



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Βαρυτικά Κύματα σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας

Μαυρογιάννης Άγγελος

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Επιβλέποντες: Εμμανουήλ Σαριδάκης, Κύριος Ερευνητής ΙΑΑΔΕΤ, Αναγνωστόπουλος
Κωνσταντίνος, καθηγητής ΕΜΠ

Ακαδημαϊκό Έτος: 2022-2023

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον κύριο Μάνο Σαριδάκη ο οποίος με βοήθησε όλο το χρονικό διάστημα της εκπόνησης της παρούσας εργασίας και μου έδειξε τον κόσμο της βαρύτητας.

Επίσης, ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Πέτρο Ασημάκη για τις συμβουλές του και την βοήθειά του κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ τον καθηγητή κύριο Κωνσταντίνο Αναγνωστόπουλο για τη συνεισφορά του στην παρούσα εργασία.

Περίληψη

Η Γενική Σχετικότητα είναι μια αρκετά επιτυχής περιγραφή της βαρύτητας. Ωστόσο, τόσο η θεωρία όσο και οι παρατηρήσεις, προτείνουν πως η Γενική Σχετικότητα μπορεί να χρειάζεται σημαντικές κλασσικές και κβαντικές διορθώσεις στις περιοχές ισχυρής βαρύτητας και στις κοσμολογικές κλίμακες. Αυτό επιτυγχάνεται με τις Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας (Modified Gravity). Η απήχηση της Γενικής Σχετικότητας μεγιστοποιήθηκε με την άμεση παρατήρηση των Βαρυτικών Κυμάτων (Gravitational Waves) το 2015 από τον ανιχνευτή LIGO. Μια από τις δοκιμές τις οποίες πρέπει να επιτύχει κάθε Τ.Θ.Β. είναι η πρόβλεψη των βαρυτικών κυμάτων και μιας συμπεριφοράς η οποία να συνάδει με τις σύγχρονες παρατηρήσεις. Στην παρούσα διπλωματική θα αναλυθεί η φυσική της Γενικής Σχετικότητας και των Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας, και θα υπολογιστούν, μέσω του προγράμματος xAct, οι πεδιακές εξισώσεις και οι εξισώσεις που περιγράφουν τα βαρυτικά κύματα για τη Γενική Σχετικότητα και για τα μοντέλα Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας $f(R) = R + \kappa R^2$ και $f(G) = R + \kappa G^2$.

Abstract

General Relativity is a successful description of gravitation. However, both theory and observations suggest that General Relativity might need significant classical and quantum corrections in the Strong Gravity regime and the Cosmological Scales. We can succeed that with Modified Gravity models. The reputation of General Relativity maximized with the direct observation of Gravitational Waves via LIGO detectors in 2015. One of the tests that MG models must pass is the prediction of Gravitational Waves with equations that converge with the current observations. In this diploma thesis, we will introduce the physics of General Relativity and Modified Gravity Models, and we will calculate via xAct the field equations and the tensor perturbations (i.g. gravitational waves) in FLRW metric of General Relativity and the Modified Gravity Models $f(R) = R + \kappa R^2$ and $f(G) = R + \kappa G^2$.

Περιεχόμενα

1	Γενική Σχετικότητα	5
1.1	Εισαγωγή	5
1.1.1	Από τον Newton στον Einstein	5
1.1.2	Πολλαπλότητες(Manifolds)	6
1.1.3	Διανύσματα	7
1.1.4	Τανυστές	11
1.1.5	Η έννοια της μετρικής	13
1.1.6	Καμπυλότητα: Συναλλοίωτη Παράγωγος, Συνοχή, Σύμβολα Christoffel	14
1.1.7	Καμπυλότητα: Τανυστές Riemann και Ricci	18
1.1.8	Κλασική θεωρία πεδίου	19
1.2	Εξισώσεις πεδίου του Einstein για τη Γενική Σχετικότητα	22
1.2.1	Παραγωγή των πεδιακών εξισώσεων	22
1.2.2	Παραγωγή των πεδιακών εξισώσεων με τη χρήση του xAct στο Mathematica	26
1.3	Η μετρική FLRW	28
1.3.1	Κοσμολογία- Η μετρική FLRW	28
1.3.2	Σύμβολα Christoffel, Τανυστής Ricci, Βαθμωτό Ricci	31
1.3.3	Εξισώσεις Einstein	34
1.3.4	Η κοσμολογική σταθερά Λ	35
2	Βαρυτικά Κύματα	37
2.1	Εισαγωγή	37
2.1.1	Κύματα	37
2.1.2	Μετασχηματισμοί Fourier	38
2.1.3	Θεωρία Διαταραχών	39
2.2	Διαταραχές της μετρικής FLRW	40
2.2.1	Από βαθμίδα σε βαθμίδα	42
2.2.2	Βαθμωτές Διαταραχές	45
2.2.3	Τανυστικές Διαταραχές: Βαρυτικά κύματα	50
2.2.4	Διαταραχές της μετρικής με το xPand	57
3	Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας	60
3.1	Εισαγωγή	60
3.2	Γιατί;	61
3.2.1	Η βαρύτητα δεν είναι ανιχνεύσιμη σε όλες τις κλίμακες	61
3.2.2	Η βαρύτητα χρειάζεται διορθώσεις στις περιπτώσεις ισχυρής βαρύτητας	62
3.2.3	Η ύστερη επιτάχυνση και νέα φυσική	63
3.2.4	Κατασκευάζοντας μια κβαντική θεωρία βαρύτητας	64
3.3	Πώς;	65
3.4	Παραδείγματα T. Θ. B.	66
3.4.1	$f(\mathbf{R})$	67
3.4.2	$f(\mathbf{G})$	68
4	Βαρυτικά Κύματα σε T. Θ. B.	71
4.1	Βαρυτικά κύματα στην $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \kappa \mathbf{R}^2$	72
4.2	Βαρυτικά κύματα στην $f(\mathbf{G}) = \mathbf{R} + \kappa \mathbf{G}^2$	73
5	Συμπεράσματα	74

6 Παράρτημα

76

1 Γενική Σχετικότητα

1.1 Εισαγωγή

1.1.1 Από τον Newton στον Einstein

Η θεωρία της Γενικής Σχετικότητας είναι η θεωρία πεδίου που εισηγήθηκε ο Albert Einstein και περιγράφει τον χωρόχρονο και τη βαρύτητα. Αν και οι υπόλοιπες δυνάμεις της φύσης περιγράφονται από πεδία στον χωρόχρονο, η βαρύτητα αποτελεί ιδιότητα του χωροχρόνου. Συγκεκριμένα, αυτό που αντιλαμβανόμαστε σαν βαρύτητα είναι η «καμπυλότητα» του χωροχρόνου.

Πριν από την θεωρία της γενικής σχετικότητας, η θεωρία που περιέγραφε καλύτερα τη βαρύτητα, ήταν αυτή του Isaac Newton, ο οποίος τη διατύπωσε τον 17^ο αιώνα. Η θεωρία αυτή χαρακτηρίζεται από δυο βασικά στοιχεία: μια εξίσωση για το βαρυτικό πεδίο και το πώς αυτό επηρεάζεται από την ύλη και μια εξίσωση η οποία αναφέρεται για το πώς η ύλη αντιδρά σε αυτό το πεδίο. Η δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο σωματιδίων μάζας M και m αντίστοιχα, τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\vec{r} = r \vec{e}_{(r)}$, υπολογίζεται από τη γνωστή εξίσωση:

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} \vec{e}_{(r)}. \quad (1.1)$$

Η δύναμη αυτή θα επιταχύνει σωματίδιο μάζας m όπως είναι γνωστό από τον δεύτερο νόμο του Newton θα επιταχύνει σωματίδιο μάζας m , με επιτάχυνση \vec{a} :

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.2)$$

Ισοδύναμα, το βαρυτικό δυναμικό Φ σχετίζεται με την πυκνότητα μάζας ρ από την εξίσωση του Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.3)$$

και η επιτάχυνση a δίνεται από το gradient του πεδίου:

$$\nabla \Phi = \vec{a}. \quad (1.4)$$

Είτε οι (1.1) και (1.2), είτε οι (1.3) και (1.4), αρκούν για να περιγράψουν ένα Νευτώνιο βαρυτικό δυναμικό. Για τη γενική σχετικότητα, ουσιαστικά θα χρειαστεί να αντικαταστήσουμε κάθε μια από αυτές τις εξισώσεις με σχέσεις για την καμπυλότητα του χωροχρόνου. Η αρχική σκέψη του Einstein για να κατασκευάσει αυτές τις σχέσεις, ήταν η Αρχή της Ισοδυναμίας (*Principle of Equivalence*), σύμφωνα με την οποία ισούται η βαρυτική με την αδρανειακή μάζα. Άμεση συνέπεια αυτής είναι πως όλα τα σώματα σε ελεύθερη πτώση έχουν την ίδια επιτάχυνση η οποία δίνεται από τη σχέση $\vec{a} = -\nabla \Phi$. Αυτή η αρχή μαζί με μερικά ακόμα νοητικά πειράματα οδήγησαν τον Einstein στο συμπέρασμα πως η βαρύτητα είναι γεωμετρία, δηλαδή ένα εγγενές χαρακτηριστικό του χωροχρόνου, καθώς επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο οτιδήποτε στο σύμπαν (με μάζα ή χωρίς).

Εδώ πρέπει να σημειωθεί πως η γενική σχετικότητα δεν έχει σκοπό να αντικαταστήσει τη θεωρία του Newton. Αντιθέτως, η γενική σχετικότητα είναι μια γενίκευση της θεωρίας του Newton για τη

βαρύτητα, με τη δεύτερη μάλιστα να αποτελεί οριακή περίπτωση της πρώτης. Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα θεμελιωθούν τα μαθηματικά εργαλεία και οι φυσικές έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν από τον Einstein για να διατυπώσει εν τέλει τη θεωρία της γενικής σχετικότητας.

1.1.2 Πολλαπλότητες (Manifolds)

Η έννοια του χωροχρόνου αποτελεί μια από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες στη γενική σχετικότητα. Η μαθηματική δομή που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του χωροχρόνου είναι η πολλαπλότητα (manifold).

Πολλαπλότητα είναι ένας συνεχής χώρος, ο οποίος τοπικά μπορεί να θεωρηθεί ευκλείδειος, δηλαδή να είναι ομαλός και να έχει συγκεκριμένες διαστάσεις, όμως συνολικά μπορεί να είναι και καμπυλωμένος (πχ γύρω από κάθε σημείο, υπάρχει μια γειτονική περιοχή η οποία είναι τοπολογικά η ίδια, όπως η μοναδιαία σφαίρα στον \mathbb{R}^n). Σε αυστηρά μαθηματικά, C^∞ πολλαπλότητα n -διαστάσεων είναι ένα σύνολο M που συνοδεύεται από έναν μέγιστο άτλαντα (atlas), ο οποίος περιέχει κάθε συμβατό διάγραμμα (chart). Για να γίνει κατανοητός ο παραπάνω ορισμός πρέπει να αποσαφηνηθεί τι είναι άτλας και τι διάγραμμα. Διάγραμμα μπορεί να οριστεί σαν ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάποιο ανοιχτό σύνολο και Άτλας είναι ένα σύνολο διαγραμμάτων που είναι ομαλά συνδεδεμένα μεταξύ τους στις περιοχές αλληλεπικάλυψης. Από τους παραπάνω ορισμούς, γίνεται άμεσα αντιληπτό πως οι πολλαπλότητες εξασφαλίζουν τη συνέχεια ενός τοπολογικού χώρου, κάτι το οποίο θεωρείται απαραίτητο για τη μελέτη ενός αληθινού συστήματος.

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η έννοια της πολλαπλότητας, αξίζει να αναφερθούν ορισμένα παραδείγματα. Το πιο κλασσικό παράδειγμα πολλαπλότητας, είναι ο Ευκλείδειος χώρος, ο οποίος αυτονόητα μπορεί τοπικά να θεωρηθεί ευκλείδειος. Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας (όπως και κάθε m -διάστατο “υπερεπίπεδο” μέσα σε έναν n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο). Η σφαίρα τοπολογικά δεν είναι ευκλείδεια επιφάνεια, ωστόσο σε μια μικρή περιοχή της επιφάνειας μπορεί να απεικονιστεί ικανοποιητικά 1:1 στο εφαιπτόμενο επίπεδο της περιοχής αυτής.

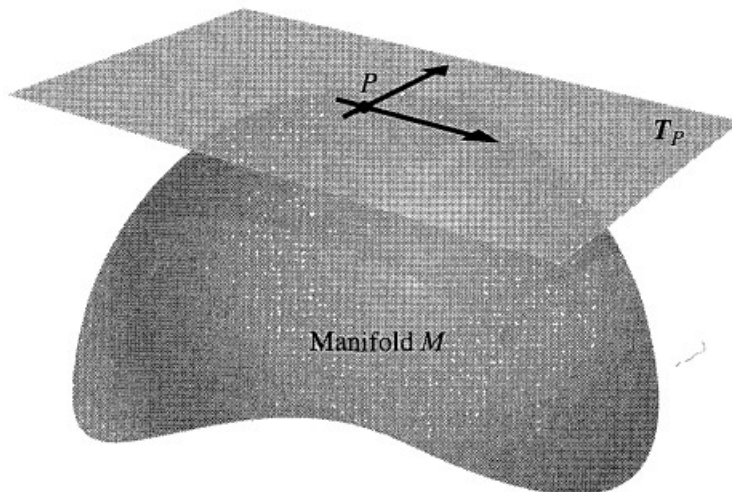
Γενικά, ένας πιο εύχρηστος ίσως ορισμός για να γίνει αντιληπτό πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έννοια της πολλαπλότητας στη γενική σχετικότητα είναι ο ακόλουθος: πολλαπλότητα είναι κάθε σύνολο το οποίο μπορεί να παραμετροποιηθεί κατά ένα συνεχή τρόπο. Ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων δίνει τη διάσταση, ενώ οι ίδιες οι παράμετροι είναι οι συντεταγμένες της πολλαπλότητας. Μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα, δηλαδή μια πολλαπλότητα στην οποία μπορούν να οριστούν κατευθύνσεις, εφαιπτόμενοι χώροι και διαφορίσιμες συναρτήσεις, σε συνδυασμό με μια μετρική, ο ορισμός της οποίας θα ακολουθήσει σε επόμενη υποενοότητα, μπορούν να περιγράψουν επαρκώς τον χωρόχρονο στον οποίον γίνονται οι υπολογισμοί για την περιγραφή της βαρύτητας (όπως και άλλων πεδίων).

1.1.3 Διανύσματα

Από τον παραπάνω ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας, έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε συναλλοίωτα (covariant) και ανταλλοίωτα (contravariant) διανύσματα (vectors) στην εκάστοτε πολλαπλότητα. Στη συνέχεια όταν γίνεται αναφορά στα ανταλλοίωτα διανύσματα θα χρησιμοποιούμε τον όρο διάνυσμα, ενώ όταν γίνεται αναφορά στα συναλλοίωτα θα χρησιμοποιούμε τον όρο συνδιανύσματα.

Στον χωρόχρονο τα διανύσματα είναι τετραδιάστατα, για αυτό και συχνά αναφέρονται και ως τετρανύσματα. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε τετρανύσματα θα τα αναφέρουμε σαν διανύσματα και αν θελήσουμε να αναφερθούμε σε τριδιάστατα διανύσματα θα χρησιμοποιούμε τον όρο τριδιανύσματα. Να σημειωθεί εδώ, πως τα διανύσματα σε πολλαπλότητες, όπως ο τετραδιάστατος χώρος, δηλαδή ο χώρος *Minkowski*, ορίζονται διαφορετικά από ότι τα κοινά τριδιανύσματα, καθώς σχετίζονται με συγκεκριμένα σημεία του χωροχρόνου και έτσι δεν μπορούν να οριστούν με τον κλασσικό ορισμό ("από ένα σημείο μέχρι ένα άλλο").

Ένα διάνυσμα είναι ένα καλά ορισμένο γεωμετρικό αντικείμενο, όπως και ένα διανυσματικό πεδίο, το οποίο ορίζεται σαν ένα σύνολο (set) διανυσμάτων με ακριβώς ένα να αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Στην περίπτωση του χώρου *Minkowski*, κάθε σημείο, p , του χωροχρόνου συσχετίζεται με το σύνολο όλων των πιθανών διανυσμάτων που ξεκινούν από αυτό. Το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων σε κάθε σημείο p μιας πολλαπλότητας M , ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος (tangent space) στο σημείο p και συμβολίζεται ως T_p . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1, ο εφαπτόμενος χώρος για κάθε τυχαία πολλαπλότητα M , μπορεί να απεικονιστεί σαν ένα διδιάστατο επίπεδο το οποίο είναι εφαπτόμενο στο σημείο p .



Σχήμα 1.1: Εφαπτόμενος χώρος T_p στο σημείο p της πολλαπλότητας M

Συχνά είναι χρήσιμο να αποσυνθέτουμε τα διανύσματα σε στοιχεία με σεβασμό σε μια βάση. Βάση ενός διανυσματικού χώρου είναι κάθε σύνολο διανυσμάτων το οποίο ταυτόχρονα εκτείνεται στον διανυσματικό χώρο (κάθε διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων βάσης) και είναι γραμμικά ανεξάρτητο (κανένα διάνυσμα βάσης δεν είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων διανυσμάτων βάσης). Για κάθε δοσμένο διανυσματικό χώρο, υπάρχουν άπειρες πιθανές διανυσματικές βάσεις τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Ωστόσο, κάθε διανυσματική βάση θα περιέχει τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων, ο οποίος καλείται *διάσταση* (dimension) του χώρου.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, στη Γενική Σχετικότητα, ο χώρος ο οποίος χρησιμοποιούμε είναι ο χώρος Minkowski του οποίου η διάσταση είναι τέσσερα, άρα κάθε βάση του αποτελείται από 4 διανύσματα. Έτσι, κάθε αφηρημένο διάνυσμα A στον επίπεδο χωροχρόνο Minkowski μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων βάσης:

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu \quad (1.5)$$

όπου A^μ (με $\mu = 0, 1, 2, 3$) οι αντίστοιχες συνιστώσες του A στη βάση \hat{e}_μ . Συχνά θα αναφερόμαστε στο εκάστοτε διάνυσμα σαν A^μ (το οποίο κανονικά είναι μόνο η μ συνιστώσα του διανύσματος) και όχι σαν A . Έτσι, από εδώ και πέρα οι αφηρημένοι δείκτες μ, ν , κλπ σε διανύσματα και ταυιστές θα αναφέρονται σε άθροισμα των συνιστωσών σε μια βάση. Δηλαδή, στον χώρο Minkowski θα ισχύει:

$$A^\mu = A^0 \hat{e}_0 + A^1 \hat{e}_1 + A^2 \hat{e}_2 + A^3 \hat{e}_3 \quad (1.6)$$

Ένα από τα κλασικότερα παραδείγματα από ένα διάνυσμα στον χωροχρόνο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας καμπύλης. Μια παραμετροποιημένη καμπύλη ή διαδρομή στον χωροχρόνο ορίζεται από τις συντεταγμένες σαν παραδειγμα της παραμέτρου, για παράδειγμα $x^\mu(\lambda)$. Έτσι, το εφαπτόμενο διάνυσμα έχει συνιστώσες:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (1.7)$$

Αν εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz στις παραμέτρους x^μ , δηλαδή:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^\nu. \quad (1.8)$$

παρατηρούμε πως η παραμετροποίηση του λ είναι αναλλοίωτη. Άρα το εφαπτόμενο διάνυσμα μετασχηματίζεται ως:

$$V^\mu \longrightarrow V^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} V^\nu \quad (1.9)$$

Τον ορισμό των διανυσμάτων μπορούμε να τον επεκτείνουμε και πέρα από τον κλασικό επίπεδο χωροχρόνο. Μπορούμε, δηλαδή, να μελετήσουμε την έννοια του διανύσματος μέσω των υπάρχοντων στοιχείων οποιαδήποτε πολλαπλότητας. Ουσιαστικά θα μελετήσουμε τον χώρο ο οποίος περιλαμβάνει όλες τις παραγώγους των ευθειών που περνάνε από το σημείο p , δηλαδή τον εφαπτόμενο χώρο T_p , ο οποίος όπως ήδη αναφέραμε είναι διανυσματικός χώρος, και επίσης καθορίζουν την κατεύθυνση της κάθε ευθείας. Έτσι, θα καταφέρουμε να μελετήσουμε τα διανύσματα του χώρου αυτού σε βάσεις οι οποίες εξαρτώνται από τις συντεταγμένες του διανυσματικού χώρου.

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ μιας αυθαίρετης πολλαπλότητας. Οι μερικές παράγωγοι ∂_μ στο σημείο p της πολλαπλότητας συγκροτούν μια καλά ορισμένη διανυσματική βάση στην οποία μπορούμε να αναπτύξουμε τα διανύσματα του χώρου. Έτσι, εξασφαλίζεται πως δεν χρειάζεται

να προσφύγουμε σε χώρο υψηλότερων διαστάσεων για να ορίσουμε ένα διάνυσμα. Επίσης, χρησιμοποιώντας τις μερικές παραγώγους σαν διανυσματική βάση μπορούμε να παραμετροποιήσουμε με αυτές κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα κάθε καμπύλης. Έτσι, εύκολα καταλαβαίνουμε πως η συμπεριφορά των διανυσμάτων είναι παρόμοια με αυτήν που περιγράψαμε για τον χώρο Minkowski, μόνο που στην περίπτωση της αυθαίρετης πολλαπλότητας που μελετάμε, τα διανύσματα βάσης αντί για \hat{e}^μ είναι ∂_μ , δηλαδή $\hat{e}^\mu = \partial_\mu$.

Οι συνιστώσες των νέων διανυσμάτων βάσης που έχουμε για την αυθαίρετη αυτή πολλαπλότητα, μετασχηματίζονται βάσει του κανόνα αλυσίδας του Leibniz, όπως φαίνεται στην εξίσωση 1.10:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \quad (1.10)$$

Έτσι, αφού για τα διανύσματα για τα οποία όπως ήδη έχουμε αναφέρει ισχύει πως $V = V^\mu \partial_\mu$, θα ισχύει η μετατροπή, απαιτώντας πως το διάνυσμα παραμένει αμετάβλητο κάτω από κάποια αλλαγή βάσης:

$$V^\mu \partial_\mu = V^{\mu'} \partial_{\mu'} = V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \implies V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (1.11)$$

Έχοντας ορίσει πλέον έναν διανυσματικό χώρο, μπορούμε να ορίσουμε έναν συσχετιζόμενο και ίσης διάστασης χώρο, γνωστός ως *δυϊκός ή συνεφαπτόμενος χώρος* (dual/contangent space) και συμβολίζεται με έναν αστερίσκο. (Δηλαδή για παράδειγμα, για τον εφαπτόμενο χώρο T_p ο αντίστοιχος συνεφαπτόμενος συμβολίζεται με T_p^* .) Ουσιαστικά, ο δυϊκός χώρος είναι ο χώρος όλων των γραμμικών χαρτών από τον αρχικό διανυσματικό χώρο στους πραγματικούς αριθμούς. Για να γίνει αυτή η κατασκευή πιο συμπαγής, μπορούμε να εισάγουμε ένα σύνολο από δυϊκά διανύσματα βάσης $\hat{\theta}^{(\nu)}$ απαιτώντας:

$$\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta_\mu^\nu \quad (1.12)$$

Τότε, κάθε δυϊκό διάνυσμα μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα των συνιστωσών του, τις οποίες συμβολίζουμε με κάτω δείκτες:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)} \quad (1.13)$$

Σε απόλυτη αναλογία με τα διανύσματα, θα γράφουμε ω_μ για να συμβολίσουμε συνολικά τα δυϊκά διανύσματα. Εν τέλει, τα στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου T_p καλούνται ανταλλοίωτα διανύσματα (ή όπως αναφέραμε στην αρχή απλά διανύσματα) και τα στοιχεία του συνεφαπτόμενου χώρου T_p^* καλούνται συναλλοίωτα διανύσματα (ή συνδιανύσματα) και θα συμβολίζονται με πάνω και κάτω δείκτες αντίστοιχα.

Ο συμβολισμός με τους δείκτες μας επιτρέπει να γράψουμε την δράση ενός συνδιανύσματος σε ένα διάνυσμα σαν:

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}(V^\nu \hat{e}_{(\nu)}) = \\ &= \omega_\mu V^\nu \hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) = \\ &\stackrel{(1.12)}{=} \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \\ &= \omega_\mu V^\mu \end{aligned} \quad (1.14)$$

Να σημειωθεί εδώ πως το αποτέλεσμα της παραπάνω πράξης είναι ένας πραγματικός αριθμός. Η μορφή της σχέσης (1.14) υπαινίσσεται επίσης πως μπορούμε να σκεφτούμε τα διανύσματα σαν γραμμικούς χάρτες πάνω σε συνδιανύσματα, ορίζοντας πως:

$$V(\omega) = \omega(V) = \omega_\mu V^\mu \quad (1.15)$$

Επομένως, ο δυϊκός χώρος στον δυϊκό διανυσματικό χώρο είναι ο αρχικός διανυσματικός χώρος.

Οι συνιστώσες των δυϊκών διανυσμάτων, ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό που ακολουθήσαμε και στην περίπτωση των διανυσμάτων, μετατρέπονται κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz όπως φαίνεται ακολούθως:

$$\omega_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^\nu \omega_\nu \quad (1.16)$$

και για τα δυϊκά διανύσματα βάσης, έχουμε:

$$\hat{\theta}^{(\rho')} = \Lambda_{\mu'}^{\rho'} \hat{\theta}^{(\sigma)} \quad (1.17)$$

Όπως θα περιμέναμε, οι συνιστώσες των δυϊκών διανυσμάτων μετασχηματίζονται κάτω από τους αντίστροφους μετασχηματισμούς αυτών των διανυσμάτων.

Στον χωροχρόνο, ωστόσο, δεν ενδιαφερόμαστε για έναν μόνο διανυσματικό χώρο, αλλά για πεδία διανυσμάτων και δυϊκών διανυσμάτων. Σε αυτήν την περίπτωση η δράση ενός δυϊκού διανυσματικού πεδίου σε ένα διανυσματικό πεδίο δεν είναι ένας απλός αριθμός, αλλά μια βαθμωτή (scalar) συνάρτηση στον χωροχρόνο. Ένα βαθμωτό μέγεθος είναι μια ποσότητα χωρίς δείκτες, το οποίο παραμένει αμετάβλητο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Με άλλα λόγια, είναι ένας μη-εξαρτόμενος από συντεταγμένες χάρτης από τον χωροχρόνο στους πραγματικούς αριθμούς.

Επίσης, στον χωροχρόνο το πιο απλό παράδειγμα ενός δυϊκού διανύσματος είναι η κλίση (gradient) μιας βαθμωτής συνάρτησης, το σύνολο των μερικών διαφορικών με σεβασμό στις χωροχρονικές συντεταγμένες, τις οποίες τις συμβολίζουμε με:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^{(\mu)} \quad (1.18)$$

Χρησιμοποιώντας τον συνηθισμένο κανόνα αλυσίδας για να μετατρέψουμε τα μερικά διαφορικά και τη σχέση (1.8), παίρνουμε τον ακόλουθο κανόνα μετατροπής των δυϊκών διανυσμάτων:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \Lambda_{\mu'}^\mu \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \quad (1.19)$$

Καθώς η κλίση είναι ένα δυϊκό διάνυσμα, ακολουθώντας την αντίστοιχη σημειογραφία για τα μερικά διαφορικά, έχουμε:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu} \quad (1.20)$$

Οπότε, αν και το x^μ έχει πάνω δείκτη, όταν είναι ο παρονομαστής σε ένα διαφορικό δρα σαν κάτω δείκτης στο προκύπτον αντικείμενο. Να σημειωθεί εδώ, πως η κλίση δρα με φυσικό τρόπο στο εφαπτόμενο διάνυσμα σε μια καμπύλη και το αποτέλεσμα είναι η συνηθισμένη παράγωγος της συνάρτησης κατά μήκος της καμπύλης, δηλαδή:

$$\partial_\mu \phi \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (1.21)$$

1.1.4 Τανυστές

Μια άμεση γενίκευση των διανυσμάτων και των δυϊκών διανυσμάτων είναι η έννοια του *τανυστή* (tensor). Ακριβώς όπως ένα δυϊκό διάνυσμα είναι ένας γραμμικός χάρτης από τα διανύσματα στο \mathbb{R} , ένας τανυστής T βαθμού (ή τύπου) (k, l) είναι ένας πολυγραμμικός (multilinear) χάρτης από μια συλλογή δυϊκών διανυσμάτων και διανυσμάτων στο \mathbb{R} . Δηλαδή, δίνοντας έναν ορισμό του τανυστή σε πιο αυστηρά μαθηματικά, έχουμε:

$$T : T_p^* \times \cdots \times T_p^* \times T_p \times \cdots \times T_p \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.22)$$

(k -φορές) (l -φορές)

Στον παραπάνω ορισμό, συμβολίσαμε με 'x' το Καρτεσιανό γινόμενο (για παράδειγμα, $T_p \times T_p$ είναι ο χώρος των διατεταγμένων ζευγών των διανυσμάτων). Επίσης, εδώ πρέπει να σημειωθεί πως με τον όρο πολυγραμμικότητα εννοούμε πως ένας τανυστής δρα γραμμικά σε καθένα από τα στοιχεία του. Για παράδειγμα, για έναν τανυστή T βαθμού (ή τύπου) $(1,1)$, έχουμε:

$$T(a\omega + b\eta, cV + dW) = acT(\omega, V) + adT(\omega, W) + bcT(\eta, V) + bdT(\eta, W). \quad (1.23)$$

Από τα παραπάνω, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε πως ένα βαθμωτό είναι ένα τανυστής τύπου $(0,0)$, ένα διάνυσμα είναι τανυστής τύπου $(1,0)$ και ένα δυϊκό διάνυσμα είναι τανυστής τύπου $(0,1)$.

Ο χώρος όλων των τανυστών ενός συγκεκριμένου τύπου (k, l) σχηματίζει έναν διανυσματικό χώρο και έτσι οι τανυστές μπορούν να προστεθούν μεταξύ τους και να πολλαπλασιαστούν με πραγματικούς αριθμούς. Για να καταφέρουμε να ορίσουμε επαρκώς μια βάση για αυτόν τον χώρο, πρέπει να ορίσουμε μια νέα "πράξη", γνωστή σαν *τανυστικό γινόμενο* (tensor product), η οποία συμβολίζεται με \otimes . Για παράδειγμα, εάν ο T είναι τανυστής τύπου (k, l) και ο S είναι ένας τύπου (m, n) , μπορούμε να ορίσουμε έναν $(k+m, l+n)$ τανυστή $T \otimes S$ ως:

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) = \\ = T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) \times S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Εδώ να σημειωθεί πως τα $\omega^{(i)}$ και $V^{(i)}$ είναι διακριτά διανύσματα και δυϊκά διανύσματα και όχι οι συνιστώσες τους. Έτσι, ουσιαστικά για το τανυστικό γινόμενο έχουμε πως ουσιαστικά πρώτα δρα ο T στο κατάλληλο σύνολο των δυϊκών διανυσμάτων και διανυσμάτων, στη συνέχεια δε ο S στα υπόλοιπα και τέλος πολλαπλασιάζουμε τα αποτελέσματα αυτών των 2 δράσεων. Επίσης, στη γενική περίπτωση, τα τανυστικά γινόμενα δεν μετατίθονται, δηλαδή $[T \otimes S, S \otimes T] = 0$, όπου με $[\dots, \dots]$ συμβολίσαμε τον μεταθέτη Lie.

Έχοντας ορίσει το τανυστικό γινόμενο, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε μια βάση για τον χώρο όλων των τανυστών (k, l) . Αυτό το επιτυγχάνουμε παίρνοντας το τανυστικό γινόμενο της βάσης των διανυσμάτων και της βάσης των δυϊκών διανυσμάτων. Αυτή η νέα βάση θα έχει τη μορφή:

$$\hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)} \quad (1.25)$$

Σε έναν τετραδιάστατο χωροχρόνο θα υπάρχουν $4^{(k+l)}$ βάσεις τανυστών γενικά. Γράφοντας τον αφηρημένο τανυστή T σε συνιστώσες, έχουμε:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)} \quad (1.26)$$

Οι συνιστώσες του ταυυστή προκύπτουν εφαρμόζοντας τον ταυυστή στις βάσεις των διανυσμάτων και των διϊκών διανυσμάτων. Έτσι έχουμε:

$$T^{\mu^1 \dots \mu^k}_{\nu^1 \dots \nu^l} = T(\hat{\theta}^{(\mu^1)}, \dots, \hat{\theta}^{(\mu^k)}, \hat{e}_{(\nu^1)}, \dots, \hat{e}_{(\nu^l)}) \quad (1.27)$$

Όπως κάναμε με τα διανύσματα και τα διϊκά διανύσματα, μπορούμε να γράψουμε τον ταυυστή (και κάθε ταυυστή) T σαν τις συνιστώσες του, $T^{\mu^1 \dots \mu^k}_{\nu^1 \dots \nu^l}$. Η δράση των ταυυστών σε ένα σύνολο διανυσμάτων και συνδιανυσμάτων, ακολουθώντας την λογική των διϊκών διανυσμάτων όταν δρουν στα διανύσματα (βλ. εξίσωση (1.14)), είναι:

$$T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T^{\mu^1 \dots \mu^k}_{\nu^1 \dots \nu^l} \omega_{\mu^1}^{(1)} \dots \omega_{\mu^k}^{(k)} V^{(1)\nu^1} \dots V^{(l)\nu^l} \quad (1.28)$$

Από τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε πως ένας (k, l) ταυυστής έχει k πάνω δείκτες και l κάτω δείκτες. Η σειρά των δεικτών έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς ταυυστής δεν πρέπει να δρα με τον ίδιο τρόπο στα διαφορετικά στοιχεία του. Επίσης, οι ταυυστές κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz μετατρέπονται όπως θα περιμέναμε: τα στοιχεία του με πάνω δείκτες μετασχηματίζονται σαν διανύσματα και τα στοιχεία του με κάτω δείκτες μετασχηματίζονται σαν συνδιανύσματα.

Αν και ορίσαμε τους ταυυστές σαν γραμμικούς χάρτες από σύνολα διανυσμάτων και εφαπτόμενων διανυσμάτων στο \mathbb{R} , μπορούν να δρουν σε μερικά μόνο στοιχεία και όχι σε όλα. Έτσι, ένας $(1,1)$ ταυυστής μπορεί να δράσει σαν χάρτης από διανύσματα σε διανύσματα και έτσι η ποσότητα $T^\mu_\nu V^\nu$ είναι και αυτή διάνυσμα. Παρόμοια, αν δράσει ένας ταυυστής πάνω σε έναν άλλο ταυυστή (ολόκληρο ή σε μερικά μόνο στοιχεία του), παίρνουμε έναν άλλο ταυυστή. Έτσι, για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε τον U^μ_ν :

$$U^\mu_\nu = T^{\mu\rho}_\sigma S^\sigma_{\rho\nu} \quad (1.29)$$

ο οποίος είναι ένας πολύ καλά ορισμένος ταυυστής $(1,1)$.

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε την πράξη *contraction*. Όταν εφαρμόζουμε *contraction* σε ένα (k, l) ταυυστή, τον μετατρέπουμε σε $(k-1, l-1)$ ταυυστή, αφαιρώντας έναν ίδιο πάνω και κάτω δείκτη και έτσι παίρνουμε έναν διαφορετικό ταυυστή. Για παράδειγμα:

$$S^{\mu\rho}_\sigma = T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\nu} \quad (1.30)$$

Ωστόσο, επιτρέπεται μόνο να κάνουμε *contraction* πάνω με κάτω δείκτη, αλλιώς το αποτέλεσμα δε θα ήταν ένας καλά ορισμένος ταυυστής. Επίσης, πρέπει να σημειώσουμε πως η σειρά των δεικτών παίζει ρόλο, καθώς κάνοντας *contraction* τους δείκτες με διαφορετικό τρόπο θέλουμε να παίρνουμε διαφορετικούς ταυυστές. Γι' αυτό γενικά θα ισχύει για τους ταυυστές πως:

$$T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}_{\sigma\nu} \quad (1.31)$$

Η σχέση (1.31) όμως είναι ο γενικός κανόνας, ο οποίος σε μερικές περιπτώσεις δεν ισχύει. Αυτές οι περιπτώσεις είναι όταν ο ταυυστής είναι είτε *συμμετρικός*, είτε *αντισυμμετρικός*. Συμμετρικός ως προς οποιουδήποτε από τους δείκτες του είναι ένας ταυυστής ο οποίος παραμένει αμετάβλητος αν εναλλάξουμε αυτούς τους δείκτες. Άρα, εάν:

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho} \quad (1.32)$$

λέμε πως ο ταυυστής $S_{\mu\nu\rho}$ είναι *συμμετρικός* ως προς τους δύο πρώτους δείκτες του, ενώ εάν:

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\mu\rho\nu} = S_{\rho\mu\nu} = S_{\nu\mu\rho} = S_{\nu\rho\mu} = S_{\rho\nu\mu} \quad (1.33)$$

λέμε πως ο ταυυστής $S_{\mu\nu\rho}$ είναι συμμετρικός ως προς όλους τους δείκτες του ή απλά συμμετρικός. Όμοια, μπορούμε να ορίσουμε πως ένας ταυυστής είναι αντισυμμετρικός ως προς οποιουδήποτε από τους δείκτες του εάν αλλάζει πρόσημο με την εναλλαγή τους. Δηλαδή, εάν:

$$S_{\mu\nu\rho} = -S_{\rho\nu\mu} \quad (1.34)$$

λέμε πως ο $S_{\mu\nu\rho}$ είναι αντισυμμετρικός ως προς τον πρώτο και τον τρίτο δείκτη του. Επίσης, εάν ένας ταυυστής είναι αντισυμμετρικός ως προς όλους τους δείκτες του λέμε πως είναι αντισυμμετρικός ως προς όλους τους δείκτες του ή απλά αντισυμμετρικός.

1.1.5 Η έννοια της μετρικής

Έχοντας πλέον περιγράψει την έννοια του ταυυστή, πρέπει να προσδιορίσουμε άλλη μια σημαντική και χρήσιμη ποσότητα, την έννοια της μετρικής (metric), η οποία όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε υπολογισμούς σε κάποια πολλαπλότητα (και κατά συνέπεια και στους υπολογισμούς της γενικής σχετικότητας και των γενικευμένων θεωριών βαρύτητας).

Η μετρική είναι ένας (0,2) ταυυστής (metric tensor) με τον οποίο μπορούμε σε μια πολλαπλότητα να ορίσουμε αποστάσεις και γωνίες επί της πολλαπλότητας. Γενικά, για να ορίσουμε μια γεωμετρία (άρα και μια πολλαπλότητα) χρειάζεται να ορίσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, x^a , για να μπορέσουμε να ορίσουμε ως μια αναπαράσταση όλα τα σημεία της, και ένα στοιχείο μήκους, ds^2 , με το οποίο ορίζουμε τη στοιχειώδη απόσταση, dx^a , μεταξύ δύο γειτονικών σημείων. Τότε το στοιχείο μήκους θα οριστεί ως:

$$ds^2 = g_{a\beta}(x)dx^a dx^\beta \quad (1.35)$$

όπου $g_{a\beta}$ είναι η μετρική, η οποία είναι ένας συμμετρικός πίνακας.

Για παράδειγμα, στον χωροχρόνο Minkowski η μετρική συμβολίζεται σαν $\eta_{\mu\nu}$ και καθώς ο χωροχρόνος είναι 4 διαστάσεων η $\eta_{\mu\nu}$ είναι ένας 4×4 συμμετρικός, διαγώνιος πίνακας και θα έχει τη μορφή:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Τώρα που έχουμε εισάγει την έννοια της μετρικής, μπορούμε πλέον να δώσουμε έναν πιο σαφή ορισμό για τους μετασχηματισμούς (προωθήσεις) Lorentz που αναφέραμε στις προηγούμενες ενότητες. Συγκεκριμένα, σαν μετασχηματισμό Lorentz ορίζουμε έναν πίνακα Λ ο οποίος δρα στη μετρική του χωροχρόνου Minkowski με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu'}{}_{\rho} \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma} = \Lambda^{\mu'}{}_{\rho} \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma} \eta_{\mu'\nu'} \quad (1.37)$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί ουσιαστικά συμβολίζουν μετατωπίσεις και στροφές του συστήματος συντεταγμένων.

Όπως ήδη αναφέραμε, η μετρική είναι ένας ταυυστής και συγκεκριμένα τύπου (0,2) και άρα μπορεί να δράσει ταυτόχρονα σε 2 διανύσματα. Αυτήν την πράξη την ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο (inner/dot product) και για την $\eta_{\mu\nu}$ η οποία δρα σε 2 αυθαίρετα διανύσματα V και W , ισχύει:

$$\eta(V, W) = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V \cdot W \quad (1.38)$$

με τις συνιστώσες της $\eta_{\mu\nu}$ να να προκύπτουν από το εσωτερικό γινόμενο της μετρικής με τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα.

Με το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε, επίσης, να διαχωρίσουμε τα διανύσματα σε χρονοειδή, χωροειδή ή φωτοειδή, δηλαδή αν η απόσταση μεταξύ δύο σημείων που ορίζεται από το διάνυσμα αυτό είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Για να καταστήσουμε σαφές και εύκολο το πώς μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε ένα διάνυσμα, πρέπει να εισάγουμε τον ορισμό της νόρμας ενός διανύσματος, η οποία ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος επί του εαυτού του. Έτσι, αν η ποσότητα $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$ είναι μικρότερη του μηδέν, το V^μ είναι χρονοειδές, αν είναι μηδέν το V^μ είναι φωτοειδές, ενώ αν είναι μεγαλύτερη του μηδέν το V^μ είναι χωροειδές.

Μπορούμε, επίσης, να ορίσουμε την *αντίστροφη μετρική* (inverse metric) $\eta^{\mu\nu}$. Η αντίστροφη μετρική είναι ένας ταυιστής τύπου (2,0) ο οποίος είναι -όπως εύκολα καταλαβαίνουμε και από το όνομα του $\eta^{\mu\nu}$ - ο αντίστροφος της μετρικής. Δηλαδή:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \eta_{\rho\nu}\eta^{\nu\mu} = \delta^\mu{}_\rho \quad (1.39)$$

όπου $\delta^\mu{}_\rho$ είναι ένας ταυιστής τύπου (1,1), ο οποίος ονομάζεται *δέλτα του Kronecker*. Αν ένας ταυιστής τύπου (1,1) θεωρείται σαν ένας χάρτης από διάνυσμα σε διάνυσμα, τότε το δέλτα του Kronecker είναι ο αντίστοιχος ταυοτικός χάρτης. Δηλαδή:

$$\delta^\mu{}_\rho = \begin{cases} 1, & \text{αν } \mu = \rho, \\ 0, & \text{αν } \mu \neq \rho. \end{cases} \quad (1.40)$$

Χρησιμοποιώντας τη μετρική και την αντίστροφη μετρική μπορούμε να ανεβάσουμε και να κατεβάσουμε δείκτες σε ταυιστές. Για παράδειγμα, για μια γενική μετρική $g_{\mu\nu}$ (με την αντίστοιχη αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$) και έναν δοσμένο ταυιστή $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μετρική για να παράξουμε νέους ταυιστές, δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\mu}{}_\delta &= g^{\mu\gamma}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \\ T_\mu{}^\beta{}_{\gamma\delta} &= g_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \\ T_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g^{\rho\gamma}g^{\sigma\delta}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Αντίστοιχα, με τη βοήθεια της μετρικής και της αντίστροφης μετρικής μπορούμε να μετατρέψουμε ένα διάνυσμα σε συνδιάνυσμα και το αντίστροφο:

$$\begin{aligned} V_\mu &= g_{\mu\nu}V^\nu \\ \omega^\mu &= g^{\mu\nu}\omega_\nu \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.1.6 Καμπυλότητα: Συναλλοιώτη Παράγωγος, Συνοχή, Σύμβολα Christoffel

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε κυρίως με τον επίπεδο χωροχρόνο, αν και σε μερικές περιπτώσεις μπορέσαμε να το γενικεύσουμε σε πιο αυθαίρετες περιπτώσεις. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, ο χωροχρόνος δεν είναι επίπεδος (τουλάχιστον στο μεγαλύτερο μέρος του και σε μεγάλες συνεχόμενες περιοχές του). Όταν ο χωροχρόνος δεν είναι επίπεδος, είναι *καμπυλωμένος* (curved). Η παρουσία ύλης, ενέργειας, ακτινοβολίας είναι οι βασικές αιτίες της καμπυλότητας του επίπεδου χωροχρόνου.

Εύκολα καταλαβαίνουμε πως με την καμπυλότητα αλλάζει και η γεωμετρία του χωροχρόνου, άρα μεταβάλλεται και η δράση της βαρύτητας (καθώς όπως ήδη έχουμε αναφέρει η βαρύτητα είναι γεωμετρία).

Όπως μπορεί να υποφιαστεί κανείς, η καμπυλότητα θα πρέπει με κάποιο τρόπο να εξαρτάται από τη μετρική της πολλαπλότητας (ή αλλιώς του χώρου που περιγράφουμε), χωρίς ωστόσο η σύνδεση να είναι προφανής. Στην παρούσα υποενότητα θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την καμπυλότητα ενός χωροχρόνου με τη βοήθεια εννοιών που εμπλέκουν και τη μετρική. Για να συμβεί αυτό πρέπει να ορίσουμε τις έννοιες της *συναλλοίωτης παραγώγου* (covariant derivative) και της *συναρχής* (connection).

Για τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη της κλασικής μερικής παραγώγου (partial derivative). Στον επίπεδο χωροχρόνο και σε αδρανειακές συντεταγμένες (όπως π.χ. οι καρτεσιανές), η μερική παράγωγος ενός τανυστή τύπου (k, l) είναι ένας τανυστής τύπου $(k, l + 1)$, δηλαδή π.χ.:

$$T_a^\mu{}_\nu = \partial_a R^\mu{}_\nu \quad (1.43)$$

Ουσιαστικά, ο τελεστής της μερικής παραγώγου ως προς την a συντεταγμένη, ∂_a , είναι ένας χάρτης από τους (k, l) τανυστές στους $(k, l + 1)$ τανυστές. Επίσης, ισχύει πως:

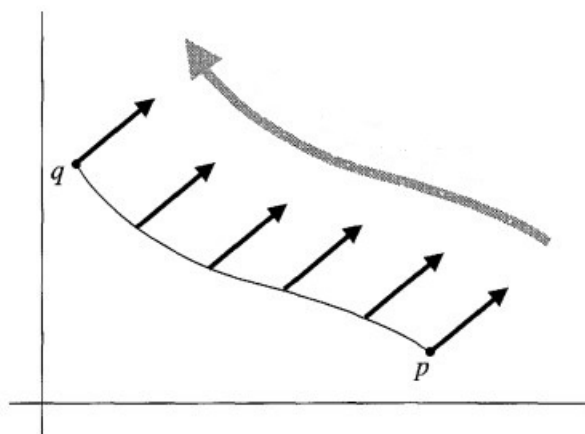
$$[\partial_\mu, \partial_\nu]V^\mu = 0 \iff \partial_\mu \partial_\nu (V^\mu) = \partial_\nu \partial_\mu (V^\mu) \quad (1.44)$$

Ωστόσο, η μερική παράγωγος εξαρτάται από τα διανύσματα βάσης του χώρου, τα οποία αν και στον επίπεδο χωροχρόνο είναι σταθερά και άρα οι όροι της μερικής παραγώγου που εξαρτώνται από αυτά μηδενίζονται, στον καμπυλωμένο χωροχρόνο μεταβάλλονται και άρα οι όροι αυτοί είναι μη μηδενικοί και άρα η εξίσωση (1.43) δεν είναι αληθής. Έτσι, αναγκάζομαστε να ορίσουμε έναν τελεστή ο οποίος είναι πιο γενικός και μπορεί να δράσει στα μαθηματικά αντικείμενα (διανύσματα, συνδιανύσματα, τανυστές, κλπ) του καμπυλωμένου χωροχρόνου όπως δρα ο τελεστής της μερικής παραγώγου στα αντίστοιχα αντικείμενα του επίπεδου χωροχρόνου. Τον τελεστή αυτόν θα τον συμβολίζουμε με ∇ και θα τον ονομάσουμε *συναλλοίωτη παράγωγος*. Η συναλλοίωτη παράγωγος θα αποτελείται από την μερική παράγωγο συν ένα γραμμικό μετασχηματισμό που συνοψίζει την προαναφερθείσα μεταβολή των διανυσμάτων βάσης. Για παράδειγμα, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανύσματος V^μ είναι:

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda \quad (1.45)$$

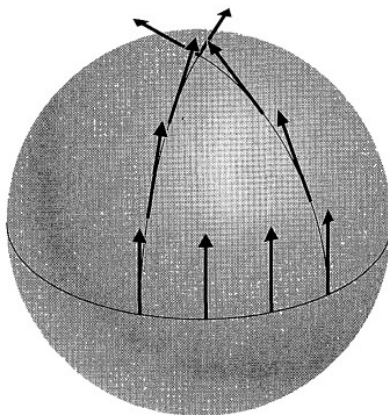
όπου $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ είναι οι συντελεστές της συναρχής στην πολλαπλότητα. Αν και εκ πρώτης όψεως οι συντελεστές αυτοί μοιάζουν με τανυστές, αν προσπαθήσουμε να τους μετασχηματίσουμε όπως είδαμε παραπάνω για τους τανυστές, θα δούμε πως δεν μετασχηματίζονται αναλόγως. Καταλαβαίνουμε πως για να ορίσουμε με ακρίβεια τη συναλλοίωτη παράγωγο σε μια πολλαπλότητα πρέπει να ορίσουμε τους συντελεστές συναρχής, οι οποίοι όπως υποδηλώνεται από το όνομά τους εξαρτώνται από τη συναρχή που επιλέγουμε στην πολλαπλότητα.

Ήρθε η ώρα να ορίσουμε τη συναρχή (connection) μιας πολλαπλότητας. Σαν συναρχή μπορούμε να ορίσουμε γεωμετρικά τον προσδιορισμό του τρόπου με τον οποίο μπορεί ένα διάνυσμα να μεταφερθεί από έναν εραπτόμενο χώρο σε κάποιον άλλον (παράλληλη μετατόπιση). Στον Ευκλείδειο χώρο η παράλληλη μετατόπιση ορίζεται μονοσήμαντα και επιτυγχάνεται κρατώντας απλά τις καρτεσιανές συνιστώσες σταθερές όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Όταν, όμως, εισάγεται η έννοια της καμπυλότητας σε έναν χώρο, ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να ορίσουμε την μετατόπιση ενός διανύσματος κρατώντας σταθερά όμως την παράλληλία του και το μέτρο του είναι παραπάνω από ένας. Ωστόσο, η τελική μορφή του διανύσματος που μετατοπίσαμε παράλληλα από το αρχικό σημείο σε ένα άλλο, έχει να κάνει με το μονοπάτι που ακολουθήθηκε για τη μετατόπιση αυτή.



Σχήμα 1.2: Στον επίπεδο χώρο, η παράλληλη μετατόπιση ορίζεται μονοσήμαντα και επιτυγχάνεται κρατώντας απλά τις καρτεσιανές συνιστώσες σταθερές.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μια σφαίρα (2-sphere) και ένα διάνυσμα στον ισημερινό της, το οποίο "δείχνει" κατά μήκος μιας γραμμής σταθερού μήκους. Το μετατοπίζουμε παράλληλα στον βόρειο πόλο κατά μήκος μιας γραμμής μήκους. Στη συνέχεια, παίρνουμε το αρχικό διάνυσμα και το μετατοπίζουμε παράλληλα κατά μήκος του ισημερινού κατά μια γωνία θ και το μεταφέρουμε στον βόρειο πόλο της σφαίρας όπως και προηγουμένως. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.3, είναι προφανές πως αν και τα δυο διανύσματα στον βόρειο πόλο ξεκίνησαν από το ίδιο διάνυσμα και κατέληξαν στο ίδιο τελικό σημείο, αλλά επειδή ακολούθησαν διαφορετικές διαδρομές διαφέρουν μεταξύ τους.



Σχήμα 1.3: Παράλληλη μετατόπιση του ίδιου διανύσματος στον βόρειο πόλο της σφαίρας ακολουθώντας δυο διαφορετικά μονοπάτια.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε έτσι πως μπορούμε να ορίσουμε πάνω από μια συνοχή στην κάθε πολλαπλότητα. Έτσι, πρέπει να αποσαφηνίσουμε στη γενική σχετικότητα ποια συνοχή θα επιλέξουμε. Για να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε ποια συνοχή θα επιλέξουμε, ορίζουμε έναν νέο ταυυστή, τον *ταυυστή στρέψης* (torsion tensor), τον οποίο συμβολίζουμε με T και ορίζεται όπως

φαίνεται στην εξίσωση (1.45):

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \quad (1.46)$$

Στη γενική σχετικότητα, επιλέγουμε τη συνοχή η οποία είναι χωρίς στρέψη (torsion-free), δηλαδή οι συντελεστές συνοχής είναι συμμετρικοί ως προς τους κάτω δείκτες και ο ταυιστής στρέψης είναι μηδέν, δηλαδή:

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = 0 \iff \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \quad (1.47)$$

Μια άλλη ιδιότητα που απαιτούμε να έχει η συνοχή της γενικής σχετικότητας είναι η συμβατότητα της μετρικής (metric compatible). Αυτό σημαίνει πως η συναλλοίωτη παράγωγος της μετρικής (και της αντίστροφης μετρικής) με σεβασμό στη συνοχή είναι παντού μηδέν. Άρα από τα παραπάνω προκύπτει πως:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho g_{\mu\nu} &= 0, \\ \nabla_\rho g^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ είναι η μετρική. Η συνοχή η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (1.47) και (1.48) καλείται συνοχή *Levi-Civita* και υπάρχει μια ακριβώς για μια δοσμένη πολλαπλότητα. Αυτή είναι και η συνοχή που θα επιλέξουμε να εξοπλίσουμε τον χωροχρόνο στη Γενική Σχετικότητα.

Μετά από τον ορισμό της συνοχής *Levi-Civita*, ήρθε η ώρα να επιστρέψουμε στους συντελεστές συνοχής και να προσπαθήσουμε πλέον να τους ορίσουμε για τη συγκεκριμένη συνοχή, συναρτήσει της μετρικής. Για να το καταφέρουμε αυτό θα αναπτύξουμε τη σχέση (1.48) για 3 διαφορετικές εναλλαγές των δεικτών. Δηλαδή, έχουμε:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \quad (1.49)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0 \quad (1.50)$$

$$\nabla_\nu g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0 \quad (1.51)$$

Αφαιρώντας την (1.50) και την (1.51) από την (1.49) και εκμεταλλευόμενοι πως οι συντελεστές συνοχής είναι συμμετρικοί ως προς τους κάτω δείκτες τους και πως η μετρική είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες της καταλήγουμε πως:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} = 0 \quad (1.52)$$

Λύνοντας την εξίσωση (1.52) ως προς τους συντελεστές συνοχής και πολλαπλασιάζοντας με την αντίστροφη μετρική $g^{\sigma\rho}$, έχουμε:

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (1.53)$$

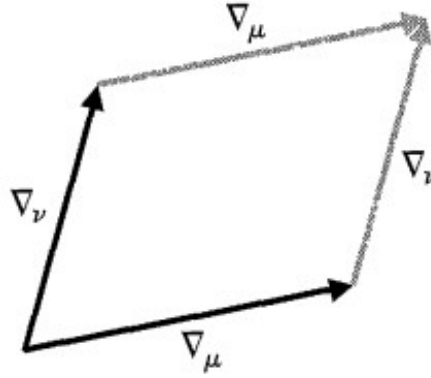
Έτσι, έχουμε μια εξίσωση με την οποία ορίζονται μονοσήμαντα οι συντελεστές συνοχής στη συνοχή *Levi-Civita* συναρτήσει της μετρικής της πολλαπλότητας. Οι συντελεστές αυτοί τότε θα καλούνται συντελεστές ή (ακόμα πιο συχνά) σύμβολα *Christoffel* και όπως θα δούμε παρακάτω μέσω αυτών μπορούμε να ορίσουμε σημαντικές ποσότητες για την περιγραφή του χωροχρόνου.

Βάσει των παραπάνω επίσης, μπορούμε να ορίσουμε τη γεωδαισιακή (geodesic) εξίσωση της πολλαπλότητας. Ουσιαστικά, η γεωδαισιακή είναι η γενίκευση της εξίσωσης της ευθείας γραμμής σε μια αυθαίρετη πολλαπλότητα. Δηλαδή, είναι μια παραμετροποιημένη καμπύλη της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα πραγματοποιεί παράλληλη μετατόπιση καθ' όλη τη διαδρομή της, κάτι το οποίο μαθηματικά μεταφράζεται:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{x^\rho}{d\lambda} \frac{x^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (1.54)$$

1.1.7 Καμπυλότητα: Τανυστές Riemann και Ricci

Ήρθε η ώρα πλέον να ορίσουμε ένα γεωμετρικό/ μαθηματικό αντικείμενο το οποίο να περιγράφει την καμπυλότητα μιας πολλαπλότητας. Αυτή η ποσότητα είναι ένας τανυστής και ονομάζεται *τανυστής Riemann* και ο οποίος ουσιαστικά περιγράφει πόσο περισσότερο καμπυλωμένη είναι τοπικά η πολλαπλότητα σε σχέση με έναν επίπεδο χώρο. Αυτό θα το καταφέρουμε μετατοπίζοντας παράλληλα ένα διάνυσμα σε έναν απειροστό βρόγχο, απαιτώντας το διάνυσμα να παραμείνει ίδιο. Εφόσον η συναλλοίωτη παράγωγος μας δείχνει το πόσο αλλάζει ένα διάνυσμα προς μια κατεύθυνση, σε σχέση με το να μετατοπιστεί παράλληλα, ο ζητούμενος τανυστής θα προκύψει από τη μετάθεση 2 συναλλοίωτων παραγώγων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4: Η μετάθεση δυο συναλλοίωτων παραγώγων

Άρα, έχουμε τη μετάθεση:

$$\begin{aligned}
 [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = \\
 &= (\partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
 &= (\partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \\
 &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
 &= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \\
 &= R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

όπου $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ ο τανυστής Riemann και $T^\lambda_{\mu\nu}$ ο τανυστής στρέψης. Έτσι, ορίσαμε πως:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \tag{1.56}$$

Ο τανυστής Riemann στη συνοχή Levi-Civita έχει κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες οι οποίες είναι χρήσιμες για τους υπολογισμούς που κάνουμε γύρω από τη Γενική Σχετικότητα. Αυτές είναι, κατεβάζοντας τον πάνω δείκτη με τη βοήθεια της μετρικής:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \tag{1.57}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu} \tag{1.58}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1.59}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0 \tag{1.60}$$

Άλλη μια σημαντική ιδιότητα του τανυστή Riemann είναι οι λεγόμενες ταυτότητες Bianchi, οι οποίες ορίζονται ως:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (1.61)$$

Επίσης, κάνοντας contraction τον πρώτο και τον τρίτο δείκτη, παίρνουμε έναν άλλον τανυστή τύπου (0,2), τον οποίον ονομάζουμε *τανυστή Ricci* και ο οποίος ορίζεται:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \quad (1.62)$$

ο οποίος είναι συμμετρικός λόγω της συμμετρίας του Riemann, δηλαδή:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (1.63)$$

Από τον τανυστή Ricci μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο μέγεθος, το *βαθμωτό Ricci* (Ricci scalar), που είναι το ίχνος του τανυστή Ricci. Δηλαδή, ορίζεται ως:

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

1.1.8 Κλασική θεωρία πεδίου

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας αποτελεί μια κλασική θεωρία πεδίου, δηλαδή μια θεωρία πεδίου η οποία δεν λαμβάνει υπ' όψη της φαινόμενα κβάντωσης. Κάθε τέτοια θεωρία θεμελιώνεται μαθηματικά μέσω της Αρχής της Ελάχιστης Δράσης, στην οποία θα κάνουμε μια εισαγωγή στο παρόν κεφάλαιο και θα δούμε πώς εφαρμόζεται στην περίπτωση του χωροχρόνου και της βαρύτητας στην επόμενη ενότητα (Ενότητα 1.2).

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας από το απλούστερο παράδειγμα της κλασικής μηχανικής: ένα σωματίδιο το οποίο μπορεί να κινηθεί σε μια διάσταση με συντεταγμένη $q(t)$ όπου t ο χρόνος. Μπορούμε να παράξουμε τις εξισώσεις κίνησης για το σωματίδιο αυτό από την “Αρχή της Ελάχιστης Δράσης”. Σύμφωνα με αυτήν, ψάχνουμε για κρίσιμα σημεία μιας “δράσης” S σαν συνάρτηση της τροχιάς του σωματιδίου, η οποία γράφεται σαν:

$$S = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (1.65)$$

όπου η συνάρτηση $L(q, \dot{q})$ είναι η Λαγκραντζιανή (Lagrangian) του συστήματος, η οποία ορίζεται σαν:

$$L = K - V \quad (1.66)$$

όπου K είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος και V η δυναμική ενέργεια του συστήματος. Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας λογισμό μεταβολών, δηλαδή εφαρμόζοντας μικρές μεταβολές στην δράση, εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης της δράσης, δηλαδή τις τροχιές $q(t)$ για τις οποίες η S παραμένει σταθερή κάτω από μικρές μεταβολές, δηλαδή $S = S + \delta S \iff \delta S \rightarrow 0$. Προκύπτει πως οι τροχιές αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler- Lagrange, οι οποίες είναι οι:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (1.67)$$

Στην κλασική θεωρία πεδίου, υπάρχει πλήρης αντιστοιχία με το παράδειγμα της κλασικής μηχανικής, μόνο που αντί για μια και μόνο συντεταγμένη έχουμε ένα σύνολο από χωροχρονικά εξαρτώμενα πεδία (fields), $\Phi^i(x^\mu)$, και η δράση S είναι ένα συναρτησφαιδές των πεδίων αυτών. Κάθε

Φ^i είναι μια συνάρτηση στον χωροχρόνο και i είναι ένας δείκτης για κάθε ανεξάρτητο πεδίο.

Στη θεωρία πεδίου, η Lagrangian μπορεί να εκφραστεί σαν ολοκλήρωμα στον χώρο μια *Λαγκραντζιανής Πυκνότητας* \mathcal{L} , η οποία είναι μια συνάρτηση των πεδίων Φ^i και των χωρικών διαφορικών τους $\partial_\mu \Phi^i$, δηλαδή:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) \quad (1.68)$$

και άρα η δράση ορίζεται σαν:

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) \quad (1.69)$$

όπου η Lagrangian είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Όπως κάναμε και στην περίπτωση του σωματιδίου, θα εφαρμόσουμε λογισμό μεταβολών, αυτήν την φορά στα πεδία Φ^i και τα διαφορικά τους $\partial_\mu \Phi^i$ απαιτώντας να μείνουν αμετάβλητα κάτω από μικρές μεταβολές του πεδίου, δηλαδή:

$$\Phi^i \rightarrow \Phi^i + \delta\Phi^i \quad (1.70)$$

$$\partial_\mu \Phi^i \rightarrow \partial_\mu \Phi^i + \delta(\partial_\mu \Phi^i) = \partial_\mu \Phi^i + \partial_\mu(\delta\Phi^i) \quad (1.71)$$

Καθώς υποθέτουμε πως οι μεταβολές είναι μικρές, μπορούμε να αναπτύξουμε την Lagrangian σε σειρά Taylor. Άρα:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) &\rightarrow \mathcal{L}(\Phi^i + \delta\Phi^i, \partial_\mu(\Phi^i + \delta\Phi^i)) = \\ &= \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} \delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \partial_\mu(\delta\Phi^i) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Όμοια, για τη δράση, έχουμε πως:

$$S \rightarrow S + \delta S \quad (1.73)$$

όπου η μεταβολή της δράσης είναι:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} \delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \partial_\mu(\delta\Phi^i) \right] \quad (1.74)$$

Στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (1.74), αναπτύσσουμε τον δεύτερο όρο εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \partial_\mu(\delta\Phi^i) &= - \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \right) \delta\Phi^i + \\ &+ \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \delta\Phi^i \right) \end{aligned} \quad (1.75)$$

Ο τελευταίος όρος στην εξίσωση (1.75), θεωρώντας πως είναι το ολοκλήρωμα ενός όρου τύπου $\partial_\mu V^\mu$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Stokes για ολοκλήρωση στις 4 διαστάσεις και θεωρώντας πως η μεταβολή (και η παράγωγός της) είναι μηδενική στα όρια, εξαφανίζεται. Έτσι, αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.75) στην (1.74), έχουμε πως:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)} \right) \right] \delta\Phi^i \quad (1.76)$$

όπου το διαφορικό του συναρτησκειδούς S με σεβασμό στο Φ^i ορίζεται σαν:

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \right) \right] \quad (1.77)$$

Τώρα, θεωρούμε πως η δράση S βρίσκεται σε ένα κρίσιμο σημείο όπου το διαφορικό του συναρτησκειδούς εξαφανίζεται. Τότε η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να ισούται με το μηδέν και άρα έχουμε:

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} \right) = 0 \quad (1.78)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστή σαν εξίσωση *Euler-Lagrange* για μια εξίσωση πεδίου στον επίπεδο χωροχρόνο.

Το απλούστερο παράδειγμα ενός πεδίου είναι ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο ϕ , δηλαδή:

$$\Phi^i = \phi(x^\mu) : (\text{χωροχρόνος}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.79)$$

Τότε για ένα τέτοιο πεδίο η κινητική ενέργεια θα είναι $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, η ενέργεια κλίσης θα είναι $\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$ και η δυναμική ενέργεια $V(\phi)$. Αν και οι δύο πρώτες δεν είναι Lorentz-αναλλοίωτες μπορούμε να τις συνδυάσουμε και να πάρουμε μια ποσότητα η οποία να είναι Lorentz-αναλλοίωτη, η οποία θα είναι:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) \quad (1.80)$$

Οπότε η Lagrangian θα ισούται με:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi) \quad (1.81)$$

και για την οποία θα ισχύει:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{dV}{d\phi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = -\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (1.82)$$

Αντικαθιστώντας την (1.82) στην (1.78), παίρνουμε την *εξίσωση d' Alembert* ή αλλιώς τις εξισώσεις κίνησης:

$$\square\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (1.83)$$

όπου $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, τηρώντας τη σύμβαση $(-+++)$.

1.2 Εξισώσεις πεδίου του Einstein για τη Γενική Σχετικότητα

1.2.1 Παραγωγή των πεδιακών εξισώσεων

Ήρθε η ώρα να προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τη Λαγκραντζιανή ανάλυση που περιγράψαμε στην Ενότητα 1.1.8 στην περίπτωση του χωροχρόνου και έτσι να παράξουμε τις εξισώσεις κίνησης της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Αν και ιστορικά δεν ακολουθήθηκε αυτή η λογική διαδρομή από τον δημιουργό της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, τον Albert Einstein, ο οποίος παράγαγε τις εξισώσεις κίνησης για τη θεωρία του βήμα-βήμα μέσω φυσικώς επιχειρημάτων και σχέσεων αναλογίας και όχι εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών στη δράση κάποιας Λαγκραντζιανής πυκνότητας, θεωρείται αναγκαίο να ακολουθηθεί αυτή η διαδικασία στην παρούσα εργασία, καθώς για να παραχθούν οι εξισώσεις κίνησης Γενικευμένων Θεωριών Βαρύτητας θα ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία (όπως θα γίνει σαφές στο Κεφάλαιο 3).

Αρχική απορία που δημιουργείται είναι σε ποια δράση θα εφαρμόσουμε θεωρία μεταβολών και άρα ποια Λαγκραντζιανή πυκνότητα θα αντιστοιχεί στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και τον καμπυλωμένο πλέον χωροχρόνο. Από την ανάλυση των προηγούμενων ενοτήτων, εύκολα καταλαβαίνουμε πως εφόσον ο χωροχρόνος είναι πλέον καμπυλωμένος η σχέση (1.69) θα πρέπει να τροποποιηθεί. Δηλαδή, πλέον η Λαγκραντζιανή πυκνότητα θα πρέπει να εξαρτάται από πεδία $\Phi^i(x)$ και αντί για την κλασική παράγωγο των πεδίων, θα εξαρτάται από την αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγο ∇_μ , δηλαδή:

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \nabla_\mu \Phi^i) d^n x \quad (1.84)$$

Η εξίσωση (1.84) ωστόσο αφορά πυκνότητες, καθώς το $d^n x$ και η \mathcal{L} είναι πυκνότητες. Άρα θα πρέπει να την τροποποιήσουμε για να αφορά βαθμωτές ποσότητες. Έτσι, θα ορίσουμε:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}} \quad (1.85)$$

όπου $\hat{\mathcal{L}}$ είναι όντως ένα βαθμωτό μέγεθος και η ποσότητα $\sqrt{-g}$ είναι η ρίζα της αρνητικής ορίζουσας της μετρικής. Να σημειωθεί εδώ πως το γινόμενο $\sqrt{-g} d^n x$ αποτελεί τον αναλλοίωτο όγκο dV και είναι βαθμωτό μέγεθος. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για τον καμπυλωμένο χωροχρόνο και για το βαθμωτό $\hat{\mathcal{L}}$ γίνονται:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right) = 0 \quad (1.86)$$

και οι αντίστοιχες εξισώσεις d'Alembert θα είναι ίδιες με την (1.83), όπου όμως:

$$\square = \nabla^\mu \nabla_\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \quad (1.87)$$

Επανερχόμενοι στο αρχικό μας ερώτημα για το ποιά θα είναι η δράση της γενικής σχετικότητας, πρέπει αρχικά να αναλογιστούμε ποιες θα είναι οι δυναμικές μεταβλητές. Η πιο λογική επιλογή είναι να επιλέξουμε τη μετρική $g_{\mu\nu}$. Από εκεί και πέρα το ανεξάρτητο βαθμωτό που κατασκευάζεται από την μετρική και περιέχει διαφορικά της μετρικής μέχρι δεύτερης τάξης, είναι το βαθμωτό Ricci, R , το οποίο παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.1.7. Άρα η δράση για τη Γενική Σχετικότητα θα είναι η δράση *Einstein-Hilbert*:

$$S_{E-H} = \int \sqrt{-g} R d^n x \quad (1.88)$$

όπου $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu$ το βαθμωτό Ricci. Η δράση αυτή φέρει το όνομα του εμπνευστή της Γενικής Σχετικότητας, αλλά και του Γερμανού μαθηματικού David Hilbert (1862-1943) ο οποίος ιστορικά πρωτοδημοσίευσε αυτήν τη δράση για τη γενική σχετικότητα. Ο Einstein στη συνέχεια τροποποίησε την (1.88) και όρισε τις διαστάσεις του χώρου στον οποίον έχουμε την ολοκλήρωση της δράσης να είναι ίσος με 4. Έτσι, η δράση της γενικής σχετικότητας στο κενό (χωρίς παρουσία ύλης) έγινε:

$$S_{GR} = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (1.89)$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ουσιαστικά θα εφαρμόσουμε θεωρία μεταβολών στη δράση (1.89) με σεβασμό στην αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$ και όχι στη μετρική $g_{\mu\nu}$. Εφόσον έχουμε πως $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$ και το δέλτα του Kronecher παραμένει αμετάβλητο κάτω από οποιαδήποτε μεταβολή, έχουμε πως:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \quad (1.90)$$

Άρα οι δεσμοί με σεβασμό στη μετρική $g^{\mu\nu}$ είναι τα ίδια με αυτά με σεβασμό στις μεταβολές του $g_{\mu\nu}$. Άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.64) για το βαθμωτό Ricci, έχουμε πως η δράση (1.89) γίνεται:

$$S_{GR} = \int \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) d^4x \quad (1.91)$$

Εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών για την δράση (1.91), έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta S_{GR} &= \delta \left(\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x \right) = \int \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) d^4x = \\ &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) d^4x + \int \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} d^4x = \\ &= \delta S_A + \delta S_B \end{aligned} \quad (1.92)$$

όπου:

$$\delta S_A = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) d^4x \quad (1.93)$$

$$\delta S_B = \int \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} d^4x \quad (1.94)$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε τη μεταβολή της δράσης δS_A . Στη συνέχεια της ανάλυσης μας θα επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων για τις οποίες τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται. Αυτό το επιλέγουμε για δική μας ευκολία χωρίς βλάβη της γενικότητας (εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς πως στη συνέχεια της ανάλυσής μας αν δεν μηδενίζαμε τα σύμβολα Christoffel θα απλοποιούνταν εάν απαλλαγούμε από τους βουβούς δείκτες) και γίνεται να κάνουμε αυτή την επιλογή εκμεταλλευόμενοι πως τα σύμβολα Christoffel δεν είναι τανυστές. Αυτές οι συντεταγμένες λέγονται γεωδαισικές. Άρα συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.56) και (1.62), έχουμε πως ο τανυστής Ricci εκφρασμένος συναρτήσει των συμβόλων Christoffel είναι:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \quad (1.95)$$

και αν απαλλαγούμε από τους βουβούς δείκτες, έχουμε $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} = 0$, άρα:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} \quad (1.96)$$

Έτσι, έχουμε πως η μεταβολή του τανυστή Ricci είναι:

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta(\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \delta(\partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho) = \partial_\rho \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \partial_\nu \delta(\Gamma_{\mu\rho}^\rho) = \\ &\stackrel{\Gamma_{\mu\nu}^\rho=0}{=} \nabla_\rho \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\rho}^\rho)\end{aligned}\quad (1.97)$$

Άρα η δράση δS_A υπολογίζεται:

$$\begin{aligned}\delta S_A &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) d^4x = \\ &\stackrel{(1.97)}{=} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\rho \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\rho}^\rho)] d^4x = \\ &= \int \sqrt{-g} [\nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho)] d^4x = \\ &= \int \sqrt{-g} d^4x \nabla_\alpha [(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - (g^{\mu\alpha} \delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho)]\end{aligned}\quad (1.98)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα (βάσει του θεωρήματος του Stokes) ισούται με μία οριακή συνεισφορά στο άπειρο, την οποία μπορούμε να ορίσουμε ίση με 0, κάνοντας τη μεταβολή να εξαφανίζεται στο άπειρο. Άρα αυτός ο όρος της μεταβολής της δράσης δε συνεισφέρει στη συνολική μεταβολή της δράσης, άρα:

$$\delta S_A = 0 \quad (1.99)$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε τον όρο δS_B . Έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta S_B &= \int \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} d^4x = \\ &= \int R_{\mu\nu} [\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu})] d^4x = \\ &= \int [R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu})] d^4x = \\ &= \int [R \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})] d^4x\end{aligned}\quad (1.100)$$

Για τη μεταβολή της αρνητικής ορίζουσας, όπου $g = \det g_{\mu\nu}$ έχουμε:

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \stackrel{(1.90)}{=} -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (1.101)$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \stackrel{(1.101)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (1.102)$$

Άρα, η (1.100), γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \delta S_B &= \int [R\delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})]d^4x \stackrel{(1.102)}{=} \\
 &= \int [R\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})]d^4x = \\
 &= \int \sqrt{-g}d^4x \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] \delta(g^{\mu\nu}) \tag{1.103}
 \end{aligned}$$

Άρα, εφόσον όπως αποδείξαμε $\delta S_A = 0$, έχουμε πως:

$$\delta S_{GR} = \delta S_B = \int \sqrt{-g}d^4x \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] \delta(g^{\mu\nu}) \tag{1.104}$$

Όμως, πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις Euler- Lagrange και επειδή όπως ήδη έχουμε αναφέρει εφαρμόζουμε θεωρία μεταβολών με σεβασμό στην αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$, έχουμε πως η (1.78), γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta S_{GR}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 &\iff \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{GR}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \stackrel{(1.104)}{\iff} \\
 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= 0 \tag{1.105}
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση (1.105) αποτελεί την *εξίσωση του Einstein στο κενό* ή αλλιώς τις πεδιακές εξισώσεις ή εξισώσεις κίνησης της Γενικής Σχετικότητας στο κενό. Αν επιστρέψουμε στις ταυτότητες Bianchi (εξίσωση 1.61) της Ενότητας 1.1.7 και εφαρμόσουμε διπλό contraction, παίρνουμε:

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_\rho R \tag{1.106}$$

και βάσει αυτής της εξίσωσης, ορίζουμε έναν νέο τανυστή, τον *τανυστή Einstein*, ως:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \tag{1.107}$$

Έτσι, η εξίσωση (1.105) γίνεται:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \tag{1.108}$$

Ωστόσο, η παραπάνω εξίσωση ισχύει στην περίπτωση του κενού. Αν στην ανάλυσή μας συμπεριλάβουμε πεδία ύλης, καταλαβαίνουμε πως πρέπει να τροποποιήσουμε την αρχική δράση (1.89) και να προσθέσουμε και έναν όρο ύλης. Τότε, θα έχουμε:

$$S = kS_{GR} + S_M \tag{1.109}$$

όπου S_M η δράση για την ύλη και k ένας συντελεστής κανονικοποίησης, ούτως ώστε να προκύπτουν οι εξισώσεις του Νεύτωνα για το νευτώνειο όριο. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με παραπάνω και απαιτώντας να ισχύει οι εξισώσεις Euler-Lagrange και για αυτήν τη δράση, έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = k \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \tag{1.110}$$

Εάν τώρα ορίσουμε τον ταυυστή ενέργειας ορμής, $T^{\mu\nu}$, ως:

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.111)$$

έχουμε πως η (1.110) γίνεται:

$$k \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.112)$$

Τέλος, για να αποτελεί η εξίσωση (1.3) οριακή κατάσταση της γενικής εξίσωσης του Einstein (1.112), επιλέγουμε $k = \frac{1}{16\pi G}$ και άρα έχουμε την τελική μορφή της:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.113)$$

ή αλλιώς:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.114)$$

Όπως είναι εμφανές, η παραγωγή των εξισώσεων κίνησης από μια δράση μέσω της θεωρίας μεταβολών είναι μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία, αν σκεφτεί κανείς, μάλιστα, πως η Λαγκραντζιανή πυκνότητα που χρησιμοποιήσαμε για την περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας ήταν απλά το βαθμωτό Ricci και όχι κάποιο πολυπλοκότερη σχέση. Όπως θα γίνει καλύτερα αντιληπτό στο Κεφάλαιο 3, για τις γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας, η δράση που θα ολοκληρώνουμε και θα εφαρμόζουμε λογισμό μεταβολών θα είναι πολύ πιο περίπλοκες ποσότητες και έτσι η παραγωγή των εξισώσεων κίνησης από αυτές είναι μια διαδικασία που φαντάζει αδύνατον να γίνει “με το χέρι”. Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνει η εξέλιξη της τεχνολογίας, καθώς μέσω του υπολογιστή αυτή η διαδικασία γίνεται αρκετά πιο απλή. Στη συνέχεια της παρούσας μελέτης, θα γίνει χρήση της γλώσσας προγραμματισμού *Wolfram Mathematica* και συγκεκριμένα του προγράμματος *xAct* μέσω του οποίου μπορούμε να πραγματοποιήσουμε ταυυστικές πράξεις και λογισμό μεταβολών.

1.2.2 Παραγωγή των πεδιακών εξισώσεων με τη χρήση του xAct στο Mathematica

Στην παρούσα ενότητα θα εφαρμόσουμε λογισμό μεταβολών και θα παράξουμε τις εξισώσεις κίνησης της Γενικής σχετικότητας μέσω του προγράμματος xAct στο Wolfram Mathematica. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε τα πακέτα xTensor και xTras.

Αρχικά θα ορίσουμε την πολλαπλότητα M διάστασης 4 και μετρικής $g_{\alpha\beta}$, καθώς και πως η συναλλοίωτη παράγωγος θα συμβολίζεται με τον τελεστή ∇ και οι δείκτες που θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε θα μπορούν να πάρουν τις τιμές $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \mu, \nu, \lambda, \sigma, \tau$:

$$\begin{aligned} & \text{DefManifold}(M, 4, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \mu, \nu, \lambda, \sigma, \tau\}) \\ & \text{DefMetric}(-1, g(-\alpha, -\beta), \text{CD}, \{;, \nabla\}, \text{PrintAs} \rightarrow g) \end{aligned} \quad (1.115)$$

Τρέχοντας αυτές τις εντολές στο στο Wolfram Mathematica μας ενημερώνει πως το βαθμωτό Ricci θα εγχαλείται μέσω της εντολής `RicciScalarCD[]`, το οποίο στα output θα διατυπώνεται σαν `RicciScalarCD()` ή $R[\nabla]$ (ανάλογα με το πώς ρυθμίζεται να είναι το output του Mathematica). Στη συνέχεια, ορίζουμε τη Λαγκραντζιανή ίση με το βαθμωτό Ricci:

$$L = \text{RicciScalarCD}(); \quad (1.116)$$

και εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών με την εντολή VarL με σεβασμό στην αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$, έχουμε πως:

$$\text{VarL}[g[\mu, \nu], \text{CD}][L]//\text{ContractMetric}//\text{ToCanonical}//\text{SortCovDs}//\text{Simplification} \quad (1.117)$$

και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$R[\nabla]_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R[\nabla] \quad \text{ή} \\ \text{RicciCD}(-\mu, -\nu) - \frac{1}{2}\text{RicciScalarCD}()g(-\mu, -\nu) \quad (1.118)$$

όπου κάνοντας τη “μετάφραση” στη δεύτερη εξίσωση πως οι αρνητικοί δείκτες του Mathematica αντιστοιχούν σε κάτω δείκτες (και οι θετικοί σε πάνω), παίρνουμε:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.119)$$

Η εξίσωση (1.119) όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς είναι το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.105), η οποία παράχθηκε μόλις σε λίγα δευτερόλεπτα μέσω των σωστών εντολών στο Mathematica και χωρίς να χρειαστεί να γίνει κάποιος μαθηματικός υπολογισμός “με το χέρι”. Για αυτόν τον λόγο στη συνέχεια οι περισσότεροι υπολογισμοί θα γίνουν μέσω του Mathematica.

1.3 Η μετρική FLRW

Μέχρι στιγμής, στην ανάλυση που έχουμε κάνει, έχουμε χρησιμοποιήσει για μετρική μια αυθαίρετη μετρική, την $g_{\mu\nu}$, με εξαίρεση βέβαια τη μετρική Minkowski. Η μετρική περιγράφει επαρκώς τη μορφή που παίρνει ο χωροχρόνος σε μια περιοχή του (η γενικά τις ιδιότητες που έχει μια πολλαπλότητα). Η μετρική Minkowski που περιγράψαμε στην Ενότητα 1.1, περιγράφει φυσικά τον επίπεδο, ομοιογενή και μη διαστελόμενο σύμπαν/ χωροχρόνο. Όπως ήδη αναφέραμε, η μετρική Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, παίρνει τη μορφή:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

Ωστόσο, σύμφωνα με τα κοσμολογικά ευρήματα το σύμπαν διαστέλλεται και άρα η μετρική Minkowski δεν είναι επαρκής για να περιγράψει τον χωροχρόνο στο σύμπαν μας. Ποια θα είναι η νέα μετρική όμως; Αυτό θα είναι το θέμα της παρούσας ενότητας, καθώς και οι τιμές που παίρνουν τα μεγέθη που εξαρτώνται από τη μετρική και μας χρησιμεύουν για να παράξουμε τις εξισώσεις Einstein για τον διαστελόμενο χωροχρόνο.

1.3.1 Κοσμολογία- Η μετρική FLRW

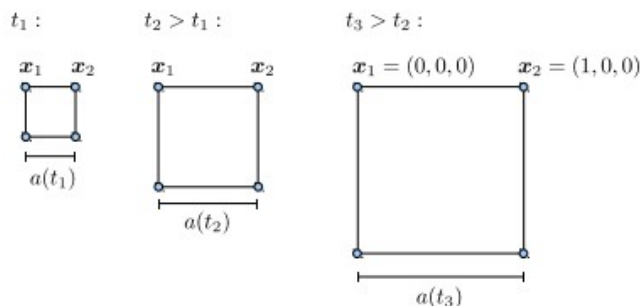
Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το σύμπαν διαστέλλεται. Αυτό σημαίνει πως η απόσταση που χωρίζει τη Γη (ή οποιονδήποτε παρατηρητή σε οποιονδήποτε γαλαξία) με κάποιους μακρινούς γαλαξίες, στο παρελθόν ήταν μικρότερη από αυτήν που είναι σήμερα. Είναι αρκετά βολικό, για να περιγράψουμε αυτό το φαινόμενο, να εισάγουμε την έννοια του *συντελεστή κοσμικής κλίμακας (scale factor)*, ο οποίος θεωρείται στη σύγχρονη κοσμολογία πως σήμερα έχει την τιμή 1 και συμβολίζεται με a . Στις πιο παλιές εποχές, ο a είχε μικρότερη τιμή από ότι έχει σήμερα.

Για να κάνουμε πιο σαφή την έννοια της διαστολής ας υποθέσουμε ένα πλέγμα στον χώρο το οποίο διαστέλλεται ομοιόμορφα, καθώς εξελίσσεται ο χρόνος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Τα σημεία του πλέγματος τα οποία αντιστοιχούν σε παρατηρητές σε ηρεμία, διατηρούν τις συντεταγμένες τους, και άρα η *κινούμενη απόσταση (comoving distance)* μεταξύ δύο σημείων, δηλαδή η διαφορά των συντεταγμένων τους σε ένα σύστημα συντεταγμένων (όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5), παραμένει σταθερή. Ωστόσο, η φυσική τους απόσταση είναι ανάλογη στον συντελεστή κοσμικής κλίμακας και εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου, καθώς ο a είναι συνάρτηση του χρόνου.

Ένα άμεσο αποτέλεσμα της διαστολής που περιγράφεται παραπάνω είναι πως το φυσικό μήκος κύματος του φωτός που εκπέμπεται από ένα μακρινό αντικείμενο αυξάνεται ανάλογα με τον συντελεστή κοσμικής κλίμακας και άρα το παρατηρούμενο μήκος κύματος του φωτός είναι μεγαλύτερο από αυτό το οποίο εκπέμφθηκε από το αντικείμενο. Άρα, το μήκος κύματος μεταωπίζεται προς το ερυθρό κατά έναν παράγοντα z :

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{παρατηρούμενο}}}{\lambda_{\text{εκπεμπόμενο}}} = \frac{a_{\text{παρατηρούμενο}}}{a_{\text{εκπεμπόμενο}}} = \frac{1}{a_{\text{εκπεμπόμενο}}} \quad (1.121)$$

Πέρα όμως από τη διαστολή του σύμπαντος, όπως κάναμε σαφές σε όλες τις προηγούμενες ενότητες, παίζει σημαντικότατο ρόλο και η Γεωμετρία του χωροχρόνου. Γι' αυτό και θα κατηγοριοποιήσουμε τα πιθανά σύμπαντα σε 3 κατηγορίες:



Σχήμα 1.5: Το διαστελόμενο σύμπαν: η κινούμενη απόσταση μεταξύ των σημείων x_1, x_2 σε ένα πλέγμα το οποίο λειτουργεί σαν ένα σύστημα συντεταγμένων παραμένει σταθερή καθώς το σύμπαν διαστέλεται, δηλαδή, στην περίπτωση μας, $|x_2 - x_1| = 1$. Η φυσική απόσταση είναι ανάλογη του συντελεστή κοσμικής κλίμακας και της κινούμενης απόστασης, και άρα, όσο περνάει ο χρόνος, μεγαλώνει.

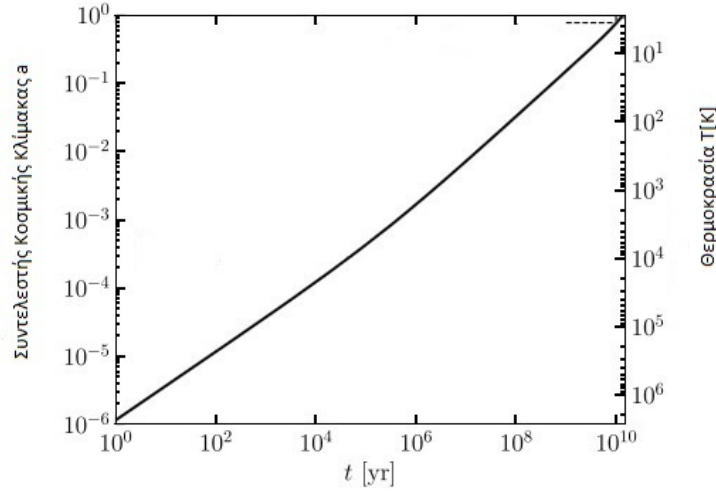
- **Ευκλείδειο:** ή αλλιώς επίπεδο σύμπαν, οι τροχιές 2 σωματιδίων που κινούνται παράλληλα, παραμένουν παράλληλες εάν κινούνται ελεύθερα,
- **Κλειστό:** τα αρχικά παράλληλα κινούμενα σωματίδια, πλησιάζουν σταδιακά μεταξύ τους, όπως θα γινόταν σε μια 2-σφαιρα,
- **Ανοιχτό:** τα αρχικά παράλληλα κινούμενα σωματίδια, αποκλίνουν σταδιακά μεταξύ τους.

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση, συνδέεται και με μια άλλη ποσότητα, την *πυκνότητα ενέργειας* (*density energy*) του σύμπαντος. Εάν η τιμή της πυκνότητας ενέργειας είναι μεγαλύτερη από μια κρίσιμη τιμή, τη ρ_{cr} , τότε το σύμπαν είναι κλειστό, αν είναι ίση με αυτήν την κρίσιμη τιμή το σύμπαν είναι Ευκλείδειο, ενώ αν είναι μικρότερη το σύμπαν είναι ανοιχτό. Αν και φαίνεται αδύνατον, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις, το σύμπαν είναι Ευκλείδειο.

Ήρθε πλέον η ώρα να ορίσουμε μια μαθηματική σχέση, η οποία να περιγράφει τη σχέση του συντελεστή κοσμικής κλίμακας με τον χρόνο, αλλά και με την ενέργεια. Αρχικά, θα ορίσουμε την *παράμετρος του Hubble*, η οποία δείχνει πώς μεταβάλλεται ο a , συναρτήσει του χρόνου. Αυτή ορίζεται ως:

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (1.122)$$

Αν στην εξίσωση (1.122) εφαρμόσουμε τον σημερινό χρόνο t_0 , έχουμε τη σταθερά του Hubble, η οποία συμβολίζεται με $H_0 = H(t_0)$. Στο Σχήμα 1.6, φαίνεται η γραφική παράσταση του συντελεστή κοσμικής κλίμακας, συναρτήσει του κοσμικού χρόνου και της θερμοκρασίας. Το σήμερα αντιστοιχεί στην πάνω δεξιά γωνία της γραφικής παράστασης, όπου $a(t_0) = 1$ και η θερμοκρασία είναι στους $T = 2.73K$.



Σχήμα 1.6: Η γραφική παράσταση της εξέλιξης του συντελεστή κοσμικής κλίμακας, συναρτήσεως του κοσμικού χρόνου και της θερμοκρασίας

Η παράμετρος Hubble σχετίζεται με την πυκνότητα ενέργειας με την εξίσωση *Friedman*, η οποία ισούται με:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho(t) + \frac{\rho_{\text{cr}} - \rho(t_0)}{a^2(t)} \right] \quad (1.123)$$

όπου G η σταθερά του Newton, $\rho(t)$ η πυκνότητα ενέργειας στο σύμπαν σαν συνάρτηση με $\rho(t_0)$ τη σημερινή τιμή της και ρ_{cr} την κρίσιμη πυκνότητα. Από τα παραπάνω για $\rho = \rho_{\text{cr}}$, έχουμε:

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (1.124)$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, θα θεωρήσουμε πως το σύμπαν είναι Ευκλείδειο, καθώς υπάρχουν θεωρητικά και πειραματικά επιχειρήματα τα οποία επιβεβαιώνουν αυτήν την υπόθεση. Να σημειωθεί επίσης, πως για όλη τη συνέχεια της ανάλυσής μας θα δουλεύουμε σε μονάδες:

$$\hbar = c = k_B = 1 \quad (1.125)$$

όπου \hbar η σταθερά του Planck, c η ταχύτητα του φωτός και k_B η σταθερά του Boltzman.

Επανερχόμενοι πλέον στο αρχικό μας ερώτημα για το ποιά είναι η μετρική του διαστελόμενου σύμπαντος, θα επανέλθουμε στο Σχήμα 1.5 για να παρατηρήσουμε ξανά πως η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων του πλέγματος είναι σταθερή και ανάλογη του $a(t)$. Εάν η κινούμενη απόσταση σήμερα είναι x_0 , η φυσική απόσταση μεταξύ των δύο σημείων σε κάποια χρονική στιγμή στο παρελθόν ήταν $a(t)x_0$, με το a σήμερα να ισούται με $a(t_0) = 1$. Έτσι, μπορούμε να καταλάβουμε πως σε ένα Ευκλείδειο σύμπαν, η μετρική θα είναι σχεδόν ίδια με την μετρική Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, όμως πλέον οι χωρικές συντεταγμένες θα είναι πολλαπλασιασμένες με τον συντελεστή κοσμικής κλίμακας. Άρα η

μετρική σε ένα διαστελόμενο, ομογενές και ισοτροπικό σύμπαν είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \quad (1.126)$$

Η παραπάνω μετρική είναι η μετρική Friedman- Lemaitre- Robertson- Walker ή FLRW (εν συντομία) μετρική και περιγράφει ένα ομογενές και ισοτροπικό σύμπαν.

1.3.2 Σύμβολα Christoffel, Τανυστής Ricci, Βαθμωτό Ricci

Ήρθε η ώρα να υπολογίσουμε τις ποσότητες που παρουσιάσαμε στην ενότητα 1.1.6 και 1.1.7 για τη μετρική FLRW, ούτως ώστε όταν παράξουμε τις εξισώσεις Einstein, να έχουμε ήδη υπολογίσει τις ποσότητες που θα χρειαστούμε για να τις αντικαταστήσουμε αμέσως και να παράξουμε τις εξισώσεις κίνησης όχι σαν συνάρτηση της μετρικής, αλλά των συναρτήσεων που συμπεριλαμβάνονται σε αυτήν, δηλαδή στην περίπτωση σαν συνάρτηση του παράγοντα κοσμικής κλίμακας, $a(t)$, και των (χρονικών) παραγώγων του. Για τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel, του τανυστή Ricci και του βαθμωτού Ricci, θα κάνουμε στην αρχή κάποιους ενδεικτικούς υπολογισμούς “με το χέρι”, και στη συνέχεια θα κάνουμε όλους τους υπόλοιπους υπολογισμούς με το πρόγραμμα xAct στο Wolfram Mathematica.

Ας ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς μας, με τον υπολογισμό του τανυστή Ricci, ο οποίος ορίζεται από την εξίσωση (1.62). Κάνοντας τα απαραίτητα contractions στους δείκτες του τανυστή Riemann, παίρνουμε τελικά πως:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \quad (1.127)$$

με τα σύμβολα Christoffel να ορίζονται από την εξίσωση (1.53). Οι μοναδικοί όροι του τανυστή Ricci οι οποίοι δεν μηδενίζονται λόγω της συμμετρίας της μετρικής, είναι οι διαγώνιοι, δηλαδή οι όροι για τους οποίους ισχύει:

- $\mu = \nu = 0$, δηλαδή ένας χρονικός όρος
- $\mu = \nu = i$, με $i = 1, 2, 3$, δηλαδή τρεις χωρικοί όροι

Αξίζει να σημειωθεί εδώ πως αν και μπορούσαμε, δεν υπολογίζουμε όλα τα σύμβολα Christoffel εξ' αρχής καθώς είναι μια χρονοβόρα διαδικασία και θα χρησιμοποιήσουμε μόνο λίγα από αυτά.

Αρχικά, θα υπολογίσουμε το χρονικό μέλος του τανυστή Ricci, δηλαδή το στοιχείο R_{00} . Άρα, η εξίσωση (1.127), γίνεται:

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{00}^\beta - \Gamma_{\beta 0}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\beta \quad (1.128)$$

Ήρθε άρα η ώρα να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel που χρειαζόμαστε. Έχουμε πως για τους δύο κάτω δείκτες ίσους με το μηδέν:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\sigma &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}) \stackrel{g_{\rho 0}=0}{=} \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (-\partial_\rho g_{00}) = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (-\partial_\rho (-1)) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.129)$$

Άρα, η (1.128), γίνεται:

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha - \Gamma_{\beta 0}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\beta \quad (1.130)$$

Άρα, πρέπει να υπολογίσουμε τώρα τα σύμβολα $\Gamma_{0\beta}^\alpha$. Από την (1.129) παρατηρούμε πως είναι μη μηδενικά, μόνο εάν τα α, β , είναι χωρικά. Άρα χρειάζεται απλά να υπολογίσουμε το σύμβολο Γ_{0j}^i :

$$\begin{aligned} \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} g^{i\nu} (\partial_j g_{0\nu} + \partial_0 g_{i\nu} - \partial_\nu g_{0j}) \stackrel{g_{j0}=0}{=} \\ &= \frac{1}{2} g^{i\nu} (\partial_0 g_{i\nu}) \stackrel{\partial_0 = \partial/\partial t}{=} \frac{1}{2} g^{i\nu} \left(\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right) = \frac{\delta_{ij}}{2a^2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (a^2(t)) \right) = \\ &= \frac{\delta_{ij}}{2a^2(t)} 2a(t)\dot{a}(t) = \delta_{ij} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \end{aligned} \quad (1.131)$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως η αντίστροφη μετρική της FLRW ισούται με:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2}(t) \end{pmatrix} \quad (1.132)$$

το οποίο προκύπτει εύκολα από την ισότητα $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 1$.

Έχοντας υπολογίσει πλέον όλα τα σύμβολα Christoffel που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό του στοιχείου R_{00} στην εξίσωση (1.130):

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\partial_0 \Gamma_{0i}^i - \Gamma_{j0}^i \Gamma_{0i}^j = -\delta_{ii} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) - \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} = \\ &= -3 \left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right) - \delta_{ii} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \\ &= -3 \left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \\ &= -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \end{aligned} \quad (1.133)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες ιδιότητες του δ του Kronecker:

- $\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii}$
- $\delta_{ii} = 3$ για $i =$ χωρικό, δηλαδή για 3 διαστάσεις

Έχοντας πλέον υπολογίσει το χρονικό στοιχείο του ταυστή Ricci, πρέπει να βρούμε και τα 3 χωρικά στοιχεία του, ούτως ώστε να καταφέρουμε να υπολογίσουμε το βαθμωτό Ricci. Με παρόμοιο τρόπο όπως υπολογίσαμε το χρονικό στοιχείο, προκύπτει πως τα χωρικά στοιχεία, R_{ij} , είναι:

$$R_{ij} = \delta_{ij} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \quad (1.134)$$

όπου $a = a(t)$ ο συντελεστής κοσμικής κλίμακας. Άρα, με χρήση των εξισώσεων (1.132), (1.133) και (1.134), έχουμε πως το βαθμωτό Ricci ισούται με:

$$\begin{aligned}
 R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + \frac{1}{a^2} R_{ii} = \\
 &= 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^2} 3(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) = \\
 &= 3\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{\ddot{a}}{a} = \\
 &= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)
 \end{aligned} \tag{1.135}$$

Αν και στην περίπτωση της μετρικής FLRW οι πράξεις είναι σχετικά εύκολες και όχι τόσο χρονοβόρες, θα δούμε αμέσως πως με το Wolfram Mathematica είναι ακόμα πιο εύκολο και γρήγορο. Αρχικά, θα ορίσουμε την πολλαπλότητα και το διάγραμμα στα οποία θα κάνουμε τους υπολογισμούς, με τις εντολές:

```
DefManifold[M4, 4, {μ, ν, α, β, σ, λ, b, c, d, e, f}]
DefChart[space, M4, {0, 1, 2, 3}, {t[], x[], y[], z[]], FormatBasis → {Partials, Differentials}]
```

(1.136)

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια βαθμωτή συνάρτηση, τον συντελεστή κοσμικής κλίμακας:

```
DefScalarFunction/@{a};
```

(1.137)

και στη συνέχεια θα ορίσουμε τη μετρική (με σύμβαση $-,+ ,+ ,+$) με τις ακόλουθες εντολές:

```
MatrixMetric = DiagonalMatrix[{ -1, a[t]^2, a[t]^2, a[t]^2}]
met = CTensor(MatrixMetric, { -space, -space})
SetCMetric[met, space, SignatureOfMetric → { -1, 3, 0}]
met[-μ, -ν]
```

(1.138)

και με την τελευταία εντολή εμφανίζουμε τη μετρική η οποία είναι η FLRW:

$$\begin{array}{cccc}
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a[t]^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a[t]^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a[t]^2
 \end{array} \mu\nu$$

Μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε όλα τα σύμβολα Christoffel, με τις ακόλουθες εντολές:

```
CD = LC[met];
MetricCompute[met, space, All]
$LargeComponentSize = 4000;
Christoffel[CD, PDspace][α, -β, -μ]
```

(1.139)

και με την τελευταία εντολή εμφανίζουμε τα σύμβολα Christoffel:

$$= \begin{matrix} \begin{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ a[t] \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ a[t] \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a[t] \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} 0 \\ a'[t] \\ a[t] \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a'[t] \\ a[t] \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} 0 \\ a'[t] \\ a[t] \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a'[t] \\ a[t] \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a'[t] \\ a[t] \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a'[t] \\ a[t] \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \end{matrix} \end{matrix}^{\alpha}_{\beta\mu}$$

και με την εντολή:

$$\text{Christoffel[CD, PDspace][\{1, space\}, \{1, -space\}, \{0, -space\}] \tag{1.140}$$

εμφανίσαμε το Γ^1_{10} σύμβολο, το οποίο ισούται με $\frac{a'(t)}{a(t)}$.

Το βαθμωτό Ricci το εμφανίζουμε με την εντολή:

$$\text{RicciScalar[CD][] \tag{1.141}$$

το οποίο ισούται με:

$$\frac{6(a(t)a''(t) + a'(t)^2)}{a(t)^2} \tag{1.142}$$

και ο τανυστής Ricci, εμφανίζεται με την εντολή:

$$\text{Ricci[CD][-\alpha, -\beta] \tag{1.143}$$

και είναι:

$$\begin{matrix} \left| \begin{matrix} -\frac{3a''[t]}{a[t]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a'[t]^2 + a[t]a''[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a'[t]^2 + a[t]a''[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a'[t]^2 + a[t]a''[t] \end{matrix} \right| \end{matrix}^{\alpha\beta}$$

1.3.3 Εξισώσεις Einstein

Έχοντας πλέον υπολογίσει τις απαραίτητες ποσότητες, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξισώσεις κίνησης για την μετρική FLRW. Οι εξισώσεις Einstein της Γενικής Σχετικότητας, όπως είδαμε

στην Ενότητα 1.2, είναι οι:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.144)$$

Άρα καταλαβαίνουμε πως το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τον ταυυστή Einstein για τη μετρική FLRW. Αυτό θα το κάνουμε αμέσως με το Wolfram Mathematica, όπως θα κάνουμε και τις υπόλοιπες πράξεις από εδώ και πέρα. Στο πρόγραμμα που χρησιμοποιήσαμε στην ενότητα 1.3.2, μπορούμε να παράξουμε τον ταυυστή Einstein με την εντολή:

$$\text{Einstein[CD]}[-\alpha, -\beta] \quad (1.145)$$

Το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε είναι:

$\frac{3a'(t)^2}{a(t)^2}$	0	0	0
0	$-a'(t)^2 - 2a(t)a''(t)$	0	0
0	0	$-a'(t)^2 - 2a(t)a''(t)$	0
0	0	0	$-a'(t)^2 - 2a(t)a''(t)$

Άρα οι εξισώσεις που λαμβάνουμε, είναι οι:

$$\begin{aligned} \frac{3a'(t)^2}{a(t)^2} &= 8\pi GT_{00}, \\ -2a(t)a''(t) - a'(t)^2 &= 8\pi GT_{ij} \text{ με } i, j \text{ χωρικά} \end{aligned} \quad (1.146)$$

Να σημειωθεί πως στην παρούσα ανάλυση δε θα ασχοληθούμε τον ταυυστή ενέργειας- ορμής $T_{\mu\nu}$ (εκτός ελάχιστα από την επόμενη ενότητα), καθώς περιγράφει την ύλη και όχι κάποιο βαρυτικό φαινόμενο.

1.3.4 Η κοσμολογική σταθερά Λ

Ένας πιο έμπειρος αναγνώστης θα καταλάβει πως έχουμε επιλέξει επιμελώς να μην αναφέρουμε καθόλου την κοσμολογική σταθερά (*cosmological constant*) Λ . Η κοσμολογική σταθερά είναι μια ποσότητα η οποία αν και ο Einstein την είχε συμπεριλάβει αρχικά στις πεδιακές εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας, στη συνέχεια την αφαίρεσε γιατί θεώρησε πως δεν επέτρεπε ένα σύμπαν να είναι στατικό (static universe), δηλαδή να είναι άπειρο όσον αφορά τόσο τον χρόνο όσο και τις τρεις χωρικές διαστάσεις. Ωστόσο, μετά από χρόνια ερευνών και θεωρητικών μελετών, αποδείχθηκε πως η κοσμολογική σταθερά δεν εμποδίζει την ύπαρξη ενός στατικού σύμπαντος, αλλά πως η κοσμολογική σταθερά έχει να κάνει με τη σκοτεινή ενέργεια (dark energy), για την οποία οι γνώσεις μας είναι αρκετά περιορισμένες. Στη συνέχεια της παρούσας ενότητας θα δούμε πως θα χειριστούμε τις εξισώσεις που τη συμπεριλαμβάνουν, ούτως ώστε να μην χρειαστεί να ασχοληθούμε ξανά με αυτήν στη συνέχεια της ανάλυσής μας, στην οποία θα ασχοληθούμε με το αριστερό μέλος της εξίσωσης Einstein.

Η κοσμολογική σταθερά, όταν συμπεριλαμβάνεται στην εξίσωση Einstein, ανεβάζοντας τον έναν από τους δείκτες πάνω, όπως φαίνεται στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \xleftrightarrow{\times g^{\mu\nu}} \\ G^{\mu}_{\nu} + \Lambda \delta^{\mu}_{\nu} &= R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}_{\nu} + \Lambda \delta^{\mu}_{\nu} = 8\pi GT^{\mu}_{\nu} \end{aligned} \quad (1.147)$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον ταυσιτή ενέργειας- ορμής, $T_{\mu\nu}$, για ένα ισοτροπικό, λείο σύμπαν, σαν αυτό που ορίζεται από τη μετρική FLRW, ισούται με:

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P}_s \end{pmatrix} \quad (1.148)$$

όπου ρ η πυκνότητα ενέργειας και \mathcal{P} η πίεση. Ο δείκτης s αναφέρεται σε κάθε συστατικό του σύμπαντος: την ψυχρή σκοτεινή ύλη (c), τα βαρυόνια (b), τα φωτόνια (γ) και τα νετρίνα (ν). Το μόνο που έχουμε να κάνουμε για να “εξαφανίσουμε” τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς, είναι να τον φέρουμε από τη δεξιά μεριά της εξίσωσης (1.147):

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}_{\nu} + \Lambda\delta^{\mu}_{\nu} &= 8\pi GT^{\mu}_{\nu} \iff \\ R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}_{\nu} &= 8\pi GT^{\mu}_{\nu} - \Lambda\delta^{\mu}_{\nu} \end{aligned} \quad (1.149)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα πως ο όρος της κοσμολογικής σταθεράς $\Lambda\delta^{\mu}_{\nu}$ ισούται με:

$$T_{(\Lambda)}^{\mu}_{\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho_{\Lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{\Lambda} \end{pmatrix} \quad (1.150)$$

όπου $-\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ η ενεργός πυκνότητα ενέργειας (effective density energy) με $\mathcal{P}_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$. Άρα, αν θεωρήσουμε πως ο όρος $T_{(\Lambda)}^{\mu}_{\nu}$ περιλαμβάνεται στον ταυσιτή ενέργειας- ορμής, έχουμε πως η πεδιακή εξίσωση παίρνει τη μορφή (1.144):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.151)$$

όπου πλέον ο $T_{\mu\nu}$ ισούται με:

$$T_{\mu\nu} = T_{(c)}^{\mu}_{\nu} + T_{(b)}^{\mu}_{\nu} + T_{(\gamma)}^{\mu}_{\nu} + T_{(\nu)}^{\mu}_{\nu} + T_{(\Lambda)}^{\mu}_{\nu} \quad (1.152)$$

όπου $T_{(s)}^{\mu}_{\nu}$ η συνεισφορά του κάθε συστατικού που αναφέραμε παραπάνω, που πλέον συγκαταλέγουμε και μια συνεισφορά από την κοσμολογική σταθερά Λ . Στη συνέχεια της ανάλυσης μας θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.151).

2 Βαρυτικά Κύματα

Τα βαρυτικά κύματα (gravitational waves) είχαν προβλεφθεί και θεμελιωθεί θεωρητικά από το 1916 από τον ίδιο τον Einstein βάσει της γενικής θεωρίας της σχετικότητας σαν διακυμάνσεις στην καμπυλότητα του χωροχρόνου. Η πρώτη έμμεση υπόδειξη ύπαρξης των βαρυτικών κυμάτων έγινε το 1974 από την παρατήρηση μείωσης της τροχιάς ενός ζεύγους Pulsar, που η μείωση αντιστοιχούσε με αυτήν που προέβλεπε η γενική σχετικότητα σαν ενέργεια που χάνεται λόγω βαρυτικής ακτινοβολίας. Η πρώτη άμεση παρατήρηση βαρυτικών κυμάτων έγινε το 2015, όταν το σήμα που δημιουργήθηκε από τη σύγκρουση δυο υπερμεγεθών μελανών οπών (black hole) έφτασε στο παρατηρητήριο βαρυτικών κυμάτων του LIGO στο Livingston της Louisiana και στο Hanford της Washington. Από τότε έχουν παρατηρούνται συστηματικά βαρυτικά κύματα τα οποία προέρχονται από διάφορες πηγές (μελανές οπές, αστέρες νετρονίων, κλπ). Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε τη μαθηματική θεμελίωση των βαρυτικών κυμάτων, τα οποία προκύπτουν σαν τανυστικές διαταραχές στις εξισώσεις Einstein για τη γενική σχετικότητα και συγκεκριμένα για τη μετρική FLRW.

2.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει η μαθηματική εισαγωγή για τα βαρυτικά κύματα, αναλύοντας τα μερικά από τα μαθηματικά εργαλεία που δεν αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, καθώς και στη θεμελιώδη θεωρία που θα εφαρμόσουμε στις εξισώσεις Einstein για να εξάγουμε τις εξισώσεις των βαρυτικών κυμάτων.

2.1.1 Κύματα

Μια κυματική διαταραχή διαδίδεται από ένα σημείο του χώρου σε κάποιο άλλο, χρησιμοποιώντας ως φορέα το μέσο στο οποίο παρατηρείται, χωρίς να μετακινείται το ίδιο το μέσο. Αυτή είναι η βάση της κυματικής εξίσωσης.

Τα κύματα των οποίων οι διαταραχές (όπως π.χ. οι μετατοπίσεις ενός σημείου ενός μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα) είναι κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ονομάζονται εγκάρσια, ενώ τα κύματα των οποίων οι διαταραχές είναι παράλληλες με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ονομάζονται διαμήκη. Τα μεγέθη που χρειαζόμαστε για την ανάλυση ενός κύματος είναι:

- Πλάτος A : η μέγιστη τιμή της διαταραχής
- Φάση κύματος φ : το μέγεθος που εκφράζει την τιμή της διαταραχής σε κάποιο σημείο του μέσου
- Περίοδος T : ο χρόνος που απαιτείται για να διαδοθεί το κύμα μεταξύ δύο συνεχόμενων σημείων ίδιας φάσης
- Μήκος κύματος λ : η απόσταση μεταξύ δύο συνεχόμενων σημείων με την ίδια φάση
- Συχνότητα κύματος f : το πηλίκο $f = \frac{1}{T}$
- Ταχύτητα κύματος U : η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η διαταραχή, $v = \lambda f$
- Κυκλική συχνότητα ω : το γινόμενο $\omega = 2\pi f$

- **Κυματαριθμός k :** ο αριθμός σκτινίων ανά μονάδα μήκους, ο οποίος ορίζεται μέσω της σχέσης

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

Στη φύση, είναι συχνότερο να εμφανίζονται τα κύματα με τη μορφή μίγματος ενός πλήθους ή μιας ομάδας συνιστωσών συχνοτήτων, που ονομάζονται κυματομάδες ή παλμοί. Με άλλα λόγια, είναι μια μη αρμονική διαταραχή, η οποία μπορεί να αναλυθεί στις αρμονικές συνιστώσες της. Η σχέση διασποράς για μια ομάδα είναι $\omega = \omega(k)$, η οποία μπορεί να είναι γραμμική ή να δίνεται από μια διαφορετικού τύπου συνάρτηση. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την ταχύτητα διάδοσης του παλμού, τη γνωστή και ως ομαδική ταχύτητα ως την κλίση της καμπύλης $\omega = \omega(k)$, δηλαδή:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.1)$$

Έχοντας πλέον ορίσει την έννοια του κυματαριθμού και την έννοια της ομαδικής ταχύτητας, μπορούμε πλέον να ορίσουμε ένα άλλο τριδιάνυσμα, το κυματόνυσμα. Το μέτρο του κυματόνυσματος είναι ο κυματαριθμός του κύματος και η διεύθυνσή του είναι η διεύθυνση της ομαδικής ταχύτητας. Όπως θα δούμε στην ενότητα 2.1.2 η έννοια του κυματόνυσματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Επίσης, είναι σημαντικό να οριστεί η διαφορική εξίσωση του κύματος, την οποία υπακούει κάθε κύμα. Έστω μια συνάρτηση $u = u(t, x, y, z)$ η οποία μπορεί να περιγράφει διάφορες φυσικές ποσότητες (όπως για παράδειγμα την κατανομή μάζας ανά μήκος) και οποία μπορεί να εξαρτάται από όλες ή από μερικές μόνο μεταβλητές της, δηλαδή την χρονική μεταβλητή t και τις τρεις χωρικές, x, y, z . Τότε η κυματική εξίσωση για τη συνάρτηση u , είναι:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \nabla^2(u) \iff \\ u_{tt} &= c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ο Λαπλασιανός τελεστής (laplacian operator) και c μια σταθερά. Κάθε φαινόμενο που περιγράφεται από την εξίσωση (2.2) αποτελεί κύμα και παραμένει αναλλοίωτη σε μεταθέσεις στον χώρο και τον χρόνο, στροφές στον χώρο και μετασχηματισμούς Lorentz. Η εξίσωση (2.2) μπορεί να εμπλουτιστεί και να περιγράφει πιο σύνθετα φαινόμενα, όπως ένα αποσβένον κύμα. Μια τέτοια εξίσωση θα έχει την μορφή:

$$u_{tt} = -bu_t + c^2 \nabla^2(u) \quad (2.3)$$

με τον όρο απόσβεσης να είναι ο $-bu_t = -b \frac{\partial u}{\partial t}$ και b μια αυθαίρετη σταθερά.

2.1.2 Μετασχηματισμοί Fourier

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με τους χωρικούς μετασχηματισμούς Fourier (spatial Fourier transforms). Αν και το συγκεκριμένο θέμα θα μπορούσαμε να το αναλύσουμε εκτενέστερα, θα περιοριστούμε σε μια πιο στοχευμένη και περιορισμένη ανάλυση μόνο των εργαλείων που θα χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση μας.

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$. Ο χωρικός μετασχηματισμός Fourier για την $f(x)$ θα είναι:

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}) \quad (2.4)$$

όπου:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) \quad (2.5)$$

Διαφορικά με σεβασμό στο x της $f(x)$ γίνονται αλγεβρικές σχέσεις στον χώρο Fourier όπως φαίνονται παρακάτω:

$$\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x^i} = ik_i \tilde{f}(\vec{k}, t) \quad (2.6)$$

Να σημειωθεί εδώ πως τα x και k είναι τριδιανύσματα, άρα μπορούμε να ανεβοκατεβάσουμε τους δείκτες χωρίς τη χρήση της μετρικής. Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, όποτε μεταφέρουμε τις πράξεις μας στον χώρο Fourier, για τη μεταβλητή \vec{k} , θα χρησιμοποιούμε το κυματόνισμα, $\vec{k} = |\vec{k}|\hat{k}$, με $|\vec{k}|$ τον κυματριθμό όπως αναφέραμε.

Μπορούμε, επιπλέον, στη συνέχεια της ανάλυσής μας μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = f(\vec{k}) \quad (2.7)$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (2.6) και (2.7), έχουμε πως η κυματική εξίσωση για ένα κύμα το οποίο αποσβένει (2.3) στον χώρο Fourier γίνεται:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -bu_t + c^2 \nabla^2(u) \iff \\ u_{tt} + bu_t - c^2 k^2 u &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

με k τον κυματριθμό και η (2.8) αποτελεί την κυματική εξίσωση αποσβένοντος κύματος στον χώρο Fourier.

2.1.3 Θεωρία Διαταραχών

Σε αυτήν την ενότητα θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία διαταραχών (perturbation theory). Αυτή η εισαγωγή θεωρείται απαραίτητη καθώς τα βαρυτικά κύματα που πραγματευόμαστε στο παρόν κεφάλαιο είναι ουσιαστικά διαταραχές στο χωροχρονικό συνεχές.

Η γενική ιδέα είναι πως έχουμε ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από μια Χαμιλτονιανή $H(q, p, t)$, αλλά η λύση της συγκεκριμένης Χαμιλτονιανής δεν είναι ιδιαίτερα εύκολη. Έτσι, θεωρούμε πως αυτό το σύστημα είναι “κοντά” σε ένα πρόβλημα με Χαμιλτονιανή $H_0(q, p, t)$ για το οποίο ξέρουμε την ακριβή της λύση. Τότε, μπορούμε να πούμε πως:

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \Delta H(q, p, t) \quad (2.9)$$

όπου το $\Delta H(q, p, t)$ μια μικρή διαταραχή. Η γενική ιδέα είναι πως αναπτύσσουμε μια οποιαδήποτε μεταβλητή του συστήματος, $z(t)$, σε δυναμοσειρές:

$$z(t) = z_0(t) + \epsilon z_1(t) + \epsilon^2 z_2(t) + \dots \quad (2.10)$$

Στην εξίσωση (2.10) ο όρος $z_0(t)$ είναι ο όρος μηδενικής τάξης και ισούται με την τιμή της μεταβλητής στο αδιατάρακτο σύστημα που χαρακτηρίζεται από την Χαμιλτονιανή $H_0(q, p, t)$ και

αντίστοιχα οι όροι $\epsilon^n z_n(t)$ είναι οι διορθωτικοί όροι n -οστής τάξης με $n = 1, 2, 3, \dots$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ανεπτυγμένες εξισώσεις κίνησης για να ορίσουμε τις σειρές:

$$z_0(t) \rightarrow \epsilon z_1(t) \rightarrow \epsilon^2 z_2(t) \rightarrow \dots, \text{ όπου } z^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \epsilon^j z_j(t) \quad (2.11)$$

Να σημειωθεί εδώ πως θεωρία διαταραχών μπορούμε να εφαρμόσουμε και στην μετρική και στη θέση της μεταβλητής $z(t)$, θα έχουμε μια άλλη ποσότητα που εξαρτάται από τη μετρική και συγκεκριμένα όπως θα δούμε τα σύμβολα Christoffel και κατά συνέπεια τους τανυστές Ricci και Einstein, όπως και το βαθμωτό Ricci.

2.2 Διαταραχές της μετρικής FLRW

Θεωρούμε την μετρική FLRW την οποία περιγράψαμε στην ενότητα 1.3 και περιγράφεται από την εξίσωση (1.126) και θεωρούμε σε αυτήν μικρές διαταραχές $h_{\mu\nu}$. Τότε η μετρική παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} g_{00}(t, \vec{x}) &= -1 + h_{00}(t, \vec{x}), \\ g_{0i}(t, \vec{x}) &= a(t)h_{0i}(t, \vec{x}) = a(t)h_{i0}(t, \vec{x}), \\ g_{ij}(t, \vec{x}) &= a(t)^2[\delta_{ij} + h_{ij}(t, \vec{x})] \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου $h_{00}(t, \vec{x})$, $h_{i0}(t, \vec{x})$, $h_{ij}(t, \vec{x})$ οι διαταραχές της μετρικής οι οποίες είναι συναρτήσεις του χρόνου t και των τριών χωρικών διαστάσεων που εδώ θα συμβολίζουμε με \vec{x} και οι συνιστώσες των οποίων είναι μικρές σε μέγεθος. Να σημειωθεί πως προς το παρόν θα χρησιμοποιήσουμε τον φυσικό χρόνο (physical time) t και όχι τον σύμμορφο χρόνο (conformal time) η , οι οποίοι πάντα συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$dt = a d\eta \quad (2.13)$$

άρα μπορούμε πολύ εύκολα όποτε θελήσουμε να κάνουμε την αλλαγή από φυσικό σε σύμμορφο χρόνο.

Αρχικά μπορούμε να θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση της σύμμορφης Νευτώνειας βαθμίδας (conformal Newtonian gauge) για την οποία θεωρούμε:

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\Psi, \\ h_{0i} &= 0, \\ h_{ij} &= 2\Phi\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.14)$$

όπου Φ και Ψ δυο βαθμωτές συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου οι οποίες θεωρούμε πως είναι τάξης μεγέθους $< 10^{-4}$. Ωστόσο, επειδή θέλουμε να κρατήσουμε την ανάλυσή μας σε πιο γενικό πλαίσιο θα ασχοληθούμε για την ώρα με τη γενική μορφή της διαταραγμένης μετρικής (2.12).

Ουσιαστικά, θα προσπαθήσουμε να καθορίσουμε τα στοιχεία της (2.12) από τη συμπεριφορά τους κάτω από μετασχηματισμούς στροφής για τις χωρικές συντεταγμένες (spatial rotation). Το χρονικό στοιχείο h_{00} πρέπει να είναι 3-βάθμωτο, δηλαδή να παραμένει αμετάβλητο κάτω από χωρικές στροφές, καθώς δεν έχει κάποιον χωρικό δείκτη. Για να παραμείνει η ανάλυσή μας γενική (και όχι για κάποια συγκεκριμένη βαθμίδα), θα ορίσουμε αυτό το βαθμωτό σαν:

$$h_{00} = -2A \quad (2.15)$$

όπου A η τριβάθμωτη συνάρτηση, ενώ ο συντελεστής -2 υπάρχει λόγω σύμβασης.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το χωρο- χρονικό στοιχείο της διαταραχής $h_{0i} = h_{i0}$, το οποίο είναι ένα τριδιάνυσμα. Άρα, μπορούμε να το αναλύσουμε σε εγκάρσια και διαμήκη τμήματα τα οποία ορίζονται από δυο συναρτήσεις, B και B_i :

$$h_{0i} = -\frac{\partial B}{\partial x^i} - B_i, \text{ με } \partial_i B_i = 0 \quad (2.16)$$

Έτσι, μπορούμε να παρατηρήσουμε στην εξίσωση (2.16) πως το πρώτο μέρος του h_{0i} είναι η κλίση (gradient) μιας τριβάθμωτης συνάρτησης $B(t, \vec{x})$ το οποίο θα ορίσουμε σαν βαθμωτή (scalar) συνεισφορά, ενώ το δεύτερο μέρος είναι ένα τριδιάνυσμα χωρίς απόκλιση (divergenceless) $B_i(t, \vec{x})$, το οποίο θα ορίσουμε σαν διανυσματική (vector) συνεισφορά. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.4), (2.6) και (2.7), μετατρέπουμε την εξίσωση (2.16) στον χώρο Fourier και παίρνει την πιο απλή μοφή:

$$h_{0i}(t, \vec{k}) = -ik_i B(t, \vec{k}) - B_i(t, \vec{k}), \text{ με } k^i B_i = 0 \quad (2.17)$$

Τέλος, υπολογίζουμε τα χωρικά στοιχεία της διαταραχής, h_{ij} , το οποίο είναι ένας συμμετρικός τρισδιάστατος ταυστής. Θεωρούμε πως η βαθμωτή συνεισφορά του χωρικού όρου είναι ανάλογη του δέλτα του Kronecker (όπως άλλωστε ήδη έχουμε δει στην ειδική περίπτωση της σύμμορφης Νευτώνειας βαθμίδας), και από εδώ και μπρος θα καλούμε D . Ωστόσο, μπορούμε να παράξουμε και έναν συμμετρικό τρισδιάστατο ταυστή παίρνοντας δυο χωρικά διαφορικά ενός βαθμωτού E . Παρόμοια, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη διανυσματική συνεισφορά στο h_{ij} παίρνοντας ένα διαφορικό από ένα διανυσματικό πεδίο, V_i , χωρίς απόκλιση, δηλαδή $\vec{\nabla} \times V_i = 0$. Έτσι, έχουμε:

$$h_{ij} = 2D\delta_{ij} - 2\partial_i\partial_j E + \partial_j V_i + \partial_i V_j \text{ (Βαθμωτό και Διανυσματικό)} \quad (2.18)$$

όπου $\partial_i V_i = 0$, εξασφαλίζοντας έτσι πως η διανυσματική συνεισφορά είναι συμμετρική ως προς τους i, j δείκτες της.

Ωστόσο, η (2.18) δεν αποτελεί την τελική μορφή για τα χωρικά στοιχεία, h_{ij} . Υπάρχει άλλος ένας όρος ο οποίος δεν μπορεί να προκύψει από κάποιο διαφορικό κάποιου βαθμωτού ή διανυσματικού πεδίου. Αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς μετρώντας του βαθμούς ελευθερίας: η διαταραχή $h_{\mu\nu}$ είναι ένας συμμετρικός ταυστής στις 4 διαστάσεις και έχει συνολικά 10 βαθμούς ελευθερίας (16 μείον 6 λόγω των περιορισμών για τα μη διαγώνια στοιχεία ούτως ώστε ο ταυστής να είναι συμμετρικός). Μέχρι στιγμής έχουμε αναγνωρίσει 4 βαθμωτές συναρτήσεις (τις A, B, D, E) και δυο επίπεδα διανύσματα (τα B_i, V_i). Όμως, λόγω των περιορισμών της εγκαρσιότητας, κάθε διάνυσμα έχει 2 ελεύθερες συναρτήσεις (και άρα συνεισφέρει με 2 βαθμούς ελευθερίας στο $h_{\mu\nu}$). Άρα μέχρι στιγμής έχουμε συνολικά 8 συναρτήσεις στη μετρική. Οι 2 εναπομείνουσες συναρτήσεις αναφέρονται σαν ταυστικοί βαθμοί ελευθερίας και συμβολίζονται ως h_{ij}^{TT} . Άρα οι χωρικές διαταραχές της μετρικής, στον χώρο Fourier, είναι:

$$h_{ij} = 2D\delta_{ij} + 2k_i k_j E + ik_i V_j + ik_j V_i + h_{ij}^{TT} \quad (2.19)$$

Μέχρι στιγμής, ουσιαστικά αποσυνθέσαμε τις διαταραχές της μετρικής στα συστατικά από την οποία αποτελείται. Αυτή ωστόσο δεν είναι μια διαδικασία που περιορίζεται αποκλειστικά στον ταυστή της διαταραχής, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και σε οποιονδήποτε άλλο ταυστή. Αυτή η διαδικασία βασίζεται σε ένα πολύ βασικό θεώρημα της γενικής σχετικότητας, το **Θεώρημα Αποσύνθεσης** (decomposition theorem). Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, οι διαταραχές κάθε τύπου -βαθμωτές, διανυσματικές και ταυστικές- εξελίσσονται ανεξάρτητα σε γραμμική τάξη (1η τάξη). Αυτό είναι μια πολύ χρήσιμη πληροφορία, καθώς όπως θα δούμε στη συνέχεια θα μπορέσουμε να

μελετήσουμε κάθε τύπο διαταραχής ξεχωριστά, κάτι το οποίο μας διευκολύνει ιδιαίτερα. Ο βασικός λόγος που ισχύει το θεώρημα αυτό είναι πως η μετρική μηδενικής τάξης FLRW (ή αλλιώς η background μετρική) είναι χωρικά ισοτροπική, δηλαδή πως παραμένει αμετάβλητη κάτω από χωρικές στροφές.

2.2.1 Από βαθμίδα σε βαθμίδα

Στην κοσμολογική μελέτη της θεωρίας διαταραχών, αναφερόμαστε συχνά στο σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε σαν *βαθμίδα* (*gauge*). Η δυνατότητα να μπορούμε να μεταφερθούμε από τη μια βαθμίδα στην άλλη είναι κάτι ιδιαίτερα χρήσιμο για την κοσμολογία, καθώς σε διαφορετική βαθμίδα είναι βολικό να κάνουμε τους απαραίτητους υπολογισμούς για τη μελέτη ενός φαινομένου και σε διαφορετικής βαθμίδα γίνεται πιο εύκολη η παρατήρηση του φαινομένου. Στην παρούσα ενότητα θα πραγματευτούμε τη διαδικασία μεταπήδησης από βαθμίδα σε βαθμίδα και πώς επηρεάζει η επιλογή βαθμίδας το φαινόμενο που μελετάται.

Αρχικά, θεωρούμε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ όπου το y αντιπροσωπεύει μια περιοχή του χωροχρόνου (t, \vec{x}) . Ενδιαφερόμαστε για μικρές διαταραχές γύρω από το ομοιογενές σύμπαν, άρα διαχωρίζουμε το ϕ σε έναν όρο μηδενικής τάξης ή background και έναν όρο διαταραχής. Άρα, έχουμε:

$$\phi(x) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \vec{x}) \quad (2.20)$$

όπου όπως παρατηρούμε ο background όρος εξαρτάται αποκλειστικά από τον χρόνο καθώς το σύμπαν θεωρείται ομογενές. Τώρα θέλουμε να δούμε τη συμπεριφορά της εξίσωσης (2.20) όταν εφαρμόζουμε έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $x \rightarrow \hat{x}(x)$. Ο μετασχηματισμός για να είναι της τάξεως της διαταραχής πρέπει να είναι εξίσου μικρός με τη διαταραχή. Άρα, εφαρμόζουμε σειρά Taylor για το $\hat{x}(x)$ γύρω από το x και κρατάμε μόνο τον όρο μηδενικής τάξης, ο οποίος αποτελεί μια αλλαγή στις συντεταγμένες. Άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} t \rightarrow \hat{t} &= t + \zeta(t, \vec{x}), \\ x^i \rightarrow \hat{x}^i &= x^i + \partial_i \xi(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου η χρονική μεταβολή γράφεται ζ και η χωρική μεταβολή γράφεται σαν την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης ξ , δηλαδή $\partial_i \xi$, καθώς μέχρι στιγμής θεωρούμε μόνο βαθμωτές διαταραχές.

Θεωρώντας πως τα $\delta\phi$, ζ και ξ είναι διαταραχές πρώτης τάξης, ο νόμος μετασχηματισμού:

$$\hat{\phi}(\hat{x}) = \phi(x[\hat{x}]) = \phi(\hat{t} - \zeta, \hat{\vec{x}} - \nabla\xi) \quad (2.22)$$

γίνεται (εφαρμόζοντας στην εξίσωση (2.22) σειρά Taylor και λαμβάνοντας υπ' όψη πως η διαταραχή του πεδίου ϕ θα είναι και αυτή πρώτης τάξης σε όλες τις βαθμίδες), έχουμε:

$$\delta\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \delta\phi(t, \vec{x}) - \frac{d\bar{\phi}(t)}{dt} \zeta(t, \vec{x}) \quad (2.23)$$

όπου αφαιρέσαμε τα “καπέλα” από τις συντεταγμένες για ευκολία. Με άλλα λόγια, δείξαμε πως ενώ μπορούμε να πούμε πως $\hat{\phi}(\hat{x}) = \phi(x)$, δεν μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη ισότητα για τις αντίστοιχες διαταραχές, δηλαδή $\delta\hat{\phi} \neq \delta\phi$. Αυτό συμβαίνει καθώς, για να ορίσουμε μια διαταραχή, πρέπει να υποθέσουμε έναν background όρο, ο οποίος αν το πεδίο είναι συνάρτηση του χρόνου,

εξαρτάται από την επιλογή της συντεταγμένης του χρόνου.

Επιστρέφοντας στη γενική διαταραγμένη μετρική (2.12), κρατώντας μόνο τις βαθμωτές διαταραχές που υπολογίσαμε και εφαρμόζοντας τους παραπάνω μικρούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, έχουμε:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1 + 2A), \\ g_{0i} &= -a\partial_i B, \\ g_{ij} &= a^2(\delta_{ij}(1 + 2D) - 2\partial_i\partial_j E) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Η μετρική, για μετασχηματισμό $x \rightarrow \hat{x}(x)$, μετασχηματίζεται:

$$\hat{g}_{\mu\nu}(\hat{x}) = \frac{\partial x^a}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \hat{x}^\nu} g_{a\beta}(x) \quad (2.25)$$

και αντίστοιχα, έχουμε:

$$\hat{g}_{a\beta}(\hat{x}) \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}(x) \quad (2.26)$$

Από την εξίσωση (2.26) θα υπολογίσουμε τα στοιχεία της μετρικής στις καινούριες συντεταγμένες και στη συνέχεια από εκεί θα δούμε πως μετασχηματίζεται κάθε μία από τις τέσσερις βαθμωτές συναρτήσεις της μετρικής (2.24). Ξεκινώντας με το χρονικό στοιχείο της (2.24), έχουμε:

$$\hat{g}_{a\beta}(\hat{x}) \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\nu} = -(1 + 2A) \quad (2.27)$$

Να σημειωθεί πως επειδή το βαθμωτό A είναι μια διαταραχή πρώτης τάξης, δεν χρειάζεται να γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των x και $\hat{x}(x)$, καθώς η διαφορά μεταξύ των συντεταγμένων είναι από μόνη της μια ποσότητα πρώτης τάξης. Θεωρούμε πως ο μοναδικός όρος που συνεισφέρει στο αριστερό μέλος της (2.27) είναι αυτός για $a = \beta = 0$, καθώς σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση προκύπτουν γινόμενα διαταραχών πρώτης τάξης, το αποτέλεσμα των οποίων είναι διαταραχές δεύτερης ή ανώτερης τάξης και έτσι αγνοούνται στην ανάλυσή μας. Άρα το αριστερό μέλος της (2.27), γίνεται:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{a\beta}(\hat{x}) \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\nu} &= -(1 + 2\hat{A}) \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^0} \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^0} = \\ &= -(1 + 2\hat{A}) \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \right)^2 = \\ &= -(1 + 2\hat{A}) \left(\frac{\partial(t + \zeta(t, \vec{x}))}{\partial t} \right)^2 = \\ &= -(1 + 2\hat{A})(1 + \dot{\zeta})^2 \simeq \\ &\simeq -1 - 2\hat{A} - 2\dot{\zeta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

και αντικαθιστώντας την (2.28) στη (2.27), έχουμε:

$$\begin{aligned} -1 - 2\hat{A} - 2\dot{\zeta} &= -(1 + 2A) \iff \\ \hat{A} &= A - \dot{\zeta} \end{aligned} \quad (2.29)$$

και αντικαθιστώντας τη σχέση μεταξύ σύμμορφου και φυσικού χρόνου $dt = a d\eta$ στην παράγωγο της συνάρτησης ζ , έχουμε:

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{a d\eta} = \frac{1}{a} \zeta' \quad (2.30)$$

Άρα από τις (2.29) και (2.30) έχουμε πώς κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x \rightarrow \hat{x}(x)$, η βαθμωτή συνάρτηση A μετασχηματίζεται:

$$A \rightarrow \hat{A} = A - \frac{1}{a} \zeta' \quad (2.31)$$

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε για τη βαθμωτή συνάρτηση A , ακολουθούμε και για τις υπόλοιπες συναρτήσεις της μετρικής (2.24), προκύπτει πως:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= B - \frac{1}{a} \zeta + \xi', \\ \hat{D} &= D - H\zeta, \\ \hat{E} &= E + \xi \end{aligned} \quad (2.32)$$

όπου $\xi' = \frac{d\xi}{d\eta}$ και H η παράμετρος Hubble που ορίζεται από την εξίσωση (1.122). Γενικά από εδώ και μπρος με τόνο θα συμβολίζουμε την παράγωγο με σεβασμό στον σύμμορφο χρόνο.

Από τα παραπάνω, είναι εμφανές πως επιβεβαιώνεται το θεώρημα αποσύνθεσης που παρουσιάσαμε παραπάνω, καθώς αυτή η αλλαγή συντεταγμένων δεν πυροδότησε κάποια μη βαθμωτή διαταραχή και έτσι το αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση των βαθμωτών συναρτήσεων A, B, D, E . Έτσι, έχουμε τέσσερις βαθμωτές συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν την βαθμωτή διαταραγμένη μετρική. Ωστόσο, αυτές μπορούν να χειραγωγηθούν με τη βοήθεια δυο άλλων βαθμωτών συναρτήσεων οι οποίες χαρακτηρίζουν τον βαθμωτό μετασχηματισμό συντεταγμένων. Για παράδειγμα, αν ξεκινήσουμε από την υπόθεση πως $E \neq 0$, μπορεί εύκολα να εξαλειφθεί το βαθμωτό E , επιλέγοντας απλά $\xi = -E$ έχοντας έτσι σαν αποτέλεσμα στη νέα μετρική πως $\hat{E} = 0$. Άρα, υπάρχουν στην πραγματικότητα $4 - 2 = 2$ φυσικοί βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι περιγράφουν τη βαθμωτή διαταραγμένη μετρική. Αυτός είναι και ο λόγος πως στη σύμμορφη Νευτώνεια βαθμίδα (εξίσωση (2.14)» καταφέραμε να εξαλείψουμε τις συναρτήσεις B και E .

Επίσης, μπορούμε να πάρουμε κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς της διαταραγμένης μετρικής οι οποίοι είναι αναλλοίωτοι υπό τους μετασχηματισμούς που περιγράφονται από τις εξισώσεις (2.31) και (2.32). Υπάρχουν ακριβώς δυο τέτοιοι ανεξάρτητοι γραμμικοί συνδυασμοί, με την πιο δημοφιλή επιλογή να είναι αυτή του Bardeen, και είναι οι:

$$\begin{aligned} \Phi_A &= A + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \eta} (a(E' - B)), \\ \Phi_H &= -D + aH(B - E') \end{aligned} \quad (2.33)$$

Στην περίπτωση της σύμμορφης Νευτώνειας βαθμίδας που έχουμε $E = B = 0$, έχουμε $\Phi_A = \Psi$ και $\Phi_H = -\Phi$. Αυτές οι αναλλοίωτες βαθμωτές συναρτήσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες παρακάμψεις για τη μεταπήδηση από μια βαθμίδα σε μια άλλη. Έτσι, μπορούμε να “μεταφέρουμε” τις διαταραχές που θέλουμε να υπολογίσουμε σε μια βαθμίδα στην οποία απλοποιούνται οι εξισώσεις και να κάνουμε υπολογισμούς σε αυτήν την βαθμίδα. Στη συνέχεια, σχηματίζουμε τις βαθμωτά αναλλοίωτες (gauge-invariant) συντεταγμένες και στη συνέχεια να τις μετασχηματίσουμε σε οποιαδήποτε άλλη βαθμίδα επιθυμούμε.

Τέλος, μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω ανάλυση πέρα από τις βαθμωτές διαταραχές. Κατά τον μετασχηματισμό των χωρικών συντεταγμένων, προσθέσαμε έναν επιπλέον διανυσματικό βαθμό ελευθερίας, ένα εγκάρσιο διάνυσμα ξ^i . Έτσι, μπορούμε να θέσουμε ένα από τα B_i και V_i

ίσο με μηδέν, για παράδειγμα. Έτσι, οι φυσικοί ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας θα μειωθούν από 4 σε 2. Επίσης, βάσει του θεωρήματος αποσύνθεσης οποιοσδήποτε μετασχηματισμός στις συντεταγμένες για τις βαθμωτές ή τις διανυσματικές διαταραχές αφήνουν τις τανυστικές διαταραχές h_{ij}^{TT} αναλλοίωτες, καθώς όπως ήδη αναφέραμε είναι αναλλοίωτες κατά τη γραμμική (1η) τάξη. Άρα, από 10 βαθμούς ελευθερίας που είχαμε στην αρχική βαθμίδα, μειώθηκαν πλέον σε 6: 2 βαθμωτούς, 2 διανυσματικούς και 2 τανυστικούς.

2.2.2 Βαθμωτές Διαταραχές

Έχοντας πλέον αιτιολογήσει πλήρως πως μπορούμε να εξετάσουμε κάθε τύπο διαταραχής ξεχωριστά και πως μπορούμε να το κάνουμε αυτό σε οποιαδήποτε βαθμίδα είναι βολικό, μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τις διαταραγμένες εξισώσεις Einstein για βαθμωτές (αρχικά) διαταραχές γραμμικής τάξης στη σύμμορφη Νευτώνεια βαθμίδα. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι παρόμοια με αυτήν που ακολουθήσαμε στην αδιατάρακτη περίπτωση της γενικής σχετικότητας: για να υπολογίσουμε το αριστερό μέλος των εξισώσεων Einstein (1.144) θα υπολογίσουμε αρχικά τα διαταραγμένα σύμβολα Christoffel και στη συνέχεια τον τανυστή Ricci και το βαθμωτό Ricci.

Εφόσον όπως αναφέραμε θα δουλέψουμε στη σύμμορφη Νευτώνεια βαθμίδα, οι διαταραχές θα πάρουν τη μορφή που φαίνεται στην εξίσωση (2.14), άρα η διαταραγμένη μετρική θα είναι:

$$\begin{aligned} g_{00}(t, \vec{x}) &= -1 - 2\Psi(t, \vec{x}), \\ g_{0i}(t, \vec{x}) &= 0, \\ g_{ij}(t, \vec{x}) &= a(t)^2 \delta_{ij} (1 + 2\Phi(t, \vec{x})) \end{aligned} \quad (2.34)$$

όπου Φ και Ψ οι δυο βαθμωτές συναρτήσεις που χρειαζόμαστε για τους δυο βαθμωτούς βαθμούς ελευθερίας. Άρα χρειαζόμαστε δυο ανεξάρτητες εξισώσεις για τα Φ, Ψ . Από τις συμμετρίες της μετρικής καταλαβαίνουμε πως θα χρειαστεί να εξαιτάσουμε το χωρικό στοιχείο ij και το χρονικό 00 . Να σημειωθεί πως σχεδόν όλους τους υπολογισμούς θα τους κάνουμε στον χώρο Fourier, οπότε τους όρους των χωρικών παραγώγων θα τους αντικαθιστούμε με δυνάμεις του ik .

Αρχικά θα υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel που θα χρειαστούμε. Θα αναδείξουμε αναλυτικά τα σύμβολα τύπου $\Gamma_{\mu\nu}^0$. Ακολουθώντας τη γενική μορφή της εξίσωσης (1.53), έχουμε:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} g^{0a} (\partial_\nu g_{a\mu} + \partial_\mu g_{a\nu} - \partial_a g_{\mu\nu}) \quad (2.35)$$

Ο μονοδικός μη μηδενικός όρος της (2.35) είναι για $a = 0$. Άρα, από την εξίσωση (2.34), έχουμε:

$$g_{00} = -1 - 2\Psi \stackrel{1\eta\varsigma \ \tau\acute{\alpha}\xi\eta\varsigma}{\iff} g^{00} = -1 + 2\Psi \quad (2.36)$$

Άρα:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{-1 + 2\Psi}{2} (\partial_\nu g_{0\mu} + \partial_\mu g_{0\nu} - \partial_0 g_{\mu\nu}) \quad (2.37)$$

Για $\mu = \nu = 0$, έχουμε πως $\partial_0 g_{00} = -2\dot{\Psi}$. Έτσι, κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης, έχουμε:

$$\Gamma_{00}^0 = \dot{\Psi} \quad (2.38)$$

Για μ ή ν χωρικά και το άλλο χρονικό, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Gamma_{0i}^0 &= \frac{-1+2\Psi}{2}(\partial_i g_{00} + \partial_0 g_{0i} - \partial_0 g_{0i}) = \\ &= \frac{-1+2\Psi}{2}(\partial_i g_{00}) = \frac{-1+2\Psi}{2}(-2\partial_i\Psi)\end{aligned}\quad (2.39)$$

και κρατώντας από τη (2.39) μόνο τους όρους πρώτης τάξης, έχουμε:

$$\Gamma_{0i}^0 = \partial_i\Psi \quad (2.40)$$

Αντίστοιχα, για μ και ν χωρικά, έχουμε $g_{0i} = g_{i0} = 0$, άρα:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^0 &= \frac{-1+2\Psi}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\delta_{ij}a^2(1+2\Phi)) = \\ &= \frac{-1+2\Psi}{2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}(a^2+2a^2\Phi) = \\ &= \frac{-1+2\Psi}{2}\delta_{ij}(2a\dot{a}+2a^2\dot{\Phi}+4a\dot{a}\Phi) = \\ &= \delta_{ij}a^2(1-2\Psi)(H+\dot{\Phi}+2H\Phi)\end{aligned}\quad (2.41)$$

με H την παράμετρο Hubble. Κρατώντας πάλι τους όρους μέχρι την 1η τάξη, έχουμε τελικά:

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}a^2(H+2H(\Phi-\Psi)+\dot{\Phi}) \quad (2.42)$$

Υπολογίζονται με ακριβώς όμοια διαδικασία τα σύμβολα Christoffel τύπου $\Gamma_{\mu\nu}^i$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{a^2}\partial_i\Psi, \\ \Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij}(H+\dot{\Phi}), \\ \Gamma_{jk}^i &= (\delta_{ij}\partial_k + \delta_{ik}\partial_j - \delta_{jk}\partial_i)\Phi\end{aligned}\quad (2.43)$$

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς πως σε όλα τα παραπάνω Christoffel, αν μηδενίσουμε τις διαταραχές, προκύπτουν οι όροι μηδενικής τάξης που υπολογίσαμε στην ενότητα 1.3.2.

Τώρα θα υπολογίσουμε τον τανυστή Ricci και αρχικά θα υπολογίσουμε το χρονικό στοιχείο. Έχουμε από την εξίσωση (1.128):

$$R_{00} = \partial_\alpha\Gamma_{00}^\alpha - \partial_0\Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha\Gamma_{00}^\beta - \Gamma_{\beta 0}^\alpha\Gamma_{0\alpha}^\beta \quad (2.44)$$

Στην εξίσωση (2.44) για $a = 0$, όπως βλέπουμε πολύ εύκολα, οι δύο πρώτοι όροι είναι ίσοι και αντίθετοι μεταξύ τους, όπως και οι δύο τελευταίοι μεταξύ τους, άρα τελικά η συνεισφορά για $a = 0$, δηλαδή χρονικό, είναι συνολικά 0. Άρα πρέπει το a να είναι χωρικό, δηλαδή $a = i$. Άρα, θα υπολογίσουμε το κάθε στοιχείο της εξίσωσης (2.44), για $a = i$. Έχουμε αρχικά:

$$\partial_i\Gamma_{00}^i \stackrel{(2.43)}{=} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{a^2}\partial_i\Psi \right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2 x^i} \quad (2.45)$$

Όπου η (2.45) στον χώρο Fourier, αντικαθιστώντας τις χωρικές παραγώγους με δυνάμεις του ik , έχουμε:

$$\partial_i\Gamma_{00}^i = \frac{(ik)(ik)}{a^2}\Psi = \frac{-k^2}{a^2}\Psi \quad (2.46)$$

Για τον δεύτερο όρο, έχουμε:

$$\begin{aligned}
-\partial_0 \Gamma_{0i}^i &= -\frac{\partial}{\partial t} (\delta_{ii} (H + \dot{\Phi}))^{\delta_{ii}=3} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} (3(H + \dot{\Phi})) = \\
&= -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2} + \ddot{\Phi} \right) = \\
&= -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \ddot{\Phi} \right) = \\
&= -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - (H)^2 + \ddot{\Phi} \right)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Υπολογίζοντας τον τρίτο όρο, $\Gamma_{\beta i}^i \Gamma_{00}^\beta$, παρατηρούμε πως ο όρος Γ_{00}^β είναι 1ης τάξης για κάθε β , άρα για τον όρο $\Gamma_{\beta i}^i$ πρέπει να κρατήσουμε μόνο τον όρο μηδενικής τάξης, αλλιώς το γινόμενο τους θα είναι ανώτερης τάξης και άρα θα θεωρείται αμελητέο για την ανάλυσή μας. Αυτό παρατηρούμε πως συμβαίνει μόνο για $\beta = 0$. Άρα:

$$\Gamma_{\beta i}^i \Gamma_{00}^\beta = \Gamma_{0i}^i \Gamma_{00}^0 = (\delta_{ii} (H + \dot{\Phi})) \dot{\Psi} = 3H\dot{\Psi} + 3\dot{\Phi}\dot{\Psi} \tag{2.48}$$

και λαμβάνοντας υπόψη μόνον τους πρωτοβάθμιους όρους της εξίσωσης (2.48), έχουμε:

$$\Gamma_{0i}^i \Gamma_{00}^0 = 3H\dot{\Psi} \tag{2.49}$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε τον τελευταίο όρο της (2.44), $-\Gamma_{\beta 0}^i \Gamma_{0i}^\beta$. Αν το β είναι χρονικό, τότε και τα δύο Christoffels είναι πρώτης τάξης, άρα το γινόμενο τους δεύτερης και συνεπώς στην ανάλυσή μας μπορείς να παραληφθεί. Άρα μόνο για β χωρικό ο παραπάνω όρος είναι 1ης τάξης, άρα:

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{\beta 0}^i \Gamma_{0i}^\beta &= -\Gamma_{j0}^i \Gamma_{0i}^j = \\
&= -(\delta_{ij} (H + \dot{\Phi})) (\delta_{ij} (H + \dot{\Phi})) = \\
&= -\delta_{ii} (H + \dot{\Phi})^2 = \\
&= -3(H^2 + 2H\dot{\Phi} + \dot{\Phi}^2)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

και λαμβάνοντας υπόψη μόνον τους όρους πρώτης τάξης, η (2.50), γίνεται:

$$-\Gamma_{j0}^i \Gamma_{0i}^j = -3(H^2 + 2H\dot{\Phi}) \tag{2.51}$$

Έτσι, αθροίζοντας τις εξισώσεις (2.46), (2.47), (2.49) και (2.51), έχουμε τελικά πως:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{-k^2}{a^2} \Psi - 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - (H)^2 + \ddot{\Phi} \right) + 3H\dot{\Psi} - 3(H^2 + 2H\dot{\Phi}) = \\
&= -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2} \Psi - 3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi})
\end{aligned} \tag{2.52}$$

όπου ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.52), είναι ο μηδενικής τάξης όρος που υπολογίστηκε στην εξίσωση (1.133) για την περίπτωση της αδιατάρακτης μετρικής FLRW, ενώ οι υπόλοιποι όροι αποτελούν της διόρθωση, δR_{00} .

Με ακριβώς παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το χωρικό κομμάτι του τανυστή Ricci, το οποίο προκύπτει:

$$R_{ij} = \delta_{ij}((2a^2H^2 + a\ddot{a})(1 + 2\Phi - 2\Psi) + a^2H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + a^2\ddot{\Phi} + k^2\Phi) + k_ik_j(\Phi + \Psi) \quad (2.53)$$

όπου πάλι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο R_{ij} που είχε υπολογιστεί για την αδιατάραχη περίπτωση στην εξίσωση (1.134), και οι υπόλοιποι όροι αποτελούν μια διόρθωση πρώτης τάξης, δR_{ij} . Έτσι, μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε και το βαθμωτό Ricci:

$$\begin{aligned} R &= g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = \\ &= (-1 - 2\Psi) \left[-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) \right] + \\ &+ \frac{1 - 2\Phi}{a^2} [3((2a^2H^2 + a\ddot{a})(1 + 2\Phi - 2\Psi) + \\ &+ a^2H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + a^2\ddot{\Phi} + k^2\Phi) + k^2(\Phi + \Psi)] \end{aligned} \quad (2.54)$$

όπου και σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να αναγνωρίσουμε το R μηδενικής τάξης που υπολογίσαμε στην εξίσωση (1.135). Κάνοντας τις πράξεις στην εξίσωση (2.54) και λαμβάνοντας υπόψη μόνον τους όρους 1ης τάξης, έχουμε πως ο διορθωτικός όρος για το βαθμωτό Ricci, είναι:

$$\begin{aligned} \delta R &= -6\Psi\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\ddot{\Phi} - 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) - \\ &- 6\Psi \left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) + 3H(6\dot{\Phi} - \dot{\Psi}) + 3\ddot{\Phi} + 4\frac{k^2\Phi}{a^2} + \frac{k^2\Psi}{a^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

όπου στην εξίσωση (2.55), η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στη συνεισφορά του R_{00} και η δεύτερη στη συνεισφορά του R_{ij} στον διορθωτικό όρο του βαθμωτού Ricci. Κάνοντας τις πράξεις, τελικά προκύπτει πως:

$$\delta R = -12\Psi \left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{2k^2\Psi}{a^2} + 6\ddot{\Phi} - 6H(\dot{\Psi} - 4\dot{\Phi}) + \frac{4k^2\Phi}{a^2} \quad (2.56)$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει όλα τα στοιχεία του αριστερού μέλους της εξίσωσης Einstein, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (1.144), η οποία ανεβάζοντας τον έναν από τους δείκτες, γίνεται:

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi GT^\mu{}_\nu \quad (2.57)$$

και από τις παραπάνω 10 πιθανές εξισώσεις επιλέγουμε 2 από αυτές για να υπολογίσουμε τις εξισώσεις εξέλιξης για τα δύο βαθμωτά πεδία των διαταραχών. Η πρώτη εξίσωση που θα επιλέξουμε είναι για $\mu = \nu = 0$ και στη συνέχεια θα επιλέξουμε ένα χωρικό με $\mu = i$ και $\nu = j$. Ωστόσο, μέχρι στιγμής δεν έχουμε σχολιάσει τις διαταραχές του δεξιού μέλους της εξίσωσης Einstein, δηλαδή τις διαταραχές για τον τανυστή ενέργειας ορμής. Αν και δε θα ασχοληθούμε στο πλαίσιο της παρούσας ανάλυσης με το πώς παράγονται, είναι απαραίτητο να αναφέρουμε το αποτέλεσμα τους, ούτως ώστε να μπορέσουμε να παράξουμε τις εξισώσεις εξέλιξης για τα δυο βαθμωτά πεδία, καθώς και οι διαταραχές στον τανυστή ενέργειας ορμής, είναι και αυτές βαθμωτές και αφορούν διαταραχές στην πυκνότητα της ύλης. Έτσι, έχουμε πως για διαταραχές πρώτης τάξης, το χρονικό στοιχείο του τανυστή ενέργειας- ορμής παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} T^0{}_0 &= T^0{}_0 + (\delta T^0{}_0) = \\ &= -\rho_\gamma - \rho_b - \rho_c - \rho_\nu - (4\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c + 4\rho_\nu N_0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

όπου στην εξίσωση (2.58) και οι όροι που βρίσκονται εκτός παρένθεσης αποτελούν τους όρους μηδενικής τάξης και οι όροι που βρίσκονται εντός παρένθεσης είναι οι διορθωτικοί όροι 1ης τάξης. Στην εξίσωση (2.58), οι όροι ρ_s είναι οι πυκνότητες για φωτόνια ($s = \gamma$), βαρυόνια ($s = b$), σκοτεινή ύλη ($s = y$) και άμαζα νετρίνα ($s = \nu$), με τις αντίστοιχες διαταραχές τους να είναι Θ_0 ο μονοπολικός όρος για την κλασματική διαταραχή θερμοκρασίας $\delta T/T$, $\delta_{s=b,c}$ οι διαταραχές πυκνότητας για τις πυκνότητες βαρυονίων και σκοτεινής ύλης αντίστοιχα και N_0 ο αντίστοιχος μονοπολικός όρος για το κλάσμα $\delta\rho_\nu/\rho_\nu$.

Για το αριστερό μέλος της εξίσωσης Einstein, έχουμε:

$$\begin{aligned} G^0_0 &= g^{00}G_{00} = g^{00}(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R) = \\ &= (-1 + 2\Psi)R_{00} - \frac{1}{2}R \end{aligned} \quad (2.59)$$

και κρατώντας μόνο το μέρος της διαταραχής και με τις σχέσεις (2.52) και (2.54), έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta G^0_0 &= -6\Psi\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\ddot{\Phi} - 3H(\dot{\Psi} - 2\dot{\Phi}) + \\ &+ 6\Psi\left(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\right) - \frac{k^2\Psi}{a^2} - 3\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Psi} - 4\dot{\Phi}) - \frac{2k^2\Phi}{a^2} = \\ &= -6H\dot{\Phi} + 6\Psi H^2 - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi \end{aligned} \quad (2.60)$$

Άρα, εξισώνοντας την (2.60) με τον διαταρακτικό όρο της (2.58) επί του συντελεστή $8\pi G$ και διαιρώντας με το 2, έχουμε τελικά:

$$-3H\dot{\Phi} + 3\Psi H^2 - \frac{k^2}{a^2}\Phi = -4\pi G(4\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c + 4\rho_\nu N_0) \quad (2.61)$$

Κάνοντας την μετατροπή από τον φυσικό στον σύμμορφο χρόνο η (2.61) τελικά γίνεται:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' - \Psi\frac{a'}{a}\right) = 4\pi G a^2(4\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c + 4\rho_\nu N_0) \quad (2.62)$$

όπου με τόνο συμβολίζουμε την μερικά παράγωγο με σεβασμό στον σύμμορφο χρόνο. Η εξίσωση (2.62) αποτελεί την πρώτη εξίσωση εξέλιξης για τα δυο βαθμωτά βαρυτικά πεδία.

Η δεύτερη εξίσωση όπως ήδη αναφέραμε θα προκύψει από το χωρικό κομμάτι της εξίσωσης Einstein, το οποίο ωστόσο θα χειραγωγήσουμε προς όφελός μας. Για το αριστερό μέλος, έχουμε:

$$\begin{aligned} G^i_j &= g^{ik}G_{kj} = g^{ik}(R_{kj} - \frac{1}{2}g_{kj}R) = \\ &= \frac{\delta^{ik}(1 - 2\Phi)}{a^2}R_{kj} - \frac{\delta^i_j}{2}R \end{aligned} \quad (2.63)$$

Παρατηρούμε πως οι περισσότεροι όροι του R_{kj} είναι ανάλογα του δ_{kj} , άρα όταν κάνουμε το contraction θα οδηγηθούμε σε όρους ανάλογους του δ_{ij} , εκτός του τελευταίου όρου που είναι ανάλογος του βαθμωτού Ricci. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$G^i_j = F(\Phi, \Psi)\delta^i_j + \frac{k^i k_j(\Phi + \Psi)}{a^2} \quad (2.64)$$

όπου $F(\Phi, \Psi)$ περιέχει περίπου 12 όρους, οι οποίοι επειδή είναι ανάλογοι του δ_j^i , συνεισφέρουν μόνο στο ίχνος του G^i_j . Ωστόσο, μπορούμε να τους “αποφύγουμε”, θα ασχοληθούμε με το *διαμήκες, χωρίς ίχνος* (longitudinal, traceless) μέρος του G^i_j , το οποίο μπορούμε να παράγουμε κάνοντας το contraction του G^i_j με τον όρο $\hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3)\delta_j^i$. Άρα, το *διαμήκες, χωρίς ίχνος* μέρος του G^i_j , είναι:

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_j^i\right) G^i_j = \left(\hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_j^i\right) \left(\frac{k^i k_j (\Phi + \Psi)}{a^2}\right) = \frac{2}{3a^2} k^2 (\Phi + \Psi) \quad (2.65)$$

Επιστρέφοντας στον τανυστή ενέργειας- ορμής, θα κάνουμε την ίδια ακριβώς χειραγώγηση την οποία κάναμε στον τανυστή Einstein για να ισχύει η εξίσωση (2.57). Άρα αντί να υπολογίσουμε το στοιχείο T^i_j , θα υπολογίσουμε το στοιχείο $\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - 1/3\delta_j^i\right) T^i_j$, το οποίο προκύπτει πως ισούται με:

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_j^i\right) T^i_j = -\frac{8}{3} [\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu N_2] \quad (2.66)$$

όπου όπως φαίνεται επιβιώνουν στην 1η τάξη μόνο οι όροι για τα φωτόνια και τα άμαζα νετρίνα, οι οποίοι είναι οι αντίστοιχοι τετραπολικόι όροι κατανομής για αυτά τα δύο είδη ύλης. Αυτός ο όρος του τανυστή ενέργειας- ορμής, καλείται *ανισοτροπική πίεση* (anisotropic stress) και σε αυτόν δε συνεισφέρουν τα μη σχετικιστικά σωματίδια, όπως τα βαρυόνια και η σκοτεινή ύλη. Άρα, για τη δεύτερη εξίσωση εξέλιξης θα εξισώσουμε την εξίσωση (2.65) με την εξίσωση (2.66) επί του συντελεστή $8\pi G$, και άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3a^2} k^2 (\Phi + \Psi) &= -\frac{64\pi G}{3} [\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu N_2] \iff \\ k^2 (\Phi + \Psi) &= -32\pi G a^2 [\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu N_2] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Από την εξίσωση (2.67), καταλαβαίνουμε πως τα δύο βαθμωτά δυναμικά Φ και Ψ είναι ίσα και αντίθετα, καθώς ο τετραπολικός όρος των φωτονίων συνεισφέρει ελάχιστα και ο τετραπολικός όρος των νετρίνων ήταν μη αμελητέος μόνο στην εποχή της ακτινοβολίας, την κοσμολογική περίοδο κατά την οποία η ακτινοβολία κυριαρχούσε στο σύμπαν κάτι το οποίο συνέβαινε στο πρώιμο σύμπαν.

Έτσι, οι εξισώσεις που περιγράφουν τις βαθμωτές διαταραχές της μετρικής και άρα και τα βαθμωτά πεδία Φ και Ψ είναι οι εξισώσεις (2.67) και (2.62), οι οποίες όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς είναι διαφορικές εξισώσεις με περιορισμούς (constraint equations), καθώς δεν περιλαμβάνουν διαφορικά δεύτερης ή ανώτερης τάξης και δεν παράγουν κυματικά φαινόμενα.

2.2.3 Τανυστικές Διαταραχές: Βαρυτικά κύματα

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα οι βαθμωτές διαταραχές στη μετρική FLRW πηγάζουν από διακυμάνσεις στην πυκνότητα της ύλης και το αντίστροφο. Λόγω του Θεωρήματος Αποσύνθεσης, όπως ήδη έχουμε αναφέρει μπορούμε εύκολα να μελετήσουμε απομονωμένα τις βαθμωτές και απομονωμένα τις τανυστικές διαταραχές.

Όπως θα δούμε στην παρούσα ενότητα, οι τανυστικές διαταραχές είναι η θεωρητική θεμελίωση ενός από τα σημαντικότερα βαρυτικά φαινόμενα που έχουμε ανακαλύψει, τα *βαρυτικά κύματα* (gravitational waves). Από την ανακάλυψή τους από το LIGO, τα βαρυτικά κύματα έχουν αποτελέσει έναν πολύ σημαντικό ανιχνευτή διάφορων ατροφυσικών φαινομένων, όπως η συγχώνευση μελανών οπών, η σύγκρουση αστέρων νετρονίων, κλπ. Τα μήχη κύματος τα οποία μπορούν να ανιχνευθούν

από το LIGO είναι της τάξεως εκατοντάδων χιλιομέτρων, ενώ στην ανάλυσή μας θα θεωρήσουμε μήκη κύματος χιλιάδων μεγαπάρσεκ (Megaparsec, $1Mpc = 3.0856 \times 10^{22}m$). Ωστόσο, η βασική εξίσωση που διέπει την παραγωγή και διάδοση των βαρυτικών κυμάτων είναι ταυτόσημη με αυτήν που θα παράξουμε αμέσως. Ο πιο εύκολος τρόπος να εντοπίσουμε κοσμολογικά τα βαρυτικά κύματα είναι οι διακυμάνσεις του CMB (Cosmic Microwave Background, κοσμική ακτινοβολία μικροκυμάτων υποβάθρου), ειδικά στις μεγαλύτερες κλίμακες. Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε για τις τανυστικές διαταραχές είναι ακριβώς τα ίδια που χρησιμοποιήσαμε και στην περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών (γι' αυτό και θεωρήθηκε απαραίτητο να αφιερώσουμε ολόκληρη την ενότητα 2.2.3, για να εστιάσουμε σε αυτήν τη διαδικασία και στην παρούσα ενότητα να εστιάσουμε στα βαρυτικά κύματα και την φυσική των τανυστικών διαταραχών).

Οι τανυστικές διαταραχές χαρακτηρίζονται από μια διαταραγμένη μετρική η οποία έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} g_{00}(t, \vec{x}) &= -1 + h_{00}(t, \vec{x}), \\ g_{0i}(t, \vec{x}) &= a(t)h_{0i}(t, \vec{x}) = a(t)h_{i0}(t, \vec{x}), \\ g_{ij}(t, \vec{x}) &= a(t)^2\delta_{ij} + \delta g_{ij}(t, \vec{x}) = a(t)^2(\delta_{ij} + h_{ij}(t, \vec{x})) \end{aligned} \quad (2.68)$$

και στην περίπτωση μας, έχουμε:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 0, \\ h_{0i} &= 0 \text{ και} \\ \delta g_{ij}(t, \vec{x}) &= a^2(t)h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

όπου:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

όπου h_+ και h_\times μικρές συναρτήσεις που περιγράφουν τις διαταραχές. Στον ορισμό του τανυστή $h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})$, επιλέξαμε οι διαταραχές να βρίσκονται στο $x-y$ επίπεδο και έτσι επιλέξαμε το κυματόνισμα να βρίσκεται στον z -άξονα. Γενικότερα, τα h_+ και h_\times είναι 2 στοιχεία ενός χωρίς απόκλιση, χωρίς ίχνος και συμμετρικού τανυστή (divergenceless, traceless, symmetric tensor). Αναλυτικά κάθε από αυτά τα στοιχεία σημαίνουν:

- Χωρίς απόκλιση (divergenceless) σημαίνει μαθηματικά πως $k^i h_{ij}^{TT} = k^j h_{ij}^{TT} = 0$ κάτι το οποίο εξασφαλίζεται καθώς δεν υπάρχουν στοιχεία στην $\hat{k} = \hat{e}_z$ κατεύθυνση. Από την ιδιότητα αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο τανυστής είναι εγκάρσιος (transverse), καθώς εξασφαλίζουμε πως ισχύει $\nabla_i h^{TT,ij} = 0$, όπου ∇_i είναι η συναλλοίωτη παράγωγος με σεβασμό στο i .
- Χωρίς ίχνος (traceless) σημαίνει μαθηματικά πως το ίχνος του τανυστή, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, να είναι 0. Αυτό είναι εμφανές καθώς $h_+ + (-h_+) + 0 = 0$
- Συμμετρικός σημαίνει πως για κάθε στοιχείο του ισχύει πως $h_{ij}^{TT} = h_{ji}^{TT}$, κάτι το οποίο είναι προφανές και εξασφαλίζει .

Στην παρούσα ανάλυση θα εστιάσουμε στην εγκάρσια και χωρίς-ίχνος φύση του τανυστή h_{ij}^{TT} και μόνο στο τέλος θα ειδικευτούμε στην περίπτωση πως $\hat{k} = \hat{e}_z$.

Θα ακολουθήσουμε ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε και στις βαθμωτές διαταραχές, ξεκινώντας με τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel. Αρχικά θα υπολογίσουμε το $\Gamma_{\alpha\beta}^0$. Υπενθυμίζεται πως τα Christoffel υπολογίζονται από την εξίσωση (1.53). Άρα, εφόσον από την μετρική (2.38) παρατηρούμε πως το στοιχείο g_{00} είναι σταθερό και τα g_{0i} εξαφανίζονται, τα μη μηδενικά στοιχεία είναι αυτά τα οποία εμπλέκουν τα χωρικά στοιχεία της μετρικής, $\partial_a g_{ij}$. Άρα προφανώς, έχουμε:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0 \quad (2.71)$$

Επίσης, από την (1.53), έχουμε πως το Γ_{ij}^0 , υπολογίζεται:

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{g^{00}}{2} \partial_t g_{ij} = \frac{1}{2} \partial_t g_{ij} \quad (2.72)$$

Εφόσον $g_{ij} = a(t)^2 (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT})$, έχουμε:

$$\partial_t g_{ij} = 2H g_{ij} + a^2 \partial_t h_{ij}^{TT} \quad (2.73)$$

Άρα:

$$\Gamma_{ij}^0 = H g_{ij} + \frac{a^2 \partial_t h_{ij}^{TT}}{2} \quad (2.74)$$

Τα επόμενα μη μηδενικά Christoffel που θα υπολογίσουμε είναι τα Γ_{0j}^i και Γ_{jk}^i . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0j}^i &= \frac{g^{ik}}{2} \partial_t g_{jk} = \\ &= \frac{g^{ik}}{2} (2H g_{jk} + a^2 \partial_t h_{jk}^{TT}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Αλλά $g^{ik} g_{jk} = \delta_{ij}$ και ξεκινώντας από την εξίσωση αυτή και λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους όρους πρώτης και μηδενικής τάξης, έχουμε:

$$\begin{aligned} g^{jk} g_{ik} &= \delta_{ij} \iff \\ g^{jk} (a^2 \delta_{ik} + a^2 h_{ik}^{TT}) &= \delta_{ij} \overset{1ης-τάξης}{\iff} \\ g^{jk} a^2 \delta_{ik} &= \delta_{ij} \iff \\ g^{jk} &= \frac{\delta_{jk}}{a^2} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Άρα, η (2.75) γίνεται:

$$\Gamma_{0j}^i = H \delta_{ij} + \frac{\partial_t h_{jk}^{TT}}{2} \quad (2.77)$$

χρησιμοποιώντας τη συμμετρικότητα του τανυστή h_{ij}^{TT} . Αντίστοιχα, υπολογίζουμε, κάνοντας την μετατροπή των χωρικών παραγώγων σε δυνάμεις τους κυματανύσματος στον χώρο Fourier:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{i}{2} (k_k h_{ij}^{TT} + k_j h_{ik}^{TT} - k_i h_{jk}^{TT}) \quad (2.78)$$

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία που ακολουθήσαμε και στις βαθμωτές διαταραχές, συνδυάζουμε τα παραπάνω Christoffel για να υπολογίσουμε τον τανυστή και το βαθμωτό Ricci. Αρχικά θα υπολογίσουμε το χρονικό στοιχείο του τανυστή Ricci, R_{00} . Γνωρίζουμε πως το στοιχείο

αυτό είναι τριβάθμιτο (3-scalar), καθώς δεν περιέχει κανέναν χωρικό δείκτη, άρα οι δείκτες του h_{ij}^{TT} πρέπει να έχουν κάνει contraction με άλλους δείκτες στο R_{00} . Άρα θα πρέπει τα στοιχεία h_{ij}^{TT} να πολλαπλασιάζονται με ένα από τα δ_{kl}, k^i ή h_{kl}^{TT} , με τα τελευταία ωστόσο να παράγουν όρους δεύτερης τάξης τους οποίους πρέπει να αγνοήσουμε. Επίσης, επειδή ο ταυστής h_{ij}^{TT} είναι χωρίς ίχνος και απόκλιση, όλα τα contractions με το δέλτα του Kronecker ή με το κυματόνισμα k^i εξαφανίζονται. Άρα το στοιχείο R_{00} δεν έχει ταυστική συνεισφορά στη γραμμική τάξη.

Το χωρικό στοιχείο του ταυστή Ricci, R_{ij} , εξαρτάται από τις ταυστικές διαταραχές. Έχουμε από την εξίσωση (1.127):

$$R_{ij} = \partial_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha - \partial_j \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta - \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta \quad (2.79)$$

Για του δύο πρώτους όρους της εξίσωσης (2.79) έχουμε:

$$\partial_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha - \partial_j \Gamma_{i\alpha}^\alpha = \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{i0}^0 - \partial_j \Gamma_{ik}^k \quad (2.80)$$

Αλλά από την εξίσωση (2.71) βλέπουμε πως $-\partial_j \Gamma_{i0}^0 = 0$. Επίσης, λόγω της συμμετρικότητας και του γεγονότος πως είναι χωρίς ίχνος, έχουμε πως $\Gamma_{ik}^k = 0$. Άρα η (2.80) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.72) και (2.78), γίνεται, κάνοντας πάλι τον μετασχηματισμό των παραγώγων στον χώρο Fourier:

$$\partial_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha - \partial_j \Gamma_{i\alpha}^\alpha = \frac{\partial_t \partial_t g_{ij}}{2} + \frac{1}{2} (-k_i k_k h_{jk}^{TT} - k_j k_k h_{ik}^{TT} + k^2 h_{ij}^{TT}) \quad (2.81)$$

Όμως, λόγω της εγκυριότητας του ταυστή h_{ij}^{TT} , έχουμε πως $k_i k_k h_{jk}^{TT} = -k_j k_k h_{ik}^{TT}$, άρα:

$$\partial_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha - \partial_j \Gamma_{i\alpha}^\alpha = \frac{\partial_t \partial_t g_{ij}}{2} + \frac{1}{2} k^2 h_{ij}^{TT} \quad (2.82)$$

Ο τρίτος όρος της εξίσωσης (2.79) είναι μη μηδενικός μόνος αν το a είναι χωρικό, άρα:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta = \Gamma_{k0}^k \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l \quad (2.83)$$

Αλλά καθένα από τα Christoffels του τελευταίου όρου της εξίσωσης (2.83) είναι πρώτης τάξης, άρα το γινόμενο τους είναι δεύτερης τάξης, άρα τον αγνοούμε για την ανάλυσή μας. Στον πρώτο όρο της (2.83), το άθροισμα στα k κάνει τους όρους πρώτης τάξης να εξαφανίζονται και έτσι το Christoffel Γ_{k0}^k είναι μηδενικής τάξης, άρα $\Gamma_{k0}^k = 3H$. Άρα:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta = \frac{3}{2} H \partial_t g_{ij} \quad (2.84)$$

Όμοια, υπολογίζουμε τον τελευταίο όρο της εξίσωσης (2.79): τα Christoffel είναι μη μηδενικά μόνο αν ή το a ή το β είναι χρονικό και το άλλο χωρικό, άρα:

$$\Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta = \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k + \Gamma_{0j}^k \Gamma_{ik}^0 \quad (2.85)$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k &= \frac{1}{2} (2H g_{jk} + a^2 \partial_t h_{jk}^{TT}) \left(H \delta_{ik} + \frac{1}{2} \partial_t h_{ik}^{TT} \right) = \\ &= H^2 g_{ij} + a^2 H \partial_t h_{ij}^{TT} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Άρα, τελικά:

$$\Gamma_{\beta j}^{\alpha} \Gamma_{ia}^{\beta} = 2H^2 g_{ij} + 2a^2 H \partial_t h_{ij}^{TT} \quad (2.87)$$

Έτσι, η εξίσωση (2.79) σε συνδυασμό με τις (2.82), (2.84) και (2.87), το χωρικό στοιχείο του τανυστή Ricci, υπολογίζεται:

$$R_{ij} = \frac{\partial_t \partial_t g_{ij}}{2} + \frac{1}{2} k^2 h_{ij}^{TT} + \frac{3}{2} H \partial_t g_{ij} - 2H^2 g_{ij} - 2a^2 H \partial_t h_{ij}^{TT} \quad (2.88)$$

και κάνοντας τους υπολογισμούς για τις χρονικές παραγώγους, έχουμε από την εξίσωση (2.73):

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_t g_{ij} &= \partial_t (\partial_t g_{ij}) = \partial_t (2H g_{ij} + a^2 \partial_t h_{ij}^{TT}) = \\ &= 2g_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) + 4a^2 H \partial_t h_{ij}^{TT} + a^2 \partial_t \partial_t h_{ij}^{TT} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Άρα, τελικά το χωρικό κομμάτι του τανυστή Ricci ισούται με:

$$R_{ij} = g_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) + \frac{k^2}{2} h_{ij}^{TT} + \frac{3}{2} a^2 H \partial_t h_{ij}^{TT} + \frac{a^2}{2} \partial_t \partial_t h_{ij}^{TT} \quad (2.90)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο χωρικό στοιχείο του τανυστή Ricci μηδενικής τάξης.

Γνωρίζουμε πως το βαθμωτό Ricci ισούται με:

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} \quad (2.91)$$

Όπως ήδη αναφέραμε το χρονικό στοιχείο του τανυστή Ricci έχει διορθώσεις ανώτερης τάξης από τη γραμμική, άρα δε συνεισφέρει στον διορθωτικό όρο του βαθμωτού Ricci στην γραμμική τάξη. Άρα μόνο το χωρικό μέρος της εξίσωσης (2.91) μπορεί να συνεισφέρει στον διορθωτικό όρο του βαθμωτού Ricci. Ωστόσο, όπως μπορεί να καταλάβει κανείς από τη μορφή της εξίσωσης (2.90), το γινόμενο του R_{ij} με το g^{ij} (πρώτης τάξης και αυτό) μας δίνει διορθώσεις ανώτερης τάξης. Άρα ο h_{ij}^{TT} δε συνεισφέρει στη διόρθωση του βαθμωτού Ricci, άρα:

$$\delta R = 0 \quad (2.92)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση Einstein (εξίσωση (2.57) και λαμβάνοντας υπόψη πως $\delta R = 0$, η μοναδική διόρθωση πρώτης τάξης στον τανυστή Einstein είναι αυτή του τανυστή Ricci, άρα:

$$\delta G^i_j = \delta R^i_j \quad (2.93)$$

Για να παράξουμε το R^i_j , θα κάνουμε το contraction του g^{ik} και του R_{kj} , το οποίο υπολογίσαμε στην (2.90). Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, έχουμε $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$ και από την εξίσωση (2.76) έχουμε $g^{jk} = \delta^{jk}/a^2$. Άρα η (2.93), γίνεται:

$$\delta G^i_j = \delta^{ik} \left(\frac{3}{2} H \partial_t h_{kj}^{TT} + \frac{\partial_t \partial_t h_{kj}^{TT}}{2} + \frac{k^2}{2a^2} h_{kj}^{TT} \right) \quad (2.94)$$

Έχοντας πλέον σχεδόν ολοκληρώσει όλη την ανάλυσή μας γύρω από τις εξισώσεις Einstein, ήρθε η ώρα να κάνουμε την ειδικευση πως $\hat{k} = \hat{e}_z$ και απλοποιώντας όλους τους παραπάνω όρους για την ειδική αυτή περίπτωση θα προκύψει ένα σετ από εξισώσεις εξέλιξης για τα h_+ και h_{\times} .

Αρχικά, για να παράξουμε την εξίσωση εξέλιξης για το h_+ , αρκεί να υπολογίσουμε την διαφορά του δG^1_1 και δG^2_2 . Ο ταυστής είναι ανάλογος του h_{ij}^{TT} και των διαφορικών του. Εφόσον $h_{11}^{TT} = -h_{22}^{TT} = h_+$, το δG^1_1 είναι ίσο και αντίθετο του δG^2_2 . Άρα, από την εξίσωση (2.94) και τις παραπάνω παρατηρήσεις, έχουμε:

$$\delta G^1_1 - \delta G^2_2 = 3H\partial_t h_+ + \partial_t \partial_t h_+ + \frac{k^2 h_+}{a^2} \quad (2.95)$$

Κάνοντας την μετατροπή στον σύμμορφο χρόνο, έχουμε:

$$\partial_t h_+ = \frac{h_+'}{a} \quad (2.96)$$

και συνεπώς:

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_t h_+ &= \frac{d(h_+'/a)}{ad\eta} = \\ &= \frac{h_+''}{a^2} - \frac{a'}{a^3} h_+' \end{aligned} \quad (2.97)$$

Άρα η εξίσωση (2.95) γίνεται σε συνδυασμό με τις (2.96) και (2.97):

$$a^2(\delta G^1_1 - \delta G^2_2) = h_+'' + 2\frac{a'}{a} h_+' + k^2 h_+ \quad (2.98)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση Einstein, το δεξί της μέλος είναι μηδέν εν απουσία ανισοτροπικής πίεσης. Αυτό σημαίνει πως τα βαρυτικά κύματα δεν παράγονται από διαταραχές της ύλης. Ανισοτροπίες στα συστατικά της ακτινοβολίας (φωτόνια και νετρίνα) έχουν ανισοτροπική πίεση, η οποία δίνεται από το τετράπολό τους, όπως ήδη αναφέραμε στην ενότητα 2.2.3. Για τα φωτόνια, ο τετραπολικός όρος καταπιέζεται κατά την κοσμική περίοδο που κυριαρχεί η ακτινοβολία, άρα ο πηγαίος όρος μπορεί να αγνοηθεί. Η πιο σχετική ποσότητα στο δεξί μέλος της εξίσωσης Einstein είναι η ανισοτροπική πίεση των νετρίνων. Η πίεση αυτή παρέχει όντως έναν πηγαίο όρο για τα βαρυτικά κύματα, ο οποίος οδηγεί σε έναν όρο απόσβεσης για τις ταυστικές διαταραχές σε μικρές κλίμακες. Ωστόσο, στην ανάλυσή μας θα αγνοηθεί καθώς επικεντρωνόμαστε σε μεγάλης κλίμακας ταυστικές διαταραχές.

Τέλος, υπολογίζουμε τις εξισώσεις εξέλιξης για το h_\times . Ξεκινώντας από τον διορθωτικό όρο δG^1_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta G^1_2 &= \delta^{11} \left(\frac{3}{2} H \partial_t h_{12}^{TT} + \frac{\partial_t \partial_t h_{12}^{TT}}{2} + \frac{k^2}{2a^2} h_{12}^{TT} \right) \\ &= 3 \left(\frac{3}{2} H \partial_t h_\times + \frac{\partial_t \partial_t h_\times}{2} + \frac{k^2}{2a^2} h_\times \right) \end{aligned} \quad (2.99)$$

και με τη βοήθεια των (2.96) και (2.97), η (2.99) γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta G^1_2 &= 3 \left(\frac{3}{2} \frac{da}{dt} \frac{h_\times'}{a^2} + \frac{h_\times''}{2a^2} - \frac{a'}{2a^3} h_\times' + \frac{k^2}{2a^2} h_\times \right) = \\ &= \frac{3}{2a^2} \left(3\frac{a'}{a} h_\times' + h_\times'' - \frac{a'}{a} h_\times' + k^2 h_\times \right) = \\ &= \frac{3}{2a^2} \left(h_\times'' + 2\frac{a'}{a} h_\times' + k^2 h_\times \right) \end{aligned} \quad (2.100)$$

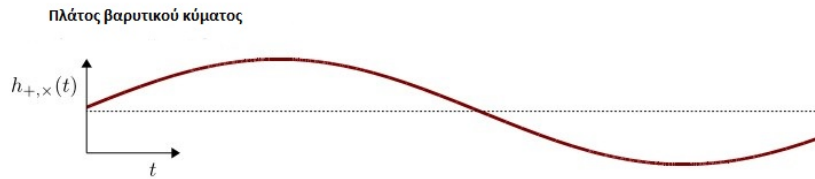
το οποίο προφανώς ισούται με μηδέν. Άρα, συνδυάζοντας τις (2.98) και (2.100), έχουμε:

$$h_t'' + 2\frac{a'}{a}h_t' + k^2h_t = 0 \quad (2.101)$$

με $t = +, \times$. Από την εξίσωση (2.8), αναγνωρίζουμε πως η εξίσωση (2.101) είναι μια κυματική εξίσωση στον χώρο Fourier και οι αντίστοιχες λύσεις της καλούνται βαρυτικά κύματα (gravitational waves). Τα βαρυτικά κύματα τα οποία παρατηρήθηκαν από το LIGO το 2015, φαίνεται πως υπακούουν στην εξίσωση (2.101), θεμελιωνόντάς την και παρατηρησιακά. Η εξίσωση (2.101) αν αγνοηθεί η διαστολή του σύμπαντος και έτσι εξαφανιστεί ο όρος απόσβεσης $2\frac{a'}{a}h_t'$, μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε πως μπορούμε να βρούμε τις ακριβείς λύσεις της διαφορικής, οι οποίες είναι $h_t \propto e^{\pm ik\eta}$. Στον πραγματικό χώρο, τότε, οι διαταραχές της μετρικής, κάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, είναι:

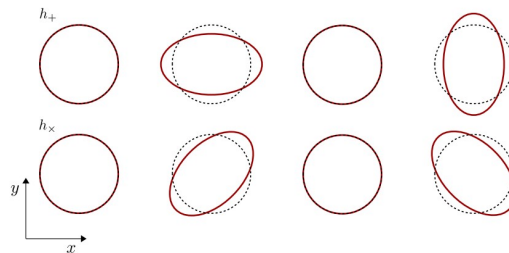
$$h_t(\vec{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} [A(\vec{k})e^{ik\eta} + B(\vec{k})e^{-ik\eta}] \quad (2.102)$$

Η εξίσωση (2.102) περιγράφει κύματα τα οποία διαδίδονται στην κατεύθυνση $\pm z$ με την ταχύτητα του φωτός και στο Σχήμα 2.1 φαίνεται η διακύμανση του πλάτους τους κύματος συναρτήσει του χρόνου.



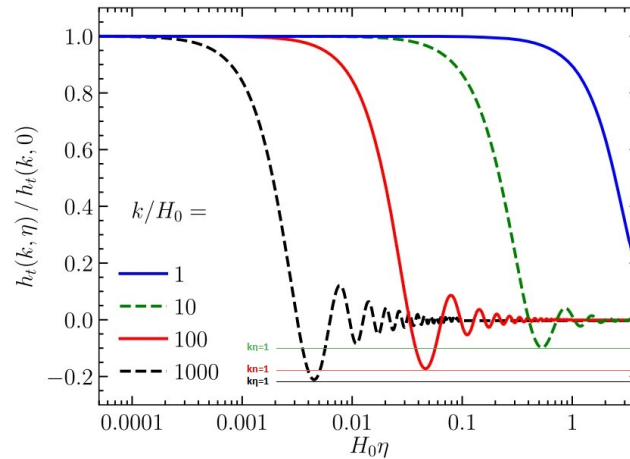
Σχήμα 2.1: Η γραφική παράσταση του πλάτους των βαρυτικών κυμάτων των οποίων το κυματόνισμα είναι μόνο επί της z διεύθυνσης και αγνοώντας την απόσβεση λόγω διαστολής στο διάστημα αμιας περιόδου.

Από το Σχήμα 2.2, μπορούμε να παρατηρήσουμε τις χωροχρονικές παραμορφώσεις που προκαλούν τα βαρυτικά κύματα, με τη διεύθυνση z να είναι κάθετη στην επιφάνεια της σελίδας. Οι παραμορφώσεις αυτές είναι ελλειπτικές σε αντίθεση με τις αζιμουθιακά συμμετρικές γύρω από το κυματόνισμα που υπολογίσαμε στην περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών.



Σχήμα 2.2: Οι χωροχρονικές παραμορφώσεις οι οποίες προκαλούνται από τα βαρυτικά κύματα.

Η εξίσωση (2.101) αποτελεί γενίκευση των εξισώσεων των βαρυτικών κυμάτων σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Στην περίπτωση που το σύμπαν αποτελείται αποκλειστικά από ακτινοβολία ή ύλη μπορούν να παραχθούν ακριβείς αναλυτικές λύσεις για αυτήν, οι οποίες θα είναι ταλαντωτικές (σαν την απλή περίπτωση των εξισώσεων (2.102)), αλλά όμως με φθίνον πλάτος ταλάντωσης.



Σχήμα 2.3: Η εξέλιξη των βαρυτικών κυμάτων με διαφορετικά μήκη κύματος. Στο σχήμα φαίνονται με οριζόντιες γραμμές και με αντίστοιχο χρώμα για τις τρεις περιπτώσεις το σημείο στο οποίο το κάθε h_t “μπαίνει στον ορίζοντα”.

Στο Σχήμα 2.3 φαίνεται η εξέλιξη των ταυσιτικών διαταραχών h_t για τέσσερα διαφορετικά μήκη κύματος (άρα και κυματαριθμούς). Και στις τέσσερις περιπτώσεις, βλέπουμε πως το h_t παραμένει σταθερό στην πρώιμη περίοδο (early times), δηλαδή όσο $k\eta < 1$. Όταν το μήκος κύματος γίνει συγκρίσιμο με τον η , το πλάτος του κύματος ταλαντώνεται με συχνότητα $k/2\pi$ και ξεκινά να φθίνει. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στην (2.101), ο όρος απόσβεσης είναι ανάλογος του $1/a$ και άρα η πυκνότητα ενέργειας των βαρυτικών κυμάτων μεταωπίζεται προς το ερυθρό κατά a^{-4} , όπως θα περιμέναμε για κάθε μορφή ακτινοβολίας. Για την ειδική περίπτωση που ισχύει πως $k\eta = 1$ (enter the horizon), παρατηρούμε πως τα h_t μικρής τάξεως (δηλαδή για $k/H_0 = 1000$) φτάνουν στην ειδική αυτή περίπτωση νωρίτερα και έτσι έχουν αποσβέσει περισσότερο σε σχέση με τα h_t μεγάλης κλίμακας.

2.2.4 Διαταραχές της μετρικής με το xPand

Όπως μπορεί να αντιληφθεί κανείς αν και η Γενική Σχετικότητα είναι από τις απλούστερες θεωρίες βαρύτητας, ο υπολογισμός των διαταραχών της μετρικής είναι μια χρονοβόρα και όχι τόσο απλή διαδικασία. Γι' αυτό θα στραφούμε πάλι στο Wolfram Mathematica και το πρόγραμμα xAct και συγκεκριμένα στο πακέτο xPand το οποίο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό διαταραχών. Στην παρούσα ενότητα θα υπολογίσουμε τις διαταραχές της μετρικής όπως ορίζονται από την εξίσωση (2.12). Την ίδια διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για τη Γενική Σχετικότητα θα ακολουθήσουμε και στις Γενικευμένες Θεωρίες Βαρύτητας που θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο 4.

Αρχικά πάλι όπως και στην περίπτωση υπολογισμού των εξισώσεων Einstein, με την εντολή:

$$\begin{aligned} & \text{DefManifold}[M, 4, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \mu, \nu, \lambda, \sigma, \tau\}] \\ & \text{DefMetric}[-1, g(-\alpha, -\beta), \text{CD}, \{;, \nabla\}, \text{PrintAs} \rightarrow g] \end{aligned} \quad (2.103)$$

ορίζουμε την πολλαπλότητα στην οποία θα κάνουμε τους υπολογισμούς. Με την εντολή:

$$\text{SetSlicing}[g, n, h, \text{cd}, \{[, d\}, \text{FLFlat}] \quad (2.104)$$

ορίζουμε τη βαθμίδα (gauge) στην οποία θα κάνουμε τους υπολογισμούς. Επιλέγουμε η βαθμίδα στην οποία θα κάνουμε τους υπολογισμούς να είναι εφοδιασμένη με spatially flat slicing, ορίζοντας έτσι πως οι διαταραχές δε θα είναι συζευγμένες με κάποιο δυναμικό, κάτι το οποίο θα απλοποιήσει ιδιαίτερα τις πράξεις μας. Έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε αυτήν την επιλογή βαθμίδας, όπως αποδείξαμε στην υποενότητα 2.2.1. Στη συνέχεια με τις εντολές:

$$\begin{aligned} & \text{DefMetricFields}[g, \text{dg}, h] \\ & \text{DefMatterFields}[u, \text{du}, h] \end{aligned} \quad (2.105)$$

ορίζουμε τα πεδία της μετρικής και της ύλης αντίστοιχα τα οποία θα διαταράζουμε για να παράξουμε τις εξισώσεις εξέλιξης για τις διαταραχές. Με την εντολή:

$$\text{MyxPand}[\text{expr}_-, \text{gauge}_-, \text{order}_-] := \text{ToxPand}[\text{expr}, \text{dg}, u, \text{du}, h, \text{gauge}, \text{order}] \quad (2.106)$$

ορίζουμε την εντολή με την οποία θα υπολογίζουμε τις διαταραχές. Στην θέση `expr_` θα γράφουμε την ποσότητα την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε στην περίπτωση της διαταραγμένης μετρικής, στην θέση `gauge_` θα γράφουμε τη βαθμίδα στην οποία θα κάνουμε τους υπολογισμούς, που στην περίπτωσή μας θα είναι η νευτώνεια βαθμίδα και στη θέση `order_` θα γράφουμε την τάξη των διαταραχών που θέλουμε να υπολογίσουμε, που στην περίπτωσή μας θα είναι πρώτης τάξης, άρα όλα τα στοιχεία τα οποία θα προκύπτουν από τους υπολογισμούς θα είναι μηδενικής και πρώτης τάξης διαταραχές. Με την εντολή:

$$\text{\$ConformalTime} = \text{True}; \quad (2.107)$$

ορίζουμε πως ο χρόνος στον οποίο θα κάνουμε τους υπολογισμούς είναι ο σύμμορφος και όχι ο φυσικός.

Για τον υπολογισμό όλων των διαταραχών του τανυστή Einstein (βαθμωτών, διανυσματικών και τανυστικών διαταραχών) θα χρειαστούμε δύο μόνο εντολές, μια για τον υπολογισμό του χρονικού στοιχείου του τανυστή και μια για το χωρικό. Αρχικά για το χρονικό στοιχείο έχουμε την εντολή:

$$\text{ExtractComponents}[\text{MyxPand}(\text{EinsteinCD}(\mu, -\nu), \text{NewtonGauge}, 1), h, \{\text{Time}, \text{Time}\}] \quad (2.108)$$

και το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε είναι:

$$-\frac{3\mathcal{H}^2}{a^2} + \epsilon \left(\frac{6\mathcal{H}^2\phi^{(1)}}{a^2} + \frac{6\mathcal{H}\psi'^{(1)}}{a^2} - \frac{2d_\alpha d^\alpha \psi^{(1)}}{a^2} \right) \quad (2.109)$$

Για το χωρικό μέρος, παίρνουμε το στοιχείο $G^i_j = G^i_j + \delta G^i_j$ με την εντολή:

$$\text{ExtractComponents}[\text{MyxPand}(\text{EinsteinCD}(\mu, -\nu), \text{NewtonGauge}, 1), h, \{\text{Space}, \text{Space}\}] \quad (2.110)$$

και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}\mathcal{H}^2}{a^2} - \frac{2\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}\mathcal{H}'}{a^2} + \\
& + \epsilon \left(\frac{E''^{(1)\mu}{}_{\nu}}{a^2} + \frac{2E'^{(1)\mu}{}_{\nu}\mathcal{H}}{a^2} + \frac{2\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}\mathcal{H}^2\phi^{(1)}}{a^2} + \frac{4\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}\mathcal{H}'\phi^{(1)}}{a^2} + \frac{2\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}\mathcal{H}\phi'^{(1)}}{a^2} + \right. \\
& + \frac{4\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}\mathcal{H}\psi'^{(1)}}{a^2} + \frac{2\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}\psi''^{(1)}}{a^2} - \frac{d_{\alpha}d^{\alpha}E^{(1)\mu}{}_{\nu}}{a^2} + \frac{\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}d_{\alpha}d^{\alpha}\phi^{(1)}}{a^2} - \frac{\bar{h}{}_{\nu}{}^{\mu}d_{\alpha}d^{\alpha}\psi^{(1)}}{a^2} - \\
& \left. - \frac{\mathcal{H}d^{\mu}B^{(1)}{}_{\nu}}{a^2} - \frac{d^{\mu}B'^{(1)}{}_{\nu}}{2a^2} - \frac{\mathcal{H}d_{\nu}B^{(1)\mu}}{a^2} - \frac{d_{\nu}B'^{(1)\mu}}{2a^2} - \frac{d_{\nu}d^{\mu}\phi^{(1)}}{a^2} + \frac{d_{\nu}d^{\mu}\psi^{(1)}}{a^2} \right) \quad (2.111)
\end{aligned}$$

Στις εξισώσεις (2.110) και (2.111) η μετρική γράφεται ως \bar{h} , τα βαθμωτά πεδία των διαταραχών είναι τα ϕ και ψ , το διανυσματικό το B^{μ} και το τανυστικό το $E^{\mu}{}_{\nu}$. Απομονώνοντας στην (2.111) τους τανυστικούς όρους βάσει του θεωρήματος αποσύνθεσης, έχουμε:

$$\frac{E''^{(1)\mu}{}_{\nu}}{a^2} + \frac{2E'^{(1)\mu}{}_{\nu}\mathcal{H}}{a^2} - \frac{d_{\alpha}d^{\alpha}E^{(1)\mu}{}_{\nu}}{a^2} \quad (2.112)$$

Εύκολα παρατηρούμε πως κάνοντας τις αντιστοιχίες που αναφέραμε παραπάνω και πως $d_{\alpha}d^{\alpha} = k^2$ παρατηρούμε πως η (2.112) είναι το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.101), την διαφορική εξίσωση των βαρυτικών κυμάτων, την οποία καταφέραμε να παράξουμε πολύ πιο εύκολα και γρήγορα σε σχέση με τους αναλυτικούς υπολογισμούς “με το χέρι”.

3 Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια εισαγωγή για τις Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας (Modified Gravity), οι οποίες είναι όπως υποδηλώνουν το όνομά τους εναλλακτικές θεωρίες για την περιγραφή της βαρύτητας και του χωροχρόνου. Θα εξαιτάσουμε για ποιό λόγο χρειάζεται να τροποποιήσουμε τη Γενική Σχετικότητα και με ποιόν τρόπο μπορούμε να την τροποποιήσουμε για να παράξουμε μια πιο γενική και ολοκληρωμένη θεωρία. Τέλος, θα υπολογίσουμε τις εξισώσεις Einstein για μια από αυτές.

3.1 Εισαγωγή

Η Γενική Σχετικότητα έχει καθιερωθεί σαν ένα εξαιρετικό μοντέλο για την βαρύτητα και την κοσμολογία. Είναι αξιοθαύμαστη η συμφωνία με αρκετά τεστ ακρίβειας για την βαρύτητα στο ηλιακό μας σύστημα, όπως η βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό, ανωμαλίες στο περιήλιο του Ερμή, πειράματα με laser στην σελήνη, κλπ. Ωστόσο, όλες οι παραπάνω προβλέψεις βρίσκονται στην περιοχή των ασθενών βαρυτικών πεδίων, όπως κοντά στην επιφάνειο του Ήλιου. Έξω από το ηλιακό σύστημα, προβλέψεις της Γενικής Σχετικότητας οι οποίες συμπεριλαμβάνουν αλλαγές στις τροχιές διαδικών συστημάτων pulsars λόγω εκπομπής βαρυτικών κυμάτων και συγχωνεύσεις μελανών οπών (black hole) έχουν επαληθευτεί. Ωστόσο, οι συγχωνεύσεις δύο μελανών οπών είναι ένα κατακλιστικό φαινόμενο το οποίο εμπλέκει ισχυρά πεδία βαρύτητας. Είναι ασαφές εάν η Γενική Σχετικότητα μπορεί να περιγράψει με ακρίβεια τη βαρύτητα σε φαινόμενα τέτοιας κλίμακας. Σε κάθε περίπτωση, τόσο η θεωρία όσο και η παρατήρηση προτείνουν πως η Γενική Σχετικότητα μπορεί να έχει σημαντικές κλασικές και κβαντικές διορθώσεις σε πριπτώσεις ισχυρής βαρύτητας (strong gravity). Με τον άμεσο εντοπισμό των βαρυτικών κυμάτων από επίγειους ανιχνευτές, τα οποία παρήχθησαν από τέτοια φαινόμενα, μπορούμε πλέον να ελέγξουμε θεωρίες βαρύτητας στο εύρος της ισχυρής βαρύτητας. Μάλιστα, με τους ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων νέας γενιάς, όπως το Cosmic Explorer και το Einstein Telescope, οι οποίοι θα είναι τουλάχιστον 50 φορές πιο ισχυροί από τους σημερινούς, θα είμαστε σε θέση να επιβεβαιώσουμε ή να διαψεύσουμε τη Γενική Σχετικότητα.

Στις μεγαλύτερες κλίμακες, η μεγαλύτερη έκπληξη από την παρατηρησιακή κοσμολογία είναι η επιταχυνόμενη διαστολή του τωρινού σύμπαντος. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί είτε με την παρουσία μιας εξωτικής πηγής στην οποία αναφερόμαστε ως σκοτεινή ενέργεια (dark energy), είτε με τροποποιήσεις στη Γενική Σχετικότητα στις μεγαλύτερες κλίμακες μήκους. Άρα, ο έλεγχος της Γενικής Σχετικότητας με κοσμολογικές παρατηρήσεις και παρατηρήσεις βαρυτικών κυμάτων είναι πολύ κρίσιμος για την κατανόηση του σύμπαντος.

Πρώτα, ωστόσο, για να αναγνωρίσουμε τις κλασικές και κβαντικές διορθώσεις στη Γενική Σχετικότητα στην ισχυρή και ασθενή βαρύτητα, πρέπει να κατασκευάσουμε Γενικευμένες Θεωρίες βαρύτητας οι οποίες κάνουν σαφείς προβλέψεις. Ένας τρόπος για να το καταφέρουμε αυτό είναι να αναγνωρίσουμε τις βασικές αρχές της Γενικής Σχετικότητας τις οποίες αναλύσαμε στις οποίες μπορούμε να εισάγουμε πιθανές τροποποιήσεις. Θα εστιάσουμε την ανάλυσή μας στο παρόν κεφάλαιο απαντώντας σε δύο βασικά ερωτήματα τα οποία αναδύονται από τον ορισμό των Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας:

- Γιατί να τροποποιήσουμε τη Γενική Σχετικότητα;
- Πώς να τροποποιήσουμε τη Γενική Σχετικότητα;

και θα δόσουμε ένα παράδειγμα Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας, υπολογίζοντας στην FLRW μετρική τις εξισώσεις Einstein για τις θεωρίες αυτές. Οι υπολογισμοί μας θα γίνουν θεωρώντας

πως $c = 8\pi G = \hbar = 1$.

3.2 Γιατί;

Όπως αναλύσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, οι εξισώσεις Einstein παράγονται μέσω λογισμού μεταβολών από τη δράση Einstein- Hilbert (εξίσωση 1.88), η οποία εξαρτάται γραμμικά από το βαθμωτό Ricci. Στην παρούσα ενότητα θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε τέσσερις βασικούς λόγους για τους οποίους η υπόθεση της γραμμικότητας αυτή μπορεί να είναι εσφαλμένη.

3.2.1 Η βαρύτητα δεν είναι ανιχνεύσιμη σε όλες τις κλίμακες

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, μια από τις πιο βασικές αρχές της Γενικής Σχετικότητας είναι η αρχή της ισοδυναμίας του Einstein, η οποία ουσιαστικά δηλώνει πως όλα τα μη βαρυτικά φαινόμενα είναι τοπικά ανεπιρέαστα από τη βαρύτητα όταν λαμβάνουν χώρα σε ένα πλαίσιο το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση. Μια άμεση συνέπεια αυτής της αρχής είναι πως τα πάντα, συμπεριλαμβανομένου και του φωτός, υπακούουν τους ίδιους νόμους. Συνεπώς, η αρχή της ισοδυναμίας αντιπροσωπεύει την αλληλεπίδραση της βαρύτητας με όλη την υπόλοιπη φυσική. Ωστόσο, σε αντίθεση με την αναλλοιωτότητα βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δεν είναι μια θεμελιώδης συμμετρία αλλά ένα πειραματικό γεγονός.

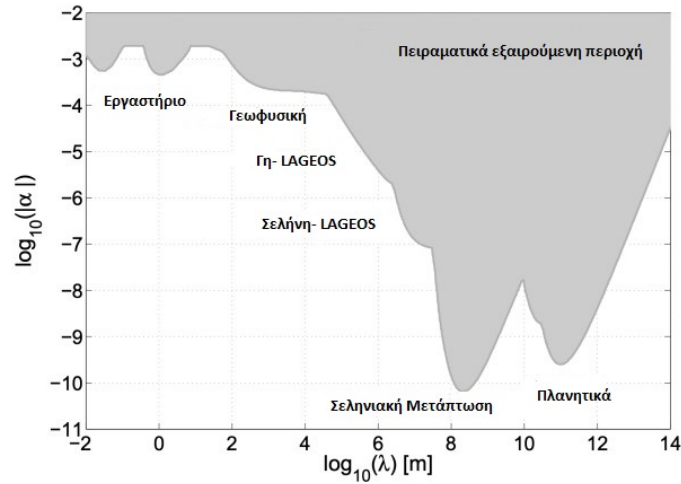
Η βαρύτητα είναι καλά ελεγμένη στις κλίμακες του ηλιακού συστήματος και των αστρικών συστημάτων, αλλά δεν είναι καλοδοκιμασμένη πέρα από αυτές τις κλίμακες. Ένας τρόπος να δοκιμάσουμε εάν επαληθεύεται η Γενική Σχετικότητα είναι να ελέγξουμε αν ισχύει η αρχή της ισοδυναμίας. Άρα, κάθε πειραματικό στοιχείο το οποίο υποδεικνύει την παραβίαση της αρχής της ισοδυναμίας θα λειτουργεί επίσης και σαν στοιχείο εναντίον της Γενικής Σχετικότητας. Επιπλέον, ένα από τα στοιχεία της, η τοπική αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς Lorentz, υποδηλώνει φορτίο, parity και αντιστροφή χρόνου (CPT) συμμετρία, οι οποίες είναι καλά δοκιμασμένες στη Γη. Ωστόσο, η δοκιμή της εγκυρότητας της αρχής της ισοδυναμίας σε κοσμική κλίμακα είναι αρκετά πιο δύσκολη.

Κατ' αρχάς, μπορούν να υπάρξουν κι άλλα βαρυτικά πεδία πέρα της μετρικής, όπως βαθμωτά πεδία. Άρα, η ύπαρξη ενός πεδίου φωτός ή ένα τεράστιο βαθμωτό πεδίο με ασθενέστερη σύζευξη με την ύλη από ότι η βαρυτική δύναμη είναι μια πιθανή πηγή παραβίασης της ασθενούς αρχής της ισοδυναμίας. Στο όριο του ασθενούς πεδίου, η Γενική Σχετικότητα οδηγεί στη Νευτώνεια βαρύτητα με τον νόμο των αντίστροφων τετραγώνων. Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται η πειραματικά εξαιρούμενη περιοχή για την τύπου Yukawa βαρυτική αλληλεπίδραση, η οποία παραβιάζει τον νόμο των αντίστροφων τετραγώνων:

$$V(r) = -G \frac{mM}{r} [1 + ae^{-r/\lambda}] \quad (3.1)$$

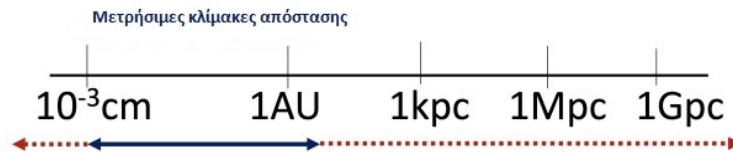
όπου a μια αδιάστατη σταθερά και το λ αντιστοιχεί στην απόκλιση από το Νευτώνειο δυναμικό. Άρα, από την παρακάτω γραφική παράσταση, μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο νόμος των αντίστροφων τετραγώνων ο οποίος προβλέπεται από τη Γενική Σχετικότητα μπορεί να μην είναι πιστικός για όλες τις κλίμακες.

Το Σχήμα 3.2 δείχνει μια αναπαράσταση από το εύρος στο οποίο η βαρύτητα έχει δοκιμαστεί με ακρίβεια. Με τη δυνατότητα βελτίωσης πειραματικών και παρατηρησιακών δεδομένων, μπορεί να πρέπει να θεωρήσουμε διορθώσεις για την ισχυρή βαρύτητα ή διορθώσεις για μεγάλες αποστάσεις οι οποίες εξαρτώνται από τις κλίμακες μήκους ενέργειας. Στη συνέχεια, θα επιχειρηματολογήσουμε



Σχήμα 3.1: Όπως φαίνεται, το 95% του επιπέδου εμπιστοσύνης περιορίζεται στις Yukawa αλληλεπιδράσεις (3.1) με $\lambda < 1\text{cm}$

για τροποποιήσεις στη Γενική Σχετικότητα για την ισχυρή βαρύτητα και για τις μεγαλύτερες δυνατές αποστάσεις.



Σχήμα 3.2: Αναπαράσταση του εύρους των αποστάσεων στις οποίες έχει δοκιμαστεί η Γενική Σχετικότητα επί του παρόντος

3.2.2 Η βαρύτητα χρειάζεται διορθώσεις στις περιπτώσεις ισχυρής βαρύτητας

Πλέον, επεκτίνουμε τη Γενική Σχετικότητα από τις τωρινές παρατηρήσιμες κλίμακες στις περιοχές ισχυρής βαρύτητας. Στην παρούσα υποενοότητα θα αναλύσουμε δυο ειδικές περιπτώσεις στις οποίες γίνεται εμφανές πως η Γενική Σχετικότητα χρειάζεται διορθώσεις στις περιοχές ισχυρής βαρύτητας.

Αρχικά, έχουμε το στοιχείο γραμμής της μετρικής FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 = -a(\eta)^2 [d\eta^2 - dx^2] \quad (3.2)$$

όπου t είναι ο φυσικός χρόνος, η ο σύμμορφος χρόνος και στη συγκεκριμένη περίπτωση το x αντιπροσωπεύει τον τρισδιάστατο χώρο. Θεωρώντας πως ο συντελεστής κοσμικής κλίμακας είναι

ανάλογος μια νιοστής δύναμης του φυσικού χρόνου, δηλαδή $a(t) \sim t^n$ ($n > 0$), το βαθμωτό Ricci για αυτό το στοιχείο γραμμής είναι:

$$R \sim \frac{n(2n-1)M_{Pl}^2}{\tau^2} \quad (3.3)$$

όπου $\tau = tM_{Pl}$ και $M_{Pl} \sim 10^{19} GeV$ η μάζα Planck, για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{M_{Pl}^2} = 8\pi G \sim l_P^2 \quad (3.4)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σειρά

$$f(R) = R + \sum_{m \geq 1} \frac{a_m}{M_{Pl}^{2m}} R^{m+1} \quad (3.5)$$

όπου a_m είναι αδιάστατες σταθερές. Η αναλογία μεταξύ του $(m+1)$ -ιστού και m -ιστού όρου στις παραπάνω σειρές είναι:

$$\frac{f_{m+1}}{f_m} \sim \frac{n(2n-1)}{\tau^2}, \text{ για κάθε } m \quad (3.6)$$

Από την παραπάνω έκφραση, συμπεραίνουμε πως δυνάμεις υψηλότερης τάξης του βαθμωτού Ricci, R , θα συνεισφέρουν σημαντικά στο πρώιμο σύμπαν (early times), καθώς τότε το τ είναι μικρό, ή σε μικρές κλίμακες μήκους. Άρα, η Γενική Σχετικότητα χρειάζεται τροποποιήσεις και είναι επιτακτικό να συμπεριλάβουμε υψηλότερους όρους καμπυλότητας για την πρώιμη εποχή.

Από την παραπάνω φυσική κατάσταση, μπορεί κανείς να συμπεράνει πως η κλασική μορφή της Γενικής Σχετικότητας δεν αντιπροσωπεύει το σύμπαν, καθώς θα περιμέναμε τουλάχιστον υψηλότερης τάξης όρους καμπυλότητας, οι οποίοι τροποποιούν τη Γενική Σχετικότητα και εισάγουν διορθώσεις οι οποίες μπορεί να είναι κλασικές ή κβαντικές.

3.2.3 Η ύστερη επιτάχυνση και νέα φυσική

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό στην κοσμολογική κλίμακα και περιγράφεται από τη μετρική FLRW. Το Λ CDM (Λ Cold Dark Matter- Λ ψυχρή σκοτεινή ύλη) θεωρείται πως είναι το standard model (καθιερωμένο πρότυπο) της κοσμολογίας και είναι συνεπές με τις περισσότερες παρατηρήσεις. Το Λ CDM προϋποθέτει πως η Γενική Σχετικότητα περιγράφει τη βαρύτητα στις κοσμολογικές κλίμακες. Όπως υποδηλώνει το όνομα, το μοντέλο αυτό απαιτεί πως η σκοτεινή ύλη και η σκοτεινή ενέργεια οι οποίες αντιπροσωπεύονται από την κοσμολογική σταθερά Λ κυριαρχούν την υπολογισμένη ενέργεια του σύμπαντος.

Το Λ CDM έρχεται, όμως, με ένα κόστος, καθώς μόνο το 5% του σύμπαντος συντίθεται από την ατομική ύλη. Επιπλέον, δεν γνωρίζουμε από τι αποτελούνται η σκοτεινή ύλη και η σκοτεινή ενέργεια. Η σκοτεινή ύλη και η σκοτεινή ενέργεια δεν έχουν ανιχνευθεί άμεσα, παρά μόνον συμπερασματικά, μέσω της βαρυτικής αλληλεπίδρασης. Επίσης, το μοντέλο Λ CDM, αντιμετωπίζει αρκετές θεωρητικές και παρατηρησιακές προκλήσεις. Μερικά από αυτά τα προβλήματα παρουσιάζονται επιγραμματικά παρακάτω:

- **Fine Tuning problem:** Από τις παρατηρήσεις, εκτιμάται πως η πυκνότητα ενέργειας για την κοσμολογική σταθερά Λ πρέπει να είναι της τάξεως $\rho_\Lambda \sim 10^{-47} GeV$. Ωστόσο, αν θεωρήσουμε

πως η κοσμολογική σταθερά προέρχεται από μια πυκνότητα ενέργειας κενού, η τιμή της ρ_Λ θα έπρεπε να είναι της τάξεως της πυκνότητας ενέργειας κενού, η οποία βάσει της χβαντικής θεωρίας πεδίου, υπολογίζεται να είναι $\rho_{vac} \sim 10^{74} \text{ GeV}$. Με άλλα λόγια, η τιμή της ρ_Λ είναι σε σύγκρουση με τις πιθανές ενεργειακές κλίμακες και απαιτούν λεπτομερή ρύθμιση (fine tuning).

- **Coincidence problem:** Αν και η πυκνότητα ύλης-ενέργειας ρ_m αλλάζει με τον χρόνο και η πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας ρ_Λ παραμένει σταθερή, είναι ακριβώς ίδιας τάξης στη σύγχρονη εποχή (οι παράμετροι πυκνότητας εκτιμούνται βάσει παρατηρήσεων $\Omega_\Lambda^{(0)} \sim 0.7$ και $\Omega_m^{(0)} \sim 0.3$), κάτι το οποίο μοιάζει να είναι μια σύμπτωση και απαιτεί λεπτομερή ρύθμιση των παραμέτρων στο πρώιμο σύμπαν. Αυτό είναι γνωστό σαν το πρόβλημα σύμπτωσης της κοσμολογίας και εμφανίζεται και σε άλλα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας πέρα του Λ CDM.
- **Διαφοροποιήσεις μεταξύ παρατηρήσεων του πρώιμου και του μεταγενέστερου Σύμπαντος:** Βάσει των τελευταίων παρατηρήσεων, προκύπτουν στο πλαίσιο του Λ CDM διαφοροποιήσεις μεταξύ των παρατηρήσεων του CMB (Cosmic Microwave Background) και του μεταγενέστερου σύμπαντος (ύστερη επιτάχυνση). Η εκτιμώμενη τιμή του H_0 από τις παρατηρήσεις στο μεταγενέστερο σύμπαν, δείχνουν μια διαφοροποίηση 5σ με την εκτιμώμενη τιμή του H_0 από τις παρατηρήσεις του CMB. Άρα, οι εκτιμήσεις για την τιμή του H_0 για το πρώιμο σύμπαν έχουν σαν αποτέλεσμα υψηλότερες τιμές σε σχέση με αυτές που λαμβάνουμε από τις παρατηρήσεις στο τοπικό σύμπαν. Επίσης, από τις παρατηρήσεις δομών μεγάλης κλίμακας και των τιμών των αντίστοιχων παραμέτρων που εκτιμούνται από τις παρατηρήσεις του CMB, δημιουργούνται διαφοροποιήσεις της τάξεως των 3σ .

Αρκετές εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας έχουν προταθεί για να λυθούν αυτά τα προβλήματα. Αυτές ευρύνονται από Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας με γεωμετρικές τροποποιήσεις έως βαθμωτές- ταυσιτικές θεωρίες. Έχειδειχθεί πως αυτά τα μοντέλα μπορούν να οδηγήσουν στην καθυστερημένη επιτάχυνση του σύμπαντος.

3.2.4 Κατασκευάζοντας μια χβαντική θεωρία βαρύτητας

Σύμφωνα με την μέχρι στιγμής κατανόησή μας, οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις της φύσης είναι η ισχυρή, η ασθενής, η ηλεκτρομαγνητική και η βαρυτική αλληλεπίδραση. Οι τρεις πρώτες εξηγούνται επιτυχώς από το καθιερωμένο πρότυπο (standard model) της σωματιδιακής φυσικής, το οποίο ενοποιεί μερικώς τις ηλεκτρομαγνητικές με τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Εκτός από τις μη εξαφανιζόμενες μάζες των νετρίνων, κανένα παρατηρήσιμο δεδομένο μέχρι στιγμής δεν αντικρούει το καθιερωμένο πρότυπο. Η Γενική Σχετικότητα περιγράφει τη βαρύτητα. Έτσι, δεν υπάρχει κίνητρο για την αναζήτηση νέων φυσικών κανόνων από εμπειρική άποψη. Ωστόσο, η κατάσταση δεν είναι ικανοποιητική από θεωρητική (μαθηματική και εννοιολογική) άποψη. Η Γενική Σχετικότητα είναι μια κλασσική θεωρία, ενώ το καθιερωμένο πρότυπο είναι μια χβαντική θεωρία πεδίου που περιγράφει μια ατελή ενοποίηση των αλληλεπιδράσεων.

Δεν έχουμε ακόμη μια φυσικά και μαθηματικά συνεπή θεωρία χβαντικής βαρύτητας. Καθώς πηγαίνουμε σε όλο και μικρότερες κλίμακες μήκους, οι χβαντικές επιδράσεις δεν μπορούν να αγνοηθούν. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας M . Η χβαντομηχανική δίνει ένα αυστηρό κατώτερο όριο για το μήκος στο οποίο το M μπορεί να εντοπιστεί (μήκος κύματος Compton):

$$\lambda_C = \frac{h}{Mc} \iff \lambda_C \downarrow \text{ ενώ } Mc \uparrow \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με τη Γενική Σχετικότητα, κάθε σωματίδιο μάζας M μπορεί να γίνει μελανή οπή εάν καταρρεύσει στην ακτίνα Schwarzschild, η οποία υπολογίζεται:

$$r_H = \frac{2GM}{c^2} \iff r_H \uparrow \text{ ενώ } M \uparrow \quad (3.8)$$

Βάσει των παραπάνω, για μελανές οπές μάζας ίση με την μάζα Planck, το μήκος Planck, η r_H και το λ_C είναι συγκρίσιμα. Σε τόσο μικρές κλίμακες μήκους, τα κβαντικά βαρυτικά φαινόμενα γίνονται σημαντικά. Έτσι, τα κβαντικά βαρυτικά φαινόμενα αναμένονται (σε χαμηλές ενέργειες) να διορθώσουν την κλασική δράση (εξίσωση 1.89) με επιπρόσθετους όρους οι οποίοι περιλαμβάνουν τετραγωνικές και υψηλότερες δυνάμεις του ταυυστή καμπυλότητας.

3.3 Πώς;

Όπως είδαμε από τα παραπάνω, κατά ειρωνικό τρόπο, η ίδια η επιτυχία της Γενικής Σχετικότητας καθιστά αναγκαία την τροποποίησή της. Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας και της ποικιλομορφίας του πεδίου της τροποποίησης της Γενικής Σχετικότητας, πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε τι κάνει μοναδική τη Γενική Σχετικότητα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Lovelock οι πεδιακές εξισώσεις του Einstein είναι οι μοναδικές δευτεροβάθμιες τοπικές εξισώσεις κίνησης για μια μετρική η οποία προκύπτει από τη δράση στις 4 διαστάσεις. Με άλλα λόγια, το θεώρημα αυτό αποδεικνύει πως η Γενική Σχετικότητα είναι μοναδική αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- Οι εξισώσεις κίνησης πρέπει να είναι δεύτερης τάξης
- Δεν υπάρχουν επιπλέον πεδία (βαθμοί ελευθερίας)
- Συναλλοιωτότητα ($\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$)
- Τοπικότητα
- Ο χωροχρόνος είναι 4 διαστάσεων

Σε ανώτερες διαστάσεις, αποδυναμώνεται πως η Γενική Σχετικότητα για να επιβιώσει χρειάζεται μη γραμμικές διορθώσεις με δυνάμεις ανώτερης τάξης του ταυυστή καμπυλότητας. Αν και εκ πρώτης όψεως το θεώρημα του Lovelock αποτελεί αποτρεπτικό παράγοντα για να δημιουργήσουμε γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας, ουσιαστικά μας δείχνει το μονοπάτι που πρέπει να ακολουθήσουμε για να το παρακάμψουμε και να δημιουργήσουμε συνεπείς γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας. Έχοντας σαν δεδομένο πως η τελευταία συνθήκη του θεωρήματος του Lovelock είναι αληθής, δηλαδή πως ο χωροχρόνος είναι 4 διαστάσεων, μπορούμε να ορίσουμε το μοντέλο μας να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- Πέρα από δεύτερης τάξης εξισώσεις κίνησης
- Προσθέτουμε νέα πεδία (βαθμωτά, διανυσματικά ή/και ταυυστικά)
- Μη ελάχιστη σύζευξη με τα πεδία της ύλης
- Μη τοπικότητα

Μια γενικευμένη θεωρία βαρύτητας θα μπορούσε να εστιάζει σε μια από τις παραπάνω συνθήκες ή να συνδυάζει δύο ή περισσότερες από αυτές. Κάθε γενικευμένη θεωρία βαρύτητας πρέπει να δοκιμάζεται τόσο σε θεωρητικό όσο και παρατηρησιακό επίπεδο, ενώ εγκαταλείπεται εάν αποτυγχάνει

σε κάποια από αυτές τις δοκμασίες.

Για να κατασκευάσουμε μια συνεπή τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας, πρέπει η θεωρία αυτή να ικανοποιεί τα ακόλουθα κριτήρια:

- **Η θεωρία πρέπει να είναι ολοκληρωμένη:** Η θεωρία θα πρέπει να είναι σε θέση να αναλύει από τις πρώτες αρχές το αποτέλεσμα οποιουδήποτε πειράματος.
- **Η θεωρία πρέπει να είναι αυτοσυνεπής:** οι προβλέψεις πρέπει να είναι μοναδικές και ανεξάρτητες από τη μέθοδο υπολογισμού. Με άλλα λόγια, η θεωρία θα πρέπει να είναι σε θέση να κάνει προβλέψεις που μπορούν να ελεγχθούν με παρατηρήσεις/πειράματα, καθιστώντας την διαψεύσιμη.
- **Η θεωρία πρέπει να είναι σχετικιστική:** Οποιαδήποτε θεωρία θα πρέπει να ανάγεται στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας, όταν “κλείνουμε” τη βαρύτητα. Αυτή η προϋπόθεση είναι επίσης σημαντική για την ανάπτυξη μιας χβαντικής θεωρίας βαρύτητας, δεδομένου πως οι υπάρχουσες χβαντικές θεωρίες είναι κατασκευασμένες για να είναι συνεπείς με την ειδική θεωρία της σχετικότητας.
- **Η θεωρία πρέπει να έχει το σωστό νευτώνειο όριο:** Πριν τη Γενική Σχετικότητα, η θεωρία της βαρύτητας του Νεύτωνα θεωρούταν πως είναι η τυπική περιγραφή της βαρύτητας. Ήταν συνεπής με διάφορα πειράματα και παρατηρήσεις στη Γη και στο ηλιακό σύστημα, υποδεικνύοντας πως στα ασθενή πεδία και της μη σχετικιστικές περιπτώσεις, η νευτώνεια βαρυτική θεωρία είναι έγκυρη. Ως εκ τούτου, οποιαδήποτε θεωρία βαρύτητας θα πρέπει να αναπαράγει του νόμους του Νεύτωνα στα ασθενή βαρυτικά πεδία και την αργή κίνηση.

Στην επόμενη υποενότητα θα εξετάσουμε δύο συγκεκριμένες Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας στις 4 διαστάσεις, οι οποίες έχουν εξισώσεις κίνησης ανώτερης τάξης και τηρούν τα παραπάνω κριτήρια.

3.4 Παραδείγματα Γ. Θ. Β.

Μέχρι στιγμής δείξαμε γιατί πρέπει να δημιουργήσουμε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας και πού πρέπει να εστιάσουμε για να κάνουμε τις απαραίτητες τροποποιήσεις, αλλά δεν έχουμε αποσαφηνίσει πώς ακριβώς θα γίνουν οι τροποποιήσεις αυτές. Όπως δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, ο πυρήνας κάθε πεδιακής θεωρίας είναι η δράση, την οποία ελαχιστοποιούμε μέσω θεωρίας μεταβολών και από εκεί προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες διέπουν την κάθε πεδιακή θεωρία. Άρα, εύκολα καταλαβαίνει κανείς πως οι τροποποιήσεις θα γίνουν στη δράση. Έτσι, για τις Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας η εξίσωση (1.89) δεν ισχύει, και πλέον έχουμε μια πιο γενική μορφή της δράσης, η οποία στις 4 διαστάσεις παίρνει τη μορφή:

$$S_{Grav} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (3.9)$$

όπου το \mathcal{L} μπορεί να είναι από ένα απλό βαθμωτό, όπως στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας, έως μια αρκετά σύνθετη έκφραση. Από τις μετατροπές της δράσης θα προκύψουν και μετατροπές στις πεδιακές εξισώσεις κίνησης. Για την παρούσα ανάλυση, οι Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας που θα εξετάσουμε δε θα επιφέρουν αλλαγές στον ταυυστή ενέργειας- ορμής, αλλά παραμόνο στον ταυυστή Einstein, ο οποίος πλέον δε θα έχει τη μορφή που γνωρίσαμε αρχικά από την εξίσωση (1.113), αλλά πλέον το αριστερό μέλος των πεδιακών εξισώσεων, θα περιγράφονται από έναν νέο ταυυστή, τον οποίο στην ανάλυσή μας θα ονομάζουμε P^μ , και ο οποίος όπως θα δούμε θα έχει

μια αρκετά πιο σύνθετη μορφή.

Στη συνέχεια θα αναφερθούν δυο Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας και θα υπολογιστούν για κάθε μια οι εξισώσεις κίνησης και ο ταυυστής $P_{\mu\nu}$ για την περίπτωση της μετρικής FLRW.

3.4.1 $f(R)$

Μια από τις πιο απλές Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας είναι οι λεγόμενες $f(R)$. Οι $f(R)$ θεωρίες βαρύτητας αντικαθιστούν ουσιαστικά στη δράση της Γενικής Σχετικότητας, το βαθμωτό Ricci με μια γενική συνάρτησή του, δηλαδή με μια συνάρτηση του R . Άρα η δράση (3.9), θα είναι:

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (3.10)$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, θα ασχοληθούμε με μια από τις πιο απλές $f(R)$ θεωρίες, η οποία ωστόσο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς παρά την απλότητά της παρέχει εξισώσεις κίνησης ανώτερης τάξης. Θεωρούμε πως:

$$f(R) = R + bR^2 \quad (3.11)$$

όπου b μια σταθερά. Μάλιστα, αν θεωρήσουμε πως $b = (6M^2)^{-1}$, όπου το M είναι μια νέα παράμετρος, οδηγούμαστε σε ένα από τα πιο δημοφιλή μοντέλα πέρα από τη Γενική Σχετικότητα, το μοντέλο Starobinsky. Έτσι, εφαρμόζουμε λογισμό μεταβολών στη δράση της εξίσωσης (3.10) για την $f(R)$ της εξίσωσης (3.11), μέσω του προγράμματος xAct. Ορίζοντας πως πλέον, αντί για $L = R$, έχουμε πως $L = R + bR^2$, αφού ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στην υποενότητα 1.2.2 για την Γενική Σχετικότητα, εκτελώντας την εντολή:

$$\text{VarD}[g[\mu, \nu], \text{CD}][\text{Sqrt}[-\text{Detg}]] \text{L} // \text{ContractMetric} // \text{ToCanonical} // \text{Simplification} \quad (3.12)$$

λαμβάνουμε πως πλέον, οι πεδιακές εξισώσεις για τη συγκεκριμένη θεωρία βαρύτητας, είναι:

$$\frac{1}{2} (R_{\mu\nu}(2 + 4bR) - g_{\mu\nu}(R + bR^2 - 4b\nabla_\alpha \nabla^\alpha R) - 2b(\nabla_\mu \nabla_\nu R + \nabla_\nu \nabla_\mu R)) \quad (3.13)$$

Έτσι, θέτοντας την εξίσωση (3.13) σαν ένα νέο ταυυστή $P_{\mu\nu}$, έχουμε πως η εξισώσεις Einstein, έχουν τη μορφή:

$$P_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \iff \frac{1}{2} (R_{\mu\nu}(2 + 4bR) - g_{\mu\nu}(R + bR^2 - 4b\nabla_\alpha \nabla^\alpha R) - 2b(\nabla_\mu \nabla_\nu R + \nabla_\nu \nabla_\mu R)) = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.14)$$

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να σημειωθεί πως η μετρική και όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από αυτήν, δηλαδή τα σύμβολα Christoffel, οι ταυυστές Riemann και Ricci και το βαθμωτό Ricci δεν επηρεάζονται από τις διαφορετικές θεωρίες βαρύτητας που αποφασίζουμε να εφαρμόσουμε, αλλά παραμένουν τα ίδια με αυτά που υπολογίστηκαν στη Γενική Σχετικότητα, καθώς αποτελούν χαρακτηριστικά του χωροχρόνου ο οποίος περιγράφεται από την κάθε θεωρία, και όχι της ίδιας της θεωρίας. Άρα, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να επιλέξουμε τη μετρική που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε και να αντικαταστήσουμε τις ποσότητες αυτές στην εξίσωση (3.14).

Η μετρική η οποία θα μελετήσουμε είναι η μετρική FLRW. Ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε στην υποενότητα 1.2.2, ορίζουμε μια πολλαπλότητα στις 4 διαστάσεις

και ορίζοντας πως η μετρική της πολλαπλότητας αυτή θα είναι η μετρική FLRW, υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffels, τους τανυστές Ricci και Riemann και το βαθμωτό Ricci. Τέλος, αντί να υπολογίσουμε τον κλασσικό τανυστή Einstein για τη Γενική Σχετικότητα, υπολογίζουμε τον νέο τανυστή που ορίσαμε παραπάνω, τον $P_{\mu\nu}$. Με την εντολή:

$$\begin{aligned} & \text{DefTensor}(P(-\mu, -\nu), M4) \\ & \text{IndexSet}(P(\mu, \nu), [\frac{1}{2}(-\text{met}(\mu, \nu)(-4\kappa\text{CD}(-\alpha)(\text{CD}(\alpha)(\text{RicciScalar}(\text{CD}())))+ \\ & + \kappa\text{RicciScalar}(\text{CD}())^2 + \text{RicciScalar}(\text{CD}()) + (4\kappa\text{RicciScalar}(\text{CD}()) + 2)\text{Ricci}(\text{CD})(\mu, \nu) - \\ & - 2\kappa(\text{CD}(\mu)(\text{CD}(\nu)(\text{RicciScalar}(\text{CD}())))) + \text{CD}(\nu)(\text{CD}(\mu)(\text{RicciScalar}(\text{CD}())))))]//\text{Simplify} \end{aligned} \quad (3.15)$$

ορίζουμε τον καινούριο τανυστή στην πολλαπλότητα $M4$. Να σημειωθεί πως ο τανυστής που ορίσαμε στην (3.15) είναι το αριστερό μέλος της (3.14), αντικαθιστώντας απλά τη σταθερά b με μια εξίσου αυθαίρετη σταθερά κ . Έτσι, προκύπτει πως ο νέος τανυστής ο οποίος συνοφίζει το αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.14), είναι ο:

$$P_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{33} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

όπου:

$$P_{00} = -\frac{54\kappa \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^4 - 36\kappa a(t) \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} - 3(a(t))^2 \left(\left(\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^2 - 6\kappa \left(\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2}\right)^2 + 12\kappa \frac{\partial a(t)}{\partial t} \frac{\partial^3 a(t)}{\partial t^3}\right)}{(a(t))^4} \quad (3.17)$$

και:

$$\begin{aligned} P_{11} &= P_{22} = P_{33} = \\ &= -\frac{18\kappa \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^4}{(a(t))^2} + \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^2 \left(-1 + \frac{72\kappa \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2}}{a(t)}\right) - 24\kappa \frac{\partial a(t)}{\partial t} \frac{\partial^3 a(t)}{\partial t^3} - \\ &- 2 \left(9\kappa \left(\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2}\right)^2 + a(t) \left(\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + 6\kappa \frac{\partial^4 a(t)}{\partial t^4}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Οι εξισώσεις (3.17) και (3.18) αποτελούν το αριστερό μέλος των εξισώσεων Einstein για την $f(R) = R + \kappa R^2$ στον χωροχρόνο που περιγράφεται από τη μετρική FLRW. Όπως εύκολα παρατηρεί κανείς, είναι διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες ωστόσο αποτελούνται από διαφορικά μέχρι και 4ης τάξης.

3.4.2 $f(G)$

Οι $f(G)$ θεωρίες βαρύτητας αντικαθιστούν ουσιαστικά στη δράση της Γενικής Σχετικότητας, με μια γενική συνάρτηση της αναλλοίωτης στις 4 διαστάσεις Gauss- Bonnet, G , όπου:

$$G = R^2 - 4(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}) + (R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) \quad (3.19)$$

και για την οποία ισχύει το Θεώρημα Gauss- Bonnet, σύμφωνα με το οποίο ισχύει πως:

$$\int d^4x \sqrt{-g} R^2 - 4(R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}) + (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0 \quad (3.20)$$

Άρα η δράση (3.9), θα είναι:

$$S_{f(G)} = \int d^4x \sqrt{-g} f(G) \quad (3.21)$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, θα ασχοληθούμε με μια από τις πιο απλές $f(G)$ θεωρίες, την:

$$f(G) = R + \kappa G^2 \quad (3.22)$$

όπου κ μια σταθερά. Έτσι, εφαρμόζουμε λογισμό μεταβολών στη δράση της εξίσωσης (3.21) για την $f(G)$ της εξίσωσης (3.22), μέσω του προγράμματος xAct. Κάνοντας παρόμοιους υπολογισμούς με την $f(R)$, έχουμε πως το αριστερό μέλος των εξισώσεων Einstein είναι ο τανυστής $P_{\mu\nu}$ που φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} = & 96\kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\gamma} R^{\alpha\beta} R_{\beta\delta} R_{\gamma\delta} + 24\kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} R^{\gamma\delta} - R^{\mu\nu} + 320\kappa R_{\alpha\gamma} R^{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} R^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \frac{160}{3} \kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\gamma} R^{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} R - 352\kappa R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} R - 8\kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R^2 + 48 \kappa R^{\mu\nu} R^3 \\ & + \frac{1}{6} \kappa g^{\mu\nu} R^4 + 256\kappa R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} R^{\mu\nu} R_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - 16\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} R R_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} + 32\kappa R^{\mu\nu} R R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ & - 7 \kappa g^{\mu\nu} R^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 48\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} R_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} R^{\epsilon\zeta} R_{\beta\delta\epsilon\zeta} - 48\kappa R^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\epsilon\zeta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} \\ & + 12\kappa g^{\mu\nu} R R_{\alpha\beta} R^{\epsilon\zeta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 32\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} R_{\alpha\epsilon} R_{\beta\zeta} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 8 \kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} \\ & - \frac{1}{2} \kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\epsilon\zeta\eta\theta} R^{\epsilon\zeta\eta\theta} + 16\kappa R^{\mu\nu} R \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} R - 8\kappa g^{\mu\nu} R^2 \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} R \\ & + 64\kappa R^{\beta\gamma} R^{\nu\alpha} \nabla_{\alpha} \nabla^{\mu} R_{\beta\gamma} - 16\kappa R^{\nu\alpha} R^{\beta\gamma\delta\epsilon} \nabla_{\alpha} \nabla^{\mu} R_{\beta\gamma\delta\epsilon} + 64\kappa R^{\beta\gamma} R^{\mu\alpha} \nabla_{\alpha} \nabla^{\nu} R_{\beta\gamma} \\ & - 16\kappa R^{\mu\alpha} R^{\beta\gamma\delta\epsilon} \nabla_{\alpha} \nabla^{\nu} R_{\beta\gamma\delta\epsilon} + 16\kappa R^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} R \nabla^{\alpha} R - 8\kappa g^{\mu\nu} R \nabla_{\alpha} R \nabla^{\alpha} R - 16\kappa R^{\nu\alpha} R \nabla^{\alpha} \nabla^{\mu} R \\ & - 16\kappa R^{\mu\alpha} R \nabla^{\alpha} \nabla^{\nu} R - 64\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} R^{\gamma\delta} \nabla_{\beta} R_{\gamma\delta} - 16\kappa R^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_{\alpha} R^{\gamma\delta\epsilon\zeta} \nabla_{\beta} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} \\ & - 16\kappa R^{\gamma\delta\epsilon\zeta} R^{\mu\alpha\nu\beta} \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 16\kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha} R \nabla^{\beta} R - 16\kappa R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} \nabla^{\alpha} R \nabla^{\beta} R \\ & + 16\kappa g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} R - 8\kappa R R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} R - 8\kappa R R^{\mu\beta} R^{\nu\alpha} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} R - 64\kappa R^{\alpha\beta} R^{\mu\nu} \nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} R_{\alpha\beta} \\ & + 32\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R \nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} R_{\alpha\beta} - 64\kappa R^{\mu\nu} \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta} \nabla^{\gamma} R^{\alpha\beta} + 32\kappa g^{\mu\nu} R \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta} \nabla^{\gamma} R^{\alpha\beta} \\ & - 64\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} \nabla_{\delta} \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta} + 64\kappa R^{\mu\gamma} R^{\nu\delta} \nabla^{\gamma} R^{\alpha\beta} \nabla^{\delta} R_{\alpha\beta} + 32\kappa R^{\alpha\beta} R^{\mu\gamma} R^{\nu\delta} \nabla^{\delta} \nabla^{\gamma} R_{\alpha\beta} \\ & + 32\kappa R^{\alpha\beta} R^{\mu\delta} R^{\nu\gamma} \nabla^{\delta} \nabla^{\gamma} R_{\alpha\beta} + 64\kappa R^{\mu\nu} R_{\alpha\gamma\beta\delta} \nabla^{\delta} \nabla^{\gamma} R^{\alpha\beta} - 32\kappa g^{\mu\nu} R R_{\alpha\gamma\beta\delta} \nabla^{\delta} \nabla^{\gamma} R^{\alpha\beta} \\ & + 16\kappa R^{\mu\nu} \nabla_{\epsilon} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^{\epsilon} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 8\kappa g^{\mu\nu} R \nabla_{\epsilon} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^{\epsilon} R^{\alpha\beta\gamma\delta} + 64\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R^{\gamma\delta\epsilon\zeta} \nabla_{\zeta} \nabla_{\delta} R_{\alpha\gamma\beta\epsilon} \\ & + 64\kappa g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} \nabla_{\epsilon} R_{\beta\delta\gamma\zeta} \nabla^{\zeta} R_{\alpha}{}^{\gamma\delta\epsilon} + 64 \kappa R^{\nu\alpha} \nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma} \nabla^{\mu} R^{\beta\gamma} - 16\kappa R^{\nu\alpha} \nabla^{\alpha} R \nabla^{\mu} R \\ & - 16\kappa R^{\nu\alpha} \nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma\delta\epsilon} \nabla^{\mu} R^{\beta\gamma\delta\epsilon} - 32\kappa R \nabla^{\mu} R^{\alpha\beta} \nabla^{\nu} R_{\alpha\beta} + 64 \kappa R^{\mu\alpha} \nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma} \nabla^{\nu} R^{\beta\gamma} \\ & - 16\kappa R^{\mu\alpha} \nabla^{\alpha} R \nabla^{\nu} R + 8\kappa R \nabla^{\mu} R \nabla^{\nu} R + 8\kappa R \nabla^{\mu} R^{\alpha\beta} \nabla^{\nu} R_{\alpha\beta} - 16\kappa R^{\mu\alpha} \nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma\delta\epsilon} \nabla^{\nu} R^{\beta\gamma\delta\epsilon} \\ & - 32\kappa R^{\alpha\beta} R \nabla^{\nu} \nabla^{\mu} R_{\alpha\beta} + 8\kappa R^2 \nabla^{\nu} \nabla^{\mu} R + 8\kappa R R^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^{\nu} \nabla^{\mu} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Η σχέση της εξίσωσης (3.23) είναι πολύ σύνθετη όπως μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κανείς. Αν και εφαρμόσαμε τις εντολές ToCanonical (αναγκάζουμε το xAct να λάβει υπ όψη τις συμμετρίες του τανυστή Riemann) και FullSimplification για να γίνουν οι απαραίτητες απλοποιήσεις, δεν κατάληξαμε σε πιο απλή μορφή της εξίσωσης αυτής.

Η μετρική η οποία θα εφαρμόσουμε είναι η μετρική FLRW και όπως ήδη έχουμε αναφέρει τα σύμβολα Christoffel, οι ταυιστές Riemann και Ricci και το βαθμωτό Ricci δεν επηρεάζονται από τις διαφορετικές θεωρίες βαρύτητας που αποφασίζουμε να εφαρμόσουμε, αλλά παραμένουν τα ίδια με αυτά που υπολογίστηκαν στη Γενική Σχετικότητα. Έτσι, το μόνο που μας μένει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τον ταυιστή $P_{\mu\nu}$ της εξίσωσης (3.23) για την FLRW. Έχουμε τότε πως:

$$P_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{33} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

όπου:

$$P_{00} = \frac{1}{(a(t))^7} \left(3 \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^2 \left((a(t))^5 - 576\kappa \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^4 \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + 96\kappa a(t) \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^2 \left(3 \left(\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial a(t)}{\partial t} \frac{\partial^3 a(t)}{\partial t^3} \right) \right) \quad (3.25)$$

και:

$$\begin{aligned} P_{11} = P_{22} = P_{33} = & \\ & = \frac{1}{(a(t))^7} \left((a(t))^5 \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^2 + 2(a(t))^6 \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} + 2304\kappa \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^6 \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} - \right. \\ & 288\kappa a(t) \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^4 \left(15 \left(\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} \right)^2 + 4 \frac{\partial a(t)}{\partial t} \frac{\partial^3 a(t)}{\partial t^3} \right) + \\ & \left. 192\kappa (a(t))^2 \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^2 \left(6 \left(\frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} \right)^3 + 8 \frac{\partial a(t)}{\partial t} \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} \frac{\partial^3 a(t)}{\partial t^3} + \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^4 a(t)}{\partial t^4} \right) \right) \quad (3.26) \end{aligned}$$

Όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς οι εξισώσεις του αριστερού μέλους της εξίσωσης Einstein είναι διαφορικές εξισώσεις ανώτερης από 2ης τάξης, όπως και θα περιμέναμε.

4 Βαρυτικά Κύματα σε Τ. Θ. Β.

Από το παραπάνω κεφάλαιο, εύκολα καταλαβαίνει κανείς πως υπάρχουν πολλοί πιθανοί τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να τροποποιήσει τη Γενική Σχετικότητα στην ισχυρή βαρύτητα και τις κοσμολογικές αποστάσεις, με κάθε μοντέλο να έχει τα δικά του μοναδικά χαρακτηριστικά. Η ερώτηση είναι με ποιον τρόπο μπορούμε να διαχωρίσουμε πειραματικά και παρατηρησιακά αυτές τις Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας από τη Γενική Σχετικότητα, αλλά και αντίστοιχα πού πρέπει να επικεντρωθεί η μελέτη μας για να αποσαφηνίσουμε εάν μπορεί όντως το σύμπαν να περιγραφεί από αυτές τις Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας. Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Στην ανάλυσή μας θα χρησιμοποιήσουμε τα βαρυτικά κύματα και θα παρουσιάσουμε με συγκεκριμένα παραδείγματα ποια διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε για κάθε Γενικευμένη Θεωρία Βαρύτητας.

Με τους ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων 3ης γενιάς (Einstein Telescope, Cosmic Explorer) να είναι έτοιμοι να κάνουν τις πρώτες τους παρατηρήσεις την επόμενη δεκαετία, η παρατήρηση και ανάλυση των βαρυτικών κυμάτων θα αποτελέσει ναυαρχίδα για την κοσμολογία και τη θεωρητική φυσική, διαψεύδοντας ή επιβεβαιώνοντας κοσμολογικά και βαρυτικά μοντέλα, όπως οι Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας. Ωστόσο, αν και πιο παλιάς τεχνολογίας, τα δεδομένα και οι παρατηρήσεις που λαμβάνουμε από το LIGO, αποτελούν έναν πολύ σαφές και καλό οδηγό για την κατεύθυνση που πρέπει να κινηθεί η θεωρητική μελέτη των βαρυτικών κυμάτων και της βαρύτητας, με την ακρίβεια ωστόσο στους ανιχνευτές τρίτης γενιάς να είναι μεγαλύτερη.

Είναι γνωστό πως για τις τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας η εξέλιξη των πολώσεων των γραμμικών, εγκάρσιων και χωρίς ίχνος (transverse-traceless) διαταραχών στον χώρο Fourier, σαν αυτές που περιγράφονται στην ενότητα 2.2.3, δίνονται από την εξίσωση:

$$h''_{ij} + (3 + a_M)Hh'_{ij} + (1 + a_T)k^2 h_{ij} = 0 \quad (4.1)$$

όπου a_T η tensor speed excess και $a_M = \frac{d(\log(M_{Pl}^2))}{d(\log(a))}$ η running ενεργός μάζα Planck. Για την ανάλυσή μας έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η ποσότητα a_T . Για την εξίσωση (4.1), ο συντελεστής $c^2_g = 1 + a_T$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα διάδοσης του βαρυτικού κύματος και το a_T τροποποιεί την ταχύτητα αυτή από την τιμή 1 που παίρνει στη Γενική Σχετικότητα όπως φαίνεται στην εξίσωση (2.112). Μετά από την παρατήρηση των βαρυτικών κυμάτων GW170817, τα οποία παρατηρήθηκαν από τους ανιχνευτές LIGO- Virgo και προέρχονται από τη συγχώνευση ενός ζεύγους αστέρων νετρονίων (binary neutron stars), επιβεβαιώθηκε πως η ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός, καθώς το σήμα των βαρυτικών κυμάτων τα οποία παρήχθησαν από τη συγχώνευση αυτή έφτασαν ταυτόχρονα με την γ - ακτινοβολία που παρήχθη από τη συγχώνευση αυτή, επιβεβαιώνοντας έτσι πως τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα με αυτήν που ταξιδεύουν και οι ακτίνες γ . Άρα, για μια βιώσιμη τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας, πρέπει το a_T να είναι ίσο με μηδέν, έτσι ώστε να προκύπτει πως τα βαρυτικά κύματα διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός.

Ουσιαστικά η διαδικασία που θα ακολουθηθεί για τις Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας είναι παρόμοια με αυτήν που περιγράψαμε στην υποενότητα 2.2.4, καθώς οι υπολογισμοί μας θα γίνουν με το πρόγραμμα xAct, καθώς οι υπολογισμοί είναι αρκετά πιο σύνθετοι σε σχέση με την περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας. Έτσι, ουσιαστικά το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις χωρικές διαταραχές του τροποποιημένου τανυστή Einstein, $P^\mu{}_\nu$, και εχμεταλλευόμενοι το θεώρημα αποσύνθεσης να υπολογίσουμε την εξίσωση η οποία διέπει τις τανυστικές διαταραχές.

4.1 Βαρυτικά κύματα στην $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \kappa\mathbf{R}^2$

Όπως και στην υποενότητα 3.4.1 θα κάνουμε τους υπολογισμούς για την $f(R) = R + \kappa R^2$. Αρχικά, θα ακολουθήσουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στη Γενική Σχετικότητα, δηλαδή θα ορίσουμε την πολλαπλότητα στην οποία θα δουλέψουμε, το slicing και θα ορίσουμε πως οι υπολογισμοί θα γίνουν στον σύμμορφο χρόνο και όχι στον φυσικό. Στη συνέχεια, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον ταυστή $P^\mu{}_\nu$. Έτσι, θα ορίσουμε τον ταυστή $P_{\mu\nu}$ με τις εντολές:

$$\text{DefTensor}(P(-\mu, -\nu), M) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \text{IndexSet}(P(\mu, \nu), [\frac{1}{2}(-\text{met}(\mu, \nu)(-4\kappa\text{CD}(-\alpha)(\text{CD}(\alpha)(\text{RicciScalar}(\text{CD}())))+ \\ & + \kappa\text{RicciScalar}(\text{CD}())^2 + \text{RicciScalar}(\text{CD}()) + (4\kappa\text{RicciScalar}(\text{CD}()) + 2)\text{Ricci}(\text{CD})(\mu, \nu) - \\ & - 2\kappa(\text{CD}(\mu)(\text{CD}(\nu)(\text{RicciScalar}(\text{CD}())) + \text{CD}(\nu)(\text{CD}(\mu)(\text{RicciScalar}(\text{CD}())))))]//\text{Simplify} \end{aligned} \quad (4.3)$$

και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(R^{\mu\nu}(2 + 4\kappa R) - g^{\mu\nu}(R + \kappa R^2 - \\ & - 4\kappa\nabla_\alpha\nabla^\alpha R) - 2\kappa(\nabla^\mu\nabla^\nu R + \nabla^\nu\nabla^\mu R)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

και με την εντολή:

$$P(\mu, -\nu) \quad (4.5)$$

λαμβάνουμε τη μορφή που θα έχει ο ταυστής $P^\mu{}_\nu$, ο οποίος είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(R^\mu{}_\nu(2 + 4\kappa R) - \delta_\nu{}^\mu(R + \kappa R^2 - \\ & - 4\kappa\nabla_\alpha\nabla^\alpha R) - 2\kappa(\nabla^\mu\nabla_\nu R + \nabla_\nu\nabla^\mu R)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή (2.108) για καθέναν από τους 7 όρους της εξίσωσης (4.5) και θα τους ονομάσουμε p_i με $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ για κάθε όρο αντίστοιχα. Αθροίζοντάς τους και απλοποιώντας την εξίσωση που θα προκύψει με την εντολή FullSimplify, έχουμε τελικά πως ο διαταραγμένος ταυστής $P^\mu{}_\nu$ είναι:

$$\begin{aligned} P^\mu{}_\nu &= P^\mu{}_\nu + \delta P^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}(p1 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 + p7) = \\ &= \frac{1}{2\alpha^4}(a^2(2\epsilon E''^\mu{}_\nu + 4\epsilon E'^\mu{}_\nu \mathcal{H} - 2h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 - 4h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' + 4\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \phi + 8\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \phi + 4\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \phi' + \\ &+ 8\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \psi' + 4\epsilon h{}^\mu{}_\nu \psi'' - 2\epsilon d_\alpha d^\alpha E^\mu{}_\nu + 2\epsilon h{}^\mu{}_\nu d_\alpha d^\alpha \phi - 2\epsilon h{}^\mu{}_\nu d_\alpha d^\alpha \psi - 2\epsilon \mathcal{H} d^\mu B_\nu - \epsilon d^\mu B'_\nu - \\ &- 2\epsilon \mathcal{H} d_\nu B^\mu - \epsilon d_\nu B'^\mu - 2\epsilon d_\nu d^\mu \phi + 2\epsilon d_\nu d^\mu \psi) + 4\kappa(3h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^4 - 3h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'^2 + 6\epsilon E''^\mu{}_\nu(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') + \\ &+ 12\epsilon E'^\mu{}_\nu \mathcal{H}(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') - 12\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^4 \phi + 12\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'^2 \phi + 6\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}' \phi' - 12\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^3 \psi' + 6\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}' \psi' + \\ &+ 6\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \psi' - 6\epsilon \mathcal{H}^2 d_\alpha d^\alpha E^\mu{}_\nu - 6\epsilon \mathcal{H}' d_\alpha d^\alpha E^\mu{}_\nu + 2\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 d_\alpha d^\alpha \phi + 4\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' d_\alpha d^\alpha \phi + \\ &+ 2\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 d_\alpha d^\alpha \psi - 2\epsilon h{}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' d_\alpha d^\alpha \psi - 6\epsilon \mathcal{H}^3 d^\mu B_\nu - 6\epsilon \mathcal{H} \mathcal{H}' d^\mu B_\nu - 3\epsilon \mathcal{H}^2 d^\mu B'_\nu - 3\epsilon \mathcal{H}' d^\mu B'_\nu - \\ &- 6\epsilon \mathcal{H}^3 d_\nu B^\mu - 6\epsilon \mathcal{H} \mathcal{H}' d_\nu B^\mu - 3\epsilon \mathcal{H}^2 d_\nu B'^\mu - 3\epsilon \mathcal{H}' d_\nu B'^\mu - 6\epsilon \mathcal{H}^2 d_\nu d^\mu \phi - 6\epsilon \mathcal{H}' d_\nu d^\mu \phi + \\ &+ 6\epsilon(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')d_\nu d^\mu \psi) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Απομονώνοντας στην εξίσωση (4.6) μόνο τους ταυυστικούς όρους βάσει του θεωρήματος αποσύνθεσης, έχουμε:

$$\frac{1}{2a^4} a^2 (2\epsilon E''^{\mu\nu} + 4\epsilon E'^{\mu\nu} \mathcal{H} - 2\epsilon d_\alpha d^\alpha E^\mu{}_\nu) + 4\kappa (6\epsilon E''^{\mu\nu} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') + 12\epsilon E'^{\mu\nu} \mathcal{H} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') - 6\epsilon \mathcal{H}^2 d_\alpha d^\alpha E^\mu{}_\nu - 6\epsilon \mathcal{H}' d_\alpha d^\alpha E^\mu{}_\nu) \quad (4.8)$$

Κάνοντας τις απολοποιήσεις στην εξίσωση (4.7) με την εντολή FullSimplify, έχουμε τελικά πως το ταυυστικό μέρος της διαταραχής του ταυυστή $P^\mu{}_\nu$ είναι:

$$\frac{\epsilon (a^2 + 12\kappa (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}'))}{a^4} (E''^{\mu\nu} + 2E'^{\mu\nu} \mathcal{H} - d_\alpha d^\alpha E^\mu{}_\nu) \quad (4.9)$$

Η εξίσωση (4.9) αν και φαίνεται κατά πολύ όμοια με την εξίσωση (2.112), έχει κάποιες βασικές διαφορές. Καθώς δεν τροποποιήσαμε καθόλου τον ταυυστή ενέργειας-ορμής, η (4.9) θα ισούται με μηδέν, άρα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την εξίσωση (4.9). Αρχικά, η παράμετρος Hubble, \mathcal{H} , δεν είναι η ίδια με αυτήν της Γενικής Σχετικότητας, αλλά είναι η αντίστοιχη ποσότητα για την $f(R)$, οι οποίες δεν είναι ίσες. Επίσης, αν και στη Γενική Σχετικότητα η αντίστοιχη εξίσωση (2.112) περιγράφει όπως ήδη έχουμε αναφέρει δύο είδη πόλωσης, το h_+ και το h_\times , οι οποίες αντιστοιχούν στους ταυυστικούς βαθμούς ελευθερίας για τη Γενική Σχετικότητα, η εξίσωση (4.9) περιγράφει και άλλη μια συνάρτηση, η οποία περιγράφει έναν τρίτο βαθμό ελευθερίας για την $f(R) = R + \kappa R^2$, ο οποίος προκύπτει από την διόρθωση κR^2 , και είναι ένα massive βαθμωτό πεδίο με μάζα $m^2 = \frac{1}{6\kappa}$, το οποίο δημιουργεί ένα επιπλέον επίπεδο πόλωσης. Επιπλέον, είναι εμφανές πως ο συντελεστής $\frac{\epsilon (a^2 + 12\kappa (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}'))}{a^2}$ θα διαφοροποιήσει τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (4.8).

Τέλος, αντιστοιχίζοντας την εξίσωση (4.9) με την εξίσωση (4.1) είναι εμφανές πως για την $f(R) = R + \kappa R^2$, ισχύει $c_g^2 = 1$, δηλαδή πως η ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός, κάνοντας τη συγκεκριμένη $f(R)$ θεωρία βιώσιμη.

4.2 Βαρυτικά κύματα στην $f(\mathbf{G}) = \mathbf{R} + \kappa \mathbf{G}^2$

Την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε για την $f(R)$, ακολουθήσαμε και για την $f(G) = R + \kappa G^2$. Όπως μπορεί να υποθέσει κανείς, η διαδικασία είναι πολύ πιο σύνθετη από την περίπτωση της $f(R)$, με τον ταυυστή $P^\mu{}_\nu$ να περιλαμβάνει πολλούς και σύνθετους όρους, με το πρόγραμμα xPand να αργεί αρκετά και να δυσκολεύεται ιδιαίτερα να υπολογίσει μερικούς από αυτούς. Οι υπολογισμοί συνεχίζονται κατά τη συγγραφή αυτής της εργασίας και θα ολοκληρωθούν το επόμενο χρονικό διάστημα.

Ωστόσο, από τη μορφή του ταυυστή $P^\mu{}_\nu$, μπορούμε να υποθέσουμε πως η τιμή της a_T θα είναι 0 μόνο για ορισμένες τιμές της σταθεράς κ . Έτσι, ολοκληρώνοντας τους υπολογισμούς για τα βαρυτικά κύματα στην $f(G)$ όχι μόνο θα έχουμε τις εξισώσεις διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων, αλλά θα έχουμε κατασκευάσει και έναν καλό test για να εξερευνήσουμε και να ελέγξουμε για ποιες τιμές του κ η $f(G) = R + \kappa G^2$ αποτελεί βιώσιμη τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας, ανοίγοντας ένα μεγάλο παράθυρο για έρευνα.

5 Συμπεράσματα

Είναι πλέον σαφές πως η ανάγκη για τροποποίηση της Γενικής Σχετικότητας είναι επιτακτική, κάτι το οποίο μπορούμε εύκολα να επιτύχουμε κάνοντας διορθώσεις στη δράση της Γενικής Σχετικότητας προσθέτοντας υψηλότερους όρους καμπυλότητας και κατασκευάζοντας Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας. Ένας πολύ καλός τρόπος για να ελέγξουμε την βιωσιμότητα των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας που κατασκευάσαμε είναι μέσω των βαρυτικών κυμάτων.

Όπως ήδη αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, μετά την παρατήρηση των βαρυτικών κυμάτων GW170817 άνοιξε ένας νέος δρόμος στη μελέτη των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας. Απαιτώντας πλέον η ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων της τροποποιημένης θεωρίας βαρύτητας που δοκιμάζουμε να είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός, έχουμε ένα πολύ σημαντικό και ξεκάθαρο κριτήριο για το αν μια θεωρία βαρύτητας είναι βιώσιμη ή όχι, ελέγχοντας αν η τιμή της a_T είναι μηδέν ή όχι.

Από την παραπάνω απαίτηση, όπως είδαμε, κάθε $f(R) = R + \kappa R^2$ θεωρία είναι βιώσιμη, ανεξαρτήτως της τιμής της σταθεράς κ , κάτι το οποίο είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικό. Ωστόσο, δεν περιμένουμε να ισχύει το ίδιο και για κάθε $f(G) = R + \kappa G^2$, καθώς περιμένουμε η τιμή της a_T για τη θεωρία αυτή να είναι μηδενική μόνο για συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς κ . Αυτό το γεγονός όμως, αποτελεί προσεδοφόρο έδαφος για έρευνα, αναζητώντας τα επόμενα χρόνια βιώσιμες $f(G)$ θεωρίες. Επίσης, μελετώντας τα βαρυτικά κύματα σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, όπως για παράδειγμα στην $f(R)$ και στην $f(G)$, μπορούμε μελετήσουμε καλύτερα τα χαρακτηριστικά των βαρυτικών κυμάτων, όπως είδαμε από τα παραδείγματα τα οποία εξετάσαμε.

Τα δεδομένα τα οποία λαμβάνουμε όλα αυτά τα χρόνια για τα βαρυτικά κύματα μας έχουν δώσει πολύ σημαντικά στοιχεία για την κοσμολογική έρευνα (όπως φαίνεται ξεκάθαρα από το παράδειγμα του GW170817), με νέα δεδομένα να προσθέτονται συνεχώς. Με τους ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων 3ης γενιάς (Einstein Telescope, Cosmic Explorer) να είναι έτοιμοι να κάνουν τις πρώτες τους παρατηρήσεις την επόμενη δεκαετία, η παρατήρηση και ανάλυση των βαρυτικών κυμάτων θα αποτελέσει ακρογναίο λίθο για την κοσμολογία και τη θεωρητική φυσική.

Βιβλιογραφία

- [1] Scott Dodelson, Fabian Schmidt, *Modern Cosmology*, 2nd edition
- [2] Sean Carroll, *SPACETIME AND GEOMETRY: An Introduction to General Relativity*, 2004
- [3] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, 1972
- [4] T. Rowland, *Manifold*, <https://mathworld.wolfram.com/Manifold.html>
- [5] Michael P. Lamoureux, *The mathematics of PDEs and the wave equation*, Seismic Imaging Summer School August, 2006, Calgary
- [6] *Perturbation Theory*, MIT OpenCourseWare, 8.09 Classical Mechanics III, Fall 2014
- [7] J. Tafel, *All transverse and TT tensors in flat spaces of any dimension*, <https://inspirehep.net/files/2ba2a6b2ba46c17040d54e638efb5504>, 26 February 2018
- [8] S. Shankaranarayanan and Joseph P Johnson, *Modified theories of Gravity: Why, How and What?*, arXiv:2204.06533v1 [gr-qc] 13 Apr 2022
- [9] *Exploring the Sensitivity of Next Generation Gravitational Wave Detectors*, arXiv:1607.08697v3 [astro-ph.IM] 11 Sep 2016
- [10] S. Shankaranarayanan, *Strong gravity signatures in the polarization of gravitational waves*, arXiv:1905.03943 [gr-qc] 10 May 2019
- [11] James B. Hartle, *Βαρύτητα: Εισαγωγή στη Γενική Σχετικότητα του Einstein*, Επιμέλεια: Α. Κεχαγιιάς, Γ. Κουτσούμπας, 2016
- [12] Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations*, 2nd edition
- [13] C. D. Kreisch and C. D. Kreisch, *Cosmological Constraints on Horndeski Gravity in Light of GW170817*, arXiv:1712.02710v3 [astro-ph.CO] 25 Jan 2019
- [14] C. D. Kreisch and C. D. Kreisch, *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, PRL 119, 161101 (2017)
- [15] B. P. Abbott et al., *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, PRL 119, 161101 (2017)
- [16] Jose Maria Ezquiaga and Miguel Zumalacarregui, *Dark Energy after GW170817: dead ends and the road ahead*, arXiv:1710.05901v2 [astro-ph.CO] 21 Nov 2017
- [17] Nadiezhda Montelongo García, Tiberiu Harko, Francisco S. N. Lobo, José P. Mimoso, *$f(G)$ modified gravity and the energy conditions*, arXiv:1012.0953v1 [gr-qc] 4 Dec 2010
- [18] Dicong Liang, Yungui Gong, Shaoqi Hou, Yunqi Liu, *Polarizations of gravitational waves in $f(R)$ gravity*, arXiv:1701.05998v3 [gr-qc] 14 May 2017

6 Παράρτημα

Παρακάτω παρατίθενται τα προγράμματα τα οποία κατασκευάστηκαν στο Mathematica για τους υπολογισμούς της παραπάνω εργασίας. Για τα notebooks ή για οτιδήποτε άλλο, παρακαλώ επικοινωνήστε στο amavrogiannis01@gmail.com.

```

In[ ]:= << xAct`xTensor`
<< xAct`xTras`
$PrePrint = ScreenDollarIndices;
-----
Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2003-2020, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
Connecting to external MinGW executable...
Connection established.
-----
Package xAct`xTensor` version 1.2.0, {2021, 10, 17}
Copyright (C) 2002-2021, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
  type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
  it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----
Package xAct`xPert` version 1.0.6, {2018, 2, 28}
Copyright (C) 2005-2020, David Brizuela, Jose M.
  Martin-Garcia and Guillermo A. Mena Marugan, under the General Public License.
** Variable $PrePrint assigned value ScreenDollarIndices
** Variable $CovDFormat changed from Prefix to Postfix
** Option AllowUpperDerivatives of ContractMetric changed from False to True
** Option MetricOn of MakeRule changed from None to All
** Option ContractMetrics of MakeRule changed from False to True
-----
Package xAct`Invar` version 2.0.5, {2013, 7, 1}
Copyright (C) 2006-2020, J. M. Martin-Garcia,
  D. Yllanes and R. Portugal, under the General Public License.
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol sigma.
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol dim.
** Option CurvatureRelations of DefCovD changed from True to False
** Variable $CommuteCovDsOnScalars changed from True to False
-----

```

```

Package xAct`xCoba` version 0.8.6, {2021, 2, 28}
CopyRight (C) 2005-2021, David Yllanes and Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----

Package xAct`SymManipulator` version 0.9.5, {2021, 9, 14}
CopyRight (C) 2011-2021, Thomas Bäckdahl, under the General Public License.
-----

Package xAct`XTras` version 1.4.2, {2014, 10, 30}
CopyRight (C) 2012-2014, Teake Nutma, under the General Public License.
** Variable $CovDFormat changed from Postfix to Prefix
** Option CurvatureRelations of DefCovD changed from False to True
-----

These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----

In[ ]:= DefManifold[M, 4, {α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, μ, ν, λ, σ, τ}]
DefMetric[-1, g[-α, -β], CD, {";", "∇"}, PrintAs → "g"]
** DefManifold: Defining manifold M.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM.
** DefTensor: Defining symmetric metric tensor g[-α, -β].
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilon[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag†[-α, -β, -γ, -δ].
** DefCovD: Defining covariant derivative CD[-α].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining Riemann tensor RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric Ricci tensor RicciCD[-α, -β].
** DefCovD: Contractions of Riemann automatically replaced by Ricci.
** DefTensor: Defining Ricci scalar RicciScalarCD[].
** DefCovD: Contractions of Ricci automatically replaced by RicciScalar.
** DefTensor: Defining symmetric Einstein tensor EinsteinCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining Weyl tensor WeylCD[-α, -β, -γ, -δ].

```

```

** DefTensor: Defining symmetric TFRicci tensor TFRicciCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining Kretschmann scalar KretschmannCD[].
** DefCovD: Computing RiemannToWeylRules for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToTFRicci for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToEinsteinRules for dim 4
** DefTensor: Defining symmetrized Riemann tensor SymRiemannCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric Schouten tensor SchoutenCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining symmetric cosmological Schouten tensor SchoutenCCCD[LI[_], -α, -β].
** DefTensor: Defining symmetric cosmological Einstein tensor EinsteinCCCD[LI[_], -α, -β].
** DefTensor: Defining weight +2 density Detg[]. Determinant.
** DefParameter: Defining parameter PerturbationParameterg.
** DefTensor: Defining tensor Perturbationg[LI[order], -α, -β].

In[ ]:= DefConstantSymbol[dimm, PrintAs → "d"]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol dimm.

In[ ]:= VarL[g[μ, ν], CD][RicciScalarCD[]] // ContractMetric // ToCanonical // SortCovDs //
Simplification
Out[ ]:=  $R[\nabla]_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R[\nabla]$ 

In[ ]:= L = RicciScalarCD[];
In[ ]:= VarL[g[μ, ν], CD][L] // ContractMetric // ToCanonical // SortCovDs // Simplification
Out[ ]:=  $R[\nabla]_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R[\nabla]$ 

In[ ]:= VarD[g[μ, ν], CD][Sqrt[-Detg[]] RicciScalarCD[]] // ContractMetric // ToCanonical //
Simplification
Out[ ]:=  $\frac{1}{2} \sqrt{-g} (2 R[\nabla]_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R[\nabla])$ 

In[ ]:= << xAct`xCoba`
-----
Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2003-2020, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
Connecting to external MinGW executable...

```

```

Connection established.

-----
Package xAct`xTensor` version 1.2.0, {2021, 10, 17}
CopyRight (C) 2002-2021, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
Package xAct`xCoba` version 0.8.6, {2021, 2, 28}
CopyRight (C) 2005-2021, David Yllanes and Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----

In[ ]:= DefManifold[M4, 4, {μ, ν, α, β, σ, λ, b, c, d, e, f}]
** DefManifold: Defining manifold M4.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM4.

In[ ]:= DefChart[space, M4, {0, 1, 2, 3}, {t[], x[], y[], z[]},
FormatBasis -> {"Partials", "Differentials"}]
** DefChart: Defining chart space.
** DefTensor: Defining coordinate scalar t[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar x[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar y[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar z[].
** DefMapping: Defining mapping space.
** DefMapping: Defining inverse mapping ispace.
** DefTensor: Defining mapping differential tensor dispace[-a, ispaceb].
** DefTensor: Defining mapping differential tensor dspace[-b, spacea].
** DefBasis: Defining basis space. Coordinated basis.
** DefCovD: Defining parallel derivative PDspace[-b].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionPDspace[b, -c, -d].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelPDspace[b, -c, -d].
** DefTensor: Defining vanishing Riemann tensor RiemannPDspace[-b, -c, -d, e].
** DefTensor: Defining vanishing Ricci tensor RicciPDspace[-b, -c].
** DefTensor: Defining antisymmetric +1 density etalUpspace[b, c, d, e].

```

```

In[*]:= DefScalarFunction /@ {a};
** DefScalarFunction: Defining scalar function a.

In[*]:= MatrixForm[MatrixMetric = DiagonalMatrix[{-1, a[t[]]^2, a[t[]]^2, a[t[]]^2}]]
Out[*]]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t]^2 \end{pmatrix}$$


In[*]:= met = CTensor[MatrixMetric, {-space, -space}]
Out[*]:= CTensor[{{-1, 0, 0, 0}, {0, a[t]^2, 0, 0}, {0, 0, a[t]^2, 0}, {0, 0, 0, a[t]^2}},
{-space, -space}, 0]

In[*]:= SetCMetric[met, space, SignatureOfMetric -> {-1, 3, 0}]
met[-μ, -ν]
Out[*]:=

$$\begin{matrix} \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t]^2 \end{matrix} & \mu\nu \end{matrix}$$


In[*]:= CD = LC[met];
In[*]:= MetricCompute[met, space, All]
In[*]:= xAct`xCoba`$LargeComponentSize = 4000;
In[*]:= Christoffel[CD, PDspace][α, -β, -μ]
Out[*]:=

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t] & a'[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t] \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a[t] & a'[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t] \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a[t] & a'[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t] \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a[t] & a'[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t] \end{matrix} \\ \alpha & \beta & \mu \end{matrix}$$


```

```

In[*]:= Christoffel[CD, PDspace][{0, space}, {0, -space}, {1, -space}]
Out[*]= 0

In[*]:= Christoffel[CD, PDspace][{2, space}, {2, -space}, {1, -space}]
Out[*]= 0

In[*]:= Christoffel[CD, PDspace][{2, space}, {1, -space}, {2, -space}]
Out[*]= 0

In[*]:= Christoffel[CD, PDspace][{0, space}, {1, -space}, {1, -space}]
Out[*]= a[t] a'[t]

In[*]:= Christoffel[CD, PDspace][{1, space}, {1, -space}, {0, -space}]
Out[*]=  $\frac{a'[t]}{a[t]}$ 

In[*]:= RicciScalar[CD] []
Out[*]=  $\frac{6 (a'[t]^2 + a[t] a''[t])}{a[t]^2}$ 

In[*]:= Ricci[CD] [-α, -β]
Out[*]= 

|                          |                           |                           |                           |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $-\frac{3 a''[t]}{a[t]}$ | 0                         | 0                         | 0                         |
| 0                        | $2 a'[t]^2 + a[t] a''[t]$ | 0                         | 0                         |
| 0                        | 0                         | $2 a'[t]^2 + a[t] a''[t]$ | 0                         |
| 0                        | 0                         | 0                         | $2 a'[t]^2 + a[t] a''[t]$ |

 αβ

In[*]:= Ricci[CD] [{0, -space}, {0, -space}]
Out[*]=  $-\frac{3 a''[t]}{a[t]}$ 

In[*]:= Einstein[CD] [-α, -β]
Out[*]= 

|                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\frac{3 a'[t]^2}{a[t]^2}$ | 0                          | 0                          | 0                          |
| 0                          | $-a'[t]^2 - 2 a[t] a''[t]$ | 0                          | 0                          |
| 0                          | 0                          | $-a'[t]^2 - 2 a[t] a''[t]$ | 0                          |
| 0                          | 0                          | 0                          | $-a'[t]^2 - 2 a[t] a''[t]$ |

 αβ

```



```

[inf.]= << xAct`xTensor`
<< xAct`xTras`
$PrePrint = ScreenDollarIndices;

-----
Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2003-2020, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
Connecting to external MinGW executable...
Connection established.

-----
Package xAct`xTensor` version 1.2.0, {2021, 10, 17}
Copyright (C) 2002-2021, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.

-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.

-----
Package xAct`xPert` version 1.0.6, {2018, 2, 28}
Copyright (C) 2005-2020, David Brizuela, Jose M.
Martin-Garcia and Guillermo A. Mena Marugan, under the General Public License.
** Variable $PrePrint assigned value ScreenDollarIndices
** Variable $CovDFormat changed from Prefix to Postfix
** Option AllowUpperDerivatives of ContractMetric changed from False to True
** Option MetricOn of MakeRule changed from None to All
** Option ContractMetrics of MakeRule changed from False to True

-----
Package xAct`Invar` version 2.0.5, {2013, 7, 1}
Copyright (C) 2006-2020, J. M. Martin-Garcia,
D. Yllanes and R. Portugal, under the General Public License.
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol sigma.
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol dim.
** Option CurvatureRelations of DefCovD changed from True to False
** Variable $CommuteCovDsOnScalars changed from True to False

-----

```

```

Package xAct`xTras` version 1.4.2, {2014, 10, 30}
Copyright (C) 2012-2014, Teake Nutma, under the General Public License.
** Variable $CovDFormat changed from Postfix to Prefix
** Option CurvatureRelations of DefCovD changed from False to True
-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----
In[ ]:= DefManifold[M, 4, {α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, μ, ν, λ, σ, τ}]
DefMetric[-1, g[-α, -β], CD, {";", "v"}, PrintAs -> "g"]
** DefManifold: Defining manifold M.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM.
** DefTensor: Defining symmetric metric tensor g[-α, -β].
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilon[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag![-α, -β, -γ, -δ].
** DefCovD: Defining covariant derivative CD[-α].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining Riemann tensor RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric Ricci tensor RicciCD[-α, -β].
** DefCovD: Contractions of Riemann automatically replaced by Ricci.
** DefTensor: Defining Ricci scalar RicciScalarCD[].
** DefCovD: Contractions of Ricci automatically replaced by RicciScalar.
** DefTensor: Defining symmetric Einstein tensor EinsteinCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining Weyl tensor WeylCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric TFRicci tensor TFRicciCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining Kretschmann scalar KretschmannCD[].
** DefCovD: Computing RiemannToWeylRules for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToTFRicci for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToEinsteinRules for dim 4
** DefTensor: Defining symmetrized Riemann tensor SymRiemannCD[-α, -β, -γ, -δ].

```



```

** DefTensor: Defining symmetric Schouten tensor SchoutenCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining symmetric cosmological Schouten tensor SchoutenCCCD[LI[_], -α, -β].
** DefTensor: Defining symmetric cosmological Einstein tensor EinsteinCCCD[LI[_], -α, -β].
** DefTensor: Defining weight +2 density Detg[]. Determinant.
** DefParameter: Defining parameter PerturbationParameterg.
** DefTensor: Defining tensor Perturbationg[LI[order], -α, -β].

In[ ]:= DefConstantSymbol[dimm, PrintAs -> "d"]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol dimm.

In[ ]:= VarL[g[μ, ν], CD][RicciScalarCD[]] // ContractMetric // ToCanonical // SortCovDs //
Simplification
Out[ ]:= R[∇]_{μν} - 1/2 g_{μν} R[∇]

In[ ]:= DefConstantSymbol[b]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol b.

In[ ]:= L = RicciScalarCD[] + b * RicciScalarCD[] * RicciScalarCD[]
Out[ ]:= R[∇] + b R[∇]^2

In[ ]:= VarL[g[μ, ν], CD][L] // ContractMetric // ToCanonical // SortCovDs // Simplification
Out[ ]:= R[∇]_{μν} (1 + 2 b R[∇]) - 1/2 g_{μν} (R[∇] + b R[∇]^2 - 4 b (∇_α ∇^α R[∇])) - 2 b (∇_ν ∇_μ R[∇])

In[ ]:= VarD[g[μ, ν], CD][Sqrt[-Detg[]] L] // ContractMetric // ToCanonical // Simplification
Out[ ]:= 1/2 sqrt(-g)
(R[∇]_{μν} (2 + 4 b R[∇]) - g_{μν} (R[∇] + b R[∇]^2 - 4 b (∇_α ∇^α R[∇])) - 2 b (∇_μ ∇_ν R[∇] + ∇_ν ∇_μ R[∇]))

In[ ]:= << xAct`xCoba`
-----
Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2003-2020, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
Connecting to external MinGW executable...
Connection established.
-----
Package xAct`xTensor` version 1.2.0, {2021, 10, 17}

```

```

CopyRight (C) 2002-2021, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
Package xAct`xCoba` version 0.8.6, {2021, 2, 28}
CopyRight (C) 2005-2021, David Yllanes and Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----

In[ ]:= DefManifold[M4, 4, {μ, ν, α, β, σ, λ, b, c, d, e, f}]
** DefManifold: Defining manifold M4.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM4.

In[ ]:= DefChart[space, M4, {0, 1, 2, 3}, {t[], x[], y[], z[]},
FormatBasis -> {"Partials", "Differentials"}]
** DefChart: Defining chart space.
** DefTensor: Defining coordinate scalar t[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar x[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar y[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar z[].
** DefMapping: Defining mapping space.
** DefMapping: Defining inverse mapping ispace.
** DefTensor: Defining mapping differential tensor dispace[-a, ispaceb].
** DefTensor: Defining mapping differential tensor dspace[-b, spacea].
** DefBasis: Defining basis space. Coordinated basis.
** DefCovD: Defining parallel derivative PDspace[-b].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionPDspace[b, -c, -d].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelPDspace[b, -c, -d].
** DefTensor: Defining vanishing Riemann tensor RiemannPDspace[-b, -c, -d, e].
** DefTensor: Defining vanishing Ricci tensor RicciPDspace[-b, -c].
** DefTensor: Defining antisymmetric +1 density etaUpspace[b, c, d, e].
** DefTensor: Defining antisymmetric -1 density etaDownspace[-b, -c, -d, -e].

In[ ]:= DefScalarFunction /@ {a};
** DefScalarFunction: Defining scalar function a.

```

```

In[ ]:= MatrixForm[MatrixMetric = DiagonalMatrix[{-1, a[t]^2, a[t]^2, a[t]^2}]
Out[ ]:= MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t]^2 \end{pmatrix}$$


In[ ]:= met = CTensor[MatrixMetric, {-space, -space}]
Out[ ]:= CTensor[{{-1, 0, 0, 0}, {0, a[t]^2, 0, 0}, {0, 0, a[t]^2, 0}, {0, 0, 0, a[t]^2}},
{-space, -space}, 0]

In[ ]:= SetCMetric[met, space, SignatureOfMetric -> {-1, 3, 0}]
met[-μ, -ν]
Out[ ]:= 
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t]^2 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$


In[ ]:= CD = LC[met];
In[ ]:= MetricCompute[met, space, All]
In[ ]:= xAct`xCoba`$LargeComponentSize = 4000;
In[ ]:= Christoffel[CD, PDspace][α, -β, -μ]
Out[ ]:= 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t] a'[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t] a'[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t] a'[t] \end{pmatrix}^{\alpha}_{\beta\mu}$$


In[ ]:= Christoffel[CD, PDspace][{0, space}, {1, -space}, {1, -space}]

```

```

Out[ ]:= a[t] a'[t]
In[ ]:= Christoffel[CD, PDspace][{1, space}, {1, -space}, {0, -space}]
Out[ ]:=  $\frac{a'(t)}{a(t)}$ 
In[ ]:= Ricci[CD][-α, -β]
Out[ ]:=  $\begin{matrix} \frac{3 a''(t)}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 a'(t)^2 - a(t) a''(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 a'(t)^2 - a(t) a''(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 a'(t)^2 - a(t) a''(t) \end{matrix}$ 
In[ ]:= Riemann[CD][-μ, -ν, -α, -β]
Out[ ]:=  $\begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & -a(t) a''(t) & 0 & 0 \\ a(t) a''(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & -a(t) a''(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a(t) a''(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -a(t) a''(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a(t) a''(t) & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & a(t) a''(t) & 0 & 0 \\ -a(t) a''(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & a(t)^2 a''(t)^2 \\ 0 & 0 & a(t)^2 a''(t)^2 & 0 \\ -a(t)^2 a''(t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 a''(t)^2 \\ 0 & 0 & a(t)^2 a''(t)^2 & 0 \\ 0 & -a(t)^2 a''(t)^2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & a(t) a''(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a(t) a''(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 a''(t)^2 \\ 0 & a(t)^2 a''(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 a''(t)^2 \\ 0 & 0 & a(t)^2 a''(t)^2 & 0 \\ 0 & -a(t)^2 a''(t)^2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & a(t) a''(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a(t) a''(t) & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 a''(t)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 a''(t)^2 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 a''(t)^2 \\ 0 & 0 & a(t)^2 a''(t)^2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$ 
In[ ]:= DefParameter[κ]
** DefParameter: Defining parameter κ.
In[ ]:= DefTensor[P[-μ, -ν], M4]
IndexSet[P[μ_, ν_],
 $\frac{1}{2}$  (Ricci[CD][μ, ν] + (2 + 4 * κ * RicciScalar[CD][[]]) -
met[μ, ν] (RicciScalar[CD][[]] + κ * (RicciScalar[CD][[]])2 -
4 * κ * CD[-α][CD[α][RicciScalar[CD][[]]]) -
2 * κ * (CD[μ][CD[ν][RicciScalar[CD][[]]] + CD[ν][CD[μ][RicciScalar[CD][[]]])) // Simplify]

```

```

** DefTensor: Defining tensor P[-μ, -ν].

```

$$\text{Out[17]=} \begin{array}{c} \frac{-54 \times a'[t]^4 + 36 \times a[t] a'[t]^2 a''[t] + 3 a[t]^2 (a'[t]^2 - 6 \times a''[t]^2 + 12 \times a'[t] a^{(3)}[t])}{a[t]^4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \frac{18 \times a'[t]^4 - 72 \times a[t] a'[t]^2 a''[t] - a[t]^2}{a[t]^4}$$

```

In[21]:= P[{0, space}, {0, -space}]
Out[21]= 
$$\frac{54 \times a'[t]^4 - 36 \times a[t] a'[t]^2 a''[t] - 3 a[t]^2 (a'[t]^2 - 6 \times a''[t]^2 + 12 \times a'[t] a^{(3)}[t])}{a[t]^4}$$


```

```

In[22]:= P[{1, space}, {1, -space}]
Out[22]= 
$$-\frac{1}{a[t]^4} (18 \times a'[t]^4 - 72 \times a[t] a'[t]^2 a''[t] + a[t]^2 (a'[t]^2 + 18 \times a''[t]^2 + 24 \times a'[t] a^{(3)}[t]) + 2 a[t]^3 (a''[t] + 6 \times a^{(4)}[t]))$$


```

```

In[23]:= P[{2, space}, {2, -space}]
Out[23]= 
$$-\frac{1}{a[t]^4} (18 \times a'[t]^4 - 72 \times a[t] a'[t]^2 a''[t] + a[t]^2 (a'[t]^2 + 18 \times a''[t]^2 + 24 \times a'[t] a^{(3)}[t]) + 2 a[t]^3 (a''[t] + 6 \times a^{(4)}[t]))$$


```

```

In[24]:= P[{3, space}, {3, -space}]
Out[24]= 
$$-\frac{1}{a[t]^4} (18 \times a'[t]^4 - 72 \times a[t] a'[t]^2 a''[t] + a[t]^2 (a'[t]^2 + 18 \times a''[t]^2 + 24 \times a'[t] a^{(3)}[t]) + 2 a[t]^3 (a''[t] + 6 \times a^{(4)}[t]))$$


```

```

In[ ]:= << xAct`xTensor`
<< xAct`xTras`
$PrePrint = ScreenDollarIndices;

-----

Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2003-2020, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
Connecting to external MinGW executable...
Connection established.

-----

Package xAct`xTensor` version 1.2.0, {2021, 10, 17}
Copyright (C) 2002-2021, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.

-----

These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.

-----

Package xAct`xPert` version 1.0.6, {2018, 2, 28}
Copyright (C) 2005-2020, David Brizuela, Jose M.
Martin-Garcia and Guillermo A. Mena Marugan, under the General Public License.
** Variable $PrePrint assigned value ScreenDollarIndices
** Variable $CovDFormat changed from Prefix to Postfix
** Option AllowUpperDerivatives of ContractMetric changed from False to True
** Option MetricOn of MakeRule changed from None to All
** Option ContractMetrics of MakeRule changed from False to True

-----

Package xAct`Invar` version 2.0.5, {2013, 7, 1}
Copyright (C) 2006-2020, J. M. Martin-Garcia,
D. Yllanes and R. Portugal, under the General Public License.
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol sigma.
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol dim.
** Option CurvatureRelations of DefCovD changed from True to False
** Variable $CommuteCovDsOnScalars changed from True to False

```

```

-----
Package xAct`xCoba` version 0.8.6, {2021, 2, 28}
CopyRight (C) 2005-2021, David Yllanes and Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
Package xAct`SymManipulator` version 0.9.5, {2021, 9, 14}
CopyRight (C) 2011-2021, Thomas Bäckdahl, under the General Public License.
-----
Package xAct`XTras` version 1.4.2, {2014, 10, 30}
CopyRight (C) 2012-2014, Teake Nutma, under the General Public License.
** Variable $CovDFormat changed from Postfix to Prefix
** Option CurvatureRelations of DefCovD changed from False to True
-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----
In[ ]:= DefManifold[M, 4, {α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, μ, ν, λ, σ, τ}]
DefMetric[-1, g[-α, -β], CD, {";", "v"}, PrintAs → "g"]
** DefManifold: Defining manifold M.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM.
** DefTensor: Defining symmetric metric tensor g[-α, -β].
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilon[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag![-α, -β, -γ, -δ].
** DefCovD: Defining covariant derivative CD[-α].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining Riemann tensor RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric Ricci tensor RicciCD[-α, -β].
** DefCovD: Contractions of Riemann automatically replaced by Ricci.
** DefTensor: Defining Ricci scalar RicciScalarCD[].
** DefCovD: Contractions of Ricci automatically replaced by RicciScalar.
** DefTensor: Defining symmetric Einstein tensor EinsteinCD[-α, -β].

```



```

** DefTensor: Defining Weyl tensor WeylCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric TFRicci tensor TFRicciCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining Kretschmann scalar KretschmannCD[].
** DefCovD: Computing RiemannToWeylRules for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToTFRicci for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToEinsteinRules for dim 4
** DefTensor: Defining symmetrized Riemann tensor SymRiemannCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric Schouten tensor SchoutenCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining symmetric cosmological Schouten tensor SchoutenCCCD[LI[_], -α, -β].
** DefTensor: Defining symmetric cosmological Einstein tensor EinsteinCCCD[LI[_], -α, -β].
** DefTensor: Defining weight +2 density Detg[]. Determinant.
** DefParameter: Defining parameter PerturbationParameterg.
** DefTensor: Defining tensor Perturbationg[LI[order], -α, -β].

In[ ]:= EulerDensity[CD]
Out[ ]:= -R[∇]^2 + 4 (R[∇]_{αβ} R[∇]^{αβ}) - (R[∇]_{αβγδ} R[∇]^{αβγδ})

In[ ]:= NoScalar[%]
Out[ ]:= 4 R[∇]_{αβ} R[∇]^{αβ} - R[∇]^2 - R[∇]_{αβγδ} R[∇]^{αβγδ}

In[ ]:= L1 = -EulerDensity[CD]
Out[ ]:= R[∇]^2 - 4 (R[∇]_{αβ} R[∇]^{αβ}) + (R[∇]_{αβγδ} R[∇]^{αβγδ})

In[ ]:= VarL[g[μ, ν], CD][L1] // ContractMetric // ToCanonical // SortCovDs // NoScalar //
Simplification
Out[ ]:= -8 R[∇]_{μ}^{α} R[∇]_{ν α} +
1/2 g_{μν} (4 R[∇]_{αβ} R[∇]^{αβ} - R[∇]^2 - R[∇]_{αβγδ} R[∇]^{αβγδ} + 4 (∇_{α} ∇^{α} R[∇]) - 8 (∇_{β} ∇_{α} R[∇]^{αβ})) +
2 (R[∇]_{μν} R[∇] + R[∇]_{μ}^{αβγ} R[∇]_{ν αβ γ} - 2 (∇_{α} ∇^{α} R[∇]_{μν}) +
2 (∇_{α} ∇_{μ} R[∇]_{ν}^{α}) + 2 (∇_{α} ∇_{ν} R[∇]_{μ}^{α}) + 2 (∇_{β} ∇_{α} R[∇]_{μ}^{αβ}) - ∇_{ν} ∇_{μ} R[∇])

In[ ]:= FullSimplification[%]
Out[ ]:= 2 g_{μν} R[∇]_{αβ} R[∇]^{αβ} - 4 R[∇]_{μ}^{α} R[∇]_{ν α} + 2 R[∇]_{μν} R[∇] - 1/2 g_{μν} R[∇]^2 -
1/2 g_{μν} R[∇]_{αβγδ} R[∇]^{αβγδ} - 4 R[∇]_{αβ} R[∇]_{μ α ν β} + 2 R[∇]_{μ}^{αβγ} R[∇]_{ν α β γ}

```



```

In[ ]:= ddis = ConstructDDIs[RiemannCD[ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ] RiemannCD[ $\epsilon, \xi, \eta, \theta$ ], { $\alpha, \beta$ }]
** DefTensor: Defining basic dimensional dependent identity
BasicDDICD4[- $\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, -\epsilon, -\xi, -\eta, -\theta, -\lambda, -\mu$ ].
Out[ ]:= { R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma$  R[ $\nabla$ ] $\beta\gamma$  -  $\frac{1}{2}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  -  $\frac{1}{2}$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] +  $\frac{1}{8}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ]2 +
R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\beta\delta$  -  $\frac{1}{2}$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\delta\epsilon$  R[ $\nabla$ ] $\beta\gamma\delta\epsilon$  +  $\frac{1}{8}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$ ,
R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma$  R[ $\nabla$ ] $\beta\gamma$  -  $\frac{1}{2}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  -  $\frac{1}{2}$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\delta$  R[ $\nabla$ ] +  $\frac{1}{8}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ]2 + R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\beta\delta$  -
R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\delta\epsilon$  R[ $\nabla$ ] $\beta\gamma\delta\epsilon$  + R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\delta\epsilon$  R[ $\nabla$ ] $\beta\delta\gamma\epsilon$  +  $\frac{1}{4}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  -  $\frac{1}{4}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$ ,
R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma$  R[ $\nabla$ ] $\beta\gamma$  -  $\frac{1}{2}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  -  $\frac{1}{2}$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] +  $\frac{1}{8}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ]2 +
R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\beta\delta$  - R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\delta\epsilon$  R[ $\nabla$ ] $\beta\delta\gamma\epsilon$  +  $\frac{1}{4}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$ , R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\delta\epsilon$  R[ $\nabla$ ] $\beta\gamma\delta\epsilon$  -
2 R[ $\nabla$ ] $\alpha\gamma\delta\epsilon$  R[ $\nabla$ ] $\beta\delta\gamma\epsilon$  -  $\frac{1}{4}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  +  $\frac{1}{2}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\gamma\delta\epsilon\zeta$  }

In[ ]:= ddisols = SolveTensors[ddis ==  $\theta$ , UseSymmetries -> False, MetricOn -> None]
... Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.
Out[ ]:= { { HoldPattern[ R[ $\nabla$ ] $\frac{\alpha\gamma\delta\epsilon}{\gamma\delta\epsilon\zeta}$  R[ $\nabla$ ] $\frac{\beta}{\gamma\delta\epsilon\zeta}$  ] ->
Module[ {  $\zeta, \theta, \lambda, \eta, \mu, \nu, \sigma, \tau$  }, 2 R[ $\nabla$ ] $\alpha\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\beta\zeta$  - g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\theta\lambda$  R[ $\nabla$ ] $\theta\lambda$  -
R[ $\nabla$ ] $\alpha\delta$  R[ $\nabla$ ] +  $\frac{1}{4}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ]2 + 2 R[ $\nabla$ ] $\zeta\eta$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\zeta\beta\eta$  +  $\frac{1}{4}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\mu\nu\sigma\tau$  R[ $\nabla$ ] $\mu\nu\sigma\tau$  ],
HoldPattern[ R[ $\nabla$ ] $\frac{\alpha\gamma\delta\epsilon}{\gamma\delta\epsilon\zeta}$  R[ $\nabla$ ] $\frac{\beta}{\gamma\delta\epsilon\zeta}$  ] -> Module[ {  $\zeta, \theta, \lambda, \eta, \mu, \nu, \sigma, \tau$  },
R[ $\nabla$ ] $\alpha\zeta$  R[ $\nabla$ ] $\beta\zeta$  -  $\frac{1}{2}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\theta\lambda$  R[ $\nabla$ ] $\theta\lambda$  -  $\frac{1}{2}$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] +
 $\frac{1}{8}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ]2 + R[ $\nabla$ ] $\zeta\eta$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\zeta\beta\eta$  +  $\frac{1}{4}$  g $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\mu\nu\sigma\tau$  R[ $\nabla$ ] $\mu\nu\sigma\tau$  ] } }

In[ ]:= eom6 = FullSimplification[] @ VarL[g[- $\mu, -\nu$ ]] @ L1
Out[ ]:= -2 g $\mu\nu$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta$  + 4 R[ $\nabla$ ] $\mu\alpha$  R[ $\nabla$ ] $\nu\alpha$  - 2 R[ $\nabla$ ] $\mu\nu$  R[ $\nabla$ ] +  $\frac{1}{2}$  g $\mu\nu$  R[ $\nabla$ ]2 +
 $\frac{1}{2}$  g $\mu\nu$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta\gamma\delta$  R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta\gamma\delta$  + 4 R[ $\nabla$ ] $\alpha\beta$  R[ $\nabla$ ] $\mu\alpha\nu\beta$  - 2 R[ $\nabla$ ] $\mu\alpha\beta\gamma$  R[ $\nabla$ ] $\nu\alpha\beta\gamma$ 

```

```

In[ ]:= eom6 /. ddisols // ToCanonical
Out[ ]:= {0}

(+)
In[ ]:= DefConstantSymbol[κ]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol κ.

In[ ]:= L2 = RicciScalarCD[] + κ (EulerDensity[CD])^2
Out[ ]:= R[∇] + κ (-R[∇]^2 + 4 (R[∇]αβ R[∇]αβ) - (R[∇]αβγδ R[∇]αβγδ))^2

In[ ]:= eom8 = FullSimplification[] @ VarL[g[-μ, -ν]] @ L2
Out[ ]:= -96 κ gμν R[∇]αγ R[∇]αβ R[∇]βδ R[∇]γδ + 40 κ gμν R[∇]αβ R[∇]αβ R[∇]γδ R[∇]γδ -
R[∇]μν + 320 κ R[∇]αγ R[∇]αβ R[∇]βγ R[∇]μν - 32 κ R[∇]βγ R[∇]βγ R[∇]μα R[∇]να +
1/2 gμν R[∇] + 160/3 κ gμν R[∇]αγ R[∇]αβ R[∇]βγ R[∇] - 336 κ R[∇]αβ R[∇]αβ R[∇]μν R[∇] -
16 κ gμν R[∇]αβ R[∇]αβ R[∇]^2 + 8 κ R[∇]μα R[∇]να R[∇]^2 + 44 κ R[∇]μν R[∇]^3 + 7/6 κ gμν R[∇]^4 +
256 κ R[∇]αβ R[∇]γδ R[∇]μν R[∇]αγβδ - 16 κ gμν R[∇]αβ R[∇]γδ R[∇]αγβδ +
28 κ R[∇]μν R[∇]αβγδ R[∇]αβγδ - 5 κ gμν R[∇]^2 R[∇]αβγδ R[∇]αβγδ -
48 κ gμν R[∇]αβ R[∇]γδ R[∇]αγβδεζ R[∇]βδεζ + 8 κ R[∇]μα R[∇]να R[∇]βγδε R[∇]βγδε -
48 κ R[∇]μν R[∇]αβεζ R[∇]αβγδ R[∇]γδεζ + 12 κ gμν R[∇]αβεζ R[∇]αβγδ R[∇]γδεζ +
32 κ gμν R[∇]αβ R[∇]γδ R[∇]αβεζ R[∇]γδεζ + 1/2 κ gμν R[∇]αβγδ R[∇]αβγδ R[∇]εζηθ R[∇]εζηθ +
8 κ R[∇]αβ R[∇]^2 R[∇]αγβδ + 8 κ R[∇]αβ R[∇]γδεζ R[∇]γδεζ R[∇]αγβδ -
32 κ R[∇]αβ R[∇]αβ R[∇]γδ R[∇]μνγδ - 4 κ R[∇]^2 R[∇]μαβγ R[∇]ναβγ -
4 κ R[∇]δεζη R[∇]δεζη R[∇]μαβγ R[∇]αβγδ + 16 κ R[∇]αβ R[∇]αβ R[∇]μνδε R[∇]ναγδε +
16 κ R[∇]μν R[∇] (∇α ∇α R[∇]) - 8 κ gμν R[∇]^2 (∇α ∇α R[∇]) + 64 κ R[∇]βγ R[∇]να (∇α ∇μ R[∇]βγ) -
16 κ R[∇]να R[∇]βγδε (∇α ∇μ R[∇]βγδε) + 64 κ R[∇]βγ R[∇]μα (∇α ∇ν R[∇]βγ) -
16 κ R[∇]μα R[∇]βγδε (∇α ∇ν R[∇]βγδε) + 16 κ R[∇]μν (∇α R[∇]) (∇α R[∇]) -
8 κ gμν R[∇] (∇α R[∇]) (∇α R[∇]) - 16 κ R[∇]να R[∇] (∇α ∇μ R[∇]) -
16 κ R[∇]αν R[∇] (∇α ∇ν R[∇]) - 64 κ gμν R[∇]αβ (∇α R[∇]γδ) (∇β R[∇]γδ) -
16 κ R[∇]μανβ (∇α R[∇]γδεζ) (∇β R[∇]γδεζ) - 16 κ R[∇]γδεζ R[∇]μανβ (∇β ∇α R[∇]γδεζ) +
16 κ gμν R[∇]αβ (∇α R[∇]) (∇β R[∇]) - 16 κ R[∇]ανβγ (∇α R[∇]) (∇β R[∇]) +

```

$$\begin{aligned}
& 16 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - 8 \kappa R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha}^{\mu} R[\nabla]_{\beta}^{\nu} (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - \\
& 8 \kappa R[\nabla] R[\nabla]_{\beta}^{\mu} R[\nabla]_{\alpha}^{\nu} (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - 64 \kappa R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla^\gamma \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla_\gamma \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) - 64 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla_\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) - 64 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} (\nabla_\epsilon \nabla_\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 64 \kappa R[\nabla]_{\mu}^{\nu} R[\nabla]_{\gamma}^{\delta} (\nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\delta R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 32 \kappa R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\mu}^{\nu} R[\nabla]_{\gamma}^{\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \kappa R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\mu}^{\nu} R[\nabla]_{\gamma}^{\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 64 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) - \\
& 32 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) - \\
& 8 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) + 64 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta} (\nabla_\epsilon \nabla_\delta R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\zeta}) + \\
& 64 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\delta\zeta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]_{\alpha}^{\gamma\delta\epsilon}) + 64 \kappa R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 16 \kappa R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\mu R[\nabla]) - 16 \kappa R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 32 \kappa R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 64 \kappa R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\nu R[\nabla]) + 8 \kappa R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]) (\nabla^\nu R[\nabla]) + \\
& 8 \kappa R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) - 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 32 \kappa R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 8 \kappa R[\nabla]^2 (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]) + 8 \kappa R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta})
\end{aligned}$$

In[]:= eom8 / . ddisols // ToCanonical

$$\begin{aligned}
\text{Out[]}:= & \left\{ -96 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha}^{\gamma} R[\nabla]_{\beta}^{\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\beta}^{\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta} + 24 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta} - R[\nabla]_{\mu\nu} + \right. \\
& 320 \kappa R[\nabla]_{\alpha}^{\gamma} R[\nabla]_{\beta}^{\delta} R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla] + \frac{160}{3} \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha}^{\gamma} R[\nabla]_{\beta}^{\delta} R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla] - \\
& 352 \kappa R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla] - 8 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]^2 + \\
& 48 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]^3 + \frac{1}{6} \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]^4 + 256 \kappa R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} - \\
& 16 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} + 32 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} - \\
& 7 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]^2 R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} - 48 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\delta\epsilon} - \\
& 48 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} + 12 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} + \\
& 32 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha}^{\epsilon} R[\nabla]_{\beta}^{\zeta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta} + 8 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta} - \\
& \frac{1}{2} \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta} R[\nabla]_{\delta\eta} + 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla]) - \\
& 8 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]^2 (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla]) + 64 \kappa R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla_\alpha \nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 16 \kappa R[\nabla]_{\nu\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma} (\nabla_\alpha \nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma}) + 64 \kappa R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla_\alpha \nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma} (\nabla_\alpha \nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma}) + 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla_\alpha R[\nabla]) (\nabla^\alpha R[\nabla]) - \\
& 8 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\alpha R[\nabla]) (\nabla^\alpha R[\nabla]) - 16 \kappa R[\nabla]_{\nu\alpha} R[\nabla] (\nabla^\alpha \nabla^\mu R[\nabla]) - \\
& 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\alpha} R[\nabla] (\nabla^\alpha \nabla^\nu R[\nabla]) - 64 \kappa \mathbf{g}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\gamma\delta}) (\nabla_\beta R[\nabla]_{\gamma\delta}) - \\
& 16 \kappa R[\nabla]_{\mu\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\gamma\delta}) (\nabla_\beta R[\nabla]_{\gamma\delta}) - 16 \kappa R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\mu\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma} (\nabla_\beta \nabla_\alpha R[\nabla]_{\gamma\delta}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\beta R[\nabla]) - 16 \times R[\nabla]_{\alpha\beta}^{\mu\nu} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\beta R[\nabla]) + \\
& 16 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - 8 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta}^{\mu\nu} (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - \\
& 8 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\beta\alpha}^{\mu\nu} (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - 64 \times R[\nabla]_{\alpha\beta}^{\mu\nu} R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla_\gamma \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla_\gamma \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) - 64 \times R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla_\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) - 64 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} (\nabla_\epsilon \nabla_\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 64 \times R[\nabla]_{\mu\nu}^{\alpha\beta} (\nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\delta R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 32 \times R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\mu\nu}^{\alpha\beta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \times R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\mu\nu}^{\alpha\beta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 64 \times R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) - \\
& 32 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 16 \times R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) - \\
& 8 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) + 64 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} (\nabla_\epsilon \nabla_\delta R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\zeta}) + \\
& 64 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{\beta\delta\gamma\zeta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]_{\alpha\gamma\delta\zeta}) + 64 \times R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\zeta}) (\nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\zeta}) - \\
& 16 \times R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\mu R[\nabla]) - 16 \times R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\zeta}) (\nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\zeta}) - \\
& 32 \times R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 64 \times R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 16 \times R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\nu R[\nabla]) + 8 \times R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]) (\nabla^\nu R[\nabla]) + \\
& 8 \times R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) - 16 \times R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\zeta}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\zeta}) - \\
& 32 \times R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 8 \times R[\nabla]^2 (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]) + 8 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) \}
\end{aligned}$$

In[*]= FullSimplification[%]

$$\begin{aligned}
Out[*]= & \left\{ -96 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\beta\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta} + 24 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta} - R[\nabla]_{\mu\nu} + \right. \\
& 320 \times R[\nabla]_{\alpha\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R[\nabla] + \frac{160}{3} \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla] - \\
& 352 \times R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla] - 8 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]^2 + \\
& 48 \times R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]^3 + \frac{1}{6} \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^4 + 256 \times R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} - \\
& 16 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} + 32 \times R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} - \\
& 7 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^2 R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} - 48 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\gamma} R[\nabla]_{\beta\delta\epsilon\zeta} - \\
& 48 \times R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 12 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + \\
& 32 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 8 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} - \\
& \frac{1}{2} \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta\eta\theta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta\eta\theta} + 16 \times R[\nabla]_{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla]) - \\
& 8 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^2 (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla]) + 64 \times R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla_\alpha \nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 16 \times R[\nabla]_{\nu\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon} (\nabla_\alpha \nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) + 64 \times R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]_{\mu\alpha} (\nabla_\alpha \nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma}) - \\
& 16 \times R[\nabla]_{\mu\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon} (\nabla_\alpha \nabla^\nu R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) + 16 \times R[\nabla]_{\mu\nu} (\nabla_\alpha R[\nabla]) (\nabla^\alpha R[\nabla]) - \\
& 8 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_\alpha R[\nabla]) (\nabla^\alpha R[\nabla]) - 16 \times R[\nabla]_{\nu\alpha} R[\nabla] (\nabla^\alpha \nabla^\mu R[\nabla]) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16 \times R[\nabla]_{\alpha}^{\mu} R[\nabla] (\nabla^{\alpha} \nabla^{\gamma} R[\nabla]) - 64 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^{\alpha\beta} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]^{\gamma\delta}) (\nabla_{\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) - \\
& 16 \times R[\nabla]^{\mu\alpha\nu\beta} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]^{\gamma\delta\epsilon\zeta}) (\nabla_{\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta}) - 16 \times R[\nabla]^{\gamma\delta\epsilon\zeta} R[\nabla]^{\mu\alpha\nu\beta} (\nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta}) + \\
& 16 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} (\nabla^{\alpha} R[\nabla]) (\nabla^{\beta} R[\nabla]) - 16 \times R[\nabla]_{\alpha}^{\mu} R[\nabla]_{\beta}^{\nu} (\nabla^{\alpha} R[\nabla]) (\nabla^{\beta} R[\nabla]) + \\
& 16 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} R[\nabla]) - 8 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha}^{\mu} R[\nabla]_{\beta}^{\nu} (\nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} R[\nabla]) - \\
& 8 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\beta}^{\mu} R[\nabla]_{\alpha}^{\nu} (\nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} R[\nabla]) - 64 \times R[\nabla]^{\alpha\beta} R[\nabla]^{\mu\nu} (\nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) - 64 \times R[\nabla]^{\mu\nu} (\nabla_{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^{\gamma} R[\nabla]^{\alpha\beta}) + \\
& 32 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) (\nabla^{\gamma} R[\nabla]^{\alpha\beta}) - 64 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^{\alpha\beta} R[\nabla]^{\gamma\delta} (\nabla_{\zeta} \nabla_{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 64 \times R[\nabla]_{\gamma}^{\mu} R[\nabla]_{\zeta}^{\nu} (\nabla^{\gamma} R[\nabla]^{\alpha\beta}) (\nabla^{\zeta} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 32 \times R[\nabla]^{\alpha\beta} R[\nabla]_{\gamma}^{\mu} R[\nabla]_{\zeta}^{\nu} (\nabla^{\zeta} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + \\
& 32 \times R[\nabla]^{\alpha\beta} R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\zeta}^{\mu} (\nabla^{\zeta} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 64 \times R[\nabla]^{\mu\nu} R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\zeta} (\nabla^{\zeta} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) - \\
& 32 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\zeta} (\nabla^{\zeta} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 16 \times R[\nabla]^{\mu\nu} (\nabla_{\epsilon} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\zeta}) (\nabla^{\epsilon} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\zeta}) - \\
& 8 \times g^{\mu\nu} R[\nabla] (\nabla_{\epsilon} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\zeta}) (\nabla^{\epsilon} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\zeta}) + 64 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^{\alpha\beta} R[\nabla]^{\gamma\delta\epsilon\zeta} (\nabla_{\zeta} \nabla_{\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\epsilon}) + \\
& 64 \times g^{\mu\nu} R[\nabla]^{\alpha\beta} (\nabla_{\epsilon} R[\nabla]_{\beta\delta\gamma\zeta}) (\nabla^{\zeta} R[\nabla]_{\alpha}^{\gamma\delta\epsilon}) + 64 \times R[\nabla]^{\nu\alpha} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^{\mu} R[\nabla]^{\beta\gamma\delta\epsilon}) - \\
& 16 \times R[\nabla]_{\alpha}^{\nu} (\nabla^{\alpha} R[\nabla]) (\nabla^{\mu} R[\nabla]) - 16 \times R[\nabla]^{\nu\alpha} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) (\nabla^{\mu} R[\nabla]^{\beta\gamma\delta\epsilon}) - \\
& 32 \times R[\nabla] (\nabla^{\mu} R[\nabla]^{\alpha\beta}) (\nabla^{\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 64 \times R[\nabla]^{\mu\alpha} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^{\nu} R[\nabla]^{\beta\gamma}) - \\
& 16 \times R[\nabla]_{\alpha}^{\mu} (\nabla^{\alpha} R[\nabla]) (\nabla^{\nu} R[\nabla]) + 8 \times R[\nabla] (\nabla^{\mu} R[\nabla]) (\nabla^{\nu} R[\nabla]) + \\
& 8 \times R[\nabla] (\nabla^{\mu} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta}) (\nabla^{\nu} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) - 16 \times R[\nabla]^{\mu\alpha} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) (\nabla^{\nu} R[\nabla]^{\beta\gamma\delta\epsilon}) - \\
& 32 \times R[\nabla]^{\alpha\beta} R[\nabla] (\nabla^{\nu} \nabla^{\mu} R[\nabla]_{\alpha\beta}) + 8 \times R[\nabla]^2 (\nabla^{\nu} \nabla^{\mu} R[\nabla]) + 8 \times R[\nabla] R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta} (\nabla^{\nu} \nabla^{\mu} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) \}
\end{aligned}$$

ln[]= << xAct`xCoba`

Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}

Copyright (C) 2003-2020, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.

Connecting to external MinGW executable...

Connection established.

Package xAct`xTensor` version 1.2.0, {2021, 10, 17}

Copyright (C) 2002-2021, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.

Package xAct`xCoba` version 0.8.6, {2021, 2, 28}

Copyright (C) 2005-2021, David Yllanes and Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.

These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details


```

-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----

```

```

In[ ]:= DefManifold[M4, 4, {α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, μ, ν, λ, σ, τ}]
** DefManifold: Defining manifold M4.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM4.

In[ ]:= DefChart[space, M4, {0, 1, 2, 3}, {t[], x[], y[], z[]},
FormatBasis -> {"Partials", "Differentials"}]
** DefChart: Defining chart space.
** DefTensor: Defining coordinate scalar t[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar x[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar y[].
** DefTensor: Defining coordinate scalar z[].
** DefMapping: Defining mapping space.
** DefMapping: Defining inverse mapping ispace.
** DefTensor: Defining mapping differential tensor dispace[-α, ispaceα].
** DefTensor: Defining mapping differential tensor dspace[-α, spaceα].
** DefBasis: Defining basis space. Coordinated basis.
** DefCovD: Defining parallel derivative PDspace[-α].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionPDspace[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelPDspace[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining vanishing Riemann tensor RiemannPDspace[-α, -β, -γ, δ].
** DefTensor: Defining vanishing Ricci tensor RicciPDspace[-α, -β].
** DefTensor: Defining antisymmetric +1 density etaUpspace[α, β, γ, δ].
** DefTensor: Defining antisymmetric -1 density etaDownspace[-α, -β, -γ, -δ].

In[ ]:= DefScalarFunction /@ {a};
** DefScalarFunction: Defining scalar function a.

```

```

In[ ]:= MatrixForm[MatrixMetric = DiagonalMatrix[{-1, a[t]^2, a[t]^2, a[t]^2}]
Out[ ]:= MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t]^2 \end{pmatrix}$$


In[ ]:= met = CTensor[MatrixMetric, {-space, -space}]
Out[ ]:= CTensor[{{-1, 0, 0, 0}, {0, a[t]^2, 0, 0}, {0, 0, a[t]^2, 0}, {0, 0, 0, a[t]^2}},
{-space, -space}, 0]

In[ ]:= SetCMetric[met, space, SignatureOfMetric -> {-1, 3, 0}]
met[-μ, -ν]
Out[ ]:= 
$$\begin{matrix} \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t]^2 \end{matrix} & \mu\nu \end{matrix}$$


In[ ]:= CD = LC[met];
In[ ]:= MetricCompute[met, space, All]
In[ ]:= xAct`xCoba`$LargeComponentSize = 4000;
In[ ]:= Christoffel[CD, PDspace][α, -β, -μ]
Out[ ]:= 
$$\begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t] a'[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t] a'[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a[t] a'[t] \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'[t] & 0 & 0 & 0 \\ a[t] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \alpha & \beta\mu \end{matrix}$$


In[ ]:= Christoffel[CD, PDspace][{0, space}, {1, -space}, {1, -space}]

```

```

Out[ ]:= a[t] a'[t]
In[ ]:= Christoffel[CD, PDspace][{1, space}, {1, -space}, {0, -space}]
Out[ ]:=  $\frac{a'[t]}{a[t]}$ 
In[ ]:= Ricci[CD][-\alpha, -\beta]
Out[ ]:=  $\begin{matrix} \frac{3 a''[t]}{a[t]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 a'[t]^2 - a[t] a''[t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 a'[t]^2 - a[t] a''[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 a'[t]^2 - a[t] a''[t] \end{matrix}$ 
In[ ]:= RicciScalar[CD][ ]
Out[ ]:=  $\frac{6 (a'[t]^2 + a[t] a''[t])}{a[t]^2}$ 
In[ ]:= Riemann[CD][-\mu, -\nu, -\alpha, -\beta]
Out[ ]:=  $\begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & -a[t] a''[t] & 0 & 0 \\ a[t] a''[t] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & -a[t] a''[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a[t] a''[t] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -a[t] a''[t] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a[t] a''[t] & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & a[t] a''[t] & 0 & 0 \\ -a[t] a''[t] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 a'[t]^2 & a[t]^2 a'[t]^2 & 0 \\ -a[t]^2 a'[t]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 a'[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a[t]^2 a'[t]^2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & a[t] a''[t] & 0 \\ -a[t] a''[t] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a[t]^2 a'[t]^2 & 0 \\ 0 & a[t]^2 a'[t]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a[t]^2 a'[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a[t]^2 a'[t]^2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & a[t] a''[t] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a[t] a''[t] & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a[t]^2 a'[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a[t]^2 a'[t]^2 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a[t]^2 a'[t]^2 & 0 \\ 0 & a[t]^2 a'[t]^2 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$ 
In[ ]:= DefParameter[x]
** DefParameter: Defining parameter x.
In[ ]:= DefTensor[P[-\mu, -\nu], M4]
IndexSet[P[\mu_, \nu_], -96 * x met[\mu, \nu] Ricci[CD][-\alpha, \gamma] x
Ricci[CD][\alpha, \beta] Ricci[CD][-\beta, \delta] x

```



```

Ricci[CD] [-γ, -δ] + 24 × met[μ, ν] Ricci[CD] [-α, -β] ×
Ricci[CD] [α, β] Ricci[CD] [-γ, -δ] ×
Ricci[CD] [γ, δ] - Ricci[CD] [μ, ν] + 320 × Ricci[CD] [-α, γ] ×
Ricci[CD] [α, β] Ricci[CD] [-β, -γ] ×
Ricci[CD] [μ, ν] + 1/2 met[μ, ν] RicciScalar[CD] [] +
160/3 × met[μ, ν] Ricci[CD] [-α, γ] ×
Ricci[CD] [α, β] Ricci[CD] [-β, -γ] ×
RicciScalar[CD] [] - 352 × Ricci[CD] [-α, -β] ×
Ricci[CD] [α, β] Ricci[CD] [μ, ν] ×
RicciScalar[CD] [] - 8 × met[μ, ν] Ricci[CD] [-α, -β] ×
Ricci[CD] [α, β] RicciScalar[CD] [] ^2 + 48 × Ricci[CD] [μ, ν] RicciScalar[CD] [] ^3 +
1/6 × met[μ, ν] RicciScalar[CD] [] ^4 + 256 × Ricci[CD] [α, β] ×
Ricci[CD] [γ, δ] Ricci[CD] [μ, ν] ×
Riemann[CD] [-α, -γ, -β, -δ] - 16 × met[μ, ν] Ricci[CD] [α, β] ×
Ricci[CD] [γ, δ] RicciScalar[CD] [] ×
Riemann[CD] [-α, -γ, -β, -δ] + 32 × Ricci[CD] [μ, ν] RicciScalar[CD] [] ×
Riemann[CD] [-α, -β, -γ, -δ] ×
Riemann[CD] [α, β, γ, δ] - 7 × met[μ, ν] RicciScalar[CD] [] ^2 ×
Riemann[CD] [-α, -β, -γ, -δ] ×
Riemann[CD] [α, β, γ, δ] - 48 × met[μ, ν] Ricci[CD] [α, β] ×
Ricci[CD] [γ, δ] ×
Riemann[CD] [-α, -γ, ε, ζ] ×
Riemann[CD] [-β, -δ, -ε, -ζ] - 48 × Ricci[CD] [μ, ν] ×
Riemann[CD] [-α, -β, ε, ζ] ×
Riemann[CD] [α, β, γ, δ] ×
Riemann[CD] [-γ, -δ, -ε, -ζ] + 12 × met[μ, ν] RicciScalar[CD] [] ×
Riemann[CD] [-α, -β, ε, ζ] ×
Riemann[CD] [α, β, γ, δ] ×
Riemann[CD] [-γ, -δ, -ε, -ζ] + 32 × met[μ, ν] Ricci[CD] [α, β] ×
Ricci[CD] [γ, δ] ×
Riemann[CD] [-α, ε, -β, ζ] ×
Riemann[CD] [-γ, -ε, -δ, -ζ] + 8 × met[μ, ν] Ricci[CD] [-α, -β] ×
Ricci[CD] [α, β] ×
Riemann[CD] [-γ, -δ, -ε, -ζ] ×
Riemann[CD] [γ, δ, ε, ζ] - 1/2 × met[μ, ν] ×
Riemann[CD] [-α, -β, -γ, -δ] ×
Riemann[CD] [α, β, γ, δ] ×
Riemann[CD] [-ε, -ζ, -η, -θ] ×

```

$$\begin{aligned}
& \text{Riemann[CD]}[\epsilon, \xi, \eta, \theta] + 16 \times \text{Ricci[CD]}[\mu, \nu] \text{RicciScalar[CD]}[] \\
& \quad (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]]) - \\
& \quad 8 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{RicciScalar[CD]}[]^2 (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]]) + \\
& \quad 64 \times \text{Ricci[CD]}[\beta, \gamma] \text{Ricci[CD]}[\nu, \alpha] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\mu][\text{Ricci[CD]}[-\beta, -\gamma]]]) - \\
& \quad 16 \times \text{Ricci[CD]}[\nu, \alpha] \times \\
& \text{Riemann[CD]}[\beta, \gamma, \delta, \epsilon] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\mu][\text{Riemann[CD]}[-\beta, -\gamma, -\delta, -\epsilon]]]) + \\
& \quad 64 \times \text{Ricci[CD]}[\beta, \gamma] \text{Ricci[CD]}[\mu, \alpha] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\nu][\text{Ricci[CD]}[-\beta, -\gamma]]]) - \\
& \quad 16 \times \text{Ricci[CD]}[\mu, \alpha] \times \\
& \text{Riemann[CD]}[\beta, \gamma, \delta, \epsilon] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\nu][\text{Riemann[CD]}[-\beta, -\gamma, -\delta, -\epsilon]]]) + \\
& \quad 16 \times \text{Ricci[CD]}[\mu, \nu] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{RicciScalar[CD]}[]]) \\
& \quad (\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]) - \\
& \quad 8 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{RicciScalar[CD]}[] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{RicciScalar[CD]}[]]) \\
& \quad (\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]) - \\
& \quad 16 \times \text{Ricci[CD]}[\nu, -\alpha] \text{RicciScalar[CD]}[] (\text{CD}[\alpha][\text{CD}[\mu][\text{RicciScalar[CD]}[]]]) - \\
& \quad 16 \times \text{Ricci[CD]}[\mu, -\alpha] \text{RicciScalar[CD]}[] (\text{CD}[\alpha][\text{CD}[\nu][\text{RicciScalar[CD]}[]]]) - \\
& \quad 64 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{Ricci[CD]}[\gamma, \delta]]) \\
& \quad (\text{met}[-\beta, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{Ricci[CD]}[-\gamma, -\delta]]) - \\
& \quad 16 \times \text{Riemann[CD]}[\mu, \alpha, \nu, \beta] (\text{met}[-\alpha, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{Riemann[CD]}[\gamma, \delta, \epsilon, \xi]]) \\
& \quad (\text{met}[-\beta, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{Riemann[CD]}[-\gamma, -\delta, -\epsilon, -\xi]]) - 16 \times \text{Riemann[CD]}[\gamma, \delta, \epsilon, \xi] \times \\
& \text{Riemann[CD]}[\mu, \alpha, \nu, \beta] (\text{met}[-\beta, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[-\alpha][\text{Riemann[CD]}[-\gamma, -\delta, -\epsilon, -\xi]]]) + \\
& \quad 16 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta] (\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]) \\
& \quad (\text{CD}[\beta][\text{RicciScalar[CD]}[]]) - \\
& \quad 16 \times \text{Riemann[CD]}[\mu, -\alpha, \nu, -\beta] (\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]) (\text{CD}[\beta][\text{RicciScalar[CD]}[]]) + \\
& \quad 16 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta] \times \\
& \text{RicciScalar[CD]}[] (\text{CD}[\beta][\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]]) - 8 \times \text{RicciScalar[CD]}[] \times \\
& \text{Riemann[CD]}[\mu, -\alpha, \nu, -\beta] (\text{CD}[\beta][\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]]) - 8 \times \text{RicciScalar[CD]}[] \times \\
& \text{Riemann[CD]}[\mu, -\beta, \nu, -\alpha] (\text{CD}[\beta][\text{CD}[\alpha][\text{RicciScalar[CD]}[]]]) - \\
& \quad 64 \times \text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta] \text{Ricci[CD]}[\mu, \nu] (\text{met}[-\gamma, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\gamma][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]]) + \\
& \quad 32 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta] \times \\
& \text{RicciScalar[CD]}[] (\text{met}[-\gamma, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[\gamma][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]]) - \\
& \quad 64 \times \text{Ricci[CD]}[\mu, \nu] (\text{met}[-\gamma, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]) (\text{CD}[\gamma][\text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta]]) + \\
& \quad 32 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{RicciScalar[CD]}[] (\text{met}[-\gamma, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]) \\
& \quad (\text{CD}[\gamma][\text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta]]) - 64 \times \text{met}[\mu, \nu] \text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta] \times \\
& \text{Ricci[CD]}[\gamma, \delta] (\text{met}[-\delta, -\nu] \times \text{CD}[\nu][\text{CD}[-\gamma][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]]) + \\
& \quad 64 \times \text{Riemann[CD]}[\mu, -\gamma, \nu, -\delta] (\text{CD}[\gamma][\text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta]]) (\text{CD}[\delta][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]) + \\
& \quad 32 \times \text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta] \times \\
& \text{Riemann[CD]}[\mu, -\gamma, \nu, -\delta] (\text{CD}[\delta][\text{CD}[\gamma][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]]) + 32 \times \text{Ricci[CD]}[\alpha, \beta] \times \\
& \text{Riemann[CD]}[\mu, -\delta, \nu, -\gamma] (\text{CD}[\delta][\text{CD}[\gamma][\text{Ricci[CD]}[-\alpha, -\beta]]]) + 64 \times \text{Ricci[CD]}[\mu, \nu] \times
\end{aligned}$$

```

Riemann[CD][ $-\alpha, -\gamma, -\beta, -\delta$ ](CD[ $\delta$ ][CD[ $\gamma$ ][Ricci[CD][ $\alpha, \beta$ ]]) -
32  $\times$  met[ $\mu, \nu$ ] RicciScalar[CD][ ]  $\times$ 
Riemann[CD][ $-\alpha, -\gamma, -\beta, -\delta$ ](CD[ $\delta$ ][CD[ $\gamma$ ][Ricci[CD][ $\alpha, \beta$ ]]) +
16  $\times$  Ricci[CD][ $\mu, \nu$ ](CD[ $-\epsilon$ ][Riemann[CD][ $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ ]])
(CD[ $\epsilon$ ][Riemann[CD][ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ]]) -
8  $\times$  met[ $\mu, \nu$ ] RicciScalar[CD][ ] (met[ $-\epsilon, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][Riemann[CD][ $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ ]])
(CD[ $\epsilon$ ][Riemann[CD][ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ]]) + 64  $\times$  met[ $\mu, \nu$ ] Ricci[CD][ $\alpha, \beta$ ]  $\times$ 
Riemann[CD][ $\gamma, \delta, \epsilon, \xi$ ]
(met[ $-\xi, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][met[ $-\delta, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][Riemann[CD][ $-\alpha, -\gamma, -\beta, -\epsilon$ ]]) +
64  $\times$  met[ $\mu, \nu$ ] Ricci[CD][ $\alpha, \beta$ ] (met[ $-\epsilon, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][Riemann[CD][ $-\beta, -\delta, -\gamma, -\xi$ ]])
(CD[ $\xi$ ][Riemann[CD][ $-\alpha, \gamma, \delta, \epsilon$ ]]) +
64  $\times$  Ricci[CD][ $\nu, \alpha$ ] (met[ $-\alpha, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][Ricci[CD][ $-\beta, -\gamma$ ]]) (CD[ $\mu$ ][Ricci[CD][ $\beta, \gamma$ ]]) -
16  $\times$  Ricci[CD][ $\nu, -\alpha$ ] (CD[ $\alpha$ ][RicciScalar[CD][ ]]) (CD[ $\mu$ ][RicciScalar[CD][ ]]) -
16  $\times$  Ricci[CD][ $\nu, \alpha$ ] (met[ $-\alpha, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][Riemann[CD][ $-\beta, -\gamma, -\delta, -\epsilon$ ]])
(CD[ $\mu$ ][Riemann[CD][ $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ]]) -
32  $\times$  RicciScalar[CD][ ] (CD[ $\mu$ ][Ricci[CD][ $\alpha, \beta$ ]]) (CD[ $\nu$ ][Ricci[CD][ $-\alpha, -\beta$ ]]) +
64  $\times$  Ricci[CD][ $\mu, \alpha$ ] (met[ $-\alpha, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][Ricci[CD][ $-\beta, -\gamma$ ]]) (CD[ $\nu$ ][Ricci[CD][ $\beta, \gamma$ ]]) -
16  $\times$  Ricci[CD][ $\mu, -\alpha$ ] (CD[ $\alpha$ ][RicciScalar[CD][ ]]) (CD[ $\nu$ ][RicciScalar[CD][ ]]) +
8  $\times$  RicciScalar[CD][ ] (CD[ $\mu$ ][RicciScalar[CD][ ]]) (CD[ $\nu$ ][RicciScalar[CD][ ]]) +
8  $\times$  RicciScalar[CD][ ] (CD[ $\mu$ ][Riemann[CD][ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ]])
(CD[ $\nu$ ][Riemann[CD][ $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ ]]) -
16  $\times$  Ricci[CD][ $\mu, \alpha$ ] (met[ $-\alpha, -\nu$ ]  $\times$  CD[ $\nu$ ][Riemann[CD][ $-\beta, -\gamma, -\delta, -\epsilon$ ]])
(CD[ $\nu$ ][Riemann[CD][ $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ]]) -
32  $\times$  Ricci[CD][ $\alpha, \beta$ ] RicciScalar[CD][ ] (CD[ $\nu$ ][CD[ $\mu$ ][Ricci[CD][ $-\alpha, -\beta$ ]]) +
8  $\times$  RicciScalar[CD][ ] ^2 (CD[ $\nu$ ][CD[ $\mu$ ][RicciScalar[CD][ ]]]) + 8  $\times$  RicciScalar[CD][ ]  $\times$ 
Riemann[CD][ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ] (CD[ $\nu$ ][CD[ $\mu$ ][Riemann[CD][ $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ ]]) // Simplify
** DefTensor: Defining tensor P[ $-\mu, -\nu$ ].

```

$$Out[6]= \begin{matrix} \frac{3 a'[t]^2 (a[t]^5 - 576 a[t]^4 a''[t] + 96 a[t] a'[t]^2 (3 a''[t]^2 + 2 a'[t] a^{(3)}[t]))}{a[t]^7} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} a[t]^2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} \mu\nu$$

In[6]= P[{0, space}, {0, -space}]

$$Out[6]= \frac{1}{a[t]^7} (3 a'[t]^2 (a[t]^5 - 576 a[t]^4 a''[t] + 96 a[t] a'[t]^2 (3 a''[t]^2 + 2 a'[t] a^{(3)}[t]))$$

In[6]= P[{1, space}, {1, -space}]

$$Out[7]= \frac{1}{a[t]^7} (a[t]^5 a'[t]^2 + 2 a[t]^6 a''[t] + 2304 a'[t]^6 a''[t] - 288 a[t] a'[t]^4 (15 a''[t]^2 + 4 a'[t] a^{(3)}[t]) + 192 a[t]^2 a'[t]^2 (6 a''[t]^3 + 8 a'[t] a''[t] a^{(3)}[t] + a'[t]^2 a^{(4)}[t]))$$

In[7]= P[{2, space}, {2, -space}]

$$Out[7]= \frac{1}{a[t]^7} (a[t]^5 a'[t]^2 + 2 a[t]^6 a''[t] + 2304 a'[t]^6 a''[t] - 288 a[t] a'[t]^4 (15 a''[t]^2 + 4 a'[t] a^{(3)}[t]) + 192 a[t]^2 a'[t]^2 (6 a''[t]^3 + 8 a'[t] a''[t] a^{(3)}[t] + a'[t]^2 a^{(4)}[t]))$$

In[7]= P[{3, space}, {3, -space}]

$$Out[7]= \frac{1}{a[t]^7} (a[t]^5 a'[t]^2 + 2 a[t]^6 a''[t] + 2304 a'[t]^6 a''[t] - 288 a[t] a'[t]^4 (15 a''[t]^2 + 4 a'[t] a^{(3)}[t]) + 192 a[t]^2 a'[t]^2 (6 a''[t]^3 + 8 a'[t] a''[t] a^{(3)}[t] + a'[t]^2 a^{(4)}[t]))$$

```

In[ ]:= << xAct`xPand`
-----
Package xAct`xPerm` version 1.2.3, {2015, 8, 23}
Copyright (C) 2003-2020, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
Connecting to external MinGW executable...
Connection established.
-----
Package xAct`xTensor` version 1.2.0, {2021, 10, 17}
Copyright (C) 2002-2021, Jose M. Martin-Garcia, under the General Public License.
-----
Package xAct`xPert` version 1.0.6, {2018, 2, 28}
Copyright (C) 2005-2020, David Brizuela, Jose M.
Martin-Garcia and Guillermo A. Mena Marugan, under the General Public License.
** Variable $PrePrint assigned value ScreenDollarIndices
** Variable $CovDFormat changed from Prefix to Postfix
** Option AllowUpperDerivatives of ContractMetric changed from False to True
** Option MetricOn of MakeRule changed from None to All
** Option ContractMetrics of MakeRule changed from False to True
-----
Package xAct`xPand` version 0.4.3, {2019, 3, 4}
Copyright (C) 2012-2018, Cyril Pitrou, Xavier Roy and Obinna Umeh under the General Public License.
-----
These packages come with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details
type Disclaimer[]. This is free software, and you are welcome to redistribute
it under certain conditions. See the General Public License for details.
-----
In[ ]:= DefManifold[M, 4, {α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, μ, ν, λ, σ, τ}]
DefMetric[-1, g[-α, -β], CD, {";", "v"}, PrintAs -> "g"]
** DefManifold: Defining manifold M.
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM.
** DefTensor: Defining symmetric metric tensor g[-α, -β].
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilon[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrag[-α, -β, -γ, -δ].

```



```

** DefTensor: Defining tetrametric Tetragl[-α, -β, -γ, -δ].
** DefCovD: Defining covariant derivative CD[-α].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelCD[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining Riemann tensor RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric Ricci tensor RicciCD[-α, -β].
** DefCovD: Contractions of Riemann automatically replaced by Ricci.
** DefTensor: Defining Ricci scalar RicciScalarCD[].
** DefCovD: Contractions of Ricci automatically replaced by RicciScalar.
** DefTensor: Defining symmetric Einstein tensor EinsteinCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining Weyl tensor WeylCD[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric TFRicci tensor TFRicciCD[-α, -β].
** DefTensor: Defining Kretschmann scalar KretschmannCD[].
** DefCovD: Computing RiemannToWeylRules for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToTFRicci for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToEinsteinRules for dim 4
** DefTensor: Defining weight +2 density Detg[]. Determinant.

In[ ]:= SetSlicing[g, n, h, cd, {"|", "d"}, "FLFlat"]
** DefTensor: Defining tensor n[τ$2275].
** DefTensor: Defining symmetric metric tensor h[-τ$2275, -τ$2276].
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilonh[-α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetrah[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric TetrahI[-α, -β, -γ, -δ].
** DefCovD: Defining covariant derivative cd[-τ$2275].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor Torsioncd[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor Christoffelcd[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining Riemann tensor Riemanncd[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric Ricci tensor Riccicd[-α, -β].
** DefCovD: Contractions of Riemann automatically replaced by Ricci.
** DefTensor: Defining Ricci scalar RicciScalarcd[].
** DefCovD: Contractions of Ricci automatically replaced by RicciScalar.
** DefTensor: Defining symmetric Einstein tensor Einsteincd[-α, -β].
** DefTensor: Defining vanishing Weyl tensor Weylcd[-α, -β, -γ, -δ].

```

```

** DefTensor: Defining symmetric TFRicci tensor TFRiccid[-α, -β].
** DefTensor: Defining Kretschmann scalar Kretschmanncd[].
** DefCovD: Computing RiemannToWeylRules for dim 3
** DefCovD: Computing RicciToTFRicci for dim 3
** DefCovD: Computing RicciToEinsteinRules for dim 3
** DefTensor: Defining weight +2 density Deth[]. Determinant.
** DefTensor: Defining extrinsic curvature tensor ExtrinsicKh[α, β]. Associated to vector n
** DefTensor: Defining acceleration vector Accelerationn[α]. Associated to vector n
** DefInertHead: Defining projector inert-head Projectorh.
Rules {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} have been declared as UpValues for h.
Rules {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} have been declared as UpValues for h.
Rules {1, 2} have been declared as UpValues for n.
Rules {1, 2, 3, 4} have been declared as UpValues for n.
Rules {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} have been declared as UpValues for n.
** DefTensor: Defining tensor M0h[LI[xAct`xPand`Private`p$3324], LI[xAct`xPand`Private`q$3324]].
** DefTensor: Defining tensor Mih[α].
** DefTensor: Defining tensor Mh[-α].
** DefTensor: Defining tensor dMh[LI[order], -α].
** DefTensor: Defining tensor ah[LI[xAct`xPand`Private`p$3343], LI[xAct`xPand`Private`q$3343]].
** DefTensor: Defining tensor Hh[LI[xAct`xPand`Private`p$3349], LI[xAct`xPand`Private`q$3349]].
** DefTensor: Defining symmetric metric tensor gah2[-τ$3356, -τ$3357].
** DefTensor: Defining inverse metric tensor Invgah2[τ$3356, τ$3357]. Metric is frozen!
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilonh2[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetragah2[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetragah2+[-α, -β, -γ, -δ].
** DefCovD: Defining covariant derivative CDah2[-τ$3356].
** DefTensor: Defining vanishing torsion tensor TorsionCDah2[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining symmetric Christoffel tensor ChristoffelCDah2[α, -β, -γ].
** DefTensor: Defining Riemann tensor RiemannDownCDah2[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining Riemann tensor
RiemannCDah2[-α, -β, -γ, δ]. Antisymmetric only in the first pair.
** DefTensor: Defining symmetric Ricci tensor RicciCDah2[-α, -β].
** DefCovD: Contractions of Riemann automatically replaced by Ricci.

```

```

** DefTensor: Defining Ricci scalar RicciScalarCDah2[.
** DefCovD: Contractions of Ricci automatically replaced by RicciScalar.
** DefTensor: Defining symmetric Einstein tensor EinsteinCDah2[-α, -β].
** MakeRule: Potential problems moving indices on the LHS.
** DefTensor: Defining Weyl tensor WeylCDah2[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining symmetric TRicci tensor TRicciCDah2[-α, -β].
** DefTensor: Defining Kretschmann scalar KretschmannCDah2[.
** DefCovD: Computing RiemannToWeylRules for dim 4
** DefCovD: Computing RicciToEinsteinRules for dim 4
** DefTensor: Defining weight +2 density Detgah2[. Determinant.
    Rules {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} have been declared as UpValues for g.
    Rules {1} have been declared as UpValues for g.
** DefTensor: Defining tensor Connectionh[-τ$2275, -τ$2276, -τ$2277].
** DefTensor: Defining tensor CSh[-τ$2275, -τ$2276, -τ$2277].
** DefTensor: Defining tensor nth[τ$2275, τ$2276].
** DefTensor: Defining tensor avh[-τ$2275].
    Rules {1, 2, 3, 4} have been declared as UpValues for avh.
** DefTensor: Defining tensor
    Kh[LI[xAct`xPand`Private`p$4069], LI[xAct`xPand`Private`q$4069], -τ$2275, -τ$2276].
In[ ]:= DefMetricFields[g, dg, h]
** DefParameter: Defining parameter ε.
** DefTensor: Defining tensor dg[LI[order], -α, -β].
** DefTensor: Defining tensor φh[LI[xAct`xPand`Private`p$4500], LI[xAct`xPand`Private`q$4500]].
** DefTensor: Defining tensor Bsh[LI[xAct`xPand`Private`p$4506], LI[xAct`xPand`Private`q$4506]].
** DefTensor: Defining tensor Bvh[LI[xAct`xPand`Private`p$4512], LI[xAct`xPand`Private`q$4512], -α].
** DefTensor: Defining tensor ψh[LI[xAct`xPand`Private`p$4519], LI[xAct`xPand`Private`q$4519]].
** DefTensor: Defining tensor Esh[LI[xAct`xPand`Private`p$4525], LI[xAct`xPand`Private`q$4525]].
** DefTensor: Defining tensor Evh[LI[xAct`xPand`Private`p$4531], LI[xAct`xPand`Private`q$4531], -α].
** DefTensor: Defining tensor
    Eth[LI[xAct`xPand`Private`p$4538], LI[xAct`xPand`Private`q$4538], -α, -β].
** DefTensor: Defining tensor Th[LI[xAct`xPand`Private`p$4548], LI[xAct`xPand`Private`q$4548]].
** DefTensor: Defining tensor Lsh[LI[xAct`xPand`Private`p$4554], LI[xAct`xPand`Private`q$4554]].
** DefTensor: Defining tensor Lvh[LI[xAct`xPand`Private`p$4560], LI[xAct`xPand`Private`q$4560], -α].

```

```

In[ ]:= DefMatterFields[u, du, h]
** DefTensor: Defining tensor  $\varphi$  [LI[xAct`xPand`Private`p$4925], LI[xAct`xPand`Private`q$4925]].
** DefTensor: Defining tensor  $\rho u$  [LI[xAct`xPand`Private`p$4931], LI[xAct`xPand`Private`q$4931]].
** DefTensor: Defining tensor  $Pu$  [LI[xAct`xPand`Private`p$4937], LI[xAct`xPand`Private`q$4937]].
** DefTensor: Defining tensor
Vspathu [LI[xAct`xPand`Private`p$4943], LI[xAct`xPand`Private`q$4943], - $\alpha$ ].
** DefTensor: Defining tensor  $V\theta u$  [LI[xAct`xPand`Private`p$4950], LI[xAct`xPand`Private`q$4950]].
** DefTensor: Defining tensor  $Vshu$  [LI[xAct`xPand`Private`p$4956], LI[xAct`xPand`Private`q$4956]].
** DefTensor: Defining tensor
Vvhu [LI[xAct`xPand`Private`p$4962], LI[xAct`xPand`Private`q$4962], - $\alpha$ ].
** DefTensor: Defining tensor  $u[\alpha]$ .
** DefTensor: Defining tensor  $du$  [LI[order],  $\alpha$ ].

In[ ]:= MyxPand[expr_, gauge_, order_] := ToxPand[expr, dg, u, du, h, gauge, order]

In[ ]:= DefConstantSymbol[l]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol l.

In[ ]:= DefConstantSymbol[ $\Lambda$ ]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol  $\Lambda$ .

In[ ]:= DefConstantSymbol[ $\kappa$ ]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol  $\kappa$ .

In[ ]:= DefConstantSymbol[b]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol b.

In[ ]:= DefConstantSymbol[c]
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol c.

In[ ]:= DefTensor[T[- $\mu$ , - $\nu$ ], M]
** DefTensor: Defining tensor  $T[-\mu, -\nu]$ .

In[ ]:= IndexSet[T[ $\mu$ _,  $\nu$ _, ( $\rho u$  + If[$Dust,  $\theta$ , Pu])] u[ $\mu$ ] u[ $\nu$ ] + If[$Dust,  $\theta$ , Pu] g[ $\mu$ ,  $\nu$ ];

In[ ]:= $Dust = False;

In[ ]:= $ConformalTime = True;

In[ ]:= $FirstOrderVectorPerturbations = False;

In[ ]:= $FirstOrderVectorPerturbations = True;

```



```

In[ ]:= ExtractComponents[MyxPand[EinsteinCD[μ, -ν], "NewtonGauge", 1], h, {"Time", "Time"}]
** DefTensor: Defining tensor ChristoffelCDCDah2[α, -β, -γ].
The Splitting of  $\frac{R[\nabla]^\mu{}_\nu}{(a)^2} + \dots$  was performed in 3.98069 seconds.
Out[ ]:= 
$$-\frac{3 \mathcal{H}^2}{a^2} + \epsilon \left( \frac{6 \mathcal{H}^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{6 \mathcal{H} \binom{(1)'}{\psi}}{a^2} - \frac{2 \left( d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^2} \right)$$


In[ ]:= ExtractComponents[MyxPand[EinsteinCD[μ, -ν], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]
The Splitting of  $\frac{R[\nabla]^\mu{}_\nu}{(a)^2} + \dots$  was performed in 3.5872 seconds.
Out[ ]:= 
$$-\frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2}{a^2} - \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'}{a^2} +$$


$$\epsilon \left( \frac{\binom{(1)''}{E}^\mu{}_\nu}{a^2} + \frac{2 \binom{(1)'}{E}^\mu{}_\nu \mathcal{H}}{a^2} + \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{4 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \binom{(1)'}{\phi}}{a^2} + \frac{4 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \binom{(1)'}{\psi}}{a^2} + \right.$$


$$\frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \binom{(1)''}{\psi}}{a^2} - \frac{d_\alpha d^\alpha \binom{(1)'}{\psi}}{a^2} + \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left( d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^2} - \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left( d_\alpha d^\alpha \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^2} -$$


$$\left. \frac{\mathcal{H} \left( d^\mu \binom{(1)}{B}_\nu \right)}{a^2} - \frac{d^\mu \binom{(1)'}{B}_\nu}{2 a^2} - \frac{\mathcal{H} \left( d_\nu \binom{(1)}{B}^\mu \right)}{a^2} - \frac{d_\nu \binom{(1)'}{B}^\mu}{2 a^2} - \frac{d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{d_\nu d^\mu \binom{(1)'}{\psi}}{a^2} \right)$$


In[ ]:= DefTensor[P[-μ, -ν], M]
** DefTensor: Defining tensor P[-μ, -ν].
In[ ]:= IndexSet[P[μ_, ν_],

$$\frac{1}{2} \left( \text{RicciCD}[\mu, \nu] * (2 + 4 * \kappa * \text{RicciScalarCD}[]) - \right.$$


$$g[\mu, \nu] \left( \text{RicciScalarCD}[] + \kappa * (\text{RicciScalarCD}[])^2 - \right.$$


$$4 * \kappa * \text{CD}[-\alpha] [\text{CD}[\alpha] [\text{RicciScalarCD}[]]] -$$


$$\left. \left. 2 * \kappa * (\text{CD}[\mu] [\text{CD}[\nu] [\text{RicciScalarCD}[]]] + \text{CD}[\nu] [\text{CD}[\mu] [\text{RicciScalarCD}[]]]) \right) // \text{Simplify} \right]$$

Out[ ]:= 
$$\frac{1}{2} \left( R[\nabla]^{\mu\nu} (2 + 4 \kappa R[\nabla]) - g^{\mu\nu} (R[\nabla] + \kappa R[\nabla]^2 - 4 \kappa (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla])) - 2 \kappa (\nabla^\mu \nabla^\nu R[\nabla] + \nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]) \right)$$


```

```

In[*]:= P[μ, -ν]
Out[*]:=  $\frac{1}{2} \left( R[\nabla]^\mu{}_\nu (2 + 4 \times R[\nabla]) - \delta_\nu^\mu (R[\nabla] + \kappa R[\nabla]^2 - 4 \times (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla])) - 2 \times (\nabla^\mu \nabla_\nu R[\nabla] + \nabla_\nu \nabla^\mu R[\nabla]) \right)$ 
In[*]:= ExtractComponents[MyxPand[P[μ, -ν], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]
** Warning, the induced derivatives are commuting endlessly. Stopped
after 10 iterations to avoid an infinite loop. This is anormal behaviour. **
The Splitting of  $\frac{2 \times R[\nabla]^\mu{}_\nu R[\nabla]}{(a)^4} + \dots$  was performed in 50.0361 seconds.
Out[*]:= 
$$-\frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2}{a^2} - \frac{18 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^4}{a^4} - \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'}{a^2} + \frac{72 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'}{a^4} - \frac{6 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'^2}{a^4} + \frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}''}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'''}{a^4} +$$


$$\in \left( \frac{{}^{(1)}E''^\mu{}_\nu}{a^2} + \frac{2 \left( {}^{(1)}E'^\mu{}_\nu \right) \mathcal{H}}{a^2} + \frac{12 \times \left( {}^{(1)}E''^\mu{}_\nu \right) \mathcal{H}^2}{a^4} + \frac{12 \times \left( {}^{(1)}E''^\mu{}_\nu \right) \mathcal{H}'}{a^4} + \frac{24 \times \left( {}^{(1)}E'^\mu{}_\nu \right) \mathcal{H} \mathcal{H}'}{a^4} + \frac{12 \times \left( {}^{(1)}E'^\mu{}_\nu \right) \mathcal{H}''}{a^4} +$$


$$\frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^2} + \frac{72 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^4 \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^4} + \frac{4 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^2} - \frac{288 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^4} +$$


$$\frac{24 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'^2 \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^4} - \frac{48 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}'' \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^4} + \frac{48 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}''' \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^4} + \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left( {}^{(1)}\phi \right)}{a^2} -$$


$$\frac{72 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^3 \left( {}^{(1)'}\phi \right)}{a^4} - \frac{24 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}' \left( {}^{(1)'}\phi \right)}{a^4} + \frac{72 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'' \left( {}^{(1)'}\phi \right)}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \left( {}^{(1)''}\phi \right)}{a^4} +$$


$$\frac{48 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \left( {}^{(1)''}\phi \right)}{a^4} + \frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left( {}^{(1)'''}\phi \right)}{a^4} + \frac{4 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left( {}^{(1)'}\psi \right)}{a^2} - \frac{168 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}' \left( {}^{(1)'}\psi \right)}{a^4} +$$


$$\frac{60 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'' \left( {}^{(1)'}\psi \right)}{a^4} + \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \left( {}^{(1)''}\psi \right)}{a^2} - \frac{84 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \left( {}^{(1)''}\psi \right)}{a^4} + \frac{60 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \left( {}^{(1)''}\psi \right)}{a^4} + \frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \left( {}^{(1)''''}\psi \right)}{a^4} -$$


$$\frac{d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)}E^\mu{}_\nu \right)}{a^2} - \frac{12 \times \mathcal{H}^2 \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)}E^\mu{}_\nu \right) \right)}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}' \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)}E^\mu{}_\nu \right) \right)}{a^4} + \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)}\phi \right) \right)}{a^2} -$$


$$\frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)}\phi \right) \right)}{a^4} - \frac{24 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)}\phi \right) \right)}{a^4} - \frac{24 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)'}\phi \right) \right)}{a^4} +$$


$$\frac{4 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)''}\phi \right) \right)}{a^4} - \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)'}\psi \right) \right)}{a^2} - \frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)'}\psi \right) \right)}{a^4} + \frac{12 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \left( d_\alpha d^\alpha \left( {}^{(1)'}\psi \right) \right)}{a^4} -$$


```

$$\begin{aligned}
& \frac{12 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{20 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)''}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{4 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \left(d_{\beta} d^{\beta} d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \\
& \frac{8 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \left(d_{\beta} d^{\beta} d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{\mathcal{H} \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^2} - \frac{12 \times \mathcal{H}' \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^4} - \frac{6 \times \mathcal{H}'' \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^4} - \frac{d^{\mu} \overset{(1)'}{B}_{\nu}}{2 a^2} - \\
& \frac{6 \times \mathcal{H}^2 \left(d^{\mu} \overset{(1)'}{B}_{\nu} \right)}{a^4} - \frac{6 \times \mathcal{H}' \left(d^{\mu} \overset{(1)'}{B}_{\nu} \right)}{a^4} - \frac{\mathcal{H} \left(d_{\nu} \overset{(1)}{B}^{\mu} \right)}{a^2} - \frac{12 \times \mathcal{H}' \left(d_{\nu} \overset{(1)}{B}^{\mu} \right)}{a^4} - \frac{6 \times \mathcal{H}'' \left(d_{\nu} \overset{(1)}{B}^{\mu} \right)}{a^4} - \\
& \frac{d_{\nu} \overset{(1)'}{B}^{\mu}}{2 a^2} - \frac{6 \times \mathcal{H}^2 \left(d_{\nu} \overset{(1)'}{B}^{\mu} \right)}{a^4} - \frac{6 \times \mathcal{H}' \left(d_{\nu} \overset{(1)'}{B}^{\mu} \right)}{a^4} - \frac{d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{12 \times \mathcal{H}^2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \\
& \frac{12 \times \mathcal{H}' \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\psi}}{a^2} + \frac{12 \times \mathcal{H}^2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H}' \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^4} + \\
& \left. \frac{36 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)''}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{4 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{8 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^4} \right)
\end{aligned}$$

In[10]= p1 = ExtractComponents[MyxPand[2 * RicciCD[μ, -ν], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]

The Splitting of $\frac{2 R[\nabla]^{\mu}_{\nu}}{(a)^2} + \dots$ was performed in 3.02964 seconds.

$$\begin{aligned}
\text{Out[10]} = & \frac{4 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2}{a^2} + \frac{2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'}{a^2} + \\
& \in \left(\frac{2 \left(\overset{(1)}{E}^{\mu}_{\nu} \right)''}{a^2} + \frac{4 \left(\overset{(1)}{E}^{\mu}_{\nu} \right)' \mathcal{H}}{a^2} - \frac{8 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(\overset{(1)}{\phi} \right)}{a^2} - \frac{4 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}' \left(\overset{(1)}{\phi} \right)}{a^2} - \frac{2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(\overset{(1)'}{\phi} \right)}{a^2} - \right. \\
& \frac{10 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(\overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^2} - \frac{2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \left(\overset{(1)''}{\psi} \right)}{a^2} - \frac{2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{E}^{\mu}_{\nu} \right)}{a^2} + \frac{2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^2} - \\
& \left. \frac{2 \mathcal{H} \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^2} - \frac{d^{\mu} \overset{(1)'}{B}_{\nu}}{a^2} - \frac{2 \mathcal{H} \left(d_{\nu} \overset{(1)}{B}^{\mu} \right)}{a^2} - \frac{d_{\nu} \overset{(1)'}{B}^{\mu}}{a^2} - \frac{2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^2} + \frac{2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^2} \right)
\end{aligned}$$

In[10]: **p2 = ExtractComponents[MyxPand[4**RicciCD[μ, -ν] × RicciScalarCD[], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]**

The Splitting of $\frac{4 \times R[\nabla]^\mu{}_\nu R[\nabla]}{(a)^4}$ +... was performed in 10.1556 seconds.

$$\begin{aligned} \text{Out[10]} = & \frac{48 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^4}{a^4} + \frac{72 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'^2}{a^4} + \\ & \left(\frac{24 \times \binom{(1)}{E}{}''_{\nu} \mathcal{H}^2}{a^4} + \frac{48 \times \binom{(1)}{E}{}'_{\nu} \mathcal{H}^3}{a^4} + \frac{24 \times \binom{(1)}{E}{}''_{\nu} \mathcal{H}'}{a^4} + \frac{48 \times \binom{(1)}{E}{}'_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'}{a^4} - \right. \\ & \frac{192 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \frac{288 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \frac{96 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \frac{72 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^3 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \\ & \frac{48 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \frac{264 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \frac{192 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \frac{72 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \\ & \frac{48 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}^2 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E}{}^\mu{}_\nu)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E}{}^\mu{}_\nu)}{a^4} - \frac{16 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi})}{a^4} - \\ & \frac{8 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi})}{a^4} + \frac{56 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi})}{a^4} + \frac{40 \times \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi})}{a^4} - \\ & \frac{24 \times \mathcal{H}^3 (d^\mu \binom{(1)}{B}_\nu)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H} \mathcal{H}' (d^\mu \binom{(1)}{B}_\nu)}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}^2 (d^\mu \binom{(1)'}{B}_\nu)}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}' (d^\mu \binom{(1)'}{B}_\nu)}{a^4} - \\ & \frac{24 \times \mathcal{H}^3 (d_\nu \binom{(1)}{B}^\mu)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H} \mathcal{H}' (d_\nu \binom{(1)}{B}^\mu)}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}^2 (d_\nu \binom{(1)'}{B}^\mu)}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}' (d_\nu \binom{(1)'}{B}^\mu)}{a^4} - \\ & \left. \frac{24 \times \mathcal{H}^2 (d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\phi})}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\phi})}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}^2 (d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\psi})}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\psi})}{a^4} \right) \end{aligned}$$

In[11]: **p3 = ExtractComponents[MyxPand[-delta[-ν, μ] × RicciScalarCD[], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]**

The Splitting of $-\frac{\delta^\mu{}_\nu R[\nabla]}{(a)^2}$ +... was performed in 1.09575 seconds.

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & -\frac{6 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2}{a^2} - \frac{6 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}'}{a^2} + \\
& \left(\frac{12 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{12 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{6 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H} \binom{(1)'}{\phi}}{a^2} + \frac{18 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H} \binom{(1)'}{\psi}}{a^2} + \frac{6 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \binom{(1)''}{\psi}}{a^2} + \right. \\
& \left. \frac{2 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^2} - \frac{4 \bar{h}_{\nu}^{\mu} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^2} \right)
\end{aligned}$$

In[*]= **p4 = ExtractComponents**[MyxPand[-delta[-ν, μ] × (κ × (RicciScalarCD[])²), "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]

The Splitting of $-\frac{\kappa \bar{\phi}_{\nu}^{\mu} R[\nabla]^2}{(a)^4} + \dots$ was performed in 1.803 seconds.

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & -\frac{36 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^4}{a^4} - \frac{72 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'}{a^4} - \frac{36 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}'^2}{a^4} + \\
& \left(\frac{144 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{288 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{144 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \right. \\
& \frac{72 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \frac{72 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \frac{216 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \frac{216 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \\
& \frac{72 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} + \frac{72 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \\
& \left. \frac{24 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}' \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{48 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{48 \kappa \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}' \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^4} \right)
\end{aligned}$$

In[*]= **p5 = ExtractComponents**[MyxPand[delta[-ν, μ] × (4 × κ × g[-α, -ν] × CD[ν][CD[α][RicciScalarCD[]]]), "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]

The Splitting of $\frac{40 \kappa R[\nabla] (\nabla^{\mu} a) (\nabla_{\nu} a)}{(a)^6} + \dots$ was performed in 23.4559 seconds.

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*] = & \frac{48 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4}{a^4} - \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}''}{a^4} + \\
& \left(\frac{48 \times \binom{(1)}{E^{\mu}_{\nu}} \mathcal{H}^3}{a^4} - \frac{24 \times \binom{(1)}{E^{\mu}_{\nu}} \mathcal{H}''}{a^4} - \frac{192 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{96 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \right. \\
& \frac{72 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\phi}}{a^4} - \frac{192 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \\
& \frac{72 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \binom{(1)'''}{\psi}}{a^4} - \\
& \frac{16 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{8 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{32 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^4} - \\
& \frac{16 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}^3 \left(d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H}'' \left(d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}^3 \left(d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}} \right)}{a^4} + \\
& \frac{12 \times \mathcal{H}'' \left(d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}} \right)}{a^4} - \frac{48 \times \mathcal{H}^2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{48 \times \mathcal{H}' \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} - \\
& \left. \frac{72 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)''}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{8 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{16 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^4} \right)
\end{aligned}$$

`In[*]:= ExtractComponents[MyxPand[delta[-ν, μ] × g[-α, -ν] × CD[ν][CD[α][RicciScalarCD[]], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]`
 The Splitting of $\frac{10 R[\nabla] (\nabla^{\mu} a)}{(a)^6} (\nabla_{\nu} a)$ +... was performed in 21.3056 seconds.

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*] = & \frac{12 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4}{a^4} - \frac{6 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}''}{a^4} + \\
& \left(\frac{12 \binom{(1)}{E^{\mu}_{\nu}} \mathcal{H}^3}{a^4} - \frac{6 \binom{(1)}{E^{\mu}_{\nu}} \mathcal{H}''}{a^4} - \frac{48 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{24 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{18 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{6 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(\overset{(1)''}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{48 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \left(\overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{18 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \left(\overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{6 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'' \left(\overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \\
& \frac{6 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(\overset{(1)'''}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{6 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(\overset{(1)''''}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{4 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} + \\
& \frac{8 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{4 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{6 \mathcal{H}^3 \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^4} + \frac{3 \mathcal{H}'' \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^4} - \\
& \frac{6 \mathcal{H}^3 \left(d_{\nu} \overset{(1)}{B}^{\mu} \right)}{a^4} + \frac{3 \mathcal{H}'' \left(d_{\nu} \overset{(1)}{B}^{\mu} \right)}{a^4} - \frac{12 \mathcal{H}^2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{12 \mathcal{H}' \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{6 \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} - \\
& \left. \frac{18 \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{6 \left(d_{\nu} d^{\mu} \overset{(1)''}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{2 \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{4 \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} \right)
\end{aligned}$$

In[*]= **p6 = ExtractComponents[MyxPand[-2 * x x CD[μ] [CD[-ν] [RicciScalarCD[]]], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]**

The Splitting of $-\frac{20 \kappa R[\nabla] (\nabla^{\mu} a) (\nabla_{\nu} a)}{(a)^6} + \dots$ was performed in 22.1143 seconds.

$$\begin{aligned}
\text{Out[*]} = & -\frac{24 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4}{a^4} + \frac{12 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}''}{a^4} + \\
& \in \left(-\frac{24 \kappa \left(\overset{(1)'}{E}_{\nu}^{\mu} \right) \mathcal{H}^3}{a^4} + \frac{12 \kappa \left(\overset{(1)'}{E}_{\nu}^{\mu} \right) \mathcal{H}''}{a^4} + \frac{96 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \left(\overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{48 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'' \left(\overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \right. \\
& \frac{36 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \left(\overset{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{12 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(\overset{(1)''}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{96 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \left(\overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \\
& \frac{36 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \left(\overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{12 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'' \left(\overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{12 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(\overset{(1)'''}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{12 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(\overset{(1)''''}{\psi} \right)}{a^4} + \\
& \frac{8 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{4 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{16 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \\
& \left. \frac{8 \kappa \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \overset{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{12 \kappa \mathcal{H}^3 \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^4} - \frac{6 \kappa \mathcal{H}'' \left(d^{\mu} \overset{(1)}{B}_{\nu} \right)}{a^4} + \frac{12 \kappa \mathcal{H}^3 \left(d_{\nu} \overset{(1)}{B}^{\mu} \right)}{a^4} - \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{6 \times \mathcal{H}'' \left(d_\nu \mathbf{B}^\mu \right)}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}^2 \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\phi} \right)}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}' \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\phi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H} \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\phi}' \right)}{a^4} + \\ & \frac{36 \times \mathcal{H} \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\psi}' \right)}{a^4} + \frac{12 \times \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\psi}'' \right)}{a^4} + \frac{4 \times \left(d_\nu d^\mu d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi} \right)}{a^4} - \frac{8 \times \left(d_\nu d^\mu d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi} \right)}{a^4} \end{aligned} \right\}$$

`In[]:= p7 = ExtractComponents[MyxPand[-2 * κ * g[-ν, -α] * CD[α][CD[μ][RicciScalarCD]]],
"NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]`

The Splitting of $-\frac{20 \times R[\nabla] \left(\nabla^\mu a \right) \left(\nabla_\nu a \right)}{(a)^6} + \dots$ was performed in 23.0596 seconds.

$$\left. \begin{aligned} \text{Out[]} = & -\frac{24 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^4}{a^4} + \frac{12 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}''}{a^4} + \\ \in & \left(-\frac{24 \times \left(\mathbf{E}_\nu^\mu \right) \mathcal{H}^3}{a^4} + \frac{12 \times \left(\mathbf{E}_\nu^\mu \right) \mathcal{H}''}{a^4} + \frac{96 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^4 \left(\mathbf{\phi} \right)}{a^4} - \frac{48 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'' \left(\mathbf{\phi} \right)}{a^4} - \right. \\ & \frac{36 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \left(\mathbf{\phi}' \right)}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^2 \left(\mathbf{\phi}'' \right)}{a^4} + \frac{96 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^3 \left(\mathbf{\psi}' \right)}{a^4} - \\ & \frac{36 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \left(\mathbf{\psi}' \right)}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}'' \left(\mathbf{\psi}' \right)}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^2 \left(\mathbf{\psi}'' \right)}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H} \left(\mathbf{\psi}''' \right)}{a^4} + \\ & \frac{8 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi} \right)}{a^4} - \frac{4 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H} \left(d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi}' \right)}{a^4} - \frac{16 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi} \right)}{a^4} + \\ & \frac{8 \times \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H} \left(d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi}' \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H}^3 \left(d^\mu \mathbf{B}_\nu \right)}{a^4} - \frac{6 \times \mathcal{H}'' \left(d^\mu \mathbf{B}_\nu \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H}^3 \left(d_\nu \mathbf{B}^\mu \right)}{a^4} - \\ & \frac{6 \times \mathcal{H}'' \left(d_\nu \mathbf{B}^\mu \right)}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}^2 \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\phi} \right)}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}' \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\phi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H} \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\phi}' \right)}{a^4} + \\ & \left. \frac{36 \times \mathcal{H} \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\psi}' \right)}{a^4} + \frac{12 \times \left(d_\nu d^\mu \mathbf{\psi}'' \right)}{a^4} + \frac{4 \times \left(d_\nu d^\mu d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi} \right)}{a^4} - \frac{8 \times \left(d_\nu d^\mu d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi} \right)}{a^4} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
In[] := & \frac{1}{2} * (p1 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 + p7) \\
Out[] := & \frac{1}{2} \left(-\frac{2 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2}{a^2} + \frac{12 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^4}{a^4} - \frac{4 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'}{a^2} - \right. \\
& \left. \frac{12 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'^2}{a^4} + \epsilon \left(\frac{12 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{12 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^2} + \frac{6 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H} \binom{(1)'}{\phi}}{a^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{18 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H} \binom{(1)'}{\psi}}{a^2} + \frac{6 \bar{h}_v^\mu \binom{(1)''}{\psi}}{a^2} + \frac{2 \bar{h}_v^\mu \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^2} - \frac{4 \bar{h}_v^\mu \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^2} \right) + \right. \\
& \left. \epsilon \left(\frac{144 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{288 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{144 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \frac{72 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \right. \right. \\
& \frac{72 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \frac{216 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \frac{216 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \\
& \frac{72 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} + \frac{72 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \\
& \left. \left. \frac{24 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{48 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{48 \kappa \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^4} \right) + \right. \\
& \left. \epsilon \left(\frac{2 \binom{(1)''}{E_v^\mu}}{a^2} + \frac{4 \binom{(1)'}{E_v^\mu} \mathcal{H}}{a^2} - \frac{8 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^2} - \frac{4 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^2} - \frac{2 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H} \binom{(1)'}{\phi}}{a^2} - \right. \right. \\
& \frac{10 \bar{h}_v^\mu \mathcal{H} \binom{(1)'}{\psi}}{a^2} - \frac{2 \bar{h}_v^\mu \binom{(1)''}{\psi}}{a^2} - \frac{2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_v^\mu} \right)}{a^2} + \frac{2 \bar{h}_v^\mu \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^2} - \\
& \left. \left. \frac{2 \mathcal{H} \left(d^\mu \binom{(1)}{B_v} \right)}{a^2} - \frac{d^\mu \binom{(1)'}{B_v}}{a^2} - \frac{2 \mathcal{H} \left(d_v \binom{(1)}{B^\mu} \right)}{a^2} - \frac{d_v \binom{(1)'}{B^\mu}}{a^2} - \frac{2 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^2} + \frac{2 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^2} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \in \left(\frac{24 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}^2}{a^4} + \frac{48 \times \binom{(1)}{E'_{\nu}} \mathcal{H}^3}{a^4} + \frac{24 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}}{a^4} + \frac{48 \times \binom{(1)}{E'_{\nu}} \mathcal{H} \mathcal{H}'}{a^4} - \right. \\
& \frac{192 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \frac{288 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \frac{96 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \frac{72 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} - \\
& \frac{48 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} - \frac{264 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \frac{192 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \frac{72 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} - \\
& \frac{48 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}^2 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{E_{\nu}})}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}' (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{E_{\nu}})}{a^4} - \frac{16 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi})}{a^4} - \\
& \frac{8 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}' (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi})}{a^4} + \frac{56 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi})}{a^4} + \frac{40 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}' (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi})}{a^4} - \\
& \frac{24 \times \mathcal{H}^3 (d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}})}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H} \mathcal{H}' (d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}})}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}^2 (d^{\mu} \binom{(1)'}{B_{\nu}})}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}' (d^{\mu} \binom{(1)'}{B_{\nu}})}{a^4} - \\
& \frac{24 \times \mathcal{H}^3 (d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}})}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H} \mathcal{H}' (d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}})}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}^2 (d_{\nu} \binom{(1)'}{B^{\mu}})}{a^4} - \frac{12 \times \mathcal{H}' (d_{\nu} \binom{(1)'}{B^{\mu}})}{a^4} - \\
& \left. \frac{24 \times \mathcal{H}^2 (d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi})}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}' (d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi})}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}^2 (d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\psi})}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}' (d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\psi})}{a^4} \right) + \\
2 \in & \left(- \frac{24 \times \binom{(1)}{E'_{\nu}} \mathcal{H}^3}{a^4} + \frac{12 \times \binom{(1)}{E'_{\nu}} \mathcal{H}''}{a^4} + \frac{96 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \frac{48 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} - \right. \\
& \frac{36 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\phi}}{a^4} + \frac{96 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \\
& \frac{36 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} - \frac{12 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \binom{(1)'''}{\psi}}{a^4} + \\
& \left. \frac{8 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi})}{a^4} - \frac{4 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\phi})}{a^4} - \frac{16 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\psi})}{a^4} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{8 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H}^3 \left(d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}} \right)}{a^4} - \frac{6 \times \mathcal{H}'' \left(d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H}^3 \left(d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}} \right)}{a^4} - \\
& \frac{6 \times \mathcal{H}'' \left(d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}} \right)}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}^2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{24 \times \mathcal{H}' \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} + \\
& \frac{36 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)''}{\psi} \right)}{a^4} + \frac{4 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{8 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} \Bigg) + \\
& \left(\frac{48 \times \binom{(1)'}{E^{\mu}_{\nu}} \mathcal{H}^3}{a^4} - \frac{24 \times \binom{(1)'}{E^{\mu}_{\nu}} \mathcal{H}''}{a^4} - \frac{192 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \frac{96 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^4} + \right. \\
& \frac{72 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\phi}}{a^4} - \frac{192 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \\
& \frac{72 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^4} + \frac{24 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \binom{(1)'''}{\psi}}{a^4} - \\
& \frac{16 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{8 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{32 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \\
& \frac{16 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}^3 \left(d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}} \right)}{a^4} + \frac{12 \times \mathcal{H}'' \left(d^{\mu} \binom{(1)}{B_{\nu}} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H}^3 \left(d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}} \right)}{a^4} + \\
& \frac{12 \times \mathcal{H}'' \left(d_{\nu} \binom{(1)}{B^{\mu}} \right)}{a^4} - \frac{48 \times \mathcal{H}^2 \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{48 \times \mathcal{H}' \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)'}{\phi} \right)}{a^4} - \\
& \left. \left. \frac{72 \times \mathcal{H} \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{24 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} \binom{(1)''}{\psi} \right)}{a^4} - \frac{8 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^4} + \frac{16 \times \left(d_{\nu} d^{\mu} d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)'}{\psi} \right)}{a^4} \right) \right)
\end{aligned}$$

In[]:= FullSimplify[%]

$$\begin{aligned}
\text{Out[]:= } & \frac{1}{2 a^4} \left(a^2 \left(2 \in \binom{(1)''}{E^{\mu}_{\nu}} + 4 \in \binom{(1)'}{E^{\mu}_{\nu}} \right) \mathcal{H} - 2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 - 4 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}' + 4 \in \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \binom{(1)}{\phi} + \right. \\
& \left. 8 \in \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi} + 4 \in \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \binom{(1)'}{\phi} + 8 \in \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \binom{(1)'}{\psi} + 4 \in \bar{h}^{\mu}_{\nu} \binom{(1)''}{\psi} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \in \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) + 2 \in \bar{h}^\mu_\nu \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right) - 2 \in \bar{h}^\mu_\nu \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right) - 2 \in \mathcal{H} \left(d^\mu \binom{(1)}{B_\nu} \right) - \\
& \in \left(d^\mu \binom{(1)'}{B_\nu} \right) - 2 \in \mathcal{H} \left(d_\nu \binom{(1)}{B^\mu} \right) - \in \left(d_\nu \binom{(1)'}{B^\mu} \right) - 2 \in \left(d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right) + 2 \in \left(d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\psi} \right) + \\
4 \times & \left(3 \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^4 - 3 \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^2 + 6 \in \left(\binom{(1)''}{E^\mu_\nu} \right) \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) + 12 \in \left(\binom{(1)'}{E^\mu_\nu} \right) \mathcal{H} \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) - \right. \\
& 12 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^4 \left(\binom{(1)}{\phi} \right) + 12 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^2 \left(\binom{(1)}{\phi} \right) + 6 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H} \mathcal{H} \left(\binom{(1)'}{\phi} \right) - 12 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^3 \left(\binom{(1)'}{\psi} \right) + \\
& 6 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H} \mathcal{H} \left(\binom{(1)'}{\psi} \right) + 6 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H} \left(\binom{(1)''}{\psi} \right) - 6 \in \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) - 6 \in \mathcal{H} \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) + \\
& 2 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right) + 4 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H} \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right) + 2 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right) - \\
& 2 \in \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H} \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right) - 6 \in \mathcal{H}^3 \left(d^\mu \binom{(1)}{B_\nu} \right) - 6 \in \mathcal{H} \mathcal{H} \left(d^\mu \binom{(1)}{B_\nu} \right) - 3 \in \mathcal{H}^2 \left(d^\mu \binom{(1)'}{B_\nu} \right) - \\
& 3 \in \mathcal{H} \left(d^\mu \binom{(1)'}{B_\nu} \right) - 6 \in \mathcal{H}^3 \left(d_\nu \binom{(1)}{B^\mu} \right) - 6 \in \mathcal{H} \mathcal{H} \left(d_\nu \binom{(1)}{B^\mu} \right) - 3 \in \mathcal{H}^2 \left(d_\nu \binom{(1)'}{B^\mu} \right) - \\
& 3 \in \mathcal{H} \left(d_\nu \binom{(1)'}{B^\mu} \right) - 6 \in \mathcal{H}^2 \left(d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right) - 6 \in \mathcal{H} \left(d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right) + 6 \in \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) \left(d_\nu d^\mu \binom{(1)}{\psi} \right) \Big)
\end{aligned}$$

In[]:= (*Από τα παραπάνω απομονώνοντας τους όρους των ταυνοστικών διαταραχών
(βάση του decomposition theorem) έχουμε την παρακάτω εξίσωση*)

eq1 =

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2 a^4} \left(a^2 \left(2 \in \left(\binom{(1)''}{E^\mu_\nu} \right) + 4 \in \left(\binom{(1)'}{E^\mu_\nu} \right) \mathcal{H} - 2 \in \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) \right) + \right. \\
& 4 \times \left(6 \in \left(\binom{(1)''}{E^\mu_\nu} \right) \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) + 12 \in \left(\binom{(1)'}{E^\mu_\nu} \right) \mathcal{H} \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) - 6 \in \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) - \right. \\
& \left. \left. 6 \in \mathcal{H} \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out[]} = & \frac{1}{2 a^4} \left(a^2 \left(2 \in \left(\binom{(1)''}{E^\mu_\nu} \right) + 4 \in \left(\binom{(1)'}{E^\mu_\nu} \right) \mathcal{H} - 2 \in \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) \right) + \right. \\
& 4 \times \left(6 \in \left(\binom{(1)''}{E^\mu_\nu} \right) \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) + 12 \in \left(\binom{(1)'}{E^\mu_\nu} \right) \mathcal{H} \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) - 6 \in \mathcal{H}^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) - 6 \in \mathcal{H} \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right) \Big)
\end{aligned}$$

In[]:= FullSimplify[%]

$$\text{Out[]} = \frac{\in \left(a^2 + 12 \times \left(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \right) \right) \left(\binom{(1)''}{E^\mu_\nu} + 2 \left(\binom{(1)'}{E^\mu_\nu} \right) \mathcal{H} - d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E^\mu_\nu} \right)}{a^4}$$

```

In[ ]:= DefTensor[P[-μ, -ν], M]
** DefTensor: Defining tensor P[-μ, -ν].

In[ ]:= IndexSet[P[μ_, ν_], -96 × g[μ, ν] RicciCD[-α, γ] ×
RicciCD[α, β] RicciCD[-β, δ] ×
RicciCD[-γ, -δ] + 24 × g[μ, ν] RicciCD[-α, -β] ×
RicciCD[α, β] RicciCD[-γ, -δ] ×
RicciCD[γ, δ] - RicciCD[μ, ν] + 320 × RicciCD[-α, γ] ×
RicciCD[α, β] RicciCD[-β, -γ] ×
RicciCD[μ, ν] + 1/2 g[μ, ν] RicciScalarCD[] + 160/3 × g[μ, ν] RicciCD[-α, γ] ×
RicciCD[α, β] RicciCD[-β, -γ] ×
RicciScalarCD[] - 352 × RicciCD[-α, -β] ×
RicciCD[α, β] RicciCD[μ, ν] ×
RicciScalarCD[] - 8 × g[μ, ν] RicciCD[-α, -β] ×
RicciCD[α, β] RicciScalarCD[]^2 + 48 × RicciCD[μ, ν] RicciScalarCD[]^3 +
1/6 × g[μ, ν] RicciScalarCD[]^4 + 256 × RicciCD[α, β] ×
RicciCD[γ, δ] RicciCD[μ, ν] ×
RiemannCD[-α, -γ, -β, -δ] - 16 × g[μ, ν] RicciCD[α, β] ×
RicciCD[γ, δ] RicciScalarCD[] ×
RiemannCD[-α, -γ, -β, -δ] + 32 × RicciCD[μ, ν] RicciScalarCD[] ×
RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ] ×
RiemannCD[α, β, γ, δ] - 7 × g[μ, ν] RicciScalarCD[]^2 ×
RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ] ×
RiemannCD[α, β, γ, δ] - 48 × g[μ, ν] RicciCD[α, β] ×
RicciCD[γ, δ] ×
RiemannCD[-α, -γ, ε, ξ] ×
RiemannCD[-β, -δ, -ε, -ξ] - 48 × RicciCD[μ, ν] ×
RiemannCD[-α, -β, ε, ξ] ×
RiemannCD[α, β, γ, δ] ×
RiemannCD[-γ, -δ, -ε, -ξ] + 12 × g[μ, ν] RicciScalarCD[] ×
RiemannCD[-α, -β, ε, ξ] ×
RiemannCD[α, β, γ, δ] ×
RiemannCD[-γ, -δ, -ε, -ξ] + 32 × g[μ, ν] RicciCD[α, β] ×
RicciCD[γ, δ] ×
RiemannCD[-α, ε, -β, ξ] ×
RiemannCD[-γ, -ε, -δ, -ξ] + 8 × g[μ, ν] RicciCD[-α, -β] ×
RicciCD[α, β] ×
RiemannCD[-γ, -δ, -ε, -ξ] ×
RiemannCD[γ, δ, ε, ξ] - 1/2 × g[μ, ν] ×
RiemannCD[-α, β, γ, δ] ×

```

```

RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ] ×
RiemannCD[α, β, γ, δ] ×
RiemannCD[-ε, -ξ, -η, -θ] ×
RiemannCD[ε, ξ, η, θ] + 16 κ RicciCD[μ, ν] RicciScalarCD[]
(CD[-α][CD[α][RicciScalarCD[]]]) -
8 κ g[μ, ν] RicciScalarCD[]^2 (CD[-α][CD[α][RicciScalarCD[]]]) +
64 κ RicciCD[β, γ] RicciCD[ν, α] (CD[-α][CD[μ][RicciCD[-β, -γ]]]) - 16 κ RicciCD[γ, α] ×
RiemannCD[β, γ, δ, ε] (CD[-α][CD[μ][RiemannCD[-β, -γ, -δ, -ε]]]) +
64 κ RicciCD[β, γ] RicciCD[μ, α] (CD[-α][CD[ν][RicciCD[-β, -γ]]]) - 16 κ RicciCD[μ, α] ×
RiemannCD[β, γ, δ, ε] (CD[-α][CD[ν][RiemannCD[-β, -γ, -δ, -ε]]]) +
16 κ RicciCD[μ, ν] (CD[-α][RicciScalarCD[]]) (CD[α][RicciScalarCD[]]) -
8 κ g[μ, ν] RicciScalarCD[] (CD[-α][RicciScalarCD[]]) (CD[α][RicciScalarCD[]]) -
16 κ RicciCD[ν, -α] RicciScalarCD[] (CD[α][CD[μ][RicciScalarCD[]]]) -
16 κ RicciCD[μ, -α] RicciScalarCD[] (CD[α][CD[ν][RicciScalarCD[]]]) -
64 κ g[μ, ν] RicciCD[α, β] (CD[-α][RicciCD[γ, δ]]) (CD[-β][RicciCD[-γ, -δ]]) -
16 κ RiemannCD[μ, α, ν, β] (CD[-α][RiemannCD[γ, δ, ε, ξ]])
(CD[-β][RiemannCD[-γ, -δ, -ε, -ξ]]) - 16 κ RiemannCD[γ, δ, ε, ξ] ×
RiemannCD[μ, α, ν, β] (CD[-β][CD[-α][RiemannCD[-γ, -δ, -ε, -ξ]]) +
16 κ g[μ, ν] RicciCD[-α, -β] (CD[α][RicciScalarCD[]]) (CD[β][RicciScalarCD[]]) -
16 κ RiemannCD[μ, -α, ν, -β] (CD[α][RicciScalarCD[]]) (CD[β][RicciScalarCD[]]) +
16 κ g[μ, ν] RicciCD[-α, -β] ×
RicciScalarCD[] (CD[β][CD[α][RicciScalarCD[]]]) - 8 κ RicciScalarCD[] ×
RiemannCD[μ, -α, ν, -β] (CD[β][CD[α][RicciScalarCD[]]]) - 8 κ RicciScalarCD[] ×
RiemannCD[μ, -β, ν, -α] (CD[β][CD[α][RicciScalarCD[]]]) -
64 κ RicciCD[α, β] RicciCD[μ, ν] (CD[-γ][CD[γ][RicciCD[-α, -β]]]) +
32 κ g[μ, ν] RicciCD[α, β] ×
RicciScalarCD[] (CD[-γ][CD[γ][RicciCD[-α, -β]]]) -
64 κ RicciCD[μ, ν] (CD[-γ][RicciCD[-α, -β]]) (CD[γ][RicciCD[α, β]]) +
32 κ g[μ, ν] RicciScalarCD[] (CD[-γ][RicciCD[-α, -β]]) (CD[γ][RicciCD[α, β]]) -
64 κ g[μ, ν] RicciCD[α, β] ×
RicciCD[γ, δ] (CD[-δ][CD[-γ][RicciCD[-α, -β]]]) +
64 κ RiemannCD[μ, -γ, ν, -δ] (CD[γ][RicciCD[α, β]]) (CD[δ][RicciCD[-α, -β]]) +
32 κ RicciCD[α, β] ×
RiemannCD[μ, -γ, ν, -δ] (CD[δ][CD[γ][RicciCD[-α, -β]]]) + 32 κ RicciCD[α, β] ×
RiemannCD[μ, -δ, ν, -γ] (CD[δ][CD[γ][RicciCD[-α, -β]]]) + 64 κ RicciCD[μ, ν] ×
RiemannCD[-α, -γ, -β, -δ] (CD[δ][CD[γ][RicciCD[α, β]]]) - 32 κ g[μ, ν] RicciScalarCD[] ×
RiemannCD[-α, -γ, -β, -δ] (CD[δ][CD[γ][RicciCD[α, β]]]) +
16 κ RicciCD[μ, ν] (CD[-ε][RiemannCD[-α, -β, -γ, -δ]]) (CD[ε][RiemannCD[α, β, γ, δ]]) -

```


$$\begin{aligned}
& 8 \times g[\mu, \nu] \text{RicciScalarCD}[] (\text{CD}[-\epsilon] [\text{RiemannCD}[-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta]]) \\
& (\text{CD}[\epsilon] [\text{RiemannCD}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]]) + 64 \times g[\mu, \nu] \text{RicciCD}[\alpha, \beta] \times \\
& \text{RiemannCD}[\gamma, \delta, \epsilon, \zeta] (\text{CD}[-\zeta] [\text{CD}[-\delta] [\text{RiemannCD}[-\alpha, -\gamma, -\beta, -\epsilon]]]) + \\
& 64 \times g[\mu, \nu] \text{RicciCD}[\alpha, \beta] (\text{CD}[-\epsilon] [\text{RiemannCD}[-\beta, -\delta, -\gamma, -\zeta]]) \\
& (\text{CD}[\zeta] [\text{RiemannCD}[-\alpha, \gamma, \delta, \epsilon]]) + \\
& 64 \times \text{RicciCD}[\nu, \alpha] (\text{CD}[-\alpha] [\text{RicciCD}[-\beta, -\gamma]]) (\text{CD}[\mu] [\text{RicciCD}[\beta, \gamma]]) - \\
& 16 \times \text{RicciCD}[\nu, -\alpha] (\text{CD}[\alpha] [\text{RicciScalarCD}[]]) (\text{CD}[\mu] [\text{RicciScalarCD}[]]) - \\
& 16 \times \text{RicciCD}[\nu, \alpha] (\text{CD}[-\alpha] [\text{RiemannCD}[-\beta, -\gamma, -\delta, -\epsilon]]) (\text{CD}[\mu] [\text{RiemannCD}[\beta, \gamma, \delta, \epsilon]]) - \\
& 32 \times \text{RicciScalarCD}[] (\text{CD}[\mu] [\text{RicciCD}[\alpha, \beta]]) (\text{CD}[\nu] [\text{RicciCD}[-\alpha, -\beta]]) + \\
& 64 \times \text{RicciCD}[\mu, \alpha] (\text{CD}[-\alpha] [\text{RicciCD}[-\beta, -\gamma]]) (\text{CD}[\nu] [\text{RicciCD}[\beta, \gamma]]) - \\
& 16 \times \text{RicciCD}[\mu, -\alpha] (\text{CD}[\alpha] [\text{RicciScalarCD}[]]) (\text{CD}[\nu] [\text{RicciScalarCD}[]]) + \\
& 8 \times \text{RicciScalarCD}[] (\text{CD}[\mu] [\text{RicciScalarCD}[]]) (\text{CD}[\nu] [\text{RicciScalarCD}[]]) + \\
& 8 \times \text{RicciScalarCD}[] (\text{CD}[\mu] [\text{RiemannCD}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]]) (\text{CD}[\nu] [\text{RiemannCD}[-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta]]) - \\
& 16 \times \text{RicciCD}[\mu, \alpha] (\text{CD}[-\alpha] [\text{RiemannCD}[-\beta, -\gamma, -\delta, -\epsilon]]) (\text{CD}[\nu] [\text{RiemannCD}[\beta, \gamma, \delta, \epsilon]]) - \\
& 32 \times \text{RicciCD}[\alpha, \beta] \text{RicciScalarCD}[] (\text{CD}[\nu] [\text{CD}[\mu] [\text{RicciCD}[-\alpha, -\beta]]]) + \\
& 8 \times \text{RicciScalarCD}[]^2 (\text{CD}[\nu] [\text{CD}[\mu] [\text{RicciScalarCD}[]]]) + 8 \times \text{RicciScalarCD}[] \times \\
& \text{RiemannCD}[\alpha, \beta, \gamma, \delta] (\text{CD}[\nu] [\text{CD}[\mu] [\text{RiemannCD}[-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta]]]) // \text{Simplify} \\
\text{Out[4]=} & R[\nabla]^{\mu\nu} (-1 + 320 \times R[\nabla]_{\alpha\gamma}^{\nu} R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla]_{\beta\gamma} - 352 \times R[\nabla]_{\alpha\delta} R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla] + \\
& 48 \times R[\nabla]^3 + 256 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla]^{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} + 32 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta} - \\
& 48 \times R[\nabla]_{\alpha\delta}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 16 \times R[\nabla] (\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} R[\nabla]) + 16 \times (\nabla_{\alpha} R[\nabla]) (\nabla^{\alpha} R[\nabla]) - \\
& 64 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} (\nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\delta}) - 64 \times (\nabla_{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\delta}) (\nabla^{\gamma} R[\nabla]^{\alpha\delta}) + \\
& 64 \times R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} (\nabla^{\delta} \nabla^{\gamma} R[\nabla]^{\alpha\delta}) + 16 \times (\nabla_{\epsilon} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) (\nabla^{\epsilon} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta}) + \\
& \frac{1}{6} g^{\mu\nu} (3 R[\nabla] + \kappa R[\nabla]^4 - 64 \times R[\nabla]_{\alpha\gamma}^{\nu} R[\nabla]^{\alpha\delta} (9 R[\nabla]_{\beta\delta}^{\gamma} R[\nabla]_{\gamma\delta} - 5 R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]) - \\
& 96 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla]^{\gamma\delta} R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} - 42 \times R[\nabla]^2 R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta} - \\
& 288 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla]^{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha\gamma}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]_{\beta\delta\epsilon\zeta} + 72 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\delta}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + \\
& 192 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla]^{\gamma\delta} R[\nabla]_{\alpha}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} - 3 \times R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta\eta\theta} R[\nabla]^{\epsilon\zeta\eta\theta} - \\
& 48 \times R[\nabla]^2 (\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} R[\nabla]) - 48 \times R[\nabla] (\nabla_{\alpha} R[\nabla]) (\nabla^{\alpha} R[\nabla]) - 384 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]^{\gamma\delta}) \\
& (\nabla_{\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta}) + 48 \times R[\nabla]_{\alpha\delta} (R[\nabla]^{\alpha\delta} (3 R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]^{\gamma\delta} - R[\nabla]^2 + R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} R[\nabla]^{\gamma\delta\epsilon\zeta}) + \\
& 2 ((\nabla^{\alpha} R[\nabla]) (\nabla^{\beta} R[\nabla]) + R[\nabla] (\nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} R[\nabla]))) + 192 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla] (\nabla_{\gamma} \nabla^{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\delta}) + \\
& 192 \times R[\nabla] (\nabla_{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\delta}) (\nabla^{\gamma} R[\nabla]^{\alpha\delta}) - 384 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla]^{\gamma\delta} (\nabla_{\delta} \nabla_{\gamma} R[\nabla]_{\alpha\delta}) - \\
& 192 \times R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} (\nabla^{\delta} \nabla^{\gamma} R[\nabla]^{\alpha\delta}) - 48 \times R[\nabla] (\nabla_{\epsilon} R[\nabla]_{\alpha\beta\gamma\delta}) (\nabla^{\epsilon} R[\nabla]^{\alpha\beta\gamma\delta}) + \\
& 384 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} R[\nabla]^{\gamma\delta\epsilon\zeta} (\nabla_{\epsilon} \nabla_{\delta} R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\epsilon}) + 384 \times R[\nabla]^{\alpha\delta} (\nabla_{\epsilon} R[\nabla]_{\beta\delta\gamma\zeta}) (\nabla^{\delta} R[\nabla]_{\alpha}^{\gamma\delta\epsilon}) + \\
& 8 \times (8 R[\nabla]^{\beta\gamma} (R[\nabla]^{\nu\alpha} (\nabla_{\alpha} \nabla^{\mu} R[\nabla]_{\beta\gamma}) + R[\nabla]^{\mu\alpha} (\nabla_{\alpha} \nabla^{\nu} R[\nabla]_{\beta\gamma})) - \\
& 2 R[\nabla]^{\mu\alpha} R[\nabla]^{\beta\gamma\delta\epsilon} (\nabla_{\alpha} \nabla^{\nu} R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) - 2 R[\nabla]^{\nu\alpha} R[\nabla] (\nabla^{\alpha} \nabla^{\mu} R[\nabla]) - \\
& 2 R[\nabla]_{\alpha}^{\mu} R[\nabla] (\nabla^{\alpha} \nabla^{\nu} R[\nabla]) - 2 R[\nabla]^{\mu\alpha\nu\beta} (\nabla_{\alpha} R[\nabla]^{\gamma\delta\epsilon\zeta}) (\nabla_{\beta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 R[\nabla]^{Y\delta\epsilon\zeta} R[\nabla]^{\mu\alpha\nu\beta} (\nabla_\beta \nabla_\alpha R[\nabla]_{Y\delta\epsilon\zeta}) - 2 R[\nabla]^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\beta R[\nabla]) - \\
& R[\nabla] R[\nabla]^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - R[\nabla] R[\nabla]^\mu{}_\beta{}^\nu{}_\alpha (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) + \\
& 8 R[\nabla]^\mu{}_\gamma{}^\nu{}_\delta (\nabla^\gamma R[\nabla]^{a\delta}) (\nabla^\delta R[\nabla]_{a\beta}) + 4 R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^\mu{}_\gamma{}^\nu{}_\delta (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{a\beta}) + \\
& 4 R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^\mu{}_\delta{}^\nu{}_\gamma (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{a\beta}) - 2 R[\nabla]^\nu{}_\alpha (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\mu R[\nabla]) - 2 R[\nabla]^\nu{}_\alpha \\
& (R[\nabla]^{a\delta} \nabla_\alpha \nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) - 4 (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^\mu R[\nabla]^{a\delta}) + (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) (\nabla^\mu R[\nabla]^{a\delta\epsilon}) - \\
& 4 R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]^{a\delta}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{a\beta}) + 8 R[\nabla]^\mu{}_\alpha (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma}) (\nabla^\nu R[\nabla]^{a\delta}) - \\
& 2 R[\nabla]^\mu{}_\alpha (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\nu R[\nabla]) + R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]) (\nabla^\nu R[\nabla]) + \\
& R[\nabla] (\nabla^\mu R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta}) (\nabla^\nu R[\nabla]_{a\beta\gamma\delta}) - 2 R[\nabla]^\mu{}_\alpha (\nabla_\alpha R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) (\nabla^\nu R[\nabla]^{a\delta\epsilon}) - \\
& 4 R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla] (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]_{a\beta}) + R[\nabla]^2 (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]) + R[\nabla] R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta} (\nabla^\nu \nabla^\mu R[\nabla]_{a\beta\gamma\delta})
\end{aligned}$$

$Inf_{\mu} = P[\mu, -\nu]$

$$\begin{aligned}
Out_{\mu} = & R[\nabla]^\mu{}_\nu (-1 + 320 \kappa R[\nabla]_{\alpha\gamma} R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]_{\beta\gamma} - 352 \kappa R[\nabla]_{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla] + \\
& 48 \kappa R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} + 32 \kappa R[\nabla] R[\nabla]_{a\beta\gamma\delta} R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta} - \\
& 48 \kappa R[\nabla]_{a\delta}{}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 16 \kappa R[\nabla] (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla]) + 16 \kappa (\nabla_\alpha R[\nabla]) (\nabla^\alpha R[\nabla]) - \\
& 64 \kappa R[\nabla]^{a\delta} (\nabla_\gamma \nabla^\gamma R[\nabla]_{a\delta}) - 64 \kappa (\nabla_\gamma R[\nabla]_{a\delta}) (\nabla^\gamma R[\nabla]^{a\delta}) + \\
& 64 \kappa R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]^{a\delta}) + 16 \kappa (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{a\beta\gamma\delta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta}) + \\
\frac{1}{6} & \delta_\nu{}^\mu (3 R[\nabla] + \kappa R[\nabla]^4 - 64 \kappa R[\nabla]_{\alpha\gamma} R[\nabla]^{a\delta} (9 R[\nabla]_{\beta\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta} - 5 R[\nabla]_{\beta\gamma} R[\nabla]) - \\
& 96 \kappa R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} - 42 \kappa R[\nabla]^2 R[\nabla]_{a\beta\gamma\delta} R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta} - \\
& 288 \kappa R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]_{\beta\delta\epsilon\zeta} + 72 \kappa R[\nabla] R[\nabla]_{a\delta}{}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + \\
& 192 \kappa R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\zeta} R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} - 3 \kappa R[\nabla]_{a\delta\gamma\delta} R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta} R[\nabla]_{\epsilon\zeta\eta\theta} R[\nabla]^{e\zeta\eta\theta} - \\
& 48 \kappa R[\nabla]^2 (\nabla_\alpha \nabla^\alpha R[\nabla]) - 48 \kappa R[\nabla] (\nabla_\alpha R[\nabla]) (\nabla^\alpha R[\nabla]) - 384 \kappa R[\nabla]^{a\delta} (\nabla_\alpha R[\nabla]^{a\delta}) \\
& (\nabla_\beta R[\nabla]_{\gamma\delta}) + 48 \kappa R[\nabla]_{a\delta} (R[\nabla]^{a\delta} (3 R[\nabla]_{\gamma\delta} R[\nabla]^{a\delta} - R[\nabla]^2 + R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta} R[\nabla]^{a\delta\epsilon\zeta}) + \\
& 2 ((\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\beta R[\nabla]) + R[\nabla] (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]))) + 192 \kappa R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla] (\nabla_\gamma \nabla^\gamma R[\nabla]_{a\delta}) + \\
& 192 \kappa R[\nabla] (\nabla_\gamma R[\nabla]_{a\delta}) (\nabla^\gamma R[\nabla]^{a\delta}) - 384 \kappa R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} (\nabla_\delta \nabla_\gamma R[\nabla]_{a\delta}) - \\
& 192 \kappa R[\nabla] R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]^{a\delta}) - 48 \kappa R[\nabla] (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{a\beta\gamma\delta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta}) + \\
& 384 \kappa R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^{a\delta} (\nabla_\epsilon \nabla_\delta R[\nabla]_{\alpha\gamma\beta\epsilon}) + 384 \kappa R[\nabla]^{a\delta} (\nabla_\epsilon R[\nabla]_{\beta\delta\gamma\zeta}) (\nabla^\epsilon R[\nabla]_{\alpha}{}^{\gamma\delta\epsilon}) + \\
& 8 \kappa (8 R[\nabla]^{a\delta} (R[\nabla]_{\nu}{}^\alpha (\nabla_\alpha \nabla^\mu R[\nabla]_{\beta\gamma}) + R[\nabla]^\mu{}_\alpha (\nabla_\alpha \nabla_\nu R[\nabla]_{\beta\gamma})) - \\
& 2 R[\nabla]^\mu{}_\alpha R[\nabla]^{a\delta\gamma\delta} (\nabla_\alpha \nabla_\nu R[\nabla]_{\beta\gamma\delta\epsilon}) - 2 R[\nabla]_{\nu\alpha} R[\nabla] (\nabla^\alpha \nabla^\mu R[\nabla]) - \\
& 2 R[\nabla]^\mu{}_\alpha R[\nabla] (\nabla^\alpha \nabla_\nu R[\nabla]) - 2 R[\nabla]^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta (\nabla_\alpha R[\nabla]^{a\delta\epsilon\zeta}) (\nabla_\beta R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta}) - \\
& 2 R[\nabla]^{a\delta\epsilon\zeta} R[\nabla]^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta (\nabla_\beta \nabla_\alpha R[\nabla]_{\gamma\delta\epsilon\zeta}) - 2 R[\nabla]^\mu{}_{\alpha\nu\beta} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\beta R[\nabla]) - \\
& R[\nabla] R[\nabla]^\mu{}_{\alpha\nu\beta} (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) - R[\nabla] R[\nabla]^\mu{}_{\beta\nu\alpha} (\nabla^\beta \nabla^\alpha R[\nabla]) + \\
& 8 R[\nabla]^\mu{}_{\gamma\nu\delta} (\nabla^\gamma R[\nabla]^{a\delta}) (\nabla^\delta R[\nabla]_{a\beta}) + 4 R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^\mu{}_{\gamma\nu\delta} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{a\beta}) + \\
& 4 R[\nabla]^{a\delta} R[\nabla]^\mu{}_{\delta\nu\gamma} (\nabla^\delta \nabla^\gamma R[\nabla]_{a\beta}) - 2 R[\nabla]_{\nu\alpha} (\nabla^\alpha R[\nabla]) (\nabla^\mu R[\nabla]) - 2 R[\nabla]_{\nu}{}^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(R[\nabla]{}^{\beta\gamma\delta\epsilon} (\nabla_\alpha \nabla^\mu R[\nabla]{}_{\beta\gamma\delta\epsilon}) - 4 (\nabla_\alpha R[\nabla]{}_{\beta\gamma}) (\nabla^\mu R[\nabla]{}^{\beta\gamma}) + (\nabla_\alpha R[\nabla]{}_{\beta\gamma\delta\epsilon}) (\nabla^\mu R[\nabla]{}^{\beta\gamma\delta\epsilon}) \right) - \\
& 4 R[\nabla]{} (\nabla^\mu R[\nabla]{}^{\alpha\beta}) (\nabla_\nu R[\nabla]{}_{\alpha\beta}) + 8 R[\nabla]{}^{\mu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]{}_{\beta\gamma}) (\nabla_\nu R[\nabla]{}^{\beta\gamma}) - \\
& 2 R[\nabla]{}^{\mu\alpha} (\nabla^\alpha R[\nabla]{}_{\beta\gamma}) (\nabla_\nu R[\nabla]{}_{\beta\gamma}) + R[\nabla]{} (\nabla^\mu R[\nabla]{}_{\beta\gamma}) (\nabla_\nu R[\nabla]{}_{\beta\gamma}) + \\
& R[\nabla]{} (\nabla^\mu R[\nabla]{}^{\alpha\beta\gamma\delta}) (\nabla_\nu R[\nabla]{}_{\alpha\beta\gamma\delta}) - 2 R[\nabla]{}^{\mu\alpha} (\nabla_\alpha R[\nabla]{}_{\beta\gamma\delta\epsilon}) (\nabla_\nu R[\nabla]{}^{\beta\gamma\delta\epsilon}) - \\
& 4 R[\nabla]{}^{\alpha\beta} R[\nabla]{} (\nabla_\nu \nabla^\mu R[\nabla]{}_{\alpha\beta}) + R[\nabla]{}^2 (\nabla_\nu \nabla^\mu R[\nabla]{}_{\alpha\beta}) + R[\nabla]{} R[\nabla]{}^{\alpha\beta\gamma\delta} (\nabla_\nu \nabla^\mu R[\nabla]{}_{\alpha\beta\gamma\delta})
\end{aligned}$$

In[]:= **p1 = ExtractComponents[MyxPand[-RicciCD[μ, -ν], "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]**
**** DefTensor: Defining tensor ChristoffelCDCDah2[α, -β, -γ].**

The Splitting of $-\frac{R[\nabla]{}^\mu{}_\nu}{(a)^2} + \dots$ was performed in 2.98821 seconds.

$$\begin{aligned}
\text{Out[]:= } & -\frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2}{a^2} - \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'}{a^2} + \\
& \left(-\frac{{}^{(1)}\bar{E}^{\mu}{}_\nu}{a^2} - \frac{2 \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}{}_\nu \right) \mathcal{H}}{a^2} + \frac{4 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \left({}^{(1)}\phi \right)}{a^2} + \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \left({}^{(1)}\phi \right)}{a^2} + \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left({}^{(1)\prime}\phi \right)}{a^2} + \frac{5 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left({}^{(1)\prime}\psi \right)}{a^2} + \right. \\
& \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left({}^{(1)\prime\prime}\psi \right)}{a^2} + \frac{d_\alpha d^\alpha \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}{}_\nu \right)}{a^2} - \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left(d_\alpha d^\alpha \left({}^{(1)}\psi \right) \right)}{a^2} + \frac{\mathcal{H} \left(d^\mu \left({}^{(1)}\bar{B}_\nu \right) \right)}{a^2} + \\
& \left. \frac{d^\mu \left({}^{(1)}\bar{B}'_\nu \right)}{2 a^2} + \frac{\mathcal{H} \left(d_\nu \left({}^{(1)}\bar{B}^\mu \right) \right)}{a^2} + \frac{d_\nu \left({}^{(1)}\bar{B}^\mu \right)}{2 a^2} + \frac{d_\nu d^\mu \left({}^{(1)}\phi \right)}{a^2} - \frac{d_\nu d^\mu \left({}^{(1)}\psi \right)}{a^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In[]:= } & \mathbf{p1} = -\frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2}{a^2} - \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}'}{a^2} + \\
& \left(-\frac{{}^{(1)}\bar{E}^{\mu}{}_\nu}{a^2} - \frac{2 \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}{}_\nu \right) \mathcal{H}}{a^2} + \frac{4 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}^2 \left({}^{(1)}\phi \right)}{a^2} + \frac{2 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H}' \left({}^{(1)}\phi \right)}{a^2} + \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left({}^{(1)\prime}\phi \right)}{a^2} + \frac{5 \bar{h}^\mu{}_\nu \mathcal{H} \left({}^{(1)\prime}\psi \right)}{a^2} + \right. \\
& \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left({}^{(1)\prime\prime}\psi \right)}{a^2} + \frac{d_\alpha d^\alpha \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}{}_\nu \right)}{a^2} - \frac{\bar{h}^\mu{}_\nu \left(d_\alpha d^\alpha \left({}^{(1)}\psi \right) \right)}{a^2} + \frac{\mathcal{H} \left(d^\mu \left({}^{(1)}\bar{B}_\nu \right) \right)}{a^2} + \frac{d^\mu \left({}^{(1)}\bar{B}'_\nu \right)}{2 a^2} + \frac{\mathcal{H} \left(d_\nu \left({}^{(1)}\bar{B}^\mu \right) \right)}{a^2} + \\
& \left. \frac{d_\nu \left({}^{(1)}\bar{B}^\mu \right)}{2 a^2} + \frac{d_\nu d^\mu \left({}^{(1)}\phi \right)}{a^2} - \frac{d_\nu d^\mu \left({}^{(1)}\psi \right)}{a^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & -\frac{2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2}{a^2} - \frac{\bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'}{a^2} + \\
& \in \left(-\frac{{}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}''}{a^2} - \frac{2 \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}'\right) \mathcal{H}}{a^2} + \frac{4 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \left({}^{(1)}\phi\right)}{a^2} + \frac{2 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left({}^{(1)}\phi\right)'}{a^2} + \frac{\bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left({}^{(1)}\phi\right)''}{a^2} + \frac{5 \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \left({}^{(1)}\psi\right)'}{a^2} + \right. \\
& \frac{\bar{h}^{\mu}_{\nu} \left({}^{(1)}\psi\right)''}{a^2} + \frac{d_{\alpha} d^{\alpha} \left({}^{(1)}E^{\mu}_{\nu}\right)}{a^2} - \frac{\bar{h}^{\mu}_{\nu} \left(d_{\alpha} d^{\alpha} \left({}^{(1)}\psi\right)\right)}{a^2} + \frac{\mathcal{H} \left(d^{\mu} \left({}^{(1)}B_{\nu}\right)\right)}{a^2} + \\
& \left. \frac{d^{\mu} \left({}^{(1)}B_{\nu}\right)'}{2 a^2} + \frac{\mathcal{H} \left(d_{\nu} \left({}^{(1)}B^{\mu}\right)\right)}{a^2} + \frac{d_{\nu} \left({}^{(1)}B^{\mu}\right)'}{2 a^2} + \frac{d_{\nu} d^{\mu} \left({}^{(1)}\phi\right)}{a^2} - \frac{d_{\nu} d^{\mu} \left({}^{(1)}\psi\right)}{a^2} \right)
\end{aligned}$$

In[*]= p2 =

ExtractComponents [

MyxPand[RicciCD[μ, -ν] × (320 × RicciCD[-α, γ] RicciCD[α, β] RicciCD[-β, -γ]),
"NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]

$$\begin{aligned}
\text{Out}[*]= & \frac{15360 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^8}{a^8} + \frac{30720 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^6 \mathcal{H}'}{a^8} + \frac{23040 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{24960 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3}{a^8} + \frac{9600 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'^4}{a^8} + \\
& \in \left(\frac{7680 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}''\right) \mathcal{H}^6}{a^8} + \frac{15360 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}'\right) \mathcal{H}^7}{a^8} + \frac{11520 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}\right) \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'}{a^8} + \frac{23040 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}\right) \mathcal{H}^5 \mathcal{H}'}{a^8} + \right. \\
& \frac{5760 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}\right) \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{11520 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}\right) \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{9600 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}\right) \mathcal{H}'^3}{a^8} + \frac{19200 \times \left({}^{(1)}\bar{E}^{\mu}_{\nu}\right) \mathcal{H} \mathcal{H}'^3}{a^8} - \\
& \frac{122880 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^8 \left({}^{(1)}\phi\right)}{a^8} - \frac{245760 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^6 \mathcal{H}' \left({}^{(1)}\phi\right)}{a^8} - \frac{184320 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2 \left({}^{(1)}\phi\right)}{a^8} - \\
& \frac{199680 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3 \left({}^{(1)}\phi\right)}{a^8} - \frac{76800 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}'^4 \left({}^{(1)}\phi\right)}{a^8} - \frac{30720 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^7 \left({}^{(1)}\phi\right)'}{a^8} - \\
& \left. \frac{46080 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \left({}^{(1)}\phi\right)'}{a^8} - \frac{74880 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \left({}^{(1)}\phi\right)'}{a^8} - \frac{38400 \times \bar{h}^{\mu}_{\nu} \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \left({}^{(1)}\phi\right)'}{a^8} \right)
\end{aligned}$$

The Splitting of $\frac{320 \times R[\nabla]_{\beta}^{-517072} R[\nabla]_{\beta}^{517072} R[\nabla]_{\gamma}^{-517072} R[\nabla]_{\gamma}^{517072} R[\nabla]_{\nu}^{\mu}}{(a)^8} + \dots$ was performed in 463.205 seconds.

$$\begin{aligned}
 \ln[\phi] = p_2 = & \frac{15\,360 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^8}{a^8} + \frac{30\,720 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^6 \mathcal{H}'}{a^8} + \frac{23\,040 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{24\,960 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3}{a^8} + \\
 & \frac{9\,600 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}'^4}{a^8} + \\
 \in & \left(\frac{7\,680 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}^6}{a^8} + \frac{15\,360 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}^7}{a^8} + \frac{11\,520 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'}{a^8} + \frac{23\,040 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}^5 \mathcal{H}'}{a^8} + \right. \\
 & \frac{5\,760 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{11\,520 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{9\,600 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H}'^3}{a^8} + \left. \frac{19\,200 \times \binom{(1)}{E''_{\nu}} \mathcal{H} \mathcal{H}'^3}{a^8} - \right. \\
 & \frac{122\,880 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^8 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{245\,760 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^6 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{184\,320 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \\
 & \frac{199\,680 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{76\,800 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}'^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{30\,720 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \\
 & \frac{46\,080 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{74\,880 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{38\,400 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \\
 & \frac{153\,600 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{230\,400 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{167\,040 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \\
 & \frac{88\,320 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{30\,720 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^6 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{46\,080 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \\
 & \frac{74\,880 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{38\,400 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{7\,680 \times \mathcal{H}^6 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{E}_{\nu}^{\mu})}{a^8} - \\
 & \frac{11\,520 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{E}_{\nu}^{\mu})}{a^8} - \frac{5\,760 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{E}_{\nu}^{\mu})}{a^8} - \frac{9\,600 \times \mathcal{H}'^3 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{E}_{\nu}^{\mu})}{a^8} - \\
 & \left. \frac{7\,680 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^6 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi})}{a^8} - \frac{11\,520 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi})}{a^8} - \frac{23\,040 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_{\alpha} d^{\alpha} \binom{(1)}{\phi})}{a^8} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{9600 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 (d_\alpha d^\alpha \phi)}{a^8} + \frac{38400 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha \psi)}{a^8} + \frac{57600 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \psi)}{a^8} + \\
& \frac{28800 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha \psi)}{a^8} + \frac{13440 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 (d_\alpha d^\alpha \psi)}{a^8} - \frac{7680 \times \mathcal{H}^7 (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \\
& \frac{11520 \times \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \frac{5760 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \frac{9600 \times \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \\
& \frac{3840 \times \mathcal{H}^6 (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \frac{5760 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \frac{2880 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \\
& \frac{4800 \times \mathcal{H}^3 (d^\mu B_\nu)}{a^8} - \frac{7680 \times \mathcal{H}^7 (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \frac{11520 \times \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \\
& \frac{5760 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \frac{9600 \times \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \frac{3840 \times \mathcal{H}^6 (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \\
& \frac{5760 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \frac{2880 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \frac{4800 \times \mathcal{H}^3 (d_\nu B^\mu)}{a^8} - \\
& \frac{7680 \times \mathcal{H}^6 (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} - \frac{11520 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} - \frac{5760 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} - \\
& \frac{9600 \times \mathcal{H}^3 (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} + \frac{7680 \times \mathcal{H}^6 (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} + \frac{11520 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} + \\
& \left. \frac{5760 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} + \frac{9600 \times \mathcal{H}^3 (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} \right) \\
\text{Out}_{(s)} = & \frac{15360 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^8}{a^8} + \frac{30720 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \mathcal{H}'}{a^8} + \frac{23040 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{24960 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3}{a^8} + \frac{9600 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^4}{a^8} + \\
& \in \left(\frac{7680 \times \binom{(1)}{E''_\nu} \mathcal{H}^6}{a^8} + \frac{15360 \times \binom{(1)}{E'_\nu} \mathcal{H}^7}{a^8} + \frac{11520 \times \binom{(1)}{E''_\nu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'}{a^8} + \frac{23040 \times \binom{(1)}{E'_\nu} \mathcal{H}^5 \mathcal{H}'}{a^8} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{5760 \kappa \binom{(1)''}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{11520 \kappa \binom{(1)'}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2}{a^8} + \frac{9600 \kappa \binom{(1)''}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}'^3}{a^8} + \frac{19200 \kappa \binom{(1)'}{E_\nu^\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}'^3}{a^8} \\
& \frac{122880 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^8 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{245760 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{184320 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} \\
& \frac{199680 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}'^3 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{76800 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{30720 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} \\
& \frac{46080 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{74880 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{38400 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} \\
& \frac{153600 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{230400 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{167040 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} \\
& \frac{88320 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{30720 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} - \frac{46080 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} \\
& \frac{74880 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} - \frac{38400 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^3 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} - \frac{7680 \kappa \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} \\
& \frac{11520 \kappa \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} - \frac{5760 \kappa \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} - \frac{9600 \kappa \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} \\
& \frac{7680 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi})}{a^8} - \frac{11520 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi})}{a^8} - \frac{23040 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi})}{a^8} \\
& \frac{9600 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi})}{a^8} + \frac{38400 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi})}{a^8} + \frac{57600 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi})}{a^8} + \\
& \frac{28800 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi})}{a^8} + \frac{13440 \kappa \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi})}{a^8} - \frac{7680 \kappa \mathcal{H}^7 (d^\mu \binom{(1)}{B_\nu})}{a^8} \\
& \frac{11520 \kappa \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' (d^\mu \binom{(1)}{B_\nu})}{a^8} - \frac{5760 \kappa \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 (d^\mu \binom{(1)}{B_\nu})}{a^8} - \frac{9600 \kappa \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 (d^\mu \binom{(1)}{B_\nu})}{a^8} \\
& \frac{3840 \kappa \mathcal{H}^6 (d^\mu \binom{(1)'}{B_\nu})}{a^8} - \frac{5760 \kappa \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d^\mu \binom{(1)'}{B_\nu})}{a^8} - \frac{2880 \kappa \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d^\mu \binom{(1)'}{B_\nu})}{a^8} - \frac{4800 \kappa \mathcal{H}'^3 (d^\mu \binom{(1)'}{B_\nu})}{a^8} \\
& \frac{7680 \kappa \mathcal{H}^7 (d_\nu \binom{(1)}{B^\mu})}{a^8} - \frac{11520 \kappa \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' (d_\nu \binom{(1)}{B^\mu})}{a^8} - \frac{5760 \kappa \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 (d_\nu \binom{(1)}{B^\mu})}{a^8}
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} & \frac{9600 \times \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} - \frac{3840 \times \mathcal{H}^6 (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} - \frac{5760 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} - \frac{2880 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} \\ & \frac{4800 \times \mathcal{H}'^3 (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} - \frac{7680 \times \mathcal{H}^6 (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} - \frac{11520 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} \\ & \frac{5760 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} - \frac{9600 \times \mathcal{H}'^3 (d_\nu d^\mu \phi)}{a^8} + \frac{7680 \times \mathcal{H}^6 (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} + \\ & \left. \frac{11520 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} + \frac{5760 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} + \frac{9600 \times \mathcal{H}'^3 (d_\nu d^\mu \psi)}{a^8} \right) \end{aligned} \right)$$

$ln[\epsilon]=$ p3 =

```
ExtractComponents[
MyxPant[RicciCD[μ, -ν] × (-352 × RicciCD[-α, -β] RicciCD[α, β] RicciScalarCD[]),
"NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]
```

$$\begin{aligned} Out[\epsilon]= & \frac{50688 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^8}{a^8} - \frac{126720 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^6 \mathcal{H}'}{a^8} - \\ & \frac{152064 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{101376 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3}{a^8} - \frac{25344 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}'^4}{a^8} + \\ \in & \left(- \frac{25344 \times \binom{(1)}{E}''_\nu \mathcal{H}^6}{a^8} - \frac{50688 \times \binom{(1)}{E}^\mu_\nu \mathcal{H}^7}{a^8} - \frac{50688 \times \binom{(1)}{E}''_\nu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'}{a^8} - \frac{101376 \times \binom{(1)}{E}^\mu_\nu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}'}{a^8} \right. \\ & - \frac{50688 \times \binom{(1)}{E}''_\nu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{101376 \times \binom{(1)}{E}^\mu_\nu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{25344 \times \binom{(1)}{E}''_\nu \mathcal{H}'^3}{a^8} - \\ & \frac{50688 \times \binom{(1)}{E}^\mu_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3}{a^8} + \frac{405504 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^8 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{1013760 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^6 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\ & \frac{1216512 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{811008 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{202752 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}'^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\ & \frac{126720 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \\ & \left. \frac{101376 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{532224 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{1064448 \times \bar{h}^\mu_\nu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{912\,384 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \left(\overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \frac{304\,128 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \left(\overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \frac{126\,720 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \left(\overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \\
& \frac{304\,128 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(\overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \frac{304\,128 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(\overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \frac{101\,376 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \left(\overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{E}_\nu^\mu \right)}{a^8} + \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{E}_\nu^\mu \right)}{a^8} + \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{E}_\nu^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^3 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{E}_\nu^\mu \right)}{a^8} + \frac{33\,792 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{84\,480 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \\
& \frac{84\,480 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} - \frac{126\,720 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \\
& \frac{236\,544 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{185\,856 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{59\,136 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \left(d_\alpha d^\alpha \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^7 \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \times \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \frac{12\,672 \times \mathcal{H}^6 \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \frac{12\,672 \times \mathcal{H}^3 \left(d^\mu \overset{(1)}{B}_\nu \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^7 \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{12\,672 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{12\,672 \times \mathcal{H}^3 \left(d_\nu \overset{(1)}{B}^\mu \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \\
& \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^3 \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\phi} \right)}{a^8} - \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \\
& \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{50\,688 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{25\,344 \times \mathcal{H}^3 \left(d_\nu d^\mu \overset{(1)}{\psi} \right)}{a^8} \Big)
\end{aligned}$$

The Splitting of $\frac{352 \times R[\nabla]_{\beta \tau 5204475}}{(a)^8} R[\nabla]^{\beta \tau 5204475} R[\nabla]^{\mu}_{\nu} R[\nabla]$ +... was performed in 128.703 seconds.

$$\begin{aligned}
 \ln[4]=p3 = & -\frac{50688 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta}}{a^8} - \frac{126720 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma}}{a^8} - \frac{152064 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 2}}{a^8} - \frac{101376 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3}}{a^8} \\
 & + \frac{25344 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta 4}}{a^8} + \\
 \in & \left(-\frac{25344 \times \binom{(1)''}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta 6}}{a^8} - \frac{50688 \times \binom{(1)'}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta 7}}{a^8} - \frac{50688 \times \binom{(1)''}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma}}{a^8} - \frac{101376 \times \binom{(1)'}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta 5} \mathcal{H}^{\gamma}}{a^8} \right. \\
 & - \frac{50688 \times \binom{(1)''}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 2}}{a^8} - \frac{101376 \times \binom{(1)'}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 2}}{a^8} - \frac{25344 \times \binom{(1)''}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta 3}}{a^8} - \\
 & + \frac{50688 \times \binom{(1)'}{E}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3}}{a^8} + \frac{405504 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{1013760 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma} \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\
 & + \frac{1216512 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 2} \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{811008 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3} \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{202752 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 4} \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\
 & + \frac{126720 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 7} \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 5} \mathcal{H}^{\delta} \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3} \mathcal{H}^{\delta 2} \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \\
 & + \frac{101376 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{532224 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 7} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{1064448 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 5} \mathcal{H}^{\delta} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \\
 & + \frac{912384 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3} \mathcal{H}^{\delta 2} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{126720 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 6} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \\
 & + \frac{304128 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 4} \mathcal{H}^{\delta} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 2} \mathcal{H}^{\delta 2} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{101376 \times \bar{h}_{\nu}^{\mu} \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 3} \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \\
 & + \frac{25344 \times \mathcal{H}^{\beta 6} (d_{\alpha} d^{\alpha}) \binom{(1)}{E}_{\nu}^{\mu}}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma} (d_{\alpha} d^{\alpha}) \binom{(1)}{E}_{\nu}^{\mu}}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^{\beta} \mathcal{H}^{\gamma 2} (d_{\alpha} d^{\alpha}) \binom{(1)}{E}_{\nu}^{\mu}}{a^8} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^3 (d_\alpha d^\alpha \mathbf{E}^{\mu\nu})}{a^8} + \frac{33\,792 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi})}{a^8} + \frac{84\,480 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^A \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi})}{a^8} + \\
& \frac{84\,480 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi})}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\phi})}{a^8} - \frac{126\,720 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi})}{a^8} - \\
& \frac{236\,544 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^A \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi})}{a^8} - \frac{185\,856 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi})}{a^8} - \frac{59\,136 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha \mathbf{\psi})}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^7 (d^\mu \mathbf{B}_\nu)}{a^8} + \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' (d^\mu \mathbf{B}_\nu)}{a^8} + \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 (d^\mu \mathbf{B}_\nu)}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 (d^\mu \mathbf{B}_\nu)}{a^8} + \frac{12\,672 \kappa \mathcal{H}^6 (d^\mu \mathbf{B}'_\nu)}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^A \mathcal{H}' (d^\mu \mathbf{B}'_\nu)}{a^8} + \\
& \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d^\mu \mathbf{B}'_\nu)}{a^8} + \frac{12\,672 \kappa \mathcal{H}'^3 (d^\mu \mathbf{B}'_\nu)}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^7 (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} + \\
& \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} + \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 (d_\nu \mathbf{B}^\mu)}{a^8} + \\
& \frac{12\,672 \kappa \mathcal{H}^6 (d_\nu \mathbf{B}'^\mu)}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^A \mathcal{H}' (d_\nu \mathbf{B}'^\mu)}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu \mathbf{B}'^\mu)}{a^8} + \\
& \frac{12\,672 \kappa \mathcal{H}'^3 (d_\nu \mathbf{B}'^\mu)}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^6 (d_\nu d^\mu \mathbf{\phi})}{a^8} + \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^A \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \mathbf{\phi})}{a^8} + \\
& \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu d^\mu \mathbf{\phi})}{a^8} + \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}'^3 (d_\nu d^\mu \mathbf{\phi})}{a^8} - \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}^6 (d_\nu d^\mu \mathbf{\psi})}{a^8} - \\
& \left. \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^A \mathcal{H}' (d_\nu d^\mu \mathbf{\psi})}{a^8} - \frac{50\,688 \kappa \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\nu d^\mu \mathbf{\psi})}{a^8} - \frac{25\,344 \kappa \mathcal{H}'^3 (d_\nu d^\mu \mathbf{\psi})}{a^8} \right)
\end{aligned}$$

$$Out[\mu]= -\frac{50\,688 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^8}{a^8} - \frac{126\,720 \kappa \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{H}^6 \mathcal{H}'}{a^8} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{152064 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{101376 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3}{a^8} - \frac{25344 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'^4}{a^8} + \\
& \left(- \frac{25344 \times \binom{(1)''}{E_v^\mu} \mathcal{H}^6}{a^8} - \frac{50688 \times \binom{(1)'}{E_v^\mu} \mathcal{H}^7}{a^8} - \frac{50688 \times \binom{(1)''}{E_v^\mu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'}{a^8} - \frac{101376 \times \binom{(1)'}{E_v^\mu} \mathcal{H}^5 \mathcal{H}'}{a^8} \right. \\
& \frac{50688 \times \binom{(1)''}{E_v^\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{101376 \times \binom{(1)'}{E_v^\mu} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{25344 \times \binom{(1)''}{E_v^\mu} \mathcal{H}'^3}{a^8} - \\
& \frac{50688 \times \binom{(1)'}{E_v^\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}'^3}{a^8} + \frac{405504 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^8 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{1013760 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^6 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\
& \frac{1216512 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{811008 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{202752 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\
& \frac{126720 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \\
& \frac{101376 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{532224 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{1064448 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \\
& \frac{912384 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{126720 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^6 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \\
& \frac{304128 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \frac{304128 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \frac{101376 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'^3 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \\
& \frac{25344 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_v^\mu} \right)}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_v^\mu} \right)}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_v^\mu} \right)}{a^8} + \\
& \frac{25344 \times \mathcal{H}'^3 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_v^\mu} \right)}{a^8} + \frac{33792 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^6 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{84480 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \\
& \frac{84480 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'^3 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} - \frac{126720 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^6 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \\
& \frac{236544 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{185856 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{59136 \times \bar{h}_v^\mu \mathcal{H}'^3 \left(d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} + \\
& \left. \frac{25344 \times \mathcal{H}^7 \left(d^\mu \binom{(1)}{B_v} \right)}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \left(d^\mu \binom{(1)}{B_v} \right)}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \left(d^\mu \binom{(1)}{B_v} \right)}{a^8} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\text{Out[24] in a previous session} \frac{\mathcal{H}'^3 \left(d^\mu \binom{(1)}{B_v} \right)}{a^8} + \frac{12672 \times \mathcal{H}^6 \left(d^\mu \binom{(1)'}{B_v} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d^\mu \binom{(1)'}{B_v} \right)}{a^8} + \right. \\
& \frac{25344 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d^\mu \binom{(1)'}{B_v} \right)}{a^8} + \frac{12672 \times \mathcal{H}'^3 \left(d^\mu \binom{(1)'}{B_v} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \mathcal{H}^7 \left(d_v \binom{(1)}{B^\mu} \right)}{a^8} + \\
& \frac{50688 \times \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \left(d_v \binom{(1)}{B^\mu} \right)}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \left(d_v \binom{(1)}{B^\mu} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \left(d_v \binom{(1)}{B^\mu} \right)}{a^8} + \\
& \frac{12672 \times \mathcal{H}^6 \left(d_v \binom{(1)'}{B^\mu} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_v \binom{(1)'}{B^\mu} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_v \binom{(1)'}{B^\mu} \right)}{a^8} + \\
& \frac{12672 \times \mathcal{H}'^3 \left(d_v \binom{(1)'}{B^\mu} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \mathcal{H}^6 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{50688 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \\
& \frac{50688 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} + \frac{25344 \times \mathcal{H}'^3 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\phi} \right)}{a^8} - \frac{25344 \times \mathcal{H}^6 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \\
& \left. \frac{50688 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{50688 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} - \frac{25344 \times \mathcal{H}'^3 \left(d_v d^\mu \binom{(1)}{\psi} \right)}{a^8} \right)
\end{aligned}$$

```

In[ ]:= p10 =
  ExtractComponents[
    MyxPand[RicciCD[μ, -ν] × (-64 × * (RicciCD[α, β] × (CD[-γ][CD[γ][RicciCD[-α, -β]]))]),
      "NewtonGauge", 1], h, {"Space", "Space"}]
** Warning, the induced derivatives are commuting endlessly. Stopped
  after 10 iterations to avoid an infinite loop. This is anormal behaviour. **
The Splitting of  $\frac{128 \times R[\nabla]^\gamma \zeta_{489057} R[\nabla]^\mu \nabla_\beta R[\nabla]^\nu \zeta_{489057} (\nabla^\delta a)}{(a)^9}$ 
  +... was performed in 39161.9 seconds.
Out[ ]:= 
$$\begin{aligned}
& -\frac{3072 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^8}{a^8} - \frac{4608 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{7680 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^4}{a^8} - \\
& \frac{4608 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^6}{a^8} - \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^8}{a^8} + \frac{1536 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}''}{a^8} - \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}''^2}{a^8} - \\
& \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}''^2}{a^8} + \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}''^2}{a^8} + \frac{1920 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \mathcal{H}''^2}{a^8} + \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}''^2}{a^8} + \\
& \in \left( -\frac{1536 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^6}{a^8} - \frac{3072 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^7}{a^8} - \frac{1536 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}''}{a^8} - \frac{3072 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^5 \mathcal{H}''}{a^8} - \right. \\
& \frac{3072 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{6144 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2}{a^8} - \frac{768 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}'^3}{a^8} - \frac{1536 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}'^3}{a^8} + \\
& \frac{768 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}''}{a^8} + \frac{1536 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^4 \mathcal{H}''}{a^8} - \frac{768 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \mathcal{H}''}{a^8} - \frac{1536 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \mathcal{H}''}{a^8} + \\
& \frac{384 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^2 \mathcal{H}''^2}{a^8} + \frac{768 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}^3 \mathcal{H}''^2}{a^8} + \frac{768 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H}' \mathcal{H}''^2}{a^8} + \frac{1536 \times \binom{(1)}{E_\nu^\mu} \mathcal{H} \mathcal{H}' \mathcal{H}''^2}{a^8} + \\
& \frac{24576 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^8 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{36864 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \mathcal{H}' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{61440 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\
& \frac{36864 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^3 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{6144 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^4 \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{12288 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \\
& \left. \frac{6144 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{6144 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{6144 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} \right)
\end{aligned}$$


```

$$\begin{aligned}
& \frac{15360 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \mathcal{H}''' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} - \frac{6144 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \mathcal{H}''' \binom{(1)}{\phi}}{a^8} + \frac{4608 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \\
& \frac{10752 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{16128 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} + \frac{5376 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \\
& \frac{3840 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{9984 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{4608 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \\
& \frac{1920 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}''' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{1536 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\phi}}{a^8} - \frac{1536 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \binom{(1)''}{\phi}}{a^8} - \\
& \frac{2304 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\phi}}{a^8} - \frac{6912 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)''}{\phi}}{a^8} - \frac{3072 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^3 \binom{(1)''}{\phi}}{a^8} - \\
& \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \binom{(1)'''}{\phi}}{a^8} - \frac{1920 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}' \binom{(1)'''}{\phi}}{a^8} - \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'''}{\phi}}{a^8} + \\
& \frac{29184 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^7 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{38400 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \frac{46848 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \\
& \frac{14592 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{11520 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{7680 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \\
& \frac{3840 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^2 \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{4992 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}''' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} - \frac{5376 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)'}{\psi}}{a^8} + \\
& \frac{3072 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^6 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \frac{13056 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \frac{6912 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \\
& \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} + \frac{1536 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} - \frac{1920 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}''' \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} - \\
& \frac{1536 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}' \mathcal{H}'' \binom{(1)''}{\psi}}{a^8} - \frac{2304 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^5 \binom{(1)'''}{\psi}}{a^8} - \frac{1152 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}' \binom{(1)'''}{\psi}}{a^8} - \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^4 \binom{(1)'''}{\psi}}{a^8} - \\
& \frac{1920 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \binom{(1)'''}{\psi}}{a^8} - \frac{768 \times \bar{h}_\nu^\mu \mathcal{H}'^2 \binom{(1)'''}{\psi}}{a^8} + \frac{1536 \times \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} + \\
& \frac{1536 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} + \frac{3072 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} - \\
& \frac{768 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H} \mathcal{H}' \mathcal{H}'' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} - \frac{384 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}''' (d_\alpha d^\alpha \binom{(1)}{E_\nu^\mu})}{a^8} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{768 \times \mathcal{H}''' (d_\alpha d^\alpha (1) E_V^\mu)}{a^8} + \frac{3072 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \frac{6656 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \\
& \frac{7168 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \frac{2304 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \frac{512 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \\
& \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'' \mathcal{H}'' (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} - \frac{512 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}''' (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} - \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}' \mathcal{H}''' (d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \\
& \frac{1280 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^5 (d_\alpha d^\alpha (1) \phi')}{a^8} + \frac{3200 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha (1) \phi')}{a^8} + \frac{1280 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha (1) \phi')}{a^8} - \\
& \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^4 (d_\alpha d^\alpha (1) \phi'')}{a^8} - \frac{640 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha (1) \phi'')}{a^8} - \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha (1) \phi'')}{a^8} - \\
& \frac{5632 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^6 (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} - \frac{7680 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} - \frac{5120 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} - \\
& \frac{768 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}'^3 (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} + \frac{1792 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} - \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H} \mathcal{H}'' \mathcal{H}'' (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} + \\
& \frac{896 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}''' (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} + \frac{1024 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}' \mathcal{H}''' (d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} + \frac{3840 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^5 (d_\alpha d^\alpha (1) \psi')}{a^8} + \\
& \frac{1920 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^3 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha (1) \psi')}{a^8} + \frac{1792 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^4 (d_\alpha d^\alpha (1) \psi'')}{a^8} + \frac{2944 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' (d_\alpha d^\alpha (1) \psi'')}{a^8} + \\
& \frac{1024 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}'^2 (d_\alpha d^\alpha (1) \psi'')}{a^8} + \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^4 (d_\beta d^\beta d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \frac{640 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' (d_\beta d^\beta d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} + \\
& \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}'^2 (d_\beta d^\beta d_\alpha d^\alpha (1) \phi)}{a^8} - \frac{1024 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^4 (d_\beta d^\beta d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} - \\
& \frac{1024 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' (d_\beta d^\beta d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} - \frac{256 \times \bar{h}_V^\mu \mathcal{H}'^2 (d_\beta d^\beta d_\alpha d^\alpha (1) \psi)}{a^8} + \frac{1536 \times \mathcal{H}^7 (d^\mu (1) B_V)}{a^8} + \\
& \frac{1536 \times \mathcal{H}^5 \mathcal{H}' (d^\mu (1) B_V)}{a^8} + \frac{3072 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'^2 (d^\mu (1) B_V)}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H} \mathcal{H}'^3 (d^\mu (1) B_V)}{a^8} - \frac{768 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}'' (d^\mu (1) B_V)}{a^8} + \\
& \frac{768 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}' \mathcal{H}'' (d^\mu (1) B_V)}{a^8} - \frac{384 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}''' (d^\mu (1) B_V)}{a^8} - \frac{768 \times \mathcal{H}' \mathcal{H}''' (d^\mu (1) B_V)}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H}^6 (d^\mu (1) B_V')}{a^8} + \\
& \frac{768 \times \mathcal{H}^4 \mathcal{H}' (d^\mu (1) B_V')}{a^8} + \frac{1536 \times \mathcal{H}^2 \mathcal{H}'^2 (d^\mu (1) B_V')}{a^8} + \frac{384 \times \mathcal{H}'^3 (d^\mu (1) B_V')}{a^8} - \frac{384 \times \mathcal{H}^3 \mathcal{H}'' (d^\mu (1) B_V')}{a^8} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{384 \times \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d^\mu \text{}^{(1)} B_\nu \right)}{a^8} - \frac{192 \times \mathcal{H}^2 \ddot{\mathcal{H}} \left(d^\mu \text{}^{(1)} B_\nu \right)}{a^8} - \frac{384 \times \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d^\mu \text{}^{(1)} B_\nu \right)}{a^8} + \frac{1536 \times \mathcal{H}^7 \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{1536 \times \mathcal{H}^5 \dot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \frac{3072 \times \mathcal{H}^3 \dot{\mathcal{H}}^2 \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}}^3 \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} - \frac{768 \times \mathcal{H}^4 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{768 \times \mathcal{H}^2 \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} - \frac{384 \times \mathcal{H}^3 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} - \frac{768 \times \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{768 \times \mathcal{H}^4 \dot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \frac{1536 \times \mathcal{H}^2 \dot{\mathcal{H}}^2 \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \frac{384 \times \dot{\mathcal{H}}^3 \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} - \frac{384 \times \mathcal{H}^3 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \\
& \frac{384 \times \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} - \frac{192 \times \mathcal{H}^2 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} - \frac{384 \times \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu \text{}^{(1)} B^\mu \right)}{a^8} + \frac{1536 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} + \\
& \frac{1536 \times \mathcal{H}^4 \dot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} + \frac{3072 \times \mathcal{H}^2 \dot{\mathcal{H}}^2 \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} + \frac{768 \times \dot{\mathcal{H}}^3 \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} - \\
& \frac{768 \times \mathcal{H}^3 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} - \frac{384 \times \mathcal{H}^2 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} - \\
& \frac{768 \times \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \phi \right)}{a^8} - \frac{1536 \times \mathcal{H}^6 \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} - \frac{1536 \times \mathcal{H}^4 \dot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} - \\
& \frac{3072 \times \mathcal{H}^2 \dot{\mathcal{H}}^2 \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} - \frac{768 \times \dot{\mathcal{H}}^3 \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} + \frac{768 \times \mathcal{H}^3 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} - \\
& \left. \frac{768 \times \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} + \frac{384 \times \mathcal{H}^2 \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} + \frac{768 \times \dot{\mathcal{H}} \ddot{\mathcal{H}} \left(d_\nu d^\mu \text{}^{(1)} \psi \right)}{a^8} \right)
\end{aligned}$$