**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΚΑΛΑΙΤΖΗΣ**

# ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΘΕΩΡΙΑ RAMSEY ΚΑΙ Ο ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ RAMSEY ΣΥΝΟΛΩΝ

ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:

**ΘΕΩΡΙΑ RAMSEY**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ**

Κανελλόπουλος Βασίλειος, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Κανελλόπουλος Βασίλειος, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Γρηγοριάδης Βασίλειος, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αρβανιτάκης Αλέξανδρος, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ, 2023

**ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Ευχαριστώ πολύ τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Κανελλόπουλο για την έμπνευση, ενθάρρυνση και βοήθεια στην διεκπεραίωση της εργασίας.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Στέφανος Καλαϊτζής

## Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η Ευκλείδια Θεωρία Ramsey. Συγκεκριμένα θα επικεντρωθούμε στα Ramsey υποσύνολα Ευκλείδιων χώρων και στο πρόβλημα του χαρακτηρισμού τους. Ενα πεπερασμένο υποσύνολο $X$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ είναι Ramsey όταν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε όπως και να διαμεριστεί ο χώρος $\mathbb{R}^N$ σε $r$ σύνολα, θα υπάρχει ενα ισομετρικό (ως προς την ευκλειδια νόρμα) αντίγραφο του $X$ το οποίο ανήκει εξ ολοκλήρου σε ενα στοιχείο της διαμέρισης. Η μόνη μέχρι στιγμής αναγκαία συνθήκη για ένα σύνολο να είναι Ramsey είναι τα στοιχεία του να ανήκουν στην επιφάνεια μιας σφαίρας πράγμα που θα αποδείξουμε. Κυρίως θα μελετήσουμε μια εικασία που έχει γίνει για τον χαρακτηρισμό των συνόλων Ramsey, η οποία ανάγεται σε μια καθαρά συνδιαστικού χαρακτήρα πρόταση που αφορά της ομάδες. Συγκεκριμένα οτι όλες οι ομάδες ικανοποιούν μια ιδιότητα τύπου Hales-Jewett. Θα παρουσιάσουμε αρχικά το Θεώρημα Hales-Jewett και έπειτα το αποτέλεσμα που λέει οτι αυτή η ιδιότητα ισχύει για τις επιλυσιμες ομάδες. Τέλος θα παρουσιάσουμε και το Θεώρημα Ramsey το οποίο είναι θεμελιώδες εντός της θεωρίας.



**Λέξεις Κλειδιά.**
Ευκλείδια Θεωρία Ramsey, Ramsey σύνολα, Θεώρημα Hales-Jewett, Θεώρημα του Kriz

## Abstract

The subject of this Diploma Thesis is Euclidean Ramsey Theory and specifically we deal with the characterization problem of Ramsey sets. A finite subset $X$ of some Euclidean space $\mathbb{R}^n$ for some $n \in \mathbb{N}$ is Ramsey, if for every $r \in \mathbb{N}$ there exists a large enough dimension $N \in \mathbb{N}$, such that, for every partition of $\mathbb{R}^N$ into $r$ sets, we can find a congruent copy of $X$ within one of the sets of the partition. The only known property of Ramsey sets is that they are spherical, meaning that their elements lie on the surface of a sphere. We will primarily deal with one of the conjectures about Ramsey sets, part of which corresponds to a purely combinatorial statement referring to a Hales-Jewett type property of groups. After we prove the Hales-Jewett theorem we will show that the Hales-Jewett type property holds for solvable groups. We will finally prove the spherical property of Ramsey sets and Ramsey's theorem, which is fundamental within the theory.



**Keywords.**
Euclidean Ramsey Theory, Ramsey sets, Hales-Jewett Theorem, Kriz's Theorem

# Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1. Βασικά στοιχεία της Ευκλείδιας θεωρίας Ramsey

Η Ευκλείδια θεωρία Ramsey ξεκίνησε το 1973 με μια σειρά εργασιών των Erdos, Graham, Montgomery, Rothchild, Spencer και Straus [**10**].Τα βασικά αντικείμενα μελέτης της ευκλείδιας θεωρίας Ramsey είναι τα λεγόμενα *Ramsey σύνολα* και κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας είναι αυτό του χαρακτηρισμού τους. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι θα χρειαστούμε την παρακάτω ορολογία.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών. Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε θέτουμε $[n] = \{1, ..., n\}$. Αν $X$ σύνολο τότε με $|X|$ συμβολίζουμε την πληθικότητα του. Εστω $X, Y$ δύο μη κενά σύνολα. Τότε μια συνάρτηση $c : X \to Y$ ονομάζεται $Y$-***χρωματισμός*** του συνόλου $X$ και κάθε στοιχείο $x \in X$ έχει το χρώμα $c(x)$. Αν το σύνολο $Y$ είναι πεπερασμενο τότε ο χρωματισμός $c$ ονομάζεται πεπερασμένος και αν $|Y| = r$, οπου $r$ θετικός ακέραιος, ο $c$ λέγεται $r$-χρωματισμός. Οταν λέμε **ευκλείδιος χώρος** εννοούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, εφοδιασμένο με την συνήθη ευκλείδια νόρμα την οποία θα συμβολίζουμε απλά με $|| \cdot ||$. Δηλαδή αν $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in[n]}$ και $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{R}^n$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, η απόσταση τους δίνεται απο την σχέση:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left( \sum_{i\in[n]} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Συνήθως όταν αναφερόμαστε σε **ευκλείδιο σύνολο** θα εννοούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το οποίο θα αγνοούμε εκτός αν είναι απαραίτητο να αναφερθεί. Δύο ευκλείδια σύνολα $X, Y$ λέγονται *ισομετρικά* αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί) συνάρτηση $f : X \to Y$ η οποία διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

για κάθε $x, y \in X$, οπου οι νόρμες υπολογίζονται στους χώρους που ανήκουν τα $X$ και $Y$ αντιστοιχα. Αν $X$ είναι ένα ευκλείδιο σύνολο τότε κάθε ευκλείδιο σύνολο $Y$ ισομετρικό με το $X$ θα καλείται *αντίγραφο* του $X$.

Ας δούμε τώρα τον ορισμό των συνόλων Ramsey.

Ορισμος 1.1. ***(Ramsey σύνολο)*** *Εστω $X$ πεπερασμένο ευκλείδιο σύνολο. Το $X$ θα λέγεται Ramsey σύνολο αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(X, r)$ τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό $c : \mathbb{R}^N \to [r]$ υπάρχει μονοχρωματικό αντίγραφο του $X$.*

Ας δούμε κάποια απλά παραδείγματα Ramsey συνόλων.

Παραδειγματα 1.1. Έστω δύο σημεία $x, y \in \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τα οποία είναι σε απόσταση $d > 0$ μεταξή τους και $r \in \mathbb{N}$. Αν χρωματίσουμε με $r$ χρώματα το κανονικό $r$-simplex, το οποίο αποτελείται απο $r+1$ σημεία όλα σε απόσταση $d$ μεταξή τους, απο την αρχή του περιστερώνα θα υπάρχουν δύο στοιχεία με το ίδιο χρώμα. Αυτά τα δύο στοιχεία θα είναι προφανώς μονοχρωματικό αντίγραφο του συνόλου $\{x, y\}$. Επομένος κάθε δισύνολο σε κάποιον ευκλείδιο χώρο είναι Ramsey.

Έστω τώρα $A$ ένα κανονικό $k$-simplex με πλευρά $d > 0$ και $r \in \mathbb{N}$. Απο την γενικότερη μορφή της αρχής του περιστερώνα, ξέρουμε οτι αν χρωματίσουμε $kr + 1$ αντικείμενα με $r$ χρώματα θα υπάρχουν $k+1$ αντικείμενα ίδιου χρώματος. Άρα παίρνουμε το κανονικό $kr$-simplex πλευράς $d$ και αφού το χρωματίσουμε με $r$ χρώματα θα υπάρχει ένα μονοχρωματικό $k$-simplex το οποίο θα είναι αντίγραφο του $A$. Πιο γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεωρημα 1.2. *(**Frankl και Rodl** [**3**]) Όλα τα simplices είναι Ramsey.*

Είναι εύκολο να δεί κανείς οτι τα υποσύνολα των Ramsey συνόλων είναι Ramsey. Επίσης έχει δειχθεί οτι το καρτεσιανό γινόμενο Ramsey συνόλων είναι Ramsey.

Μέχρι και σήμερα παραμένει ανοικτό το πρόβλημα του χαρακτηρισμού των Ramsey συνόλων. Δηλαδή να βρεθεί κάποια ισοδύναμη έννοια η οποία να περιγράφει πλήρως αυτά τα σύνολα. Όπως θα δούμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 6, αν ένα Ευκλείδιο σύνολο είναι Ramsey τότε είναι σφαιρικό δηλαδή τα σημεία του ανήκουν στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Η ιδιότητα αυτή ώθησε τον R.L Graham στο [**4**] να κάνει την εξής εικασία:

Εικασια 1.3. *(**Graham**) Ενα πεπερασμένο ευκλείδιο σύνολο $X$ είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι σφαιρικό.*

Ταυτόχρονα με την αναζήτηση κάποιου χαρακτηρισμού των Ramsey συνόλων, απο την γέννηση της θεωρίας , πραγματοποιούνταν η αναζήτηση συνόλων η οικογενιών συνόλων τα οποία είναι Ramsey. Ίσως το ποιο σημαντικό αποτέλεσμα σε αυτή την κατεύθυνση αποτελεί το θεώρημα του Kriz [**8**]. Το θεώρημα αυτό επικεντρώνεται στις αλγεβρικές ιδιότητες της ομάδας συμμετριών των ευκλείδιων συνόλων. Για να το διατυπώσουμε θα χρειαστούμε την εξής ορολογία.

Αρχικά εστω $X$ μη κενό σύνολο και $G$ μια ομάδα. Με τον όρο ***δράση της ομάδας $G$ στο σύνολο $X$*** θα εννοούμε μια συνάρτηση απο το $G \times X$ στο $X$ που θα συμβολίζουμε με $(g, x) \to gx$, τέτοια ώστε (α) $ex = x$ για κάθε $x \in X$ ($e$ το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας) και (β) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $g_1, g_2 \in G$.

Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $Gx = \{gx : g \in G\}$ ονομάζεται ***τροχιά** του $x$*. Λέμε οτι η $G$ δρά ***transitively*** (ή οτι η δράση είναι *transitive*) αν έχει μόνο μια τροχιά, δηλαδή αν $Gx = X$ για κάποιο $x \in X$(ή ισοδύναμα για όλα τα $x \in X$). Αν $X$ είναι ένα ευκλείδιο σύνολο, με $S_X$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ισομετριών από το $X$ στο $X$, δηλαδή

$$S_X = \{f : X \to X : \ (\forall x, y \in X) \ \ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|\}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το $S_X$ εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων είναι ομάδα. Η ομάδα αυτή ονομάζεται ***ομάδα συμμετριών*** *του* $X$.

Η δράση της $S_X$ στο $X$ δίνεται απο την σχέση $fx = f(x)$ και όταν η δράση είναι transitive το σύνολο $X$ λέγεται transitive. Τέλος θα μας χρειαστεί και η έννοια της επιλύσιμης ομάδας.

Έστω $G$ ομάδα και $H < G$ μια υποομάδα της $G$. Η $H$ λέγεται **κανονική υποομάδα** της $G$ αν $Hg = gH$ για κάθε $g \in G$, οπου $gH = \{gh : h \in H\}$ και $Hg = \{hg : h \in H\}$ και θα γράφουμε $H \lhd G$. Μια ομάδα $G$ λέγεται ***επιλύσιμη*** αν υπάρχει μια ακολουθία της μορφής $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ (μια τέτοια ακολουθία ονομάζεται υποκανονική) τέτοια ώστε για κάθε $i \in [n]$, η ομάδα πηλίκο $G_i/G_{i-1}$ είναι αβελιανή (άρα κάθε αβελιανή ομάδα είναι επιλύσιμη). Αν η $G$ είναι πεπερασμένη αποδεικνύεται ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα πηλίκα $G_i/G_{i-1}$ είναι κυκλικές ομάδες. Οι Feit και Thomson [**2**] απέδειξαν ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα περιττής τάξης είναι επιλύσιμη. Επίσης αποδεικνύεται οτι οι ομάδες μεταθέσεων $S_n$ είναι επιλίσυμες μόνο για $n \leq 4$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4. ***(Kriz)*** *Εστω $X$ ένα πεπερασμένο transitive ευκλείδιο σύνολο. Αν η $S_X$ περιέχει μια επιλύσιμη υποομάδα η οποία έχει το πολύ δύο τροχιές στο $X$ τότε το $X$ είναι Ramsey.*

Με αυτό το θεώρημα στην οικογένεια των Ramsey συνόλων μπήκαν όλα τα κανονικά πολύγωνα και τα πλατωνικά στερεά (εννοούμε το σύνολο των κορυφών τους).

Όπως παρατηρήθηκε στο [**9**] σε όλες τις αποδείξεις που έχουν γίνει μέχρι τώρα για να δειχθεί οτι κάποιο σύνολο είναι Ramsey, το ζητούμενο σύνολο εμφυτευόταν σε κάποιο transitive υπερσύνολο (πιθανώς σε μεγαλύτερη διάσταση). Ειδικότερα, αποδείχθηκε πρόσφατα από τον **Καραμανλή** [**7**], οτι μέχρι στιγμής όλα τα Ramsey σύνολα (ακόμα και τα simplices) εμφυτεύονται σε ένα transitive σύνολο που ικανοποιεί τη συνθήκη με την επιλύσιμη υποομάδα του Θεωρήματος 1.4. Όταν ένα ευκλείδιο σύνολο $X$ εμφυτεύεται σε κάποιο σύνολο $Y$ το οποίο είναι transitive, το σύνολο $X$ λέγεται **subtransitive**. Με άλλα λόγια όλα τα μέχρι στιγμής γνωστά Ramsey σύνολα είναι subtransitive. Το γεγονός αυτό ώθησε τους Leader, Russell και Walters [**9**] να κάνουν την εξής υπόθεση:

ΕΙΚΑΣΙΑ 1.5. *Ενα πεπερασμένο ευκλείδιο σύνολο $X$ είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι subtransitive.*

Και οι δύο κατευθύνσεις της εικασίας είναι ανοικτές. Επίσης η παραπάνω εικασία δεν έρχεται σε αντίφαση με την εικασία του Graham γιατί, όπως αποδεικνύεται, κάθε transitive σύνολο είναι σφαιρικό. Όμως, όπως δείξανε οι Leader, Russell και Walters ([**1**]) υπάρχουν σφαιρικά σύνολα τα οποία δεν εμφυτεύονται σε κάποιο transitive σύνολο. Άρα, οι δύο εικασίες διαφέρουν και οι εικασία 1.5 είναι μια εκλέπτυνση της εικασίας 1.3.

## 2. Σύνδεση με αλφάβητα και λέξεις

Η κατεύθυνση της Εικασίας 1.5 που λέει οτι αν ένα σύνολο είναι subtransitive, τότε είναι Ramsey ανάγεται σε έναν καθαρά συνδιαστικού χαρακτήρα ισχυρισμό που είναι παρόμοιας φύσης με το Θεώρημα Hales–Jewett [**5**]. Το θεώρημα αυτό είναι θεμελιώδους σημασίας στην θεωρία Ramsey και θα το δούμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2. Εδώ απλά θα κάνουμε μια συνοπτική παρουσίαση του θεωρήματοω αυτού.

Ενα ***αλφάβητο*** $A$ είναι ενα μη κενό σύνολο, τα στοιχεία του οποίου θα λέμε γράμματα. Καθε πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του $A$ ονομάζεται ***λέξη*** του αλφαβήτου $A$, οταν είναι ξεκάθαρο ποιό είναι το αλφάβητο τότε θα λέμε απλά λέξη. Αν $w$ μια λέξη τοτε με $|w|$ συμβολίζουμε το μήκος της. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $A^n$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των λέξεων μήκους $n$. Συγκεκριμένα, το $A^0$ περιέχει μόνο την κενή λέξη ενώ αν $n \geq 1$ έχουμε $A^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in A$ για κάθε $i \in [n]\}$. Θέτουμε $A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ το σύνολο όλων των λέξεων του αλφάβητου $A$.

Εστω $A$ ενα αλφάβητο και $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε το σύνολο $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$, τα στοιχεία του οποίου βλέπουμε σαν γράμματα-μεταβλητές, με $A \cap \{x_0, ..., x_{n-1}\} = \emptyset$. Μια ***$n$-μεταβλητή λέξη*** στο αλφάβητο A ονομάζεται μια λέξη $w$ του αλφάβητου $A \cup \{x_0, ..., x_{n-1}\}$, τέτοια ώστε για κάθε $i \in \{0, ..., n-1\}$ το στοιχείο $x_i$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά και επιπλέον αν $n \geq 2$, για κάθε $i, j \in \{0, ..., n-1\}$ με $i < j$ όλες οι εμφανίσεις της μεταβλητής $x_i$ προκύπτουν πριν εμφανιστεί η μεταβλητή $x_j$. Μια 1-μετβλητή λέξη θα αποκαλείται απλώς μεταβλητή λέξη.

Εστω τώρα $A, B$ δύο αλφάβητα, $w$ μια μεταβλητή λέξη στο $A$ και $b \in B$. Αν $x$ το μεταβλητό γράμμα στην λέξη $w$ τότε με $w(b)$ συμβολίζουμε την λέξη του $A \cup B$ που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στο $w$ κάθε εμφάνιση του $x$ με $b$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6. ***(Hales-Jewett)*** *Για κάθε ζεύγος $k, r$ θετικών ακεραίων με $k \geq 2$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ με την παρακάτω ιδιότητα. Αν $n \geq N$, τότε για κάθε αλφάβητο $A$ με $|A| = k$ και κάθε $r$-χρωματιμό του $A^n$ υπάρχει μεταβλητή λέξη $w$ του $A$ μήκους $n$, τέτοια ώστε το σύνολο $\{w(a) : a \in A\}$ να είναι μονοχρωματικό. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος με την παραπάνω ιδιότητα συμβολίζεται με $HJ(k, r)$.*

Ορίζουμε τώρα αντίστοιχες έννοιες με αυτές που μας χρειάστηκαν στο θεώρημα Hales-Jewett αλλα προσαρμοσμένες σε ομάδες και δράσεις ομάδων.

Εστω $G$ πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρά σε ενα πεπερασμένο και μη κενό σύνολο $X$. Βλέπουμε το σύνολο $X$ σαν αλφάβητο και τις πεπερασμένες ακολουθίες στοιχείων του $X$ τις λέμε λέξεις. Εστω επιπλέον το σύνολο $\{v_g, g \in G\}$, ξένο απο το $X$ και το οποίο βλέπουμε σαν σύνολο μεταβλητών. Για κάθε μη κενό υποσύνολο $H$ του $G$, ονομάζουμε $H$-**μεταβλητή λέξη** επι του $X$, μήκους $N$, μια πεπερασμένη ακολουθία $\boldsymbol{W} = (w_i)_{i=1}^{N}$ με $w_i \in X \cup \{v_h : h \in H\}$ για κάθε $i \in [N]$ και τέτοια ώστε τα σύνολα $F_h = \{i \in [N] : w_i = v_h\}$ να είναι μη κενά για κάθε $h \in H$. Δηλαδή σε μια $H$-μεταβλητή λέξη, για κάθε $h \in H$ η μεταβλητή $v_h$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά. Ο αριθμός $d = \sum_{h \in H} |F_h|$ θα αποκαλείται βαθμός της λέξης $W$.

Μια $H$-μεταβλητή λέξη θα λέγεται ***uniform*** αν για κάθε $h_1, h_2 \in H$, ισχύει $|F_{h_1}| = |F_{h_2}|$, δηλαδή οταν οι μεταβλητές $\{v_h : h \in H\}$ εμφανίζονται τον ίδιο αριθμό φορών. Το σύνολο των *uniform* $H$-μεταβλητών λέξεων βαθμού $d$ επι του συνόλου $X$ θα συμβολίζεται με $V_{un}^d(H, X)$.

Εστω τώρα $W = (w_i)_{i=1}^n$ μια $H$-μεταβλητή λέξη επι του $X$, μήκους $n$ και $x \in X$. Με $W(x)$ θα συμβολίζουμε την λέξη $W(x) = (w_i(x))_{i=1}^n$ μήκους $n$ επι του $X$ με

$$w_i(x) = \begin{cases} w_i & \text{αν } w_i \in X \\ hx & \text{αν } w_i = v_h \text{ για κάποιο } h \in H. \end{cases}$$

Μια $H$-μεταβλητή λέξη $W = (w_i)_{i\in[n]}$ στο σύνολο $X$, μήκους $n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ θα την συμβολίζουμε ως εξής:

$$W = \prod_{i\in F} w_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} v_h$$

όπου $F = \{i \in [n] : w_i \in X\}$ και $F_h$ όπως έχουμε αναφέρει. Επομένως για $x \in X$ θα γράφουμε

$$W = \prod_{i\in F} w_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} hx$$

Οι εικασία 1.5, όπως δείξανε οι Leader, Walters και Russel ([**9**]) ανάγεται στην εξής εικασία.

Εικασια 1.7. *Έστω $G$ πεπερασμένη ομάδα και $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $d, n$ τέτοιοι ώστε για κάθε $r$ χρωματισμό του $G^n$ υπάρχει μη κενό $H \subset G$ και $W$ μια $H$-μεταβλητή λέξη επι του $G$ μήκους $n$, βαθμού $d$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Άμεσα παρατηρείται η ομοιότητα της εικασίας 1.7 με το θεώρημα Hales-Jewett. Πιο σύγκεκριμένα, αν ο αριθμός $d$ δεν ήταν ανεξάρτητος απο τον χρωματισμό, η εικασία θα προέκυπτε απο το θεώρημα Hales-Jewett. Η παρακάτω πρόταση δείχνει πως σχετίζεται η Εικασία 1.7 με την Εικασία 1.5.

Προταση 1.8. *Αν ισχύει η Εικασία 1.7 τότε κάθε subtransitive σύνολο είναι Ramsey.*

Ας δούμε γιατι ισχύει η πρόταση 1.8. Η έννοια των μεταβλητών λέξεων που ορίσαμε παραπάνω έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Έστω $X$ ένα πεπερασμένο ευκλείδιο υποσύνολο του $R^n$ και $G$ η ομάδα συμμετριών του $X$ (όπως ορίσαμε στην εισαγωγή). Αν $\emptyset \neq H \subset G$ και $W$ μια $H$-μεταβλητή λέξη βαθμού $d$ και μήκους $N$ τότε για την απεικόνιση $f : X \to X^N$ με $f(x) = W(x)$, ισχύει οτι $||f(x) - f(x')||^2 = d||x - x'||^2$ για κάθε $x, x' \in X$. Επομένως η λέξη $W$ αντιστοιχεί σε μια διαστολή του $X$ κατα $\sqrt{d}$ στον $\mathbb{R}^{nN}$.

Αποδειξη. (1.8) Εστω οτι ισχύει η εικασία 1.7. Εστω $X$ ενα πεπερασμένο Ευκλείδιο σύνολο το οποίο είναι transitive και $r$ ενας θετικός ακέραιος. Αν $G = S_X$ απο την εικασία 1.7 θα υπάρχουν οι θετικοί ακέραιοι $d, n$ τέτοι ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^n$ να υπάρχει $H \subset G$, $W$ μια $H$-μεταβλητή λέξη επι του $G$ μήκους $n$ και βαθμού $d$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό. Εστω $c : \frac{1}{\sqrt{d}}X^n \to [r]$ ένας $r$-χρωματισμός του $\frac{1}{\sqrt{d}}X^n$ και $x \in X$. Θέτουμε $c' : X^n \to [r]$ τον επαγώμενο χρωματισμό με $c'((x_1, ..., x_n)) = c(\frac{1}{\sqrt{d}}(x_1, ..., x_n))$. Παίρνουμε επιπλέον τον επαγώμενο χρωματισμό , $c_G : G^n \to [r]$ με

$$c_G(g_1, ..., g_n) = c'(g_1x, ..., g_nx) \tag{1}$$

Για τον χρωματισμό $c_G$ θα υπάρχει $H \subset G$, $W$ $H$-μεταβλητή λέξη μήκους $n$ και βαθμου $d$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό. Γράφουμε

$$W = \prod_{i \in F} g_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} v_h$$

απο τι σχέση (1) έχουμε οτι το σύνολο $\{\prod_{i \in F} g_i x \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} h(gx) : g \in G\}$ θα είναι μονοχρωματικό για τον χρωματισμό $c'$. Παρατηρούμε οτι επειδή το $X$ είναι transitive θα ισχύει $X = \{gx : g \in G\}$ και συνεπώς το προηγούμενο σύνολο μπορεί να γραφτει ως $\{\prod_{i \in F} g_i x \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hx : x \in X\}$. Δηλαδή, απο τον ορισμό του χρωματισμού $c'$ το σύνολο $\{\frac{1}{\sqrt{d}} \left(\prod_{i \in F} g_i x \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hx\right) : x \in X\}$ είναι μονοχρωματικό για τον χρωματισμό $c$. Εστω $x, y \in X$. Τότε έχουμε οτι

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{d}} \left( \prod_{i \in F} g_i x \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hx \right) - \frac{1}{\sqrt{d}} \left( \prod_{i \in F} g_i x \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hy \right) \right\|^2 =$$

$$\frac{1}{d} \left\| \prod_{i \in F} g_i x \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hx - \prod_{i \in F} g_i x \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hy \right\|^2 =$$

$$\frac{1}{d} \left\| \prod_{i \in F} 0 \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} (hx - hy) \right\|^2 = \frac{1}{d} \left( d||hx - hy||^2 \right) = ||x - y||^2$$

Επομένως βρήκαμε ένα μονοχρωματικό αντίγραφο του $X$ εντός του $\frac{1}{\sqrt{d}} X^n$. Άρα το $X$ είναι Ramsey. □

## 3. Η Εικασία 1.7 για επιλύσιμες ομάδες

Όπως αποδείχθηκε στο [**6**] η εικασία 1.7 όταν η ομάδα $G$ είναι επιλύσιμη είναι αληθής και μάλιστα με μια πιο ισχυρή μορφή. Συγκεκριμένα για μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα $G$ για την οποία υπάρχει η υποκανονική ακολουθία ομάδων $(G_i)_{i \in [k]}$ τέτοια ώστε $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_k = G$ και $p_i = |G_i / G_{i-1}|$ για $i \in [k]$, οπου $G_i / G_{i-1}$ η κυκλική ομάδα πηλίκο, ορίζουμε τον αριθμό

$$d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{(p_i - 1) \prod_{j > i} p_j} = p_1^{(p_1 - 1) \prod_{j=2}^{k} p_j} p_2^{(p_2 - 1) \prod_{j=3}^{k} p_j} ... p_k^{p_k - 1}$$

τον οποίο θα αποκαλούμε *HJ-βαθμό* της $G$. Το βασικό αποτέλεσμα λοιπόν στο κεφάλαιο 4 θα είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεωρημα 1.9. *Έστω $G$ πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα, $d$ ένας HJ-βαθμός της $G$ και $r$ θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ υπάρχει μια uniform $G$-μεταβλητή λέξη $W$ επί του $G$ μήκους $N$ και βαθμού $d$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Παρατηρούμε οτι ο βαθμός της λέξης $W$ είναι ανεξάρτητος απο τον αριθμό χρωμάτων $r$.

Μαζί με το θεώρημα 1.9 θα δείξουμε επίσης και το επόμενο θεώρημα.

Θεωρημα 1.10. *Έστω πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα $G$ η οποία δρά σε ένα ευκλείδιο σύνολο $X$, $d$ ένας HJ-βαθμός της $G$ και $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $N$ θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $X^N$ υπάρχει μια uniform $G$-μεταβλητή λέξη $W$ στο $X$, μήκους $N$ και βαθμού $d^p$ οπου $p$ ο αριθμός των τροχιών της $G$ στο $X$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{W(gx) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Ειναι φανερό οτι το θεώρημα 1.10 περιέχει σαν ειδική περίπτωση το θεώρημα 1.9. Όμως, όπως θα δούμε είναι ισοδύναμα.

## 4. Πορεία απόδειξης του θεωρήματος 1.9

Αρχικά στο κεφάλαιο 3 θα δείξουμε οτι η εικασία 1.7 ισχύει αν η ομάδα $G$ είναι κυκλική.

Θεωρημα 1.11. *Έστω $G$ μια κυκλική ομάδα τάξης $p \in \mathbb{N}$, $d = p^{p-1}$ ο μοναδικός HJ-βαθμός της $G$ και $r \in \mathbb{N}$. Τότε θα υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ θα υπάρχει λέξη $W \in V_{un}^d(G,G)$, μήκους $N$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Για την συνέχεια θα χρειαστουμε τους εξής ορισμούς.

Ορισμος 1.12. *(**d-uniform Hales-Jewett ιδιότητα**) Εστω $G$ μια πεπερασμένη ομάδα και $d \in \mathbb{N}$. Θα λέμε οτι η $G$ έχει την $d$-uniform Hales-Jewett ιδιότητα, για συντομία γράφουμε $d$-UHJP, αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(G,d,r)$ τέτοιος ώστεγια κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ υπάρχει μεταβλητή λέξη $W \in V_{un}^d(G,G)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Αυτός ο ορισμός ουσιαστικά απομονώνει την ιδιότητα των επιλύσιμων ομάδων απο το θεώρημα 1.9.

Ορισμος 1.13. *(Επέκταση ομάδας) Εστω $H, K$ δύο ομάδες. Τότε **επέκταση της** $K$ **μέσω της** $H$ ονομάζεται μια ομάδα $G$ μαζί με έναν επιμορφισμό( επί ομομορφισμός) $\pi : G \to K$ και εναν μονομορφισμό(1-1 ομομορφισμό) $\iota : H \to G$ τέτοιους ώστε ο πυρήνας του $\pi$ ισούται με την εικόνα του $\iota$, δηλαδή $Ker(\pi) = Im(\iota)$*

Θα δείξουμε οτι οι επεκτάσεις ομάδων διατηρούν την $d-$UHJP. Με το θεώρημα 1.11 και με την εφαρμογή αυτού του γεγονότος στην υποκανονική ακολουθία της επιλύσιμης ομάδας $G$ θα αποδείξουμε το θεώρημα 1.9. Στο ίδιο κεφάλαιο θα δείξουμε πως με το θεώρημα 1.9 και με την βοήθεια του θεωρήματος Ramsey προκύπτει το θεώρημα του Kriz.

Κεφάλαιο 2

# Το θεώρημα *Hales-Jewett*

Αρχικά καθιερώνουμε την ορολογία και ορίζουμε κάποιες βασικές έννοιες που θα χρειαστούμε.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών. Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε θέτουμε $[n] = \{1, ..., n\}$. Εστω $X, Y$ δύο μη κενά σύνολα. Τότε μια συνάρτηση $c : X \to Y$ ονομάζεται $Y$-***χρωματισμός*** του συνόλου $X$ και κάθε στοιχείο $x \in X$ έχει το χρώμα $c(x)$. Αν το σύνολο $Y$ είναι πεπερασμενο τότε ο χρωματισμός $c$ ονομάζεται πεπερασμένος και αν $|Y| = r$, οπου $r$ θετικός ακέραιος, ο $c$ λέγεται $r$-χρωματισμός.

## 1. Αλφάβητα και σταθερές λέξεις

Ενα ***αλφάβητο*** $A$ είναι ενα μη κενό σύνολο, τα στοιχεία του οποίου θα λέμε γράμματα. Καθε πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του $A$ ονομάζεται ***λέξη*** του αλφαβήτου $A$, οταν είναι ξεκάθαρο ποιό είναι το αλφάβητο τότε θα λέμε απλά λέξη. Αν $w$ μια λέξη τοτε με $|w|$ συμβολίζουμε το μήκος της. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $A^n$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των λέξεων μήκους $n$. Συγκεκριμένα, το $A^0$ περιέχει μόνο την κενή λέξη ενώ αν $n \geq 1$ έχουμε $A^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in A$ για κάθε $i \in [n]\}$. Θέτουμε $A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ το σύνολο όλων των λέξεων του αλφάβητου $A$.

Αν $w_1, w_2 \in A^{<\mathbb{N}}$ δύο λέξεις, τότε με $w_1^\frown w_2$ συμβολίζουμε την λέξη μήκους $|w_1| + |w_2|$ που προκύπτει απο την ένωση τους. Δηλαδή αν $w_1 = (w_1^1, ..., w_1^n)$ και $w_2 = (w_2^1, ..., w_2^m)$ τότε $w_1^\frown w_2 = (w_1^1, ..., w_1^n, w_2^1, ..., w_2^m)$.

## 2. Μεταβλητές λέξεις και Συνδιαστικοί χώροι

Εστω $A$ ενα αλφάβητο και $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε το σύνολο $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$, τα στοιχεία του οποίου βλέπουμε σαν γράμματα-μεταβλητές, με $A \cap \{x_0, ..., x_{n-1}\} = \emptyset$. Μια $n$-***μεταβλητή λέξη*** στο αλφάβητο Α ονομάζεται μια λέξη $w$ του αλφάβητου $A \cup \{x_0, ..., x_{n-1}\}$, τέτοια ώστε για κάθε $i \in \{0, ..., n-1\}$ το στοιχείο $x_i$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά και επιπλέον αν $n \geq 2$, για κάθε $i, j \in \{0, ..., n-1\}$ με $i < j$ όλες οι εμφανίσεις της μεταβλητής $x_i$ προκύπτουν πριν εμφανιστεί η μεταβλητή $x_j$. Μια 1-μετβλητή λέξη θα αποκαλείται απλώς μεταβλητή λέξη.

Εστω τώρα $A, B$ δύο αλφάβητα, $w$ μια μεταβλητή λέξη στο $A$ και $b \in B$. Αν $x$ το μεταβλητό γράμμα στην λέξη $w$ τότε με $w(b)$ συμβολίζουμε την λέξη του $A \cup B$ που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στο $w$ κάθε εμφάνιση του $x$ με $b$. Πιο γενικά έστω $v$ μια $n$-μεταβλητή λέξη του $A$ και $(b_0, , ..., b_{n-1}) \in B^n$. Με $v(b_0, ..., b_{n-1})$ συμβολίζουμε την λέξη του αλφάβητου $A \cup B$ που προκύπτει αντικαθιστώντας στην $v$ κάθε εμφάνιση του $x_i$ με $b_i$ για κάθε $i \in \{0, ..., n-1\}$.

Εστω $A$ ενα αλφάβητο με $|A| \geq 2$. ***Συνδιαστικός χώρος*** του $A^{<\mathbb{N}}$ είναι ενα σύνολο της μορφής

$$W = \{v(a_0, ..., a_{n-1}) : a_0, ..., a_{n-1} \in A\} \tag{2.2}$$

οπου $v$ μια $n$-μεταβλητή λέξη του $A$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Η λέξη $v$ λέμε οτι παράγει τον $W$. Ο αριθμός $n$ ονομάζεται διάσταση του $W$ και συμβολίζεται με $dim(W)$. .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. *Εστω $W$ συνδιαστικός χώρος του $A^{<\mathbb{N}}$, $n = dim(W)$ και $v$ η $n$-μεταβλητή λέξη που τον παράγει. Ο **κανονικός ισομορφισμός** του χωρου $W$ είναι η απεικόνιση $I_W : A^n \to W$ με*

$$I_W(a_0, ..., a_{n-1}) = v(a_0, ..., a_{n-1}) \tag{2.3}$$

*για κάθε $(a_0, ..., a_{n-1}) \in A^n$.*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το θεώρημα *Hales-Jewett*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. ***(Hales-Jewett)*** *Για κάθε ζεύγος $k, r$ θετικών ακεραίων με $k \geq 2$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ με την παρακάτω ιδιότητα. Αν $n \geq N$, τότε για κάθε αλφάβητο $A$ με $|A| = k$ και κάθε $r$-χρωματιμό του $A^n$ υπάρχει μεταβλητή λέξη $w$ του $A$ μήκους $n$, τέτοια ώστε το σύνολο $\{w(a) : a \in A\}$ να είναι μονοχρωματικό. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος με την παραπάνω ιδιότητα συμβολίζεται με $HJ(k, r)$.*

## 3. Η απόδειξη του Shelah

Εδώ θα παρουσιάσουμε την απόδειξη που έδωσε ο Shelah το 1987. Αν και δεν θα εμβαθύνουμε στην μελέτη των αριθμών $HJ(k, r)$, αξιζει να σημειωθεί οτι με την απόδειξη του Shelah βελτιώθηκαν σημαντικά τα ανω φράγματά τους.

Ξεκινάμε με κάποιος βασικόυς ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. *Εστω το πεπερασμένο αλφάβητο $A$ με $A \geq 2$ και $a, b \in A$ με $a \neq b$. Δυο λέξεις $x, y \in A^{<\mathbb{N}}$ θα λέμε οτι είναι $(a, b)$-**ισοδύναμες** αν ισχυουν τα παρακάτω:*

$$|x| = |y|$$

*και αν $x = (x_0, ..., x_{n-1})$ και $y = (y_0, ..., y_{n-1})$ με $n \geq 1$ τοτε*

$$x_i \neq y_i \Rightarrow x_i, y_i \in \{a, b\}$$

Δηλαδή δύο λέξεις ενος αλφάβητου είναι ισοδύναμες αν έξουν το ίδιο μήκος και σε κάθε συντεταγμένη ή έχουν το ίδιο γράμμα ,η διαφέρουν με την μια να έχει το γράμμα $a$ και την άλλη το γράμμα $b$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4. *Ενα σύνολο $S \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ θα λέμε οτι είναι $(a, b)$-**insensitive** αν για κάθε λέξη $x \in S$ και κάθε λέξη $y \in A^{<\mathbb{N}}$ ισχύει:*

$$x, y \text{ είναι } (a, b)\text{-ισοδύναμες } \Rightarrow y \in S$$

Δηλαδή ενα $(a, b)$-insensitive σύνολο για κάθε λέξη που περιέχει, περιέχει και όλες τις $(a, b)$-ισοδύναμές της. Περιορίζοντας τώρα την έννοια του $(a, b)$-insensitive συνόλου σε εναν συνδιαστικό χώρο παίρνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμος 2.5. *Εστω ενα σύνολο $S \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ και $W$ ένας συνδιαστικός χώρος του $A^{<\mathbb{N}}$. Θα λέμε οτι το σύνολο $S$ είναι $(a,b)$-**insensitive στον W** αν το σύνολο $I_W^{-1}(S \cap W)$ είναι $(a,b)$-insensitive.*

Η έννοια του insensitive συνόλου επεκτείνεται φυσιολογικά στους χρωματισμούς.

Ορισμος 2.6. *Εστω ενα πεπερασμένο αλφάβητο $A$ με $|A| \geq 2$ και $a,b \in A$ με $a \neq b$. Εστω $r$ θετικός ακέραιος, $W$ ένας συνδιαστικός χώρος στο $A^{<\mathbb{N}}$ και $c : W \to [r]$, χρωματισμός του $W$. Λέμε οτι ο χρωματισμός $c$ είναι $(a,b)$-insensitive στον $W$ αν για κάθε χρώμα $p \in [r]$, το σύνολο $c^{-1}\{p\}$ είναι $(a,b)$-insensitive στο $W$.*

Παρατηρηση 2.1. Στον παραπάνω ορισμό αν ο χώρος $W$ είναι διάστασης $d$ τότε έχουμε οτι για κάθε $x \in A^d$ και κάθε $p \in [r]$, $c(I_W(x)) = p$ αν και μόνο αν $x \in I_W^{-1}(c^{-1}(p) \cap W)$. Με αυτή την παρατήρηση διατυπώνουμε τον παρακάτω ξαρακτηρισμό των $(a,b)$-insensitive χρωματισμών.

Ορισμος 2.7. *Εστω ενα πεπερασμένο αλφάβητο $A$ με $|A| \geq 2$ και $a,b \in A$ με $a \neq b$. Εστω $r$ θετικός ακέραιος, $W$ ένας συνδιαστικός χώρος στο $A^{<\mathbb{N}}$ με $dim(W) = d$ και $c : W \to [r]$, χρωματισμός του $W$. Τότε ο χρωματισμός $c$ είναι $(a,b)$-insensitive αν και μόνο αν $c(I_W(x)) = c(I_W(y))$ για κάθε $x, y \in A^d$ που είναι $(a,b)$-ισοδύναμα.*

Συμβολισμος 2.1. Εστω $A$ ενα αλφάβητο, $a \in A$ και $i \in \mathbb{N}$. Με $a^i$ συμβολίζουμε την λέξη που περιέχει μόνο το γράμμα $a$ και έχει μήκος $i$. Αν $i = 0$ παίρνουμε την κενή λέξη.

Με τις παραπάνω έννοιες μπορουμε να διατυπώσουμε το βασικό λήμμα που χρησιμοποίησε ο Shelah για να αποδύξει το θεώρημα Hales-Jewett.

Λημμα 2.8. *(Shelah) Εστω η τρειάδα $k, d, r$ θετικών ακεραίων. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(k,d,r)$ με την εξής ιδιότητα: Αν $n \geq N$ τότε για κάθε αλφάβητο $A$ με $|A| = k+1$, για κάθε $a, b \in A$ με $a \neq b$ και κάθε χρωματισμό $c : A^n \to [r]$, υπάρχει συνδιαστικός χώρος $W$ του $A^n$ διάστασης $d$ στον οποίο ο χρωματισμός $c$ είναι $(a,b)$-insensitive. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος με την παραπάνω ιδιότητα συμβολίζεται με $Sh(k,d,r)$.*

Αποδειξη. Αρχικά σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$, ένα αλφάβητο $A$ με $|A| = k+1$ και $a, b \in A$ με $a \neq b$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $d$.

Εστω $d = 1$. Θα δείξουμε οτι $Sh(k,1,r) = r$.

Πρωτα βλέπουμε οτι $Sh(k,1,r) \geq r$. Για $r = 1$ είναι προφανές οποτε υποθέτουμε οτι $r \geq 2$. Εστω ο χρωματισμός $c : A^{r-1} \to [r]$ με

$$c(a_0, ..., a_{r-2}) = |\{i \in \{0, ..., r-2\} : a_i = a\}|$$

Παρατηρούμε οτι, $c(w(a)) \neq (w(b))$ για κάθε μεταβλητή λέξη $w$ του $A$ με $|w| = r-1$. Επομένως $Sh(k,1,r) \geq r$. Στην συνέχεια δείχνουμε οτι $Sh(k,1,r) \leq r$.

Εστω $n \geq r$, $A$ ένα αλφάβητο με $|A| = k+1$ και $a, b \in A$ με $a \neq b$. Εστω $c : A^n \to [r]$ ένας $r$-χρωματισμός του $A^n$. Ορίζουμε το σύνολο

$$D(a,b,n) = \{a^i {}^\frown b^{n-i} : 0 \leq i \leq n\} \subseteq A^n$$

Παρατηρούμε οτι $|D(a,b,n)| = r+1$, επομένως απο την αρχή του περιστερώνα δύο στοιχεία του συνόλου $D(a,b,n)$, εστω $z = a^m {}^\frown b^{n-m}$ και $y = a^l {}^\frown b^{n-l}$ με $m > l$ θα έχουν το ίδιο χρώμα. Τότε για την μεταβλητή λέξη $w = a^l {}^\frown x^{m-l} {}^\frown b^{n-m}$ ισχύει $w(a) = z, w(b) = y$. Επομένως $c(w(a)) = c(w(b))$. Δηλαδή βρίκαμε έναν μονοδιάστατο συνδιαστικό χώρο (μεταβλητή λέξη) στον οπίο ο χρωματισμός $c$ είναι $(a,b)$-insensitive.

Εστω τώρα οτι οι αριθμοί $Sh(k,d,r)$ έχουν ορισθοί για κάποιο $d \in \mathbb{N}$ με $d \geq 2$ και για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε οτι και ο αριθμός $Sh(k,d+1,r)$ ορίζεται για κάθε $r \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $N_1 = Sh(k,d,r^{|A|}) = Sh(k,d,r^{k+1})$ και $N_2 = Sh(k,1,r^{|A|^{N_1}}) = Sh(k,1,r^{(k+1)^{N_1}})$

Ισχυρισμος 2.9. $Sh(k,d+1,r) \leq N_1 + N_2$

Πράγματι, θέτουμε $N = N_1 + N_2$ και έστω $c : A^N \to [r]$ ένας $r$-χρωματισμός του χώρου $A^N$. Για $y \in A^{N_1}$ ορίζουμε $c_y : A^{N_2} \to [r]$ με $c_y(x) = c(y^\frown x)$ για κάθε $x \in A^{N_2}$. Θέτουμε $c_* : A^{N_2} \to [r^{(k+1)^{N_1}}]$ τον $r^{(k+1)^{N_1}}$-χρωματισμό του $A^{N_2}$ με $c_*(x) = (c_y(x))_{y \in A^{N_1}}$. Επειδή $N_2 = Sh(k,1,r^{(k+1)^{N_1}})$ θα υπάρξει $W$ μονοδιάστατος χώρος, δηλαδή μεταβλητή λέξη, τέτοια ώστε $c_*(W(a)) = c_*(W(b))$ ή αλλιώς

$$c_y(W(a)) = c_y(W(b)) \tag{2.4}$$

για κάθε $y \in A^{N_1}$.

Αντίστοιχα ορίζουμε για κάθε $x \in A$, $c^x : A^{N_1} \to [r]$ με $c^x(y) = c(y^\frown W(x))$ για κάθε $y \in N_1$. Θέτουμε $c^* : A^{N_2} \to [r^{k+1}]$ τον $r^{k+1}$-χρωματισμό του $A^{N_1}$ με $c_*(y) = (c^x(y))_{x \in A}$. Επειδή $N_1 = Sh(k,d,r^{k+1})$, θα υπάρχει $d$-διάστατος συνδιαστικός χώρος $W_1$ τέτοιος ώστε $c^*(I_{W_1}(u_1)) = c^*(I_{W_1}(u_2))$ για κάθε $u,v \in A^d$ $(a,b)$-ισοδύναμα. Δηλαδή για κάθε $x \in A$ και $u,v \in A^d$ $(a,b)$-ισοδύναμα

$$c^x(I_{W_1}(u_1)) = c^x(I_{W_1}(u_2)) \tag{2.5}$$

Θέτουμε $W_2 = W_1^\frown W$. Ο χώρος $W_2$ είναι ο ζητούμενος. Πράγματι παρατηρούμε οτι $dim(W_2) = dim(W_1^\frown W) = dim(W_1) + dim(W) = d+1$. Επίσης έστω $u_1^\frown v_1, u_2^\frown v_2 \in A^{d+1}$ δυο $(a,b)$-ισοδύναμες λέξεις, οπου $u_1, u_2 \in A^d$ και $v_1, v_2 \in A$. Εχουμε

$$\begin{aligned}
&c(I_{W_2}(u_1^\frown v_1)) = c(I_{W_1^\frown W}(u_1^\frown v_1)) = c(I_{W_1}(u_1)^\frown W(v_1)) = \\
&c^{v_1}(I_{W_1}(u_1)) \overset{2.4}{=} c^{v_1}(I_{W_1}(u_2)) = c(I_{W_1}(u_2)^\frown W(v_1)) = \\
&c_{u_2}(W(v_1)) \overset{2.3}{=} c_{u_2}(W(v_2)) = c(I_{W_1}(u_2)^\frown W(v_2)) = \\
&c(I_{W_1^\frown W}(u_2^\frown v_2)) = c(I_{W_2}(u_2^\frown v_2))
\end{aligned}$$

Αρα ο χρωματιμσός $c$ έιναι $(a,b)$-insensitive στον συνδιαστικό χώρο $W_2$ και συνεπως αποδείξαμε τον ισχυρισμό 2.9 και το τελικά το λήμμα. □

Εχοντας το λήμμα 2.8 στα χέρια μας, μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα Hales–Jewett.

Αποδειξη του Θεωρηματος hales–jewett (Θεωρημα 2.2). Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στον αριθμό των γραμμάτων $k$.

Για $k = 2$ και $r \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε οτι ο αριθμος $Sh(1,1,r)$ ικανοποιεί το θεώρημα. Αρα $HJ(2,r) \leq Sh(1,1,r)$ και απο τον ορισμό του $Sh(1,1,r)$ θα έχουμε οτι $HJ(2,r) = Sh(1,1,r)$. Εστω οτι έχουμε ορίσει τους αριθμούς $HJ(k,r)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ και για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε οτι ορίζεται και ο αριθμός $HJ(k+1,r)$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $N = Sh(k+1, HJ(k,r), r)$. Θα δείξουμε οτι $HJ(k+1,r) \leq N$.

Πράγματι εστω ενα αλφάβητο $A$ με $|A| = k+1$, $a, b \in A$ με $a \neq b$ και $c : A^N \to [r]$ ένας $r$-χρωματισμός του $A^N$. Απο τον ορισμό του $N$, θα υπάρχει ένας συνδιαστικός χώρος $W$ με $dim(W) = HJ(k,r)$ στον οποίο ο χρωματισμός $c$ θα είναι $(a,b)$-insensitive. Δηλαδή

$$c(I_W(u)) = c(I_W(v)) \tag{2.6}$$

για κάθε $u, v \in A^{HJ(k,r)}$ $(a,b)$-ισοδύναμα. Εστω τώρα $c' : \{A \setminus \{b\}\}^{HJ(k,r)} \to [r]$ ενας $r$-χρωματισμός του $\{A \setminus \{b\}\}^{HJ(k,r)}$ με $c'(x) = c(I_W(x))$. Τοτε υπάρχει μεταβλητή λέξη $W'$ με $|W'| = HJ(k,r)$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\{c'(W'(z)) : z \in A \setminus \{b\}\}$ να είναι μονοχρωματικό. Δηλαδή το σύνολο $\{c(I_W(W'(z))) : z \in A \setminus \{b\}\}$ είναι μονοχρωματικό . Παρατηρούμε τώρα οτι οι λέξεις $W'(a)$ και $W'(b)$ είναι $(a,b)$-ισοδύναμες, άρα απο την σχέση 2.6 έχουμε $c(I_W(W'(a))) = c(I_W(W'(b)))$. Επομένως το σύνολο $\{I_W(W'(z)) : z \in A\}$ θα είναι μονοχρωματικό.

□

## 4. Εφαρμογές του θεωρήματος Hales-Jewett

Το θεώρημα Hales-Jewett αποτελεί ενα ισχυρό αποτέλεσμα εντος της θεωρίας Ramsey. Το γεγονός οτι αναφέρεται σε ενα αλφάβητο, το οποίο μπορεί να είναι οποιασδήποτε φύσεως σύνολο, του δίνει την γενικότητα που χρειάζεται προκειμένου να εφαρμοστεί σε πολλες και διαφορετικές περιπτώσεις. Παρακάτω θα δούμε κάποιες απο αυτές.

Πρόταση 2.10. *(Θεώρημα* ***Van der Waerden****) Εστω $k, r$ θετικοί ακέραιοι. Υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(k,r)$ τέτοιος ώστε για κάθε χρωματισμό του συνόλου $\{1, ..., N\}$ με $r$ χρώματα, υπάρχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος $k$ όρων. Ο ελάχιστος αριθμός $N$ με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται αριθμός Van der Waerden και συμβολίζεται με $W(k,r)$.*

Απόδειξη. Εστω $N = HJ(k,r)$ και $M = kN$. Θα δείξουμε οτι ο αριθμός $M$ ικανοποιεί την ζητούμενη ιδιότητα και άρα $W(k,r) \leq M$. Πράγματι έστω η απεικόνιση $f : [k]^N \to [M]$ με $f((x_1, ..., x_N)) = \sum_{i=1}^{N} x_i$ και $c : \{1, ..., M\} \to [r]$ ένας $r$-χρωματισμός του συνόλου $\{1, ..., M\}$. Εστω $c' : [k]^N \to [r]$ ο επαγώμενος χρωματισμός στο $[k]^N$ με $c'((x_1, ..., x_N)) = c(f((x_1, ..., x_N)))$. Αφού $N = HJ(k,r)$ υπάρχει μεταβλητή λέξη $W$ τέτοια ώστε $|W| = N$ και το σύνολο $\{W(1), ..., W(k)\}$ να είναι μονοχρωματικό. Αν $W = (w_i)_{i=1}^N$ και για κάθε $x \in [k]$ $W(x) = (w_i(x))_{i=1}^N$ οπου

$$w_i(x) = \begin{cases} w_i & \text{αν } w_i \in A \\ x & \text{αν } w_i \notin [k] \end{cases}$$

τότε το σύνολο $\{f((w_1(x), ..., w_N(x))) : x \in [k]\}$ είναι μονοχρωματικό. Παρατηρούμε τώρα οτι

$$f((w_1(x+1), ..., w_N(x+1)) - f((w_1(x), ..., w_N(x)) = |\{i \in [N] : w_i \notin [k]\}| = d$$

οπου $d$ ο βαθμός της $W$, για κάθε $x \in [k-1]$. Αρα τα στοιχεία του συνόλου $\{f((w_1(x), ..., w_N(x))) : x \in [k]\}$ αποτελούν αριθμιτική πρόοδο $k$ όρων με βήμα $d$. $\square$

Μια άμεση γενίκευση του θεωρήματος Hales-Jewett είναι το πολυδιάστατο Hales-Jewett.

Προταση 2.11. ***(Πολυδιάστατο Hales-Jewett)*** *Εστω $k, d, r$ θετικοί ακέραιοι. Υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(k, d, r)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει το εξής: Για κάθε αλφάβητο $A$ με $|A| = k$ και κάθε $r$-χρωματισμό του $A^n$, υπάρχει μονοχρωματικός $d$-διάστατος συνδιαστικός χώρος.*

Αποδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $A = [k]$. Εστω $N = HJ(k^d, r)$ και $c : [k]^{dN} \to [r]$ ένας $r$-χρωματισμός του $[k]^{dN}$. Εστω επίσης ο χώρος $\{[k]^d\}^N$ και η απεικόνιση $f : \{[k]^d\}^N \to [k]^{dN}$ με

$$f((x_1^1, ..., x_1^d), ..., (x_N^1, ..., x_N^d)) = (x_1^1, ..., x_N^1, x_1^2, ..., x_N^2, ..., x_1^d, ..., x_N^d)$$

Παρατηρούμε οτι μια μεταβλητή λέξη στον χώρο $\{[k]^d\}^N$ αντιστοιξεί μέσω της $f$ σε μια $d$-μεταβλητη λέξη στον χώρο $[k]^{dN}$. Για παράδειγμα αν $k = d = N = 2$ και $W = ((x, y), (1, 1))$ μια μεταβλητη λέξη στο $\{[2]^2\}^2$, μέσω της $f$ αυτη η λέξη αντιστοιξεί στον δισδιάστατο χώρο $W' = (x, 1, y, 1)$ του χώρου $2^4$ οπου $x, y \in [2]$. Εστω λοιπόν ο επαγώμενος χρωματισμός $c' : \{[k]^d\}^N \to [r]$ με $c'((x_1^1, ..., x_1^d), ..., (x_N^1, ..., x_N^d)) = c(f((x_1^1, ..., x_1^d), ..., (x_N^1, ..., x_N^d)))$. Αφού $N = HJ(k^d, r)$, υπάρχει $W$ μεταβλητή λέξη μήκους $N$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(x) : x \in [k]^d$ να είναι μονοχρωματικό στον $c'$. Δηλαδή το σύνολο $\{W((x_1, ..., x_d)) : x_i \in A$ για κάθε $i \in [d]\}$ είναι μονοχρωματικό. Τελικά βλέπουμε οτι το σύνολο $\{f(W(x_1, ..., x_d)) : x_i \in A$ για κάθε $i \in [d]\}$, το οποίο είναι $d$-διάστατος συνδιαστικός χώρος, είναι μονοχρωματικό. $\square$

Ορισμος 2.12. *Εστω $V = \{v_1, ..., v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ για $k, n \in \mathbb{N}$. Ενα σύνολο $W = \{u_1, .., u_k\}$ θα λέγεται* ***ομοθετικό*** *του $V$ αν, υπο την κατάλληλη αρίθμιση των στοιχείων του $W$, υπάρχουν $c \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$u_i = cv_i + b$$

*για κάθε $i \in [k]$. Με συμβολισμό συνόλων γράφουμε $W = cV + b$. Η γεωμετρική ερμηνεία του ομοθετικού συνόλου είναι όμοιο χωρίς περιστροφή.*

Θεωρημα 2.13. ***(Θεώρημα Gallai)*** *Εστω οτι χρωματίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $r$ χρώματα , $r \in \mathbb{N}$. Για κάθε πεπερασμένο $V \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει μονοχρωματικό σύνολο $W$ ομοθετικό του $V$.*

Αποδειξη. Εστω $V = \{v_1, ..., v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ και $c : \mathbb{R}^n \to [r]$ ο $r$-χρωματισμός του $\mathbb{R}^n$. Θα ακολουθήσουμε όμοια τακτική απόδειξης με το θεώρημα Van der Waerden. Εστω $N = HJ(k, r)$ και η απεικόνηση $f : V^N \to \mathbb{R}^n$ με $f(u_1, ..., u_N) = \sum_{i=1}^{N} u_i$. Ορίζουμε τον επαγώμενο $r$-χρωματισμό του $V^N$ $c' : V^N \to [r]$ με $c'(u_1, ..., u_N) =$

$c(f(u_1, ..., u_N))$. Θα υπάρχει μεταβλητή λέξη $W$ με $|W| = N$ με το σύνολο $\{W(x) : x \in V\}$ να είναι μονοχρωματικό στον $c'$. Δηλαδή το σύνολο $\{f(W(x)) : x \in V\}$ είναι μονοχρωματικό στον $c$. Παρατηρούμε οτι $f(W(x)) = cx + b$ οπου $c$ ο αριθμός εμφάνισης του μεταβλητού γράμματος στην λέξη $W$ και $b$ το αθροισμα των σταθερών γραμμάτων στην λέξη. Αρα το σύνολο $\{f(W(x)) : x \in V\} = cV + b$ είναι μονοχρωματικό και ομοθετικό του $V$. $\square$

Κεφάλαιο 3

# Αλγεβρική μορφή του θεωρήματος Hales–Jewett για κυκλικές ομάδες

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια αλγεβρική μορφή του θεωρήματος Hales-Jewett που ισχύει για τις κυκλικές ομάδες. Οπως θα δούμε αργότερα, αυτο έχει σημαντικές συνέπειες στην ευκλείδια θεωρία Ramsey. Υπάρχουν αρκετές ομοιότητες με το προηγούμενο κεφάλαιο στους ορισμούς και στην αποδεικτική διαδικασία αλλα υπάρχουν και ορισμένες ιδιαιτερότητες.

Αρχικά πλαισιώνουμε τις αντίστοιχες έννοιες του προηγούμενου κεφαλαίου σε αλγεβρικό περιβάλον.

## 1. Μεταβλητές λέξεις και ομάδες

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. ***(Δράση ομάδας)*** *Εστω μια ομάδα $G$ και ενα σύνολο $X$. Ονομάζουμε* **δράση** *της $G$ πάνω στο $X$ μια απεικόνιση $* : G \times X \to X$, θα γράφουμε $gx$ αντι για $*(g,x)$, τέτοια ώστε*

$$ex = x, \text{ για κάθε } x \in X$$

*και*

$$(g_1g_2)(x) = g_1(g_2x) \text{ για κάθε } x \in X \text{ και κάθε } g_1, g_2 \in G$$

*Υπο αυτές τις προυποθέσεις το $X$ θα λέγεται $G$-σύνολο*

Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $Gx = \{gx : g \in G\}$ ονομάζεται **τροχιά** του $G$ στο $X$. Λέμε οτι η $G$ δρά **μεταβατικά** στο $X$ (η οτι η δράση είναι **μεταβατική**), αν η $G$ έχει μόνο μια τροχιά στο $X$. Δηλαδή αν $Gx = X$ για κάποιο $x \in X$.

Εστω $G$ πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρά σε ενα πεπερασμένο και μη κενό σύνολο $X$. Βλέπουμε το σύνολο $X$ σαν αλφάβητο και τις πεπερασμένες ακολουθίες στοιχείων του $X$ τις λέμε λέξεις. Εστω επιπλέον το σύνολο $\{v_g, g \in G\}$, ξένο απο το $X$ και το οποίο βλέπουμε σαν σύνολο μεταβλητών. Για κάθε μη κενό υποσύνολο $H$ του $G$, ονομάζουμε $H$-**μεταβλητή λέξη** επι του $X$, μήκους $N$, μια πεπερασμένη ακολουθία $\boldsymbol{W} = (w_i)_{i=1}^N$ με $w_i \in X \cup \{v_h : h \in H\}$ για κάθε $i \in [N]$ και τέτοια ώστε τα σύνολα $F_h = \{i \in [N] : w_i = v_h\}$ να είναι μη κενά για κάθε $h \in H$. Δηλαδή σε μια $H$-μεταβλητή λέξη, για κάθε $h \in H$ η μεταβλητή $v_h$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά. Ο αριθμός $d = \sum_{h\in H} |F_h|$ θα αποκαλείται βαθμός της λέξης $W$.

Εστω τώρα $W = (w_i)_{i=1}^n$ μια $H$-μεταβλητή λέξη επι του $X$, μήκους $n$ και $x \in X$. Με $W(x)$ θα συμβολίζουμε την λέξη $W(x) = (w_i(x))_{i=1}^n$ μήκους $n$ επι του $X$ με

$$w_i(x) = \begin{cases} w_i & \text{αν } w_i \in X \\ hx & \text{αν } w_i = v_h \text{ για κάποιο } h \in H. \end{cases}$$

Μια $H$-μεταβλητή λέξη θα λέγεται ***uniform*** αν για κάθε $h_1, h_2 \in H$, ισχύει $|F_{h_1}| = |F_{h_2}|$, δηλαδή οταν οι μεταβλητές $\{v_h : h \in H\}$ εμφανίζονται τον ίδιο αριθμό φορών. Το σύνολο των *uniform* $H$-μεταβλητών λέξεων βαθμού $d$ επι του συνόλου $X$ θα συμβολίζεται με $V^d_{un}(H, X)$.

Παρατηρηση 3.1. Η έννοια των μεταβλητών λέξεων που ορίσαμε παραπάνω έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Έστω $X$ ένα πεπερασμένο ευκλείδιο υποσύνολο του $R^n$ και $G$ η ομάδα συμμετριών του $X$ (όπως ορίσαμε στην εισαγωγή). Αν $\emptyset \neq H \subset G$ και $W$ μια $H$-μεταβλητή λέξη βαθμού $d$ και μήκους $N$ τότε για την απεικόνιση $f : X \to X^N$ με $f(x) = W(x)$, ισχύει οτι $||f(x) - f(x')||^2 = d||x - x'||^2$ για κάθε $x, x' \in X$. Επομένως η λέξη $W$ αντιστοιχεί σε μια διαστολή του $X$ κατα $\sqrt{d}$ στον $\mathbb{R}^{nN}$.

Ορισμος 3.2. ***(d-uniform Hales-Jewett ιδιότητα)*** *Εστω $G$ μια πεπερασμένη ομάδα και $d \in \mathbb{N}$. Θα λέμε οτι η $G$ έχει την d-uniform Hales-Jewett ιδιότητα, για συντομία γράφουμε d-UHJP, αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(G, d, r)$ τέτοιος ώστεγια κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ υπάρχει μεταβλητή λέξη $W \in V^d_{un}(G, G)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Στόχος είναι να δείξουμε το εξής:

Θεωρημα 3.3. *Εστω $p$ θετικός ακέραιος και $G$ κυκλική ομάδα τάξης $p$. Τότε η $G$ έχει την $p^{p-1}$-UHJP ιδιότητα.*

Για την απόδειξη του 3.3 θα χρειαστούμε μια γενίκευση του ορισμού 3.2 και μια παραλαγή του λήμματος 2.8 (λήμμα Shelah).

Ορισμος 3.4. *Εστω μια πεπερασμένη ομάδα $G$ η οποία δρά σε πεπερασμένο σύνολο $X$. Εστω επίσης $H \subseteq G$, $E$ μια σχέση ισοδυναμίας στο $X$ και $d$ ένας θετικός ακέραιος. Θα λέμε οτι το $(H, X)$ έχει την $(E, d)$-UHJP, αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(H, X, E, d, r)$ τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $X^N$ υπάρχει μεταβλητή λέξη $W \in V^d_{un}(H, X)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$, το σύνολο $\{W(x') : x'Ex\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Παρατηρηση 3.2. Χωρίς μαθηματική αυστηρότητα παρατηρουμε τα εξής: Η σχέση ισοδυναμίας $E$ γενικεύει την ένοια της $(a, b)$-ισοδυναμίας μεταξή λέξεων και η έννοια της $(E, d)$-*UHJP* ιδιότητας αντιστοιχεί στην ικανοποίηση του λήμματος του Shelah. Πιο συγκεκριμένα αν το $(H, X)$ έχει την $(E, d)$-*UHJP* τότε για κάθε $r$ υπάρχει $N$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $X^N$ θα υπάρχει ενας υπόχωρος του $X^N$ που ορίζετε απο την $W$ στον οποίο ο χρωματισμός θα είναι $E$-*insensitive*.

Συμβολισμος 3.1. Αν $(W_i)_{i=1}^n \subseteq V^d_{un}(H, X)$ και $(x_i)_{i=1}^n$ τότε αν $\{j_1 < ... < j_k\} \subseteq [n]$, με $\prod_{i=1}^k W_{j_i}(x_{j_i})$ συμβολίζουμε την συνένοση $W_{j_1}(x_{j_1})^\frown ... ^\frown W_{j_k}(x_{j_k})$

Εχοντας τα παραπάνω, διατυπώνουμε την χρήσιμη παραλλαγή του λήμματος του Shelah.

Λημμα 3.5. *Εστω μια πεπερασμένη ομάδα $G$ η οποία δρά σε πεπερασμένο σύνολο $X$. Εστω επίσης $H \subseteq G$, $E$ μια σχέση ισοδυναμίας στο $X$ και $d$ ένας θετικός ακέραιος.*

*Αν το $(H,X)$ έχει την $(E,d)$-UHJP τοτε για κάθε $r,n \in \mathbb{N}$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(n,r)$, τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό $c : X^N \to [r]$ του $X^N$ υπάρχουν οι μεταβλητές λέξεις $(W_i)_{i=1}^n \subset V_{un}^d(H,X)$ τέτοιες ώστε $\sum_{i\in[n]}|W_i| = N$ και για κάθε $(x_i)_{i=1}^n \in X^n$ το σύνολο $\{\prod_{i=1}^n W_i(y_i) : y_i E x_i \forall i \in [n]\}$ είναι μονοχρωματικό.*

Αποδειξη. (3.5) Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο $n$.

Για $n = 1$ και για κάθε $r \in \mathbb{N}$ ,εφόσον το $(H,X)$ έχει την $(E,d)$ ιδιότητα, θα υπάρχει $N = N(H,X,E,d,r)$ όπως στον ορισμο 3.4 με την επιθυμητή ιδιότητα. Θέτουμε $f(r) = N(H,X,E,d,r)$ και επομένως $N(1,r) = f(r)$.

Εστω τωρα οτι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ και για κάθε $r \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει τους αριθμούς $N(n,r)$. Για κάθε $r \in \mathbb{N}$ θέτουμε $N_1 = N(n, r^{|X|})$, $N_2 = f(r^{|X|^{N_1}})$ και $N = N_1 + N_2$.

Ισχυρισμος 3.6. $N(n+1,r) = N$

Πράγματι, έστω $c : X^N \to [r]$ ένας $r$-χρωματισμός του $X^N$. Εστω $c_2 : X^{N_2} \to [r^{|X|^{N_1}}]$ ένας $r^{|X|^{N_1}}$-χρωματισμός του $X^{N_2}$ με $c_2(x) = (c(y^\frown x))_{y\in X^{N_1}}$ για κάθε $x \in X^{N_2}$. Απο τον ορισμό του $N_2$ θα υπάρχει $W \in V_{un}^d(H,X)$ με $|W| = N_2$, τέτοια ώστε $c_2(W(x)) = c_2(W(y))$ για κάθε $x,y \in X$ με $xEy$. Δηλαδή για κάθε $z \in X^{N_1}$ ισχύει
$$c(z^\frown W(x)) = c(z^\frown W(y)) \tag{3.1}$$
αν $xEy$. Τώρα θέτουμε τον $r^{|X|}$-χρωματιμσό $c_1 : X^{N_1} \to [r^{|X|}]$ του $X^{N_1}$ με $c_1(x) = (c(x^\frown W_2(y)))_{y\in X}$ για κάθε $x \in X^{N_1}$. Απο τον ορισμό του $N_1$ θα υπάρχουν $(W_i)_{i=1}^n \subset V_{un}^d(H,X)$ με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N_1$ τέτοιες ώστε αν $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ τότε $c_1(\prod_{i=1}^n W_i(x_i)) = c_1(\prod_{i=1}^n W_i(y_i))$ όπου $x_i E y_i$ για κάθε $i \in [n]$. Δηλαδή για κάθε $z \in X$ ισχύει
$$c(\prod_{i=1}^n W_i(x_i)^\frown W(z)) = c(\prod_{i=1}^n W_i(y_i)^\frown W(z)) \tag{3.2}$$
αν $x_i E y_i$ για κάθε $i \in [n]$. Θέτουμε $W_{n+1} = W$. Τότε $(W_i)_{i=1}^{n+1} \subset V_{un}^d(H,X)$ με $\sum_{i=1}^{n+1}|W_i| = N_1 + N_2 = N$. Εστω επίσης $(x_i)_{i=1}^{n+1}, (y_i)_{i=1}^{n+1} \in X^{n+1}$ τέτοια ώστε $x_i E y_i \forall i \in [n+1]$. Τοτε
$$c(\prod_{i=1}^{n+1} W_i(x_i)) = c(\prod_{i=1}^{n} W_i(x_i)^\frown W(x_{n+1})) \overset{3.2}{=} c(\prod_{i=1}^{n} W_i(y_i)^\frown W(x_{n+1})) \overset{3.1}{=}$$
$$c(\prod_{i=1}^{n} W_i(y_i)^\frown W(y_{n+1})) = c(\prod_{i=1}^{n+1} W_i(y_i))$$
. □

Παραθέτουμε εδω κάποιο συμβολισμό που θα φανεί χρήσιμος στην συνέχεια.

Συμβολισμος 3.2. Εστω $G$ πεπερασμένη ομάδα και $H$ ενα μη κενό υποσύνολο του $G$. Αν $(W_i)_{i=1}^n$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $H$-μεταβλητών λέξεων πανω στο $G$ και $[n] = \bigcup_{j=1}^m F_j$ μια διαμέριση του $[n]$ τότε με $\prod_{j=1}^m \prod_{i\in F_j} W_i$ συμβολίζουμε την συνένωση των λέξεων $W_1^\frown ... ^\frown W_n$

Εστω $W = (w_i)_{i=1}^n \in V_{un}^d(H,G)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$W = \prod_{i \in F} g_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} v_h \tag{3.3}$$

οπου $F = \{i \in [n] : w_i = g_i \in G\}$ και $F_h = \{i \in [n] : w_i = v_h\}$. Ετσι θα έχουμε επίσης

$$W(g) = \prod_{i \in F} g_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hg \tag{3.4}$$

Τέλος για κάθε $\tau \in G$, με $W^\tau$ θα συμβολίζουμε την $H\tau$-μεταβλητή λέξη πάνω στο $G$ που προκύπτει απο την αντικατάσταση κάθε μεταβλητής $v_h$ με $v_{h\tau}$ και αφήνωντας ίδιο το σταθερό μέρος. Δηλαδή

$$W^\tau = \prod_{i \in F} g_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} v_{h\tau} \tag{3.5}$$

και για κάθε $g \in G$ θα έχουμε $W^\tau(g) = \prod_{i \in F} g_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} (h\tau)g = \prod_{i \in F} g_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} h(\tau g)$ και συνεπώς $W^\tau(g) = W(\tau g)$.

Με τα παραπάνω εργαλεία είμαστε σχεδόν έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα 3.3. Ας κοιτάξουμε πρώτα μια απλή περίπτωση προκειμένου να καταλάβουμε καλήτερα την φιλοσοφία της απόδειξης.

Εστω οτι $p = 3$, δηλαδή η ομάδα αποτελείται απο τρεία στοιχεία $G = \{e, \tau, \tau^2\}$. Στόχος είναι, για κάθε $r \in \mathbb{N}$ να βρούμε κάποιο $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ να υπάρχει μια λέξη $W \in V_{un}^9(G,G)$ μήκους $N$, τέτοια ώστε οι λέξεις $W(e), W(\tau), W(\tau^2)$ να έχουν το ίδιο χρώμα. Αυτό θα το πετύχουμε επαγωγικά. Δηλαδή πρώτα θα δείξουμε οτι υπάρχει $N$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ υπάρχει μια λέξη $W \in V_{un}^3(G,G)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε οι λέξεις $W(e), W(\tau)$ να έχουν το ίδιο χρώμα. Εχοντας δείξει το παραπάνω θα εφαρμόσουμε το λήμμα 3.5 και θα χτισουμε την επιθημητή λέξη.

Αρχικά ας μελετήσουμε λίγο μια λέξη $W \in V_{un}^3(G,G)$ μήκους $N$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$. Αυτή μπορεί να γραφτεί στην μορφή $W = \prod_{i=1}^N w_i$ και πιο συγκεκριμένα, αν $w_i = v_e, w_j = v_\tau, w_k = v_{\tau^2}$ τότε $W = v_e^i \times v_\tau^j \times v_{\tau^2}^k \times \prod_{m \in F} g_m$. Τότε αν ορίσουμε την λέξη $W' = x_i \times y_j \times z_k \times \prod_{m \in F} g_m$ οπου $x, y, z$ μεταβλητές και $I_{W'}(x,y,z) : G^3 \to G^N$, παρατηρούμε οτι $W(e) = I_{W'}(e, \tau, \tau^2), W(\tau) = I_{W'}(\tau, \tau^2, e), W(\tau^2) = I_{W'}(\tau^2, e, \tau)$. Δηλαδή τα στοιχεία $e, \tau, \tau^2$ αντιστοιχούν στην εφαρμογή της κυκλικής μετάθεσεις $(e\ \tau\ \tau^2)$ στο διάνυσμα $(e, \tau, \tau^2)$ 0 φορές,1 φορά και 2 φορές αντίστοιχα. Οπότε σε αρχική φάση ψάχνουμε $N$ τέτειο ώστε να υπάρχει $W \in V_{un}^3(G,G)$ μήκους $N$, τέτοια ώστε οι λέχεις $I_{W'}(e, \tau, \tau^2), I_{W'}(\tau, \tau^2, e)$ να έχουν το ίδιο χρώμα.

## 2. Απόδειξη του θεωρήματος 3.3

Προκειμένου να διατηρούμε το χρώμα υπο τις κυκλικές μεταθέσης του διανύσματος $(e, \tau, \tau^2)$ θα χρησιμοποιήσουμε μια ασθενέστερη μορφή του θεωρήματος Ramsey.

Για τα παρακάτω, αν $X$ ενα σύνολο και $m \in \mathbb{N}$ τότε με $\binom{X}{m}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των υποσυνόλων του $X$ με $m$ στοιχεία. Επίσης για $X \subset \mathbb{N}$ μή κενό, θέτουμε $X^* = X \setminus \{maxX\}$ και $X_* = X \setminus \{minX\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.7. *Εστω $p, r$ θετικοί ακέραιοι με $p \geq 2$. Τότε υπάρχει $n = n(p,r)$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του συνόλου $\binom{[n]}{p-1}$, υπάρχει $A \subset [n]$ με $|A| = p$ και τέτοιο ώστε τα $A^*$ και $A_*$ να έχουν το ίδιο χρώμα.*

Το θεώρημα 3.7 είναι αμεση συνέπεια του θεωρήματος Ramsey αλλα εδώ θα παρουσιάσουμε μια αυτούσια επαγωγική απόδειξη βασισμένη στην αρχή του περιστερώνα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. 3.7

Εστω $p = 2$. Ψάχνουμε εναν αριθμό $n$, τέτοιο ώστε αν χρωματίσουμε το $[n]$ με $r$ χρώματα να υπάρχουν δύο στοιχεια με ίδιο χρώμα. Απο την αρχή του περιστερώνα βλέπουμε οτι το $n(2, r) = r + 1$ .

Θα δείξουμε και την περίπτωση $p = 3$ ωστε να γίνει πιο ξεκάθαρη η επαγωγή. Εστω $p = 3$ και $n$ ενας μεγάλος θετικός ακέραιος τον οποιο θέλουμε να καθορίσουμε. Εστω επίσης $c : \binom{[n]}{2} \to [r]$ ενας $r$-χρωματισμός του $\binom{[n]}{2}$. Με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε τον αριθμό $n(2, m)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, ορίζουμε εναν επαγώμενο χρωματισμό στο $[n]$ ως εξής: $c' : [n] \to [2^r]$ με $c'(i) = \{c(\{i, j\}) : j > i\}$ για κάθε $i \in [n]$. Αν τώρα $n = n(2, 2^r)$ θα υπάρχει $\{i, j\} \subset [n]$ με $i < j$,τέτοιο ώστε $c'(i) = c'(j)$. Δηλαδή $\{c(\{i, s\}) : s > i\} = \{c(\{j, s\}) : s > j\}$. Παρατηρούμε οτι $c(\{i, j\}) \in c'(i)$ αφού $i < j$ και άρα $c(\{i, j\}) \in c'(j)$ . Συνεπώς θα υπάρχει $k \in [n]$ με $k > j$ τέτοιο ώστε $c(\{j, k\}) = c(\{i, j\})$. Οπότε βρήκαμε το επιθυμητό τρισύνολο $\{i, j, k\}$ και $n(3, r) = n(2, 2^r)$.

Στην συνέχεια οταν γράφουμε το σύνολο $\{i_1, ..., i_k\}$ θα υποθέτουμε οτι είναι ταξινομημένο.

Εστω τώρα οτι ισχύει για κάποιο $p \geq 2$, δηλαδή υπάρχει ο αριθμός $n(p, r)$ για κάθε $r$. Εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς ιδέα. Αν $n = n(p, 2^r)$ και $c : \binom{[n]}{p} \to [r]$, θέτουμε τον επαγώμενο χρωματισμό $c' : \binom{[n]}{p-1} \to [2^r]$ με $c'(\{i_1, ..., i_{p-1}\}) = \{c(\{i_1, ..., i_{p-1}, j\}) : j > i_{p-1}\}$. Θα υπάρχει σύνολο $P = \{i_1, ..., i_p\}$ τέτειο ώστε $c'(P^*) = c'(P_*)$. Δηλαδή

$$\{c(\{i_1, ..., i_{p-1}, j\}) : j > i_{p-1}\} = \{c(\{i_2, ..., i_p, j\}) : j > i_p\} \tag{3.6}$$

Παρατηρούμε οτι $c(\{i_1, ..., i_p\}) \in c'(P^*) = c'(P_*)$, άρα υπάρχει $j \in [n]$ με $j > i_p$ τέτοιο ώστε $c(\{i_2, ..., i_p, j\}) = c(\{i_1, ..., i_p\})$. Επομένως το επιθυμητό σύνολο είναι το $\{i_1, ..., i_p, j\}$ και $n(p + 1, r) = n(p, 2^r)$. □

Εστω τώρα $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και $G = \{\tau^i : 0 \leq i \leq p - 1\}$ η κυκλική ομάδα τάξης $p$. Τότε το θεώρημα 3.3 είναι άμεση συνέπεια του επόμενου λήμματος.

ΛΗΜΜΑ 3.8. *Εστω $k \in \{1, .., p - 1\}$. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N$ θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$, υπάρχει μεταβλητή λέξη $W \in V_{un}^{p^k}(G, G)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(\tau^i) : 0 \leq i \leq k\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. 3.8 Ας δούμε πρώτα την απόδειξη για $p = 3$ και $G = \{e, t, t^2\}$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο $k$. Για $k = 1$ θέλουμε να βρούμε εναν θετικό ακέραιο $N$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$, να υπάρχει μεταβλητή λέξη $W \in V_{un}^3(G, G)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε οι λέξεις $W(e), W(t)$ να έχουν το ίδιο χρώμα.

Δηλαδή θέλουμε να βρούμε μια τρειδιάσταση μεταβλητή λέξη $W_1$ πανω στο αλφάβητο $G \cup \{x, y, z\}$ μήκους $N$, οπου οι μεταβλητές $x, y, z$ εμφανίζονται μια φορά η κάθε μία στις θέσεις $i, j, k$ αντίστοιχα και τέτοια ώστε $c(I_{W_1}(e, t, t^2)) = c(I_{W_1}(t, t^2, e))$. Εστω λοιπόν $r \in \mathbb{N}$, $N = n(3, r)$ και $c : G^N \to [r]$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f_1 : \binom{[N]}{2} \to G^N$ με $f_1(\{i, j\}) = (w_1^s)_{s=1}^N$ οπου

$$w_1^s = \begin{cases} e & s \notin \{i, j\} \\ t & s = i \\ t^2 & s = j \end{cases} \tag{3.7}$$

Δηλαδή η τιμή $f_1(\{i, j\})$ είναι η λέξη που περιέχει παντου το γράμμα $e$ εκτός απο τις θέσεις $i, j$ στις οποίες περιέχει τα γράμματα $t, t^2$ αντίστοιχα. Μέσω της $f_1$ ορίζουμε τον επαγώμενο χρωματισμό $c' : \binom{[N]}{2} \to [r]$ με $c'(\{i, j\}) = c(f_1(\{i, j\})$. Εφόσον $N = n(3, r)$ θα υπάρχουν $i, j, k \subset [N]$ με $i < j < k$ και τέτοια ώστε

$$c'(\{i, j\}) = c'(\{j, k\}) \tag{3.8}$$

Δηλαδή οι λέξεις $f_1(\{i, j\}), f_1(\{j, k\})$ έχουν το ίδιο χρώμα. Επομένως αν $W_1 = x^i \times y^j \times z^k \times \prod_{s \notin \{i,j,k\}} e$ παρατηρούμε οτι $c(I_{W'}(e, t, t^2)) = c(I_{W'}(t, t^2, e))$ Με το ίδιο $N$ μπορούμε να βρούμε μια αντίστοιχη λέξη $W_2$ τέτοια ώστε $c(I_{W_2}(t, t^2, e)) = c(I_{W_2}(t^2, e, t))$ ως εξής: Οριζουμε την συνάρτηση $f_2 : \binom{[N]}{2} \to G^N$ με $f_2(\{i, j\}) = (w_2^s)_{s=1}^N$ οπου

$$w_2^s = \begin{cases} t & s \notin \{i, j\} \\ t^2 & s = i \\ e & s = j \end{cases} \tag{3.9}$$

και όμοια τον επαγώμενο χρωματισμό $c' : \binom{[N]}{2} \to [r]$ με $c'(\{i, j\}) = c(f_2(\{i, j\})$. Οι λέξη $W_1$ διατηρεί το χρωμα της για την πρώτη κυκλική μετάθεση του $(e, t, t^2)$ και η $W_2$ για την δεύτερη. Θα θέλαμε μια λέξη που να διατηρεί το χρώμα της για τις δύο περιπτώσεις. Παρατηρούμε τώρα οτι η βασική διαφορά των λέξεων $W_1, W_2$ είναι στα σταθερά τους μέροι, της $W_1$ αποτελείτε μονο απο $e$ και τις $W_2$ απο $t$. Αρα αν για το $N = n(3, r^2)$ παίρναμε τον επαγώμενο χρωματισμό $c'(\{i, j\}) = (c(f_1\{i, j\}), c(\{f_2(\{i, j\})))$ θα βρίσκαμε $W_1, W_2$ που θα είχαν στις ίδιες συντεταγμένες τις μεταβλητές αλλα θα διέφεραν στο σταθερο τους μέρος. Σε αυτο το σημείο θα μας βοηθήσει το λήμμα 3.5 γιατί θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω επαγώμενο χρωματισμό αλλα σε εναν χώρο που είναι $(e, t)$-insensitive και σύνεπώς να μην μας νοιάζει το σταθερό μερος.

Πράγματι, αν θέσουμε $E_1$ την σχέση ισοδυναμίας πάνω στην $G$ με

$$gE_1g' \Leftrightarrow g, g' \in \{e, t\} \text{ ή } g = g'$$

τότε έχουμε δείξει οτι η $G$ έχει την $(E_1, 3)$-UHJP. Αρα απο το λήμμα 3.5 για $r \in \mathbb{N}$ και $n = n(3, r^2)$, υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε για κάθε $c : G^N \to [r]$ υπάρχουν $(W_i)_{i=1}^n \cup V_{un}^3$ με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και αν $(g_1, ..., g_n) \in G^n$ τότε το σύνολο $\{\prod_{i=1}^n W_i(g_i') : g_i'E_1g_i\}$ είναι μονοχρωματικό. Ορίζουμε τώρα τον επαγώμενο χρωματισμό $c_1 : G^n \to [r]$ με

$$c_1(g_1, ..., g_n) = c(\prod_{i=1}^{n} W_i(g_i)) \tag{3.10}$$

. Επιπλέον ορίζουμε τον επαγώμενο χρωματισμό $c_2 : \binom{[n]}{2} \to [r^2]$ με

$$c_2(\{i,j\}) = (c_1(f_1(\{i,j\})), c_1(f_2(\{i,j\}))) \tag{3.11}$$

Αφού $n = n(3, r^2)$ θα υπάρχουν $i_1, i_2, i_3 \subset [n]$ με $i_1 < i_2 < i_3$ τέτοια ώστε

$$c_2(\{i_1, i_2\}) = c_2(\{i_2, i_3\}) \tag{3.12}$$

Δηλαδή $c_1(f_1(\{i_1, i_2\})) = c_1(f_1(\{i_2, i_3\}))$ και $c_1(f_2(\{i_1, i_2\})) = c_1(f_2(\{i_2, i_3\}))$ Τότε

$$\begin{aligned} c(W_{i_1}(e) \times W_{i_2}(t) \times W_{i_3}(t^2) \prod_{i \notin \{i_1,i_2,i_3\}} W_i(e)) = c_1(f_1(\{i_2, i_3\})) \\ = c_1(f_1(\{i_1, i_2\})) = c(W_{i_1}(t) \times W_{i_2}(t^2) \times W_{i_3}(e) \prod_{i \notin \{i_1,i_2,i_3} W_i(e)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & c(W_{i_1}(t) \times W_{i_2}(t^2) \times W_{i_3}(e) \prod_{i \notin \{i_1,i_2,i_3\}} W_i(e)) \\ & = c(W_{i_1}(t) \times W_{i_2}(t^2) \times W_{i_3}(e) \prod_{i \notin \{i_1,i_2,i_3\}} W_i(t)) = c_1(f_2(\{i_2, i_3\})) \\ & = c_1(f_2(\{i_1, i_2\})) = c(W_{i_1}(t^2) \times W_{i_2}(e) \times W_{i_3}(t) \prod_{i \notin \{i_1,i_2,i_3\}} W_i(t)) \\ & = c(W_{i_1}(t^2) \times W_{i_2}(e) \times W_{i_3}(t) \prod_{i \notin \{i_1,i_2,i_3\}} W_i(e)) \end{aligned}$$

Επομένως η λέξη $W = W_{i_1}^e \times W_{i_2}^t \times W_{i_3}^{t^2} \prod_{i \notin \{i_1,i_2,i_3\}} W_i(e)$ είναι η επιθυμητή.

Την ίδια μέθοδο θα ακολουθήσουμε στην γενική περιπτωση για $p \geq 4$. Εστω λοιπόν $p \geq 4$ και $G = \{e, t, t^2, ..., t^{p-1}\}$. Αρχικα $k = 1$ . Εστω $r \in \mathbb{N}$ , $N = n(p, r)$ και $c : G^N \to [r]$. Θέτουμε την απεικόνιση $f : \binom{[n]}{p-1} \to G^N$ οπου για κάθε $B = \{i_1, ..., i_{p-1}\}$ έχουμε $f(B) = (f_i(B))_{i \in [n]}$ με

$$f_i(B) = \begin{cases} e & \text{αν } i \notin B \\ t^q & \text{αν } i = i_q \text{ για κάποιο } q \in \{1, ..., p-1\} \end{cases} \tag{3.13}$$

Ορίζουμε τον επαγώμενο χρωματισμό $c' : \binom{[n]}{p-1} \to [r]$ με

$$c'(B) = c(f(B)) \tag{3.14}$$

Αφού $N = n(p, r)$ θα υπάρχει ενα σύνολο $A \subset [n]$ με $|A| = p$ και τέτοιο ώστε $c'(A^*) = c'(A_*)$. Δηλαδή αν $A = \{i_1, ..., i_p\}$ θα ισχύει $c(f(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) = c(f(\{i_2, ..., i_p\}))$. Επομένως αν $W = v_e^{i_1} \times v_t^{i_2} \times ... \times v_{t^{p-1}}^{i_p} \prod_{i \notin A} e$, θα έχουμε

$$c(W(e)) = c(f(\{i_2, ..., i_p\})) = c(f(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) = c(W(t))$$

Ετσι ολοκληρώνεται η περίπτωση για $k = 1$.

Εστω οτι ισχύει για $k \leq p-2$. Θέτουμε $E_k$ την σχέση ισοδυναμίας πάνω στο $G$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$g_1 E_k g_2 \Leftrightarrow g_1, g_2 \in \{t^i : 0 \leq i \leq k\} \text{ ή } g_1 = g_2$$

Τότε η $G$ έχει την $(E_k, d^k)$-UHJP και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 3.5. Δηλαδή για $r \in \mathbb{N}$ και $n = n(p, r^{k+1})$ θα υπάρχει $N = N(n, r)$ τέτοιο ώστε για κάθε $c : G^N \to [r]$ να υπάρχουν $(W_i)_{i=1}^n \subset V_{un}^{d^k}(G, G)$ με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και για κάθε $(g_1, ..., g_n) \in G^n$ το σύνολο $\{\prod_{i=1}^n W_i(g_i') : g_i' E_k g_i\}$ να είναι μονοχρωματικό. Εστω $c_1 : G^n \to [r]$ ο χρωματισμός με $c_1((g_1, ..., g_n)) = c(\prod_{i=1}^n W_i(g_i))$ Ορίζουμε την απεικόνιση $f : \binom{[n]}{p-1} \to \{G^n\}^{k+1}$, όπου αν $B = \{i_1, ..., i_{p-1}\}$ έχουμε

$$f(B) = (f^1(B), ..., f^{k+1}(B))$$

με

$$f_s^i(B) = \begin{cases} t^{i-1} \text{ αν } s \notin B \\ t^{q+i-1} \text{ αν } s = i_q \text{ για κάποιο } q \in \{1, ..., p-1\} \end{cases} \tag{3.15}$$

Μέσω της $f$ ορίζουμε τον επαγώμενο χρωματισμό $c_2 : \binom{[n]}{p-1} \to [r^{k+1}]$ με

$$c_2(B) = c_1(f(B)) = (c_1(f^1(B)), ..., c_1(f^{k+1}(B))) \tag{3.16}$$

Θα υπάρχει $A \subset [n]$ με $|A| = p$ και τέτιο ώστε

$$c_2(A^*) = c_2(A_*)$$

Αν $A = \{i_1, ..., i_p\}$ θα έχουμε οτι $c_2(\{i_1, ..., i_{p-1}\}) = c_2(\{i_2, ..., i_p\})$. Δηλαδή

$$c_1(f(\{i_1, ..., i_{p-1}\}) = c_1(f(\{i_2, ..., i_p\})$$

. Πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned} &c_1(f^1(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) = c_1(f^1(\{i_2, ..., i_p\})) \\ &c_1(f^2(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) = c_1(f^2(\{i_2, ..., i_p\})) \\ &... \\ &... \\ &... \\ &c_1(f^{k+1}(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) = c_1(f^{k+1}(\{i_2, ..., i_p\})) \end{aligned}$$

Εστω λοιπον η λέξη

$$W = W_{i_1}^e \times W_{i_2}^t \times ... \times W_{i_p}^{t^{p-1}} \times \prod_{i \notin A} W_i(e)$$

Τοτε θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
&c(W(e)) = c_1(f^1(\{i_2, ..., i_p\})) = c_1(f^1(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) \\
&= c(W(t)) = c(W_{i_1}(t) \times W_{i_2}(t^2) \times ... \times W_{i_p}(e) \times \prod_{i \notin A} W_i(e) \\
&= c(W_{i_1}(t) \times W_{i_2}(t^2) \times ... \times W_{i_p}(e) \times \prod_{i \notin A} W_i(t) \\
&= c_1(f^2(\{i_2, ..., i_p\})) = c_1(f^2(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) \\
&= c(W(t^2)) = ... = c(W(t^k)) \\
&= c(W_{i_1}(t^k) \times W_{i_2}(t^{k+1}) \times ... \times W_{i_p}(t^{k-1}) \times \prod_{i \notin A} W_i(t^{k-1}) = c(W(t^k)) \\
&= c(W_{i_1}(t^k) \times W_{i_2}(t^{k+1}) \times ... \times W_{i_p}(t^{k-1}) \times \prod_{i \notin A} W_i(t^k) = c_1(f^{k+1}(\{i_2, ..., i_p\})) \\
&= c_1(f^{k+1}(\{i_1, ..., i_{p-1}\})) = c(W(t^{k+1})
\end{aligned}
$$

□

Επομένως βλέπουμε οτι για $k = p - 1$ το σύνολο $\{W(t^i) : 0 \leq i \leq p - 1\}$ είναι μονοχρωματικό και σύνεπως ισχύει το θεώρημα 3.3.

## 3. Εφαρμογή του θεώρηματος 3.3 στην ευκλείδια θεωρία Ramsey

Στις εφαρμογές του πρώτου κεφαλαίου είδαμε το θεώρημα Gallai. Αυτο μας εξασφαλίζει οτι αν $X \subset \mathbb{R}^n$ πεπερασμένο για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $r \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε $r$-χρωματιμσό του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει $X'$ μονοχρωματικό τέτοιο ώστε $X' = cX + v$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{R}^n$. Το $X'$ είναι ομοθετικό του $X$. Στην ευκλείδια θεωρία Ramsey στόχος είναι να μπορούμε να βρούμε $X' \subset \mathbb{R}^N$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ μονοχρωματικό ισομετρικό αντίγραφο του $X$. Μόνο με το θεώρημα Hales-Jewett αυτό είναι αδύνατο. Χωρίς να εμβαθύνουμε πολύ, αυτο συμβαίνει διότι το θεώρημα Hales Jewett μας δίνει μια μεταβλητή λέξη αγνώστου βαθμού, γιαυτό παίρνουμε ομοθετικό για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ άγνωστο.

Σε αυτό το κεφάλαιο όμως, έχοντας εισάγει την άλγεβρα στο σύστημα, μπορούμε να πάρουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα για την ευκλείδια θεωρία Ramsey.

Αρχικά παρουσιάζουμε τον βασικό ορισμό στην ευκλείδια θεωρία Ramsey.

Ορισμος 3.9. *Εστω $X$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Το $X$ θα λέγεται σύνολο Ramsey αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(X, r)$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $\mathbb{R}^N$ υπάρχει $X' \subset \mathbb{R}^N$ μονοχρωματικό ισομετρικό αντίγραφο του $X$.*

Αμεση συνέπεια του θεωρήματος 3.3 είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεωρημα 3.10. *Τα κανονικά πολύγωνα είναι Ramsey.*

Αποδειξη. 3.10

Εστω $P_n$ ενα κανονικό πολύγωνο με $n$ κορυφές στον χώρο $\mathbb{R}^m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ Αν $G$ το σύνολο των ισομετριών πάνω στο $X$, δηλαδή το σύνολο των $1-1$ και επί απεικονίσεων απο το $X$ στο $X$ που διατηρούν τις αποστάσεις, τότε το $G$ εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων αποτελή ομάδα η οποία δρά πάνω στο $X$. Εστω $H$ η κυκλική υποομάδα της $G$ που περιέχει τις $n$ στροφές του πολυγώνου κατα $\frac{2\pi}{n}$ rad. Τότε απο το θεώρημα 3.3 η ομάδα $H$ θα έχει την $n^{n-1}$-UHJP ιδιότητα, θέτουμε $d = n^{n-1}$. Εστω $r \in \mathbb{N}$ και $N = N(n,r) \in \mathbb{N}$ αυτό που μας δίνει το θεώρημα 3.3 . Εστω $c : P_n^N \to [r]$ ένας $r$-χρωματιμσός του $P_n^N \subset \mathbb{R}^{mN}$ και $y \in P_n$ μια κορυφή του πολυγώνου. Ορίζουμε τον επαγώμενο $r$-χρωματιμσό $c_y : H^N \to [r]$ του $H^N$ με

$$c_y(h_1, ..., h_N) = c(h_1 y, ..., h_N y)$$

Θα υπάρχει μεταβλητή λέξη $W \in V_{un}^d(H,H)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(h) : h \in H\}$ να είναι μονοχρωματικό. Δηλαδή αν $W = (w_i)_{i=1}^N$

$$c(w_1(t')y, ..., w_N(t')y) = c(w_1(t)y, ..., w_N(t)y) \tag{3.17}$$

για κάθε $t', t \in H$. Πιο αναλυτικά η εξίσωση 3.17 μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$c(\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h}(ht')y) = c(\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h}(ht)y)$$

η

$$c(\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(t'y)) = c(\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(ty)) \tag{3.18}$$

για κάθε $t', t \in H$. Παρατηρούμε οτι επειδή η τροχιά του $y$ υπο την δράση της $H$ είναι όλες οι κορυφές του πολυγώνου, καθώς το $t$ διατρέχει το $H$ το στοιχείο $ty$ διατρέχει το σύνολο $P_n$. Επομένως για κάθε $x \in P_n$ έχουμε οτι το σύνολο

$$\{\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(x) : x \in P_n\}$$

είναι μονοχρωματικό.

Θετουμε $w : P_n \to P_n^N$ την απεικόνιση με $w(x) = \prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} hx$ και βλέπουμε οτι

$$||w(x_1) - w(x_2)||^2 = ||\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} hx_1 - \prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} hx_2||^2$$
$$= \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} ||hx_1 - hx_2||^2 = d||x_1 - x_2||^2$$

Αρα $||w(x_1) - w(x_2)|| = \sqrt{d}||x_1 - x_2||$. Καταφέραμε να βρούμε λοιπόν ενα διαστελμένο κατα παράγοντα $\sqrt{d}$ αντίγραφο του $X$ το οποίο να είναι μονοχρωματικό. Προκειμένου να βρούμε ενα μονοχρωματικό αντίγραφο του $X$ θα εφαρμόσουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία αλλά αντί να πάρουμε τον αρχικό χρωματισμό $c$ στον χώρο $P_n^N$, θα τον πάρουμε στον διεσταλμένο χώρο $\frac{1}{\sqrt{d}}P_n^N$ και εντός αυτού θα βρούμε το επιθυμητό αντίγραφο του $X$. Πράγματι έστω $c : \frac{1}{\sqrt{d}}P_n^N \to [r]$ και $c_y : H^N \to [r]$ με $c_y(h_1, ..., h_N) = c(h_1\frac{y}{\sqrt{d}}, ..., h_N\frac{y}{\sqrt{d}})$. Τοτε όμοια θα βρούμε την λέξη $W$ τέτοια ώστε $W = (w_i)_{i=1}^N$ και το σύνολο

$$\{\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(x) : x \in \frac{1}{\sqrt{d}}P_n\}$$

είναι μονοχρωματικό. Θέτουμε $w : P_n \to P_n^N$ με $w(x) = \prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(x)$ και $f : P_n \to \frac{1}{\sqrt{d}}P_n^N$ με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{d}}w(x)$ Τότε

$$\begin{aligned}
&||f(x_1) - f(x_2)||^2 = ||\frac{1}{\sqrt{d}}w(x_1) - \frac{1}{\sqrt{d}}w(x_2)||^2 \\
&= \frac{1}{d}||\prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(x_1) - \prod_{i\in F} w_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(x_2)||^2 \\
&= \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h}\frac{1}{d}||h(x_1) - h(x_2)||^2 = \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h}\frac{1}{d}||hx_1 - hx_2||^2 \\
&= ||x_1 - x_2||^2
\end{aligned}$$

Αρα η το σύνολο $f(P_n) = \{f(x) : x \in P_n\}$ είναι μονοχρωματικό και η $f$ ισομετρία. Επομένως βρίκαμε ενα μονοχρωματικό αντίγραφο του $P_n$ εντός του $\frac{1}{\sqrt{d}}P_n^N$ και άρα εντός του $R^{mN}$. □

Κεφάλαιο 4

# Αλγεβρική μορφή του θεωρήματος Hales-Jewett για επιλύσιμες ομάδες

Οπως αναφέραμε στην εισαγωγή, ο ορισμός των Ramsey συνόλων δημιουργεί φυσιολογικά το κίνητρο να βρεθεί κάποιος χαρακτηρισμός αυτών των συνόλων. Το γεγονός οτι αν ένα σύνολο είναι Ramsey τότε τα στοιχεία του θα ανήκουν στην επιφάνεια κάποιας σφαίρας, δηλαδή είναι σφαιρικό, ώθησε τον Graham να θέσει την εικασία οτι ένα σύνολο είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι σφαιρικό. Μετά απο 20 περίπου χρόνια δώθηκε μία δεύτερη εικασία απο τους Leader, Russel και Walters η οποία λέει οτι ενα σύνολο είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι subtransitive, δηλαδή αν και μόνο αν είναι ισομετρικό με ενα υποσύνολο ενός συνόλου στο οποίο η ομάδα συμμετριών του δρά transitively. Μια ενδιαφέρουσα πτυχή αυτής της υπόθεσης είναι οτι η μια κατεύθηνση ανάγεται σε καθαρά συνδιαστικού χαρακτήρα πρόταση, χωρίς γεωμετρία. Συγκεκριμένα, η κατεύθηνση που λέει οτι ένα σύνολο είναι Ramsey αν είναι subtransitive ανάγεται στην επόμενη εικασία.

Εικασια 4.1. *Εστω $G$ μια πεπερασμένη ομάδα και $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $d$ και $N$ τέτοιοι ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ υπάρχει $G$-μεταβλητή λέξη $W$ μήκους $N$ και βαθμού $d$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Στο τρίτο κεφάλαιο δείξαμε οτι οι πεπερασμένες κυκλικές ομάδες έχουν την $d$-UHJP. Δηλαδή ικανοποιούν την εικασία 4.1 και μάλιστα χωρίς να εξαρτάτε ο βαθμός της λέξης απο τον αριθμό των χρωμάτων. Στόχος σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε οτι το ίδιο ισχύει και για τις επιλύσιμες .

Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς ορισμούς.

Έστω $G$ ομάδα και $H < G$ μια υποομάδα της $G$. Η $H$ λέγεται κανονική υποομάδα της $G$ αν $Hg = gH$ για κάθε $g \in G$, οπου $gH = \{gh : h \in H\}$ και $Hg = \{hg : h \in H\}$ και θα γράφουμε $H \lhd G$. Μια ομάδα $G$ λέγεται **επιλύσιμη** αν έχει υποκανονική ακολουθία ομάδων $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ τέτοια ώστε η ομάδα πυλίκο $G_i/G_{i-1}$ είναι αβελιανή για κάθε $i \in [n]$. Αν η $G$ είναι πεπερασμένη τότε η $G$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν έχει υποκανονική ακολουθία ομάδων $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ τέτοια ώστε η ομάδα $G_i/G_{i-1}$ είναι κυκλική.

Ορισμος 4.2. *Εστω $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ η υποκανονική ακολουθία ομάδων για μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα $G$ οπου η $G_i/G_{i-1}$ είναι κυκλική ομάδα* *τάξης $p_i$ για κάθε $i \in [n]$. Τότε ο αριθμός*

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{(p_i-1)\prod_{j>i} p_j} = p_1^{(p_1-1)\prod_{j=2}^{n} p_j} p_2^{(p_2-1)\prod_{j=3}^{n} p_j} ... p_n^{p_n-1} \tag{4.1}$$

*θα λέγεται HJ-βαθμός της $G$*

Μια επιλύσιμη ομάδα γενικά μπορεί να έχει πάνω απο έναν HJ-βαθμό. Για παράδειγμα αν $C_6$ η κυκλική ομάδα τάξης 6 τότε οι ακολουθίες $\{e\} \lhd C_6$, $\{e\} \lhd C_2 \lhd C_6$ και $\{e\} \lhd C_3 \lhd C_6$ δίνουν τους HJ-βαθμούς $6^5, 2^3 3^2$ και $3^4 2$ αντίστοιχα. Αν $C_n$ η κυκλική ομάδα τάξης $n$ τότε ο μεγαλύτερος HJ-βαθμός της είναι ο αριθμός $n^{n-1}$. Αυτό που θα δείξουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι οτι οι επιλύσημες ομάδες ικανοποιούν την εξής πιο ισχυρή μορφή της εικασίας 4.1

Θεωρημα 4.3. *Εστω $G$ μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα, $d$ ενας HJ-βαθμός της $G$ και $r \in N$. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $G^N$ υπάρχει λέξη $W \in V_{un}^{d}(G,G)$ μήκους $N$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Επίσης θα δείξουμε το επόμενο.

Θεωρημα 4.4. *Εστω $G$ πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα η οποία δρά σε ένα σύνολο $X$, $d$ ένας HJ-βαθμός της $G$ και $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ωστε για κάθε $r$-χρωματισμό του $X^N$ υπάρχει λέξη $W \in V_{un}^{d^p}(G,X)$, οπου $p$ το πλήθος των τροχιών της $G$ στο $X$, μήκους $N$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{W(gx) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Προφανώς το θεώρημα 4.4 περιέχει το θεώρημα 4.3 αν $X = G$.

Παρατηρηση 4.1. Το θεώρημα 4.3 αποτελεί πιο ισχυρή μορφή της πρότασης 4.1 επειδή στην λέξη $W$ που βρήσκουμε, ο βαθμός $d$ μας είναι γνωστός εξ αρχής διότι εξαρτάτε μόνο απο την δομή της $G$ και της υποκανονικής ακολουθίας, όχι απο τον αριθμό των χρωμάτων $r$.

Ορισμος 4.5. *Εστω η ομάδα $G$ η οποία δρά σε ένα σύνολο $X$. Αν $H$ υποομάδα της $G$ τότε με $E_{X|H}$ συμβολίζουμε την σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται απο τις τροχιές της $H$ στο $X$. Δηλαδή*

$$x \; E_{X|H} \; y \Leftrightarrow x \in Hy \tag{4.2}$$

*οπου $Hy$ η τροχία του $y$ υπο την δράση της $H$.*

Υπο τον ορισμό 4.5 το θεώρημα 4.4 μας λέει οτι αν $G$ πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα που δρά σε ένα σύνολο $X$ και $d$ ένας HJ-βαθμός της $G$, τότε το $(G, X)$ έχει την $(E_{X|G}, d^p)$-UHJP ιδιότητα, οπου $p$ το πλήθος των τροχιών της $G$ στο $X$.

Προκειμένου να αποδείξουμε τα θεωτήματα 4.3 και 4.4 θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση:

Προταση 4.6. *Εστω $G$ πεπερασμένη ομάδα που δρά σε ένα πεπερασμένο σύνολο $X$ και $H$ υποομάδα της $G$. Αν η $H$ έχει την $d$-UHJP ιδιότητα τότε το $(H, X)$ έχει την $(E_{X|H}, d^p)$-UHJP ιδιότητα, οπου $p$ το πλήθος των τροχιών της $H$ στο $X$.*

## 1. Απόδειξη της πρότασης 4.6

Για την συνέχεια υποθέτουμε $G$ μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δρά σε ένα πεπερασμένο σύνολο $X$ και $H$ μια υποομάδα της $G$ με την $d$-UHJP ιδιότητα.

Λημμα 4.7. *Εστω $y \in X$ και $E_y$ η σχέση ισοδυναμίας στο $X$ που ορίζεται ως :*

$$x' \ E_y \ x \Leftrightarrow x' \in Hx \text{ η } x' = x \tag{4.3}$$

*Τότε το $(H, X)$ έχει την $(E_y, d)$-UHJP ιδιότητα.*

Αποδειξη. Θα ακολουθήσουμε την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε το θεώρημα 3.10. Πράγματι για $r \in \mathbb{N}$, αφού η $H$ έχει την $d$-UHJP, έστω $N = N(H, d, r)$ όπως στον ορισμό 3.2. Εστω $c : X^N \to [r]$ και $c_H : H^N \to [r]$ με

$$c_H(h_1, ..., h_N) = c(h_1 y, ..., h_N y) \tag{4.4}$$

Θα υπάρχει $W_H \in V^d_{un}(H, H)$ μήκους $N$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\{W_H(h) : h \in H\}$ να είναι μονοχρωματικό.Δηλαδή

$$c_H(W_H(h_1)) = c_H(W_H(h_2)) \tag{4.5}$$

για κάθε $h_1, h_2 \in H$. Αν γράψουμε την $W_H = \prod_{i \in F} h_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} v_h$ τότε η 4.5 γίνεται

$$c(\prod_{i \in F} h_i y \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} (hh_1)y) = c(\prod_{i \in F} h_i y \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} (hh_2)y$$

η αλλιώς

$$c(\prod_{i \in F} h_i y \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} h(h_1 y)) = c(\prod_{i \in F} h_i y \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} h(h_2 y)) \tag{4.6}$$

Παρατηρούμε τώρα οτι τα στοιχεία $h_1 y, h_2 y$ διατρέχουν ολα τα στοιχεία της τροχιάς του $y$ και συνεπώς η εξίσωση (4.6) γίνεται

$$c(\prod_{i \in F} h_i y \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hx) = c(\prod_{i \in F} h_i y \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} hz) \tag{4.7}$$

για κάθε $x, z \in Hy$. Αρα αν θέσουμε $W = \prod_{i \in F} h_i y \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} v_h$ παρατηρούμε οτι $W \in V^d_{un}(H, X)$, $|W| = N$ και απο την (4.7) το σύνολο $\{W(x) : x \in Hy\}$ είναι μονοχρωματικό.

$\square$

Εστω τώρα $Hy_1, ..., Hy_p$ οι τροχιές της $H$ στο $X$. Για κάθε $k \in \{1, ..., p\}$ ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $E_k$ με

$$x \ E_k \ x' \Leftrightarrow \text{ υπάρχει } j \in \{1, ..., k\} \text{ τέτοιο ώστε } x, x' \in Hy_j \text{ ή } x = x' \tag{4.8}$$

Επειδή $E_p = E_{X|H}$, αποδεικνύωντας το επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε και την πρόταση 4.6.

Λημμα 4.8. *Για κάθε $k \in [p]$ το $(H, X)$ έχει την $(E_k, d^k)$-UHJP ιδιότητα.*

Αποδειξη. 4.8 Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο $k$.

Για $k = 1$ προκύπτει απο το λήμμα 4.7. Εστω οτι ισχύει για κάποιο $k \in [p-1]$, θα δείξουμε οτι ισχύει και για $k+1$. Εστω $r \in \mathbb{N}$. Απο την επαγωγική υπόθεση έχουμε οτι το $(H, X)$ έχει την $(E_k, d^k)$-UHJP. Επομένως απο το λήμμα 3.5 για κάθε $n$ υπάρχει $N$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωμαστισμό $c : X^N \to [r]$ υπάρχουν οι λέξεις $(W_i)_{i=1}^n \subset V_{un}^{d^k}(H, X)$ με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και για κάθε $(x_i)_{i=1}^n$ το σύνολο

$$\{\prod_{i=1}^{n} W_i(x_i') : x_i' \ E_k \ x_i\} \tag{4.9}$$

είναι μονοχρωματικό. Πέρνουμε για $n$ τον θετικό ακέραιο που μας δίνει το λήμμα 4.7 για $y = y_{k+1}$ και ορίζουμε τον εξής χρωματισμό: $c' : X^n \to [r]$ με

$$c'(x_1, ..., x_n) = c(\prod_{i=1}^{n} W_i(x_i))$$

Απο την επιλογή του $n$ θα υπάρχει λέξη $W' \in V_{un}^{d}(H, X)$ μήκους $n$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{W'(x) : x \in Hy_{k+1}\}$ να είναι μονοχρωματικό. Δηλαδή

$$c'(W'(x)) = c'(W'(x')) \tag{4.10}$$

για κάθε $x, x' \in Hy_{k+1}$

Αν $W' = \prod_{i \in F} x_i \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} v_h$ τότε η εξίσωση (4.10) γίνεται

$$c(\prod_{i \in F} W_i(x_i) \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} W_i(hx)) = c(\prod_{i \in F} W_i(x_i) \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} W_i(hx')) \tag{4.11}$$

Θέτουμε $W = \prod_{i \in F} W_i(x_i) \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} W_i^h$

Τότε η $W$ είναι η επιθυμητή λέξη. Πράγματι παρατηρούμε οτι επειδή ο βαθμός των $W_i$ είναι $d^k$ για κάθε $i \in n$ και ουσιαστικά κρατάω μόνο τις $d = |H| \times |F_h|$ έχουμε οτι $W \in V_{un}^{d^{k+1}}(H, X)$. Επίσης $|W| = \sum_{i=1}^n |W_i| = N$. Τέλος δείχνουμε οτι για κάθε $j \in [k+1]$ το σύνολο $\{W(x) : x \in Hy_j\}$ είναι μονοχρωματικό. Εστω πρώτα $j = k+1$ και $x \in Hy_{k+1}$. Τότε :

$$c(W(x)) = c(\prod_{i \in F} W_i(x_i) \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} W_i(hx)) \overset{(4.11)}{=}$$
$$c(\prod_{i \in F} W_i(x_i) \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} W_i(hy_{k+1}))) = c(W(y_{k+1}))$$

Εστω τώρα $j \in [k]$ και $x \in Hy_k$. Θα έχουμε:

$$c(W(x)) = c(\prod_{i \in F} W_i(x_i) \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} W_i(hx)) \overset{4.9}{=}$$
$$c(\prod_{i \in F} W_i(x_i) \times \prod_{h \in H} \prod_{i \in F_h} W_i(hy_k)) = c(W(y_k))$$

Έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο.

□

Σε αυτό το σημείο, πρωτού προχωρήσουμε θα προσθέσουμε μια ειδική περίπτωση της πρότασης (4.6) στην οποία ο αριθμός των τροχιών της $H$ στο $X$ είναι $p = 2$ και η ομάδα $G$ δρά transitively στο $X$. Τότε μπορούμε να ενώσουμε τις δύο αυτές τροχιές και να βρούμε μια λέξη που πέρνει το ίδιο χρώμα σε ολόκληρο το σύνολο $X$. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε και το θεώρημα Ramsey οπότε αρχικά το υπενθυμίζουμε.

Θεωρημα 4.9. *( Ramsey) Εστω $d, m, r$ θετικοί ακέραιοι με $d \geq m$. Υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του σύνόλου $\binom{[N]}{m}$ υπάρχει $A \in \binom{[N]}{d}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\binom{A}{m}$ είναι μονοχρωματικό.*

Τώρα προχωράμε στην ακριβή διατύπωση και απόδειξη του αποτελέσματος.

Θεωρημα 4.10. *Εστω $X$ πεπερασμένο σύνολο και $G$ πεπερασμένη ομάδα η οποία δρά transitively στο $X$. Εστω επίσης $H$ υποομάδα της $G$, με δύο τροχιές στο $X$ η οποία έχει την $d$-UHJP για κάποιο $d \in \mathbb{N}$. Τότε το $(G, X)$ έχει την $(E_{X|G}, d^2 \cdot |G|)$-UHJP.*

Αποδειξη. (4.10) Θα ξεκινίσουμε με κάποιες παρατηρήσεις. Εστω $x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε $Hx_1, Hx_2$ οι δύο τροχιές της $H$ στο $X$. Αν $g \in G$ και $x \in X$ τότε το στοιχείο $gx$ θα ανήκει η στο $Hx_1$ η στο $Hx_2$. Αν λοιπόν $W \in V^k_{un}(G, X)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ με $W = \prod_{i \in F} x_i \times \prod_{g \in G} \prod_{i \in F_g} v_g$ τότε $W(x) = \prod_{i \in F} x_i \times \prod_{g \in G} \prod_{i \in F_g} gx$ οπου $m = |\{g \in G : gx \in Hx_1\}$ απο τα $gx$ θα ανήκουν στο $Hx_1$ και $|G| - m$ θα ανήκουν στο $Hx_2$. Απο την θεώρία δράσης ομάδων σε σύνολα, γνωρίζουμε οτι για κάθε $x \in X$ το σύνολο $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ είναι υποομάδα της $G$ και ισχύει οτι $|Gx| = |(G : G_x)|$. Επειδή όμως η $G$ δρα transitively έχουμε $|X| = |(G : G_x)| = |G|/|G_x| \Rightarrow |G_x| = |G|/|X|$. Δηλαδή το $|G_x|$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του $x$. Αυτο μας είναι χρήσιμο διότι συνεπάγεται οτι ο αριθμός $m$ είναι ίδιος για κάθε $x \in X$. Πράγματι έστω $x \in X$ και $m = |\{g \in G : gx \in Hx_1\}$. Αν $gx \in Hx_1$ θα υπάρχει $y \in Hx_1$ τέτοιο ώστε $gx = y$ αρα $m = |\cup_{y \in Hx_1} \{g \in G : gx = y\}| = \sum_{y \in Hx_1} |\{g \in G : gx = y\}|$. Αν $gx = y$ τότε το $|\{g \in G : gx = y\}| = |gG_x| = |G_x|$, αρα $m = |Hx_1||G_x| = |Hx_1|(|G|/|X|)$ ανεξάρτητο απο το $x$. Το γεγονός αυτό θα μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε το θεώρημα Ramsey και να βρούμε την κατάληλη λέξη. Ας δούμε πως. Η υποομάδα $H$ έχει την $d$-UHJP και έχει δύο τροχιές στο $X$ επομένως γνωρίζουμε οτι το $(H, X)$ έχει την $(E_{X|H}, d^2)$-UHJP. Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το λήμμα 3.5 και για κάθε $n, r \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $c : X^N \to [r]$ θα υπάρχουν οι λέξεις $(W_i)_{i=1}^n \subset V^{d^2}_{un}(H, X)$ τέτοιες ώστε

$$c(\prod_{i=1}^{n} W_i(x_i)) = c(\prod_{i=1}^{n} W_i(x'_i)) \tag{4.12}$$

για κάθε $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \in X^n$ με $x_i \; E_{X|H} \; x'_i$ για κάθε $i \in [n]$. Επειδή η σχέση $E_{X|H}$ έχει μόνο δύο κλάσεις ισοδυναμίας (τις δύο τροχιές) μπορούμε να φανταστούμε την ταύτιση όλων των στοιχείων στο $Hx_1$ με το $x_1$ και όλων στο $Hx_2$ με το $x_2$. Παίρνουμε $n = R(m, |G|, r)$ τον αριθμό απο το θεώρημα Ramsey και τον επαγώμενο χρωματισμό $c' : \binom{[n]}{m} \to [r]$ με

$$c'(B) = c(\prod_{i \notin B} W_i(x_2) \times \prod_{i \in B} W_i(x_1)) \tag{4.13}$$

για κάθε $B = \{i_1 < ... < i_m\} \subset [n]$. Θα υπάρχει σύνολο $A = \{i_1, ..., i_{|G|}\} \subset [n]$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\binom{A}{m}$ να είναι μονοχρωματικό. Δηλαδή για κάθε $B, B' \subset A$ με

$|B| = |B'| = m$ ισχύει $c'(B) = c'(B')$ η αλλιώς

$$c(\prod_{i \notin B} W_i(x_2) \times \prod_{i \in B} W_i(x_1)) = c(\prod_{i \notin B'} W_i(x_2) \times \prod_{i \in B'} W_i(x_1)) \tag{4.14}$$

Για απλότητα στον σύμβολισμό υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι $A = [|G|]$. Ορίζουμε μια αρίθμηση της ομάδας $G$, με $G = \{g_1, ..., g_{|G|}\}$ και θέτουμε

$$W = \prod_{i > |G|} W_i(x_2) \times \prod_{i \leq |G|} W_i^{g_i} \tag{4.15}$$

Παρατητούμε τώρα οτι για κάθε $x \in X$ στη λέξη $W(x) = \prod_{i>|G|} W_i(x_2) \times \prod_{i \leq |G|} W_i(g_i x)$ $m$ απο τα στοιχεία του συνόλου $\{g_i x : i \in [|G|]\}$ θα ανήκουν στην τροχιά $Hx_1$. Εστω οτι $B_x = \{i \in [|G|] : g_i x \in Hx_1\}$. Τότε για κάθε $x, x' \in X$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&c(W(x)) = c(\prod_{i>|G|} W_i(x_2) \times \prod_{i \leq |G|} W_i(g_i x)) \overset{(4.12)}{=} \\
&c(\prod_{i>|G|} W_i(x_2) \times \prod_{i \notin B_x} W_i(x_2) \times \prod_{i \in B_x} W_i(x_1)) \overset{(4.14)}{=} \\
&c(\prod_{i>|G|} W_i(x_2) \times \prod_{i \notin B_{x'}} W_i(x_2) \times \prod_{i \in B_{x'}} W_i(x_1)) \overset{(4.12)}{=} \\
&c(\prod_{i>|G|} W_i(x_2) \times \prod_{i \leq |G|} W_i(g_i x')) \\
&= c(W(x'))
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε επίσης οτι αφού $W_i \in V_{un}^{d^2}(H, X)$ και εμείς πέρνουμε $|G|$ το πλήθος αυτών, η λέξη $W$ θα έχει βαθμό $d^2|G|$.

□

Παρατηρηση 4.2. Για $X = G$ και για δράση της $H$ στην $G$ την πράξη της ομάδας, η πρόταση 4.6 πέρνει την παρακάτω μορφή:

Πορισμα 4.11. *Εστω $G$ πεπερασμένη ομάδα και $H$ υποομάδα της $G$. Αν η $H$ έχει την $d$-UHJP τότε το $(H, G)$ έχει την $(E_{G|H}, d^p)$-UHJP, οπου οι κλάσεις ισοδύναμίας είναι τα δεξιά σύμπλοκα και $p = (G : H)$ ο δείκτης της $H$ στην $G$.*

Αν υποθέσουμε οτι ισχύει το θεώρημα 4.3 τότε με τα αποτελέσματα που έχουμε μέχρι στιγμής μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα 4.4.

Αποδειξη. 4.4 Εστω $G$ πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα η οποία δρά σε ένα πεπερασμένο σύνολο $X$ και $d$ ενας HJ-βαθμός της $G$. Απο το θεώρημα 4.3 η $G$ θα έχει την $d$-UHJP ιδιότητα και απο την πρόταση (4.6) το $(G, X)$ θα έχει την $(E_{X|G}, d^p)$-UHJP ιδιότητα, όπου $p$ ο αριθμός των τροχιών της $G$.

□

Ετσι βλέπουμε οτι παρά το γεγονός οτι το θεώρημα 4.4 φένεται γενικότερο απο το θεώρημα 4.3 στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμα.

Επομένως εστιάζουμε τώρα στο θεώρημα 4.3.

## 2. Απόδειξη του θεωρήματος 4.3

Αρχικά υπενθυμίζουμε κάποιες έννοιες που θα χρειαστούμε.

Ορισμος 4.12. *(Επέκταση ομάδας) Εστω $H, K$ δύο ομάδες. Τότε* ***επέκταση της*** *$K$* ***μέσω της*** *$H$ ονομάζεται μια ομάδα $G$ μαζί με έναν επιμορφισμό( επί ομομορφισμός) $\pi : G \to K$ και εναν μονομορφισμό(1-1 ομομορφισμό) $\iota : H \to G$ τέτοιους ώστε ο πυρήνας του $\pi$ ισούται με την εικόνα του $\iota$, δηλαδή $Ker(\pi) = Im(\iota)$*

Παρατηρηση 4.3. Αν $H$ μια κανονική υποομάδα της $G$ τότε η $G$ είναι μια κανονική επέκταση της ομάδας πηλίκο $G/H$ μέσω της $H$, όπου $\iota : H \to G$ η ταυτοτική συνάρτηση και $\pi : G \to G/H$ είναι ο φυσιολογικός επιμορφισμός με $g \to gH$

Μια σημαντική ιδιότητα των επεκτάσεων ομάδων είναι οτι διατηρούν την ιδιότητα της επιλυσημότητας. Δηλαδή αν $H, K$ δύο επιλύσιμες ομάδες και $G$ μια επέκταση της $K$ μέσω της $H$ τότε και η $G$ και θα είναι επιλύσιμη. Στην συνέχεια θα δείξουμε οτι οι επεκτάσεις ομάδων διατηρούν επίσης την $d$-UHJP ιδιότητα.

Προταση 4.13. *Εστω $H, K$ δύο πεπερασμένες ομάδες και έστω $G$ μια επέκταση της $K$ μέσω της $H$. Αν η ομάδα $H$ έχει την $d_H$-UHJP και η ομάδα $K$ έχει την $d_K$-UHJP τότε η $G$ θα έχει την $d$-UHJP, όπου $d = d_H^{\frac{|G|}{|H|}} \cdot d_K$*

Για την παραπάνω πρόταση αν $\iota : H \to G$ και $\pi : G \to K$ ο μονομορφισμός και ο επιμορφισμός αντίστοιχα της επέκτασης, τότε μπορούμε να ταυτίσουμε την ομάδα $H$ με την υποομάδα $\iota(H)$ της $G$. Συνεπώς αν η $H$ έχει την $d_H$-UHJP ιδιότητα τότε απο το 4.11 έχουμε οτι το $(H, G)$ έχει την $(E_{G|H}, d_H^p)$ οπου $p = (G : H) = \frac{|G|}{|H|}$ ο δείκτης της $H$ στην $G$. Επομένως για τα αποδείξουμε την πρόταση (4.13) αρκεί να δείξουμε το εξής λήμμα:

Λημμα 4.14. *Εστω $H, G, K$ πεπερασμένες ομάδες τέτοιες ώστε να υπάρχει ενας επιμορφισμός $\pi : G \to K$ με $Ker(\pi) = H$. Αν το $(H, G)$ έχει την $(E_{G|H}, d_1)$-UHJP ιδιότητα για κάποιο $d_1 \in \mathbb{N}$ και η ομάδα $K$ έχει την $d_K$-UHJP τότε η $G$ έχει την $d_1 \cdot d_k$-UHJP.*

Αποδειξη. 4.14 Εστω $r \in \mathbb{N}$. Εφόσον το $(H, G)$ έχει την $(E_{G|H}, d_1)$-UHJP ιδιότητα, απο το λήμμα 3.5 έχουμε οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ωστε για κάθε $r$ χρωματισμό του $G^N$ υπάρχουν οι λέξεις $(W_i)_{i=1}^n \subset V_{un}^{d_1}(H, G)$ τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και για κάθε $(g_i)_{i=1}^n \subset G$ το σύνολο $\{\prod_{i=1}^n W_i(g_i') : g_i' \; E_{G|H} \; g_i\}$ είναι μονοχρωματικό. Παρατηρούμε οτι : Αν $g \; E_{G|H} \; g'$ τότε $g' = gh$ για κάποιο $h \in H$ οπότε $\pi(g') = \pi(gh) = \pi(g)$. Επίσης $\pi(g) = \pi(g') \Rightarrow \pi(g^{-1})\pi(g') = e_K \Rightarrow \pi(g^{-1}g') = e_K \Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow g \; E_{G|H} \; g'$. Αρα έχουμε την σχέση

$$g_i \; E_{G|H} \; g_i' \Leftrightarrow \pi(g) = \pi(g') \tag{4.16}$$

για κάθε $i \in [n]$

Αρα με την σχέση (4.16) θα έχουμε

$$c(\prod_{i=1}^n W_i(g_i)) = c(\prod_{i=1}^n W_i(g_i')) \tag{4.17}$$

αν $\pi(g_i) = \pi(g_i')$ για κάθε $i \in [n]$. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την $d_k$-UHJP ιδιότητα της ομάδας $K$ παίρνουμε $n = N(K, r, d_K)$. Θέτουμε $c' : K^n \to [r]$ με

$$c'(k_1, ..., k_n) = c(\prod_{i=1}^{n} W_i(g_{k_i})) \tag{4.18}$$

όπου $g_{k_i}$ τέτοιο ώστε $\pi(g_{k_i}) = k_i$ το οποίο υπάρχει αφού η $\pi$ είναι επι. Ο χρωματισμός $c'$ είναι καλά ορισμένος διότι αν $g, g'$ τέτοια ώστε $\pi(g) = \pi(g') = k$ τότε απο την (4.16) $g\ E_{G|H}\ g'$ επομένως το χρώμα δεν εξαρτάτε απο την επιλογή του $g_k$. Θα υπάρχει λοιπόν λέξη $W_K \in V_{un}^{d_K}(K, K)$ μήκους $n$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\{W_K(k) : k \in K\}$ να είναι μονοχρωματικό. Αν $W_K = \prod_{i\in F} k_i \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} v_k$ τότε θα έχουμε οτι

$$c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_{kk_1})) = c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_{kk_2})) \tag{4.19}$$

για κάθε $k_1, k_2 \in K$. Παρατηρούμε οτι $\pi(g_k g_{k_1}) = \pi(g_k)\pi(g_{k_1}) = kk_1$ άρα μπορούμε να πάρουμε $g_{kk_1} = g_k g_{k_1}$. Ετσι η σχέση (4.15) γίνεται

$$c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_k g_{k_1})) = c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_k g_{k_2})) \tag{4.20}$$

για κάθε $k_1, k_2 \in K$.

Θέτουμε

$$W = \prod_{i\in F} W(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i^{g_k}$$

και παρατηρούμε οτι αν $g, g' \in G$ τότε $g = g_{\pi(g)}$ και $g' = g_{\pi(g')}$ και α΄ρα

$$c(W(g)) = c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_k g)) = c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_k g_{\pi(g)})) \overset{4.20}{=}$$

$$c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_k g_{\pi(g')})) = c(\prod_{i\in F} W_i(g_{k_i}) \prod_{k\in K} \prod_{i\in F_k} W_i(g_k g')) = c(W(g'))$$

Επίσης η λέξη $W$ έχει βαθμό $d = d_1 \cdot d_K$ και μήκος $N$ επομένως αποδείξαμε το ζητούμενο. □

Τωρα μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα 4.3. Το λήμμα που μόλις αποδείξαμε θα μας χρησιμεύσει γιατί θα κάνουμε επαγωγή πάνω στην υποκανονική ακολουθία ομάδων.

Αποδειξη. (4.3) Εστω $G$ πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα και $d \in \mathbb{N}$ ένας HJ-βαθμός της $G$. Εστω επίσης $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ η υποκανονική ακολουθία ομάδων με κυκλικούς παράγοντες $G_i/G_{i-1}$ τάξης $p_i$ για κάθε $i \in [n]$ και τέτοια ώστε $d = \prod_{i=1}^{n} p_i^{(p_i-1)\prod_{j>i} p_j}$. Θα δείξουμε επαγωγικά οτι για κάθε $k \in \{0, ..., n\}$ η ομάδα $G_k$ έχει την $d_k$-UHJP ιδιότητα οπου $d_k = d_{k-1}^{p_k} p_k^{p_k-1}$ και $d_0 = 1$. Για $k = 0$ η $G_0 = \{e\}$ έχει την $d_0$-UHJP αφού για κάθε $r \in \mathbb{N}$ όποιο $N$ και να πάρουμε έχουμε μόνο μια λέξη (αυτή που έχει παντού το $e$) και η βαθμού 1 λέξη που περιέχει σε κάποια θέση την μεταβλητή $v_e$ μας κάνει την δουλειά. Εστω οτι ισχύει για κάποιο $k \in \{0, ..., n-1\}$. Τότε η ομάδα $G_k$ έχει την $d_k$-UHJP. Επίσης η ομάδα $G_{k+1}/G_k$ είναι κυκλική τάξης $p_{k+1}$ και άρα απο το θεώρημα 3.3 έχει την $p_{k+1}^{p_{k+1}-1}$-UHJP ιδιότητα. Απο την παρατήρηση (3.3) η ομάδα $G_{k+1}$ είναι μια κανονική επέκταση της $G_{k+1}/G_k$ μέσω της $G_k$. Επομένως απο την πρόταση (3.11) η $G_{k+1}$ έχει την $d_k^{p_{k+1}} p_{k+1}^{p_{k+1}-1}$-UHJP. Επαγωγικά βλέπουμε οτι στο τέλος θα έχουμε οτι η $G$ έχει την $d_{n-1}^{p_n} p_n^{p_n-1}$-UHJP η αλλιώς έχει την $d$-UHJP. $\square$

Παρατηρηση 4.4. Συνδιάζωντας τα θεωρήματα 4.3 , 4.10 και την παρατήρηση 3.1 μπορούμε να πάρουμε το θεώρημα του Kriz (1.4). Πράγματι αν $X$ transitive και $G < S_X$ επιλύσιμη με δύο τροχιές στο $X$ , απο το θεωρημα 4.3 θέρουμε οτι η $G$ θα έχει την $d$-UHJP για κάποιο $d \in \mathbb{N}$ και συνεπώς απο το θεώρημα 4.10 θα υπάρχει μονοχρωματική λέξη για κάθε στοιχείο του $X$. Απο αυτή τη λέξη, εφαρμόζωντας την παρατήρηση 3.1 μπορούμε να βρούμε για κάθε χρωματισμό μια ισομετρία ώστε να υπάρχει μονοχρωματικό αντίγραφο του $X$.

Κεφάλαιο 5

# Θεώρημα Ramsey

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μας χρειάστηκε το θεώρημα Ramsey. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως αποδεικνύεται.

Ας το διατυπώσουμε ξανά:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. *Εστω $d, m, r$ θετικοί ακέραιοι με $d \geq m$. Υπάρχει θετικός ακέραιος $N$ τέτοιος ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του σύνόλου $\binom{[N]}{m}$ υπάρχει $A \in \binom{[N]}{d}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\binom{A}{m}$ είναι μονοχρωματικό.*

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί κατα μια έννοια την πεπερασμένη μορφή του παρακάτω γενικότερου θεωρήματος, το οποίο αφορά χρωματισμούς άπειρων αριθμήσημων συνόλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2. *Εστω $m, r$ θετικοί ακέραιοι. Τότε για κάθε $r$-χρωματισμό του $\binom{\mathbb{N}}{m}$ υπάρχει ενα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, έστω $M$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\binom{M}{m}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Στο παρών κεφάλαιο θα αποδείξουμε το θεώρημα 5.2 και θα δείξουμε πως αυτό συνεπάγεται την πεπερασμένη μορφή του θεωρήματος (5.1).

## 1. Απόδειξη του θεωρήματος 5.2

Αρχικά παρατηρούμε οτι το θεώρημα 5.2 μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε άπειρο αριθμήσιμο σύνολο. Αυτό είναι προφανές γιατι κάθε άπειρο αριθμήσιμο σύνολο μπορεί να αριθμηθή, δηλαδή υπάρχει μια ενα προς ενα και επί συνάρτηση απο το $\mathbb{N}$ στο σύνολο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον αριθμό $m$. Έστω $m = 1$ και ενας $c : \mathbb{N} \to [r]$ $r$-χρωματισμός του $\binom{N}{1}$. Τότε προφανώς θα υπάρχει άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που θα έχει το ίδιο χρώμα (αλλιώς θα καταλήγαμε στο οτι το $\mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο). Αυτήν την ιδιότητα για $m = 1$ ας την πούμε ip απο το infinite pigeanhole principle. Πρωτού πάμε στο γενικό βήμα ας δούμε και την περίπτωση για $m = 2$. Εστω ένας $r$-χρωματισμός $c : \binom{\mathbb{N}}{2} \to [r]$. Εστω $n_1 \in \mathbb{N}$ και $c_1 : \mathbb{N} \setminus [n_1] \to [r]$ ο χρωματισμός με

$$c_1(n) = c(\{n_1, n\}) \tag{5.1}$$

Απο το ip θα υπάρχει άπειρο σύνολο $M_1 \subset \mathbb{N} \setminus [n_1]$ το οποίο θα είναι μονοχρωματικό. Έστω $n_2 \in M_1$ και $c_2 : M_1 \setminus [n_2] \to [r]$ με

$$c_2(n) = c(\{n_2, n\}) \tag{5.2}$$

Απο το ip θα υπάρχει άπειρο σύνολο $M_2 \subset M_1 \setminus [n_2] \subset M_1$ το οποίο θα είναι μονοχρωματικό για τον χρωματιμσό $c_2$. Πέρνουμε $n_3 \in M_2$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία . Στο $k$ βήμα πέρνουμε το $n_k \in M_{k-1} \subset M_{k-2} \subset ... \subset M_1$ και τον χρωματισμό $c_k : M_{k-1} \setminus [n_k] \to [r]$ με

$$c_k(n) = c(\{n_k, n\}) \tag{5.3}$$

Ετσι βρίσκουμε το μονοχρωματικό σύνολο $M_k \subset M_{k-1} \setminus [n_k]$ για τον χρωματισμό $c_k$ και επιλέγουμε το $n_{k+1} \in M_k$. Ετσι κατασκευάζουμε την ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Παρατηρούμε οτι αν $i < j < k \in \mathbb{N}$ τότε $n_j, n_k \in M_i$ και άρα απο την σχέση (5.3) θα ισχύει $c_i(n_j) = c_i(n_k)$, δηλαδή

$$c(\{n_i, n_j\}) = c(\{n_i, n_k\})$$

Ετσι ορίζουμε τον χρωματισμό $c' : (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \to [r]$ με $c'(n_k) = c(\{n_k, n_s\})$ οπου $k \in \mathbb{N}$ και $s > k$. Τελικά απο το ip θα υπάρχει άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, έστω $M$, τέτοιο ώστε το $(n_s)_{s\in M}$ θα είναι μονοχρωματικό ως προς τον χρωματισμό $c'$. Παρατηρούμε τότε οτι για κάθε $\{i_1 < i_2\}, \{i_3 < i_4\} \in \binom{M}{2}$ θα ισχύει οτι $c'(n_{i_1}) = c'(n_{i_3})$ άρα $c(\{n_{i_1}, n_{i_2}\}) = c(\{n_{i_3}, n_{i_4}\})$. Συνεπώς το σύνολο $(n_s)_{\in M}$ είναι το επιθυμητό υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

Με αντίστοιχο τρόπο θα δείξουμε και το γενικό βήμα. Η μόνη ιδιαιτερότητα θα είναι στους χρωματισμούς που ορίζουμε για την ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Εστω λοιπόν οτι το θεώρημα ισχύει μέχρι και το $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 3$. Θα δείξουμε οτι ισχύει και για το $m+1$. Πράγματι έστω ένας $r$-χρωματισμός $c : \binom{\mathbb{N}}{m+1} \to [r]$ και $A_1 \in \binom{\mathbb{N}}{m}$. Ξεκινάμε την διαδικασία, όπως και στην περίπτωση που $m = 2$, κατασκευάζωντας τον χρωματισμό $c_1 : \mathbb{N} \setminus [maxA_1] \to [r]$ με

$$c_1(n) = c(A_1 \cup \{n\})$$

Απο το ip θα υπάρχει άπειρο υποσύνολο $M_1 \subset \mathbb{N} \setminus [maxA_1]$ το οποίο θα είναι μονοχρωματικό για τον χρωματισμό $c_1$. Επιλέγουμε $n_1 \in M_1$, θέτουμε $S_1 = A_1 \cup \{n_1\}$ και ορίζουμε τον χρωματισμό $c_2 : M_1 \setminus [n_1] \to [r]^m$ με

$$c_2(n) = (c(S \cup \{n\}))_{S\in\binom{S_1}{m}}$$

Απο το ip θα υπάρχει άπειρο υποσύνολο $M_2 \subset M_1 \setminus [n_1] \subset M_1$ μονοχρωματικό ως προς τον χρωματισμό $c_2$. Επιλέγουμε $n_2 \in M_2$, θέτουμε $S_2 = S_1 \cup \{n_2\}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Στο γενικό βήμα, έστω οτι έχουμε επιλέξει το $n_k \in M_k$, οπου $M_k \subset M_{k-1} \subset ... \subset M_1$ και θέτουμε $S_k = S_{k-1} \cup \{n_k\}$. Ορίζουμε τον χρωματισμό $c_{k+1} : M_k \setminus [n_k] \to [r]^{|\binom{S_k}{m}|}$ με

$$c_{k+1}(n) = (c(S \cup \{n\}))_{S\in\binom{S_k}{m}} \tag{5.4}$$

Απο το ip θα υπάρχει το άπειρο μονοχρωματικό υποσύνολο $M_{k+1} \subset M_k \setminus [n_k]$ και επιλέγουμε $n_{k+1} \in M_{k+1}$.

Ετσι κατασκευάζουμε την ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ οπου ισχύει το εξής: για κάθε $A \in \binom{(n_k)_{k\in\mathbb{N}}}{m}$ και $i, j \in \mathbb{N}$ με $i, j > maxA$, $c_{maxA}(n_i) = c_{maxA}(n_j)$ και απο την σχέση (5.4) έχουμε

$$c(A \cup \{n_i\}) = c(A \cup \{n_j\}) \tag{5.5}$$

Αρα μπορούμε να ορίσουμε τον χρωματισμό $c' : \binom{(n_k)_{k\in\mathbb{N}}}{m} \to [r]$ με

$$c'(A) = c(A \cup \{n\}) \tag{5.6}$$

για κάποιο $n \in (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $n > maxA$

Απο την επαγωγική υπόθεση θα υπάρχει άπειρο υποσύνολο $M \subset \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\binom{(n_s)_{s\in M}}{m}$ να είναι μονοχρωματικό στον χρωματισμό $c'$. Εστω τώρα $A, B \in \binom{(n_s)_{s\in M}}{m+1}$. Τότε ξέρουμε οτι $c'(A^*) = c'(B^*)$ και σύνεπώς απο την σχέση (5.6) $c(A) = c(B)$. Επομένως το σύνολο $(n_s)_{s\in M}$ είναι το επιθυμητό.

□

## 2. Απόδειξη του θεωρήματος Ramsey

Εχοντας την άπειρη μορφή του θεωρήματος Ramsey μπορούμε να αποδείξουμε την πεπερασμένη χρησιμοποιώντας κατα μια έννοια την αρχή της συμπάγιας. Θα ακολουθήσουμε την μέθοδο απαγωγής σε άτοπο.

Απόδειξη. 4.9

Εστω οτι δεν ισχύει το θεώρημα. Δηλαδή υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $r, d, m$ με $r \geq 2$ και $d > m$ τέτοιοι ώστε για κάθε $N \geq d$ υπάρχει $r$-χρωματισμός του συνόλου $\binom{N}{m}$, έστω $c$, τέτοιος ώστε να μην υπάρχει $A \in \binom{M}{d}$ με το σύνολο $\binom{A}{m}$ να είναι μονοχρωματικό. Στόχος είναι να κατασκευάσουμε, μέσω των χρωματισμών $c$ για κάθε $N$ όπως παραπάνω, εναν χρωματισμό του $\mathbb{N}$ και μέσω του θεωρήματος 5.2 να καταλήξουμε σε άτοπο.

Ξεκινάμε την διαδικασία για $N = d$. Προφανώς υπάρχει ενας χρωματισμός

$$c_0 : \binom{\{1,...,d\}}{m} \to [r]$$

τέτοιος ώστε να υπάρχουν δύο $m$-σύνολα με διαφορετικό χρώμα. Για $N = d+1$ πέρνουμε τον χρωματισμό

$$c_1 : \binom{\{1,...,d+1\}}{m} \to [r]$$

για τον οποίο κάθε σύνολο $A \in \binom{\{1,...,d+1\}}{d}$ έχει μή μονοχρωματικό το σύνολο $\binom{A}{m}$. Γενικά για $i = 0, 1, ...$ πέρνουμε τον χρωματισμό

$$c_i : \binom{\{1,...,d+i\}}{m} \to [r]$$

με την ζητούμενη ιδιότητα.

Εστω $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμηση των στοιχείων του συνόλου $\binom{\mathbb{N}}{m}$. Για το σύνολο $A_1$ ορίζεται το σύνολο $S_1 = \{i \in \mathbb{N} : A_1 \in \{1,...,d+i\}\}$. Πέρνουμε τον χρωματισμό $c^1 : S_1 \to [r]$ με $c^1(n) = c_n(A_1)$ και απο το ip θα υπάρχει ενα άπειρο σύνολο $M_1 \subset S_1$ μονοχρωματικό. Για το σύνολο $A_2$ υπάρχει όμοια το σύνολο $S_2$ και πέρνουμε τον χρωματισμό $c^2 : S_2 \cap M_1 \to [r]$ με $c^2(n) = c_n(A_2)$ και όμοια θα υπάρχει άπειρο υποσύνολο $M_2 \subset M_1$ μονοχρωματικό. Ομοια συνεχίζουμε την διαδικασία και βρίσκουμε την φθήνουσα ακολουθία συνόλων $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ η οποία μας επιτρέπει να ορίσουμε τον εξής χρωματισμό $c : \binom{\mathbb{N}}{m} \to [r]$ με

$$c(A_i) = c_k(A_i) \tag{5.7}$$

για $k \in M_i$

Απο το θεώρημα 5.2 θα υπάρχει άπειρο σύνολο $M \subset \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\binom{M}{m}$ να είναι μονοχρωματικό.

Εστω $A \in \binom{M}{d}$. Θέτουμε $I = \{i \in \mathbb{N} : A_i \in \binom{A}{m}\}$ και $a = maxI$. Αν $n \in M_a$ παρατηρούμε τα εξής:

Για κάθε $L \in \binom{A}{m}$ ισχύει $L \in \{1, ..., d+n\}$ και άρα $A \in \{1, ..., d+n\}$

Επίσης $c(L) = c_n(L)$ για κάθε $L \in \binom{A}{m}$. Επομένως καταλήγουμε στο ότι το σύνολο $\binom{A}{m}$ είναι μονοχρωματικό στον χρωματισμό $c_n$. Αυτό είναι άτοπο απο την υπόθεση και την κατασκευή των χρωματισμών $c_i$ με $i \in \{0, 1, ...\}$. Επομένως υπάρχει ο επιθυμητός θετικός ακέραιος $N$ για την τριάδα $d, m, r$.

$\square$

Κεφάλαιο 6

# Η σφαιρικότητα των συνόλων Ramsey

Ξεκινάμε με τον θεμελιώδη ορισμό της ευκλείδιας θεωρίας Ramsey.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1. ***(Ramsey σύνολο)*** *Εστω $X \subset \mathbb{R}^n$ πεπερασμένο για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Το $X$ ονομάζεται Ramsey αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = (X, r) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $r$-χρωματισμό του χώρου $\mathbb{R}^N$, υπάρχει μονοχρωματικό ισομετρικό αντίγραφο του $X$.*

Ο παραπάνω ορισμός γεννάει άμεσα το ερώτημα του ποιά σύνολα είναι Ramsey και ποια δεν είναι. Εχουμε δεί για παράδειγμα στο κεφάλαιο 2 οτι τα κανονικά πολύγωνα είναι Ramsey σύνολα. Απο την σύσταση του ορισμόυ των Ramsey συνόλων μέχρι και σήμερα δεν έχει βρεθεί κάποιος πλήρης χαρακτηρισμός αυτών των συνόλων, δηλαδή κάποια ισοδύναμη ιδιότητα η οποία να αφορά προυγουμένως γνωστές έννοιες. Η μοναδική πρόοδος που έχει πραγματοποιηθεί προς αυτήν την κατεύθηνση είναι το παρακάτω θεώρημα, το οποίο είναι και το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ενα Ramsey σύνολο. Τότε τα στοιχεία του $X$ ανήκουν στην επιφάνεια μιας μπάλας του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή είναι σφαιρικό. Πιο αναλυτικά θα υπάρχουν $v \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $||x - v|| = r$ για κάθε $x \in X$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος 6.2 θα χρειαστούμε κάποια λήμματα. Το ένα αφορά τον χαρακτηρισμό των σφαιρικών συνόλων και τα άλλα δύο αφορούν χρωματισμούς που αποτρέπουν μονοχρωματικές λύσεις σε ορισμένες εξισώσεις.

ΛΗΜΜΑ 6.3. *Εστω $X = \{x_0, ..., x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Το $X$ δεν είναι σφαιρικό αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $(\lambda_i)_{i\in[k]}$ όχι όλοι μηδεν τέτοιοι ώστε:*

(1) $\sum_{i\in[k]} \lambda_i(x_i - x_0) = 0$
*και*
(2) $\sum_{i\in[k]} \lambda_i(||x_i||^2 - ||x_0||^2) \neq 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. ($\Leftarrow$). Θέλουμε να δείξουμε οτι αν ισχύουν οι σχέσεις (1) και (2) τότε το σύνολο $X$ δεν μπορεί να είναι σφαιρικό. Αυτό είναι το ίδιο με το να δείξουμε οτι αν το $X$ είναι σφαιρικό δεν γίνεται να ισύουν τα (1) και (2) ταυτόχρονα. Εστω λοιπόν οτι το $X$ είναι σφαιρικό. Τότε θα υπάρχουν $v \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$||x_i - v||^2 = r^2 \tag{6.1}$$

για $i = 0, 1, ..., k$. Εστω επίσης οτι υπάρχουν οι πραγματικοί αριθμοί $(\lambda_i)_{i\in[k]}$ όχι όλοι μηδέν έτσι ώστε να ισχύει η (1), δηλαδή

$$\sum_{i\in[k]} \lambda_i(x_i - x_0) = 0$$

. Παρατηρούμε τώρα οτι για κάθε $i \in [k]$ ισχύει

$$||x_i||^2 - ||x_0||^2 = ||x_i||^2 - ||v||^2 - (||x_0||^2 - ||v||^2) = ||x_i - v||^2 + 2x_i v - (||x_0 - v||^2 + 2x_0 v)$$

$$= ||x_i - v||^2 - ||x_0 - v||^2 + 2(x_i - x_0)v \overset{(6.1)}{=} 2(x_i - x_0)v$$

Επομένως έχουμε

$$\sum_{i\in[k]} \lambda_i(||x_i||^2 - ||x_0||^2) = \sum_{i\in[k]} \lambda_i(2(x_i - x_0)v) = 2v \sum_{i\in[k]} \lambda_i(x_i - x_0) \overset{(1)}{=} 0$$

και άρα δεν ισχύει η σχέση (2).

($\Rightarrow$) Εστω οτι το $X$ δεν είναι σφαιρικό. Θα δείξουμε οτι ισχύουν οι σχέσεις (1) και (2). Επειδή κάθε σύνολο με τρεία η λιγότερα στοιχεία ειναι σφαιρικό, μπορούμε να υποθέσουμε οτι το $X$ είναι ελαχιστικά σφαιρικό. Δηλαδή οτι αν αφαιρέσουμε οποιοδοίποτε στοιχείο του $X$ το σύνολο που απομένει θα είναι σφαιρικό. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας διότι αν δεν ισχύει απλως αφαιρούμε ένα ένα τα στοιχεία του $X$ μέχρι να ισχύει. Αν τα διανύσματα $x_i - x_0$ για $i \in [k]$ ηταν γραμμικά ανεξάρτητα το $X$ θα ήταν simplex το οποίο είναι πάντα σφαιρικό. Άρα τα $x_i - x_0$ για $i \in [k]$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $(\lambda_i)_{i\in[k]}$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\sum_{i\in[k]} \lambda_i(x_i - x_0) = 0$$

Δηλαδή η σχέση (1). Εφόσον τα $(\lambda_i)_{i\in[k]}$ δεν είναι όλα μηδέν υποθέτουμε οτι $\lambda_k \neq 0$. Απο την υπόθεση το σύνολο $X = \{x_0, ..., x_{k-1}\}$ είναι σφαιρικό οπότε υπάρχουν $v \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ με

$$||x_i - x_0||^2 = r^2 \tag{6.2}$$

για $i = 0, 1, ..., k - 1$ και συνεπώς

$$\sum_{i\in[k]} \lambda_i(||x_i||^2 - ||x_0||^2) = \sum_{i\in[k]} \lambda_i\{||x_i - v||^2 - ||x_0 - v||^2 + 2(x_i - x_0)v\}$$

$$= \sum_{i\in[k]} \lambda_i(||x_i - v||^2 - ||x_0 - v||^2) + 2v \sum_{i\in[k]} \lambda_i(x_i - x_0) \overset{(1),(6.2)}{=} \lambda_k(||x_k - v||^2 - r^2) \neq 0$$

Επομένως ισχύει και η σχέση (2).

□

Έχοντας την παραπάνω ισοδυναμία, τώρα θα κατευθηνθούμε προς την απόδειξη δύο λημμάτων που αφορούν εξισώσεις οι οποίες δεν επιδέχονται μονοχρωματικές λύσεις. Αυτά θα μας επιτρέψουν να εφαρμόσουμε την ισοδύναμια που μας δίνει το λήμμα 6.3 και τελικά να αποδείξουμε το θεώρημα 6.2.

Λημμα 6.4. *Εστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $2n$-χρωματισμός του $\mathbb{R}$, έστω $c : \mathbb{R} \to [2n]$, τέτοιος ώστε η εξίσωση*

$$\sum_{i\in[n]} (x_i - x_i') = 1 \tag{6.3}$$

*να μην επιδέχεται λύση για την οποία ισχύει $c(x_i) = c(x_i')$ για κάθε $i \in [n]$*

Αποδειξη. Διαμερίζουμε το $\mathbb{R}$ ως εξής: Αρχικά σε διαστηματα μήκους 2 με τα σύνολα $[m, m+2)$ για κάθε $m$ ακέραιο και έπειτα κάθε τέτοιο διάστημα το διαμερίζουμε σε $2n$ υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{n}$. Αρα καταλήγουμε για κάθε ακέραιο $m$ να έχουμε τα διαστήματα $[m+\frac{j-1}{n}, m+\frac{j}{n})$ με $j \in [2n]$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $c(x) = j$ οπου το $j$ είναι τέτοιο ώστε $x \in [m + \frac{j-1}{n}, m + \frac{j}{n}$ για κάποιο $m$ ακέραιο. Δηλαδή χρωματίζουμε περιοδικά το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε για κάθε $j \in [2n]$ τα διαστήματα $[m+\frac{j-1}{n}, m+\frac{j}{n})$ να έχουν το ίδιο χρώμα για κάθε $m$ ακέραιο. Παρατηρούμε οτι αν $x, x' \in \mathbb{R}$ με $c(x) = c(x')$ τότε $x - x' = 2k + l$ οπου $k$ ακέραιος και $l \in \mathbb{R}$ με $|l| < \frac{1}{n}$. Άρα αν $(x_i)_{i\in[n]}, (x_i')_{i\in[n]}$ μια λύση της εξίσωσης τέτοια ώστε $c(x_i) = c(x_i')$ για κάθε $i \in [n]$ θα ισχύει

$$1 = \sum_{i\in[n]} (x_i - x_i') = 2 \sum_{i\in[n]} k_i + \sum_{i\in[n]} l_i$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το $\sum_{i\in[n]} k_i$ είναι ακέραιος και το $\sum_{i\in[n]} l_i$ είναι πραγματικός με $|\sum_{i\in[n]} l_i| < 1$

□

Το επόμενο λήμμα αποτελεί γενίκευσει του παραπάνω αποτελέσματος και είναι αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε τελικά στην απόδειξη του θεωρήματος 6.2.

Λημμα 6.5. *Εστω $(\lambda_i)_{i\in[n]}$ και $b \neq 0$, πραγματικοί αριθμοί για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $(2n)^n$-χρωματισμός του $\mathbb{R}$, έστω $c : \mathbb{R} \to [(2n)^n]$, τέτοιος ώστε η εξίσωση*

$$\sum_{i\in[n]} \lambda_i (x_i - x_i') = b \tag{6.4}$$

*να μην επιδέχεται λύση τέτοια ώστε $c(x_i) = c(x_i')$ για κάθε $i \in [n]$*

Αποδειξη. Αρχικά προσασμόζουμε την εξίσωση (6.4) ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο λήμμα.

$$\sum_{i\in[n]} \lambda_i(x_i - x_i') = b \Leftrightarrow \sum_{i\in[n]} \frac{\lambda_i}{b}(x_i - x_i') = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\in[n]} \tilde{\lambda}_i(x_i - x_i') = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\in[n]} (\tilde{\lambda}_i x_i - \tilde{\lambda}_i x_i') = 1$$

οπου $\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{b}$ Αρα η εξίσωση (6.4) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sum_{i\in[n]} (\tilde{\lambda}_i x_i - \tilde{\lambda}_i x_i') = 1 \tag{6.5}$$

Εστω $c' : \mathbb{R} \to [2n]$ ο χρωματισμός απο το λήμμα 6.4 για $n$. Ορίζουμε τον χρωματισμό $c : \mathbb{R} \to [(2n)^n]$ με

$$c(x) = (c'(\tilde{\lambda}_i x))_{i\in[n]} \tag{6.6}$$

Αν $(x_i)_{i\in[n]},(x'_i)_{i\in[n]} \subset \mathbb{R}$ μια λύση της εξίσωσης (6.5) με $c(x_i)=c(x'_i)$ για κάθε $i\in[n]$, τότε απο την (6.6) θα έχουμε οτι για κάθε $i\in[n]$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
&c'(\tilde{\lambda_1}x_i)=c'(\tilde{\lambda_1}x'_i)\\
&c'(\tilde{\lambda_2}x_i)=c'(\tilde{\lambda_2}x'_i)\\
&.\\
&.\\
&.\\
&c'(\tilde{\lambda_n}x_i)=c'(\tilde{\lambda_n}x'_i)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή τα $(\tilde{\lambda_i}x_i)_{i\in[n]},(\tilde{\lambda_i}x'_i)_{i\in[n]}$ είναι λύση της εξίσωσης (6.5) και $c'(\tilde{\lambda_i}x_i)=c'(\tilde{\lambda_i}x'_i)$ για κάθε $i\in[n]$ το οποίο είναι άτοπο απο την επιλογή του $c'$.

□

Με τα παραπάνω εργαλεία μπορούμε τελικά να αποδείξουμε το θεώρημα 6.2.

Αποδειξη. (6.2)

Έστω οτι το σύνολο $X=\{x_0,x_1,...,x_k\}\subset\mathbb{R}^n$ δεν είναι σφαιρικό. Τότε απο το λήμμα 6.3 θα υπάρχουν οι πραγματικοί αριθμοί $(\lambda_i)_{i\in[k]}$ όχι όλοι μηδέν και $b\in\mathbb{R}$ με $b\neq 0$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (1),(2). Δηλαδή

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i(x_i-x_0)=0$$

και

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i(||x_i||^2-||x_0||^2)=b$$

Αρχικά παρατηρούμε οτι για ένα αντίγραφο $X'$ του συνόλου $X$ σε κάποιο χώρο μεγαλήτερης διάστασης $m$, οι σχέσεις (1),(2) εξακολουθούν να ισχύουν. Έστω $c:\mathbb{R}\to[(2k)^k]$ ο χρωματισμός που δίνει το λήμμα 6.5 για τις παραμέτρους $(\lambda_i)_{i\in[k]}$ και $b$. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ με $m\geq n$ ορίζουμε τον χρωματισμό $c_m:\mathbb{R}^m\to[(2k)^k]$ με

$$c_m(x)=c(||x||^2) \tag{6.7}$$

Αν το $X$ είναι Ramsey, θα υπάρχει διάσταση $m\geq n$ και ενα αντίγραφο του $X$, έστω $X'$ το οποίο θα είναι μονοχρωματικό στον χρωματισμό $c_m$ και θα ικανοποεί τις σχέσεις (1),(2). Δηλαδή θα υπάρχει λύση της εξίσωσης

$$\sum_{i\in[k]}\lambda_i(||x_i||^2-||x_0||^2)=b$$

με $c(||x_i||^2)=c(||x_0||^2)$ το οποίο είναι αδύνατο απο την επιλογή του χρωματισμού $c$. Επομένως το $X$ πρέπει να είναι σφαιρικό.

□

# Βιβλιογραφία


[1] I.Leader, P.Russell and M.Walters. Transitive sets and cyclic quadrilaterals. *arXiv preprint arXiv:1012.5468*, 2010.

[2] Walter Feit and John G Thompson. *Solvability of groups of odd order*. Pacific Journal of Mathematics, 1963.

[3] Peter Frankl and Vojtech Rödl. A partition property of simplices in euclidean space. *Journal of the American Mathematical Society*, 3(1):1–7, 1990.

[4] Ronald L Graham. Recent trends in euclidean ramsey theory. *Discrete Mathematics*, 136(1-3):119–127, 1994.

[5] Alfred W Hales and Robert I Jewett. Regularity and positional games. *Transactions of the American Mathematical Society*, 106(2):222–229, 1963.

[6] Vassilis Kanellopoulos and Miltiadis Karamanlis. A hales–jewett type property of finite solvable groups. *Mathematika*, 66(4):959–972, 2020.

[7] Miltiadis Karamanlis. Simplices and regular polygonal tori in euclidean ramsey theory. *arXiv preprint arXiv:2105.07689*, 2021.

[8] Igor Kříž. Permutation groups in euclidean ramsey theory. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 112(3):899–907, 1991.

[9] I. Leader, P. Russel and M. Walters. Transitive sets in Euclidean Ramsey theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 119(2):382–396, 2012.

[10] P.Erdös, R.L Graham, P. Montgomery, B.L Rothschild, J Spencer and E.G Straus. Euclidean ramsey theorems. I. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 14(3):341–363, 1973.