Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Συνοριακά προβλήματα βαθμοελαστικότητας με εμπλοκή επιφανειακής ενέργειας

Συγγραφέας:
Κατσαμπάκος Αντώνιος

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος

20 Ιουνίου 2023

Περιεχόμενα

Λίστα Σχημάτων

Τριμελής Εξεταστική επιτροπή

Αρβανιτάκης Αλέξανδρος, Επίκουρος Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε , Ε.Μ.Π

Δούκα Ευανθία, Επίκουρη Καθηγήτρια Σ.Ε.Φ.Μ.Ε , Ε.Μ.Π

Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος, Καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε , Ε.Μ.Π

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ.Χαραλαμπόπουλο Αντώνιο για την αμέριστη συμπαράσταση του τόσο στο πλαίσιο της διπλωματικής αλλά και με τις χρήσιμες και πολύτιμες συμβουλές που μου προσέφερε για την συνέχεια της ακαδημαϊκής μου πορείας.Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για όλη της την προσφορά και υπομονή καθ΄ όλη την ακαδημαϊκη μου σταδιοδρομία.

Περίληψη

Το 1964-1965 ο Mindlin δημοσίευσε ένα πρωτοποριακό έργο στην μηχανική των συνεχών μέσων και συγκεκριμένα στην ελαστικότητα.Μέχρι εκείνη την χρονική στιμγή η θεωρία ελαστικότητας θεωρούσε ένα ομογενές και συνεχές μέσο για να μοντελοποιήσει τα προβλήματα μηχανικής υλικών , όμως η έρευνα του Mindlin ως εξέλιξη της εργασίας του Toupin , θεώρησε υλικά σώματα τα οποία δεν ήταν πλέον καθολικά ομογενή και συνεχή αλλά είχαν κάποιου είδους μικροδομή η οποία μπορούσε να έχει σχετική κίνηση διαφορετική από αυτή της μακροσκοπικής κλίμακας ,έτσι γεννήθηκε η βαθμοελαστική θεωρία της μηχανικής των υλικών. Αυτή η διόρθωση στην θεωρία έφερε σοβαρά προβλήματα στην μαθηματική αλλά και φυσική σκοπιά της. Στην διπλωματική αυτή εργασία κάνουμε μια ανασκόπηση κάποιων σημαντικών αποτελεσμάτων στην επίλυση τέτοιων βαθμοελαστικών συνοριακών προβλήματων και αναλύουμε εκτενέστερα την θεωρία σε προβλήματα με επιφανειακή μικρομηχανική ενέργεια ,βρίσκοντας εν τέλη τις νέες συνοριακές συνθήκες αλλά και τις νέες εξίσωσεις ισορροπίας για αυτήν την νέα θεώρηση.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρουμε κάποια σημαντικά εργαλεία , θεωρήματα , ορισμούς και τύπους που θα ήταν καλό ο αναγνώστης να γνωρίζει για την συνέχεια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται η θεωρία και κάποια παραδείγματα της εφαρμογής της θεωρίας του λογισμού των μεταβολών στην εξαγωγή συνορικών συνθηκών αλλά και των εξισώσεων ισορροπίας ενός συνεχούς συστήματος(ή διακριτού).Στο τέλος αναφέρουμε την Αρχη του Hamilton ως συνέπεια όλων των παραπάνω αλλά και για μια καλύτερη σύνδεση των προηγούμενων μαθηματικών ορισμών και οντοτήτων με τον φυσικό κόσμο.

Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τα συνοριακά προβλήματα της βαθμοελαστικότητας ξεκινώντας από την απλούστερη περίπτωση μικροδομής ,

παρουσιάζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας αλλά και τις συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Εξαγάγουμε τις συνορικές συνθήκες αλλά και τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος αναλυτικά με τις μεθόδους της παραγράφου 2 και τέλος παρουσιάζεται ένας τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων και την διαδικασία που κάποιος μπορεί να ακολουθήσει έτσι ώστε να λύση το απλούστερο πρόβλημα κάμψης δοκού με μικροδομή αλλά και η πορεία σκέψης καθώς και τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσει κανείς εάν επιθυμεί να δουλέψει με πιο σύνθετα προβλήματα βαθμοελαστικότητας , όπως αυτό με την επιφανειακή μικρομηχανική ενέργεια.

Στο παράρτημα δίνονται κάποια αποτελέσματα της συγκεκριμένης εργασίας αλλά και μια γενικότερη θεωρία για ελλειπτικά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων για τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος που μελετήθηκε.

Abstract

In 1964-1965 Mindlin published a groundbreaking paper in continuum mechanics and specifically in elasticity. Until that time , in classical elasticity , the analyzed continuum was presupposed as a locally homogeneous media , but Mindlin's research after the work done by Toupin , propossed a new theory where bodies were not homogeneous but had microstructure that could in move independently from the macroscopic movement of the elastic body, the gradient elastic theory. That correction to the existing theory led to extreme difficulty to theoretically or experimentally solve the problems that rose but also in the mathematical and physical theory behind it. In this undergraduate thesis we present some results concerning the analytical solutions of gradient elastic problems of the simplest form and expand our theory in order to find the boundary conditions and the equation of equilibrium of a gradient elastic body with surface energy.

In the first chapter a few useful tools ,theorems and identities are presented that the reader should pay attention to throughout his reading.

In the second chapter useful tools from calculus of variations are presented and some examples of how boundary conditions and the equation of motion are derived in a continuous system(or discrete).In the end we present Hamilton's principle , a useful idea from a physical point of view that justifies the work done before and after.

Finally, in chapter number three we discuss boundary value problems in gradient elasticity theory , starting with the simplest form of microstructure presenting the equations of equilibrium and the boundary conditions.We derive analytically the equations of equilibrium of a gradient elastic material with surface energy and lastly the thought process and the analytical solution of the bending of a plain strain gradient elastic rectangle

in order to give to the reader a first step towards solving these king of problems.

In the appendix specific theory of elliptic PDEs is given in order to have a broader view of the mathematical nature of the problem but also results that rose during the writing of this thesis and for a better idea of the complex mathematical expressions given in the text.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

1.1 Θεώρημα αναπαράστασης Helmholtz

Θεώρημα 1 (Θεώρημα αναπαράστασης Helmholtz)**.** *Έστω $F(r)$ ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο με συνεχείς πρώτες παραγώγους. Τότε το $F(r)$ μπορεί να γραφεί , μοναδικά , ως άθροισμα της απόκλισης ενός βαθμωτού δυναμικού $\phi(r)$ και τον στροβλισμό ενός διανυσματικού δυναμικού $\boldsymbol{\alpha}(r)$.*

Απόδειξη: Αρχικά είναι γνωστό ότι :

$$\nabla^2(\frac{1}{R}) = -4\pi\delta(R) \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_V F(r^{'})\delta(r - r^{'})\, d^3r^{'} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V F(r^{'})\nabla^2(\frac{1}{R})\, d^3r^{'} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_V \frac{F(r^{'})}{R}\, d^3r^{'} \end{aligned} \tag{1.2}$$

την ολοκλήρωση σε κάθε περιοχή V που περιέχει το σημείο $\mathbf{r}$. Χρησιμοποιόντας τώρα την ταυτότητα $\nabla\times\nabla\times = \nabla\nabla\cdot - \nabla^2$ η εξίσωση (1.2) μπορεί να γραφεί ως

$$F(r) = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V \frac{F(r^{'})}{R}\, d^3r^{'} - \frac{1}{4\pi}\nabla\nabla\cdot\int_V \frac{F(r^{'})}{R}\, d^3r^{'} \tag{1.3}$$

Θεωρούμε αρχικά τον όρο της απόκλισης(divergence) που εμφανίζεται σε αυτήν την έκφραση. Επειδή ο διανυσματικός διαφορικός τελεστής ∇ δεν δρα πάνω στις κύριες συντεταγμένες , έχουμε

$$\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int_V \frac{F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} = \frac{1}{4\pi}\int_V F(r^{'})\cdot\nabla\frac{1}{R}\,d^3r^{'} \tag{1.4}$$

Επιπλέον η υπο ολοκλήρωση έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$F(r^{'})\cdot\nabla\frac{1}{R} = -F(r^{'})\cdot\nabla^{'}(\frac{1}{R}) = -\nabla^{'}\cdot(\frac{F(r^{'})}{R}) + \frac{1}{R}\nabla^{'}\cdot F(r^{'}) \tag{1.5}$$

όπου $\nabla^{'} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x^{'}} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y^{'}} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z^{'}}$ αντικαθιστώντας την (1.5) στην (1.4) και εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης προκύπτει

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int_V \frac{F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} &= -\frac{1}{4\pi}\int_V \nabla^{'}\cdot\frac{F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla^{'}F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{1}{R}F(r^{'})\cdot\hat{n}\,d^2r^{'} + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla^{'}F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} \\ &= \phi(r)\end{aligned} \tag{1.6}$$

η οποία είναι η επιθυμητή μορφή του βαθμωτού δυναμικού $\phi(r)$ για το διανυσματικό πεδίο F(r). Το S είναι η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V και περιέχει το σημείο r.

Όσον αφορά τον στροβιλισμό που εμφανίζεται στην εξίσωση (1.3) έχουμε ομοίως το εξής

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V \frac{F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} &= -\frac{1}{4\pi}\int_V F(r^{'})\times\nabla\frac{1}{R}\,d^3r^{'} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V F(r^{'})\times\nabla^{'}\frac{1}{R}\,d^3r^{'}\end{aligned} \tag{1.7}$$

επιπλέον η τελευταία υπο ολοκλήρωση ποσότητα που εμφανίζεται στην σχέση (1.7) μπορεί να εκφραστεί και ως

$$F(r^{'})\times\nabla^{'}(\frac{1}{R}) = \frac{\nabla^{'}\times F(r^{'})}{R} - \nabla^{'}\times\frac{F(r^{'})}{R} \tag{1.8}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V \frac{F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} &= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla^{'}\times F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} - \frac{1}{4\pi}\int_V \nabla^{'}\times\frac{F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla^{'}\times F(r^{'})}{R}\,d^3r^{'} + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{1}{R}F(r^{'})\times\hat{n}\,d^2r^{'} \\ &= \boldsymbol{\alpha}(r)\end{aligned} \tag{1.9}$$

το οποίο είναι η επιθυμητή μορφή για το διανυσματικό δυναμικό.

Από τις προηγούμενες σχέσεις δείξαμε λοιπόν ότι κάθε διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας (αρνητικής) απόκλισης ενός βαθμωτού δυναμικού $\phi(r)$ καιτου στροβιλισμού ενός διανυσματικού δυναμικού $\boldsymbol{\alpha}(r)$.

$$F(r) = -\nabla\phi(r) + \nabla\times\boldsymbol{\alpha}(r) \tag{1.10}$$

1.2 Ταυτότητες του Green

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε συνοπτικά δυο γνωστές ταυτότητες(θεωρήματα) του απειροστικού λογισμού , οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν σε κάποια σημεία στη συνέχεια αυτής της διπλωματικής.

Έστω Ω ένα ανοικτό,συνεκτικό φραγμένο υποσύνολο του R^3 με ομαλό σύνορο. Το **n** είναι το κάθετο διάνυσμα πάνω στην επιφάνεια του χωρίου και u,v κατάλληλες συναρτήσεις επαρκώς παραγωγίσιμες, τότε έχουμε:

Πρώτη ταυτότητα του Green

$$\iiint_\Omega \nabla v\cdot\nabla u dV + \iiint_\Omega v\Delta u dV = \iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dA \tag{1.11}$$

Δεύτερη ταυτότητα του Green

$$\iiint_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)dV = \iint_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}})dA \tag{1.12}$$

Σαφώς οι τύποι αυτοί θα μπορούσαν να γενικευτούν σε περισσότερες διαστάσεις(ή και άλλους χώρους συναρτήσεων) και όχι μόνο στον R^3 με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω.

1.3 Τανυστές

1.3.1 Περιγραφή και βασικές ιδιότητες

Ένα βαθμωτό πεδίο περιγράφει μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ ενός μοναδικού αριθμού και ενός σημείου. Ένα ν-διάστατο διανυσματικό πεδίο περιγράφεται από μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ ν αριθμών και ενός σημείου. Αν γενικεύσουμε αυτό το σκεπτικό θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε δυάδες ή τριάδες ν-αριθμών κ.λπ. με ένα σημείο. Όταν αυτοί οι αριθμοί υπακούν κάποιους συγκεκριμένους κανόνες που αφορούν την δυνατότητα μετασχηματισμού τους από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο τότε μιλάμε για τανυστικά πεδία. Γενικά τα βαθμωτά πεδία αποτελούν τανυστές τάξης μηδέν ενώ τα διανυσματικά , τανυστές τάξης ένα.

Πριν συνεχίσουμε στους ορισμούς των τανυστών θα ορίσουμε κάποιες συμβάσεις για την συνέχεια της ανάγνωσης. Αρχικά στη χρήση των τανυστών οι δείκτες i,j,k... θα παίρνουν τιμές 1,2 ή 3 αφού στο πλαίσιο της μηχανικής των υλικών βρισκόμαστε στον 3-διάστατο χώρο.

1.3.2 Συμβολισμοί με δείκτες και συμβάσεις

Κάθε τανυστής συμβολίζεται με ένα γράμμα καθώς και με ένα σύνολο δεικτών.

Για παράδειγμα το διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ με τις σντεταγμένες του εκφρασμένες στο κύριο σύστημα συντεταγμένων, εκφράζεται και ως $a_i \ : \ i = 1,2,3$ ή ένας πίνακας $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ γράφεται και ως $b_{ij} : i,j = 1,2,3$ συμβολίζοντας έτσι το κάθε στοιχείο του πίνακα.

Κατά αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε ότι ένας τανυστής a_i αποτελείται από 3 ποσότητες , ένας τελεστής b_{ij} αποτελείται από 3^2 ποσότητες και ομοίως ένας τανυστής με n δείκτες αποτελείται από 3^n ποσότητες εφόσον μας απασχολεί ο τρισδιάστατος χώρος.

Σύμβαση αθροίσεως:Όταν ο δείκτης εμφανίζεται δυο φορές στον ίδιο όρο , αυτό σημαίνει άθροισμα των όρων που προκύπτουν, καθώς ο επαναλαμβανόμενος δείκτης λαμβάνει διαδοχικά τις τιμές 1,2,3. Κανένας δείκτης δεν είναι επιτρεπτό να επαναληφθεί περισσότερο από μια φορά. Για παράδειγμα :

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3$$

Σχόλιο:Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες ονομάζονται βωβοί(dummy) αφού είναι αδιάφορο το γράμμα που τους εκφράζει.

Σύμβαση παραγωγίσεων : Ο δείκτης κόμμα (,) που ακολουθείται από έναν δείκτη i,j,k... υποδεικνύει μερική παράγωγο ως προς $x_i, x_j, x_k, \ldots$. Για παράδειγμα : $a_{i,j} = \frac{\partial a}{\partial x_j}$.

1.3.3 Ορισμοί τανυστών

Τανυστής $1^{\eta\varsigma}$ τάξεως(ή διάνυσμα):είναι το μέγεθος που ορίζεται από $3^1 = 3$ βαθμωτές ποσότητες (τις συνιστώσες του),οι οποίες μετασχηματίζονται από ένα σύστημα αξόνων x_i σε ένα άλλο $x_i^{'}$ υπακούοντας στον ακόλουθο νόμο μετασχηματισμού:

$$A_i^{'} = a_{ij} A_j$$

όπου A_i :οι συνιστώσες του τανυστή στο σύστημα x_i,

$A_i^{'}$: συνιστώσες τανυστή στο σύστημα $x_i^{'}$,

a_{ij}:συνημίτονα κατευθύνσεως.

Τανυστής $2^{\alpha\varsigma}$ τάξεως: είναι το μέγεθος που ορίζεται από $3^2 = 9$ βαθμωτές ποσότητες(τις συνιστώσες του) A_{ij} που αναφέρονται σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς x_i και οι οποίες μετασχηματίζονται σε ένα νέο σύστημα αναφοράς $x_i^{'}$ με βάση τον νόμο

$$A_{ij}^{'} = a_{ik} a_{jl} A_{kl}$$

Τανυστής ν-οστής τάξεως: Ομοίως ορίζονται και οι τανυστές ν-οστής τάξεως.

Παραδείγματα τανυστών που θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια αποτελούν μεταξή άλλων το δέλτα του Kronecker , ο τανυστής τάσης και ο τανυστής τροπής .

Δέλτα του Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Σύμβολο Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, \text{ αν δυο ή τρία από τα i,j,k είναι ίδια} \\ 1, \text{ αν τα i,j,k είναι κυκλική εναλλαγή των 1,2,3} \\ -1, \text{ αν τα i,j,k είναι κυκλική εναλλαγή των 3,2,1} \end{cases}$$

Απόκλιση και στροβιλισμός με χρήση δεικτών

$$\nabla \cdot A = A_{i,i}$$
$$\nabla \times A = \epsilon_{ijk} A_{k,j}$$

1.3.4 Ταυτότητες του Brand

Πριν ορίσουμε τις ταυτότητες του Brand(1966) ορίζουμε κάποιους συμβολισμούς.

Ορίζουμε την διπλή κα τριπλή τελεία ως το δυαδικό και το τριαδικό εσωτερικό γινόμενο αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} (a \otimes b) : (c \otimes d) &= (b \cdot c)(a \cdot d) \\ (a \otimes b \otimes m) \vdots (l \otimes c \otimes d) &= (m \cdot l)(b \cdot c)(a \cdot d) \end{aligned} \tag{1.13}$$

όπου a,b,c,d,m,l είναι διανύσματα στις τρείς διαστάσεις , ενώ το $\otimes$ συμβολίζει το δυαδικό γινόμενο.

Το σύμβολο $(\circ)^{321}$ σημαίνει:

$$(a \otimes b \otimes c)^{321} = c \otimes b \otimes a$$

Έστω τανυστής $3^{ης}$ τάξης που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση συμμετρίας

$$\mu_{ijk} = \mu_{ikj} \text{ ή}$$
$$(\tilde{\mu})^{321} = \tilde{\mu}$$

και το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{u}$ τότε έχουμε τις εξής ταυτότητες που θα μας χρησιμεύσουν στην πορεία της διπλωματικής.

$$\begin{aligned} \nabla\cdot[(\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{132} : \nabla\mathbf{u}] &= (\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})^T : \nabla\mathbf{u} + (\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{321} \vdots \nabla\nabla\mathbf{u} \\ \nabla\cdot[(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})\cdot\mathbf{u}] &= [\nabla\cdot(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})]\cdot\mathbf{u} + (\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})^T : \nabla\mathbf{u} \\ \nabla[\tilde{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{u}] &= (\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}})\cdot\mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} : \nabla\mathbf{u} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Έστω μια επιφάνεια S. Μπορούμε να ορίσουμε την επιφανειακή απόκλιση ως $\nabla_S = (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}})\cdot\nabla$ όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ ο μοναδιαίος τανυστής και όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S καθώς $\delta\mathbf{u}$ η μεταβολή του $\mathbf{u}$. Έτσι έχουμε κάποιες ακόμα ταυτότητες(Brand 1966):

$$\begin{aligned} \nabla_S\cdot[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})^T\cdot\delta\mathbf{u}] &= [\nabla_S\cdot(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})^T]\cdot\delta\mathbf{u} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}) : \nabla_S(\delta\mathbf{u}) \\ \nabla_S\cdot(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}) &= (\nabla_S\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{n}}\cdot[\nabla_S\cdot(\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{213}] \end{aligned} \tag{1.15}$$

Κεφάλαιο 2

Λογισμός Μεταβολών

Ο λογισμός των μεταβολών χρησιμοποιείται σε διάφορα πεδία των εφαρμοσμένων μαθηματικών και αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την αντιμετώπιση περίπλοκων προβλημάτων. Στην συνέχεια της εργασίας θα φανεί χρήσιμο εργαλείο για την εξαγωγή των συνοριακών συνθηκών αλλά και των εξισώσεων ισσοροπίας για ένα τρισδιάστατο βαθμοελαστικό σώμα.

2.1 Λογισμός μεταβολών σε 3-διάστασεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά του λογισμού μεταβολών σε 3-διαστάσεις και θα εξάγουμε κάποια βασικά συμπεράσματα.

2.1.1 Μεταβολή ενός συναρτησιακού σε μια καθορισμένη επιφάνεια

Έστω συναρτησιακό της μορφής:

$$J[u] = \int \cdots \int_{\Omega} F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) dx_1 \cdot \cdot dx_n \tag{2.1}$$

το οποίο εξαρτάται από n ανέξαρτητες μεταβλητές $x_1 \cdot \cdot x_n$, μιας άγνωστης συνάρτησης u που εξαρτάται από τις μεταβλητές αυτές και από τις παραγώγους της $u(x_1, \ldots, u_{x_n})$. Θεωρούμε ότι η προς ολοκλήρωση F έχει συνεχείς, πρώτες και δεύτερες παραγώγους. Υπολογίζουμε τώρα τη μεταβολή της (2.1) , θεωρώντας ότι το χωρίο Ω παραμένει σταθερό, ενώ η συνάρτηση $u(x_1, \ldots, x_n)$ γίνεται

$$u^*(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n) + \epsilon\psi(x_1, \ldots, x_n) + \cdots \tag{2.2}$$

οι τρείς τελείες δηλώνουν την ύπαρξη όρων μεγαλύτερης τάξης από 1 του ε. Με την μεταβολή δJ του συναρτησιακού (2.1) , στο οποίο εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός (2.2) θεωρούμε το κύριο μέρος (ως προς ε) της διαφοράς

$$J[u^*] - J[u].$$

Για λόγους απλότητας, θα γράφουμε $u(x), \psi(x)$ αντί για $u(x_1, \ldots, x_n), \psi(x_1, \ldots, x_n)$, dx αντί για $dx_1 \cdot \cdot dx_n$ κλπ. Χρησιμοποιόντας το θεώρημα Taylor , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} J[u^*] - J[u] &= \int_\Omega F[x, u(x) + \epsilon\psi(x), u_{x_1}(x) + \epsilon\psi_{x_1}(x), \ldots u_{x_n} + \epsilon\psi_{x_n}(x)] \\ &- F[x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}]dx \\ &= \epsilon\int_\Omega \left(F_u + \sum_{n=1}^{n} F_{u_{x_i}}\psi_{x_i} \right) dx + \cdots, \end{aligned}$$

όπου πάλι οι τελείες δηλώνουν όρους του ε ανώτερης τάξης από 1. Προκύπτει ότι :

$$\delta J = \epsilon\int_\Omega \left(F_u + \sum_{n=1}^{n} F_{u_{x_i}}\psi_{x_i} \right) dx \tag{2.3}$$

η οποία είναι η μεταβολή του συναρτησιακού (2.1).

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να αναπαραστήσουμε την μεταβολή του συναρτησιακού(2.1) ως ένα ολοκήρωμα της μορφής

$$G(x)\psi(x) + div(\cdots),$$

δηλαδή θα προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε την σχέση (2.3) με τέτοιον τρόπο ώστε οι παράγωγοι ψ_{x_i} να εμφανίζονται μόνο ως ένας συνδυασμός όρων που μπορεί να γραφεί ως μια απόκλιση. Για να το επιτύχουμε αυτό αντικαθιστούμε το

$$F_{u_{x_i}}\psi_{x_i}(x)$$

με

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[F_{u_{x_i}}\psi(x)] - \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i}\psi(x)$$

στη σχέση (2.3),έτσι καταλήγουμε

$$\delta J = \epsilon\int_\Omega \left(F_u - \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}\right)\psi(x)dx + \epsilon\int_\Omega \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[F_{u_{x_i}}\psi(x)]dx. \tag{2.4}$$

Αυτή η έκφραση για την μεταβολή δJ είναι ιδιαίτερα σημαντική διότι ο δεύτερος όρος είναι το ολοκλήτωμα μιας απόκλισης και έτσι μπορούμε να το μετατρέψουμε σε ένα ολοκλήρωμα στο σύνορο Γ , που θεωρείται μια (n-1)-διάστατη επιφάνεια.Σύμφωνα με το θεώρημα Green :

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[F_{u_{x_i}}\psi(x)]dx = \int_\Gamma \psi(x)(G,v)d\sigma \tag{2.5}$$

όπου

$$G = \left(F_{u_{x_1}}, \cdots, F_{u_{x_n}}\right)$$

είναι ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος του οποίου οι συντελεστές είναι οι παράγωγοι $F_{u_{x_i}}, v = (v_1, \cdots, v_n)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο Γ και με (G,v) να δηλωνει το εσωτερικό γινόμενο των G,v. Χρησιμοποιόντας τώρα την (2.4) και την (2.5) μπορούμε να γράψουμε την μεταβολή του συναρτησιακού στην μορφή

$$\delta J = \epsilon\int_\Omega \left(F_u - \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}\right)\psi(x)dx + \epsilon\int_\Gamma \psi(x)(G,\nu)d\sigma, \tag{2.6}$$

και με αυτόν τον τρόπο το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια Ω δεν περιέχει πλέον παραγώγους της ψ(x).

Για να έχει το σναρτησιακό (2.1) ακρότατο , πρέπει δJ=0 για κάθε αποδεκτή ψ(x),συγκεκριμένα θέλουμε,δJ=0 για όλες τις αποδεκτές ψ(x) οι οποίες εξαφανίζονται στο σύνορο.Για τέτοιες συναρτήσεις ,η (2.6) γίνεται

$$\delta J = \int_\Omega \left(F_u - \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}}\right)\psi(x)dx,$$

και λόγω της ανεξαρτησίας του ψ(x) μέσα στο Ω , δJ=0 ίσχύει ότι:

$$F_u - \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_{u_{x_i}} = 0 \tag{2.7}$$

για κάθε $x \in \Omega$. Αυτή η εξίσωση είναι η γενίκευση της εξίσωσης Euler στις n-διαστάσεις.

2.2 Η ταλαντούμενη μεμβράνη

Θεωρούμε την ταλάντωση μιας μεμβράνης , επιφανειακής πυκνότητας ρ. Έστω u(x,y,t) να δηλώνει την μετατόπιση της απο το σημείο ισορροπίας (x,y) , την στιγμή t. Η κινητική ενέργεια της μεμβράνης την στιγμή t είναι:

$$T = \frac{1}{2}\rho \int\int_{\Omega} {u_t}^2(x, y, t)dxdy, \tag{2.8}$$

όπου Ω είναι η περιοχή του επιπέδου που καταλαμβάνει η μεμβράνη σε αδράνεια.Η δυναμική ενέργεια της μεμβράνης σε μια θέση που περιγράφεται από την συνάρτηση u(x,y,t) , με t σταθερό, είναι το έργο που χρειάζεται για να μετακινήσει κανείς την μεμβράνη από την κατάσταση ισορροπίας στην δοσμένη θέση u(x,y,t). Το έργο αυτό είναι το άθροισμα του έργου U_1 που χρειάζεται για να παραμορφώσει κάποιος την μεμβράνη και το έργο U_2 που χρειάζεται για να μετακινήσει το σύνορο της μεμβράνης, το οποίο θεωρείται οτι είναι ελαστικά βαλμένο στην θέση ισορροπίας.

Για να υπολογίσουμε την δυναμική ενέργεια U_1 έστω τ η τάση της μεμβράνης και θεωρούμε ένα στοιχείο ΔΑ της μεμβράνης το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή αρχικά $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y$.Το έργο που χρειάζεται για να παραμορφωθεί το κομμάτι ΔΑ ισούται με το γινόμενο της τ με την αύξηση της επιφάνειας ΔΑ μετά την παραμόρφωση, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
\tau\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2}\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta u)^2} - \tau\Delta x\Delta y = \\
\frac{1}{2}\tau\left[(\frac{\Delta u}{\Delta x})^2 + (\frac{\Delta u}{\Delta y})^2\right]\Delta x\Delta y + \cdots, \qquad (2.9) \\
= \frac{1}{2}\tau {u_x}^2(x_0, y_0, t) + {u_y}^2(x_0, y_0, t)\Delta x\Delta y + \cdots,
\end{aligned}$$

Ομοίως οι τελείες δηλώνουν όρους ανώτερης τάξης από αυτούς που έχουν γραφτεί. Ολοκληρώνοντας την (2.9) σε μια περιοχή Ω, βρίσκουμε το έργο που χρειάζεται η μεμβράνη για να παραμορφωθεί ολόκληρη:

$$U_1 = \frac{1}{2}\tau \int\int_{\Omega} [{u_x}^2(x, y, t) + {u_y}^2(x, y, t)]dxdy. \tag{2.10}$$

Αν Γ είναι το σύνορο της περιοχής Ω , και s το μήκος τόξου που μετράται στην επιφάνεια Γ από ένα αρχικό σταθερό σημείο , τότε :

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \kappa(s){u_x}^2(s, t)ds, \tag{2.11}$$

όπου u(s,t) είναι η μετατόπιση της μεμβράνης απο την κατάσταση ισσοροπίας στο σημείο s,t και κ(s) είναι η γραμμική πυκνότητα των ελαστικών σταθερών των δυνάμεων που κρατούν το σύνορο της μεμβράνης. Συνδυάζοντας (2.8) ,(2.10) και (2.11) βρίσκουμε ότι το συναρτησιακό της κίνησης της ταλαντούμενης μεμβράνης είναι :

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_{t_0}^{t_1} (T - U_1 - U_2) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \int\int_{\Omega} \rho {u_t}^2(x,y,t) - \tau[{u_x}^2(x,y,t) + {u_y}^2(x,y,t)] dxdydt \\ &- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \kappa(s) {u_x}^2(s,t) dsdt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Υποθέτουμε κατά τα γνωστά ότι η λύση μας μεταβάλλεται κατά ε ,δηλαδή:

$$u^*(x,y,t) = u(x,y,t) + \epsilon\psi(x,y,t) + \cdots \tag{2.13}$$

χρησιμοποιόντας τον τύπο (2.6), έχουμε ότι η μεταβολή του συναρτησιακού(2.12) είναι

$$\begin{aligned} \delta J &= \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \int\int_{\Omega} \Big[-\rho u_{tt} + \tau(u_{xx} + u_{yy}) \Big] \psi dxdydt \\ &- \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \kappa u \psi dsdt - \epsilon\tau \int_{t_0}^{t_1} \int\int_{\Omega} \Big[\frac{\partial}{\partial x}(u_x\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y\psi) \Big] dxdydt \\ &+ \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \int\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(u_t\psi) dxdydt. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι η σνάρτηση u(x,y,t) δεν μεταβάλλεται την αρχική και την τελική στιγμή , δηλαδή

$$\psi(x,y,t_0) = \psi(x,y,t_1) \equiv 0. \tag{2.15}$$

λόγω της (2.15) το τελευταίο ολοκήρωμα στην (2.14) εξαφανίζεται. Επιπλέον χρησιμοποιόντας το θεώρημα Green στις 2 διαστάσεις , έχουμε

$$\begin{aligned} \int\int_{\Omega} \Big[\frac{\partial}{\partial x}(u_x\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y\psi) \Big] dxdy &= \int_{\Gamma} (u_x \psi dy - u_y \psi dx) \\ &= \int_{\Gamma} \Big[\frac{\partial u}{\partial n} cos(\theta) \cdot \psi ds sin\Big(\frac{\pi}{2} + \theta\Big) - \frac{\partial u}{\partial n} sin(\theta) \psi ds cos\Big(\frac{\pi}{2} + \theta\Big) \Big] \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \psi ds, \end{aligned} \tag{2.16}$$

όπου $\frac{\partial}{\partial n}$ δηλώνει την παραγώγιση ως προς το κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη , n, και ϑ την γωνία μεταξύ του n και του άξονα x. Άρα η εξίσωση (2.14) γίνεται:

$$\delta J = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \int\int_{\Omega} \Big[- \rho u_{tt} + \tau(u_{xx} + u_{yy}) \Big] \psi dxdydt - \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \Big(\kappa u + \tau \frac{\partial u}{\partial n} \Big) \psi dsdt. \tag{2.17}$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι :

$$\psi(s,t) = 0 \, (s \in \Gamma), \tag{2.18}$$

με t τυχαίο ,δηλαδή το u δεν μεταβάλλεται στο σύνορο της μεμβράνης. Σε αυτήν την περίπτωση η (2.14) γίνεται

$$\delta J = \epsilon \int_{t_0}^{t_1} \int\int_{\Omega} \Big[- \rho u_{tt} + \tau(u_{xx} + u_{yy}) \Big] \psi dxdydt. \tag{2.19}$$

Θέτοντας (την προηγούμενη) ίση με μηδέν και επείδη το διάστημα $[t_0, t_1]$ήταν τυχαίο όπως και η συνάρτηση $\psi = \psi(x, y, t)$ μέσα στο $\Omega \times [t_0, t_1]$,έχουμε ότι

$$u_{tt} = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy}) \qquad \left(\alpha^2 = \frac{\tau}{\rho} \right) \tag{2.20}$$

για $(x, y) \in \Omega$ και για κάθε t. Η εξίσωση(2.20) είναι η εξίσωση της ταλαντούμενης μεμβράνης και μπορεί να γραφεί ως

$$u_{tt} = \alpha^2 \nabla^2 u(x, y, t), \tag{2.21}$$

με την χρήση του τελεστή Laplace

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2.22}$$

Στη συνέχεια αναιρούμε τον περιορισμό(2.18). Αφού η u(x,y,t) πρέπει να ικανοποιεί την(2.17), ο πρώτος όρος της εξαφανίζεται και έτσι μας απομένει

$$\delta J = -\epsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \Big(\kappa u + \tau \frac{\partial u}{\partial n} \Big) \psi dsdt. \tag{2.23}$$

αφού και εδώ η $\psi(s, t)$ είναι μια τυχαία συνάρτηση, εξισώνοντας την (2.23) με μηδέν καταλήγουμε

$$\kappa u + \tau \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (s \in \Gamma). \tag{2.24}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η συνοριακή συνθήκη για την ελαστική ταλαντούμενη μεμβράνη , με το σύνορο της ελαστικά κρατημένο στην θέση ισορροπίας. Συγκεκριμένα εάν το σύνορο της μεμβράνης ήταν ελεύθερο, $\kappa(s) = 0$ η (2.24) θα ήταν

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (s \in \Gamma), \tag{2.25}$$

και αντιστοίχως αν το σύνορο της μεμβράνης είναι πακτωμένο , δηλαδή $\kappa(s) = \infty$ η (2.24) γίνεται

$$u(s,t) = 0 \qquad (s \in \Gamma). \tag{2.26}$$

2.3 Αρχή του Hamilton

Στο πλαίσιο του λογισμού των μεταβλητών και για λόγους καλύτερης κατανόησης της παραγράφου [3.2], όπου θα εξαχθούν οι συνοριακές συνθήκες αλλά και η εξίσωση ισορροπίας ενός ελαστικού σώματος με μικροδομή και επιφανειακή ενέργεια, θα παρουσιαστεί η Αρχή του Hamilton ή αλλιώς η Αρχή της ελάχιστης δράσης η οποία είναι μια διαφορετική διατύπωση των παραπάνω παραγράφων αλλά αρκετά εύχρηστη σε εφαρμογές της μηχανικής.

Γενικεύοντας τις εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα , ο Lagrange , έδωσε μια νέα διάσταση για την καλύτερη κατανόηση φαινομένων , τα οποία θα ήταν εξαιρετικά δυσκολότερο να κατανοηθούν και να μελετηθούν μόνο με τις εξισώσεις του Νεύτωνα. Αρχικά, έστω ότι ένα σύστημα περιγράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες , αν κάνουμε μια γενίκευση των συντεταγμένων και έχουμε πλέον ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων , τις γενικευμένες συντεταγμένες, μπορούμε να καταλήξουμε στις εξισώσεις του Lagrange. Οι επίλυση αυτού του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων και ο αντίστροφος μετασχηματισμός στις καρτεσιανές συντεταγμένες , μας δίνει τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων ή του συνεχούς μέσου που μελετάμε. Οι εξισώσεις του Lagrange δίνονται ως:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1,2,3,...,n \tag{2.27}$$

όπου τα q_k οι γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος, οι οποίες μπορούν να περιγράφουν θέση , ορμή , γωνία , στροφορμή και άλλα. Η L είναι μια συνάρτηση ,η Λαγκρανζιανή ,του συστήματος και ορίζεται ώς :

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t). \tag{2.28}$$

Με T συμβολίζουμε την κινητική ενέργεια και με V μια βαθμωτή συνάρτηση(δυναμικού). Σε πολλές περιπτώσεις "φυσιολογικών" σηστημάτων η V είναι απλά η δυναμική τους ενέργεια.

Έχοντας ορίσει την Λαγκρανζιανή , ως δράση ορίζεται το ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει. Δηλαδή :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \tag{2.29}$$

Η Αρχή του Χάμιλτον ή αλλιώς η αρχή της ελάχιστης δράσης μας λέει ότι για κάθε σύστημα η δράση θα πρέπει να είναι η ελάχιστη και ως αποτέλεσμα η μεταβολή της να μηδενίζεται:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \tag{2.30}$$

ή αλλιώς

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \tag{2.31}$$

Όπου $q, \dot{q}$ οι γενικευμένες συντεταγμένες του σύστηματος , οι οποίες θα μπορούσαν να είναι και περισσότερες ή με διαφορετική μορφή. Για λόγους απλότητας έχουν γραφεί μόνο δύο.

Κεφάλαιο 3

Βαθμοελαστικότητα

3.1 Εισαγωγή

Στην κλασική θεωρία ελαστικότητας, το συνεχές σώμα που μελετάται θεωρείται τοπικά ομογενές και όλες οι κύριες ποσότητες και οι υλικές σταθερές που περιγράφουν το υλικό σε κάθε σημείο θεωρούνται ως μέσες τιμές "μικρών" ογκικών ποσοτήτων που περιέχουν το σημείο που μας ενδιαφέρει.Όμως όταν αυτές οι ποσότητες αρχίσουν να διαφέρουν τετραγωνικά μέσα στο μέσο που μελετάμε , που σημαίνει ότι όροι παραγώγων των τροπών ανώτερης τάξης συνεισφέρουν στο υλικό, τότε αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε ενισχυμένες ελαστικές θεωρίες για την περιγραφή του φαινομένου. Τέτοια είναι η θεωρία της βαθμοελαστικότητας την οποία πρότεινε ο Mindlin(1906-1987) για δυναμικά προβλήματα ελαστικότητας ύστερα από το καινοτόμο έργο του Toupin.

Ο Mindlin πρότεινε μια γενική δυναμική ελαστική θεωρία για να περιγράψει την συμπεριφορά των ισότροπων ελαστικών υλικών με μικροδομή. Παρ' όλο που είναι πολύ συνοπτική και κομψή , η χρήση 18 νέων σταθερών για την μηχανική περιγραφή των υλικών έκανε πολύ δύσκολη την μελέτη τους τόσο από πειραματικής , φυσικής αλλά και από μαθηματικής πλευράς.Για να απλουστεύσει αυτήν την κατάσταση, ο Mindlin, πρότεινε στο ίδιο ακαδημαϊκό άρθρο τρείς απλουστευμένους τύπους , γνωστούς ως μορφές I,II,III οι οποίες κατέληγαν στην ίδια εξίσωση κίνησης.Στην μορφή I , η συνάρτηση της πυκνότητας τροπικής ενέργειας θεωρείται ως τετραγωνική μορφή των κλασσικών όρων τροπής και των δεύτερων παραγώνων των παραμορφώσεων, στην μορφή II , η δεύτερες παράγωγοι των παραμορφώσεων αντικαθίστανται από από τις παραγώγους των τροπών , ενώ στην μορφή III , η τροπική ενέργεια γράφεται ως άθροισμα των τροπών , των παραγώγων των στροφών και του συμμέτρικού μέρους των παραγώγων των τροπών. Μελετώντας τις ελαστοστατικές εκδοχές των μορφών αυτών, διακρίνουμε τα εξής κοινά χαρακτηριστικά:1) ικανοποιούν την ίδια τετάρτης τάξεως εξίσωση ισορροπίας,2) χρειάζονται 5 ανεξάρτητες υλικές παραμέτρους για να περιγράφουν τα κύρια χαρακτηριστικά του υλικού,3) εκτός από τις κλασσικές και αναγκαίες συνοριακές συνθήκες , νέες συνοριακές προκύπτουν στο σύνορο του σώματος ιδιαίτερα στις περιοχές με γωνίες ή ακμές.

Στην συνέχεια του συγκεκριμένου κεφαλαίου θα παρουσιαστούν αναλυτικά οι συνοριακές συνθήκες και οι εξισώσεις ισορροπίας ενός σώματος σε 2 διαστάσεις , τόσο χωρίς αλλά και με επιφανειακή ενέργεια. Επιπλέον θα δωθούν αναλυτικές λύσεις για το πρόβημα της κάμψης δισδιάστατης δοκού με μικροδομή, προβλημα το οποίο επιλύθηκε σε άρθρο του Χαραλαμπόπουλου Αντώνιου , Πολύζου Δημοσθένη και Τσινόπουλου Στεφάνου(5). Ο τρόπος εξαγωγής των εξισώσεων ισορροπίας θα παρουσιαστεί αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Το κύριο πρόβλημα προς μελέτη στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αφορά την κάμψη μιας δοκού με μικροδομή και γενικότερα με επιφανειακή ενέργεια καθώς και την εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας και των συνοριακών συνθηκών του βαθμοελαστικού σώματος.Χωρίς να λάβουμε υπόψιν προς το παρόν την επιφανειακή ενέργεια, θεωρούμε ένα ισότροπο δισδιάστατο ελαστικό παραλληλόγραμμο σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων , το ποίο καταλαμβάνει έναν όγκο V και περιβάλλεται από μια επιφάνεια $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.Το κάθετο στις επιφάνειες διάνυσμα $\hat{n}$ είναι ακρίβως η x_1, x_2 συνιστώσα του καρτεσιανού συστήματος αντίστοιχα.Μη ομαλότητα του συνόρου υπάρχει στις γωνίες του παραλληλογράμμου στις οποίες , όπως θα δούμε στη συνέχεια , παρατηρούμε κάποια "άλματα" των τάσεων περνόντας από την μια επιφάνεια στην άλλη.

Στην δεύτερη μορφή της θεωρίας του Mindlin για τα προβλήματα της βαθμοελαστικότητας, η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας W του ελαστικού σώματος εξαρτάται από τις τροπές και τις παραγώγους τους.Θεωρώντας την

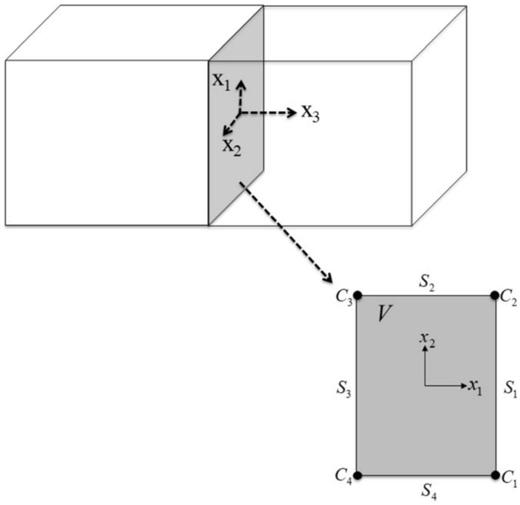

Figure 3.1: Ουσιαστικά το επίπεδο πρόβλημα είναι στην πραγματικότητα ένα χωρικό πρόβλημα του οποίου η τρίτη συνιστώσα x_3 είναι "πολύ" μεγαλύτερη από τις άλλες δυο.

απλούστερη δυνατή μορφή της στο επίπεδο, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\lambda e_{ii}e_{jj} + \mu e_{ij}e_{ij} + \frac{1}{2}\lambda g^2 \kappa_{ijj}\kappa_{ikk} + \mu g^2 \kappa_{ijk}\kappa_{ijk} \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = e_{ji} \\ \kappa_{ijk} &= \partial_i e_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_i \partial_j u_k + \partial_i \partial_k u_j) = \kappa_{ikj} \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου i,j,k=1,2, ∂_i δηλώνει χωρική παραγώγηση , u_i τις παραμορφώσεις,λ, μ τις σταθερές του Lamé και g^2 τη μοναδική εσωτερική παράμετρο μήκους με μονάδες μήκους στο τετράγωνο(m^2).

Οι τροπές και οι παράγωγοι των τροπών είναι δυϊκές στην συνάρτηση της ενέργειας.Με τις κλασσικές τάσεις(τάσεις Cauchy) και τις διπλές τάσεις να ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{\partial W}{e_{ij}} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{nn}\delta_{ij} \\ \mu_{ijk} &= \frac{\partial W}{\kappa_{ijk}} = g^2 \partial_i \tau_{jk}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Για το παραλληλόγραμμο του παραπάνω σχήματος οι τάσεις και οι διπλές τάσεις γράφονται συναρτήσει των παραμορφώσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= (\lambda + 2\mu)\partial_1 u_1 + \lambda\partial_2 u_2 \\ \tau_{22} &= (\lambda + 2\mu)\partial_2 u_2 + \lambda\partial_1 u_1 \\ \tau_{12} &= \tau_{21} = \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)\end{aligned} \tag{3.3}$$

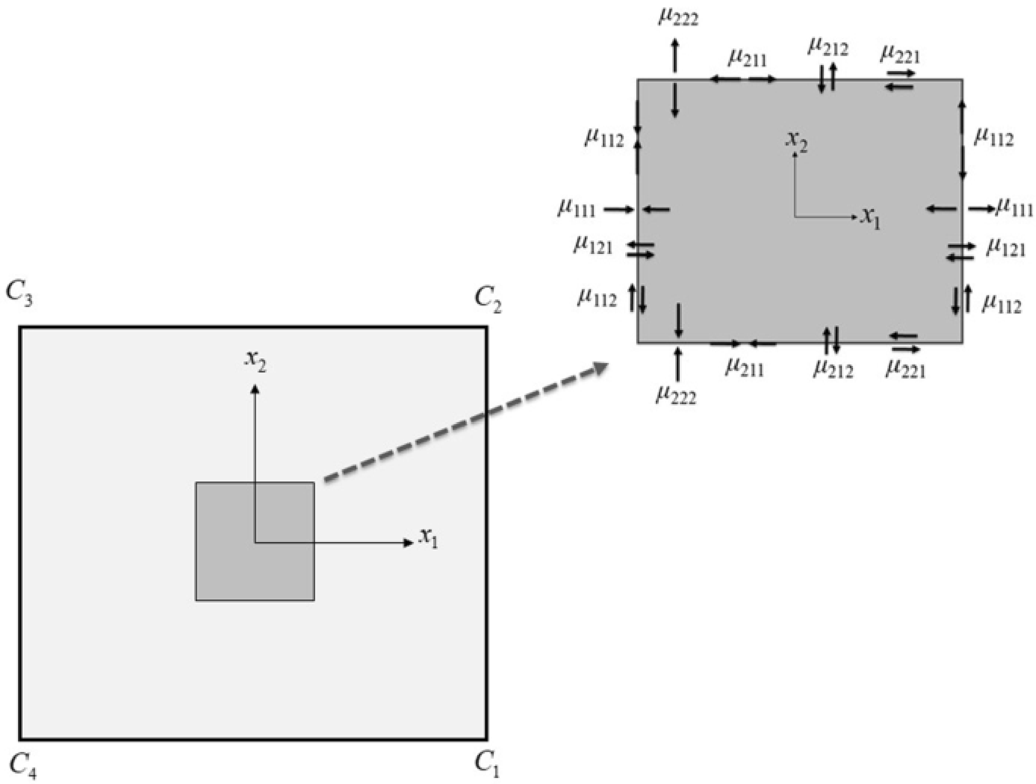

Figure 3.2: Διπλές τάσεις στις τέσσερεις πλευρές ενός εσωτερικού μικροστοιχείου

$$\begin{aligned}\mu_{111} &= (\lambda + 2\mu)g^2{\partial_1}^2 u_1 + \lambda g^2\partial_1\partial_2 u_2 \\ \mu_{222} &= (\lambda + 2\mu)g^2{\partial_2}^2 u_2 + \lambda g^2\partial_1\partial_2 u_1 \\ \mu_{112} &= \mu_{121} = \mu g^2({\partial_1}^2 u_2 + \partial_1\partial_2 u_1) \\ \mu_{122} &= (\lambda + 2\mu)g^2\partial_1\partial_2 u_2 + \lambda g^2{\partial_1}^2 u_1 \\ \mu_{211} &= (\lambda + 2\mu)g^2\partial_1\partial_2 u_1 + \lambda g^2{\partial_1}^2 u_2 \\ \mu_{212} &= \mu_{221} = \mu g^2({\partial_2}^2 u_1 + \partial_1\partial_2 u_2)\end{aligned} \tag{3.4}$$

Θα μπορούσαμε επίσης να αντικαταστήσουμε τις σταθερές του Lamé λ, μ χρησιμοποιόντας την σταθερά Poisson ν και το μέτρο ελαστικότητας E και έτσι να έχουμε τις γνωστές σχέσεις $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda+2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

Όσον αφορά την σημασία των δεικτών έχουμε απο την μια τους δυο δείκτες των κλασσικών τάσεων με ίδιο συμβολισμό όπως και στην κλασσική ελαστικότητα , ενώ για τις διπλές τάσεις χρησιμοποιούμε την σύμβαση του Mindlin , με τον πρώτο δείκτη να συμβολίζει τον μοχλοβραχίονα που ασκούνται οι διπλές τάσεις και τους άλλους δυο ότι και στην κλασσικές τάσεις με τον δεύτερο να συμβολίζει το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας που ορίζεται η τάση και με τον τρίτο την κατεύθυνση της.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι η συμμετρία των διπλών τάσεων προέρχεται από την Μορφή ΙΙ της βαθμοελαστικότητας , η οποίο είναι ανεξάρτητη από ζεύγη διπλών τάσεων , αφού το άθροισμα ενός ζεύγους $(\mu_{ijk} - \mu_{ikj})/2 = 0$ είναι πάντοτε μηδέν.Από φυσικής πλευράς, αυτό μπορεί να εξηγηθεί θεωρώντας μια πολύ μικρή ίνα η οποία έχει ενσωματωθεί σε ένα ελαστικό υλικό απείρων διαστάσεων.Αυτή η ίνα θεωρείται ότι ανήκει σε μια πολύ λεπτή στρώση του υλικού , με μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε αυτήν το διάνυσμα $\hat{x}_2$.Το ζεύγος των δυνάμεων στο σημεία Α,Α' με μοχλοβραχίονα το διάνυσμα $\hat{x}_2$ δημιουργούν τις διπλές τάσεις μ_{221}.Ομοίως οι δυνάμεις στα σημεία Β,Β' με μοχλοβραχίονα το $\hat{x}_1$, δημιουργούν τις τάσεις μ_{212}.Άρα προφανώς θα πρέπει , για να έχουμε ισορροπία , $\mu_{221} = \mu_{212}$ και το ζεύγος δυνάμεων $M = (\mu_{221} - \mu_{212})/2 = 0$.

Οι σχετικές τάσεις που ορίζονται ως $s_{jk} = -\partial_i \mu_{ijk}$ γράφονται συναρτήσει των παραμορφώσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}
&s_{11} = -\partial_1\mu_{111} - \partial_2\mu_{211} = -(\lambda+2\mu)g^2({\partial_1}^3 u_1 + {\partial_2}^2\partial_1 u_1) - \lambda g^2({\partial_1}^2\partial_2 u_2 + {\partial_2}^3 u_2)\\
&s_{22} = -\partial_2\mu_{222} - \partial_1\mu_{122} = -(\lambda+2\mu)g^2({\partial_2}^3 u_2 + {\partial_1}^2\partial_2 u_2) - \lambda g^2({\partial_2}^2\partial_1 u_1 + {\partial_1}^3 u_1)\\
&s_{12} = -\partial_1\mu_{112} - \partial_2\mu_{212} = -\mu g^2({\partial_1}^3 u_2 + {\partial_1}^2\partial_2 u_1 + {\partial_2}^2\partial_1 u_2 + {\partial_2}^3 u_1)\\
&s_{21} = -\partial_1\mu_{121} - \partial_2\mu_{221} = -\mu g^2({\partial_1}^3 u_2 + {\partial_1}^2\partial_2 u_1 + {\partial_2}^2\partial_1 u_2 + {\partial_2}^3 u_1)\\
&s_{12} = s_{21}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Σύμφωνα με τις (3.3) και (3.5) οι ολικές τάσεις , οι οποίες είναι το άθροισμα των σχετικών και των τάσεων Cauchy , δηλαδή $\sigma_{ij} = \tau_{ij} + s_{ij}$

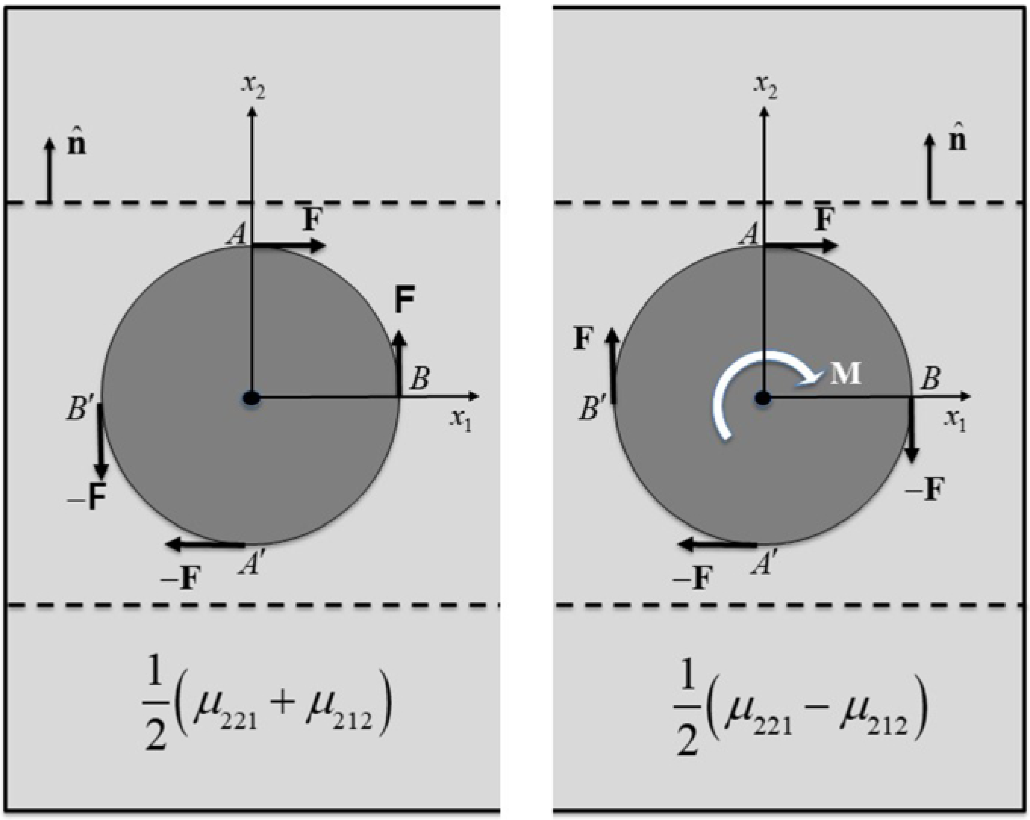

Figure 3.3: Συμμετρία διπλών τάσεων και μηδενισμός ζεύγους ροπών στην δεύτερη μορφή της βαθμοελαστικής θεωρίας του Mindlin

παίρνουν τελικά την μορφή:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda+2\mu)\partial_1 u_1 + \lambda\partial_2 u_2 - (\lambda+2\mu)g^2({\partial_1}^3 u_1 + {\partial_2}^2\partial_1 u_1) - \lambda g^2({\partial_1}^2\partial_2 u_2 + {\partial_2}^3 u_2)\\
\sigma_{22} &= (\lambda+2\mu)\partial_2 u_2 + \lambda\partial_1 u_1 - (\lambda+2\mu)g^2({\partial_2}^3 u_2 + {\partial_1}^2\partial_2 u_2) - \lambda g^2({\partial_2}^2\partial_1 u_1 + {\partial_1}^3 u_1)\\
\sigma_{12} &= \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) - \mu g^2({\partial_1}^3 u_2 + {\partial_1}^2\partial_2 u_1 + {\partial_2}^2\partial_1 u_2 + {\partial_2}^3 u_1)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Εξισώνοντας την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας με την μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων , όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο στην γενική περίπτωση, έχουμε την εξίσωση ισσοροπίας καθώς και τις συνοριακές συνθήκες. Στο δισδιάστατο πρόβλημα γράφονται ως:

$$(1-g^2\partial_{nn})[\mu\partial_{ii}u_j + (\lambda+\mu)\partial_j\partial_i u_i] + F_j = 0 \tag{3.7}$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$(1-g^2\nabla^2)[\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}] + \mathbf{F} = 0 \tag{3.8}$$

όπου ∇ ο τελεστής της κλίσης (gradient operator) και **u** το διάνυσμα των μετατοπίσεων.
Όπως θα δούμε και στη συνέχεια η εξίσωση ισορροπίας συνοδεύεται από τις κλασσικές και μη συνοριακές συνθήκες στο περίβλημα του χωρίου , με τις κλασσικές να δρουν στο ομαλό σύνορο ενώ τις μη κλασσικές στα σημεία ασυνέχειας όπως οι γωνίες ή πλευρές.

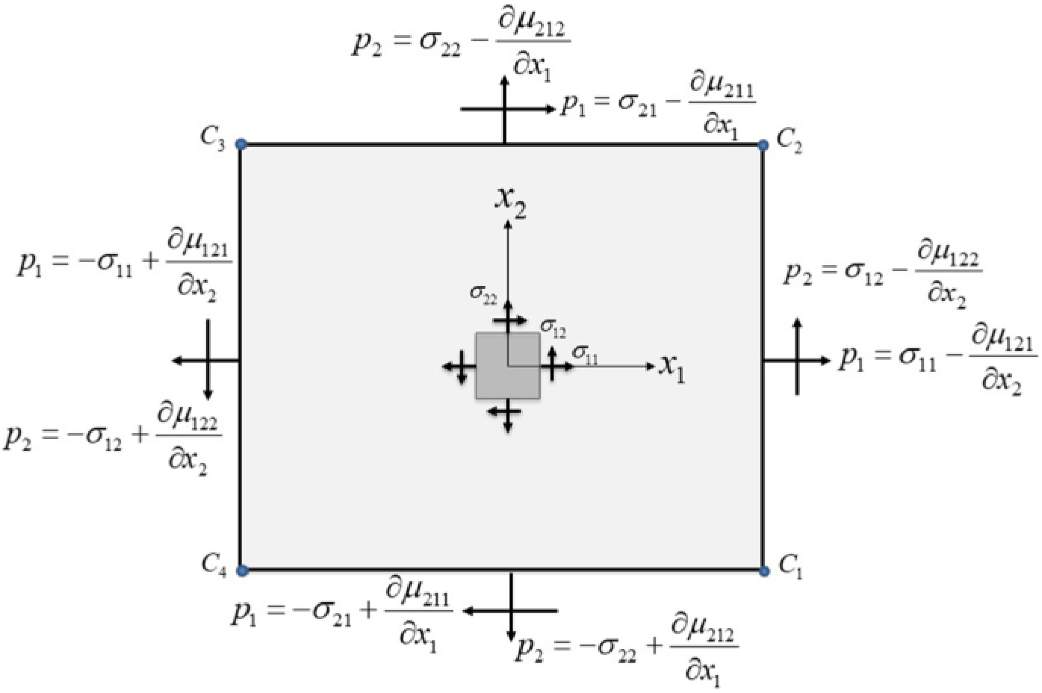

Figure 3.4: Ισορροπία των ολικών τάσεων και των πεδίων ελκυστών στο προς μελέτη παραλληλόγραμμο.

Με τους ελκυστές **p,R,E**να ορίζονται ως:

$$p_i = n_j(\tau_{ji} - \partial_n \mu_{nji}) - D_j(n_a \mu_{aji}) + (D_l n_l) n_a n_b \mu_{abi} \tag{3.9}$$

$$R_i = n_a \mu_{abi} n_b \tag{3.10}$$

$$E_i = ||t_b n_a \mu_{abi}|| \tag{3.11}$$

με το **n** το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο S ,$D = n_a \partial_a$ και $D_b = (\delta_{ba} - n_b n_a)\partial_a$.Οι μη κλασσικές συνοριακές συνθήκες υπάρχουν μόνο στα μη ομαλά σημεία του συνόρου.Οι διπλές "απόλυτες τιμές" $||\cdot||$ ορίζουν την διαφορά της τιμής της ποσότητας μεταξύ των δύο πλευρών μιας γωνίας του παραλληλογράμου, ενώ το **m** το διάνυσμα εφαπτόμενο στην γραμμή της εκάστοτε γωνίας. Οι δυο συνιστώσες του διανύσματος του εκλυστή που δίνεται στην σχέση(3.9) και με το κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}(n_1, n_2)$δίνονται αναλυτικά ως:

$$\begin{aligned} p_1 = & n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} + n_1({n_1}^2 - 2)\partial_1\mu_{111} + n_2({n_2}^2 - 2)\partial_2\mu_{221} \\ & + n_2({n_1}^2 - 1)(\partial_1\mu_{121} + \partial_1\mu_{211}) + n_1({n_2}^2 - 1)(\partial_2\mu_{121} + \partial_2\mu_{211}) \\ & + n_2{n_1}^2\partial_2\mu_{111} + n_1{n_2}^2\partial_1\mu_{221} \\ p_2 = & n_2\tau_{22} + n_1\tau_{12} + n_1({n_1}^2 - 2)\partial_1\mu_{112} + n_2({n_2}^2 - 2)\partial_2\mu_{222} \\ & + n_2({n_1}^2 - 1)(\partial_1\mu_{212} + \partial_1\mu_{112}) + n_1({n_2}^2 - 1)(\partial_2\mu_{122} + \partial_2\mu_{212}) \\ & + n_2{n_1}^2\partial_2\mu_{112} + n_1{n_2}^2\partial_1\mu_{222} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι το εσωτερικό , τοπικό στοιχείο φαίνεται να ισορροπεί μονο με τις ολικές κλασσικές τάσεις , $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ όμως η ισορροπία ολόκληρης της κατασκευής επιτυγχάνεται με την εφαρμογή επιπλέον συνοριακών συνθηκών υπό την μορφή παραγώγων των διπλών τάσεων.Παρά την φυσική σημασία και αναγκαιότητα των συγκεκριμένων συνοριακών συνθηκών , αυτές δεν τοποθετουνται αυθαίρετα. Λόγω της νέας διαφορικής εξίσωσης καθώς και με την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού της ενέργειας , εξάγονται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα. Αξίζει παρατήρησης η εφαρμοσιμότητα της μαθηματικής μεθοδολογίας στην καλύτερη , βαθύτερη και ακριβέστερη μοντελοποίηση του φυσικού προβλήματος.

Ομοίως , οι συνιστώσες του διανύσματος του διπλού-εκλυστή R_i όπως αυτός ορίστηκε στην εξίσωση (3.10) , με το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια εφαρμογής να είναι το $\hat{\mathbf{n}}(n_1, n_2)$ έχουμε την μορφή:

$$\begin{aligned} R_1 &= {n_1}^2\mu_{111} + n_1n_2\mu_{121} + n_1n_2\mu_{211} + {n_2}^2\mu_{221} \\ R_1 &= {n_2}^2\mu_{222} + {n_1}^2\mu_{112} + n_1n_2\mu_{122} + n_2n_1\mu_{212} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Τελικά λόγω των τεσσάρων γωνίων στο παραλληλόγραμμο , έχουμε τέσσερεις εκλυστές άλματος που σύμφωνα με την εξίσωση(3.11) γράφονται αναλυτικά ως:

$$\begin{aligned} {E_1}^{cornerC_1} &= t_jn_i\mu_{ij1}|_{S_1}{}^{cornerC_1} - t_jn_i\mu_{ij1}|_{S_4}{}^{cornerC_1} = \mu_{121}|_{S_1}{}^{cornerC_1} + \mu_{211}|_{S_4}{}^{cornerC_1} \\ {E_2}^{cornerC_1} &= t_jn_i\mu_{ij2}|_{S_1}{}^{cornerC_1} - t_jn_i\mu_{ij2}|_{S_4}{}^{cornerC_1} = \mu_{122}|_{S_1}{}^{cornerC_1} + \mu_{212}|_{S_4}{}^{cornerC_1} \end{aligned} \tag{3.14}$$

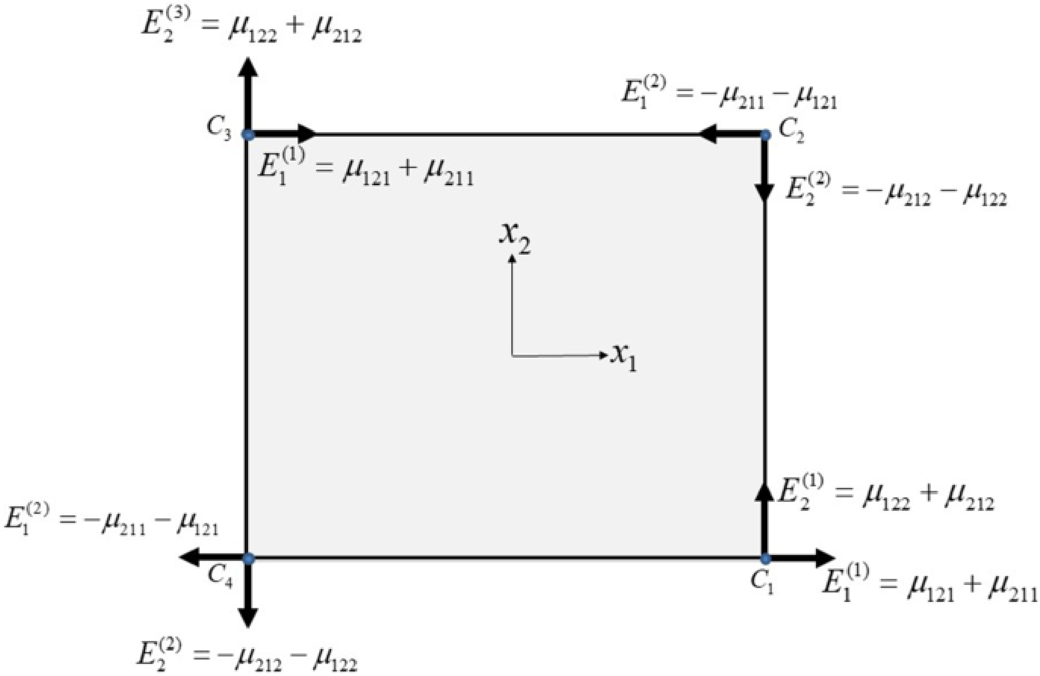

Figure 3.5: Οι συνιστώσες του ελκυστή "άλματος" στις τέσσερις γωνίες του παραλληλογράμμου.

$$\begin{aligned}
E_1{}^{cornerC_2} &= t_j n_i \mu_{ij1}|_{S_2}{}^{cornerC_2} - t_j n_i \mu_{ij1}|_{S_1}{}^{cornerC_2} = -\mu_{211}|_{S_2}{}^{cornerC_2} - \mu_{121}|_{S_1}{}^{cornerC_2} \\
E_2{}^{cornerC_2} &= t_j n_i \mu_{ij2}|_{S_2}{}^{cornerC_2} - t_j n_i \mu_{ij2}|_{S_1}{}^{cornerC_2} = -\mu_{212}|_{S_2}{}^{cornerC_2} - \mu_{122}|_{S_1}{}^{cornerC_2}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
E_1{}^{cornerC_3} &= t_j n_i \mu_{ij1}|_{S_3}{}^{cornerC_3} - t_j n_i \mu_{ij1}|_{S_2}{}^{cornerC_3} = \mu_{121}|_{S_3}{}^{cornerC_3} + \mu_{211}|_{S_2}{}^{cornerC_3} \\
E_2{}^{cornerC_3} &= t_j n_i \mu_{ij2}|_{S_3}{}^{cornerC_3} - t_j n_i \mu_{ij2}|_{S_2}{}^{cornerC_3} = \mu_{122}|_{S_3}{}^{cornerC_3} + \mu_{212}|_{S_2}{}^{cornerC_3}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
E_1{}^{cornerC_4} &= t_j n_i \mu_{ij1}|_{S_4}{}^{cornerC_4} - t_j n_i \mu_{ij1}|_{S_3}{}^{cornerC_4} = -\mu_{211}|_{S_4}{}^{cornerC_4} - \mu_{121}|_{S_3}{}^{cornerC_4} \\
E_2{}^{cornerC_4} &= t_j n_i \mu_{ij2}|_{S_4}{}^{cornerC_4} - t_j n_i \mu_{ij2}|_{S_3}{}^{cornerC_4} = -\mu_{212}|_{S_4}{}^{cornerC_4} - \mu_{122}|_{S_3}{}^{cornerC_4}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

3.2 Εξαγωγή συνοριακών συνθηκών και εξισώσεων ισσοροπίας

Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιόντας την παραμορφωσιακή,τροπική ενέργεια ενός σώματος(με επιφανειακή ενέργεια) θα εξάγουμε της εξισώσεις ισορροπίας του καθώς και τις συνονορικές του συνθήκες. Έστω λοιπόν ένα τρισδιάστατο σώμα με μικροδομή και επιφανειακή ενέργεια που καταλαμβάνει έναν όγκο V και μια επιφάνεια S.Σύμφωνα με τη θεωρία βαθμίδας του Mindlin(1964,1965) , η αποθηκευμένη ενέργεια εξαρτάται από την παραμόρφωση και τις παραγώγους της, με πυκνότητα ενέργειας:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\lambda e_{ii}e_{jj} + \mu e_{ij}e_{ij} + l_m[\frac{1}{2}\lambda\partial_m(e_{ii}e_{jj}) + \mu\partial_m(e_{ij}e_{ij})] \\ &+ \frac{1}{2}\lambda g^2\kappa_{ijj}\kappa_{ikk} + \mu g^2\kappa_{ijk}\kappa_{ijk} \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = e_{ji} \\ \kappa_{ijk} &= \partial_i e_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_i\partial_j u_k + \partial_i\partial_k u_j) \end{aligned} \tag{3.18}$$

και συνολική ενέργεια:

$$\begin{aligned} U &= \int_V \left[\tilde{\boldsymbol{\tau}} : \tilde{\mathbf{e}} + (\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{321}\vdots\nabla\tilde{\mathbf{e}} + \bar{\ell}\cdot[\frac{1}{2}\lambda\nabla(\tilde{\delta}\tilde{\mathbf{e}}\cdot\tilde{\delta}\tilde{\mathbf{e}}) + \mu\nabla(\tilde{\mathbf{e}} : \tilde{\mathbf{e}})]\right]dV \\ &= \int_V \left(\tau_{ij}e_{ij} + \mu_{ijk}\partial_i e_{jk} + l_n[\frac{1}{2}\lambda\partial_n(e_{ii}e_{jj}) + \mu\partial_n(e_{ij}e_{ij})]\right)dV. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Παίρνοντας την μεταβολή της ενέργειας έχουμε

$$\delta U = \int_V [\tilde{\boldsymbol{\tau}} : \nabla\delta\mathbf{u} + (\tilde{\boldsymbol{\mu}} + \ell[\lambda(\tilde{\mathbf{e}} : \tilde{\mathbf{I}})\tilde{\mathbf{I}} + 2\mu\tilde{\mathbf{e}}])^{321}\vdots\nabla\nabla\mathbf{u}]dV \tag{3.20}$$

Στην πορεία των πράξεων θα θεωρήσουμε :

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{new} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{old} + \ell[\lambda(\tilde{\mathbf{e}} : \tilde{\mathbf{I}})\tilde{\mathbf{I}} + 2\mu\tilde{\mathbf{e}}]$$

του οποίου οι συμμετρίες είναι ίδιες με του κλασσικού $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ και θα αποδειχθούν στο παράρτημα. Χρησιμοποιόντας τις ταυτότητες του Brand(1966):

$$\begin{aligned} \delta U = \int_V (&\nabla\cdot[(\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})\cdot\delta\mathbf{u}] - [\nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})]\cdot\delta\mathbf{u} \\ &+ \nabla\cdot[\tilde{\boldsymbol{\mu}} : \nabla(\delta\mathbf{u})])) \end{aligned} \tag{3.21}$$

και από το θεώρημα απόκλισης

$$\begin{aligned} \delta U = &-\int_V [\nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})]\cdot\delta\mathbf{u}dV \\ &+ \int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})\cdot\delta\mathbf{u}dS \\ &+ \int_S \hat{\mathbf{n}}\tilde{\boldsymbol{\mu}} : \nabla(\delta\mathbf{u})dS \end{aligned} \tag{3.22}$$

Όμως , όπως αναφέρεται και στα Mindlin(1964.1965),το τελευταίο ολοκλήρωμα της εξίσωσης(3.22) περιέχει την συνάρτηση $\nabla(\delta\mathbf{u})$,η οποία είναι προφανώς ανεξάρτητη από την $\delta\mathbf{u}$ πάνω στην επιφάνεια S. Μόνο το κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla(\delta\mathbf{u})$ είναι ανεξάρτητο της $\delta\mathbf{u}$ πάνω στην S.Διαχωρίζοντας το ανάδελτα σε κάθετο και εφαπτόμενο μέρος πάνω στην επιφάνεια S , τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}\int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}} : \nabla(\delta\mathbf{u})dS &= \int_S \left[\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}} : \left(\nabla_S + \hat{\mathbf{n}}\frac{\partial}{\partial n}\right)(\delta\mathbf{u})\right]dS \Rightarrow \\ \int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}} : \nabla(\delta\mathbf{u})dS &= \int_S (\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\mathbf{n}})[\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla(\delta\mathbf{u})]dS \\ &+ \int_S (\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}) : \nabla_S(\delta\mathbf{u})]dS\end{aligned} \tag{3.23}$$

έχοντας στο μυαλό μας την σχέση συμμετρίας $(\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{132} = (\tilde{\boldsymbol{\mu}})$,η οποία σημαίνει $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})^T = \hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ τότε το τελευταίο ολοκήρωμα της (3.23) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\int_S (\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}) : \nabla_S(\delta\mathbf{u})]dS = \int_S \Big(&\nabla_S\cdot[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})\cdot\delta\mathbf{u}] \\ &-[(\nabla_S\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{n}}\cdot[\nabla_S\cdot(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{213}]]\cdot\delta\mathbf{u}\Big)dS\end{aligned} \tag{3.24}$$

ωστόσο , ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος στο δεξί μέρος της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}\nabla_S\cdot[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})\cdot\delta\mathbf{u}] &= \hat{\mathbf{n}}\nabla_S\times[\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot\delta\mathbf{u})] \\ &+ [(\nabla_S\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}]\cdot\delta\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Επιπλέον το ολοκλήρωμα $\int_S \hat{\mathbf{n}}\nabla_S\times[\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot\delta\mathbf{u})]dS$ απλοποιείται όταν η επιφάνεια είναι λεία, και παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}&\int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla_S\times[\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot\delta\mathbf{u})]dS = \\ &\sum_{C_a}\oint_{C_a}\Big(||(\hat{\mathbf{m}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot||\delta\mathbf{u}\Big)dC\end{aligned} \tag{3.26}$$

για μη λείες επιφάνειες, όπου C_a είναι οι ακμές που τέμνονται δυο επιφάνεις S_1 και S_2 της S, $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{n}}$ με $\hat{\mathbf{s}}$ το εφαπτόμενο διάνυσμα στις C_a και οι αγκύλες $||\cdot||$ δηλώνουν την διαφορά των ποσότητων ,των επιφανειών S_1 και S_2, που περιέχονται σε αυτες.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.25) και (3.26) στην (3.24) και στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (3.23) , η μεταβολή της τροπικής ενέργειας που δίνεται από την εξίσωση(3.22) παίρνει τελικά την μορφή:

$$\begin{aligned}
\delta U = &- \int_V [\nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}})]\cdot\delta\mathbf{u}dV \\
&+ \int_S (\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\mathbf{n}})\cdot[\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla(\delta\mathbf{u})]dS \\
&+\int_S \left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}} - (\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\mu}}}{\partial n} - \hat{\mathbf{n}}\cdot(\nabla_S\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}) - \hat{\mathbf{n}}\cdot[\nabla_S\cdot(\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{213}]\right)\cdot\delta\mathbf{u}dS \\
&+ \int_S \left((\nabla_S\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}} - (\nabla_S\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}\right)\cdot\delta\mathbf{u}dS \\
&+ \sum_{C_a}\oint_{C_a}\left(||(\hat{\mathbf{m}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}||\delta\mathbf{u}\right)dC.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Η μεταβολή του έργου των καθολικών εξωτερικών δυνάμεων $\mathbf{f}$ που ασκούνται στο σώμα καθώς και των εξωτερικών εφελκυσμών $\mathbf{P}$, επιφανειακών διπλών τάσεων $\mathbf{R}$ και τα επιφανειακών άλματων τους $\mathbf{E}$ είναι: (Mindlin 1964,1965)

$$\begin{aligned}
\delta W = &\int_V \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}dV + \int_S \mathbf{R}\cdot[\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla(\delta\mathbf{u})]dS \\
&+ \int_S \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}dS + \sum_{C_a}\oint_{C_a}\left(\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{u}\right)dC.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Δεδομένου ότι $\delta U = \delta W$ και επιλέγοντας, όπως και στο παράδειγμα της μεμβράνης , διαφορετικές κλάσεις συναρτήσεων ,έχουμε τελικά τις εξισώσεις ισορροπίας καθώς και τις απαραίτητες συνορικές συνθήκες που θα πρέπει να τις συνοδεύουν.Καταλήγουμε:

Η εξίσωσεις ισορροπίας:

$$\nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{f} = 0 \tag{3.29}$$

Οι κλασσικές συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{x}) = &\hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\tau}} - (\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\mu}}}{\partial n} - \hat{\mathbf{n}}\cdot(\nabla_S\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}) - \hat{\mathbf{n}}\cdot[\nabla_S\cdot(\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{213}] \\
&+ (\nabla_S\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}} - (\nabla_S\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ή/και

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0 \tag{3.31}$$

και τις μη κλασσικές:

$$\mathbf{R}(x) = \hat{\mathbf{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x)}{\partial n} = q_0 \tag{3.32}$$

$$\mathbf{E}(x) = ||(\hat{\mathbf{m}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}||$$

3.3 Θεώρημα αναπαράστασης λύσης

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε ένα σημαντικό θεώρημα το οποίο μας βοηθά στο να επιλύσουμε αναλυτικά την εξίσωση ισορροπίας του σώματος. Το θεώρημα διαχωρίζει την γενική λύση του προβλήματος της εξίσωσης ισορροπίας του σώματος με μικροδομή :

$$(1 - g^2\nabla^2)[\mu\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})] = 0 \tag{3.33}$$

σε δύο ανεξάρτητες λύσεις , με την μια να επιλύει την κλασσική εξίσωση και την άλλη την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz.

Θεώρημα 2 (Θεώρημα αναπαράστασης λύσης). *Η λύση της εξίσωσης(3.33) μπορεί να γραφεί ως:*

$$\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{u}^{gradient} = \boldsymbol{u}^{classical} + \boldsymbol{u}^{g}, \tag{3.34}$$

με $\boldsymbol{u}^{classical} \in ker(\mu\nabla^2 + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot)$ *και* $\boldsymbol{u}^{g} \in ker(1 - g^2\nabla^2)$.

Proof. Συμβολίζουμε Δ^* τον κλασσικό ελαστικό ελλειπτικό διαφορικό τελεστή $\mathbf{u}^{classical} \in ker(\mu\nabla^2+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot)$.Δεδομένου ότι $(1-g^2\nabla^2)\Delta^*\mathbf{u}^{gradient} = \Delta^*(1 - g^2\nabla^2)\mathbf{u}^{gradient} = 0$, βλέπουμε ότι

$$\Delta^*\mathbf{u}^{gradient} = \mathbf{w}^{g}\in ker(1 - g^2\nabla^2), \tag{3.35}$$

και

$$(1 - g^2\nabla^2)\mathbf{u}^{gradient} = \mathbf{w}^{e}\in ker(\Delta^*) \tag{3.36}$$

Συνεπώς,

$$(1 - g^2\nabla^2)\mathbf{u}^{gradient} = \mathbf{w}^{e} \Longrightarrow \mu\Delta\mathbf{u}^{gradient} = \frac{\mu}{g^2}\mathbf{u}^{gradient} - \frac{\mu}{g^2}\mathbf{w}^{e}. \tag{3.37}$$

Από τις εξισώσεις (3.33) και (3.37) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{g^2}\mathbf{u}^{gradient} - \frac{\mu}{g^2}\mathbf{w}^e + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^{gradient}) &= \mathbf{w}^g \quad \Longrightarrow \\ \mathbf{u}^{gradient} &= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}g^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^{gradient}) + \mathbf{w}^e + \frac{g^2}{\mu}\mathbf{w}^g. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Χρησιμοποιόντας τώρα το θεώρημα αποσύνθεσης Helmholtz(Θεώρημα 1) $\mathbf{w}^g : \mathbf{w}^g = \nabla H + \nabla\times\mathbf{K}$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση(3.38) :

$$\begin{aligned} &\nabla[\mu\Delta\mathbf{u}^{gradient} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^{gradient})] = \nabla(\nabla H + \nabla\times K) \Longrightarrow \\ &\Delta[(\lambda+2\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}^{gradient} - H] = 0 \Longrightarrow \\ &(\lambda+2\mu)\nabla\cdot\mathbf{u}^{gradient} = H + B_0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

Όπου η B_0, είναι μια αρμονική συνάρτηση.Τότε οι συναρτήσεις (3.38) και (3.39) δίνουν:

$$\mathbf{u}^{gradient} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}g^2\nabla(H+B_0) + \mathbf{w}^e + \frac{g^2}{\mu}\mathbf{w}^g. \tag{3.40}$$

Επιπλέον ισχύει ότι $\Delta H = \nabla\cdot\mathbf{w}^g \in ker(1-g^2\Delta)$ και αφού $\Delta[(1-g^2\Delta)H] = 0 \Longrightarrow (1-g^2\Delta)H = B_1$,όπου B_1 είναι μια άλλη αρμονική συνάρτηση.Μια λύση αυτής της εξίσωσης είναι προφανώς η ίδια η B_1 συνεπώς η γενική λύση είναι $H = u^g + B_1$, με $u^g \in ker(1-g^2\Delta)$. Άρα η εξίσωση (3.40) μπορεί πλέον να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{gradient} &= -\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}g^2\nabla(B_1+B_0) + \mathbf{w}^e \\ &+ \frac{g^2}{\mu}\mathbf{w}^g - \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}g^2\nabla u^g. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Οι πρώτοι δυο όροι αυτής της εξίσωσης δημιουργούν το κλασσικό μέρος της λύσης $\mathbf{u}^e \in ker\Delta^*$, ενώ οι υπόλοιποι το κομμάτι $\mathbf{u}^g$ που ικανοποιεί την ομογενή τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz. □

3.4 Αναλυτικές λύσεις του ελαστοστατικού προβλήματος της κάμψης δοκού με μικροδομή

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε θεωρητικά το ελαστικό μέσο με μικροδομή (και επιφανειακή ενέργεια) στην απλούστερη εκδοχή του.Τώρα θα παρουσιάσουμε αρχικά την κλασσική λύση της κάμψεως δισδιάστατης ράβδου και στην συνέχεια θα επεκτείνουμε την λύση της όπως δείχθηκε στο[5] υπό το πρίσμα του θεώρηματος αποσύνθεσης της λύσης που αποδείχθηκε στην παράγραφο(3.3).Έχοντας στο μυαλό μας ότι η λύση είναι μοναδική και έχει μοναδική αποσύνθεση σε ένα κομμάτι λύσης με μικροδομή και ένα καθαρά κλασσικά ελαστικό, η πορεία σκέψης είναι η εξής:

- Μοναδικότητα λύσης $\Rightarrow$ Αν βρω λύση που να ικανοποιεί τις συνοριακές τιμές και την διαφορική εξίσωση , έχω λύση.
- Μοναδικότητα αποσύνθεσης της λύσης $\Rightarrow$ Κάνω συνδυασμό μιας κλασσικής ελαστικής λύσης με μια λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmoltz.
- Δεν έχω καθολικό τρόπο επίλυσης τέτοιας διαφορικής εξίσωσης $\Rightarrow$ Δοκιμάζω με κατάλληλα επιχειρήματα πιθανές λύσεις.
- Λόγω των παραπάνω έχω φτιάξει αναλυτικές λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

3.4.1 Κλασσική ελαστική λύση του προβλήματος κάμψεως δισδιάστατης δοκού

Ο συνήθης τρόπος για να επιλυθεί ένα τέτοιο πρόβλημα κλασσικής επίπεδης ελαστικότητας είναι να βρεθεί μια τασική συνάρτηση Airy που να επαληθεύει τις συνοριακές συνθήκες και στην συνέχεια να επιλυθούν οι επιμέρους (διαφορικές) εξίσωσεις έτσι ώστε να έχουμε την αναλυτική λύση που θέλουμε.Το πρόβλημα αυτό λύθηκε στο βιβλίο του Selvadurai:Partial Differential Equations in Mechanics[1] αλλά η μεθοδολογία αυτή είναι γενική για ένα μεγάλο πλήθος ελαστοστατκών προβλημάτων κλασσικής ελαστικότητας και παρουσιάζεται επίσης στο βιβλίο[11].
Όπως έχουμε δει και στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας αλλά προφανώς και της κλασσικής ελαστικότητας , αντιμετωπίζουμε ένα σύστημα, δύο συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων. Το 1862 ο G.B. Airy επινόησε ένα τρόπο επίλυσης αυτού του προβλήματος , το οποιο εν τέλη απλοποιεί σημαντικά την δυσκολία επίλυσης αφού από δυο συζευμένες εξισώσεις καταλήγουμε σε μια μόνο εξίσωση , την διαρμονική. Για να επιλύσουμε λοιπόν το σύστημα, αρκεί να βρούμε μια λύση της διαρμονικής εξίσωσης για το

εκάστοτε επίπεδο πρόβλημα , τέτοια ώστε να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση αλλά και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.Αρκετές φορές ένα πολυώνυμο έως τετάρτου βαθμού είναι αρκετό για να επιτύχει αυτόν ακριβώς τον σκοπό.
Σχόλιο:Η μοναδικότητα της λύσης είναι άμεση συνέπεια από την θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή της ελαστικής ενέργειας.Η εξαγωγή και απόδειξη αυτού του τεχνάσματος της συνάρτησης Airy μπορεί να βρεθεί εδω[11].Γενικά:

- Βρίσκω συνάρτηση $\Phi(x, y)$που να ικανοποιέι την εξίσωση $\nabla^4\Phi = C{\cdot}\mathbf{V}$με C να εξαρτάται από το επίπεδο πρόβλημα προς επίλυση, $\mathbf{V}$ το δυναμικό που εμπεριέχεται στο πρόβλημα και προφανώς $\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ο διαρμονικός τελεστής.
- Ελέγχω και προσαρμόζω τους συντελεστές της λύσης για να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες.
- Οι τάσεις προκύπτουν ως: $\sigma_{xx} = \mathbf{V} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \mathbf{V} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$
- $\sigma_{ij} = Ee_{ij}$ για κατάλληλο μητρώο ακαμψίας Ε(ανάλογα με το πρόβλημα).
- $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
- Λύνω ως προς τα u_x, u_y.Ολοκληρώνοντας και εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες επιλύω το πρόβλημα και βρίσκω το πεδίο των μετατοπίσεων.

Έστω λοιπόν το πρόβλημα την κάμψεως δισδιάστατης δοκού όπως στο παράτω σχήμα(και όπως δόθηκε στο βιβλίο του Selvadurai[1]).Έχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες:

- $\sigma_{xx}(0, y) = \sigma_{xx}(L, y) = \frac{\sigma_0 y}{a}$
- $\sigma_{xy}(0, y) = \sigma_{xy}(L, y) = 0$
- $\sigma_{yy}(x, a) = \sigma_{yy}(x, -a) = \sigma_{xy}(x, a) = \sigma_{xy}(x, -a) = 0$

Λύση: Για να λύσουμε το πρόβλημα θα ακολουθήσουμε τα παραπάνω βήματα και ορισμούς των τάσεων και παραμορφωσιακών πεδίων , χρησιμοποιόντας την τασική συνάρτηση Airy:

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma_0 y^3}{6a} \tag{3.42}$$

η οποία προφανώς ικανοποιεί τις συνοριχές μας συνθήκες. Τέλος για λόγους στατικότητας του προβλήματος θα επιβάλουμε εκ των υστέρων τις εξής συνθήκες για τις μετατοπίσεις και τις στροφές στο σημείο (0,0) :

$$u(0,0) = 0; v(0,0) = 0; \omega_{x,y} = 0 \tag{3.43}$$

καταλήγοντας στην τελική λύση:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x,y) = \frac{P_1(1-\nu^2)}{Ea}xy \\ u_2(x,y) = -\frac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \end{cases} \tag{3.44}$$

Figure 3.6: Πρόβλημα κάμψεως δοκού.

3.4.2 Επέκταση κλασσικής λύσης σε λύση δοκού με μικροδομή

Στην παράγραφο αυτή θα επεκτείνουμε την προηγούμενη λύση που αφορούσε το πρόβλημα της κλασσικής ελαστικότητας , σε λύση προβλήματος κάμψεως δοκού με μικροδομή υπό συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες , όπως παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν στο άρθρο[5].Έτσι θα αντιληφθούμε καλύτερα την αξία αυτής της υπέρθεσης των λύσεων , γεγονός που είναι φυσικά αποδεκτό αλλά και μαθηματκά μέσω του θεωρήματος(3.3).Πρώτα όμως θα αναλύσουμε συνοπτικά τις πιθανές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz , η οποία θα μας "δείξει" επιπλέον τις υποψήφιες διορθωτικές λύσεις.

Έστω χωρίο Ω και $\partial\Omega$ το σύνορο του , όλα επαρκώς ομαλά για την συνέχεια της ανάλυσης.Η τροποποιημένη εξίσωση Helmoltz με συντελεστή μικροδομής g^2 είναι η εξής:

$$(I - g^2\nabla^2)\vec{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.45}$$

με $\vec{\mathbf{u}} = (u_1(x,y), u_2(x,y))$ το πεδίο των μετατοπίσεων.
Προσπαθώντας να λύσουμε την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση καταλήγουμε σε 2 "όμοια" προβλήματα για τις u_1, u_2 συνεπώς θα το λύσουμε για μία βαθμωτή συνάρτηση v(για να εξάγουμε την γενική λύση) και άρα και για τις άλλες δύο, αγνοόντας προς το παρόν τις συνοριακές συνθήκες.

$$(1 - g^2\nabla^2)v(x,y) = 0 \tag{3.46}$$

Θεωρόντας λύση της μορφής $v(x,y) = X(x)Y(y)$ έχουμε:

$$X(x)Y(y) - g^2[X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)] = 0 \tag{3.47}$$

διαιρούμε με τον πρώτο όρο

$$1 - g^2[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}] = 0 \tag{3.48}$$

Άρα $\Rightarrow$

$$(\frac{1}{g^2} - \frac{X''(x)}{X(x)}) = \frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{3.49}$$

Το πρώτο μέλος είναι εξαρτάται μόνο από το x ενώ το δεύτερο μόνο από το y άρα για να ισούνται θα πρέπει να είναι σταθερές συναρτήσεις.Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\lambda^2 \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{1}{g^2} + \lambda^2 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Φυσικά καθώς το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς τα X(x),Y(y) θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις δυο συνήθης διαφορικές εξισώσεις ανάποδα και ότι γενική μορφή λύσης βρούμε για το X(x) να είναι για το Y(y) και αντίστροφα.Συνεπώς η γενική μορφή της λύσης θα πρέπει να περιέχει και τις δυο εκδοχές.Λύνοντας την πρώτη εξίσωση καταλήγουμε:
Αν $\lambda \neq 0$

$$Y(y) = A_\lambda cos(\sqrt{\lambda}y) + B_\lambda sin(\sqrt{\lambda}y) \tag{3.51}$$

Αν $\lambda = 0$

$$Y(y) = a_\lambda y + b_\lambda \tag{3.52}$$

και λύνοντας την δεύτερη:
Θεωρώντας $n^2 = \lambda^2 + \frac{1}{g^2}$
Αν $\lambda^2 + \frac{1}{g^2} > 0$ τότε:

$$X(x) = T_n e^{nx} + J_n e^{-nx} \tag{3.53}$$

ή

$$X(x) = T_n e^{(\sqrt{\frac{1}{g^2}+\lambda^2})x} + J_n e^{-(\sqrt{\frac{1}{g^2}+\lambda^2})x} \tag{3.54}$$

Προφανώς λόγω συμμετρίας θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε και ανάποδα αυτές τις δυο λύσεις ως προς τα γνωρίσματα x,y αλλά για την δική μας περίπτωση αυτή η αναπαράσταση είναι αρκετή για την εύρεση των λύσεων στην συνέχεια.Άρα εν τέλη έχουμε την συνολική λύση:

$$v(x,y) = \sum_{\lambda,n=0}^{\infty} [(a_\lambda y + b_\lambda)(T_n e^{\frac{1}{g}x} + J_n e^{-\frac{1}{g}x}) + \\ (A_\lambda cos(\sqrt{\lambda}y) + B_\lambda sin(\sqrt{\lambda}y))(T_n e^{(\sqrt{\frac{1}{g^2}+\lambda^2})x} + J_n e^{-(\sqrt{\frac{1}{g^2}+\lambda^2})x})] \tag{3.55}$$

Πλέον έχοντας δει την κλασσική ελαστική λύση της κάμψεως , το θεώρημα διαχωρισμού των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης και τέλος έχοντας στο νου μας μια πιθανή αναπαράσταση των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θα προκύψουν φυσικά οι παρακάτω λύσεις στο πρόβλημα με μικροδομή. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε 5 προβλήματα κάμψεως με διαφορετικού είδους συνοριακές συνθήκες, όπως επιλύθηκαν στο άρθρο[5] των Χαραλαμπόπουλου Α. , Τσινόπουλου Σ. και Πολύζου Δ..Προφανώς με την παραπάνω μεθοδολογία θα μπορούσαμε να επιλύσουμε και επιπλέον προβλήματα με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Το πρόβλημα γίνεται αρκετά δυσκολότερο σε διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών και άλλες μέθοδοι και αναπαραστάσεις της λύσης του ελαστοστατικού προβλήματος χρησιμοποιούνται.Στην περίπτωση της εμπλοκής μικρομηχανικής επιφανειακής ενέργειας τα πράγματα γίνονται πολύ δύσκολα και αποτελεί μια ερευνητική περιοχή της προχωρημένης μηχανικής των υλικών.

Στα παρακάτω 5 προβλήματα που αφορούν το πρόβλημα του σχήματος[3.6].Θεωρούμε ότι η εφελκυτική δύναμη στα άκρα του παραλληλόγραμμου μεταβάλεται γραμμικά. Οι κλασσικές συνοριακές συνθήκες είναι ίδιες για όλα τα παρακάτω προβλήματα και είναι οι εξής:

- $p_1(0,y) = p_1(L,y) = \frac{P_1 y}{a}$

- $p_2(0, y) = p_2(L, y) = 0$
- $\mathbf{p}(x, a) = \mathbf{p}(x, -a) = \mathbf{0}$

ενώ οι μη κλασσικές συνοριακές συνθήκες θα ορίζονται ανεξάρτητα στο κάθε πρόβλημα ξεχωριστά.
Πρόβλημα 1: Σε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε ότι οι μη κλασσικές συνοριακές συνθήκες των διπλών τάσεων καθώς και των αλμάτων των τάσεων είναι όλες μηδενικές.Αξιοσημείωτο είναι ότι αν δεν υποβάλλουμε την ράβδο σε μη κλασσικές συνοριακές συνθήκες τότε δεν υπάρχει πυροδότηση της μικρομηχανικής συμπεριφοράς του υλικού. Πιο αναλυτικά:

- $\mathbf{R}$(0,y)=$\mathbf{R}$(L,y)=$\mathbf{0}$
- $\mathbf{R}$(x,a)=$\mathbf{R}$(x,-a)=$\mathbf{0}$

Παρατηρούμε ότι η κλασσική λύση είναι αρκετή για να επιλύσει το πρόβλημα και άρα να ικανοποιηθούν όλες οι συνοριακές συνθήκες.Συνεπώς:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x, y) = \frac{P_1(1-\nu^2)}{Ea} xy \\ u_2(x, y) = -\frac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \end{cases} \tag{3.56}$$

Πρόβλημα 2: Στο συγκεκριμένο πρόβλημα εφαρμόζουμε μη κλασσικές συνοριακές συνθήκες και παρατηρούμε την ύπαρξη όρων μικροδομής στην λύση του προβλήματος.Έχουμε λοιπόν τις εξής συνοριακές συνθήκες:

- $\mathbf{R}$(x,a)=$\mathbf{R}$(x,-a)=$\mathbf{0}$
- $R_1(0, y) = R_1(L, y) = 0$
- $R_2(0, y) = R_2(L, y) = \pm R_0$

και η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x, y) = \frac{P_1(1-\nu^2)}{Ea} xy \\ u_2(x, y) = -\dfrac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \\ \qquad\qquad + 2(1+\nu)\dfrac{R_0}{E}\dfrac{e^{-\frac{x}{g}} + e^{\frac{(x-L)}{g}}}{1+e^{-\frac{L}{g}}} - 2(1+\nu)\dfrac{R_0}{E} \end{cases} \tag{3.57}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται και γραφικά οι λύσεις του προβλήματος 2 με διαφορετικές τιμές της παραμέτρου g και συγκρίνονται με την λύση του κλασσικά ελαστικού προβλήματος.

Το παραπάνω πρόβλημα δεν αλλάζει δραστικά αν οι δυο μη μηδενικές διπλες

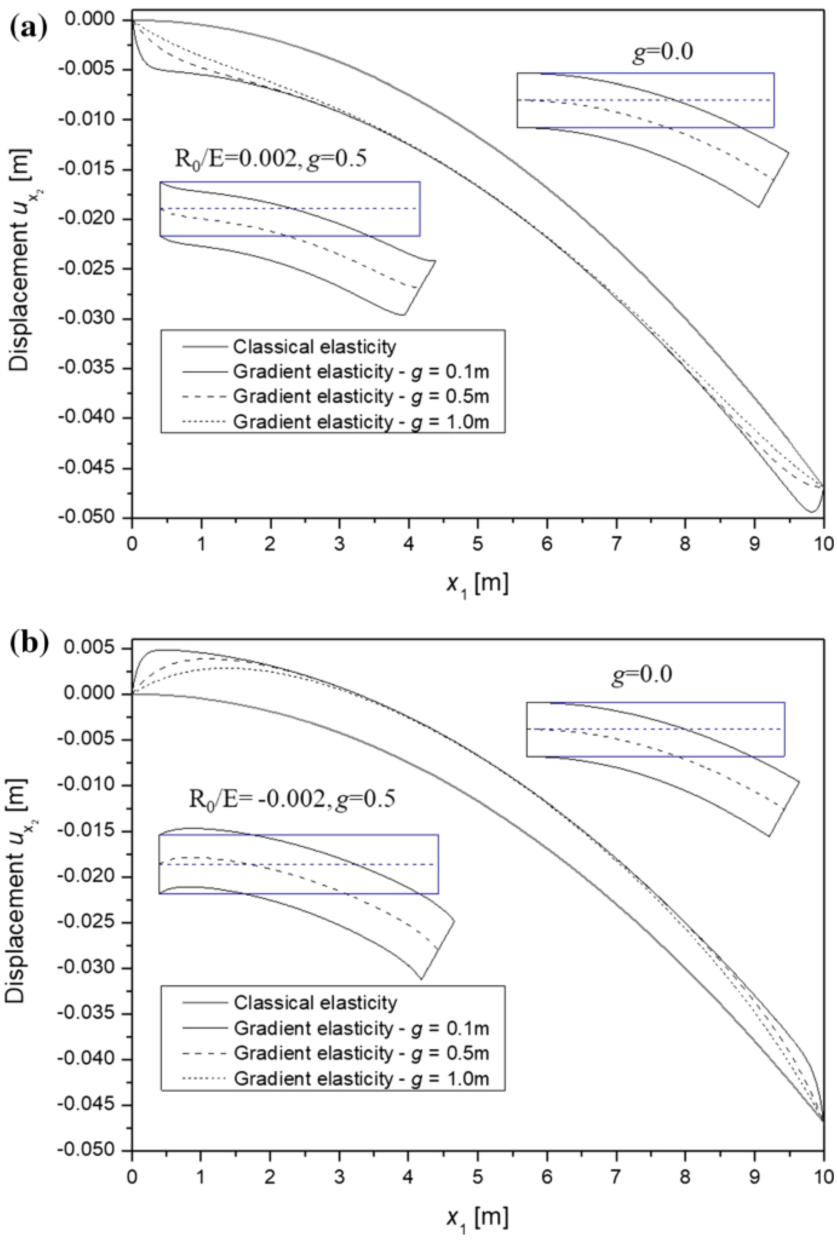

Figure 3.7: Γραφική αναπαράσταση του προβλήματος 2 για $L = 10m, a = 1, P_1/E = 0.001, \nu = 0.25, R_0/E = 0.002(a), R_0/E = -0.002(b)$

τάσεις δεν συμμετρικές στα άκρα του παραλληλογράμμου. Δηλαδή αν έχουμε τις ίδιες συνοριακές συνθήκες αλλά:

- $\mathbf{R}|_{x_1=0} = R_0\hat{\mathbf{x}}_2$
- $\mathbf{R}|_{x_1=L} = R_1\hat{\mathbf{x}}_2$

με $R_0 \neq R_1$.Η λύση γίνεται:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x,y) = \frac{P_1(1-\nu^2)}{Ea}xy \\ u_2(x,y) = -\dfrac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \\ \dfrac{2(1+\nu)}{E(1-e^{-2L/g})}[(R_0 - R_1e^{-L/g})e^{-x/g} + (R_1 - R_0e^{-L/g})e^{-(x-L)/g}] - 2(1+\nu)\dfrac{R_0}{E} \end{cases} \tag{3.58}$$

Πρόβλημα 3: Το συγκεκριμένο πρόβλημα αφορά μια καθαρή κάμψη με μη-κλασσικές συνοριακές συνθήκες τις εξής:

- $R_1(x_1, a) = R_1(x_1, -a) = \pm R_0$
- $R_2(x_1, a) = R_2(x_1, -a) = 0$
- $\mathbf{R}(0, x_2) = \mathbf{R}(L, x_2) = \mathbf{0}$

Οι μη μηδενικές συνοριακές συνθήκες στην πάνω και κάτω οριζόντια πλευρά οδηγούν πάλι σε μόνο μια διόρθωση της κλασσικής λύσης αλλά στον πρώτο όρο αυτή την φορά. Δηλαδή :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x,y) = \dfrac{P_1(1-\nu^2)}{Ea}xy \\ \qquad 2(1+\nu)\dfrac{R_0}{E}\dfrac{e^{(y-a)/g} + e^{(y+a)/g}}{1+e^{-2a/g}} - 2(1+\nu)\dfrac{R_)}{E}\dfrac{2e^{-2a/g}}{1+e^{-2a/g}} \\ u_2(x,y) = -\frac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \end{cases} \tag{3.59}$$

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα παρουσιάζονται και εδώ οι λύσεις γραφικά στο σχήμα [3.8].

Ομοίως στην περίπτωση που οι διπλές τάσεις δεν είναι συμμετρικές δηλαδή:

- $\mathbf{R}|_{y=-a} = R_1\hat{\mathbf{x}}$

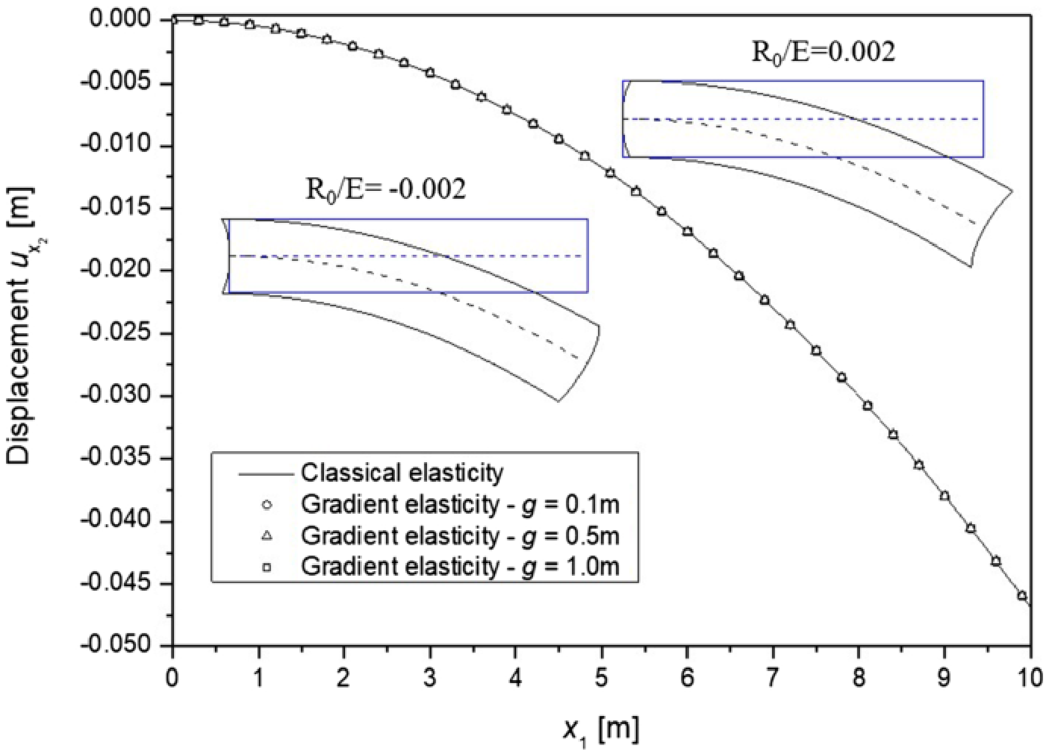

Figure 3.8: Γραφική αναπαράσταση του προβλήματος 3 για L=10m ,a=1,$P_1/E = 0.001, \nu = 0.25, R_0/E = 0.002, R_0/E = -0.002$

- $\mathbf{R}|_{y=a} = R_2\hat{\mathbf{x}}$

με $R_1 = \pm R_2$ έχουμε τελικά:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x,y) = \dfrac{P_1(1-\nu^2)}{Ea}xy + \dfrac{2(1+\nu)}{E(1-e^{-4a/g})}[(R_2 - R_1 e^{-2a/g})e^{(y-a)/g} + (R_1 - R_2 e^{-2a/g})] \\ \qquad - 2(1+\nu)\dfrac{(R_1+R_2)e^{-a/g}}{E(1+e^{-2a/g})} \\ u_2(x,y) = -\frac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \end{cases} \tag{3.60}$$

Εδώ παρατηρούμε ότι η κάμψη της δοκού παραμένει ίδια με την μόνη διαφορά στο τελικό της σχήμα , το οποίο φαίνεται να παραμορφώνεται σε σχέση με το αρχικό λόγω των συγκεκριμένων συνοριακών συνθηκών.

Πρόβλημα 4: Στο πρόβλημα 4 διαφοροποιούμε λίγο τις μη κλασσικές συνοριακές συνθήκες και εφαρμόζουμε κάποια απαίτηση για τις παραγώγους των μετατοπίσεων.Αναλυτικά:

- $\mathbf{R}(x,a) = \mathbf{R}(x,-a) = \mathbf{0}$
- $R_1(0,y) = R_1(L,y) = 0$
- $\partial_1 u_2(0,y) = \partial_1 u_2(L,y) = 0$

Χρησιμοποιόντας την υπόθεαη ότι η λύση είναι της μορφής $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\kappa\lambda\alpha\sigma\sigma\iota\kappa} + g^2(Ae^{-x/g} + Be^{(x-L)/g})\hat{\mathbf{u}}$, και εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες βρίσκουμε τα A,B και έχουμε :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x,y) = \frac{P_1(1-\nu^2)}{Ea}xy \\ u_2(x,y) = -\dfrac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \\ \qquad\qquad + 2(1-\nu^2)\dfrac{P_1}{E}\dfrac{Lg}{a}\dfrac{(cosh\frac{x}{g}-1)}{1-e^{-2/L}} \end{cases} \tag{3.61}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η σημαντική επίδραση που έχει η μικροδομή στην τελική παραμόρφωση του σώματος καθώς όσο μεγαλώνει τόσο δραστικότερη γίνεται η επιρροή της.

Πρόβλημα 5: Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα δούμε πως επιδρούν τα άλματα-ασυνέχειες των τάσεων στις ακμές του παραλληλογράμμου.Όπως διαπιστώνει κανείς η υπαρξη της μικροδομής μας εφοδιάζει με τα κατάλληλα εργαλεία και την δυνατότητα να το λύσουμε.Έχουμε λοιπόν τις εξής συνοριακές συνθήκες:

- $E_1(a,0) = E_1(a,L) = E_1(-a,0) = E_1(-a,L) = 0$
- $E_2(a,0) = E_2(-a,0) = e$
- $E_2(a,L) = E_2(-a,L) = -e$

Από τα προηγούμενα κάνουμε μια χρήσιμη εικασία για την λύση και θεωρούμε την εξής:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\kappa\lambda.} + (A_1e^{-(y+a)/g} + B_1e^{(y-a)/g})\hat{\mathbf{x}} + (A_2e^{-x/g} + B_2e^{(x-L)/g})\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \tag{3.62}$$

όπου το $\mathbf{C}$ είναι προφανώς ένας σταθερός όρος διόρθωσης ο οποίος μας δίνει περισότερους βαθμούς ελευθερίας για την επίλυση του συστήματος. Επειδή το

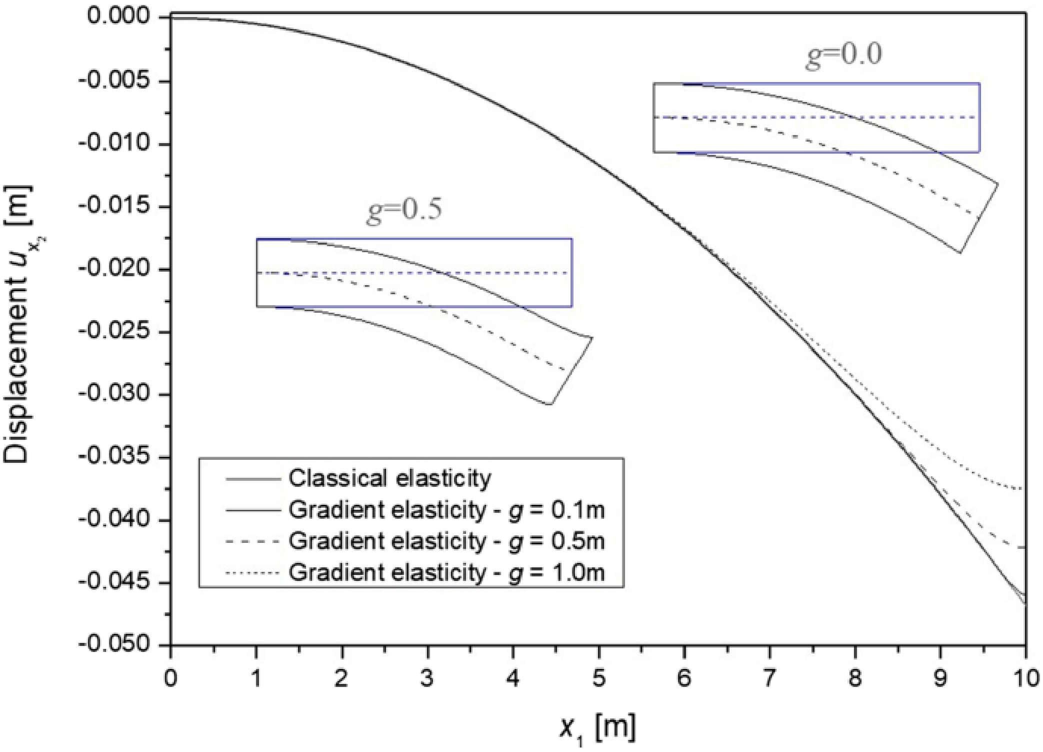

Figure 3.9: Γραφική αναπαράσταση της ελαστικής γραμμής του προβλήματος 4 για L=10m ,a=1,$P_1/E = 0.001, \nu = 0.25, R_0/E = 0.002, R_0/E = -0.002$

σώμα θεωρούμε ότι είναι ακίνητο το **C** δρα και ως φυσικός περιορισμός της κίνησης του σώματος στην θέση (0,0).Τελικά:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(x,y) = \frac{P_1(1-\nu^2)}{Ea}xy + \frac{2(1+\nu)e}{E(1-e^{-2a/g})}(e^{(y-a)/g} - e^{-(y+a)/g}) \\ u_2(x,y) = -\dfrac{P_1}{2Ea}[\nu(1+\nu)y^2 + (1-\nu^2)x^2] \\ \qquad\qquad - \dfrac{2(1+\nu)P_1 g^2}{Ea(1+e^{-L/g})}(e^{-x/g} + e^{(x-L)/g}) + \dfrac{2(1+\nu)P_1 g^2}{Ea} \end{cases} \tag{3.63}$$

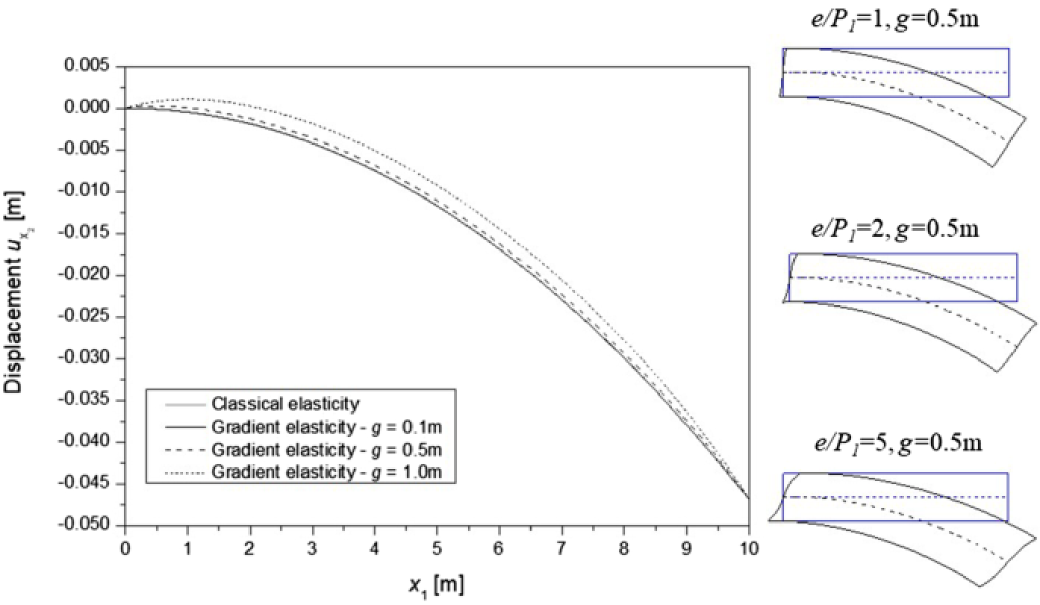

Figure 3.10: Γραφική αναπαράσταση της ελαστικής γραμμής του προβλήματος 10 για L=10m ,a=1,$P_1/E = 0.001, \nu = 0.25, e/P_1 = 1, 2, 5$

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Στην πορεία αυτής της διπλωματικής εργασίας δόθηκαν διάφορα μαθηματικά εργαλεία , τύποι και θεωρήματα για την μελέτη και βαθύτερη κατανόηση των περίπλοκων συνοριακών προβλημάτων της βαθμοελαστικής θεωρίας του Mindlin. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει μεγάλο περιθώριο στην ανάπτυξη της συγκεκριμένης θεωρίας αφού τα μόνα προβλήματα που έχουν μελετηθεί αφορούν την απλούστερη περίπτωση μικροδομής ενώ άμεση ενίσχυση της θεωρίας να αποτελεί η εμπλούτιση της στην περίπτωση της μικρομηχανικής επιφανειακής ενέργειας.

Στο μέλλον τα αποτελέσματα αυτής της διπλωματικής αλλά και ο τρόπος σκέψης και επίλυσης του απλούστερου προβλήματος κάμψης δοκού με μικροδομή , θα μπορούσε να αποτελεί ένα βήμα για όποιον θα ήθελε να λύσει παρόμοια προβλήματα με ή χωρίς επιφανειακή ενέργεια. Στην βιβλιογραφία θα μπορούσε κάποιος να ανατρέξει για την εύρεση περισσοτέρων αποτελεσμάτων και μεθόδων για τα συγκεκριμένα συναρπαστικά προβλήματα της βαθμοελαστικής θεωρίας.

Παράρτημα A

Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων για τις εξισώσεις ισορροπίας

Σε αυτό το κομμάτι του παραρτήματος θα ασχοληθούμε με το ελαστοστατικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας σώματος με μικροδομή(και επιφανειακή ενέργεια) σε ένα πιο αφηρημένο υπόβαθρο των χώρων Sobolev. Θα δούμε μερικά αποτελέσματα από την γενική θεωρία συνοριακών προβλημάτων που εφαρμόζονται στην δική μας , τετάρτης τάξεως , διαφορική εξίσωση.

Θεωρούμε λοιπόν ένα φραγμένο ανοικτό χωρίο $\Omega \subset R^d$ με d=2,3 και το περίβλημα του συνόρου $\partial\Omega$ να είναι μια επιφάνεια Lipschitz. Αν αγνοήσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις , τότε οδηγούμαστε σε μια δυάδα εξισώσεων τετάρτης τάξης και με ένα σύνολο κλασσικών και μη-κλασσικών συνοριακών συνθηκών όπως είδαμε κατα την διάρκεια του κεφαλάιου(3). Χωρίζουμε το περίβλημα του Ω σε δύο υποχωρία $\partial\Omega_D, \partial\Omega_N$ με το $meas(\partial\Omega_D) > 0$ στα οποία θα εφαρμόζονται οι κλασσικές συνθήκες , αλλά δευτερευόντως σε άλλα δύο υποχωρία $\partial\Omega_Q, \partial\Omega_R$ των οποίων η τομή διάστασης d-2 ,θα αναπαριστά τις γωνίες ή πλευρές του σώματος στην επιφάνεια του. Τότε οι συνοριακές συνθήκες γράφονται ως:

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad x \in \partial\Omega_D$
- $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad x \in \partial\Omega_N$

και οι μη κλασσικές:

- $\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial n} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, g) \quad x \in \partial\Omega_Q$
- $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}, g), \quad x \in \partial\Omega_R$
- $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}, g), \quad x \in \Gamma$

όπου τα $\mathbf{p} = p_i\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{R} = R_i\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{E} = E_i\hat{\mathbf{x}}_i$

Η λύση $\mathbf{u(x)}$ αλλά και οι μη-κλασσικές συνοριακές συνθήκες $\mathbf{p(x)}$,$\mathbf{R(x)}$,$\mathbf{E(x)}$ προφανώς εξαρτώνται από το g, αλλά θα παραληφθεί παρακάτω για απλούστευση των πράξεων.

Θεωρούμε ότι οι δοσμένες συναρτήσεις **f,g,h,r** και s έχουν όλες την απαραίτητη κανονικότητα για τον καλό ορισμό του ίχνους της λύσης της εξίσωσης(3.3) και των παραγώγων τους στο σύνορο $\partial\Omega$. Στην συνέχεια θα αναλύσουμε το πρόβλημα όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο του Wloka για την μεταβολική διατύπωση ελλειπτικών συνορικών προβλημάτων για ιδιότητες ευστάθειας , μοναδικότητας και ύπαρξης λυσης. Δεν θα αναλυθεί στην συνέχεια σε έκταση το συγκεκριμένο θέμα αλλά θα δοθούν κάποιοι ορισμοί και αποτελέσματα για την φύση της προς μελέτη διαφορικής εξίσωσης σε αυτή την διπλωματική εργασία.

Γνωρίζουμε ότι οι χώροι Sobolev $H^s(\Omega)$ και $H^s(\partial\Omega)$ είναι πλήρεις χώροι Hilbert εφοδιασμένοι με εσωτερικό γινόμενο παραγώμενοι από από τις συναρτήσεις (κατανομές) με συγκεκριμένη συμπεριφορά ως προς την ολοκλήρωση τους πάνω σε αυτούς τους χώρους.Στους πιο γνωστούς χώρους Sobolev ανήκει ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ και ο υπόχωρος του $H^1(\Omega)$, στον οποίο οι παράγωγοι των συναρτήσεων κατέχουν και αυτές τετραγωνικά ολοκληρώιμη συμπεριφορά.Κάθε χώρος Hilbert $H^m(\Omega)$,με $m \in N$ έχει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και την νόρμα που επάγεται από αυτό με όλες τις παραγώγους των συναρτήσεων τάξης έως m. Συνεπώς η σχέση $H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega)$ είναι ένας προφανής εγκλυσμός , όταν $m_1 > m_2$. Για s , πραγματικό αριθμό η έννοια της παραγώγου γενικεύεται με ένα περίπλοκο τρόπο όπως δίνεται σε προχωρημένα βιβλία Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων όπως [6] και άλλα.Όταν $s \geq 0$, τα στοιχεία του χώρου $H^s(\Omega)$ ανήκουν στον $L^2(\Omega)$, αλλά αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση που s < 0 , και τότε υπάρχουν κατανομές χωρίς συναρτησιακό εκπρώσωπο.

Παρόλο που οι συναρτήσεις που ανήκουν στον χώρο $H^s(\Omega)$ δεν είναι κλασσικές με την συνήθη έννοια , έχουν ίχνος στο σύνορο του χώρου $H^s(\Omega)$, το οποίο αποτελείται από γενικευμένες συναρτήσεις του χώρου $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.Η παράγωγοι k τάξης στην επιφάνεια ενός συνόρου του χώρου $\partial\Omega$, ανήκουν στον $H^{s-k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ στην περίπτωση που η ομαλότητα του συνόρου το επιτρέψει.Ο χώρος $H^s{}_0(\Omega)$ είναι ο υπόχωρος του του $H^s\Omega$, με τα στοιχεία του αλλά και τις παραγώγους των στοιχείων του μικρότερης απο k τάξης ,να έχουν ίχνος 0 στο σύνορο του συνόλου.

Παρατηρούμε ότι για μια κλειστή επιφάνεια $\partial\Omega$, ο χώρος $H^{-s}(\partial\Omega)$ είναι ο δυϊκός του χώρου $H^s(\partial\Omega)$ και συνεπώς δημιουργούνται όροι της μορφής $\langle h, f\rangle|_{\partial\Omega}$ με το $h{\in}H^{-s}(\partial\Omega)$ και το $f{\in}H^s(\partial\Omega)$. Οι αγκύλες γενικά συμβολίζουν την δράση ενός τελεστή h πάνω στο στοιχείο f αλλά θα μπορούσαν φυσικά να ορίζουν την δράση των εξωτερικών δυνάμεων πάνω στις μετατοπισεις.Μόνο στην περίπτωση που έχουμε s=0 , οι αγκύλες αυτές δηλώνουν το γνωστό εσωτερικό γινόμενο $\int_{\partial\Omega} h(x)f(x)dS$.

Έχοντας στον νου μας τα παραπάνω , παρατηρούμε ότι έχουμε στα χέρια μας ένα πρόβλημα τετάρτης τάξεως και συνεπώς η τάξη των τελεστών των συνοριακών συνθήκων δεν θα μπορούσε να ξεπεράσει το τρία. Μπορεί φυσικά να το δει κανείς αν θυμηθεί ότι για να βρούμε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες πήραμε ένα μεταβολικό πρόβλημα και στην πορεία , κάνοντας ολοκληρώσεις κατα παράγοντες και με λίγη άλγεβρα βρήκαμε τις συνορικές συνθήκες. Δεν θα μπορούσαμε να έχουμε ίδιας ή και παραπάνω τάξης τελεστές συνοριακών συνθηκών από ότι είναι η διαφορική εξίσωση που θα εφαρμοζόταν.Για παράδειγμα αν είχαμε ως συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (3.3) τις εξισώσεις που ορίστηκαν παραπάνω, οι οποίες θα εφαρμόζονταν σε ολόκληρο το σύνορο $\partial\Omega$ ($\Gamma = \emptyset$) τότε ό πρώτος διαφορικός τελεστής στο σύνορο θα ήταν A=I ,με τάξη 0, και ο δεύτερος ο B=$\frac{\partial}{\partial n}$, με τάξη 1. Θα καταλήγαμε έτσι στο γνωστό συνορικό πρόβλημα Dirichlet.

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι η οριακή συμπεριφορά της λύσεως του προβλήματος της παρούσας διπλωματικής όταν ο όρος της μικροδομής τείνει στο μηδέν. Με βάση ένα γενικό θεώρημα ομαλότητας του βίβλίου [10] έχουμε:

$$\begin{aligned}||\mathbf{u}||_{H^s(\Omega)} \leq C_g \Big(&||\mathbf{f}||_{H^{s-m_1-1/2}(\partial\Omega_D)} + ||\mathbf{g}||_{H^{s-m_2-1/2}(\partial\Omega_N)} + ||\mathbf{h}||_{H^{s-m_3-1/2}(\partial\Omega_Q)} \\ &+ ||\mathbf{r}||_{H^{s-m_4-1/2}(\partial\Omega_R)} + ||\mathbf{s}||_{H^{(s-m_4-1/2)-1/2}(\Gamma)} \Big)\end{aligned} \tag{A.1}$$

με τα m_i να δηλώνουν τις τάξεις των τελεστών του συνόρου.Αντικαθιστώντας τις τάξεις των τελεστών που έχουμε στο δικό μας πρόβλημα έχουμε:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}||_{H^s(\Omega)} \leq & C_g\bigg(||\mathbf{f}||_{H^{s-1/2}(\partial\Omega_D)} + ||\mathbf{g}||_{H^{s-7/2}(\partial\Omega_N)} + ||\mathbf{h}||_{H^{s-3/2}(\partial\Omega_Q)} \\ & + ||\mathbf{r}||_{H^{s-5/2}(\partial\Omega_R)} + ||\mathbf{s}||_{H^{(s-3}(\Gamma)}\bigg) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Αξίζει να σημειωθεί η μείωση της διάστασης των όρων της παραπάνω ανίσωσης απο το αρχικό σύνολο μέχρι και την τομή των επιφανειών $\Omega \to \partial\Omega \to \Gamma$. Οι διαστάσεις αυτές αλλά και του χώρου παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση μας αφού ανάλογα με την διάσταση του χώρου θα ζητούσαμε και διαφορετική απαίτηση ομαλότητας του συνόρου. Αφού το πρόβλημα μας είναι τετάρτης τάξεως απαιτούμε να έχει παραγώγους έως τέταρτης τάξης τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και όλα τα δεδομένα να ανήκουν σε φυσιολογικούς χώρους Sobolev θετικής τάξης.Τότε η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται με την L^2-έννοια.Όμως αυτό ικανοποιείται με την υπόθεση ότι έχουμε ένα ομαλό $C^{1,1}$ σύνορο.Για να επιτρέξουμε την ύπαρξη γωνιών και ακμών θα πρέπει να δουλέψουμε με χώρο s=2.Άρα:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}||_{H^2(\Omega)} \leq & C_g\bigg(||\mathbf{f}||_{H^{3/2}(\partial\Omega_D)} + ||\mathbf{g}||_{H^{-3/2}(\partial\Omega_N)} + ||\mathbf{h}||_{H^{1/2}(\partial\Omega_Q)} \\ & + ||\mathbf{r}||_{H^{-1/2}(\partial\Omega_R)} + ||\mathbf{s}||_{H^{-1}(\Gamma)}\bigg) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Στην περίπτωση αυτή τα **f,h** χάνουν την ομαλότητα τους αλλά συνεχίζουν να παραμένουν τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.Αντίθετα τα δεδομένα **g,r,s** που αντιπροσωπεύουν τις τάσεις και τα άλματα των διπλών τάσεων στης γωνίες ή πλευρές, θα μπορούσαν γίνουν μη τετραγωνικά ολοκληρώσιμες κατανομές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μέχρι στιγμής έχουμε πάρει την ιδανική περίπτωση απουσίας εξωτερικών δυνάμεων. Η διαφορική εξίσωση δεν είναι πλέον κλασσική αλλά με την έννοια των κατανομών.Σημαντική παρατήρηση είναι η κάτω φράξη (coercivity) της διγραμμικής μορφής του βαθμοελαστικού τελεστή.Η γενική σταθερά C_g που εμφανίζεται στις προηγούμενες σχέσεις δεν θα μπορούσε να έχει χειρότερη τάξη σύγκλισης από g^{-2} $O(g^{-2})$ για $g \to 0$.Επιπλέον έχουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}||_{H^1(\Omega)} \leq & C\bigg(||\mathbf{f}||_{H^{3/2}(\partial\Omega_D)} + ||\mathbf{g}||_{H^{-3/2}(\partial\Omega_N)} + ||\mathbf{h}||_{H^{1/2}(\partial\Omega_Q)} \\ & + ||\mathbf{r}||_{H^{-1/2}(\partial\Omega_R)} + ||\mathbf{s}||_{H^{-1}(\Gamma)}\bigg) \end{aligned} \tag{A.4}$$

με την σταθερά της παραπάνω ανίσωσης να είναι ανεξάρτητη από τον συντελεστή g, αφού θεωρώντας νόρμες μόνο πρώτων παραγώγων σημαίνει ότι δεν θα υπάρχει εμπλοκή της σταθεράς g αλλά μόνο των κλασσικών ελαστικών σταθερών.

Εφαρμογή: Θεωρούμε το κλασσικό ελαστοστατικό πρόβλημα συνορικών τιμών :

$$\begin{aligned} \Delta^* \mathbf{u}^{\kappa\lambda\cdot}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\in\Omega \\ \Delta^* &= \mu\nabla^2 + (\lambda+\mu)\nabla\nabla \\ \mathbf{u}^{\kappa\lambda\cdot}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega_D \\ \mathbf{t}^{\kappa\lambda\cdot}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega_N \end{aligned} \tag{A.5}$$

με το $\mathbf{t}^{\kappa\lambda\cdot}(\mathbf{x}) = \tau_{ij}\hat{\mathbf{x}}_i\hat{\mathbf{x}}_j\cdot\hat{\mathbf{n}}$, το κλασσικό πεδίο τάσεων.

Σύμφωνα με τη προήγουμενη ανάλυση για τα ελλειπτικά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων βλέπουμε ότι η λύση της εξίσωσης ικανοποιεί την παρακάτω ανίσωση ευστάθειας:

$$||\mathbf{u}^{\kappa\lambda\cdot}||_{H^1(\Omega)} \leq C\Bigg(||\mathbf{f}||_{H^{1/2}(\partial\Omega_D)} + ||\mathbf{g}||_{H^{-1/2}(\partial\Omega_N)}\Bigg) \tag{A.6}$$

Εδώ φαίνεται προφανώς τι ομαλότητα απαιτούμε από τα δεδομένα για να έχουμε ευστάθεια.Όμως το βαθμοελαστικό πρόβλημα έχει ήδη απαιτήσει διαφορετική κανονικότητα από τα δεδομένα και συνεπώς έχουμε τις εξής σχέσεις:

- $\mathbf{f} \;\in\; H^{3/2}(\partial\Omega_D)\subset H^{1/2}(\partial\Omega_D)$
- $\mathbf{g} \;\in\; H^{-1/2}(\partial\Omega_N)\subset H^{-3/2}(\partial\Omega_N)$

Αφού έχουμε δώσει το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο δουλεύουμε θα εξετάσουμε την συμπεριφορά των λύσεων την εξίσωσης καθώς η μικροδομή εξαφανίζεται , δηλαδή όταν $g \to 0$.Προφανώς θέλουμε να καταλήξουμε στην κλασσική λύση χωρίς μικροδομή(g=0).

Στο επόμενο θεώρημα θα δείξουμε ότι κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις για τις συνοριακές συνθήκες μια τέτοια σύγκλιση είναι εφικτή. Από φυσικής πλευράς θα ήταν αποδεκτό και λογικό οι διπλές τάσεις αλλά και τα άλματα του πεδίου να εξαρτώνται τετραγωνικά από την παράμετρο της μικροδομής.Συγκεκριμένα, οι συνοριακοί τελεστές $\mathbf{R(x)}$ και $\mathbf{E(x)}$ μπορούν να επιλεγούν ως :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x};s) = g^2\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega_R, \tag{A.7}$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x};g) = g^2\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Gamma \tag{A.8}$$

Οι υπόλοιπες παραδοχές και απαιτήσεις οφείλονται στην κανονικότητα των δεδομέμων.Είναι αναγκαίο για την σύγκλιση , να θεωρήσουμε τα δεδομένα $\mathbf{g}$ στο σύνορο να είνα τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και συγκεκριμένα στοιχεία του $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_N)$ και ότι η νόρμα $||\mathbf{h}(\cdot,g)||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_Q)}$ να παραμένει φραγμένο καθώς το g αλλάζει. Συνήθως το $\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathrm{g})$ είναι ανεξάρτητο από το g.

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω περιορισμών θα δούμε στην συνέχεια ότι η συνάρτηση $\frac{\partial}{\partial n}\mathbf{u}^{\kappa\lambda\cdot}(\mathbf{x})$ γίνεται τετραγωνικά ολοκληρώσιμη , γεγονός το οποίο θα παίξει σημαντικό ρόλο στην σύγκλιση.

Θεώρημα 3. *Έστω το πρόβλημα που αποτελείται από τις εξισώσεις ισορροπίας αλλά και τις συνοριακές συνθήκες στην αρχή του παραρτήματος(σελ.51).Δεδομένο ότι τα* $\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}$ *έχουν την μορφή που αναφέρθηκε στις (A.7),(A.8) ,* $\boldsymbol{g}\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_N)\subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_N)$ *και* $||\boldsymbol{h}(\cdot,g)||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_Q)}$ *φραγμένες συναρτήσεις ως προς το g.Καταλήγουμε έτσι σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις:*

(A) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x};g) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial n}\boldsymbol{u}^{\kappa\lambda\cdot}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_Q \quad a.e.$

(B) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x};g) - \frac{\partial}{\partial n}\boldsymbol{u}^{\kappa\lambda\cdot}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_Q$

Στην περίπτωση (B) , απαιτούμε επιπλέον κανονικότητα με $\boldsymbol{f}\in H^{\frac{5}{2}}(\partial\Omega_D)$ *και* $\boldsymbol{g}\in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega_N)$*. Έστω* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x};g)$ *να είναι η μοναδική λύση της βαθμοελαστικής εξίσωσης.Όταν η μικρδομή του υλικού τείνει στο μηδέν τότε υπάρχει ομοιόμορφη σύγκλιση του βαθμοελαστικού πεδίου στο κλασσικό ελαστικό πεδίο.*

Απόδειξη: Το κλασσικό πεδίο των μετατοπίσεων ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη ευστάθειας:

$$||\mathbf{u}^{\kappa\lambda\cdot}||_{H^1(\Omega)}\leq\left(||\mathbf{f}||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_D)} + ||\mathbf{g}||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_N)}\right) \tag{A.9}$$

Αφού έχουμε ήδη υποθέσει επιπλέον κανονικότητα για τα δεδομένα έχουμε $\mathbf{f}\in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega_D)\subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_D)$ και $\mathbf{g}\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_N)\subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_N)$ και από γνωστή θεωρία κανονικότητας για ελλειπτικά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων έχουμε:

$$||\mathbf{u}^{\kappa\lambda\cdot}||_{H^2(\Omega)}\leq\left(||\mathbf{f}||_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega_D)} + ||\mathbf{g}||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_N)}\right). \tag{A.10}$$

Συνεπώς η κλασσική λύση έχει τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις μέχρι δύτερης τάξεως παραγώγων και με όρους ίχνους στο σύνορο $\partial_i\partial_j\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}\Big|_{\partial\Omega}$ να ανήκουν στον $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ και αντίστοιχα $\partial_i\partial_j\partial_k\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}\Big|_{\partial\Omega} \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.

Κάνοντας χρήση τανυστικού συμβολισμού στο ελαστικό πεδίο w της εξίσωσης μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας που αναφέρθηκε στην ενότητα 3 έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{R}_w, D\mathbf{w}\rangle\big|_{\partial\Omega} + \langle \mathbf{P}_w, \mathbf{w}\rangle\big|_{\partial\Omega} + \langle \mathbf{E}_w, \mathbf{w}\rangle\big|_{\Gamma} - \int_\Omega (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_w : \tilde{\mathbf{e}}_w + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_w \vdots \tilde{\mathbf{e}}_w\nabla)dx = \\ \int_\Omega (\nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_w - \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}_w))\cdot\mathbf{w}dx = 0\end{aligned} \tag{A.11}$$

Εδώ παρατηρούμε τα συζηγή ζεύγη συνορικών συνθηκών $\langle \mathbf{R}_w, D\mathbf{w}\rangle\big|_{\partial\Omega} = \langle \mathbf{R}_w, D\mathbf{w}\rangle\big|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$, $\langle \mathbf{P}_w, \mathbf{w}\rangle\big|_{\partial\Omega} = \langle \mathbf{P}_w, \mathbf{w}\rangle\big|_{H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}$ και $\langle \mathbf{E}_w, \mathbf{w}\rangle\big|_{\Gamma} = \langle \mathbf{E}_w, \mathbf{w}\rangle\big|_{H^{-1}(\Gamma)\times H^{1}(\Gamma)}$ μεταξύ των αντίστοιχων χώρων που αναπαριστούν επιφανειακές δράσεις και δράσεις σε καμπύλες του συνόρου. Φυσικά, όταν τα πεδία αυτά είναι αρκετά ομαλά οι τύποι αυτοί δίνουν την θέση τους στο κλασσικό εσωτερικό γινόμενο με την L^2 έννοια.Για τις συνοριακές συνθήκες μπορούμε να δούμε ότι :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, g) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega_D \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_w &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}}(\mathbf{x}, g) \\ &= g^2\big(\mathbf{D}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) - (\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}))\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\big) : \nabla\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}} \\ &+ g^2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) : D\nabla\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}} \\ &+ g^2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\cdot\big(\mathbf{D}\cdot\nabla\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}}\big) + g^2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\cdot\big(\mathbf{D}\cdot\nabla\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{213}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}}\big), \quad x \in \partial\Omega_N\end{aligned} \tag{A.13}$$

και με $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{x}}_i D_i.$, $D_j = (\delta_{jm} - n_j n_m)\partial_m$ και $D = n_m\partial_m$.

Σε αυτό το τανυστικό πλαίσιο γράφουμε και τις μη-κλασσικές συνοριακές συνθήκες του $\mathbf{w}(\mathbf{x}$,g):

$$\begin{aligned}D\mathbf{w}(\mathbf{x}, g) &= \frac{\partial}{\partial n}\mathbf{u}(\mathbf{x}, g) - \frac{\partial}{\partial n}\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, g) - \frac{\partial}{\partial n}\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}(\mathbf{x}), \quad x \in \partial\Omega_Q\end{aligned} \tag{A.14}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_w(\mathbf{x}, g) &= g^2 \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}}(\mathbf{x}, g) \\ &= g^2 \big(\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) : \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}}, \quad x \in \partial\Omega_R \end{aligned} \tag{A.15}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην εξίσωση(Α.12) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_w : \tilde{\mathbf{e}}_w + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_w \vdots \tilde{\mathbf{e}}_w \nabla) dx = g^2 \langle \mathbf{k}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot, g) \rangle|_{\partial\Omega_N} & \\ + \langle \mathbf{R}_w(\mathbf{x}, g), \mathbf{h}(\mathbf{x}, g) - \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u}^{\kappa\lambda.}(\mathbf{x}) \rangle|_{\partial\Omega_Q} & \\ + g^2 \langle \big(\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) : \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}}, D\mathbf{w} \rangle|_{\partial\Omega_R} & \\ + g^2 \langle \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \mathbf{w} \rangle|_\Gamma - g^2 \langle \mathbf{s}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}}, \mathbf{w} \rangle|_\Gamma & \end{aligned} \tag{A.16}$$

με

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \big[\big(\mathbf{D}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) - (\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}))\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \big) : \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) : D \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}} \\ + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \big(\mathbf{D} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}} \big) + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \big(\mathbf{D} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{213}_{\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}} \big) \big] \end{aligned} \tag{A.17}$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει οι όροι που υπάρχουν στην έκφραση του $\mathbf{k(x)}$ είναι καλώς ορισμένοι και ανήκουν στον $H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega_N)$.Επίσης , αφού στο κλασσικό πεδίο κάθε επιφανειακή νόρμα ίχνους καθώς και οι παράγωγοι της,παίρνουν τιμές που ελέγχονται από την νόρμα $||\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}||_{H^2(\Omega)}$, η οποία είναι φραγμένη από τα δεδομένα όπως δείξαμε στην εξίσωση (Α.11), το επιφανειακό πεδίο $g^2\mathbf{k(x)}$ φράσσεται ομοιόμορφα από το g^2 στον $H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega_N)$.

Τα πεδία $\mathbf{w}$ και D$\mathbf{w}$ είναι από την νόρμα της λύσης $||\mathbf{w}||_{H^1\Omega}$, η οποία φράσσεται ομοιόμορφα από την παράμετρο g , σύμφωνα με την εξίσωση(Α.4).

Στην περίπτωση (Α) , είναι προφανές ότι ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης (Α.17) εξαφανίζεται και έτσι δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με την συμπεριφορά του $\mathbf{R}_w(\mathbf{x}, g)$ στο σύνορο $\partial\Omega_D$.Στην άλλη περίπτωση απαιτούμε μεγαλύτερη κανονικότητα στις τροπές και τις τάσεις οδηγώντας μας σε επιπλέον κανονικότητα στην κλασσική λύση.Αυτή η απαίτηση γίνεται για να μπορέσουμε να κρατήσουμε το $\frac{\partial}{\partial n}\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}(\mathbf{x})$ μέσα στον $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ άρα η νόρμα $||\mathbf{u}^{\kappa\lambda.}||_{H^3(\Omega)}$ παραμένει φραγμένη.

Τέλος , το πεδίο $\mathbf{R}_w(\mathbf{x}, g)$ στο $\partial\Omega_Q$ είναι ίσο με $g^2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) : \nabla\boldsymbol{\tau}_w$ στο οποίο συμπεριέχονται δεύτερης τάξεως παράγωγοι του $\mathbf{w}$. Η νόρμα του είναι φραγμέμη ομοιόμορφα από το $g^2||\mathbf{w}||_{H^1(\Omega)}$ η οποία είναι φραγμένη από το $g^2 C$ λόγω της εξίσωσης(A.4). Προφανώς τείνει στο 0 καθώς το g $\rightarrow 0$, αφού η C είναι ανεξάρτητη από το g.

Παίρνοντας το όριο καθώς το g $\rightarrow 0$, η εξίσωση (A.17) γίνεται :

$$\int \big(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_w : \tilde{\mathbf{e}}_w + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_w \vdots \tilde{\mathbf{e}}_w \nabla\big) dx = 0 \tag{A.18}$$

Αφού η διγραμμική ελαστική μορφή είναι θετικά ορισμένη έχουμε ότι $\tilde{\mathbf{e}}_{w_{g=0}} = \mathbf{0}$, άρα το $\mathbf{w}(\mathbf{x},0)$ είναι σταθερό. Δοσμένως ότι το ίχνος του $\mathbf{w}(\mathbf{x},0)|_{\partial\Omega_D} = 0$, καταλήγουμε ότι :

$$\lim_{g\rightarrow 0}\mathbf{w}(\mathbf{x},g) = 0, \quad x\in\Omega \tag{A.19}$$

και συνεπώς σε άμεση αυμπτωτική συμπεριφορά.

Παράρτημα B

Άλλες αναπαραστάσεις λύσεων της ελαστοστατικής εξίσωσης ισορροπίας με μικροδομή

Στην παράγραφο αυτή θα δοθούν μερικές γενικές αναπαραστάσεις των λύσεων της ελαστοστατικής εξίσωσης σώματος με μικροδομή.Είναι σαφώς άμεσο λόγο της διατήρησης της διαφορικής εξίσωσης και με επιφανειακή ενέργεια , ότι αυτές οι αναπαραστάσεις διατηρούνται και σε αυτή την περίπτωση. Η πρώτη αναπαράστη δόθηκε από τον Mindlin ,συναρτήσει διανυσματικών δυναμικών ως εξής:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - g^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{B} - \frac{1}{2}(k_1 - g^2\nabla^2)\nabla[\mathbf{r}\cdot(1 - g^2\nabla^2)\mathbf{B} + B_0] \tag{B.1}$$

όπου το $k_1 = \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}$ και τα $\mathbf{B}$ και B_0 ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \mu(1 - g^2\nabla^2)\nabla^2\mathbf{B} &= -\mathbf{F} \\ \mu(1 - g^2\nabla^2)\nabla^2 B_0 &= \mathbf{r}\cdot(1 - g^2\nabla^2)\mathbf{F} - 4g^2\nabla\cdot\mathbf{F} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Μια διαφορετική αναπαράσταση που δόθηκε[] και απλουστεύει λίγο περισσότερο την κατάστση είναι η εξής:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\nabla[\mathbf{r}\cdot(1 - g^2\nabla^2)\mathbf{B} + B_0] \tag{B.3}$$

με τα $\mathbf{B}$ και B_0 να ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες με τα προηγούμενα στην αναπαράσταση του Mindlin.

Απόδειξη:

Για την απόδειξη το σημαντικό μας εργαλείο θα είναι το θεώρημα αποσύνθεσης του Helmhotlz που δόθηκε στην πρώτη ενότητα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.Με αυτό και λίγη άλγεβρα θα καταφέρουμε να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.Έχουμε λοιπόν αποσυνθέτοντας το πεδίο των μετατοπίσεων:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\mathbf{V} \tag{B.4}$$

με $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$.
Αντικαθιστώντας αυτήν την εξίσωση στην εξίσωση της ελαστοστατικής με μικροδομή (και επιφανειακη ενέργεια) έχουμε:

$$(1 - g^2\nabla^2)[\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}] + \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{B.5}$$

άρα $\Rightarrow$

$$(1 - g^2\nabla^2)[\mu\nabla^2(\nabla\phi + \nabla\times\mathbf{V}) + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot(\nabla\phi + \nabla\times\mathbf{V})] + \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{B.6}$$

έτσι κάνοντας λίγες απλοποιήσεις μέσα στις αγκύλες έχουμε:

$$(1-g^2\nabla^2)[\mu\nabla^2\nabla\phi+\mu\nabla^2\nabla\times\mathbf{V}+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\nabla\phi+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\nabla\times V]+\mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{B.7}$$

αφού $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{V} = 0$ και με απλές πράξεις βλέπουμε ότι $\nabla^2\nabla\phi = \nabla\nabla\cdot\nabla\phi$ έχουμε:

$$(1 - g^2\nabla^2)\nabla^2[(\lambda + 2\mu)\nabla\phi + \mu\nabla\times\mathbf{V}] + \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{B.8}$$

Ορίζοντας ως :

$$\mathbf{B} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\nabla\phi + \nabla\times\mathbf{V} \tag{B.9}$$

η προηγούμενη εξίσωση (B.8) απλοποιήται στην μορφή:

$$\mu(1 - g^2\nabla^2)\nabla^2\mathbf{B} = -\mathbf{F} \tag{B.10}$$

από τις παραπάνω εξισώσεις , παραγωγίζοντας από τα αριστερά μπορούμε να πάρουμε τις εξής σχέσεις:

$$\begin{gathered}\nabla\mathbf{B} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\nabla^2\phi \\ (\lambda + 2\mu)(1 - g^2\nabla^2)\nabla^2\nabla^2\phi = -\nabla\mathbf{F}\end{gathered} \tag{B.11}$$

Συνεχίζοντας , κάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης(B.10) με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ από τα δεξιά και με την βοήθεια της ταυτότητας:

$$\nabla^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \mathbf{r}\cdot\nabla^2\mathbf{s} + 2\nabla\cdot\mathbf{s} \tag{B.12}$$

και της εξίσωσης (B.11), έχουμε:

$$\mu\nabla^2[\mathbf{r}\cdot(1-g^2\nabla^2)\mathbf{B}]-2(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi+2g^2(\lambda+2\mu)\nabla^2\nabla^2\phi=-\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} \tag{B.13}$$

Εφαρμόζοντας τώρα από τα δεξία τον τελεστή $(1-g^2\nabla^2)$ στην εξίσωση (B.13) και από την (B.12) έχουμε:

$$\mu(1-g^2\nabla^2)\nabla^2[\mathbf{r}\cdot(1-g^2\nabla^2)\mathbf{B}-2\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\phi]=-(1-g^2\nabla^2)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{F})+2g^2\nabla\cdot\mathbf{F} \tag{B.14}$$

κάνοντας χρήση της ταυτότητας:

$$(1-g^2\nabla^2)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{F})=\mathbf{r}\cdot(1-g^2\nabla^2)\mathbf{F}-2g^2\nabla\cdot\mathbf{F} \tag{B.15}$$

και χρησιμοποιόντας την στην σχέση (B.14) έχουμε:

$$\mu(1-g^2\nabla^2)\nabla^2B_0=\mathbf{r}\cdot(1-g^2\nabla^2)\mathbf{F}-4g^2\nabla\cdot\mathbf{F} \tag{B.16}$$

με

$$B_0=-\mathbf{r}\cdot(1-g^2\nabla^2)\mathbf{B}+2\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla\phi \tag{B.17}$$

Τελικά βάση όλων των παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=\nabla\phi+\nabla\times\mathbf{V}\overset{\text{Εξ.(B.9)}}{=}\nabla\phi+\mathbf{B}-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla\phi\\&=\mathbf{B}-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\nabla\phi\\&\overset{\text{Εξ.(B.17)}}{=}\mathbf{B}-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\nabla\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}[\mathbf{r}\cdot(1-g^2\nabla^2)\mathbf{B}+B_0]\\&=B-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}[\nabla\cdot(1-g^2\nabla^2)\mathbf{B}+B_0]\end{aligned} \tag{B.18}$$

Παράρτημα C

Αναλυτική γραφή συνοριακών συνθηκών και εξισώσεων ισορροπίας ενός σώματος με μικροδομή και επιφανειακή ενέργεια

Πυκνότητα τροπικής ενέργειας

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\lambda e_{ii}e_{jj} + \mu e_{ij}e_{ij} + l_m[\frac{1}{2}\lambda\partial_m(e_{ii}e_{jj}) + \mu\partial_m(e_{ij}e_{ij})] \\ &+ \frac{1}{2}\lambda g^2\kappa_{ijj}\kappa_{ikk} + \mu g^2\kappa_{ijk}\kappa_{ijk} \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = e_{ji} \\ \kappa_{ijk} &= \partial_i e_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_i\partial_j u_k + \partial_i\partial_k u_j) \end{aligned} \tag{C.1}$$

Σχόλιο: Η επιφανειακή ενέργεια μαθηματικώς είναι ένα διάνυσμα με $||\boldsymbol{\ell}|| < 1$ και θετικούς συντελεστές.

Τάσεις Cauchy

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = 2\mu(e_{ij} + l_m\partial_m e_{ij}) + \lambda(e_{nn}\delta_{ij} + l_m\partial_m e_{nn}\delta_{ij}) \tag{C.2}$$

ή σε αναλυτική μορφή:

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= (\lambda+2\mu)(\partial_1 u_1 + l_1 \partial_1{}^2 u_1 + l_2 \partial_1 \partial_2 u_1) + \lambda(\partial_2 u_2 + l_1 \partial_1 \partial_2 u_2 + l_2 \partial_2{}^2 u_2) \\
\tau_{22} &= \lambda(\partial_1 u_1 + l_1 \partial_1{}^2 u_1 + l_2 \partial_1 \partial_2 u_1) + (\lambda+2\mu)(\partial_2 u_2 + l_1 \partial_1 \partial_2 u_2 + l_2 \partial_2{}^2 u_2) \\
\tau_{12} &= \mu(\partial_2 u_1 + l_1 \partial_1 \partial_2 u_1 + l_2 \partial_2{}^2 u_1 + \partial_1 u_2 + l_2 \partial_1 \partial_2 u_2 + l_1 \partial_1{}^2 u_2) = \tau_{21}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Προφανώς και με τον όρο της επιφανειακής τάσης , οι σχετικές τάσεις παραμένουν συμμετρικός τανυστής.

Διπλές τάσεις

$$\mu_{ijk} = \mu_{ijk}{}^s + \mu_{ijk}{}^g = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ijk}} = 2\mu(g^2 \partial_i e_{jk} + l_i e_{jk}) + \lambda(e_{nn} l_i \delta_{jk} + g^2 \partial_i e_{nn} \delta_{jk}) \tag{C.4}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση οι διπλές τάσεις εξακολουθούν να έχουν τις ίδιες συμμετρίες όπως πριν που αφορούσαν μόνο τη μικροδομή του υλικού.Για καλύτερη εποπτεία είναι γραμμένες αναλυτικά παρακάτω.

$$\begin{aligned}
\mu_{111} &= (\lambda+2\mu)\ell_1 \partial_1 u_1 + \lambda \ell_1 \partial_2 u_2 + (\lambda+2\mu) g^2 \partial_1{}^2 u_1 + \lambda g^2 \partial_1 \partial_2 u_2 \\
\mu_{222} &= (\lambda+2\mu)\ell_2 \partial_2 u_2 + \lambda \ell_2 \partial_1 u_1 + (\lambda+2\mu) g^2 \partial_2{}^2 u_2 + \lambda g^2 \partial_1 \partial_2 u_1 \\
\mu_{112} &= \mu_{121} = \mu \ell_1 (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + \mu g^2 (\partial_1{}^2 u_2 + \partial_1 \partial_2 u_1) \\
\mu_{122} &= \lambda \ell_1 \partial_1 u_1 + (\lambda+2\mu)\ell_1 \partial_2 u_2 + (\lambda+2\mu) g^2 \partial_1 \partial_2 u_2 + \lambda g^2 \partial_1{}^2 u_1 \\
\mu_{211} &= (\lambda+2\mu)\ell_2 \partial_1 u_1 + \lambda \ell_2 \partial_2 u_2 + (\lambda+2\mu) g^2 \partial_1 \partial_2 u_1 + \lambda g^2 \partial_1{}^2 u_2 \\
\mu_{212} &= \mu_{221} = \mu \ell_1 (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) + \mu g^2 (\partial_2{}^2 u_1 + \partial_1 \partial_2 u_2)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Σχετικές τάσεις

Οι σχετικές τάσεις ορίζονται ως:

$$s_{ij} = -\partial_k \mu_{kij} \tag{C.6}$$

ή

$$\begin{aligned}
&s_{11} = -(\lambda+2\mu)(\ell_1{\partial_1}^2 u_1 + \ell_2\partial_2\partial_1 u_1) - \lambda(\ell_1\partial_1\partial_2 u_2 + \ell_2{\partial_2}^2 u_2)\\
&\quad(\lambda+2\mu)\partial_1 u_1 + \lambda\partial_2 u_2 - (\lambda+2\mu)g^2({\partial_1}^3 u_1 + {\partial_2}^2\partial_1 u_1) - \lambda g^2({\partial_1}^2\partial_2 u_2 + {\partial_2}^3 u_2)\\
&s_{22} = -(\lambda+2\mu)(\ell_1\partial_1\partial_2 u_2 + \ell_2{\partial_2}^2 u_2) - \lambda(\ell_1{\partial_1}^2 u_1 + \ell_2\partial_2\partial_1 u_1)\\
&\quad(\lambda+2\mu)\partial_2 u_2 + \lambda\partial_1 u_1 - (\lambda+2\mu)g^2({\partial_2}^3 u_2 + {\partial_1}^2\partial_2 u_2) - \lambda g^2({\partial_2}^2\partial_1 u_1 + {\partial_1}^3 u_1)\\
&s_{12} = s_{21} = -\mu\ell_1({\partial_1}^2 u_2 + \partial_1\partial_2 u_1) - \mu\ell_2(\partial_2\partial_1 u_2 + {\partial_2}^2 u_1)\\
&\quad\mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) - \mu g^2({\partial_1}^3 u_2 + {\partial_1}^2\partial_2 u_1 + {\partial_2}^2\partial_1 u_2 + {\partial_2}^3 u_1)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Ολικές τάσεις Οι ολικές τάσεις είναι το άθροισμα των σχετικών τάσεων και των τάσεων Cauchy οι οποίες σύμφωνα με την σχέση μεταξύ των τάσεων λόγω μικρομηχανικής ενέργειας:

$$s_{ij}{}^s = -\partial_m \mu_{mij}{}^s = -\lambda\ell_m\partial_m e_{nn}\delta_{ij} - 2\mu\ell_m\partial_m e_{ij} = -\tau_{ij}{}^s \tag{C.8}$$

παραμένουν ακρίβως ίδιες με τις ολικές τάσεις χωρίς την επιπλοκή της επιφανειακής ενέργειας.Για αυτόν τον λόγο η το ελαστοστατικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων παραμένει ακριβώς ίδιο με την απλούστερη περίπτωση μικροδομής του υλικού.Αναλυτικά παρουσιάστηκαν στην παράγραφο (3.1) και για αυτό εδώ παραλείπονται.

Οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες όπως για παράδειγμα τα άλματα των τάσεων όπως παρυσιάστηκαν στην παράγραφο(3.1) καθώς και οι εξισώσεις ισορροπίας(που παραμένουν ίδιες) προκύπτουν απλώς αντικαθιστώντας τις νέες , διορθωμένες διπλές τάσεις με επιφανειακή ενέργεια , στις παλιές που είχαν μόνο μικροδομή.

Βιβλιογραφία

[1] Selvadurai A.P.S. *Partial Differential Equations in Mechanics 2*. Springer, 2000.

[2] Charalambopoulos Antonios, Gortsas Theodore, and Polyzos Demosthenes. «On Representing Strain Gradient Elastic Solutions of Boundary Value Problems by Encompassing the Classical Elastic Solution.» In: *Mathematics* 10 (2022). DOI: 10.3390/math10071152.

[3] T. A. A. Broadbent. «Calculus of Variations. By I. M. Gelfand and S. V. Fomin. Translated by R. A. Silverman. Pp. vii, 232. 56s. 1963. (Prentice-Hall, New Jersey)». In: *The Mathematical Gazette* 48.366 (1964), pp. 464–464. DOI: 10.2307/3611748.

[4] Charalambopoulos Antonios. Polyzos Demosthenes. «Plane strain gradient elastic rectangle in tension.» In: *Arch Appl Mech* 85 (2015), pp. 1421–1438. DOI: https://doi.org/10.1007/s00419-014-0951-x.

[5] Charalambopoulos Antonios. Tsinopoulos Stephanos V. Polyzos Demosthenes. «Plane strain gradient elastic rectangle in bending.» In: *Arch Appl Mech* 90 (2020), pp. 967–986. DOI: https://doi.org/10.1007/s00419-019-01649-3.

[6] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998. ISBN: 9780821807729. URL: https://books.google.gr/books?id=5Pv4LVB%5C_m8AC.

[7] R.D. Mindlin. «Micro-structure in linear elasticity.» In: *Arch. Rational Mech.* Anal. 16 (1964), pp. 51–78. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00248490.

[8] R.D. Mindlin. «Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity». In: *International Journal of Solids and Structures* 1.4 (1965), pp. 417–438. ISSN: 0020-7683. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7683(65)90006-5. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768365900065.

[9] K. Tsepoura, S. Papargyri-Beskou, and Demosthenes Polyzos. «A boundary element method for solving 3D static gradient elastic problems with surface energy». In: *Computational Mechanics* 29 (Oct. 2002), pp. 361–381. DOI: 10.1007/s00466-002-0348-5.

[10] J. Wloka. *Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1987. ISBN: 9780521277594. URL: https://books.google.gr/books?id=Eix7JA9VVy0C.

[11] Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης. *Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών*. Εκδόσεις Συμμετρία, 2003.