

Ανακανονικοποίηση και συνάρτηση β στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Ανδρέας Χριστοφιλόπουλος

Επιβλέπων:
Νίκος Τράκας

Τριμελής Επιτροπή:
Ν. Ήργες
Ν. Μαυρόματος
Ν. Τράκας

Αθήνα, Ιούνιος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Νίκο Τράκα για την καθοδήγηση, τον καθηγητή Χρήστο Αθανασιάδη του Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α. που μου γνωστοποίησε την έννοια της Pfaffian και τη σύνδεσή της με το ίχνος των πινάκων γ , και τη Μάρω που έκανε πολύ πιο ευχάριστους τους τελευταίους μήνες.

.....
Ανδρέας Χριστοφιλόπουλος

©(2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ'αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Περιγράφονται τα βασικά στοιχεία της θεωρίας σκεδάσεων στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου, της θεωρίας ανακανονικοποίησης και των μεθόδων ομάδας ανακανονικοποίησης, με έμφαση στις έννοιες της κυλιόμενης σύζευξης και της συνάρτησης β . Δίνονται αναλυτικά παραδείγματα των υπολογισμών αυτών στην QED και στην QCD, και τελικά υπολογίζεται η συνάρτηση β για κάθε σύζευξη του Καθιερωμένου Προτύπου σε 1η τάξη loops. Παρουσιάζονται επίσης συνοπτικά και συγκρίνονται διαφορετικές οπτικές γωνίες για την ανακανονικοποίηση.

Λέξεις κλειδιά— Ανακανονικοποίηση, Κβαντική Θεωρία Πεδίου, Καθιερωμένο Πρότυπο, συνάρτηση β , ασυμπτωτική ελευθερία, ομάδα ανακανονικοποίησης, κυλιόμενη σύζευξη, QCD, QED, θεωρία σκέδασης, θεωρία διαταραχών, αιτιακή θεωρία διαταραχών

Abstract

We describe the basics of scattering theory in Quantum Field Theory, renormalization theory and renormalization group methods, with emphasis on the notions of running coupling and the beta function. Detailed examples of relevant calculations are given in QED and QCD, and finally the beta function is derived in 1 loop order for every Standard Model coupling. We also present briefly and contrast different viewpoints on renormalization.

Keywords— Renormalization, Quantum Field Theory, Standard Model, beta function, asymptotic freedom, renormalization group, running coupling, QCD, QED, scattering theory, perturbation theory, causal perturbation theory

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Κβαντική θεωρία πεδίου	2
2.1	Σημαντικές θεωρίες βαθμίδας	3
2.2	Επιλογή βαθμίδας και φαντάσματα Faddeev-Popov	4
3	Μέθοδοι υπολογισμού πλατών σκέδασης σε ΚΘΠ	5
3.1	Θεωρία σκεδάσεων	6
3.2	Τύπος LSZ και συναρτήσεις Green	7
3.3	Διαδότες, αναπαράσταση Källén-Lehmann	9
3.4	Διαταρακτική σειρά, διαγράμματα	12
3.5	Ιδιοενέργειες, 1PI διαγράμματα	14
3.6	Στροφή Wick	15
3.7	Τι ακριβώς (δεν) υπολογίζει η θεωρία διαταραχών;	16
4	Πρώτα παραδείγματα και αποκλίσεις στην QED	17
4.1	Διαδότης φωτονίων	17
4.2	Διαδότης ηλεκτρονίων	23
4.3	Αποκλίσεις IR	25
5	Μέθοδοι ανακανονικοποίησης	26
5.1	Προκαταρκτικά: Ανακανονικοποιησιμότητα και βαθμός απόκλισης	26
5.2	On-Shell (OS) ανακανονικοποίηση	28
5.3	Γενίκευση με την μ-αφαίρεση	28
5.4	Minimal Subtraction (MS) και τροποποιημένο Minimal Subtraction \overline{MS}	30
5.5	Μέθοδος BPHZ	30
5.6	Είναι όλες οι μέθοδοι ισοδύναμες;	31
6	Ομάδα ανακανονικοποίησης (RG)	32
6.1	Η ομάδα Stückelberg-Petermann	33
6.2	Μεγάλοι λογάριθμοι και η μέθοδος των Gell-Mann και Low	34
6.3	Απλή υπολογιστική μέθοδος για τη συνάρτηση β	35
7	Συνάρτηση β στην QCD και ασυμπτωτική ελευθερία	37
7.1	Συνάρτηση κορυφής (Προσδιορισμός Z_1)	37
7.2	Διαδότης quark (Προσδιορισμός Z_2)	41
7.3	Διαδότης γκλουονίου (Προσδιορισμός Z_3)	41
7.4	Υπολογισμός συνάρτησης β	43
7.5	Ασυμπτωτική ελευθερία και συνέπειες	44
8	Γενίκευση - συνάρτηση β στο Καθιερωμένο Πρότυπο	45

A	Κατανομές ή γενικευμένες συναρτήσεις και ΚΘΠ	45
A.1	Βασικοί ορισμοί	45
A.2	Γινόμενα κατανομών	48
A.3	Κώνοι φωτός και αιτιακές κατανομές	49
A.4	Διαχωρισμός κατανομών	50
B	Πρόγραμμα Epstein-Glaser: Αιτιακή θεωρία διαταραχών	50
C	Συνάρτηση Γ του Euler	52
D	Χρήσιμοι τύποι για ολοκληρώματα	53
D.1	Τύπος Feynman για συνδυασμό παρονομαστών	53
D.2	Τύποι ολοκλήρωσης σε d διαστάσεις	53
E	Ομάδες και αναπαραστάσεις	54
F	Πίνακες γ	55

1 Εισαγωγή

Σε αυτή την εργασία μελετάμε μία συγκεκριμένη κλάση αποκλίσεων που προκύπτουν στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου (ΚΘΠ), την πιο επιτυχημένη θεωρία που έχουμε για την περιγραφή κάθε γνωστού σωματιδίου και αλληλεπίδρασης (εκτός από τη βαρύτητα) σε θεμελιώδες επίπεδο. Αυτή η επιτυχία της θεωρίας είναι παρά τις διάφορες αφύσικες απειρίες που προκύπτουν κάθε φορά που προσπαθούμε να κάνουμε κάποιον υπολογισμό. Συνήθως, συναντάμε 3 ειδών απειρίες: τις IR (infrared) αποκλίσεις, που εμφανίζονται εξαιτίας της συμπεριφοράς της θεωρίας σε μεγάλες αποστάσεις ή χαμηλές ενέργειες (για παράδειγμα όταν κάποιο ολοκλήρωμα πάνω σε ολόκληρο το χώρο απειρίζεται), τις UV (ultraviolet) αποκλίσεις, που σχετίζονται με τη συμπεριφορά σε υψηλές ενέργειες ή μικρές αποστάσεις, και τις απειρίες που προκύπτουν όταν προσπαθούμε να αθροίσουμε κάθε όρο μίας σειράς διαταραχών. Η πρώτη και η τελευταία κατηγορία δεν είναι πάρα πολύ καλά κατανοητές, ωστόσο το πρόβλημα των UV αποκλίσεων έχει μελετηθεί ευρέως, και η λύση σε αυτό είναι η ανακανονικοποίηση.

Η ανακανονικοποίηση και η ΚΘΠ γενικότερα επιδέχονται διάφορες ερμηνείες και αντιμετώπισεις. Για παράδειγμα, μία συνηθισμένη αντιμετώπιση θεωριών όπως το Καθιερωμένο Πρότυπο (ΚΠ) είναι ως αποτελεσματικές θεωρίες χαμηλών ενεργειών, δηλαδή ως όρια μίας πιο θεμελιώδους θεωρίας, τα οποία δεν χρειάζεται απαραίτητα να είναι συνεπή σε κάθε ενεργειακή κλίμακα [BT19][Wei21]. Αυτή η αντιμετώπιση έχει το πλεονέκτημα πως παρακάμπτει το δύσκολο μαθηματικό ερώτημα της συνέπειας, και παρέχει τη δυνατότητα να απαλείφουμε τις UV απειρίες που θα συναντήσουμε με κάποιο πεπερασμένο ενεργειακό cutoff πάνω από το οποίο θεωρούμε ότι η θεωρία δεν είναι πια έγκυρη, το οποίο δεν χρειάζεται να πηγαίνει στο άπειρο. Από την άλλη, αυτή η πιο θεμελιώδης θεωρία και αυτό το cutoff είναι άγνωστα. Εδώ δεν θα υιοθετήσουμε αυτή την οπτική γωνία. Θα αντιμετωπίσουμε τις θεωρίες που μελετάμε ως συνεπείς και θα δούμε πώς μπορεί η ανακανονικοποίηση να λύσει τα προβλήματα που προκύπτουν, ακόμα και χωρίς να διατηρούμε ένα πεπερασμένο cutoff. Το αν οι θεωρίες αυτές είναι πράγματι συνεπείς μένει να απαντηθεί.

Στην Ενότητα 2 αναφέρονται κάποιες βασικές έννοιες της ΚΘΠ και των θεωριών που θα μελετήσουμε (θεωρίες βαθμίδας). Η Ενότητα 3 είναι αφιερωμένη στις βασικές μεθόδους που υπάρχουν για την ανάλυση πειραμάτων σκέδασης (που είναι στην πραγματικότητα ένα από τα ελάχιστα πράγματα που μπορούμε πραγματικά να μοντελοποιήσουμε στα πλαίσια της ΚΘΠ). Έχοντας παρουσιάσει τα κατάλληλα εργαλεία, στην Ενότητα 4 τα εφαρμόζουμε στον υπολογισμό πλατών σκέδασης στην QED, για να συναντήσουμε για πρώτη φορά τις UV αποκλίσεις. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε για πρώτη φορά τις μεθόδους ομαλοποίησης και ανακανονικοποίησης με counterterms που θα χρησιμοποιήσουμε στην υπόλοιπη εργασία. Η ανακανονικοποίηση εδώ γίνεται με την επιβολή ορισμένων συνθηκών, που όπως θα δούμε λέγονται on-shell (OS). Στην ενότητα 5 βλέπουμε πως αυτή η επιλογή δεν είναι μοναδική, και συναντάμε κάποιες εναλλακτικές αλλά φυσικά ισοδύναμες συνθήκες, οι οποίες αποδεικνύονται πιο χρήσιμες σε πολλές περιπτώσεις. Αυτή η αυθαιρεσία στην ανακανονικοποίηση μας οδηγεί στην έννοια της ομάδας ανακανονικοποίησης, που μελετάμε στην ενότητα 6. Διαχωρίζουμε 3 διαφορετικές έννοιες με τις οποίες χρησιμοποιείται αυτός ο όρος, και βλέπουμε πώς μία συγκεκριμένη έννοια μας οδηγεί στην κυλιόμενη σύζευξη (δηλαδή την εξάρτηση της σταθεράς σύζευξης από την ενεργειακή κλίμακα), και στη συνάρτηση β που ποσοτικοποιεί τη μεταβολή της σύζευξης. Εφαρμόζουμε αυτή την ανάλυση στην QCD στην Ενότητα 7 με σκοπό να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β , και οδηγούμαστε στη σημαντική έννοια της ασυμπτωτικής ελευθερίας. Τέλος, στην

Ενότητα 8 αναφέρεται σύντομα η γενίκευση του υπολογισμού και σε άλλες θεωρίες βαθμίδας που απαρτίζουν το ΚΠ.

Στα παραρτήματα αναφέρονται διάφοροι χρήσιμοι τύποι και έννοιες που χρησιμοποιούμε στην υπόλοιπη εργασία. Επίσης έχει συμπεριληφθεί μία σύντομη επισκόπηση της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων ή κατανομών που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν πιο αυστηρά τους τελεστές της ΚΘΠ, και της αιτιακής θεωρίας διαταραχών, η οποία δείχνει πως οι UV αποκλίσεις προκύπτουν όταν δεν δίνεται η κατάλληλη προσοχή στις ιδιαιτερότητες των κατανομών, και πως μία πιο προσεκτική ανάλυση λύνει εξ αρχής το πρόβλημα των UV αποκλίσεων χωρίς να χρειάζεται ομαλοποίηση. Τα αποτελέσματα που δίνει αυτή η θεωρία είναι ισοδύναμα με αυτά που βρίσκουμε με τις πιο απλές μεθόδους που χρησιμοποιούμε στην υπόλοιπη εργασία. Ο λόγος που συμπεριλαμβάνονται αυτές οι μέθοδοι είναι για να γίνει σαφές πως η ανακανονικοποίηση δεν είναι απλά μία αυθαίρετη ad hoc διαδικασία για να διώξουμε προβληματικούς απειρισμούς, αλλά μία αναγκαία διαδικασία η οποία δεν χρειάζεται στην πραγματικότητα καμία αναφορά σε απειρισμούς, άσχετα αν στην πράξη βολεύει υπολογιστικά να αντιμετωπίζεται με αυτό τον τρόπο.

Η εργασία δεν περιέχει κανένα πρωτότυπο αποτέλεσμα, εκτός από έναν τύπο για τον υπολογισμό του ίχνους γινομένων πινάκων γ που παρουσιάζεται σε ένα παράρτημα. Καθώς το περισσότερο από το υλικό που παρουσιάζεται είναι παγιωμένο και καθιερωμένο, χρησιμοποιήθηκαν για το μεγαλύτερο μέρος της εκτενώς 4 βασικές αναφορές πάνω στην ΚΘΠ: το εισαγωγικό βιβλίο του Mark Srednicki [Sre07], δύο από τους τρεις τόμους της σειράς του Steven Weinberg πάνω στην ΚΘΠ [Wei95] [Wei96] και η μονογραφία του John C. Collins πάνω στην ανακανονικοποίηση [Col84].

2 Κβαντική θεωρία πεδίου

Η κβαντική θεωρία πεδίου είναι ένα γενικό πλαίσιο μελέτης διάφορων θεωριών, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν από μία Λαγκραντζιανή πυκνότητα, με βασικό χαρακτηριστικό ότι οι καταστάσεις ενός συστήματος περιγράφονται από ακτίνες σε ένα χώρο Hilbert, πάνω στον οποίο δρουν ορισμένοι τελεστές πεδίου. Οι τελεστές πεδίου παραμετροποιούνται από χωροχρονικές συντεταγμένες (στην εικόνα Heisenberg), και αντιστοιχούν σε ορισμένα πεδία που εμφανίζονται μέσα στη Λαγκραντζιανή, και είναι τα αντικείμενα των οποίων η μέση τιμή μπορεί να μετρηθεί.

Ένα απλό παράδειγμα είναι η **θεωρία ϕ^4** , που παίζει σημαντικό ρόλο στο Καθιερωμένο Πρότυπο καθώς εμφανίζεται στην περιγραφή του πεδίου Higgs, και χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη Λαγκραντζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial^\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Εδώ ο όρος με το τετράγωνο των παραγώγων λέγεται **κινητικός όρος**, ο όρος με το τετράγωνο του πεδίου ϕ λέγεται **όρος μάζας**, και ο τελευταίος όρος (που δίνει και το όνομα της θεωρίας) είναι **όρος αλληλεπίδρασης**.

Στο πεδίο που εμφανίζεται στην \mathcal{L} αντιστοιχεί ένας τελεστής πάνω στο χώρο Hilbert \mathcal{H} των καταστάσεων, τον οποίο μπορούμε να συμβολίσουμε με $\hat{\phi}$ (σε μετέπειτα ενότητες θα θεωρούμε ότι είναι κατανοητή η διαφορά και δεν θα χρησιμοποιούμε πια το συμβολισμό με το καπελάκι πάνω από το ϕ). Έστω λοιπόν μία κατάσταση $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Σε αυτή την κατάσταση μπορούμε να

εκφράσουμε την αναμενόμενη τιμή του πεδίου ϕ ως:

$$E(\phi(x)) = \langle \psi | \hat{\phi}(x) | \psi \rangle$$

Εδώ, το x είναι το 4-διάνυσμα της χωροχρονικής θέσης του σωματιδίου. Ο τρόπος που σχετίζεται ο κβαντικός τελεστής με τα (κλασσικά) πεδία που παρουσιάζονται στη Λαγκραντζιανή πυκνότητα είναι μέσω μιας διαδικασίας κβάντωσης, που έχει ως σημείο εκκίνησης τα **ολοκληρώματα διαδρομής Feynman**. Δεν θα μπορούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες καθώς θα θεωρήσουμε δεδομένο τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτό. Σημειώνεται όμως πως αυτός είναι ένας από πολλούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η κβάντωση. Υπάρχει για παράδειγμα η **κανονική κβάντωση**, η οποία έχει ως σημείο εκκίνησης τη Χαμιλτονιανή. Διαφορετικοί φορμαλισμοί έχουν διαφορετικά προτερήματα και μειονεκτήματα.

Αξίζει εδώ να αναφερθεί η σχέση μεταξύ της κβαντικής θεωρίας πεδίου και της απλής, μη σχετικιστικής κβαντικής μηχανικής. Οι τελεστές στην πρώτη παραμετροποιούνται, όπως αναφέρθηκε ήδη, πάνω σε 4-διανύσματα θέσης σε χώρο Minkowski. Η σύμβαση που ακολουθούμε για τη μετρική Minkowski εδώ είναι $(-, +, +, +)$. Στη δεύτερη, οι τελεστές παραμετροποιούνται πάνω στο χρόνο, είναι δηλαδή μία κβαντική θεωρία πεδίου αλλά μόνο σε μία διάσταση. Έστω ο κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής σε 1 χωρική διάσταση, που περιγράφεται από τη Λαγκραντζιανή (εδώ δεν μιλάμε για πυκνότητα):

$$L = \frac{p^2(t)}{2m} - \frac{1}{2}kx^2(t)$$

Στη μη σχετικιστική κβαντική μηχανική μπορούμε να υπολογίσουμε για παράδειγμα την αναμενόμενη τιμή της θέσης ως εξής:

$$E(x(t)) = \langle \psi | \hat{x}(t) | \psi \rangle$$

Εδώ βλέπουμε μία βασική διαφορά με την ΚΘΠ (Κβαντική Θεωρία Πεδίου). Το x και το p που εμφανίζονται στην \mathcal{L} είναι τελεστές, και δεν πρέπει να συγχέονται με το x και το p όπως θα εμφανίζονται στην ΚΘΠ, όπου θα είναι απλά χωροχρονικές παράμετροι. Η παράμετρος εδώ είναι απλά και μόνο ο χρόνος t .

Στην πραγματικότητα οι τελεστές αυτοί δεν είναι συνήθεις συναρτήσεις των χωροχρονικών συντεταγμένων αλλά **κατανομές** (ή αλλιώς **γενικευμένες συναρτήσεις**, που δρουν πάνω σε ένα χώρο **δοκιμαστικών συναρτήσεων**, οι οποίες με τη σειρά τους είναι ορισμένες πάνω στις χωροχρονικές συντεταγμένες. Περισσότερες λεπτομέρειες θα παρατεθούν στο Παράρτημα Α, και στις αναφορές [Tal22; SW00; Sch14; Sch01].

2.1 Σημαντικές θεωρίες βαθμίδας

Θα μας απασχολήσουν εδώ 2 σημαντικές θεωρίες βαθμίδας, η QED και η QCD. Οι θεωρίες βαθμίδας είναι αναλλοίωτες όταν δρουν πάνω τους ορισμένες ομάδες Lie με τη μορφή τοπικών μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα, η QED είναι αναλλοίωτη υπό (αβελιανούς) μετασχηματισμούς βαθμίδας $U(1)$ που δρουν στα φερμιόνια της θεωρίας (ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια) που αναπαριστώνται ως σπινωρικά πεδία, και η QCD είναι αντίστοιχα αναλλοίωτη υπό μη αβελιανούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(3)$. Η QED συγκεκριμένα είναι στην πραγματικότητα μία

αποτελεσματική θεωρία πεδίου, δηλαδή το όριο χαμηλών ενεργειών της ηλεκτρασθενούς θεωρίας, η οποία περιγράφεται από μία συμμετρία βαθμίδας $U(1) \times SU(2)$ [Weinberg:1995kr]. Το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι ο συνδυασμός όλων αυτών των θεωριών και χαρακτηρίζεται από συμμετρία βαθμίδας $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

Η απαίτηση του αναλλοίωτου βαθμίδας οδηγεί αναγκαία στην ύπαρξη μποζονίων βαθμίδας (φωτόνια στην QED, γκλουόνια στην QCD) τα οποία αλληλεπιδρούν με τα υπόλοιπα σωματίδια με τρόπο καθορισμένο από τους γεννήτορες της κάθε ομάδας. Η Λαγκραντζιανή πυκνότητα της QED είναι [Sre07]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

Όπου έχουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο βαθμίδας:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$$

Και τον τανυστή Faraday:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Βλέπουμε ότι προκύπτει μία αλληλεπίδραση 2 φερμιονικών πεδίων με 1 μποζόνιο βαθμίδας που αντιστοιχεί στα φωτόνια. Αντίστοιχα η Λαγκραντζιανή πυκνότητα της QCD έχει μία παρόμοια μορφή, εμφανίζεται όμως η άλγεβρα της $SU(3)$ με τους 8 διαφορετικούς γεννήτορες (πίνακες Gell-Mann) στη θεμελιώδη αναπαράσταση απ'όπου προέρχονται και οι δείκτες χρώματος (που συμβολίζονται με a,b,c), ενώ υπάρχουν και 3 διαφορετικές γενιές φερμιονίων που δίνουν τους δείκτες γεύσης (συμβολίζονται με i, j, k):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m \delta_{ij}) \psi_j$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$(D_\mu)_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} - ig (T_a)_{ij} A_\mu^a$$

Τα f^{abc} είναι οι σταθερές δομής της άλγεβρας, και T_a οι γεννήτορες της άλγεβρας. Περισσότερες λεπτομέρειες αναφέρονται σε παράρτημα.

2.2 Επιλογή βαθμίδας και φαντάσματα Faddeev-Popov

Ο φορμαλισμός των ολοκληρωμάτων διαδρομής αντιμετωπίζει προβλήματα με τις θεωρίες βαθμίδας εξαιτίας των περιττών βαθμών ελευθερίας (2 αποτελέσματα που διαφέρουν μεταξύ τους κατά έναν μετασχηματισμό βαθμίδας είναι φυσικά ισοδύναμα). Για να μπορούν να γίνουν οι υπολογισμοί με τρόπο συνεπή πρέπει οι περιττοί βαθμοί ελευθερίας να αφαιρεθούν. Αυτή η διαδικασία λέγεται **επιλογή βαθμίδας (gauge fixing)** και υλοποιείται στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν με τη **μέθοδο Faddeev-Popov**, δηλαδή με την προσθήκη ορισμένων επιπλέον πεδίων στη Λαγκραντζιανή, τα **φαντάσματα Faddeev-Popov**, και ενός όρου gauge fixing [Sre07]:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \partial^\mu A_\mu^a \partial^\nu A_\nu^a$$

Όπου ξ είναι μία παράμετρος που αντιστοιχεί σε διαφορετικές επιλογές βαθμίδας. Η πιο απλή επιλογή είναι συνήθως η βαθμίδα Feynman, $\xi = 1$, και είναι αυτή που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλους τους υπολογισμούς μας.

Στην QED, τα φαντάσματα δεν αλληλεπιδρούν με τα υπόλοιπα σωματίδια και αγνοούνται εύκολα, τα αποτελέσματα όμως που παίρνουμε όταν κάνουμε διάφορους υπολογισμούς έχουν ρητή εξάρτηση από την επιλογή βαθμίδας και πρέπει να δίνεται προσοχή για να μην αναμειχθούν 2 διαφορετικές επιλογές βαθμίδας στον ίδιο υπολογισμό. Στην QCD αντιθέτως τα φαντάσμα αλληλεπιδρούν με τα υπόλοιπα σωματίδια, και πρέπει να τα λαμβάνουμε υπ'όψιν. Η Λαγκραντζιανή των φαντασμάτων είναι:

$$\mathcal{L}_{gh} = -\partial^\mu c^{a\dagger} D_\mu c^a$$

Τα φαντάσματα είναι άμαζα μιγαδικά βαθμωτά, ο κινητικός τους όρος έχει όμως αρνητικό πρόσημο (το “λάθος” πρόσημο) και έτσι δεν αντιμετωπίζονται ως φυσικά πεδία, καθώς οι καταστάσεις τους έχουν αρνητική νόρμα και οι τετραορμές τους είναι spacelike ($p^2 > 0$), άρα μη αιτιακές.

3 Μέθοδοι υπολογισμού πλατών σκέδασης σε ΚΘΠ

Σκέδαση ονομάζεται μία φυσική διεργασία όπου ένα σωματίδιο ή ένα κύμα που έχει αρχικά (στο “απώτερο παρελθόν”) μία γνωστή και συνήθως στάσιμη κατάσταση (για παράδειγμα μία πορεία σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα), περνάει από μία (μικρή) περιοχή όπου αυτή η εξέλιξη διαταράσσεται, με αποτέλεσμα να καταλήγει σε μία διαφορετική κατάσταση στο “απώτερο μέλλον”. **Πλάτος σκέδασης** λέγεται το πλάτος πιθανότητας να παρατηρηθεί μετάβαση από μία συγκεκριμένη κατάσταση σε μία άλλη ως αποτέλεσμα της σκέδασης.

Ένα από τα κεντρικά προβλήματα της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι ο υπολογισμός πλατών σκέδασης για διάφορες ελαστικές ή ανελαστικές σκεδάσεις σωματιδίων. Η μοντελοποίηση μίας σωματιδιακής σκέδασης στα πλαίσια αυτής της θεωρίας είναι ένα πρόβλημα που στην πραγματικότητα δεν είναι καθόλου τετριμμένο, λόγω ορισμένων μαθηματικών δυσκολιών που σχετίζονται με το θεώρημα Haag, τις οποίες θα αναφέρουμε συντόμως αλλά θα αγνοήσουμε επί το πλείστον, καθώς δεν είναι απαραίτητο να τις επιλύσουμε με μαθηματικά αυστηρό τρόπο για να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους. Αυτό που έχουμε σκοπό να υπολογίσουμε στη μελέτη ενός φαινομένου σκέδασης είναι τα στοιχεία του πίνακα S-matrix, με τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε πλάτη σκέδασης.

Ελάχιστα προβλήματα όμως στη φυσική (και ειδικά στη κβαντική θεωρία πεδίου) έχουν αναλυτική λύση. Οι ελεύθερες θεωρίες συνήθως είναι επιλύσιμες, αλλά οι αλληλεπιδράσεις δυσκολεύουν το πρόβλημα. Συνεπώς, πολύ συχνά αξιοποιούνται διαταρακτικές μέθοδοι θεωρώντας τις σταθερές σύζευξης μικρές. Αυτές οι μέθοδοι δεν είναι οι μοναδικές που χρησιμοποιούνται, καθώς δεν επαρκούν για την περιγραφή κάθε είδους φαινομένου (είναι γνωστά πολλά μη διαταρακτικά φαινόμενα όπως για παράδειγμα instantons και renormalons, ενώ επίσης για πολλές θεωρίες η σύζευξη είναι πολύ ισχυρή για να είναι εφικτή μία διαταρακτική προσέγγιση, και προτιμούνται μέθοδοι ορισμού της θεωρίας σε πλέγματα). Ωστόσο είναι αυτές που θα μας απασχολήσουν εδώ. Για τον κάθε όρο της διαταρακτικής σειράς που θα πάρουμε για τα προβλήματα σκέδασης θα χρησιμοποιήσουμε μια πολύ πρακτική μέθοδο γραφικού υπολογισμού, τα διαγράμματα Feynman.

3.1 Θεωρία σκεδάσεων

Έστω ένα πείραμα διάσπασης ενός σωματιδίου A σε δύο άλλα σωματίδια B και C :

$$A \rightarrow B + C$$

Για να μελετηθεί αυτό το φαινόμενο πρέπει φυσικά να ορίσουμε το τι εννοούμε ακριβώς με πώς έχουμε αρχικά ένα σωματίδιο A που διασπάται σε δύο σωματίδια B και C . Σκοπός της θεωρίας σκεδάσεων είναι να υπολογίσουμε την πιθανότητα μετάβασης από μία αρχική σε μία τελική κατάσταση, οι οποίες θεωρούμε ότι βρίσκονται σε χρονικές στιγμές $\mp\infty$ αντίστοιχα. Πυρήνας της προσέγγισης που υπολογίζουμε είναι η υπόθεση πως οι αρχικές και τελικές καταστάσεις είναι ελεύθερες στα αντίστοιχα χρονικά όρια, ανήκουν δηλαδή έναν ελεύθερο χώρο Hilbert (πιο συγκεκριμένα χώρο Fock πολλών ελεύθερων σωματιδίων) \mathcal{H}_0 , όμως η αλληλεπιδρώσα θεωρία έχει ένα διαφορετικό χώρο Hilbert \mathcal{H} [IZ12; Tal22; SW00; Col19].

Μία αφελής προσέγγιση στη θεωρία σκεδάσεων είναι η **εικόνα αλληλεπιδράσεων**. Στα πλαίσια αυτής θεωρούμε ότι αν έχουμε μία αρχική κατάσταση $|i\rangle$ στην εικόνα Heisenberg, μπορούμε να την συσχετίσουμε με μία κατάσταση της εικόνας αλληλεπιδράσεων η οποία θεωρούμε ότι ανήκει στον ελεύθερο χώρο Hilbert μέσω του μοναδιακού (unitary) τελεστή $U(t, s)$:

$$\begin{aligned} |i\rangle_H &= \lim_{t \rightarrow \text{inf ty}} U(t, 0) |i, t\rangle_{\text{int}} \\ |f\rangle_H &= \lim_{s \rightarrow \infty} U(s, 0) |f, t\rangle_{\text{int}} \\ \langle f|i\rangle_H &= \lim_{s \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} \langle f, s|U(t, s)|i, t\rangle_{\text{int}} \\ S &\equiv \lim_{s \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} U(t, s) \end{aligned}$$

Όπου:

$$U(t, s) = T e^{i \int_{s \leq x^0 \leq t} d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x)}$$

Εδώ T είναι ο **τελεστής χρονοδιάταξης**, τον οποίο θα ορίσουμε αργότερα. Αυτή η προσέγγιση στη σκέδαση επιχειρεί να “απομονώσει” τη χρονική εξέλιξη λόγω των αλληλεπιδράσεων από την “ελεύθερη” χρονική εξέλιξη, και η κεντρική ιδέα είναι πως οι καταστάσεις της εικόνας αλληλεπιδράσεων είναι ελεύθερες, και ο τελεστής $U(0, 0)$ είναι η μονάδα στον ελεύθερο χώρο \mathcal{H}_0 .

Το πρόβλημα είναι πως αυτή η μορφή στην πραγματικότητα δεν ισχύει, και αυτό το εγχείρημα είναι γενικά αδύνατον, καθώς ο τελεστής S ορισμένος έτσι δεν υπάρχει, σύμφωνα με το **θεώρημα του Haag** [Haa55], εκτός από την τετριμμένη περίπτωση που τα πεδία είναι ελεύθερα (ή, όπως τέθηκε από τους Streater και Wightman, “η εικόνα αλληλεπιδράσεων υπάρχει αν και μόνο αν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση” [SW00]). Αυτή η προσέγγιση δεν σέβεται το γεγονός ότι οι 2 χώροι Hilbert δεν είναι ίδιοι.

Μία λύση στο πρόβλημα είναι να ορίσουμε τους **τελεστές Møller** $\Omega_{\pm} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ οι οποίοι θα σχετίζουν τα αρχικά και τελικά πεδία στην εικόνα Heisenberg με ελεύθερα πεδία με βάση τον τύπο:

$$\phi_{f,i}(x) = \Omega_{\pm} \phi_0(x) \Omega_{\pm}^{\dagger}$$

Όπου ισχύει το όριο:

$$\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi_{f,i}(t, \mathbf{x}), \quad t \rightarrow \pm\infty$$

Όπου αντιλαμβανόμαστε το όριο ως **ασθενές**, δηλαδή ισχύει ξεχωριστά για κάθε στοιχείο μήτρας [HS20]. Με άλλα λόγια, έχουμε υποθέσει ότι υπάρχουν ορισμένοι τελεστές $\phi_{f,i}$ στον αλληλεπιδρώντα χώρο οι οποίοι συμπεριφέρονται ως ελεύθεροι, και συγκλίνουν ασθενώς στους τελεστές ϕ του αλληλεπιδρώντα χώρου που μελετάμε, χωρίς βέβαια να ταυτίζονται με αυτούς. Ορίζουμε έτσι τον **πίνακα S (S-matrix)**:

$$S = \Omega_+^\dagger \Omega_-$$

Μία καθιερωμένη μέθοδος για τον υπολογισμό του πίνακα S χωρίς τα προβλήματα που αντιμετωπίσαμε με τον αφελή ορισμό του είναι η εισαγωγή μίας συνάρτησης $g(x)$ η οποία “σβήνει” την αλληλεπίδραση στο άπειρο ([IZ12; Sch14; Düt+19]):

$$S(g) \equiv T e^{i \int d^4x g(x) \mathcal{L}_{int}(x)}$$

Τότε μπορούμε να πάρουμε το **αδιαβατικό όριο** όπου η συνάρτηση αυτή τείνει στο 1 και ανακτούμε τη φυσική θεωρία:

$$S = \lim_{g \rightarrow 1} S(g)$$

Αν και είναι σαφώς καλύτερος αυτός ο ορισμός, και πάλι παρουσιάζει ορισμένες σημαντικές δυσκολίες. Συγκεκριμένα, αποτυγχάνει στην περίπτωση όπου υπάρχουν άμαζα σωματίδια στη θεωρία, και ο πίνακας S παρουσιάζει αποκλίσεις τύπου IR (infrared) στο αδιαβατικό όριο. Θα επανέλθουμε σε αυτό το πρόβλημα, που όμως δεν θα το εξετάσουμε διεξοδικά, καθώς είναι αρκετά περίπλοκο, όχι πολύ καλά κατανοητό και δεν σχετίζεται άμεσα με την UV (ultraviolet) συμπεριφορά της θεωρίας που μας ενδιαφέρει περισσότερο εδώ.

3.2 Τύπος LSZ και συναρτήσεις Green

Ο τύπος LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το S-matrix με βάση ορισμένες συναρτήσεις Green, για τις οποίες υπάρχουν απλές μέθοδοι να υπολογιστούν. Βασικές αναφορές εδώ ήταν το σύγγραμμα [IZ12] και το άρθρο [Col19].

Στην ενότητα αυτή θα υποθέτουμε πως μιλάμε για ένα βαθμωτό πεδίο, αλλά τα αποτελέσματα γενικεύονται εύκολα για περισσότερα πεδία. Δουλεύοντας πάντα στην εικόνα Heisenberg, έχουμε μία βάση καταστάσεων $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; in\rangle$ που γράφουμε $|\alpha, in\rangle$, και μία $|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n'}; out\rangle$ που γράφουμε $|\beta, out\rangle$, όπως περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Θα μπορούσαμε τότε να γράψουμε τα στοιχεία του S-matrix ως:

$$S_{\alpha,\beta} = \langle \beta; out | \alpha; in \rangle$$

Αυτός ο ορισμός είναι κάπως σχηματικός, καθώς το γινόμενο αυτών των καταστάσεων περιλαμβάνει αποκλίνοντα ολοκληρώματα. Ο σωστός τρόπος να οριστεί είναι υπό το πρίσμα της θεωρίας κατανομών που θα περιγραφεί στο Παράρτημα A. Ακόμη, θα ορίσουμε τον **τελεστή χρονοδιάταξης** (που αναφέραμε χωρίς να ορίσουμε στην προηγούμενη ενότητα) ως τον τελεστή που μετατρέπει ένα γινόμενο τελεστών σε **χρονοδιατεταγμένο γινόμενο**. Το τελευταίο είναι ένα

γινόμενο όπου οι τελεστές σε πρώτες χρονικές στιγμές μπαίνουν στα δεξιά των μετέπειτα:

$$T\{A_1(t_1)A_2(t_2)\cdots A_n(t_n)\} = \sum_p \Theta(t_{p_1} > t_{p_2} > \cdots > t_{p_n})\varepsilon(p)A_{p_1}(t_{p_1})A_{p_2}(t_{p_2})\cdots A_{p_n}(t_{p_n}) \quad (1)$$

$$= \sum_p \left(\prod_{j=1}^{n-1} \Theta(t_{p_j} - t_{p_{j+1}}) \right) \varepsilon(p)A_{p_1}(t_{p_1})A_{p_2}(t_{p_2})\cdots A_{p_n}(t_{p_n}) \quad (2)$$

Όπου το άθροισμα είναι πάνω σε κάθε πιθανή μετάθεση των δεικτών, Θ οι βηματικές συναρτήσεις Heaviside, και $\varepsilon(p)$ μία συνάρτηση που είναι ταυτοτικά 1 για μποζονικά πεδία, και παίρνει το πρόσημο της μετάθεσης για φερμιονικά πεδία. Όπως θα δούμε στο Παράρτημα Α, αυτός ο ορισμός είναι λίγο προβληματικός καθώς εμπλέκει γινόμενα κατανομών τα οποία δεν είναι καλά ορισμένα. Ωστόσο, είναι αυτός που χρησιμοποιείται πιο συχνά στη βιβλιογραφία. Ο **τύπος LSZ** σχετίζει το S-matrix όπως ορίστηκε παραπάνω με ένα αντικείμενο γνωστό ως **χρονοδιατεταγμένες συναρτήσεις συσχετισμού** ή **χρονοδιατεταγμένες συναρτήσεις Green**:

$$S_{\alpha,\beta} = i^{n+n'} \lim_{on-shell} \prod_{k=1}^n (p_k^2 + m_{Ph}^2) \prod_{j=1}^n (k_j^2 + m_{Ph}^2) \tilde{G}^{(n+n')}(k_1, \dots, k_{n'}; p_1, \dots, p_n)$$

Όπου m_{Ph} είναι η φυσική μάζα του σωματιδίου (που όπως θα δούμε δεν ταυτίζεται με την μάζα που εμφανίζεται στη Λαγκραντζιανή), το on-shell όριο σημαίνει $p_i^2 \rightarrow -m_{Ph}^2$ για κάθε εξωτερική ορμή, και οι χρονοδιατεταγμένες συναρτήσεις Green στο χώρο των συντεταγμένων ορίζονται ως [Col84]:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

Ενώ στον τύπο LSZ έχουμε το μετασχηματισμό Fourier τους. Η κατάσταση $|\Omega\rangle$ αντιπροσωπεύει το κενό μίας αλληλεπιδρώσας θεωρίας, για να το διακρίνουμε από το κενό της ελεύθερης θεωρίας, που θα συμβολίζεται $|0\rangle$.

Ο τύπος LSZ όπως παρουσιάστηκε παραπάνω είναι έγκυρος μόνο υπό ορισμένες προϋποθέσεις, που σχετίζονται με το γεγονός ότι για να τον αποδείξουμε, πρέπει να υποθέσουμε πως οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής στην αλληλεπιδρώσα θεωρία συμπεριφέρονται όπως συμπεριφέρονται και στην ελεύθερη. Αυτό δεν ισχύει γενικά, καθώς οι τελεστές δημιουργίας σε μία αλληλεπιδρώσα θεωρία δεν δημιουργούν απλά ένα σωματίδιο όπως θα περιμέναμε. Πιο συγκεκριμένα, ο φορμαλισμός LSZ στηρίζεται πάνω στην **αδιαβατική υπόθεση** [IZ12; SW00; BLT75], την οποία χρησιμοποιήσαμε και στην προηγούμενη ενότητα:

1. Η σύζευξη μεταξύ των πεδίων εξαρτάται από μία συνάρτηση $g(x)$ που χάνεται ομαλά στο άπειρο (αδιαβατικό cutoff), και μπορούμε να ανακτήσουμε τη φυσική θεωρία στο όριο $g \rightarrow 1$ (αδιαβατικό όριο).
2. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, στο (ασθενές) όριο $t \rightarrow -\infty$ είναι $\phi(x) \rightarrow \phi_{in}(x)$, όπου το $\phi_{in}(x)$ είναι ελεύθερο πεδίο.
3. Αντίστοιχα, στο (ασθενές) όριο $t \rightarrow \infty$ έχουμε $\phi(x) \rightarrow \phi_{out}(x)$.

Για αυτό μπορούμε επιπλέον να προσθέσουμε τις απαιτήσεις:

$$\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0$$

$$\langle p | \phi(x) | \Omega \rangle = 1$$

Όπως θα ίσχυε δηλαδή και για τα ελεύθερα πεδία, όπου το $|p\rangle$ είναι μία κατάσταση ορμής p .

Ωστόσο θα δούμε πως πολλές φορές εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου αυτές οι προϋποθέσεις δεν πληρούνται, και ως αποτέλεσμα δίνει αποκλίνοντα αποτελέσματα τα οποία πρέπει να διορθωθούν. Θα δούμε πως μία μορφή ανακανονικοποίησης στην ΚΘΠ είναι απλά ο επανορισμός των πεδίων με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο LSZ με συνεπή τρόπο. Όλα αυτά δείχνουν να υποστηρίζουν το επιχείρημα πως οι αποκλίσεις δεν είναι απαραίτητα ένα εγγενές πρόβλημα της θεωρίας, αλλά απλά η συνέπεια χρήσης τεχνικών για την εξαγωγή αποτελεσμάτων οι οποίες δεν είναι αυστηρά σωστές, και απαιτούν “διόρθωση” υπό τη μορφή της ανακανονικοποίησης.

Το συμπέρασμα από αυτή την υποενότητα είναι ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του S -matrix (στο βαθμό που αυτό είναι καλά ορισμένο) απλά και μόνο γνωρίζοντας τις χρονοδιατεταγμένες συναρτήσεις Green για τα πεδία που αντιστοιχούν στα σκεδαζόμενα σωματίδια, μέσω του τύπου LSZ. Για να είναι έγκυρη η εφαρμογή αυτού του τύπου, πρέπει να πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις, οι οποίες δεν θα πληρούνται απαραίτητα εξ αρχής στα προβλήματα που θα εξετάσουμε. Επομένως μπορούν αυτές οι συναρτήσεις Green να εξεταστούν αυτοτελώς [Col84], και θα δούμε στη συνέχεια πώς μπορούν να υπολογιστούν με διαγραμματικές μεθόδους στο πλαίσιο της θεωρίας διαταραχών.

3.3 Διαδότες, αναπαράσταση Källén-Lehmann

Έστω μία θεωρία χωρίς αλληλεπιδράσεις, με 3 είδη πεδίων: βαθμωτά (σπιν 0) πεδία $\phi(x)$, φερμιονικά (σπιν 1/2) πεδία Dirac $\psi(x)$ (εκφράζονται ως σπίνορες), και διανυσματικά (σπιν 1) πεδία βαθμίδας $A^\mu(x)$. Οι διαδότες ορίζονται ως ένα είδος συνάρτησης Green 2 σημείων:

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{i} \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

$$S(x-y) = \frac{1}{i} \langle 0 | T \bar{\psi}(x) \psi(y) | 0 \rangle$$

$$\Delta^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{i} \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle$$

Περισσότερο θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier αυτών των διαδοτών, που τους μεταφέρει στο χώρο των ορμών, και στην ελεύθερη θεωρία δίνονται από ([Sre07]):

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m_\phi^2 - i\epsilon}$$

$$S(p) = \frac{-\not{p} + m_\psi}{p^2 + m_\psi^2 - i\epsilon}$$

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu}}{p^2 + m_A^2 - i\epsilon}$$

Ο τρίτος δεν είναι στην πιο γενική του μορφή, καθώς έχει επιλεχθεί η βαθμίδα Feynman που τον απλοποιεί. Το $g^{\mu\nu}$ είναι η μετρική Minkowski.

Οι ελεύθεροι διαδότες είναι χρήσιμοι, όμως μας ενδιαφέρει η μορφή που παίρνουν όταν προστίθενται αλληλεπιδράσεις στη θεωρία. Οι αντίστοιχα ορισμένοι διαδότες μίας αλληλεπιδρώσας θεωρίας ονομάζονται **ακριβείς (exact) διαδότες**. Για αυτούς υπάρχει η αναπαράσταση Källén-Lehmann (αρχικές εργασίες: [Leh54; Kal52]).

Θεώρημα 3.1 (Källén-Lehmann για βαθμωτά). Έστω ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ σε θεωρία με Poincare-αναλλοίωτο κενό, το οποίο δεν αλληλεπιδρά με διαφορετικά πεδία. Έστω επίσης ότι όλες οι καταστάσεις της θεωρίας είναι φυσικές (αρνητικό p^2), δεν υπάρχουν δέσμες καταστάσεις, και ισχύουν οι αδιαβατικές υποθέσεις της προηγούμενης ενότητας. Τότε ο ακριβής διαδότης $\Delta(p)$ του $\phi(x)$ γράφεται:

$$\Delta(p) = \Delta(p) + \int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{p^2 + s - i\epsilon}$$

Εδώ το $\rho(s)$ είναι μία μη αρνητική συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω χώρος Fock που αποτελείται από καταστάσεις $|n\rangle$, όπου n είναι μια ταμπέλα που συμβολίζει κάθε δυνατό πλήθος σωματιδίων και ιδιοκατάσταση 4-ορμής. Χρησιμοποιούμε την πληρότητα του χώρου αυτού για να γράψουμε:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$$

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi^\dagger(y) | \Omega \rangle = \sum_n \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi^\dagger(y) | \Omega \rangle$$

Εδώ το \sum_n συμβολίζει ένα άθροισμα πάνω σε κάθε δυνατή τέτοια κατάσταση (αυτό σημαίνει ότι δεν είναι ένα διακριτό άθροισμα). Εφόσον είναι βαθμωτό, γράφουμε το πεδίο ως:

$$\phi(x) = e^{-iP \cdot x} \phi(0) e^{iP \cdot x}$$

όπου P είναι ο τελεστής της 4-ορμής (γεννήτορας της ομάδας Poincare). Το κενό $|\Omega\rangle$ είναι Poincare-αναλλοίωτο, άρα ισχύει:

$$e^{iP \cdot x} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi^\dagger(y) | \Omega \rangle = \sum_n e^{ip_n \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2$$

Εδώ p_n είναι η συνολική ορμή της κατάσταση $|n\rangle$. Εισάγουμε τώρα τη συνάρτηση:

$$\rho^*(p) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2$$

Ο συμβολισμός $*$ δεν υποδηλώνει μιγαδικό συζυγές. Είναι τέτοια ώστε:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi^\dagger(y) | \Omega \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \rho^*(p) e^{ip \cdot (x-y)}$$

Αφού δεν έχουμε μη φυσικές καταστάσεις, είναι $-p^2 \geq 0$ και $p_0 > 0$, και γράφουμε $\rho^*(p) = \rho(p)\theta(p_0)$. Επιπλέον, για να είναι αναλλοίωτο το αριστερό μέρος της εξίσωσης, πρέπει να έχει εξάρτηση μόνο από το p^2 , άρα γράφουμε τελικά:

$$\rho^*(p) = \rho(-p^2)\theta(p_0) = \int_0^\infty ds \rho(s) \delta(s + p^2) \theta(p_0)$$

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi^\dagger(y) | \Omega \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(s + p^2) \theta(p_0) e^{ip \cdot (x-y)}$$

Το ολοκλήρωμα έχει αυτά τα όρια ακριβώς γιατί δεν μπορούμε να έχουμε αρνητική συνολική μάζα στο σύστημα. Υποθέτοντας αυτοσυζυγείς τελεστές, μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι:

$$i \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) \Delta(x-y; s)$$

Εξετάζοντας λίγο πιο προσεκτικά την $\rho^*(p)$, βλέπουμε ότι το άθροισμα πάνω σε όλες τις καταστάσεις έχει έναν όρο για $|n\rangle = |\Omega\rangle$ ο οποίος από τις αδιαβατικές υποθέσεις δίνει $\langle \Omega | \phi(0) | \Omega \rangle = 0$, μετά έναν όρο για $|n\rangle = |1\rangle$, δηλαδή μία κατάσταση ενός σωματιδίου (με $s = -p^2 = m^2$) η οποία πάλι από την υπόθεση δίνει $\langle p | \phi(0) | \Omega \rangle = 1$, και όρους για τις καταστάσεις με 2 και περισσότερα σωματίδια, όπου πλέον το $s = ip^2$ παίρνει κάθε δυνατή τιμή στο διάστημα $[4m^2, \infty)$ καθώς αποκτούν και σχετική ορμή μεταξύ τους. Μπορούμε λοιπόν να σπάσουμε το άθροισμα σε διαφορετικά τμήματα, ώστε να γράφουμε:

$$\Delta(x-y) = \Delta(x-y; m^2) + \int_{4m^2}^\infty ds \rho(s) \Delta(x-y; s)$$

Αρκεί τώρα να κάνουμε έναν μετασχηματισμό Fourier για να μεταβούμε στη μορφή που θέλουμε να αποδείξουμε. \square

Το σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι ο διαδότης έχει έναν **μεμονωμένο πόλο** στη μάζα ενός σωματιδίου με υπόλοιπο 1 αν ισχύει η αδιαβατική υπόθεση που χρησιμοποιείται για την απόδειξη του τύπου LSZ. Παρόμοιες μορφές μπορούμε να πάρουμε και για διαδότες φερμιονίων, φωτονίων κλπ. Η τροποποίηση που πρέπει να γίνει είναι αντί να ξεκινάει η ολοκλήρωση από τη μάζα $4m^2$, να ξεκινάει από το m_{th}^2 , μία μάζα-κατώφλι, που ταυτίζεται με τη χαμηλότερη μάζα που μπορεί να έχει μία πολυσωματιδιακή κατάσταση $|n\rangle$ η οποία να μην μηδενίζει το $\langle n | A(0) | \Omega \rangle$, όπου $A(x)$ κάποιο αυθαίρετο πεδίο.

Η περίπτωση των φωτονίων παρουσιάζει μία μικρή επιπλοκή, καθώς το φωτόνιο έχει μηδενική μάζα και ο πόλος δεν είναι πλέον μεμονωμένος. Η μηδενική φωτονική μάζα δημιουργεί διάφορα προβλήματα που σχετίζονται και με αποκλίσεις τύπου IR (χαμηλών ενεργειών/μεγάλων αποστάσεων) τα οποία θα αγνοήσουμε ως επί το πλείστον, και θα διορθώνουμε εισάγοντας μία “ψευτική” πεπερασμένη φωτονική μάζα m_γ .

Παρατηρούμε πως έχουμε κάνει 2 υποθέσεις που δεν ισχύουν στην πραγματικότητα: ότι δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις, και ότι ο χώρος Fock της θεωρίας δεν περιέχει μη φυσικές καταστάσεις. Η πρώτη από τις 2 προφανώς δεν ισχύει για την QED και την QCD, και μάλιστα στη δεύτερη στην πραγματικότητα όλες αυτές οι συνθήκες δεν βγάζουν νόημα, καθώς τα γκλουόνια και τα κουαρκς απαντώνται μόνο σε δέσμιες καταστάσεις, επομένως ούτε αυτή η απαίτηση ούτε

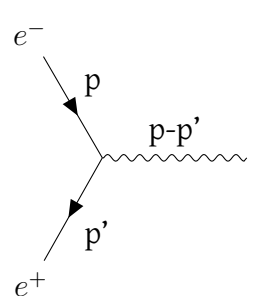
η ασυμπτωτική θεωρία γενικότερα δεν είναι έγκυρες αυστηρά. Θα αγνοήσουμε τις δέσμιες καταστάσεις εδώ, αλλά γενικά ελαττώνουν το m_{th} . Υπάρχει και ένα ακόμη πρόβλημα όμως, το γεγονός ότι τα φαντάσματα έχουν αρνητικό s [Kug97; KO79]. Η συνεισφορά των φαντασμάτων αναιρεί στην πραγματικότητα τα συμπεράσματα που βγάλαμε. Θα αγνοήσουμε και αυτά τα προβλήματα, καθώς δεν επιχειρούμε μία πιο αυστηρή μελέτη της θεωρίας, που μπορεί να βρεθεί αλλού. Κρατάμε το συμπέρασμα πως για να είναι εφαρμόσιμη η διαταρακτική προσέγγιση που ακολουθούμε, πρέπει τα πεδία να είναι κανονικοποιημένα με τέτοιο τρόπο που ο ακριβής διαδότης τους να έχει πόλο στο $-p^2 = m^2$ με υπόλοιπο 1. Η τοποθεσία του πόλου αργότερα θα ταυτίζεται με την “φυσική” μάζα του σωματιδίου, σε αντίθεση με τη “γυμνή” μάζα η οποία είναι απλά μία παράμετρος που εμφανίζεται στη Λαγκραντζιανή.

3.4 Διαταρακτική σειρά, διαγράμματα

Τώρα είναι ώρα να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις Green διαταρακτικά. Ο πιο εύκολος τρόπος να υπολογιστούν αυτές είναι η διαγραμματική μέθοδος, όπου όροι της Λαγκραντζιανής πυκνότητας αντιστοιχίζονται με στοιχεία διαγραμμάτων. Τα διαγράμματα τότε δίνουν τις συναρτήσεις Green που ψάχνουμε χάρις σε ορισμένους **κανόνες Feynman** που τα συσχετίζουν με κάποιες αλγεβρικές ποσότητες. Δεν θα ασχοληθούμε εδώ ακριβώς με το πως μπορούμε να εξάγουμε αυτούς τους κανόνες Feynman από τη Λαγκραντζιανή πυκνότητα, θα χρησιμοποιηθούν όπως απαντώνται στη βιβλιογραφία (συγκεκριμένα, στο [Sre07]).

Στα διαγράμματα Feynman οι γραμμές αντιστοιχίζονται με διαδότες σωματιδίων και οι κορυφές με αλληλεπιδράσεις. Οι εξωτερικές γραμμές αντιστοιχούν στα σωματίδια για τα οποία προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις Green, και τελικά αθροίζουμε την τιμή όλων των δυνατών διαγραμμάτων με τις ίδιες εξωτερικές γραμμές για να πάρουμε το αποτέλεσμα. Επίσης, σε κάθε κορυφή πρέπει να έχουμε διατήρηση ορμής. Στην περίπτωση της QED έχουμε 3 βασικά στοιχεία, το διαδότη των φερμιονίων, το διαδότη των φωτονίων και την κορυφή $e - e - \gamma$:

$$\begin{aligned}
 e &\xrightarrow{p} e = \frac{1}{i} S(p) \\
 \mu &\sim\!\!\!\sim\!^p \nu = \frac{1}{i} \Delta_{\mu\nu}(p)
 \end{aligned}$$



$$= ie\gamma^\mu \text{ (χωρίς τις εξωτερικές γραμμές)}$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε, για παράδειγμα, έναν ακριβή διαδότη, πρέπει να επιλέξουμε εξωτερικές γραμμές που αντιστοιχούν στα πεδία που αυτός εμπλέκει με τέτοιο τρόπο ώστε οι εσωτερικές γραμμές να είναι κάποιος συνδυασμός των επιτρεπόμενων διαγραμμάτων που αναφέρθηκαν. Ισχύουν επιπλέον οι γενικοί κανόνες (τους οποίους θα δούμε λεπτομερώς στην πράξη αργότερα):

- Σε κάθε κορυφή έχουμε διατήρηση ορμής.
- Αθροίζουμε το αποτέλεσμα κάθε πιθανού διαγράμματος που μπορούμε να πάρουμε.
- Όταν στα εσωτερικά loops εμφανίζονται ορμές που δεν είναι απόλυτα καθορισμένες, πρέπει να αθροίσουμε πάνω σε κάθε πιθανή ορμή ολοκληρώνοντας κατάλληλα πάνω τους.
- Στο άθροισμα αυτό, κάποιες φορές χρειάζεται να συμπεριλάβουμε ορισμένους παράγοντες συμμετρίας, αλλά αυτό δεν θα μας απασχολήσει εδώ γιατί δεν συναντάμε τέτοια διαγράμματα.
- Τα κλειστά φερμιονικά loops συνεισφέρουν έναν παράγοντα -1 στο γινόμενο.
- Διαβάζουμε ανάποδα από την κατεύθυνσή τους τις φερμιονικές γραμμές μέχρι το τέλος τους, και γράφουμε από αριστερά στα δεξιά κάθε διαδότη και κορυφή που συναντάμε, συνάπτοντας κατάλληλα τους σπιντοριακούς δείκτες. Για παράδειγμα, στο διάγραμμα με την κορυφή που είδαμε νωρίτερα, ξεκινάμε από το ποζιτρόνιο και καταλήγουμε στο ηλεκτρόνιο, γράφοντας στην πορεία τη συνεισφορά:

$$\frac{1}{i} S(\psi')_{\alpha\beta} i e \gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \frac{1}{i} S(\psi)_{\gamma\delta}$$

Η περίπτωση της QCD είναι λίγο πιο περίπλοκη, γιατί υπάρχουν επιπλέον κορυφές μεταξύ γκλουονίων, δείκτες χρώματος (a, b, c κλπ) για τα γκλουόνια, δείκτες γεύσης (i, j, k κλπ) για τα φερμιόνια, ενώ πρέπει να λάβουμε υπ'όψιν και τις αλληλεπιδράσεις με τα φαντάσματα. Έχουμε τις ακόλουθες τροποποιήσεις στις γραμμές που ήδη βρίσκονται (σε παρόμοια μορφή) και στην QED:

$$S_{ij}(\psi) = S(\psi)\delta_{ij}$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = \Delta_{\mu\nu}(k)\delta^{ab}$$

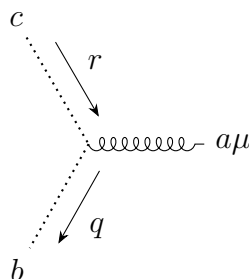
Ενώ οι κορυφές φερμιονίου-φερμιονίου-γκλουονίου συνεισφέρουν παράγοντα:

$$iV_{ij}^{\mu a} = ig\gamma^{\mu}T_{ij}^a$$

Όπου T^a ο γεννήτορας της ομάδας $SU(3)$ στη θεμελιώδη αναπαράσταση (περισσότερες λεπτομέρειες στο παράρτημα). Προστίθεται επιπλέον μία νέα γραμμή για τα φαντάσματα, τα οποία κουβαλούν δείκτες χρώματος:

$$a \cdots \overset{k}{\cdots} b = i\Delta^{ab}(k) = i\frac{\delta^{ab}}{k^2 - i\epsilon}$$

Συναντάμε κορυφές φαντάσματος-φαντάσματος-γκλουονίου (τα γκλουόνια αναπαρίστανται με κατσαρές γραμμές):



Αυτή η κορυφή συνεισφέρει παράγοντα:

$$iV_{\mu}^{abc}(r, q) = gf^{abc}q_{\mu}$$

Εδώ εμφανίζονται οι σταθερές f^{abc} , γνωστές ως **σταθερές δομής** της $SU(3)$. Τέλος, έχουμε τις κορυφές 3 και 4 γκλουονίων:

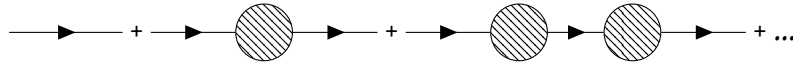
$a \mu = gf^{abc} [(q - r)_{\mu}g_{\nu\rho} + (r - p)_{\nu}g_{\rho\mu} + (p - q)_{\rho}g_{\mu\nu}]$

$d \sigma = -ig^2 f^{abe} f^{cde} g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + [\text{μεταθέσεις των } (b, \nu), (c, \rho), (d, \sigma)]$

Στα παραπάνω, θεωρούμε συμβατικά ότι οι ορμές δείχνουν έξω από την κορυφή, και η αντιστοιχεία των ορμών στα a, b, c είναι p, q, r .

3.5 Ιδιοενέργειες, 1PI διαγράμματα

Ο υπολογισμός των διαταρακτικών διορθώσεων κατά τα προηγούμενα για τους διαδοτές εμπλέκει διαγράμματα που μπορούν να γραφούν στην ακόλουθη μορφή:



Όπου οι κύκλοι είναι το άθροισμα όλων των 1PI (1 Particle Irreducible) διαγραμμάτων, δηλαδή διαγράμματα που δεν μπορούν να διαχωριστούν κόβοντας μία εσωτερική γραμμή. Η τιμή όλων των 1PI υποδιαγραμμάτων μαζί που αποτελούν κάθε κύκλο ονομάζεται **ιδιοενέργεια**, και είναι το αντικείμενο πολλών από τους υπολογισμούς που θα κάνουμε καθώς αρκεί για να οριστούν οι διορθώσεις των διαδοτών. Το παραπάνω άθροισμα διαγραμμάτων μπορεί να γραφεί (για την περίπτωση, για παράδειγμα, ενός βαθμωτού πεδίου) ως η παρακάτω τυπική γεωμετρική σειρά:

$$\frac{1}{i}\Delta(p^2) = \frac{1}{i}\Delta(p^2) + \frac{1}{i}\Delta(p^2) [i\Pi(p^2)] \frac{1}{i}\Delta(p^2) + \frac{1}{i}\Delta(p^2) [i\Pi(p^2)] \frac{1}{i}\Delta(p^2) [i\Pi(p^2)] \frac{1}{i}\Delta(p^2) + \dots$$

Όπου $i\Pi(p^2)$ είναι η τιμή των 1PI διαγραμμάτων που συνεισφέρουν στην ιδιοενέργεια. Η σειρά αυτή μπορεί να αθροιστεί τυπικά (μη αυστηρά) στην τιμή:

$$\Delta(p^2) = \frac{\Delta(p^2)}{1 - \Delta(p^2)\Pi(p^2)} = \frac{1}{p^2 + m^2 - \Pi(p^2) - i\epsilon}$$

Αντίστοιχη χρήσιμη σχέση μπορούμε να βρούμε και για τον ακριβή διαδότη φερμιονίων:

$$S(\not{p}) = \frac{1}{\not{p} + m - \Sigma(\not{p}) - i\epsilon}$$

Όπου εδώ η ιδιοενέργεια είναι $\Sigma(\not{p})$. Η περίπτωση του διαδότη των φωτονίων είναι λίγο πιο περίπλοκη. Η ιδιοενέργεια συμβολίζεται πλέον $\Pi^{\mu\nu}(k^2)$ αφού έχει ταυστικούς δείκτες, αλλά μπορεί να αποδειχθεί για την QED με χρήση των ταυτοτήτων Ward (που δεν θα μελετήσουμε εδώ) πως μπορούμε να την γράψουμε στη μορφή:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = k^2 \Pi(k^2) P^{\mu\nu}(k)$$

Όπου $\Pi(k^2)$ είναι μία βαθμωτή συνάρτηση που θα αποκαλούμε στο εξής ιδιοενέργεια του φωτονίου, και έχουμε επίσης ορίσει τον τελεστή προβολής:

$$P^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$$

Τα φωτόνια είναι άμαζα, όμως συχνά χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μία “ψεύτικη” φωτονική μάζα m_γ για να αποφύγουμε ορισμένες παθογένειες της θεωρίας στο όριο χαμηλών ενεργειών (IR αποκλίσεις). Με την εισαγωγή αυτής της ψεύτικης μάζας μπορούμε να γράψουμε τον ακριβή διαδότη (σε βαθμίδα Feynman όπως κάναμε και για τον ελεύθερο):

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{P^{\mu\nu}(k)}{k^2[1 - \Pi(k^2)] + m_\gamma^2 - i\epsilon}$$

Παρόμοια αποτελέσματα παίρνουμε και για τον διαδότη των γκλουονίων που θα χρειαστούμε αργότερα.

3.6 Στροφή Wick

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να υπολογίσουμε ολοκληρώματα πάνω στους δείκτες ενός τετρανύσματος q της μορφής $\int d^d q$. Συχνά όμως είναι προτιμότερο να ολοκληρώνουμε πάνω σε ευκλείδια διανύσματα αντί για διανύσματα σε χώρο Minkowski, είτε γιατί θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ορισμένους μαθηματικούς τύπους που ισχύουν για αυτά, είτε γιατί τα ολοκληρώματα στο χώρο Minkowski παρουσιάζουν χειρότερες/πιο περίπλοκες αποκλίσεις, είτε γιατί ορισμένα πράγματα δεν είναι καλά ορισμένα στο χώρο Minkowski (σημειώνεται ότι και τα ίδια τα ολοκληρώματα διαδρομής Feynman δεν έχουν καλά ορισμένο μέτρο σε χώρο Minkowski, και έτσι ορίζονται σε ευκλείδιο χώρο πρώτα και μετά ο χώρος μετατρέπεται σε χώρο Minkowski με χρήση στροφής Wick [Col84]). Η στροφή Wick είναι ένας τρόπος να μεταφέρουμε ένα ολοκλήρωμα από το χώρο Minkowski στον ευκλείδιο χώρο, χρησιμοποιώντας φανταστικό χρόνο.

Για να υλοποιήσουμε τη στροφή Wick σε ένα ολοκλήρωμα, αντιμετωπίζουμε το ολοκλήρωμα πάνω στο q^0 από το $-\infty$ στο $+\infty$ ως ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, πάνω σε μία καμπύλη που ταυτίζεται με τη γραμμή των πραγματικών αριθμών. Μπορούμε να αποδείξουμε όμως ότι αν η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα φθίνει γρηγορότερα από το $\frac{1}{|q^0|}$ καθώς $|q^0| \rightarrow \infty$, τότε αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα ολοκλήρωμα πάνω σε κλειστή καμπύλη. Τότε, ως συνέπεια του **ολοκληρωτικού τύπου Cauchy**

στην περίπτωση που η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι αναλυτική και που η συνάρτηση δεν περνάει από πόλους κατά την περιστροφή, μπορούμε να περιστρέψουμε αυτή την καμπύλη κατά $\pi/2$ στο μιγαδικό επίπεδο χωρίς να αλλάξουμε την τιμή του ολοκληρώματος. Σε αυτή την περίπτωση, αντικαθιστούμε [Col84]:

$$q^0 = i\bar{q}_d, q^j = \bar{q}^j$$

$$d^d q \rightarrow i \int d^d \bar{q}$$

3.7 Τι ακριβώς (δεν) υπολογίζει η θεωρία διαταραχών;

Η διαταρακτική θεωρία σκεδάσεων στην ΚΘΠ μπορεί να κατασκευαστεί με μαθηματικά αυστηρό τρόπο (κατά το πρόγραμμα Epstein-Glaser της αιτιακής θεωρίας διαταραχών που αναφέρεται σύντομα στα παραρτήματα), ωστόσο η ΚΘΠ δεν μπορεί να αναχθεί απλά και μόνο στη μελέτη διαγραμμάτων Feynman και στον υπολογισμό πλατών σκέδασης.

Μπορεί να δοθεί αρχικά σε κάποιον η εντύπωση πως θα μπορούσαμε να αναλύσουμε οποιοδήποτε φαινόμενο με αυθαίρετη ακρίβεια εάν απλά συμπεριλάβουμε αρκετά διαγράμματα Feynman στον υπολογισμό. Αυτό παρουσιάζει 3 διαφορετικά προβλήματα. Πρώτον, σε πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα (για παράδειγμα στην QCD σε χαμηλές ενέργειες) οι συζεύξεις είναι πολύ ισχυρές για να είναι εφαρμόσιμη η θεωρία διαταραχών. Εκεί εφαρμόζονται μη διαταρακτικές τεχνικές, όπως υπολογισμοί σε πλέγματα, κλπ. Δεύτερον, ακόμα και εκεί όπου μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία διαταραχών, υπάρχουν φαινόμενα που της “ξεφεύγουν” σε κάθε τάξη, για παράδειγμα τα instantons. Αυτό μπορεί να φαίνεται περίεργο, αλλά σχετίζεται με το γεγονός ότι υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες το ανάπτυγμα Taylor είναι προβληματικό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $e^{-\frac{1}{x^2}}$ είναι μη μηδενική για $x \neq 0$, αλλά όλοι οι όροι στο ανάπτυγμα Taylor είναι 0. Επομένως το ανάπτυγμα Taylor δεν μπορεί να προσεγγίσει αυτή τη συνάρτηση σε οποιαδήποτε τάξη. Τέλος, ακόμα και για φαινόμενα για τα οποία η θεωρία διαταραχών εφαρμόζεται συχνά και με μεγάλη ακρίβεια, και όπου μπορούμε να δείξουμε πως κάθε όρος σε αυτή τη σειρά είναι πεπερασμένος, με το μέτρο των όρων να τείνει στο 0 καθώς πηγαίνουμε σε ανώτερες τάξεις, η διαταρακτική σειρά και πάλι σχεδόν ποτέ δεν συγκλίνει, όπως υποψιάστηκε αρχικά ο Dyson [Dys52], μία υποψία που αργότερα επιβεβαιώθηκε. Αυτό είναι ένα πρόβλημα που σχετίζεται με το προηγούμενο, ενώ το παρουσιάζουν κάποιες φορές ακόμα και μοντέλα για τα οποία γνωρίζουμε την ακριβή λύση, για παράδειγμα ο αναρμονικός ταλαντωτής στη μη σχετικιστική κβαντομηχανική (που μπορούμε να το δούμε ως πρόβλημα ΚΘΠ σε μία διάσταση) [BW69; BW73].

Το τελευταίο αυτό στοιχείο μπορεί να προκαλέσει απογοήτευση, και εγείρει το ερώτημα του τι ακριβώς είναι αυτό που υπολογίζουμε αν η σειρά αποκλίνει. Το γεγονός ότι οι πειραματικές παρατηρήσεις βρίσκονται σε τόσο μεγάλη συμφωνία με τις θεωρητικές προβλέψεις όμως δείχνουν ότι δεν μπορεί να είναι μία τελείως ανυπόστατη διαδικασία. Η διαταρακτική σειρά αντιμετωπίζεται γενικά ως ασυμπτωτική σειρά, δηλαδή ως μια σειρά η οποία πλησιάζει στο ακριβές αποτέλεσμα σε πεπερασμένη τάξη, χωρίς απαραίτητα να συγκλίνει σε αυτό. Σε ορισμένες περιπτώσεις (όπως στην περίπτωση του αναρμονικού ταλαντωτή που αναφέρθηκε νωρίτερα) μπορεί μία διαφορετική μέθοδος άθροισης από τη συνηθισμένη να κάνει τη σειρά να συγκλίνει (για παράδειγμα η άθροιση Borel). Αυτό όμως δεν λειτουργεί για τις περισσότερες ενδιαφέρουσες θεωρίες ΚΘΠ. Επομένως απλά αποδεχόμαστε πως η συνηθισμένη θεωρία διαταραχών δεν θα

συγκλίνει, και πως απλά θα δίνει προσεγγιστικά σωστά αποτελέσματα μέχρι κάποια πεπερασμένη τάξη.

Ένα συμπέρασμα από όλα αυτά είναι πως η θεωρία διαταραχών δεν εξαντλείει την ΚΘΠ, άρα τα προβλήματα που μπορεί να παρουσιάζει η πρώτη δεν είναι απαραίτητα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της δεύτερης. Η θεωρία διαταραχών είναι μία υπολογιστική τεχνική που μπορεί να είναι λιγότερο ή περισσότερο αποτελεσματική σε κάποιες περιστάσεις. Στην καλύτερη περίπτωση μπορεί η εφαρμογή της να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο αυθαίρετη και συνεπής, ωστόσο δεν μπορεί να συλλάβει κάθε πτυχή της πλήρους θεωρίας, και όταν παρουσιάζει προβλήματα αυτό δεν είναι απαραίτητα γιατί η πλήρης θεωρία είναι προβληματική. Η απόδειξη μαθηματικής ύπαρξης μη τετριμμένων θεωριών ΚΘΠ σε 4 διαστάσεις με αλληλεπιδράσεις είναι γνωστό ανοιχτό πρόβλημα. Οι απειρισμοί και οι δυσκολίες που προκύπτουν στη θεωρία διαταραχών δεν αποτελούν ένδειξη μη ύπαρξης της θεωρίας. Εδώ δεν θα ασχοληθούμε εις βάθος με τέτοια ερωτήματα, αλλά είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τι μπορούμε να περιμένουμε από τη θεωρία διαταραχών, και τι είναι πραγματικά προβληματικό.

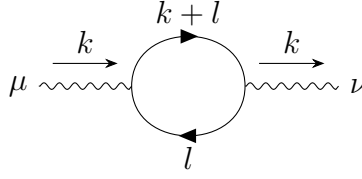
Περισσότερες πληροφορίες για το πρόβλημα της συμπεριφοράς της σειράς διαταραχών σε μεγάλες τάξεις και την αντιμετώπιση της σειράς ως ασυμπτωτικής μπορούν να βρεθούν στα [LZ12; Zin21; Wei96], και για τις ασυμπτωτικές σειρές γενικότερα στα [Boy99; BO99].

4 Πρώτα παραδείγματα και αποκλίσεις στην QED

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα από την QED που παρουσιάζουν UV (ultraviolet) αποκλίσεις όταν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις Green όπως αναφέρθηκαν πιο πάνω. Ιστορικά, αυτή ήταν και η πρώτη ΚΘΠ όπου χρησιμοποιήθηκε η ανακανονικοποίηση για να αφαιρεθούν οι αποκλίσεις UV που προέκυπταν. Αποκλίσεις UV προκύπτουν όταν προσπαθούμε να μελετήσουμε με "αφελή" τρόπο όρους της διαταρακτικής σειράς που προκύπτουν από διαγράμματα Feynman με loops. Θα υπολογίσουμε με αυτό τον τρόπο τις διορθώσεις για το διαδότη των φωτονίων και το διαδότη των ηλεκτρονίων στην QED χρησιμοποιώντας τους κανόνες Feynman στη βαθμίδα Feynman, που αναφέραμε νωρίτερα. Αυτός ο υπολογισμός είναι σημαντικός όχι μόνο γιατί θα συναντήσουμε για πρώτη φορά τις αποκλίσεις που θέλουμε να ξεφορτωθούμε εν τέλει, αλλά επίσης γιατί ο προσδιορισμός των διορθώσεων κάθε διαδότη και κορυφής είναι βασικός για την εύρεση οποιουδήποτε πλάτους σκέδασης σε αυθαίρετη τάξη θεωρίας διαταραχών. Ακολουθούμε κατά βάση την παρουσίαση των υπολογισμών στο [Sre07].

4.1 Διαδότης φωτονίων

Στα πλαίσια ενός αφελούς υπολογισμού του φωτονικού διαδότη σε τάξη 1 loop, χρησιμοποιούμε τους (αφελείς) κανόνες Feynman που περιγράφηκαν νωρίτερα για να υπολογίσουμε την πόλωση κενού από το ακόλουθο διάγραμμα:



Για να μπορούμε να επαναχρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματά μας αργότερα, θα υπολογίσουμε την τιμή του διαγράμματος στη γενική περίπτωση d χωροχρονικών διαστάσεων αντί για 4. Η δράση τότε είναι:

$$S = \int d^d x \mathcal{L}$$

Καθώς αυτή πρέπει πάντα να είναι αδιάστατη, σε d διαστάσεις η σταθερά σύζευξης e έχει διάσταση μάζας $(4-d)/2$. Για να την κρατήσουμε αδιάστατη (όπως τυχαίνει να είναι για $d=4$), κάνουμε την αντικατάσταση:

$$e \rightarrow \mu^{(4-d)/2} e$$

Όπου το μ είναι μία αυθαίρετη σταθερά με διαστάσεις μάζας. Θα δούμε πως αυτή παρέχει πολλές φορές μία “κλίμακα μάζας” στη θεωρία, επομένως θα την αποκαλούμε **σταθερά κλίμακας**. Μετά από αυτές τις τροποποιήσεις, η πόλωση κενού που δίνει αυτό το διάγραμμα είναι:

$$i\Pi^{\mu\nu}(k) = (-1)(ie\mu^{(4-d)/2})^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \gamma_{\alpha\beta}^\nu S(k+l)_{\beta\gamma} \gamma_{\gamma\delta}^\mu S(l)_{\delta\alpha}$$

Όπου οι ελληνικοί κάτω δείκτες είναι σπινωριακοί δείκτες, που συνάπτονται μεταξύ τους με τον τρόπο που περιγράψαμε στους κανόνες Feynman. Παρατηρούμε ότι αυτό μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(k) &= -e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \text{tr}[\gamma^\nu S(k+l) \gamma^\mu S(l)] \\ &= -e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{N^{\mu\nu}}{[(k+l)^2 + m^2][l^2 + m^2]} \end{aligned}$$

Όπου:

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= \text{tr}[\gamma^\nu (-\not{k} - \not{l} + m) \gamma^\mu (-\not{l} + m)] \\ &= \text{tr}[\gamma^\nu (\not{k} + \not{l}) \gamma^\mu \not{l}] + m^2 \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας το ίχνος κατά τους κανόνες του παραρτήματος για τους πίνακες γ , παίρνουμε:

$$N^{\mu\nu}/4 = (l+k)^\nu l^\mu + (l+k)^\mu l^\nu - [l \cdot (l+k) + m^2] g^{\mu\nu}$$

Στρεφόμαστε τώρα στον παρονομαστή. Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Feynman για το συνδυασμό παρονομαστών (που παρουσιάζεται σε παράρτημα) και τον γράφουμε:

$$\frac{1}{[(k+l)^2 + m^2][l^2 + m^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{[x(k+l)^2 + (1-x)l^2 + m^2]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[l^2 + 2xk \cdot l + x^2 k^2 + m^2]^2}$$

Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του l και να γράψουμε τον παρονομαστή στη μορφή:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(q^2 + D)^2}$$

Όπου:

$$q = l + xk \quad D = x(1-x)k^2 + m^2$$

Τώρα, θα αλλάξουμε πρώτα τη σειρά των 2 ολοκληρωμάτων και μετά θα αλλάξουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από l σε q . Για να γίνει αυτό πρέπει να κάνουμε αυτή την αλλαγή στο $N^{\mu\nu}$ πρώτα. Όταν το κάνουμε αυτό, ο νέος παρονομαστής είναι συνάρτηση του q^2 , οι όροι του αριθμητή που είναι γραμμικοί στα q δίνουν 0 καθώς ολοκληρώνονται. Αγνοώντας αυτούς τους όρους, ο αριθμητής γράφεται:

$$N^{\mu\nu}/4 = 2q^\mu q^\nu - 2x(1-x)k^\mu - [q^2 - x(1-x)k^2 + m^2]g^{\mu\nu}$$

Τέλος, ισχύει ο τύπος (γνωστός ως ελάττωση Passarino-Veltman, προκύπτει εύκολα αναγνωρίζοντας πως η μόνη λογική μορφή που μπορεί να έχει το αποτέλεσμα με αυτούς τους δείκτες είναι $Cg^{\mu\nu}$, και μετά χρησιμοποιώντας $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d$ για να βρεθεί το C):

$$\int d^d q^\mu q^\nu f(q^2) = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int d^d q q^2 f(q^2)$$

Κι έτσι κάνουμε μέσα στον αριθμητή την αντικατάσταση $q^\mu q^\nu \rightarrow g^{\mu\nu} q^2$. Εμφανίζονται με αυτό τον τρόπο τα ολοκληρώματα $I(1, 2)$ και $I(0, 2)$ που έχουν προσδιορισθεί στο Παράρτημα D (εκεί αυτός ο υπολογισμός εκτελείται με τη βοήθεια στροφής Wick των ολοκληρωμάτων σε ευκλείδιο χώρο). Με βάση τους τύπους του παραρτήματος, έχουμε:

$$I(1, 2) = \frac{Dd}{2-d} I(0, 2)$$

Έτσι, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $I(1, 2)$ ανάγεται στον υπολογισμό του $I(0, 2)$. Οι όροι με q^2 στον αριθμητή είναι υπεύθυνοι για την εμφάνιση των ολοκληρωμάτων $I(1, 2)$, κι έτσι μπορούμε να κάνουμε στον αριθμητή την αντικατάσταση $q^2 \rightarrow Dd/(2-d)$, ώστε να καταλήξουμε:

$$N^{\mu\nu}/4 = 2x(1-x)(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) = 2x(1-x)k^2 P^{\mu\nu}(k)$$

Έτσι, μπορούμε πράγματι να γράψουμε την πόλωση κενού στη μορφή $\Pi^{\mu\nu}(k) = \Pi(k^2)k^2 P^{\mu\nu}(k)$, και έχουμε:

$$\Pi(k^2) = -4e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx I(0, 2) 2x(1-x)$$

Σε 4 διαστάσεις, το ολοκλήρωμα $I(0, 2)$ αποκλίνει (καθώς βλέπουμε πως εμφανίζει παράγοντα $\Gamma(0)$). Άρα η ιδιοενέργεια απειρίζεται. Αυτή είναι η πρώτη **UV απόκλιση** που συναντάμε. Ο λόγος που ονομάζεται έτσι είναι ότι η απειρία προέρχεται από τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος σε μεγάλες ενέργειες. Κοιτώντας λίγο γενικότερα το πρόβλημα, έστω ένα ολοκλήρωμα πάνω στα x σε d διαστάσεις που έχει στον αριθμητή ένα πολυώνυμο $Q_a(q)$ τάξης a (θεωρούμε εδώ πως το q είναι βαθμωτό για απλότητα) και στον παρονομαστή το πολυώνυμο $P_b(q)$ τάξης b . Τότε στο όριο $q \rightarrow \infty$ η συμπεριφορά του ολοκληρώματος είναι:

$$\int d^d q \frac{Q_a(q)}{P_b(q)} \rightarrow \int d^d q \frac{q^a}{q^b}$$

Βλέπουμε πως αν $d + a \geq b$, το ολοκλήρωμα θα αποκλίνει. Βλέπουμε επίσης πως αν δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής κάπου, τότε το ολοκλήρωμα συγκλίνει αν επιβάλλουμε ένα άνω όριο στο ολοκλήρωμα (cutoff). Υπάρχουν επίσης οι **IR αποκλίσεις** οι οποίες προέρχονται από τη συμπεριφορά της θεωρίας σε μικρές ενέργειες (ή μεγάλες αποστάσεις). Τέτοια είναι για παράδειγμα η περίπτωση που ο παρονομαστής τείνει στο 0 στο όριο $q \rightarrow 0$.

Το πρόβλημα εδώ είναι πως οι υποθέσεις μας δεν ήταν έγκυρες. Για να συνδεθεί αυτός ο υπολογισμός με φυσικές ποσότητες όπως διατομές σκέδασης που μπορούν να παρατηρηθούν, πρέπει τα πεδία μας να είναι κανονικοποιημένα με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του τύπου LSZ. Επομένως ο διαδότης πρέπει να είναι σε μορφή Kallen-Lehmann, άρα να παρουσιάζει πόλο με υπόλοιπο 1 εκεί όπου $k^2 = -m_\gamma^2$ (διατηρούμε προς το παρόν την “ψεύτικη” φωτονική μάζα). Άρα θέλουμε να ισχύει $\Pi(-m_\gamma^2) = 0 \Rightarrow \Pi(0) = 0$. Προφανώς αυτό δεν ισχύει για το πεδίο μας. Πρέπει λοιπόν να το **ανακανονικοποιήσουμε** ώστε να έρθει σε αυτή τη μορφή:

$$A_0 = Z_A^{1/2} A$$

Όπου το Z_A μένει να προσδιορισθεί, και με 0 συμβολίζουμε το πεδίο στην αρχική του μορφή που μας έδωσε τις αποκλίσεις (“**γυμνό**” πεδίο), ενώ χωρίς δείκτες γράφουμε το νέο πεδίο. Το Z_A μπορούμε και αυτο να το γράψουμε ως μία (τυπική) δυναμοσειρά στα e . Με παρόμοιο τρόπο θα ανακανονικοποιήσουμε εν τέλει και το πεδίο των ηλεκτρονίων:

$$\psi_0 = Z_\psi^{1/2} \psi$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να ανακανονικοποιήσουμε και παραμέτρους της θεωρίας, πράγμα που είναι αναγκαίο όπως θα δούμε παρακάτω:

$$\begin{aligned} m_0 &= Z_m m \\ e_0 &= Z_e e \end{aligned}$$

Θα γράψουμε λοιπόν τη Λαγκραντζιανή πυκνότητα στην τροποποιημένη μορφή:

$$\mathcal{L} = Z_1 e \bar{\psi} A \psi + Z_2 i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - Z_3 \frac{1}{4} (F^{\mu\nu})^2 - Z_4 m^2 \bar{\psi} \psi$$

Όπου είναι:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\psi Z_A^{1/2} Z_e \\ Z_2 &= Z_\psi \\ Z_3 &= Z_A \\ Z_4 &= Z_m^2 Z_\psi \end{aligned}$$

Αυτές οι 4 σταθερές που τροποποιούν τη Λαγκραντζιανή ονομάζονται **counterterms**. Μπορούμε να γράψουμε τη Λαγκραντζιανή στη μορφή:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ct} + \mathcal{L}_{int}$$

Όπου \mathcal{L}_0 είναι η ελεύθερη Λαγκραντζιανή στη μορφή χωρίς τα counterterms, \mathcal{L}_{ct} η Λαγκραντζιανή που απομονώνει τα counterterms, και \mathcal{L}_{int} η αλληλεπίδραση:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(F^{\mu\nu})^2 \\ \mathcal{L}_{ct} &= (Z_2 - 1)i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (Z_4 - 1)m^2\bar{\psi}\psi - (Z_3 - 1)\frac{1}{4}(F^{\mu\nu})^2 \\ \mathcal{L}_{int} &= Z_1 e\bar{\psi}\not{A}\psi\end{aligned}$$

Η ελεύθερη Λαγκραντζιανή δίνει τους ίδιους κανόνες Feynman που ξέραμε για τις γραμμές των διαγραμμάτων. Η αλληλεπίδραση πολλαπλασιάζει τον παράγοντα που δίνουν οι κορυφές με Z_1 . Η \mathcal{L}_{ct} δίνει τους επιπλέον κανόνες:

$$\begin{aligned}\text{---}\blacktriangleright\text{---}\otimes\text{---}\blacktriangleright\text{---} &= -i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_m - 1)m \\ \text{~~~~}\otimes\text{~~~~} &= -i(Z_3 - 1)(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\end{aligned}$$

Όπου παραπάνω αντιμετωπίζουμε τον κύκλο στη μέση σαν “κορυφή”, οι κανόνες αυτοί δηλαδή ισχύουν για την “κορυφή” ακρωτηριασμένη από τους διαδότες στα δύο άκρα της. Υποθέτουμε ότι τα $Z - 1$ είναι τάξης e^2 και πάνω.

Χρειάζεται επίσης μία μέθοδος **ομαλοποίησης (regularization)** του ολοκληρώματος. Δηλαδή, θέλουμε να εισάγουμε μία παράμετρο η οποία τροποποιεί τα ολοκληρώματα με τέτοιο τρόπο ώστε σε ένα συγκεκριμένο όριο αυτής της παραμέτρου να ανακτούν την αρχική τους μορφή, αλλά σε πεπερασμένες τιμές της παραμέτρου να είναι πεπερασμένα. Αυτό μας βοηθάει να καταλάβουμε καλύτερα τη μορφή αυτών των αποκλίσεων, καθώς και να κάνουμε πράξεις μεταξύ αποκλίνουσων ποσοτήτων, κάνοντας πρώτα την πράξη με τις πεπερασμένες ποσότητες και μετά παίρνοντας το όριο της παραμέτρου που ανακτά την αρχική θεωρία. Οι ομαλοποιητές πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε να αλλοιώνουν όσο το δυνατόν λιγότερο ποιοτικά χαρακτηριστικά της θεωρίας, όπως για παράδειγμα σημαντικές συμμετρίες. Αν ο ομαλοποιητής δεν σέβεται τέτοια χαρακτηριστικά, τότε πολύ πιθανό είναι το όριο που θα πρέπει να πάρουμε για να ανακτήσουμε τη φυσική θεωρία από την ομαλοποιημένη να είναι πολύ πιο περίπλοκο απ’ό,τι θα περιμέναμε, καθώς ορισμένα σημαντικά χαρακτηριστικά θα είναι “αόρατα” για τον ομαλοποιητή.

Μία συνηθισμένη μέθοδος ομαλοποίησης η οποία ήταν και η πρώτη που ανακαλύφθηκε ήταν η εισαγωγή ενός cutoff υψηλών ενεργειών (ή, περίπου ισοδύναμα, η διακριτοποίηση του χώρου σε πλέγμα). Αυτό όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα λύνει το πρόβλημα των UV αποκλίσεων. Μπορούμε ύστερα να πάρουμε το όριο όπου το cutoff τείνει στο άπειρο (ή αντίστοιχα όπου η πλεγματική σταθερά τείνει στο 0). Πράγματι, πολλές φορές οι ΚΘΠ ορίζονται πάνω σε ένα τέτοιο πλέγμα, και μετά επιχειρείται το όριο. Το πρόβλημα είναι ότι αυτή η ομαλοποίηση προφανώς δεν διατηρεί τη συμμετρία Lorentz.

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε είναι η **διαστατική ομαλοποίηση**, η οποία είναι σχετικά απλή υπολογιστικά και διατηρεί πολλές περίπλοκες συμμετρίες της θεωρίας (για παράδειγμα τη συμμετρία Lorentz, συμμετρίες βαθμίδας, κλπ). Ουσιαστικά κάνουμε τους υπολογισμούς σε $d = 4 - \epsilon$ αντί για 4 διαστάσεις, όπου το ϵ είναι ένας θετικός αριθμός που δεν χρειάζεται να είναι ακέραιος, και παίρνουμε το όριο $\epsilon \rightarrow 0$ για να ανακτήσουμε τη φυσική θεωρία. Βέβαια, δεν υπάρχει καλά ορισμένη έννοια μη ακέραιου αριθμού διαστάσεων. Αρκούμαστε στο να βρούμε τύπους που ισχύουν για d ακέραιο, τους οποίους συνεχίζουμε αναλυτικά σε d συνεχές, για αυτό και

σε όλη την προηγούμενη συζήτηση κάναμε υπολογισμούς για τη γενική περίπτωση d διαστάσεων. Ένα πρόβλημα με αυτή την προσέγγιση είναι πως αυτή η ομαλοποίηση καταστρέφει ορισμένες τοπολογικές ποσότητες που ισχύουν συγκεκριμένα για 4 διαστάσεις, οπότε “χάνουμε” ορισμένα τοπολογικά φαινόμενα. Ένα αλληλένδετο πρόβλημα είναι και το γεγονός πως δεν υπάρχει καλός ορισμός του πίνακα γ^5 σε άλλο πλήθος διαστάσεων από 4, κι έτσι συμμετρίες που σχετίζονται με αυτόν δεν διατηρούνται από αυτή την ομαλοποίηση (κι έτσι προκύπτουν οι λεγόμενες **χειραλικές ανωμαλίες**). Ωστόσο είναι επαρκής για τους σκοπούς μας.

Μετά την εισαγωγή των counterterms, έχουμε άλλο ένα διάγραμμα που συνεισφέρει στην πόλωση κενού σε τάξη 1 loop:

$$\mu \xrightarrow{k} \otimes \xrightarrow{k} \nu$$

$$i\Pi(k^2) = -4Z_1^2 e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx I(0, 2) 2x(1-x) - i(Z_3 - 1)$$

$$I(0, 2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \log\left(\frac{4\pi}{D}\right) - \gamma + O(\epsilon) \right]$$

Μπορούμε εδώ να θέσουμε $Z_1 = 1$ γιατί οι ανώτεροι όροι του αγνοούνται στα πλαίσια υπολογισμού 1 loop (2ης τάξης σε e). Παρατηρούμε πως το $I(0, 2)$ χωρίζεται σε έναν πεπερασμένο και σε έναν άπειρο όρο (όταν το ϵ τείνει στο 0):

$$I_{fin} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\log\left(\frac{4\pi}{D}\right) - \gamma + O(\epsilon) \right]$$

$$I_{div} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση (για μικρό ϵ):

$$\mu^\epsilon = 1 + \epsilon \log \mu + O(\epsilon^2)$$

Μπορούμε να επιλέξουμε το Z_3 κατάλληλα ώστε να αφαιρείται η απειρία και να μένουμε μόνο με πεπερασμένες ποσότητες γράφοντάς το:

$$Z_3 = 1 - 4e^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} 2x(1-x) + \kappa_3$$

$$= 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \kappa_3$$

Όπου κ_3 είναι κάποιος πεπερασμένος όρος τάξης e^2 και ανώτερης. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\Pi(k^2) = -\kappa_3 - \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx 2x(1-x) \left[2 \log \mu + \log\left(\frac{4\pi}{D}\right) - \gamma \right]$$

$$= -\kappa_3 - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{De^\gamma}\right)$$

$$= -\kappa_3 + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{D}{\tilde{\mu}^2}\right)$$

Όπου ορίσαμε $\tilde{\mu}^2 = 4\pi e^{-\gamma} \mu^2$. Αν θέλουμε $\Pi(0) = 0$, τότε πρέπει:

$$\begin{aligned}\kappa_3 &= \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{m^2}{\tilde{\mu}^2}\right) \\ &= \frac{e^2}{6\pi^2} \log\left(\frac{m}{\tilde{\mu}}\right)\end{aligned}$$

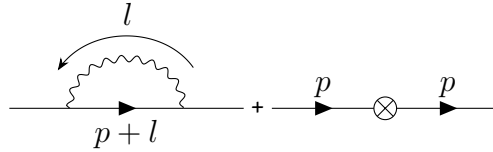
Έχουμε έτσι προσδιορίσει πλήρως τα $\Pi(k^2)$ και Z_3 :

$$\begin{aligned}\Pi(k^2) &= \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(\frac{x(1-x)k^2 + m^2}{m^2}\right) \\ Z_3 &= 1 + \frac{e^2}{6\pi^2} \log\left(\frac{m}{\tilde{\mu}}\right) - \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως ο διαδότης τώρα δεν εξαρτάται από την παράμετρο ομαλοποίησης ϵ , όπως και θέλουμε.

4.2 Διαδότης ηλεκτρονίων

Υπολογίζουμε τώρα με βάση τους νέους κανόνες Feynman τις διορθώσεις του διαδότη του ηλεκτρονίου. Τα σχετικά διαγράμματα είναι:



$$\begin{aligned}i\Sigma(p) &= (iZ_1 e)^2 \mu^{4-d} \left(\frac{1}{i}\right) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \Delta_{\nu\mu}(l) \gamma^\nu S(p+l) \gamma^\mu - i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_4 - 1)m \\ &= e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(2-d)(1-x)\not{p} - dm}{(q^2 + D)^2} - i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_4 - 1)m \\ &= e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx [(1-x)(2-d)\not{p} - dm] I(0, 2) - i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_4 - 1)m \\ &= e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx [(1-x)(\epsilon - 2)\not{p} + (\epsilon - 4)m] I(0, 2) - i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_4 - 1)m\end{aligned}$$

Για να φτάσουμε εδώ κάναμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Θέσαμε $Z_1 = 1$ γιατί αγνοούμε όρους τάξης ανώτερης από 2.
2. Συνδυάσαμε τους παρονομαστές με τον τύπο του Feynman, εναλλάσσουμε τη σειρά ολοκληρωμάτων και συμπληρώσαμε το τετράγωνο στα l , θέτοντας:

$$q = l + xp, \quad D = x(1-x)p^2 + xm^2 + (1-x)m_\gamma^2$$

3. Ο αριθμητής είναι:

$$\gamma_\mu(-\not{p} - \not{l} + m)\gamma^\mu = -(d-2)(\not{p} + \not{l}) - dm$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τους τύπους του παραρτήματος για τους πίνακες γ . Αντικαθιστώντας τώρα το $q = l + xp$ όπως κάναμε και στην προηγούμενη ενότητα, ο αριθμητής γίνεται:

$$-(d-2) [q + (1-x)\not{p}] - dm$$

Όμως αγνοούμε όρους γραμμικούς στα q .

4. Αλλάζουμε το μέτρο ολοκλήρωσης από l σε q όπως και στην προηγούμενη ενότητα.

Αντικαθιστούμε όπως πριν το $I(0, 2)$ αγνοώντας όρους τάξης ϵ και άνω, και παίρνουμε ξανά ένα πεπερασμένο και ένα άπειρο κομμάτι. Για να απορροφηθεί το άπειρο κομμάτι, διαλέγουμε:

$$\begin{aligned} Z_2 &= 1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \kappa_2 \\ Z_4 &= 1 - \frac{e^2}{2\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \kappa_4 \end{aligned}$$

Επομένως η ιδιοενέργεια γίνεται:

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p}) &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \log\left(\frac{D}{\tilde{\mu}^2}\right) [2(1-x)\not{p} + 4m] + 2 \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [(1-x)\not{p} + m] - \kappa_2 \not{p} - \kappa_4 m \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \log\left(\frac{D}{\tilde{\mu}^2}\right) [(1-x)\not{p} + 2m] + \frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{\not{p}}{2} + m\right) - \kappa_2 \not{p} - \kappa_4 m \end{aligned}$$

Για να φτάσουμε σε αυτό τον τύπο, διώξαμε κάθε όρο τάξης ϵ και άνω από την ιδιοενέργεια, και κάναμε χρήση του τύπου:

$$\mu^\epsilon I(0, 2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \log\left(\frac{D}{\tilde{\mu}^2}\right) + O(\epsilon) \right]$$

Οι όροι κ_2 και κ_4 θα προσδιορισθούν απαιτώντας ο διαδότης να είναι σε μορφή Kallen-Lehmann (πόλος στο $\not{p} = -m_{Ph}$ όπου m_{Ph} η φυσική μάζα, και υπόλοιπο 1 σε αυτό τον πόλο). Μπορούμε εύκολα να δούμε από τη μορφή του διαδότη πως αυτές οι απαιτήσεις ισοδυναμούν με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \Sigma(-m_{Ph}) &= 0 \\ \Sigma'(-m_{Ph}) &= 0 \end{aligned}$$

Αυτές μας δίνουν ένα σύστημα 2 εξισώσεων που προσδιορίζει πλήρως τους 2 αγνώστους, αν θεωρήσουμε πως $m = m_{Ph}$ (δηλαδή η ανακανονικοποιημένη μάζα μας ταυτίζεται με τη φυσική μάζα). Αυτή η υπόθεση αντιστοιχεί στην **on-shell (OS) ανακανονικοποίηση**, αλλά όπως θα δούμε δεν είναι η μοναδική επιλογή. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να διαλέξουμε οποιαδήποτε τιμή για το πεπερασμένο κομμάτι των counterterms, αλλά οι παράμετροι της θεωρίας μας δεν θα αντιστοιχούσαν στις φυσικές ποσότητες. Αυτό δεν είναι πρόβλημα, αρκεί να γίνεται με σωστό τρόπο η αντιστοίχιση των διαδοτών με παρατηρήσιμες ποσότητες όπως στοιχεία

του πίνακα S. Ο τύπος LSZ ισχύει για τα φυσικά κανονικοποιημένα πεδία και χρησιμοποιεί τη φυσική μάζα ως παράμετρο, οπότε κάθε υπολογισμός αυτών των στοιχείων πρέπει να λαμβάνει αυτό υπ'όψιν. Καθώς άλλες επιλογές θα δίνουν διαφορετικό υπόλοιπο, θα πρέπει να διαιρούμε τους διαδότες με αυτό το υπόλοιπο σε κάθε τέτοιο υπολογισμό. Το ζήτημα εξετάζεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην επόμενη ενότητα.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε και το Z_1 , μελετώντας την κορυφή ηλεκτρονίου-φωτονίου-ηλεκτρονίου. Αυτό που διορθώνουμε σε αυτή την περίπτωση δεν είναι πια διαδότης, αλλά **συνάρτηση κορυφής**, δηλαδή ένα είδος συνάρτησης Green 3 σημείων. Θα κάνουμε έναν τέτοιο υπολογισμό για την περίπτωση της QCD, αλλά θα τον παραλείψουμε εδώ για την περίπτωση της QED.

4.3 Αποκλίσεις IR

Οι υπολογισμοί που έγιναν χρησιμοποίησαν μη μηδενική φωτονική μάζα. Όμως στην πραγματικότητα τα φωτόνια είναι άμαζα. Ως συνέπεια, το ολοκλήρωμα μέσα έχει έναν όρο l^{-2} , και αποκλίνει στο κάτω άκρο της ολοκλήρωσης, είναι δηλαδή μία απόκλιση τύπου IR. Το χειρότερο είναι πως αυτή η απόκλιση δεν διορθώνεται από την ανακανονικοποίηση που κάναμε. Η θεωρία σκεδάσεων που έχουμε κατασκευάσει δεν είναι κατάλληλη για να περιγράψει σκεδάσεις που εμπλέκουν άμαζα πεδία. Υπάρχουν 3 βασικές κατηγορίες μεθόδων για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα ([HS20]):

1. Μέθοδος διατομών. Αυτή η μέθοδος αποδέχεται τις IR αποκλίσεις του πίνακα S, καθώς τα στοιχεία του δεν είναι άμεσα φυσικά παρατηρήσιμα. Παρατηρήσιμες είναι οι διατομές σκέδασης, και για να υπολογιστούν χρειάζεται άθροιση πάνω σε κάθε πιθανή αρχική και τελική κατάσταση. Οι διατομές αυτές υπολογίζονται με βάση τον πίνακα S, αλλά η άθροιση πάνω σε κάθε πιθανή αρχική και τελική κατάσταση δίνει τελικά πεπερασμένο αποτέλεσμα.
2. Μέθοδος σύμφωνων καταστάσεων (dressed states ή coherent states). Ο πίνακας S αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο, αλλά τα στοιχεία του υπολογίζονται μεταξύ ορισμένων “σύμφωνων καταστάσεων” που είναι διαφορετικές από τις καταστάσεις ορμών του χώρου Fock που χρησιμοποιήσαμε. Δυστυχώς αυτή η μέθοδος παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες, γιατί οι καταστάσεις αυτές δεν είναι κανονικοποιησιμα στοιχεία ενός χώρου Fock, δεν έχουν καλά ορισμένη ορμή, και παρουσιάζονται υπολογιστικές δυσκολίες.
3. Τροποποίηση του πίνακα S. Ο πίνακας S δεν αντικατοπτρίζει καλά την ασυμπτωτική συμπεριφορά σε μεγάλες αποστάσεις δυναμικών που δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμα, όπως για παράδειγμα το δυναμικό Coulomb $1/r$, γιατί παραμένουν ορισμένοι παράγοντες που αλλοιώνουν την “ελεύθερη” συμπεριφορά του πεδίου, και ευθύνονται για τις IR αποκλίσεις. Η μέθοδος αυτή επιχειρεί να τροποποιήσει τον πίνακα με τέτοιο τρόπο ώστε να ακυρώνει αυτούς τους παράγοντες αντικατοπτρίζοντας καλύτερα την ασυμπτωτική συμπεριφορά σε μεγάλες αποστάσεις των σωματιδίων, θεωρώντας πως σε αυτό το όριο δεν υπάγονται σε μία ελεύθερη Χαμιλτονιανή H_0 αλλά σε μία τροποποιημένη ασυμπτωτική Χαμιλτονιανή H_{as} . Μία ανάλυση τέτοιας μορφής έγινε αρχικά για τη μη σχετικιστική κβαντική μηχανική για το δυναμικό Coulomb από τον Dollard το 1971 [Dol71] και αργότερα τροποποιήθηκε για τις ανάγκες της QED από τους Faddeev και Kulish [KF16], αξιοποιώντας

πρόοδο που είχε γίνει και στην μέθοδο σύμφωνων καταστάσεων. Η γενίκευση σε μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας είναι ακόμη ανοικτό πεδίο έρευνας.

Η IR συμπεριφορά της ΚΘΠ είναι γενικά ένα δύσκολο σημείο που δεν είναι απόλυτα κατανοητό. Όμως εδώ δεν μας ενδιαφέρει στην πραγματικότητα να υπολογίσουμε διατομές σκέδασης, ούτε και μας ενδιαφέρουν οι λεπτομέρειες της IR συμπεριφοράς των θεωριών που εξετάζουμε. Για αυτό και θα παραλείψουμε αυτά τα βήματα. Μας ενδιαφέρει μόνο η UV συμπεριφορά η οποία είναι καλά κατανοητή και που είναι το αντικείμενο της θεωρίας ανακανονικοποίησης. Άλλωστε, υπάρχουν μέθοδοι ανακανονικοποίησης (τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τη συνάρτηση β) οι οποίες “θεραπεύουν” τις IR αποκλίσεις στο επίπεδο διαδοτών. Αυτό δεν σημαίνει και ότι λύνουν το πρόβλημα, καθώς όταν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε διατομές βάσει αυτών των διαδοτών, οι IR αποκλίσεις επανεμφανίζονται. Θα βοηθήσει όμως στο να τις αγνοήσουμε.

5 Μέθοδοι ανακανονικοποίησης

Υπάρχουν άπειροι διαφορετικοί τρόποι να αφαιρεθούν οι αποκλίσεις UV όπως αυτές της QED που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Στην προηγούμενη ενότητα τροποποιήσαμε τη Λαγκραντζιανή πυκνότητα με την εισαγωγή counterterms, και οι ανακανονικοποιημένες παράμετροι θεωρήθηκαν πως αντιστοιχούν στα πειραματικά μετρήσιμα μεγέθη. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε τις πιο βασικές από τις μεθόδους (**subtraction schemes**), και το πώς εφαρμόζονται σε γενική βάση. Για αυτή την ενότητα ακολουθούμε κυρίως τις αναφορές [Col84; PP00; IZ12].

5.1 Προκαταρκτικά: Ανακανονικοποιησιμότητα και βαθμός απόκλισης

Υπάρχουν δύο σημαντικές έννοιες στη θεωρία ανακανονικοποίησης για τις οποίες δεν μιλήσαμε διεξοδικά ακόμη: η ανακανονικοποιησιμότητα και ο βαθμός απόκλισης ενός ολοκληρώματος. Αυτές οι έννοιες χρησιμοποιούνται στη συνέχεια οπότε εδώ θα μιλήσουμε για αυτές στην ίδια υποενότητα, καθώς σχετίζονται.

Στην Ενότητα 4.1 μελετήσαμε ένα ολοκλήρωμα σε d διαστάσεις, του οποίου ο ολοκληρωτέος (δηλαδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση) στο όριο $q \rightarrow \infty$ συμπεριφερόταν ανάλογα με το q^{a-b} , και συμπεράναμε πως παρουσιάζει UV απόκλιση αν $d + a \geq b$. Γενικεύοντας αυτό το συμπέρασμα, μπορούμε να δούμε πως σε 4 διαστάσεις ο **επιφανειακός βαθμός απόκλισης** $\omega(G)$ ενός διαγράμματος G δίνεται από τον τύπο [IZ12]:

$$\omega(G) = 4L + \sum_{\text{κορυφές}} \delta_v - I_F - 2I_B$$

Όπου L το πλήθος ανεξάρτητων loops, δ_v το πλήθος παραγωγίσεων πεδίων που εμφανίζεται σε κάθε όρο αλληλεπίδρασης στην Λαγκραντζιανή, και I_F, I_B το πλήθος εσωτερικών γραμμών φερμιονίων και μποζονίων αντίστοιχα. Στην περίπτωση της διόρθωσης του φωτονικού διαδότη σε τάξη 1 loop, αυτό είναι:

$$\omega(G) = 4 + 2 \cdot 0 - 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

Αυτή η απόκλιση λέγεται τετραγωνική. Ενώ στην περίπτωση των διορθώσεων του διαδότη των ηλεκτρονίων, ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης είναι:

$$\omega(G) = 4 + 2 \cdot 0 - 1 - 2 \cdot 1 = 1$$

Αυτή είναι μία πιο ήπια, γραμμική απόκλιση. Ένα ολοκλήρωμα με βαθμό απόκλισης μεγαλύτερο ή ίσο του 0 θα παρουσιάζει γενικά UV απόκλιση, ενώ τα υπόλοιπα γενικά θα συγκλίνουν στο UV όριο. Αυτός ο βαθμός απόκλισης ονομάζεται “επιφανειακός”, γιατί στην πραγματικότητα υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις που δεν καλύπτονται από αυτή την ανάλυση.

Ένας άλλος τρόπος που μπορούμε να γράψουμε τον παραπάνω τύπο που θα μας βοηθήσει να αναλύσουμε το πρόβλημα βαθύτερα είναι:

$$\omega(G) = 4 + \sum_{\text{κορυφές } v} (\omega_v - 4) - \frac{3}{2} E_F - E_B - \delta$$

Όπου:

$$\omega_v = \delta_v + \frac{3}{2} f_v + b_v$$

Με f_v (b_v) το πλήθος φερμιονικών (μποζονικών) γραμμών που εφάπτονται στην κορυφή v , και αντίστοιχα δ_v το πλήθος παραγώγων πεδίων στην κορυφή. Σε αυτή τη μορφή, ο παράγοντας αυτός παίρνει μία διαστατική ερμηνεία: καθώς τα φερμιονικά πεδία έχουν διάσταση μάζας $3/2$, τα μποζονικά 1, και οι παράγωγοι 1, το ω_v ερμηνεύεται ως απλά η διάσταση μάζας του όρου αλληλεπίδρασης, εξαιρώντας τη σταθερά σύζευξης. Για να παραμένει η δράση αδιάστατη, πρέπει να ισχύει:

$$\omega_v + [g_v] = 4$$

Όπου $[g_v]$ η διάσταση μάζας της σταθεράς σύζευξης. Άρα μπορούμε να γράψουμε το βαθμό απόκλισης:

$$\omega(G) = 4 - \sum_{\text{κορυφές } v} [g_v] - \frac{3}{2} E_F - E_B - \delta$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτό τον τύπο ως εξής: πηγαίνοντας σε ανώτερες τάξεις θεωρίας διαταραχών, παίρνουμε όλο και μεγαλύτερες δυνάμεις του g . Αν έχει θετική διάσταση μάζας (ορμής), αυτό διαστατικά “υποχρεώνει” τους ολοκληρωτέους να είναι όλο και μικρότερης διάστασης μάζας (ορμής) άρα και να χάνονται πιο γρήγορα στο UV όριο. Αν έχει αρνητική διάσταση μάζας γίνεται ακριβώς το αντίθετο, και σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών θα έχουμε όλο και μεγαλύτερες αποκλίσεις. Μία θεωρία με αδιάστατη σταθερά σύζευξης δίνει τον ίδιο βαθμό απόκλισης σε κάθε τάξη. Οι θεωρίες που εξετάζουμε χωρίζονται τότε φυσικά σε 3 κατηγορίες [IZ12]:

1. **Μη ανακανονικοποιήσιμες.** Έχουν τουλάχιστον μία αλληλεπίδραση με $[g_v] < 0$. Ως αποτέλεσμα ο επιφανειακός βαθμός απόκλισης αυξάνεται όσο αυξάνεται η τάξη θεωρίας διαταραχών που εξετάζουμε.
2. **Ανακανονικοποιήσιμες.** Όλες οι σταθερές σύζευξης έχουν θετική ή μηδενική διάσταση μάζας, με μία τουλάχιστον να έχει μηδενική. Η μηδενική διάσταση μάζας σημαίνει πως οι συγκεκριμένες αλληλεπιδράσεις συνεισφέρουν το ίδιο στην απόκλιση σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών, και μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων Green ευθύνεται για αποκλίσεις.

3. **Υπερανακανονικοποιήσιμες.** Όλες οι σταθερές σύζευξης έχουν θετική διάσταση μάζας. Ως αποτέλεσμα ο βαθμός απόκλισης μειώνεται όσο αυξάνεται η τάξη θεωρίας διαταραχών, κι έτσι παρουσιάζουν απόκλιση μόνο σε πεπερασμένο πλήθος διαγραμμάτων.

Οι πιο ενδιαφέρουσες θεωρίες είναι γενικά οι ανακανονικοποιήσιμες (όπως είναι για παράδειγμα η QCD και η QED). Οι μη ανακανονικοποιήσιμες έχουν το χαρακτηριστικό ότι δεν μπορούν να ανακανονικοποιηθούν με πεπερασμένο πλήθος counterterms (αφού σε κάθε τάξη παρουσιάζουν νέες αποκλίσεις που δεν διορθώθηκαν ακόμη) πράγμα που τις καθιστά προβληματικές συνήθως. Μη ανακανονικοποιήσιμη είναι για παράδειγμα η βαρύτητα αν αντιμετωπιστεί ως θεωρία βαθμίδας με γκραβιτόνια που έχουν spin 2.

5.2 On-Shell (OS) ανακανονικοποίηση

Αυτή είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα για να βρεθούν οι loop διορθώσεις του διαδότη ηλεκτρονίων στην QED. Κεντρική έννοια αυτής της μεθόδου είναι η ταύτιση των ανακανονικοποιημένων μέσω counterterms παραμέτρων με τις φυσικά μετρήσιμες ποσότητες. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η θεωρία αναπαραμετροποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε οι διαδότες των πεδίων στα οποία αντιστοιχεί μία μονοσωματιδιακή κατάσταση έχουν απλό πόλο με μοναδιαίο υπόλοιπο εκεί όπου το τετράγωνο της 4-ορμής του σωματιδίου τείνει στο τετράγωνο της φυσικής του μάζας. Είναι αρκετά προφανής επιλογή στην QED όπου έχουμε παραμέτρους όπως η μάζα του ηλεκτρονίου οι οποίες έχουν μία σαφή πειραματική τιμή, ωστόσο θα δούμε ότι για παράδειγμα στην QCD αυτή η μέθοδος είναι λιγότερο ενδεδειγμένη, για αυτό και χρησιμοποιείται λιγότερο.

5.3 Γενίκευση με την μ-αφαίρεση

Σε υπολογισμούς που γίνονται με χρήση τη μέθοδο OS, επιδιώκουμε η φυσική μάζα (δηλαδή η θέση του πόλου του διαδότη) να ταυτίζεται με την ανακανονικοποιημένη μάζα της μεθόδου, δηλαδή $m_{OS} = m_{ph}$. Αυτό σημαίνει ότι, για παράδειγμα, για το διαδότη ενός βαθμωτού με μάζα:

$$\Delta_{OS}(p^2) = \frac{1}{p^2 + m_{OS}^2 - \Pi_{OS}(p^2)}$$

Θα ισχύει $\Pi_{OS}(-m_{OS}^2) = 0$ και $\Pi'_{OS}(-m_{OS}^2) = 0$, με παρόμοιες συνθήκες και για διαδότες διαφορετικής μορφής.

Αντί για αυτό, θα μπορούσαμε να ανακανονικοποιήσουμε σε ένα διαφορετικό σημείο μ_S (προσθέσαμε το δείκτη S που αντιστοιχεί σε “subtraction” για να τον διαφοροποιήσουμε από την αυθαίρετη παράμετρο με διαστάσεις μάζας μ που εισάγαμε κατά τη διαστατική ομαλοποίηση). Δηλαδή, μπορούμε να προσπαθήσουμε να επιβάλλουμε στο παραπάνω παράδειγμα τη συνθήκη $\Pi(p^2 = -\mu_S^2) = 0$. Το σημείο αυτό μπορούμε να το θέσουμε να βρίσκεται οπουδήποτε θέλουμε και δεν ταυτίζεται με την ανακανονικοποιημένη μάζα της μεθόδου m_{μ_S} .

Γενικά λοιπόν μπορούμε να πούμε πως η συνθήκη ανακανονικοποίησης που χρησιμοποιούμε είναι απαιτούμε ο διαδότης να έχει την ίδια μορφή με τον ελεύθερο διαδότη σε μία κλίμακα $p^2 = \mu_S^2$. Ονομάζουμε τη μέθοδο αυτή **μ-αφαίρεση (μ-subtraction)**, και θα το γράφουμε για συντομία μ_S . Η OS μέθοδος αποτελεί την ειδική περίπτωση όπου $m_{\mu_S} = \mu_S$.

Αυτή η μέθοδος ανακανονικοποίησης (που καλύτερα περιγράφεται ως οικογένεια μεθόδων που παραμετροποιούνται από το μ_S) χρησιμοποιήθηκε από τους Gell-Mann και Low σε μία από τις πρώτες εργασίες που μελέτησαν την αυθαιρεσία στην επιλογή μεθόδου ανακανονικοποίησης και τη συμπεριφορά της QED σε διαφορετικές κλίμακες με μεθόδους που σήμερα περιγράφονται ως μέθοδοι “ομάδας ανακανονικοποίησης” ([GL54; Fra21]).

Όταν χρησιμοποιούμε μία διαφορετική μέθοδο ανακανονικοποίησης από την OS, πρέπει να θυμόμαστε πως εν τέλει οι διαδότες που θα χρησιμοποιήσουμε στον τύπο LSZ είναι οι φυσικοί, δηλαδή αυτοί με πόλο στη φυσική μάζα με υπόλοιπο 1. Για το παράδειγμα της μ_S που αναφέραμε νωρίτερα, ο ορισμός της φυσικής μάζας ως η θέση του πόλου μας δίνει την εξίσωση $-m_{Ph}^2 + m_{\mu_S} - \Pi_{\mu_S}(-m_{Ph}) = 0$. Το υπόλοιπο όμως του ανακανονικοποιημένου διαδότη $\Delta_{\mu_S}(p^2)$ σε αυτό τον πόλο δεν είναι 1, αλλά:

$$R = \frac{1}{1 - \Pi'_{\mu_S}(-m_{Ph}^2)}$$

Όταν υπολογίζουμε διατομές, πρέπει να θυμόμαστε πως ο τύπος LSZ χρησιμοποιεί τα “φυσικά” πεδία με μοναδιαίο υπόλοιπο, και τη φυσική μάζα. Η αντικατάσταση των ανακανονικοποιημένων συναρτήσεων Green στον τύπο LSZ πρέπει να συνοδεύεται από 3 ακόμα βήματα [Sre07]:

1. Πολλαπλασιάζουμε τον τύπο με παράγοντα $R^{-1/2}$ για κάθε εξωτερικό σωματίδιο, ώστε να ανταποκρίνεται στα σωστά κανονικοποιημένα πεδία.
2. Κάθε εξωτερική γραμμή όταν ακυρώνει τους πόλους μέσα στον τύπο συνεισφέρει παράγοντα διόρθωσης R , επομένως ο συνολικός παράγοντας με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε τελικά τον τύπο στη μορφή που τον χρησιμοποιούμε γίνεται $R^{1/2}$ για κάθε εξωτερικό σωματίδιο.
3. Οι ορμές των εξωτερικών σωματιδίων πρέπει να έχουν τετράγωνο $-m_{Ph}^2$, όχι $-m^2$, επομένως χρειαζόμαστε και τη σχέση μεταξύ αυτών των ποσοτήτων

Αυτό θα πρέπει να τα κάνουμε κάθε φορά που χρησιμοποιούμε μία μέθοδο διαφορετική από την OS. Μετά από αυτή τη διαδικασία, αναμένουμε ότι θα πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα από κάθε διαφορετική μέθοδο ανακανονικοποίησης. Το ζήτημα αυτό εξετάζεται πιο λεπτομερώς σε μετέπειτα υποενότητα.

Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή στο διαδότη του φωτονίου στην QED που εξετάσαμε ήδη, παίρνουμε το ακόλουθο ενδιαφέρον αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu_S}(k^2) &= \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{x(1-x)k^2 + m^2}{-x(1-x)\mu_S^2 + m^2} \right) \\ Z_3(\mu_S) &= 1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{-x(1-x)\mu_S^2 + m^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα τυπικά να υπολογίσουμε τη σχετική κανονικοποίηση του φωτονικού πεδίου για διαφορετικές επιλογές του μ_S υπολογίζοντας την ποσότητα $Z_3(\mu')/Z_3(\mu)$ (ο δείκτης S που έκανε σαφή τη διαφορά αυτής της παραμέτρου και της παραμέτρου της ομαλοποίησης τώρα παραλείπεται, θεωρώντας ότι η διαφορά είναι κατανοητή):

$$Z_3(\mu, \mu') = \frac{Z_3(\mu')}{Z_3(\mu)} = \frac{1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} + \kappa_3(\mu')}{1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} + \kappa_3(\mu)} = 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{-x(1-x)\mu'^2 + m^2}{-x(1-x)\mu^2 + m^2} \right)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $Z_3(\mu, \mu')Z_3(\mu', \mu'') = Z_3(\mu, \mu'')$. Αυτή η παρατήρηση θα γίνει σημαντική αργότερα, όταν θα εξετάσουμε την ομάδα ανακανονικοποίησης Gell-Mann-Low.

5.4 Minimal Subtraction (MS) και τροποποιημένο Minimal Subtraction \overline{MS}

Η τεχνική που χρησιμοποιείται περισσότερο στην QCD συγκεκριμένα αλλά και γενικότερα είναι το Minimal Subtraction (MS) (ή, ακριβέστερα, το Modified Minimal Subtraction \overline{MS} , μια ελαφρώς τροποποιημένη εκδοχή). Σχετικές με αυτή τη μέθοδο είναι ακόμη οι μέθοδοι DR και \overline{DR} (Dimensional Reduction και Modified Dimensional Reduction), οι οποίες χρησιμοποιούνται κυρίως στην υπερσυμμετρία και δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.

Τα counterterms επιλέγονται έτσι ώστε, για παράδειγμα αν έχουμε επιβάλλει διαστατική ομαλοποίηση, στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ να μην έχουν πεπερασμένο κομμάτι. Θέλουμε δηλαδή να αφαιρούν καθαρά και μόνο τον απειρισμό και τίποτα άλλο. Πιο συχνά, χρησιμοποιείται η ελαφρώς τροποποιημένη μέθοδος \overline{MS} , όπου αναπροσαρμόζουμε την κλίμακα μ που προκύπτει στη διαστατική ομαλοποίηση:

$$\tilde{\mu}^2 = \mu^2 \frac{e^\gamma}{4\pi}$$

Μία εφαρμογή αυτής της μεθόδου στην περίπτωση του διαδότη του φωτονίου στην QED που μελετήσαμε νωρίτερα αντιστοιχεί στην επιλογή $\kappa_3 = 0$ και θα έδινε:

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{x(1-x)k^2 + m^2}{\tilde{\mu}^2} \right)$$

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$$

Βλέπουμε ότι τώρα η πόλωση κενού εξαρτάται ρητά από την παράμετρο κλίμακας $\tilde{\mu}$, αλλά όχι και το Z_3 . Είναι σημαντικό όμως να σημειώσουμε ότι παρά τα φαινόμενα, αυτή η μέθοδος δεν δίνει ένα σχήμα αφαίρεσης (subtraction scheme) αλλά μία οικογένεια άπειρων διαφορετικών τα οποία παραμετροποιούνται από την αυθαίρετη παράμετρο κλίμακας. Στην πραγματικότητα, και το ίδιο το Z_3 έχει εξάρτηση από το $\tilde{\mu}$, καθώς όπως θα δούμε και αργότερα η σταθερά σύζευξης εξαρτάται από την κλίμακα.

Η μέθοδος \overline{MS} είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη στην QCD, καθώς είναι υπολογιστικά απλή (δεν απαιτείται να υπολογίσουμε κάποιο πεπερασμένο κομμάτι), οδηγεί αρκετά φυσικά σε ορισμένες μεθόδους ομάδας κανονικοποίησης, και διορθώνει επιφανειακά τις IR αποκλίσεις [Col84]. Πράγματι, παρατηρούμε πως το κάτω όριο των ολοκληρωμάτων στην ιδιοενέργεια του ηλεκτρονίου είναι καλά ορισμένο αν επιλέξουμε $\kappa_2 = \kappa_4 = 0$, ακόμα και για μηδενική φωτονική μάζα.

5.5 Μέθοδος BPHZ

Μέθοδος BPHZ μπορεί να αποκαλούνται 2 έννοιες οι οποίες δεν ταυτίζονται. Από τη μία μεριά μπορεί να αναφέρεται στο σχήμα αφαίρεσης (subtraction scheme) BPHZ (Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann) που είναι επίσης γνωστό ως **zero momentum subtraction (ZMS)** το οποίο απαιτεί να μηδενίζονται οι ιδιοενέργειες κλπ για μηδενική ορμή. Από την άλλη μεριά μπορεί να αναφέρεται στον **αλγόριθμο BPHZ**, που είναι μία εναλλακτική μέθοδος ανακανονικοποίησης η

οποία δεν απαιτεί τη χρήση counterterms και ομαλοποίησης, αν και στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμη με αυτές τις μεθόδους.

Ο αλγόριθμος BPHZ βασίζεται στην παρατήρηση ότι στην ανακανονικοποίηση ενός διαγράμματος αφαιρούμε ένα πολυώνυμο στις εξωτερικές ορμές βαθμού ίσου με το βαθμό απόκλισης του ολοκληρώματος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου, αφαιρέσαμε από το ολοκλήρωμα ένα πολυώνυμο βαθμού 1 στις ορμές p . Αν θέλουμε το ολοκλήρωμα να μηδενίζεται για μηδενική ορμή (κατά τα πρότυπα του ZMS), μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το 0 στις ορμές τον ολοκληρωτέο και να αφαιρέσουμε τους πρώτους $\omega(G)$ όρους. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να αφαιρέσουμε τις απειρίες χωρίς να απαιτείται ομαλοποίηση, ούτε η εισαγωγή counterterms που απειρίζονται.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου, ο βαθμός απόκλισης είναι 1, επομένως μπορούμε να αφαιρέσουμε από τον ολοκληρωτέο (στο αρχικό αποκλίνον ολοκλήρωμα) τους όρους μηδενικής και πρώτης τάξης του αναπτύγματος Taylor:

$$i\Sigma_{BPHZ}(\not{p}) = e^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{\gamma_\mu(-\not{p} - \not{l} + m)\gamma^\mu}{(l^2 + m_\gamma^2)[(p+l)^2 + m^2]} - \frac{\gamma_\mu(-\not{l} + m)\gamma^\mu}{(l^2 + m_\gamma^2)(l^2 + m^2)} \right. \\ \left. - \gamma_\mu \frac{-(l^2 + m^2)\gamma_\nu + 2(l - m)l_\nu}{(l^2 + m^2)^2(l^2 + m_\gamma^2)} \gamma^\mu \not{p}^\nu \right]$$

Ωστόσο, σε ανώτερες τάξεις της θεωρίας διαταραχών μπορεί να υπάρχουν πολλά υποδιαγράμματα που αποκλίνουν. Στα πλαίσια αυτής της ανάλυσης βρέθηκε μία αναδρομική μέθοδος αφαίρεσης των αποκλίσεων από ένα οποιοδήποτε διάγραμμα σε αυθαίρετη τάξη θεωρίας διαταραχών από τον Bogoliubov, και η αναδρομή λύθηκε από τον Zimmermann, ώστε να δοθεί ένας απλός αλγόριθμος που δουλεύει αποδεδειγμένα. Μία τέτοια ανάλυση υπερβαίνει όμως το σκοπό αυτής της εργασίας, ενώ η μέθοδος BPHZ γενικά παρουσιάζει ορισμένες πρακτικές δυσκολίες, καθώς αντίθετα με τις μεθόδους που εμπλέκουν διαστατική ομαλοποίηση, δεν διατηρεί ορισμένες ποσότητες που σχετίζονται με τις συμμετρίες βαθμίδας των θεωριών βαθμίδας που εξετάζουμε [Col84].

5.6 Είναι όλες οι μέθοδοι ισοδύναμες;

Όλες αυτές οι αναπαραμετροποιήσεις που είδαμε είναι κατασκευασμένες με τέτοιο τρόπο ώστε σε μία ανακανονικοποιήσιμη θεωρία, η τελική κατασκευή παρατηρήσιμων αντικειμένων να μένει ανεπηρέαστη. Δηλαδή, ξεκινώντας από μία “γυμνή” Λαγκραντζιανή πυκνότητα $(L)_0$, μπορούμε ελεύθερα να μεταβούμε σε μία ανακανονικοποιημένη θεωρία με ανακανονικοποιημένες συναρτήσεις Green G_R οι οποίες δεν είναι απαραίτητα ίδιες με τις φυσικές συναρτήσεις Green G_{Ph} που θα χρησιμοποιούσαμε στον τύπο LSZ για παράδειγμα, αρκεί η **σχετική κανονικοποίηση** μεταξύ των δύο να είναι διαταρακτικά πεπερασμένη, ώστε να μπορούμε να ανακτήσουμε τις φυσικές συναρτήσεις από τις ανακανονικοποιημένες όταν θα τις χρειαστούμε. Στην πράξη, οι διαφορετικές μέθοδοι ανακανονικοποίησης αντιστοιχούν σε διαφορετικές παραμετροποιήσεις της ίδιας διαταρακτικής σειράς, με τέτοιο τρόπο που να στέλνονται συνεισφορές σε διαφορετικές τάξεις της θεωρίας διαταραχών.

Θα φαινόταν λοιπόν πως είναι ισοδύναμες όλες οι μέθοδοι. Στην πράξη όμως, αυτό που υπολογίζουμε τελικά είναι στοιχεία του πίνακα S ως ασυμπτωτική διαταρακτική σειρά, σε πεπερασμένη τάξη. Σε πεπερασμένη τάξη επιβιώνει μία διαφορά ανάμεσα στις διαφορετικές

μεθόδους [Ste82]. Η διαφορά όμως θα είναι ανώτερης τάξης από την τάξη στην οποία σταματήσαμε [Col84]. Ένα τετριμμένο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η συνάρτηση (για μικρό θετικό x):

$$A(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$

Αν γραφεί ως διαταρακτική σειρά στα x που σταματάει σε 1η τάξη είναι:

$$A_1(x) = 1 + x + O(x^2)$$

Αν τώρα θέσουμε $x' = x + x^2$ (ώστε το x' να μην είναι μικρότερης τάξης από το x), μπορούμε να γράψουμε:

$$\bar{A}(x') = 1 + x' + (x')^2$$

Και τώρα ισχύει η ισότητα:

$$\bar{A}(x + x^2) = A(x)$$

Κόβοντας αυτή τη νέα σειρά στην 1η τάξη των x' όπως πριν:

$$\bar{A}_1(x') = 1 + x' + ((x')^2)$$

Τώρα όμως βλέπουμε ότι δεν ισχύει πια η ίδια ισότητα, αλλά η διαφωνία είναι δεύτερης τάξης και πάνω:

$$\bar{A}_1(x + x^2) - A_1(x) = 1 + x + x^2 - (1 + x) = x^2$$

Η μικρή αυτή υπολογιστική διαφωνία σημαίνει πως σε κάθε υπολογισμό για παράδειγμα, μίας διατομής σκέδασης πρέπει να διασαφηνίζεται η μέθοδος ανακανονικοποίησης που χρησιμοποιήθηκε.

6 Ομάδα ανακανονικοποίησης (RG)

Έχουμε ήδη παρατηρήσει πως υπάρχει αυθαιρεσία στην επιλογή της μεθόδου ανακανονικοποίησης και πως μπορούμε να ορίσουμε κάποιους μετασχηματισμούς μεταξύ διαφορετικών μεθόδων. Αυτούς τους μετασχηματισμούς θα μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα. Με το όνομα “Ομάδα Ανακανονικοποίησης” (Renormalization Group ή RG) περιγράφονται πολλές διαφορετικές έννοιες, οι οποίες δεν είναι τελείως άσχετες μεταξύ τους, αλλά δεν ταυτίζονται. Στα πλαίσια της ΚΘΠ, μπορούμε να διακρίνουμε τουλάχιστον 3 διαφορετικές εκδοχές της ιδέας [Düt+19; BDF09; Düt12]:

- **Ομάδα Stückelberg-Petermann (SPRG):** Είναι πραγματική ομάδα με τη μαθηματική έννοια. Αναπτύχθηκε στα πλαίσια της αιτιακής ΚΘΠ και εκφράζει ουσιαστικά την ελευθερία επιλογής μεθόδων ανακανονικοποίησης. Μέλη της ομάδας είναι όλοι οι διαφορετικοί αποδεκτοί μετασχηματισμοί που μπορούν να γίνουν στις παραμέτρους μίας ανακανονικοποιήσιμης θεωρίας.
- **Ομάδα (ή Cocycle) Gell-Mann-Low (GMLRG):** Δεν είναι πραγματική μαθηματική ομάδα, αλλά λέγεται στη μαθηματική ορολογία cocycle που σχετίζεται με την ομάδα SPRG. Αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο μετασχηματισμών που ανήκουν στην SPRG, οι οποίοι αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς κλίμακας της θεωρίας. Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης εισήχθηκε για πρώτη φορά και η **συνάρτηση β** , την οποία θα υπολογίσουμε για την περίπτωση της QCD.

- **Ομάδα (ή ροή) Wilson (WRG):** Η WRG δεν έχει κάποια ιδιαίτερη αλγεβρική δομή, και δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση μαθηματική ομάδα. Επίσης, η προσέγγιση του Wilson δεν βρίσκει εφαρμογή μόνο σε ανακανονικοποιήσιμες θεωρίες (ούτε και μόνο στα πλαίσια της ΚΘΠ, εξάλλου αναπτύχθηκε κατά βάση για τη μελέτη προβλημάτων της στατιστικής φυσικής και της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης. Τέλος, δεν απαιτεί το cutoff της θεωρίας να πηγαίνει στο άπειρο. Αντίθετα, μελετάει τη συμπεριφορά μίας θεωρίας με συγκεκριμένο πεπερασμένο cutoff καθώς αυτό κυμαίνεται, ή “ρέει”.

Θα μας απασχολήσουν εδώ κυρίως οι πρώτες 2 εκδοχές, και ειδικά η GMLRG. Σε αυτή την ενότητα θα περιγραφούν συνοπτικά οι SPRG και GMLRG καθώς και η σχέση μεταξύ τους, και τελικά θα φτάσουμε στην έννοια της **κυλιόμενης σύζευξης (running coupling)** και της συνάρτησης β .

6.1 Η ομάδα Stückelberg-Petermann

Όπως έχουμε ήδη δει, οι UV απειρίες μπορούν να αφαιρεθούν με άπειρους διαφορετικούς τρόπους, και αν οι υπολογισμοί γίνουν σωστά, όλοι αυτοί οι τρόποι δίνουν ουσιαστικά τα ίδια φυσικά αποτελέσματα (με διαφωνία τάξης ανώτερης από την τάξη θεωρίας διαταραχών που εξετάζουμε κάθε φορά). Οι Stückelberg και Petermann δούλευαν μέσα στο πλαίσιο της αιτιακής θεωρίας διαταραχών, η οποία γενικά δεν παρουσιάζει UV απειρίες, αλλά και πάλι μπορεί να παρουσιάζει παρόμοια αυθαιρεσία. Εξετάζοντας την αυθαιρεσία αυτή, επιχειρηματολόγησαν υπέρ μίας συνεχούς ομάδας μετασχηματισμών μεταξύ αυτών των “πεπερασμένων” ανακανονικοποιήσεων των πεδίων, οι οποίες προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο και τις ανακανονικοποιήσεις των παραμέτρων (όπως είναι οι μάζες, οι συζεύξεις κλπ), και την ονόμασαν “group de normalization”, δηλαδή “ομάδα κανονικοποίησης” (και όχι ανακανονικοποίησης, όπως σήμερα λέγεται συνήθως) [SP53; Fra21].

Στην πραγματικότητα, δεν έδωσαν απόδειξη για τους περισσότερους από αυτούς τους ισχυρισμούς [Fra21]. Έκτοτε έχει αποδειχθεί αυστηρά πως αυτοί οι μετασχηματισμοί συνιστούν ομάδα, και διατυπώθηκε στα πλαίσια της μαθηματικής φυσικής το ακόλουθο θεώρημα (το οποίο αναπαράγουμε σε όχι και τόσο αυστηρή γλώσσα) [PS16; Düt+19]:

Θεώρημα 6.1 (Κεντρικό Θεώρημα Διαταρακτικής Ανακανονικοποίησης). *Ο πίνακας S είναι συνάρτηση της Λαγκραντζιανής πυκνότητας, και μπορεί να γραφεί ως τυπική δυναμοσειρά χρονοδιατεταγμένων γινομένων που υπακούει ορισμένα αξιώματα που αναφέρονται στο Παράρτημα Β. Υπάρχουν γενικά πολλαπλές πιθανές λύσεις που υπακούουν αυτά τα αξιώματα, και δύο λύσεις (ανακανονικοποιήσεις) S και \hat{S} σχετίζονται με τον τύπο:*

$$S \circ Z = \hat{S}$$

Όπου $Z : \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}$ μία αναλυτική συνάρτηση αναπαραμετροποίησης της Λαγκραντζιανής. Οι διάφορες πιθανές αναπαραμετροποιήσεις συνιστούν την ομάδα Stückelberg-Petermann.

Στη γλώσσα που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα, αυτό μεταφράζεται ως εξής: μία διαφορετική αποδεκτή επιλογή των counterterms των πεδίων προσδιορίζει μία “ανακανονικοποίηση” του πίνακα S , πράγμα που έχουμε ήδη δει στην προηγούμενη ενότητα. Αυτή η ανακανονικοποιημένη μορφή ισούται με τον αρχικό πίνακα S αν τον αναπαραμετροποιήσουμε κατάλληλα. Αυτές οι αναπαραμετροποιήσεις προσδιορίζονται μοναδικά, και συνιστούν μία μαθηματική ομάδα, την ομάδα Stückelberg-Petermann.

6.2 Μεγάλοι λογάριθμοι και η μέθοδος των Gell-Mann και Low

Η εργασία των Stückelberg και Petermann δεν έλαβε ιδιαίτερα μεγάλη προσοχή, καθώς ήταν αρκετά αφηρημένη. Οι Gell-Mann και Low κατά πάσα πιθανότητα δεν την γνώριζαν όταν προσπάθησαν να ερευνήσουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της QED σε υψηλές ενέργειες χρησιμοποιώντας μία εκδοχή της μεθόδου μS που αναφέραμε νωρίτερα. Μάλιστα, δεν έκαναν καμία αναφορά στη μαθηματική έννοια της ομάδας [Fra21]. Η σύνδεση μεταξύ των δύο εννοιών κάτω από την κοινή έννοια της “ομάδα ανακανονικοποίησης” έγινε αργότερα από τους Bogoliubov και Shirkov.

Αν οι Gell-Mann και Low είχαν προσπαθήσει να μελετήσουν τη συμπεριφορά σε υψηλές ενέργειες της QED με χρήση της “παραδοσιακής” μεθόδου OS, θα συναντούσαν μία σημαντική δυσκολία: τους **μεγάλους λογαρίθμους**. Συγκεκριμένα στο παράδειγμα της πόλωσης κενού βλέπουμε ότι υπάρχει ένας παράγοντας k^2 μέσα στο λογάριθμο, ο οποίος αποκλίνει στο όριο υψηλών ενεργειών. Για αυτό και χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος μS , η οποία επιλέγοντας $\mu_S = -k^2$ ακυρώνει αυτό τον προβληματικό παράγοντα. Αντί για αυτή τη μέθοδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αντίστοιχο τρόπο και η μέθοδος \overline{MS} . Η κλίμακα που παρέχουν οι αυθαίρετες παράμετροι είναι λοιπόν μία κλίμακα ενέργειας.

Σύμφωνα τώρα με το ΚΘΔΑ, κάθε ανακανονικοποίηση πεδίων αντιστοιχεί με μοναδικό τρόπο σε ανακανονικοποίηση των παραμέτρων. Αυτό οδηγεί στην έννοια της **κυλιόμενης σύζευξης**, δηλαδή για μία οποιαδήποτε επιλογή της παραμέτρου κλίμακας μ στη μέθοδο \overline{MS} (ή στην μS) η σύζευξη και η μάζα των φερμιονίων γράφονται ως συναρτήσεις της παραμέτρου $e(\mu)$ και $m(\mu)$. Υπό αυτή την έννοια μπορούμε να λέμε ότι η σύζευξη εξαρτάται από την ενέργεια. Για τη μελέτη της μεταβολής της σύζευξης για διαφορετικές ενέργειες, εισάγουμε τη **συνάρτηση β** , για παράδειγμα στην \overline{MS} :

$$\beta(e) = \frac{\partial e}{\partial \log \tilde{\mu}}$$

Θα δούμε στην επόμενη υποενότητα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα αυτή τη συνάρτηση.

Αναφέραμε πως στην πραγματικότητα οι μετασχηματισμοί κλίμακας που μελέτησαν οι Gell-Mann και Low δεν συνιστούν ομάδα με τη μαθηματική έννοια. Είδαμε πως στη μέθοδο μS μπορούμε να μεταφερθούμε από κάθε δεδομένη κλίμακα αφαίρεσης σε μία άλλη ανακανονικοποιώντας το πεδία με τον παράγοντα:

$$Z_3(\mu, \mu') = 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{-x(1-x)\mu'^2 + m^2}{-x(1-x)\mu^2 + m^2} \right)$$

Είδαμε επίσης πως ισχύει η ιδιότητα $Z_3(\mu, \mu')Z_3(\mu', \mu'') = Z_3(\mu, \mu'')$. Ωστόσο, εκτός από την περίπτωση που $m = 0$ (ή στην περίπτωση υψηλών ενεργειών που μελέτησαν οι Gell-Mann και Low, όπου η μάζα των φερμιονίων είναι αμελητέα), το γινόμενο $Z_3(\mu_1, \mu_2)Z_3(\mu_3, \mu_4)$ δεν δίνει γενικά κάποιον άλλο μετασχηματισμό τέτοιας μορφής. Με άλλα λόγια, δεν υπακούει την προϋπόθεση της κλειστότητας για τις μαθηματικές ομάδες. Συνεπώς η ονομασία “ομάδα Gell-Mann-Low” στην πραγματικότητα δεν είναι ακριβώς σωστή, αλλά η ορολογία είναι ευρέως διαδεδομένη. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι αν και οι διαφορετικές ανακανονικοποιήσεις αποτελούν ομάδα, η συγκεκριμένη κλάση ανακανονικοποιήσεων που αφορά κλίμακες δεν εξαντλεί όλα τα ενδεχόμενα, και δεν αποτελεί γενικά ούτε καν υποομάδα της ευρύτερης ομάδας στην οποία περιέχονται.

Μία άλλη οπτική γωνία η οποία αναπτύχθηκε κυρίως από τους Callan και Symanzik αλλά βρίσκεται στο πνεύμα της αρχικής εργασίας των Gell-Mann και Low είναι πως οι μεγάλοι λογάριθμοι προέρχονται από την καταστροφή του αναλλοίωτου κλίμακας της θεωρίας όταν επιλέγουμε μία συγκεκριμένη κλίμακα ανακανονικοποίησης. Για μία πληρέστερη παρουσίαση αυτής της οπτικής γωνίας, παραπέμπουμε στο [Wei96].

Έστω ότι επιλέγουμε μία τέτοια κλίμακα και προσπαθούμε να υπολογίσουμε μία ποσότητα όπως για παράδειγμα μια διατομή σκέδασης $\Gamma(E, x, g, m)$ (οι οποία έχει διάσταση E^D , όπου D η διάσταση του χωροχρόνου και E η ενέργεια). Εδώ με x συμβολίζουμε διάφορες αδιάστατες παραμέτρους από τις οποίες μπορεί να εξαρτάται, και με g όλες τις (αδιάστατες) συζεύξεις. Με βάση τη διαστατική ανάλυση, πρέπει να ισχύει:

$$\Gamma(E, x, g, m) = E^D \Gamma(1, x, g, \frac{m}{E})$$

Θα περιμέναμε αφελώς ότι στο όριο μεγάλων ενεργειών που μελέτησαν οι Gell-Mann και Low, θα συνεχίσουμε να βλέπουμε αυτή τη συμπεριφορά, δηλαδή ότι:

$$\Gamma(E, x, g, m) \rightarrow E^D \Gamma(1, x, g, 0)$$

Ωστόσο, αντί για αυτό βλέπουμε να κάνουν την εμφάνισή τους λογάριθμοι της μορφής $\log(E/m)$, πράγμα που αναγνωρίζουμε ως θραύση του αναλλοίωτου κλίμακας, και οφείλεται στο γεγονός ότι το όριο $m \rightarrow 0$ παρουσιάζει ανωμαλίες, για τις οποίες ευθύνεται η ανακανονικοποίηση, και συγκεκριμένα η εξάρτηση των συζεύξεων g από τη μάζα m . Ο τρόπος που αυτό θεραπεύεται και αποκαθίσταται το αναλλοίωτο κλίμακας είναι εισάγοντας μία νέα παράμετρο διάστασης μάζας (ενέργειας) μ , και ανακανονικοποιώντας με τέτοιο τρόπο ώστε πλέον οι συζεύξεις να εξαρτώνται από αυτή την παράμετρο αντί για τη μάζα, και μετά θέτουμε $\mu = E$. Τότε γράφουμε:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) \rightarrow E^D \Gamma(1, x, g_E, 0, 1)$$

Αυτό δουλεύει γιατί το g_E πλέον δεν εξαρτάται από το m οπότε το όριο $m \rightarrow 0$ δεν είναι πια προβληματικό. Φτάνουμε έτσι πάλι στην κυλιόμενη σύζευξη από ένα άλλο μονοπάτι, που τονίζει τη σημασία της κλίμακας.

6.3 Απλή υπολογιστική μέθοδος για τη συνάρτηση β

Ένας εύκολος τρόπος για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο \overline{MS} , να βρούμε όλα τα counterterms που σχετίζουν τη σύζευξη $e(\mu)$ με το “γυμνό” e_0 , και τελικά να λογαριθμήσουμε και παραγωγίσουμε και τις δύο μεριές με το $\log \tilde{\mu}$, απαιτώντας η γυμνή σταθερά σύζευξης να μην εξαρτάται από την παράμετρο κλίμακας. Για παράδειγμα, στην QED είναι:

$$Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e \mu^{\epsilon/2} = e_0$$

Είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε τη σύζευξη $\alpha = \frac{e^2}{2\pi}$. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση γίνεται:

$$Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1} \alpha \mu^\epsilon = \alpha_0$$

Αν τώρα ορίσουμε:

$$G(\alpha, \epsilon) = \log (Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1})$$

Λογαριθμίζουμε, και παίρνουμε:

$$\log \alpha_0 = G(\alpha, \epsilon) + \log \alpha + \epsilon \log \mu$$

Τέλος, παραγωγίζοντας:

$$\left(\frac{\partial G(\alpha, \epsilon)}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \beta(\alpha) + \epsilon = 0$$

Γράφουμε τώρα τη συνάρτηση β ως δυναμοσειρά των ϵ :

$$\beta(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \epsilon^n$$

Στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ απομένει μόνο ο όρος β_0 , και αυτός είναι που τελικά θέλουμε να υπολογίσουμε. Θα χρειαστούμε τώρα μία καλύτερη μορφή για το $G(\alpha, \epsilon)$. Για να την βρούμε, κάνουμε 2 παρατηρήσεις. Πρώτον, επειδή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο \overline{MS} , κάθε counterterm θα γράφεται σε μορφή $1 + O(\alpha)$, άρα και κλάσματα/γινόμενα counterterms θα παίρνουν την ίδια μορφή. Αυτό σημαίνει πως η συνάρτησή μας θα έχει τη μορφή:

$$G(\alpha, \epsilon) = \log(1 + O(\alpha))$$

Αυτό μπορούμε να το αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το 0, με τον όρο μηδενικής τάξης σε α να μηδενίζεται. Η δεύτερη παρατήρηση είναι πως καμία μη μηδενική δύναμη του α δεν εμφανίζεται χωρίς να συνοδεύεται από κάποια αρνητική δύναμη του ϵ (αλλιώς θα είχαμε μη μηδενικό πεπερασμένο κομμάτι). Μπορούμε τότε να αναδιατάξουμε τη σειρά Taylor ώστε να γίνει σειρά Laurent πάνω στα ϵ , που περιέχει μόνο αρνητικές δυνάμεις του ϵ :

$$G(\alpha, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\alpha)}{\epsilon^n}$$

Αντιστοιχίζοντας τώρα τους όρους ίδιας τάξης σε ϵ :

$$\beta_n(\alpha) = 0 \text{ για } n > 1$$

$$\beta_1(\alpha) = -\alpha$$

$$\beta_0(\alpha) = \alpha^2 G_1'(\alpha)$$

Στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ θα χρησιμοποιούμε λοιπόν τον τύπο:

$$\beta(\alpha) = \alpha^2 G_1'(\alpha)$$

Που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β βρίσκοντας απλά και μόνο το $G_1(\alpha)$.

7 Συνάρτηση β στην QCD και ασυμπτωτική ελευθερία

Έχουμε πλέον όλα τα εργαλεία για να γίνει ο υπολογισμός της συνάρτησης β της QCD σε επίπεδο ενός loop. Θα χρησιμοποιήσουμε διαστατική ομαλοποίηση και τη μέθοδο \overline{MS} , και ακολουθούμε πάλι τους υπολογισμούς του συγγραμματος του Srednicki [Sre07]. Η Λαγκραντζιανή πυκνότητα της QCD παίρνει (όταν συμπεριλαμβάνουμε τα counterterms) την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} Z_3 A^{a\mu} (g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A^{a\nu} + \frac{1}{2} \xi^{-1} A^{a\mu} \partial_\mu \partial_\nu A^{a\nu} \\ & - Z_3 g f^{abc} A^{a\mu} A^{b\nu} \partial_\mu A_\nu^c - \frac{1}{4} Z_4 g^2 f^{abc} f^{cde} A^{a\mu} A^{b\nu} A_\mu^c A_\nu^d \\ & - Z_2 \partial^\mu \bar{C}^a \partial_\mu C^a + Z_1 g f^{abc} A_\mu^c \partial^\mu \bar{C}^a C^b \\ & + i Z_2 \bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i - Z_m m \bar{\psi}_i \psi_i + Z_1 g A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j \end{aligned}$$

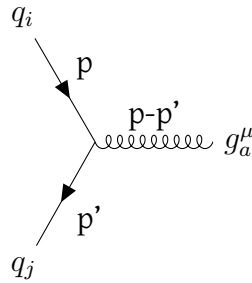
Μπορούμε με επισκόπηση των συντελεστών να βρούμε ότι ισχύει:

$$\alpha_0 = \frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \mu^\epsilon \alpha$$

Όπου $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$ και ο δείκτης 0 αναφέρεται στις “γυμνές” ποσότητες. Σκοπός εδώ θα είναι λοιπόν ο υπολογισμός των $Z_{1,2,3}$. Το Z_1 προσδιορίζεται από τις διορθώσεις στη συνάρτηση κορυφής quark-quark-γκλουονίου (2 διαγράμματα σε τάξη 1 loop), το Z_2 από τις διορθώσεις του διαδότη quark (1 βασικό διάγραμμα και 1 διάγραμμα counterterm σε τάξη 1 loop), και το Z_3 από τις διορθώσεις του διαδότη γκλουονίου (4 βασικά διαγράμματα και 1 διάγραμμα counterterm σε τάξη 1 loop).

7.1 Συνάρτηση κορυφής (Προσδιορισμός Z_1)

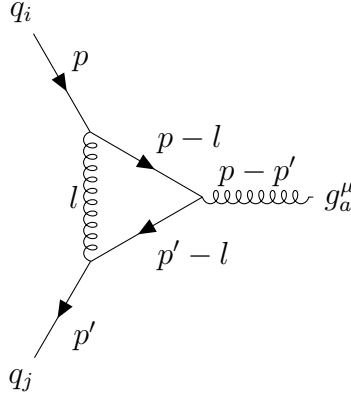
Η συνάρτηση κορυφής κουαρκ-κουαρκ-γκλουονίου είναι η ακρωτηριασμένη συνάρτηση Green 3 σημείων με εξωτερικές πηγές 2 κουαρκς και ένα γκλουόνιο. Σε επίπεδο διαγραμμάτων δέντρου είναι:



Τα i, j είναι δείκτες γεύσης για τα κουαρκς, και το a είναι δείκτης χρώματος για το γκλουόνιο, ενώ το μ είναι ταυστικός δείκτης. Οι (τροποποιημένοι, με την προσθήκη των counterterms) κανόνες Feynman δίνουν τη συνάρτηση κορυφής σε επίπεδο διαγραμμάτων δέντρου:

$$iV_{0-loop,ij}^{a\mu}(p, p') = iZ_1 \mu^{\epsilon/2} g \gamma^\mu T_{ij}^a$$

Σε αυτή την συνάρτηση θα προσθέσουμε και τις διορθώσεις σε επίπεδο 1 loop. Έχουμε 2 σχετικά διαγράμματα. Το πρώτο από αυτά είναι παρόμοιο με αντίστοιχο που εμφανίζεται στην QED:



Η συνεισφορά του διαγράμματος αυτού είναι:

$$(iZ_1\mu^{\epsilon/2}g)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \Delta_{\rho\nu}^{bc}(l) \gamma^\rho T_{kj}^c S(\not{p}' - \not{l}) \gamma^\mu T_{mk}^a S(\not{p} - \not{l}) \gamma^\nu T_{im}^b$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το γεγονός ότι ο διαδότης του γκλουονίου (τον οποίο γράφουμε σε βαθμίδα Feynman, όπως κάναμε και στην QED) περιέχει έναν όρο δ^{ab} :

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(l) = \frac{\delta^{ab} g_{\mu\nu}}{l^2 + m_g^2 - i\epsilon}$$

Εδώ έχουμε συμπεριλάβει μία πλασματική μάζα γκλουονίου m_g . Επομένως θα εμφανιστεί μέσα στο ολοκλήρωμα ο παράγοντας:

$$T_{im}^b T_{mk}^a T_{kj}^b = (T^b T^a T^b)_{ij} = \left[C(R) - \frac{1}{2} T(A) \right] T_{ij}^a$$

Επιπλέον, ο παράγοντας $g_{\rho\nu}$ χαμηλώνει το δείκτη του γ^ρ . Τώρα μένει να υπολογιστεί το υπόλοιπο ολοκλήρωμα:

$$\mu^{3\epsilon/2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\nu(-\not{p}' + \not{l} + m) \gamma^\mu(-\not{p} + \not{l} + m) \gamma^\nu}{(l^2 + m_g^2) [(p' - l)^2 + m^2] [(p - l)^2 + m^2]}$$

Μετατρέπουμε τον παρονομαστή σε άθροισμα χρησιμοποιώντας το γνωστό τύπο Feynman:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(l^2 + m_g^2) [(p' - l)^2 + m^2] [(p - l)^2 + m^2]} = \\ & = \int dF_3 \{x_1[(p - l)^2 + m^2] + x_2[(p' - l)^2 + m^2] + x_3(l^2 + m_g^2)\}^{-3} \end{aligned}$$

Το μέτρο ολοκλήρωσης είναι:

$$\int dF_3 = 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

Αναπτύσσουμε τώρα τις παρενθέσεις στον παρονομαστή και παίρνουμε:

$$x_1[(p - l)^2 + m^2] + x_2[(p' - l)^2 + m^2] + x_3 l^2 = (x_1 + x_2 + x_3) l^2$$

$$+[-2x_1p - 2x_2p']l$$

$$+x_1(p^2 + m^2) + x_2((p')^2 + m^2)$$

Ο συντελεστής του l^2 είναι $x_1 + x_2 + x_3$. Μετά την ολοκλήρωση πάνω στα x , αυτός ο συντελεστής θα δώσει 1. Επομένως μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με 1 εξ αρχής. Έτσι μπορούμε να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του l και να γράψουμε το ολοκλήρωμα στη μορφή:

$$\mu^{3\epsilon/2} \int_0^1 dF_3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{N^{\mu\nu}}{(q^2 + D)^3}$$

Όπου (ταιριάζοντας τους όρους των δύο μορφών μεταξύ τους):

$$q = l - x_1p - x_2p'$$

$$D = x_1(1 - x_1)p^2 + x_2(1 - x_2)(p')^2 - 2x_1x_2p \cdot p' + (x_1 + x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2$$

$$N^{\mu\nu} = \gamma_\nu(-\not{p}' + \not{l} + m)\gamma^\mu(-\not{p} + \not{l} + m)\gamma^\nu$$

$$= \gamma_\nu(-\not{p}' + \not{q} + x_1\not{p} + x_2\not{p}' + m)\gamma^\mu(-\not{p} + \not{q} + x_1\not{p} + x_2\not{p}' + m)\gamma^\nu$$

Οι όροι γραμμικοί στα q μηδενίζονται στο ολοκλήρωμα. Αγνοώντας αυτούς τους όρους ο αριθμητής γίνεται:

$$N^{\mu\nu} = \gamma_\nu \not{q} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu$$

$$+ \gamma_\nu [x_1\not{p} + (x_2 - 1)\not{p}' + m] \gamma^\mu [(x_1 - 1)\not{p} + x_2\not{p}' + m] \gamma^\nu$$

Μία ακόμη απλοποίηση είναι εφικτή. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για τους πίνακες γ που μπορούν να βρεθούν στο σχετικό παράρτημα, και αγνοώντας τους γραμμικούς όρους, κάνουμε την αντικατάσταση:

$$\gamma_\nu \not{q} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \rightarrow \frac{1}{d} q^2 \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = \frac{(d-2)^2}{d} q^2 \gamma^\mu$$

Για να φτάσουμε στη μορφή για τον αριθμητή:

$$N^{\mu\nu} = \frac{(d-2)^2}{d} q^2 \gamma^\mu$$

$$+ \gamma_\nu [x_1\not{p} + (x_2 - 1)\not{p}' + m] \gamma^\mu [(x_1 - 1)\not{p} + x_2\not{p}' + m] \gamma^\nu$$

Το ολοκλήρωμα τώρα είναι:

$$\mu^{3\epsilon/2} \int_0^1 dF_3 \left[\frac{(d-2)^2}{d} \gamma^\mu I(1, 3) \right]$$

$$+ \gamma_\nu [x_1\not{p} + (x_2 - 1)\not{p}' + m] \gamma^\mu [(x_1 - 1)\not{p} + x_2\not{p}' + m] \gamma^\nu I(0, 3)$$

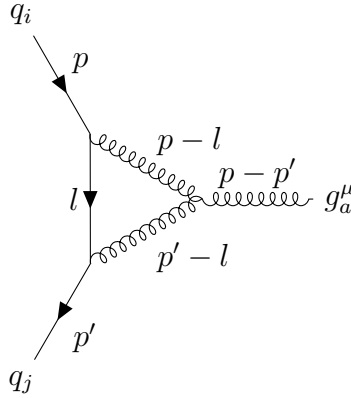
Ο υπολογισμός του πεπερασμένου μέρους αυτής της ποσότητας δεν χρειάζεται, ενώ είναι σχετικά απαιτητικός, οπότε θα βρούμε μόνο το αποκλίνον κομμάτι αυτού του ολοκληρώματος. Μόνο το $I(1, 3)$ έχει αποκλίνον κομμάτι, το οποίο σύμφωνα με το παράρτημα είναι:

$$\frac{4D}{\epsilon} \frac{i}{2D(4\pi)^2} = \frac{i}{8\pi^2\epsilon}$$

Τελικά λοιπόν το αποκλίνον τμήμα για αυτό το διάγραμμα είναι:

$$\frac{g^3}{8\pi^2\epsilon} \left[C(R) - \frac{1}{2}T(A) \right] T_{ij}^a \gamma^\mu$$

Τώρα πρέπει να μελετήσουμε και το άλλο διάγραμμα κορυφής:



Διαγράμματα αυτής της μορφής δεν εμφανίζονται στην QED. Εφόσον μας αφορά μόνο η απειρία, δεν θα κάνουμε έναν εξίσου λεπτομερή υπολογισμό. Η απειρία δεν εξαρτάται από τις εξωτερικές ορμές, άρα μπορούμε να τις θέσουμε όλες ίσες με 0 για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς. Η συνεισφορά του είναι:

$$(ig)^2 g f^{abc} (T^c T^b)_{ij} \left(\frac{1}{i} \right)^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\rho (-\not{l} + m) \gamma_\nu}{l^4 (l^2 + m^2)} [2l^\mu g^{\nu\rho} - l^\nu g^{\rho\mu} - l^\rho g^{\mu\nu}]$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τον τύπο:

$$f^{abc} T^c T^b = -\frac{1}{2} i T(A) T^a$$

Όπως και πριν, συνεχίζουμε σε $4 - \epsilon$ διαστάσεις, και βρίσκουμε ότι το αποκλίνον τμήμα είναι:

$$\frac{3g^3}{16\pi^2\epsilon} T(A) T_{ij}^a \gamma^\mu$$

Τελικά λοιπόν, λαμβάνοντας υπ'όψιν τις συνεισφορές και των 2 διαγραμμάτων, η απειρία της συνάρτησης κορυφής είναι:

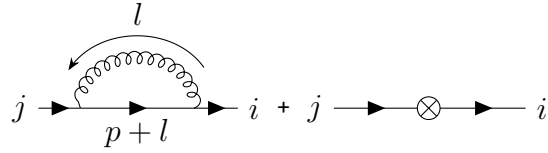
$$V_{ij}^{\alpha\mu}(0,0)_{div} = Z_1 [C(R) + T(A)] \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} g T_{ij}^a \gamma^\mu$$

Η οποία αφαιρείται (αγνοώντας όρους τάξης g^4 και άνω) θέτοντας:

$$Z_1 = 1 - [C(R) + T(A)] \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} + O(g^4)$$

7.2 Διαδότης quark (Προσδιορισμός Z_2)

Αυτός ο υπολογισμός είναι ευκολότερος γιατί απαιτεί μόνο ένα διάγραμμα το οποίο έχει ήδη υπολογιστεί στην περίπτωση της QED (εκτός από έναν παράγοντα που σχετίζεται με το χρώμα), και ένα διάγραμμα counterterm:

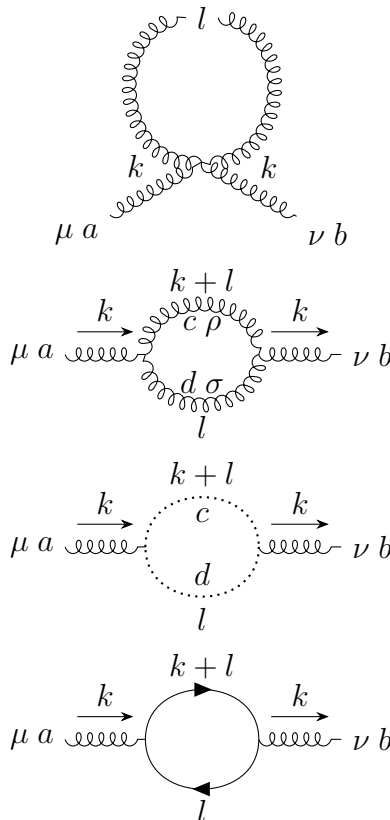


Τα διαγράμματα αυτά είναι όμοια με την περίπτωση των διορθώσεων 1-loop του διαδότη του ηλεκτρονίου, με τη διαφορά ότι τώρα υπάρχουν και οι δείκτες χρώματος και γεύσης, ενώ οι κορυφές δίνουν έναν παράγοντα $(T^a T^a)_{ij} = C(R)\delta_{ij}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της QED, σε ανακανονικοποίηση \overline{MS} έχουμε:

$$Z_2 = 1 - C(R) \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + O(g^4)$$

7.3 Διαδότης γκλουονίου (Προσδιορισμός Z_3)

Οι υπολογισμοί σε αυτή την ενότητα θα γίνουν με λιγότερη λεπτομέρεια καθώς ήδη έχουν γίνει αρκετές φορές παρόμοιοι. Χρειάζεται να μελετήσουμε 5 διαφορετικά διαγράμματα που συνεισφέρουν στο $i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k)$:



$$a \mu \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{---} \otimes \text{---} \\ \xrightarrow{k} \end{array} a \mu$$

Το πρώτο από αυτά τα διαγράμματα μηδενίζεται, καθώς είναι ανάλογο του $\int d^d l / (2\pi)^d l^{-2}$, δηλαδή του $I(0, 1)$ για $D = 0$ και $q = l$. Μπορούμε να δούμε εύκολα πως αυτό δίνει 0 στη διαστατική ομαλοποίηση. Το δεύτερο διάγραμμα γράφεται κατά τα γνωστά στη μορφή:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^\epsilon}{2} g^2 f^{acd} f^{bcd} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}}{l^2(l+k)^2} = \\ & = -\frac{\mu^\epsilon}{2} g^2 T(A) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}}{(q^2 + D)^2} \end{aligned}$$

Όπου $q = l + xk$, $D = x(1-x)k^2$, και (αγνοώντας όρους γραμμικούς σε q , και θέτοντας $d=4$ μόνο στον αριθμητή καθώς μας ενδιαφέρει μόνο το άπειρο κομμάτι):

$$N_{\mu\nu} = -\frac{9}{2} q^2 g_{\mu\nu} - (5 - 2x + 2x^2) k^2 g_{\mu\nu} + (2 + 10x - 10x^2) k_\mu k_\nu$$

Εμφανίζονται λοιπόν τα ολοκληρώματα $I(0, 2)$ και $I(1, 2)$, για τους όρους του αριθμητή ανάλογους με q^0 και q^2 αντίστοιχα. Αξιοποιώντας τους τύπους από το παράρτημα που συνδέουν αυτά τα 2 ολοκληρώματα μεταξύ τους, κάνουμε την αντικατάσταση $q^2 \rightarrow (2/d - 1)^{-1} D$, άρα γράφουμε:

$$N_{\mu\nu} = -(5 - 11x + 11x^2) k^2 g_{\mu\nu} + (2 + 10x - 10x^2) k_\mu k_\nu$$

Και η απειρία του διαγράμματος γράφεται:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\epsilon} \frac{ig^2}{16\pi^2} T(A) \delta^{ab} \int_0^1 dx N_{\mu\nu} = \\ & = -\frac{1}{\epsilon} \frac{ig^2}{16\pi^2} T(A) \delta^{ab} \left(-\frac{19}{6} k^2 g_{\mu\nu} + \frac{11}{3} k_\mu k_\nu \right) \end{aligned}$$

Το τρίτο διάγραμμα περιέχει loop φαντάσματος. Αυτό σύμφωνα με τους κανόνες Feynman της QCD θα δώσει έναν συνολικό παράγοντα -1 μπροστά από το ολοκλήρωμα. Η συνεισφορά του είναι λοιπόν:

$$(-1) \mu^\epsilon g^2 f^{acd} f^{bcd} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l+k)_\mu l_\nu}{l^2(l+k)^2}$$

Η απειρία που δίνει αυτό το ολοκλήρωμα είναι:

$$-\frac{1}{\epsilon} \frac{ig^2}{8\pi^2} T(A) \delta^{ab} \left(-\frac{1}{12} k^2 g_{\mu\nu} - \frac{1}{6} k_\mu k_\nu \right)$$

Το τέταρτο διάγραμμα είναι όμοιο με την περίπτωση του φωτονικού διαδότη στην QED, με 2 διαφορές: οι κορυφές δίνουν παράγοντα χρώματος $Tr(T^a T^b) = T(R) \delta^{ab}$, και στην πραγματικότητα έχουμε n_F διαφορετικά τέτοια διαγράμματα που συνεισφέρουν ξεχωριστά, ένα για κάθε διαφορετική γεύση quark. Η συνεισφορά στην απειρία είναι:

$$-\frac{1}{\epsilon} \frac{ig}{6\pi^2} n_F T(R) \delta^{ab} (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)$$

Αθροίζουμε τώρα τις συνεισφορές όλων αυτών των διαγραμμάτων. Όπως και στην περίπτωση των φωτονίων, η ιδιοενέργεια των γκλουονίων μπορεί να γραφεί:

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) = \Pi(k^2)P_{\mu\nu}(k)k^2\delta^{ab}$$

Βρίσκουμε έτσι ότι όλα τα διαγράμματα που υπολογίσαμε συνεισφέρουν στην απειρία:

$$\Pi(k^2)_{div} = -(Z_3 - 1) + \left[\frac{5}{3}T(A) - \frac{4}{3}n_F T(R) \right] \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$$

Άρα:

$$Z_3 = 1 + \left[\frac{5}{3}T(A) - \frac{4}{3}n_F T(R) \right] \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon}$$

7.4 Υπολογισμός συνάρτησης β

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα και την ανάλυση της ενότητας 5 για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β σε ταξη 1-loop. Έχουμε τους ακόλουθους τύπους:

$$\alpha_0 = \frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \mu^\epsilon \alpha$$

$$Z_1 = 1 - [C(R) + T(A)] \frac{\alpha}{2\pi\epsilon} + O(\alpha^2) = 1 + \frac{A}{\epsilon} + O(\alpha^2)$$

$$Z_2 = 1 - C(R) \frac{\alpha}{2\pi\epsilon} + O(\alpha^2) = 1 + \frac{B}{\epsilon} + O(\alpha^2)$$

$$Z_3 = 1 + \left[\frac{5}{3}T(A) - \frac{4}{3}n_F T(R) \right] \frac{\alpha}{2\pi\epsilon} + O(\alpha^2) = 1 + \frac{C}{\epsilon} + O(\alpha^2)$$

Λογαριθμίζουμε το κλάσμα στον πρώτο τύπο:

$$\log \left(\frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \right) = \left[2 \log \left(1 + \frac{A}{\epsilon} \right) - 2 \log \left(1 + \frac{B}{\epsilon} \right) - \log \left(1 + \frac{C}{\epsilon} \right) \right]$$

Μπορούμε να κάνουμε ένα τυπικό ανάπτυγμα Taylor για κάθε έναν από αυτούς τους λογαρίθμους. Σε αυτή την περίπτωση παίρνει τη μορφή:

$$\log \left(\frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(a)}{\epsilon^n}$$

$$\log \alpha_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\alpha)}{\epsilon^n} + \log \alpha + \epsilon \log \mu$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας, για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β αρκεί να υπολογίσουμε τον πρώτο όρο του άπειρου αθροίσματος, και τότε αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$\beta(\alpha) = \alpha^2 G'_1(\alpha)$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$G_1(\alpha) = 2A - 2B - C = \left[\frac{4}{3}n_F T(R) - \frac{11}{3}T(A) \right] \frac{\alpha}{2\pi}$$

Έτσι καταλήγουμε στο τελικό μας αποτέλεσμα για τη συνάρτηση β :

$$\beta(\alpha) = \left[\frac{4}{3}n_F T(R) - \frac{11}{3}T(A) \right] \frac{\alpha^2}{2\pi} + O(\alpha^3)$$

Μία σημαντική παρατήρηση είναι πως αυτό στην περίπτωση της QCD είναι αρνητικό: υπάρχουν 6 γεύσεις κουαρκ, και στη θεμελιώδη αναπαράσταση έχουμε $T(A) = 3$ και $T(R) = \frac{1}{2}$. Άρα παίρνουμε $\beta = -7\alpha^2/(2\pi)$. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει πως η αποτελεσματική (effective) σταθερά σύζευξης μικραίνει όσο μεγαλώνει η ενέργεια, το φαινόμενο που ονομάζεται **ασυμπτωτική ελευθερία**.

7.5 Ασυμπτωτική ελευθερία και συνέπειες

Η QCD (αντίθετα με την QED, για παράδειγμα) είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη, που σημαίνει ότι στο όριο μεγάλων ενεργειών (ή, ισοδύναμα, μικρών αποστάσεων) τα ισχυρά αλληλεπιδρώντα σωματίδια τείνουν να συμπεριφερθούν ως ελεύθερα καθώς τείνει να μηδενιστεί η ισχύς της αλληλεπίδρασης. Αντίστροφα, στο όριο χαμηλών ενεργειών/μεγάλων αποστάσεων η σύζευξη τείνει στο άπειρο.

Η ανακάλυψη της ασυμπτωτικής ελευθερίας της QCD ήταν σημαντική, γιατί αυτό το χαρακτηριστικό της θεωρίας έχει σημαντικές θεωρητικές και φυσικές επιπτώσεις. Χάρης σε αυτή, τα κουάρκ εντός των αδρονίων συμπεριφέρονται σαν να είναι περίπου ελεύθερα, αφού η σταθερά σύζευξης είναι εξαιρετικά μικρή σε μικρές αποστάσεις (μεγάλες ενέργειες). Από την άλλη, σημαίνει ότι η θεωρία διαταραχών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα για χαμηλές ενέργειες. Αυτή είναι η αντίστροφη συμπεριφορά από την QED.

Η συμπεριφορά αυτή θεωρούνταν αδύνατη από αρκετούς φυσικούς, όπως για παράδειγμα από τον Lev Landau, που εντόπισε ένα πρόβλημα στη διαταρακτική συμπεριφορά της QED σε υψηλές ενέργειες. Συγκεκριμένα, αυτός και η ομάδα του ανακάλυψαν έναν πόλο, στον οποίο η σύζευξη απειρίζεται (πόλος Landau). Καθώς θεωρούσαν πως αυτή η συμπεριφορά ήταν χαρακτηριστική κάθε πιθανής ΚΘΠ, συμπέραναν ότι οι ΚΘΠ δεν είναι συνεπείς, γιατί δεν είναι πια χρήσιμες σε ενέργειες πάνω από αυτό τον πόλο. Επιπλέον, επιχειρηματολόγησαν πως μία παρόμοια θεωρία που περιγράφει τα μεσόνια (οι οποίες ήταν υπό εξέταση τότε) θα παρουσιάζει τον πόλο σε ακόμα χαμηλότερες ενέργειες, και έτσι θα είναι μη εφαρμόσιμη [Fra21]. Έκτοτε έχουν υπάρξει διάφορα επιχειρήματα για την ασυνέπεια θεωριών όπως η QED, αν και δεν είναι ακόμη αδιαμφισβήτητη. Πάντως, το σημαντικό είναι πως οι ασυμπτωτικά ελεύθερες θεωρίες αποφεύγουν αυτά τα προβλήματα. Ακόμη δηλαδή κι αν ισχύει πως οι μη ασυμπτωτικά ελεύθερες θεωρίες είναι ασυνεπείς, θεωρείται γενικά πως η QCD και άλλες ασυμπτωτικά ελεύθερες θεωρίες (όπως γενικότερα η Yang-Mills) υπάρχουν (με τη μαθηματική έννοια) και είναι συνεπείς (η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού για τις θεωρίες Yang-Mills είναι σημαντικό ανοικτό ερώτημα [JW06]). Τα επιχειρήματα του Landau για την μη εφαρμοσιμότητα της ΚΘΠ για τα μεσόνια ακυρώθηκαν με αυτό τον τρόπο από την ασυμπτωτική ελευθερία της QCD, και η ΚΘΠ καθιερώθηκε ως η καλύτερη θεωρία περιγραφής όλων των γνωστών σωματιδίων με τις αλληλεπιδράσεις τους στη μορφή του Καθιερωμένου Προτύπου.

8 Γενίκευση - συνάρτηση β στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί και για άλλες θεωρίες βαθμίδας (των οποίων η QED και η QCD είναι απλά ειδικές περιπτώσεις) με σχεδόν πανομοιότυπο τρόπο. Στον υπολογισμό που κάναμε για την QCD δεν συμπεριλάβαμε συνεισφορές από βαθμωτά μποζόνια. Στη γενική περίπτωση μίας θεωρίας βαθμίδας $SU(N)$, πρέπει αυτές να συμπεριληφθούν. Το αποτέλεσμα είναι τότε:

$$\beta(a) = - \left(\frac{11}{3}T(A) - \frac{1}{3}n_s T(R_s) - \frac{4}{3}n_f T(R_f) \right) \frac{a^2}{2\pi}$$

Όπου οι δείκτες s υποδεικνύουν τα βαθμωτά, και οι δείκτες f τα φερμιόνια. Για φερμιόνια Weyl ή Majorana, ο παράγοντας $4/3$ πρέπει να αντικαθίσταται με $2/3$ καθώς πρέπει να μετρήσουμε ξεχωριστά αριστερόστροφα και δεξιόστροφα σωματίδια. Το καθιερωμένο πρότυπο αποτελεί ουσιαστικά μία θεωρία βαθμίδας $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Οι συμμετρίες αυτές αντιστοιχούν κατά σειρά στον ηλεκτρομαγνητισμό, την ασθενή αλληλεπίδραση, και την ισχυρή αλληλεπίδραση. Μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση β για κάθε μία από τις αντίστοιχες συζεύξεις, γνωρίζοντας πως έχουμε 3 γενιές λεπτονίων, 3 γενιές quarks, και 1 βαθμωτό ουδέτερο μποζόνιο Higgs. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι [Sre07]:

$\frac{\beta_1}{\alpha_1^2/2\pi} = \frac{20}{9}n + \frac{1}{6} = \frac{41}{6}$
$\frac{\beta_2}{\alpha_2^2/2\pi} = -\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n + \frac{1}{6} = -\frac{19}{6}$
$\frac{\beta_3}{\alpha_3^2/2\pi} = -11 + \frac{4}{3}n = -7$

Όπου $n = 3$ οι γενιές, και οι δείκτες 1, 2, 3 αντιστοιχούν στις συζεύξεις των θεωριών $U(1)$, $SU(2)$ και $SU(3)$, ενώ οι συνεισφορές $+\frac{1}{6}$ προέρχονται από το Higgs. Η μόνη από αυτές που δεν παρουσιάζει ασυμπτωτική ελευθερία είναι η πρώτη.

A Κατανομές ή γενικευμένες συναρτήσεις και ΚΘΠ

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε τους βασικούς ορισμούς της θεωρίας κατανομών, και περιγράφουμε συνοπτικά την εφαρμογή τους στη ΚΘΠ και τις δυσκολίες που αυτό παρουσιάζει. Επίσης σκιαγραφούμε τη σημαντική μεθοδολογία του διαχωρισμού κατανομών ώστε να είναι καλά ορισμένα κάποια γινόμενα κατανομών με φυσική σημασία. Χρησιμοποιούμε ως γενικές πηγές τα αντίστοιχα κεφάλαια των [Tal22; SW00], και συγκεκριμένα για τη μέθοδο διαχωρισμού μεταβλητών την παρουσίαση στα [Sch14; Sch01; AAS10].

A.1 Βασικοί ορισμοί

Οι κατανομές είναι (γραμμικές) συναρτήσεις οι οποίες αντί να είναι ορισμένες πάνω στις χωροχρονικές μεταβλητές (δηλαδή πάνω στο \mathbb{R}^n για παράδειγμα), είναι ορισμένες πάνω σε συγκεκριμένες ομαλές συναρτήσεις αυτών των μεταβλητών. Ο λόγος που τις μελετάμε είναι ότι μπορούμε έτσι να αντικαταστήσουμε ένα στοιχείο $x \in \mathbb{R}^n$ με ομαλές συναρτήσεις οι οποίες

είναι μη μηδενικές σε κάποια γειτονιά ενός σημείου, και με αυτό τον τρόπο “θολώνουμε” αυτά τα σημεία και διώχνουμε ορισμένες ανωμαλίες. Μπορούμε να ορίσουμε έτσι αντικείμενα όπως η συνάρτηση δ που δεν μπορούν να οριστούν κανονικά ως συναρτήσεις του \mathbb{R}^n , να παραγωγίσουμε ασυνεχείς συναρτήσεις, κλπ.

Εδώ θα ασχοληθούμε συγκεκριμένα με **tempered κατανομές**, δηλαδή γραμμικά συναρτησιακά ορισμένες πάνω στο **χώρο Schwarz δοκιμαστικών συναρτήσεων**. Αυτές είναι απείρως παραγωγίσιμες (ομαλές) συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ των οποίων κάθε παράγωγος μειώνεται αρκετά γρήγορα, υπό μία έννοια που θα περιγράψουμε σύντομα. Ορίζουμε αρχικά:

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N} \forall i$$

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{a_1} x_1 \cdots \partial^{a_n} x_n} f$$

$$|x| := \sum_{i=1}^n |x_i|, x \in \mathbb{R}^n$$

Χρησιμοποιώντας αυτά, μπορούμε να ορίσουμε μία **ημινόρμα** στο χώρο αυτών των ομαλών συναρτήσεων για κάθε ακέραιο k :

$$\|f\|_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|$$

Ορισμός A.1 (Χώρος Schwarz). Ο χώρος Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι ο χώρος των δοκιμαστικών συναρτήσεων πάνω στο \mathbb{R}^n , δηλαδή των ομαλών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε το $\|f\|_k$ να είναι πεπερασμένο για κάθε k .

Ο ορισμός αυτός εκφράζει ότι η συνάρτηση και όλες τις οι παράγωγοι μειώνονται αρκετά γρήγορα στο άπειρο ώστε να “υπερνικά” κάθε δύναμη του $1 + |x|$. Ισχύουν επιπλέον 2 σημαντικές ιδιότητες κλειστότητας του χώρου που χρησιμοποιούνται συχνά:

Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε $x^\beta D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τότε το ίδιο ισχύει και για τον μετασχηματισμό Fourier της.

Ορισμός A.2 (Tempered κατανομές). Μία *tempered κατανομή* F στο \mathbb{R}^n είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ το οποίο είναι συνεχές ως προς μία από τις ημινόρμες $\|\cdot\|_k$, δηλαδή για κάποιο k υπάρχει σταθερά C ώστε για όλα τα $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει:

$$|F(f)| \leq C \|f\|_k$$

Πολύ συχνά, γράφουμε τη δράση των κατανομών πάνω στις δοκιμαστικές συναρτήσεις στην τυπική μορφή:

$$F(f) = \int dx F(x) f(x)$$

Όπου φυσικά $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Πολλές φορές, η ποσότητα $F(x)$ δεν είναι καν συνάρτηση. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα για τη “συνάρτηση” δ του Dirac, η οποία είναι tempered κατανομή, και πολλές φορές την γράφουμε ως $\delta(x)$, εννοώντας:

$$\delta(f) = f(0) = \int dx \delta(x) f(x)$$

Εδώ, το $\delta(f)$ είναι καλά ορισμένο σαν κατανομή, αλλά η “συνάρτηση” $\delta(x)$ δεν είναι. Ωστόσο, είναι και πάλι αρκετά βολικό να τις γράφουμε έτσι πολλές φορές. Εκτός από αυτό, αυτή η γραφή μας δίνει έναν εύκολο τρόπο να μετατρέψουμε μία συνηθισμένη συνάρτηση σε κατανομή, αντικαθιστώντας την μέσα στο ολοκλήρωμα (εφόσον βέβαια το ολοκλήρωμα μας δίνει μία καλά ορισμένη tempered κατανομή, πράγμα που φυσικά δεν ισχύει πάντα). Χρήσιμο είναι επίσης να ορίσουμε την παραγωγή κατανομών:

Ορισμός A.3 (Παραγωγή κατανομών). Αν F tempered κατανομή, τότε ορίζουμε μία παράγωγο της ως:

$$D^\alpha F(f) := -F(D^\alpha f)$$

Υπό αυτή την έννοια, όλες οι κατανομές είναι απείρως παραγωγίσιμες, καθώς κάθε παράγωγος μίας δοκιμαστικής συνάρτησης είναι επίσης δοκιμαστική συνάρτηση. Παρατηρούμε πως αν η κατανομή είναι καλά ορισμένη και ως παραγωγίσιμη συνάρτηση (και η ίδια και οι παράγωγοί της δεν τείνουν στο άπειρο πιο γρήγορα απ’ ό,τι χάνονται οι δοκιμαστικές συναρτήσεις), τότε με χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες μπορούμε να δούμε ότι η παράγωγος της ως κατανομή συμπίπτει υπό μία έννοια με την παράγωγο της ως συνάρτηση, όπως θα περιμέναμε:

$$F'(f) = - \int dx F(x) f'(x) = \int dx F'(x) f(x)$$

Αυτό σημαίνει πως πολλές φορές μπορούμε να χειριζόμαστε τις κατανομές και τις παραγώγους τους ως συνηθισμένες συναρτήσεις, χωρίς πολλά προβλήματα. Μάλιστα, τις χειριζόμαστε ως τέτοιες ακόμα και αν δεν πληρούνται τα κριτήρια για να ισχύουν μορφές όπως αυτή. Αυτό δεν είναι τελείως σωστό, αλλά στην πράξη είναι βολικό να χρησιμοποιούμε τέτοιες “πρόχειρες” τυπικές εκφράσεις, και συνήθως δεν συμπεριφέρονται με αναπάντεχο τρόπο. Θα δούμε αργότερα πως προκύπτουν προβλήματα όταν προσπαθούμε να χειριστούμε έτσι γινόμενα κατανομών.

Το τελευταίο πράγμα που θέλουμε να ορίσουμε εδώ είναι η **υποστήριξη** των κατανομών. Με αυτό τον τρόπο εκφράζουμε ότι μία κατανομή μηδενίζεται εκτός ενός συγκεκριμένου υποσυνόλου του \mathbb{R}^n .

Ορισμός A.4 (Υποστήριξη συναρτήσεων στο \mathbb{R}^n). Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο $\text{supp}(f)$ στο οποίο υποστηρίζεται η f ως:

$$\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

Στην ΚΘΠ, οι τελεστές είναι tempered κατανομές με τελεστικές τιμές (operator valued distributions). Δηλαδή, είναι γραμμικά συναρτησιακά F από το χώρο Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ στο χώρο των τελεστών ενός χώρου Hilbert \mathcal{H} , για τα οποία οι ποσότητες $\langle \eta | F | \xi \rangle$ είναι κατανομές για κάθε $\eta, \xi \in \mathcal{H}$. Με άλλα λόγια, τα πεδία της ΚΘΠ είναι τελεστές των οποίων τα στοιχεία μητρών μεταξύ διαφόρων καταστάσεων του χώρου Hilbert είναι tempered κατανομές.

A.2 Γινόμενα κατανομών

Όπως απέδειξε ([Sch54]) ο Laurent Schwarz, ένας από τους πρώτους που συστηματοποίησαν τη θεωρία των κατανομών, τα γινόμενα κατανομών δεν είναι γενικά καλά ορισμένα. Αναπαράγουμε εδώ τα βασικά στοιχεία της απόδειξής του, και κάποια στοιχεία για τα γινόμενα των κατανομών και πότε είναι καλά ορισμένα. Αυτό είναι ένα εξαιρετικά σημαντικό ζήτημα για την ΚΘΠ, καθώς τα κακά ορισμένα γινόμενα κατανομών ευθύνονται για τις UV αποκλίσεις.

Το γινόμενο 2 πραγματικών συναρτήσεων h, g ορισμένων στο \mathbb{R}^n είναι φυσικά καλά ορισμένο και προφανές:

$$(hg)(x) = h(x)g(x)$$

Θα φανταζόμασταν ίσως ότι το γινόμενο 2 κατανομών H, G θα μπορούσε να οριστεί παρόμοια:

$$(HG)(f) = \int dx H(x)G(x)f(x)$$

Αυτό κάνουμε όταν αντιμετωπίζουμε το γινόμενο κατανομών ως γινόμενο συνηθισμένων συναρτήσεων. Ένας τέτοιος ορισμός θα είχε ορισμένες “καλές” ιδιότητες που θέλουμε να έχει ένας πολλαπλασιασμός (διγραμμική πράξη) πάνω στις κατανομές:

1. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:

$$(FG)H = F(GH) = FGH$$

2. Ισχύει ο κανόνας Leibniz για την παραγωγήιση:

$$(FH)' = F'H + FH'$$

3. Αν οι κατανομές είναι καλά ορισμένες και ως συνηθισμένη συνεχής συνάρτηση, ο πολλαπλασιασμός κατανομών συμπίπτει με τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων.

Αν όμως υπάρχουν κατανομές x^{-1} και $\delta \neq 0$ ώστε:

$$x^{-1}x = 1, \quad x\delta = 0$$

Τότε δεν μπορεί να είναι καλά ορισμένος ο πολλαπλασιασμός αυτός, καθώς:

$$\delta = (x^{-1}x)\delta = x^{-1}(x\delta) = 0$$

Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε πως αν ισχύουν οι προϋποθέσεις για τον πολλαπλασιασμό που θέσαμε, το x^{-1} ανήκει στο χώρο κατανομών, και ισχύει $x\delta = 0$. Άρα δεν υπάρχει καλός τρόπος να ορίσουμε το γινόμενο παντού στο χώρο κατανομών. Μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο GF αν η κατανομή G είναι καλά ορισμένη και ως συνάρτηση $g(x)$, και μάλιστα τέτοια ώστε $gf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε:

$$GF(f) := F(gf)$$

Αυτό που προκαλεί τα προβλήματα στον πολλαπλασιασμό είναι ο πολλαπλασιασμός ορισμένων ανώμαλων (singular) κατανομών με άλλες κατανομές που είναι επίσης ανώμαλες/ασυνεχείς στο

ίδιο σημείο. Η έννοια της ανωμαλίας (singularity) είναι αντίστοιχη με το βαθμό απόκλισης τον οποίο συζητήσαμε στο κύριο σώμα του κειμένου, αλλά δεν θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ. Στην ΚΘΠ, αντιμετωπίζουμε UV αποκλίσεις όταν στον ορισμό του χρονοδιατεταγμένου γινομένου πολλαπλασιάζουμε κατανομές ανώμαλες στο 0 με βηματικές συναρτήσεις (κατανομές) Θ , οι οποίες είναι ασυνεχείς στο ίδιο σημείο. Εκεί προκύπτει η ανάγκη “ομαλοποίησης” των κατανομών σε αυτό το σημείο.

A.3 Κώννοι φωτός και αιτιακές κατανομές

Επανερχόμαστε τώρα στη φυσική. Στη σχετικότητα, το χωροχρονικό διάστημα Δx μεταξύ 2 χωροχρονικών σημείων μπορεί να έχει $\Delta x^2 > 0$, οπότε στη σύμβαση $(-+++)$ για τη μετρική Minkowski ονομάζεται spacelike, ή Δx^2 (timelike), ή $\Delta x^2 = 0$ (lightlike). Τα lightlike διαστήματα που ξεκινούν από ένα αρχικό σημείο x ουσιαστικά ορίζουν έναν “κώννο” με κορυφή το x και άξονα το χρονικό άξονα. Αυτός ο κώννος είναι ουσιαστικά κάθε πιθανή χωροχρονική διαδρομή που μπορεί να έχει μία ακτίνα φωτός που περνάει από το x_i , και για αυτό αποκαλείται **κώννος φωτός**. Στο εσωτερικό του κώννου φωτός βρίσκονται τα σημεία που είναι timelike διαχωρισμένα ως προς το x , και στο εξωτερικό του είναι τα spacelike διαχωρισμένα σημεία. Το κομμάτι του κώννου με $\Delta t = \Delta x^0 > 0$ ονομάζεται μελλοντικός κώννος φωτός, ενώ το κομμάτι με $\Delta x^0 < 0$ ονομάζεται παρελθοντικός κώννος φωτός. Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς για τους κλειστούς μελλοντικούς και παρελθοντικούς κώννους φωτός γύρω από το σημείο y αντίστοιχα:

$$\bar{V}^\pm(y) = x | (x - y)^2 \leq 0, \pm(x_0 - y_0) \geq 0$$

Μπορούμε επίσης να το γενικεύσουμε σε n διαστάσεις:

$$\Gamma_n^\pm(y) = \{ (x_1, \dots, x_n) | x_j \in \bar{V}^\pm(y), \forall j = 1, \dots, n \}$$

Οι κώννοι φωτός είναι σημαντικοί, γιατί σύμφωνα με τη σχετικότητα 2 σημεία δεν μπορούν να επικοινωνήσουν αν είναι spacelike διαχωρισμένα. Αυτό συμβαίνει γιατί για να περάσει κάποιο σήμα από 2 spacelike διαχωρισμένα σημεία πρέπει να ταξιδεύει με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός. Επιπλέον, ένα γεγονός δεν μπορεί να επηρεαστεί από κάποιο γεγονός το οποίο είναι στο μέλλον (αιτιότητα). Συνεπώς, κάθε γεγονός μπορεί να εξαρτάται μόνο από άλλα γεγονότα στον παρελθοντικό κώννο φωτός του.

Καθώς θέλουμε να περιγράψουμε με τις κατανομές σχέσεις μεταξύ φυσικών γεγονότων (πιο συγκεκριμένα, να γράψουμε διαδότες που συσχετίζουν 2 σημεία ως κατανομές), θέλουμε να κατηγοριοποιήσουμε κάπως τις κατανομές ανάλογα με τη σχέση τους με τους κώννους φωτός διαφόρων σημείων, άρα και τις αιτιακές σχέσεις που μπορεί να εκφράζουν. Έτσι μπορούμε να θέσουμε ορισμένους περιορισμούς στο ποιες είναι αποδεκτές φυσικά και ποιες όχι. Συγκεκριμένα, ένας διαδότης που σχετίζει μεταξύ τους χωροχρονικά σημεία και παίρνει για ορίσματα τα διαστήματα μεταξύ τους δεν μπορεί να έχει μη αιτιακή υποστήριξη, δηλαδή να υποστηρίζεται από σημεία εκτός του κώννου φωτός του 0. Χωρίζουμε λοιπόν τους διαδότες σε:

- Καθυστερημένους (retarded): $\text{supp}(r) \subseteq \Gamma_n^+(0)$
- Προχωρημένους (advanced): $\text{supp}(a) \subseteq \Gamma_n^-(0)$
- Αιτιακούς (causal): $\text{supp}(d) \subseteq \Gamma_n^-(0) \cup \Gamma_n^+(0)$

Στη συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να χωρίσουμε έναν αιτιακό διαδότη σε καθυστερημένο και προχωρημένο κομμάτι, αποφεύγοντας κακά ορισμένα γινόμενα μεταξύ ανώμαλων κατανομών.

A.4 Διαχωρισμός κατανομών

Αν έχουμε μία ομαλή αιτιακή κατανομή, μπορούμε απλά να διαλέξουμε κάποιο διάνυσμα $v \in \Gamma^+$ και να γράψουμε $r(x) = \Theta(v \cdot x)d(x)$:

$$r(f) = (\Theta[v \cdot x]\delta)(f) = \int dx \Theta(v \cdot x) d(x) f(x)$$

Μπορεί να αποδειχθεί πως το r πράγματι είναι το καθυστερημένο τμήμα της d . Πολλές φορές όμως, αυτό δεν ορίζεται καλά γιατί η αιτιακή κατανομή d περιέχει ανωμαλίες, για παράδειγμα συναρτήσεις δ κλπ. Έστω ω ο βαθμός ανωμαλίας της αιτιακής κατανομής. Για να διορθώσουμε τις ανωμαλίες, ορίζουμε το διαχωρισμό ως:

$$r(f) = (\Theta[v \cdot x]\delta)(Wf)$$

Όπου:

$$(Wf)(x) := f(x) - w(x) \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} \frac{x^\alpha}{\alpha!} (D^\alpha f)(0) = \sum_{|\beta|=\omega+1} x^\beta \psi_\beta(x)$$

Με $w(x)$ μία συνάρτηση η οποία έχει $w(0) = 1$, $D^\alpha w(0) = 0$ ($\forall 1 \leq |\alpha| \leq \omega$). Ουσιαστικά αφαιρούμε τις ανωμαλίες του σημείου 0, με τρόπο που θυμίζει πάρα πολύ την ανακανονικοποίηση ΒΡΗΖ που είδαμε στην Ενότητα 5. Η $r(x)$ συμφωνεί με την $d(x)$ στο σύνολο $\Gamma^+(0) \setminus \{0\}$. Παραμένει όμως μία αυθαιρεσία ακριβώς στο σημείο 0, όπου μπορεί να οριστεί κάποιος άλλος διαχωρισμός \tilde{r} , η διαφορά του οποίου με τον r να έχει σημειακή υποστήριξη, και τη “σωστή” τάξη ανωμαλίας:

$$\tilde{r} - r = \sum_{|\alpha|=0}^{\omega} C_\alpha D^\alpha \delta(x)$$

$$\omega(\tilde{r}) = \omega(r) = \omega(d) = \omega(a) = \omega(\tilde{a})$$

Στην ΚΘΠ, αυτή η αυθαιρεσία αντιστοιχεί στην αυθαιρεσία μεθόδου ανακανονικοποίησης.

B Πρόγραμμα Epstein-Glaser: Αιτιακή θεωρία διαταραχών

Η αιτιακή θεωρία διαταραχών βασίστηκε σε ιδέες των Stueckelberg, Bogoliubov και Shirkov, και υλοποιήθηκε για πρώτη φορά με μαθηματικά αυστηρό τρόπο από τους Epstein και Glaser για βαθμωτές θεωρίες πεδίων στο [EG73], ενώ αργότερα επεκτάθηκε και σε θεωρίες βαθμίδας. Κεντρικός σκοπός είναι η κατασκευή μίας διαταρακτικής έκφρασης για τον πίνακα S , με βάση τις απαιτήσεις τοπικής αιτιότητας. Η προσέγγιση αυτή σέβεται το χαρακτήρα των πεδίων ως κατανομές, και το γεγονός ότι δεν είναι εν γένει καλά ορισμένο το γινόμενο 2 κατανομών. Όπως θα δούμε, οι απαιτήσεις τοπικής αιτιότητας οδηγούν στην ανάγκη “διαχωρισμού” των κατανομών σε τμήματα αντίστοιχο με τα χρονοδιατεταγμένα γινόμενα που είδαμε ήδη, ωστόσο η αφελής μέθοδος των χρονοδιατεταγμένων γινομένων δεν είναι καλά ορισμένη λόγω της υψηλής τάξης singularity των κατανομών. Θα σκιαγραφήσουμε μία μέθοδο αναδρομικής κατασκευής του πίνακα S των Epstein και Glaser, και τέλος θα δούμε πώς προκύπτει η ελευθερία επιλογής ανακανονικοποίησης σε αυτό το πλαίσιο. Πιο διεξοδικές παρουσιάσεις βρίσκονται στα [Sch14; Sch01; AAS10], τα οποία ακολουθούμε και εδώ στην παρουσίασή μας.

Στα πλαίσια της αιτιακής θεωρίας διαταραχών, τα πεδία είναι tempered κατανομές πάνω στο χώρο Minkowski, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Ο πίνακας S εκφράζεται ως (τυπική) δυναμοσειρά τελεστικών κατανομών:

$$S(g) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n(g) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n)$$

Η $g(x)$ είναι συνάρτηση του χώρου Schwartz η οποία “ανοιγοκλείνει” την αλληλεπίδραση, υπό την έννοια ότι χάνεται μακριά από το σημείο αλληλεπίδρασης ώστε τα σωματίδια να συμπεριφέρονται εκεί ως ελεύθερα. Τότε μπορούμε να ανακτήσουμε τη φυσική θεωρία στο όριο $g \rightarrow 1$. Οι τελεστικές κατανομές T_n δρουν στο χώρο Fock ελεύθερων πεδίων, και είναι ουσιαστικά τα χρονοδιατεταγμένα γινόμενα πεδίων που έχουμε συναντήσει σε τέτοιους υπολογισμούς, αλλά αντί να τα κατασκευάσουμε ρητά με τον αφελή τρόπο που το κάναμε στο κύριο σώμα του κειμένου θα επιβάλλουμε πάνω τους τα **αξιώματα Bogoliubov** [BLT75]:

1. Υποθέτουμε ότι τα T_n είναι συμμετρικά ως προς όλες τις μεταβλητές τους. Έτσι μπορούμε να γράφουμε $T_n(x_1, \dots, x_n) = T_n(X)$ με $X = x_1, \dots, x_n$.
2. Υποθέτουμε Poincaré αναλλοιωτότητα για τα T_n .
3. Απαιτούμε αιτιότητα. Ορίζουμε ως \bar{V}^- τον παρελθοντικό κώνο φωτός και γράφουμε για 2 σύνολα $X \geq Y$ αν $x_i - y_j \notin \bar{V}^-$ για κάθε στοιχείο των συνόλων, που εκφράζει ότι το X είναι “αργότερα” από το Y . Η αιτιότητα απαιτεί τότε:

$$T_{n+m}(X \cup Y) = T_m(X)T_n(Y)$$

Αυτό εκφράζει το γεγονός ότι το παρελθόν δεν επηρεάζεται από το μέλλον.

4. Unitarity του πίνακα S : $S(g)^{-1} = S(g)^\dagger$

Στην πραγματικότητα, θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τα πρώτα 3 αξιώματα στην κατασκευή. Η κατασκευή ξεκινάει από κάποιο δεδομένο $T_1(x)$, το οποίο είναι κάποια γνωστή αλληλεπίδραση, και τελικά μας δίνει οποιοδήποτε T_n θέλουμε, το μόνο πράγμα που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τον πίνακα S .

Ορίζουμε τώρα το **αντι-χρονοδιατεταγμένο γινόμενο**, το οποίο εμφανίζεται και στη δυναμοσειρά του $S(g)^{-1}$:

$$\tilde{T}_n(X) = \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1) \dots T_{n_r}(X_r)$$

Όπου P_r οποιαδήποτε διάσπαση του X σε r ξένα μεταξύ τους, μη κενά υποσύνολα τάξης n_r . Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τα T_m για $1 \leq m \leq n-1$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε και τα αντίστοιχα $\tilde{T}_m(X)$. Άρα είναι γνωστές και οι ποσότητες:

$$A'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n)$$

$$R'_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{P_2} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X)$$

Μπορώ τώρα να αποδείξω ότι αν ορίσω $R_n = R'_n + T_n$ (το οποίο T_n φυσικά είναι αυτό που προσπαθούμε να κατασκευάσουμε, άρα δεν είναι γνωστό), τότε το R_n είναι καθυστερημένη κατανομή. Το αντίθετο ισχύει για το $A_n = A'_n + T_n$. Για τις λεπτομέρειες αυτής της απόδειξης παραπέμπουμε στο [Sch01]. Αρκεί τώρα να βρούμε έναν τρόπο να υπολογίσουμε τα R_n, A_n .

Μπορούμε να ορίσουμε τέλος την κατανομή $D_n = R'_n - A'_n = R_n - A_n$. Αυτή έχει αιτιακή υποστήριξη, και μπορούμε να την υπολογίσουμε με βάση τα R'_n, A'_n . Τα R_n και A_n προσδιορίζονται διαχωρίζοντας την D_n σε καθυστερημένο και προπορευόμενο τμήμα. Αυτό γενικά δεν γίνεται με μοναδικό τρόπο, για αυτό και δεν παίρνουμε μοναδικό αποτέλεσμα για τα T_n . Αυτός είναι τελικά και ο λόγος που υπάρχει ελευθερία στην επιλογή ανακανονικοποίησης.

Η μέθοδος αυτή δίνει UV πεπερασμένα αποτελέσματα για τον πίνακα S σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών χωρίς να προκύψουν ποτέ απειρισμοί που πρέπει να “αφαιρεθούν” και χωρίς να χρειαστεί καμία ομαλοποίηση, ενώ είναι μαθηματικά καλά ορισμένη και σαφώς προτιμότερη από αυτή την άποψη από τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε στο κύριο σώμα του κειμένου. Η αιτιακή θεωρία διαταραχών είναι για αυτούς τους λόγους ευρέως χρησιμοποιούμενη στην αξιωματική/αλγεβρική ΚΘΠ, παρά το γεγονός ότι από πρακτική σκοπιά δεν είναι τόσο χρήσιμη όσο οι πιο απλές μέθοδοι που είδαμε ήδη. Ωστόσο, δεν λύνει κάθε πρόβλημα που συναντάμε στην ΚΘΠ. Για παράδειγμα, το IR όριο $g \rightarrow 1$ εξακολουθεί να είναι προβληματικό πολλές φορές, ενώ άλυτο παραμένει και το πρόβλημα της μη σύγκλισης της διαταρακτικής σειράς.

C Συνάρτηση Γ του Euler

Η συνάρτηση Γ ορίζεται συνήθως ως:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Όπου $\text{Re}(z) > 0$. Επεκτείνεται αναλυτικά με μοναδικό τρόπο σε όλους τους μιγαδικούς εκτός από τους μη θετικούς ακεραίους (όπου παρουσιάζει πόλους) χρησιμοποιώντας τη σημαντική ιδιότητα:

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$$

Η οποία ισχύει παντού στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για μη αρνητικούς ακέραιους n και μικρό x ισχύουν [Sre07]:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(-n+x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + O(x) \right]$$

Όπου $\gamma = 0.5772\dots$ η σταθερά Euler-Mascheroni. Συνήθως θα χρησιμοποιούμε τον τελευταίο αυτό τύπο για $n = 0$.

D Χρήσιμοι τύποι για ολοκληρώματα

D.1 Τύπος Feynman για συνδυασμό παρονομαστών

Πολλές φορές χρειάζεται να μετατρέψουμε ένα γινόμενο παρονομαστών σε άθροισμα. Για αυτό το σκοπό χρησιμεύει ο τύπος [Sre07]:

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = \int dF_n (x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^{-n}$$

$$\int dF_n := (n-1)! \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n - 1)$$

Στην περίπτωση που $n = 2$, αυτό ανάγεται στον απλό τύπο:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) (xA+yB)^{-2}$$

$$= \int_0^1 dx [xA+(1-x)B]^{-2}$$

D.2 Τύποι ολοκλήρωσης σε d διαστάσεις

Όπως αναφέραμε, για να ορίσουμε την ολοκλήρωση σε d διαστάσεις βολεύει πρώτα στροφή Wick ώστε να περάσουμε από τα μη ευκλείδια τετρανύσματα σε χώρο Minkowski σε ευκλείδια διανύσματα σε 4-διάστατο ευκλείδιο χώρο. Η αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης επιφέρει πολλαπλασιασμό με έναν παράγοντα i . Αποδεικνύεται τότε ότι ισχύει:

$$I(a, b) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^a}{(q^2 + D)^b} = i \frac{\Gamma(b-a-d/2)\Gamma(a+d/2)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(b)\Gamma(d/2)} D^{-(b-a-d/2)}$$

Μερικές σημαντικές ειδικές περιπτώσεις σε 4-ε διαστάσεις είναι:

$$I(0, b) = i \frac{\Gamma(b-2+\epsilon/2)}{(b-1)!} \frac{D^{2-b}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{D}\right)^{\epsilon/2}$$

$$I(1, b) = \frac{Dd}{2b-2-d} I(0, b) = \frac{(4-\epsilon)D}{2b-6+\epsilon} I(0, b)$$

Χρησιμοποιήσαμε για αυτούς τους τύπους τις ιδιότητες των συναρτήσεων Γ . Άρα για παράδειγμα έχουμε:

$$I(0, 2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma(\epsilon/2) \left(\frac{4\pi}{D}\right)^{\epsilon/2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)\right) \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi}{D}\right) + O(\epsilon^2)\right]$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \log\left(\frac{D}{4\pi}\right) - \gamma + O(\epsilon)\right]$$

$$I(1, 2) = \frac{Dd}{2-d} I(0, 2) = \frac{4-\epsilon}{-2+\epsilon} DI(0, 2) = (-2 - \epsilon/2 + \dots) DI(0, 2)$$

$$I(0, 3) = i \frac{\Gamma(1 + \epsilon/2)}{2D} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{D} \right)^{\epsilon/2} = i \frac{1}{2D} \frac{1}{(4\pi)^2} + O(\epsilon)$$

$$I(1, 3) = \frac{Dd}{4-d} I(0, 3) = \left(\frac{4}{\epsilon} - 1 \right) DI(0, 3)$$

Ε Ομάδες και αναπαράστασεις

Ως **ομάδα** ορίζεται ένα σύνολο G μαζί με μία πράξη (\cdot) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. (Προσεταιριστική ιδιότητα) Για $a, b, c \in G$ ισχύει $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$.
2. (Υπαρξη μονάδας) Υπάρχει ένα (μοναδικό) στοιχείο $e \in G$ ώστε για κάθε $a \in G$ να ισχύει $e \cdot a = a \cdot e = a$.
3. (Κλειστότητα) Για κάθε $a, b \in G$, ισχύει $a \cdot b \in G$.

Μία ομάδα μπορεί να έχει **υποομάδες**, δηλαδή υποσύνολα με την ίδια πράξη τα οποία είναι και τα ίδια ομάδες. Στη συνέχεια θα παραλείψουμε το σύμβολο (\cdot) .

Οι ομάδες χωρίζονται σε **αβελιανές** και **μη αβελιανές**. Για μία αβελιανή ομάδα ισχύει $gf = fg \forall f, g \in G$. Οι μη αβελιανές έχουν στοιχεία για τα οποία αυτό δεν ισχύει.

Οι ομάδες μπορούν να έχουν πεπερασμένα ή και άπειρα στοιχεία γενικά. Εδώ μας ενδιαφέρουν βέβαια περισσότερο οι συνεχείς **ομάδες Lie**. Έστω $GL(n, \mathbb{C})$ η ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών στο χώρο \mathbb{C}^n (αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων). Κάθε υποομάδα αυτής είναι μία ομάδα Lie πινάκων.

Αναπαράσταση μίας ομάδας ονομάζεται η έκφρασή της ως μετασχηματισμοί (πίνακες) σε έναν διανυσματικό χώρο, με τρόπο που να διατηρεί τη δομή της. Πιο συγκεκριμένα, είναι μία απεικόνιση [FH13]:

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

Όπου G ομάδα, και V διανυσματικός χώρος, για την οποία ισχύει:

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$$

Είναι δηλαδή **ομομορφισμός ομάδων**.

Με τις ομάδες Lie μπορούμε να σχετίσουμε ορισμένους **γεννήτορες**. Οι γεννήτορες είναι ουσιαστικά ορισμένοι πίνακες που περιγράφουν ένα στοιχείο μίας ομάδας Lie που διαφέρει απειροστά από την ταυτότητα, και αποτελούν βάση για μία **άλγεβρα Lie**, έναν διανυσματικό χώρο πινάκων εφοδιασμένο με τους **μεταθέτες**:

$$[A, B] = AB - BA$$

Οι άλγεβρες Lie είναι σημαντικές γιατί γνωρίζοντας τα στοιχεία της άλγεβρας μπορούμε να ανακτήσουμε την ομάδα. Οι μη αβελιανές ομάδες Lie έχουν άλγεβρες Lie στις οποίες δεν μηδενίζονται εν γένει οι μεταθέτες. Συγκεκριμένα, για τους γεννήτορες ισχύει:

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

Τα f^{abc} ονομάζονται **σταθερές δομής** της άλγεβρας. Βέβαια, διαφορετικές αναπαράστασεις της ομάδας δίνουν διαφορετικές αναπαράστασεις και της άλγεβρας. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε τους γεννήτορες T_R^a αντί για T^a για να εκφράσουμε την εξάρτηση από την αναπαράσταση, ενώ διατηρούμε το σύμβολο T^a για τους γεννήτορες στην αρχική άλγεβρα, δηλαδή στη **θεμελιώδη (fundamental) αναπαράσταση**. Οι σταθερές δομής παρέχουν τη σημαντική **adjoint αναπαράσταση**:

$$(T_A^a)^{bc} = -if^{abc}$$

Υπάρχουν 2 σημαντικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν τις αναπαράστασεις: ο **δείκτης** $T(R)$ και ο **τελεστής Casimir** $C(R)$.

$$Tr(T_R^a T_R^b) = T(R)\delta^{ab}$$

$$C_R = T_R^a T_R^a$$

Η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(N)$ έχει δείκτη $T_R(N) = 1/2$, και η αντίστοιχη adjoint έχει $T_A(N) = N$ [Sre07].

F Πίνακες γ

Οι πίνακες γ είναι d διαφορετικοί πίνακες (σε d -διάστατο χώρο Minkowski, όπου το d είναι προφανώς ακέραιο αλλά πολλές φορές συνεχίζουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα σε συνεχείς διαστάσεις) που δρουν πάνω στο χώρο των σπινόρων. Υπάρχουν διάφορες αναπαράστασεις τους και για αυτό το λόγο δεν θα ασχοληθούμε απευθείας με τη συγκεκριμένη τους μορφή σε κάθε αναπαράσταση, αλλά θα τους ορίσουμε μέσα από τις μεταθετικές σχέσεις [Sre07]:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = g_{\mu\nu} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = -2g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma^\mu \iff$$

$$\iff \gamma_\mu \gamma^\mu = -g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -d$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma_\mu (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = (-2 + d)\gamma^\nu$$

Και ούτω καθεξής. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και ορισμένα γινόμενα με ποσότητες μορφής $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$:

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = (d - 2)\not{a}$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b - (d - 4)\not{a} \not{b}$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = 2\not{c} \not{b} \not{a} + (d - 4)\not{a} \not{b} \not{c}$$

Σημαντικές επίσης είναι και ταυτότητες που εμπλέκουν το ίχνος των πινάκων γ . Τα βασικά δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- $tr[1] = 4$
- Κυκλικές μεταθέσεις των πινάκων σε ένα γινόμενο δεν μεταβάλλουν το ίχνος
- $(\gamma^5)^2 = 1$ όπου $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\bullet \{ \gamma^\mu, \gamma^5 \} = 0$$

Θεώρημα F.1. Το ίχνος ενός γινομένου n πινάκων γ είναι 0 αν n περιττός.

Απόδειξη. Θεωρώ το ίχνος του $\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}$, και εισάγω το $(\gamma^5)^2 = 1$ στην αρχή του:

$$\text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] = \text{tr} [(\gamma^5)^2 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}]$$

Μεταθέτουμε το γ^5 με κάθε ένα από τα υπόλοιπα με τη σειρά μέχρι να φτάσει στο τέλος. Κάθε φορά που μετατίθεται με ένα από αυτά, πολλαπλασιάζει το γινόμενο με έναν παράγοντα (-1) λόγω των μεταθετικών σχέσεων. Έτσι έχουμε:

$$\text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] = (-1)^n \text{tr} [\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5] = (-1)^n \text{tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}]$$

Η τελευταία ισότητα προέκυψε από την κυκλική ιδιότητα του ίχνους που αναφέραμε. Βλέπουμε τώρα πως αν το n είναι περιττό, έχουμε $\text{tr}[\dots] = -\text{tr}[\dots]$ άρα είναι ίσο με 0. \square

Τώρα μένει να εξετάσουμε τα ίχνη ζυγού πλήθους πινάκων γ , τα οποία δεν μηδενίζονται. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το $\text{tr}[\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_n]$ για n ζυγό, καθώς ποσότητες τέτοιας μορφής προκύπτουν συχνά σε υπολογισμούς.

Θεώρημα F.2. Ισχύει για κάθε n ο τύπος:

$$\text{tr}[\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_{2n}] = 4(-1)^n \text{pf}(A)$$

Όπου A ο αντισυμμετρικός πίνακας με στοιχεία τα γινόμενα $a_i \cdot a_j$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \cdot a_2 & a_1 \cdot a_3 & \dots \\ -a_1 \cdot a_2 & 0 & a_2 \cdot a_3 & \dots \\ -a_1 \cdot a_3 & -a_2 \cdot a_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Και $\text{pf}(A)$ η Pfaffian του πίνακα αυτού.

Απόδειξη. Η Pfaffian είναι μία ποσότητα που ορίζεται για αντισυμμετρικούς πίνακες από τον τύπο:

$$\text{pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}$$

Όπου $\sigma \in S_{2n}$ μεταθέσεις $2n$ στοιχείων. Ένας γνωστός εναλλακτικός και ισοδύναμος ορισμός της Pfaffian είναι μέσω του αναδρομικού τύπου ([Hab15]):

$$\text{pf}(A) = \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j a_{1j} \text{pf}(A_{1j}).$$

Εδώ, $A_{i\bar{j}}$ είναι ο πίνακας A , αλλά χωρίς τη γραμμή i και τη στήλη j . Θεωρούμε κατά σύμβαση πως η Pfaffian ενός 0×0 πίνακα είναι 1.

Επιστρέφοντας στα ίχνη, ξεκινώντας από το τελευταίο στοιχείο του γινομένου μέσα στο ίχνος και μετατίθοντας το με τη σειρά ως την αρχή (ώστε να διαφέρει από το αρχικό γινόμενο κατά μία κυκλική μετάθεση) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα που αναφέρθηκε με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε:

$$tr[\phi_1 \cdots \phi_{2n+2}] = -4[(a_{2n+1} \cdot a_{2n+2})tr[\phi_1 \cdots \phi_{2n}] - (a_{2n} \cdot a_{2n+2})tr[\phi_1 \cdots \phi_{2n-1}\phi_{2n+1}] + \cdots]$$

Παρατηρούμε τώρα πως το ίχνος διαιρεμένο με $4(-1)^n$ έχει ακριβώς τον ίδιο αναδρομικό τύπο με την Pfaffian του πίνακα που ορίσαμε, ενώ για $n = 0$ δίνει επίσης 1. Άρα αυτές οι ποσότητες είναι ίσες. \square

Επομένως τώρα το πρόβλημα έχει αναχθεί στον υπολογισμό μίας Pfaffian. Αν εκμεταλλευτούμε την αντισυμμετρία του πίνακα, μπορούμε να αποφύγουμε την ανάγκη άθροισης πάνω σε κάθε δυνατή μετάθεση. Αν Π το σύνολο όλων των διαχωρισμών του $\{1, \dots, 2n\}$ σε μη διατεταγμένα ζεύγη (το οποίο γίνεται με $2^n n!$ διαφορετικούς τρόπους), μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα οποιοδήποτε μέλος $\alpha \in \Pi$ ως:

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}$$

Όπου $i_k < j_k$ και $i_1 < i_2 < \dots < i_{2n}$. Σχετίζουμε ακόμη με κάθε α μία μετάθεση:

$$\pi_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \cdots & i_n & j_n \end{bmatrix}$$

Και τώρα η Pfaffian υπολογίζεται εύκολα από τον τύπο:

$$pf(A) = \sum_{\alpha \in \Pi} \text{sgn}(\pi_\alpha) a_{i_1, j_1} a_{i_2, j_2} \cdots a_{i_n, j_n}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε λοιπόν τον τύπο γράφοντας κάθε μετάθεση τέτοιας μορφής και βάζοντας το κατάλληλο πρόσημο μπροστά. Έτσι βρίσκουμε τους ακόλουθους τύπους για μικρές τιμές του n :

$$tr[\not{a}\not{b}] = -4a \cdot b$$

$$tr[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$$

Το βολικό με αυτό το φορμαλισμό είναι ότι με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και πιο περίπλοκες ποσότητες, όπως ίχνη γινομένων που περιέχουν και πίνακες γ και ποσότητες μορφής \not{a} . Το μόνο που χρειάζεται είναι μία αρκετά προφανής τροποποίηση του πίνακα A , όπου αν κάποιο στοιχείο a_i στο ίχνος αντικατασταθεί με το $\gamma^{\mu i}$, στον πίνακα A αντικαθιστούμε τα στοιχεία a_i^{ν} με $\eta^{\mu i \nu} a_{j\nu}$.

Αναφορές

[Dys52] F. J. Dyson. “Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics”. In: *Phys. Rev.* 85 (4 Feb. 1952), pp. 631–632. DOI: [10.1103/PhysRev.85.631](https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.631). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.85.631>.

- [Kal52] Gunnar Kallen. “On the definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics”. In: *Helv. Phys. Acta* 25.4 (1952). Ed. by Cecilia Jarlskog, p. 417. DOI: [10.1007/978-3-319-00627-7_90](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00627-7_90).
- [SP53] Ernst Carl Gerlach Stueckelberg von Breidenbach and André Petermann. “La normalisation des constantes dans la theorie des quanta”. In: *Helvetica Physica Acta* 26.5 (1953), pp. 499–520.
- [GL54] Murray Gell-Mann and Francis E Low. “Quantum electrodynamics at small distances”. In: *Physical Review* 95.5 (1954), p. 1300.
- [Leh54] Harry Lehmann. “Über eigenschaften von ausbreitungsfunktionen und renormierungskonstanten quantisierter felder”. In: *Il Nuovo Cimento (1943-1954)* 11 (1954), pp. 342–357.
- [Sch54] Laurent Schwartz. “Sur limpossibilite de la multiplication des distributions”. In: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de L Academie des Sciences* 239.15 (1954), pp. 847–848.
- [Haa55] Rudolf Haag. *On quantum field theories*. Tech. rep. 12. This document exists only as a journal publication: it is not in the CERN Official Collection bound volume. 1955. URL: <http://cds.cern.ch/record/212242>.
- [BW69] Carl M Bender and Tai Tsun Wu. “Anharmonic oscillator”. In: *Physical Review* 184.5 (1969), p. 1231.
- [Dol71] John D Dollard. “Quantum-mechanical scattering theory for short-range and Coulomb interactions”. In: *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* (1971), pp. 5–88.
- [BW73] Carl M Bender and Tai Tsun Wu. “Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order”. In: *Physical Review D* 7.6 (1973), p. 1620.
- [EG73] Henri Epstein and Vladimir Glaser. “The role of locality in perturbation theory”. In: *Annales de l’institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*. Vol. 19. 3. 1973, pp. 211–295.
- [BLT75] Nikolaj Nikolaevič Bogolûbov, Anatolii Alekseevich Logunov, and Ivan T Todorov. “Introduction to axiomatic quantum field theory”. In: (1975).
- [KO79] Taichiro Kugo and Izumi Ojima. “Local covariant operator formalism of non-Abelian gauge theories and quark confinement problem”. In: *Progress of Theoretical Physics Supplement* 66 (1979), pp. 1–130.
- [Ste82] P Stevenson. “Sense and nonsense in the renormalization-scheme-dependence problem”. In: *Nuclear Physics B* 203.3 (1982), pp. 472–492.
- [Col84] John Clements Collins. *Renormalization: an introduction to renormalization, the renormalization group and the operator-product expansion*. Cambridge university press, 1984.
- [Wei95] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields, Volume 1: Foundations*. Vol. 1. Cambridge university press, 1995.
- [Wei96] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 489 p. 1996. URL: <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?key=3763846>.

- [Kug97] Taichiro Kugo. “Eichtheorie”. In: *Eichtheorie*. Springer, 1997, pp. 133–232.
- [BO99] Carl M Bender and Steven A Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 1999.
- [Boy99] John P Boyd. “The devil’s invention: asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series”. In: *Acta Applicandae Mathematica* 56 (1999), pp. 1–98.
- [PP00] Stefan Pokorski and Stefan Pokorski. *Gauge field theories*. Vol. 2. Cambridge University Press Cambridge, 2000.
- [SW00] Raymond Frederick Streater and Arthur S Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*. Vol. 30. Princeton University Press, 2000.
- [Sch01] Gunter Scharf. *Quantum gauge theories: A true ghost story*. 2001.
- [JW06] Arthur Jaffe and Edward Witten. “Quantum yang-mills theory”. In: *The millennium prize problems* 1 (2006), p. 129.
- [Sre07] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [BDF09] Romeo Brunetti, Michael Dütsch, and Klaus Fredenhagen. “Perturbative algebraic quantum field theory and the renormalization groups”. In: *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* 13.5 (2009), pp. 1541–1599.
- [AAS10] Andreas Aste, Cyrill von Arx, and Gunter Scharf. “Regularization in quantum field theory from the causal point of view”. In: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 64.1 (2010), pp. 61–119.
- [Düt12] Michael Dütsch. “Connection between the renormalization groups of Stückelberg–Petermann and Wilson”. In: *Confluentes Mathematici* 4.01 (2012), p. 1240001.
- [IZ12] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber. *Quantum field theory*. Courier Corporation, 2012.
- [LZ12] Jean-Claude Le Guillou and Jean Zinn-Justin. *Large-order behaviour of perturbation theory*. Elsevier, 2012.
- [FH13] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory: a first course*. Vol. 129. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Sch14] Gunter Scharf. *Finite quantum electrodynamics: the causal approach*. Courier Corporation, 2014.
- [Hab15] Howard E Haber. “Notes on antisymmetric matrices and the pfaffian”. In: *matrix* 1 (2015), p. 3.
- [KF16] Peter P Kulish and Ludvig Dmitrievich Faddeev. “Asymptotic conditions and infrared divergences in quantum electrodynamics”. In: *Fifty Years of Mathematical Physics: Selected Works of Ludwig Faddeev*. World Scientific, 2016, pp. 144–156.
- [PS16] G Popineau and R Stora. “A pedagogical remark on the main theorem of perturbative renormalization theory”. In: *Nuclear Physics B* 912 (2016), pp. 70–78.
- [BT19] Ilaria Brivio and Michael Trott. “The standard model as an effective field theory”. In: *Physics Reports* 793 (2019), pp. 1–98.

- [Col19] John Collins. “A new approach to the LSZ reduction formula”. In: *arXiv preprint arXiv:1904.10923* (2019).
- [Düt+19] Michael Dütsch et al. *From classical field theory to perturbative quantum field theory*. Springer, 2019.
- [HS20] Holmfridur Hannesdottir and Matthew D Schwartz. “S-Matrix for massless particles”. In: *Physical Review D* 101.10 (2020), p. 105001.
- [Fra21] James D Fraser. “The twin origins of renormalization group concepts”. In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 89 (2021), pp. 114–128.
- [Wei21] Steven Weinberg. “On the development of effective field theory”. In: *The European Physical Journal H* 46.1 (Mar. 2021). DOI: [10 . 1140 / epjh / s13129 - 021 - 00004 - x](https://doi.org/10.1140/epjh/s13129-021-00004-x). URL: <https://doi.org/10.1140/epjh/s13129-021-00004-x>.
- [Zin21] Jean Zinn-Justin. *Quantum field theory and critical phenomena*. Vol. 171. Oxford university press, 2021.
- [Tal22] Michel Talagrand. *What Is a Quantum Field Theory?* Cambridge University Press, 2022.