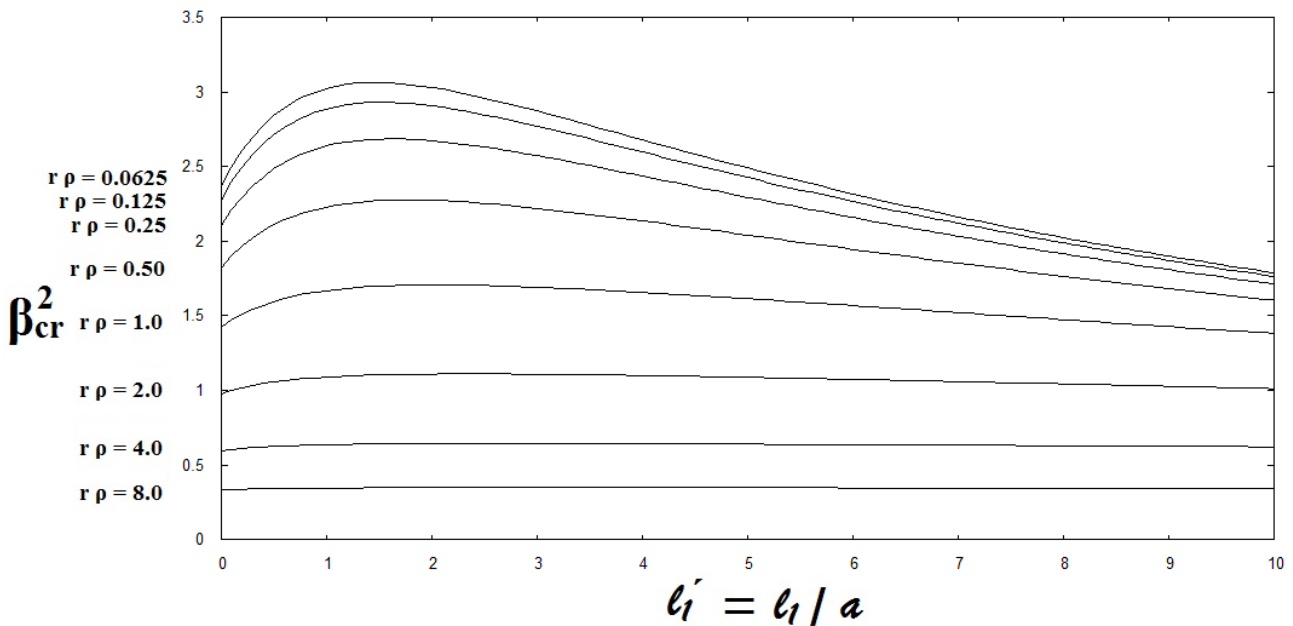
## 1.6 Εξαγωγή Διαγραμμάτων

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα τα οποία αποτελούνται από τις καμπύλες των κρίσιμων φορτίων  $\beta_{cr}^2$  της γραμμικής ανάλυσης που προηγήθηκε ως προς το ανηγμένο μήκος του υποστύλωματος  $l_1'$ , για διάφορες περιπτώσεις των γεωμετρικών μεγεθών  $r \cdot \rho = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{I_m}{I_2}$ .

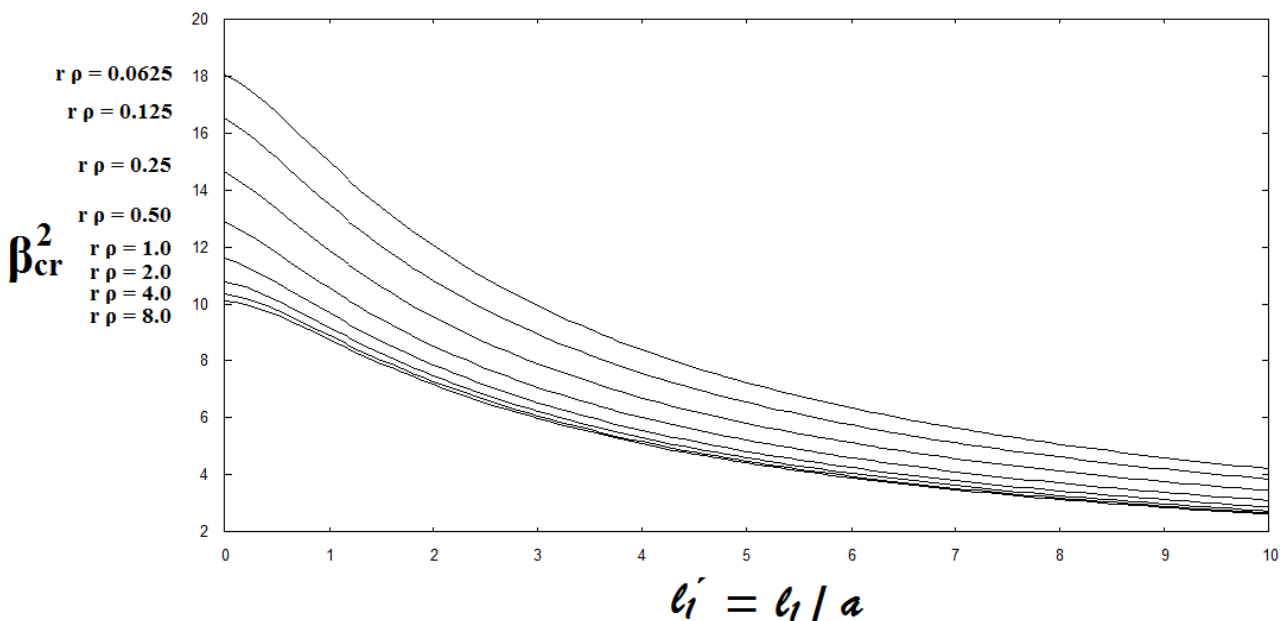
Συγκεκριμένα, επιλέχθηκαν ως βέλτιστες οι τιμές  $r \cdot \rho = 0.0625; 0.125; 0.25; 0.5; 1.0; 2.0; 4.0; 8.0$ .

Επιπλέον, να σημειωθεί ότι τα απαιτούμενα διαγράμματα εξήχθησαν μέσω επαναληπτικής διαδικασίας (Μέθοδος των ίσων διαστημάτων) σε πρόγραμμα της γλώσσας fortran.

### Περίπτωση Αντισυμμετρικού Λυγισμού με Μετάθεση



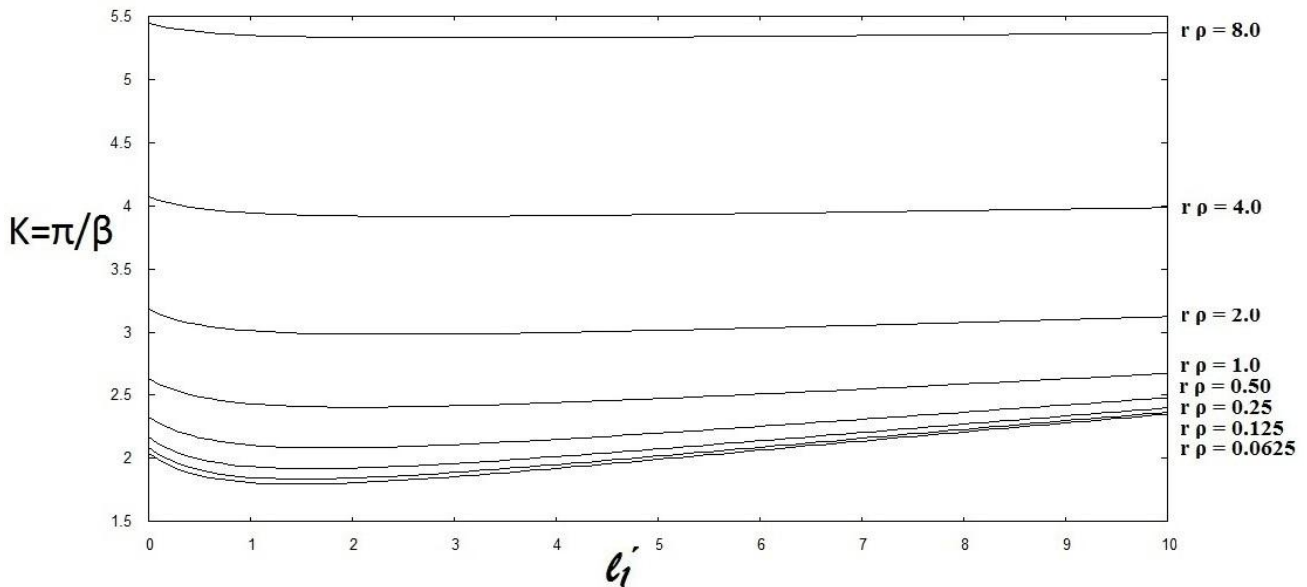
### Περίπτωση Συμμετρικού Λυγισμού άνευ Μεταθέσεως



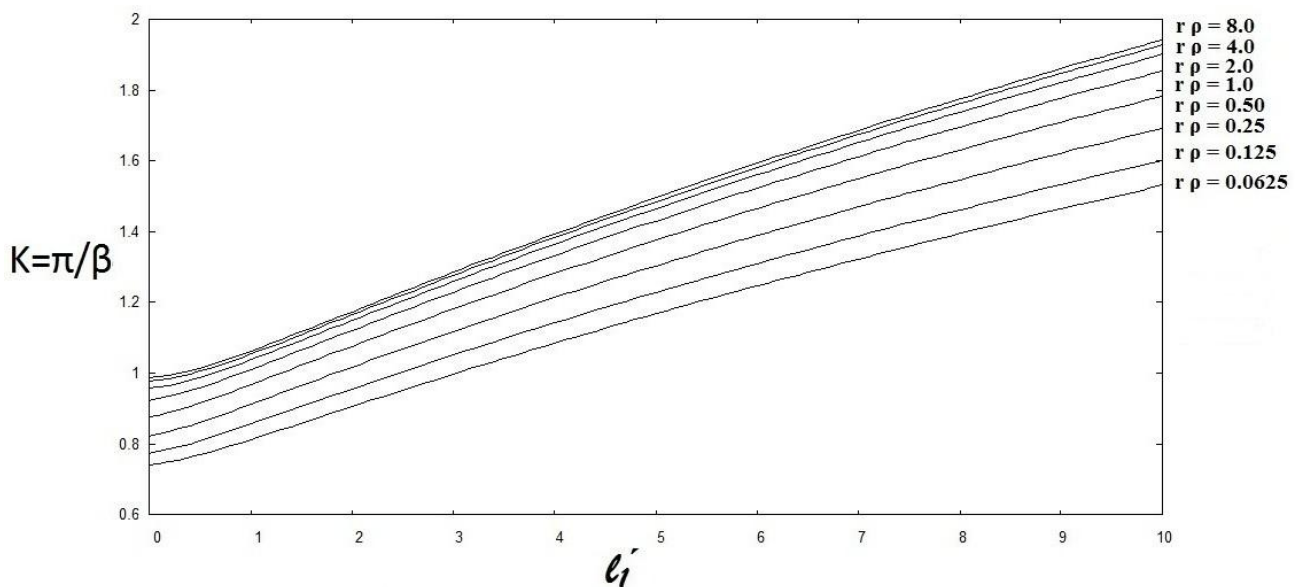
Αξιοσημείωτο είναι ότι στις παραπάνω καμπύλες γίνεται περισσότερο εμφανής η μη γραμμικότητα της μεταβολής της δυσκαμψίας αν τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες πλαισίων που αποτελούνται από υποστυλώματα με μέλη τετραγωνικής μεταβολής της δυσκαμψίας (βλέπε σχετικές βιβλιογραφικές αναφορές).

Επιπλέον, εξήχθησαν για κάθε περίπτωση οι αντίστοιχες καμπύλες ανηγμένου μήκους λυγισμού, ένα μέγεθος εξίσου χρήσιμο για τον έλεγχο ευστάθειας μιας κατασκευής. Το τελικό μήκος λυγισμού, άρα, προκύπτει από το ύψος του υποστυλώματος πολλαπλασιασμένο επί τον συντελεστή  $K$ .

#### Περίπτωση Αντισυμμετρικού Λυγισμού με Μετάθεση



#### Περίπτωση Συμμετρικού Λυγισμού άνευ Μεταθέσεως



Παρατηρούμε ότι τα μήκη λυγισμού κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 1,80 και 5,50 για την περίπτωση του μεταθετού λυγισμού και των τιμών 0,70 και 1,95 για τον συμμετρικό λυγισμό χωρίς μετάθεση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

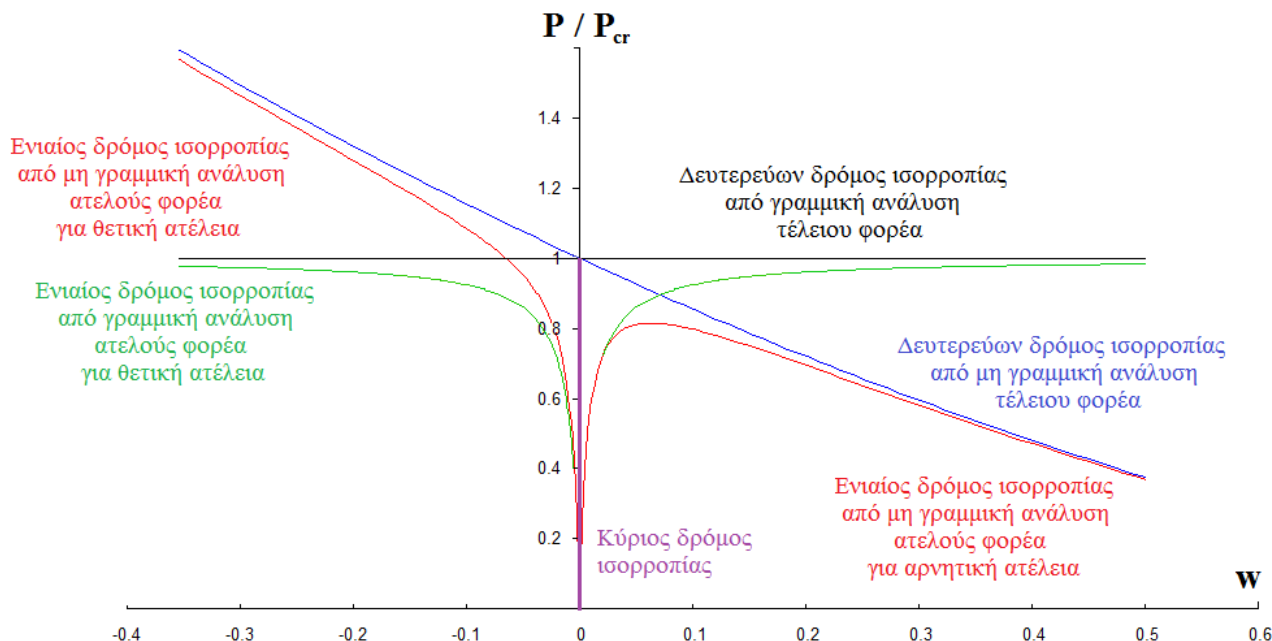
---



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

#### 2.1 Βασικές Έννοιες



Σχήμα 2.1 Δρόμοι ισορροπίας από γραμμική και μη γραμμική ανάλυση συστήματος με και χωρίς ατέλεια

Όπως αναφέρουμε και στην παράγραφο 1.1, η πραγματική συμπεριφορά της κατασκευής πολλές φορές αποκλίνει σημαντικά από τη γραμμική ανάλυση. Πλέον εισάγονται γεωμετρικές ατέλειες – για παράδειγμα έκκεντρη φόρτιση, παραμένουσες τάσεις, μικρές ανωμαλίες κατασκευαστικής φύσης, κτλ. – οι οποίες προκαλούν μεγάλη μείωση στην αρχική φέρουσα ικανότητα. Επιπλέον, η μη γραμμική ανάλυση μάς δίνει πληροφορίες για τη μεταλυγισμική συμπεριφορά του φορέα βοηθώντας να κατανοήσουμε σε βάθος το φυσικό πρόβλημα.

Για τους λόγους αυτούς είναι απαραίτητη η μη γραμμική ανάλυση ελαστικής ευστάθειας. Εκ των μεθόδων μελέτης της ελαστικής ευστάθειας, πλέον πρόσφορη είναι η ενεργειακή μέθοδος, η εφαρμογή της οποίας απαιτεί διαδικασίες του Λογισμού των Μεταβολών, για την εξαγωγή των σχετικών διαφορικών εξισώσεων και των αντίστοιχων φυσικών συνοριακών συνθηκών, που διέπουν την ισορροπία των πλαισίων στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Οι βασικές παραδοχές (1) έως (4) που περιγράφουν τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας (παράγραφος 1.1.1) ισχύουν και στη μη γραμμική θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Αυτή διακρίνεται σε **θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων** και **θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων**. Η πρώτη αναφέρεται σε μία ενδιάμεση κατηγορία παραμορφώσεως (intermediate class of deformation), γνωστή και ως θεωρία ευστάθειας μετρίως μεγάλων στροφών (moderately large rotations). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή χρησιμοποιούμε τις παρακάτω εκφράσεις παραμορφώσεων και καμπυλοτήτων:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right], \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}. \quad (2.1)$$

Στις παραπάνω σχέσεις η ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon$  είναι μικρή συγκριτικά με τη μονάδα, όπως στη γραμμική θεωρία ευστάθειας. Το χαρακτηριστικό, όμως, αυτής της κατηγορίας παραμορφώσεως είναι ότι η κλίση (γωνία στροφής)  $dw/dx$  είναι μετρίου μεγέθους (moderate rotation), η δε ποσότητα  $0.5(dw/dx)^2$  είναι ακόμη μικρότερη αλλά οπωσδήποτε όχι αμελητέα συγκριτικά με τη μονάδα. Εάν  $\varepsilon$  και  $0.5(dw/dx)^2$  στη σχέση (2.1.1) είναι μικρές ποσότητες συγκριτικά με τη μονάδα, τότε και  $du/dx$  θα είναι μικρή ποσότητα έναντι της μονάδος και συνεπώς η ποσότητα  $0.5(du/dx)^2$  μπορεί να αμεληθεί ως ανωτέρω τάξεως. Ως εκ τούτου, σ' αυτήν την περίπτωση οι σχέσεις (2.1) απλοποιούνται ως εξής:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2, \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}. \quad (2.2)$$

Η μη γραμμική θεωρία ευστάθειας μεγάλων μετατοπίσεων βασίζεται σε ακριβέστερη έκφραση της καμπυλότητας. Κατ' αυτήν η καμπυλότητα έχει την ακόλουθη έκφραση:

$$\kappa = \frac{-\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (2.3)$$

Η θεωρία αυτή είναι γνωστή και ως «στατική τρίτης τάξεως». Ο προσδιορισμός μετατοπίσεων σύμφωνα με τη σχέση (2.3) συνδέεται με τη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων (large deformations) η οποία στη ξενόγλωσση βιβλιογραφία αναφέρεται ως θεωρία της "Elastica". Η μη γραμμική θεωρία ευστάθειας, που βασίζεται στη σχέση (2.3), είναι γνωστή και ως «ευστάθεια εις μεγάλες μετατοπίσεις» ή «ευστάθεια εις μεγάλη διαταραχή» (stability in the "large").

Η μη γραμμική θεωρία ευστάθειας, που θα αναπτυχθεί κατωτέρω και που πρακτικώς είναι πολύ επαρκής, είναι των μετρίως μεγάλων στροφών.

Η αναπτυσσόμενη σε τυχούσα διατομή (εμβαδού  $A$ ) ροπή κάμψεως, βάσει της σχέσεως  $\sigma_y = E \cdot \varepsilon_y$ , ισούται με

$$M(x) = \int_A \sigma_y y dA = E \int_A \varepsilon_y y dA = E \varepsilon \int_A y dA - E \theta' \int_A y^2 dA$$

ή

$$M = -EI\theta'. \quad (2.4)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ακριβής διότι κατά την εξαγωγή της δεν έγινε καμία προσέγγιση, πλην των παραδοχών 1~4 (παράγραφος 1.1.1).

Τέλος, παρατηρούμε ότι όταν μία ευθύγραμμη ράβδος (διατομής  $A$ ) επιπονείται αξονικά υπό δυνάμεως  $N$  ενεργούσα στο άκρον αυτής, η ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon = N/EA$  είναι σταθερή, σε όλο το μήκος του κεντροβαρικού της άξονα. Συνεπώς, δυνάμει της σχέσης (2.2) θα έχουμε:

$$N(x) = EA \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} w'^2 \right]. \quad (2.5)$$

### 2.1.1 Ενεργειακή Μέθοδος

Για τον προσδιορισμό των κρισίμων φορτίων των κατασκευών έχουν εφαρμοσθεί επιτυχώς διάφορες μέθοδοι, που μπορούν να ενταχθούν κυρίως στις ακόλουθες τρεις:

1. Την κλασική **μέθοδο ισορροπίας του Euler** (Euler's classical approach), γνωστή και ως στατική μέθοδο ισορροπίας (static equilibrium approach) ή μέθοδο γειτονικής ισορροπίας (adjacent equilibrium approach).
2. Την **ενεργειακή μέθοδο** (energy approach) ή μέθοδο δυναμικής ενέργειας (potential energy approach), η οποία είναι επίσης στατική μέθοδος.
3. Την **δυναμική ή κινηματική μέθοδο** (dynamic or kinetic approach).

Στη δεύτερη κατηγορία εντάσσεται και η Αρχή των Δυνατών Έργων στη Στατική. Η Αρχή των Δυνατών Έργων στη Δυναμική και η Αρχή Hamilton ανήκουν στην τρίτη κατηγορία μεθόδων.

Χαρακτηριστικό της πρώτης μεθόδου του Euler και της τρίτης κατηγορίας μεθόδων είναι ότι εφαρμόζονται τόσο σε συντηρητικά, όσο και σε μη συντηρητικά ελαστικά συστήματα, ενώ αντίθετα η δεύτερη κατηγορία μεθόδων εφαρμόζεται σε συντηρητικά συστήματα πλην της Αρχής των Δυνατών Έργων στη Στατική, η οποία είναι εφαρμόσιμη και σε μη συντηρητικά συστήματα.

Υπενθυμίζεται ότι μία δύναμη καλείται **συντηρητική**, αν το έργο που εκτελείται από αυτήν κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της είναι ανεξάρητο του δρόμου (τροχιάς), εξαρτώμενο αποκλειστικώς από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής της δύναμης. Σ' αυτήν την περίπτωση η δύναμη προκύπτει από δυναμικό πεδίο (potential force). Αντίθετα, όταν μία δύναμη δεν προκύπτει από δυναμικό πεδίο (non-potential force) είναι μη συντηρητική (π.χ. η δύναμη τριβής). Το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων εξαρτάται από ολόκληρη την τροχιά, που ακολουθεί το σημείο εφαρμογής της μη συντηρητικής δύναμης και όχι από την αρχική και τελική θέση του.

Σ' αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με την ενεργειακή μέθοδο. Η ενεργειακή μέθοδος εφαρμόζεται σε συντηρητικά συστήματα στα οποία όλες οι δυνάμεις απορρέουν από δυναμικό (συντηρητικές δυνάμεις). Το συνολικό δυναμικό (total potential)  $U^T$  οποιουδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος ισούται με το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων  $U$ , που καλείται και ελαστική ενέργεια ή ενέργεια παραμορφώσεως (strain energy), και το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων  $\Omega$ , δηλαδή

$$U^T = U + \Omega. \quad (2.6)$$

Η δυναμική ενέργεια (ή συνολικό δυναμικό) ενός ελαστικού συστήματος, ευρισκομένου σε κάποια παραμορφωσιακή κατάσταση ορίζεται ως το έργο που εκτελείται από όλες τις εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις, αν το σύστημα μετακινηθεί από την ανώτερη παραμορφωσιακή κατάσταση σε άλλη, που λαμβάνεται ως αφετηρία και η οποία συνήθως είναι η αφόρτιστη κατάσταση.

Είναι φανερό ότι η δυναμική ενέργεια των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με την ενέργεια (έργο) παραμορφώσεως  $U$  που έχει αποταμιευθεί στο φορτισθέν σύστημα. Τούτο δε, διότι αν το σύστημα μετακινηθεί από την φορτισμένη κατάσταση στην αφόρτιση, το έργο που θα εκτελεσθεί ταυτίζεται με την ενέργεια παραμορφώσεως. Εξ άλλου, η δυναμική ενέργεια των εξωτερικών δυνάμεων, σύμφωνα με τον ανώτερο ορισμό, είναι αρνητική, διότι κάθε φορτίο που δρα στο σύστημα εκτελεί αρνητικό έργο, καθώς το σύστημα από την αρχική κατάσταση επιστρέφει στην αρχική αφόρτιστη κατάσταση. Έτσι, π.χ. στην περίπτωση συγκεντρωμένων δυνάμεων  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$\Omega = -\sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad (2.7)$$

όπου  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) τα αντίστοιχα βέλη (μεταθέσεις) στις θέσεις εφαρμογής των δυνάμεων.

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η δυναμική ενέργεια των εξωτερικών δυνάμεων δεν ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων, που πραγματοποιείται από αυτές, καθώς αυξάνουν βαθμιαία από το μηδέν μέχρι της τελικής τους τιμής.

Έτσι, η δυναμική ενέργεια δοκού η οποία φορτίζεται με συγκεντρωμένο και κατανεμημένο φορτίο ( $P$  και  $q$  αντίστοιχα), δίνεται από τη σχέση

$$U^T = U + \Omega = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \int_0^l q w dx - P \cdot w(a). \quad (2.8)$$

Θέτοντας  $M = -EIw''$ , παίρνουμε:

$$U^T = \frac{1}{2} \int_0^l EIw''^2 dx - \int_0^l q w dx - P \cdot w(a).$$

### Ενεργειακά κριτήρια

Δύο μεγίστης σημασίας ενεργειακά κριτήρια που χρησιμοποιούνται ευρύτατα είναι τα ακόλουθα:

1. **Κριτήριο ισορροπίας:** Ένα συντηρητικό σύστημα υπό στατική φόρτιση ισορροπεί σε κάποια θέση, όταν το συνολικό δυναμικό  $U^T$  έχει στάσιμη τιμή (stationary value) στη θέση αυτή.
2. **Κριτήριο ευστάθειας:** Μία κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε συντηρητικού συστήματος είναι ευσταθής για μικρού μεγέθους διαταραχή (stability in the “small”), όταν το συνολικό δυναμικό  $U^T$  που αντιστοιχεί σε αυτή έχει σχετικό (τοπικό) ελάχιστο.

Σύμφωνα με το πρώτο ενεργειακό κριτήριο ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισορροπεί ένα οποιοδήποτε συντηρητικό σύστημα είναι το συνολικό δυναμικό αυτού να έχει στάσιμη τιμή. Για το λόγο αυτό το κριτήριο είναι γνωστό και ως **Αρχή της Στασίμου Τιμής της Δυναμικής Ενέργειας** (Principle of stationary potential energy) και είναι αυτό που θα μας απασχολήσει στις επόμενες παραγράφους.

Το συνολικό δυναμικό στην περίπτωση διακεκριμένων συστημάτων είναι μια μονότιμος συνεχής συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), ως και συνάρτηση της εξωτερικής φόρτισης που συμβολικά παριστάνουμε με  $P$ , δηλαδή  $U^T = U^T(q; P)$ . Ακόμη υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της  $U^T$  ως προς  $q_i$  υπάρχουν και είναι συνεχείς στην εξεταζόμενη περιοχή (δηλαδή η  $U^T$  είναι αναλυτική συνάρτηση). Αναφερόμενοι πάντοτε σε συντηρητικά συστήματα, χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα, δυνάμεθα να θεωρήσουμε ότι η υπό έρευνα θέση ισορροπίας συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων

$$q_i = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε τη συνάρτηση του συνολικού δυναμικού  $U^T$  (που αντιστοιχεί σε τυχούσα γειτονική θέση  $q_i \neq 0$ ) σε σειρά Taylor περί τη στατική θέση ισορροπίας  $q_i = 0$ , οπότε προκύπτει

$$U^T(q_1, q_2, \dots, q_n; P) = U^T(0, 0, \dots, 0; P) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial U^T}{\partial q_i} \right|_0 q_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 U^T}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 q_i q_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^3 U^T}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right|_0 q_i q_j q_k + R \quad (2.10)$$

, όπου  $q_i \neq 0$  είναι τυχούσα (συμβιβαστή με τους υπάρχοντες συνδέσμους) γειτονική θέση της υπό μελέτη θέσεως ισορροπίας  $q_i = 0$ , ενώ  $R$  παριστά το άθροισμα όρων ανωτέρας τάξης.

Εφ' όσον η θέση  $q_i = 0$  παριστά θέση ισορροπίας, το συνολικό δυναμικό που αντιστοιχεί σε αυτήν, σύμφωνα με το πρώτο ενεργειακό κριτήριο, έχει στάσιμη τιμή και συνεπώς

$$\left. \frac{\partial U^T}{\partial q_i} \right|_0 = U_i^T \Big|_0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Ένας άλλος συντομογραφικός τρόπος διατυπώσεως της σχέσης (2.10) είναι ο ακόλουθος

$$\Delta U^T = \delta U^T + \frac{1}{2!} \delta^2 U^T + \frac{1}{3!} \delta^3 U^T + R \quad (2.12)$$

, όπου οι ποσότητες  $\delta U^T$ ,  $\delta^2 U^T$ ,  $\delta^3 U^T$  ταυτίζονται με τους αντίστοιχους όρους της σχέσης (2.10) και καλούνται πρώτη, δεύτερη και τρίτη μεταβολή.

Σύμφωνα με την Αρχή της Στασίμου Τιμής της δυναμικής ενέργειας (που ισχύει τόσο για πολυβάθμια, όσο και συνεχή συστήματα) για τη θέση ισορροπίας  $q_i = 0$ , έπεται

$$\delta U^T = \delta U^T(0; P) = 0. \quad (2.13)$$

Η επέκταση των ανωτέρω στα συνεχή συστήματα - απαιτούσα διαδικασίες του **Λογισμού των Μεταβολών**, διότι το συνολικό δυναμικό δεν είναι πλέον συνάρτηση αλλά συναρτησιακό (functional) – δεν έχει σε όλες περιπτώσεις βασισθεί σε αυστηρές μαθηματικές διαδικασίες. Εν τούτοις, έχει γίνει αποδεκτό, ότι τα δύο ενεργειακά κριτήρια και οι σχέσεις (2.12), (2.13) ισχύουν και για συνεχή συστήματα.

## 2.1.2 Η Επιρροή των Αρχικών Ατελειών

Από την έναρξη των πρώτων πειραμάτων, στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, προς επαλήθευση των θεωρητικών αναλύσεων, διαπιστώθηκε το εξής παράδοξο: σε ορισμένες μεν περιπτώσεις τα θεωρητικώς λαμβανόμενα κρίσιμα φορτία λυγισμού ευρίσκοντο πολύ κοντά στα πειραματικά φορτία λυγισμού, σε άλλες δε σε οξεία διάσταση. Στην τελευταία περίπτωση τα πειραματικά φορτία λυγισμού ήταν πάντοτε μικρότερα από τα θεωρητικά, ενίοτε δε διέφεραν περισσότερο του 30%. Χαρακτηριστική ήταν η περίπτωση αξονικώς θλιβομένων κυλινδρικών κελυφών, των οποίων τα πειραματικώς μετρούμενα φορτία λυγισμού ήταν κατά 20% μικρότερα των θεωρητικώς λαμβανομένων. Σήμερα έχει γίνει γενικώς αποδεκτό ότι η βασική αιτία αυτής της ασυμφωνίας οφείλεται στις αναπόφευκτες μικρές εκτροπές στο αρχικώς παραδεκτό σχήμα μιας κατασκευής ή στις πάντοτε υπάρχουσες μικρές εγγενείς ανωμαλίες κατασκευαστικής φύσης, ή τέλος εκκεντρότητες φόρτισης.

Στο σημείο αυτό αξίζει να διευκρινισθεί ότι η *τελειότητα* ενός συστήματος είναι έννοια σχετική, εξαρτώμενη από την άποψη από την οποία εξετάζεται το σύστημα. Πράγματι, μπορεί να τονισθεί ότι ένα σύστημα είναι *τέλειο* από δύο διαφορετικές απόψεις: Συγκεκριμένα, είτε από άποψης καταστάσεως και γεωμετρίας (καίτοι μπορεί να συνδέεται με οριακό σημείο), είτε από άποψης ευστάθειας (συνδεδεμένης με ασταθές σημείο διακλαδώσεως). Στην δεύτερη περίπτωση το κρίσιμο φορτίο ακαριαίου λυγισμού λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή του. Η διάκριση αυτή διαπιστώνεται εύκολα στην περίπτωση ενός απλού εκ δύο ράβδων πλαισίου. Τούτο, όταν είναι τελείως ορθογωνικό (γεωμετρικά τέλειο), χάνει την ευστάθειά του μέσω οριακού σημείου (δηλαδή είναι ατελές από άποψης ευστάθειας) ενώ για κάποια ελαφρώς μεγαλύτερης της ορθής γωνίας χάνει την ευστάθειά του μέσω σημείου διακλαδώσεως με τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του κρίσιμου φορτίου. Κάτι παρόμοιο ισχύει και για την περίπτωση της ελαφρώς μεγαλύτερης της μηδενικής εκκεντρότητας φόρτισης. Η ανωτέρω διάκριση δεν υπάρχει στη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, η οποία ταυτίζεται με διακλαδική (bifurcational) ανάλυση. Στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου γίνεται η διαπίστωση των παραπάνω μέσω αναλυτικής διερεύνησης.

## 2.2 Μη Γραμμική Ανάλυση Ορθογωνικού Πλαισίου με τη Μέθοδο των Μετρίως Μεγάλων Μετατοπίσεων

Όπως γνωρίζουμε ήδη η μεταβολή της δυσκαμψίας των μελών που μελετάμε είναι της μορφής:

$$I_1(x_1) = I_{1,0} \cdot \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^3 \quad (2.14)$$

Επιπλέον, εκτός από μεταβολή της ροπής αδρανείας, έχουμε και γραμμικά μεταβαλλόμενο εμβαδόν:

$$F(x) = F_{1,0} \cdot \frac{x}{a}, \quad (2.15)$$

όπου  $F_{1,0}$  το εμβαδόν της βάσης του υποστυλώματος.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι η σχέση (2.5) τροποποιείται ως εξής:

$$N(x) = E \cdot F(x) \cdot \left[ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} w'^2 \right] = \text{σταθερό}$$

, δηλαδή αποδεχόμαστε ότι η αξονική δύναμη που καταπονεί το μέλος διατηρείται σταθερή καθ' όλο το μήκος του.

Συνάρτηση βέλους κάμψεως του μέλους:

$$w_1(x_1) = A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + C_1 \cdot x_1 + D_1 \quad (2.16)$$

$$\mu^2 = \frac{S_1 \cdot \alpha^2}{E \cdot I_1} \cdot \frac{\alpha}{l_1} = k^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\ell'}\right)^3 \quad (2.17)$$

Παράγωγοι βέλους κάμψεως:

$$w_1(x_1)' = x_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot x_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselJ\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + \right.$$

$$\left. B_1 \cdot x_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselY\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) \right] + C_1$$

$$w_1(x_1)'' = -\frac{\mu^2 \cdot l_1}{x_1^{5/2}} \left[ A_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) \right]$$

$$w_1(x_1)''' = \frac{\mu^2 \cdot l_1}{x_1^{7/2}} \left[ 2A_1 \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \cdot BesselJ\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + \right.$$

$$\left. 2B_1 \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \cdot BesselY\left(0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) \right]$$

Εξίσωση βέλους κάμψεως μέλους διατομής σταθερού εμβαδού και ροπής αδρανείας στο οποίο δεν υποβάλλεται αξονική δύναμη:

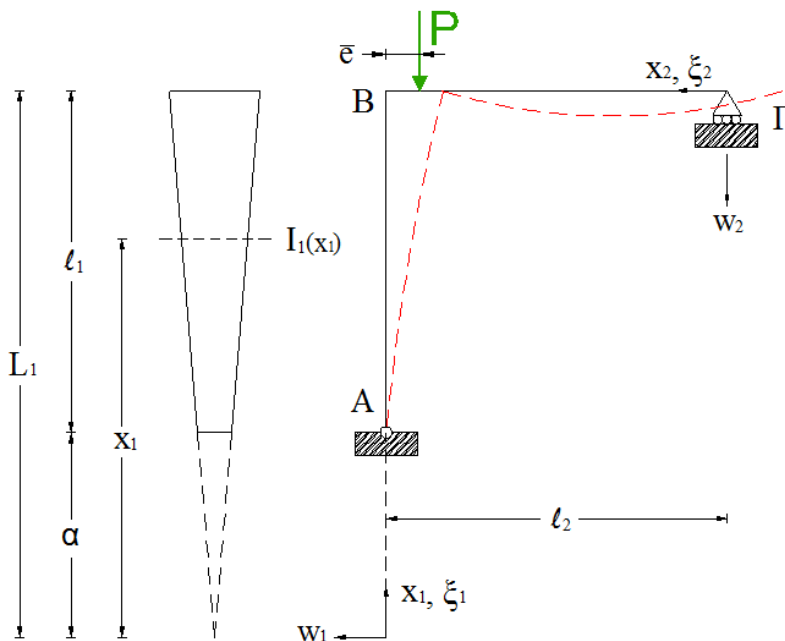
$$w_2(x_2) = A_2 \cdot x_2^3 + B_2 \cdot x_2^2 + C_2 \cdot x_2 + D_2 \quad (2.18)$$

**2.2.1 Περιγραφή του Πλαισίου**

Μελετάται το διμελές ορθογωνικό πλαίσιο ΑΒΓ (βλ. Σχήμα) το οποίο υπόκειται σε συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο P στον κόμβο Β. Η φόρτιση θεωρείται ότι ενεργεί έκκεντρα και σε μικρή απόσταση e από τον άξονα του υποστύλωματος ΑΒ.

Το υποστύλωμα στηρίζεται με άρθρωση στο Α, ενώ η δοκός ΒΓ με οριζόντια κύλιση στο Γ.

Επιπλέον, η διατομή του στύλου υπακούει στην κυβική μεταβολή δυσκαμψίας  $I_1(x)$  καθώς επίσης και στη γραμμική μεταβολή του εμβαδού  $F_1(x)$ , ενώ το ζύγωμα αποτελείται από διατομή σταθερών γεωμετρικών και αδρανειακών χαρακτηριστικών  $I_2, F_2$ .



Σχήμα 2.2 Γεωμετρία πλαισίου και φόρτισης

Δυνάμει των γραμμικών συστατικών καθώς και των μη γραμμικών κινηματικών σχέσεων η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$U_T = U_1 + U_2 + \Omega \tag{2.19}$$

, όπου  $U_1$  είναι η ελαστική ενέργεια που αφορά το υποστύλωμα,  $U_2$  η ελαστική ενέργεια της δοκού και  $\Omega$  το δυναμικό της εξωτερικής φόρτισης. Συγκεκριμένα είναι:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \cdot \int_a^{L_1} \left[ E \cdot I_1(x) \cdot w_1''^2 + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right)^2 \right] dx_1 \\ U_2 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{l_2} \left[ E \cdot I_2 \cdot w_2''^2 + E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right)^2 \right] dx_2 \\ \Omega &= P \cdot \xi_1(L_1) + P \cdot e \cdot w_2'(l_2) \end{aligned} \right\} \tag{2.20}$$

, όπου F(x) ορίζεται το μεταβλητό εμβαδόν της διατομής του υποστύλωματος.

Λαμβάνοντας την πρώτη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας που αφορά τον στύλο έχουμε

$$\begin{aligned}\delta U_1 &= \frac{1}{2} \cdot \int_a^{L_1} \left[ 2E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \cdot \delta w_1'' + E \cdot F(x) \cdot 2 \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot (\delta \xi_1' + w_1' \cdot \delta w_1') \right] dx_1 \\ &= \int_a^{L_1} \left[ E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \cdot \delta w_1'' + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot \delta \xi_1' + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \cdot \delta w_1' \right] dx_1\end{aligned}$$

Μετά από μία παραγοντική ολοκλήρωση ως προς  $\delta \xi$  και δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις ως προς  $\delta w$  βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\delta U_1 &= E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \cdot \delta w_1' \Big|_a^{L_1} - \int_a^{L_1} (E \cdot I_1(x) \cdot w_1'')' \cdot \delta w_1' dx_1 + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot \delta \xi_1 \Big|_a^{L_1} \\ &\quad - \int_a^{L_1} \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right]' \cdot \delta \xi_1 dx_1 + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \cdot \delta w_1 \Big|_a^{L_1} \\ &\quad - \int_a^{L_1} \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \right]' \cdot \delta w_1 dx_1 \\ &= E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \cdot \delta w_1' \Big|_a^{L_1} + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot \delta \xi_1 \Big|_a^{L_1} + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \cdot \delta w_1 \Big|_a^{L_1} \\ &\quad + \int_a^{L_1} - (E \cdot I_1(x) \cdot w_1'')' \cdot \delta w_1' - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right]' \cdot \delta \xi_1 - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \right]' \cdot \delta w_1 dx_1 \\ &= E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \cdot \delta w_1' \Big|_a^{L_1} - (E \cdot I_1(x) \cdot w_1'')' \cdot \delta w_1 \Big|_a^{L_1} + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot \delta \xi_1 \Big|_a^{L_1} \\ &\quad + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \cdot \delta w_1 \Big|_a^{L_1} - \int_a^{L_1} \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right]' \cdot \delta \xi_1 dx_1 \\ &\quad + \int_a^{L_1} \left\{ (E \cdot I_1(x) \cdot w_1'')'' - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \right]' \right\} \cdot \delta w_1 dx_1\end{aligned}$$

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, το συναρτησιακό του Συνολικού Δυναμικού είναι συνάρτηση τεσσάρων ανεξαρτήτων συναρτήσεων:  $\xi_1(x_1)$ ,  $\xi_2(x_2)$ ,  $w_1(x_1)$ ,  $w_2(x_2)$ . Εφαρμόζοντας την Αρχή της Στασίμου Τιμής του Συνολικού Δυναμικού και με δεδομένο ότι οι μεταβολές  $\delta \xi$  και  $\delta w$  ως αυθαίρετες είναι και ανεξάρτητες μεταξύ τους κάθε ένα από τα ολοκληρώματα βάσει του θεμελιώδους λήμματος του Λογισμού των Μεταβολών ισούται με μηδέν. Έτσι, καταλήγουμε στις ακόλουθες εξισώσεις Euler-Lagrange, οι οποίες διέπουν την ισορροπία του πλαισίου στην παραμορφωμένη κατάσταση.

$$\triangleright \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right]' = 0 \Rightarrow \left[ F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right]' = 0$$

$$\triangleright (E \cdot I_1(x) \cdot w_1'')'' - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \right]' = 0$$



$$\Rightarrow (E \cdot I_1(x) \cdot w_1'')'' - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right]' \cdot w_1' - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right] \cdot w_1'' = 0 \Rightarrow$$

$$(E \cdot I_1(x) \cdot w_1'')'' - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right] \cdot w_1'' = 0$$

Όμοια διαδικασία με το κατακόρυφο μέλος ακολουθούμε και για το ζύγωμα (για διατομή σταθερού εμβαδού και ροπής αδρανείας):

$$\left[ E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right) \right]' = 0 \Rightarrow \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right)' = 0$$

$$(E \cdot I_2 \cdot w_2'')'' - \left[ E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right) \right] \cdot w_2'' = 0$$

### 2.2.2 Διαφορικές Εξισώσεις Ισορροπίας

Συνοπτικά οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που διαμορφώσαμε είναι:

$$\left. \begin{aligned} \left[ E \cdot F_i(x) \cdot \left( \xi_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 \right) \right]' &= 0 \\ \frac{d^2}{dx_i^2} (E \cdot I_i \cdot w_i'') - E \cdot F_i \cdot \left( \xi_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 \right) \cdot w_i'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2. \quad (2.21)$$

Γεωμετρικές Συνθήκες (Κινηματικές):

$$\left. \begin{aligned} \bullet \text{ Συνοριακές} \quad w_1(a) = w_2(0) = \xi_1(\alpha) = 0 \\ \bullet \text{ Συνέχειας} \quad w_1(L_1) = \xi_2(l_2), \quad \xi_1(L_1) = -w_2(l_2), \quad w_1'(L_1) = w_2'(l_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Φυσικές Συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned} \color{blue}{\oplus} \text{ Συνοριακές} \\ \xi_2'(0) + \frac{1}{2} w_2'(0)^2 = 0, \quad w_1''(\alpha) = w_2''(0) = 0 \\ \color{blue}{\oplus} \text{ Ισορροπία ροπών στον κόμβο} \\ E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0 \\ \color{blue}{\oplus} \text{ Ισορροπία κατακόρυφων δυνάμεων} \\ E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) + P = 0 \\ \color{blue}{\oplus} \text{ Ισορροπία οριζοντίων δυνάμεων} \\ E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1'''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Η συνθήκη (2.23.6) διαμορφώθηκε έπειτα από παραγωγή της ροπής κάμψεως για το σημείο  $x_1 = L_1$ :

$$\frac{d}{dx_1} [E \cdot I_1(x_1) \cdot w_1''(x_1)]_{x_1=L_1} = E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''''(L_1) + 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1'''(L_1)$$

Μετά από ολοκλήρωση των σχέσεων (2.21) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.23.1) παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 &= -\frac{S_1}{E \cdot F_1(x)} \\ \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 &= 0 \\ \frac{d^2}{dx_1^2} (E \cdot I_1 \cdot w_1'') + S_1 \cdot w_1'' &= 0 \\ w_2'''' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

, όπου  $S_1$  είναι η αξονική θλιπτική δύναμη του υποστυλώματος. Προφανώς, η αξονική δύναμη της δοκού είναι μηδέν.

Προκειμένου να έχουμε καλύτερη εποπτεία των υπολογισμών ακολουθούν οι εξής αντικαταστάσεις:

$$J_{a,1} = BesselJ(1, 2\mu\sqrt{l_1'}), \quad Y_{a,1} = BesselY(1, 2\mu\sqrt{l_1'})$$

$$J_{a,0} = BesselJ(0, 2\mu\sqrt{l_1'}), \quad Y_{a,0} = BesselY(0, 2\mu\sqrt{l_1'})$$

$$J_1 = BesselJ\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right), \quad Y_1 = BesselY\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right)$$

$$J_0 = BesselJ\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right), \quad Y_0 = BesselY\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right)$$

Η εφαρμογή των συνθηκών (2.22.1), (2.22.2) καθώς και των (2.23.2), (2.23.3) και (2.23.6) δίνει:

$$\text{a) } w_1(\alpha) = A_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{\alpha}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{\alpha}}\right) + C_1 \cdot \alpha + D_1 = 0$$

$$\text{b) } D_2 = 0$$

$$\text{c) } B_1 = -A_1 \cdot \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}}$$

$$\text{d) } B_2 = 0$$

$$\text{e) } E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1'''(L_1) = 0$$

Μέσω της σχέσης

$$\xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 = -\frac{S_1}{E \cdot F_1(x)}, \text{ έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} & -S_1 \cdot C_1 - S_1 \cdot L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right] \\ & + 3 \cdot E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{5/2}} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) - E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{7/2}} \cdot \left( 2A_1 \cdot J_1 + A_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + 2B_1 \cdot Y_1 \right. \\ & \left. + B_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -S_1 \cdot C_1 - S_1 \cdot L_1^{-1/2} \left( A_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + B_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \\ & + 3 \cdot E \cdot I_1 \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{a^3 \cdot L_1^{1/2}} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) - E \cdot I_1 \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{a^3 \cdot L_1^{1/2}} \cdot \left( 2A_1 \cdot J_1 + A_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + 2B_1 \cdot Y_1 \right. \\ & \left. + B_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_1 = & -L_1^{-1/2} \left( A_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + B_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) + \frac{E \cdot I_1}{S_1} \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{a^3 \cdot L_1^{1/2}} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) \\ & - \frac{E \cdot I_1}{S_1} \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{a^3 \cdot L_1^{1/2}} \cdot \left( A_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + B_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση του  $\mu^2 = \frac{S_1 \cdot \alpha^2}{E \cdot I_1} \cdot \frac{\alpha}{l_1}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} C_1 = & -L_1^{-1/2} \left( A_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + B_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) + \frac{E \cdot I_1}{S_1} \cdot \frac{S_1 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha \cdot l_1}{E \cdot I_1 \cdot a^3 \cdot L_1^{1/2}} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) \\ & - \frac{E \cdot I_1}{S_1} \cdot \frac{S_1 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha \cdot l_1}{E \cdot I_1 \cdot a^3 \cdot L_1^{1/2}} \cdot \left( A_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + B_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.22.6), (2.23.4) και (2.23.5) παίρνουμε:

$$\mathbf{a)} \quad w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$$

$$w_2'(l_2) = 3A_2 \cdot l_2^2 + C_2 = L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right]$$

$$\mathbf{b)} \quad E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0$$

$$-E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{5/2}} (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) + E \cdot I_2 \cdot 6A_2 \cdot l_2 + P \cdot e = 0$$

$$\Rightarrow -S_1 \cdot \sqrt{L_1} (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) + E \cdot I_2 \cdot 6A_2 \cdot l_2 + P \cdot e = 0$$

$$\text{c) } E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) + P = 0$$

Μέσω της σχέσης  $\xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 = -\frac{S_1}{E \cdot F_1(x)}$ , έχουμε:

$$-S_1 + E \cdot I_2 \cdot 6A_2 + P = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{S_1 - P}{6E \cdot I_2}$$

Έτσι, με αντικατάσταση του  $A_2$  στη σχέση (b) προκύπτει:

$$-S_1 \cdot A_1 \cdot \sqrt{L_1} \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right) + (S_1 - P) \cdot l_2 + P \cdot e = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)}$$

Επιπλέον για το  $C_2$  από τη σχέση (a) είναι:

$$\begin{aligned} C_2 &= L_1^{-1/2} \cdot A_1 \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 + \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2 \\ &= \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1 \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 + \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2 \end{aligned}$$

Έτσι τα βέλη κάμψεως γίνονται:

$$\begin{aligned} w_2(x_2) &= A_2 \cdot x_2^3 + C_2 \cdot x_2 \\ &= \frac{S_1 - P}{6E \cdot I_2} \cdot x_2^3 + \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1 \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 + \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] \cdot x_2 - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2 \cdot x_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} w_1(x_1) &= A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \text{Bessel}J \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \text{Bessel}Y \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + D_1 \\ &= \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \cdot \sqrt{x_1} \cdot \left[ \text{Bessel}J \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \text{Bessel}Y \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.2.3 Εξίσωση Λυγισμού

Η εξίσωση λυγισμού θα προκύψει από την εξίσωση:

$$\xi_1(L_1) = -w_2(l_2)$$

Η αξονική βράχυνση του υποστυλώματος  $\xi_1(x_1)$  προκύπτει από την ολοκλήρωση της σχέσης:

$$\xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 = -\frac{S_1}{E \cdot F_1(x)} \Rightarrow \xi_1(x_1) = -\frac{S_1 \cdot (x_1 - a)}{E \cdot F_1(x_1)} - \frac{1}{2} \int_a^{x_1} w_1'(x_1)^2 dx_1$$

Όμως ο παράγοντας

$$w_1'(x_1)^2 = x_1^{-3} \left[ A_1 \cdot x_1 \cdot BesselJ \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselJ \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + B_1 \cdot x_1 \cdot BesselY \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselY \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) \right]^2$$

δεν ολοκληρώνεται αναλυτικά καθώς μέσα στο ολοκλήρωμα υπεισέρχονται συναρτήσεις Bessel υψωμένες στο τετράγωνο καθώς και γινόμενα συναρτήσεων Bessel διαφορετικής τάξης και είδους.

Έτσι οδηγούμαστε σε αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα η εξίσωση λυγισμού θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & -\frac{S_1 \cdot (L_1 - a)}{E \cdot F_1(L_1)} - \frac{1}{2} \int_a^{L_1} w_1'(x_1)^2 dx_1 = \frac{S_1 - P}{3E \cdot I_2} \cdot l_2^3 - \\ & \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1 \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 + \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right] \cdot l_2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ο τελευταίος όρος απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1} \left[ 1 + \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1} \right] \cdot l_2 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1} \left[ 1 + \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right] \cdot l_2$$

#### Αδιαστατοποίηση

Για την αριθμητική επίλυση, όμως, είναι απαραίτητη η αδιαστατοποίηση των μεγεθών, ώστε τα μήκη να παίρνουν ανηγμένες τιμές. Έτσι, για το βέλος κάμψεως του κατακόρυφου στοιχείου διαιρούμε όλα τα μεγέθη μήκους με το ύψος του υποστυλώματος  $l_1$ , ενώ για το βέλος της δοκού διαιρούμε αντιστοίχως με το μήκος  $l_2$ :

$$x_i^* = \frac{x_i}{l_i}, \quad w_i(x_i)^* = \frac{w_i(x_i)}{l_i}$$

Συγκεκριμένα, για την επίλυση της εξίσωσης λυγισμού πραγματοποιούνται οι παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 \rightarrow 1 \\ a \rightarrow 1/l_1' \\ L_1 = l_1 + a \rightarrow 1 + 1/l_1' \\ l_2 \rightarrow l_2/l_1 = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} e \rightarrow e/l_1 = \bar{e} \\ x_1 = a \sim L_1 \rightarrow \frac{1}{l_1'} \sim 1 + \frac{1}{l_1'} \\ x_2 = 0 \sim l_2 \rightarrow 0 \sim 1 \end{array} \quad (2.28)$$

Έτσι, το βέλος κάμψεως της δοκού θα γίνει:

$$w_2(1) = -\frac{S_1 - P}{3E \cdot I_2} \cdot l_2^2 + \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1} \left[ 1 + \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right]$$

Ενώ, διαιρώντας αριθμητές και παρονομαστές με το μήκος  $l_1$ , έχουμε:

$$w_2(1) = -\frac{S_1 - P}{3E \cdot I_2} \cdot l_2^2 + \frac{P \cdot \bar{e} + (S_1 - P) \cdot r}{S_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right)} \left[ 1 + \frac{\mu}{\sqrt{1 + 1/l_1'}} \cdot \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right]$$

Τέλος, μένουν οι αντικαταστάσεις για τα φορτία:

$$\beta^2 = \frac{P \cdot l_1^2}{E \cdot I_m}, \quad k^2 = \frac{S_1 \cdot l_1^2}{E \cdot I_m} \Rightarrow S_1 = k^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2$$

Έτσι, το **ανηγμένο βέλος κάμψεως του ζυγώματος** γίνεται:

$$\begin{aligned} w_2(1)^* &= -\frac{(k^2 - \beta^2) \cdot E \cdot I_m / l_1^2}{3E \cdot I_2} \cdot l_2^2 \\ &+ \frac{\beta^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot E \cdot I_m / l_1^2 \cdot r}{k^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right)} \left[ 1 + \frac{\mu}{\sqrt{1 + 1/l_1'}} \cdot \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right] \Rightarrow \\ w_2(1)^* &= \frac{(\beta^2 - k^2) \cdot \rho \cdot r^2}{3} + \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right)} \left[ 1 + \frac{\mu}{\sqrt{1 + 1/l_1'}} \cdot \frac{J_{a,1} \cdot Y_0 - J_0 \cdot Y_{a,1}}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Αντιστοίχως, για την **ανηγμένη βράχυνση του στύλου** θα είναι:

$$\xi_1(L_1) = -\frac{k^2 \cdot I_m / l_1^2}{F_1(L_1)} - \frac{1}{2} \int_a^{L_1} w_1(x_1)^2 dx_1 = -\frac{k^2}{\lambda_1^2} - \frac{1}{2} \int_a^{L_1} w_1(x_1)^2 dx_1$$

, όπου  $\lambda_1^2 = \frac{l_1^2 \cdot F_1(L_1)}{I_m}$  η ανηγμένη λυγηρότητα του στοιχείου με

$$F_1(L_1) = F_{1,0} \cdot \frac{L_1}{a} = F_{1,0} \cdot \frac{l_1 + a}{a} = F_{1,0} \cdot (l_1' + 1). \quad (2.30)$$

Μένει, τέλος, η αδιαστατοποίηση του ολοκληρώματος η οποία αφορά την πρώτη παράγωγο του βέλους κάμψεως καθώς και τα άκρα μέσα στα οποία ορίζεται.

$$\int_a^{L_1} w_1(x_1)'{}^2 dx_1 \rightarrow \int_{1/l_1'}^{1+l_1'/l_1'} w_1(x_1)'{}^2 dx_1$$

$$w_1(x_1)' = x_1^{-1/2} \left[ A_1 \cdot BesselJ \left( 1, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) - A_1 \cdot \frac{\mu}{\sqrt{x_1}} \cdot BesselJ \left( 0, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) \right. \\ \left. + B_1 \cdot BesselY \left( 1, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) - B_1 \cdot \frac{\mu}{\sqrt{x_1}} \cdot BesselY \left( 0, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$w_1(x_1)' = x_1^{-1/2} \cdot A_1 \left[ BesselJ \left( 1, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) - \frac{\mu}{\sqrt{x_1}} \cdot BesselJ \left( 0, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) \right. \\ \left. - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot BesselY \left( 1, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) + \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{x_1}} \cdot BesselY \left( 0, \frac{2\mu}{\sqrt{x_1}} \right) \right] \quad (2.31)$$

$$\text{, όπου } A_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot \sqrt{L_1} \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)}$$

Η μετακίνηση του υποστυλώματος στην κεφαλή  $w_1(L_1)$  θα είναι (σχέση 2.26):

$$w_1(L_1) = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \cdot \sqrt{L_1} \cdot \left[ BesselJ \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \right) - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot BesselY \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$w_1 \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \cdot \left[ J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right] = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2} = \frac{\beta^2}{k^2} \cdot \bar{e} + \left( 1 - \frac{\beta^2}{k^2} \right) \cdot r$$

$$\boxed{w_1 \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) = \frac{\beta^2}{k^2} \cdot (\bar{e} - r) + r} \quad (2.32)$$

### Παρατήρηση

Στους παραπάνω υπολογισμούς αναφερόμαστε στο εμβαδόν της διατομής του ποδός του στύλου  $F_{1,0}$ .

Αν ο μελετητής επιθυμεί να δουλεύει με την αντικατάσταση ενός μέσου εμβαδού  $F_m$ , αυτό που αλλάζει στη φόρμουλα των υπολογισμών τελικώς θα αφορά μόνο τη λυγηρότητα του θλιβόμενου στοιχείου  $\lambda_1^2 = l_1^2 \cdot F_1(L_1) / I_m$  ως εξής:

$$F_1(L_1) = F_m \cdot \frac{L_1}{a + l_1 / 2} = F_m \cdot \frac{1 + l_1'}{1 + l_1' / 2}, \text{ αφού τώρα θα είναι } F(x) = F_m \frac{x}{a + l_1 / 2}. \quad (2.33)$$

## 2.3 Αριθμητική Επίλυση Εξίσωσης Λυγισμού

### 2.3.1 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Επιλέγεται, για αρχή, ως μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης η **μέθοδος του τραπεζίου**. Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε είναι η εξής:

$$S = (2S_1 + S_0) \cdot h / 2$$

, όπου  $S_0 = f_{(a)} + f_{(b)}$ , όπου α και β δηλώνουν τα άκρα του ορισμένου ολοκληρώματος και είναι:

$$\alpha = \frac{1}{l'_1}, \quad b = 1 + \frac{1}{l'_1}.$$

$$\begin{aligned} w'_1(1/l'_1) &= \sqrt{l'_1} \cdot \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{l'_1}} \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \cdot \left( J_{a,1} - \mu \sqrt{l'_1} \cdot J_{a,0} - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_{a,1} + \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot \mu \sqrt{l'_1} \cdot Y_{a,0} \right) \\ &= \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{l'_1} + \frac{1}{l_1'^2}}} \cdot \frac{\mu \sqrt{l'_1} \cdot (J_{a,1} \cdot Y_{a,0} - J_{a,0} \cdot Y_{a,1})}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{w'_1(1/l'_1)^2 = \frac{[\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r]^2}{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right)} \cdot \left( \frac{J_{a,1} \cdot Y_{a,0} - J_{a,0} \cdot Y_{a,1}}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right)^2 \cdot \mu^2 \cdot l_1'^2} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} w'_1(1+1/l'_1) &= \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \left( J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 \right)} \cdot \left[ J_1 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+1/l'_1}} \cdot \left( J_0 - \frac{J_{a,1}}{Y_{a,1}} \cdot Y_0 \right) \right] = \\ &= \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{l'_1}\right)} \cdot \left( 1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+1/l'_1}} \cdot \frac{Y_{a,1} \cdot J_0 - J_{a,1} \cdot Y_0}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

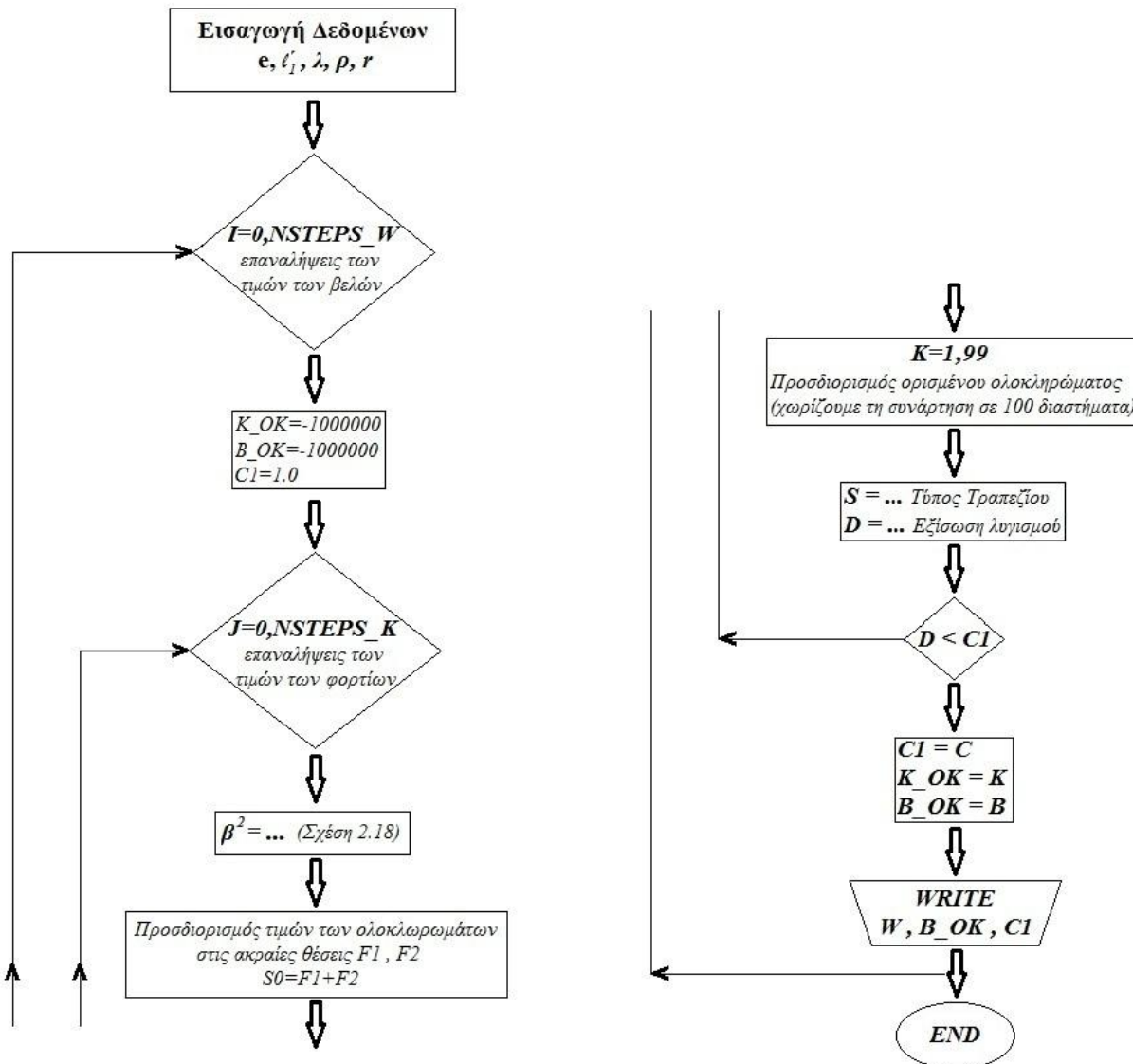
$$\boxed{w'_1(1+1/l'_1)^2 = \left[ \frac{\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{1 + \frac{1}{l'_1}} \cdot \left( 1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+1/l'_1}} \cdot \frac{Y_{a,1} \cdot J_0 - J_{a,1} \cdot Y_0}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right) \right]^2} \quad (2.35)$$



### 2.3.2 Προγραμματισμός

Με την παραπάνω φόρμουλα χρησιμοποιούμε την Fortran ως γλώσσα προγραμματισμού για την εξαγωγή των απαραίτητων αποτελεσμάτων.

Ακολουθεί το διάγραμμα ροής που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή του δρόμου ισορροπίας του βέλους κάμψεως του στύλου για το τυπικό διμελές πλαίσιο του Σχήματος 2.2, ενώ ο κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα.



Σχήμα 2.3 Διάγραμμα ροής για τους δρόμους ισορροπίας του βέλους κάμψεως

### 2.3.3 Συσχετισμός του Φορτίου Λυγισμού με τη Στροφή του Υποστρώματος.

Η πρώτη παράγωγος στο σημείο της κεφαλής του στύλου μάς δίνει:

$$w_1'(1+1/l_1') = \frac{\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{1 + \frac{1}{l_1'}} \cdot \left( 1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+1/l_1'}} \cdot \frac{Y_{a,1} \cdot J_0 - J_{a,1} \cdot Y_0}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1} \right) \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \left[ \frac{w_1'(1+1/l_1') \cdot \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right)}{\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+1/l_1'}} \cdot \frac{Y_{a,1} \cdot J_0 - J_{a,1} \cdot Y_0}{Y_{a,1} \cdot J_1 - J_{a,1} \cdot Y_1}\right)} - r \right] \cdot k^2 / (\bar{e} - r) \quad (2.36)$$

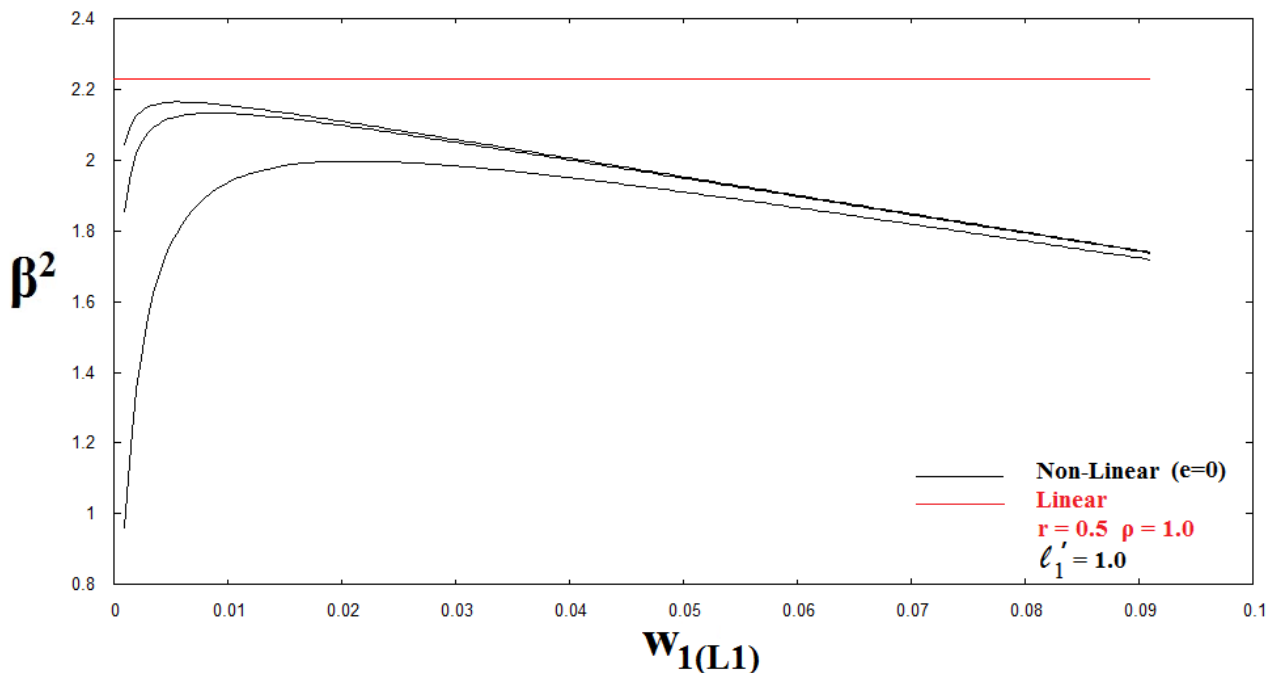
Μ'αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εξάγουμε διαγράμματα φορτίων-στροφής της κεφαλής του υποστρώματος.

## 2.4 Αποτελέσματα Μη Γραμμικής Ανάλυσης – Διαγράμματα

### 2.4.1 Διαγράμματα Βέλους Κάμψεως

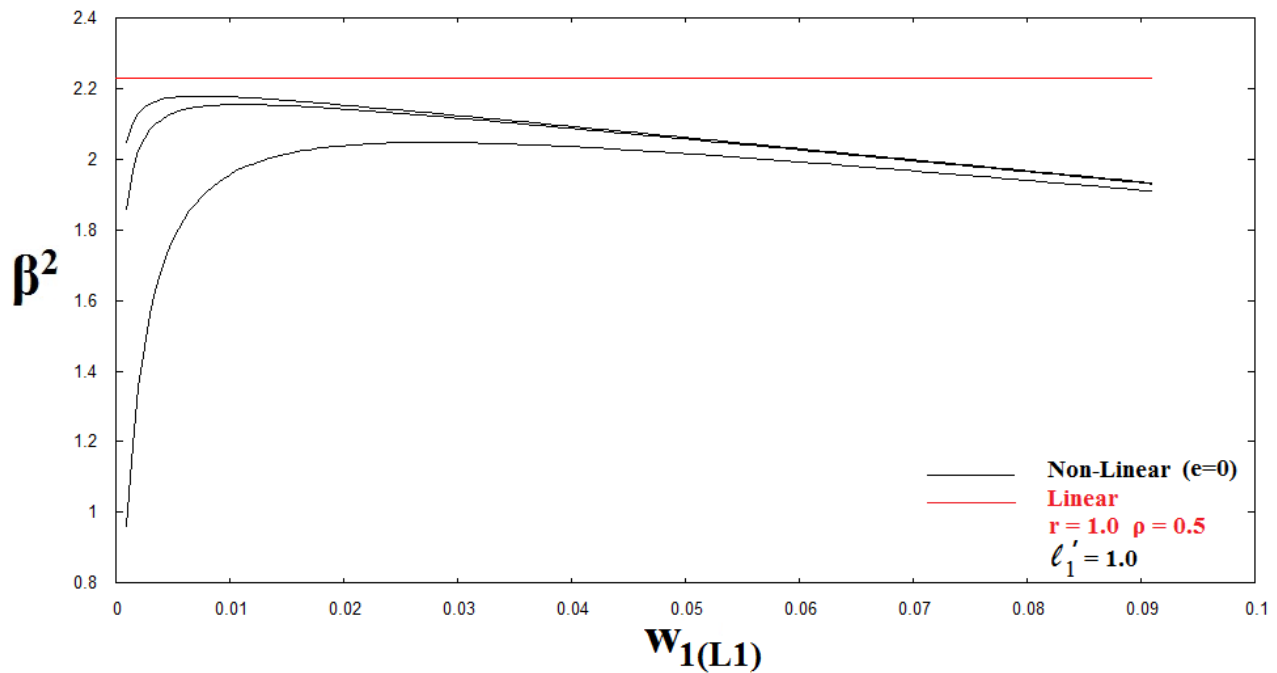
Αρχικά παρουσιάζουμε τα διαγράμματα για τα βέλη κάμψεως της κεφαλής του στύλου  $w_1(L_1)$  για μηδενική εκκεντρότητα και για διάφορες γεωμετρικές τιμές καθώς και τιμές λυγηρότητας. Επίσης, γίνεται σύγκριση των μη γραμμικών δρόμων ισορροπίας με τις αντίστοιχες γραμμικές επιλύσεις.

$$\color{blue}{\oplus} \quad l_1' = 1, \quad r = 0.5, \quad \rho = 1.0, \quad \lambda = 150 - 100 - 40$$



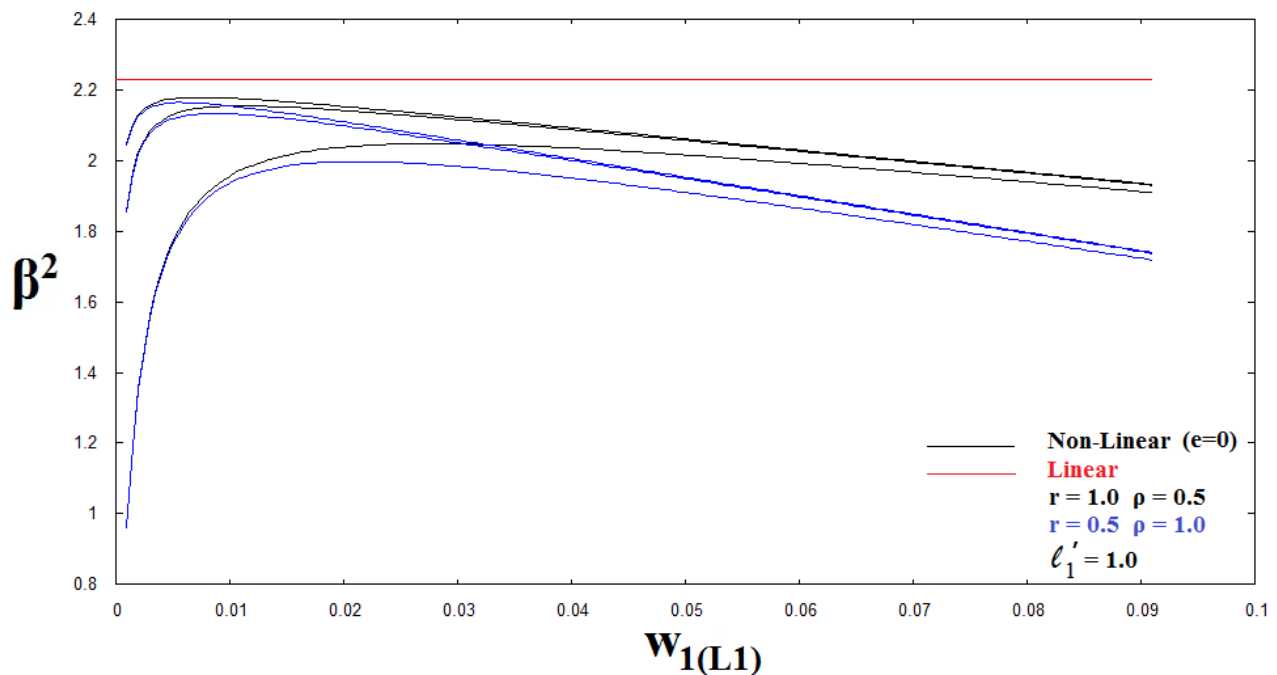
Προφανώς οι (μη γραμμικοί) δρόμοι ισορροπίας -με σειρά από πάνω προς τα κάτω- αντιστοιχούν στις λυγηρότητες 150, 100 και 40. Ομοίως και για τα διαγράμματα που ακολουθούν.

$$\ell'_1 = 1, r = 1.0, \rho = 0.5, \lambda = 150 - 100 - 40$$



$$\ell'_1 = 1, r = 1.0, \rho = 0.5, \lambda = 150 - 100 - 40$$

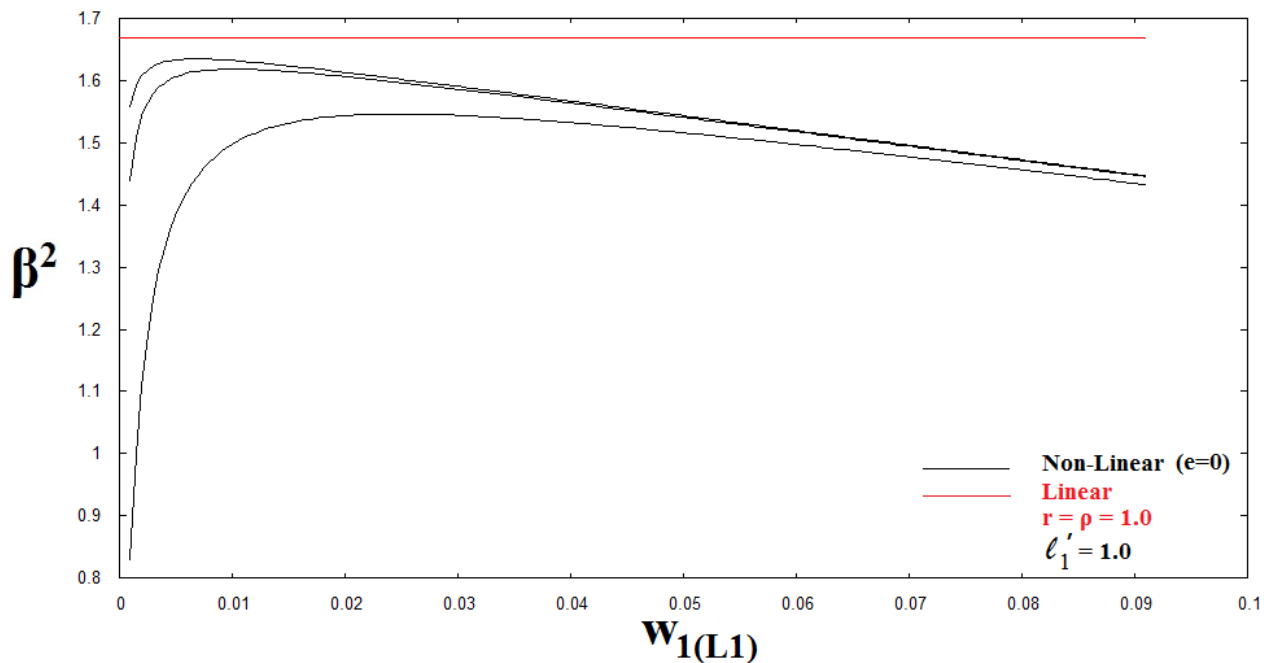
$$+ r = 0.5, \rho = 1.0$$



Από τα παραπάνω εύκολα διαπιστώνουμε κατ'αρχήν ότι όσο μεγαλύτερη η λυγηρότητα τόσο περισσότερο η μη γραμμική ανάλυση προσεγγίζει τη λύση της γραμμικής θεωρίας, συνεπώς τόσο μεγαλύτερο το κρίσιμο φορτίο.

Επιπλέον, ενώ η γραμμική ανάλυση δίνει ίδια λύση για το ίδιο γινόμενο  $r \cdot \rho$ , μεταξύ των μη γραμμικών αναλύσεων παρατηρείται διαφορά ως προς το κρίσιμο φορτίο η οποία θα εξεταστεί στη συνέχεια περισσότερο αναλυτικά.

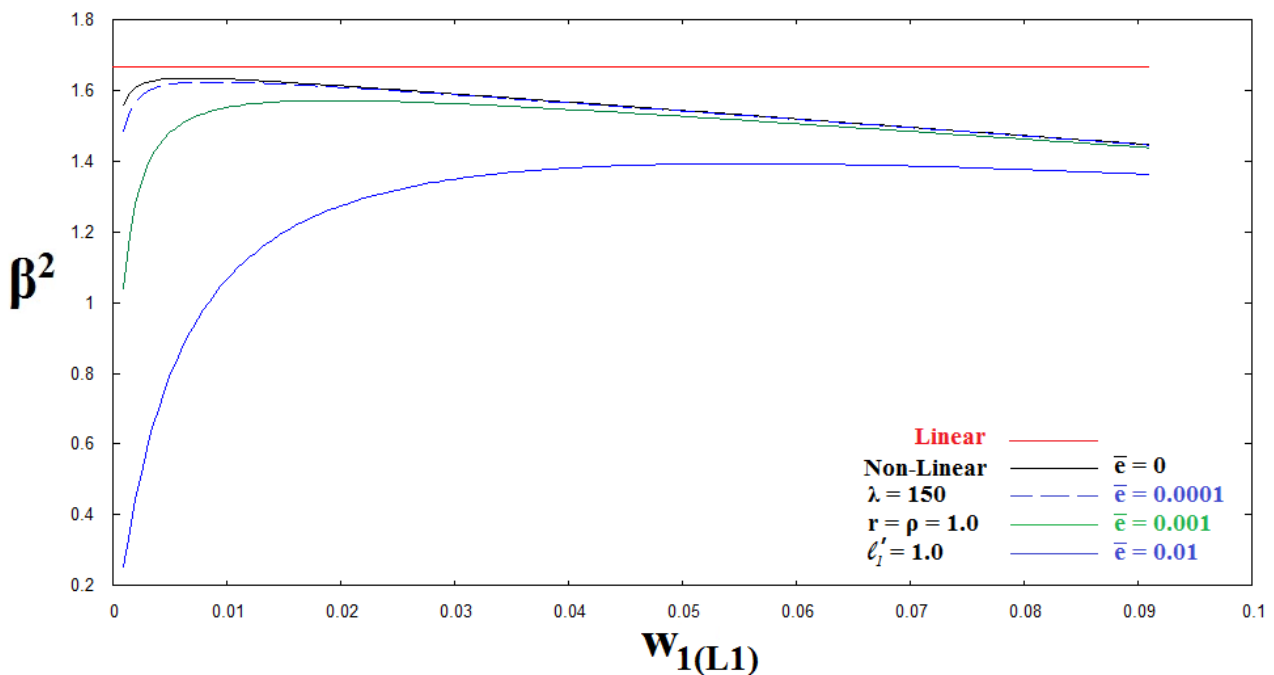
$$l'_1 = 4, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 150 - 100 - 40$$



Αν συγκρίνουμε τα δύο προηγούμενα σχήματα παρατηρούμε ότι αυξάνοντας το  $r$  ή το  $\rho$  από 0,5 σε 1,0 μειώνεται το κρίσιμο φορτίο του πλαισίου, συμπέρασμα στο οποίο είχαμε καταλήξει και από τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας. Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνουμε το μήκος δοκού ή τη δυσκαμψία της διατομής της, τόσο αυξάνεται η αντοχή του πλαισίου σε λυγισμό.

Για μη μηδενική εκκεντρότητα παίρνουμε συνοπτικά τα παρακάτω διαγράμματα.

$$l'_1 = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 150, e = 0 - 0.00010^{-4} - 0.001 - 0.01$$



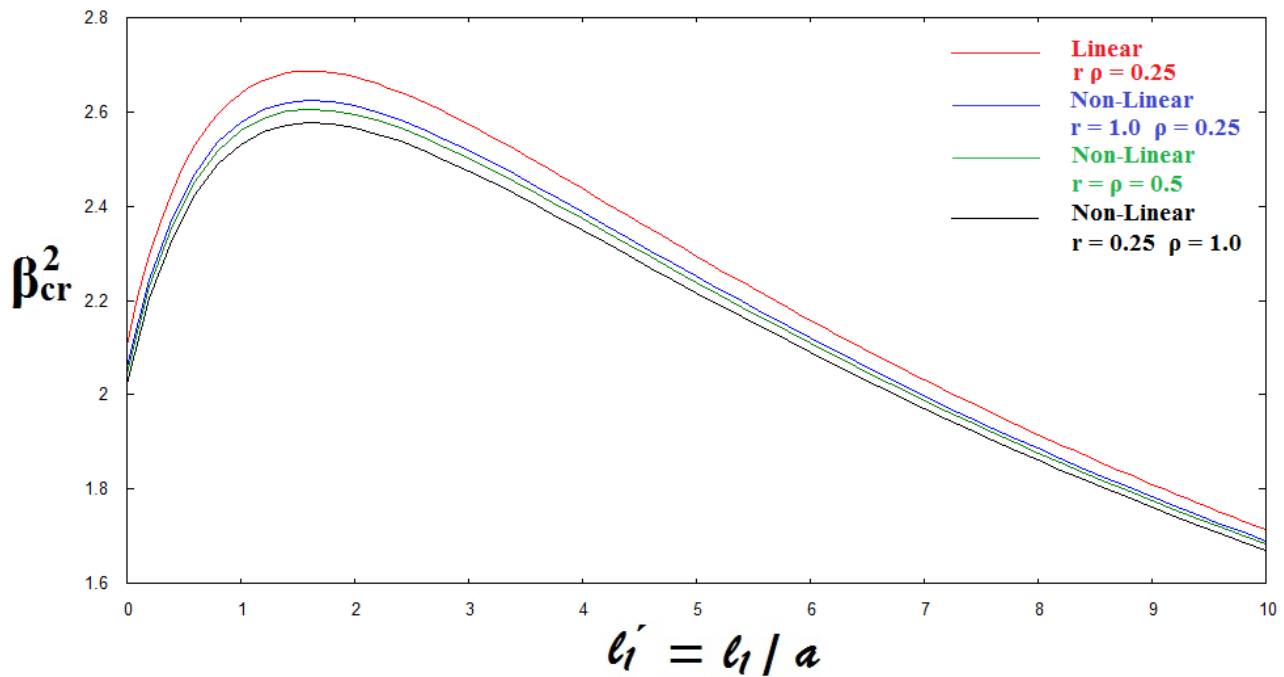
Από το παραπάνω σχήμα διαπιστώνουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η εκκεντρότητα φόρτισης, τόσο μεγαλύτερη η μείωση στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Χαρακτηριστικό ότι παρουσία εκκεντρότητας μόλις 1%, οδηγεί σε μείωση της φέρουσας ικανότητας κατά 15% (από 1,63 σε 1,39).

### 2.4.2 Διαγράμματα ως προς $l_1'$

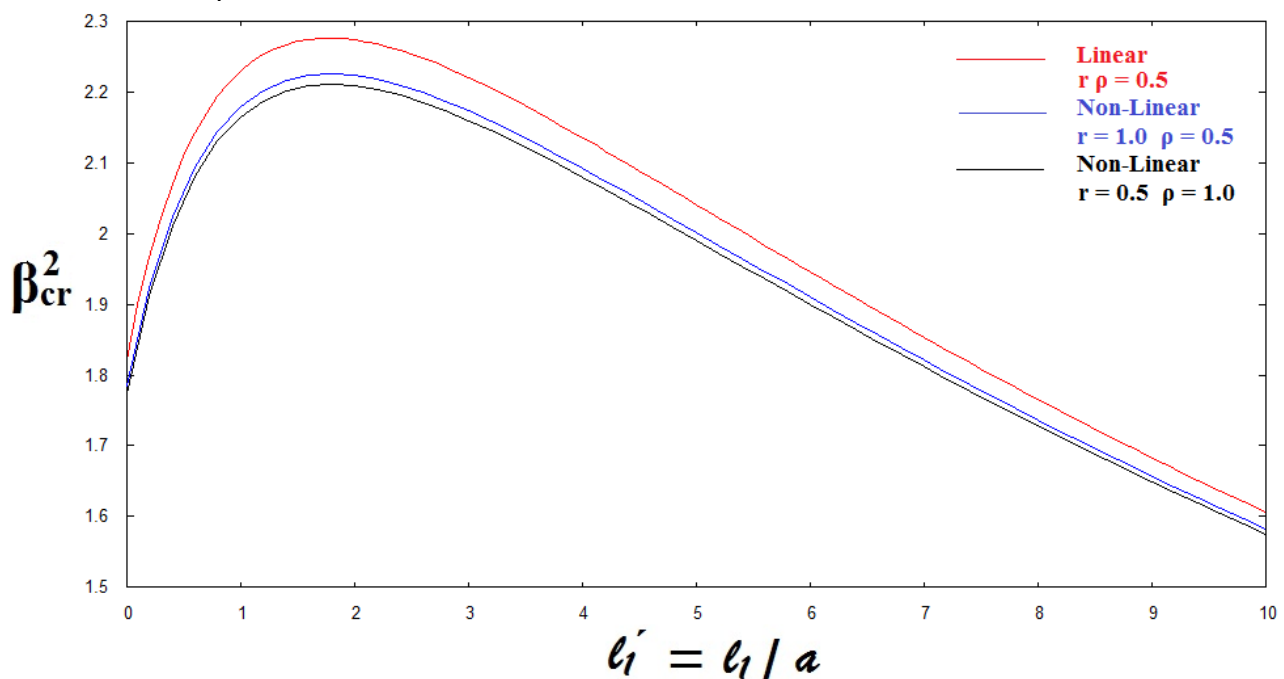
Εν συνεχεία επισυνάπτονται τα διαγράμματα απ'τα οποία παίρνουμε τα μέγιστα κρίσιμα φορτία για κάθε περίπτωση γεωμετρικών λόγων  $l_1' = 0 \sim 10$ .

Αυτά προέκυψαν δημιουργώντας στον κώδικα άλλον ένα εξωτερικό βρόχο κρατώντας κάθε φορά τη μέγιστη τιμή του κρίσιμου φορτίου  $\beta_{cr}^2$  για κάθε τιμή του γεωμετρικού λόγου  $l_1'$ .

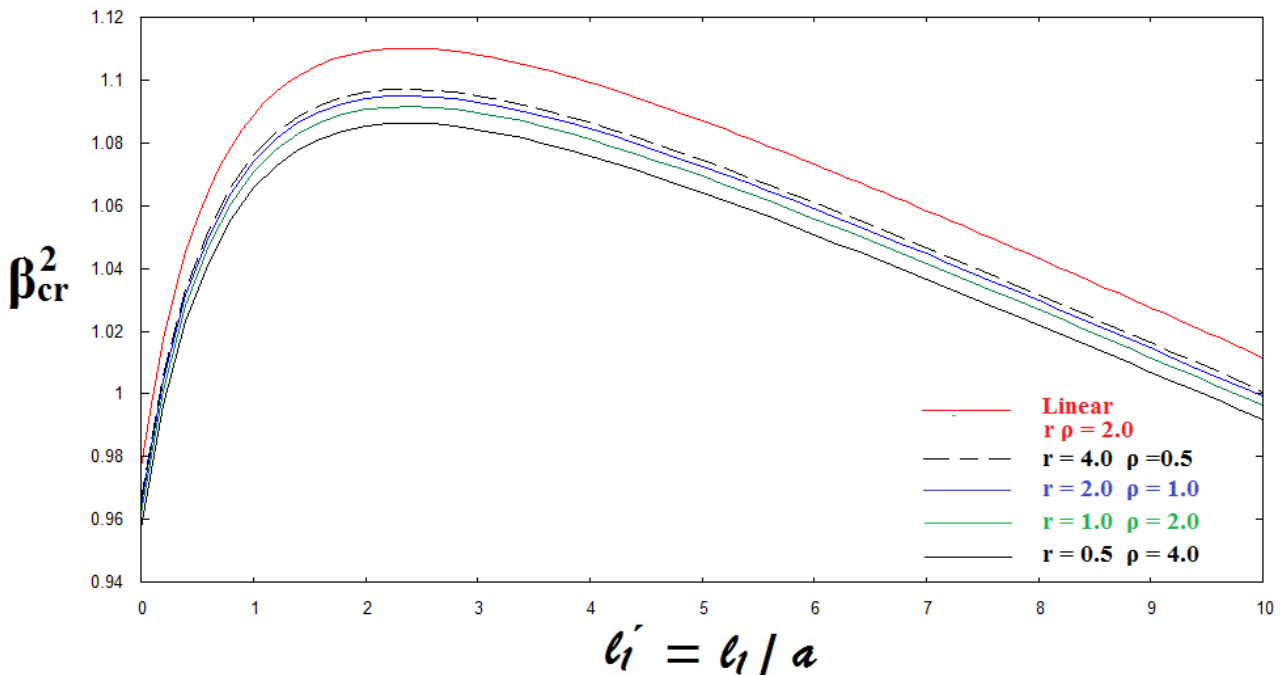
- ✚  $r = 1.0, \rho = 0.25, \lambda = 150$
- +  $r = 0.5, \rho = 0.5, \lambda = 150$
- +  $r = 0.25, \rho = 1.0, \lambda = 150$



- ✚  $r = 1.0, \rho = 0.5, \lambda = 150$
- +  $r = 0.5, \rho = 1.0, \lambda = 150$



- ✚  $r = 4.0, \rho = 0.5, \lambda = 150$
- +  $r = 2.0, \rho = 1.0, \lambda = 150$
- +  $r = 1.0, \rho = 2.0, \lambda = 150$
- +  $r = 0.5, \rho = 4.0, \lambda = 150$



Από τα παραπάνω τρία διαγράμματα εύκολα παρατηρείται ότι η επιρροή του γεωμετρικού μεγέθους  $r = \frac{l_2}{l_1}$ , είναι μεγαλύτερη από ότι του αντίστοιχου  $\rho = \frac{I_m}{I_2}$ . Εξ άλλου αυτό βεβαιώνεται και από την εξίσωση λυγισμού, συγκεκριμένα στην έκφραση του βέλους κάμψεως του ζυγώματος  $w_2(l_2)$ , στην οποία το  $r$  είναι υψωμένο σε μεγαλύτερη δύναμη έναντι του  $\rho$  (Σχέση 2.29). Στη γραμμική ανάλυση δεν είχαμε τη δυνατότητα να καταλήξουμε σε τέτοιο συμπέρασμα καθώς οι δύο γεωμετρικοί λόγοι παρουσιάζονταν σε ένα γινόμενο υψωμένοι στην ίδια δύναμη (μονάδα) (Σχέση 1.12).

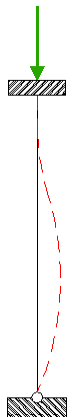
Αναφορικά με τις συγκρίσεις που προηγήθηκαν ως προς το μέγεθος  $\rho$  θα πρέπει να επισημάνουμε τα εξής:

Έχουμε διατυπώσει το συμπέρασμα ότι όσο μεγαλύτερη η τιμή του  $\rho$ , τόσο μικρότερο το φορτίο  $\beta^2$ . Αυτό σημαίνει ότι όσο πιο δύσκαμπτη είναι η διατομή της δοκού τόσο αποδοτικότερο θα είναι το πλαίσιο σε ευστάθεια. Μάλιστα, αν εισάγουμε απειρία δυσκαμψίας του ζυγώματος, τότε το υποστύλωμα μπορεί να θεωρηθεί ότι πακτώνεται στον κόμβο Β (βλέπε Σχήμα).

Αντίθετα, όσο μεγαλύτερη η ροπή αδρανείας στο μέσον του στύλου, τόσο μικρότερο το αδιάστατο φορτίο  $\beta^2$ . Σ' αυτό το σημείο, όμως, δεν πρέπει να συγχέουμε το φορτίο  $P$ , το οποίο δεν ακολουθεί την ίδια σύγκριση καθώς πολλαπλασιάζεται με το  $I_m$  σύμφωνα με τον τύπο:

$$P = \frac{\beta^2 \cdot E \cdot I_m}{l_1^2}.$$

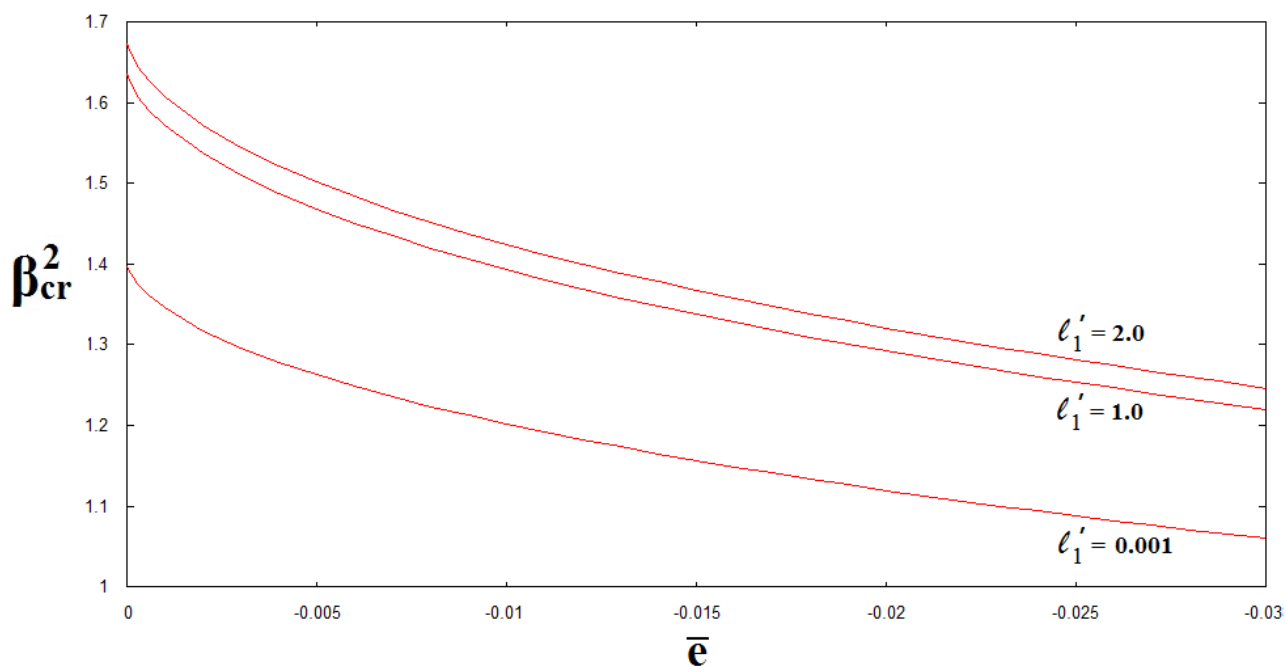
Τελικώς, άρα, θα προκύπτει επίσης μεγαλύτερο  $P_{cr}$  για μεγαλύτερη μέση ροπή αδρανείας,  $I_m$ . Τα παραπάνω ισχύουν ανεξαρτήτως τιμής ανηγμένων μηκών  $l_1'$  καθώς και ανηγμένων εκκεντροτήτων  $\bar{e}$ , όπως θα δούμε στη συνέχεια.



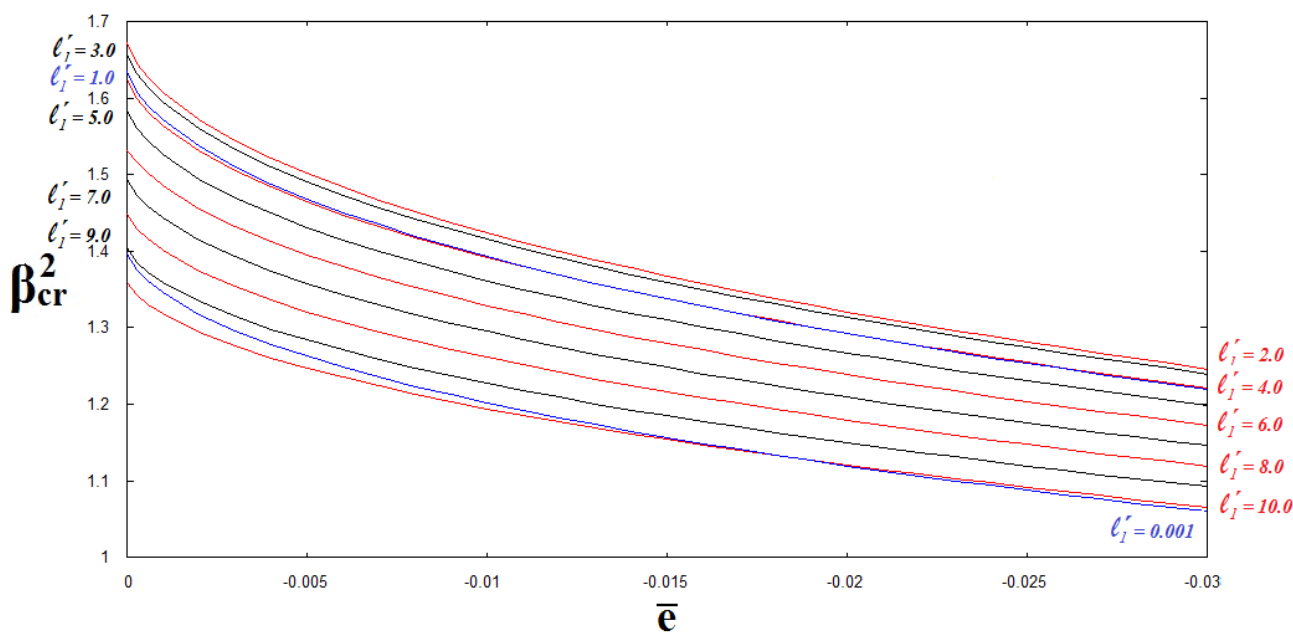
### 2.4.3 Διαγράμματα ως προς την Εκκεντρότητα

Για την εξαγωγή των διαγραμμάτων με οριζόντια άξονα τις τιμές εκκεντροτήτων δημιουργήσαμε στον αρχικό κώδικα άλλον ένα εξωτερικό βρόχο στον οποίο δίνουμε πολλές τιμές εκκεντροτήτων (με βήμα ανηγμένης εκκεντρότητας 0.005) κρατώντας σταθερή την τιμή του γεωμετρικού λόγου  $l_1'$ .

$l_1' = 0.001-1-2, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 150$



$l_1' = 0.001 \sim 10, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 150$

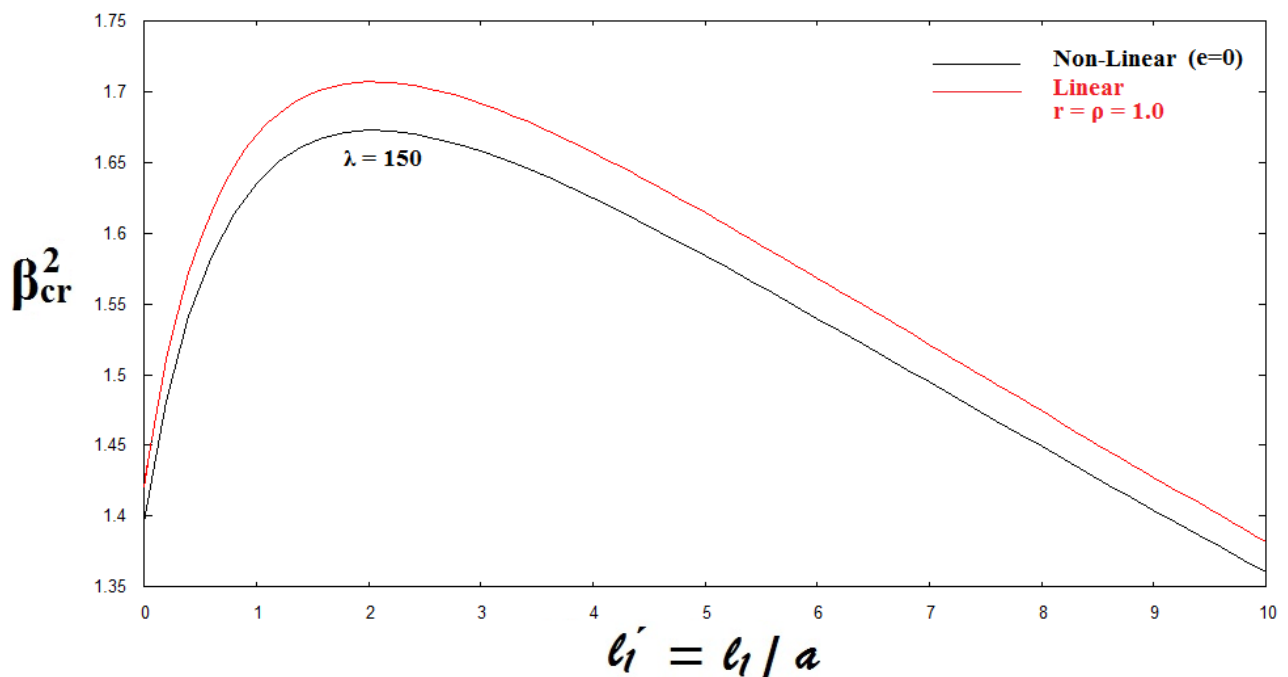


Από το παραπάνω διάγραμμα επιβεβαιώνουμε τις τιμές για μηδενική εκκεντρότητα που προέκυψαν και από τις προηγούμενες αναλύσεις:

$l_1'$	$\beta_{cr}^2$
0.001	1.39580782848000
1.0	1.63549139592960
2.0	1.67282128256000
3.0	1.65801576693760
4.0	1.62490737955840
5.0	1.58410315130880
6.0	1.53985088648960
7.0	1.49464255037440
8.0	1.44901079101440
9.0	1.40400980213760
10.0	1.36006816907520

*Πίνακας 2.1*

Παρατηρείται δηλαδή η αυξομείωση που υπάρχει και στο παρακάτω διάγραμμα καθώς αυξάνει η τιμή του  $l_1'$ .





#### 2.4.4 Διερεύνηση της Επιρροής Ατελειών

Όπως έχουμε αναφέρει στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, οι μεταθετοί φορείς σχήματος  $\Gamma$  παρουσιάζουν ευσταθή ή ασταθή μεταλυσισμική συμπεριφορά. Αυτό εξαρτάται από τη φορά των αρχικών ατελειών, των οποίων η επιρροή επί της φέρουσας ικανότητας ενός θλιβόμενου συστήματος, που συνδέεται με ασταθή μεταλυσισμικό δρόμο ισορροπίας διερχόμενου δια σημείου διακλαδώσεως, όπως είδαμε, μπορεί να είναι αρκετά σημαντική. Επιπλέον, οι επικίνδυνες περιπτώσεις συστημάτων είναι εκείνες που συνδέονται με «ακαριαίο λυγισμό». Αυτή η μορφή λυγισμού συνδέεται είτε με οριακό σημείο είτε με συμμετρικό ασταθές (ή ασύμμετρο) σημείο διακλαδώσεως. Στην περίπτωση όπου το σύστημα χάνει την ευστάθειά του μέσω ασταθούς σημείου διακλαδώσεως (και μάλιστα στην περίπτωση ασύμμετρου σημείου διακλαδώσεως) είναι περισσότερο έντονη η επιρροή των αρχικών ατελειών στη μείωση της φέρουσας ικανότητας.






Στο παρόν υποκεφάλαιο θα παρατηρήσουμε, μέσα από τη διερεύνηση των ήδη εξαγόμενων αναλυτικών σχέσεων λυγισμού, με ποιόν τρόπο η φορά των αρχικών ατελειών επηρεάζει τη συμπεριφορά του φορέα. Τα συμπεράσματα που θα ακολουθήσουν διευκρινίζονται μέσα από τα αντίστοιχα διαγράμματα, ενώ οι θεωρητικές λύσεις επιβεβαιώνονται από αριθμητικό παράδειγμα με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων. Κλείνοντας, παρατηρούμε σε σχηματική διάταξη τον δευτερεύοντα δρόμο ισορροπίας καθώς και το ασύμμετρο σημείο διακλαδώσεως.

##### 2.4.4.1 Ασύμμετρο Σημείο Διακλάδωσης

Γενικώς τα ατελή συστήματα γίνονται ασταθή μέσω οριακού σημείου. Εντούτοις, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, ατελή πλαίσια παρουσιάζουν αστάθεια μέσω σημείου διακλάδωσης. Το πλαίσιο το οποίο διερευνάται στην παρούσα διπλωματική, λόγω της αξονικής παραμορφωσιμότητας των υποστρωμάτων, μπορεί να χάσει την ευστάθειά του μέσω ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης για μία συγκεκριμένη εκκεντρότητα  $e_{cr}$ , ανεξάρτητα από το εάν η στήριξη στο κατακόρυφο μέλος είναι άρθρωση ή πάκτωση (βλέπε Κουνάδης και λοιποί). Η κρίσιμη εκκεντρότητα είναι το όριο μεταξύ λυγισμού μέσω οριακού σημείου ή σημείου διακλάδωσης. Παρόμοια συμπεράσματα έχουν εξαχθεί από τους Ioannidis et al. (2005) για πλαίσια στα οποία η ατέλεια δεν οφείλεται σε εκκεντρότητα φορτίου αλλά σε αποκλίσεις των πλαισίων από τη θεωρητική τους γεωμετρία, για παράδειγμα λόγω αρχικής καμπυλότητας. Τα παραπάνω διαπιστώνονται σε εργασίες των ίδιων μελετητών και για συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας (διμελές ορθογωνικό πλαίσιο στηριζόμενο σε ακλόνητες αρθρώσεις). Τέλος, από άλλους μελετητές έχει ληφθεί υπόψη, μέσω αριθμητικών αναλύσεων, και η ανελαστική, γεωμετρικά μη γραμμική συμπεριφορά με την παρουσία αρχικών ατελειών (Μαγείρου 2011).

Στην περίπτωσή μας η προσέγγιση της κρίσιμης εκκεντρότητας έγινε μέσω επαναληπτικής διαδικασίας του δρόμου ισορροπίας για διάφορες τιμές της έκκεντρης φόρτισης. Οι παράμετροι που επιλέχθηκαν αντιστοιχούν σε έναν περισσότερο ρεαλιστικό φορέα - από τις περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί έως τώρα - ώστε να προχωρήσουμε έπειτα (§2.4.4.2) στην αντίστοιχη σύγκριση με το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων ADINA.

##### Γεωμετρικά και Αδρανειακά Χαρακτηριστικά

-   $l_1' = 1$
-   $r = 1$
-   $\rho = 3.375$
-   $\lambda_1 = 54.41$
-   $\bar{e} \rightarrow$  μεταβαλλόμενη.

Από τις αντίστοιχες αναλύσεις προκύπτουν τα παρακάτω κρίσιμα φορτία:

$\bar{e}$	$\beta_{cr}^2$
-0,01	0,58458
0,0	0,70317
0,00010	0,70813
0,00020	0,71455
0,00025	0,71924
0,00028	0,7234
0,00029	0,72549
0,00030	0,72978
<b>0,00030016</b>	<b>0,73051</b>

Μετά την τιμή της εκκεντρότητας  $\bar{e} = +0.00030016$  παρατηρούμε ότι οι τιμές του φορτίου  $\beta^2$  που προκύπτουν δεν αντιστοιχούν σε δρόμο ισορροπίας της γνωστής μέχρι τώρα μορφής. Η τιμή  $e$  εκφράζει την κρίσιμη εκκεντρότητα  $e_{cr}$  η μείωση της οποίας συνεπάγεται μείωση της τιμής του οριακού φορτίου λυγισμού  $\beta_s^2$ . Η τιμή  $e = e_{cr}$  είναι η μεγαλύτερη δυνατή για την οποία το πλαίσιο χάνει την ελαστική ευστάθειά του. Πράγματι, για  $e > e_{cr}$  το πλαίσιο εμφανίζει έναν συνεχώς αυξανόμενο δρόμο ισορροπίας, ο οποίος για κάποια τιμή του φορτίου οδηγεί στη διαρροή και για περαιτέρω αύξηση σε απώλεια της ευστάθειάς του μέσω πλαστικού λυγισμού. Επιπλέον, να σημειωθεί ότι για να προσεγγίσουμε με μεγάλη ακρίβεια ( $10^{-8}$ ) την κρίσιμη εκκεντρότητα χρειάστηκε να εξάγουμε τις λύσεις των δρόμων ισορροπίας ξεκινώντας από την (ανηγμένη) τιμή του βέλους κάμψεως στην κεφαλή του υποστυλώματος

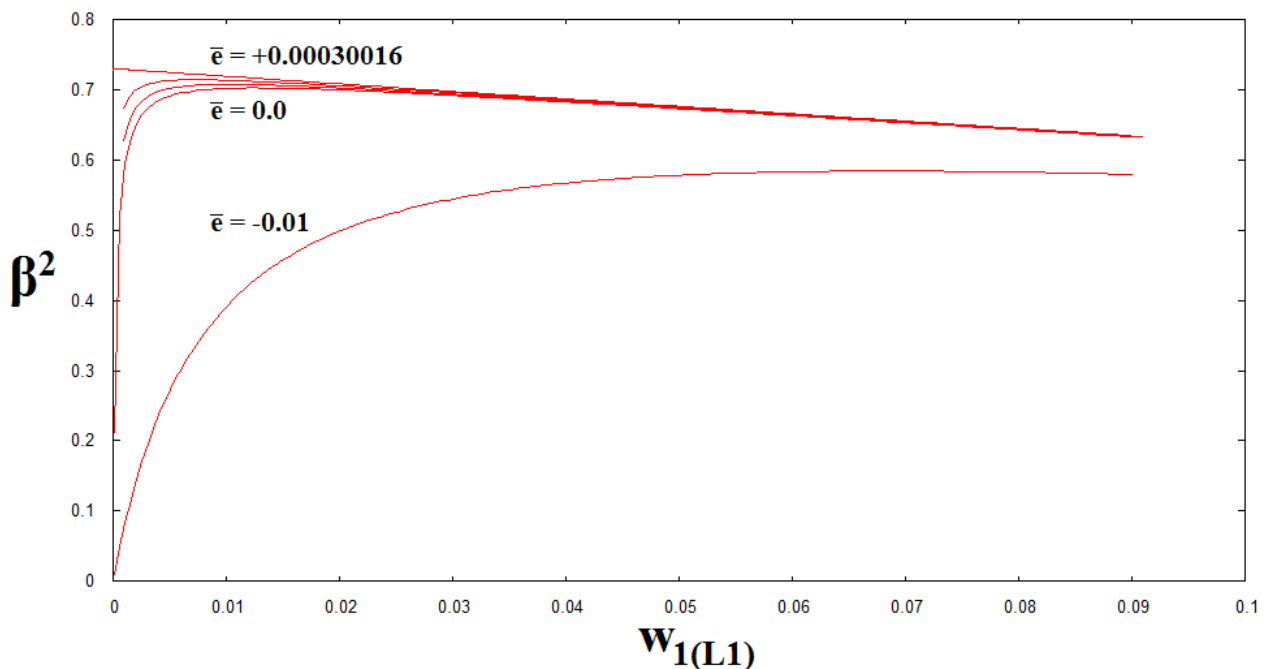
$$w_1(L_1) = 10^{-6}.$$

Ακόμα, εκτελέστηκε βήμα βέλους  $\Delta w = 3,125 \cdot 10^{-5}$

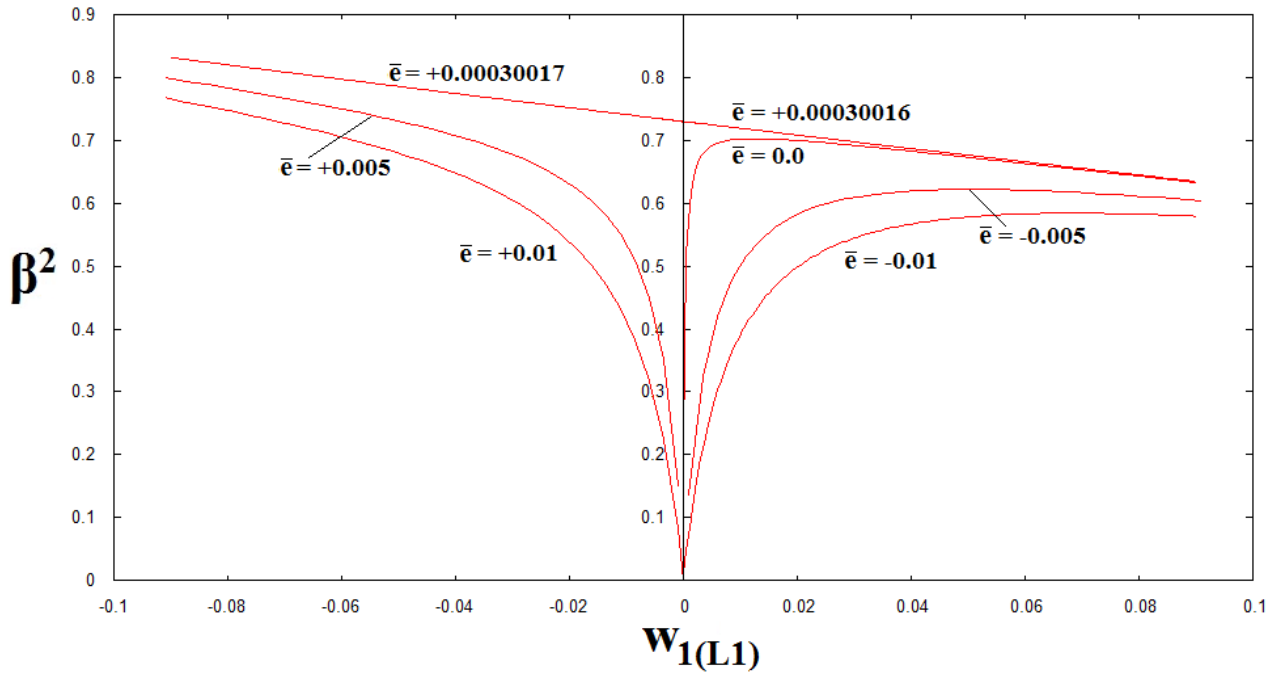
και βήμα φορτίου  $\Delta(\beta^2) = 10^{-5}$ .

Τα παραπάνω διαπιστώνονται ευκολότερα στα διαγράμματα που ακολουθούν.

✚  $\bar{e} = -0.01 ; 0.0 ; +0.0001 ; +0.0002 ; +0.00030016$



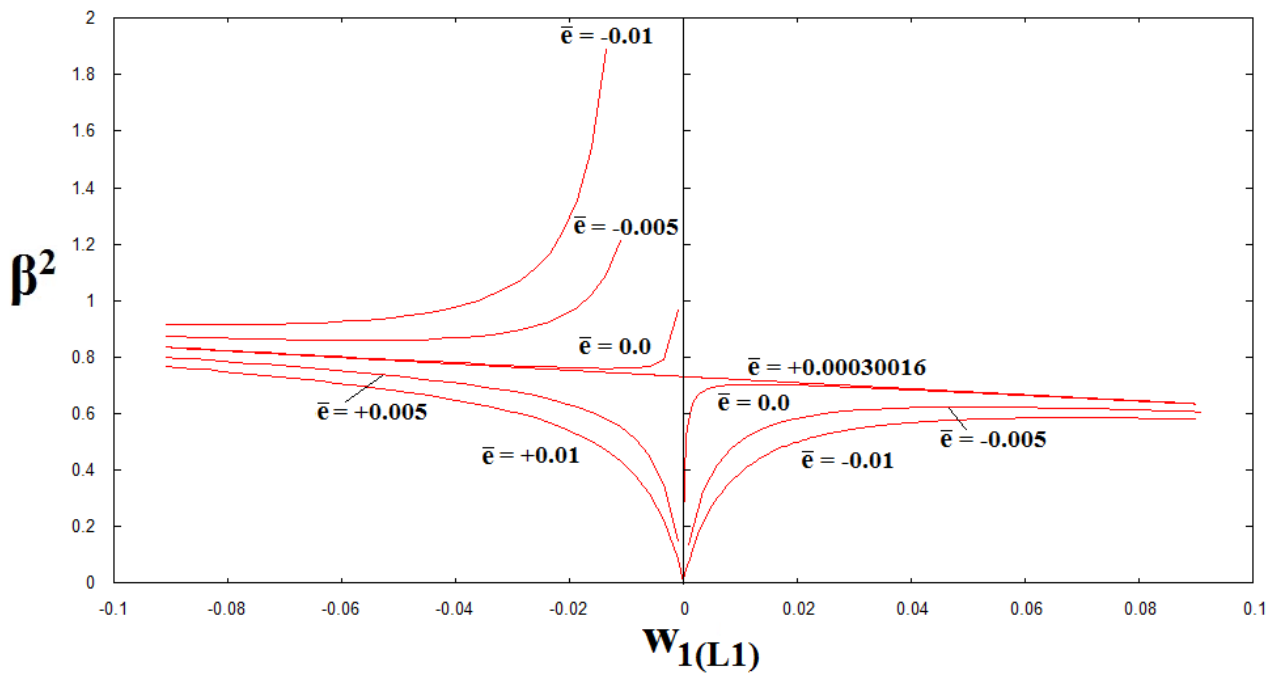
$\bar{e} = -0.01 ; -0.005 ; 0.0 ; +0.00030016$ , με  $w(1) > 0$   
 $\bar{e} = +0.00030017 ; +0.005 ; +0.01$ , με  $w(1) < 0$



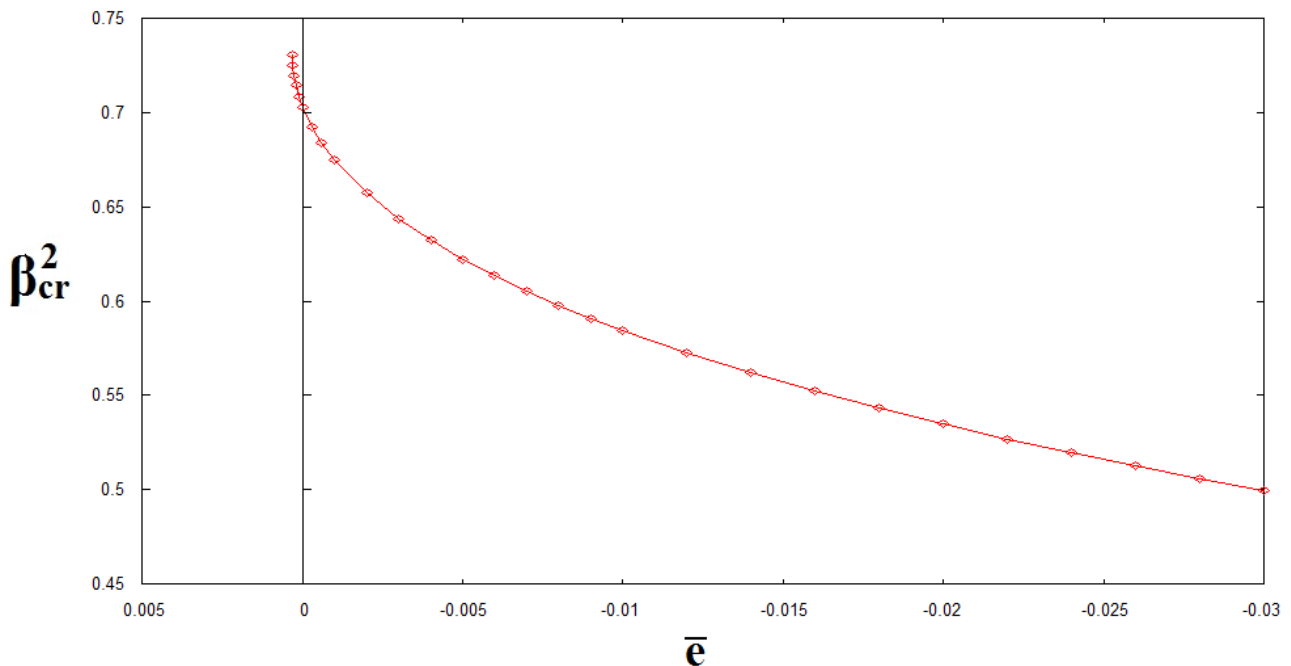
Επίσης μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο δρόμος ισορροπίας για τιμές εκκεντροτήτων μικρότερων της κρίσιμης τιμής και για αρνητικές τιμές του βέλους κάμψεως.

Έτσι, σχηματίζεται το ακόλουθο διάγραμμα στο οποίο συνοψίζονται κάθε πιθανός δρόμος ισορροπίας.

$\bar{e} = -0.01 ; -0.005 ; 0.0 ; +0.00030016$ , με  $w(1) > 0$   
 $\bar{e} = -0.01 ; -0.005 ; 0.0 ; +0.00030017 ; +0.005 ; +0.01$ , με  $w(1) < 0$



Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να αποτυπώσουμε την καμπύλη ευαισθησίας του φορέα σε γεωμετρική ατέλεια λόγω έκκεντρης φόρτισης,  $\beta_s^2 = \beta_s^2(e)$ . Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί περιλαμβάνονται όλα τα κρίσιμα φορτία λυγισμού για εκκεντρότητες  $\bar{e} = -0.03 \sim +0.00030016$ .



Εδώ φαίνεται με τον πλέον εύκολο τρόπο η αύξηση της φέρουσας συμπεριφοράς του φορέα έως την τιμή του κρίσιμου διακλαδικού φορτίου  $\beta_{cr}^2 = 0.730514$ , το οποίο αντιστοιχεί στην κρίσιμη τιμή της εκκεντρότητας  $\bar{e}_{cr} = +0.00030016$ .

Σημαντική παρατήρηση αποτελεί το γεγονός ότι από την αντίστοιχη **γραμμική ανάλυση** του ίδιου φορέα παίρνουμε ακριβώς **το ίδιο κρίσιμο φορτίο!** Εισάγουμε, δηλαδή, τις παραμέτρους  $r \cdot \rho = 1 \cdot 3,375 = 3,375$  και παίρνουμε για την τιμή του  $l_1' = 1$ :  $\beta_{cr}^2 = 0,73051$ .

#### 2.4.4.2 Αριθμητικό Παράδειγμα

Για τους σκοπούς μιας ολοκληρωμένης μελέτης ακολουθείται αριθμητικό παράδειγμα και σύγκριση των αποτελεσμάτων με το λογισμικό ADINA.

Το πλαίσιο μορφής Γ αποτελείται από το υποστύλωμα μεταβλητής διατομής διπλού ταυ διαστάσεων 200x200 (διατομή πόδα) και 400x400 (διατομή κεφαλής) και από τη δοκό σταθερής διατομής διπλού ταυ διαστάσεων 200x200.

Τα χαρακτηριστικά του πλαισίου είναι:

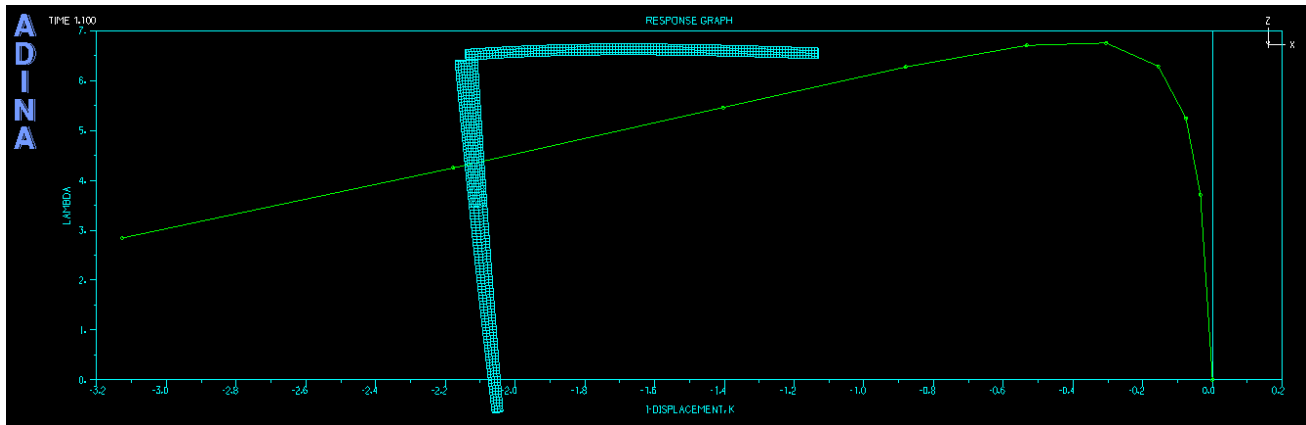
- $l_1 = l_2 = 6,0m \Rightarrow r = 1$
- $l_1' = 1$
- $I_1 = I_2 = 18,606375 \cdot 10^{-5} m^4$
- $\rho = 3,375$
- $F_1(L_1) = 0,0153 m^2$
- $\lambda_1 = 54,41$

Αναλυτικότερα παρουσιάζονται η γεωμετρία των διατομών και του φορέα καθώς και η προσομοίωση του φορέα στο λογισμικό στις παραγράφους 4.1 και 4.3 αντίστοιχα.

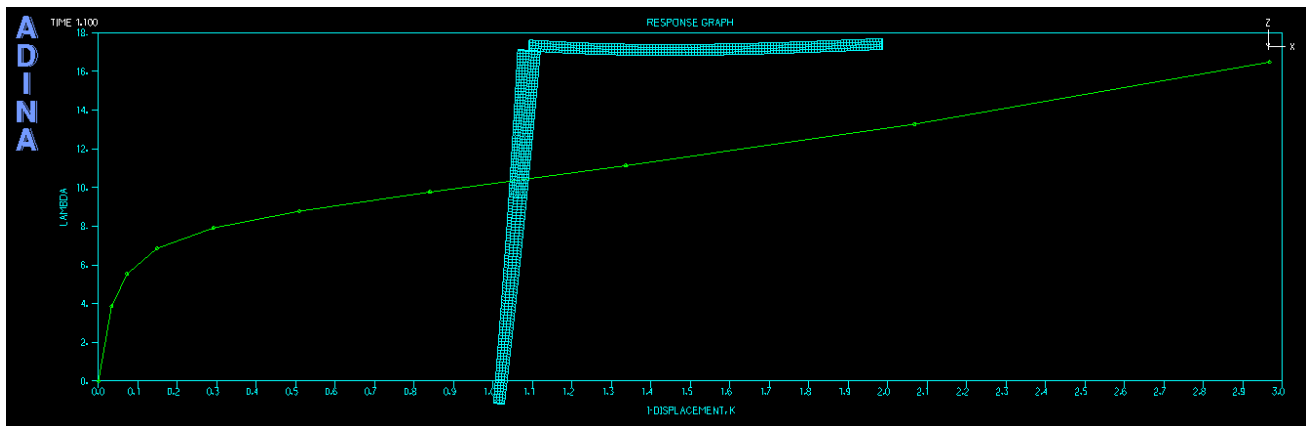
Η εκκεντρότητα της φόρτισης επιλέγεται να γίνει στο πρώτο node που υπάρχει εκατέρωθεν του κέντρου βάρους της διατομής του υποστυλώματος, δηλαδή σε απόσταση 0,05 m. Η ανηγμένη εκκεντρότητα επομένως θα είναι:

$$\bar{e} = \pm 0,05 / 6,0 = \pm 0,008333.$$

Οι δρόμοι ισορροπίας του προγράμματος παρουσιάζονται στις παρακάτω εικόνες, η πρώτη αναφέρεται στον ασταθή ( $\bar{e} = -0,008333$ ) και η δεύτερη στον ευσταθή δρόμο ισορροπίας ( $\bar{e} = +0,008333$ ).

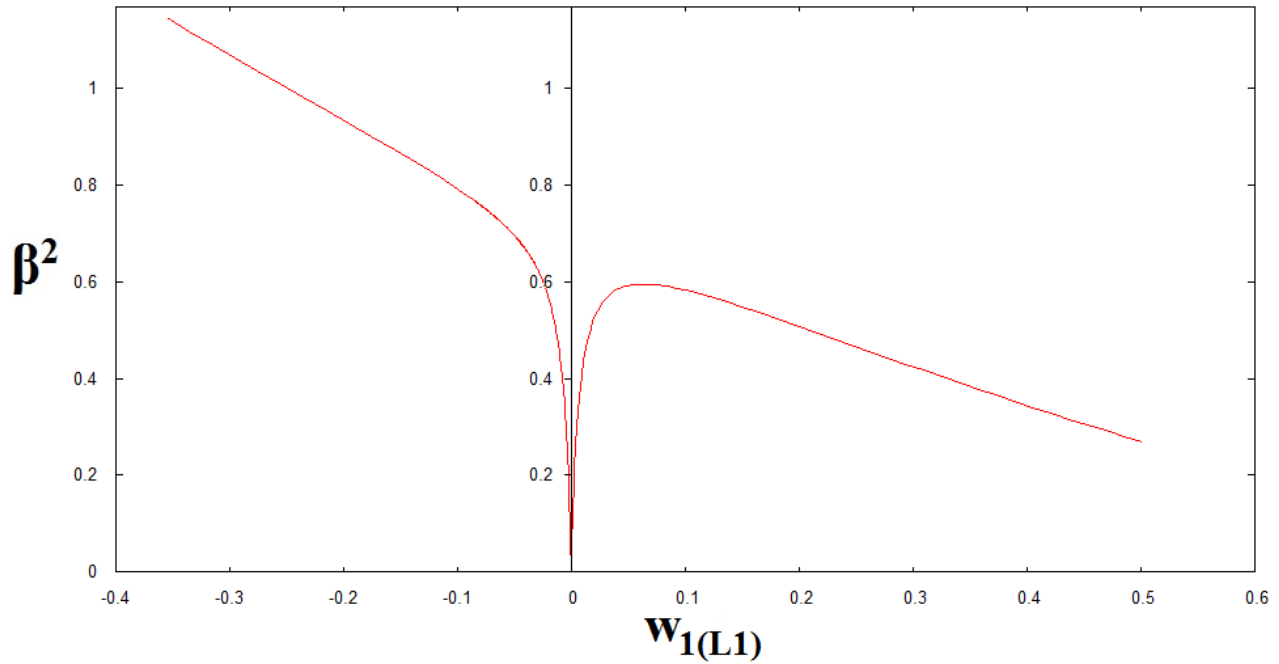


*Εικόνα 2.1 Ασταθής δρόμος ισορροπίας (αρνητική εκκεντρότητα)*

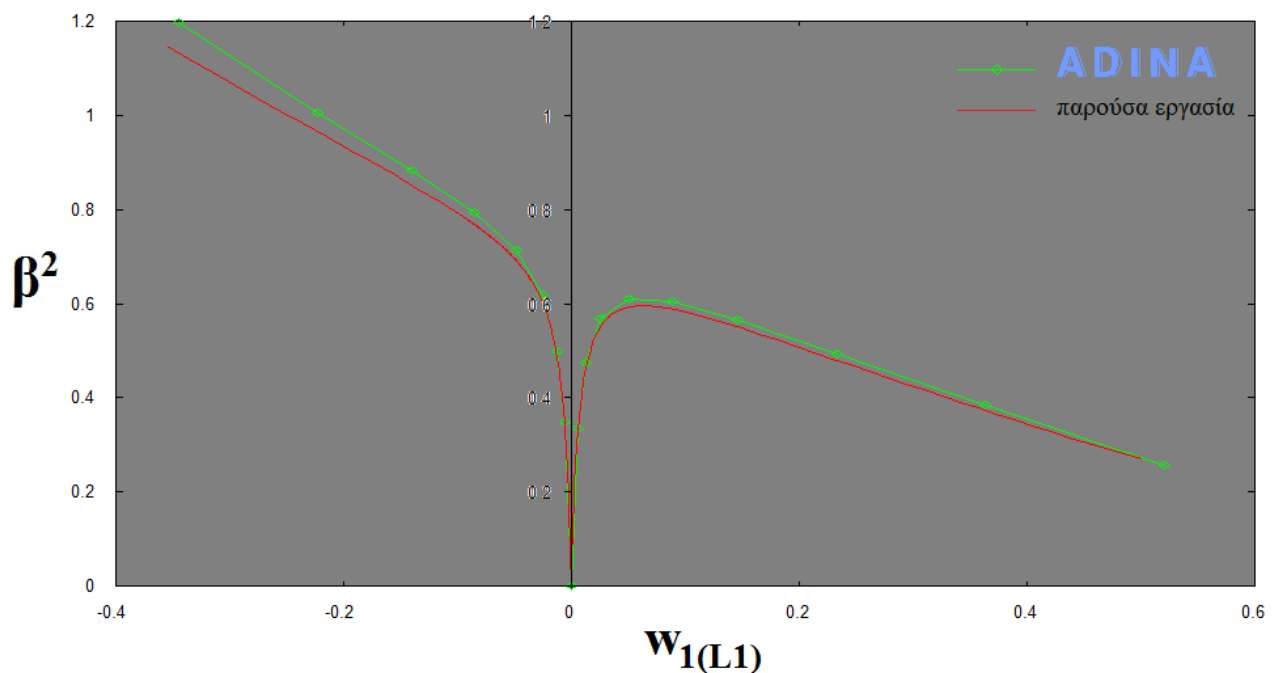


*Εικόνα 2.2 Ευσταθής δρόμος ισορροπίας (θετική εκκεντρότητα)*

Ακολουθούν τα θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί από τις αναλυτικές σχέσεις που έχουν προκύψει μέχρι τώρα. Στο παραπάνω σχήμα επισυνάπτονται και τα δύο διαγράμματα, ο αριστερός κλάδος αναφέρεται στη θετική και ο δεξιός στην αρνητική εκκεντρότητα.



Προχωρούμε στην αδιαστατοποίηση των διαγραμμάτων που πήραμε από το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων και στην σύγκριση με τα αντίστοιχα θεωρητικά.



Παρατηρούμε μικρή απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα το ανηγμένο κρίσιμο φορτίο που προκύπτει από τον (ασταθή) δρόμο ισορροπίας του λογισμικού είναι:

$$P_{cr} = 675,567kN \Rightarrow \beta_{cr}^2 = 0,610416^*$$

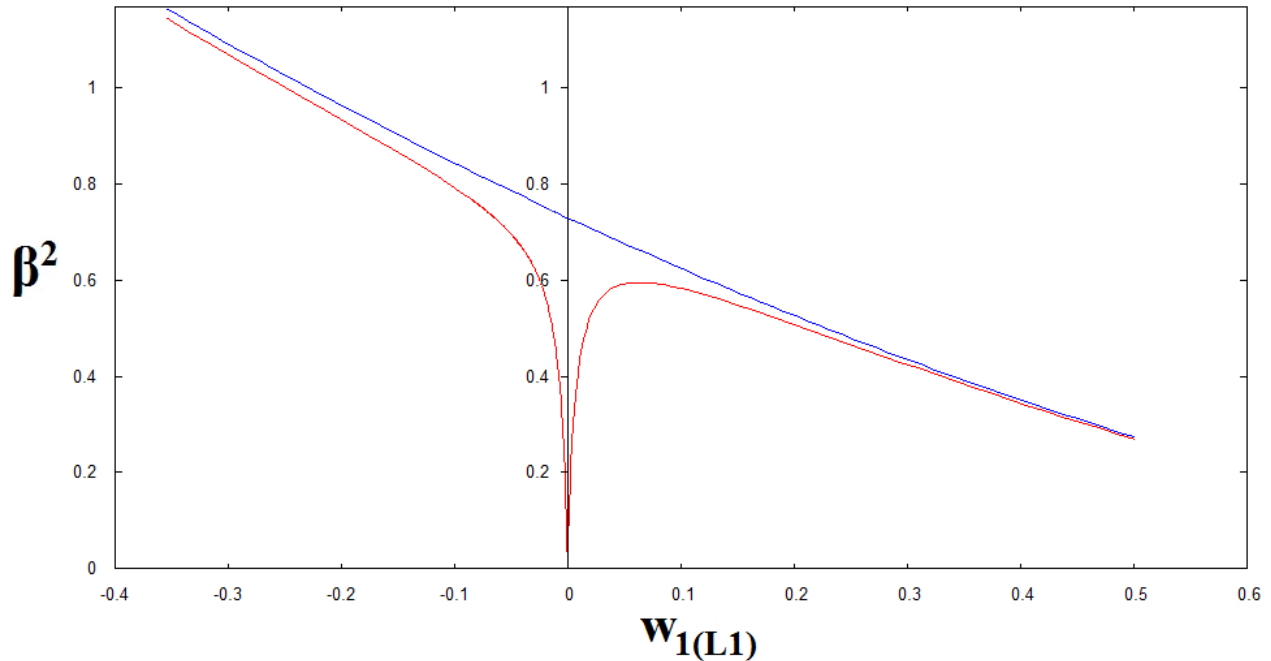
Ενώ το θεωρητικό αποτέλεσμα μάς δίνει:

$$\beta_{cr}^2 = 0,59562 \text{ (απόκλιση από την πραγματική συμπεριφορά 2,4\%).}$$

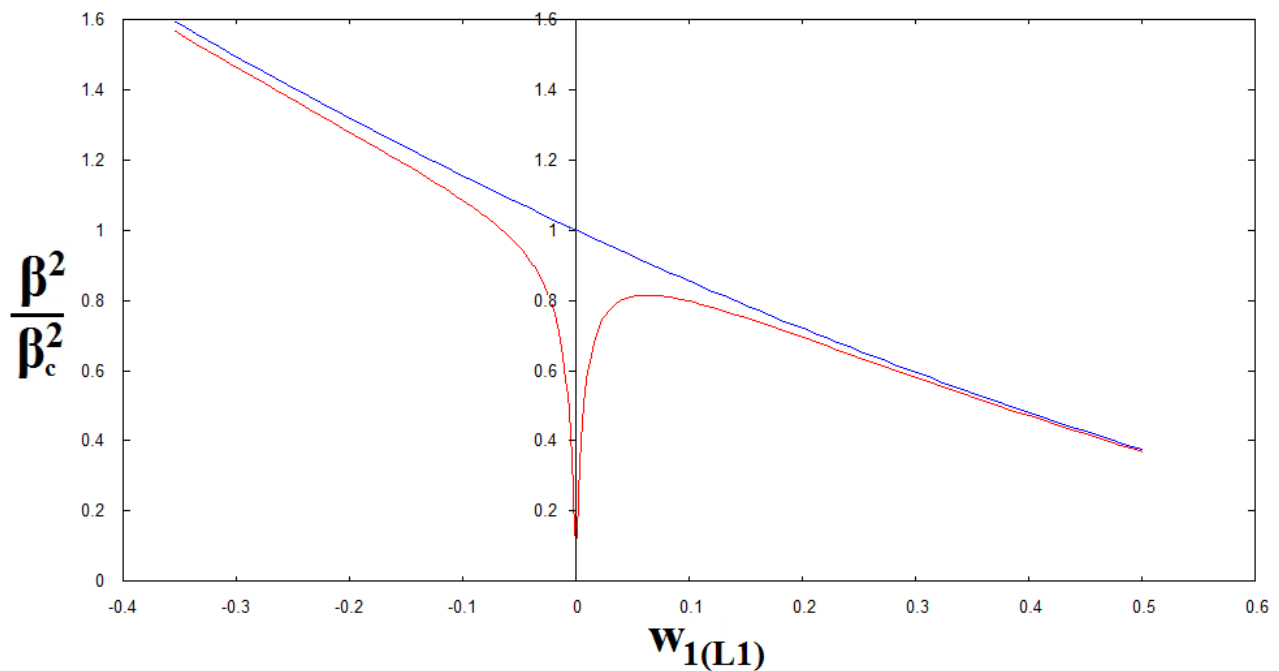
\*Η αδιαστατοποίηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού περιγράφεται περισσότερο αναλυτικά στην παράγραφο 4.3.

Τέλος, ακολουθούν τα διαγράμματα των θεωρητικών αποτελεσμάτων με τους δύο δρόμους ισορροπίας (για θετική και αρνητική ατέλεια) καθώς και τον δευτερεύοντα δρόμο ισορροπίας ο οποίος έχει εξαχθεί από την κρίσιμη εκκεντρότητα που βρέθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Παρατηρούμε πώς οι δρόμοι ισορροπίας προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τον αντίστοιχο δευτερεύοντα δρόμο διακλαδικής ισορροπίας.



Αν προχωρήσουμε στην αδιαστατοποίηση του άξονα των φορτίων ως προς το κρίσιμο διακλαδικό φορτίο  $\beta_{cr}^2 = 0,73046$  θα πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα. Παρατηρούμε ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας τέμνει τον κατακόρυφο άξονα των φορτίων στην τιμή 1 (σημείο διακλάδωσης).



### 2.4.4.3 Διακλαδική Ανάλυση

Για τον φορέα του σχήματος 2.2, σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας, οι διαφορικές εξισώσεις μορφώνονται όπως στην παράγραφο 1.4.1 με τη διαφορά ότι στη συνθήκη (VII) υπεισέρχεται και η ροπή λόγω της εκκεντρότητας.

Γεωμετρικές Συνθήκες (Κινηματικές):

- Συνοριακές
  - I.  $w_1(a) = 0$
  - II.  $w_2(0) = 0$
- Συνέχειας
  - III.  $w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$
  - IV.  $w_2(l_2) = 0$

Φυσικές Συνθήκες:

- Συνοριακές
  - V.  $-E \cdot I_1 \cdot w_1''(\alpha) = 0$
  - VI.  $-E \cdot I_2 \cdot w_2''(0) = 0$

✚ Ισορροπία ροπών στον κόμβο

$$\text{VII. } E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0$$

✚ Ισορροπία οριζοντίων δυνάμεων

$$-E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1'''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) - P \cdot w_1'(L_1) = 0$$

Με την επίλυση του συστήματος λαμβάνουμε τις εκφράσεις των βελών κάμψεως. Το βέλος κάμψεως του υποστυλώματος θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$w_1(x_1) = A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \text{Bessel}J\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \text{Bessel}Y\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) \quad (2.37)$$

, όπου

$$\frac{A_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 \cdot r \cdot \rho \cdot \bar{e} / 3}{\left[\frac{\beta^2 \cdot r \cdot \rho}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right) - 1\right] \cdot \left(J_1 - Y_1 \cdot \frac{J_a}{Y_a}\right) + \frac{\beta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'}\right)^{3/2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}} \cdot \left(J_0 - Y_0 \cdot \frac{J_a}{Y_a}\right)} \quad (2.38)$$

και

$$B_1 = -A_1 \cdot \frac{J_a}{Y_a} \quad (2.39)$$



Ακόμα το αδιαστατοποιημένο βέλος κάμψεως στην κεφαλή του στύλου θα είναι:

$$w_1(1+1/l_1') = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right) \cdot \left(J_1 - \frac{J_a}{Y_a} \cdot Y_1\right) \quad (2.40)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι για απειρία του βέλους κάμψεως λαμβάνουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Το βέλος κάμψεως όπως παρατηρούμε στη σχέση (2.40) είναι ανάλογο του όρου  $A_1$ . Έτσι, απειρίζοντας τον όρο, ή μηδενίζοντας τον παρονομαστή του κλάσματος στη σχέση (2.38) εξάγουμε τη γνωστή εξίσωση λυγισμού (σχ. 1.12):

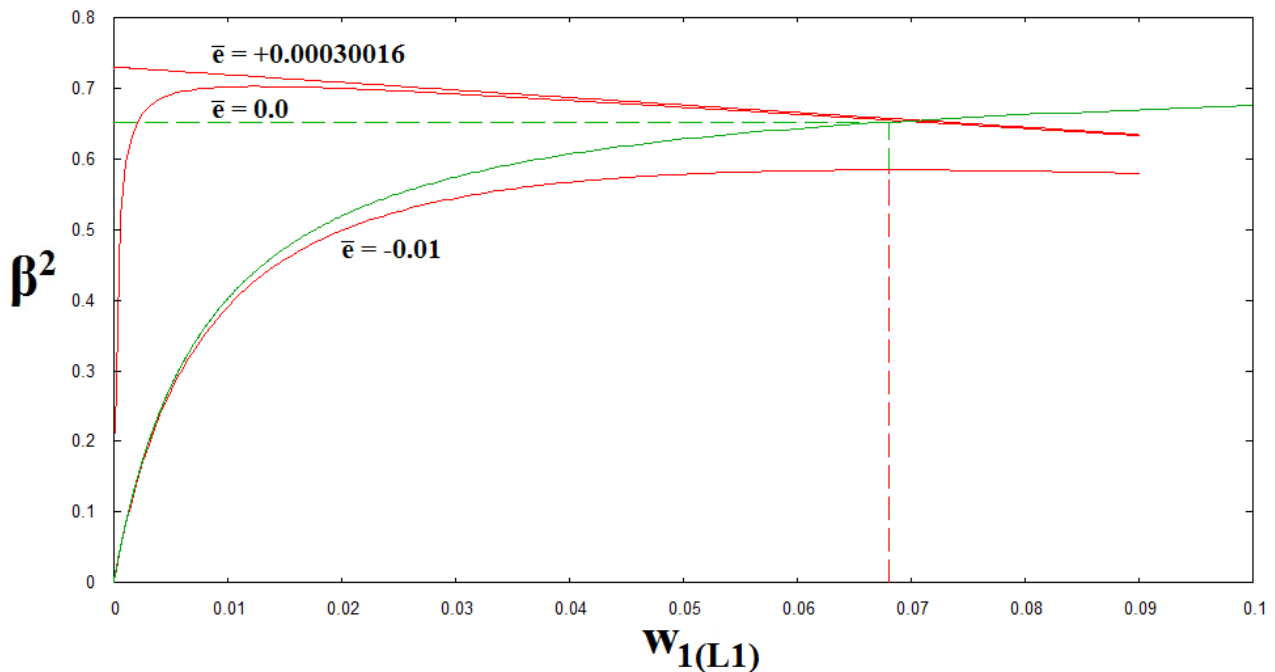
$$\frac{J_0 \cdot Y_a - J_a \cdot Y_0}{J_1 \cdot Y_a - J_a \cdot Y_1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}}{\beta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'}\right)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{\beta^2 \cdot r \cdot \rho}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right) \right]$$

Αφού πήραμε την έκφραση του βέλους κάμψεως προχωρούμε στην εξαγωγή των διαγραμμάτων για περιπτώσεις φορτίσεων με έκκεντρη φόρτιση.

Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τον φορέα που μελετάται στην παράγραφο 2.4.4.1 με χαρακτηριστικά  $r \cdot \rho = 3,375$  και για εκκεντρότητα φόρτισης  $\bar{e} = \pm 0,01$ .

Στο παρακάτω διάγραμμα επισυνάπτονται οι δρόμοι ισορροπίας από τη μη γραμμική ανάλυση (κόκκινο) καθώς και η καμπύλη που προέκυψε από τη γραμμική ανάλυση που έγινε παραπάνω (πράσινο).

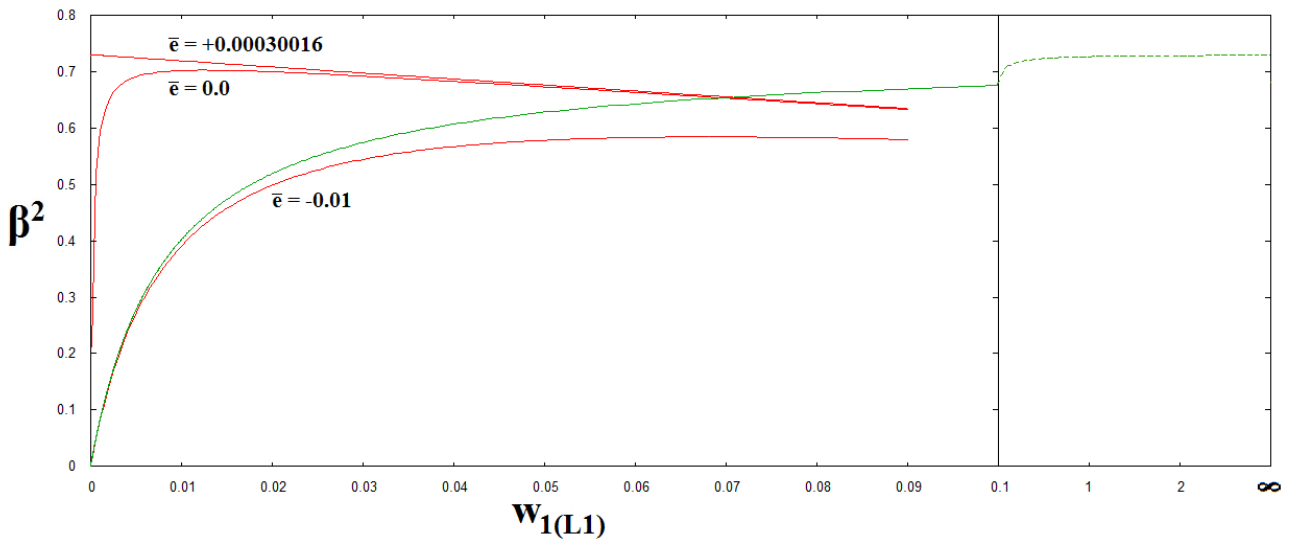
✚  $r = 1,0$  ;  $\rho = 3,375$  ;  $\bar{e} = -0,01$



Φυσικά, αν προχωρήσουμε μέχρι την απειρία του βέλους κάμψεως (βλέπε επόμενο διάγραμμα) το φορτίο που λαμβάνουμε δεν είναι άλλο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού:

$\beta_{cr}^2 = 0,730512$  ( $w = 10485$ ). Η τιμή αυτή σημειώνεται για οποιαδήποτε εκκεντρότητα.

Να σημειωθεί ότι για θετική τιμή εκκεντρότητας (θετική ατέλεια) ο δρόμος ισορροπίας προκύπτει ίδιος με τον επισυναπτόμενο αλλά με αντίθετο βέλος κάμψεως.



Σ' αυτό το σημείο μπορούμε να συγκρίνουμε το φορτίο που εξάγεται από τη γραμμική ανάλυση με το αντίστοιχο της μη γραμμικής. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της μη γραμμικής ανάλυσης για εκκεντρότητα  $-0,01$  παρατηρείται όταν το βέλος κάμψεως παίρνει τιμή  $w = 0,0681$ . Για την ίδια τιμή βέλους από τη γραμμική ανάλυση παίρνουμε:

$$\beta^2 = 0,65252.$$

Το τελευταίο αποκλίνει από το (πραγματικό) μη γραμμικό κρίσιμο φορτίο ( $\beta_{cr}^2 = 0,5845765$ ) κατά περίπου 12%.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο για διάφορες εκκεντρότητες λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα.

$\bar{e}$	$\beta_{cr}^2$ non-linear	w	$\beta^2$ linear	απόκλιση %
0	0,70317	0,0121	0,73051	3,9
-0,005	0,62240	0,0485	0,67404	8,3
-0,01	0,58458	0,0681	0,65252	11,6
-0,05	0,44884	0,1360	0,56250	25,3

*Πίνακας 2.1*

Παρατηρούμε πώς αυξάνει η απόκλιση μεταξύ των αναλύσεων από 4 σε 25% για αύξηση της εκκεντρότητας από 0 σε 5%. Ακόμα, αξιοσημείωτο αποτελεί η αύξηση του βέλους στο οποίο εκδηλώνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Στον πίνακα σημειώνεται το αδιάστατο βέλος κάμψεως. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, με ύψος στύλου 6 m, το βέλος παίρνει αντίστοιχα τις τιμές:

\_ για εκκεντρότητα 0%: 0,0726 m

\_ για εκκεντρότητα 5%: 0,816 m.

Τέλος, να σημειωθεί ότι για μηδενική εκκεντρότητα το φορτίο της γραμμικής ανάλυσης δεν είναι άλλο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, το οποίο λαμβάνεται από όλες τις γραμμικές αναλύσεις όταν απειρίζεται το βέλος κάμψεως.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

---

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

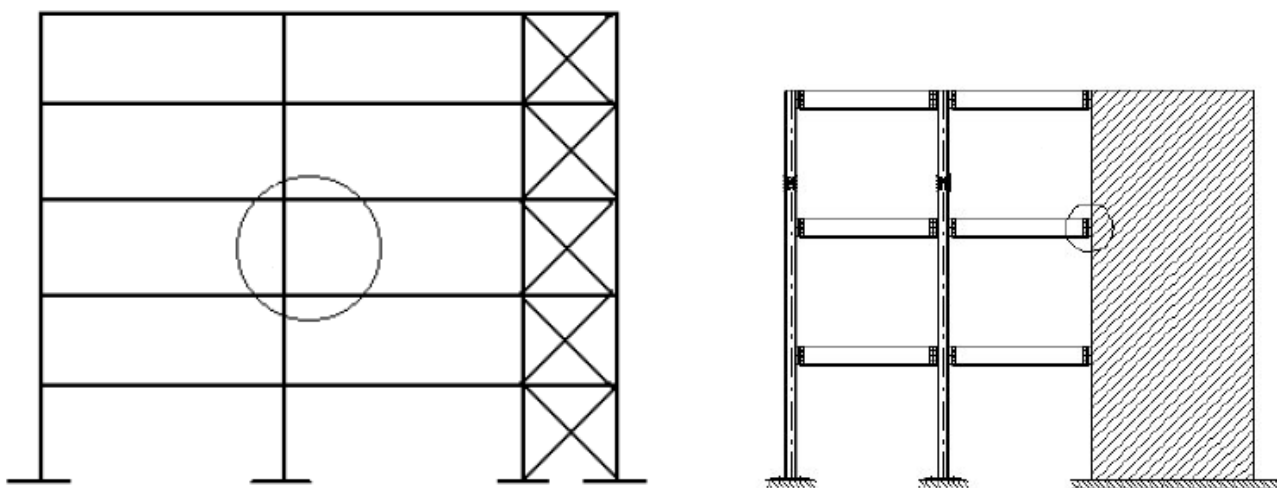
## ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Η περίπτωση της μη γραμμικής ανάλυσης που έχει μελετηθεί μέχρι τώρα αποτελεί μια ιδανική περίπτωση φορέα του οποίου το υποστύλωμα παραλαμβάνει μηδενική ροπή στον πόδα. Επιπλέον, το πλαίσιο που εξετάζεται είναι πλήρως μεταθετό με αποτέλεσμα να πραγματοποιείται ο αντισυμμετρικός λυγισμός με μετάθεση.

Στην πραγματικότητα ο φορέας που περιγράφεται παραπάνω δύσκολα απαντάται στις κατασκευές. Είναι σύνηθες η μετάθεση ενός πλαισίου να παρεμποδίζεται είτε από συστήματα δυσκαμψίας (τοιχώματα, χιαστί συνδέσμους) είτε από άλλες κατασκευές που βρίσκονται σε επαφή με το υπό εξέταση πλαίσιο, με αποτέλεσμα να έχουμε μερικώς μεταθετή ή και αμετάθετη συμπεριφορά. Από τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας γνωρίζουμε ότι σ'αυτές τις περιπτώσεις ο φορέας καθίσταται πλέον δύσκαμπτος με αποτέλεσμα την αύξηση του κρίσιμου φορτίου.

Αναφορικά με τη ροπή που μπορεί να παραλάβει το υποστύλωμα στη βάση του μεγάλο ρόλο παίζει η σύνδεση: για παράδειγμα σε μια σύνδεση ροπής η συμπεριφορά του πλαισίου θα είναι διαφορετική. Ακόμα, η στροφική δέσμευση εξαρτάται και από τα άλλα μέλη (δοκοί και υποστυλώματα) που συντρέχουν στον ίδιο κόμβο.

Είναι επομένως αντιληπτό ότι σε κάθε μία απ'τις παραπάνω περιπτώσεις το όριο απώλειας της ελαστικής ευστάθειας του πραγματικού πλαισίου είναι (έως και πολύ) μεγαλύτερο από το μέχρι τώρα υπολογισθέν. Για τον λόγο αυτό κρίνεται απαραίτητη η διερεύνηση ενός μοντέλου που λαμβάνει υπόψη πολυπλοκότερες συνοριακές συνθήκες.



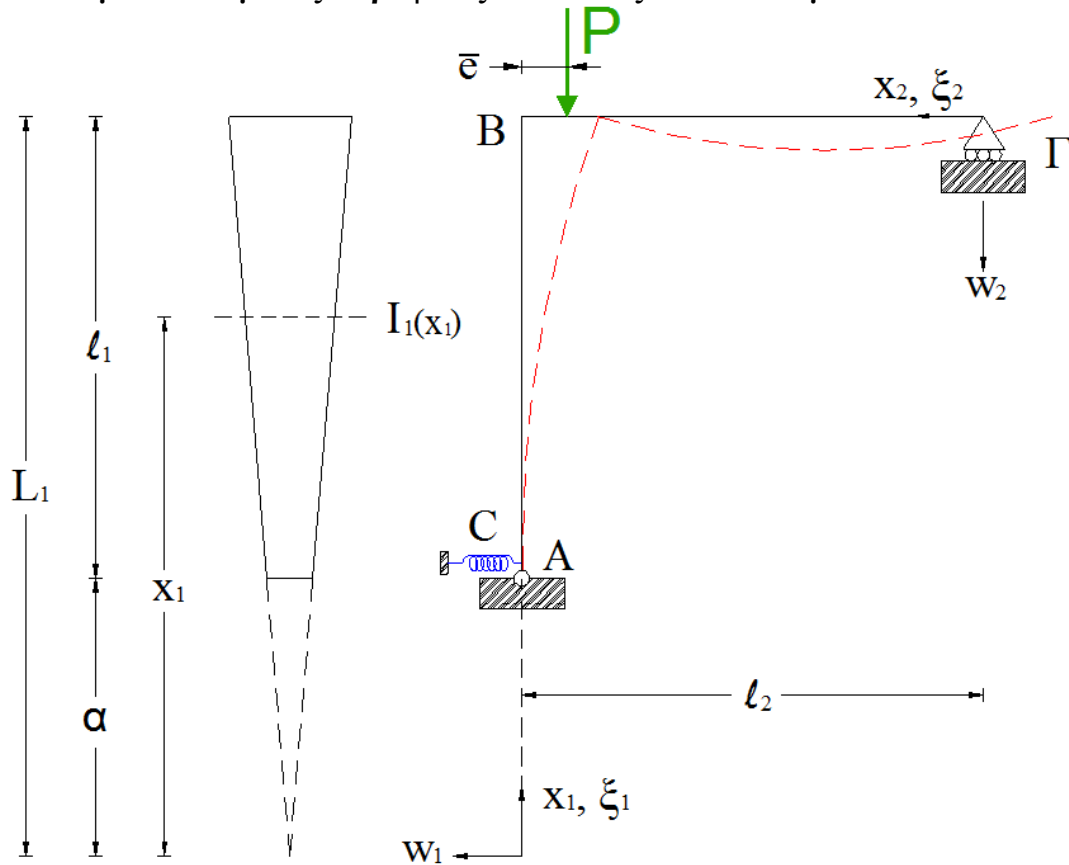
Εικόνα 3.1\*

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας προτείνεται η προσομοίωση της στροφικής δέσμευσης που προσδίδουν στη βάση του υποστυλώματος τα συντρέχοντα μέλη με στροφικό ελατήριο και ένα ελατήριο ευθυγράμμου κίνησης στην στήριξη της δοκού που προσομοιώνει το σύστημα δυσκαμψίας του πλαισίου το οποίο μπορεί να προέρχεται ακόμα και από επαφή ή σύνδεση του πλαισίου με άλλες κατασκευές.

Τέλος, γίνεται διερεύνηση της επιρροής της παρουσίας της αξονικής δύναμης της δοκού.

\*Η όψη του αριστερού κτιρίου προέρχεται από την διδακτορική διατριβή του Γ. Μαγείρου.

3.1 Πλαίσια με Δύσκαμπτες Στροφικές Συνδέσεις Υποστυλωμάτων



Σχήμα 3.1

Το διμελές πλαίσιο όπως βλέπουμε στο Σχήμα φορτίζεται έκκεντρα από ένα κατακόρυφο φορτίο  $P$  που δρα κατά τη διεύθυνση του άξονα του υποστυλώματος. Η δοκός στηρίζεται σε μία οριζόντια κύλιση η οποία επιτρέπει το πλαίσιο να μεταταθεί είτε προς αριστερά είτε προς δεξιά. Η μόνη διαφορά με τους προηγούμενους φορείς παρουσιάζεται στη βάση του υποστυλώματος όπου έχουμε εισάγει περιστρεφόμενο ελατήριο.

Εφ' όσον το ελατήριο είναι γραμμικώς ελαστικό η αναπτυσσόμενη αντίδραση (δηλαδή η ροπή κάμψεως) είναι ανάλογη της αντίστοιχης μετατόπισης (γωνία στροφής της διατομής). Δηλαδή η αναπτυσσόμενη αντίδραση  $C \cdot w'(\alpha)$  στο άκρο  $A$  θα είναι ανάλογη της αντίστοιχης εσωτερικής δύναμης  $M(\alpha)$ , όπου  $C$  ο δείκτης αντιστάσεως του περιστροφικού ελατηρίου. Με βάση το επιλεγέν σύστημα συντεταγμένων παρατηρούμε ότι η στροφή  $w'_1(\alpha)$  έχει θετική φορά, ενώ η ροπή κάμψεως  $M(\alpha) = -E \cdot I_1 \cdot w''_1(\alpha)$  είναι αρνητική.

Όπως και στην παράγραφο (2.2.2) προσθέτοντας τη συνεισφορά του στροφικού ελατηρίου, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 U_T = & \frac{1}{2} \cdot \int_a^{L_1} \left[ E \cdot I_1(x) \cdot w_1''^2 + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right)^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot w_1'(\alpha)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{l_2} \left[ E \cdot I_2 \cdot w_2''^2 + E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right)^2 \right] dx_2 + P \cdot \xi_1(L_1) + P \cdot e \cdot w_2'(l_2)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

, όπου  $F(x)$  ορίζεται το μεταβλητό εμβαδόν της διατομής του υποστυλώματος.

Ακόμα θεωρούνται πλέον γνωστές η συνάρτηση βέλους κάμψεως του υποστυλώματος:

$$w_1(x_1) = A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + C_1 \cdot x_1 + D_1$$

$$\mu^2 = \frac{S_1 \cdot \alpha^2}{E \cdot I_1} \cdot \frac{\alpha}{l_1} = k^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l'}\right)^3$$

, καθώς και η συνάρτηση βέλους κάμψεως μέλους διατομής σταθερού εμβαδού και ροπής αδρανείας στο οποίο δεν υποβάλλεται αξονική δύναμη:

$$w_2(x_2) = A_2 \cdot x_2^3 + B_2 \cdot x_2^2 + C_2 \cdot x_2 + D_2$$

### 3.1.1 Διαφορικές Εξισώσεις Ισοροπίας

Όπως προέκυψαν και για το πλαίσιο χωρίς στρωφικές δεσμεύσεις (§ 2.2.2) συνοπτικά οι διαφορικές εξισώσεις ισοροπίας που διαμορφώνουμε είναι

$$\left. \begin{aligned} & \left[ E \cdot F_i(x) \cdot \left( \xi_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 \right) \right]' = 0 \\ & \frac{d^2}{dx_i^2} (E \cdot I_i \cdot w_i'') - E \cdot F_i \cdot \left( \xi_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 \right) \cdot w_i'' = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Όσον αφορά τις συνθήκες που περιγράφουν το πλαίσιο η μόνη που το διαφοροποιεί από την παλαιά προσομοίωση αφορά τη ροπή κάμψεως στη βάση του υποστυλώματος η οποία τώρα εξαρτάται από τον δείκτη αντιστάσεως του περιστροφικού ελατηρίου  $C$ . Όπως περιγράφεται παραπάνω η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη θα είναι (σχ. 2.23.2):  $-E \cdot I_2 \cdot w_1''(a) + C \cdot w_1'(a) = 0$ .

Γεωμετρικές Συνθήκες (Κινηματικές):

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \text{ Συνοριακές} \quad w_1(a) = w_2(0) = \xi_1(a) = 0 \\ & \bullet \text{ Συνέχειας} \quad w_1(L_1) = \xi_2(l_2), \quad \xi_1(L_1) = -w_2(l_2), \quad w_1'(L_1) = w_2'(l_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Φυσικές Συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \text{ Συνοριακές} \\ & \xi_2'(0) + \frac{1}{2} w_2'(0)^2 = 0, \quad -E \cdot I_2 \cdot w_1''(a) + C \cdot w_1'(a) = 0 \quad -E \cdot I_2 \cdot w_2''(0) = 0, \\ & \bullet \text{ Ισοροπία ροπών στον κόμβο} \\ & E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0 \\ & \bullet \text{ Ισοροπία κατακόρυφων δυνάμεων} \\ & E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) + P = 0 \\ & \bullet \text{ Ισοροπία οριζοντιών δυνάμεων} \\ & E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1'''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Η συνθήκη (3.4.6) διαμορφώθηκε έπειτα από παραγωγή της ροπής κάμψεως για το σημείο  $x_1 = L_1$ :

$$\frac{d}{dx_1} [E \cdot I_1(x_1) \cdot w_1''(x_1)]_{x_1=L_1} = E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''''(L_1) + 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1'''(L_1)$$

Μετά από ολοκλήρωση των σχέσεων (3.2) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.4.1) παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 &= -\frac{S_1}{E \cdot F_1(x)} \\ \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 &= 0 \\ \frac{d^2}{dx_1^2} (E \cdot I_1 \cdot w_1'') + S_1 \cdot w_1'' &= 0 \\ w_2'''' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

, όπου  $S_1$  είναι η αξονική θλιπτική δύναμη του υποστυλώματος.

Φυσικά για καλύτερη εποπτεία των υπολογισμών ακολουθούν οι αντικαταστάσεις των συναρτήσεων Bessel:

$$J_{a,1} = BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right), \quad Y_{a,1} = BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{l_1'}\right)$$

$$J_{a,0} = BesselJ\left(0, 2\mu\sqrt{l_1'}\right), \quad Y_{a,0} = BesselY\left(0, 2\mu\sqrt{l_1'}\right)$$

$$J_1 = BesselJ\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right), \quad Y_1 = BesselY\left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right)$$

$$J_0 = BesselJ\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right), \quad Y_0 = BesselY\left(0, \frac{2\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}}\right)$$

Η εφαρμογή των συνθηκών (3.3.1), (3.3.2) καθώς και των (3.4.2), (3.4.3) και (3.4.6) δίνει:

$$\text{a) } w_1(\alpha) = A_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{\alpha}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{\alpha}}\right) + C_1 \cdot \alpha + D_1 = 0$$

$$\text{b) } D_2 = 0$$

$$\text{c) } E \cdot I_2 \cdot w_1''(a) = C \cdot w_1'(a) \Rightarrow w_1''(a) = C^* \cdot w_1'(a)$$

, όπου  $C^* = C / (E \cdot I_1)$ . (3.6)

$$w_1''(\alpha) = -\frac{\mu^2 \cdot l_1}{a^{5/2}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1})$$

$$w_1'(\alpha) = \frac{1}{a^{3/2}} \cdot (A_1 \cdot a \cdot J_{a,1} - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1} \cdot a \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot a \cdot Y_{a,1} - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1} \cdot a \cdot Y_{a,0}) + C_1$$

$$= \frac{1}{a^{1/2}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1'} \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,1} - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1'} \cdot Y_{a,0}) + C_1$$

$$\frac{w_1'(\alpha)}{w_1''(\alpha)} = \frac{A_1 \cdot J_{a,1} - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1'} \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,1} - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1'} \cdot Y_{a,0} + C_1 \cdot \sqrt{\alpha}}{-\frac{a^{1/2} \cdot \mu^2 \cdot l_1'}{a^{5/2}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1})}$$

$$= -\frac{a^2}{\mu^2 \cdot l_1'} \cdot \frac{A_1 \cdot J_{a,1} - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1'} \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,1} - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1'} \cdot Y_{a,0} + C_1 \cdot \sqrt{\alpha}}{A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}}$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2}{\mu^2 \cdot l_1'} \cdot \left[ 1 + \frac{C_1 \cdot \sqrt{\alpha} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0})}{A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}} \right] = C^*$$

$$\frac{C_1 \cdot \sqrt{\alpha} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0})}{A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}} = -\frac{\mu^2 \cdot l_1'}{a^2} \cdot C^* - 1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\mu \sqrt{l_1'}}{\sqrt{\alpha}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0}) - \left( \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{C^* \cdot a^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1})$$

**d)**  $B_2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1'''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) = 0 \\ & -S_1 \cdot C_1 - S_1 \cdot L_1^{3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right] \\ & + 3 \cdot E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{L_1^{5/2}} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) - E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{L_1^{7/2}} \cdot \left( 2A_1 \cdot J_1 + A_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + 2B_1 \cdot Y_1 \right. \\ & \left. + B_1 \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

Όπως προκύπτει και στην παράγραφο (2.2.2) έχουμε τελικά:

$$C_1 = 0$$

Έτσι, η σχέση (c) γίνεται:

$$0 = \frac{\mu \sqrt{l_1'}}{\sqrt{\alpha}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0}) - \left( \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{C^* \cdot a^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1})$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \cdot \frac{A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0}}{A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}} - \frac{a}{\mu^2 \cdot l_1'} = \frac{1}{C^*}$$



, ή

$$\left( \frac{1}{C^*} + \frac{a}{\mu^2 \cdot l_1'} \right) \cdot \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} = \frac{J_{a,0} + \frac{B_1}{A_1} \cdot Y_{a,0}}{J_{a,1} + \frac{B_1}{A_1} \cdot Y_{a,1}} \quad (3.7)$$

Από τις σχέσεις (3.3.6), (3.4.4) και (3.4.5) παίρνουμε:

$$\text{a) } w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$$

$$w_2'(l_2) = 3A_2 \cdot l_2^2 + C_2 = L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right]$$

$$\text{b) } E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0$$

$$-E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot \frac{\mu^2 \cdot l_1}{L_1^{5/2}} (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) + E \cdot I_2 \cdot 6A_2 \cdot l_2 + P \cdot e = 0$$

$$\Rightarrow -S_1 \cdot \sqrt{L_1} (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) + E \cdot I_2 \cdot 6A_2 \cdot l_2 + P \cdot e = 0$$

$$\text{c) } E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) + P = 0$$

Μέσω της σχέσης  $\xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 = -\frac{S_1}{E \cdot F_1(x)}$ , έχουμε:

$$-S_1 + E \cdot I_2 \cdot 6A_2 + P = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{S_1 - P}{6E \cdot I_2}$$

Έτσι, με αντικατάσταση του  $A_2$  στη σχέση (b) προκύπτει:

$$-S_1 \cdot \sqrt{L_1} (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) + (S_1 - P) \cdot l_2 + P \cdot e = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2 - S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot B_1 \cdot Y_1}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_1}$$

, ή

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot A_1 \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \quad (3.8)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3.7) παίρνουμε:

$$\left( \frac{1}{C^*} + \frac{a}{\mu^2 \cdot l_1'} \right) \cdot \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} = \frac{J_{a,0} + \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot A_1 \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot Y_{a,0}}{J_{a,1} + \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot A_1 \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot Y_{a,1}}$$

Έτσι, προκύπτει ο συντελεστής  $A_1$  του βέλους κάμψεως του υποστυλώματος:

$$A_1 = \frac{\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1}}{\frac{J_{a,0} - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{C^* \cdot a} + \frac{1}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} + Y_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{C^* \cdot a} + \frac{1}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}}$$

Όπως παρατηρούμε ο συντελεστής του στροφικού ελατηρίου  $C^*$  εμφανίζεται στον παρονομαστή των κλασμάτων των αθροισμάτων. Προκειμένου να εξάγουμε αποτελέσματα και για μηδενική στροφική δυσκαμψία στη βάση του υποστυλώματος (περίπτωση άρθρωσης) έχουμε:

$$A_1 = \frac{\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1}}{\frac{J_{a,0} \cdot C^* - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C^* + Y_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}}$$

Θέτοντας  $C^* = 0$  προκύπτει:

$$A_1 = \frac{\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1}}{\frac{-J_{a,1} + \frac{J_1}{Y_1}}{Y_{a,1}}} = \frac{\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1}}}{\frac{-J_{a,1} \cdot Y_1 + J_1}{Y_{a,1}}} = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot \left( J_1 - \frac{J_{a,1} \cdot Y_1}{Y_{a,1}} \right)}$$

Μ' αυτόν τον τρόπο επιβεβαιώνεται η επίλυση που έχουμε ακολουθήσει έως τώρα από την περίπτωση πλαισιακού φορέα χωρίς στροφικό ελατήριο στη βάση του υποστυλώματος (§2.2.2).

Από τη σχέση 3.8 για το  $B_1$  παίρνουμε:

$$B_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot A_1$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \frac{\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1}}{\frac{J_{a,0} \cdot C^* - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C^* + Y_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}}$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές  $A_1$  και  $B_1$  στη συνθήκη (3.3.1) έχουμε:

$$w_1(\alpha) = A_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{\alpha}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot BesselY\left(1, 2\mu\sqrt{\frac{l_1}{\alpha}}\right) + C_1 \cdot \alpha + D_1 = 0$$

$$A_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot J_{a,1} + \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} \cdot \left(\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot A_1\right) + D_1 = 0$$

$$A_1 \cdot \left(\sqrt{\alpha} \cdot J_{a,1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot Y_{a,1}\right) + \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} \cdot \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} + D_1 = 0$$

$$\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} \cdot \left(\sqrt{\alpha} \cdot J_{a,1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot Y_{a,1}\right) + \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} \cdot \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} + D_1 = 0$$

$$\frac{J_{a,0} \cdot C^* - J_{a,1} \cdot \left(\frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}\right)}{-Y_{a,0} \cdot C^* + Y_{a,1} \cdot \left(\frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}\right)} + \frac{J_1}{Y_1}$$

$$-Y_{a,0} \cdot C^* + Y_{a,1} \cdot \left(\frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}\right)$$

Τελικώς για το  $D_1$  προκύπτει:

$$D_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1}} \cdot C^* \cdot \frac{Y_{a,1} \cdot J_{a,0} - Y_{a,0} \cdot J_{a,1}}{(Y_1 \cdot J_{a,1} - Y_{a,1} \cdot J_1) \cdot \left(\frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}\right) + (Y_{a,0} \cdot J_1 - Y_1 \cdot J_{a,0}) \cdot C^*}$$

Για  $C^* = 0$  το  $D_1$  γίνεται:

$$\Rightarrow D_1 = 0$$

Επιβεβαιώνεται, άρα, από τη λύση χωρίς στροφικό ελατήριο (§2.2.2).

Μένει ο προσδιορισμός της σταθεράς  $C_2$  η οποία θα προκύψει από τη σχέση (3.3.6):

$$w_1'(L_1) = w_2'(L_2) \Rightarrow 3A_2 \cdot l_2^2 + C_2 = L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right]$$

$$C_2 = L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right] - 3A_2 \cdot l_2^2$$

$$= \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + \frac{B_1}{A_1} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \right] - 3A_2 \cdot l_2^2$$

Αντικαθιστώντας και το  $A_2 = \frac{S_1 - P}{6E \cdot I_2}$  παίρνουμε τελικά:

$$C_2 = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + \frac{B_1}{A_1} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \right] - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2$$

, ή

$$C_2 = \frac{A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1}}{L_1 \cdot Y_1} (J_1 \cdot Y_0 - Y_0 \cdot J_1) + \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1 \cdot Y_1} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2$$

Έτσι, το βέλος κάμψεως της δοκού  $w_2(l_2)$  παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} w_2(x_2) &= A_2 \cdot x_2^3 + C_2 \cdot x_2 \\ &= \frac{S_1 - P}{6E \cdot I_2} \cdot x_2^3 + \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 \right) \cdot x_2 + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \cdot x_2 - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2 \cdot x_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Η έκφραση του βέλους κάμψεως του υποστυλώματος θα είναι:

$$\begin{aligned} w_1(x_1) &= A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselJ \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselY \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + D_1 \\ , όπου \\ A_1 &= \frac{\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1}}{\frac{J_{a,0} \cdot C^* - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C^* + Y_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}}, \\ B_1 &= \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot A_1, \\ D_1 &= \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{\frac{L_1}{a}}} \cdot C^* \cdot \frac{Y_{a,1} \cdot J_{a,0} - Y_{a,0} \cdot J_{a,1}}{\left( Y_1 \cdot J_{a,1} - Y_{a,1} \cdot J_1 \right) \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right) + \left( Y_{a,0} \cdot J_1 - Y_1 \cdot J_{a,0} \right) \cdot C^*} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι οι εξισώσεις των βελών κάμψεως λαμβάνουν πολύ μεγάλες εκφράσεις λόγω της πολυπλοκότητας που εισάγει η σταθερά ελατηρίου C. Επιπλέον, η εξίσωση λυγισμού στην οποία θα καταλήξουμε θα πρέπει να εισαχθεί στον κώδικα του προγράμματος σε γλώσσα Fortran.

Συνεπώς, για υπολογιστική ευκολία -και άρα καλύτερη εποπτεία των αριθμητικών αντικαταστάσεων- αλλά και καλύτερη εποπτεία του κώδικα του προγράμματος προτιμήθηκε οι εκφράσεις των συντελεστών του βέλους κάμψεως του υποστυλώματος  $A_1$  και  $B_1$  να μην αντικαθιστώνται άμεσα. Ακόμα, με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε ένα λειτουργικό πρόγραμμα που μάλιστα είναι «γρηγορότερο» από το αντίστοιχο που δημιουργήθηκε για τον πλαισιακό φορέα χωρίς στροφικό ελατήριο!

### 3.1.2 Εξίσωση Λυγισμού

Η εξίσωση λυγισμού θα προκύψει από την εξίσωση:

$$\xi_1(L_1) = -w_2(l_2)$$

Η αξονική βράχυνση του υποστυλώματος  $\xi_1(x_1)$  προκύπτει από την ολοκλήρωση της σχέσης:

$$\xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 = -\frac{S_1}{E \cdot F_1(x)} \Rightarrow \xi_1(x_1) = -\frac{S_1 \cdot (x_1 - a)}{E \cdot F_1(x_1)} - \frac{1}{2} \int_a^{x_1} w_1'(x_1)^2 dx_1$$

Κατά τα γνωστά (λόγω της πολυπλοκότητας των συναρτήσεων Bessel) οδηγούμαστε σε αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Συνεπώς, θα πρέπει να βρούμε τις εκφράσεις της πρώτης παραγώγου του βέλους κάμψεως του υποστυλώματος στις θέσεις  $x_1 = a$  και  $x_1 = L_1$ . Πριν προχωρήσουμε όμως είναι απαραίτητος ο ορισμός των αδιάστατων μεγεθών και για τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης.

Συγκεκριμένα η έκφραση του τετραγώνου της πρώτης παραγώγου είναι:

$$w_1'(x_1)^2 = x_1^{-3} \left[ A_1 \cdot x_1 \cdot BesselJ \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselJ \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + B_1 \cdot x_1 \cdot BesselY \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselY \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) \right]^2$$

#### Αδιαστατοποίηση

Όπως αναφέρεται πιο αναλυτικά στην παράγραφο (2.2.4) τα μήκη που αφορούν το υποστώλιωμα διαιρούνται με το μήκος υποστυλώματος  $l_1$  ενώ τα αντίστοιχα για τη δοκό (πλην της εκκεντρότητας) διαιρούνται με το μήκος δοκού  $l_2$ .

Συγκεκριμένα ισχύουν οι παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 \rightarrow 1 \\ a \rightarrow 1/l_1' \\ L_1 = l_1 + a \rightarrow 1 + 1/l_1' \\ l_2 \rightarrow l_2/l_1 = r \end{array} \right\} \begin{array}{l} e \rightarrow e/l_1 = \bar{e} \\ x_1 = a \sim L_1 \rightarrow \frac{1}{l_1'} \sim 1 + \frac{1}{l_1'} \\ x_2 = 0 \sim l_2 \rightarrow 0 \sim 1 \end{array} \quad (3.11)$$

Ακόμα θα χρειαστούμε τα αδιάστατα μεγέθη των επιβαλλόμενων φορτίων:

$$\mu^2 = \frac{P \cdot \alpha^2}{E \cdot I_1} \cdot \frac{\alpha}{l_1}, \quad \beta^2 = \frac{P \cdot l_1^2}{E \cdot I_m}, \quad k^2 = \frac{S_1 \cdot l_1^2}{E \cdot I_m} \Rightarrow S_1 = k^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2$$

, των αδρανειακών μεγεθών

$$\rho = \frac{I_m}{I_2}$$

, καθώς και τον γνωστό νόμο μεταβολής :

$$I(x_1) = I_1 \cdot \left( \frac{x_1}{a} \right)^3 \Rightarrow I_m = I_1 \cdot \left( \frac{a + l_1/2}{a} \right)^3 = I_1 \cdot (1 + l_1'/2)^3 \Rightarrow I_1 = \frac{I_m}{(1 + l_1'/2)^3}$$

Όσον αφορά τη σταθερά ελατηρίου  $C^* = C / (E \cdot I_1)$  παρατηρούμε εκφράζεται σε 1/m.

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας με το μήκος του στύλου θα έχουμε

$$C' = C \cdot l_1 / (E \cdot I_1) = C^* \cdot l_1.$$

Ξεκινώντας με το βέλος κάμψεως της δοκού έχουμε:

$$w_2(x_2) = \frac{S_1 - P}{6E \cdot I_2} \cdot x_2^3 + \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 \right) \cdot x_2 + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \cdot x_2 - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2 \cdot x_2$$

Πιο συγκεκριμένα για τους συντελεστές  $A_1$  και  $B_1$  έχουμε:

$$A_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} \left( = \sqrt{m} \right) \\ \frac{J_{a,0} \cdot C^* - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C^* + Y_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}$$

Ομοίως για το  $B_1$ .

Κρίνεται σε αυτό το σημείο απαραίτητο οι δύο συντελεστές να πάρουν νέα αδιάστατη μορφή. Συμψηφίζοντας το γεγονός ότι διαιρούνται με ίση ποσότητα τους φέρνουμε στην εξής αδιάστατη μορφή διαιρώντας με  $\sqrt{L_1}$ .

$$\frac{A_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1 \cdot Y_1} \\ \frac{J_{a,0} \cdot C^* - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C^* + Y_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^*}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}$$

και

$$\frac{B_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1 \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{L_1}}$$

Ο αριθμητής γίνεται:

$$\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot L_1 \cdot Y_1} = \frac{\beta^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2 \cdot e + (k^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2 - \beta^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2) \cdot l_2}{k^2 \cdot E \cdot I_m / l_1^2 \cdot L_1 \cdot Y_1} \\ = \frac{\beta^2 \cdot e + (k^2 - \beta^2) \cdot l_2}{k^2 \cdot L_1 \cdot Y_1} = \frac{\beta^2 \cdot e / l_1 + (k^2 - \beta^2) \cdot l_2 / l_1}{k^2 \cdot L_1 / l_1 \cdot Y_1} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot (1 + 1/l_1') \cdot Y_1}$$

Ενώ για τον παρονομαστή πολλαπλασιάζοντας κάθε κλάσμα με το μήκος  $l_1$  έχουμε:

$$J_{a,0} \cdot C^* \cdot l_1 - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} + \frac{C^* \cdot l_1}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right) = J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left( \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{1} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)$$

$$= J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left( \mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)$$

Τελικώς οι συντελεστές παίρνουν τις παρακάτω μορφές:

$$\frac{A_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot (1 + 1/l_1') \cdot Y_1} \cdot \frac{J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left( \mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C' + Y_{a,1} \cdot \left( \mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1} \quad (3.12)$$

και

$$\frac{B_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot (1 + 1/l_1') \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \quad (3.13)$$

Στο εξής θα εργαζόμαστε με τις παραπάνω εκφράσεις.

Η νέα σχέση του βέλους κάμψεως της δοκού θα είναι:

$$w_2(x_2) = \frac{k^2 - \beta^2}{6} \cdot \rho \cdot \left( \frac{x_2}{l_1} \right)^2 \cdot x_2 + \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1'}{L_1}} \cdot J_0 \right) \cdot x_2 + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1'}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \cdot x_2$$

$$- \frac{k^2 - \beta^2}{2} \cdot \rho \cdot \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \cdot x_2$$

Η τιμή της εξίσωσης στο αδιάστατο σημείο  $x^* = l_2 / l_1 = 1$  θα είναι:

$$w_2(1) = \frac{\beta^2 - k^2}{3} \cdot \rho \cdot r^2 + \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1'}{L_1}} \cdot J_0 \right) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1'}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \quad (3.14)$$

Αντιστοίχως, για την **ανηγμένη βράχυνση του στύλου** θα είναι:

$$\xi_1(L_1) = -\frac{k^2 \cdot I_m / l_1^2}{F_1(L_1)} - \frac{1}{2} \int_a^{L_1} w_1(x_1)^2 dx_1 = -\frac{k^2}{\lambda_1^2} - \frac{1}{2} \int_a^{L_1} w_1(x_1)^2 dx_1$$

, όπου  $\lambda_1^2 = \frac{l_1^2 \cdot F_1(L_1)}{I_m}$  η ανηγμένη λυγηρότητα του στοιχείου με

$$F_1(L_1) = F_{1,0} \cdot \frac{L_1}{a} = F_{1,0} \cdot \frac{l_1 + a}{a} = F_{1,0} \cdot (l_1' + 1). \quad (3.15)$$

Προχωρούμε με τις εκφράσεις της πρώτης παραγώγου του βέλους κάμψεως του στύλου στις θέσεις  $x_1 = a$  και  $x_1 = L_1$  ή στις αδιάστατες θέσεις  $x_1 = 1/l_1'$  και  $x_1 = 1 + 1/l_1'$ , αντιστοίχως.

$$\begin{aligned} w_1'(x_1) &= x_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot x_1 \cdot BesselJ \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselJ \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + \right. \\ & B_1 \cdot x_1 \cdot BesselY \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 x_1} \cdot BesselY \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) \left. \right] \\ &= \frac{A_1}{\sqrt{x_1}} \cdot \left[ BesselJ \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - \mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \cdot BesselJ \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) \right] \\ &+ \frac{B_1}{\sqrt{x_1}} \cdot \left[ BesselY \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) - \mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \cdot BesselY \left( 0, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) \right] \\ \Rightarrow w_1'(\alpha) &= \frac{A_1}{\sqrt{\alpha}} \cdot (J_{a,1} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot J_{a,0}) + \frac{B_1}{\sqrt{\alpha}} \cdot (Y_{a,1} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot Y_{a,0}) \end{aligned}$$

Παραπάνω έχουμε σχηματίσει τα  $\frac{A_1}{\sqrt{L_1}}$  και  $\frac{B_1}{\sqrt{L_1}}$ . Άρα θα είναι:

$$\frac{A_1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_1}} = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \sqrt{\frac{l_1 + a}{a}} = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \sqrt{l_1' + 1}$$

και ομοίως για το B

$$\frac{B_1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_1}} = \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \sqrt{l_1' + 1}$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$\left[ w_1' \left( \frac{1}{l_1'} \right) \right]^2 = \left[ \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \sqrt{l_1' + 1} \cdot (J_{a,1} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot J_{a,0}) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \sqrt{l_1' + 1} \cdot (Y_{a,1} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot Y_{a,0}) \right]^2 \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow w_1'(L_1) = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 \right) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right)$$



$$\left[ w_1' \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \right]^2 = \left[ \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}} \cdot J_0 \right) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{1}{l_1'}}} \cdot Y_0 \right) \right]^2 \quad (3.17)$$

Τέλος, θα χρειαστούμε τη σχέση που συνδέει το βέλος κάμψεως του στύλου στην κορυφή με το φορτίο λυγισμού  $\beta^2$ . Κατ' αρχήν το βέλος κάμψεως θα είναι:

$$\left. \begin{aligned} w_1(L_1) &= A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_1 + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1 + D_1 \\ D_1 &= -A_1 \cdot \sqrt{a} \cdot J_{a,1} - B_1 \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_1(L_1) = A_1 \cdot \left( \sqrt{L_1} \cdot J_1 - \sqrt{a} \cdot J_{a,1} \right) + B_1 \cdot \left( \sqrt{L_1} \cdot Y_1 - \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} \right)$$

$$= \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( L_1 \cdot J_1 - \sqrt{L_1 \cdot a} \cdot J_{a,1} \right) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( L_1 \cdot Y_1 - \sqrt{L_1 \cdot a} \cdot Y_{a,1} \right)$$

Στην αδιάστατη μορφή (διαιρώντας με  $l_1$ ) θα έχουμε:

$$w_1 \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot J_1 - \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot \frac{1}{l_1'}} \cdot J_{a,1} \right] + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot Y_1 - \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot \frac{1}{l_1'}} \cdot Y_{a,1} \right]$$

Η παραπάνω σχέση πρέπει να επιλυθεί ως προς το φορτίο λυγισμού. Επομένως ξεκινάμε από τους συντελεστές  $A_1$  και  $B_1$ .

$$\frac{A_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot (1 + 1/l_1') \cdot Y_1} = \frac{\beta^2 / k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1 + 1/l_1') \cdot Y_1}$$

$$\frac{A_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left( \mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C' + Y_{a,1} \cdot \left( \mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1} = \frac{J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left( \mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)}{-Y_{a,0} \cdot C' + Y_{a,1} \cdot \left( \mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}$$

$$\frac{B_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot (1 + 1/l_1') \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 / k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1 + 1/l_1') \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{L_1}}$$

$$w_1 \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot J_1 - \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot \frac{1}{l_1'}} \cdot J_{a,1} \right]$$

$$+ \left( \frac{\beta^2 / k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1 + 1/l_1') \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \right) \cdot \left[ \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot Y_1 - \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot \frac{1}{l_1'}} \cdot Y_{a,1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1+1/l'_1) \cdot Y_1} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}}}{\frac{J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left(\mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l'_1}}\right)}{-Y_{a,0} \cdot C' + Y_{a,1} \cdot \left(\mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l'_1}}\right)} + \frac{J_1}{Y_1}} \cdot \left[-J_{a,1} + Y_{a,1} \cdot \frac{J_1}{Y_1}\right] \\
&+ \frac{\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1+1/l'_1) \cdot Y_1} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot Y_1 - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}} \cdot Y_{a,1}\right] \\
&= \frac{\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1+1/l'_1) \cdot Y_1} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot Y_1 - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}} \cdot Y_{a,1} + \frac{\left(-J_{a,1} + Y_{a,1} \cdot \frac{J_1}{Y_1}\right) \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}}}{\frac{J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left(\mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l'_1}}\right)}{-Y_{a,0} \cdot C' + Y_{a,1} \cdot \left(\mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l'_1}}\right)} + \frac{J_1}{Y_1}} \right\}
\end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο κρίνεται απαραίτητο να γίνει η επαλήθευση για  $C' = 0$ .

Το τελευταίο άθροισμα του παρενθετικού γίνεται:

$$\frac{\left(-J_{a,1} + Y_{a,1} \cdot \frac{J_1}{Y_1}\right) \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}}}{\frac{-J_{a,1}}{Y_{a,1}} + \frac{J_1}{Y_1}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}} \cdot \frac{-J_{a,1} \cdot Y_1 + Y_{a,1} \cdot J_1}{-J_{a,1} \cdot Y_1 + J_1 \cdot Y_{a,1} \cdot Y_1} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}} \cdot Y_{a,1}$$

Έτσι, το βέλος κάμψεως γίνεται:

$$\begin{aligned}
w_1 \left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) &= \frac{\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1+1/l'_1) \cdot Y_1} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot Y_1 - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}} \cdot Y_{a,1} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) \cdot \frac{1}{l'_1}} \cdot Y_{a,1} \right\} \\
&= \beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r
\end{aligned}$$

Όπως καταλήξαμε, δηλαδή, και στην παράγραφο 2.2.4, σχέση 2.18.

Τελικά, η επίλυση ως προς το φορτίο λυγισμού δίνει:

$$w_1 \left(1 + \frac{1}{l'_1}\right) = \frac{\beta^2/k^2 \cdot (\bar{e} - r) + r}{(1+1/l'_1) \cdot Y_1} \cdot R$$

$$\Rightarrow \beta^2 = w_1 \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right) \cdot (1 + 1/l_1') \cdot \frac{Y_1}{Q} \cdot \frac{k^2}{\bar{e} - r} - r \cdot \frac{k^2}{\bar{e} - r}$$

,όπου

$$Q = \left(1 + \frac{1}{l_1'}\right) \cdot Y_1 - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l_1'}\right) \cdot \frac{1}{l_1'}} \cdot Y_{a,1} + \frac{\left(-J_{a,1} + Y_{a,1} \cdot \frac{J_1}{Y_1}\right) \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l_1'}\right) \cdot \frac{1}{l_1'}}}{J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left(\mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}\right)} + \frac{J_1}{Y_1}$$

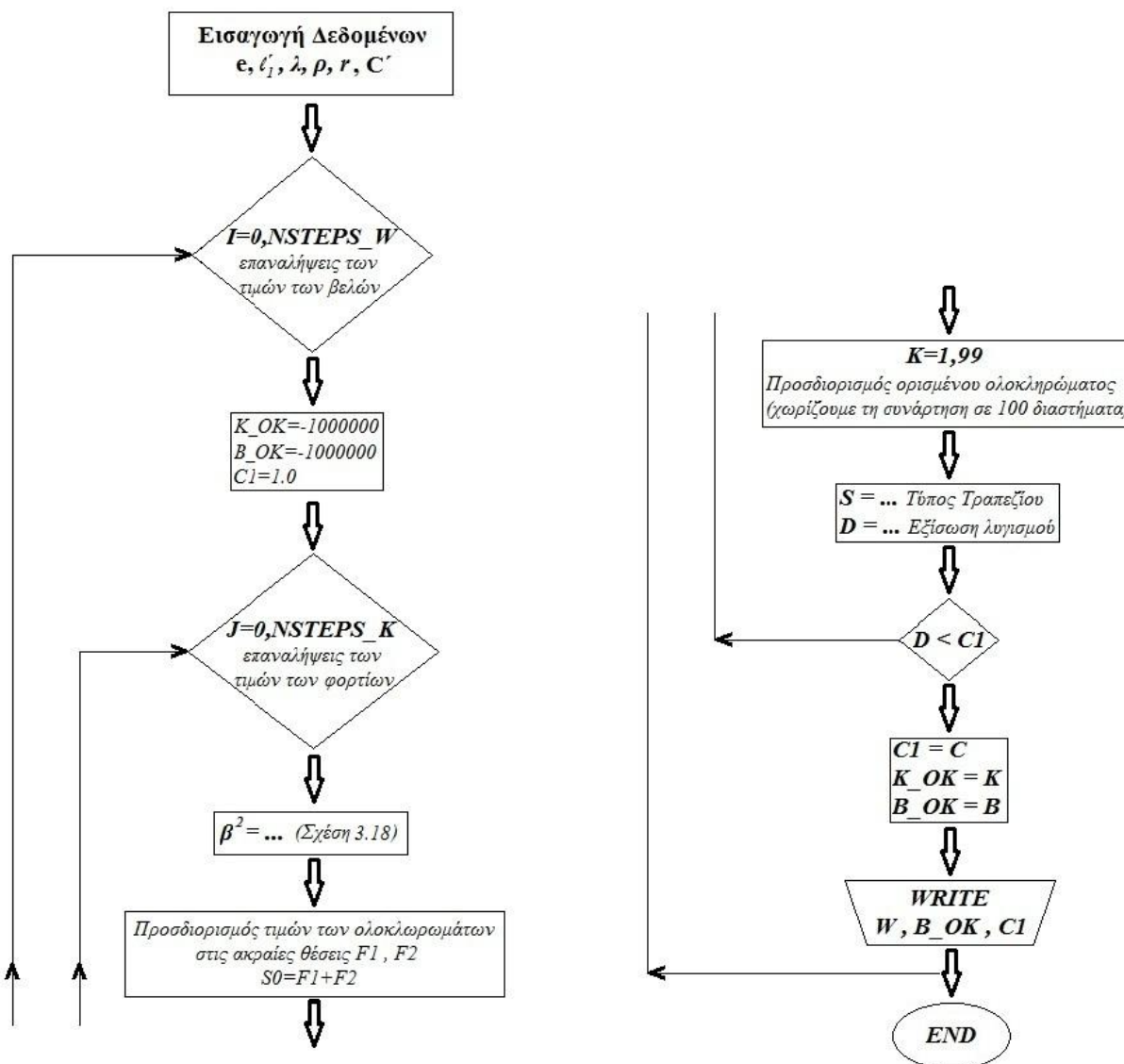
$$- \frac{Y_{a,0} \cdot C' + Y_{a,1} \cdot \left(\mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}\right)}{J_{a,0} \cdot C' - J_{a,1} \cdot \left(\mu \cdot l_1'^{3/2} + \frac{C'}{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}\right)}$$

Μ' αυτόν τον τρόπο έχουμε ότι χρειαζόμαστε για να προχωρήσουμε στη δημιουργία του προγράμματος για την εξαγωγή των διαγραμμάτων μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Fortran.

### 3.1.3 Προγραμματισμός

Ακολουθώς παρατίθεται το διάγραμμα ροής του προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή των διαγραμμάτων.

Παρατηρούμε ότι έχει προστεθεί στην εισαγωγή των δεδομένων η παράμετρος που αφορά τη σταθερά του στροφικού ελατηρίου  $C'$ .



Σχήμα 3.2 Διάγραμμα ροής για τους δρόμους ισορροπίας του βέλους κάμψεως

Στο παράρτημα παρατίθεται ο κώδικας του συγκεκριμένου προγράμματος που αφορά το βέλος κάμψεως στο σημείο της κεφαλής του υποστυλώματος υπό φορτίο λυγισμού  $\beta^2$ .

### 3.1.4 Αποτελέσματα – Διαγράμματα

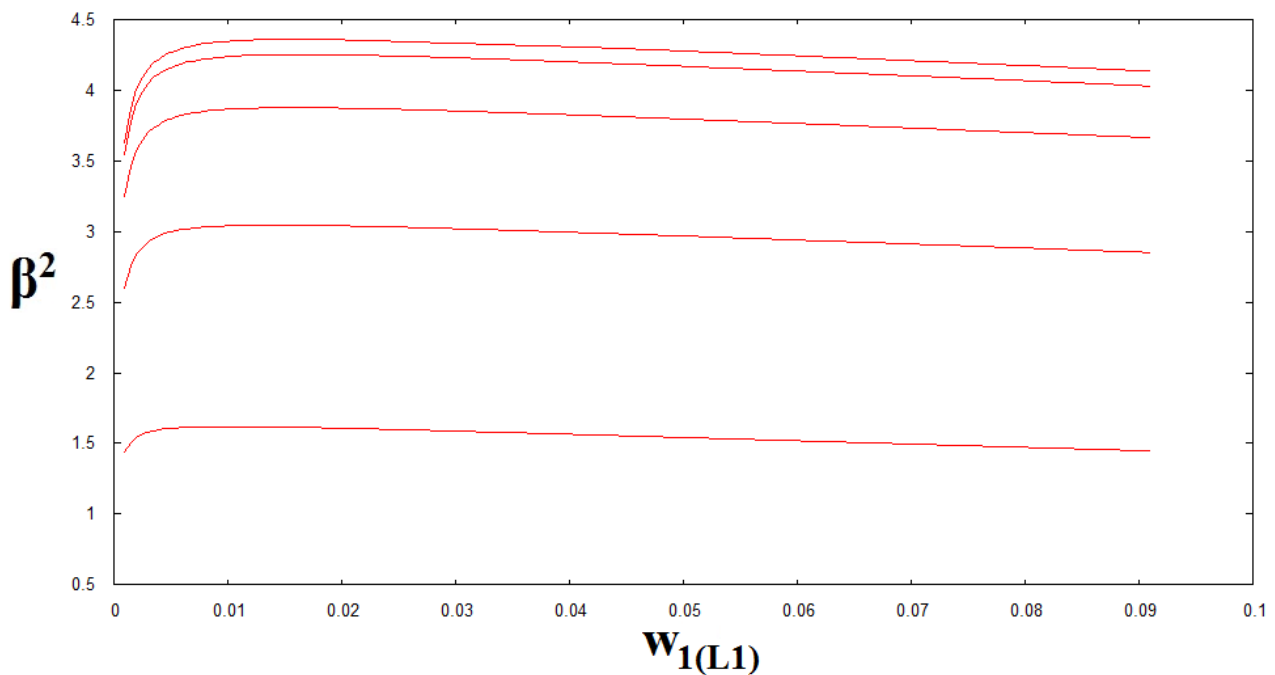
Τα πρώτα διαγράμματα που εξήχθησαν αφορούσαν μηδενική σταθερά ελατηρίου προς επαλήθευση της μεθόδου. Διαπιστώθηκε ταύτιση των τιμών των φορτίων. Επίσης, επαληθεύθηκε ότι τα προγράμματα εκτελούνται σε (έως πολύ) μικρότερο χρόνο συγκριτικά με εκείνα που περιγράφουν την περίπτωση πλαισιακού φορέα χωρίς στροφική δέσμευση.

Ακολουθούν τα εξής διαγράμματα για διάφορες περιπτώσεις λυγηροτήτων:

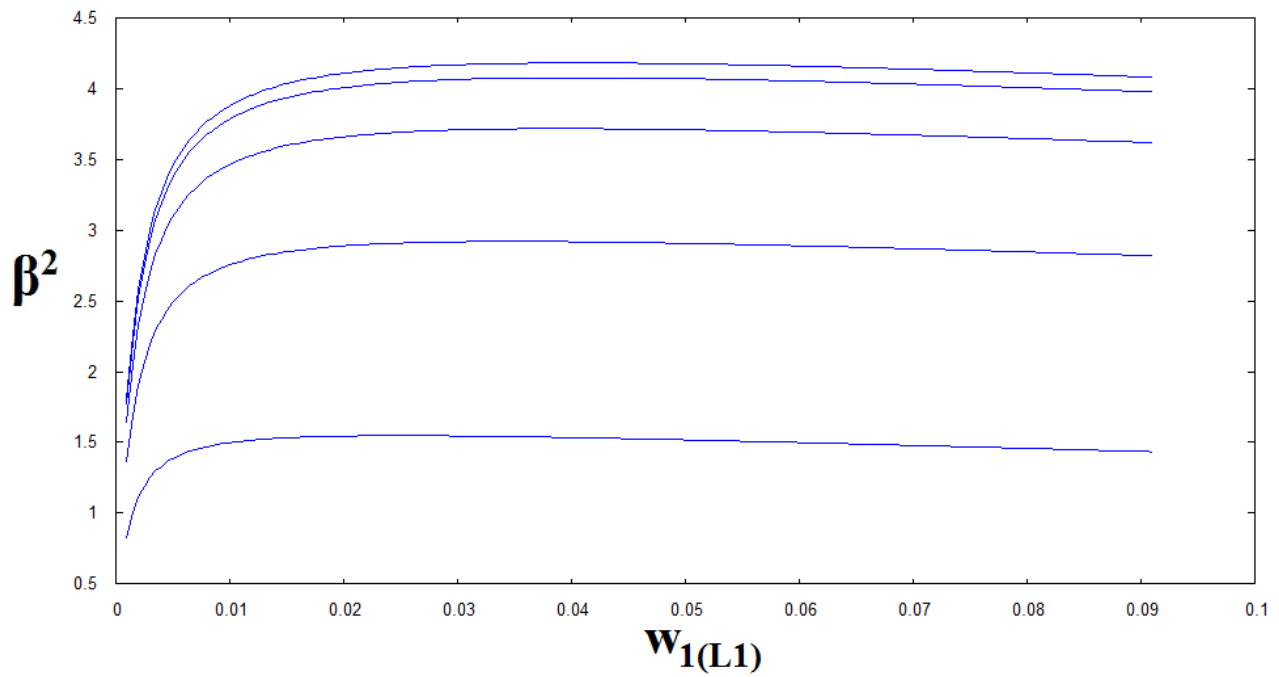
- i. Βέλος Κάμψεως χωρίς Εκκεντρότητα ( $\beta^2 - w_1(1+1/l_1')$ )
- ii. Βέλος Κάμψεως με Εκκεντρότητα ( $\beta^2 - w_1(1+1/l_1')$ )
- iii. Αδιάστατου Λόγου  $l_1'$  ( $\beta_{cr}^2 - l_1'$ ).

#### Διαγράμματα Βέλος Κάμψεως χωρίς Εκκεντρότητα

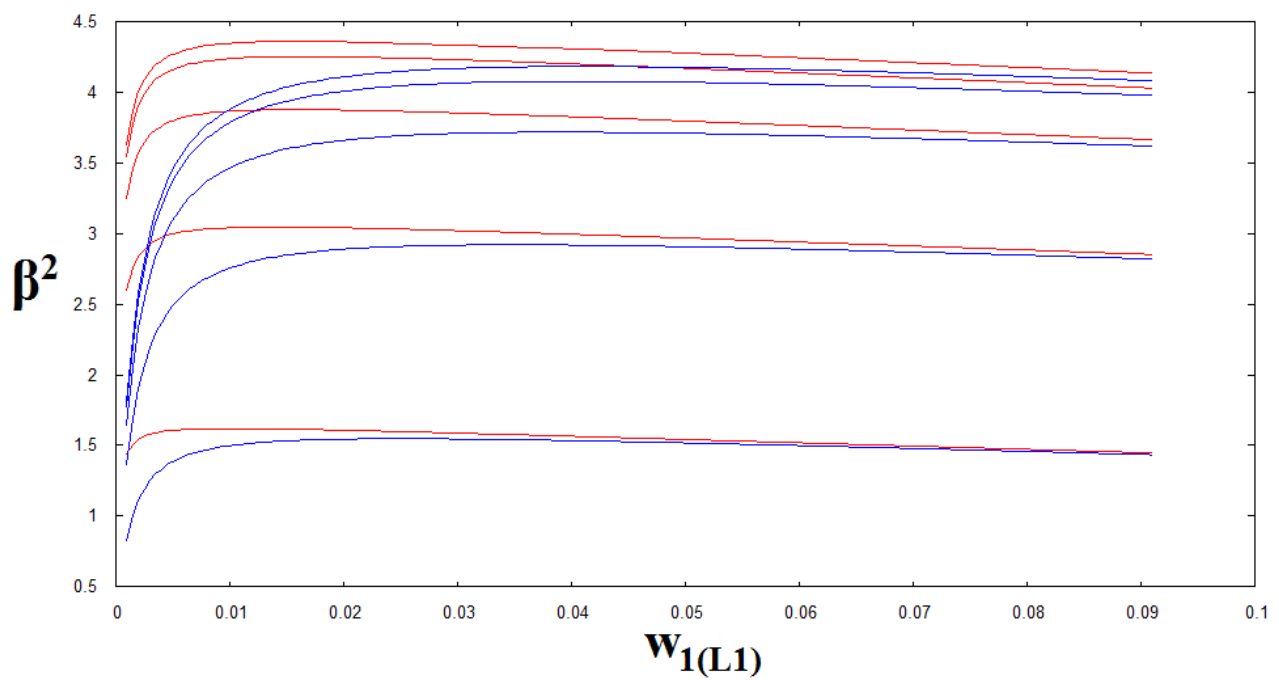
✚  $l_1' = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 100, C' = 0 - 5 - 20 - 100 - 10^5$



$l'_1 = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 40, C' = 0 - 5 - 20 - 100 - 10^5$

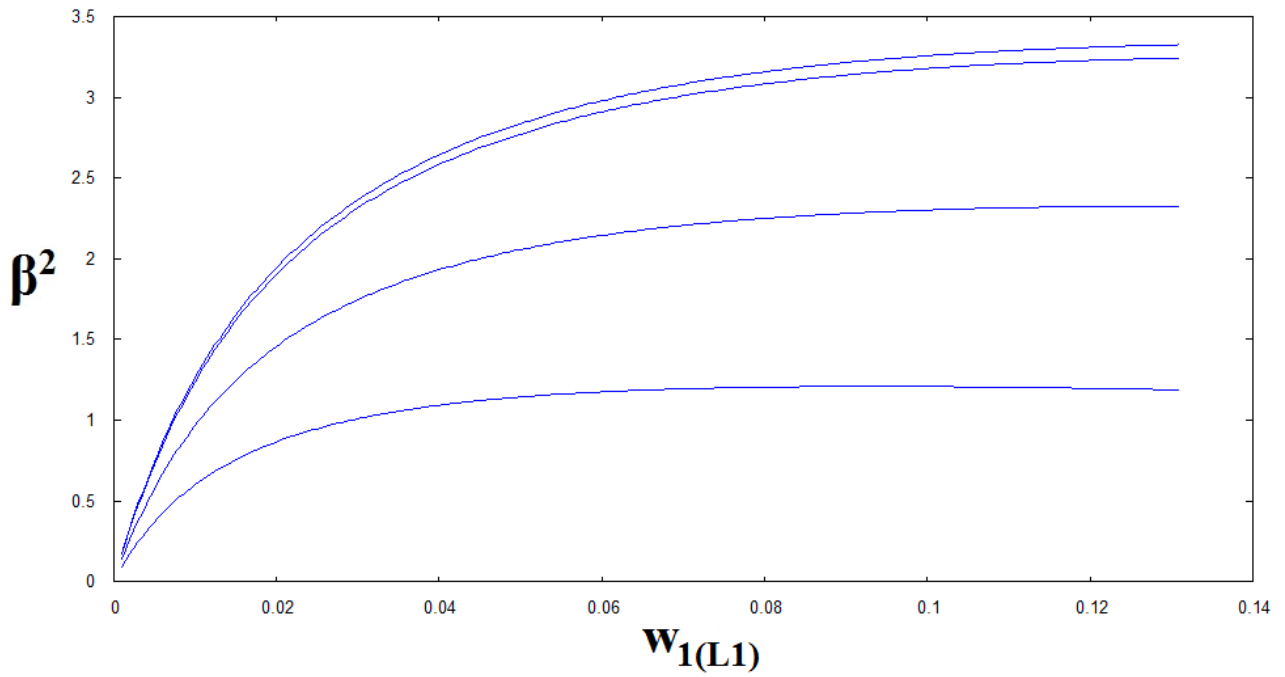


$l'_1 = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 100, C' = 0 - 5 - 20 - 100 - 10^5$   
 $+ \lambda = 40, C' = 0 - 5 - 20 - 100 - 10^5$

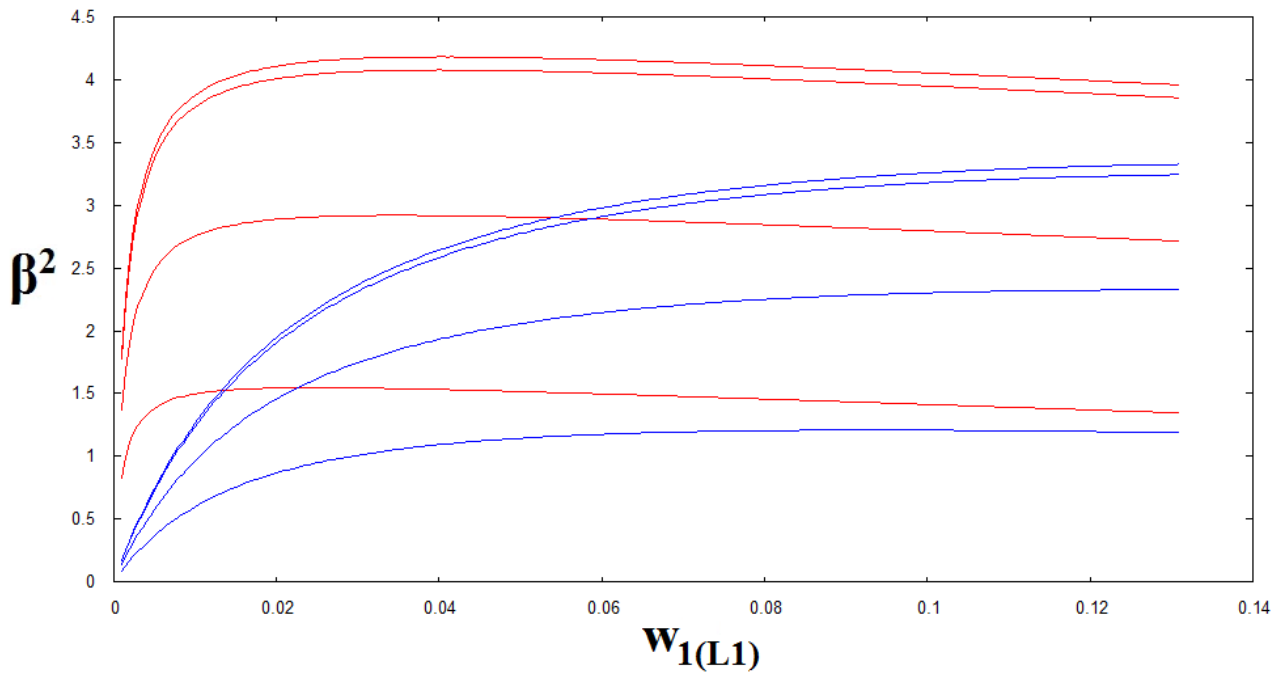


**Διαγράμματα Βέλους Κάμψεως με Εκκεντρότητα**

✚  $l_1' = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, e = 0.03, \lambda = 40, C' = 0 - 5 - 100 - 10^07$



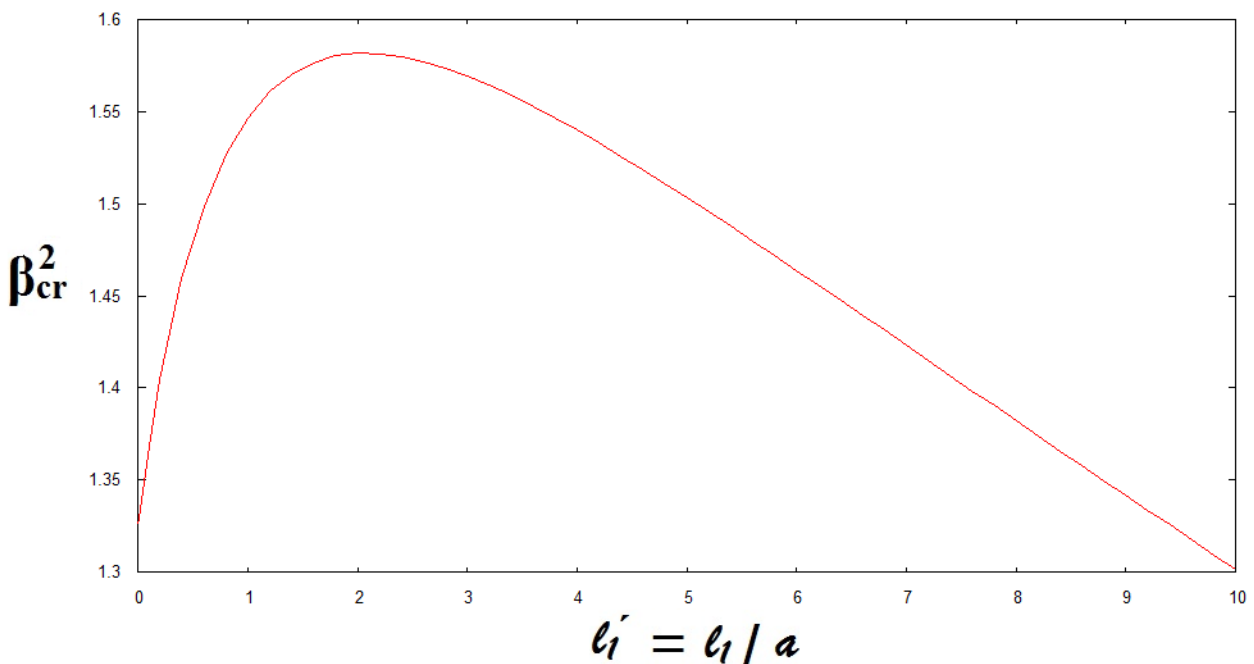
✚  $l_1' = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, e = 0.03, \lambda = 40, C' = 0 - 5 - 100 - 10^07$   
 +  $e = 0.0, \lambda = 40, C' = 0 - 5 - 100 - 10^07$



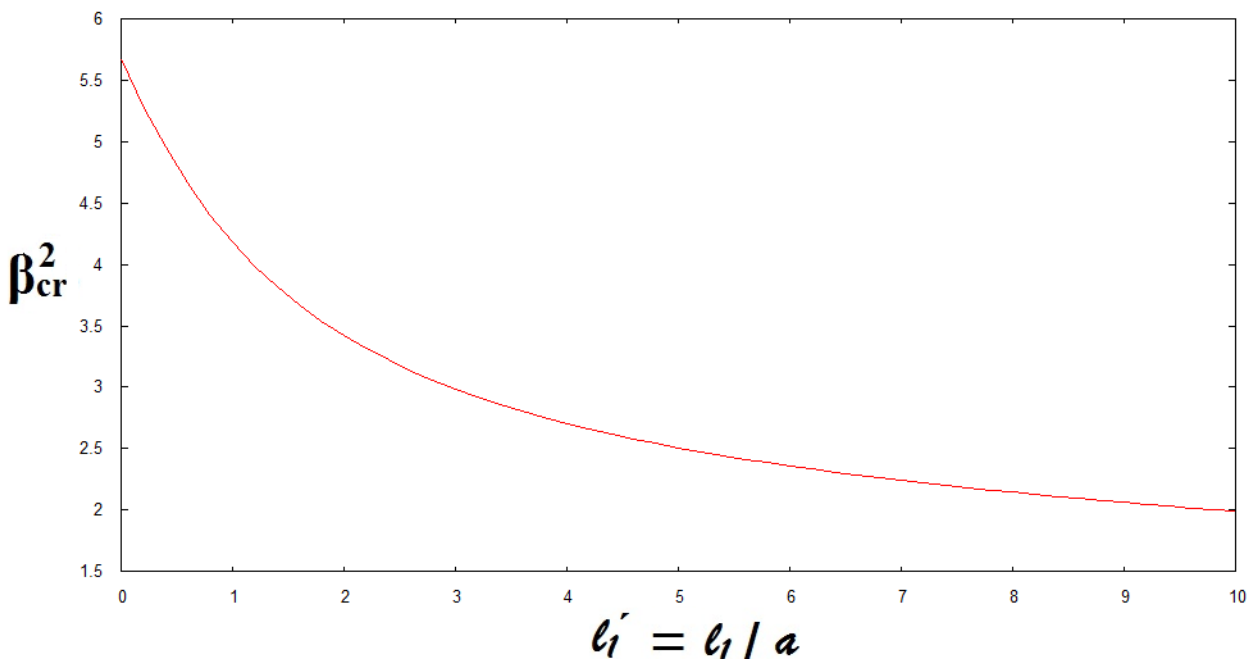
### Διαγράμματα ως προς $l_1'$

Εδώ τα αποτελέσματα παρουσιάζουν ακόμα μεγαλύτερο ενδιαφέρον από πλευράς ότι οι καμπύλες ως προς  $l_1'$  τείνουν να πάρουν τη μορφή αμετάθετου φορέα, έχοντας ήδη «γνωρίσει» από προηγούμενες αναλύσεις (§1.2) καμπύλες ως προς  $l_1'$  αμετάθετων φορέων. Για τον λόγο αυτό επιδιώχθηκε η εξαγωγή των διαγραμμάτων με σταδιακή αύξηση της αδιάστατης σταθεράς ελατηρίου  $C'$  για φορέα με ίδια χαρακτηριστικά ώστε να γίνει περισσότερο αντιληπτή η παραπάνω συμπεριφορά.

✚  $r = \rho = 1.0, \lambda = 40, e = 0, C' = 0.0$

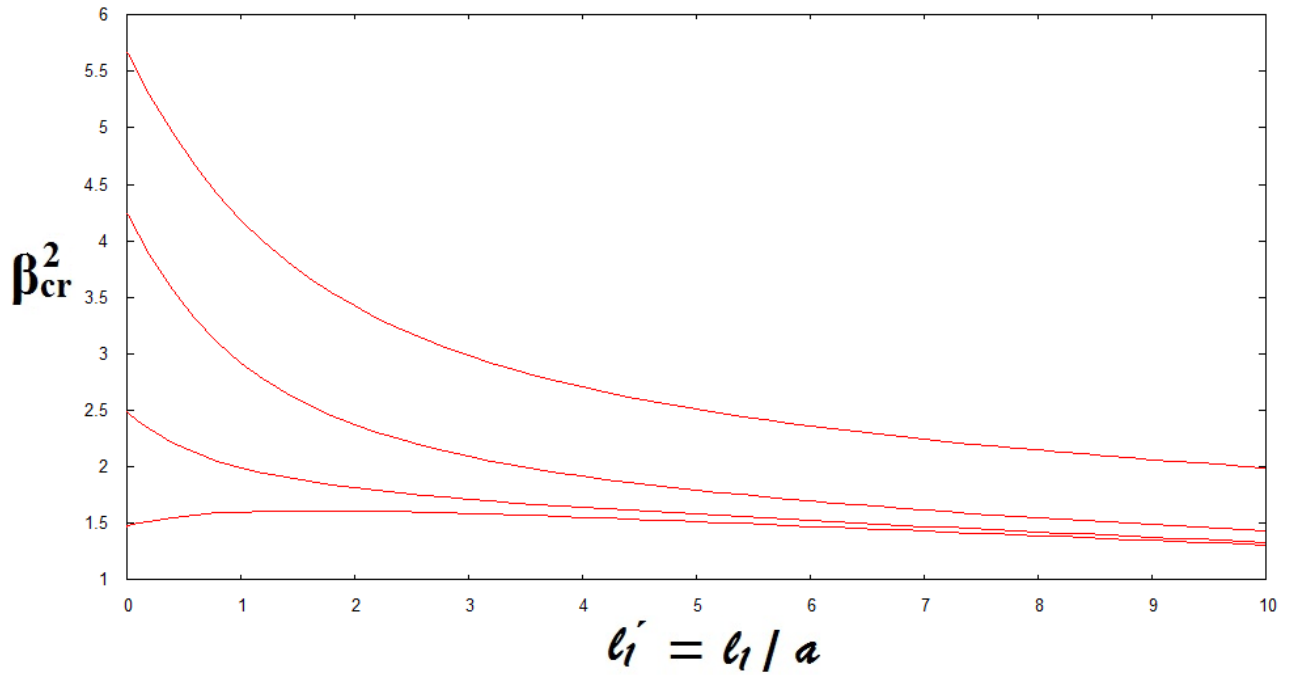


✚  $r = \rho = 1.0, \lambda = 40, e = 0, C' = 10^7$

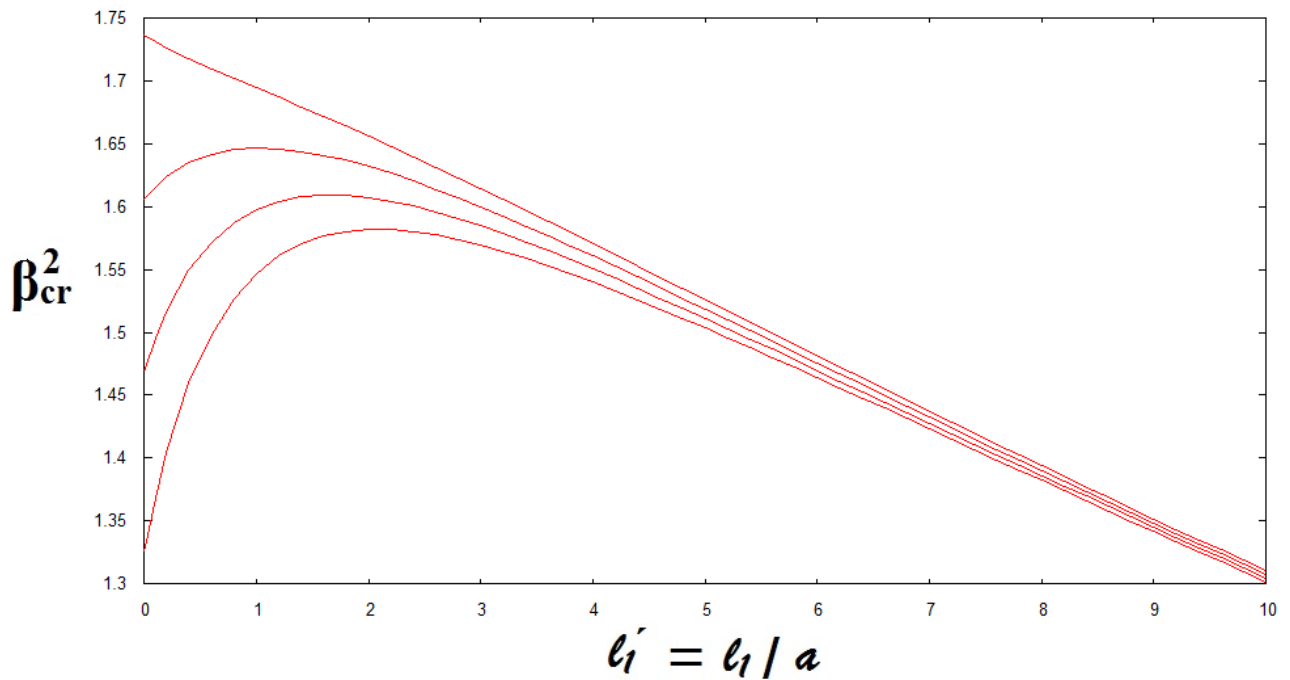




✚  $r = \rho = 1.0, \lambda = 40, e = 0, C' = 0.1 - 1.0 - 5.0 - 10^7$

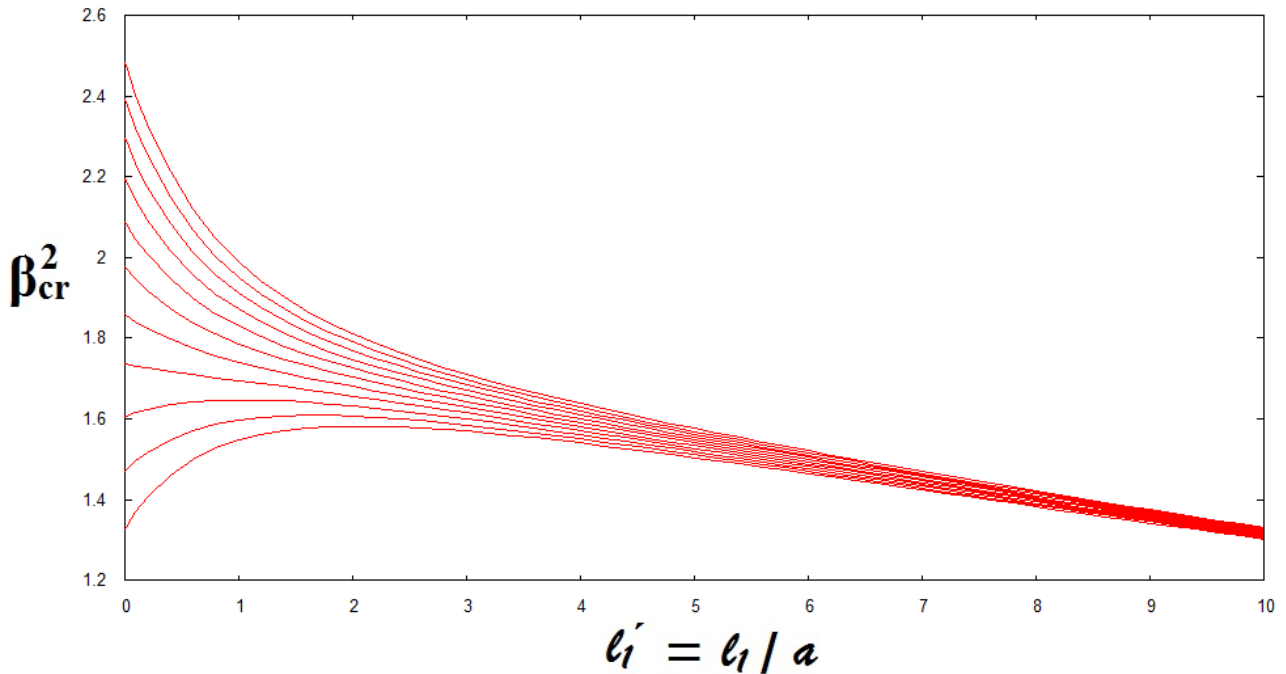


✚  $r = \rho = 1.0, \lambda = 40, e = 0, C' = 0.0 - 0.1 - 0.2 - 0.3$



Αναλυτικότερα, για το διάστημα τιμών της σταθεράς ελατηρίου  $C' = 0.0 \sim 1.0$  με βήμα 0.1 παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα.

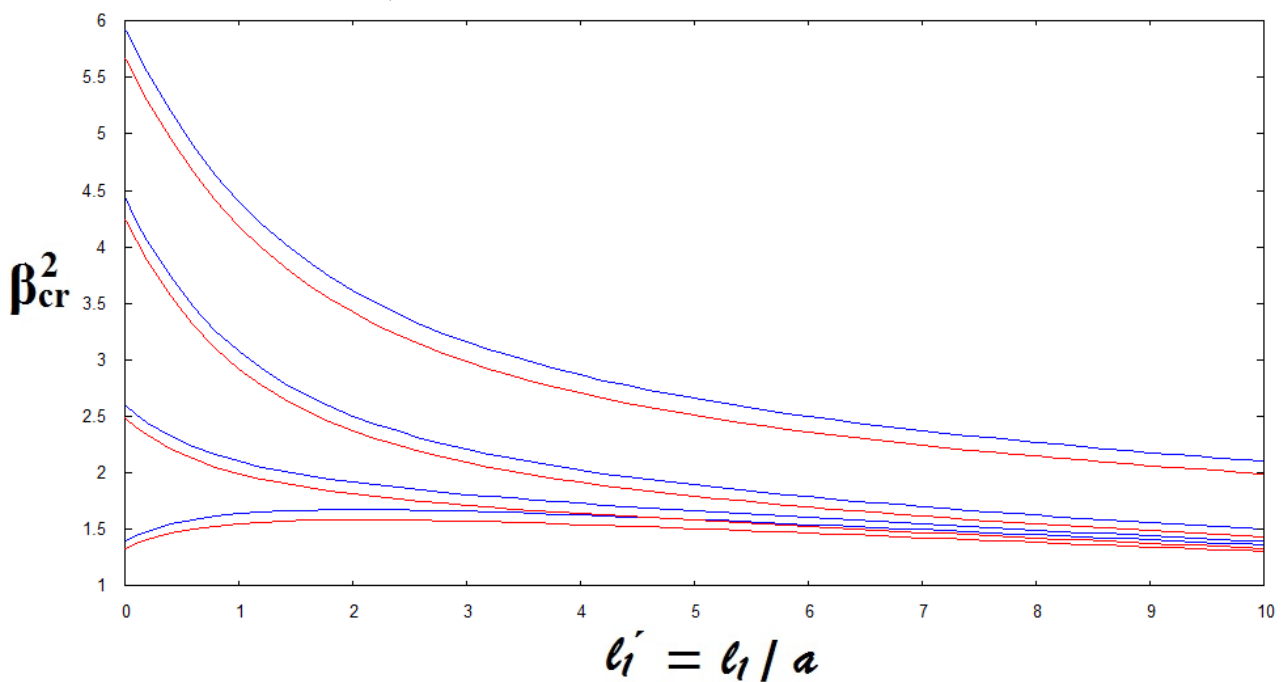
$$\color{red}{\boxplus} \quad r = \rho = 1.0, \lambda = 40, e = 0, C' = 0.0 \sim 1.0$$



Τέλος, επισυνάπτεται ένα συγκριτικό διάγραμμα με διαφορετικές λυγηρότητες για τέσσερις περιπτώσεις ελατηρίων.

$$\color{red}{\boxplus} \quad r = \rho = 1.0, e = 0, \lambda = 150, C' = 0.0 - 1.0 - 5.0 - 10^7$$

$$+ \lambda = 40, C' = 0.0 - 1.0 - 5.0 - 10^7$$



### 3.1.5 Ασύμμετρο Σημείο Διακλάδωσης

Με σκοπό την εξαγωγή του σημείου διακλάδωσης καθώς και του δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία που περιγράφεται στην παράγραφο 2.4.4.1. Πιο συγκεκριμένα, έγινε η επαναληπτική διαδικασία για φορέα με δεδομένες παραμέτρους:

$$l'_1 = 1$$

$$r = 1$$

$$\rho = 3.375$$

$$\lambda_1 = 54.41$$

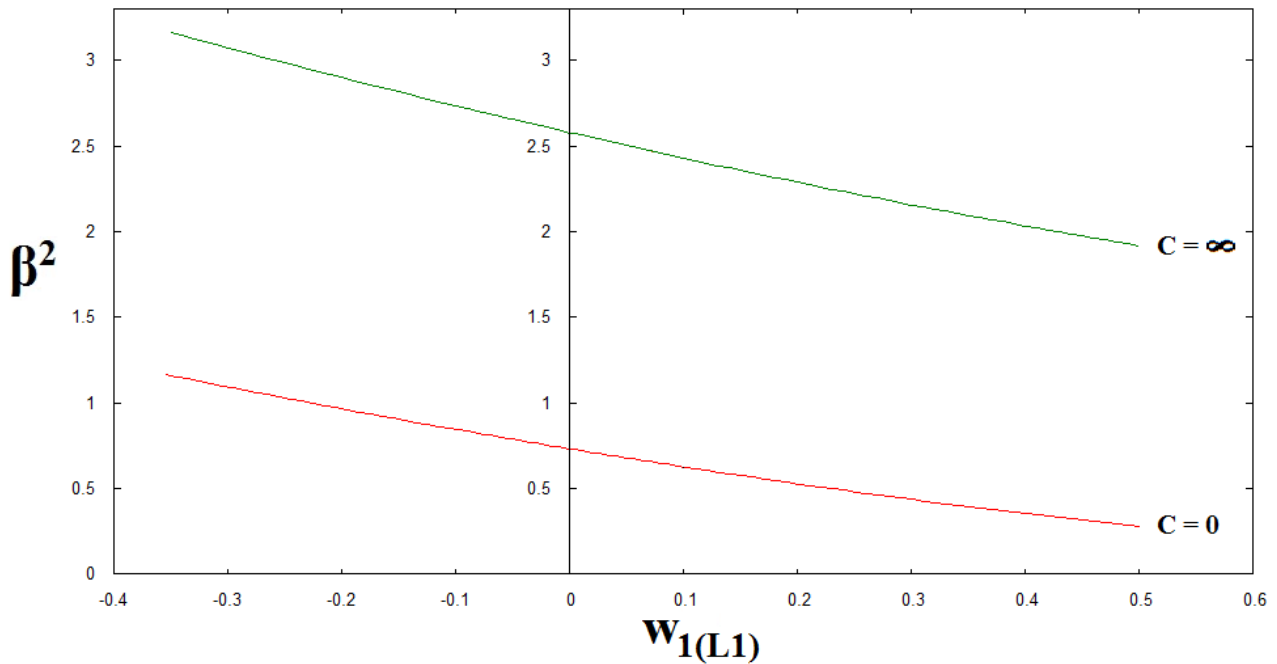
$e \rightarrow$  μεταβαλλόμενη.

Έτσι, διαπιστώθηκε η ίδια κρίσιμη εκκεντρότητα που είχαμε βρει για τον φορέα χωρίς στροφική δέσμευση στον πόδα του υποστυλώματος ( $C = 0$ ),  $e_{cr} = +0,00030016$ . Εδώ το κρίσιμο φορτίο για την δεδομένη εκκεντρότητα (κρίσιμο φορτίο διακλάδωσης) αυξήθηκε σε

$$\beta_c^2 = 2,578307$$

, έναντι του αντίστοιχου κρίσιμου φορτίου χωρίς στροφική δέσμευση

$$\beta_c^2 = 0,730514.$$

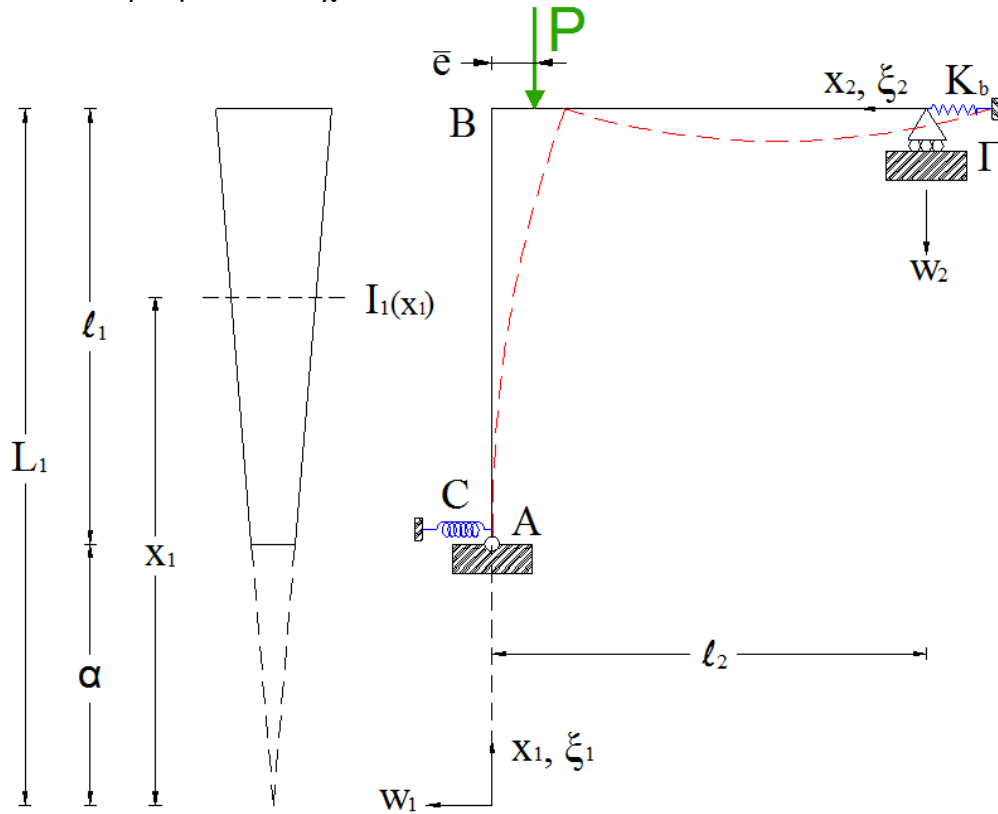


### 3.2 Πλαίσια με Περιορισμένη Μετάθεση

Στις επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με την προσομοίωση του πλαίσιακού φορέα ώστε να επιτύχουμε μία ακόμα περισσότερο πραγματική συμπεριφορά. Όπως αναφέρεται και στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου, προκειμένου να εισάγουμε την περιορισμένη μετάθεση του πλαισίου γίνεται χρήση ελατηρίου ευθυγράμμου κίνησης.

Πριν από οποιαδήποτε μαθηματική επίλυση, όμως, παρατηρούμε ότι από την έναρξη της εξωτερικής φόρτισης η δοκός καταπονείται καμπτικά και ως εκ τούτου ο προλυγισμικός δρόμος ισορροπίας δεν μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι, η παραμόρφωση του πλαισίου είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (διβάμιο σύστημα). Στο σημείο αυτό, κρίνοντας την επίλυση του προβλήματος πολυπλοκότερη, προτείνεται μία ενδιαφέρουσα εναλλακτική λύση (παράγραφος 3.2.2), τα

αποτελέσματα της οποίας κρίνονται ιδιαίτερα στο τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας όπου πραγματοποιούνται οι συγκρίσεις των θεωρητικών αποτελεσμάτων με τις αντίστοιχες των λογισμικών των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.3

Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε πώς μορφώνεται ο πλαισιακός φορέας με την προσθήκη του μετακινησιακού ελατηρίου. Η συνολική ενέργεια του συστήματος θα είναι

$$U_T = U_1 + U_2 + \Omega$$

Πιο συγκεκριμένα οι ελαστικές ενέργειες των μελών καθώς και το δυναμικό της εξωτερικής φόρτισης, αντίστοιχα, θα είναι

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \cdot \int_a^{l_1} \left[ E \cdot I_1(x) \cdot w_1''^2 + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right)^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot w_1'(\alpha)^2 \\ U_2 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{l_2} \left[ E \cdot I_2 \cdot w_2''^2 + E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right)^2 \right] dx_2 + \frac{1}{2} \cdot K_b \cdot \xi_2(0)^2 \\ \Omega &= P \cdot \xi_1(L_1) + P \cdot e \cdot w_2'(l_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Να σημειώσουμε ότι συμβολίσαμε τις σταθερές του στρωφικού και του μετακινησιακού ελατηρίου με  $C$  και  $K_b$ , αντίστοιχα.

Για τις ανάγκες της εξαγωγής των διαφορικών εξισώσεων και ένεκα της πολυπλοκότητας του συστήματος λαμβάνουμε την πρώτη μεταβολή των εσωτερικών ενεργειών κάθε μέλους ξεχωριστά.

$$\delta U_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_a^{l_1} \left[ 2E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \cdot \delta w_1'' + E \cdot F(x) \cdot 2 \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot (\delta \xi_1' + w_1' \cdot \delta w_1') \right] dx_1 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot w_1'(\alpha)^2$$

$$\delta U_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{l_2} \left[ 2E \cdot I_2 \cdot w_2'' \cdot \delta w_2'' + E \cdot F \cdot 2 \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right) \cdot \left( \delta \xi_2' + w_2' \cdot \delta w_2' \right) \right] dx_2 + \frac{1}{2} \cdot K_b \cdot \xi_2(0)^2$$

Μετά από μία παραγοντική ολοκλήρωση ως προς δξ και δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις ως προς δw βρίσκουμε (η διαδικασία περιγράφεται περισσότερο αναλυτικά στην παράγραφο 2.2.2):

- Πρώτη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του υποστυλώματος

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \cdot \delta w_1' \Big|_a^{L_1} - \left( E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \right)' \cdot \delta w_1 \Big|_a^{L_1} + E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot \delta \xi_1 \Big|_a^{L_1} \\ &+ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \cdot \delta w_1 \Big|_a^{L_1} - \int_a^{L_1} \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \right]' \cdot \delta \xi_1 dx_1 \\ &+ \int_a^{L_1} \left\{ \left( E \cdot I_1(x) \cdot w_1'' \right)'' - \left[ E \cdot F(x) \cdot \left( \xi_1' + \frac{1}{2} w_1'^2 \right) \cdot w_1' \right]' \right\} \cdot \delta w_1 dx_1 + C \cdot w_1'(\alpha) \cdot \delta w_1'(\alpha) \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Πρώτη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας της δοκού

$$\begin{aligned} \delta U_2 &= E \cdot I_2 \cdot w_2'' \cdot \delta w_2' \Big|_0^{l_2} - \left( E \cdot I_2 \cdot w_2'' \right)' \cdot \delta w_2 \Big|_0^{l_2} + E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right) \cdot \delta \xi_2 \Big|_0^{l_2} \\ &+ E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right) \cdot w_2' \cdot \delta w_2 \Big|_0^{l_2} - \int_0^{l_2} \left[ E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right) \right]' \cdot \delta \xi_2 dx_2 \\ &+ \int_0^{l_2} \left\{ \left( E \cdot I_2 \cdot w_2'' \right)'' - \left[ E \cdot F_2 \cdot \left( \xi_2' + \frac{1}{2} w_2'^2 \right) \cdot w_2' \right]' \right\} \cdot \delta w_2 dx_2 + K_b \cdot \xi_2(0)_2 \cdot \delta \xi_2(0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Έτσι, σχηματίζονται οι γνωστές διαφορικές εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} \left[ E \cdot F_i(x) \cdot \left( \xi_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 \right) \right]' &= 0 \\ \frac{d^2}{dx_i^2} \left( E \cdot I_i \cdot w_i'' \right) - E \cdot F_i \cdot \left( \xi_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 \right) \cdot w_i'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2. \quad (3.22)$$

Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στις συνθήκες που περιγράφουν τον πλαισιακό μας φορέα.

Γεωμετρικές Συνθήκες (Κινηματικές):

$$\left. \begin{aligned} \bullet \text{ Συνοριακές} \quad w_1(a) = w_2(0) = \xi_1(\alpha) = 0 \\ \bullet \text{ Συνέχειας} \quad w_1(L_1) = \xi_2(l_2), \quad \xi_1(L_1) = -w_2(l_2), \quad w_1'(L_1) = w_2'(l_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Φυσικές Συνθήκες:

✚ Συνοριακές

$$\left( \xi_2'(0) + \frac{1}{2} w_2'(0)^2 \right) = 0, \quad -E \cdot I_2 \cdot w_1''(a) + C \cdot w_1'(\alpha) = 0, \quad w_2''(0) = 0 \quad (3.24 \sim 26)$$

✚ Ισορροπία ροπών στον κόμβο

$$E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0 \quad (3.27)$$

✚ Ισορροπία κατακόρυφων δυνάμεων

$$E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) - E \cdot F_2(l_2) \cdot \left[ \xi_2'(l_2) + \frac{1}{2} w_2'(l_2)^2 \right] \cdot w_2'(l_2) + P = 0$$

$$\text{ή} \quad -S_1 + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) + S_2 \cdot w_2'(l_2) + P = 0 \quad (3.28)$$

✚ Ισορροπία οριζοντίων δυνάμεων

$$E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) + K_b \cdot \xi_2(0) = 0$$

$$\text{ή} \quad -S_1 \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) + K_b \cdot \xi_2(0) = 0 \quad (3.29)$$

Οι παραπάνω συνθήκες μορφοποιήθηκαν σύμφωνα με την εξίσωση

$$S_i(L_i) = -E \cdot F_i(L_i) \cdot \left[ \xi_i'(L_i) + \frac{1}{2} w_i'(L_i)^2 \right], \quad \text{για } i = 1, 2. \quad (3.30)$$

Όμως, η αξονική δύναμη παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος του κάθε μέλους όπως έχουμε αποδείξει μέσα από τον Λογισμό των Μεταβολών. Συνεπώς, η παραπάνω συνθήκη, ειδικά για σύνδεση της δοκού με το μετακινησιακό ελατήριο, μάς δίνει:

$$S_2(l_2) = S_2(0) = -E \cdot F_2 \cdot \left[ \xi_2'(0) + \frac{1}{2} w_2'(0)^2 \right]$$

Τέλος, μηδενίζοντας το  $\delta \xi_2(0)$  στην πρώτη μεταβολή της ελαστικής ενέργειας της δοκού, λαμβάνουμε

$$-E \cdot F_2 \cdot \left[ \xi_2'(0) + \frac{1}{2} w_2'(0)^2 \right] + K_b \cdot \xi_2(0) = 0. \quad (3.31)$$

Ακόμα μηδενίζοντας το  $\delta w_1'(a)$  επαληθεύουμε τη σχέση ροπής στη βάση του υποστυλώματος που είχαμε εξάγει στην παράγραφο 3.1.1:

$$-E \cdot I_2 \cdot w_1''(a) + C \cdot w_1'(a) = 0.$$

Αναφορικά με τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν πρέπει να συγχέουμε την αξονική βράχυνση της δοκού στο σημείο  $x_2 = 0$  με την αντίστοιχη της περίπτωσης της άρθρωσης όπου έχουμε

$$\xi_2(0) = 0,$$

καθότι στην περίπτωση μας υφίσταται η μερική μετάθεση, συνεπώς, όπως και στο πλήρως μεταθετό πλαίσιο, η αξονική βράχυνση στον μέσον του δίστυλου πλαισίου είναι διάφορη του μηδενός.

Αφού έχουμε σχηματίσει τις εξισώσεις ισορροπίας μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του διβάθμιου συστήματος.

### 3.2.1 Επίλυση του Συστήματος

Ακολουθούν οι εκφράσεις των βελών κάμψεως καθώς και των βραχύνσεων.

$$\left. \begin{aligned} w_1(x_1) &= A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselJ\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselY\left(1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}}\right) + C_1 \cdot x_1 + D_1 \\ w_2(x_2) &= A_2 \cdot \sin(k_2 x_2) + B_2 \cdot \cos(k_2 x_2) + C_2 \cdot x_2 + D_2 \\ \xi_1(x_1) &= \bar{C}_1 - \frac{S_1 \cdot (x_1 - a)}{E \cdot F_1(x_1)} - \frac{1}{2} \int_a^{x_1} w_1'(x_1)^2 dx_1 \\ \xi_2(x_2) &= \bar{C}_2 - \frac{S_2 \cdot x_2}{E \cdot F_2} - \frac{1}{2} \int_0^{x_2} w_2'(x_2)^2 dx_2 \\ , \text{ όπου } \mu^2 &= \frac{S_1 \cdot \alpha^2}{E \cdot I_1} \cdot \frac{\alpha}{l_1} = k_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l_1'}\right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Επιπλέον, ισχύουν, όπως σε κάθε επίλυση που έχει προηγηθεί, οι αντικαταστάσεις των εξισώσεων Bessel (§3.1.1).

Ξεκινώντας από τις συνθήκες (3.23.1), (3.23.2) και (3.25), (3.26) και (3.29) παίρνουμε

a)  $w_1(\alpha) = A_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot Y_{a,1} + C_1 \cdot \alpha + D_1 = 0$

b)  $w_2(0) = 0 \Rightarrow B_2 + D_2 = 0$

c)  $-E \cdot I_2 \cdot w_1''(a) + C \cdot w_1'(a) = 0$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\mu \sqrt{l_1'}}{\sqrt{\alpha}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0}) - \left( \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{C \cdot a^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1})$$

(όμοια με την παράγραφο 3.1.1).

d)  $w_2'' = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0$

e)  $-S_1 \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1'''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) + K_b \cdot \xi_2(0) = 0$

$$\Rightarrow -S_1 \cdot C_1 + K_b \cdot \xi_2(0) = 0$$

Από τη σχέση (3.32.4) μπορούμε να καταλήξουμε:

$$-S_1 \cdot C_1 + K_b \cdot \bar{C}_2 = 0 \Rightarrow \bar{C}_2 = S_1 \cdot C_1 / K_b \quad (3.33)$$

Ακόμα καταλήγουμε ότι ισχύει:  $\Rightarrow S_2 = -S_1 \cdot C_1$

Επιπλέον, από την σχέση (3.23.3) παίρνουμε  $\bar{C}_1 = 0$ , οπότε η έκφραση της βράχυνσης του στύλου παίρνει τη γνωστή μορφή:

$$\xi_1(x_1) = -\frac{S_1 \cdot (x_1 - a)}{E \cdot F_1(x_1)} - \frac{1}{2} \int_a^{x_1} w_1'(x_1)^2 dx_1.$$

$$w_2(x_2) = A_2 \cdot \sin(k_2 x_2) + C_2 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow w_2'(x_2) = A_2 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 x_2) + C_2$$

$$\Rightarrow w_2''(x_2) = -A_2 \cdot k_2^2 \cdot \sin(k_2 x_2)$$

Ακολουθούν οι σχέσεις (3.23.6), (3.27) και (3.28).

$$a) \quad w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$$

$$L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right] + C_1 = A_2 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 l_2) + C_2$$

$$b) \quad E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0$$

$$\Rightarrow -S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) - A_2 \cdot k_2^2 \cdot \sin(k_2 l_2) \cdot E \cdot I_2 + P \cdot e = 0$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του  $S_2 = k_2^2 \cdot E \cdot I_2$ , έχουμε:

$$-S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1) - S_2 \cdot A_2 \cdot \sin(k_2 l_2) + P \cdot e = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{P \cdot e - S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1)}{S_2 \cdot \sin(k_2 l_2)}$$

$$c) \quad -S_1 + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) + S_2 \cdot w_2'(l_2) + P = 0$$

$$\Rightarrow -S_1 - E \cdot I_2 \cdot A_2 \cdot k_2^3 \cdot \cos(k_2 l_2) + S_2 \cdot A_2 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 l_2) + S_2 \cdot C_2 + P = 0$$

$$\Rightarrow -S_1 - S_2 \cdot A_2 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 l_2) + S_2 \cdot A_2 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 l_2) + S_2 \cdot C_2 + P = 0 \Rightarrow -S_1 + S_2 \cdot C_2 + P = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{S_1 - P}{S_2}$$

Αντικαθιστώντας τα  $A_2$  και  $C_2$  στη σχέση (a) έχουμε:

$$L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right] + C_1 =$$

$$\frac{P \cdot e - S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1)}{S_2 \cdot \sin(k_2 l_2)} \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 l_2) + \frac{S_1 - P}{S_2}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{P \cdot e - S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1)}{S_2 \cdot \sin(k_2 l_2)} \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 l_2) + \frac{S_1 - P}{S_2}$$

$$-L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right]$$

Εξισώνοντας το  $C_1$  με το αντίστοιχο που είχαμε βρει παραπάνω μέσω της σχέσης (3.25) θα είναι:

$$\frac{\mu \sqrt{l_1'}}{\sqrt{\alpha}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0}) - \left( \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{C \cdot a^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}) = \frac{P \cdot e - S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot (A_1 \cdot J_1 + B_1 \cdot Y_1)}{S_2 \cdot \tan(k_2 l_2)} \cdot k_2$$

$$+ \frac{S_1 - P}{S_2} - L_1^{-3/2} \left[ A_1 \cdot L_1 \cdot J_1 - A_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot J_0 + B_1 \cdot L_1 \cdot Y_1 - B_1 \cdot \mu \sqrt{l_1 L_1} \cdot Y_0 \right]$$

(3.34)

Τέλος, η σχέση (3.23.4) θα δίνει:

$$w_1(L_1) = \xi_2(l_2)$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_{a,1} + C_1 \cdot L_1 + D_1 = \bar{C}_2 - \frac{S_2 \cdot x_2}{E \cdot F_2} - \frac{1}{2} \int_0^{l_2} w_2'(x_2)^2 dx_2$$

Στην τελευταία σχέση μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις των:



$$C_1 = \frac{\mu\sqrt{l_1'}}{\sqrt{\alpha}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0}) - \left( \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{C^* \cdot a^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}),$$

$$\bar{C}_2 = S_1 \cdot C_1 / K_b,$$

$$D_1 = -A_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot J_{a,1} - B_1 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot Y_{a,1} - C_1 \cdot \alpha$$

$$S_2 = -S_1 \cdot C_1$$

Επιπλέον, αντιμετωπίζεται και το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της πρώτης παραγώγου του βέλους κάμψεως της δοκού.

$$w_2'(x_2)^2 = (A_2 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 x_2) + C_2)^2 = A_2^2 \cdot k_2^2 \cdot \cos^2(k_2 x_2) + C_2^2 + 2A_2 \cdot k_2 \cdot \cos(k_2 x_2) \cdot C_2$$

$$\int_0^{l_2} w_2'(x_2)^2 dx_2 = A_2^2 \cdot k_2^2 \cdot \int_0^{l_2} \cos^2(k_2 x_2) dx_2 + \int_0^{l_2} C_2^2 dx_2 + 2A_2 \cdot k_2 \cdot C_2 \cdot \int_0^{l_2} \cos(k_2 x_2) dx_2$$

$$= A_2^2 \cdot k_2^2 \cdot \frac{\sin(k_2 x_2) \cdot \cos(k_2 x_2) + k_2 \cdot x_2}{2k_2} \Big|_0^{l_2} + C_2^2 \cdot l_2 + 2A_2 \cdot k_2 \cdot C_2 \cdot \frac{\sin(k_2 l_2)}{k_2}$$

$$= A_2^2 \cdot k_2^2 \cdot \frac{\sin(k_2 l_2) \cdot \cos(k_2 l_2) + k_2 \cdot l_2}{2k_2} + C_2^2 \cdot l_2 + 2A_2 \cdot C_2 \cdot \sin(k_2 l_2)$$

$$= A_2 \cdot \left[ A_2 \cdot k_2 \cdot \frac{\sin(k_2 l_2) \cdot \cos(k_2 l_2) + k_2 \cdot l_2}{2} + 2C_2 \cdot \sin(k_2 l_2) \right] + C_2^2 \cdot l_2$$

Έτσι, η εξίσωση γίνεται:

$$\Rightarrow A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_{a,1} + C_1 \cdot L_1 + D_1 = \bar{C}_2 - \frac{S_2 \cdot x_2}{E \cdot F_2}$$

$$-A_2 \cdot \left[ A_2 \cdot k_2 \cdot \frac{\sin(k_2 l_2) \cdot \cos(k_2 l_2) + k_2 \cdot l_2}{4} + C_2 \cdot \sin(k_2 l_2) \right] + C_2^2 \cdot l_2 / 2 \quad (3.35)$$

Με τον τρόπο αυτό έχουμε καταλήξει στις δύο εξισώσεις (3.34) και (3.35) με δύο αγνώστους: τα  $A_1$  και  $B_1$ .

Πριν προχωρήσουμε όμως σε περαιτέρω μαθηματική ανάλυση θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και στις δύο εξισώσεις ο φορτιστικός συντελεστής  $k_2$  εμπεριέχεται σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις (sine, cosine, tangent). Επιπλέον, το  $k_2$  εκφράζεται μέσω του συντελεστή  $C_1$ ,

$$S_2 = -S_1 \cdot C_1 = -S_1 \cdot \frac{\mu\sqrt{l_1'}}{\sqrt{\alpha}} \cdot (A_1 \cdot J_{a,0} + B_1 \cdot Y_{a,0}) + S_1 \cdot \left( \frac{\mu^2 \cdot l_1'}{C^* \cdot a^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \cdot (A_1 \cdot J_{a,1} + B_1 \cdot Y_{a,1}),$$

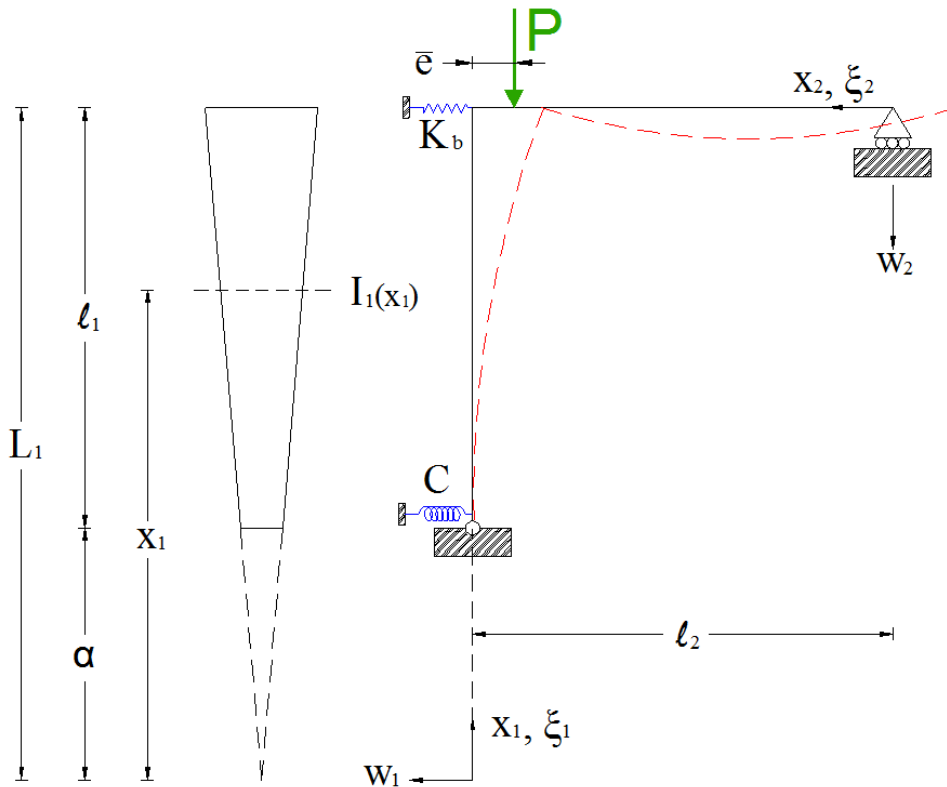
στον οποίον εμπριέχονται οι άγνωστες σταθερές  $A_1$ ,  $B_1$ . Ακόμα, ο όρος  $A_2^2$  (σχ. 3.35) οδηγεί σε μη γραμμική συσχέτιση των  $A_1$ ,  $B_1$ . Από τα παραπάνω καταλήγουμε ότι τα μη γραμμικά συστήματα  $2 \times 2$  επιλύονται μόνο μέσω επαναληπτικών διαδικασιών.

Το τελευταίο σε συνδυασμό με το ήδη υπάρχον δυσεπίλυτο σύστημα (εξαιτίας των συναρτήσεων Bessel κατά κύριο λόγο), ενισχύουν την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Επιπλέον, λόγω του μεγάλου αριθμού επαναληπτικών διαδικασιών που ακολουθούνται δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τον βαθμό αξιοπιστίας που θα έχουν τα τελικά αποτελέσματα. Για τους λόγους αυτούς παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο μία τροποποίηση του φυσικού προσομοιώματος η οποία διευκολύνει την εξαγωγή της εξίσωσης λυγισμού. Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων κρίνεται στο τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας.

### 3.2.2 Απλοποίηση του Προβλήματος

Με σκοπό την άμεση αντιμετώπιση του προβλήματος κρίνεται αναγκαία η υιοθέτηση μιας απλοϊκότερης προσομοίωσης, της οποίας τα αποτελέσματα θα πρέπει να πλησιάζουν με μεγάλη προσέγγιση αυτά της πραγματικής συμπεριφοράς του πλαισίου με περιορισμένη μετάθεση.

Η ευρεσιτεχνία που επιλέγεται σ' αυτό το σημείο ξεπερνά τη δυσκολία του διβάθμιου συστήματος. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτό αφορά απλώς το σημείο τοποθέτησης του μετακινησιακού ελατηρίου το οποίο πλέον συνδέεται στον κόμβο δοκού υποστυλώματος, με αποτέλεσμα να εξαλείφει την καταπόνηση της δοκού σε αξονική δύναμη.



Σχήμα 3.4

Οι εξισώσεις ισορροπίας που περιγράφουν το σύστημα είναι οι εξής.

Γεωμετρικές Συνθήκες (Κινηματικές):

- Συνοριακές  $w_1(a) = w_2(0) = \xi_1(a) = 0$
- Συνέχειας  $w_1(L_1) = \xi_2(l_2), \xi_1(L_1) = -w_2(l_2), w_1'(L_1) = w_2'(l_2)$

(3.36)

Φυσικές Συνθήκες:

✚ Συνοριακές

$$\xi_2'(0) + \frac{1}{2} w_2'(0)^2 = 0, \quad -E \cdot I_2 \cdot w_1''(a) + C \cdot w_1'(a) = 0, \quad -E \cdot I_2 \cdot w_2''(0) = 0, \quad (3.37\sim.39)$$

✚ Ισορροπία ροπών στον κόμβο

$$E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{L_1}{a}\right)^3 \cdot w_1''(L_1) + E \cdot I_2 \cdot w_2''(l_2) + P \cdot e = 0 \quad (3.40)$$

✚ Ισορροπία κατακόρυφων δυνάμεων

$$E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] + E \cdot I_2 \cdot w_2'''(l_2) + P = 0 \quad (3.41)$$

✚ Ισορροπία οριζοντίων δυνάμεων

$$E \cdot F_1(L_1) \cdot \left[ \xi_1'(L_1) + \frac{1}{2} w_1'(L_1)^2 \right] \cdot w_1'(L_1) - E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{L_1}{a} \right)^3 \cdot w_1'''(L_1) - 3E \cdot I_1 \cdot \frac{L_1^2}{a^3} \cdot w_1''(L_1) + K_b \cdot w_1(L_1) = 0 \quad (3.42)$$

Συνεχίζοντας με την επίλυση του συστήματος καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για την εξαγωγή των βελών κάμψεως. Δεδομένης της εξοικείωσης με την επίλυση των συστημάτων παρουσιάζονται αμέσως τα αποτελέσματα.

Βέλος κάμψεως υποστυλώματος

$$w_1(x_1) = A_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselJ \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + B_1 \cdot \sqrt{x_1} \cdot BesselY \left( 1, 2\mu \sqrt{\frac{l_1}{x_1}} \right) + C_1 \cdot x_1 + D_1$$

$$A_1 = \frac{\frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1}}{\frac{\sqrt{\frac{L_1}{a}} \cdot J_1 \cdot C^* \cdot K_b - J_{a,1} \cdot C^* \cdot K_b - (S_1 - K_b \cdot l_1) \cdot \left( J_{a,0} \cdot C^* \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} - \frac{J_{a,1} \cdot \mu^2 \cdot l_1'}{a^2} - \frac{J_{a,1} \cdot C^*}{a} \right)}{-\sqrt{\frac{L_1}{a}} \cdot Y_1 \cdot C^* \cdot K_b + Y_{a,1} \cdot C^* \cdot K_b + (S_1 - K_b \cdot l_1) \cdot \left( Y_{a,0} \cdot C^* \frac{\mu \cdot \sqrt{l_1'}}{a} - \frac{Y_{a,1} \cdot \mu^2 \cdot l_1'}{a^2} - \frac{Y_{a,1} \cdot C^*}{a} \right)} + \frac{J_1}{Y_1}}$$

$$B_1 = \frac{P \cdot e + (S_1 - P) \cdot l_2}{S_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot A_1$$

$$C_1 = -K_b \cdot \frac{A_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_1 + B_1 \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1 + D_1}{K_b \cdot L_1 - S_1}$$

$$D_1 = \frac{-A_1 \cdot \left( \sqrt{a} \cdot J_{a,1} + \frac{K_b \cdot \sqrt{L_1} \cdot J_1}{S_1 - K_b \cdot L_1} \cdot a \right) - B_1 \cdot \left( \sqrt{a} \cdot Y_{a,1} + \frac{K_b \cdot \sqrt{L_1} \cdot Y_1}{S_1 - K_b \cdot L_1} \cdot a \right)}{1 + \frac{K_b \cdot a}{S_1 - K_b \cdot L_1}}$$

Βέλος κάμψεως δοκού

$$w_2(x_2) = A_2 \cdot x_2^3 + B_2 \cdot x_2^2 + C_2 \cdot x_2 + D_2$$

$$A_2 = \frac{S_1 - P}{6E \cdot I_2}$$

$$C_2 = C_1 + \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \left[ J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot J_0 + \frac{B_1}{A_1} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \right] - \frac{S_1 - P}{2E \cdot I_2} \cdot l_2^2$$

$$B_2 = D_2 = 0$$

Να σημειωθεί ότι επαληθεύθηκαν οι παραπάνω λύσεις με τις αντίστοιχες της παραγράφου (3.1.1) για μηδενισμό της σταθεράς του μετακινησιακού ελατηρίου

### 3.2.3 Εξίσωση Λυγισμού

Η εξίσωση λυγισμού θα προκύψει κατά τα γνωστά από την εξίσωση:

$$\xi_1(L_1) = -w_2(L_2)$$

#### Αδιαστατοποίηση

Στα μέχρι τώρα κεφάλαια δεν έχει γίνει μόνο η αδιαστατοποίηση της σταθεράς του μετακνησιακού ελατηρίου:

$$K' = \frac{K_b \cdot l_1^3}{E \cdot I_1(L_1)} = K \cdot l_1^3$$

, ενώ θυμίζουμε και την αδιάστατη σταθερά του στροφικού ελατηρίου:

$$C' = C \cdot l_1 / (E \cdot I_1) = C^* \cdot l_1$$

Διαιρώντας το βέλος στην κορυφή του υποστυλώματος με το μήκος  $l_1$ , παίρνουμε

$$w_1 \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot J_1 + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot Y_1 + C_1 \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) + \frac{D_1}{l_1} \quad (3.43)$$

Με τον τρόπο αυτό οι παράγοντες των βελών κάμψεως που περιέχουν τις σταθερές των ελατηρίων τροποποιούνται ως εξής:

$$\frac{A_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot (1 + 1/l_1') \cdot Y_1}$$

, όπου

$$Z = \frac{\sqrt{l_1' + 1} \cdot J_1 \cdot C' \cdot K' - J_{a,1} \cdot C' \cdot K' - \left[ k^2 \cdot \left( \frac{l_1' / 2 + 1}{l_1' + 1} \right)^3 - K' \right] \cdot (J_{a,0} \cdot C' \cdot \mu \cdot l_1'^{3/2} - J_{a,1} \cdot \mu^2 \cdot l_1'^3 - J_{a,1} \cdot C' \cdot l_1')}{-\sqrt{l_1' + 1} \cdot Y_1 \cdot C' \cdot K' + Y_{a,1} \cdot C' \cdot K' + \left[ k^2 \cdot \left( \frac{l_1' / 2 + 1}{l_1' + 1} \right)^3 - K' \right] \cdot (Y_{a,0} \cdot C' \cdot \mu \cdot l_1'^{3/2} - Y_{a,1} \cdot \mu^2 \cdot l_1'^3 - Y_{a,1} \cdot C' \cdot l_1')} + \frac{J_1}{Y_1}$$

$$\frac{B_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{\beta^2 \cdot \bar{e} + (k^2 - \beta^2) \cdot r}{k^2 \cdot (1 + 1/l_1') \cdot Y_1} - \frac{J_1}{Y_1} \cdot \frac{A_1}{\sqrt{L_1}}$$

$$C_1 = -K' \cdot \frac{\frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot J_1 + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot Y_1 + \frac{D_1}{L_1}}{K' \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) - k^2 \cdot \left( \frac{l_1' / 2 + 1}{l_1' + 1} \right)^3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right)$$

$$\frac{D_1}{l_1} = \frac{\left( \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot J_1 + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot Y_1 \right) \cdot \frac{K' \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot \frac{1}{l_1'}}{k^2 \cdot \left( \frac{l_1'/2+1}{l_1'+1} \right)^3 - K' \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right)} + \sqrt{\frac{1}{l_1'} \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right)} \cdot \left( \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot J_{a,1} + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot Y_{a,1} \right)}{-1 - \frac{K'/l_1'}{k^2 \cdot \left( \frac{l_1'/2+1}{l_1'+1} \right)^3 - K' \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right)}}$$

Κατά όμοιο τρόπο το αδιάστατο βέλος της δοκού στο σημείο του κόμβου είναι

$$w_2(1) = \frac{\beta^2 - k^2}{3} \cdot \rho \cdot r^2 + C_1 + \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1'}{L_1}} \cdot J_0 \right) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \mu \sqrt{\frac{l_1'}{L_1}} \cdot Y_0 \right) \quad (3.44)$$

Τέλος, για τις ανάγκες του προγραμματισμού απαιτούνται οι σχέσεις του βέλους κάμψεως στις θέσεις  $1/l_1'$  και  $1+1/l_1'$  καθώς και η σχέση του αδιάστατου εξωτερικού φορτίου  $\beta^2$  με το αδιάστατο

βέλος κάμψεως στην κεφαλή του στύλου  $w_1 \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right)$ :

$$w_1' \left( \frac{1}{l_1'} \right) = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \sqrt{l_1'+1} \cdot \left( J_{a,1} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot J_{a,0} \right) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \sqrt{l_1'+1} \cdot \left( Y_{a,1} - \mu \sqrt{l_1'} \cdot Y_{a,0} \right) + C_1 \quad (3.45)$$

$$w_1' \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) = \frac{A_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( J_1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}} \cdot J_0 \right) + \frac{B_1}{\sqrt{L_1}} \cdot \left( Y_1 - \frac{\mu}{\sqrt{1+\frac{1}{l_1'}}} \cdot Y_0 \right) + C_1 \quad (3.46)$$

$$\beta^2 = \frac{w \cdot \left\{ k^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{l_1'} \right) \cdot Y_1 \cdot \left[ \frac{K'}{k^2} \cdot \left( \frac{l_1'+1}{l_1'/2+1} \right)^3 - 1 \right] \right\}}{Q \cdot \sqrt{1+\frac{1}{l_1'}} \cdot (\bar{e} - r)} - \frac{r \cdot k^2}{\bar{e} - r} \quad (3.47)$$

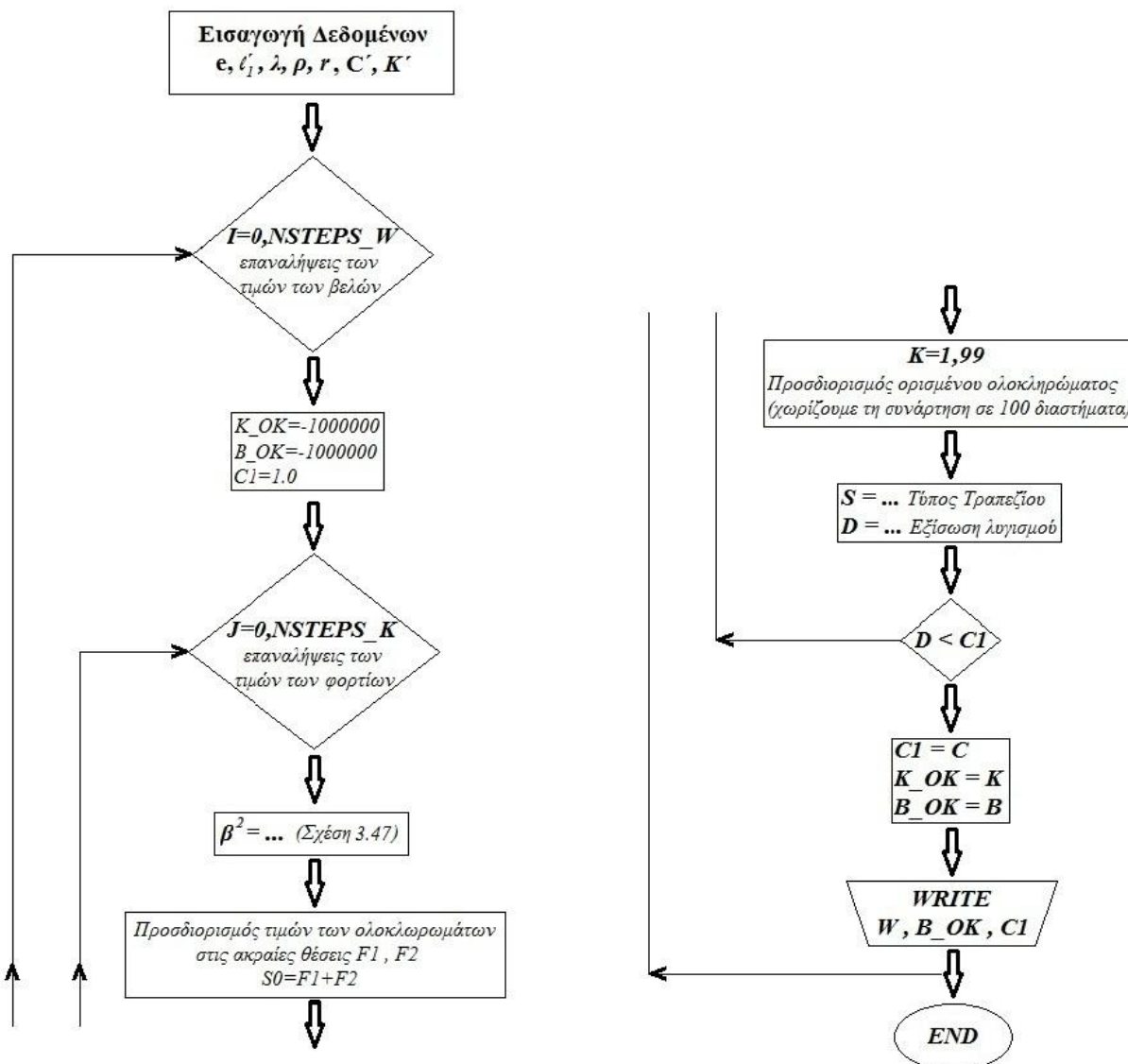
όπου

$$Q = \frac{Y_{a,1}}{\sqrt{l_1'}} - \sqrt{1+\frac{1}{l_1'}} \cdot Y_1 + \left( \frac{J_{a,1}}{\sqrt{l_1'}} - \frac{J_1 \cdot Y_{a,1}}{Y_1 \cdot \sqrt{l_1'}} \right) \cdot \frac{1}{Z}$$

Η έκφραση του Z δίνεται στην προηγούμενη σελίδα.

### 3.2.4 Προγραμματισμός

Κατά τα γνωστά, εν συνεχεία, μορφοποιούμε τον κώδικα του προγράμματος. Παρατηρούμε και στο διάγραμμα ροής που επισυνάπτεται παρακάτω έχει προστεθεί η αδιάστατη σταθερά του μετακνησιακού ελατηρίου  $K'$ .



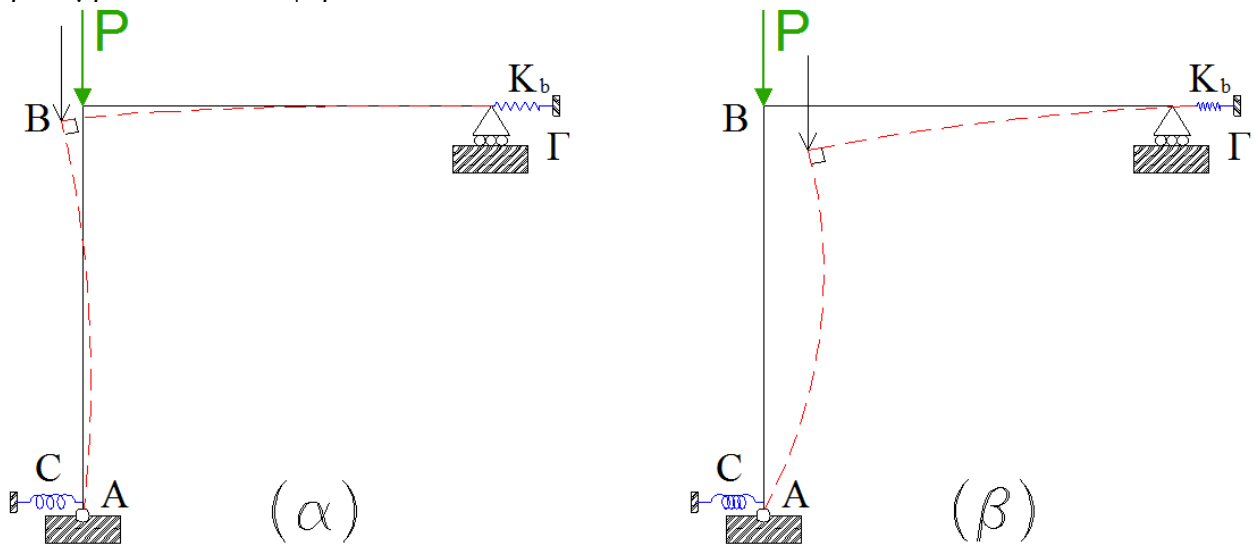
Σχήμα 3.5 Διάγραμμα ροής για τους δρόμους ισορροπίας του βέλους κάμψης

Ο αντίστοιχος αλγόριθμος επισυνάπτεται στο Παράρτημα.

3.2.5 Αποτελέσματα – Διαγράμματα

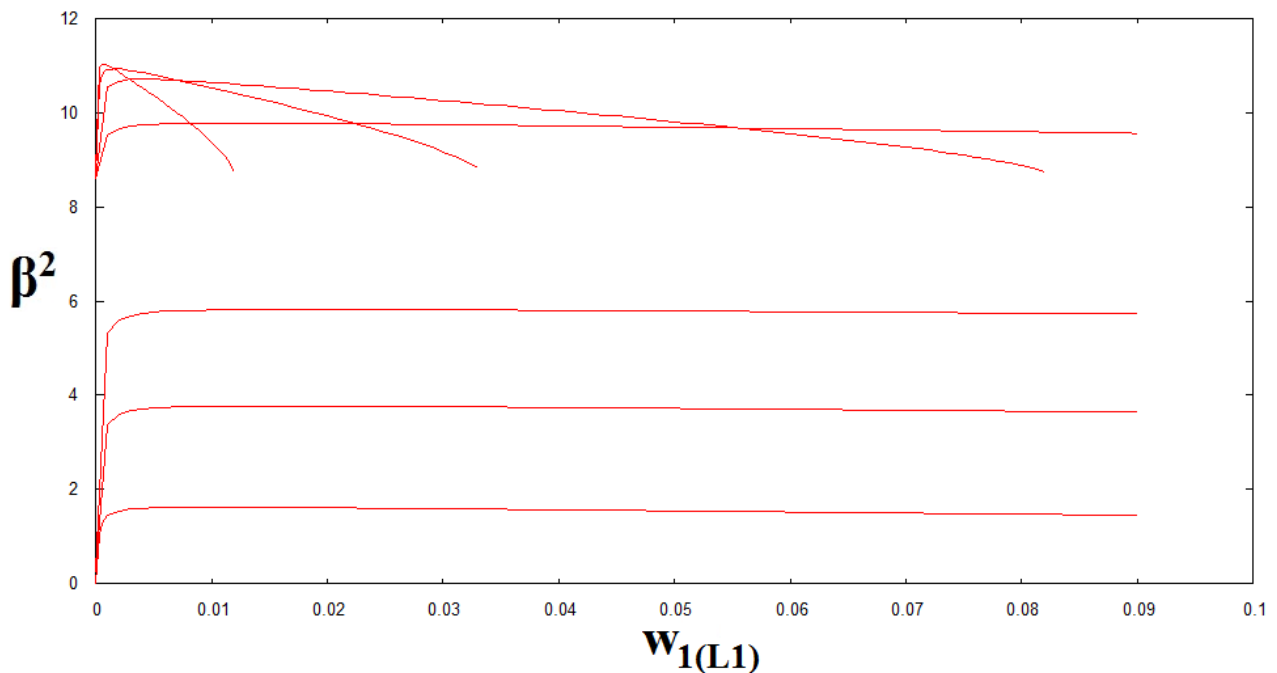
Σ' αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι για να εξάγουμε τους σωστούς δρόμους ισορροπίας που αφορούν μεγάλες τιμές του  $K'$  θα πρέπει το βέλος κάμψεως της κεφαλής του στύλου να παίρνει αρνητικές τιμές. Αυτό καθίσταται σαφές καθώς όσο αυξάνει η τιμή του μετακνησιακού ελατηρίου τόσο ο κόμβος  $\Gamma$  της δοκού γίνεται περισσότερο αμετάθετος και επομένως εμποδίζεται να κινηθεί προς τα αριστερά. Λεπτομερέστερη περιγραφή γίνεται στην παράγραφο 4.4.3, όπου επιβεβαιώνουμε με το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων τα δύο στάδια που επισυνάπτονται στο Σχήμα 3.6: το πρώτο -και πολύ σύντομο- στάδιο (Σχήμα 3.6.α) όπου το βέλος της κεφαλής του στύλου παίρνει πολύ μικρές αλλά θετικές τιμές και το δεύτερο στάδιο στο οποίο το πλαίσιο χάνει την ευστάθειά του κινούμενο προς τα δεξιά (Σχήμα 3.6.β).

Η παραπάνω παρατήρηση μάς επιβεβαιώνει την αρχική θέση ότι η δοκός, αφού βραχύνεται αξονικά, παραλαμβάνει θλιπτικό φορτίο.

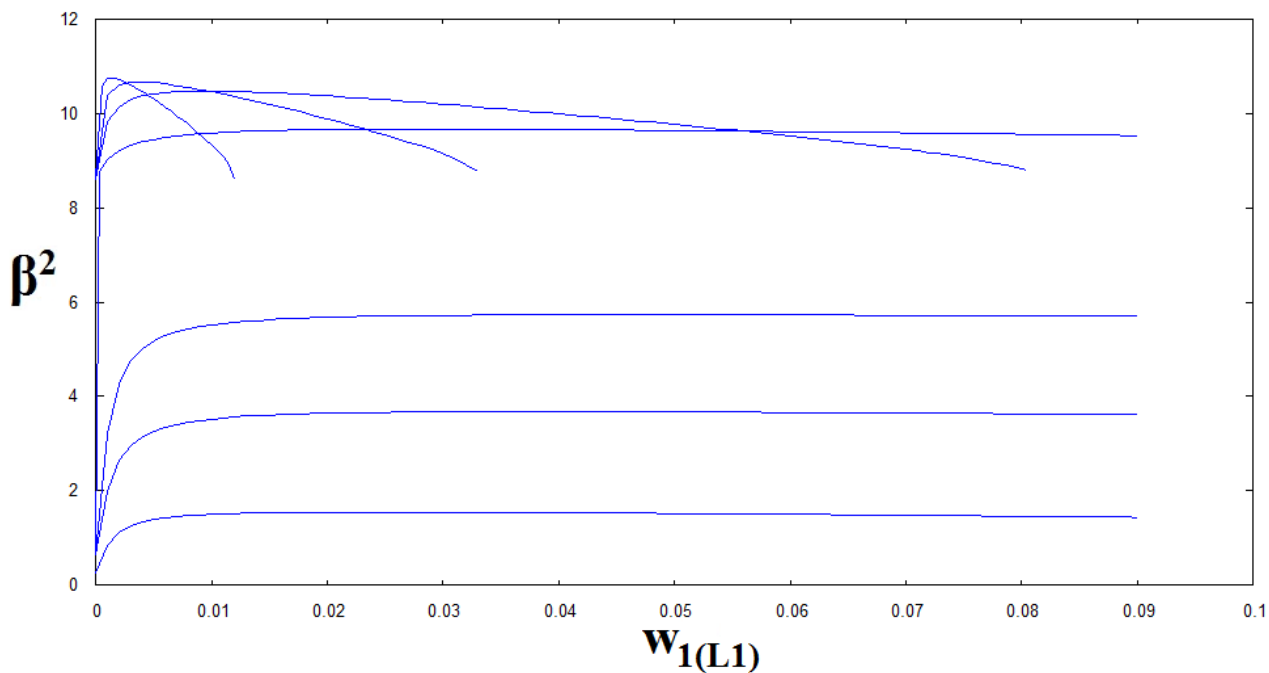


Σχήμα 3.6

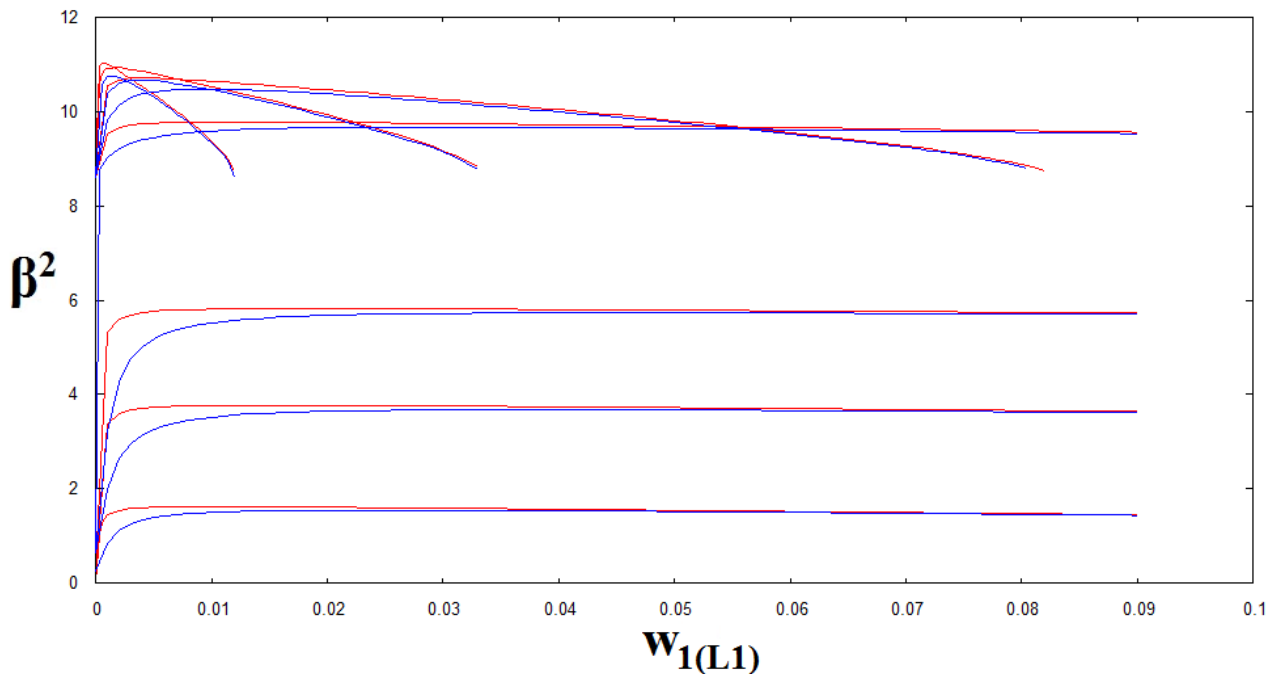
$l_1' = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 100, K' = 0 - 1 - 2 - 5 - 10 - 20 - 50$



✚  $l_1' = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 40, K' = 0 - 1 - 2 - 5 - 10 - 20 - 50$



✚  $l_1' = 1, r = 1.0, \rho = 1.0, \lambda = 100, K' = 0 - 1 - 2 - 5 - 10 - 20 - 50$   
 $+ \lambda = 40, K' = 0 - 1 - 2 - 5 - 10 - 20 - 50$



Προφανώς, στα παραπάνω σχήματα, τα διαγράμματα με τη μηδενική δυσκαμψία ελατηρίου αντιστοιχούν στους δρόμους ισορροπίας με τα μικρότερα φορτία λυγισμού και αντίστοιχα εκείνα με τη μέγιστη δυσκαμψία αντιστοιχούν στους δρόμους ισορροπίας με τα μεγαλύτερα κρίσιμα φορτία.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

Οποιαδήποτε θεωρία αναπτύσσεται είναι απαραίτητο να διαπιστωθεί αν προσεγγίζει επαρκώς την πραγματική συμπεριφορά της κατασκευής. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αυτό γίνεται έπειτα από την προσομοίωση φορέων με τη χρήση λογισμικών αρκετά καλής ακρίβειας, του Sap2000 και του Adina. Το πρώτο επιλέχθηκε λόγω της ευκολίας του σχεδιασμού, ώστε να εξάγουμε γρηγορότερα αποτελέσματα σε περιπτώσεις όπου ήταν αναγκαίο, και το δεύτερο λόγω της ικανότητας εξαγωγής διαγραμμάτων της μη γραμμικής ανάλυσης με σκοπό να γίνουν οι αντίστοιχες συγκρίσεις με τους θεωρητικούς δρόμους ισορροπίας.

Ακόμα, μπορεί να διατυπωθεί με μεγάλη ασφάλεια ότι εκτός του ελέγχου που γίνεται στα θεωρητικώς εξαγόμενα αποτελέσματα, ισχύει και το αντίστροφο: μέσω της διαδικασίας των αριθμητικών αναλύσεων που ακολουθούν είμαστε σε θέση να κρίνουμε αν τα εμπορικά προγράμματα μάς δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

#### 4.1 Επιλογή Πλαισιακών Φορέων

Όπως αναφέρουμε στο πρώτο κεφάλαιο (§ 1.3.1), σύμφωνα με τον κυβικό νόμο μεταβολής της δυσκαμψιάς, η μεγαλύτερη ακρίβεια της μεθόδου επιτυγχάνεται όταν ισχύει η εξίσωση των λόγων:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{L_1}{a}$$

, όπου  $h_1$  και  $h_2$  τα ύψη των ακραίων διατομών διπλού ταυ μετρούμενα από τα μέσα των πελμάτων.

Παρά ταύτα, προτιμήθηκε να γίνουν οι συγκρίσεις με την συντηρητικότερη παραδοχή του κυβικού νόμου μεταβολής, όπου ισχύουν οι ισότητες:

$$\frac{h_{ολ.2}}{h_{ολ.1}} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{L_1}{a}$$

Με τον τρόπο αυτό, γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι τα κρίσιμα φορτία είναι κατάτι μικρότερα από τα πραγματικά, θα διαπιστώσουμε πόσο υπέρ της ασφαλείας διαστασιολογούμε, με δεδομένο ότι η προσομοίωση των φορέων στα δύο λογισμικά πλησιάζει παραπάνω από αρκετά την πραγματική συμπεριφορά.

Τα γεωμετρικά και αδρανειακά στοιχεία των διατομών επιλέχθηκαν με σκοπό να ελέγξουμε και να συγκρίνουμε φορείς με μεγάλο εύρος των αδιάστατων μεγεθών:

$$l_1' = \frac{l_1}{a}, \quad r = \frac{l_2}{l_1}, \quad \rho = \frac{I_m}{I_2}, \quad \lambda_1^2 = \frac{l_1^2 \cdot F_1(L_1)}{I_m}$$

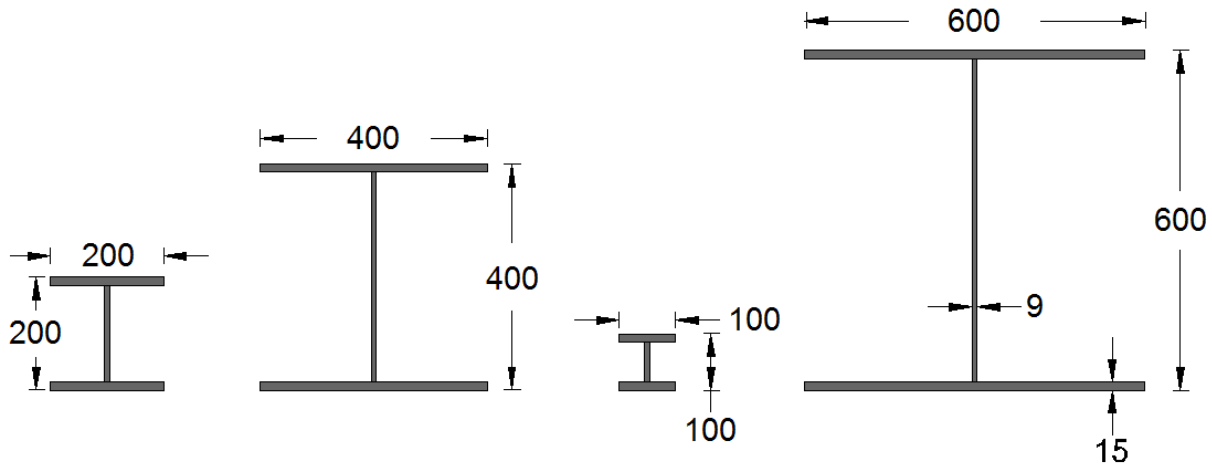
Συγκεκριμένα οι διατομές που επιλέχθηκαν επισυνάπτονται στον παρακάτω πίνακα:

Διατομή	Ροπή Αδρανείας ( $\times 10^{-4} \text{ m}^4$ )	
	άξονας y	άξονας z
200	0,55130	0,20010
400	4,82900	1,60000
100	0,05732	0,02504
600	16,79000	5,40000

*Πίνακας 4.1 Αδρανειακά μεγέθη των διατομών*

Το όνομα της διατομής μάς δίνει τη διάσταση του πλάτους του πέλματος καθώς και του συνολικού ύψους της διατομής διπλού ταυ. Ακόμη, τα πάχη των διατομών είναι:

$$t_f = 30mm, \quad t_w = 9mm.$$



Σχήμα 4.1

Αναφορικά με τη γεωμετρία του πλαισίου, επιλέχθηκαν 6 περιπτώσεις φορέων με διαφορετικές διατομές στην αρχή και στο τέλος κάθε μέλους (συνεπώς διαφορετικοί λόγοι  $\rho$  και  $\lambda_1$ ), για κάθε έναν από τους οποίους εκτελέστηκαν 3 περιπτώσεις του λόγου μηκών:  $r = 1.0 ; 0.5 ; 2.0$ .

Το ύψος του στύλου θα είναι 6,0 m για όλες τις περιπτώσεις πλην της τελευταίας (περίπτωση 6) όπου επιλέχθηκε ύψος 3,0 m.

Οι πλαισιακοί φορείς επισυνάπτονται στον πίνακα που ακολουθεί, όπου  $F_1(L_1)$  το εμβαδόν της κεφαλής του στύλου,  $I_2$  η ροπή αδρανείας της αντίστοιχης δοκού και  $I_m$  η ροπή στο μέσον του υποστρώματος. Στη στήλη των περιπτώσεων (στήλη 1) αναφέρεται με τα δύο πρώτα μεγέθη η διατομή του πόδα και της κεφαλής του υποστρώματος, αντίστοιχα, και με το τρίτο η (σταθερή) διατομή της δοκού (μονάδες σε μέτρα).

Περιπτώσεις	$F_1(L_1)$	$I_2 (x10^{-4})$	άξονας y			άξονας z		
			$I_m (x10^{-4})$	$\rho$	$\lambda_1$	$I_m (x10^{-4})$	$\rho$	$\lambda_1$
1.200-400-200	0,0153	0,5513	1,86064	3,375	54,4084	0,67534	1,22499	90,3101
2.100-400-200	0,0153	0,5513	0,89563	1,62457	78,4213	0,39125	0,70967	118,6506
3.200-400-400	0,0153	4,829	1,86064	0,38531	54,4084	0,67534	0,13985	90,3101
4.100-600-200	0,0231	0,5513	2,45760	4,45782	58,1704	1,0736	1,94738	88,0112
5.100-600-600	0,0231	16,79	2,45760	0,14637	58,1704	1,0736	0,06394	88,0112
6.200-400-200	0,0153	0,5513	1,86064	3,375	27,2042	0,67534	1,22499	45,1551

Πίνακας 4.2 Περιπτώσεις πλαισιακών φορέων

Παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.2 το (μεγάλο) εύρος τιμών που επιτυγχάνεται σχετικά με τα μεγέθη:  $\rho$  ( 0,06 έως 4,46 ) και  $\lambda_1$  ( 27 έως 119 ).

Επιπλέον, το  $l_1'$  παίρνει τις τιμές 1 (περιπτώσεις 1, 2, 6), 2 (περίπτωση 3) και 5 (περιπτώσεις 4, 5).

Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να διακρίνουμε ότι το  $\rho$  παίρνει τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή (για τον ίδιο άξονα) με ταυτόχρονα ίδιες τιμές λυγηρότητας και αναλογίας μηκών  $l_1'$  (περιπτώσεις 4 και 5). Ακόμα, το μέγεθος  $l_1'$  παίρνει ίδιες τιμές για αντίστοιχα μικρή και σχετικώς μεγάλη τιμή  $\rho$  (περιπτώσεις 1 και 3). Τέλος, αναφορικά με την περίπτωση 6 επιλέχθηκε το ύψος στύλου 3 m με σκοπό να επιτύχουμε μικρότερες τιμές λυγηρότητας.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι μεγάλες μεταβολές στην δυσκαμψία της διατομής μέλους υπό θλίψη και κάμψη δεν είναι πάντα δεκτές. Για παράδειγμα, στις περιπτώσεις 4 και 5 – όπου το υποστύλωμα «ξεκινάει» από τη διατομή 100 και «τερματίζει» με τη διατομή 600 – ενδέχεται να υπάρξει κατάρρευση του φορέα λόγω πλαστικοποίησης της διατομής του πόδα (στην περίπτωση φυσικά όπου έχουμε στροφική δυσκαμψία στον πόδα) πολύ νωρίτερα από το κρίσιμο φορτίο κατάρρευσης λόγω λυγισμού, οπότε μιλάμε για μη γραμμικότητα υλικού – κάτι το οποίο δεν μας απασχολεί στην παρούσα εργασία.

Επιπλέον, στις περιπτώσεις 3 και 5 παρατηρούμε ότι η δοκός αποτελείται από σταθερή διατομή ίδιων χαρακτηριστικών με αυτήν στην κεφαλή του στύλου, συνεπώς η δυσκαμψία του ζυγώματος είναι σίγουρα μεγαλύτερη από αυτήν του στύλου (μικρές τιμές  $\rho = I_m / I_2$ ). Με άλλα λόγια στην ανάλυση του εντατικού φορέα δεν πληρείται ο ικανοτικός σχεδιασμός.

Με τις τελευταίες παρατηρήσεις τονίζεται ότι ο σχεδιασμός μελών με μεταβλητή διατομή χρήζει μεγαλύτερης προσοχής από όλα τα στάδια της ανάλυσης. Στην συγκεκριμένη εργασία εκλέχθηκαν οι παραπάνω «τολμηρές» περιπτώσεις πλαισιακών φορέων απλώς για την επίτευξη συγκριτικής μελέτης μεγάλου εύρους των παραμέτρων. Για την περίπτωση μικρών τιμών  $\rho$  θα γίνει περαιτέρω αναφορά στην παράγραφο 4.4.1.

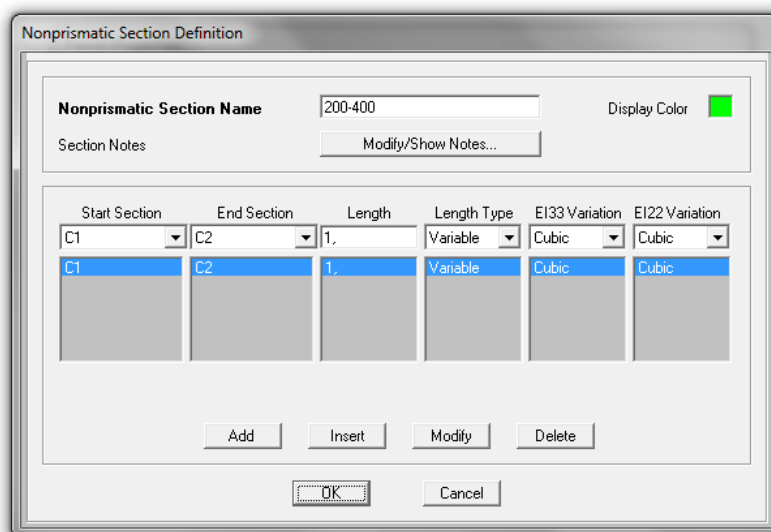
Πριν από την επισύναψη των αποτελεσμάτων ακολουθούν συνοπτικά οι τρόποι με τους οποίους έγιναν οι προσομοιώσεις στα δύο λογισμικά που χρησιμοποιήθηκαν.

## 4.2 Αναλύσεις με το Λογισμικό Sap2000

Οι αναλύσεις με το πρόγραμμα Sap2000 έγιναν με την προσομοίωση του φορέα με στοιχεία δοκού. Το θλιβόμενο στοιχείο (υποστύλωμα) αποτελείται από 50 τμήματα, σχηματίζοντας στοιχεία μήκους περί των 12 cm (για τις περιπτώσεις με ύψος στύλου 6 m) και 6 cm (για την περίπτωση 3 m). Η δοκός αποτελείται από 1 μέλος στις περιπτώσεις των αναλύσεων με μεταθετούς φορείς, καθώς δεν αναλαμβάνει αξονική δύναμη. Στις αναλύσεις των μερικώς μεταθετών φορέων τμήθηκε σε στοιχεία ενός μέτρου.

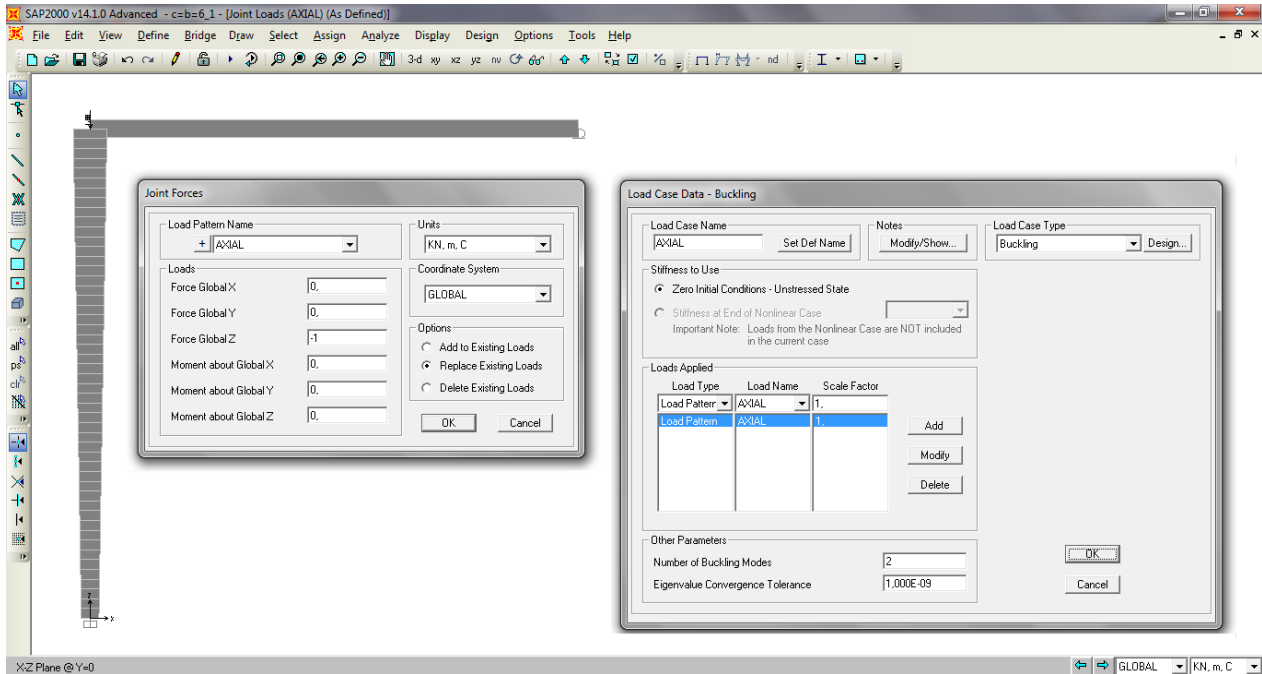
Αφού ορίζονται οι διατομές που χρησιμοποιούνται προχωρούμε στην γεωμετρία του φορέα: για το μέλος του υποστυλώματος έχουμε τη δυνατότητα να εισάγουμε τη μεταβολή ως εξής:

“Define → Section Properties → Frame Sections → Add New Property → Frame Section Property Type: Other”. Επιλέγοντας το εικονίδιο Non Prismatic εμφανίζονται οι επιλογές για τις διατομές αρχής και πέρατος του στοιχείου. Επιλέγουμε Κυβική μεταβολή ροπής αδρανείας περί τους άξονες y και z.



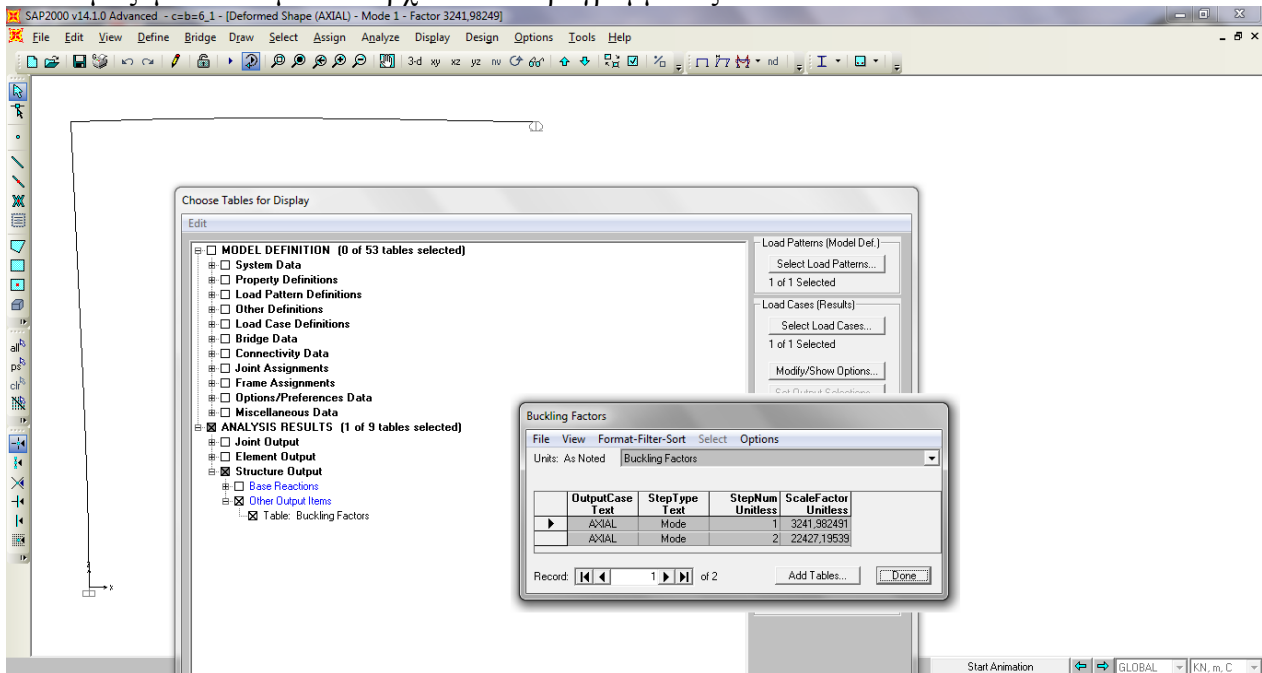
Εικόνα 4.1 Εισαγωγή μεταβλητής διατομής

Ο έλεγχος σε λυγισμό ορίζεται μέσω του “Load Case → Load Case Type → Buckling”, αφού πριν έχουμε ορίσει στον κόμβο του πλαισίου κατακόρυφο φορτίο (με φορά βαρύτητας) ίσο με μονάδα. Επιλέγεται μέτρο ελαστικότητας  $E = 210 \times 10^6$  KPa ( $\nu = 0.3$ ) και μηδενικό βάρος υλικού. Στην εικόνα που ακολουθεί φαίνονται η επιβολή του φορτίου καθώς και ο τύπος φόρτισης. Το συγκεκριμένο μοντέλο αναφέρεται στην περίπτωση φορέα 1.



Εικόνα 4.2 Εισαγωγή φόρτισης

Η ανάλυση έγινε με τους βαθμούς ελευθερίας που αναφέρονται στο επίπεδο του πλαισίου (XZ), δηλαδή μετακινήσεις κατά x και z και στροφή κατά y. Τα αποτελέσματα εξάγονται μέσω της επιλογής “Display → Show Tables → Analysis Results → Structure Output → Buckling Factors”. Οι ιδιομορφές εξάλλου φαίνονται αμέσως μετά την ανάλυση με τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία στο πλαισίο μαζί με το όνομα του αρχείου του προγράμματος.



Εικόνα 4.3 Εξαγωγή αποτελεσμάτων

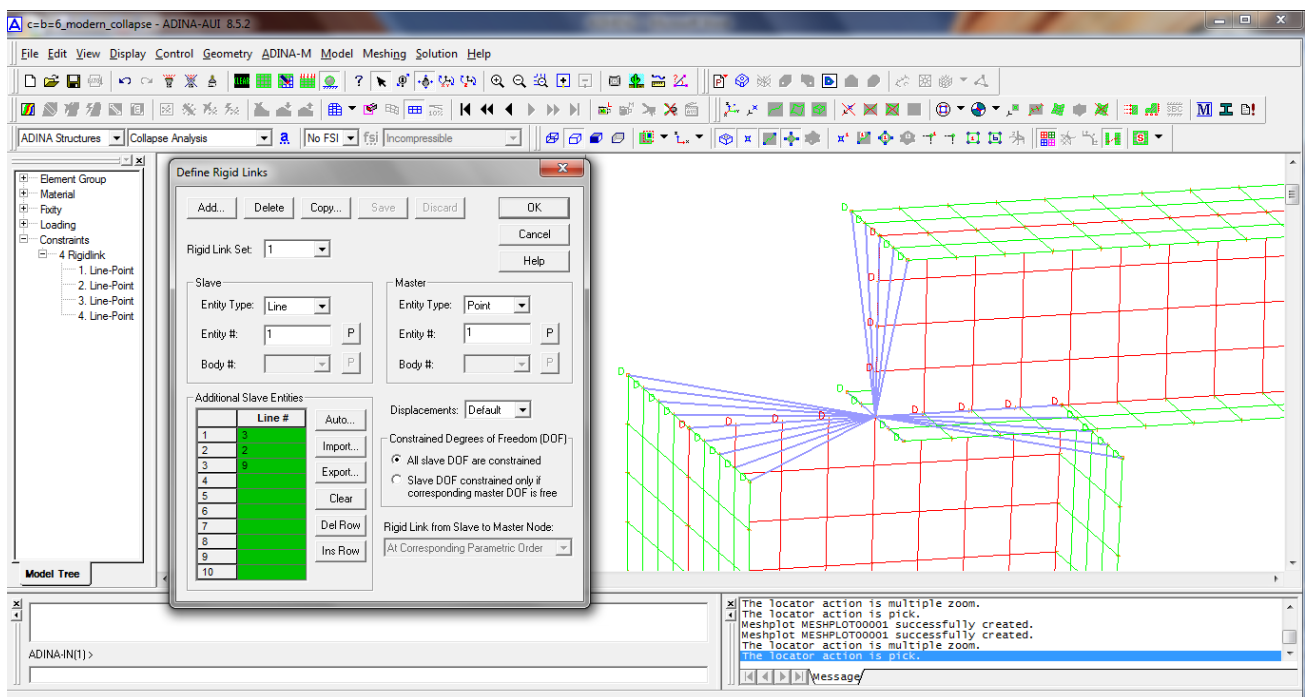
### 4.3 Αναλύσεις με το Λογισμικό ADINA

Οι αναλύσεις με το λογισμικό Adina έγιναν με επιφανειακά στοιχεία (shell elements) με σκοπό την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας. Το μήκος των πεπερασμένων στοιχείων είναι 5 cm, από εμπειρία του προγράμματος και για τα δεδομένα μήκη των μελών. Ως βαθμοί ελευθερίας, ομοίως με προηγουμένως, επιλέγονται οι μετακινήσεις κατά x και z και η στροφή κατά y, ενώ για την ορθότερη επίλυση του προβλήματος εισάγουμε μεγάλες μετατατοπίσεις / στροφές (και μικρές παραμορφώσεις):

Control → Analysis Assumptions → Kinematics → Displacements/Rotations : Large.

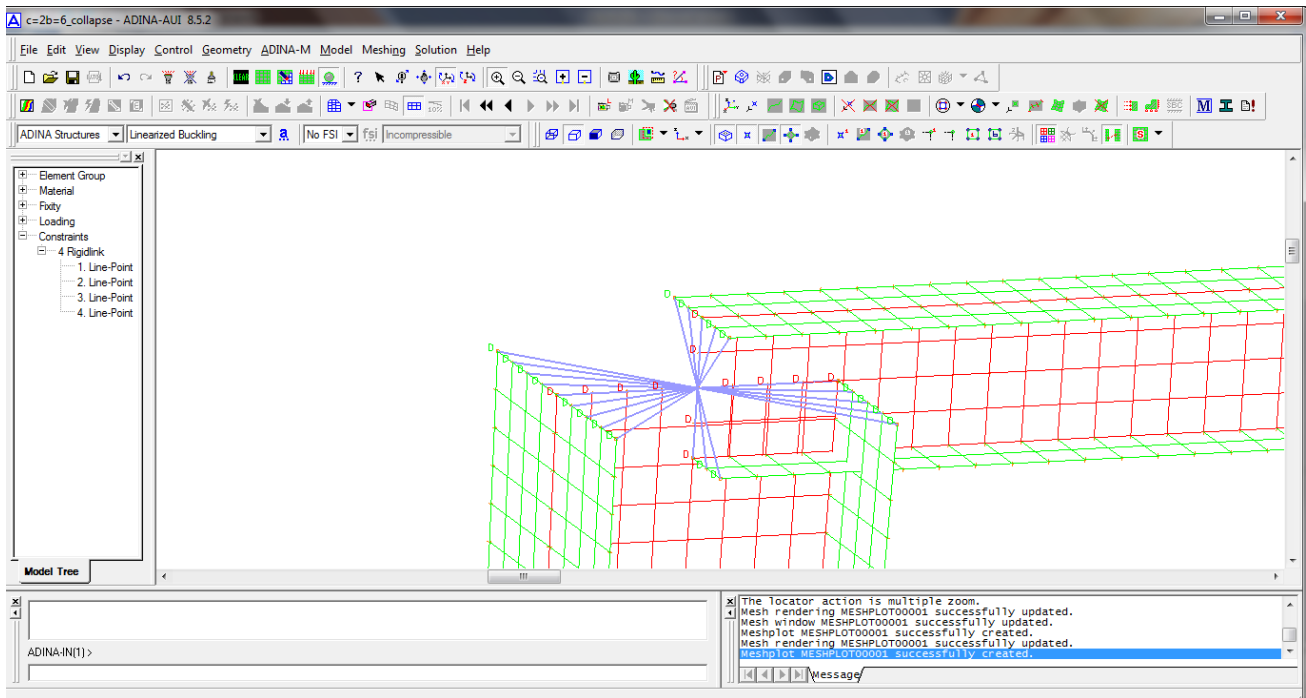
Με το λογισμικό αυτό έγιναν δύο τύποι αναλύσεων, η γραμμική και η μη γραμμική ανάλυση λυγισμού, Linearized Buckling και Collapse Analysis, αντίστοιχα. Με τον τρόπο αυτό έχουμε την ευκαιρία να συγκρίνουμε και τα κρίσιμα φορτία που προκύπτουν από τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας. Απ' την άλλη το "collapse analysis" μάς δίνει και τον μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας. Για τον χάλυβα επιλέχθηκε υλικό ελαστικό ισοτροπικό με μέτρο ελαστικότητας  $E = 210 \times 10^6$  MPa.

Ο κόμβος απασχόλησε ιδιαίτερα το κομμάτι της προσομοίωσης, καθώς επιλέχθηκε να σχεδιασθεί υπό περισσότερο πραγματικές συνθήκες. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε και στην εικόνα που ακολουθεί, προκειμένου να συνδέσουμε τα δύο μέλη με rigid links, ορίζουμε ως master το σημείο στο μέσον (κέντρο βάρους) του υποστύλωματος και slave τις γραμμές που ορίζουν τα πέλματα και τον κορμό. Αναλόγως και για τη δοκό με τη διαφορά ότι ως master του κόμβου επιλέγεται το μέσον του κάτω πέλματος (ίδιο σημείο και για τα δύο μέλη). Έτσι, το ζύγωμα εδράζεται ολόκληρο επάνω στο υποστύλωμα δημιουργώντας στερεό κόμβο ο οποίος δεν επιτρέπει ελαστική σύνδεση (συνθήκη ίσων στροφών). Σε περίπτωση που ορίζουμε ως master το κέντρο βάρους της δοκού και slaves τα περιφερειακά τμήματα, η ανάλυση δεν προχωρεί εξαιτίας του ότι το ίδιο σημείο (κέντρο βάρους υποστύλωματος) δεν μπορεί να λειτουργεί ως master και slave ταυτόχρονα.



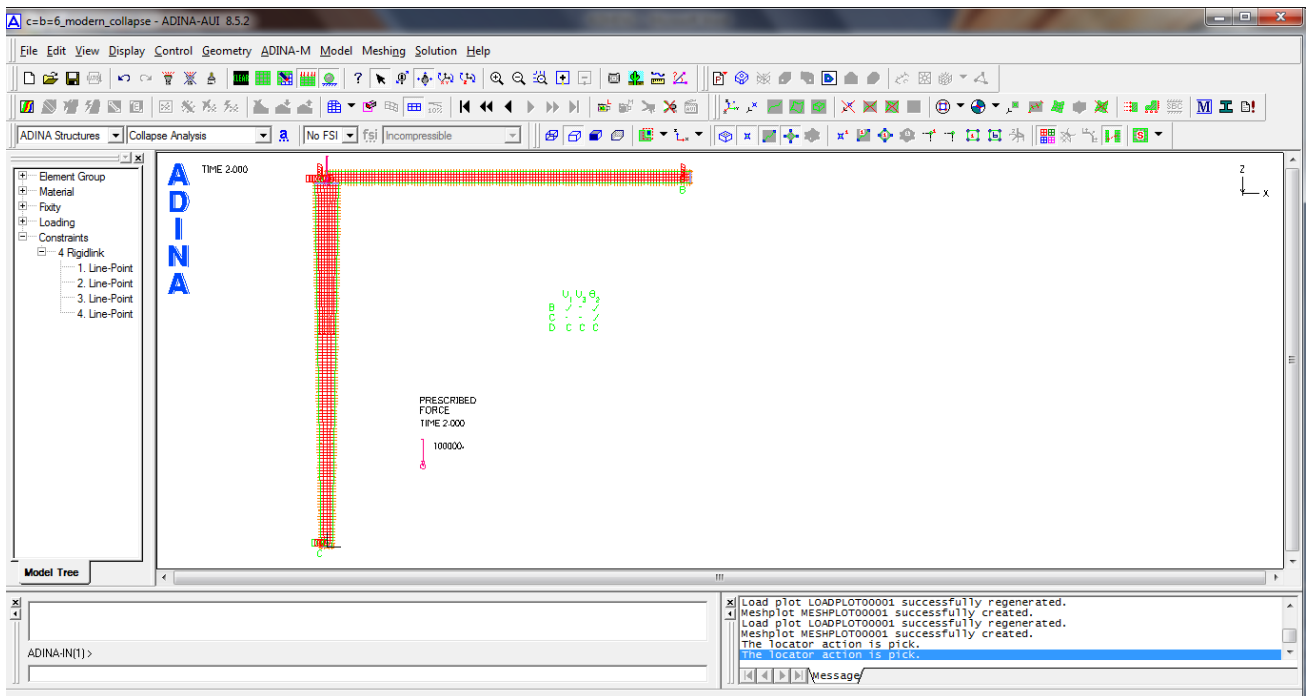
Εικόνα 4.4 Προσομοίωση κόμβου

Με τη διαδικασία που περιγράφεται προηγουμένως αποφεύγεται η ελλειπής προσομοίωση της επόμενης εικόνας. Παρ’ όλα αυτά, όπως διαπιστώθηκε, ο κάτωθι σχεδιασμός της γεωμετρίας δεν είναι λανθασμένος, καθότι δίνει κρίσιμα φορτία λυγισμού πολύ κοντά στα πραγματικά.



**Εικόνα 4.5** Εναλλακτική προσομοίωση κόμβου

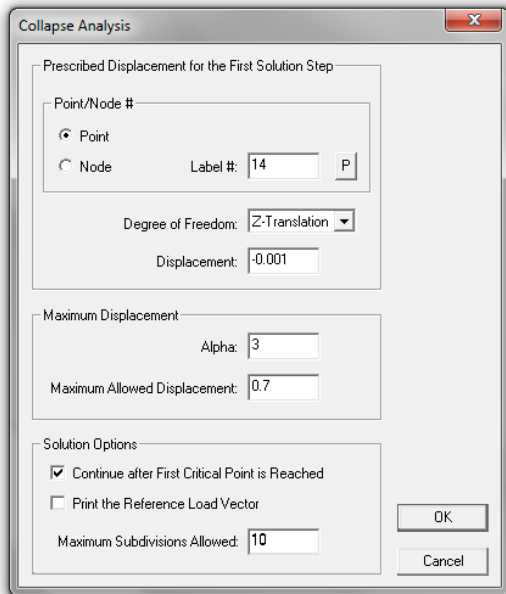
Με τον τρόπο αυτό ο φορέας παίρνει την παρακάτω μορφή.



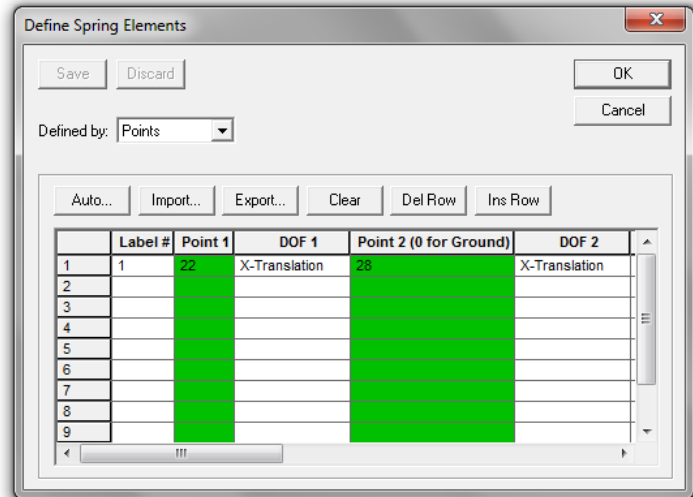
**Εικόνα 4.6** Τελική μορφή του φορέα

Για την περίπτωση της “collapse analysis” γίνεται δίνοντας μία γεωμετρική ατέλεια στο κέντρο βάρους της κεφαλής του υποστυλώματος, συγκεκριμένα κατακόρυφη μετακίνηση προς τα κάτω

κατά 0,001 m (Analysis Options). Επιπλέον, δίνουμε βήμα αναλύσεων 0,025 (Control → Time Step).

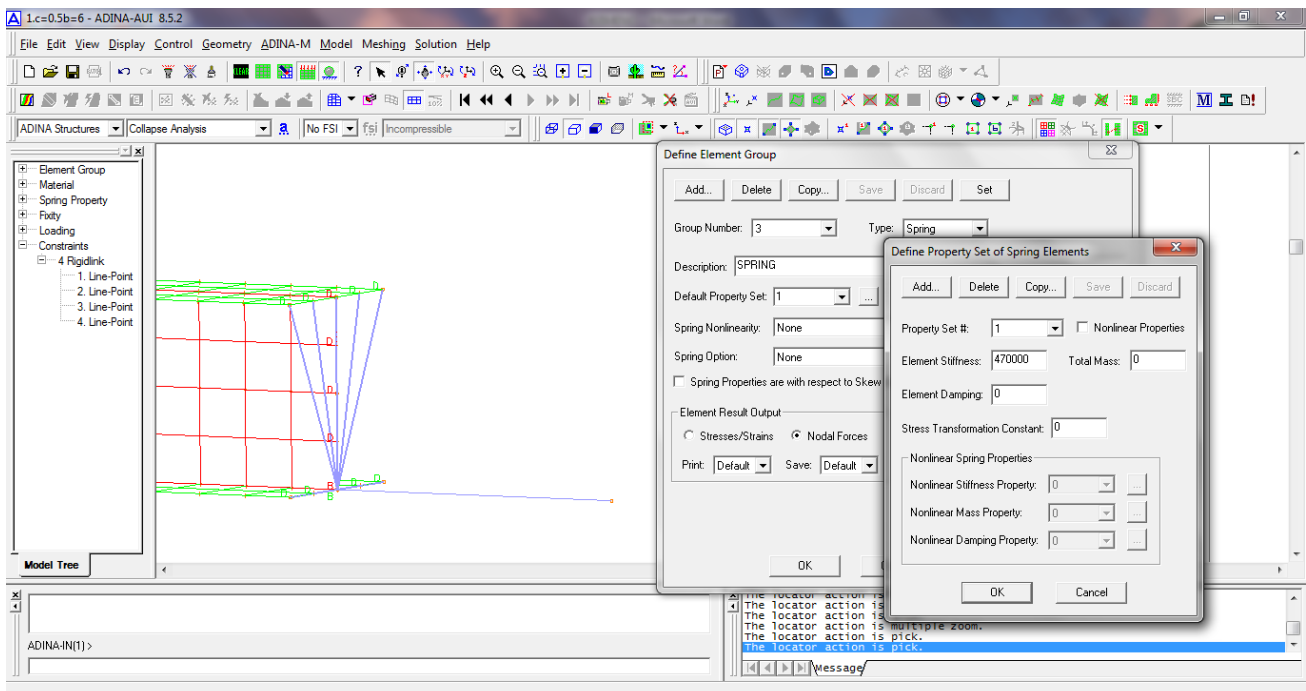


Εικόνα 4.7 Γεωμετρική ατέλεια



Εικόνα 4.8 Σχηματισμός ελατηρίου

Ακόμα, για την προσομοίωση του ελατηρίου εισάγουμε το αντίστοιχο element group και ορίζουμε τη δυσκαμψία του ελατηρίου (“Element Stiffness”). Έπειτα δίνουμε τις συντεταγμένες του δεύτερου σημείου (δεν επηρεάζει το μήκος του ελατηρίου), το δεσμεύουμε με πάκτωση και ορίζουμε το ελατήριο: Meshing → Element → Spring. Η προσομοίωση του ελατηρίου παρατίθεται στις εικόνες 4.8 και 4.9.



Εικόνα 4.9 Δυσκαμψία ελατηρίου



Τέλος, προχωρούμε στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Η γραμμική ανάλυση μάς δίνει αμέσως το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, ενώ αναφορικά με την μη γραμμική ανάλυση είναι απαραίτητα τα διαγράμματα επιβαλλόμενου φορτίου – βέλους κάμψεως για τα οποία ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Δίνουμε το node του κέντρου βάρους της κεφαλής του υποστυλώματος

Definitions → Model Point → Node

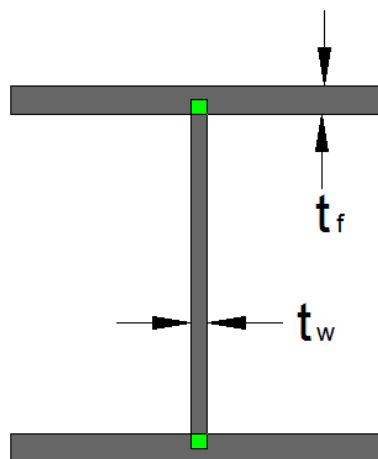
και έπειτα από το

Graph → Response Curve (Model Point)

επιλέγουμε “Displacement – X DISPLACEMENT” για τον άξονα x και “Time – LAMDA” για τον άξονα y.

Αναφορικά με τα κρίσιμα φορτία λυγισμού του λογισμικού Adina πρέπει να γίνει ιδιαίτερα κατανοητό ότι η διατομή που εισάγουμε απέχει κατά ένα μικρό ποσοστό (2 ~ 3.5%) από την πραγματική. Αυτό επειδή οι επιφάνειες συνδέονται μεταξύ τους από τα κέντρα βάρους. Συνεπώς, η τελική ροπή αδρανείας της διατομής στο πρόγραμμα θα λαμβάνει υπόψη εις διπλούν το ορθογωνικό κομμάτι μάζας που ορίζεται από το μισό πάχος πέλματος επί το πάχος κορμού.

Για τον λόγο αυτό, προκειμένου να είναι συγκρίσιμα τα αποτελέσματα με τα θεωρητικώς εξαγόμενα, όταν προχωρήσουμε στην μετατροπή του κρίσιμου φορτίου  $P_{cr}$  σε  $\beta_{cr}^2$ , θα θεωρήσουμε ως ροπή αδρανείας του πόδα του υποστυλώματος αυτήν που λαμβάνουμε από το πρόγραμμα.



Σχήμα 4.2

Η παραπάνω σημείωση αποτελεί τον λόγο για τον οποίο δεν είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που εξάγουν τα δύο προγράμματα (Sap2000 και Adina), οι διαφορές των οποίων γίνονται αντιληπτές στους πίνακες της παραγράφου 4.4.

Έτσι, οι ροπές αδρανείας στο μέσον (για τον άξονα y, σε μέτρα) θα είναι οι εξής:

Περιπτώσεις	$I_m (x10^{-4})$
1.200-400-200	1,89725
2.100-400-200	0,92856
3.200-400-400	1,89725
4.100-600-200	2,54797
5.100-600-600	2,54797
6.200-400-200	1,89725

Πίνακας 4.3

#### 4.4 Συγκρίσεις Κρίσιμων Φορτίων

Στις επόμενες παραγράφους επισυνάπτονται οι συγκρίσεις των θεωρητικών αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται πρώτα τα κρίσιμα φορτία που προέκυψαν από το Sap2000 και έπειτα από το Adina (χωρίς και με εκκεντρότητα). Στους πίνακες που ακολουθούν είναι σκιασμένες με κίτρινο οι αποκλίσεις 10 ~ 15 % ενώ με κόκκινο οι άνω του 15 %.

##### 4.4.1 Μεταθετοί Φορείς χωρίς Στροφική Δέσμευση

Στις τελευταίες γραμμές των πινάκων που ακολουθούν επισυνάπτονται οι μέσοι όροι των αποκλίσεων για κάθε περίπτωση ανάλυσης. Ο πρώτος μέσος όρος αφορά όλες τις περιπτώσεις φορέων (18 στον αριθμό), ενώ ο δεύτερος δεν περιλαμβάνει τις περιπτώσεις που ονομάσαμε «τολημέρες» στην παράγραφο 4.1. Αυτές έχουν να κάνουν στο παρόν υποκεφάλαιο με την περίπτωση 5 (δοκός με πολύ μεγαλύτερη δυσκαμψία συγκριτικά με την αντίστοιχη του υποστυλώματος).

	r	θεωρητικό linear	Sap2000		απόκλιση %	θεωρητικό non-linear	απόκλιση %
			Pcr	$\beta cr^2$			
<b>1</b>	1	0,73051	795,187	0,73264	0,290	0,70313	4,027
	0,5	1,22361	1322,039	1,21805	-0,456	1,14881	5,685
	2	0,40203	437,681	0,40325	0,303	0,39279	2,594
<b>2</b>	1	1,27696	706,5	1,35229	5,570	1,23395	8,751
	0,5	1,86483	1062,138	2,03300	8,272	1,77191	12,843
	2	0,76447	412,463	0,78948	3,168	0,74790	5,267
<b>3</b>	1	2,40484	2675,296	2,46487	2,435	2,25579	8,482
	0,5	2,75068	3038,32	2,79934	1,738	2,52507	9,797
	2	1,89135	2098,591	1,93352	2,181	1,80253	6,775
<b>4</b>	1	0,58276	853,067	0,59505	2,066	0,56448	5,138
	0,5	1,00798	1489,45	1,03896	2,982	0,95578	8,006
	2	0,31330	454,541	0,31706	1,186	0,30735	3,064
<b>5</b>	1	2,40409	4036,922	2,81594	14,626	2,28989	18,681
	0,5	2,48110	4153,675	2,89738	14,367	2,33175	19,522
	2	2,25060	3751,941	2,61715	14,006	2,16106	17,427
<b>6</b>	1	0,73051	3090,826	0,71193	-2,611	0,67690	4,920
	0,5	1,22361	4897,156	1,12799	-8,477	1,07893	4,349
	2	0,40203	1731,61	0,39885	-0,798	0,38381	3,770
					<b>4,701</b>		<b>8,283</b>
					<b>2,836</b>		<b>6,232</b>

Πίνακας 4.4

Γενικώς, για το πρόγραμμα Sap2000, διακρίνουμε μεγαλύτερη σύγκλιση με τη γραμμική ανάλυση. Παρατηρούμε στον Πίνακα 4.3 ότι σε όλες τις περιπτώσεις η μη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας μάς έδωσε κρίσιμα φορτία υπέρ της ασφαλείας, εν συγκρίσει με τα αντίστοιχα του προγράμματος Sap2000. Το αυτό ισχύει και για το λογισμικό Adina για το κομμάτι της μη γραμμικής ανάλυσης, εξαιρουμένων δύο περιπτώσεων στους φορείς 4 και 6 ( $r = 0.5$ ).

Ακόμα πρέπει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση φορέα 5 η αποκλίσεις είναι μεγαλύτερες από τις επιτρεπόμενες. Αυτό το φαινόμενο συμπερασματικά ισχύει λόγω της μικρής τιμής  $\rho$  ( $= 0.15$ ), και όχι εξαιτίας του μεγάλου  $l_1'$  ( $= 5$ ). Αν και το τελευταίο παίζει έναν ρόλο στην ακρίβεια της μεθόδου, στην περίπτωση φορέα 4, όπου έχουμε ίδια τιμή  $l_1'$  αλλά πολύ μεγαλύτερη τιμή  $\rho$  ( $= 4.5$ ), δεν συμβαίνουν οι ίδιες αποκλίσεις. Τα παραπάνω ισχύουν και για τις συγκρίσεις που ακολουθούν.

Η σύγκριση του Πίνακα 4.4 έγινε και για τα αντίστοιχα πλαίσια με λυγισμό ως προς τον ασθενή άξονα των υποστυλωμάτων, z. Οι διατομές των ζυγωμάτων έμειναν ίδιες, επομένως μειώθηκε η τιμή του  $\rho$  σε κάθε περίπτωση (βλ. Πίνακα 4.2). Κατά συνέπεια τα αποτελέσματα που παίρνουμε αποκλίνουν έως 30% από αυτά του Sap2000 (μέσος όρος απόκλισης μέχρι 10%). Για το λόγο αυτό δεν επισυνάπτονται στο τεύχος της εργασίας, όμως γίνεται περαιτέρω αναφορά στην παράγραφο 4.4.4.

	r	θεωρητικό linear	ADINA linear		απόκλιση %	θεωρητικό non-linear	ADINA non-linear		απόκλιση %	
			Pcr	$\beta cr^2$			Pcr	$\beta cr^2$		
1	1	0,73051	831	0,75086	4,587	0,70313	795,234	0,71854	2,145	
	0,5	1,22361	1391	1,25686	4,524	1,14881	1245,61	1,12549	-2,072	
	2	0,40203	455,3	0,41139	4,161	0,39279	448,073	0,40486	2,981	
2	1	1,27696	745,5	1,37632	10,510	1,23395	711,133	1,31287	6,011	
	0,5	1,86483	1135	2,09540	14,161	1,77191	1014,47	1,87288	5,391	
	2	0,76447	431,2	0,79607	7,375	0,74790	423,46	0,78178	4,334	
3	1	2,40484	2949	2,66461	11,490	2,25579	2735,61	2,47180	8,739	
	0,5	2,75068	3342	3,01971	10,667	2,52507	2864,6	2,58835	2,445	
	2	1,89135	2315	2,09175	11,326	1,80253	2233,34	2,01796	10,676	
4	1	0,58276	888,6	0,59785	5,982	0,56448	848,795	0,57107	1,154	
	0,5	1,00798	1561	1,05024	7,429	0,95578	1382,63	0,93024	-2,746	
	2	0,31330	471,6	0,31729	4,760	0,30735	464,36	0,31242	1,623	
5	1	2,40409	4480	3,01415	23,069	2,28989	4152,34	2,79370	18,034	
	0,5	2,48110	4608	3,10027	22,810	2,33175	3962,76	2,66615	12,542	
	2	2,25060	4156	2,79616	22,367	2,16106	3999,13	2,69062	19,682	
6	1	0,73051	3228	0,72918	1,750	0,67690	2968,47	0,67055	-0,947	
	0,5	1,22361	5127	1,15814	-3,614	1,07893	4144,8	0,93627	-15,237	
	2	0,40203	1800	0,40660	3,032	0,38381	1747,51	0,39475	2,770	
					9,645					6,640
					7,025					4,618

Πίνακας 4.5

Γενικά διαπιστώνεται μεγαλύτερη ακρίβεια της μη γραμμικής ανάλυσης, εν συγκρίσει με τη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας.

Ακολουθούν οι συγκρίσεις με έκκεντρη φόρτιση με ανηγμένες εκκεντρότητες από 2.4 έως 4.8 %. Τα θεωρητικά αποτελέσματα προκύπτουν μόνο από τη μη γραμμική ανάλυση.

	r	θεωρητικό non-linear	ADINA non-linear		απόκλιση %	$\bar{e}$
			Pcr	$\beta cr^2$		
<b>1</b>	1	0,51840	587,098	0,53048	2,278	-0.0240625
	0,5	0,81131	865,604	0,78213	-3,731	
	2	0,30069	353,999	0,31986	5,993	
<b>2</b>	1	0,93534	538,371	0,99392	5,894	-0.0240625
	0,5	1,31574	747,557	1,38012	4,664	
	2	0,57919	337,449	0,62299	7,031	
<b>3</b>	1	1,93131	2350,86	2,12415	9,078	-0.0240625
	0,5	2,16470	2461,2	2,22385	2,660	
	2	1,52456	1919,09	1,73402	12,079	
<b>4</b>	1	0,41065	621,549	0,41818	1,800	-0.024375
	0,5	0,65927	955,227	0,64268	-2,582	
	2	0,23311	364,785	0,24543	5,020	
<b>5</b>	1	2,10814	3828,82	2,57604	18,163	-0.024375
	0,5	2,12895	3617,83	2,43408	12,536	
	2	1,97102	3669,91	2,46912	20,173	
<b>6</b>	1	0,45101	1982,13	0,44775	-0,728	-0.048125
	0,5	0,67980	2626,29	0,59325	-14,588	
	2	0,26716	1260,05	0,28463	6,138	
					<b>7,508</b>	
					<b>5,618</b>	

*Πίνακας 4.6*

Γενικώς παρατηρείται μία μικρή αύξηση της απόκλισης στα κρίσιμα φορτία με εκκεντρότητα εν συγκρίσει με τα αντίστοιχα με μηδενική εκκεντρότητα.

#### 4.4.2 Μεταθετοί Φορείς με Στροφική Δέσμευση

Στις επόμενες περιπτώσεις δεσμεύουμε τον πόδα του υποστυλώματος και στροφικά (κατά τη διεύθυνση y) για να ελέγξουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα. Αυτό το καταφέρνουμε εισάγοντας μια πολύ μεγάλη τιμή του στροφικού ελατηρίου (θεωρητικά άπειρη):

$$C' = 10^7.$$

Στα προγράμματα, αντιστοίχως, θεωρήσαμε το υποστύλωμα πακτωμένο.

	r	θεωρητικό non-linear	Sap2000		απόκλιση %	ADINA linear	ADINA non-linear		απόκλιση %	
			Pcr	$\beta_{cr^2}$			Pcr	$\beta_{cr^2}$		
1	1	2,50944	2796,2	2,57626	2,594	2982	2895,58	2,61634	4,086	
	0,5	3,33895	3762,006	3,4661	3,668	3988	3639,44	3,28847	-1,535	
	2	1,98416	2198,347	2,02543	2,038	2362	2342,82	2,11689	6,270	
2	1	2,36901	1315,931	2,51878	5,946	1393	1334,91	2,46447	3,873	
	0,5	3,39915	1947,273	3,72721	8,802	2066	1838,17	3,39357	-0,165	
	2	1,59243	871,638	1,66837	4,552	926,1	912,894	1,68536	5,514	
3	1	6,01349	6901,59	6,35873	5,429	7523	6953,44	6,28287	4,288	
	0,5	6,83964	7963,513	7,33713	6,78	8648	7279,94	6,57789	-3,979	
	2	4,79958	5418,882	4,99265	3,867	5920	5721,64	5,16986	7,162	
4	1	1,01240	1524,112	1,06314	4,772	1598	1539,83	1,03600	2,278	
	0,5	1,56765	2383,34	1,66249	5,705	2488	2223,59	1,49603	-4,787	
	2	0,67798	1021,59	0,71261	4,859	1078	1067,04	0,71791	5,561	
5	1	4,49709	7662,805	5,34516	15,866	8287	7517,32	5,05766	11,084	
	0,5	4,65230	8026,831	5,59908	16,910	8665	7148,09	4,80925	3,263	
	2	4,08962	6819,036	4,75659	14,022	7381	7027,9	4,72838	13,509	
6	1	2,44373	10708,495	2,46655	0,925	11090	10478,7	2,36704	-3,240	
	0,5	3,17133	13852,205	3,19066	0,606	14240	12071,6	2,72686	-16,300	
	2	1,95830	8537,627	1,96652	0,418	8894	8756,09	1,97792	0,992	
					5,987					5,438
					4,064					4,669

Πίνακας 4.7

	r	θεωρητικό non-linear	ADINA non-linear		απόκλιση %	$\bar{e}$
			Pcr	$\beta cr^2$		
<b>1</b>	1	2,02615	2364,82	2,13676	5,177	-0.0240625
	0,5	2,49944	2746,13	2,48130	-0,731	
	2	1,70425	2164,82	1,95605	12,873	
<b>2</b>	1	1,82593	1034,95	1,91069	4,436	-0.0240625
	0,5	2,50118	1353,69	2,49914	-0,082	
	2	1,28627	764,309	1,41104	8,843	
<b>3</b>	1	5,12563	5925,44	5,35401	4,266	-0.0240625
	0,5	5,81728	6295,66	5,68853	-2,263	
	2	4,08707	4969,16	4,48995	8,973	
<b>4</b>	1	0,76895	1180,84	0,79447	3,212	-0.024375
	0,5	1,10060	1571,17	1,05709	-4,116	
	2	0,54984	900,75	0,60603	9,272	
<b>5</b>	1	4,07672	6858,27	4,61425	11,649	-0.024375
	0,5	4,19973	6470,39	4,35329	3,527	
	2	3,65790	6329,01	4,25817	14,097	
<b>6</b>	1	1,83627	7973,12	1,80106	-1,955	-0.048125
	0,5	2,16088	8453,88	1,90965	-13,156	
	2	1,59551	7371,76	1,66521	4,186	
					<b>6,267</b>	
					<b>5,569</b>	

Πίνακας 4.8

#### 4.4.3 Μερικώς Μεταθετοί Φορείς με Στροφική Δέσμευση

Στους πίνακες που ακολουθούν γίνονται συγκρίσεις μερικώς μεταθετών φορέων σε συνδυασμό με δύσκαμπτη στροφική στήριξη του πόδα του υποστυλώματος. Αρχικά παραθέτουμε φορείς με περιορισμένη μετάθεση μόνο ( $K' \neq 0$ ,  $C' = 0$ ): Πίνακες 4.9 έως 4.11 και έπειτα δεσμεύουμε και τη στροφή της βάσης του υποστυλώματος ( $C' \neq 0$ ): Πίνακας 4.12.

Υπενθυμίζεται ότι, επειδή, για απειρία του μετακνησιακού ελατηρίου (περίπτωση άρθρωσης), η μη γραμμική επίλυση δεν μας δίνει πολύ αξιόπιστα αποτελέσματα, επισυνάπτονται τα θεωρητικά αποτελέσματα μέχρι την αδιάστατη σταθερά  $K' = 30$ . Όπως θα διαπιστώσουμε από τις επιλύσεις των προγραμμάτων, η απειρία της σταθεράς του ελατηρίου δεν διαφέρει πολύ από την τιμή 30, ως προς το κρίσιμο φορτίο. Από παλαιότερη διπλωματική εργασία έχει εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι διαφοροποιήσεις από τις τιμές 30 ~ 50 στο άπειρο δεν εισάγουν πρακτικό σφάλμα (μικρότερο του 1%) και έτσι μπορούμε να θεωρούμε τους φορείς απόλυτα αμετάθετους.

Για τις συγκρίσεις επιλέχθηκαν οι περιπτώσεις φορέων 1, 2 και 5 (η επιλογή δεν έγινε τυχαία αλλά προκειμένου να καταλήξουμε στη σύγκριση του Πίνακα 4.12). Η τελευταία, όπως είδαμε, έφερε όχι μικρές αποκλίσεις μεταξύ της θεωρίας και των λογισμικών του εμπορίου. Με τους Πίνακες 4.9 έως 4.11 παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις της τάξεως του 20 % μειώνονται αισθητά στο 4 ~ 10 %. Αυτό μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος της παρούσας εργασίας μάς δίνει ακόμα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα στην περίπτωση μερικώς μεταθετού πλαισίου.

Να σημειωθεί εντόνως ότι τα μετακνησιακά ελατήρια τοποθετήθηκαν στο ελεύθερο άκρο του ζυγώματος (κόμβος Γ), ώστε να επιτύχουμε τη σύγκριση που επιθυμούμε και όχι στη σύνδεση δοκού-υποστυλώματος.

		θεωρητικό non-linear	Sap2000		απόκλιση %
			Pcr	$\beta_{cr}^2$	
<b>1 - r=1</b>	K'=1	3,01359	3572,7366	3,29172	8,449
	K'=5	9,24561	10082,2511	9,28921	0,469
	K'=10	9,40275	10208,5538	9,40558	0,030
	K'=∞		10252,3682	9,44595	
<b>1 - r=0.5</b>	K'=1	3,37655	4031,6158	3,71450	9,098
	K'=5	9,50431	10503,2978	9,67714	1,786
	K'=10	9,94259	10875,9856	10,02052	0,778
	K'=∞		11016,5966	10,15007	
<b>1 - r=2</b>	K'=1	2,73909	3236,8975	2,98229	8,155
	K'=5	8,99653	9758,8473	8,99125	-0,059
	K'=10	9,04285	9795,7500	9,02525	-0,195
	K'=∞		9808,0680	9,03660	
<b>2 - r=1</b>	K'=1	4,80631	3161,4544	6,05123	20,573
	K'=5	6,78843	3982,9166	7,62357	10,955
	K'=10	6,84710	4003,8174	7,66357	10,654
	K'=∞		4019,7318	7,69403	
<b>2 - r=0.5</b>	K'=1	4,90846	3183,7636	6,09393	19,453
	K'=5	7,27347	4280,7429	8,19363	11,230
	K'=10	7,42539	4343,9690	8,31465	10,695
	K'=∞		4394,6051	8,41157	
<b>2 - r=2</b>	K'=1	4,63477	3074,0670	5,88397	21,230
	K'=5	6,41213	3754,0410	7,18548	10,763
	K'=10	6,42571	3760,7450	7,19832	10,733
	K'=∞		3765,8730	7,20813	
<b>5 - r=1</b>	K'=1	4,55098	7751,6215	5,40711	15,833
	K'=5	6,41922	10331,1089	7,20642	10,924
	K'=10	6,72177	10702,2773	7,46533	9,960
	K'=∞		11054,7976	7,71123	
<b>5 - r=0.5</b>	K'=1	4,54588	7811,3126	5,44875	16,570
	K'=5	6,54543	10759,9200	7,50554	12,792
	K'=10	6,90407	11219,7688	7,82631	11,784
	K'=∞		11659,2796	8,13288	
<b>5 - r=2</b>	K'=1	4,55194	7706,2278	5,37545	15,320
	K'=5	6,11646	9691,4625	6,76024	9,523
	K'=10	6,32683	9934,0390	6,92945	8,697
	K'=∞		10161,4278	7,08806	
					9,859
					7,307

Πίνακας 4.9

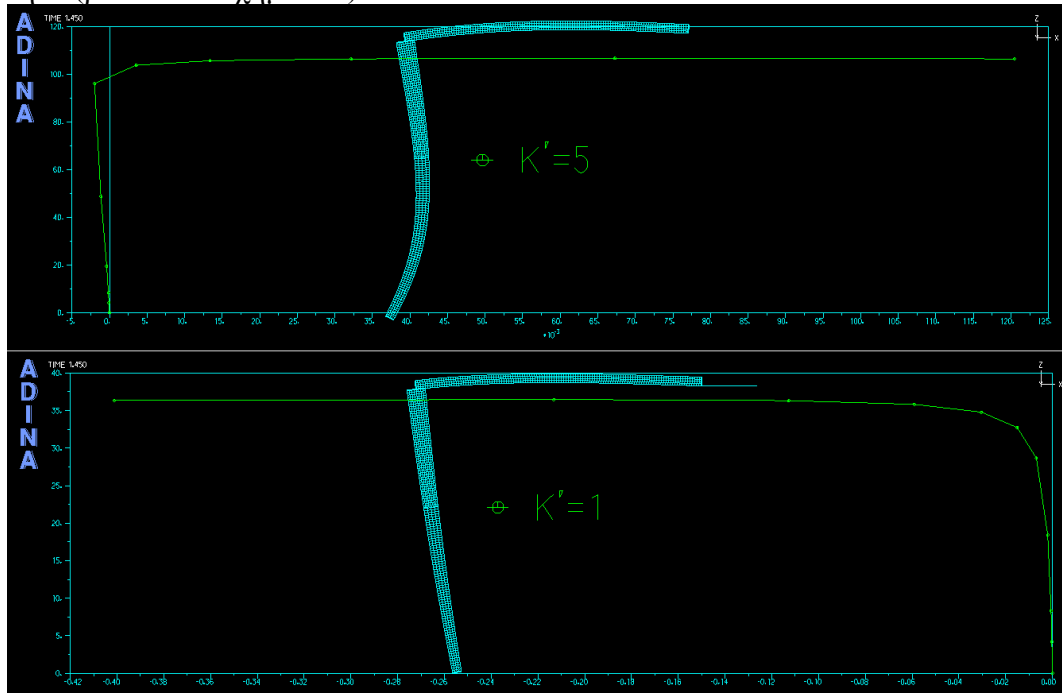
		θεωρητικό non-linear	ADINA non-linear		απόκλιση %
			Pcr	$\beta_{cr}^2$	
<b>1 - r=1</b>	K'=1	3,01359	3647,52	3,29577	8,562
	K'=5	9,24561	10661,90	9,63370	4,028
	K'=10	9,40275	10842,30	9,79671	4,021
	K'= $\infty$		10904,10	9,85255	
<b>1 - r=0.5</b>	K'=1	3,37655	3941,70	3,56158	5,195
	K'=5	9,50431	10824,50	9,78062	2,825
	K'=10	9,94259	11163,80	10,08720	1,434
	K'= $\infty$		11289,10	10,20042	
<b>1 - r=2</b>	K'=1	2,73909	3414,42	3,08515	11,217
	K'=5	8,99653	10447,10	9,43962	4,694
	K'=10	9,04285	10538,00	9,52175	5,030
	K'= $\infty$		10569,30	9,55003	
<b>2 - r=1</b>	K'=1	4,80631	3261,45	6,02118	20,177
	K'=5	6,78843	4249,01	7,84438	13,461
	K'=10	6,84710	4272,26	7,88731	13,188
	K'= $\infty$		4290,20	7,92043	
<b>2 - r=0.5</b>	K'=1	4,90846	3275,25	6,04666	18,824
	K'=5	7,27347	4400,75	8,12452	10,475
	K'=10	7,42539	4450,55	8,21646	9,628
	K'= $\infty$		4490,21	8,28968	
<b>2 - r=2</b>	K'=1	4,63477	3200,40	5,90847	21,557
	K'=5	6,41213	-		
	K'=10	6,42571	-		
	K'= $\infty$		-		
<b>5 - r=1</b>	K'=1	4,55098	8139,40	5,47620	16,895
	K'=5	6,41922	10256,10	6,90032	6,972
	K'=10	6,72177	10568,00	7,11017	5,463
	K'= $\infty$		10871,10	7,31409	
<b>5 - r=0.5</b>	K'=1	4,54588	8788,19	5,91271	23,117
	K'=5	6,54543	9845,89	6,62433	1,191
	K'=10	6,90407	10136,00	6,81952	-1,240
	K'= $\infty$		10417,80	7,00911	
<b>5 - r=2</b>	K'=1	4,55194	8723,31	5,86906	22,442
	K'=5	6,11646	10001,30	6,72889	9,102
	K'=10	6,32683	10235,90	6,88673	8,130
	K'= $\infty$		10459,00	7,03683	
					<b>9,855</b>
					<b>6,150</b>

Πίνακας 4.10

\*Στην περίπτωση φορέα 2 (r=2) το λογισμικό μας έδωσε αποτελέσματα κατά πολύ μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα.



Από τις επιλύσεις του Adina, για όλες τις περιπτώσεις δυσκαμψίας του ελατηρίου  $K' = 5$  και άνω, επιβεβαιώσαμε ότι το πλαίσιο χάνει την ευστάθειά του κινούμενο προς τα δεξιά, συνεπώς οι τιμές των βελών κάμψεως είναι αρνητικές. Για την ακρίβεια, οι πρώτες 4 (συνήθως) τιμές προκύπτουν για θετικό βέλος κάμψεως (κίνηση προς τα αριστερά) και έπειτα ο φορέας κινείται προς τα δεξιά. Ακόμα, παρατηρείται (από το αντίστοιχο διάγραμμα φορτίου-στροφής) ότι η στροφή της κεφαλής του στύλου έχει το ίδιο πρόσημο (αρνητικό) σε όλο τον δρόμο ισορροπίας. Η Εικόνα 4.10 αποσαφηνίζει την παραπάνω περιγραφή η οποία αναφέρεται μόνο για φορτίσεις με μηδενική εκκεντρότητα (βλέπε και Σχήμα 3.6).



Εικόνα 4.10

Σ' αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να επισημάνουμε ότι σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ο φορέας χάνει την ευστάθειά του, δηλαδή ο δρόμος ισορροπίας είναι ασταθής και όχι ευσταθής. Στα παραπάνω διαγράμματα (Εικόνα 4.10), προκειμένου να εστιάσουμε στην προλυγισμική συμπεριφορά του φορέα, δεν έχουμε «προχωρήσει» τους δρόμους ισορροπίας έως το σημείο λυγισμού. Σημειώνουμε την παραπάνω παρατήρηση ούτως ώστε να μην συγχέεται η ισορροπία (ευσταθής ή ασταθής) με τη φορά μετακίνησης του φορέα (αριστερά ή δεξιά).



Πριν σχολιάσουμε τους πίνακες που ακολουθούν και προκειμένου να έχουμε καλύτερη εποπτεία των συγκρίσεων πρέπει να αναφέρουμε τα μεγέθη των δυσκαμψιών των ελατηρίων που χρησιμοποιήθηκαν:

$$C' = C \cdot l_1 / (E \cdot I_1)$$

$$K' = \frac{K_b \cdot l_1^3}{E \cdot I_1 (L_1)}$$

Φορέας 1: 200-400-200

$$C' = 1 \Rightarrow C = E \cdot I_1 / l_1 = 1930 \text{KNm}$$

$$K' = 1 \Rightarrow K_b = E \cdot I_1 (L_1) / l_1^3 = 470 \text{KN}$$

Φορέας 2: 100-400-200

$$C' = 1 \Rightarrow C = E \cdot I_1 / l_1 = 200 \text{KNm}$$

$$K' = 1 \Rightarrow K_b = E \cdot I_1 (L_1) / l_1^3 = 470 \text{KN}$$

Φορέας 5: 100-600-600

$$C' = 1 \Rightarrow C = E \cdot I_1 / l_1 = 200 \text{KNm}$$

$$K' = 1 \Rightarrow K_b = E \cdot I_1 (L_1) / l_1^3 = 1632 \text{KN}$$

	C'	K'	θεωρητικό non-linear	Sap2000		απόκλιση %	δ/δ <sub>0</sub>
				Pcr	βcr <sup>2</sup>		
<b>1 - r=1</b> C=1930 K=470 (KN)	0	0	0,70313	795,187	0,73264	4,027	1,000
	0,1	0	0,74064	836,133	0,77037	3,858	1,001
	0	0,1	0,93353	1074,37	0,98986	5,691	1,000
	1	0	1,02516	1147,164	1,05693	3,006	1,003
	0	1	3,01359	3572,7366	3,29172	8,449	0,996
	1	1	3,35884	3952,013	3,64116	7,754	1,003
	5	1	3,97211	4625,751	4,26190	6,800	0,996
	1	5	10,36938	11177,216	10,29805	-0,693	0,100
	5	5	12,24518	13411,052	12,35618	0,898	0,369
	1E+07	30	18,45514	19303,644	17,78528	-3,766	0,052
<b>2 - r=1</b> C=200 K=470 (KN)	0	0	1,23396	706,5	1,35229	8,750	1,000
	0,1	0	1,24665	723,679	1,38517	10,000	1,001
	0	0,1	1,61466	987,244	1,88965	14,553	0,995
	1	0	1,35066	776,472	1,48622	9,121	1,005
	0	1	5,19882	3161,454	6,05123	14,087	0,809
	1	1	5,55978	3311,93	6,33925	12,296	0,856
	5	1	6,62256	3661,247	7,00787	5,498	0,971
	1	5	7,19744	4193,704	8,02703	10,335	0,055
	5	5	8,48323	4864,273	9,31054	8,886	0,036
	1E+07	30	14,51576	7583,914	14,51611	0,002	0,006
<b>5 - r=1</b> C=200 K=1632 (KN)	0	0	2,28989	4036,922	2,81594	18,681	1,000
	0,1	0	2,30300	4056,594	2,82966	18,612	1,001
	0	0,1	2,56715	4549,282	3,17333	19,102	0,970
	1	0	2,41554	4226,055	2,94787	18,058	1,010
	0	1	4,55098	7751,6215	5,40711	15,833	0,660
	1	1	4,75016	8040,972	5,60895	15,311	0,670
	5	1	5,40860	9012,775	6,28683	13,969	0,707
	1	5	6,67214	10671,509	7,44387	10,367	0,170
	5	5	7,54378	11847,345	8,26407	8,716	0,171
	1E+07	30	13,25326	19894,21	13,87713	4,496	0,028
						<b>9,090</b>	

Πίνακας 4.11

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3, ο φορέας μπορεί να καταταγεί ως αμετάθετος όταν έχει ένα κατακόρυφο σύστημα δυσκαμψίας που να μειώνει τις οριζόντιες μετατοπίσεις κατά 80%, δηλαδή ο λόγος της οριζόντιας μετακίνησης πλαισίου με σύστημα δυσκαμψίας ( $\delta$ ) προς την αντίστοιχη πλαισίου χωρίς σύστημα δυσκαμψίας ( $\delta_0$ ) να είναι μικρότερος από 20% ( $\delta/\delta_0 < 0,2$ ). Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση δεν είναι άλλο παρά το βέλος κάμψης της κεφαλής του υποστυλώματος,  $w_1(L_1)$ .

Έτσι, στον Πίνακα 4.11 μπορούμε να παρακολουθήσουμε πόσο αμετάθετος γίνεται ο φορέας παράλληλα με την αύξηση των σταθερών των ελατηρίων.

Επιπλέον, στον παραπάνω πίνακα αν παρατηρήσουμε πώς μεταβάλλεται η ευστάθεια του πλαισιακού φορέα για ίσες ανηγμένες σταθερές ελατηρίων, διαπιστώνουμε ότι η αύξηση στην οποία συντελεί το μετακινησιακό ελατήριο είναι πολλές φορές πολλαπλάσια από την αντίστοιχη του στροφικού. Για παράδειγμα, στην περίπτωση φορέα 1, για  $C' = 0$  και  $K' = 0.1$ , η φέρουσα συμπεριφορά αυξάνεται κατά 35,1%, ενώ για  $K' = 0$  και  $C' = 0.1$ , μόνο 5,2%. Ομοίως και για τους άλλους φορείς.

Η παραπάνω παρατήρηση μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μετακινησιακή δέσμευση του πλαισίου προσφέρει πολύ μεγαλύτερη αντοχή του φορέα σε ευστάθεια, έναντι της στροφικής δέσμευσης.

Σε συνδυασμό με τα παραπάνω μπορεί κάποιος να διερωτηθεί: υπό ποία δυσκαμψία στροφικού ελατηρίου επιτυγχάνουμε την ίδια φέρουσα ικανότητα με ένα αντιστοίχως μερικώς μεταθετό πλαίσιο με μερική μετακινησιακή δέσμευση.

Επειδή η στροφική δυσκαμψία, όμως, δεν μεταβάλλει κατά τόσο μεγάλο βαθμό το κρίσιμο φορτίο του φορέα, εδώ θα μελετήσουμε το αντίστροφο: ώστε να βρούμε ποιά είναι η δυσκαμψία του μετακινησιακού ελατηρίου η οποία προσφέρει ίδιο ακριβώς κρίσιμο φορτίο σε λυγισμό με το αντίστοιχο πλαισιακού φορέα με πακτωμένο το κάτω άκρο του υποστυλώματος. Η διερεύνηση που ακολουθεί αφορά τους φορείς του Πίνακα 4.11 (1, 2 και 5).

Φορέας	Pcr (C=0;K <sub>b</sub> =0)	Pcr (C=∞;K <sub>b</sub> =0)	K <sub>b</sub> αντίστοιχο	Pcr (C=0;K <sub>b</sub> αντ.)	α %
1.200-400-200	795,2	2796,2	338	2796,3	256
2.100-400-200	706,5	1332,0	108	1334,1	89
5.100-600-600	4036,9	7662,8	1570	7663,0	90

Πίνακας 4.12

Στον Πίνακα 4.12 (μονάδες σε KN) επισυνάπτουμε στη δεύτερη στήλη το κρίσιμο φορτίο του φορέα χωρίς καμία δέσμευση ελατηρίου, στην τρίτη το κρίσιμο φορτίο που μάς δίνει ο φορέας με πακτωμένη βάση υποστυλώματος χωρίς μετακινησιακό ελατήριο, στην τέταρτη η δυσκαμψία του μετακινησιακού ελατηρίου που απαιτείται για να «φτάσουμε» το ίδιο  $P_{cr}$  με τη δεύτερη στήλη και τέλος το κρίσιμο φορτίο που επιτυγχάνουμε μόνο με το μετακινησιακό ελατήριο (για επαλήθευση) καθώς και το ποσοστό αύξησης του φορτίου. Οι αντίστοιχες σταθερές  $K_b$  προέκυψαν έπειτα από επαναλήψεις με το πρόγραμμα Sap2000.

Πρώτη παρατήρηση αποτελεί το γεγονός ότι ενώ στον φορέα 1 το κρίσιμο φορτίο αυξήθηκε κατά 256%, στους υπόλοιπους αυξήθηκε μόνο 90%. Αυτό συμβαίνει επειδή στον πρώτο η διατομή του πόδα του υποστυλώματος (200) έχει ροπή αδρανείας περίπου 10 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη (100) στους άλλους φορείς. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η επιτελεσματικότητα της στροφικής δυσκαμψίας δεν εξαρτάται μόνο από το στροφικό ελατήριο αλλά και από τη δυσκαμψία της διατομής, καθώς όσο καλύτερα τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής, τόσο μεγαλύτερη η φέρουσα ικανότητα που επιτυγχάνεται.

Κάτι αντιστρόφως ανάλογο παρατηρείται για το μετακινησιακό ελατήριο. Αν δώσουμε στο μετακινησιακό ελατήριο του φορέα 2 την ίδια τιμή με το αντίστοιχο του φορέα 5 ( $K_b = 1570$  KN) και για μηδενικό στροφικό ελατήριο παίρνουμε κρίσιμο φορτίο  $P_{cr} = 3939,4$  KN. Το φορτίο αυτό είναι 458% μεγαλύτερο από το αντίστοιχο για τον φορέα 2 χωρίς κανένα ελατήριο. Αυτό σημαίνει ότι για διατομή κεφαλής στύλου 400 και δοκού 200 πετυχαίνουμε 5,5 φορές μεγαλύτερη αντοχή, σε αντίθεση με την περίπτωση διατομής στην κεφαλή του στύλου και δοκό 600 (μόνο 1,9 φορές μεγαλύτερο φορτίο σε λυγισμό).

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 3.2.2 η διαφοροποίηση του προβλήματος μάς επιβάλλει να επιβεβαιώσουμε ότι οι παραδοχές που λάβαμε υπόψη, ώστε να ισχύει η μέθοδος, είναι αληθής. Βασική υπόθεση αποτελεί το γεγονός ότι η παράλειψη της αξονικής δύναμης που ασκείται στη δοκό δεν διαφοροποιεί σε μεγάλο βαθμό το κρίσιμο φορτίο σε λυγισμό. Για τον λόγο αυτό ακολουθεί ο Πίνακας 4.13 στον οποίο επισυνάπτονται κρίσιμα φορτία τα οποία προκύπτουν από δύο περιπτώσεις δέσμευσης του πλαισιακού φορέα κατά τη διεύθυνση  $x$ . Στην πρώτη τοποθετούμε το μετακινησιακό ελατήριο στον κόμβο Β (σύνδεση δοκού-υποστυλώματος). Με αυτόν τον τρόπο εξάγουμε αποτελέσματα κρίσιμων φορτίων λυγισμού φορέων στους οποίους το ζύγωμα δεν καταπονείται από θλίψη. Στη δεύτερη περίπτωση το ελατήριο τοποθετείται, όπως στις αναλύσεις που προηγήθηκαν, στον κόμβο Γ.

		Β	Γ	απόκλιση %	S2
<b>1 - r=1</b>	K'=1	3577,55	3572,74	0,134	-1138,45
	K'=5	10086,07	10082,25	0,038	1060,00
	K'=10	10209,16	10208,55	0,006	-554,24
<b>1 - r=0.5</b>	K'=1	4033,88	4031,62	0,056	-1119,36
	K'=5	10508,59	10503,30	0,050	1729,04
	K'=10	10877,11	10875,99	0,010	985,69
<b>1 - r=2</b>	K'=1	3246,78	3236,90	<b>0,304</b>	1144,06
	K'=5	9761,09	9758,85	0,023	586,38
	K'=10	9796,06	9795,75	0,003	-294,81
<b>2 - r=1</b>	K'=1	3165,03	3161,45	0,113	-917,43
	K'=5	3986,58	3982,92	0,092	343,67
	K'=10	4007,79	4003,82	0,099	-300,94
<b>2 - r=0.5</b>	K'=1	3185,09	3183,76	0,042	-838,080
	K'=5	4281,23	4280,74	0,011	574,780
	K'=10	4344,30	4343,97	0,008	512,580
<b>2 - r=2</b>	K'=1	3081,94	3074,07	0,255	-1019,74
	K'=5	3754,23	3754,04	0,005	-190,54
	K'=10	3760,86	3760,75	0,003	165,22
<b>5 - r=1</b>	K'=1	7756,24	7751,62	0,060	-767,44
	K'=5	10338,57	10331,11	0,072	2234,53
	K'=10	10709,41	10702,28	0,067	-2477,10
<b>5 - r=0.5</b>	K'=1	7813,74	7811,31	0,031	-751,10
	K'=5	10764,55	10759,92	0,043	2340,90
	K'=10	11224,26	11219,77	0,040	-2698,98
<b>5 - r=2</b>	K'=1	7714,65	7706,23	0,109	-808,70
	K'=5	9701,19	9691,46	0,100	-2018,23
	K'=10	9943,13	9934,04	0,091	2066,35
				<b>0,069</b>	

Πίνακας 4.13

Παρατηρούμε από τον πίνακα ότι ο μέσος όρος των αποκλίσεων των δύο περιπτώσεων περιορίζεται μόλις στο 0,07% (μέγιστη στο 0,3%). Μάλιστα, μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε ότι όσο αυξάνεται η δυσκαμψία του ελατηρίου τόσο η απόκλιση γίνεται μικρότερη.

#### 4.4.4 Πραγματική Ακρίβεια της Μεθόδου

Στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου (§4.1) σχολιάσαμε τις περιπτώσεις των μεταβολών των διαστάσεων της διατομής διπλού ταυ. Πριν το κλείσιμο των συγκρίσεων για τα κρίσιμα φορτία θεωρείται απαραίτητο να επισυνάψουμε τις συγκρίσεις οι οποίες αποκαλύπτουν την μέγιστη δυνατή ακρίβεια της μεθόδου. Εδώ ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{L_1}{a}$$

Στις διατομές που χρησιμοποιούνται, άρα, όλες οι διαστάσεις παραμένουν ίδιες πλην του ολικού ύψους, που ενώ πριν ήταν ίδιο με το πλάτος πέλματος, τώρα διαφοροποιείται ως εξής:

Διατομή	h ολικό (mm)	b <sub>f</sub> (mm)	I <sub>y</sub> (m <sup>4</sup> )
200	215	200	6,48600E-05
400	415	400	5,23000E-04
100	115	100	8,01700E-06
600	615	600	1,77000E-03

Πίνακας 4.14

Περιπτώσεις	F <sub>1</sub> (L <sub>1</sub> )	I <sub>2</sub> (x10 <sup>-4</sup> )	άξονας y			άξονας z		
			I <sub>m</sub> (x10 <sup>-4</sup> )	ρ	λ <sub>1</sub>	I <sub>m</sub> (x10 <sup>-4</sup> )	ρ	λ <sub>1</sub>
1.200-400-200	0,0155	0,64860	2,18903	3,375	50,4884	0,67534	1,0412	90,8985
2.100-400-200	0,0155	0,64860	1,25266	1,9313	66,7423	0,39141	0,6035	119,3997
3.200-400-400	0,0155	5,23000	2,18903	0,4186	50,4884	0,67534	0,1291	90,8985
4.100-600-200	0,0233	0,64860	3,43858	5,3015	49,3901	1,0740	1,6559	88,3737
5.100-600-600	0,0233	17,7000	3,43858	0,1943	49,3901	1,0740	0,0607	88,3737
6.200-400-200	0,0155	0,64860	2,18903	3,375	25,2442	0,67534	1,0412	45,4492

Πίνακας 4.15

Να σημειωθεί ότι οι πραγματικές ροπές αδρανείας στο μέσον του υποστυλώματος ελάχιστα απέχουν από τις θεωρητικές εξαγόμενες:

#### Ροπή Αδρανείας (m<sup>4</sup>)

Μεταβολή Στύλου	Διατομή στο μέσον	άξονας y		άξονας z	
		Κυβικός νόμος	Πραγματική	Κυβικός νόμος	Πραγματική
200-400	300	2,18903E-04	2,20000E-04	6,75338E-05	6,75200E-05
100-400	250	1,25266E-04	1,27100E-04	3,91406E-05	3,90800E-05
100-600	350	3,43858E-04	3,50000E-04	1,07402E-04	1,07200E-04

Πίνακας 4.16

Η γεωμετρία των φορέων παραμένει όπως στις προηγούμενες αναλύσεις.

Τα θεωρητικώς εξαγόμενα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα του Sap2000. Κυρίως επικεντρωνόμαστε στις περιπτώσεις όπου είχαμε μεγάλες αποκλίσεις, συνεπώς ακολουθούν οι πίνακες με τις μη γραμμικές αναλύσεις χωρίς έκκεντρη φόρτιση. Στο αριστερό μέρος του πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση όπου ο πόδας του υποστυλώματος συνδέεται αρθρωτά και στο δεξιό μέρος όπου συνδέεται με πάκτωση.

	Περίπτωση Άρθρωσης				Περίπτωση Πάκτωσης			
	θεωρητικό non-linear	Sap2000		απόκλιση %	θεωρητικό non-linear	Sap2000		απόκλιση %
		Pcr	$\beta_{cr2}$			Pcr	$\beta_{cr}^2$	
1	0,70108	924,005	0,72361	3,114	2,50409	3241,983	2,53889	1,371
	1,14329	1520,72	1,19092	3,999	3,32546	4355,02	3,41054	2,495
	0,39212	511,605	0,40065	2,130	1,98218	2543,096	1,99157	0,471
2	1,09361	824,321	1,12810	3,057	2,13181	1595,98	2,18413	2,396
	1,62396	1234,446	1,68936	3,872	3,09324	2336,916	3,19812	3,279
	0,64696	482,91	0,66087	2,105	1,44273	1070,05	1,46439	1,479
3	2,19612	2941,837	2,30383	4,675	5,84321	7679,583	6,01409	2,841
	2,47933	3349,098	2,62277	5,469	6,69820	8869,581	6,94601	3,568
	1,73092	2297,993	1,79962	3,818	4,62360	6027,281	4,72013	2,045
4	0,48431	996,162	0,49663	2,481	0,90512	1850,843	0,92273	1,908
	0,83654	1726,932	0,86095	2,836	1,38977	2856,991	1,42434	2,427
	0,26098	532,765	0,26561	1,742	0,61896	1256,68	0,62651	1,205
5	2,19824	4577,601	2,28214	3,676	4,2253	8776,74	4,37560	3,435
	2,26927	4726,912	2,35658	3,705	4,47113	9235,34	4,60424	2,891
	2,00121	4215,422	2,10158	4,776	3,66344	7729,12	3,85332	4,928
6	0,67293	3582,292	0,70135	4,052	2,43351	12361,04	2,42007	-0,555
	1,06847	5600,439	1,09646	2,553	3,13363	15916,89	3,11624	-0,558
	0,38246	2021,861	0,39584	3,381	1,95408	9847,041	1,92787	-1,359
				<b>3,414</b>				<b>2,178</b>
				<b>3,286</b>				<b>1,864</b>

Πίνακας 4.17

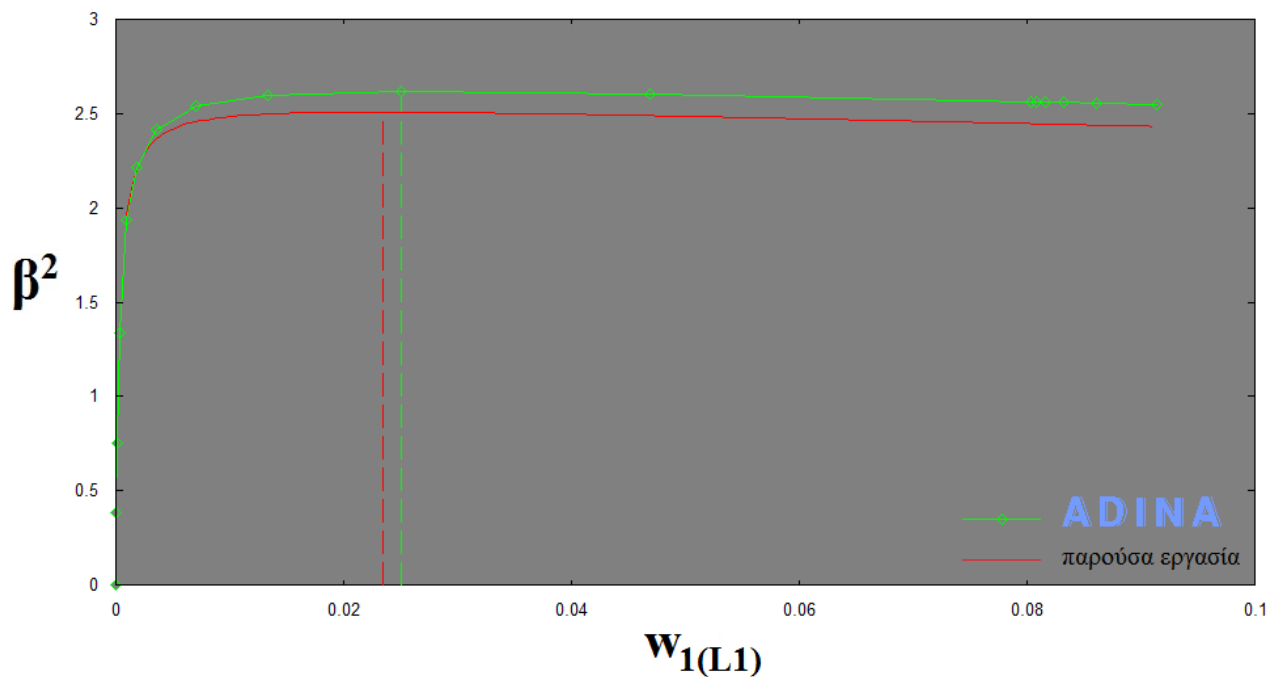
Είναι προφανές ότι τα θεωρητικά ευρήματα πλησιάζουν πολύ περισσότερο τα αντίστοιχα του λογισμικού. Συγκεκριμένα, από 8.3% και 6.0% οι αποκλίσεις μειώθηκαν στις τιμές 3.4% και 2.2%, αντίστοιχα. Χαρακτηριστικό αποτελεί το γεγονός ότι στην περίπτωση του φορέα 5 (όπου το  $\rho$  είναι πολύ μικρό) οι αποκλίσεις μειώθηκαν από το 20% στο 3%. Το τελευταίο μάς ενθαρρύνει να εξάγουμε με ασφάλεια κρίσιμα φορτία φορέων οι οποίοι λυγίζουν εκτός του επιπέδου του πλαισίου (ροπή αδρανείας του υποστυλώματος κατά τον ασθενή άξονα z).

Επιπλέον, το γεγονός ότι στην περίπτωση φορέα 6 τα θεωρητικώς εξαγόμενα αποτελέσματα είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του Sap2000 και σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις για τις ίδιες περιπτώσεις φορέων στους Πίνακες 4.3 έως 4.7 μάς οδηγεί με ασφάλεια στο συμπέρασμα ότι τα λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων εξάγουν κρίσιμα φορτία υπέρ της ασφαλείας για μικρές τιμές λυγηροτήτων. Συνεπώς, η πραγματική φέρουσα συμπεριφορά του πλαισίου σε λυγισμό είναι (κατά ένα μικρό ποσοστό) μεγαλύτερη. Οι τελευταίες αναλύσεις με την αντικατάσταση των διατομών για τις οποίες ισχύει ακριβέστερα ο κυβικός νόμος μεταβολής επιβεβαιώνουν την παραπάνω σημείωση, τουλάχιστον για την περίπτωση του πακτωμένου υποστυλώματος.

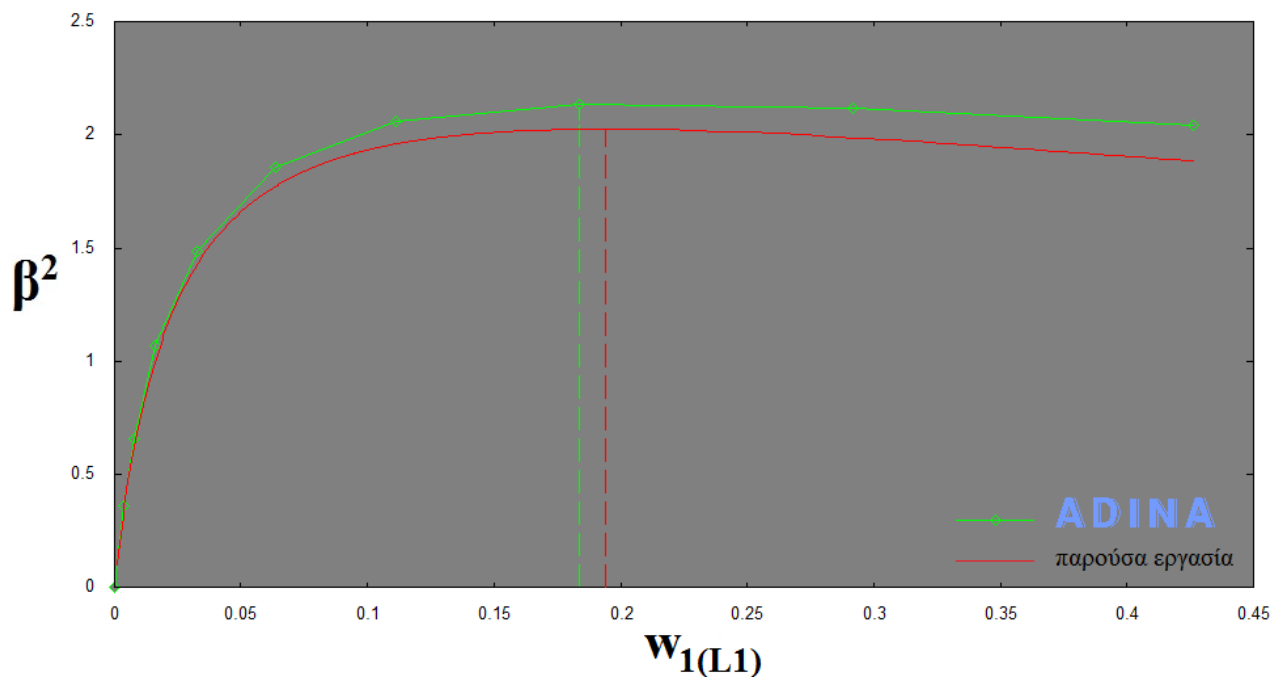
#### 4.5 Συγκρίσεις Διαγραμμάτων μη Γραμμικών Αναλύσεων

Ακολουθούν συγκρίσεις των δρόμων ισορροπίας μεταξύ των θεωρητικών αποτελεσμάτων και του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων Adina. Να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα που ακολουθούν αφορούν τις περιπτώσεις φορέων (1~6) που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.1.

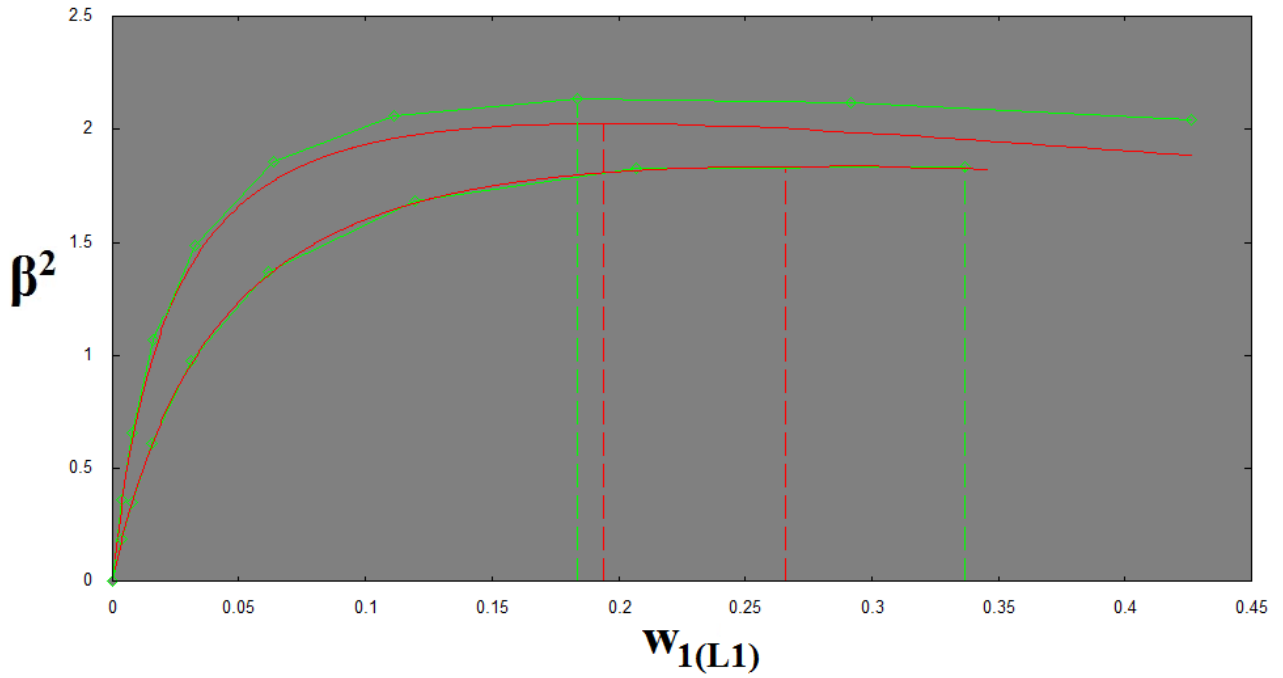
✚ Φορέας 1 ( $r=1$ ) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος



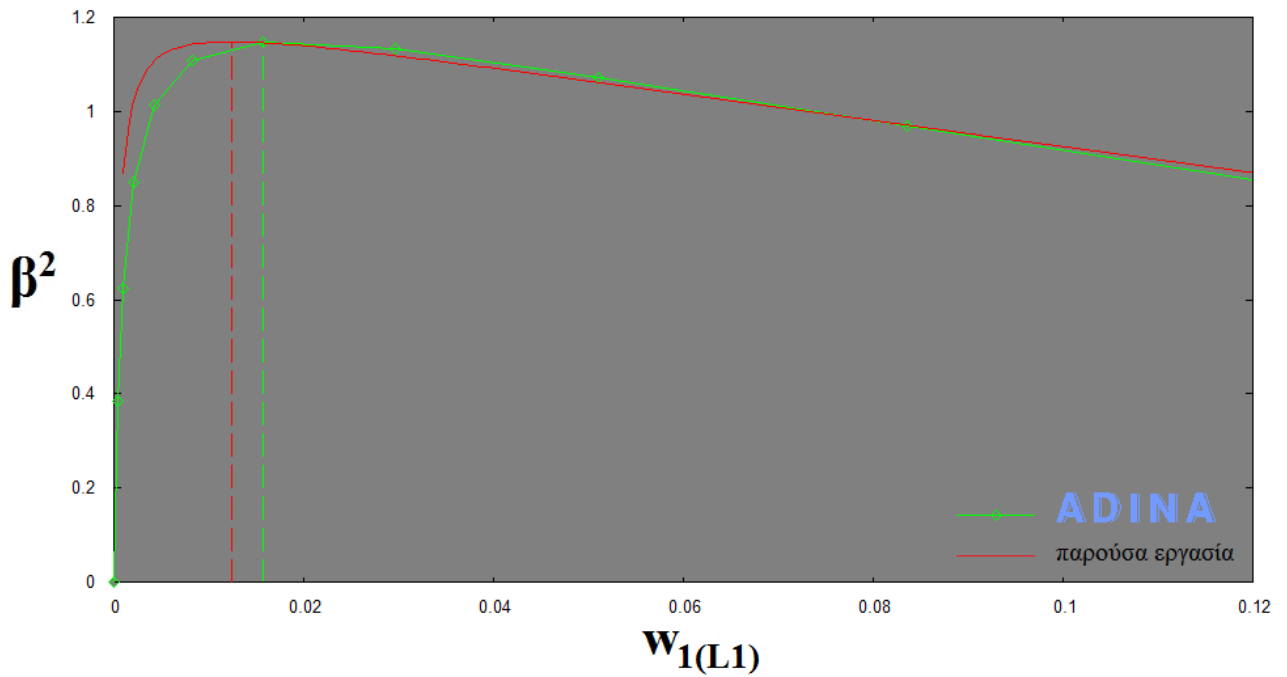
✚ Φορέας 1 ( $r=1$ ) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος – έκκεντρη φόρτιση



- ✚ Φορέας 1 (r=1) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος – έκκεντρη φόρτιση
- + Φορέας 6 (r=1) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος – έκκεντρη φόρτιση

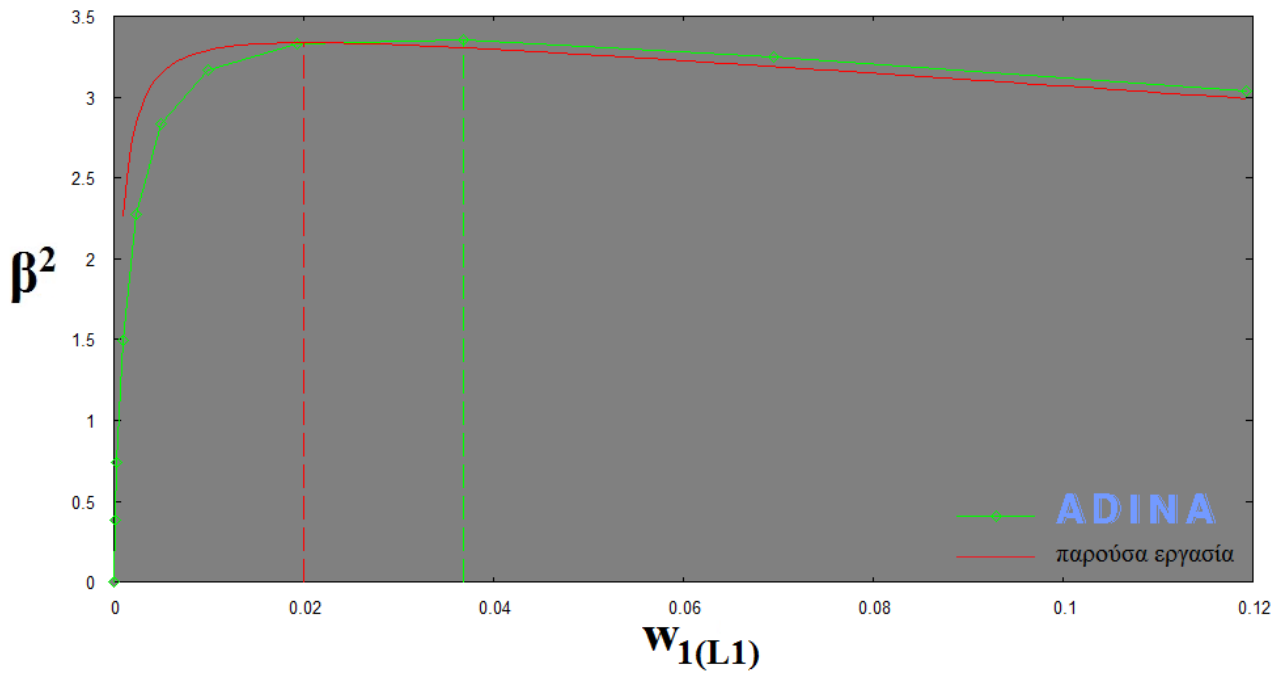


- ✚ Φορέας 2 (r=0.5) – Αρθρωτή βάση υποστυλώματος

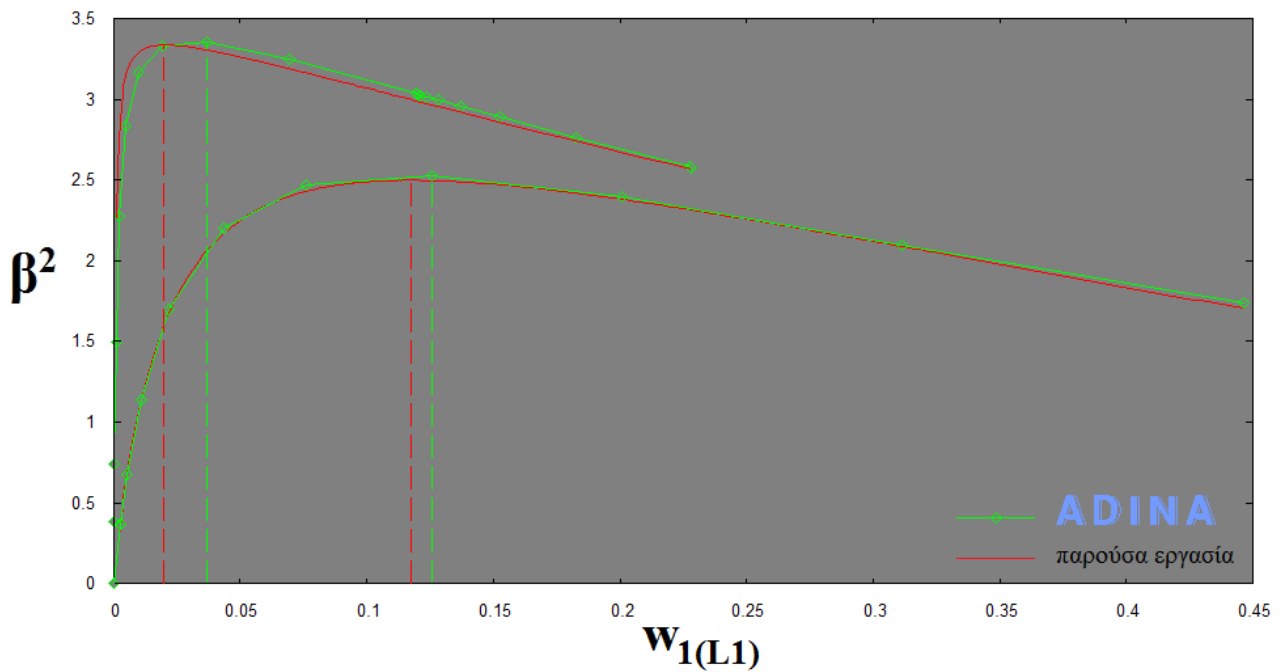




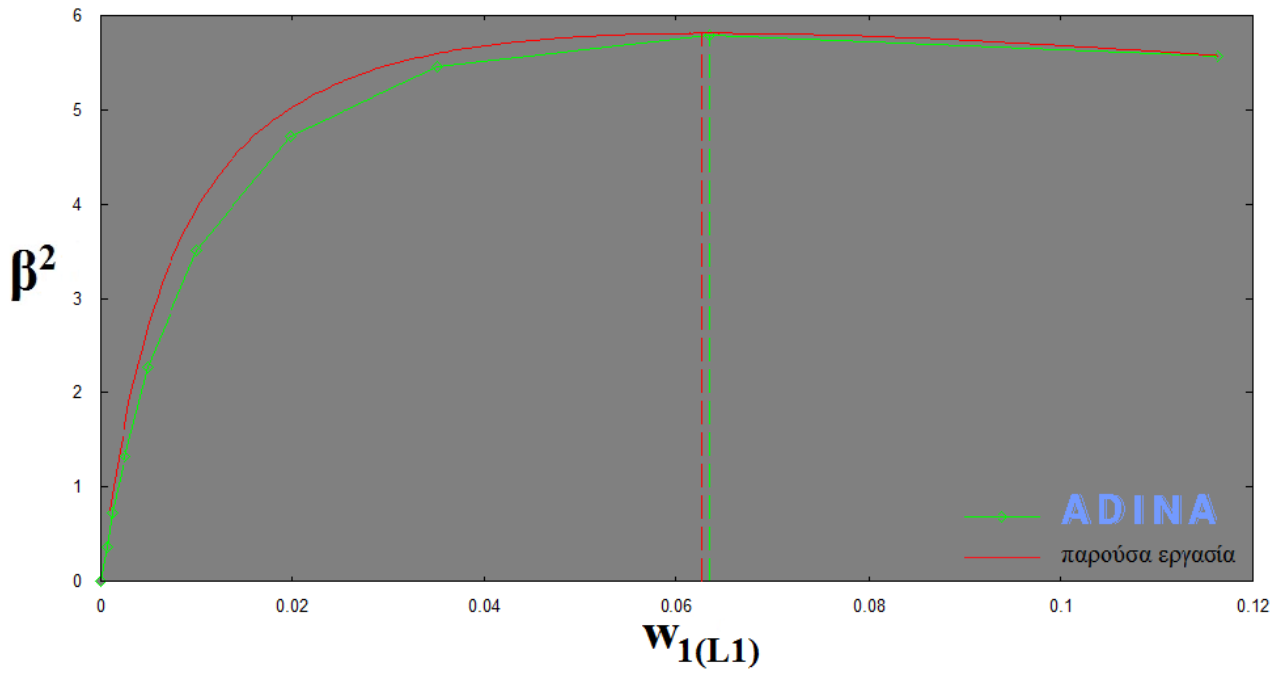
✚ Φορέας 1 (r=0.5) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος



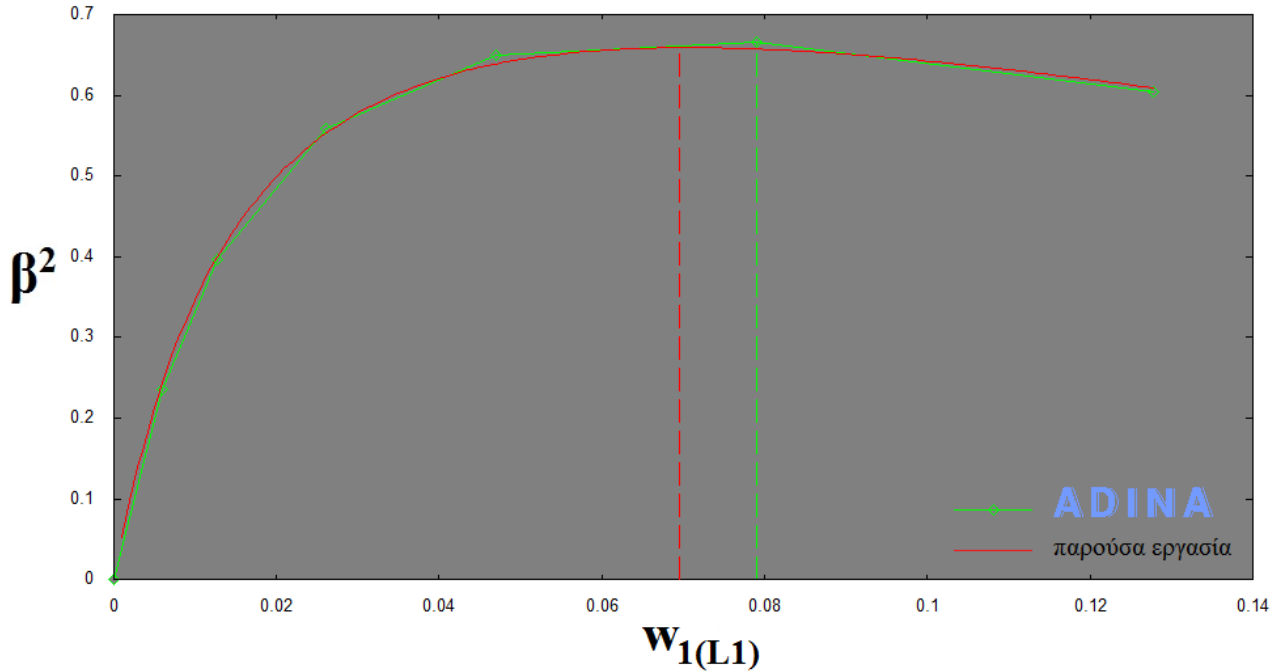
✚ Φορέας 1 (r=0.5) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος – με και χωρίς εκκεντρότητα φόρτισης



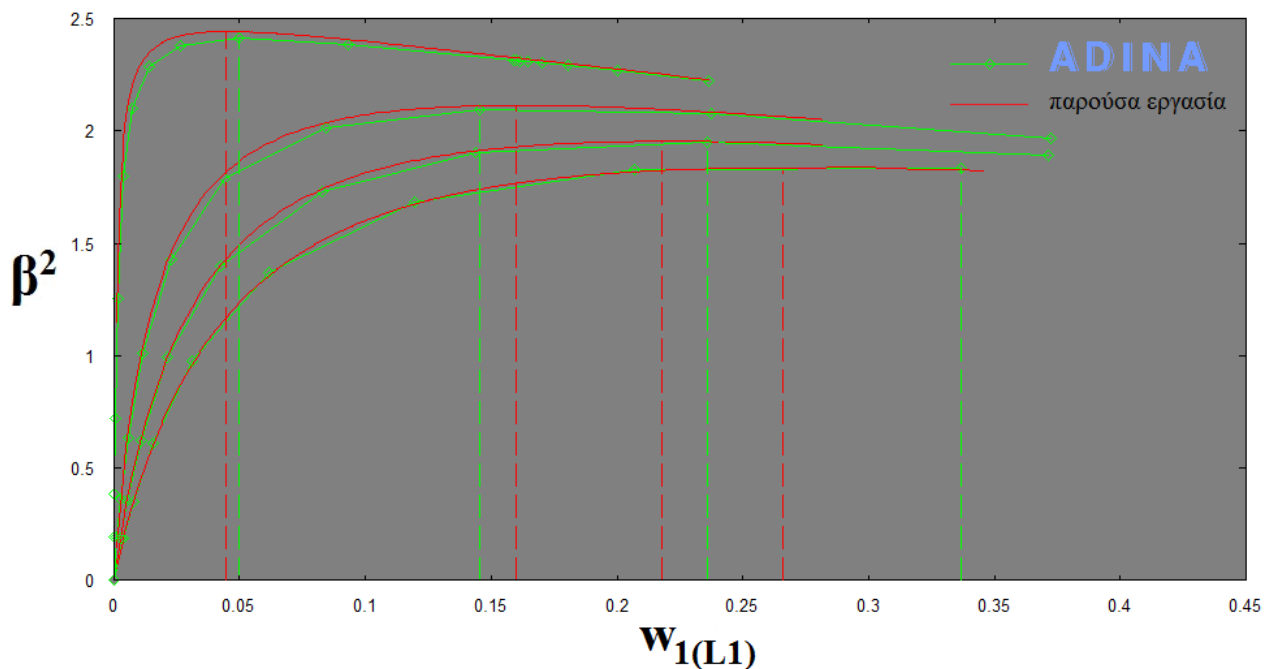
✚ Φορέας 3 ( $r=0.5$ ) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος – έκκεντρη φόρτιση



✚ Φορέας 4 ( $r=0.5$ ) – Αρθρωτή βάση υποστυλώματος – έκκεντρη φόρτιση



✚ Φορέας 6 ( $r=1$ ) – Πακτωμένη βάση υποστυλώματος – χωρίς και με έκκεντρες φορτίσεις



Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα του παραπάνω σχήματος ελήφθησαν από τις εξής εκκεντρότητες φορτίσεως (με σειρά από πάνω προς τα κάτω):

$$\bar{e}_0 = 0$$

$$\bar{e}_1 = -0,016042$$

$$\bar{e}_2 = -0,032083$$

$$\bar{e}_3 = -0,048125$$

Προφανώς ισχύει αυτό που έχουμε διαπιστώσει και θεωρητικά: όσο μεγαλύτερη είναι η ατέλεια του συστήματος, τόσο μικρότερο θα είναι το κρίσιμο φορτίο σε λυγισμό.

Επιπλέον, στο παραπάνω σχήμα επαληθεύεται (όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα) ότι με την έκκεντρη φόρτιση το κρίσιμο φορτίο εκδηλώνεται σε μεγαλύτερες ανηγμένες τιμές των οριζόντιων μετατοπίσεων, δηλαδή του βέλους κάμψεως στην κεφαλή του υποστυλώματος. Μάλιστα, για την μεγαλύτερη εκκεντρότητα  $\bar{e}_3$  παρατηρούμε ότι το κρίσιμο φορτίο διαπιστώνεται στην τιμή ανηγμένου βέλους  $w_1 = 0,337 \rightarrow$  πραγματική οριζόντια μετατόπιση πλαισίου:  $0,337 \cdot 3 \approx 1,0m$ .

Τελικώς, από την ποιότητα των διαγραμμάτων που προηγήθηκαν διαπιστώνουμε πολύ καλή προσέγγιση της συμπεριφοράς του φορέα σύμφωνα με τη θεωρία μη γραμμικής ελαστικής ευστάθειας. Η μορφή των καμπύλων είναι απολύτως ακριβής, ενώ έχει προηγηθεί ο σχολιασμός για τα κρίσιμα φορτία στις προηγούμενες παραγράφους. Να προσθέσουμε ότι (ιδιαίτερα στις περιπτώσεις με μηδενική εκκεντρότητα φορτίσεως) προσδιορίζεται επιτυχώς και η οριζόντια μετατόπιση του φορέα, μετά την οποία ο φορέας χάνει την ευστάθειά του.

## 4.6 Συμπεράσματα εν Περιλήψει

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η συμπεριφορά πλαισιακών φορέων σε φαινόμενα δευτέρας τάξεως σύμφωνα με τη γραμμική και (κυρίως) τη μη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας. Εισαγάγαμε τον κυβικό νόμο μεταβολής της δυσκαμψίας και από την ισορροπία ροπών και δυνάμεων εξαγάγαμε την μορφή του βέλους κάμψεως -υπό μορφή συναρτήσεων Bessel- δοκού με μεταβλητή διατομή διπλού ταυ και ως προς τις δύο έννοιες. Έπειτα, μέσω της ενεργειακής μεθόδου και των διαδικασιών του Λογισμού των Μεταβολών εξαγάγαμε τις διαφορικές εξισώσεις που εκφράζουν το πλαίσιο μορφής  $\Gamma$  σε αντισυμμετρικό λυγισμό με μετάθεση.

Οι δρόμοι ισορροπίας που προέκυψαν εκφράζουν απολύτως ικανοποιητικά τη συμπεριφορά του πλαισιακού φορέα έναντι λυγισμού. Αφού έγιναν οι απαραίτητες συγκρίσεις ως προς τα γεωμετρικά και αδρανειακά μεγέθη εξήχθησαν διαγράμματα ως προς τα αδιάστατα μεγέθη (ύψος στύλου και εκκεντρότητα φόρτισης). Εν συνεχεία, έγινε περαιτέρω διερεύνηση της επιρροής γεωμετρικών ατελειών, δηλαδή της εκκεντρής φόρτισης, ώστε να εξάγουμε το ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης. Με την εμβάθυνση στη συμπεριφορά του φορέα ο οποίος χάνει την ευστάθειά του μέσω σημείου διακλάδωσης καταλήξαμε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Ακόμα, επιβεβαιώσαμε τη μεγάλη σημασία του προσήμου των αρχικών ατελειών για τη φέρουσα ικανότητα των φορέων με μετάθεση.

Κάθε εξεταζόμενο πλαίσιο μιας κατασκευής δεν δρα μεμονωμένα, αλλά συμβάλλουν στην αντοχή και την ευστάθειά του και τα υπόλοιπα μέλη που συντρέχουν σε αυτό. Για το λόγο αυτό ασχοληθήκαμε με την προσομοίωση των συνθηκών στήριξης οι οποίες θα ανταποκρίνονται σε περισσότερο πραγματική συμπεριφορά. Ακολούθησε, έτσι, (σταδιακά) η εισαγωγή του στροφικού ελατηρίου στον πόδα του υποστύλωματος και έπειτα του μετακινησιακού ελατηρίου στο ελεύθερο άκρο της δοκού. Για το πρώτο έγινε ξανά εμβάθυνση της μελέτης στην αστάθεια του φορέα μέσω σημείου διακλάδωσης απ' όπου προέκυψαν αρκετά ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Στην περίπτωση της προσομοίωσης του μερικώς μεταθετού πλαισίου, λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος, προτείνεται ένα απλοποιητικό μοντέλο στο οποίο δεν θα εισάγονται πρακτικά σφάλματα. Τέλος, εξήχθησαν οι δρόμοι ισορροπίας και συγκρίθηκαν με τους αντίστοιχους του πλήρους μεταθετού πλαισίου χωρίς στροφικές δεσμεύσεις.

Στο τελευταίο κομμάτι της διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήσαμε αριθμητικές αναλύσεις φορέων υπό ένα ευρύ φάσμα δεδομένων διατομών και γεωμετριών. Έτσι, έγιναν οι συγκρίσεις των κρίσιμων φορτίων της ελαστικής (γραμμικής και μη γραμμικής) ανάλυσης με τα προγράμματα Sap2000 και Adina για όλες τις περιπτώσεις λυγισμού που αναπτύχθηκαν θεωρητικά. Τα αποτελέσματα κρίνονται ικανοποιητικά και ιδιαίτερα για την πραγματική ακρίβεια του κυβικού νόμου μεταβολής της δυσκαμψίας απολύτως επιτυχή. Ακόμα, έγινε παραμετρική διερεύνηση της συνεισφοράς μεταξύ των δυσκαμψιών των ελατηρίων στη φέρουσα ικανότητα του πλαισίου. Τέλος, συγκρίναμε τους δρόμους ισορροπίας των μη γραμμικών αναλύσεων, όπου παρατηρήσαμε και σχηματικά την πολύ καλή προσέγγιση της αναλυτικής μεθόδου.

Συνοψίζοντας, με την παρούσα διπλωματική εργασία εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις καθώς και μη γραμμικές επιλύσεις φορέων με μέλη κυβικής μεταβολής δυσκαμψίας, τα οποία έως τώρα δεν συναντάμε στη διεθνή βιβλιογραφία. Επίσης, τονίζεται η σημασία και ο πρωτεύων ρόλος των φαινομένων δευτέρας τάξεως, η διερεύνηση των οποίων είναι επιβεβλημένη, αλλά και η δυσκολία της μαθηματικής προσέγγισης και της προσομοίωσης της πραγματικής συμπεριφοράς μιας κατασκευής.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

---

- ☑ Timoshenko, St. Gere, J. (1961), Theory of Elastic Stability, Mc Graw-Hill Co. Inc., New York.
- ☑ Κουνάδης, Α. (1997), Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας, Εκδόσεις Συμεών.
- ☑ Κουνάδης, Α. (2004), Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας, Εκδόσεις Συμεών.
- ☑ Ermopoulos, J. and Kounadis, A. (1984), “Buckling Analysis of a Simple Frame with Varying Stiffness”, Acta Mechanica, vol. 54, pp. 95-105.
- ☑ Raftoyannis, I. and Ermopoulos, J. (2005), “Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections”, Engineering Structures, vol.27, pp. 1248-1257.
- ☑ Φασουλάκης, Ζ. (2010), Ανάλυση Ευστάθειας Πλαισίων με Μέλη Μεταβλητής Δυσκαμψίας, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ.
- ☑ Αβραάμ, Τ. Φασουλάκης, Ζ. και Ερμόπουλος, Ι. (2011), «Λυγισμός Δίστυλων Πλαισίων με Στύλους Μεταβλητής Διατομής», 7<sup>ο</sup> Εθνικό Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών, Βόλος, 27-28 Οκτωβρίου 2011, Πρακτικά Τόμος Ι, σελίδες 506-513.
- ☑ Κουνάδης, Α. (1985), Στοιχεία Λογισμού των Μεταβολών, Εκδόσεις ΕΜΠ.
- ☑ Ioannidis, G. Raftoyiannis, I. and Kounadis, A. (2005), “Imperfect frames exhibiting bifurcational instability”, Eurosteel Conference on Steel and Composite Structures, Maastricht, The Netherlands, 8-10 June 2005, Proceedings, Vol. A, pg 1.4-89 to 1.4-96.
- ☑ Ioannidis, G. and Raftoyiannis, I. (2005), “A simplified nonlinear stability analysis of an imperfect rectangular two-bar frame”, Computational Mechanics, Vol. 35, No. 2, pp. 127-133.
- ☑ Raftoyiannis, I. Constantakopoulos, T. Michaltsos, G. and Kounadis, A. (2006), “Dynamic buckling of a simple geometrically imperfect frame using Catastrophe Theory”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 48, Vol. 10, pp. 1021-1030.
- ☑ Μαγείρου, Γ. (2011), Συμβολή στον Σχεδιασμό Πολυώροφων Μεταλλικών Πλαισίων Έναντι Καμπτικού Λυγισμού, Διδακτορική Διατριβή, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ.
- ☑ Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Ι. Ιωαννίδης, Γ. (2005), Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- ☑ Ράπτης, Γ. (2008), Επιρροή Ελαστικών Συνδέσεων στο Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού Στύλων σε Μεταλλικά Πλαίσια, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ.
- ☑ Eurocode 3 Design of Steel Structures Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, CEN Brussels 1992, CEN Document EN 1993-1-1: 1992.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παρακάτω επισυνάπτονται οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των δρόμων ισοροπίας καθώς και για τα διαγράμματα ως προς τα αδιάστατα μεγέθη μηκών  $l_1' = l_1 / a$ , και εκκεντροτήτων,  $\bar{e}$ .

Οι μεταβλητές που θέτουμε περιγράφονται ως εξής:

W =  $w_1(L_1)$  (βέλος κάμψεως υποστυλώματος στη θέση  $x_1 = L_1$ )

XK = k (αδιάστατο φορτίο S που καταπονεί το υποστύλωμα)

C1 = ακρίβεια επανάληψης

XE =  $\bar{e}$  (αδιάστατη τιμή εκκεντρότητας  $e / l_1$ )

XL =  $\lambda^2$  (αδιάστατη τιμή λυγηρότητας)

R = r (αδιάστατος λόγος μηκών των μελών  $l_2 / l_1$ )

P =  $\rho$  (αδιάστατος λόγος ροπών αδρανείας  $I_m / I_2$ )

XI =  $l_1'$  (αδιάστατος λόγος μηκών  $l_1 / a$ )

E = C' (αδιάστατη τιμή σταθεράς στροφικού ελατηρίου:  $C' = C \cdot l_1 / (E \cdot I_1)$ )

CB = K' (αδιάστατη τιμή σταθεράς μετακινησιακού ελατηρίου:  $K' = \frac{K_b \cdot l_1^3}{E \cdot I_1(L_1)}$ )

XB =  $\beta^2$

XG =  $\mu$

### Διάγραμμα φορτίου-βέλους κάμψεως $\beta^2 - w_1$ χωρίς στροφικό ελατήριο

```
C*****
PROGRAM DIAGR
C*****
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

  PARAMETER(W_MIN=1.D-03, W_MAX=0.091D0, NSTEPS_W=180)
  PARAMETER(XK_MIN=0.1D0, XK_MAX=1.7D0, NSTEPS_XK=10000)

  OPEN(1,FILE='B-W.TXT')
  XE=-0.001D0
  XL=150.D0
  R=1.D0
  P=0.5D0
  XI=1.D0

  DO I=0,NSTEPS_W
    W=W_MIN+I*(W_MAX-W_MIN)/NSTEPS_W
    XK_OK=-1000000.D0
    XB_OK=-1000000.D0
    C1=1.D0
    DO J=0,NSTEPS_XK
      XK=XK_MIN+J*(XK_MAX-XK_MIN)/NSTEPS_XK
      XB=XK**2.D0*(W-R)/(XE-R)
```

1  
2  
1  
2  
1  
2  
3  
1  
2  
3  
1  
2  
3  
1  
2  
3

```
XB=DABS(XB)
XG=XK*(1.D0/XI+0.5D0)**1.5D0
XJ0=DBESJ0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
XJ1=DBESJ1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
Y0=DBESY0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
Y1=DBESY1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
XJA=DBESJ1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
YA=DBESY1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
YA0=DBESY0(2.D0*XG*DSQRT(XI))
XJA0=DBESJ0(2.D0*XG*DSQRT(XI))

F1=(XB/XK**2.D0*(XE-R)+R)**2.D0/(1.D0/XI+1/XI**2.D0)/(XJ1-XJA/
YA*Y1)**2.D0*(-XG*DSQRT(XI)*XJA0+XJA/
YA*XG*DSQRT(XI)*YA0)**2.D0

F2=((XB/XK**2.D0*(XE-R)+R)/(1.D0+1.D0/XI)**2.D0*(1.D0+XG/
DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*(Y0*XJA-XJ0*YA)/(YA*XJ1-XJA*
Y1))**2.D0

S0=F1+F2
S1=0.D0
XH=0.01D0

DO K=1,99

X=1.D0/XI+K*XH
X2=2*XG/DSQRT(X)

S1=S1+(XB/XK**2.D0*(XE-R)+R)**2.D0/(X*(1.D0+1.D0/XI))*
(DBESJ1(X2)-X2/2.D0*DBESJ0(X2)-XJA/YA*DBESY1(X2)+XJA/
YA*X2/2.D0*DBESY0(X2))**2.D0/(XJ1-XJA/YA*Y1)**2.D0

ENDDO ! K

S=XH/2.D0*(S0+2.D0*S1)
D=XB*R**2.D0*P/3.D0*(1.D0-XK**2.D0/XB)+(XE-R+XK**2.D0/XB*
R)/(XK**2.D0/XB*(1.D0+1.D0/XI))*(1.D0+(Y0*XJA-
YA*XJ0)/(YA*XJ1-Y1*XJA)*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))-
(XK/XL)**2.D0-S/2.D0
C=DABS(D)

IF (C.LT.C1) THEN
C1=C
XK_OK=XK
XB_OK=XB
END IF

ENDDO ! J
WRITE(1,*) W , XB_OK , C1
WRITE(*,*) W , XB_OK , C1

ENDDO ! I
CLOSE(1)
STOP
END
```

**Διάγραμμα φορτίου-βέλους κάμψεως  $\beta^2 - w_1$  με στροφικό ελατήριο**

```

C*****
PROGRAM DIAGR
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

PARAMETER(W_MIN=0.001D0, W_MAX=0.091D0, NSTEPS_W=180)
PARAMETER(XK_MIN=1.1D0, XK_MAX=2.5D0, NSTEPS_XK=10000)

OPEN(1,FILE='B-W.TXT')

    XE=0.D0
    XL=45.155D0
    R=2.D0
    P=1.225D0
    XI=1.D0
    E=1.D+07

DO I=0,NSTEPS_W

    W=W_MIN+I*(W_MAX-W_MIN)/NSTEPS_W

    XK_OK=-1000000.D0
    XB_OK=-1000000.D0
    C1=1.D0

    DO J=0,NSTEPS_XK

        XK=XK_MIN+J*(XK_MAX-XK_MIN)/NSTEPS_XK

        XG=XK*(1.D0/XI+0.5D0)**1.5D0
        XJ0=DBESJ0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
        XJ1=DBESJ1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
        Y0=DBESY0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
        Y1=DBESY1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
        XJA=DBESJ1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
        YA=DBESY1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
        YA0=DBESY0(2.D0*XG*DSQRT(XI))
        XJA0=DBESJ0(2.D0*XG*DSQRT(XI))

        V=(XJA0*E-XJA*(XG*XI**1.5D0+E/XG/DSQRT(XI)))/(-YA0*E+YA*(XG*
            XI**1.5D0+E/XG/DSQRT(XI)))+XJ1/Y1

        XB=XK**2.D0*W/(XE-R)*(1.D0+1.D0/XI)*Y1/((YA*XJ1/Y1-XJA)*
            DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/XI)/V+(1.D0+1.D0/XI)*Y1-
            DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/XI)*YA)-XK**2.D0*R/(XE-R)
        XB=DABS(XB)

        A3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1*V)
        B3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1)-XJ1/
            Y1*A3
    
```



```

1      F1=(A3*DSQRT(1.D0+XI)*(XJA-XG*DSQRT(XI)*XJA0)+B3*DSQRT(1.D0+
      XI)*(YA-XG*DSQRT(XI)*YA0))**2.D0

1      F2=(A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+
      1.D0/XI)*Y0))**2.D0

      S0=F1+F2
      S1=0.D0
      XH=0.01D0

      DO K=1,99

          X=1.D0/XI+K*XH
          X2=2*XG/DSQRT(X)

          S1=S1+(A3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESJ1(X2)-X2/2.D0*
          DBESJ0(X2))+B3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESY1(X2)-
          X2/2.D0*DBESY0(X2)))**2.D0

          ENDDO ! K

      S=XH/2.D0*(S0+2.D0*S1)
      D=(XB-XK**2.D0)*R**2.D0*P/3.D0+A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/
      XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*Y0)-(XK/XL)**
      2.D0-S/2.D0

      C=DABS(D)

      IF (C.LT.C1) THEN
          C1=C
          XK_OK=XK
          XB_OK=XB
      END IF

      ENDDO ! J

      WRITE(1,*) W , XB_OK , C1
      WRITE(*,*) W , XB_OK , C1
      ENDDO ! I
      CLOSE(1)
      STOP
      END

```

**Διάγραμμα κρίσιμου φορτίου-αδιάστατου μήκους  $\beta_{cr}^2 - l_1'$  με στροφικό ελατήριο**

```

C*****
PROGRAM DIAGR
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

PARAMETER(W_MIN=0.015D0, W_MAX=0.035D0, NSTEPS_W=40)
PARAMETER(XK_MIN=0.1D0, XK_MAX=1.5D0, NSTEPS_XK=10000)

OPEN(1,FILE='B-L1.TXT')

    XE=0.D0
    XL=40.D0
    R=1.D0
    P=1.D0
    E=0.9D0

    F=0.2D0
DO L=1,50
    XI=L*F
    XMAXB=0.D0
    W1=0.D0

    DO I=0,NSTEPS_W

        W=W_MIN+I*(W_MAX-W_MIN)/NSTEPS_W

        XK_OK=-1000000.D0
        XB_OK=-1000000.D0
        C1=1.D0

        DO J=0,NSTEPS_XK

            XK=XK_MIN+J*(XK_MAX-XK_MIN)/NSTEPS_XK

            XG=XK*(1.D0/XI+0.5D0)**1.5D0
            XJ0=DBESJ0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
            XJ1=DBESJ1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
            Y0=DBESY0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
            Y1=DBESY1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
            XJA=DBESJ1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
            YA=DBESY1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
            YA0=DBESY0(2.D0*XG*DSQRT(XI))
            XJA0=DBESJ0(2.D0*XG*DSQRT(XI))
            V=(XJA0*E-XJA*(XG*XI**1.5D0+E/XG/DSQRT(XI)))/(-YA0*E+YA*(XG*
                XI**1.5D0+E/XG/DSQRT(XI))+XJ1/Y1

            XB=XK**2.D0*W/(XE-R)*(1.D0+1.D0/XI)*Y1/((YA*XJ1/Y1-XJA)*
                DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/XI)/V+(1.D0+1.D0/XI)*Y1-
                DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/XI)*YA)-XK**2.D0*R/(XE-R)
            XB=DABS(XB)

```

```

1
A3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1*V)
B3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1)-XJ1/
  Y1*A3

1
F1=(A3*DSQRT(1.D0+XI)*(XJA-XG*DSQRT(XI)*XJA0)+B3*DSQRT(1.D0+
  XI)*(YA-XG*DSQRT(XI)*YA0))**2.D0

1
F2=(A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+
  1.D0/XI)*Y0))**2.D0

S0=F1+F2
S1=0.D0
XH=0.01D0

DO K=1,99

  X=1.D0/XI+K*XH
  X2=2*XG/DSQRT(X)

  S1=S1+(A3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESJ1(X2)-X2/2.D0*
    DBESJ0(X2))+B3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESY1(X2)-
    X2/2.D0*DBESY0(X2)))**2.D0

  ENDDO ! K

S=XH/2.D0*(S0+2.D0*S1)
D=(XB-XK**2.D0)*R**2.D0*P/3.D0+A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/
  XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*Y0)-(XK/XL)**
  2.D0-S/2.D0

C=DABS(D)

IF (C.LT.C1) THEN
  C1=C
  XK_OK=XK
  XB_OK=XB
END IF

ENDDO ! J
IF (XB_OK.GT.XMAXB) THEN
  XMAXB=XB_OK
  W1=W
ENDIF
ENDDO ! I

WRITE(1,*) XI , XMAXB , C1
WRITE(*,*) XI , XMAXB , C1
ENDDO ! L
CLOSE(1)
STOP
END

```

**Διάγραμμα κρίσιμου φορτίου-εκκεντρότητας  $\beta_{cr}^2 - \bar{e}$  με στροφικό ελατήριο**

```

C*****
PROGRAM DIAGR
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

PARAMETER(W_MIN=0.01D0, W_MAX=0.07D0, NSTEPS_W=120)
PARAMETER(XK_MIN=0.6D0, XK_MAX=1.D0, NSTEPS_XK=10000)

OPEN(1,FILE='B-E.TXT')

  XI=1.D0
  XL=54.41D0
  R=1.D0
  P=3.375D0
  E=0.D0

  F=3.D-04
DO L=1,3
  XE=L*F
  XMAXB=0.D0
  W1=0.D0
  DO I=0,NSTEPS_W

    W=W_MIN+I*(W_MAX-W_MIN)/NSTEPS_W
    XK_OK=-1000000.D0
    XB_OK=-1000000.D0
    C1=1.D0

    DO J=0,NSTEPS_XK

      XK=XK_MIN+J*(XK_MAX-XK_MIN)/NSTEPS_XK

      XG=XK*(1.D0/XI+0.5D0)**1.5D0
      XJ0=DBESJ0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
      XJ1=DBESJ1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
      Y0=DBESY0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
      Y1=DBESY1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
      XJA=DBESJ1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
      YA=DBESY1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
      YA0=DBESY0(2.D0*XG*DSQRT(XI))
      XJA0=DBESJ0(2.D0*XG*DSQRT(XI))

      V=(XJA0*E-XJA*(XG*XI**1.5D0+E/XG/DSQRT(XI)))/(-YA0*E+YA*(XG*
1      XI**1.5D0+E/XG/DSQRT(XI)))+XJ1/Y1

      XB=XK**2.D0*W/(XE-R)*(1.D0+1.D0/XI)*Y1/((YA*XJ1/Y1-XJA)*
1      DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/XI)/V+(1.D0+1.D0/XI)*Y1-
2      DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/XI)*YA)-XK**2.D0*R/(XE-R)
      XB=DABS(XB)

      A3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1*V)

```

```

1      B3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1)-XJ1/
      Y1*A3

1      F1=(A3*DSQRT(1.D0+XI)*(XJA-XG*DSQRT(XI)*XJA0)+B3*DSQRT(1.D0+
      XI*(YA-XG*DSQRT(XI)*YA0))**2.D0
1      F2=(A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+
      1.D0/XI)*Y0))**2.D0
      S0=F1+F2
      S1=0.D0
      XH=0.01D0
      DO K=1,99

      X=1.D0/XI+K*XH
      X2=2*XG/DSQRT(X)

1      S1=S1+(A3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESJ1(X2)-X2/2.D0*
2      DBESJ0(X2))+B3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESY1(X2)-
      X2/2.D0*DBESY0(X2)))**2.D0

      ENDDO ! K

      S=XH/2.D0*(S0+2.D0*S1)
1      D=(XB-XK**2.D0)*R**2.D0*P/3.D0+A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/
2      XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*Y0)-(XK/XL)**
      2.D0-S/2.D0
      C=DABS(D)

      IF (C.LT.C1) THEN
        C1=C
        XK_OK=XK
        XB_OK=XB
      END IF
      ENDDO ! J

      IF (XB_OK.GT.XMAXB) THEN
        XMAXB=XB_OK
        W1=W
      ENDIF
      ENDDO ! I

      WRITE(1,*) XE , XMAXB , C1
      WRITE(*,*) XE , XMAXB , C1

      ENDDO ! L

      CLOSE(1)
      STOP
      END

```

Διάγραμμα φορτίου-βέλους κάμψεως  $\beta^2 - w_1$  με στροφικό και μετακινησιακό ελατήριο

```
C*****
PROGRAM DIAGR
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

PARAMETER(W_MIN=0.001D0, W_MAX=0.091D0, NSTEPS_W=90)
PARAMETER(XK_MIN=2.0D0, XK_MAX=2.6D0, NSTEPS_XK=10000)

OPEN(1,FILE='B-W.TXT')
  XE=0.D0
  XL=40.D0
  R=1.D0
  P=1.D0
  XI=1.D0
  E=5.D0
  CB=0.D0

DO I=0,NSTEPS_W
  W=-W_MIN-I*(W_MAX-W_MIN)/NSTEPS_W
  XK_OK=-1000000.D0
  XB_OK=-1000000.D0
  C1=1.D0

  DO J=0,NSTEPS_XK
    XK=XK_MIN+J*(XK_MAX-XK_MIN)/NSTEPS_XK

    XF=XK**2.D0/CB*((XI/2.D0+1.D0)/(XI+1.D0))**3.D0-1.D0
    XH=XK**2.D0/CB*((XI/2.D0+1.D0)/(XI+1.D0))**3.D0-(1.D0+1.D0/XI)
    XG=XK*(1.D0/XI+0.5D0)**1.5D0
    XJ0=DBESJ0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    XJ1=DBESJ1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    Y0=DBESY0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    Y1=DBESY1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    XJA=DBESJ1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
    YA=DBESY1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
    YA0=DBESY0(2.D0*XG*DSQRT(XI))
    XJA0=DBESJ0(2.D0*XG*DSQRT(XI))

    V=(DSQRT(XI+1.D0)*XJ1*E*CB-XJA*E*CB-XF*CB*(XG*XI**1.5D0*E*
1      XJA0-XG**2.D0*XI**3.D0*XJA-XI*XJA*E))/(-DSQRT(XI+1.D0)*
2      Y1*E*CB+YA*E*CB+XF*CB*(XG*XI**1.5D0*E*YA0-XG**2.D0*
3      XI**3.D0*YA-XI*YA*E))+XJ1/Y1

    XB=W*XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1*(1.D0/XK**2.D0*((XI+1.D0)/(XI/
1      2.D0+1.D0))**3.D0-1.D0/CB)/(DSQRT(1.D0/XI+1.D0)*(XE-R)*
2      (YA/DSQRT(XI)-DSQRT(1.D0/XI+1.D0)*Y1+(XJA/DSQRT(XI)-
3      XJ1*YA/Y1/DSQRT(XI))/V))*CB-XK**2.D0*R/(XE-R)

    XB=DABS(XB)

    A3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1*V)
```

```

1      B3=(XB*XE+R*(XK**2.D0-XB))/(XK**2.D0*(1.D0+1.D0/XI)*Y1)-XJ1/
      Y1*A3

1      D3=(-A3*XJ1-B3*Y1)*(1.D0+1.D0/XI)/XI/XF+DSQRT((1.D0+
      1.D0/XI)/XI)*(-A3*XJA-B3*YA)/XF*XH

      C3=(1.D0+1.D0/XI)/XH*(A3*XJ1+B3*Y1+D3/(1.D0+1.D0/XI))

1      F1=(A3*DSQRT(1.D0+XI)*(XJA-XG*DSQRT(XI)*XJA0)+B3*DSQRT(1.D0+
      XI)*(YA-XG*DSQRT(XI)*YA0)+C3)**2.D0

1      F2=(A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+
      1.D0/XI)*Y0)+C3)**2.D0

      S0=F1+F2
      S1=0.D0
      XT=0.01D0

      DO K=1,99

          X=1.D0/XI+K*XT
          X2=2*XG/DSQRT(X)

          S1=S1+(A3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESJ1(X2)-X2/2.D0*
1          DBESJ0(X2))+B3*DSQRT((1.D0+1.D0/XI)/X)*(DBESY1(X2)-
2          X2/2.D0*DBESY0(X2))+C3)**2.D0

      ENDDO ! K

      S=XT/2.D0*(S0+2.D0*S1)
1      D=(XB-XK**2.D0)*R**2.D0*P/3.D0+C3+A3*(XJ1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/
2      XI)*XJ0)+B3*(Y1-XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*Y0)-(XK/XL)**
      2.D0-S/2.D0

      C=DABS(D)

      IF (C.LT.C1) THEN
          C1=C
          XK_OK=XK
          XB_OK=XB
      END IF
      ENDDO ! J

      WRITE(1,*) W , XB_OK , C1
      WRITE(*,*) W , XB_OK , C1
      ENDDO ! I
      CLOSE(1)
      STOP
      END

```

**Γραμμική θεωρία-Αντισυμμετρικός Λυγισμός με μετάθεση**  
**Διάγραμμα κρίσιμου φορτίου-αδιάστατου μήκους  $\beta_{cr}^2 - l_1'$**

```
C*****
PROGRAM DIAGR
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
PARAMETER(XI_MIN=0.1D0, XI_MAX=10.1D0, NSTEPS_XI=100)
PARAMETER(XK_MIN=0.5D0, XK_MAX=2.D0, NSTEPS_XK=1000000)

OPEN(1,FILE='B-K4.TXT')

  R=1.225D0

DO I=0,NSTEPS_XI

  XI=XI_MIN+I*(XI_MAX-XI_MIN)/NSTEPS_XI

  XK_OK=-1000000.D0
  C1=1.D0

  DO J=0,NSTEPS_XK

    XK=XK_MIN+J*(XK_MAX-XK_MIN)/NSTEPS_XK

    XG=XK*(0.5D0+1.D0/XI)**1.5D0
    XJ0=DBESJ0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    XJ1=DBESJ1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    Y0=DBESY0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    Y1=DBESY1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+1.D0/XI))
    XJA=DBESJ1(2.D0*XG*DSQRT(XI))
    YA=DBESY1(2.D0*XG*DSQRT(XI))

    D=XG*(Y0*XJA-YA*XJ0)/(Y1*XJA-YA*XJ1)

    B=DSQRT(1.D0+1.D0/XI)*(1.D0-XK**2.D0*R*(1.D0+1.D0/XI)/3.D0)
    C=DABS(D-B)

    IF (C.LT.C1) THEN
      C1=C
      XK_OK=XK
    END IF

  ENDDO ! J
  XK_OK=XK_OK**2.D0

  WRITE(1,*) XI, XK_OK , C1
  WRITE(*,*) XI, XK_OK , C1
ENDDO ! I
CLOSE(1)
STOP
END
```



## Γραμμική θεωρία-Συμμετρικός Λυγισμός χωρίς μετάθεση

Διάγραμμα κρίσιμου φορτίου-αδιάστατου μήκους  $\beta_{cr}^2 - l_1'$

```
C*****
PROGRAM DIAGR
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
PARAMETER(XI_MIN=0.1D0, XI_MAX=10.D0, NSTEPS_XI=99)
PARAMETER(XK_MIN=0.1D0, XK_MAX=3.3D0, NSTEPS_XK=1000000)

OPEN(1,FILE='B-K7.TXT')

R=8.D0

DO I=0,NSTEPS_XI

  XI=XI_MIN+I*(XI_MAX-XI_MIN)/NSTEPS_XI

  XK_OK=-1000000.D0
  C1=1.D0

  DO J=0,NSTEPS_XK

    XK=XK_MIN+J*(XK_MAX-XK_MIN)/NSTEPS_XK
    XG=XK*(1.D0+XI/2.D0)**1.5D0/XI
    XJ0=DBESJ0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+XI))
    XJ1=DBESJ1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+XI))
    Y0=DBESY0(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+XI))
    Y1=DBESY1(2.D0*XG/DSQRT(1.D0+XI))
    XJA=DBESJ1(2.D0*XG)
    YA=DBESY1(2.D0*XG)

    D=(XJA*Y0-XJ0*YA)/(YA*XJ1-XJA*Y1)

    B=DSQRT(XI+1.D0)/(XI*XG)+XG*R*(XI+1.D0)**2.5D0/
      ((1.D0/XI+1.D0)*(XI/2.D0+1.D0)**3.D0)
    C=DABS(D-B)

    IF (C.LT.C1) THEN
      C1=C
      XK_OK=XK
    END IF

  ENDDO ! J

  XA=XK_OK**2.D0*(1.D0+XI/2.D0)**3.D0
  WRITE(1,*) XI, XA, C1
  WRITE(*,*) XI, XA, C1
ENDDO ! I
CLOSE(1)
STOP
END
```

