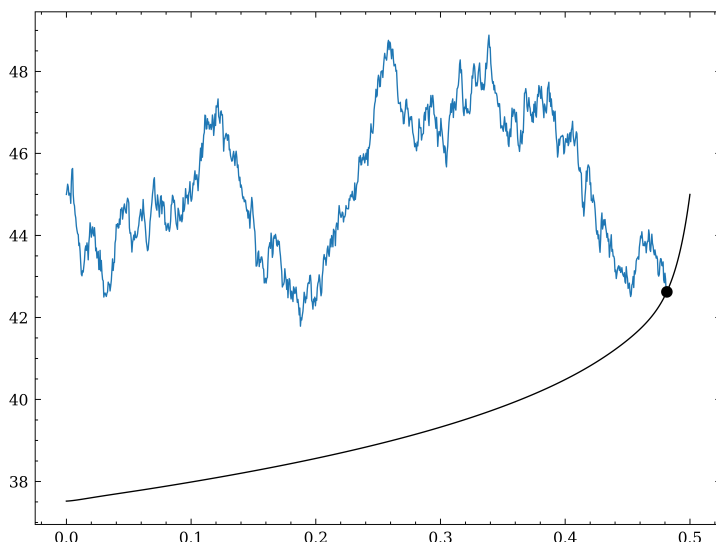




Διπλωματική εργασία
Μαλεκκίδης Νικόλαος

Προβλήματα Βέλτιστης Διακοπής Με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά

Στην επιστημονική περιοχή:
Θεωρία Πιθανοτήτων



Επιβλέπων: Μιχαήλ Λουλάκης, Καθηγητής

Τριμελής επιτροπή:

.....
Μιχαήλ Λουλάκης
Καθηγητής
ΕΜΠ

.....
Βασίλης Παπανικολάου
Ομότιμος Καθηγητής
ΕΜΠ

.....
Αντώνης Παπαπαντολέων
Καθηγητής
TU Delft

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Μιχάλη Λουλάκη, για τη συνεργασία μας και την καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Θα είμαι πάντα ευγνώμων για την υπομονή και τις πολύτιμες συμβουλές του. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κύριο Βασίλη Παπανικολάου, που μέσα από τις συζητήσεις μας, με βοήθησε να συνθέσω την εργασία αυτή. Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένεια μου, καθώς χωρίς την αγάπη και τη στήριξή τους, τίποτα απ' όλα αυτά δεν θα ήταν εφικτό. Σας ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου για όσα μου προσφέρατε όλα αυτά τα χρόνια.

.....
Μαλεκκίδης Νικόλαος

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στη παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με τα προβλήματα βέλτιστης διακοπής. Θα μας απασχολήσει η ποιοτική τους μελέτη, τόσο στον διακριτό όσο και στον συνεχή χρόνο, καθώς και η αναγωγή τους σε προβλήματα ελευθέρου συνόρου. Έπειτα, θα μελετήσουμε πιθανές εφαρμογές τους, στο πλαίσιο της μαθηματικής χρηματοοικονομίας. Ειδικότερα, θα εστιάσουμε στη τιμολόγηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης, όταν το πρωτογενές προϊόν ακολουθεί το υπόδειγμα Black & Scholes. Τέλος, θα παρουσιάσουμε και διάφορες αριθμητικές μεθόδους, με τις οποίες θα επιλύσουμε τον εν λόγω πρόβλημα.

Λέξεις Κλειδιά

Πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, πρόβλημα ελευθέρου συνόρου, μαθηματική χρηματοοικονομία, Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης, υπόδειγμα Black & Scholes.

Abstract

In the present thesis, we study optimal stopping problems. We investigate their properties, in both the discrete and continuous time setting, and also their reduction to a free boundary problem. Then, we consider some of the possible applications, in the realm of mathematical finance. In particular, we focus on the pricing of the American put option, when the underlying asset's price follows the Black & Scholes model. Finally, we present some numerical methods, which we then use to solve the given problem.

Keywords

Optimal stopping problem, free boundary problem, mathematical finance, American put option, Black & Scholes model.

Κατάλογος σχημάτων

| | |
|---|----|
| 2.1 Τροχιές της μονοδιάστατης (τυπικής) κίνησης Brown. | 15 |
| 2.2 Τροχιές της δισδιάστατης (τυπικής) κίνησης Brown. | 16 |
| 2.3 Τροχιές της γεωμετρικής κίνησης Brown. | 17 |
| 6.1 Τιμολόγηση του αέναου Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. | 67 |
| 6.2 Βέλτιστη άσκηση του αέναου Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. . . | 67 |
| 7.1 Υπόδειγμα CRR δυο περιόδων. | 82 |
| 7.2 Διακριτοποίηση του χωρίου $[0, \tilde{T}] \times [-y_{\max}, y_{\max}]$ | 90 |
| 7.3 Τιμολόγηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. | 94 |
| 7.4 Σύγκλιση της εκτίμησης του συνόρου άσκησης. | 98 |
| 7.5 Βέλτιστη άσκηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. | 99 |

Κατάλογος πινάκων

| | |
|---|----|
| 7.1 Τιμολόγηση με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος). | 83 |
| 7.2 Τιμολόγηση με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη). | 83 |
| 7.3 Τιμολόγηση με τη μέθοδο Longstaff-Schwartz, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος). | 86 |
| 7.4 Τιμολόγηση με τη μέθοδο Longstaff-Schwartz, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη). | 86 |
| 7.5 Σύγκριση της μεθόδου Longstaff-Schwartz με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος). | 87 |
| 7.6 Σύγκριση της μεθόδου Longstaff-Schwartz με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη). | 87 |
| 7.7 Τιμολόγηση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος). | 92 |
| 7.8 Τιμολόγηση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη). | 92 |
| 7.9 Σύγκριση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος). | 92 |
| 7.10 Σύγκριση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη). | 93 |
| 7.11 Τιμολόγηση μέσω της εκτίμησης του συνόρου άσκησης, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος). | 96 |
| 7.12 Τιμολόγηση μέσω της εκτίμησης του συνόρου άσκησης, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη). | 97 |

Κατάλογος πινάκων

| | |
|--|----|
| 7.13 Σύγκριση της μεθόδου εκτίμησης του ελευθέρου συνόρου με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος). | 97 |
| 7.14 Σύγκριση της μεθόδου εκτίμησης του ελευθέρου συνόρου με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη). | 97 |

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Εισαγωγή | 1 |
| 2 | Μαθηματικό Υπόβαθρο | 3 |
| 2.1 | Στοιχεία μαθηματικής ανάλυσης | 3 |
| 2.2 | Στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων | 5 |
| 3 | Διακριτός Χρόνος | 20 |
| 3.1 | Γενικό πλαίσιο | 20 |
| 3.2 | Μαρκοβιανό πλαίσιο | 27 |
| 4 | Συνεχής Χρόνος | 34 |
| 4.1 | Γενικό πλαίσιο | 34 |
| 4.2 | Μαρκοβιανό πλαίσιο | 43 |
| 5 | Πρόβλημα Ελεύθερου Συνόρου | 54 |
| 5.1 | Εισαγωγή | 54 |
| 5.2 | Συνθήκη smooth fit | 56 |
| 6 | Αμερικανικά Δικαιώματα | 59 |
| 6.1 | Εισαγωγή | 59 |
| 6.2 | Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης | 62 |
| 7 | Αριθμητική Επίλυση | 80 |
| 7.1 | Διακριτοποίηση χρόνου | 80 |
| 7.2 | Πρόβλημα ελεύθερου συνόρου | 88 |
| 7.3 | Συμπεράσματα | 99 |
| A | Κώδικες | 101 |
| | Βιβλιογραφία | 108 |

1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τα **προβλήματα βέλτιστης διακοπής** (optimal stopping problems). Τέτοιου είδους προβλήματα εμφανίζονται σε διάφορες εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στην μαθηματική χρηματοοικονομία. Ειδικότερα, η δίκαια τιμολόγηση καθώς και η βέλτιστη άσκηση ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου, υπολογίζονται μέσω ενός προβλήματος βέλτιστης διακοπής.

Διαισθητικά, πίσω από ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, βρίσκεται ένα τυχαίο φαινόμενο το οποίο παρακολουθούμε. Μπορούμε, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή να σταματήσουμε την παρακολούθηση, εισπράττοντας ένα πόσο (κέρδος). Το ποσό αυτό, μπορεί είτε να εξαρτάται από την κατάσταση του φαινομένου όταν το διακόψαμε, είτε από ολόκληρη την τροχιά του (τροχιοεξαρτώμενο). Έστω ότι συμβολίζουμε με G_t , το κέρδος που έχουμε αν διακόψουμε το φαινόμενο τη χρονική στιγμή t . Εφόσον το φαινόμενο είναι τυχαίο, το κέρδος G_t είναι μια τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, η $(G_t)_{t \geq 0}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία, την οποία ονομάζουμε **διαδικασία κέρδους** (gain process).

Το κύριο ερώτημα ενός προβλήματος βέλτιστης διακοπής είναι, η εύρεση της "καλύτερης" στρατηγικής με βάση την οποία θα σταματήσουμε την παρακολούθηση. Η στρατηγική διακοπής που ακολουθούμε είναι εν γένει τυχαία, καθώς το κέρδος που μας επιφέρει η διακοπή του φαινομένου είναι τυχαίο. Μια λογική απαίτηση που θέτουμε όμως, είναι η στρατηγική αυτή να πηγάζει από την τροχιά του φαινομένου. Δηλαδή, η απόφασή μας για το αν θα διακόψουμε την παρακολούθηση σε κάποια χρονική στιγμή, οφείλει να εξαρτάται μόνο από την μέχρι στιγμής τροχιά του φαινομένου. Τέτοιου είδους στρατηγικές διακοπής, μοντελοποιούνται με την έννοια του **χρόνου διακοπής** (stopping time).

Κάθε δυνατή στρατηγική διακοπής αντιστοιχεί σε ένα **αναμενόμενο κέρδος** (expected gain). Αν επιλέξουμε να σταματήσουμε την παρακολούθηση με βάση τον χρόνο διακοπής τ , το αναμενόμενο μας κέρδος είναι $\mathbb{E}[G_\tau]$. Το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής αναζητεί τον χρόνο διακοπής, ο οποίος μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος. Δηλαδή, το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε είναι το:

$$V = \sup_{\tau} \mathbb{E}[G_\tau]$$

όπου το supremum, αφορά μια κλάση χρόνων διακοπής που καθορίζεται από τη φύση του προβλήματος που μελετάμε.

Η ποσότητα V ονομάζεται **συνάρτηση αξίας** (value function). Ο χαρακτηρισμός της ως συνάρτηση θα φανεί πιο κάτω, όταν εισάγουμε τις Μαρκοβιανές διαδικασίες στο πρόβλημα. Σκοπός μας είναι, ο υπολογισμός της εν λόγω ποσότητας και η εύρεση κάποιου χρόνου διακοπής τ_* , ο οποίος να την πετυχαίνει, δηλαδή $V = \mathbb{E}[G_{\tau_*}]$. Ένας τέτοιος χρόνος διακοπής λέγεται **βέλτιστος** (optimal stopping time).

Ο ακριβής υπολογισμός της V και κάποιου τ_* είναι συνήθως αδύνατος, γι' αυτό και οδηγούμαστε σε αριθμητικές μεθόδους. Παρ' όλ' αυτά, παρουσιάζουμε μια σειρά από θεωρήματα τα οποία απαντούν σε ποιοτικά ερωτήματα όπως η ύπαρξη και η μοναδικότητα του βέλτιστου χρόνου διακοπής, καθώς και μερικά αποτελέσματα τα οποία θα μας βοηθήσουν στην μορφοποίηση των αλγορίθμων.

Το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής με το οποίο θα ασχοληθούμε στο πρακτικό μέρος της εργασίας, είναι η arbitrage-free τιμολόγηση ενός **Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης** (American put option), όπου το πρωτογενές προϊόν ακολουθεί μια **γεωμετρική κίνηση Brown** (geometric Brownian motion) ή ισοδύναμα το υπόδειγμα **Black & Scholes**. Η τιμολόγηση του εν λόγω παραγώγου, δίνεται από:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}_{t,x}[e^{-r\tau}(K - S_{t+\tau})^+]$$

Θα επικεντρωθούμε στην ποιοτική μελέτη του ως άνω προβλήματος, καθώς και σε μερικές αριθμητικές μεθόδους για την προσεγγιστική επίλυσή του.

Η παρούσα εργασία, χωρίζεται σε δυο μέρη. Το πρώτο (θεωρητικό) μέρος, αποτελείται από τα κεφάλαια 3-5 και ασχολείται με το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής στη γενική του μορφή. Το δεύτερο (πρακτικό) μέρος, απαρτίζεται από τα κεφάλαια 6 και 7, και εστιάζει στη τιμολόγηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

Ειδικότερα, στο κεφάλαιο 2, θα εισάγουμε τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που θα μας χρειαστούν. Στα κεφάλαια 3 και 4, θα μελετήσουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, στις περιπτώσεις του διακριτού και συνεχή χρόνου, αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 5, θα ασχοληθούμε με την αναγωγή του προβλήματος βέλτιστης διακοπής, σε πρόβλημα ελευθέρου συνόρου. Τέλος, στο κεφάλαιο 6 θα μελετήσουμε ποιοτικά το πρόβλημα τιμολόγησης του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης και στο κεφάλαιο 7 θα παρουσιάσουμε μερικές αριθμητικές μεθόδους για την επίλυσή του.

2

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε μερικά βασικά αποτελέσματα, τα οποία θα μας χρειαστούν στα ερχόμενα κεφάλαια. Η απόδειξή τους είναι εκτός του πλαισίου της παρούσας εργασίας, οπότε αποφεύγουμε να την παρουσιάσουμε.

Τα πιο κάτω, αποτελούν μια συλλογή αποτελεσμάτων, από τα κλασσικά συγγράμματα [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Για δύο πολύ ενδιαφέρον συζητήσεις, σχετικά με τις διαδικασίες Feller και τις ιδιότητές τους, παραπέμπουμε στους ισότοπους [8, 9].

2.1 Στοιχεία μαθηματικής ανάλυσης

2.1.1 Ημι-συνέχεια

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι, η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^d$ αν-ν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \geq 0}$ στον \mathbb{R}^d , με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, ισχύει ότι $f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ (αρχή μεταφοράς).

Τροποποιώντας ελαφρώς την πιο πάνω ισοδυναμία, μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της ημι-συνέχειας.

Ορισμός 2.1.1 (Ημι-συνέχεια). Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Η f λέγεται **κάτω ημι-συνεχής** (lower semicontinuous), αν για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Ομοίως, λέγεται **άνω ημι-συνεχής** (upper semicontinuous), αν για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

Για συντομία, γράφουμε ότι η f είναι lsc και usc αντίστοιχα.

Εύκολα βλέπουμε ότι, μια πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συνεχής αν-ν είναι lsc και usc. Επιπλέον, η ημι-συνέχεια μπορεί να χαρακτηριστεί ισοδύναμα, μέσω των προ-εικόνων της συνάρτησης. Ειδικότερα:

- (i) Η f είναι lsc αν-ν το σύνολο $\{f > y\}$ είναι ανοιχτό για κάθε $y \in \mathbb{R}$
- (ii) Η f είναι usc αν-ν το σύνολο $\{f < y\}$ είναι ανοιχτό για κάθε $y \in \mathbb{R}$

Δίνουμε πιο κάτω, μερικές ιδιότητες που θα μας χρησιμεύσουν.

Πρόταση 2.1.1 (Ιδιότητες).

- (i) Αν f μια lsc (usc) συνάρτηση, τότε $\eta - f$ είναι usc (lsc)
- (ii) Το άθροισμα δυο lsc (usc) συναρτήσεων είναι και αυτό lsc (usc)
- (iii) Αν $(f_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια lsc συναρτήσεων, τότε και το $\sup_{i \in I} f_i$ είναι lsc
- (iv) Αν $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ένα συμπαγές υποσύνολο και f μια usc (lsc) συνάρτηση, τότε η f έχει μέγιστο (ελάχιστο) στο D

2.1.2 Ημι-ομάδες Feller

Έστω τώρα, ο χώρος συναρτήσεων:

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής και } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$$

Είναι γνωστό ότι ο $C_0(\mathbb{R}^d)$, εφοδιασμένος με την (άπειρο) νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, όπου $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$, είναι χώρος Banach. Οι πραγματικές, γραμμικές απεικονίσεις από τον πιο πάνω χώρο, θα μας χρησιμεύσουν στο να ορίσουμε τις διαδικασίες Feller.

Ορισμός 2.1.2 (Τελεστής). Μια γραμμική απεικόνιση $T : C_0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, λέγεται (γραμμικός) **τελεστής**.

Ως νόρμα ενός τελεστή T , ορίζουμε την ποσότητα:

$$\|T\| = \sup_{f \in C_0(\mathbb{R}^d)} \frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Με βάση την νόρμα του τελεστή, υπάρχουν και οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί.

Ορισμός 2.1.3 (Χαρακτηρισμοί τελεστών). Ο τελεστής $T : C_0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, λέγεται:

- (i) **φραγμένος**, αν η νόρμα του είναι φραγμένη
- (ii) **συστολή**, αν για κάθε $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, ισχύει ότι $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
- (iii) **θετικός**, αν για κάθε $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ με $f \geq 0$, ισχύει ότι $Tf \geq 0$

Εύκολα βλέπουμε ότι, ένας τελεστής T είναι συστολή αν-ν $\|T\| \leq 1$. Συνεπώς, αν ένας τελεστής είναι συστολή, τότε είναι και φραγμένος.

Θυμίζουμε ότι, ο χώρος των φραγμένων τελεστών του $C_0(\mathbb{R}^d)$, λέγεται *δυϊκός* και συμβολίζεται με $C_0(\mathbb{R}^d)^*$. Ο *δυϊκός*, εφοδιασμένος με την νόρμα τελεστών που ορίσαμε πιο πάνω, είναι και αυτός χώρος Banach.

Έστω τώρα μια οικογένεια τελεστών, $(T_t)_{t \geq 0}$ ¹. Λέμε ότι, η εν λόγω οικογένεια είναι **ημι-ομάδα**, αν $T_t \circ T_s = T_{t+s}$, για κάθε $t, s \geq 0$. Η ιδιότητα αυτή, ονομάζεται ιδιότητα της ημι-ομάδας.

Ορίζουμε τώρα μια ειδική περίπτωση ημι-ομάδας, που θα μας φανεί χρήσιμη.

Ορισμός 2.1.4 (Ημι-ομάδα Feller). Έστω μια ημι-ομάδα, $(T_t)_{t \geq 0}$, από θετικές συστολές. Λέμε ότι η $(T_t)_{t \geq 0}$, είναι **ημι-ομάδα Feller**, αν:

- (i) $T_t C_0(\mathbb{R}^d) \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$, για κάθε $t \geq 0$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} T_t f(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι, σε μια ημι-ομάδα Feller, η σύγκλιση της ιδιότητας (ii) είναι ομοιόμορφη, δηλαδή $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t f - f\|_\infty = 0$, για κάθε $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

2.2 Στοιχεία θεωρίας πιθανοτήτων

2.2.1 Οικογένειες τυχαίων μεταβλητών

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Θυμίζουμε ότι, το supremum μιας αριθμήσιμης οικογένειας τυχαίων μεταβλητών, είναι και αυτό τυχαία μεταβλητή. Αντίθετα, για υπεραριθμήσιμες οικογένειες τυχαίων μεταβλητών, δεν ισχύει εν γένει.

Στην περίπτωση αυτή, εργαζόμαστε με την έννοια του **ουσιώδους supremum**. Το πιο κάτω λήμμα, μας δίνει την ύπαρξή του και λειτουργεί ως ορισμός του.

Λήμμα 2.2.1 (Ουσιώδες supremum). Έστω $\{X_i : i \in I\}$ μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών. Τότε, υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $J \subseteq I$, τέτοιο ώστε η τυχαία μεταβλητή $Z = \sup_{j \in J} X_j$ να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $\mathbb{P}[X_i \leq Z] = 1$, για κάθε $i \in I$
- (ii) Αν Y κάποια άλλη τυχαία μεταβλητή με την ιδιότητα (i), τότε $\mathbb{P}[Z \leq Y] = 1$

Η Z είναι η μοναδική τυχαία μεταβλητή (\mathbb{P} -σβ) που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) και ονομάζεται **ουσιώδες supremum** (της οικογένειας $\{X_i : i \in I\}$). Συνηθίζεται να

¹Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου χρησιμοποιούμε τους δείκτες n και k , ενώ στην περίπτωση του συνεχούς, τους δείκτες t και s . Συνεπώς, με τη συντομογραφία $n \geq 0$, συμβολίζουμε το σύνολο δεικτών $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, ενώ με $t \geq 0$ το σύνολο $t \in [0, \infty)$.

γράφουμε $\text{ess sup}_{i \in I} X_i$, αντί για Z .

Επιπλέον, αν η οικογένεια $\{X_i : i \in I\}$ είναι upwards directed, δηλαδή αν για κάθε $i, j \in I$ υπάρχει $k \in I$ τέτοιο ώστε $X_i \vee X_j \leq X_k$ (\mathbb{P} -σβ), τότε το σύνολο $J = \{i_n : n \geq 1\}$ μπορεί να επιλεγεί ώστε η ακολουθία $(X_{i_n})_{n \geq 1}$ να είναι αύξουσα (\mathbb{P} -σβ). Συνεπώς, το ουσιώδες supremum γράφεται και ως $Z = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{i_n}$ (\mathbb{P} -σβ).

Απόδειξη. Για την απόδειξη του πιο πάνω, παραπέμπουμε στο λήμμα 1.3 του [10], σελίδες 6-8. ■

Μια έννοια που θα μας χρειαστεί στα πιο κάτω, είναι η **ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα**, μιας οικογένειας τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 2.2.1 (Ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα). Μια οικογένεια $\{X_i : i \in I\}$ τυχαίων μεταβλητών, λέγεται **ομοιόμορφη ολοκληρώσιμη**, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\epsilon)$, τέτοιο ώστε $\mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| \geq M\}}] < \epsilon$ για κάθε $i \in I$.

Παρατήρηση 2.2.1. Η ολοκληρωσιμότητα των τυχαίων μεταβλητών, δεν αρκεί για να είναι η οικογένεια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Η πιο κάτω πρόταση, αποτελεί ένα κριτήριο, για να δείξουμε ότι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 2.2.1 (Ικανή συνθήκη - Ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα). Αν Y μια μη αρνητική, ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, τέτοια ώστε $|X_i| \leq Y$ για κάθε $i \in I$, τότε η οικογένεια $\{X_i : i \in I\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

2.2.2 Διακριτός χρόνος

Έστω ένας χώρος πιθανότητας με διήθηση $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$. Στην υποσυνολογένεση αυτή, θα ασχοληθούμε με τις στοχαστικές διαδικασίες (ανελιξίσεις), στον διακριτό χρόνο.

Ορισμός 2.2.2 (Χρόνος διακοπής). Η τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, λέγεται (διακριτός) **χρόνος διακοπής** (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$), αν για κάθε $n \geq 0$:

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Διαισθητικά, ο πιο πάνω ορισμός μας λέει ότι, η πληροφορία της τροχιάς \mathcal{F}_n , αρκεί για να γνωρίζουμε αν θα διακόψουμε το φαινόμενο, μέχρι τη χρονική στιγμή n . Επομένως, αποτελούν μια φυσιολογική επιλογή, για να περιγράψουν τις στρατηγικές διακοπής σε ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της διήθησης, στους χρόνους διακοπής. Ειδικότερα, για ένα χρόνο διακοπής τ , η **προ- τ σ-άλγεβρα** (ή σταματημένη σ-άλγεβρα) \mathcal{F}_τ , ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ για κάθε } n \geq 0\}$$

Διαισθητικά, η πιο πάνω σ -άλγεβρα, μας δίνει τα ενδεχόμενα που γνωρίζουμε αν έχουν συμβεί, παρακολουθώντας το φαινόμενο μέχρι τον χρόνο διακοπής τ .

Για δοσμένο χρόνο διακοπής τ , μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της **σταματημένης διαδικασίας**. Ειδικότερα, για μια (προσαρμοσμένη) στοχαστική διαδικασία $X = (X_n)_{n \geq 0}$, ορίζουμε τη σταματημένη διαδικασία $X^\tau = (X_{n \wedge \tau})_{n \geq 0}$, ως:

$$X_{n \wedge \tau}(\omega) = \begin{cases} X_k(\omega) & , \text{για } \tau(\omega) = k < n \\ X_n(\omega) & , \text{για } \tau(\omega) \geq n \end{cases}$$

Ορίζουμε τώρα, το βασικό είδος στοχαστικών διαδικασιών που θα μας απασχολήσει, τις διαδικασίες martingale.

Ορισμός 2.2.3 (Martingale). *Η στοχαστική διαδικασία $(X_n)_{n \geq 0}$, λέγεται **martingale** (ως προς το μέτρο \mathbb{P} και τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$), αν:*

- (i) *Είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$*
- (ii) *$\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, για κάθε $n \geq 0$*
- (iii) *$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $n \geq 0$*

*Αν η (iii) ισχύει με \geq (ή \leq), τότε λέγεται **submartingale** (ή **supermartingale**).*

Παράδειγμα 2.2.1 (Doob martingale). *Αν Y μια ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, τότε η διαδικασία $(M_n)_{n \geq 0}$, όπου:*

$$M_n = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_n], \text{ για κάθε } n \geq 0$$

*είναι martingale (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$) και λέγεται **Doob martingale**.*

Παρατήρηση 2.2.2. *Εύκολα βλέπουμε ότι, μια διαδικασία $(X_n)_{n \geq 0}$ είναι submartingale αν-ν η διαδικασία $(-X_n)_{n \geq 0}$ είναι supermartingale.*

Διαισθητικά, η ιδιότητα (iii) του πιο πάνω ορισμού, μας λέει ότι αν συνεχίσουμε από τη χρονική στιγμή n , έχοντας ήδη διανύσει τη τροχιά \mathcal{F}_n , τότε αναμένουμε ότι η τιμή της διαδικασίας θα παραμείνει η ίδια. Ομοίως, αν η ιδιότητα (iii) ισχύει με ανισότητα, τότε αναμένουμε ότι η τιμή της διαδικασίας θα αυξηθεί (μειωθεί).

Επομένως, αν σε ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, η διαδικασία κέρδους έχει την πιο πάνω δομή, τότε η επίλυσή του είναι τετριμμένη. Αν είναι submartingale, τότε είναι βέλτιστο να περιμένουμε μέχρι την ωρίμανση. Αν είναι supermartingale, τότε είναι βέλτιστο να διακόψουμε το φαινόμενο κατευθείαν. Ενώ, αν είναι martingale, τότε όλες οι στρατηγικές διακοπής είναι βέλτιστες.

Η ακόλουθη πρόταση, μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την πιο πάνω δομή, στην σταματημένη εκδοχή μιας διαδικασίας.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω τ ένας χρόνος διακοπής. Τότε:*

- (i) Αν η X είναι supermartingale, τότε και η X^τ είναι supermartingale
(ii) Αν η X είναι martingale, τότε και η X^τ είναι martingale

Το πιο κάτω, αποτελεί ένα χρήσιμο κριτήριο, για να δείξουμε ότι μια supermartingale διαδικασία, είναι martingale.

Πρόταση 2.2.3. Έστω $X = (X_n)_{n \geq 0}$ ένα supermartingale. Αν η αναμενόμενη τιμή του είναι σταθερή, δηλαδή $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$ για κάθε $n \geq 0$, τότε είναι martingale.

Δίνουμε τώρα, το βασικό θεώρημα της υποενότητας αυτής, το οποίο επεκτείνει την ιδιότητα (iii) ενός martingale, σε χρόνους διακοπής.

Θεώρημα 2.2.1 (Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής). Έστω $X = (X_n)_{n \geq 0}$ ένα submartingale και τ, σ δυο χρόνοι διακοπής τέτοιοι ώστε, $\tau \leq \sigma$ (\mathbb{P} -σβ). Τότε:

$$\mathbb{E}[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] \geq X_\tau \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

αν ισχύει κάποια από τις ακόλουθες συνθήκες²:

- (i) Ο χρόνος διακοπής σ είναι φραγμένος (κατά συνέπεια και ο τ)
(ii) Υπάρχει ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή X , τέτοια ώστε $X_n \leq \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $n \geq 0$

Το πιο πάνω θεώρημα, επεκτείνεται και σε διαδικασίες martingale. Η συνεπαγωγή, γίνεται πλέον $\mathbb{E}[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau$ (\mathbb{P} -σβ), ενώ η συνθήκη (ii) οφείλει να ισχύει με ισότητα.

Μια άλλη σημαντική έννοια που μας ενδιαφέρει, είναι η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Προτού την παρουσιάσουμε, θα σχολιάσουμε την έννοια του **τελεστή μετατόπισης** (shift operator) θ_n , όπου $n \geq 0$. Διαισθητικά, ο τελεστής μετατόπισης παίρνει μια τροχιά της διαδικασίας X , και "αφαιρεί" το κομμάτι της πριν τη χρονική στιγμή n . Ειδικότερα, για $k, n \geq 0$, γράφουμε:

$$X_k \circ \theta_n = X_{k+n}$$

Αυστηρά μιλώντας, ο τελεστής μετάβασης ορίζεται στην κανονική αναπαράσταση του δειγματικού χώρου Ω (canonical space). Ως κανονική αναπαράσταση, ονομάζουμε τον χώρο των ακολουθιών $\tilde{\Omega} = \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0}$, όπου \mathcal{S} το πεδίο τιμών της διαδικασίας X (στην περίπτωση μας, $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$). Οπότε, για $n \geq 0$, ο τελεστής μετατόπισης $\theta_n : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$, ορίζεται ως:

$$\theta_n(\tilde{\omega})(k) = \tilde{\omega}(n+k)$$

Παράλληλα, θεωρούμε και την κανονική αναπαράσταση της διαδικασίας X (canonical process). Ως κανονική αναπαράσταση, ονομάζουμε την ταυτοτική απεικόνιση $\tilde{X}_n = \tilde{\omega}(n)$, για $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$. Οπότε, γράφουμε:

$$(\tilde{X}_k \circ \theta_n)(\tilde{\omega}) = \tilde{X}_k(\theta_n(\tilde{\omega})) = \tilde{\omega}(n+k) = \tilde{X}_{n+k}(\tilde{\omega})$$

²Υπάρχουν και πιο γενικές διατυπώσεις του θεωρήματος, με διαφορετικές συνθήκες. Επιλέγουμε να παρουσιάσουμε μόνο αυτές που θα μας χρησιμεύσουν.

Ομοίως, για κάποια συνάρτηση f της διαδικασίας, γράφουμε:

$$(f(\tilde{X}_k) \circ \theta_n)(\tilde{\omega}) = f(\tilde{X}_k(\theta_n(\tilde{\omega}))) = f(\tilde{X}_{n+k}(\tilde{\omega}))$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να "ταυτίσουμε" το δειγματικό χώρο, με την κανονική αναπαράστασή του. Οπότε, στο υπόλοιπο της εργασίας, θεωρούμε ότι ο τελεστής μετατόπισης είναι καλά ορισμένος, ακόμα και αν δεν εργαζόμαστε στον κανονικό χώρο. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στην παράγραφο 19.5 του [7], σελίδα 158.

Είμαστε πλέον σε θέση, να παρουσιάσουμε την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Ορισμός 2.2.4 (Μαρκοβιανή ιδιότητα). *Μια προσαρμοσμένη διαδικασία $(X_n)_{n \geq 0}$, λέγεται **Μαρκοβιανή** (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$), αν για κάθε φραγμένη και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι:*

$$\mathbb{E}[f(X_k) \circ \theta_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[f(X_k)] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

για κάθε $n, k \geq 0$. Η πιο πάνω σχέση, λέγεται **Μαρκοβιανή ιδιότητα**.

Τόσο ο τελεστής μετάβασης, όσο και η Μαρκοβιανή ιδιότητα, μπορούν να επεκταθούν και για χρόνους διακοπής. Διαισθητικά, ο τελεστής μετατόπισης αφαιρεί το κομμάτι της τροχιάς, πριν από το αντίστοιχο στιγμιότυπο του χρόνου διακοπής. Ειδικότερα, για $n \geq 0$ και χρόνο διακοπής τ , γράφουμε:

$$(\tilde{X}_k \circ \theta_\tau)(\tilde{\omega}) = \tilde{X}_k(\theta_\tau(\tilde{\omega})) = \tilde{\omega}(n + \tau(\tilde{\omega})) = \tilde{X}_{n+\tau}(\tilde{\omega})$$

όπου, η πιο πάνω σύνθεση έχει νόημα, μόνο όταν $\tau(\tilde{\omega}) < \infty$.

Οπότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα χρησιμοποιούμε εκφράσεις όπως, $X_n \circ \theta_\tau = X_{n+\tau}$ και $f(X_n) \circ \theta_\tau = f(X_{n+\tau})$.

Μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε, την επέκταση της Μαρκοβιανής ιδιότητας στους χρόνους διακοπής, την λεγόμενη ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Ορισμός 2.2.5 (Ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα). *Μια προσαρμοσμένη διαδικασία $(X_n)_{n \geq 0}$, λέγεται **ισχυρά Μαρκοβιανή** (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$), αν για κάθε φραγμένη και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ και χρόνο διακοπής τ με $\tau < \infty$ (\mathbb{P} - $\sigma\beta$), ισχύει ότι:*

$$\mathbb{E}[f(X_n) \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}_{X_\tau}[f(X_n)] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

για κάθε $n \geq 0$. Η πιο πάνω σχέση, λέγεται **ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα**.

Στους πιο πάνω ορισμούς, θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις f είναι φραγμένες, ώστε οι δεσμευμένες μέσες τιμές να είναι καλά ορισμένες. Άρα, αρκεί να υποθέσουμε ότι το $\mathbb{E}[\sup_{n \geq 0} |f(X_n)|] < \infty$, κάτι που προφανώς ισχύει για φραγμένες συναρτήσεις.

Κάτι που αξίζει να σχολιάσουμε, είναι η δράση του τελεστή μετατόπισης θ_σ στη διαδικασία X_τ , όπου τ και σ χρόνοι διακοπής. Αποδεικνύεται ότι:

$$(\tilde{X}_\tau \circ \theta_\sigma)(\tilde{\omega}) = \tilde{X}_\tau(\theta_\sigma(\tilde{\omega})) = \tilde{\omega}(\tau(\theta_\sigma(\tilde{\omega})) + \sigma(\tilde{\omega})) = \tilde{X}_{\tau \circ \theta_\sigma + \sigma}(\tilde{\omega})$$

όπου, η πιο πάνω σύνθεση έχει νόημα, μόνο όταν $\sigma(\tilde{\omega}), \tau(\tilde{\omega}) < \infty$.

Διαισθητικά, αφαιρείται το μέρος της τροχιάς πριν τον χρόνο διακοπής σ , ενώ παράλληλα ο χρόνος διακοπής τ εφαρμόζεται στη απομένουσα τροχιά. Άρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις, $X_\tau \circ \theta_\sigma = X_{\tau \circ \theta_\sigma + \sigma}$ και $f(X_\tau) \circ \theta_\sigma = f(X_{\tau \circ \theta_\sigma + \sigma})$.

Παρατήρηση 2.2.3. Έστω $\tau_D = \{n \geq 0 : X_n \in D\}$, ο χρόνος εισόδου της αλυσίδας στο σύνολο $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ³. Αν γ ένας χρόνος διακοπής, τέτοιος ώστε $\gamma \leq \tau_D$, τότε:

$$\gamma + \tau_D \circ \theta_\gamma = \{n \geq \gamma : X_n \in D\} = \tau_D$$

Ολοκληρώνουμε την υποενότητα αυτή, δίνοντας τα κλασσικά θεωρήματα εναλλαγής της αναμενόμενης τιμής με κάποια οριακή διαδικασία. Παρουσιάζουμε τα πιο κάτω, για δεσμευμένες μέσες τιμές, όμως επεκτείνονται με προφανή τρόπο και στην απλή μέση τιμή (δεσμεύοντας ως προς την τετριμμένη σ -άλγεβρα).

Έστω $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ μια σ -άλγεβρα και $(X_n)_{n \geq 0}$ μια ακολουθία από ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές (ώστε να ορίζονται οι δεσμευμένες μέσες τιμές).

Λήμμα 2.2.2 (Fatou). Αν οι $(X_n)_{n \geq 0}$ είναι μη αρνητικές, τότε:

$$\mathbb{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \middle| \mathcal{G} \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

Λήμμα 2.2.3 (Αντίστροφο Fatou). Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή Y , τέτοια ώστε $X_n \leq Y$ για κάθε $n \geq 0$, τότε:

$$\mathbb{E} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \middle| \mathcal{G} \right] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

Θεώρημα 2.2.2 (Μονότονης σύγκλισης). Αν οι $(X_n)_{n \geq 0}$ είναι μη αρνητικές και αύξουσα ως ακολουθία, τότε:

$$\mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \middle| \mathcal{G} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

Θεώρημα 2.2.3 (Κυριαρχημένης σύγκλισης). Έστω ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή Y , τέτοια ώστε $|X_n| \leq Y$ για κάθε $n \geq 0$. Έστω επιπλέον ότι $X_n \rightarrow X$, \mathbb{P} - $\sigma\beta$. Τότε η X είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

³Θεωρούμε ότι η διαδικασία $(X_n)_{n \geq 0}$, παίρνει τιμές στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Θυμίζουμε ότι, στον διακριτό χρόνο, οι χρόνοι εισόδου σε τέτοια σύνολα, είναι πράγματι χρόνοι διακοπής.

2.2.3 Συνεχής χρόνος

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας με διήθηση. Στην υποενοότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε μερικά αποτελέσματα, αντίστοιχα με τα πιο πάνω, τα οποία ισχύουν στον συνεχή χρόνο. Όμως, στο πλαίσιο αυτό τίθενται διάφορα τεχνικά ζητήματα, όπως η συνέχεια των διαδικασιών και των διηθήσεων.

Ορισμός 2.2.6 (Χαρακτηρισμοί διήθησης). Η διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ λέγεται:

- (i) **δεξιά-συνεχής**, αν για κάθε $t \geq 0$, η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$
- (ii) **πλήρης**, αν για κάθε $t \geq 0$, η σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t περιέχει όλα τα \mathbb{P} -μηδενικά σύνολα της \mathcal{F} ⁴

Αν είναι δεξιά-συνεχής και πλήρης, τότε λέμε ότι **πληρεί τις συνήθεις υποθέσεις**.

Εύκολα βλέπουμε ότι, αν η διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ είναι πλήρης, τότε ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ είναι πλήρης, για κάθε $t \geq 0$.

Έστω τώρα μια στοχαστική διαδικασία $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Στον συνεχή χρόνο, οι διαδικασίες μπορούν να χαρακτηρισθούν, ανάλογα με τη συνέχεια των τροχιών τους καθώς και από την ύπαρξη των πλευρικών τους ορίων.

Ορισμός 2.2.7 (Χαρακτηρισμοί διαδικασιών). Λέμε ότι η διαδικασία $X = (X_t)_{t \geq 0}$:

- (i) είναι **συνεχής**, αν το σύνολο

$$\{\omega \in \Omega : \text{η τροχιά } t \mapsto X_t(\omega) \text{ είναι συνεχής}\}$$

έχει πιθανότητα 1

- (ii) είναι **δεξιά-συνεχής**, αν το σύνολο

$$\{\omega \in \Omega : \text{η τροχιά } t \mapsto X_t(\omega) \text{ είναι δεξιά-συνεχής}\}$$

έχει πιθανότητα 1

- (iii) είναι **αριστερά-συνεχής**, αν το σύνολο

$$\{\omega \in \Omega : \text{η τροχιά } t \mapsto X_t(\omega) \text{ είναι αριστερά-συνεχής}\}$$

έχει πιθανότητα 1

- (iv) έχει **αριστερά όρια**, αν για κάθε $t > 0$, το όριο $\lim_{h \downarrow 0} X_{t-h}$ υπάρχει (\mathbb{P} -σβ)

- (v) είναι **quasi-αριστερά-συνεχής**, αν για κάθε πεπερασμένο χρόνο διακοπής τ και ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_n)_{n \geq 0}$, τέτοια ώστε $\tau_n < \tau$ και $\tau_n \uparrow \tau$, ισχύει ότι $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$ (\mathbb{P} -σβ).

Αν η X είναι δεξιά-συνεχής και quasi-αριστερά-συνεχής, τότε λέμε ότι είναι **RCQLC**.

⁴Ένα σύνολο $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ λέγεται \mathbb{P} -μηδενικό, αν υπάρχει $B \subseteq \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}[B] = 0$.

Αξιίζει να σχολιάσουμε τις συνεπαγωγές, μεταξύ των πιο πάνω χαρακτηρισμών. Αν η διαδικασία είναι συνεχής, τότε προφανώς ικανοποιεί και τους ισχυρισμούς (ii)-(v). Αν είναι quasi-αριστερά-συνεχής, τότε έχει και αριστερά-όρια, καθώς οι σταθεροί χρόνοι, είναι χρόνοι διακοπής. Όμως, η quasi-αριστερά-συνέχεια δεν συνεπάγεται και αριστερά-συνέχεια, βλέπε για παράδειγμα τη διαδικασία Poisson⁵.

Σε αντίθεση με την περίπτωση του διακριτού χρόνου, στον συνεχή χρόνο υπάρχουν διάφορες μορφές ισότητας, μεταξύ δυο στοχαστικών διαδικασιών.

Ορισμός 2.2.8 (Ισότητα διαδικασιών). Έστω δυο στοχαστικές διαδικασίες $(X_t)_{t \geq 0}$ και $(Y_t)_{t \geq 0}$. Λέμε ότι:

(i) η $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ είναι **εκδοχή** της $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ⁶, αν:

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1, \text{ για κάθε } t \geq 0$$

(ii) οι $X = (X_t)_{t \geq 0}$ και $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ είναι **μη-διακρινόμενες**, αν:

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t, \text{ για κάθε } t \geq 0] = 1$$

Διαισθητικά, δυο διαδικασίες είναι εκδοχές μεταξύ τους, όταν για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή $t \geq 0$, ισούνται με πιθανότητα 1. Όταν όμως είναι μη-διακρινόμενες, τότε το σύνολο των τροχιών που ταυτίζονται (εξ ολοκλήρου), έχει πιθανότητα 1.

Εύκολα βλέπουμε ότι, αν οι δυο διαδικασίες είναι μη-διακρινόμενες, τότε είναι και εκδοχές. Το αντίστροφο όμως, δεν ισχύει. Ωστόσο, αν είναι και δεξιά-συνεχείς, τότε το πιο κάτω λήμμα, μας δίνει και την αντίστροφη συνεπαγωγή.

Λήμμα 2.2.4. Έστω X και Y δυο δεξιά-συνεχείς διαδικασίες. Αν η X είναι εκδοχή της Y , τότε είναι και μη-διακρινόμενες.

Θα παρουσιάσουμε τώρα τις έννοιες του χρόνου διακοπής, των διαδικασιών martingale καθώς και μερικά σχετικά αποτελέσματα. Οι πλείστες έννοιες επεκτείνονται με φυσιολογικό τρόπο, όμως είναι τεχνικά πιο δύσκολες, λόγω των ιδιοτήτων που προκύπτουν από τα διάφορα είδη συνέχειας.

Ορισμός 2.2.9 (Χρόνος διακοπής). Η τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, λέγεται (συνεχής) **χρόνος διακοπής** (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), αν για κάθε $t \geq 0$:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Ορισμός 2.2.10 (Martingale). Η στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{t \geq 0}$, λέγεται **martingale** (ως προς το μέτρο \mathbb{P} και τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), αν:

⁵Για την απόδειξη, παραπέμπουμε στο ιστότοπο [9], όπου αποδεικνύεται ότι κάθε διαδικασία Feller, η οποία είναι càglàd (δηλαδή είναι δεξιά συνεχής, με αριστερά όρια), είναι και quasi-αριστερά-συνεχής. Για μια εναλλακτική προσέγγιση, η οποία αποφεύγει την χρήση των διαδικασιών Feller, βλέπε τον ιστότοπο [11].

⁶Ισοδύναμα, ότι η $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ είναι εκδοχή της $X = (X_t)_{t \geq 0}$.

(i) Είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$

(ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, για κάθε $t \geq 0$

(iii) $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $t \geq s \geq 0$

Αν η (iii) ισχύει με $\mu \geq$ (ή \leq), τότε λέγεται **submartingale** (ή **supermartingale**).

Παράδειγμα 2.2.2 (Doob martingale). Αν Y μια ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, τότε η διαδικασία $(M_t)_{t \geq 0}$, όπου:

$$M_t = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t], \text{ για κάθε } t \geq 0$$

είναι martingale (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) και λέγεται **Doob martingale**.

Η όλη συζήτηση, περί τετριμμένης επίλυσης του προβλήματος βέλτιστης διακοπής, όταν η διαδικασία κέρδους έχει δομή σαν την πιο πάνω, εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση του συνεχή χρόνου.

Η πιο κάτω πρόταση, μας δίνει ένα κριτήριο, ώστε να δείξουμε ότι ένα supermartingale, επάγει μια δεξιά-συνεχής εκδοχή.

Πρόταση 2.2.4. Έστω ότι η διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ πληρεί τις συνήθεις υποθέσεις και $(X_t)_{t \geq 0}$ ένα supermartingale. Αν η απεικόνιση $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ είναι δεξιά-συνεχής, τότε υπάρχει δεξιά-συνεχής εκδοχή της X , η οποία είναι και αυτή supermartingale.

Όταν χρησιμοποιούμε την πιο πάνω πρόταση, συνηθίζουμε να λέμε ότι η διαδικασία είναι δεξιά-συνεχής, εννοώντας όμως τη δεξιά-συνεχής εκδοχή που επάγεται.

Η ακόλουθη πρόταση, μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την πιο πάνω δομή, στην σταματημένη διαδικασία. Βλέπουμε ότι, σε αντίθεση με τον διακριτό χρόνο, χρειαζόμαστε και μια μορφή συνέχειας, ώστε να έχουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.2.5. Έστω τ ένας χρόνος διακοπής. Τότε:

(i) Αν η X είναι δεξιά-συνεχής submartingale, τότε και η X^τ είναι submartingale

(ii) Αν η X είναι δεξιά-συνεχής martingale, τότε και η X^τ είναι martingale

Όπως και στην προηγούμενη υποενότητα, η πιο κάτω πρόταση, μας δίνει ένα κριτήριο, για να δείξουμε ότι ένα supermartingale, είναι martingale.

Πρόταση 2.2.6. Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ένα supermartingale. Αν η αναμενόμενη τιμή του είναι σταθερή, δηλαδή $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$ για κάθε $t \geq 0$, τότε είναι martingale.

Δίνουμε τώρα, το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής στο πλαίσιο του συνεχή χρόνου, όπου πάλι χρειαζόμαστε τη δεξιά-συνεχεία για να το διατυπώσουμε.

Θεώρημα 2.2.4 (Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής). Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ένα δεξιά-συνεχής submartingale και τ, σ δυο χρόνοι διακοπής τέτοιοι ώστε, $\tau \leq \sigma$ (\mathbb{P} -σβ). Τότε:

$$\mathbb{E}[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] \geq X_\tau \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

αν ισχύει κάποια από τις ακόλουθες συνθήκες:

- (i) Ο χρόνος διακοπής σ είναι φραγμένος (κατά συνέπεια και ο τ)
- (ii) Υπάρχει ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή X , τέτοια ώστε $X_t \leq \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $t \geq 0$

Το πιο πάνω θεώρημά, μπορεί να διατυπωθεί και για διαδικασίες martingale. Τότε όμως, τόσο το αποτέλεσμα, όσο και η συνθήκη (ii), θα ισχύουν με ισότητα.

Θα ασχοληθούμε τώρα, με τις Μαρκοβιανές διαδικασίες. Ο ορισμός τους, είναι απλή επέκταση του αντίστοιχου ορισμού, από τον διακριτό χρόνο. Επιπλέον, ο τελεστής μετάβασης $\theta_t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$, όπου $t \geq 0$, λειτουργεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Η μόνη διαφοροποίηση είναι ότι, ο κανονικός χώρος $\tilde{\Omega}$, είναι πλέον ο χώρος συναρτήσεων $\mathcal{S}^{[0, \infty)}$. Όμως, αξίζει να σημειωθεί ότι, οι συναρτήσεις του χώρου $\tilde{\Omega}$, οφείλουν να έχουν την ίδια μορφή συνέχειας, με την αρχική διαδικασία X . Δηλαδή, αν η X είναι δεξιά-συνεχής, τότε κάθε συνάρτηση $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, θα είναι και αυτή δεξιά-συνεχής.

Ορίζουμε πιο κάτω την Μαρκοβιανή ιδιότητα, για το παρόν πλαίσιο.

Ορισμός 2.2.11 (Μαρκοβιανή ιδιότητα). Μια προσαρμοσμένη διαδικασία $(X_t)_{t \geq 0}$, λέγεται **Μαρκοβιανή** (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), αν για κάθε φραγμένη και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}[f(X_h) \circ \theta_t | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{X_t}[f(X_h)] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

για κάθε $t, h \geq 0$. Η πιο πάνω σχέση, λέγεται **Μαρκοβιανή ιδιότητα**.

Ορισμός 2.2.12 (Ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα). Μια προσαρμοσμένη διαδικασία $(X_t)_{t \geq 0}$, λέγεται **ισχυρά Μαρκοβιανή** (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), αν για κάθε φραγμένη και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ και χρόνο διακοπής τ με $\tau < \infty$ (\mathbb{P} -σβ), ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}[f(X_h) \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}_{X_\tau}[f(X_h)] \quad (\mathbb{P}\text{-}\sigma\beta)$$

για κάθε $h \geq 0$. Η πιο πάνω σχέση, λέγεται **ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα**.

Μια ειδική κατηγορία Μαρκοβιανών διαδικασιών, που θα μας απασχολήσει, είναι οι διαδικασίες Feller. Πρώτα όμως, θα ορίσουμε την έννοια του **τελεστή μετατόπισης** (transition operator). Για μια Μαρκοβιανή διαδικασία, ορίζουμε για κάθε $t \geq 0$, τον τελεστή μετατόπισης $T_t : C_0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $T_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ ⁷.

Ορισμός 2.2.13 (Διαδικασία Feller). Έστω $(X_t)_{t \geq 0}$ μια Μαρκοβιανή διαδικασία. Λέμε ότι η $(X_t)_{t \geq 0}$ είναι **διαδικασία Feller**, αν η συλλογή $(T_t)_{t \geq 0}$, σχηματίζει μια ημι-ομάδα Feller.

⁷Η μέση τιμή $\mathbb{E}_x[f(X_t)]$ είναι καλά ορισμένη, διότι η $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ είναι φραγμένη.

Οι διαδικασίες Feller, έχουν "καλή συμπεριφορά" ως προς την αρχική τους κατάσταση. Αποδεικνύεται ότι⁸, αν $(X_t)_{t \geq 0}$ μια διαδικασία Feller, τότε:

$$X_t^x \xrightarrow{d} X_t^y \quad \text{καθώς } x \rightarrow y, \text{ για δεδομένο } t \geq 0$$

$$X_t^x \xrightarrow{\mathbb{P}} x \quad \text{καθώς } t \rightarrow 0, \text{ για δεδομένο } x \in \mathbb{R}^d$$

όπου με X_t^x , συμβολίζουμε την κατάσταση της διαδικασίας, την χρονική στιγμή $t \geq 0$, δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση $x \in \mathbb{R}^d$.

Ορίζουμε τώρα, το βασικό είδος διαδικασίας που θα μας απασχολήσει.

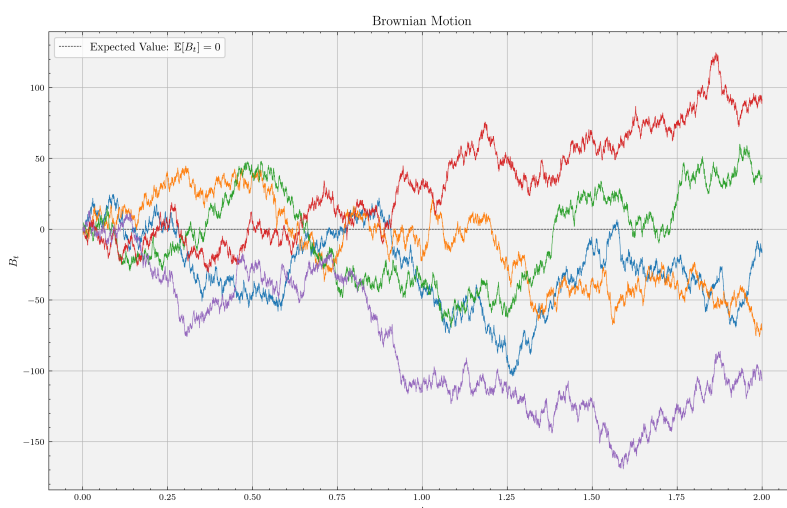
Ορισμός 2.2.14 (Κίνηση Brown). Μια διαδικασία $(B_t)_{t \geq 0}$ λέγεται (μονοδιάστατη) **κίνηση Brown** (ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), αν είναι προσαρμοσμένη και τέτοια ώστε:

- (i) Για κάθε $0 \leq s < t$, η προσαύξηση $B_t - B_s \perp \mathcal{F}_s$
- (ii) Για κάθε $0 \leq s \leq t$, η προσαύξηση $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$
- (iii) Είναι συνεχής

Αν επιπλέον, $B_0 = 0$, τότε λέγεται **τυπική κίνηση Brown**.

Η κίνηση Brown είναι η απλούστερη και πιο συνήθης επιλογή, όταν θέλουμε να προσθέσουμε θόρυβο (noise), σε ένα υπάρχον νετερμινιστικό μοντέλο. Η παρουσία της, εκφράζει την τυχαιότητα του φυσικού φαινομένου που θέλουμε να περιγράψουμε. Ένα παράδειγμα της μεθοδολογίας αυτής, είναι οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες επεκτείνουν τις συνήθεις αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις, προσθέτοντας τους θόρυβο (υπό τη μορφή της κίνησης Brown).

Βλέπουμε στο σχήμα 2.1, μερικές τροχιές της τυπικής κίνησης Brown. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση, δίνεται στο παράρτημα A.1.

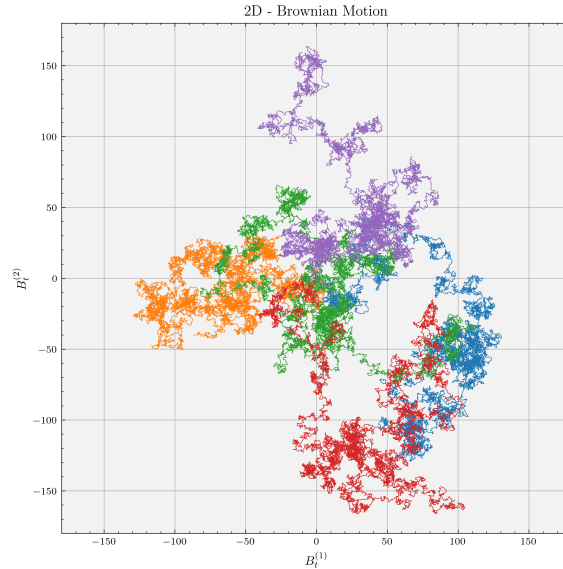


Σχήμα 2.1: Τροχιές της μονοδιάστατης (τυπικής) κίνησης Brown.

⁸Βλέπε λήμμα 17.3, του [5], σελίδες 315-316.

Ο ορισμός της κίνησης Brown, επεκτείνεται με φυσιολογικό τρόπο και στις πολλές διαστάσεις. Ορίζουμε ως d -διάστατη (τυπική) κίνηση Brown, τη διαδικασία $B = (B_t)_{t \geq 0}$, με $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \dots, B_t^{(d)})$, όπου οι $B^{(i)}$ είναι d ανεξάρτητες, μονοδιάστατες (τυπικές) κινήσεις Brown.

Βλέπουμε στο σχήμα 2.2, μερικές τροχιές της διδιάστατης κίνησης Brown. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση, είναι απλή επέκταση της μονοδιάστατης περίπτωσης (βλέπε παράρτημα A.1)



Σχήμα 2.2: Τροχιές της διδιάστατης (τυπικής) κίνησης Brown.

Ορισμός 2.2.15 (Διάχυση Itô). Μια διαδικασία $X = (X_t)_{t \geq 0}$ λέγεται (χρονικά ομογενής) **διάχυση Itô**, αν ικανοποιεί την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \text{ για κάθε } t \geq 0$$

$$X_0 = x \in \mathbb{R}^d$$

όπου $B = (B_t)_{t \geq 0}$ είναι μια m -διάστατη κίνηση Brown και οι συντελεστές $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ είναι Lipschitz.

Παρατήρηση 2.2.4. Αποδεικνύεται ότι, κάθε διάχυση Itô είναι συνεχής, ισχυρά Μαρκοβιανή και Feller. Για την απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού, παραπέμπουμε στο ισότοπο [8].

Παράδειγμα 2.2.3 (Γεωμετρική κίνηση Brown). Η διαδικασία $(X_t)_{t \geq 0}$, λέγεται **γεωμετρική κίνηση Brown**, αν είναι λύση της πιο κάτω:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \text{ για κάθε } t \geq 0$$

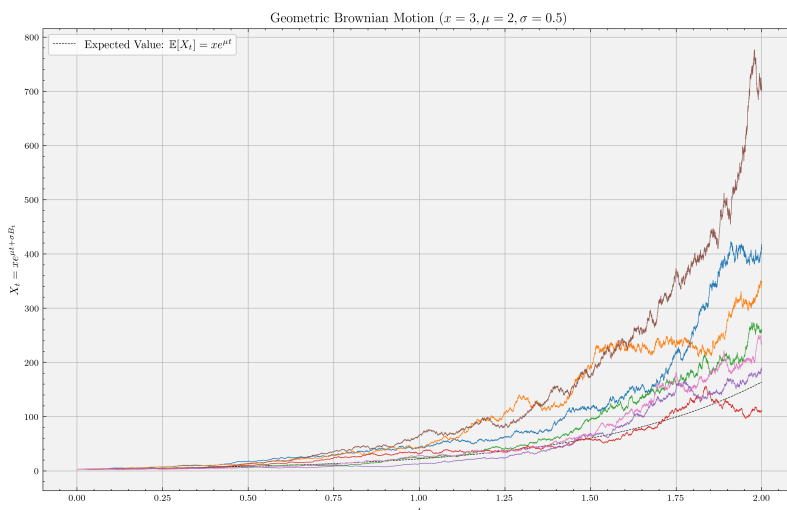
$$X_0 = x$$

όπου οι σταθερές $\mu, x \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$.

Ισοδύναμα, αν $X_t = xe^{\mu t + \sigma B_t}$, για κάθε $t \geq 0$. Η παράμετρος μ λέγεται τάση του μοντέλου, καθώς η αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας είναι $\mathbb{E}[S_t] = xe^{\mu t}$. Συνεπώς,

η μ εκφράζει τη τάση με την οποία αυξάνεται (ή μειώνεται) η τιμή της διαδικασίας. Η παράμετρος σ λέγεται μεταβλητότητα του μοντέλου, καθώς ρυθμίζει (πολλαπλασιαστικά) την πηγή τυχαιότητας του μοντέλου.

Στο σχήμα 2.3, βλέπουμε μερικές τροχιές της γεωμετρικής κίνησης Brown. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση, δίνεται στο παράρτημα A.2.



Σχήμα 2.3: Τροχιές της γεωμετρικής κίνησης Brown.

Για κάθε διάχυση Itô, μπορούμε να ορίσουμε και διάφορους τελεστές. Ειδικότερα, θα ορίσουμε τον γεννήτορα, τον χαρακτηριστικό τελεστή, τον διαφορικό τελεστή καθώς και διάφορες συσχετίσεις μεταξύ τους.

Ορισμός 2.2.16 (Γεννήτορας). Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ μια διάχυση Itô. Ο **γεννήτορας** της X , έστω A_X , ορίζεται ως:

$$A_X f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t}$$

Το πεδίο ορισμού του, έστω $\text{dom } A_X$, περιέχει όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να υπάρχει το πιο πάνω όριο, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Ορισμός 2.2.17 (Χαρακτηριστικός τελεστής). Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ μια διάχυση Itô. Ο **χαρακτηριστικός τελεστής** της X , έστω \mathcal{A}_X , ορίζεται ως:

$$\mathcal{A}_X f(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_{\tau_U^c})] - f(x)}{\mathbb{E}_x[\tau_U^c]}$$

όπου το όριο $U \downarrow x$, συμβολίζει μια φθίνουσα ακολουθία ανοιχτών περιοχών του x , έστω $U = (U_n)_{n \geq 0}$, τέτοιες ώστε $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = \{x\}$.

Το πεδίο ορισμού του \mathcal{A}_X , έστω $\text{dom } \mathcal{A}_X$, περιέχει όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να υπάρχει το πιο πάνω όριο για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και ακολουθία U .

Μπορεί να αποδειχθεί ότι, ο χαρακτηριστικός τελεστής, είναι επέκταση του γεννήτορα. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι $\text{dom } A_X \subseteq \text{dom } \mathcal{A}_X$ και για κάθε $f \in \text{dom } A_X$, ισχύει ότι $A_X f = \mathcal{A}_X f$.

Ορισμός 2.2.18 (Διαφορικός τελεστής). Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ μια διάχυση Itô. Ο **διαφορικός τελεστής** της X , έστω \mathcal{L}_X , ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}_X f(x) = \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma \sigma^T)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

όπου υπονοείται ότι η f , είναι επαρκώς ομαλή, ώστε να ορίζεται η πιο πάνω ποσότητα.

Δίνουμε τις ακόλουθες δυο προτάσεις, οι οποίες μας επιτρέπουν να ταυτίσουμε τους πιο πάνω τελεστές, για συγκεκριμένες κλάσεις συναρτήσεων.

Πρόταση 2.2.7. Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ μια διάχυση Itô και έστω μια πραγματική συνάρτηση $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, με συμπαγές στήριγμα. Τότε, η $f \in \text{dom } A_X$ και ισχύει ότι $A_X f = \mathcal{L}_X f$.

Πρόταση 2.2.8. Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ μια διάχυση Itô και έστω μια πραγματική συνάρτηση $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Τότε, η $f \in \text{dom } \mathcal{A}_X$ και ισχύει ότι $\mathcal{A}_X f = \mathcal{L}_X f$.

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό, σχολιάζοντας την έννοια της "σκοτωμού" (killing) μιας διάχυσης Itô. Είδαμε ότι, αν $X = (X_t)_{t \geq 0}$ μια διάχυση Itô, τότε ο γεννήτορας της ταυτίζεται με τον διαφορικό τελεστή της (για κατάλληλη κλάση συναρτήσεων):

$$A_X f = \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Ένα ερώτημα που προκύπτει, είναι κατά πόσο υπάρχει κάποια διαδικασία \tilde{X} , της οποίας ο γεννήτορας να δίνεται από:

$$A_{\tilde{X}} f = \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - c f = A_X f - c f$$

όπου $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μια μη αρνητική, φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, την οποία ονομάζουμε συντελεστή "σκοτωμού" (killing coefficient).

Πράγματι, υπάρχει μια τέτοια διαδικασία, η οποία προκύπτει σταματώντας ("σκοτώνοντας") τα μονοπάτια της $(X_t)_{t \geq 0}$, σε ένα τυχαίο χρόνο. Ειδικότερα, υπάρχει ένας τυχαίος χρόνος ζ , τέτοιος ώστε:

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega) & , \text{για } \zeta(\omega) < t \\ \partial & , \text{για } \zeta(\omega) \geq t \end{cases}$$

όπου $\partial \notin \mathbb{R}^d$ μια τερματική κατάσταση (cemetery state).

Κατά σύμβαση, θεωρούμε ότι κάθε συνάρτηση της $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ (δηλαδή κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^d \cup \{\partial\}$), παίρνει τη τιμή μηδέν στην κατάσταση ∂ .

Αποδεικνύεται ότι, η **σκοτωμένη διαδικασία** $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ είναι και αυτή ισχυρά Μαρκοβιανή, καθώς και ότι για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση f , ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}_x[f(\tilde{X}_t)] = \mathbb{E}_x[e^{-\int_0^t c(X_s) ds} f(X_t)]$$

3

Διακριτός Χρόνος

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με τα προβλήματα βέλτιστης διακοπής, στην περίπτωση του διακριτού χρόνου. Αν και δεν εμφανίζονται άμεσα στις εφαρμογές που θέλουμε να μελετήσουμε, τα χρησιμοποιούμε στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης, αντίστοιχων προβλημάτων στον συνεχή χρόνο.

Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας το πρόβλημα στη γενική του μορφή, ενώ στο τέλος θα σχολιάσουμε και πως η επιπλέον υπόθεση για Μαρκοβιανή δομή στην υποκείμενη διαδικασία, μπορεί να οδηγήσει σε μια εναλλακτική προσέγγιση.

Η θεωρία που παρουσιάζουμε στηρίζεται κυρίως στην δουλειά των [10], ενώ πολύ ενδιαφέρον συζητήσεις για το θέμα υπάρχουν και στα [12, 2, 13].

3.1 Γενικό πλαίσιο

Ξεκινάμε, ορίζοντας το γενικό πλαίσιο, με το οποίο θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ο χώρος πιθανότητας που περιγράφει τις δυνατές εκβάσεις του φαινομένου που παρακολουθούμε.

Έστω $G = (G_n)_{n \geq 0}$, η διαδικασία κέρδους του φαινομένου. Επομένως, η τυχαία μεταβλητή G_n , παριστάνει το κέρδος που έχουμε αν σταματήσουμε το φαινόμενο τη χρονική στιγμή n . Λόγω της φυσικής ερμηνείας της G ως κέρδος, φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι είναι μη αρνητική. Όμως, θα δούμε και πιο κάτω, ότι η επιπλέον αυτή υπόθεση δεν επηρεάζει τις σχετικές αποδείξεις, γι' αυτό και την παραλείπουμε.

Επίσης, θεωρούμε και την παραγόμενη διήθηση της G , την οποία συμβολίζουμε με $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Δηλαδή, για κάθε $n \geq 0$, η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_n = \sigma(G_k : 0 \leq k \leq n)$, παριστάνει την πληροφορία που μας δίνει η τροχιά του φαινομένου μέχρι και τη χρονική στιγμή n . Στα πιο κάτω θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας με διήθηση $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$.

3.1.1 Προς τα πίσω επαγωγή

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Έστω λοιπόν, $N \in \mathbb{N}$ ο χρονικός ορίζοντας (ωρίμανση) του φαινομένου. Άρα, η διαδικασία κέρδους και η παραγόμενη διήθησή της, ορίζονται μέχρι και τη χρονική στιγμή N , δηλαδή $(G_n)_{0 \leq n \leq N}$ και $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Συνεπώς, το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, το οποίο θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο αυτό, είναι το:

$$V_0^N = \sup_{0 \leq \tau \leq N} \mathbb{E}[G_\tau] \quad (3.1.1)$$

όπου με $0 \leq \tau \leq N$, συμβολίζουμε τους χρόνων διακοπής, με τιμές μεταξύ του 0 και N (\mathbb{P} -σβ).

Για να έχει νόημα η επίλυση του προβλήματος 3.1.1, πρέπει να επιβάλουμε και κάποιους επιπλέον περιορισμούς στη διαδικασία G , ώστε το supremum να είναι πεπερασμένο. Ακολουθώντας τον συλλογισμό των [10], υποθέτουμε ότι:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq n \leq N} |G_n| \right] < \infty \quad (3.1.2)$$

Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας 3.1.2, μας εξασφαλίζει ότι $\mathbb{E}[G_\tau] < \infty$, για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \tau \leq N$. Διαφορετικά, η επίλυση του 3.1.1 θα ήταν τετριμμένη (κάθε χρόνος διακοπής με άπειρο αναμενόμενο κέρδος θα ήταν βέλτιστος).

Όπως προδίδει και η ονομασία της υποενότητας, θα επιδιώξουμε να λύσουμε το πρόβλημα 3.1.1 επαγωγικά. Η ιδέα είναι, να εντάξουμε το πρόβλημα 3.1.1, σε μια (αριθμήσιμη) ακολουθία προβλημάτων, την οποία μπορούμε να λύσουμε επαγωγικά.

Για κάθε χρονική στιγμή $0 \leq n \leq N$, ορίζουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής:

$$V_n^N = \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}[G_\tau] \quad (3.1.3)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η υπόθεση 3.1.2, εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα 3.1.3 είναι καλά ορισμένο, για κάθε $0 \leq n \leq N$. Με βάση τον πιο πάνω συμβολισμό, το αρχικό πρόβλημα 3.1.1, ταυτίζεται με το 3.1.3, για $n = 0$. Επιπλέον, για $n = N$, το πρόβλημα 3.1.3 είναι τετριμμένο, καθώς ο μοναδικός διαθέσιμος χρόνος διακοπής, είναι ο σταθερός $\tau \equiv N$ (με αντίστοιχη αξία $V_N^N = G_N$).

Απομένει να κατασκευάσουμε μια αναδρομική σχέση, η οποία συνδέει τα προβλήματα 3.1.3. Έχοντας μια τέτοια σχέση, μπορούμε ξεκινώντας από τη τετριμμένη περίπτωση για $n = N$, να υπολογίσουμε αναδρομικά τη λύση του αρχικού προβλήματος 3.1.1 (ισοδύναμα τη λύση του 3.1.3 για $n = 0$).

Η παρατήρηση, στην οποία θα στηρίζουμε τη ζητούμενη αναδρομή, είναι ότι σε κάθε χρονική στιγμή $0 \leq n \leq N - 1$, μπορούμε είτε να σταματήσουμε, είτε να προχωρήσουμε στη χρονική στιγμή $n + 1$. Μια πιθανή προσέγγιση, είναι να εργαστούμε

άπληστα (greedy), δηλαδή να επιλέξουμε την πράξη που αξίζει περισσότερο. Θα δούμε πιο κάτω ότι, ο συλλογισμός αυτός είναι πράγματι βέλτιστος.

Έστω $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$, το κέρδος που έχουμε σε κάθε χρονική στιγμή $0 \leq n \leq N$, ακολουθώντας την πιο πάνω στρατηγική. Τη χρονική στιγμή $n = N$, η μοναδική μας επιλογή είναι να σταματήσουμε. Επομένως, έχουμε ότι $S_N^N = G_N$. Τη χρονική στιγμή $n = N - 1$, μπορούμε είτε να σταματήσουμε, είτε να συνεχίσουμε στη χρονική στιγμή $n = N$. Αν επιλέξουμε να σταματήσουμε, το κέρδος μας είναι G_{N-1} . Αν επιλέξουμε να συνεχίσουμε, το κέρδος μας είναι ίσο με το κέρδος της χρονικής στιγμής $n = N$, δεδομένης της μέχρι στιγμής τροχιάς μας, δηλαδή $\mathbb{E}[S_N^N | \mathcal{F}_{N-1}]$ ¹. Λειτουργώντας άπληστα, επιλέγουμε το μεγαλύτερο από τα δυο:

$$S_{N-1}^N = \max\{G_{N-1}, \mathbb{E}[S_N^N | \mathcal{F}_{N-1}]\}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο συλλογισμό, οδηγούμαστε στο πιο κάτω αναδρομικό σχήμα:

$$S_N^N = G_N \tag{3.1.4}$$

$$S_n^N = \max\{G_n, \mathbb{E}[S_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]\}, \quad n = N - 1, N - 2, \dots, 0 \tag{3.1.5}$$

Η ακολουθία που παράγει το πιο πάνω σχήμα, είναι μονοσήμαντα ορισμένη, λόγω της τελικής συνθήκης 3.1.4. Αυτός είναι και ο κύριος περιορισμός της προσέγγισης αυτής, καθώς στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα, δεν έχουμε κάποια συνθήκη ανάλογη της 3.1.4². Συνεπώς, η μέθοδος της προς τα πίσω επαγωγής, μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα.

Η στρατηγική που συνοδεύει την πιο πάνω αναδρομή, είναι να σταματήσουμε την παρακολούθηση, όταν το κέρδος της άμεσης διακοπής, είναι μεγαλύτερο του κέρδους συνέχειας στην επόμενη χρονική στιγμή. Εύκολα βλέπουμε ότι, ο συλλογισμός αυτός περιγράφεται από τους ακόλουθους χρόνους διακοπής:

$$\tau_n^N = \inf\{n \leq k \leq N : S_k^N = G_k\}, \quad n = N, N - 1, \dots, 0 \tag{3.1.6}$$

Παρατήρηση 3.1.1. *Εύκολα βλέπουμε ότι $n \leq \tau_n^N \leq N$, για κάθε $0 \leq n \leq N$, λόγω της τελικής συνθήκης 3.1.4.*

Θα αποδείξουμε ότι, το αναδρομικό σχήμα 3.1.4-3.1.5 και οι χρόνοι διακοπής 3.1.6, πράγματι λύνουν την ακολουθία προβλημάτων 3.1.3 (και κατά συνέπεια το πρόβλημα 3.1.1).

Αποδεικνύουμε πρώτα ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα, το οποίο θα μας χρειαστεί. Στην πιο κάτω πρόταση, δείχνουμε ότι ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή $0 \leq n \leq N$ και έχοντας ήδη διανύσει τη τροχιά \mathcal{F}_n , το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος που μπορούμε να έχουμε, περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή S_n^N . Επιπλέον, πετυχαίνουμε τη τιμή αυτή, ακολουθώντας την στρατηγική που υποδεικνύει ο χρόνος διακοπής τ_n^N .

¹Το κέρδος G_N είναι τυχαία μεταβλητή. Άρα η μέχρι στιγμής τροχιά, \mathcal{F}_{N-1} , επηρεάζει τις δυνατές τιμές της.

²Ισχύει μια αναδρομική σχέση όμοια της 3.1.5 και στην περίπτωση του άπειρου ορίζοντα (βλέπε [10]). Όμως, χωρίς κάποια "αρχική" συνθήκη ανάλογη της 3.1.4, δεν μπορούμε να αξιοποιήσουμε (ξεκινήσουμε) την αναδρομή για τον αναλυτικό υπολογισμό της ακολουθίας.

Πρόταση 3.1.1. Έστω ότι ισχύει η συνθήκη 3.1.2. Τότε, για κάθε $0 \leq n \leq N$:

$$S_n^N \geq \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_n] \quad \text{για κάθε } n \leq \tau \leq N \quad (3.1.7)$$

$$S_n^N = \mathbb{E}[G_{\tau_N} | \mathcal{F}_n] \quad (3.1.8)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε και τους δυο ισχυρισμούς επαγωγικά.

Σχέση 3.1.7

- Επαγωγική βάση

Για $n = N$, ο μοναδικός διαθέσιμος χρόνος διακοπής, είναι ο σταθερός $\tau \equiv N$. Άρα:

$$G_\tau \equiv G_N \Rightarrow \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[G_N | \mathcal{F}_N] = G_N = S_N^N$$

- Επαγωγική υπόθεση

Έστω ότι ισχύει ο ισχυρισμός για $n = k$, όπου $1 \leq k \leq N - 1$. Δηλαδή:

$$S_k^N \geq \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_k] \quad \text{για κάθε } k \leq \tau \leq N$$

- Επαγωγικό βήμα

Θα δείξουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός για $n = k - 1$, δηλαδή ότι:

$$S_{k-1}^N \geq \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_{k-1}] \quad \text{για κάθε } k - 1 \leq \tau \leq N$$

Έστω ένας χρόνος διακοπής $k - 1 \leq \tau \leq N$. Ορίζουμε τώρα τον $\tilde{\tau} = \tau \vee k$. Ο $\tilde{\tau}$ είναι χρόνος διακοπής, ως το maximum μεταξύ δυο χρόνων διακοπής και εύκολα βλέπουμε ότι $k \leq \tilde{\tau} \leq N$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}[G_\tau \mathbf{1}_{\{\tau=k-1\}} + G_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[G_\tau \mathbf{1}_{\{\tau=k-1\}} | \mathcal{F}_{k-1}] + \mathbb{E}[G_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= G_{k-1} \mathbf{1}_{\{\tau=k-1\}} + \mathbb{E}[G_{\tilde{\tau}} | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \\ &= G_{k-1} \mathbf{1}_{\{\tau=k-1\}} + \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\tilde{\tau}} | \mathcal{F}_k] | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \\ &\leq G_{k-1} \mathbf{1}_{\{\tau=k-1\}} + \mathbb{E}[S_k^N | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \\ &\leq S_{k-1}^N \mathbf{1}_{\{\tau=k-1\}} + S_{k-1}^N \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \\ &= S_{k-1}^N \end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ανισότητα, επικαλεστήκαμε την επαγωγική υπόθεση.

Σχέση 3.1.8

- Επαγωγική βάση

Ίδιο επιχειρήμα με τη σχέση 3.1.7.

- Επαγωγική υπόθεση

Έστω ότι ισχύει ο ισχυρισμός για $n = k$, όπου $1 \leq k \leq N - 1$. Δηλαδή:

$$S_k^N = \mathbb{E}[G_{\tau_k^N} | \mathcal{F}_k]$$

- Επαγωγικό βήμα

Θα δείξουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός για $n = k - 1$, δηλαδή ότι:

$$S_{k-1}^N = \mathbb{E}[G_{\tau_{k-1}^N} | \mathcal{F}_{k-1}]$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_{\tau_{k-1}^N} | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}[G_{\tau_{k-1}^N} \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} + G_{\tau_{k-1}^N} \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[G_{\tau_{k-1}^N} \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} | \mathcal{F}_{k-1}] + \mathbb{E}[G_{\tau_{k-1}^N} \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= S_{k-1}^N \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} + \mathbb{E}[G_{\tau_k^N} | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} \\ &= S_{k-1}^N \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} + \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\tau_k^N} | \mathcal{F}_k] | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} \\ &= S_{k-1}^N \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} + \mathbb{E}[S_k^N | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} \\ &= S_{k-1}^N \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} + S_{k-1}^N \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} \\ &= S_{k-1}^N \end{aligned}$$

όπου στην πέμπτη ισότητα, επικαλεστήκαμε την επαγωγική υπόθεση. ■

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.1.7-3.1.8, μπορούμε να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της υποενότητας αυτής. Στο πιο κάτω θεώρημα δείχνουμε ότι, η τυχαία μεταβλητή S_n^N λύνει (έμμεσα) το πρόβλημα 3.1.3, ότι ο χρόνος διακοπής τ_n^N είναι βέλτιστος καθώς και δυο χαρακτηρισμούς για την ακολουθία $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$.

Θεώρημα 3.1.1 (Προς τα πίσω επαγωγή). Έστω ότι ισχύει η συνθήκη 3.1.2. Τότε για δεδομένο $0 \leq n \leq N$:

- (i) Ο τ_n^N είναι ο μικρότερος βέλτιστος χρόνος διακοπής του προβλήματος 3.1.3
- (ii) Η ακολουθία $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$ είναι το μικρότερο supermartingale που κυριαρχεί την $(G_k)_{n \leq k \leq N}$
- (iii) Η σταματημένη ακολουθία $(S_{k \wedge \tau_n^N}^N)_{n \leq k \leq N}$ είναι martingale

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα τον ισχυρισμό (ii), καθώς χρειάζεται στην απόδειξη του ισχυρισμού (i).

Ισχυρισμός (ii)

Από κατασκευή της ακολουθίας $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$ (βλέπε σχήμα 3.1.4-3.1.5), έπεται άμεσα ότι είναι supermartingale³ και ότι κυριαρχεί την $(G_k)_{n \leq k \leq N}$.

³Εύκολα βλέπουμε ότι είναι προσαρμοσμένη και ολοκληρώσιμη.

Έστω τώρα $(\tilde{S}_k)_{n \leq k \leq N}$, ένα άλλο supermartingale που κυριαρχεί την $(G_k)_{n \leq k \leq N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\tilde{S}_k \geq S_k^N$, για κάθε $n \leq k \leq N$. Θα το αποδείξουμε επαγωγικά.

- Επαγωγική βάση

Για $l = N$, εύκολα βλέπουμε ότι $S_N^N = G_N \leq \tilde{S}_N$.

- Επαγωγική υπόθεση

Έστω ότι ισχύει ο ισχυρισμός για $l = k$, όπου $n + 1 \leq k \leq N - 1$. Δηλαδή:

$$S_k^N \leq \tilde{S}_k$$

- Επαγωγικό βήμα

Θα δείξουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός, για $l = k - 1$, δηλαδή:

$$S_{k-1}^N \leq \tilde{S}_{k-1}$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} S_{k-1}^N &= \max\{G_{k-1}, \mathbb{E}[S_k^N | \mathcal{F}_{k-1}]\} \\ &\leq \max\{G_{k-1}, \mathbb{E}[\tilde{S}_k | \mathcal{F}_{k-1}]\} \\ &\leq \max\{G_{k-1}, \tilde{S}_{k-1}\} \\ &= \tilde{S}_{k-1} \end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ανισότητα, επικαλεστήκαμε την επαγωγική υπόθεση.

Ισχυρισμός (i)

Δείχνουμε πρώτα ότι ο τ_n^N είναι βέλτιστος. Η σχέση 3.1.7, μας δίνει ότι:

$$\mathbb{E}[S_n^N] \geq \mathbb{E}[G_\tau] \quad \text{για κάθε } n \leq \tau \leq N \Rightarrow \mathbb{E}[S_n^N] \geq \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}[G_\tau] = V_n^N$$

Επιπλέον, από τη σχέση 3.1.8, παίρνουμε ότι:

$$\mathbb{E}[S_n^N] = \mathbb{E}[G_{\tau_n^N}] \leq \sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}[G_\tau] = V_n^N$$

Οι δυο πιο πάνω σχέσεις, μας δίνουν ότι $V_n^N = \mathbb{E}[S_n^N] = \mathbb{E}[G_{\tau_n^N}]$. Συνεπώς, ο τ_n^N είναι πράγματι βέλτιστος για το πρόβλημα 3.1.3.

Έστω τώρα $n \leq \tau_* \leq N$, ένας άλλος βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 3.1.3. Θα αποδείξουμε ότι $\tau_n^N \leq \tau_*$ (\mathbb{P} -σβ). Αν δείξουμε ότι, $S_{\tau_*}^N = G_{\tau_*}$ (\mathbb{P} -σβ), τότε από τον ορισμό του τ_n^N ως infimum (βλέπε σχέση 3.1.6), θα έχουμε το ζητούμενο.

Από κατασκευή της ακολουθίας $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$, έχουμε ότι $S_k^N \geq G_k$, για κάθε $n \leq k \leq N$. Επομένως, έπεται και ότι $S_{\tau_*}^N \geq G_{\tau_*}$. Αν τώρα $\mathbb{P}[S_{\tau_*}^N > G_{\tau_*}] > 0$, τότε:

$$\mathbb{E}[G_{\tau_*}] < \mathbb{E}[S_{\tau_*}^N] \leq \mathbb{E}[S_n^N] = V_n^N$$

όπου στη δεύτερη ανισότητα, επικαλεστήκαμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής⁴.

Η γνήσια ανισότητα στην πιο πάνω σχέση, οδηγεί σε άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι ο τ_* είναι βέλτιστος για το πρόβλημα 3.1.3.

Ισχυρισμός (iii)

Αρκεί να επιβεβαιώσουμε την martingale ιδιότητα⁵. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N | \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \leq k\}} + S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} | \mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \leq k\}} | \mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} | \mathcal{F}_k] \\ &= S_{\tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \leq k\}} + \mathbb{E}[S_{k+1}^N | \mathcal{F}_k] \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} \\ &= S_{\tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \leq k\}} + S_k^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} \\ &= S_{k \wedge \tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \leq k\}} + S_{k \wedge \tau_n^N}^N \mathbb{1}_{\{\tau_n^N \geq k+1\}} \\ &= S_{k \wedge \tau_n^N}^N \end{aligned}$$

για κάθε $n \leq k \leq N - 1$. ■

Συνοψίζοντας, στην υποενότητα αυτή, παρουσιάσαμε μια μεθοδολογία αναλυτικής επίλυσης του προβλήματος βέλτιστης διακοπής 3.1.1. Οι υποθέσεις του προβλήματος 3.1.1, εκ πρώτης όψης φαίνονται αρκετά δεσμευτικές. Όμως, όπως θα δούμε και στο πρακτικό κομμάτι της εργασίας, συνηθίζεται να προσεγγίζουμε τη λύση προβλημάτων βέλτιστης διακοπής στον συνεχή χρόνο, από τέτοιου είδους προβλήματα.

Παρόλο που η διαδικασία είναι άμεση, εν γένει είναι εξαιρετικά δύσκολο να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή στην εξίσωση 3.1.5. Το πως υπολογίζουμε ή εκτιμούμε τη μέση τιμή αυτή, αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί τις αριθμητικές μεθόδους, που θα παρουσιάσουμε στο δεύτερο μέρος της εργασίας.

Ανάλογα αποτελέσματα με το θεώρημα 3.1.1, ισχύουν και στην περίπτωση του συνεχή χρόνου. Ομοίως με πιο πάνω, την λύση στο πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, μας δίνει το μικρότερο supermartingale που κυριαρχεί την διαδικασία κέρδους, ενώ η εν λόγω διαδικασία θα είναι και martingale έως την (βέλτιστη) διακοπή της.

⁴Ο χρόνος διακοπής τ_* είναι φραγμένος από N .

⁵Το ότι είναι προσαρμοσμένη και ολοκληρώσιμη, έπεται από το ότι η $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$ είναι supermartingale.

3.2 Μαρκοβιανό πλαίσιο

Προτού προχωρήσουμε στην περίπτωση του συνεχή χρόνου, θα σχολιάσουμε μια εναλλακτική μορφή του προβλήματος, που προκύπτει όταν η υποκείμενη διαδικασία είναι Μαρκοβιανή. Θα δούμε ότι, στο πλαίσιο αυτό μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση του προβλήματος, ως μια (πραγματική) συνάρτηση του χώρου καταστάσεων.

Ορίζουμε πρώτα, το πλαίσιο που θα μας απασχολήσει στην παρούσα ενότητα. Έστω $X = (X_n)_{n \geq 0}$ μια χρονικά ομογενής, ισχυρά Μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο πιθανότητας με διήθηση $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P}_x)$ ⁶. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η διαδικασία παίρνει τιμές στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, καθώς και ότι το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_x , είναι τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$.

Η διαδικασία κέρδους, δίνεται πλέον ως συνάρτηση της υποκείμενης διαδικασίας X . Ειδικότερα, έστω $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Όπως και με την υπόθεση 3.1.2, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση G , είναι τέτοια ώστε:

$$\mathbb{E}_x \left[\sup_{0 \leq n \leq N} |G(X_n)| \right] < \infty \quad (3.2.1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, όπου με \mathbb{E}_x συμβολίζουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_x .

Με βάση τα πιο πάνω, βλέπουμε ότι σε αυτό το πλαίσιο, υπάρχει άμεση εξάρτηση από την αρχική κατάσταση της αλυσίδας, $x \in \mathbb{R}^d$. Συνεπώς, το αντίστοιχο πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, παίρνει πλέον τη μορφή:

$$V_0^N(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq N} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \quad (3.2.2)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η υπόθεση 3.2.1, μας εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα 3.2.2 είναι καλά ορισμένο, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Το κύριο πλεονέκτημα του πιο πάνω πλαισίου, είναι ότι μας επιτρέπει να μελετήσουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής 3.2.2, μέσω της απεικόνισης $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto V_0^N(x)$. Θα δούμε πιο κάτω, πως το γεγονός αυτό, μας οδηγεί σε μερικά επιπλέον συμπεράσματα για τη λύση του προβλήματος.

Μπορούμε να δείξουμε ότι, το πρόβλημα 3.2.2 ανάγεται στο πρόβλημα 3.1.1 της προηγούμενης ενότητας. Πράγματι, έστω κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$. Θεωρούμε ως διαδικασία κέρδους την $(G_n)_{0 \leq n \leq N}$, όπου $G_n = G(X_n)$ και για μέτρο πιθανότητας το \mathbb{P}_x , που περιγράψαμε πιο πάνω. Τότε, το πρόβλημα 3.2.2, για το συγκεκριμένο x , αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος 3.1.1.

Άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής για να το επιλύσουμε. Συνεπώς, η ακολουθία $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$ και οι χρόνοι διακοπής τ_n^N , που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, μας δίνουν το ζητούμενο. Το ενδιαφέρον ερώτημα της ενότητας αυτής, είναι κατά πόσο η Μαρκοβιανή δομή της υποκείμενης αλυσίδας, μας δίνει κάποια επιπλέον πληροφορία.

⁶Για τα αποτελέσματα που θέλουμε να παρουσιάσουμε, αρκεί να υποθέσουμε ότι η διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ είναι η παραγόμενη διήθηση της X . Παρ' όλ' αυτά, η επιπλέον αυτή υπόθεση δεν επηρεάζει τις σχετικές αποδείξεις γι' αυτό και την παραλείπουμε.

Το προτέρημα του πλαισίου αυτού, είναι ότι μπορούμε να συνδέσουμε άμεσα την ακολουθία $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$, με τη συνάρτηση αξίας V_0^N . Η ταυτότητα, που μας επιτρέπει να κάνουμε αυτή την αναγωγή, είναι η $S_n^N = V_0^{N-n}(X_n)$. Η ιδέα πίσω από την απόδειξή της, είναι ότι λόγω της Μαρκοβιανής δομής της αλυσίδας X , υπάρχει μια μορφή "συμμετρίας" μεταξύ του προβλήματος 3.2.2 για $N - n$ και του 3.1.3 για n .

Παρατήρηση 3.2.1. Στο πρόβλημα 3.2.2, ο χρονικός δείκτης συμβολίζει τον εναπομείναντα χρόνο μέχρι την ωρίμανση, ενώ στο πρόβλημα 3.1.3, τη χρονική στιγμή από την οποία ξεκινάμε την αναζήτηση.

Δείχνουμε στο πιο κάτω λήμμα, ότι πράγματι ισχύει η πιο πάνω σχέση.

Λήμμα 3.2.1. Έστω ότι ισχύει η υπόθεση 3.2.1. Τότε, για κάθε $0 \leq n \leq N$:

$$S_n^N = V_0^{N-n}(X_n) \quad (3.2.3)$$

Απόδειξη. Από την αναδρομική κατασκευή της $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$ (βλέπε σχήμα 3.1.4-3.1.5), παίρνουμε ότι $S_k^{N-n} \circ \theta_n = S_{n+k}^N$. Οπότε, για $0 \leq n \leq N$, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \tau_n^N &= \inf\{n \leq k \leq N : S_k^N = G(X_k)\} \\ &= \inf\{n \leq k \leq N : S_{k-n}^{N-n} \circ \theta_n = G(X_{k-n}) \circ \theta_n\} \\ &= n + \inf\{0 \leq k \leq N - n : S_k^{N-n} = G(X_k)\} \circ \theta_n \\ &= n + \tau_0^{N-n} \circ \theta_n \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση, την Μαρκοβιανή ιδιότητα της αλυσίδας $X = (X_n)_{0 \leq n \leq N}$, καθώς και τη σχέση 3.1.8, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\begin{aligned} S_n^N &= \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_n^N}) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}_x[G(X_{n+\tau_0^{N-n}} \circ \theta_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_0^{N-n}}) \circ \theta_n | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}_{X_n}[G(X_{\tau_0^{N-n}})] \end{aligned}$$

Επιπλέον, οι σχέσεις 3.1.7-3.1.8, μας δίνουν ότι:

$$\mathbb{E}_x[S_0^{N-n}] = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_0^{N-n}})] = \sup_{0 \leq \tau \leq N-n} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)] = V_0^{N-n}(x)$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις, έπεται το ζητούμενο. ■

Κάτι που αξίζει να σχολιαστεί είναι ότι, η ποσότητα $V_0^{N-n}(x)$ του προβλήματος 3.2.2 (όπου $x \in \mathbb{R}^d$), είναι πραγματικός αριθμός, ενώ η $V_0^{N-n}(X_n)$ στη σχέση 3.2.3, είναι τυχαία μεταβλητή.

Ορίζουμε τώρα, για κάθε $0 \leq n \leq N$, τα ακόλουθα σύνολα:

$$\mathcal{C}_n^N = \{x \in \mathbb{R}^d : V_0^{N-n}(x) > G(x)\} \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{D}_n^N = \{x \in \mathbb{R}^d : V_0^{N-n}(x) = G(x)\} \quad (3.2.5)$$

καθώς και τον χρόνο εισόδου της αλυσίδας στο \mathcal{D}_n^N :

$$\tau_{\mathcal{D}} = \inf\{0 \leq n \leq N : X_n \in \mathcal{D}_n^N\} \quad (3.2.6)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, τα σύνολα 3.2.4 και 3.2.5 είναι συμπληρωματικά, διότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^d : V_0^{N-n}(x) < G(x)\} = \emptyset$, για κάθε $0 \leq n \leq N$. Πράγματι, από τον ορισμό του προβλήματος 3.2.2, βλέπουμε ότι η V_0^{N-n} κυριαρχεί την G , στον \mathbb{R}^d . Επομένως, ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας, διαμερίζεται στα δυο αυτά σύνολα.

Λόγω της ταυτότητας 3.2.3, ο χρόνος εισόδου $\tau_{\mathcal{D}}$, ταυτίζεται με τον τ_0^N της προηγούμενης παραγράφου (βλέπε σχέση 3.1.6). Συνεπώς, είναι εύλογο να ονομάσουμε τα σύνολα \mathcal{C}_n^N και \mathcal{D}_n^N , ως σύνολο συνέχειας (continuation set) και διακοπής (stopping set), αντίστοιχα.

Είμαστε πλέον σε θέση, να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας αυτής. Στο πιο κάτω θεώρημα, βλέπουμε πως τα αποτελέσματα της μεθόδου της προς τα πίσω επαγωγής (βλέπε θεώρημα 3.1.1), επεκτείνονται στο παρόν πλαίσιο.

Θεώρημα 3.2.1 (Μαρκοβιανό πλαίσιο - Ομογενές). *Έστω ότι ισχύει η υπόθεση 3.2.1. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, έχουμε ότι:*

(i) *Η συνάρτηση αξίας V_0^n , ικανοποιεί τις εξισώσεις Wald-Bellman:*

$$V_0^0(x) = G(x) \quad (3.2.7)$$

$$V_0^n(x) = \max\{G(x), \mathbb{E}_x[V_0^{n-1}(X_1)]\}, \quad n = N, N-1, \dots, 0 \quad (3.2.8)$$

Για δεδομένο $x \in \mathbb{R}^d$, ισχύει επιπλέον ότι:

(ii) *Ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι ο μικρότερος βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 3.2.2*

(iii) *Η ακολουθία $(V_0^{N-n}(X_n))_{0 \leq n \leq N}$ είναι το μικρότερο \mathbb{P}_x -supermartingale που κυριαρχεί την $(G(X_n))_{0 \leq n \leq N}$*

(iv) *Η σταματημένη ακολουθία $(V_0^{N-n \wedge \tau_{\mathcal{D}}}(X_{n \wedge \tau_{\mathcal{D}}}))_{0 \leq n \leq N}$ είναι \mathbb{P}_x -martingale*

Απόδειξη. Η ταυτότητα 3.2.3, μας επιτρέπει να επικαλεστούμε το θεώρημα 3.1.1 της προηγούμενης ενότητας, από όπου έπονται άμεσα οι ισχυρισμοί (ii)-(iv).

Ισχυρισμός (i)

Εύκολα βλέπουμε ότι, οι εξισώσεις Wald-Bellman, είναι το ανάλογο του σχήματος 3.1.4-3.1.5, στο τρέχον πλαίσιο.

Η αρχική συνθήκη 3.2.7, έπεται άμεσα από τον ορισμό του προβλήματος 3.2.2. Πράγματι, για $N = 0$, ο μοναδικός διαθέσιμος χρόνος διακοπής είναι ο σταθερός $\tau \equiv 0$. Επομένως, ισχύει ότι $V_0^0(x) = \mathbb{E}_x[G(X_\tau)] = G(x)$.

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις σχέσεις 3.2.3 και 3.1.5, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} V_0^{N-n}(X_n) &= S_n^N \\ &= \max\{G(X_n), \mathbb{E}_x[S_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]\} \\ &= \max\{G(X_n), \mathbb{E}_x[V_0^{N-(n+1)}(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n]\} \\ &= \max\{G(X_n), \mathbb{E}_x[V_0^{N-(n+1)}(X_1) \circ \theta_n | \mathcal{F}_n]\} \\ &= \max\{G(X_n), \mathbb{E}_{X_n}[V_0^{N-(n+1)}(X_1)]\} \end{aligned}$$

για κάθε $0 \leq n \leq N$.

Θέτοντας $n = 0$ στην πιο πάνω σχέση, παίρνουμε ότι (κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_x) ισχύει η αναδρομή $V_0^N(x) = \max\{G(x), \mathbb{E}_x[V_0^{N-1}(X_1)]\}$. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι, η απόδειξη της ταυτότητας 3.2.3 μπορεί να τροποποιηθεί, ώστε να επιλεχθεί οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός (μέχρι και το N), ως ωρίμανση του προβλήματος. Άρα, από την πιο πάνω αναδρομή, έπεται η ζητούμενη σχέση 3.2.8. ■

3.2.1 Μη-ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο του διακριτού χρόνου, εξετάζοντας και την περίπτωση όπου η υποκείμενη Μαρκοβιανή αλυσίδα X , είναι χρονικά μη-ομογενής.

Έστω λοιπόν, $X = (X_n)_{0 \leq n \leq N}$, μια μη-ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα. Γνωρίζουμε ότι, η διαδικασία $Z = (Z_n)_{0 \leq n \leq N}$, όπου $Z_n = (n, X_n)$, είναι χρονικά ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα πιο πάνω αποτελέσματα, θεωρώντας ως υποκείμενη διαδικασία την Z .

Λόγω της επαύξησης της αλυσίδας X , με τη χρονική στιγμή n , χρειάζεται να τροποποιήσουμε κατάλληλα και το πρόβλημα θέλουμε να επιλύσουμε. Ως μέτρο πιθανότητας του μετρήσιμου χώρου (Ω, \mathcal{F}) , θεωρούμε το μέτρο $\mathbb{P}_{n,x}$, το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_{n,x}[X_n = x] = 1$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$ και $0 \leq n \leq N$.

Η διαδικασία κέρδους, είναι πλέον συνάρτηση και της χρονικής στιγμής. Ειδικότερα, έστω $G : \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας 3.2.1, παίρνει πλέον τη μορφή:

$$\mathbb{E}_{n,x} \left[\sup_{0 \leq k \leq N-n} |G(n+k, X_{n+k})| \right] < \infty \quad (3.2.9)$$

για κάθε $0 \leq n \leq N$ και $x \in \mathbb{R}^d$, όπου με $\mathbb{E}_{n,x}$ συμβολίζουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}_{n,x}$.

Ανάλογα, τροποποιούμε και το προς επίλυση πρόβλημα βέλτιστης διακοπής 3.2.2:

$$V_0^N(n, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq N-n} \mathbb{E}_{n,x}[G(n+\tau, X_{n+\tau})] \quad (3.2.10)$$

Για την επίλυση του προβλήματος 3.2.10, αρκεί να αποδείξουμε μια σχέση, ανάλογη της 3.2.3. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:

$$S_{n+k}^N = V_0^N(n+k, X_{n+k}) \quad (3.2.11)$$

για κάθε $0 \leq k \leq N - n$.

Η απόδειξή της, είναι όμοια με αυτή της σχέσης 3.2.3, οπότε την παραλείπουμε.

Τροποποιούμε, με παρόμοιο τρόπο, τα σύνολα συνέχειας και διακοπής, 3.2.4 και 3.2.5 αντίστοιχα, καθώς και τον χρόνο εισόδου 3.2.6:

$$\mathcal{C} = \{(n, x) \in \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d : V_0^N(n, x) > G(n, x)\} \quad (3.2.12)$$

$$\mathcal{D} = \{(n, x) \in \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d : V_0^N(n, x) = G(n, x)\} \quad (3.2.13)$$

$$\tau_{\mathcal{D}} = \inf\{0 \leq k \leq N - n : Z_{n+k} = (n+k, X_{n+k}) \in \mathcal{D}\} \quad (3.2.14)$$

Πριν δώσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας, θα δείξουμε έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό για τις διαδικασίες supermartingale, με βάση τις superharmonic συναρτήσεις. Για να αποδείξουμε τον εν λόγω ισχυρισμό, θα χρειαστούμε την έννοια του τελεστή μετάβασης. Δίνουμε πιο κάτω τον σχετικό ορισμό.

Ορισμός 3.2.1 (Τελεστής μετάβασης). *Ορίζουμε ως **τελεστή μετάβασης** της αλυσίδας Z , την απεικόνιση:*

$$Tf(n, x) = \mathbb{E}_{n,x}[f(n+1, X_{n+1})]$$

όπου $(n, x) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \mathbb{R}^d$.

Ως πεδίο ορισμού του τελεστή μετάβασης, θεωρούμε κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η τυχαία μεταβλητή $f(n+1, X_{n+1})$, να είναι ολοκληρώσιμη ως προς $\mathbb{P}_{n,x}$, για κάθε $(n, x) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \mathbb{R}^d$.

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή μετάβασης, μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της superharmonic συνάρτησης, την οποία ορίζουμε πιο κάτω.

Ορισμός 3.2.2 (Superharmonic συνάρτηση). *Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, λέγεται **superharmonic** (ως προς τη Z) αν:*

$$Tf(n, x) \leq f(n, x)$$

για κάθε $(n, x) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \mathbb{R}^d$, όπου T ο τελεστής μετάβασης της Z .

Στον πιο πάνω ορισμό, υπονοείται ότι αν f μια superharmonic συνάρτηση, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $f(n+1, X_{n+1})$ είναι ολοκληρώσιμες ως προς $\mathbb{P}_{n,x}$, για κάθε $(n, x) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \mathbb{R}^d$ (ώστε να είναι καλά ορισμένο το αριστερό μέλος).

Είμαστε πλέον σε θέση, να αποδείξουμε τον ζητούμενο ισχυρισμό. Βλέπουμε στην πιο κάτω πρόταση, κάτω από ποιες συνθήκες, μπορεί μια superharmonic συνάρτηση, να επάγει μια διαδικασία supermartingale.

Πρόταση 3.2.1. Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε οι τυχαίες μεταβλητές $f(n+k, X_{n+k})$, να είναι ολοκληρώσιμες ως προς $\mathbb{P}_{n,x}$, για κάθε $(n, x) \in \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d$ και $0 \leq k \leq N-n$. Τότε, η f είναι superharmonic συνάρτηση αν-ν η διαδικασία $(f(n+k, X_{n+k}))_{0 \leq k \leq N-n}$ είναι $\mathbb{P}_{n,x}$ -supermartingale.

Απόδειξη. Λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας της Z , ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:

$$Tf(Z_{n+k}) = \mathbb{E}_{Z_{n+k}}[f(Z_1)] = \mathbb{E}_z[f(Z_1) \circ \theta_{n+k} | \mathcal{F}_{n+k}] = \mathbb{E}_z[f(Z_{n+k+1}) | \mathcal{F}_{n+k}]$$

όπου $z = (n, x)$, η αρχική κατάσταση της αλυσίδας και $0 \leq k \leq N-n$.

” \Rightarrow ” Έστω ότι η f είναι superharmonic. Τότε, η πιο πάνω σχέση μας δίνει ότι:

$$\mathbb{E}_z[f(Z_{n+k+1}) | \mathcal{F}_{n+k}] = Tf(Z_{n+k}) \leq f(Z_{n+k})$$

” \Leftarrow ” Έστω ότι η διαδικασία $(f(n+k, X_{n+k}))_{0 \leq k \leq N-n}$ είναι \mathbb{P}_z -supermartingale. Τότε, η supermartingale ιδιότητά της, μας δίνει ότι:

$$\mathbb{E}_z[f(Z_{n+k+1}) | \mathcal{F}_{n+k}] \leq f(Z_{n+k})$$

Θέτοντας $k=0$ και παίρνοντας μέσες τιμές, \mathbb{E}_z , στα δυο μέλη, έχουμε ότι:

$$Tf(z) = \mathbb{E}_z[f(Z_{n+1})] \leq \mathbb{E}_z[f(Z_n)] = f(z)$$

όπου η δεύτερη ισότητα, έπεται από το γεγονός ότι $Z_n = z$ (\mathbb{P}_z -σβ). ■

Δίνουμε τώρα, το βασικό αποτέλεσμα της υποενότητας αυτής. Στο πιο κάτω θεώρημα, βλέπουμε πως τροποποιούνται τα αποτελέσματα του θεωρήματος 3.2.1, όταν η υποκειμένη αλυσίδα είναι μη-ομογενής.

Θεώρημα 3.2.2 (Μαρκοβιανό πλαίσιο - Μη-ομογενές). Έστω ότι ισχύει η υπόθεση 3.2.9. Τότε, για κάθε $(n, x) \in \{0, 1, \dots, N-1\} \times \mathbb{R}^d$, έχουμε ότι:

(i) Η συνάρτηση αξίας V_0^N , ικανοποιεί τις εξισώσεις Wald-Bellman:

$$V_0^N(n, x) = \max\{G(n, x), TV_0^N(n, x)\}$$

(ii) Η συνάρτηση αξίας V_0^N , είναι η μικρότερη superharmonic συνάρτηση που κυριαρχεί την G στο $\{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d$

Για δεδομένο $(n, x) \in \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^d$, ισχύει επιπλέον ότι:

(iii) Ο τ_D είναι ο μικρότερος βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 3.2.10

(iv) Η σταματημένη ακολουθία $(V_0^N((n+k) \wedge \tau_D, X_{(n+k) \wedge \tau_D}))_{0 \leq k \leq N-n}$ είναι $\mathbb{P}_{n,x}$ -martingale

Απόδειξη. Η ταυτότητα 3.2.11, μας επιτρέπει να επικαλεστούμε το θεώρημα 3.1.1, από όπου έπονται οι ισχυρισμοί (ii)-(iv). Ειδικότερα, για τον ισχυρισμό (ii), χρησιμοποιούμε και την πρόταση 3.2.1.

Ισχυρισμός (i)

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις σχέσεις 3.2.11 και 3.1.5, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} V_0^N(Z_{n+k}) &= S_{n+k}^N \\ &= \max\{G(Z_{n+k}), \mathbb{E}_{n,x}[V_0^N(Z_{n+k+1})|\mathcal{F}_{n+k}]\} \\ &= \max\{G(Z_{n+k}), \mathbb{E}_{n,x}[V_0^N(Z_1) \circ \theta_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k}]\} \\ &= \max\{G(Z_{n+k}), \mathbb{E}_{Z_{n+k}}[V_0^N(Z_1)]\} \end{aligned}$$

για κάθε $0 \leq k \leq N - (n + 1)$.

Θέτοντας $k = 0$ στην πιο πάνω σχέση, παίρνουμε ότι:

$$V_0^N(n, x) = \max\{G(Z_n), \mathbb{E}_{Z_n}[V_0^N(Z_1)]\} = \max\{G(n, x), TV_0^N(n, x)\}$$

όπου η δεύτερη ισότητα, έπεται από το γεγονός ότι $Z_n = (n, x)$ ($\mathbb{P}_{n,x}$ -σβ). ■

Συνοψίζοντας, στην πιο πάνω ενότητα, παρουσιάσαμε ένα εναλλακτικό πλαίσιο για το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, 3.2.2 και 3.2.10, όταν η υποκείμενη διαδικασία που παρακολουθούμε είναι Μαρκοβιανή. Στο ερχόμενο κεφάλαιο, θα δούμε ότι όμοια αποτελέσματα με τα πιο πάνω, ισχύουν και στην περίπτωση του συνεχή χρόνου.

Στην παρούσα εργασία, δεν θα εφαρμόσουμε άμεσα τα πιο πάνω αποτελέσματα. Όμως, αποτελούν μια καλή εισαγωγή στο αντίστοιχο πλαίσιο του συνεχή χρόνου. Επίσης, βλέπουμε στον ισχυρισμό (ii) του θεωρήματος 3.2.2, ότι η πρόταση 3.2.1, μας επιτρέπει να αναζητήσουμε τη ζητούμενη συνάρτηση αξίας, μέσω ενός προβλήματος συναρτησιακής (αρμονικής) ανάλυσης. Η χρησιμότητα του αποτελέσματος αυτού, θα φανεί στην περίπτωση του συνεχή χρόνου, όπου η έννοια των αρμονικών συναρτήσεων, συνδέεται άμεσα με την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

4

Συνεχής Χρόνος

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε κάποια γενικά αποτελέσματα για τα προβλήματα βέλτιστης διακοπής, στον συνεχή χρόνο. Θα δούμε πιο κάτω ότι, οι πλείστες έννοιες που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, επεκτείνονται με φυσιολογικό τρόπο και στην περίπτωση του συνεχή χρόνου.

Θα ασχοληθούμε πρώτα, με την γενική μορφή του προβλήματος, ενώ στο τέλος θα σχολιάσουμε και την περίπτωση όπου, η υποκείμενη διαδικασία είναι Μαρκοβιανή. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [10, 12, 2, 13].

4.1 Γενικό πλαίσιο

Ξεκινάμε, ορίζοντας το γενικό πλαίσιο, με το οποίο θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, ο χώρος πιθανότητας με διήθηση που περιγράφει τις δυνατές εκβάσεις του φαινομένου, όπου υποθέτουμε ότι η διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, πληρεί τις συνήθεις υποθέσεις.

Έστω τώρα $G = (G_t)_{t \geq 0}$, η διαδικασία κέρδους του φαινομένου, την οποία θεωρούμε RCQLC και προσαρμοσμένη (στη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$). Οι στρατηγικές διακοπής, όπως και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, μοντελοποιούνται ως χρόνοι διακοπής. Όμως, στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε και με την περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα. Επομένως, για να έχει νόημα η στρατηγική που αναζητούμε, απαιτούμε επιπλέον, οι υποψήφιοι χρόνοι διακοπής να είναι πεπερασμένοι (\mathbb{P} -σβ).

Με βάση τα πιο πάνω, το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής που θα μας απασχολήσει στο κεφάλαιο αυτό, είναι το:

$$V_0 = \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[G_\tau] \quad (4.1.1)$$

όπου με $0 \leq \tau < \infty$, συμβολίζουμε τους πεπερασμένους χρόνους διακοπής (\mathbb{P} -σβ).

Για να είναι καλά ορισμένο το πρόβλημα 4.1.1, θέλουμε οι αναμενόμενες τιμές εντός του supremum, να είναι πεπερασμένες. Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό με το προηγούμενο κεφάλαιο (βλέπε σχέση 3.1.2), υποθέτουμε ότι η διαδικασία κέρδος

G , ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} |G_t| \right] < \infty \quad (4.1.2)$$

Στην υποενότητα της προς τα πίσω επαγωγής, μελετήσαμε το ζητούμενο πρόβλημα βέλτιστης διακοπής, ως ειδική περίπτωση μιας ακολουθίας προβλημάτων (βλέπε πρόβλημα 3.1.3). Όμοια, θα μελετήσουμε το πρόβλημα 4.1.1, εντάσσοντας το σε μια μεγαλύτερη κλάση προβλημάτων.

Για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, ορίζουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής:

$$V_t = \sup_{t \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[G_\tau] \quad (4.1.3)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η συνθήκη 4.1.2, μας εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα 4.1.3 είναι καλά ορισμένο, για κάθε $t \geq 0$. Επιπλέον, με βάση τον πιο πάνω συμβολισμό, το πρόβλημα 4.1.1 αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος 4.1.3, για $t = 0$.

Παρατήρηση 4.1.1. *Εξ ορισμού, ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής, είτε του προβλήματος 4.1.1, είτε του 4.1.3, είναι πεπερασμένος (\mathbb{P} -σβ).*

Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, είχαμε λύσει το πρόβλημα 3.1.3, κατασκευάζοντας την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$ (βλέπε σχήμα 3.1.4-3.1.5). Είδαμε επιπλέον ότι, η εν λόγω ακολουθία, ικανοποιεί τις σχέσεις 3.1.7 και 3.1.8. Οι δυο τελευταίες σχέσεις, μας δείχνουν ότι οι τυχαίες μεταβλητές $(S_n^N)_{0 \leq n \leq N}$, μπορούν να γραφτούν ισοδύναμα ως:

$$S_n^N = \operatorname{ess\,sup}_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_n]$$

όπου χρησιμοποιούμε την έννοια του ουσιαστικού supremum, διότι το σύνολο των (διακριτών) χρόνων διακοπής, με τιμές στο μεταξύ των n και N , είναι υπεραριθμήσιμο.

Υιοθετώντας τον πιο πάνω συλλογισμό, ορίζουμε τη διαδικασία $S = (S_t)_{t \geq 0}$, όπου:

$$S_t = \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t] \quad (4.1.4)$$

καθώς και την ακόλουθη οικογένεια χρόνων διακοπής (βλέπε σχέση 3.1.6):

$$\tau_t = \inf \{ u \geq t : S_u = G_u \} \quad (4.1.5)$$

όπου, εξ ορισμού θεωρούμε ότι $\inf \emptyset = \infty$.

Στη βιβλιογραφία, η διαδικασία S λέγεται και φάκελος Snell της G . Επιπλέον, λόγω του άπειρου χρονικού ορίζοντα, δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν ο τ_t είναι πεπερασμένος (\mathbb{P} -σβ). Συνεπώς, χωρίς κάποια επιπλέον υπόθεση, ο τ_t μπορεί να μην ανήκει στο σύνολο των υποψήφιων χρόνων διακοπής.

Ένα τελευταίο σχόλιο, που θα μας διευκολύνει στις ερχόμενες αποδείξεις, είναι ότι αν έχουμε ένα δεξιά-συνεχής supermartingale $(X_t)_{t \geq 0}$, το οποίο κυριαρχεί τη $(G_t)_{t \geq 0}$, τότε μπορούμε να επικαλεστούμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής, για οποιουσδήποτε χρόνους διακοπής. Πράγματι, η διαδικασία $(-X_t)_{t \geq 0}$ είναι submartingale, ενώ εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει:

$$-X_t \leq -G_t = \mathbb{E}[-G_t | \mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} |G_t| \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

όπου η $\sup_{t \geq 0} |G_t|$ είναι ολοκληρώσιμη, λόγω της συνθήκης 4.1.2.

Επομένως, για αυθαίρετους χρόνους διακοπής τ, σ , με $\tau \leq \sigma$ (\mathbb{P} -σβ), έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[-X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] \geq -X_\tau \iff \mathbb{E}[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] \leq X_\tau$$

Είμαστε πλέον, σε θέση να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας αυτής. Στο παρακάτω θεώρημα δείχνουμε ότι, αν ο τ_t είναι πεπερασμένος, τότε τόσο οι σχέσεις 3.1.7-3.1.8, όσο και τα αποτελέσματα του θεωρήματος 3.1.1 επεκτείνονται και στο πλαίσιο του συνεχή χρόνου.

Θεώρημα 4.1.1. Έστω ότι ισχύει η υπόθεση 4.1.2. Αν για δεδομένο $t \geq 0$, ισχύει ότι $\mathbb{P}[\tau_t < \infty] = 1$, τότε:

(i) Ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

$$S_t \geq \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t] \quad \text{για κάθε } t \leq \tau < \infty \quad (4.1.6)$$

$$S_t = \mathbb{E}[G_{\tau_t} | \mathcal{F}_t] \quad (4.1.7)$$

(ii) Ο τ_t είναι βέλτιστος για το πρόβλημα 4.1.3

(iii) Αν τ_* , ένας άληθος βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.1.3, τότε $\tau_t \leq \tau_*$ (\mathbb{P} -σβ)

(iv) Η διαδικασία $(S_s)_{s \geq t}$, είναι το μικρότερο δεξιά-συνεχής supermartingale, που κυριαρχεί την $(G_s)_{s \geq t}$

(v) Η σταματημένη διαδικασία $(S_{s \wedge \tau_t})_{s \geq t}$, είναι δεξιά-συνεχής martingale

Αν $\mathbb{P}[\tau_t = \infty] > 0$ τότε δεν υπάρχει βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.1.3.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα τον ισχυρισμό (iv), καθώς χρειάζεται στην απόδειξη του ισχυρισμού (iii).

Ισχυρισμός (iv)

Το ότι η διαδικασία $(S_u)_{u \geq t}$ κυριαρχεί την $(G_u)_{u \geq t}$, είναι προφανές από τον ορισμό της. Πράγματι, για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $u \geq t$, επιλέγοντας τον σταθερό χρόνο διακοπή $\tau \equiv u$, βλέπουμε ότι $S_u \geq \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_u] = G_u$.

Θα δείξουμε τώρα, ότι η διαδικασία $(S_u)_{u \geq t}$ είναι supermartingale.

Αν η οικογένεια $\{\mathbb{E}[G_\tau|\mathcal{F}_t] : t \leq \tau < \infty\}$ είναι upwards directed, τότε υπάρχει μια ακολουθία χρόνων διακοπής $(\sigma_k)_{k \geq 0}$ με $t \leq \sigma_k < \infty$, τέτοια ώστε η ακολουθία $(\mathbb{E}[G_{\sigma_k}|\mathcal{F}_t])_{k \geq 0}$, να είναι αύξουσα (\mathbb{P} -σβ) και $S_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G_{\sigma_k}|\mathcal{F}_t]$.

Λόγω της υπόθεσης 4.1.2, οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbb{E}[G_{\sigma_k}|\mathcal{F}_t]$ είναι ολοκληρώσιμες για κάθε $k \geq 0$, ενώ μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να τις θεωρήσουμε και μη αρνητικές (αφαιρώντας τον πρώτο όρο της ακολουθίας). Επομένως, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, βλέπουμε ότι για $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G_{\sigma_k}|\mathcal{F}_t] \middle| \mathcal{F}_s\right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G_{\sigma_k}|\mathcal{F}_s] \leq S_s$$

όπου η τελευταία ανισότητα, ισχύει από τον ορισμό της S_s (βλέπε 4.1.4).

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\{\mathbb{E}[G_\tau|\mathcal{F}_t] : t \leq \tau < \infty\}$ είναι upwards directed. Πράγματι, έστω σ_1, σ_2 δύο χρόνοι διακοπής με $t \leq \sigma_1, \sigma_2 < \infty$. Ορίζουμε τον $\sigma_3 = \sigma_1 \mathbb{1}_A + \sigma_2 \mathbb{1}_{A^c}$, όπου $A = \{\mathbb{E}[G_{\sigma_1}|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[G_{\sigma_2}|\mathcal{F}_t]\} \in \mathcal{F}_t$. Εύκολα βλέπουμε ότι, $\mathbb{P}[t \leq \sigma_3 < \infty] = 1$, ενώ το ότι είναι χρόνος διακοπής, έπεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \{\sigma_3 \leq s\} &= (\{\sigma_3 \leq s\} \cap A) \cup (\{\sigma_3 \leq s\} \cap A^c) \\ &= (\{\sigma_1 \leq s\} \cap A) \cup (\{\sigma_2 \leq s\} \cap A^c) \end{aligned}$$

Προφανώς, ισχύει και ότι $G_{\sigma_3} = G_{\sigma_1 \mathbb{1}_A + \sigma_2 \mathbb{1}_{A^c}} = G_{\sigma_1} \mathbb{1}_A + G_{\sigma_2} \mathbb{1}_{A^c}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_{\sigma_3}|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[G_{\sigma_1} \mathbb{1}_A + G_{\sigma_2} \mathbb{1}_{A^c}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[G_{\sigma_1}|\mathcal{F}_t] \mathbb{1}_A + \mathbb{E}[G_{\sigma_2}|\mathcal{F}_t] \mathbb{1}_{A^c} \\ &= \mathbb{E}[G_{\sigma_1}|\mathcal{F}_t] \vee \mathbb{E}[G_{\sigma_2}|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Άρα, η διαδικασία $(S_u)_{u \geq t}$, είναι πράγματι supermartingale.

Με παρόμοια επιχειρήματα, μπορούμε να δείξουμε και ότι η διαδικασία $(S_u)_{u \geq t}$, λύνει (έμμεσα) το πρόβλημα 4.1.3. Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι:

$$\mathbb{E}[S_t] = \sup_{t \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[G_\tau] = V_t \tag{4.1.8}$$

Πράγματι, από τον ορισμό της S_t , βλέπουμε ότι:

$$S_t \geq \mathbb{E}[G_\tau|\mathcal{F}_t] \quad \text{για κάθε } t \leq \tau < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[S_t] \geq \sup_{t \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[G_\tau] = V_t$$

ενώ, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας δίνει ότι:

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G_{\sigma_k}|\mathcal{F}_t]\right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G_{\sigma_k}] \leq \sup_{t \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[G_\tau] = V_t$$

Θα δείξουμε τώρα ότι, η $(S_u)_{u \geq t}$ είναι δεξιά-συνεχής. Ειδικότερα, θα δείξουμε ότι έχει δεξιά-συνεχής εκδοχή. Αξιοποιώντας το κριτήριο 2.2.4, αρκεί να δείξουμε ότι, η απεικόνιση $[t, \infty) \ni u \mapsto \mathbb{E}[S_u]$ είναι δεξιά-συνεχής.

Πράγματι, έστω $u \geq t$ και έστω $(u_n)_{n \geq 0}$ μια ακολουθία χρόνων, τέτοια ώστε $u_n \downarrow u$. Το ζητούμενο είναι, να δείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_{u_n}] = \mathbb{E}[S_u]$. Από την supermartingale ιδιότητα της $(S_u)_{u \geq t}$, παίρνουμε ότι:

$$\mathbb{E}[S_u] \geq \dots \geq \mathbb{E}[S_{u_1}] \geq \mathbb{E}[S_{u_0}]$$

Άρα, το όριο $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_{u_n}]$ υπάρχει και είναι τέτοιο ώστε $L \leq \mathbb{E}[S_u]$.

Επομένως, αρκεί να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, $L \geq \mathbb{E}[S_u]$. Έστω ένα $\epsilon > 0$. Λόγω της σχέσης 4.1.8, υπάρχει κάποιος χρόνος διακοπής $u \leq \sigma < \infty$, τέτοιος ώστε:

$$\mathbb{E}[G_\sigma] > \mathbb{E}[S_u] - \epsilon \quad (4.1.9)$$

Έστω τώρα $\delta > 0$. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $u_n \in [u, u + \delta]$, για κάθε $n \geq 0$. Πράγματι, λόγω της $u_n \downarrow u$, θα ισχύει τελικά. Ορίζουμε, για κάθε $n \geq 0$, τους ακόλουθους χρόνους διακοπής:

$$\sigma_n = \sigma \mathbb{1}_{\{\sigma > u_n\}} + (u + \delta) \mathbb{1}_{\{\sigma \leq u_n\}}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, $\mathbb{P}[u_n \leq \sigma_n < \infty] = 1$, ενώ η απόδειξη του ότι είναι χρόνος διακοπής, είναι ανάλογη με αυτήν του σ_3 , που είδαμε πιο πάνω.

Οπότε, για κάθε $n \geq 0$, έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[G_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma > u_n\}}] + \mathbb{E}[G_{u+\delta} \mathbb{1}_{\{\sigma \leq u_n\}}] = \mathbb{E}[G_{\sigma_n}] \leq \mathbb{E}[S_{u_n}]$$

όπου η τελευταία ανισότητα, ισχύει λόγω της σχέσης 4.1.8.

Εύκολα βλέπουμε ότι, καθώς το $u_n \downarrow u$, οι ακολουθίες συνόλων $\{\sigma > u_n\} \uparrow \{\sigma > u\}$ και $\{\sigma \leq u_n\} \downarrow \{\sigma \leq u\} = \{\sigma = u\}$. Παίρνοντας όρια καθώς το $n \rightarrow \infty$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης¹ μας δίνει ότι, για κάθε $\delta > 0$:

$$\mathbb{E}[G_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma > u\}}] + \mathbb{E}[G_{u+\delta} \mathbb{1}_{\{\sigma = u\}}] \leq L$$

Έπειτα, παίρνοντας όριο καθώς το $\delta \downarrow 0$, χρησιμοποιώντας και πάλι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, καθώς και την δεξιά συνέχεια της G , οδηγούμαστε στη:

$$\mathbb{E}[G_\sigma] = \mathbb{E}[G_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma > u\}}] + \mathbb{E}[G_u \mathbb{1}_{\{\sigma = u\}}] \leq L$$

Οπότε, η σχέση 4.1.9 μας δίνει ότι $L > \mathbb{E}[S_u] - \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$. Παίρνοντας όριο καθώς το $\epsilon \downarrow 0$, καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα, $L \geq \mathbb{E}[S_u]$.

Άρα, η απεικόνιση $[t, \infty) \ni u \mapsto \mathbb{E}[S_u]$, είναι πράγματι δεξιά-συνεχής. Συνεπώς, η $(S_u)_{u \geq t}$ έχει δεξιά-συνεχής εκδοχή. Στο υπόλοιπο της εργασίας, θα λέμε ότι η S είναι δεξιά-συνεχής, εννοώντας τη δεξιά-συνεχής εκδοχή της.

¹Οι τυχαίες μεταβλητές $G_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma > u_n\}}$ και $G_{u+\delta} \mathbb{1}_{\{\sigma \leq u_n\}}$, κυριαρχούνται από την $\sup_{t \geq 0} |G_t|$, η οποία γνωρίζουμε από την υπόθεση 4.1.2 ότι είναι ολοκληρώσιμη.

Απομένει να δείξουμε ότι, η διαδικασία $(S_u)_{u \geq t}$, είναι το μικρότερο τέτοιο supermartingale. Έστω λοιπόν $(\hat{S}_u)_{u \geq t}$, ένα δεξιά-συνεχές supermartingale, που κυριαρχεί την $(G_u)_{u \geq t}$. Το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής, μας δίνει ότι:

$$\mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_u] \leq \mathbb{E}[\hat{S}_\tau | \mathcal{F}_u] \leq \hat{S}_u$$

για κάθε χρόνο διακοπής $u \leq \tau < \infty$.

Οπότε, παίρνοντας supremum στην πιο πάνω, βλέπουμε ότι $S_u \leq \hat{S}_u$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $u \geq t$. Η δεξιά-συνέχεια των S και \hat{S} , μας δίνει ότι, $S \leq \hat{S}$ (\mathbb{P} -σβ)².

Σχέση 4.1.6

Η σχέση 4.1.6, έπεται άμεσα από τον ορισμό της S_t (βλέπε σχέση 4.1.4). Πράγματι:

$$S_t = \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t]$$

για κάθε χρόνο διακοπής $t \leq \tau < \infty$.

Σχέση 4.1.7

Η απόδειξη της σχέσης 4.1.7, είναι πολύ πιο τεχνική. Θα δούμε όμως, ότι αρκεί να την αποδείξουμε, για μη αρνητική διαδικασία κέρδους.

Πράγματι, έστω ότι ισχύει η σχέση $S_t = \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t]$, όταν η διαδικασία κέρδους είναι μη αρνητική. Τότε, ορίζουμε τη τυχαία μεταβλητή $H = \inf_{t \geq 0} G_t$, η οποία είναι καλά ορισμένη, λόγω του ότι η G είναι κάτω φραγμένη. Επιπλέον, η συνθήκη 4.1.2, μας δίνει ότι η H είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως, ορίζεται και το Doob martingale της, έστω $M_t = \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_t]$. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι η διαδικασία $(M_t)_{t \geq 0}$ είναι δεξιά-συνεχής, καθώς η απεικόνιση $t \mapsto \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[H]$ είναι σταθερή (άρα και δεξιά-συνεχής).

Ορίζουμε τώρα, μια καινούργια "διαδικασία κέρδους" $\tilde{G} = (\tilde{G}_t)_{t \geq 0}$, όπου $\tilde{G}_t = G_t - M_t$. Προφανώς, η \tilde{G} είναι δεξιά-συνεχής, ως άθροισμα δύο δεξιά-συνεχών διαδικασιών. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι είναι και μη αρνητική. Πράγματι:

$$G_t \geq H \Rightarrow G_t = \mathbb{E}[G_t | \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_t] = M_t$$

Ανάλογα, ορίζουμε και τη διαδικασία $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$, όπου $\tilde{S}_t = \operatorname{ess\,sup}_{t \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[\tilde{G}_\tau | \mathcal{F}_t]$. Από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής³, παίρνουμε ότι:

$$\mathbb{E}[\tilde{G}_\tau | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t] - M_t$$

για κάθε χρόνο διακοπής $t \leq \tau < \infty$.

²Η απόδειξη του επιχειρήματος αυτού, είναι ανάλογη με του λήμματος 2.2.4.

³Εξ ορισμού του Doob martingale, μπορούμε να επικαλεστούμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής, για οποιοδήποτε χρόνο διακοπής.

Παίρνοντας supremum στην πιο πάνω σχέση, βλέπουμε ότι $\tilde{S}_t = S_t - M_t$. Η υπόθεση $\mathbb{P}[\tau_t < \infty] = 1$, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 4.1.7, για τη διαδικασία \tilde{S} . Οπότε, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_t = \mathbb{E}[\tilde{G}_{\tau_t} | \mathcal{F}_t] &\iff S_t - M_t = \mathbb{E}[G_{\tau_t} | \mathcal{F}_t] - M_t \\ &\iff S_t = \mathbb{E}[G_{\tau_t} | \mathcal{F}_t]\end{aligned}$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε τη σχέση 4.1.7, για μη αρνητική διαδικασία κέρδους. Οπότε, έστω ότι η διαδικασία κέρδους G είναι μη αρνητική. Εύκολα βλέπουμε ότι και η διαδικασία S είναι μη αρνητική.

Ορίζουμε, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$, τους ακόλουθους χρόνους διακοπής:

$$\tau_t^\lambda = \inf\{s \geq t : \lambda S_s \leq G_s\} \quad (4.1.10)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, η ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_t^\lambda)_{0 \leq \lambda \leq 1}$ είναι αύξουσα, καθώς και ότι $\tau_t^\lambda \leq \tau_t$, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$.

Από τη δεξιά-συνέχεια των διαδικασιών S και G , έπεται ότι:

$$\lambda S_{\tau_t^\lambda} \leq G_{\tau_t^\lambda} \quad (4.1.11)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \tau_{t+h}^\lambda = \tau_t^\lambda \quad (4.1.12)$$

Από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής ($\tau_t^\lambda \geq t$), παίρνουμε ότι:

$$S_t \geq \mathbb{E}[S_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_t]$$

Θέλουμε να δείξουμε και την αντίστροφη ανισότητα. Ορίζουμε τη διαδικασία $R = (R_t)_{t \geq 0}$, όπου $R_t = \mathbb{E}[S_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_t]$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι, $S_t \leq R_t$ (\mathbb{P} -σβ).

Εύκολα βλέπουμε ότι, η R είναι μη αρνητική. Επιπλέον, μπορούμε να δείξουμε ότι είναι και supermartingale. Πράγματι, για $0 \leq s \leq t$, έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[R_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[S_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_t] \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[S_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_s] \leq \mathbb{E}[S_{\tau_s^\lambda} | \mathcal{F}_s] = R_s$$

όπου, η ανισότητα ισχύει από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής, καθώς $\tau_t^\lambda \geq \tau_s^\lambda$.

Από την supermartingale ιδιότητα της R , έπεται ότι η ακολουθία $(\mathbb{E}[R_{t+h}])_{h \geq 0}$ είναι φθίνουσα και άνω φραγμένη από την $\mathbb{E}[R_t]$. Συνεπώς, το όριο της, καθώς το $h \downarrow 0$, υπάρχει και είναι τέτοιο ώστε $\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E}[R_{t+h}] \leq \mathbb{E}[R_t]$.

Από τη σχέση 4.1.12 και τη δεξιά-συνέχεια της S , παίρνουμε ότι $S_{\tau_t^\lambda} = \lim_{h \downarrow 0} S_{\tau_{t+h}^\lambda}$ ⁴. Οπότε, χρησιμοποιώντας το λήμμα Fatou (η S είναι μη αρνητική), έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[R_t] = \mathbb{E}[S_{\tau_t^\lambda}] = \mathbb{E}\left[\lim_{h \downarrow 0} S_{\tau_{t+h}^\lambda}\right] \leq \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E}[S_{\tau_{t+h}^\lambda}] = \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E}[R_{t+h}]$$

⁴Οι χρόνοι διακοπής τ_{t+h}^λ , φθίνουν προς τον τ_t^λ , καθώς το $h \downarrow 0$.

Άρα, καταλήγουμε στο ότι $\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E}[R_{t+h}] = \mathbb{E}[R_t]$, ή ισοδύναμα στο ότι η απεικόνιση $t \mapsto \mathbb{E}[R_t]$ είναι δεξιά-συνεχής. Συνεπώς, η διαδικασία R έχει δεξιά-συνεχής εκδοχή. Στο υπόλοιπο της απόδειξης, θεωρούμε ότι η R είναι δεξιά-συνεχής (εννοώντας τη δεξιά-συνεχή εκδοχή της).

Ορίζουμε τώρα, τη διαδικασία $L = (L_t)_{t \geq 0}$, όπου $L_t = \lambda S_t + (1 - \lambda)R_t$. Εύκολα βλέπουμε ότι η L , είναι δεξιά-συνεχής supermartingale. Θα δείξουμε πιο κάτω, ότι $L_t \geq G_t$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $t \geq 0$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
L_t &= \lambda S_t + (1 - \lambda)R_t \\
&= \lambda S_t + (1 - \lambda)R_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} + (1 - \lambda)R_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}} \\
&= \lambda S_t + (1 - \lambda)S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} + (1 - \lambda)R_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}} \\
&= \lambda S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} + \lambda S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}} + (1 - \lambda)S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} + (1 - \lambda)R_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}} \\
&= S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} + \lambda S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}} + \underbrace{(1 - \lambda)R_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}}}_{\geq 0} \\
&\geq S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} + \lambda S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}} \\
&\geq G_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} + G_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda > t\}} \\
&= G_t
\end{aligned}$$

όπου, η τρίτη ισότητα ισχύει λόγω της $R_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}} = S_t \mathbb{1}_{\{\tau_t^\lambda = t\}}$ και η τελευταία ανισότητα, από τον ορισμό του τ_t^λ (βλέπε σχέση 4.1.10).

Άρα, η διαδικασία $(L_t)_{t \geq 0}$, είναι δεξιά-συνεχής supermartingale που κυριαρχεί την G . Οπότε, από τον ισχυρισμό (iv), έπεται ότι $S_t \leq L_t$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, από τον ορισμό της L , παίρνουμε ότι:

$$S_t \leq L_t = \lambda S_t + (1 - \lambda)R_t \iff S_t \leq R_t = \mathbb{E}[S_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_t]$$

Επομένως, ισχύει η ισότητα $S_t = \mathbb{E}[S_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_t]$, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.1.11, έχουμε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$:

$$S_t = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[\lambda S_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_t] \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[G_{\tau_t^\lambda} | \mathcal{F}_t]$$

Έστω ότι, συμβολίζουμε με $\tau_t^1 = \lim_{\lambda \uparrow 1} \tau_t^\lambda$. Ο τ_t^1 είναι χρόνος διακοπής, ως το όριο αύξουσας ακολουθίας χρόνων διακοπής. Οπότε, από τη quasi-αριστερά-συνέχεια της G , έχουμε ότι $\lim_{\lambda \uparrow 1} G_{\tau_t^\lambda} = G_{\tau_t^1}$. Επομένως, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης⁵, μας δίνει ότι:

$$S_t \leq \mathbb{E}[G_{\tau_t^1} | \mathcal{F}_t]$$

Επιπλέον, εξ ορισμού της S_t , έχουμε ότι $S_t \geq \mathbb{E}[G_{\tau_t^1} | \mathcal{F}_t]$ (ο τ_t^1 είναι πεπερασμένος, λόγω της $\tau_t^\lambda \leq \tau_t$). Συνεπώς, καταλήγουμε στη ζητούμενη ισότητα, $S_t = \mathbb{E}[G_{\tau_t^1} | \mathcal{F}_t]$.

⁵Για κάθε $\lambda \in (0, 1)$, ισχύει ότι $|G_{\tau_t^\lambda}| \leq \sup_{t \geq 0} |G_t|$, όπου η δεύτερη είναι ολοκληρώσιμη, λόγω της υπόθεσης 4.1.2.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, δείχνοντας ότι $\tau_t^1 = \tau_t$. Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, ισχύει ότι $\tau_t^\lambda \leq \tau_t$, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$. Επομένως, στο όριο καθώς $\lambda \uparrow 1$, θα έχουμε ότι $\tau_t^1 \leq \tau_t$. Αν $\mathbb{P}[\tau_t^1 < \tau_t] > 0$, τότε έπεται ότι $\mathbb{P}[S_{\tau_t^1} > G_{\tau_t^1}] > 0$ και κατά συνέπεια:

$$S_t = \mathbb{E}[G_{\tau_t^1} | \mathcal{F}_t] < \mathbb{E}[S_{\tau_t^1} | \mathcal{F}_t]$$

Όμως, το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής μας δίνει ότι $\mathbb{E}[G_{\tau_t^1} | \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[S_{\tau_t^1} | \mathcal{F}_t]$. Άρα, πράγματι ισχύει ότι $\mathbb{P}[\tau_t^1 = \tau_t] = 1$.

Ισχυρισμός (ii)

Παίρνοντας μέσες τιμές στη σχέση 4.1.7, έχουμε ότι $\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[G_{\tau_t}]$. Το ζητούμενο έπεται από τη σχέση 4.1.8, που αποδείξαμε πιο πάνω.

Ισχυρισμός (iii)

Έστω τώρα, $t \leq \tau_* < \infty$, ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.1.3. Αν δείξουμε ότι, $S_{\tau_*} = G_{\tau_*}$ (\mathbb{P} -σβ), τότε εξ ορισμού του τ_t , θα έχουμε ότι $\tau_t \leq \tau_*$ (\mathbb{P} -σβ).

Επομένως, αρκεί να δείξουμε το πιο πάνω. Λόγω της $G_t \leq S_t$ (\mathbb{P} -σβ), για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $G_{\tau_*} \leq S_{\tau_*}$ (\mathbb{P} -σβ). Αν όμως, $\mathbb{P}[S_{\tau_*} > G_{\tau_*}] > 0$, τότε από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής ($\tau_* \geq t$), έπεται ότι:

$$\mathbb{E}[G_{\tau_*}] < \mathbb{E}[S_{\tau_*}] \leq \mathbb{E}[S_t] = V_t$$

το οποίο είναι άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι ο τ_* είναι βέλτιστος.

Ισχυρισμός (iv)

Εύκολα βλέπουμε ότι, η σταματημένη διαδικασία $(S_{u \wedge \tau_t})_{u \geq t}$ είναι δεξιά-συνεχής supermartingale. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι έχει σταθερή μέση τιμή (βλέπε πρόταση 2.2.6). Πράγματι, για $u \geq t$, έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[S_{u \wedge \tau_t} | \mathcal{F}_t] \leq S_t \Rightarrow \mathbb{E}[S_{u \wedge \tau_t}] \leq \mathbb{E}[S_t]$$

Επιπλέον, από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής ($\tau_t \geq u \wedge \tau_t$), παίρνουμε ότι:

$$\mathbb{E}[S_{u \wedge \tau_t}] \geq \mathbb{E}[S_{\tau_t}] = \mathbb{E}[G_{\tau_t}] = \mathbb{E}[S_t]$$

όπου, η πρώτη ισότητα έπεται από τη δεξιά-συνέχεια των G και S .

Άρα, η μέση της τιμή είναι σταθερή και ίση με $\mathbb{E}[S_{u \wedge \tau_t}] = \mathbb{E}[S_t]$, για κάθε $u \geq t$. Συνεπώς, η διαδικασία $(S_{u \wedge \tau_t})_{u \geq t}$ είναι martingale.

Τελεινταίος ισχυρισμός

Θυμίζουμε ότι, για να είναι ένας χρόνος διακοπής βέλτιστος, θα πρέπει να είναι πεπερασμένος (\mathbb{P} -σβ). Έστω ότι υπάρχει βέλτιστος χρόνος διακοπής, $t \leq \tau_* < \infty$.

Τότε, από τον ισχυρισμό (iii), έχουμε ότι $\tau_t \leq \tau_*$ (\mathbb{P} -σβ). Επομένως, ισχύει ότι $\mathbb{P}[\tau_* = \infty] > 0$, το οποίο είναι άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι ο τ_* είναι βέλτιστος. ■

Προτού προχωρήσουμε στην περίπτωση όπου το φαινόμενο είναι Μαρκοβιανό, θα σχολιάσουμε το πως τροποποιούνται τα πιο πάνω αποτελέσματα, στην περίπτωση όπου ο χρονικός ορίζοντας είναι πεπερασμένος ($T < \infty$).

Προφανώς, το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής 4.1.1, γράφεται πλέον ως:

$$V_0^T = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[G_\tau]$$

Πλέον, είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |G_t| \right] < \infty$$

η οποία είναι προφανώς ασθενέστερη της συνθήκης 4.1.2.

Όμοια, τα προβλήματα βέλτιστης διακοπής 4.1.3, οι τυχαίες μεταβλητές 4.1.4 και οι χρόνοι διακοπής 4.1.5, τροποποιούνται ως:

$$\begin{aligned} V_t^T &= \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[G_\tau] \\ S_t^T &= \text{ess sup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_t] \\ \tau_t^T &= \inf \{ t \leq s \leq T : S_s^T = G_s \} \end{aligned}$$

Η κύρια διαφορά με την περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα, είναι ότι όπως και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, έχουμε την τερματική συνθήκη, $S_T^T = G_T$ (\mathbb{P} -σβ) (βλέπε σχέση 3.1.4). Η συνθήκη αυτή, μας εξασφαλίζει ότι $\mathbb{P}[0 \leq \tau_t^T \leq T] = 1$ (και κατά συνέπεια ότι $\mathbb{P}[0 \leq \tau_t^T < \infty] = 1$), για κάθε $0 \leq t \leq T$. Άρα, μπορούμε να επικαλεστούμε τα αποτελέσματα του θεωρήματος 4.1.1 (κατάλληλα τροποποιημένα με βάση τους πιο πάνω συμβολισμούς), χωρίς κάποιο περιορισμό.

Σε αντίθεση με την περίπτωση του διακριτού χρόνου, δεν έχουμε κάποια αναδρομική σχέση, ανάλογη της 3.1.5, ώστε να μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα επαγωγικά. Η σχέση 4.1.6, μας δίνει ότι $S_t \geq \max\{G_t, \mathbb{E}[G_s | \mathcal{F}_t]\}$, για κάθε $t \leq s \leq T$. Όμως, η αντίστροφη ανισότητα δεν ισχύει κατ' ανάγκη.

4.2 Μαρκοβιανό πλαίσιο

Στην ενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου η υποκείμενη διαδικασία, είναι Μαρκοβιανή. Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν, θεωρώντας ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι πεπερασμένος. Στο τέλος, θα σχολιάσουμε και πως αυτά τροποποιούνται, όταν ο ορίζοντας είναι πεπερασμένος.

Ορίζουμε πρώτα, το σχετικό πλαίσιο. Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$, μια ισχυρή Μαρκοβιανή, RCQLC διαδικασία στον χώρο πιθανότητας με διήθηση $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x)$. Θεωρούμε ότι η διαδικασία παίρνει τιμές στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, ότι η διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ είναι δεξιά-συνεχής και ότι το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_x , είναι τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$.

Παρατήρηση 4.2.1. Η δεξιά-συνέχεια της διήθησης $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ και της διαδικασίας X , εξασφαλίζουν ότι οι χρόνοι εισόδου της X σε κλειστά σύνολα, είναι χρόνοι διακοπής.

Η διαδικασία κέρδους, δίνεται ως μια μετρήσιμη συνάρτηση της υποκείμενης διαδικασίας X , έστω $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι, η G ικανοποιεί τη συνήθη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας:

$$\mathbb{E}_x \left[\sup_{t \geq 0} |G(X_t)| \right] < \infty \quad (4.2.1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Οπότε, το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής που θα μας απασχολήσει στην παρούσα ενότητα, είναι το:

$$V(x) = \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \quad (4.2.2)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, η υπόθεση 4.2.1, μας εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα 4.2.2 είναι καλά ορισμένο, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Όπως και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου (βλέπε σχέσεις 3.2.4-3.2.6), ορίζουμε τα σύνολα συνέχειας και διακοπής:

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) > G(x)\} \quad (4.2.3)$$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) = G(x)\} \quad (4.2.4)$$

καθώς και τον χρόνο εισόδου της διαδικασίας στο \mathcal{D} :

$$\tau_{\mathcal{D}} = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{D}\} \quad (4.2.5)$$

Τα σύνολα \mathcal{C} και \mathcal{D} , είναι προφανώς συμπληρωματικά. Επιπλέον, αν οι συναρτήσεις V και G , είναι lsc και usc αντίστοιχα, τότε το σύνολο \mathcal{D} είναι κλειστό (και το \mathcal{C} ανοιχτό). Επομένως, από την παρατήρηση 4.2.1, ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι χρόνος διακοπής.

Επεκτείνουμε και την έννοια της superharmonic συνάρτησης (βλέπε ορισμό 3.2.2), στο πλαίσιο του συνεχή χρόνου.

Ορισμός 4.2.1 (Superharmonic συνάρτηση). Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, λέγεται **superharmonic** (ως προς τη X), αν:

$$\mathbb{E}_x[f(X_\sigma)] \leq f(x)$$

για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \sigma < \infty$ και $x \in \mathbb{R}^d$.

Στον πάνω ορισμό, υπονοείται ότι αν f μια superharmonic συνάρτηση, τότε οι τυχαίες μεταβλητές $f(X_\sigma)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς \mathbb{P}_x , για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και χρόνο διακοπής $0 \leq \sigma < \infty$.

Αποδεικνύεται ότι, ισχύει ένα ανάλογο αποτέλεσμα με την πρόταση 3.2.1, και στην περίπτωση του συνεχή χρόνου. Η πιο κάτω πρόταση, μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια διαδικασία supermartingale, από μια superharmonic συνάρτηση.

Πρόταση 4.2.1. Αν $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μια lsc, superharmonic συνάρτηση, τότε η διαδικασία $(f(X_t))_{t \geq 0}$ είναι δεξιά-συνεχής \mathbb{P}_x -supermartingale, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη της πιο πάνω, βλέπε [10], σελίδα 39-40. ■

Είμαστε πλέον σε θέση, να αποδείξουμε κάποιες αναγκαίες συνθήκες για το πρόβλημα 4.2.2. Στο πιο κάτω θεώρημα, βλέπουμε πως όταν το πρόβλημα 4.2.2 έχει λύση, τότε ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα με τα θεωρήματα 3.2.1 και 3.2.2.

Θεώρημα 4.2.1 (Μαρκοβιανό πλαίσιο - Αναγκαία συνθήκη). Έστω ότι ισχύει η υπόθεση 4.2.1. Αν υπάρχει βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.2.2, τότε:

(i) Η συνάρτηση αξίας V , είναι η μικρότερη superharmonic συνάρτηση, που κυριαρχεί την G , στον \mathbb{R}^d

Αν επιπλέον, οι V και G είναι lsc και usc αντίστοιχα, τότε για δεδομένο $x \in \mathbb{R}^d$:

(ii) Ο τ_D είναι βέλτιστος για το πρόβλημα 4.2.2

(iii) Αν τ_* ένας άληθος βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.2.2, τότε $\tau_D \leq \tau_*$ (\mathbb{P}_x -σβ)

(iv) Η σταματημένη διαδικασία $(V(X_{t \wedge \tau_D}))_{t \geq 0}$ είναι δεξιά-συνεχής \mathbb{P}_x -martingale

Απόδειξη. Έστω ότι, υπάρχει κάποιος χρόνος διακοπής τ_* , ο οποίος είναι βέλτιστος για το πρόβλημα 4.2.2. Ισοδύναμα, είναι τέτοιος ώστε $V(x) = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_*})]$ και $\mathbb{P}_x[0 \leq \tau_* < \infty] = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Ισχυρισμός (i)

Έστω $0 \leq \sigma < \infty$, ένας χρόνος διακοπής. Τότε, η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα της X , μας δίνει ότι η V είναι superharmonic. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[V(X_\sigma)] &= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_{X_\sigma}[G(X_{\tau_*})] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_*}) \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] \right] \\ &= \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma + \tau_* \circ \theta_\sigma})] \\ &\leq V(x) \end{aligned}$$

Αν $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, μια άλλη superharmonic συνάρτηση που κυριαρχεί την G , τότε:

$$\mathbb{E}_x[G(X_\sigma)] \leq \mathbb{E}_x[f(X_\sigma)] \leq f(x)$$

για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \sigma < \infty$.

Παίρνοντας supremum στην πιο πάνω, έπεται το ζητούμενο:

$$V(x) = \sup_{0 \leq \sigma < \infty} \mathbb{E}_x[G(X_\sigma)] \leq f(x)$$

Ισχυρισμός (iii)

Έστω, $0 \leq \tau_* < \infty$, ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.2.2. Αν δείξουμε ότι $V(X_{\tau_*}) = G(X_{\tau_*})$ (\mathbb{P}_x -σβ), τότε εξ ορισμού του $\tau_{\mathcal{D}}$, θα έχουμε το ζητούμενο.

Λόγω της $G(X_t) \leq V(X_t)$ (\mathbb{P}_x -σβ), για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $G(X_{\tau_*}) \leq V(X_{\tau_*})$ (\mathbb{P}_x -σβ). Αν όμως, $\mathbb{P}_x[V(X_{\tau_*}) > G(X_{\tau_*})] > 0$, τότε από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής, έπεται ότι:

$$\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_*})] < \mathbb{E}_x[V(X_{\tau_*})] \leq \mathbb{E}_x[V(X_0)] = V(x)$$

το οποίο είναι άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι ο τ_* είναι βέλτιστος.

Ισχυρισμός (ii)

Θα δείξουμε πρώτα ότι, η $(V(X_t))_{t \geq 0}$ είναι \mathbb{P}_x -supermartingale. Δείξαμε πιο πάνω ότι, η V είναι superharmonic και υποθέσαμε ότι είναι και lsc. Οπότε, η πρόταση 4.2.1 μας δίνει ότι η $(V(X_t))_{t \geq 0}$, είναι δεξιά-συνεχής \mathbb{P}_x -supermartingale.

Άρα, το θεώρημα βέλτιστης διακοπής ($\tau_{\mathcal{D}} \leq \tau_*$), μας δίνει το ζητούμενο:

$$V(x) = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_*})] = \mathbb{E}_x[V(X_{\tau_*})] \leq \mathbb{E}_x[V(X_{\tau_{\mathcal{D}}})] = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{\mathcal{D}}})] \leq V(x)$$

όπου η τελευταία ισότητα, ισχύει καθώς $X_{\tau_{\mathcal{D}}} \in \mathcal{D}$ (λόγω της δεξιά-συνέχειας της X).

Ισχυρισμός (iv)

Στον προηγούμενο ισχυρισμό, δείξαμε ότι η διαδικασία $(V(X_t))_{t \geq 0}$ είναι δεξιά-συνεχής \mathbb{P}_x -supermartingale. Επομένως, η σταματημένη διαδικασία $(V(X_{t \wedge \tau_{\mathcal{D}}}))_{t \geq 0}$ είναι και αυτή δεξιά-συνεχής \mathbb{P}_x -supermartingale. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι η μέση τιμή της είναι σταθερή. Πράγματι, για $t \geq 0$, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[V(X_{t \wedge \tau_{\mathcal{D}}})] &= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_{X_{t \wedge \tau_{\mathcal{D}}}} [G(X_{\tau_{\mathcal{D}}})] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_x [G(X_{\tau_{\mathcal{D}}}) \circ \theta_{t \wedge \tau_{\mathcal{D}}} | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_{\mathcal{D}}}] \right] \\ &= \mathbb{E}_x [G(X_{t \wedge \tau_{\mathcal{D}} + \tau_{\mathcal{D}} \circ \theta_{t \wedge \tau_{\mathcal{D}}})}] \\ &= \mathbb{E}_x [G(X_{\tau_{\mathcal{D}}})] \\ &= V(x) \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα, ισχύει λόγω της $\tau_{\mathcal{D}} \geq t \wedge \tau_{\mathcal{D}}$. ■

Θα αποδείξουμε και μια ικανή συνθήκη, για την ύπαρξη κάποιου βέλτιστου χρόνου διακοπής στο πρόβλημα 4.2.2. Στο πιο κάτω θεώρημα βλέπουμε ότι, για να έχει λύση το πρόβλημα 4.2.2, αρκεί να υπάρχει η ελάχιστη superharmonic συνάρτηση, που κυριαρχεί την G (least superharmonic majorant).

Θεώρημα 4.2.2 (Μαρκοβιανό πλαίσιο - Ικανή συνθήκη). Έστω ότι ισχύει η υπόθεση 4.2.1. Επιπλέον, έστω ότι υπάρχει η μικρότερη superharmonic συνάρτηση \hat{V} , που κυριαρχεί την G στον \mathbb{R}^d και ότι οι \hat{V} και G είναι lsc και usc, αντίστοιχα. Τότε:

(i) Αν $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $\hat{V} = V$ και ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι βέλτιστος για το πρόβλημα 4.2.2

(ii) Αν $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] < 1$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε δεν υπάρχει βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.2.2

Απόδειξη. Έστω $\hat{V} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, η μικρότερη superharmonic συνάρτηση που κυριαρχεί την G , στον \mathbb{R}^d .

Ισχυρισμός (i)

Από την υπόθεση, έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \leq \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_\tau)] \leq \hat{V}(x)$$

για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \tau < \infty$.

Παίρνοντας supremum στην πιο πάνω, καταλήγουμε στη σχέση:

$$V(x) = \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \leq \hat{V}(x)$$

Απομένει να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, καθώς και ότι ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι βέλτιστος. Θα το αποδείξουμε πρώτα, για την περίπτωση όπου η G είναι κάτω φραγμένη.

Έστω λοιπόν ότι, η G είναι κάτω φραγμένη. Ορίζουμε τη σταθερά $c = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} G(x)$. Από κατασκευή, ισχύει ότι $c > -\infty$. Επιπλέον, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι η G είναι μη αρνητική. Πράγματι, αν $c < 0$ (αν $c \geq 0$ τότε είναι ήδη μη αρνητική) τότε θεωρούμε ως G και \hat{V} , τις $G - c \geq 0$ και $\hat{V} - c$ αντίστοιχα⁶.

Έστω μια σταθερά $\lambda \in (0, 1)$, με βάση την οποία ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα:

$$\mathcal{C}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : \lambda \hat{V}(x) > G(x)\}$$

$$\mathcal{D}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : \lambda \hat{V}(x) \leq G(x)\}$$

Τα σύνολα \mathcal{C}_λ και \mathcal{D}_λ , είναι ανοιχτό και κλειστό αντίστοιχα, λόγω του ότι οι \hat{V} και G είναι lsc και usc, αντίστοιχα. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι, καθώς το $\lambda \uparrow 1$, έχουμε ότι $\mathcal{C}_\lambda \uparrow \mathcal{C}$ και $\mathcal{D}_\lambda \downarrow \mathcal{D}$, όπου τα σύνολα \mathcal{C} και \mathcal{D} , ορίζονται όπως και στις σχέσεις 4.2.3-4.2.4, χρησιμοποιώντας τη \hat{V} στη θέση της V .

Θεωρούμε τώρα, τον χρόνο εισόδου της X στο \mathcal{D}_λ :

$$\tau_{\mathcal{D}_\lambda} = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{D}_\lambda\}$$

Ο $\tau_{\mathcal{D}_\lambda}$ είναι χρόνος διακοπής, καθώς το σύνολο \mathcal{D}_λ είναι κλειστό. Επιπλέον, από τις σχέσεις $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_\lambda$ και $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] = 1$, παίρνουμε ότι $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}_\lambda} < \infty] = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda \in (0, 1)$.

⁶Εύκολα βλέπουμε ότι, η $\hat{V} - c$ είναι η ελάχιστη superharmonic συνάρτηση, που κυριαρχεί τη $G - c$ στον \mathbb{R}^d .

Θα δείξουμε ότι, $\hat{V}(x) = \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}]$. Λόγω του ότι η \hat{V} είναι superharmonic, έχουμε άμεσα ότι $\mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \leq \hat{V}(x)$. Οπότε, απομένει να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα. Θα αποδείξουμε πρώτα, την πιο κάτω ανισότητα:

$$G(x) \leq \lambda \hat{V}(x) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \quad (4.2.6)$$

Πράγματι, αν $x \in \mathcal{C}_\lambda$, τότε $\lambda \hat{V}(x) > G(x)$. Οπότε, λόγω του ότι η \hat{V} είναι μη αρνητική ($\hat{V} \geq G \geq 0$), έχουμε ότι:

$$G(x) < \lambda \hat{V}(x) \leq \lambda \hat{V}(x) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}]$$

Αν τώρα $x \in \mathcal{D}_\lambda$, τότε $\tau_{\mathcal{D}_\lambda} \equiv 0$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lambda \hat{V}(x) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] = \lambda \hat{V}(x) + (1 - \lambda) \hat{V}(x) = \hat{V}(x) \geq G(x)$$

Θα χρειαζόμαστε επιπλέον ότι, η απεικόνιση $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}]$ είναι superharmonic. Πράγματι, έστω $0 \leq \sigma < \infty$ ένας χρόνος διακοπής. Τότε:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_{X_\sigma}[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \right] &= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})} \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] \right] \\ &= \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\sigma + \tau_{\mathcal{D}_\lambda} \circ \theta_\sigma})] \\ &\leq \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα, ισχύει από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής ($\tau_{\mathcal{D}_\lambda} \leq \sigma + \tau_{\mathcal{D}_\lambda} \circ \theta_\sigma$).

Στο πιο πάνω επιχείρημα, ισχυριζόμαστε ότι η διαδικασία $(\hat{V}(X_t))_{t \geq 0}$ είναι μη αρνητικό, δεξιά-συνεχές \mathbb{P}_x -supermartingale. Πράγματι, το γεγονός αυτό, έπεται από το ότι η \hat{V} είναι superharmonic και lsc (βλέπε πρόταση 4.2.1).

Οπότε, η απεικόνιση $\mathbb{R}^d \mapsto \lambda \hat{V}(x) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}]$ θα είναι και αυτή superharmonic (ως κυρτός συνδυασμός superharmonic συναρτήσεων). Επιπλέον, κυριαρχεί και την G στον \mathbb{R}^d , λόγω της σχέσης 4.2.6 που αποδείξαμε πιο πάνω.

Άρα, λόγω του ότι η \hat{V} είναι η μικρότερη τέτοια συνάρτηση, παίρνουμε ότι:

$$\hat{V}(x) \leq \lambda \hat{V}(x) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \iff \hat{V}(x) \leq \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}]$$

Επομένως, έχουμε ότι ισχύει η ισότητα $\hat{V}(x) = \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}]$.

Λόγω της δεξιά-συνέχειας της X , ισχύει ότι $X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda}} \in \mathcal{D}_\lambda$. Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\lambda \hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda}}) \leq G(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda}}) \quad (4.2.7)$$

Η πιο πάνω σχέση, μας δίνει ότι:

$$\hat{V}(x) = \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \leq \frac{1}{\lambda} V(x) \quad (4.2.8)$$

Παίρνοντας όριο στην πιο πάνω, καθώς το $\lambda \uparrow 1$, καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα $\hat{V}(x) \leq V(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Οπότε, πράγματι ισχύει ότι $\hat{V} = V$.

Απομένει να δείξουμε ότι, ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι βέλτιστος για το πρόβλημα 4.2.2. Ισοδύναμα, πρέπει να δείξουμε ότι $V(x) = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{\mathcal{D}}})]$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ (εξ υποθέσεως, έχουμε ότι $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$).

Από την ανισότητα 4.2.8, παίρνουμε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$:

$$V(x) = \hat{V}(x) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \quad (4.2.9)$$

Λόγω του ορίου $\mathcal{D}_\lambda \uparrow \mathcal{D}$, έχουμε ότι οι χρόνοι διακοπής $\tau_{\mathcal{D}_\lambda} \leq \tau_{\mathcal{D}}$, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ καθώς και ότι είναι αύξουσα ως ακολουθία της παραμέτρου λ . Επιπλέον, συγκλίνουν σε κάποιον χρόνο διακοπής $\tau_{\mathcal{D}_1} = \lim_{\lambda \uparrow 1} \tau_{\mathcal{D}_\lambda}$ (ως άνω φραγμένη, αύξουσα ακολουθία χρόνων διακοπής), τέτοιον ώστε $\tau_{\mathcal{D}_1} \leq \tau_{\mathcal{D}}$.

Παίρνοντας όριο καθώς το $\lambda \uparrow 1$, στη σχέση 4.2.7 και χρησιμοποιώντας ότι η X είναι quasi-αριστερά-συνεχής καθώς και ότι οι V και G είναι lsc και usc αντίστοιχα, καταλήγουμε στη σχέση $V(X_{\tau_{\mathcal{D}_1}}) \leq G(X_{\tau_{\mathcal{D}_1}})$. Η αντίστροφη ανισότητα, έπεται από το ότι η V κυριαρχεί την G . Επομένως, έχουμε ότι την ισότητα $V(X_{\tau_{\mathcal{D}_1}}) = G(X_{\tau_{\mathcal{D}_1}})$. Οπότε, από τον ορισμό του $\tau_{\mathcal{D}}$, έχουμε ότι $\tau_{\mathcal{D}} \leq \tau_{\mathcal{D}_1}$ και κατά συνέπεια ότι $\tau_{\mathcal{D}_1} = \tau_{\mathcal{D}}$.

Παίρνοντας $\limsup_{\lambda \uparrow 1}$ στη σχέση 4.2.9 και χρησιμοποιώντας το αντίστροφο λήμμα Fatou⁷, οδηγούμαστε στη:

$$V(x) \leq \limsup_{\lambda \uparrow 1} \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})}] \leq \mathbb{E}_x \left[\limsup_{\lambda \uparrow 1} G(X_{\tau_{\mathcal{D}_\lambda})} \right] \leq \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{\mathcal{D}}})] \leq V(x)$$

Άρα, ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι πράγματι βέλτιστος, όταν η G είναι κάτω φραγμένη. Στην περίπτωση όπου, η G δεν είναι κάτω φραγμένη, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \mathbb{E}_x \left[\inf_{t \geq 0} G(X_t) \right]$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, $h \leq G$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$:

$$h(x) = \mathbb{E}_x \left[\inf_{t \geq 0} G(X_t) \right] \leq \mathbb{E}_x[G(x)] = G(x)$$

Άρα, η $G - h$ είναι μη αρνητική και προφανώς κάτω φραγμένη (από το 0). Επομένως, ισχύει και ότι $\hat{V} - h \geq G - h$. Για να δείξουμε ότι, η $\hat{V} - h$ είναι superharmonic, αρκεί να δείξουμε ότι η $-h$ είναι. Πράγματι, αν $0 \leq \sigma < \infty$, τότε:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[-h(X_\sigma)] &= \mathbb{E}_x \left[- \mathbb{E}_{X_\sigma} \left[\inf_{t \geq 0} G(X_t) \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[- \mathbb{E}_x \left[\inf_{t \geq 0} G(X_t) \circ \theta_\sigma \middle| \mathcal{F}_\sigma \right] \right] \end{aligned}$$

⁷Η G είναι μη αρνητική και φράσσεται από την ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή $\sup_{t \geq 0} |G_t|$.

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x \left[- \inf_{t \geq 0} G(X_{t+\sigma}) \right] \\
&\leq \mathbb{E}_x \left[- \inf_{t \geq 0} G(X_t) \right] \\
&\leq -h(x)
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ανισότητα, ισχύει λόγω του ότι το infimum του υπερσυνόλου, είναι μικρότερο ή ίσο (μεγαλύτερο ή ίσο με το μείον) από το infimum του υποσυνόλου.

Άρα, η $\hat{V} - h$ είναι πράγματι superharmonic. Η απόδειξη ολοκληρώνεται, εφαρμόζοντας τα ίδια επιχειρήματα με την περίπτωση της κάτω φραγμένης G , χρησιμοποιώντας όμως τις συναρτήσεις $\hat{V} - h$ και $G - h$, στη θέση των \hat{V} και G αντίστοιχα.

Ισχυρισμός (ii)

Έστω $0 \leq \tau_* < \infty$, ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα 4.2.2. Από τον ισχυρισμό (ii) της αναγκαίας συνθήκης (βλέπε θεώρημα 4.2.1), παίρνουμε ότι $\tau_{\mathcal{D}} \leq \tau_*$ (\mathbb{P}_x -σβ), για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Οπότε, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] < 1$, τότε ισχύει και ότι $\mathbb{P}_x[\tau_* < \infty] < 1$. Όμως, αυτό είναι άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι ο τ_* είναι βέλτιστος (άρα και πεπερασμένος \mathbb{P}_x -σβ). ■

Το πιο πάνω θεώρημα, μας επιτρέπει να εντοπίσουμε τη συνάρτηση αξίας V , υπολογίζοντας την ελάχιστη superharmonic συνάρτηση, που κυριαρχεί την G . Στο ερχόμενο κεφάλαιο, θα δούμε ότι, ο εν λόγω υπολογισμός μπορεί να γίνει μέσω ενός προβλήματος διαφορικών εξισώσεων (υποθέτοντας κατάλληλα ομαλότητα στη V).

Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι, η V είναι lsc, τότε η πιο πάνω ικανή συνθήκη, μας δίνει ένα κριτήριο για την ύπαρξη βέλτιστου χρόνου. Διατυπώνουμε το εν λόγω κριτήριο, στην πιο κάτω πρόταση.

Πρόταση 4.2.2. Έστω ότι ισχύει η συνθήκη 4.2.1. Έστω επιπλέον ότι, οι V και G είναι lsc και usc, αντίστοιχα. Τότε:

- (i) Αν $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, τότε ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι βέλτιστος για το πρόβλημα 4.2.2
- (ii) Αν $\mathbb{P}_x[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] < 1$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^d$, τότε δεν υπάρχει βέλτιστο χρόνο διακοπής για το πρόβλημα 4.2.2

Απόδειξη. Αν δείξουμε ότι, η V είναι superharmonic, τότε εύκολα βλέπουμε ότι είναι και η μικρότερη τέτοια συνάρτηση, που κυριαρχεί την G . Πράγματι, αν $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μια άλλη superharmonic συνάρτηση, που κυριαρχεί την G , τότε για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \tau < \infty$:

$$\mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \leq \mathbb{E}_x[f(X_\tau)] \leq f(x)$$

Παίρνοντας supremum στην πιο πάνω, βλέπουμε ότι:

$$V(x) = \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \leq f(x)$$

Άρα, η συνάρτηση αξίας V είναι η ζητούμενη συνάρτηση \hat{V} , της ικανής συνθήκης. Επομένως, οι δυο ισχυρισμοί είναι συνέπεια του θεωρήματος 4.2.2.

Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι η V είναι superharmonic. Έστω $0 \leq \tau, \sigma < \infty$, δυο χρόνοι διακοπής. Από την ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα, παίρνουμε ότι:

$$\mathbb{E}_{X_\sigma}[G(X_\tau)] = \mathbb{E}_x[G(X_\tau) \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau \circ \theta_\sigma}) | \mathcal{F}_\sigma]$$

Η V ως lsc, είναι και μετρήσιμη. Συνεπώς, η απεικόνιση $\sigma \mapsto V(X_\sigma) = \text{ess sup}_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau \circ \theta_\sigma}) | \mathcal{F}_\sigma]$, όπου $0 \leq \sigma < \infty$, είναι και αυτή μετρήσιμη.

Θα δείξουμε ότι, η οικογένεια $\{\mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau \circ \theta_\sigma}) | \mathcal{F}_\sigma] : \tau \in \mathcal{T}_0\}$ είναι upwards directed. Πράγματι, έστω $0 \leq \tau_1, \tau_2 < \infty$. Ορίζουμε τους χρόνους διακοπής $\rho_1 = \sigma + \tau_1 \circ \theta_\sigma$ και $\rho_2 = \sigma + \tau_2 \circ \theta_\sigma$, καθώς και το σύνολο:

$$\begin{aligned} B &= \{\mathbb{E}_x[G(X_{\rho_1}) | \mathcal{F}_\sigma] \geq \mathbb{E}_x[G(X_{\rho_2}) | \mathcal{F}_\sigma]\} \\ &= \{\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_1}) \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] \geq \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_2}) \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma]\} \\ &= \{\mathbb{E}_{X_\sigma}[G(X_{\tau_1})] \geq \mathbb{E}_{X_\sigma}[G(X_{\tau_2})]\} \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, $B \in \mathcal{F}_\sigma$. Ορίζουμε τώρα, τον $\rho = \rho_1 \mathbb{1}_B + \rho_2 \mathbb{1}_{B^c}$. Το γεγονός ότι ο ρ , είναι χρόνος διακοπής, έπεται από την πιο κάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \{\rho \leq t\} &= (\{\rho \leq t\} \cap B) \cup (\{\rho \leq t\} \cap B^c) \\ &= (\{\rho_1 \leq t\} \cap B \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (\{\rho_2 \leq t\} \cap B^c \cap \{\sigma \leq t\}) \end{aligned}$$

όπου τα σύνολα $B, B^c \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_t$, εφόσον βρισκόμαστε στο σύνολο $\{\sigma \leq t\}$.

Απομένει να δείξουμε ότι, ο ρ μπορεί να γραφτεί ως $\rho = \sigma + \tau \circ \theta_\sigma$, για κάποιον χρόνο διακοπής $0 \leq \tau < \infty$. Έστω το σύνολο $A = \{\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_1})] \geq \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_2})]\} \in \mathcal{F}_0$. Εύκολα βλέπουμε ότι, $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \circ \theta_\sigma$. Άρα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \rho &= (\sigma + \tau_1 \circ \theta_\sigma) \mathbb{1}_B + (\sigma + \tau_2 \circ \theta_\sigma) \mathbb{1}_{B^c} \\ &= \sigma + (\tau_1 \mathbb{1}_A + \tau_2 \mathbb{1}_{A^c}) \circ \theta_\sigma \end{aligned}$$

Η απόδειξη του ότι ο $\tau_1 \mathbb{1}_A + \tau_2 \mathbb{1}_{A^c}$ είναι χρόνος διακοπής, είναι όμοια με του ρ . Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι, είναι πεπερασμένος (\mathbb{P}_x -σβ).

Οπότε, χρησιμοποιώντας τον ρ , δείχνουμε το ζητούμενο:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[G(X_\rho) | \mathcal{F}_\sigma] &= \mathbb{E}_x[G(X_{\rho_1}) \mathbb{1}_B + G(X_{\rho_2}) \mathbb{1}_{B^c} | \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbb{E}_x[G(X_{\rho_1}) | \mathcal{F}_\sigma] \mathbb{1}_B + \mathbb{E}_x[G(X_{\rho_2}) | \mathcal{F}_\sigma] \mathbb{1}_{B^c} \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_x[G(X_{\rho_1})|\mathcal{F}_\sigma] \vee \mathbb{E}_x[G(X_{\rho_2})|\mathcal{F}_\sigma]$$

Άρα, η οικογένεια $\{\mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma] : \tau \in \mathcal{T}_0\}$ είναι πράγματι upwards directed. Επομένως, υπάρχει ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_n)_{n \geq 0}$, με $0 \leq \tau_n < \infty$, τέτοια ώστε η ακολουθία $(\mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau_n\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma])_{n \geq 0}$, να είναι αύξουσα και:

$$V(X_\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau_n\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma]$$

Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μας δίνει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[V(X_\sigma)] &= \mathbb{E}_x \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau_n\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma] \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau_n\circ\theta_\sigma})] \\ &\leq V(x) \end{aligned}$$

Άρα, η V είναι πράγματι superharmonic. ■

Οι υποθέσεις ημισυνέχειας των V και G , φαίνεται να περιορίζουν τη γενικότητα των πιο πάνω αποτελεσμάτων. Όμως, θα δούμε και στο πρακτικό μέρος της εργασίας, ότι οι υποθέσεις αυτές είναι φυσιολογικές. Επίσης, για να δείξουμε ότι η V είναι lsc, αρκεί να δείξουμε ότι, η απεικόνιση $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{E}_x[G(X_\tau)]$ είναι lsc, για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \tau < \infty$ (το supremum lsc συναρτήσεων, είναι lsc).

Παρατήρηση 4.2.2. *Αποδεικνύεται ότι, αν η X είναι διαδικασία Feller και η G συνεχής συνάρτηση, τότε η V είναι lsc.*

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό, σχολιάζοντας το πως τροποποιούνται τα πιο πάνω αποτελέσματα, στην περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα ($T < \infty$). Η κύρια διαφοροποίηση είναι ότι, πλέον μας ενδιαφέρει άμεσα και η χρονική στιγμή από την οποία ξεκινάμε (ισοδύναμα, ο χρόνος που απομένει μέχρι την ωρίμανση). Συνεπώς, όταν μελετούμε την περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε ως υποκείμενη διαδικασία τη $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$, όπου $Z_t = (t, X_t)$.

Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε, γιατί χρειάζεται η πιο πάνω τροποποίηση. Έστω ότι έχουμε διανύσει μια τροχιά \mathcal{F}_t , μέχρι κάποια ενδιάμεση χρονική στιγμή $t \in (0, T)$. Η Μαρκοβιανή δομή της X , μας επιτρέπει να επικεντρωθούμε μόνο στη παρούσα θέση της διαδικασίας, X_t , αγνοώντας το υπόλοιπο της τροχιάς. Όμως, το γεγονός ότι έχουμε ήδη διανύσει χρόνο t , επηρεάζει άμεσα το σύνολο των δυνατών χρόνων διακοπής, με τους οποίους μπορούμε να συνεχίσουμε. Αυτό οφείλεται στο ότι, οι υπό εξέταση χρόνοι διακοπής τ , πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη $\tau \leq T - t$ ⁸, διότι (εξ ορισμού) η διαδικασία τερματίζει τη χρονική στιγμή T . Επομένως, πρέπει να προσθέσουμε και τη χρονική μεταβλητή, στην υποκείμενη διαδικασία του προβλήματος, καταλήγοντας έτσι στη διαδικασία Z που δώσαμε πιο πάνω.

⁸Στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα, η συνθήκη αυτή, παίρνει τη μορφή $\tau < \infty$. Αυτό μας επιτρέπει να μελετήσουμε το πρόβλημα, "επανεκκινώντας" το. Δηλαδή, θεωρώντας ξανά το ίδιο πρόβλημα, αλλάζοντας μόνο την αρχική θέση της διαδικασίας. Οπότε, στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα, το πρόβλημα είναι χρονικά ομογενές.

Συνεπώς, το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής 4.2.2, έχει πλέον τη μορφή:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}_{t,x}[G(t + \tau, X_{t+\tau})] = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}_{t,x}[G(Z_{t+\tau})] \quad (4.2.10)$$

για κάθε αρχική κατάσταση $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. Με $\mathbb{E}_{t,x}$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}_{t,x}$, το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\mathbb{P}_{t,x}[X_t = x] = 1$.

Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας 4.2.1, γράφεται πλέον ως:

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\sup_{0 \leq s \leq T-t} |G(t + s, X_{t+s})| \right] < \infty \quad (4.2.11)$$

για κάθε $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Ομοίως, τροποποιούμε και το σύνολο συνέχειας 4.2.3, το σύνολο διακοπής 4.2.4 και τον χρόνο εισόδου 4.2.5:

$$\mathcal{C} = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d : V(t, x) = G(t, x)\} \quad (4.2.12)$$

$$\mathcal{D} = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d : V(t, x) > G(t, x)\} \quad (4.2.13)$$

$$\tau_{\mathcal{D}} = \inf\{0 \leq s \leq T - t : Z_{t+s} \in \mathcal{D}\} \quad (4.2.14)$$

Τα αποτελέσματα της αναγκαίας συνθήκης 4.2.1, της ικανής συνθήκης 4.2.2, καθώς και του πορίσματος 4.2.2, εξακολουθούν να ισχύουν και σε αυτό το πλαίσιο, με κατάλληλες όμως τροποποιήσεις, βάσει των πιο πάνω συμβολισμών.

Εύκολα βλέπουμε ότι, λόγω του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα, το πρόβλημα 4.2.10 ικανοποιεί την τελική συνθήκη $V(T, x) = G(T, x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ (βλέπε σχέση 3.2.7). Επομένως, έχουμε ότι $\{(T, x) : x \in \mathbb{R}^d\} \subseteq \mathcal{D}$. Άρα, ο χρόνος διακοπής $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι φραγμένος από T , για κάθε αρχική κατάσταση $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Οπότε, στην περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα, η συνθήκη $\mathbb{P}_{t,x}[\tau_{\mathcal{D}} < \infty] = 1$, ικανοποιείται εξ ορισμού. Συνεπώς, για να συμπεράνουμε την ύπαρξη του βέλτιστου χρόνου διακοπής, αρκεί να ελέγξουμε τις υποθέσεις ημισυνέχειας των V και G (και να επικαλεστούμε την πρόταση 4.2.2).

5

Πρόβλημα Ελεύθερου Συνόρου

Στο κεφάλαιο αυτό, θα δούμε πως τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, μας υποδεικνύουν ότι, μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τη ζητούμενη συνάρτηση αξίας, μέσω ενός προβλήματος ελεύθερου συνόρου. Θα σχολιάσουμε την αναγωγή αυτή, καθώς και μια επιπλέον συνθήκη που χρειάζεται να επιβάλουμε. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στα [10, 14].

5.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάσαμε μια σειρά από ποιοτικά θεωρήματα, για το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής 4.2.2. Στην ενότητα αυτή, θα δούμε πως τα εν λόγω αποτελέσματα, μας οδηγούν σε ένα εναλλακτικό πρόβλημα, του οποίου η επίλυση μας δίνει τη ζητούμενη (ή τις υποψήφιες) συνάρτηση αξίας.

Έστω ότι, ικανοποιούνται οι υποθέσεις της πρότασης 4.2.2. Συνεπώς, ο $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι βέλτιστος, ή ισοδύναμα $V(x) = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{\mathcal{D}}})]$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Από την απόδειξη της πρότασης 4.2.2, βλέπουμε ότι, η V είναι η μικρότερη superharmonic συνάρτηση, που κυριαρχεί την G (το γεγονός αυτό, έπεται και από την αναγκαία συνθήκη 4.2.1). Επομένως, η V είναι η μικρότερη λύση του πιο κάτω συστήματος:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_X V \leq 0 \\ V \geq G \end{aligned} \iff \begin{aligned} \mathcal{A}_X V \leq 0 \\ V > G \text{ στο } \mathcal{C} \\ V = G \text{ στο } \mathcal{D} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

όπου υποθέτουμε ότι $V \in \text{dom } \mathcal{A}_X$ ¹.

Το πρόβλημα 5.1.1 ονομάζεται **πρόβλημα ελεύθερου συνόρου**, καθώς εκτός της άγνωστης συνάρτησης αξίας V , είναι άγνωστο και το χωρίο επίλυσης \mathcal{C} . Στο πρακτικό μέρος της εργασίας, θα δούμε πως μπορούμε να αξιοποιήσουμε το πρόβλημα 5.1.1, ώστε να λύσουμε αριθμητικά το ζητούμενο πρόβλημα βέλτιστης διακοπής 4.2.2.

¹Θα δούμε στο ερχόμενο κεφάλαιο ότι, ένα τέτοιο ποιοτικό χαρακτηριστικό, μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς κάποια αναλυτική έκφραση της V .

Επιπλέον, η αναπαράσταση της συνάρτησης αξίας ως $V(x) = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})]$, μας οδηγεί σε ένα πρόβλημα τύπου Dirichlet. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, χρειαζόμαστε την έννοια του κανονικού συνόρου, την οποία ορίζουμε πιο κάτω.

Ορισμός 5.1.1 (Κανονικό σύνορο). Ένα σημείο του συνόρου $x \in \partial\mathcal{C}$, λέγεται **κανονικό** (ως προς το \mathcal{D}), αν $\mathbb{P}_x[\sigma_{\mathcal{D}} = 0] = 1$, όπου $\sigma_{\mathcal{D}} = \inf\{t > 0 : X_t \in \mathcal{D}\}$. Το σύνορο $\partial\mathcal{C}$, λέγεται **κανονικό** (ως προς το \mathcal{D}), αν κάθε σημείο του είναι κανονικό.

Διαισθητικά, ο πιο πάνω ορισμός μας λέει ότι, αν η διαδικασία ξεκινήσει από κάποιο κανονικό σημείο του συνόρου, τότε εισέρχεται κατευθείαν στο \mathcal{D} .

Είμαστε πλέον σε θέση, να αποδείξουμε τον ισχυρισμό που υποσχεθήκαμε πιο πάνω.

Θεώρημα 5.1.1 (Πρόβλημα Dirichlet). Έστω ότι η συνάρτηση αξίας G , είναι συνεχής στο σύνορο $\partial\mathcal{C}$, το οποίο υποθέτουμε ότι είναι κανονικό (ως προς το \mathcal{D}). Τότε, η συνάρτηση αξίας V , ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet:

$$\mathcal{A}_X V = 0 \text{ στο } \mathcal{C} \quad (5.1.2)$$

$$V = G \text{ στο } \partial\mathcal{C} \quad (5.1.3)$$

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι, το σύνολο \mathcal{C} είναι ανοιχτό.

Σχέση 5.1.2

Για κάθε $x \in \mathcal{C}$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U , τέτοια ώστε $x \in U \subseteq \mathcal{C}$. Οπότε, η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα μας δίνει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[V(X_{\tau_{U^c}})] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_{\tau_{U^c}}}[G(X_{\tau_D})]] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D}) \circ \theta_{\tau_{U^c}} | \mathcal{F}_{\tau_{U^c}}]] \\ &= \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{U^c} + \tau_D \circ \theta_{\tau_{U^c}}})] \\ &= \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})] \\ &= V(x) \end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα, ισχύει λόγω της $\tau_{U^c} \leq \tau_D$ ($U \subseteq \mathcal{C} = \mathcal{D}^c$).

Άρα, από τον ορισμό του χαρακτηριστικού τελεστή, έπεται το ζητούμενο:

$$\mathcal{A}_X V(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbb{E}_x[V(X_{\tau_{U^c}})] - V(x)}{\mathbb{E}_x[\tau_{U^c}]} = 0$$

Σχέση 5.1.3

Έστω τώρα $x \in \partial\mathcal{C}$. Από τον ορισμό του κανονικού συνόρου, έχουμε ότι $\mathbb{P}_x[\sigma_{\mathcal{D}} = 0] = 1$. Επομένως, εξ ορισμού της V , παίρνουμε ότι:

$$V(x) = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})] = G(x)$$

όπου η δεύτερη ισότητα, ισχύει λόγω της $\mathbb{P}_x[\tau_D = 0] = 1$ ($0 \leq \tau_D \leq \sigma_{\mathcal{D}}$). ■

Η σχέση 5.1.3, είναι γνωστή ως **συνθήκη continuous fit**. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι, η ισότητα 5.1.2 είναι σύμφωνη με το γεγονός ότι, η σταματημένη διαδικασία $(V(X_{t \wedge \tau_D}))_{t \geq 0}$ είναι \mathbb{P}_x -martingale (δηλαδή, με το ότι η διαδικασία $(V(X_t))_{t \geq 0}$, είναι \mathbb{P}_x -martingale, όσο βρίσκεται στο σύνολο συνέχειας \mathcal{C}).

Τα όσα σχολιάσαμε πιο πάνω, μας επιτρέπουν να αναζητήσουμε τη λύση του προβλήματος βέλτιστης διακοπής 4.2.2, επιλύοντας είτε το πρόβλημα ελευθέρου συνόρου 5.1.1, είτε το πρόβλημα Dirichlet 5.1.2-5.1.3. Ειδικότερα, τα προβλήματα αυτά, αποτελούν μια αναγκαία συνθήκη για τη ζητούμενη συνάρτηση αξίας V . Συνεπώς, η επίλυσή τους μας οδηγεί στις υποψήφια λύσεις του προβλήματος 4.2.2. Σημειώνουμε ότι, υπάρχουν παθολογικές περιπτώσεις όπου, ενώ το πρόβλημα Dirichlet έχει λύση (ή και λύσεις), το αρχικό πρόβλημα βέλτιστης διακοπής δεν έχει.

Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε εκ των προτέρων να αποδείξουμε ότι, η συνάρτηση αξίας V είναι αρκετά ομαλή, ώστε $\mathcal{A}_X V = \mathcal{L}_X V$. Επομένως, τα προβλήματα 5.1.1 και 5.1.2-5.1.3, είναι πλέον προβλήματα διαφορικών εξισώσεων. Μια συνήθης μεθοδολογία είναι, να "μαντέψουμε" τη γενική μορφή του χωρίου \mathcal{C} (στηριζόμενοι στη φύση του προβλήματος) και έπειτα να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση αξίας V , επιλύοντας τα προβλήματα αυτά. Όμως, ακόμα και στην σπάνια περίπτωση όπου, η διαφορική εξίσωση λύνεται αναλυτικά, χρειαζόμαστε μια επιπλέον συνθήκη, ώστε να προσδιορίσουμε και το άγνωστο χωρίο \mathcal{C} . Η ζητούμενη αυτή συνθήκη, είναι γνωστή ως **συνθήκη smooth fit** (βλέπε ερχόμενη ενότητα).

Αφού υπολογίσουμε μια υποψήφια συνάρτηση αξίας (επιλύοντας τα πιο πάνω), πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι πράγματι η βέλτιστη. Στην περίπτωση όπου, γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι, το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής 4.2.2 έχει λύση, τότε η μοναδική (ή η μικρότερη) λύση του προβλήματος ελευθέρου συνόρου 5.1.1 (ή του προβλήματος Dirichlet 5.1.2-5.1.3), είναι η ζητούμενη συνάρτηση αξίας.

5.2 Συνθήκη *smooth fit*

Η συνθήκη *smooth fit* μας λέει ότι, η βέλτιστη επιλογή για το σύνορο $\partial\mathcal{C}$, είναι τέτοια ώστε, οι παράγωγοι των V και G , να ταυτίζονται σε αυτό². Δηλαδή, τέτοια ώστε:

$$\nabla V = \nabla G \text{ στο } \partial\mathcal{C} \quad (5.2.1)$$

Η απόδειξη της συνθήκης 5.2.1, είναι αρκετά τεχνική, ακόμα και στην μονοδιάστατη περίπτωση (πόσο μάλλον στις πολλές διαστάσεις). Για το λόγο αυτό, θα την αποδείξουμε μόνο για μια ειδική περίπτωση διαχύσεων Itô.

Απόδειξη. Έστω $X = (X_t)_{t \geq 0}$ μια μονοδιάστατη διάχυση Itô, με συντελεστή διάχυσης σ , τέτοιον ώστε $\sigma(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι, η X είναι κανονική, εννοώντας ότι, για οποιοσδήποτε δύο καταστάσεις της, $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\mathbb{P}_x[T_y < \infty] = 1$, όπου $T_y = \inf\{t \geq 0 : X_t = y\}$.

²Για να έχει νόημα ο εν λόγω ισχυρισμός, η G πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο $\partial\mathcal{C}$.

Επιπλέον, έστω ότι, τα σύνολα συνέχειας και διακοπής έχουν τη μορφή $\mathcal{C} = (b, \infty)$ και $\mathcal{D} = (-\infty, b]$, αντίστοιχα. Άρα, το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι, $V'(b) = G'(b)$.

Έστω ένα $\epsilon > 0$. Οι σχέσεις $V \geq G$ και $V(b) = G(b)$, μας δίνουν ότι:

$$\frac{V(b + \epsilon) - V(b)}{\epsilon} \geq \frac{G(b + \epsilon) - G(b)}{\epsilon}$$

Παίρνοντας όριο στην πιο πάνω, καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$, έχουμε ότι:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(b + \epsilon) - V(b)}{\epsilon} \geq G'(b) \quad (5.2.2)$$

Ορίζουμε επιπλέον, τον ακόλουθο χρόνο διακοπής:

$$\tau_\epsilon = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (b - \epsilon, b + \epsilon)\}$$

Από τη συνέχεια της X , έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_b[V(X_{\tau_\epsilon})] &= V(b + \epsilon)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b + \epsilon] + V(b - \epsilon)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b - \epsilon] \\ &= V(b + \epsilon)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b + \epsilon] + G(b - \epsilon)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b - \epsilon] \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα, ισχύει καθώς το $b - \epsilon \in \mathcal{D}$.

Λόγω του ότι η V είναι superharmonic, έχουμε επιπλέον ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_b[V(X_{\tau_\epsilon})] &\leq V(b) \\ &= V(b)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b + \epsilon] + V(b)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b - \epsilon] \\ &= V(b)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b + \epsilon] + G(b)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b - \epsilon] \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις, παίρνουμε ότι:

$$\left(V(b + \epsilon) - V(b)\right)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b + \epsilon] \leq \left(G(b) - G(b - \epsilon)\right)\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b - \epsilon] \quad (5.2.3)$$

Στο υπόλοιπο της απόδειξης, θα χρειαστούμε την έννοια της συνάρτησης κλίμακας (scale function) $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μιας διάχυσης Itô. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η s ορίζεται ως:

$$s(x) = \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^y \frac{2\mu(z)}{\sigma(z)^2} dz} dy$$

για κάποιο, αυθαίρετα επιλεγμένο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αποδεικνύεται ότι, για οποιαδήποτε $\alpha < x < \beta$, η s είναι τέτοια ώστε:

$$\mathbb{P}_x[T_\beta < T_\alpha] = \frac{s(x) - s(\alpha)}{s(\beta) - s(\alpha)}$$

όπου $T_\alpha = \inf\{t \geq 0 : X_t = \alpha\}$ και $T_\beta = \inf\{t \geq 0 : X_t = \beta\}$.

Με βάση την πιο πάνω, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b + \epsilon] &= \mathbb{P}_x[T_{b+\epsilon} < T_{b-\epsilon}] = \frac{s(b) - s(b - \epsilon)}{s(b + \epsilon) - s(b - \epsilon)} \\ \mathbb{P}_b[X_{\tau_\epsilon} = b - \epsilon] &= \mathbb{P}_x[T_{b-\epsilon} < T_{b+\epsilon}] = \frac{s(b + \epsilon) - s(b)}{s(b + \epsilon) - s(b - \epsilon)}\end{aligned}$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τις πιο πάνω στη σχέση 5.2.3, παίρνουμε ότι:

$$\frac{V(b + \epsilon) - V(b)}{\epsilon} \leq \frac{G(b) - G(b - \epsilon)}{\epsilon} \frac{s(b + \epsilon) - s(b)}{s(b) - s(b - \epsilon)}$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, έχουμε ότι η s είναι παραγωγίσιμη, με $s'(x) = \exp(-\int_{x_0}^x \frac{2\mu(z)}{\sigma(z)^2} dz) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, παίρνοντας όριο στην πιο πάνω, καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$, βλέπουμε ότι:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(b + \epsilon) - V(b)}{\epsilon} \leq G'(b) \frac{s'(b)}{s'(b)} = G'(b) \quad (5.2.4)$$

Οι σχέσεις 5.2.2 και 5.2.4, μας δίνουν το ζητούμενο. ■

Για περισσότερες λεπτομέρειες, σχετικά με την πιο πάνω απόδειξη, παραπέμπουμε στα [10, 12]. Στο [15], βλέπουμε μια σχετική απόδειξη για την περίπτωση των πολλών διαστάσεων, ενώ στο [16], βλέπουμε και μια συζήτηση για το πότε η συνθήκη αυτή, είναι και ικανή να μας δώσει τη ζητούμενη συνάρτηση αξίας.

6

Αμερικανικά Δικαιώματα

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε μια ειδική περίπτωση του πρόβλημα βέλτιστης διακοπής. Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε με την arbitrage-free τιμολόγηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης, όταν το πρωτογενές προϊόν ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown. Αρχικά, θα εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες των χρηματοοικονομικών και μετά θα εστιάσουμε στη τιμολόγηση του παραγώγου.

Θα δούμε ότι, στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα, μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τη ζητούμενη συνάρτηση αξίας. Αντίθετα, στην περίπτωση του πεπερασμένου ορίζοντα, θα αρκεστούμε σε μερικά ποιοτικά αποτελέσματα.

Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού, στηρίζονται κυρίως στα [17, 18, 10]. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στα [19, 20].

6.1 Εισαγωγή

Έστω ότι, στην αγοράς μας υπάρχουν δυο προϊόντα: ένας αποταμιευτικός λογαριασμός (ή αλλιώς προϊόν χωρίς κίνδυνο) και μια "μετοχή" (ή αλλιώς προϊόν με κίνδυνο)¹. Ο χαρακτηρισμός των δυο προϊόντων, ως με ή χωρίς κίνδυνο οφείλεται στο ότι, η δυναμική τους είναι στοχαστική και ντετερμινιστική αντίστοιχα.

Οι δυνατές εκβάσεις της αγοράς, περιγράφονται από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$. Οι έννοιες που θα μελετήσουμε έχουν ένα χρονικό εύρος $[0, T]$, όπου θεωρούμε ως παρούσα χρονική στιγμή τη $t = 0$. Ο ορίζοντας $T \in [0, \infty]$ ονομάζεται και ωρίμανση.

6.1.1 Προϊόν χωρίς κίνδυνο

Η έννοια του αποταμιευτικού λογαριασμού, μοντελοποιεί τη δυνατότητα ενός επενδυτή να δανειστεί (καταθέσει) ένα χρηματικό ποσό από (σε) μια τράπεζα, πληρώνοντας (εισπράττοντας) ένα ποσό σε τόκους, με βάση ένα προκαθορισμένο επιτόκιο, έστω

¹Οι έννοιες που θα παρουσιάσουμε, γενικεύονται και σε αγορές με περισσότερες από μια μετοχές.

$r > 0$. Υποθέτουμε ότι, το επιτόκιο είναι σταθερό, ότι είναι το ίδιο για τα δάνεια και τις καταθέσεις, καθώς και ότι ο ανατοκισμός είναι συνεχής.

Επομένως, η αξία του προϊόντος χωρίς κίνδυνο, έστω $(S_t^0)_{0 \leq t \leq T}$, περιγράφεται από την πιο κάτω συνήθη διαφορική εξίσωση²:

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt \quad \text{για κάθε } 0 \leq t \leq T \\ S_0^0 &= 1 \end{aligned}$$

Η (μοναδική) λύση της πιο πάνω, είναι η $S_t^0 = e^{rt}$. Παρατηρούμε ότι, η δυναμική του προϊόντος χωρίς κίνδυνο, είναι πράγματι ντετερμινιστική και καθορίζεται πλήρως από το επιτόκιο r .

Η S_t^0 μας δίνει την αξία μιας σημερινής μονάδα χρήματος, τη χρονική στιγμή t . Ισοδύναμα, μια μονάδα χρήματος τη χρονική στιγμή t , αξίζει $1/S_t^0 = e^{-rt}$ σημερινές μονάδες. Εξαιτίας αυτού, ο όρος e^{-rt} λέγεται και προεξοφλητικός παράγοντας.

6.1.2 Προϊόν με κίνδυνο

Ως προϊόν με κίνδυνο, χαρακτηρίζουμε ένα προϊόν της αγοράς, του οποίου η αξία είναι στοχαστική. Το σύνηθες παράδειγμα είναι οι μετοχές. Για το λόγο αυτό συνήθιζεται να αναφερόμαστε στο προϊόν με κίνδυνο ως μετοχή, ανεξάρτητα του τι είναι.

Υποθέτουμε ότι, η δυναμική της αξίας της μετοχής, έστω $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$, περιγράφεται από μια γεωμετρική κίνηση Brown. Ειδικότερα, η τιμή της μετοχής δίνεται από:

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \quad \text{για κάθε } 0 \leq t \leq T$$

όπου $\sigma > 0$ η μεταβλητότητα του μοντέλου και $S_0 > 0$ η αρχική τιμή της μετοχής.

Με $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$, συμβολίζουμε την (τυπική) κίνηση Brown του χώρου. Επιπλέον, θεωρούμε και την παραγόμενη διήθηση της, έστω $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Άρα, ο χώρος πιθανότητας με διήθηση $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{Q})$, περιγράφει πλήρως τη συμπεριφορά της αγοράς.

Το πιο πάνω μοντέλο, ονομάζεται υπόδειγμα Black-Scholes³ και αποτελεί ένα από τα απλούστερα μοντέλα για την αξία της μετοχής. Στην πράξη, οι παράμετροί του είναι άγνωστες, οπότε χρησιμοποιούμε κάποια εκτίμησή τους από ιστορικά δεδομένα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, το μέτρο πιθανότητας \mathbb{Q} είναι τέτοιο ώστε, οι προεξοφλημένες αξίας των προϊόντων $(e^{-rt} S_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ και $(e^{-rt} S_t)_{0 \leq t \leq T}$, να είναι \mathbb{Q} -martingale. Λόγω αυτού, το μέτρο \mathbb{Q} λέγεται και αδιάφορο κινδύνου (risk neutral) μέτρο πιθανότητας.

²Κατά σύμβαση, θεωρούμε ότι η αρχική τιμή του προϊόντος χωρίς κίνδυνο, είναι ίση με 1.

³Εναλλακτικά ονομάζεται και μοντέλο Black-Scholes-Merton ή μοντέλο Samuelson.

6.1.3 Παράγωγα

Ένα προϊόν λέγεται παράγωγο, αν η αξία του εξαρτάται από την τιμή ενός υποκείμενου (πρωτογενούς) προϊόντος, όπως για παράδειγμα μιας μετοχής. Ειδικότερα, θα επικεντρωθούμε στα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Τέτοιου είδους δικαιώματα, δίνουν στον κάτοχο τους τη δυνατότητα να αγοράσει (ή να πουλήσει) το υποκείμενο προϊόν, σε κάποια μελλοντική στιγμή, προς μια μια προσυμφωνημένη τιμή.

Ο κάτοχος του δικαιώματος, λέμε ότι έχει θετική θέση σε αυτό, ενώ ο εκδότης του αρνητική. Άρα, ο κάτοχος του δικαιώματος, έχει το δικαίωμα να το ασκήσει, δηλαδή να αγοράσει (ή να πουλήσει) το υποκείμενο προϊόν, εφόσον αυτό τον συμφέρει. Αντίθετα, ο εκδότης του δικαιώματος υποχρεούται να πουλήσει (ή να αγοράσει) το υποκείμενο προϊόν, εάν ο κάτοχος ασκήσει το δικαίωμα.

Το κάθε δικαίωμα, χαρακτηρίζεται από τη τιμή αγοράς (ή πώλησης) που θέτει για το υποκείμενο προϊόν, καθώς και από τις χρονικές στιγμές στις οποίες μπορεί να ασκηθεί. Η τιμή συναλλαγής που ορίζεται, ονομάζεται τιμή άσκησης και συμβολίζεται με K . Στα δικαιώματα που θα μελετήσουμε, η τιμή άσκησης είναι προκαθορισμένη και σταθερή. Υπάρχουν όμως δικαιώματα, των οποίων η τιμή άσκησης διαφέρει ανάλογα με την τροχιά που κατέγραψε η αξία του υποκείμενου προϊόντος, μέχρι την άσκηση του δικαιώματος (τροχιοεξαρτώμενα).

Το κάθε δικαίωμα, είναι σε ισχύ μέχρι την ωρίμανση T και μπορεί να ασκηθεί σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Ένα δικαίωμα λέγεται ευρωπαϊκού τύπου, αν επιτρέπει στον κάτοχό του να το ασκήσει μόνο στην ωρίμανσή του, ενώ λέγεται αμερικανικού τύπου εάν μπορεί να ασκηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Υπάρχουν και "ενδιάμεσες" περιπτώσεις, όπως τα δικαιώματα τύπου Bermuda, τα οποία μπορούν να ασκηθούν σε κάποιες προκαθορισμένες χρονικές στιγμές.

Ένα δικαίωμα, όταν και αν ασκηθεί, επιφέρει στον κάτοχό του, ένα χρηματικό ποσό ως κέρδος. Το ποσό αυτό, ονομάζεται απόδοση του παραγώγου, όπου με βάση τα πιο πάνω, είναι συνάρτηση της αξίας του υποκείμενου προϊόντος. Η εν λόγω συνάρτηση, λέγεται συνάρτηση αποπληρωμής του παραγώγου και τη συμβολίζουμε με G . Δίνουμε πιο κάτω, τις συναρτήσεις αποπληρωμής για τα συνήθη δικαιώματα:

(i) Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς: $G(S_T) = (S_T - K)^+$

(ii) Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης: $G(S_T) = (K - S_T)^+$

(iii) Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς: $G(S_t) = (S_t - K)^+$, για κάθε $0 \leq t \leq T$

(iv) Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης: $G(S_t) = (K - S_t)^+$, για κάθε $0 \leq t \leq T$

Το θετικό μέρος στις πιο πάνω, μας επιτρέπει να συμπεριλάβουμε στις πιθανές στρατηγικές άσκησης του δικαιώματος και την περίπτωση που δεν το ασκούμε. Ειδικότερα, την ταυτίζουμε με την περίπτωση που ασκούμε το δικαίωμα στην ωρίμανση, καθώς και στις δυο περιπτώσεις η απόδοση είναι μηδενική.

6.1.4 Αρχή της μη επιτηδειότητας

Η αρχή της μη επιτηδειότητας (principle of no arbitrage) αποτελεί το βασικό αξίωμα, με το οποίο τιμολογούμε⁴ δικαιώματα. Ειδικότερα, αξιώνει ότι σε μια αγορά σε ισορροπία, δεν υπάρχει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη ρίσκου.

Ένα πόρισμα της το οποίο θα μας χρειαστεί είναι ότι, εάν δυο χαρτοφυλάκια έχουν οπωσδήποτε την ίδια αξία (\mathbb{Q} -σβ) σε κάποια μελλοντική στιγμή, τότε οφείλουν να αξιζούν το ίδιο και σήμερα. Με τον όρο χαρτοφυλάκιο (portfolio), εννοούμε μια συλλογή από προϊόντα της αγοράς. Επομένως, εάν σε κάποια χρονική στιγμή γνωρίζουμε τις αξίες των προϊόντων της αγοράς, τότε γνωρίζουμε και την αξία του χαρτοφυλακίου.

Ο τρόπος με τον οποίο αξιοποιούμε το πιο πάνω πόρισμα, στηρίζεται στην έννοια του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Λέμε ότι, ένα χαρτοφυλάκιο αντισταθμίζει ένα παράγωγο, εάν σε κάθε χρονική στιγμή η αξία του ισούται (\mathbb{Q} -σβ) με την αποπληρωμή του παραγώγου. Προφανώς, το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι δυναμικό. Όμως, οποιαδήποτε αλλαγή σε αυτό οφείλει να είναι αυτό-χρηματοδοτούμενη, δηλαδή να προκύπτει από συναλλαγές των προϊόντων του.

Συνεπώς, η αρχή της μη επιτηδειότητας μας λέει ότι, το παράγωγο οφείλει να αξίζει σήμερα όσο και το χαρτοφυλάκιο, του οποίου η σημερινή αξία είναι γνωστή. Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε, λέγεται αντιστάθμιση (hedging) ενός παραγώγου και αποτελεί το βασικό εργαλείο με το οποίο το τιμολογούμε.

6.2 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης

Στο υπόλοιπο της εργασίας, θα εστιάσουμε σε μια ειδική περίπτωση του προβλήματος βέλτιστης διακοπής. Πιο συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με την arbitrage-free τιμολόγηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης, με τιμή άσκησης K και ωρίμανση T . Η τιμολόγηση του εν λόγω παραγώγου, δίνεται από το πιο κάτω πρόβλημα:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}_{t,x} [e^{-r\tau} (K - S_{t+\tau})^+] \quad (6.2.1)$$

όπου με $\mathbb{E}_{t,x}$ συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}_{t,x}$.

Το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}_{t,x}$, είναι τέτοιο ώστε $\mathbb{Q}_{t,x}[S_t = x] = 1$. Συνεπώς, το πρόβλημα 6.2.1 μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E} [e^{-r\tau} (K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+]$$

Η απόδειξη του ότι, το πρόβλημα 6.2.1 δίνει τη ζητούμενη τιμολόγηση, είναι εκτός του πλαισίου της παρούσας εργασίας. Για την εν λόγω απόδειξη, παραπέμπουμε στο θεώρημα 4.4.2 του [18], σελίδα 73.

⁴Με τον όρο τιμολόγηση, εννοούμε το χρηματικό ποσό που χρειάζεται να πληρώσει ή να εισπράξει ο κάτοχος ενός παραγώγου, για να το αγοράσει από τον εκδότη του.

6.2.1 Άπειρος χρονικός ορίζοντας

Στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα⁵, το πρόβλημα 6.2.1 "απλοποιείται" (είναι χρονικά ομογενές) και παίρνει τη μορφή:

$$V(x) = \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}_x[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+] \quad (6.2.2)$$

όπου με \mathbb{E}_x συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο \mathbb{Q}_x .

Πράγματι, έστω δυο χρόνοι $0 \leq t_1 \leq t_2 < T = \infty$. Τότε, κάθε πεπερασμένος χρόνος διακοπής τ , είναι τέτοιος ώστε $0 \leq \tau < T - t_1$ και $0 \leq \tau < T - t_2$, καθώς θεωρούμε ότι $\infty - t = \infty$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} V(t_1, x) &= \sup_{0 \leq \tau < T - t_1} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &= \sup_{0 \leq \tau < T - t_2} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &= V(t_2, x) \end{aligned}$$

Άρα, στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα, η απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \mapsto V(t, x)$ είναι σταθερή, με το πρόβλημα 6.2.1 να παίρνει τη μορφή του 6.2.2.

Κάτι που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι, στα προβλήματα 6.2.1 και 6.2.2, υπάρχει και ο προεξοφλητικός παράγοντας $e^{-r\tau}$. Επομένως, αποτελούν μια ειδική περίπτωση των γενικών προβλημάτων 4.2.2 και 4.2.10, στα οποία χρησιμοποιούμε τη σκοτωμένη διαδικασία, $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$. Άρα, η συνάρτηση κέρδους τους είναι η $G(x) = (K - x)^+$.

Παρατήρηση 6.2.1. Η συνάρτηση κέρδους $G(x) = (K - x)^+$ ικανοποιεί τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωσιμότητας, καθώς είναι φραγμένη (από K). Επιπλέον, είναι παραγωγίσιμη παντού εκτός από το $x = K$.

Όπως εξηγήσαμε και στο κεφάλαιο 5, θα λύσουμε το πρόβλημα 6.2.2 μέσω της εξίσωσης 5.1.2. Θυμίζουμε ότι, πρώτα "μαντεύουμε" μια γενική μορφή για το σύνολο \mathcal{C} και μετά επιβεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση αξίας που προκύπτει, είναι πράγματι η ζητούμενη. Επομένως, απομένει να επιλέξουμε τη γενική μορφή του συνόλου \mathcal{C} .

Βλέπουμε ότι, όσο πιο κοντά στο 0 είναι η αξία της μετοχής, τόσο μεγαλύτερη είναι η αποπληρωμή του δικαιώματος και συνεπώς πιο πιθανό να θελήσουμε να το ασκήσουμε. Επομένως, είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι υπάρχει κάποια οριακή τιμή b^* , κάτω από την οποία διακόπτουμε τη διαδικασία. Άρα, υποθέτουμε ότι το σύνολο συνέχειας έχει τη μορφή $\mathcal{C} = (b^*, \infty)$, με τον χρόνο εισόδου:

$$\tau_{b^*} = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq b^*\} \quad (6.2.3)$$

να είναι ο υποψήφιος βέλτιστος χρόνος διακοπής.

⁵Ένα Αμερικανικό δικαίωμα με άπειρο χρονικό ορίζοντα, λέγεται αέναο.

Παρατήρηση 6.2.2. Εύκολα βλέπουμε ότι $b^* \in (0, K)$, καθώς για οποιαδήποτε μεγαλύτερη τιμή, το κέρδος είναι προφανώς μηδέν.

Άρα, υπολογίζουμε την υποψήφια συνάρτηση αξίας V , επιλύοντας τη συνήθη διαφορική εξίσωση 5.1.2⁶, χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες 5.1.3 και 5.2.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S V(x) - rV(x) &= 0 && \text{για } x \in (b^*, \infty) \\ V(x) &= K - b^* && \text{για } x = b^* \quad (\text{continuous fit}) \\ V'(x) &= -1 && \text{για } x = b^* \quad (\text{smooth fit}) \end{aligned}$$

Οπότε, η προς επίλυση διαφορική εξίσωση είναι η:

$$\frac{\sigma^2}{2} x^2 V''(x) + rxV'(x) - rV(x) = 0$$

Η πιο πάνω, είναι μια διαφορική εξίσωση Cauchy-Euler, της οποίας οι λύσεις έχουν τη μορφή x^m . Οι εκθέτες τους, υπολογίζονται από το πιο κάτω πολυώνυμο:

$$\frac{\sigma^2}{2} m(m-1) + rm - r = 0 \iff \frac{\sigma^2}{2} m^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})m - r = 0$$

Επομένως, η γενική λύση της πιο πάνω συνήθης διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$V(x) = C_1 x + C_2 x^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \quad \text{για } x \in (b^*, \infty)$$

Η λύση του προβλήματος 6.2.2 είναι προφανώς είναι φραγμένη (από K). Συνεπώς, ο συντελεστής $C_1 = 0$ διότι διαφορετικά θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty$.

Απομένει να προσδιορίσουμε τους αγνώστους C_2 και b^* . Οι συνθήκες continuous και smooth fit, μας δίνουν τις ακόλουθες δυο εξισώσεις για την εύρεσή τους:

$$\begin{aligned} C_2 b^{*- \frac{2r}{\sigma^2}} &= K - b^* \\ (-\frac{2r}{\sigma^2}) C_2 b^{*- \frac{2r}{\sigma^2} - 1} &= -1 \end{aligned}$$

Επιλύοντας το πιο πάνω σύστημα, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} b^* &= \frac{K}{1 + \frac{\sigma^2}{2r}} \\ C_2 &= \frac{\sigma^2}{2r} \left(\frac{K}{1 + \frac{\sigma^2}{2r}} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2} + 1} \end{aligned}$$

⁶Ο ισχυρισμός (iv) του λήμματος 6.2.4 μας δίνει ότι, η συνάρτηση αξίας V είναι ομαλή. Επομένως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον χαρακτηριστικό τελεστή \mathcal{A}_S στην εξίσωση 5.1.2, με τον διαφορικό τελεστή \mathcal{L}_S .

Άρα, η υποψήφια λύση του προβλήματος 6.2.2 είναι η:

$$V(x) = \begin{cases} (K - b^*) \left(\frac{x}{b^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & \text{για } x \in (b^*, \infty) \\ K - x & \text{για } x \in (0, b^*] \end{cases} \quad (6.2.4)$$

Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι, η έκφραση 6.2.4 είναι η συνάρτηση αξίας του προβλήματος 6.2.2. Στο πιο κάτω θεώρημα, δείχνουμε ακριβώς αυτό.

Θεώρημα 6.2.1. *Η συνάρτηση V που δίνεται από τη σχέση 6.2.4, είναι η ζητούμενη συνάρτηση αξίας του προβλήματος 6.2.2. Επιπλέον, αν ο χρόνος διακοπής τ_{b^*} που δίνεται από τη σχέση 6.2.3, είναι πεπερασμένος τότε είναι και βέλτιστος.*

Απόδειξη. Στο πλαίσιο της παρούσας απόδειξης, συμβολίζουμε τη λύση του προβλήματος 6.2.2 με V^* , ενώ την υποψήφια λύση 6.2.4 με V .

Εύκολα βλέπουμε ότι, η V είναι $C^2((0, b^*) \cup (b^*, \infty))$ και $C^1((0, \infty))$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\mathbb{P}_x[S_t = b^*] = 0$, για κάθε $x, t > 0$ (η S_t είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή).

Οπότε, χρησιμοποιώντας μια γενικευμένη μορφή της φόρμουλας του Itô (για την απόδειξή της, παραπέμπουμε στο [21]), παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} e^{-rt}V(S_t) &= V(x) + \int_0^t e^{-rs}(\mathcal{A}_S V - rV)(S_s) \mathbb{1}_{\{S_s \neq b^*\}} ds + \int_0^t e^{-rs} \sigma S_s V'(S_s) dB_s \\ &= V(x) - \int_0^t e^{-rs} r K \mathbb{1}_{\{S_s < b^*\}} ds + \int_0^t e^{-rs} \sigma S_s V'(S_s) dB_s \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα, έπεται από το γεγονός ότι $V(x) = G(x)$ και $(\mathcal{A}_S G - rG)(x) = -rK$, για κάθε $x \in (0, b^*)$ και ότι $(\mathcal{A}_S V - rV)(x) = 0$, για κάθε $x \in (b^*, \infty)$.

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα στην πιο πάνω, είναι \mathbb{Q}_x -martingale καθώς ισχύει ότι $|V'(x)| \leq 1$, για κάθε $x > 0$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικό. Άρα, η διαδικασία $(e^{-rt}V(S_t))_{t \geq 0}$ είναι \mathbb{Q}_x -supermartingale και από κατασκευή της κυριαρχεί και την $(e^{-rt}G(S_t))_{t \geq 0}$.

Επομένως, το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής μας δίνει ότι:

$$\mathbb{E}_x[e^{-r\tau}G(S_\tau)] \leq \mathbb{E}_x[e^{-r\tau}V(S_\tau)] \leq V(x)$$

για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \tau < \infty$.

Παίρνοντας supremum στην πιο πάνω, έχουμε ότι:

$$V^*(x) = \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}_x[e^{-r\tau}G(S_\tau)] \leq V(x)$$

Από την απόδειξη του θεωρήματος 5.1.1, βλέπουμε ότι, η V ως λύση του προβλήματος 5.1.2 γράφεται και ως $V(x) = \mathbb{E}_x[e^{-r\tau_{b^*}}G(S_{\tau_{b^*}})]$. Άρα, ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα $V(x) \leq V^*(x)$ και κατά συνέπεια και η ισότητα $V^*(x) = V(x) = \mathbb{E}_x[e^{-r\tau_{b^*}}G(S_{\tau_{b^*}})]$. Οπότε, αν ο τ_{b^*} είναι πεπερασμένος, τότε είναι και βέλτιστος. ■

Αξίζει να σημειωθεί ότι, ο χρόνος διακοπής τ_{b^*} δεν είναι πάντα πεπερασμένος. Ειδικότερα, θα αποδείξουμε ότι:

$$\mathbb{Q}_x[\tau_{b^*} < \infty] = \begin{cases} 1 & \text{αν } r \leq \frac{\sigma^2}{2} \text{ ή } x \in (0, b^*] \\ \left(\frac{b^*}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} & \text{αν } r > \frac{\sigma^2}{2} \text{ και } x \in (b^*, \infty) \end{cases}$$

Απόδειξη. Η περίπτωση όπου $x \in (0, b^*]$ είναι τετριμμένη, καθώς τότε $\tau_{b^*} = 0$. Αν τώρα $r < \frac{\sigma^2}{2}$, τότε η γεωμετρική κίνηση Brown τείνει στο 0 (\mathbb{Q}_x -σβ). Πράγματι:

$$S_t = xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t} = xe^{((r-\frac{\sigma^2}{2})+\sigma\frac{B_t}{t})t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t} \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

όπου στο προτελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε ότι ο λόγος $\frac{B_t}{t} \rightarrow 0$ (\mathbb{Q}_x -σβ).

Στην περίπτωση όπου $r = \frac{\sigma^2}{2}$, τότε $S_t = xe^{\sigma B_t}$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{Q}[\inf_{t \geq 0} xe^{\sigma B_t} \leq \frac{K}{2}] = \mathbb{Q}[\inf_{t \geq 0} B_t \leq \frac{1}{\sigma} \ln(\frac{K}{2x})]$. Πράγματι, το ζητούμενο έπεται από το ότι $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty$ και ότι η κίνηση Brown έχει συνεχείς τροχιές.

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, θα χρειαστούμε την πιο κάτω σχέση (για την απόδειξή της, παραπέμπουμε στο πόρισμα 1 του [22], σελίδα 760):

$$\mathbb{Q}\left[\sup_{t \geq 0} (B_t - \alpha t) \geq \beta\right] = e^{-2\alpha\beta}$$

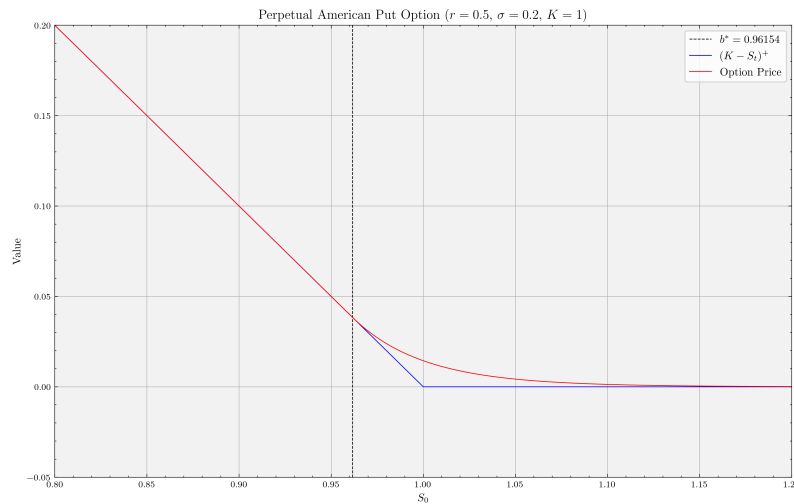
όπου $\alpha, \beta > 0$.

Άρα, με βάση την πιο πάνω, παίρνουμε ότι:

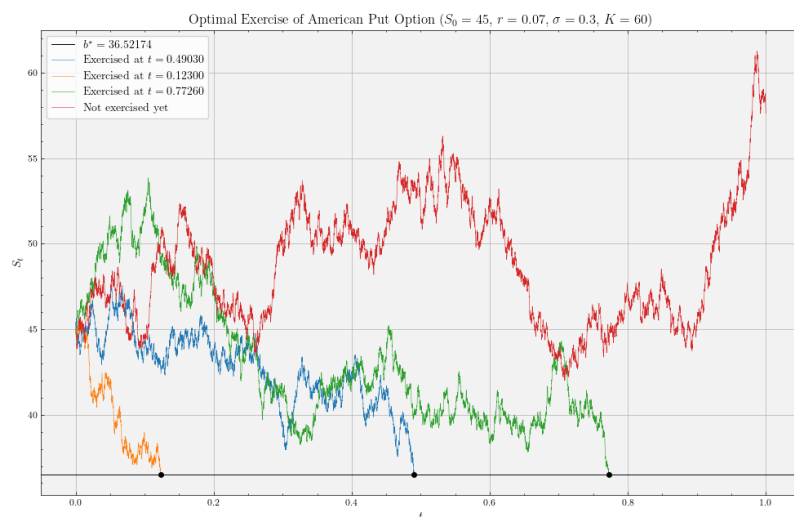
$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_x[\tau_{b^*} < \infty] &= \mathbb{Q}\left[\inf_{t \geq 0} xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t} \leq b^*\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[\inf_{t \geq 0} \left((r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right) \leq \ln \frac{b^*}{x}\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[\sup_{t \geq 0} \left(B_t - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t\right) \geq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{x}{b^*}\right] \\ &= e^{-2\left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\frac{1}{\sigma} \ln \frac{x}{b^*}} \\ &= \left(\frac{b^*}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \end{aligned}$$

όπου στη τρίτη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε ότι $B_t \stackrel{d}{=} -B_t$. ■

Δίνουμε πιο κάτω, μερικά σχήματα για όσα αναφέραμε. Στο σχήμα 6.1, βλέπουμε τη τιμολόγηση του αέναου Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης συναρτήσει της αρχικής τιμής της μετοχής. Έπειτα, στο σχήμα 6.2, βλέπουμε τη βέλτιστη άσκηση του δικαιώματος, για μερικές τροχιές της μετοχής (μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 1$).



Σχήμα 6.1: Τιμολόγηση του αέναου Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.



Σχήμα 6.2: Βέλτιστη άσκηση του αέναου Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

6.2.2 Πεπερασμένος χρονικός ορίζοντας

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα 6.2.1, που δώσαμε στην αρχή της ενότητας:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}_{t,x} [e^{-r\tau} (K - S_{t+\tau})^+]$$

Μέχρι στιγμής, δεν έχουμε κάποια αναλυτική έκφραση (η οποία υπολογίζεται άμεσα) για τη λύση του πιο πάνω. Συνεπώς, θα αρκεστούμε στην αριθμητική επίλυσή του. Πρώτα όμως, θα παρουσιάσουμε μερικά ποιοτικά αποτελέσματα.

Παρατήρηση 6.2.3. Όπως εξηγήσαμε στο τέλος του κεφαλαίου 4, στο παρόν πλαίσιο χρησιμοποιούμε τη διαδικασία $Z = (t, S)$. Εύκολα βλέπουμε ότι, ο χαρακτηριστικός τελεστής της, έχει τη μορφή:

$$\mathcal{A}_Z = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}_S$$

Δίνουμε πιο κάτω, έναν άμεσο χαρακτηρισμό για τη συνάρτηση αξίας.

Λήμμα 6.2.1. Η απεικόνιση $[0, T] \ni t \mapsto V(t, x)$ είναι φθίνουσα. Επιπλέον, ισχύει η τελική συνθήκη $V(T, x) = G(x) = (K - x)^+$.

Απόδειξη. Έστω δυο χρόνοι $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Τότε:

$$\begin{aligned} V(t_1, x) &= \sup_{0 \leq \tau \leq T-t_1} \mathbb{E}[e^{-r\tau} (K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &\geq \sup_{0 \leq \tau \leq T-t_2} \mathbb{E}[e^{-r\tau} (K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &= V(t_2, x) \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα, ισχύει διότι το σύνολο των χρόνων διακοπής με τιμές στο $[0, T-t_2]$, είναι υποσύνολο του αντίστοιχου συνόλου με τιμές στο $[0, T-t_1]$.

Η τελική συνθήκη έπεται άμεσα από τον ορισμό του προβλήματος 6.2.1. Για $t = T$, ο μοναδικός διαθέσιμος χρόνος διακοπής είναι ο $\tau \equiv 0$. Επομένως, ισχύει η ζητούμενη ισότητα $V(T, x) = (K - x)^+ = G(x)$. ■

Παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση κέρδους G είναι συνεχής, καθώς και ότι ο χρόνος διακοπής $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι πεπερασμένος, λόγω της τελικής συνθήκης $V(T, x) = G(x)$. Άρα, αν δείξουμε ότι η V είναι lsc, τότε λόγω της πρότασης 4.2.2, το πρόβλημα 6.2.1 θα έχει λύση. Το ερχόμενο λήμμα, μας δίνει ακριβώς αυτό.

Λήμμα 6.2.2. Η απεικόνιση $[0, T] \times (0, \infty) \ni (t, x) \mapsto V(t, x)$ είναι lsc.

Απόδειξη. Έστω ένας χρόνος διακοπής $0 \leq \tau \leq T$ και ένα αρχικό σημείο $(t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)$. Ορίζουμε τώρα, τη συνάρτηση:

$$u(t, x, \tau) = e^{-r\tau \wedge (T-t)} (K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau \wedge (T-t) + \sigma B_{\tau \wedge (T-t)}})^+$$

Η συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης, της συνάρτησης κέρδους $G(x) = (K - x)^+$ και της κίνησης Brown, μας δίνουν ότι η απεικόνιση $(t, x) \mapsto u(t, x, \tau)$ είναι συνεχής, για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \tau \leq T$.

Επιπλέον, είναι προφανές ότι $|u(t, x, \tau)| \leq K$. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, έπεται ότι και η απεικόνιση $(t, x) \mapsto \mathbb{E}_{t,x}[u(t, x, \tau)]$ είναι συνεχής, για κάθε χρόνο διακοπής $0 \leq \tau \leq T$.

Με βάση τα πιο πάνω, η συνάρτηση αξίας $V(t, x)$ γράφεται ισοδύναμα ως⁷:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_{t,x}[u(t, x, \tau)]$$

Άρα, η απεικόνιση $(t, x) \mapsto V(t, x)$ είναι (τουλάχιστον) lsc, ως supremum συνεχών συναρτήσεων. ■

Οπότε, η πρόταση 4.2.2 μας δίνει ότι, ο χρόνος εισόδου $\tau_{\mathcal{D}}$ είναι βέλτιστος. Θυμίζουμε ότι, τα σύνολα συνέχειας και διακοπής έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty) : V(t, x) > (K - x)^+\} \\ \mathcal{D} &= \{(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty) : V(t, x) = (K - x)^+\} \cup \{T\} \times (0, \infty) \end{aligned}$$

Θα δώσουμε τώρα, μια σειρά από ποιοτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση αξίας. Τα αποτελέσματα αυτά, θα μας οδηγήσουν σε μια εναλλακτική μορφή του συνόλου συνέχειας, η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί άμεσα στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου.

Λήμμα 6.2.3. *Ισχύουν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:*

- (i) Η απεικόνιση $(0, \infty) \ni x \mapsto V(t, x)$ είναι κυρτή (και κατά συνέπεια συνεχής)
- (ii) Κάθε σημείο $(t, x) \in [0, T) \times [K, \infty)$ ανήκει στο σύνολο συνέχειας \mathcal{C}

Απόδειξη.

Ισχυρισμός (i)

Έστω μια χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, $x > 0$ και ένας χρόνος διακοπής $0 \leq \tau \leq T - t$. Τότε, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$u(x, \tau) = e^{-r\tau} (K - xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+$$

Με απλή άλγεβρα (χρησιμοποιώντας και την ανισότητα $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$) δείχνουμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto u(x, \tau)$ είναι κυρτή. Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έπεται ότι και η απεικόνιση $x \mapsto \mathbb{E}_{t,x}[u(x, \tau)]$ είναι κυρτή.

Με βάση τα πιο πάνω, η συνάρτηση αξίας $V(t, x)$ γράφεται και ως:

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_{t,x}[u(t, \tau)]$$

Άρα, η απεικόνιση $x \mapsto V(t, x)$ είναι κυρτή, ως supremum κυρτών συναρτήσεων. Επιπλέον, ως κυρτή και φραγμένη σε ανοιχτό διάστημα, είναι και συνεχής.

⁷Εύκολα βλέπουμε ότι, τα σύνολα $\{\tau \wedge (T - t) : 0 \leq \tau \leq T\} = \{\tau : 0 \leq \tau \leq T - t\}$.

Ισχυρισμός (ii)

Έστω κάποιο σημείο $(t, x) \in [0, T) \times [K, \infty)$. Για $0 < \epsilon < K$, ορίζουμε τον:

$$\tau_\epsilon = \inf\{0 \leq s \leq T - t : S_{t+s} \leq K - \epsilon\}$$

Ο τ_ϵ είναι χρόνος διακοπής, καθώς το σύνολο $[0, K - \epsilon]$ είναι κλειστό και η διαδικασία $(S_{t+s})_{0 \leq s \leq T-t}$ συνεχής.

Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathbb{P}_{t,x}[0 < \tau_\epsilon < T - t] > 0$ ($B_{t+s} \sim N(0, t + s)$). Άρα, ισχύει ότι $V(t, x) \geq \mathbb{E}_{t,x}[e^{-r\tau_\epsilon}(K - S_{t+\tau_\epsilon})^+] > 0 = G(t, x)$. Συνεπώς, το σημείο $(t, x) \in \mathcal{C}$. ■

Λόγω του ισχυρισμού (ii) στο πιο πάνω λήμμα, έχουμε ότι τα σύνολα συνέχειας και διακοπής γράφονται και ως:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty) : V(t, x) + x > K\} \\ \mathcal{D} &= \{(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty) : V(t, x) + x = K\} \cup \{T\} \times (0, \infty) \end{aligned}$$

Από τον ισχυρισμό (i), παίρνουμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto V(t, x) + x$ είναι κυρτή και συνεχής, ως άθροισμα κυρτών και συνεχών. Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$K \leq (K - x)^+ + x \leq V(t, x) + x \leq K + x$$

Παίρνοντας όρια καθώς το $x \rightarrow 0$, έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0}(V(t, x) + x) = K$. Τα τελευταία δυο σχόλια, μας δίνουν ότι η απεικόνιση $x \mapsto V(t, x) + x$ είναι αύξουσα.

Η πιο πάνω παρατήρηση μας υποδεικνύει ότι, υπάρχει μια συνάρτηση (σύνορο) $b : [0, T) \rightarrow (0, K)$, τέτοια ώστε τα σύνολα συνέχειας και διακοπής:

$$\mathcal{C} = \{(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty) : x > b(t)\} \quad (6.2.5)$$

$$\mathcal{D} = \{(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty) : x \leq b(t)\} \cup \{T\} \times (0, \infty) \quad (6.2.6)$$

Παρατήρηση 6.2.4. Τα σύνολα \mathcal{C} και \mathcal{D} είναι μονοσήμαντα ορισμένα, βάσει της συνάρτησης b . Συνεπώς, στρέφουμε την προσοχή μας στη μελέτη της b .

Θα δούμε πιο κάτω ότι, ο ακριβής υπολογισμός της συνάρτησης b είναι πρακτικά αδύνατος. Για το λόγο αυτό, θα εστιάσουμε στην ποιοτική μελέτη της. Πρώτα όμως, θα παρουσιάσουμε μερικά επιπλέον αποτελέσματα για τη συνάρτηση αξίας V .

Λήμμα 6.2.4. *Ισχύουν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:*

(i) Η απεικόνιση $(0, \infty) \ni x \mapsto V(t, x)$ είναι φθίνουσα. Ειδικότερα, για $x \in (0, K]$ είναι γνησίως φθίνουσα

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} V(t, x) = K$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} V(t, x) = \infty$

(iii) Η απεικόνιση $[0, T) \times (0, \infty) \ni (t, x) \mapsto V(t, x)$ είναι συνεχής

(iv) Η απεικόνιση $\mathcal{C} \ni (t, x) \mapsto V(t, x)$ είναι $C^{1,2}$

Απόδειξη.

Ισχυρισμός (ii)

Για $t = T$, ο ισχυρισμός είναι προφανής, καθώς $V(T, x) = (K - x)^+$.

Έστω λοιπόν, κάποιο $0 \leq t < T$. Πιο πάνω, αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (V(t, x) + x) = K$. Οπότε, έπεται άμεσα ότι $\lim_{x \rightarrow 0} V(t, x) = K$.

Έστω τώρα, κάποιο $x \geq K (> b^*)$. Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}[e^{-r\tau} (K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &\leq \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[e^{-r\tau} (K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &= (K - b^*) \left(\frac{x}{b^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

Άρα, για $x \rightarrow \infty$ έχουμε ότι, $\lim_{x \rightarrow \infty} V(t, x) = 0$.

Ισχυρισμός (i)

Για $t = T$, η απόδειξη είναι τετριμμένη, καθώς $V(T, x) = (K - x)^+$. Πράγματι, αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $V(T, x_1) = (K - x_1)^+ \geq (K - x_2)^+ = V(T, x_2)$. Επιπλέον, αν $0 < x_1 < x_2 \leq K$, τότε $V(T, x_1) = K - x_1 > K - x_2 = V(T, x_2)$.

Έστω τώρα $0 \leq t < T$. Εύκολα βλέπουμε ότι, $0 \leq V(t, x) \leq K$. Ο ισχυρισμός (i) του λήμματος 6.2.3 και ο ισχυρισμός (ii) του λήμματος 6.2.4 μας δίνουν ότι, η απεικόνιση $(0, \infty) \ni x \mapsto V(t, x)$ είναι φθίνουσα. Επιπλέον, λόγω του ότι $V(t, x) > 0$ για κάθε $x < K$, η απεικόνιση $(0, K] \ni x \mapsto V(t, x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Ισχυρισμός (iii)

Για κάθε $t \geq 0$, ορίζουμε τη διαδικασία $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} |B_s|$. Έστω τώρα $x > 0$ και $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Επιπλέον, έστω τ_1 ο βέλτιστος χρόνος του $V(t_1, x)$ και $\tau_2 = \tau_1 \wedge (T - t_2)$. Εύκολα βλέπουμε ότι, $\tau_1 \geq \tau_2$ και $\tau_1 - \tau_2 \leq t_2 - t_1$. Οπότε:

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(t_1, x) - V(t_2, x) \\ &\leq \mathbb{E}_x[e^{-r\tau_1} (K - S_{\tau_1})^+] - \underbrace{\mathbb{E}_x[e^{-r\tau_2} (K - S_{\tau_2})^+]}_{\text{ο } \tau_2 \text{ είναι sub-optimal}} \\ &\leq \mathbb{E}_x \left[e^{-r\tau_2} [(K - S_{\tau_1})^+ - (K - S_{\tau_2})^+] \right] \\ &\leq \mathbb{E}_x [e^{-r\tau_2} (S_{\tau_2} - S_{\tau_1})^+] \\ &= \mathbb{E}_x [e^{-r\tau_2} S_{\tau_2} (1 - e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(\tau_1-\tau_2)+\sigma(B_{\tau_1}-B_{\tau_2})})^+] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\underbrace{e^{-r\tau_2} S_{\tau_2}}_{\mathcal{F}_{\tau_2}\text{-μετρήσιμα}} \mathbb{E}_x [(1 - e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(\tau_1-\tau_2)+\sigma(B_{\tau_1}-B_{\tau_2})})^+ | \mathcal{F}_{\tau_2}] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}_x \left[e^{-r\tau_2} S_{\tau_2} \underbrace{\mathbb{E}_x \left[(1 - e^{-|r - \frac{\sigma^2}{2}|(t_2 - t_1) - \sigma|B_{\tau_1 - \tau_2}|})^+ \right]}_{B_{\tau_1 - \tau_2} \stackrel{d}{=} B_{\tau_1 - \tau_2} \perp \mathcal{F}_{\tau_2}} \right] \\
&= x \mathbb{E}_x \left[(1 - e^{-|r - \frac{\sigma^2}{2}|(t_2 - t_1) - \sigma|B_{\tau_1 - \tau_2}|})^+ \right] \\
&\leq x \mathbb{E}_x \left[(1 - e^{-|r - \frac{\sigma^2}{2}|(t_2 - t_1) - \sigma M_{t_2 - t_1}|})^+ \right]
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα, έπεται από το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής, καθώς η $(e^{-rt} S_t)_{t \geq 0}$ είναι \mathbb{Q}_x -martingale και ο τ_2 φραγμένος (από $T - t_2$).

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $h(t) = \mathbb{E}[(1 - e^{-|r - \frac{\sigma^2}{2}||t| - \sigma M_{|t|}})^+]$. Εύκολα βλέπουμε ότι, $h(0) = 0$, ενώ το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει, ότι είναι και συνεχής στο 0 (θυμίζουμε ότι η $(M_t)_{t \geq 0}$ είναι συνεχής).

Άρα, έστω $(t_0, x_0) \in [0, T] \times (0, \infty)$ και έστω $((t_n, x_n))_{n \geq 0}$ μια ακολουθία στον $[0, T] \times (0, \infty)$, τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, x_n) = (t_0, x_0)$. Η πιο πάνω ανισότητα και ο ισχυρισμός (i) του λήμματος 6.2.3, μας δίνουν ότι:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} |V(t_n, x_n) - V(t_0, x_0)| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |V(t_n, x_n) - V(t_0, x_n)| \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} |V(t_0, x_n) - V(t_0, x_0)| \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n h(t_n - t_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει η αρχή μεταφοράς (ισοδύναμα η $(t, x) \mapsto V(t, x)$ είναι συνεχής).

Ισχυρισμός (iv)

Η απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού, χρειάζεται μερικά κλασσικά αποτελέσματα από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η συζήτηση αυτή ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Οπότε, αποφεύγουμε να την παρουσιάσουμε. Για τις σχετικές λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στο [10], σελίδα 131. ■

Θα αποδείξουμε τώρα, έναν πρώτο ισχυρισμό για τη συνάρτηση b . Ειδικότερα, θα δείξουμε ότι είναι αύξουσα. Διαισθητικά, το αναμένουμε, καθώς όσο πλησιάζουμε στην ωρίμανση, τόσο πιο πιθανό να ασκήσουμε το παράγωγο για λιγότερο κέρδος.

Λήμμα 6.2.5. *Η συνάρτηση $b : [0, T] \rightarrow [0, K)$ είναι αύξουσα και τέτοια ώστε $b^* \leq b(t) < K$, για κάθε $t \in [0, T)$.*

Απόδειξη. Έστω $0 \leq t_1 < t_2 < T$. Από το λήμμα 6.2.1, παίρνουμε ότι:

$$K - b(t_1) = V(t_1, b(t_1)) \geq V(t_2, b(t_1)) \geq K - b(t_1)$$

Επομένως, έχουμε ότι $(t_2, b(t_1)) \in \mathcal{D}$ και κατά συνέπεια ότι $b(t_2) \geq b(t_1)$.

Έστω τώρα κάποιο $x \leq b^*$. Τότε, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} V(0, x) &= \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &\leq \sup_{0 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau})^+] \\ &= K - x \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι $(0, x) \in \mathcal{D}$. Άρα, για $x = b^*$ ισχύει ότι $b^* \leq b(0) \leq b(t)$.

Το γεγονός ότι, $b(t) < K$ για κάθε $t \in [0, T)$, έπεται άμεσα από τον ισχυρισμό (ii) του λήμματος 6.2.3. Πράγματι, αν για κάποιο $t \in [0, T)$ ισχύει ότι $b(t) \geq K$, τότε θα έχουμε ότι $(t, b(t)) \in \mathcal{C}$ (από λήμμα 6.2.3). Όμως, αυτό είναι άτοπο από τον ορισμό της συνάρτησης b (βλέπε σύνολα 6.2.5 και 6.2.6). ■

Προτού δείξουμε μερικούς επιπλέον χαρακτηρισμούς για τη συνάρτηση b , θα αποδείξουμε και το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.2.6. *Ισχύουν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:*

- (i) *Η απεικόνιση $x \mapsto V(t, x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $b(t)$, με $V_x = G_x$ (smooth fit)*
- (ii) *Η απεικόνιση $x \mapsto V(t, x)$ είναι C^1 , με $-1 \leq V_x(t, x) \leq 0$*

Απόδειξη.

Ισχυρισμός (i)

Έστω ένα σημείο $(t^*, x^*) \in [0, T) \times (0, \infty)$, τέτοιο ώστε $x^* = b(t^*) < K$. Λόγω του ότι η απεικόνιση $x \mapsto V(t^*, x)$ είναι κυρτή, η πλευρική παράγωγος $\frac{\partial^+ V}{\partial x}(t^*, x)$ υπάρχει για κάθε $x > 0$. Οπότε, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^+ V}{\partial x}(t^*, x^*) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{V(t^*, x^* + \epsilon) - V(t^*, x^*)}{\epsilon} \\ &\geq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{G(x^* + \epsilon) - G(x^*)}{\epsilon} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Έστω τώρα κάποιο $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $x^* + \epsilon < K$. Συμβολίζουμε με τ_ϵ , τον βέλτιστο χρόνο διακοπής του $V(t^*, x^* + \epsilon)$. Με απλή άλγεβρα, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} V(t^*, x^* + \epsilon) - V(t^*, x^*) &= \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}(K - (x^* + \epsilon)\Theta_\epsilon)^+] - \underbrace{\mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}(K - x^*)\Theta_\epsilon)^+]}_{\text{ο } \tau_\epsilon \text{ είναι sub-optimal}} \\ &\leq \mathbb{E}\left[e^{-r\tau_\epsilon}[(K - (x^* + \epsilon)\Theta_\epsilon)^+ - (K - x^*)\Theta_\epsilon)^+] \mathbf{1}_{\{(x^* + \epsilon)\Theta_\epsilon < K\}}\right] \\ &= -\epsilon \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon} \Theta_\epsilon \mathbf{1}_{\{(x^* + \epsilon)\Theta_\epsilon < K\}}] \end{aligned}$$

όπου $\Theta_\epsilon = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_\epsilon + \sigma B\tau_\epsilon}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι, $\tau_\epsilon \rightarrow 0$ κατά πιθανότητα, καθώς το $\epsilon \downarrow 0$. Πράγματι, έστω $\tau_{x^*} = \inf\{s \geq 0 : S_s \leq x^*\}$. Λόγω του ότι η b είναι αύξουσα, έχουμε ότι $\tau_\epsilon \leq \tau_{x^*}$ ($\mathbb{Q}_{t^*, x^* + \epsilon}$ -σβ), για κάθε $\epsilon > 0$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\liminf_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_{t^*, x^* + \epsilon}[e^{-r\tau_\epsilon}] \geq \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_{t^*, x^* + \epsilon}[e^{-r\tau_{x^*}}] = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(\frac{x^* + \epsilon}{x^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} = 1$$

όπου η πρώτη ισότητα, έπεται από την τιμολόγηση του αέναου δικαιώματος πώλησης.

Επομένως, έχουμε ότι $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}] = 1 = \mathbb{E}[e^{-r0}]$. Ισοδύναμα, ότι η ροπογεννήτρια της τ_ϵ , συγκλίνει στην ροπογεννήτρια της σταθεράς 0, καθώς το $\epsilon \downarrow 0$. Συνεπώς, η $\tau_\epsilon \rightarrow 0$ κατά κατανομή. Είναι γνωστό ότι, η κατά κατανομή σύγκλιση σε σταθερά, συνεπάγεται και σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Παίρνοντας όριο, καθώς το $\epsilon \downarrow 0$, στην ανισότητα που δείξαμε πιο πάνω, έχουμε ότι:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{V(t^*, x^* + \epsilon) - V(t^*, x^*)}{\epsilon} \leq -\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon} \Theta_\epsilon \mathbf{1}_{\{(x+\epsilon)\Theta_\epsilon < K\}}] = 1$$

όπου η εναλλαγή του ορίου, έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (και τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης και της κίνησης Brown).

Για το αριστερά πλευρικό όριο, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^- V}{\partial x}(t^*, x^*) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{V(t^*, x^*) - V(t^*, x^* - \epsilon)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{G(x^*) - G(x^* - \epsilon)}{\epsilon} \\ &= G'(x^*) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Επομένως, η απεικόνιση $x \mapsto V(t, x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $b(t)$, με $V_x = G_x$.

Ισχυρισμός (ii)

Έστω κάποιο $t^* \in [0, T)$. Για $x > b(t^*)$ (δηλαδή για $(t^*, x) \in \mathcal{C}$), το ζητούμενο έπεται από τον ισχυρισμό (iv) του λήμματος 6.2.4, ενώ για $x < b(t^*)$ έχουμε ότι $V(t, x) = G(x) \in C^1((0, b(t^*)))$.

Λόγω του προηγούμενου ισχυρισμού, απομένει να δείξουμε ότι $\lim_{x \uparrow b(t^*)} V_x(t^*, x) = \lim_{x \downarrow b(t^*)} V_x(t^*, x) = -1$. Το κάτω-όριο $\lim_{x \uparrow b(t^*)} V_x(t^*, x) = -1$, είναι προφανές καθώς $V(t, x) = K - x$, για κάθε $x < b(t^*)$. Άρα, απομένει να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x \downarrow b(t^*)} V_x(t^*, x) = -1$$

Ένα γνωστό αποτέλεσμα του απειροστικού λογισμού είναι ότι, λόγω του ότι η $x \mapsto V(t^*, x)$ είναι κυρτή, η απεικόνιση $x \mapsto \frac{\partial^+ V}{\partial x}(t^*, x)$ είναι δεξιά-συνεχής. Επιπλέον,

λόγω του ότι η $x \mapsto V(t^*, x)$ είναι παραγωγίσιμη, έχουμε ότι $V_x(t^*, x) = \frac{\partial^+ V}{\partial x}(t^*, x)$, για κάθε $x > 0$. Οι δυο αυτές παρατηρήσεις, μας δίνουν το άνω-όριο.

Θα δείξουμε τώρα ότι, $-1 \leq V_x(t^*, x) \leq 0$. Για $x \in (0, b(t^*)]$, το επιχείρημα είναι άμεσο διότι $V(t, x) = K - x$. Το γεγονός ότι, η $x \mapsto V(t^*, x)$ είναι φθίνουσα μας δίνει ότι, $V_x(t^*, x) \leq 0$. Επιπλέον, λόγω του ότι η $x \mapsto V_x(t^*, x)$ είναι συνεχής και η $x \mapsto V(t^*, x)$ είναι κυρτή (άρα έχει μονότονη παράγωγο), παίρνουμε ότι η $x \mapsto V_x(t^*, x)$ είναι αύξουσα και κατά συνέπεια το ζητούμενο. ■

Οπότε, είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Λήμμα 6.2.7. Η συνάρτηση b είναι συνεχής με $\lim_{t \uparrow T} b(t) = K$.

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι είναι δεξιά-συνεχής. Έστω $t \in [0, T)$. Λόγω του ότι η b είναι αύξουσα, το δεξιά-πλευρικό της όριο $b(t+)$ υπάρχει και είναι τέτοιο ώστε $b(t) \leq b(t+) < K$. Έστω τώρα, μια ακολουθία χρόνων $(t_n)_{n \geq 1}$, τέτοια ώστε $t_n \downarrow t$. Εξ ορισμού του \mathcal{D} , έχουμε ότι $(t_n, b(t_n)) \in \mathcal{D}$, για κάθε $n \geq 1$. Οπότε, ισχύει και ότι $(t, b(t+)) \in \mathcal{D}$, λόγω του ότι το \mathcal{D} είναι κλειστό. Από το λήμμα 6.2.5, παίρνουμε ότι:

$$0 \leq V(t, b(t+)) - V(t, b(t)) = (K - b(t+)) - (K - b(t)) = b(t) - b(t+) \leq 0$$

Άρα, έχουμε ότι $b(t) = b(t+)$ και κατά συνέπεια ότι η $t \mapsto b(t)$ είναι δεξιά-συνεχής.

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι και αριστερά-συνεχής. Έστω $t \in (0, T)$. Λόγω του ότι η b είναι αύξουσα, το αριστερά-πλευρικό της όριο $b(t-)$, υπάρχει και είναι τέτοιο ώστε $b(t-) \leq b(t) < K$. Έστω τώρα, μια ακολουθία χρόνων $(t_n)_{n \geq 1}$, τέτοια ώστε $t_n \uparrow t$. Λόγω του ότι το \mathcal{D} είναι κλειστό, έχουμε ότι $(t, b(t-)) \in \mathcal{D}$. Έστω επιπλέον ότι, $b(t-) < b(t)$. Θα δείξουμε ότι η τελευταία υπόθεση, οδηγεί σε άτοπο.

Έστω τώρα, $x^* = (b(t-) + b(t))/2$ και ένας χρόνος $t' < t$. Λόγω του ότι, η b είναι αύξουσα, έχουμε ότι:

$$b(t') \leq b(t-) < x^* < b(t) < K$$

Από την πιο πάνω σχέση, παίρνουμε ότι $(t, x^*) \in \mathcal{D}$ και $\{t'\} \times (b(t'), x^*) \subseteq \mathcal{C}$. Από τον ορισμό του συνόλου \mathcal{C} και από τον ισχυρισμό (i) του λήμματος 6.2.6, έχουμε ότι:

$$V(t', b(t')) - G(b(t')) = 0 \quad (6.2.7)$$

$$V_x(t', b(t')) - G_x(b(t')) = 0 \quad (6.2.8)$$

Ο ισχυρισμός (iv) του λήμματος 6.2.4, μας δίνει ότι για κάθε $x \in (b(t'), x^*)$:

$$\begin{aligned} V_{xx}(t', x) &= \frac{2}{\sigma^2 x^2} (rV(t', x) - V_t(t', x) - rxV_x(t', x)) \\ &\geq \frac{2r}{\sigma^2 x^2} V(t', x) \\ &\geq \frac{2r}{\sigma^2 x^2} G(x) \end{aligned}$$

$$\geq \frac{2r}{\sigma^2 x^2} (K - x^*) = \gamma > 0$$

όπου η πρώτη ανισότητα, έπεται από το ότι οι απεικονίσεις $x \mapsto V(t, x)$ και $t \mapsto V(t, x)$, είναι φθίνουσες.

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω, τις σχέσεις 6.2.7-6.2.8 και το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} V(t', x^*) - G(x^*) &= V(t', x^*) - G(x^*) - (V(t', b(t')) - G(b(t'))) \\ &= \int_{b(t')}^{x^*} (V_x(t', y) - G_x(y)) dy \\ &= \int_{b(t')}^{x^*} \left((V_x(t', y) - G_x(y)) - (V_x(t', b(t')) - G_x(b(t'))) \right) dy \\ &= \int_{b(t')}^{x^*} \int_{b(t')}^y \underbrace{(V_{xx}(t', z) - G_{xx}(z))}_{\geq \gamma} dz dy \\ &\geq \int_{b(t')}^{x^*} \int_{b(t')}^y \gamma dz dy \\ &= \gamma \frac{(x^* - b(t'))^2}{2} \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο στην πιο πάνω, καθώς το $t' \uparrow t$, βλέπουμε ότι:

$$V(t, x^*) - G(x^*) \geq \gamma \frac{(x^* - b(t-))^2}{2} > 0$$

όπου επικαλούμαστε τη συνέχεια της V .

Άρα, έχουμε ότι το σημείο $(t, x^*) \in \mathcal{C}$. Όμως, δείξαμε πιο πάνω ότι $(t, x^*) \in \mathcal{D}$, καταλήγοντας έτσι στη ζητούμενη αντίφαση. Επομένως, έχουμε ότι $b(t) = b(t-)$ και κατά συνέπεια ότι η $t \mapsto b(t)$ είναι αριστερά-συνεχής.

Η απόδειξη του ότι $\lim_{t \uparrow T} b(t) = K$, είναι όμοια με την πιο πάνω. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την απόδειξη της αριστερά-συνέχειας, επιλέγοντας ως $t = T$ και υποθέτοντας ότι $b(T) < K$, οδηγούμαστε στη σχέση $V(T, x^*) - G(x^*) > 0$. Όμως, η σχέση αυτή οδηγεί σε άτοπο, λόγω της τελικής συνθήκης $V(T, x) = G(x)$. ■

Παρατήρηση 6.2.5. Από το πιο πάνω *λήμμα* έπεται ότι, το ελεύθερο σύνορο του προβλήματος 6.2.1, έχει τη μορφή $\partial \mathcal{C} = \{(t, b(t)) : t \in [0, T]\}$.

Για λόγους πληρότητας, δίνουμε και τον ακόλουθο χαρακτηρισμό της συνάρτησης b , παραλείποντας όμως τη σχετική απόδειξη.

Λήμμα 6.2.8. Η απεικόνιση $t \mapsto b(t)$ είναι κυρτή.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του πιο πάνω, παραπέμπουμε στο [23]. ■

Θα δούμε τώρα, πως μπορούμε να αξιολογήσουμε τα πιο πάνω αποτελέσματα, ώστε να υπολογίσουμε τη ζητούμενη συνάρτηση αξίας. Ακολουθώντας τον συλλογισμό του κεφαλαίου 5, βλέπουμε ότι η συνάρτηση V ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} V_t + \mathcal{A}_S V &= rV && \text{στο } \mathcal{C} \\ V(t, x) &= K - x && \text{για } x = b(t) \quad (\text{continuous fit}) \\ V_x(t, x) &= -1 && \text{για } x = b(t) \quad (\text{smooth fit}) \\ V(t, x) &> G(x) && \text{στο } \mathcal{C} \\ V(t, x) &= G(x) && \text{στο } \mathcal{D} \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Σε αντίθεση με την περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τη διαφορική εξίσωση, διότι δεν έχουμε κάποια αναλυτική έκφραση για το σύνορο. Παρ' όλ' αυτά, θα παρουσιάσουμε δύο εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης του προβλήματος, οι οποίες παρακάμπτουν τον περιορισμό αυτό.

Η πρώτη μέθοδος, στηρίζεται στην έννοια του **γραμμικού συμπληρωματικού προβλήματος** (linear complementary problem). Λόγω του ότι, τα σύνολα \mathcal{C} και \mathcal{D} είναι συμπληρωματικά, οι σχέσεις 6.2.9 συνεπάγονται το πιο κάτω πρόβλημα:

$$\begin{aligned} (V_t + \mathcal{A}_S V - rV)(V - G) &= 0 \\ V - G &\geq 0 \\ (V_t + \mathcal{A}_S V - rV) &\leq 0 \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Το πρόβλημα 6.2.10, λέγεται **πρόβλημα μεταβολικών ανισοτήτων** (variational inequalities). Το σημαντικό του πλεονέκτημα είναι ότι, είναι ανεξάρτητο του άγνωστου χωρίου \mathcal{C} . Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αξίας V , επιλύοντας (αριθμητικά) το εν λόγω πρόβλημα. Επιπλέον, μπορούμε να ανακτήσουμε και το άγνωστο χωρίο \mathcal{C} , ως τα σημεία του χώρου όπου η V είναι μεγαλύτερη της G .

Η δεύτερη προσέγγιση, στηρίζεται στην έννοια του **προνομίου πρόωρης άσκησης** (early exercise premium). Η γενικευμένη φόρμουλα του Itô (βλέπε απόδειξη του θεωρήματος 6.2.1), μας δίνει ότι:

$$\begin{aligned} e^{-rs}V(t+s, S_{t+s}) &= V(t, x) + \int_0^s e^{-ru}(V_t + \mathcal{A}_S V - rV)(t+u, S_{t+u})\mathbb{1}_{\{S_{t+u} \neq b(t+u)\}}du \\ &\quad + \int_0^u e^{-ru}\sigma S_{t+u}V_x(t+u, S_{t+u})dB_u \\ &= V(t, x) - \int_0^s e^{-ru}rK\mathbb{1}_{\{S_{t+u} < b(t+u)\}}du \\ &\quad + \int_0^u e^{-ru}\sigma S_{t+u}V_x(t+u, S_{t+u})dB_u \end{aligned}$$

όπου το στοχαστικό ολοκλήρωμα, είναι $\mathbb{Q}_{t,x}$ -martingale καθώς $|V_x(t, x)| \leq 1$ (βλέπε ισχυρισμό (ii) του λήμματος 6.2.6).

Παίρνοντας μέσες τιμές ως προς το μέτρο $\mathbb{Q}_{t,x}$, εναλλάσσοντας τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini (οι υπό ολοκλήρωση ποσότητες είναι μη αρν-

ητικές) και θέτοντας $s = T - t$, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \mathbb{E}_{t,x}[e^{-r(T-t)}V(T, S_T)] + rK \int_0^{T-t} e^{-ru} \mathbb{P}_{t,x}[S_{t+u} < b(t+u)] du \\ &= \mathbb{E}_{t,x}[e^{-r(T-t)}(K - S_T)^+] + rK \int_0^{T-t} e^{-ru} \mathbb{P}_{t,x}[S_{t+u} < b(t+u)] du \quad (6.2.11) \end{aligned}$$

Η σχέση 6.2.11 ονομάζεται **αναπαράσταση προνομίου πρόωρης άσκησης** της συνάρτησης αξίας V . Η ονομασία αυτή οφείλεται στο ότι, ο πρώτος όρος είναι η τιμολόγηση του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε τον δεύτερο όρο, ως το προνόμιο που πληρώνει ο αγοραστής για να αποκτήσει την Αμερικανική εκδοχή του δικαιώματος.

Γνωρίζουμε ότι, η τιμολόγηση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι η:

$$\mathbb{E}_{t,x}[e^{-r(T-t)}(K - S_T)^+] = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t, x)) - xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_1(t, x))$$

όπου $d_{1,2}(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln \frac{xe^{r(T-t)}}{K} \pm \sigma\sqrt{T-t}$.

Επιπλέον, η πιθανότητα εντός του ολοκληρώματος ισούται με:

$$\mathbb{P}_{t,x}[S_{t+u} < b(t+u)] = \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{u}}\left(\ln \frac{b(t+u)}{x} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)\right)$$

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω στη σχέση 6.2.11, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t, x)) - xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_1(t, x)) \\ &\quad + rK \int_0^{T-t} \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{u}}\left(\ln \frac{b(t+u)}{x} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)\right) du \quad (6.2.12) \end{aligned}$$

Επομένως, αν έχουμε υπολογίσει με κάποιο τρόπο το σύνορο $t \mapsto b(t)$, τότε η σχέση 6.2.12 μας δίνει τη ζητούμενη τιμολόγηση $V(t, x)$. Οπότε, απομένει να βρούμε μια σχέση, μέσω της οποίας θα υπολογίσουμε το σύνορο b .

Θέτοντας $x = b(t)$ στην εξίσωση 6.2.12, παίρνουμε την ακόλουθη μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\begin{aligned} K - b(t) &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t, b(t))) - xe^{-r(T-t)}\Phi(-d_1(t, b(t))) \\ &\quad + rK \int_0^{T-t} e^{-ru} \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{u}}\left(\ln \frac{b(t+u)}{b(t)} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)\right) du \quad (6.2.13) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0, T]$.

Η σχέση 6.2.13 ονομάζεται **εξίσωση ελευθέρου συνόρου**. Άρα, η ιδέα της μεθόδου είναι, να υπολογίσουμε το σύνορο $t \mapsto b(t)$ μέσω της σχέσης 6.2.13 και έπειτα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αξίας $V(t, x)$, χρησιμοποιώντας τη σχέση 6.2.12.

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό, δίνοντας το σχετικό θεώρημα που μας εγγυάται ότι, η λύση της εξίσωσης 6.2.13 είναι πράγματι το ζητούμενο σύνορο.

Θεώρημα 6.2.2. *Το σύνορο άσκησης του προβλήματος 6.2.1, μπορεί να επιλεγεί ως η μοναδική λύση της εξίσωσης ελευθέρου συνόρου 6.2.13, στην κλάση των αυξουσών συναρτήσεων $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, με $0 < c(t) < K$ για κάθε $t \in [0, T]$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του πιο πάνω, παραπέμπουμε στο θεώρημα 25.3 του [10], σελίδα 386. ■

7

Αριθμητική Επίλυση

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση του προβλήματος 6.2.1, δηλαδή με την προσέγγιση της τιμολόγησης του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μια επισκόπηση από διάφορες μεθόδους που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Συνεπώς, δεν θα ασχοληθούμε με τη θεωρητική τεκμηρίωσή τους. Σημειώνουμε ότι, όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε πιο κάτω, προέρχονται από το ίδιο λειτουργικό σύστημα.

7.1 Διακριτοποίηση χρόνου

Η πρώτη προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε, αξιοποιεί το αναδρομικό σχήμα της προς τα πίσω επαγωγής (βλέπε σχήμα 3.1.4-3.1.5). Η ιδέα είναι, να διακριτοποιήσουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$, προσεγγίζοντας έτσι το αρχικό πρόβλημα με ένα αντίστοιχο πρόβλημα διακριτού χρόνου. Έπειτα, επιλύοντας το διακριτό πρόβλημα με προς τα πίσω επαγωγή, καταλήγουμε σε μια προσέγγιση της ζητούμενης τιμολόγησης. Προφανώς, για να έχει νόημα η πιο πάνω διαδικασία, θέλουμε όσο πιο πυκνή γίνεται η διαμέριση, τόσο πιο ακριβής να είναι η προσέγγιση.

Ειδικότερα, για $N \geq 0$, παίρνουμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$, έστω $\Pi_N = \{t_1^N, t_2^N, \dots, t_N^N\}$, τέτοια ώστε $\Pi_N \rightarrow \Pi$ καθώς το $N \rightarrow \infty$, όπου το Π είναι πυκνό στο $[0, T]$. Εύκολα βλέπουμε ότι, μια τέτοια ακολουθία υποσυνόλων προκύπτει διαμερίζοντας ομοιόμορφα το $[0, T]$, με λεπτότητα $\frac{T}{N}$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής στη διακριτή ακολουθία $(G_{t_i^N})_{1 \leq i \leq N}$, οδηγούμαστε σε μια προσέγγιση της ζητούμενης τιμολόγησης. Αναμένουμε ότι, καθώς το $N \rightarrow \infty$, η προσέγγιση γίνεται όλο και καλύτερη. Ένα τελευταίο σχόλιο είναι ότι, κάθε συνεχής χρόνος διακοπής τ μπορεί να γραφτεί ως το όριο μιας ακολουθίας διακριτών χρόνων διακοπής, έστω $\tau_N = \sum_{i=1}^N t_i^N \mathbb{1}_{\{t_{i-1}^N \leq \tau < t_i^N\}}$, καθώς το $N \rightarrow \infty$.

Παρατήρηση 7.1.1. Στο κεφάλαιο αυτό, συμβολίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές S_n^N (που κατασκευάζονται από την προς τα πίσω επαγωγή) με V_n , ώστε να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση με την αξία της μετοχής, την οποία συμβολίζουμε με S_n . Στις εν λόγω ακολουθίες, ο χρονικός δείκτης n αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t_n^N .

Οπότε, έστω μια ομοιόμορφη διαμέριση του $[0, T]$. Υπολογίζουμε τη τιμολόγηση του παραγώγου μέσω του σχήματος $V_n = \max\{G_n, \mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}$. Το κεντρικό ερώτημα είναι, πως υπολογίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή στο δεξί μέρος. Δυο συνήθεις προσεγγίσεις είναι, είτε να υποθέσουμε κάποιο υπόδειγμα για την αξία της μετοχής, τέτοιο ώστε να υπολογίζεται αναλυτικά η μέση τιμή, είτε να την προσεγγίσουμε αριθμητικά, χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις της γεωμετρικής κίνησης Brown.

Στις ερχόμενες υποενότητες, θα ασχοληθούμε με δυο τέτοιες μεθόδους. Το υπόδειγμα Cox-Ross-Rubenstein αποτελεί ένα διακριτό μοντέλο για την αξία της μετοχής, στο οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τη δεσμευμένη μέση τιμή. Στη μέθοδο Longstaff-Schwartz, προσεγγίζουμε την εν λόγω μέση τιμή προσαρμόζοντας μια γραμμική παλινδρόμηση, χρησιμοποιώντας προσομοιωμένες τροχιές του υποδείγματος Black & Scholes.

7.1.1 Υπόδειγμα Cox-Ross-Rubenstein

Η πρώτη μέθοδος που θα παρουσιάσουμε, στηρίζεται στο υπόδειγμα Cox-Ross-Rubenstein (CRR). Το υπόδειγμα CRR, είναι ένα από τα κλασσικά υποδείγματα της μαθηματικής χρηματοοικονομίας, για την περίπτωση του διακριτού χρόνου.

Ειδικότερα, θεωρούμε ότι το χρονικό διάστημα $[0, T]$ υποδιαιρείται σε N χρονικές στιγμές, τις οποίες ονομάζουμε περιόδους. Υποθέτουμε ότι, ανάμεσα σε δυο διαδοχικές περιόδους, υπάρχουν ακριβώς δυο δυνατές εκβάσεις. Είτε να αυξηθεί η τιμή της μετοχής κατά $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, είτε να μειωθεί κατά $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = \frac{1}{u}$, όπου $\delta t = \frac{T}{N}$ η λεπτότητα της διαμέρισης. Για το λόγο αυτό, το υπόδειγμα CRR λέγεται και διωνυμικό υπόδειγμα πολλαπλών περιόδων (binomial lattice).

Επομένως, στην περίοδο $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ οι δυνατές τιμές της μετοχής είναι:

$$S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, i^1$$

όπου S_0 η αρχική τιμή της μετοχής, την οποία θεωρούμε γνωστή.

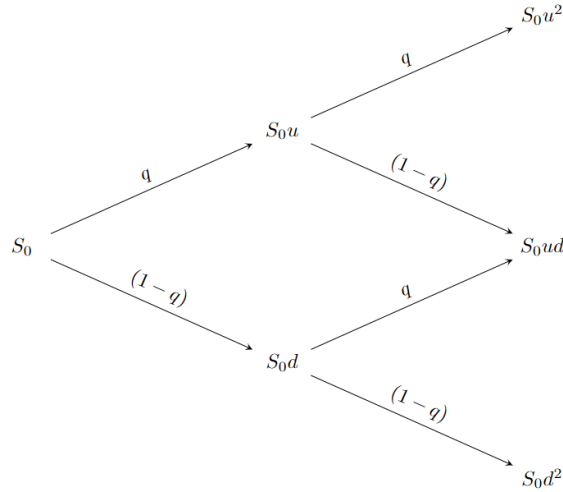
Από την αρχή της μη επιτηδειότητας παίρνουμε ότι, το αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας \mathbb{Q} είναι τέτοιο ώστε, η τιμή της μετοχής να αυξάνεται με πιθανότητα:

$$\mathbb{Q}[S_{i+1,j+1}|S_{i,j}] = q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$$

και αντίστοιχα να μειώνεται με πιθανότητα $\mathbb{Q}[S_{i+1,j}|S_{i,j}] = 1 - q$.

Στο σχήμα 7.1, βλέπουμε το διωνυμικό δέντρο που παράγεται από το υπόδειγμα CRR με $N = 2$ περιόδους.

¹Αρα, ο δείκτης j δείχνει πόσες φορές αυξήθηκε η τιμή της μετοχής, μέχρι την περίοδο i .



Σχήμα 7.1: Υπόδειγμα CRR δυο περιόδων.

Παρατήρηση 7.1.2. *Εύκολα βλέπουμε ότι, στο γενικό υπόδειγμα CRR με N περιόδους, υπάρχουν συνολικά $1 + 2 + \dots + (N + 1) = \mathcal{O}(N^2)$ καταστάσεις.*

Συνεπώς, ο αριθμός των δυνατών τροχιών της αξίας της μετοχής είναι πεπερασμένος (σε αντίθεση με το υπόδειγμα Black & Scholes). Άρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ αναλυτικά. Σε κάθε κατάσταση του υποδείγματος, υπολογίζουμε τη διαδικασία κέρδους $(G_n)_{0 \leq n \leq N}$, μέσω της συνάρτησης αποπληρωμής του παραγώγου. Έπειτα, στην τελευταία περίοδο του υποδείγματος (δηλαδή στην ωρίμανση), η σχέση 3.1.4 μας δίνει την αξία του παραγώγου. Οπότε, για κάθε ενδιάμεση περίοδο (ξεκινώντας από την προτελευταία), η αξία του παραγώγου υπολογίζεται μέσω της αναδρομικής σχέσης 3.1.5. Δηλαδή, σε κάθε κατάσταση $S_{i,j}$, η αξία του παραγώγου ισούται με:

$$\begin{aligned} V_{i,j} &= \max\{(K - S_{i,j})^+, \mathbb{E}[e^{-r\delta t} V_{i+1} | \mathcal{F}_{i,j}]\} \\ &= \max\{(K - S_{i,j})^+, e^{-r\delta t} [qV_{i+1,j+1} + (1-q)V_{i+1,j}]\} \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας την πιο πάνω αναδρομή, οδηγούμαστε στη ζητούμενη τιμολόγηση V_0 .

Αξίζει να σημειωθεί ότι, ο πιο πάνω αλγόριθμος είναι ντετερμινιστικός. Συνεπώς, η ακρίβειά του εξαρτάται μόνο από το πλήθος των περιόδων που επιλέγουμε. Λόγω αυτού, συνηθίζεται στη βιβλιογραφία να χρησιμοποιούμε τη τιμολόγηση του υποδείγματος CRR, ως benchmark για την ακρίβεια μιας αριθμητικής μεθόδου. Παρ' όλα αυτά, οι περιορισμοί του είναι εμφανείς. Η αναδρομική του φύση απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ και χρόνο, ενώ η γενίκευσή του σε περισσότερα από ένα υποκείμενα προϊόντα ή σε τροχιοεξαρτώμενα παράγωγα², είναι πρακτικά αδύνατη.

²Για τροχιοεξαρτώμενο παράγωγο, το δέντρο του υποδείγματος είναι πλέον ένα πλήρες διωνυμικό δέντρο, με εκθετικό αριθμό καταστάσεων. Ειδικότερα, θα υπάρχουν συνολικά $2^0 + 2^1 + \dots + 2^N = 2^{N+1} - 1$ πιθανές καταστάσεις.

Για μια εκτενέστερη συζήτηση σχετικά με τον πιο πάνω αλγόριθμο, καθώς και για την απόδειξη της ορθότητάς του παραπέμπουμε στα [24, 25]. Για μια πιο κομψή υλοποίηση του αλγορίθμου, παραπέμπουμε στο [26].

Δίνουμε τώρα μια σειρά από αριθμητικά αποτελέσματα, για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων. Για κάθε συνδυασμό, τιμολογούμε το παράγωγο χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα CRR, για διάφορα πλήθη περιόδων. Στους πίνακες 7.1 και 7.2, βλέπουμε τη τιμολόγηση του παραγώγου, όταν η ωρίμανσή του είναι σε μισό και 2 έτη, αντίστοιχα. Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε φαίνεται στο παράρτημα A.3.

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα | | | |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|------------|------------|------------|
| r | σ | K | S_0 | $N = 100$ | $N = 1000$ | $N = 2000$ | $N = 5000$ |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 2.09214 | 2.09478 | 2.09492 | 2.09500 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 11.28269 | 11.28966 | 11.28921 | 11.28883 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 10.00000 | 10.00000 | 10.00000 | 10.00000 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 0.81364 | 0.81421 | 0.81429 | 0.81441 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 10.10819 | 10.11171 | 10.11033 | 10.11031 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 0.11552 | 9.09688 | 35.31086 | 228.79392 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 0.02310 | 1.81938 | 7.06217 | 45.75878 |

Πίνακας 7.1: Τιμολόγηση με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος).

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα | | | |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|------------|------------|------------|
| r | σ | K | S_0 | $N = 100$ | $N = 1000$ | $N = 2000$ | $N = 5000$ |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 3.47026 | 3.47497 | 3.47521 | 3.47535 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 13.76518 | 13.75717 | 13.75714 | 13.75708 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 10.17631 | 10.17839 | 10.17848 | 10.17844 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 1.92860 | 1.92634 | 1.92657 | 1.92678 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 14.58356 | 14.56983 | 14.56980 | 14.56912 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 0.09501 | 8.78632 | 35.37830 | 205.38450 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 0.01900 | 1.75726 | 7.07566 | 41.07690 |

Πίνακας 7.2: Τιμολόγηση με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη).

Παρατηρούμε ότι, και στις δυο περιπτώσεις φαίνεται να υπάρχει μια μορφή σύγκλισης, καθώς αυξάνεται το πλήθος των περιόδων N . Παράλληλα όμως, αυξάνεται και το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου. Βλέπουμε ότι, για πλήθος περιόδων $N = 5000$ χρειαστήκαμε σχεδόν 4 λεπτά³, για να τα τιμολογήσουμε μόλις 5 παράγωγα.

³Ο χρόνος εκτέλεσης είναι υποκειμενικός, καθώς εξαρτάται από το λειτουργικό μας σύστημα και την υλοποίηση του αλγορίθμου. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε την αύξηση στη τάξη μεγέθους του χρόνου εκτέλεσης, ως ένα αντικειμενικό μέτρο ποσοτικοποίησης του υπολογιστικού κόστους.

Το γεγονός αυτό, κάνει απαγορευτική τη χρήση του αλγορίθμου για παράγωγα με μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα, διότι τότε χρειαζόμαστε ακόμα μεγαλύτερο N για να έχουμε ικανοποιητικά λεπτή διαμέριση. Επιπλέον, είναι εμφανές ότι, για τροχειοζαρτώμενα παράγωγα και για παράγωγα με περισσότερα από ένα υποκείμενα προϊόντα, το υπολογιστικός κόστος είναι απαγορευτικό. Παρ' όλ' αυτά, θα χρησιμοποιήσουμε τη τιμολόγηση που υπολογίσαμε για $N = 5000$, ως benchmark για την ακρίβεια των υπόλοιπων μεθόδων που θα παρουσιάσουμε.

Ένα τελευταίο σχόλιο, αφορά την περίπτωση όπου, οι παράμετροι $(r, \sigma, K, S_0) = (0.03, 0.15, 65.00, 55.00)$. Όταν η ωρίμανση είναι σε μισό έτος, η τιμολόγηση είναι ίση με 10, δηλαδή είναι βέλτιστο να ασκήσουμε κατευθείαν το παράγωγο. Αυτό οφείλεται (εν μέρει) στο ότι, το υπόδειγμα έχει μικρή μεταβλητότητα. Επομένως, είναι λιγότερο πιθανό να μειωθεί ικανοποιητικά η τιμή της μετοχής, εντός μισού έτους. Όταν όμως, η ωρίμανση αυξηθεί στα 2 έτη, η τιμολόγηση διαφοροποιείται. Συνεπώς, η άμεση άσκηση του παραγώγου δεν είναι πλέον βέλτιστη.

7.1.2 Μέθοδος Longstaff-Schwartz

Η μέθοδος Longstaff-Schwartz ανήκει στη δεύτερη οικογένεια αλγορίθμων που αναφέραμε, όπου προσεγγίζουμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, χρησιμοποιώντας προσομοιωμένες τροχιές του υποδείγματος Black & Scholes. Το απλούστερο που μπορούμε να κάνουμε είναι, να χρησιμοποιήσουμε κάποια εκτιμήτρια Monte Carlo. Μια τέτοια επιλογή, οδηγεί στη μέθοδο τυχαίου δέντρου (random tree), την οποία αποφεύγουμε να παρουσιάσουμε λόγω του μεγάλου υπολογιστικού της κόστους. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στο [27].

Στη μέθοδο Longstaff-Schwartz, προσεγγίζουμε την ζητούμενη μέση τιμή προσαρμόζοντας μια γραμμική παλινδρόμηση. Ειδικότερα, έστω $(\psi_k)_{1 \leq k \leq m}$ μια οικογένεια από συναρτήσεις $\psi_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, τις οποίες ονομάζουμε συναρτήσεις βάσης. Υποθέτουμε ότι, η εν λόγω αναμενόμενη τιμή ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\mathbb{E}[V_{n+1}|S_n = x] = \sum_{k=1}^m \beta_{n,k} \psi_k(x) \quad (7.1.1)$$

Απομένει να εκτιμήσουμε τους άγνωστους συντελεστές $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq m}$, για κάθε $1 \leq n \leq N-1$. Η σχέση 7.1.1 είναι προφανώς μια (πολλαπλή) γραμμική παλινδρόμηση. Επομένως, μπορούμε να εκτιμήσουμε τους συντελεστές $\beta_n = (\beta_{n,1}, \beta_{n,2}, \dots, \beta_{n,m})^T$ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (ή με οποιοδήποτε άλλο αλγόριθμο εκπαίδευσης ενός πολλαπλού γραμμικού μοντέλου).

Η ιδέα του αλγορίθμου είναι η ακόλουθη. Ξεκινάμε με μια ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$, έστω $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Με βάση τη διαμέριση αυτή, προσομοιώνουμε b μονοπάτια του υποδείγματος Black & Scholes, τα οποία συμβολίζουμε με $(S_{i,n})_{0 \leq n \leq N}$, για κάθε $1 \leq i \leq b$. Έπειτα, επιλέγουμε τις συναρτήσεις βάσης. Η απλούστερη επιλογή είναι τα πολυώνυμα, δηλαδή $\psi_k(x) = x^{k-1}$. Η

επιλογή αυτή, συνήθως είναι ικανοποιητική, όμως εν γένει μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε βάση επιθυμούμε⁴.

Ο αλγόριθμος λειτουργεί αναδρομικά, ξεκινώντας από την ωρίμανση, όπου $\hat{V}_{i,N} = (K - S_{i,N})^+$ για κάθε $1 \leq i \leq b$ (βλέπε σχέση 3.1.4). Η σχέση 7.1.1 μας δίνει ότι:

$$\mathbb{E}[V_{n+1}|S_n = S_{i,n}] = \sum_{k=1}^m \beta_{n,k} \psi_k(S_{i,n})$$

για κάθε χρονική στιγμή $0 \leq n \leq N - 1$ και τροχιά $1 \leq i \leq b$.

Άρα, σε κάθε χρονική στιγμή $0 \leq n \leq N - 1$ έχουμε ως επεξηγηματικές μεταβλητές, το σύνολο $(\psi_1(S_{i,n}), \psi_2(S_{i,n}), \dots, \psi_m(S_{i,n}))$ και ως τιμή στόχο, την $\hat{V}_{i,n+1}$. Το σύνολο των τιμών αυτών (για κάθε τροχιά $1 \leq i \leq b$) αποτελεί το σύνολο εκπαίδευσης του μοντέλου, με βάση το οποίο εκτιμούμε τους συντελεστές β_n , για κάθε $1 \leq n \leq N - 1$.

Εστω ότι συμβολίζουμε με $\hat{\beta}_n$, την εκτίμηση των συντελεστών β_n . Τότε:

$$\hat{V}_{i,n} = \max\{(K - S_{i,n})^+, C_n(S_{i,n})\}$$

για κάθε τροχιά $1 \leq i \leq b$, όπου $C_n(x) = \sum_{k=1}^m \hat{\beta}_{n,k} \psi_k(x)$.

Συνεχίζουμε αναδρομικά για $n = N - 1, N - 2, \dots, 1$, καταλήγοντας στις εκτιμήσεις $(\hat{V}_{i,1})_{1 \leq i \leq b}$. Η εκτίμηση της ζητούμενης τιμολόγησης του παραγώγου δίνεται από:

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{b}(\hat{V}_{1,1} + \hat{V}_{2,1} + \dots + \hat{V}_{b,1})$$

Η διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω, λέγεται μέθοδος Monte Carlo ελαχίστων τετραγώνων (Least-Squares Monte Carlo). Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στην αρχική δημοσίευση [28]. Εμείς θα ακολουθήσουμε μια τροποποίησή της, που πρότειναν οι Longstaff και Schwartz, στο [29]. Οι μόνες διαφοροποιήσεις είναι ότι, στην εκτίμηση των συντελεστών β_n χρησιμοποιούμε μόνο τους in the money κόμβους $S_{i,n}$, δηλαδή για όσους $K - S_{i,n} > 0$. Επιπλέον, σε κάθε ενδιαμέση χρονική στιγμή $1 \leq n \leq N - 1$, η αξία του παραγώγου δίνεται από:

$$\hat{V}_{i,n} = \begin{cases} (K - S_{i,n})^+ & \text{αν } (K - S_{i,n})^+ \geq C_n(S_{i,n}) \\ e^{-r\delta t} \hat{V}_{i,n+1} & \text{αν } (K - S_{i,n})^+ < C_n(S_{i,n}) \end{cases}$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι, οι πιο πάνω τροποποιήσεις βελτιώνουν την ακρίβεια της μεθόδου.

Επισημαίνουμε ότι, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου είναι τυχαίο καθώς εξαρτάται από τις προσομοιώσεις της γεωμετρικής κίνησης Brown. Επομένως, για να έχουμε ένα αξιόπιστο αποτέλεσμα, για κάθε υπόδειγμα τρέχουμε 5 επαναλήψεις του αλγορίθμου, θεωρώντας ως τιμολόγηση τον μέσο όρο τους. Παράλληλα, υπολογίζουμε και το μέσο τετραγωνικό τους σφάλμα, ως ένα μέτρο διακύμανσης του αλγορίθμου.

⁴Μπορούμε να προσθέσουμε και τη συνάρτηση αποπληρωμής του παραγώγου στη βάση, δηλαδή $\psi_k(x) = (K - x)^+$ για κάποιο $1 \leq k \leq m$. Τα αριθμητικά αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι, η προσθήκη αυτή μπορεί να βελτιώσει την ακρίβεια του αλγορίθμου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, η ακρίβεια της μεθόδου εξαρτάται κυρίως από την επιλογή της βάσης και όχι από τις παραμέτρους b και N . Για μεγαλύτερα b και N , έχουμε μικρότερη διακύμανση στο αποτέλεσμα και σύγκλιση σε μια οριακή τιμή. Το πόσο καλή εκτίμηση αποτελεί το εν λόγω όριο, εξαρτάται από τη βάση που επιλέγουμε.

Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου, η βάση αποτελείται από πολυώνυμα μέχρι βαθμού p . Στους πίνακες 7.3 και 7.4, βλέπουμε τα σχετικά αποτελέσματα. Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε φαίνεται στο παράρτημα A.4.

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα | | | |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|----------|----------|----------|
| r | σ | K | S_0 | Στατιστικό | $p = 6$ | $p = 7$ | $p = 8$ |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | Τιμολόγηση | 2.09984 | 2.09929 | 2.09315 |
| | | | | RMSE | 0.00774 | 0.00917 | 0.00878 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | Τιμολόγηση | 11.30377 | 11.28206 | 11.29212 |
| | | | | RMSE | 0.02345 | 0.01629 | 0.03140 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | Τιμολόγηση | 9.99199 | 9.99176 | 9.99203 |
| | | | | RMSE | 0.00225 | 0.00237 | 0.00328 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | Τιμολόγηση | 0.81573 | 0.81594 | 0.81926 |
| | | | | RMSE | 0.00491 | 0.00288 | 0.00381 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | Τιμολόγηση | 10.11701 | 10.10679 | 10.11918 |
| | | | | RMSE | 0.03563 | 0.02378 | 0.03234 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 10.47954 | 11.03454 | 11.53719 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 0.41918 | 0.44138 | 0.46149 |

Πίνακας 7.3: Τιμολόγηση με τη μέθοδο Longstaff-Schwartz, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος).

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα | | | |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|----------|----------|----------|
| r | σ | K | S_0 | Στατιστικό | $p = 6$ | $p = 7$ | $p = 8$ |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | Τιμολόγηση | 3.46139 | 3.47341 | 3.48101 |
| | | | | RMSE | 0.01177 | 0.01789 | 0.00697 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | Τιμολόγηση | 13.74237 | 13.74437 | 13.74982 |
| | | | | RMSE | 0.02989 | 0.03332 | 0.02886 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | Τιμολόγηση | 10.18707 | 10.16302 | 10.17677 |
| | | | | RMSE | 0.01092 | 0.01329 | 0.01197 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | Τιμολόγηση | 1.93228 | 1.92477 | 1.91626 |
| | | | | RMSE | 0.00873 | 0.00773 | 0.00941 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | Τιμολόγηση | 14.55359 | 14.55203 | 14.58471 |
| | | | | RMSE | 0.03382 | 0.07054 | 0.04206 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 12.07634 | 12.01729 | 12.73771 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 0.48305 | 0.48069 | 0.50951 |

Πίνακας 7.4: Τιμολόγηση με τη μέθοδο Longstaff-Schwartz, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη).

Στους πίνακες 7.5 και 7.6, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου Longstaff-Schwartz (για $p = 8$) με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του υποδείγματος CRR.

| r | Παράμετροι | | | Αποτελέσματα | | |
|------------------------------|------------|--------|-------|--------------|----------|---------|
| | σ | K | S_0 | CRR | L-S | Σφάλμα |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 2.09500 | 2.09315 | 0.00185 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 11.28883 | 11.29212 | 0.00329 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 10.00000 | 9.99203 | 0.00797 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 0.81441 | 0.81926 | 0.00485 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 10.11031 | 10.11918 | 0.00887 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 45.75878 | 0.46149 | |

Πίνακας 7.5: Σύγκριση της μεθόδου Longstaff-Schwartz με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος).

| r | Παράμετροι | | | Αποτελέσματα | | |
|------------------------------|------------|--------|-------|--------------|----------|---------|
| | σ | K | S_0 | CRR | L-S | Σφάλμα |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 3.47535 | 3.48101 | 0.00566 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 13.75708 | 13.74982 | 0.00726 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 10.17844 | 10.17677 | 0.00167 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 1.92678 | 1.91626 | 0.01052 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 14.56912 | 14.58471 | 0.01559 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 41.07690 | 0.50951 | |

Πίνακας 7.6: Σύγκριση της μεθόδου Longstaff-Schwartz με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη).

Βλέπουμε ότι, το (απόλυτο) σφάλμα της μεθόδου Longstaff-Schwartz είναι της τάξης του 10^{-3} και 10^{-2} , για ωρίμανση σε $T = 0.5$ και $T = 2$ έτη αντίστοιχα. Επιπλέον, ο μέσος χρόνος εκτέλεσής της είναι πολύ λιγότερος. Η τεράστια μείωση στο υπολογιστικό κόστος, σε σχέση με τάξη του σφάλματος, κάνει τη μέθοδο Longstaff-Schwartz προτιμότερη σε πρακτικά σενάρια.

Θα μπορούσαμε να πειραματιστούμε και με τις συναρτήσεις βάσης, ώστε να αυξήσουμε την ακρίβεια της εκτίμησης. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να προσθέσουμε περισσότερες δυνάμεις της τιμής της μετοχή. Μια τέτοια προσθήκη, αυξάνει το κόστος υπολογισμού των συντελεστών $\hat{\beta}_n$, δηλαδή της επίλυσης του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων. Όμως, η αριθμητική επίλυσή του έχει μελετηθεί εκτενώς, με τις σύγχρονες μεθόδους να έχουν μικρό υπολογιστικό κόστος.

7.2 Πρόβλημα ελευθέρου συνόρου

Η δεύτερη προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε, στηρίζεται στα αποτελέσματα του κεφαλαίου 5. Θα παρουσιάσουμε δυο μεθόδους. Στην πρώτη μέθοδο, λύνουμε το πρόβλημα μεταβολικών ανισοτήτων 6.2.10, χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές. Στη δεύτερη, υπολογίζουμε το σύνορο άσκησης λύνοντας την εξίσωση ελευθέρου συνόρου 6.2.13 και έπειτα τιμολογούμε το παράγωγο μέσω της σχέσης 6.2.12.

7.2.1 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite differences), είναι μια από τις κλασικές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης. Στην υποσενότητα αυτή, θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εν λόγω μέθοδο, ώστε να λύσουμε το πρόβλημα μεταβολικών ανισοτήτων 6.2.10.

Θυμίζουμε ότι, η συνάρτηση αξίας V ικανοποιεί το πιο κάτω γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα⁵ (βλέπε πρόβλημα 6.2.10):

$$\begin{aligned} \left(V_t(t, x) + rxV_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2V_{xx}(t, x) - rV(t, x) \right) \left(V(t, x) - G(x) \right) &= 0 \\ V_t(t, x) + rxV_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2V_{xx}(t, x) - rV(t, x) &\leq 0 \\ V(t, x) - G(x) &\geq 0 \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

για κάθε $(t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)$.

Επιπλέον, ικανοποιεί και τις πιο κάτω αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} V(T, x) &= G(x) = (K - x)^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0} V(t, x) &= \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = K \\ \lim_{x \rightarrow \infty} V(t, x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Προτού προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος 7.2.1, θα εφαρμόσουμε μια αλλαγή μεταβλητών ώστε να το απλοποιήσουμε. Οπότε, έστω οι πιο κάτω μεταβλητές:

$$y = \ln \frac{x}{K} \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t) \quad q = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (7.2.3)$$

όπου y είναι η "αδιάστατη" αξία της μετοχής (log-moneyness) και τ ο (scaled) χρόνος που απομένει μέχρι την ωρίμανση.

Με βάση τις πιο πάνω, ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση αξίας:

$$u(\tau, y) = \frac{1}{K} e^{\frac{1}{2}(q-1)y + (\frac{1}{4}(q-1)^2 + q)\tau} V(t^{-1}(\tau), x^{-1}(y)) \quad (7.2.4)$$

⁵Ο χαρακτηρισμός του προβλήματος ως γραμμικό, οφείλεται στο ότι οι ποσότητες $V_t + rxV_x + \frac{1}{2}\sigma^2V_{xx} - rV$ και $V - G$ είναι γραμμικές συναρτήσεις του V .

Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές 7.2.3 και την καινούργια συνάρτηση αξίας 7.2.4, το πρόβλημα 7.2.1 γράφεται ως:

$$\begin{aligned} (u_\tau(\tau, y) - u_{yy}(\tau, y)) (u(\tau, y) - g(\tau, y)) &= 0 \\ u_\tau(\tau, y) - u_{yy}(\tau, y) &\geq 0 \\ u(\tau, y) - g(\tau, y) &\geq 0 \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

για κάθε $(\tau, y) \in [0, \tilde{T}] \times \mathbb{R}$, όπου $\tilde{T} = \frac{T\sigma^2}{2}$ ο νέος τελικός χρόνος και $g(\tau, y) = e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} (e^{\frac{1}{2}(q-1)y} - e^{\frac{1}{2}(q+1)y})^+$ η καινούργια συνάρτηση κέρδους.

Επιπλέον, οι συνθήκες 7.2.2 παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g(0, y) \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} u(\tau, y) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} g(\tau, y) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(\tau, y) &= \lim_{y \rightarrow \infty} g(\tau, y) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Το κύριο πλεονέκτημα της πιο πάνω αλλαγής μεταβλητών είναι ότι, η μερική διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον χαρακτηριστικό τελεστή της γεωμετρικής κίνησης Brown, ανάγεται στην κλασσική εξίσωση διάχυσης.

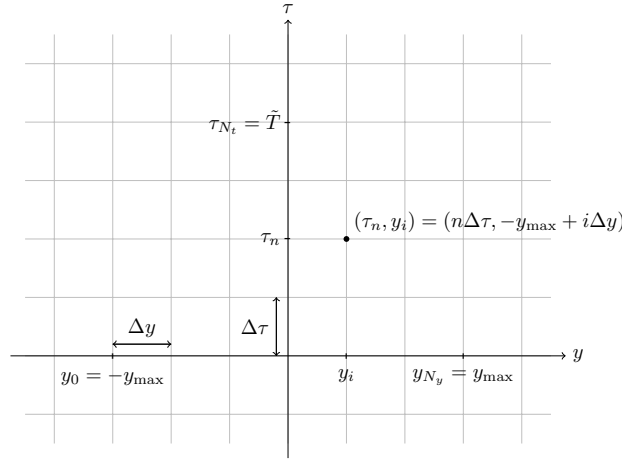
Θα δούμε τώρα, πως μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα 7.2.5 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Αρχικά, πρέπει να περιορίσουμε το χωρίο επίλυσης, ώστε να είναι φραγμένο. Οπότε, έστω μια επαρκώς μεγάλη τιμή y_{\max} , τέτοια ώστε το χωρίο επίλυσης να είναι το $[0, \tilde{T}] \times [-y_{\max}, y_{\max}]$. Το μέγεθος της τιμής αυτής, εξαρτάται από τη τιμή άσκησης K του παραγώγου. Για παράδειγμα, αν $K = 45$, τότε με $y_{\max} = 3$ τιμολογούμε το παράγωγο για τιμές της μετοχής στο εύρος $x \in [2.2404, 903.85]$ ⁶. Επομένως, το y_{\max} δεν χρειάζεται να είναι ιδιαίτερα μεγάλο, ώστε να τιμολογήσουμε το παράγωγο για λογικές τιμές της μετοχής⁷.

Ακολουθώντας, διακριτοποιούμε το χωρίο $[0, \tilde{T}] \times [-y_{\max}, y_{\max}]$. Έστω N_τ και N_y , οι πυκνότητες (ομοιόμορφης) διαμέρισης των διαστημάτων $[0, \tilde{T}]$ και $[-y_{\max}, y_{\max}]$ αντίστοιχα. Άρα, σχηματίζουμε ένα πλέγμα με $(N_\tau + 1) \times (N_y + 1)$ σημεία, όπου το χρονικό και χωρικό βήμα είναι $\Delta\tau = \frac{\tilde{T}}{N_\tau}$ και $\Delta y = \frac{2y_{\max}}{N_y}$ αντίστοιχα.

Βλέπουμε στο σχήμα 7.2, τη γενική μορφή του πιο πάνω πλέγματος. Κάθε σημείο του είναι της μορφής $(\tau_n, y_i) = (n\Delta\tau, -y_{\max} + i\Delta y)$, για κάποιο $n \in \{0, 1, \dots, N_\tau\}$ και $i \in \{0, 1, \dots, N_y\}$. Επιπλέον, από την κατασκευή του πλέγματος ισχύει ότι, $\tau_0 = 0$, $\tau_{N_\tau} = \tilde{T}$, $y_0 = -y_{\max}$ και $y_{N_y} = y_{\max}$.

⁶Το εύρος αυτό, προκύπτει εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό $x = Ke^y$, στο διάστημα $[-y_{\max}, y_{\max}] = [-3, 3]$.

⁷Για τιμές της μετοχής που δεν είναι "σπάνιες", δηλαδή που δεν συμβαίνουν με πολύ μικρή πιθανότητα.



Σχήμα 7.2: Διακριτοποίηση του χωρίου $[0, \tilde{T}] \times [-y_{\max}, y_{\max}]$.

Στα πιο κάτω, υιοθετούμε τους συμβολισμούς $u_{n,i} = u(\tau_n, y_i)$ και $g_{n,i} = g(\tau_n, y_i)$. Προσεγγίζουμε τις μερικές παραγώγους του προβλήματος 7.2.5, χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες πεπερασμένες διαφορές:

$$u_\tau(\tau_n, y_i) \approx \frac{u_{n+1,i} - u_{n,i}}{\Delta\tau}$$

$$u_{yy}(\tau_n, y_i) \approx (1 - \theta) \frac{u_{n,i+1} - 2u_{n,i} + u_{n,i-1}}{\Delta y^2} + \theta \frac{u_{n+1,i+1} - 2u_{n+1,i} + u_{n+1,i-1}}{\Delta y^2} \quad (7.2.7)$$

όπου $\theta \in [0, 1]$ ⁸.

Οι εξισώσεις 7.2.6, μας δίνουν τις ακόλουθες αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} u_{0,i} &= g_{0,i} & i &\in \{0, 1, \dots, N_y\} \\ u_{n,0} &= g_{n,0} & n &\in \{0, 1, \dots, N_\tau\} \\ u_{n,N_y} &= g_{n,N_y} & n &\in \{0, 1, \dots, N_\tau\} \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Εφαρμόζοντας το διακριτό σχήμα 7.2.7 στο πρόβλημα 7.2.5, παίρνουμε ότι:

$$-\alpha u_{n+1,i-1} + (1 + 2\alpha)u_{n+1,i} - \alpha u_{n+1,i+1} \geq \beta u_{n,i-1} + (1 - 2\beta)u_{n,i} + \beta u_{n,i+1}$$

όπου $\mu = \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2}$ (αριθμός Courant), $\alpha = \mu\theta$ και $\beta = (1 - \theta)\mu$.

Άρα, για κάθε χρονική στιγμή $n = 1, 2, \dots, N_\tau$, έχουμε ότι:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1,1} \\ u_{n+1,2} \\ \vdots \\ u_{n+1,N_y-2} \\ u_{n+1,N_y-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_{n+1}}$$

⁸Για $\theta = 0$ παίρνουμε την άμεση μέθοδο Euler, για $\theta = 1$ την έμμεση μέθοδο Euler και για $\theta = \frac{1}{2}$ τη μέθοδο Crank-Nicolson.

$$\geq \underbrace{\begin{pmatrix} 1-2\beta & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 1-2\beta & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta & 1-2\beta & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \beta & 1-2\beta \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \\ \vdots \\ u_{n,N_y-2} \\ u_{n,N_y-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta u_{n,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta u_{n,N_y} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_n} = \mathbf{d}_n$$

Συνεπώς, έχοντας υπολογίσει το διάνυσμα \mathbf{u}_n , υπολογίζουμε το \mathbf{u}_{n+1} επιλύοντας την πιο πάνω γραμμική ανισότητα. Η επαγωγή αυτή είναι καλά ορισμένη, λόγω της αρχικής συνθήκης $\mathbf{u}_0 = \mathbf{g}_0$, όπου $\mathbf{g}_n = (g_{n,1}, g_{n,2}, \dots, g_{n,N_y-1})^T$.

Όμοια, βλέπουμε ότι το πρόβλημα 7.2.5 έχει την ακόλουθη διακριτή μορφή:

$$\begin{aligned} (D\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{d}_n)(\mathbf{u}_n - \mathbf{g}_n) &= \mathbf{0} \\ D\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{d}_n &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_n - \mathbf{g}_n &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

για κάθε $n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1$.

Οπότε, σε κάθε χρονική στιγμή $n = 1, 2, \dots, N_\tau$, επιλύουμε ένα σύστημα από γραμμικές ανισότητες της μορφής:

$$\begin{aligned} (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(\mathbf{x} - \mathbf{c}) &= \mathbf{0} \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} - \mathbf{c} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι, το πιο πάνω σύστημα έχει μοναδική λύση όταν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (άρα και αντιστρέψιμος). Για τη σχετική απόδειξη, παραπέμπουμε στο [30]. Εύκολα βλέπουμε ότι, το διάνυσμα $\max\{A^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, όπου το maximum εφαρμόζεται κατά συνιστώσα, ικανοποιεί το ζητούμενο σύστημα. Επομένως, αρκεί να βρούμε τη μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Στην περίπτωση μας, ο πίνακας D του συστήματος 7.2.9 είναι θετικά ορισμένος, καθώς έχει αυστηρή διαγώνια υπεροχή. Άρα, σε κάθε χρονική στιγμή $n = 1, 2, \dots, N_\tau$, λύνουμε το γραμμικό σύστημα $D\mathbf{x}_n = \mathbf{d}_{n-1}$ και θέτουμε ως συνάρτηση αξίας το διάνυσμα $\mathbf{u}_n = \max\{\mathbf{x}_n, \mathbf{g}_n\}$. Τέλος, χρησιμοποιώντας τη σχέση 7.2.4, επαναφέρουμε τις τιμές αυτές στο αρχικό σύστημα μεταβλητών.

Στους πίνακες 7.7 και 7.8, βλέπουμε τα σχετικά αποτελέσματα της μεθόδου. Στα πιο κάτω, οι παράμετροι της μεθόδου είναι $y_{\max} = 1$, $N_\tau = 500$ και $N_y = 10000$. Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε, φαίνεται στο παράρτημα A.5.

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|
| r | σ | K | S_0 | |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 2.09434 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 11.29011 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 9.99703 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 0.81368 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 10.10773 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 6.74610 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 1.34922 |

Πίνακας 7.7: Τιμολόγηση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος).

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|
| r | σ | K | S_0 | |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 3.47268 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 13.75456 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 10.17418 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 1.92511 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 14.56260 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 6.47628 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 1.29526 |

Πίνακας 7.8: Τιμολόγηση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη).

Στους πίνακες 7.9 και 7.10, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών (για $y_{\max} = 1$, $N_\tau = 500$ και $N_y = 10000$) με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του υποδείγματος CRR.

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα | | |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|----------|---------|
| r | σ | K | S_0 | CRR | FD | Σφάλμα |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 2.09500 | 2.09434 | 0.00066 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 11.28883 | 11.29011 | 0.00128 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 10.00000 | 9.99703 | 0.00297 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 0.81441 | 0.81368 | 0.00073 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 10.11031 | 10.10773 | 0.00258 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 45.75878 | 1.34922 | |

Πίνακας 7.9: Σύγκριση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος).

| r | Παράμετροι | | | Αποτελέσματα | | |
|------------------------------|------------|--------|-------|--------------|----------|---------|
| | σ | K | S_0 | CRR | FD | Σφάλμα |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 3.47535 | 3.47268 | 0.00267 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 13.75708 | 13.75456 | 0.00252 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 10.17844 | 10.17418 | 0.00426 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 1.92678 | 1.92511 | 0.00167 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 14.56912 | 14.56260 | 0.00652 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 41.07690 | 1.29526 | |

Πίνακας 7.10: Σύγκριση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη).

Βλέπουμε ότι, το σφάλμα της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών είναι της τάξης του 10^{-3} και ότι ο χρόνος εκτέλεσής της είναι πολύ λιγότερος. Επομένως, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είναι πιο εύχρηστη, σε σχέση με το υπόδειγμα CRR.

Θα μπορούσαμε να πυκνώσουμε κι' άλλο τη διαμέριση, ώστε να αυξήσουμε την ακρίβεια της εκτίμησης. Μια τέτοια τροποποίηση, αυξάνει τη διάσταση των προς επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όμως, η τριδιαγώνια δομή του πίνακα D , μας επιτρέπει να λύσουμε τα συστήματα αυτά χρησιμοποιώντας αλγόριθμους οι οποίοι είναι πιο αποδοτικοί. Επιπλέον, λόγω του ότι ο πίνακας D είναι ίδιος σε όλα τα χρονικά βήματα, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε και την LU παραγοντοποίησή του, ώστε να οδηγηθούμε στην επίλυση τριγωνικών συστημάτων.

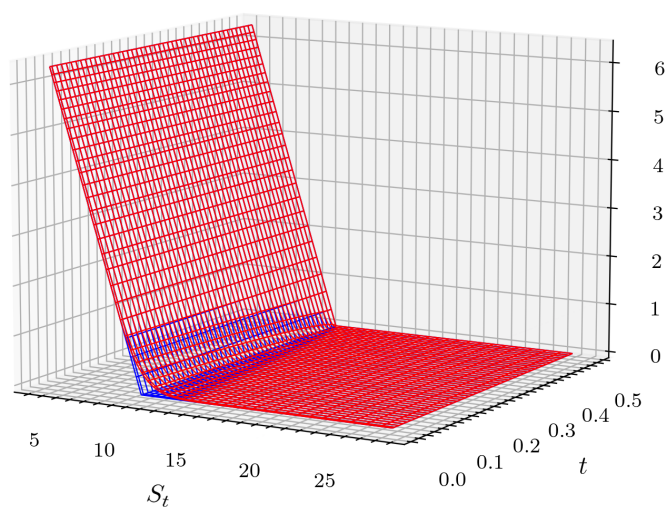
Αξίζει να σημειωθεί ότι, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, τιμολογούμε το παράγωγο για οποιαδήποτε αρχική αξία της μετοχής και για οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την ωρίμανση.

Βλέπουμε στο σχήμα 7.3, τη τιμολόγηση του παραγώγου (με παραμέτρους $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$ και $K = 10$) συναρτήσει της αρχικής αξίας της μετοχής και της χρονικής στιγμής. Παρατηρούμε ότι, η τιμολόγηση πράγματι κυριαρχεί τη συνάρτηση αποπληρωμής, καθώς και ότι ταυτίζονται στην ωρίμανση. Επιπλέον, επιβεβαιώνουμε και τα υπόλοιπα ποιοτικά χαρακτηριστικά της τιμολόγησης, που αποδείξαμε στο κεφάλαιο 6. Για παράδειγμα, εύκολα βλέπουμε ότι, η απεικόνιση $x \mapsto V(t, x)$ είναι κυρτή και φθίνουσα καθώς και την οριακή συμπεριφορά της τιμολόγησης, δηλαδή ότι $\lim_{x \rightarrow 0} V(t, x) = K$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} V(t, x) = 0$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες, σχετικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πλαίσιο της επίλυσης ενός προβλήματος ελευθέρου συνόρου, παραπέμπουμε στο [14]. Για την ποιοτική μελέτη της ευστάθειας και σύγκλισης των διακριτών σχημάτων που χρησιμοποιήσαμε, παραπέμπουμε στο [31].

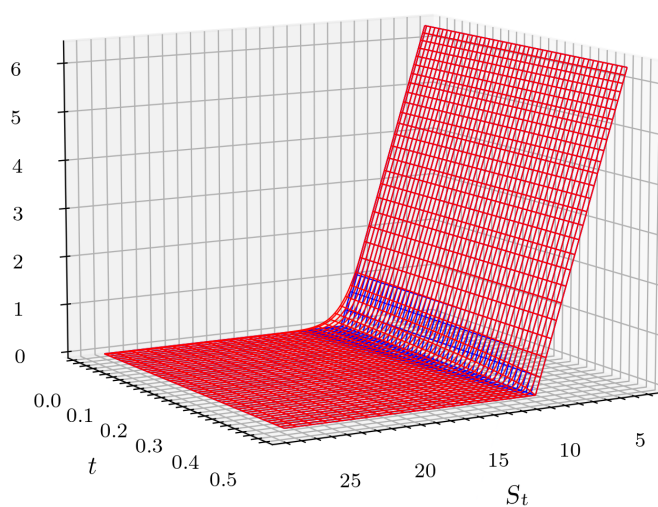
American Put Option ($r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $K = 10$)

— $(K - S_t)^+$
— Option price



American Put Option ($r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $K = 10$)

— $(K - S_t)^+$
— Option price



Σχήμα 7.3: Τιμολόγηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

7.2.2 Εκτίμηση ελευθέρου συνόρου

Στην υποενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε με τον αλγόριθμο που προτείνεται στο [32]. Ειδικότερα, θα παρουσιάσουμε ένα επαναληπτικό σχήμα για την επίλυση της εξίσωσης ελευθέρου συνόρου 6.2.13. Έπειτα, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του εν λόγω σχήματος, τιμολογούμε το παράγωγο μέσω της σχέσης 6.2.12.

Η έμπνευση των [32] προέρχεται από τη δουλειά των [33], όπου μετά από μια σειρά από αλγεβρικές πράξεις, απλοποιούν την εξίσωση 6.2.13 ώστε να περιέχει μόνο απλές ολοκληρώσεις (δηλαδή αποφεύγει τα διπλά ολοκληρώματα). Στη συνέχεια, κατασκευάζουν ένα επαναληπτικό σχήμα για τον υπολογισμό του σύνορο άσκησης, βάσει της καινούργιας αυτής αναπαράστασης. Το πλεονέκτημα των [32] είναι ότι, καταλήγουν σε ένα σχήμα επαναληπτικής φύσης, αποφεύγοντας τη συσσώρευση σφαλμάτων που προκαλείτε από την αναδρομική φύση του αλγορίθμου των [33].

Η (απλοποιημένη) εξίσωση συνόρου στην οποία καταλήγουν οι [32] είναι η:

$$b(\tau) = \left[\Phi(d_1(b(\tau), \tau, K)) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2}d_1(b(\tau), \tau, K)^2} \right]^{-1} \times \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} K e^{-(r\tau + \frac{1}{2}d_2(b(\tau), \tau, K))^2} + rK \int_0^\tau \frac{r}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau - \xi)}} e^{-(r(\tau - \xi) + \frac{1}{2}d_2(b(\tau), \tau, b(\xi))^2)} d\xi \right] \quad (7.2.10)$$

όπου $\tau = T - t$ και $d_{1,2}(S, \tau, B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} (\ln \frac{S}{B} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau)$.

Η απόδειξη της πιο πάνω αναπαράστασης είναι εκτός του πλαισίου της παρούσας εργασίας, για αυτό και δεν την παρουσιάζουμε.

Οι [32] προτείνουν να χρησιμοποιηθεί η αναπαράσταση 7.2.10, σε μια μέθοδο σταθερού σημείου (fixed point iteration). Θυμίζουμε ότι, το x^* λέγεται σταθερό σημείο της f , αν $x^* = f(x^*)$. Ένα τρόπος για να υπολογίσουμε το x^* , είναι μέσω του επαναληπτικού σχήματος $x_{n+1} = f(x_n)$ ⁹. Οι [32] προτείνουν να χρησιμοποιηθεί το δεξί μέλος της 7.2.10, ως η συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το σταθερό σημείο. Προφανώς, για δεδομένο $\tau \in [0, T]$, το ζητούμενο σταθερό σημείο είναι το $b(\tau)$.

Έστω $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = T$, μια ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$, με λεπτότητα $\Delta\tau = \frac{T}{n}$. Για κάθε τ_i , προσεγγίσουμε την αντίστοιχη τιμή του συνόρου, έστω $b_i (\approx b(\tau_i))$, εκτελώντας μια επανάληψη της μεθόδου του σταθερού σημείου. Για $\tau_0 = 0$, ορίζουμε εκ των προτέρων ότι $b_0 = K$. Όμως, λόγω του ολοκληρώματος στο δεξί μέλος της 7.2.10, πρέπει να γνωρίζουμε ολόκληρο το σύνορο της προηγούμενης επανάληψης (όχι μόνο στα σημεία της διαμέρισης). Η λύση που προτείνουν οι συγγραφείς είναι, να συμπληρώνουμε το υπόλοιπο σύνορο παρεμβάλλοντας τις τιμές που υπολογίστηκαν με ένα πολυώνυμο τάξης n .

Οπότε, έστω $b^{(j)}$ η εκτίμηση του συνόρου b μετά από j επαναλήψεις του αλγορίθμου.

⁹Αν η συνάρτηση f είναι συστολή, τότε το εν λόγω σχήμα συγκλίνει στο ζητούμενο σταθερό σημείο.

Για κάθε χρονική στιγμή τ_i , υπολογίζουμε την εκτίμηση $b_{\tau_i}^{(j+1)}$ μέσω της σχέσης¹⁰:

$$b_{\tau_i}^{(j+1)} = \left[\Phi(d_1(b_{\tau_i}^{(j)}, \tau_i, K)) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau_i}} e^{-\frac{1}{2}d_1(b_{\tau_i}^{(j)}, \tau_i, K)^2} \right]^{-1} \times \\ \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau_i}} K e^{-(r\tau_i + \frac{1}{2}d_2(b_{\tau_i}^{(j)}, \tau_i, K))^2} + \right. \\ \left. rK \int_0^{\tau_i} \frac{r}{\sigma\sqrt{2\pi(\tau_i - \xi)}} e^{-(r(\tau_i - \xi) + \frac{1}{2}d_2(b_{\tau_i}^{(j)}, \tau_i, b_{\xi}^{(j)})^2)} d\xi \right]$$

Σε κάθε επανάληψη, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος αριθμητικά, χρησιμοποιώντας αριθμητική ολοκλήρωση Gauss (Gaussian quadrature) τάξης 10. Έπειτα, συμπληρώνουμε και το υπόλοιπο σύνορο παρεμβάλλοντας τα $n + 1$ γνωστά σημεία $(B_{\tau_i}^{(j+1)})_{0 \leq i \leq n}$, με ένα πολυώνυμο τάξης n . Ως αρχική συνθήκη του σχήματος, χρησιμοποιούμε τη σταθερή τιμή $b_{\xi}^{(0)} = K$, για κάθε $\xi \in [0, T]$.

Αφού εκτελέσουμε ένα ικανοποιητικό αριθμό επαναλήψεων του πιο πάνω σχήματος, έστω m , τιμολογούμε το παράγωγο μέσω της σχέσης 6.2.12, όπου υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας αριθμητική ολοκλήρωση Gauss τάξης 10.

Στους πίνακες 7.11 και 7.12, βλέπουμε τα σχετικά αποτελέσματα της μεθόδου. Στα πιο κάτω, εκτελούμε $m = 20$ επαναλήψεις του αλγορίθμου, με $n = 10$ σημεία στη διαμέριση. Ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε, φαίνεται στο παράρτημα A.6.

| Παράμετροι | | | | Αποτελέσματα |
|------------------------------|----------|--------|-------|--------------|
| r | σ | K | S_0 | |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | 2.09537 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | 11.27773 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | 9.99560 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | 0.81491 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | 10.10794 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 0.47007 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | 0.09401 |

Πίνακας 7.11: Τιμολόγηση μέσω της εκτίμησης του συνόρου άσκησης, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος).

¹⁰Πράγματι, χρειαζόμαστε ολόκληρο το σύνορο $b^{(j)}$ για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, λόγω του όρου $b_{\xi}^{(j)}$ στο εκθετικό.

| r | Παράμετροι | | | S_0 | Αποτελέσματα |
|------------------------------|------------|--------|-------|-------|--------------|
| | σ | K | | | |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | | 3.46516 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | | 13.66524 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | | 10.13561 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | | 1.90681 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | | 14.51579 |
| Χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 0.58101 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 0.11620 |

Πίνακας 7.12: Τιμολόγηση μέσω της εκτίμησης του συνόρου άσκησης, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη).

Στους πίνακες 7.13 και 7.14, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της πιο πάνω μεθόδου (για $m = 20$ και $n = 10$) με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του υποδείγματος CRR.

| r | Παράμετροι | | | S_0 | Αποτελέσματα | | |
|------------------------------|------------|--------|-------|-------|--------------|----------|---------|
| | σ | K | | | CRR | FB | Σφάλμα |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | | 2.09500 | 2.09537 | 0.00037 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | | 11.28883 | 11.27773 | 0.0111 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | | 10.00000 | 9.99560 | 0.0044 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | | 0.81441 | 0.81491 | 0.0005 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | | 10.11031 | 10.10794 | 0.00237 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 45.75878 | 0.09401 | |

Πίνακας 7.13: Σύγκριση της μεθόδου εκτίμησης του ελεύθερου συνόρου με το υπόδειγμα CRR, για βραχυπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 0.5$ έτος).

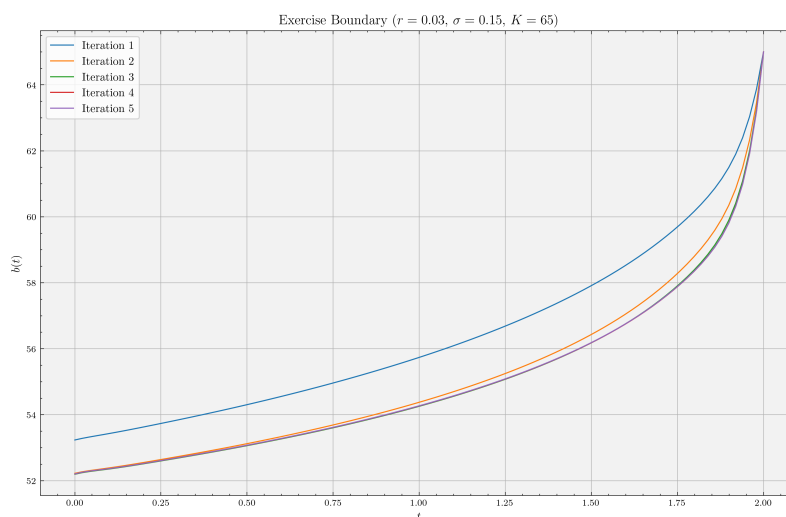
| r | Παράμετροι | | | S_0 | Αποτελέσματα | | |
|------------------------------|------------|--------|-------|-------|--------------|----------|---------|
| | σ | K | | | CRR | FB | Σφάλμα |
| 0.05 | 0.20 | 45.00 | 45.00 | | 3.47535 | 3.46516 | 0.01019 |
| 0.07 | 0.25 | 100.00 | 90.00 | | 13.75708 | 13.66524 | 0.09184 |
| 0.03 | 0.15 | 65.00 | 55.00 | | 10.17844 | 10.13561 | 0.04283 |
| 0.12 | 0.30 | 35.00 | 40.00 | | 1.92678 | 1.90681 | 0.01997 |
| 0.10 | 0.40 | 85.00 | 80.00 | | 14.56912 | 14.51579 | 0.05333 |
| Μέσος χρόνος εκτέλεσης [sec] | | | | | 41.07690 | 0.11620 | |

Πίνακας 7.14: Σύγκριση της μεθόδου εκτίμησης του ελεύθερου συνόρου με το υπόδειγμα CRR, για μακροπρόθεσμα δικαιώματα (με ωρίμανση σε $T = 2$ έτη).

Βλέπουμε ότι, το σφάλμα της μεθόδου είναι της τάξης του 10^{-2} και ο χρόνος εκτέλεσής της πολύ λιγότερος. Όμως, παρόλο που η μέθοδος είναι αρκετά γρήγορη, η ακρίβεια της δεν είναι ικανοποιητική. Δυο πιθανές λύσεις είναι, να αυξήσουμε το πλήθος των σημείων n ¹¹ ή να επιλέξουμε κάποιο κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης υψηλότερης τάξης. Τέτοιου είδους αλλαγές, αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου. Ωστόσο, λόγω του μικρού υπολογιστικού της κόστους, υπάρχει περιθώριο να θυσιάσουμε λίγη από την αποδοτικότητα, για να αυξήσουμε την ακρίβειά της.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, ο υπολογισμός σε κάθε σημείο τ_i , είναι ανεξάρτητος από τους υπόλοιπους. Άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τεχνικές παράλληλου προγραμματισμού, ώστε να γίνει ακόμα πιο αποδοτικός ο αλγόριθμος.

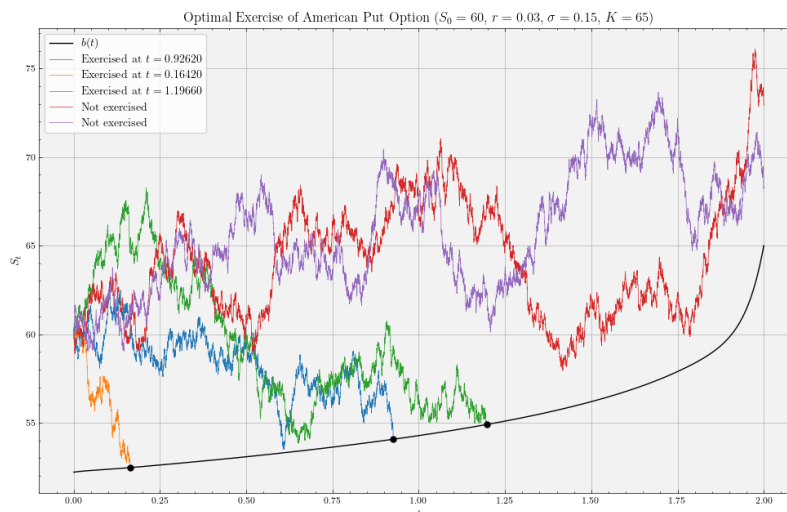
Δίνουμε πιο κάτω, μερικά σχετικά γραφήματα. Στο σχήμα 7.4, βλέπουμε τις πρώτες 5 εκτιμήσεις του συνόρου άσκησης (για $n = 10$). Έπειτα, στο σχήμα 7.5, βλέπουμε τη βέλτιστη άσκηση του δικαιώματος, για μερικές τροχιές της μετοχής (όπου χρησιμοποιούμε τη τελική εκτίμηση του συνόρου, μετά από 20 επαναλήψεις της μεθόδου).



Σχήμα 7.4: Σύγκλιση της εκτίμησης του συνόρου άσκησης.

Οφείλουμε να αναφέρουμε ότι, οι συγγραφείς δεν αποδεικνύουν τη σύγκλιση του επαναληπτικού σχήματος. Συνεπώς, στηρίζομαστε εξ ολοκλήρου στα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου, για να τεκμηριώσουμε την ορθότητά της.

¹¹Για μεγαλύτερες τιμές του n , είναι προτιμότερο να παρεμβάλλουμε με διαφορετικό τρόπο το σύνορο (πχ κυβικά splines), ώστε να αποφύγουμε φαινόμενα ταλαντώσεων στα άκρα του διαστήματος.



Σχήμα 7.5: Βέλτιστη άσκηση του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

7.3 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, παρουσιάσαμε συνολικά τέσσερις αριθμητικές μεθόδους, με τις οποίες μπορούμε να τιμολογήσουμε το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης. Η μέθοδος CRR είναι η πιο ακριβής, όμως και η πιο χρονοβόρα. Η γενίκευση της σε τροchioξαρτώμενα παράγωγα ή σε περισσότερα από ένα υποκείμενα προϊόντα, είναι πρακτικά αδύνατη. Αντίθετα, η μέθοδος Longstaff-Schwartz είναι μια καλή ενδιάμεση λύση, της οποίας η ακρίβεια είναι ικανοποιητική και το υπολογιστικό κόστος μικρό. Μπορεί άμεσα να γενικευθεί σε περισσότερα υποκείμενα προϊόντα, αρκεί η προσομοίωση τους να μπορεί να γίνει εύκολα. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είναι ελκυστική, λόγω του ότι τιμολογεί το παράγωγο για διάφορες αρχικές τιμές της μετοχής. Η ακρίβεια και το υπολογιστικό της κόστος είναι αρκετά καλά, όμως η γενίκευση της σε περισσότερα προϊόντα δεν είναι δυνατή, λόγω του curse of dimensionality. Επιπλέον, τα αποτελέσματα του Μαρκοβιανού πλαισίου παύουν να ισχύουν για τροchioξαρτώμενα παράγωγα. Η τελευταία μέθοδος, έχει το πλεονέκτημα ότι μας δίνει μια ξεκάθαρη περιγραφή της βέλτιστης στρατηγικής διακοπής καθώς και ότι έχει μικρό υπολογιστικό κόστος. Όμως, η γενίκευση της τόσο σε περισσότερα προϊόντα ή σε τροchioξαρτώμενα παράγωγα είναι αδύνατη, τουλάχιστον στη μορφή που παρουσιάσαμε, διότι η εξίσωση ελεύθερου συνόρου δεν είναι ίδια με τη 6.2.13.

Εν γένει, υπάρχουν διάφορες αριθμητικές μέθοδοι με τις οποίες μπορεί κάποιος να τιμολογήσει το παράγωγο. Μια οικογένεια μεθόδων που δεν παρουσιάσαμε, είναι οι αναλυτικές προσεγγίσεις. Οι μέθοδοι αυτοί, απλοποιούν με κατάλληλο τρόπο το πρόβλημα, ώστε να μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά. Για παράδειγμα, είτε απλοποιούν κατάλληλα την μερική διαφορική εξίσωση, είτε υποθέτουν εξ αρχής μια sub-optimal οικογένεια στρατηγικών, την οποία προσπαθούν να βελτιστοποιήσουν. Τέτοιου είδους προσεγγίσεις, βλέπουμε στα [34, 35, 36]. Το κύριο πλεονέκτημά τους είναι ότι, έχουν πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος και αρκετά καλή ακρίβεια. Όμως, έχουν

πάντα ένα δεδομένο σφάλμα, το οποίο δεν υπάρχει τρόπος να μειωθεί (το αποτέλεσμα τους υπολογίζεται αναλυτικά). Επίσης, υπάρχουν και μοντέρνες μέθοδοι, οι οποίες αξιοποιούν τεχνικές μηχανική μάθησης για να επιλύσουν το πρόβλημα. Για δυο τέτοιες προσεγγίσεις, παραπέμπουμε στα [37, 38]. Η πρώτη από αυτές, εκπαιδεύει ένα νευρωνικό δίκτυο το οποίο "μαθαίνει" την βέλτιστη στρατηγική άσκησης από προσομοιωμένες τροχιές της μετοχής, ενώ η δεύτερη, αντικαθιστά την γραμμική παλινδρόμηση της μεθόδου Longstaff-Schwartz με παλινδρόμηση διανυσμάτων στήριξης (support vector regression) και με δέντρα παλινδρόμησης (regression trees).

A

Κώδικες

```
1 import numpy as np
2
3 T = 0.2      # terminal time
4 N = 10000   # no of discretization points
5 M = 12      # no of simulations
6 dt = T / N  # time step
7
8 X = np.zeros((M, N + 1)) # BM paths
9 Z = np.random.randn(M, N) # normal independent increments
10
11 for i in range(M):
12     X[i, range(1, N + 1)] = np.cumsum(Z[i, :])
```

Κώδικας A.1: Προσομοίωση της κίνησης Brown.

```
1 import numpy as np
2
3 X0, mu, sigma = 3., 2., 0.5 # model configuration
4
5 T = 2      # terminal time
6 N = 10000  # no of discretization points
7 M = 7      # no of simulations
8 dt = T / N # time step
9
10 X = np.zeros((M, N + 1)) # GBM paths
11 X[:, 0] = X0             # initialize paths
12 Z = np.random.randn(M, N) # normal independent increments
```

```

13
14 for j in range(N):
15     X[:, j + 1] = X[:, j] * np.exp(mu * dt + sigma * np.sqrt(dt)
        ↪ * Z[:, j])

```

Κώδικας A.2: Προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brown.

```

1 import numpy as np
2
3 def main(S0, r, sigma, T, K, N):
4     dt = T / N # time step
5     disc = np.exp(-r * dt) # discount factor
6     u = np.exp(sigma * np.sqrt(dt)) # increase ratio
7     d = 1 / u # decrease ratio
8     p = (np.exp(r * dt) - d) / (u - d) # risk neutral
        ↪ probability
9
10    values = np.zeros(N + 1) # option's values
11
12    for j in range(N + 1):
13        values[j] = np.maximum(0, K - S0 * u**j * d**(N - j))
14
15    for i in range(N - 1, 0, -1):
16        for j in range(i + 1):
17            hold = disc * (p * values[j + 1] + (1 - p) *
                ↪ values[j])
18            exer = np.maximum(0., K - S0 * u**j * d**(i - j))
19            values[j] = np.maximum(hold, exer)
20
21    hold = disc * (p * values[1] + (1 - p) * values[0]) #
        ↪ continuation value
22    exer = np.maximum(0., K - S0) #
        ↪ payoff value
23
24    values[0] = np.maximum(hold, exer)
25    return values[0]
26
27    S0, K, r, sigma = 40., 50., 0.08, 0.3 # model configuration
28    T = 0.5 # option's maturity

```



```

29 N = 200                                # no of periods
30
31 price = main(S0, r, sigma, T, K, N)

```

Κώδικας A.3: Τιμολόγηση με το υπόδειγμα CRR.

```

1  import numpy as np
2
3  def main(r, sigma, K, S0, T, b, N, order):
4      dt = T / N                            # time step
5      disc = np.exp(-r * dt)                # discount factor
6      S = np.zeros((b, N + 1))             # stock price paths
7      S[:, 0] = S0                          # initial stock price
8
9      Z = np.random.randn(b, N)            # normal independent increments
10
11     for j in range(1, N + 1):
12         S[:, j] = S[:, j - 1] * np.exp((r - 0.5 * sigma**2) * dt
13         ↪ + sigma * np.sqrt(dt) * Z[:, j - 1])
14
15     payoff = np.maximum(K - S, 0)          # option's payoff
16     value = np.zeros_like(payoff)          # option's values
17
18     value[:, -1] = payoff[:, -1]          # value at maturity
19
20     for t in range(N - 1, 0, -1):
21         in_money = payoff[:, t] > 0       # in the money nodes
22
23         if not np.any(S[in_money, t]):
24             value[:, t] = value[:, t + 1] * disc
25             continue
26
27         model = np.polyfit(S[in_money, t], value[in_money, t +
28         ↪ 1] * disc, order)
29         C = np.polyval(model, S[in_money, t])
30
31         exercise = np.zeros(len(in_money), dtype=bool)
32         exercise[in_money] = payoff[in_money, t] > C

```

```

32     value[exercise, t] = payoff[exercise, t]
33     value[exercise, t + 1:] = 0
34
35     value[~exercise, t] = value[~exercise, t + 1] * disc
36
37     return np.mean(value[:, 1]) * disc
38
39 S0, r, sigma, K = 45., 0.05, 0.2, 45. # model configuration
40 T = 0.5                               # option's maturity
41 b = 70000                             # no of simulations
42 N = 100                               # no of time steps
43 order = 4                             # order of polynomial
44     → regressed
45 price = main(r, sigma, K, S0, T, b, N, order)

```

Κώδικας A.4: Τιμολόγηση με τη μέθοδο Longstaff-Schwartz.

```

1  import numpy as np
2  from scipy import sparse
3  from scipy.sparse.linalg import splu
4
5  T = 0.5                               # option's maturity
6  K, S0, r, sigma = 10., 4., 0.05, 0.2 # model configuration
7
8  y_max = 0.5                           # state truncation value
9  T_max = 0.5 * T * sigma**2            # new maturity
10 N_y = 10000                            # no of space intervals
11 N_t = 500                              # no of time intervals
12
13 y, dy = np.linspace(-y_max, y_max, N_y + 1, retstep = True) #
14     → space discretization
15
16 t, dt = np.linspace(0, T_max, N_t + 1, retstep = True)     #
17     → time discretization
18
19 theta = 0.5 # schema parameter
20 mu = dt / dy**2 # courant number
21
22 q = 2 * r / sigma**2

```

```

20 alpha = theta * mu
21 beta = (1 - theta) * mu
22
23 g = lambda tau, y: np.exp(tau * (0.25 * (q - 1)**2 + q)) *
  ↪ np.maximum(0, np.exp(0.5 * y * (q - 1)) - np.exp(0.5 * y *
  ↪ (q + 1))) # new payoff function
24
25 u = np.zeros((N_t + 1, N_y + 1)) # option's values
26 u[0,:] = g(t[0], y) # initial condition
27 u[:,0] = g(t, y[0]) # left boundary condition
28 u[:, -1] = g(t, y[-1]) # right boundary condition
29
30 D = sparse.diags([-alpha, 1 + 2 * alpha, -alpha], [-1, 0, 1],
  ↪ shape = (N_y - 1, N_y - 1)).tocsc()
31 LU = splu(D)
32 E = sparse.diags([beta, 1 - 2 * beta, beta], [-1, 0, 1], shape =
  ↪ (N_y - 1, N_y - 1)).tocsc()
33 b = np.zeros(N_y - 1)
34
35 for j in range(1, N_t + 1):
36     b[0] = alpha * u[j, 0] + beta * u[j-1, 0]
37     b[-1] = alpha * u[j, -1] + beta * u[j-1, -1]
38
39     u[j, range(1, N_y)] = np.maximum( LU.solve( E.dot(u[j - 1,
  ↪ range(1, N_y)]) + b), g(t[j], y[range(1, N_y)]))
40
41 value = np.log(S0 / K)
42 idx = (np.abs(x - value)).argmin()
43
44 price = K * np.exp(-0.5 * (q - 1) * y[idx] - (0.25 * (q - 1)**2
  ↪ + q) * t[-1]) * u[-1, idx]

```

Κώδικας Α.5: Τιμολόγηση με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.

```

1 import numpy as np
2 from scipy.stats import norm
3 from scipy import integrate
4 from scipy import special
5

```

```

6  def d1(S, t, B):
7      return (np.log(S / B) + (r + 0.5 * sigma**2) * t) / (sigma *
    ↪ np.sqrt(t))
8
9  def d2(S, t, B):
10     return d1(S, t, B) - sigma * np.sqrt(t)
11
12  r, sigma, K, S0 = 0.03, 0.15, 65., 60.  # model configuration
13  T = 2.                                  # option's maturity
14
15  N = 10      # no of intervals
16  iter = 20   # no of iterations
17
18  t = np.linspace(0, T, N+1) # time discretization
19  B = np.zeros(N+1)         # exercise boundary value
20  B[0] = K                  # exercise boundary at maturity
21
22  for i in range(1, N+1):
23      first = 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi * t[i])) * np.exp(-r
    ↪ * t[i] - 0.5 * d2(K, t[i], K)**2)
24      second = np.sqrt(r) / (sigma * np.sqrt(2)) *
    ↪ special.erf(np.sqrt(r * t[i])) * np.exp(-t[i] *
    ↪ (sigma**2 - 2 * r)**2 / (8 * sigma**2))
25      denom = norm.cdf(d1(K, t[i], K)) + 1 / (sigma * np.sqrt(2 *
    ↪ np.pi * t[i])) * np.exp(-0.5 * d1(K, t[i], K)**2)
26
27      B[i] = K * (first + second) / denom
28
29  B_pol = np.polyfit(t, B, deg = N) # interpolate the rest of the
    ↪ boundary
30  B_old = np.polyval(B_pol, t)     # old boundary values at the
    ↪ partition points
31
32  for j in range(iter - 1):
33      for i in range(1, N + 1):
34          first = 1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi * t[i])) * K *
    ↪ np.exp(-(r * t[i] + 0.5 * d2(B_old[i], t[i], K)**2))
35          integrant = lambda x: 1 / np.sqrt(t[i] - x) * np.exp(-r
    ↪ * (t[i] - x) - 0.5 * d2(B_old[i], t[i],
    ↪ np.polyval(B_pol, x)**2)

```

```
36     second = r * K / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi)) *
    ↪ integrate.fixed_quad(integrand, 0 , t[i], n = 10)[0]
37     denom = norm.cdf(d1(B_old[i], t[i], K)) + 1 / (sigma *
    ↪ np.sqrt(2 * np.pi * t[i])) * np.exp(-0.5 *
    ↪ d1(B_old[i], t[i], K)**2)
38
39     B[i] = (first + second) / denom
40
41     B_pol = np.polyfit(t, B, deg = N)
42     B_old = np.polyval(B_pol, t)
43
44     eur_price = K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(-d2(S0, T, K)) - S0 *
    ↪ norm.cdf(-d1(S0, T, K)) # price of european option
45     integrand = lambda x: np.exp(r * x) * norm.cdf(-d2(S0, T - x,
    ↪ np.polyval(B_pol, x))) # integral in early exercise
    ↪ premium
46
47     price = eur_price + r * K * np.exp(-r * T) *
    ↪ integrate.fixed_quad(integrand, 0 , T, n = 10)[0]
```

Κώδικας Α.6: Τιμολόγηση μέσω της εκτίμησης του συνόρου άσκησης.

Βιβλιογραφία

- [1] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Springer, 1998.
- [2] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. 6th ed. Springer, 2003.
- [3] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [4] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3rd ed. Springer, 1999.
- [5] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. 3rd ed. Springer, 2021.
- [6] Jean-François Le Gall. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Springer, 2016.
- [7] Richard F Bass. *Stochastic Processes*. Cambridge University Press, 2011.
- [8] George Lowther. *Feller Processes*. 2010. URL: <https://almostsuremath.com/2010/07/14/feller-processes/> (visited on 06/24/2023).
- [9] George Lowther. *Properties of Feller Processes*. 2010. URL: <https://almostsuremath.com/2010/07/19/properties-of-feller-processes/> (visited on 06/24/2023).
- [10] Goran Peskir and Albert Shiryaev. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Birkhäuser, 2006.
- [11] George Lowther. *Compensators*. 2011. URL: <https://almostsuremath.com/2011/11/22/compensators/> (visited on 06/26/2023).
- [12] Albert Shiryaev. *Optimal Stopping Rules*. Springer, 2008.
- [13] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 3rd ed. Oxford University Press, 2000.
- [14] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, and Sam Howison. *Option pricing: Mathematical models and computation*. Oxford Financial Press, 1993.
- [15] Bernt Øksendal. “The High Contact Principle in Optimal Stopping and Stochastic Waves”. In: *Seminar on Stochastic Processes* (1989), pp. 177–192.

- [16] Kjell Arne Brekke and Bernt Øksendal. “The High Contact Principle as a Sufficiency Condition for Optimal Stopping”. In: *Stochastic Models and Option Values* (1991), pp. 187–208.
- [17] Ravi Myneni. “The Pricing of the American Option”. In: *The Annals of Applied Probability* 2.1 (1992), pp. 1–23.
- [18] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. CRC Press, 2000.
- [19] Ioannis Karatzas. “On the pricing of American options”. In: *Applied Mathematics and Optimization* 17 (1988), pp. 37–60.
- [20] Cornelis W Oosterlee and Lech A Grzelak. *Mathematical Modelling and Computation in Finance*. World Scientific, 2020.
- [21] Raouf Ghomrasni and Goran Peskir. “Local Time-Space Calculus and Extensions of Itô’s Formula”. In: *High Dimensional Probability III* (2003), pp. 177–192.
- [22] Albert Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*. World Scientific, 1999.
- [23] Xinfu Chen, John Chadam, Lishang Jiang, and Weian Zheng. “Convexity of the exercise boundary of the American put on a zero dividend asset”. In: *Mathematical Finance* 18 (2008), pp. 185–197.
- [24] John C. Cox, Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein. “Option pricing: A simplified approach”. In: *Journal of Financial Economics* 7 (1979), pp. 229–263.
- [25] Μιχάλης Λουλάκης. *Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία*. Ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις Κάλλιπος, 2015.
- [26] Qianru Shang and Brian Byrne. “American Option Pricing: An Accelerated Lattice Model with Intelligent Lattice Search”. In: *The Journal of Derivatives* 27 (2019), pp. 92–108.
- [27] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- [28] John N. Tsitsiklis and Benjamin Van Roy. “Regression Methods for Pricing Complex American Style Options”. In: *IEEE Transactions on Neural Networks* 12 (2001), pp. 694–703.
- [29] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach”. In: *Review of Financial Studies* 14 (2001), pp. 113–147.
- [30] Katta G. Murty. “On the number of solutions to the complementarity problem and spanning properties of complementary cones”. In: *Linear Algebra and its Applications* 5 (1972), pp. 65–108.
- [31] Manolis Georgoulis. *Computational Methods for Partial Differential Equations*. Jan. 2009. URL: http://users.math.uoc.gr/~tsogka/Courses/AESDE-spring2015/Biblio/Georgoulis_notes_new.pdf (visited on 07/05/2023).

- [32] In Joon Kim, Bong-Gyu Jang, and Kyeong Tae Kim. “A simple iterative method for the valuation of American options”. In: *Quantitative Finance* 13 (2013), pp. 885–895.
- [33] Thomas Little, Vijay Pant, and Chunli Hou. “A New Integral Representation of the Early Exercise Boundary for American Put Options”. In: *Journal of Computational Finance* 3 (2000), pp. 73–96.
- [34] Giovanni Barone-Adesi and Robert E. Whaley. “Efficient Analytic Approximation of American Option Values”. In: *The Journal of Finance* 42 (1987), pp. 301–320.
- [35] Petter Bjerksund and Gunnar Stensland. “Closed-form approximation of American options”. In: *Scandinavian Journal of Management* 9 (1993), pp. 87–99.
- [36] Petter Bjerksund and Gunnar Stensland. “Closed form valuation of American options”. In: (2002).
- [37] Sebastian Becker, Patrick Cheridito, and Arnulf Jentzen. “Deep optimal stopping”. In: *Journal of Machine Learning Research* 20 (2019), pp. 1–25.
- [38] Jingying Lin and Caio Almeida. “American option pricing with machine learning: An extension of the Longstaff-Schwartz method”. In: *Brazilian Review of Finance* 19 (2021), pp. 85–109.