



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Τομέας Φυσικής

Πιθανός ρόλος αξιονίων επαγόμενων από στρέψη στη  
γεωμετρία του πρώιμου σύμπαντος ως σκοτεινή ύλη

Διπλωματική Εργασία  
Μακάριος Βύρος

Επιβλέπων: Νικόλαος Ε. Μαυρόματος  
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Κ. Αναγνωστόπουλος    Χ. Κούβαρης    Ν. Μαυρόματος  
(Καθηγητής ΣΕΜΦΕ)    (Καθηγητής ΣΕΜΦΕ)    (Καθηγητής ΣΕΜΦΕ)

Αθήνα, Ιούλιος 2023



National Technical University of Athens  
School of Applied Mathematical and Physical Sciences  
Department of Physics

Potential role of torsion-induced axions as dark matter  
candidates

Diploma thesis  
Makarios Vyros

**Supervisor:** Nikolaos E. Mavromatos

**Examination Committee:**

K. Anagnostopoulos C. Kouvaris N.Mavromatos

Athens, July 2023

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Μαυρόματο, για τις υποδείξεις του και τη συνεχή του υποστήριξη κατά τη συγγραφή αυτής της διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τις γνώσεις που μου μετέδωσε κατά το μάθημα της Θεωρητικής Φυσικής.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον κ.Κ.Αναγνωστόπουλο και κ.Χ.Κούβαρη για τη σύσταση της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής μου εργασίας και τις γνώσεις που μου πρόσφεραν στα πολύ ενδιαφέροντα μαθήματα της Υπολογιστικής Φυσικής και Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου και τους συγγενείς μου για την στήριξη και την συμπαράστασή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

.....  
Μακάριος Βύρος

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, ερευνούμε τον πιθανό ρόλο των αξιονίων επαγόμενων από τη στρέψη ως υποψήφια σωματίδια σκοτεινής ύλης στο πρώιμο σύμπαν. Μελετούμε ένα απλό μοντέλο της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής σε χωρόχρονο παρουσία στρέψης και δείχνουμε ότι η στρέψη αντιστοιχεί σε ένα άμαζο ψευδοβαθμωτό αξιονικό πεδίο. Ακόμη, εξετάζουμε ένα ενεργό βαρυτικό μοντέλο εμπνευσμένο από τη θεωρία των χορδών, που περιέχει εγγενώς στρέψη και αποδεικνύουμε ότι εμφανίζεται ένα άμαζο KR αξιόνιο, το οποίο δύναται να λάβει μάζα μέσω μη διαταρακτικών μηχανισμών (instantons) κατά την QCD εποχή, καθιστώντας το υποψήφιο σωματίδιο για σκοτεινή ύλη. Τα αποτελέσματά μας υποδηλώνουν ότι τα αξιόνια επαγόμενα από στρέψη μπορούν να αποτελέσουν υποψήφια σωματίδια σκοτεινής ύλης και παροτρύνουν περαιτέρω έρευνα σε αυτήν την κατεύθυνση.

### Λέξεις Κλειδιά

Γεωμετρία με στρέψη, αξιόνια, σκοτεινή ύλη

## Abstract

In this thesis, we investigate the potential role of torsion-induced axions as dark matter candidates in the early universe. We are studying a simple model of quantum electrodynamics in spacetime with torsion and show that torsion corresponds to a massless pseudoscalar axionic field. Additionally, we examine an active gravitational model inspired by string theory, which inherently includes torsion, and prove that it exhibits a massless KR axion, capable of acquiring mass through non-perturbative mechanisms (instantons) during the QCD era, making it a candidate particle for dark matter. Our results suggest that torsion-induced axions could be a viable candidate for dark matter, and motivate further investigation in this direction.

### Keywords

Geometry with torsion, axions, dark matter

# Κατάλογος Σχημάτων

1	Ενεργειακό περιεχόμενο του σύμπαντος, όπως εκτιμάται από το WMAP [1] (αριστερό διάγραμμα) και το Planck 2013 [2] (δεξί διάγραμμα) (© ESA and the Planck Collaboration [3]) . . . . .	4
2	Ιστορία του σύμπαντος με βάση το μοντέλο της μεγάλης έκρηξης. Σε αυτήν την εργασία θα επικεντρωθούμε στην εποχή του πληθωρισμού αλλά και ύστερα από αυτήν [4]. . . . .	7
3.1	Σχηματική αναπαράσταση της μάζας των σωματιδίων της σκοτεινής ύλης σε διάφορα μοντέλα, όπου φαίνονται και τα QCD αξιόνια [5] . . . . .	30
3.2	Πληθώρα πιθανών θεωριών για την σκοτεινή ύλη [6] . . . . .	31
4	Αναπαράσταση χαρτών $(U, x)$ και $(V, y)$ με μη μηδενική επικάλυψη. Η τομή των δύο περιοχών $U \cap V$ απεικονίζεται από την $x$ και $y$ απεικόνιση στις αντίστοιχες αναπαραστάσεις. Μία απεικόνιση χάρτη μετάβασης $y \circ x^{-1}$ χρησιμοποιείται για να απεικονίσει την αλληλεπικαλυπτόμενη περιοχή από τη μία αναπαράσταση στην άλλη [7]. . . . .	50
5	Σχηματική αναπαράσταση του ορισμού (A.5.1) [7]. . . . .	53
6	Εφαπτόμενα επίπεδα σε δύο σημεία $p, q \in \mathcal{M} = S^2$ [7]. . . . .	54

# Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	1
Περιεχόμενα	2
Εισαγωγή	4
1 Κβαντική ηλεκτροδυναμική σε χωρόχρονο με στρέψη	9
1.1 Εισαγωγή	9
1.2 Κβαντική ηλεκτροδυναμική με στρέψη	9
1.3 Στρέψη και αξιονικός βαθμός ελευθερίας	15
1.4 Σύνοψη	17
2 Ενεργή βαρυτική θεωρία με στρέψη εμπνευσμένη από τη θεωρία χορδών	18
2.1 Εισαγωγή	18
2.2 Ενεργή δράση με στρέψη από θεωρία χορδών	18
2.3 Αξιονικός βαθμός ελευθερίας	20
2.4 Σύνοψη	24
3 Εποχή μετά τον πληθωρισμό και QCD αξιονική σκοτεινή ύλη	25
3.1 Εισαγωγή	25
3.2 Εποχή μετά τον πληθωρισμό	25
3.3 Θραύση της συμμετρίας μετατόπισης	28
3.4 Σύνοψη	31
Συμπεράσματα	32
Παράρτημα Α: Φορμαλισμός της στρέψης	33
Α.1 Εισαγωγή	33
Α.2 Βαρύτητα με στρέψη	33
Α.3 Τανυστής τάσης και Cotton τανυστής	36
Α.4 Διαστατική Ανάλυση	44
Παράρτημα Β: Μαθηματικό υπόβαθρο	46
Β.1 Εισαγωγή	46
Β.2 Τοπολογία	46
Β.2.1 Συνεχείς απεικονίσεις	48
Β.3 Τοπολογικά manifold (πολλαπλότητες)	49
Β.3.1 Απεικονίσεις χαρτών μετάβασης	49
Β.4 Πολυγραμμική άλγεβρα	50
Β.4.1 Τανυστές	51
Β.4.2 Βάσεις και συνιστώσες τανυστή	51

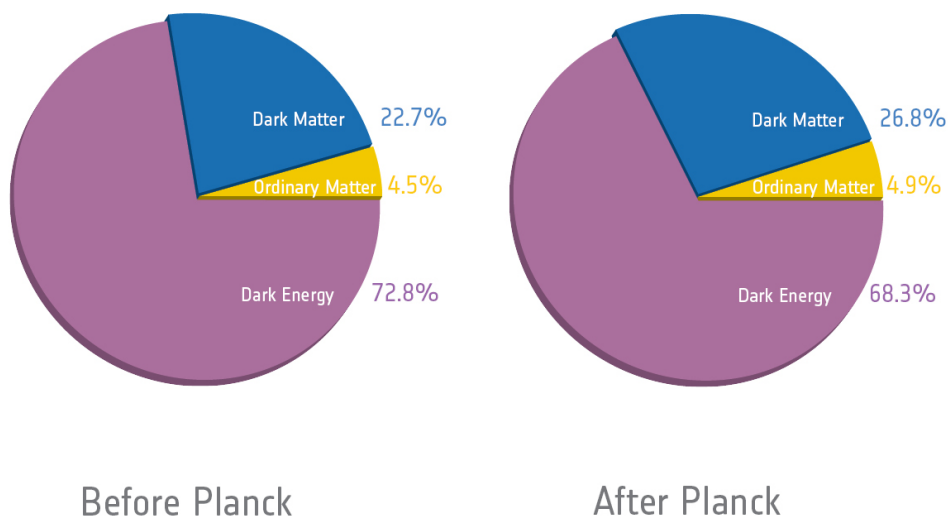
B.5	Διαφορίσιμα manifolds . . . . .	52
B.5.1	Διαφορομορφισμοί (diffeomorphisms) . . . . .	53
B.6	Εφαπτομενικοί χώροι . . . . .	54
B.7	Μετρικός τανυστής . . . . .	56
B.8	Τανυστικές πυκνότητες - Σύμβολο Levi-Civita . . . . .	57
B.9	Διαφορικές μορφές . . . . .	59
B.9.1	Εξωτερικό γινόμενο . . . . .	60
B.9.2	Εξωτερική παράγωγος . . . . .	61
B.9.3	Διαδικός Hodge τελεστής . . . . .	61
B.9.4	Ολοκλήρωση σε manifolds και θεώρημα Stokes . . . . .	62
<b>Bibliography</b>		<b>65</b>



# Εισαγωγή

Η θεωρία της Γενικής Σχετικότητας (General Relativity - (GR)) του Einstein μας παρέχει ένα πολύ επιτυχημένο πλαίσιο για την κλασική περιγραφή των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων [8], κάτι που έχει ελεγχθεί σε ικανοποιητικό βαθμό τόσο σε τοπικό (γήινο, αστροφυσικό) επίπεδο μέσω των ηλιακών πειραματικών δεδομένων [9], όσο και σε καθολικό (κοσμολογικό) επίπεδο. Σε κοσμολογικές κλίμακες, η κοσμολογική λύση FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) των πεδιακών εξισώσεων του Einstein της GR, με την παρουσία μιας θετικής κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda > 0$ , συμπεριλαμβανομένου και μιας Cold-Dark-Matter συνιστώσας ( $\Lambda$ CDM paradigm), φαίνεται να περιγράφει με επιτυχία, την πληθώρα των σημερινών κοσμολογικών πειραματικών δεδομένων [10–12].

Το μοντέλο  $\Lambda$ CDM άλλαξε την αντίληψή μας για την εξέλιξη και τις ιδιότητες του σύμπαντος που είχαμε για το μεγαλύτερο μέρος του 20ού αιώνα. Σύμφωνα με τις πιο αποδεκτές ερμηνείες των πειραματικών δεδομένων [13], το σύμπαν φαίνεται επί του παρόντος να επιταχύνεται μπαίνοντας ξανά σε μία (κατά προσέγγιση) φάση de Sitter με μία καταστατική εξίσωση σχεδόν ίδια με ένα σύμπαν που έχει θετική κοσμολογική σταθερά  $w \simeq -1$ , όπως κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, αλλά με μικρότερη σε μέγεθος παράμετρο Hubble [13,14]. Η συνηθισμένη (κυρίως βαρυονική) ύλη αποτελεί περίπου μόνο το  $\sim 5\%$  του τρέχοντος ενεργειακού περιεχομένου του σύμπαντος. Το υπόλοιπο 95% του παρατηρήσιμου σύμπαντος αποτελείται από άγνωστες ουσίες: περίπου το  $\sim 25\%$  του περιεχομένου του σύμπαντος φαίνεται να είναι σκοτεινή ύλη (Dark Matter (DM)), η οποία έχει άγνωστη προέλευση και έχουμε μόνο αστροφυσικές (δηλαδή βαρυτικές) αποδείξεις για την ύπαρξή της, και περίπου το  $\sim 70\%$  αντιστοιχεί σε μια άγνωστη μορφή ενέργειας (σκοτεινή ενέργεια), υπεύθυνη για την επιτάχυνση του σύμπαντος, η οποία στη σημερινή εποχή συμπεριφέρεται σαν θετική κοσμολογική σταθερά.



Σχήμα 1: Ενεργειακό περιεχόμενο του σύμπαντος, όπως εκτιμάται από το WMAP [1] (αριστερό διάγραμμα) και το Planck 2013 [2] (δεξί διάγραμμα) (© ESA and the Planck Collaboration [3])

Η ανακάλυψη των βαρυτικών κυμάτων (gravitational waves (GW)) το 2015 από τους ανιχνευτές συμβολομέτρων LIGO/VIRGO [15], έδωσε μεγάλη ώθηση στην GR, αφού επιβεβαίωσε μία από τις μεγαλύτερες της προβλέψεις της θεωρίας, την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων. Τα κύματα αυτά, προήλθαν από τη συγχώνευση δύο αστρικών αντικειμένων, τα οποία θεωρήθηκαν ότι είναι δύο περιστρεφόμενες μελανές οπές. Αυτή η ανακάλυψη, άνοιξε ένα νέο κεφάλαιο για την αστρονομία, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για περαιτέρω δοκιμές της GR, στο πλαίσιο του πιθανού περιορισμού των παραμέτρων (ή της απόρριψης) των τροποποιημένων θεωριών της βαρύτητας πέρα από την GR. Επιπλέον, η απεικόνιση της σκιάς μιας υπερμεγέθους μελανής οπής στο κέντρο του ελλειπτικού γαλαξία M87 στον αστερισμό της Παρθένου από το τηλεσκόπιο του ορίζοντα γεγονότων (Event-Horizon Telescope (EHT)) [16], αναμένεται να συμβάλει με νέους τρόπους στην κοσμολογία, και μάλιστα σε ορισμένες πτυχές να συμπληρώσει τα βαρυτικά κύματα στον περιορισμό της φυσικής των μελανών οπών [17] και γενικότερα στη δοκιμή θεωριών βαρύτητας πέρα από την κλασική GR. Πράγματι, οι λύσεις μελανών οπών σε τροποποιημένες θεωρίες της βαρύτητας θα είχαν παρατηρήσιμες τροποποιήσεις στις σκιές τους σε σύγκριση με αυτές των μελανών οπών της GR. Ένα από τα είδη τέτοιων μελανών οπών προκύπτει σε τροποποιημένες θεωρίες της GR, εμπνευσμένες από τη θεωρία χορδών, που περιλαμβάνουν εκθετική σύζευξη ενός βαθμωτού πεδίου (dilaton), με τετραγωνικούς όρους των ταχυστών καμπυλότητας (ταχυστής καμπυλότητας Riemann, ταχυστής του Ricci, βαθμωτό του Ricci κλπ) σε Gauss-Bonnet (GB) συνδυασμούς [18]. Ακόμη, τα τελευταία χρόνια, τέτοιες τροποποιήσεις της GR έχουν εξεταστεί επίσης στο πλαίσιο των λεγόμενων scalar-tensor (βαθμωτού-ταχυστικών) θεωριών βαρύτητας (τύπου Horndeski), όπου εμφανίζονται γραμμικές συζεύξεις μεταξύ ενός βαθμωτού πεδίου και GB όρων, όπου το βαθμωτό πεδίο ικανοποιεί μία συμμετρία μετατόπισης [19–23]. Άλλες θεωρίες πέρα από την GR, των οποίων οι λύσεις των μελανών οπών τους μπορούν να εξεταστούν πειραματικά, είναι οι λεγόμενες Chern-Simons θεωρίες της βαρύτητας [24, 25], οι οποίες περιλαμβάνουν συζεύξεις των παραγώγων ψευδοβαθμωτών αξιονικών (axion-like) πεδίων (που παραβιάζουν την CP συμμετρία) με ανώμαλους βαρυτικούς Chern-Simons όρους.

Ωστόσο, παρά τις φαινομενολογικές επιτυχίες της GR, η ανάγκη να προχωρήσουμε πέρα από αυτήν είναι αρκετά επείγουσα από θεωρητική άποψη. Η χβάντωση της βαρύτητας, δηλαδή η ανάπτυξη μιας συνεπούς (από μαθηματική και φυσική άποψη) θεωρίας της χβαντικής βαρύτητας (Quantum Gravity (QG)), ακολουθώντας το παράδειγμα των υπόλοιπων θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων στη φύση, παραμένει ακόμα ένα σημαντικό αναπάντητο πρόβλημα στη θεμελιώδη φυσική, το οποίο, εάν επιλυθεί, θα οδηγήσει αναμφίβολα σε συγκεκριμένες τροποποιήσεις της GR [26]. Η GR ως έχει, είναι μία μη επανακανονικοποιήσιμη θεωρία και έτσι δεν μπορεί να είναι μια κατάλληλη θεωρία χβαντικής βαρύτητας [13].

Μέχρι στιγμής, υπάρχουν διάφορες θεωρίες που προσπαθούν να απαντήσουν σε θεμελιώδη ζητήματα της QG. Η πιο αναπτυγμένη θεωρία είναι η θεωρία των χορδών [27–29], η οποία προσφέρει έναν συνεπή τρόπο χβάντωσης της βαρύτητας, μαζί με όλες τις άλλες θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις. Στο πλαίσιο της θεωρίας των χορδών, η GR τροποποιείται με συγκεκριμένο τρόπο, δεδομένου ότι οι ενεργές βαρυτικές δράσεις (στο όριο των χαμηλών ενεργειών), περιέχουν έναν άπειρο αριθμό όρων υψηλότερης τάξης στις παραγώγους αλλά και στους ταχυστές καμπυλότητας. Παρόλα αυτά, αυτή τη στιγμή, οι θεωρίες των χορδών δεν αποτελούν πραγματικά έναν φορμαλισμό ανεξάρτητο από το χωροχρονικό υπόβαθρο, αν και η δυνατότητα για κάτι τέτοιο μπορεί να υπάρχει σε μελλοντικές μη-διαταρακτικές διατυπώσεις. Έτσι, όλες οι γνωστές διατυπώσεις της θεωρίας των χορδών μέχρι σήμερα, συμπεριλαμβανομένων των D-brane θεωριών, φαίνεται να εξαρτώνται από το χωροχρονικό υπόβαθρο με την έννοια ότι, ο χωρόχρονος ακόμη δεν έχει κατανοηθεί πλήρως σε χβαντικό επίπεδο. Επιπλέον, η θεωρία των χορδών χαρακτηρίζεται από μία αφθονία επιτρεπτών κενών, κάτι που ονομάζεται Landscape, και ο μηχανισμός για την επιλογή του φυσικού κενού δεν έχει ακόμη κατανοηθεί (μάλιστα, ορισμένοι φυσικοί αναφέρονται σε ανθρωποκεντρικά επιχειρήματα για να εξηγήσουν μια τέτοια επιλογή [30]).

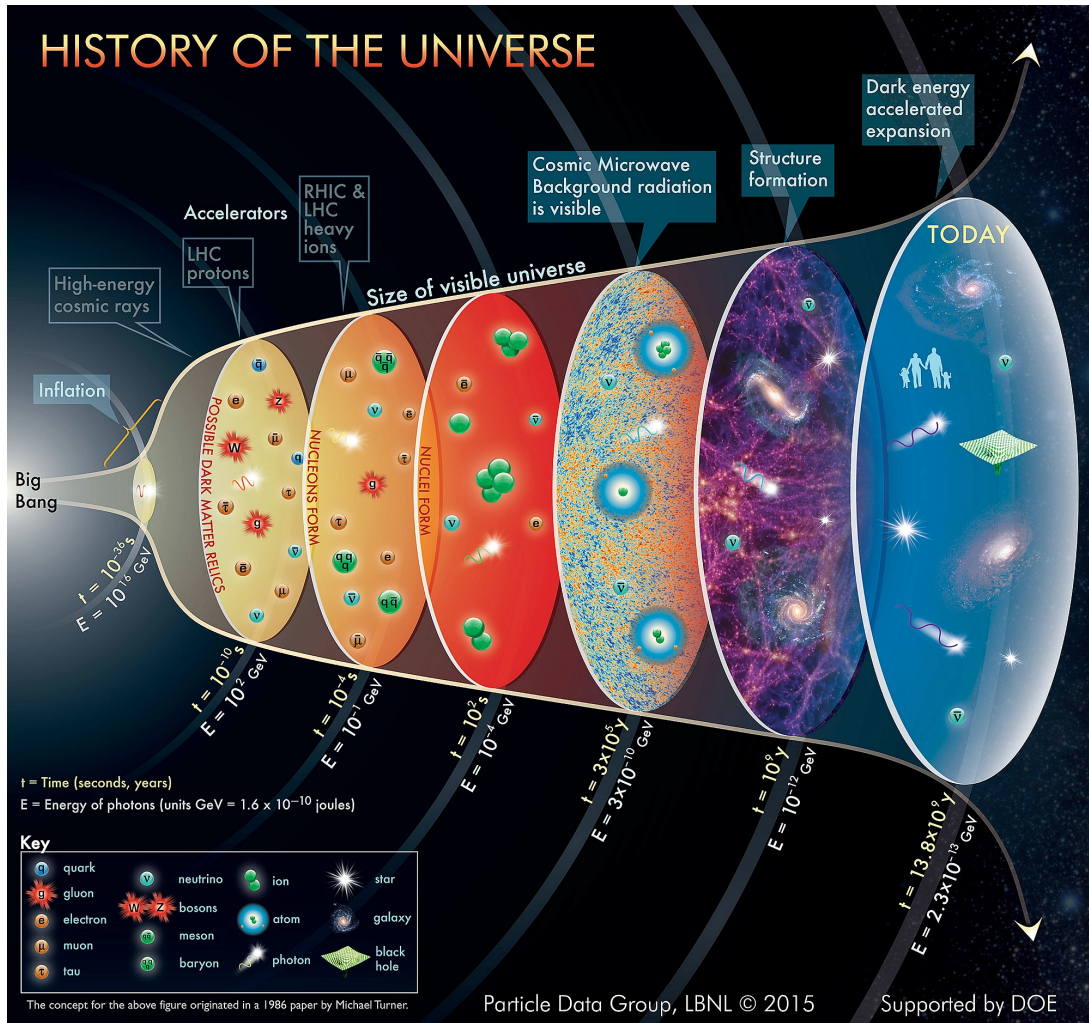
Εναλλακτικά με την θεωρία των χορδών, υπάρχουν αρκετές θεωρίες που είναι ανεξάρτητες από το

χωροχρονικό υπόβαθρο και μαθηματικά-φυσικά συνεπείς, έχοντας τη δυνατότητα να περιγράψουν δυναμικά την εμφάνιση του χωροχρόνου. Τέτοιες θεωρίες είναι η Loop Quantum Gravity (LQG) [31, 32] και οι εφαρμογές της σε ομογενή συστήματα, η καλούμενη Loop-Quantum κοσμολογία [33, 34], τα spin-foam μοντέλα [35, 36] και η ομαδο-πεδιοθεωρητική προσέγγιση στην QG [37], κατά την οποία ορίζονται κβαντικές θεωρίες πεδίων του χωροχρόνου, όπου το manifold είναι μία κατάλληλη ομάδα Lie και περιγράφει τη δυναμική της τοπολογίας και της γεωμετρίας του σύμπαντος. Το διαταραχτικό όριο της LQG δίνει τα spin-foam μοντέλα, τα οποία μπορούν να αντιστοιχούν και σε πεπερασμένες ομάδες, πέρα από τις συνεχείς Lie ομάδες [38].

Εκτός από τις θεωρητικές ανάγκες να πάμε σε θεωρίες πέρα από την GR, φαίνεται να υπάρχουν και παρατηρησιακά ζητήματα που ενέπνευσαν αρκετούς θεωρητικούς φυσικούς να αναζητήσουν μοντέλα πέρα από το  $\Lambda$ CDM μοντέλο της κοσμολογίας και γενικότερα πέρα από την GR. Όντως, τα κοσμολογικά πειραματικά δεδομένα φαίνεται να χαρακτηρίζονται από ενδιαφέρουσες ασυμφωνίες (tensions) σε μικρές κλίμακες. Για παράδειγμα έχουμε την “ $H_0$ -tension”, που δείχνει αποκλίσεις ανάμεσα στην τρέχουσα τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$ , όπως εξάγεται από τις τοπικές αστροφυσικές μετρήσεις (γαλαξίες Cepheid) [39, 40] και αυτή που προκύπτει από τις μετρήσεις της ακτινοβολίας του κοσμικού υποβάθρου (CMB) του πειράματος Planck, βασισμένη σε προσαρμογές των πειραματικών δεδομένων εντός του  $\Lambda$ CDM πλαισίου [12]. Ακόμη, στα τρέχοντα δεδομένα σχηματισμού γαλαξιών και σμηνών γαλαξιών παρουσιάζεται μία διαφοροποίηση στην τιμή της τυπικής απόκλισης (r.m.s) των διακυμάνσεων της πυκνότητας της ύλης στην τρέχουσα εποχή, εντός σφαιρών με ακτίνα  $8h^{-1}$  (με  $h \simeq 0.7$  να είναι η “ανηγμένη Hubble σταθερά”), όπως προκύπτει με βάση το  $\Lambda$ CDM μοντέλο, εν συγκρίσει με την τιμή της τυπικής απόκλισης που προκύπτει από τοπικές άμεσες μετρήσεις σε μικρά redshifts (μετατοπίσεις στο ερυθρό) [13, 41]. Αυτή η τελευταία ασυμφωνία, καλείται “ $\sigma^8$  tension”. Παρόλο που δεν μπορούμε ακόμα να αποκλείσουμε την πιθανότητα ότι αυτές οι ασυμφωνίες οφείλονται σε ανεπαρκή (προς το παρόν) ακρίβεια δεδομένων και (ή) στατιστικής, δεδομένου ότι οι σχετικές αποκλίσεις είναι αυτήν την στιγμή μέσα σε ένα εύρος  $2\sigma - 3\sigma$ , έχουν οδηγήσει στην εξερεύνηση μοντέλων πέρα του  $\Lambda$ CDM και της GR, μέσω των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας [42]. Αξίζει να αναφέρουμε ότι, ένα τέτοιο θεωρητικό μοντέλο είναι το “running vacuum model (RVM)” [43], όπου υποθέτουμε μία χρονικά εξαρτώμενη ενέργεια κενού με καταστατική εξίσωση  $w_{\text{vacuum}} = -1$ , όπως είναι και στην de Sitter περίπτωση. Αυτό μας παρέχει μία ομαλή εξέλιξη του σύμπαντος από τον πληθωρισμό έως την τωρινή εποχή, με πιθανές παρατηρήσιμες αποκλίσεις από το  $\Lambda$ CDM [44] και ταυτόχρονα ελαττώνει και τους δύο τύπους των ασυμφωνιών  $H_0$  και  $\sigma_8$ , με τα τωρινά δεδομένα [13, 45].

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η έννοια της στρέψης κατέχει κεντρικό ρόλο και πρέπει να αναφερθεί ότι εν γένει η στρέψη μπορεί να υπάρχει στις ενεργές θεωρίες της βαρύτητας που προκύπτουν από τα προαναφερθέντα μικροσκοπικά μοντέλα της QG. Για παράδειγμα, γενικευμένες γεωμετρίες με στρέψη δύναται να εμφανιστούν στο όριο των χαμηλών ενεργειών της θεωρίας των χορδών, όπου η στρέψη δίνεται από την ισχύ του πεδίου ενός (spin-1) αντισυμμετρικού τανυστικού (Kalb-Ramond (KR)) πεδίου, που ανήκει στην άμαζη μποζονική βαρυτική multiplet των χορδών [13]. Εμείς, ακριβώς σε αυτό το είδος στρέψης θα περιοριστούμε (διότι υπάρχουν και άλλου είδους κοσμολογίες με στρέψη σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας [13, 46]) και θα συζητήσουμε τη σύνδεσή της με τον σκοτεινό τομέα του σύμπαντος στο όριο των χαμηλών ενεργειών μιας κοσμολογίας εμπνευσμένης από τη θεωρία των χορδών, με μη τετριμμένες βαρυτικές ανωμαλίες [47] στο πρώιμο σύμπαν. Οι ανώμαλοι όροι εκφράζονται μέσω της παρουσίας στην Lagrangian, του βαρυτικού Chern-Simons όρου (που παραβιάζει την CP συμμετρία), ο οποίος κάνει σύζευξη με KR αξιόνιο (που είναι ανεξάρτητο από το μοντέλο της θεωρίας των χορδών) και αυτό στον (3+1)-διάστατο χωρόχρονο είναι δυαδικό στην στρέψη, όπως θα εξηγήσουμε και στον Κεφ.2 αναλυτικά. Στην ουσία, οι ανώμαλοι όροι στις τέσσερις διαστάσεις είναι επακόλουθο των αντισταθμιστικών όρων που υπάρχουν στις ανώτερες διαστάσεις και εισέρχονται στην ενεργό θεωρία ως αποτέλεσμα του μηχανισμού ακύρωσης των ανωμαλιών Green-Schwarz [27]. Αυτοί οι βαρυτικοί Chern-Simons όροι είναι μη τετριμμένοι όταν υπάρχουν αρχέγονα (primordial) βαρυτικά κύματα [48], των οποίων η

πιθανή προέλευση έχει συζητηθεί στα άρθρα [49, 50]. Επίσης, η αλληλεπίδραση του KR αξιονίου με τους βαρυτικούς Chern-Simons όρους, αναδεικνύεται ουσιαστική για την δημιουργία ενός κοσμολογικού κενού, τύπου RVM, που με τη σειρά του συνεπάγεται πληθωρισμό δίχως την ανάγκη ενός inflaton πεδίου [51], όπου ο σχηματισμός συμπυκνωμάτων βαρυτικών κυμάτων είναι απαραίτητος για αυτό το αποτέλεσμα. Επιπρόσθετα, τέτοια συμπυκνώματα οδηγούν σε undiluted (αδιάλυτα) KR αξιονικά υπόβαθρα κατά την έξοδο από τον πληθωρισμό, τα οποία θραύουν αυθόρμητα την συμμετρία Lorentz. Αυτά τα υπόβαθρα, διατηρούνται και μέχρι την εποχή της ακτινοβολίας, όπου οδηγούν σε λεπτογένεση σε θεωρίες με δεξιόστροφα sterile νετρίνα μεγάλης μάζας [52, 53].



Σχήμα 2: Ιστορία του σύμπαντος με βάση το μοντέλο της μεγάλης έκρηξης. Σε αυτήν την εργασία θα επικεντρωθούμε στην εποχή του πληθωρισμού αλλά και ύστερα από αυτήν [4].

Η δομή της εργασίας είναι η εξής: στο πρώτο κεφάλαιο μελετούμε την θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής σε χωρόχρονο με στρέψη (contorted QED), ως ένα δοκιμαστικό μοντέλο για να εξοικειωθούμε με την έννοια της στρέψης, αποδεικνύοντας ότι η στρέψη αντιστοιχεί σε αξιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Φυσικά αυτό είναι το απλούστερο μοντέλο όπου οι εξισώσεις κίνησης για τη στρέψη δεν είναι τετριμμένες, θεωρώντας στην ουσία μία σύζευξη μιας Einstein-Cartan θεωρίας (δηλαδή μιας καθαρά βαρυτικής θεωρίας με ένα βαθμωτό όρο καμπυλότητας στην Lagrangian με βάση το φορμαλισμό του Palatini, όπου τα vielbeins (τετράδες) και οι σπιν συνοχές αντιμετωπίζονται ως ανεξάρτητα πεδία, έχοντας αφαιρέσει την συνθήκη μηδενικής στρέψης που υποθέτει η GR), με φερμιονικά πεδία Dirac. Στο δεύτερο κεφάλαιο, βρισκόμαστε στο πρώιμο σύμπαν πριν αλλά και κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού και παρουσιάζουμε την ενεργή βαρυτική θεωρία που είναι εμπνευσμένη από τη θεωρία των χορδών στον (3+1)-διάστατο χωρόχρονο, όπου εξηγούμε την εμφάνιση

της στρέψης και την ισοδυναμία αυτής με ένα δυναμικό άμαζο KR αξιονικό πεδίο. Έπειτα στο τρίτο κεφάλαιο, θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στην εποχή μετά τον πληθωρισμό, όπου οι βαρυτικές ανωμαλίες ακυρώνονται από την γένεση χειραλικής φερμιονικής ύλης με τρόπο που θα εξηγήσουμε αναλυτικά. Επίσης, περιγράφουμε πως μέσω ενός μη διαταρακτικού μηχανισμού (instantons) μετά τον πληθωρισμό κατά την QCD εποχή, γεννάται ένα δυναμικό και άρα μάζα για το πρώην άμαζο KR αξιόνιο και με αυτό τον τρόπο μπορεί να παίζει το ρόλο της σκοτεινής ύλης (ή μιας συνιστώσας αυτής) στο σύμπαν εμπνευσμένο από τη θεωρία των χορδών. Ύστερα παραθέτουμε τα συμπεράσματά μας, όπου λόγω της σύνδεσης του KR αξιονίου με τη στρέψη μπορούμε να πούμε ότι η σκοτεινή ύλη έχει γεωμετρική προέλευση σε τέτοια μοντέλα. Τέλος, κάποιες μαθηματικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά της στρέψης περιγράφονται στο παράρτημα A, μαζί με τις τροποποιημένες εξισώσεις κίνησης του Einstein λόγω των βαρυτικών Chern-Simons terms όρων και αποδεικνύεται ότι η συνθήκη της γενικής συναλλοιότητας (general covariance) ικανοποιείται. Το παράρτημα B αποτελεί μία σύντομη ανασκόπηση σε βασικά μαθηματικά εργαλεία για τη μελέτη της φυσικής που είναι σε άμεση σύνδεση με την GR και την κοσμολογία. Γενικά στην εργασία, θα δουλέψουμε στο φυσικό σύστημα μονάδων όπου  $\hbar = c = 1$  και ο χρωματισμός σε ορισμένες εξισώσεις θα είναι για την διευκόλυνση του αναγνώστη στις πράξεις.

# Κεφάλαιο 1

## Κβαντική ηλεκτροδυναμική σε χωρόχρονο με στρέψη

### 1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε ένα μοντέλο, που αφορά την κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) σε χωρόχρονο παρουσία στρέψης, κατά το πρώιμο σύμπαν, για ένα φορτισμένο φερμιονικό πεδίο Dirac  $\psi(x)$ , υιοθετώντας την πιο απλή (minimal) περιγραφή για τις βαρυτικές και gauge (βαθμίδας) συζεύξεις. Στόχος μας είναι να εξακριβώσουμε τον ρόλο της στρέψης, εφόσον λάβουμε διορθώσεις βρόχου πρώτης τάξης (one-loop corrections) στην θεωρία. Να σημειωθεί ότι κατά την ανάλυση θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση του άρθρου των Duncan, Kaloper και Olive [54].

### 1.2 Κβαντική ηλεκτροδυναμική με στρέψη

Κατά την παραδοσιακή προσέγγιση της θεωρίας της βαρύτητας, στα πλαίσια της γενικής σχετικότητας του Einstein, η στρέψη δεν παίζει σημαντικό ρόλο στη γεωμετρία του χωροχρόνου, καθώς ορίζεται ίση με το μηδέν εξ' αρχής και πειραματικά φαίνεται ότι δεν υπάρχει κάποιος αναγκαίος λόγος για να μην ισχύει αυτό. Ωστόσο, σε μια πιο γεωμετρική προσέγγιση της βαρύτητας, η στρέψη και η καμπυλότητα του χωροχρόνου πρέπει να αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο [55]. Έτσι, θα εξετάσουμε ένα απλό μοντέλο της QED σε χωρόχρονο παρουσία στρέψης και θα δούμε τι συνέπειες έχει η συμπερίληψη της στρέψης στη θεωρία μας.

Αρχικά θα θεωρήσουμε την δράση για ένα άμαζο φορτισμένο Dirac φερμιόνιο, το οποίο αλληλεπιδρά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και την βαρύτητα παρουσία στρέψης [54], ως:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{QED}}^{\text{torsion}} &= \mathcal{S}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{S}_{\psi}^{\text{torsion}}, \\ \mathcal{S}_{\text{Maxwell}} &= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \\ \mathcal{S}_{\psi}^{\text{torsion}} &= \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \bar{\psi} \gamma^{\mu} \bar{\mathcal{D}}_{\mu} \psi - (\bar{\mathcal{D}}_{\mu} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \psi \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

όπου  $\bar{\mathcal{D}}_{\mu} = \bar{D}_{\mu} - ie A_{\mu}(x)$ , είναι η πλήρης συναλλοίωτη παράγωγος (gauge-βαρυτική) σε χωρόχρονο με στρέψη,  $e$  είναι το ηλεκτρικό φορτίο (θεωρούμε ότι είναι αυτό του ηλεκτρονίου) με  $e^2 = 4\pi\alpha_{\text{QED}}$  και  $A_{\mu}(x)$  είναι το πεδίο φωτονίων που εμφανίζεται στον ταυστή Maxwell δίχως

στρέψη. Η βαρυτική συναλλοιώτη παράγωγος  $\bar{D}_\mu$  και η χωροχρονική-Riemannian βαρυτική συναλλοιώτη παράγωγος  $D_\mu$  που δρουν πάνω σε σπίνορες ορίζονται ως:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}}\psi &= \mathbf{d}\psi - \frac{i}{4} \bar{\omega}_{ab} \sigma^{ab} \psi, \\ \mathbf{D}\psi &= \mathbf{d}\psi - \frac{i}{4} \omega_{ab} \sigma^{ab} \psi, \quad \sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b],\end{aligned}\quad (1.2)$$

με  $\bar{\omega}_{ab}$  να είναι η γενικευμένη σπιν συνοχή με στρέψη,  $\omega_{ab}$  να είναι η σπιν συνοχή δίχως στρέψη και  $\gamma^a$  είναι οι  $\gamma$  πίνακες Dirac στον (επίπεδο Minkowski) εφαπτομενικό χώρο (όπου οι δείκτες ανεβαίνουν και κατεβαίνουν με την μετρική Minkowski  $\eta^{ab}$ , με την σύμβαση προσήμου  $(-, +, +, +)$ ). Φυσικά μπορούμε να λάβουμε και τις συζυγείς εκφράσεις [54] αυτών των παραγώγων, όπου:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}}\bar{\psi} &= \mathbf{d}\bar{\psi} + \frac{i}{4} \bar{\omega}_{ab} \bar{\psi} \sigma^{ab}, \\ \mathbf{D}\bar{\psi} &= \mathbf{d}\bar{\psi} + \frac{i}{4} \omega_{ab} \bar{\psi} \sigma^{ab},\end{aligned}\quad (1.3)$$

και να κάνουμε χρήση της σχέσης (A.5), όπου  $\bar{\omega}_{ab\mu} = \omega_{ab\mu} + K_{ab\mu}$ , δηλαδή η γενικευμένη σπιν συνοχή χωρίζεται σε ένα κομμάτι το οποίο αφορά τον “torsionless” (χωρίς στρέψη) χώρο που σχετίζεται με τα γνωστά σύμβολα Christoffel και στην contorsion η οποία περιέχει όλη την στρέψη. Οπότε με χρήση αυτής της σχέσης (A.5) και των (1.2),(1.3) έπεται ότι:

$$\begin{aligned}\bar{D}_\mu \psi &= D_\mu \psi - \frac{i}{4} K_{ab\mu} \sigma^{ab} \psi, \\ \bar{D}_\mu \bar{\psi} &= D_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} K_{ab\mu} \bar{\psi} \sigma^{ab},\end{aligned}\quad (1.4)$$

Με απλή αντικατάσταση της πλήρους συναλλοιώτης παραγώγου (θα πρέπει να προσέξουμε να λάβουμε την συζυγή έκφραση για το  $\bar{\psi}$ ) η σπινοριακή δράση γράφεται :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\psi^{\text{torsion}} &= \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu \bar{D}_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} e (\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi) + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} e (A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \\ &= \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu \bar{D}_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) + e \int d^4x \sqrt{-g} A_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)\end{aligned}\quad (1.5)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το  $A_\mu$  είναι ανεξάρτητο από τους σπίνορες (στην ουσία έχουμε δύο αντικείμενα το  $A_\mu$  και το  $\psi$  που δρουν σε διαφορετικούς χώρους) και χρησιμοποιώντας την (1.4) έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\psi^{\text{torsion}} &= \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) + e \int d^4x \sqrt{-g} A_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \\ &\quad + \frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu K_{ab\mu} \sigma^{ab} \psi) + \frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} K_{ab\mu} \sigma^{ab} \gamma^\mu \psi) \\ &= \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) + e \int d^4x \sqrt{-g} A_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \\ &\quad + \frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{-g} (\bar{\psi} \{ \gamma^c, \sigma^{ab} \} \psi) K_{abc}\end{aligned}\quad (1.6)$$

όπου το  $\{ \dots \}$  δηλώνει τον αντιμεταθέτη δύο τελεστών A,B με  $\{A, B\} = AB + BA$  και θα χρεια-

στεί να κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων των  $\gamma$  Dirac πινάκων. Συγκεκριμένα με χρήση διαφόρων ταυτοτήτων [56] και επειδή ισχύει ότι  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0$  ισχύει η εξής ταυτότητα για το γινόμενο τριών  $\gamma^a$  πινάκων στον εφραπτομενικό χώρο:

$$\gamma^a \gamma^b \gamma^c = \eta^{ab} \gamma^c + \eta^{bc} \gamma^a - \eta^{ac} \gamma^b + i\epsilon^{abcd} \gamma^5 \gamma_d.$$

Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντιμεταθέτη ως εξής:

$$\begin{aligned} \{\gamma^c, \sigma^{ab}\} &= \gamma^c \sigma^{ab} + \sigma^{ab} \gamma^c = \gamma^c \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b] + \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b] \gamma^c \\ &= \frac{i}{2} \gamma^c (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) + \frac{i}{2} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) \gamma^c = \frac{i}{2} (\gamma^c \gamma^a \gamma^b - \gamma^c \gamma^b \gamma^a + \gamma^a \gamma^b \gamma^c - \gamma^b \gamma^a \gamma^c) \\ &= \frac{i}{2} (\eta^{ca} \gamma^b + \eta^{ab} \gamma^c - \eta^{cb} \gamma^a + i\epsilon^{cabd} \gamma^5 \gamma_d - (\eta^{cb} \gamma^a + \eta^{ba} \gamma^c - \eta^{ca} \gamma^b + i\epsilon^{cbae} \gamma^5 \gamma_e) \\ &\quad + \eta^{ab} \gamma^c + \eta^{bc} \gamma^a - \eta^{ac} \gamma^b + i\epsilon^{abch} \gamma^5 \gamma_h - (\eta^{ba} \gamma^c + \eta^{ac} \gamma^b - \eta^{bc} \gamma^a + i\epsilon^{bacf} \gamma^5 \gamma_f)) \\ &= \frac{i}{2} (\eta^{ca} \gamma^b + \eta^{ab} \gamma^c - \eta^{cb} \gamma^a + i\epsilon^{cabd} \gamma^5 \gamma_d - \eta^{cb} \gamma^a - \eta^{ba} \gamma^c + \eta^{ca} \gamma^b - i\epsilon^{cbae} \gamma^5 \gamma_e \\ &\quad + \eta^{ab} \gamma^c + \eta^{bc} \gamma^a - \eta^{ac} \gamma^b + i\epsilon^{abch} \gamma^5 \gamma_h - \eta^{ba} \gamma^c - \eta^{ac} \gamma^b + \eta^{bc} \gamma^a - i\epsilon^{bacf} \gamma^5 \gamma_f) \\ &= \frac{i}{2} (i\epsilon^{cabd} \gamma^5 \gamma_d - i\epsilon^{cbae} \gamma^5 \gamma_e + i\epsilon^{abch} \gamma^5 \gamma_h - i\epsilon^{bacf} \gamma^5 \gamma_f) = 2i^2 \epsilon^{cabd} \gamma^5 \gamma_d = -2\epsilon^{abcd} \gamma^5 \gamma_d, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της συμμετρικότητας της μετρικής Minkowski,  $\eta^{ab} = \eta^{ba}$  και φυσικά την πλήρη αντισυμμετρικότητα του ταυστή Levi-Civita  $\epsilon_{abcd} = -\epsilon_{bacd}$  και έτσι απλοποιείται η έκφραση με τον αντιμεταθέτη στην (1.6). Άρα η σπινωριακή δράση  $\mathcal{S}_\psi \equiv \mathcal{S}_\psi^{\text{torsion}}$  τελικά γράφεται:

$$\mathcal{S}_\psi = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \bar{\psi} \frac{i}{2} \gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{i}{2} (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + e A_\mu(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \frac{1}{4} \epsilon^{abcd} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma_d \psi K_{abc} \right) \quad (1.7)$$

και μάλιστα παρατηρούμε από την (1.7), (A.8), ότι μόνο το πλήρως αντισυμμετρικό κομμάτι της contorsion  $T_{[abc]} = -2K_{[abc]}$ , κάνει σύζευξη με την φερμιονική ύλη και συγκεκριμένα με το αξονικό ρεύμα (axial current) των φερμιονίων,  $J_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi$  στην τροποποιημένη με στρέψη QED δράση (εάν έχουμε περισσότερες γεύσεις ή είδη φερμιονίων το ρεύμα απλώς θα είναι το ίδιο αθροίζοντας πάνω στα είδη [13]) [54]. Εάν ορίσουμε την στρέψη 3-μορφή και την δυαδική της 1-μορφή ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{3!} T_{abc} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \wedge \mathbf{e}^c, \\ \mathbf{S} &= \star \mathbf{T}, \text{ με συνιστώσες } S_d = \frac{1}{3!} \epsilon^{abc}{}_d T_{abc}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

τότε ο contorsion όρος (όρος 'σύστρεψης') στην (1.7) θα γίνει [54], ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\psi \ni & -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \epsilon^{abcd} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma_d \psi K_{abc} = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \epsilon^{abcd} \bar{\psi} \gamma_d \gamma^5 \psi K_{abc} \\ &= \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \epsilon^{abc}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi K_{abc} = \frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{-g} \epsilon^{abc}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi (T_{cab} - T_{abc} - T_{cba}) \\ &= \frac{1}{8} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \epsilon^{cab}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi T_{cab} - \epsilon^{abc}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi T_{abc} - \epsilon^{cba}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi T_{cba} \right) \\ &= -\frac{3!}{8} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{3!} \epsilon^{abc}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi T_{abc} \right) = -\frac{3}{4} \int d^4x \sqrt{-g} S_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \mathcal{S}_\psi \ni -\frac{3}{4} \int \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{J}^5 \quad (1.9)$$

με το αξονικό ρεύμα 1-μορφή  $\mathbf{J}^5 = J_\mu^5 \mathbf{d}x^\mu$ , όπου οι συνιστώσες του είναι  $J_\mu^5 = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi$ , και κάναμε χρήση της σχέσης  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ . Δηλαδή η αλληλεπίδραση της στρέψης και της ύλης αναδεικνύεται με ένα διανυσματικό πεδίο το οποίο κάνει σύζευξη στο αξονικό ρεύμα των φερμιονίων που όμως αγνοούμε τις δυναμικές ιδιότητες του διανυσματικού πεδίου προς το παρόν [54]. Ακόμη μπορούμε να χωρίσουμε την contorsion σε ένα πλήρως αντισυμμετρικό κομμάτι και στο υπόλοιπο, το οποίο το συμβολίζουμε με  $\widehat{K}_{abc}$ , δηλαδή θα έχουμε ότι:

$$K_{abc} = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} S^d + \widehat{K}_{abc}. \quad (1.10)$$

Επίσης, ορίζοντας τον συνήθη ταυυστή καμπυλότητας Riemann (δίχως στρέψη) μέσω της σχέσης:

$$R_{\mu\nu\sigma}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - (\nu \leftrightarrow \sigma), \quad \lambda, \mu, \nu, \sigma = 0, \dots, 3, \quad (1.11)$$

όπου  $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$  είναι τα σύμβολα Christoffel, μπορούμε με κατάλληλη συστολή να λάβουμε τον ταυυστή Ricci,  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$  και το βαθμωτό της καμπυλότητας Ricci  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  που εμφανίζεται στην γνωστή από τη γενική σχετικότητα δράση Einstein-Hilbert [7]. Εύκολα γενικεύοντας τον ταυυστή καμπυλότητας και στην περίπτωση της στρέψης (βλ. Παράρτημα Α) [13], σε αναλογία με τα παραπάνω θα είναι ο γενικευμένος ταυυστής καμπυλότητας Riemann ως εξής:

$$\bar{R}_{\rho\mu\nu}^\lambda = E_a^\lambda e^b_\rho \bar{R}_{b\mu\nu}^a = \partial_\mu \bar{\Gamma}_{\rho\nu}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\sigma\mu}^\lambda \bar{\Gamma}_{\rho\nu}^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad \lambda, \mu, \nu, \rho = 0, \dots, 3, \quad (1.12)$$

με  $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  να είναι η γενικευμένη σπιν συνοχή, **μη** συμμετρική στους κάτω δείκτες παρουσία στρέψης. Άρα μπορούμε να ορίσουμε τον γενικευμένο ταυυστή Ricci,  $\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\lambda\nu}^\lambda$  και το γενικευμένο βαθμωτό της καμπυλότητας Ricci  $\bar{R} = g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}$  και εν τέλει την ενεργό δράση (effective action) της βαρύτητας σε αναλογία με την δράση Einstein-Hilbert, παρουσία στρέψης ως:

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int \bar{R} \sqrt{-g} \, d^4x = \frac{1}{2\kappa^2} \int (R + \Delta) \sqrt{-g} \, d^4x \quad (1.13)$$

όπου  $\kappa^2 = 8\pi G_N$  είναι μία σταθερά και  $\Delta = K^\lambda_{\mu\nu} K^{\nu\mu}_\lambda - K^{\mu\nu}_\nu K_{\mu\lambda}^\lambda$  είναι ένας όρος με την contorsion που περιέχει όμως όλη την στρέψη (βλ.σχετική συζήτηση στο Παράρτημα Α εξίσωση (A.10) και ύστερα). Αλλά το  $\Delta$  κομμάτι με την στρέψη στην παραπάνω βαρυτική δράση (1.13) με αντικατάσταση της (1.10) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Delta &= K^\lambda_{\mu\nu} K^{\nu\mu}_\lambda - K^{\mu\nu}_\nu K_{\mu\lambda}^\lambda = \left( \frac{1}{2} \epsilon^\lambda_{\mu\nu d} S^d + \widehat{K}^\lambda_{\mu\nu} \right) \left( \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\mu}_{\lambda e} S^e + \widehat{K}^{\nu\mu}_\lambda \right) \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\nu d} S^d + \widehat{K}^{\mu\nu}_\nu \right) \left( \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\lambda e} S^e + \widehat{K}_{\mu\lambda}^\lambda \right) = \frac{1}{4} \epsilon^\lambda_{\mu\nu d} S^d \epsilon^{\nu\mu}_{\lambda e} S^e + \frac{1}{2} \epsilon^\lambda_{\mu\nu d} S^d \widehat{K}^{\nu\mu}_\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2} \widehat{K}^\lambda_{\mu\nu} \epsilon^{\nu\mu}_{\lambda e} S^e + \widehat{K}^\lambda_{\mu\nu} \widehat{K}^{\nu\mu}_\lambda - \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu}_{\nu d} S^d \epsilon_{\mu\lambda e} S^e - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\nu d} S^d \widehat{K}_{\mu\lambda}^\lambda - \frac{1}{2} \widehat{K}^{\mu\nu}_\nu \epsilon_{\mu\lambda e} S^e \\ &\quad - \widehat{K}^{\mu\nu}_\nu \widehat{K}_{\mu\lambda}^\lambda = -\frac{1}{4} \epsilon_{\lambda\mu\nu d} \epsilon^{\lambda\mu\nu e} S^d S^e + \frac{1}{2} \epsilon^\lambda_{\mu\nu d} S^d \widehat{K}^{\nu\mu}_\lambda + \frac{1}{2} \epsilon^\lambda_{\mu\nu d} S^d \widehat{K}^{\mu\nu}_\lambda + \widehat{\Delta} \\ &= \frac{3!}{4} \delta_d^e S^d S^e + \widehat{\Delta} = \frac{3}{2} S_d S^d + \widehat{\Delta} \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{3}{2} S_d S^d + \widehat{\Delta}}, \quad (1.14) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρικότητα του ταυυστή Levi-Civita και φυσικά το γεγονός ότι  $\epsilon_{abcd} = \eta_{al} \eta_{bm} \eta_{cn} \eta_{dq} \epsilon^{lmnq} = \epsilon^{lmnq} \det \eta = -\epsilon^{abcd}$ , με  $\epsilon_{abcd} \epsilon^{abce} = -3! \delta_d^e$  και βεβαίως την αντισυμμετρικότητα της contorsion  $K_{ab} = -K_{ba} \Rightarrow \widehat{K}^{\nu\mu}{}_\lambda = -\widehat{K}^{\mu\nu}{}_\lambda$ , το οποίο οδηγεί στην τελική έκφραση με  $\widehat{\Delta} = \widehat{K}^\lambda{}_{\mu\nu} \widehat{K}^{\nu\mu}{}_\lambda - \widehat{K}^{\mu\nu}{}_\nu \widehat{K}^{\lambda\mu}{}_\lambda$  (ας μην ξεχνάμε ότι το ανέβασμα και κατέβασμα των δεικτών γίνεται μέσω της εκάστοτε μετρικής). Συνεπώς η πλήρης βαρυτική δράση (1.13) θα γραφτεί με χρήση της εξίσωσης (1.14) ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_G &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \widehat{\Delta}) + \frac{3}{4\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} S_d S^d \\ \Rightarrow \mathcal{S}_G &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \widehat{\Delta}) + \frac{3}{4\kappa^2} \int \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

και αποτελείται από τρία διακριτά κομμάτια, το πρώτο αφορά την γνωστή Einstein-Hilbert δράση δίχως παρουσία στρέψης, το δεύτερο αφορά τα  $\widehat{K}$  τα οποία είναι απλώς αλγεβρικά [54] χωρίς δυναμικό περιεχόμενο και συνεπώς οι εξισώσεις κίνησής τους είναι τετριμμένες και το τρίτο περιέχει το πεδίο  $S_\mu$  που ενδιαφερόμαστε για τις δυναμικές του ιδιότητες. Όταν συνδυάσουμε την QED δράση (1.1) με την βαρυτική (1.15), τότε παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες της στρέψης δεν είναι διαδιδόμενα πεδία, αφού δεν εμφανίζονται παράγωγοι αυτών και άρα μπορούν να ολοκληρωθούν επακριβώς στα ανάλογα ολοκληρώματα διαδρομής, κάτι που θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα [13]. Σε αυτό το σημείο είναι σκόπιμο να εξεταστούν οι κλασικές εξισώσεις κίνησης, θεωρώντας τα πεδία  $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$  και  $S_\mu$  ως ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας. Αρχικά οι εξισώσεις του Maxwell δεν αλλάζουν για το H/M πεδίο καθώς δεν υπάρχει σύζευξη με την στρέψη, αφού θα ισχύει ότι:

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda - \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma A_\sigma = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

όπου  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  είναι η συνήθης Christoffel συνοχή με απουσία στρέψης, συμμετρική στους κάτω δείκτες της και άρα έχουμε τις συνήθεις εξισώσεις Maxwell  $\mathbf{dF} = 0$  και  $\mathbf{d} \star \mathbf{F} = \star \mathbf{J}$  με  $J_\mu = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ , [54], [57]. Οι εξισώσεις κίνησης του φερμιονίου θα δίνονται από εξισώσεις Euler-Lagrange όπου για τη δράση ισχύει ότι:

$$\mathcal{S}_\psi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\psi \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \bar{\psi}} - D_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (D_\mu \bar{\psi})} \right) = 0 \quad (1.16)$$

και φυσικά υπολογίζοντας αυτές τις μερικές παραγώγους θα έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu D_\mu \psi + e A_\mu \gamma^\mu \psi - \frac{3}{4} S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad \text{και} \quad D_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (D_\mu \bar{\psi})} \right) = D_\mu \left( -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi \right)$$

άρα από την εξίσωση E-L (1.16), το φερμιόνιο ικανοποιεί μία τροποποιημένη εξίσωση Dirac:

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi + e A_\mu \gamma^\mu \psi - \frac{3}{4} S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi = 0 \Rightarrow \boxed{i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi = \frac{3}{4} S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi} \quad (1.17)$$

με  $\mathcal{D}_\mu = D_\mu - i e A_\mu$ , να είναι η συναλλοίωτη παράγωγος (gauge-βαρυτική) σε χωρόχρονο χωρίς στρέψη και παρατηρούμε ότι κλασικά η στρέψη δρα ως πηγή αξονικού ρεύματος [54]. Επίσης οι

εξισώσεις E-L για τον  $\psi$  βαθμό ελευθερίας είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \psi} = \left( -\frac{i}{2} D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \frac{3}{4} S_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \right), \text{ όπου } D_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (D_\mu \psi)} \right) = D_\mu \left( \bar{\psi} \frac{i}{2} \gamma^\mu \right)$$

και άρα από την εξίσωση (1.16) θα έχουμε αντίστοιχα:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \psi} - D_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial (D_\mu \psi)} \right) = 0 \Rightarrow -i D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \frac{3}{4} S_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 = 0 \quad (1.18)$$

δηλαδή λαμβάνουμε την ερμιτιανή συζυγή (hermitian conjugate - h.c.) έκφραση της εξίσωσης (1.17) και μάλιστα επειδή ισχύει ο κανόνας γινομένου κατά Leibniz είναι:

$$D_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu \psi) \quad (1.19)$$

και με χρήση των εξισώσεων (1.17),(1.18) (πολλαπλασιάζουμε με  $-i\bar{\psi}$  και με  $i\psi$  αντίστοιχα τις δύο εξισώσεις και έπειτα προσθέτουμε κατά μέλη), τελικά θα ισχύει ότι:

$$D_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \Rightarrow D_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) = 0 \Rightarrow D_\mu J^{5\mu} = 0 \quad (1.20)$$

δηλαδή διατηρείται το αξονικό ρεύμα κλασικά [54]. Ακόμη η εξίσωση κίνησης για την στρέψη θα προκύψει θεωρώντας την πλήρη δράση, σπινοριακή και βαρυτική (διότι εκεί εμφανίζεται η στρέψη (1.7), (1.9), (1.15)) και λαμβάνοντας την E-L για το πεδίο  $S_\mu$ . Δηλαδή έχουμε διαδοχικά:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\psi + \mathcal{S}_G \ni \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{3}{4\kappa^2} S_d S^d - \frac{3}{4} S_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi \right) \quad (1.21)$$

με τις εξής εξισώσεις E-L :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_b} - D_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu S_b)} \right) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial S_b} \left( \frac{1}{\kappa^2} \eta^{ad} S_d S_a - S_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi \right) = 0 \\ \frac{1}{\kappa^2} \left( \delta_d^b S^d + \delta_a^b S^a \right) - \left( \delta_d^b \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi \right) = 0 &\Rightarrow \frac{2}{\kappa^2} S^b - \bar{\psi} \gamma^b \gamma^5 \psi = 0 \Rightarrow \boxed{S^b = \frac{1}{2} \kappa^2 J^{5b}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

και μπορούμε ισοδύναμα σε μορφή διαφορικών μορφών να γράψουμε ότι  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5$ . Άμεσα έπεται ότι λόγω της παραπάνω σχέσης (1.22), η εξίσωση (1.20) για την στρέψη γράφεται ως:

$$D_\mu S^\mu = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} \star \mathbf{S} = 0 \quad (1.23)$$

όπου η στρέψη είναι η μόνη που συζευγνύεται με την ύλη και ίσως πρωταρχικά να σκεφτούμε ότι μπορούμε απλώς να ολοκληρώσουμε την  $S_\mu$  έξω από το αντίστοιχο ολοκλήρωμα διαδρομής με τη μέθοδο συμπλήρωσης του τετραγώνου, χρησιμοποιώντας την δράση (1.21). Βέβαια, με αυτόν τον τρόπο θα λάβουμε έναν ενεργό όρο αλληλεπίδρασης τεσσάρων φερμιονίων [54] (απωστικής φύσεως λόγω του προσήμου μείον που είναι σχετικό με το πρόσημο του κινητικού όρου των αξιόνων, που λεπτομέρειες θα δοθούν στην (1.31)), ο οποίος είναι χαρακτηριστικός για τη θεωρία Einstein-

Cartan (που αφορά τη θεωρία της βαρύτητας παρουσία της στρέψης) [13]:

$$-\frac{3\kappa^2}{16} \int \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5. \quad (1.24)$$

### 1.3 Στρέψη και αξιονικός βαθμός ελευθερίας

Ωστόσο αυτή η αντιμετώπιση είναι προβληματική σε κβαντικό επίπεδο, καθώς το ολοκλήρωμα διαδρομής είναι αναλλοίωτο κάτω από τον καθολικό μετασχηματισμό  $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \psi$ , που αντιστοιχεί σε μία αξονική (axial) περιστροφή, αλλά το ρεύμα Noether  $\mathbf{J}^5$  είναι ‘ανώμαλο’ (anomalous), δηλαδή δεν διατηρείται λόγω κβαντικών φαινομένων ενός βρόχου (one loop quantum effects) [54]. Δηλαδή πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι  $\mathbf{d} \star \mathbf{J}^5 \neq 0$ , πριν ολοκληρώσουμε την  $S_\mu$  έξω από το ολοκλήρωμα διαδρομής, ώστε να είμαστε συνεπείς με την θεωρία. Έτσι στην κβαντική θεωρία, η διατήρηση του ρεύματος (1.20) παύει να ισχύει λόγω χειραλικών ανωμαλιών (chiral anomalies), τόσο στον gauge όσο και στον βαρυτικό τομέα. Οπότε με βάση την δράση (1.1) ύστερα από τις διορθώσεις βρόχου πρώτης τάξης (one-loop corrections) η χειραλική ανωμαλία υπολογίζεται επακριβώς [47], [54] ως:

$$\mathbf{d} \star \mathbf{J}^5 = -\frac{e^2}{4\pi^2} \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} - \frac{1}{96\pi^2} \text{tr}(\overline{\mathbf{R}} \wedge \overline{\mathbf{R}}) \equiv \mathcal{G}(\overline{\omega}, A) \quad (1.25)$$

όπου φυσικά το ίχνος είναι  $\text{tr}(\overline{\mathbf{R}} \wedge \overline{\mathbf{R}}) = \overline{\mathbf{R}}_b^a \wedge \overline{\mathbf{R}}_a^b$ , με την γενικευμένη καμπυλότητα 2-μορφή  $\overline{\mathbf{R}}_b^a$  να δίνεται από την εξίσωση (A.11). Επίσης, η ανωμαλία σε μορφή συνιστωσών γράφεται ως εξής:

$$D_\mu J^{5\mu} = \frac{e^2}{8\pi^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{192\pi^2} \overline{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{\overline{R}}_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \mathcal{G}(\overline{\omega}, A) \quad (1.26)$$

με το  $(\widetilde{\dots})$  να δηλώνει δυαδικούς τελεστές, οι οποίοι ορίζονται ως  $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$  και  $\tilde{\overline{R}}_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}$ , όπου  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  είναι η βαρυτική συναλλοίωτη Levi-Civita τανυστική πυκνότητα, με  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  το επίπεδο Minkowski Levi-Civita σύμβολο [13]. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως μπορεί ναδειχθεί [58], [59] ότι κάθε εξάρτηση από την στρέψη του γενικευμένου τανυστή καμπυλότητας Riemann στο βαρυτικό κομμάτι της χειραλικής ανωμαλίας (1.26), δύναται να αφαιρεθεί με την κατάλληλη προσθήκη πεπερασμένων αντισταθμιστικών όρων από την ομάδα επακανονικοποίησης (renormalization-group counterterms), τύπου Green-Schwarz [13]. Επομένως το δεξί μέλος της (1.26) εξαρτάται στην πράξη μόνο από το Riemannian κομμάτι της συνοχής και ισοδύναμα από τους τανυστές καμπυλότητας Riemann, δηλαδή:

$$\mathcal{G}(\overline{\omega}, A) \quad (\text{με πρόσθεση αντισταθμιστικών όρων}) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{G}(\omega, A). \quad (1.27)$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η παρουσία της χειραλικής ανωμαλίας (1.26) υποδηλώνει ότι καθώς μεταβαίνουμε σε υψηλότερες διορθώσεις βρόχου στην θεωρία μας (άμαξη QED σε γεωμετρία με στρέψη), η δυαδική της πλήρως αντισυμμετρικής συνιστώσας της στρέψης δεν θα διατηρείται πλέον, αφού  $D_\mu S^\mu \neq 0$  και μάλιστα θα είναι  $D_\mu S^\mu \propto \mathcal{G}(\overline{\omega}, A)$ . Άρα πρέπει να αποφύγουμε αυτήν την ασυνέπεια αλλά και επειδή δεν γνωρίζουμε όλα τα κβαντικά φαινόμενα τα οποία σχετίζονται με την στρέψη, πάλι θα ήταν ασυνεπές να συμπεριλάβουμε μόνο την συνεισφορά της αξονικής (χειραλικής)

ανωμαλίας [54]. Έτσι, προσθέτουμε κατάλληλους αντισταθμιστικούς όρους, τάξη με τάξη κατά την θεωρία διαταραχών, ώστε να αφαιρέσουμε τέτοιες ανώμαλες συνεισφορές, εξασφαλίζοντας την ισχύ της (1.23) σε κάθε τάξη [13]. Δηλαδή θα διατηρήσουμε την  $\mathbf{d} \star \mathbf{S} = 0$  σε κβαντικό επίπεδο, κάτι που είναι συμβατό με το κλασικό αποτέλεσμα (1.23) και gauge αναλλοίωτο [54]. Αυτό συνεπάγεται τη διατήρηση του ‘φορτίου στρέψης’ στην κβαντική θεωρία:

$$Q_{\text{torsion}} = \int \star \mathbf{S}. \quad (1.28)$$

Στον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής, η παραπάνω ανάλυση επιτυγχάνεται με την εισαγωγή ενός περιορισμού δέλτα-συναρτησοειδούς  $\delta(\mathbf{d} \star \mathbf{S})$  στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα διαδρομής [54], και έχουμε από την συνδυασμένη εξίσωση (1.21) ότι:

$$\mathcal{Z} \propto \int \mathcal{D}S \delta(\mathbf{d} \star \mathbf{S}) \exp \left( i \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{S} - \frac{3}{4} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] \right) \quad (1.29)$$

και εκφράζοντας το  $\delta$ -συναρτησιακό μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange ψευδοβαθμωτού πεδίου  $\varphi(x)$  αξιονικό (axion-like) το ολοκλήρωμα διαδρομής θα είναι [54], [13]:

$$\mathcal{Z} \propto \int \mathcal{D}S \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{S} - \frac{3}{4} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{J}^5 + \varphi \mathbf{d} \star \mathbf{S} \right] \right), \quad (1.30)$$

όπου το  $\mathcal{D}(\dots)$  είναι το μέτρο ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος διαδρομής και δεν αναφέρουμε ρητά όλα τα ολοκληρώματα διαδρομής πάνω στη μετρική και στις άλλες συνιστώσες της στρέψης καθώς δεν μας απασχολούν, για την εμφάνιση του αξιονίου. Συνεπώς, άμεσα παρατηρούμε από την παραπάνω εξίσωση (1.30) πως η (μη-διαδιδόμενη) στρέψη  $\mathbf{S}$  μπορεί να ολοκληρωθεί επακριβώς, με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου [54]. Ορίζοντας  $\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5$ , και αντικαθιστώντας στην (1.30) το εκθετικό γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{S} - \frac{3}{4} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{J}^5 + \varphi \mathbf{d} \star \mathbf{S} \right] &= \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{S} - \frac{3}{4} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] + \int \mathbf{d}(\varphi \wedge \star \mathbf{S}) \\ &\quad - \int \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{S} = \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{S} - \frac{3}{4} \mathbf{S} \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] - \int \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{S} \\ &= \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \left( \left( \mathbf{S}' + \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \right) \wedge \star \left( \mathbf{S}' + \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \left( \mathbf{S}' + \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \right) \wedge \star \mathbf{J}^5 - \mathbf{d}\varphi \wedge \star \left( \mathbf{S}' + \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \right) \right] \\ &= \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \left( \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{S}' + \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{d}\varphi + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{J}^5 + \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{S}' \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{9} \kappa^4 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{d}\varphi + \frac{1}{3} \kappa^4 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{J}^5 + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{S}' + \frac{1}{3} \kappa^4 \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{d}\varphi + \frac{1}{4} \kappa^4 \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 \right) \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \left( \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{J}^5 + \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{J}^5 + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 \right) - \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{S}' - \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{d}\varphi - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] \\ &= \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{S}' + \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{d}\varphi + \frac{3}{4} \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{J}^5 + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{J}^5 + \frac{1}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{d}\varphi + \frac{3}{16} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{J}^5 - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{J}^5 - \frac{6}{16} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 - \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{d}\varphi - \frac{2}{3} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{d}\varphi - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] \\ &= \int \left[ \frac{3}{4\kappa^2} \mathbf{S}' \wedge \star \mathbf{S}' - \frac{1}{2} \left( \frac{2\kappa^2}{3} \right) \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{d}\varphi - \frac{3}{16} \kappa^2 \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 - \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{d}\varphi \wedge \star \mathbf{J}^5 \right], \end{aligned}$$

καθώς πραγματοποιήσαμε παραγοντική ολοκλήρωση και από το γενικευμένο θεώρημα Stokes, οι επιφανειακοί-συνοριακοί όροι μηδενίζονται (βλ. (A.16)) και επίσης χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα  $\alpha_p \wedge \star \beta_p = \beta_p \wedge \star \alpha_p$  για δύο  $p$ -διαφορικές μορφές  $\alpha_p, \beta_p$  [60]. Ακόμη, η Ιακωβιανή (Jacobian) του μετασχηματισμού  $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$  είναι μονάδα και άρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε επακριβώς το πεδίο  $\mathbf{S}'$  έξω από το ολοκλήρωμα διαδρομής (1.30) [54]. Αυτό που απομένει είναι η ολοκλήρωση πάνω στο πεδίο  $\varphi$ , όπου με την κανονικοποίηση  $b = \left(\frac{3}{2\kappa^2}\right)^{1/2} \varphi$ , εισάγουμε το ψευδοβαθμωτό πεδίο  $b$  στο ολοκλήρωμα διαδρομής της στρέψης (1.29) και τελικά θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &\propto \int Db \exp \left( -i \int \left[ \frac{1}{2} \mathbf{d}b \wedge \star \mathbf{d}b + \frac{1}{f_b} \mathbf{d}b \wedge \star \mathbf{J}^5 + \frac{1}{2f_b^2} \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] \right) \\ &= \int Db \exp \left( -i \int \left[ \frac{1}{2} \mathbf{d}b \wedge \star \mathbf{d}b + \frac{1}{2f_b^2} \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] - i \int \mathbf{d} \left( \frac{1}{f_b} b \wedge \star \mathbf{J}^5 \right) + i \int \frac{1}{f_b} b \mathbf{d} \star \mathbf{J}^5 \right) \\ &= \int Db \exp \left( -i \int \left[ \frac{1}{2} \mathbf{d}b \wedge \star \mathbf{d}b - \frac{1}{f_b} b \mathcal{G}(\omega, A) + \frac{1}{2f_b^2} \mathbf{J}^5 \wedge \star \mathbf{J}^5 \right] \right), \quad f_b \equiv \left( \frac{3\kappa^2}{8} \right)^{-1/2} \quad (1.31) \end{aligned}$$

όπου στον δεύτερο όρο του εκθέτη πραγματοποιήσαμε παραγοντική ολοκλήρωση και χρησιμοποιήσαμε την σχέση της χειραλικής ανωμαλίας (1.26),(1.27) [13].

## 1.4 Σύνοψη

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η παρουσία στρέψης στην χβαντική θεωρία μίας contorted QED (σε minimal εκδοχή) είναι ισοδύναμη με την εισαγωγή ενός πλήρως δυναμικού (διαδιδόμενου-propagating) άμαζου ψευδοβαθμωτού αξιονικού πεδίου  $b(x)$ , δίχως δυναμικό, διότι η (1.31) αναγνωρίζεται ως ένας κινητικός όρος του  $b(x)$  και η σύζευξη αυτού του πεδίου με τα φερμιόνια [54]. Επιπλέον, παρατηρούμε από την (1.31) ότι η εμφάνιση του αξιονίου μόνο μέσω των παραγώγων αυτού, δηλώνει την ύπαρξη μίας συμμετρίας μετατόπισης (shift symmetry) που ικανοποιεί το ίδιο, δηλαδή  $b(x) \rightarrow b(x) + c$ , όπου  $c$  μία σταθερά. Επίσης είναι αξιοσημείωτη, η φυσική εμφάνιση της αλληλεπίδρασης του αξιονικού πεδίου με τις χειραλικές ανωμαλίες, με μία συγκεκριμένη αξιονική σταθερά σύζευξης (coupling)  $f_b$ , η οποία εξαρτάται από την βαρυτική σταθερά μέσω του  $\kappa^2$ , αφού  $\kappa^2 = 8\pi G_N$  [13]. Τελικά, μία QED θεωρία σε χωρόχρονο παρουσία στρέψης, είναι ισοδύναμη με μία QED θεωρία δίχως στρέψη αλλά συζευγμένη με ένα αξίνιο  $b(x)$ . Άρα, μπορούμε να πούμε ότι η στρέψη έγινε δυναμική λόγω των ανωμαλιών και μάλιστα ότι το αξίνιο που επάγεται από την στρέψη έχει γεωμετρική προέλευση, το οποίο σε διάφορα μοντέλα μπορεί να λάβει μάζα, κάνοντάς το υποψήφιο σωματίδιο για σκοτεινή ύλη [13], αλλά στο συγκεκριμένο contorted QED μοντέλο δεν μπορεί να παίξει το ρόλο της σκοτεινής ύλης καθώς χρειαζόμαστε κάποιο μηχανισμό για να λάβει μάζα το αξίνιο. Στην ουσία, πρέπει να ενσωματώσουμε αυτήν την QED θεωρία σε ένα πιο γενικό μοντέλο, όπου για παράδειγμα σε μία μη αβελιανή θεωρία μπορεί να γεννηθεί μάζα μέσω μη διαταρακτικών φαινομένων (instantons), όπως θα δούμε και στο Κεφάλαιο 3. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι στην παραπάνω ανάλυση περιοριστήκαμε στην περίπτωση άμαζων φορτισμένων χειραλικών φερμιονίων, διότι ενδιαφερόμαστε για την φυσική του πρώιμου σύμπαντος, όπου τα χειραλικά φερμιόνια παράχθηκαν σχετικιστικά ύστερα από την περίοδο του πληθωρισμού λόγω υψηλών θερμοκρασιών.

## Κεφάλαιο 2

# Ενεργή βαρυτική θεωρία με στρέψη εμπνευσμένη από τη θεωρία χορδών

### 2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε μία ενεργή βαρυτική θεωρία εμπνευσμένη από τη θεωρία των χορδών (string-inspired gravitational effective theory), που εμπλέκει την έννοια της στρέψης, κατά το πρώιμο σύμπαν. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε το ρόλο της στρέψης, ύστερα από την ακύρωση των βαρυτικών και gauge ανωμαλιών, που υπάρχουν στον επιπλέον διαστάσεων χώρο μέσω του Green-Schwarz μηχανισμού [61]. Να σημειωθεί ότι κατά την ανάλυση θα κάνουμε ευρεία χρήση των άρθρων [13], [48].

### 2.2 Ενεργή δράση με στρέψη από θεωρία χορδών

Οι θεωρίες των χορδών, εν γένει έχουν άπειρες καταστάσεις λόγω των διαφορετικών τρόπων ταλάντωσης μίας ορισμένης χορδής (ανοικτής ή κλειστής), ωστόσο εμείς θα επικεντρωθούμε στις άμαζες προκύπτουσες καταστάσεις βασίζοντας την ανάλυσή μας σε superstrings ώστε να αποφύγουμε τυχόν αστάθειες [62]. Στην μποζονική θεωρία των χορδών [27], [28], [29], η άμαζη multiplet του τομέα των κλειστών χορδών αποτελείται από ένα βαθμωτό (spin-0) dilaton πεδίο  $\Phi(x)$ , από ένα (spin-2) graviton πεδίο, το οποίο περιγράφεται από έναν συμμετρικό άχνο τανυστή  $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$  και από ένα (spin-1) αντισυμμετρικό τανυστικό (ή Kalb-Ramond (KR)) πεδίο με  $B_{\mu\nu}(x) = -B_{\nu\mu}(x)$ , όπου  $\mu, \nu = 0 \dots D-1$  και  $D = 4$  είναι η χωροχρονική διάσταση της χορδής ύστερα από την συμπαγοποίηση (compactification) [61], [28]. Στις (3+1) διαστάσεις το τανυστικό πεδίο  $B_{\mu\nu}(x)$  έχει την εξής U(1) gauge συμμετρία [13]:

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Theta_\nu(X) - \partial_\nu \Theta_\mu(X), \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad (2.1)$$

όπου  $\Theta_\mu(X)$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ , είναι gauge παράμετροι, το οποίο υποδηλώνει ότι η ενεργός δράση του target χώρου, που περιγράφει την δυναμική των κλειστών χορδών σε χαμηλές ενέργειες είναι αναλλοίωτη κάτω από την U(1) gauge συμμετρία (2.1). Αυτό βέβαια συνεπάγεται ότι, θα εξαρτάται μόνο από την ισχύ του πεδίου  $B_{\mu\nu}$ , που είναι μία 3-μορφή, έχοντας τον ρόλο της στρέψης στην

θεωρία μας και μάλιστα μόνο της αντισυμμετρικής συνιστώσας αυτής, με συνιστώσες της 3-μορφής που δίνονται από τη σχέση [48]:

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} = \partial_{\mu} B_{\nu\rho} + \partial_{\nu} B_{\rho\mu} + \partial_{\rho} B_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

και μάλιστα θα ικανοποιεί εκ' κατασκευής (φορμαλιστικά), την ταυτότητα Bianchi όπου:

$$\partial_{[\sigma} H_{\mu\nu\rho]} = 0 \Rightarrow \partial_{\sigma} H_{\mu\nu\rho} + \partial_{\mu} H_{\nu\rho\sigma} + \partial_{\nu} H_{\rho\sigma\mu} = 0 \quad (2.3)$$

με το σύμβολο [...] να δηλώνει αντισυμμετρικότητα στους αντίστοιχους καθολικούς δείκτες. Αυτή η ταυτότητα Bianchi (2.3), μπορεί να πάρει και άλλη ισοδύναμη μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_{\sigma} H_{\mu\nu\rho} + \partial_{\mu} H_{\nu\rho\sigma} + \partial_{\nu} H_{\rho\sigma\mu}) &= 0 \Rightarrow \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\sigma} H_{\mu\nu\rho} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} H_{\nu\rho\sigma} + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\nu} H_{\rho\sigma\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\sigma} H_{\mu\nu\rho} + \varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \partial_{\sigma} H_{\mu\nu\rho} + \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \partial_{\sigma} H_{\mu\nu\rho} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\sigma} H_{\mu\nu\rho} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\sigma} \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} = 0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου  $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho} \equiv \kappa^{-1} H_{\mu\nu\rho}$  και χρησιμοποιήσαμε την πλήρη αντισυμμετρικότητα του βαρυτικού συναλλοιώτου συμβόλου Levi-Civita,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}$ , το οποίο ορίζεται συναρτηθεί του Minkowski χωροχρονικού πλήρως αντισυμμετρικού συμβόλου Levi-Civita  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  μέσω των σχέσεων:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\text{sgn}(g)}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \mu, \nu, \rho, \sigma = 0, \dots, 3. \quad (2.5)$$

Ακόμη, η string-inspired ενεργός δράση στον target χωρόχρονο σε χαμηλές ενέργειες αναπτύσσεται σε δυνάμεις της κλίσης-Regge  $\alpha'$  (Regge-slope) [13]. Η κλίση-Regge  $\alpha'$  της χορδής, ορίζεται ως  $\alpha' = M_s^{-2}$  (σε φυσικές μονάδες  $\hbar = c = 1$ ), με  $M_s$  να είναι η τάξη μάζας της χορδής που εν γένει είναι διαφορετική από την τετραδιάστατη τάξη μάζας Planck  $M_s \neq M_{\text{Pl}}$ ,  $\kappa^2 = 8\pi G_N = M_{\text{Pl}}^{-2}$ , αλλά φαίνεται πως είναι ελεύθερη παράμετρος η οποία δύναται να περιοριστεί φαινομενολογικά [13]. Έτσι στην χαμηλότερη μη τετριμμένη τάξη του  $\alpha'$ , η (3+1)-διάστατη ενεργός δράση, που βασίζεται στην παραπάνω άμαξη μποζονική multiplet των κλειστών χορδών, έπειτα από κατάλληλες συμπαγοποιήσεις των επιπλέον  $n$  διαστάσεων [27], [28], [29], θα είναι:

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa^2} \left[ -R + 2 \partial_{\mu} \Phi \partial^{\mu} \Phi \right] - \frac{1}{6} e^{-4\Phi} \mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} \mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} + \dots \right), \quad (2.6)$$

με  $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho} \equiv \kappa^{-1} H_{\mu\nu\rho}$  να έχει διάσταση [μάζα]<sup>2</sup>, και οι ... δηλώνουν υψηλότερους όρους δυνάμεων του ταυστή καμπυλότητας και της βαρυτικής συναλλοιώτης παραγώγου, σε υψηλότερη τάξη ως προς το  $\alpha'$  [48], οι οποίοι δεν μας απασχολούν για την θεωρία μας (μένουμε σε minimal εκδοχή της ενεργούς δράσεως). Επίσης ακολουθούμε την σύμβαση (+, -, -, -) για την σύμβαση της υπογραφής της μετρικής και για τον ταυστή Riemann θεωρούμε ότι:

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} = \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - (\nu \leftrightarrow \sigma), \quad \lambda, \mu, \nu, \sigma = 0, \dots, 3, \quad (2.7)$$

όπου,  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$  είναι ο ταυστής Ricci, και  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  είναι το βαθμωτό της καμπυλότητας Ricci (βλ.σχετική συζήτηση στο παράρτημα A). Βέβαια στην εξίσωση (2.7),  $\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} = \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}$  είναι η



συνήθης Christoffel συνοχή με απουσία στρέψης, συμμετρική στους κάτω δείκτες της [13]. Ακόμη θα υποθέσουμε ότι το dilaton  $\Phi(x)$  μεταβάλλεται πολύ αργά ή ότι σταθεροποιείται, μέσω ενός κατάλληλου μη διαταρακτικού string μηχανισμού [48], σε μία σταθερή τιμή  $\Phi_0$ , ώστε προσεγγιστικά να ισχύει ότι  $\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \simeq 0$  στην εξίσωση (2.6). Αυτό δεικνύει προσεγγιστικά μία σταθερή τιμή για την σταθερά σύζευξης της χορδής, με  $g_s = g_s^{(0)} e^{\Phi_0}$  και δίχως βλάβη της γενικότητας θα θέσουμε  $\Phi_0 = 0$  [13]. Να σημειωθεί ότι η σταθερά σύζευξης της χορδής  $g_s^{(0)}$  μπορεί να σταθεροποιηθεί από φαινομενολογικές θεωρήσεις της τετραδιάστατης ενεργής θεωρίας πεδίου [27]. Συνεπώς η δράση  $\mathcal{S}_B$  θα γραφτεί ως:

$$\mathcal{S}_B = - \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{6} \mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} \mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} + \dots \right). \quad (2.8)$$

Επιπλέον είναι γνωστό [27] ότι, η ισχύς των πεδίων των KR όρων  $\mathcal{H}^2$  στην (2.8), μπορούν να απορροφηθούν (μέχρι μίας ολικής παραγώγου που είναι αδιάφορη για τις εξισώσεις κίνησης), σε μία contorted γενικευμένη καμπυλότητα  $\bar{R}(\bar{\Gamma})$ , με μία συνοχή που περιλαμβάνει στρέψη και αντιστοιχεί σε έναν contorsion ταυυστή ανάλογο με την ισχύ του πεδίου  $\mathcal{H}_{\mu\nu}^\rho$  [48], διότι είναι  $\mathcal{H}_{\nu\rho}^\mu = -\mathcal{H}_{\rho\nu}^\mu$  και δηλαδή θα έχουμε ότι:

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{\alpha'}{\kappa\sqrt{3}} \mathcal{H}_{\mu\nu}^\rho \neq \bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\rho, \quad (2.9)$$

όπου  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$  είναι το σύμβολο Christoffel δίχως παρουσία στρέψης. Οπότε, ισοδύναμα η δράση (2.8), με την υπόθεση ότι  $\alpha' \sim \kappa^2 = M_{\text{Pl}}^{-2}$  [48], μπορεί να γραφτεί στη μορφή (παρόμοια με την γνωστή Einstein-Hilbert δράση αλλά σε contorted γεωμετρία, με αντίθετο πρόσημο (βλ.(A.13))):

$$\mathcal{S}_B = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \bar{R}(\bar{\Gamma}) + \dots, \quad (2.10)$$

και άμεσα συμπεραίνουμε ότι αυτή η contorted γεωμετρία περιέχει μόνο μία πλήρη αντισυμμετρική συνιστώσα της στρέψης, κάτι που είναι ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των string μοντέλων, σε αντιδιαστολή με τα γενικά μοντέλα-κοσμολογίες που περιέχουν στρέψη, έχοντας εν γένει η στρέψη περισσότερες συνιστώσες (όπως έχει το QED μοντέλο του κεφ.1, βλ.(1.14)) [13].

## 2.3 Αξιονικός βαθμός ελευθερίας

Στην string-inspired θεωρία μας, υπάρχουν βαρυτικές και gauge ανωμαλίες στον επιπλέον διαστάσεων χώρο, οι οποίες είναι κατάλοιπα των Green-Schwarz αντισταθμιστικών όρων που εμφανίζονται στον ορισμό της ισχύος των πεδίων της άμαξης multiplet των κλειστών χορδών [61]. Έτσι, η απαίτηση για την ακύρωση αυτών των ανωμαλιών, επιτυγχάνεται με την εισαγωγή κατάλληλων αντισταθμιστικών όρων Green-Schwarz στην ενεργό δράση [27], [28], [29], το οποίο έχει ως αποτέλεσμα την τροποποίηση της ισχύς του πεδίου  $H_{\mu\nu\rho}$  με τους Chern-Simons (βαρυτικούς- (“Lorentz”, L) και gauge(Y)) ανώμαλους όρους, δηλαδή θα είναι (σε γραφή διαφορικών μορφών):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \kappa^{-1} d\mathbf{B} + \frac{\alpha'}{8\kappa} (\Omega_{3L} - \Omega_{3Y}), \\ \Omega_{3L} &= \omega_c^a \wedge d\omega_a^c + \frac{2}{3} \omega_c^a \wedge \omega_d^c \wedge \omega_a^d, \quad \Omega_{3Y} = \mathbf{A} \wedge d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου το  $\wedge$  δηλώνει το εξωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε διαφορικές  $(k, \ell)$  μορφές (με την αντισυμμετρική ιδιότητα  $\mathbf{f}^{(k)} \wedge \mathbf{g}^{(\ell)} = (-1)^{k\ell} \mathbf{g}^{(\ell)} \wedge \mathbf{f}^{(k)}$  [60]). Στην παραπάνω έκφραση, το  $\mathbf{A}$  είναι το Yang-Mills gauge πεδίο 1-μορφή, και  $\omega_b^a$  είναι η σπιν συνοχή 1-μορφή, με τους λατινικούς δείκτες  $a, b, c, d$  να είναι δείκτες του εφαπτομενικού χώρου ( $\text{SO}(1,3)$ ) [13]. Επίσης, υποθέτουμε ότι στο πρώιμο σύμπαν μόνο πεδία από τη βαρυτική άμαξη string multiplet εμφανίζονται ως εξωτερικά πεδία, δηλαδή ως δυναμικά πεδία. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το gauge πεδίο  $\mathbf{A}$  δεν υπάρχει, κατά τα πρώιμα στάδια της εξελίξεως του σύμπαντος [13]. Τα gauge πεδία μαζί με την χειραλική ύλη, θεωρούνται ότι σχηματίστηκαν κατά το πέρασ του πληθωρισμού, ως αποτέλεσμα της διάσπασης του running vacuum [13]. Συνεπώς θεωρούμε ότι  $\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \Omega_{3Y} = 0$  στην παρακάτω ανάλυση.

Ακόμη η σχέση (2.4) (η οποία σε μορφή διαφορικών μορφών γράφεται  $d\mathcal{H} = 0$ ), λόγω των βαρυτικών και gauge ανωμαλιών πρέπει να τροποποιηθεί, ώστε να ληφθούν και αυτές υπόψιν. Οπότε από την σχέση (2.11) και επειδή η καμπυλότητα 2-μορφή ορίζεται ως  $\mathbf{R}_b^a = \frac{1}{2} R_{b\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c$ , η ταυτότητα Bianchi (2.4) θα γίνει ως εξής:

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \frac{\alpha'}{8\kappa} \mathbf{R}_b^a \wedge \mathbf{R}_a^b \Rightarrow \varepsilon_{abc}{}^\mu D_\mu \mathcal{H}^{abc} \equiv \varepsilon_{abc}{}^\mu \mathcal{H}^{abc}{}_{;\mu} = \frac{\alpha'}{32\kappa} R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \\ &= \frac{\alpha'}{32\kappa} \mathcal{K}^\mu(\omega)_{;\mu} = \frac{\alpha'}{32\kappa \sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \mathcal{K}^\mu(\omega)) \Rightarrow \varepsilon_{abc}{}^\mu D_\mu \mathcal{H}^{abc} - \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{abc}{}^\mu D_\mu \mathcal{H}^{abc} - \frac{\alpha'}{32\kappa} R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} = 0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

με το σύμβολο  $(;)$  να σημαίνει βαρυτική συναλλοίωτη παραγωγή ως προς την συνήθη Christoffel συνοχή [13] και το σύμβολο  $(\dots)$  πάνω από τον τανυστή καμπυλότητας, δηλώνει τον αντίστοιχο δυαδικό τανυστή, ο οποίος ορίζεται ως  $\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}$ . Στην παραπάνω εξίσωση (2.12), ρητά αποδώσαμε τον χαρακτήρα των βαρυτικών Chern-Simons ανωμαλιών  $\sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega)$  [47], ως ολικές παραγώγους της ποσότητας  $\mathcal{K}^\mu(\omega)$  που εισάγαμε [13]. Επιπλέον, επειδή η ανωμαλία  $\sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega)$  είναι ένα ακριβές αποτέλεσμα ύστερα από διόρθωση πρώτης τάξης βρόχου (one loop exact) [47], μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Bianchi (2.12), ως έναν περιορισμό δέλτα-συναρτησοειδούς στο κβαντικό ολοκλήρωμα διαδρομής της δράσης (2.8) πάνω στα πεδία  $\mathcal{H}$  και  $g_{\mu\nu}$ , εκφράζοντας τον περιορισμό μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange ψευδοβαθμωτού αξιονικού (axion-like) πεδίου  $b(x)/3\sqrt{2}$  (ο παράγοντας  $3\sqrt{2}$  αποτελεί κανονικοποίηση ώστε να εμφανιστεί κανονικός κινητικός όρος για το πεδίο  $b(x)$ , ακριβώς όμοια με την περίπτωση της QED βλ.(1.31)) [48]. Έτσι, ο περιορισμός με χρήση της (2.12) θα εισαχθεί στο ολοκλήρωμα διαδρομής ως εξής:

$$\begin{aligned} \prod_x \delta(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma}(x)_{;\mu} - \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega)) &\Rightarrow \int \mathcal{D}b \exp \left[ i \int \varepsilon \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \left( \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma}(x)_{;\mu} - \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}b \exp \left[ i \int \varepsilon \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} D_\mu (b(x) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma}(x)) - \partial^\mu b(x) \frac{1}{3\sqrt{2}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}b \exp \left[ -i \int \varepsilon \left( \partial^\mu b(x) \frac{1}{3\sqrt{2}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} + \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}b \exp \left[ -i \int \varepsilon \left( \partial^\mu b(x) \frac{1}{3\sqrt{2}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} + \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \frac{\alpha'}{32\kappa} R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου πραγματοποιήσαμε στην δεύτερη γραμμή παραγοντική ολοκλήρωση, υποθέτωντας φυσικά ότι το KR πεδίο (και εν γένει όλα τα πεδία), μηδενίζονται στο άπειρο (βλ. σχετική συζήτηση (A.16)) και προφανώς αφού το  $b$  είναι ψευδοβαθμωτό πεδίο, ισχύει  $D_\mu b = \partial_\mu b$ , όπου παραπάνω το στοιχείο όγκου στον (3+1)-διάστατο χωρόχρονο είναι το  $\epsilon = \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 = \sqrt{-g} d^4x$  [54], [60]. Άρα, χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση (2.13) το ολοκλήρωμα διαδρομής της δράσης (2.8), που θα αφορά τα πεδία  $\mathcal{H}$ ,  $g_{\mu\nu}$  και  $b(x)$  θα γραφτεί ως:

$$\mathcal{Z} = \int \mathbb{D} \exp \left( i \int \epsilon \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{6} \mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} \mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} - \partial^\mu b(x) \frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \right)$$

με  $\mathbb{D} = \mathcal{D}g \mathcal{D}\mathcal{H} \mathcal{D}b$ , να είναι το μέτρο ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος διαδρομής και ολοκληρώνοντας πάνω στο πεδίο  $\mathcal{H}$  με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, λαμβάνουμε μία ενεργό θεωρία, η οποία εκφράζεται μέσω μιας ενεργούς δράσεως [13]. Ωστόσο, αν πραγματοποιήσουμε την μέθοδο συμπλήρωσης του τετραγώνου στο παραπάνω Minkowski ολοκλήρωμα διαδρομής, θα διαπιστώσουμε ότι αποκλίνει [63]. Αυτό είναι ένα γνωστό πρόβλημα κατά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής και ο τρόπος για να το αντιμετωπίσουμε είναι να υπολογίσουμε το αντίστοιχο ευκλείδειο ολοκλήρωμα διαδρομής και έπειτα να επιστρέψουμε στον Minkowski χώρο, αίροντας τις όποιες ‘αμφιβολίες’ (ambiguities) [64].

Ακόμη, προτού ολοκληρώσουμε πάνω στο πεδίο  $\mathcal{H}$ , αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει μία σχέση δυαδικότητας μεταξύ της στρέψης  $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}$  και του αξιονίου  $b(x)$  [54], η οποία προκύπτει από την ύπαρξη ενός τοπικού ελαχίστου του παραπάνω ολοκληρώματος διαδρομής, που φυσικά αντιστοιχεί σε ένα κλασικό κενό. Δηλαδή θα έχουμε διαδοχικά ότι (με χρήση του αντίστοιχου ευκλείδειου ολοκληρώματος διαδρομής):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E \ni \int \epsilon \mathcal{L}_{\mathcal{H}} &\Rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{H}} = \int \epsilon \left( -\frac{1}{6} \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} \mathcal{H}^{\mu\nu\rho} - \partial^\mu b(x) \frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^{(E)} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} \right) \\ \mathcal{L}_{\mathcal{H}} &= \int \epsilon \left( -\frac{1}{6} \mathcal{H}_{abc} \mathcal{H}_{def} \eta^{ad} \eta^{be} \eta^{cf} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \partial_a b(x) \epsilon^{abcd(E)} \mathcal{H}_{bcd} \right) \\ \stackrel{(E-L)}{\Rightarrow} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{H}_{klm}} - \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{H}}}{\partial (\partial_i \mathcal{H}_{klm})} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{H}_{klm}} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} \delta_a^k \delta_b^l \delta_c^m \mathcal{H}_{def} \eta^{ad} \eta^{be} \eta^{cf} \\ -\frac{1}{6} \mathcal{H}_{abc} \delta_d^k \delta_e^l \delta_f^m \eta^{ad} \eta^{be} \eta^{cf} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \partial_a b(x) \epsilon^{abcd(E)} \delta_b^k \delta_c^l \delta_d^m &= 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \mathcal{H}^{klm} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \partial_a b(x) \epsilon^{aklm(E)} \\ \Rightarrow \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\lambda b(x) \epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma(E)} \Rightarrow \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^{(E)} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\lambda b(x) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^{(E)} \epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma(E)} = -\frac{6}{\sqrt{2}} \partial_\lambda b(x) \delta_\mu^\lambda \\ &\Rightarrow \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^{(E)} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} = -\sqrt{18} \partial_\mu b(x) \Rightarrow \boxed{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} = -3\sqrt{2} \partial_\mu b(x)} \end{aligned}$$

όπου  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^{(E)}$  είναι το συναλλοίωτο σύμβολο Levi-Civita, αλλά οι ποσότητες με τον δείκτη  $(E)$  δηλώνουν ότι έχουν υπολογιστεί με βάση την ευκλείδεια υπογραφή της μετρικής (ακολουθούμε την σύμβαση (+, +, +, +)) και φυσικά χρησιμοποιήσαμε την σχέση  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^{(E)} \epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma(E)} = 3! \delta_\mu^\lambda$  και ύστερα επιστρέψαμε στον Minkowski χωρόχρονο [65]. Βέβαια, πάντα αν έχουμε μία ποσότητα σε ένα σημείο του χωροχρόνου μπορώ να πάω στον αντίστοιχο εφαπτομενικό επίπεδο χώρο Minkowski μέσω των vielbeins (tetrads), με  $e^a_\mu$  τα vielbein,  $E^\mu_a$  τα αντίστροφα vielbein, όπου ισχύει ότι  $E^\mu_a e^\mu_b = \delta^a_b$  και  $E^\mu_a e^\nu_a = \delta_\mu^\nu$  (βλ. (A.4)). Άρα, παραπάνω εμφανίζεται η σχέση δυαδικότητας (λόγω του βαρυτικού συναλλοίωτου συμβόλου Levi-Civita) μεταξύ των πεδίων  $b(x)$  και  $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}$  και η ενεργός δράση των

χειραλικών φερμιονίων, που λαμβάνουμε ύστερα από την εποχή του πληθωρισμού βασίζεται σε αυτή τη σχέση, όπως θα δούμε και στο παρακάτω κεφάλαιο 3 [66].

Συνεχίζοντας την παραπάνω ανάλυση για την ολοκλήρωση του πεδίου  $\mathcal{H}$ , ορίζουμε (για σημειογραφική απλότητα) το  $C_{\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu b(x)$  και προσθέτοντας-αφαιρώντας έναν όρο  $\frac{1}{12} C_{\nu\rho\sigma} C^{\nu\rho\sigma}$ , το εκθετικό του αντίστοιχου ευκλείδειου με το παραπάνω ολοκληρώματος διαδρομής θα γίνει ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \int \epsilon' \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{6} \mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} \mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} - \frac{C_{\nu\rho\sigma}}{3\sqrt{2}} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma} - \frac{1}{12} C_{\nu\rho\sigma} C^{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{12} C_{\nu\rho\sigma} C^{\nu\rho\sigma} - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \\
&= \int \epsilon' \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R - \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \mathcal{H} + \frac{1}{2\sqrt{3}} C \right)^2 + \frac{1}{12} C_{\nu\rho\sigma} C^{\nu\rho\sigma} - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \\
&\propto \int \epsilon' \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{12} C_{\nu\rho\sigma} C^{\nu\rho\sigma} - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \\
&= \int \epsilon' \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{12} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^{(E)} \varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma(E)} \partial^\mu b(x) \partial_\alpha b(x) - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \\
&= \int \epsilon' \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{12} 3! \delta_\mu^\alpha \partial^\mu b(x) \partial_\alpha b(x) - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \\
&= \int \epsilon' \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \tag{2.14}
\end{aligned}$$

με  $\epsilon' = d^4x \sqrt{g^{(E)}}$  να είναι το ευκλείδειο στοιχείο όγκου [65] και κατά την συμπλήρωση του τέλει τετραγώνου, στην δεύτερη γραμμή καταστήσαμε τους δείκτες των πεδίων για σημειογραφική απλότητα. Οπότε μεταβαίνοντας πίσω στον χώρο Minkowski το ολοκλήρωμα διαδρομής θα είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &\propto \int \mathcal{D}g \mathcal{D}b \exp \left( i \int \sqrt{-g} d^4x \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \sqrt{-g} \mathcal{G}(\omega) \right] \right) \Rightarrow \\
\mathcal{Z} &\propto \int \mathcal{D}g \mathcal{D}b \exp \left( i \int \sqrt{-g} d^4x \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{b(x)}{3\sqrt{2}} \frac{\alpha'}{32\kappa} R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \right) \Rightarrow \\
\mathcal{Z} &\propto \int \mathcal{D}g \mathcal{D}b \exp \left( i \int \sqrt{-g} d^4x \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{\alpha'}{96\kappa\sqrt{2}} b(x) R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \right). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε σε μία ενεργό θεωρία, η οποία αφορά μία ενεργό δράση συναρτήσει της βαρυτικής ανωμαλίας (εν γένει υπάρχει και gauge ανωμαλία, ωστόσο θέσαμε  $\mathbf{A} = 0$ ) και του πλήρως δυναμικού, άμαζου αξιονικού (axion-like) πεδίου (KR ή string-model ανεξάρτητου αξιονίου)  $b(x)$ , σε έναν Riemannian καμπυλωμένο χωρόχρονο, που θα γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_B^{\text{eff}} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{\alpha'}{96\kappa\sqrt{2}} b(x) R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{\alpha'}{96\kappa\sqrt{2}} b(x) D_\mu \mathcal{K}^\mu(\omega) \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{\alpha'}{96\kappa\sqrt{2}} \left( D_\mu \left( \overset{0}{b(x) \mathcal{K}^\mu(\omega)} \right) - \mathcal{K}^\mu(\omega) \partial_\mu b(x) \right) \right] \\
&\Rightarrow \mathcal{S}_B^{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b + \frac{\alpha'}{96\kappa\sqrt{2}} \mathcal{K}^\mu(\omega) \partial_\mu b(x) \right], \tag{2.16}
\end{aligned}$$

όπου το  $\mathcal{K}^\mu(\omega)$  ορίστηκε στην σχέση (2.12) και εκφράζει την ολική παράγωγο των βαρυτικών Chern-Simons ανώμαλων όρων [13]. Αξίζει να σημειωθεί πως, ο πολλαπλασιαστής Lagrange  $b(x)$

είναι ψευδοβαθμωτό πεδίο και αυτό συνδέεται άμεσα με το ότι οι Chern-Simons όροι παραβιάζουν την CP συμμετρία και άρα τελικά για να διατηρείται η CP αναλλοιώτητα της βαρυτικής Lagrangian (2.16), πρέπει το  $b(x)$  να είναι ψευδοβαθμωτό πεδίο (εξάλλου το δ-συναρτησιακό (2.12) είναι εκ' κατασκευής CP αναλλοίωτο) [13].

## 2.4 Σύνοψη

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι από την string multiplet έχουμε εγγενώς την στρέψη στην string-inspired θεωρία μας (σε minimal εκδοχή) που όμως μπορεί να εξαληφθεί (σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση) με την εισαγωγή ενός πλήρως δυναμικού (propagating) άμαζου ψευδοβαθμωτού KR αξιονικού πεδίου  $b(x)$ , δίχως δυναμικό, διότι η (2.16) αναγνωρίζεται ως μία Einstein-Hilbert (Riemannian) βαρυτική δράση, ένας κινητικός όρος του  $b(x)$  και η σύζευξη αυτού του πεδίου με την αξονική (axial) πυκνότητα ρεύματος  $\mathcal{K}^\mu$  της μποζονικής μας θεωρίας [48]. Ακόμη, παρατηρούμε από την (2.16) ότι η εμφάνιση του αξιονίου μόνο μέσω των παραγώγων αυτού, δηλώνει την ύπαρξη μίας συμμετρίας μετατόπισης (shift symmetry) που ικανοποιεί το ίδιο, δηλαδή  $b(x) \rightarrow b(x) + c$ , όπου  $c$  μία σταθερά. Τελικά, η εμφάνιση του αξιονίου  $b(x)$  αναπαριστά τα αποτελέσματα της στρέψης στην θεωρία μας, εξαιτίας του ρόλου της ισχύς του KR πεδίου ως (κβαντική) στρέψη (2.9), στην θεωρία των χορδών [48]. Άρα, μπορούμε να πούμε ότι η στρέψη έγινε δυναμική λόγω των ανωμαλιών (και συγκεκριμένα των βαρυτικών) που υπάρχουν αναγκαστικά στην ενεργό θεωρία μας [13] και μάλιστα ότι το αξίνιο που επάγεται από την στρέψη έχει γεωμετρική προέλευση, το οποίο μπορεί να λάβει μάζα, κάνοντάς το υποψήφιο σωματίδιο για σκοτεινή ύλη [13], πάντα αναφερόμενοι στο πρώιμο σύμπαν πριν αλλά και κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, που υπάρχουν πεδία μόνο από την βαρυτική άμαζη string multiplet [48]. Βέβαια αξίζει να σημειωθεί ότι, όλα τα αξιόνια που επάγονται από την στρέψη (όπως και εδώ το KR αξίνιο), είναι άμαζα διότι η γεωμετρία (δηλαδή η στρέψη), δεν μου γεννά κάποιο δυναμικό για τα αξιόνια. Πρέπει κανείς να πάει σε άλλους μηχανισμούς που να προσδώσουν δυναμικό στο KR αξίνιο ώστε να λάβει μάζα (μέχρι στιγμής μπορούμε να θεωρήσουμε το αξίνιο ως άμαζο βαθμό ελευθερίας, ως ένα Goldstone μποζόνιο) και εν τέλει να καταστεί ως υποψήφιο σωματίδιο σκοτεινής ύλης, το οποίο έχει γεωμετρική προέλευση, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο, όπου κατά την QCD εποχή έχουμε μη διαταραχτικά φαινόμενα (instantons).

## Κεφάλαιο 3

# Εποχή μετά τον πληθωρισμό και QCD αξιονική σκοτεινή ύλη

### 3.1 Εισαγωγή

Με βάση το κοσμολογικό μοντέλο RVM, ύστερα από τον πληθωρισμό με τη κατάλληλη διάσπαση του running vacuum (του κενού, όπου η πυκνότητα ενέργειας αυτού μπορεί να μεταβάλλεται με τον κοσμικό χρόνο [13]) σε ύλη και ακτινοβολία, το σύμπαν θα αναθερμανθεί και θα εμφανιστεί χειραλική φερμιονική ύλη, με ανώμαλα αξονικά ρεύματα [66]. Έτσι, σε αυτό το κεφάλαιο, σε συνέχεια της παραπάνω string-inspired θεωρίας (Κεφ.2) και βασιζόμενοι στο RVM κοσμολογικό μοντέλο, θα περιγράψουμε πως μέσω ενός μη διαταρακτικού μηχανισμού μετά τον πληθωρισμό και κατά την QCD εποχή, μπορεί να γεννηθεί μάζα στο αξιόνιο  $b(x)$  που επάγεται από στρέψη και συνεπώς να παίζει το ρόλο της σκοτεινής ύλης (ή μιας συνιστώσας αυτής [48]).

### 3.2 Εποχή μετά τον πληθωρισμό

Κατά το πέρας του πληθωρισμού, σύμφωνα με το RVM κοσμολογικό, μοντέλο εμφανίζονται χειραλικά φερμιόνια Dirac (ή Majorana) με ανώμαλα αξονικά ρεύματα και στην ενεργό δράση της string-inspired θεωρίας (Κεφ.2), θα συμπεριλάβουμε σε αυτά τα φερμιονικά πεδία μάζα  $m$ . Με βάση τον ορισμό της στρέψης (2.9), η contorsion ερμηνεία του αντισυμμετρικού τανυστή ισχύος πεδίου  $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}$ , υποδηλώνεται μία minimal σύζευξη αυτού του πεδίου με το αξονικό φερμιονικό ρεύμα, με δεδομένο φυσικά ότι η αντίστοιχη Dirac Lagrangian για τα φερμιόνια σε βαρύτητα με στρέψη, περιέχει την γενικευμένη σπιν συνοχή  $\bar{\omega}_{ab\mu} = \omega_{ab\mu} + K_{ab\mu}$ , όπου  $K_{abc} = \frac{\alpha'}{2\kappa} (\mathcal{H}_{cab} - \mathcal{H}_{abc} - \mathcal{H}_{bca}) = -\frac{\alpha'}{2\kappa} \mathcal{H}_{abc}$  [48]. Οπότε, η δράση για τα Dirac φερμιόνια θα είναι :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{Dirac} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{\psi}_j \gamma^\mu \left( \mathcal{D}(\bar{\omega})_\mu \psi_j \right) - \left( \mathcal{D}(\bar{\omega})_\mu \bar{\psi}_j \right) \gamma^\mu \psi_j \right) - m^{(j)} \bar{\psi}_j \psi_j \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{\psi}_j \gamma^a \left( \partial_a \psi_j \right) - \left( \partial_a \bar{\psi}_j \right) \gamma^a \psi_j \right) - m^{(j)} \bar{\psi}_j \psi_j \right] \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{\psi}_j \gamma^a \left( -\frac{i}{4} \bar{\omega}_{bca} \sigma^{bc} \psi_j \right) - \left( \frac{i}{4} \bar{\omega}_{bca} \bar{\psi}_j \sigma^{bc} \right) \gamma^a \psi_j \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{S}_{Dirac}^{Free} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{8} \left( \bar{\psi}_j \gamma^a \bar{\omega}_{bca} \sigma^{bc} \psi_j + \bar{\omega}_{bca} \bar{\psi}_j \sigma^{bc} \gamma^a \psi_j \right) \right] \\
&= \mathcal{S}_{Dirac}^{Free} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{8} \left( \bar{\psi}_j \left\{ \gamma^a, \sigma^{bc} \right\} \psi_j \right) \bar{\omega}_{bca} \right], \quad \sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b], \quad (3.1)
\end{aligned}$$

όπου οι λατινικοί δείκτες  $a, b, c, \dots$  αναφέρονται σε δείκτες του εφαπτομενικού χώρου, οι οποίοι ανεβοκατεβαίνουν με την μετρική Minkowski  $\eta^{ab}$ , σε κάποιο σημείο του χωροχρόνου με συντεταγμένες  $x^\mu$ , με μετρική  $g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) \eta_{ab} e_\nu^b(x)$ , όπου  $e_\mu^a(x)$  είναι τα vielbein και  $E_a^\mu(x)$  τα αντίστροφα vielbein [48]. Ακόμη, η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται ως  $\bar{\mathcal{D}}_a = \partial_a - \frac{i}{4} \bar{\omega}_{bca} \sigma^{bc}$  και οι  $\gamma^a$  είναι οι πίνακες Dirac έτσι ώστε,  $\gamma^\mu(x) = e_\mu^a(x) \gamma^a$ , όπου ισχύει η σχέση (πλήρης απόδειξη υπάρχει στο κεφάλαιο 1)  $\left\{ \gamma^a, \sigma^{bc} \right\} = 2 \epsilon^{abcd} \gamma_d \gamma^5 = 2 \epsilon^{abcd} \gamma_d \gamma^5$  και η παραπάνω δράση (3.1), με το δεδομένο ότι η σπιν συνοχή γράφεται ως  $\omega_\mu^{ab} \equiv e_\nu^a \left[ \partial_\mu E^{\nu b} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu E^{\sigma b} \right]$  με  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  να είναι τα συνήθη Christoffel σύμβολα [67] (τα οποία σε επίπεδο χώρο Minkowski, εκπεφρασμένα σε καρτεσιανές συντεταγμένες μηδενίζονται ταυτοτικά), γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{Dirac} &= \mathcal{S}_{Dirac}^{Free} + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4} \bar{\psi}_j \epsilon^{abcd} \gamma_d \gamma^5 \psi_j \bar{\omega}_{bca} \right) = \mathcal{S}_{Dirac}^{Free} + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4} \epsilon^{abcd} J_d^5 \bar{\omega}_{bca} \right) \\
&= \mathcal{S}_{Dirac}^{Free} + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4} \epsilon^{abcd} J_d^5 \omega_{bca} \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4} \epsilon^{abcd} J_d^5 K_{bca} \right) \\
&\Rightarrow \mathcal{S}_{Dirac} = \mathcal{S}_{Dirac}^{Free} + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{F}^d + B^d \right) J_d^5 \quad (3.2)
\end{aligned}$$

με  $J_d^5 = \bar{\psi}_j \gamma_d \gamma^5 \psi_j$  να είναι το αξονικό ρεύμα των φερμιονίων, που εν γένει είναι ανώμαλο (και φυσικά αθροίζουμε πάνω σε όλες τις γεύσεις-είδη αυτών),  $\mathcal{F}^d = \epsilon^{abcd} e_{\nu c} \partial_b E_a^\nu$  και ακόμη είναι  $B^d = -\frac{\alpha'}{8\kappa} \epsilon^{abcd} \mathcal{H}_{bca}$  που προέρχεται από τον όρο της contorsion. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι, τοπικές διακυμάνσεις βαρυτικών κυμάτων κατά την εποχή της ύλης και της ακτινοβολίας, δύνανται να οδηγήσουν εν γένει σε μη τετριμμένο υπόβαθρο  $\mathcal{F}_d$ , αν και αυτές οι διακυμάνσεις είναι αρκετά κατασταλμένες (suppressed) εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες αρχέγονες (primordial) βαρυτικές διακυμάνσεις [48]. Στην παρακάτω ανάλυση, θα θεωρήσουμε ότι έχουμε μία FLRW μετρική  $g_{\mu\nu}$  ως υπόβαθρο και θα είναι  $\mathcal{F}_d = 0$  (κάτι που ισχύει εν γένει για σφαιρικά συμμετρικούς χωροχρόνους με διαγώνιες μετρικές) [48]. Επομένως η ολική (τετραδιάστατη χωροχρονική) ενεργός δράση  $\mathcal{S}_{eff}$  είναι το άθροισμα της δράσης  $\mathcal{S}_B$  (2.8) και της  $\mathcal{S}_{Dirac}$  (3.2):

$$\mathcal{S}_{eff} = \mathcal{S}_B + \mathcal{S}_{Dirac} = \mathcal{S}_{Dirac}^{Free} + \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{6} \mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} \mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} - \frac{\alpha'}{8\kappa} \epsilon^{abcd} \mathcal{H}_{bca} J_d^5 \right) \quad (3.3)$$

και μπορούμε να πάρουμε μία ενεργός δράση συναρτήσε του KR αξιονίου  $b(x)$ , αν ακολουθήσουμε παρόμοια ανάλυση με τα προηγούμενα κεφάλαια. Δηλαδή, παίρνοντας το ολοκλήρωμα διαδρομής της δράσης (3.3) και διατηρώντας την ταυτότητα Bianchi (2.12) σε κβαντικό επίπεδο με την εισαγωγή ενός πολλαπλασιαστή Lagrange ψευδοβαθμωτού αξιονικού πεδίου  $b(x)/\sqrt{3}$  (που θέλουμε να είναι αδιάστατο), ολοκληρώνουμε πάνω στο πεδίο  $\mathcal{H}$  με βάση τον ευκλείδειο φορμαλισμό (όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2). Εάν θέσουμε ως  $C_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{H}^{\nu\rho\sigma}$ , τότε η ολοκλήρωση πάνω στο πεδίο  $\mathcal{H}$  συνεπάγεται ότι το εκθητικό του αντίστοιχου ευκλείδειου ολοκληρώματος διαδρομής της δράσης (3.3), με τη μέθοδο συμπλήρωσης του τετραγώνου θα είναι (δείχνουμε ρητά μόνο του όρους που σχετίζονται με την ισχύ του KR πεδίου  $\mathcal{H}$ , οι υπόλοιποι απλώς θα δοθούν στην τελική σχέση της ενεργούς δράσης):

$$\begin{aligned}
& - \int \epsilon' \left( \frac{1}{6} C_\mu C^\mu + \frac{1}{\sqrt{3}} C_\mu \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha'}{8\kappa} C_\mu J^{5\mu} \right) = - \int \epsilon' \left( \frac{1}{6} C_\mu C^\mu + C_\mu \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha'}{8\kappa} J^{5\mu} \right) \right) \\
& = - \int \epsilon' \left( \frac{1}{6} C_\mu C^\mu + C_\mu \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha'}{8\kappa} J^{5\mu} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa \sqrt{2}} J^{5\mu} \right)^2 \right) \\
& + \int \epsilon' \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa \sqrt{2}} J^{5\mu} \right)^2 = \int \epsilon' \left( \frac{1}{\sqrt{6}} C_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa \sqrt{2}} J^{5\mu} \right)^2 \\
& + \int \epsilon' \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa \sqrt{2}} J^{5\mu} \right)^2 \propto \int \epsilon' \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu b(x) + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa \sqrt{2}} J^{5\mu} \right)^2 \\
& = \int \epsilon' \left( \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa} \partial_\mu b J^{5\mu} + \frac{3\alpha'^2}{128\kappa^2} J_\mu^5 J^{5\mu} \right), \tag{3.4}
\end{aligned}$$

με  $\epsilon' = d^4x \sqrt{g^{(E)}}$  να είναι το ευκλείδειο στοιχείο όγκου [65] και για να γράψουμε τον δεύτερο όρο της δράσης  $\mathcal{S}_B$  συναρτήσει του  $C_\mu$ , χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα  $\epsilon^{\mu\nu\rho\delta(E)} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(E)} = \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho(E)}$ . Άρα, η ολική ενεργός δράση μαζί με τους όρους των ανωμαλιών (2.16) θα είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\text{eff}} & = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{96\kappa} b(x) D_\mu \mathcal{K}^\mu \right] \\
& + \mathcal{S}_{Dirac}^{\text{Free}} + \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa} D_\mu b J^{5\mu} + \frac{3\alpha'^2}{128\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} J_\mu^5 J^{5\mu} + \dots, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

και στην παραπάνω δράση εμφανίζεται ένας αξονικός όρος αλληλεπίδρασης τεσσάρων φερμιονίων, που είναι χαρακτηριστικός για τις Einstein-Cartan θεωρίες με στρέψη [66]. Αν πραγματοποιήσουμε μία παραγοντική ολοκλήρωση στον όρο σύζευξης του KR αξιονίου με το φερμιονικό ρεύμα στην παραπάνω δράση, αγνοώντας τους συνοριακούς όρους θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\text{eff}} & = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{96\kappa} b(x) D_\mu \mathcal{K}^\mu \right] \\
& + \mathcal{S}_{Dirac}^{\text{Free}} - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa} b D_\mu J^{5\mu} + \frac{3\alpha'^2}{128\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} J_\mu^5 J^{5\mu} + \dots \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η παραπάνω δράση (3.5) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τη συμμετρία μετατόπισης του KR αξιονικού πεδίου  $b(x)$ :

$$b(x) \rightarrow b(x) + \text{constant} \tag{3.7}$$

κάτι που είναι γενικό ιδίωμα της αξιονικής φυσικής [68], [69]. Επίσης, ύστερα από τον πληθωρισμό, επειδή η ύπαρξη τοπικών διακυμάνσεων βαρυτικών κυμάτων χαλούν την διαφορομορφική αναλλοιωτότητα (συμμετρία επαναπαραμετροποίησης) των κβαντικών θεωριών στην εποχή της ακτινοβολίας και της ύλης, υποθέτουμε ότι η παραγωγή της χειραλικής ύλης στο τέλος του πληθωρισμού, ακυρώνει τις βαρυτικές ανωμαλίες, ακόμη και σε τοπικό επίπεδο [66]. Ωστόσο, χειραλικές [70] ή QCD-αξιονικές [69] ανωμαλίες παραμένουν ως έχουν, διότι δεν έχουν κάποια συνεισφορά στον ταυστή τάσης (ενέργειας-ορμής)  $T_b^{\mu\nu}$ , εν αντιθέσει με τις βαρυτικές και άρα δεν υπάρχει κάποιος θεμελιώδης λόγος για την θεωρία να είναι ελεύθερη από χειραλικές ανωμαλίες, παρά μόνο από gauge διότι θέλουμε να διατηρήσουμε τις ταυτότητες Ward [66]. Έτσι, υποθέτουμε ότι ισχύει η εξής



σχέση κατά την εποχή της ακτινοβολίας και της ύλης (θεωρώντας την δράση (3.6)):

$$D_\mu \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\alpha'}{\kappa} J^{5\mu} + \frac{\alpha'}{\kappa} \frac{\sqrt{3}}{96} \mathcal{K}^\mu \right) \right] = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\alpha'}{\kappa} \left( \frac{e^2}{8\pi^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \right) \quad (3.8)$$

όπου  $F_{\mu\nu}$  είναι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής του Maxwell, και  $G_{\mu\nu}^a$  είναι η ισχύς των πεδίων των γκλουονίων, με  $a = 1, \dots, 8$  να είναι ένας συζυγής (adjoint) SU(3) δείκτης χρώματος,  $e$  είναι το φορτίο του ποζιτρονίου (κατά σύμβαση) και  $g_s$  είναι η σταθερά σύζευξης των ισχυρών αλληλεπιδράσεων [66]. Ο λόγος για τον οποίο, η ανωμαλία είναι ανάλογη με αυτές τις σταθερές είναι εξαιτίας του ότι αποτελεί αποτέλεσμα ενός βρόχου (one-loop effect), με τα χειραλικά φερμιόνια να κυκλοφορούν πάνω στον βρόχο. Παρακάτω, θα επικεντρωθούμε μόνο σε QCD ανωμαλίες, οι οποίες ήταν κυρίαρχες κατά την QCD εποχή του σύμπαντος και οι χειραλικές ηλεκτρομαγνητικές ανωμαλίες έχουν εκτενώς μελετηθεί στο άρθρο [48].

### 3.3 Θραύση της συμμετρίας μετατόπισης

Πραγματοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, στον  $b - J^5$  όρο αλληλεπίδρασης της (3.5) και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.8), λαμβάνουμε μία ενεργό δράση για το KR ψευδοβαθμωτό αξιόνιο  $b(x)$ , κατά την QCD εποχή. Δηλαδή θα έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{aligned} S^{\text{eff}} &\ni \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b + \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa} D_\mu b J^{5\mu} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b + \left( D_\mu \left( \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa} b(x) J^{5\mu} \right) - \frac{\alpha' \sqrt{3}}{8\kappa} b(x) D_\mu J^{5\mu} \right) \right] \\ &\stackrel{(3.8)}{\Rightarrow} S_b^{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\alpha'}{\kappa} \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Γενικά, κατά την παρουσία μη αβελιανών πεδίων βαθμίδας στις (ανώμαλες) συζεύξεις των αξιονίων (στην QCD περίπτωση, των πεδίων των γκλουονίων  $G_{\mu\nu}^a$  (3.9)), μη διαταρακτικά κβαντικά φαινόμενα (instantons) μπορούν να παράγουν περιοδικά αξιονικά δυναμικά (μέχρι στιγμής το KR αξιόνιο  $b(x)$  ήταν δίχως δυναμικό (3.5)) θραύοντας την συμμετρία μετατόπισης (3.7) [68], [69]. Συγκεκριμένα, για ένα γενικό (generic) αξιονικό πεδίο  $a(x)$  με ανώμαλη σύζευξη σε μη αβελιανά πεδία βαθμίδας, δηλαδή της μορφής :

$$S_{\text{axion-QCD}} \ni \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{f_a} a(x) \mathbf{F}_{\mu\nu} \tilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

με  $f_a$  να δηλώνει την αντίστοιχη αξιονική σταθερά σύζευξης (που αφορά την αποδιέγερση (decay) αυτού), με διάσταση μάζας +1 και  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  είναι η ισχύς του μη αβελιανού πεδίου βαθμίδας, τα μη διαταρακτικά φαινόμενα (instantons) γεννούν ένα αξιονικό δυναμικό της μορφής:

$$\mathcal{U}(a) \simeq \Lambda_{\text{inst}}^4 \left[ 1 - \cos\left(\frac{a(x)}{f_a}\right) \right], \quad (3.11)$$

όπου  $\Lambda_{\text{inst}}$  είναι η ανάλογη κλίμακα ενέργειας και στην περίπτωση της QCD που ενδιαφερόμαστε είναι  $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 218 \text{ MeV}$  [66]. Έτσι, το δυναμικό (3.11) σπάει την συμμετρία μετατόπισης (3.7) και λόγω ύπαρξης ενός τοπολογικού δείκτη Pontryagin, ο οποίος λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές [69], [71]

και στην περίπτωση της QCD για τα πεδία των γκλουονίων  $G_{\mu\nu}^a$  ισχύει ότι :

$$q = \frac{g_s^2}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr} (G\tilde{G}) = \frac{g_s^2}{32\pi^2} \int d^4x G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \quad \text{με } q \in \mathbb{Z} \quad (3.12)$$

δηλαδή έχουμε τη διατήρηση ενός τοπολογικού φορτίου και επομένως η συμμετρία μετατόπισης (3.7) περιορίζεται στην εξής συμμετρία :

$$a(x) \rightarrow a(x) + 2\pi f_a \xrightarrow[\text{axion}]{\text{KR}} b(x) \rightarrow b(x) + 2\pi f_b. \quad (3.13)$$

Στο string-inspired μοντέλο μας, είναι το KR αξιόνιο  $b(x)$ , που κάνει σύζευξη με τέτοια instanton φαινόμενα, μέσω των ανώμαλων όρων στην (3.5) και αντίστοιχα με παραπάνω έχουμε ένα περιοδικό δυναμικό της μορφής :

$$\mathcal{U}(b)^{\text{QCD}} \simeq \Lambda_{\text{QCD}}^4 \left[ 1 - \cos\left(\frac{b(x)}{f_b}\right) \right] \quad \text{με } f_b \equiv \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{\kappa}{\alpha'} = \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{M_s}{M_{\text{Pl}}}\right)^2 M_{\text{Pl}}, \quad (3.14)$$

με  $M_{\text{Pl}} = \kappa^{-1} = 2.4 \times 10^{18}$  GeV, να είναι η ανηγμένη μάζα Planck στις (3+1)-διαστάσεις που θα οριστεί ως εξής. Οι παράμετροι,  $\alpha'$  και  $\kappa^2$  γενικά είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, στα διάφορα μοντέλα της θεωρία των χορδών [28], [29] και ιδιαίτερα εν όψει της δυνατότητας συμπαγοποιήσεων των επιπλέον διαστάσεων, ωστόσο εμείς θα υποθέσουμε στα επόμενα [72], [73] τις εξής σχέσεις :

$$\sqrt{\alpha'} = M_s^{-1} \sim \kappa = \frac{\sqrt{8\pi}}{M_P} \sim (2.4 \times 10^{18})^{-1} \text{ GeV}^{-1}. \quad (3.15)$$

όπου  $M_{\text{Pl}} \equiv M_P/\sqrt{8\pi} = 2.4 \times 10^{18}$  GeV, είναι η ανηγμένη μάζα Planck στις (3+1)-διαστάσεις [65]. Αξίζει να σημειωθεί ότι, αυτός ο περιορισμός στις string παραμέτρους, δεν επηρεάζει τα ποιοτικά συμπεράσματα της ανάλυσης κατά την παραγωγή μάζας του αξιονίου  $b(x)$  και άμεσα μπορεί να γενικευθεί σε πιο γενικά μοντέλα όπου  $\sqrt{\alpha'} \neq \kappa$ . Στα παρακάτω, θεωρούμε ότι  $M_s \neq M_{\text{Pl}}$ , αφού γενικά έχουν διαφορετικές τιμές, ακολουθώντας την φαινομενολογική μελέτη των [48], [66] και ύστερα θα χρησιμοποιήσουμε την (3.15). Επιπλέον αναφέρουμε ότι, η παραγωγή ενός δυναμικού για το KR πεδίο συνεπάγεται ότι η ερμηνεία της στρέψης με βάση αυτό το πεδίο δεν είναι πλέον εφικτή, στην φάση που έχει πάρει μάζα.

Από την σχέση (3.14), παρατηρούμε ότι το εύρος τιμών του αξιονικού coupling (σταθερά σύζευξης)  $f_b$ , εξαρτάται από το επιτρεπόμενο εύρος τιμών της κλίμακας μάζας της χορδής  $M_s$  [65], το οποίο βάση των μελετών [48], [66] είναι :

$$M_{\text{Pl}} \gtrsim M_s \gtrsim 10^{-3} M_{\text{Pl}}, \quad (3.16)$$

που το πάνω όριο της  $M_s$  αντιστοιχεί στην (3.15). Δηλαδή, εάν κατασκευάσουμε το δεξί μέλος της (3.14) με βάση την παραπάνω ανισότητα (3.16), θα λάβουμε το εξής εύρος τιμών για το  $f_b$  :

$$3.9 \times 10^{12} \text{ GeV} \lesssim f_b \lesssim 3.9 \times 10^{18} \text{ GeV}. \quad (3.17)$$

Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης του παραπάνω εύρους, σημειώνουμε ότι το γενικό (generic)

αξιονικό coupling  $f_a$ , έχει εύρος τιμών [69]:

$$10^9 \text{ GeV} < f_a < 10^{12} \text{ GeV} . \quad (3.18)$$

Βέβαια, μέσω αστροφυσικών πειραματικών δεδομένων [74], [75], [76], [77], [78], μπορούμε να επεκτείνουμε το πάνω όριο μέχρι της τάξης των  $10^{17} \text{ GeV}$ . Οπότε παρατηρούμε ότι, ακόμη και εάν δεν λάβουμε υπόψιν τους αστροφυσικούς περιορισμούς, υπάρχει μία επικάλυψη (εντός μιας τάξης μεγέθους) μεταξύ της ελάχιστης επιτρεπτής τιμής του  $f_b$ , (3.17) και της μέγιστης επιτρεπτής τιμής (προερχόμενη από φαινομενολογία) της QCD αξιονικής σταθεράς σύζευξης  $f_a$  (3.18). Επίσης, από την (3.14), για την περίπτωση του KR αξιονίου  $b(x)$ , συμπεραίνουμε ότι επαγόμενη από τον μη διαταρακτικό μηχανισμό των instanton μάζα του KR αξιονίου είναι [66]:

$$m_b = \sqrt{\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}(b)^{\text{QCD}}}{\partial b^2} \right|_{b=0}} = \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{f_b} = \sqrt{\frac{3}{8}} \left( \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M_s} \right)^2 M_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{3}{8}} \left( \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \left( \frac{M_{\text{Pl}}}{M_s} \right)^2 M_{\text{Pl}} , \quad (3.19)$$

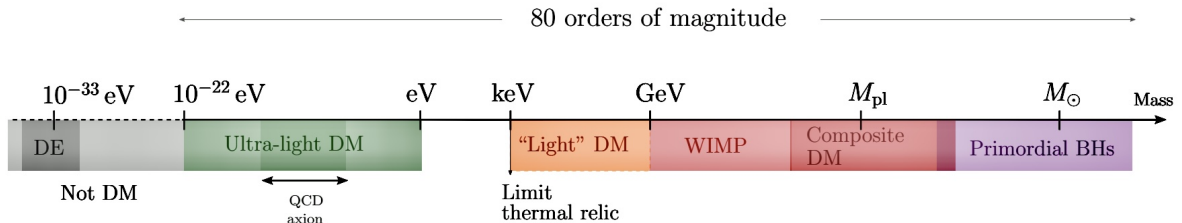
όπου με χρήση των σχέσεων (3.16),(3.17), η μάζα βρίσκεται στο εύρος:

$$1.17 \times 10^{-11} \text{ eV} \lesssim m_b \lesssim 1.17 \times 10^{-5} \text{ eV} , \quad (3.20)$$

δηλαδή, μέσα στο διάστημα που έχει υπολογιστεί με βάση τις πλεγματικές προσομοιώσεις QCD (Lattice QCD [79]):

$$m_a \sim 5.7 \left( \frac{10^{12} \text{ GeV}}{f_a} \right) \times 10^{-6} \text{ eV} . \quad (3.21)$$

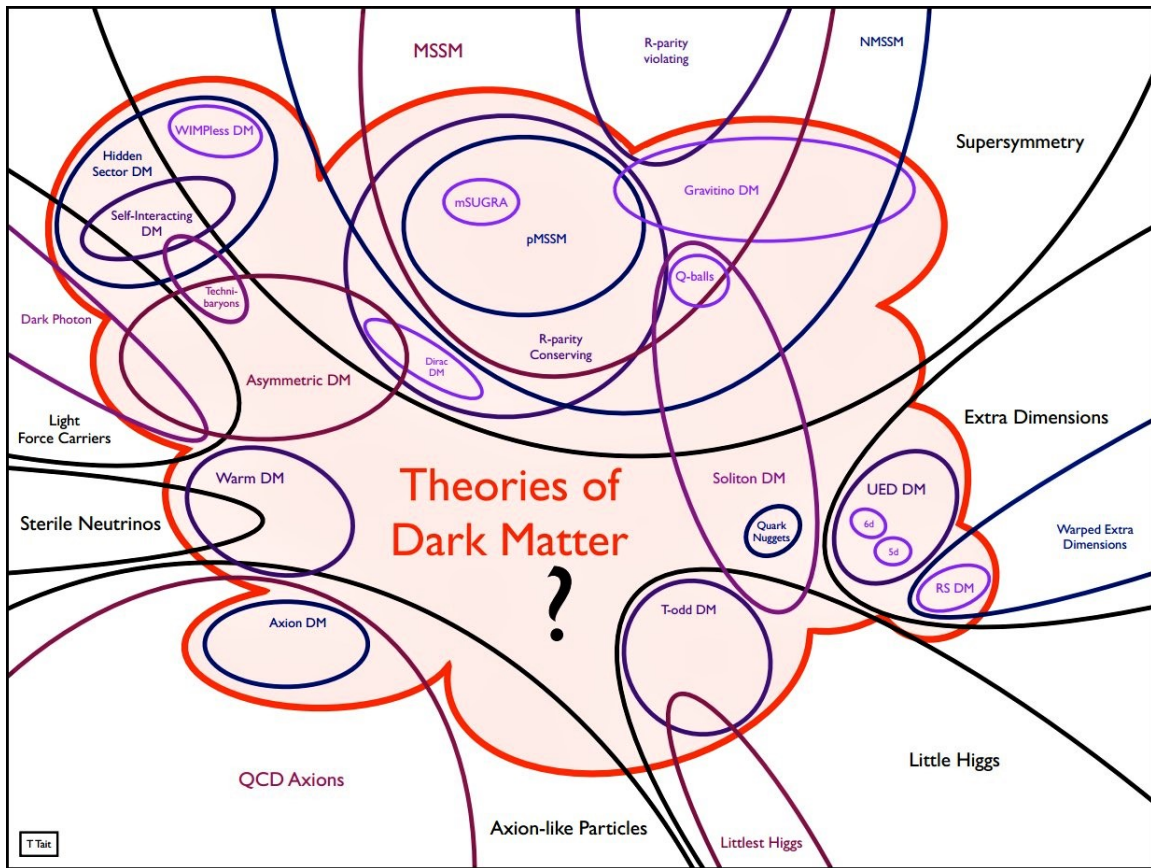
Επομένως, αποκτώντας μάζα το KR αξιόνιο  $b(x)$  που επάγεται από την στρέψη, μέσω της γέννησης ενός περιοδικού δυναμικού από τον μη διαταρακτικό μηχανισμό των instanton, κατά την QCD εποχή, γίνεται υποψήφιο σωματίδιο για σκοτεινή ύλη (ή μπορεί απλώς να αποτελεί μία συνιστώσα αυτής). Παρακάτω απεικονίζεται μία σχηματική αναπαράσταση των σωματιδίων της σκοτεινής ύλης σε διάφορα μοντέλα (μπορεί και να μην αποτελείται από σωματίδια η σκοτεινή ύλη, αλλά στο πλαίσιο της ανάλυσής μας θεωρούμε ότι αποτελείται από αξιόνια που παίρνουν μάζα με κάποιο τρόπο) και φαίνεται το εύρος μάζας του KR αξιονίου  $b(x)$ , κατά την QCD εποχή, όπως αυτό προκύπτει από τη σχέση (3.20).



Σχήμα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση της μάζας των σωματιδίων της σκοτεινής ύλης σε διάφορα μοντέλα, όπου φαίνονται και τα QCD αξιόνια [5]

### 3.4 Σύνοψη

Οπότε, αφού το KR αξιόνιο  $b(x)$  που επάγεται από την στρέψη, έχει λάβει μάζα μέσω των instantons κατά την QCD εποχή, δύναται να αποτελεί υποψήφιο σωματίδιο για σκοτεινή ύλη (ή μπορεί απλώς να είναι μία συνιστώσα αυτής). Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν την συσχέτιση του KR αξιονίου με την στρέψη, πάντα στα πλαίσια της string-inspired θεωρίας (Κεφ.2), λαμβάνουμε μία γεωμετρική προέλευση της σκοτεινής ύλης, στηριζόμενοι στην RVM κοσμολογία [66]. Βέβαια σε γενικότερα μοντέλα, υπάρχουν πιο πολύπλοκοι μηχανισμοί παραγωγής μάζας για το KR αξιόνιο μέσω μη διαταρακτικών δυναμικών που προκύπτουν σε διάφορα μοντέλα της θεωρίας των χορδών [80], που αφορούν μίξη του  $b(x)$  πεδίου με άλλα αξιόνια τα οποία είναι άφθονα στην θεωρία των χορδών [81]. Τέλος, σε αυτά τα μοντέλα επιτρέπονται και πολύ ελαφριά αξιόνια (που παίζουν τον ρόλο της σκοτεινής ύλης), με μάζα μικρότερη από  $10^{-21}$  eV, κάτι που αποτελεί τώρα αντικείμενο έντονης έρευνας [82], με πλούσια φαινομενολογία [81], [78].



Σχήμα 3.2: Πληθώρα πιθανών θεωριών για την σκοτεινή ύλη [6]

## Συμπεράσματα

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία μελετήσαμε τον πιθανό ρόλο των αξιονίων, που επάγονται από τη στρέψη, ως υποψήφια σωματίδια σκοτεινής ύλης. Συγκεκριμένα, θεωρήσαμε το πιο απλό μοντέλο που αφορούσε την χβαντική ηλεκτροδυναμική σε γεωμετρία παρουσία στρέψης, όπου μέσω των χειραλικών ανωμαλιών που εμφάνιζε η θεωρία, για τη διατήρηση του φορτίου στρέψης και σε χβαντικό επίπεδο εισάγαμε έναν πολλαπλασιαστή Lagrange στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα διαδρομής. Αυτός ο πολλαπλασιαστής Lagrange, ήταν ένα ψευδοβαθμωτό πεδίο που δείξαμε ότι είχε μόνο κινητικό όρο και εμφανιζόταν μόνο μέσω των παραγώγων του στην αντίστοιχη δράση (βλ.1.31) και ικανοποιούσε μία συμμετρία μετατόπισης,  $b(x) \rightarrow b(x) + c$ . Οπότε, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η θεωρία μας στην πράξη είναι ισοδύναμη με μία QED θεωρία χωρίς την παρουσία στρέψης αλλά συζευγμένη με ένα άμαζο βαθμό ελευθερίας, που μπορεί να θεωρηθεί ως αξιόνιο, ωστόσο όχι ως υποψήφιο σωματίδιο για σκοτεινή ύλη, διότι απαιτείται κάποιος μηχανισμός για να πάρει μάζα, μέσω ενός δυναμικού. Έπειτα, μελετήσαμε μία ενεργό θεωρία εμπνευσμένη από την θεωρία των χορδών, που παρουσίαζε φορμαλιστικά στρέψη και αποδείξαμε ότι η στρέψη πάλι αντιστοιχεί σε ένα πλήρως δυναμικό (propagating) άμαζο ψευδοβαθμωτό KR αξιονικό πεδίο. Συνεπώς, πάλι το αξιόνιο που επάγεται από την στρέψη μπορούμε να πούμε ότι έχει γεωμετρική προέλευση και είναι άμαζο δίχως κάποιο δυναμικό, σαν ένα Goldstone μποζόνιο. Τέλος, δείξαμε ότι, κατά την QCD εποχή λόγω μη διαταρακτικών φαινομένων (instantons), γεννήθηκε ένα περιοδικό δυναμικό για το KR αξιόνιο και έτσι απέκτησε μάζα καθιστώντας το, υποψήφιο σωματίδιο για σκοτεινή ύλη. Δηλαδή, επειδή το KR αξιόνιο έχει γεωμετρική προέλευση, λόγω της σύνδεσής του με την στρέψη, μπορούμε να πούμε ότι η σκοτεινή ύλη (ή μια συνιστώσα αυτής), ενδεχομένως μπορεί να έχει γεωμετρική προέλευση. Έτσι, με αυτά τα δύο απλά μοντέλα (κυρίως με το εμπνευσμένο από τη θεωρία των χορδών μοντέλο), τονίσαμε την σπουδαιότητα της στρέψης στα μοντέλα που προσπαθούν να περιγράψουν την σκοτεινή ύλη και δείξαμε ότι μπορεί η σκοτεινή ύλη να έχει γεωμετρική προέλευση κάτι που για να επαληθευτεί, απαιτεί περαιτέρω έρευνα σε αυτήν την κατεύθυνση τόσο πειραματική όσο και θεωρητική, διότι υπάρχει μία πληθώρα μοντέλων για την πιθανή εξήγηση της σκοτεινής ύλης [78].

# Παράρτημα Α

## Φορμαλισμός της στρέψης

### A.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το παράρτημα θα πραγματοποιήσουμε μία ανασκόπηση σε βασικά στοιχεία του φορμαλισμού της στρέψης που αναδεικνύονται κομψότερα με χρήση των διαφορικών μορφών και του εξωτερικού (ή wedge) γινομένου [60] και θα αναφερθούμε στις τροποποιημένες εξισώσεις Einstein που λαμβάνουμε από τη δράση (2.16) και στους τανυστές τάσης (ενέργειας-ορμής) και Cotton.

### A.2 Βαρύτητα με στρέψη

Αρχικά, μία διαφορική  $p$ -μορφή σε έναν  $(3+1)$ -διάστατο χωρόχρονο ορίζεται ως :

$$\mathcal{A}^{(p)} \equiv \mathcal{A}_{\mu_1 \dots \mu_p} \mathbf{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{\mu_p} \quad \text{με} \quad \mu_p = 0, \dots, 3 \quad (\text{A.1})$$

να είναι καθολικοί δείκτες, και το  $\wedge$  δηλώνει το εξωτερικό (αντισυμμετρικό) γινόμενο. Επομένως, ο τανυστής  $\mathcal{A}_{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv n! \mathcal{A}_{[\mu_1 \dots \mu_p]}$ , ο οποίος ορίζει τις συνιστώσες της  $p$ -μορφής, είναι πλήρως αντισυμμετρικός στους κάτω δείκτες (το  $[\dots]$  δηλώνει αντισυμμετρικότητα στους αντίστοιχους δείκτες, με κανονικοποίηση  $\frac{1}{n!}$ ) [13]. Θεωρώντας έναν  $(3+1)$ -διάστατο χωρόχρονο παρουσία στρέψης [13], με την έννοια της γεωμετρίας του χωρόχρονου των Einstein-Cartan ( $\Gamma_{[bc]}^a \neq 0$ ), μπορούμε να κατασκευάσουμε σε κάθε σημείο του χωρόχρονου-πολλαπλότητας (manifold), μία ορθοκανονική βάση τεσσάρων διανυσμάτων και τα αντίστοιχα δυαδικά 1-μορφής (one-form duals) στον εφαπτομενικό χώρο [54]. Συμβολίζουμε την τετράδα των διανυσμάτων ως  $\mathbf{E}_a$  και τα δυαδικά 1-μορφής με  $\mathbf{e}^a = e^a_{\mu}(x) \mathbf{d}x^{\mu}$ , τα οποία ονομάζονται αντίστροφα vielbein και vielbein αντίστοιχα. Με χρήση της εξωτερικής παραγώγου 1-μορφής  $\mathbf{d} = \partial_{\mu} dx^{\mu}$  και της γενικευμένης σπιν συνοχής (generalised spin connection) παρουσία στρέψης η οποία είναι ανεξάρτητη των vielbein [13],  $\bar{\omega}^a_b$  μπορούμε να ορίσουμε την στρέψη 2-μορφή ως :

$$\mathbf{T}^a = \mathbf{d}e^a + \bar{\omega}^a_b \wedge e^b \equiv \bar{\mathbf{D}}e^a \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

όπου το σύμβολο ,

$$\bar{\mathbf{D}}_b^a \equiv \delta_b^a \mathbf{d} + \bar{\omega}_b^a \wedge \quad (\text{A.3})$$

δηλώνει τον τελεστή της βαρυτικής συναλλοίωτης παραγωγού παρουσία στρέψης [13]. Θα χρησιμοποιήσουμε συμβατικά ως μετρική του εφαπτομενικού χώρου (τοπικά επίπεδος χωρόχρονος) την  $\eta^{ab} = (-1, 1, 1, 1)$  και αξίζει να αναφέρουμε ότι οι ελληνικοί δείκτες αναφέρονται στη χωροχρονική πολλαπλότητα (φυσικά παρουσία στρέψης εν προκειμένω) με μετρική  $g_{\mu\nu}(x)$  (και πάλι με υπογραφή  $(-, +, +, +)$ ) και οι λατινικοί δείκτες στον εφαπτομενικό χώρο σε κάποιο σημείο  $x$  του χωρόχρονου. Εξ' ορισμού έχουμε ότι [60] :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{ab} E^\mu_a E^\nu_b, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad a, b = 0, \dots, 3, \quad (\text{A.4})$$

με  $e^a_\mu$  τα vielbein,  $E^\mu_a$  τα αντίστροφα vielbein, όπου ισχύει ότι  $E^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu$  και  $E^\mu_a e^\nu_a = \delta^{\mu\nu}$ . Επιπλέον, αφού η στρέψη στην εξίσωση (A.2) είναι γραμμική στην συνοχή μπορούμε να χωρίσουμε την γενικευμένη σπιν συνοχή σε ένα Riemannian κομμάτι  $\omega^a_{\mu b}$  δίχως στρέψη και στην contorsion (“συστροφή”)  $K^a_{\mu b} \equiv K^a_c e^c_\mu$ , με  $\mathbf{K}_{ab} = -\mathbf{K}_{ba}$ , η οποία περιέχει όλη την στρέψη [54], δηλαδή :

$$\bar{\omega}^a_{\mu b} = \omega^a_{\mu b} + K^a_{\mu b}. \quad (\text{A.5})$$

Βέβαια το “torsionless” (χωρίς στρέψη) κομμάτι της συνοχής ορίζεται μέσω της σχέσης :

$$\mathbf{D}e^a \equiv \mathbf{d}e^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0. \quad (\text{A.6})$$

Η συναλλοίωτη σταθερότητα (covariant constancy [54]), της μετρικής του εφαπτομενικού χώρου δηλαδή  $\bar{\mathbf{D}}\eta_{ab} = 0$ , υποδηλώνει ότι η γενικευμένη σπιν συνοχή είναι αντισυμμετρική στους δείκτες της  $\bar{\omega}_{ab} = -\bar{\omega}_{ba}$  και όμοια επειδή  $\mathbf{D}\eta_{ab} = 0$  η σπιν συνοχή (χωρίς παρουσία στρέψης) είναι αντισυμμετρική στους δείκτες της  $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ , όπου οι συνιστώσες στην πολλαπλότητα ή στον εφαπτομενικό χώρο δίνονται από την  $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} \mathbf{d}x^\mu = \omega^a_{bc} e^c$  [54].

Με βάση τα παραπάνω και λόγω γραμμικότητας μπορούμε να γράψουμε :

$$\bar{\mathbf{D}}_b^a = \mathbf{D}_b^a + \mathbf{K}_b^a \wedge \quad (\text{A.7})$$

όπου  $\mathbf{D}_b^a \equiv \delta_b^a \mathbf{d} + \omega^a_b \wedge$  είναι ο “torsionless” τελεστής της βαρυτικής συναλλοίωτης παραγωγού που ικανοποιεί την (A.6). Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω της εξίσωσης (A.6), σε Riemannian χώρους τα σύμβολα Christoffel (δίχως παρουσία στρέψης με  $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu}$ ) μπορούν να εκφραστούν ως  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma})$ , δηλαδή μόνο συναρτήσει της μετρικής και της παραγωγού αυτής [13]. Ακόμη, όπως ορίσαμε παραπάνω την contorsion 1-μορφή με  $\mathbf{K}_b^a = \mathbf{K}^a_{bc} e^c$  και λόγω της αντισυμμετρικότητάς της στους δείκτες της  $\mathbf{K}_{ab} = -\mathbf{K}_{ba}$ , από τις εξισώσεις (A.2) και (A.5) σε συνδυασμό με την συνθήκη (A.6) έχουμε ότι  $\mathbf{T}^a = \mathbf{K}_b^a \wedge e^b$  από όπου μπορούμε να εκφράσουμε την στρέψη συναρτήσει του contorsion και αντίστροφα [54], ως εξής :

$$T^a_{bc} = -2K^a_{[bc]} \equiv K^a_{cb} - K^a_{bc}, \quad K_{abc} = \frac{1}{2} (T_{cab} - T_{abc} - T_{cba}), \quad (\text{A.8})$$

όπου το σύμβολο [...] δηλώνει αντισυμμετρικότητα των αντίστοιχων δεικτών όπως αναφέραμε και

παραπάνω. Η στρέψη 2-μορφή (A.2) εκπεφρασμένη σε ένα σύστημα συντεταγμένων συνδέεται με τον ταυιστή στρέψης  $T^\lambda_{\mu\nu}$  μέσω της  $T^\lambda_{\mu\nu} = e^\lambda_a T^\lambda_{\mu\nu}$ , όπου:

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu} \neq 0, \quad (\text{A.9})$$

και  $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$  είναι η γενικευμένη σπιν συνοχή, **μη** συμμετρική στους κάτω δείκτες παρουσία στρέψης, που εμφανίζεται στον γενικευμένο ταυιστή καμπυλότητας Riemann [13] μέσω της σχέσης:

$$\bar{R}^\lambda_{\rho\mu\nu} = E^\lambda_a e^b_\rho \bar{R}^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\sigma\mu} \bar{\Gamma}^\sigma_{\rho\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad \lambda, \mu, \nu, \rho = 0, \dots, 3, \quad (\text{A.10})$$

με την γενικευμένη καμπυλότητα 2-μορφή να δίνεται από την :

$$\bar{\mathbf{R}}^a_b = d\bar{\omega}^a_b + \bar{\omega}^a_c \wedge \bar{\omega}^c_b = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}^a_{bcd} \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}^a_{b\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \bar{\omega}^a_b \equiv \bar{\omega}^a_{\mu b} dx^\mu. \quad (\text{A.11})$$

Επίσης, η γενικευμένη καμπυλότητα 2-μορφή μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της Riemannian καμπυλότητας  $\mathbf{R}^a_b$  και της contorsion  $\mathbf{K}^a_b$  2-μορφής ως:

$$\bar{\mathbf{R}}^a_b = \mathbf{R}^a_b + \mathbf{D}\mathbf{K}^a_b + \mathbf{K}^a_c \wedge \mathbf{K}^c_b, \quad (\text{A.12})$$

με  $\mathbf{R}^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ , να είναι η Riemannian καμπυλότητα 2-μορφή δίχως στρέψη, η οποία εκ κατασκευής ικανοποιεί την ταυτότητα Bianchi  $\mathbf{D}\mathbf{R}^a_b = 0$  [54]. Επειδή οι συνιστώσες των ταυιστών της καμπυλότητας Riemannian και της γενικευμένης καμπυλότητας (εκπεφρασμένες σε ένα σύστημα συντεταγμένων) είναι αντισυμμετρικές στο πρώτο και το τελευταίο ζευγάρι δεικτών τους, μπορούμε να λάβουμε μόνο δύο συστολές (contractions) στους δείκτες των δύο καμπυλοτήτων [54]. Έτσι λαμβάνουμε τους δύο ταυιστές Ricci  $\bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = \bar{R}^\lambda_{\mu\lambda\nu}$  και  $\mathcal{R}_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$  αλλά και δύο βαθμωτά (ένα που αφορά ύπαρξη στρέψης και ένα δίχως στρέψη) της καμπυλότητας, τα  $\bar{\mathcal{R}} = g^{\mu\nu} \bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$  και  $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$  [54]. Οπότε μπορούμε να ορίσουμε την ενεργό δράση (effective action) της βαρύτητας σε αναλογία με την δράση Einstein-Hilbert, παρουσία στρέψης ως:

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int \bar{\mathcal{R}} \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{A.13})$$

όπου  $\kappa^2 = 8\pi G_N$  είναι μία σταθερά και  $g \equiv \det g = |g|$  είναι η ορίζουσα της μετρικής στον Riemannian χώρο. Με χρήση διαφορικών μορφών [54] η ενεργός δράση γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_G &= \frac{1}{2\kappa^2} \int \bar{\mathbf{R}}_{ab} \wedge \star(\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b) \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int (\mathbf{R}_{ab} + \mathbf{D}\mathbf{K}_{ac} + \mathbf{K}_{ac} \wedge \mathbf{K}^c_b) \wedge \star(\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

όπου το  $\star$  εκφράζει τον δυαδικό τελεστή Hodge [60], ο οποίος ορίζεται μέσω της δράσης του πάνω σε μία p-μορφή σε έναν (3+1)-διάστατο χωρόχρονο ως:

$$\star(\mathbf{e}^{a_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{a_p}) = \frac{1}{(4-p)!} \epsilon^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_{4-p}} \mathbf{e}^{b_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{b_{4-p}}, \quad (\text{A.15})$$

με  $\epsilon^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_{4-p}}$  να είναι το Levi-Civita πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο (ταυιστής) στον (επίπεδο-Minkowski) εφαπτομενικό χώρο με την σύμβαση  $\epsilon_{abcd} = \epsilon_{0123} = +1$  και έχουμε την χρήσιμη ταυ-



τότητα  $(\underbrace{\mathbf{e}^a \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^b}_p) \wedge \star (\underbrace{\mathbf{e}_{a'} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{b'}}_p) = \delta_{a' \dots b'}^{a \dots b} \epsilon$ , όπου το στοιχείο όγκου στον (3+1)-διάστατο χωρόχρονο είναι το  $\epsilon = \mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 = \sqrt{-g} d^4x$  και  $\epsilon_{abcd} = \delta_{abcd}^{0123}$  [54]. Ο δεύτερος όρος στη δράση (A.14) είναι απλώς μία ολική παράγωγος καθώς και τα vielbein και το σύμβολο Levi-Civita είναι συναλλοίωτα σταθερά κάτω από τη δράση της  $\mathbf{D}$ , όπου  $\mathbf{D}\epsilon_{abcd} = 0$  και δηλαδή θα έχουμε ότι:

$$\int (\mathbf{D}\mathbf{K}_{ab} \wedge \star (\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b)) = \int_M \mathbf{d} (\mathbf{K}_{ab} \wedge \star (\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b)) = \int_{\partial M} (\mathbf{K}_{ab} \wedge \star (\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b)) \quad (\text{A.16})$$

έναν επιφανειακό όρο λόγω του θεωρήματος Stokes και συνεπώς αδιάφορο για τις εξισώσεις κίνησης (τα ολοκληρώματα αναφέρονται στην χωροχρονική πολλαπλότητα για αυτό δεν γράψαμε ρητά το  $d^4x$ , είναι ανεξάρτητα μετρικής) [54]. Άλλωστε αυτή η συνεισφορά ενός συνοριακού όρου (boundary term) εξαφανίζεται με την υπόθεση ότι τα πεδία και οι παράγωγοί τους μηδενίζονται στο σύνορο της χωροχρονικής πολλαπλότητας [13] και άρα δεν μας απασχολούν. Οπότε, από την (A.14) η βαρυτική δράση σε γεωμετρία παρουσία στρέψης (contorted geometry) είναι η εξής:

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int (\mathbf{R}_{ab} + \mathbf{K}_{ac} \wedge \mathbf{K}_b^c) \wedge \star (\mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b) \quad (\text{A.17})$$

και παρατηρούμε ότι η βαρυτική δράση είναι δευτεροβάθμια ως προς την contorsion και δεν περιέχει καθόλου παραγώγους αυτού του τανυστή, πράγμα που ισχύει εν γένει σε γεωμετρίες με στρέψη [13]. Αυτό το γενικό αποτέλεσμα, μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε ακριβώς την contorsion στο ανάλογο ολοκλήρωμα διαδρομής, κάτι το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο καθώς αίρονται περαιτέρω υπολογιστικές πολυπλοκότητες που ειδάλως θα υπήρχαν [13]. Επίσης ο πρώτος όρος στην (A.17) είναι η συνήθης Einstein-Hilbert δράση για έναν “torsionless” χώρο, ενώ ο τελευταίος περιέχει όλη την στρέψη [54]. Οπότε η βαρυτική δράση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int (\mathcal{R} + \Delta) \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{A.18})$$

όπου το κομμάτι με την στρέψη  $\Delta$  είναι:

$$\Delta = K^\lambda{}_{\mu\nu} K^{\nu\mu}{}_\lambda - K^{\mu\nu}{}_\nu K_{\mu\lambda}{}^\lambda = T^\nu{}_{\nu\mu} T^{\lambda\mu}{}_\lambda - \frac{1}{2} T^\mu{}_{\nu\lambda} T^\nu{}_\mu{}^\lambda + \frac{1}{4} T_{\mu\nu\lambda} T^{\mu\nu\lambda}, \quad (\text{A.19})$$

το οποίο φαίνεται κάπως περίπλοκο, ωστόσο δυναμικές συμμετρίες της (con)torsion το απλοποιούν σημαντικά [54].

### A.3 Τανυστής τάσης και Cotton τανυστής

Κατά την γενική θεωρία της σχετικότητας, η δράση της βαρύτητας προκαλείται από την καμπυλότητα του χωροχρόνου, ο οποίος αποτελεί ένα Riemannian manifold. Στην ουσία, ο χωρόχρονος είναι ένα τετραδιάστατο τοπολογικό manifold με έναν λείο άτλαντα, που είναι εφοδιασμένο με μία συνοχή δίχως στρέψη, συμβατή με μία Lorentzian μετρική και με χρονικό προσανατολισμό τέτοιο ώστε, να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του Einstein [7]. Η δυναμική αυτού του manifold περιγράφεται (σε σύστημα μονάδων, με  $c = 1$ ) από τις πεδιακές εξισώσεις του Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu} \quad (\text{A.20})$$

όπου  $T_\nu^\mu$  είναι ο ταυυστής τάσης (ενέργειας-ορμής),  $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\sigma\mu\lambda\nu}$  είναι ο ταυυστής Ricci και  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  είναι το βαθμωτό του Ricci, που βέβαια ορίζονται ως συστολές του ταυυστή καμπυλότητας Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  (όπως αναφέραμε και παραπάνω βλ.(A.13)). Ορίζουμε τον ταυυστή Riemann ως εξής [83]:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (\text{A.21})$$

ο οποίος ικανοποιεί την ταυτότητα Bianchi:

$$D_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.22})$$

όπου  $D_\mu$  είναι η συναλλοίωτη παράγωγος που ορίζεται μέσω της δράσης της σε ανταλλοίωτα και συναλλοίωτα διανύσματα [83], ως εξής:

$$D_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda \quad D_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (\text{A.23})$$

και  $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$  είναι τα σύμβολα Christoffel τα οποία δίνονται από τη σχέση:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\lambda g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\lambda\nu}) . \quad (\text{A.24})$$

Θεωρώντας την ενεργό δράση (2.16), παρατηρούμε ότι η παρουσία του ανώμαλου βαρυτικού όρου Chern-Simons ( $g\mathcal{CS}$ ) τροποποιεί τις εξισώσεις Einstein [66],

$$\mathcal{S}_B^{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b - \frac{\alpha'}{96\kappa\sqrt{2}} b(x) R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right]. \quad (\text{A.25})$$

Δηλαδή παίρνοντας την μεταβολή της δράσης (A.25), για τους δύο πρώτους όρους θα έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\mathcal{S}_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_M \right] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b \right] \quad (\text{A.26})$$

και από την αρχή της στάσιμης δράσης (μεταβάλλοντας την μετρική  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ ) θα είναι:

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{S}_1 &= \int \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} \frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} \left( \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Η σχέση (A.27) ισχύει για κάθε μεταβολή  $\delta g_{\mu\nu}$  και άρα:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2\kappa^2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{A.28})$$

και το δεξί μέλος της (A.28) είναι ανάλογο με τον ταυυστή τάσης (ενέργειας-ορμής) εξ' ορισμού:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M. \quad (\text{A.29})$$

Βέβαια με χρήση της (A.26) ο ταυνοστής τάσης (A.29) θα γραφτεί ως εξής:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial^\mu b \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu b \partial_\nu b \right) = \frac{1}{2} \partial_\mu b \partial_\nu b$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M = -\partial_\mu b \partial_\nu b + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^a b \partial_a b. \quad (\text{A.30})$$

Για να υπολογίσουμε το αριστερό μέλος της (A.28), πρέπει να υπολογίσουμε την μεταβολή του βαθμωτού του Ricci και συνεπώς την μεταβολή του ταυνοστή της καμπυλότητας Riemann [83]. Οπότε με βάση τον ορισμό (A.21) η μεταβολή του ταυνοστή Riemann είναι:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (\text{A.31})$$

και επειδή η μεταβολή  $\delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}$  είναι μία διαφορά δύο συνοχών, δηλαδή αποτελεί έναν ταυνοστή, μπορούμε να υπολογίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο αυτού, ως εξής:

$$D_\mu (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) = \partial_\mu (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}. \quad (\text{A.32})$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι η μεταβολή του ταυνοστή Riemann (A.31) είναι στην πραγματικότητα μία διαφορά δύο όρων του τύπου της εξίσωσης (A.32), δηλαδή:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = D_\mu (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - D_\nu (\delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) \quad (\text{A.33})$$

και τελικά μπορούμε να λάβουμε μία έκφραση για την μεταβολή του ταυνοστή Ricci και του βαθμωτού αυτού, καθώς:

$$\delta R_{\sigma\nu} \equiv \delta R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = D_\rho (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - D_\nu (\delta \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho}) \quad \text{και} \quad R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}$$

$$\delta R = R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + D_\rho \left( g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - g^{\sigma\rho} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} \right). \quad (\text{A.34})$$

Ακόμη, τελευταίος όρος στην παραπάνω έκφραση,

$$D_\rho \left( g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - g^{\sigma\rho} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} \right) \quad \text{όπου} \quad D_\rho A^\rho \equiv A_{;\lambda}^\lambda \quad \text{με} \quad A^\rho = g^{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - g^{\sigma\rho} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu}$$

πολλαπλασιασμένος με  $\sqrt{-g}$ , γίνεται μια ολική παράγωγος, αφού για κάθε διάνυσμα  $A^\lambda$  και για κάθε ταυνοστική πυκνότητα  $\sqrt{-g} A^\lambda$  ισχύει ότι:

$$\sqrt{-g} A_{;\lambda}^\lambda = \left( \sqrt{-g} A^\lambda \right)_{;\lambda} = \left( \sqrt{-g} A^\lambda \right)_{,\lambda} \quad \text{ή} \quad \sqrt{-g} D_\mu A^\mu = D_\mu \left( \sqrt{-g} A^\mu \right) = \partial_\mu \left( \sqrt{-g} A^\mu \right)$$

και επομένως από το θεώρημα Stokes αυτός ο όρος θα είναι ένας επιφανειακός όρος, που γενικά δεν είναι μηδενικός διότι εξαρτάται όχι μόνο από το  $\delta g^{\mu\nu}$  αλλά και από τις μερικές του παραγώγους  $\partial_\lambda \delta g^{\mu\nu} \equiv \delta \partial_\lambda g^{\mu\nu}$  (βλ. όρος Gibbons-Hawking-York [83]). Ωστόσο, όταν η μεταβολή της μετρικής  $\delta g^{\mu\nu}$ , μηδενίζεται σε μία γειτονιά του συνόρου ή όταν δεν έχουμε καθόλου σύνορα (στο χωροχρόνο ή απλώς τα αγνοούμε λέγοντας ότι τα πεδία μηδενίζονται στο άπειρο), αυτός ο όρος δεν συνεισφέρει

στη μεταβολή της δράσης και συνεπώς από την (A.34) έχουμε ότι :

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.35})$$

Επίσης για κάθε τετραγωνικό πίνακα ισχύει η σχέση:

$$\ln(\det(A)) = \text{tr}(\ln(A)) \implies \frac{1}{\det(A)} \delta(\det(A)) = \text{tr}(A^{-1}\delta A), \quad (\text{A.36})$$

οπότε για την η ορίζουσα της μετρικής  $g \equiv \det g = |g|$  θα είναι :

$$\frac{1}{g} \delta g = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \implies \delta g = -g (g_{\rho\sigma} \delta g^{\rho\sigma}) \implies \delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.37})$$

και άρα θα ισχύει ότι :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.38})$$

Οπότε η εξίσωση (A.28), με βάση τα παραπάνω θα γραφτεί ως :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa^2 \mathcal{T}_{\mu\nu} \implies \boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa^2 \mathcal{T}^{\mu\nu}} \quad (\text{A.39})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω ταυτότητα και τον ορισμό για τον ορισμό του ταυυστή τάσης (A.29) :

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad \rightarrow \quad \delta(g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda}) = 0 \quad \rightarrow \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \delta g_{\lambda\rho}$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad \text{και} \quad \mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.40})$$

Τώρα απομένει να λάβουμε την μεταβολή για τον  $g \mathcal{CS}$  όρο από τη σχέση (A.25), ώστε να βρούμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Einstein. Η μεταβολή της δράσης για τον ανώμαλο  $\mathcal{CS}$  όρο είναι (την σταθερά που υπάρχει μπροστά στον  $\mathcal{CS}$  όρο δεν θα την κρατήσουμε στους υπολογισμούς απλώς θα την επαναφέρουμε στο τελικό αποτέλεσμα και ακολουθούμε την ανάλυση από την εργασία [84]) :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{\mathcal{CS}} &= \delta \left[ \int d^4 x \sqrt{-g} b(x) R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right] = \delta \left[ \frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} b(x) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right] \\ &= \delta \left[ -\frac{1}{2} \int d^4 x b(x) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right] = -\frac{1}{2} \int d^4 x b \delta(R_{\mu\nu\rho\sigma}) R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4 x b R_{\mu\nu\rho\sigma} \delta(R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \int d^4 x b D_{\rho} (\delta\Gamma_{\mu\sigma\nu}) R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4 x b D_{\sigma} (\delta\Gamma_{\mu\rho\nu}) R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} - \frac{1}{2} \int d^4 x b R_{\mu\nu\rho\sigma} D_{\alpha} (\delta\Gamma_{\beta}^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4 x b R_{\mu\nu\rho\sigma} D_{\beta} (\delta\Gamma_{\alpha}^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

όπου κάναμε χρήση του ορισμού  $\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}$  και την σχέση (A.33) και του βαρυτικού συναλλοιώτου συμβόλου Levi-Civita, το οποίο ορίζεται συναρτήσει του Minkowski χωροχρονικού

πλήρως αντισυμμετρικού συμβόλου Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  μέσω των σχέσεων :

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\text{sgn}(g)}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad \mu, \nu, \rho, \sigma = 0, \dots, 3. \quad (\text{A.42})$$

Ακόμη, εάν στον πρώτο και τρίτο όρο της (A.41) εναλλάξουμε τους δείκτες  $\sigma \leftrightarrow \rho$ ,  $\alpha \leftrightarrow \beta$ , με χρήση της πλήρους αντισυμμετρικότητας του Levi-Civita,  $\epsilon^{\beta\alpha\sigma\rho} = -\epsilon^{\alpha\beta\sigma\rho} = \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}$  και της αντισυμμετρικότητας του ταυυστή Riemann  $R_{abcd} = -R_{abdc}$  [83], θα είναι:

$$\delta S_{CS} = \int d^4x b D_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}) R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} + \int d^4x b R_{\mu\nu\rho\sigma} D_\beta (\delta \Gamma_\alpha^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}. \quad (\text{A.43})$$

Εάν, πραγματοποιήσουμε παραγοντική ολοκλήρωση στην παραπάνω σχέση θα έχουμε διαδοχικά ότι :

$$\begin{aligned} \delta S_{CS} &= \int d^4x D_\sigma \left( b \delta (\Gamma_{\mu\nu}) R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right) - \int d^4x D_\sigma (b) \delta (\Gamma_{\mu\nu}) R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \\ &\quad - \int d^4x b \delta (\Gamma_{\mu\nu}) D_\sigma (R_{\alpha\beta}^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} + \int d^4x D_\beta \left( b R_{\mu\nu\rho\sigma} \delta (\Gamma_\alpha^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right) \\ &\quad - \int d^4x D_\beta (b) R_{\mu\nu\rho\sigma} \delta (\Gamma_\alpha^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} - \int d^4x b D_\beta (R_{\mu\nu\rho\sigma}) \delta (\Gamma_\alpha^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

όπου οι επιφανειακοί όροι μηδενίζονται (θεωρούμε ότι τα πεδία στο άπειρο μηδενίζονται) και με εναλλαγή των δεικτών  $\sigma \leftrightarrow \beta$  και  $\rho \leftrightarrow \alpha$  στον πρώτο και δεύτερο όρο όμοια με παραπάνω, παίρνουμε ότι :

$$\delta S_{CS} = -2 \int d^4x \left[ b D_\beta (R_{\rho\sigma}^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} + D_\beta (b) R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right] \delta (\Gamma_{\mu\alpha\nu}) \quad (\text{A.45})$$

με την μεταβολή των Christoffel συμβόλων να δίνεται από τη σχέση :

$$\delta (\Gamma_{\mu\alpha\nu}) = \frac{1}{2} g_\mu^\lambda \left[ D_\alpha (\delta g_{\lambda\nu}) + D_\nu (\delta g_{\lambda\alpha}) - D_\lambda (\delta g_{\alpha\nu}) \right]. \quad (\text{A.46})$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις (A.45),(A.46), παρατηρούμε ότι με τον πολλαπλασιασμό του  $\delta (\Gamma_{\mu\alpha\nu})$  στην (A.45) που περιλαμβάνει την μετρική  $g_\mu^\lambda$ , λαμβάνουμε  $R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} g_\mu^\lambda = R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu}$  και επειδή ο ταυυστής Riemann είναι αντισυμμετρικός στους δείκτες  $\lambda, \nu$  και η μετρική συμμετρική θα είναι :

$$\left[ b D_\beta (R_{\rho\sigma}^{\mu\nu}) \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} + D_\beta (b) R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right] g_\mu^\lambda D_\alpha (\delta g_{\lambda\nu}) = 0. \quad (\text{A.47})$$

Ακόμη, ο πρώτος όρος της (A.45) είναι ταυτοτικά μηδέν, διότι αποτελεί την ταυτότητα Bianchi που ικανοποιεί ο ταυυστής Riemann, δηλαδή :

$$D_{[\beta} R_{\rho\sigma]}^{\lambda\nu} = \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} D_\beta R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Οπότε, τελικά η (A.45) με χρήση της (A.46) γίνεται ως εξής :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_{CS} &= - \int d^4x \left[ D_\beta(b) R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} D_\nu (\delta g_{\lambda\alpha}) - D_\beta(b) R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} D_\lambda (\delta g_{\alpha\nu}) \right] \\ &\Rightarrow \delta\mathcal{S}_{CS} = -2 \int d^4x \left[ D_\beta(b) R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} D_\nu (\delta g_{\lambda\alpha}) \right]\end{aligned}\quad (\text{A.49})$$

όπου θέσαμε στον τελευταίο όρο  $\lambda \leftrightarrow \nu$  και χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρικότητα του τανυστή Riemann. Επιπλέον, με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε ότι (αγνοώντας τους επιφανειακούς όρους, όπως αναφέραμε και παραπάνω):

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = 2 \int d^4x \left[ D_\beta(b) D_\nu (R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}) + D_\nu D_\beta(b) R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right] (\delta g_{\lambda\alpha}) \quad (\text{A.50})$$

και ο δεύτερος όρος μπορεί να αντικατασταθεί από την σχέση:

$$D_\nu D_\beta(b) R_{\rho\sigma}^{\lambda\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -2 \sqrt{-g} D_\nu D_\beta(b) \tilde{R}^{\lambda\nu\alpha\beta} \quad (\text{A.51})$$

αλλά και ο πρώτος όρος αλλάζει με χρήση της ταυτότητας Bianchi [83]:

$$\begin{aligned}0 &= D_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = D_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + D_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + D_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} \\ &\Rightarrow 0 = g^{\sigma\nu} (D_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + D_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + D_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) \\ &= D_\lambda R_{\rho\mu\nu}^\nu + D_\rho R_{\lambda\mu\nu}^\nu + D^\nu R_{\lambda\rho\mu\nu} \\ &= D_\lambda R_{\rho\nu\mu}^\nu - D_\rho R_{\lambda\nu\mu}^\nu + D^\nu R_{\lambda\rho\mu\nu} \\ &\Rightarrow D^\nu R_{\nu\mu\lambda\rho} = D_\rho R_{\lambda\mu} - D_\lambda R_{\rho\mu}.\end{aligned}\quad (\text{A.52})$$

Δηλαδή θα έχουμε ότι:

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = -2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[ D_\beta(b) \left[ D_\rho R_\sigma^\lambda - D_\sigma R_\rho^\lambda \right] \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} + 2D_\nu D_\beta(b) \tilde{R}^{\lambda\nu\alpha\beta} \right] (\delta g_{\lambda\alpha}) \quad (\text{A.53})$$

όπου με χρήση της πλήρους αντισυμμετρικότητας του Levi-Civita,  $\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -\epsilon^{\beta\alpha\rho\sigma}$ , θα είναι:

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = -4 \int d^4x \sqrt{-g} \left[ D_\beta(b) D_\rho R_\sigma^\lambda \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} + D_\nu D_\beta(b) \tilde{R}^{\lambda\nu\alpha\beta} \right] (\delta g_{\lambda\alpha}). \quad (\text{A.54})$$

Τελικά λόγω της συμμετρίας της μετρικής στους δείκτες της  $\lambda, \alpha$ , μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση ως:

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = -4 \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left[ D_\beta(b) \left[ \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} D_\rho R_\sigma^\lambda + \epsilon^{\lambda\beta\rho\sigma} D_\rho R_\sigma^\alpha \right] + D_\nu D_\beta(b) \left[ \tilde{R}^{\lambda\nu\alpha\beta} + \tilde{R}^{\alpha\nu\lambda\beta} \right] \right] (\delta g_{\lambda\alpha})$$

και συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\delta\mathcal{S}_{CS} = 4 \int d^4x \sqrt{-g} C^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -4 \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.55})$$

όπου,  $C^{\mu\nu}$  είναι ο τανυστής Cotton [24], [25], ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[ D_\sigma(b) \left[ \epsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} D_\alpha R_\beta^\nu + \epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} D_\alpha R_\beta^\mu \right] + D_\sigma D_\tau(b) \left[ \tilde{R}^{\tau\mu\sigma\nu} + \tilde{R}^{\tau\nu\sigma\mu} \right] \right] \quad (\text{A.56})$$

ή εναλλακτικά σε μία ισοδύναμη συμπαγή μορφή με  $v_\sigma \equiv D_\sigma b = b_{;\sigma}$ ,  $v_{\sigma\tau} \equiv v_{\tau;\sigma} = b_{;\tau;\sigma}$ , είναι :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left[ v_\sigma \left( \varepsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} R^\nu_{\beta;\alpha} + \varepsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} R^\mu_{\beta;\alpha} \right) + v_{\sigma\tau} \left( \tilde{R}^{\tau\mu\sigma\nu} + \tilde{R}^{\tau\nu\sigma\mu} \right) \right] \\ \mathcal{C}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( v_\sigma \tilde{R}^{\lambda\mu\sigma\nu} \right)_{;\lambda} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Οπότε οι τροποποιημένες εξισώσεις Einstein που ικανοποιεί η δράση (A.25), παίρνοντας την μεταβολή αυτής, με χρήση της (A.39) είναι :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \frac{\alpha'}{12 \kappa \sqrt{2}} \mathcal{C}^{\mu\nu} = \kappa^2 \mathcal{T}_b^{\mu\nu} \quad (\text{A.58})$$

με τον τανυστή τάσης (ενέργειας-ορμής) να δίνεται από τη σχέση :

$$\mathcal{T}_b^{\mu\nu} = \partial^\mu b \partial^\nu b - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial^\alpha b \partial_\alpha b), \quad (\text{A.59})$$

και  $\mathcal{C}^{\mu\nu}$  φυσικά είναι ο τανυστής Cotton, που δίνεται από τη σχέση (A.57). Από τον ορισμό (A.56) και τις ιδιότητες του τανυστή Riemann [83], προκύπτει ότι ο τανυστής Cotton είναι άιχνος [24] :

$$g_{\mu\nu} \mathcal{C}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.60})$$

Συνήθως, η διαφορομορφική αναλλοιωτήτα (συμμετρία επαναπαραμετροποίησης) στην γενική σχετικότητα, υποδηλώνει την διατήρηση του τανυστή τάσης  $\mathcal{T}_b^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  [66]. Ακόμη, εξαιτίας της ταυτότητα Bianchi του τανυστή καμπυλότητας Riemann, ο τανυστής του Einstein  $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$ , θα διατηρείται και αυτός συναλλοίωτα αλλά κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τον τανυστή Cotton [24], [66]. Ο τανυστής Cotton, μπορεί να γραφτεί ισοσύναμα με την (A.56), ως εξής :

$$\mathcal{C}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ D_\rho(b) D_\nu \left( R^{\lambda\nu}{}_{\alpha\beta} \right) \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} + D_\nu D_\rho(b) R^{\lambda\nu}{}_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \right] \quad (\text{A.61})$$

και επειδή η συναλλοίωτη παράγωγος του  $\sqrt{-g}$  είναι μηδέν και ισχύει η σχέση  $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{\text{sgn}(g)}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , η παραπάνω έκφραση γίνεται :

$$\mathcal{C}^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} \left[ D_\rho(b) D_\nu \left( \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} \right) + D_\nu D_\rho(b) \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} \right]. \quad (\text{A.62})$$

Πραγματοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση για τον πρώτο όρο της παραπάνω σχέσης θα λάβουμε :

$$D_\rho(b) D_\nu \left( \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} \right) = \cancel{D_\nu \left( D_\rho(b) \left( \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} \right) \right)} \overset{0}{- D_\nu D_\rho(b) \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma}} \quad (\text{A.63})$$

και με χρήση της αντισυμμετρικής ιδιότητας του  $\tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma}$ , τελικά θα είναι :

$$\mathcal{C}^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{2} D_\nu \left[ D_\rho(b) \left( \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} + \tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\nu} \right) \right]. \quad (\text{A.64})$$

Παίρνοντας την συναλλοίωτη παράγωγο του Cotton τανυστή έχουμε ότι (ακολουθούμε την ανάλυση

που υπάρχει στο άρθρο [85]):

$$\begin{aligned} D_\lambda C^{\lambda\sigma} &= -\frac{1}{2} D_\lambda D_\nu \left[ D_\rho(b) \left( \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} + \tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\nu} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ D_\lambda, D_\nu \right] D_\rho(b) \left( \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2} \tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\nu} \right) - \frac{1}{2} D_\lambda D_\nu \left[ D_\rho(b) \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

με τον μεταθέτη  $[D_\lambda, D_\nu] = D_\lambda D_\nu - D_\nu D_\lambda$  και φυσικά ο δεύτερος όρος της παραπάνω έκφρασης θα μηδενιστεί διότι η ποσότητα  $D_\lambda D_\nu$  είναι συμμετρική στους δείκτες  $\lambda, \nu$ , ενώ η  $\tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma}$  αντισυμμετρική. Άρα η παραπάνω έκφραση θα γίνει:

$$D_\lambda C^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} D_\rho(b) [D_\lambda, D_\nu] \left( \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2} \tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\nu} \right) \quad (\text{A.66})$$

και λόγω της ταυτότητας του Ricci για κάθε τανυστή  $T$  θα ισχύει ότι:

$$[D_\lambda, D_\nu] T^{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\lambda\nu}{}^\alpha{}_\kappa T^{\kappa\beta\gamma\delta} + R_{\lambda\nu}{}^\beta{}_\kappa T^{\alpha\kappa\gamma\delta} + R_{\lambda\nu}{}^\gamma{}_\kappa T^{\alpha\beta\kappa\delta} + R_{\lambda\nu}{}^\delta{}_\kappa T^{\alpha\beta\gamma\kappa} \quad (\text{A.67})$$

και με εφαρμογή αυτής της ταυτότητας για τους τανυστές  $\tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma}$ ,  $\tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\nu}$  έχουμε ότι:

$$[D_\lambda, D_\nu] \tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\nu} = R_{\kappa\lambda\nu}^\lambda \tilde{R}^{\kappa\sigma\rho\nu} + R_{\kappa\lambda\nu}^\sigma \tilde{R}^{\lambda\kappa\rho\nu} + R_{\kappa\lambda\nu}^\rho \tilde{R}^{\lambda\sigma\kappa\nu} + R_{\kappa\lambda\nu}^\nu \tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\kappa} \quad (\text{A.68})$$

$$[D_\lambda, D_\nu] \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\sigma} = R_{\kappa\lambda\nu}^\lambda \tilde{R}^{\kappa\nu\rho\sigma} + R_{\kappa\lambda\nu}^\nu \tilde{R}^{\lambda\kappa\rho\sigma} + R_{\kappa\lambda\nu}^\rho \tilde{R}^{\lambda\nu\kappa\sigma} + R_{\kappa\lambda\nu}^\sigma \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\kappa} \quad (\text{A.69})$$

συνεπώς με αντικατάσταση αυτών των δύο εκφράσεων η (A.66) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} D_\lambda C^{\lambda\sigma} &= \frac{1}{2} D_\rho(b) \left[ \left( \tilde{R}^{\kappa\sigma\rho\nu} + \frac{1}{2} \tilde{R}^{\kappa\nu\rho\sigma} \right) R_{\kappa\lambda\nu}^\lambda + \left( \tilde{R}^{\lambda\sigma\rho\kappa} + \frac{1}{2} \tilde{R}^{\lambda\kappa\rho\sigma} \right) R_{\kappa\lambda\nu}^\nu \right. \\ &\quad \left. + \left( \tilde{R}^{\lambda\sigma\kappa\nu} + \frac{1}{2} \tilde{R}^{\lambda\nu\kappa\sigma} \right) R_{\kappa\lambda\nu}^\rho + \left( \tilde{R}^{\lambda\kappa\rho\nu} + \frac{1}{2} \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\kappa} \right) R_{\kappa\lambda\nu}^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Οι δύο πρώτοι όροι της παραπάνω σχέσης μηδενίζονται, διότι ο τανυστής Ricci είναι συμμετρικός στους δείκτες του και ο τανυστής Riemann αντισυμμετρικός. Επίσης, οι δύο τελευταίοι όροι προστίθενται μεταξύ τους με ανάλογο χειρισμό των δεικτών  $\rho, \sigma$  και με χρήση της αντισυμμετρικότητας του  $R^{\lambda\kappa\rho}$ , τελικά θα είναι [24]:

$$D_\lambda C^{\lambda\sigma} = \frac{1}{4} D_\rho(b) \left[ \tilde{R}^{\lambda\kappa\rho\nu} (R_{\kappa\nu\lambda}^\sigma - R_{\lambda\nu\kappa}^\sigma) + \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\kappa} R_{\kappa\lambda\nu}^\sigma \right]. \quad (\text{A.71})$$

Τέλος με χρήση της ταυτότητα Bianchi:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\beta\gamma\alpha\delta} + R_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0 \Rightarrow R_{\sigma\lambda\nu\kappa} = -R_{\sigma\nu\kappa\lambda} - R_{\sigma\kappa\lambda\nu} \quad (\text{A.72})$$

η έκφραση (A.71) γίνεται ως:

$$\begin{aligned} D_\lambda C^{\lambda\sigma} &= \frac{1}{4} D_\rho(b) \left[ \tilde{R}^{\lambda\kappa\rho\nu} R_{\nu\kappa\lambda}^\sigma + \tilde{R}^{\lambda\nu\rho\kappa} R_{\kappa\lambda\nu}^\sigma \right] = \frac{1}{2} D_\rho(b) \tilde{R}^{\lambda\kappa\rho\nu} R_{\nu\kappa\lambda}^\sigma \\ &= \frac{1}{2} D_\rho(b) \left( -\frac{1}{4} \delta_\sigma^\rho R^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \Rightarrow \boxed{D_\lambda C^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{8} D^\sigma(b) R^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}} \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$



Οπότε, η συναλλοίωτη παραγωγή των εξισώσεων Einstein (A.58) δίνει :

$$\frac{\alpha'}{12 \kappa \sqrt{2}} \mathcal{C}^{\mu\nu}{}_{;\mu} = -\frac{\alpha'}{12 \kappa \sqrt{2}} \frac{1}{8} (D^\nu b) R^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \kappa^2 \mathcal{T}_b^{\mu\nu}{}_{;\mu} . \quad (\text{A.74})$$

δηλαδή, παρουσία των βαρυτικών ανωμαλιών, η αναλλοιώτητα διαφορομορφισμού και η συναλλοίωτη διατήρηση του  $\mathcal{T}_b^{\mu\nu}$  φαίνεται να παραβιάζονται [66], εκτός εάν θεωρήσουμε συγκεκριμένα βαρυτικά υπόβαθρα όπως είναι το FLRW, κατά τα οποία η πυκνότητα Pontryagin μηδενίζεται ταυτοτικά  $R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ . Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει εδώ κάποιο θεμελιώδες πρόβλημα, διότι αναγνωρίζουμε από την (A.74), έναν διατηρούμενο τροποποιημένο τανυστή τάσης (ενέργειας - ορμής) :

$$\kappa^2 \tilde{\mathcal{T}}_{b+gCS}^{\mu\nu} \equiv \frac{\alpha'}{12 \kappa \sqrt{2}} \mathcal{C}^{\mu\nu} - \kappa^2 \mathcal{T}_b^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{T}}_{b+gCS}^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 , \quad (\text{A.75})$$

και ως εκ τούτου, η μη μηδενική συναλλοίωτη απόκλιση του τανυστή Cotton σε ανώμαλα βαρυτικά υπόβαθρα, απλώς εκφράζει μη τετριμμένες αλληλεπιδράσεις μεταξύ του αξιονικού πεδίου  $b$  και της βαρύτητας ( $g_{\mu\nu}$ ), που ερμηνεύεται ως ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ αυτών των δύο πεδίων [66].

## A.4 Διαστατική Ανάλυση

Σε όλη την διπλωματική εργασία έχουμε θεωρήσει ότι  $\hbar = c = 1$  και συνεπώς μπορούμε να κάνουμε μετατροπή των μονάδων από χρόνο σε μήκος και από μήκος σε μάζα<sup>-1</sup> ως εξής (ακολουθούμε την ανάλυση που παρουσιάζεται στην διπλωματική εργασία [86]) :

$$\begin{aligned} T &= c^{-1} L \\ L &= \hbar c^{-1} M^{-1} . \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Εν γένει μπορούμε σε αυτό το σύστημα μονάδων, να εκφράσουμε οποιαδήποτε ποσότητα  $X$  με μονάδες μάζας και θα συμβολίζουμε ως  $[X]$ . Κάποια βασικά μεγέθη σε διαστάσεις μάζας είναι :

$$\begin{aligned} [m] &= +1 \\ [x^\mu] &= -1 \\ [\partial^\mu] &= +1 \\ [d^4 x] &= -4 . \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Η χρήση της διαστατικής ανάλυσης γενικά μας επιβεβαιώνει αν η όλη ανάλυση που πραγματοποιήσαμε σε θεωρητικό επίπεδο, είναι σωστή και από την πλευρά των διαστάσεων. Για παράδειγμα, για το ευκλείδειο ολοκλήρωμα διαδρομής μίας δράσης (δίχως πηγές), θεωρώντας τη Lagrangian για ένα βαθμωτό πεδίο  $\varphi$  θα είναι της μορφής :

$$Z = \int D\varphi \exp[i\mathcal{S}] = \int D\varphi \exp \left[ i \int d^4 x \mathcal{L} \right] \quad (\text{A.78})$$

και αφού η δράση μπαίνει σαν όρισμα μέσα σε ένα εκθετικό πρέπει να είναι αδιάστατη και η Lagrangian να έχει διάσταση μάζας = 4, δηλαδή:

$$[S] = 0 \quad \text{και} \quad [\mathcal{L}] = 4. \quad (\text{A.79})$$

Οπότε, η διαστατική ανάλυση αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο ελέγχου και εμείς συγκεκριμένα το χρησιμοποιήσαμε ώστε όλες οι σχέσεις στη εργασία να είναι ορθές από πλευράς διάστασης. Ιδιαίτερα, αξίζει να αναφέρουμε διαστατικά τις εξής ποσότητες:

$$\begin{aligned} [\kappa^2] &= -2 \quad \text{και} \quad [\alpha'] = -2 \\ [H] &= +1 \quad \text{και} \quad [\mathcal{H}] = +2. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

# Παράρτημα Β

## Μαθηματικό υπόβαθρο

### Β.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το παράρτημα θα αναπτύξουμε ορισμένα μαθηματικά εργαλεία απαραίτητα για τη μελέτη της φυσικής που είναι σε άμεση σύνδεση με την γενική θεωρία της σχετικότητας (general relativity-GR) και τις θεωρίες που αφορούν εν γένει κοσμολογία. Η βασικότερη έννοια της GR είναι ότι η βαρύτητα είναι ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό του χωροχρόνου και μάλιστα καμπύλωση αυτού κάτι που την διαφοροποιεί από τις άλλες θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης, οι οποίες περιγράφονται από πεδία ορισμένα εντός του χωροχρόνου. Έτσι απαιτούνται μαθηματικά εργαλεία όπως είναι η τοπολογία, οι διαφορικές μορφές, η διαφορική γεωμετρία για την κατανόηση θεωριών που περιέχουν βαρύτητα και θα κάνουμε μία μικρή αναφορά πάνω σε αυτά τα εργαλεία με εκτενή χρήση των βιβλιογραφικών πηγών [7], [87] (ο αναγώστης μπορεί για περαιτέρω λεπτομέρειες να δει τα βιβλία [57], [87], [88]).

### Β.2 Τοπολογία

**Ορισμός Β.2.1** (Powerset). Το powerset (δυναμοσύνολο)  $\mathcal{P}(S)$  ενός συνόλου  $S$  είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του  $S$ .

**Ορισμός Β.2.2** (Τοπολογία). Έστω ότι  $\mathcal{M}$  είναι ένα σύνολο. Μία τοπολογία  $\mathcal{O}$  πάνω στο  $\mathcal{M}$  είναι ένα υποσύνολο  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$  που ικανοποιεί :

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  και  $\mathcal{M} \in \mathcal{O}$ .
- (ii) Με δεδομένα  $U, V \in \mathcal{O}$  ισχύει ότι  $U \cap V \in \mathcal{O}$ .
- (iii) Έστω  $A$  ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών. Με δεδομένο  $U_\alpha \in \mathcal{O}$  ισχύει ότι  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$ .

**Ορισμός Β.2.3** (Χαοτική Τοπολογία). Έστω  $\mathcal{M}$  ένα σύνολο. Η χαοτική τοπολογία πάνω στο  $\mathcal{M}$  ορίζεται ως :

$$\mathcal{O}_{\text{chaotic}} := \{\emptyset, \mathcal{M}\}. \quad (\text{B.1})$$

**Ορισμός B.2.4** (Διακριτή Τοπολογία). Έστω  $\mathcal{M}$  ένα σύνολο. Η διακριτή τοπολογία πάνω στο  $\mathcal{M}$  ορίζεται ως :

$$\mathcal{O}_{\text{discrete}} := \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad (\text{B.2})$$

και από αυτούς τους ορισμούς καταλαβαίνουμε ότι η χαοτική και διακριτή τοπολογία είναι οι δύο ακρότατες περιπτώσεις τοπολογίας, με τα λιγότερα και περισσότερα στοιχεία αντίστοιχα [7]. Επίσης στον  $\mathbb{R}^d = \{(p_1, \dots, p_d) \mid p_i \in \mathbb{R}\}$  υπάρχει μία σημαντική τοπολογία η οποία ορίζεται παρακάτω.

**Ορισμός B.2.5** (Standard Τοπολογία στον  $\mathbb{R}^d$ ). Έστω  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ . Η standard τοπολογία πάνω στο  $\mathcal{M}$  ορίζεται ως :

$$\mathcal{O}_s := \left\{ U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \mid \forall p \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U \right\} \quad (\text{B.3})$$

όπου,

$$B_r(p) := \left\{ (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d (q_i - p_i)^2 < r^2 \right\} \quad (\text{B.4})$$

ονομάζεται μία soft-ball (ανοικτή-μπάλα) ακτίνας  $r$  γύρω από το  $p$ , που είναι και γνωστή ως γειτονιά του  $p$  με ακτίνα  $r$ . Ίσως εκ πρώτης όψεως να πούμε ότι αυτή η μπάλα είναι απλώς η ευκλείδεια νόρμα όπως γνωρίζουμε από τους διανυσματικούς χώρους, ωστόσο αυτό δεν είναι σωστό διότι ο παραπάνω ορισμός δεν απαιτεί μία πλήρως διανυσματική δομή (όπως απαιτεί η νόρμα) αλλά μόνο χρειάζεται να γνωρίζουμε τι εννοούμε κάθε φορά με το  $(q_i - p_i)^2$  [7].

**Ορισμός B.2.6** (Τοπολογικός χώρος). Έστω  $\mathcal{M}$  ένα σύνολο και  $\mathcal{O}$  μια τοπολογία πάνω στο  $\mathcal{M}$ , τότε θα ονομάζουμε τοπολογικό χώρο αυτό το σύνολο με την τοπολογία  $\mathcal{O}$  και θα συμβολίζουμε ως  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ .

**Ορισμός B.2.7** (Γειτονιά). Έστω  $\mathcal{M}$  ένα σύνολο και  $\mathcal{O}$  μια τοπολογία πάνω στο  $\mathcal{M}$ , τότε μία γειτονιά του  $p \in \mathcal{M}$  είναι οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο  $U_p \in \mathcal{O}$  το οποίο περιέχει το  $p$ .

**Ορισμός B.2.8** (Τοπολογικός χώρος Hausdorff). Ένας τοπολογικός χώρος καλείται Hausdorff εάν για κάθε  $p, q \in \mathcal{M}$  υπάρχουν γειτονιές  $U_p, U_q \in \mathcal{O}$  τέτοιες ώστε  $p \in U_p, q \in U_q$  και  $U_p \cap U_q = \emptyset$ .

Διαισθητικά, ένας τοπολογικός χώρος μας επιτρέπει να βλέπουμε κάθε σημείο σε ένα σύνολο το οποίο υπάρχει στη γειτονιά άλλων σημείων. Το κριτήριο της διαχωρισιμότητας (δηλαδή το γεγονός ότι ο τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff), μας επιτρέπει για δύο διαφορετικά σημεία να μπορούμε να θεωρούμε μία γειτονιά που περιέχει το ένα αλλά όχι το άλλο [83]. Αυτή είναι μία βασική απαίτηση ώστε να εφοδιάσουμε τον χωρόχρονό μας με μία μετρική, όπως θα δούμε και παρακάτω.

**Ορισμός B.2.9** (Ανοικτό σύνολο). Έστω  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  είναι ένας τοπολογικός χώρος. Ονομάζουμε ένα σύνολο  $U \subseteq \mathcal{M}$  ως ανοικτό σύνολο αν και μόνο εάν  $U \in \mathcal{O}$ .

**Ορισμός B.2.10** (Κλειστό σύνολο). Έστω  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  είναι ένας τοπολογικός χώρος. Ονομάζουμε ένα σύνολο  $V \subseteq \mathcal{M}$  ως κλειστό σύνολο αν και μόνο εάν  $\mathcal{M} \setminus V \in \mathcal{O}$ , όπου  $\mathcal{M} \setminus V$  είναι το συμπληρωματικό (compliment) σύνολο του  $V$ .

## B.2.1 Συνεχείς απεικονίσεις

Αρχικά, λέμε ότι  $f$  είναι μία απεικόνιση από το σύνολο  $\mathcal{M}$ , γνωστό και ως πεδίο ορισμού της απεικόνισης (domain), σε ένα άλλο σύνολο  $\mathcal{N}$ , γνωστό και ως σύνολο τιμών της απεικόνισης (target) και συμβολίζουμε ως  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ . Έτσι, λέμε ότι το στοιχείο  $m \in \mathcal{M}$  απεικονίζεται στο  $n \in \mathcal{N}$  και γράφουμε  $f : m \rightarrow n$  και μάλιστα η  $f$  θα αντιστοιχίσει- απεικονίσει όλα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού στα αντίστοιχα του συνόλου τιμών, μέσω ενός κανόνα, όπου δεν είναι απαραίτητο μέσω της απεικόνισης να καλυφθεί όλο το σύνολο τιμών. Οπότε λαμβάνουμε τους εξής ορισμούς για τις απεικονίσεις :

**Ορισμός B.2.11** (Injective απεικόνιση ή 1-1). Μία απεικόνιση  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  καλείται injective εάν είναι 1 προς 1, δηλαδή αν :

$$f(m_1) = f(m_2) \iff m_1 = m_2 \quad \forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}. \quad (\text{B.5})$$

**Ορισμός B.2.12** (Surjective απεικόνιση ή επί). Μία απεικόνιση  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  καλείται surjective εάν είναι επί, δηλαδή κάθε στοιχείο του συνόλου τιμών καλύπτεται :

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad \exists m \in \mathcal{M} : f(m) = n. \quad (\text{B.6})$$

**Ορισμός B.2.13** (Bijective απεικόνιση ή 1-1 και επί). Μία απεικόνιση  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  καλείται bijective εάν είναι injective και surjective, δηλαδή 1-1 και επί.

**Ορισμός B.2.14** (Συνεχής απεικόνιση). Έστω  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$  και  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$  να είναι τοπολογικοί χώροι. Μία απεικόνιση  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  λέμε ότι είναι συνεχής ως προς  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  και  $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$  αντίστοιχα αν και μόνο εάν:

$$\forall V \in \mathcal{O}_{\mathcal{N}}, \quad \text{preim}_f(V) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \quad (\text{B.7})$$

όπου,

$$\text{preim}_f(V) := \{m \in \mathcal{M} \mid f(m) \in V\}. \quad (\text{B.8})$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το preimage μίας απεικόνισης  $f$ , δεν είναι το ίδιο με την αντίστροφη της [7], γιατί για παράδειγμα δεν μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση για μία μη injective απεικόνιση. Επίσης, αν επιλέξουμε την τοπολογία πάνω στο  $\mathcal{M}$  να είναι η διακριτή τοπολογία τότε κάθε απεικόνιση  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  είναι συνεχής και αυτό διότι η preimage οποιαδήποτε συνόλου στο  $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$  είναι είτε υποσύνολο του  $\mathcal{M}$  είτε το κενό σύνολο, τα οποία βέβαια ανήκουν στην διακριτή τοπολογία του  $\mathcal{M}$ .

**Ορισμός B.2.15** (Ομοιομορφισμός). Έστω  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  να είναι μία bijective απεικόνιση. Τότε η απεικόνιση καλείται ομοιομορφισμός αν η  $f$  και η αντίστροφη της  $f^{-1}$  είναι συνεχείς. Είναι στην ουσία οι τοπολογικές ισομορφικές απεικονίσεις της τοπολογίας, διότι διατηρούν τη δομή της τοπολογίας [7].

**Ορισμός B.2.16** (Σύνθεση συνεχών απεικονίσεων). Με δεδομένες δύο απεικονίσεις  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  και  $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ , μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεσή τους σαν μία καινούργια απεικόνιση ως:  $g \circ f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$  όπου  $(g \circ f)(m) := g(f(m))$ .

## B.3 Τοπολογικά manifold (πολλαπλότητες)

**Ορισμός B.3.1** (Τοπολογικά manifold). Έστω ότι  $U_p$  είναι μια ανοικτή γειτονιά που περιέχει το σημείο  $p$  σε κάποιο τοπολογικό χώρο. Ο τοπολογικός χώρος  $(M, \mathcal{O})$  καλείται ένα  $d$ -διάστατο τοπολογικό manifold εάν :

$$\forall p \in M \exists U_p \in \mathcal{O} : \exists x : U_p \rightarrow x(U_p) \subseteq \mathbb{R}^d \quad (\text{B.9})$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες :

- (i) η απεικόνιση  $x$  να είναι αντιστρέψιμη :  $x^{-1} : x(U_p) \rightarrow U_p$
- (ii) η  $x$  είναι συνεχής
- (iii) η  $x^{-1}$  είναι συνεχής.

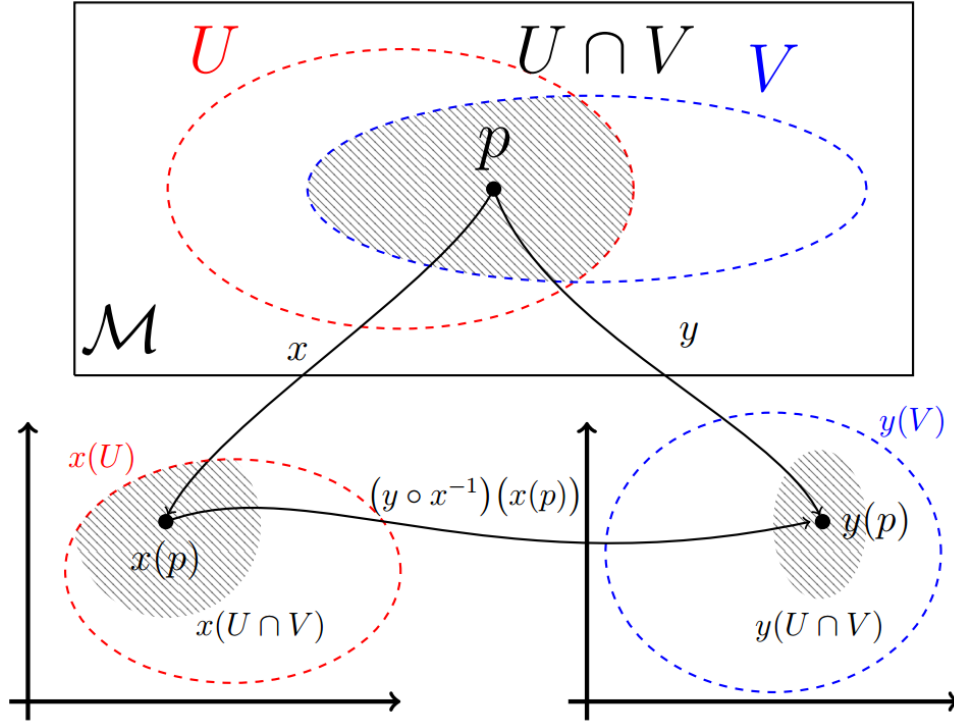
Οπότε μπορούμε να ορίσουμε και την εξής ορολογία για τα manifolds :

- Το ζεύγος  $(U, x)$  καλείται **χάρτης** (chart) του  $(M, \mathcal{O})$ .
- Το σύνολο  $\mathcal{A} = \{(U_{(\alpha)}, x_{(\alpha)}) \mid \alpha \in A\}$ , για κάποιο αυθαίρετο σύνολο δεικτών  $A$  ονομάζεται **άτλας** (atlas) του  $(M, \mathcal{O})$  εάν  $\bigcup_{\alpha \in A} U_{(\alpha)} = M$ .
- $x : U \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$  καλείται μία απεικόνιση **χάρτη**, η οποία ορίζεται από την  $x(p) = (x^1(p), \dots, x^d(p))$ , όπου  $x^i(p)$  είναι η  $i^{\text{οστή}}$  συνιστώσα του  $p$  σε αντιστοιχία με το επιλεγμένο **χάρτη**  $(U, x)$ .
- $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζονται οι απεικονίσεις **συντεταγμένων**.

**Ορισμός B.3.2** (Μέγιστος άτλας). Ένας άτλας, που περιέχει κάθε δυνατό συνδυασμό χαρτών για ένα τοπολογικό manifold καλείται **μέγιστος άτλας**.

### B.3.1 Απεικονίσεις χαρτών μετάβασης

Έστω δύο χάρτες  $(U, x)$  και  $(V, y)$  για το ίδιο τοπολογικό χώρο  $(M, \mathcal{O})$  με αλληλεπικαλυπτόμενες περιοχές, δηλαδή  $U \cap V \neq \emptyset$ . Ένα σημείο σε αυτή την περιοχή μπορεί να απεικονιστεί από την  $x$  και την  $y$  απεικόνιση και μπορούμε να βρεθούμε μεταξύ των δύο αυτών αναπαραστάσεων του σημείου, χρησιμοποιώντας τις απεικονίσεις χαρτών μετάβασης [7]. Δηλαδή, αν θέλουμε να πάμε από τον **χάρτη**  $(U, x)$  στον  $(V, y)$ , χρησιμοποιούμε την απεικόνιση του **χάρτη μετάβασης** (chart transition map)  $(y \circ x^{-1}) : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ . Πάλι διαισθητικά, μπορούμε να πούμε ότι οι απεικονίσεις χαρτών μετάβασης, μας παρέχουν την κατάλληλη πληροφορία ώστε για παράδειγμα να τοποθετήσουμε τις 'σελίδες' ενός άτλαντα που ενδεχομένως έχουν αλληλοεπικαλύψεις στην σωστή γεωγραφική σειρά. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις αναπαραστάσεις χαρτών  $(U, x)$  και  $(V, y)$  με μη μηδενική αλληλοεπικάλυψη [7].



Σχήμα 4: Αναπαράσταση χαρτών  $(U, x)$  και  $(V, y)$  με μη μηδενική επικάλυψη. Η τομή των δύο περιοχών  $U \cap V$  απεικονίζεται από την  $x$  και  $y$  απεικόνιση στις αντίστοιχες αναπαραστάσεις. Μία απεικόνιση χάρτη μετάβασης  $y \circ x^{-1}$  χρησιμοποιείται για να απεικονίσει την αλληλεπικαλυπτόμενη περιοχή από τη μία αναπαράσταση στην άλλη [7].

## B.4 Πολυγραμμική άλγεβρα

**Ορισμός B.4.1** (Γραμμικές απεικονίσεις). Έστω  $(V, +_V, \cdot_V)$  και  $(W, +_W, \cdot_W)$  δύο διανυσματικοί χώροι. Τότε μία απεικόνιση  $\varphi : V \rightarrow W$  καλείται γραμμική αν για κάθε  $v, \tilde{v} \in V$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(i) \quad \varphi(v +_V \tilde{v}) = \varphi(v) +_W \varphi(\tilde{v}), \text{ και}$$

$$(ii) \quad \varphi(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W \varphi(v).$$

Εάν μία απεικόνιση  $\varphi : V \rightarrow W$  είναι γραμμική, τότε θα συμβολίζουμε  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ .

**Ορισμός B.4.2.** (Ο διανυσματικός χώρος των ομομορφισμών) Έστω  $(V, +, \cdot)$  και  $(W, +, \cdot)$  δύο διανυσματικοί χώροι. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο:

$$\text{Hom}(V, W) := \{\varphi : V \xrightarrow{\sim} W\} \quad (\text{B.10})$$

και γίνεται αυτό να γίνει διανυσματικός χώρος, ορίζοντας:

$$\oplus : \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W) \quad \text{και} \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \oplus \psi, \quad (\text{B.11})$$

όπου  $(\varphi \oplus \psi)(V) = \varphi(V) + \psi(V)$  και για τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό  $\odot : \mathbb{R} \times \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ . Η τριάδα  $(\text{Hom}(V, W), \oplus, \odot)$  αποτελεί τον διανυσματικό χώρο των ομομορφισμών.

**Ορισμός B.4.3** (Δυαδικός διανυσματικός χώρος). Έστω  $(V, +, \cdot)$  ένας διανυσματικός χώρος. Ορίζουμε τον δυαδικό διανυσματικό χώρο (στον  $V$ )  $(V^*, \oplus, \odot)$ , όπου:

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}) := \{\varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\}, \quad (\text{B.12})$$

και τα στοιχεία του δυαδικού χώρου  $V^*$  καλούνται covectors ή 1-μορφές (περί των διαφορικών μορφών θα πούμε παρακάτω) [7].

### B.4.1 Τανυστές

Εάν θεωρήσουμε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης τότε είναι φυσικό να ορίσουμε τους τανυστές σαν πολυγραμμικές απεικονίσεις.

**Ορισμός B.4.4** (Τανυστής). Έστω  $(V, +, \cdot)$  ένας διανυσματικός χώρος. Ένας  $(r, s)$ -τανυστής,  $T$ , πάνω στο  $V$  είναι μία πολυγραμμική απεικόνιση, όπου

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-όροι}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-όροι}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}. \quad (\text{B.13})$$

Ο αριθμός  $r$  στον παραπάνω ορισμό συνήθως καλείται συναλλοίωτη τάξη του τανυστή  $T$  και το  $s$  ανταλλοίωτη τάξη. Το άθροισμά τους  $r+s$  ονομάζεται τάξη (rank) του τανυστή  $T$ .

**Ορισμός B.4.5** (Τανυστής μέσω του τανυστικού γινομένου). Έστω  $(V, +, \cdot)$  ένας διανυσματικός χώρος. Ένας  $(r, s)$ -τανυστής,  $T$ , ορίζεται ως:

$$T = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-όροι}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-όροι}} \equiv V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} \quad (\text{B.14})$$

όπου το  $\otimes$  καλείται τανυστικό γινόμενο. Σε αυτόν τον ορισμό έχουμε  $r$   $V$  όρους και  $s$   $V^*$  όρους, ανάποδα με τον παραπάνω ορισμό και κάθε φορά κάποιος θα πρέπει να είναι συνεπής με τις εκάστοτε συμβάσεις που έχει λάβει. Ακόμη, επειδή ο διανυσματικός μας χώρος είναι πεπερασμένος θα ισχύει ότι  $V = (V^*)^*$ , και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τον χώρο  $V$  ως το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το  $V^*$  στο  $\mathbb{R}$  [7]. Έτσι παίρνοντας το τανυστικό γινόμενο απλά σημαίνει ότι, έχουμε  $r$  γραμμικές απεικονίσεις  $V : V^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$  και  $s$  γραμμικές απεικονίσεις  $V^* : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ . Αυτός ο ορισμός είναι χρήσιμος, διότι εύκολα κάποιος μπορεί να ορίσει τανυστές υψηλότερης τάξης παίρνοντας το τανυστικό γινόμενο με έναν άλλο τανυστή, δηλαδή εάν  $T$  είναι ένας  $(r, s)$ -τανυστής και  $S$  είναι ένας  $(p, q)$ -τανυστής τότε  $T \otimes S$  είναι ένας  $(r+p, s+q)$ -τανυστής.

### B.4.2 Βάσεις και συνιστώσες τανυστή

**Ορισμός B.4.6** (Βάση για διανυσματικό χώρο). Έστω  $(V, +, \cdot)$  ένας διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο  $B \subseteq V$  καλείται (Hamel) βάση εάν:

$$\forall v \in V, \exists! \text{ πεπερασμένο } F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset B : \exists! v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} : v = v^1 f_1 + \dots + v^n f_n$$



**Ορισμός B.4.7** (Βάση για διανυσματικό χώρο (γραμμική ανεξαρτησία)). Έστω  $(V, +, \cdot)$  ένας διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο  $B = \{e_1, \dots, e_d\} \subseteq V$  καλείται βάση εάν :

- (i) Η βάση παράγει (spans) τον  $V$ , δηλαδή κάθε  $v \in V$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, και
- (ii) Τα στοιχεία της βάσης είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή ισχύει ότι :

$$\sum_{i=1}^d \lambda^i e_i = 0 \implies \lambda^i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}. \quad (\text{B.15})$$

**Ορισμός B.4.8** (Διάσταση ενός διανυσματικού χώρου). Εάν υπάρχει μία βάση  $B \subseteq V$  για έναν διανυσματικό χώρο  $(V, +, \cdot)$  με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, έστω  $d$  τότε ονομάζουμε  $d$  να είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου και συμβολίζουμε με  $\dim V = d$ .

Επίσης, εάν  $(V, +, \cdot)$  είναι ένας διανυσματικός χώρος και επιλέξουμε μία βάση  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , τότε μπορούμε μοναδικά να συσχετίσουμε  $v \mapsto (v^1, \dots, v^n)$ , που ονομάζονται συνιστώσες του  $v$  στην συγκεκριμένη βάση, έτσι ώστε  $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ . Βέβαια με δοσμένο διανυσματικό χώρο  $(V, +, \cdot)$  και τον δυαδικό αυτού  $(V^*, +, \cdot)$  μπορεί κάποιος να ορίσει μία βάση στον κάθε χώρο ανεξάρτητη του άλλου χώρου, ωστόσο υπάρχει ένας κομψός τρόπος ώστε οι βάσεις που θα επιλεγούν στον κάθε χώρο να συνδέονται μεταξύ τους [7].

**Ορισμός B.4.9** (Δυαδική βάση). Έστω  $(V, +, \cdot)$  ένας διανυσματικός χώρος και  $\{e_1, \dots, e_n\}$  μία βάση πάνω σε αυτόν. Ορίζουμε την δυαδική βάση του δυαδικού χώρου  $(V^*, +, \cdot)$  ως  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  που ικανοποιεί :

$$\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{εάν } i = j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \quad (\text{B.16})$$

**Ορισμός B.4.10** (Συνιστώσες τανυστών). Έστω ότι  $T$  είναι ένας  $(r, s)$ -τανυστής πάνω σε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο  $(V, +, \cdot)$  και έστω  $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\}$  μία βάση με την αντίστοιχη δυαδική βάση  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^{\dim V}\}$ . Τότε ορίζουμε τους  $(r + s)^{\dim V}$  αριθμούς ως :

$$T^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} := T(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \in \mathbb{R} \quad (\text{B.17})$$

για  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, \dim V\}$ . Αυτές είναι οι συνιστώσες του τανυστή  $T$  ως προς μία δεδομένη βάση.

## B.5 Διαφορίσιμα manifolds

Μέχρι στιγμής αναφερθήκαμε σε τοπολογικά manifolds, τα οποία μας επέτρεψαν να μελετήσουμε την συνέχεια μιας καμπύλης  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ . Εάν όμως θελήσουμε να περιγράψουμε την κίνηση ενός σωματιδίου στον χωρόχρονο, ως μία καμπύλη πάνω σε ένα manifold πρέπει να είμαστε σε θέση να συσχετίζουμε μία ταχύτητα σε κάθε σημείο της καμπύλης, δηλαδή χρειαζόμαστε να ορίσουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα (την ταχύτητα) σε κάθε σημείο της καμπύλης. Οπότε, χρειαζόμαστε την προσθήκη μίας επιπλέον δομής αυτήν της διαφορίσιμης [7].

**Θεώρημα B.5.1** (Θεώρημα Whitney). Οποιοσδήποτε  $C^k$ -άτλας  $\mathcal{A}_{C^k}$  για  $k \geq 1$  ενός τοπολογικού manifold, περιέχει έναν υπο-άτλαντα που είναι  $C^\infty$  άτλας ( $C^\infty(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ ), απείρως διαφορίσιμος και συνεχής γνωστός ως λείος (smooth)).

Αυτό είναι ένα πολύ ισχυρό θεώρημα στη φυσική, διότι δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για την διασφάλιση ορισμένου αριθμού παραγώγων (ύπαρξη ή μη) μιας καμπύλης, αρκεί να είναι  $C^1$  και έπειτα παίρνει κανείς τον υπο-άτλαντα. Συνεπώς δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρούμε πάντα  $C^\infty$ -manifolds ή λεία manifolds, εκτός αν θέλουμε να εισάγουμε επιπλέον ιδιότητες όπως είναι η μιγαδική παραγωγή κλπ [7].

### B.5.1 Διαφορομορφισμοί (diffeomorphisms)

Όποτε εισάγουμε μία καινούργια δομή για τα στοιχεία μας είναι σημαντικό να μελετήσουμε αν αυτή η δομή διατηρεί τις απεικονίσεις. Αυτές οι απεικονίσεις γενικά ονομάζονται ισομορφισμοί και για δύο σύνολα ένας ισομορφισμός είναι μία bijection απεικόνιση. Για τους τοπολογικούς χώρους ένας ισομορφισμός είναι μία συνεχής bijection απεικόνιση, της οποίας η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης συνεχής και ονομάζονται ομοιομορφισμοί. Δύο αντικείμενα τα οποία συνδέονται με έναν ισομορφισμό ονομάζονται ισομορφικά.

**Ορισμός B.5.1** (Λείες απεικονίσεις). Έστω  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$  και  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}, \mathcal{A}_{\mathcal{N}})$  δύο λεία manifold διάστασης  $m$  και  $n$  αντίστοιχα. Μία απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  καλείται  $C^\infty$  (ή λεία), αν η απεικόνιση  $y \circ \varphi \circ x^{-1}$  είναι  $C^\infty$  (με την έννοια ότι  $C^\infty(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ), απείρως διαφορίσιμη) για τους χάρτες  $(U, x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  και  $(V, y) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & V \\
 x \downarrow & & \downarrow y \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{y \circ \varphi \circ x^{-1}} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Σχήμα 5: Σχηματική αναπαράσταση του ορισμού (A.5.1) [7].

Ο παραπάνω ορισμός ισχύει για δύο χάρτες  $(U, x)$  και  $(V, y)$  και γενικεύοντας ισχύει για όλους τους χάρτες, καθώς το manifold μας είναι λείο και αλλάζοντας χάρτες είναι  $C^\infty$ .

**Ορισμός B.5.2** (Διαφορομορφισμός). Έστω  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$  και  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}, \mathcal{A}_{\mathcal{N}})$  δύο λεία manifold, τα οποία είναι ισομορφικά όταν υπάρχει μία bijection απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  τέτοια ώστε οι  $\varphi$  και  $\varphi^{-1}$  να είναι  $C^\infty$  απεικονίσεις. Μία τέτοια απεικόνιση, ονομάζεται διαφορομορφισμός (diffeomorphism) και τα manifolds καλούνται διαφορομορφικά.

## B.6 Εφαπτομενικοί χώροι

**Ορισμός B.6.1** (Βαθμωτά πεδία). Ο διανυσματικός χώρος με το σύνολο,

$$C^\infty(\mathcal{M}) := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ είναι μια λεία συνάρτηση}\} \quad (\text{B.18})$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις  $(f \oplus g)(p) = f(p) + g(p)$  και  $(\lambda \odot f)(p) = \lambda \cdot f(p)$ , αποτελεί τον χώρο των βαθμωτών πεδίων (ή λείων συναρτήσεων) πάνω στο  $\mathcal{M}$ .

**Ορισμός B.6.2.** Έστω ένα λείο manifold  $(\mathcal{M}, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  και μία καμπύλη  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  η οποία είναι τουλάχιστον  $C^1$ . Εάν υποθέσουμε ότι  $\gamma(\lambda_0) = p \in \mathcal{M}$ , η ταχύτητα της  $\gamma$  στο  $p$  είναι μία γραμμική απεικόνιση όπου,

$$v_{\gamma,p} : C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, \text{ που ορίζεται από την } v_{\gamma,p}(f) := (f \circ \gamma)'(\lambda_0). \quad (\text{B.19})$$

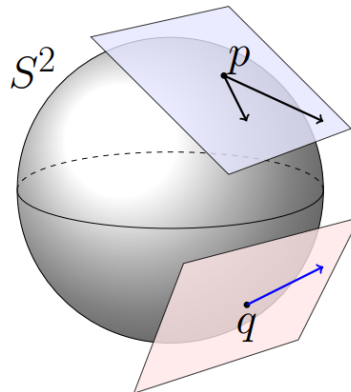
**Ορισμός B.6.3** (Εφαπτομενικός διανυσματικός χώρος). Για κάθε σημείο  $p \in \mathcal{M}$  ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο, γνωστό και ως εφαπτομενικό (διανυσματικό) χώρο στο manifold  $\mathcal{M}$  στο σημείο  $p$ , του οποίου το σύνολο είναι:

$$T_p \mathcal{M} := \{v_{\gamma,p} \mid \gamma \text{ λεία καμπύλη που διέρχεται από το } p\}, \quad (\text{B.20})$$

όπου η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δίνονται από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned} (v_{\gamma,p} \oplus v_{\delta,p})(f) &:= v_{\gamma,p}(f) + v_{\delta,p}(f) \\ (\alpha \odot v_{\gamma,p})(f) &:= \alpha \cdot v_{\gamma,p}(f). \end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, γενικά δεν μπορώ να προσθέσω δύο ταχύτητες που είναι εφαπτόμενες σε διαφορετικά σημεία. Δηλαδή η πράξη  $v_{\gamma,p} \oplus v_{\delta,q}$  έχει νόημα μόνο όταν  $p = q$  και αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε με ένα απλό παράδειγμα. Εάν θεωρήσουμε ως manifold την  $\mathcal{M} = S^2$  2-σφαίρα, τότε μπορούμε διαισθητικά να πούμε ότι οι ταχύτητες είναι διανύσματα σε εφαπτόμενα επίπεδα στο manifold. Εάν θεωρήσω δύο σημεία (6)  $p, q$ , τότε δεν μπορούμε να προσθέσουμε τις ταχύτητες οι οποίες είναι εφαπτόμενες σε διαφορετικά σημεία, καθώς υπάρχουν σε διαφορετικά  $\mathbb{R}^2$ -επίπεδα. Με-



Σχήμα 6: Εφαπτόμενα επίπεδα σε δύο σημεία  $p, q \in \mathcal{M} = S^2$  [7].

ρικές φορές θεωρούμε τις ταχύτητες σαν διανύσματα που υπάρχουν πάνω στον εφαπτομενικό χώρο

και δείχνουν έξω από το manifold. Βέβαια, αυτό προϋποθέτει να εμβαπτίσουμε (embed) το manifold σε έναν χώρο υψηλότερης διάστασης όπως είναι η 2-σφαίρα στον  $\mathbb{R}^3$ . Ωστόσο, αν θεωρήσουμε ένα manifold με διάσταση  $d \geq 3$ , τότε δεν έχουμε απεικονιστική αναπαράσταση, διότι δεν μπορούμε να δούμε τετραδιάστατους χώρους. Αλλά, ο παραπάνω φορμαλισμός της ταχύτητας δεν απαιτεί να εμβαπτίσουμε το manifold σε μεγαλύτερης διάστασης χώρο, αφού ορίσαμε την ταχύτητα εγγενώς στο manifold [7]. Έτσι, για τα εφαπτόμενα διανύσματα μπορούμε να χρησιμοποιούμε την έννοια του εμβαπτίσματος όταν υπάρχει κάποια γεωμετρική διαίσθηση, ειδικά απλώς τα θεωρούμε βάσει του εγγενούς ορισμού τους πάνω στο manifold.

Για να πραγματοποιήσει κανείς υπολογισμούς στον εφαπτομενικό χώρο  $T_p \mathcal{M}$  με την χρήση της θεωρίας των διανυσματικών χώρων αρκεί να επιλέξει μία βάση διανυσμάτων για τον  $T_p \mathcal{M}$ . Η βάση  $e_\mu = \partial_\mu$  του εφαπτομενικού χώρου  $T_p \mathcal{M}$  καλείται βάση συντεταγμένων και εκφράζοντας ένα διάνυσμα  $X \in T_p(\mathcal{M})$  ως  $X^\mu e_\mu$ , οι αριθμοί  $X^\mu$  ονομάζονται συνιστώσες του  $X$  στην αντίστοιχη βάση  $e_\mu$  [87]. Από κατασκευής, είναι φανερό ότι ένα διάνυσμα  $X$  υπάρχει και δίχως συγκεκριμένες συντεταγμένες, η επιλογή των συντεταγμένων απλώς μας βοηθούν στο να κάνουμε υπολογισμούς. Αυτό το γεγονός, μας παρακινεί να βρούμε τον νόμο μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός διανύσματος. Έστω  $p \in U_i \cap U_j$  και  $x = \phi_i(p)$ ,  $x' = \phi_j(p)$  τότε έχουμε δύο εκφράσεις για το διάνυσμα  $X \in T_p(\mathcal{M})$ ,

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( X^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right) \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \right) = X^{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \quad (\text{B.21})$$

και άρα ο κανόνας μετασχηματισμού για τις συνιστώσες του (ανταλλοιώτου) διανύσματος είναι:

$$X^\mu \rightarrow X^{\mu'} = X^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \quad (\text{B.22})$$

διότι η βάση του διανύσματος μετασχηματίζεται ως:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (\text{B.23})$$

Ακόμη, εάν ένα διάνυσμα τοποθετηθεί ομαλά σε κάθε σημείο ενός manifold  $\mathcal{M}$ , τότε λέμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο [87].

**Ορισμός B.6.4** (Συνεφαπτομενικός χώρος). Έστω ότι  $T_p \mathcal{M}$  είναι ένας εφαπτομενικός χώρος σε κάποιο σημείο  $p \in \mathcal{M}$ . Ο δυαδικός χώρος αυτού του χώρου, ονομάζεται συνεφαπτομενικός χώρος (cotangent space) και ορίζεται ως:

$$T_p^* \mathcal{M} \equiv (T_p \mathcal{M})^* := \left\{ \varphi : T_p \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \right\}. \quad (\text{B.24})$$

Οπότε, ανάλογα με παραπάνω ορίζουμε ένα συνεφαπτομενικό (δυαδικό) διάνυσμα ή συναλλοίωτο διάνυσμα μέσω της σχέσης,  $\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu$ , όπου  $\omega_\mu$  είναι οι συνιστώσες του συναλλοίωτου διανύσματος και  $\hat{\theta}^\mu$  μία βάση (πρέπει να προσέξουμε να μην μπερδέψουμε αυτή τη γενική μορφή των συναλλοίωτων διανυσμάτων με την σπιν συνοχή, σε αυτό το παράρτημα ακολουθούμε τις συμβάσεις του βιβλίου [87]). Ένας πιο αυστηρός μαθηματικός ορισμός για το συνεφαπτομενικό διάνυσμα είναι ο εξής:

**Ορισμός B.6.5.** Ένα δυαδικό διάνυσμα ορίζεται ως μία απεικόνιση  $\omega : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ο αντίστοιχος δυαδικός χώρος σε ένα σημείο  $p$  συμβολίζεται ως  $T_p^*(\mathcal{M})$  και η αντίστοιχη βάση συντεταγμένων των συνεφαπτομενικών διανυσμάτων, στο σύστημα αναφοράς του  $\vec{x}$ , είναι η  $\hat{\theta}^\mu = dx^\mu$ .

Όμοια με πριν, τα συνεφαπτομενικά διανύσματα είναι ανεξάρτητα από τις συντεταγμένες και άρα μπορούμε να βρούμε τον νόμο μετασχηματισμού των συνιστωσών τους, ως εξής:

$$\omega_\mu \rightarrow \omega_{\mu'} = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \quad (\text{B.25})$$

όπου βέβαια για την βάση είναι:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (\text{B.26})$$

Με βάση τον ορισμό των εφαπτομενικών χώρων μπορούμε να δώσουμε και έναν άλλο ορισμό για το τι είναι ταυστής πέραν των (B.13),(B.14).

**Ορισμός B.6.6.** Ένας ταυστής τύπου  $(q, r)$  είναι ένα πολυγραμμικό αντικείμενο το οποίο απεικονίζει  $q$  στοιχεία του  $T_p^*(\mathcal{M})$  και  $r$  στοιχεία του  $T_p(\mathcal{M})$  σε έναν πραγματικό αριθμό. Το σύνολο όλων των ταυστών του τύπου  $(q, r)$  στο  $p \in \mathcal{M}$  συμβολίζεται ως  $\mathfrak{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$ . Ένα στοιχείο του  $\mathfrak{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$  σε μία βάση συντεταγμένων γράφεται ως:

$$T = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r} \quad (\text{B.27})$$

με τις συνιστώσες του να είναι οι  $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}$ . Αυτές οι συνιστώσες του ταυστή κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις ιδιότητες μετασχηματισμού των εφαπτομενικών και συνεφαπτομενικών διανυσμάτων. Δηλαδή για έναν  $(q, r)$  ταυστή θα είναι:

$$T^{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_q}_{\nu'_1 \nu'_2 \dots \nu'_r} = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\mu'_2}}{\partial x^{\mu_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_q}}{\partial x^{\mu_q}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x^{\nu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial x^{\nu'_r}}. \quad (\text{B.28})$$

**Ορισμός B.6.7.** Ένα ταυστικό πεδίο τύπου  $(q, r)$ , ορίζεται μέσω της ομαλής τοποθέτησης (smooth assignment) ενός ταυστή σε κάθε σημείο  $p \in \mathcal{M}$ .

## B.7 Μετρικός ταυστής

Στην στοιχειώδη γεωμετρία, το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων  $\mathbf{U}$  και  $\mathbf{V}$  ορίζεται από την σχέση  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_i V^i$  (επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται), όπου  $U_i, V_i$  είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^n$ . Σε ένα manifold, ένα εσωτερικό γινόμενο ορίζεται σε κάθε εφαπτομενικό χώρο  $T_p(\mathcal{M})$ .

**Ορισμός B.7.1.** Έστω ότι  $\mathcal{M}$  είναι ένα διαφορίσιμο manifold. Μία Riemannian μετρική  $g$  πάνω στο  $\mathcal{M}$  είναι ένας τύπος  $(0, 2)$  ταυστικού πεδίου πάνω στο  $\mathcal{M}$ , το οποίο ικανοποιεί τα εξής αξιώματα σε κάθε σημείο  $p \in \mathcal{M}$  [89].

(i)  $g_p(U, V) = g_p(V, U)$

(ii)  $g_p(U, U) \geq 0$ , όπου η ισότητα ισχύει μόνο για  $U = 0$ .

Στα παραπάνω είναι  $U, V \in T_p(\mathcal{M})$  και  $g_p = g|_p$  και συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι μία Riemannian μετρική είναι συμμετρική, θετικά ορισμένη και διγραμμική.

**Ορισμός B.7.2.** Έστω ότι  $\mathcal{M}$  είναι ένα διαφορίσιμο manifold. Μία pseudo-Riemannian μετρική  $g$  πάνω στο  $\mathcal{M}$  είναι ένας τύπος  $(0, 2)$  τανυστικού πεδίου πάνω στο  $\mathcal{M}$ , το οποίο ικανοποιεί τα εξής αξιώματα σε κάθε σημείο  $p \in \mathcal{M}$ .

$$(i) \quad g_p(U, V) = g_p(V, U)$$

$$(ii) \quad \text{Εάν } g_p(U, V) = 0, \text{ για οποιοδήποτε } U \in T_p(\mathcal{M}), \text{ τότε } V = 0.$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς έπεται ότι η μετρική Minkowski είναι μία ειδική υποπερίπτωση των pseudo-Riemannian μετρικών και η ευκλείδεια μετρική  $\delta_{ij}$  είναι μία ειδική υποπερίπτωση των Riemannian μετρικών [87]. Εάν ένα λείο manifold  $\mathcal{M}$  είναι εφοδιασμένο με μία (pseudo) Riemannian μετρική  $g$ , το ζεύγος  $(\mathcal{M}, g)$  καλείται (pseudo) Riemannian manifold. Επιπλέον, αν η  $g$  είναι Lorentzian, δηλαδή έχει μόνο μία αρνητική ιδιοτιμή, το  $(\mathcal{M}, g)$  καλείται Lorentz manifold, όπου η θεωρία της γενικής σχετικότητας είναι θεμελιωμένη πάνω σε ένα Lorentz manifold και φυσικά η Lorentzian μετρική είναι μία ειδική περίπτωση της γενικής pseudo-Riemannian μετρικής [87]. Με την επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων, μπορούμε να γράψουμε την μετρική συναρτήσει του στοιχείου μήκους  $ds^2$  ως εξής:

$$g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu \Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{B.29})$$

Επειδή η μετρική, καθιερώνει ένα εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων, παρουσιάζει μία πολύ σημαντική ιδιότητα. Συσχετίζει εφαπτομενικά διανύσματα του  $T_p(\mathcal{M})$  σε συνεφαπτομενικά διανύσματα στον  $T_p^*(\mathcal{M})$ . Συγκεκριμένα η μετρική πραγματώνει έναν ισομορφισμό μεταξύ του  $T_p^*(\mathcal{M})$  και του  $T_p(\mathcal{M})$ , δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ως μία injective, surjective και bijective απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων του εφαπτομενικού-συνεφαπτομενικού χώρου και των στοιχείων του συνεφαπτομενικού-εφαπτομενικού χώρου, όπου αλγεβρικά αυτός ο ισομορφισμός εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} U_\mu &= g_{\mu\nu} U^\nu \\ U^\mu &= g^{\mu\nu} U_\nu \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

με  $g^{\mu\nu}$  να δηλώνει την αντίστροφη μετρική. Ακόμη συμβολίζουμε την ορίζουσα της μετρικής ως  $\det(g_{\mu\nu}) = g$  και την αντίστροφή της με  $\det(g^{\mu\nu}) = g^{-1}$  και μάλιστα ισχύει η σχέση μεταξύ της μετρικής και της αντιστρόφου αυτής  $g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha$  [87].

## B.8 Τανυστικές πυκνότητες - Σύμβολο Levi-Civita

Κάθε αντικείμενο που είναι τανυστής θα μετασχηματίζεται κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων με έναν συγκεκριμένο τρόπο (B.28). Ωστόσο, υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα που καλούνται τανυστικές πυκνότητες και δύο χαρακτηριστικά είναι το σύμβολο Levi-Civita και η ορίζουσα της μετρικής, τα οποία χαρακτηρίζονται από άλλον νόμο μετασχηματισμού [87].

**Ορισμός B.8.1.** Το σύμβολο Levi-Civita που ορίζεται σε ένα  $n$ -διάστατο manifold  $\mathcal{M}$  δίνεται

από την σχέση :

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{εάν } \mu_1\mu_2\dots\mu_n \text{ είναι άρτια μετάθεση των } 012\dots(n-1) \\ -1 & \text{εάν } \mu_1\mu_2\dots\mu_n \text{ είναι περιττή μετάθεση των } 012\dots(n-1) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Εάν το manifold  $\mathcal{M}$  είναι ένα Lorentz manifold τότε το σύμβολο Levi-Civita με τους δείκτες πάνω είναι:

$$\tilde{\epsilon}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \begin{cases} -1 & \text{εάν } \mu_1\mu_2\dots\mu_n \text{ είναι άρτια μετάθεση των } 012\dots(n-1) \\ +1 & \text{εάν } \mu_1\mu_2\dots\mu_n \text{ είναι περιττή μετάθεση των } 012\dots(n-1) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

Το Levi-Civita σύμβολο συχνά χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός τανυστή, εκπεφρασμένο σε μορφή πινάκων και για παράδειγμα για έναν δεύτερης τάξης τανυστή  $T$ , θα ισχύει ο εξής κανόνας για την ορίζουσά του :

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1\mu'_2\dots\mu'_n} \det T = \tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} T^{\mu_1}_{\mu'_1} T^{\mu_2}_{\mu'_2} \dots T^{\mu_n}_{\mu'_n}. \quad (\text{B.33})$$

Εάν θεωρήσουμε την περίπτωση όπου  $T^{\mu}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$ , η οποία αντιστοιχεί σε έναν νόμο μετασχηματισμού συντεταγμένων, από την παραπάνω εξίσωση θα έχουμε ότι :

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1\mu'_2\dots\mu'_n} = (\det T)^{-1} \tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}}. \quad (\text{B.34})$$

Αντικείμενα που μετασχηματίζονται με βάση τον παραπάνω νόμο μετασχηματισμού συντεταγμένων (B.34), ονομάζονται τανυστικές πυκνότητες και για παράδειγμα η ορίζουσα της μετρικής, που είναι μία τανυστική πυκνότητα, μετασχηματίζεται ως :

$$g(x^{\mu'}) = (\det T)^{-2} g(x^{\mu}). \quad (\text{B.35})$$

Για να πάμε από την τανυστική πυκνότητα μιας ποσότητας στον αντίστοιχα τανυστή απλώς πολλαπλασιάζουμε την πυκνότητα με  $|g|^{\frac{w}{2}}$ , όπου  $w$  είναι το 'βάρος' της πυκνότητας (εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι το  $|g|$ , αφορά την απόλυτη τιμή της ορίζουσας της μετρικής ενώ στο παράρτημα B έχουμε συμβολίσει ως  $\det g = |g|$ , απλώς εδώ ακολουθούμε τις σημειογραφικές συμβάσεις του [87]). Συγκεκριμένα ο τανυστής Levi-Civita ορίζεται ως :

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \quad \text{και} \quad \epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \frac{\tilde{\epsilon}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}}{\sqrt{|g|}}. \quad (\text{B.36})$$

Μία σημαντική ιδιότητα του τανυστή Levi-Civita είναι όταν λαμβάνουμε την συστολή (contraction) με τον εαυτό του, που δίνει :

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p\alpha_1\dots\alpha_{n-p}} \epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p\beta_1\dots\beta_{n-p}} = (-1)^s p! \delta_{\beta_1\dots\beta_{n-p}}^{\alpha_1\dots\alpha_{n-p}} \quad (\text{B.37})$$

με το  $s$  να δηλώνει τον αριθμό των αρνητικών ιδιοτιμών της μετρικής (για παράδειγμα για την υπο-

γραφή  $(-, +, +, +)$  είναι  $s = 1$ , ενώ για την υπογραφή  $(+, -, -, -)$  είναι  $s = 3$ ) και το γενικευμένο kronecker δέλτα δίνεται από την σχέση:

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_{n-p}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{n-p}} = \det \begin{vmatrix} \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} & \dots & \delta_{\beta_{n-p}}^{\alpha_1} \\ \delta_{\beta_1}^{\alpha_2} & \dots & \delta_{\beta_{n-p}}^{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{\beta_1}^{\alpha_{n-p}} & \dots & \delta_{\beta_{n-p}}^{\alpha_{n-p}} \end{vmatrix}. \quad (\text{B.38})$$

Μία εφαρμογή της παραπάνω σχέσης είναι η  $\epsilon_{abcd} \epsilon^{abce} = -3! \delta_d^e$  που κάναμε χρήση στο κεφάλαιο 1.

## B.9 Διαφορικές μορφές

**Ορισμός B.9.1.** Μία διαφορική μορφή (differential form) τάξης  $r$  ή μία  $r$ -μορφή είναι ένας ολικός αντισυμμετρικός τανυστής τύπου  $(0, r)$ .

Με βάση αυτόν τον ορισμό, μία 0-μορφή είναι μία βαθμωτή συνάρτηση, μία 1-μορφή ένα συνεφαπτομενικό διάνυσμα, μία 2-μορφή ένας αντισυμμετρικός τανυστής τύπου  $(0, 2)$ , κλπ. Επίσης, αφού μία διαφορική μορφή είναι ένας τανυστής, δύναται να εκφραστεί μέσω μιας βάσης συντεταγμένων και άρα προκύπτει ο εξής ορισμός [87].

**Ορισμός B.9.2.** Μία πλήρως αντισυμμετρική βάση μιας  $r$ -μορφής ορίζεται μέσω του πλήρως αντισυμμετρικού wedge (εξωτερικού) γινομένου, που συμβολίζεται ως  $\wedge$ , των  $r$  σε πλήθος 1-μορφής βάση όπου γράφουμε:

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (\text{B.39})$$

Για παράδειγμα, μία 2-μορφή βάση γράφεται ως  $dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$  και μία 4-μορφή βάση σε ένα τετραδιάστατο manifold, μπορεί όμοια να οριστεί μέσω του συμβόλου Levi-Civita από την εξής σχέση:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = -\hat{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \equiv -\hat{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x. \quad (\text{B.40})$$

και αυτό γιατί, η βάση  $dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$  είναι αντισυμμετρική (εξ' ορισμού) και άρα μπορεί να εκφραστεί μέσω του συμβόλου Levi-Civita με την σύμβαση ότι  $\hat{\epsilon}^{0123} = -1$ . Περιοριζόμαστε, βέβαια στην περίπτωση όπου ο προσανατολισμός του όγκου  $dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ , είναι ένας όγκος με θετικό πρόσημο και φυσικά αναφερόμαστε σε manifolds που μπορούμε να ορίσουμε θετικές και αρνητικές τιμές, δηλαδή θεωρούμε προσανατολισμένα manifolds (όχι για παράδειγμα μία λωρίδα Mobius κλπ).

**Ορισμός B.9.3.** Εάν δηλώσουμε τον διανυσματικό χώρο των  $r$ -μορφών στο  $p \in \mathcal{M}$  με  $\Omega_p^r(\mathcal{M})$ , τότε ένα στοιχείο του  $\Omega_p^r(\mathcal{M})$  μπορεί να εκφραστεί σε μία βάση συντεταγμένων ως:

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (\text{B.41})$$

όπου  $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$  θεωρούνται πλήρως αντισυμμετρικά, λόγω της πλήρους αντισυμμετρικότητας της βάσης και ο παράγοντας  $\frac{1}{r!}$  είναι ένας όρος κανονικοποίησης [87]. Ο χώρος των λείων  $r$ -μορφών



πάνω στο  $\mathcal{M}$  συμβολίζεται ως  $\Omega^r(\mathcal{M})$  και για παράδειγμα ο χώρος  $\Omega^0(\mathcal{M})$  είναι το σύνολο όλων των λείων συναρτήσεων  $C^\infty(\mathcal{M})$ . Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί και ως :

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &= \frac{1}{r!} \omega_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r]} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &= \hat{\omega}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}\end{aligned}\quad (\text{B.42})$$

όπου φυσικά λόγω της αντισυμμετρικότητας, ισχύει και η σχέση με γενικευμένο kronecker δέλτα :

$$\omega_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r]} = \frac{1}{r!} \omega_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} \delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} . \quad (\text{B.43})$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, επειδή μία διαφορική μορφή είναι εντελώς αντισυμμετρική, μία  $r$ -μορφή σε  $D$  διαστάσεις (με  $r \leq D$ ) έχει,

$$\binom{D}{r} = \frac{D!}{r!(D-r)!} \quad (\text{B.44})$$

βαθμούς ελευθερίας. Έτσι, αν  $r = D$  τότε έχουμε μόνο μία συνιστώσα και το γεγονός ότι μία  $r$ -μορφή έχει τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας με μία  $(D-r)$ -μορφή παίζει σημαντικό ρόλο στις σχέσεις δυαδικότητας. Συγκεκριμένα, μας επιτρέπει να ορίσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ του χώρου των  $r$ -μορφών  $\Omega_p^r(\mathcal{M})$  και του χώρου των  $(D-r)$ -μορφών,  $\Omega_p^{(D-r)}(\mathcal{M})$  [87].

### B.9.1 Εξωτερικό γινόμενο

**Ορισμός B.9.4.** Το εξωτερικό γινόμενο μίας  $q$ -μορφής και μιας  $r$ -μορφής, ορίζεται ως μία απεικόνιση μέσω του wedge γινομένου  $\wedge : \Omega_p^q(\mathcal{M}) \times \Omega_p^r(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(\mathcal{M})$ . Αυτό σημαίνει ότι το wedge γινόμενο δημιουργεί μία νέα μορφή με την τάξη της να είναι το άθροισμα των τάξεων των δύο αρχικών που πολλαπλασιάζονται. Δηλαδή εάν  $A^{(q)}$  είναι μια  $q$ -μορφή και  $B^{(r)}$  είναι μια  $r$ -μορφή, τότε παίρνοντας το wedge γινόμενο μεταξύ των δύο αυτών μορφών λαμβάνουμε :

$$\begin{aligned}A^{(q)} \wedge B^{(r)} &= \frac{A_{[\mu_1 \dots \mu_q]} B_{\nu_1 \dots \nu_r}}{q! r!} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \wedge dx^{\nu_1} \dots \wedge dx^{\nu_r} \\ &= \frac{1}{q! r!} A_{[\mu_1 \dots \mu_q]} B_{\nu_1 \dots \nu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \wedge dx^{\nu_1} \dots \wedge dx^{\nu_r} \\ &\stackrel{(\text{B.43})}{=} \frac{1}{(q+r)!} \left( \frac{1}{q! r!} A_{\alpha_1 \dots \alpha_q} B_{\beta_1 \dots \beta_r} \delta_{\mu_1 \dots \mu_q \nu_1 \dots \nu_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta_1 \dots \beta_r} \right) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \wedge dx^{\nu_1} \dots \wedge dx^{\nu_r} \\ &= \frac{1}{(q+r)!} C_{\rho_1 \dots \rho_{q+r}} dx^{\rho_1} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_{q+r}} = C^{(q+r)} .\end{aligned}\quad (\text{B.45})$$

Το εξωτερικό γινόμενο έχει ορισμένες ιδιότητες. Έστω ότι  $\xi$  είναι μια  $q$ -μορφή,  $\eta$  μία  $r$ -μορφή και  $\omega$  μία  $s$ -μορφή, τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις :

$$\begin{aligned}\xi \wedge \xi &= 0, \quad \forall q \in \mathbb{N}_{2n+1} \\ \xi \wedge \eta &= (-1)^{(q r)} \eta \wedge \xi \\ (\xi \wedge \eta) \wedge \omega &= \xi \wedge (\eta \wedge \omega) .\end{aligned}\quad (\text{B.46})$$

## B.9.2 Εξωτερική παράγωγος

**Ορισμός B.9.5.** Η εξωτερική (exterior) παράγωγος μίας  $r$ -μορφής ορίζεται ως μία απεικόνιση  $d : \Omega^r(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{r+1}(\mathcal{M})$ . Αυτό σημαίνει ότι η διαφορίση μίας  $r$ -μορφής μέσω της εξωτερικής παραγωγού, δημιουργεί μία νέα μορφή τάξης  $r + 1$ . Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε μία  $r$ -μορφή  $\omega^{(r)}$  τότε θα είναι :

$$\begin{aligned}
 d\omega^{(r)} &= \frac{1}{r!} (\partial_\alpha \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}) dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\
 &\stackrel{(B.42)}{=} \frac{1}{r!} \partial_{[\alpha} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r]} dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\
 &\stackrel{(B.43)}{=} \frac{1}{(r+1)!} \left( \partial_{\nu_1} \omega_{\nu_2 \dots \nu_{r+1}} \frac{\delta^{\nu_1 \dots \nu_{r+1}}}{r!} \right) dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\
 &= \frac{1}{(r+1)!} F_{\rho_1 \dots \rho_{r+1}} dx^{\rho_1} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_{r+1}} = F^{(r+1)}. \tag{B.47}
 \end{aligned}$$

Ακόμη, η εξωτερική παράγωγος έχει δύο σημαντικές ιδιότητες:

- (i) Έστω  $\xi$  μια  $q$ -μορφή και  $\omega$  μια  $r$ -μορφή, τότε η εξωτερική παράγωγος ικανοποιεί έναν τροποποιημένο κανόνα του Leibniz ως εξής :

$$d(\xi \wedge \omega) = d\xi \wedge \omega + (-1)^q \xi \wedge d\omega \tag{B.48}$$

- (ii) η εξωτερική παράγωγος (όπου φυσικά μπορεί να ειπωθεί σαν τελεστής) είναι nilpotent, δηλαδή αν δράσουμε με την εξωτερική παράγωγο πάνω σε μία μορφή η οποία μπορεί να εκφραστεί ως  $b = da$ , τότε  $db = 0$ . Αλγεβρικά αυτό εκφράζεται μέσω της σχέσης :

$$d^2 = 0 \quad (\text{ή } d_{r+1} d_r = 0). \tag{B.49}$$

Κάθε μορφή  $b$  για την οποία ισχύει ότι  $db = 0$  καλείται κλειστή, ενώ κάθε μορφή  $b$  η οποία μπορεί να εκφραστεί ως  $b = da$  καλείται ‘ακριβής’ (exact). Όλες οι ‘ακριβές’ μορφές είναι κλειστές, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα [87].

## B.9.3 Δυαδικός Hodge τελεστής

Όπως σημειώσαμε παραπάνω, ο χώρος  $\Omega^r(\mathcal{M})$  είναι ισομορφικός στον  $\Omega^{m-r}(\mathcal{M})$ , σε ένα  $m$ -διάστατο manifold  $\mathcal{M}$ . Εάν το manifold είναι εφοδιασμένο με μία μετρική  $g$ , τότε μπορούμε να ορίσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των δύο χώρων, η οποία ονομάζεται Hodge  $\star$  πράξη (ή Hodge δυαδική πράξη).

**Ορισμός B.9.6.** Η Hodge  $\star$  πράξη είναι μία γραμμική απεικόνιση  $\star : \Omega^r(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{m-r}(\mathcal{M})$ , της οποίας η δράση πάνω σε μία βάση του  $\Omega^r(\mathcal{M})$  ορίζεται ως :

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{1}{(m-r)!} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \tag{B.50}$$

με  $\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m}$  να είναι ο levi-civita ταυνοστής.

**Ορισμός B.9.7.** Με χρήση της Hodge  $\star$  πράξης, μπορούμε να ορίσουμε το στοιχείο όγκου στο manifold ως εξής :

$$\star 1 = \frac{1}{m!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \stackrel{(B.40)}{=} -\frac{1}{m!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} \hat{e}^{\mu_1 \dots \mu_m} d^m x \stackrel{(B.37)}{=} \sqrt{|g|} d^m x, \quad (B.51)$$

και πάνω σε μία  $r$ -μορφή ενός  $m$ -διάστατου manifold η Hodge  $\star$  πράξη ικανοποιεί την ιδιότητα :

$$\star \star \omega = (-1)^{s+r(m-r)} \omega \quad (B.52)$$

με  $s$  να είναι ο αριθμός των αρνητικών ιδιοτιμών της μετρικής [87]. Από αυτή την σχέση μπορούμε να ορίσουμε και την αντίστροφη Hodge πράξη  $\star^{-1} : \Omega^{m-r}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^r(\mathcal{M})$  και θα είναι :

$$\star^{-1} = (-1)^{s+r(m-r)} \star. \quad (B.53)$$

Καταλαβαίνουμε ότι η χρήση των διαφορικών μορφών είναι αρκετά ισχυρή και μπορούμε να γενικεύουμε εύκολα σε περισσότερες διαστάσεις και για παράδειγμα οι γνωστοί τελεστές -πράξεις, όπως είναι η βαθμίδα, η απόκλιση και ο στροβιλισμός σε μορφή διαφορικών μορφών γράφονται :

$$\nabla f = df, \quad \text{div } X = \star d \star X, \quad \nabla \times X = \star dX. \quad (B.54)$$

## B.9.4 Ολοκλήρωση σε manifolds και θεώρημα Stokes

Έστω ένα  $m$ -διάστατο manifold  $\mathcal{M}$  το οποίο είναι προσανατολισμένο. Μία διαφορική μορφή μέγιστης τάξης, δηλαδή μια  $r$ -μορφή με  $r = \dim(\mathcal{M})$ , ονομάζεται top-μορφή. Ορίζουμε την ολοκλήρωση πάνω στο manifold μέσω της top-μορφής (διότι αυτή θα δώσει την μορφή (form) του όγκου (B.40)), ως εξής :

$$\begin{aligned} \int \omega &= \int \frac{1}{m!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \\ &= \int \frac{1}{m!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_m} (-\hat{e}^{\mu_1 \dots \mu_m}) d^m x \\ &= \int d^m x \sqrt{|g|} \left( \frac{\omega_{\mu_1 \dots \mu_m} (-\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_m})}{m!} \right). \end{aligned} \quad (B.55)$$

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι, γενικά όταν θέλουμε να ολοκληρώσουμε μια ποσότητα χρησιμοποιούμε ένα κατάλληλο μέτρο ολοκλήρωσης, ωστόσο στην ολοκλήρωση των διαφορικών μορφών δεν χρειάζεται διότι οι ίδιες μας το παρέχουν φορμαλιστικά και συμβολικά γράφουμε για μία την ολοκλήρωση μίας top-μορφής :

$$\int_{\mathcal{M}} \omega^{(m)} \quad (B.56)$$

όπου ο εκθέτης δηλώνει την τάξη της μορφής που ισούται με την διάσταση του manifold. Έτσι λαμβάνουμε μία φυσική σύνδεση μεταξύ των  $m$ -μορφών και των  $m$ -διάστατων επιφανειών. Δηλαδή, εάν  $m = 1$  θα έχουμε την ολοκλήρωση μίας 1-μορφής  $A_\mu$  πάνω σε μία worldline, αν  $m = 2$  θα έχουμε την ολοκλήρωση μίας 2-μορφής  $B_{\mu\nu}$  πάνω σε ένα worldsheet μιας χορδής κ.ο.κ. Επίσης αν θεωρήσουμε ότι ένα  $m$ -διάστατο manifold  $\mathcal{M}$ , έχει σύνορο και ότι η top-μορφή είναι ακριβής (exact), δηλαδή μπορεί να εκφραστεί ως  $\omega = d\xi$ , όπου  $\xi$  είναι μία μορφή τάξης  $(m - 1)$ , θα ισχύει

η εξής σχέση:

$$\int_{\mathcal{M}} d\xi = \int_{\partial\mathcal{M}} \xi \quad (\text{B.57})$$

που είναι το θεώρημα Stokes και ενοποιεί στην παραπάνω συμπαγή γραφή αρκετά αποτελέσματα από τον συνήθη διαφορικό λογισμό αλλά και τα γενικεύει, διότι για παράδειγμα δεν έχουμε καθορίσει εξ' αρχής πιο είναι το manifold. Οπότε, αν  $m = 1$  με  $\mathcal{M}$  να είναι το διάστημα  $I$  και εισάγοντας συντεταγμένες  $x$  στο  $\mathcal{M}$ , η εφαρμογή του παραπάνω τύπου δίνει:

$$\int_{\mathcal{M}} d\xi = \int_{x_i}^{x_f} \frac{d\xi}{dx} dx = \xi(x_f) - \xi(x_i) = \int_{\partial\mathcal{M}} \xi \quad (\text{B.58})$$

που φυσικά είναι το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Εάν τώρα επιλέξουμε το  $m = 2$  με  $\mathcal{M}$  να είναι ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  και εισάγουμε συντεταγμένες  $(x, y)$  στο  $\mathcal{M}$ , θα πάρουμε ότι:

$$\begin{aligned} \omega = d\xi &= \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) dx \wedge dy \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} d\xi = \int_{\mathcal{M}} \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\mathcal{M}} \xi = \int_{\partial\mathcal{M}} \xi_x dx + \xi_y dy \\ &\Rightarrow \boxed{\oint_C (A dx + B dy) = \iint_D (\partial_x B - \partial_y A) dx dy} \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

το οποίο είναι το θεώρημα του Green. Όμοια για  $m = 3$  μπορούμε να πάρουμε το θεώρημα της απόκλισης του Gauss που είναι:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \quad (\text{B.60})$$

και αμέσως καταλαβαίνουμε την ισχυρή και κομψή γραφή των διαφορικών μορφών που μας δίνουν την δυνατότητα να κάνουμε υπολογισμούς σε οποιοδήποτε manifold και να εξάγουμε χρήσιμα φυσικά και γεωμετρικά συμπεράσματα [87]. Για παράδειγμα θα θεωρήσουμε την περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού για να αναδείξουμε με αυτό το απλό παράδειγμα την σπουδαιότητα των διαφορικών μορφών. Έστω η 1-μορφή  $A = A_\nu dx^\nu$ , η οποία αντιπροσωπεύει το αβελιανό πεδίο βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού. Τότε, η ισχύς του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου βρίσκεται μέσω της εξωτερικής παραγώγου ως εξής:

$$F = dA = \partial_{[\mu} A_{\mu]} dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv \frac{1}{2!} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{B.61})$$

Αλλά γνωρίζουμε και την αναλλοιώτητα βαθμίδας που υπάρχει για το αβελιανό πεδίο βαθμίδας,  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  και σε μορφή διαφορικών μορφών πολύ απλά θα γίνει,  $A \rightarrow A + d\Lambda$ . Έτσι βλέπουμε αμέσως ότι το  $F$  είναι αναλλοίωτο στον μετασχηματισμό βαθμίδας αφού είναι:

$$F = dA = d(A + d\Lambda) = dA + d^2\Lambda = dA \quad (\text{B.62})$$

με χρήση βεβαίως της ιδιότητας  $d^2 = 0$ , όπως αναφέραμε και παραπάνω. Δηλαδή αμέσως παρατηρούμε ότι οι μετασχηματισμοί βαθμίδας έχουν βαθιά μαθηματικά θεμέλια και αναδύονται πολύ κομψά με την χρήση των διαφορικών μορφών. Επιπλέον μπορούμε να πούμε ότι η απουσία μαγνητικών μονοπόλων που προκύπτει από τις εξισώσεις του Maxwell ως  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , μπορεί να θεωρηθεί ως τοπολογική συνθήκη. Και αυτό γιατί από την ταυτότητα bianchi είναι  $dF = d^2A = 0$  και το

συμπέρασμα είναι ότι μία φυσική θεωρία μπορεί να περιέχει μαγνητικά μονόπολα, όμως σε μία μη τετριμμένη τοπολογία. Ενδεικτικά η δράση του ηλεκτρομαγνητισμού μπορεί να γραφτεί ως :

$$\mathcal{S}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x = -\frac{1}{2} \int \mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F} \quad (\text{B.63})$$

και ξανά το συμπέρασμα είναι ότι η χρήση των διαφορικών μορφών μας επιτρέπει να γενικεύουμε την φυσική περιγραφή μας στον γενικότερο τοπολογικό χώρο που μπορούμε, καθιστώντας τις εξισώσεις μας τοπολογικές, δηλαδή ανεξάρτητα της μετρικής στο πλαίσιο που μας απασχολεί (η χρήση της **έντονης γραφής** κατά σύμβαση θα δηλώνει διαφορικές μορφές).

# Bibliography

- [1] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. Bennett, J. Dunkley, M. Nolta, M. Halpern, R. Hill, N. Odegard *et al.*, “Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, no. 2, p. 19, 2013.
- [2] P. Ade and et al. [Planck Collaboration], “Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.*, vol. 571, p. A16, 2014.
- [3] European Space Agency (ESA), “Planck reveals an almost perfect universe,” ESA website, n.d., [https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/Planck/Planck\\_reveals\\_an\\_almost\\_perfect\\_Universe](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_reveals_an_almost_perfect_Universe).
- [4] Nature Chemistry Community, “Simple or complicated? what do astronomers think about lithium?” Nature Chemistry Community website, n.d., <https://chemistrycommunity.nature.com/posts/49637-simple-or-complicated-what-do-astronomers-think-about-lithium>.
- [5] E. G. M. Ferreira, “Ultra-light dark matter,” *Astronomy & Astrophysics Review*, vol. 29, no. 1, p. 7, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00159-021-00135-6>
- [6] APS Physics, “Pushing the limits of neutrino oscillations,” *Physics*, vol. 11, p. 48, 2018. [Online]. Available: <https://physics.aps.org/articles/v11/48>
- [7] F. P. Schuller, “The we-heraeus international winter school on gravity and light,” 2015.
- [8] L. Iorio, “Editorial for the special issue 100 years of chronogeometrodynamics: The status of the einstein’s theory of gravitation in its centennial year,” *Universe*, vol. 1, no. 1, pp. 38–81, apr 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390%2FUniverse1010038>
- [9] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 17, no. 1, jun 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.12942%2Fllr-2014-4>
- [10] S. Perlmutter and et al. [Supernova Cosmology Project], “Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.*, vol. 517, pp. 565–586, 1999.
- [11] A. G. Riess and et al. [Supernova Search Team], “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.*, vol. 116, pp. 1009–1038, 1998.

- [12] N. Aghanim and et al. [Planck], “Planck 2018 results. vi. cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.*, vol. 641, p. A6, 2020.
- [13] N. E. Mavromatos, “Torsion in string-inspired cosmologies and the universe dark sector,” *Universe*, vol. 7, no. 12, p. 480, dec 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390%2Funiverse7120480>
- [14] G. Calcagni, *Classical and quantum cosmology*. Springer, 2017.
- [15] B. P. Abbott, et al. [LIGO Scientific, and Virgo], “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>
- [16] K. Akiyama and et al. [Event Horizon Telescope], “First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole,” *Astrophys. J.*, vol. 875, no. 1, p. L1, 2019.
- [17] D. Psaltis and et al. [Event Horizon Telescope], “Gravitational test beyond the first post-newtonian order with the shadow of the m87 black hole,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 125, no. 14, p. 141104, 2020.
- [18] P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley, “Dilatonic black holes in higher curvature string gravity,” *Physical Review D*, vol. 54, no. 8, pp. 5049–5058, oct 1996. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.54.5049>
- [19] M. Zumalacá rregui and J. García-Bellido, “Transforming gravity: From derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the horndeski lagrangian,” *Physical Review D*, vol. 89, no. 6, mar 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.89.064046>
- [20] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, “Exploring gravitational theories beyond horndeski,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2015, no. 02, pp. 018–018, feb 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2015%2F02%2F018>
- [21] D. Ayzenberg and N. Yunes, “Slowly rotating black holes in einstein-dilaton-gauss-bonnet gravity: Quadratic order in spin solutions,” *Physical Review D*, vol. 90, no. 4, aug 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.90.044066>
- [22] T. P. Sotiriou and S.-Y. Zhou, “Black hole hair in generalized scalar-tensor gravity,” *Physical Review Letters*, vol. 112, no. 25, jun 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.112.251102>
- [23] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “Black holes in scalar-tensor gravity,” *Physical Review Letters*, vol. 108, no. 8, feb 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.108.081103>
- [24] R. Jackiw and S.-Y. Pi, “Chern-simons modification of general relativity,” *Physical Review D*, vol. 68, no. 10, nov 2003. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.68.104012>

- [25] S. Alexander and N. Yunes, “Chern–simons modified general relativity,” *Physics Reports*, vol. 480, no. 1-2, pp. 1–55, aug 2009. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2009.07.002>
- [26] C. Kiefer, *Quantum Gravity*, ser. International Series of Monographs on Physics, 2004, vol. 124.
- [27] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory Vols. 1 and 2: 25th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2012, *Vol. 1*: Available at <https://doi.org/10.1017/CBO9781139248563>. *Vol. 2*: Available at <https://doi.org/10.1017/CBO9781139248570>.
- [28] J. Polchinski, *String Theory: Vol. 1 - An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge University Press, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511816079>
- [29] —, *String Theory: Vol. 2 - Superstring Theory and Beyond*. Cambridge University Press, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511618123>
- [30] L. Susskind, “The anthropic landscape of string theory,” 2003.
- [31] C. Rovelli, “Loop quantum gravity,” *Living Rev. Rel.*, vol. 1, p. 1, 1998, and references therein.
- [32] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Background independent quantum gravity: a status report,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21, no. 15, pp. R53–R152, jul 2004. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F21%2FR15%2Fr01>
- [33] M. Bojowald, “Loop quantum cosmology,” *Living Rev. Rel.*, vol. 8, p. 11, 2005, and references therein.
- [34] A. Ashtekar and P. Singh, “Loop quantum cosmology: a status report,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, no. 21, p. 213001, sep 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F28%2F21%2F213001>
- [35] D. Oriti, “Space-time geometry from algebra: Spin foam models for nonperturbative quantum gravity,” *Rept. Prog. Phys.*, vol. 64, pp. 1703–1756, 2001, and references therein.
- [36] A. Perez, “The spin-foam approach to quantum gravity,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 16, no. 1, feb 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.12942%2Flrr-2013-3>
- [37] D. Oriti, “The group field theory approach to quantum gravity,” 2007.
- [38] B. Bahr, B. Dittrich, and J. P. Ryan, “Spin foam models with finite groups,” 2011.
- [39] V. Bonvin, F. Courbin, S. H. Suyu, P. J. Marshall, C. E. Rusu, D. Sluse, M. Tewes, K. C. Wong, T. Collett, C. D. Fassnacht, T. Treu, M. W. Auger, S. Hilbert, L. V. E. Koopmans, G. Meylan, N. Rumbaugh, A. Sonnenfeld, and C. Spiniello, “Holicow – v. new cosmograil time delays of he 0435-1223: H0 to 3.8 per cent precision from strong lensing in a flat  $\lambda$ cdm model,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 465, no. 4, pp. 4914–4930, Nov. 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1093/mnras/stw3006>



- [40] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. Macri, B. Bucciarelli, M. G. Lattanzi, J. W. MacKenty, J. B. Bowers, W. Zheng, and A. V. Filippenko, “Milky way cepheid standards for measuring cosmic distances and application to gaia dr2: Implications for the hubble constant,” *Astrophysical Journal*, vol. 861, no. 2, p. 126, 2018.
- [41] E. Di Valentino, L. A. Anchordoqui, O. Akarsu, Y. Ali-Haimoud, L. Amendola, N. Arendse, M. Asgari, M. Ballardini, S. Basilakos, E. Battistelli, and et al., “Cosmology intertwined iii:  $f\sigma_8$  and  $s_8$ ,” *Astroparticle Physics*, vol. 131, p. 102604, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016%2Fj.astropartphys.2021.102604>
- [42] E. D. Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F. Mota, A. G. Riess, and J. Silk, “In the realm of the hubble tension—a review of solutions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 38, no. 15, p. 153001, jul 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F1361-6382%2Fac086d>
- [43] I. L. Shapiro and J. Solà, “The scaling evolution of the cosmological constant,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2002, no. 02, pp. 006–006, feb 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F2002%2F02%2F006>
- [44] A. Gómez-Valent, J. Solà, and S. Basilakos, “Dynamical vacuum energy in the expanding universe confronted with observations: a dedicated study,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2015, no. 01, pp. 004–004, jan 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2015%2F01%2F004>
- [45] J. S. Peracaula, A. Gómez-Valent, J. de Cruz Perez, and C. Moreno-Pulido, “Running vacuum against the  $h_0$  and  $\sigma_8$  tensions,” *EPL*, vol. 134, no. 1, p. 19001, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/134/19001>
- [46] J. Magueijo, T. G. Zlosnik, and T. W. B. Kibble, “Cosmology with a spin,” *Physical Review D*, vol. 87, no. 6, mar 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.87.063504>
- [47] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, “Gravitational anomalies,” *Nuclear Physics B*, vol. 234, no. 2, pp. 269–330, 1984.
- [48] S. Basilakos, N. E. Mavromatos, and J. S. Peracaula, “Gravitational and chiral anomalies in the running vacuum universe and matter-antimatter asymmetry,” *Physical Review D*, vol. 101, no. 4, feb 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.101.045001>
- [49] N. E. Mavromatos and J. S. Peracaula, “Inflationary physics and trans-planckian conjecture in the stringy running vacuum model: from the phantom vacuum to the true vacuum,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 136, no. 11, nov 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140%2Fepjp%2Fs13360-021-02149-6>
- [50] —, “Stringy-running-vacuum-model inflation: from primordial gravitational waves and stiff axion matter to dynamical dark energy,” *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 230, no. 9, pp. 2077–2110, jun 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140%2Fepjs%2Fs11734-021-00197-8>

- [51] J. Sola and H. Yu, “Particle and entropy production in the running vacuum universe,” 2020.
- [52] M. de Cesare, N. E. Mavromatos, and S. Sarkar, “Tree level leptogenesis from kalb-ramond torsion background,” 2015.
- [53] T. Bossingham, N. E. Mavromatos, and S. Sarkar, “Leptogenesis from heavy right-handed neutrinos in CPT violating backgrounds,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, no. 2, feb 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-018-5587-5>
- [54] M. J. Duncan, N. Kaloper, and K. A. Olive, “Axion hair and dynamical torsion from anomalies,” *Nuclear Physics B*, vol. 387, no. 1, pp. 215–235, 1992.
- [55] O. Chandí a and J. Zanelli, “Topological invariants, instantons, and the chiral anomaly on spaces with torsion,” *Physical Review D*, vol. 55, no. 12, pp. 7580–7585, jun 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.55.7580>
- [56] P. B. Pal, “Representation-independent manipulations with dirac matrices and spinors,” 2015.
- [57] T. Frankel, *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge university press, 2011.
- [58] C. Hull, “Anomalies, ambiguities and superstrings,” *Physics Letters B*, vol. 167, no. 1, pp. 51–55, 1986.
- [59] N. E. Mavromatos, “A note on the atiyah-singer index theorem for manifolds with totally antisymmetric h torsion,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 21, no. 10, p. 2279, 1988.
- [60] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, “Gravitation, gauge theories and differential geometry,” *Physics reports*, vol. 66, no. 6, pp. 213–393, 1980.
- [61] N. E. Mavromatos, “Geometrical origins of the universe dark sector: string-inspired torsion and anomalies as seeds for inflation and dark matter,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 380, no. 2222, mar 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1098%2Frsta.2021.0188>
- [62] J. Bedford, “An introduction to string theory,” 2012.
- [63] A. Wipf, “Path integrals in quantum and statistical mechanics,” *Statistical Approach to Quantum Field Theory: An Introduction*, pp. 5–23, 2013.
- [64] S. B. Giddings and A. Strominger, “Axion induced topology change in quantum gravity and string theory,” pp. 890–907, 1988.
- [65] N. E. Mavromatos, “Non-hermitian yukawa interactions of fermions with axions: potential microscopic origin and dynamical mass generation,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2038, no. 1, p. 012019, oct 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F1742-6596%2F2038%2F1%2F012019>

- [66] S. Basilakos, N. E. Mavromatos, and J. S. Peracaula, “Quantum anomalies in string-inspired running vacuum universe: Inflation and axion dark matter,” *Physics Letters B*, vol. 803, p. 135342, apr 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2020.135342>
- [67] T. Bossingham, N. E. Mavromatos, and S. Sarkar, “The role of temperature dependent string-inspired CPT violating backgrounds in leptogenesis and the chiral magnetic effect,” *The European Physical Journal C*, vol. 79, no. 1, jan 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-019-6564-3>
- [68] J. E. Kim, “Phys. rept.” vol. 150, pp. 1–177, 1987.
- [69] J. E. Kim and G. Carosi, “Rev. mod. phys.” vol. 82, pp. 557–602, 2010, erratum: Rev. Mod. Phys. 91, 049902 (2019) ([Preprint 0807.3125](#)).
- [70] S. L. Adler, Phys. Rev. 177, 2246 (1969); J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. A60, 47 (1969).
- [71] L. D. Luzio, M. Giannotti, E. Nardi, and L. Visinelli, “The landscape of QCD axion models,” *Physics Reports*, vol. 870, pp. 1–117, jul 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2020.06.002>
- [72] J. Alexandre and N. E. Mavromatos, “On the consistency of a non-hermitian yukawa interaction,” *Physics Letters B*, vol. 807, p. 135562, aug 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2020.135562>
- [73] J. Alexandre, N. E. Mavromatos, and A. Soto, “Dynamical majorana neutrino masses and axions i,” *Nuclear Physics B*, vol. 961, p. 115212, dec 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016%2Fj.nuclphysb.2020.115212>
- [74] A. Arvanitaki and S. Dubovsky, “Exploring the string axiverse with precision black hole physics,” *Physical Review D*, vol. 83, no. 4, feb 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.83.044026>
- [75] A. Arvanitaki, M. Baryakhtar, and X. Huang, “Discovering the QCD axion with black holes and gravitational waves,” *Physical Review D*, vol. 91, no. 8, apr 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.91.084011>
- [76] A. Arvanitaki, M. Baryakhtar, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, and R. Lasenby, “Black hole mergers and the QCD axion at advanced LIGO,” *Physical Review D*, vol. 95, no. 4, feb 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.95.043001>
- [77] G. G. Raffelt, “Astrophysical axion bounds,” in *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 51–71. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007%2F978-3-540-73518-2\\_3](https://doi.org/10.1007%2F978-3-540-73518-2_3)
- [78] D. J. Marsh, “Axion cosmology,” *Physics Reports*, vol. 643, pp. 1–79, jul 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2016.06.005>

- [79] G. G. di Cortona, E. Hardy, J. P. Vega, and G. Villadoro, “The QCD axion, precisely,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2016, no. 1, jan 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007%2Fjhep01%282016%29034>
- [80] M. Berg, E. Pajer, and S. Sjors, *Phys. Rev. D* 81 (2010) 103535; For a review of axion inflation see: E. Pajer and M. Peloso, *Class. Quant. Grav.* 30 (2013) 214002.
- [81] A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, N. Kaloper, and J. March-Russell, “String axiverse,” *Physical Review D*, vol. 81, no. 12, jun 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.81.123530>
- [82] L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, *Phys. Rev. D* 95 (2017) 043541; Y. V. Stadnik and V. V. Flambaum, *Phys. Rev. D* 89 (2014) 043522; *Phys. Rev. Lett.* 115 (2015) 201301; A. Aoki and J. Soda, *Int. J. Mod. Phys. D* 26 (2016) 1750063; C. Abel et al., *Phys. Rev. X* 7 (2017) 041034; P. W. Graham, D. E. Kaplan, J. Mardon, S. Rajendran, W. A. Terrano, L. Trahms, and T. Wilkason, *Phys. Rev. D* 97 (2018) 055006; Z. Ahmed et al., [arXiv:1803.11306 \[hep-ex\]](https://arxiv.org/abs/1803.11306), and references therein.
- [83] S. Liberati, “Advanced general relativity and quantum field theory in curved spacetimes,” 2020.
- [84] V. A. Chiotellis, “Inflation without inflaton fields in a cosmological model with gravitational anomalies,” Master’s thesis, National Technical University of Athens, 2022, uRI: <https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/handle/123456789/55350>.
- [85] N. Chatzifotis, P. Dorlis, N. E. Mavromatos, and E. Papantonopoulos, “Scalarization of chern-simons-kerr black hole solutions and wormholes,” *Physical Review D*, vol. 105, no. 8, apr 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.105.084051>
- [86] Ευσταθίου, Αθανάσιος, “Εισαγωγή στην επανακανονικοποίηση θεωριών πεδίου - Θεωρία  $\varphi^3$  στις 6 διαστάσεις,” 2022, uRI: <https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/handle/123456789/57718>.
- [87] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2003.
- [88] Αρβανιτογεώργος, Α., *Γεωμετρία πολλαπλοτήτων [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015. [Online]. Available: <https://hdl.handle.net/11419/146>
- [89] D. Tong, “Lectures on general relativity,” *Lecture notes, DAMTP Cambridge*, 2019.