
ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΕΤΕΥΡΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Διπλωματική Εργασία

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΗΛΙΟΥΝΗΣ

Επιβλέπων Καθηγητής

Δρ. Νίκος Δ. Λαγαρός



2011

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

Copyright © Γιώργος Πηλιούνης, 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική μου εργασία και ταυτόχρονα τον πενταετή κύκλο σπουδών μου στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω κάποια άτομα που με βοήθησαν τόσο στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας όσο και γενικότερα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κατ' αρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Νίκο Λαγαρό που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα και συγχρόνως μου προσέφερε τις επιστημονικές του συμβουλές και τη βοήθειά του όποτε αυτό χρειάστηκε.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω το λέκτορα ΕΜΠ κ. Νίκο Γερόλυμο που με την εις βάθος γνώση των γεωτεχνικών θεμάτων που άπτονται της διπλωματικής μου εργασίας μου προσέφερε χρήσιμες λύσεις και συμβουλές όσον αφορά στις κατανομές των γεωτεχνικών παραμέτρων.

Επιπλέον, ευχαριστώ όλους τους καθηγητές στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ για την ανεκτίμητη επιστημονική γνώση που μου μετέδωσαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες προς τους γονείς μου Κώστα και Βάνα και τον αδελφό μου Δημήτρη καθώς και προς όλους τους στενούς μου φίλους για την αμέριστη και συνεχή συμπαράσταση που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στην οικογένειά μου για τη στήριξή τους σε κάθε μου προσπάθεια.

Πίνακας περιεχομένων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
1.1 ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	9
1.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΣΤΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ	10
1.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ	11
1.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ	13
ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ	15
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	15
2.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO	18
2.3 ΔΕΙΚΤΗΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ (RELIABILITY INDEX)	21
2.3.1 Γενικός Ορισμός του Δείκτη Αξιοπιστίας	21
2.3.2 Δείκτης Αξιοπιστίας First-Order Second-Moment	23
2.3.3 Δείκτης Αξιοπιστίας Hasofer-Lind.....	26
2.3.4 Μια διαφορετική προσέγγιση για το δείκτη αξιοπιστίας Hasofer-Lind.....	29
2.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ	34
ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ	37
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	37
3.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ	39
3.2.1 Μεταβλητές σχεδιασμού.....	41
3.2.2 Αντικειμενική συνάρτηση	42
3.2.3 Συναρτήσεις Περιορισμού	42
3.2.4 Τοπικά και καθολικά ελάχιστα.....	45
3.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ	46
3.3.1 Particle Swam Optimization Algorithm	46
3.3.2 Harmony Search.....	50
3.3.3 Differential Evolution	54
3.3.4 Covariance Matrix Adaptation.....	56
3.3.5 Elitistic Covariance Matrix Adaptation	58
3.4 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ	60
3.5 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ- ΒΙΒΛΙΟΦΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ	62
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	65
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	65

4.1.1 Αρχικοποίηση	65
4.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ.....	67
4.2.1 Αξιολόγηση της πιθανότητας υγροποίησης αμμωδών εδαφών	67
4.2.2: Ευστάθεια πρανούς γεωκατασκευής (επιχώματος)	70
4.2.3: Μετατόπιση θεμελίωσης με πασσάλους	72
4.2.4 Ευστάθεια μεγάλου φράγματος από σκυρόδεμα.....	76
4.3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ.....	78
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	80
5.1 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ	81
5.2 ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ	82
5.3 ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	83

Περίληψη

Οι ανάγκες της σύγχρονης εποχής για οικονομικότερες, αποδοτικότερες κατασκευές οδηγούν στην απομάκρυνση από τη μονοδιάστατη έννοια του “υπέρ της ασφαλείας” και στρέφουν πλέον το ενδιαφέρον στην αναζήτηση του “βέλτιστου”. Στην αναζήτηση δηλαδή της καλύτερης λύσης μέσα από ένα σύνολο ασφαλών επιλογών. Φυσικά, ο κλάδος της Γεωτεχνικής Μηχανικής δεν θα μπορούσε να μείνει ανεπηρέαστος από αυτό το ρεύμα και σταδιακά οι συμβατικές εμπειρικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται από τους γεωτεχνικούς μηχανικούς για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές αντικαθίστανται από νέες καινοτόμες μεθοδολογίες. Σε αυτή την κατεύθυνση κινείται και η παρούσα διπλωματική εργασία, η οποία μελετά τη χρήση μετεωριστικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης για την ανάλυση αξιοπιστίας γεωτεχνικών προβλημάτων. Αφού επεξηγείται αναλυτικά το θεωρητικό υπόβαθρο πίσω από την ανάλυση αξιοπιστίας και τις μεθόδους βελτιστοποίησης, παρατίθενται τα αποτελέσματα των επιλύσεων αριθμητικών εφαρμογών. Μελετήθηκαν πέντε πολλά υποσχόμενοι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης και αξιολογήθηκε η απόδοσή τους για τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας τεσσάρων βασικών γεωτεχνικών προβλημάτων. Τέλος εξήχθησαν συμπεράσματα σχετικά με την καταλληλότητα και τις δυνατότητές τους για ευρύτερη εφαρμογή στον κλάδο της Γεωτεχνικής Μηχανικής.

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Η ντετερμινιστική ανάλυση κάθε δομικού συστήματος απαιτεί συγκεκριμένες παραδοχές που αφορούν τη γεωμετρία, τις ιδιότητες των υλικών και άλλα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά τα οποία επηρεάζουν τη συνολική φέρουσα ικανότητα της κατασκευής. Επίσης, πρόσθετες απλοποιητικές παραδοχές πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όσον αφορά στα φορτία και κυρίως αυτά που σχετίζονται με σεισμικές δράσεις. Παρόλα αυτά, στις πραγματικές εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού συχνά υπεισέρχονται αβεβαιότητες που οφείλονται είτε στην τυχαιότητα (aleatory uncertainty) είτε στην ελλιπή γνώση (epistemic uncertainty) των εξεταζόμενων προβλημάτων. Οι αβεβαιότητες αυτές συχνά παίζουν αποφασιστικό ρόλο και ιδιαίτερα στο σχεδιασμό με κριτήρια επιτελεστικότητας (performance-based design) της Σεισμικής Μηχανικής, όπως για παράδειγμα οι γεωτεχνικές σεισμικές εφαρμογές που είναι άκρως στοχαστικά προβλήματα. Εντούτοις, συχνά οι μηχανικοί συμβιβάζονται με τη χρήση ντετερμινιστικών απλοποιήσεων λόγω του χαμηλού υπολογιστικού τους κόστους και της μικρής τους περιπλοκότητας. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων χρόνων όμως, με την ιδιαίτερα σημαντική εξέλιξη των μεθόδων στοχαστικής ανάλυσης αλλά και με την αύξηση των υπολογιστικών δυνατοτήτων, οι πιθανολογικές μέθοδοι κερδίζουν συνεχώς έδαφος.

1.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΣΤΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Οι συντελεστές ασφαλείας που χρησιμοποιούνται στη συμβατική γεωτεχνική μηχανική βασίζονται σε εμπειρικές μεθόδους, ενώ είναι συχνό το να χρησιμοποιείται μια τιμή συντελεστή ασφαλείας χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο βαθμός αβεβαιότητας που περιέχεται στον υπολογισμό της. Εξαιτίας των ισχυρόντων κανονισμών και της παράδοσης, έχει επικρατήσει η χρήση του ίδιου συντελεστή για κάποιες εφαρμογές παρόλο που οι επικρατούσες συνθήκες έχουν πολύ μεγάλο εύρος βαθμών αβεβαιότητας. Βέβαια, οι εμπειρικές μέθοδοι συνήθως είναι προσαρμοσμένες έτσι ώστε να παρέχουν αποτελέσματα “υπέρ της ασφαλείας”, αλλά αυτό δεν είναι πάντα καλό αφού δεν οδηγεί σε οικονομικές, αποδοτικές λύσεις.

Οι αναλύσεις αξιοπιστίας παρέχουν ένα μέσο αξιολόγησης των επιδράσεων των αβεβαιοτήτων, αλλά και ένα τρόπο διάκρισης μεταξύ των συνθηκών όπου οι αβεβαιότητες είναι χαρακτηριστικά μεγάλες ή μικρές. Παρόλο το γεγονός ότι η θεωρία της ανάλυσης αξιοπιστίας έχει δυνητικά εξαιρετικές δυνατότητες, δεν έχει χρησιμοποιηθεί και αξιοποιηθεί στη πράξη όσο θα έπρεπε. Αυτό οφείλεται κυρίως σε δύο λόγους. Πρώτον, περιλαμβάνει όρους και έννοιες με τους οποίους οι περισσότεροι γεωτεχνικοί μηχανικοί δεν είναι εξοικειωμένοι και δεύτερον, υπάρχει μια γενική πεποίθηση ότι η ανάλυση αξιοπιστίας απαιτεί περισσότερο κόπο και μεγαλύτερο όγκο δεδομένων από αυτόν που είναι διαθέσιμος στα συνήθη πρακτικά γεωτεχνικά προβλήματα.

Ο Christian κ.α. (1994), ο Tang κ.α. (1999) και άλλοι έχουν περιγράψει εξαιρετικά παραδείγματα χρήση της ανάλυσης αξιοπιστίας σε γεωτεχνικές εφαρμογές παραθέτοντας ταυτόχρονα σαφείς και λεπτομερείς επεξηγήσεις των υποκειμένων εννοιών. Ταυτόχρονα, ο Duncan (2000) επιχείρησε να δείξει πως οι θεωρίες της αξιοπιστίας μπορούν να εφαρμοστούν με απλούς τρόπους έτσι ώστε να μην απαιτούν περισσότερο κόπο και όγκο δεδομένων από τις συμβατικές μεθόδους.

Η ανάλυση αξιοπιστίας των κατασκευών μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με μεθόδους προσομοίωσης, όπως η μέθοδος Monte Carlo, είτε με προσεγγιστικές μεθόδους (FORM, SORM, RSM κα). Παρόλα αυτά, η μέθοδος Monte Carlo φαίνεται να είναι η μόνη που μπορεί να επιτύχει ακριβείς λύσεις σε σύνθετα προβλήματα που περιλαμβάνουν μη γραμμικότητες και μεγάλο αριθμό τυχαίων μεταβλητών. Το βασικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι μπορεί να δώσει αποδεκτές λύσεις σχεδόν για κάθε πρόβλημα ενώ το κυριότερο μειονέκτημά της είναι το πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Χαρακτηριστική μείωση του υπολογιστικού κόστους μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση αποτελεσματικών μοντέλων πρόβλεψης (efficient soft computing metamodels) (Παπαδρακάκης κα) αλλά και πάλι παραμένει δυσανάλογο και συχνά η μέθοδος αυτή αποδεικνύεται ασύμφορη.

1.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Τα περισσότερα προβλήματα της γεωτεχνικής μηχανικής περιλαμβάνουν ανάλυση ευστάθειας με αποτέλεσμα ο σχεδιασμός των κατασκευών όπως οι τοίχοι αντιστήριξης και τα πρανή να γίνεται έναντι αστοχίας. Κατά την επίλυση αυτών το προβλημάτων επιδιώκεται ο υπολογισμός του μέγιστου φορτίου που μπορεί να μεταφέρει η κατασκευή στο έδαφος ή του ελαχίστου λόγου μεταξύ των δυνάμεων και ροπών στήριξης και ανατροπής. Υπάρχουν όμως και πολλά προβλήματα όπου μέσα στις ευθύνες του μηχανικού εκτός από τον έλεγχο έναντι αστοχίας τίθεται και το θέμα του οικονομικού σχεδιασμού, το να καταλήξει δηλαδή στην πιο οικονομική και αποτελεσματική/αποδοτική λύση. Επομένως σχεδόν όλες οι πρακτικές εφαρμογές οδηγούν σε μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης που υπόκειται σε συγκεκριμένους περιορισμούς και συμπεριφορές τις κατασκευής. Η σημαντικότητα και περιπλοκότητα των εφαρμογών αυτών επιβάλλει τη χρήση των πιο συστηματικών και ορθολογικών προσεγγίσεων. Η περιπλοκότητα αυτή έγκειται στο γεγονός ότι συχνά η επίλυση των γεωτεχνικών προβλημάτων ανάλυσης και σχεδιασμού οδηγεί σε σύνθετα συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων. Όταν οι περιορισμοί των προβλημάτων αποτελούνται από ανισοτικές συνθήκες, το επίπεδο δυσκολίας αυξάνεται ακόμα περισσότερο υπερβαίνοντας τις δυνατότητες των συμβατικών μαθηματικών του διαφορικού λογισμού και δημιουργώντας την ανάγκη επιστράτευσης νέων πιο αποτελεσματικών μεθόδων επίλυσης.

Η αναγνώριση της ανάγκης αυτής οδήγησε στη δημιουργία πρωτότυπων μαθηματικών προγραμματιστικών τεχνικών που επικεντρώνονται στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Περιλαμβάνουν την εύρεση ενός συνόλου μεταβλητών που βελτιστοποιούν τη αντικειμενική συνάρτηση και ικανοποιούν κάποιους προκαθορισμένους περιορισμούς σχεδιασμού. Τα τελευταία τριάντα χρόνια όλο και περισσότεροι ερευνητές εστίασαν το ενδιαφέρον τους στη χρήση των μεθόδων αυτών σε εφαρμογές όπως ο υπολογισμός της τάσης του εδάφους, η αντοχή γεωκατασκευής, η ευστάθεια πρανούς κ.α. Παρόλο που αρχικά οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν ήταν πάρα πολλές λόγω των περιορισμένων υπολογιστικών δυνατοτήτων, ήταν προφανής η ανωτερότητα των μεθόδων βελτιστοποίησης στην επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων, είτε ισοτικών είτε ανισοτικών. Μέχρι τότε, η προσέγγιση των προβλημάτων αυτών γινόταν με εμπειρικές γραφικές και αλγεβρικές μεθόδους ή με “πρωτόγονες” αριθμητικές μεθόδους με αποτέλεσμα να περιορίζονται σε πολύ απλές εφαρμογές. Μέχρι τις αρχές του '70 είχαν γίνει μόνο ελάχιστες δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια. Ο Lysmer (1970) επέλυσε εφαρμογές υπολογισμού τάσεων του εδάφους και αντοχής γεωκατασκευών μετατρέποντας το μη γραμμικό πρόβλημα σε γραμμικό μέσω της προσέγγισης των μη γραμμικών περιορισμών με μια σειρά από ευθείες γραμμές και εφαρμοσμένες γραμμικές προγραμματιστικές τεχνικές. Οι Potchman και Kolesnichenco (1972) χρησιμοποίησαν δυναμικό προγραμματισμό για προβλήματα φέρουσας ικανότητας, ενώ οι Krugman και Krizek (1973) και ο Chen (1975) επέλυσαν θέματα ευστάθειας

πρανών με δύο ως τρεις μεταβλητές. Η πρώτη διδακτορική διατριβή πάνω στον τομέα αυτό δημοσιεύτηκε το (1976) με τίτλο “Some Application of Mathematical Programming Techniques to Stability Problems in Geotechnical Engineering”. Εδώ να αναφερθεί ότι αρχικά η επιστημονική κοινότητα αντιμετώπισε με δυσπιστία τις καινοτόμες αυτές προσεγγίσεις κάνοντας αρκετά δύσκολο το έργο των ερευνητών. Πλέον, οι δυνατότητες τους έχουν ευρέως αναγνωριστεί με αποτέλεσμα εφαρμογές των γενετικών και άλλων εξελικτικών αλγόριθμων καθώς και των νευρωνικών δικτύων να επεκτείνονται όχι μόνο σε μη γραμμικά προβλήματα αλλά και σε όλους τους τομείς της γεωτεχνικής μηχανικής.

Φυσικά, όπως συμβαίνει με όλες τις αναλυτικές και αριθμητικές τεχνικές στο πλαίσιο της επίλυσης περίπλοκων προβλημάτων, το ενδιαφέρον δεν περιορίζεται μόνο στις διάφορες διαθέσιμες μεθόδους αλλά και στην τέχνη της σωστής εφαρμογής τους. Το κάθε πρόβλημα και κυρίως τα συστήματα μεγάλης κλίμακας χρειάζεται ξεχωριστή επεξεργασία και εστίαση στις ιδιαιτερότητες του προκειμένου να απαντηθούν τα πολλά ερωτήματα που αφορούν στον καθορισμό των μεταβλητών, των περιορισμών και των στόχων ενώ είναι προφανές ότι είναι αδύνατον να βρεθούν γενικές λύσεις που θα είναι εφαρμόσιμες σε κάθε περίπτωση. Η βελτιστοποίηση και άλλοι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι χρήσιμες μέθοδοι για την ανάλυση και το σχεδιασμό, αλλά η επιτυχής εφαρμογή τους εξαρτάται κυρίως από τον τρόπο εφαρμογής τους και από τη σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Στην παρούσα εργασία έγινε ανάλυση αξιοπιστίας με χρήση του δείκτη Hasofer-Lind για τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας τεσσάρων γεωτεχνικών προβλημάτων. Τα προβλήματα αυτά είναι η υγροποίηση των αμμωδών εδαφών, η ευστάθεια του πρανούς επιχώματος, η θεμελίωση με πασσάλους και η ευστάθεια μεγάλου φράγματος από σκυρόδεμα. Χρησιμοποιήθηκαν πέντε πολλά υποσχόμενοι μετεωριστικοί αλγόριθμοι των οποίων τα αποτελέσματα παρουσιάζονται αναλυτικά και συγκρίνονται μεταξύ τους καθώς και με τα αποτελέσματα της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo.

1.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

1. Basudhar, P. K. (2008). *Application of Optimization and other Evolutionary Techniques in Geotechnical Engineering*. Kanpur: Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Kanpur.
2. Basudhar, P. K. *Application of Optimization Techniques in Geotechnical Engineering at I.I.T.Kanpur*. Kanpur: Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Kanpur.
3. Cui, L., & Sheng, D. (2005). Genetic algorithms in probabilistic finite element analysis of geotechnical problems. *Computers and Geotechnics* .
4. Duncan, M. J. (2000). Factors of Safety and Reliability in Geotechnical Engineering. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* .
5. Garavelas, A. (2007). *Efficient Computational Methods for Solving Seismic RBDO Problems*. Athens: NTUA.
6. Lagaros, N. D., Tsobanakis, Y., Psarropoulos, P. N., & Georgopoulos, E. C. (2009). Copmputationally efficient seismic fragility analysis of geostructures. *Computers and Structures* .
7. Letsios, C. (2007). *Optimum Design of Pile Foundations*. Athens: NTUA.
8. Tsompanakis, Y., Lagaros, N. D., Psarropoulos, P. N., & Georgopoulos, E. C. (2010, February-April). Probabilistic seismic slope stability assesment of geostructures. *Structure and Infrastructure Engineering* .
9. Καββαδάς, Μ. (2005). *Στοιχεία Εδαφομηχανικής*. Αθήνα: Ε.Μ.Πολυτεχνείο.

2

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

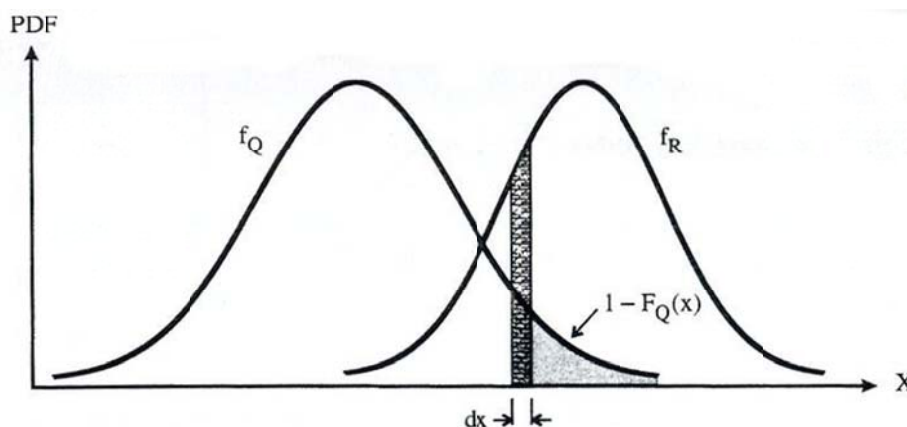
Το θεωρητικό υπόβαθρο και οι μέθοδοι ανάλυσης της αξιοπιστίας των κατασκευών έχουν εξελιχθεί σημαντικά τα τελευταία 20 χρόνια, με την εξέλιξη αυτή να αποτυπώνεται με τον ολοένα αυξανόμενο αριθμό των δημοσιεύσεων σχετικών με το θέμα αυτό. Οι εξελίξεις αυτές σε συνδυασμό με την επίτευξη ακριβέστερων ποσοτικοποιήσεων των αβεβαιοτήτων που σχετίζονται με τα φορτία και τις αντοχές των κατασκευών έχουν τονώσει το ενδιαφέρον για την πιθανολογική θεώρηση των κατασκευών. Η αξιοπιστία μιας κατασκευής ή η πιθανότητα αστοχίας της αποτελεί καθοριστικό παράγοντα της διαδικασίας σχεδιασμού, αφού εξετάζει την πιθανότητα να εκπληρώσει επιτυχώς η κατασκευή τις απαιτήσεις σχεδιασμού της. Η ανάλυση αξιοπιστίας οδηγεί σε πρόσθετα μέτρα ασφαλείας τα οποία ο σχεδιαστής μηχανικός πρέπει να λάβει υπόψη του λόγω των προαναφερθέντων αβεβαιοτήτων. Παρόλο που από θεωρητικής άποψης οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί γίνονται ολοένα και πιο διαδεδομένες, από υπολογιστικής άποψης σοβαρά εμπόδια έχουν αντιμετωπιστεί στις πρακτικές εφαρμογές.

Οι μέθοδοι αξιοπιστίας πρώτης και δεύτερης τάξης που έχουν αναπτυχθεί για την εκτίμηση της αξιοπιστίας των κατασκευών οδηγούν σε εύχρηστες διατυπώσεις που απαιτούν γνώση μόνο των μέσων και των διακυμάνσεων των τυχαίων μεταβλητών και τον ορισμό της συνάρτησης αστοχίας (differentiable failure function). Για προβλήματα μικρής κλίμακας, οι μέθοδοι αυτές αποδεικνύονται πολύ αποτελεσματικές, αλλά για προβλήματα μεγαλύτερης κλίμακας ή και προβλήματα με

μεγάλο αριθμό τυχαίων μεταβλητών, η μέθοδος Monte Carlo (MCS) υπερτερεί. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ απλή στη χρήση αλλά για τα συνήθη προβλήματα αξιοπιστίας των κατασκευών, απαιτεί υπερβολικά μεγάλο υπολογιστικό φόρτο εξαιτίας του τεράστιου μεγέθους του δείγματος και του χρόνου CPU που απαιτούνται για κάθε επανάληψη της μεθόδου. Για τη μείωση του υπολογιστικού φόρτου, έχουν αναπτυχθεί περίπλοκες μέθοδοι προσομοίωσης που ονομάζονται τεχνικές μείωσης της διασποράς (variance reduction techniques), η αποδοτικότητά τους όμως είναι περιορισμένη για μεγάλες τιμές πιθανότητας. Παρόλη την εξέλιξη στις μεθόδους αυτές, ο υπολογιστικός φόρτος που απαιτείται παραμένει δυσανάλογα μεγάλος με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν πολλά παραδείγματα εκτίμησης της πιθανότητας αστοχίας.

Χρονικά Αμετάβλητη Ανάλυση Αξιοπιστίας των Κατασκευών

Η πιθανολογική φύση των παραμέτρων σχεδιασμού, των ιδιοτήτων των υλικών και των συνθηκών φόρτισης που εμπλέκεται στην ανάλυση των κατασκευών αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα που επηρεάζει την ασφάλεια τους. Η ανάλυση αξιοπιστίας οδηγεί σε μέτρα ασφαλείας που πρέπει να ληφθούν υπόψη εξαιτίας των προαναφερθέντων αβεβαιοτήτων.



Σχήμα 2.1 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας φορτίου (Q) και αντίστασης (R)

Έστω R η αντοχή ή "χωρητικότητα" ενός στοιχείου ή μιας κατασκευής και Q η επιρροή του φορτίου ή "ζήτηση". Μια συνάρτησης οριακής κατάστασης (performance function or limit state function) μπορεί να οριστεί ως $g(R, Q) = R - Q$. Αν $g \geq 0$, η κατασκευή είναι ασφαλής (επιθυμητή συμπεριφορά), αν $g < 0$ η κατασκευή δεν είναι ασφαλής (μη επιθυμητή συμπεριφορά). Η πιθανότητα αστοχίας είναι ίση με την πιθανότητα να συμβεί η μη επιθυμητή συμπεριφορά. Η τυχαιότητα των R και Q μπορεί να περιγραφεί από γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_r(y)$ και $f_q(y)$ αντίστοιχα, με $F_R(y) = p[R < y]$, $F_Q(y) = p[Q < y]$ να αποτελούν τις αθροιστικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των R και Q αντίστοιχα. Η πιθανότητα αστοχίας, P_f , μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας της συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των R και Q όπως στο σχήμα 2.1.

Η κατασκευή αστοχεί όταν το φορτίο υπερβαίνει την αντοχή. Αν η ανοχή R είναι ίση με μία συγκεκριμένη τιμή r_i , τότε η πιθανότητα αστοχίας είναι ίση με την πιθανότητα ότι το φορτίο θα υπερβαίνει την τιμή της αντοχής, ή $P(Q > r_i)$. Επιπλέον, εφόσον η αντοχή R είναι τυχαία μεταβλητή, σε κάθε τιμή r_i αντιστοιχεί μια πιθανότητα. Επομένως, η πιθανότητα αστοχίας αποτελείται από όλους τους πιθανούς συνδυασμούς από $R = r_i$ και $Q > r_i$ που μπορούν να γραφούν και ως

$$P_f = \sum P(R = r_i \cap Q > r_i) = \sum P(Q > R | R = r_i) P(R = r_i) \quad (2.1)$$

όπου χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας. Για την συνεχή περίπτωση, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα. Η πιθανότητα $P(Q > R | R = R_i)$ είναι ίση με $1 - P(Q \leq R | R = r_i) = 1 - F_Q(r_i)$. Οριακά ισχύει $P(R = r_i) \approx \int f_R(r_i) dr_i$. Συνδυάζοντας όλες αυτούς τους μετασχηματισμούς καταλήγουμε στην εξίσωση (2.2).

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_Q(r_i)] f_R(r_i) dr_i = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} F_Q(r_i) f_R(r_i) dr_i \quad (2.2)$$

Υπάρχει και μία εναλλακτική διατύπωση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Συγκεκριμένα, το φορτίο Q είναι ίσο με μια συγκεκριμένη τιμή q_i , τότε η πιθανότητα αστοχίας είναι ίση με την πιθανότητα η αντοχή να είναι μικρότερη από το φορτίο, ή $P(R < q_i)$. Παρόλα αυτά, εφόσον το φορτίο Q είναι τυχαία μεταβλητή, σε κάθε τιμή q_i αντιστοιχεί μια πιθανότητα. Επομένως, η πιθανότητα αστοχίας αποτελείται από όλους τους πιθανούς συνδυασμούς από $Q = q_i$ και $R < q_i$ που μπορούν να γραφούν και ως:

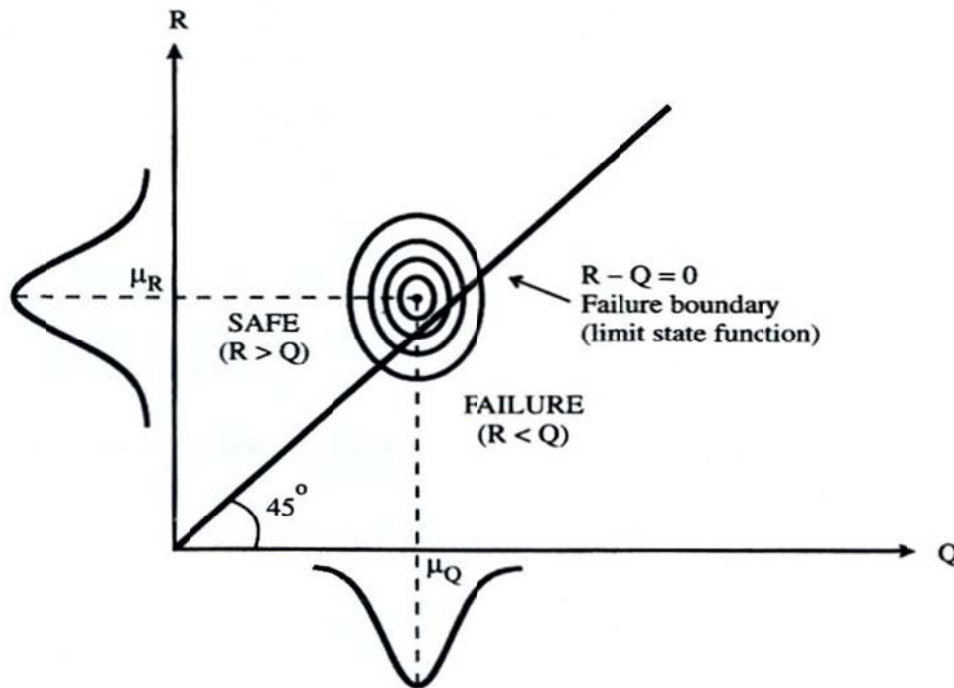
$$P_f = \sum P(Q = q_i \cap R < q_i) = \sum P(R < Q | Q = q_i) P(Q = q_i) \quad (2.3)$$

Ακολουθώντας την ίδια λογική με παραπάνω, η αμετάβλητη ανάλυση αξιοπιστίας δίνει:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(q_i) f_Q(q_i) dq_i \quad (2.4)$$

Παρόλο που οι εξισώσεις (2.2) και (2.4) μοιάζουν πολύ ξεκάθαρες, είναι πρακτικά αδύνατον να εκτιμηθεί αναλυτικά η αντοχή για σύνθετες ή και μεγάλης κλίμακας κατασκευές. Σε τέτοιες περιπτώσεις το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (2.2) μπορεί να υπολογιστεί μόνο προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας είτε μεθόδους προσομοίωσης, όπως η μέθοδος Monte Carlo, είτε προσεγγιστικές μεθόδους. Οι προσεγγιστικές μέθοδοι πρώτης και δεύτερης τάξης (FORM και SORM) οδηγούν σε διατυπώσεις που απαιτούν γνώση των μέσων και των διακυμάνσεων των τυχαίων μεταβλητών πριν γίνει η ανάλυση αξιοπιστίας καθώς και ορισμό της διαφορικής συνάρτησης αστοχίας. Αντίθετα, οι μέθοδοι Monte Carlo απαιτούν προκαθορισμό των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας όλων των τυχαίων μεταβλητών πριν την ανάλυση

αξιοπιστίας. Για προβλήματα μικρής κλίμακας οι εφαρμογές των FORM και SORM έχουν αποδειχθεί πολύ αποτελεσματικές, αλλά όταν ο αριθμός των τυχαίων μεταβλητών αυξάνεται και τα προβλήματα γίνονται πιο σύνθετα οι μέθοδοι που βασίζονται στην προσομοίωση Monte Carlo έχουν αποδειχθεί πιο αξιόπιστες.



Σχήμα 2.2: Ασφαλής και μη ασφαλής περιοχή σε διδιάστατο χώρο

2.2 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

Στην ανάλυση αξιοπιστίας των κατασκευών η μέθοδος Monte Carlo είναι κυρίως εφαρμόσιμη όταν δεν είναι εφικτή μια αναλυτική λύση και η περιοχή αστοχίας δεν μπορεί να εκφραστεί ή να προσεγγιστεί με αναλυτική μορφή. Αυτό συμβαίνει συνήθως σε σύνθετα προβλήματα που περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό βασικών μεταβλητών όπου όλες οι άλλες μέθοδοι ανάλυσης αξιοπιστίας δεν είναι εφαρμόσιμες. Παρά το γεγονός ότι η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου Monte Carlo είναι σχετικά απλή και η μέθοδος έχει τη δυνατότητα να χειριστεί πρακτικά κάθε πιθανή περίπτωση, η προσέγγιση αυτή δεν έχει λάβει μεγάλη αποδοχή λόγω του υπερβολικά μεγάλου υπολογιστικού φόρτου που απαιτεί. Ποικίλες δειγματοληπτικές τεχνικές, που ονομάζονται και τεχνικές μείωσης της διακύμανσης, έχουν αναπτυχθεί προκειμένου να βελτιώσουν την υπολογιστική αποτελεσματικότητα της μεθόδου περιορίζοντας το στατιστικό σφάλμα που ενυπάρχει στη μέθοδο Monte Carlo και κρατώντας το μέγεθος του δείγματος στο ελάχιστο δυνατό. Επιπροσθέτως, προηγμένες μέθοδοι επίλυσης και παράλληλη επεξεργασία έχουν εφαρμοστεί πρόσφατα έχοντας ευεργετική επίδραση στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

Ένας από τους συνήθεις σκοπούς της χρήσης της μεθόδου Monte Carlo είναι ο υπολογισμός συγκεκριμένων παραμέτρων και κατανομών πιθανοτήτων τυχαίων μεταβλητών των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από τις αλληλεπιδράσεις με άλλες τυχαίες μεταβλητές, οι κατανομές πιθανοτήτων των οποίων είναι καθορισμένες. Η μέθοδος Monte Carlo είναι μια συγκεκριμένη τεχνική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή αποτελεσμάτων αριθμητικά, χωρίς να γίνουν πραγματικά πειράματα. Αποτελέσματα παλιών δοκιμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό των κατανομών των σημαντικότερων μεταβλητών του προβλήματος. Εν συνεχεία, οι κατανομές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή δειγμάτων αριθμητικών δεδομένων.

Η μέθοδος Monte Carlo εφαρμόζεται συχνά σε τρεις περιπτώσεις:

1. Χρησιμοποιείται για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων για τα οποία κλειστές λύσεις είναι αδύνατες ή εξαιρετικά δύσκολες. Για παράδειγμα, πιθανολογικά προβλήματα που περιλαμβάνουν σύνθετα μη γραμμικά μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων μπορούν να προσομοιωθούν με τη μέθοδο Monte Carlo, εφόσον είναι διαθέσιμη η απαραίτητη υπολογιστική ισχύς.
2. Χρησιμοποιείται στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με κλειστές λύσεις (έστω και προσεγγιστικά) με τη χρήση πολλών απλοποιητικών παραδοχών. Με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo, το "πραγματικό" πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί χωρίς τις απλοποιητικές παραδοχές και να επιτευχθούν πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.
3. Χρησιμοποιείται για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων άλλων τεχνικών.

Στην περίπτωση της ανάλυσης αξιοπιστίας των κατασκευών, η τυχαία δειγματοληψία για την προσομοίωση τεχνητά ενός μεγάλου αριθμού πειραμάτων σημαίνει τη λήψη δείγματος από κάθε τυχαία μεταβλητή X_i . Στη συνέχεια ελέγχεται η συνάρτηση οριακής κατάστασης (limit state function) $g(X) = 0$. Αν η οριακή κατάσταση παραβιάζεται (π.χ. $g(X) \leq 0$), η κατασκευή ή το στοιχείο της κατασκευής έχει αστοχήσει. Το πείραμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές, κάθε φορά με ένα τυχαία επιλεγμένο διάνυσμα X από X_i τιμές.

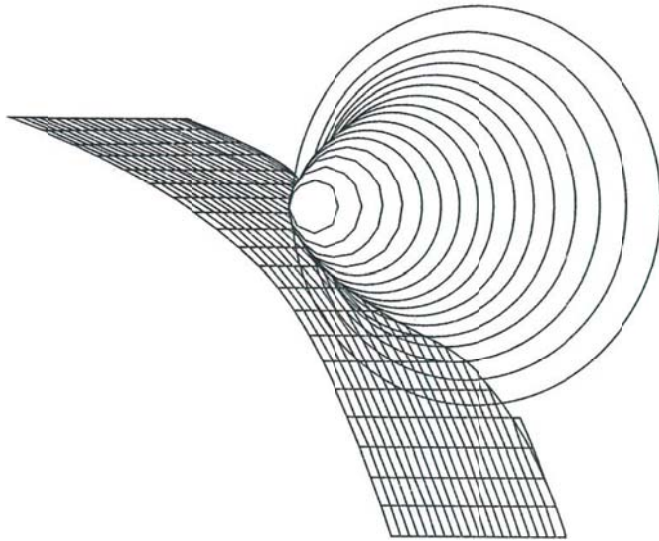
Εκφράζοντας την συνάρτηση οριακής κατάστασης ως $g(X) < 0$, όπου $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι το διάνυσμα των n τυχαίων μεταβλητών, η ακόλουθη εξίσωση

$$P_f = P[g(R, Q) \geq 0] = \int_{g \geq 0} f_R(R) f_Q(Q) dR dQ \quad (2.5)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$P_f = \int_{g(x) \geq 0} f_x(x) dx \quad (2.6)$$

όπου $F_x(x)$ συμβολίζει την συνδυασμένη πιθανότητα της αστοχίας για όλες τις τυχαίες μεταβλητές.



Σχήμα 2.3: Κατανομή συνδυασμένης πιθανότητας δύο ανεξάρτητων κανονικών μεταβλητών και ενός μη γραμμικού κριτηρίου αστοχίας

Εφόσον η μέθοδος Monte Carlo βασίζεται στη θεωρία των μεγάλων αριθμών ($N \rightarrow \infty$), μια εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας δίνεται από

$$P_f = \frac{1}{N_\infty} \sum_{j=1}^{N_\infty} I(x_j) \quad (2.7)$$

όπου $I(x_j)$ είναι ένας δείκτης για επιτυχημένες και αποτυχημένες προσομοιώσεις που ορίζεται ως

$$I(X_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(X_j) \geq 0 \\ 0 & \text{if } g(X_j) < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Προκειμένου να εκτιμηθεί η πιθανότητα P_f , παράγεται ένας ικανός αριθμός από N ανεξάρτητα τυχαία δείγματα χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη, συνήθως ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος X . Η τιμή της συνάρτησης αστοχίας υπολογίζεται για κάθε τυχαίο δείγμα X_j η εκτίμηση της μεθόδου Monte Carlo της πιθανότητας P_f , δίνεται από τη σχέση:

$$P_f \cong \frac{N_H}{N} \quad (2.9)$$

Όπου N_H είναι ο αριθμός των επιτυχημένων προσομοιώσεων και N ο συνολικός αριθμός των προσομοιώσεων.

2.3 ΔΕΙΚΤΗΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ (RELIABILITY INDEX)

Θα αποδειχθεί βολικό για την ανάλυσή μας να μετατρέψουμε όλες τις τυχαίες μεταβλητές στην “τυποποιημένη κανονική” τους μορφή, που είναι μια αδιάστατη μορφή των μεταβλητών. Για τις βασικές μεταβλητές R και Q, οι τυποποιημένες κανονικές μορφές μπορούν να εκφραστούν ως

$$Z_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (2.10)$$

$$Z_Q = \frac{R - \mu_Q}{\sigma_Q} \quad (2.11)$$

Οι μεταβλητές Z_R και Z_Q αναφέρονται συχνά ως “τυποποιημένες” μεταβλητές. Μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις (2.10), (2.11), η αντοχή R και το φορτίο Q μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των “τυποποιημένων” μεταβλητών με τον ακόλουθο τρόπο.

$$R = \mu_R + Z_R \sigma_R \quad (2.12)$$

$$Q = \mu_Q + Z_Q \sigma_Q \quad (2.13)$$

Η συνάρτηση οριακής κατάστασης $g(R, Q) = R - Q$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των “τυποποιημένων” μεταβλητών ως εξής

$$g(Z_R, Z_Q) = \mu_R + Z_R \sigma_R - \mu_Q - Z_Q \sigma_Q = (\mu_R - \mu_Q) + Z_R \sigma_R - Z_Q \sigma_Q \quad (2.14)$$

Για κάθε συγκεκριμένη τιμή του $g(Z_R, Z_Q)$, η εξίσωση (2.14) παριστάνεται με μια ευθεία στο χώρο των “τυποποιημένων” μεταβλητών Z_R και Z_Q . Η ευθεία που κυρίως μας ενδιαφέρει στην ανάλυση αξιοπιστίας είναι αυτή που αντιστοιχεί στο $g(Z_R, Z_Q) = 0$, γιατί διαχωρίζει το ασφαλές από το μη ασφαλές τμήμα του χώρου των “τυποποιημένων” μεταβλητών.

2.3.1 Γενικός Ορισμός του Δείκτη Αξιοπιστίας

Μία εκδοχή του δείκτη αξιοπιστίας ορίζεται ως το αντίστροφο του συντελεστή μεταβλητότητας:

$$\beta = \frac{1}{V_Y} = \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \quad (2.15)$$

Όπου V_Y είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας που ορίζεται ως εξής:

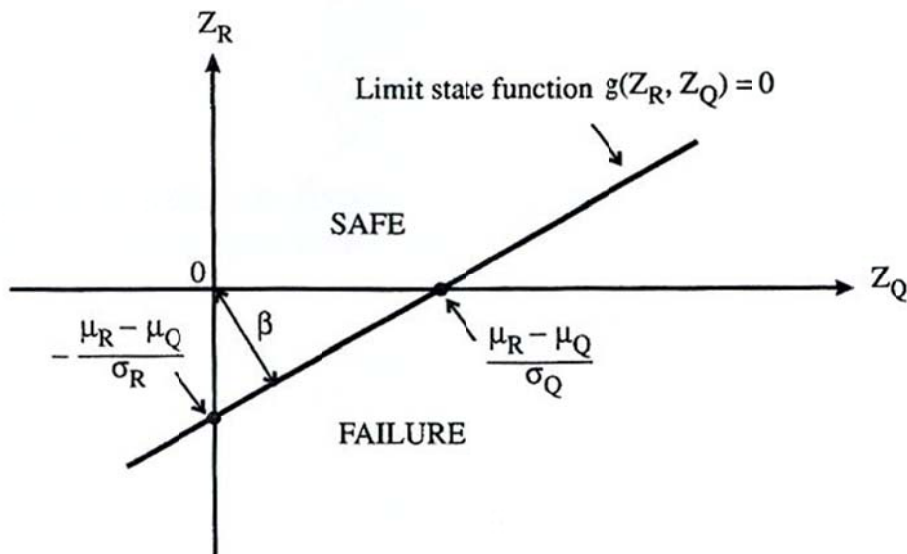
$$V_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2 - 2\text{CoV}(R, Q)}}{\mu_R - \mu_Q} \quad (2.16)$$

Όπου $\text{CoV}(R, Q)$ είναι η συνδιακύμανση των R και Q

$$\text{CoV}(R, Q) = E[(R - \mu_R)(Q - \mu_Q)] = E[RQ - R\mu_Q - Q\mu_R + \mu_R\mu_Q] \quad (2.17)$$

Όπου $E[\]$ υποδηλώνει την αναμενόμενη τιμή.

Στο πλαίσιο της ανάλυσης αυτής, θα ορίσουμε το δείκτη αξιοπιστίας ως τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των “τυποποιημένων” μεταβλητών ως την ευθεία $g(Z_R, Z_Q) = 0$. Ο ορισμός αυτός, που εισήχθη από τους Hasofer και Lind (1974), παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Ορισμός του δείκτη αξιοπιστίας ως η ελάχιστη απόσταση στο χώρο των “τυποποιημένων” μεταβλητών

Με τη χρήση γεωμετρίας μπορούμε να υπολογίσουμε το δείκτη αξιοπιστίας (ελάχιστη απόσταση) από τον ακόλουθο τύπο:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} \quad (2.18)$$

Όπου β είναι ο αντίστροφος του συντελεστή μεταβλητότητας της συνάρτησης $g(R, Q) = R - Q$ όταν τα R, Q είναι ασυσχέτιστα. Για τυχαίες μεταβλητές R και Q που ακολουθούν την κανονική κατανομή, αποδεικνύεται ότι ο δείκτης αξιοπιστίας σχετίζεται με την πιθανότητα αστοχίας

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f) \quad \text{ή} \quad p_f = \Phi(-\beta) \quad (2.19)$$

Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει τη μεταβολή του β συναρτήσει του p_f και αντίστροφα, βασιζόμενος στην παραπάνω εξίσωση.

Πίνακας 2.1: Δείκτης αξιοπιστίας β και πιθανότητα αστοχίας P_f

P_f	β
10^{-1}	1.28
10^{-2}	2.33
10^{-3}	3.09
10^{-4}	3.71
10^{-5}	4.26
10^{-6}	4.75
10^{-7}	5.19
10^{-8}	5.62
10^{-9}	5.99

Ο ορισμός για την περίπτωση των δύο μεταβλητών μπορεί να γενικευτεί και για n μεταβλητές με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω μια συνάρτηση οριακής κατάστασης $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ όπου οι X_i μεταβλητές είναι όλες ασυσχέτιστες. Ο δείκτης αξιοπιστίας Hasofer-Lind ορίζεται ως εξής:

1. Ορίζεται η σειρά από “τυποποιημένες” μεταβλητες (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) , χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (2.20)$$

2. Επαναπροσδιορίζεται σχέση οριακής κατάστασης εκφράζοντάς την συναρτήσει των “τυποποιημένων” μεταβλητών (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) .
3. Ο δείκτης αξιοπιστίας είναι η ελάχιστη απόσταση από την αρχή του n -διάστατου χώρου των (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) , ως την καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$.

2.3.2 Δείκτης Αξιοπιστίας First-Order Second-Moment

Γραμμικές συναρτήσεις οριακής κατάστασης

Έστω μια γραμμική συνάρτηση οριακής κατάστασης της μορφής:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (2.21)$$

όπου οι όροι a_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) είναι σταθερές και οι X_i είναι ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές. Αν εφαρμόσουμε των διαδικασία των τριών βημάτων που περιγράφηκε παραπάνω για τον προσδιορισμό του δείκτη αξιοπιστίας Hasofer-Lind λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση για το β :

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + \sigma_{x_i})^2}} \quad (2.22)$$

Παρατηρούμε ότι ο δείκτης αξιοπιστίας εξαρτάται μόνο από τους μέσους και τις τυπικές αποκλίσεις των τυχαίων μεταβλητών. Ως εκ τούτου, ο δείκτης αυτός ονομάζεται second moment αφού για τον υπολογισμό του απαιτούνται μόνο ο μέσος και η τυπική απόκλιση. Δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη σχέση μεταξύ του β και του τύπου της κατανομής των τυχαίων μεταβλητών. Ο παραπάνω τύπος είναι ακριβής όταν όλες οι τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή και είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Σε διαφορετική περίπτωση η εξίσωση (2.22) δίνει μόνο μια προσέγγιση της σχέσης μεταξύ του β και της πιθανότητας αστοχίας.

Μη γραμμικές συναρτήσεις οριακής κατάστασης

Έστω η περίπτωση μιας μη γραμμικής συνάρτησης οριακής κατάστασης. Όταν η συνάρτηση είναι μη γραμμική μπορούμε να καταλήξουμε σε μια προσεγγιστική λύση γραμμικοποιώντας την με τη χρήση αναπτύγματος σειράς Taylor. Το αποτέλεσμα είναι:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) \approx g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\text{evaluated at } (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)} \quad (2.23)$$

όπου $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ είναι το σημείο στο οποίο αναπτύσσεται η σειρά. Μια επιλογή για το σημείο γραμμικοποίησης είναι το σημείο που αντιστοιχεί στις μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών. Επομένως η εξίσωση 2.23 γίνεται:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) \approx g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) + \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_{x_i}) \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\text{evaluated at mean values}} \quad (2.24)$$

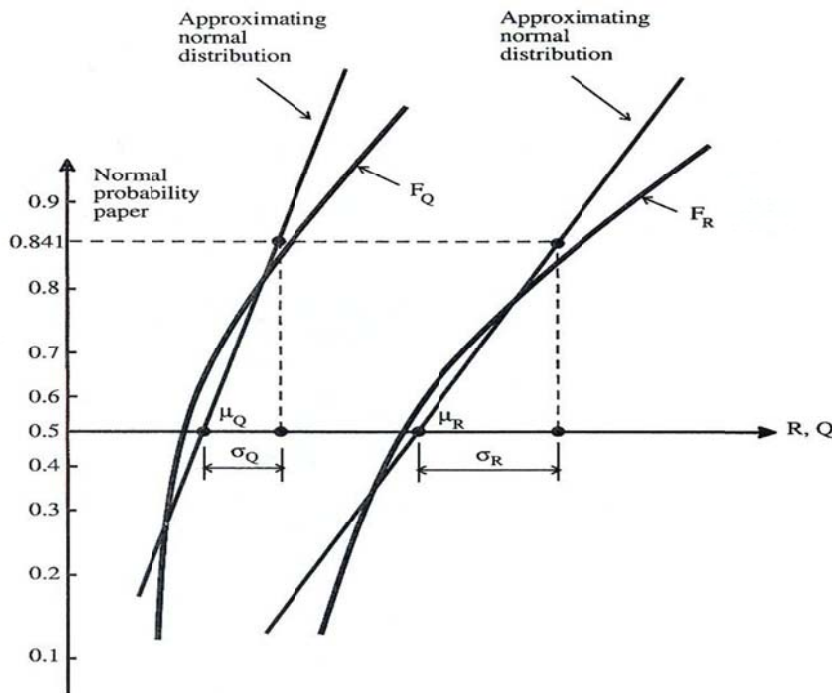
Εφόσον η 2.24 είναι μια γραμμική εξίσωση των X_i μεταβλητών μπορεί να γραφεί ακριβώς όπως η 2.21. Έτσι η 2.22 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσεγγιστική λύση για το δείκτη αξιοπιστίας β . Μετά από αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για το β :

$$\beta = \frac{g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \sigma_{x_i})^2}} \quad \text{όπου } a_i = \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\text{evaluated at mean values}} \quad (2.25)$$

Ο δείκτης αξιοπιστίας που ορίζεται παραπάνω ονομάζεται first-order second-moment mean value reliability index.

- First-Order επειδή χρησιμοποιούνται όροι πρώτης τάξης στο ανάπτυγμα Taylor.
- Second-Moment γιατί απαιτούνται μόνο οι μέσοι και οι διακυμάνσεις.
- Mean Value γιατί η σειρά Taylor χρησιμοποιεί τις μέσες τιμές.

Σχόλια πάνω στο δείκτη first-order second-moment mean value reliability index



Σχήμα 2.5: Διατύπωση της mean value second-moment formulation

Η μέθοδος έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα όσον αφορά στην εφαρμογή της στην ανάλυση της αξιοπιστίας των κατασκευών. Μεταξύ των πλεονεκτημάτων:

1. Είναι εύκολη στη χρήση.
2. Δεν απαιτεί γνώση των κατανομών των τυχαίων μεταβλητών.

Μεταξύ των μειονεκτημάτων της:

1. Τα αποτελέσματα είναι ανακριβή αν οι ουρές των συναρτήσεων κατανομών δεν μπορούν να προσεγγιστούν από κανονική κατανομή.
2. Υπάρχει ένα πρόβλημα με αναλλοίωτες μεταβλητές: η τιμή του δείκτη αξιοπιστίας εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης οριακής κατάστασης.

Το πρόβλημα αυτό διευκρινίζεται καλύτερα με το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω μεταλλική δοκός η οποία θεωρείται συμπαγής με παραμέτρους Z (μέτρο πλαστικότητας) και τάση διαρροής F_y . Υπάρχουν τέσσερις τυχαίες μεταβλητές που πρέπει να ληφθούν υπόψη: P , L , Z , F_y . Υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

Έστω η συνάρτηση οριακής κατάστασης ροπών:

$$g_1 = (Z, F_y, P, L) = ZF_y - \frac{PL}{4} \quad (2.26)$$

Ο σκοπός της συνάρτησης οριακής κατάστασης είναι να καθορίσει το όριο μεταξύ του ασφαλούς και του μη ασφαλούς τομέα, και το όριο αντιστοιχεί σε $g=0$. Επομένως, αν διαιρέσουμε τη g_1 κατά μία θετική ποσότητα (π.χ. Z), δεν αλλάζουμε ούτε το όριο ούτε της περιοχές όπου η συνάρτηση είναι θετική ή αρνητική. Έτσι μια εναλλακτική συνάρτηση οριακής κατάστασης θα ήταν:

$$g_2(Z, F_y, P, L) = F_y - \frac{PL}{4Z} = \frac{g_1(Z, F_y, P, L)}{Z} \quad (2.27)$$

Αν υπολογίσουμε το δείκτη αξιοπιστίας για τις δύο συναρτήσεις θα λάβουμε $\beta=2.48$ για τη g_1 και $\beta=3.48$ για τη g_2 . Το παράδειγμα αποδεικνύει ξεκάθαρα ότι ο δείκτης αξιοπιστίας first-order second-moment mean value είναι αναλλοίωτη μεταβλητή.

2.3.3 Δείκτης Αξιοπιστίας Hasofer-Lind

Το 1974, οι Hasofer και Lind πρότειναν ένα τροποποιημένο δείκτη αξιοπιστίας, ο οποίος δεν παρουσίαζε το πρόβλημα του παραπάνω παραδείγματος, όπου ο δείκτης αξιοπιστίας ήταν αναλλοίωτη μεταβλητή. Η “διόρθωση” ήταν η αξιολόγηση της συνάρτησης οριακής κατάστασης σε ένα συγκεκριμένο σημείο γνωστό ως “σημείο σχεδιασμού” αντί για τις μέσες τιμές. Το σημείο σχεδιασμού αυτό είναι ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια αστοχίας $g=0$. Εφόσον το σημείο σχεδιασμού δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων, είναι απαραίτητη η χρήση μιας επαναληπτικής διαδικασίας για να γίνει η επίλυση ως προς το δείκτη αξιοπιστίας.

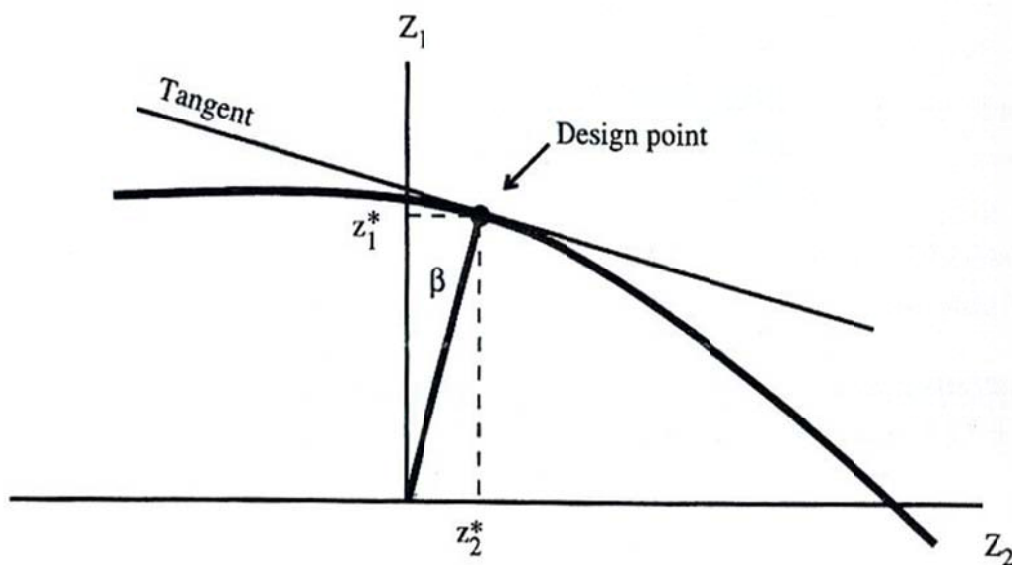
Έστω μια συνάρτηση οριακής κατάστασης $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, όπου οι τυχαίες μεταβλητές είναι όλες ασυσχέτιστες (αν οι μεταβλητές συσχετίζονται, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματισμός για την επίτευξη ασυσχέτιστων μεταβλητών). Η συνάρτηση οριακής κατάστασης ξαναγράφεται συναρτήσει της κανονικής μορφής των μεταβλητών (“τυποποιημένων” μεταβλητών) χρησιμοποιώντας:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (2.28)$$

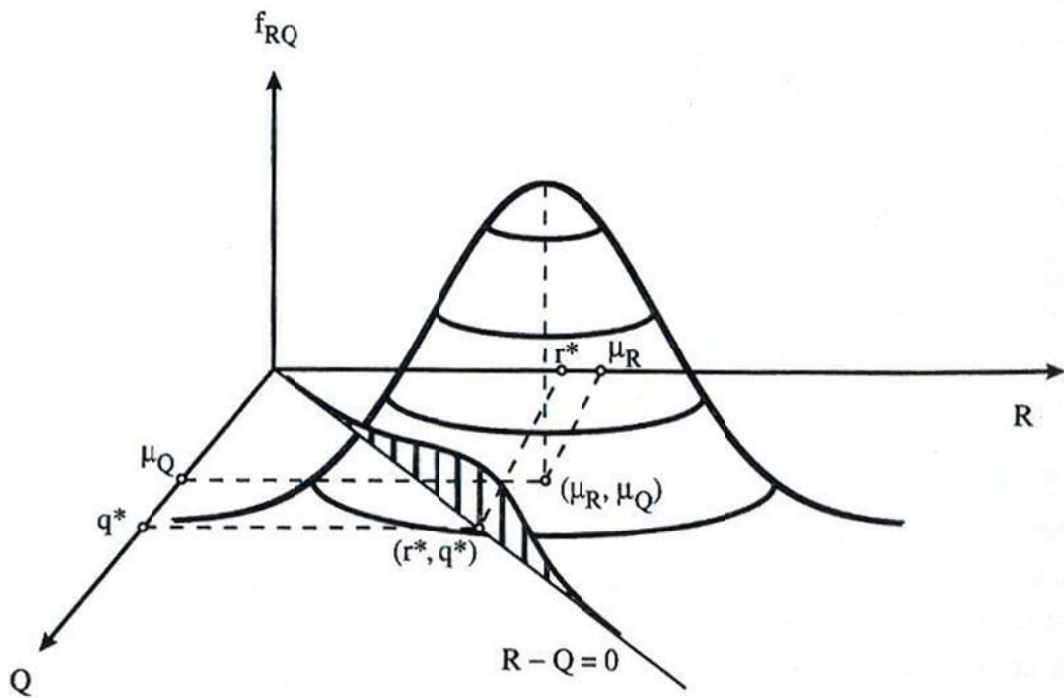
Όπως και προηγουμένως, ο δείκτης αξιοπιστίας Hasofer-Lind ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση από την αρχή του χώρου των “τυποποιημένων” μεταβλητών ως την συνάρτηση οριακής κατάστασης $g=0$. Μέχρι αυτό το σημείο δεν υπάρχει καμία αλλαγή σε σχέση με την προηγούμενη παρουσίαση του δείκτη αξιοπιστίας και εφόσον η συνάρτηση οριακής κατάστασης είναι γραμμική, ο δείκτης υπολογίζεται με τη ίδια σχέση:

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \sigma_{x_i})^2}} \quad (2.29)$$

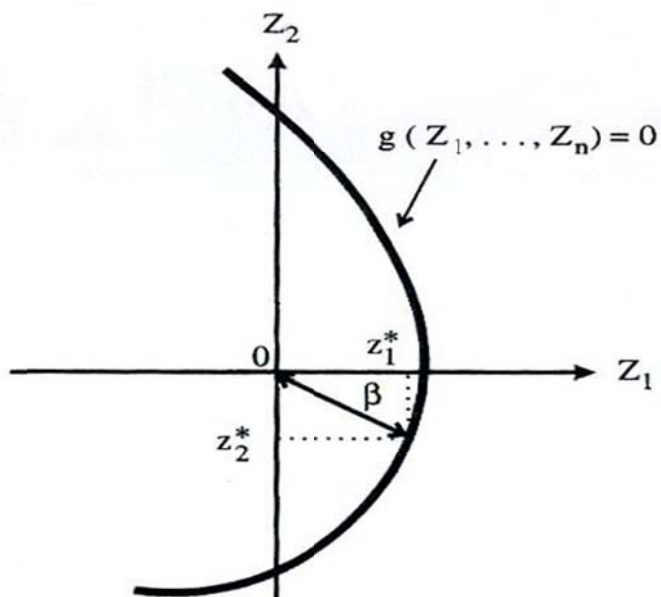
Αν η συνάρτηση οριακής κατάστασης είναι μη γραμμική, απαιτείται επαναληπτική διαδικασία προκειμένου να βρεθεί το σημείο σχεδιασμού $\{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\}$ στο χώρο των “τυποποιημένων” μεταβλητών, έτσι ώστε το β να αντιστοιχεί ακόμα στην ελάχιστη απόσταση. Τα παραπάνω παρουσιάζονται γραφικά στα σχήματα 2.6 έως 2.8 για την περίπτωση των δύο τυχαίων μεταβλητών.



Σχήμα 2.6: Δείκτης αξιοπιστίας H-L



Σχήμα 2.7: Σημείο σχεδιασμού στο όριο αστοχίας για τη γραμμική οριακή σχέση $g=R-Q$



Σχήμα 2.8: Σημείο σχεδιασμού και δείκτης αξιοπιστίας για εξαιρετικά μη γραμμική συνάρτηση

Η επαναληπτική διαδικασία απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος $(2n+1)$ εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους: $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$, όπου:

$$a_i = \frac{\left. \frac{-\partial g}{\partial Z_i} \right|_{\text{evaluted at design point}}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\left. \frac{\partial g}{\partial Z_k} \right|_{\text{evaluted at design point}} \right)^2}} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial g}{\partial Z_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial Z_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{xi} \quad (2.31)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i)^2 = 1 \quad (2.32)$$

$$z_i^* = \beta a_i \quad (2.33)$$

$$g(z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*) = 0 \quad (2.34)$$

Η εξίσωση (2.31) είναι απλώς μια εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας της διαφοροποίησης. Η (2.32) είναι μια απαίτηση για τις τιμές των μεταβλητών a_i , που μπορεί να επιβεβαιωθεί εξετάζοντας τη εξίσωση (2.30). Η (2.34) είναι η μαθηματική έκφραση της απαίτησης, το σημείο σχεδιασμού να είναι πάνω στο όριο αστοχίας.

Υπάρχουν δύο εναλλακτικές επιλογές για την επαναληπτική διαδικασία: η διαδικασία των ταυτόχρονων εξισώσεων και η διαδικασία πινάκων.

2.3.4 Μια διαφορετική προσέγγιση για το δείκτη αξιοπιστίας Hasofer-Lind

Στην ανάλυση αξιοπιστίας που πραγματοποιείται σε αυτή την περίπτωση, ο δείκτης αξιοπιστίας υπολογίζεται μέσω μιας διαδικασίας ελαχιστοποίησης. Αυτή είναι και η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην παρούσα έρευνα.

Όπως προαναφέρθηκε ο δείκτης αυτός συνδέεται προσεγγιστικά με την πιθανότητα αστοχίας σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f) \quad \text{ή} \quad p_f = \Phi(-\beta) \quad (2.35)$$

στην οποία Φ είναι η τυπική κανονική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (standard normal cumulative distribution function, CDF). Η εξίσωση αυτή είναι ακριβής όταν το κριτήριο αστοχίας είναι γραμμικό και όλες οι τυχαίες μεταβλητές έχουν κανονικές κατανομές.

Το β ορίζεται ως εξής:

Έστω ένα διάνυσμα από βασικές μεταβλητές X , μια επιφάνεια αστοχίας θ , στην οποία το κριτήριο αστοχίας και η ασφαλής περιοχή $g(X) > 0$, εισάγουν “τυποποιημένες” μεταβλητες Z .

$$Z \equiv S_x^{-1}(X - \mu_x) \quad (2.36)$$

στην οποία το S_x , είναι ένα διαγώνιο μητρώο από τυπικές αποκλίσεις των X (σ_x) και μ_x είναι η μέση τιμή των X . Τότε ο δείκτης αξιοπιστίας Hasofer-Lind ορίζεται όπως στο σχήμα 2.6

$$\beta \equiv \min_{Z \in \theta} \sqrt{Z^T Z} \quad (2.37)$$

Το σημείο στην επιφάνεια αστοχίας στην οποία το Z έχει το ελάχιστο μέτρο ονομάζεται σημείο σχεδιασμού και θα συμβολίζεται με Z^* . Το διάνυσμα Z μπορεί να γραφεί ως γινόμενο του μέτρου του και ενός μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{a} :

$$Z \equiv \mathbf{a}\beta \quad (2.38)$$

Όταν το Z είναι ελάχιστο, το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{a} θα είναι κάθετο στην επιφάνεια θ . Επομένως χρησιμοποιούμε ένα διάνυσμα \mathbf{c} το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια αυτή για να κατασκευάσουμε το \mathbf{a} . Έστω ότι η $h(Z)$ είναι η $g(x)$ στο χώρο των Z . Τότε μια κατάλληλη επιλογή για το \mathbf{c} είναι:

$$\mathbf{c} \equiv \frac{\partial h}{\partial Z} \quad (2.39)$$

και

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \quad (2.40)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, η εξίσωση (2.38) γίνεται:

$$\mathbf{c} = S_x \mathbf{b} \quad (2.41)$$

όπου

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\partial g}{\partial X} \quad (2.42)$$

Ο ακόλουθος βρόγχος αναζήτησης θα συγκλίνει στο \mathbf{b} αν η αρχική υπόθεση για το σημείο σχεδιασμού είναι επαρκώς ακριβής:

(ο συμβολισμός “:=” χρησιμοποιείται ως τελεστής αντικατάστασης)

Αρχικοποίησε $b := \pm 1$, $\beta := \beta_0$

Βήμα 1- Κατασκεύασε c κάθετο στην επιφάνεια αστοχίας στο εκτιμώμενο σημείο σχεδιασμού:

$$c := S_x b \quad (2.43)$$

Μετάτρεψε το c σε μοναδιαίο διάνυσμα a :

$$|c| := \sqrt{c^T c} \quad (2.44)$$

$$a := -\frac{c}{|c|} \quad (2.45)$$

Το εκτιμώμενο σημείο σχεδιασμού στον X -χώρο δίνεται:

$$X := \mu_x + S_x a \beta \quad (2.46)$$

$$\text{Αξιολόγησε } b \equiv \frac{\partial g}{\partial X} \text{ (υπορουτίνα)} \quad (2.47)$$

$$\text{Λύσε } g(x) = 0 \text{ ως προς } \beta \text{ (υπορουτίνα)} \quad (2.48)$$

Επανάλαβε από το βήμα 1 μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση.

Εδώ πρέπει να γίνει μια πρώτη υπόθεση για την αρχική τιμή του β_0 και $b_i = +1$ για τη φέρουσα ικανότητα της κατασκευής και $b_i = -1$ για τα φορτία. Για να εξασφαλιστεί σύγκλιση, μια καλή αρχική τιμή β_0 πρέπει να βρεθεί από πειράματα ή από προηγούμενη εμπειρία. Ο βρόγχος ξεκινάει με τον πολλαπλασιασμό με S_x προκειμένου να επιτευχθεί μια λίγο καλύτερη αρχική εκτίμηση για το a_i από το να αρχικοποιούσαμε απλά το c_i σε ± 1 .

Γραμμική Προσέγγιση του g

Η επίλυση του $g = 0$ ως προς β κάθε φορά μέσα στο βρόγχο μπορεί να είναι πολύ δύσκολη όταν η $g(X)$ είναι μη γραμμική. Όσο βασιζόμαστε στην σύγκλιση μέσω της επαναληπτικής μεθόδου, μπορούμε να κάνουμε μία προσέγγιση του $g(X)$ με μια τοπική γραμμική προσέγγιση κάθε φορά μέσα στο βρόγχο. Έτσι και οι δύο προσεγγιστικές μέθοδοι μπορούν να συγκλίνουν ταυτόχρονα. Με αυτό τον τρόπο η επίλυση του $g(X) = 0$ με την ακόλουθη έκφραση:

$$\beta := \beta + \frac{g}{|c|} \quad (2.49)$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει εύκολα ως εξής:

Έστω Z τωρινή τιμή για την οποία η g είναι μικρή αλλά όχι ακόμα 0 και Z' η τιμή της επόμενης δοκιμής. Από το θεώρημα Taylor:

$$g(Z') = g(Z) + \sum_i \frac{\partial g}{\partial Z_i} (Z'_i - Z_i) = g + c^T a (\beta' - \beta) \quad (2.50)$$

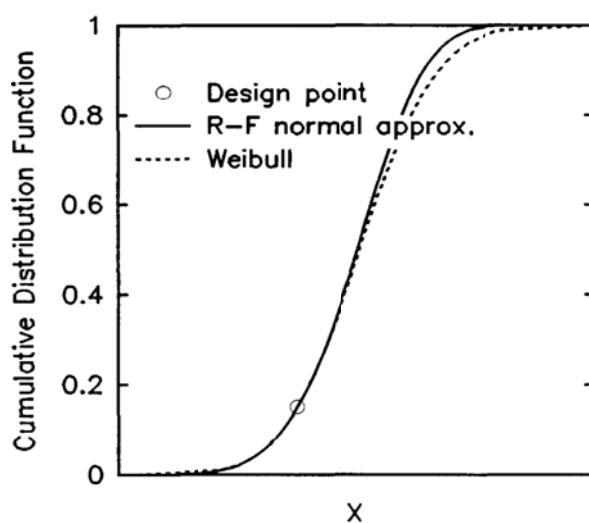
Επιθυμούμε $g(Z') = 0$ και έχουμε ότι $c^T a = - |c|$. Επομένως προκύπτει η εξίσωση (2.49).

Επιλύοντας ως προς b είναι το αναλυτικό πρόβλημα. Το αντίστοιχο πρόβλημα σχεδιασμού είναι αυτό στο οποίο το b είναι δοσμένο και αναζητείται η μέση τιμή μιας από τις βασικές μεταβλητές. Στη συγκεκριμένη έρευνα επικεντρωνόμαστε μόνο στο αναλυτικό πρόβλημα.

Μη κανονικές μεταβλητές

Η απλή σχέση του δείκτη αξιοπιστίας Hasofer-Lind είναι ακριβής μόνο όταν όλες οι μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή και το κριτήριο αστοχίας είναι γραμμικό. Η σχέση είναι προσεγγιστικά σωστή ακόμα και όταν το κριτήριο αστοχίας δεν είναι γραμμικό, εφόσον είναι προσεγγιστικά γραμμικό κοντά στο σημείο σχεδιασμού.

Για την επέκταση του β σε μη γραμμικές μεταβλητές, είναι επαρκές να αντικαταστήσουμε τις κατανομές των μη γραμμικών μεταβλητών με τοπικές κανονικές προσεγγίσεις. Οι Rackwitz και Fiessler (1977) πρότειναν το απλό τέχνασμα της επιλογής της προσέγγισης με κανονική κατανομή, έτσι ώστε η CDF της να έχει την ίδια τεταγμένη και κλίση με τη μη γραμμική CDF στο σημείο σχεδιασμού. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:



Σχήμα 2.9: Ορισμός της κανονικής προσέγγισης Rackwitz-Fiessler

Έστω ότι η X_j ακολουθεί μη κανονική κατανομή με CDF $F_j(X_j)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_j(X_j)$ (PDF). Η PDF είναι η παράγωγος (κλίση) της CDF. Έστω οι αντίστοιχες προσεγγιστικές κανονικές κατανομές Φ και ϕ με μέση τιμή μ_{rfj} και σ_{rfj} . Η εξίσωση των συντεταγμένων δίνει:

$$F_j(X_j^*) = \Phi\left(\frac{X_j^* - \mu_{rfj}}{\sigma_{rfj}}\right) \quad (2.51)$$

και η εξίσωση των κλίσεων:

$$f_j(X_j^*) = \phi\left(\frac{X_j^* - \mu_{rfj}}{\sigma_{rfj}}\right) \frac{1}{\sigma_{rfj}} \quad (2.52)$$

Ο αλγόριθμος Rackwitz- Fiessler μπορεί να κωδικοποιηθεί ως εξής:

$$z := \Phi^{-1}[F_j(X_j)]$$

$$\sigma_{rfj} := \phi(z)/f_j(X_j) \quad (2.53)$$

$$\mu_{rfj} := X_j - \sigma_{rfj} z$$

όπου το σύμβολο του σημείο σχεδιασμού έχει παραλειφθεί γιατί σε κάθε επανάληψη του βρόγχου το X^* απλά προσεγγίζεται. Το σημείο σχεδιασμού μπορεί να επιτευχθεί μόνο αφού η επαναληπτική διαδικασία έχει συγκλίνει. Η κωδικοποίηση μπορεί να τοποθετηθεί στο τέλος του βρόγχου που περιγράφηκε παραπάνω. Σε όλη την υπόλοιπη διάρκεια του βρόγχου, τα μ_{rfj} και σ_{rfj} πρέπει να χρησιμοποιούνται στη θέση των πραγματικών μέσων τιμών και τυπικών αποκλίσεων των X_j . Ο αλγόριθμος πρέπει να εφαρμόζεται για κάθε μη κανονική μεταβλητή.

2.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ- ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Garavelas, A. (2007). *Efficient Computational Methods for Solving Seismic RBDO Problems*. Athens: NTUA.
2. Nowak A S, Collins K R. *Reliability of Structures*. Boston: McGraw-Hill, 2000.
3. Zahn J.J. *Fortran Programs for Reliability Analysis*
4. Ditlevsen O, Madsen HO. *Structural reliability methods*. Chichester: Wiley; 1996.
5. Shinozuka M. Basic analysis of structural safety. *J Struct Eng, ASCE* 1983; 109(3):721–40.
6. Tvedt L. Distribution of quadratic forms in normal space-application to structural reliability. *J Eng Mech* 1990; 16(6):1183–97.
7. Bargmann H, Rustenberg I, Devlukia J. Reliability of metal components in fatigue -a simple algorithm for the exact solution. *Int J Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1994; 17(12):1445–57.
8. Bjerager P. Probability integration by directional simulation. *J Eng Mech* 1988; 114(8):1285–301.
9. Bucher CG. Adaptive sampling-an iterative fast Monte Carlo procedure. *Structural Safety* 1988; 5(2):119–26.
10. Melchers RE. Search-based importance sampling. *Struct Saf* 1990; 9(2):117–28.
11. Wang L, Grandhi RV. Safety index calculation using intervening variables for structural reliability analysis. *Comput Struct* 1996; 59(6):1139–48.
12. Venter G, Haftka RT, Starnes JH. Construction of response surfaces for design optimization applications. In: *Proceedings of the Sixth AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Bellevue, Washington, September 4–6. In: Paper No. 96-4040, Part 1, p. 548–64.
13. Box GEP, Wilson KB. The exploration and exploitation of response surfaces: some general considerations and examples. *Biometrics* 1954; 10:16–60.
14. Khuri AI, Cornell JA. *Response surfaces: design and analyses*. New York: Marcel and Dekker; 1997.
15. Myers RH, Montgomery DC. *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*. John Wiley and Sons; 1995.
16. Romero VJ, Swiler LP, Giunta AA. Application of finite element, global polynomial and kriging response surfaces in progressive lattice sampling designs. *8th ASCE Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*; 2000.
17. Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 1990, 7(1):57–66.
18. Faravelli. Response surface approach for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, 115(12):2763–2781.

19. Liu Y W, Moses F. A sequential response surface method and its application in the reliability analysis of aircraft structural system. *Structural Safety*, 1994, 16(1):39-46.
20. Rajashekhar M R, Ellingwood B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 1993, 12(3):205–220.
21. Bayer V, Schueller G I. Discussion on: a new look at the response surface approach for reliability. *Structural Safety*, 1994, 16(3):227–234.
22. [21] Kim S, Na S. Response surface method using vector projected sampling points. *Structural Safety*, 1997, 19(1):3–19.
23. Bohm F, Bruckner-Foit A. On criterion for accepting a response surface model. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1992, 7(3):183–190.
24. Das P K, Zheng Y. Cumulative formation of response surface and its use in reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2000, 15(4):309–315.
25. Wong FA. Slope reliability and response surface method. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE 1985; 111(1):32–53.
26. Wong FS. Uncertainties in dynamic soil–structure interaction. *J Eng Mech*, ASCE 1984; 110:308–24.
27. Faravelli L. Structural reliability via response surface. In: Bellomo N, Casciati F, editors. *Proc of IUTAM symposium on nonlinear stochastic mechanics*. Springer Verlag; 1992. p. 213–23.
28. C.G. Bucher, Y.-M. Chen, G.I. Schueller, Time variant reliability analysis utilizing response surface approach, in: P. Thoft-Christensen, ed., *Reliability and Optimization of Structural Systems '88*, (Lecture Notes in Engineering 48), Springer Verlag, Berlin, 1989, pp. 1-14.
29. W. Ouypornprasert, C.G. Bucher, An efficient scheme to determine response functions for reliability analyses, Internal Working Report No. 30, Institute of Engineering Mechanics, Innsbruck, Austria, 1988.
30. Gayton N, Bourinet JM, Lemaire M. CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety* 2003; 25(1):99–121.
31. Kaymaz I, McMahan C A. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20(1):11–17.
32. Guan X L, Melchers R E. Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates. *Structural Safety*, 2001, 23(4):429–444.
33. Gupta S., Manohar C.S. An improved response surface method for the determination of failure probability and importance measures. *Structural Safety* 26 (2004) 123-139.
34. Breitung K, Faravelli L. Response surface methods and asymptotic approximations. In: Casciati F, Roberts JB, editors. *Mathematical models for structural reliability analysis*. CRC Press; 1996 [Chapter 5].

35. Der Kiureghian A, Dakessian T. Multiple design points in first and second-order reliability. *Structural Safety* 1998; 20:37–49.
36. Rackwitz R, Fiessler B. Structural reliability under combined random load sequences. *Computers and Structures* 1978; 9:489–94.
37. Mahadevan S, Shi P. Multiple linearization method for nonlinear reliability analysis. *J Eng Mech ASCE* 2001; 127(11):1165–73.
38. Lu Z., Zhao J., Yue Z., Advanced response surface method for mechanical reliability analysis. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2007, 28(1), 19-25.

3

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις μέρες μας ο όρος “βελτιστοποίηση κατασκευών” ερμηνεύεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Προς αποφυγή παρερμηνειών είναι χρήσιμο να προσδιορίσουμε επακριβώς τον όρο “κατασκευή” από τη σκοπιά της μηχανικής των κατασκευών. Ως “κατασκευή” ορίζεται εκείνη η διευθέτηση των μελών της ή των υλικών της έτσι ώστε να εξυπηρετεί στην ανάληψη μηχανικών φορτίων. Η λέξη κλειδί “εξυπηρετεί” πρέπει να χρησιμοποιείται με την έννοια της λειτουργικότητας. Ο σχεδιασμός των κατασκευών ακολουθεί μία επαναληπτική διαδικασία με στόχο την εύρεση του άριστου ή βέλτιστου σχεδιασμού.

Η επιστήμη του μηχανικού είχε και έχει ως κύριο σκοπό τον σχεδιασμό και την κατασκευή δομικών συστημάτων όπως είναι οι γέφυρες, τα αεροσκάφη, τα κτήρια κ.λπ. Σήμερα η πρόοδος της τεχνολογίας των υπολογιστών επέτρεψε την αύξηση των απαιτήσεων. Ο σχεδιασμός ενός δομικού συστήματος που θα ικανοποιεί τις κατασκευαστικές απαιτήσεις ασφάλειας δεν αποτελεί πια μία αποδεκτή λύση. Είναι απαραίτητο το δομικό σύστημα να σχεδιαστεί με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο. “Βέλτιστος” ονομάζεται ένας σχεδιασμός που ικανοποιεί τις λειτουργικές προδιαγραφές, ελαχιστοποιώντας ταυτόχρονα συγκεκριμένα κριτήρια όπως είναι το κόστος ή/και το βάρος της κατασκευής.

Στόχος του μηχανικού είναι να εξευρεθεί ένας συνδυασμός ανεξάρτητων μεταβλητών που λαμβάνουν πραγματικές ή ακέραιες τιμές και ονομάζονται *παράμετροι ή μεταβλητές σχεδιασμού* (design variables), έτσι ώστε να βελτιστοποιηθεί η *αντικειμενική συνάρτηση* (objective function) του προβλήματος. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης, στην επιστημονική περιοχή της υπολογιστικής μηχανικής, συνήθως υπόκεινται σε *περιορισμούς*, όπως είναι το εύρος μέσα στο οποίο κινούνται οι παράμετροι σχεδιασμού το οποίο καθορίζει τον χώρο αναζήτησης, αλλά και άλλες *συναρτήσεις περιορισμού* (constraint functions), όπως λόγου χάρι είναι εκείνες των τάσεων και παραμορφώσεων, οι οποίες καθορίζουν τον χώρο των αποδεκτών λύσεων του προβλήματος.

Για τον υπολογισμό του βέλτιστου σχεδιασμού είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθούν δύο βήματα: η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης στο *μοντέλο βελτιστοποίησης* και ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Το πρώτο βήμα περιλαμβάνει τον ορισμό των παραμέτρων σχεδιασμού, της σχέσης μεταξύ των παραμέτρων αυτών, τον καθορισμό της προς βελτιστοποίηση συνάρτησης καθώς επίσης και τον ορισμό των περιορισμών του προβλήματος. Η διαδικασία βελτιστοποίησης ολοκληρώνεται με την επιλογή ενός κατάλληλου αλγόριθμου βελτιστοποίησης και τον συνδυασμό του με το *δομοστατικό μοντέλο* και το *μοντέλο βελτιστοποίησης*. Μία βασική προϋπόθεση του βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών είναι η διατύπωση με μαθηματικούς όρους της συμπεριφοράς των κατασκευών (δομοστατικό μοντέλο). Στην περίπτωση των δομικών συστημάτων η συμπεριφορά παραπέμπει στην τυπική απόκριση στα στατικά και δυναμικά φορτία, όπως παραμορφώσεις, τάσεις, ιδιοτιμές, φορτία λυγισμού κ.λ.π. Το δομοστατικό μοντέλο προσδιορίζει τις καταστατικές μεταβλητές που απαιτούνται για τη διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών.

Ο σχεδιασμός πολύπλοκων δομικών συστημάτων απαιτεί πολλούς και χρονοβόρους υπολογισμούς. Η ταχύτατη πρόοδος της τεχνολογίας των υπολογιστών και παράλληλα η ανάπτυξη αποδοτικών αλγορίθμων, κατέστησαν εφικτό το βέλτιστο σχεδιασμό δομικών στοιχείων ή και πολύπλοκων κατασκευαστικών συστημάτων. Με την αξιοποίηση αυτών των μέσων παρέχεται η δυνατότητα στο μηχανικό να σχεδιάζει καλύτερα δομικά συστήματα με μειωμένο κόστος παραγωγής και σχεδιασμού σε εύλογο υπολογιστικό χρόνο.

Η ύπαρξη “έξυπνων-αποδοτικών” αλγορίθμων βελτιστοποίησης δεν συνεπάγεται την επιτυχή αντιμετώπιση όλων των προβλημάτων βέλτιστου σχεδιασμού. Η εμπειρία - ευφυΐα του μηχανικού αποτελούν σημαντικές παραμέτρους για τη σωστή χρήση των αλγορίθμων αυτών. Ο σχεδιασμός αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία, όπου ως επανάληψη θεωρείται η διαδοχική δοκιμή μίας ή πολλών υποψήφιων βέλτιστων σχεδιασμών και η εκτίμηση κατά πόσο ο ένας υπερτερεί ή όχι των προηγούμενων, ικανοποιώντας παράλληλα τους περιορισμούς του προβλήματος. Η συμβατική διαδικασία που ακολουθούν οι μηχανικοί είναι εκείνη της “δοκιμής και διόρθωσης”.

Βέβαια, με την αύξηση της πολυπλοκότητας και του μεγέθους των προβλημάτων η χρήση τέτοιων εμπειρικών τεχνικών δεν οδηγεί στη βέλτιστη λύση. Έτσι κατέστη απαραίτητη η αυτοματοποίηση του σχεδιασμού αξιοποιώντας τις εξελίξεις στην τεχνολογία των υπολογιστών και την ανάπτυξη αποτελεσματικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Σήμερα οι δοκιμές αυτές είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν με αυτόματο τρόπο και με μεγαλύτερη ταχύτητα και ακρίβεια.

Οι πρώτοι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης που εφαρμόστηκαν σε δομικά προβλήματα ήταν δανεισμένοι από τους τομείς των οικονομικών, των μαθηματικών και της επιχειρησιακής έρευνας και βασίζονταν στον *μαθηματικό προγραμματισμό* (mathematical programming). Αυτές οι τεχνικές είναι ιδιαίτερα εύχρηστες και αποδοτικές και μπορούν να οδηγήσουν στη βέλτιστη επίλυση προβλημάτων με μεγάλο εύρος πρακτικών εφαρμογών. Εκτός των μαθηματικών μεθόδων βελτιστοποίησης υπάρχουν και οι τυχηματικές μέθοδοι όπως είναι η μέθοδος των *στρατηγικών εξέλιξης* (Evolution Strategies-ESs), των *γενετικών αλγορίθμων* (Genetic Algorithms-GAs), η μέθοδος της *προσομοίωσης απόπτησης* (simulated annealing), κ.α.. Η εφαρμογή των μεθόδων αυτών αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική σε ένα ευρύτερο πεδίο προβλημάτων σε σχέση με το πεδίο εφαρμογής των μεθόδων μαθηματικού προγραμματισμού [1-4]. Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής διερευνήθηκε η εφαρμογή των τυχηματικών μεθόδων σε προβλήματα της γεωτεχνικής μηχανικής. Διενεργήθηκε επίσης, σύγκριση των μεθόδων αυτών με τις τεχνικές μαθηματικού προγραμματισμού και προτάθηκε η δημιουργία υβριδικών τεχνικών που συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα και των δύο μεθόδων.

3.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Γενικά ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης κατασκευών ενδέχεται να είναι συνεχές ή διακριτό, ανάλογα με το είδος του πεδίου τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού. Λόγοι τυποποίησης πολλές φορές επιβάλλουν το πεδίο τιμών να είναι διακριτό. Το μαθηματικό μοντέλο ενός συνεχούς προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}) &\rightarrow \min \\ \mathbf{s} &= \{s_1, s_2, \dots, s_n\}^T \\ l_i &\leq s_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n \\ g_j(\mathbf{s}) &\geq 0, j = 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{s}) &= 0, j = m + 1, m + 2, \dots, t \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου \mathbf{s} είναι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού, l_i και u_i είναι το κάτω και άνω όριο της μεταβλητής σχεδιασμού s_i αντίστοιχα, $F(\mathbf{s})$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση της οποίας αναζητούμε την ελάχιστη τιμή ενώ $g_j(\mathbf{s})$, $h_j(\mathbf{s})$ είναι οι συναρτήσεις περιορισμού ανισοτήτων και ισοτήτων, αντίστοιχα.

Πολλά από τα προβλήματα που εμφανίζονται στην επιστημονική περιοχή του βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών ενδέχεται να εμπεριέχουν διακριτές ή και μικτού τύπου μεταβλητές σχεδιασμού. Ένα τυπικό παράδειγμα προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού με μικτού τύπου μεταβλητές σχεδιασμού είναι ο βέλτιστος σχεδιασμός μορφή-διατομών μιας δικτυωτής κατασκευής. Σε ένα τέτοιο πρόβλημα οι συντεταγμένες των κόμβων του δικτύωματος, οι οποίες καθορίζουν τη βέλτιστη μορφή της κατασκευής μπορούν να λαμβάνουν συνεχείς τιμές, αντίθετα, λόγω τυποποίησης επιβάλλουν οι τιμές των διατομών των ράβδων να προέρχονται από διακριτό πεδίο τιμών. Ένα τέτοιο πρόβλημα ονομάζεται *μικτό* πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού.

Σε αντιστοιχία με το πρόβλημα που διατυπώνεται από την εξ. (3.1), ένα διακριτό πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}) &\rightarrow \min \\ \mathbf{s} &= \{s_1, s_2, \dots, s_n\}^T \\ l_i &\leq s_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n \\ s_i &\in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, n \\ g_j(\mathbf{s}) &\geq 0, j = 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{s}) &= 0, j = m + 1, m + 2, \dots, t \end{aligned} \tag{3.2}$$

όπου \mathbb{R}^d είναι το πεδίο τιμών των διακριτών μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{s} . Οι μεταβλητές σχεδιασμού s_i ($i=1, 2, \dots, n$) μπορούν να λάβουν τιμές μόνο από το σύνολο \mathbb{R}^d .

Για την αντιμετώπιση ενός μικτού προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι. Συνήθως η διαχείριση των διακριτών μεταβλητών ενός μικτού ή ενός καθαρά διακριτού προβλήματος γίνεται σαν να αποτελούσαν συνεχείς μεταβλητές σχεδιασμού. Στο τέλος της διαδικασίας, όταν πια θα έχουν καθοριστεί οι βέλτιστες τιμές όλων των μεταβλητών σχεδιασμού, αντιστοιχίζονται στις συνεχείς μεταβλητές σχεδιασμού που προέκυψαν κατάλληλες τιμές από το διακριτό πεδίο ορισμού. Για την περίπτωση ενός διακριτού προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού στο οποίο το πεδίο ορισμού είναι δυνατό να ταξινομηθεί ως προς όλα τα χαρακτηριστικά των διατομών (εμβαδόν, κύρια ροπή αδράνειας, δευτερεύουσα ροπή αδράνειας, κ.λπ.) σε μια αυστηρώς μονότονη ακολουθία, τότε η τεχνική αυτή δίνει μια καλή προσέγγιση της βέλτιστης λύσης. Όμως σε πρακτικά προβλήματα αυτό δεν ισχύει. Στην περίπτωση π.χ. που οι διατομές ταξινομηθούν βάσει του εμβαδού τους σε μια αυστηρώς μονότονη ακολουθία, οι αντίστοιχες τιμές των ροπών αδράνειας δεν εμφανίζονται μονότονα ταξινομημένες και συνεπώς η τεχνική αυτή δεν είναι δυνατό να δώσει αποδεκτά αποτελέσματα. Στην εργασία των Bremicker et al. [6]

παρουσιάζονται οι κυριότερες μέθοδοι αντιμετώπισης διακριτών ή μικτών προβλημάτων βέλτιστου σχεδιασμού. Οι περισσότερες από αυτές τις μεθόδους μετατρέπουν το μικτό πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού σε μια σειρά συνεχών προβλημάτων βέλτιστου σχεδιασμού τα οποία λύνονται επαναληπτικώς [7,8].

3.2.1 Μεταβλητές σχεδιασμού

Οι παράμετροι εκείνες οι οποίες όταν λάβουν συγκεκριμένη τιμή καθορίζουν πλήρως ένα σχεδιασμό ονομάζονται *μεταβλητές σχεδιασμού* (design variables). Στην περίπτωση που ένας σχεδιασμός δηλαδή μια συγκεκριμένη τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού δεν πληροί τους περιορισμούς του προβλήματος τότε ονομάζεται *ανέφικτος* (infeasible), σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται *εφικτός* (feasible). Ένας εφικτός σχεδιασμός δεν είναι απαραίτητα και ο βέλτιστος αλλά είναι πάντοτε πραγματοποιήσιμος.

Ένα πολύ σημαντικό πρώτο βήμα για την κατάλληλη προσομοίωση ενός προβλήματος είναι η σωστή επιλογή των μεταβλητών σχεδιασμού. Σε περιπτώσεις που η επιλογή είναι λανθασμένη τότε η προσομοίωση είναι δυνατό να είναι εσφαλμένη ή σε χειρότερη περίπτωση ο βέλτιστος σχεδιασμός στον οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης να είναι μη πραγματοποιήσιμος. Σε πολλές περιπτώσεις είναι επιθυμητό να επιλέγεται μεγαλύτερο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού από ότι είναι απαραίτητο για την σωστή προσομοίωση, παρά το γεγονός ότι με αυτό τον τρόπο αυξάνονται οι “βαθμοί ελευθερίας” σχεδιασμού του φορέα. Στη συνέχεια είναι δυνατό να αφαιρεθούν οι επιπλέον μεταβλητές σχεδιασμού λαμβάνοντας συγκεκριμένες τιμές για τα επόμενα βήματα βελτιστοποίησης. Ένα επίσης σημαντικό θέμα που πρέπει να προσεχθεί κατά την επιλογή των μεταβλητών σχεδιασμού είναι η μεταξύ τους ανεξαρτησία. Πολλές φορές ενδέχεται να επιλεγούν μεταβλητές σχεδιασμού να είναι εξαρτώμενες η μία από την άλλη. Σε αυτή την περίπτωση το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος γίνεται ιδιαίτερα πολύπλοκο.

Κατά τη μόρφωση του μαθηματικού μοντέλου βελτιστοποίησης θα πρέπει η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση να είναι επαρκώς εξαρτώμενη από όλες τις παραμέτρους σχεδιασμού. Ας θεωρηθεί για παράδειγμα ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι το βάρος της κατασκευής, του οποίου αναζητείται η ελάχιστη τιμή και ας υποθεθεί ότι η τάξη μεγέθους του βάρους είναι 1,000Kg. Αν το βάρος κάποιου μέλους της κατασκευής είναι τάξης μεγέθους 10^{-3} Kg ή και μικρότερης και το μέλος αυτό αντιστοιχεί σε μία από τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος, τότε στην περίπτωση που η τιμή της αλλάξει κατά 100% η επιρροή της στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδαμινή. Για την αποφυγή προβλημάτων ‘κακής κατάστασης’, όπως είναι αυτό που προαναφέρθηκε, κρίνεται σκόπιμη η διασύνδεση μεταξύ τους των μεταβλητών σχεδιασμού. Δηλαδή, ομαδοποίηση κάποιων μελών της κατασκευής, ώστε να αντιπροσωπεύονται από μία κοινή παράμετρο σχεδιασμού. Πριν την τελική επιλογή του μαθηματικού μοντέλου βελτιστοποίησης συνιστάται η διενέργεια μιας ανάλυσης ευαισθησίας έτσι ώστε να ελεγχθεί το μέγεθος της

ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με όλες τις παραμέτρους σχεδιασμού. Μέσω της ανάλυσης ευαισθησίας μπορούν να ανιχνευθούν οι παράμετροι σχεδιασμού που έχουν μηδαμινή επιρροή στην αντικειμενική συνάρτηση, ώστε στη συνέχεια να διασυνδεθούν με κάποιες άλλες παραμέτρους σχεδιασμού και να πάψουν να αποτελούν ξεχωριστές παραμέτρους σχεδιασμού.

3.2.2 Αντικειμενική συνάρτηση

Κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης περιγράφεται από ένα μεγάλο πλήθος εφικτών σχεδιασμών, εκ των οποίων κάποιοι είναι καλύτεροι κάποιων άλλων και κάποιος εξ αυτών αποτελεί τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Για να γίνει αυτού του είδους η διάκριση μεταξύ καλού και καλύτερου σχεδιασμού είναι αναγκαία η ύπαρξη ενός κριτηρίου για τη σύγκριση και την αξιολόγηση των σχεδιασμών. Το κριτήριο αυτό είναι μία συνάρτηση η οποία λαμβάνει κάποια δεδομένη τιμή για κάποιο συγκεκριμένο σχεδιασμό. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση η οποία εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού (βλ. εξ. (3.1) και (3.2)). Χωρίς καμία παραβίαση της γενικότητας οι εξισώσεις (3.1) και (3.2) αναφέρονται σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης $F(s)$ μπορεί να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $-F(s)$. Μια συνάρτηση η οποία ελαχιστοποιείται συχνά καλείται και *συνάρτηση κόστους* (cost function).

Η κατάλληλη επιλογή της αντικειμενικής συνάρτησης αποτελεί ένα εξ ίσου με την επιλογή των μεταβλητών σχεδιασμού πολύ σημαντικό στάδιο για την όλη διαδικασία μόρφωσης του μαθηματικού μοντέλου σχεδιασμού. Μερικά παραδείγματα αντικειμενικών συναρτήσεων που έχουν αναφερθεί στη διεθνή βιβλιογραφία είναι: η ελαχιστοποίηση κόστους, η μεγιστοποίηση κέρδους, ο σχεδιασμός ελαχίστου βάρους, η ελαχιστοποίηση απωλειών ενέργειας. Σε ορισμένα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού ζητούμενο είναι η ταυτόχρονη βελτιστοποίηση δύο ή περισσότερων αντικειμενικών συναρτήσεων, οι οποίες αντιπαλεύονται η μία την άλλη. Όπως λόγω χάρη στην περίπτωση ενός δομικού προβλήματος όπου ζητούμενο είναι η εύρεση του σχεδιασμού με το ελάχιστο βάρος και ταυτόχρονα η μετατόπιση ή η τάση σε ορισμένα σημεία της κατασκευής να είναι ελάχιστη, τα προβλήματα αυτού του τύπου ονομάζονται *προβλήματα βελτιστοποίησης με πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις* (multi-objective design ή Pareto optimum design).

3.2.3 Συναρτήσεις Περιορισμού

Ο σχεδιασμός ενός δομικού συστήματος επιτυγχάνεται όταν οι παράμετροι σχεδιασμού λάβουν συγκεκριμένες τιμές. Σχεδιασμός, μπορεί να θεωρηθεί και ένα αυθαίρετα ορισμένο δομικό σύστημα, όπως λόγω χάρη μία κυκλική διατομή με αρνητική ακτίνα, ή μία διατομή δακτυλίου με αρνητικό πάχος τοιχώματος, καθώς επίσης και κάθε μη κατασκευάσιμο δομικό σύστημα.

Κάθε απαίτηση του μηχανικού εισάγεται στο μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης με τη μορφή ανισοτήτων και ισοτήτων, οι οποίες ονομάζονται περιορισμοί και βάσει αυτών πραγματοποιείται ο έλεγχος περί του εφικτού ή μη του τρέχοντος σχεδιασμού. Για να έχει νόημα η συμμετοχή του περιορισμού στο μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να είναι εξαρτώμενος τουλάχιστον από μία μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος. Οι περιορισμοί που συνήθως επιβάλλονται σε προβλήματα κατασκευών είναι των τάσεων και μετατοπίσεων, των οποίων οι τιμές δεν επιτρέπεται να υπερβαίνουν κάποια καθορισμένα όρια.

Πολλές φορές ο μηχανικός επιβάλλει επιπλέον συναρτήσεις περιορισμών, λόγω αβεβαιοτήτων ή απειρίας, οι οποίες ενδέχεται να είναι άχρηστες, αφού είτε είναι εξαρτημένες από άλλες, είτε παραμένουν πάντα στην ασφαλή περιοχή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τη χωρίς κανένα όφελος διόγκωση των υπολογισμών κυρίως για την περίπτωση των μεθόδων μαθηματικού προγραμματισμού, στις οποίες απαιτείται η ανάλυση ευαισθησίας.

Συχνά γίνεται αναφορά σε ενεργείς και ανενεργείς συναρτήσεις περιορισμού. Μία ανισοτική συνάρτηση περιορισμού $g_j(\mathbf{s}) \leq 0$ θεωρείται *ενεργής* (active) σε ένα σημείο \mathbf{s}^* στην περίπτωση που ικανοποιείται η ισότητα, δηλαδή $g_j(\mathbf{s}^*) = 0$. Αντίστοιχα η ανωτέρω συνάρτηση περιορισμού καλείται *ανενεργής* (inactive) για έναν σχεδιασμό \mathbf{s}^* στην περίπτωση που ικανοποιείται αυστηρώς η ανισότητα, δηλαδή $g_j(\mathbf{s}^*) < 0$. Η ανισοτική συνάρτηση περιορισμού θεωρείται ότι παραβιάζεται για τον σχεδιασμό \mathbf{s}^* στην περίπτωση που λαμβάνει θετική τιμή, δηλαδή $g_j(\mathbf{s}^*) > 0$. Αντίστοιχα, μία ισοτική συνάρτηση περιορισμού $h_j(\mathbf{s}) = 0$ θεωρείται ότι παραβιάζεται στο σημείο \mathbf{s}^* αν δεν ισχύει η ισότητα, δηλαδή $h_j(\mathbf{s}^*) \neq 0$. Συνεπώς, μία ισοτική συνάρτηση περιορισμού ενδέχεται να είναι ενεργής ή να παραβιάζεται. Από όσα αναφέρθηκαν σχετικά με ενεργείς ή όχι συναρτήσεις περιορισμού γίνεται σαφές ότι κάθε εφικτός σχεδιασμός ορίζεται από ενεργείς ή ανενεργείς ανισοτικές συναρτήσεις περιορισμού καθώς και από ενεργείς ισοτικές συναρτήσεις περιορισμού.

Σε κάθε βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης είναι απίθανο να εμφανίζονται όλες οι συναρτήσεις περιορισμού ως ενεργείς. Βέβαια, ο μηχανικός δεν έχει τη δυνατότητα εκ των προτέρων να καθορίσει ποιες από τις συναρτήσεις περιορισμού πρόκειται να είναι ενεργείς και ποιες ανενεργείς σε κάθε βήμα. Για αυτό τον λόγο κατά την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση διαφόρων τεχνικών αποτελεσματικότερης αντιμετώπισης των συναρτήσεων περιορισμού, οι οποίες βελτιώνουν κατά πολύ την απόδοση των μεθόδων βελτιστοποίησης και μειώνουν σημαντικά τον χρόνο των υπολογισμών. Ειδικά όταν το πρόβλημα είναι σχετικά μεγάλο, δηλαδή με πολλές μεταβλητές σχεδιασμού και συναρτήσεις περιορισμού, κάθε δυνατότητα μείωσης των υπολογισμών των τιμών και των παραγώγων των συναρτήσεων περιορισμού έχει σημαντική επίπτωση στην απόδοση της μεθόδου βελτιστοποίησης. Έτσι, σε κάθε βήμα εντοπίζονται οι συναρτήσεις περιορισμού που είναι εντός της *ασφαλούς* (safe) περιοχής, δηλαδή

ανενεργείς, και οι οποίες δεν επηρεάζουν στην παρούσα φάση τη διαδικασία εύρεσης ενός βελτιωμένου σχεδιασμού προκειμένου να συνεχιστεί η διαδικασία με τις ενεργείς συναρτήσεις περιορισμού.

Μία ενεργής συνάρτηση περιορισμού υποδηλώνει ότι η παρουσία της επηρεάζει σημαντικά τη βελτίωση του παρόντος σχεδιασμού. Εξ ορισμού οι ισοτικές συναρτήσεις περιορισμού πρέπει να πληρούνται σε κάθε βήμα κι έτσι συμπεριλαμβάνονται πάντα στο σύνολο των ενεργών συναρτήσεων περιορισμού [9,10]. Μία ενεργής ανισοτική συνάρτηση περιορισμού σημαίνει ότι στην παρούσα φάση πρέπει να πληρείται ως ισότητα, έστω και κατά προσέγγιση. Όταν μία συνάρτηση περιορισμού είναι ανενεργής, τότε αυτό σημαίνει ότι η παρουσία της δεν παίζει ρόλο τη δεδομένη στιγμή, αφού υπερκαλύπτεται από τις ενεργείς συναρτήσεις περιορισμού. Βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιττή αφού μπορεί σε ένα επόμενο βήμα να ενεργοποιηθεί. Συνήθως, οι μαθηματικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης για την αύξηση της αποτελεσματικότητάς τους χρησιμοποιούν μόνο τις ενεργείς συναρτήσεις περιορισμού. Αλλά και εμπειρικές μέθοδοι βέλτιστου σχεδιασμού, όπως είναι η μέθοδος της *πλήρους εντατικής κατάστασης* (fully-stressed design), βασίζονται στην εκμετάλλευση της ύπαρξης των ενεργών συναρτήσεων περιορισμού.

Για να εντοπιστούν οι ενεργείς συναρτήσεις περιορισμού θα πρέπει πρώτα να κανονικοποιηθούν οι τιμές τους στην τάξη μοναδιαίων μεγεθών [11] για να υπάρχει ένα ενιαίο σύστημα αναφοράς τιμών ανεξαρτήτως του είδους της κάθε συνάρτησης περιορισμού. Για παράδειγμα, ενδέχεται η τιμή μίας συνάρτησης περιορισμού μετατοπίσεων να είναι της τάξης του 0.1-2.0 cm, ενώ η τιμή μιας συνάρτησης περιορισμού τάσεων να είναι της τάξης του 25,000 kPa, οπότε γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι είναι απαραίτητη η ομοιογενοποίηση των μεγεθών.

Η κανονικοποίηση των τιμών των συναρτήσεων περιορισμού γίνεται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$g_j^N(\mathbf{s}) = \frac{g_j^l - g_j}{|g_j^l|} \leq 0 \quad (3.3)$$

για μία συνάρτηση περιορισμού της μορφής *κάτω ορίου* $g_j \geq g_j^l$, και

$$g_j^N(\mathbf{s}) = \frac{g_j - g_j^u}{|g_j^u|} \leq 0 \quad (3.4)$$

για μία συνάρτηση περιορισμού της μορφής *άνω ορίου* $g_j \leq g_j^u$. Έτσι, στην περίπτωση που μία συνάρτηση περιορισμού έχει κανονικοποιημένη τιμή +0.50, τότε παραβιάζει την επιτρεπόμενη τιμή κατά 50%, ενώ εάν έχει κανονικοποιημένη τιμή -0.50 τότε βρίσκεται κατά 50% κάτω από την επιτρεπόμενη τιμή. Συνήθως, μέσα στο

σύνολο των ενεργών συναρτήσεων περιορισμού συμπεριλαμβάνονται όσες έχουν κανονικοποιημένη τιμή μεγαλύτερη από -0.1 έως -0.01 [9]. Επίσης, συνήθως επιτρέπεται και μία μικρή ανοχή όταν οι συναρτήσεις περιορισμού παραβιάζουν ελάχιστα την επιτρεπόμενη τιμή (0.001 έως -0.005), αφού έτσι κι αλλιώς η όλη διαδικασία προσομοίωσης, ανάλυσης, σχεδιασμού και κατασκευής εμπεριέχει πολλές προσεγγιστικές θεωρήσεις και αβεβαιότητες.

3.2.4 Τοπικά και καθολικά ελάχιστα

Ένα σύννηθες πρόβλημα όλων των μαθηματικών μεθόδων βελτιστοποίησης είναι ότι λόγω του ντετερμινιστικού τρόπου λειτουργίας τους ενδέχεται να οδηγηθούν στον εντοπισμό ενός *τοπικού ελάχιστου* (local minimum), σε αντίθεση με τις μεθόδους που στηρίζονται σε πιθανοτικές θεωρήσεις, οι οποίες λόγω του τυχαίου τρόπου έρευνας έχουν περισσότερες πιθανότητες να εντοπίσουν το *καθολικό ελάχιστο* (global minimum). Ο ορισμός του τοπικού και του καθολικού ελάχιστου από μαθηματική σκοπιά δίνεται ως εξής:

Τοπικό ελάχιστο. Ένα σημείο \mathbf{s}^* στον χώρο σχεδιασμού θεωρείται τοπικό ή σχετικό ελάχιστο όταν πληροί τις συναρτήσεις περιορισμού και ισχύει η σχέση $F(\mathbf{s}^*) \leq F(\mathbf{s})$ για κάθε σημείο εφικτού σχεδιασμού σε μικρή ακτίνα γύρω από το σημείο \mathbf{s}^* . Εάν ισχύει μόνο η ανισότητα, $F(\mathbf{s}^*) < F(\mathbf{s})$, τότε το σημείο \mathbf{s}^* καλείται *αυστηρό* (strict) ή *μοναδικό* (unique) ή *δυνατό* (strong) τοπικό ελάχιστο.

Καθολικό ελάχιστο. Ένα σημείο \mathbf{s}^* στον χώρο σχεδιασμού θεωρείται καθολικό ή απόλυτο ελάχιστο όταν πληροί τις συναρτήσεις περιορισμού και ισχύει η σχέση $F(\mathbf{s}^*) \leq F(\mathbf{s})$ για κάθε σημείο εφικτού σχεδιασμού. Εάν ισχύει μόνο η ανισότητα, $F(\mathbf{s}^*) < F(\mathbf{s})$, τότε το σημείο \mathbf{s}^* καλείται *αυστηρό* (strict) ή *μοναδικό* (unique) ή *δυνατό* (strong) καθολικό ελάχιστο.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν συναρτήσεις περιορισμού, τότε ισχύουν οι ίδιοι ορισμοί, αλλά σε ολόκληρο τον χώρο σχεδιασμού και όχι μόνο στην περιοχή των εφικτών σχεδιασμών. Γενικά, είναι δύσκολο να προλεχθεί εκ των προτέρων η ύπαρξη τοπικών ή καθολικού ελαχίστου σε κάθε πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού. Πάντως, εάν η αντικειμενική συνάρτηση $F(\mathbf{s})$ είναι συνεχής και η περιοχή εφικτών σχεδιασμών δεν είναι *κενή* (nonempty), είναι *κλειστή* (closed) και *καθορισμένη* (bounded), τότε υπάρχει καθολικό ελάχιστο για την $F(\mathbf{s})$ [12]. Η περιοχή εφικτών σχεδιασμών δεν είναι κενή όταν δεν υπάρχουν αλληλοσυγκρουόμενες συναρτήσεις περιορισμού ή όταν δεν υπάρχουν υπεράριθμες συναρτήσεις περιορισμού. Εάν δεν μπορεί ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης να εντοπίσει κανένα εφικτό σημείο τότε σημαίνει ότι η περιοχή εφικτών σχεδιασμών είναι κενή οπότε πρέπει να επαναδιατυπωθεί το πρόβλημα αφαιρώντας ή κάνοντας ελαστικότερες κάποιες συναρτήσεις περιορισμού. Η περιοχή εφικτών σχεδιασμών είναι κλειστή και καθορισμένη όταν οι συναρτήσεις περιορισμού είναι συνεχείς και δεν υπάρχουν “αυστηρές” ανισότητες ($g < 0$). Πάντως και εάν ακόμα δεν ισχύουν αυτές οι

συνθήκες αυτό δεν αποκλείει την ύπαρξη ελαχίστων, απλά δεν μπορεί να τεκμηριωθεί μαθηματικά, αλλά μπορεί να προκύψει κατά την διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης όταν βρεθεί κάποιο ελάχιστο και ελεγχθεί εάν πληροί τις συνθήκες περιορισμού.

3.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Στην παρούσα έρευνα θα εξεταστούν πέντε διαφορετικοί πολλά υποσχόμενοι μετεωριστικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης, οι οποίοι μέχρι στιγμής έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία σε πολλά σύνθετα προβλήματα. Στη συνέχεια, παρατίθεται μια συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων αυτών.

3.3.1 Particle Swarm Optimization Algorithm

Πολλοί πιθανολογικά βασισμένοι αλγόριθμοι αναζήτησης έχουν εμπνευσθεί από φυσικά φαινόμενα, όπως μεταξύ άλλων, ο εξελικτικός προγραμματισμός (evolutionary programming), οι γενετικοί αλγόριθμοι (evolutionary algorithms) και οι εξελικτικές στρατηγικές (evolution strategies). Πρόσφατα, έχει αναπτυχθεί μια οικογένεια μεθόδων βελτιστοποίησης, η οποία βασίζεται στην προσομοίωση των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μελών ενός συγκεκριμένου είδους τα οποία αναζητούν τροφή ή πόρους γενικότερα. Μία από αυτές τις μεθόδους είναι η Particle Swarm Optimization (PSO) η οποία προτάθηκε από τους Kennedy και Eberhart (1995) και βασίζεται στη συμπεριφορά που αντανακλάται στα σμήνη πουλιών, μελισσών και στα κοπάδια ψαριών που προσαρμόζουν τις φυσικές τους κινήσεις για να αποφύγουν τα αρπακτικά και για να αναζητήσουν τροφή. Η μέθοδος αυτή, έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον των ερευνητών που ασχολούνται με τη βελτιστοποίηση κατά τα τελευταία χρόνια.

Ένα σμήνος πουλιών ή εντόμων ή ένα κοπάδι ψαριών αναζητά τροφή και προστασία με πολύ χαρακτηριστικό τρόπο. Αν ένα μέλος ανακαλύψει μια επιθυμητή πορεία, τα υπόλοιπα μέλη του σμήνους ακολουθούν γρήγορα. Το κάθε μέλος αναζητά για το καλύτερο στην περιοχή του, μαθαίνει από τη δική του εμπειρία και από τις εμπειρίες των άλλων, κυρίως των καλύτερων του σμήνους. Η μέθοδος PSO μιμείται αυτή τη συμπεριφορά. Είναι μία μέθοδος βελτιστοποίησης βασισμένη σε πληθυσμό λύσεων (population based) που στηρίζεται στην προϋπόθεση ότι η ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των ατόμων μπορεί να παρέχει ένα εξελικτικό πλεονέκτημα.

Η PSO έχει αποδειχτεί εξαιρετικά αξιόπιστη για την επίλυση πολλών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Μπορεί να χειριστεί μη γραμμικούς, μη κυρτούς χώρους με ασυνέχειες. Σε σύγκριση με άλλες μη-ντετερμινιστικές μεθόδους βελτιστοποίησης θεωρείται αποτελεσματική όσον αφορά το πλήθος υπολογισμού αντικειμενικών συναρτήσεων, αλλά και λόγω του ότι συνήθως οδηγεί σε ίδιας ή καλύτερης ποιότητας αποτελέσματα. Η ευκολία εφαρμογής της την κάνει πιο ελκυστική, αφού δεν απαιτεί γνωστή μορφή πεδίου αναζήτησης ενώ ταυτόχρονα μπορεί να εφαρμοστεί απ'

ευθείας σε παράλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα, μειώνοντας έτσι αισθητά το υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος PSO έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε πολλούς τομείς, όπως η βελτιστοποίηση μαθηματικών συναρτήσεων, η εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων και ο έλεγχος ασαφών συστημάτων.

Σε μια διατύπωση της PSO συνυπάρχουν πολλαπλές υποψήφιες λύσεις, οι οποίες αλληλεπιδρούν. Κάθε μία από αυτές τις λύσεις ονομάζεται "σωματίδιο" (particle) και χαρακτηρίζεται από τη θέση και την ταχύτητά της στον πολυδιάστατο χώρο σχεδιασμού. Τα σωματίδια "πετούν" μέσα στο πεδίο αναζήτησης (search space) αναζητώντας τη βέλτιστη θέση. Όσο περνάει ο χρόνος κάθε σωματίδιο προσαρμόζει τη θέση του ανάλογα με την "εμπειρία" του αλλά και την εμπειρία άλλων (γειτονικών) σωματιδίων. Η εμπειρία των σωματιδίων δημιουργείται καταγράφοντας και αποθηκεύοντας τη βέλτιστη θέση από την οποία έχουν περάσει κατά τη διάρκεια της "πτήσης" τους. Καθώς το κάθε σωματίδιο καταγράφει τη βέλτιστη θέση από την οποία έχει περάσει, η PSO διαθέτει μία μνήμη. Ένα σύστημα PSO συνδυάζει τοπική μέθοδο αναζήτησης (μέσω της εμπειρίας κάθε σωματιδίου) και καθολική μέθοδο αναζήτησης (μέσω της εμπειρίας των γειτονικών σωματιδίων).

Μαθηματική διατύπωση της PSO

Κάθε σωματίδιο διατηρεί δύο βασικά χαρακτηριστικά, ταχύτητα και θέση, στο πολυδιάστατο πεδίο αναζήτησης τα οποία ανανεώνονται ως εξής:

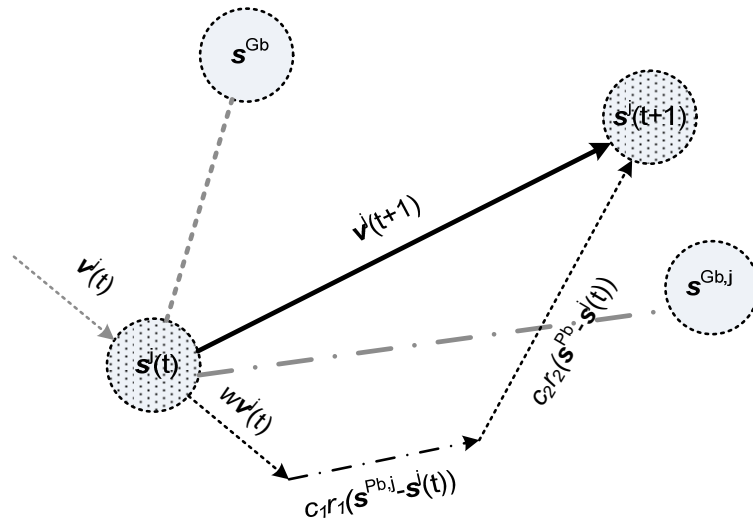
$$\mathbf{v}^j(t+1) = w\mathbf{v}^j(t) + c_1\mathbf{r}_1\mathbf{o}(\mathbf{s}^{Pb,j} - \mathbf{s}^j(t)) + c_2\mathbf{r}_2\mathbf{o}(\mathbf{s}^{Gb} - \mathbf{s}^j(t)) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{s}^j(t+1) = \mathbf{s}^j(t) + \mathbf{v}^j(t+1) \quad (3.6)$$

όπου με $\mathbf{v}^j(X)$ συμβολίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου j σε χρόνο t , με $\mathbf{s}^j(X)$ συμβολίζεται η θέση του σωματιδίου j σε χρόνο t , το διάνυσμα $\mathbf{s}^{Pb,j}$ είναι η καλύτερη θέση στην οποία έχει βρεθεί το σωματίδιο j και το \mathbf{s}^{Gb} είναι η καλύτερη θέση ολόκληρου του σμήνους. Οι συντελεστές επιτάχυνσης c_1 και c_2 υποδεικνύουν το δείκτη εμπιστοσύνης της καλύτερης λύσης που έχει βρεθεί από το κάθε σωματίδιο ατομικά (c_1 – cognitive parameter) και από το σμήνος συνολικά (c_2 – social parameter) αντίστοιχα. Τα r_1 και r_2 είναι δύο τυχαία διανύσματα, ομοιόμορφα καταναμημένα στο διάστημα $[0,1]$. Το σύμβολο "ο" συμβολίζει το γινόμενο Hadamard.

Το σχήμα 3.1 αναπαριστά την κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα δισδιάστατο χώρο σχεδιασμού, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.5) και (3.6). Σε κάθε στιγμή t , η θέση του σωματιδίου $\mathbf{s}^j(t)$ αναπαριστάται από τον διακεκομμένο κύκλο στο κάτω αριστερά μέρος του σχήματος, ενώ η νέα θέση $\mathbf{s}^j(t+1)$ τη χρονική στιγμή $t+1$ αναπαριστάται πάνω δεξιά με τον έντονο διακεκομμένο κύκλο. Είναι εμφανές το πώς η κίνηση του

σωματιδίου εξαρτάται από: i) την ταχύτητα του v^j , ii) την καλύτερη θέση στη οποία έχει βρεθεί το σωματίδιο $s^{Pb,j}$, και iii) την καλύτερη θέση όλου του σμήνους.



Σχήμα 3.1 Οπτικοποίηση της κίνησης των σωματιδίων σε διδιάστατο χώρο σχεδιασμού

Ο όρος w της εξίσωσης 3.5 είναι το σταθμισμένο βάρος, ένας συντελεστής κλίμακας που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο των ικανοτήτων εξερεύνησης του σμήνους. Μεγάλα αδρανειακά βάρη οδηγούν σε μεγαλύτερες ανανεώσεις της ταχύτητας (velocity updates), επιτρέποντας την καθολικότερη διερεύνηση του χώρου σχεδιασμού από τον αλγόριθμο. Αντίθετα, μικρότερες τιμές του αδρανειακού βάρους οδηγούν σε συγκεντρώσεις των ενημερώσεων της ταχύτητας σε κοντινές περιοχές του χώρου σχεδιασμού. Το αδρανειακό βάρος μπορεί επίσης, να ανανεώνεται κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Ένας συνηθής κανόνας που χρησιμοποιείται για την ανανέωση των τιμών του αδρανειακού βάρους είναι η γραμμική μείωση που υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$w_{t+1} = w_{\max} - \frac{w_{\max} - w_{\min}}{t_{\max}} \times t \quad (3.7)$$

όπου t είναι ο αριθμός των επαναλήψεων και w_{\max} , w_{\min} είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή αντίστοιχα του σταθμισμένου βάρους. Σε γενικές γραμμές η χρήση του γραμμικά μειούμενου σταθμισμένου βάρους έχει αποδειχθεί αποδοτικότερη από τη διατήρηση σταθερής τιμής.

Πίνακας 3.1 Βασικές παράμετροι της PSO

Symbol	Description	Details
NP	Number of particles	A typical range is 10 – 40. For most problems 10 particles is sufficient enough to get acceptable results. For some difficult or special problems the number can be increased to 50-100.
n	Dimension of particles	It is determined by the problem to be optimized.
w	Inertia weight	Usually is set to a value less than 1, i.e. 0.95. It can also be updated during iterations.
s^L, s^U	Vectors containing the lower and upper bounds of the n design variables, respectively	They are determined by the problem to be optimized. Different ranges for different dimensions of particles can be applied in general.
v^{\max}	Vector containing the maximum allowable velocity for each dimension during one iteration	Usually is set half the length of the allowable interval for the given dimension: $v_i^{\max} = (s_i^U - s_i^L)/2$. Different values for different dimensions of particles can be applied in general.
c_1, c_2	Cognitive and social parameters	Usually $c_1=c_2=2$. Other values can also be used, provided that $0 < c_1+c_2 < 4$.

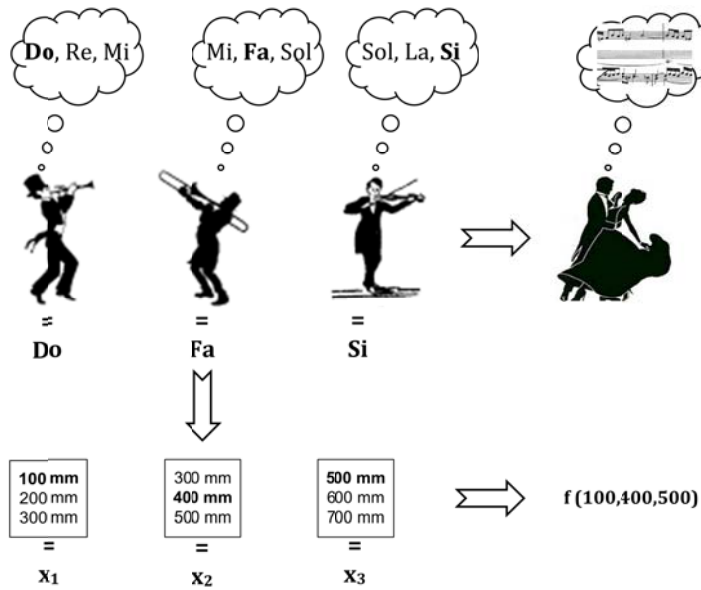
Οι ταχύτητες των σωματιδίων σε κάθε διάσταση i ($i=1,2,\dots,n$) περιορίζονται από μία μέγιστη ταχύτητα v^{\max} . Το διάνυσμα v^{\max} της διάστασης n περιέχει τις μέγιστες απόλυτες ταχύτητες για κάθε διάσταση. Η χρήση διανύσματος είναι καταλληλότερη από τη χρήση βαθμωτού μεγέθους, αφού διαφορετικοί περιορισμοί ταχύτητας μπορούν να εφαρμοστούν για διαφορετικές διαστάσεις του σωματιδίου. Αν για ένα δοσμένο σωματίδιο j το άθροισμα των επιταχύνσεων προκαλεί την αύξηση της απόλυτης ταχύτητας για τη διάσταση i , έτσι ώστε να γίνει μεγαλύτερη από τη μέγιστη ταχύτητα $v^{\max,i}$, τότε η ταχύτητα αυτής της διάστασης περιορίζεται σε $\pm v^{\max,i}$. Το διάνυσμα v^{\max} χρησιμοποιείται για την προστασία της συνοχής του συστήματος. Η βασική μέθοδος PSO έχει μόνο λίγες παραμέτρους που απαιτούν ρύθμιση, οι βασικότερες από τις οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.2 Παράμετροι σύγκλισης της PSO

Symbol	Description	Details
t_{\max}	Maximum number of iterations for the termination criterion.	Determined by the complexity of the problem to be optimized, in conjunction with other PSO parameters (n , NP).
k_f	Number of iterations for which the relative improvement of the objective function satisfies the convergence check.	If the relative improvement of the objective function over the last k_f iterations (including the current iteration) is less or equal to f_m , convergence has been achieved.
f_m	Minimum relative improvement of the value of the objective function.	

3.3.2 Harmony Search

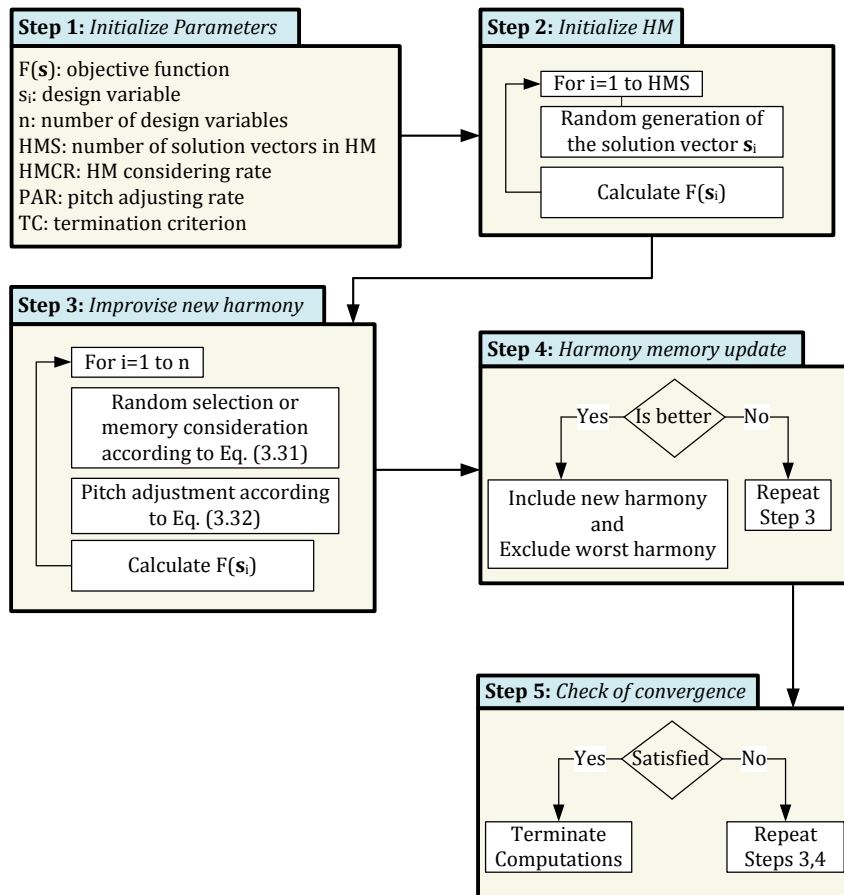
Ο αλγόριθμος της μεθόδου Harmony Search (HS) αρχικά εμπνεύστηκε από τη διαδικασία αυτοσχεδιασμού των μουσικών jazz. Σύμφωνα με την αναλογία μεταξύ αυτοσχεδιασμού και βελτιστοποίησης, ο κάθε μουσικός (σαξοφωνίστας, μπασίστας, κιθαρίστας κλπ) αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή του προβλήματος, ενώ το εύρος του τόνου που μπορεί να παίξει αντιστοιχεί στο εύρος τιμών της μεταβλητής. Η μουσική αρμονία σε μια συγκεκριμένη στιγμή αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα λύσεων μίας συγκεκριμένης επανάληψης και η αισθητική του κοινού αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση. Ακριβώς όπως η μουσική αρμονία βελτιώνεται με την πάροδο του χρόνου, έτσι και το διάνυσμα των λύσεων βελτιώνεται με κάθε επανάληψη. Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται λεπτομερώς κάθε βήμα της μεθόδου περιλαμβάνοντας τα εξής: 1) ρύθμιση των παραμέτρων του αλγόριθμου, 2) τυχαία ρύθμιση για αρχικοποίηση της μνήμης, 3) αυτοσχεδιασμός αρμονίας, 4) ανανέωση μνήμης και 5) τερματισμός. Το διάγραμμα ροής της μεθόδου Harmony Search παρουσιάζεται στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.2 Αναλογία μεταξύ αυτοσχεδιασμού και βελτιστοποίησης

Ρύθμιση Παραμέτρων Αλγορίθμου

Αρχικοποίηση Παραμέτρων: Στο πρώτο βήμα, συγκεκριμενοποιείται το πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπου n είναι ο αριθμός των μεταβλητών ελέγχου (decision variables), όπου $s_i^L \leq s_i \leq s_i^U$, $i = 1, 2, \dots, n$ ορίζεται το εύρος τιμών της i - μεταβλητής. Οι παράμετροι του αλγορίθμου προσδιορίζονται σε αυτό το βήμα: HMS (harmony memory size) είναι το μέγεθος της μνήμης αρμονίας και αντιστοιχεί στον αριθμό των διανυσμάτων που αποθηκεύονται ταυτόχρονα στη μνήμη. HRCR (harmony rate considering rate) είναι ο ρυθμός με τον οποίο η μέθοδος επιλέγει μία τυχαία τιμή από τη μνήμη του μουσικού, ενώ PAR (pitch adjusting rate) είναι ο ρυθμός με τον οποίο η HS ρυθμίζει την αρχική τιμή που επιλέχθηκε από τη μνήμη. MI (maximum improvisation) είναι ο αριθμός των επαναλήψεων και FW (fret width) είναι το εύρος ζώνης, μόνο για συνεχείς μεταβλητές, που παλαιότερα ονομαζόταν bandwidth.



Σχήμα 3.3 Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου της Harmony Search

Στα πλαίσια της μεθόδου, ο όρος *fret* δηλώνει τα αυθαίρετα σημεία τα οποία χωρίζουν το συνολικό πεδίο τιμών σε μικρότερα τμήματα, ενώ *fret width* ονομάζεται η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών *frets*. Συνήθως στην μέθοδο HS χρησιμοποιούνται ομοιόμορφα διαστήματα, ενώ αρχικά χρησιμοποιούνταν σταθερές τιμές των παραμέτρων. Παρόλα αυτά, ορισμένοι ερευνητές έχουν προτείνει τη χρήση μεταβλητών τιμών παραμέτρων. Ο Mahdavi κ.α. (2007) πρότειναν τη γραμμική αύξηση του PAR και την εκθετική μείωση του FW με επαναλήψεις.

$$PAR(I) = PAR_{\min} + (PAR_{\max} - PAR_{\min}) \cdot \frac{1}{MI} \quad (3.8)$$

$$FW(I) = FW_{\max} \cdot \exp\left[\ln\left(\frac{FW_{\min}}{FW_{\max}}\right) \cdot \frac{I}{MI}\right] \quad (3.9)$$

Ο Mukhopadhyay et al. (2008) πρότεινε τη χρήση του FW ως τυπική απόκλιση του εκάστοτε πληθυσμού, όταν το HMCR είναι κοντά στο 1.

$$FW(I) = \sigma(s_i) = \sqrt{var(s_i)} \quad (3.10)$$

Ο Geem (2006) μετά από έρευνα ποικίλων βιβλιογραφιών πινακοποίησε σταθερές τιμές των παραμέτρων, όπως ο αριθμός των μεταβλητών, HMS, HMCR, PAR και MI. Το FW κανονικά κυμαίνεται από 1% έως 10% του συνολικού εύρους τιμών. Επιπροσθέτως, ερευνητές έχουν προτείνει προσαρμοζόμενες θεωρίες παραμέτρων, οι οποίες επιτρέπουν στην HS να έχει αυτόματα τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σε κάθε επανάληψη (Geem 2006 και 2009).

Αρχικοποίηση Μνήμης (Harmony Memory Initialization)

Στο δεύτερο βήμα της μεθόδου η μνήμη (Harmony Memory, HM) αρχικοποιείται με HMS τυχαία παραγμένα διανύσματα λύσεων που ορίζουν το μητρώο μνήμης αρμονίας του κάθε μουσικού.

$$HM = \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 \dots & s_n^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \dots & s_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{HMS} & s_2^{HMS} & s_3^{HMS} \dots & s_n^{HMS} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Αυτοσχεδιασμός Αρμονίας

Στο τρίτο βήμα, δημιουργείται ένα νέο διάνυσμα ακολουθώντας τρεις κανόνες: τυχαία επιλογή, χρήση μνήμης και προσαρμογή του τόνου (pitch). Σύμφωνα με την τυχαία επιλογή, η τιμή της μεταβλητής s_i επιλέγεται τυχαία από τη μνήμη $HM = [s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{HMS}]$ με πιθανότητα HMCR ($0 \leq HMCR \leq 1$) ή λαμβάνοντας υπόψη τη μνήμη επιλέγεται τυχαία με πιθανότητα $1 - HMCR$ μέσα στο εύρος τιμών της.

$$s_i = \begin{cases} s_i \in [s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{HMS}] \text{ with probability HMCR} \\ s_i^l \leq s_i \leq s_i^u \text{ with probability } (1 - HMCR) \end{cases} \quad (3.12)$$

Αφού η τιμή s_i επιλεγεί τυχαία σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, μπορεί να προσαρμοστεί περαιτέρω σε γειτονικές τιμές με την προσθήκη μιας συγκεκριμένης ποσότητας, με πιθανότητα $HMCR \times PAR$ ($0 \leq PAR \leq 1$) ενώ η αρχική τιμή διατηρείται με πιθανότητα $HMCR \times (1 - PAR)$.

$$s_i = \begin{cases} s_i(k+m) \text{ with probability } HMCR \times PAR \\ s_i \text{ with probability } HMCR \times (1 - PAR) \end{cases} \quad (3.13)$$

Για διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού, ο αλγόριθμος της HS έχει τη ακόλουθη στοχαστική παράγωγο που αποτελείται από τρεις όρους (τυχαία επιλογή, χρήση μνήμης και προσαρμογή του τόνου).

$$\frac{df}{ds_i} = \frac{1}{K_i}(1 - \text{HMCR}) + \frac{n(s_i(k))}{\text{HMS}} \text{HMCR}(1 - \text{PAR}) + \frac{n(s_i(k-m))}{\text{HMS}} \text{HMCR}(\text{PAR}) \quad (3.14)$$

Ανανέωση Μνήμης

Εφόσον το καινούριο διάνυσμα αρμονίας που παράχθηκε είναι καλύτερο από το χειρότερο διάνυσμα της μνήμης, σύμφωνα με την αντικειμενική συνάρτηση, τότε παίρνει τη θέση του:

$$s^{New} \in \text{HM} \cap s^{Worst} \notin \text{HM} \quad (3.15)$$

Παρόλα αυτά, προκειμένου να υπάρχει ποικιλία αρμονιών στη μνήμη, μπορούν να ληφθούν υπόψη και διαφορετικές αρμονίες (όσον αφορά την ελάχιστη ομοιότητα). Επίσης, μπορεί να οριστεί ένας μέγιστος αριθμός πανομοιότυπων αρμονιών στη μνήμη, έτσι ώστε να αποφευχθεί πρόωρη σύγκλιση. Εάν η νέα αρμονία s^{new} είναι καλύτερη από όλες τις προϋπάρχουσες στη μνήμη HM , μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια πρόσθετη διαδικασία που ονομάζεται *accidentaling*. Κάθε μεταβλητή της αρμονίας μπορεί να ρυθμιστεί περαιτέρω (εάν αυτή η αρμονία είναι η βέλτιστη μέχρι εκείνη τη στιγμή), οδηγώντας σε ακόμα καλύτερες λύσεις.

$$s^{New} = \left\{ \begin{array}{l} s_i(k \pm m) \text{ for discrete variables} \\ s_i \pm \Delta s \text{ for continuous variables} \end{array}, i = 1, \dots, n \right\} \quad (3.16)$$

3.3.3 Differential Evolution

Το 1995, οι Storm και Price πρότειναν ένα νέο εξελικτικό αλγόριθμο με πραγματικής μορφής κωδικοποίηση (floating point) και τον ονόμασαν Differential Evolution. Εισηγάγαν ένα νέο τελεστή που επιδίωκε τη δημιουργία νέων απογόνων από τα χρωμοσώματα των γονέων. Η DE είναι μια σχετικά νέα, παράλληλη, απ' ευθείας μέθοδος αναζήτησης που χρησιμοποιεί ένα πληθυσμό από NP διανύσματα παραμέτρων $s_{i,g}$ ($i = 1, 2, \dots, \text{NP}$) για κάθε γενιά g . Η μέθοδος αυτή, παράγει νέα διανύσματα προσθέτοντας το διάνυσμα της σταθμισμένης διαφοράς μεταξύ δύο μελών του πληθυσμού σε ένα τρίτο μέλος. Αν το διάνυσμα που προκύπτει αντιστοιχεί σε καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης από ένα μέλος του πληθυσμού, τότε το αντικαθιστά. Η σύγκριση γίνεται μεταξύ των νέων διανυσμάτων και όλων των μελών του πληθυσμού, εκτός των τριών που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή τους. Επιπροσθέτως, σε κάθε γενιά αξιολογείται το καλύτερο διάνυσμα προκειμένου να καταγράφεται η πρόοδος της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Μέχρι τώρα έχουν προταθεί πολλές παραλλαγές της μεθόδου, αλλά οι δύο που χρησιμοποιούνται κυρίως είναι οι παρακάτω:

Παραλλαγή DE1

Στην πρώτη παραλλαγή, παράγεται αρχικά ένα διάνυσμα δωρητής σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{v}_{i,g+1} = \mathbf{s}_{r_1,g} + F \cdot (\mathbf{s}_{r_2,g} - \mathbf{s}_{r_3,g}) \quad (3.17)$$

πριν τον υπολογισμό του i -στου διανύσματος $\mathbf{s}_{i,g+1}$. Αυτό το βήμα είναι αντίστοιχο του τελεστή μετάλλαξης (mutation operator) των γενετικών αλγορίθμων ή των εξελικτικών στρατηγικών. Οι ακέραιοι r_1 , r_2 και r_3 επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[1, NP]$ με $i \neq r_1, r_2$ και r_3 . Η F είναι μια πραγματική σταθερή τιμή που ονομάζεται συντελεστής μετάλλαξης και ρυθμίζει την ενίσχυση της διαφορικής διαφοροποίησης (differential variation) ($\mathbf{s}_{r_2,g} - \mathbf{s}_{r_3,g}$), έχοντας εύρος τιμών $[0, 2]$. Στο επόμενο βήμα, εφαρμόζεται ο τελεστής διασταύρωσης (crossover operator) παράγοντας το δοκιμαστικό διάνυσμα $\mathbf{u}_{i,g+1} = [u_{1,i,g+1}, u_{2,i,g+1}, \dots, u_{D,i,g+1}]^T$, το οποίο ορίζεται από στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{s}_{i,g}$ καθώς και από στοιχεία του διανύσματος δωρητή $\mathbf{v}_{i,g+1}$ με πιθανότητα CR ως εξής:

$$u_{j,i,g+1} = \begin{cases} v_{j,i,g+1} & \text{if } \text{rand}_{j,i} \leq CR \text{ or } j = I_{rand} \\ s_{j,i,g} & \text{if } \text{rand}_{j,i} > CR \text{ or } j \neq I_{rand} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, NP \text{ and } j = 1, 2, \dots, n$$

όπου $\text{rand}_{j,i} \sim U[0, 1]$, I_{rand} είναι ένας τυχαίος ακέραιος που ανήκει στο διάστημα $[1, 2, \dots, n]$ και εξασφαλίζει ότι $\mathbf{v}_{i,g+1} \neq \mathbf{s}_{i,g}$. Το τελευταίο βήμα αυτής της διαδικασίας είναι η εφαρμογή του τελεστή επιλογής (selection operator), όπου το διάνυσμα $\mathbf{s}_{i,g}$ συγκρίνεται με το δοκιμαστικό διάνυσμα $\mathbf{u}_{i,g+1}$:

$$\mathbf{s}_{i,g+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,g+1} & \text{if } f(\mathbf{u}_{i,g+1}) \leq f(\mathbf{s}_{i,g}) \\ \mathbf{s}_{i,g} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, NP$$

Παραλλαγή DE2

Στη δεύτερη παραλλαγή, παράγεται και πάλι ένα διάνυσμα δωρητής σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{v}_{i,g+1} = \mathbf{s}_{i,g} + \lambda \cdot (\mathbf{s}_{best,g} - \mathbf{s}_{i,g}) + F \cdot (\mathbf{s}_{r_2,g} - \mathbf{s}_{r_3,g}) \quad (3.20)$$

πριν τον υπολογισμό του i -στου διανύσματος $\mathbf{s}_{i,g+1}$, εισάγοντας μια πρόσθετη μεταβλητή ελέγχου λ . Ο σκοπός της μεταβλητής αυτής είναι να ενισχύσει τη διαδικασία αναζήτησης της μεθόδου ενσωματώνοντας το τρέχων βέλτιστο διάνυσμα

$s_{\text{best},g}$. Η παραγωγή του δοκιμαστικού διανύσματος $u_{i,g+1}$, όπως και η διαδικασία επιλογής είναι ίδιες με την πρώτη παραλλαγή. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η δεύτερη μέθοδος.

3.3.4 Covariance Matrix Adaptation

Η μέθοδος CMA προτάθηκε από τους Hansen και Ostermeier και είναι ένα τελείως μη-τυχαίοποιημένο και αυτοπροσαρμοζόμενο πρόγραμμα. Πρώτον, το μητρώο συνδιακύμανσης της κατανομής μετάλλαξης είναι αλλαγμένο, προκειμένου να αυξηθεί η πιθανότητα να παραχθεί ξανά το επιλεγμένο βήμα μετάλλαξης. Δεύτερον, ο ρυθμός της αλλαγής προσαρμόζεται ανάλογα με τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να προσαρμοστούν. Τρίτον, στην τυχαία επιλογή, η προσδοκία του μητρώου συνδιακύμανσης είναι σταθερή. Τέλος, ο μηχανισμός προσαρμογής είναι εγγενώς ανεξάρτητος από το δοσμένο σύστημα συντεταγμένων. Η μετάβαση από την γενιά g στην επόμενη ($g+1$) δίνεται στα επόμενα βήματα.

Παραγωγή των απογόνων: Δημιουργία λ νέων απογόνων ως εξής:

$$\mathbf{s}_k^{(g+1)} \sim N\left(\mathbf{m}^{(g)}, \sigma^{(g)^2} \mathbf{C}^{(g)}\right) \sim \mathbf{m}^{(g)} + \sigma^{(g)} N\left(\mathbf{0}, \mathbf{C}^{(g)}\right) \quad (3.21)$$

όπου $\mathbf{s}_k^{g+1} \in \mathbb{B}^n$ είναι το διάνυσμα σχεδιασμού του k -στου απογόνου της γενιάς $g+1$ ($k=1,2,\dots,\lambda$), $N(\mathbf{m}^{(g)}, \mathbf{C}^{(g)})$ είναι κανονικά κατανομημένοι αριθμοί, όπου $\mathbf{m}^{(g)} \in \mathbb{B}^n$ είναι το διάνυσμα της μέσης τιμής και $\mathbf{C}^{(g)}$ είναι το μητρώο συνδιακύμανσης. $\mathbf{s}^{(g)} \in \mathbb{B}_n$ είναι το καθολικό μέγεθος βήματος. Για να οριστεί μία νέα γενιά, πρέπει να οριστούν το νέο διάνυσμα της μέσης τιμής $\mathbf{m}^{(g+1)}$, καθολικό μέγεθος βήματος $\mathbf{s}^{(g+1)}$ και μητρώο συνδιακύμανσης $\mathbf{C}^{(g+1)}$.

Νέο διάνυσμα μέσης τιμής: Αφού το πρόγραμμα επιλογής (μ, λ) ενεργήσει πάνω στους λ απογόνους, υπολογίζεται το νέο διάνυσμα μέσης τιμής, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{m}^{(g+1)} = \sum_{i=1}^{\mu} w_i \mathbf{s}_{i,\lambda}^{(g+1)} \quad (3.22)$$

όπου $\mathbf{s}_{i,\lambda}^{(g+1)}$ είναι ο i -στος καλύτερος απόγονος και w_i είναι οι συντελεστές βαρύτητας που ορίζονται ως εξής:

$$w_i = \frac{\ln(\mu + 1) - \ln i}{\sum_{j=1}^{\mu} (\ln(\mu + 1) - \ln j)}, \quad \sum_{i=1}^{\mu} w_i = 1, \quad w_i > 0, \quad i = 1, \dots, \mu \quad (3.23)$$

Καθολικό μέγεθος βήματος: Το νέο καθολικό μέγεθος βήματος υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma^{(g+1)} = \sigma^{(g)} \exp \left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma} \left(\frac{\|\mathbf{p}_\sigma^{(g+1)}\|}{E\|N(\mathbf{0}, \mathbf{I})\|} - 1 \right) \right) \quad (3.24)$$

όπου d_s και c_s είναι σταθερές και ορίζονται ως εξής:

$$c_\sigma = \frac{\mu_{eff} + 2}{n + \mu_{eff} + 3} \quad (3.25\alpha), \quad (3.25\beta)$$

$$d_\sigma = 1 + 2 \max \left(0, \sqrt{\frac{\mu_{eff}-1}{n+1}} - 1 \right) + c_\sigma, \quad \mu_{eff} = \left(\sum_{i=1}^{\mu} w_i^2 \right)^{-1}$$

$E\|N(\mathbf{0}, \mathbf{I})\|$ είναι η αναμενόμενη τιμή της Ευκλείδειας νόρμας ενός κανονικά καταναμημένου διανύσματος και $\mathbf{p}_s^{(g+1)}$ είναι η συζευγμένη εξελικτική πορεία ($\mathbf{p}_s^{(0)} = \mathbf{0}$), που δίνεται από:

$$\mathbf{p}_\sigma^{(g+1)} = (1 - c_\sigma) \mathbf{p}_\sigma^{(g)} + \sqrt{c_\sigma(2 - c_\sigma)} \mu_{eff} \mathbf{C}^{(g)\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{m}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}} \quad (3.26)$$

όπου το μητρώο $\mathbf{C}^{g-1/2}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{C}^{(g)\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^{(g)} \mathbf{D}^{(g)-1} \mathbf{B}^{(g)T} \quad (3.27)$$

με τις στήλες του $\mathbf{B}^{(g)}$ να αποτελούν την ορθογώνια βάση των ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbf{C}^{g-1/2}$ και τα στοιχεία της διαγωνίου του $\mathbf{D}^{(g)}$ είναι οι τετραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων θετικών ιδιοτιμών.

Ανανέωση του μητρώου συνδιακύμανσης: Το νέο μητρώο συνδιακύμανσης $\mathbf{C}^{(g+1)}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbf{C}^{(g+1)} = (1 - c_{cov}) \mathbf{C}^{(g)} + \frac{c_{cov}}{\mu_{cov}} \mathbf{p}_c^{(g+1)} \mathbf{p}_c^{(g+1)T} + c_{cov} \left(1 - \frac{1}{\mu_{cov}} \right) \sum_{i=1}^{\mu} w_i \text{OP} \left(\frac{\mathbf{s}_{i,\lambda}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}} \right) \quad (3.28)$$

Το OP δηλώνει το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του και $\mathbf{p}_c^{(g)} \in \mathbb{B}^n$ είναι η εξελικτική πορεία ($\mathbf{p}_c^{(0)} = \mathbf{0}$) που δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{p}_c^{(g+1)} = (1 - c_c) \mathbf{p}_c^{(g)} + H_\sigma^{(g+1)} \sqrt{c_c(2 - c_c)} \mu_{eff} \frac{\mathbf{m}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}} \quad (3.29)$$

όπου

$$c_c = \frac{4}{4+n}, \mu_{cov} = \mu_{eff}$$

$$c_{cov} = \frac{1}{\mu_{cov}} \frac{2}{(n+\sqrt{2})^2} + \left(1 - \frac{1}{\mu_{cov}}\right) \min \left(1, \frac{2\mu_{eff} - 1}{(n+2)^2 + \mu_{eff}}\right) \quad (3.30),(3.31)$$

3.3.5 Elitistic Covariance Matrix Adaptation

Η εξελικτική στρατηγική ECMA είναι ένας συνδυασμός μεταξύ του πολύ γνωστού $(1+\lambda)$ συστήματος επιλογής των εξελικτικών στρατηγικών με τη μέθοδο CMA που περιγράφηκε παραπάνω. Ο αρχικός κανόνας ανανέωσης για το μητρώο συνδιακύμανσης μπορεί να εφαρμοστεί στην $(1+\lambda)$ επιλογή. Η αθροιστική προσαρμογή μεγέθους βήματος (step size adaptation) της $(\mu/\mu, \lambda)$ CMA μεθόδου αντικαθιστάται από μία διόρθωση του κανόνα “επιτυχίας” (success rule step size control). Κάθε μέλος a του αλγορίθμου ECMA αποτελείται από πέντε στοιχεία:

$$a = \{s, \bar{p}_{succ}, \sigma, p_c, C\} \quad (3.32)$$

όπου s είναι το διάνυσμα σχεδιασμού, \bar{p}_{succ} είναι μία παράμετρος που εκφράζει το ρυθμό επιτυχίας κατά τη διάρκεια της εξελικτικής διαδικασίας, σ είναι το μέγεθος του βήματος, p_c είναι η εξελικτική πορεία και C είναι το μητρώο συνδιακύμανσης των δυνάμεων μετάλλαξης (mutation strengths). Αντίθετα με τον αλγόριθμο CMA, κάθε άτομο έχει δικό του βήμα, εξελικτική πορεία και μητρώο συνδιακύμανσης. Ένας ψευδοκώδικας της μεθόδου παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:

Algorithm: $(1+\lambda)$ -ECMA

```

1  $g = 0$ , initialize  $a_{parent}^{(g)}$ 
2 repeat
3    $a_{parent}^{(g+1)} \leftarrow a_{parent}^{(g)}$ 
4   for  $k = 1, \dots, \lambda$  do
5      $s_k^{(g+1)} \sim N\left(s_{parent}^{(g)}, \sigma^{(g)^2} C^{(g)}\right)$ 
6   end do
7   UpdateStepSize  $\left(a_{parent}^{(g+1)}, \frac{\lambda_{succ}^{(g+1)}}{\lambda}\right)$ 
8   if  $f\left(s_{1:\lambda}^{(g+1)}\right) < f\left(s_{parent}^{(g)}\right)$  then
9      $x_{parent}^{(g+1)} \leftarrow x_{1:\lambda}^{(g+1)}$ 
10    UpdateCovariance  $\left(a_{parent}^{(g+1)}, \frac{s_{parent}^{(g+1)} - s_{parent}^{(g)}}{\sigma_{parent}^{(g)}}\right)$ 
11  end if
12 until stopping criterion is met

```

Σχήμα 3.4 Αλγόριθμος της μεθόδου ECMA

Στην γραμμή #1 παράγεται ένας νέος γονέας $\alpha_{parent}^{(g)}$. Στις γραμμές #4-6 παράγονται λ απόγονοι από αυτόν το γονέα. Η δειγματοληψία των απογόνων γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση (17) με τη μεταβλητή $m^{(g)}$ να αντικαθιστάται από το διάνυσμα σχεδιασμού $s_{parent}^{(g)}$ του γονέα. Στη συνέχεια, ανανεώνεται το βήμα του γονέα σύμφωνα με την υπορουτίνα που παρουσιάζεται στο σχ. 3.5. Τα κριτήρια για την υπορουτίνα είναι ο γονέας $\alpha_{parent}^{(g)}$ και το ποσοστό επιτυχίας (success rate) $I_{succ}^{(g+1)}/I$ όπου $I_{succ}^{(g+1)}$ είναι ο αριθμός των απογόνων που έχουν καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης από το γονέα. Η ανανέωση του βήματος γίνεται σύμφωνα με τον κανόνα $1/5$. Όταν ο λόγος $I_{succ}^{(g+1)}/I$ είναι μεγαλύτερος από $1/5$, τότε το βήμα αυξάνεται και όταν είναι μικρότερος το βήμα μειώνεται. Εφόσον ο καλύτερος απόγονος έχει καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης από το γονέα, τότε γίνεται αυτός ο γονέας για την επόμενη γενιά (γραμμές #8-9). Αν η ανισότητα της γραμμής #8 ικανοποιείται τότε το μητρώο συνδιακύμανσης ανανεώνεται με βάση την υπορουτίνα του σχήματος 3.6. Τα κριτήρια αυτής της υπορουτίνας είναι ο τρέχων γονέας και η μεταβολή του βήματος:

$$\frac{s_{parent}^{(g+1)} - s_{parent}^{(g)}}{\sigma_{parent}^{(g)}} \quad (3.33)$$

Η ανανέωση της πορείας εξέλιξης και του μητρώου συνδιακύμανσης εξαρτάται από το ποσοστό επιτυχίας:

$$\bar{p}_{succ} = \frac{\lambda_{succ}}{\lambda} \quad (3.34)$$

Εάν το ποσοστό επιτυχίας είναι μικρότερο από μια οριακή τιμή p_{thresh} , τότε λαμβάνεται υπόψη το μέγεθος του βήματος και ανανεώνεται η πορεία εξέλιξης και το μητρώο συνδιακύμανσης (γραμμές #2-3 του σχήματος 3.6). Εάν το ποσοστό επιτυχίας είναι μεγαλύτερο από την οριακή τιμή τότε δεν λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή του βήματος και η ανανέωση γίνεται σύμφωνα με τις γραμμές #5-6. Οι εκ των προτέρων υπολογισμένες τιμές των υπόλοιπων στρατηγικών παραμέτρων δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$d = 1 + \frac{n}{2\lambda} \quad (3.35)$$

$$p_{succ}^{target} = \frac{1}{5 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \quad (3.36)$$

$$c_p = \frac{p_{succ}^{target} \lambda}{2 + p_{succ}^{target} \lambda} \quad (3.37)$$

όπου d είναι συντελεστής απόσβεσης της υπορουτίνας ανανέωσης βήματος, n είναι ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού, c_p είναι μια σταθερά ομαλοποίησης της παραμέτρου \bar{p}_{succ} και p_{succ}^{target} είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τον αριθμό των απογόνων.

Procedure: UpdateStepSize($a = \{s, \bar{p}_{succ}, \sigma, \mathbf{p}_c, \mathbf{C}\}, p_{succ}$)

- 1 $\bar{p}_{succ} \leftarrow (1 - c_p)\bar{p}_{succ} + c_p p_{succ}$
 - 2 $\sigma \leftarrow \sigma \exp\left(\frac{1}{d}\left(\bar{p}_{succ} - \frac{p_{succ}^{target}}{1 - p_{succ}^{target}}(1 - \bar{p}_{succ})\right)\right)$
-

Procedure: UpdateCovariance($a = \{s, \bar{p}_{succ}, \sigma, \mathbf{p}_c, \mathbf{C}\}, s_{step} \in \mathbb{R}^n$)

- 1 **if** $\bar{p}_{succ} < p_{thresh}$ **then**
 - 2 $\mathbf{p}_c \leftarrow (1 - c_c)\mathbf{p}_c + \sqrt{c_c(2 - c_c)}\mathbf{x}_{step}$
 - 3 $\mathbf{C} \leftarrow (1 - c_{cov})\mathbf{C} + c_{cov}\mathbf{p}_c\mathbf{p}_c^T$
 - 4 **else**
 - 5 $\mathbf{p}_c \leftarrow (1 - c_c)\mathbf{p}_c$
 - 6 $\mathbf{C} \leftarrow (1 - c_{cov})\mathbf{C} + c_{cov}(\mathbf{p}_c\mathbf{p}_c^T + c_c(2 - c_c)\mathbf{C})$
 - 7 **end if**
-

Σχήμα 3.5,3.6 Υπορουτίνες ανανέωσης μεγέθους βήματος και συνδιακύμανσης

3.4 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Σε μία διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού είναι απαραίτητη η ύπαρξη κάποιων κανόνων βάσει των οποίων η διαδικασία θα τερματίζεται. Οι κανόνες αυτοί πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε να συνδυάζουν δύο χαρακτηριστικά. Πρώτον, να επιτυγχάνουν τον τερματισμό της διαδικασίας αφού πρώτα έχει γίνει ο υπολογισμός του ζητουμένου, δηλαδή να έχουν εντοπιστεί οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού για τις οποίες η αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει τη βέλτιστη τιμή της. Δεύτερον, ο υπολογισμός να πραγματοποιείται μέσα σε εύλογο αριθμό επαναλήψεων.

Τα μήκη βήματος, αναπροσαρμοζόμενα βάσει του κανόνα επιτυχιών 1/5, από τη στιγμή που έχει προσεγγιστεί η θέση του καθολικού βέλτιστου οδηγούνται σε συνεχώς μικρότερες τιμές. Συνεπώς ένα συχνά χρησιμοποιούμενο κριτήριο σύγκλισης είναι το ακόλουθο: όταν το μήκος βήματος γίνει 'μηδέν' η διαδικασία να τερματίζεται. Μηδενική τιμή του μήκους βήματος συνεπάγεται και μηδενικές διορθώσεις στις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού οπότε παρατηρείται μηδενική

βελτίωση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Για να γίνει πιο αποτελεσματικός ο κανόνας είναι προτιμότερο να τεθεί ως τελική τιμή των μηκών βήματος μία μικρή, κοντά στο μηδέν, πεπερασμένη τιμή. Ο κανόνας αυτός έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα, τα μήκη βήματος λαμβάνουν συχνά μικρές τιμές όχι μόνο στην περίπτωση που έχει εντοπιστεί η περιοχή του καθολικού βέλτιστου αλλά και όταν έχει εντοπιστεί η περιοχή ενός οποιουδήποτε τοπικού βέλτιστου. Συνεπώς, η απαίτηση $\sigma > \varepsilon$ ή $\|\mathbf{s}^{(g)} - \mathbf{s}^{(g-1)}\| > \varepsilon$ για τον μη τερματισμό της διαδικασίας αναζήτησης δεν εγγυάται σύγκλιση στο καθολικό βέλτιστο αλλά συχνά οδηγεί σε πρόωρη σύγκλιση σε τοπικό βέλτιστο.

Ένα δεύτερο κριτήριο σύγκλισης είναι ο έλεγχος της μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης $\Delta F = F(\mathbf{s}^{(g-1)}) - F(\mathbf{s}^{(g)})$. Η διαδικασία συνεχίζεται όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς ΔF γίνει ‘μηδέν’ ή μικρότερη ενός ορίου. Όμως και πάλι, υπάρχει κίνδυνος το κριτήριο αυτό να ικανοποιείται και σε κάποιες θέσεις μακριά από το καθολικό βέλτιστο. Για την αποφυγή και πάλι του φαινομένου της πρόωρης σύγκλισης, βάσει του κανόνα επιτυχιών $1/5$ του μήκους βήματος, αυξάνονται οι τιμές των σ^2 , και έτσι η διαφορά των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων ΔF μεταξύ δύο επιτυχημένων δοκιμών αυξάνεται κατά μέσο όρο. Η διαδικασία τερματίζεται όταν

$$F(\mathbf{s}_E^{(g-\Delta g)}) - F(\mathbf{s}_E^{(g)}) \leq \varepsilon_c \quad (3.38)$$

ή

$$\frac{1}{\varepsilon_d} [F(\mathbf{s}_E^{(g-\Delta g)}) - F(\mathbf{s}_E^{(g)})] \leq F(\mathbf{s}_E^{(g)}) \quad (3.39)$$

όπου τα $\Delta g \geq 20n$ και $\varepsilon_c > 0$ ή $1 > \varepsilon_d > 0$, επιλέγονται ανάλογα με την ακρίβεια του υπολογιστή που απαιτείται για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε σαν κριτήριο τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας η ύπαρξη πέντε συνεχόμενων γενεών χωρίς βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης.

3.5 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ- ΒΙΒΛΙΟΦΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

1. Lagaros , N.D., “Structural Optimization using evolutionary algorithms and neural networks”, NTUA, 2000.
2. Mitropoulou, C.C, Advanced computational methods for seismic design and assessment of reinforced concrete structures, NTUA, 2011
3. Papadrakakis, M., Lagaros, N.D., Thierauf, G., and Cai, J., “Advanced solution methods in structural optimization based on evolution strategies”, *Journal of Engineering Computations*, vol. 15(1), pp. 12-34, 1998.
4. Schoenauer, M., “Shape representantion for evolutionary optimization and identification in structural mechanics”, in Winter, G., Periaux, J., Galan, M., and Cuesta, P. (eds.), *Genetic Algorithms in engineering and computer science*, John Wiley, pp. 443-464, 1995.
5. Hajela, P., “Genetic search - An approach to the nonconvex optimization”, *AIAA J.*, vol. 28, No. 7, pp. 1205-1210, 1990.
6. Michaliewicz, Z., ‘Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs’, Springer-Verlag, 1992.
7. Hager, K., and Balling, R., “New approach for discrete structural optimization”, *Journal of Structural Eng. ASCE*, vol. 114(5), pp. 1120-1134, 1988.
8. Bremicker, M., Papalambros, P.Y., and Loh, H.T., “Solution of Mixed-Discrete Structural Optimization Problems with a New Sequential Linearization Algorithm”, *Computers & Structures*, vol. 37, No. 4, pp. 451-461, 1990.
9. Cai, J., and Thierauf, G., “Discrete optimization of structures using an improved penalty function method”, *Engineering Optimization Journal*, vol. 21, pp. 293-306, 1993.
10. Fu, J., Fenton, R.G., and Cleghorn, W.L., “A mixed integer-discrete-continuous programming method and its applications to engineering design optimization”, *Engineering Optimization Journal*, vol. 17, pp. 263-280, 1991.
11. Arora, J.S., “Introduction to optimum design”, McGraw-Hill, New York, 1989.
12. Gill, P.E, Murray, W., and Wright, M.H., “Practical Optimization”, Academic Press, 1981.
13. Vanderplaats, G.N., “Numerical optimization techniques for engineering design”, McGraw-Hill, New York, 1984.
14. Arora, J.S., “Methods for optimization of large-scale systems”, in Papadrakakis, M. (ed.), *Solving Large-Scale Problems in Mechanics*, John Wiley, pp. 391-430, 1994.
15. Schittkowski, K., Zillober, C., and Zotemantel, R., “Numerical comparison of non-linear algorithms for structural optimization”, *Structural Optimization*, vol. 7, pp. 1-19, 1994.
16. Arora, J.S., “Computational Design Optimization: A review and future directions”, *Structural Safety*, vol. 7, pp. 131-148, 1990.

17. Thanedar, P.B., Arora, J.S., Tseng, C.H., Lim, O.K., and Park, G.J., “Performance of some SQP methods on structural optimization problems”, *Inter. Journal of Num. Meth. Engng*, vol. 23, pp. 2187-2203, 1986.
18. Gill, P.E., Murray, W., Saunders, M.A., and Wright, M.H., “User’s guide for NPSOL (Version 4.0): A Fortran Package for Nonlinear Programming”, Technical Report SOL 86-2, Dept. of Operations Research, Stanford University, 1986.
19. Fleury, C., “Dual methods for convex separable problems”, in Rozvany, G.I.N., (ed), NATO/DFG ASI Optimization of large structural systems, Berchtesgaden, Germany, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 509-530, 1993.
20. Papalabros, P.Y., and Wilde, W.J., “Principles of optimal design: Modelling and computation”, Cambridge Univ. Press, New York, 1988.
21. Papadrakakis, M., Tsompanakis, Y., Hinton, E. and Sienz, J., “Advanced Solution Methods in Topology Optimization and Shape Sensitivity Analysis”, *Journal of Engineering Computations*, vol. 3, No. 5, pp. 57-90, 1996.
22. Papadrakakis, M. and Tsompanakis, Y., “Domain decomposition methods for parallel solution of sensitivity analysis problems”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, pp. 281-303, 1999.
23. Bletzinger, K.U., Kimmich, S., and Ramm, E., “Efficient modelling in shape optimal design”, *Computing Systems in Engineering*, vol. 2(5/6), pp. 483-495, 1991.
24. Cheng, G., and Olhoff, N., “New method of error analysis and detection in semi-analytical sensitivity analysis”, in Rozvany, G.I.N., (ed.), NATO/DFG ASI Optimization of large structural systems, Berchtesgaden, Germany, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 361-383, 1993.
25. Haftka, R.T., Gurdal, Z., and Kamat, M.P., “Elements of structural optimization”, Kluwer, 1990.
26. Kibsgaard, S., “Sensitivity analysis - The basis of optimization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 34, pp. 901-932, 1992.
27. Olhoff, N., Rasmussen, J., and Lund, E., “Method of exact numerical differentiation for error estimation in finite element based semi-analytical shape sensitivity analyses”, Special Report No. 10, Institute of mechanical Engineering, Aalborg University, Aalborg, DK, 1992.
28. Hinton, E. and Sienz, J., “Aspects of adaptive finite element analysis and structural optimization ”, in Topping, B.H.V. and Papadrakakis, M. (eds.) *Advances in Structural Optimization*, CIVIL-COMP Press, Edinburgh, pp. 1-25, 1994.

4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

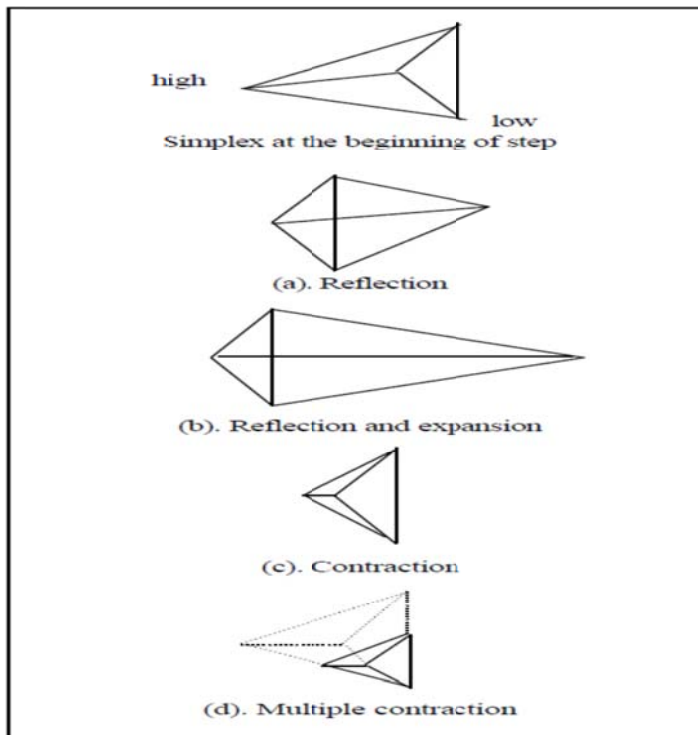
Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας θα μελετηθούν τέσσερις διαφορετικές γεωτεχνικές εφαρμογές. Η πιθανότητα αστοχίας θα υπολογιστεί με χρήση της μεθόδου Monte Carlo, αλλά και μέσω του δείκτη αξιοπιστίας Hasofer-Lind και συγκεκριμένα με τη σχέση $\beta = \min \sqrt{\{x'\}^T C^{-1} \{x'\}}$ και θα γίνει σύγκριση των δύο μεθόδων. Θεωρήθηκε ότι και στα τέσσερα προβλήματα δεν υπάρχει συσχέτιση (correlation) μεταξύ των μεταβλητών με αποτέλεσμα ο πίνακας C^{-1} να είναι ίσος με το μοναδιαίο πίνακα. Θα εξεταστούν οι εξής πέντε μετεωριστικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης: Particle Swarm Optimization (PSO), Harmony Search (HS), Differential Evolution (DE), Covariance Matrix Adaptation (CMA), Elitist Covariance Matrix Adaptation (ECMA). Όσον αφορά στα κριτήρια σύγκλισης, η μέθοδος Monte Carlo προγραμματίστηκε να σταματά στις 1.000.000 επαναλήψεις ενώ η διαδικασία βελτιστοποίησης σταματά όταν δημιουργηθούν πέντε συνεχόμενες γενιές λύσεων χωρίς βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης. Η ανάπτυξη των αλγορίθμων έγινε σε προγραμματιστικό περιβάλλον Fortran.

4.1.1 Αρχικοποίηση

Η επιλογή του αρχικού πληθυσμού στις μεθόδους βελτιστοποίησης παίζει πολύ σημαντικό ρόλο αφού δίνει τη δυνατότητα πιο αποτελεσματικής διερεύνησης του πεδίου αναζήτησης και παραγωγής πιο ποιοτικών αποτελεσμάτων. Η αρχικοποίηση των παραμέτρων γίνεται συνήθως με τη χρήση ομοιόμορφης κατανομής στο πεδίο αναζήτησης αλλά αυτή συχνά δεν είναι η καλύτερη επιλογή. Σε μια άλλη προσέγγιση,

χρησιμοποιείται μια γεννήτρια ακολουθιών Sobol για να δημιουργήσει τον αρχικό πληθυσμό, ομοιόμορφα κατανομημένο σε πολυδιάστατα πεδία αναζήτησης. Στα παρακάτω παραδείγματα αξιοποιήθηκε η Μη Γραμμική Μέθοδος Simplex (Nonlinear Simplex Method) που αναπτύχθηκε από τους J.A. Nelder και R.Mead [6]. Πειραματικά δεδομένα αποδεικνύουν ότι η μέθοδος αυτή είναι πολλά υποσχόμενη και μπορεί να βελτιώσει αισθητά τους ρυθμούς σύγκλισης και “επιτυχίας”.

Η Μη Γραμμική Μέθοδος Simplex (NSM) είναι μια γεωμετρική μέθοδος που βασίζεται στα πολύγωνα Simplex D -διαστάσεων. Τα πολύγωνα αυτά αποτελούνται από $D+1$ κορυφές και όλα τα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα και επιφάνειες. Έτσι για παράδειγμα, ένα Simplex σε χώρο δύο διαστάσεων είναι ένα τρίγωνο, ενώ σε τρισδιάστατο χώρο είναι ένα τετράεδρο. Γενικότερα, θεωρούνται μόνο πολύγωνα που είναι μη-εκφυλισμένα, που περικλείουν δηλαδή πεπερασμένο όγκο D -διαστάσεων. Η NSM ξεκινά με ένα αρχικό Simplex και ακολουθεί μια σειρά από βήματα και πιθανές κινήσεις βελτιώνοντας συνεχώς τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των κορυφών. Η σύγκλιση της μεθόδου είναι μέτρια, αλλά έχει πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος και αποτελεί μια αξιόλογη λύση αρχικοποίησης. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι πιθανές κινήσεις ενός πολυγώνου Simplex. Η υποροϋτίνα της μεθόδου προγραμματίστηκε σε περιβάλλον Fortran.



Σχήμα 4.1 Πιθανές κινήσεις πολυγώνου Simplex

4.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

4.2.1 Αξιολόγηση της πιθανότητας υγροποίησης αμμωδών εδαφών

Η υγροποίηση ή ρευστοποίηση των εδαφών είναι ένα είδος αστοχίας του εδάφους που σχετίζεται με τους σεισμούς. Η αστοχία αυτή συμβαίνει όταν η ενεργός τάση του εδάφους μηδενίζεται λόγω της αύξησης της υδατικής πίεσης πόρων κατά τη διάρκεια των σεισμικών δονήσεων. Κατά τη ρευστοποίηση, οι κόκκοι της άμμου απλά αιωρούνται στο νερό χωρίς να ασκούνται μεταξύ τους δυνάμεις, δηλαδή η συμπεριφορά του εδάφους είναι παρόμοια με τη συμπεριφορά ενός υγρού. Όταν το έδαφος επέρχεται σε αυτή την κατάσταση, μπορούν να προκληθούν σημαντικές καταστροφές σε κατασκευές όπως κτίρια, έργα οδοποιίας, γέφυρες, φράγματα κα. αφού η αντοχή του είναι μηδέν. Μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι για τη αξιολόγηση των φαινομένων υγροποίησης, οι περισσότερες από τις οποίες όμως λαμβάνουν υπόψη περιορισμένο αριθμό παραμέτρων. Στην πραγματικότητα, η ανάλυση της αστοχίας λόγω υγροποίησης επηρεάζεται από πολλές σεισμικές και εδαφικές/γεωτεχνικές παραμέτρους.

Στο παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί η σχέση των G. Sen και E. Akyol (2009), η οποία παρουσιάζεται και επεξηγείται παρακάτω.

$$LI = -5.13 \cdot SSSR_{7.5}^{4.39} + 2.29 \cdot \ln \left((r_d^{1.6}) + 1 \right) + 9.91 \cdot D_{50}^{1.31} \cdot SSSR_{7.5}^{1.40} - P1 \\ \cdot \ln \left((D_{50}^{6.38} + 1) \right) - 0.06 \cdot \ln \left((q_c^{2.62}) + 1 \right) \cdot r_d^{5.11} - P2 \\ \cdot \ln \left((D_{50}^{7.74}) + 1 \right) \cdot GWT^{4.48} - 0.88$$

$$\text{όπου } P1 = 0 \text{ όταν } \frac{\sigma_{vo}}{\sigma'_{vo}} \leq 0.838 \text{ ενώ } P1 = 8.97 \text{ όταν } \frac{\sigma_{vo}}{\sigma'_{vo}} > 0.838$$

$$\text{και } P2 = 0 \text{ όταν } \frac{GWT}{z} \leq 0.555 \text{ ενώ } P2 = 8.97 \text{ όταν } \frac{GWT}{z} > 0.555$$

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος και οι κατανομές τους:

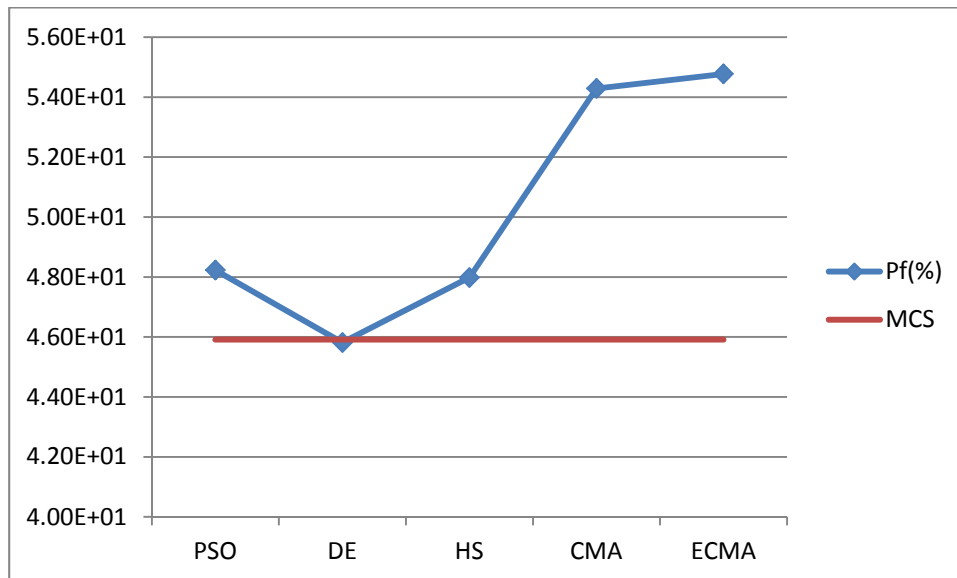
Πίνακας 4.1: Μεταβλητές του 1^{ου} προβλήματος και οι κατανομές τους

Μεταβλητή	Περιγραφή	Τύπος Κατανομής	Παράμετροι Κατανομής
α_{\max}	Μέγιστη επιτάχυνση εδάφους	Εκθετική	$\lambda=3,407$
σ_{vo}	Ολική γεωστατική τάση εδάφους	Ομοιόμορφη	$\alpha=22,60, \beta=296,30$
σ'_{vo}	Ενεργός γεωστατική τάση εδάφους	Ομοιόμορφη	$\alpha=13,90, \beta=227,50$
q_{c1}	Διορθωμένη αντίσταση αιχμής CTP	Γάμμα	$\alpha=1,4133, \beta=5404,0$
D_{50}	Μέση διάμετρος κόκκου	Γάμμα	$\alpha=2,6641, \beta=0,0608$
GWT	Βάθος υδροφόρου ορίζοντα	Ομοιόμορφη	$\alpha=0,20, \beta=8,40$
z	Βάθος δοκιμής CTP	Ομοιόμορφη	$\alpha=0,59, \beta=15,10$
SSSSR	Συντελεστής σεισμικής διατμητικής τάσης	Εκθετική	$\lambda=4,1255$
SSSR _{7.5}	Διορθωμένος συντελεστής σεισμικής διατμητικής τάσης	Γάμμα (3P)	$\alpha=3,0968, \beta=0,04965, \gamma=0,06745$
q_c	Αντίσταση αιχμής CTP	Γάμμα	$\alpha=4,2756, \beta=0,06865$

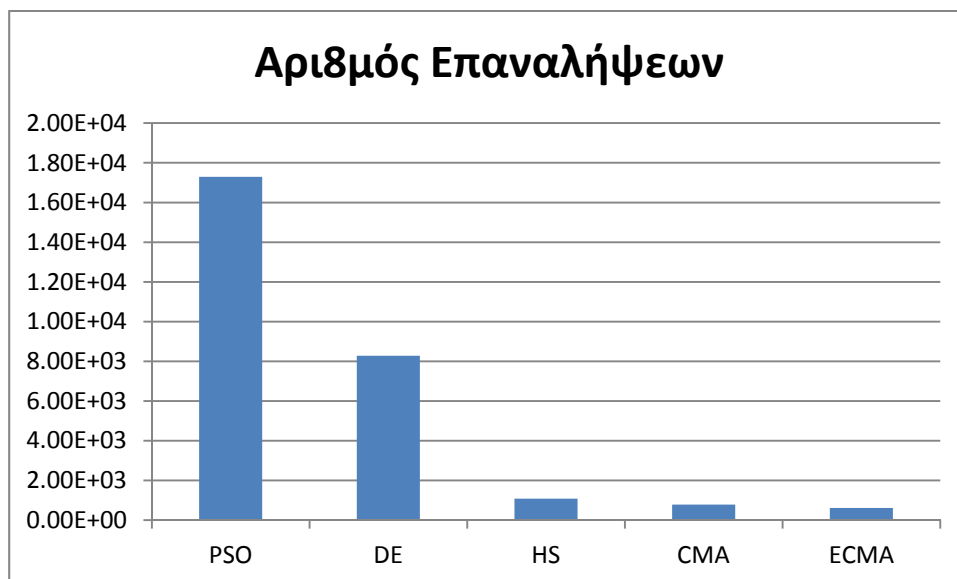
Η επίλυση του προβλήματος της ρευστοποίησης έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα, τα οποία συνοψίζονται στον πίνακα 4.2 και παρουσιάζονται γραφικά με τα σχήματα 4.2 και 4.3.

Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα επίλυσης προβλήματος ρευστοποίησης

Μέθοδος	Pf(%)	Αριθμός Επαναλήψεων
MCS	45,9	1,00E+06
PSO	48,2	1,73E+04
DE	45,8	8,28E+03
HS	48,0	1,09E+03
CMA	54,3	7,84E+02
ECMA	54,8	6,18E+02



Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση πιθανότητας αστοχίας προβλήματος ρευστοποίησης



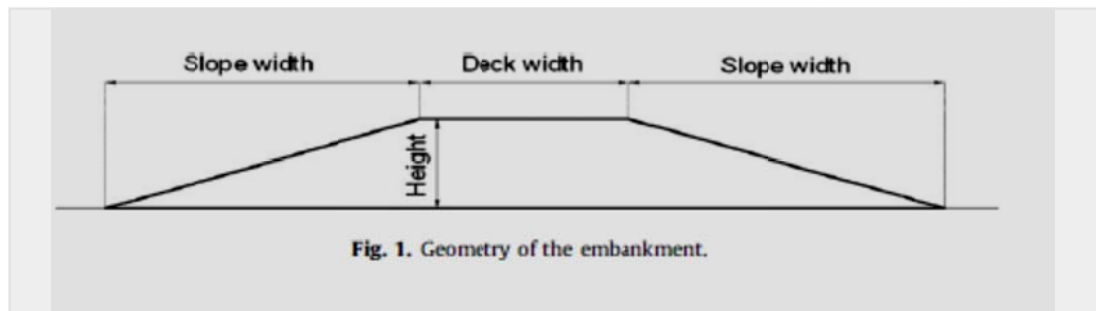
Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση αριθμού επαναλήψεων προβλήματος ρευστοποίησης

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος που πλησιάζει περισσότερο τα αποτελέσματα της μεθόδου Monte Carlo είναι η Differential Evolution με σφάλμα μόλις 0,2%. Οι υπόλοιπες μέθοδοι σε γενικές γραμμές δίνουν τιμές της πιθανότητας αστοχίας μεγαλύτερες από τη Μοντε Carlo με της PSO και HS να αποκλίνουν κατά περίπου 4% ενώ οι CMA και ECMA παρουσίασαν αρκετά μεγαλύτερο σφάλμα, της τάξεως του 20%. Όπως αναμενόταν, όλες οι μέθοδοι βελτιστοποίησης χρειάστηκαν αρκετά μικρότερο αριθμό επαναλήψεων από την MCS για να συγκλίνουν στην τελική λύση.

4.2.2: Ευστάθεια πρανούς γεωκατασκευής (επιχώματος)

Τα επιχώματα είναι μεγάλης κλίμακας γεωκατασκευές, όπως φράγματα ή χώροι υγειονομικής ταφής στερεών αποβλήτων, η ασφάλεια και λειτουργικότητα των οποίων είναι άμεσα συνδεδεμένη με περιβαλλοντολογικά και κοινωνικοοικονομικά θέματα. Η αξιολόγηση της ευστάθειας των πρανών τέτοιων επιχωμάτων περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό αβεβαιοτήτων και για αυτό οι μέθοδοι ανάλυσης αξιοπιστίας έχουν κερδίσει έδαφος τα τελευταία χρόνια. Στο παράδειγμα αυτό μελετάται επίχωμα τραπεζοειδούς διατομής (σχ.4.4) και για την ανάλυση της ευστάθειάς του χρησιμοποιείται η απλοποιημένη μέθοδος Bishop για ξηρά εδάφη. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην παραδοχή κυκλικών επιφανειών αστοχίας στο εσωτερικό του επιχώματος. Θεωρήθηκε συντελεστής ασφαλείας $F=2$, η υπέρβαση του οποίου υποδείκνυε την κατάσταση αστοχίας.

Σχήμα 4.4: Γεωμετρία επιχώματος



Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος και οι κατανομές τους:

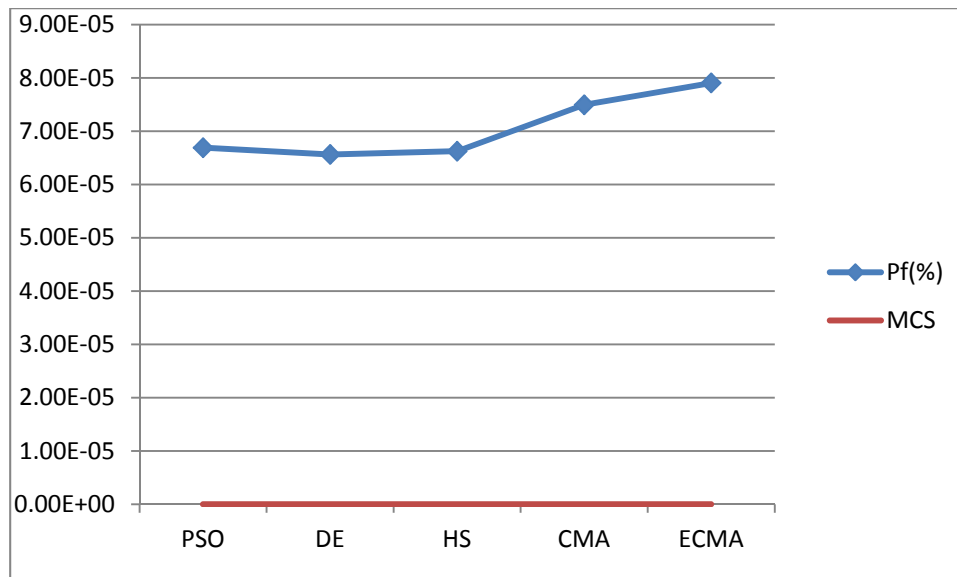
Πίνακας 4.3: Μεταβλητές του 2^{ου} προβλήματος και οι κατανομές τους

Μεταβλητή	Περιγραφή	Τύπος Κατανομής	Παράμετροι Κατανομής
c	Συνοχή	Κανονική	$\mu=5$, COV=10%
ϕ	Γωνία τριβής	Κανονική	$\mu=30$, COV=10%
γ	Ειδικό βάρος	Κανονική	$\mu=22$, COV=10%
α_1	Πλάτος πρανούς	Κανονική	$\mu=60$, COV=20%
α_2	Πλάτος καταστρώματος	Κανονική	$\mu=40$, COV=20%
α_3	Πλάτος πρανούς	Κανονική	$\mu=60$, COV=20%
α_4	Ύψος	Κανονική	$\mu=20$, COV=20%
PHA	Σεισμικός συντελεστής	Κανονική	$\mu=0,5$, COV=10%

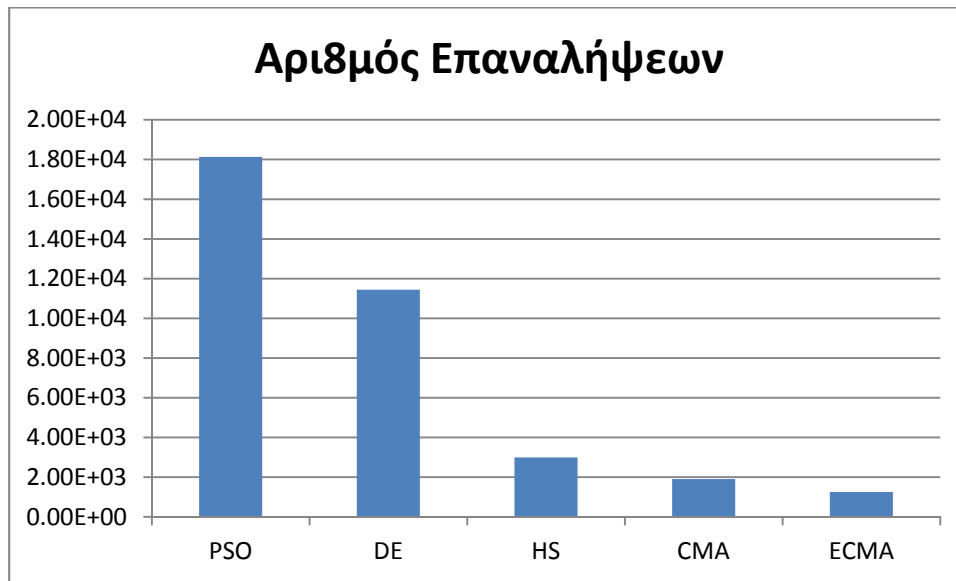
Η επίλυση του προβλήματος της ευστάθειας πρανούς έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα τα οποία συνοψίζονται στον πίνακα 4.4 και παρουσιάζονται γραφικά με τα σχήματα 4.5 και 4.6.

Πίνακας 4.4: Αποτελέσματα επίλυσης προβλήματος ευστάθειας πρανούς

Μέθοδος	Pf(%)	Αριθμός Επαναλήψεων
MCS	0,00	1,00E+06
PSO	6,69E-05	1,81E+04
DE	6,56E-05	1,14E+04
HS	6,62E-05	2,99E+03
CMA	7,49E-05	1,91E+03
ECMA	7,90E-05	1,26E+03



Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση πιθανότητας αστοχίας προβλήματος ευστάθειας πρανούς

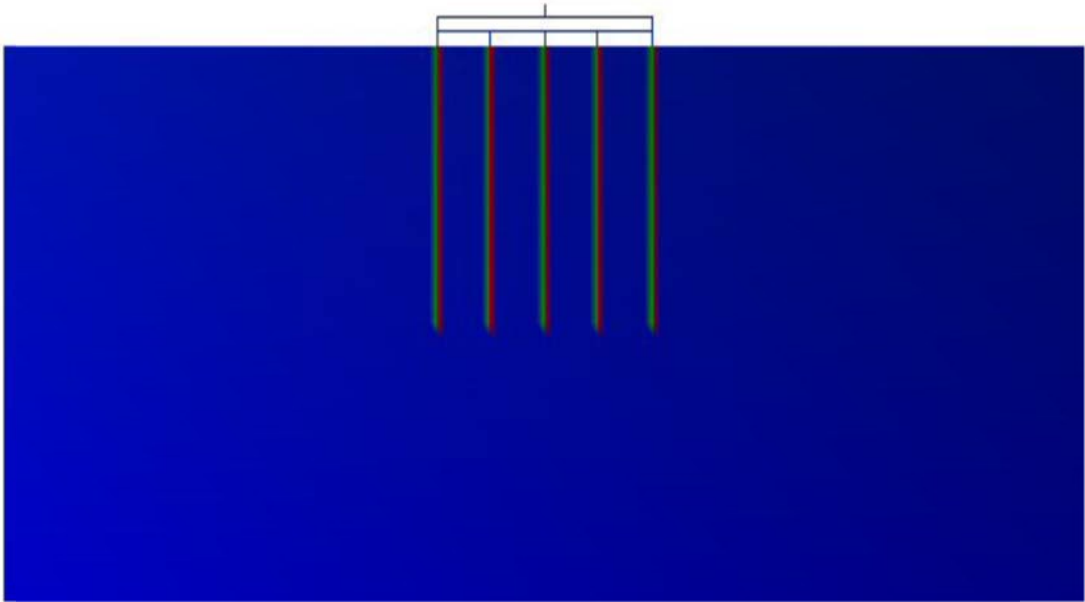


Σχήμα 4.6: Γραφική παράσταση αριθμού επαναλήψεων προβλήματος ευστάθειας πρηνούς

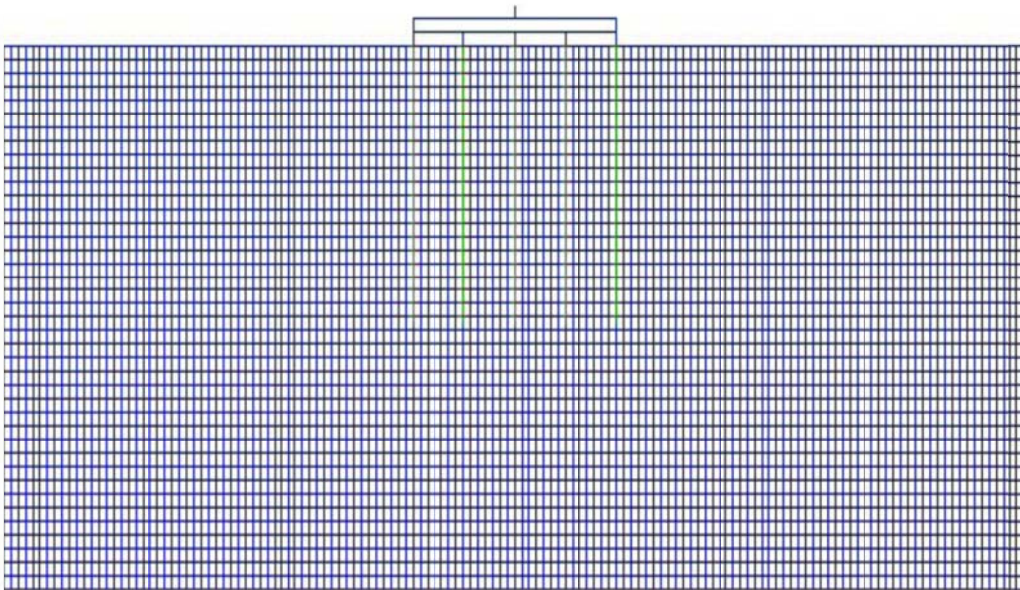
Κατά την επίλυση του προβλήματος αυτού, οι 1000,000 επαναλήψεις δεν επαρκούσαν για τη μέθοδο MCS και δεδομένης της πολύ μικρής τιμής της πιθανότητας αστοχίας απαιτούνταν αρκετές ακόμα. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης έδωσαν όπως περιμέναμε πολύ μικρές πιθανότητες αστοχίας της τάξεως του $7 \cdot 10^{-5}$. Οι PSO, DE και HS κατέληξαν σε πολύ κοντινές τιμές με τη μεταξύ τους απόκλιση να μην υπερβαίνει το 2% ενώ οι CMA και ECMA απέκλιναν από τις τρεις πρώτες κατά περίπου 10%. Ο αριθμός των επαναλήψεων προέκυψε και σε αυτό το πρόβλημα αρκετά μικρότερος από την MCS με τις ECMA και CMA να απαιτούν τις λιγότερες.

4.2.3: Μετατόπιση θεμελίωσης με πασσάλους

Όλα τα έργα του Πολιτικού Μηχανικού (κτίρια, γέφυρες, επιχώματα οδοποιίας, σήραγγες, τοίχοι αντιστήριξης, φράγματα κλπ) πρέπει να εδρασθούν στο έδαφος. Είναι προφανές ότι η ασφαλής θεμελίωση των έργων αυτών αποτελεί έναν από τους στόχους του σχεδιασμού τους. Μία από τις πιο συνήθεις μεθόδους θεμελίωσης είναι η θεμελίωση με πασσάλους. Οι πάσσαλοι είναι επιμήκη στοιχεία συνήθως από σκυρόδεμα ή χάλυβα που χρησιμοποιούνται για την μεταφορά των τάσεων της κατασκευής από τα ανώτερα και συνήθως πιο ασθενή στρώματα του εδάφους στα βαθύτερα και πιο ανθεκτικά στρώματα. Στο παράδειγμα αυτό εξετάστηκε θεμελίωση πέντε πασσάλων από σκυρόδεμα, διαμέτρου 1m και μήκους 18m ο καθένας (σχ.4.7). Το υλικό έδρασης θεωρήθηκε ότι είναι σφιγρή άργιλος (stiff clay), ενώ ως μέγιστη επιτρεπτή μετατόπιση ορίστηκε τα 2cm. Ο υπολογισμός της μετατόπισης έγινε με χρήση καννάβου πεπερασμένων στοιχείων στο πρόγραμμα OpenSees του πανεπιστημίου Berkeley.



Σχήμα 4.7: Σχηματική αναπαράσταση θεμελίωσης με πασσάλους



Σχήμα 4.8: Κάνναβος πεπερασμένων στοιχείων

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος και οι κατανομές τους:

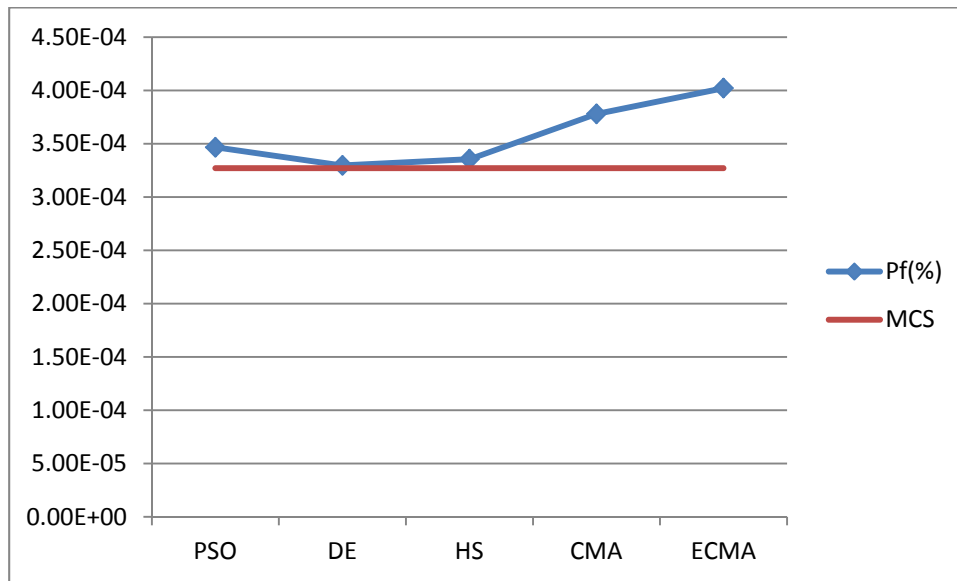
Πίνακας 4.5: Μεταβλητές του 3^{ου} προβλήματος και οι κατανομές τους

Μεταβλητή	Περιγραφή	Τύπος Κατανομής	Παράμετροι Κατανομής
rho	rho	Ομοιόμορφη	$\mu=1,8, COV=15\%$
RSM	Μέτρο διάτμησης	Ομοιόμορφη	$\mu=1,50E+05, COV=15\%$
RBM	Reference Bulk Modulus	Ομοιόμορφη	$\mu=7,50E+05, COV=15\%$
c	Συνοχή	Ομοιόμορφη	$\mu=75,00, COV=15\%$
PSS	Μέγιστη διατμητική αντοχή	Ομοιόμορφη	$\mu=0,10, COV=15\%$

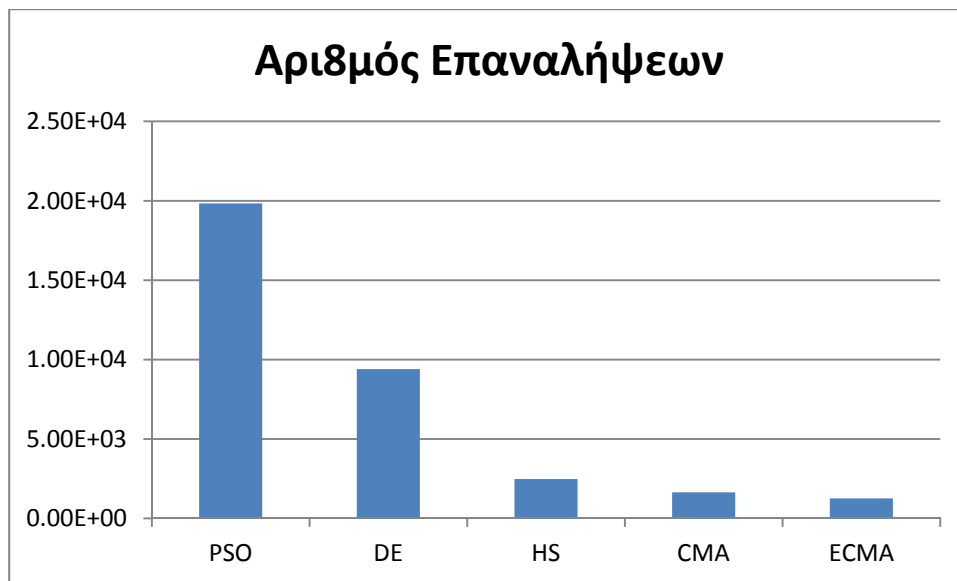
Η επίλυση του προβλήματος της μετατόπισης θεμελίωσης με πασσάλους έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα τα οποία συνοψίζονται στον πίνακα 4.6 και παρουσιάζονται γραφικά με τα σχήματα 4.9 και 4.10.

Πίνακας 4.6: Αποτελέσματα επίλυσης προβλήματος μετατόπισης θεμελίωσης με πασσάλους

Μέθοδος	Pf(%)	Αριθμός Επαναλήψεων
MCS	3,27E-04	1,00E+06
PSO	3,47E-04	1,98E+04
DE	3,30E-04	9,41E+03
HS	3,35E-04	2,49E+03
CMA	3,78E-04	1,64E+03
ECMA	4,02E-04	1,27E+03



Σχήμα 4.9: Γραφική παράσταση πιθανότητας αστοχίας προβλήματος θεμελίωσης με πασσάλους

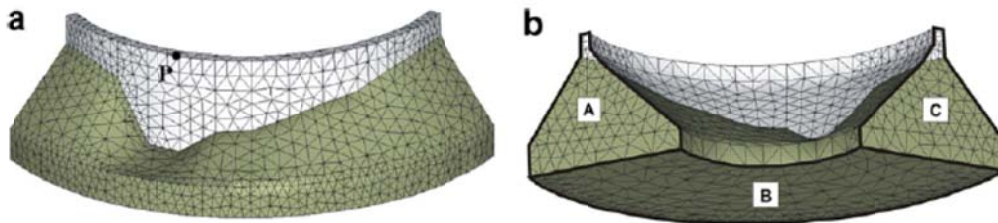


Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση αριθμού επαναλήψεων προβλήματος θεμελίωσης με πασσάλους

Σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος Monte Carlo έδωσε πιθανότητα αστοχίας $3,27 \cdot 10^{-4}$. Παρατηρούμε ότι, οι μέθοδοι DE και HS προσεγγίζουν ικανοποιητικά την MCS με σφάλμα μικρότερο του 2.5%. Η μεγαλύτερη απόκλιση παρουσιάζεται και πάλι από τη μέθοδο ECMA με σφάλμα λίγο πάνω από 20%. Ο αριθμός των επαναλήψεων διατηρήθηκε στα ίδια επίπεδα με τις δύο παραπάνω εφαρμογές, αρκετά μικρότερος από τις 1.000.000 της MCS.

4.2.4 Ευστάθεια μεγάλου φράγματος από σκυρόδεμα

Η τέταρτη εφαρμογή εξετάζει την πιθανότητα αστοχίας ενός μεγάλου τοξωτού φράγματος που βρίσκεται στη βόρειο Ιταλία (σχ.4.11). Το φράγμα έχει υψόμετρο κορυφής 830,5 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, πλάτος στην κορυφή 158,0 m και μέγιστο ύψος 34,0 m. Η ανάλυση θα γίνει θεωρώντας σταθερές τις διαστάσεις του φράγματος και χρησιμοποιώντας ως τυχαίες μεταβλητές τέσσερις μηχανικές ιδιότητες του σκυροδέματος. Με τη μέθοδο που αναπτύσσεται στο άρθρο “Vulnerability analysis of large concrete dams using the continuum strong discontinuity approach and neural networks” Παπαδρακάκης κ.α. (2006) υπολογίστηκε η πιθανότητα ο φορτικός συντελεστής να είναι μεγαλύτερος του 3, δηλαδή η υδροστατική πίεση αν είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από την αντοχή του φράγματος.



Σχήμα 4.11: Γεωμετρία φράγματος και κάρναβος πεπερασμένων στοιχείων α) ανάντη όψη β) κατόντη όψη

Οι μεταβλητές του προβλήματος μαζί με τις κατανομές τους παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

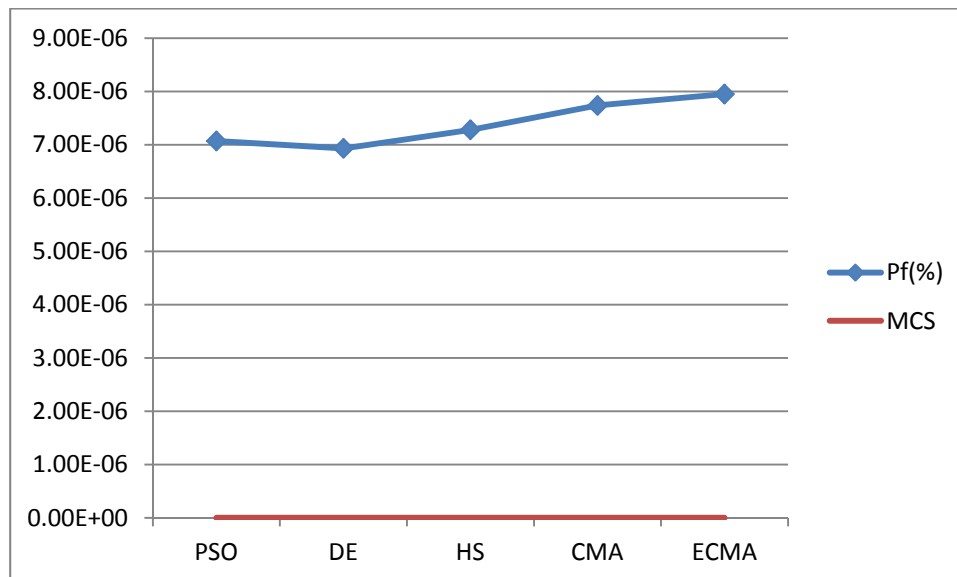
Πίνακας 4.7: Μεταβλητές του 4^{ου} προβλήματος και οι κατανομές τους

Μεταβλητή	Περιγραφή	Τύπος Κατανομής	Παράμετροι Κατανομής
E	Μέτρο ελαστικότητας	Gauss	$\mu=20000$, COV=876,8
ν	Λόγος Poisson	Gauss	$\mu=0,20$, COV=0,012
f_u	Εφελκυστική αντοχή	Gauss	$\mu=1,0$, COV=0,16
Q	Ενέργεια θραύσης	Gauss	$\mu=100$, COV=4,5

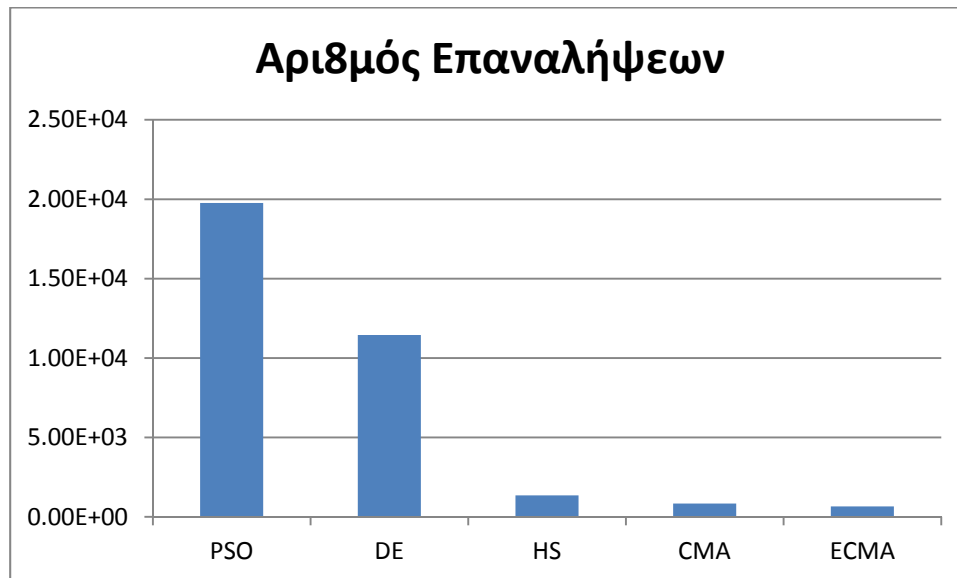
Η επίλυση του προβλήματος της ευστάθειας φράγματος έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα, τα οποία συνοψίζονται στον πίνακα 4.8 και παρουσιάζονται γραφικά με τα σχήματα 4.12 και 4.13.

Πίνακας 4.8: Αποτελέσματα επίλυσης προβλήματος ευστάθειας φράγματος

Μέθοδος	Pf(%)	Αριθμός Επαναλήψεων
MCS	0,00	1,00E+06
PSO	7,07E-06	1,98E+04
DE	6,93E-06	1,15E+04
HS	7,28E-06	1,35E+03
CMA	7,74E-06	8,37E+02
ECMA	7,95E-06	6,60E+02



Σχήμα 4.12: Γραφική παράσταση πιθανότητας αστοχίας προβλήματος ευστάθειας φράγματος



Σχήμα 4.13: Γραφική παράσταση αριθμού επαναλήψεων προβλήματος ευστάθειας φράγματος

Παρατηρούμε ότι και σε αυτό το πρόβλημα η πιθανότητα αστοχίας είναι πάρα πολύ μικρή και οι 1,000,000 δοκιμές δεν επαρκούν για τη μέθοδο MCS. Οι μέθοδοι PSO, DE και HS παρουσιάζουν παρεμφερή αποτελέσματα με μέγιστη απόκλιση μικρότερη από 5%. Οι μέθοδοι CMA και ECMA δίνουν μεγαλύτερες τιμές πιθανότητας αστοχίας και αποκλίνουν από τις άλλες τρεις κατά περίπου 10%.

4.3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

1. Cui, L., & Sheng, D. (2005). Genetic algorithms in probabilistic finite element analysis of geotechnical problems. *Computers and Geotechnics* .
2. Garavelas, A. (2007). *Efficient Computational Methods for Solving Seismic RBDO Problems*. Athens: NTUA.
3. Lagaros, N. D., & Karlaftis, M. G. *A critical assessment of metaheuristics for handling emergency infrastructure inspections*. Athens: NTUA.
4. Lagaros, N. D., tsobanakis, Y., Psarropoulos, P. N., & Georgopoulos, E. C. (2009). Computationally efficient seismic fragility analysis of geostuctures. *Computers and Structures* .
5. Letsios, C. (2007). *Optimum Design of Pile Foundations*. Athens: NTUA.
6. Nelder, A. C., & Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal* , 308-313.

7. Papadrakakis, M., Papadopoulos, V., Lagaros, N. D., Oliver, J., Huespe, A. E., & Sanchez, P. (2008). Vulnerability analysis of large concrete dams using the continuum strong discontinuity approach and neural networks. *Structural Safety* .
8. Parsopoulos, E. K., & Vrahatis, N. M. *Initializing the Particle Swarm Optimizer using the Nonlinear Simplex Method*. Patras: University of Patras.
9. Sen, G., & Akyol, E. (2009). *A genetic-algorithm approach for assesing the liquefaction potential of sandy soils*. Denizli, Turkey: Copernicus Publications.
10. Tsompanakis, Y., Lagaros, N. D., Psarropoulos, P. N., & Georgopoulos, E. C. (2010, February-April). Probabilistic seismic slope stability assesment of geostructures. *Structure and Infrastructure Engineering* .
11. Καββαδάς, Μ. (2005). *Στοιχεία Εδαφομηχανικής*. Αθήνα: Ε.Μ.Πολυτεχνείο.

5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά την επίλυση και των τεσσάρων προβλημάτων και την επεξεργασία και παρουσίαση των αποτελεσμάτων τους μπορούμε πλέον να εξάγουμε τα τελικά συμπεράσματα σχετικά με την αποτελεσματικότητα και την εγκυρότητα των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν. Για την καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει όλα τα αποτελέσματα των πέντε μεθόδων βελτιστοποίησης και της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo.

Πίνακας 5.1: Συνοπτικός πίνακας αποτελεσμάτων

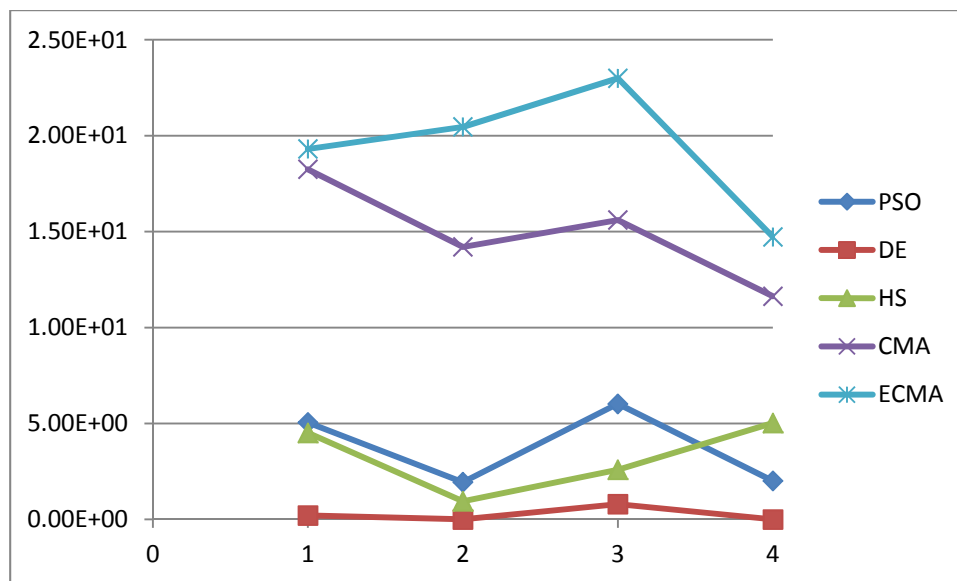
Πρόβλημα/Μεθοδος		MCS	PSO	DE	HS	CMA	ECMA
Πρόβλημα 1	Αριθμός επαναλ.	1,00E+06	1,73E+04	8,28E+03	1,09E+03	7,84E+02	6,18E+02
	Pf(%)	4,59E+01	4,82E+01	4,58E+01	4,80E+01	5,43E+01	5,48E+01
Πρόβλημα 2	Αριθμός επαναλ.	1,00E+06	1,81E+04	1,14E+04	2,99E+03	1,91E+03	1,26E+03
	Pf(%)	0,00	6,69E-05	6,56E-05	6,62E-05	7,49E-05	7,90E-05
Πρόβλημα 3	Αριθμός επαναλ.	1,00E+06	1,98E+04	9,41E+03	2,49E+03	1,64E+03	1,27E+03
	Pf(%)	3,27E-04	3,47E-04	3,30E-04	3,35E-04	3,78E-04	4,02E-04
Πρόβλημα 4	Αριθμός επαναλ.	1,00E+06	1,98E+04	1,15E+04	1,35E+03	8,37E+02	6,60E+02
	Pf(%)	0,00	7,07E-06	6,93E-06	7,28E-06	7,74E-06	7,95E-06

5.1 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Προκειμένου να γίνει σύγκριση της ακρίβειας των πέντε μεθόδων, στον παρακάτω πίνακα και στο διάγραμμα 5.1 παρουσιάζονται τα σφάλματά τους σε σχέση με τη μέθοδο MCS. Για τα δύο παραδείγματα όπου οι 1.000.000 δοκιμές δεν επαρκούσαν για να υπολογίσει τη πιθανότητα η MCS χρησιμοποιήθηκε στη θέση της η μέθοδος Differential Evolution, η οποία έδωσε τα καλύτερα αποτελέσματα στα υπόλοιπα παραδείγματα.

Πίνακας 5.2: Σφάλματα μεθόδων βελτιστοποίησης σε σχέση με την MCS (%)

Μέθοδος	Σφάλμα σε σχέση με την MCS (%)			
	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4
PSO	5,05	1,94	6,02	2,01
DE	0,21	0,00	0,80	0,00
HS	4,51	0,95	2,59	5,03
CMA	18,25	14,20	15,60	11,63
ECMA	19,31	20,46	22,99	14,72



Σχήμα 5.1: Σφάλματα μεθόδων βελτιστοποίησης σε σχέση με την MCS (%)

Τα αποτελέσματα δείχνουν ξεκάθαρα την υπεροχή της μεθόδου Differential evolution η οποία σε όλα τα προβλήματα παρουσιάζει τη μικρότερη απόκλιση, με το σφάλμα της να είναι παντού μικρότερο από 1%. Οι μέθοδοι Particle Swarm Optimization και Harmony Search κινούνται περίπου στα ίδια επίπεδα απόκλισης, με την PSO να είναι ελαφρώς ακριβέστερη στα πρώτα τρία προβλήματα και τη HS να υπερτερεί στην εφαρμογή της ευστάθειας φράγματος. Το ελάχιστο σφάλμα και των δύο παρατηρείται στο πρόβλημα της ευστάθειας πρανούς με 1,94% και 0,95% αντίστοιχα, ενώ τα

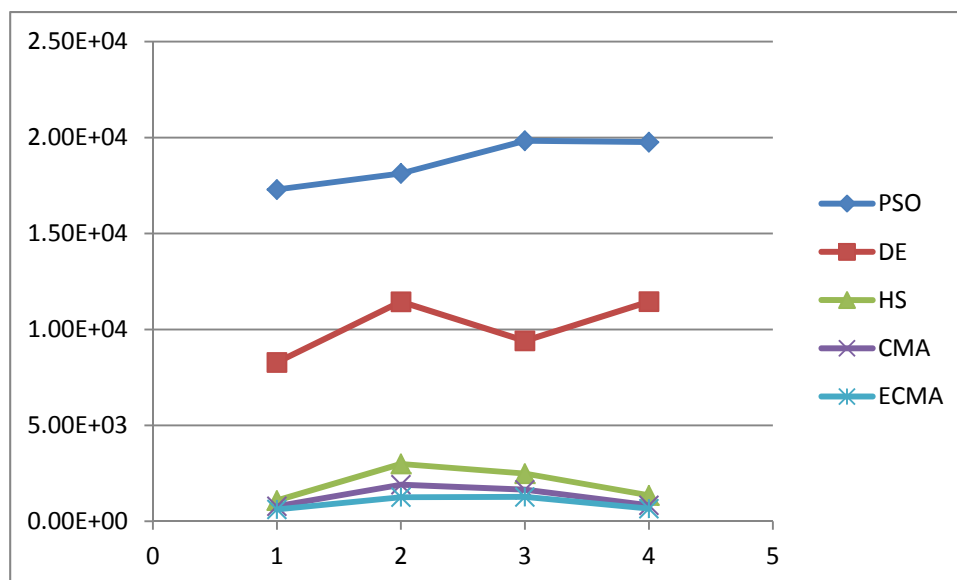
μέγιστα σφάλματά τους υπολογίζονται γύρω στο 5%. Τέλος, οι μέθοδοι CMA και ECMA αποκλίνουν αρκετά περισσότερο από τις υπόλοιπες μεθόδους με τα σφάλματά τους να είναι σταθερά πάνω από 10% και να ξεπερνούν και το 20% για κάποια από τα προβλήματα.

5.2 ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ

Εκτός από την ακρίβεια των μεθόδων, μία άλλη σημαντική παράμετρος που μας αφορά είναι ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για τη σύγκλιση τους. Ο αριθμός αυτός είναι που δείχνει την ταχύτητα και αποτελεσματικότητα της σύγκλισης και έχει άμεση εξάρτηση με το υπολογιστικό κόστος. Στον παρακάτω πίνακα και στο διάγραμμα 5.2 συνοψίζονται οι απαιτούμενες επαναλήψεις των πέντε μεθόδων βελτιστοποίησης για κάθε ένα από τα 4 προβλήματα που μελετήθηκαν.

Πίνακας 5.3: Απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων για σύγκλιση

Μέθοδος	Απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων για σύγκλιση			
	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4
PSO	1,73E+04	1,81E+04	1,98E+04	1,98E+04
DE	8,28E+03	1,14E+04	9,41E+03	1,15E+04
HS	1,09E+03	2,99E+03	2,49E+03	1,35E+03
CMA	7,84E+02	1,91E+03	1,64E+03	8,37E+02
ECMA	6,18E+02	1,26E+03	1,27E+03	6,60E+02



Σχήμα 5.2: Απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων για σύγκλιση

Όπως προαναφέρθηκε και στις αναλύσεις των τεσσάρων εφαρμογών, οι πέντε μέθοδοι βελτιστοποίησης απαιτούν αισθητά μικρότερο αριθμό επαναλήψεων απ' ό,τι η μέθοδος Monte Carlo. Πιο συγκεκριμένα, οι CMA και ECMA αν και αποδείχτηκαν λιγότερο ακριβείς, φαίνεται να συγκλίνουν ταχύτερα από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους. Στις εφαρμογές της ρευστοποίησης και της ευστάθειας φράγματος χρειάστηκαν λιγότερες από 1.000 επαναλήψεις για να καταλήξουν στο τελικό αποτέλεσμα, ενώ στα άλλα δυο προβλήματα, τα οποία ήταν αρκετά πιο σύνθετα και πάλι περιορίστηκαν σε κάτω από 2.000 επαναλήψεις. Σε παρόμοια επίπεδα κυμάνθηκε η μέθοδος HS με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων σχεδόν 3.000 για το πρόβλημα της ευστάθειας πρανούς. Η DE, η μέθοδος που έδωσε τα ακριβέστερα αποτελέσματα, απαίτησε περίπου 10.000 επαναλήψεις και στα τέσσερα προβλήματα με μέγιστο τις 11500 για την εφαρμογή του φράγματος και ελάχιστο τις 8.300 για το πρόβλημα της ρευστοποίησης. Τέλος, η μέθοδος PSO χρειάστηκε τις περισσότερες επαναλήψεις μέχρι να συγκλίνει με ελάχιστα λιγότερες από 20.000 και για τα τέσσερα προβλήματα.

5.3 ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εν κατακλείδι, η μελέτη των πέντε μετεωριστικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης έδειξε ότι μπορούν να προσφέρουν αξιόλογα αποτελέσματα στις γεωτεχνικές εφαρμογές. Αποδείχτηκαν αξιόπιστοι και για τα πιο απλά προβλήματα όπως η ρευστοποίηση του εδάφους και για τα αρκετά πιο σύνθετα, όπως η μελέτη της θεμελίωσης πασσάλων με χρήση καννάβου πεπερασμένων στοιχείων. Όπως ήταν αναμενόμενο απαίτησαν πολύ λιγότερες επαναλήψεις απ' ό,τι η μέθοδος Monte Carlo αποκτώντας έτσι ένα σημαντικό προβάδισμα στον τομέα του υπολογιστικού κόστους. Εκτιμάται ότι η ευρύτερη εφαρμογή τους στα πρακτικά και θεωρητικά γεωτεχνικά προβλήματα μπορεί να επιφέρει ευεργετικά αποτελέσματα και να αποβεί ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του Πολιτικού Μηχανικού.