# *Πληθικά Αναλλοίωτα του Συνεχούς*

Κατερίνα Μάρκου

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής: Αρβανιτάκης Αλέξανδρος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Ακαδημαϊκό Έτος: 2022-2023

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον κύριο Αλέξανδρο Αρβανιτάκη για την πρόταση του θέματος και την βοήθεια του καθ΄ όλη την διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

**Περίληψη**

Το αντικείμενο που μελετά η παρούσα εργασία είναι οι πληθικοί αριθμοί, οι οποίοι είναι αυστηρά μεγαλύτεροι από το $\aleph_0$, της πληθικότητας του συνόλου των φυσικών αριθμών, και μικρότεροι ή ίσοι από το $2^{\aleph_0}$, της πληθικότητας του συνεχούς (δηλαδή των πραγματικών αριθμών). Σχετικά με το όνομα του αντικειμένου, η ορολογία που θα χρησιμοποιούμε είναι πληθικά «αναλλοίωτα» του συνεχούς. Εναλλακτικά, χρησιμοποιείται και ο όρος «χαρακτηριστικά» αντί για αναλλοίωτα. Αρχικά, θα δούμε στην εισαγωγή μία σύντομη ιστορική αναδρομή της θεωρίας συνόλων και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα προαπαιτούμενα για το βασικό μας θέμα. Τέλος, θα ορίσουμε τα πληθικά αναλλοίωτα του συνεχούς και θα επικεντρωθούμε στην μελέτη των ιδιοτήτων τους και των σχέσεων μεταξύ τους.

## Abstract

The subject matter of the present thesis is the study of cardinal numbers, that are strictly greater than $\aleph_0$, the cardinality of natural numbers, and less than or equal to $2^{\aleph_0}$, the cardinality of the continuum (i.e.the real numbers). On the name of the subject, the terminology we are going to use is cardinal "invariants" of the continuum. An alternative name that is commonly used is "characteristics" instead of invariants. At first, we are going to see in the introduction, a short historical review of the set theory and then we are going to study the preliminaries we need for our basic subject. Finally, we will define the cardinal invariants of the continuum and we will focus our study on their properties and the relations between them.

# Περιεχόμενα

# 1. Εισαγωγή

Όπως υποδηλώνεται και από τον τίτλο, η παρούσα εργασία ασχολείται με άπειρους πληθικούς αριθμούς. Ο κλάδος των μαθηματικών που μελετά πληθικούς αριθμούς είναι η θεωρία συνόλων, η οποία έχει παίξει κρίσιμο ρόλο στην κατανόηση αφηρημένων εννοιών, όπως αυτή του μαθηματικού απείρου, αλλά και των ιδιοτήτων τους.

## Ιστορικό Υπόβαθρο

Η ανάπτυξη της συνολοθεωρίας ξεκινά τον 19ο αιώνα, όταν ο μαθηματικός Georg Cantor εισάγει την έννοια των διαφορετικών μεγεθών ή αλλιώς διαφορετικών πληθικοτήτων άπειρων συνόλων. Πιο συγκεκριμένα, μία από της σημαντικότερες συνεισφορές του Cantor στη θεωρία συνόλων, είναι η απόδειξη του, ότι η πληθικότητα των φυσικών αριθμών ($\mathbb{N}$) είναι αυστηρά μικρότερη από αυτή των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$), δείχνοντας ότι δεν υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ φυσικών και πραγματικών. Τα συμπεράσματά του σχετικά με τα διαφορετικά μεγέθη απείρου, τον οδήγησαν στην κατασκευή μίας ακολουθίας υπερπεπερασμένων διατακτικών αριθμών, με τέτοιο τρόπο που δημιουργείται μία άπειρη ιεραρχία από αυστηρά αυξανόμενα μεγέθη απείρου. Η δουλειά του πάνω στις πληθικότητες τον οδήγησε σε πολύ σημαντικά αποτελέσματα, ένα εκ των οποίων είναι και το θεώρημα του Cantor.

Η συστηματική δουλειά πολλών μαθηματικών στις αρχές του 20ου αιώνα οδήγησαν στην αξιωματικοποιήση της συνολοθεωρίας, δηλαδή στον εξοπλισμό της με μία αξιωματική βάση, όπως αυτή που εισήγαγε ο Zermelo. Ο στόχος του Zermelo ήταν να αντικαταστήσει τις άμεσες διαισθήσεις του Cantor για τα σύνολα με ένα σύνολο αξιωμάτων, τα οποία να μπορούν να αποβάλλουν όλες τις αντιφάσεις. Έτσι δημιουργήθηκε η αξιωματική συνολοθεωρία που συμβολίζεται με το ακρωνύμιο ZFC, παίρνοντας τα αρχικά από τους Zermelo - Fraenkel και από το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice). Η ZFC θεωρία αν και δεν έχει παραμείνει αυτούσια στο πέρασμα των χρόνων, είναι μέχρι και σήμερα μία ευρέως αποδεκτή θεωρία, όχι μόνο για την συνολοθεωρία, αλλά γενικά για τα μαθηματικά, αφού η πλειονότητα των μαθηματικών θεωριών μπορεί να ερμηνευτεί μέσω της συνολοθεωρίας. Αυτό σημαίνει, προφανώς, ότι μαθηματικές δομές, από διάφορους κλάδους των μαθηματικών μπορούν να αναπαρασταθούν σαν σύνολα και άρα όλα τα μαθηματικά θεωρήματα, τα οποία είναι σχετικά με αυτές τις δομές, μπορούν να αποδειχτούν με χρήση των αξιωμάτων της ZFC θεωρίας. Παρά την επικράτηση της, έγινε αντιληπτό από τα μέσα του 20ου αιώνα, ότι δεν μπορεί να λύσει όλα τα προβλήματα που μπορούν να προκύψουν στους διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Τα ερωτήματα για τα οποία δεν μπορούν να αποφανθούν τα αξιώματα της ZFC συνολοθεωρίας τα λέμε ανεξάρτητα. Για τα ανεξάρτητα ερωτήματα, η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει ούτε την ύπαρξη κάποιας απάντησης, αλλά ούτε και την άρνησή της.

Εκτός από τις μεγάλες του ανακαλύψεις, ο Cantor συνάντησε και αρκετά προβλήματα, ίσως με πιο σημαντικό να είναι αυτό της Υπόθεσης του Συνεχούς, ένα από τα πιο γνωστά ανεξάρτητα ερωτήματα στη θεωρία συνόλων. Σύμφωνα με την Υπόθεση Συνεχούς (CH) δεν υπάρχει σύνολο του οποίου η πληθικότητα να είναι αυστηρά ανάμεσα σε αυτή του συνόλου των φυσικών και του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Με άλλα λόγια, η πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών ($2^{\aleph_0}$) είναι η ελάχιστη μη-αριθμίσιμη πληθικότητα, δηλαδή $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Ο Cantor διατύπωσε την υπόθεση το 1878, πιστεύοντας αρχικά ότι είναι αληθής. Το 1882, δεχόμενος ότι ο πληθικός αριθμός του $\aleph_1$ είναι ο αμέσως μεγαλύτερος πληθικός αριθμός του $\aleph_0$, ισχυρίστηκε πως το $\aleph_1$ και το $c$ μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Παρά τις πολλές προσπάθειές του, όμως, δεν κατάφερε την απόδειξη αλλά ούτε και την άρνηση της υπόθεσης. Η αδυναμία απόδειξης της CH έγινε αντιληπτή μέσα από το έργο του Gödel και του Cohen, αφού ο πρώτος έδειξε ότι το ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την άρνηση της CH και ο δεύτερος απέδειξε την αδυναμία της ZFC να αποδείξει την CH. Έτσι, παρέμεινε ένα ανοιχτό άλυτο πρόβλημα.

Η Υπόθεση Συνεχούς κέρδισε μεγάλη προσοχή στις αρχές του 20ου αιώνα, όταν ο David Hilbert, ένας από τους μεγαλύτερους υπέρμαχους της αξιωματικής θεμελίωσης, την συμπεριέλαβε ως πρώτο πρόβλημα, το 1900, στην γνωστή του λίστα με τα 23 άλυτα μαθηματικά προβλήματα. Αν και ο ίδιος δεν ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την θεωρία συνόλων, πίστευε ότι η ενασχόληση με τα προβλήματά της είχε μεγάλη σημασία, έχοντας σαν αποτέλεσμα να βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση, λόγω της επιρροής του στον μαθηματικό κόσμο. Για σχεδόν τέσσερις δεκαετίες, πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα, αλλά καμία σημαντική πρόοδος δεν είχε επιτευχθεί, μέχρι το 1938. Την χρονιά εκείνη, ο Kurt Gödel έδωσε μία μερική λύση στο πρόβλημα, αποδεικνύοντας ότι δεδομένου ενός οποιουδήποτε μοντέλου της συνολοθεωρίας, μπορούμε να ορίσουμε μία υποδομή του, η οποία μαζί με τα αξιώματα ZFC θα ικανοποιεί και την CH. Αυτό σημαίνει ότι, η Υπόθεση Συνεχούς δεν μπορεί να διαψευτεί από τα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Το αποτέλεσμα αυτό μαζι με τη δουλειά του Cohen παρακάτω οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η CH είναι ανεξάρτητη του ZFC, δηλαδή ότι τα αξιώματα ZFC δεν μπορούν να αποφανθούν για την αλήθεια ή την μη-αλήθεια της.

Σχεδόν 25 χρόνια μετά την δουλειά του Gödel, το 1963, ο Paul Cohen απέδειξε ότι η ZFC είναι συμβατή και με την άρνηση του αξιώματος της επιλογής. Η ανεξαρτησία της CH από το ZFC αλλά και από το ZF έχει πολλές εφαρμογές σχετικές με το ερώτημα της πληθικότητας του συνεχούς, δηλαδή του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

## Πληθικά Αναλλοίωτα του Συνεχούς

Ένας από τους βασικούς στόχους της συνολοθεωρίας είναι η κατανόηση του μεγέθους και της δομής των άπειρων συνόλων. Τα πληθικά αναλλοιώτα του συνεχούς παρέχουν μία ποσοτική προσέγγιση προς αυτή την κατεύθυνση. Ουσιαστικά, είναι κάποιοι συγκεκριμένοι πληθάριθμοι, οι οποίοι περιγράφουν ιδιότητες της γραμμής των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$ και μας δίνουν πληροφορίες σχετικές με σύνολα όπως το $P(\omega)$ (το δυναμοσύνολο του συνόλου $\omega$ των φυσικών αριθμών), το $[\omega]^\omega$ (το σύνολο των άπειρων υποσυνόλων του $\omega$) και το ${}^\omega\omega$ (το σύνολο των συναρτήσεων από το $\omega$ στο $\omega$). Τα περισσότερα αναλλοίωτα βρίσκονται ανάμεσα στο $\aleph_1$ και τον πληθάριθμο του συνεχούς, $c = 2^{\aleph_0}$, ενώ αυτό θα ισχύει για όλα όσα θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία. Προφανώς, αν η Υπόθεση Συνεχούς ισχύει, τότε κάθε τέτοιος πληθάριθμος θα ισούται με το $\aleph_1$. Συνεπώς, η θεωρία των πληθικών αναλλοίωτων αφορά την περίπτωση στην οποία η CH αποτυγχάνει.

Η θεωρία αυτή αποτελείται κυριώς από δύο είδη αποτελεσμάτων. Αρχικά, περιλαμβάνει ισότητες και ανισότητες μεταξύ των πληθικών αναλλοίωτων, συγκρίνοντας έτσι τα μεγέθη τους, ενώ περιέχει επίσης ανεξάρτητα αποτελέσματα που δείχνουν ότι άλλες ισότητες ή ανισότητες δεν μπορούν να αποδειχτούν στην συνολοθεωρία ZFC. Οι αποδείξεις των ανισοτήτων αυτών παρέχουν επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την CH.

Στο **Κεφάλαιο 2** βρίσκονται τα απαραίτητα προαπαιτούμενα της θεωρίας συνόλων, από την γλώσσα και τους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε, τα αξιώματα ZFC, μέχρι γενικές πληροφορίες και αποτελέσματα για διατακτικούς αριθμούς, αριθμήσιμους και μη-αριθμήσιμους πληθαρίθμους.

Στο **Κεφάλαιο 3** θα παρουσιαστεί το βασικό θέμα της εργασίας που αφορά τα πληθικά αναλλοίωτα του συνεχούς. Ο αριθμός των αναλλοίωτων που θα ορίσουμε είναι οκτώ. Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό του καθενός ξεχωριστά και ξεκινήσουμε την σύγκριση των μεγεθών τους, θα χρειαστεί να μελετήσουμε και ορισμένες άλλες βασικές έννοιες. Στην πρώτη ενότητα, θα ασχοληθούμε με τις έννοιες του ιδεώδους και του φίλτρου, οι οποίες θα χρησιμεύσουν στον προσδιορισμό των πληθαρίθμων $add, cov, non$ που θα δούμε στην δεύτερη ενότητα. Ακόμη, θα ορίσουμε τις Dominating (Κυριαρχούσες) και τις Un-bounded (Μη-φραγμένες) Οικογένειες συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν οι πληθάρθμοι $\mathscr{d}, \mathscr{b}$. Στην τρίτη ενότητα θα εστιάσουμε την προσοχή μας στις Σχεδόν Ξένες Οικογένειες συνόλων, τις Μέγιστες Σχεδόν Ξένες Οικογένειες (Maximal Almost Disjoint-MAD) και το πληθικό αναλλοίωτο $\mathscr{a}$. Στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε τον πληθάριθμο $\mathscr{p}$, για τον οποίο θα χρειαστούμε τις Ιδιότητες της Πεπερασμένης και της Άπειρης Τομής (FIP, SFIP) καθώς και την έννοια της Ψεύδο-τομής (Pseudo-intersection). Τελος, θα ασχοληθούμε με τα υπερφίλτρα και τις ιδιότητες τους, ώστε να μπορέσουμε να ορίσουμε τον χαρακτήρα του υπερφίλτρου $\chi(U)$, που θα είναι και το τελευταίο αναλλοίωτο από τα οκτώ.

# 2. Επισκόπηση της Συνολοθεωρίας

Πριν προχωρήσουμε στο βασικό θέμα της εργασίας αυτής, θα δώσουμε σε αυτό το κεφάλαιο μερικές απαραίτητες γνώσεις της θεωρίας συνόλων, όπως ορισμούς, θεωρήματα, γνωστά αποτελέσματα, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν, άμεσα ή έμμεσα, στο επόμενο κεφάλαιο.

## 2.1 Γενικές Πληροφορίες για τα Σύνολα και Γλώσσα

Στην ενότητα αυτή, θα δούμε μερικές από τις βασικές ιδέες για σύνολα, κυρίως για να δώσουμε μία εξήγηση της γλώσσας και των συμβολισμών που θα χρησιμοποιηθούν σε όλη την έκταση της εργασίας. Είναι γνωστό ότι οι άνθρωποι πέρα από τις φυσικές γλώσσες που έχουν δημιουργήσει για να επικοινωνούν μεταξύ τους, έχουν σχεδιάσει και γλώσσες με πολύ αυστηρότερους κανόνες. Οι γλώσσες αυτές εξυπηρετούν διάφορους σκοπούς, όπως η αλληλεπίδραση με ηλεκτρονικούς υπολογιστές μέσω γλωσσών προγραμματισμού. Ένας άλλος σκοπός είναι η ανάπτυξη μίας αξιωματικής θεωρίας, μία διαδικασία που έχει οδήγησει στην δημιουργία της λογικής πρώτου βαθμού, σύμβολα της οποίας χρησιμουποιούμε και στην εργασία.

Τα βασικά λογικά σύμβολα που χρησιμοποιούμε είναι:

- το σύμβολο της ισότητας $=$,
- λογικοί σύνδεσμοι, όπως σύζευξη (και) $\wedge$, διάζευξη (ή) $\vee$, άρνηση $\neg$, συνεπαγωγή $\rightarrow$, ισοδυναμία $\leftrightarrow$,
- τα σύμβολα ποσοδεικτών $\forall$ (για κάθε), $\exists$ (υπάρχει) και $\exists!$ (υπάρχει μοναδικό),
- παρανθέσεις, αγκύλες και άλλα σημεία στίξης,
- και μεταβλητές, που συχνά συμβολίζονται με πεζά γράμματα, όπως $x, y, z$.

Ακόμη αν θεωρήσουμε μία σειρά αντικειμένων, έστω $A$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $lh(A)$ για να αναφερθούμε στο μήκος της σειράς και τον συμβολισμό $\frown$ (επέκταση) αν θέλουμε να επεκτείνουμε την σειρά κατά ένα αντικείμενο (π.χ. $A^\frown 0$).

Όπως είπαμε προηγουμένως, η συστηματική μελέτη των συνόλων ξεκίνησε τον 19ο αιώνα απο τον Georg Cantor, παρόλο που είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, όπως η γεωμετρία. Η έννοια του συνόλου είναι θεμελιακή, όπως και του σημείου, και δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες. Μία περιγραφή της έννοιας που δόθηκε από τον Cantor είναι η εξής:

**Ορισμός 2.1.1.** *Με τη λέξη* ***σύνολο*** *εννοούμε μία οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.*

Ο ορισμός αυτός οδηγεί σε αντιφάσεις και έχει αντικατασταθεί από τα αξιώματα της $ZFC$ θεωρίας, τα οποία θα δούμε στην επόμενη ενότητα. Παρολαυτά, συνεπάγεται δύο βασικές ιδιότητες των συνόλων:

1. Κάθε σύνολο Α έχει στοχεία ή μέλη, δηλαδή:

$$x \in A \iff \text{το αντικείμενο } x \text{ είναι στοιχείο του Α}$$

2. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του, δηλαδή αν έχουμε δύο σύνολα $A, B$, τότε:

$$A = B \iff (\forall x)\,[x \in A \iff x \in B]$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ιδιότητα της έκτασης.

**Ορισμός 2.1.2.** ***Κενό Σύνολο*** *(Empty Set): Ένα ιδιότυπο σύνολο είναι το κενό $\varnothing$, το οποίο δεν έχει κανένα μέλος. Η ιδιότητα της έκτασης συνεπάγεται ότι μπορεί να υπάρχει μόνο ένα κενό σύνολο.*

Έστω δύο σύνολα $A, B$:

- Λέμε ότι το $A$ είναι υποσύνολο του $B$ και συμβολίζουμε με $A \subseteq B$, αν ισχύει :

$$A \subseteq B \iff (\forall x)\,[x \in A \Longrightarrow x \in B]$$

- Λέμε ότι το $A$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $B$ και συμβολίζουμε με $A \subsetneq B$, αν ισχύει :

$$A \subsetneq B \iff [A \subseteq B \wedge A \neq B]$$

- Από την ιδιότητα της έκτασης έπεται ότι $\forall A, B$:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Οι συμβολισμοι που θα χρησιμοποιούμε κυρίως για να ορίζουμε συγκεκριμένα σύνολα είναι :

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

όπου το $A$ είναι το πεπερασμένο σύνολο που έχει μέλη ακριβώς τα στοιχεία $a_1, a_2, ..., a_n$. Επίσης, αν $P$ είναι μία συνθήκη που ορίζει κάποια ιδιότητα των στοιχείων του συνόλου $A$ τότε μπορούμε να γράφουμε το $A$ ως εξής :

$$A = \{x | P(x)\}$$

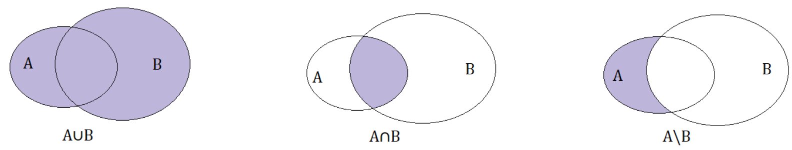
**Ορισμός 2.1.3.** *Για όλα τα σύνολα $A, B$ ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις:*

- ***Ένωση*** *των $A, B$:*

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

- ***Τομή*** *των $A, B$:*

$$A \cap B = \{x \in A | x \in B\}$$




Σχήμα 1: Πράξεις Boole

- ***Διαφορά*** *των* $A, B$:

$$A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$$

Οι πράξεις αυτές ονομάζονται πράξεις Boole και απεικονίζονται σχηματικά με τα διαγράμματα Venn (Σχήμα 1), όπου τα σύνολα αναπαριστούνται από εμβαδά στο επίπεδο.

**Ορισμός 2.1.4.** *Δύο σύνολα είναι* ***ξένα****, άν η τομή τους είναι κενή, δηλαδή:*

$$A \text{ ξένο με το } B \iff A \cap B = \varnothing$$

**Ορισμός 2.1.5.** ***Δυναμοσύνολο*** *(Powerset): Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου* $A$ *είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του* $A$ *και συμβολίζεται με* $P(A)$:

$$P(A) = \{X | X: \text{ σύνολο και } X \subseteq A\}$$

Με τον συμβολισμό

$$f : A \to B$$

εννοούμε ότι η $f$ είναι η συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε μέλος $x$ του συνόλου $A$ του πεδίου ορισμού της $f$, ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του πεδίου τιμών της $f$.
Δύο συναρτήσεις είναι ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και αντιστοιχούν την ίδια τιμή σε κάθε μέλος του κοινού τους πεδίου ορισμού, δηλαδή:

$$f = g \iff (\forall x \in A)\,[f(x) = g(x)]$$

Σχετικά με τις συναρτήσεις, θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τους παρακάτω συμβολισμούς.

**Ορισμός 2.1.6.** *Θεωρούμε μία συνάρτηση* $f$ *και ορίζουμε τις παρακάτω έννοιες.*

1. ***Μονομορφισμός*** *( ένα προς ένα ή 1-1 ): Η* $f$ *είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν ισχύει:*

$$f : X \rightarrowtail Y \iff (\forall x, x' \in X)\,[f(x) = f(x') \to x = x']$$

2. ***Επιμορφισμός*** *( επί (onto) ): Η* $f$ *είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν ισχύει:*

$$f : X \twoheadrightarrow Y \iff (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\,[f(x) = y]$$

3. ***Αντιστοιχία***: *Η $f$ είναι αντιστοιχία αν και μόνο αν ισχύει:*

$$(\forall y \in Y)(\exists! x \in X)\left[f(x) = y\right]$$

**Ορισμός 2.1.7.** ***Εικόνα:*** *Για κάθε $f : A \to B$ και $X \subseteq A$, το σύνολο:*

$$f\left[X\right] = \{f(x) | x \in X\}$$

*ονομάζεται εικόνα του $X$ από την $f$.*

**Ορισμός 2.1.8.** ***Χαρακτηριστική Συνάρτηση:*** *Έστω σύνολο $A$ και $X \subseteq A$. Ονομάζουμε χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $X$, την συνάρτηση:*

$$\chi_X = \begin{cases} 1, x \in A \cap X \\ 0, x \in A \setminus X \end{cases}$$

## 2.2 Τα Αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων

Οι διαισθητικοί ορισμοί του Cantor για τα σύνολα αντικαταστήθηκαν από τα αξιώματα του Zermelo, δηλαδή ορισμένες υποθέσεις για τα σύνολα, τις οποίες δεχόμαστε, επειδή είναι απαραίτητες για τις αποδείξεις βασικών αποτελεσμάτων. Έτσι δημιουργήθηκε η αξιωματική συνολοθεωρία με τα παρακάτω αξιώματα, εκ των οποίων δεν έχει αφαιρεθεί κανένα μέχρι σήμερα. Τα αξιώματα ZFC είναι τα εξής:

I **Αξίωμα της Έκτασης** (Axiom of Extensionality): Αν δύο σύνολα $x, y$ έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε είναι ίσα.

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y \to x = y)$$

II **Αξίωμα της Θεμελίωσης** (Axiom of Foundation): Για κάθε μη-κενό σύνολο $x$, υπάρχει στοιχείο $y$ στο $x$, τέτοιο ώστε να μην έχει άλλα κοινά στοιχεία με το σύνολο $x$.

$$\forall x\, [x \neq \varnothing] \to \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to \neg(z \in y)))$$

III **Αξίωμα του Κενού Συνόλου και του Ζεύγους** (Axiom of Empty set and Pairing): (α) Υπάρχει ένα «συμβατικό» σύνολο, που το ονομάζουμε κενό και το συμβολίζουμε με $\varnothing$, το οποίο δεν έχει κανένα μέλος.
(β) Για όλα τα σύνολα $x, y$, υπάρχει ένα σύνολο που περιέχει σαν στοιχεία τα $x, y$ και το συμβολίζουμε με $\{x, y\}$ .

$$\forall x, y\, [\exists z(x \in z \wedge y \in z)]$$

IV **Αξίωμα της Εξειδίκευσης ή Διαχωρισμού** (Axiom of Seperation): Για κάθε σύνολο $x$ και κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη $P$, υπάρχει ένα σύνολο $y$, που ικανοποιεί την ισοδυναμία:

$$z \in y \iff z \in x \wedge P(z)$$

V **Αξίωμα της Ένωσης** (Axiom of Union): Για κάθε σύνολο $x$ υπάρχει ένα σύνολο $y$, το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία των στοιχείων του $x$, δηλαδή:

$$\forall x \exists y\, [z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w)]$$

VI **Αξίωμα της Αντικατάστασης** (Axiom of Replacement): Για κάθε σύνολο $x$ και για κάθε οριστικό τελεστή $\phi$, υπάρχει ένα σύνολο $y$ έτσι ώστε $z \in y$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα στοιχείο $w \in x$ και το $z$ είναι η εικόνα του $w$ υπο την $\phi$, δηλαδή:

$$\forall x \exists y\, [z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z = \phi(w))]$$

VII **Αξίωμα του Απείρου** (Axiom of Infinity): Υπάρχει κάποιο σύνολο $x$ που περιέχει το κενό σύνολο και το μονοσύνολο κάθε μέλους του, δηλαδή:

$$\exists x\, [\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \to \{y\} \in x)]$$

VIII **Αξίωμα του Δυναμόσυνόλου** (Axiom of Powerset): Για κάθε σύνολο $x$ υπάρχει ένα σύνολο $y$, το οποίο περιέχει ακριβώς όλα τα υποσύνολα του $x$, και συμβολίζεται με $P(x)$:

$$\forall x \exists y(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

IX **Αξίωμα της Επιλογής** (Axiom of Choice (AC)): Για κάθε διμελή σχέση $P$ σε σύνολα $X, Y$ ισχύει:

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)P(x,y) \rightarrow (\exists f : X \rightarrow Y)(\forall x \in X)P(x, f(x))$$

Τα αξιώματα αυτά επιβεβαιώνουν την ύπαρξη των συνόλων και επιτρέπουν την δημιουργία νέων από τα ήδη υπάρχοντα. Επίσης, η αξιωματική συνολοθεωρία βοηθάει στη μελέτη διάφορων μαθηματικών εννοιών, από βασικές πράξεις μεταξύ συνόλων μέχρι πιο προχωρημένα θέματα, όπως οι διατακτικοί και πληθικοί αριθμοί.
Με το $ZF$ αναφερόμαστε στα 8 πρώτα αξιώματα, ενώ αν θέλουμε να αναφερθούμε στα βασικά αξιώματα των $Zermelo - Fraenkel$ με την προσθήκη του αξιώματος της επιλογής χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $ZFC$.

## 2.3 Σχέσεις και Συναρτήσεις

Οι περισσότερες έννοιες και ορισμοί που θα αναφέρουμε στην ενότητα αυτή είναι σχετικά γνωστοί από τα μαθηματικά. Σκοπός της ενότητας είναι να εξειδικεύσουμε τον συμβολισμό μας και να γίνει σαφές ότι οι παρακάτω ορισμοί μπορούν να αναπτυχθούν και μέσω της αξιωματικής συνολοθεωρίας.

**Ορισμός 2.3.1.** ***Διατεταγμένο Ζεύγος*** *(Ordered Pair): Διαισθητικά, το ζεύγος $(x, y)$ έχει πρώτο μέλος το $x$ και δεύτερο μέλος το $y$ και διαφέρει από το μη διατεταγμένο ζεύγος (π.χ. $\{0, 1\} = \{1, 0\}$).*

*Άρα, διατεταγμένο ζεύγος είναι ένα ζεύγος που πληρεί την εξής ιδιότητα:*

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \land y = y'$$

Θεωρούμε τώρα την έννοια της σχέσης (relation) που διαποτίζει τα μαθηματικά. Διαισθητικά, διμελής σχέση $R$ ανάμεσα σε αντικείμενα $x \in A$ και $y \in B$ είναι μία συνθήκη που ικανοποίειται από μερικά $x, y$ και δεν ικανοποιείται από άλλα. Ένας τρόπος να απεικονίσουμε μία διμελή σχέση στη συνολοθεωρία είναι να την ταυτίσουμε με την έκτασή της, δηλαδή με το σύνολο των ζευγών που την ικανοποιούν.

**Ορισμός 2.3.2.** *Η $R$ είναι μία διμελής σχέση αν και μόνο αν είναι ένα σύνολο διατεταμένων ζεύγων, δηλαδή:*

$$\forall u \in R \; \exists x, y \, [u = (x, y)]$$

**Σημείωση:** Χρησιμοποιούμε ισοδύναμα τους συμβολισμούς:

$$R(x, y) \iff xRy \iff (x, y) \in R$$

Κάποια προφανή παραδείγματα σχέσεων είναι η ισότητα, η σχέση του «ανήκειν» και η σχέση του υποσυνόλου, όλες περιορισμένες σε κάποιο σύνολο $A$.

$$\begin{aligned} x =_A y &\iff x \in A \land y \in A \land x = y \\ x \in_A Y &\iff x \in A \land Y \subseteq A \land x \in Y \\ X \subseteq_A Y &\iff X \subseteq Y \subseteq A \end{aligned}$$

**Ιδιότητες των σχέσεων:** Θα δούμε εδώ μερικές ιδιότητες των σχέσεων, που χρησιμοποιούνται συχνα, μόνες τους ή σε διάφορους συνδυασμούς.

1. Η $R$ είναι αυτοπαθής (reflexive) στο σύνολο $A$ αν και μόνο αν $(\forall x \in A)\, [xRx]$.
2. Η $R$ είναι μεταβατική (transitive) στο σύνολο $A$ αν και μόνο αν $(\forall x, y, z \in A)\, [xRy \land yRz \to xRz]$.
3. Η $R$ είναι συμετρική (symmetric) στο σύνολο $A$ αν και μόνο αν $(\forall x, y \in A)\, [xRy \leftrightarrow yRx]$.
4. Η $R$ είναι σχέση ισοδυναμίας (equivalence relation) στο $A$ αν είναι αυτοπαθής, μεταβατική και συμμετρική. (Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για την σχέση ισοδυναμίας είναι $\approx, \simeq$.)

**Ορισμός 2.3.3.** ***Συνάρτηση*** *(function): Η $R$ λέμε ότι είναι μία συνάρτηση (ή απεικόνιση ή μετασχηματισμός) αν και μόνο αν είναι μία σχέση μεταξύ των $x \in A$ και $y \in B$, τέτοια ώστε για κάθε $x$, να υπάρχει το πολύ ένα $y$, ώστε $(x,y) \in R$. Αν υπάρχει $y$ τέτοιο ώστε να ισχύει $xRy$ τότε το $R(x)$ δηλώνει το μοναδικό $y$.*

**Ορισμός 2.3.4.** ***Καρτεσιανό Γινόμενο*** *(Cartesian Product): Ο ορισμός των διατεταγμένων ζεύγων μας επιτρέπει να ορίσουμε, για κάθε σύνολο $A, B$, το Καρτεσιανό Γινόμενο ως το παρακάτω σύνολο:*

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

**Ορισμός 2.3.5.** ***Περιορισμός*** *(Restriction): Για $X \subseteq A$, ο περιορισμός $R \restriction X$ μίας συνάρτησης $R : A \to B$ είναι η συνάρτηση που υπολείπεται αν αφαιρέσουμε από την $R$ τα ζεύγη με πρώτο μέλος έξω από το $X$, δηλαδή:*

$$R \restriction X = \{(x,y) \in R | x \in X\}$$

Το $R \restriction X$ είναι ένα ορισμένο υποσύνολο της $R$, άρα υπάρχει λόγω συμπληρωματικότητας. Ο περιορισμός $\restriction$ χρησιμοποιείται κυριώς για συναρτήσεις.

**Ορισμός 2.3.6.** *Ονομάζουμε* ***αντίστροφη συνάρτηση*** *μίας συνάρτησης $R$ και συμβολίζουμε με $R^{-1}$, το σύνολο:*

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$$

Οι έννοιες του μονομορφισμού και του επιμορφισμού που είδαμε στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου, μπορούν να εφαρμοστούν και στην συνολοθεωρία.

**Ορισμός 2.3.7.** *Έστω δύο σύνολα $A, B$. Ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις μεταξύ των δύο συνόλων.*

1. $A \preccurlyeq B \iff \exists$ *συνάρτηση $f$ τέτοια ώστε* $f : A \xrightarrow{1-1} B$
2. $A \approx B \iff \exists$ *συνάρτηση $f$ τέτοια ώστε* $f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$

Η πρώτη σχέση $A \preccurlyeq B$ μας δείχνει ότι υπάρχει συνάρτηση 1-1, που ενσωματώνει το $A$ στο $B$, που σημαίνει ότι το μέγεθος του $A$ θα είναι μικρότερο ή ίσο του $B$. Αντιθέτως, η δεύτερη σχέση $A \approx B$ ουσιαστικά σημαίνει ότι τα σύνολα $A, B$ έχουν το ίδιο μέγεθος, με την έννοια ότι υπάρχει συνάρτηση, που μπορεί να τα τοποθετήσει σε μία 1-1 αντιστοιχία.

**Ορισμός 2.3.8.** *Έστω ένα σύνολο $X$ και μία σχέση $R$.*

1. ***Ελαχιστικό στοιχείο:*** *Το στοιχείο $y \in X$ είναι $R-$ελαχιστικό στο σύνολο $X$ αν και μόνο αν ισχύει:*

$$\neg \exists z \neq y (z \in X \wedge zRy)$$

2. ***Μεγιστικό στοιχείο:*** *Το στοιχείο $y \in X$ είναι $R-$μεγιστικό στο σύνολο $X$ αν και μόνο αν ισχύει:*

$$\neg \exists z \neq y (z \in X \wedge yRz)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα, όσα έχουμε ορίσει στην ενότητα αυτή για τις σχέσεις, μπορούμε να δούμε τι ονομάζουμε μερική και καλή διάταξη.

**Ορισμός 2.3.9.** ***Μερική Διάταξη*** *(partial ordering): Μία διμελής σχέση $R$ σε ένα σύνολο $A$ λέμε ότι είναι μερική διάταξη αν είναι αυτοπαθής, μεταβατική και αντισυμμετρική. Δηλαδή, θα πρέπει για όλα τα $x, y, z \in A$ να ισχύει:*

1. *$xRx$ (αυτοπάθεια)*
2. *$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (μεταβατικότητα)*
3. *$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (αντισυμμετρικότητα)*

**Ορισμός 2.3.10.** ***Ολική Διάταξη*** *(total ordering): Η $R$ είναι ολική διάταξη αν είναι μερική διάταξη και αν επιπλέον όλα τα στοιχεία του $A$ είναι συγκρίσιμα ανά δύο ως προς την $R$, δηλαδή:*

$$(\forall x, y \in A)\, [xRy \vee yRx]$$

**Ορισμός 2.3.11.** ***Καλή Διάταξη*** *(well ordering): Η διμελής σχέση $R$ στο $A$ είναι καλή διάταξη του συνόλου $A$, αν είναι ολική διάταξη του συνόλου αυτού και επιπλέον κάθε μη-κενό υποσύνολο του $A$ έχει ένα $R-$ελαχιστικό στοιχείο. Συμβολικά:*

$$(\forall X \subseteq A)\, [X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)\, [xRy]]$$

## 2.4 Διατακτικοί Αριθμοί

Μπορούμε να φανταστούμε τους αριθμούς με δύο διαφορετικούς τρόπους: σαν διατακτικούς αριθμούς, στους οποίους η διάταξη παίζει ρόλο (π.χ. πρώτο, δεύτερο, τρίτο κτλ), και σαν πληθικούς αριθμούς ή πληθάριθμους, οι οποίοι αναφέρονται στο μέγεθος (αριθμό στοιχείων του συνόλου), ενώ σε αυτούς η διάταξη δεν παίζει κανένα ρόλο. Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την θεωρία Διατακτικών Αριθμών του von Neumann, στην οποία βρίσκει εφαρμογή το Αξίωμα της Αντικατάστασης. Πριν δώσουμε τον ορισμό των διατακτικών αριθμών, θα δούμε μερίκες βασικές έννοιες που θα χρειαστούμε.

**Ορισμός 2.4.1.** ***Μερικά Διατεταγμένος Χώρος*** *(Partially Ordered Set - Poset): Μερικά Διατεταγμένος Χώρος είναι ένα δομημένο σύνολο με μία διμελή σχέση $R$, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες της μερικής διάταξης (είναι δηλαδή αυτοπαθής, μεταβατική και αντισυμμετρική).*

**Ορισμός 2.4.2.** *Έστω $P$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος, $X \subseteq P$ και $M$ ένα στοιχείο του $P$.*

1. *Το $M$ είναι **άνω φράγμα** (upper bound) του $X$, αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο απο κάθε στοιχείο του $X$, δηλαδή:*
$$(\forall x \in X)\,[x \leq M]$$
2. *Το $M$ είναι **μέγιστο** (maximum) του $X$, αν είναι άνω φράγμα και στοιχείο του $X$, δηλαδή:*
$$(\forall x \in X)\,[x \leq M] \wedge M \in X$$
3. *Το $M$ είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** (supremum) του $X$, αν είναι άνω φράγμα και μικρότερο ή ίσο απο κάθε άνω φράγμα του $X$, δηλαδή:*
$$(\forall x \in X)\,[x \leq M] \wedge (\forall M')\,[(\forall x \in X)\,[x \leq M'] \Rightarrow M \leq M']$$

**Ορισμός 2.4.3.** ***Αλυσίδα*** *(Chain): Έστω ένα σύνολο $A$ και $X \subseteq A$. Το υποσύνολο $X$ του $A$ είναι αλυσίδα αν τα μέλη του $X$ είναι ανά δύο συγκρίσιμα, δηλαδή:*
$$(\forall x, y \in X)\,[xRy \vee yRx]$$

**Λήμμα 2.4.1.** ***Λήμμα του Zorn*** *: Αν $P$ ένα μη-κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο, τέτοιο ώστε κάθε αλυσίδα στο $P$ να έχει άνω φράγμα, τότε το $P$ έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

**Απόδειξη:**

- Θα ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας μία αλυσίδα στον μερικά διατεταγμένο χώρο $P$, δηλαδή ένα υποσύνολο του $P$ του οποίου τα στοιχεία είναι ανά δύο συγκρίσιμα. Θέλουμε η αλυσίδα να οδηγεί σε μεγιστικό στοιχείο του $P$.
  Έστω:
$$\begin{aligned} a_a &= \text{ ένα στοιχείο του } P \text{ τέτοιο ώστε } a_a > a_k \text{ για κάθε } a > k \text{ και} \\ C_a &= \{a_k : k < a\} \end{aligned}$$

- Έστω ότι κάθε $a > 0$ είναι ένας οριακός διατακτικός. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο $C_a$ θα είναι μία αλυσίδα στο $P$, αφού αν κάθε $a \in P$ είναι οριακός, τότε για κάθε $a_x, a_y \in C_a$ θα ισχύει $a_x < a_a$ και $a_y < a_a$, που σημαίνει ότι τα $a_x, a_y$ είναι συγκρίσιμα.
- Έστω $\theta$ ο οριακός διατακτικός που αντιστοιχεί στην πληθικότητα του $C_a$.
Λόγω της κατασκευής του $C_a$ ξέρουμε ότι για κάθε $a < \theta$ θα υπάρχει $a_a \in C_a$.
- Έστω ότι υπάρχει στοιχείο $a_{\theta+1}$ τέτοιο ώστε:

$$a_{\theta+1} > a_\theta$$

Αυτό σημαίνει ότι ο διατακτικός που αντιστοιχεί στην πληθικότητα του $C_a$ είναι τουλάχιστον $\theta + 1$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $\theta$. Άρα, δεν υπάρχει στοιχείο $a_{\theta+1}$ στο $P$, τέτοιο ώστε $a_{\theta+1} > a_\theta$. Επομένως, το $a_\theta$ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο του $P$.

□

**Ορισμός 2.4.4.** ***Μεταβατικό Σύνολο*** *(transitive set): Ένα σύνολο $M$ είναι μεταβατικό αν $\cup M \subseteq M$ ή ισοδύναμα:*

$$\forall x \in M \implies x \subseteq M$$

Προφανώς, ένα μεταβατικό σύνολο είναι ένα σύνολο, στο οποίο κάθε στοιχείο είναι επίσης ένα υποσύνολο του συνόλου. Μερικά παραδείγματα είναι:

1. Το κενό σύνολο $\varnothing$, το οποίο είναι μεταβατικό, αφού δεν έχει κανένα στοιχείο, που σημαίνει ότι θα πληρεί την συνθήκη κάθε στοιχείο του να είναι υποσύνολο του κενού συνόλου.
2. Το σύνολο $\{0, 1, 2\}$, του οποίου προφανώς όλα τα στοιχεία είναι υποσύνολα του σύνολου, άρα ικανοποιείται η συνθήκη.
3. Το σύνολο $\{0, 1, \{1\}\}$ θα είναι επίσης μεταβατικό. Τα στοιχεία $0, 1$ είναι προφανές ότι είναι υποσύνολα του συνόλου, ενώ το στοιχείο $\{1\}$ θα είναι επίσης υποσύνολο, αφού περιέχει το στοιχείο 1, το οποίο είναι επίσης στοιχείο του συνόλου $\{0, 1, \{1\}\}$.

Θα δούμε ένα αντιπαράδειγμα για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια του μεταβατικού συνόλου:

Έστω το σύνολο $A = \{0, 1, \{2\}\}$. Όπως έχουμε πει για να είναι μεταβατικό το $A$ θα πρέπει κάθε στοιχείο του να είναι επίσης ένα υποσύνολο του $A$. Όμως, στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι ενώ τα στοιχεία $0, 1$ είναι προφανή υποσύνολα του $A$, το στοιχείο $\{2\}$ δεν είναι υποσύνολα. Αυτό ισχύει γιατι το σύνολο $\{2\}$ περιέχει το στοιχείο 2, το οποίο δεν αποτελεί στοιχείο του συνόλου $A = \{0, 1, \{2\}\}$. Άρα, το $A$ δεν είναι μεταβατικό.

**Ορισμός 2.4.5.** ***Επόμενος*** *(successor): Ο επόμενος ή διάδοχος ενός μερικά διατεταγμένου χώρου $P$ συμβολίζεται με $succ(P)$ και κατασκευάζεται προσθέτοντας ένα καινούριο σημείο πάνω απ΄ όλα τα σημεία του $P$.*

Τώρα, με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τους διατακτικούς του von Neumann.

**Ορισμός 2.4.6. *Διατακτικοί Αριθμοί:*** *Το $A$ είναι ένας διατακτικός αριθμός αν και μόνο αν είναι ένα μεταβατικό σύνολο, το οποίο ικανοποίει τις συνθήκες της καλής διάταξης για την σχέση του ανήκειν ($\in$).*

Με βάση τον παραπάνω ορισμό για τους διατακτικούς του von Neumann, το Λήμμα του Zorn και τον ορισμό (2.3.11) για την καλή διάταξη, οι συνθήκες που θα πρέπει να ικανόποιεί ένα σύνολο $A$ για να είναι διατακτικός αριθμός είναι:

1. $x \notin x$
2. $x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z$
3. $(x \in y \vee y = x) \wedge (y \in x \vee x = y) \Rightarrow x = y$
4. $(\forall x, y \in A)\,[x \in y \vee y \in x \vee x = y]$
5. $(\forall X \subseteq A)\,[X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)\,[x \in y] \vee [x = y]]$
6. $(\forall x \in A)\,[x \subseteq A]$

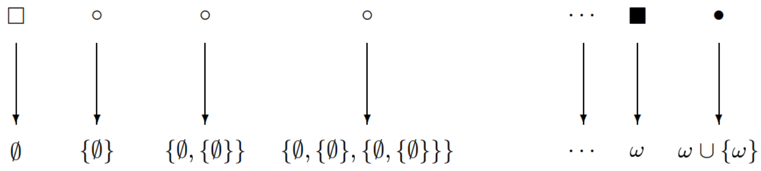
Συνήθως, την συλλογή των διατακτικών αριθμών την συμβολίζουμε με $ON$, οπότε αν θέλουμε να πούμε ότι ο $a$ είναι διατακτικός αριθμός μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικά τον συμβολισμό $a \in ON$.
Η κατακευή των διατακτικών von Neumann γίνεται ως εξής:

- Το κενό σύνολο, που το συμβολίζουμε με $\varnothing$, αναπαριστά τον διατακτικό αριθμό 0 και είναι ο ελάχιστος διατακτικός.
- Για κάθε διατακτικό αριθμό $a$, το $a+1$, που ορίζεται ως το σύνολο $a \cup \{a\}$, είναι ο **επόμενος διατακτικός** του $a$ (successor ordinal).
- Αν ο $a$ δεν είναι επόμενος κανενός διατακτικού, τότε ονομάζεται **οριακός διατακτικός** (limit ordinal) και ορίζεται ως η ένωση όλων των προηγούμενων διατακτικών. Συγκρκριμένα,

$$a = sup\,\{b|b < a\} = \bigcup a$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω βήματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία σειρά από διατακτικούς von Neumann ως εξής:

$$\begin{aligned}
&0 = \varnothing \\
&1 = \{\varnothing\} \\
&2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
&... \\
&\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, ...\} = \{0, 1, 2, ...\} \\
&\omega + 1 = \{0, 1, 2, ..., \omega\} \\
&\text{κ.ο.κ.}
\end{aligned}$$



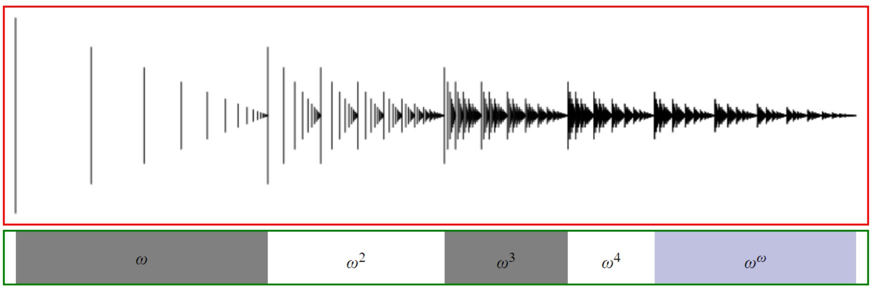

Σχήμα 2: Αναπαράσταση των διατακτικών από τον 0 εώς τον $\omega + 1$

**Ορισμός 2.4.7.** *Λαμβάνοντας υπόψη το Αξίωμα του Απείρου, ορίζουμε τον διατακτικό αριθμό $\omega$ ως το σύνολο που αναπαριστά τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή:*

$$\omega = \{n | n \text{ ένας φυσικός αριθμός } \}$$

Ουσιαστικά, το $\omega$ αναπαριστά το σύνολο των φυσικών αριθμών με την διάταξή τους. Παρατηρώντας την κατασκευή, ο $\omega$ φαίνεται να είναι ο πρώτος οριακός διατακτικός, αλλά και ο μικρότερος άπειρος διατακτικός. Παίρνοντας την ένωση προηγούμενων διατακτικών, ο $\omega$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αρχικό σημείο για την κατασκευή όλο και μεγαλύτερων διατακτικών. Για παράδειγμα, ο επόμενος διατακτικός του $\omega$ είναι ο $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$. Συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή, παίρνουμε $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... , $\omega + \omega = 2\omega$, ... , $3\omega$, ... , $\omega \times \omega = \omega^2$, συνεχίζοντας έχουμε $\omega^3$, $\omega^\omega$ κ.ο.κ.

Όλη αυτή η διαδικασία για την παραγωγή μεγάλων διατακτικών ξεκινώντας από το $\omega$, μπορεί να γίνει λόγω του Αξιώματος της Αντικατάστασης, σύμφωνα με το οποίο, για κάθε σύνολο $x$ και για κάθε στοιχείο $w \in x$ και για κάθε οριστικό τελεστή $T$, υπάρχει μοναδικό σύνολο $y$,τέτοιο ώστε $\forall z, z \in y \exists w \in xz = T(w)$. Στην περίπτωση της κατασκευής διατακτικών, το Αξίωμα της Αντικατάστασης, μας επιτρέπει να ορίσουμε την πράξη της ένωσης των διατακτικών.




Σχήμα 3: Γραφική αναπαράσταση του $\omega^\omega$

**Ορισμός 2.4.8.** *Ένα σύνολο $A$ είναι **πεπερασμένο** (finite) αν και μόνο αν $A \preccurlyeq n$, για κάποιο φυσικό αριθμό $n$. Ένα σύνολο είναι **άπειρο** (infinite) αν δεν είναι πεπερασμένο.*

Προφανώς, το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι πεπερασμένο, αφού

$$\varnothing = \{i \in \mathbb{N} | i < 0\}$$

**Ορισμός 2.4.9.** *Ένα σύνολο $A$ είναι* ***αριθμήσιμο ή απαριθμητό*** *(countable) αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, διαφορετικα είναι* ***μη-αριθμήσιμο ή αναπαρίθμητο*** *(uncountable).*

## 2.5 Πληθικότητες

Η ενότητα αυτή αναπτύσσεται στην $ZF^-$ θεωρία, όπου υποθέτουμε όλα τα αξιώματα της συνολοθεωρίας εκτός από το Αξίωμα της Θεμελίωσης και της Επιλογής.
Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και τα αποτελέσματα που είδαμε στην ενότητα (2.4) για τους διατακτικούς αριθμούς, μπορούμε να μετακινήσουμε το ενδιαφέρον μας στους πληθικούς αριθμούς. Θα ξεκινήσουμε με τον παρακάτω ορισμό, στον οποίο χρησιμοποιούμε την έννοια του διατακτικού.

**Ορισμός 2.5.1.** ***Πληθάριθμος*** *(Cardinal Number): Ένας διατακτικός αριθμός $\alpha$ λέγεται πληθάριθμος αν για κάθε διατακτικό $\beta < \alpha$, δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση (αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία) από το $\beta$ στο $\alpha$.*

$$(\forall \beta < \alpha) \nexists f \ \mu\epsilon \ f : \beta \xrightarrow[onto]{1-1} a$$

Για κάθε σύνολο $A$, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $|A|$ για να αναφερθούμε στον πληθάριθμο του $A$, δηλαδή στον ελάχιστο διατακτικό $\kappa$, για τον οποίο υπάρχει μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\kappa$ στο $A$.

**Ορισμός 2.5.2.** *Δύο σύνολα $A, B$ λέμε ότι είναι ισοπληθικά, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $|A| = |B|$, αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το $A$ στο $B$, δηλαδη:*

$$f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$$

Χωρίς το Αξιώμα του Δυναμοσυνόλου δεν μπορούμε να παράξουμε καμία πληθικότητα που να είναι μεγαλύτερη του διατακτικού $\omega$, τον οποίο σαν πληθάριθμο θα τον συμβολίζουμε χρησιμοποιώντας το γράμμα «άλεφ» ($\aleph$) με δείκτη 0, δηλαδή $\aleph_0$. Ακόμη, χωρίς το Αξίωμα της Επιλογής, δεν μπορούμε να ορίσουμε το μέγεθος $|A|$ ενός συνόλου $A$ ως έναν πληθάριθμο von Neumann. Παρολαυτά, μπορούμε να αναπτύξουμε μερικά βασικά αποτελέσματα σχετικά με τις πληθικότητες, συμπεριλαμβανομένου ιδιότητες, τις οποίες οι μη-αριθμήσιμοι πληθάριθμοι θα πρέπει να πληρούν αν υπάρχουν.

**Ορισμός 2.5.3.** ***Πληθική Αριθμητική:*** *Ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της δύναμης μεταξύ πληθαρίθμων, έστω $\kappa$ και $\lambda$ δύο ξένων συνόλων $A$ και $B$ αντίστοιχα:*

1. $\kappa + \lambda = |A \cup B|$
2. $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$, *όπου* $\kappa \times \lambda = \{(x, y) | x \in \kappa, y \in \lambda\}$
3. $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$, *όπου* ${}^\lambda\kappa = \{f | f : \kappa \to \lambda\}$

Μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει από τον ορισμό του πληθαρίθμου (2.5.1) και της ισοπληθικότητας των συνόλων (2.5.2) ότι χρησιμοποιούμε τις έννοιες της μονοσήμαντης και αμφιμοσήμαντης απεικόνισης για να συγκρίνουμε τα μεγέθη των σύνολων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Θεώρημα Schröder-Bernstein.

**Θεώρημα 2.5.1.** *(Schröder-Bernstein): Για κάθε σύνολο $A, B$,*

$$\alpha\nu \ |A| \leq |B| \ \kappa\alpha\iota \ |B| \leq |A| \ \tau\acute{o}\tau\epsilon \ |A| = |B|$$

**Απόδειξη:** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $A$ στο $B$.

- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μονομορφισμοί

$$f : A \rightarrowtail B \text{ και } g : B \rightarrowtail A$$

- Ορίζουμε αναδρομικά τα σύνολα $A_n$ και $B_n$ ως εξής:

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & B_0 &= B, \\ A_{n+1} &= gf[A_n], & B_{n+1} &= fg[B_n], \end{aligned}$$

  όπου $fg[X] = \{f(g(x))|x \in X\}$ και ανάλογα για τη συνάρτηση $gf$.

- Με επαγωγή στο $n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A_n &\supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1} \\ B_n &\supseteq f[A_n] \supseteq B_{n+1} \end{aligned}$$

  και έτσι προκύπτουν οι αλυσίδες συνόλων:

$$\begin{aligned} A_0 &\supseteq g[B_0] \supseteq A_1 \supseteq g[B_1] \supseteq A_2..., \\ B_0 &\supseteq f[A_0] \supseteq B_1 \supseteq f[A_1] \supseteq B_2... \end{aligned}$$

- Ορίζουμε, επίσης, τις τομές

$$A^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \ B^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$$

- Για την $B^*$ θα ισχύει:

$$B^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n] \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{n+1} = B^*$$

- Επειδή, η $f$ είναι μονομορφισμός θα έχουμε:

$$f[A^*] = f[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n] = B^*$$

  Συνεπώς, η $f$ είναι αντιστοιχία του $A^*$ με το $B^*$.

- Τώρα, για τα σύνολα $A, B$ θα ισχύει επίσης:

$$\begin{aligned} A &= A^* \cap (A_0 \setminus g[B_0]) \cap (g[B_0] \setminus A_1) \cap (A_1 \setminus g[B_1])... \\ B &= B^* \cap (B_0 \setminus f[A_0]) \cap (f[A_0] \setminus B_1) \cap (B_1 \setminus f[A_1])... \end{aligned}$$

  Παρατηρούμε ότι τα σύνολα στις ενώσεις αυτές είναι μεταξύ τους ξένα, δηλαδή κανένα σύνολο δεν έχει κοινά στοιχεία με κάποιο άλλο.

- Επίσης, αφού η $f$ είναι 1-1 θα ισχύει:

$$f[A_n \setminus g[B_n]] = f[A_n] \setminus fg[B_n] \Rightarrow$$
$$f[A_n \setminus g[B_n]] = f[A_n] \setminus B_{n+1}$$

αφού $fg[B_n] = B_{n+1}$. Αντίστοιχα, αφού και η $g$ είναι 1-1 θα ισχύει:

$$g[B_n \setminus f[A_n]] = g[B_n] \setminus A_{n+1}$$

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, προκύπτει μία 1-1 και επί συνάρτηση $h$ από το $A$ στο $B$, τέτοια ώστε :

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ αν } x \in A^* \vee (\exists n)[x \in A_n \setminus g[B_n]], \\ g^{-1}(x), \text{ αν } x \notin A^* \wedge (\exists n)[x \in [B_n] \setminus A_{n+1}] \end{cases}$$

□

Για το επόμενο θεώρημα θα υποθέσουμε ότι για κάθε σύνολο $A$, το δυναμοσύνολό του $P(A)$ υπάρχει.

**Θεώρημα 2.5.2.** *(Cantor): Για κάθε σύνολο $A$ ισχύει ότι είναι μικρότερο σε πληθικότητα από το δυναμοσύνολό του, δηλαδή:*

$$|A| < |P(A)|$$

*Με άλλα λόγια δεν υπάρχει συνάρτηση επί από το $A$ στο $P(A)$.*

**Απόδειξη:** Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω ότι υπάρχει μία συνάρτηση 1-1 και επί από το $A$ στο $P(A)$, δηλαδή έστω :

$$f : A \twoheadrightarrow P(A)$$

Τότε, προφάνως, για κάθε $a \in A$, θα ισχύει :

$$f(a) \subseteq A$$

Ορίζουμε το σύνολο $D = \{a \in A | a \notin f(a)\}$, το οποίο προφανώς είναι υποσύνολο του $A$.
Αφού $D \subseteq A$ και η $f$ είναι επί, θα υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε :

$$f(a_0) = D \tag{2.1}$$

Άρα, εξ' ορισμού:

$$a_0 \notin f(a_0) \iff a_0 \in D \iff a_0 \in f(a_0) \text{ άτοπο}$$

Επομένως, δεν μπορεί να υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f$ από το $A$ στο $P(A)$, που σημαίνει ότι ισχύει :

$$|A| < |P(A)|$$

□

Με βάση το θεώρημα του Cantor, αν πάρουμε σαν $A$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, εύκολα προκύπτει ότι, για $A = \mathbb{N}$ :

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < ...$$

Με τον τρόπο αυτό βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε όλο και μεγαλύτερες τάξεις απείρου, τις όποιες θα δούμε αναλυτικότερα στην επόμενη ενότητα.

## 2.6 Μη - Αριθμήσιμες Πληθικότητες

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιούμε το αξίωμα του Δυναμοσυνόλου για να παράγουμε μη-αριθμήσιμους πληθαρίθμους. Το παρακάτω πόρισμα είναι μία σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος του Cantor που είδαμε στην ενότητα (2.5).

**Πόρισμα 2.6.1.** *Για κάθε σύνολο $A$ με πληθάριθμο $\kappa$ ισχύει ότι $\kappa < 2^{\kappa}$.*

**Απόδειξη:** Κάθε υποσύνολο $X \subseteq A$ αντιπροσωπεύεται από την χαρακτηριστική του συνάρτηση $\chi_X : A \to \{0,1\}$,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, x \in A \cap X, \\ 0, x \in A \setminus X \end{cases} \qquad \forall x \in A$$

Μπορούμε να ανακτήσουμε κάθε $X$ από την $\chi_X$ ως εξής:

$$X = \{x \in A | \chi_X(x) = 1\}$$

Με βάση τον ορισμό του δυναμοσυνόλου, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\chi_X$ είναι αντιστοιχία του δυναμοσυνόλου $P(A)$ με το σύνολο $(A \to \{0,1\})$, που σημαίνει ότι θα ισχύει:

$$|(A \to \{0,1\})| = |P(A)| \tag{2.2}$$

Μπορούμε να συμβολίσουμε το σύνολο των συναρτήσεων από το $A$ στο $2 = \{0,1\}$ με $2^A$,

$$2^A = (A \to \{0,1\}) \tag{2.3}$$

Από τις σχέσεις (2.4), (2.5) προκύπτει:

$$|P(A)| = |2^A|$$

και από το θεώρημα του Cantor:

$$|A| < |2^A| = 2^|A| \Rightarrow$$
$$\kappa < 2^{\kappa}$$

□

**Ορισμός 2.6.1.** *Για κάθε πληθάριθμο $\kappa$, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\kappa^+$ για να αναφερθούμε στον ελάχιστο πληθάριθμο μεγαλύτερο του $\kappa$, δηλαδή:*

$$\kappa < \kappa^+$$

**Ορισμός 2.6.2.** *Ορίζουμε αναδρομικά τους άπειρους πληθαρίθμους ως εξής:*

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$
- $\aleph_{a+1} = \aleph_a^+$
- $\aleph_\gamma = \bigcup\limits_{a<\gamma} \aleph_a = sup\{\aleph_a : a < \gamma\}$, *όπου $\gamma$ είναι ένας οριακός διατακτικός.*

**Σημείωση:** Πολλές φορές γράφουμε $\omega_a$ στη θέση του $\aleph_a$.

Η διαισθητική συνολοθεωρία του Cantor έδωσε δύο πολύ σημαντικές υποθέσεις, οι οποίες είναι:

- Η Υπόθεση του Συνεχούς: Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή δεν υπάρχει σύνολο πραγματικών αριθμών $A$ με πλήθος ενδιάμεσο αυτών των του $\mathbb{N}$ και του $\mathbb{R}$, δηλαδή:

$$(\forall A \subseteq \mathbb{R})[|A| \leq \mathbb{N} \vee |A| = \mathbb{R}]$$

- Η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς: Για κάθε άπειρο σύνολο $A$ ισχύει:

$$(\forall X \subseteq P(A))[|X| \leq |A| \vee |X| = |P(A)|]$$

Αν οι δύο αυτές υποθέσεις αληθεύουν, τότε οι φυσικοί $\mathbb{N}$ και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ αποτελούν τις δύο ελάχιστες τάξεις απείρου. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σύνολο θα είναι ή αριθμήσιμο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$ ή «αυστηρά πολυπληθέστερο» του $\mathbb{R}$. Με βάση τους παραπάνω ορισμούς και αποτελέσματα οι υποθέσεις αυτές μπορούν να οριστούν και ως εξής:

**Ορισμός 2.6.3.** ***Υπόθεση του Συνεχούς (CH)***: *Η CH είναι ο ισχυρισμός σύμφωνα με τον οποίο, δεδομένου συνόλου $A$, τέτοιου ώστε $|\omega| \leq |A| \leq |P(\omega)|$, είτε $|A| = \omega$ είτε $|A| = |P(\omega)| = 2^\omega$. Με άλλα λόγια, ισχύει:*

$$\omega_1 = 2^\omega$$

**Ορισμός 2.6.4.** ***Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς (GCH)***: *Η GCH είναι ο ισχυρισμός ότι δεδομένου οποιουδήποτε διατακτικού $a$ θα ισχύει:*

$$\omega_{a+1} = 2^{\omega_a}$$

**Ορισμός 2.6.5.** ***Το συνεχές (the continuum)***: *Ο κλασικός συμβολισμός για τον πληθάριθμο του $P(\omega)$ είναι ο παρακάτω:*

$$c = |P(\omega)| = 2^\omega$$

Μία έννοια που χρησιμοποιείται σε πολλούς μαθηματικούς κλάδους είναι τα δέντρα, τα οποία μπορούμε να τα συναντήσουμε με διαφορετικούς ορισμούς ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν. Εδώ θα δώσουμε τον ορισμό που θα μας χρήσιμευσει περισσότερο στην εργασία.

**Ορισμός 2.6.6.** ***Δέντρο*** *(Tree): Έστω $Seq$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών των φυσικών αριθμών. Δέντρο $T$ ονομάζουμε ένα σύνολο $T \subseteq Seq$, το οποίο ικανοποιεί την σχέση:*

$$\textit{αν } t \in T \textit{ και } s = t \restriction n, \textit{ για κάποιο } n, \textit{ τότε } s \in T$$

Τα μέλη του $T$ ονομάζονται κόμβοι (nodes) ή πεπερασμένα κλαδία (finite branches), ενώ κάθε μη-κενό δέντρο έχει το $\varnothing$ ως ελάχιστο κόμβο, ο οποίος ονομάζεται ρίζα (root).

**Ορισμός 2.6.7.** ***Άπειρα Κλαδιά:*** *Αν $T \subseteq Seq$ ένα δέντρο, τότε ονομάζουμε άπειρα κλαδιά του $T$, τις άπειρες ακολουθίες του δηλαδή το σύνολο:*

$$[T] = \{f \in \mathbb{N} : f \restriction n \in T\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Ορισμός 2.6.8.** ***Ομοτελικότητα (cofinality):*** *Αν $\kappa$ ένας άπειρος πληθάριθμος, τότε ονομάζουμε ομοτελικότητα του $\kappa$ τον ελάχιστο πληθάριθμο $\lambda$, έτσι ώστε το $\kappa$ να είναι η ένωση $\lambda$ συνόλων μικρότερων σε πληθικότητα από το $\kappa$, δηλαδή:*

$$cf(\kappa) = \inf(|\{|I| \subseteq \kappa| \text{για κάποια οικογένεια } (i \to K_i)_i \in I, (\forall i \in I)[|K_i| < \kappa] \wedge \kappa = \bigcup_{i \in I} K_i\}|)$$

Οι γενικές ιδιότητες του ελαχίστου συναπάγονται τις εξής βασικές ιδιότητες του τελεστή ομοτελικότητας:

- $cf(\kappa) \leq \kappa$
- $\kappa = \bigcup_{i \in cf(\kappa)} K_i$, για κάποια οικογένεια συνόλων $(i \to K_i)$, τέτοια ώστε $(\forall i \in cf(\kappa))[K_i < \kappa]$
- Αν $\lambda$ πληθάριθμος και $(\forall i \in \lambda)[|L_i| < \kappa]$ και $\kappa = \bigcup_{i \in \lambda} L_i$, τότε $cf(\kappa) \leq \lambda$.

**Ορισμός 2.6.9.** *Έστω $A$ μερικά διατεταγμένο σύνολο και $B \subseteq A$. Το $B$ είναι* ***ομοτελικό*** *(cofinal) του $A$ αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $a \leq b$.*

**Ορισμός 2.6.10.** ***Κανονικός πληθάριθμος (regular cardinal):*** *Ένας άπειρος πληθάριθμος $\kappa$ είναι κανονικός αν η πληθικότητά του ισούται με την ομοτελικότητά του, δηλαδή αν :*

$$cf(\kappa) = \kappa$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα regular πληθαρίθμου είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών $\omega$. Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι άπειρο, ενώ η ένωση πεπερασμένων στοιχείων του συνόλου είναι πεπερασμένη. Συνεπώς, αφού δεν υπάρχει μικρότερη πληθικότητα που να καλύπτει όλους τους φυσικούς αριθμούς (σύμφωνα με τις ιδιότητες της ομοτελικότητας ισχύει: $cf(\omega) \leq \omega$) συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει:

$$cf(\omega) = \omega$$

**Ορισμός 2.6.11.** ***Ιδιάζων πληθάριθμος (singular cardinal):*** *Ένας καλά διατάξιμος, άπειρος πληθάριθμος $\kappa$ είναι ιδιάζων αν δεν είναι κανονικός.*

**Σημείωση:** Ένας πληθάριθμος είναι ιδιάζων αν δεν είναι επόμενος πληθάριθμος και η ομοτελικότητά του είναι αυστηρά μικρότερη του $\kappa$.

**Λήμμα 2.6.1.** ***(König)**: Για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\kappa$ ισχύει :*

$$\kappa < cf(2^\kappa)$$

**Απόδειξη:** Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε άπειρο $\kappa$, η ομοτελικότητα του $2^\kappa$ είναι μικρότερη του $\kappa$. Για απλότητα θα κάνουμε την απόδειξη για $\kappa = \omega$. Η γενική απόδειξη δεν έχει καμία διαφορά. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $\omega = cf(2^\omega)$.

- Από τον ορισμό της ομοτελικότητας θα υπάρχει μία οικογένεια συνόλων $K_n \subseteq 2^\omega$, για την οποία θα ισχύει:

$$2^\omega = \bigcup_{n\in\omega} K_n \tag{2.4}$$

και

$$|K_n| < 2^\omega \tag{2.5}$$

- Επειδή $|\omega| = |\omega \times \omega|$ θα υπάρχουν σύνολα $A_n \subseteq \omega$ για τα οποία θα ισχύουν τα παρακάτω :
  - $|A_n| = \omega$ και $\bigcup_{n\in\omega} A_n = \omega$

    Πράγματι, αν $h : \omega \to \omega \times \omega$ μία συνάρτηση 1-1 και επί και θέσουμε:

$$A_n = h^{-1}\left[\{n\} \times \omega\right] \Rightarrow |A_n| = \omega \text{ και}$$
$$\bigcup_{n\in\omega} A_n = h^{-1}\left[\bigcup_{n\in\omega} (\{n\} \times \omega)\right] = h^{-1}\left[\omega \times \omega\right] = \omega$$

  - $A_n \cap A_m = \varnothing$, για $n \neq m$

    Χρησιμοποιώντας πάλι την $h$, για $n \neq m$:

$$A_n \cap A_m = h^{-1}\left[\{n\} \times \omega\right] \cap h^{-1}\left[\{m\} \times \omega\right] = h^{-1}\left[(\{n\} \times \omega) \cap (\{m\} \times \omega)\right] \overset{n\neq m}{=} \varnothing$$

- Επειδή $|k \restriction A_n : k \in K_n| \leq |K_n| \overset{(2.7)}{\Longrightarrow} |k \restriction A_n| < 2^\omega = 2^{A_n}$, θα υπάρχει συνάρτηση

$$f_n : A_n \to 2 = \{0, 1\}$$

  τέτοια ώστε:

$$f_n \notin k \restriction A_n$$

- Θεωρούμε 1-1 και επί συνάρτηση $f : \omega \to \{0, 1\}$ τέτοια ώστε:

$$f(n) = f_k(n) \iff n \in A_k \tag{2.6}$$

- **Ισχυρισμός:** Για κάθε $n \in \omega$ θα ισχύει:

$$f \notin \bigcup K_n$$

**Απόδειξη Ισχυρισμού:** Αν $f \in \bigcup K_n$ τότε θα υπάρχει κάποιο $m \in \omega$ τέτοιο ώστε $f \in K_m$, άρα θα ισχύει: (Για απλότητα συμβολίζουμε με $K_n \restriction A_n$, το σύνολο $\{k \restriction A_n : k \in K_n\}$.)

$$\begin{aligned}
&(f \restriction A_m) \in (K_m \restriction A_m) \stackrel{(2.8)}{\Longrightarrow} \\
&f_m \in (K_m \restriction A_m)
\end{aligned}$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει, επειδή έχουμε επιλέξει την $f_m$ ακριβώς σαν την συνάρτηση που δεν ανήκει στα $K_m \restriction A_m$, για κάθε $m \in \omega$. Άρα,

$$\begin{aligned}
&f \notin \bigcup K_n \\
&f \in 2^\omega \setminus \bigcup_{n \in \omega} K_n
\end{aligned} \tag{2.7}$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού από την σχέση (2.6) η ένωση $\bigcup K_n$ καλύπτει όλο το $2^\omega$.
Αφού η σχέση (2.9) μας οδηγεί σε άτοπο, συμπεραίνουμε ότι η αρχική μας υπόθεση ($cf(2^\omega) = \omega$) δεν μπορεί να ισχύει, άρα :

$$cf(2^\omega) > \omega$$

□

# 3. Πληθικά Αναλλοίωτα του Συνεχούς

Ένα πληθικό αναλλοίωτο (ή χαρακτηριστικό) του συνεχούς είναι ένας πληθάριθμος αυστηρά μεγαλύτερος του $\aleph_0$, της πληθικότητας των φυσικών αριθμών και μικρότερος ή ίσος του $2^{\aleph_0}$, της πληθικότητας των πραγματικών αριθμων (συνεχές).
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μερικούς τέτοιους μικρούς πληθαρίθμους, δηλαδή πληθαρίθμους των οποίων η πληθικότητα είναι μεταξύ των $\aleph_1$ και $2^{\aleph_0}$. Για την παρουσίαση αυτή θα χρειαστεί πρώτα να ασχοληθούμε στην πρώτη ενότητα με την έννοια του ιδεώδους και του φίλτρου, να παραθέσουμε τους ορισμούς τους και να δώσουμε κάποια παραδείγματα.

## 3.1 Φίλτρα και Ιδεώδη

**Ορισμός 3.1.1.** ***Ιδεώδες*** *(Ideal): Έστω A ένα μη - κενό σύνολο. Ιδεώδες στο σύνολο A είναι ένα υποσύνολο $I \subseteq P(A)$, το οποίο ικανοποιεί τα εξής:*

1. $\varnothing \in I$, $A \notin I$
2. $\forall X, Y \in I$ *ισχύει ότι:* $X \cup Y \in I$
3. $\forall X, Y \subseteq A$ *ισχύει ότι:* $(X \subseteq Y \wedge Y \in I) \implies X \in I$

**Παράδειγμα:** Το $[A]^{<\kappa}$ είναι ένα ιδεώδες στο A, αν ο κ είναι άπειρος πληθάριθμος και ισχύει ότι $\kappa \leq |A|$. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή $A = \mathbb{N}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει πληθικότητα ω. Τότε για το ιδεώδες θα ισχύει $I = [\mathbb{N}]^{<\omega}$, που σημαίνει ότι θα ισούται με το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με πληθικότητα μικρότερη του ω. Με άλλα λόγια, ισούται με το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό για τα ιδεώση έχουμε:

1. $\varnothing \in I$, $\mathbb{N} \notin I$
2. $\forall X, Y \in I \implies X, Y \subseteq \mathbb{N}$ και $X, Y$: πεπερασμένα $\implies X \cup Y$: πεπερασμένη $\implies$ $X \cup Y \in I$
3. $\forall X, Y \subseteq \mathbb{N}$ για τα οποία ισχύει ότι: $(X \subseteq Y \wedge Y \in I) \implies Y \in I$, άρα $Y$: πεπερασμένο και $X \subseteq Y$, άρα $X$: πεπερασμένο.

**Ορισμός 3.1.2.** *Ορίζουμε τα παρακάτω 3 ιδεώδη:*

1. $fin = [\omega]^{<\omega}$*: το ιδεώδες των πεπερασμένων υποσυνόλων του ω, δηλαδή η οικογένεια όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων ενός μη-κενού συνόλου A. Το fin είναι ιδεώδες, γιατί:*
   - *περιέχει το κενό σύνολο (αφού το κενό σύνολο μπορεί να θεώρηθει σαν ένα πεπερασμένο σύνολο κάθε σύνολου), ενώ δεν περιέχει το ίδιο το A (αφού το A δεν είναι ένα πεπερασμένο σύνολο του εαυτού του). Άρα,* $\varnothing \in fin$ *και* $A \notin fin$
   - *αν* $X, Y \in A$*: πεπερασμένα (δηλαδή* $X, Y \in fin$*), τότε και η ένωση τους είναι πεπερασμένη, άρα* $X \cup Y \in fin$

- *αν* $(X, Y \subseteq A \wedge Y \subseteq X)$ *και* $X \in fin$ *(δηλαδή X: πεπερασμένο), τότε κάθε υποσύνολο του είναι πεπερασμένο, άρα* $Y \in fin$.

2. *null: το ιδεώδες των null υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *(δηλαδή των υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *που έχουν μέτρο μηδεν). Το null είναι ιδεώδες, γιατί:*

   - *περιέχει το κενό σύνολο (αφού έχει μέτρο μηδέν), ενώ δεν περιέχει το* $\mathbb{R}$ *(αφού δεν μπορεί να έχει μέτρο μηδέν). Άρα* $\varnothing \in null$ *και* $\mathbb{R} \notin null$
   - *αν* $X, Y \in \mathbb{R}$ *και έχουν μέτρο μηδέν (δηλαδή* $X, Y \in null$*), τότε και η ένωση τους έχει μέτρο μήδεν, άρα* $X \cup Y \in null$
   - *αν* $(X, Y \subseteq \mathbb{R} \wedge Y \subseteq X)$ *και* $X \in null$ *(δηλαδή έχει μέτρο μήδεν), τότε κάθε υποσύνολο του θα έχει μέτρο μηδέν, άρα* $Y \in null$

   ***Παράδειγμα:*** *Έστω οι συναρτήσεις f και g, για τις οποίες ισχύει:* $f, g \in \mathbb{R}$. *Αν οι f και g είναι σχεδόν παντού ίσες, τότε θα ισχυεί ότι* $\{x : f(x) \neq g(x)\} \in null$.

3. *meager: το ιδεώδες των meager υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *(Με τον όρο meager εννοούμε τα σύνολα, τα οποία μπορούν να εκφραστούν σαν την ένωση αριθμήσιμών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$*, των οποίων η κλειστότητα έχει κενό εσωτερικό. Διαισθητικά, ένα meager σύνολο μπορούμε να το φανταστούμε σαν ένα «μικρό», αραιό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.*

Γενικά, μπορούμε να φανταστούμε τα ιδεώδη σαν σύνολα που είναι «αμελητέα» ή «σχεδόν τίποτα». Από τα τρία ιδεώδη που ορίσαμε παραπάνω, αυτά που θα μας απασχολήσουν κυρίως είναι το $fin$ και το $null$, ενώ το $meager$ δεν θα το χρησιμοποιήσουμε στην εργασία.

**Ορισμός 3.1.3.** ***Φίλτρο*** *(Filter): Έστω A μη - κενό σύνολο. Ορίζουμε ως Φίλτρο στο A ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του A* $(F \subseteq P(A))$*, το οποίο ικανοποιεί τα εξής:*

1. $\varnothing \notin F$, $A \in F$
2. $\forall X, Y \in F$ *ισχύει ότι* $X \cap Y \in F$
3. $\forall X, Y \subseteq A$ *ισχύει ότι* $(X \supseteq Y \wedge Y \in F) \implies X \in F$

Η διττή έννοια ενός ιδεώδους είναι το φίλτρο. Η δυικότητα μεταξύ των δύο αυτών εννοιών γίνεται σαφής με τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 3.1.4.** ***Δυικότητα*** *(duality): Έστω σύνολο A και* $E \subseteq P(A)$. *Ορίζουμε ως δυικό (dual) του E, το σύνολο:*

$$E^* = \{X \subseteq P(A) : (A \setminus X) \in E\}$$

Με βάση τον ορισμό της δυικότητας, για τα ιδεώδη και τα φίλτρα θα ισχύει:

- Αν $I \subseteq P(A)$ ιδεώδες στο A, τότε το $I^*$ ονομάζεται δυικό φίλτρο ($dual filter$).

**Πρόταση:** Το δυικό ενός φίλτρου είναι φίλτρο.

**Απόδειξη:** Έστω $I$ ιδεώδες στο σύνολο A και $I^* = \{(A \setminus X) : X \in I\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $I^*$ είναι φίλτρο. Παρατηρούμε τα εξής:

1. – $\varnothing \notin I^* \iff (A \setminus \varnothing) \notin I \iff A \notin I$, που ισχυεί από τον ορισμό του ιδεώδους για το I.
   – $A \in I^* \iff (A \setminus \varnothing) \in I^* \iff \varnothing \in I$, ισχύει επίσης από τον ορισμό για τα ιδεώδη.
2. Έστω $X, Y \in I^*$.
   Από τον ορισμό του $I^*$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&(A \setminus X) \in I \text{ και } (A \setminus Y) \in I \Longrightarrow \\
&((A \setminus X) \cup (A \setminus Y)) \in I \overset{\text{Νομος De Morgan}}{\iff} \\
&(A \setminus (X \cap Y)) \in I \iff \\
&X \cap Y \in I^*
\end{aligned}$$

3. Έστω $X, Y \subseteq A$ και $(X \subseteq Y \wedge X \in I^*)$. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&X \subseteq Y \iff \\
&I \ni (A \setminus X) \supseteq (A \setminus Y) \Longrightarrow \qquad ((A \setminus X) \in I, \text{ επειδή } X \in I^*) \\
&(A \setminus Y) \in I \iff Y \in I^*
\end{aligned}$$

Οι 3 συνθήκες του ορισμού για τα φίλτρα πληρούνται, άρα το $I^*$ είναι φίλτρο.

□

- Αν $F \subseteq P(A)$ φίλτρο στο A, τότε το $F^*$ ονομάζεται δυικό ιδεώδες (dual ideal).

**Πρόταση:** Το δυικό ιδεώδες ενός συνόλου είναι ιδεώδες.

**Απόδειξη:** Έστω $F$ φίλτρο στο σύνολο A και $F^* = \{(A \setminus X) \in F : X \subseteq P(A)\}$.
Θέλουμε να δείξουμε ότι το $F^*$ είναι ιδεώδες. Παρατηρούμε τα εξής:

1. – $\varnothing \in F^* \iff (A \setminus \varnothing) \in F$, ισχύει από τον ορισμό του φίλτρου ($F$: φίλτρο)
   – $A \notin F^* \iff \varnothing \in F$, ισχύει επίσης από τον ορισμό του φίλτρου.

2. Έστω $X, Y \in F^*$.
   Από τον ορισμό του $F^*$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&(A \setminus X) \in F \text{ και } (A \setminus Y) \in F \Longrightarrow \\
&((A \setminus X) \cap (A \setminus Y)) \in F \overset{\text{Νόμος De Morgan}}{\iff} \\
&(A \setminus (X \cup Y)) \in F \iff \\
&X \cup Y \in F^*
\end{aligned}$$

3. Έστω $X, Y \subseteq A$ και $(X \subseteq Y \wedge Y \in F^*)$. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} &X \subseteq Y \iff \\ &F \ni (A \setminus X) \supseteq (A \setminus Y) \implies \qquad ((A \setminus X) \in F, \text{ επειδή } Y \in F^*) \\ &A \setminus Y \in F \iff Y \in F^* \end{aligned}$$

Οι 3 συνθήκες από τον ορισμό για τα ιδεώδη πληρούνται, που σημαίνει ότι το $F^*$ είναι ιδεώδες.

□

**Λήμμα 3.1.1.** *Έστω ένα σύνολο A και $E \subseteq P(A)$. Τότε θα ισχύει:*

$$E^{**} = E$$

*Συγκεκριμένα, για τα φίλτρα και τα ιδεώδη ισχύουν τα παρακάτω:*

- *αν E είναι ένα ιδεώδες, τότε το $E^{**}$ είναι ένα ιδεώδες.*
- *αν E είναι ένα φίλτρο, τότε το $E^{**}$ είναι ένα φίλτρο.*

**Απόδειξη:** Έστω σύνολο A και $E \subseteq P(A)$. Έστω επίσης σύνολο $X \in E^{**}$. Τότε θα ισχύει:

$$X \in E^{**} \iff (A \setminus X) \in E^* \iff (A \setminus (A \setminus X)) \in E \iff X \in E$$

**Ορισμός 3.1.5.** *Έστω δύο σύνολα A και B, R μία σχέση στο B, I ιδώδες στο A και F φίλτρο στο A. Έστω επίσης $f, g \in B^A$. Τότε ορίζουμε:*

$$\begin{aligned} fR_I g &\iff \{\alpha \in A : \neg f(\alpha) R g(\alpha)\} \in I \\ fR_F g &\iff \{\alpha \in A : f(\alpha) R g(\alpha)\} \in F \end{aligned}$$

**Παράδειγμα:** Έστω $I = null$ στο $\mathbb{R}$ και $f, g \in B^{\mathbb{R}}$. Τότε θα ισχύει:

- $f =_{null} g \iff f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού (δηλαδή παντού εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν)
- $f =_{null} g \iff \{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in null^* \iff \{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in null.$

**Ορισμός 3.1.6.** *Έστω $f, g \in \omega^\omega$. Ορίζουμε:*

1. $f =^* g \iff f =_{fin} g$
2. $f \leq^* g \iff f \leq_{fin} g$

Η σχέση $=^*$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Η σχέση $\leq^*$ είναι ανακλαστική και μεταβατική.

**Λήμμα 3.1.2.** $f \leq^* g \leq^* f \iff f =^* g$

**Απόδειξη:** Έστω:

$$A = \{n \in \omega : g(n) < f(n)\} \in fin \text{ και}$$
$$B = \{n \in \omega : f(n) < g(n)\} \in fin$$

Αφού $A, B \in fin$, από τον ορισμό του ιδεώδους θα ισχύει $A \cup B \in fin$.
Εστω επίσης το σύνολο:

$$\begin{aligned} C &= \{n \in \omega : f(n) \neq g(n)\} \\ &= \{n \in \omega : g(n) < f(n)\} \cup \{n \in \omega : f(n) < g(n)\} \\ &= A \cup B \in fin \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} &C = \{n \in \omega : f(n) \neq g(n)\} \in fin \iff \\ &\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in fin^* \iff \\ &f =^* g \end{aligned}$$

□

**Λήμμα 3.1.3.** $f <^* g \iff f \leq^* g$ *και* $f \neq^* g$

**Απόδειξη:**

1. $f \leq^* g \implies \{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \in fin \implies \{n \in \omega : f(n) \leq^* g(n)\} \in fin^*$
2. $f \neq^* g \implies \neg\{n \in \omega : f(n) \neq g(n)\} \in fin \implies \{n \in \omega : f(n) \neq g(n)\} \in fin^*$

Επίσης έχουμε: $f <^* g \iff \{n \in \omega : g(n) \geq f(n)\} \in fin^*$ & $\{n \in \omega : f(n) \neq g(n)\} \in fin^*$
Από (1),(2) : $f <^* g \iff f \leq^* g$ και $f \neq^* g$

□

## 3.2 Μερικοί Μικροί Πληθάριθμοι

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να δωθούν κάποιοι πληθάριθμοι, οι οποίοι βρίσκονται μεταξύ του $\aleph_1$ και του $2^{\aleph_0}$. Αν υποθέσουμε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς ($CH$) είναι αληθής τότε οποισδήποτε τέτοιος πληθάριθμος θα ισούται με το συνεχές (γιατί $\aleph_1 = c$). Όμως, η $CH$ είναι ανεξάρτητη της $ZFC$ συνολοθεωρίας, που σημαίνει ότι η υπόθεση συνεχούς ή η άρνηση της μπορεί να είναι αλήθεια. Τι ισχυεί, επομένως, στην περίπτωση που η άρνηση της $CH$ αληθεύει;

Στην περίπτωση αυτή, θα δούμε ότι υπάρχουν πληθάριμοι μεταξύ του $\aleph_1$ και του $c$, οι οποίοι ονομάζονται πληθικά αναλλοίωτα του συνεχούς. Μπορούμε να πούμε ότι τα πληθικά αναλλοίωτα είναι απλώς οι μικρότεροι πληθάριμοι για τους οποίους διάφορα αποτελέσματα που είναι αληθή για αριθμήσιμα σύνολα, παύουν να ισχύουν.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μερικά από αυτά τα αναλλοίωτα, ξεκινώντας από αυτά που σχετίζονται με τα ιδεώδη. Οι πληθάριθμοι αυτοί θα μας δώσουν τη δυνατότητα να μελετήσουμε τη δομή ενός ιδεώδους, καθώς και να συγκρίνουμε ιδεώδη μεταξύ τους.

### 3.2.1 Φίλτρα και Ιδεώδη: Οι πληθάριθμοι $add, cov, non$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τα αναλλοίωτα που σχετίζονται με ιδεώδη. Οι τιμές αυτών των πληθαρίθμων επηρεάζονται από τις ιδιότητες του ιδεώδους I, καθώς και από το μέγεθος του συνόλου A.

**Ορισμός 3.2.1.** *Έστω σύνολο $A$ και $I$ ένα ιδεώδες στο $A$, με $[A]^{<\omega} \subseteq I$. Τότε ορίζουμε τους παρακάτω 3 πληθαρίθμους:*

1. ***add(I)*** *(additivity of $I$) : ο ελάχιστος πληθάριθμος $\kappa$ μιας οικογένειας συνόλων $E$ στο $I$, της οποίας η ένωση δεν ανήκει στο $I$, δηλαδή:*

$$add(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E \notin I\}$$

*Με άλλα λόγια, ο $add(I)$ είναι το ελάχιστο μέγεθος μιας οικογένειας συνόλων $E$, που χτίζεται από το $I$, έτσι ώστε η ένωση της $E$ να μην ανήκει στο $I$.*

2. ***cov(I)*** *(covering number of $I$) : ο ελάχιστος πληθάριθμος $\kappa$ μιας οικογένειας συνόλων $E$ στο $I$, της οποίας η ένωση καλύπτει (covers) το $A$, δηλαδή:*

$$cov(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \ A = \cup E\}$$

3. ***non(I)*** *($uniformity$ $of$ $I$) : ο ελάχιστος πληθάριθμος $\kappa$ ενός υποσυνόλου $X$ του $A$, που δεν ανήκει στο $I$, δηλαδή:*

$$non(I) = min\{\kappa : \exists X \in [A]^{\kappa} \mid \ X \notin I\}$$

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε ότι οι 3 αυτοί πληθάριθμοι είναι άπειροι.

1. Έστω $I$ ιδεώδες στο $A$ με $[A]^{<\omega} \subseteq I$, $E$ μία οικογένεια συνόλων με $E \in [I]^{\kappa}$ και έστω ότι το κ είναι πεπερασμένο. Από τον ορισμό του ιδεώδους:

$$\forall A, B \in I \implies A \cup B \in I$$

Άρα, για $n \in \omega$ :

$$\forall A_1, ..., A_n \in I \implies \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in I$$

Επαγωγικά, αν $A_1, ..., A_n, A_{n+1} \in I \implies \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in I$ και $A_{n+1} \in I \implies \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \in I$,
το οποίο είναι άτοπο λόγω του ορισμού του $add(I)$, αφού $\forall E \in I \implies \cup E \notin I$.
Επομένως, ο $\kappa$ δεν είναι πεπερασμένος, που σημαίνει ότι :

$$add(I) \geq \aleph_0$$

2. Έστω $I$ ιδεώδες στο $A$ με $[A]^{<\omega} \subseteq I$, $E$ μία οικογένεια συνόλων με $E \in [I]^{\kappa}$ και έστω ότι το κ είναι πεπερασμένο. Αυτό σημαίνει ότι $E \subseteq I$ με $|E| = \kappa < \omega$. Στην παραπάνω απόδειξη δείξαμε ότι για $\kappa$: πεπερασμένο ισχύει:

$$\bigcup E \in I \tag{3.1}$$

Από τον ορισμό του $cov(I)$ έχουμε: $cov(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E = A\}$. Άρα,

$$\bigcup E = A \tag{3.2}$$

Από (3.1),(3.2) είναι προφανές ότι $A \in I$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του ιδεώδους (σύμφωνα με τον οποίο $A \notin I$). Επομένως, ο $\kappa$ δεν είναι πεπερασμένος, που σημαίνει ότι :

$$cov(I) \geq \aleph_0$$

3. Έστω $I$ ιδεώδες στο $A$, $E$ μία οικογένεια συνόλων με $E \in [I]^{\kappa}$ και έστω ότι το κ είναι πεπερασμένο. Από τον ορισμό του $non(I)$ έχουμε: $non(I) = min\{\kappa : \exists X \in [A]^{\kappa} \mid X \notin I\}$, που σημαίνει ότι :

$$X \subseteq A \text{ με } |X| = \kappa < \omega \implies X \in I$$

το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό για το $non(I)$ (σύμφωνα με τον οποίο $X \notin I$).
Επομένως, ο $\kappa$ δεν είναι πεπερασμένος, που σημαίνει ότι :

$$non(I) \geq \aleph_0$$

Στο Λήμμα παρακάτω θα δούμε τις σχέσεις μεταξύ των πληθαρίθμων $add(I), cov(I), non(I)$.

**Λήμμα 3.2.1.** *Αν $I$ ιδεώδες στο σύνολο $A$ με $[A]^{<\omega} \subseteq I$, τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $add(I) \leq non(I) \leq |A|$
2. $add(I) \leq cov(I) \leq |A|$
3. $add(I) : regular$

***Απόδειξη:***

1. *Από τον ορισμό του $non(I)$ και του $add(I)$ έχουμε:*

$$non(I) = min\{\kappa : \exists X \in [A]^{\kappa} \mid X \notin I\}$$
$$add(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E \notin I\}$$

*Έστω $X \subseteq A$, $|X| = non(I)$ και $X \notin I$.*
*Έστω, επίσης $E = \{\{x\} : x \in X\}$. Για την $E$ προκύπτουν τα εξής:*

- *Επειδή η $E$ αποτελείται από τα μονοσύνολα του $X$ θα ισχύει ότι: $\bigcup E = X$ και $E \subseteq I$. Από τον ορισμό του $non(I)$, όμως ξέρουμε ότι $X \notin I$, που σημαίνει ότι:*

$$\bigcup E \notin I \tag{3.3}$$

- *Επίσης, επειδή $|E| = |X| = non(I)$ θα ισχύει:*

$$E \subseteq I \implies E \in [I]^{non(I)} \tag{3.4}$$

*Από (3.3),(3.4) προκύπτει ότι για κάθε ιδεώδες $I$, θα ισχύει :*

$$\begin{aligned} & non(I) \in \{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} : \cup E \notin I\}, \text{ άρα} \\ & min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} : \cup E \notin I\} \leq non(I) \iff \\ & add(I) \leq non(I) \end{aligned} \tag{3.5}$$

*Επίσης, ισχύει ότι $A \in [A]^{|A|}$ και $A \notin I$, που σημαίνει ότι :*

$$\begin{aligned} & |A| \in \{\kappa : \exists X \in [A]^{\kappa} |X \notin I\} \text{ , άρα} \\ & min\{\kappa : \exists X \in [A]^{\kappa} |X \notin I\} \leq |A| \iff \\ & non(I) \leq |A| \end{aligned} \tag{3.6}$$

*Από (3.5), (3.6) προκύπτει ότι:*

$$add(I) \leq non(I) \leq |A|$$

2. *Από τους ορισμούς των $cov(I)$ και $add(I)$ έχουμε:*

$$cov(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid A = \cup E\}$$
$$add(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E \notin I\}$$

*Έστω $\kappa = cov(I)$, τότε $\exists E \in [I]^{\kappa}$, ώστε :*

$$A = \bigcup E \notin I, \tag{3.7}$$

*αφού από τον ορισμό του ιδεώδους $I$ ξέρουμε ότι $A \notin I$.*

*Από την σχέση (3.7) προκύπτει:*

$$\kappa \in \left\{\lambda : \exists E \in [I]^{\lambda} : \cup E \notin I\right\}$$

*Άρα,*

$$\begin{aligned}
&min\left\{\lambda : \exists E \in [I]^{\lambda} : \cup E \notin I\right\} \leq \kappa \iff \\
&add(I) \leq \kappa \overset{\kappa=cov(I)}{\iff} \\
&add(I) \leq cov(I) \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

*Έστω, τώρα* $E = \{\{a\} : a \in A\}$. *Στην περίπτωση αυτή έχουμε :* $\bigcup E = A$ *και* $|E| = |A|$. *Επίσης,* $\forall \alpha \in A$ *ισχύει ότι :* $\{\alpha\} \in I$, *που σημαίνει ότι έχουμε μία οικογένεια συνόλων* $E \in [I]^{|E|} = [I]^{|A|}$. *Άρα,*

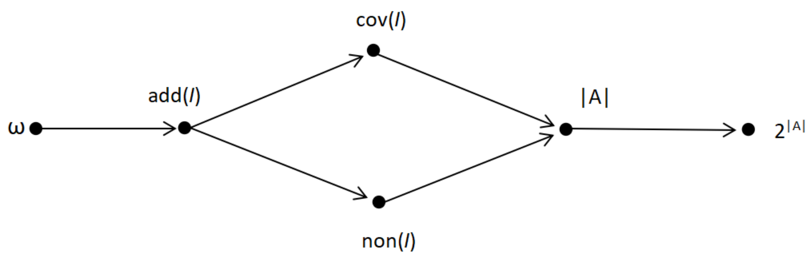
$$|A| \in \{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E = A\} \qquad (3.9)$$

*Από την (3.9) προκύπτει ότι :*

$$\begin{aligned}
&min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E = A\} \leq |A| \iff \\
&cov(I) \leq |A| \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

*Επομένως, από την (3.8), (3.10) :*

$$add(I) \leq cov(I) \leq |A|$$




3. *Έστω ότι ο* $add(I)$ *δεν είναι regular και έστω* $add(I) = \kappa_0$.
*Από τον ορισμό για τον* $add(I)$ *έχουμε:*

$$add(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E \notin I\} = \kappa_0$$

*Αφού ο* $add(I)$ *δεν είναι regular θα υπάρχει* $\xi_0$, *μικρότερος του* $\kappa_0$, *δηλαδή* $\xi_0 < \kappa_0 = add(I)$, *και* $A_j, j \in \xi_0$, *έτσι ώστε:*

$$|A_J| < \kappa_0 \qquad (3.11)$$

$$\bigcup A_j = \kappa_0 \qquad (3.12)$$

*Θεωρούμε* $E$ *ώστε* $E \in [I]^{\kappa_0}$ *και* $\bigcup E \notin I$.
*Έστω συνάρτηση* $f : E \longrightarrow \kappa_0$ *(1-1 και επί) και έστω* $A'_j = \bigcup\{x \in E : f(x) \in A_j\}$.
*Από (3.11) :*

$$|A_j| < \kappa_0 \implies |A'_j| < \kappa_0 \text{ (αφού f 1-1 και επί)}$$

*Άρα, από τον ορισμό του* $add(I)$*, θα έχουμε* $A'_j \in [I]^{|A_j|}$*. Επίσης, έστω:*

$$\Omega = \{\Omega_j, j < \xi_0\} \textit{ με } \Omega_j = \bigcup A'_j \textit{ και } |\Omega| = \xi_0 < \kappa_0 \tag{3.13}$$

*Τότε, θα ισχυεί:* $\bigcup \Omega \in I$*, αφού ο* $\kappa_0 = add(I)$ *είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίο* $\bigcup E \notin I$ *και* $\xi_0 < \kappa_0$*.*
*Σε αυτή την περίπτωση όμως, θα έχουμε:*

$$\bigcup \Omega = \bigcup_{j<\xi_0} \Omega_j \overset{(3.13)}{=} \bigcup_{j<\xi_0} \cup A'_j = \bigcup E \in I$$

*το οποίο είναι άτοπο (λόγω ορισμού του* $add(I)$*). Επομένως, ο* $add(I)$ *είναι* $regular$*.*

□

### 3.2.2 Οι 3 πληθάριθμοι (add(I), cov(I), non(I)) στο ιδεώδες fin

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, έστω ότι $A = \mathbb{N}$ και $I = fin = [\mathbb{N}]^{<\omega}$.
Θα μελετήσουμε τους πληθαρίθμους $add(fin), cov(fin)), non(fin)$ στην περίπτωση που το κ είναι πεπερασμένο και στην περίπτωση που ισούται με το ω.

1. Για τον $add(fin) = min\{\kappa : \exists E \in [fin]^\kappa \mid \cup E \notin fin\}$ έχουμε:
   - για $\kappa = 2$ : έστω $E = \{\{X, Y\} : X, Y \in fin\}$.
     Άρα, $\bigcup E = X \cup Y \in fin$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $add(I)$.
   - για $\kappa < \omega$ προφανώς ισχύει το ίδιο.
   - για $\kappa = \omega$ : έστω $E = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ...\}$.
     Άρα, $\bigcup E = \mathbb{N} \notin I$, που είναι σύμφωνο με τον ορισμό του $add(I)$.

   Επομένως, $add(fin) = \omega$.

2. Για τον $cov(fin) = min\{\kappa : \exists E \in [fin]^\kappa \mid \ A = \bigcup E\}$ έχουμε:
   - για $\kappa = 2$ : έστω $E = \{\{X, Y\} : X, Y \in fin\}$.
     Άρα, $\bigcup E = X \cup Y \in fin$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $cov(I)$, σύμφωνα με τον οποίο θα έπρεπε να ισχύει $\bigcup E = A = \mathbb{N}$.
   - για $\kappa < \omega$ προφανώς ισχύει το ίδιο.
   - για $\kappa = \omega$ : έστω $E = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ...\}$.
     Άρα, $\bigcup E = \mathbb{N}$, που είναι σύμφωνο με τον ορισμό του $cov(I)$.

   Επομένως, $cov(fin) = \omega$.

3. Για τον $non(I) = min\{\kappa : \exists X \in [A]^\kappa \mid \ X \notin fin\}$ έχουμε:
   - για $\kappa < \omega$ : έστω $X \in [\mathbb{N}]^\kappa$ τότε $|X| = \kappa$ πεπερασμένο, άρα $X \in fin$, άτοπο από τον ορισμό του $non(I)$.

- για $\kappa = \omega$ : έστω $X \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, τότε $|X| = \omega$, που σημαίνει ότι $X \notin fin$, που είναι σύμφωνο με τον ορισμό του $non(I)$.

Επομένως, $non(fin) = \omega$.
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$add(fin) = cov(fin) = non(fin) = \omega$$

### 3.2.3 Οι 3 πληθάριθμοι (add(I), cov(I), non(I)) στο ιδεώδες null

Έστω $A = \mathbb{R}$ και $I$ ιδεώδες στο $A$ με $[A]^{<\omega} \subseteq I$.
Έστω, επίσης, ότι για το ιδεώδες ισχύει $I = null = \{X \subseteq \mathbb{R} : \lambda(x) = 0\}$. Θα μελετήσουμε τους πληθαρίθμους $add(null), cov(null), non(null)$ και τις τιμές που μπορούν να πάρουν.

1. Από τον ορισμό του $add(I)$ για $I = null$ έχουμε:

$$add(null) = min\left\{\kappa : \exists E \in [null]^{\kappa} \mid \cup E \notin null\right\}$$

Για $\kappa = \omega$, έστω $E \subseteq null$ και $E = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$ με $|E| = \kappa = \omega$.
Όμως, γνωρίζουμε ότι :

$$\lambda\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} e_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(e_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 0 = 0$$

Άρα, προκύπτει ότι: $\bigcup E \in null$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $add(I)$, που σημαίνει ότι ο $add(null)$ δεν μπορεί να ισούται με $\omega$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να είναι πεπερασμένος, αφού αποδείξαμε παραπάνω ότι $add(I) \geq \aleph_0$. Επομένως, προκύπτει ότι:

$$add(null) > \aleph_0 \implies add(null) \geq \aleph_1$$

2. Από τον ορισμό του $cov(I)$ για $I = null$ έχουμε:

$$cov(null) = min\left\{\kappa : \exists E \in [null]^{\kappa} \mid A = \cup E\right\}$$

Έστω $E = \{\{x\}, x \in \mathbb{R}\}$. Τότε θα ισχύει:

$$\bigcup E = \mathbb{R}$$

Επειδή $\{x\} \in null$, τότε θα ισχύει $E \in [null]^{|\mathbb{R}|} = [null]^{2^{\aleph_0}}$

$$2^{\aleph_0} \in \{\kappa : \exists E \in [null]^{\kappa} \mid \bigcup E = \mathbb{R}\}.$$

Όμως, με βάση τον ορισμό, ο $cov(null)$ πρέπει να είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος $\kappa$ για τον οποίο $E \in [null]^{\kappa}$ έτσι ώστε $\bigcup E = \mathbb{R}$. Επομένως, θα ισχύει:

$$cov(null) \leq 2^{\omega}$$

3. Από τον ορισμό του $non(I)$ και του $add(I)$ για ένα ιδεώδες $I$ έχουμε:

$$non(I) = min\{\kappa : \exists X \in [A]^{\kappa} \mid \; X \notin I\} \text{ και}$$
$$add(I) = min\{\kappa : \exists E \in [I]^{\kappa} \mid \cup E \notin I\}$$

Έστω (σύμφωνα με τον ορισμό του $non(I)$), $X$ υποσύνολο του $A$ με $|X| = non(I)$ και $X \notin I$. Έστω, επίσης, $E = \{\{x\} : x \in X\}$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

- από τον ορισμό του $add(I)$:
$$E \subseteq I \tag{3.14}$$
- αφού η $E$ αποτελείται από τα μονοσύνολα του $X$ θα ισχύει : $\bigcup E = X$. Από την επιλογή του $X$, όμως ξέρουμε ότι $X \notin I$, που σημαίνει ότι :
$$\bigcup E \notin I \tag{3.15}$$

Από (3.14), (3.15) συμπεραίνουμε ότι γενικά για κάθε ιδεώδες $I$, θα ισχύει :

$$add(I) \leq non(I)$$

Επομένως, για $I = null$:

- $add(null) \leq non(null)$
- $add(null) \geq \aleph_1$, όπως αποδείξαμε παραπάνω.

Από τις 2 αυτές σχέσεις προκύπτει ότι:

$$non(null) \geq \aleph_1$$

### 3.2.4 Dominating και Unbounded Οικογένειες: Οι πληθάριθμοι $\mathfrak{d}$ και $\mathfrak{b}$

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε κυρίως με την μελέτη δύο νέων αναλλοίωτων, των *dominating* ($\mathfrak{d}$) και (*un*)*bounding* ($\mathfrak{b}$). Θα ξεκινήσουμε από τους ορισμούς για τις Dominating και Unbounded οικογένειες, οι οποίες σχετίζονται με τους πληθαρίθμους $\mathfrak{d}$ και $\mathfrak{b}$. Στη συνέχεια, αφού δώσουμε τους ορισμούς για τα $\mathfrak{d}$ και $\mathfrak{b}$, θα κάνουμε μία σύγκριση μεταξύ τους, καθώς και με άλλους γνώστους πληθάριθμους, για να ελέγξουμε τις τιμές που μπορούν να πάρουν.

**Ορισμός 3.2.2** (Οι πληθάριθμοι $\mathfrak{d}$ και $\mathfrak{b}$).

1. *Μία οικογένεια συνόλων $D \subseteq \omega^{\omega}$ ονομάζεται* ***Dominating*** *(Κυριαρχούσα) αν για κάθε $f \in \omega^{\omega}$ υπάρχει $g \in D$ έτσι ώστε :*
$$f \leq^{*} g$$
*Ο πληθάριθμος $\mathfrak{d}$ είναι το ελάχιστο μέγεθος μίας Dominating οικογένειας συνόλων, δηλαδή:*
$$\mathfrak{d} = min\{\kappa : \exists D \subseteq \omega^{\omega}, |D| = \kappa \text{ και } \forall f \in \omega^{\omega} \exists g \in D : f \leq^{*} g\}$$

2. *Μία οικογένεια συνόλων $B$ ονομάζεται **Unbounded** (Μη-Φραγμένη) αν δεν υπάρχει καμία $f \in \omega^\omega$ έτσι ώστε, για κάθε $g \in B$ :*

$$g \leq^* f$$

*Ο πληθάριθμος $\mathfrak{b}$ είναι το ελάχιστο μέγεθος μιας Unbounded οικογένειας, δηλαδή:*

$$\mathfrak{b} = min\{\kappa : \exists B \subseteq \omega^\omega, |B| = \kappa : \neg\exists f \in \omega^\omega | \forall g \in B : g \leq^* f\}$$

**Λήμμα 3.2.2.** $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq c$

***Απόδειξη:***

1. *$\underline{\mathfrak{d} \leq c}$ : Έστω οικογένεια συνόλων $D$ για την οποία ισχύει $D = \omega^\omega$. Ξέρουμε ότι $|\omega^\omega| = c$.*

   *Τότε, από τον ορισμό για το $\mathfrak{d}$, για κάθε $f \in \omega^\omega$ θα υπάρχει $g \in D$ έτσι ώστε $f \leq^* g$, π.χ. $g = f$. Άρα,*

   $$c = |\omega^\omega| \in \{\kappa : \exists D = \omega^\omega, |D| = \kappa : \forall f \in \omega^\omega \exists g \in D : f \leq^* g\}$$

   *Επομένως, είναι προφανές ότι :*

   $$\begin{aligned} &c \geq min\{\kappa : \exists D \subseteq \omega^\omega, |D| = \kappa : \forall f \in \omega^\omega \exists g \in D : f \leq^* g\} \implies \\ &c \geq \mathfrak{d} \end{aligned}$$

2. *$\underline{\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}}$ : Αρκεί να δείξουμε ότι αν $D$ : dominating $\implies$ $D$ : unbounded .*

   *Έστω ότι η οικογένεια συνόλων $D$ είναι dominating αλλά όχι unbounded.*
   *Στην περίπτωση αυτή από τον ορισμό της unbounded οικογένειας θα ισχύει:*

   $$\exists f_0 \in \omega^\omega \text{ έτσι ώστε } \forall g \in D : g \leq^* f_0 \tag{3.16}$$

   *Όμως, επειδή η $D$ είναι dominating, θα ισχύει επίσης:*

   $$\forall f \in \omega^\omega \; \exists g \in D \text{ έτσι ώστε } : f \leq^* g \tag{3.17}$$

   *Από τις σχέσεις (3.16),(3.17) προκύπτει:*

   $$\exists f_0 \in \omega^\omega \text{ έτσι ώστε } \forall f \in \omega^\omega : f \leq^* f_0 \iff \{n : f(n) > f_0(n)\} \in fin \tag{3.18}$$

   *Έστω : $f(n) = f_0(n) + 1$ , για $f \in \omega^\omega$.*
   *Στην περίπτωση αυτή, από την σχέση (3.18) έχουμε:*

   $$\{n : f(n) \leq f_0(n)\} = \varnothing \implies \{n : f(n) > f_0(n)\} = \omega \in fin \text{ άτοπο}$$

   *Επομένως, η $D$ θα είναι unbounded, που σημαίνει ότι:*

   $$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$$

3. *$\underline{\mathfrak{b} \geq \aleph_1}$: Θέλουμε να δείξουμε ότι ο πληθάριθμος $\mathfrak{b}$ είναι μη-αριθμήσιμος, που σημαίνει ότι αν έχουμε μία unbounded οικογένεια $B$, τότε η $B$ δεν μπορεί να είναι αριθμήσιμη.*
*Έστω $B = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$. Αρκεί να κατασκευάσουμε μία $f \in \omega^\omega$ έτσι ώστε $\forall b \in B$ να ισχύει ότι $b \leq^* f$. Έστω:*

   - $f(1) = b_1(1) + 1$
   - $f(2) = max\,\{b_1(2), b_2(2)\} + 1$
   - $f(3) = max\,\{b_1(3), b_2(3), b_3(3)\} + 1$
   - $f(m) = max\{b_1(m), b_2(m), ..., b_m(m)\} + 1$

   *Άρα, (επειδή για κάθε $n < m, b_n(m) < f(m)$), έπεται ότι:*

$$b_n(m) > f(m) \implies m < n, \forall m, n \in \omega$$

   *Άρα,*

$$f \geq^* b_n, \forall n \in \omega$$

   *Αφού βρήκαμε μία συνάρτηση $f \in \omega^\omega$, για την οποία ισχύει ότι για κάθε $b \in B$, $b \leq^* f$, καταλήγουμε σε άτοπο, άρα:*

$$\mathfrak{b} \geq \aleph_1$$

$\square$

## 3.3 Σχεδόν Ξένες Οικογένειες Συνόλων

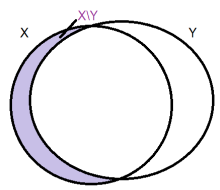
Η μελέτη των οικογένειων συνόλων έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών χρήσιμων και ενδιαφέρων εννοιών. Μία τέτοια έννοια είναι και αυτή που θα συζητήσουμε στο σημείο αυτό, η οποία αφορά οικογένειες άπειρων συνόλων των οποίων η τομή είναι πεπερασμένη.
Σε αυτή την ενότητα, θα ασχοληθούμε με τις σχεδόν ξένες οικογένειες συνόλων και τις ιδιότητες τους. Θα ορίσουμε επίσης τις μεγιστικές σχεδόν ξένες ($mad$) οικογένειες και θα δούμε ορισμένα ενδιαφέροντα αποτελέσματα σχετικά με αυτές. Τέλος, τα παραπάνω θα μας οδηγήσουν σε έναν νέο πληθάριθμο, που βρίσκεται ανάμεσα στο $\omega_1$ και το συνεχές $c$.

### 3.3.1 Σχεδόν Ξένες και Μεγιστικές Σχεδόν Ξένες Οικογένειες

**Ορισμός 3.3.1.** *Έστω δύο σύνολα* $X, Y$.

1. ***Σχεδόν Υποσύνολο:*** *Λέμε ότι το* $X$ *είναι σχεδόν υποσύνολο του* $Y$*, και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό* $X \subseteq^* Y$*, αν το* $X \setminus Y$ *είναι πεπερασμένο, δηλαδή:*

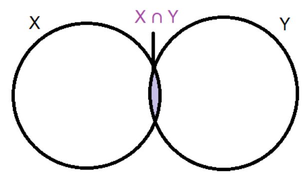
$$X \subseteq^* Y \iff X \setminus Y \in fin$$




Σχήμα 4: Παράδειγμα που απεικονίζει το X σαν σχεδόν υποσύνολο του Υ

2. ***Σχεδόν Ξένα Σύνολα:*** *Λέμε ότι τα* $X, Y$ *είναι σχεδόν ξένα μεταξύ τους, και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό* $X \perp Y$*, αν η τομή των 2 συνόλων είναι πεπερασμένη, δηλαδή:*

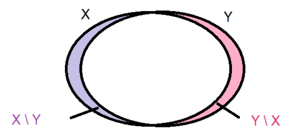
$$X \perp Y \iff X \cap Y \in fin$$




Σχήμα 5: Παράδειγμα σχεδόν ξένων υποσυνόλων

3. ***Σχεδόν Ίσα Σύνολα:*** *Λέμε ότι 2 σύνολα είναι σχεδόν ίσα μεταξύ τους, και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $X =^* Y$, αν η συμμετρική τους διαφορά είναι πεπερασμένη, δηλαδή:*

$$X =^* Y \iff (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \in fin$$




Σχήμα 6: Παράδειγμα σχεδόν ίσων συνόλων

Οι παραπάνω έννοιες χρησιμοποιούνται κυριώς όταν τα $X, Y$ είναι άπειρα υπολύνολα του ω ή άλλα αριθμήσιμα σύνολα.

**Παρατήρηση:** Το $X$ είναι σχεδόν υποσύνολο του $Y$ αν για τις χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις ισχύει :

$$\text{Για } X, Y \subseteq \omega : X \subseteq^* Y \iff x_X \leq^* x_Y$$

**Απόδειξη:**

- $X \subseteq^* Y \implies X \setminus Y \in fin \implies \{n \in \omega : n \in X \wedge n \notin Y\} \in fin \implies$
  $\{n \in \omega : x_X(n) > x_Y(n)\} \in fin \implies x_X \leq^* x_Y$
- $x_X \leq^* x_Y \implies \{n \in \mathbb{N} : x_X(n) = 1 \wedge x_Y(n) = 0\} \in fin \implies$
  $X \setminus Y \in fin \implies X \subseteq^* Y$

□

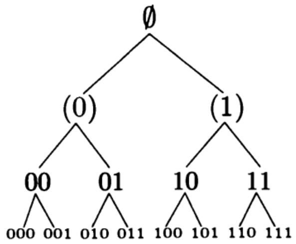
**Ορισμός 3.3.2.** ***Σχεδόν Ξένη Οικογένεια*** *(Almost Disjoint Family) ονομάζουμε μία οικογένεια άπειρων συνόλων, $D$, έτσι ώστε για κάθε $X, Y \in D$ με $X \neq Y$, τα σύνολα αυτά να είναι σχεδόν ξένα μεταξύ τους, δηλαδή:*

$$\forall X, Y \in D \text{ με } X \neq Y : X \perp Y$$

**Λήμμα 3.3.1.** *Υπάρχει σχεδόν ξένη οικογένεια $D \subseteq [\omega]^\omega$, έτσι ώστε η πληθικότητα της να ισούται με την πληθικότητα του συνεχούς, δηλαδή $|D| = c$.*

**Απόδειξη:**

- Έστω σύνολο $T$ μεγέθους $\omega$ και έστω ότι το $T$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών του 0 και 1, δηλαδή $T = 2^{<\omega}$.




Σχήμα 7: Δέντρο του *Cantor*

- Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων $D \subseteq [T]^{\omega}$ έτσι ώστε $|D| = c$.
  Μπορούμε να μεταφέρουμε την $D$ στο $\omega$ χρησιμοποιλωντας μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $T$ στο $\omega$. Έστω $f : T \longrightarrow \omega$
- Έστω, $N_{\alpha} = f(\{\alpha \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\}), \forall a \in 2^{\omega}$.
- Έστω $D = \{N_a : a \in 2^{\omega}\}$.
  Τότε, για την πληθικότητα της οικογένειας $D$ θα ισχύει:
  $$|D| = |\,\{N_a : a \in 2^{\omega}\}\,| = c \tag{3.19}$$
- Αν $N_a, N_b$ δύο κλαδιά στο $T$ με $a \neq b$, τότε θα έχουμε:
  $$\begin{aligned} & f^{-1}(N_a \cap N_b) = f^{-1}(N_a) \cap f^{-1}(N_b) = \{a \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{b \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\} \in fin \quad \text{, αφού } a \neq b \\ & \Longrightarrow f(\{a \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\}) \cap f(\{b \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\}) \in fin \\ & \Longrightarrow N_a \cap N_b \in fin \\ & \Longrightarrow N_a \perp N_b \end{aligned} \tag{3.20}$$

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι η οικογένεια συνόλων $D$ είναι μία σχεδόν ξένη οικογένεια, από την σχέση (3.20) και η πληθικότητα της ισούται με το $c$, από την σχέση (3.19).

□

**Ορισμός 3.3.3.** ***Μεγιστική Σχεδόν Ξένη Οικογένεια*** *(Maximal Almost Disjoint Family ή mad family) είναι μία σχεδόν ξένη οικογένεια άπειρων συνόλων ($D \subseteq [\omega]^{\omega}$), η οποία είναι μεγιστική μεταξύ όλων των σχεδόν ξένων οικογενειών.*

Με άλλα λόγια, μία σχεδόν ξένη οικογένεια μπορεί να επεκταθεί, προσθέτοντας όσο το δυνατόν περισσότερα υποσύνολα του $\omega$, μέχρι το σημείο που ισχύει η συνθήκη του ορισμού (3.3.2). Αυτή θα είναι και η μεγαλύτερη πιθανή σχεδόν ξένη οικογένεια και θα ονομάζεται *mad* οικογένεια. Θα δείξουμε σε αυτό το σημείο ότι μπορεί να υπάρχει μία τέτοια οικογένεια συνόλων.

**Θεώρημα 3.3.1.** *Υπάρχουν μεγιστικές σχεδόν ξένες οικογένειες.*

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του $Zorn$.

- Έστω $\Omega = \{D \subseteq [\omega]^{\omega}\ a.d.\}$ και για $D_1, D_2 \in \Omega$, ορίζουμε $D_1 \leq D_2$, αν και μόνο αν $D_1 \subseteq D_2$.
- Έστω $\{D_i : i \in I\}$ μία αλυσίδα στο $\Omega$. Τότε, θα ισχύει:
$$\bigcup D_i \supseteq D_i, \forall i \in I \tag{3.21}$$
- Αρκεί να δείξουμε ότι η $\bigcup\limits_{i \in I} D_i$ είναι σχεδόν ξένη οικογένεια:
Έστω $X, Y \in \bigcup\limits_{i \in I} D_i$. Τότε θα υπάρχουν $i_x, i_y$, έτσι ώστε $X \in D_{i_x}$ και $Y \in D_{i_y}$.
Έστω, επίσης (επειδή θέσαμε την $\{D_i : i \in I\}$ πριν σαν αλυσίδα):
$$\begin{aligned} & D_{i_x} \subseteq D_{i_y} \implies X \in D_{i_y} \text{ και } Y \in D_{i_y} \\ & \implies X, Y \in D_{i_y} \overset{D_i : a.d}{\implies} X \cap Y \in fin \\ & \implies X \perp Y \end{aligned} \tag{3.22}$$

Επομένως, αφού $X, Y \in \bigcup\limits_{i \in I} D_i$ και από την σχέση (3.22) ισχύει $X \perp Y$, η $\bigcup\limits_{i \in I} D_i$ θα είναι σχεδόν ξένη οικογένεια. Άρα, αφού $\bigcup D_i \supseteq D_i, \forall i \in I$ από την σχέση (3.21), τότε η $\bigcup D_i$ θα είναι άνω φράγμα. Από το Λήμμα του $Zorn$, προκύπτει ότι υπάρχει μεγιστική σχεδόν ξένη οικογένεια $D$.

### 3.3.2 Το πληθικό αναλλοίωτο $\mathfrak{a}$

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε ένα πληθικό αναλλοίωτο, το οποίο σχετίζεται με τις Μεγιστικές Σχεδόν Ξένες Οικογένειες.

**Ορισμός 3.3.4** (Ο πληθάριθμος $\mathfrak{a}$)**.** *Το ελάχιστο μέγεθος μίας άπειρης, μεγιστικής σχεδόν ξένης οικογένειας συνόλων (mad) το συμβολίζουμε με* $\mathfrak{a}$.

**Λήμμα 3.3.2.** $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \leq c$

**Απόδειξη:**

- $\underline{\aleph_1 \leq \mathfrak{b}}$ : Έχει αποδειχτεί στο Λήμμα 3.2.2.

- $\underline{\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}}$ : Εδώ θέλουμε να δείξουμε ότι : $\forall k < \mathfrak{b} \implies k < \mathfrak{a}$.

  - Έστω ένα άπειρο $k$ έτσι ώστε $k < \mathfrak{b}$ και έστω μία σχεδόν ξένη οικογένεια:
  $$D = \{X_a : \mathfrak{a} < k\}$$
  Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η $D$ δεν είναι $maximal$.

– Έστω, $\forall n, m \in \omega$ :

$$\begin{aligned}
&\hat{X}_n = X_n \setminus \bigcup_{m<n} X_m \\
&\implies \hat{X}_n = \bigcap_{m<n} (X_n \setminus X_m) = \bigcap_{m<n} (X_n \setminus (X_n \cap X_m)) \\
&\implies \hat{X}_n = X_n \setminus \bigcup_{m<n} (X_n \cap X_m) \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\forall n, m \in \omega$, τα $\hat{X}_n$ είναι άπειρα και ανά δύο ξένα ($(\hat{X}_n \cap \hat{X}_m) = \emptyset$, για $n \neq m$). Επίσης, ισχύει ότι:

$$\hat{X}_n =^* X_n \qquad (3.24)$$

αφού $\hat{X}_n = X_n \setminus \bigcup_{m<n} (X_n \cap X_m)$, όπου $X_n \cap X_m \in fin \implies \bigcup_{m<n} X_n \cap X_m \in fin$.

– Για $g \in \omega^\omega$, έστω :

1. $e_g^n \longrightarrow$ το ελάχιστο στοιχείο του $\hat{X}_n$, που είναι μεγαλύτερο του $g(n)$, δηλαδή $e_g^n > g(n)$ και $e_g^n \in \hat{X}_n$
2. $E_g = \{e_g^n : n \in \omega\}$

Το $E_g$ περιέχει 1 στοιχείο από κάθε $\hat{X}_n$, άρα θα ισχύει:

* το $E_g$ είναι άπειρο, αφού τα $\hat{X}_n$ είναι ξένα ανά δύο.
* $\forall n \in \omega : E_g \perp \hat{X}_n \longrightarrow E_g \perp X_n$, αφού $\hat{X}_n =^* X_n$ από σχέση (3.24). Άρα,

$$E_g \cap X_n \in fin \text{ (από τον ορισμό των σχεδόν ξένων υποσυνόλων)} \qquad (3.25)$$

– Για $\omega \leq \alpha < k$ :

$$X_a \cap X_n \in fin$$

Θεωρούμε $f_a$, έτσι ώστε όλα τα στοιχεία της τομής $X_a \cap X_n$ να είναι μικρότερα του $f_a(n), \forall n \in \omega$ (Σχήμα 9), δηλαδή:

$$f_a(n) > max(X_a \cap X_n)$$

– Αφού $\alpha < k < \mathscr{b}$, η οικογένεια $\{f_a : \omega \leq \mathscr{a} < k\}$ δεν θα είναι *unbounded*, που σημαίνει ότι θα υπάρχει $g$, τέτοιο ώστε:

$$g \geq^* f_a, \forall a$$

– Για κάθε $n$, για το οποίο ισχύει $g(n) \geq f_a(n)$, θα ισχυεί επίσης ότι:

$$e_g^n \notin X_a$$

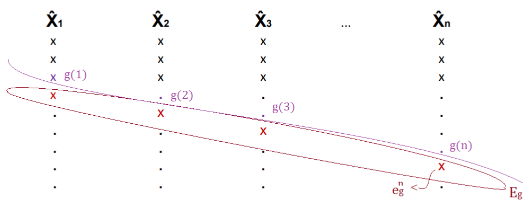
αφού $e_g^n > g(n) \geq f_a(n)$, αφού λόγω του ορισμού που έχουμε δώσει παραπάνω για τα $e_g^n$, το $e_g^n$ ανήκει στο $X_n$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned}
&e_g^n \in E_g \cap X_a \implies g(n) < f_a(n) \text{ άρα} \\
&E_g \cap X_a \in fin \implies E_g \perp X_a \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

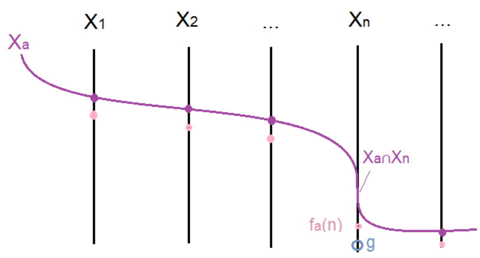
- Έστω $A$ η οικογένεια που αποτελείται από την ένωση των $\{X_a : \mathfrak{a} < k\}$, $\{e_g^n : n \in \omega\}$, δηλαδή $A = D \cup \{E_g\}$.

Προφανώς, θα ισχύει ότι $E_g, X_a \in A$. Άρα από την σχέση (3.26) και τον ορισμό για τις σχεδόν ξένες οικογένειες προκύπτει ότι η $A$ είναι μία σχεδόν ξένη οικογένεια συνόλων. Αυτό σημαίνει ότι η $D$ δεν μπόρει να είναι μεγιστική σχεδόν ξένη οικογένεια. Επομένως, αφού αποδείξαμε ότι η $D$ δεν μπορεί να είναι μεγιστική, τότε θα ισχύει $k \leq \mathfrak{a}$. Άρα,

$$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$$




Σχήμα 8: Απεικόνιση των συνόλων $\hat{X}_n$




Σχήμα 9: Απεικόνιση των συνόλων $X_n$ και $X_a$

- $\underline{\mathfrak{a} \leq c}$ :

Στο Λήμμα 3.3.1 αποδείξαμε ότι ύπαρχει σχεδόν ξένη οικογένεια $D \subseteq [\omega]^\omega$, τετοιά ώστε $|D| = c$. Άρα, θα ισχύει :

$$\mathfrak{a} \leq c$$

□

## 3.4 Ιδιότητες της Τομής Συνόλων

Η τόμη συνόλων είναι μία βασική έννοια στα μαθηματίκα, η οποία, μαζί με τις ιδιότητες της, χρησιμοποιείται σε διάφορους κλάδους, όπως αυτοί της ανάλυσης και της θεωρίας συνόλων. Η Ιδιότητα της Πεπερασμένης Τομής ($FIP$), η Ισχυρή Ιδιότητα της Πεπερασμένης Τομής ($SFIP$) και η Ψευδοτομή είναι μερικά παραδείγματα ιδιοτήτων της τομής, που έχουν μελετηθεί αρκετά, καθώς παιζούν σημαντικό ρόλο στην μελέτη μαθηματικών εννοιών, όπως τα φίλτρα και τα υπερφίλτρα.
Μέσα από την μελέτη των ιδιοτήτων αυτών έχει οριστεί και ένα πληθικό αναλλοίωτο, που συμβολίζεται με $\mathfrak{p}$. Ο πληθάριθμος αυτός μετράει το μέγεθος της μικρότερης οικογένειας συνόλων που ικανοποιεί την $SFIP$ και δεν έχει καμία ψευδο-τομή. Η μελέτη του $\mathfrak{p}$ και της σχέσης του με τις ιδιότητες της τομής έχει οδηγήσει σε διάφορα ενδιαφέροντα αποτελέσματα στα μαθηματικά.
Στην ενότητα αυτή, θα δούμε τους ορισμούς των $FIP$ και $SFIP$, καθώς και της ψευδο-τομής και θα εξετάσουμε την σχέση τους με τον πληθάριθμο $\mathfrak{p}$. Ακόμη, θα συγκρίνουμε τον $\mathfrak{p}$ με άλλους πληθαρίθμους και θα δούμε μερικές εφαρμόγες του.

### 3.4.1 Πεπερασμένη, Άπειρη και Ψευδο-Τομή

**Ορισμός 3.4.1.** *Εστώ $E$ μία οικογένεια άπειρων συνόλων.*

- *(FIP) : Η $E$ έχει την **Ιδιότητα Πεπερασμένης Τομής** (Finite Intersection Property - FIP) αν για όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα, έστω $F$, της $E$, η τομή τους είναι μη-κενή. Με άλλα λόγια, η $E$ έχει την $FIP$ αν και μόνο αν $\forall F \in [E]^{<\omega}$ ισχύει:*

$$\bigcap F \neq \varnothing$$

- *(SFIP) : Η $E$ έχει την **Ισχυρή Ιδιότητα Πεπερασμένης Τομής** (Strong Finite Intersection Property - SFIP) αν για όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα $F$, της $E$, η τομή τους είναι άπειρη. Με άλλα λόγια, η $E$ έχει την $SFIP$ αν και μόνο αν $\forall F \in [E]^{<\omega}$ ισχύει:*

$$\bigcap F : \textit{άπειρη}$$

- *(Ψευδο-τομή) : Μία **ψευδο-τομή** (pseudo – intersection) της οικογένειας $E$ είναι ένα άπειρο σύνολο, το οποίο είναι σχεδόν υποσύνολο κάθε συνόλου της $E$. Επομένως, ένα σύνολο $K$ είναι μία ψευδο-τομή της $E$ αν και μόνο αν:*

  1. *$K$ : άπειρο*
  2. *$K \subseteq^* Z, \forall Z \in E$*

**Παρατήρηση:** Σε αντίθεση με την τομή όλων των συνόλων της $E$ ($\bigcap E$), η οποία είναι μοναδική, αν η $E$ έχει μία ψευδο-τομή τότε μπορούν να υπάρχουν και άλλες ψευδο-τομές.

**Παράδειγμα:** Ας δούμε ένα παράδειγμα οικογένειας συνόλων με παραπάνω από μία ψευδοτομές. Έστω η οικογένεια $E = \{Z_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ και $Z_n$ το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που πολλαπλασιάζονται με το $n$, δηλαδή $Z_n = \{nm : m \in \omega\} = \{n, 2n, 3n, ...\}$. Θέλουμε, αρχικά να δούμε αν η $E$ έχει τη $SFIP$ και στη συνέχεια άν έχει ψευδο-τομή, δηλαδή αν πληρεί τις δύο προυποθέσεις του ορισμού.

1. Για $F \in [E]^{<\omega}$ έστω $F = \{Z_{n_1}, ...Z_{n_k}\}$.
   Τότε θα ισχύει:
$$Z_{n_1 \dots n_k} = \{n_1 \cdots n_k, 2n_1 \cdots n_k, 3n_1 \cdots n_k ...\} \subseteq Z_{n_i}, \forall i = 1, ...k$$
$$\implies Z_{n_1 \dots n_k} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} Z_{n_i} \tag{3.27}$$
   Ας δούμε έδω ένα παράδειγμα, για να κατανοήσουμε καλύτερα γιατί ισχύει η σχέση (3.27).
   Έστω $n_1 = 2$ και $n_2 = 3$ :
   - $Z_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
   - $Z_3 = \{3, 6, 9, 12, ...\}$

   Τότε θα έχουμε : $Z_{2 \cdot 3} = Z_6 = \{6, 12, 18, ...\}$, για το οποίο όπως βλέπουμε από τα κοινά στοιχεία των συνόλων τους ισχύει: $Z_6 \subseteq Z_2 \cap Z_3$.
   Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι προφανές ότι η οικογένεια συνόλων $E$ έχει την $SFIP$, αφού η $\bigcap\limits_{i=1}^{k} Z_{n_i}$ θα είναι άπειρη.

2. Έστω $K = \{m! : m \in \omega\}$.
   Αν $m \geq n$, τότε $\forall n \in \omega$, θα ισχύει: $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdots m \in Z_n$ και άρα για $m \geq n$, το $n$ διαιρεί το $m!$.
   Επομένως, $K = \{1!, 2!, 3!, ...(n-1)!, n!, (n+1)!, ...\}$.
   Το σύνολο $K$ θα είναι όντως σχεδόν υποσύνολο του $Z_n$.
   Αυτό ισχυεί γιατί το σύνολο $K \setminus \{1!, ...(n-1)!\}$ είναι υποσύνολο του $Z_n$.

   π.χ. έστω :
$$K = \{1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, 7!, ...\} = \{1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, ...\} \subseteq Z_1$$
   αφού $Z_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} = \omega$. Επίσης θα ισχύει:
   - $K \setminus \{1\} \subseteq Z_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$
   - $K \setminus \{1, 2!\} \subseteq Z_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$
   - $K \setminus \{1, 2!, 3!\} \subseteq Z_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$

   Συνεπώς, βλέπουμε ότι γενικά $\forall n \in \omega$ ισχύει ότι:
$$K \setminus \{1, 2!, ..., (n-1)!\} \subseteq Z_n$$
   Αυτό σημαίνει ότι το $K \setminus Z_n$ είναι πεπερασμένο, άρα από τον ορισμό των σχεδόν ξένων υποσυνόλων:
$$K \subseteq^* Z_n$$
   Επίσης το $K$ είναι προφανώς ένα άπειρο σύνολο, αφού περιέχει όλα τα παραγοντικά των φυσικών αριθμών. Επομένως το $K$ θα είναι μία ψευδο-τομή της $E$, αφού πληρεί τις 2 προυποθέσεις του ορισμού.

   Έστω $K' = \{7m!, m \in \omega\} = \{7, 14, 42, 168, 840, ...\}$, το οποίο είναι ένα άπειρο σύνολο.
   Με την ίδια λογική που μελετήσαμε το σύνολο $K$ θα έχουμε:

- $K' \subseteq Z_1$
- $K' \setminus \{7 \cdot 1\} \subseteq Z_2$
- $K' \setminus \{7 \cdot 1, 7 \cdot 2!\} \subseteq Z_3$
- $K' \setminus \{7 \cdot 1, 7 \cdot 2!, 7 \cdot 3!\} \subseteq Z_4$

Άρα, $\forall n \in \omega$ ισχύει ότι:

$$K' \setminus \{7 \cdot 1, 7 \cdot 2!, ..., 7 \cdot (n-1)!\} \subseteq Z_n$$

Αυτό σημαίνει ότι :

$$K' \setminus Z_n \text{ πεπερασμένο } \implies K' \subseteq^* Z_n$$

Επομένως, το $K'$ μπορεί να είναι μία ψευδο-τομή της $E$, αφού πληρούνται οι 2 προυποθέσεις του ορισμού.

### 3.4.2 Το πληθικό αναλλοίωτο $\mathfrak{p}$

**Ορισμός 3.4.2** (Ο πληθάριθμος $\mathfrak{p}$). *Ο πληθάριθμος $\mathfrak{p}$ είναι το ελάχιστο μέγεθος μίας οικογένειας $E \subseteq [\omega]^\omega$, έτσι ώστε η $E$ :*

1. *να έχει την Ισχυρή Ιδιότητα Πεπερασμένης Τομής (SFIP)*
2. *να μην έχει καμία ψευδο-τομή.*

**Παράδειγμα:** Μιας και δεν είναι αρκετά προφανές ότι μπορεί να υπάρχει μία τέτοια οικογένεια συνόλων, θα δούμε εδω ένα παράδειγμα. Έστω:

- $E = \{\omega \setminus x : x \in D\}$, όπου $D$ : $mad$ οικογένεια και
- $F = \{\omega \setminus x_1, \omega \setminus x_2, ..., \omega \setminus x_n\}$, όπου $x_1, ..., x_n \in D$

Αρχικά, θέλω να δείξω ότι η $E$ έχει την $SFIP$ και στη συνέχεια ότι δεν έχει ψευδο-τομή.

1. Για να δείξουμε ότι η $E$ έχει την $SFIP$, ουσιαστικά αρκεί να δείξουμε ότι η $\bigcap F$ είναι άπειρη (λόγω του ορισμού της $SFIP$). Επειδή η $D$ είναι άπειρη μπορούμε να διαλέξουμε ένα σύνολο $z \in D$, έτσι ώστε $z \neq x_1, ...x_n$.
   Θεωρώ το σύνολο :

   $$\Omega = z \setminus \bigcup \{z \cap x_1, ..., z \cap x_n\}$$

   για το οποίο θα ισχύει:

   (α′) Αφού $z, x_1, ..., x_n \in D$ και η $D$ είναι σχεδόν ξένη οικογένεια από τον ορισμό έχουμε:

   $$z \cap x_1 \in fin, ..., z \cap x_n \in fin$$

   (β′) Από το (α′) :

   $$z \cap x_1 \in fin, ..., z \cap x_n \in fin \implies \bigcup \{z \cap x_1, ..., z \cap x_n\} \in fin$$

Επομένως, δεδομένου ότι το $z$ είναι άπειρο, από τα (α′), (β′) προκύπτει ότι το σύνολο $\Omega$ είναι άπειρο. Επίσης θα ισχύει:

$$\Omega \cap x_1 = \varnothing, ..., \Omega \cap x_n = \varnothing,$$

λόγω του ορισμού που δώσαμε στο $\Omega$. Επομένως,

$$\Omega \subseteq \omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{x_1, ..., x_n\} \implies$$

$$\Omega \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (\omega \setminus x_i) \tag{3.28}$$

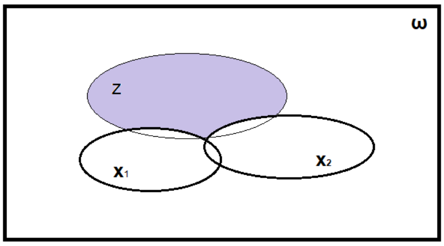
Όμως, γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\omega \setminus x_i) = \bigcap F \tag{3.29}$$

Άρα, από (3.28),(3.29):

$$\Omega \subseteq \bigcap F$$

Όμως, όπως δείξαμε προηγουμένως το $\Omega$ είναι άπειρο, που σημαίνει ότι και η $\bigcap F$ θα είναι άπειρη. Επομένως, η οικογένεια $E$ έχει την $SFIP$.




Σχήμα 10: Απεικόνιση του συνόλου $\Omega$ (γραμμοσκιασμένο σύνολο)

2. Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι η $E$ δεν έχει ψευδο-τομή.
Έστω $K$ μία ψευδο-τομή της $E$. Τότε, με βάση τον ορισμό της ψευδο-τομής, για κάθε $x \in D$ θα ισχύει :

$$K \subseteq^* (\omega \setminus x) \implies K \setminus (\omega \setminus x) \in fin \implies K \cap x \in fin \implies K \perp x$$

Από τον ορισμό των σχεδόν ξένων οικογενειών ($a.d.$) θα ισχύει : $D \cup \{K\}$ $a.d.$, το οποίο είναι άτοπο, αφού η $D$ είναι η $mad$ οικογένεια .
Άρα, η $E$ δεν έχει ψευδο-τομή.

Αφού είδαμε ένα παράδειγμα μεγιστικής οικογένειας με τη $SFIP$ που δεν έχει ψευδοτομή, θα δούμε τι τιμές μπορεί να πάρει ο πληθάριθμος.

**Λήμμα 3.4.1.** $\aleph_1 \leq \mathfrak{p}$

**Απόδειξη:**

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε οικογένεια συνόλων $E$ με πληθικότητα μικρότερη του $\aleph_1$, δηλαδή $|E| < \aleph_1 \implies |E| \leq \aleph_0$, η οποία έχει την $SFIP$ θα έχει και ψευδο-τομή.

- Έστω, άρα, ότι η $E$ είναι η εξής: $E = \{Z_i : i \in \omega\}$ και ότι κάθε $Z_i$ είναι άπειρο.
  Επειδή έχει τη $SFIP$, η τομή των πεπερασμένων υποσυνόλων των άπειρων συνόλων $Z_i$ θα είναι άπειρη, δηλαδή:

$$\bigcap_{i=1}^{n} Z_i : \text{άπειρη} \ , \forall n \in \omega$$

- Διαλέγω : $z_{n+1} \in \bigcap_{i=1}^{n+1} Z_i \setminus \{z_1, ..., z_n\}$. Έχουμε:
  - $z_1 \in Z_1$
  - $z_2 \in Z_1 \cap Z_2 \setminus \{z_1\}$
  - $z_3 \in Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 \setminus \{z_1, z_2\}$
  - $z_k \in \bigcap_{i=1}^{k} Z_i \setminus \{z_1, ..., z_{k-1}\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} Z_i$ για $m \leq k$

  Έστω το σύνολο: $Z = \{z_n : n \in \omega\} = \{z_1, z_2, z_3, ...\}$
  Άρα :

$$Z \setminus \{z_1, ..., z_{i-1}\} \subseteq Z_i \implies$$
$$Z \subseteq^* Z_i \ , \forall i \in \omega$$

  Επομένως, το $Z$ θα είναι ψευδο-τομή της $E$.
  Άρα, κάθε οικογένεια $E$ με πληθικότητα μικρότερη του $\aleph_1$ που έχει τη $SFIP$ έχει και ψευδο-τομή. Λαμβάνοντας υπόψη το συμπέρασμα αυτό και τον ορισμό για το $\mathfrak{p}$, προκύπτει :

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{p}$$

□

**Λήμμα 3.4.2.** *Έστω οι μη-κενές οικογένειες συνόλων :*

- $E \subseteq [\omega]^\omega$ *με* $|E| < \mathfrak{p}$ *και*
- $\mathscr{H} \subseteq [\omega]^\omega$ *με* $|\mathscr{H}| < \mathfrak{p}$

*Υποθέτουμε ότι για κάθε σύνολο $H$ που ανήκει στην οικογένεια $\mathscr{H}$, το σύνολο $\{Z \cap H : Z \in E\}$ έχει την $SFIP$. Τότε, η $E$ θα έχει μία ψευδο-τομή $K$, έτσι ώστε η τομή $K \cap H$ να έιναι άπειρη, για κάθε $H \in \mathscr{H}$.*

**Απόδειξη:**

Για να αποδείξουμε ότι η τομη $K \cap H$ είναι άπειρη θα δούμε 2 περιπτώσεις για την οικογένεια $\mathscr{H}$, μία κατα την οποία θα αποτελείται από ένα σύνολο και μία που θα είναι άπειρη.

<u>1η Περίπτωση</u> : Έστω $\mathscr{H} = \{H\}$. Στην περίπτωση αυτή, είναι προφανές ότι:

$$|\{Z \cap H : Z \in E\}| \leq |E| < \mathfrak{p}$$

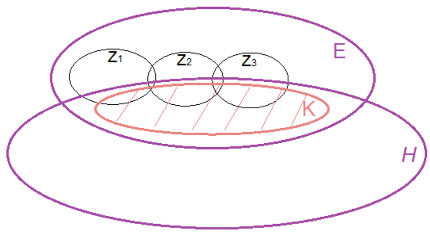
Από τον Ορισμό 3.4.2, όταν μία οικογένεια έχει πληθικότητα μικρότερη του $\mathfrak{p}$ και έχει την $SFIP$ θα έχει και ψευδο-τομή. Επομένως, το σύνολο $\{Z \cap H : Z \in E\}$ έχει ψευδο-τομή, έστω $K$. Από τον ορισμό της θα ισχύει:

$$\begin{aligned} &K \subseteq^* Z \cap H \subseteq Z, H \implies \\ &K \subseteq^* Z \text{ και } K \subseteq^* H, \forall Z \in E \end{aligned}$$

Άρα, η $K$ θα είναι επίσης ψευδο-τομή της $E$ και του $H$. Επίσης θα είναι ένα άπειρο σύνολο, λόγω του ορισού της ψευδο-τομής. Άρα τα $Z$ και $H$ θα είναι επίσης άπειρα, αφού το $K$ είναι σχεδόν υποσύνολό τους. Επομένως, έχοντας αποδείξει για τα σύνολα $K, H$ τα εξής:

1. $K \subseteq^* H$ και
2. $K, H$ : άπειρα

συμπεραίνουμε ότι, η τομή τους $(K \cap H)$ θα είναι επίσης άπειρη.




Σχήμα 11: Απεικόνιση των οικογενειών $E$, $\mathscr{H}$ και της ψευδο-τομής $K$

<u>2η Περίπτωση</u> : Εδώ θα εφαρμόσουμε τον ορισμό του $\mathfrak{p}$ σε οικογένειες υποσυνόλων του αριθμήσιμου συνόλου $J = [\omega]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$.

- Θεωρώ τα παρακάτω σύνολα :
  - $\underline{\underline{\forall Z \in E}}$ : $\hat{Z} = \{s \in [\omega]^{<\omega} : s \subseteq Z\} = [Z]^{<\omega}$
  - $\underline{\underline{\forall H \in \mathscr{H}}}$ : $\tilde{H} = \{s \in [\omega]^{<\omega} : s \cap H \neq \varnothing\}$
  - $\underline{\underline{\forall \ell \in \omega}}$ : $T_\ell = \{s \in [\omega]^{<\omega} : min(s) > \ell\}$

Παίρνοντας τώρα την ένωση των τριών συνόλων, έστω $E^*$, και την τομή ενός πεπερασμένου υποσυνόλου τους, έστω $\Omega$, έχουμε:

$$E^* = \left\{\hat{Z} : Z \in E\right\} \cup \left\{\tilde{H} : H \in \mathscr{H}\right\} \cup \{T_\ell : \ell \in \omega\} \subseteq \left[[\omega]^{<\omega}\right]^\omega,$$

$$\Omega = \hat{Z}_1 \cap \hat{Z}_2 \cap ... \cap \hat{Z}_{n_1} \cap \tilde{H}_1 \cap \tilde{H}_2 \cap ... \cap \tilde{H}_{n_2} \cap T_{\ell_1} \cap ... \cap T_{\ell_n},$$

όπου $\left[[\omega]^{<\omega}\right]^\omega$: άπειρα υποσύνολα πεπερασμένων υποσυνόλων του ω και $T_{\ell_1} \cap ... \cap T_{\ell_n} = T_{max\{\ell_1,...,\ell_n\}}$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο που αποτελείται από το $Z = Z_1 \cap ... \cap Z_{n_1}$ που συναντά κάθε $H_i$ σύνολο, είναι άπειρο, αφού το $\{Z \cap H : Z \in E\}$ έχει την $SFIP$ (από υπόθεση). Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει $s \in J$ με αυθαίρετα μεγάλο ελάχιστο, τέτοιο ώστε $s \subseteq Z$ και το $s$ να συναντά κάθε $H_i$. Άρα, η τομή $\Omega$ είναι άπειρη, που σημαίνει ότι η $E^*$ έχει την $SFIP$. Ακόμη, για την ένωση $E^*$ θα ισχύει:

- $\mid \left\{\hat{Z}\right\} \mid < \mathfrak{p}$ (εξ' ορισμού)
- $\mid \left\{\tilde{H}\right\} \mid < \mathfrak{p}$ (εξ' ορισμού)
- $\mid \{T_\ell\} \mid \leq \omega < \mathfrak{p}$

Επομένως, για την πληθικότητα της $E^*$ προκύπτει:

$$\mid E^* \mid < \mathfrak{p} \tag{3.30}$$

Αυτό σημαίνει ότι η $E^*$ θα έχει ψευδο-τομή, έστω $M$.

- Έστω $\ell'$, για το οποίο ισχύει $\ell' > \ell$ και $m_1, m_2, ..., m_{n_2} > \ell'$ :
  - $m_1 > \ell' : m_1 \in Z_1 \cap ... \cap Z_{n_1} \cap H_1$
  - $m_2 > \ell' : m_2 \in Z_1 \cap ... \cap Z_{n_1} \cap H_2$

    ...
  - $m_{n_2} > \ell' : m_{n_2} \in Z_1 \cap ... \cap Z_{n_1} \cap H_{n_2}$

  Οι παραπάνω τομές είναι άπειρα σύνολα, αφού από την εκφώνηση του Λήμματος έχουμε υποθέσει ότι το σύνολο $\{Z \cap H : \forall Z \in E\}$ έχει την $SFIP$.

- Έστω $M$ το σύνολο των $m_1, m_2, ..., m_{n_2}$, δηλαδή $M = \{m_1, m_2, ..., m_{n_2}\}$, για το οποίο ισχύει:
  - $M \in \hat{Z}_1, ..., \hat{Z}_{n_1} \longrightarrow$ αυτό σημαίνει ότι το $M$ θα ανήκει και στο $Z$, αφού το $\hat{Z}$ είναι το σύνολο που περιέχει πεπερασμένα υποσύνολα του $Z$. Άρα,

    $$M \in Z \tag{3.31}$$

  - $m_1 \in H_1 \implies M \in \tilde{H}_1$
  - $m_2 \in H_2 \implies M \in \tilde{H}_2$

    ...
  - $m_{n_2} \in H_{n_2} \implies M \in \tilde{H}_{n_2}$

  Άρα, $M \in \tilde{H}_1 \cap \tilde{H}_2 \cap ... \cap \tilde{H}_{n_2}$. Επομένως, το $M$ συναντά κάθε $H_i$.

- Έστω ότι το σύνολο $K = \bigcup M \subseteq \omega$. Το $K$ είναι άπειρο, αφού το $M$ είναι ψευδο-τομή της $E^*$. Αρχικά, θέλω να δείξω ότι το K είναι ψευδο-τομή της E, και στη συνέχεια ότι το σύνολο $K \cap H$ είναι άπειρο, για κάθε $H$.

  – Αφού η $M$ είναι ψευδοτομή της $E^*$, θα ισχύει:

  $$M \subseteq^* \hat{Z} \ , \ \forall Z \in E$$

  Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει σύνολο $F \subseteq M$, πεπερασμένο (λόγω του ορισμού των σχεδόν υποσυνόλων), τέτοιο ώστε, για $s \in \hat{Z}$:

  $$s \in M \text{ και } s \notin Z \implies s \in F$$

  Επομένως, θα ισχύει :

  $$\begin{aligned} &\bigcup M \setminus Z = \bigcup F \\ &\overset{\cup M = K}{\Longleftrightarrow} K \setminus Z = \bigcup F \in fin \text{ (αφού } F\text{: πεπερασμένο)} \\ &\implies K \subseteq^* Z \end{aligned} \tag{3.32}$$

  Άρα, λόγω της σχέσης (3.32), το σύνολο $K$ είναι ψευδο-τομή της οικογένειας $E$.

  – Αφού, το $M$ είναι ψευδο-τομή της $E^*$, για $H \in \mathscr{H}$ και $\ell \in \omega$ θα ισχύει:

  $$\begin{aligned} &M \subseteq^* \tilde{H} \text{ και } M \subseteq^* T_\ell \implies \\ &M \subseteq^* \tilde{H} \cap T_\ell \implies \\ &M \setminus \left(\tilde{H} \cap T_\ell\right) \in fin \implies \\ &\left(M \setminus \tilde{H}\right) \cup (M \setminus T_\ell) \in fin \end{aligned}$$

  Επειδή το $\ell$ είναι αυθαίρετο, έστω ότι για κάθε $\ell \in \omega$, θα υπάρχει $s \in M$ με $s \in \tilde{H} \cap T_\ell$, έτσι ώστε $s \cap H \neq \varnothing$ (από τον ορισμό του συνόλου $\tilde{H}$) και $min(s) > \ell$ (από τον ορισμό του συνόλου $T_\ell$).

  Διαλέγω :
  * $s_1 \in M$ με $s_1 \cap H \neq \varnothing$
  * $s_2 \in M$ με $s_2 \in \tilde{H} \cap T_{maxs_1}$

    ...
  * $s_{n+1} \in M$ με $s_{n+1} \in \tilde{H} \cap T_{maxs_n}$

  Λόγω της ανισότητας $min(s) > \ell$, θα ισχύει:

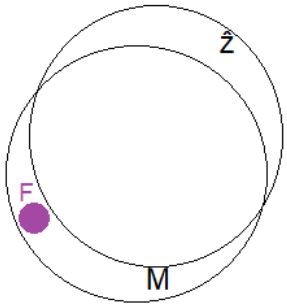
  $$max(s_1) < min(s_2) \leq max(s_2) < min(s_3) \leq max(s_3) < min(s_4) \leq ...$$

  Αφού η ένωση των $M_i$ ισούται με $K$, τότε για κάθε $i \in \omega$, κάθε σύνολο $M_i$ θα είναι υποσύνολο του $K$, δηλαδή $M_i \subseteq K$ και $M_i \cap H \neq \varnothing$.
  Έστω $n_i \in M_i \cap H$ και $N = \{n_i : n_1 < n_2 < n_3 < ...\}$ άπειρο σύνολο.
  Συνεπώς, για το $N$ θα ισχύει:

  $$N \subseteq K \text{ και } N \subseteq H$$

  Άρα, το $K \cap H$ είναι άπειρο.

□




Σχήμα 12: Παράδειγμα του συνόλου $F$

Αφού ορίσαμε τον πληθάριθμο $\mathfrak{p}$, θα δούμε στο παρακάτω Λήμμα την θέση που έχουν οι πληθάριθμοι $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}, a$ και $\mathfrak{p}$ ανάμεσα στο $\aleph_1$ και το $c$.

**Λήμμα 3.4.3.** *Συγκρίνοντας τους πληθαρίθμους $\aleph_1, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{p}$ και $c$ προκύπτουν οι εξής ανισότητες:*

1. $\aleph_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \leq c$
2. $\aleph_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq c$

**Απόδειξη:**

$\underline{\aleph_1 \leq \mathfrak{p}}$ : έχει αποδειχτεί στο Λήμμα (3.4.1)

$\underline{\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \leq c}$ : έχει αποδειχτεί στο Λήμμα (3.3.2)

$\underline{\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq c}$ : έχει αποδειχτεί στο Λήμμα (3.2.2)

Συνεπώς, η μόνη σχέση που δεν έχει αποδειχτεί μέχρι στιγμής είναι η : $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$.

$\underline{\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}}$ : Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall k < \mathfrak{p} \implies k < \mathfrak{b}$.

- Έστω $B \subseteq \omega^\omega$ μία οικογένεια συνόλων με πληθικότητα $k$, δηλαδή $|B| = k < \mathfrak{p}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $B$ είναι φραγμένη, δηλαδή :

  $$\exists g \ , \forall f \in B : f \leq^* g$$

  Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα (3.4.2) σε οικογένειες υποσυνόλων του αριθμήσιμου συνόλου $\omega \times \omega$ (παράδειγμα στο Σχήμα 13).

- Έστω :

  $$Z_f = \{(x, y) \in \omega \times \omega : y > f(x)\}, \ \forall f \in B \text{ και}$$

$$E = \{Z_f : f \in B\}$$

Για την πληθικότητα της $E$ θα ισχύει : $|E| \leq k$, αφού $B = k$.

- Έστω :

$$H_j = \{j\} \times \omega \text{ και } \mathscr{H} = \{H_j : j \in \omega\}$$

Προφανώς, για την πληθικότητα της οικογένειας $\mathscr{H}$ ισχύει : $|\mathscr{H}| = \omega \leq k$.

Θέλουμε, αρχικά, να δείξουμε ότι για κάθε $j$, το σύνολο $\{Z_f \cap H_j : f \in B\}$ έχει την $SFIP$, έτσι ώστε να ισχύει το Λήμμα (3.4.2).

- Έστω $f_1, ..., f_n \in B$. Τότε θα έχουμε:

$$Z_{f_1} \cap ... \cap Z_{f_n} \cap H_j = \{(j, l) : l > max\,\{f_1(j), ..., f_n(j)\}\} \text{ άπειρο}$$

Επομένως, το $\{Z_f \cap H_j : f \in B\}$ έχει όντως την $SFIP$, που σημαίνει ότι σύμφωνα με το Λήμμα (3.4.2), η $E$ θα έχει μία ψευδο-τομή, έστω $K \subseteq \omega \times \omega$, έτσι ώστε η $K \cap H_j$ να είναι άπειρη για κάθε $j \in \omega$.

- Προφανώς, αφού το $K$ είναι ψευδο-τομή του $\{Z_f \cap H_j : f \in B\}$, η τομή του $K$ με κάθε $H_j$ είναι διάφορη του κενού, δηλαδή $K \cap H_j \neq \varnothing$. Άρα, θα ισχυεί:

$$\begin{aligned} &\exists\; g \in \omega^\omega,\ \forall j \in \omega : (j, g(j)) \in K \cap H_j \implies \\ &(j, g(j)) \in K \end{aligned} \tag{3.33}$$

Όμως, το $K$ είναι ψευδο-τομή της $E = \{Z_f : f \in \omega\}$, που σημαίνει με βάση τον ορισμό, ότι το $K$ θα είναι σχεδόν υποσύνολο σε κάθε $Z_f$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} &K \subseteq^* Z_f \implies \\ &K \setminus Z_f \in fin,\ \forall f \in B \end{aligned} \tag{3.34}$$

Από τις σχέσεις (3.33), (3.34) έχουμε:

$$\begin{aligned} &\{(j, g(j)) : j \in \omega\} \setminus Z_f \in fin \implies \\ &g \subseteq^* Z_f \end{aligned}$$

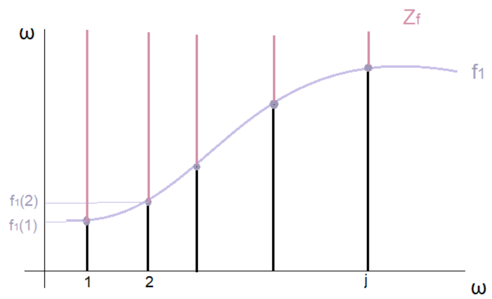
Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει $f \subseteq \omega$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε για κάθε $j$ που δεν ανήκει στο $f$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} &(j, g(j)) \in Z_f \implies \qquad (\text{από τον ορισμό του } Z_f = \{(x, y) : y > f(x)\}) \\ &g(j) > f(j) \implies \\ &g \geq^* f \end{aligned}$$

Αφού υπάρχει $g$ τέτοιο ώστε $g \geq^* f$, η οικογένεια $B$ θα είναι φραγμένη, άρα:

$$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$$

□




Σχήμα 13: Παράδειγμα της οικογένειας συνόλων $Z_f$ με $f = f_1 \in B$

**Λήμμα 3.4.4.** *Αν έχουμε έναν πληθάριθμο $k$ με $\aleph_0 \leq k < \mathfrak{p}$, τότε θα ισχύει:*

$$2^k = c$$

**Απόδειξη:**
Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι αν $\aleph_0 \leq k < \mathfrak{p}$ τότε $2^k = c$. Αρχικά, είναι προφανές ότι αν το $k$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\aleph_0$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} &\aleph_0 \leq k \implies \\ &2^{\aleph_0} \leq 2^k \implies 2^{\omega} \leq 2^k \implies \\ &c \leq 2^k \end{aligned} \tag{3.35}$$

Επομένως, για να ισούται το $c$ με $2^k$, αρκεί να δείξω ότι ισχύει και η ανισότητα : $c \geq 2^k$.

- Φτιάχνουμε ένα δέντρο $T =^{\leq k} 2 = \bigcup \{^{\xi}2 : \xi \leq k\}$,το οποίο μπορούμε να το φανταστούμε σαν ένα δέντρο, του οποίου τα στοιχεία είναι ακολουθίες απο 0 και 1. Για το T έχουμε:
  - $\tau \in T \iff \exists \xi \leq k$, έτσι ώστε $\tau : \xi \to \{0, 1\}$
  - Το μήκος του $\tau$ θα είναι : $lh(\tau) = \xi$
  - Αν $\tau \in T$ , $\tau : \xi \to \{0, 1\}$ και $\xi < k$, τότε:

$$\tau^\frown 0 : \xi + 1 \to \{0, 1\}$$

$$\tau^\frown 0(j) = \begin{cases} \tau(j) & \text{αν } j \leq \xi \\ 0 & \text{αν } j = \xi + 1 \end{cases} \tag{3.36}$$

  Αντίστοιχα, ορίζεται και το $\tau^\frown 1$ κ.ο.κ (παράδειγμα στο Σχήμα 14).

- Ορίζω αναδρομικά ως προς το μήκος του $\tau$, το σύνολο Γ:

  $$\Gamma : T \to [\omega]^{\omega} \cup \{\perp\}, \qquad \text{( όπου } \perp\text{: 1 οποιοδήποτε στοιχείο)}$$

  έχοντας τρεις περιπτώσεις, ως εξής:

1. $\Gamma(\varnothing) = \omega$
2. Αν $\xi = j+1$ και $\tau : \xi \to \{0,1\}$, δηλαδή ο $\xi$ είναι ο επόμενος του $j$, και $\Gamma(\tau_j) \in [\omega]^{\omega}$, όπου $\tau_j = \tau \restriction j$ (δηλαδή το $\tau$ περιορισμένο μέχρι το $j$) και το $\Gamma(\tau_j)$ είναι άπειρο υποσύνολο του ω, έστω:

$$\Gamma(j) = \omega_0 \cup \omega_1 \text{ και } \omega_0 \cap \omega_1 = \varnothing, \qquad\qquad \omega_0, \omega_1 \in [\omega]^{\omega}$$

ορίζουμε

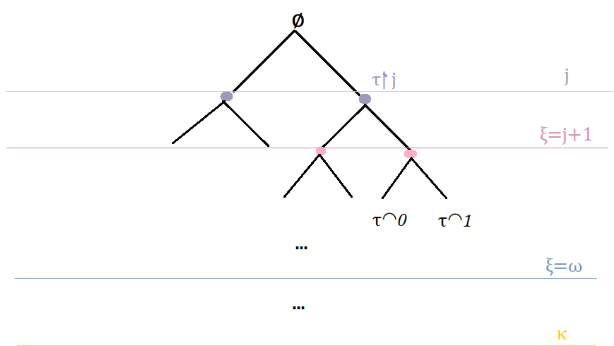
$$\Gamma(\tau) = \begin{cases} \omega_0 & \text{αν } \tau = \tau_j^\frown 0 \\ \omega_1 & \text{αν } \tau = \tau_j^\frown 1 \end{cases}$$

Αν $\Gamma(\tau_j) = \perp$ ή $\Gamma(\tau_j)$ πεπερασμένο, ορίζουμε $\Gamma(\tau) = \perp$.

3. Αν ο $\xi$ είναι οριακός, τότε :
   - για $j < \xi$ και $\tau : \xi \to \{0,1\} : \tau_j = \tau \restriction j$
     Στην περίπτωση αυτή, αν για κάθε $j < \xi$ το σύνολο $\Gamma(\tau_j)$ ανήκει στα άπειρα υποσύνολα του $\omega$ ($\Gamma(\tau_j) \in [\omega]^{\omega}$), που σημαίνει ότι και η οικογένεια $E = \{\Gamma(\tau_j) : j < \xi\}$ έχει τη $SFIP$, επειδή $\xi \leq k < \mathfrak{p}$. Ακόμη, επειδή ισχύει:

$$\xi \leq k < \mathfrak{p}$$

     η οικογένεια $E$ θα έχει ψευδοτομή (όπως αποδείξαμε στο Λήμμα (3.4.2)), έστω $\Gamma(\tau_\xi)$.
   - διαφορετικά, ορίζουμε $\Gamma(\tau_j) = \perp$




Σχήμα 14: Παράδειγμα του δέντρου $T$

**Ισχυρισμός:** Για κάθε $\tau \in T$, για το σύνολο $\Gamma(\tau)$ θα ισχύει: $\Gamma(\tau) \in [\omega]^{\omega}$. Επίσης, το $\Gamma(\tau)$ θα είναι μία ψευδο-τομή της οικογένειας $E = \{\Gamma(\tau \restriction j) : j < \xi\}$.

**Απόδειξη Ισχυρισμού:**

1. Ισχύει για το $\varnothing$ : $\Gamma(\varnothing) = \omega$

2. Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλα τα $j < \xi$ και θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για το $\xi$:
   Έστω $\xi = j' + 1$ και $\tau : \xi \to \{0, 1\}$ (δηλαδή ο $\xi$ είναι ο επόμενος του $j'$).
   Αφού ο ισχυρισμός ισχύει για όλα τα $j$ θα ισχύει και για το $j'$, που σημαίνει ότι:
   $$\Gamma(\tau_{j'}) \in [\omega]^{\omega}$$
   Συνεπώς το $\Gamma(\tau)$ είναι άπειρο υποσύνολο του $\Gamma(\tau_{j'})$, που σημαίνει ότι θα ισχύει:
   $$\Gamma(\tau) \in [\omega]^{\omega}$$
   Από την επαγωγική υπόθεση, το $\Gamma(\tau_{j'})$ είναι ψευδο-τομή της οικογένειας $\{\Gamma(\tau_j) : j < j'\}$.
   Επίσης, ισχύει ότι $\Gamma(\tau) \subseteq \Gamma(\tau_{j'}),\ \forall \tau \in T$.
   Επομένως, το σύνολο $\Gamma(\tau)$ θα είναι ψευδο-τομή και της οικογένειας:
   $$\{\Gamma(\tau_j) : j < j'\} \cup \{\Gamma(\tau_{j'})\} = \{\Gamma(\tau \restriction j) : j < \xi\}$$
3. Αν το $\xi$ είναι οριακός, τότε για κάθε $j < \xi$, θα ισχύει: $\Gamma(\tau_j) \in [\omega]^{\omega}$.
   Η οικογένεια $\{\Gamma(\tau_j) : j < \xi\}$ έχει την $SFIP$, αφού αν $j_1 < j_2 < ... < j_n < \xi$, το $\Gamma(\tau_{j_n})$ είναι η ψευδο-τομή της οικογένειας $\{\Gamma(\tau_j) : j < j_n\}$. Αυτό σημαίνει ότι:
   $$\Gamma(\tau_{j_n}) \subseteq^* \Gamma(\tau_{j_1}), ..., \Gamma(\tau_{j_{n-1}})$$
   Άρα, θα υπάρχουν πεπερασμένα υποσύνολα του ω, έστω $F_1, ..., F_{n-1}$, τέτοια ώστε:
   $$\Gamma(\tau_{j_n}) \setminus F_1 \subseteq \Gamma(\tau_{j_1}), ..., \Gamma(\tau_{j_n}) \setminus F_{n-1} \subseteq \Gamma(\tau_{j_{n-1}})$$
   Έστω $F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{n-1}$, που είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του ω (αφού $F_i$ πεπερασμένα). Συνεπώς, το σύνολο $\Gamma(\tau_{j_n}) \setminus F$ για το οποίο ισχύει:
   $$\Gamma(\tau_{j_n}) \setminus F \subseteq \Gamma(\tau_{j_1}), ...\Gamma(\tau_{j_{n-1}}), \Gamma(\tau_{j_n}),$$
   θα είναι άπειρο. Άρα, θα ισχύει: $\Gamma(\tau_{j_1}) \cap ... \cap \Gamma(\tau_{j_n}) \in [\omega]^{\omega}$.
   Επειδή $|\{\Gamma(\tau_j) : j < \xi\}| = |\xi| \leq k < \mathfrak{p}$, από το Λήμμα (3.4.2), θα υπάρχει ψευδο-τομή της οικογένειας $\{\Gamma(\tau_j) : j < \xi\}$, και συνεπώς από τον ορισμό, η $\Gamma(\tau_\xi)$ είναι μία τέτοια.

**Ισχυρισμός** : Για κάθε $\xi \leq k$, η οικογένεια συνόλων $\{\Gamma(\tau) : \tau \in T \ \wedge \ lh(\tau) = \xi\}$ είναι σχεδόν ξένη.

**Απόδειξη Ισχυρισμού:** Με επαγωγή ως προς το $\xi$ έχουμε:

1. Προφανώς, ο ισχυρισμός ισχύει για το κενό σύνολο.
2. Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλα τα $j < \xi$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το $\xi$.
   - Εστώ $\tau_0, \tau_1$ με:
     * $lh(\tau_0) = lh(\tau_1) = \xi$
     * $\tau_0 \neq \tau_1$
   - Θέτω $j_0 = min\,\{j : \tau_0 \restriction j \neq \tau_1 \restriction j\} \leq \xi$.
     Έστω ότι θα υπάρχει $j'$, τέτοιο ώστε $j_0 = j' + 1$, γιατί αν δεν υπάρχει ένα τέτοιο $j'$, ο $j_0$ θα είναι οριακός. Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει:
     $$\tau_0 \restriction j_0 = \bigcup_{j<j_0} \tau_0 \restriction j \text{ και } \tau_1 \restriction j_0 = \bigcup_{j<j_0} \tau_1 \restriction j$$
     Επειδή, όμως, $\tau_0 \restriction j_0 \neq \tau_1 \restriction j_0$, έπεται ότι θα υπάρχει $j < j_0$, έτσι ώστε: $\tau_0 \restriction j \neq \tau_1 \restriction j$, που είναι άτοπο.

– Για το $j'$ έχουμε:

$$\xi \geq j_0 = j' + 1 \implies$$
$$j' < \xi$$

Αφού $j_0 = j' + 1$, ο $j'$ θα είναι ο αμέσως προηγούμενος του $j_0$ και επειδή ο $j_0$ είναι ο ελάχιστος, για τον οποίο ισχύει: $\tau_0 \restriction j \neq \tau_1 \restriction j$, θα έχουμε:

$$\tau_0 \restriction j' = \tau_1 \restriction j'$$

– Έστω ότι:

$$\tau_0 \sqsupseteq (\tau_0 \restriction j')^\frown 0 \text{ και } \tau_1 \sqsupseteq (\tau_0 \restriction j')^\frown 1 \tag{3.37}$$

Από τις σχέσεις (3.37) προκύπτει ότι το $\Gamma(\tau_0)$ σχεδόν περιέχεται στο $\Gamma((\tau_0 \restriction j')^\frown 0)$, καθώς και ότι το $\Gamma(\tau_1)$ σχεδόν περιέχεται στο $\Gamma((\tau_0 \restriction j')^\frown 1)$, που σημαίνει ότι:

$$\Gamma(\tau_0) \cap \Gamma(\tau_1) \in fin \implies$$
$$\Gamma(\tau_0) \perp \Gamma(\tau_1) \tag{3.38}$$

Συνεπώς, λόγω της σχέσης (3.38) προκύπτει ότι η οικογένεια $\{\Gamma(\tau) : \tau \in 2^k\}$ είναι σχεδόν ξένη. Επίσης, για την πληθικότητα της ισχύει: $|\{\Gamma(\tau) : \tau \in 2^k\}| = 2^k$, ενώ $\Gamma(\tau) \subseteq \omega$, που σημαίνει ότι:

$$2^k \leq P(\omega) = 2^\omega \implies$$
$$2^k \leq c \tag{3.39}$$

Τέλος, από τις σχέσεις (3.35), (3.39) έχουμε:

$$c \leq 2^k \text{ και } c \geq 2^k \implies$$
$$c = 2^k$$

□

**Λήμμα 3.4.5.** *Έστω πληθάριθμος $k$ με $\aleph_0 \leq k < \mathfrak{p}$. Αν $\mathfrak{p} = c$, τότε ο $c$ είναι κανονικός και για όλα τα $k < c$, $2^k = 2^\omega = c$.*

**Απόδειξη:**

Θέλουμε να δείξουμε ότι αν ο $\mathfrak{p}$ ισούται με $c$, τότε ο $c$ είναι κανονικός πληθάριθμος και επίσης ισχύει $2^k = c$, $\forall k < c$.

- Έχουμε δείξει στο Λήμμα (3.4.4) ότι, για $\aleph_0 \leq k < \mathfrak{p}$, ισχύει:

$$2^k = c \implies$$
$$cf(2^k) = cf(c) \tag{3.40}$$

Από το Λήμμα του *König* γνωρίζουμε ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο $k$ ισχύει:

$$cf(2^k) > k \overset{(3.40)}{\implies}$$
$$cf(c) > k \tag{3.41}$$

Άρα $cf(c) \geq \wp$ και αν $\wp = c$ τότε:

$$cf(c) \geq c, \tag{3.42}$$

Επειδή $c \geq cf(c)$ (από τις ιδιότητες της ομοτελικότητας), έπεται η ισότητα:

$$cf(c) = c \tag{3.43}$$

Επομένως, $c$ είναι κανονικός πληθάριθμος.

- Έχουμε αποδείξει στο Λήμμα (3.4.4) ότι $2^k = c$ για $\aleph_0 \leq k < \wp$.
  Άρα, για $\wp = c$, θα ισχύει:

$$2^k = c$$

□

## 3.5 Φίλτρα και Υπερφίλτρα

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τα υπερφίλτρα, τα οποία αποτελούν μία γενίκευση της έννοιας του φίλτρου, ξεκινώντας από τις βασικές τους ιδιότητες. Αφού δώσουμε τον ορισμό των υπερφίλτρων θα δούμε μερικές σχετικές εφαρμογές και παραδείγματα, όπως τα $principal$ και τα $non-principal$ υπερφίλτρα. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την έννοια του χαρακτήρα ενός υπερφίλτρου, ο οποίος αποτελεί έναν πληθάριθμο που μετράει το μέγεθος μιας οικογένειας συνόλων που παράγουν ένα υπερφίλτρο και θα τον συγκρίνουμε με πληθικά αναλλοίωτα που έχουμε ορίσει στις προηγούμενες ενότητες.

### 3.5.1 Υπερφίλτρα: Βασικοί Ορισμοί, Ιδιότητες και Προτάσεις

**Ορισμός 3.5.1.** ***Υπερφίλτρο*** *(Ultrafilter): Ένα υπερφίλτρο $U$ σε ένα μη-κενό σύνολο $A$ είναι ένα φίλτρο στο $A$, τέτοιο ώστε για κάθε $X \subseteq A$, είτε το $X$ είτε το συμπλήρωμα του ανήκουν στο $U$, δηλαδή:*

$$X \in U \text{ ή } A \setminus X \in U$$

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει έναν εναλλακτικό και αρκετά χρήσιμο ορισμό για τα υπερφίλτρα.

**Πρόταση 1.** *Αν έχουμε ένα μη-κενό σύνολο $A$, τότε το $U$ είναι στο $A$ αν και μόνο αν είναι φίλτρο, το οποίο έχει επιπλέον την ιδιότητα να μην υπάρχει κανένα γνήσιο υπερσύνολο του $U$ που να είναι φίλτρο.*

**Ορισμός 3.5.2.** *Έστω $A$ ένα μη-κενό σύνολο. Ένα σύνολο $U \subseteq P(A)$ είναι ένα* ***υπερφίλτρο*** *στο $A$ αν και μόνο αν το $U$ είναι ένα μεγιστικό φίλτρο.*

**Ιδιότητες των Υπερφίλτρων:** Με βάση τις ιδιότητες που πρέπει να πληρεί ένα φίλτρο, όπως τις έχουμε ορίσει στην ενότητα (3.1), μπορούμε να ορίσουμε και τις ιδιότητες ενός υπερφίλτρου. Έστω ένα μη-κενό σύνολο $A$ και $F, U$ ένα φίλτρο και ένα υπερφίλτο του $A$ αντίστοιχα. Τότε το $U$ θα πρέπει να πληρεί τα παρακάτω:

1. $\varnothing \notin U$, $A \in U$
2. $\forall X, Y \in U$ ισχύει ότι: $X \cap Y \in U$
3. $\forall X, Y \subseteq A$ ισχύει ότι: $(X \supseteq Y \wedge Y \in U) \implies X \in U$
4. $\forall F$ φίλτρο στο $A : \neg U \subsetneqq F \implies U$ : μέγιστο φίλτρο

**Λήμμα 3.5.1.** *(The Ultrafilter Lemma): Για κάθε φίλτρο $F_0$ στο μη-κενό σύνολο $A$ υπάρχει ένα υπερφίλτρο $U$ στο $A$, τέτοιο ώστε $F_0 \subseteq U$.*

**Απόδειξη:**

Για να αποδείξουμε το λήμμα αρκεί να κατασκευάσουμε ένα μεγιστικό φίλτρο $F$, το οποίο να επεκτείνει το $F_0$.

- Έστω η οικογένεια συνόλων $\Omega$, η οποία περιέχει τα φίλτρα στο $A$, που επεκτείνουν το $F_0$, δηλαδή:

  $$\Omega = \{F : F \text{ φίλτρο στο } A \wedge F_0 \subseteq F\}$$

  Προφανώς, ισχύει ότι $F_0 \in \Omega$ και $\Omega \neq \varnothing$.
  Διατάσσουμε μερικά το $\Omega$ με τη σχέση $\subseteq$.

- Έστω μία μη-κενή αλυσίδα $C \subseteq \Omega$, δηλαδή μία αλυσίδα που αποτελείται από φίλτρα του $A$, για τα οποία ισχύει $F_0 \subseteq F$:

  $$C = \{F_i : i \in I\}$$

- Ορίζω το σύνολο $F$, ως εξής:

  $$F = \bigcup_{i \in I} F_i \supseteq F_i \text{ , } \forall i \in I$$

  Θα δείξουμε αρχικά ότι το $F$ είναι φίλτρο:

  1. $\varnothing \neq F$, γιατί $\forall i \in I : \varnothing \neq F_i$ (αφού τα $F_i$ είναι φίλτρα) και
     $A \in F$, γιατί $\forall i \in I : A \in F_i$ (αφού τα $F_i$ είναι φίλτρα)
  2. Για $A, B \in F = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$ θα υπάρχουν $i_A, i_B \in I$ τέτοια ώστε $A \in F_{i_A}$ και $B \in F_{i_B}$.
     Έστω $F_{i_A} \subseteq F_{i_B}$. Αυτό σημαίνει ότι:

     $$\begin{aligned} & A \in F_{i_A}, B \in F_{i_B} \overset{(F_{i_A} \subseteq F_{i_B})}{\Longrightarrow} \\ & A, B \in F_{i_B} \Longrightarrow \\ & A \cap B \in F_{i_B} \overset{(F_{i_B} \in F)}{\Longrightarrow} \\ & A \cap B \in F \end{aligned}$$

  3. Έστω $A \in F$ και $A \subseteq B$. Τότε, θα υπάρχει $i \in I$, τέτοιο ώστε:

     $$A \in F_i \overset{(A \subseteq B)}{\Longrightarrow} B \in F_i \overset{(F_i \in F)}{\Longrightarrow} B \in F$$

  Αφού το σύνολο $F$ ικανοποιεί τις 3 συνθήκες που απαιτούνται για να είναι ένα φίλτρο, συμπεραίνουμε ότι το $F = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$ είναι φίλτρο στο $\Omega$. Άρα, θα ισχύει $F_0 \subseteq F$, που σημαίνει ότι το $F$ θα είναι άνω φράγμα της $C$. Επομένως, το $\Omega$ θα ικανοποιεί το Λήμμα του $Zorn$, σύμφωνα με το οποίο θα έχει ένα μεγιστικό στοιχείο, έστω $U$.
  Με βάση τον ορισμό του $\Omega$, το μεγιστικό αυτό στοιχείο θα είναι ένα φίλτρο στο $A$, το οποίο θα περιέχει το $F_0$. Αφού το $U$ είναι φίλτρο και το $F_0$ περιέχεται σε κάθε υποσύνολο του $U$ μπορούμε να πούμε ότι, το $U$ έχει την Ιδιότητα της Πεπερασμένης Τομής ($FIP$).

- Ισχυριζόμαστε ότι το μεγιστικό στοιχείο του $\Omega$, έστω $U$, είναι ένα υπερφίλτρο.
  Σε περίπτωση που το $U$ δεν είναι υπερφίλτρο θα υπάρχει $X \subseteq A$ τέτοιο ώστε $X \notin U$ και $A \setminus X \notin U$. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων:

  $$E = U \cup \{X\}$$

Έστω $a_1, a_2, ..., a_n \in E$.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a_i$ για $1 \leq i \leq n$, τέτοιο ώστε $a_i \notin U$. Έστω $a_1 = X \notin U$ και $a_2, ..., a_n \in U$. Αφού το $U$ έχει την $FIP$ θα ισχύει :

$$a_2 \cap ... \cap a_n \in U$$

Αν $A \setminus X \notin U$, τότε:

$$\begin{aligned} &a_2 \cap ... \cap a_n \nsubseteq A \setminus X \implies \\ &X \cap a_2 \cap ... \cap a_n \neq \varnothing \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $E$ θα έχει επίσης την $FIP$ και μπορεί να επεκταθεί σε ένα φίλτρο $E'$, δηλαδή:

$$E' \supsetneq E \supsetneq U \text{που είναι άτοπο, γιατί το } U \text{ έχει τεθεί μεγιστικό.}$$

□

**Λήμμα 3.5.2.** *Αν το $U$ είναι ένα υπερφίλτρο στο $X$ και $A, B \subseteq X$, τότε :*

$$A \cup B \in U \iff A \in U \vee B \in U$$

**Απόδειξη:**

- Αν $U$ υπερφίλτρο και $A, B \subseteq X$ με $A \cup B \in U \implies A \in U$ ή $B \in U$.

  Αρκεί να δείξουμε ότι είτε το $U \cup \{A\}$ είτε το $U \cup \{B\}$ έχει την $FIP$.
  Έστω ότι δεν ισχύει αυτό, τότε για $A_1, A_2, ..., A_n \in U$ :

$$\begin{aligned} &A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap A = \varnothing \implies \\ &\exists A' = A_1 \cap ... \cap A_n \in U \text{ τέτοιο ώστε: } A' \cap A = \varnothing \end{aligned} \tag{3.44}$$

  Όμοια, για $B_1, B_2, ..., B_n \in U$:

$$\begin{aligned} &B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \cap B = \varnothing \implies \\ &\exists B' = B_1 \cap ... \cap B_n \in U \text{ τέτοιο ώστε: } B' \cap B = \varnothing \end{aligned} \tag{3.45}$$

  Για $A \cup B$ και $A' \cap B' \in U$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &(A \cup B) \cap (A' \cap B') = (A \cap A' \cap B') \cup (B \cap A' \cap B') \subseteq (A \cap A') \cup (B \cap B') \\ &\overset{(3.45),(3.46)}{\implies} (A \cup B) \cap (A' \cap B') \subseteq \varnothing \notin U \text{ άτοπο} \end{aligned}$$

  Συνεπώς θα πρέπει ένα από τα $U \cup \{A\}$, $U \cup \{B\}$ να έχει την $FIP$.

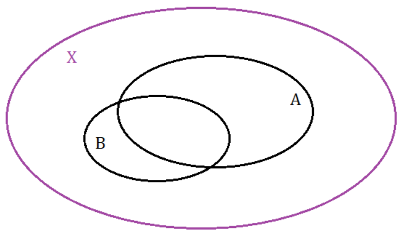
  Έστω ότι το $U \cup \{A\}$ έχει την $FIP$. Θεωρώ το σύνολο:

$$U' = \{\Omega \subseteq X : \Omega \supseteq A' \cap A \text{ για κάποιο } A' \in U\}$$

  Θέλω να αποδείξω ότι το $U'$ είναι φίλτρο στο $X$ και ότι περιέχει το $A$:

1. Έστω $\varnothing \in U'$, τότε $\varnothing \supseteq A' \cap A$, άτοπο, γιατί $A' \in U$ και το $U \cup \{A\}$ έχει την $FIP$, που σημαίνει ότι $A' \cap A \neq \varnothing$.
   Επίσης, ισχύει $X \supseteq X \cap A$. Άρα, από τον ορισμό του $U'$: $X \in U'$.
2. Έστω $\Omega_1, \Omega_2 \in U'$. Τότε, θα ισχύει:
$$\Omega_1 \supseteq A_1 \cap A \text{ με } A_1 \in U \text{ και} \tag{3.46}$$
$$\Omega_2 \supseteq A_2 \cap A \text{ με } A_2 \in U \tag{3.47}$$
   Από (3.46), (3.47):
$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \supseteq A_1 \cap A_2 \cap A \overset{(A_1, A_2 \in U)}{\Longrightarrow}$$
$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \in U'$$
3. Έστω $\Omega \in U'$ και $\Omega \subseteq \Omega'$. Τότε, με βάση τον ορισμό του $U'$ θα υπάρχει $A' \in U$, τέτοιο ώστε $\Omega \supseteq A' \cap A$. Άρα,
$$\Omega' \supseteq \Omega \supseteq A' \cap A \implies$$
$$\Omega' \in U'$$
4. Προφανώς, ισχύει:
$$A \supseteq X \cap A \overset{(X \cap A = A)}{\Longrightarrow}$$
$$A \in U'$$

Από τα (1),(2),(3) προκύπτει ότι το $U'$ είναι φίλτρο και από το (4) ότι περιέχει το σύνολο $A$.




Σχήμα 15: Το σύνολο $X$ με τα υποσύνολά του $A, B$.

- <u>Αν $U$ φίλτρο και $A, B \subseteq X$ με $A \in U$ ή $B \in U \implies A \cup B \in U$.</u>
  - Έστω ότι $A \in U$.

  * Ξέρουμε ότι $A \subseteq X$, που σημαίνει ότι $X \in U$, αφού το $U$ είναι φίλτρο στο $X$.
  * Επίσης, επειδή $B \subseteq X$ θα ισχύει $A \cup B \subseteq X$.
  * Από την 3η ιδιότητα που πρέπει να πληρεί ένα σύνολο για να είναι φίλτρο έχουμε:

$$A, A \cup B \subseteq X : A \subseteq A \cup B \wedge A \in U \implies A \cup B \in U$$

- Όμοια, έστω $B \in U$.
  * Ξέρουμε ότι $B \subseteq X$, που σημαίνει ότι $X \in U$.
  * Επίσης, επειδή $A \subseteq X$ θα ισχύει $A \cup B \subseteq X$.
  * Από την 3η ιδιότητα που πρέπει να πληρεί ένα σύνολο για να είναι φίλτρο έχουμε:

$$B, A \cup B \subseteq X : B \subseteq A \cup B \wedge B \in U \implies A \cup B \in U$$

Επομένως, έχουμε δείξει ότι είτε $A \in U$ είτε $B \in U$, τότε $A \cup B \in U$.

- Σύμφωνα με τον ορισμό, για να είναι το $U$ υπερφίλτρο θα πρέπει είτε το $A \in U$ είτε το $A^c \in U$.
Για το σύνολο $A$ και το συμπλήρωμα του $A^c$ ξέρουμε ότι $A \subseteq X$, που σημαίνει ότι:

$$A \cup A^c = X \in U \tag{3.48}$$

Έστω ότι $A \in U$ και $A^c \in U$. Τότε, αφού το $\Upsilon$ είναι φίλτρο, με βάση την 2η ιδιότητα που πρέπει να πληρεί ένα σύνολο για να είναι φίλτρο, θα ισχύει:

$$A \cap A^c \in U \tag{3.49}$$

Όμως, τα σύνολα $A$ και $A^c$ είναι συμπληρωματικά, που σημαίνει ότι:

$$A \cap A^c = \varnothing \tag{3.50}$$

Από (3.49), (3.50) προκύπτει ότι:

$$\varnothing \in U \text{ άτοπο, γιατί το } U \text{ είναι φίλτρο που σημαίνει ότι } \varnothing \notin U$$

Άρα, αποδείξαμε ότι δεν μπορούν και τα δύο σύνολα $A, A^c$ να περιέχονται στο $U$.
Επομένως, $A \in U$ ή $A^c \in U$ και από την σχέση (3.48) $A \cup A^c \in U$.

□

### 3.5.2 Principal και Non-Principal Υπερφίλτρα

Αφού ορίσαμε τα υπερφίλτρα θα δούμε 2 βασικές κατηγορίες τους, τα principal και τα non-principal υπερφίλτρα. Τα principal είναι ένα είδος υπερφίλτρου, το οποίο παράγεται από ένα συγκεκριμένο στοιχείο του συνόλου. Διαισθητικά, μπορούμε να το φανταστούμε σαν μία μεγάλη οικογένεια συνόλων που έχει ένα «κέντρο» από το οποίο παράγεται. Σε αντίθεση με το principal, ένα non-principal υπερφίλτρο δεν παράγεται από συγκεκριμένο στοιχείο.

**Ορισμός 3.5.3.** ***Principal Υπερφίλτρο:*** *Έστω $U$ ένα υπερφίλτρο στο σύνολο $X$ και $x$ ένα στοιχείο του $x$. Το $U$ ονομάζεται principal αν ισούται με την οικογένεια όλων των υποσυνόλων του $X$, τα οποία περιέχουν το $x$, δηλαδή:*

$$U = \{A \subseteq X : x \in A\}$$

*Λέμε ότι το $U$ παράγεται από το στοιχείο $x$, ενώ μπορούμε να το συμβολίσουμε και ως $U(x)$.*
*Με τον όρο «παράγει» εννοούμε ότι, αν θεωρήσουμε σύνολο $X$, οικογένεια συνόλων $\mathscr{A}$ η οποία έχει την $FIP$ και υπερφίλτρο $U$, λέμε ότι η $\mathscr{A}$ παράγει το $U$ αν ισχύει η παρακάτω σχέση:*

$$U = \{\Omega \subseteq X : \exists A_1, ..., A_n \in \mathscr{A} : \Omega \supseteq A_1 \cap ... \cap A_n\}$$

**Παράδειγμα:** Με βάση τον παραπάνω ορισμό που δώσαμε για τα principal υπερφίλτρα, έστω:

- $X = \mathbb{N}$
- $x = 8$

Στην περίπτωση αυτή, το principal υπερφίλτρο που παράγεται από το 8 θα είναι η οικογένεια όλων των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών, τα οποία περιλαμβάνουν τον αριθμό 8. (π.χ. $\{1,8\}$, $\{2,8\}$, $\{3,8\}$ κ.ο.κ.)

Πριν προχωρήσουμε στα non-principal υπερφίλτρα, θα ορίσουμε ένα είδος φίλτρου που δεν έχουμε συναντήσει μέχρι στιγμής.

**Ορισμός 3.5.4.** *(Fréchet Φίλτρο): Έστω $X$ ένα άπειρο σύνολο. Η οικογένεια $F$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του $X$, των οποίων το συμπλήρωμα είναι πεπερασμένο, είναι ένα φίλτρο και ονομάζεται Fréchet Φίλτρο:*

$$F = \{A \subseteq X : X \setminus A \in fin\}$$

Χρησιμοποιώντας το φίλτρο *Fréchet* μπορούμε να αποφασίσουμε αν ένα υπερφίλτρο είναι non-principal, ελέγχοντας αν το υπερφίλτρο περιέχει *Fréchet* σαν υποσύνολο του ή όχι.

**Ορισμός 3.5.5.** ***Non-Principal Υπερφίλτρο:*** *Έστω $U$ ένα υπερφίλτρο στο σύνολο $A$. Το $U$ ονομάζεται non-principal αν κάθε σύνολο $X$ που ανήκει στο $U$ είναι άπειρο.*

**Πρόταση 2.** *Αν το υπερφίλτρο $U$ περιέχει πεπερασμένα σύνολα, τότε είναι $principal$. Άρα, κάθε $non-principal$ υπερφίλτρο περιέχει το $Frechet$.*

**Απόδειξη:**
Στην περίπτωση που το $U$ δεν περιείχε μόνο άπειρα σύνολα, τότε θα ήταν ένα *principal* υπερφίλτρο. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $X$ στο $U$ τέτοιο ώστε:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \ , \ n \in \omega$$

Αφού το $U$ είναι υπερφίλτρο, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο, θα υπάρχει $i = 1, 2, ..., n$ έτσι ώστε:

$$\{x_i\} \in U \tag{3.51}$$

Έστω $Y$ οποιοδήποτε υποσύνολο του $A$ τέτοιο ώστε $Y \supseteq \{x_i\}$.
Τότε, από τις ιδιότητες των φίλτρων ισχύει:

$$Y \in U$$

Άρα, το $U$ είναι το *principal* υπερφίλτρο που παράγεται από το $x_i$.
Έστω $U' = \{Y \subseteq A : Y \supseteq \{x_i\}\}$. Προφανώς, το $U'$ παράγεται από το $X$, αφού κάθε υποσύνολο $Y$ του $A$, το οποίο περιέχει το $X$ είναι στο $U'$. Άρα, το $U'$ είναι *principal*.
Επίσης, $U' \subseteq U$, αφού περιέχει όλα τα $Y \in U$. Αυτό σημαίνει ότι το $X$ που παράγει το $U'$ θα περιέχεται και στο $U$, άρα το $U$ είναι επίσης *principal*.
Συνεπώς, αν το $U$ περίεχει πεπερασμένο σύνολο θα είναι *principal*.

□

**Πρόταση 3.** *Έστω $U$ υπερφίλτρο σε ένα άπειρο σύνολο $X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Το $U$ είναι non-principal.*
2. *Το $U$ περιέχει το Fréchet φίλτρο, έστω $F$.*

**Απόδειξη:**

1. Έστω ότι το $U$ δεν είναι non-principal, δηλαδή είναι principal. Άρα,

   $$U = \{A \subseteq X : a \in A\}$$

   Τότε, αφού $\{a\} \in U$ θα ισχυεί ότι $X \setminus \{a\} \notin U$, που σημαίνει ότι το $U$ δεν περιέχει το $F$.
   Άρα, αποδείξαμε ότι αν ένα υπερφίλτρο περιέχει το $F$ τότε είναι non-principal.

2. Έστω ότι το $U$ δεν περιέχει το $F$ και ότι το $U$ είναι non-principal. Τότε, θα υπάρχει $A \in F$, ώστε $A \notin U$ και άρα $X \setminus A \in U$ .
   Όμως, $X \setminus A \in U$ πεπερασμένο, που είναι άτοπο, αφού από τον ορισμό του non-principal υπερφίλτρου, κάθε σύνολο που θα περιέχεται στο $U$ θα πρέπει να είναι άπειρο.
   Συνεπώς, αποδείξαμε ότι αν το $U$ είναι non-principal, τότε περιέχει το $F$.

□

**Ορισμός 3.5.6.** ***Συμπεπερασμένο Φίλτρο:*** *Έστω $X$ ένα άπειρο σύνολο. Ονομάζουμε ως συμπεπερασμένο (cofinite) σύνολο, το $A \subseteq X$, αν το συμπλήρωμα του είναι πεπερασμένο. Δηλαδή, αν $X \setminus A \in fin$.*

**Παρατήρηση:** Η οικογένεια όλων των συμπεπερασμένων υποσυνόλων του $X$, έστω:

$$C = \{A \subseteq X : X \setminus A \in fin\}$$

θα είναι προφανώς το *Fréchet* φίλτρο στο $X$.

**Λήμμα 3.5.3.** *Έστω μη-κενή οικογένεια συνόλων $E \subseteq P(A)$ που έχει την $FIP$. Τότε, η οικογένεια συνόλων που ισούται με το σύνολο όλων των $Y \subseteq A$ έτσι ώστε $Y \supseteq X_1 \cap ... \cap X_n$, για κάποιο $n \in \omega$ και κάποια $X_1, ..., X_n \in E$, δηλαδή:*

$$F = \{Y \subseteq A : Y \supseteq X_1 \cap ... \cap X_n \text{ με } X_1, ..., X_n \in E\}$$

*είναι φίλτρο και θα το αναφέρουμε ως το φίλτρο που παράγεται από την οικογένεια $E$.*

**Απόδειξη:**

Θέλω να αποδείξω ότι το $F$ είναι φίλτρο.

1. Αφού, η $E$ είναι μη-κενή οικογένεια που έχει την $FIP$, για $Y \in E$, θα υπάρχουν $X_1, ..., X_n \in E$, ώστε $Y \supseteq X_1 \cap ... \cap X_n$. Άρα, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&X_1 \cap ... \cap X_n \neq \varnothing \implies \\
&Y \neq \varnothing \overset{(X_1,...,X_n \subseteq Y)}{\implies} \\
&\varnothing \notin E
\end{aligned}$$

   Επίσης έχουμε ότι για $X \in E$ (για οποιδήποτε $X$), $X \subseteq A$ άρα $A \in F$.

2. Έστω $F_1, F_2 \in F$. Από τον ορισμό για το $F$ έχουμε:

$$F_1 \supseteq X_1^1 \cap ... \cap X_{n_1}^1 \text{ και } F_2 \supseteq X_1^2 \cap ... \cap X_{n_2}^2,$$

   όπου $X_1^1, ..., X_{n_1}^1, X_1^2, X_{n_1}^2 \in E$. Επίσης, επειδή η $E$ έχει την $FIP$, η τομή όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων της θα είναι μη-κενή, άρα θα ισχύει: $X_1^1 \cap ... \cap X_{n_1}^1 \neq \varnothing$ και $X_1^2 \cap ... \cap X_{n_1}^2 \neq \varnothing$.
   Για την τομή των $F_1, F_2$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
&F_1 \cap F_2 \supseteq X_1^1 \cap ... \cap X_{n_1}^1 \cap X_1^2 \cap ... \cap X_{n_1}^2 \\
&F_1 \cap F_2 \in F
\end{aligned}$$

3. Έστω $F_1, F_2 \subseteq A$ με $F_2 \in F$ και $F_1 \supseteq F_2 \supseteq X_1 \cap ... \cap X_n \implies F_1 \in F$

Άρα, το $F$ είναι φίλτρο.

□

### 3.5.3 Ο χαρακτήρας ενός υπερφίλτρου

Ο χαρακτήρας ενός υπερφίλτρου είναι ουσιαστικά ένα πληθικό αναλλοίωτο, το οποίο μετράει το ελάχιστο μέγεθος ενός συνόλου που παράγει το υπερφίλτρο. Με άλλα λόγια, μετράει τον αριθμό των υποσυνόλων που απαιτούνται για να παραχθεί το υπερφίλτρο. Για παράδειγμα, ένα υπερφίλτο με μεγάλο χαρακτήρα χρειάζεται έναν μεγάλο αριθμό υποσυνόλων για να παραχθεί, ενώ ένα υπερφίλτρο με μικρό χαρακτήρα μπορεί να παραχθεί από έναν μικρό αριθμό υποσυνόλων.

**Ορισμός 3.5.7.** *Αν $U$ ένα υπερφίλτρο στο σύνολο $A$, τότε ονομάζουμε* ***χαρακτήρα*** *(character) του $U$ (και συμβολίζουμε με $\chi(U)$) το ελάχιστο μέγεθος μίας οικογένειας $E \subseteq U$, η οποία και παράγει το $U$.*

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι ο χαρακτήρας ενός *principal* υπερφίλτρου σε ένα σύνολο $A$ θα είναι 1. Αυτό ισχύει γιατί ένα *principal* υπερφίλτρο παράγεται από ένα συγκεκριμένο στοιχείο του $A$, που σημαίνει ότι οποιοδήποτε υποσύνολο που περιέχει το στοιχείο αυτό θα ανήκει και αυτό στην οικογένεια που παράγει το υπερφίλτρο. Άρα, αν $U$ : *principal* υπερφίλτρο στο $A$, τότε:

$$\chi(U) = 1$$

Αντιθέτως, αν το $U$ είναι $non - principal$ υπερφίλτρο σε ένα σύνολο $A$ θα ισχύει $\chi(U) \geq \aleph_1$.

**Πρόταση 4.** *Αν το $U$ είναι ένα $non-principal$ υπερφίλτρο στο σύνολο $A$, τότε για τον χαρακτήρα του θα ισχύει:*

$$\chi(U) \geq \aleph_1$$

**Απόδειξη Πρότασης:** Έστω μία αριθμήσιμη οικογένεια συνολών $E = \{e_n : n \in \omega\} \subseteq U$, η οποία παράγει το $U$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $X \in U$ υπάρχει $e_n \in E$ τέτοιο ώστε $X \supseteq e_n$. Πράγματι:

**Ισχυρισμός:** Αν $U$ ένα $non - principal$ υπερφίλτρο στο $A$ με χαρακτήρα $\omega$, τότε υπάρχει $E = \{e_n : n \in \omega\}$ οικογένεια που το παράγει, ώστε το $X \subseteq A$ να ανήκει στο $U$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \omega$, τέτοιο ώστε $X \supseteq e_n$.

**Απόδειξη του Ισχυρισμού:**
Θεωρώ:

- $E = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$, ώστε το $E$ να παράγει το $U$.
- Θέτουμε $e_n^{'} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} e_k$
- $E' = \left\{e_n^{'} : n \in \omega\right\}$

Θέλω να δείξω ότι $X \in U \iff \exists n \in \omega : X \supseteq e_n^{'}$

1. Έστω ότι υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε:

$$X \supseteq e_n^{'} \implies X \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} e_k$$

   Προφανώς, το $e_n^{'}$ θα ανήκει στο $U$, αφού είναι μία πεπερασμένη τομή συνόλων της $E$, η οποία παράγει το $U$, άρα:

$$e_n^{'} \in U \implies X \in U$$

2. Έστω, ότι το $X$ ανήκει στο $U$. Τότε, θα υπάρχουν $n_1 < n_2 < ... < n_k$ έτσι ώστε:

$$X \supseteq e_{n_1} \cap e_{n_2} \cap ... \cap e_{n_k} \implies$$
$$X \supseteq \bigcap_{i=1}^{n_k} e_{n_i} \implies$$
$$X \supseteq e'_{n_k}$$

Επομένως, με βάση τον παραπάνω ισχυρισμό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$X \in U \iff X \supseteq e_n \tag{3.52}$$

Κάθε $e_n$ θα είναι άπειρο, αφού $e_n \in U$ και το $U$ είναι $non-principal$ υπερφίλτρο, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να περιέχει πεπερασμένο σύνολο. Επομένως, για κάθε $e_n \in E$ μπορώ να διαλέξω δύο διαφορετικά στοιχεία $x_n, y_n$ έτσι ώστε και τα δύο να ανήκουν στο $e_n$. Διαλέγω, άρα, αναδρομικά δύο ακολουθίες $x_n, y_n$ με $n \in \omega$ έτσι ώστε:

- $x_1, y_1 \in e_1$
- $x_2, y_2 \in e_2$
- $x_3, y_3 \in e_3$ κ.ο.κ.

και

- $x_2 \neq x_1, y_1, y_2$
- $y_2 \neq x_1, y_1, x_2$
- $x_3 \neq x_1, y_1, x_2, y_2, y_3$
- $y_3 \neq x_1, y_1, x_2, y_2, x_3$

Έστω το σύνολο $X = \{x_n : n \in \omega\}$. Αν $X \in U$, τότε θα υπάρχει $n \in \omega$, ώστε $X \supseteq e_n$.
Άρα, για το $n$ αυτό, θα ισχύει $y_n \in X$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $X$.
Επομένως, θα ισχύει:

$$A \setminus X \in U \tag{3.53}$$

Θα υπάρχει τώρα $n \in \omega$ ώστε:

$$A \setminus X \supseteq e_n \tag{3.54}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $x_n \in A \setminus X$, το οποίο είναι πάλι άτοπο, γιατί $x_n \in X$ από τον ορισμό του $X$.

Συνεπώς, αφού η υπόθεση ότι το υπερφίλτρο $U$ παράγεται από μία αριθμήσιμη οικογένεια $E$ μας οδηγεί σε άτοπο, και δεδομένου ότι το $U$ είναι $non-principal$, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να παράγεται από μία μη-αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων. Άρα, για τον χαρακτηρα του $U$, που είναι ο μικρότερος πληθάριθμος της οικογένειας που παράγει το υπερφίλτρο θα ισχύει:

$$\chi(U) \geq \aleph_1$$

□

**Λήμμα 3.5.4.** *Αν $U$ είναι ένα $non-principal$ υπερφίλτρο στο $\omega$, τότε $\mathfrak{p} \leq \chi(U) \leq c$.*

**Απόδειξη:**

- Κάθε στοιχείο του υπερφίλτρου $U$ θα είναι υποσύνολο του $\omega$. Επομένως, η πληθικότητα του $U$ θα είναι μικρότερη ή ίση του δυναμοσυνόλου του $\omega$, δηλαδή:

$$|U| \leq |P(\omega)| = 2^{\omega} = c \tag{3.55}$$

Αφού, ο χαρακτήρας του $U$ είναι εξ' ορισμού ο ελάχιστος πληθάριθμος μίας οικογένειας υποσυνόλων του $\omega$ που παράγουν και άρα περιέχονται στο $U$, λόγω της σχέσης (3.55) θα ισχύει:

$$\chi(U) \leq c$$

- Έστω, για κάποιο $k < \mathfrak{p}$, μία οικογένεια συνόλων $E = \{e_t : t < k\}$, η οποία παράγει το $U$. Προφανώς η $E$ έχει τη $SFIP$, αφού αποτελείται από στοιχεία του $non-principal$ υπερφίλτρου $U$, και επειδή υποθέσαμε ότι $k < \mathfrak{p}$, από τον ορισμό του $\mathfrak{p}$, έπεται ότι η $E$ έχει μία ψευδοτομή, έστω $X$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $t < k$:

  – το $X$ είναι άπειρο

  – $X \subseteq^* e_t \implies X \setminus e_t \in fin, \ \forall e_t \in E$

Επειδή το $X$ είναι άπειρο μπορώ να θεωρήσω ένα άπειρο σύνολο $Y \subseteq X$ με $X \setminus Y$ επίσης άπειρο.
Αφού $Y \subseteq X$ και $X \setminus e_t \in fin$, για $e_1, ..., e_t \in E$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} &(Y \setminus e_1) \cup ... \cup (Y \setminus e_t) \in fin \implies \\ &Y \setminus (e_1 \cap ... \cap e_t) \in fin \end{aligned} \tag{3.56}$$

Θέτω $K = Y \setminus (e_1 \cap ... \cap e_t)$. Προφανώς, το K θα είναι πεπερασμένο, λόγω της σχέσης (3.56) και θα είναι υποσύνολο της ψευδοτομής $X$. Αφού, όμως είναι πεπερασμένο δεν θα μπορεί να είναι υπερσύνολο του $Y$ ή του $X \setminus Y$, καθώς και τα δύο αυτά σύνολα είναι άπειρα. Επομένως, ισχύει:

$$K \not\supseteq Y \text{ και } K \not\supseteq (X \setminus Y) \tag{3.57}$$

Έχουμε θέσει το $Y$ ως ένα υποσύνολο της ψευδοτομής της οικογένειας $E$. Η $E$, όμως, παράγει το $U$, που σημαίνει ότι, με βάση τον ορισμό των υπερφίλτρων, θα ισχύει:

$$Y \in U \text{ ή } \omega \setminus Y \in U$$

  – Έστω ότι $Y \in U$.
  Τότε θα υπάρχουν $e_1, ..., e_t$ τέτοια ώστε $Y \supseteq e_1 \cap ... \cap e_t$ (αφού το $E$ παράγει το $U$).
  Συνεπώς, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} &(X \setminus Y) \cap (e_1 \cap ... \cap e_t) = \varnothing \implies \\ &(X \setminus Y) \subseteq K \text{ άτοπο από (3.57)} \end{aligned}$$

– Έστω ότι $\omega \setminus Y \in U$.
Τότε, θα υπάρχουν $e_1, ..., e_t \in E$, τέτοια ώστε $\omega \setminus Y \supseteq e_1 \cap ... \cap e_t$, που σημαίνει ότι θα ισχύει:

$$\begin{gathered} Y \cap (e_1 \cap ... \cap e_t) = \varnothing \implies \\ Y \subseteq K \text{ άτοπο από } (3.57) \end{gathered}$$

Αφού και οι 2 περιπτώσεις καταλήγουν σε άτοπο, η υπόθεση μας ότι το $U$ μπορεί να παραχθεί από την οικογένεια $E$ με πληθάριθμο μικρότερο του $\mathfrak{p}$ δεν θα ισχύει, που σημαίνει ότι:

$$\chi(U) \geq \mathfrak{p}$$

□

# Βιβλιογραφία

[1] Kenneth Kunen, *Set Theory* (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations), Volume 34, 2011

[2] Matthew Foreman, Akihiro Kanamori, *Handbook of Set Theory*, Volume 1, 2010

[3] Thomas Jech, *Set Theory*, The Third Millennium Edition, revised and explained, Springer-Verlag, 2002

[4] Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite:* Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings, Department of Mathematics, Boston University, Second Edition, 2003

[5] Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Καλιφόρνιας και Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2η έκδοση, 2014

[6] Andreas Blass, *Simple Cardinal Characteristics of the Continuum*, arXiv:math/9405202v1 [math.LO] 1994

[7] Miguel A. Cardona, Diego A. Mejia, Ismael E. Rivera-Madrid, *The covering number of the strong measure zero ideal can be above almost everything else*, arXiv:1902.01508v1 [math.LO] 2019

[8] Andreas Blass, *Reductions Between Cardinal Characteristics of the Continuum*, arXiv:math/9407203v1 [math.LO] 1994

[9] Stefan Geschke, *Almost Disjoint and Independent Families*, 2013

[10] Diego A. Mejia, *Models of cardinal invariants with large continuum*, arXiv:1305.4739v1 [math.LO] 2013

[11] Cecelia Higgins, *Ultrafilters in Set Theory*, 2018

[12] Lieth A. Majed, Sabreen Mohameed Sabah *Types of Filter and Ultrafilter with applications*, Department of Mathematics College of Science, University of Diyala, Iraq, 2021

[13] Brent Cody, *Ultraproducts, The Compactness Theorem and Applications*, 2014

[14] Alex Kruckman, *Notes on Ultrafilters*, 2012

[15] Caleb Stanford, *Filters and Ultrafilters*, 2015

[16] Roman Murawski, *John von Neumann and Hilbert's school of foundation of mathematics*, Adam Mickiewicz University, 2004

[17] John C. Baez, *Large Countable Ordinals (Part 1)*, `https://johncarlosbaez.wordpress.com/2016/06/29/large-countable-ordinals-part-1/`, 2016

[18] Konstantinos Tsaprounis, *Large Cardinals and Resurrection Axioms*, University of Barcelona, 2012

[19] Marc Lischka, *Cardinal Characteristics of the Continuum Based on Asymptotic Density*, University of Zurich, 2019