



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Τομέας Μηχανικής

Διπλωματική Εργασία

«Υπολογιστική Ανάλυση του Προβλήματος Ενίσχυσης  
Υποστρώματος με Μεταλλικό Επίθεμα»

Παπαγιαννοπούλου Ελένη

Επιβλέπων :  
Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Αθήνα 2023



## Ευχαριστίες

Υπάρχουν αρκετοί άνθρωποι που θα ήθελα να ευχαριστήσω για τη βοήθεια τους στη διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας. Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Θεοτόκογλου, Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π., για την βοήθεια στην επιλογή του θέματος της εργασίας, αλλά και για την πολύτιμη καθοδήγησή και στήριξή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω, τον υποψήφιο διδάκτορα του τομέα Μηχανικής της προαναφερθείσας σχολής κ. Παναγιώτη Λυμπερόπουλο, για την έμπρακτη βοήθεια του, αλλά και για τον χρόνο που διέθεσε σε συζητήσεις και που με βοήθησε σε κάθε πιθανή απορία μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με στήριξαν κατά την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.



## Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 1.1: Συνδυασμοί σύνθετων υλικών [4].....	10
Σχήμα 1.2: Τύποι σύνθετων υλικών με βάση το είδος της ενίσχυσης [3] .....	11
Σχήμα 1.3 : Επιμεταλλωμένος χάλυβας [6] .....	12
Σχήμα 1.4: Διαδικασία laser cladding [10] .....	14
Σχήμα 2.1: Τύποι θραύσης [11].....	15
Σχήμα 2.2: Πείραμα εφελκυσμού [12] .....	16
Σχήμα 2.3: Διάγραμμα χάλυβα χαμηλής περιεκτικότητας σε χάλυβα [13] .....	17
Σχήμα 2.4: Διάγραμμα κράματος Αλουμινίου [13] .....	17
Σχήμα 2.5: Προσδιορισμός της τάσης διαρροής με την μέθοδο της μικρής μόνιμης τροπής. [13] ...	18
Σχήμα 2.6: Διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης στα ψαθυρά υλικά [13] .....	19
Σχήμα 2.7: Η επιφάνεια αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας von Mises [15] .....	20
Σχήμα 2.8: Η επιφάνεια αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας von Mises στη δισδιάστατη κατάσταση [16].....	21
Σχήμα 2.9: Καμπύλη σ-N [17].....	22
Σχήμα 2.10: Μορφές κυμαινόμενων τάσεων (α) αντιστρεπτός κύκλος φόρτισης, (b-d) επαναλαμβανόμενος κύκλος φόρτισης για διάφορες τιμές του λόγου των τάσεων R, (e) τυχαίος κύκλος φόρτισης [18].....	23
Σχήμα 2.11: Τρόποι ανοίγματος ρωγμής (a) opening mode , (b) sliding mode, (c) shearing mode [19] .....	25
Σχήμα 2.12: Συγκέντρωση τάσεων γύρω από σπή [20].....	26
Σχήμα 2.13: Σύστημα συντεταγμένων στο εμπρόσθιο άκρο της ρωγμής [22].....	28
Σχήμα 2.14: Κόμβοι στο άνοιγμα της ρωγμής (a) half model (b) full model [22] .....	29
Σχήμα 2.15: Καμπύλες γύρω από την κορυφή της ρωγμής [23].....	30
Σχήμα 2.16: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης των τάσεων ΔK [24].....	31
Σχήμα 2.17: Ρυθμός διάδοσης της ρωγμής σε συνάρτηση με το εύρος του συντελεστή έντασης τάσεων [14] .....	32
Σχήμα 3.1: Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων [1].....	36
Σχήμα 3.2: Στοιχεία μίας και δύο διαστάσεων .....	37
Σχήμα 3.3: Στοιχεία τριών διαστάσεων .....	37
Σχήμα 3.4: Απλό ορθογωνικό στοιχείο [27] .....	39
Σχήμα 3.5: Τετραπλευρικό στοιχείο .....	42
Σχήμα 3.6: Σημεία ολοκλήρωσης Gauss στο απλό τετραπλευρικό στοιχείο [28].....	44
Σχήμα 3.7: Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο .....	45
Σχήμα 3.8: Σημεία ολοκλήρωσης Gauss 3x3 και 2x2 στο οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο [28]	46
Σχήμα 3.9: Γραμμικό τετραεδρικό στοιχείο .....	47
Σχήμα 3.10: Διακριτοποίηση εξαεδρικού στοιχείου σε τετραεδρικά στοιχεία [29] .....	49
Σχήμα 3.11: Το οκτακομβικό εξαεδρικό στοιχείο [30] .....	49
Σχήμα 4.1: Πραγματικά δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν για την πειραματική μελέτη του προβλήματος [2].....	51
Σχήμα 4.2: Γεωμετρία δοκιμίου .....	51
Σχήμα 4.3: Απλοποιημένη γεωμετρία σε 2-διαστάσεις .....	52
Σχήμα 4.4: Γεωμετρία λόγω συμμετρίας .....	52
Σχήμα 4.5: Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για AISI 4340 [31].....	53
Σχήμα 4.6: Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για AMPCO21 [31] .....	55

Σχήμα 4.7: : Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για AMPCO18 [30] .....	56
Σχήμα 4.8: Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για C17200 [31] .....	56
Σχήμα 4.9: Μορφή χρονικά κυμαινόμενης τάσης .....	58
Σχήμα 5.1: Τελικό δισδιάστατο πρόβλημα .....	59
Σχήμα 5.2: Γεωμετρία κατασκευής στο Design Modeler .....	59
Σχήμα 5.3: Διάγραμμα σύγκλισης αποτελεσμάτων .....	60
Σχήμα 5.4: Διακριτοποίηση της κατασκευής .....	60
Σχήμα 5.5: Κατανομή ορθής τάσης $\sigma_x$ στο δοκίμιο για υλικό επίστρωσης στο AMPCO21 .....	61
Σχήμα 5.6: Διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά επίστρωσης .....	61
Σχήμα 5.7: Bilinear Isotropic Hardening model στο Ansys [22] .....	63
Σχήμα 5.8: Προσέγγιση καμπύλης isotropic bilinear hardening για κράμα αλουμινίου [35] .....	63
Σχήμα 5.9: Κατανομή της τάσης $\sigma_x$ για υλικό επίστρωση μη γραμμικό AMPCO21 .....	64
Σχήμα 5.10: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για επίστρωση από AMPCO21 .....	64
Σχήμα 5.11: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για επίστρωση από AMPCO18 .....	65
Σχήμα 5.12: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για επίστρωση από C17200 .....	65
Σχήμα 5.13: Διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά της επίστρωσης .....	66
Σχήμα 5.18: Κατανομή της πλαστικής παραμόρφωσης του δοκιμίου, στην περίπτωση του επιθέματος με C17200 .....	67
Σχήμα 5.19: Τρισδιάστατη γεωμετρία του προβλήματος .....	68
Σχήμα 5.20: Διάγραμμα σύγκλισης αποτελεσμάτων στο τρισδιάστατο μοντέλο .....	68
Σχήμα 5.21: Διακριτοποίηση τρισδιάστατης γεωμετρίας .....	69
Σχήμα 5.22: Κατανομή των τάσεων $\sigma_x$ στο τρισδιάστατο δοκίμιο .....	69
Σχήμα 5.23: Καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά της επίστρωσης .....	70
Σχήμα 5.24: Διάγραμμα σύγκρισης Τρισδιάστατου και Δισδιάστατου μοντέλου .....	70
Σχήμα 5.25: Παρουσίαση του δισδιάστατου προβλήματος με προϋπάρχουσα ρωγμή .....	71
Σχήμα 5.26: Πλέγμα με προϋπάρχουσα ρωγμή .....	72
Σχήμα 5.27: Πλέγμα γύρω από την ρωγμή .....	72
Σχήμα 5.28: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης τάσεων $\Delta K$ ως προς το μήκος ρωγμής για ύψος επίστρωσης $h=1\text{mm}$ .....	73
Σχήμα 5.29: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης τάσεων $\Delta K$ ως προς το μήκος ρωγμής για ύψος επίστρωσης $h=2\text{mm}$ .....	74
Σχήμα 5.30: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης τάσεων $\Delta K$ ως προς το μήκος ρωγμής για ύψος επίστρωσης $h=3\text{mm}$ .....	74
Σχήμα 5.31: Σύγκριση του εύρους συντελεστή έντασης τάσεων $\Delta K$ με την κρίσιμη τιμή $\Delta K_{ic}$ του υλικού της επίστρωσης για ύψος επίστρωσης $h=1\text{mm}$ .....	76
Σχήμα 5.32: Σύγκριση του εύρους συντελεστή έντασης τάσεων $\Delta K$ με την κρίσιμη τιμή $\Delta K_{ic}$ του υλικού της επίστρωσης για ύψος επίστρωσης $h=2\text{mm}$ .....	76
Σχήμα 5.33: Σύγκριση του εύρους συντελεστή έντασης τάσεων $\Delta K$ με την κρίσιμη τιμή $\Delta K_{ic}$ του υλικού της επίστρωσης για ύψος επίστρωσης $h=3\text{mm}$ .....	77

## Εισαγωγή

Τα σύνθετα υλικά έχουν αλλάξει ιδιαίτερα τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και χρησιμοποιούμε τα υλικά. Ειδικά τα επιμεταλλωμένα μέταλλα, που προκύπτουν από τη συγκόλληση ενός μετάλλου σε ένα άλλο μέταλλο, έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμα στον τομέα της μηχανικής και της τεχνολογίας. Τα επιμεταλλωμένα μέταλλα παρουσιάζουν έναν συνδυασμό των ιδιοτήτων των μετάλλων από τα οποία αποτελούνται, προσφέροντας λύσεις σε πολλές εφαρμογές. Οι επιστημονικές έρευνες στον τομέα αυτόν έχουν αποδείξει την ικανότητά τους να προσφέρουν υψηλή αντοχή, εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες, βελτιωμένη θερμομηχανική συμπεριφορά, αντίσταση στη διάβρωση, και ανθεκτικότητα σε ακραίες συνθήκες, επιτρέποντας έτσι την εξέλιξη και την επέκταση πολλών τομέων, όπως η αεροναυπηγική, η αυτοκινητοβιομηχανία, η ιατρική και οι κατασκευές. Σε αυτό το πλαίσιο γίνονται προσπάθειες προσδιορισμού της συνολικής συμπεριφοράς των σύνθετων αυτών υλικών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μία υπολογιστική μελέτη του προβλήματος ενίσχυσης χαλύβδινου υποστρώματος με μεταλλικό επίθεμα. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) με χρήση του λογισμικού ANSYS 2021R1 [1]. Αφορά την μελέτη διάδοσης ρωγμής σε επιμεταλλωμένο χάλυβα και βασίστηκε στις μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί στο Brno University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Institute of Structural Mechanics από τους Malíková, L., Miarka, P., Doubek, P., Seitzl, S. στα πλαίσια του πρότζεκτ «Influence of the the bi-material interface on initiation and and propagation of a small fatigue crack». [2]

Η εργασία αυτή περιλαμβάνει δύο αναλύσεις με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και του Ansys Mechanical. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την μελέτη του προβλήματος σε δύο και σε τρεις διαστάσεις που καταπονείται εφελκυστικά.

Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει την μελέτη του προβλήματος με προϋπάρχουσα ρωγμή υπό συνθήκες κόπωσης με σκοπό τον προσδιορισμό του εύρους του συντελεστή έντασης των τάσεων, ώστε να μελετηθεί η διάδοση της ρωγμής.

**Λέξεις Κλειδιά:** Μηχανική Θραύσεων, σύνθετα υλικά, συντελεστής έντασης Τάσεως K, κόπωση

## Abstract

Composite materials are widely used in engineering applications. Specifically, metal clad metals, which result from the bonding of one metal to another, have proven to be highly valuable in the fields of engineering and technology. Those metals exhibit combined properties from the constituent metals, offering a wide range of functionalities and applications. Scientific research in this field has demonstrated their ability to provide high strength, exceptional mechanical properties, improved thermo-mechanical behavior, corrosion resistance, and resilience under extreme conditions, enabling the advancement and expansion of numerous sectors, such as aerospace, automotive, medical, and construction. Within this context, efforts are being made to determine the overall behavior of these complex materials.

This diploma thesis presents a computational study of the problem of a steel substrate reinforced with a metal clad layer. The analysis was performed using the finite element method (FEM) with the software ANSYS 2021R1. It focuses on the study of crack propagation in laser clad steels and is based on research conducted at the Brno University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Institute of Structural Mechanics by Malíková, L., Miarka, P., Doubek, P., Seitzl, S. as part of the project "Influence of the bi-material interface on initiation and propagation of a small fatigue crack."

This work includes two analyses using the finite element method and Ansys Mechanical. The first part involves studying the problem in two and three dimensions under tensile loading conditions for different clad materials.

The second part investigates the problem with a pre-existing crack under cyclic tensile stress, aiming to determine the stress intensity factor range and analyze crack propagation.

**Keywords:** Fracture Mechanics, Composite Materials, Stress Intensity Factor K, Fatigue



## Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων .....	4
Εισαγωγή .....	6
Abstract .....	7
Κεφάλαιο 1: Σύνθετα υλικά και μέθοδος συγκόλλησης .....	10
1.1 Σύνθετα Υλικά .....	10
1.1.1 Βασικές Έννοιες .....	10
1.1.2 Ταξινόμηση των σύνθετων υλικών: .....	11
1.1.3 Επιμεταλλωμένα μέταλλα .....	12
1.2 Laser Cladding – Συγκόλληση με λέιζερ .....	13
Κεφάλαιο 2: Αντοχή των υλικών και Μηχανική των Θραύσεων .....	15
2.1 Γενικά στοιχεία .....	15
2.2: Καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης .....	16
2.3 Τάση von Mises .....	20
2.4 Κόπωση .....	22
2.5 Τύποι ανοίγματος ρωγμών .....	25
2.6 Συγκέντρωση Τάσεων .....	26
2.7 Συντελεστής Ένταση Τάσεων K .....	27
2.8 Εύρος Συντελεστής Ένταση Τάσεων ΔK .....	31
2.9 Νόμος Paris .....	32
Κεφάλαιο 3: Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων .....	35
3.1 Εισαγωγικά στοιχεία της μεθόδου .....	35
3.2 Πεπερασμένα στοιχεία δισδιάστατης ελαστικότητας .....	39
3.2.1 Απλό ορθογωνικό στοιχείο .....	39
3.2.2 Το τετραπλευρικό στοιχείο .....	42
3.2.3 Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο .....	45
3.3 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ .....	47
3.3.1 Το γραμμικό τετραεδρικό στοιχείο .....	47
3.3.2 Το οκτακομβικό εξαεδρικό στοιχείο .....	49
Κεφάλαιο 4: Περιγραφή Προβλήματος .....	51
4.1 Γεωμετρία προβλήματος .....	51
4.2 Υλικά .....	53
4.2.1 Υλικό υποστρώματος .....	53
4.2.2 Υλικά επίστρωσης .....	54

4.3 Φόρτιση προβλήματος.....	57
Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά μοντέλα και αποτελέσματα.....	59
5.1 Δισδιάστατο πρόβλημα .....	59
5.1.1 Δημιουργία πλέγματος .....	60
5.1.2 Ανάλυση γραμμικής ελαστικότητας .....	61
5.1.3 Ανάλυση μη-γραμμικής ελαστικότητας.....	63
5.2 Τρισδιάστατο πρόβλημα.....	68
5.2.1 Δημιουργία πλέγματος .....	68
5.2.2 Ανάλυση γραμμικής ελαστικότητας .....	69
5.3 Δισδιάστατο πρόβλημα με προϋπάρχουσα ρωγμή .....	71
5.3.1 Διακριτοποίηση Κατασκευής.....	72
5.3.2 Υπολογισμός του εύρους του συντελεστή έντασης τάσεων .....	73
Γενικά συμπεράσματα.....	79
Επίλογος και προοπτικές για μελλοντική έρευνα .....	80
Βιβλιογραφία .....	81

# Κεφάλαιο 1 : Σύνθετα υλικά και μέθοδος συγκόλλησης

## 1.1 Σύνθετα Υλικά

### 1.1.1 Βασικές Έννοιες

Τα στερεά υλικά ταξινομούνται σε τρεις βασικές κατηγορίες: τα μέταλλα, τα κεραμικά και τα πολυμερή. Από την επεξεργασία και τον συνδυασμό υλικών που υπάγονται στις παραπάνω κατηγορίες προκύπτουν τα σύνθετα υλικά.

Ως σύνθετο υλικό ορίζεται το υλικό που προκύπτει από την ανάμειξη σε μακροσκοπική κλίμακα δύο ή περισσότερων υλικών ή φάσεων και το οποίο έχει ιδιότητες διαφορετικές από τις αντίστοιχες ιδιότητες των υλικών από τα οποία αποτελείται. Τα δύο υλικά δημιουργούν ένα νέο υλικό με διαφορετικές και βελτιωμένες ιδιότητες από τα αρχικά. Με τη δημιουργία σύνθετων υλικών επιτυγχάνουμε τον κατάλληλο συνδυασμό ιδιοτήτων που επιθυμούμε, ανάλογα με τη χρήση του υλικού. Τα πιο συνηθισμένα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούν μέταλλα, κεραμικά ή πολυμερή συνδετικά υλικά, τα οποία οπλίζονται με ίνες, σωματίδια ή φύλλα. [3]



Σχήμα 1.1: Συνδυασμοί σύνθετων υλικών [4]

Τα σύνθετα υλικά έχουν πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα φυσικά υλικά, όπως η αντοχή στη φθορά και τη διάβρωση, η ελαστικότητα, η ανθεκτικότητα στη θερμότητα και η ηλεκτρική αγωγιμότητα. Επίσης μπορούν να είναι ελαφρύτερα από τα φυσικά υλικά και να έχουν καλύτερη αντοχή στην τριβή και στις κρούσεις. Συνεπώς, χρησιμοποιούνται σε πολλούς τομείς, όπως οι κατασκευές, η αυτοκινητοβιομηχανία, η αεροναυπηγική, η ιατρική κ.α.

Οι ιδιότητες των στερεών υλικών κατηγοριοποιούνται ως εξής: μηχανικές, θερμικές, μαγνητικές, οπτικές και εκείνες που μπορούν να προκαλέσουν υποβάθμιση.

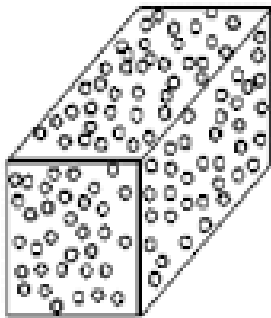
Τα εκάστοτε σύνθετα υλικά κατασκευάζονται κατάλληλα, έτσι ώστε να έχει κάθε φορά τον επιθυμητό συνδυασμό κάποιων από τις παραπάνω ιδιότητες. Ένας σύντομος και αποτελεσματικός τρόπος αξιολόγησης των σύνθετων υλικών είναι οι λεγόμενες «ειδικές ιδιότητες». Ειδική ιδιότητα ονομάζεται ο λόγος της τιμής μιας ιδιότητας ως προς την πυκνότητα του υλικού. Έτσι, με μία τιμή μπορούμε να ελέγξουμε αμέσως πόσο ελαφρύ είναι το υλικό και πόσο ισχυρή είναι η εν λόγω ιδιότητα σε αυτό. [5]

Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων τα σύνθετα υλικά έχουν μικρότερο βάρος και χαμηλότερο κόστος, ενώ οι δυνατοί συνδυασμοί είναι απεριόριστοι.

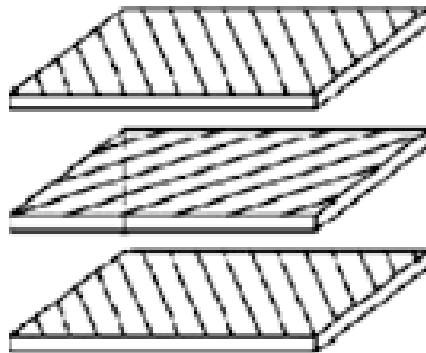
### 1.1.2 Ταξινόμηση των σύνθετων υλικών:

Υπάρχουν πολλοί τρόποι ταξινόμησης των σύνθετων υλικών. Ένας πολύ διαδεδομένος και εύκολος τρόπος ταξινόμησης είναι βάσει του είδους του συστατικού ενίσχυσης. Με αυτό το κριτήριο τα σύνθετα υλικά ταξινομούνται ως εξής:

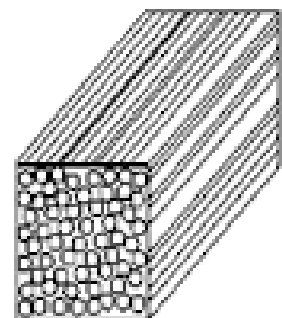
- Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites)
- Πολύστρωτα σύνθετα υλικά (Laminated composites)
- Ινώδη σύνθετα υλικά (Fiber composites)



α) Κοκκώδη σύνθετα υλικά



β) Πολύστρωτα σύνθετα υλικά



γ) Ινώδη σύνθετα υλικά

Σχήμα 1.2: Τύποι σύνθετων υλικών με βάση το είδος της ενίσχυσης [3]

Στην περίπτωση των πολύστρωτων σύνθετων υλικών τα υλικά διατάσσονται σε στρώσεις και συνθέτουν το τελικό υλικό με βελτιωμένες ιδιότητες. Τα φύλλα στρώσης έχουν συγκεκριμένη διεύθυνση υψηλής αντοχής και είναι ενισχυμένα με συνεχείς και ευθυγραμμισμένες ίνες. Στη συνέχεια τα φύλλα στρώνονται και συγκολλούνται μεταξύ τους με εναλλασσόμενο προσανατολισμό έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να ενισχύεται σε διάφορες διευθύνσεις.

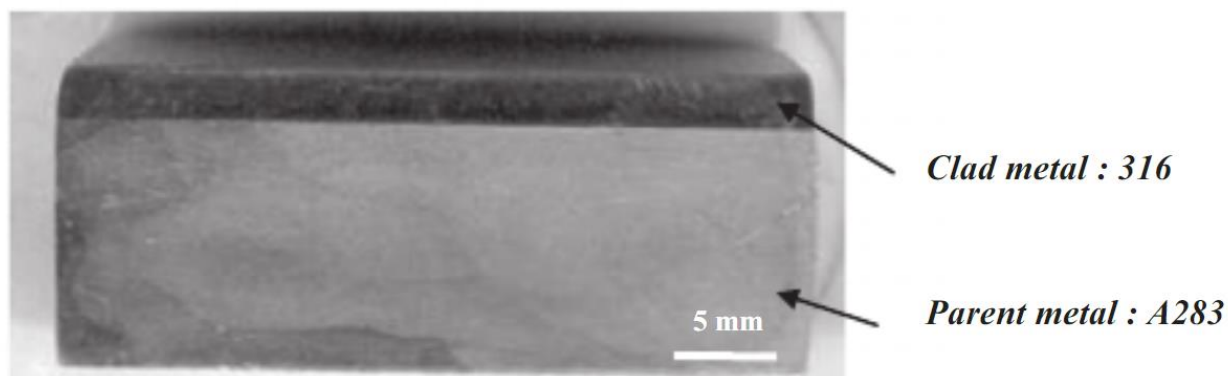
Στην συγκεκριμένη εργασία θα μελετήσουμε πολύστρωτα σύνθετα υλικά και συγκεκριμένα επιμεταλλωμένα μέταλλα. Τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά συνήθως έχουν πολύ καλή συμπεριφορά όσον αφορά την αντοχή, την ακαμψία, την αντίσταση σε διάβρωση και φθορά κ.α.

### 1.1.3 Επιμεταλλωμένα μέταλλα

Επιμετάλλωση είναι η επίθεση ενός μετάλλου πάνω σε μία επιφάνεια, ή στην δική μας περίπτωση πάνω σε ένα μέταλλο. Είναι μια διαδικασία η οποία γίνεται για να μπορέσει ένα υλικό να συνδυάσει τις καλύτερες ιδιότητες του μετάλλου και του ίδιου του υλικού.

Για παράδειγμα, τα υψηλής αντοχής κράματα αργιλίου, δεν είναι ανθεκτικά στη διάβρωση, αλλά το καθαρό αργίλιο και μερικά κράματά του είναι ανθεκτικά στη διάβρωση, δεν έχουν όμως υψηλή αντοχή. Ένα κράμα υψηλής αντοχής του αργιλίου επιμεταλλωμένο με ένα κράμα αργιλίου ανθεκτικό στη διάβρωση, αποτελεί ένα σύνθετο υλικό που διαθέτει και τις δύο ιδιότητες, δηλαδή υψηλή αντοχή και αντοχή στη διάβρωση.[5]

Τα βασικότερα πλεονεκτήματα της επιμετάλλωσης είναι η σημαντική ανθεκτικότητα στη διάβρωση, η υψηλή μηχανική αντοχή και η δημιουργία καλαίσθητης επιφάνειας.



Σχήμα 1.3 : Επιμεταλλωμένος χάλυβας [6]

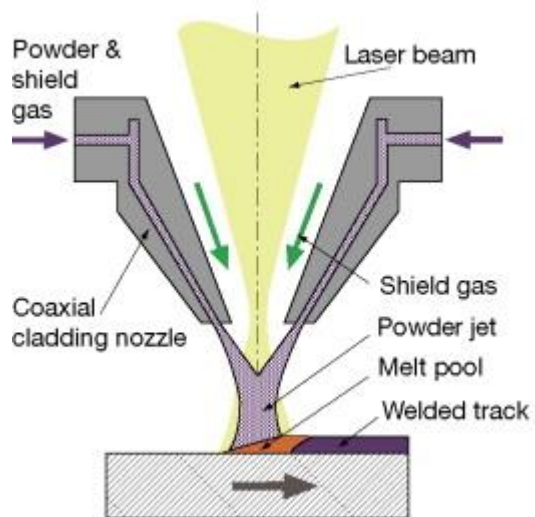
## 1.2 Laser Cladding – Συγκόλληση με λέιζερ

Η συγκόλληση (cladding) είναι μια διαδεδομένη τεχνική επεξεργασίας μετάλλων που επιτρέπει τη συνένωση όμοιων αλλά και ανόμοιων μετάλλων, των οποίων η σύνδεση μπορεί να είναι πολύ δύσκολη στις περιπτώσεις που οι χημικές και φυσικές τους ιδιότητες είναι πολύ διαφορετικές. Χρησιμοποιείται κυρίως για να δημιουργήσουμε ένα προστατευτικό στρώμα πάνω από το μέταλλο βάσης (υπόστρωμα) με ένα άλλο μέταλλο, που καλείται μέταλλο πλήρωσης. Κατά τη συγκόλληση τα δύο μέταλλα αναπτύσσουν ισχυρούς μεταλλουργικούς δεσμούς.

Μία πολύ σύγχρονη και αποτελεσματική μέθοδος συγκόλλησης, ιδιαίτερα για μέταλλα και πιο συγκεκριμένα για τον χάλυβα, είναι η συγκόλληση με λέιζερ. Η συγκεκριμένη τεχνική μπορεί να πραγματοποιηθεί τόσο κατά την αρχική κατασκευή όσο και κατά την επισκευή ενός δοκιμίου ή εξαρτήματος. Η συγκόλληση με λέιζερ ανήκει στην κατηγορία των συγκολλήσεων θερμικής αγωγιμότητας, καθώς η δέσμη λέιζερ χρησιμοποιείται ως συγκεντρωμένη πηγή θερμότητας για την επίτευξη στενών και βαθέων συγκολλήσεων.

Η συγκόλληση με laser δίνει λύσεις σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων που προκύπτουν από τις συμβατικές μεθόδους συγκόλλησης, καθώς είναι πιο οικολογική, σύντομη και πολύ αποτελεσματική. Μέσω αυτής επιτυγχάνονται συγκολλήσεις υψηλής ποιότητας, ενώ ελαχιστοποιούνται οι παραμορφώσεις, καθώς εξασφαλίζει μεγάλη ακρίβεια στην τοποθέτηση και την εστίαση της δέσμης. Είναι μία μέθοδος πολύ ευέλικτη, με ποικίλλες εφαρμογές που επιτρέπει τον συνδυασμό υλικών υψηλού κόστους με άλλα χαμηλότερου κόστους, ενώ προσφέρει μεγάλη ανθεκτικότητα στη θερμότητα και στη χημική διάβρωση. Η συγκόλληση με λέιζερ προσδίδει ανώτερες ιδιότητες που ήταν προηγουμένως ανέφικτες και έχει πολλά πλεονεκτήματα έναντι των τεχνολογιών θερμικού ψεκασμού. Μειώνει σημαντικά το πορώδες και τις παραμένουσες τάσεις και δημιουργεί ισχυρό μεταλλουργικό δεσμό με το βασικό υλικό [6][7]. Όπως προαναφέρθηκε, άλλο ένα σημαντικό της πλεονέκτημα είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για επισκευές ακριβείας συγκεκριμένων τμημάτων μιας κατασκευής. [8][9]

Η τεχνική της συγκόλλησης με λέιζερ χρησιμοποιείται ευρέως στους κλάδους της αεροναυπηγικής και της χημικής μηχανικής, καθώς το προστατευτικό στρώμα που προκύπτει ενισχύει σημαντικά την αντοχή στη διάβρωση. Επίσης, χρησιμοποιείται σε γεωργικά μηχανήματα και στη βιομηχανία της αυτοκίνησης. Ενδεικτικά κάποια εξαρτήματα που υποβάλλονται σε συγκόλληση με λέιζερ είναι: οι υδραυλικοί κύλινδροι, οι τουρμπίνες ή βαλβίδες κ.α.



Σχήμα 1.4: Διαδικασία laser cladding [10]

## Κεφάλαιο 2 : Αντοχή των υλικών και Μηχανική των Θραύσεων

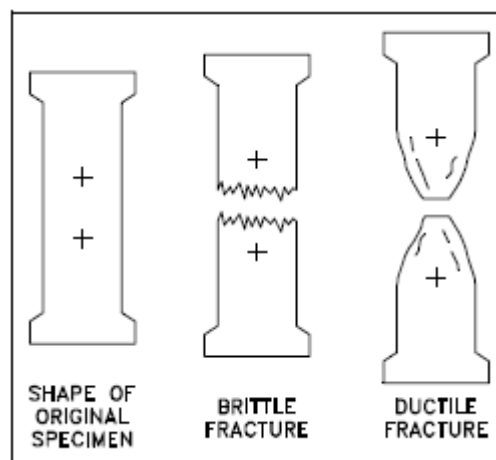
### 2.1 Γενικά στοιχεία

Η μηχανική των θραύσεων είναι το πεδίο της μηχανικής που μελετά τη συμπεριφορά των υλικών υπό συνθήκες θραύσης. Μελετά τα φορτία σε σχέση με τη γεωμετρία και τις ιδιότητες των υλικών, τις συνθήκες δημιουργίας και διάδοσης ρωγμών και προβλέπει την διάρκεια ζωής του υλικού.

Απλή θραύση είναι ο διαχωρισμός ενός σώματος σε δύο ή περισσότερα τμήματα, ως αποτέλεσμα μίας επιβαλλόμενης στατικής τάσης ή κόπωσης (κυκλικές τάσεις) και ερπυσμού (χρονικά εξαρτώμενη παραμόρφωση σε αυξημένες θερμοκρασίες). Η εφαρμοζόμενη τάση μπορεί να είναι εφελκυστική, θλιπτική, διατμητική, στρεπτική ή και συνδυασμός αυτών. Η συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθεί με θραύσεις λόγω καθαρού εφελκυσμού και κόπωσης με μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

Κάθε διαδικασία θραύσης εμπεριέχει δύο στάδια, τον σχηματισμό της ρωγμής και την διάδοση της ρωγμής. Ο τύπος της θραύσης εξαρτάται από τον μηχανισμό διάδοσης της ρωγμής.

Στα μέταλλα υπάρχουν δύο δυνατοί τύποι θραύσης, ο όλκιμος και ο ψαθυρός. Η κατάταξη βασίζεται στην ικανότητα του υλικού να υφίσταται πλαστική παραμόρφωση. Η όλκιμη θραύση χαρακτηρίζεται από εκτεταμένη πλαστική παραμόρφωση και είναι μία σχετικά αργή διαδικασία. Σε αυτόν τον τύπο θραύσης χαρακτηρίζουμε τη ρωγμή ως σταθερή, δηλαδή αντιστέκεται σε περαιτέρω επέκταση εκτός αν υπάρχει μια αύξηση στην εφαρμοζόμενη τάση. Απαιτείται περισσότερη ενέργεια παραμόρφωσης αφού τα υλικά είναι γενικά πιο δύσθραυστα. Είναι συνήθως φανερή μία σημαντική παραμόρφωση που μας προειδοποιεί για την επικείμενη θραύση. Αντίθετα, στην ψαθυρή θραύση παρουσιάζονται ασταθείς ρωγμές, δηλαδή ρωγμές που η διάδοση τους συνεχίζεται αυθόρμητα χωρίς κάποια αύξηση της εφαρμοζόμενης τάσης. Οι ρωγμές αυτές μπορούν να εξαπλωθούν πολύ γρήγορα και με ελάχιστη ή μηδενική πλαστική παραμόρφωση. Κάτω από την επίδραση μιας εφαρμοζόμενης εφελκυστικής τάσης τα περισσότερα μεταλλικά κράματα είναι όλκιμα.



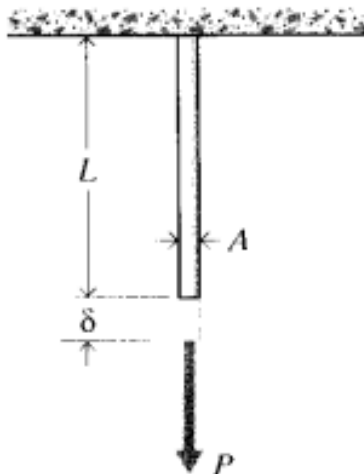
Σχήμα 2.1: Τύποι θραύσης [11]



## 2.2: Καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης

Σημαντικό χαρακτηριστικό του εκάστοτε υλικού είναι το διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης του. Η συνηθέστερη μέθοδος προσδιορισμού του διαγράμματος τάσης – παραμόρφωσης ενός υλικού είναι μέσω πειραμάτων εφελκυσμού. Τα πειράματα αυτά πραγματοποιούνται σε ειδική μηχανή εφελκυσμού με δοκίμια συνήθως κυλινδρικά, με μήκος πενταπλάσιο της διαμέτρου τους ή καλώδια. Τα δοκίμια συγκρατούνται με δύο σιαγόνες και υποβάλλονται σε κεντρικό φορτίο  $P$ , που συνεχώς αυξάνεται. Όσο το φορτίο αυξάνεται, φυσικά μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ δύο δεδομένων σημείων, ή αλλιώς προκύπτει μια μετατόπιση  $\delta L$  συναρτήσει του φορτίου. Για κάθε τιμή του φορτίου καταγράφεται η αντίστοιχη επιμήκυνση του δοκιμίου και η παράλληλη ελάττωση της διαμέτρου της διατομής του [13].

Έτσι, από τις γνωστές σχέσεις:  $\sigma = \frac{P}{A_0}$  και  $\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$  προκύπτουν οι καμπύλες τάσης παραμόρφωσης του υλικού του δοκιμίου.

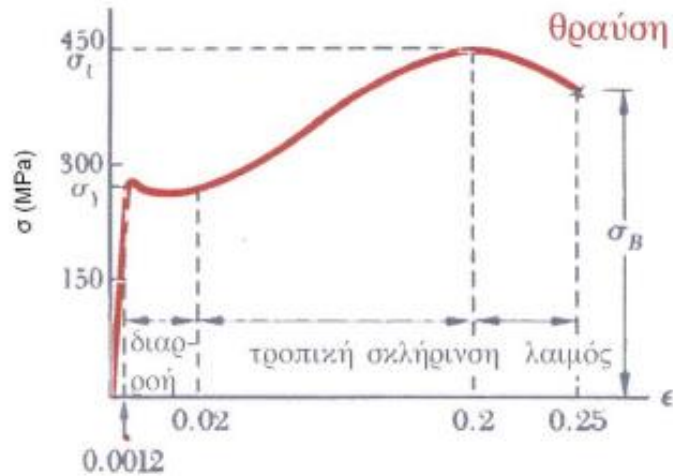


Σχήμα 2.2: Πείραμα εφελκυσμού [12]

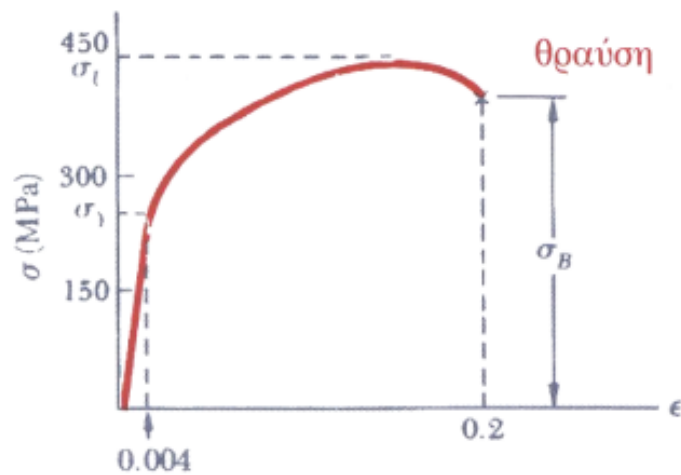
Τα διαγράμματα αυτά είναι πολύ διαδεδομένα και χρήσιμα γιατί μας δίνουν πληροφορίες για άλλες γεωμετρικές δοκιμιών από το ίδιο υλικό. Ωστόσο υπάρχουν παράγοντες που μεταβάλλουν τα διαγράμματα τάσης-τροπής για το ίδιο υλικό όπως η θερμοκρασία, η ταχύτητα μεταβολής του φορτίου και ο τρόπος επεξεργασίας του υλικού (ειδικά στα σύνθετα υλικά).

Παραθέτονται κάποια χαρακτηριστικά διαγράμματα τάσης-παραμόρφωσης για τις δύο κατηγορίες υλικών, βάσει της συμπεριφοράς τους σε φόρτιση, τα όλκιμα και τα ψαθυρά υλικά.

Για τα υλικά που παρουσιάζουν όλκιμότητα οι καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης φαίνονται στα σχήματα 2.3 και 2.4.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα χάλυβα χαμηλής περιεκτικότητας σε χάλυβα [13]



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα κράματος Αλουμινίου [13]

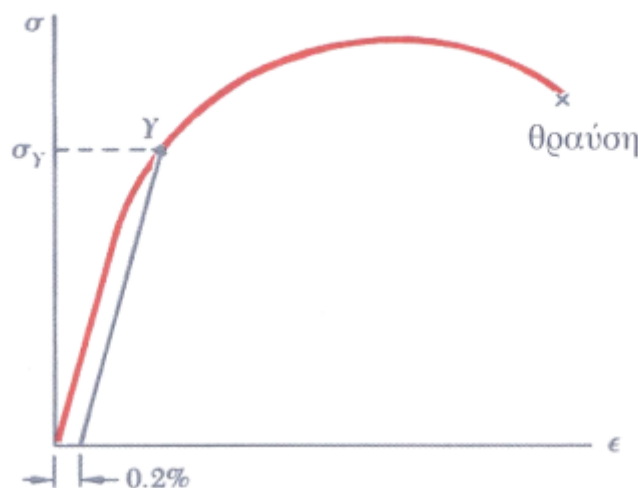
Τα δοκίμια υποβάλλονται σε φορτίο που αυξάνεται. Στο αρχικό τμήμα του διαγράμματος (low strain portion) το μήκος αυξάνεται γραμμικά ανάλογα με το φορτίο με πολύ αργό ρυθμό, ισχύει, επομένως ο νόμος του Hooke. Για την περίπτωση του κράματος αλουμινίου αλλά και πολλών άλλων υλικών δεν έχουμε γραμμικότητα στο διάγραμμα τάσης - παραμόρφωσης μέχρι την τιμή της τάσης διαρροής, υπάρχει επομένως μία παραδοχή για τον υπολογισμό της  $\sigma_y$ , που θα αναφερθεί παρακάτω.

Όταν η εφαρμοζόμενη τάση ξεπεράσει την τάση διαρροής (yield strength)  $\sigma_y$  του υλικού (το σημείο όπου  $\sigma = \sigma_y$  καλείται όριο αναλογίας) η παραμόρφωση αυξάνεται πολύ για μικρή αύξηση της εφαρμοζόμενης τάσης. Η περιοχή αυτή του διαγράμματος είναι η περιοχή διαρροής και η μεγάλη πλαστική παραμόρφωση του δοκιμίου (πλαστική ροή) οφείλεται στην ανάπτυξη διατμητικών τάσεων. Τα όλκιμα μέταλλα, υπό συνθήκες στατικής φόρτισης και θερμοκρασίας περιβάλλοντος δεν αστοχούν εξαιτίας της πλαστικής ροής, λόγω του φαινομένου της τροπικής σκλήρυνσης.

Τροπική σκλήρυνση ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο, όσο αυξάνεται η παραμόρφωση του υλικού, τόσο μεγαλύτερη εφαρμοζόμενη τάση πρέπει να έχουμε για να προκύψει περαιτέρω παραμόρφωση. Η περιοχή αυτή στο διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης εκτείνεται μέχρι η τιμή της τάσης να φτάσει στην οριακή τάση (ultimate strength)  $\sigma_u$ .

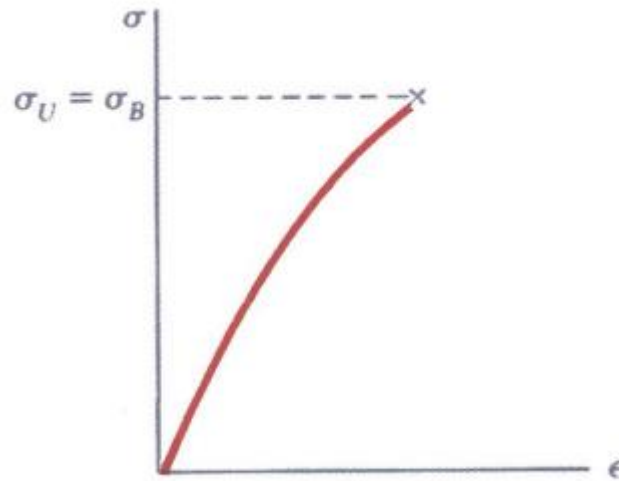
Όταν η εφαρμοζόμενη τάση ξεπεράσει την τιμή  $\sigma_u$  έχουμε το φαινόμενο της στένωσης ή αλλιώς το φαινόμενο σχηματισμού λαιμού στο δοκίμιο. Εφόσον το δοκίμιο έχει πλέον πολύ μεγάλη και εμφανή παραμόρφωση θα οδηγηθεί σε θραύση για μία τιμή της τάσης  $\sigma_b$  που μπορεί να είναι μικρότερη από την οριακή, αφού το δοκίμιο επιμηκύνεται και για μικρότερες τιμές της τάσης.

Στην περίπτωση των κραμάτων αλουμινίου και άλλων αντίστοιχων υλικών χρησιμοποιούμε την μέθοδο προέκτασης, δηλαδή θεωρούμε μία μόνιμη τροπή  $\epsilon=0.2\%$  για την οποία εμφανίζεται η τάση διαρροής, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 2.5: Προσδιορισμός της τάσης διαρροής με την μέθοδο της μικρής μόνιμης τροπής. [13]

Για τα υλικά που παρουσιάζουν ψαθυρότητα οι καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης φαίνονται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης στα ψαθυρά υλικά [13]

Στα ψαθυρά υλικά η οριακή τάση ταυτίζεται με την τάση αστοχίας, καθώς δεν υπάρχουν σημαντικές μεταβολές του ρυθμού παραμόρφωσης πριν την θραύση. Εφόσον τα ψαθυρά υλικά υφίστανται πολύ μικρότερη παραμόρφωση πριν την θραύση σε σύγκριση με τα όλκιμα, η τιμή της παραμόρφωσης κατά την θραύση των ψαθυρών υλικών είναι πολύ μικρότερη από εκείνη των όλκιμων [13].

## 2.3 Τάση von Mises

Η ισοδύναμη τάση von Mises είναι μία από τις πιο συχνά αναφερόμενες ισοδύναμες τάσεις που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη των υλικών για την εκτίμηση της αντοχής και της ανθεκτικότητας των υλικών.

Σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας von Mises η διαρροή ενός όλκιμου υλικού κάτω από την επίδραση σύνθετης εντατικής κατάστασης αρχίζει όταν η ισοδύναμη τάση  $\sigma_{eq}$  ισούται με την αντοχή σε εφελκυσμό, όπως αυτή μετρείται κατά τη διαρροή του υλικού λόγω καθαρού εφελκυσμού.[14]

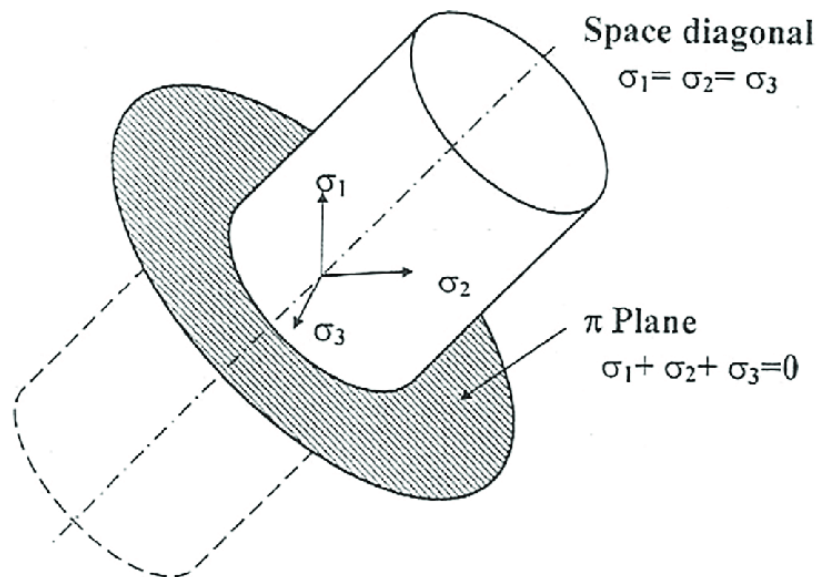
Η μαθηματική διατύπωση του κριτηρίου είναι:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (2.1)$$

ή

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)}{2}} \quad (2.2)$$

Στο σχήμα 2.7 παρουσιάζεται η επιφάνεια αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας von Mises. Εάν το σημείο που εκφράζει την τυχαία εντατική κατάσταση βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο, τότε το υλικό βρίσκεται στην ελαστική περιοχή. Εάν το σημείο βρίσκεται στην επιφάνεια διαρροής, τότε αρχίζει η διαρροή του υλικού, ενώ όταν το σημείο αυτό βρίσκεται έξω από τον κύλινδρο, τότε έχει ήδη δημιουργηθεί πλαστική παραμόρφωση στο υλικό.

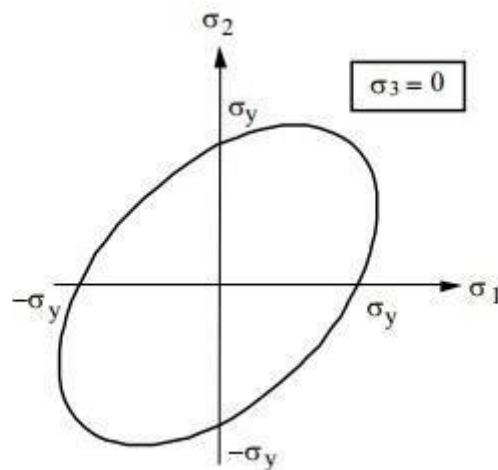


Σχήμα 2.7: Η επιφάνεια αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας von Mises [15]

Στην περίπτωση διδιάστατης εντατικής κατάστασης ισχύει  $\sigma_3 = 0$  οπότε το κριτήριο von Mises γίνεται:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (2.3)$$

Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο von Mises δίνεται από μία έλλειψη όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8: Η επιφάνεια αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας von Mises στη διδιάστατη κατάσταση [16]

## 2.4 Κόπωση

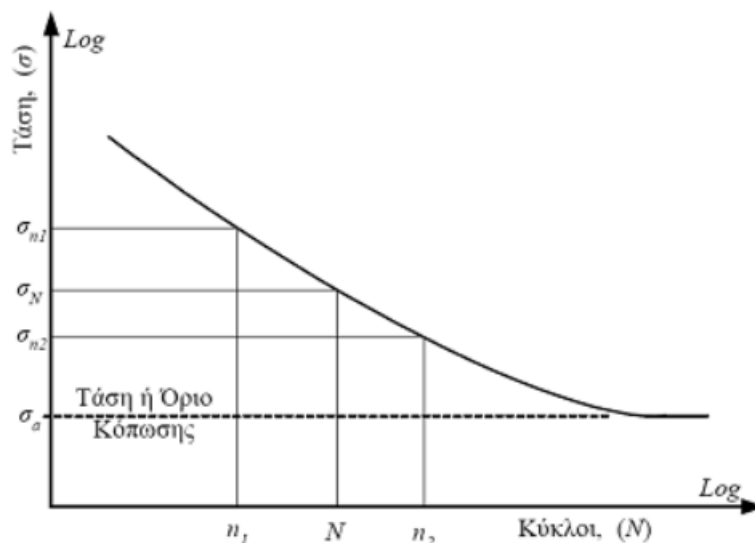
Η κόπωση είναι ένα σημαντικό φαινόμενο στη μηχανική των υλικών, καθώς επηρεάζει σημαντικά την διάρκεια ζωής των υλικών και των κατασκευών και είναι υπεύθυνη για την αστοχία των περισσότερων μεταλλικών κατασκευών (περίπου το 90%). Στην κόπωση, το υλικό υποβάλλεται σε επαναλαμβανόμενες τάσεις ή παραμορφώσεις για μεγάλο χρονικό διάστημα με αποτέλεσμα η αστοχία να συμβαίνει σε πολύ χαμηλότερα επίπεδα τάσεων από την αντοχή του υλικού σε στατική φόρτιση.

Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζει δύο βασικά χαρακτηριστικά. Πρώτον, η φόρτιση είναι κυκλική, πράγμα που σημαίνει ότι οι τάσεις και οι παραμορφώσεις που ασκούνται στο υλικό μεταβάλλονται μεταξύ μίας μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Δεύτερον το υλικό υφίσταται βλάβη κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας. Η βλάβη αυτή μπορεί να εκδηλωθεί ως τοπική πλαστική παραμόρφωση, δημιουργία μικρορωγμών αλλά και ως δημιουργία και διάδοση ρωγμών. Η κόπωση προκαλεί την τροπική προοδευτική συσσώρευση βλάβης στο υλικό, η οποία χαρακτηρίζεται συνήθως από την αύξηση του μήκους της ρωγμής.

Η διαδικασία της αστοχίας σε κόπωση περιλαμβάνει τρία διαδοχικά βήματα. Πρώτον έχουμε έναρξη της ρωγμής σε κάποιο σημείο μεγάλης συγκέντρωσης τάσης. Στην συνέχεια, η ρωγμή διαδίδεται αυξανόμενη με κάθε κύκλο φόρτισης και η τελική αστοχία συμβαίνει όταν το μήκος της ρωγμής αποκτήσει ένα κρίσιμο μέγεθος. Στην κόπωση μιλάμε για διάρκεια ζωής του υλικού την οποία την μετράμε σε κύκλους φορτίσεως και συμβολίζουμε με  $N_f$ .

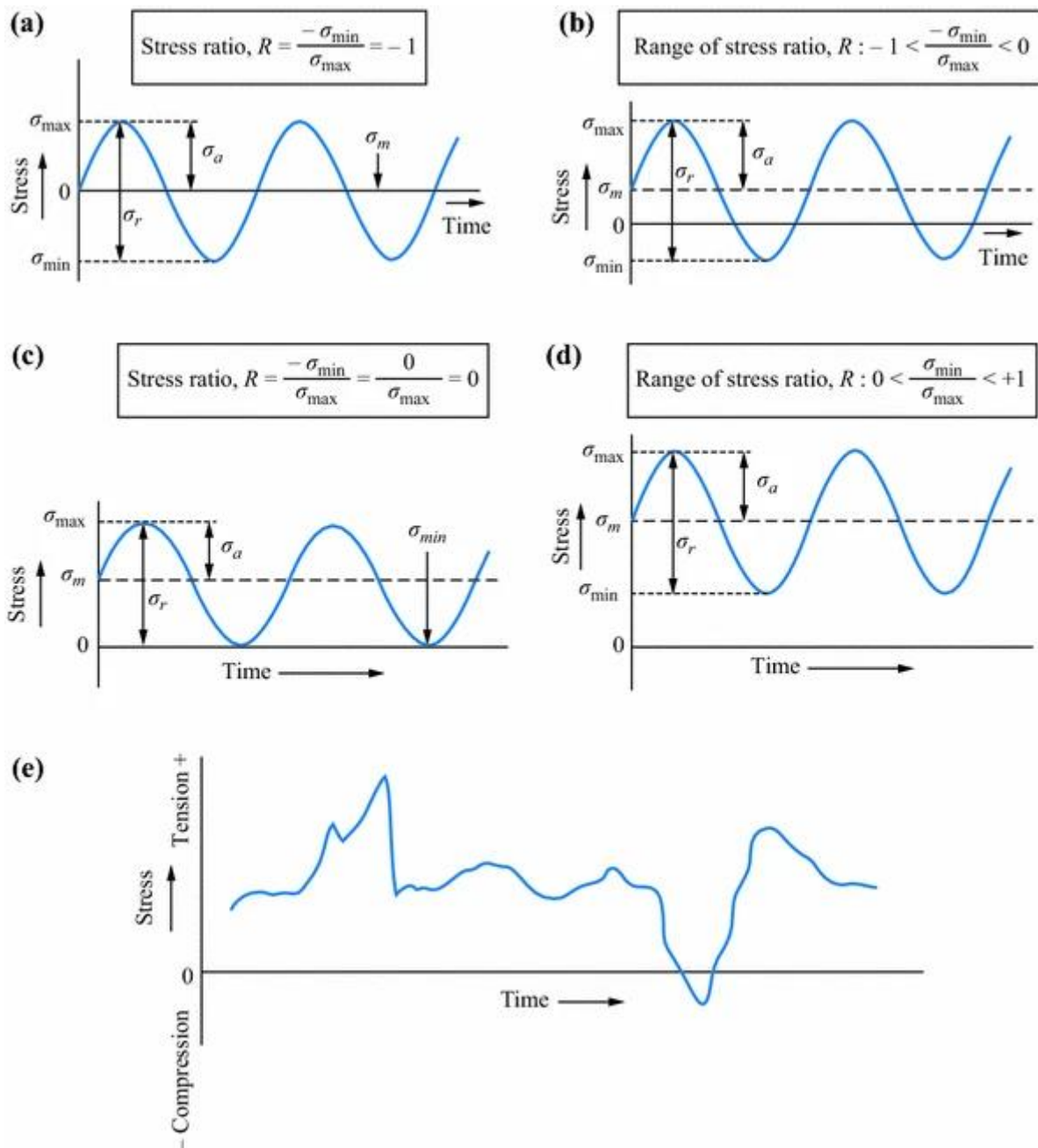
Οι ρωγμές λόγω κόπωσης σχεδόν πάντα δημιουργούνται στην επιφάνεια του σώματος σε κάποιο σημείο συγκέντρωσης τάσεων και η επιφάνεια θραύσης είναι συνήθως κάθετη στην διεύθυνση της εφαρμοζόμενης εφελκυστικής τάσης.

Οι ιδιότητες της κόπωσης μπορούν να προσδιοριστούν με εργαστηριακές δοκιμές. Από τα πειράματα αυτά προκύπτουν οι καμπύλες S-N, που είναι το διάγραμμα της εφαρμοζόμενης τάσης συναρτήσει του λογαρίθμου του αριθμού των κύκλων φόρτισης. Το σημείο όπου η καμπύλη γίνεται πρακτικά οριζόντια λέγεται τάση ή όριο κόπωσης και είναι η ανώτατη φόρτιση που μπορεί να δεχτεί το υλικό χωρίς να αστοχήσει, ακόμα και για άπειρο αριθμό επαναλήψεων.



Σχήμα 2.9: Καμπύλη  $\sigma$ - $N$  [17]

Οι τάσεις στην κόπωση μπορεί να είναι αξονικές, καμπτικές ή στρεπτικές και υπάρχουν τρεις δυνατοί τύποι χρονικά κυμαινόμενης τάσης, οι αντιστρεπτοί κύκλοι φόρτισης, οι επαναλαμβανόμενοι και οι τυχαίοι κύκλοι φόρτισης. Η μορφή του κάθε τύπου φαίνεται στο σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10: Μορφές κυμαινόμενων τάσεων (α) αντιστρεπτός κύκλος φόρτισης, (b-d) επαναλαμβανόμενος κύκλος φόρτισης για διάφορες τιμές του λόγου των τάσεων R, (e) τυχαίος κύκλος φόρτισης [18]



Τα μεγέθη που σχετίζονται με την κόπωση είναι τα εξής:

- Η μέση τάση  $\sigma_m$  : η μέση τιμή της μέγιστης και της ελάχιστης τάσης στον κύκλο:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (2.4)$$

- Το εύρος των τάσεων  $\sigma_r$  : η διαφορά μεταξύ των τιμών  $\sigma_{max}$  και  $\sigma_{min}$ , σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_r = | \sigma_{max} - \sigma_{min} | \quad (2.5)$$

- Το πλάτος της τάσης  $\sigma_\alpha$  : το μισό του εύρους των τάσεων:  $\sigma_\alpha = \frac{\sigma_r}{2}$  (2.6)

- Ο λόγος τάσεων R : είναι ο λόγος του ελάχιστου και του μέγιστου πλάτους της τάσης:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (2.7)$$

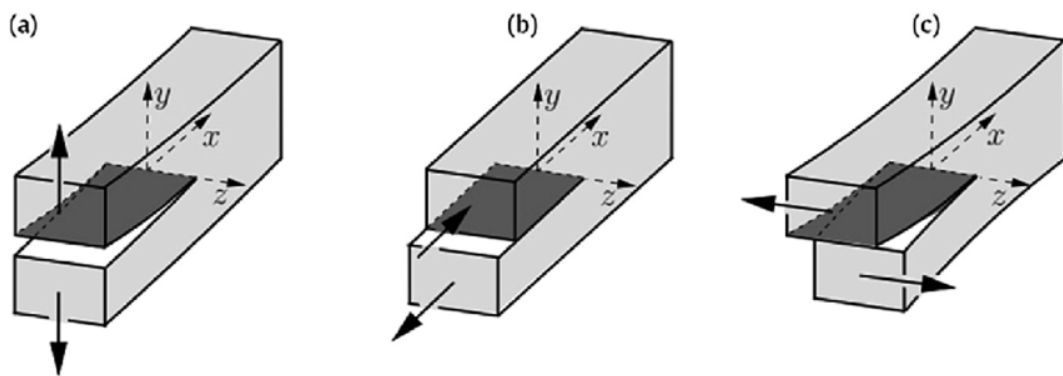
## 2.5 Τύποι ανοίγματος ρωγμών

Υπάρχουν τρία είδη ανοίγματος ρωγμών:

Ο τρόπος I (opening mode) δηλώνει ένα συμμετρικό άνοιγμα της ρωγμής σε σχέση με το επίπεδο  $x,z$ .

Ο τρόπος II (sliding mode) περιγράφει έναν αντισυμμετρικό διαχωρισμό της επιφάνειας της ρωγμής λόγω σχετικών μετατοπίσεων στην κατεύθυνση  $x$ .

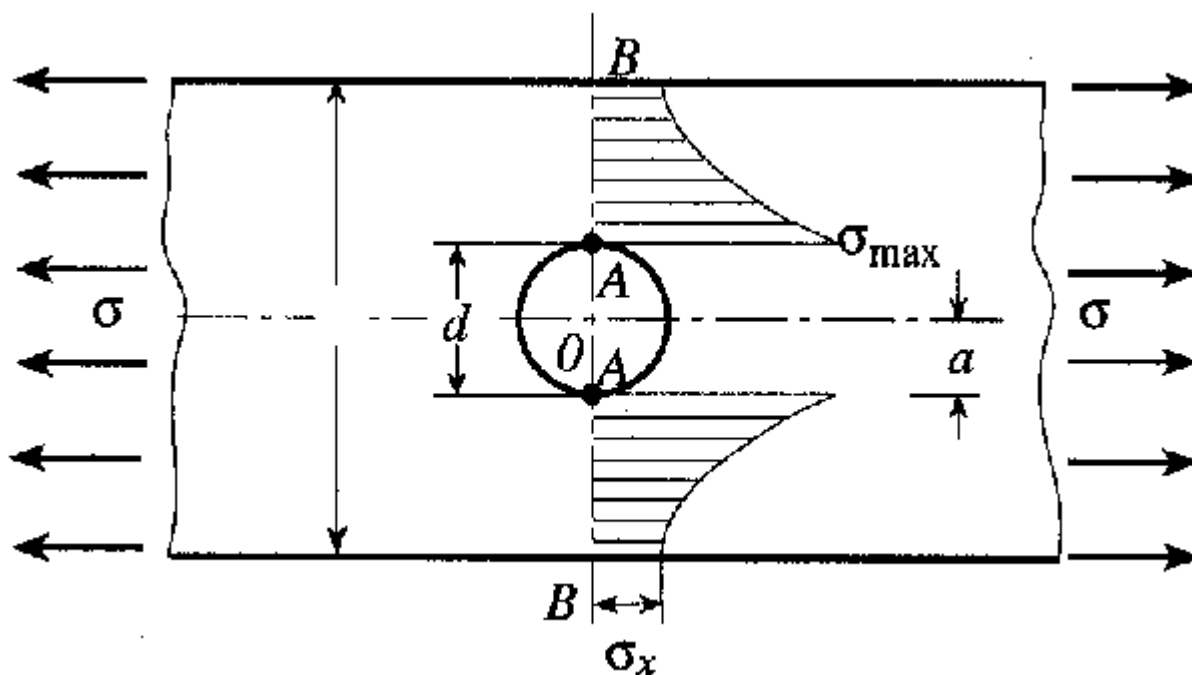
Ο τρόπος III (shearing mode) αναφέρεται στον διαχωρισμό λόγω σχετικών μετατοπίσεων ως προς την κατεύθυνση  $z$ .



Σχήμα 2.11: Τρόποι ανοίγματος ρωγμής (a) opening mode , (b) sliding mode, (c) shearing mode [19]

## 2.5 Συγκέντρωση Τάσεων

Όταν ένα τέλειο στερεό φορτίζεται εφελκυστικά η ορθή τάση είναι ίδια σε κάθε σημείο του σώματος. Αν όμως το υλικό έχει κάποια γεωμετρική ατέλεια (π.χ ρωγμές, οπές κ.α.), οι ελεύθερες επιφάνειες του δοκιμίου δεν φέρουν φορτίο. Το αποτέλεσμα είναι ότι τα γειτονικά σημεία της ατέλειας πρέπει να φέρουν παραπάνω φορτίο, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται συγκέντρωση τάσεων σε αυτά. Η συγκέντρωση αυτή καθιστά αυτές τις περιοχές κρίσιμες για πιθανή εμφάνιση θραύσης.



Σχήμα 2.12: Συγκέντρωση τάσεων γύρω από οπή [20]

## 2.6 Συντελεστής Ένταση Τάσεων K

Το τασικό πεδίο στο άκρο μίας ρωγμής μπορεί να περιγραφεί από μία παράμετρο, τον συντελεστή έντασης τάσεων (stress intensity factor), K. Συγκεκριμένα, η κατανομή των τάσεων στο άκρο της ρωγμής εξαρτάται γραμμικά από τον συντελεστή K.

Πρόκειται για μία από τις πιο σημαντικές και χρήσιμες παραμέτρους της μηχανικής των θραύσεων, καθώς είναι καθοριστική για τον προσδιορισμό κριτηρίων αστοχίας. Σχετίζεται άμεσα με τον ρυθμό διάδοσης της ρωγμής και εφαρμόζεται συνήθως σε ομογενή, γραμμικώς ελαστικά υλικά.

Ο συντελεστής K εξαρτάται από τη γεωμετρία του δείγματος, το μέγεθος και την τοποθεσία της ρωγμής, καθώς και από το μέγεθος και την κατανομή του φορτίου. Πρόκειται για θεωρητικό κατασκεύασμα που αναπτύχθηκε από τον George R Irwin το 1957 και προέκυψε ως προσεγγιστική λύση στην γενική λύση του Westergaard για το πεδίο των τάσεων γύρω από μία ρωγμή [21].

Οι τάσεις στην περιοχή της ρωγμής έχουν την μορφή:

$$\sigma_{ij} = \sigma\sqrt{\pi a} f_{ij}(\theta) \quad (2.8)$$

όπου r και θ οι κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες του σημείου ως προς την κορυφή της ρωγμής.

Ο συντελεστής K δίνεται γενικά από την σχέση:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (2.9)$$

Όπου  $f\left(\frac{a}{w}\right)$  είναι μία αδιάστατη παράμετρος που εξαρτάται μόνο από την γεωμετρία του δοκιμίου, το πλάτος w και το μήκος της ρωγμής a.

Ο Irwin έδειξε επίσης πως η αντοχή ενός δοκιμίου σε θραύση (fracture toughness) εξαρτάται από την κρίσιμη τιμή του συντελεστή K. Στη συνηθέστερη περίπτωση ρωγμής με διεύθυνση διάδοσης κάθετη σε αυτή της φόρτισης συμβολίζεται με  $K_{Ic}$  (critical stress intensity factor). Το  $K_{Ic}$  προσδιορίζει την τάση για την οποία μια προ-υπάρχουσα ρωγμή θα διαδοθεί στο υλικό μας.

Ο συντελεστής K μας χρειάζεται για να υπολογίσουμε τη στατική αντοχή μιας κατασκευής με ρωγμή ή την επέκταση μιας ρωγμής σε κατασκευή που φορτίζεται δυναμικά ή την επέκταση μιας ρωγμής λόγω διάβρωσης σε μια φορτισμένη κατασκευή.

Διακρίνουμε τρεις μορφές του συντελεστή K, μια για κάθε έναν από τους τρεις κύριους τρόπους (modes) ανοίγματος μιας ρωγμής :

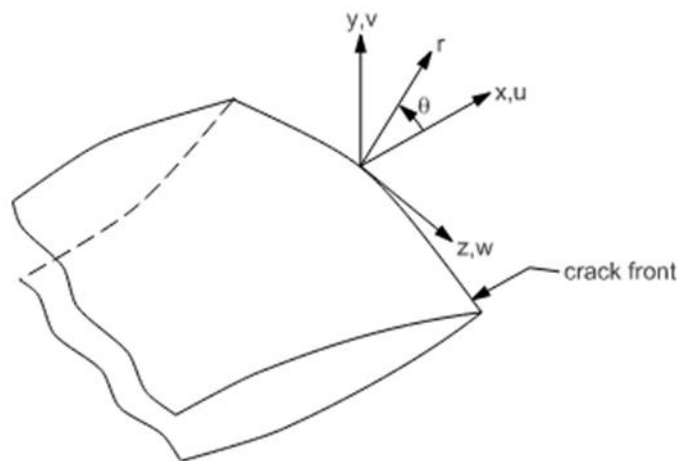
- KI για τρόπο φόρτισης I : Συναντάται στην πλειοψηφία των περιπτώσεων και γι' αυτό έχει λάβει πολύ μεγαλύτερη προσοχή σε θεωρητικό και πειραματικό επίπεδο.
- KII για τρόπο φόρτισης II : Είναι ο λιγότερο συχρός και λιγότερο σημαντικός. Εμφανίζεται συνήθως μαζί με τον I ή III οι οποίοι είναι και οι κυρίαρχοι τρόποι φόρτισης.
- KIII για τρόπο φόρτισης III : Εμφανίζεται κατά τη στρέψη μιας ράβδου που φέρει ρωγμή.

Ο συντελεστής K υπολογίζεται από το Ansys με δύο μεθόδους:

### 1. Displacement extrapolation method

Σε αυτή την μέθοδο ο συντελεστής K υπολογίζεται βάσει των μετατοπίσεων των κόμβων στην περιοχή γύρω από τη ρωγμή. Ο τρόπος υπολογισμού περιγράφεται παρακάτω [22].

Θεωρώντας το παρακάτω τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο εμπρόσθιο άκρο της ρωγμής:



Σχήμα 2.13: Σύστημα συντεταγμένων στο εμπρόσθιο άκρο της ρωγμής [22]

Οι σχέσεις για τον συντελεστή  $K_I$  είναι:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1+\kappa} \frac{|v|}{\sqrt{r}} \quad (2.10), \text{ για μοντέλα συμμετρικά ως προς τη ρωγμή (half-crack model)}$$

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1+\kappa} \frac{|\Delta v|}{\sqrt{r}} \quad (2.11), \text{ για ολόκληρα μοντέλα (full-crack model), όπου το } \Delta v \text{ είναι η κίνηση της μίας πλευράς της ρωγμής σε σχέση με την άλλη.}$$

Οι σχέσεις για τον συντελεστή  $K_{II}$  είναι:

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1+\kappa} \frac{|u|}{\sqrt{r}} \quad (2.12), \text{ για μοντέλα συμμετρικά ως προς τη ρωγμή}$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1+\kappa} \frac{|\Delta u|}{\sqrt{r}} \quad (2.13), \text{ για ολόκληρα μοντέλα}$$

Οι σχέσεις για τον συντελεστή  $K_{III}$  είναι:

$$K_{III} = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1+\kappa} \frac{|w|}{\sqrt{r}} \quad (2.14), \text{ για μοντέλα συμμετρικά ως προς τη ρωγμή}$$

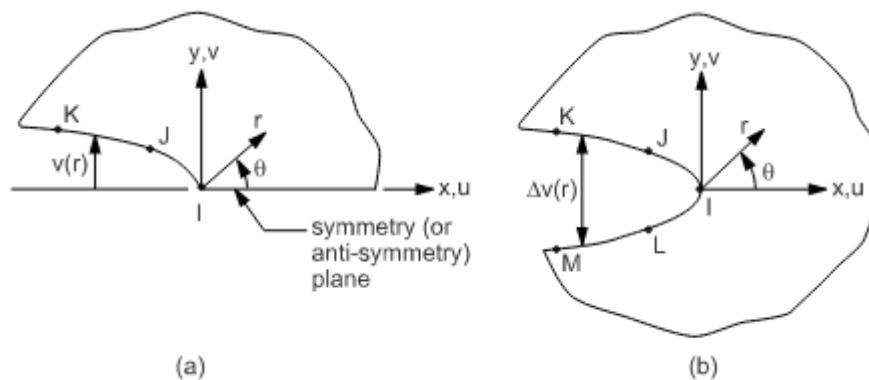
$$K_{III} = \sqrt{2\pi} \frac{2G}{1+\kappa} \frac{|\Delta w|}{\sqrt{r}} \quad (2.15), \text{ για ολόκληρα μοντέλα}$$

, όπου  $\kappa = \begin{cases} 3-4\nu, & \text{σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu}, & \text{σε συνθήκες επίπεδης έντασης} \end{cases}$

$\nu$ : ο λόγος Poisson

$G$ : το μέτρο διάτμησης

Οι κόμβοι βάσει των οποίων γίνεται ο υπολογισμός φαίνονται στο σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.14: Κόμβοι στο άνοιγμα της ρωγμής (a) half model (b) full model [22]

## 2. Contour Integral method

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων υπολογίζεται από ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Χρησιμοποιείται ένα βοηθητικό πεδίο (auxiliary field) το οποίο αποτελεί την αναλυτική λύση του πεδίου γύρω από την κορυφή της ρωγμής στην περίπτωση μιας ημι-άπειρης ρωγμής που φορτίζεται με κομβικό φορτίο  $F$  με κατεύθυνση παράλληλη στην ρωγμή. Με αυτό τον τόπο μηδενίζει την συνεισφορά του singularity στην κορυφή της ρωγμής [23].

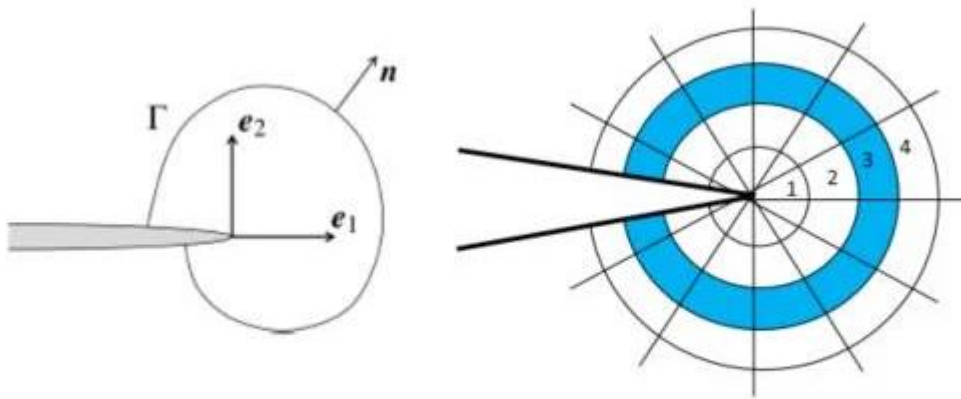
Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται interaction integral:

$$I = \frac{-\int_V q_{i,j} [\sigma_{kl} \varepsilon_{kl}^{aux} \delta_{ij} - \sigma_{kj}^{aux} u_{k,i} - \sigma_{kj} u_{k,i}^{aux}] dV}{\int_S \delta q_n dS} \quad (2.16)$$

Όπου:  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ , οι τάσεις, οι τροπές και οι μετατοπίσεις

$\sigma_{ij}^{aux}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{aux}$ ,  $u_i^{aux}$ , οι τάσεις, οι τροπές και οι μετατοπίσεις του βοηθητικού πεδίου

$q_i$ , crack extension vector



The circular rings labeled 1, 2, 3, and 4 represent the finite element contours

Σχήμα 2.15: Καμπύλες γύρω από την κορυφή της ρωγμής [23]

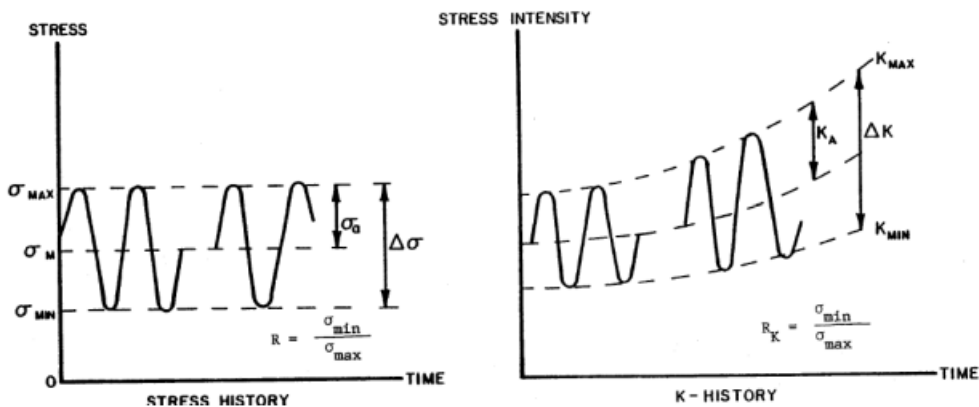
Η σχέση του ολοκληρώματος- $I$  με τον συντελεστή έντασης τάσεων  $K$  είναι:

$$I = \frac{2}{E} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) + \frac{1}{G} K_{III} K_{III}^{aux} \quad (2.17)$$

Στην συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος contour integral

## 2.7 Εύρος Συντελεστής Ένταση Τάσεων ΔK

Στην κόπωση όπως αναφέρθηκε υπάρχει ένα εύρος τάσης Δσ. Το εύρος αυτό μπορεί να μεταφραστεί σε εύρος του συντελεστή έντασης των τάσεων για συγκεκριμένο μήκος ρωγμής.



Σχήμα 2.16: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης των τάσεων ΔK [24]

Σημειώνεται ότι, όταν η τάση είναι θλιπτική, η ρωγμή κλείνει και ο συντελεστής K παύει να έχει νόημα. Σ' αυτή την περίπτωση, για τους υπολογισμούς ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$\text{Αν } \sigma_{min} \leq 0, \text{ τότε } K_{min} = 0 \text{ και } \Delta K = K_{max} \text{ [24]}$$



## 2.7 Νόμος Paris

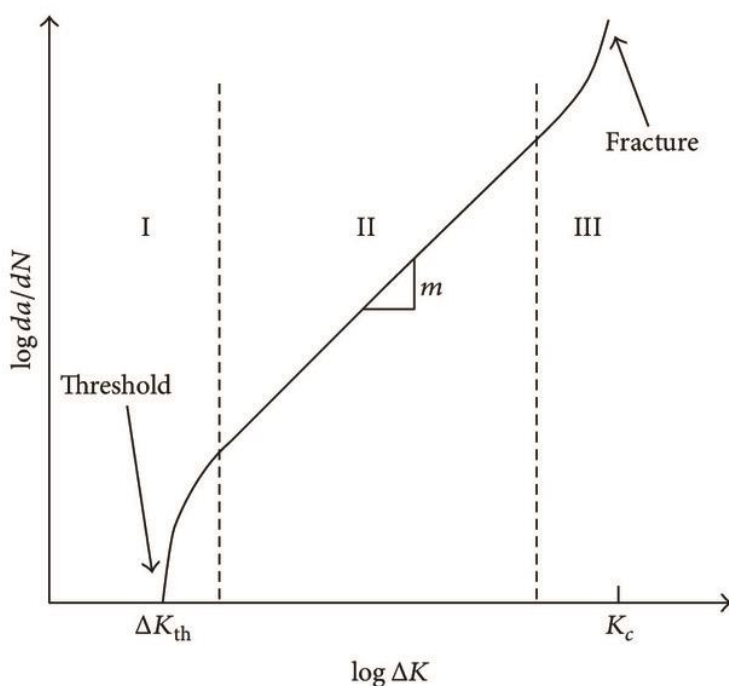
Υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά μεγέθη του  $\Delta K$ , το  $\Delta K_{\text{thres}}$  και το  $\Delta K_c$ . Το  $\Delta K_{\text{thres}}$  είναι η τιμή εκείνη του συντελεστή έντασης τάσεων κάτω από την οποία δεν υπάρχει διάδοση της ρωγμής. Η τιμή αυτή περιγράφεται ως «κατώφλι» της διάδοσης της ρωγμής σε κόπωση.

Το 1963, ο Paris έδειξε ότι ο ρυθμός διάδοσης των ρωγμών υπό κόπωση ( $da/dN$ ), μπορεί να περιγραφεί εμπειρικά με τη μεταβολή του συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$ , αναπαριστώντας τα σημεία σε διπλή λογαριθμική κλίμακα. [25]

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad (2.16)$$

όπου  $C, m$  πειραματικά προσδιοριζόμενες σταθερές

Ο ρυθμός διάδοσης της ρωγμής σε συνάρτηση με το εύρος του συντελεστή έντασης τάσεων φαίνεται στο σχήμα



Σχήμα 2.17: Ρυθμός διάδοσης της ρωγμής σε συνάρτηση με το εύρος του συντελεστή έντασης τάσεων [14]

Η Περιοχή I αντιπροσωπεύει τα πρώτα στάδια ανάπτυξης της ρωγμής και της διάδοσης της μικρορωγμής. Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης περιοχής, είναι η τιμή εκείνη του συντελεστή έντασης τάσεων κάτω από την οποία δεν υπάρχει διάδοση του ρήγματος. Η τιμή αυτή περιγράφεται ως «κατώφλι» της διάδοσης της ρωγμής σε κόπωση και παρουσιάζεται ως  $\Delta K_{th}$ . Για τιμές του  $\Delta K$  μικρότερες από το  $\Delta K_{th}$ , η ρωγμή δε διαδίδεται για σχετικά μεγάλο αριθμό κύκλων φόρτισης. Η κρίσιμη αυτή τιμή εξαρτάται από το λόγο των επιβαλλόμενων τάσεων ( $R$ ).

Η Περιοχή II ονομάζεται περιοχή του Paris, καθώς σ' αυτή την περιοχή, ο ρυθμός ανάπτυξης της ρωγμής περιγράφεται από το νόμο του Paris

Η Περιοχή III αντιπροσωπεύει την ταχύτατη ανάπτυξη του μήκους ρωγμής, με ψηλούς ρυθμούς. Όταν η τιμή του  $\Delta K$  προσεγγίσει εκείνη του κρίσιμου συντελεστή έντασης τάσης  $K_c$  του υλικού, ο ρυθμός διάδοσης της ρωγμής επιταχύνεται με αποτέλεσμα την ταχύτατη αστοχία του υλικού.



## Κεφάλαιο 3 : Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

### 3.1 Εισαγωγικά στοιχεία της μεθόδου

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων ή finite element method (FEM) είναι μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων της μηχανικής και της μαθηματικής φυσικής. Η πολυπλοκότητα τέτοιων προβλημάτων καθιστά, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, αδύνατη την υλική μοντελοποίηση τους, η οποία θα είχε υψηλό κόστος και θα ήταν ιδιαίτερα χρονοβόρα. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μας δίνει για ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων τη δυνατότητα να τα εκφράσουμε ως προβλήματα συνοριακών τιμών, ή προβλήματα συνοριακών-αρχικών τιμών που αποτελούνται από συστήματα διαφορικών, ολοκληρωτικών και αλγεβρικών εξισώσεων, με μια ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και μια ή περισσότερες εξαρτημένες. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών, στις περισσότερες περιπτώσεις πραγματικών προβλημάτων με πολλές παραμέτρους, είναι αδύνατον να γίνει αναλυτικά και πραγματοποιείται προσεγγιστικά, μέσω κάποιας αριθμητικής μεθόδου, όπως είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

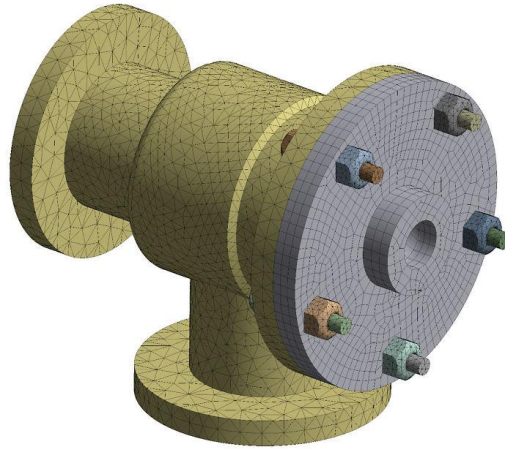
Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων προέκυψε από την απότομη ανάπτυξη του τομέα των αεροναυπηγικών κατασκευών την δεκαετία του '50 και την ανάγκη για νέες μεθόδους υπολογισμού. Η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών την ίδια δεκαετία συνέβαλε στην εξέλιξη της μεθόδου. Στις ακόλουθες δεκαετίες του '60 και του '70 επενδύθηκαν στη μέθοδο πολλά χρήματα, κυρίως στις Η.Π.Α., κατά την ανάπτυξη του διαστημικού τους προγράμματος, εν μέσω του Ψυχρού Πολέμου.

Η ιδέα που θεμελίωσε την ανάπτυξη της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων ήταν εκείνη της διακριτοποίησης των κατασκευών, του χωρισμού τους, δηλαδή, σε μικρότερα τμήματα, που συνδέονται μεταξύ τους με κόμβους. Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα έχει πεπερασμένο πλήθος αγνώστων σε διακριτά σημεία του φορέα και η επιμέρους επίλυση προσεγγίζει τη συνεχή λύση. Το πόσο ικανοποιητική θα είναι η προσέγγιση εξαρτάται από το πλήθος των στοιχείων και το είδος τους που θα αναλυθεί παρακάτω.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων βασίστηκε στη μητρωϊκή ανάλυση της γραμμικής άλγεβρας. Οι βασικές μεταβλητές με τις οποίες περιγράφεται το εκάστοτε πρόβλημα και θα κατασκευαστούν τα αντίστοιχα μητρώα εξαρτάται από το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να αναπτυχθεί με ένα εκ των εξής δύο μοντέλων:

- Το μοντέλο μετατοπίσεων
- Το μοντέλο δυνάμεων.

Τα δύο παραπάνω μοντέλα μπορούν επίσης να συνδυαστούν (υβριδικό μοντέλο).



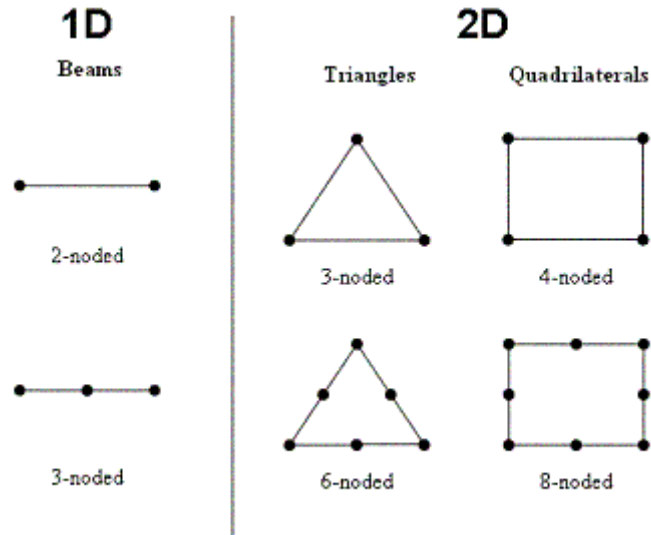
Σχήμα 3.1: Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων [1]

Το μοντέλο που χρησιμοποιείται περισσότερο το μοντέλο των μετατοπίσεων. Περιγράφονται συνοπτικά τα στάδια επίλυσης μέσω του μοντέλου των μετατοπίσεων:

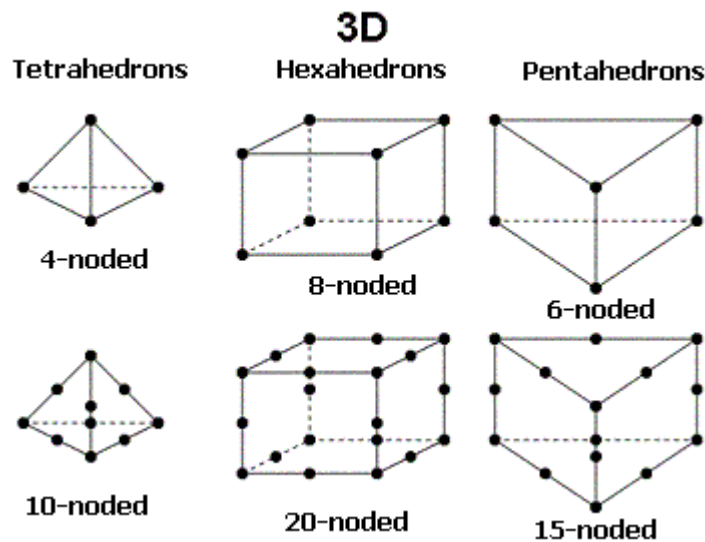
1. Διακριτοποίηση της κατασκευής:

Χωρίζουμε το σύστημα σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, ο οποίος ανάλογα με το πρόβλημα, πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος. Όσο μικρότερα και άρα πολυπληθέστερα στοιχεία έχουμε τόσο μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύς χρειάζεται, επομένως, ανάλογα με τον υπολογιστή που επεξεργάζεται το μοντέλο μας προσπαθούμε να επιτύχουμε τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Τα πεπερασμένα στοιχεία θα πρέπει να είναι τόσο μικρά ώστε να προκύπτουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, αλλά και τόσο μεγάλα ώστε να μην απαιτείται μεγάλη υπολογιστική δύναμη. Στην περίπτωση που τα αποτελέσματα δεν συγκλίνουν, επιλέγονται μικρά πεπερασμένα στοιχεία και συνήθως ανωτέρας τάξεως.

Ο τύπος των στοιχείων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι επίσης καθοριστικός για την ορθότητα και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας. Τα βασικά στοιχεία παρουσιάζονται στα σχήματα 3.2 και 3.3. Σε όλες τις κατηγορίες διακρίνεται η περίπτωση των κόμβων στις γωνίες και η περίπτωση με ενδιάμεσους κόμβους στα στοιχεία ανωτέρας τάξεως.



Σχήμα 3.2: Στοιχεία μίας και δύο διαστάσεων



Σχήμα 3.3: Στοιχεία τριών διαστάσεων

2. Εισαγωγή κατάλληλων συναρτήσεων μορφής:

Σε αυτό το βήμα γίνεται επιλογή κατάλληλων παρεμβολικών τύπων για την κατανομή της άγνωστης μεταβλητής  $u$  για το κάθε στοιχείο. Μέσω αυτών των συναρτήσεων εκφράζεται η λύση του προβλήματος στο εσωτερικό του κάθε στοιχείου συναρτήσει των αντιστοίχων κομβικών τιμών. Η ακρίβεια της λύσης εξαρτάται αρκετά από την επιλογή των συναρτήσεων αυτών. Συνήθως χρησιμοποιούνται πολυώνυμα καθώς οι πράξεις με πολυώνυμα είναι σχετικά εύκολες.

Επιλέγουμε έναν παρεμβολικό τύπο για κάθε στοιχείο και το πεδίο των μετατοπίσεων ορίζεται ξεχωριστά σε αυτό. Για ένα στοιχείο με  $n$  κόμβους η συνάρτηση είναι:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_n u_n ,$$

όπου  $u_1, u_2, \dots, u_n$  είναι οι άγνωστες μετατοπίσεις στους κόμβους και  $N_1, N_2, \dots, N_n$  είναι οι συναρτήσεις σχήματος.

### 3. Κατασκευή των μητρώων ακαμψίας και διανυσμάτων φόρτισης των στοιχείων:

Με χρήση των εξισώσεων ισορροπίας παράγεται το μητρώο ακαμψίας  $K^e$  του κάθε στοιχείου, καθώς επίσης και το αντίστοιχο διάνυσμα φόρτισης  $F^e$ .

### 4. Διαμόρφωση του συνολικού μητρώου ακαμψίας:

Η διαμόρφωση του συνολικού μητρώου ακαμψίας γίνεται με διάφορους τρόπους π.χ θεωρώντας την ισορροπία των κόμβων ξεχωριστά ή με την εφαρμογή της μεθόδου των δυνατών έργων.

Πρέπει να ενσωματωθούν οι συνοριακές συνθήκες στις εξισώσεις ισορροπίας, οπότε το αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας εκφράζεται ως:

$$[K] \vec{d} = \vec{F}$$

όπου  $K$  είναι το συνολικό μητρώο ακαμψίας,  $\vec{d}$  είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων και  $\vec{F}$  είναι το διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων.

### 5. Επίλυση του συστήματος :

Γίνεται η επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων και υπολογισμός των αγνώστων κομβικών μετατοπίσεων .

### 6. Υπολογισμός τάσεων και παραμορφώσεων.

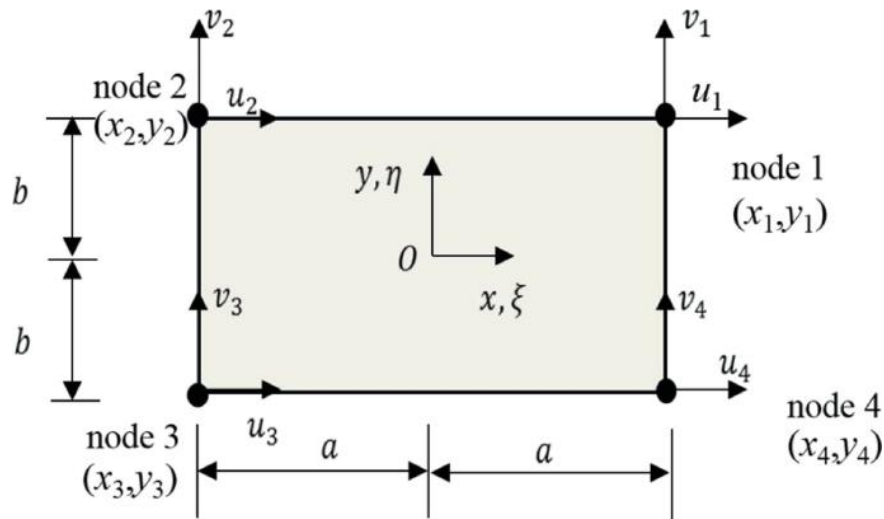
Από τις μετατοπίσεις υπολογίζονται οι τάσεις και οι παραμορφώσεις της κατασκευής.

### 3.2 Πεπερασμένα στοιχεία δισδιάστατης ελαστικότητας

Στη συγκεκριμένη εργασία γίνεται χρήση στοιχείων δισδιάστατης και τρισδιάστατης ανάλυσης. Στην συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζονται κάποια στοιχεία που χρησιμοποιούνται στην δισδιάστατη ανάλυση [26].

#### 3.2.1 Απλό ορθογωνικό στοιχείο

Στην εργασία αυτή η υπολογιστική ανάλυση γίνεται με χρήση οκτακομβικών τετραπλευρικών στοιχείων (quadrilateral 8-node elements). Τα στοιχεία αυτά είναι επέκταση του απλού ορθογωνικού στοιχείου. Το απλό ορθογωνικό στοιχείο είναι ένα στοιχείο με 4 κόμβους όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Απλό ορθογωνικό στοιχείο [27]

Οι μετατοπίσεις κάθε κόμβου έχουν δύο συνιστώσες, οπότε έχουμε 8 βαθμούς ελευθερίας συνολικά. Το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάθε κόμβο σε μητρική μορφή δίνεται από την σχέση :

$$\delta(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & xy & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & xy & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$



Αντικαθιστούμε στην σχέση αυτή όπου  $x, y$  τις συντεταγμένες των κόμβων και προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & ab & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & ab & b \\ 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Λύνοντας ως προς  $a$  προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_3 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Χρησιμοποιούμε τις αδιάστατες συντεταγμένες  $\xi = \frac{x}{a}$  και  $\eta = \frac{y}{b}$  και αντικαθιστούμε το διάνυσμα  $a$  από την (3.3) στην (3.2) και έχουμε ότι:

$$\delta(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [N(\xi,\eta)\delta^e] = [N_1(\xi,\eta) \quad N_2(\xi,\eta) \quad N_3(\xi,\eta) \quad N_4(\xi,\eta)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_3 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{όπου}$$

$$N_i(\xi,\eta) = v_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.4)$$

Όπου  $v_i$  οι συναρτήσεις σχήματος:

- $v_1(\xi,\eta) = (1-\xi)(1-\eta)$
- $v_2(\xi,\eta) = \xi(1-\eta)$
- $v_3(\xi,\eta) = \xi\eta$
- $v_4(\xi,\eta) = (1-\xi)\eta$

Το πεδίο των παραμορφώσεων ορίζεται ως εξής:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = B_1 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

όπου  $B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{\alpha} & 0 & \frac{1-\eta}{\alpha} & 0 & \frac{\eta}{\alpha} & 0 & -\frac{\eta}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{1-\xi}{b} & 0 & -\frac{\xi}{b} & 0 & \frac{\xi}{b} & 0 & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{\alpha} & -\frac{\xi}{b} & \frac{1-\eta}{\alpha} & \frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{\alpha} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{\eta}{\alpha} \end{bmatrix}$  το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Το πεδίο των τάσεων δίνεται από την σχέση  $\sigma = D\epsilon$ , όπου D το μητρώο των ελαστικών σταθερών στην επίπεδη εντατική κατάσταση. Άρα το  $\sigma$  δίνεται από στην σχέση:

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{\alpha} & -\nu\frac{1-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{\alpha} & -\nu\frac{\xi}{b} & \frac{\eta}{\alpha} & \nu\frac{\xi}{b} & -\frac{\eta}{\alpha} & \nu\frac{1-\xi}{b} \\ -\nu\frac{1-\eta}{\alpha} & -\frac{1-\xi}{b} & \nu\frac{1-\eta}{\alpha} & -\frac{\xi}{b} & \nu\frac{\eta}{\alpha} & \frac{\xi}{b} & -\nu\frac{\eta}{\alpha} & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{(1-\nu)(1-\xi)}{2b} & -\frac{(1-\nu)(1-\eta)}{2\alpha} & -\frac{(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)(1-\eta)}{2\alpha} & \frac{(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)\eta}{2\alpha} & \frac{(1-\nu)(1-\xi)}{2b} & -\frac{(1-\nu)\eta}{2\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από την σχέση:

$$\bar{k}^e = t \int_0^a \int_0^b B_1^T D B_1 dx dy. \quad (3.7)$$

Τελικά έχουμε:

$$\bar{k}^e = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 2[\frac{2}{c} + c(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1+\nu) & -\frac{4}{c} + c(1-\nu) & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -\frac{2}{c} - c(1-\nu) & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) \\ \frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[c - \frac{1}{c}(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & -2c - \frac{1-\nu}{c} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} \\ -\frac{4}{c} + c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{2}{c} + c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -\frac{2}{c} - c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1+\nu) \\ -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[c - \frac{1}{c}(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2c - \frac{1-\nu}{c} \\ -\frac{2}{c} - c(1-\nu) & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{2}{c} + c(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1+\nu) & -\frac{4}{c} + c(1-\nu) & -\frac{3}{2}(1-3\nu) \\ -\frac{3}{2}(1+\nu) & -2c - \frac{1-\nu}{c} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & \frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[c - \frac{1}{c}(1-\nu)] \\ 2[\frac{1}{c} - c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -\frac{2}{c} - c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1+\nu) & -\frac{4}{c} + c(1-\nu) & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[\frac{2}{c} + c(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) \\ \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c + \frac{1-\nu}{c} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2c - \frac{1-\nu}{c} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2[c - \frac{1}{c}(1-\nu)] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2[2c + \frac{1}{c}(1-\nu)] \end{bmatrix}$$

όπου  $c = \frac{a}{b}$  και t το πάχος του στοιχείου

Για να υπολογίσουμε το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιούμε την σχέση:

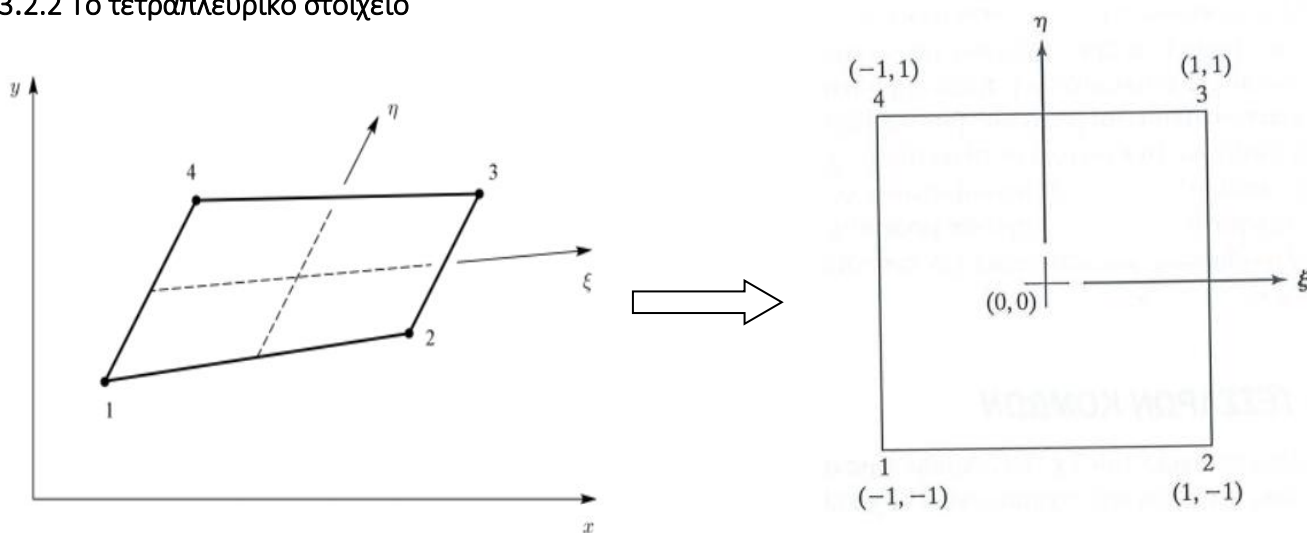
$$k^e = a_1^T \bar{k}^e a_1, \quad (3.8)$$

όπου  $a_1$  είναι το μητρώο στροφής και δίνεται από την σχέση  $a_1 = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 \end{bmatrix}$ ,

όπου  $T_1 = \begin{bmatrix} \ell_x & m_x & n_x \\ \ell_y & m_y & n_y \\ \ell_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$  και  $(\ell_x, m_x, n_x)$ ,  $(\ell_y, m_y, n_y)$ ,  $(\ell_z, m_z, n_z)$  τα διευθύνοντα συνημίτονα των

αξόνων  $x, y, z$  ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων  $X, Y, Z$ .

### 3.2.2 Το τετραπλευρικό στοιχείο



Σχήμα 3.5: Τετραπλευρικό στοιχείο

Το πεδίο των μετατοπίσεων για το γενικό τετραπλευρικό στοιχείο μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση (3.1) που περιγράφει το πεδίο μετατοπίσεων για το ορθογωνικό στοιχείο. Όμως ένα διγραμμικό πολυώνυμο ως προς  $x$  και  $y$  όπως αυτό του ορθογωνικού στοιχείου δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια των μετατοπίσεων κατά μήκος των κοινών πλευρών γειτονικών στοιχείων λόγω της κλίσης των πλευρών αυτών ως προς τα συστήματα αξόνων του κάθε στοιχείου. Η ασυνέχεια αυτή μπορεί να ξεπεραστεί αν το θεωρούμενο πεδίο μετατοπίσεων εκφραστεί συναρτήσει ενός μη ορθογωνικού και αδιάστατου τοπικού συστήματος αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα.

Σαν αρχή του τοπικού συστήματος  $(\xi, \eta)$  λαμβάνεται στο σημείο τομής των διαμέσων. Στο σύστημα αυτό οι πλευρές ορίζονται από τις εξισώσεις  $\xi = \pm 1$  και  $\eta = \pm 1$ .

Το πεδίο των μετατοπίσεων δίνεται από την σχέση:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & v_2 & 0 & v_3 & 0 & v_4 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 & v_3 & 0 & v_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

όπου  $v_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  οι συναρτήσεις σχήματος.

- $v_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$
- $v_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$
- $v_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$
- $v_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$

Το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων είναι:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_4}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_4}{\partial y} & \frac{\partial v_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα για την μερική διαφορίση και προκύπτει ότι:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.10),$$

Όπου η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού J δίνεται από την σχέση:

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\xi) & (1-\xi) & (1-\xi) & -(1-\xi) \\ -(1-\eta) & -(1+\eta) & (1+\eta) & (1-\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix}$$

Αν αντιστρέψουμε την (4) προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Επίσης  $dA = dx dy = (\det J) d\xi d\eta$

Το μητρώο ακαμψίας δίνεται από την σχέση  $k^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_1^T D B_1 dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_1^T D B_1 (\det J) d\xi d\eta$  (3.11)

Τα ολοκληρώματα αυτά έχουν πολυώνυμο στον παρονομαστή οπότε για τον υπολογισμό τους χρειαζόμαστε μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η βασική μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι η μέθοδος του Gauss [28]. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή ο υπολογισμός ενός διπλού ολοκληρώματος της μορφής  $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$  ανάγεται στο άθροισμα:

$$I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

Όπου  $w_i$  τα βάρη και  $\xi_i$  οι θέσεις των σημείων Gauss όπως φαίνονται στον πίνακα 1 [28].

Πίνακας 1: Θέσεις και βάρη Gauss

$n$	$\xi_i$	$w_i$
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{3}/\sqrt{5}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \frac{1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36} (18 + \sqrt{30})$
	$\pm \frac{1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36} (18 - \sqrt{30})$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900} (322 + 13\sqrt{70})$
	$\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900} (322 - 13\sqrt{70})$

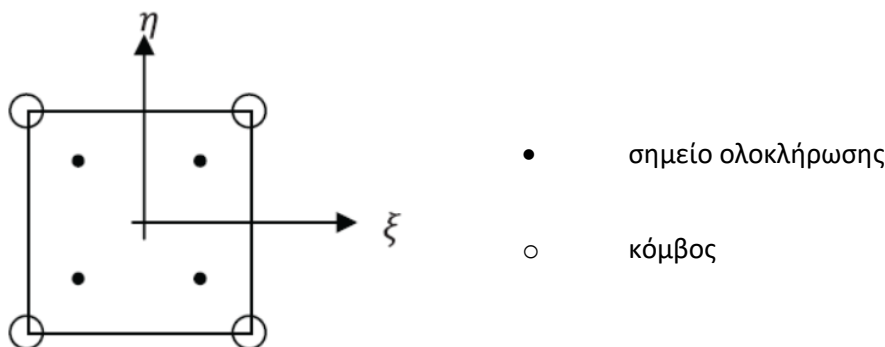
Στην περίπτωση του μητρώου  $k^e$  η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι :

$$f(\xi, \eta) = t B_1^T(\xi, \eta) D B_1(\xi, \eta) (\det J(\xi, \eta)) \quad (3.12)$$

Τότε με την μέθοδο του Gauss χρησιμοποιώντας  $2 \times 2$  σημεία είναι:

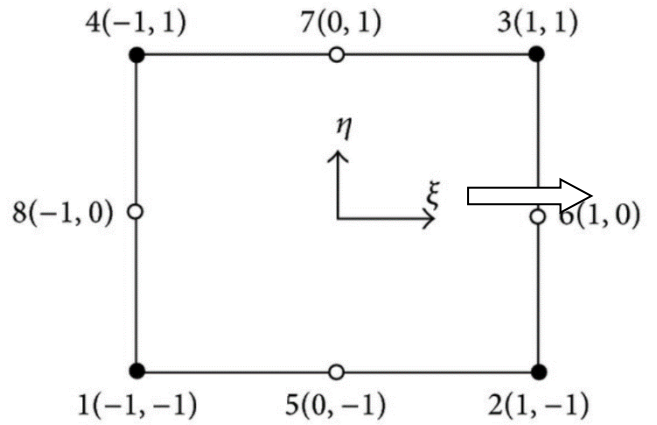
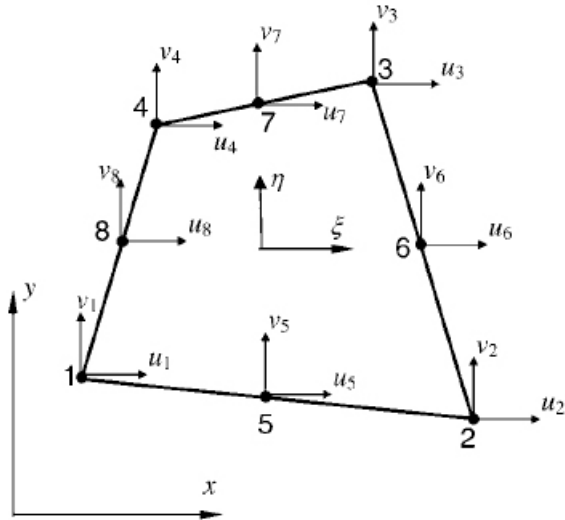
$$K_{ij}^e = w_1^2 f(\xi_1, \eta_1) + w_1 w_2 f(\xi_1, \eta_2) + w_2 w_1 f(\xi_2, \eta_1) + w_2^2 f(\xi_2, \eta_2)$$

$$\xi, \eta \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right\} \text{ και } w_i = w_j = 1$$



Σχήμα 3.6: Σημεία ολοκλήρωσης Gauss στο απλό τετραπλευρικό στοιχείο [28]

### 3.2.3 Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο



Σχήμα 3.7: Το οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο

Το 8κομβικό τετραπλευρικό στοιχείο είναι σαν το 4κομβικό που αναλύσαμε παραπάνω, αλλά έχει έναν επιπλέον κόμβο στο μέσο της κάθε πλευράς.

Αντίστοιχα το πεδίο των μετατοπίσεων δίνεται από την σχέση:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & v_2 & 0 & v_3 & 0 & v_4 & 0 & v_5 & 0 & v_6 & 0 & v_7 & 0 & v_8 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 & v_3 & 0 & v_4 & 0 & v_5 & 0 & v_6 & 0 & v_7 & 0 & v_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \\ x_7 \\ y_7 \\ x_8 \\ y_8 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Και οι συναρτήσεις σχήματος είναι:

- $v_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$
- $v_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$
- $v_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$
- $v_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$
- $v_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$
- $v_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$
- $v_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$
- $v_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$

Το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων είναι:

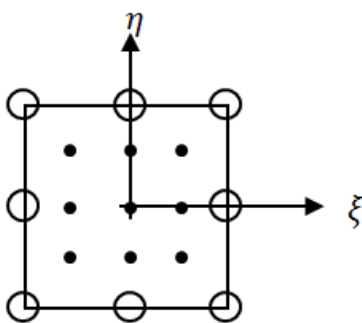
$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial v_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial v_8}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial x} & \dots & \frac{\partial v_8}{\partial y} & \frac{\partial v_8}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο ακαμψίας δίνεται από την σχέση

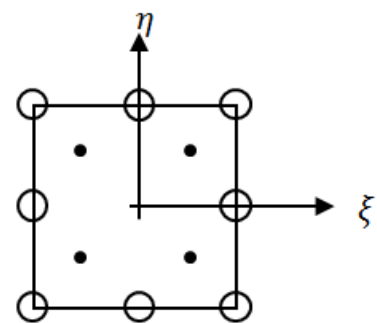
$$k^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_1^T D B_1 dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_1^T D B_1 (\det J) d\xi d\eta$$

Η ολοκλήρωση γίνεται με τη μέθοδο του Gauss που περιγράφηκε παραπάνω. Για μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιούμε 3x3 στοιχεία αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και 2x2.

$\xi, \eta \in \{-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}\}$  και  $w_i, w_j$  είναι  $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$  για συντεταγμένες  $-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$  αντίστοιχα



- Nodes
- Integration points



Full integration 8-node quadrilateral

Computations:

$$(16 \times 16)_{\text{entries}} \times 9 = 2,304$$

Reduced integration 8-node quadrilateral

Computations:

$$(16 \times 16)_{\text{entries}} \times 4 = 1,024$$

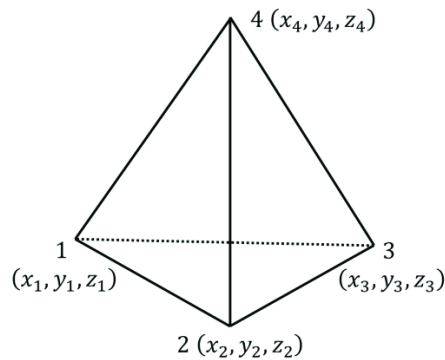
Σχήμα 3.8: Σημεία ολοκλήρωσης Gauss 3x3 και 2x2 στο οκτακομβικό τετραπλευρικό στοιχείο [28]

### 3.3 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Τα πεπερασμένα στοιχεία για προβλήματα τρισδιάστατης ελαστικότητας είναι συνήθως απλά τρισδιάστατα σχήματα όπως τετράεδρα και εξάεδρα. Οι κλασικές συναρτήσεις σχήματος αναπτύσσονται σε πρότυπα στοιχεία και απεικονίζονται στα πραγματικά στοιχεία μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών. Οι συναρτήσεις σχήματος συνήθως, αναπτύσσονται με βάση τους κόμβους του στοιχείου, έτσι ώστε αυτόματα να δημιουργούνται συνεχείς συναρτήσεις βάσης στο γενικό επίπεδο του πλέγματος, όταν τα στοιχεία συνδέονται στους κόμβους.

#### 3.3.1 Το γραμμικό τετραεδρικό στοιχείο

Το γραμμικό τετραεδρικό στοιχείο αποτελείται από τέσσερις κόμβους και τρεις βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο, δηλαδή δώδεκα βαθμούς ελευθερίας συνολικά. Το στοιχείο καλείται γραμμικό τετράεδρο διότι οι συναρτήσεις σχήματος στο φυσικό επίπεδο είναι γραμμικά πολυώνυμα ως προς  $\xi, \eta, \zeta$ .



Σχήμα 3.9: Γραμμικό τετραεδρικό στοιχείο

Το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάθε κόμβο σε μητρική μορφή δίνεται από την σχέση :

$$\delta(x,y,z) = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Τελικά :

$$\delta(x,y,z) = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = [N_1(x,y,z) \quad N_2(x,y,z) \quad N_3(x,y,z) \quad N_4(x,y,z)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$



$$\text{με } N_i(x,y,z) = v_i(x,y,z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1,2,3,4$$

$$\text{και } v_i(x,y,z) = (s_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6V, i = 1,2,3,4$$

όπου:

$$s_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Οι υπόλοιπες σταθερές προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή.

Έστω  $V^e$  ο όγκος του τετραέδρου (1,2,3,4). Είναι:

$$6V^e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων είναι:

$$B_i = \frac{1}{6V^e} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix}, i = 1,2,3,4$$

Το μητρώο ακαμψίας τετραεδρικού στοιχείου τεσσάρων κόμβων δίνεται από τη σχέση:

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [E][B] dV_e \quad (3.16)$$

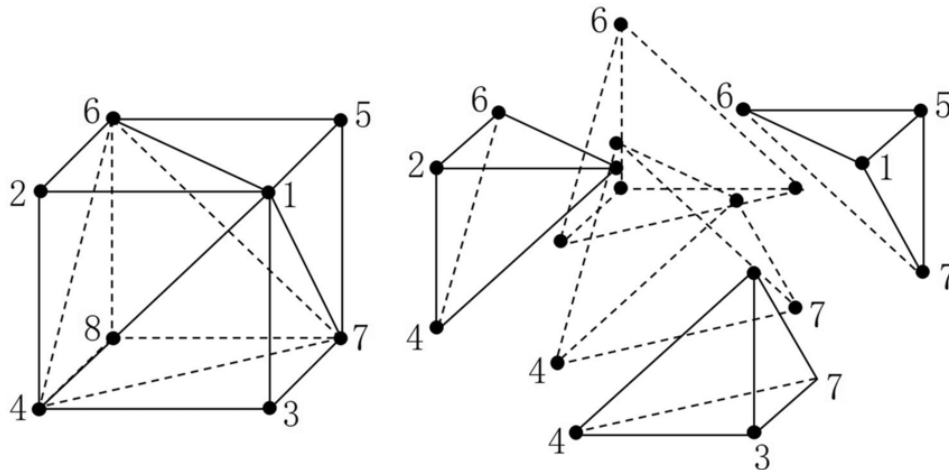
όπου  $[E]$  το μητρώο ελαστικών σταθερών

Η ολοκλήρωση στην παραπάνω σχέση πραγματοποιείται με μεγάλη ευκολία δεδομένου ότι το μητρώο  $[B]$  είναι ανεξάρτητο των  $x,y,z$ . Έτσι προκύπτει:

$$[k^e] = V_e [B]^T [E][B]$$

### 3.3.2 Το οκτακομβικό εξαεδρικό στοιχείο

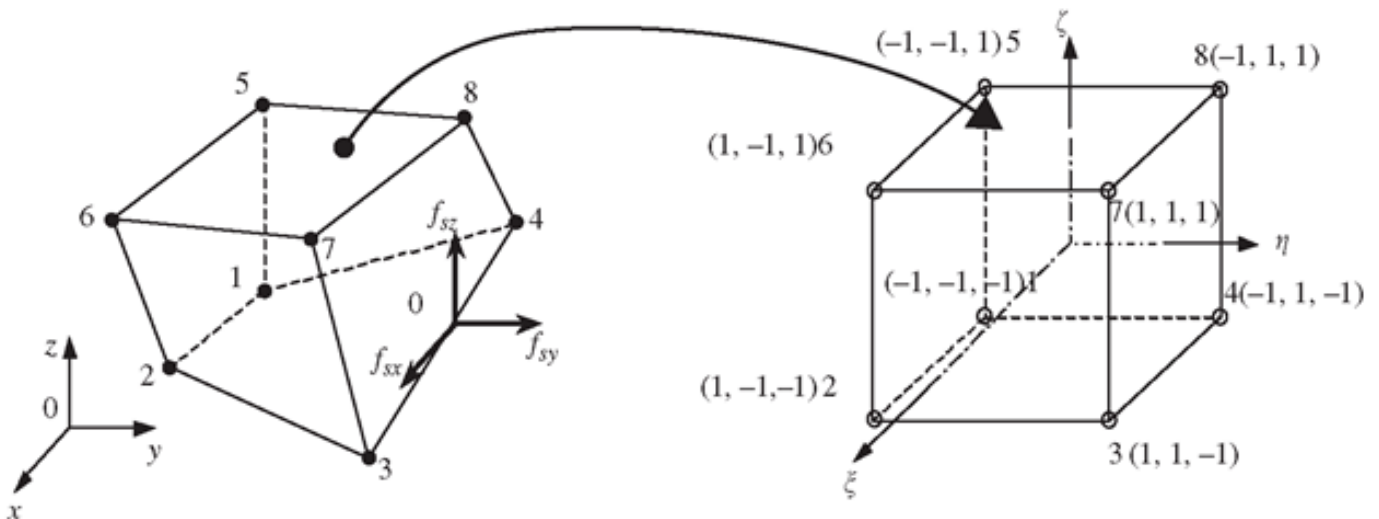
Όταν έχουμε ένα τρισδιάστατο στερεό δεν είναι πάντα εύκολο να το διαμερίσουμε σε τετράεδρα. Για να απλοποιηθεί αυτή η διαδικασία το σώμα πρώτα χωρίζεται σε εξάεδρα και στη συνέχεια το κάθε εξάεδρο διαμερίζεται σε τετράεδρα.



Σχήμα 3.10: Διακριτοποίηση εξαεδρικού στοιχείου σε τετραεδρικά στοιχεία [29]

Το εξαεδρικό ορθογώνιο στοιχείο οκτώ κόμβων αποτελεί τη γενίκευση στις τρεις διαστάσεις του ορθογωνικού στοιχείου επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων.

Έχει οκτώ κόμβους και τρεις βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο, δηλαδή 24 βαθμούς ελευθερίας συνολικά.



Σχήμα 3.11: Το οκτακομβικό εξαεδρικό στοιχείο [30]

Η μετατόπιση δίνεται από την σχέση:

$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z + \alpha_5xy + \alpha_6xz + \alpha_7zx + \alpha_8xyz$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου του στοιχείου είναι:

$$x_0 = \frac{x_3 + x_2}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_3 + y_7}{2}$$

$$z_0 = \frac{z_3 + z_4}{2}$$

Οι αδιάστατες συντεταγμένες ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\xi = \frac{x - x_0}{c}$$

$$\eta = \frac{y - y_0}{a}$$

$$\zeta = \frac{z - z_0}{b}$$

όπου  $a, b, c$  είναι τα ημιμήκη των πλευρών των στοιχείων.

Τελικά προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου συναρτήσει των αδιάστατων συντεταγμένων:

- $v_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$
- $v_2 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$
- $v_5 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$
- $v_6 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$

- $v_3 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$
- $v_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$
- $v_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$
- $v_8 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$

## Κεφάλαιο 4 : Περιγραφή Προβλήματος

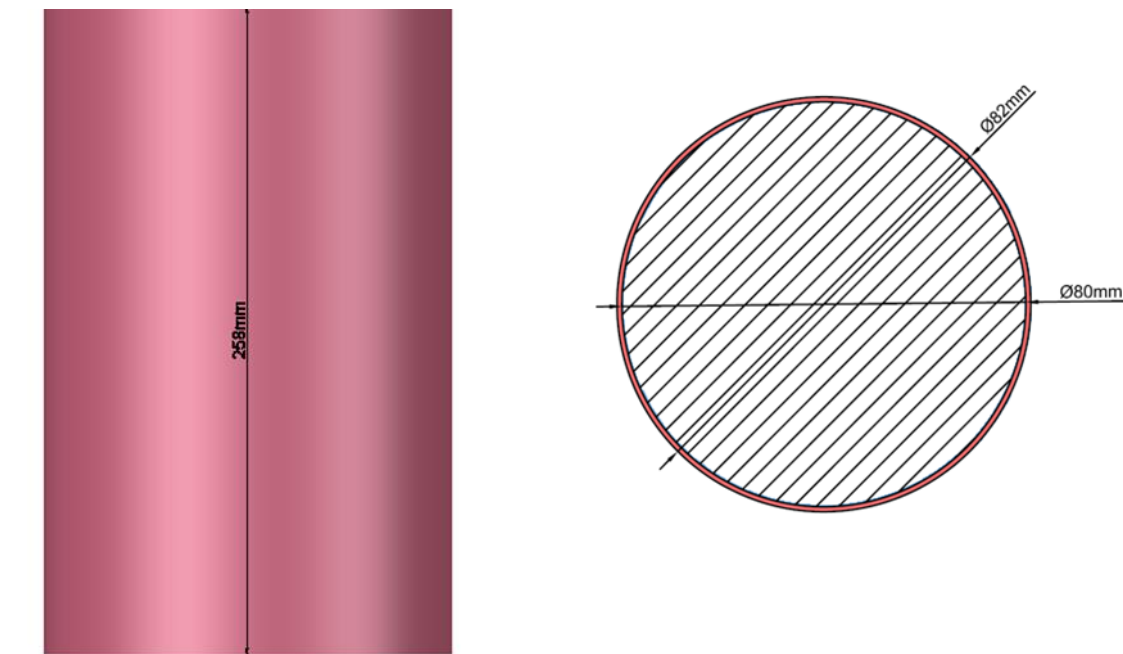
### 4.1 Γεωμετρία προβλήματος

Στη συγκεκριμένη διπλωματική διερευνήθηκε η συμπεριφορά υπό εφελκυστική τάση ενός κυλίνδρου από χάλυβα στον οποίο συγκολλάται εξωτερικά ένα λεπτό προστατευτικό σώμα. Θα γίνει μελέτη για διαφορετικά υλικά επίστρωσης.



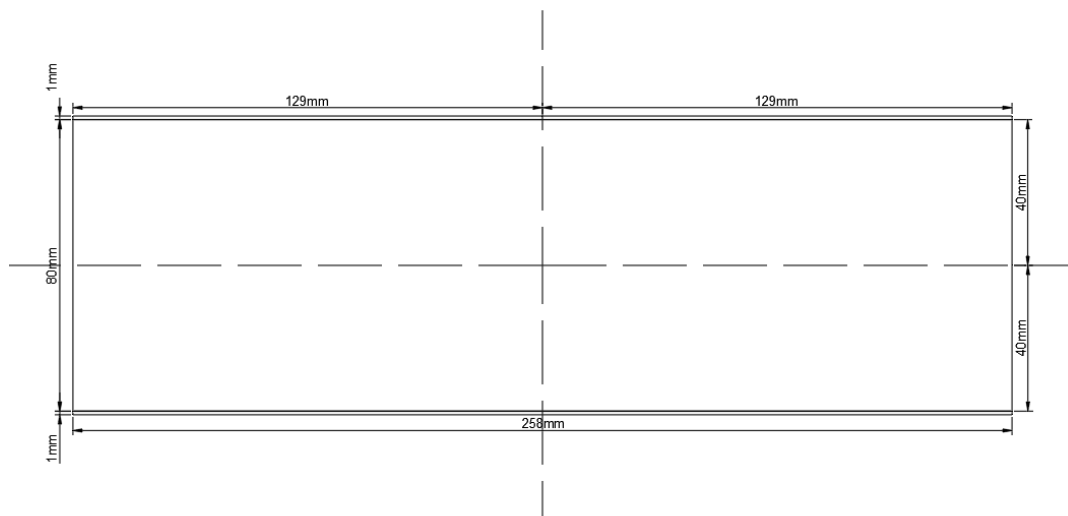
Σχήμα 4.1: Πραγματικά δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν για την πειραματική μελέτη του προβλήματος [2]

Η γεωμετρία του προβλήματος όπως φαίνεται στον σχήμα 4.2 είναι ένας κύλινδρος ακτίνας 40mm και μήκους 258mm με μία εξωτερική επίστρωση ύψους 1mm.



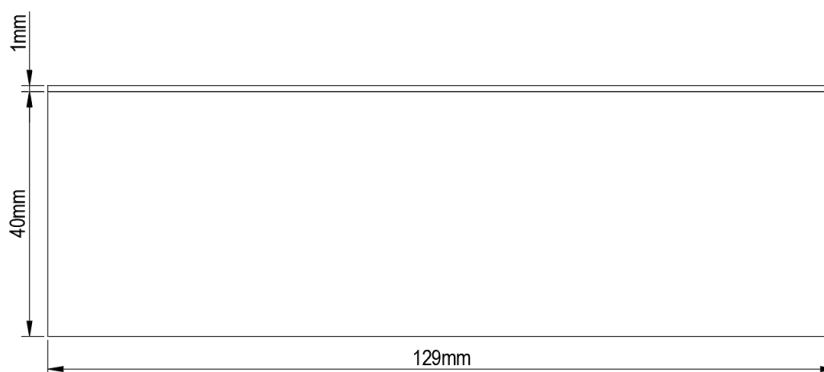
Σχήμα 4.2: Γεωμετρία δοκίμιου

Το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα επίπεδης ελαστικότητας, οπότε τελικά θα μελετηθεί μία μεταλλική πλάκα που αποτελείται από δύο διαφορετικά συγκολλημένα υλικά, υπό συνθήκες επίπεδης έντασης όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Απλοποιημένη γεωμετρία σε 2-διαστάσεις

Όπως φαίνεται και στο σχήμα το πρόβλημα μας παρουσιάζει συμμετρία γεωμετρίας και φόρτισης, οπότε τελικά αρκεί να μελετηθεί το ένα τέταρτο του δοκιμίου. Άρα η γεωμετρία του προβλήματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4: Γεωμετρία λόγω συμμετρίας

## 4.2 Υλικά

### 4.2.1 Υλικό υποστρώματος

Όπως αναφέρθηκε θα μελετηθεί μία πλάκα από δύο υλικά. Ως βασικό υλικό (υπόστρωμα) στο πρόβλημα χρησιμοποιείται ο χάλυβας, λόγω της ευρείας χρήσης του σε πολλές βιομηχανίες. Επίσης προσφέρει μεγάλη ελευθερία στην επιλογή του υλικού του προστατευτικού στρώματος, καθώς πρόκειται για ένα υλικό συμβατό με πολλά μέταλλα.

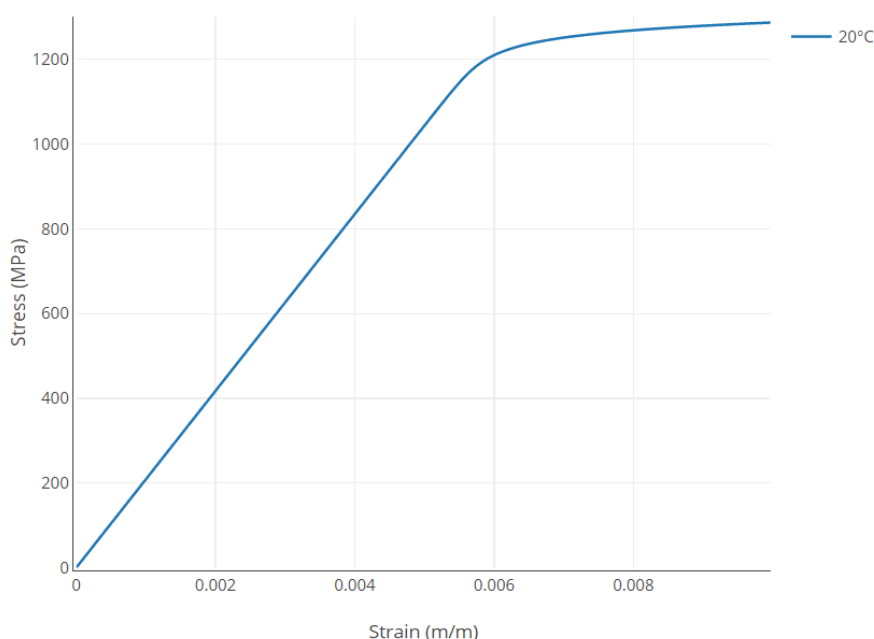
Συγκεκριμένα το υλικό του υποστρώματος είναι το AISI 4340. Οι ιδιότητες του υλικού φαίνονται στον πίνακα 1[31][33]. Ο χάλυβας AISI 4340 έχει υψηλή ελαστική αντοχή και εξαιρετική ανθεκτικότητα και μπορεί να υποβληθεί σε θερμική επεξεργασία για να επιτευχθούν υψηλά επίπεδα σκληρότητας. Επίσης παρουσιάζει πολύ καλή αντοχή στη φθορά και στη θερμοκρασία. Είναι κατάλληλος για κατεργασίες και παρουσιάζει ευκολία στη συγκόλληση.

Χρησιμοποιείται ευρέως στην αυτοκινητοβιομηχανία και στην αεροναυπηγική λόγω της υψηλής ανθεκτικότητας και αντοχής του, όπως και για την κατασκευή πολλών μηχανολογικών εξαρτημάτων. Επίσης χρησιμοποιείται στις κατασκευές συστημάτων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

Όνομασία	Περιγραφή	E (GPa)	Λόγος Poisson $\nu$	Αντοχή σε κόπωση (MPa)
AISI 4340	Χάλυβας	200	0.32	800

Πίνακας 2: Ιδιότητες χάλυβα υποστρώματος AISI 4340

Στο σχήμα 4.5 παρουσιάζεται μία ενδεικτική καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για το υλικό.



Σχήμα 4.5: Καμπύλη τάσης-παραμορφώσης για AISI 4340 [31]

#### 4.2.2 Υλικά επίστρωσης

Για την επίστρωση συνήθως χρησιμοποιούνται κράματα μετάλλων που έχουν μέτρο ελαστικότητας που κυμαίνεται μεταξύ των τιμών  $E=100-200$  GPa. Τέτοια υλικά είναι ο μπρούτζος αργιλίου, το σκληρό χρώμιο, τα κράματα χαλκού-βηρυλλίου κ.α. Στην συγκεκριμένη εργασία θα χρησιμοποιηθούν τα υλικά που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3 [31][32][33] προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά της πλάκας για διαφορετικές ιδιότητες του υλικού της επίστρωσης.

Πίνακας 3: Ιδιότητες υλικών επίστρωσης

Όνομασία	Περιγραφή	E (GPa)	Λόγος Poisson $\nu$	Ολκιμότητα/ Ψαθυρότητα	Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)
-	Σκληρό χρώμιο	104	0.22	Ψαθυρό	800
<b>Ampco 18</b>	Χαλκο-αλουμίνιο	117	0.32	Όλκιμο	689
<b>Ampco 21</b>	Χαλκο-αλουμίνιο	110	0.32	Όλκιμο	758
<b>C17200</b>	Κράμα χαλκού-βηρυλλίου	131	0.30	Όλκιμο	695
<b>Stellite</b>	Κράμα κοβάλτιου	210	0.27	Ψαθυρό	1362

#### Σκληρό χρώμιο

Το χρώμιο είναι ένα ευρέως διαδεδομένο υλικό για την προστασία μεταλλικών εξαρτημάτων, καθώς συνδυάζει πολλά χρήσιμα χαρακτηριστικά όπως υψηλή σκληρότητα, χαμηλό συντελεστή τριβής και συνεπώς πολύ μεγάλη αντοχή στη διάβρωση και τη φθορά, ενώ ταυτόχρονα είναι οικονομικό. Είναι υλικό που ανταποκρίνεται καλά στη συγκόλληση, η οποία μπορεί να γίνει είτε σε όλη την επιφάνεια του δοκιμίου ή σε τμήμα αυτού.

Εφαρμόζεται στην επιφάνεια καινούργιων μεταλλικών αντικειμένων για προστασία, καθώς και αντικειμένων που έχουν υποστεί φθορά, αφού προηγηθεί κατάλληλη μηχανουργική επεξεργασία (ρεκτιφιέ). Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η διαστασιακή αποκατάσταση του αντικειμένου και η παράταση της διάρκειας ζωής του.

#### Χαλκο-αλουμίνιο (Ampco)

Πρόκειται για κράματα με βάση τον χαλκό που περιέχουν κυρίως αλουμίνιο ενώ σε μικρότερη συγκέντρωση μπορεί να περιέχουν και σίδηρο και νικέλιο. Κατά κανόνα τα χαλκο-αλουμίνια εμφανίζουν υψηλή μηχανική αντοχή και καλή αντίσταση στη διάβρωση. Επίσης έχουν εξαιρετική αντοχή στην οξείδωση σε υψηλές θερμοκρασίες και στη διάβρωση από οξέα.

Επίσης το χαλκοαλουμίο συνδυάζει υψηλή μηχανική αντοχή του χαλκού με την ελαφρότητα και την καλή αντιδιαβρωτική αντίσταση του αλουμινίου και επίσης διαθέτει εξαιρετική θερμική αγωγιμότητα και είναι σχετικά εύκολο στην επεξεργασία.

Το χαλκοαλουμίο χρησιμοποιείται στην αεροναυπηγική, στην αυτοκινητοβιομηχανία, στις κατασκευές και σε ηλεκτρονικές εφαρμογές [34].

### Κράματα χαλκού-βηρυλλίου (C17200)

Τα κράματα χαλκού- βηρυλλίου είναι από τα πιο ανθεκτικά κράματα με βάση τον χαλκό, με πολύ υψηλή σκληρότητα, αντοχή στην κόπωση και τη φθορά καθώς και μεγάλη θερμική και ηλεκτρική αγωγιμότητα. Υπάρχουν δύο οικογένειες τέτοιων κραμάτων , στη μία τα υλικά χαρακτηρίζονται από μέτρια αντοχή και υψηλή αγωγιμότητα, ενώ στην άλλη, η οποία είναι και αυτή που χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη εργασία καθώς σε αυτή ανήκει το C17200 έχουμε πολύ υψηλή αντοχή και μέτρια αγωγιμότητα.

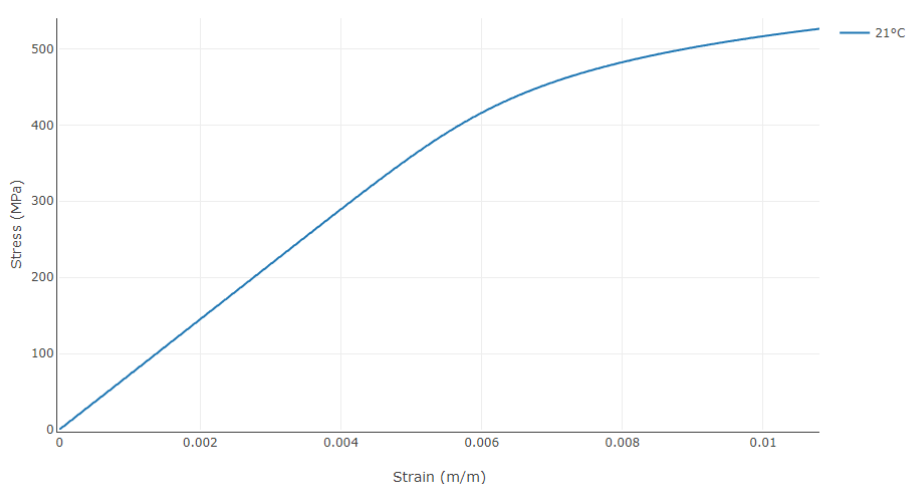
Τα κράματα χαλκού-βηρυλλίου χρησιμοποιούνται ευρέως στην αεροδιαστημική βιομηχανία λόγω της αντοχής τους στην κόπωση και την αντιδιαβρωτική τους αντοχή. Χρησιμοποιούνται σε εξαρτήματα αεροσκαφών διότι η αντοχή τους σε κόπωση τους επιτρέπει να αντέχουν σε επαναλαμβανόμενες καταπονήσεις κατά τη διάρκεια πτήσης.

### Κράματα κοβαλτίου (Stellite)

Τα κράματα κοβαλτίου είναι πολύ ανθεκτικά στη διάβρωση και επίσης είναι εξαιρετικά σκληρά, κάτι που τα καθιστά κατάλληλα για εφαρμογές όπου απαιτείται αντοχή σε φθορά και τριβή. Ακόμα, λόγω της πολύ υψηλής θερμοκρασίας τήξης του κοβαλτίου, είναι πολύ ανθεκτικά σε υψηλές θερμοκρασίες. Μπορούν να αντέξουν σε θερμοκρασίες που υπερβαίνουν τους 1000°C, κάτι που τα καθιστά κατάλληλα για χρήση σε περιβάλλοντα υψηλής θερμοκρασίας. Συνήθως το κοβάλτιο συνδυάζεται σε κράματα με χρώμιο, βολφράμιο, νικέλιο και σίδηρο.

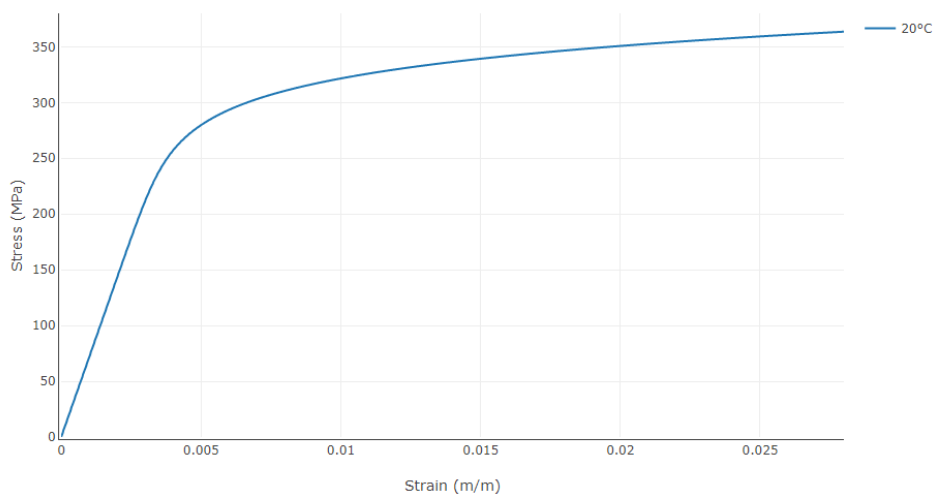
Λόγω των χαρακτηριστικών τους χρησιμοποιούνται ευρέως σε πολλούς τομείς, συμπεριλαμβανομένης της αεροναυπηγικής, της ιατρικής, της βιομηχανίας εργαλείων και άλλων εφαρμογών όπου απαιτούνται υψηλή αντοχή, αντοχή σε διάβρωση και θερμική σταθερότητα.

Στα σχήματα 4.6-4.9 παρουσιάζονται ενδεικτικές καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης για τα υλικά της επίστρωσης που παρουσιάζουν όλκιμη συμπεριφορά.

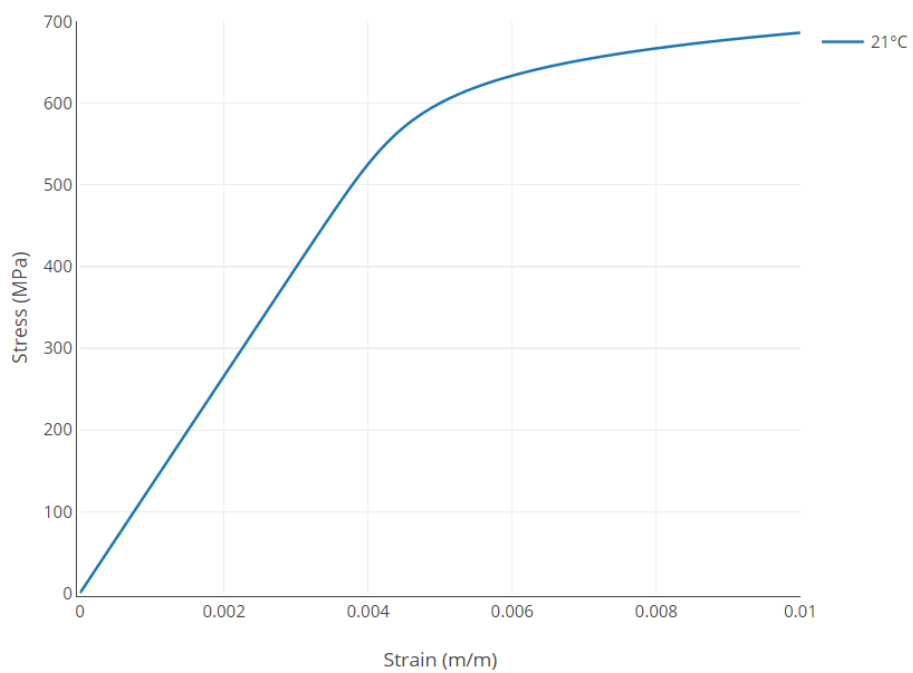


Σχήμα 4.6: Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για AMPCO21 [31]





Σχήμα 4.7: : Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για AMPCO18 [30]



Σχήμα 4.8: Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης για C17200 [31]

### 4.3 Φόρτιση προβλήματος

Στο πρώτο κομμάτι της εργασίας γίνεται μελέτη της συμπεριφοράς των δοκιμίων υπό εφελκυστική καταπόνηση. Εφαρμόζεται στο δοκίμιο μία κοινή μετατόπιση ώστε τα δύο υλικά να παρουσιάζουν την ίδια παραμόρφωση.

Στο απλοποιημένο πρόβλημα, όπου το κυλινδρικό δοκίμιο έχει αναχθεί σε μία δισδιάστατη πλάκα υπό εφελκυστική φόρτιση, κωδικοποιούμε το υπόστρωμα (substrate) ως υλικό 1 και την επίστρωση (clad) ως υλικό 2 και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$(\Delta L)_1 = (\Delta L)_2 \Rightarrow \varepsilon_1 L = \varepsilon_2 L \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (4.1)$$

Επίσης ισχύει  $\sigma_1 = E_1 \frac{\sigma_2}{E_2}$  και λόγω της (4.1) προκύπτει:  $\sigma_1 = E_1 \frac{\sigma_1}{E_1}$  και  $\sigma_2 = E_2 \frac{\sigma_1}{E_1}$

- Αν η  $\sigma_1$  φτάσει στην τιμή διαρροής  $\sigma_{Y1}$  τότε:

$$\sigma_{Y1} = E_1 \frac{\sigma_1}{E_1} \text{ και } \sigma_2 = E_2 \frac{\sigma_{Y1}}{E_1} \text{ και ελέγχεται αν } \sigma_2 \leq \sigma_{Y2}.$$

- Αν η  $\sigma_2$  φτάσει στην τιμή διαρροής  $\sigma_{Y2}$  τότε:

$$\sigma_1 = E_1 \frac{\sigma_{Y2}}{E_2} \text{ και ελέγχεται αν } \sigma_1 \leq \sigma_{Y1}.$$

Έστω ότι όταν στο υλικό 1 έχουμε  $\sigma_1 = \sigma_{Y1}$ , η τάση στο υλικό 2 είναι  $\sigma_2 \leq \sigma_{Y2}$ . Τότε η συνολική τιμή του φορτίου που δέχεται το σώμα θα είναι:  $F_Y = \sigma_{Y1} A_1 + \sigma_2 A_2$ .

Μετά την αστοχία του υλικού 1, το σώμα μπορεί να αντέξει  $F_Y = \sigma_{Y2} A_2$ .

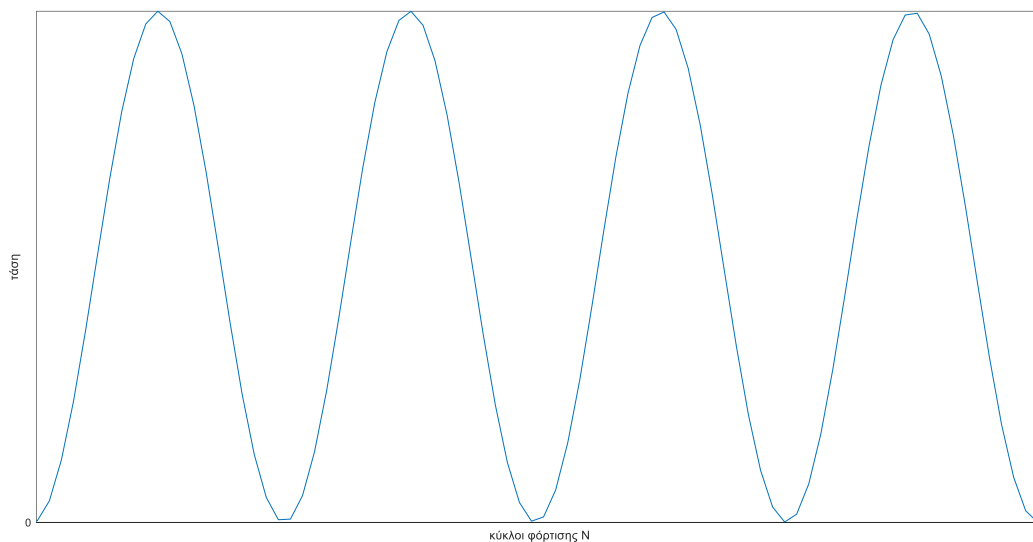
Στην αριθμητική ανάλυση του προβλήματος, προκειμένου να υπάρχει ίση παραμόρφωση στα δύο υλικά της πλάκας εφαρμόζεται κοινή μετατόπιση στο άκρο και από την στιγμή που τα δύο υλικά έχουν ίδιο μήκος  $L$  θα έχουν και κοινή παραμόρφωση.

Στο δεύτερο κομμάτι μελετάται η συμπεριφορά του δοκιμίου με προϋπάρχουσα ρωγμή υπό καθαρά εφελκυστική κυκλική φόρτιση.

Θεωρούμε ότι το δοκίμιο φορτίζεται και αποφορτίζεται σε κάθε κύκλο φόρτισης οπότε θα χρησιμοποιήσουμε επαναλαμβανόμενους κύκλους τάσης όπου η ελάχιστη τάση είναι ίση με 0, δηλαδή θεωρούμε ότι ο κύλινδρος αποφορτίζεται πλήρως. Η θεώρηση της πλήρους αποφόρτισης επιχειρεί την προσομοίωση της πραγματικής καταπόνησης που δέχονται αυτού του είδους τα δοκίμια .

Οπότε ο λόγος των τάσεων είναι  $R = 0$ .

Η μορφή της κυμαινόμενης τάσης φαίνεται στο σχήμα 4.9.



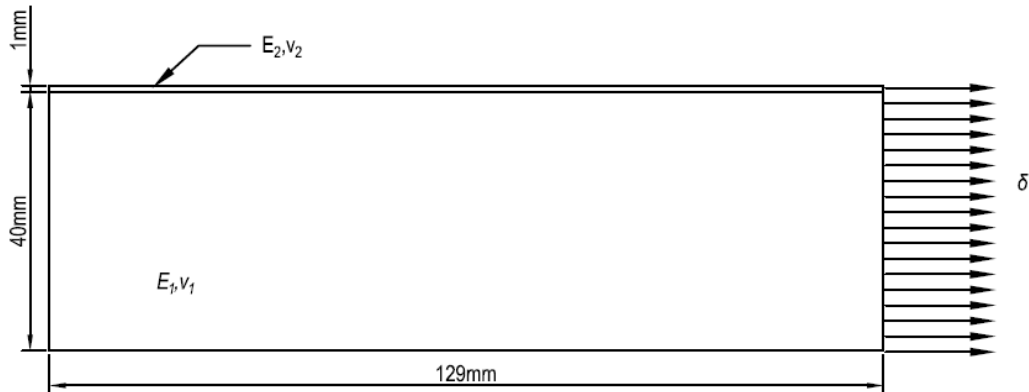
Σχήμα 4.9: Μορφή χρονικά κυμαινόμενης τάσης

Στο αριθμητικό μοντέλο η φόρτιση είναι σταθερή και υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων για την μέγιστη τιμή της κυμαινόμενης τάσης.

## Κεφάλαιο 5 : Αριθμητικά μοντέλα και αποτελέσματα

### 5.1 Δισδιάστατο πρόβλημα

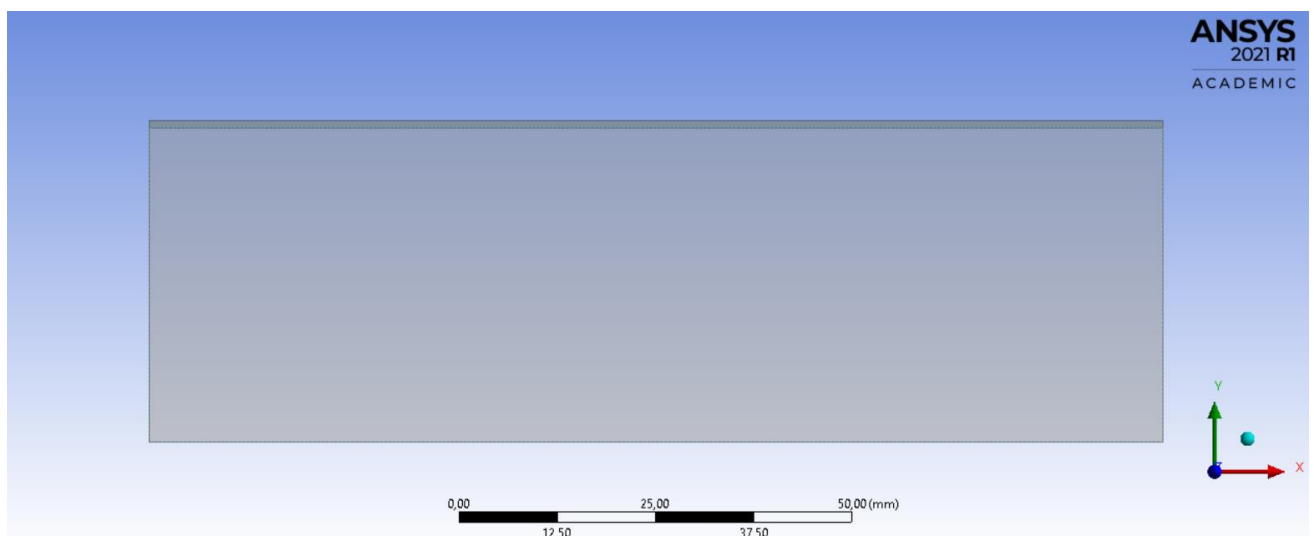
Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.1, γίνεται μελέτη κυλινδρικών δοκιμών τα οποία αποτελούνται από δύο διαφορετικά υλικά. Η γεωμετρία μπορεί να αναχθεί σε δισδιάστατη και τελικά το πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζεται είναι μία δισδιάστατη πλάκα υπό συνθήκες επίπεδης έντασης, υπό συνθήκες εφελκυσμού.



Σχήμα 5.1: Τελικό δισδιάστατο πρόβλημα

Στην πλάκα εφαρμόζεται μία μετατόπιση στο άκρο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Επίσης εφαρμόζονται κατάλληλες συνθήκες συμμετρίας, οπότε στο αριστερό και στο κάτω σύνορο εφαρμόζονται κυλίσεις που περιορίζουν την κίνηση ως προς τους άξονες x και y αντίστοιχα.

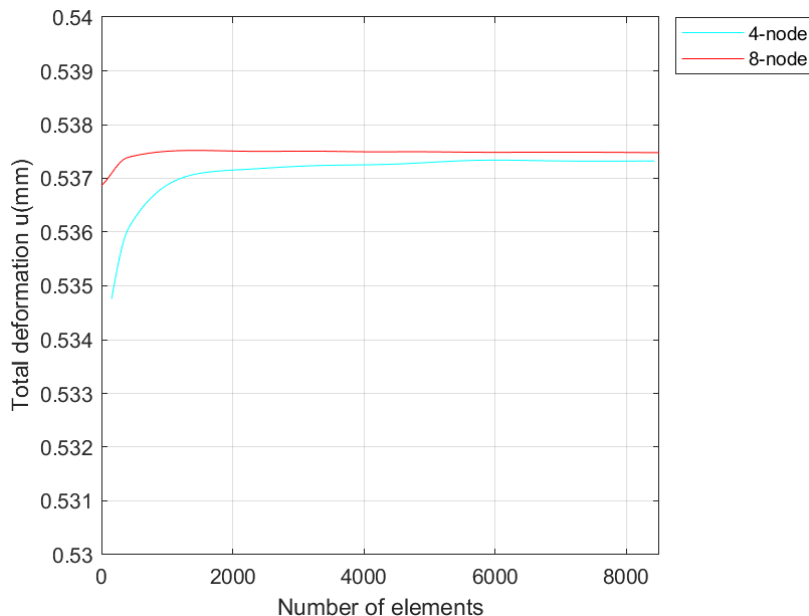
Αρχικά δημιουργήθηκε η γεωμετρία του προβλήματος χρησιμοποιώντας το Design Modeler του ANSYS Workbench, η οποία φαίνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Γεωμετρία κατασκευής στο Design Modeler

### 5.1.1 Δημιουργία πλέγματος

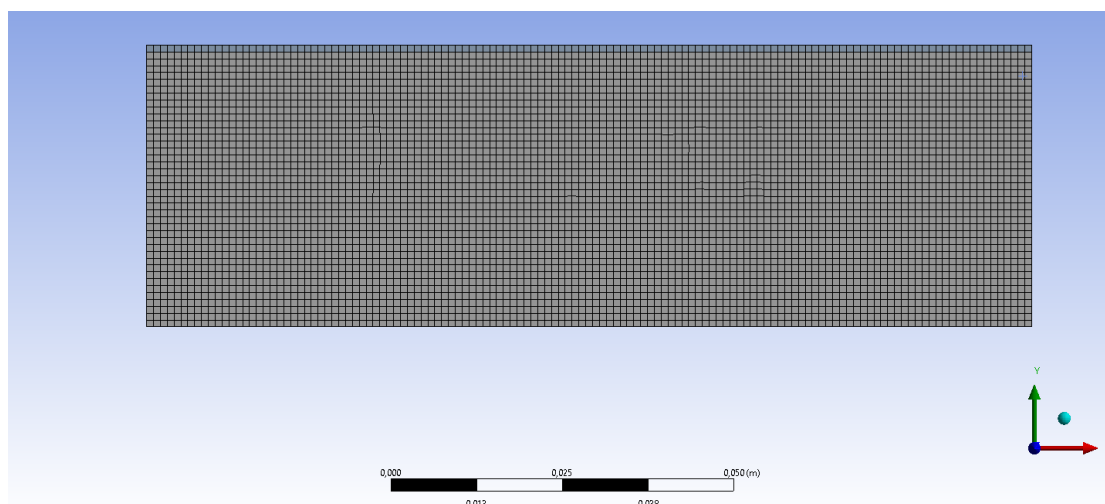
Το επόμενο βήμα είναι η διακεκριμενοποίηση της κατασκευής. Αρχικά ελέγχεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων ώστε να γίνει η κατάλληλη επιλογή των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν.



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα σύγκλισης αποτελεσμάτων

Από το διάγραμμα του σχήματος 5.3 φαίνεται ότι η λύση συγκλίνει για περισσότερα από 4000 στοιχεία, όσο και αν πυκνωθεί το πλέγμα. Επιλέγονται 8-κομβά στοιχεία (PLANE183) και ένα μοντέλο με 5.289 στοιχεία.

Το επιλεγόμενο πλέγμα φαίνεται στο σχήμα 5.4.



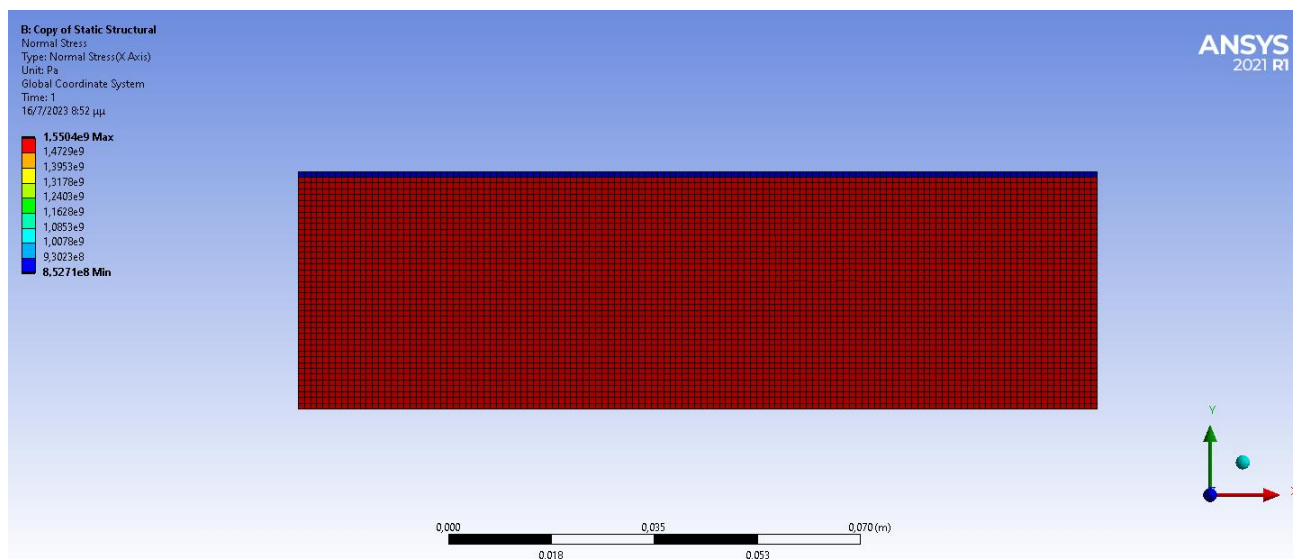
Σχήμα 5.4: Διακριτοποίηση της κατασκευής

### 5.1.2 Ανάλυση γραμμικής ελαστικότητας

Αρχικά γίνεται μελέτη της συμπεριφοράς των δοκιμίων θεωρώντας γραμμική ελαστικότητα.

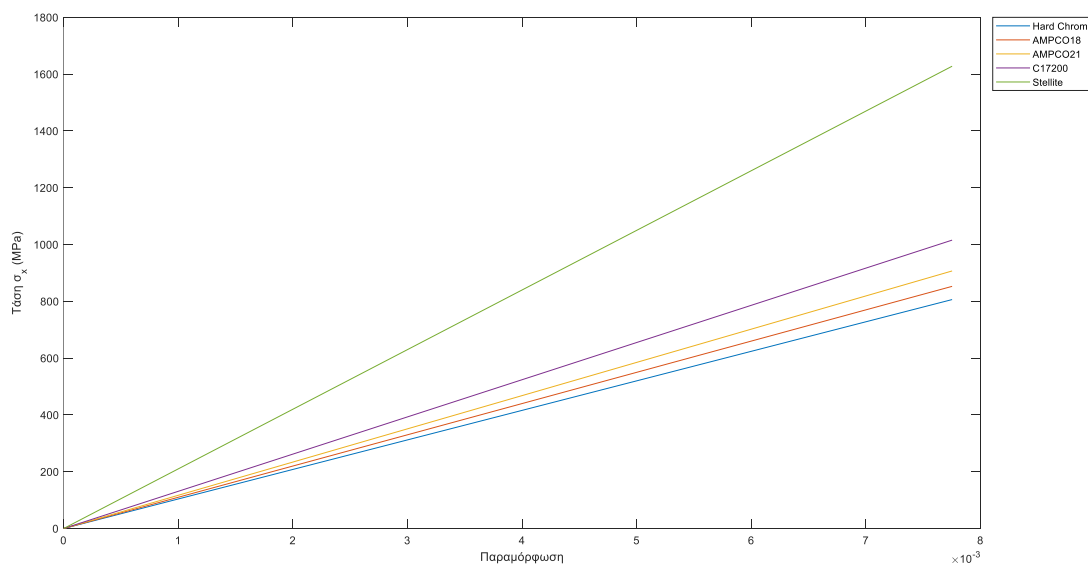
Τα δοκίμια καταπονούνται εφελκυστικά και θεωρούνται τέλεια στερεά. Οπότε οι τάσεις που αναπτύσσονται κατανέμονται ομοιόμορφα στο κάθε υλικό, χωρίς να παρουσιάζεται συγκέντρωση τάσεων σε κάποιο σημείο.

Στο σχήμα 5.5 παρουσιάζεται μία περίπτωση κατανομής των τάσεων  $\sigma_x$  στο υπόστρωμα



Σχήμα 5.5: Κατανομή ορθής τάσης  $\sigma_x$  στο δοκίμιο για υλικό επίστρωσης στο AMPCO21

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η συμπεριφορά των τάσεων και των παραμορφώσεων για κάθε υλικό επίστρωσης.



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά επίστρωσης

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζεται η αναπτυσσόμενη τάση της επίστρωσης, όταν η αναπτυσσόμενη τάση στο υπόστρωμα είναι 800MPa, που αποτελεί το όριο κόπωσης του υποστρώματος και συγκρίνεται με την αντοχή σε εφελκυσμό του εκάστοτε υλικού.

Πίνακας 4: Αναπτυσσόμενες τάσεις στην επίστρωση

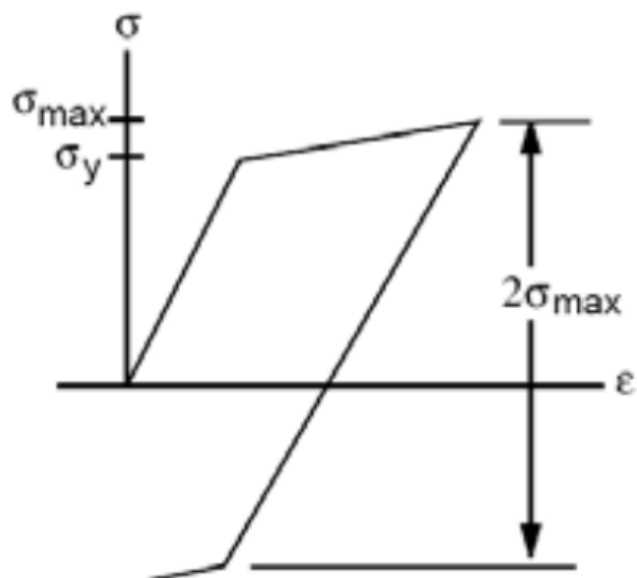
<b>Υλικό</b>	<b>Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)</b>	<b>Αναπτυσσόμενη τάση (MPa)</b>
Hard Chrome	800	416
AMPCO21	758	440
AMPCO18	689	468
C17200	695	524
Stellite	1362	840

Σε κάθε περίπτωση οι αναπτυσσόμενες τάσεις στην επίστρωση βρίσκονται κάτω από την τάση αντοχής σε εφελκυσμό για το κάθε υλικό.

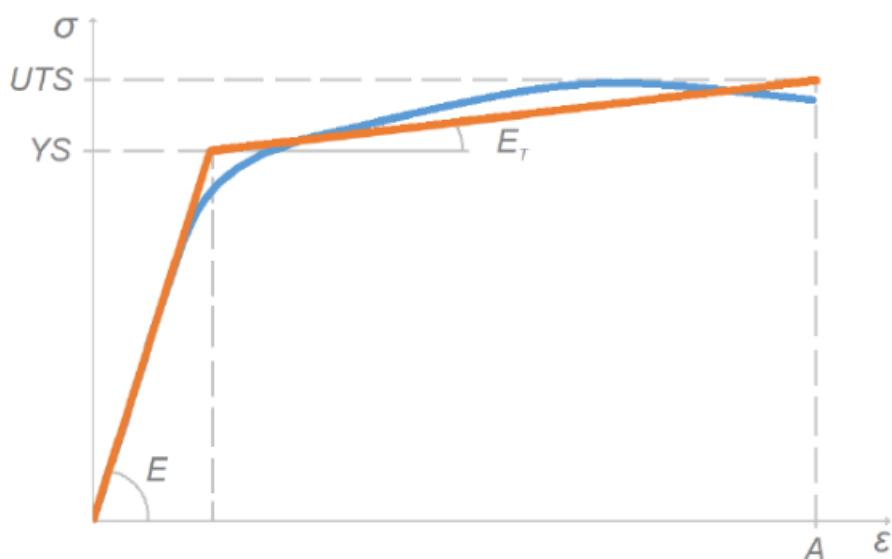
### 5.1.3 Ανάλυση μη-γραμμικής ελαστικότητας

Τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται είναι μέταλλα, οπότε δεν παρουσιάζουν πλήρως ελαστική συμπεριφορά. Για τα υλικά της επίστρωσης τα οποία παρουσιάζουν ολκιμότητα, οπότε πριν τη θραύση εμφανίζεται εκτεταμένη πλαστική παραμόρφωση, θα γίνει μελέτη λαμβάνοντας υπόψιν τη συμπεριφορά τους αυτή.

Εισάγονται στο πρόγραμμα καμπύλες isotropic bilinear hardening, που χρησιμοποιούν το κριτήριο διαρροής von Mises. [22][35]



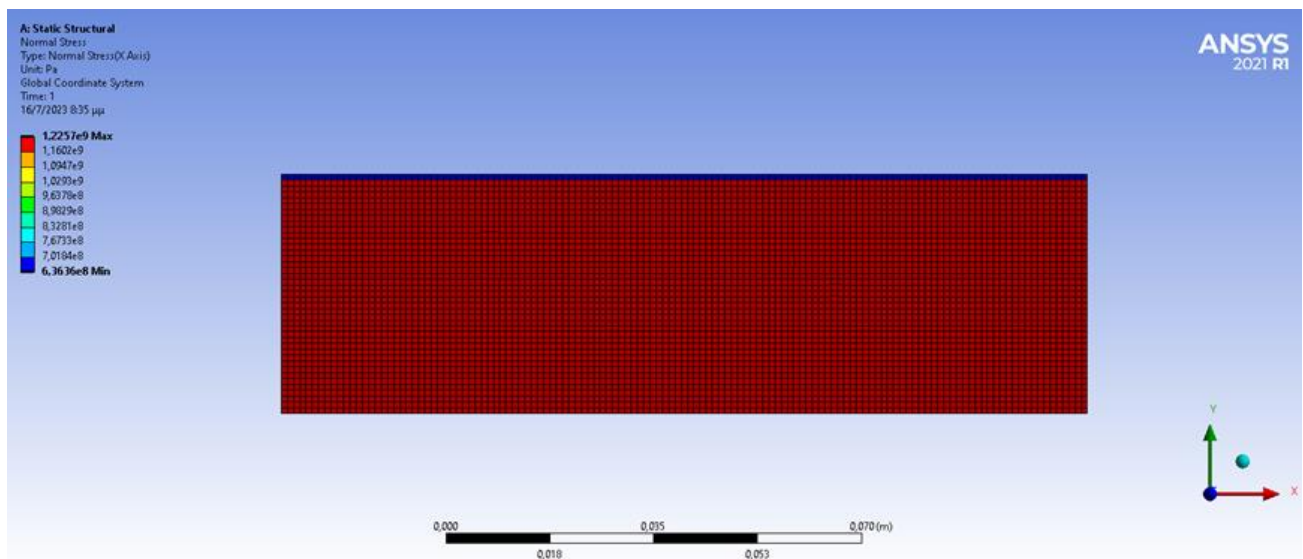
Σχήμα 5.7: Bilinear Isotropic Hardening model στο Ansys [22]



Σχήμα 5.8: Προσέγγιση καμπύλης isotropic bilinear hardening για κράμα αλουμινίου [35]

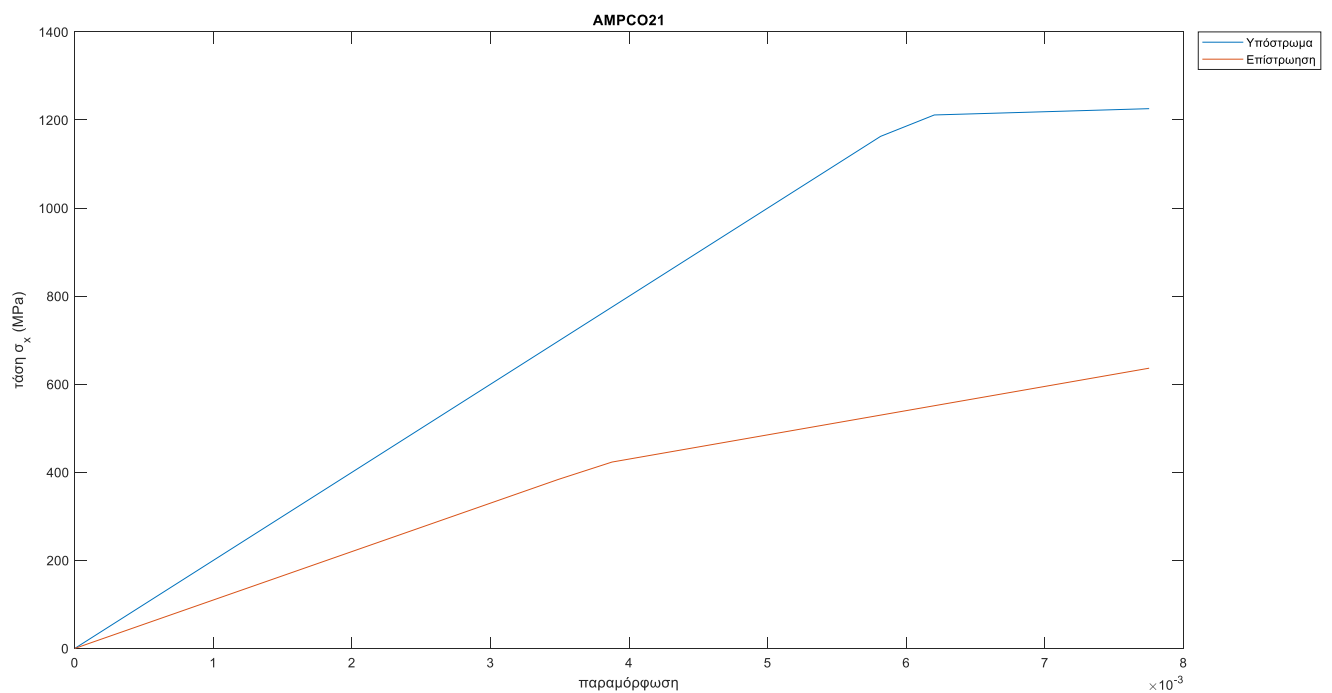


Στο σχήμα 5.9 παρουσιάζεται μία περίπτωση κατανομής των τάσεων  $\sigma_x$  στο υπόστρωμα

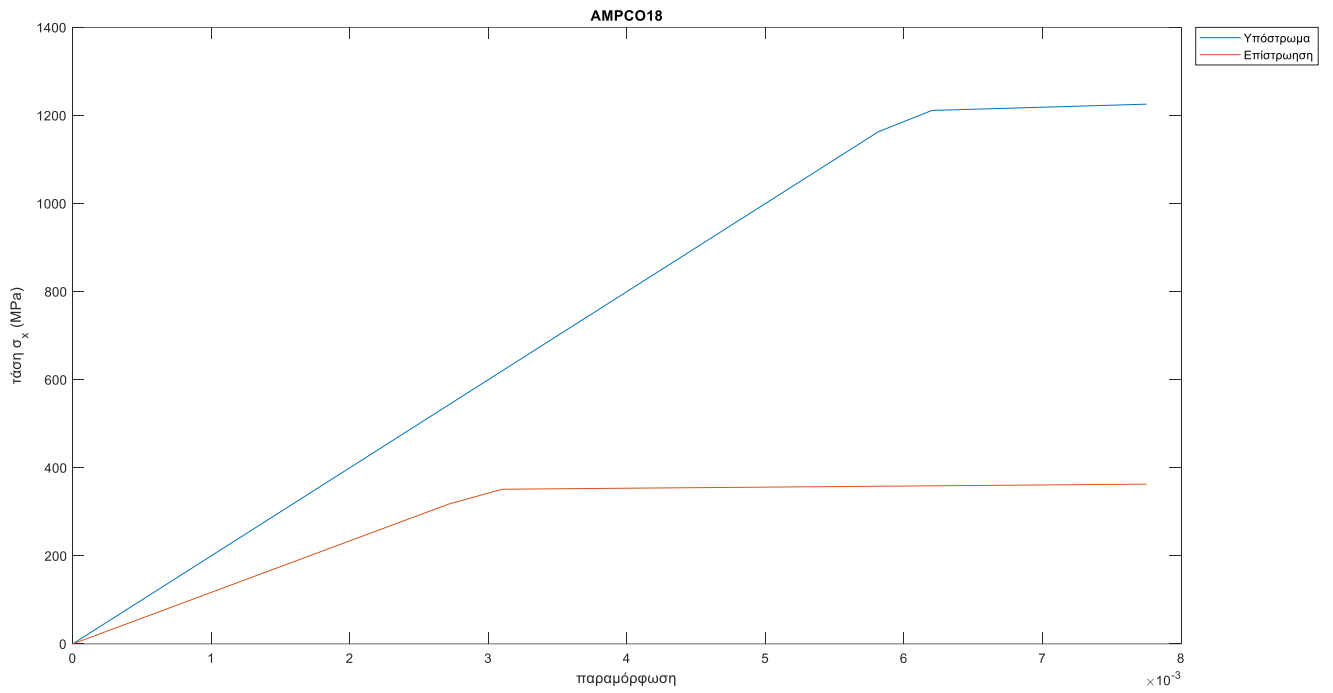


Σχήμα 5.9: Κατανομή της τάσης  $\sigma_x$  για υλικό επίστρωση μη γραμμικό AMPCO21

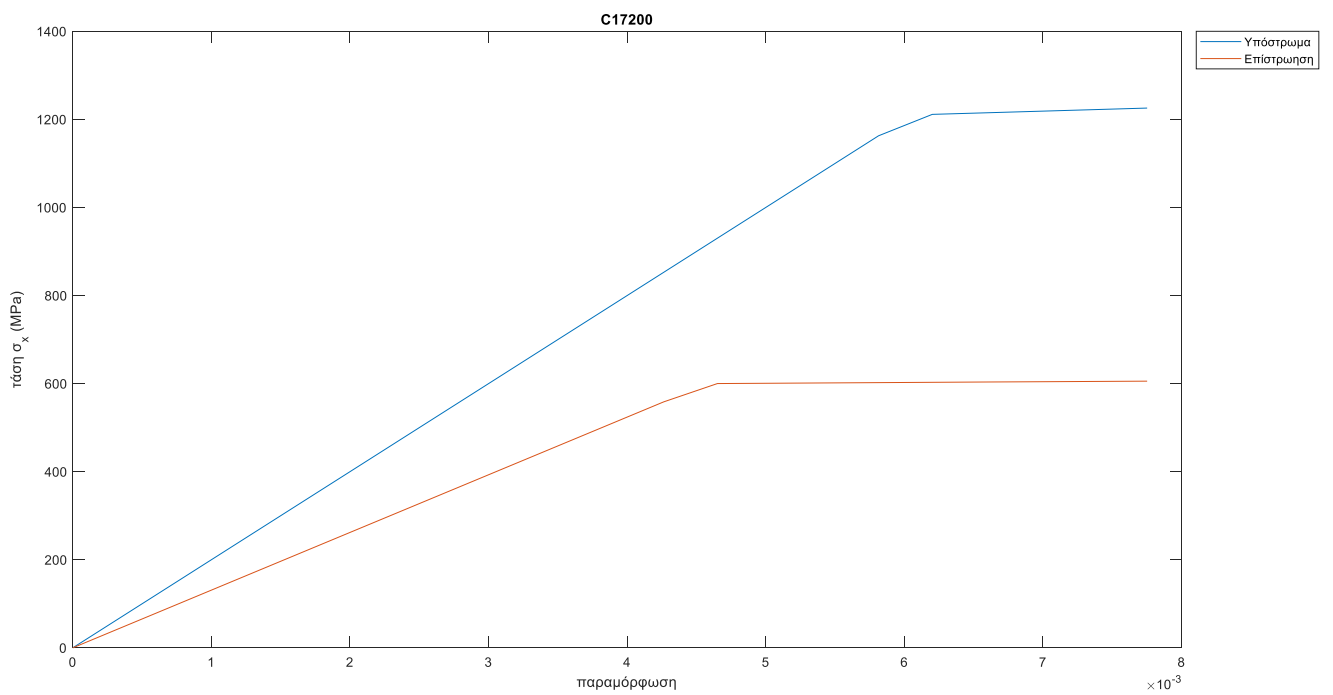
Στα σχήματα 5.10-5.12 παρουσιάζονται οι καμπύλες τάσεων παραμορφώσεων για τα διαφορετικά υλικά του επιθέματος.



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για επίστρωση από AMPCO21

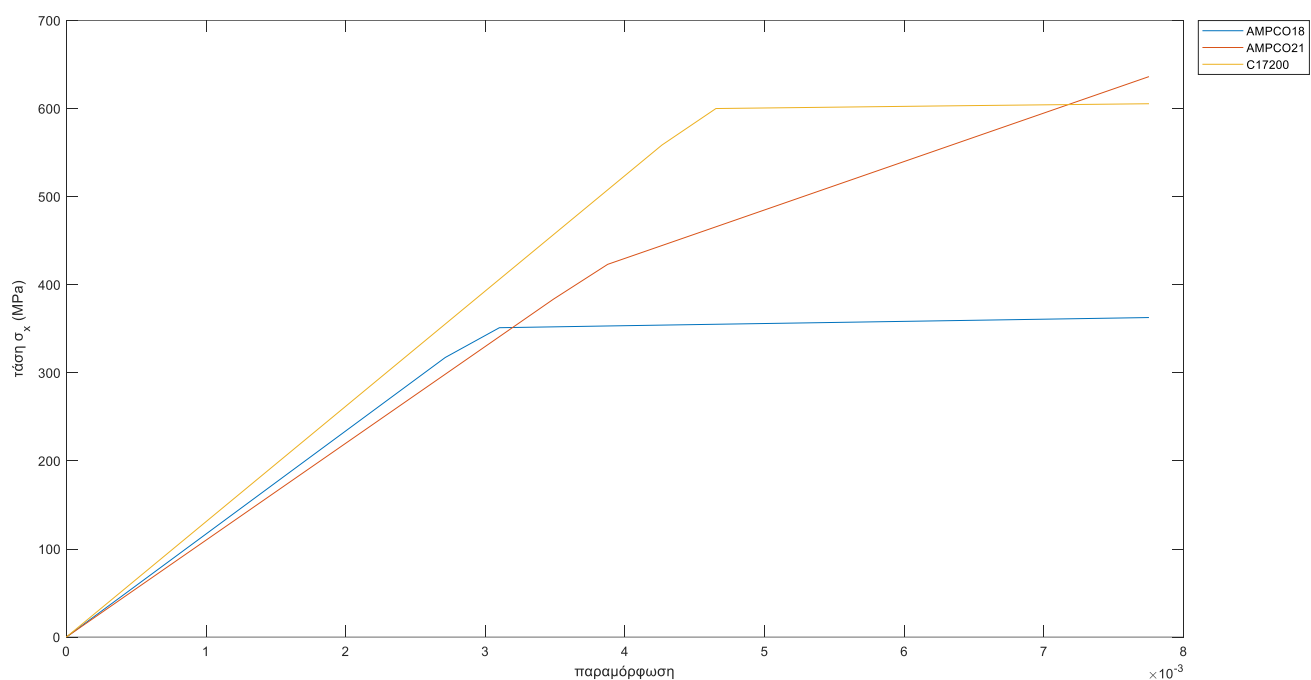


Σχήμα 5.11: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για επίστρωση από AMPCO18



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για επίστρωση από C17200

Στο σχήμα 5.13 παρουσιάζονται οι καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά της επίστρωσης.



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά της επίστρωσης

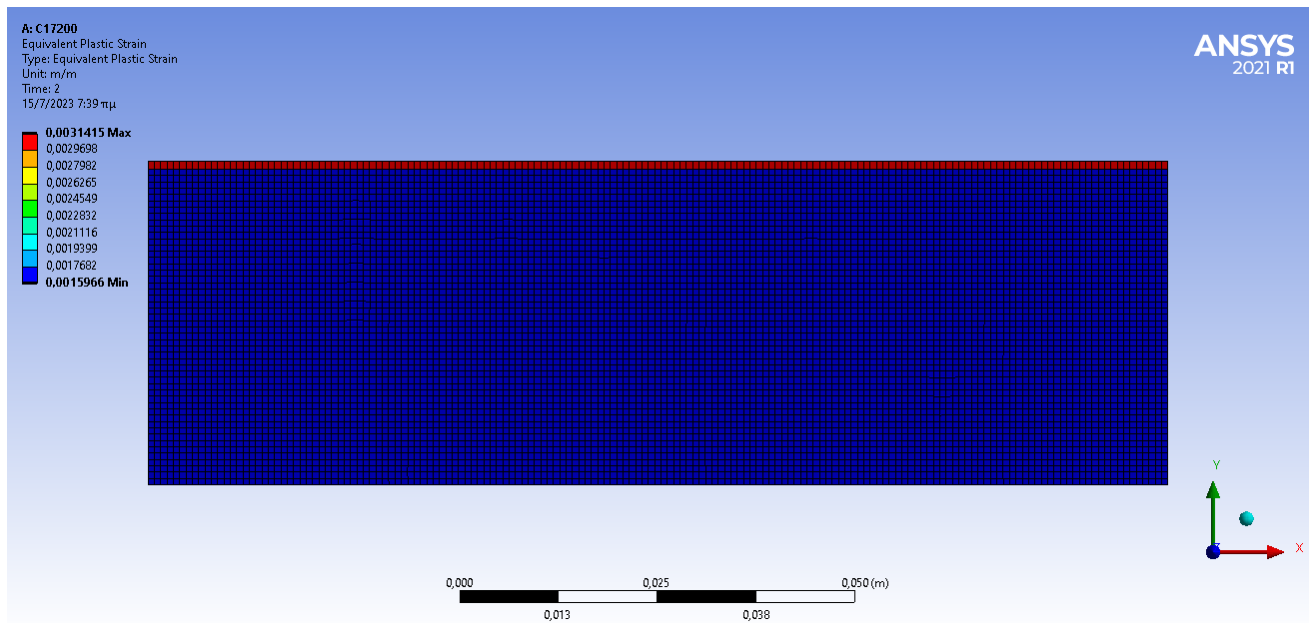
Στον Πίνακα 5 εμφανίζεται η αναπτυσσόμενη τάση στην επίστρωση, όταν η τάση στο υπόστρωμα παίρνει την τιμή της τάσης διαρροής του χάλυβα.

Πίνακας 5

Υλικό	Τάση διαρροής (MPa)	Αναπτυσσόμενη τάση (MPa)
AMPCO21	420	542.76
AMPCO18	351	358.12
C17200	600	602.53

Παρατηρείται ότι σε κάθε περίπτωση το υλικό της επίστρωσης διαρρέει πριν τον χάλυβα.

Στο σχήμα 5.18 παρουσιάζεται η κατανομή της πλαστικής παραμόρφωσης του δοκιμίου, στην περίπτωση του επιθέματος με C17200.

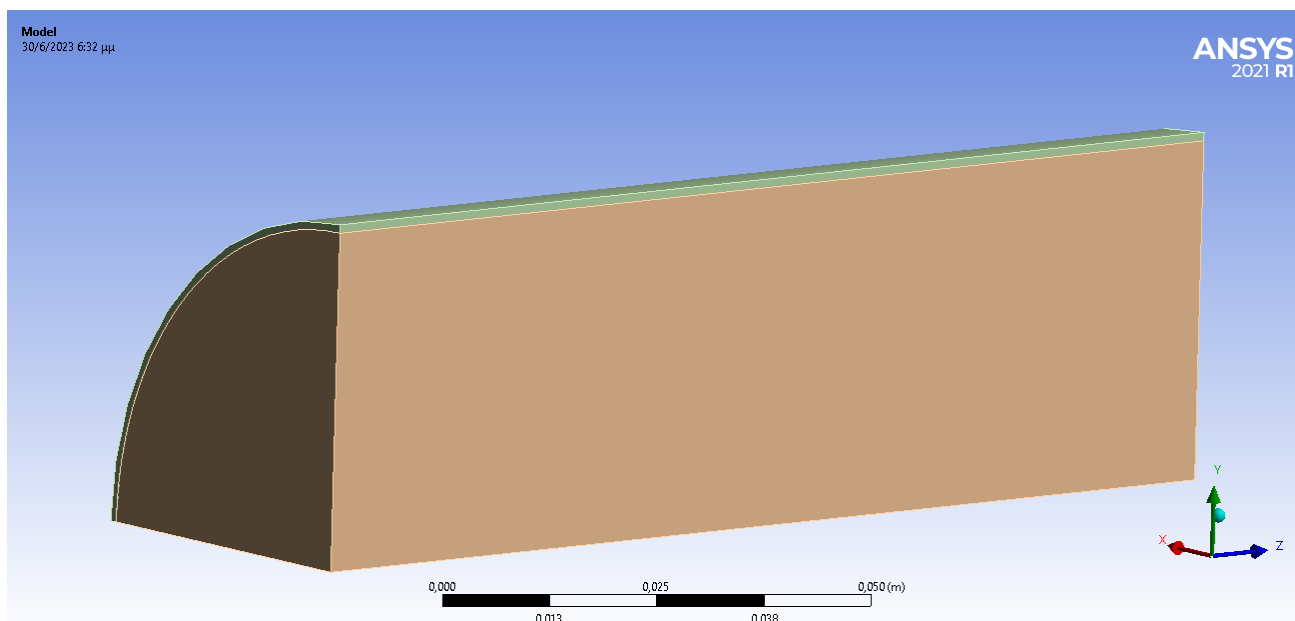


Σχήμα 5.14: Κατανομή της πλαστικής παραμόρφωσης του δοκιμίου, στην περίπτωση του επιθέματος με C17200

Η αναπτυσσόμενη τάση είναι αρκετά μεγάλη ώστε να εμφανιστεί πλαστική παραμόρφωση και στα δύο υλικά. Από τη στιγμή που οι τάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στο εκάστοτε υλικό, θα εμφανιστεί και ομοιόμορφη πλαστική παραμόρφωση.

## 5.2 Τρισδιάστατο πρόβλημα

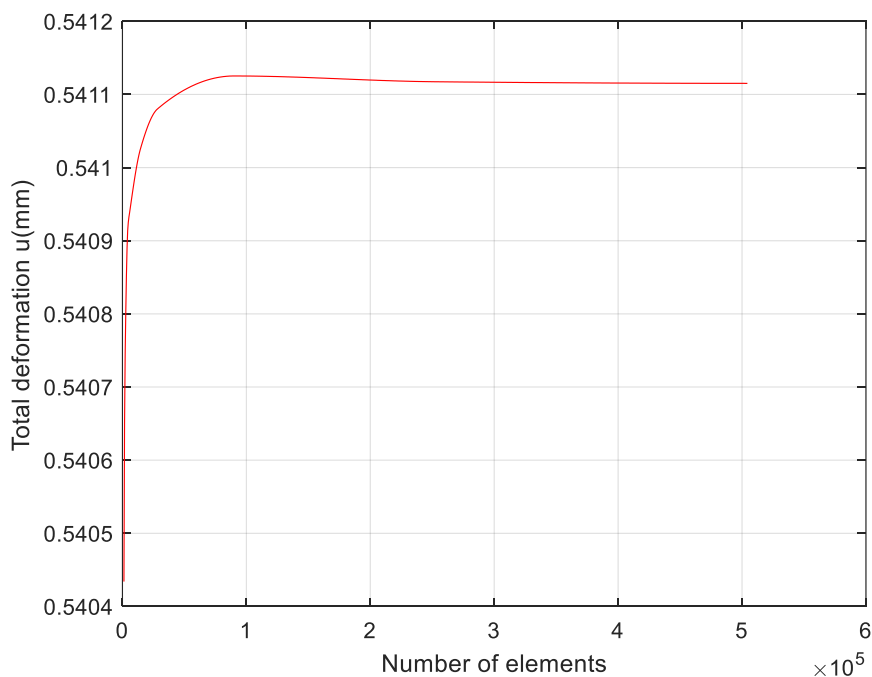
Στην συνέχεια αντιμετωπίζεται το ίδιο πρόβλημα στις 3 διαστάσεις. Από την στιγμή που το πρόβλημα παρουσιάζει συμμετρία γεωμετρίας και φόρτισης, αρκεί να μοντελοποιηθεί το ένα τέταρτο του δοκιμίου. Η τελική γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα 5.19



Σχήμα 5.15: Τρισδιάστατη γεωμετρία του προβλήματος

### 5.2.1 Δημιουργία πλέγματος

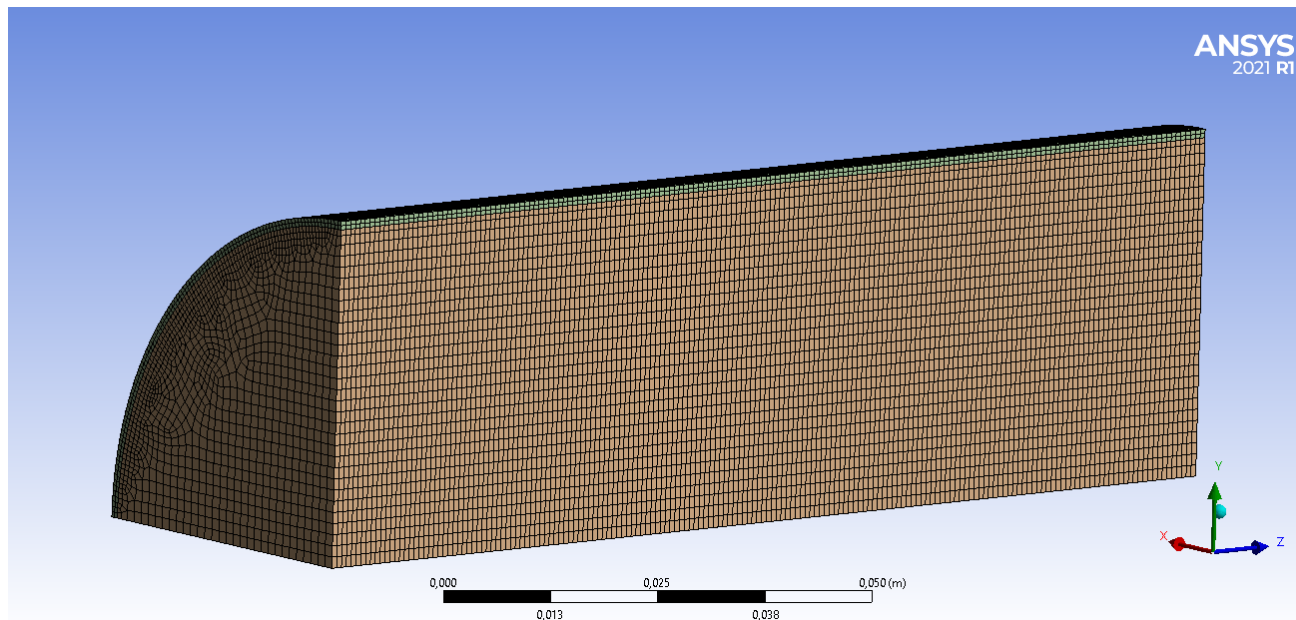
Αρχικά ελέγχεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 5.16: Διάγραμμα σύγκλισης αποτελεσμάτων στο τρισδιάστατο μοντέλο

Η λύση συγκλίνει για περισσότερα από 100.000 στοιχεία, όσο και αν αλλάξουμε το πλέγμα. Επιλέγουμε εξαεδρικά στοιχεία (SOLID185) και ένα μοντέλο με 106.455 στοιχεία.

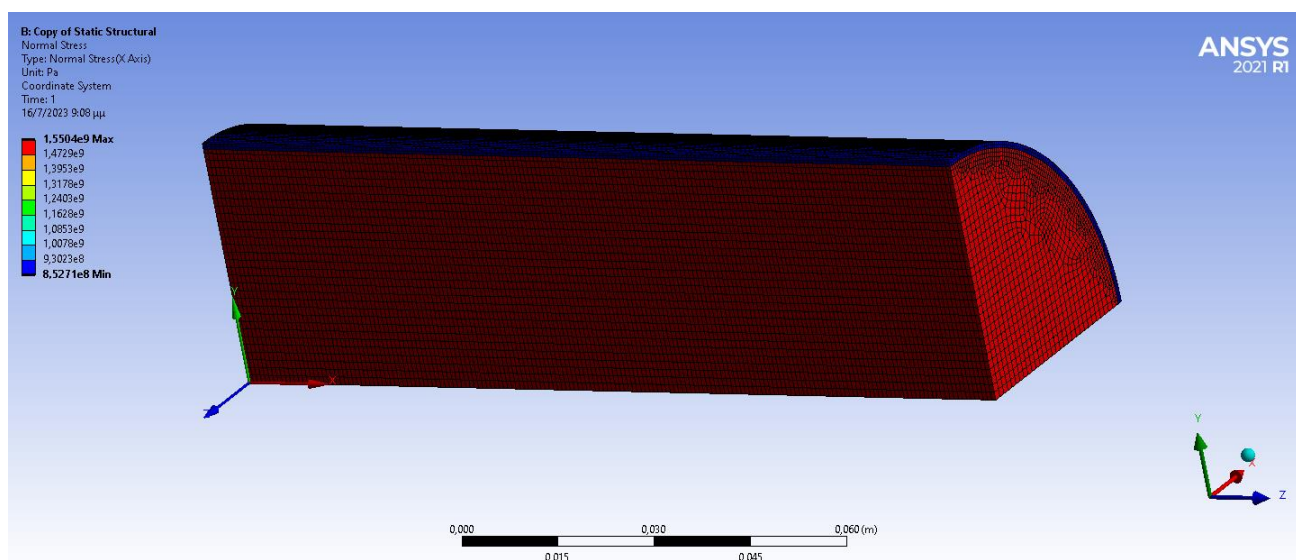
Η διακριτοποίηση φαίνεται στο σχήμα 5.21.



Σχήμα 5.17: Διακριτοποίηση τρισδιάστατης γεωμετρίας

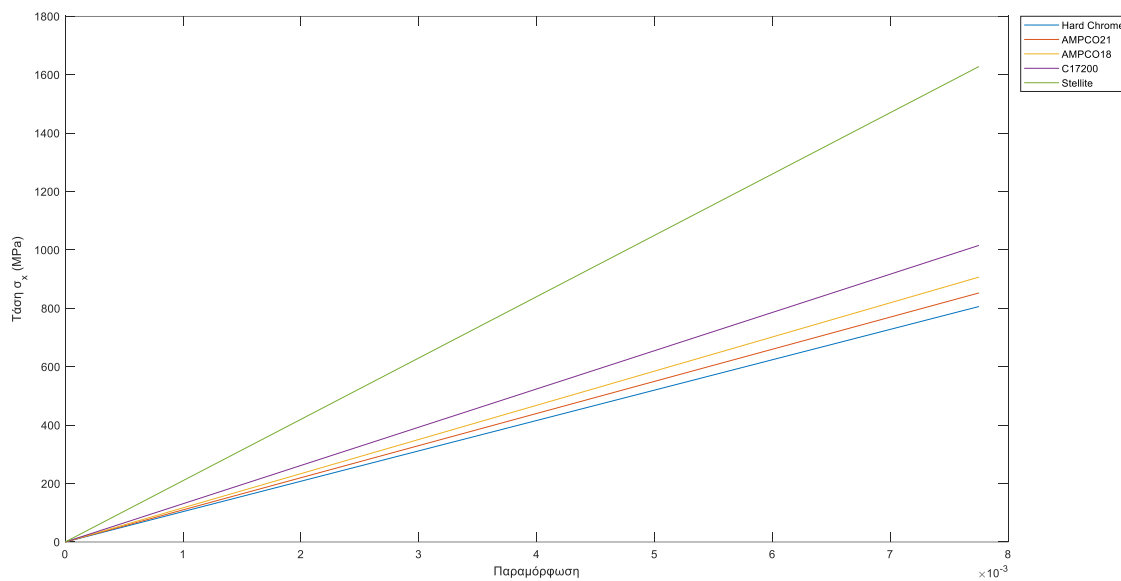
### 5.2.2 Ανάλυση γραμμικής ελαστικότητας

Η τρισδιάστατη ανάλυση γίνεται με χρήση γραμμικής ελαστικότητας και η κατανομή της τάσης  $\sigma_x$  στο δοκίμιο φαίνεται στο σχήμα



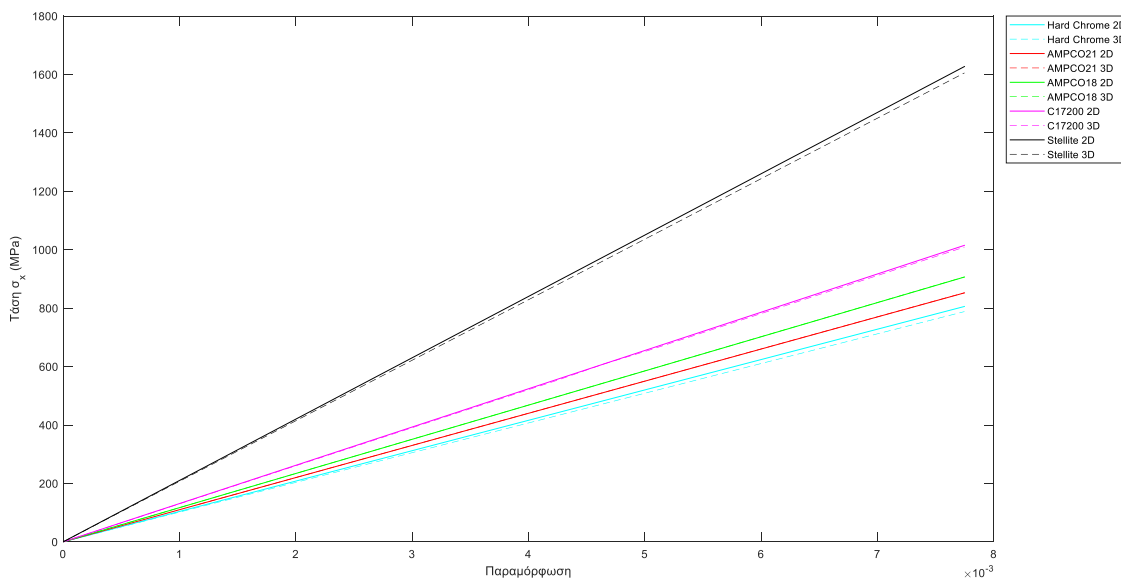
Σχήμα 5.18: Κατανομή των τάσεων  $\sigma_x$  στο τρισδιάστατο δοκίμιο

Στο διάγραμμα του σχήματος 5.23 φαίνονται οι καμπύλες τάσης- παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά της επίστρωσης.



Σχήμα 5.19: Καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης για τα διαφορετικά υλικά της επίστρωσης

Στην συνέχεια συγκρίνονται τα αποτελέσματα με αυτά του δισδιάστατου μοντέλου. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 5.24.

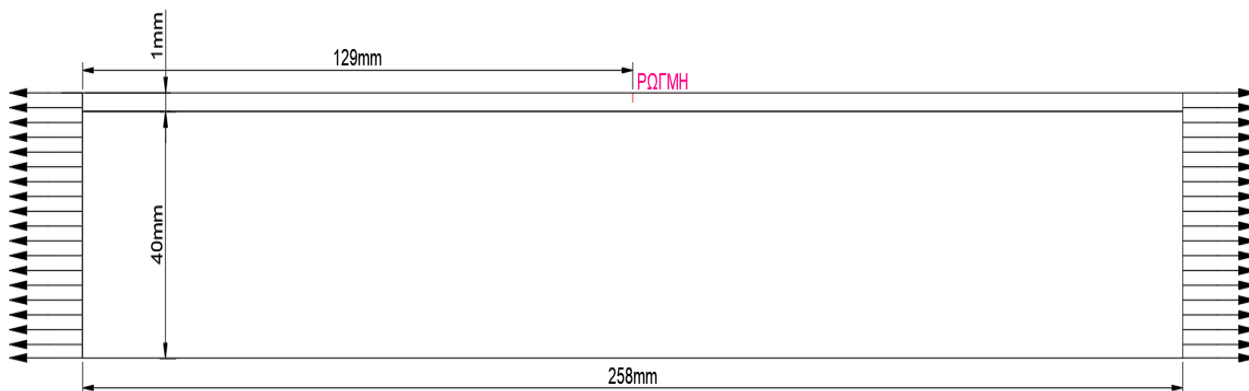


Σχήμα 5.20: Διάγραμμα σύγκρισης Τρισδιάστατου και Δισδιάστατου μοντέλου

### 5.3 Δισδιάστατο πρόβλημα με προϋπάρχουσα ρωγμή

Στην ενότητα αυτή γίνεται μελέτη της διάδοσης ρωγμής υπό συνθήκες κόπωσης, όταν στο δοκίμιο υπάρχει μία ρωγμή στο μέσο της επίστρωσης.

Σύμφωνα με πειραματικούς ελέγχους που έχουν διεξαχθεί, τα δοκίμια αυτά όταν καταπονούνται με κυκλική εφελκυστική φόρτιση παρουσιάζεται μία ρωγμή στο μέσο της επίστρωσης[2]. Συνεπώς θα γίνει μελέτη για τη διάδοση αυτής το ρωγμής. Το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε φαίνεται στο σχήμα 5.27



Σχήμα 5.21: Παρουσίαση του δισδιάστατου προβλήματος με προϋπάρχουσα ρωγμή

Λόγω συμμετρία αρκεί να προσομοιωθεί μόνο το μισό μοντέλο.

Τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται στο αριθμητικό μοντέλο φαίνονται στο πίνακα 6.

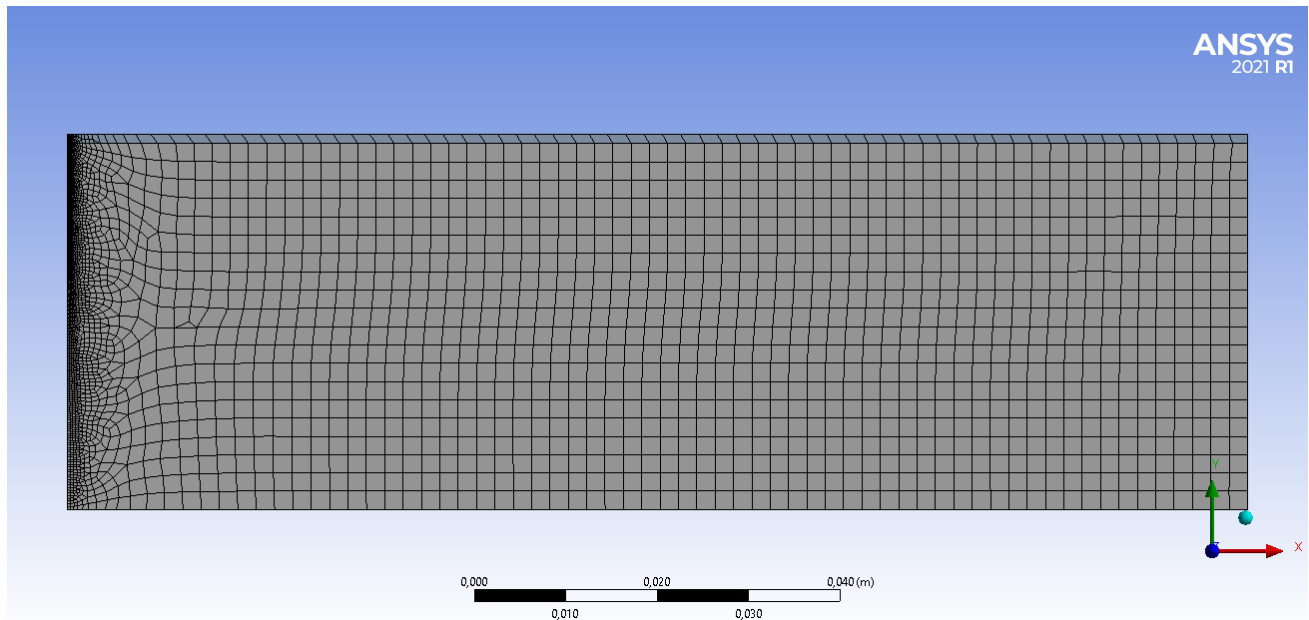
Πίνακας 6. Μεγέθη αριθμητικού μοντέλου

Μέγεθος	Τιμή
Μήκος πλάκας L	129mm
Ύψος υποστρώματος $h_s$	40mm
Ύψος επίστρωσης $h_c$	1 ÷ 3mm
Σχετικό μήκος ρωγμής $a/h_c$	0.03 ÷ 0.98

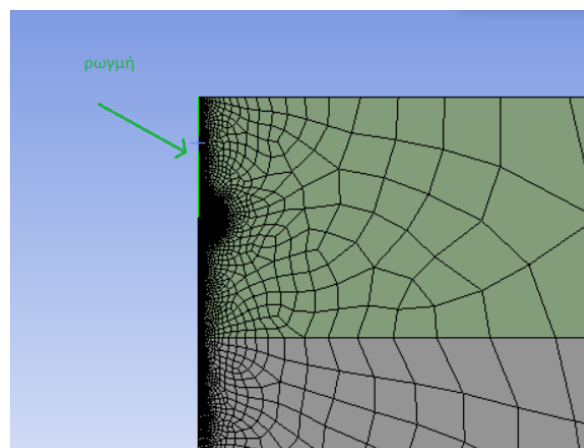


### 5.3.1 Διακριτοποίηση Κατασκευής

Γίνεται χρήση pre-meshed crack οπότε θα πρέπει η διακριτοποίηση να υπάρχει πύκνωση γύρω από την περιοχή της ρωγμής. Η διακριτοποίηση της κατασκευής που επιλέχθηκε μετά τον έλεγχο σύγκλησης των αποτελεσμάτων φαίνεται στα σχήματα 5.28 και 5.29.



Σχήμα 5.22: Πλέγμα με προϋπάρχουσα ρωγμή



Σχήμα 5.23: Πλέγμα γύρω από την ρωγμή

### 5.3.2 Υπολογισμός του εύρους του συντελεστή έντασης τάσεων

Υπολογίζεται το εύρος του συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  για διαφορετικά μήκη της ρωγμής στο κάθε υλικό επίστρωσης όταν το ύψος της συγκολλημένης επιφάνειας είναι 1,2 και 3mm.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση επειδή το  $\sigma_{\min}$  είναι 0, το εύρος του συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  ισούται με το  $K_{\max}$ . Συνεπώς αρκεί να υπολογιστεί ο συντελεστής έντασης των τάσεων  $K$  που αντιστοιχεί σε εφαρμοζόμενη τάση  $\sigma_{\max}$ .

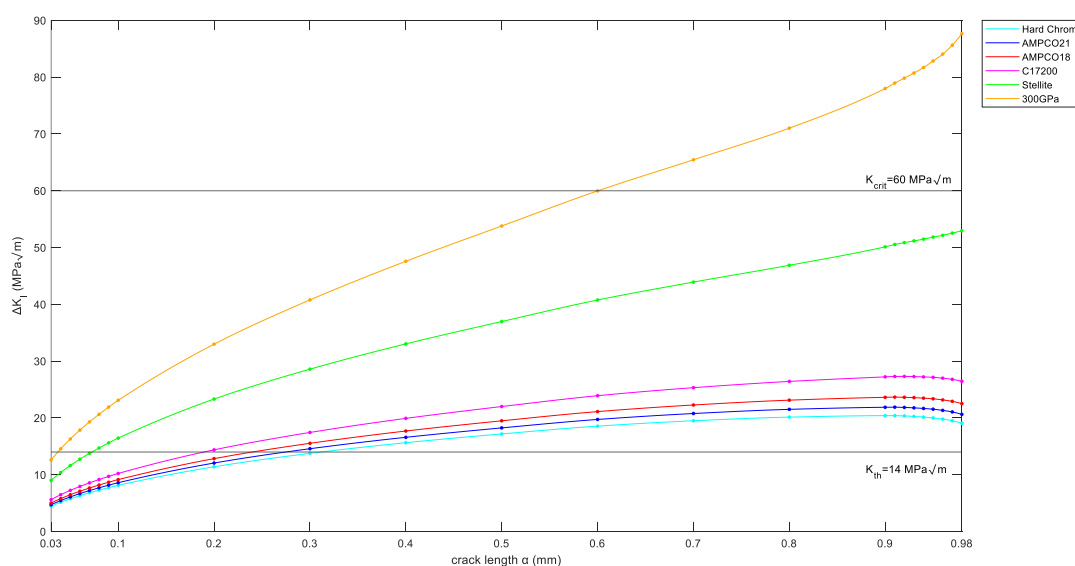
Επίσης στη συγκεκριμένη περίπτωση η ρωγμή διαδίδεται κάθετα ως προς το επιβαλλόμενο εφελκυστικό φορτίο, οπότε έχουμε τρόπο ανοίγματος I (opening mode) . Άρα υπολογίζεται ο συντελεστής  $K_I$ .

Το σχετικό μήκος ρωγμής για κάθε ύψος της επίστρωσης είναι  $0.03 \div 0.98$ . Αυτό συμβαίνει διότι ο υπολογισμός του συντελεστή  $K$  όταν η ρωγμή φτάνει στη διεπιφάνεια των δύο διαφορετικών υλικών χρειάζεται συγκεκριμένη διερεύνηση και μελέτη [36], διαφορετική από αυτή που γίνεται στη συγκεκριμένη εργασία.

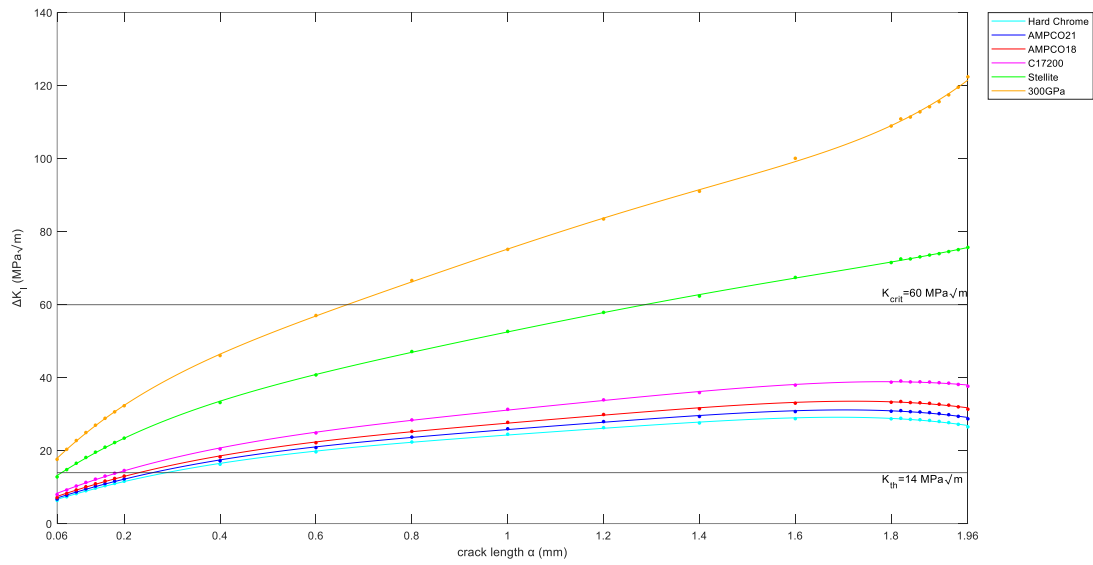
Τα διαγράμματα του εύρους του συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  ως προς το μήκος της ρωγμής παρουσιάζονται στα σχήματα. Εκτός από τα υλικά για τα οποία γίνεται συγκεκριμένη μελέτη, υπολογίζεται και ο συντελεστής  $K$  για ένα υλικό με μέτρο ελαστικότητας 300 GPa για να προσδώσει μια εικόνα για την περίπτωση που η επίστρωση έχει μέτρο ελαστικότητας αρκετά μεγαλύτερο από αυτό του υποστρώματος.

Η τιμή του συντελεστή  $K$  που υπολογίστηκε συγκρίνεται με την τιμή κατωφλίου για τη διάδοση ρωγμής  $K_{th}$  και με την κρίσιμη τιμή του συντελεστή έντασης τάσεων  $K_{Ic}$  του υποστρώματος. Για χάλυβα AISI 4340 το  $K_{th} = 14 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$  και  $K_{Ic} = 60 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$  [37][38].

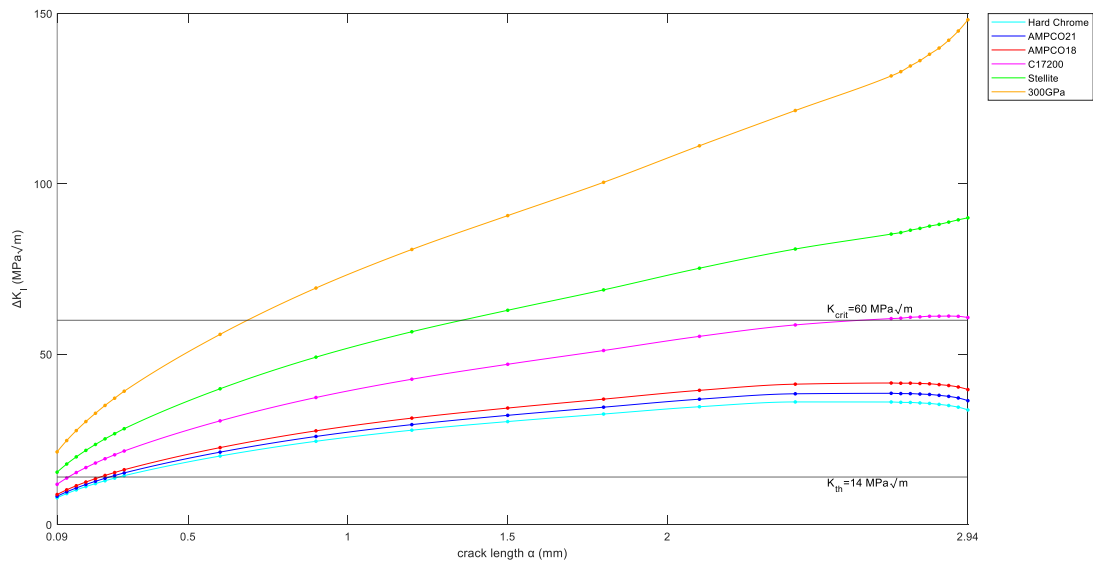
Στα σχήματα 5.28-5.30 παρουσιάζεται η σχέση του  $\Delta K$  με το μήκος τα ρωγμής.



Σχήμα 5.24: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  ως προς το μήκος ρωγμής για ύψος επίστρωσης  $h=1\text{mm}$



Σχήμα 5.25: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  ως προς το μήκος ρωγμής για ύψος επίστρωσης  $h=2\text{mm}$



Σχήμα 5.26: Διάγραμμα εύρους συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  ως προς το μήκος ρωγμής για ύψος επίστρωσης  $h=3\text{mm}$

## Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω διαγράμματα μπορούν να βγουν κάποια συμπεράσματα για τη διάδοση της ρωγμής αν θεωρηθεί ότι έχουμε μία ομοιογενή πλάκα από χάλυβα.

Αρχικά από όλα τα διαγράμματα προκύπτει ότι όταν αυξάνεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της συγκολλημένης επιφάνειας, αυξάνεται και ο συντελεστής έντασης τάσεων. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την πιο γρήγορη διάδοση της ρωγμής υπό συνθήκες κόπωσης.

Επίσης παρατηρείται ότι για μικρότερες τιμές του μέτρου ελαστικότητας της επίστρωσης, αυξάνεται το μήκος της ρωγμής που βρίσκεται κάτω από το κατώφλι  $\Delta K_{th}$ . Οπότε όταν το υλικό της επίστρωσης είναι πιο ελαστικό, ο χρόνος ζωής αυξάνεται.

Για ύψος επίστρωσης  $h = 1\text{mm}$  :

- Για όλα τα υλικά που μελετώνται ο συντελεστής έντασης τάσεων δεν ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή, οπότε η ρωγμή θα διαδίδεται σταθερά, αυξανόμενη σε κάθε κύκλο φόρτισης.
- Επίσης για τα υλικά που έχουν μέτρο ελαστικότητας μικρότερο από αυτό του χάλυβα, για μήκη ρωγμής έως και  $0.2\text{mm}$  η ρωγμή δεν διαδίδεται

Για ύψος επίστρωσης  $h = 2\text{mm}$  :

- Για όλα τα υλικά που έχουν μέτρο ελαστικότητας μικρότερο από αυτό του χάλυβα ο συντελεστής έντασης τάσεων δεν ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή, οπότε η ρωγμή θα διαδίδεται σταθερά, αυξανόμενη σε κάθε κύκλο φόρτισης.

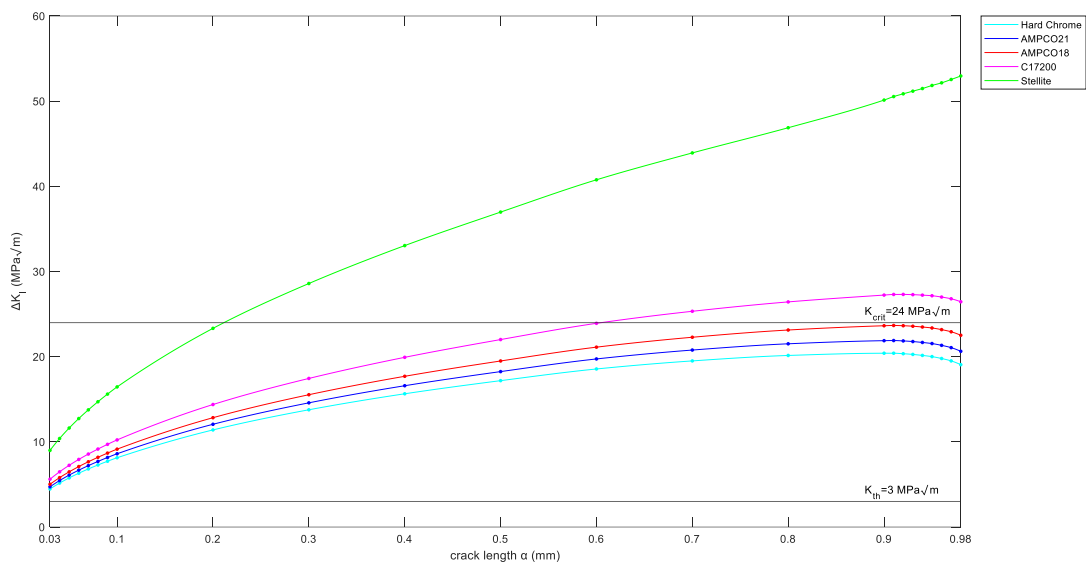
Για ύψος επίστρωσης  $h = 3\text{mm}$  :

- Για τα υλικά που έχουν μέτρο ελαστικότητας μικρότερο από  $120\text{GPa}$  ο συντελεστής έντασης τάσεων δεν ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή.
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι  $131\text{GPa}$  (C17200) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι  $a_c = 2.6\text{mm}$
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι  $210\text{GPa}$  (Stellite) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι  $a_c = 1.4\text{mm}$

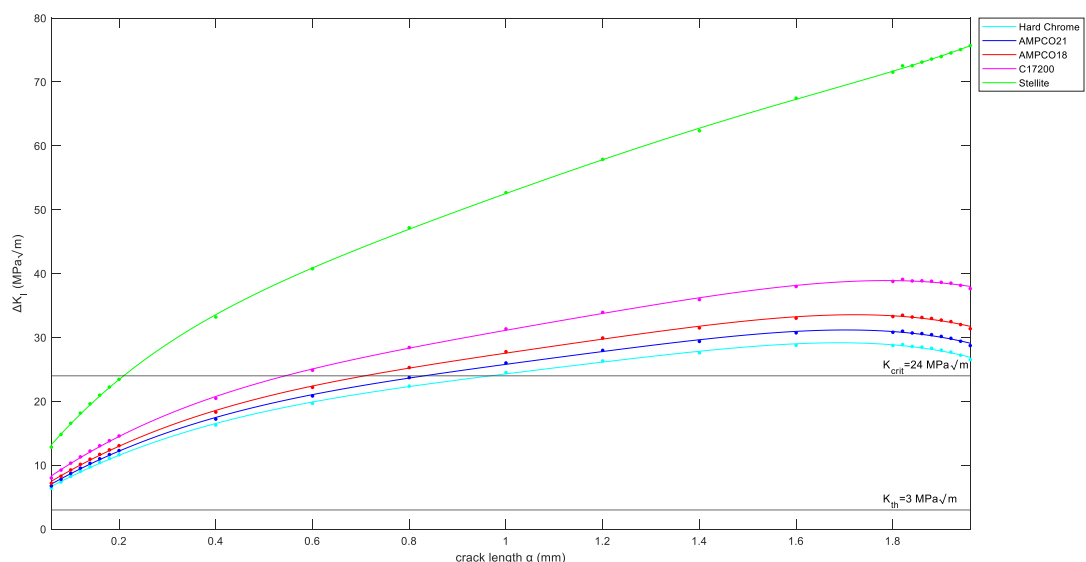
Προηγουμένως έγινε μια προσπάθεια να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για την αντοχή του δοκιμίου συνολικά, συγκρίνοντας τον συντελεστή  $K$  που υπολογίστηκε με τις κρίσιμες τιμές του χάλυβα του υποστρώματος.

Στη συνέχεια θα γίνει σύγκριση της τιμής του υπολογιζόμενου  $K$  με την τιμή κατωφλίου για την διάδοση ρωγμής  $K_{th}$  και με την κρίσιμη τιμή του συντελεστή έντασης τάσεων  $K_{Ic}$  των υλικών της επίστρωσης. Για όλα τα υλικά τα οποία μελετώνται οι τιμές είναι κοντινές.

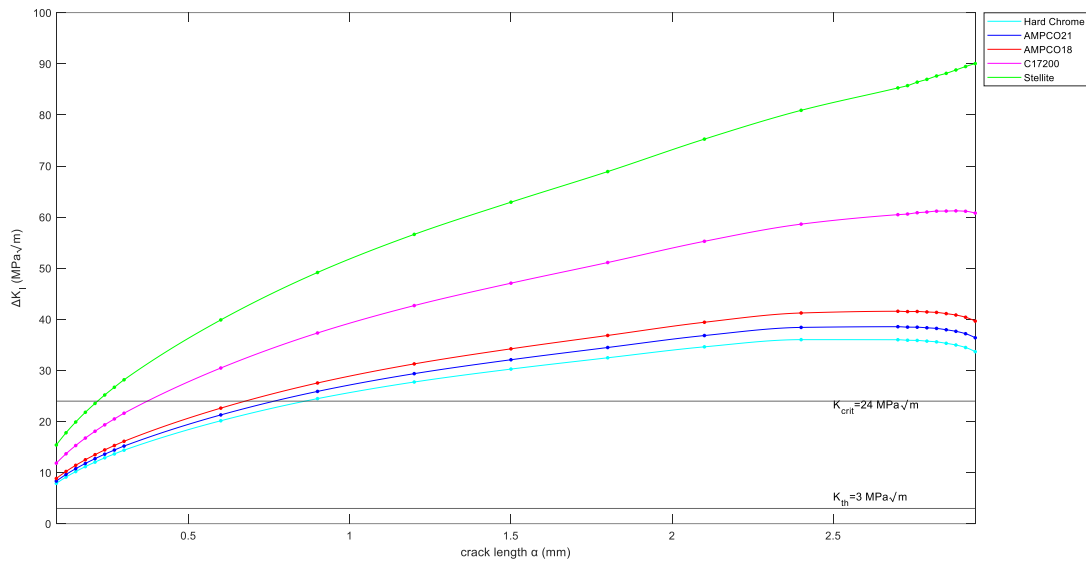
Θεωρούνται  $K_{th} = 3 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$  και  $K_{Ic} = 24 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$  [39][40].



Σχήμα 5.27: Σύγκριση του εύρους συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  με την κρίσιμη τιμή  $\Delta K_{Ic}$  του υλικού της επίστρωσης για ύψος επίστρωσης  $h=1\text{mm}$



Σχήμα 5.28: Σύγκριση του εύρους συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  με την κρίσιμη τιμή  $\Delta K_{Ic}$  του υλικού της επίστρωσης για ύψος επίστρωσης  $h=2\text{mm}$



Σχήμα 5.29: Σύγκριση του εύρους συντελεστή έντασης τάσεων  $\Delta K$  με την κρίσιμη τιμή  $\Delta K_{ic}$  του υλικού της επίστρωσης για ύψος επίστρωσης  $h=3\text{mm}$

## Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν κάποια συμπεράσματα για τη διάδοση της ρωγμής στην επίστρωση.

Αρχικά από όλα τα διαγράμματα φαίνεται ότι σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει διάδοση της ρωγμής στην επίστρωση, ακόμα και για πολύ μικρά μήκη της ρωγμής, αφού ο συντελεστής  $K$  σε όλες τις περιπτώσεις βρίσκεται πάνω από την τιμή κατωφλίου

Για ύψος επίστρωσης  $h = 1\text{mm}$  :

- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης δεν ξεπερνάει τα 120 GPa, ο συντελεστής έντασης των τάσεων δεν ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή οπότε θα έχουμε σταθερή διάδοση της ρωγμής.
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι 131GPa (C17200) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι  $a_c = 0.6\text{mm}$
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι 210 GPa (Stellite) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι  $a_c = 0.22\text{mm}$

Για ύψος επίστρωσης  $h = 2\text{mm}$  :

- Για όλα τα υλικά που μελετάμε ο συντελεστής έντασης τάσεων ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή, οπότε θα έχουμε ασταθή διάδοση της ρωγμής στην επίστρωση μετά από κάποιο κρίσιμο μήκος .

- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι 104GPa (Hard chrome) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι περίπου  $a_c = 1\text{mm}$
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι 110GPa (AMPCO21) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι περίπου  $a_c = 0.82\text{mm}$
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι 117GPa (AMPCO18) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι περίπου  $a_c = 0.7\text{mm}$
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι 131GPa (C17200) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι  $a_c = 0.55\text{mm}$
- Όταν το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης είναι 210 GPa (Stellite) το κρίσιμο μήκος της ρωγμής είναι  $a_c = 0.22\text{ mm}$

## Γενικά συμπεράσματα

Με βάση την αριθμητική μελέτη που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας μπορούν να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για τις ελαστικές ιδιότητες που πρέπει να έχει η στρώση που συγκολλάται πάνω σε υπόστρωμα χάλυβα σχετικά με την αντοχή στην κόπωση.

Από την ανάλυση σε ένα δοκίμιο με προϋπάρχουσα ρωγμή στο μέσο της επίστρωσης συμπεραίνεται ότι το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης πρέπει να είναι μικρότερο από αυτό του υποστρώματος. Το κρίσιμο μήκος της ρωγμής προκειμένου να έχουμε ασταθή διάδοση αυξάνεται, όσο μικρότερο είναι το μέτρο ελαστικότητας της επίστρωσης.



## Επίλογος και προοπτικές για μελλοντική έρευνα

Η κατασκευή επιμεταλλωμένων μετάλλων είναι μια πολύ διαδεδομένη πρακτική με πολλές βιομηχανικές εφαρμογές. Ταυτόχρονα η μέθοδος συγκόλλησης με λέιζερ είναι μία μέθοδος που χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο, λόγω των πολλών πλεονεκτημάτων που προσφέρει. Λόγω αυτών η μελέτη των ιδιοτήτων που πρέπει να έχει το υλικό της επίστρωσης είναι πολλή σημαντική.

Στην συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε μία αριθμητική ανάλυση προκειμένου να εξαχθούν κάποια πρώτα συμπεράσματα. Χρειάζονται περισσότερες μελέτες πάνω στο συγκεκριμένο πρόβλημα προκειμένου να μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για τις βέλτιστες ιδιότητες του υλικού και το κατάλληλο ύψος επίστρωσης ώστε να έχουν τα απαραίτητα χαρακτηριστικά για την καλύτερη αξιοποίηση της μεθόδου στην παραγωγή .

Μερικές προτάσεις για περαιτέρω μελέτη:

- Επίλυση του τρισδιάστατου αριθμητικού μοντέλου με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με προϋπάρχουσα ρωγμή στο μέσο της επίστρωσης
- Αριθμητική μελέτη του προβλήματος με προϋπάρχουσα ρωγμή στην διεπιφάνεια των δύο υλικών
- Μελέτη του προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη τη συμπεριφορά της διεπιφάνειας των δύο υλικών
- Επίλυση του προβλήματος για διαφορετικές φορτίσεις

## Βιβλιογραφία

- [1] ANSYS 2021 R1, [www.ansys.com](http://www.ansys.com)
- [2] Malíková, L., Miarka, P., Doubek, P., Seitzl, S. (2021). Influence of the bi-material interface on the crack propagation through a thin protective layer, *Struct. Integr. Procedia*.
- [3] Callister William D., J.R David ,G. Rethwisch , *Επιστήμη και Τεχνολογία των υλικών*, Εκδ. ΤΖΙΟΛΑ ,9η έκδοση
- [4] Θάνος Αλεξανδρίδης, *Σύνθετα Υλικά (Composites)*
- [5] Παπανικολάου Γ., Μουζάκης Δ., “Σύνθετα υλικά”, Εκδ. Κλειδάριθμος (2007).
- [6] Dhib, Zina & Guermazi, Noamen & Gasperini, Monique & Haddar, Nader. (2015). Cladding of low-carbon steel to austenitic stainless steel by hot-roll bonding: Microstructure and mechanical properties before and after welding. *MSEA*. Wen, P., Feng, Z., Zheng, S. Formation Quality Optimization of Laser Hot Wire Cladding for Repairing Martensite Precipitation Hardening Stainless Steel *Optics & Laser Technology* 2015
- [7] Sun, Y., Hao, M. Statistical Analysis and Optimization of Process Parameters in Ti6Al4V Laser Cladding Using Nd:YAG Laser *Optics & Lasers in Engineering* 2012
- [8] Lai, Q.; Abrahams, R.; Yan, W.; Qiu, C.; Mutton, P.; Paradowska, A.; Soodi, M. Investigation of a Novel Functionally Graded Material for the Repair of Premium Hypereutectoid Rails Using Laser Cladding Technology. *Compos. Part B Eng.* 2017
- [9] Nie, M.H.; Zhang, S.; Wang, Z.Y.; Zhang, C.H.; Chen, H.T.; Chen, J. Effect of Laser Power on Microstructure and Interfacial Bonding Strength of Laser Cladding 17-4PH Stainless Steel Coatings. *Mater. Chem. Phys.* 2022
- [10] Z. Liu, *Laser applied coatings, reference module in materials science and materials engineering*
- [11] Engineering Library, DOE Fundamentals Handbook: Material Science," DOE-HDBK-1017/1-93, U.S. Department of Energy, Jan 1993.
- [12] David Roylance , *STRESS-STRAIN CURVES*,Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139August 23, 2001
- [13] Beer Ferdinand P.,Johnston Russell E.,*Μηχανική των Υλικών*, 6η Έκδοση (2012), ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- [14] T.L Anderson, *Fracture Mechanics , Fundamentals and applications*, Third Edition
- [15] Bashar Abid Hamza, Ahmed Reyadh, Qais Al-Madhloom, Effect of (B/D) ratio on ultimate load capacity for horizontally curved box steel beam under out of plane concentrated load
- [16] Moamen Emara, Ezzeldin Yazeed Sayed-Ahmed, Emam Soliman, Numerical Analysis of CHS Unstiffened Bolted Circular Flange Connection
- [17] Β. Χ. Μούσα, Έλεγχος & Αξιολόγηση Κατασκευών, Τα Διαγράμματα σ-N και το Όριο Κόπωσης
- [18] Bhaduri, A. (2018). Fatigue. In: *Mechanical Properties and Working of Metals and Alloys*. Springer Series in Materials Science, vol 264. Springer, Singapore.
- [19] Gross, D., & Seelig, T. (2017). *Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics*. Springer.

- [20] Hu, Z., Delfanian, F. (2005). Stress concentration in lami-nated composites with a central circular hole under biaxial load. Proceedings of IMECE2005, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Orlando, Florida USA.
- [21] Irwin, G. R. (1957) Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME. E24,351
- [22] Ansys Inc, Theory reference for the Mechanical APDL and mechanical applications
- [23] Ansys Inc, ANSYS Mechanical APDL Fracture Analysis Guide
- [24] Handbook for Damage Tolerant Design
- [25] P. Paris, F. Erdogan, A Critical Analysis of Crack Propagation Laws 1963
- [26] Γ.Ι Τσαμασφύρος, Ε.Ε Θεοτόκογλου , Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων
- [27] Lyu, Y. (2022). Finite Element Analysis Using Rectangular Element. In: Finite Element Method. Springer, Singapore.
- [28] Karen Dow, Sameer Adeeb, Lindsey Westover, Yong Li, University of Alberta ,Introduction to numerical analysis for engineers, course
- [29] Xie, Jing & Cui, Yi-An & Zhang, Lijuan & Guo, Youjun & Wang, Jiaxin & Fanidi, Meryem & Liu, Jianxin. (2020). Numerical modeling of biogeobattery system from microbial degradation of underground organic contaminant. SN Applied Sciences. 2. 10.1007/s42452-020-2008-9.
- [30] Vasheghani Farahani, Behzad & Berardo, José & Andrade Pires, Francisco. (2014). An Investigation on Three Dimensional Plasticity through Using von-Mises and Hill Yield Criteria in Matlab and Ansys. 10.13140/2.1.4062.5442.
- [31] Total Materia [www.totalmateria.com](http://www.totalmateria.com)
- [32] [www.lookpolymers.com](http://www.lookpolymers.com)
- [33] [www.matweb.com](http://www.matweb.com)
- [34] AMPCO METAL [www.ampcometal.com](http://www.ampcometal.com)
- [35] Merayo, David & Rodríguez-Prieto, Alvaro & Camacho, Ana. (2020). Prediction of the Bilinear Stress-Strain Curve of Aluminum Alloys Using Artificial Intelligence and Big Data. Metals - Open Access Metallurgy Journal. 10. 904. 10.3390/met10070904.
- [36] Malíková, L., Klysák (2021) Crack behaviour at the interface of a surface layer applied on a steel substrate by laser cladding
- [37] R. Rihan, R.K. Singh Raman, R.N. Ibrahim, and D. Gerrard, determination of the threshold stress intensity factor of 4340 steel using small circumferential notched tensile (cnt)specimen
- [38] Youxiang Chew, Jihn Hock Lye Pang, Bin Song, Effects of laser cladding on fatigue performance if AISI 4340 Steel in the as-clad and machine treated conditions
- [39] doddamani, s. and m. kaleemulla. Review of experimental fracture toughness (KIC) of aluminium alloy and aluminium MMCs. International Journal of Fracture and Damage Mechanics. 2016, vol. 1, iss. 2, pp. 38–51.
- [40] HOLPER, B., MAYER, H., VASUDEVAN, A.K. and S.E. STANZL-TSCHEGG. Near threshold fatigue crack growth at positive load ratio in aluminium alloys at low and ultrasonic frequency: influences of strain rate, slip behaviour and air humidity. International Journal of Fatigue. 2004, vol. 26, pp. 27–38. ISSN 0142-1123



