Διπλωματική Εργασία

Αριθμητικές Συναρτήσεις

&

Η Συνάρτηση ζ του Riemann

Μάντσης Κοσμάς

09104093

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε

2011

Επιβλέπων Καθηγητής :

Αλέξανδρος Χ. Παπαϊωάννου

Εξεταστική Επιτροπή:

Σ. Λαμπροπούλου	Α. Παπαϊωάννου	Π. Στεφανέας
Αν. Καθηγήτρια	Αν. Καθηγητής	Λέκτρορας

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας ,θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω όλους εκείνους που με την συμβολή και την παρότρυνση τους συνέβαλαν στην υλοποίηση της.
Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Αλέξανδρο Παπαϊωάννου, ο οποίος με την καθοδήγηση του κατάφερε να με εισάγει στον κόσμο της Θεωρίας Αριθμών.
Εν συνεχεία, θα ήθελα να τονίσω την σημαντική συμβολή της καθηγήτριας κα. Λαμπροπούλου, με την παρότρυνση της οποίας κατάφερα να συνεχίσω την διπλωματική μου εργασία στο πανεπιστήμιο του ,δίνοντάς μου παράλληλα με τον τρόπο αυτό και μια εμπειρία ζωής.
Σωστό σ' όλη αυτή την πορεία μου , θα ήταν να πω ένα ευχαριστώ στον καθηγητή κ.Patterson ,τόσο για την ακαδημαϊκή φιλοξενία του, όσο και για την συμβολή του στην ορθή κατανόηση από μέρους μου , της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών.
Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή Ρασσιά που με έφερε σε επαφή και μου έδωσε το βιβλίο του H. M. Edwards , καθώς και τον επιβλέποντα και τον Μ. Ρασσιά για την σημαντική βοήθεια που μου πρόσφερε το βιβλίο τους στην θεωρία αριθμών.
Δεν θα μπορούσα, όμως, να μην αναφερθώ στους φίλους και συμφοιτητές μου ευχαριστώντας τους για το υπέροχο αυτό ταξίδι των φοιτητικών μας χρόνων.
Τέλος, συμπαραστάτες και συνοδοιπόροι μου σε όλα τα χρόνια της φοιτητικής μου πορείας στάθηκαν οι γονείς και ο αδερφός μου ,που με την στήριξη τους, οικονομική και ηθική, κατάφερα εγώ να σπουδάσω και να υλοποιήσω τα όνειρα μου. Σ' αυτούς αξίζει το μεγαλύτερο ευχαριστώ.

Πρόλογος

Η παρούσα πτυχιακή εργασία αποτελεί μια εισαγωγή σε βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών. Πιο συγκεκριμένα μελετάμε τις αριθμητικές συναρτήσεις και την συνάρτηση ζ του Riemann, και τέλος προσπαθήσαμε να συνδέσουμε τις δύο αυτές έννοιες.

Στο πρώτο κεφάλαιο παραθέτουμε τους βασικούς ορισμούς της Θεωρίας Αριθμών, όπως αυτούς των πρώτων αριθμών, των αριθμητικών συναρτήσεων και κάποια σημαντικά θεωρήματα όπως το Μικρό Θεώρημα του Fermat, το Θεώρημα Auler-Fermat και αυτό του Legendre.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζουμε κάποιες πολύ γνωστές αριθμητικές συναρτήσεις, όπως αυτη του Euler, του Mobius και τις συναρτήσεις των διαιρετών, όπως είναι η τ(n) και η σ(n). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες τους και εξετάζουμε αν είναι πολλαπλασιαστικές.

Το τρίτο κεφάλαιο εξετάζει τις συναρτήσεις π(x) και li(x), που αν και δεν είναι αριθμητικές συναρτήσεις παρουσιάζουν ενδιαφέρον στην μελέτη των πρώτων αριθμών. Επίσης δίνουμε ένα αριθμητικό φράγμα για την π(x) μέσω μιας ανισότητας και το αποδεικνύουμε.

Με το τρίτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται το μέρος της Θεωρίας Αριθμών και προχωράμε στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμων μελετώντας την συνάρτηση ζ και την εικασία του Riemann. Αναλυτικότερα, στο τέταρτο κεφάλαιο βλέπουμε τα βασικά σημείας της εργασίας του Riemann με τίτλο “On the Number of Primes less than a Given Magnitude” και πως καταλήγει στην καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης π(x). Υπολογίζουμε αριθμητικές τιμές της ζ για το 2 και για κάθε άρτιο, και τέλος βλέπουμε μία εφαρμογη της.

Στη συνέχεια, το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στην Εικασία του Riemann με την βοήθεια της συνάρτησης ξ(x). Εν συνεχεία αποδεικνύουμε μέσω εργαλείων ασυμπτωτικής ανάλυσης μια αναγκάια συνθήκη της Εικασίας.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο βλέπουμε την συνάρτηση ζ σαν γεννήτρια συνάρτηση και τη σχέση της με τις αριθμητικές συναρτήσεις. Με αυτό τον τρόπο συνδέονται τα δύο μέρη της διπλωματικής εργασίας και κλείνει η εργασία.

Abstract

The primary objective in my diploma thesis is to make an introduction to Arithmetic Functions and to Riemann's Zeta Function. The first chapter is introductory and contains the basic definitions and theorems in Number Theory. The second chapter is about the basic arithmetic functions, such as the function of Euler and Mobius. The third chapter focuses on functions $\pi(x)$ and li(x), so we can study the distribution of prime numbers on the set of real numbers. However, the first three chapters concern Number Theory, unlike the last three chapters, where we deal with Analytic Number Theory, by introducing the Riemann's Zeta function and the Riemann Hypothesis. Specifically, the forth chapter focuses on the basic points of Riemann's paper "On the Number of Primes Less than a Given Magnitude" and we compute some arithmetic values for the Riemann Zeta Function. Moreover, the objective of the fifth chapter is the Riemann Hypothesis and the proof of a sufficient condition of the Hypothesis. In conclusion, in the sixth chapter, we study the Zeta Function as a generating function and we connect it to the arithmetic functions.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μια βασική εισαγωγή στην θεωρία αριθμών και ουσιαστικά περιέχει βασικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν στα παρακάτω κεφάλαια. Αρκετές αποδείξεις παραλείπονται, διότι αποτελούν τετριμένες γνώσεις θωρίας αριθμών.

Στην θεωρία αριθμών κεντρικό ρόλο διαδραματίζουν οι πρώτοι αριθμοί:

Ορισμός 1.1 Κάθε θετικός ακέραιος αριθμός, μεγαλύτερος της μονάδας, ο οποίος διαρείται μόνο με τον εαυτό του και την μονάδα, καλείται πρώτος αριθμος.

Ορισμός 1.2 Δύο αριθμοί $a,b \in \mathbb{Z}$ ονομάζονται πρώτοι προς αλλήλους ή πρώτοι μεταξύ τους αν δεν υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{N}$, $c > 1$ τέτοιος ώστε να διαιρεί και τον a και τον b. Συμβολίζουμε $(a,b) = 1$, όπου (a,b) είναι ο Μεγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) του a και του b.

Λημμα 1.1 (1ο θεώρημα Ευκλείδη/Λήμμα Ευκλείδη) Έστω p πρώτος, $a,b \in \mathbb{Z}$. Αν $p \mid ab$ τότε $p \mid a$ ή $p \mid b$.

Θεώρημα 1.1 (Θεμελιώδης Θεώρημα της Αριθμητικής) Κάθε θετικός ακέραιος n μπορεί να αναπαρασταθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων κατά μοναδικό τρόπο με την εξής μρφή $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_n^{e_n}$.

Ορισμός 1.3 Δύο ακέραιοι αριθμοί a,b καλούνται ισοδύναμοι ή ισοϋπόλοιποι modulo m , όπου m ένας ακέραιος αριθμός, αν ο m διαιρεί την διαφορά a-b. Συμβολίζουμε: $a \equiv b (\bmod m)$.

Λήμμα 1.2 Έστω p πρώτος και $a,b \in \mathbb{Z}$. Τότε $(a+b)^p \equiv a^p + b^p (\bmod p)$

Απόδειξη:

Από το Διώνυμο του Νεύτωνα έχουμε: $(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} a^{p-r} b^r$.

Θα δείξουμε ότι $\sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{r}a^{p-r}b^{r} \equiv 0(\mathrm{mod}\, p) \Leftrightarrow p \mid \sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{r}a^{p-r}b^{r}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $p \mid \binom{p}{r}$:

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!} = \frac{p(p-1)(p-r+1)}{r!}$$

$$\Leftrightarrow p(p-1)(p-r+1) = \binom{p}{r}r! \Leftrightarrow p \mid \binom{p}{r}r!$$

$p \nmid 1,2,...,p-1$ αφού ο p είναι πρώτος. Επίσης ξέρουμε πως $r < p$ άρα $p \nmid r!$

Άρα $p \mid \binom{p}{r}$.

Θεώρημα 1.2 (Το Μικρό Θεώρημα του Fermat) Αν ο p είναι πρώτος και $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,p)=1$ τότε $a^{p-1} = 1(\mathrm{mod}\, p)$

Απόδειξη:

Εφόσον $(a,p)=1$ αρκεί να δείξουμε ότι $a^{p} = a(\mathrm{mod}\, p)$. Θα το αποδείξουμε παίρνοντας περιπτώσεις για το a:

Για $a=0$ είναι προφανές.

Έστω το $a \in \mathbb{N}$, με επαγωγή στο a έχουμε:

Για $a=1$: $1^{p} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, που ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για a, δηλαδή $a^{p} \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$, θα δείξω ότι ισχύει για $a+1$:

$(a+1)^{p} \equiv a^{p} + 1^{p}(\mathrm{mod}\, p)$ (από Λήμμα 1.2)

$\Leftrightarrow (a+1)^{p} \equiv a^{p} + 1(\mathrm{mod}\, p) \Leftrightarrow (a+1)^{p} \equiv a+1(\mathrm{mod}\, p)$ (από επαγωγική υπόθεση)

Άρα αν $a \in \mathbb{N}$ ισχύει.

Έστω τώρα ότι $a < 0$.

Τότε $-a > 0$ και έχουμε πως $(-a)^{p} = -a(\mathrm{mod}\, p) \Leftrightarrow (-1)^{p}a^{p} = -a(\mathrm{mod}\, p)$

Αν $p \neq 2 \Rightarrow (-1)^{p} = -1$ έχουμε ισοδύναμα:

$-a^p \equiv -a(\bmod p) \Leftrightarrow a^p \equiv a(\bmod p)$.

Αν $p = 2 \Rightarrow (-1)^2 = 1$ και $-a \equiv a(\bmod 2)$.

Οπότε έχουμε ισοδύναμα ότι $a^2 \equiv a(\bmod 2)$.

Παράδειγμα: Έχουμε ότι $(3,7) = 1$, σύμφωνα με το Μικρό Θεώρημα του Fermat υπολογίζουμε: $3^{7-1} \bmod 7 = 3^6 \bmod 7 = 1 \bmod 7$.
Πράγματι $3^6 \bmod 7 = 729 \bmod 7 = (7 \cdot 104 + 1) \bmod 7 = 1 \bmod 7$

Ορισμός 1.4 Αριθμητικές συναρτήσεις καλούνται όλες εκείνες οι συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού , τους φυσικούς αριθμούς ή κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

Ορισμός 1.5 Μια αριθμητική συνάρτηση f καλείτε πολλαπλασιαστική (multiplicative function) όταν ισχύει $f(1) = 1$ και $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $(m,n) = 1$. Αν m, n δεν είναι πρώτοι προς αλλήλους και οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ τότε η f καλείτε πλήρως πολλαπλασιαστική.

Ορισμός 1.6 Η συνάρτηση Euler $\varphi(n)$ μας δίνει το πλήθος των αριθμών, οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι και πρώτοι προς τον n.

Μερικές τιμές δίνονται στο πίνακα:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί γενίκευση του μικρού θεωρήματος του Fermat:

Θεώρημα 1.3 (Το θεώρημα Fermat-Euler): Αν $a, m \in \mathbb{Z}$ και $(a, m) = 1$, τότε $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$.

Έτσι αν ο m είναι πρώτος, φ(m)=m-1, και έχουμε το Μικρό Θεώρημα του Fermat.

Παράδειγμα: Έχουμε (7,9)=1, τότε το Θεώρημα Fermat-Euler μας λέει ότι
$7^{\varphi(9)} \bmod 9 = 7^6 \bmod 9 = 1 \bmod 9$. Πράγματι
$7^6 \bmod 9 = 117649 \bmod 9 = (13072 \cdot 9 + 1) \bmod 9 = 1 \bmod 9$

Θεώρημα 1.4 (Το θεώρημα Legendre) Εάν ο n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και ο p πρώτος τέτοιος ώστε $p \mid n$, τότε ο p εμφανίζεται στην κανονική αναπαράσταση του n! με εκθέτη e_p, όπου $e_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Απόδειξη:

Για ένα δεδομένο ακέραιο k, τα πολλαπλάσια του p^k τα οποία δεν ξεπερνούν το n είναι τα $p^k, 2p^k, 3p^k, \ldots, qp^k$, όπου ο q είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος τέτοιος ώστε $qp^k \leq n$. Δηλαδή ο q είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνάει τον $\frac{n}{p^k}$. Με άλλα λόγια είναι ίσος με τον $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Έτσι ο p^k είναι ο αριθμός των θετικών πολλαπλασιών του p^k οι οποίοι δεν ξεπερνούν το n .

Εάν τώρα $m = qp^k$, με $1 \leq m \leq n$ και $(p,q) = 1$, και $0 \leq k \leq r$, τότε ο m συνεισφέρει ακριβώς k στο σύνολο του εκθέτη e_p, με τον οποίο ο p εμφανίζεται στην κανονική αναπαράσταση του n! .

Επιπλέον ο m μετράται ακριβώς k φορές στο άθροισμα : $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$ μια φορά σαν πολλαπλάσιο του p, μια σαν πολλαπλάσιο του p^2,…, μια σαν πολλαπλάσιο του p^k και καμοία άλλη φορά. Αν $k = 0$, τότε ο m δεν προσμετράται στο άθροισμα.

Γι' αυτό τον λόγο $e_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα: $9 = 3^2$, πόσες φορές θα εμφανίζεται το 3 στο 9 παραγοντικό;

Το θεώρημα του Legendre μας λέει ότι εμφανίζεται με εκθέτη e_3, που δίνεται απο την σχέση

$$e_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{9}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{3^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9}{3^4} \right\rfloor + \ldots = \lfloor 3 \rfloor + \lfloor 1 \rfloor + \lfloor 0.33 \rfloor + \ldots = 3 + 1 + 0 + 0 + \ldots = 4$$

Ας δούμε τώρα πως πως αναπτύσεται σε πρώτους παράγοντες το 9!:

$$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Βλέπουμε δηλαδή οτί το θεώρημα του Legendre μας δίνει ακριβώς τον εκθέτη του αριθμού 3 στο 9! .

Κεφάλαιο 2ο

Αριθμητικές Συναρτήσεις

§2.1. Η συνάρτηση Euler $\varphi(n)$

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η συνάρτηση Euler είναι μια αριθμητική συνάρτηση η οποία μας δίνει τους αριθμούς που είναι μικρότεροι και πρώτοι προς τον n. Παρακάτω θα εξετάσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες:

Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση και ως εξής: $\varphi(n) = \sum_{m=1}^{n} \left\lfloor \frac{1}{(m,n)} \right\rfloor$

Πρόταση 2.1: Η συνάρτηση $\varphi(n)$ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή $\forall m,n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(m,n)=1$, τότε $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

Απόδειξη:

Αρχικά υποθέτουμε πως $m,n > 1$,διαφορετικά το πρόβλημα είναι τετριμένο αφού $\varphi(1)=1$. Ταξινομούμε τους φυσικούς $1,2,....,mn$ σε ένα πίνακα με n στήλες και m γραμμές:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & m \\ m+1 & m+2 & m+3 & \ldots & 2m \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ (n-1)m+1 & (n-1)m+2 & (n-1)m+3 & \ldots & nm \end{array}$$

Οι i φυσικοί αποτελούν ενα πλήρες σύστημα υπολοίπων[1] $\bmod mn$, έτσι η $\varphi(mn)$ είναι το πλήθος των i που είναι πρώτοι προς τον mn ή ισοδύναμα ικανοποιούν την σχέση $(i,m)=(i,n)=1$.

Βλέπουμε πως οι φυσικοί σε μια συγκεκριμένη στήλη είναι ισοδύναμοι $\bmod m$ και οι m στήλες αποτελούν m κλάσεις υπολοίπων $\bmod m$. Άρα ακριβώς $\varphi(m)$ στήλες αποτελούνται από i φυσικούς αριθμούς που είναι πρώτοι προς τον m, ενώ στις υπόλοιπες στήλες τα i στοιχεία τους έχουν έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη $(i,m)>1$.

---

[1] Ορισμός 1. : Καλούμε κλάση υπολοίπων $[a] \pmod n$, όλους εκείνους τους αριθμούς που έχουν υπόλοπο $a \pmod n$.

Τώρα κάθε στήλη που περιέχει στοιχεία πρώτα με τον m έχει την μορφή c, m+c, 2m+c, ... , (n-1)m+c , για κάποιο c φυσικό αριθμό. Ξέρουμε ότι το σύνολο $\mathrm{A} = \{1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{n}\text{-}1\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο υπολοίπων $\bmod n$.

<u>Ισχυρισμός:</u> Το σύνολο $\mathrm{B} = \{a \cdot m + c \mid a \in A\}$ είναι πλήρες σύνολο υπολοίπων.

Απόδειξη Ισχυρισμού:

Εάν το $am + c \equiv a'm + c \pmod n$, όπου $a, a' \in A$, αυτό συνεπάγεται , την απαλοιφή του c και του m, επειδή $(m,n) = 1$, πως $a \equiv a' \pmod n$, δηλαδή $a = a'$. Έτσι βλέπουμε ότι τα στοιχεία $a \cdot m + c$ ανήκουν όλα σε διαφορετικές κλάσεις υπολοίπων , άρα το Β είναι πλήρης κλάση υπολοίπων $\bmod n$.

Αυτες οι στήλες λοιπόν, περιέχουν $\varphi(n)$ φυσικούς αριθμούς πρώτους προς τον n. Δηλαδή $\varphi(m)$ στήλες περιέχουν $\varphi(n)$ φυσικούς αριθμούς i που είναι πρώτοι προς τον mn. Άρα $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Πρόταση 2.2 Για κάθε αριθμό $n = p^e$, όπου p πρώτος, ισχύει ότι $\varphi(n) = p^e - p^{e-1}$

Απόδειξη:

Ο $\varphi\left(p^e\right)$ είναι το πλήθος των ακεραίων $\left\{1,...,p^e\right\}$, οι οποίοι είναι πρώτοι προς τον p^e, οι οποίοι δεν διαιρούνται από τον p . Αυτό το σύνολο έχει p^e στοιχεία, από τα οποία $p^e/p = p^{e-1}$ είναι πολλαπλάσια του p. Άρα $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1}$.

Πρόταση 2.3 Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$, όπου το άθροισμά είναι πάνω σε όλους τους διαιρέτες d του n.

Απόδειξη:

Έστω $S = \{1,2,...,n\}$. Κάθε στοιχείο a του συνόλου S έχει μια σχέση διαιρετότητας με το n, δηλαδή είτε είναι πρώτο προς το είναι είτε $(a,n) = d$, όπου d διαρέτης του n. Ορίζουμε τα σύνολα $S_d = \left\{a \in S : (a,n) = \dfrac{n}{d}\right\}$. Τα σύνολα S_d, διαμερίζουν το S σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, αφού αν το $a \in S$ τότε $(a,n) = \dfrac{n}{d}$, μοναδικός διαιρέτη του n. Έτσι $\sum_{d \mid n} \left|S_d\right| = \left|S\right| = n$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\left|S_d\right| = \varphi(d)$.

Τώρα $a \in S_d \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z} : 1 \le a \le n, (a,n) = \frac{n}{d}$ (1). Κατασκευάζουμε $\forall a$: $a' = a \cdot \frac{d}{n}$, το $a' \in \mathbb{Z}$, αφού $\frac{n}{d} = (a,n)$. Μετασχήματίζοντας την δεξια πλευρά της ισοδυναμίας (1), διαιρώντας της με το n/d, έχουμε: $a \in S_d \Leftrightarrow a = \frac{n}{d} \cdot a', \ a' \in \mathbb{Z} : 1 \le a' \le d \ \kappa\alpha\iota \ (a',d) = 1$

Έτσι το $|S_d|$, είναι ο αριθμός των a', που βρίσκοντα αποκλειστικά μεταξύ του 1 και του d, και είναι πρώτοι προς το d, δηλαδή $|S_d| = \varphi(d)$.

Παράδειγμα: Εξετάζουμε τον αριθμό 12. Οι διαιρέτες του είναι: 1,2,3,4,6,12. Υπολογίζουμε το άθροισμα:

$$\sum_{d|12} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$$

Βλέπουμε ότι η πρόταση μας επαληθεύεται.

Πρόταση 2.4 Για κάθε φυσικό αριθμό n του οποίου η κανονική μορφή είναι $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$ ισχύει ότι $\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

Απόδειξη:

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον δείκτη k .

Για $k = 1$, από την Πρόταση 2.2 , που αποδείξαμε παραπάνω, ισχύει η επαγωγική μας βάση.

Έστω ότι ισχύει για k, θα δείξουμε ότι ισχύει για k+1:

Ο n γράφεται ώς εξής: $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k} p_{k+1}^{e_{k+1}}$. Τώρα όμως οι $p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$ και $p_{k+1}^{e_{k+1}}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους (από τον ορισμό της κανονικής αναπαράστασης ενός φυσικού αριθμού)

Άρα από την Πρόταση 2.1 έχουμε:

$$\varphi(n)=\varphi\left(p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\cdot p_{k+1}^{e_{k+1}}\right)=\varphi\left(p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\right)\cdot\varphi\left(p_{k+1}^{e_{k+1}}\right)$$
$$=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\left(p_{k+1}^{e_{k+1}}-p_{k+1}^{e_{k+1}-1}\right)$$
$$=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot p_{k+1}^{e_{k+1}}\cdot\left(1-\frac{1}{p_{k+1}}\right)$$
$$=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}p_{k+1}^{e_{k+1}}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_{k+1}}\right)$$
$$=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_{k+1}}\right)$$

$$\varphi(n)=\varphi\left(p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\cdot p_{k+1}^{e_{k+1}}\right)=\varphi\left(p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\right)\cdot\varphi\left(p_{k+1}^{e_{k+1}}\right)$$
$$=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\left(p_{k+1}^{e_{k+1}}-p_{k+1}^{e_{k+1}-1}\right)$$
$$=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot p_{k+1}^{e_{k+1}}\cdot\left(1-\frac{1}{p_{k+1}}\right)$$
$$=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}p_{k+1}^{e_{k+1}}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_{k+1}}\right)$$
$$=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_{k+1}}\right)$$

Μια δεύτερη απόδειξη βασίζεται στην Αρχή του Εγκλισμού-Αποκλεισμού.

Η παραπάνω πρόταση μας βοηθάει πολύ στον υπολογισμό της φ, παρ’όλα αυτά είναι απαραίτητο να ξέρουμε την κανονική αναπαράσταση του n, πράγμα που δεν είναι πάντα εύκολο, όπως φαίνεται και απο τα παρακάτω παραδείγματα:

- $\varphi(580)=\varphi(2^2\cdot 5\cdot 29)=580\cdot\frac{1}{2}\frac{4}{5}\frac{28}{29}=\frac{64.960}{290}=224$
- $\varphi(581)=\varphi(7\cdot 83)=581\cdot\frac{6}{7}\frac{82}{83}=\frac{285.852}{581}=492$
- $\varphi(582)=\varphi(2\cdot 3\cdot 97)=582\cdot\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{96}{97}=\frac{111.744}{582}=192$
- $\varphi(32.844)=\varphi(2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 17\cdot 23)=32.844\cdot\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{6}{7}\frac{16}{17}\frac{22}{23}=\frac{138.733.056}{16.422}=8.448$

§2.2 Η συνάρτηση Mobius $\mu(n)$

Ορισμός 2.1 Η συνάρτηση του Mobius ορίζεται ως εξής:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \quad \alpha\nu\ \tau o\ \text{n=1} \\ (-1)^r & , \quad \alpha\nu\ \tau o\ n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r} \\ 0 & , \quad \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

Παραδείγμα: $\mu(580) = \mu(2^2 \cdot 5 \cdot 29) = (-1)^3 = -1$, $\mu(581) = \mu(7 \cdot 83) = (-1)^2 = 1$,

$\mu(582) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 97) = (-1)^3 = -1$, $\mu(32.844) = \mu(2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 23) = (-1)^5 = -1$.

Πρόταση 2.5 Η συνάρτηση $\mu(n)$ είναι πολλαπλασιαστική. Δηλαδή $\forall m,n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $(m,n) = 1$, τότε $\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)$.

Απόδειξη:

Πρέπει να δείξουμε ότι για δύο τυχαίους πρώτους προς αλλήλους m,n, $\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)$.

Εστω η κανονική τους αναπαράσταση $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}, m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_l^{r_l}$. Τότε $\mu(n) = (-1)^k$ και $\mu(m) = (-1)^l$.

Το γινόμενο τους θα είναι: $m \cdot n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_l^{r_l}$ και $\mu(nm) = (-1)^{k+l} = (-1)^k (-1)^l = \mu(n)\mu(m)$

Άρα η συνάρτηση του Mobius είναι πολλαπλασιαστική.

Πρόταση 2.6 : Αν $n = 1$ τότε $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$, και $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, αν $n > 1$.

Απόδειξη:

Για $n = 1$, είναι προφανές, αφού $\mu(1) = 1$, εξ' ορισμού.

Για $n > 1$, έστω η κανονική αναπαράσταση $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$

Τότε το άθροισμα πάνω στους διαιρέτες μας δίνει:
$\sum_{d|n}\mu(d)=\mu(1)+\sum_{1\le i\le k}\mu(p_i)+\sum_{\substack{i\ne j\\ 1\le i,j\le k}}\mu(p_ip_j)+...+\mu(p_1p_2...p_k)$ όπου το τυχαίο άθροισμα $\sum_{i_1\ne i_2\ne...\ne i_\lambda}\mu(p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot...\cdot p_{i_\lambda})$ εκτείνεται σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς λ, διαφορετικών μεταξύ τους πρώτων παραγώντων του n.

Από τον ορισμό προκύπτει πως στην περίπτωση που όλοι οι πρώτοι δεν είναι διάφοροι μεταξύ τους η συνάρτηση Mobius μηδενίζεται.

Από τον δυωνυμικό τύπο συνεπάγεται ότι
$$\sum_{d|n}\mu(d)=1+\binom{k}{1}(-1)+\binom{k}{2}(-1)^2+...+\binom{k}{k}(-1)^k=(1-1)^k=0.$$

Επομένως $\sum_{d|n}\mu(d)=0$.

Θεώρημα 2.1 (Τύπος Αντιστροφής του Mobius) Αν ισχύει ότι $g(n)=\sum_{d|n}f(d)$ τότε $f(n)=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})\cdot g(d)$, και αντιστρόφως.

Απόδειξη:

Γενικά για κάθε αριθμητική συνάρτηση, έστω $f(n)$ ισχύει ότι:

$\sum_{d|n}f(n)=\sum_{d|n}f(\frac{d}{n})$, αφού $\frac{n}{d}=d'$, όπου d' διαρέτης του n.

Ακολουθώντας την ίδια λογική, προκύπτει ότι: $\sum_{d|n}\mu(\frac{d}{n})g(d)=\sum_{d|n}\mu(d)g(\frac{d}{n})$ (1)

Όμως $\sum_{d|n}\mu(d)g(\frac{d}{n})=\sum_{d|n}\left(\mu(d)\cdot\sum_{\lambda|\frac{n}{d}}f(\lambda)\right)$ (2)

Αλλά $\lambda d\,|\,n$, αρα $\sum_{d|n}\mu(d)g(\frac{d}{n})=\sum_{\lambda d|n}\mu(d)f(\lambda)$

Ομοίως μπορούμε να γράψουμε $\sum_{d|n}\left(f(\lambda)\cdot\sum_{d|\frac{n}{\lambda}}f(\lambda)\right)=\sum_{\lambda d|n}\mu(d)f(\lambda)$

Συνεπώς $\sum_{d|n}\mu(d)g(\frac{d}{n}) = \sum_{d|n}\left(f(\lambda)\cdot\sum_{d|\frac{n}{\lambda}}\mu(d) \right)$ (3)

Αλλά από την Πρόταση 2.6 είδαμε ότι $\sum_{d|\frac{n}{\lambda}}\mu(d) = 1 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow n = \lambda$

Στην περίπτωση όμως που το $n = \lambda$ προκύπτει ότι :

$$\sum_{d|n}\left(f(\lambda)\cdot\sum_{d|\frac{n}{\lambda}}\mu(d) \right) = f(n) \qquad (4)$$

Από (1),(3),(4) $\Rightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d)$

Τότε $f(n) = \sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})\cdot g(d)$

Για το αντίστροφο:

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\sum_{\lambda|\frac{n}{d}}\mu(\frac{n}{\lambda d})g(\lambda) = \sum_{d\lambda|n}\mu(\frac{n}{\lambda d})g(\lambda) = \sum_{d\lambda|n}\left(g(\lambda)\underbrace{\sum_{d|\frac{n}{\lambda}}\mu(\frac{n}{\lambda d})}_{=1} \right)$$

Συνεπώς για $n = \lambda$, λαμβάνουμε $\sum_{d|n} f(d) = g(n)$

Πρόταση 2.7 Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $\varphi(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$

Απόδειξη:

Στην Πρόταση 2.6 δείξαμε ότι $\sum_{d|n}\mu(d) = 1$ ή 0. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι $\sum_{d|n}\mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$. Ξέρουμε όμως ότι $\varphi(n) = \sum_{m=1}^{n}\left\lfloor \frac{1}{(m,n)} \right\rfloor = \sum_{m=1}^{n}\sum_{d|(n,m)}\mu(d)$. Οι συνθηκες των αθροίσματων είναι: $1 \le m \le n$, d | n *και* d | m, δηλαδή να ισχύει $1 \le \lambda d \le n$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{N}$ ή $1 \le \lambda \le \frac{n}{d}$ και d | n .

Επομένως το γράφουμε ως:

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{d|(n,m)}\mu(d) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n/d}\mu(d) = \sum_{d|n}\frac{n}{d}\mu(d) \Rightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n}\frac{n}{d}\mu(d)$$

§2.3 Η συναρτήσεις $\tau(n)$, $\sigma(n)$

Μια άλλη κατηγορία αριθμητικών συναρτήσεων που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι οι συναρτήσεις που αναφέρονται στους διαιρέτες του n :

Ορισμός 2.2 Ορίζουμε $\tau(n)$ τον αριθμό των διαιρετών του n, δηλαδή $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ και $\sigma(n)$ το άθροισμα των διαιρετών του n, δηλαδή $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

Πρόταση 2.8 Εάν $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$, τότε $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (e_i + 1)$

Απόδειξη:

Έστω $m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} ... p_k^{l_k}$. Για να διαιρεί τον $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$ θα πρέπει $0 \le l_i \le e_i$ για $i = 1,2,...,k$ και αυτό γιατί κάθε παράγοντας p_i του m πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος από κάθε p_i στοιχείο του n . Έτσι εάν το $m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} ... p_k^{l_k}$ είναι διαιρέτης του n υπάρχουν $e_1 + 1$ επιλογές για τον l_1 , $e_2 + 1$ επιλογές για τον l_2 , ..., $e_k + 1$ επιλογές για τον l_k . Άρα από απλή συνδυαστική υπάρχουν $(e_1 + 1)(e_2 + 1)...(e_k + 1)$ επιλογές για τους $l_1, l_2, ..., l_k$. Συνεπώς οι διαιρέτες του n είναι $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (e_i + 1)$.

Πρόταση 2.9 Εάν $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$, τότε $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} \right)$

Απόδειξη:

Το άθροισμα των διαιρετών του $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$, μπορεί να εκφραστεί από το γινόμενο: $\left(1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{a_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + ... + p_2^{a_2}\right)...\left(1 + p_k + p_k^2 + ... + p_k^{a_k}\right)$ χρησιμοποιώντας τον τύπο για το άθροισμα μιας πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς, που είανι ο εξής:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Βλέπουμε ότι η παραπάνω έκφραση γίνεται:

$$\sigma(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{a_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + ... + p_2^{a_2}\right)...\left(1 + p_k + p_k^2 + ... + p_k^{a_k}\right)$$

$$= \left(\frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right)\left(\frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1} \right)...\left(\frac{p_k^{e_k+1} - 1}{p_k - 1} \right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1} \right)$$

Οπότε καταλήξαμε στο ζητούμενο.

Πρόταση 2.10 Οι συναρτήσεις $\tau(n)$, $\sigma(n)$ είναι πολλαπλασιαστικές.

Σημείωση : Και οι δύο συναρτήσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης $\sigma_\alpha(n)$, η οπόια ορίζεται ως εξής: $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$.

Έτσι βλέπουμε ότι για $\alpha = 0$, $\sigma_0(n) = \sum_{d|n} d^0 = \sum_{d|n} 1 = \tau(n)$ ενώ για $\alpha = 1$, $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d^1 = \sum_{d|n} d = \sigma(n)$.

Κεφάλαιο 3ο

Η συναρτήσεις $\pi(x)$, $\mathrm{li}(x)$

§3.1 Ορισμοί Συναρτήσεων

Η συνάρτηση $\pi(x)$ ορίζεται ως συνάρτηση απαρίθμισης των πρώτων αριθμών που δεν υπερβαίνουν τον πραγματικό αριθμό x, δηλαδή για κάθε x>0 μας δίνει τον αριθμό των πρώτων που είναι μικρότεροι από x. Για παράδειγμα για $x = 7 : \pi(7) = 3$, διότι έχουμε τους 2, 3, 5 πρώτους αριθμούς μικρότερους από 7.

Η συνάρτηση δεν είναι αριθμητική συνάρτηση διότι έχει σαν πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς, όμως είναι μια σημαντική συνάρτηση στη θεωρία αριθμών. Η $\pi(x)$ δεν έχει κάποιο συγκεκριμένο τύπο καθώς δεν έχουμε πλήρη γνώση για την κατανομή των πρώτων αριθμών μέσα στο σύνολο των ακεραίων και γι'αυτον τον λόγο η συγκεκριμένη συνάρτηση παρουσιάζει ένα μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες να προσεγγιστεί αριθμητικά, ένα απο τα σημαντικότερα αποτελέσματα είναι το Θεώρημα Πρώτων Αριθμών, το οποίο περιγράφει την ασυμπτωτική κατανομή των πρώτων αριθμών : $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$

Ο Gauss κατάφερε να αποδείξει ότι η $\pi(x)$ προσεγγίζεται ακόμα καλύτερα από το λογαριθμικό ολοκλήρωμα $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \dfrac{dt}{\log t}$, συγκεκριμένα έδειξε ότι $li(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L' Hospital.

Στον παρακάτω πίνακα, βλέπουμε μερικά αριθμητικά αποτελέσματα στα οποία είναι εμφανές ότι η $li(x)$ για μεγάλους αριθμούς δίνει καλύτερα αποτελέσματα:

x	$x/\ln x$	$li(x)$	$\pi(x)$
10	4.3	51.2	4
100	21.7	29.1	25
500	80.4	100.8	95
1000	144.7	176.6	168
5000	587.0	683.2	669
10000	1087.0	1245.0	1230
15000	1559.9	1775.6	1754
10^6	72381.9	78632	78498
10^9	48254630	50849240	50847478

Αριθμητικά Αποτελέσματα της $li(x)$ *και* $\pi(x)$

Έτσι βλέπουμε ότι μπορεί η διαφορά στους μικρούς αριθμούς να μην είναι τόσο εμφανής, αλλά καθώς πλησιάζουμε σε όλο και μεγαλύτερους αριθμούς η προσέγγιση της $li(x)$ είναι πολύ καλύτερη.

§3.2 Αριθμητικό Φράγμα για την Συνάρτηση $\pi(x)$

Στο εδάφιο αυτό θα αναφερθούμε σε αριθμητικά φράγματα για της συναρτήσεις που εξετάσαμε προηγουμένως. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε μια ανισότητα για την συνάρτηση $\pi(x)$. Η απόδειξη βασίζεται στην μέθοδο που ακολουθεί το βιβλίο των Μιχαήλ Θ. Ρασσιά και Αλέξανδρος Χ. Παπαϊωάννου που βρίσκεται στην βιβλιογραφια.

Πρόταση 3.1 Για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{1}{6}\frac{n}{\log n} < \pi(n) \leq 6\frac{n}{\log n}$$

Αποδειξη:

Επειδή πρόκειται για μια μακροσκελής απόδειξη θα την δούμε σε βήματα:

<u>Βήμα 1^{ο} :</u> Θα δείξουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει ότι $\frac{1}{6}\frac{n}{\log n} < \pi(n)$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει ότι
$2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$.

- Η ανισότητα $2^n \leq \binom{2n}{n}$ αποδεικνύεται απλά μέσω της μαθηματικής επαγωγής:

  - Για $n = 2$: $4 \leq \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$. Άρα η επαγωγική μας βάση ισχύει.

  - Έστω ότι ισχύει για n , ισχύει δηλαδή ότι $2^n \leq \binom{2n}{n}$ (1)

    Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$.

    Έχουμε:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \overset{(1)}{\geq} 2^n \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$$

    Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για $n \geq 2$ ότι ισχύει :

$$\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \geq 2 \Rightarrow (2n+1)(2n+2) \geq 2(n+1)^2 \Rightarrow 2n^2 + 2n \geq 0 \Rightarrow 2n(n+1) \geq 0$$

    που ισχύει διότι $n \geq 2$.

    Άρα $\binom{2(n+1)}{n+1} \geq 2^{n+1}$

    Δηλαδή δείξαμε ότι: $2^n \leq \binom{2n}{n}$, $\forall n \geq 2$.

- Στη συνέχεια θέλουμε να δείξουμε το άλλο μέρος της ανισότητας :
  $\binom{2n}{n} \leq 4^n$

  Εδώ θα στηριχτούμε στο γεγονός ότι :

$$\binom{2n}{n} < \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n} = 4^n$$

Έτσι επαληθεύεται και το άλλο μέρος της ανισότητας.

Άρα δείξαμε πως για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει $2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$ (2) .

Λογαριθμίζοντας την Σχέση (2) έχουμε:

$$2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n \Rightarrow \log 2^n \leq \log \binom{2n}{n} \leq \log 4^n$$

$$\Rightarrow n\log 2 \leq \log \frac{(2n)!}{n!n!} \leq n\log 4 \Rightarrow$$

$$n\log 2 \leq \log((2n)!) - \log(2n!) \leq n\log 4 \Rightarrow$$

$$n\log 2 \leq \log((2n)!) - 2\log(n!) \leq n\log 4 \quad (3)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Legendre ξέρουμε ότι όταν ένας φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$, περιέχει ένα πρώτο παράγοντα p τότε ο $n!$ θα έχει την p στην κανονική του αναπαράσταση με εκθέτη : $e_p = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

Συνεπώς

$$\log(2n!) - 2\log(n!) = \sum_{p \leq 2n} e_p \log p_i - 2\sum_{p \leq n} e_p \log p = \sum_{p \leq 2n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right] \log p - 2\sum_{p \leq n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right] \log p$$

Όμως ισχύει ότι : $\sum_{p \leq 2n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right] \log p = \sum_{p \leq 2n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right] \log p$, και αυτό γιατί αν $p_i > n$, τότε $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

Άρα έχουμε :

$$\log(2n!) - 2\log(n!) = \sum_{p \leq 2n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right] \log p - 2\sum_{p \leq 2n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right] \log p =$$

$$\sum_{p \leq 2n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right] \log p = \sum_{p \leq 2n} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \right] \log p$$

Τώρα όμως οι όροι του αθροίσματος $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$, μπορεί να είναι 0 ή το πολύ 1, διότι:

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2.$$

Όμως οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται για k τέτοιο ώστε $p_i^k > 2n$, δηλαδή για $k > \dfrac{\log 2n}{\log p}$

Άρα $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p}\right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \le \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p}\right\rfloor} 1$

Αντικαθιστώντας στη σχέση με την διαφορά των λογαρίθμων έχουμε:

$$\log(2n!) - 2\log(n!) = \sum_{p\le 2n}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)\right]\log p =$$

$$\sum_{p\le 2n}\left[\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p_i}\right\rfloor} 1\right]\log p \le \sum_{p\le 2n}\frac{\log 2n}{\log p}\log p = \sum_{p\le 2n}\log 2n = \pi(2n)\log 2n$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην ανισότητα (3) έχουμε:

$n\log 2 \le \pi(2n)\log 2n \Rightarrow$

$$\pi(2n) \ge \frac{n\log 2}{\log 2n} > \frac{n/2}{\log 2n} = \frac{2n}{4\log 2n} \Rightarrow$$

$$\pi(2n) > \frac{1}{4}\frac{2n}{\log 2n} > \frac{1}{6}\frac{2n}{\log 2n}$$

Άρα η ανισότητα $\dfrac{1}{6}\dfrac{n}{\log n} < \pi(n)$, ισχύει όταν ο n είναι άρτιος. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο n είναι περιττός:

$$\pi(2n+1) \ge \pi(2n) > \frac{1}{4}\frac{2n}{\log 2n} = \frac{1}{4}\frac{2n}{2n+1}\frac{2n+1}{\log 2n} > \frac{1}{4}\frac{2n}{2n+1}\frac{2n+1}{\log(2n+1)}$$

Εύκολα δείχνουμε ότι $\dfrac{2n}{2n+1} \ge \dfrac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα:

$$\pi(2n+1) > \frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{2n+1}{\log(2n+1)} = \frac{1}{6}\frac{2n+1}{\log(2n+1)}$$

Συνεπώς η ανισότητα $\dfrac{1}{6}\dfrac{n}{\log n} < \pi(n)$, $\forall n \ge 2$ ισχύει!

<u>Βήμα 2^{o}:</u> Θα δείξουμε την άλλη πλευρά της ανισότητας : $\pi(n) \le 6\dfrac{n}{\log n}$, για κάθε θετικό ακέραιο $n \ge 2$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι: $\displaystyle\log(2n!) - 2\log(n!) = \sum_{p\le 2n}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)\right]\log p$

Όπου κανένας από τους όρους $\left\lfloor \dfrac{2n}{p^k}\right\rfloor, -2\left\lfloor \dfrac{n}{p^k}\right\rfloor$ δεν είναι αρνητικός.

Είναι προφανές ότι: $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1 \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right)$.

Επομένως:

$$\log(2n!) - 2\log(n!) \ge \sum_{p_i \le 2n}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1\right)\right]\log p_i \ge \sum_{n < p_i \le 2n}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1\right)\right]\log p_i$$

Όμως για τους πρώτους αριθμούς p, τέτοιοι ώστε $n < p_i \le 2n$, ισχύει ότι $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1$, καθώς $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor = 1$ και $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 0$

Άρα $\log(2n!) - 2\log(n!) \ge \sum_{n < p_i \le 2n} \log p$

Κάνοντας χρήση τώρα της συνάρτησης Chebysev $\vartheta(x) = \sum_{p<x} \log p$, έχουμε:

$$\log(2n!) - 2\log(n!) \ge \vartheta(2n) - \vartheta(n) \Rightarrow \vartheta(2n) - \vartheta(n) < n\log 4$$

Έστω ότι το n μπορεί να εκφραστεί σαν τέλεια δύναμη του 2. Τότε απο την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\vartheta(2\cdot 2^m) - \vartheta(2^m) < 2^m \log 2^2 \Rightarrow$$
$$\vartheta(2^{m+1}) - \vartheta(2^m) < 2^{m+1} \log 2^2 \Rightarrow$$

Για m=1 έχουμε:

$$\begin{gathered} \vartheta(2^2) - \vartheta(2) < 2^2 \log 2 \\ \vdots \\ \vartheta(2^{\lambda+1}) - \vartheta(2^\lambda) < 2^{\lambda+1} \log 2 \end{gathered}$$

Αθροίζοντας τα: $\vartheta(2^{\lambda+1}) - \vartheta(2) < \left(2^2 + 2^3 + ... + 2^\lambda + 2^{\lambda+1}\right)\log 2$,

όμως $\vartheta(2) = \log 2$, άρα $\vartheta(2^{\lambda+1}) < \left(1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^\lambda + 2^{\lambda+1}\right)\log 2 = (2^{\lambda+1} - 1)\log 2$.

Ισχύει συνεπώς ότι $\vartheta(2^{\lambda+1}) < 2^{\lambda+1} \log 2$.

Για κάθε φυσικό n μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο ακέραιο m τέτοιο ώστε: $2^m \le n < 2^{m+1}$.

Τότε :
$\vartheta(n) = \sum_{p<n} \log p \le \sum_{p<2^m} \log p = \vartheta(2^m) \Rightarrow \vartheta(n) < 2^{m+2} \log 2 = 2^2 \cdot 2^m \log 2 \le 4n\log 2$.

Έστω N το πλήθος των πρώτων αριθμών p_i, τέτοιοι ώστε $n^r < p_i \le n$, όπου $0 < r < 1$, για $i = 1,2,...,N$.

Τότε : $\left.\begin{array}{c}\log n^r < \log p_1 \\ \log n^r < \log p_2 \\ \ldots \\ \log n^r < \log p_N\end{array}\right\} \Rightarrow N \log n^r < \sum_{n^r < p \le n} \log p$

Δηλαδή $\lfloor \pi(n) - \pi(n^r) \rfloor \log n^r < \sum_{n^r < p \le n} \log p$

Από όλα τα παραπάνω, προκύπτει ότι :

$$\lfloor \pi(n) - \pi(n^r) \rfloor \log n^r < 4n \log 2 \Rightarrow$$

$$\pi(n) \log n^r < 4n \log 2 + \pi(n^r) \log n^r \Rightarrow$$

$$\pi(n) < \frac{4n \log 2}{\log n^r} + \pi(n^r) < \frac{4n \log 2}{\log n^r} + n^r \Rightarrow$$

$$\pi(n) < \frac{n}{\log n}\left(\frac{4 \log 2}{r} + n^{r-1} \log n\right)$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\log x}{x^{1-r}}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Τότε $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} x^{1-r} - (1-r) x^{-r} \log x}{\left(x^{1-r}\right)^2}$.

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x^{-r} = (1-r) x^{-r} \log x \Rightarrow \log x = \dfrac{1}{1-r}$, δηλαδή $x = e^{1/(1-r)}$.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως η $f(x)$ μας λαμβάνει μέγιστο για $x = e^{1/(1-r)}$, οπότε $f(x) \le \dfrac{1}{e(1-r)} \Rightarrow f(n) \le \dfrac{1}{e(1-r)}$.

Συνεπώς $n^{r-1} \log n \le \dfrac{1}{e(1-r)} \Rightarrow \pi(n) < \dfrac{n}{\log n}\left(\dfrac{4 \log 2}{r} + \dfrac{1}{e(1-r)}\right)$

Όπου για r=2/3 : $\pi(n) < \dfrac{n}{\log n}\left(6 \log 2 + \dfrac{3}{e}\right)$

Όμως ισχύει ότι $6 \log 2 + \dfrac{3}{e} < 6$ και έτσι $\pi(n) < 6 \dfrac{n}{\log n}$

Άρα δείξαμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \ge 2$ ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{1}{6} \frac{n}{\log n} < \pi(n) \le 6 \frac{n}{\log n}.$$

Κεφάλαιο 4^{ο}

Η Συνάρτηση ζ του Riemann

§4.1 Ιστορική Αναφορά

Το 1859 ο Bernard Riemann δημοσιεύσε μια οχτασέλιδη εργασία με τίτλο “On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude”, στην οποία μελέτησε την κατανομή των πρώτων αριθμών σε σχέση με την συνάρτηση ζ, η οποία είναι πλέον γνωστή ως συνάρτηση Riemann. Η εργασία είχε εισαγωγικό χαρακτήρα με σκοπό να ακολουθηθεί από μια μετέπειτα, με πληρέστερο και πιο αναλυτικό περιεχόμενο. Το παραπάνω διαπιστώνεται από την αλληλογραφία μεταξύ του Riemann και του Weierstrass.

Η εργασία χαίρει εξαιρετικής ιστορικής και ερευνητικης σημασίας, μιας και αποτέλεσε αντικέιμενο έρευνας για πάρα πολλούς μαθηματικούς, μεταξύ τους και κορυφαίων προσωπικοτήτων όπως ο Mertens, ο von Mongolt, ο Hadamard, ο Valle-Poussin κ.ά.

Στην προσπάθεια του Riemann να συνδέσει τις ρίζες της συνάρτησης ζ με την κατανομή των πρώτων αριθμών μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, έκανε 6 υποθέσεις από της οποίες μια μένει αναπάντητη μέχρι και σήμερα και είναι η περίφημη “Εικασία του Riemann” (Riemann Hypothesis) στην οποία θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στο 5ο κεφάλαιο.

§4.2 Η εργασία του Riemann: “On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude”

Στο συγκεκριμένο εδάφιο θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τα συμαντικότερα βήματα στην εργασία του Riemann. Η παρακάτω περιγραφή είναι αποσπασματική και επικεντρώνεται στα βασικά επιχειρήματα του Riemann διότι σκοπός μας είναι να δείξουμε την προσφορά της εργασίας στην μελέτη των πρώτων. Για περαιτέρω μελέτη βλέπε [3].

Ο Riemann ξεκινάει την εργασία του με βασικό σημειο τον τύπο του Euler γνωστο και ως “The Euler Product Formula”:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\quad, \ p \text{ πρώτος αριθμός}$$

Ο παραπάνω τύπος προκύπτει αν αναπτύξουμε κάθε παράγοντα από τα δεξιά ως εξής:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{\left(p^2\right)^s}+\frac{1}{\left(p^3\right)^s}+\dots$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο τους είναι το άθροισμα των όρων του τύπου : $\frac{1}{\left(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_r^{n_r}\right)^s}$. Από το Θεμελειώδης Θεώρημα της Αριθμητικής συμπεραίνουμε ότι είναι το $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}$.

Η χρήση του τύπου του Euler από τον Riemann είναι σαφώς επηρεασμένη από τον δάσκαλό του, τον Dirichlet. Ο Dirichlet χρησιμοποίησε τον τύπο για $s\in\mathbb{R}$ και τον απέδειξε αυστηρά, εν αντιθέσει με τον Euler ο οποίος τον διατύπωσε για $s\in\mathbb{Z}$ και η απόδειξη του δεν ήταν πλήρης.

Ο Riemann ως πρωτεργάτης των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής, θα ήταν λογικό να υποθέσει ότι $s\in\mathbb{C}$. Εύκολα αποδυκνείεται οτι τα δύο μέλη του τύπου συγκλίνουν για $s\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}s\geq 1$ όμως ο Riemann πηγαίνει πολύ παραπέρα και δείχνει ότι ο τύπος ισχύει για όλες τις τιμές του s πάνω στο $\mathbb{C}$, εκτός απο τον πόλο για $s=1$.

Στην συνέχεια εστιάζουμε στην γενίκευση που είχε κάνει για την συνάρτηση του παραγοντικού, δηλαδή από $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ στην :

$$\Pi(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^s dx \qquad (1)$$

Έτσι η $\Pi(s)$ ορίζεται για κάθε $s\in\mathbb{R}$ με $s>-1$ και για κάθε $s\in\mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}s>-1$. Ενώ για $s\in\mathbb{Z}$, $\Pi(s)=s!$

Μία άλλη αναπαράσταση της $\Pi(s)$, από τον Euler πάλι, είναι η εξής:

$$\Pi(s)=\lim_{N\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot N}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot\ldots\cdot(s+N)}(N+1)^s \qquad (2)$$

Οι (1) και (2) συμπίπτουν για $s\in\mathbb{R}$ με $s>-1$.

Μερικές ιδιότητες της $\Pi(s)$ είναι :

- $\Pi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s}$
- $\Pi(s) = s\Pi(s-1)$
- $\frac{\pi \cdot s}{\Pi(s) \cdot \Pi(-s)} = \sin \pi s$
- $\Pi(s) = 2^{s} \Pi(\frac{s}{2}) \Pi(\frac{s-1}{2}) \pi^{-\frac{1}{2}}$

Ο Riemann παίρνει τον τύπο για το παραγοντικό $\Pi(s)$ για s-1 και αντικαθιστά το x με το nx: $\frac{\Pi(s-1)}{n^{s}} = \int_{0}^{\infty} e^{-nx} x^{s} dx$, $s > 0$, $n = 1,2,3...$

Στην συνέχεια αθροίζει πανω στο n και με την βοήθεια της ταυτότητας :
$\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = (r-1)^{-1}$, έχει το εξής αποτέλεσμα:

$$\Pi(s-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s}} = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^{x}-1} dx .$$

Το επομενο βήμα είναι να θεωρήσει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα απο το άπειρο προς το μηδέν, μαζι με το μηδεν, και ξανά στο άπειρο, ως εξής:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s}}{e^{x}-1} \frac{dx}{x}$$

Ο υπολογισμός του οποίου δίνει:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s}}{e^{x}-1} \frac{dx}{x} = (e^{i\pi s} - e^{i\pi s}) \int_{0}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^{x}-1} dx$$

Έτσι σε συνδυασμό με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s}}{e^{x}-1} \frac{dx}{x} = 2i \sin(\pi s) \Pi(s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s}} \xRightarrow{\frac{\Pi(-s)}{2\pi i s}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s}} = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \int_{\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s}}{e^{x}-1} \frac{dx}{x}$$

Και έτσι ορίζεται η συνάρτηση του Riemann:

$$\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-x)^{s}}{e^{x}-1}\frac{dx}{x}$$

σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από τον πόλο για $s = 1$.

Να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση $\zeta(s)$ του Riemann για $\operatorname{Re} s > 1$ είναι ίση με την συνάρτηση Dirichlet $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$. Τονίζουμε ότι η συνάρτηση Riemann είναι κυρίως γνωστή και χρησιμοποιείται ευρέως με την παραπάνω μορφή: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$.

Έχουμε δηλαδή ότι $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$, από τον τύπο γινομένου του Euler έχουμε:

$$\zeta(s) = \prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}} \quad , \ \operatorname{Re} s > 1$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση, και κάνοντας χρήση του αναπτύγματος :

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{3}x^{3} - \ldots$$

Έχουμε: $$\log\zeta(s) = \sum_{p}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}p^{-ns}\right], \operatorname{Re} s > 1$$

Η διπλή σειρά συγκλίνει πλήρως για $\operatorname{Re} s > 1$, άρα δεν έχει σημασία η σειρά των αθροισμάτων , συνεπώς:

$$\log\zeta(s) = \sum_{p}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}p^{-ns}, \ \operatorname{Re} s > 1.$$

Το άθροισμα μπορεί να γραφεί σαν ολοκλήρωμα Stieltjes:

$$\log\zeta(s) = \int_{0}^{\infty}x^{-s}\,dJ(x),$$

Όπου $J(x)$ είναι η συνάρτηση που ξεκινάει για $x = 0$, και αυξάνεται με βήμα 1 για τους πρώτους p, με βήμα $1/2$ για τα τετράγωνα των πρώτων, με βήμα $1/3$ για τους κύβους των πρώτων κλπ

Στην θεωρία ολοκληρωμάτων Stieltjes η τιμής της $J(x)$ σε κάθε βήμα, ορίζεται η μέση τιμή μεταξύ νέας και παλιάς. Ένας τύπος για την $J(x)$ είναι ο εξής:

$$J(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{p^{n}<x}\frac{1}{n} + \sum_{p^{n}\le x}\frac{1}{n}\right].$$

Έτσι λοιπόν:

$$\log \zeta(s) = s\int_0^\infty J(x)x^{-s-1}\,dx\,,\ \operatorname{Re} s > 1\,.$$

Στην συνέχεια

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^\infty J(x)x^{-s-1}\,dx\,,\ \operatorname{Re} s > 1\,.$$

Και καταλήγουμε στον εξής τύπο:

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(x)x^{s}\frac{ds}{s}\,,\ \operatorname{Re} s > 1\,.$$

Ο οποίος αν αναλυθεί παραπάνω θα μας δώσει βασικό αποτέλεσμα της εργασίας του είναι ο παρακάτω αναλυτικός τύπος για την $J(x)$:

$$J(x) = Li(x) - \sum_{p} Li\left(x^{p}\right) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}\,,\ x > 1\,. \quad \textit{(4.1)}$$

Σκοπός του Riemann ήταν να βρει έναν τύπο για την $\pi(x)$. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι ο αριθμός των «πρώτων τετραγώνων» μικροτερων του x είναι ίσος με τον αριθμών των πρώτων που είναι μικρότερη από το $x^{1/2}$, το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο από το $\pi\left(x^{1/2}\right)$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι η $J(x)$ και η $\pi(x)$ σχετίζονται με την σχέση:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{1/2}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\pi\left(x^{1/n}\right) + \ldots$$

Από τον τύπο αντιστροφής του Möbius, έχουμε:

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J\left(x^{1/2}\right) - \frac{1}{3}J\left(x^{1/3}\right) - \ldots + \frac{\mu(n)}{n}\pi\left(x^{1/n}\right) + \ldots$$

'οπου $\mu(n)$ η συνάρτηση του Möbius.

Έτσι μαζί με τον τύπο *(4.1)* η παραπάνω σχέση δίνει μια αναλυτική μορφή της $\pi(x)$, δηλαδή το ζητούμενο της εργασίας.

Αν αντικαταστήσουμε τώρα την $J(x)$, στον τύπο για την $\pi(x)$, αποτελείται από τρία μέρη:

-Αυτά που αυξάνονται σταθερά μαζί με το x: $Li(x)$

-Αυτά που αυξάνονται με το x, αλλά ταλαντεύονται : $Li\left(x^{p}\right)$, και

-Αυτά που δεν αυξάνονται όσο αυξάνεται το x: $\log 2+\int_{x}^{\infty}\frac{dt}{t(t^{2}-1)\log t}$.

Δεν επιλέγουμε τα τελευταία και ο τύπος για την $\pi(x)$ έχει την εξής μορφή:

$$\pi(x)=Li(x)-\frac{1}{2}Li\left(x^{1/2}\right)-\frac{1}{3}Li\left(x^{1/3}\right)-\frac{1}{5}Li\left(x^{5}\right)+\frac{1}{6}Li\left(x^{1/6}\right)-\frac{1}{7}Li\left(x^{1/7}\right)+\ldots$$

Στην πραγματικότητα ο πρώτος όρος είναι η προσέγγιση του Gauss:

$$\pi(x)\sim\int_{2}^{x}\frac{dt}{\log t}=Li(x)-Li(2),$$

Ενώ σύμφωνα με τον Riemann η προσέγγιση τίνει:

$$\pi(x)\sim Li(x)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}Li\left(x^{1/n}\right).$$

Ένας μεταγενέστερος πίνακας, συγκρίνει τις δύο προσεγγίσεις:

x	Προσεγγιστικό Λάθος Riemann	Προσεγγιστικό Λάθος Gauss
1.000.000	30	130
2.000.000	-9	122
3.000.000	0	155
4.000.000	33	206
5.000.000	-64	125
6.000.000	24	228
7.000.000	-38	179
8.000.000	-6	223
9.000.000	-53	187
10.000.000	88	339

§4.3 Αριθμητικές Τιμές για την συνάρτηση Riemann

Ο υπολογισμός των τιμών της συνάρτησης Riemann δεν είναι κάτι τετριμένο και αυτό το καταλαβαίνουμε και από τον τύπο της. Σε αυτό το κεφάλαιο θα βρούμε τις τιμές, πρώτα για $s=2$ και στην συνέχεια για κάθε άρτιο $s=2\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$.

Υπολογισμός της τιμής $\zeta(2)$.

Σε αυτό το εδάφιο προσπαθούμε να βρούμε την τιμή της συνάρτησης Riemann για $s=2$, να βρούμε δηλαδή την τιμή της σειράς $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. Το παραπάνω πρόβλημα είχε διατυπωθεί για πρώτη φορά το 1644 από τον ιταλό μαθηματικό Pietro Mengoli και είναι γνωστό σαν "Πρόβλημα Basel". Λύθηκε το 1733 από τον Euler και πήρε το όνομα από την πόλη καταγωγής του. Φυσικά τότε η διατύπωση δεν αφορούσε την τιμη της $\zeta(2)$, αλλά το άθροισμα των αντιστρόφων τετραγώνων των φυσικών αριθμών : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

Για τον υπολογισμό της $\zeta(2)$, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπου $\sin z$ που το επεκτείνει σε μορφή γινομένου:

$$\sin z = z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right) = z\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Το πρώτο γινόμενο είναι πάνω σε όλους τους μη μηδενικούς ακεραίους, ενώ το δεύτερο προκύπτει από τον πρώτο, αν ενώσουμε άνα δύο τους όρους για $\pm n$.

Η όλη ιδέα της ανάπτυξης είναι ότι θεωρούμε το $\sin z$ σαν ένα πολυώνυμο με άπειρες ρίζες στα σημεία $z=n\cdot\pi$, $n\in\mathbb{N}$. Για την πλήρη απόδειξη του τύπου μπορούμε να ανατρέξουμε σε κάποιο βιβλίο Μιγαδικής Ανάλυσης. όπως στο βιβλίο των Marsden και Hoffman, Βασική Μιγαδική Ανάλυση (Κεφάλαιο 7, παράδειγμα 7.1).

Αν αναπτύξουμε τώρα το δεύτερο μέρος του γινομένου παίρνουμε μια δυναμοσειρά για το $\sin z$, η οποία πρέπει να συμπίπτει με το ανάπτυγμα Taylor, που είναι το εξής:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

Έτσι συγκρίνοντας του συντελεστές για το z^3 βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει:

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2\pi^2} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3!} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Συνεπώς $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Υπολογισμός της τιμής $\zeta(2\kappa)$.

Συνεχίζουμε με την σχέση για το $\sin z$:

$$\sin z = z\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Λογαριθμίζοντας την, έχουμε:

$$\ln\sin z = \ln z + \sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Παραγωγίζοντας κάθε όρο παίρνουμε:

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{n\geq 1}\frac{2z}{n^2\pi^2}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1}.$$

Υπολογίζουμε την σειρά:

$$\frac{2z}{n^2\pi^2}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1} = \frac{2z}{n^2\pi^2}\sum_{\kappa\geq 0}\left(\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)^{\kappa} = 2\sum_{\kappa\geq 0}\frac{z^{2\kappa+1}}{n^{2\kappa+2}\pi^{2\kappa+2}} = 2\sum_{\kappa\geq 1}\frac{z^{2\kappa-1}}{n^{2\kappa}\pi^{2\kappa}}.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2\sum_{\kappa\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{z^{2\kappa-1}}{n^{2\kappa}\pi^{2\kappa}} = \frac{1}{z} - 2\sum_{\kappa\geq 1}\frac{\zeta(2\kappa)z^{2\kappa-1}}{\pi^{2\kappa}}. \ (1)$$

Το οποίο είναι η σειρά Laurent για το $\cot z$. Σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε τον παραπάνω τύπο με ένα άλλο αναάπτυγμα. Έχουμε:

$$e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots \Rightarrow \frac{e^{t}-1}{t} = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots$$

Το αντίστροφό του έχει ανάπτυγμα Taylor, το οποίο γράφεται ως εξής:

$$\frac{t}{e^t-1} = (1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots)^{-1} = \sum_{m\geq 0}\frac{B_m}{m!}t^m. \ (2)$$

Όπου $B_0, B_1, B_2, \ldots$ είναι συγκεκριμένες σταθερές, γνωστές ως αριθμοί Bernoulli.

Έχουμε ότι:

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{t}{2}(\frac{e^t+1}{e^t-1} - 1) = \frac{t}{2}(\frac{e^{t/2}+e^{-t/2}}{e^{t/2}-e^{-t/2}} - 1) = \frac{t}{2}(\coth\frac{t}{2} - 1) = \frac{t}{2}(i\cot\frac{it}{2} - 1)$$

Θέτοντας τώρα σαν $z = \frac{it}{2}$, έχουμε:

$$\frac{t}{e^t-1}=z\cot z-\frac{z}{i}=z\cot z+iz$$

Αντικαθιστώντας στο ανάπτυγμα Taylor και διαιρώντας με το z προκύπτει :

$$\cot z=-i+\frac{1}{z}\sum_{m\geq 0}\frac{B_m}{m!}t^m=-i+\sum_{m\geq 0}\frac{B_m}{m!}\left(\frac{2}{i}\right)^m z^{m-1}$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές των δύο αναπτυγμάτων, συνεπάγεται ότι :

$$-2\frac{\zeta(2\kappa)z^{2\kappa-1}}{\pi^{2\kappa}}=\frac{B_{2\kappa}}{(2\kappa)!}\left(\frac{2}{i}\right)^{2\kappa}z^{2\kappa-1}\Rightarrow -2\frac{\zeta(2\kappa)}{\pi^{2\kappa}}=\frac{B_{2\kappa}}{(2\kappa)!}\left(\frac{2}{i}\right)^{2\kappa}$$

Άρα

$$\zeta(2\kappa)=\frac{(-1)^{\kappa-1}2^{2\kappa-1}\pi^{2\kappa}B_{2\kappa}}{(2\kappa)!}.$$

Παράδειγμα:

$$\zeta(2)=\pi^2 B_2,\zeta(4)=-\frac{\pi^4 B_4}{3},\zeta(6)=-\frac{2\pi^6 B_6}{45},...$$

Οι πρώτες τιμές των αριθμών Bernoulli είναι:

$$B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_4=-\frac{1}{30},B_6=\frac{1}{42},...$$

Για κάθε περιττό $m>1$ ισχύει $B_m=0$.

Παρατήρηση: Από τον τύπο προκύπτει εύκολα και η τιμή για το $\zeta(2)$, δηλαδή για $\kappa=1$, έχουμε:

$$\zeta(2)=\frac{(-1)^{1-1}2^{2\cdot 1-1}\pi^{2\cdot 1}B_{2\cdot 1}}{(2\cdot 1)!}=\frac{(-1)^0 2^1\pi^2 B_2}{2!}=\pi^2 B_2=\frac{\pi^2}{6},$$

την οποία είχαμε υπολογίσει στο προηγούμενο εδάφιο.

4.4 Εφαρμογές

Πρόταση 4.1 Έστω P η πιθανότητα δύο τυχαίων φυσικών αριθμων x,y να είναι πρώτοι μεταξύ τους. Δείξτε ότι : $P=\dfrac{1}{\zeta(2)}$

Απόδειξη:

Όταν $(x,y)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} p \nmid x \\ \eta \\ p \nmid y \end{cases}$, για κάθε p πρώτος. Βέβαια το γεγονός ότι ένας πρώτος p_k διαιρεί ή τον x ή τον y, είναι ανεξάρτητο με το αν τους διαιρεί ένας άλλος πρώτος p_λ.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} P &= \Pr\{(x,y)=1\} = \Pr\{(p_1 \nmid x) \vee (p_1 \nmid y)\} \cdot \Pr\{(p_2 \nmid x) \vee (p_2 \nmid y)\} \cdot \ldots = \\ &= \prod_p \Pr\{(p \nmid x) \vee (p \nmid y)\} = \prod_p \left(1-\Pr\{(p \mid x) \wedge (p \mid y)\}\right) \end{aligned}$$

Συνεπώς τα ενδεχόμενα $(p \mid x),(p \mid y)$ είναι ανεξάρτητα άρα:

$$P=\prod_p \left(1-\Pr\{(p \mid x) \wedge (p \mid y)\}\right) = \prod_p \left(1-\Pr\{(p \mid x)\} \cdot \Pr\{(p \mid y)\}\right) =$$

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}\right) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\prod_p \frac{1}{1-p^{-2}}} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

Κεφάλαιο 5ο. Η Εικασία του Riemann

5.1 Εισαγωγή.

Η Εικασία του Riemann, διατυπωμένη στην εργασία του "On the Number of Primes less than a given Magnitude", λέει ότι όλες οι μη τετριμένες ρίζες της συνάρτησης ζ έχουν πραγματικό μέρος ίσο με $\frac{1}{2}$. Έτσι στο μιγαδικό επίπεδο έχουμε τις τετρημένες ρίζες που βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα και είναι όλοι οι αρνητικοί άρτιοι αριθμοί και όλες οι υπόλοιπες πάνω στον άξονα $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Η απόδειξη της εικασίας του Riemann αποτελεί μέχρι και σήμερα ένα ανοικτό πρόβλημα, από τα σημαντικότερα στην Θεωρία Αριθμών και στα μαθηματικά γενικότερα.

Με οδηγό την εργασία του E. Crosswald "Generalization of a formula of Heyman and its application to the study of the Riemann zeta function", θα προσπαθήσουμε όχι να απόδείξουμε την Εικασία του Riemann αλλά να δείξουμε μία αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε αν αυτή δεν επαληθεύεται η εικασία δεν είναι αποδείξιμη.

5.2 Το θεώρημα του Crosswald

Η εργασία του Crosswald αποτελεί συνέχεια του Heyman ο οποίος μελετάει συνρτήσεις της μορφής $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, αναλυτικές μέσα στο δίσκο $z < R(\leq \infty)$. Οι συναρτήσεις τις παραπάνω μορφής όταν ικανοποιούν κάποιες συνθήκες για τις συνιστώσες a_n, εκτιμούνται ασυμπτωτικά και έτσι καταλήγουν σε μια γενίκευση του τύπου του Sterling $1/n \approx (e/n)^n (2\pi n)^{-1/2}$.

Ο Crosswald συνθέτει και αποδικνύει ένα αρκετά σύνθετο θεώρημα το οποίο φαίνεται από την αρχή ότι δεν είναι εύχριστο και δεν εφαρμάζοται παντού καθώς οι συνθήκες είναι πάρα πολλές και πολύ συγκεκριμένες. Παρόλα αυτά εφαρμόζει πλήρως στις ανάγκες μας για την συνάρτηση ζ.

Ξεκινόντας την μελέτη για το παρακάτω θεώρημα πρέπει να ορίσουμε κάποιες κλάσεις συνόλων:

Θεωρούμε τις αναλυτικές συναρτήσεις $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ στον δίσκο $|z| < R(\leq \infty)$, με πραγματικές τιμές στον άξονα των πραγματικών, τέτοιες ώστε $\lim_{x \to R} f(x) = \infty$.

Θέτουμε $a_1(z) = z\frac{d(\log f(z))}{dz} = z(f'(z)/f(z))$ και ορίζουμε αναδρομικά για $\nu > 1$ τις εξής συναρτήσεις: $a_\nu(z) = z\frac{da_{\nu-1}(z)}{dz}$.

Ορίζουμε την κλάση συναρτήσεων Α={όλες εκείνες τις α_ν για τις οποίες με $\nu \geq 3$ ισχύει $\alpha_\nu(x) \leq \alpha(x)$, για αρκετά μεγάλα x}. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $\delta(x)$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις ακόλουθες υποθέσεις για κάποιες $\alpha \in$ Α :

1. $\lim_{x\to R} \delta^2(x) a_2(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to R} \delta^3(x) a_3(x) = 0$.

Θέτοντας τώρα $\lambda(\chi;\delta) = \max_{|\theta|\geq\delta} f^{-1}(x)\left|f(xe^{i\theta})\right|$, παίρνουμε ότι:

3. $\lim_{x\to R} \lambda(\chi;\delta) = 0$.

Ορίζουμε την κλάση συναρτήσεων F ={όλες εκείνες τις συναρτήσεις $f(z)$ για τις οποίες μπορούν να οριστούν οι $\delta(x)$ }.

Έστω ότι $r = r(n)$ η μοναδική ρίζα της $a_1(r) = n$ (5.1) η οποια πλησιάζει το R καθώς το $n \to \infty$. Ορίζεται κλάση Δ=Δ(α) η κλάση συναρτήσεων δ=δ(α) που ικανοποιούν τις υποθέσεις 1,2,3 για κάποια $a(x) \in$ Α .

Για ένα συγκεκριμένο φυσικό αριθμό m και μια $a(x) \in$ Α , θέτουμε:

$b(x) = \max\{a^{2m+1}a_2^{-3m-5/2}, a_2^{-3m-3/2}a_2^{2m}, a_2^{-3m-5/2}a_3^{2m+2}, a_2^{-3m-7/2}a^{2m+2}\}$ και έπειτα επιλέγουμε μια $\delta(x) \in \Delta(\alpha)$ για να ορίσουμε :

$$\varphi_m(x;\delta,a) = a_2^{1/2}(x)\max\{(\delta a_2)^{-1}\exp(-\frac{1}{2}\delta^2\alpha_2), \lambda(x,\delta), \beta(x)\}.$$

Συμβολίζουμε με $\left(\begin{array}{c} N \\ \nu \end{array}\right)_\kappa = \frac{\mathrm{N}!}{\nu_1!\nu_2!...\nu_\kappa!}$, όπου $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa = \mathrm{N}$ και θέτουμε

$\mathrm{A_N}(x) = \frac{(-1)^{N/2}}{N!}\sum_{k=1}^{k_1}\frac{1}{k!}\left(\begin{array}{c} N \\ \nu \end{array}\right)_\kappa a_{\nu_1}(x)a_{\nu_2}(x)...a_{\nu_k}(x)$ όπου N περιττός και $k_1 = [N/3]$.

Με την βοήθεια των παραπάνω διατυπώνουμε το θεώρημα:

Θεώρημα 5.1 Εάν $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ανήκει στην κλάση F και $r=r(n)$ η μοναδική ρίζα της $a_1(r)=n$, τότε για οποιαδήποτε επιλογή φυσικού αριθμού m, $a(x)\in \mathrm{A}$ και $\delta(x)\in\Delta(\alpha)$ οι συντελεστές a_n της $f(z)$ θα αναλύονται ασυμπτωτικά ως εξής:

$$a_n = f(r)r^{-n}(2\pi^2\alpha_2(r))^{-1/2}\{\sum_{v=0}^{3m}(2\alpha_2^{-1}(r))^{v}\Gamma(v+\frac{1}{2})\mathrm{A}_{2v}(r)+\mathrm{O}(\varphi_m(x;\delta,a)\}=$$
$$=f(r)r^{-n}(2\pi^2\alpha_2(r))^{-1/2}\{1+\pi^{-1/2}\sum_{v=0}^{3m}(2\alpha_2^{-1}(r))^{v}\Gamma(v+\frac{1}{2})\mathrm{A}_{2v}(r)+\mathrm{O}(\varphi_m(x;\delta,a)\}$$

Βλέπουμε πως το σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης εξαρτάτε καθαρά από την α και την δ που θα επιλέξουμε. Γενικότερα θέλουμε να είναι όσο μικρότερος γίνεται για αυτό και επιλέγουμε $\overline{a}(x)=g.l.bd_{a\in \mathrm{A}}a(x)$. Αν τώρα $\overline{a}(x)\in A$ και $f\in F$ τότε θα λέμε ότι $f\in F_1$.

5.3 Αναγκαία συνθήκη της Εικασίας του Riemann

Έστω η συνάρτηση $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ όπου η $\zeta(s)$ είναι η συνάρτηση Riemann. Θέτοντας $s=\frac{1}{2}+it$, έχουμε: $\xi(\frac{1}{2}+it)=\Xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n$, ολική συνάρτηση του t, τάξης ένα. Μία ισοδύναμη μορφή της Εικασίας του Riemann είναι η εξής:

Όλες οι ρίζες της $\Xi(t)$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Εάν ισχύει το παραπάνω παρατηρούμε ότι η c_0 είναι πραγματικός αριθμός και μία από τις συνέπειες είναι πως $\mu_n = nc_n^2-(n+1)c_{n-1}c_{n+1}>0$. Στην πραγματικότητα αυτή η συνθήκη είναι προφανης: Η $\Xi(t)$ είναι μια άρτια συνάρτηση και οι συντελεστές του t^2 εναλλάσουν πρόσιμο κατα τέτοιο τρόπο ώστε $\Xi(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m a_m t^{2m}, a_m>0$ και έτσι επαληθεύουμε πως $\mu_{2m}=2ma_{2m}^2>0$ και $\mu_{2m+1}=(2m+2)a_m a_{m+1}>0$.

Μπορούμε βέβαια να θεωρήσουμε την $\Xi(t)$ σαν συνάρτηση του t^2 . Στην συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοπειούμε τον συμβολισμό του Heyman, θέτοντας $z=t^2$. Έτσι θα έχουμε $\Xi(t)=f(-t^2)=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ μια ολική συνάρτηση τάξεως ½.

Οπότε εάν t_0 είναι μια πραγματική ρίζα της $\Xi(t)$ τότε $z_0=-t_0^2$ είναι μια αρνητική ρίζα της $f(z)$ και η εικασία του Riemann είναι ισοδύναμη με την εξής διατύπωση:

Όλες οι ρίζες της $f(z)$ είναι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

Συνεπώς θα ισχύει ότι η $D_n = nc_n^2 - (n+1)c_{n-1}c_{n+1}$ πρέπει να είναι θετική για κάθε $n \geq 1$.

Παρότι η παραπάνω συνθήκη δεν αποδυκνύυει την Εικασία του Riemann, εάν δεν ισχύει για κάποια n , τότε η Εικασία παύει να είναι αληθής και δεν επιδέχεται απόδειξη. Για τον παραπάνω λόγο παρουσιάζουμε την απόδειξη ότι :

$$D_n > 0 \tag{5.1}$$

Με την βοήθεια του θεωρήματος 5.1 θα αποδείξουμε ότι:

$$D_n = a_n^2(1 + \mathrm{O}(\log^{-1} n)) \tag{5.2}$$

Απόδειξη:

Κάνοντας χρήση του ορισμού της $f(z)$ καθώς και του γενικευμένου τύπου του Stirling έχουμε:

$$\log f(z) = \frac{1}{2} z^{1/2} \log \frac{z^{1/2}}{2\pi e} + \frac{7}{8} z^{1/2} \log z + \frac{1}{4} \log \frac{\pi}{2} + J\left(\frac{z^{1/2}}{2} + \frac{1}{4}\right) + Q(z), \tag{5.3}$$

όπου $J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z}{u^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi u}} du = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{B_{2\nu}}{2\nu(2\nu - 1)} z^{1-2\nu} + \mathrm{O}(z^{1-2m})$,

$Q(z) = \log \zeta(z^{1/2} + \frac{1}{2})$, και B_ν οι αριθμοί Bernoulli.

Ορίζουμε: $J_1(z) = z \frac{d}{dz} J(\frac{1}{2} z^{1/2} + \frac{1}{4})$ και αναδρομικά για $\nu > 1$: $J_\nu(z) = z \frac{d}{dz} J_{\nu-1}(z)$

Τώρα για $|\arg z| \leq \pi - \delta$, όπου $\delta > 0$ μπορούμε να δείξουμε ότι :

$$J_1(z) = \frac{1}{2} B_2 z^{-1/2}(1 - z^{-1/2}) + \mathrm{O}(z^{-3/2})$$

$J_2(z) = \frac{1}{4} B_2 z^{-1/2}(1 - z^{-1/2}) + \mathrm{O}(z^{-3/2})$ και γενικά

$$J_\nu(z) = (-1)^\nu B_2 z^{-1/2}(2^{-\nu} - (2z^{1/2})^{-1}) + \mathrm{O}(z^{-3/2}) = \frac{(-1)^\nu}{6} z^{-1/2}(2^{-\nu} - \frac{1}{2} z^{-1/2}) + \mathrm{O}(z^{-3/2})$$

Εάν λοιπόν $a_1(z) = z(f'(z)/f(z))$ και για $\nu > 1$, $a_\nu(z) = z a'_{\nu-1}(z)$ από την σχέση 5.3 θα έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ στο δίσκο $|\arg z| < \pi - \delta$:

$$a_1(z) = \frac{1}{4} z^{1/2} \log \frac{z^{1/2}}{2\pi} + \frac{7}{8} - \frac{1}{12}(z^{-1/2} - z^{-1}) + \mathrm{O}(z^{-3/2})$$

$$a_2(z) = \frac{1}{8} z^{1/2} \log \frac{ez^{1/2}}{2\pi} + \frac{1}{24}(z^{-1/2} - 2z^{-1}) + \mathrm{O}(z^{-3/2})$$

$$a_\nu(z) = 2^{-\nu-1} z^{1/2} \log \frac{e^{\nu-1} z^{1/2}}{2\pi} + \frac{(-1)^\nu}{6} z^{-1/2}(2^{-\nu} - \frac{1}{2} z^{-1/2}) + \mathrm{O}(z^{-3/2}), \text{ για } \nu > 1. \quad (5.4)$$

Τώρα για να εφαρμόσουμε το θεώρημα 5.1 θέτουμε $|z| = x$ και επιλέγουμε δ τέτοια ώστε $\delta = x^{-1/6} \log^{-1/2} x$. Παρατηρούμε ότι $R = \infty$ και ότι για κάθε $\nu > 1$, $a_1(x) > a_n(x)$ για x αρκετά μεγάλο. Έτσι παίρνουμε $a(x) = \bar{a}(x) = a_1(x)$ και για $f(z) \in F$ έχουμε ότι $f(z) \in F_1$.

Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε πως καθώς το $x \to \infty$, $\delta^2(x) a_2(x) \approx \frac{1}{16} x^{1/6} \to \infty$

$$\delta^3(x) a_3(x) \approx \frac{1}{8} \log x^{-1/2} \to 0 \text{ και } \delta^2 x^{1/2} = x^{1/6} \log^{-1} \to \infty. \quad (5.5)$$

Τέλος ελέφχουμε αν όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις του θεωρήματος επαληθεύονται για την $f(z)$:

Όντως για $z = x^{i\theta}$ και για $\delta < |\theta| < \pi - \delta$ κάνοντας χρήση της (5.3) και της παρακάτω ιδιότητας: $|Q(z)| \approx \left|2^{-z^{1/2}+1/2}\right| < \exp\{-\frac{1}{2}(\log 2) x^{1/3} \log^{-1/2} x\}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\log|f(z)| - \log f(z) < -\frac{1}{2}(1 - \cos\frac{\delta}{2}) x^{1/2} \log \frac{x^{1/2}}{2\pi e} - \frac{1}{8}\delta^2 x^{1/2} + \frac{7}{8}\log x + \frac{1}{4}\log\frac{\pi}{2} + \mathrm{O}(x^{-1/2}) \\
&-(\frac{1}{2} x^{1/2} \log \frac{x^{1/2}}{2\pi e} + \frac{7}{8}\log x + \frac{1}{4}\log\frac{\pi}{2} + \mathrm{O}(x^{-1/2})) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\delta}{2}\right) x^{1/2} \log \frac{x^{1/2}}{2\pi e} - \frac{1}{8}\delta^2 x^{1/2} + \mathrm{O}(x^{-1/2}) \\
&= -\frac{1}{16}\delta^2 x^{1/2} \log \frac{x^{1/2}}{2\pi e} - \frac{1}{8}\delta^2 x^{1/2} + \frac{1}{2^9 \cdot 3} x^{-1/6} \log^{-1} x + \mathrm{O}(x^{-1/2}) \\
&= -\frac{1}{16}\delta^2 x^{1/2} \log \frac{x^{1/2}}{2\pi e} + \mathrm{O}(x^{-1/6} \log^{-1} x) < -\frac{1}{32} x^{1/6}
\end{aligned}$$

Τώρα αν θέσουμε $\lambda(x) = \exp\left(-\frac{1}{32} x^{1/6}\right)$, έχουμε $f^{-1}(x)\left|f(xe^{i\theta})\right| < \lambda(x)$ που ισχύει για $\delta \le |\theta| \le \pi - \delta$ καθώς το $x \to \infty$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για $\pi - \delta \le |\theta| \le \pi$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει πως: $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} z^{1/2} + \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{4}$, έτσι από τον τύπο του Stirling έχουμε:

$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} z^{1/2} + \frac{1}{4}\right)\right| < (2\pi)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{4}\pi x^{1/2}(1 - \frac{1}{8}\delta^2)\right\} x^{\delta x^{1/2}/8}$ και έτσι κάνοντας χ΄ηση του ορισμού της δ η παραπάνω γίνεται: $\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}z^{1/2}+\frac{1}{4}\right)\right| < 2\pi)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{4}\pi x^{1/2}+\mathrm{O}(x^{1/6})\right\}$

,Επίσης έχουμε , έτσι ώστε $\mathrm{Re}\left(z^{1/2}+\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2},\mathrm{Im}\left(z^{1/2}+\frac{1}{2}\right)\approx x^{1/2}\sin\theta/2\leq x^{1/2}$ έτσι

$0\leq\left|\zeta\left(z^{1/2}+\frac{1}{2}\right)\right|< x^{1/2}$ και $-\infty\leq\mathrm{Re}Q(z)<\frac{1}{12}\log x$ άρα έχοουμε πως

$-\infty\leq\log\left|f(xe^{i\theta})\right|<-\frac{1}{4}\pi x^{1/2}+\mathrm{O}(x^{1/6})+\mathrm{O}(\log x)<-\frac{1}{5}\pi x^{1/2}$.

Δηλαδή συμπαιρένουμε ότι

$\log\left|f(xe^{i\theta})\right|-\log f(x)<-x^{1/2}\left(\log\frac{x^{1/2}}{2\pi e}+\frac{\pi}{5}\right)<-x^{1/2}\log\frac{x^{1/2}}{2\pi e}<-\frac{1}{32}x^{1/2}=\log\lambda(x)$,

όπου ισχύει παντού στο $\pi-\delta\leq|\theta|\leq\pi$. Αυτό τελειώνει την απόδειξη ότι η $f(z)\in F_1$, άρα και $f(z)\in F$.

Τώρα πλέον είμαστε έτοιμοι να κάνουμε χρήση του θεωρήματος και να υπολογίσουμε τις a_n .

Αντικαθιστούμε το x με την ρίζα της εξίσωσης $r=r(n)$ η οποία ικανοποεί την (5.4):

$$r^{1/2}\log\frac{r^{1/2}}{2\pi}=4\left(n-\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{r^{-1/2}-r^{-1}}{3}\right)+\mathrm{O}(r^{-3/2}) \tag{5.6}$$

Σημειώνουμε τις συνέπειες της (5.6):

1. $\left(r^{1/2}\log\frac{r^{1/2}}{2\pi}\right)^{-m}=\mathrm{O}(n^{-m})$ για κάθε $m>0$
2. $\log x-2\log n\approx-2\log_2 n$

   $\frac{1}{4}r^{1/2}=\left(n-\frac{7}{8}+\mathrm{O}(r^{-1/2})\right)\log^{-1}\frac{r^{1/2}}{2\pi}$
3. $=\left(n-\frac{7}{8}+\mathrm{O}(1)\right)\left(\log n+\mathrm{O}(\log_2 n)\right)^{-1}$

   $=n\log^{-1}n(1+\mathrm{O}((\log_2 n)(\log^{-1}n)))$

Τωρα επιλέγουμε $m=2$ και υπολογίζουμε τις ποσότητες που ορίζουν την φ_2 :

$$(da_2)^{-1}\exp(-\frac{1}{2}\delta^2\alpha_2) = \mathrm{O}((r^{1/3}\log^{1/2} r)^{-1}\exp(-\frac{1}{32}r^{1/6}))$$
$$\lambda(r) = \exp(-\frac{1}{32}r^{1/6})$$
$$a_2^{-17/2}a_1^5 = \mathrm{O}((r^{-7/4}\log^{-7/2} r)$$
$$a_2^{-15/2}a_3^4 a_4 = \mathrm{O}((r^{-5/4}\log^{-5/2} r)$$
$$a_2^{-17/2}a_3^6 = \mathrm{O}((r^{-5/4}\log^{-5/2} r)$$
$$a_2^{-19/2}a_1^6 = \mathrm{O}((r^{-7/4}\log^{-7/2} r)$$

Διαπιστώνουμε ότι η μεγαλύτερη ποσότητα είναι η $\mathrm{O}((r^{-5/4}\log^{-5/2} r)$, συνεπώς

$\varphi_2 = \mathrm{O}(n^{-2})$ και έτσι το θεώρημα υπολογίζει τις a_n ως εξής:

$$a_n = f(r)r^{-n}(2\pi^2\alpha_2(r))^{-1/2}\{1+\pi^{-1/2}\sum_{\nu=2}^{6}(2\alpha_2^{-}(r))^{\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\mathrm{A}_{2\nu}(r)+\mathrm{O}(n^2)\} \quad (5.7)$$

και μετά από υπολογισμούς προκύπτει:

$$a_n = r^{-n}f(r)(2\pi\alpha_2(r))^{-1/2}\left(1-(24n)^{-1}+\mathrm{O}(n\log n)^{-1}\right) \quad (5.8)$$

Υπολογίζουμε τώρα την D_n, ο οποίος αποτελούσε και τον αρχικό μας σκοπό:

Αντικαθιστώντας την (5.8) έχουμε:

$D_n = na_n^2\left\{1-(1+n^{-1})h(n)1+\mathrm{O}\left((n\log n)^{-1}\right)\right\}$ όπου

$h(n) = r_n^{2n}r_{n-1}^{-(n-1)}r_{n+1}^{-(n+1)}f^{-2}(r_n)f(r_{n+1})f(r_{n-1})\cdot\left(a^{-2}(r_n)a(r_{n+1})a(r_{n-1})\right)^{-1/2}$.

Έστω $g(x) = \log f(r(x)) - \frac{1}{2}\log a_2(r(x)) - x\log(r(x))$ (5.9)

Αν ορίσουμε τώρα τις πεπερασμένες διαφορές $\Delta^k g(i)$ θα έχουμε:

$\Delta^2 g(n-1) = g(n+1)-2g(n)+g(n-1)$ και $h(n) = \exp\left\{\Delta^2 g(n-1)\right\}$ και η D_n έχει την εξής μορφή:

$$D_n = na_n^2\left\{1-(1+n^{-1})\exp\left\{\Delta^2 g(n-1)\right\}\left[1+\mathrm{O}\left((n\log n)^{-1}\right)\right]\right\} \quad (5.10)$$

Από την (5.9) βλέπουμε ότι η g είναι διπλά διαφορίσιμη άρα $\Delta^2 g(n-1) = g''(n+\eta), |\eta| < 1$.

Συμβολίζουμε: $f' = df/dr, a'_\nu = da_\nu/dr, r' = df/dx$ τότε $da_1/dx = a'_1 r'$.
Πραγωγίσοντας την $a_1(r) = x$ έχουμε : $a'_1 r' = 1$.

Δηλαδή: $r'/r = (ra'_1)^{-1} = a_2^{-1}$ (5.11)

Ολοκληρώνουμε την (5.9) :

$$g'(x) = \left(f'/f\right)r' - \frac{1}{2}\left(a_2'/a_2\right)r' - \log r - x(r'/r) = (a_1 - -\frac{1}{2}\left(a_2'/a_2\right) - x)(r'/r) - \log r$$
$$= -\frac{1}{2}a_3 a_2^{-1}(r'/r) - \log r = -\frac{1}{2}a_3 a_2^{-2} - \log r$$

Και άλλη μια φορά:

$$g''(x) = \frac{1}{2}a_2^{-3}\left(2a_3 a_2' - a_2 a_3'\right)r' - (r'/r) = \left\{\frac{1}{2}a_2^{-3}\left(2a_3 r a_2' - a_2 r a_3'\right) - 1\right\}(r'/r)$$
$$= -(r'/r)\left(1 + \mathrm{O}\left((r^{1/2}\log r)^{-1}\right)\right) = -a_2^{-1}(1 + \mathrm{O}(n^{-1}))$$

Αντικαθιστώντας στις a_n έχουμε:

$$2a_2(r(x)) = a_1(r(x)) - \frac{7}{8} + \frac{1}{4}r^{1/2}(x) + \mathrm{O}(r^{-1/2}(x))$$
$$= x - \frac{7}{8} + \frac{1}{4}r^{1/2}(x) + \mathrm{O}(r^{-1/2}(x))$$
$$= x + (x\log^{-1}x)(1 + \mathrm{O}(\log_2 x\log^{-1}x))$$

Και συνεπως:

$$-a_2^{-1} = -2x^{-1}(1 + \log^{-1}x + \mathrm{O}(\log_2 x\log^{-1}x))^{-1} = -2x^{-1}(1 - \log^{-1}x + \mathrm{O}(\log_2 x\log^{-1}x))$$

Επειδή $|\eta| < 1$, προκύπτει:

$$\Delta^2 g(n-1) = g''(n+\eta)$$
$$= -2(n+\eta)^{-1}(1 - \log^{-1}(n+\eta) + \mathrm{O}(\log_2(n+\eta)\log_2(n+\eta))(1 + \mathrm{O}(n^{-1}))$$
$$= -2n^{-1}(1 - \log^{-1}n + \mathrm{O}(\log_2 n\log^{-2}n))$$

Το οποίο συνεπάγεται πως:

$\exp\left\{\Delta^2 g(n-1)\right\} = 1 - 2n^{-1} + \mathrm{O}((n\log n)^{-1})$, και έτσι η (5.10) γίνεται:

$$D_n = na_n^2\left\{1 - (1+n^{-1})\left[1 - 2n^{-1} + \mathrm{O}\left((n\log n)^{-1}\right)\right]\left[1 + \mathrm{O}((n\log n)^{-1}\right]\right\}$$
$$= na_n^2\left\{1 - \left[1 - n^{-1} + \mathrm{O}\left((n\log n)^{-1}\right)\right]\left[1 + \mathrm{O}\left((n\log n)^{-1}\right)\right]\right\}$$
$$= a_n^2(1 + \mathrm{O}(\log^{-1}n))$$

Με το οποίο ολοκληρώνεται και η απόδειξη μας.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Στα τρία πρώτα κεφάλαια είδαμε βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών, αναλύσαμε τις αριθμητικές συναρτήσεις και τις ιδιότητες τους και μελετήσαμε άλλες συναρτήσεις που έχουν σχέση με τους πρώτους αριθμούς. Στη συνέχεια εξετάσαμε βασικές έννοιες της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών όπως η συνάρτηση ζ και η Εικασία του Riemann. Επειδή όμως η Θεωρία Αριθμών βαδίζει παράλληλα με την Αναλυτική Θεωρία Αριθμών, στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο της παρούσας εργασίας γίνεται μια σύνδεση των δύο αυτών ενοτήτων.

Η σύνδεση αυτή γίνεται μέσω της έννοιας της γεννήτριας συνάρτησης:

Ορισμός 6.1: Γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας πραγματικών αριθμών (a_n) είναι κάθε συνάρτηση $F(s)$ της μορφής:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(s)$$

Τότε λέμε πως η συνάρτηση $f(s)$ είναι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας πραγματικών αριθμών (a_n).

Για $\mathrm{Re}(s) > 2$, ισχύει η ισότητα: $\dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$, όπου η $\varphi(n)$ είναι η συνάρτηση Euler.

Παρόμοιες σχέσεις μπορούμε να βρούμε και για την συνάρτηση του Mobious καθώς και για τις συναρτήσεις των διαιρετών. Συγκεκριμένα ισχύει:

$\dfrac{1}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ και επίσης $\zeta^2(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$. Γενικότερα δε $\zeta^{\kappa}(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{\kappa}(n)}{n^s}$.

Έτσι βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\dfrac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ είναι γεννήτρια συνάρτηση της $\varphi(n)$, η $\zeta^2(s)$ είναι η γεννήτρια της $\mu(n)$ κ.ό.κ.

Βιβλιογραφία

1. E. T. Compson Asymptotic Analysis, Cabridge Tracts in Mathematics

2. H. Davenport, Multiplicative Number Theory, Second Edition.

3. H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Dover Publication, 1974.

4. E. Grosswald, Generalization of a Formula of Hayman and its Application to the Study of Riemann's Zeta Function, Illinois Journal of Mathematics, Vol.10, No.1, March 1966.

5. E. Grosswald, Correction and Completion of the Paper "Generalization of a Formula of Haymann", Illinois Journal of Mathematics.

6. G. A. Jones and J. M. Jones, Elementary Number Theory, Springer, 1998.

7. A. A. Karatsuba and S. M. Voronin, The Riemann Zeta Function, de Gruter, 1992.

8. J. E. Marsden and M. J. Hollmand, Βασική Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία.

9. M. R. Murty, Problems in Analytical Number Theory, Springer, 2001.

10. Α. Χ. Παπαϊωάννου, Μ. Θ. Ρασσιάς, Εισαγωγή στη Θεωρία Αριθμών, Εκδόσεις Συμεών, 2010.

11. S. J. Patterson, The Riemann Hypothesis – a Short Story, Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, de Gruter, 2010.

12. R. C. Vaughan, The Hardy-Littlewood Method, 1919