ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

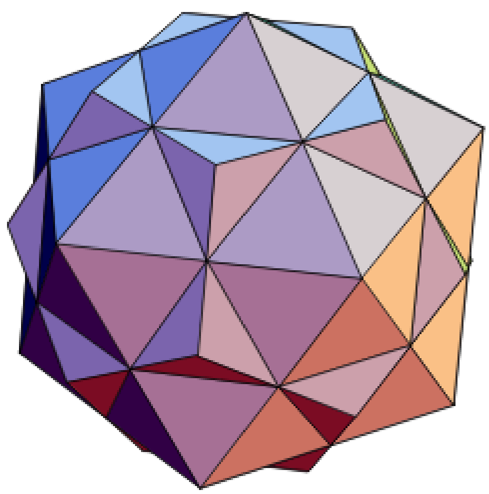
Ανδρέας Κατσαούνης

Διπλωματική εργασία

Πολύεδρα και Συμμετρότητα

Επιβλέπουσες:

Σοφία Λαμπροπούλου, Χριστίνα Βασιλακοπούλου



Αθήνα, 2023

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή έχει ως κεντρικό αντικείμενο μελέτης τα πολύεδρα, τα οποία προσελκύουν το ενδιαφέρον σπουδαίων μαθηματικών και φιλοσόφων ήδη από την Αρχαιότητα, ενώ αποτελούν αντικείμενο έρευνας μέχρι και σήμερα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στοχαστών και μαθηματικών που καταπιάστηκαν με αυτά είναι ο Πλάτων, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ο Kepler, ο Euler, ο Coxeter και άλλοι πολλοί.

Υπάρχουν τρεις διακριτές θεματικές ενότητες, κάθε μία από τις οποίες προσεγγίζει τα πολύεδρα από διαφορετικό κλάδο των Μαθηματικών.

Στην πρώτη ενότητα, γίνεται η προσπάθεια να παρουσιαστούν τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πολυέδρων. Έτσι, περιγράφονται πρώτα τα πολύγωνα, που αποτελούν τις έδρες των πολυέδρων. Μετά από μια σκιαγράφηση των βασικών χαρακτηριστικών των πολυέδρων, παρουσιάζονται διεξοδικά τα κυρτά πολύεδρα με κανονικές έδρες, δηλαδή αυτά των οποίων κάθε έδρα είναι ένα πολύγωνο με ίσες πλευρές και γωνίες. Αυτά είναι τα 5 Πλατωνικά στερεά, τα 13 Αρχιμήδεια στερεά, τα 92 στερεά του Johnson και οι οικογένειες των πρισμάτων και αντιπρισμάτων. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται η μοναδικότητα των Πλατωνικών και Αρχιμήδειων στερεών, καθώς κι ο τύπος του Euler. Η απόδειξη του τελευταίου γίνεται με τη βοήθεια γραφημάτων, τα οποία εν γένει διευκολύνουν τη μελέτη των πολυέδρων, απλουστεύοντας τη γεωμετρία τους. Στο τέλος αυτής της ενότητας, γίνεται αναφορά στα αστεροειδή πολύεδρα, που είναι μη κυρτά.

Στη δεύτερη ενότητα, εξετάζονται τα πολύεδρα από αλγεβρικής σκοπιάς. Μελετώνται όλοι οι πιθανοί τύποι συμμετρίας που μπορεί να έχει ένα πολύεδρο. Λέγοντας συμμετρία εννοούμε κάθε ισομετρία του χώρου μετά την εκτέλεση της οποίας το στερεό φαίνεται να καταλαμβάνει την ίδια ακριβώς θέση στο χώρο συνολοθεωρητικά, δηλαδή χωρίς απαραίτητα το κάθε σημείο του να βρίσκονται στην ίδια θέση με πριν. Τέτοιες ισομετρίες μπορεί να είναι είτε στροφές γύρω από κάποιον άξονα, είτε ανακλάσεις ως προς κάποιο επίπεδο. Αποδεικνύουμε, μάλιστα, ότι ένα τυχαίο πολύεδρο που έχει στροφική συμμετρία, έχει ως τύπο στροφικής συμμετρίας ίδιο με αυτόν κάποιας πυραμίδας, κάποιου πρίσματος, του τετραέδρου, του οκταέδρου, ή του εικοσαέδρου. Φυσικά, υπάρχουν και στερεά που δεν έχουν συμμετρίες, εκτός από την ταυτοτική, δηλαδή την ισομετρία που αφήνει το πολύεδρο ακίνητο.

Στην τρίτη και τελευταία ενότητα, μελετάται η τοπολογική φύση των πολυέδρων. Η βασική ιδέα, εδώ, είναι να πάρουμε ένα πολύεδρο, να το «σπάσουμε» σε μικρότερα ίσα μεταξύ τους πολύεδρα και στη συνέχεια να τα κολλήσουμε κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να πάρουμε ένα νέο πολύεδρο, διαφορετικό από το πρώτο. Δύο πολύεδρα για τα οποία «δουλεύει» η παραπάνω διαδικασία καλούνται σύμμετρα και προφανώς έχουν τον ίδιο όγκο. Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι αν δύο πολύεδρα με τον ίδιο όγκο, είναι απαραίτητα και σύμμετρα. Για να απαντήσουμε, ανατρέχουμε στο 3^{ο} πρόβλημα του Hilbert, το οποίο θέτει το ίδιο ερώτημα, με τη διαφορά ότι σ’ αυτό δεν απαιτείται να «σπάσουμε» το αρχικό μας πολύεδρο σε ίσα μεταξύ τους πολύεδρα, αλλά σε τυχαία πολύεδρα (όχι απαραίτητα ίσα μεταξύ τους). Πρώτα, λύνουμε το «ανάλογο» διδιάστατο πρόβλημα, δηλαδή δουλεύουμε πάνω σε πολύγωνα με ίδιο εμβαδόν. Στη συνέχεια, δίνεται η απάντηση του Dehn, μαθητή του Hilbert, στο βασικό πρόβλημα. Ανάλογα, απαντάται και το αρχικό μας ερώτημα, δηλαδή αν δύο πολύεδρα με τον ίδιο όγκο είναι απαραίτητα σύμμετρα.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2023

ΜΕΡΟΣ 1^{o}

1.1 Πολύγωνα

Ορισμός: p-γωνο καλείται μία κλειστή καμπύλη η οποία αποτελείται από p ευθύγραμμα τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_pA_1$ που ενώνονται ανά δύο στα p σημεία $A_1, A_2, \dots, A_p$. Τα ευθύγραμμα τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_pA_1$ καλούνται πλευρές, ενώ τα σημεία $A_1, A_2, \dots, A_p$ κορυφές του p-γώνου. Αν οι πλευρές του p-γώνου είναι ομοεπίπεδες, τότε καλείται επίπεδο, αλλιώς λοξό.

Θα θεωρήσουμε ότι οι πλευρές του p-γώνου δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από τις κορυφές (δε διασταυρώνονται), δηλαδή θα ασχοληθούμε με απλές κλειστές καμπύλες. Σ' αυτήν την περίπτωση, από το Θεώρημα του Jordan, ένα επίπεδο p-γωνο χωρίζει το επίπεδό του σε δύο περιοχές: το εσωτερικό του, που είναι ένα φραγμένο χωρίο, και το εξωτερικό του.

Πολλές φορές, θα θεωρούμε ότι το p-γωνο απαρτίζεται από το εσωτερικό του, τις πλευρές και τις κορυφές του. Τότε, μπορούμε να δώσουμε ένα νέο ορισμό του p-γώνου, ως μία απλά συνεκτική περιοχή (δηλαδή χωρίς οπές) που φράσσεται από p διακριτά ευθύγραμμα τμήματα.

Ορισμός: Ένα p-γωνο καλείται κυρτό, αν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει οποιαδήποτε δύο σημεία στο εσωτερικό του βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του p-γώνου. Ένα κυρτό p-γωνο περιγράφεται (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες) από ένα σύνολο p γραμμικών ανισώσεων:

$$a_k x + b_k y \leq c_k, \qquad k = 1,2, \dots, p,$$

οι οποίες καθορίζουν το χωρίο ολοκλήρωσης του:

$$\iint dx\, dy,$$

που υπολογίζει το εμβαδόν του εσωτερικού του p-γώνου.

Ορισμός: Ένα p-γωνο λέγεται:

- ισόπλευρο, αν όλες οι πλευρές του είναι ίσες,
- ισογώνιο, αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι για $p > 3$, ένα p-γωνο μπορεί να είναι ισόπλευρο, χωρίς να είναι ισογώνιο! Για παράδειγμα, ο ρόμβος είναι ισόπλευρος, αλλά όχι ισογώνιος.

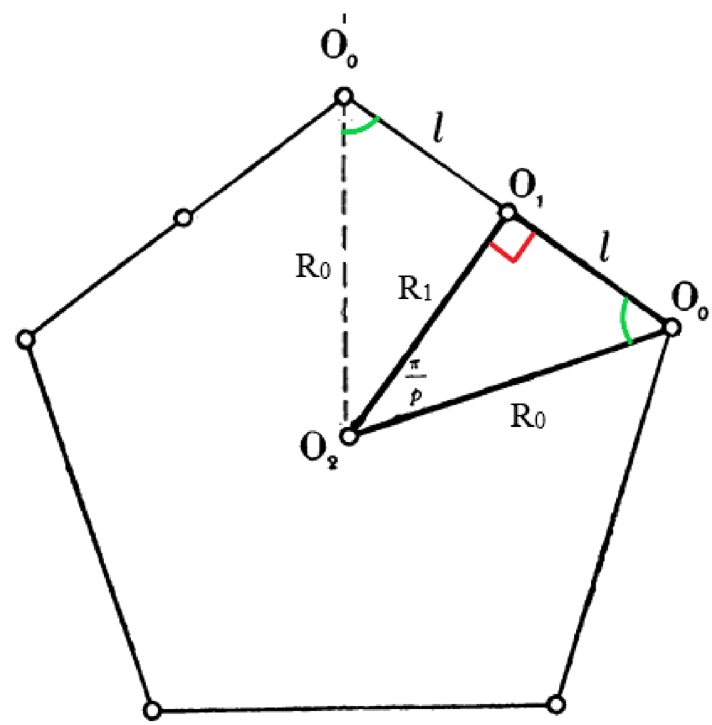
Ορισμός: Ένα επίπεδο p-γωνο που είναι συγχρόνως ισόπλευρο και ισογώνιο καλείται <u>κανονικό</u> και συμβολίζεται: $\{p\}$ (σύμβολο του Schläfli).

Για παράδειγμα, με $\{3\}$ συμβολίζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο, με $\{4\}$ το τετράγωνο κοκ.

Ορισμός: <u>Κέντρο</u> ενός κανονικού πολυγώνου είναι ένα σημείο το οποίο απέχει την ίδια απόσταση R_0 από όλες τις κορυφές και την ίδια απόσταση R_1 από τις πλευρές του πολυγώνου. Το κέντρο του πολυγώνου αποτελεί, τότε, και κέντρο δύο κύκλων· ενός περιγεγραμμένου στο πολύγωνο (οι πλευρές του πολυγώνου εφάπτονται στον κύκλο) και ενός εγγεγραμμένου (οι κορυφές του πολυγώνου είναι σημεία του).

Έστω O_0 και O_0' δύο γειτονικές κορυφές ενός κανονικού p-γώνου πλευράς $2l$, O_1το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος O_0O_0' και O_2 το κέντρο του p-γώνου. Τότε, με βάση τους ορισμούς, προκύπτει:

$$O_0\hat{O}_1O_2 = \frac{\pi}{2}, O_0O_1 = l, O_0O_2 = R_0 \; και \; O_1O_2 = R_1.$$

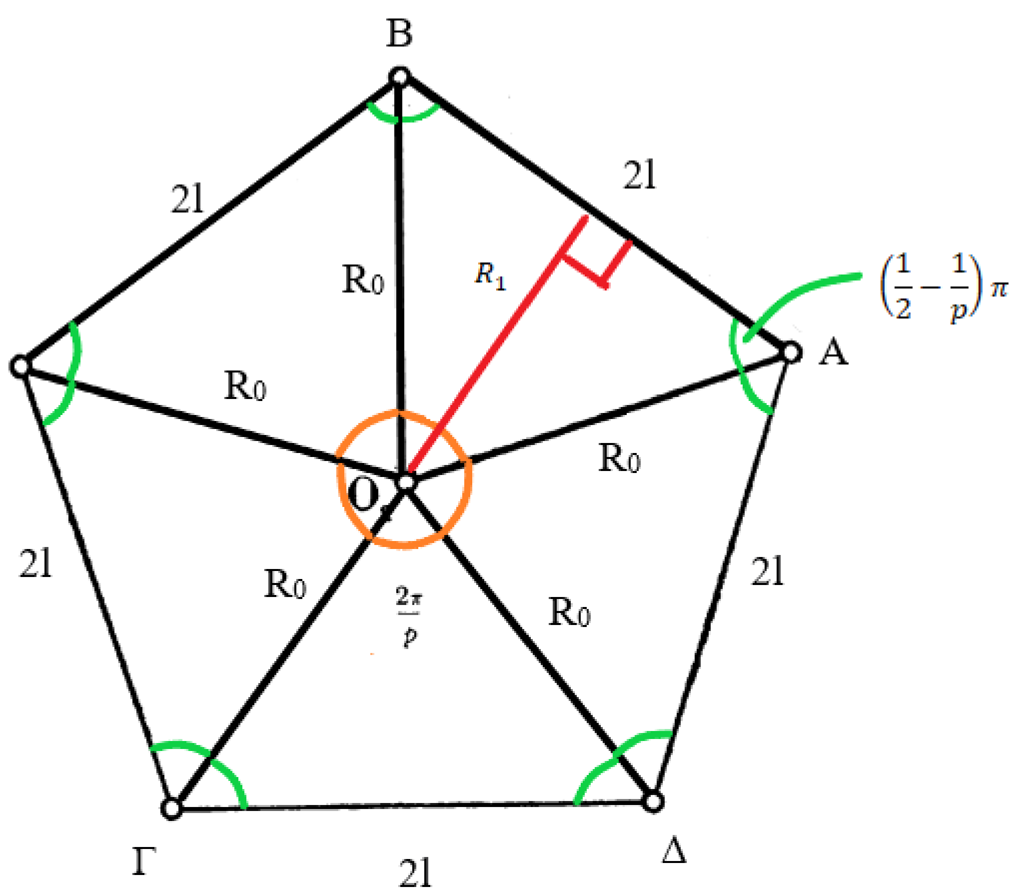


Οι πλευρές του πολυγώνου είναι όλες ίσες (επειδή είναι κανονικό) και το κέντρο O_2 απέχει την ίδια απόσταση R_0 από όλες τις κορυφές. Επομένως, από κριτήριο ισότητας τριγώνων

(ΠΠΠ), για κάθε δύο ζεύγη γειτονικών κορυφών του πολυγώνου Α,Β και Γ,Δ, τα τρίγωνα $\text{A}O_2\text{B}$ και $\Gamma O_2 \Delta$ είναι ίσα. Άρα και οι γωνίες:

$$\text{A}\hat{O}_2\text{B} = \Gamma\hat{O}_2\Delta.$$

Τώρα, τα τρίγωνα που σχηματίζονται συνολικά με τον παραπάνω τρόπο στο p-γωνο είναι όσες και οι πλευρές του, δηλαδή p.



Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω:

$$O_0\hat{O}_2O_0' = \frac{2\pi}{p}.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $O_0O_2O_0{}'$ είναι ισοσκελές και το O_1O_2 είναι το ύψος του. Άρα,

$$O_1\hat{O}_2O_0 = \frac{\pi}{p}.$$

Τότε,

$$sin\frac{\pi}{p} = \frac{l}{R_0} \Rightarrow R_0 = l\,csc\frac{\pi}{p}$$

και

$$R_1 = l\,cot\frac{\pi}{p}.$$

Δουλεύοντας στο ορθογώνιο τρίγωνο $O_0O_1O_2$ παίρνουμε:

$$O_1\hat{O}_0O_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\pi$$

κι επειδή όλα τα ισοσκελή τρίγωνα είναι ίσα, προκύπτει ότι **η εσωτερική γωνία ενός κανονικού $\boldsymbol{p}$-γώνου** είναι η διπλάσια της $O_1\hat{O}_0O_2$, δηλαδή:

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi, \text{ή } \left(1 - \frac{2}{p}\right)180°.$$

Ο παραπάνω τύπος θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος παρακάτω για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα των Αρχιμήδειων στερεών.

Το **εμβαδόν** του πολυγώνου είναι p φορές το εμβαδόν του τριγώνου $O_0O_2O_0{}'$, δηλαδή

$$E = p\,\left(\frac{1}{2}(2l)R_1\right) = plR_1 = pl^2cot\frac{\pi}{p},$$

ενώ η **περίμετρός** του:

$$S = 2pl.$$

1.2 Πολύεδρα

Ορισμός: Πολύεδρο είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από επίπεδα πολύγωνα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε πλευρά κάθε πολυγώνου να ανήκει ακόμα σε ένα και μόνο ένα πολύγωνο. Τα πολύγωνα καλούνται έδρες και οι πλευρές τους ακμές του πολύεδρου.

Κατ' αντιστοιχία με όσα αναπτύξαμε για τα πολύγωνα, θα θεωρήσουμε ότι οι έδρες του πολυέδρου δε διασταυρώνονται. Τότε, το πολύεδρο αποτελεί μία απλή κλειστή επιφάνεια και χωρίζει το χώρο σε δύο περιοχές: το εσωτερικό του, που είναι ένα φραγμένο χωρίο, και το εξωτερικό του.

Πολλές φορές θα θεωρούμε ως πολύεδρο το εσωτερικό του μαζί με τις έδρες, τις ακμές και τις κορυφές του.

Ορισμός: Ένα πολύεδρο καλείται κυρτό, αν για δύο τυχαία σημεία του το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο πολύεδρο. Ένα κυρτό πολύεδρο περιγράφεται (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες) από ένα σύνολο p γραμμικών ανισώσεων:

$$a_k x + b_k y + c_k z \leq d_k, \qquad k = 1,2,\dots,p,$$

οι οποίες καθορίζουν το χωρίο ολοκλήρωσης του:

$$\iiint dx\, dy\, dz,$$

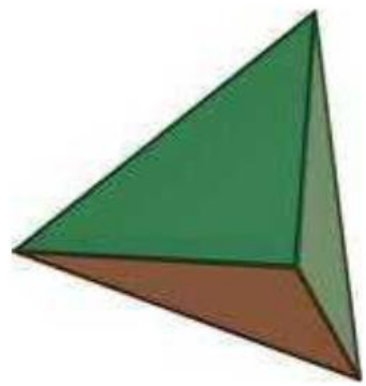
που υπολογίζει τον όγκο του εσωτερικού του πολυέδρου.

Ορισμός: Ένα κυρτό πολύεδρο λέγεται κανονικό, αν όλες οι έδρες του είναι ίσα κανονικά πολύγωνα τα οποία ενώνονται με τον ίδιο τρόπο γύρω από κάθε κορυφή, δηλαδή όλες οι στερεές γωνίες του είναι ίσες. Ένα κανονικό πολύεδρο συμβολίζεται με $\{p, q\}$ (σύμβολο του Schläfli), όπου p είναι ο αριθμός των πλευρών της κάθε έδρας και q ο αριθμός των εδρών που ενώνονται σε κάθε κορυφή.

1.3 Πλατωνικά στερεά

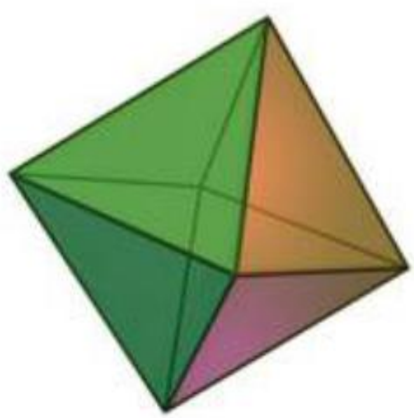
Πλατωνικό στερεό λέγεται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα, όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες, όλες οι ακμές του είναι ίσες και όλες οι (επίπεδες) γωνίες των εδρών του είναι ίσες. Υπάρχουν 5 τέτοια στερεά: το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο, ο κύβος και το δωδεκάεδρο.

1. **Κανονικό τετράεδρο {3,3}:** Τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα τοποθετούνται με τρόπο ώστε κάθε τρεις από τις επίπεδες γωνίες τους να δημιουργούν μια στερεά γωνία.



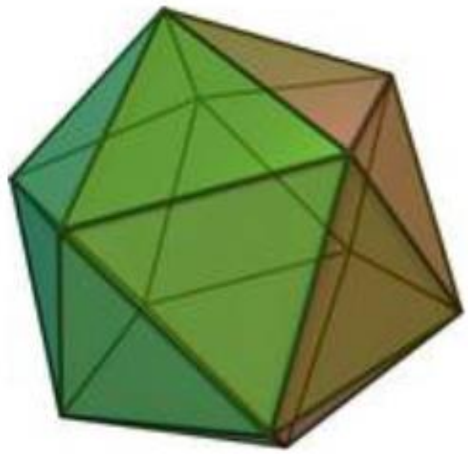
Το κανονικό τετράεδρο (4 κορυφές, 4 έδρες, 6 ακμές).

2. **Κανονικό οκτάεδρο {3,4}:** Σχηματίζεται από οκτώ έδρες (ισόπλευρα τρίγωνα) τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο, ώστε η κάθε μία από τις έξι στερεές γωνίες του να αποτελείται από τέσσερις επίπεδες γωνίες.



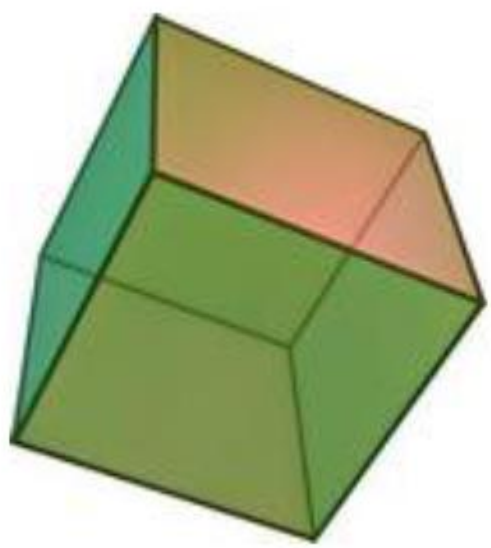
Το κανονικό οκτάεδρο (6 κορυφές, 8 έδρες, 12 ακμές).

3. **Κανονικό εικοσάεδρο {3,5}:** Σχηματίζεται από είκοσι έδρες (ισόπλευρα τρίγωνα) οι οποίες σχηματίζουν δώδεκα στερεές γωνίες, που έχουν σαν σύνορό τους πέντε επίπεδες γωνίες.



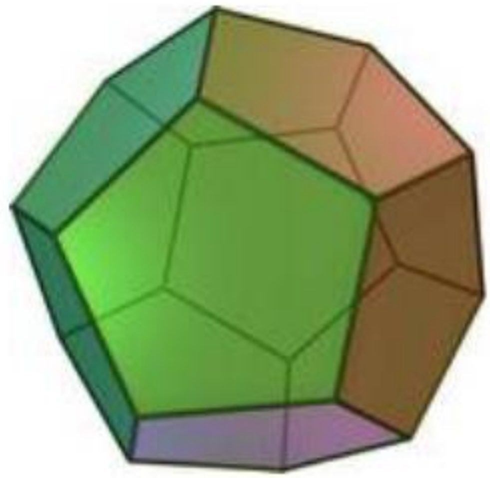
Το κανονικό εικοσάεδρο (12 κορυφές, 20 έδρες, 30 ακμές).

4. **Κύβος {4,3}:** Έξι τετράγωνα τοποθετούνται μαζί με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μία από τις οκτώ στερεές γωνίες του να αποτελείται από τρεις επίπεδες γωνίες.



Ο κύβος (8 κορυφές, 6 έδρες, 12 ακμές).

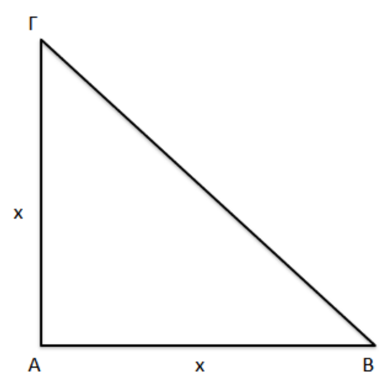
5. **Κανονικό δωδεκάεδρο {5,3}:** Αποτελείται από δώδεκα κανονικά πεντάγωνα ίσα μεταξύ τους.



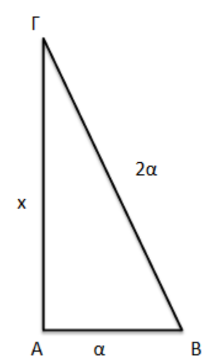
Το κανονικό δωδεκάεδρο (20 κορυφές, 12 έδρες, 30 ακμές).

Να σημειωθεί ότι ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι κάθε Πλατωνικό στερεό έχει σαν σύνορό του επίπεδες επιφάνειες που αποτελούνται από τρίγωνα. Τα θεμελιώδη τρίγωνα που παράγουν τα επίπεδα σχήματα είναι δύο ειδών:

- το ορθογώνιο και ισοσκελές
- το ορθογώνιο σκαληνό τρίγωνο με την ιδιότητα: η μικρότερη από τις κάθετες πλευρές του να ισούται με το μισό της υποτείνουσας



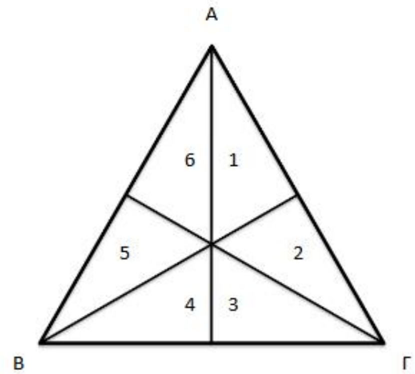
ορθογώνιο ισοσκελές



ορθογώνιο σκαληνό με τη μικρότερη από τις κάθετες πλευρές να ισούται με το μισό της υποτείνουσας

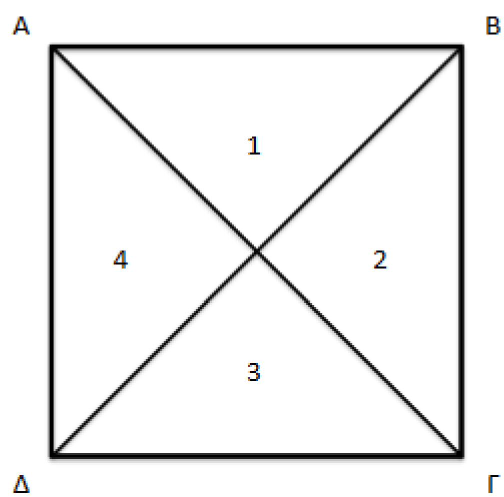
Τα θεμελειώδη πλατωνικά τρίγωνα.

Έξι τρίγωνα του δεύτερου είδους, τοποθετημένα όπως το παρακάτω σχήμα, δημιουργούν το ισόπλευρο τρίγωνο:



ισόπλευρο τρίγωνο

ενώ τέσσερα σχήματα του πρώτου είδους δημιουργούν, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο:



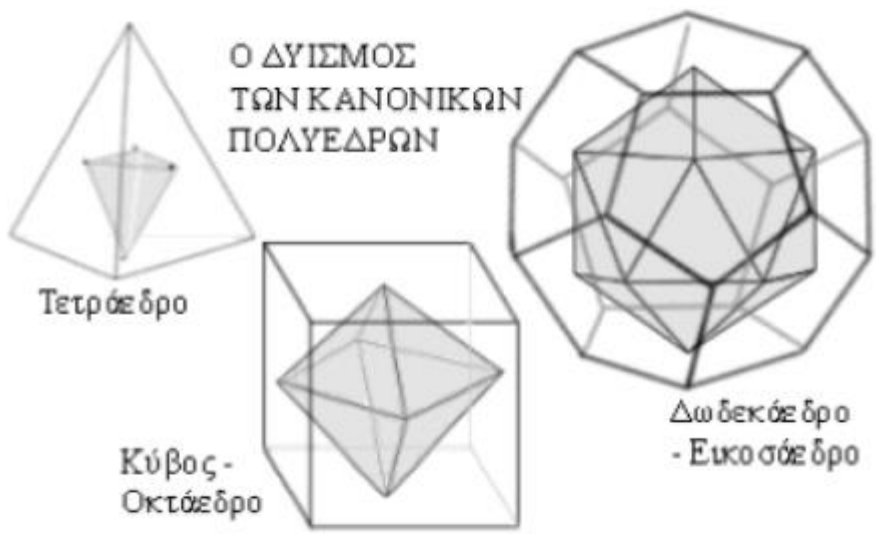
τετράγωνο

Από τα «τέλεια» αυτά σχήματα, δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο, ο Πλάτων θα προχωρήσει στη δημιουργία των τεσσάρων μόνο (από τα πέντε) κοσμικών σχημάτων, εξαιρώντας το δωδεκάεδρο, που έχει για έδρες κανονικά πεντάγωνα!

1.4 Η έννοια της δυϊκότητας των πολυέδρων

Ορισμός: Δύο πολύεδρα είναι <u>δυϊκά</u> αν τα κέντρα των εδρών του ενός συμπίπτουν με τις κορυφές του άλλου και αντίστροφα.

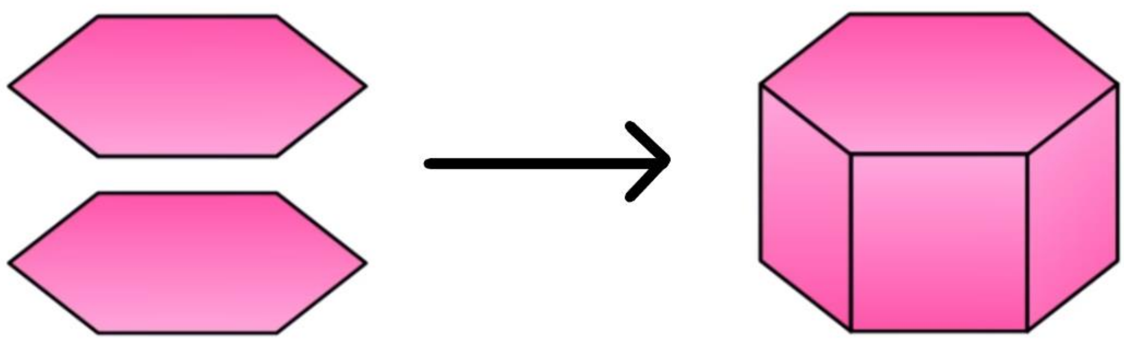
Τα δυϊκά γεωμετρικά σχήματα είναι αλληλοπαραγόμενα, π.χ. ο κύβος, δυϊκό σχήμα του κανονικού οκταέδρου, μετασχηματίζεται με λογικό τρόπο σε οκτάεδρο και αντίστροφα. Το δυϊκό σχήμα του κανονικού τετραέδρου είναι ο εαυτός του. Είναι δηλαδή αυτοπαραγόμενο στερεό. Το δυϊκό του δωδεκαέδρου είναι το εικοσάεδρο. Το πλήθος επομένως των εδρών γίνεται πλήθος κορυφών και αντίστροφα για τα δυϊκά στερεά.



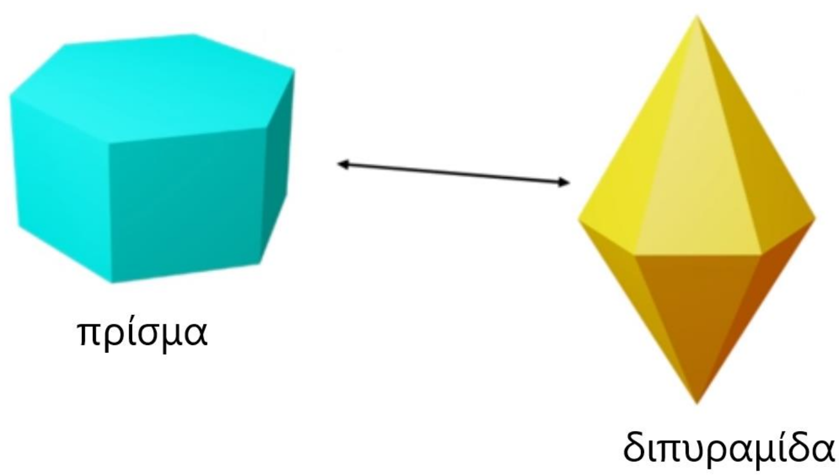
Ο δυϊσμός των κανονικών πολυέδρων

1.5 Πρίσματα

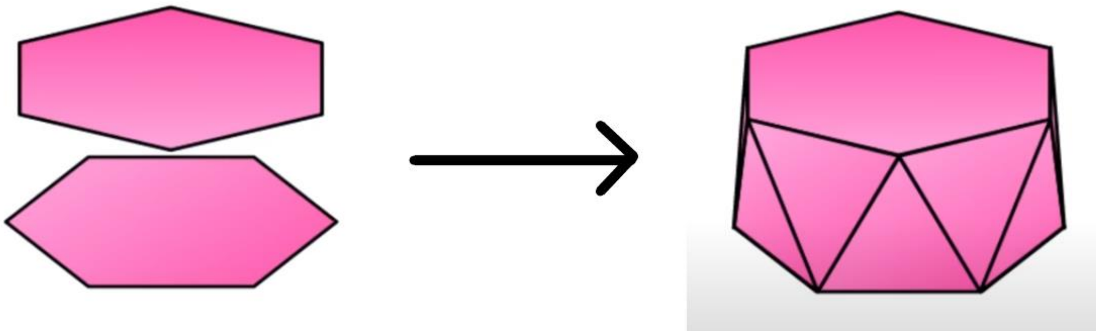
Ορισμός: Πρίσμα είναι ένα πολύεδρο κατασκευασμένο από δύο παράλληλα πανομοιότυπα πολύγωνα των οποίων οι αντίστοιχες πλευρές ενώνονται με ορθογώνια. Κανονικό πρίσμα είναι ένα πρίσμα του οποίου τα πολύγωνα είναι κανονικά και τα ορθογώνια είναι τετράγωνα.



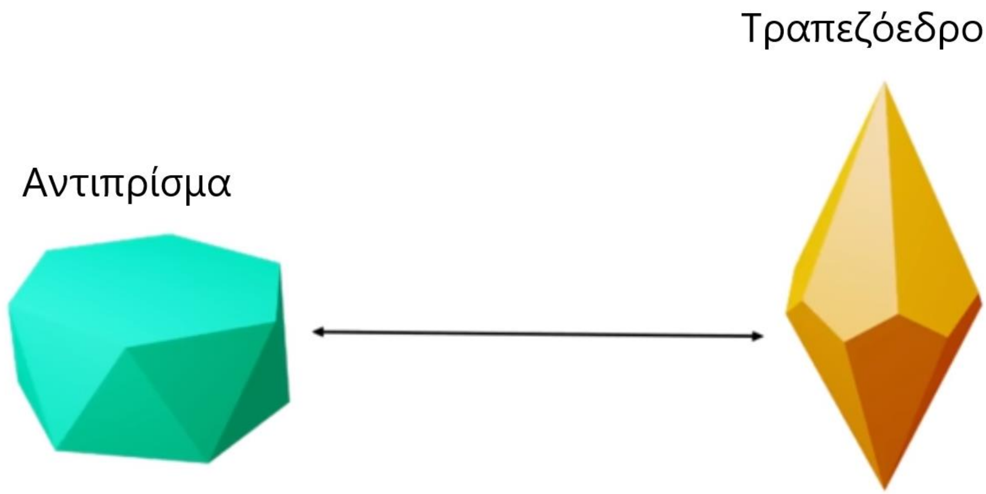
Τα δυϊκά των πρισμάτων είναι η άπειρη οικογένεια των διπυραμύδων.



Αντιπρίσμα είναι ένα πολύεδρο κατασκευασμένο από δύο παράλληλα πανομοιότυπα πολύγωνα έτσι, ώστε κάθε κορυφή του ενός να ενώνεται με μία πλευρά του άλλου με ένα ισοσκελές τρίγωνο. Κανονικό αντιπρίσμα είναι ένα πρίσμα του οποίου τα πολύγωνα είναι κανονικά και τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα.



Τα δυϊκά των αντιπρισμάτων είναι τα <u>τραπεζόεδρα</u>.



Συμβολίζουμε με $(p_1.p_2.\ldots.p_n)$ το στερεό στο οποίο κάθε κορυφή περικλείεται από n πολύγωνα, όπου p_i ο αριθμός των πλευρών του i-στού πολυγώνου.

Συνεπώς, με τον παραπάνω συμβολισμό, τα πρίσματα αποτελούν την άπειρη οικογένεια πολυέδρων με τύπο $(4.4.n)$, ενώ τα αντιπρίσματα την $(3.3.3.n)$, $n \in \{3,4,\ldots\}$.

Παρατηρούμε ότι το πρίσμα (4.4.4) είναι ο κύβος, ενώ το αντιπρίσμα (3.3.3.3) είναι το οκτάεδρο.

1.6 Αρχιμήδεια στερεά

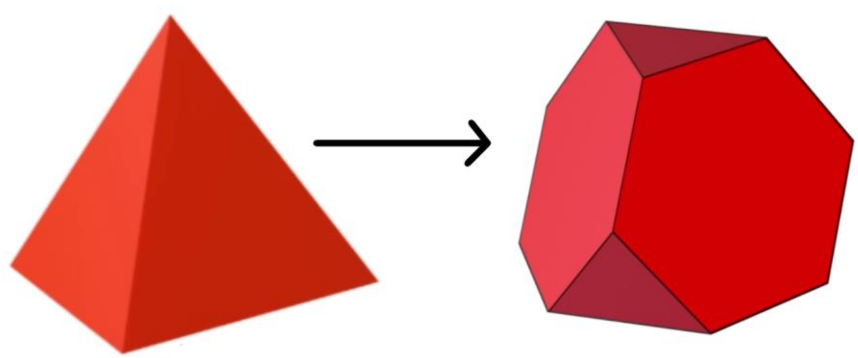
Ορισμός: Αρχιμήδειο στερεό είναι ένα κυρτό πολύεδρο που συνίσταται από κανονικά πολύγωνα δύο ή περισσότερων τύπων και οι κορυφές του είναι «ισοδύναμες». Λέγοντας «ισοδύναμες» εννοούμε ότι αν επιλέγονται δύο κορυφές υπάρχει τρόπος περιστροφής ή ανάκλασης του πολυέδρου, έτσι ώστε να φαίνεται αναλλοίωτο με τη μία κορυφή να έχει μετακινηθεί στη θέση της άλλης.

Σημείωση: Στα Αρχιμήδεια στερεά δεν περιλαμβάνονται τα πρίσματα και τα αντιπρίσματα, που αποτελούν άπειρες οικογένειες πολυέδρων.

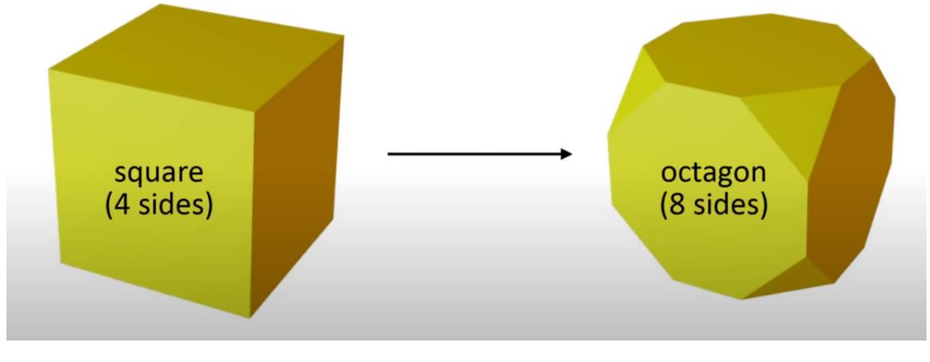
Όπως και στα πρίσματα και αντιπρίσματα πιο πάνω, συμβολίζουμε με $(p_1.p_2.\dots.p_n)$ το Αρχιμήδειο στερεό στο οποίο κάθε κορυφή περικλείεται από n πολύγωνα, όπου p_i ο αριθμός των πλευρών του i-στού πολυγώνου.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε τα πρώτα 5 στερεά που ικανοποιούν τον παραπάνω ορισμό μέσω των Πλατωνικών, ακολουθώντας τη διαδικασία της **αποκοπής (truncation),** δηλαδή αποκόπτουμε όλες τις γωνίες του Πλατωνικού στερεού με τέτοιο τρόπο, ώστε όλες οι έδρες του νέου πολυέδρου να είναι κανονικά πολύγωνα.

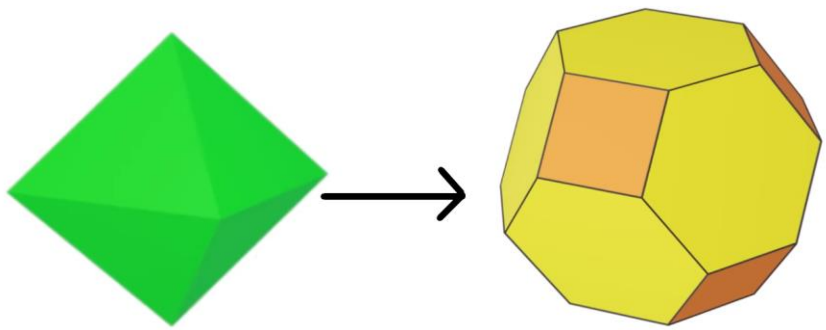
Έτσι, από το τετράεδρο παίρνουμε το **κόλουρο τετράεδρο (3.6.6):**



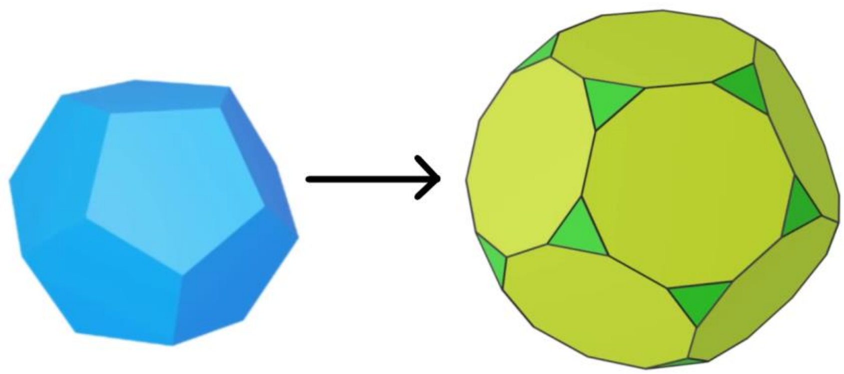
από τον κύβο τον **κόλουρο κύβο (3.8.8):**



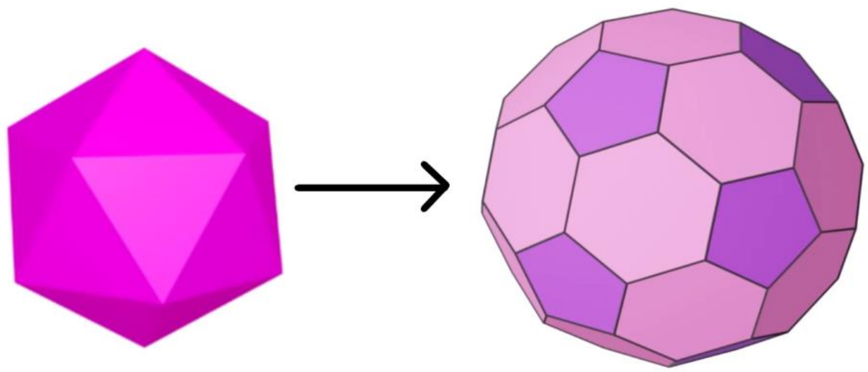
από το οκτάεδρο το **κόλουρο οκτάεδρο (4.6.6):**



από το δωδεκάεδρο το **κόλουρο δωδεκάεδρο (3.10.10):**

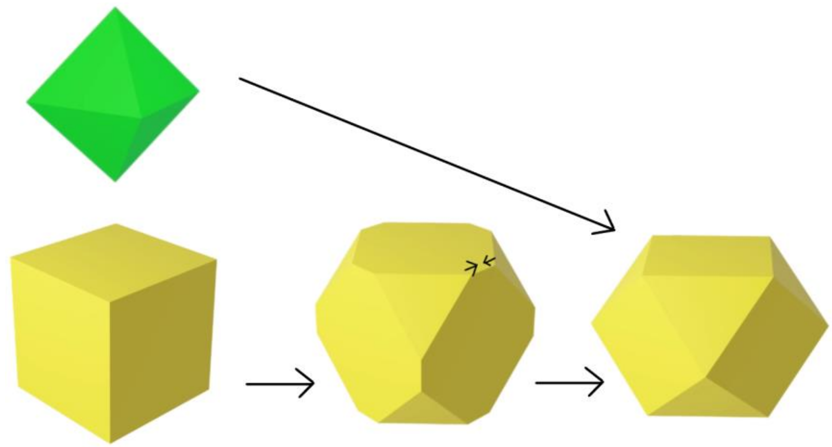


και από το εικοσάεδρο το **κόλουρο εικοσάεδρο (5.6.6):**

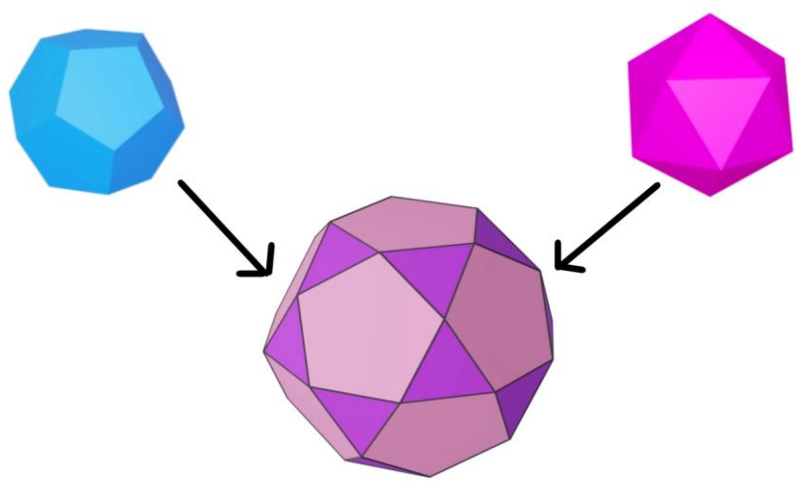


Με μία παρόμοια διαδικασία, που ονομάζεται **διόρθωση (rectification),** κόβουμε τις κορυφές με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ακμές του αρχικού Πλατωνικού στερεού να εξαφανιστούν. Αυτή τη φορά όμως, παίρνουμε μόνο 2 νέα Αρχιμήδεια στερεά!

Από το οκτάεδρο και τον κύβο παίρνουμε το **κυβοκτάεδρο (3.4.3.4):**



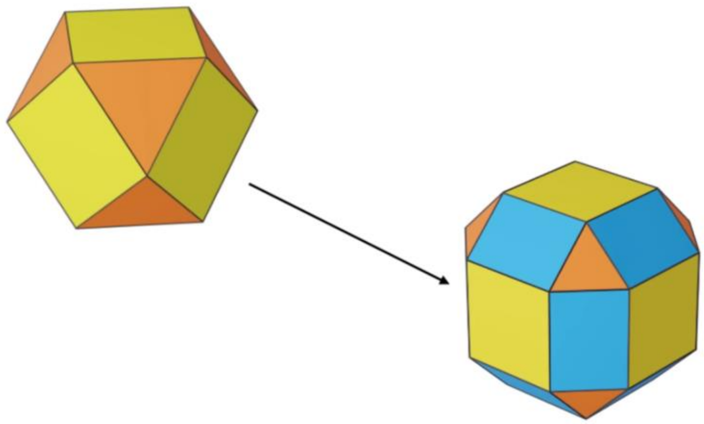
από το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο το **εικοσιδωδεκάεδρο (3.5.3.5):**



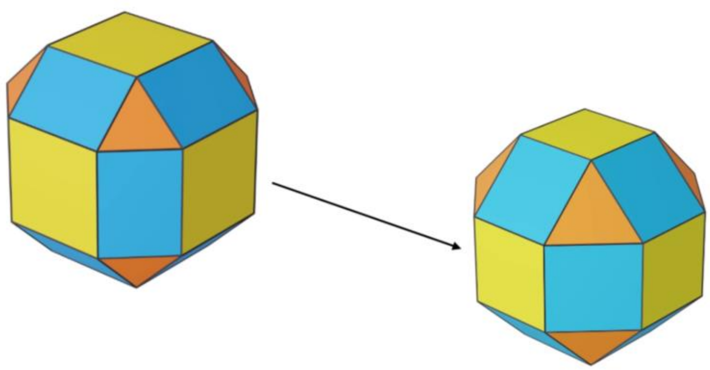
ενώ από το τετράεδρο παίρνουμε το οκτάεδρο, άρα όχι κάποιο καινούριο Αρχιμήδειο στερεό.

Τα επόμενα 4 Αρχιμήδεια στερεά θα προκύψουν από τα 2 τελευταία, ακολουθώντας εκ νέου αποκοπή και διόρθωση σε καθένα από αυτά.

Πιο συγκεκριμένα, εκτελώντας διόρθωση στο κυβοκτάεδρο:

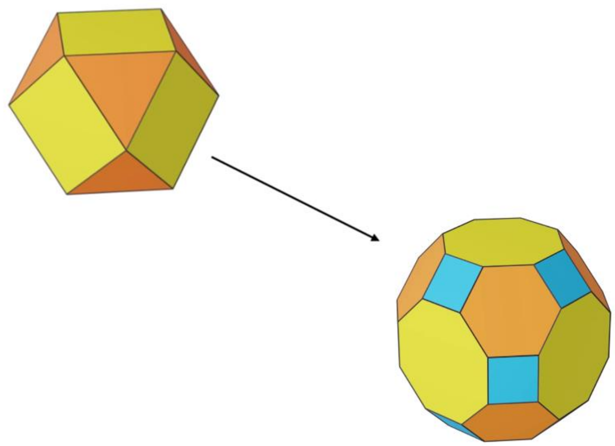


Παρατηρούμε ότι κάποιες από τις έδρες του είναι ορθογώνια, που δεν είναι κανονικά πολύγωνα. Συνεπώς, το συγκεκριμένο πολύεδρο δεν είναι Αρχιμήδειο. Μπορεί, όμως να γίνει αν αντικαταστήσουμε τα ορθογώνια με τετράγωνα! Σ' αυτήν την περίπτωση, παίρνουμε το **ρομβοκυβοκτάεδρο (3.4.4.4):**

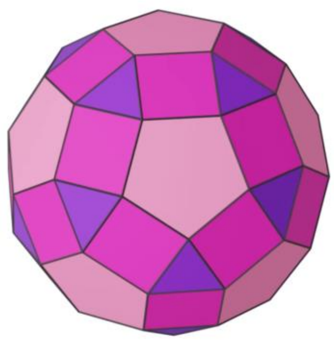


Η ιδιαιτερότητα του συγκεκριμένου πολύεδρου είναι κάποια τετράγωνα έχουν κοινές ακμές με 2 τετράγωνα και 2 τρίγωνα, ενώ κάποια άλλα με 4 τετράγωνα!

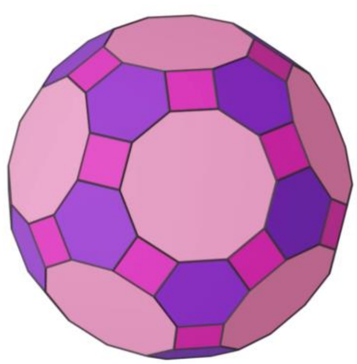
Με αποκοπή στο κυβοκτάεδρο παίρνουμε το **κόλουρο κυβοκτάεδρο (4.6.8):**



Οι ίδιες διαδικασίες στο εικοσιδωδεκάεδρο δίνουν το **ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (3.4.5.4):**

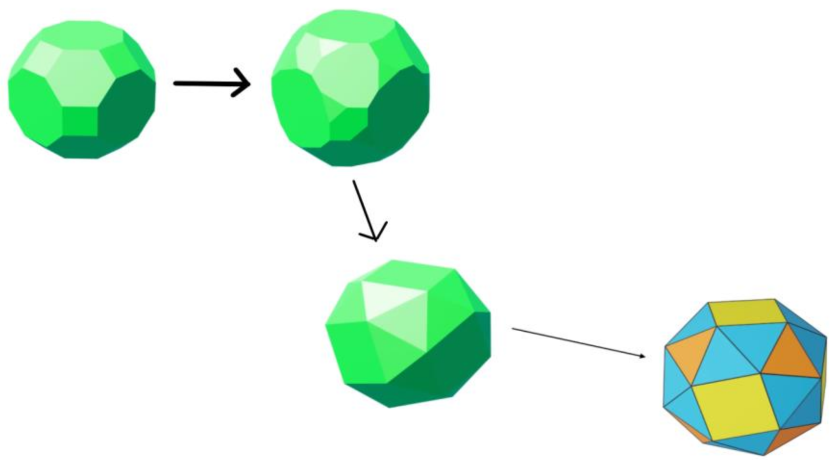


και το **κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο (4.6.10):**

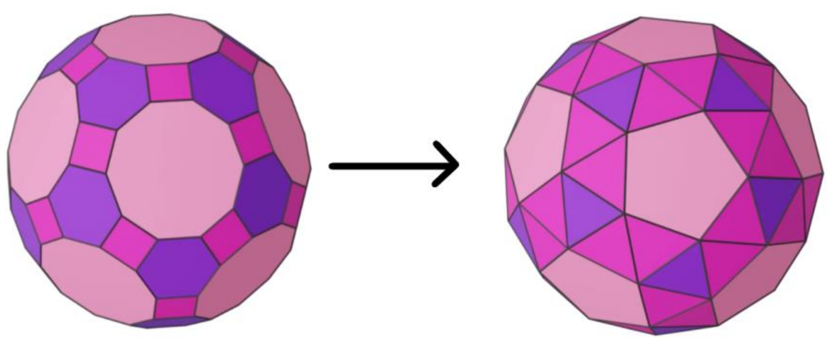


το οποίο είναι το Αρχιμήδειο στερεό με το μεγαλύτερο αριθμό κορυφών και ακμών.

Το επόμενο Αρχιμήδειο στερεό προκύπτει από το κυβοκτάεδρο, εκτελώντας ημι-διόρθωση, με την έννοια ότι δεν εκτελείται σε όλες τις κορυφές. Το πολύεδρο που προκύπτει περιέχει τρίγωνα που δεν είναι κανονικά. Επομένως, το μετασχηματίζουμε, ώστε να πληροί τον ορισμό του Αρχιμήδειου στερεού. Τελικά, παίρνουμε τον **κολοβό κύβο (3.3.3.3.4):**

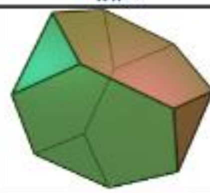
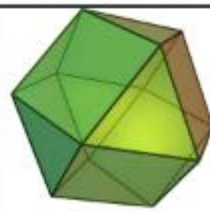
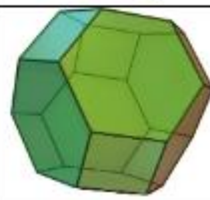


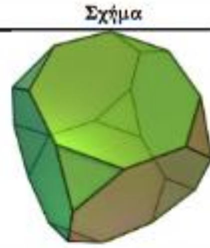
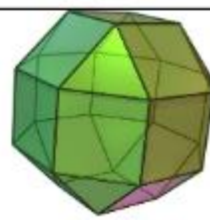
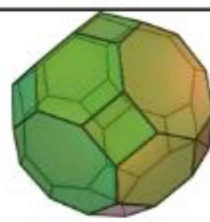
Τέλος, με αποκοπή στο κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο, παίρνουμε το **κολοβό δωδεκάεδρο (3.3.3.3.5):**

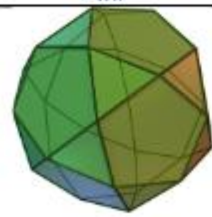
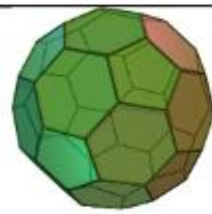
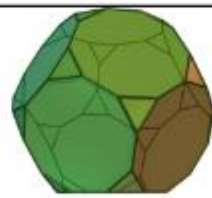


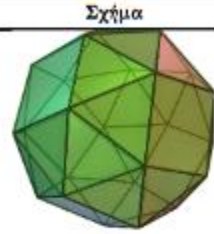
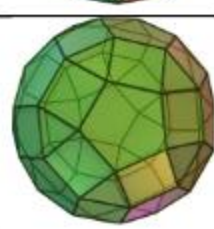
Τα Αρχιμήδεια στερεά πήραν το όνομά τους από τον Αρχιμήδη, που τα περιέγραψε τον 3ο αιώνα π.Χ. Εντούτοις, η πραγματεία του δε διασώζεται. Ο Πάππος από την Αλεξάνδρεια τον 4ο αιώνα μ.Χ. τα περιέγραψε εκ νέου, κάνοντας αναφορά στο έργο του Αρχιμήδη. Ο Johannes Kepler (1571-1630) ήταν ο επόμενος που έγραψε για τα Αρχιμήδεια στερεά στο έργο του «Harmonices Mundi» παρ’ ότι κάποια από αυτά τα στερεά είχαν επανακαλυφθεί από άλλους. Ο Kepler απέδειξε ότι είναι ακριβώς 13, δίνοντάς τους σύγχρονα ονόματα. (Η αναφορά γίνεται στο Βιβλίο ΙΙ του έργου του «De Corguentia Figurarum Harmonicarum»

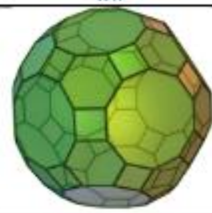
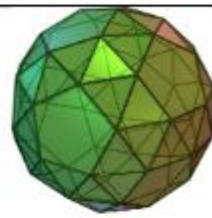
Πρόταση XXVIII, σελίδες 61-65) Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας με συγκεντρωμένα όλα τα Αρχιμήδεια στερεά:

Α/Α	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
1.	κόλουρο τετράεδρο (truncated tetrahedron) (3.6.6)		Το πρώτο σχήμα με οκτώ έδρες 4 τρίγωνα και 4 εξά-γωνα.
2.	κυβοκτάεδρο (cuboctahedron) (3.4.3.4)		Μετά από αυτό έρχονται τρία σχήματα με 14 έδρες. Το πρώτο με 8 τρίγωνα και 6 τετράγωνα,
3.	κόλουρο οκτάεδρο (truncated octahedron) (4.6.6)		το δεύτερο με 6 τετράγωνα και 8 εξάγωνα

Α/Α	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
4.	κόλουρος κύβος (truncated cube) (3.8.8)		και το τρίτο με 8 τρίγωνα και 6 οκτάγωνα.
5.	ρομβοκυβοκτάεδρο (rhombicuboctahedron) (3.4.4.4)		Μετά από αυτά έρχονται δύο σχήματα με 26 έδρες. Το πρώτο με 8 τρίγωνα και 18 τετράγωνα
6.	κόλουρο κυβοκτάεδρο (truncated cuboctahedron) (4.6.8)		το δεύτερο με 12 τετράγωνα, 8 εξάγωνα και 6 οκτά-γωνα.

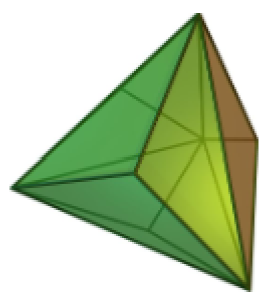
Α/Α	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
7.	εικοσιδωδεκάεδρο (icosidodecahedron) (3.5.3.5)		Μετά απ' αυτά έρχονται 3 σχήματα με 32 έδρες, το πρώτο με 20 τρίγωνα και 12 πεντάγωνα,
8.	κόλουρο εικοσάεδρο (truncated icosahedron) (5.6.6)		το δεύτερο με 12 πεντάγωνα και 20 εξάγωνα
9.	κόλουρο δωδεκάεδρο (truncated dodecahedron) (3.10.10)		και το τρίτο με 20 τρίγωνα και 12 δεκάγωνα.

Α/Α	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
10.	κολοβός κύβος (snub cube) (3.3.3.3.4)	 	Μετά από αυτά έρχεται ένα σχήμα με 38 έδρες, με 32 τρίγωνα και 6 τετράγωνα.
11.	ρομβικοσιδωδεκάεδρο (rhombicosidodecahedron) (3.4.5.4)		Μετά από αυτό έρχονται δύο σχήματα με 62 έδρες, το πρώτο με 20 τρίγωνα, 30 τετράγωνα και 12 πεντάγωνα,

Α/Α	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
12.	κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο (truncated icosidodecahedron) (4.6.10)		Το δεύτερο με 30 τετράγωνα, 20 εξάγωνα και 12 δεκάγωνα.
13.	κολοβό δωδεκάεδρο (snub dodecahedron) (3.3.3.3.5)	 	Μετά από αυτά έρχεται το τελευταίο, ένα σχήμα με 92 έδρες, με 80 τρίγωνα και 12 πεντάγωνα.

Τα δυϊκά των Αρχιμήδειων στερεών ονομάζονται **καταλανικά**, προς τιμήν του Βέλγου μαθηματικού Eugène Catalan ο οποίος τα περιέγραψε πρώτος το 1865. Να σημειωθεί ότι τα καταλανικά στερεά είναι κυρτά, αλλά οι έδρες τους δεν είναι κανονικά πολύγωνα!

Για παράδειγμα, το δυϊκό του κόλουρου τετράεδρου λέγεται τριάκις τετράεδρο. Έχει 12 έδρες, 18 ακμές και 8 κορυφές και κάθε έδρα του είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο:

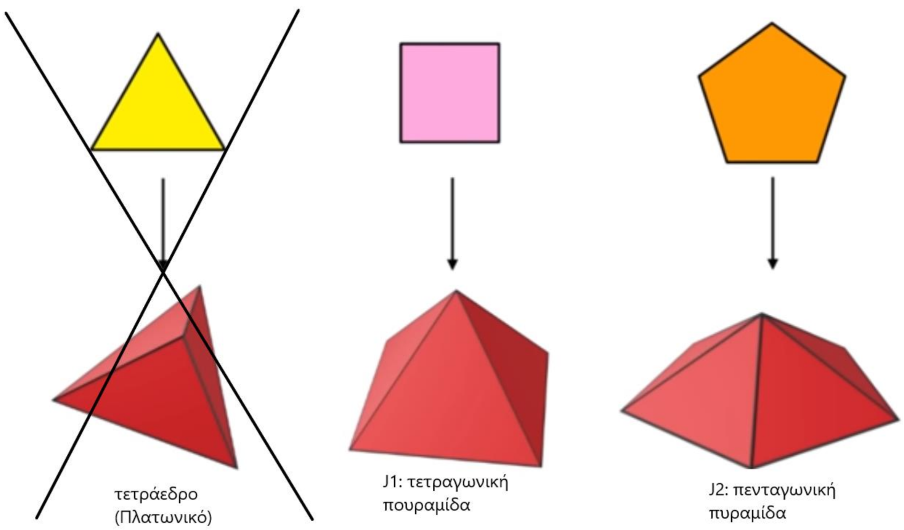


1.7 Τα στερεά του Johnson

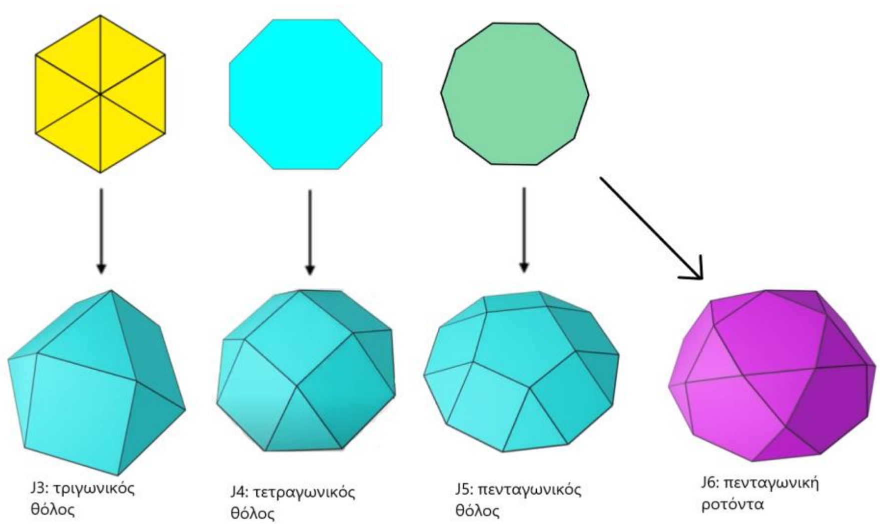
Ορισμός: Στερεό του Johnson καλείται κάθε κυρτό πολύεδρο του οποίου κάθε έδρα είναι κανονικό πολύγωνο εξαιρώντας τα Πλατωνικά, τα Αρχιμήδεια στερεά και τις άπειρες οικογένειες των πρισμάτων και των αντιπρισμάτων.

Ανακαλύφθηκαν από τον Norman Johnson το 1966, ο οποίος έφτιαξε μια λίστα με 92 τέτοια στερεά, εικάζοντας ότι δεν υπάρχουν άλλα. Το 1969, ο Victor Zalgaller απέδειξε με τη βοήθεια υπολογιστή, ότι τα στερεά του Johnson είναι πράγματι 92.

Τα πρώτα στερεά Johnson είναι πυραμίδες, με βάση τετράγωνο ή πεντάγωνο και τα υπόλοιπα πολύγωνα τρίγωνα:



Στη συνέχεια, έχουμε τους θόλους, με βάση εξάγωνο, οκτάγωνο και δεκάγωνο και τα υπόλοιπα πολύγωνα τρίγωνα και τετράγωνα:



Στη συνέχεια, θα συνδυάσουμε πολύεδρα με κανονικές έδρες, ώστε να πάρουμε νέα στερεά Johnson.

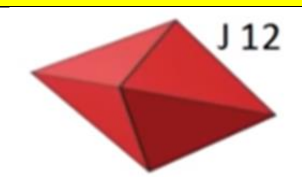
Αρχικά, παίρνουμε την πυραμίδα με τριγωνική βάση, δηλαδή το τετράεδρο. Ενώνοντάς το με:

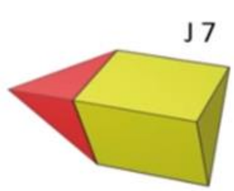
άλλο ένα τετράεδρο, παίρνουμε την **τριγωνική διπυραμίδα (J12),**

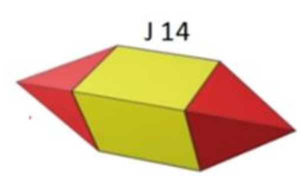
ένα τριγωνικό πρίσμα, παίρνουμε την **επιμήκη τριγωνική πυραμίδα (J7),**

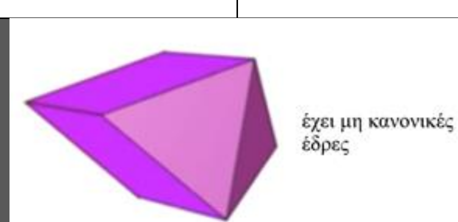
ένα τριγωνικό αντιπρίσμα, παίρνουμε ένα στερεό που δεν είναι όλες οι έδρες του κανονικές.

Ενώνοντας την επιμήκη τριγωνική πυραμίδα (J7) με άλλο ένα τετράεδρο, παίρνουμε την **επιμήκη τριγωνική διπυραμίδα (J14).**

<table>
<tr><td colspan="2">Τριγωνική βάση
(Πλατωνικό)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

τριγωνική διπυραμίδα</td></tr>
<tr><td>

επιμήκης τριγωνική πυραμίδα</td><td>

επιμήκης τριγωνική διπυραμίδα</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

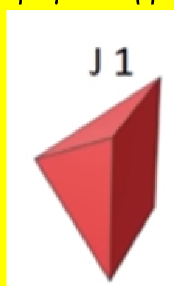
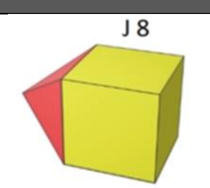
Τώρα, παίρνουμε την πυραμίδα με τετραγωνική βάση (J1) και την ενώνουμε με:

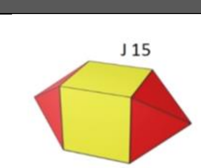
άλλη μία τετραγωνική πυραμίδα, που δίνει το οκτάεδρο (Πλατωνικό),

έναν κύβο (τετραγωνικό πρίσμα), που δίνει την **επιμήκη τετραγωνική πυραμίδα (J8),**

ένα τετραγωνικό αντιπρίσμα, που δίνει τη **γυροεπιμήκη τετραγωνική πυραμίδα (J10).**

Ενώνοντας την επιμήκη τετραγωνική πυραμίδα (J8) με άλλη μία τετραγωνική πυραμίδα, παίρνουμε την **επιμήκη τετραγωνική διπυραμίδα (J15),** ενώ ενώνοντας τη γυροεπιμήκη τετραγωνική πυραμίδα (J10) με άλλη μία τετραγωνική πυραμίδα, παίρνουμε τη **γυροεπιμήκη τετραγωνική διπυραμίδα (J17).**

<table>
<tr><td colspan="2">Τετραγωνική βάση

</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>

επιμήκης τετραγωνική πυραμίδα</td><td>

επιμήκης τετραγωνική διπυραμίδα</td></tr>
<tr><td>

γυροεπιμήκης τετραγωνική πυραμίδα</td><td>

γυροεπιμήκης τετραγωνική διπυραμίδα</td></tr>
</table>

Παίρνουμε, τώρα, πρίσματα και τους ενώνουμε τα τετράγωνα με τετραγωνικές πυραμίδες:

Στο τριγωνικό πρίσμα μπορούμε να προσθέσουμε:

1 πυραμίδα και παίρνουμε το **επαυξημένο τριγωνικό πρίσμα (J49),**

2 πυραμίδες και παίρνουμε το **διεπαυξημένο τριγωνικό πρίσμα (J50),**

3 πυραμίδες και παίρνουμε το **τριεπαυξημένο τριγωνικό πρίσμα (J51).**

Στο πενταγωνικό πρίσμα μπορούμε να προσθέσουμε:

1 πυραμίδα και παίρνουμε το **επαυξημένο πενταγωνικό πρίσμα (J52),**

2 πυραμίδες και παίρνουμε το **διεπαυξημένο πενταγωνικό πρίσμα (J53).**

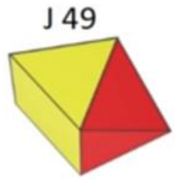
(3 ή περισσότερες πυραμίδες χαλάνε την κυρτότητα του πολυέδρου)

Στο εξαγωνικό πρίσμα μπορούμε να προσθέσουμε:

1 πυραμίδα και παίρνουμε το **επαυξημένο εξαγωνικό πρίσμα (J54),**

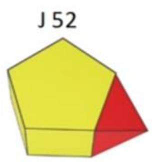
2 πυραμίδες σε απέναντι έδρες και παίρνουμε το **παραδιεπαυξημένο εξαγωνικό πρίσμα (J55),**

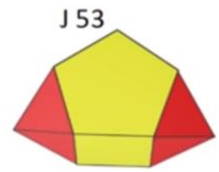
2 πυραμίδες όχι σε απέναντι έδρες και παίρνουμε το **μεταδιεπαυξημένο εξαγωνικό πρίσμα (J56).**

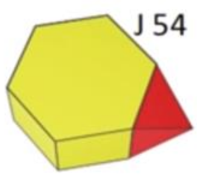
<table>
<tr>
<td colspan="4">

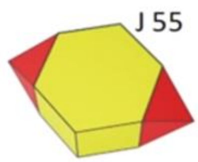
επαυξημένο τριγωνικό πρίσμα</td>
<td colspan="4">

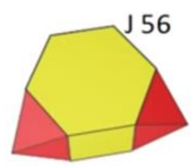
διεπαυξημένο τριγωνικό πρίσμα</td>
<td colspan="4">

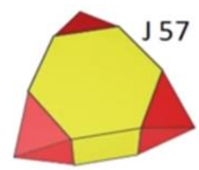
τριεπαυξημένο τριγωνικό πρίσμα</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="6">

επαυξημένο πενταγωνικό πρίσμα</td>
<td colspan="6">

διεπαυξημένο πενταγωνικό πρίσμα</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

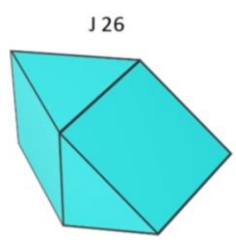
επαυξημένο εξαγωνικό πρίσμα</td>
<td colspan="3">

παραδιεπαυξημένο εξαγωνικό πρίσμα</td>
<td colspan="3">

μεταδιεπαυξημένο εξαγωνικό πρίσμα</td>
<td colspan="3">

τριεπαυξημένο εξαγωνικό πρίσμα</td>
</tr>
</table>

Ενώνοντας 2 τριγωνικά πρίσματα, παίρνουμε το **γυροδικόρυφο (J26):**



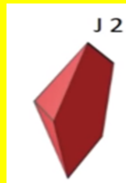
Ξεκινώντας τώρα από πενταγωνική πυραμίδα (J2), αν την ενώσουμε με:

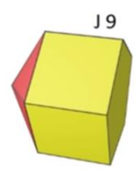
τον εαυτό της, παίρνουμε την **πενταγωνική διπυραμίδα (J13),**

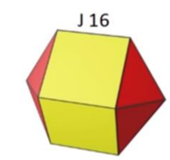
πενταγωνικό πρίσμα, παίρνουμε την **επιμήκη πενταγωνική πυραμίδα (J9).**

πενταγωνικό αντιπρίσμα, παίρνουμε τη **γυροεπιμήκη πενταγωνική πυραμίδα (J11).**

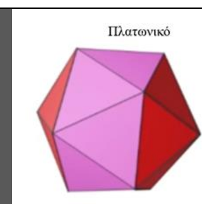
Ενώνοντας την επιμήκη πενταγωνική πυραμίδα (J9) με άλλη μία πενταγωνική πυραμίδα (J2), παίρνουμε την **επιμήκη πενταγωνική διπυραμίδα (J16),** ενώ ενώνοντας τη γυροεπιμήκη πενταγωνική πυραμίδα (J11) με άλλη μία πενταγωνική πυραμίδα (J2), παίρνουμε το εικοσάεδρο (Πλατωνικό).

<table>
<tr><td colspan="2">Πενταγωνική βάση

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

πενταγωνική διπυραμίδα</td></tr>
<tr><td>

επιμήκης πενταγωνική πυραμίδα</td><td>

επιμήκης πενταγωνική διπυραμίδα</td></tr>
<tr><td>

γυροεπιμήκης πενταγωνική πυραμίδα</td><td>
</td></tr>
</table>

Ξεκινώντας από εξαγωνική πυραμίδα (J3), αν την ενώσουμε με:

τον εαυτό της, ενώνοντας τρίγωνα με τρίγωνα και τετράγωνα με τετράγωνα, παίρνουμε τον **τριγωνικό ορθοδιθόλο (J27),**

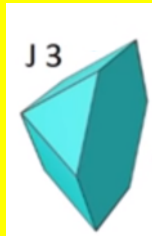
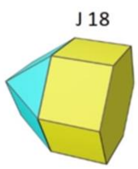
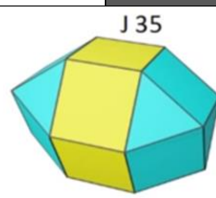
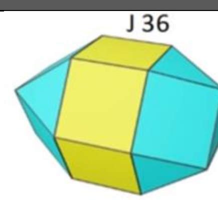
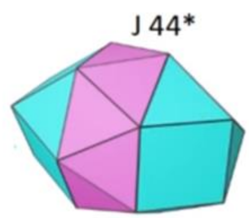
τον εαυτό της, ενώνοντας τρίγωνα με τετράγωνα, παίρνουμε το κυβοκτάεδρο (3.4.3.4), το οποίο είναι Αρχιμήδειο,

εξαγωνικό πρίσμα, παίρνουμε τον **επιμήκη τριγωνικό θόλο (J18),**

εξαγωνικό αντιπρίσμα, παίρνουμε τον **γυροεπιμήκη τριγωνικό θόλο (J22).**

Αν στον επιμήκη τριγωνικό θόλο (J18) προσθέσουμε άλλη μία εξαγωνική πυραμίδα (J3) ενώνοντας τρίγωνα με τρίγωνα και τετράγωνα με τετράγωνα, παίρνουμε την επιμήκη **τριγωνική ορθοδιροτόντα (J35),** ενώ αν ενώσουμε τρίγωνα με τετράγωνα, **τον επιμήκη τριγωνικό γυροδιθόλο (J36).**

Αν στον γυροεπιμήκη τριγωνικό θόλο (J22) προσθέσουμε άλλη μία εξαγωνική πυραμίδα (J3), τότε παίρνουμε τον **γυροεπιμήκη τριγωνικό διθόλο (J44)** (ανεξάρτητα από το πώς θα τοποθετηθεί η J3 θα πάρουμε το ίδιο στερεό).

<table>
<tr><td colspan="6">Εξαγωνική βάση
</td></tr>
<tr><td colspan="3">
τριγωνικός ορθοδιθόλος</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">
επιμήκης τριγωνικός θόλος</td><td colspan="2">
επιμήκης τριγωνική ορθοδιροτόντα</td><td colspan="2">
επιμήκης τριγωνικός γυροδιθόλο</td></tr>
<tr><td colspan="3">
γυροεπιμήκης τριγωνικός θόλος</td><td colspan="3">
γυροεπιμήκης τριγωνικός διθόλος</td></tr>
</table>

Ξεκινώντας από οκταγωνική πυραμίδα (J4), αν την ενώσουμε με:

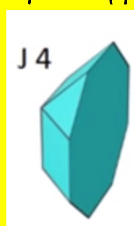
τον εαυτό της, ενώνοντας τρίγωνα με τρίγωνα και τετράγωνα με τετράγωνα, τότε παίρνουμε τον **τετραγωνικό ορθοδιθόλο (J28),**

τον εαυτό της, ενώνοντας τρίγωνα με τετράγωνα, τότε παίρνουμε τον **τετραγωνικό γυροδιθόλο (J29),** με οκταγωνικό πρίσμα, παίρνουμε τον **επιμήκη τετραγωνικό θόλο (J19),**

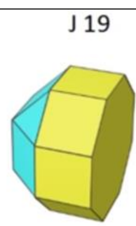
με οκταγωνικό αντιπρίσμα, παίρνουμε τον **γυροεπιμήκη τετραγωνικό θόλο (J23).**

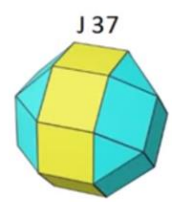
Αν στον επιμήκη τετραγωνικό θόλο (J19) προσθέσουμε άλλη μία οκταγωνική πυραμίδα (J4), ενώνοντας τρίγωνα με τρίγωνα και τετράγωνα με τετράγωνα, τότε παίρνουμε το ρομβοκυβοκτάεδρο (3.4.4.4), που είναι Αρχιμήδειο, ενώ ενώνοντας τρίγωνα με τετράγωνα παίρνουμε τον **επιμήκη τετραγωνικό γυροδιθόλο (J37).**

Αν στον γυροεπιμήκη τετραγωνικό θόλο (J23) προσθέσουμε άλλη μία οκταγωνική πυραμίδα (J4), τότε θα πάρουμε τον **γυροεπιμήκη τετραγωνικό διθόλο (J45)** (ανεξάρτητα από το πώς θα τοποθετηθεί η J3 θα πάρουμε το ίδιο στερεό).

<table>
<tr><td colspan="6">Οκταγωνική βάση

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

τετραγωνικός ορθοδιθόλος</td><td colspan="3">

τετραγωνικός γυροδιθόλος</td></tr>
<tr><td colspan="2">

επιμήκης τετραγωνικός θόλος</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2">

επιμήκης τετραγωνικός γυροδιθόλος</td></tr>
<tr><td colspan="3">

γυροεπιμήκης τετραγωνικός θόλος</td><td colspan="3">

γυροεπιμήκης τετραγωνικός διθόλος</td></tr>
</table>

Ξεκινώντας από πενταγωνικό θόλο (J5), αν τον ενώσουμε με:

με τον εαυτό του, ενώνοντας τρίγωνα με τρίγωνα και τετράγωνα με τετράγωνα, τότε παίρνουμε τον **πενταγωνικό ορθοδιθόλο (J30),**

με τον εαυτό του, ενώνοντας τρίγωνα με τετράγωνα, τότε παίρνουμε τον **πενταγωνικό γυροδιθόλο (J31),**

με πενταγωνική ροτόντα (J6), ενώνοντας τρίγωνα με πεντάγωνα και τετράγωνα με τρίγωνα, τότε παίρνουμε την **πενταγωνική ορθοθολοροτόντα (J32),**

με πενταγωνική ροτόντα (J6), ενώνοντας τρίγωνα με τρίγωνα και τετράγωνα με πεντάγωνα, τότε παίρνουμε την **πενταγωνική γυροθολοροτόντα (J33),**

με δεκαγωνικό πρίσμα, παίρνουμε τον **επιμήκη πενταγωνικό θόλο (J20),**

με δεκαγωνικό αντιπρίσμα, παίρνουμε τον **γυροεπιμήκη πενταγωνικό θόλο (J24).**

Αν ενώσουμε τον επιμήκη πενταγωνικό θόλο (J20) με πενταγωνική ροτόντα (J6), βάζοντας τα τρίγωνα του θόλου απέναντι από τα πεντάγωνα της ροτόντας, τότε παίρνουμε την **επιμήκη πενταγωνική ορθοθολοροτόντα (J40).** Αν τα ενώσουμε βάζοντας τα τρίγωνα του θόλου απέναντι από τα τρίγωνα της ροτόντας, παίρνουμε την **επιμήκη πενταγωνική γυροθολοροτόντα (J41).**

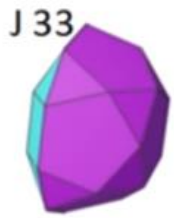
Αν ενώσουμε τον επιμήκη πενταγωνικό θόλο (J20) με άλλον έναν πενταγωνικό θόλο (J5), τοποθετώντας τα τρίγωνα του νέου θόλου απέναντι απ’ αυτά του αρχικού, τότε παίρνουμε τον **επιμήκη πενταγωνικό ορθοδιθόλο (J38),** ενώ τοποθετώντας τα τρίγωνα του νέου θόλου απέναντι από τα τετράγωνα του αρχικού, παίρνουμε τον **επιμήκη πενταγωνικό γυροδιθόλο (J39).**

Αν ενώσουμε το γυροεπιμήκη πενταγωνικό θόλο (J24):

με άλλον έναν πενταγωνικό θόλο (J5), τότε παίρνουμε το **γυροεπιμήκη πενταγωνικό διθόλο (J46)** (ανεξάρτητα από το πώς θα τοποθετηθεί ο J5 θα πάρουμε το ίδιο στερεό),

με πενταγωνική ροτόντα (J6), παίρνουμε τη **γυροεπιμήκη πενταγωνική θολοροτόντα (J47)** (ανεξάρτητα από το πώς θα τοποθετηθεί η J6 θα πάρουμε το ίδιο στερεό).

Δεκαγωνική βάση (με θόλο)

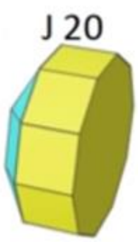


πενταγωνική γυροθολοροτόντα

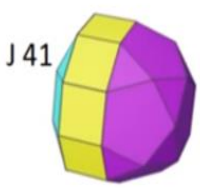
πενταγωνική ορθοθολοροτόντα

πενταγωνικός ορθοδιθόλος

πενταγωνικός γυροδιθόλος

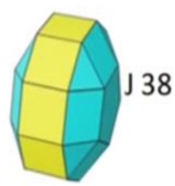


επιμήκης πενταγωνικός θόλος



επιμήκης πενταγωνική γυροθολοροτόντα

επιμήκης πενταγωνική ορθοθολοροτόντα



επιμήκης πενταγωνικός ορθοδιθόλος

επιμήκης πενταγωνικός γυροδιθόλος

γυροεπιμήκης πενταγωνικός θόλος

γυροεπιμήκης πενταγωνικός διθόλος

γυροεπιμήκης πενταγωνική θολοροτόντα

Ξεκινώντας από πενταγωνική ροτόντα (J6), αν την ενώσουμε με:

τον εαυτό της, ενώνοντας τρίγωνα με τρίγωνα και πεντάγωνα με πεντάγωνα, παίρνουμε την **πενταγωνική ορθοδιροτόντα (J34),**

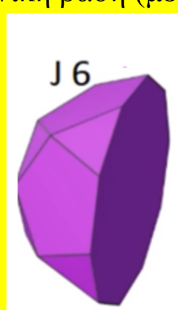
τον εαυτό της, ενώνοντας τρίγωνα με πεντάγωνα, παίρνουμε το εικοσιδωδεκάεδρο (3.5.3.5), που είναι Αρχιμήδειο,

δεκαγωνικό πρίσμα, παίρνουμε την **επιμήκη πενταγωνική ροτόντα (J21),**

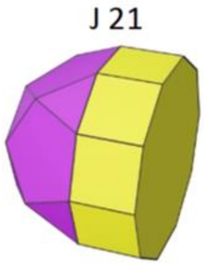
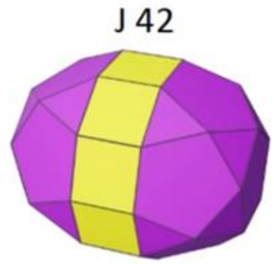
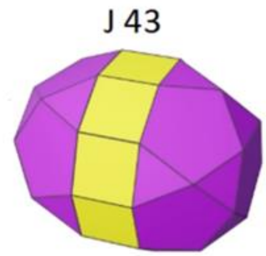
δεκαγωνικό αντιπρίσμα, παίρνουμε τη **γυροεπιμήκη πενταγωνική ροτόντα (J25).**

Ενώνοντας την επιμήκη πενταγωνική ροτόντα (J21) με άλλη μία ροτόντα, τοποθετώντας τα τρίγωνα της αρχικής απέναντι από τα τρίγωνα της νέας, παίρνουμε την **επιμήκη πενταγωνική ορθοδιροτόντα (J42),** ενώ τοποθετώντας τα τρίγωνα της μιας απέναντι από τα πεντάγωνα της άλλης ροτόντας, παίρνουμε την **επιμήκη πενταγωνική γυροδιροτόντα (J43).**

Ενώνοντας τη γυροεπιμήκη πενταγωνική ροτόντα (J25) με άλλη μία πενταγωνική ροτόντα (J6), παίρνουμε τη **γυροεπιμήκη πενταγωνική διροτόντα (J48)** (ανεξάρτητα από το πώς θα τοποθετηθεί η J6 θα πάρουμε το ίδιο στερεό).

<table>
<tr><td colspan="2">Δεκαγωνική βάση (με ροτόντα)

</td></tr>
<tr><td>

πενταγωνική ορθοδιροτόντα</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
επιμήκης πενταγωνική ροτόντα</td>
<td>
επιμήκης πενταγωνική ορθοδιροτόντα</td>
<td>
επιμήκης πενταγωνική γυροδιροτόντα</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
γυροεπιμήκης πενταγωνική ροτόντα</td>
<td>
γυροεπιμήκης πενταγωνική διροτόντα</td>
</tr>
</table>

Μέχρι στιγμής, έχουμε φτιάξει 57 στερεά Johnson, ξεκινώντας από τις πυραμίδες, τους θόλους και τη ροτόντα και στη συνέχεια συνδυάζοντας αυτά με πρίσματα και αντιπρίσματα.

Τα επόμενα 26 στερεά Johnson προέρχονται από τροποποιήσεις Πλατωνικών και Αρχιμήδειων στερεών.

Ξεκινώντας από ένα δωδεκάεδρο, αν το ενώσουμε με:

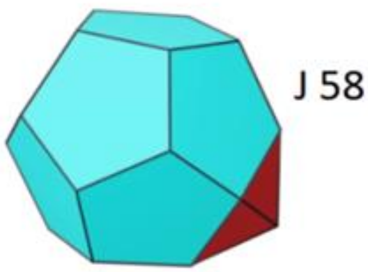
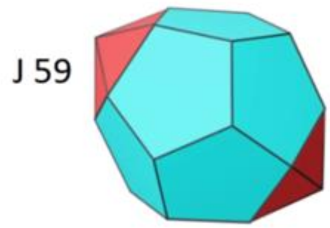
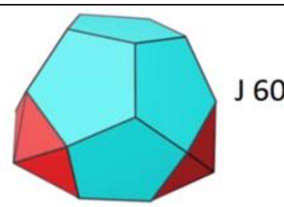
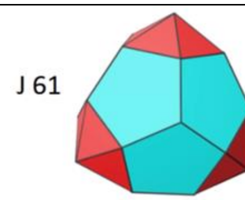
1 πενταγωνική πυραμίδα, παίρνουμε το **επαυξημένο δωδεκάεδρο (J58),**

2 πενταγωνικές πυραμίδες σε απέναντι έδρες, παίρνουμε το **παραδιεπαυξημένο δωδεκάεδρο (J59),**

2 πενταγωνικές πυραμίδες όχι σε απέναντι έδρες, παίρνουμε το **μεταδιεπαυξημένο δωδεκάεδρο (J60),**

3 πενταγωνικές πυραμίδες όχι σε γειτονικές έδρες, παίρνουμε το **τριεπαυξημένο δωδεκάεδρο (J61).**

(4 ή περισσότερες πυραμίδες χαλάνε την κυρτότητα του πολυέδρου, το ίδιο γίνεται και αν τοποθετήσουμε 2 ή 3 πυραμίδες με άλλον τρόπο από τους παραπάνω)

<table>
<tr><td colspan="3">Δωδεκάεδρο
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
επαυξημένο δωδεκάεδρο</td><td colspan="2">
παραδιεπαυξημένο δωδεκάεδρο</td></tr>
<tr><td>
μεταδιεπαυξημένο δωδεκάεδρο</td><td>
τριεπαυξημένο δωδεκάεδρο</td></tr>
</table>

Παίρνοντας, τώρα, το εικοσάεδρο, μπορούμε να του αφαιρέσουμε πενταγωνικές πυραμίδες.

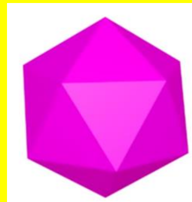
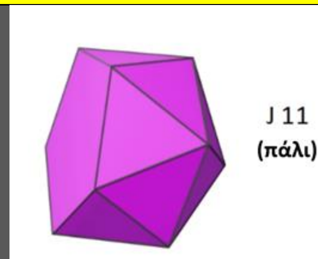
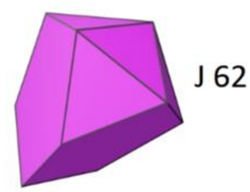
Αφαιρώντας 1 πυραμίδα, παίρνουμε τη γυροεπιμήκη πενταγωνική πυραμίδα (J11), που έχουμε ήδη κατασκευάσει ενώνοντας την πενταγωνική πυραμίδα (J2) με πενταγωνικό αντιπρίσμα.

Αφαιρώντας 2 απέναντι πυραμίδες, παίρνουμε αντιπρίσμα.

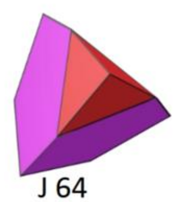
Αφαιρώντας 2 γειτονικές πυραμίδες, παίρνουμε το **μεταδιελαττωμένο εικοσάεδρο (J62).**

Αφαιρώντας 3 πυραμίδες, παίρνουμε το **τριελαττωμένο εικοσάεδρο (J63).**

Στο τριελαττωμένο εικοσάεδρο (J63) μπορούμε να προσθέσουμε ένα τετράεδρο και να πάρουμε το **επαυξημένο τριελαττωμένο εικοσάεδρο (J64).**

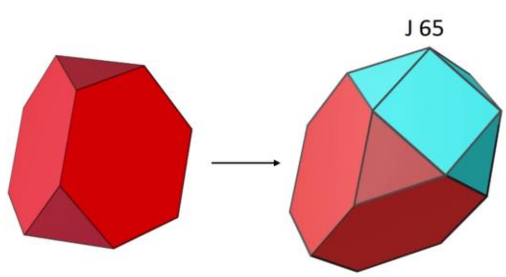
<table>
<tr><td colspan="2">Εικοσάεδρο
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

μεταδιελαττωμένο εικοσάεδρο</td></tr>
<tr><td>

τριελαττωμένο εικοσάεδρο</td><td>

επαυξημένο τριελαττωμένο εικοσάεδρο</td></tr>
</table>

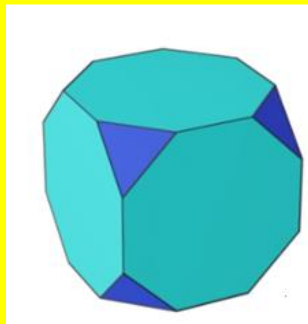
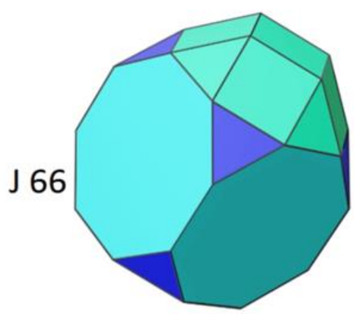
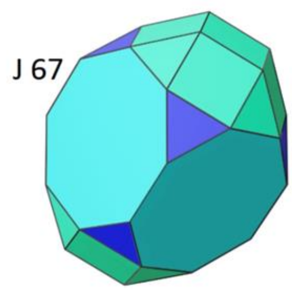
Ξεκινώντας από το κόλουρο τετράεδρο (3.6.6), αν το ενώσουμε με τριγωνικό θόλο (J3), παίρνουμε το **επαυξημένο κολοβό τετράεδρο (J65).**



Ξεκινώντας από τον κόλουρο κύβο (3.8.8), μπορούμε να το ενώσουμε με τετραγωνικό θόλο:

1 φορά, οπότε παίρνουμε τον **επαυξημένο κολοβό κύβο (J66),**

2 φορές (σε απέναντι πλευρές), οπότε παίρνουμε το **διεπαυξημένο κολοβό κύβο (J67).**

<table>
<tr><td colspan="2">Κόλουρος κύβος
</td></tr>
<tr><td>
επαυξημένος κολοβός κύβο</td><td>
διεπαυξημένος κολοβός κύβο</td></tr>
</table>

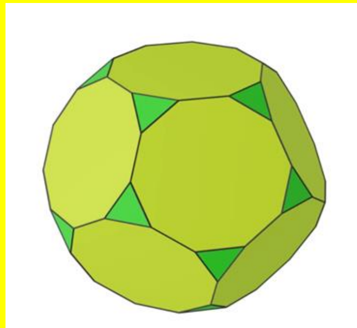
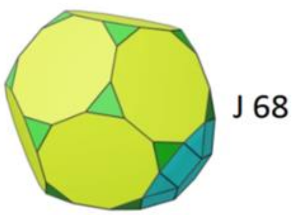
Ξεκινώντας από το κόλουρο δωδεκάεδρο (3.10.10), μπορούμε να το ενώσουμε με πενταγωνικό θόλο (J5):

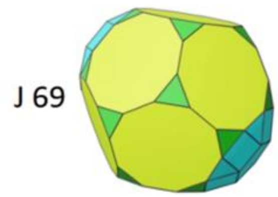
1 φορά, οπότε παίρνουμε το **επαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο (J68),**

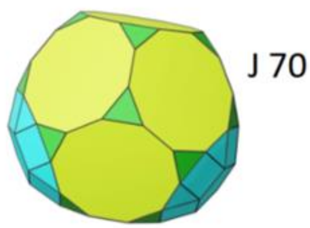
2 φορές σε απέναντι έδρες, οπότε παίρνουμε το **παραδιεπαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο (J69),**

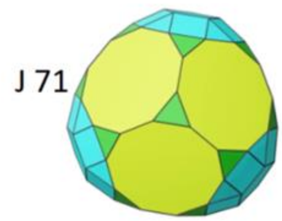
2 φορές, όχι σε απέναντι έδρες, ούτε γειτονικές, οπότε παίρνουμε το **μεταδιεπαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο (J70),**

3 φορές, όχι σε γειτονικές έδρες, οπότε παίρνουμε το **τριεπαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο (J71).**

<table>
<tr><td colspan="3">Κόλουρο δωδεκάεδρο
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

επαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο</td><td colspan="2">

παραδιεπαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο</td></tr>
<tr><td>

μεταδιεπαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο</td><td>

τριεπαυξημένο κολοβό δωδεκάεδρο</td></tr>
</table>

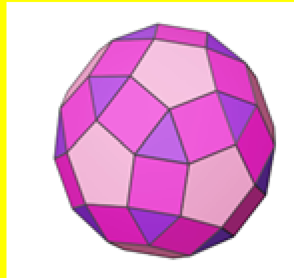
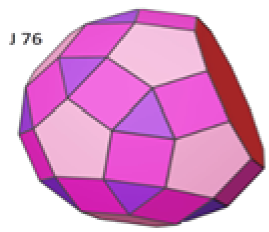
Θεωρώντας το ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (3.4.5.4), μπορούμε να του αφαιρέσουμε:

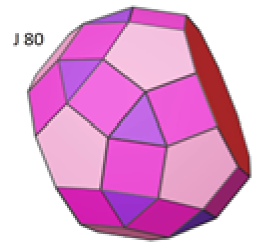
1 πενταγωνικό θόλο (J5) και να πάρουμε το **ελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J76),**

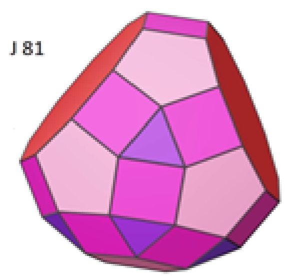
2 απέναντι πενταγωνικούς θόλους (J5) και να πάρουμε το **παραδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J80),**

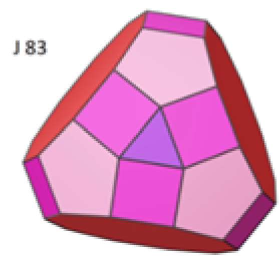
2 πενταγωνικούς θόλους (J5) που δεν είναι απέναντι και να πάρουμε το **μεταδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J81),**

3 πενταγωνικούς θόλους (J5) και να πάρουμε το **τριδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J83).**

<table>
<tr><td colspan="3">Ρομβεικοσιδωδεκάεδρο
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

ελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td><td colspan="2">

παραδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td></tr>
<tr><td>

μεταδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td><td>

τριδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td></tr>
</table>

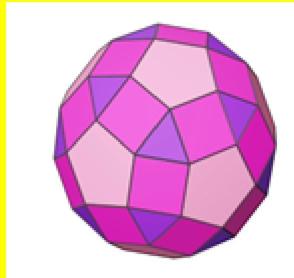
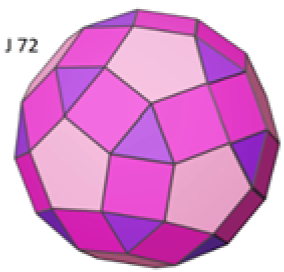
Επίσης, (πάλι στο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο) μπορούμε να περιστρέψουμε:

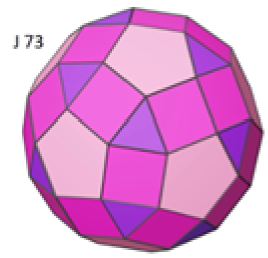
1 πενταγωνικό θόλο (J5) και να πάρουμε το **γυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο (J72),**

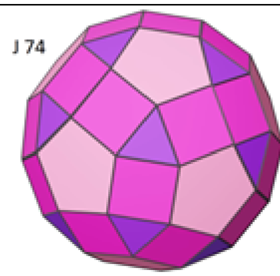
2 απέναντι πενταγωνικούς θόλους (J5) και να πάρουμε το **παραγυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο (J73),**

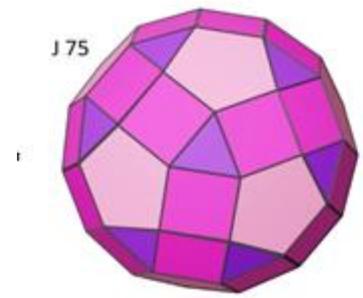
2 πενταγωνικούς θόλους (J5) που δεν είναι απέναντι και να πάρουμε το **μεταγυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο (J74),**

3 πενταγωνικούς θόλους (J5) και να πάρουμε το **τριγυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο (J75).**

<table>
<tr><td colspan="3">Ρομβεικοσιδωδεκάεδρο
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

γυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο</td><td colspan="2">

παραγυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο</td></tr>
<tr><td>

μεταγυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο</td><td>

τριγυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο</td></tr>
</table>

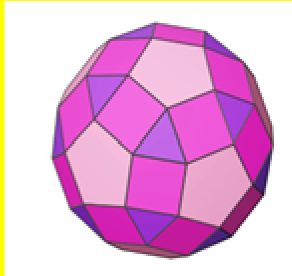
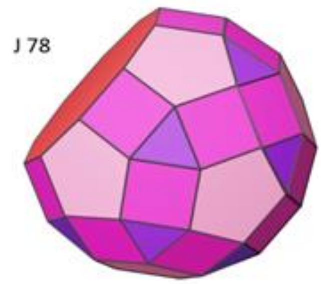
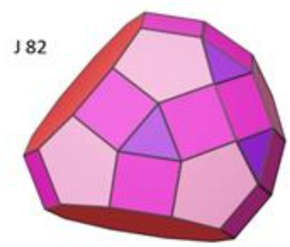
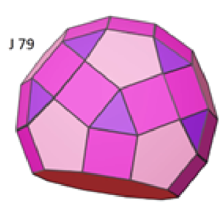
Μπορούμε, ακόμα, να συνδυάσουμε τις δύο παραπάνω διαδικασίες στο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο, ως εξής:

Περιστρέφουμε έναν πενταγωνικό θόλο (J5) και κόβουμε τον απέναντί του, παίρνοντας το **παραγυροελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J77).**

Περιστρέφουμε έναν πενταγωνικό θόλο (J5) και κόβουμε έναν άλλο ο οποίος δεν είναι απέναντι από τον πρώτο, παίρνοντας το **μεταγυροελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J78).**

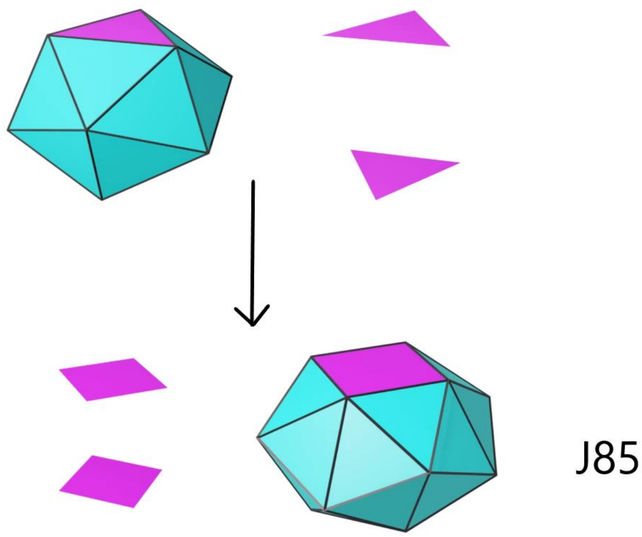
Από το (J78) κόβουμε άλλον έναν πενταγωνικό θόλο (J5) και παίρνουμε το **γυροδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J82).**

Κόβοντας έναν πενταγωνικό θόλο (J5) από το μεταγυρορομβεικοσιδωδεκάεδρο (J74), παίρνουμε το **διγυροελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο (J79)** (δηλαδή περιστροφή δύο θόλων του ρομβεικοσιδωδεκάεδρου που δεν είναι απέναντι και αφαίρεση ενός τρίτου).

<table>
<tr><td colspan="3">Ρομβεικοσιδωδεκάεδρο
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">περιστροφή ενός θόλου</td><td rowspan="2">
παραγυροελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td><td>
μεταγυροελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td></tr>
<tr><td>
γυροδιελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td></tr>
<tr><td>περιστροφή 2 θόλων</td><td colspan="2">
διγυροελαττωμένο ρομβεικοσιδωδεκάεδρο</td></tr>
</table>

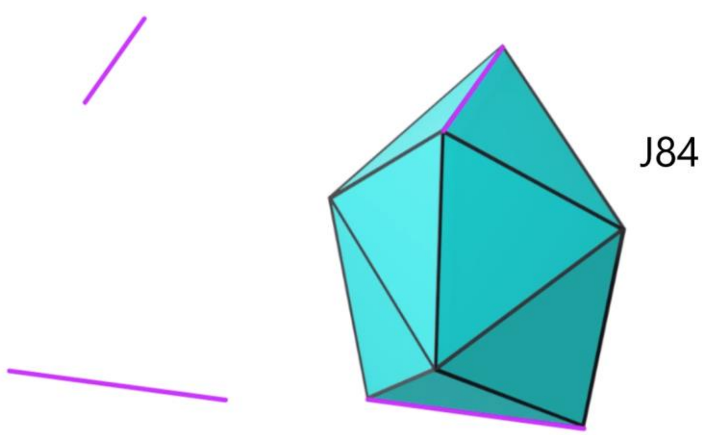
Τα τελευταία 9 στερεά του Johnson καλούνται **θεμελιώδη στερεά του Johnson**, γιατί δεν προέρχονται από καμία διαδικασία που ακολουθήσαμε πιο πάνω (ένωση και αφαίρεση).

Η ιδέα κατασκευής του πρώτου είναι η εξής: Θεωρούμε το εικοσάεδρο ως δύο παράλληλα, αλλά αντίθετα τοποθετημένα ισόπλευρα τρίγωνα τα οποία συνδέονται μέσω άλλων τριγώνων. Τοποθετώντας με τον ίδιο τρόπο 2 τετράγωνα και ενώνοντάς τα με τρίγωνα, παίρνουμε το **πεπλατυσμένο τετραγωνικό αντιπρίσμα (J85).**

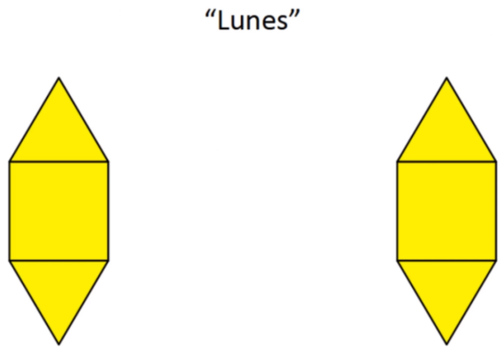


Κάνοντας το ίδιο με κανονικά πεντάγωνα, το στερεό που προκύπτει δεν είναι πλέον κυρτό.

Μπορούμε, όμως, να πάρουμε ένα νέο στερεό Johnson, το **κολοβό δισφηνοειδές (J84)** αν θεωρήσουμε 2 παράλληλα δίγωνα στο χώρο (αντί για 2 ισόπλευρα τρίγωνα) δηλαδή πρακτικά δύο ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους.



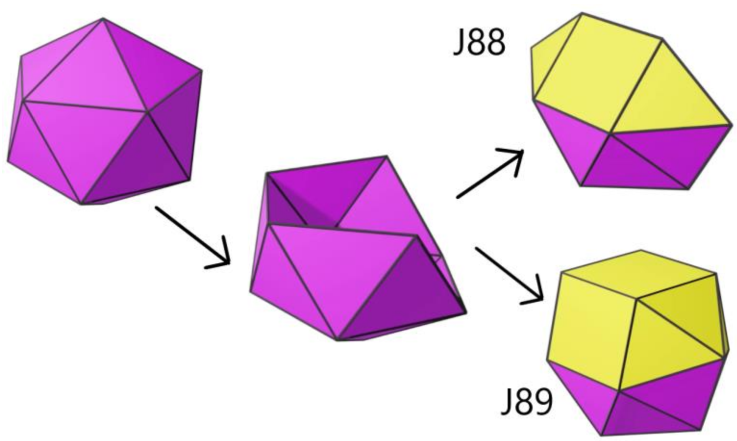
Για τα υπόλοιπα, θα χρησιμοποιήσουμε ένα πολύγωνο που καλείται **lune** και είναι ένα τετράγωνο ενωμένο με δύο ισόπλευρα τρίγωνα τα οποία είναι τοποθετημένα σε παράλληλες πλευρές του τετραγώνου.



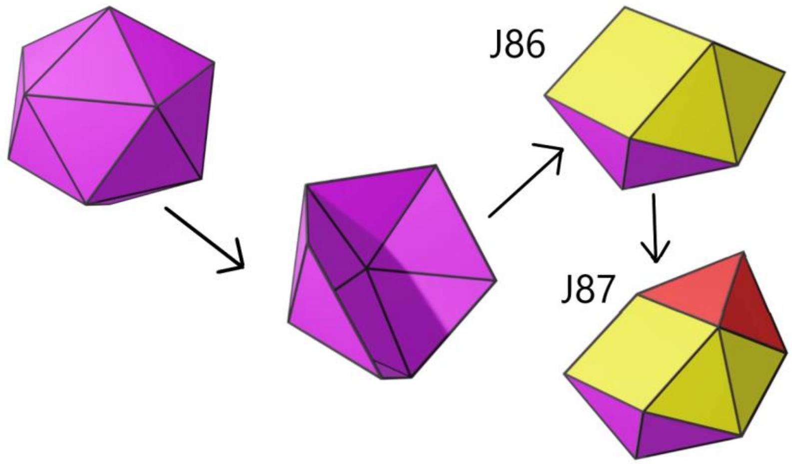
Παίρνουμε, τώρα το εικοσάεδρο και του αφαιρούμε 8 γειτονικά τρίγωνα. Με κατάλληλη προσαρμογή σ' αυτό που απομένει, μπορούμε να προσθέσουμε:

2 lunes και να πάρουμε τη **σφηνομεγακορώνα (J88),**

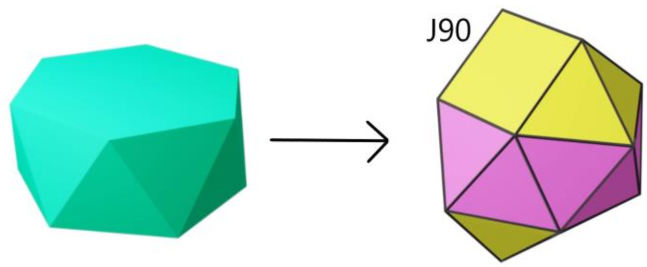
3 lunes και να πάρουμε την **ηβησφηνομεγακορώνα (J89).**



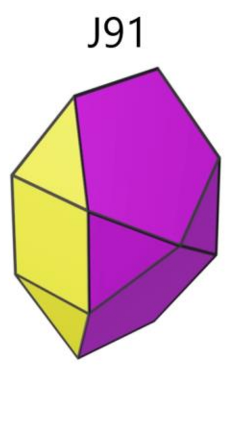
Αφαιρώντας πάλι από το εικοσάεδρο 12 έδρες και με κατάλληλη προσαρμογή του εναπομείναντος σχήματος, του προσθέτουμε 2 lunes και παίρνουμε τη **σφηνοκορώνα (J86).** Ενώνοντας τη σφηνοκορώνα (J86) με μία τετραγωνική πυραμίδα (J4) παίρνουμε την **επαυξημένη σφηνοκορώνα (J87).**



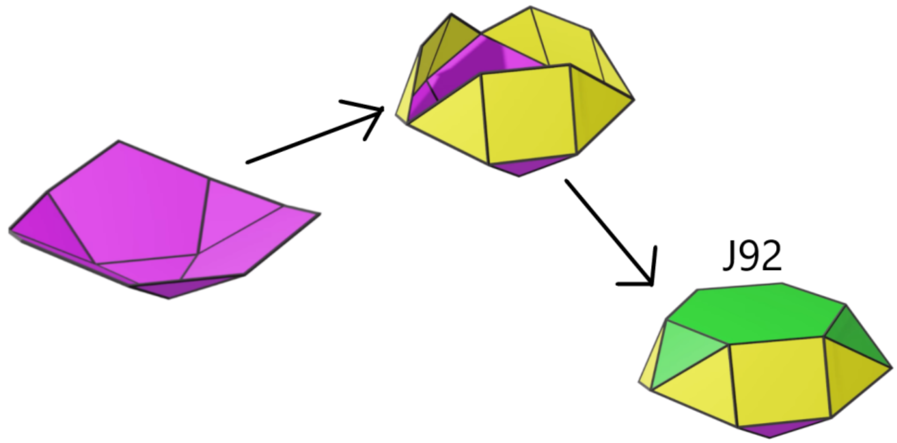
Στο εξαγωνικό αντιπρίσμα προσθέτουμε 2 lunes από πάνω και 2 από κάτω και παίρνουμε το **disphenocingulum (J90):**



Παίρνουμε τώρα 2 τρίγωνα και 2 πεντάγωνα από τη ροτόντα (J6). Ενώνοντας 2 τέτοια σχήματα με 2 lunes, παίρνουμε τη **bilunabirotunda (J91):**



Τέλος, μπορούμε να πάρουμε 3 πεντάγωνα και 4 τρίγωνα από τη ροτόντα (J6) και να ενώσουμε αυτό που προκύπτει με 3 lunes. Το στερεό κλείνει με 3 τρίγωνα και ένα εξάγωνο και καλείται **τριγωνική ηβησφηνοροτόντα (J92):**



Συμπέρασμα: Τα κυρτά πολύεδρα με κανονικές έδρες είναι τα 5 Πλατωνικά στερεά, τα 13 Αρχιμήδεια, τα 92 στερεά του Johnson και οι άπειρες οικογένειες των πρισμάτων και αντιπρισμάτων. Παρακάτω θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα των Πλατωνικών και των Αρχιμήδειων στερεών, ενώ για τη μοναδικότητα των στερεών του Johnson ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Victor Zalgaller, *Convex Polyhedra with Regular Faces* (1969).

1.8 Γραφήματα

Ορισμός: Γράφημα ή γράφος G είναι ένα ζεύγος συνόλων (V, E), όπου V είναι ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο N_0 στοιχείων και E ένα πεπερασμένο σύνολο N_1 ζευγών με στοιχεία του συνόλου V.

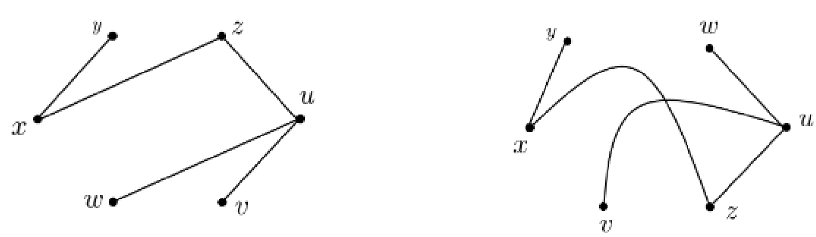
Τα στοιχεία του V ονομάζονται κόμβοι ή κορυφές και το V σύνολο κόμβων ή σύνολο κορυφών, ενώ τα στοιχεία του E ακμές και το E σύνολο ακμών.

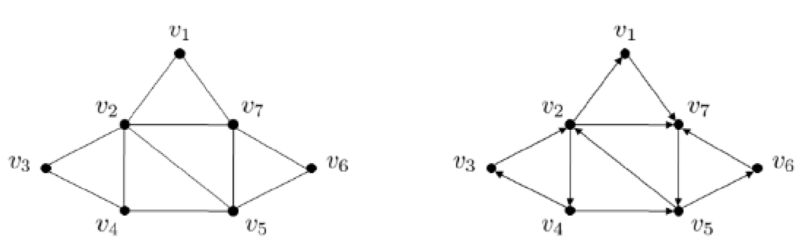
Αν τα στοιχεία-ζεύγη του συνόλου E είναι μη διατεταγμένα, τότε το γράφημα καλείται μη κατευθυνόμενο, αλλιώς κατευθυνόμενο.

Παράδειγμα: $G = (V, E)$, όπου $V = \{x, y, z, u, v, w\}, E = \{xy, xz, zu, uv, uw\}$.

Αναπαράσταση γραφήματος: Έστω G ένα γράφημα, $V(G)$ το σύνολο κόμβων του G και $E(G)$ το σύνολο των ακμών του. Τα στοιχεία του $V(G)$ τα αναπαριστούμε με σημεία και τα στοιχεία του $E(G)$ με ευθείες ή τεθλασμένες γραμμές.

Έτσι, δύο τρόποι αναπαράστασης του γραφήματος του παραπάνω παραδείγματος είναι οι παρακάτω:

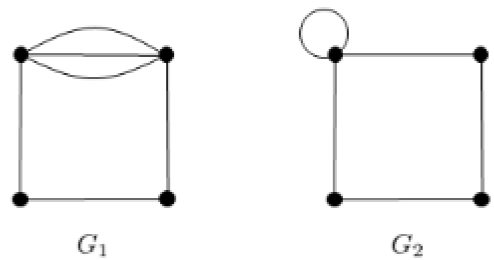




G_1 G_2

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G_1 και ένα κατευθυνόμενο γράφημα G_2.

Ορισμός: Η ακμή $xx \in E(G)$ ονομάζεται <u>βρόχος</u>. Δύο ή περισσότερες ακμές $xy \in E(G)$ οι οποίες προσπίπτουν στο ίδιο ζεύγος κόμβων ονομάζονται <u>παράλληλες ακμές</u>. Ένα γράφημα χωρίς βρόχους και παράλληλες ακμές καλείται <u>απλό</u>.



Στο γράφημα G_1 βλέπουμε παράλληλες ακμές, ενώ στο G_2 ένα βρόχο.

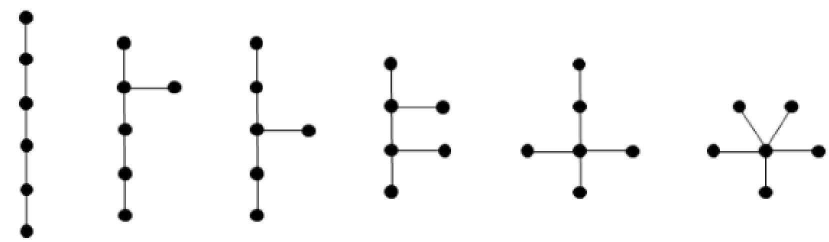
Ορισμός: Έστω G ένα απλό γράφημα. <u>Περίπατος</u> καλείται μία ακολουθία κόμβων $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ του G, αν $v_{i-1}v_i \in E$, για κάθε $i = 1,2,\dots,k$.

Ορισμός: Έστω G ένα απλό γράφημα. <u>Διαδρομή ή μονοπάτι μήκους k</u> καλείται μία ακολουθία κόμβων $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ του G, αν $v_{i-1}v_i \in E$, για κάθε $i = 1,2,\dots,k$ και δεν υπάρχει κάποιος κόμβος της P που να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές.

Ορισμός: Μία ακολουθία κόμβων $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$ ενός γραφήματος G ονομάζεται <u>κύκλος</u> (ή κύκλωμα ή κλειστή διαδρομή), αν $v_{i-1}v_i \in E$, για κάθε $i = 1,2,\dots,k-1$ και $v_{k-1}v_0 \in E$.

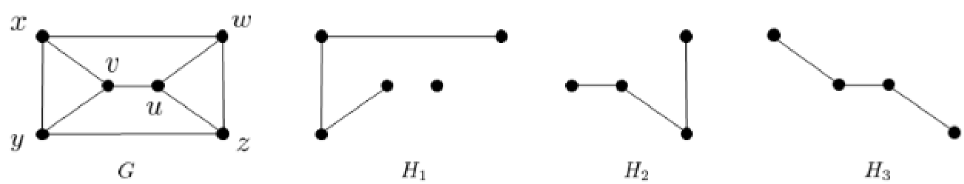
Ορισμός: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα καλείται <u>συνεκτικό</u>, αν μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κόμβων του x, y, υπάρχει μία διαδρομή $(x, v_1, v_2, \dots, v_p, y)$, $p \geq 0$ από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Ορισμός: <u>Δέντρο</u> T ονομάζεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που είναι συνεκτικό και άκυκλο.



Δέντρα

Ορισμός: Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Ένα <u>υπογράφημα</u> του γραφήματος G είναι ένα γράφημα $H = (V', E')$ τέτοιο, ώστε $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.

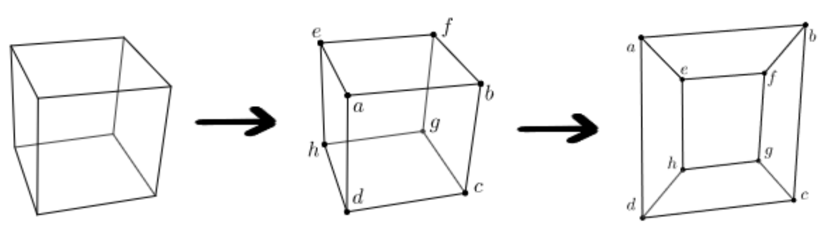


Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G και τρία υπογραφήματά του H_1, H_2 και H_3.

Αβίαστα, λοιπόν, μπορούμε να θεωρήσουμε τις ακμές και τις κορυφές ενός πολύεδρου ως τις ακμές και τους κόμβους ενός γραφήματος, αντίστοιχα, ενώ κάθε έδρα του πολυέδρου είναι ένα κύκλωμα. Η ιδέα αυτή, μπορεί να απλουστεύσει αρκετά τη μελέτη των πολυέδρων, αν λάβουμε υπόψη ότι ένα γράφημα μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς τρόπους. Έτσι, το γράφημα ενός πολυέδρου μπορούμε να το μετατρέψουμε σε επίπεδο γράφημα με ακριβώς τον ίδιο αριθμό κόμβων, ακμών και επιφανειών (που αντιστοιχούν στις έδρες του πολύεδρου) θεωρώντας και το χώρο έξω από το γράφημα ως επιφάνεια.

Παράδειγμα: Το γράφημα ενός κύβου:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$
$$E = \{ab, bc, cd, da, ef, fg, gh, he, ae, bf, cg, dh\}.$$



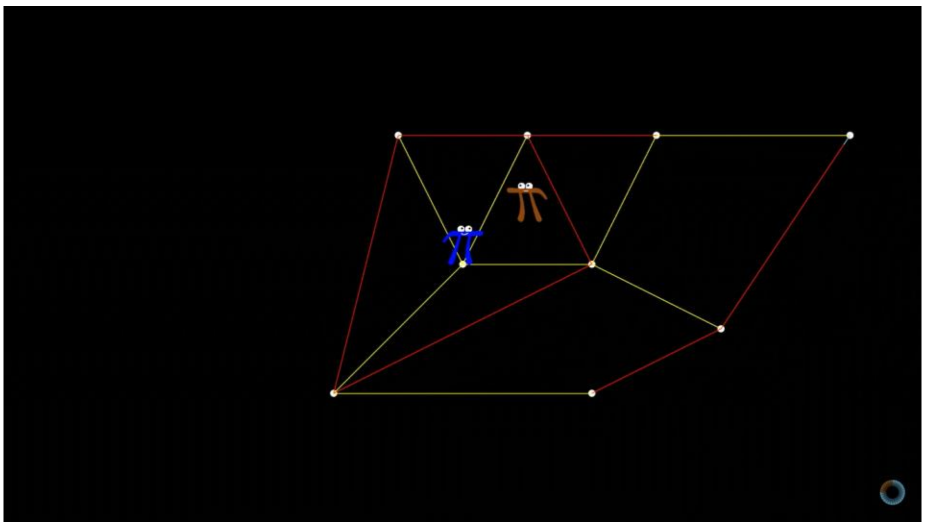
1.9 Ο τύπος του Euler

Για ένα κυρτό πολύεδρο με V κορυφές, E ακμές και F έδρες ισχύει ο τύπος:

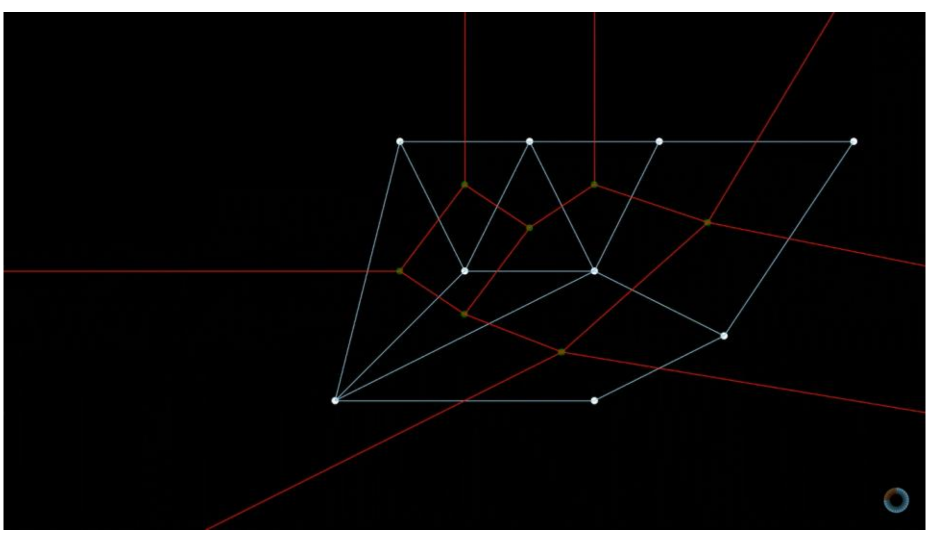
$$V - E + F = 2$$

Παρακάτω δίνεται η απόδειξη του von Staudt:

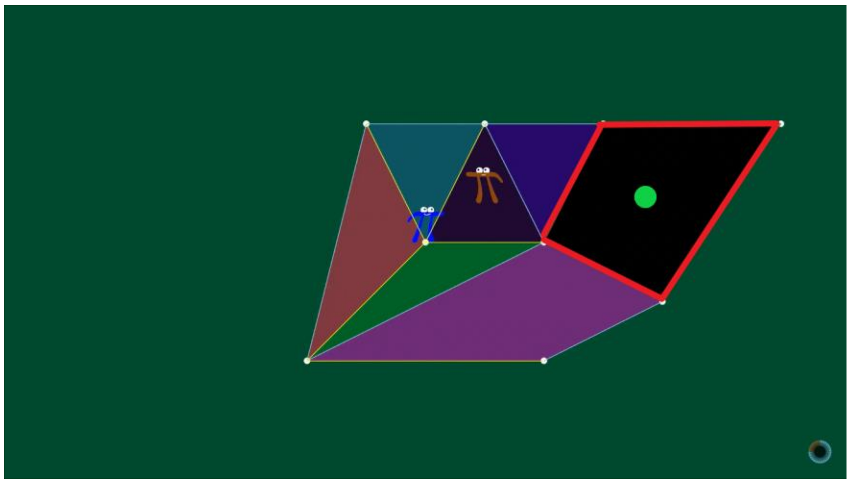
Θεωρούμε το επίπεδο γράφημα του πολύεδρου και φτιάχνουμε ένα δέντρο (υπογράφημα) με V κόμβους, ενώνοντας τους V κόμβους του γραφήματος (κορυφές του πολύεδρου). Τότε, οι ακμές του δέντρου είναι V-1. Προφανώς, υπάρχουν ακμές του γραφήματος που δεν ανήκουν στο δέντρο.



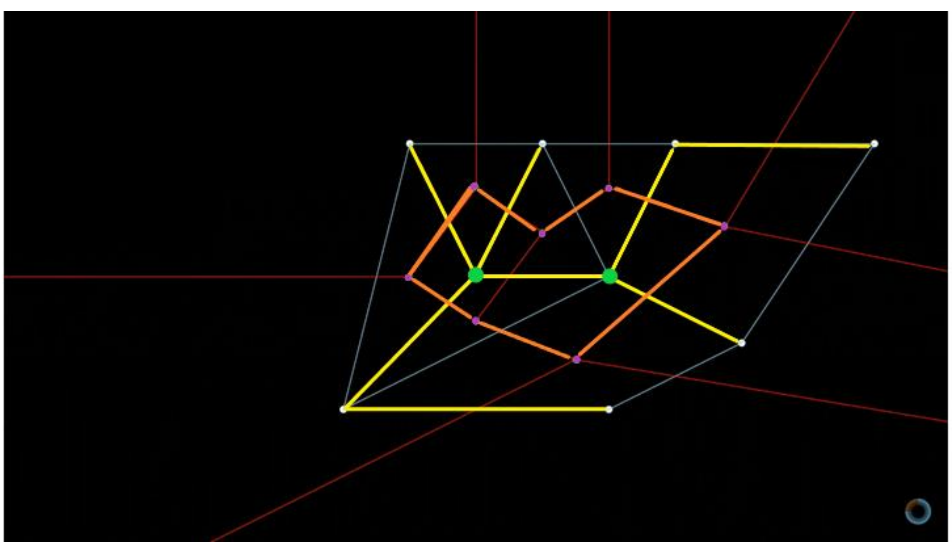
Θεωρούμε, τώρα, το δυϊκό γράφημα του αρχικού, το οποίο έχει ένα κόμβο μέσα σε κάθε επιφάνεια του αρχικού γραφήματος, δηλαδή F κόμβους. Οι ακμές του είναι όσες και του αρχικού γραφήματος.



Θεωρούμε τις αντίστοιχες ακμές στο δυϊκό γράφημα με αυτές του αρχικού που δεν ανήκουν στο δέντρο και τις ενώνουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε ενώνοντας τις κορυφές του δυϊκού, (δηλαδή τις επιφάνειες του αρχικού), οι ακμές του υπογραφήματος που φτιάχνουμε να μη διασταυρώνονται με αυτές του δέντρου. Ισχυριζόμαστε ότι φτιάξαμε ένα νέο δέντρο στο δυϊκό γράφημα. Καταρχάς, ενώνει και τους F κόμβους του δυϊκού και είναι συνεκτικό, γιατί για να είχε έναν απομονωμένο κόμβο, θα έπρεπε το δέντρο να έχει κάποιο κύκλωμα που να απομονώνει μία περιοχή του αρχικού γραφήματος. Άτοπο, αφού τα δέντρα δεν έχουν κυκλώματα.



Επίσης, αν το υπογράφημα του δυϊκού είχε κύκλωμα, τότε μέσα σ' αυτό το κύκλωμα θα υπήρχαν κόμβοι του αρχικού γραφήματος οι οποίοι θα ήταν απομονωμένοι από το δέντρο. Άτοπο, αφού τα δέντρα είναι συνεκτικά. Άρα, το υπογράφημα του δυϊκού γραφήματος είναι κι αυτό δέντρο και έχει F-1 ακμές.



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε με κίτρινο το δέντρο του αρχικού γραφήματος, που ενώνει όλους τους κόμβους του, με κόκκινο το δυϊκό και με πορτοκαλί το κύκλωμα του δυϊκού που "περικυκλώνει" 2 (πράσινες) κορυφές του αρχικού δέντρου.

Τελικά, κάθε ακμή του επίπεδου γραφήματος (άρα και του πολύεδρου) είναι είτε ακμή του αρχικού δέντρου, είτε διασταυρώνεται με μία ακμή του δυϊκού δέντρου.

Άρα,

$$(V-1)+(F-1)=E$$
$$V-E+F=2 \blacksquare$$

1.10 Η μοναδικότητα των Πλατωνικών στερεών

Έστω ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο με V κορυφές, E ακμές και F έδρες. Έστω, επίσης, n ο βαθμός (αριθμός των ακμών) κάθε έδρας και d ο βαθμός κάθε κορυφής, δηλαδή ο αριθμός των ακμών που «συναντιούνται» σε κάθε κορυφή. Τότε, ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\sum_{i=1}^{V} \deg(v_i) = 2E, \textit{όπου } v_i \textit{ η } i\textit{-στή κορυφή του πολύεδρου}$$

$$\sum_{i=1}^{F} \deg(f_i) = 2E, \textit{όπου } f_i \textit{ η } i\textit{-στή έδρα του πολύεδρου}$$

Επειδή το πολύεδρο είναι κανονικό, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$Vd = 2E \textit{ και } Fn = 2E$$
$$\text{ή } V = \frac{2E}{d} \textit{ και } F = \frac{2E}{n}$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{2E}{d}+\frac{2E}{n}=V+F$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler ($V-E+F=2$):

$$\frac{2E}{d}+\frac{2E}{n}=E+2$$

Διαιρούμε με $2E$:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{E}$$

Επειδή $E>0$, προκύπτει η ανισότητα:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2} \, (*)$$

Παρατηρούμε ότι για μεγάλα n, d η παραπάνω ανισότητα είναι ψευδής. Για παράδειγμα, αν $n = d = 4$, δίνει:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

Επίσης,

$$n \geq 3$$

αφού δεν υπάρχει «δίγωνο» και

$$d \geq 3$$

αφού δεν μπορεί να υπάρξει κορυφή πολύεδρου με μόνο δύο ακμές.

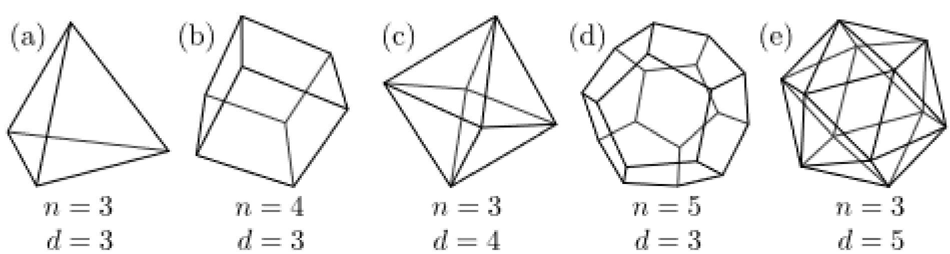
Ακόμα, αν θέσουμε κάποιο από τα n, d ίσο με 6, έστω το n, η (*) δίνει:

$$d < 3, άτοπο.$$

Συνεπώς, τα μόνα επιτρεπτά ζεύγη (n, d) είναι τα:

(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3).

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι τα κυρτά κανονικά πολύεδρα είναι ακριβώς 5.■



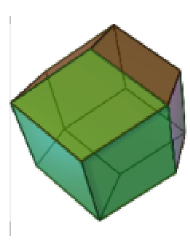
Όνομα κανονικού πολύεδρου	V	E	F	d	N
(a) Τετράεδρο	4	6	4	3	3
(b) Κύβος	8	12	6	3	4
(c) Οκτάεδρο	6	12	8	4	3
(d) Δωδεκάεδρο	20	30	12	3	5
(e) Εικοσάεδρο	12	30	20	5	3

1.11 Το δωδεκάεδρο του ταξιδιώτη

Το 1857, ο Hamilton έφτιαξε ένα μαθηματικό παιχνίδι: Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές ενός πολύεδρου (δωδεκάεδρο στο παιχνίδι) αναπαριστούν πόλεις που θέλουμε να επισκεφτούμε και οι ακμές του τις πιθανές "διαδρομές" που μπορούμε να ακολουθήσουμε. Θέλουμε να φτιάξουμε μία μοναδική διαδρομή η οποία να διέρχεται από όλες τις κορυφές του πολύεδρου μία και μοναδική φορά από την καθεμία. Στην περίπτωση που παραλλάξουμε ελαφρώς το παιχνίδι και απαιτήσουμε η τελευταία κορυφή να είναι ίδια με την αρχική, προκύπτει ένας κύκλος και ονομάζεται <u>χαμιλτονιανός κύκλος</u>.

Το παιχνίδι λεγόταν "Το δωδεκάεδρο του ταξιδιώτη" (The Icosian Game) και βγήκε στην αγορά του Λονδίνου το 1859. Δεν απέκτησε ιδιαίτερη απήχηση, καθώς ήταν πολύ εύκολο να βρει κάποιος μία διαδρομή που περνάει από όλες τις πόλεις μία φορά.

Να σημειωθεί, επίσης, ότι όλα τα Πλατωνικά, όπως και τα Αρχιμήδεια στερεά έχουν χαμιλτονιανούς κύκλους. Δεν ισχύει, όμως το ίδιο για τα δυϊκά των Αρχιμήδειων. Για παράδειγμα, όπως έδειξαν οι Coxeter και Rosenthal το 1946, το ρομβικό δωδεκάεδρο (δυϊκό του κυβοκτάεδρου) δεν έχει χαμιλτονιανό κύκλο.



1.12 Η μοναδικότητα των Αρχιμήδειων στερεών

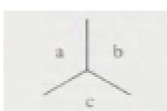
Παρακάτω θα δείξουμε τη μοναδικότητα των Αρχιμήδειων στερεών, δηλαδή ότι είναι ακριβώς τα 13 που κατασκευάσαμε, ακολουθώντας την απόδειξη του Kepler. Πρώτα, όμως θα αποδείξουμε 2 βοηθητικά λήμματα. Στην απόδειξη του πρώτου λήμματος, όπως και στην απόδειξη της μοναδικότητας των Αρχιμήδειων στερεών θα γίνει εκτενής χρήση ενός θεωρήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, σύμφωνα με το οποίο: Το άθροισμα των πολυγωνικών γωνιών που συνιστούν μια στερεά γωνία ενός πολυέδρου πρέπει να είναι μικρότερο από $360°$.

Λήμμα 1 (Kepler): Αν οι έδρες ενός κυρτού πολυέδρου είναι όλες κανονικά πολύγωνα, τότε κάθε στερεά γωνία του πολυέδρου συνίσταται από το πολύ 3 διαφορετικού τύπου έδρες.

Απόδειξη: Τα 4 κανονικά πολύγωνα με τις μικρότερες εσωτερικές γωνίες είναι το ισόπλευρο τρίγωνο ($60°$), το τετράγωνο ($90°$), το κανονικό πεντάγωνο ($108°$) και το κανονικό εξάγωνο ($120°$). Ας θεωρήσουμε, προς άτοπο, ότι σε κάθε κορυφή ενός κυρτού πολυέδρου συναντώνται ακριβώς αυτά τα 4 πολύγωνα. Τότε, το άθροισμα των γωνιών τους είναι $60° + 90° + 108° + 120° = 378° > 360°$, που είναι άτοπο! ■

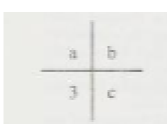
Λήμμα 2 (Kepler): Ένα πολύεδρο του οποίου οι στερεές γωνίες είναι όλες πανομοιότυπες **δεν** μπορεί να έχει τις ακόλουθες στερεές γωνίες:

(i)



όπου a περιττός και $b \neq c$

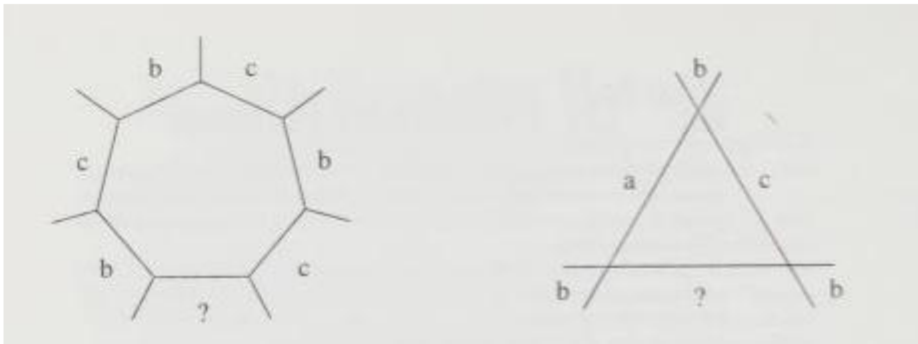
(ii)



όπου $a \neq c$.

Απόδειξη: (i) Λόγω της απαίτησης πανομοιότυπων στερεών γωνιών, σε κάθε κορυφή συναντιούνται 3 πολύγωνα (ένα a-γωνο, ένα b-γωνο κι ένα c-γωνο). Αυτό σημαίνει, ότι αν θεωρήσουμε ένα a-γωνο, τότε οι πλευρές του συνορεύουν εναλλάξ με ένα b-γωνο κι ένα c-γωνο. Αν όμως ο a είναι περιττός και $b \neq c$, τότε οδηγούμαστε σε άτοπο!

(ii) Σε κάθε γωνία, απέναντι από κάθε τρίγωνο βρίσκεται ένα b-γωνο. Επειδή οι στερεές γωνίες είναι όλες πανομοιότυπες, οι πλευρές του τριγώνου πρέπει να συνορεύουν εναλλάξ με a-γωνα και c-γωνα, που είναι άτοπο! ■



Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ότι τα Αρχιμήδεια στερεά είναι πράγματι 13:

Καταρχάς, όπως και στην απόδειξη της μοναδικότητας των Πλατωνικών στερεών, έτσι κι εδώ, υποθέτουμε ότι σε κάθε κορυφή του πολυέδρου συναντιούνται τουλάχιστον 3 πολύγωνα.

Θα εξετάσουμε τι συμβαίνει σε κάθε περίπτωση όπου κάθε στερεά γωνία απαρτίζεται από n τύπους πολυγώνων:

Για $n = 1$ πολύγωνο, παίρνουμε τα Πλατωνικά στερεά. Οπότε, δε μας ενδιαφέρει αυτή η περίπτωση.

Για $n \geq 4$ το Λήμμα 1 μας εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχει τέτοιο κυρτό πολύεδρο.

Επομένως, απομένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $n = 2$ και $n = 3$.

Για $n = 2$:

(1) <u>Τα πολύγωνα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο</u>

- Αν έχουμε μόνο ένα τετράγωνο, τότε έχουμε το πολύ 4 τρίγωνα, γιατί αν είχαμε 5 τρίγωνα:

  $$5 \cdot 60° + 90° = 390° > 360°.$$

  Άρα, παίρνουμε τα εξής πιθανά στερεά:

  (3.3.4): απορρίπτεται από το Λήμμα 2(i),

  (3.3.3.4): απορρίπτεται, επειδή ανήκει στην οικογένεια των αντιπρισμάτων,

  (3.3.3.3.4): κολοβός κύβος.

- Αν έχουμε δύο τετράγωνα, τότε έχουμε το πολύ δύο τρίγωνα, γιατί αν είχαμε 3 τρίγωνα:

$$3 \cdot 60° + 2 \cdot 90° = 360°.$$

Άρα, παίρνουμε τα εξής πιθανά στερεά:

(3.3.4.4): απορρίπτεται από το Λήμμα 2(ii),

(3.4.3.4): κυβοκτάεδρο,

(3.4.4): απορρίπτεται, επειδή ανήκει στην οικογένεια των πρισμάτων.

- Αν έχουμε 3 τετράγωνα, τότε έχουμε αναγκαστικά ένα τρίγωνο, γιατί αν είχαμε 2 τρίγωνα:

$$3 \cdot 90° + 2 \cdot 60° = 390° > 360°.$$

Άρα, παίρνουμε το **(3.4.4.4), που είναι το ρομβοκυβοκτάεδρο.**

(2) <u>Τα πολύγωνα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και το κανονικό πεντάγωνο</u>

- Αν έχουμε ένα πεντάγωνο, τότε έχουμε το πολύ 4 τρίγωνα, γιατί αν είχαμε 5 τρίγωνα:

$$5 \cdot 60° + 108° = 408° > 360°.$$

Άρα, παίρνουμε τα εξής πιθανά στερεά:

(3.3.3.3.5): κόλουρο δωδεκάεδρο,

(3.3.3.5): απορρίπτεται, επειδή ανήκει στην οικογένεια των αντιπρισμάτων.

- Αν έχουμε 2 πεντάγωνα, τότε έχουμε το πολύ 3 τρίγωνα, γιατί αν είχαμε 4 τρίγωνα:

$$4 \cdot 60° + 2 \cdot 108° = 600° > 360°.$$

Άρα, παίρνουμε τα εξής πιθανά στερεά:

(3.3.5.5): απορρίπτεται από το Λήμμα 2(ii),
(3.5.3.5): εικοσιδωδεκάεδρο,
(3.5.5): απορρίπτεται από το Λήμμα 2(i).

- Αν έχουμε 3 ή περισσότερα πεντάγωνα, τότε ακόμα και με ένα τρίγωνο δεν μπορεί να προκύψει πολύεδρο, καθώς:

$$60° + 3 \cdot 108° = 384° > 360°.$$

(3) <u>Τα πολύγωνα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και το κανονικό εξάγωνο</u>

- Αν έχουμε ένα εξάγωνο, τότε έχουμε το πολύ 3 τρίγωνα, γιατί αν είχαμε 4 τρίγωνα:

$$4 \cdot 60° + 120° = 360°.$$

Άρα, παίρνουμε τα εξής πιθανά στερεά:

(3.3.3.6): απορρίπτεται, επειδή ανήκει στην οικογένεια των αντιπρισμάτων,

(3.3.6): απορρίπτεται από το Λήμμα 2(i),

Δηλαδή δεν παίρνουμε κανένα Αρχιμήδειο στερεό.

- Αν έχουμε 2 εξάγωνα, τότε αναγκαστικά έχουμε ένα τρίγωνο, γιατί αν είχαμε 2 ή περισσότερα τρίγωνα:

$$2 \cdot 60° + 2 \cdot 120° = 360°.$$

Άρα, παίρνουμε το **(3.6.6), που είναι το κόλουρο τετράεδρο.**

- Αν έχουμε 3 ή περισσότερα εξάγωνα, τότε ακόμα και με ένα τρίγωνο δεν μπορεί να προκύψει πολύεδρο, καθώς:

$$60° + 3 \cdot 120° = 420° > 360°.$$

(4) <u>Τα πολύγωνα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο και το κανονικό n-γωνο, με $n \geq 7$</u>

- Αν έχουμε ένα n-γωνο, τότε έχουμε το πολύ 3 τρίγωνα, γιατί αν είχαμε 4 τρίγωνα:

$$4 \cdot 60° + (1 - \frac{2}{7}) \cdot 180° \approx 368° > 360°.$$

Άρα, παίρνουμε τα εξής πιθανά στερεά:

(3.3.3.n): απορρίπτεται, επειδή ανήκει στην οικογένεια των αντιπρισμάτων,

(3.3.n): απορρίπτεται από το Λήμμα 2(i).

Δηλαδή δεν παίρνουμε κανένα Αρχιμήδειο στερεό.

- Αν έχουμε περισσότερα από ένα n-γωνο, τότε η μόνη πιθανή περίπτωση είναι να έχουμε 2 n-γωνα και ένα τρίγωνο.
Πράγματι, αν είχαμε 3 n-γωνα και έστω ένα τρίγωνο, τότε:

$$3 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180° + 60° = 600° - \frac{1080°}{n} \geq 445° > 360°,$$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ n \geq 7 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$600° - \frac{1080°}{n} \geq 600° - \frac{1080°}{7} \approx 445°.$$

Για 2 n-γωνα και 2 τρίγωνα:

$$2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180° + 2 \cdot 60° = 480° - \frac{720°}{n} \geq 377° > 360°,$$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\; n \geq 7 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{7} \Rightarrow$$
$$480° - \frac{720°}{n} \geq 480° - \frac{720°}{7} \approx 377°.$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε από το Λήμμα 2(i) δεν έχουμε πολύεδρο. Επίσης, αν το n είναι μεγαλύτερο του 10 (και άρτιος), έστω 12, τότε ακόμα και με ένα τρίγωνο παίρνουμε:

$$2 \cdot \left(1 - \frac{2}{12}\right) \cdot 180° + 60° = 360°.$$

Τελικά, μας μένουν οι περιπτώσεις:

(3.8.8): κόλουρος κύβος,

(3.10.10): κόλουρο δωδεκάεδρο.

Αυτή ήταν και η τελευταία περίπτωση με 2 πολύγωνα, το ένα από τα οποία να είναι τρίγωνο.

(5) Τα πολύγωνα είναι το τετράγωνο και το κανονικό n-γωνο, με $n \geq 5$

- Αν έχουμε ένα n-γωνο, τότε έχουμε 2 τετράγωνα, γιατί αν είχαμε 3:

  $$\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180° + 3 \cdot 90° = 450° - \frac{360°}{n} \geq 450° - \frac{360°}{5} = 378° > 360°.$$

  Άρα, παίρνουμε την περίπτωση $(4.4.n)$, το οποίο όμως είναι πρίσμα.

- Αν έχουμε 2 n-γωνα, τότε έχουμε ένα τετράγωνο, γιατί αν είχαμε 2:

  $$2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180° + 2 \cdot 90° = 540° - \frac{720°}{n}$$
  $$\geq 540° - \frac{720°}{5} = 396° > 360°.$$

  Τότε, παίρνουμε το $(4.n.n)$. Αν $n \geq 8$:

  $$2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180° + 90° = 450° - \frac{720°}{n} \geq 450° - \frac{720°}{8} = 360°.$$

  Επίσης, το n δεν μπορεί να είναι περιττός, από το Λήμμα 2(i). Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι το **(4.6.6), δηλαδή το κόλουρο οκτάεδρο.**

- Αν έχουμε 3 ή περισσότερα n-γωνα, ακόμα και με ένα τετράγωνο, δεν παίρνουμε νέο πολύεδρο, αφού:

  $$3 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180° + 90° = 630° - \frac{1080°}{n}$$
  $$\geq 630° - \frac{1080°}{5} = 414° > 360°.$$

(6) Τα πολύγωνα είναι το κανονικό πεντάγωνο και το κανονικό n-γωνο, με $n \geq 6$

- Αν έχουμε ένα n-γωνο, τότε μπορούμε να έχουμε μέχρι 2 πεντάγωνα, γιατί αν είχαμε 3, τότε:

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° + 3\cdot 108° = 504° - \frac{360°}{n}$$
$$\geq 504° - \frac{360°}{6} = 444° > 360°.$$

Άρα, προκύπτει μόνο η περίπτωση $(5.5.n)$, που απορρίπτεται από το Λήμμα 2(i).

- Αν έχουμε 2 n-γωνα, τότε αν είχαμε 2 πεντάγωνα:

$$2\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° + 2\cdot 108° = 576° - \frac{720°}{n}$$
$$\geq 576° - \frac{720°}{6} = 456° > 360°.$$

Άρα, παίρνουμε την οικογένεια $(5.n.n)$, $n \geq 6$. Για $n = 6$, έχουμε το **κόλουρο εικοσάεδρο (5.6.6).**

Για $n > 6$, δεν παίρνουμε κάποιο νέο πολύεδρο, αφού:

$$2\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° + 108° = 468° - \frac{720°}{n}$$
$$\geq 468° - \frac{720°}{7} \approx 365° > 360°.$$

- Αν έχουμε 3 ή περισσότερα n -γωνα, δεν προκύπτει νέο πολυεδρο, αφού ακόμα και με ένα πεντάγωνο:

$$3\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° + 108° = 648° - \frac{1080°}{n}$$
$$\geq 648° - \frac{1080°}{6} \approx 468° > 360°.$$

(7) Η περίπτωση <u>τα πολύγωνα είναι το κανονικό εξάγωνο και το κανονικό n -γωνο, με $n \geq 7$,</u> δε δίνει κάποιο πολύεδρο, αφού ακόμα κι αν έχουμε 2 εξάγωνα κι ένα επτάγωνο:

$$2\cdot\left(1-\frac{2}{6}\right)\cdot 180° + \left(1-\frac{2}{7}\right)\cdot 180° \approx 368° > 360°.$$

Για $n = 3$:

(8) <u>Τα πολύγωνα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό n-γωνο, με $n \geq 5$</u>

- Αν έχουμε ένα n-γωνο κι ένα τετράγωνο, τότε μπορούμε να έχουμε το πολύ 2 τρίγωνα, γιατί αν είχαμε 3:

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° + 90° + 3\cdot 60° = 450° - \frac{360°}{n}$$
$$\geq 450° - \frac{360°}{5} = 378° > 360°.$$

Άρα, προκύπτουν οι περιπτώσεις:
$(3.3.4.n)$: απορρίπτεται από το Λήμμα 2(ii),
$(3.4.3.n)$: απορρίπτεται από το Λήμμα 2(ii),
$(3.4.n)$: απορρίπτεται από το Λήμμα 2(i).

- Αν έχουμε ένα n-γωνο και 2 τετράγωνα, τότε μπορούμε να έχουμε μόνο ένα τρίγωνο, γιατί αν είχαμε έστω 2:
$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° + 2\cdot 90° + 2\cdot 60° = 480° - \frac{360°}{n}$$
$$\geq 480° - \frac{360°}{5} = 408° > 360°.$$
Επίσης, για ένα n-γωνο, 2 τετράγωνα κι ένα τρίγωνο, πρέπει $n < 6$, γιατί για $n \geq 6$:
$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° + 2\cdot 90° + 60° = 420° - \frac{360°}{n}$$
$$\geq 420° - \frac{360°}{6} = 360°.$$
Άρα $n = 5$ και παίρνουμε τις εξής 2 περιπτώσεις:
(3.4.4.5): απορρίπτεται από το Λήμμα 2(ii),
$(\mathbf{3.4.5.4})$: **ρομβεικοσιδωδεκάεδρο.**

(9) <u>Τα πολύγωνα είναι 3 διαφορετικά κανονικά n-γωνα, με $n \geq 4$</u>

- Έστω ότι κάθε στερεά γωνία αποτελείται από 4 πολύγωνα, τα οποία είναι τετράγωνα, πεντάγωνα και εξάγωνα. Θεωρούμε την «καλύτερη» δυνατή περίπτωση, δηλαδή τα πολύγωνα να είναι 2 τετράγωνα, ένα πεντάγωνο κι ένα εξάγωνο. Τότε, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι:
$$2\cdot 90° + 108° + 120° = 408° > 360°.$$
Οπότε, αναγκαστικά σε κάθε στερεά γωνία συναντιούνται ακριβώς 3 διαφορετικά κανονικά πολύγωνα. Τότε, από το Λήμμα 2(i), κανένα από τα 3 πολύγωνα δεν μπορεί να έχει περιττό αριθμό πλευρών.
Άρα, έχουμε τα εξής 2 Αρχιμήδεια στερεά:
(4.6.8): κόλουρο κυβοκτάεδρο,
(4.6.10): κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο.

Αν θεωρήσουμε το συνδυασμό $(4.6.n)$, με $n > 10$, τότε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι:
$$90° + 120° + \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot 180° = 390° - \frac{360°}{n} \geq 390° - \frac{360°}{12} = 360°.$$
Άρα, δεν υπάρχει άλλος συνδυασμός που να δίνει Αρχιμήδειο στερεό. ■

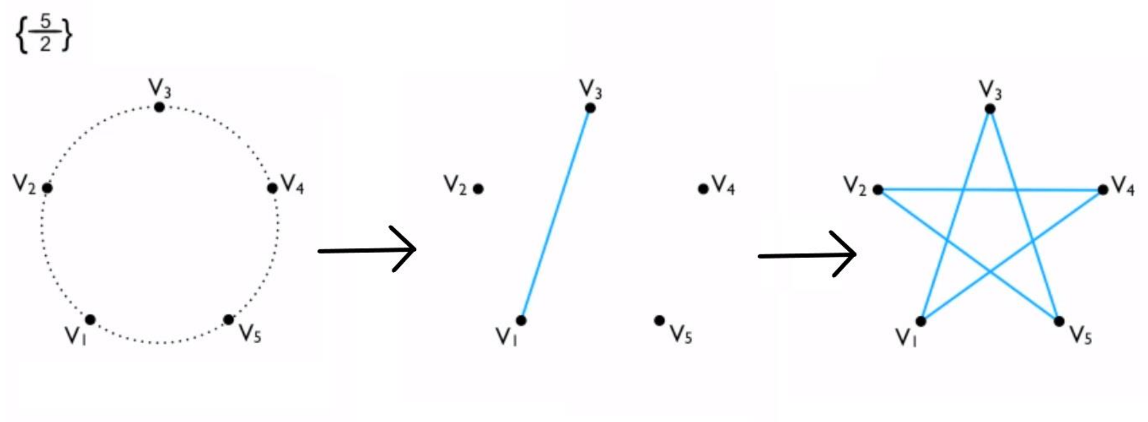
1.13 Αστεροειδή πολύγωνα και πολύεδρα

Στο κεφάλαια 1.1 θεωρήσαμε ότι οι πλευρές ενός πολυγώνου δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από τις κορυφές, δηλαδή δε διασταυρώνονται. Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 1.2 θεωρήσαμε, κατ' αντιστοιχία, ότι οι έδρες ενός πολυέδρου δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από τις ακμές και τις κορυφές τους. Αυτές ήταν βασικές υποθέσεις για να εξασφαλίσουμε την κυρτότητα τόσο των πολυγώνων, όσο και των πολυέδρων. Σ' αυτό το κεφάλαιο, θα κατασκευάσουμε μη κυρτά πολύγωνα και πολύεδρα παίρνοντας γνωστά και μάλιστα κανονικά πολύγωνα (αντ. πολύεδρα) και επεκτείνοντάς τα μέχρι οι πλευρές τους (αντ. οι έδρες τους) να τμηθούν, δηλαδή το ακριβώς αντίθετο απ' αυτό που θεωρούσαμε ως τώρα!

Ορισμός: Κανονικό αστεροειδές πολύγωνο είναι ένα αυτοτεμνόμενο, ισόπλευρο και ισογώνιο πολύγωνο. Κατασκευάζεται από ένα κανονικό κυρτό p-γωνο, συνδέοντας μια κορυφή με μια άλλη μη γειτονική κορυφή και συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή μέχρι να φτάσουμε και πάλι στην αρχική κορυφή.

Μπορούμε να συμβολίσουμε ένα κανονικό αστεροειδές πολύγωνο με το σύμβολο του Schläfli ως $\{p/q\}$, όπου $(p,q)=1$ και $q \geq 2$. Αυτό δηλώνει ότι συνδέουμε κάθε q-οστό σημείο από p σημεία ενός κύκλου τοποθετημένα σε ίσα διαστήματα μεταξύ τους (ή αλλιώς τα p σημεία ενός κανονικού p-γώνου).

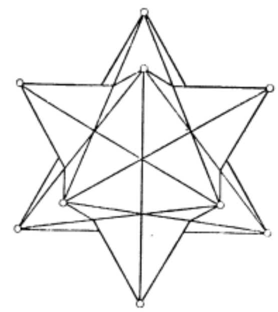
Για παράδειγμα, ας κατασκευάσουμε το κανονικό πεντάγραμμα $\{5/2\}$:



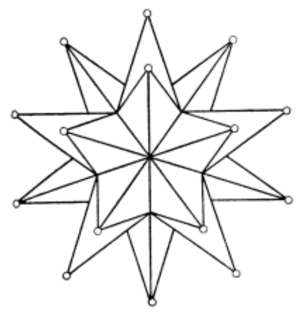
Ορισμός: Έστω $\{p/q\}$ ένα κανονικό αστεροειδές πολύγωνο. Κανονικό αστεροειδές πολύεδρο είναι ένα αυτοτεμνόμενο πολύεδρο, το οποίο προκύπτει από την ένωση r πολυγώνων $\{p/q\}$ τα οποία ενώνονται με τον ίδιο τρόπο γύρω από κάθε κορυφή του πολυέδρου, δηλαδή όλες οι στερεές γωνίες του είναι ίσες.

Συμβολίζουμε ένα κανονικό αστεροειδές πολύεδρο ως $\{p/q, r\}$.

Ενώνοντας 5 κανονικά πενταγράμματα $\{5/2\}$, παίρνουμε το **μικρό αστεροειδές δωδεκάεδρο** $\{\mathbf{5/2, 5}\}$**,** ενώ ενώνοντας 3 πενταγράμματα παίρνουμε το **μεγάλο αστεροειδές δωδεκάεδρο**. Τα πολύεδρα αυτά ονομάζονται πολύεδρα Kepler, ενώ η ονομασία τους αποδίδεται στον Arthur Cayley. Ο Kepler κατασκεύασε τα 2 αυτά πολύεδρα παίρνοντας το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο και επεκτείνοντας τις ακμές τους μέχρι να τμηθούν.

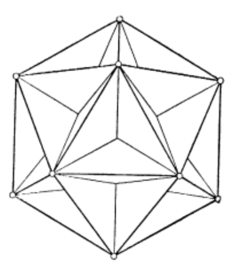


$\{\frac{5}{2}, 5\}$

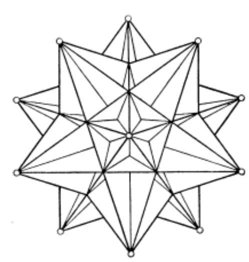


$\{\frac{5}{2}, 3\}$

Περίπου 100 χρόνια μετά τον Kepler, ο Poinsot κατασκεύασε άλλα 2 κανονικά αστεροειδή πολύεδρα, το μεγάλο δωδεκάεδρο και το μεγάλο εικοσάεδρο. Τα 4 αυτά στερεά ονομάζονται στερεά Kepler-Poinsot.



μεγάλο
δωδεκάεδρο



μεγάλο
εικοσάεδρο

ΜΕΡΟΣ 2ο

2.1 Συμμετρίες πολυέδρων

Ένα πολύεδρο είναι συμμετρικό, αν δείχνει το ίδιο από συγκεκριμένες διαφορετικές οπτικές γωνίες. Με άλλα λόγια, ένα πολύεδρο είναι συμμετρικό, αν μπορούμε να εκτελέσουμε πάνω του κάποιες διεργασίες (όπως η στροφή), οι οποίες αλλάζουν τη θέση των εδρών του στο χώρο, αλλά τελικά το πολύεδρο φαίνεται πανομοιότυπο με την πρότερή του κατάσταση.

Μία τέτοια διεργασία ονομάζεται συμμετρία και ορίζεται ως μία ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ η οποία αφήνει το πολύεδρο να καταλαμβάνει τον ίδιο χώρο (συνολοθεωρητικά, όχι αναγκαστικά σημειακά).

Πριν προχωρήσουμε, δίνουμε ορισμένους ορισμούς από τη Θεωρία Ομάδων:

Ορισμός: Διμελής πράξη * σε ένα σύνολο S είναι ένας κανόνας με τον οποίο σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του S αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του S, δηλαδή είναι μία απεικόνιση:

$$\begin{aligned} * : S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto a * b. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα, ότι για οποιαδήποτε 2 στοιχεία του S, ορίζεται η *, ενώ το αποτέλεσμα είναι μοναδικό και ανήκει πάλι στο S (κλειστότητα πράξης).

Παράδειγμα: Η πρόσθεση + πάνω στους φυσικούς αριθμούς είναι διμελής πράξη.

Η αφαίρεση πάνω στους πραγματικούς αριθμούς είναι διμελής πράξη, αλλά όχι στους φυσικούς, αφού $1{,}2 \in \mathbb{N},$ αλλά $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$.

Ορισμός: Ομάδα (G,*) είναι ένα σύνολο G, μαζί με μια διμελή πράξη * στο G τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Η διμελής πράξη * είναι προσεταιριστική.
2. Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο, ώστε $e * x = x * e = x, \text{για κάθε } x \in G$. Το στοιχείο αυτό καλείται ταυτοτικό στοιχείο για την * στη G.
3. Για κάθε $a \in G,$ υπάρχει ένα στοιχείο $a' \in G$ τέτοιο, ώστε $a * a' = a' * a = e$. Το στοιχείο α' καλείται αντίστροφο του α ως προς την πράξη *.

Ορισμός: Αν ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G είναι κλειστό ως προς τη διμελή πράξη της G κι αν το H είναι κι αυτό ομάδα, τότε το H λέγεται υποομάδα της G. Συμβολίζουμε $H \leq G$.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, μπορεί να αποδειχτεί ότι το σύνολο των συμμετριών ενός πολυέδρου είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συμμετριών και ταυτοτικό στοιχείο την ταυτοτική συμμετρία. Η ομάδα αυτή καλείται ομάδα συμμετριών.

Οι πιθανοί τύποι συμμετρίας που μπορεί να συναντήσει κανείς στα πολύεδρα είναι 2: στροφές και ανακλάσεις.

2.2 Στροφές πολυέδρων

Το σύνολο των στροφών ενός πολυέδρου αποτελεί υποομάδα της ομάδας συμμετριών του (Θεώρημα στροφών του Euler).

Ένα πολύεδρο μπορεί να έχει περισσότερους από έναν άξονες στροφικής συμμετρίας. Ο Euler απέδειξε, ότι για περισσότερους του ενός άξονες συμμετρίας, υπάρχει ένα σημείο μέσα στο πολύεδρο στο οποίο τέμνονται όλοι.

Μία στροφική συμμετρία καθορίζεται από τη γωνία στροφής, δηλαδή πόσες μοίρες (ή rad) στρέφουμε το πολύεδρο γύρω από έναν άξονα συμμετρίας του, ώστε να παραμείνει (συνολοθεωρητικά) ίδιο. Η γωνία αυτή είναι ίση με $\frac{360°}{n}$.

Προφανώς, $n \cdot \frac{360°}{n} = 360°$, που σημαίνει ότι εφαρμόζοντας n φορές στροφή γύρω από τον ίδιο άξονα κατά $\frac{360°}{n}$, παίρνουμε την ταυτοτική συμμετρία. Έτσι, προκύπτει ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός: Μια στροφική συμμετρία $\frac{360°}{n}$, καλείται <u>n-πλή συμμετρία</u> (δηλαδή διπλή, τριπλή, τετραπλή κλπ.). Ο άξονας συμμετρίας γύρω από τον οποίον εκτελείται η συγκεκριμένη συμμετρία καλείται <u>n-πλός άξονας</u>.

Σύμβαση: Ένας n-πλός άξονας μπορεί να είναι συγχρόνως και m-πλός άξονας, για κάποιο m. Για παράδειγμα, ένας 4-πλός άξονας είναι συγχρόνως και 2-πλός άξονας, αφού στροφή κατά $2 \cdot \frac{360°}{4} = \frac{360°}{2}$ γύρω από τον 4-πλό άξονα αφήνει το πολύεδρο (συνολοθεωρητικά) ίδιο. Έτσι, διαλέγουμε το μεγαλύτερο δυνατό n για να χαρακτηρίσουμε έναν άξονα n-πλό.

Μπορούμε, τώρα, να κατηγοριοποιήσουμε τις στροφικές συμμετρίες των πολυέδρων με βάση τους άξονες συμμετρίας τους και συγκεκριμένα το πλήθος τους και το πλήθος των συμμετριών γύρω από καθέναν από αυτούς:

Κυκλική συμμετρία

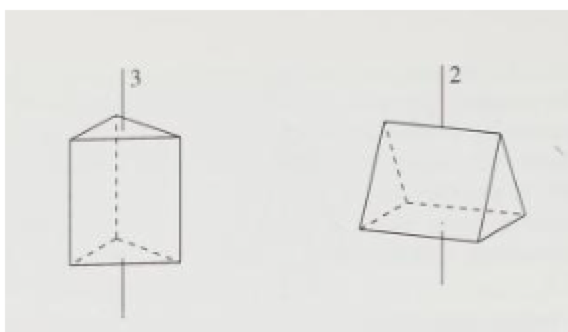
Το απλούστερο σύστημα στροφικών συμμετριών δίνουν οι πυραμίδες, οι οποίες έχουν 1 μοναδικό άξονα συμμετρίας. Μία πυραμίδα με βάση n-γωνικό κανονικό πολύγωνο έχει ένα μοναδικό n-πλό άξονα συμμετρίας και το σύστημα στροφικών συμμετριών της συμβολίζεται C_n, με $1 \cdot n = n$ στοιχεία.

Διεδρική συμμετρία

Σ’ αυτήν την κατηγορία, ανήκουν τα πρίσματα, τα οποία έχουν 2 τύπους αξόνων συμμετρίας.

Ας πάρουμε για παράδειγμα το τριγωνικό πρίσμα. Ένας άξονας συμμετρίας του είναι αυτός που διέρχεται από τα κέντρα των τριγώνων του. Μπορούμε να στρέψουμε το πρίσμα κατά $\frac{360°}{3} = 120°$, 1, 2 και 3 φορές, παίρνοντας κάθε φορά πανομοιότυπο σχήμα. Άρα, ο άξονας αυτός είναι ένας τριπλός (3-πλός) άξονας.

Στη συνέχεια, μπορούμε να πάρουμε έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο ενός ορθογωνίου και από το μέσο της απέναντι ακμής του πρίσματος. Υπάρχουν 3 τέτοιοι άξονες για το παράδειγμά μας, οι οποίοι είναι διπλοί (2-πλοί). Ο 3-πλός άξονας καλείται <u>πρωτεύων</u>, ενώ οι άλλοι 3 <u>δευτερεύοντες</u>.



Το είδος της συμμετρίας που αναλύσαμε στο παραπάνω παράδειγμα καλείται διεδρική και συμβολίζεται με D_n, όπου το n είναι η τάξη του πρωτεύοντα άξονα.

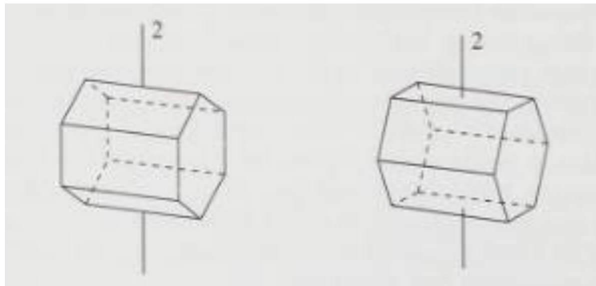
Γενικεύοντας για πρίσμα με κανονική n-γωνική βάση, ο πρωτεύων άξονας είναι n-πλός ενώ οι δευτερεύοντες είναι n το πλήθος και 2-πλοί.

Συνολικά, στην D_n περιλαμβάνονται:

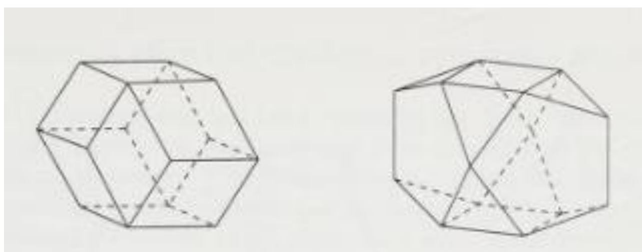
$$1 \cdot n + n \cdot 2 = 3n \; συμμετρίες.$$

Για n περιττό (όπως στο παραπάνω παράδειγμα), όλοι οι δευτερεύοντες άξονες είναι ισοδύναμοι, δηλαδή μπορούμε να περιστρέψουμε κάθε δευτερεύοντα γύρω από τον πρωτεύοντα, με αποτέλεσμα ο περιστραμμένος να καταλήξει πάνω σε έναν άλλο δευτερεύοντα.

Για n άρτιο, οι δευτερεύοντες άξονες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: σ' αυτούς που τέμνουν 2 έδρες στα κέντρα τους και σ' αυτούς που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών, όπως φαίνεται και στο εξαγωνικό πρίσμα:



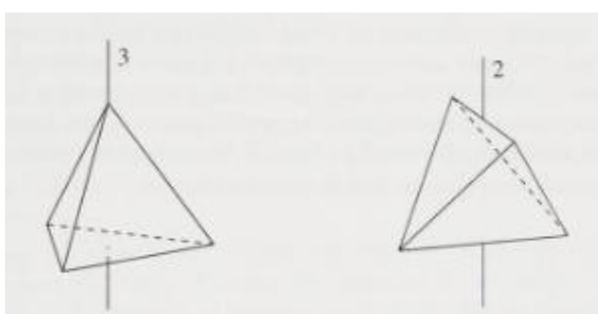
Ειδική περίπτωση αποτελεί αυτή στην οποία ο πρωτεύων άξονας είναι 2-πλος. Τότε έχουμε μια εκφυλισμένη περίπτωση όπου ο πρωτεύων και οι δευτερεύοντες είναι ισοδύναμοι (οι δευτερεύοντες είναι 2 2-πλοί):



Τετραεδρική συμμετρία

Το κανονικό τετράεδρο έχει 7 άξονες συμμετρίας: 4 3-πλούς και 3 2-πλούς. Κάθε 3-πλός περνάει από το κέντρο μιας έδρας και την απέναντι κορυφή της, ενώ κάθε 2-πλός περνάει από τα μέσα απέναντι ακμών. Κάθε πολύεδρο με αυτόν τον τύπο συμμετρίας έχει τετραεδρική συμμετρία και συμβολίζεται με T. Συνολικά, στην T περιλαμβάνονται:

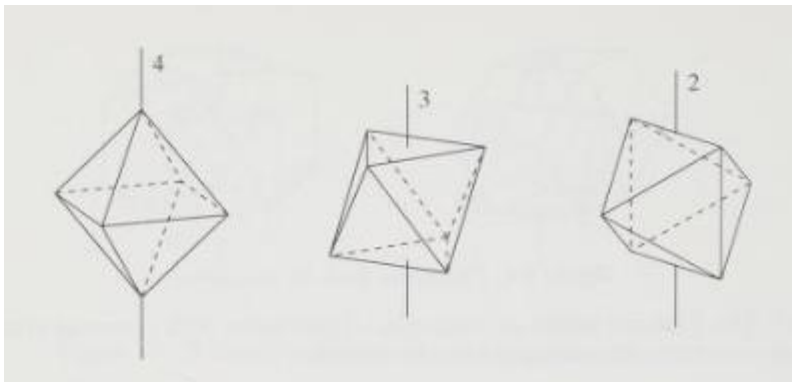
$$4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18 \; συμμετρίες.$$



Οκταεδρική συμμετρία

Το κανονικό οκτάεδρο έχει 3 τύπους αξόνων συμμετρίας: 3 4-πλοί, που ενώνουν τις απέναντι κορυφές, 4 3-πλοί, που διέρχονται από τα κέντρα απέναντι εδρών και 6 2-πλοί, που διέρχονται από τα μέσα απέναντι ακμών. Κάθε πολύεδρο με αυτόν τον τύπο συμμετρίας έχει οκταεδρική συμμετρία και συμβολίζεται με O. Συνολικά, στην O περιλαμβάνονται:

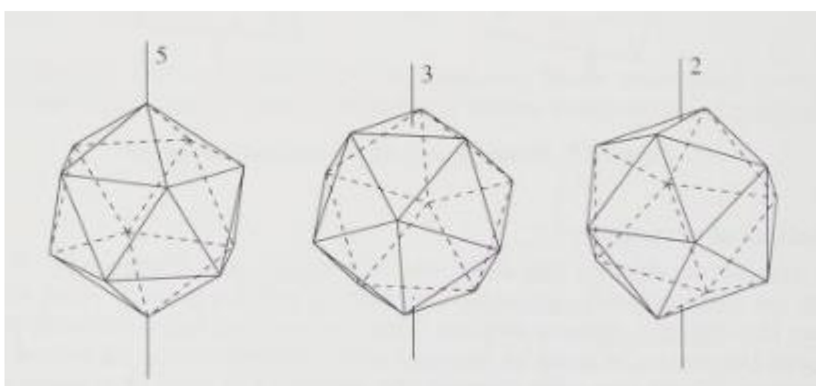
$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 36 \, συμμετρίες.$$



Εικοσαεδρική συμμετρία

Το κανονικό εικοσάεδρο έχει 6 5-πλούς άξονες, που διέρχονται από απέναντι κορυφές, 10 3-πλούς, που διέρχονται από τα κέντρα απέναντι εδρών και 15 2-πλούς, που διέρχονται από τα μέσα απέναντι ακμών. Κάθε πολύεδρο με αυτόν τον τύπο συμμετρίας έχει εικοσαεδρική συμμετρία και συμβολίζεται με *I*. Συνολικά, στην *I* περιλαμβάνονται:

$$6 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 90 \, συμμετρίες.$$



2.3 Η μοναδικότητα των $\boldsymbol{C_n}, \boldsymbol{D_n}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{O}$ και $\boldsymbol{I}$ ως συστήματα στροφών των πολυέδρων

Είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό το αποτέλεσμα ότι οι στροφές οποιουδήποτε πολυέδρου είναι σε κάποια από τις 5 παραπάνω ομάδες, οι οποίες κατασκευάστηκαν από την οικογένεια των πυραμίδων, την οικογένεια των πρισμάτων και κάποια από τα Πλατωνικά στερεά!

Προτού, όμως, αποδείξουμε αυτό το σπουδαίο αποτέλεσμα, πρέπει να εισάγουμε άλλη μία έννοια, αυτή των πόλων. Πόλος είναι το σημείο στο οποίο ένας άξονας συμμετρίας τέμνει το πολύεδρο. Κάθε άξονας τέμνει το πολύεδρο σε 2 σημεία, άρα οι πόλοι είναι διπλάσιοι σε αριθμό από τους άξονες. Επίσης, ένας πόλος ενός n-πλού άξονα καλείται n-πόλος. Οι πόλοι μπορεί να βρίσκονται πάνω σε κορυφές, ακμές ή έδρες του πολυέδρου, ενώ ζεύγη πόλων μπορεί να είναι 2 κορυφές, μέσα 2 ακμών, κέντρα 2 εδρών, κλπ.

Δύο πόλοι λέγονται ισοδύναμοι, αν υπάρχει κάποια στροφική συμμετρία του πολυέδρου που μετακινεί τον έναν πόλο πάνω στον άλλο.

Για παράδειγμα, το τετράεδρο έχει δύο ειδών πόλους: 2-πόλους (ίδιοι) και 3-πόλους (4 στις έδρες και 4 σε κορυφές). Άρα, όλοι οι 2-πόλοι του τετραέδρου είναι ισοδύναμοι, ενώ οι 3-πόλοι ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας, αφού δεν υπάρχει στροφή γύρω από κάποιον άξονα που να παίρνει σημείο έδρας και να το μετακινεί σε κορυφή, ή το αντίστροφο.

Ο αριθμός των πόλων σε μια κλάση ισοδυναμίας εξαρτάται από το συνολικό αριθμό των στροφών και από το είδος του κάθε πόλου. Πιο συγκεκριμένα, αν N ο συνολικός αριθμός των στροφών, τότε η κλάση ισοδυναμίας των n-πόλων περιλαμβάνει $\frac{N}{n}$ πόλους. Γνωρίζοντας, έτσι, πόσους πόλους περιέχει κάθε κλάση ισοδυναμίας, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό αριθμό των στροφών.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω:

Θεώρημα: Το σύστημα των στροφικών συμμετριών ενός πολυέδρου πρέπει να είναι ένας από τους ακόλουθους τύπους: κυκλική, διεδρική, τετραεδρική, οκταεδρική, ή εικοσαεδρική.

Απόδειξη: Έστω ένα τυχαίο σύστημα στροφικών συμμετριών N στροφών. Επιλέγουμε ένα πολύεδρο με αυτές τις συμμετρίες. Μία κλάση ισοδυναμίας n-πόλων περιλαμβάνει $\frac{N}{n}$ πόλους και σε κάθε πόλο αντιστοιχούν $(n-1)$ μη τετριμμένες στροφές. Αθροίζοντας όλες αυτές τις στροφές , παίρνουμε 2 φορές τον αριθμό των μη τετριμμένων στροφών του πολυέδρου. Άρα,

$$2(N-1) = \sum_{\pi \acute{o} \lambda o \iota} \frac{N}{n}(n-1)$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{2}{N} = \sum_{\pi ό\lambda o\iota} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \; (A).$$

Αν $N = 1$, τότε η μόνη συμμετρία του πολυέδρου είναι η ταυτοτική. Άρα, θεωρούμε ότι $N \geq 2$. Τότε,

$$1 \leq 2 - \frac{2}{N} < 2.$$

Επίσης, πρέπει $n \geq 2$, γιατί αν $n = 1$, τότε αυτό σημαίνει ότι η μόνη στροφή που δίνει συμμετρία του πολυέδρου είναι η ταυτοτική. Άρα,

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Έστω, τώρα, ότι το σύστημα των στροφών περιέχει μόνο μία κλάση πόλων. Τότε, το δεξί μέλος της (Α) θα ήταν μικρότερο από 1, που είναι άτοπο, αφού το αριστερό μέλος της (Α) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Άρα, υπάρχουν τουλάχιστον 2 κλάσεις πόλων.

Επίσης, το σύστημα δεν μπορεί να έχει 4 ή περισσότερες κλάσεις πόλων, γιατί το αριστερό μέλος της (Α) είναι μικρότερο του 2, ενώ το δεξί μέλος δίνει:

$$\sum_{\pi ό\lambda o\iota} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Συνεπώς, μπορούμε να έχουμε 2 ή 3 κλάσεις πόλων.

Έστω ότι έχουμε 2 κλάσεις, μία p-πόλων και μία q-πόλων. Τότε, το άθροισμα στην (Α) δίνει:

$$2 - \frac{2}{N} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$
$$\Rightarrow 2 = \frac{N}{p} + \frac{N}{q}$$

Τώρα, η κλάση των p-πόλων περιέχει $\frac{N}{p}$ πόλους, άρα ο $\frac{N}{p}$ είναι μη μηδενικός θετικός ακέραιος. Ομοίως, ο $\frac{N}{q}$ είναι μη μηδενικός θετικός ακέραιος. Άρα,

$$\frac{N}{p} = \frac{N}{q} = 1$$
$$\Longrightarrow N = p = q.$$

Άρα, το σύστημα έχει 2 πόλους (1 σε κάθε κλάση), άρα 1 άξονα. Και οι 2 πόλοι είναι p-πόλοι, άρα ο άξονας είναι p-πλός. Άρα, το σύστημά μας είναι οι κυκλικές συμμετρίες C_p.

Έστω, τώρα, ότι υπάρχουν 3 κλάσεις πόλων: p-πόλοι, q-πόλοι και r-πόλοι. Τότε, η (A) δίνει:

$$2-\frac{2}{N}=\left(1-\frac{1}{p}\right)+\left(1-\frac{1}{q}\right)+\left(1-\frac{1}{r}\right)$$
$$\Longrightarrow 1+\frac{2}{N}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$$

Αν $p,q,r\geq 3$, τότε:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

Όμως, $1+\frac{2}{N}\geq 1$. Άρα, τουλάχιστον ένας από τους p,q,r είναι 2, έστω ο r. Έστω, επίσης, ότι $p\geq q$. Τότε,

$$1+\frac{2}{N}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\ (B)$$
$$(p-2)(q-2)=4\left(1-\frac{pq}{N}\right)<4\ (C),$$

δηλαδή $(p-2)(q-2)=0,1,2,$ ή 3.

Αν το γινόμενο είναι μηδέν, τότε $q=2$. Τότε, η (B) δίνει:

$$\frac{2}{N}=\frac{1}{p}\Longrightarrow N=2p.$$

Άρα, το σύστημά μας έχει 3 κλάσεις πόλων: μία p-πόλων και 2 2-πόλων. Κάθε μία από τις κλάσεις των 2-πόλων περιέχει $\frac{N}{2}=p$ πόλους. Τελικά, το σύστημα είναι οι διεδρικές συμμετρίες D_p.

Οι υπόλοιπες λύσεις της (C) προκύπτουν για: $(p,q)=(3,3),(4,3)$ και $(5,3)$, οι οποίες δίνουν, αντίστοιχα, τα συστήματα T,O και I. ■

2.4 Ανακλάσεις πολυέδρων

Υπάρχουν πολύεδρα τα οποία δεν έχουν κανέναν άξονα στροφικής συμμετρίας, χωρίς να είναι ασύμμετρα. Ένα παράδειγμα είναι αυτό του παρακάτω σχήματος, στο οποίο φαίνεται ένα πολύεδρο που δεν έχει άξονα συμμετρίας, αλλά μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα που το ένα είναι καθρέφτισμα του άλλου.

Το επίπεδο που χωρίζει το πολύεδρο κατ' αυτόν τον τρόπο ονομάζεται επίπεδο συμμετρίας ή ανάκλασης, ενώ η συμμετρία του πολυέδρου ονομάζεται ανάκλαση.

Ένα πολύεδρο όπως το παραπάνω, λέμε ότι έχει αμφίπλευρη συμμετρία, την οποία συμβολίζουμε με C_s.

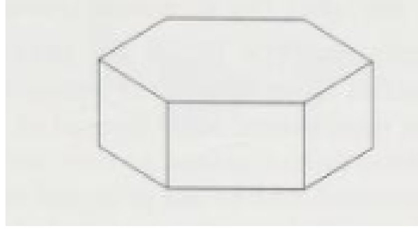
Αν ένα πολύεδρο έχει περισσότερα από ένα επίπεδα συμμετρίας, τότε η ευθεία που προκύπτει από την τομή 2 τέτοιων επιπέδων, αποτελεί άξονα στροφικής συμμετρίας. Αυτό συνεπάγεται το γεγονός, ότι εκτός από τις συμμετρίες του C_s, όλα τα υπόλοιπα συστήματα ανακλάσεων περιέχουν και κάποιο από τα συστήματα στροφών που περιγράψαμε παραπάνω.

Πρισματικές συμμετρίες

Οι συμμετρίες αυτού του τύπου προκύπτουν από πρίσματα και άλλα στερεά που περιλαμβάνουν είτε κυκλικές, είτε διεδρικές στροφικές συμμετρίες.

Τύπος συμμετρίας D_{nh}

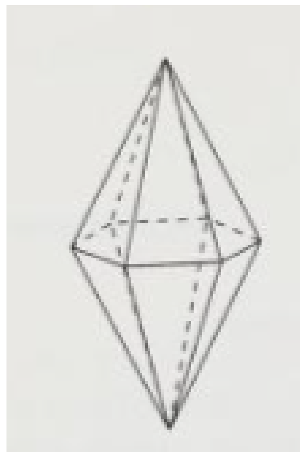
Ξεκινάμε με ένα πρίσμα με βάση ένα κανονικό n-γωνο. Οι στροφικές του συμμετρίες είναι διεδρικές, δηλαδή έχει 1 πρωτεύοντα n-πλό άξονα και n 2-πλούς δευτερεύοντες. Θεωρούμε ότι το πρίσμα τοποθετείται όπως το εξαγωνικό πρίσμα του παρακάτω σχήματος.



Τότε, υπάρχει 1 οριζόντιο επίπεδο συμμετρίας και n κάθετα στα n-γωνα. Στο παράδειγμα του εξαγωνικού πρίσματος, 3 από τα κάθετα διέρχονται από τις κορυφές των εξαγώνων και άλλα 3 από τα μέσα των πλευρών τους.

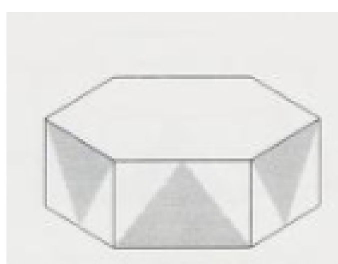
Συμβολίζουμε το παραπάνω σύστημα συμμετρίων D_{nh}, όπου το D_n αναφέρεται στον τύπο στροφικής συμμετρίας, ενώ το h στην ύπαρξη οριζόντιου επιπέδου συμμετρίας.

Εκτός από το εξαγωνικό πρίσμα, ένα άλλο στερεό με συμμετρίες D_{6h} είναι το ισοσκελές τραπεζόεδρο:



Τύπος συμμετρίας D_{nv}

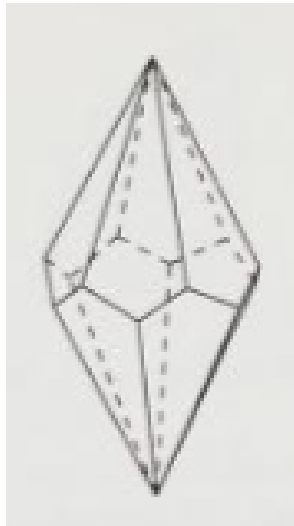
Έστω, τώρα ότι χρωματίζουμε τα ορθογώνια του πρίσματος με τρίγωνα, έτσι ώστε κάθε τρίγωνο να έχει για βάση μία πλευρά του n-γώνου και απέναντι κορυφή το μέσο της απέναντι ακμής του πολυέδρου. Ακολουθούμε αυτή τη διαδικασία εναλλάξ, θεωρώντας μία φορά ως βάση του τριγώνου μία πλευρά του κάτω n-γώνου και την επόμενη του πάνω n-γώνου, όπως στο παρακάτω εξαγωνικό πρίσμα:



Επί της ουσίας, το στερεό που φτιάξαμε έχει χάσει κάποιες από τις συμμετρίες του αρχικού πρίσματος. Το οριζόντιο επίπεδο δεν αποτελεί πια επίπεδο συμμετρίας, ούτε και τα κάθετα που διέρχονται από απέναντι ακμές.

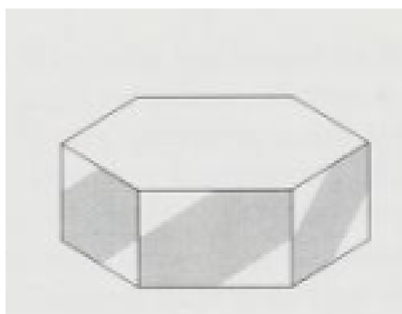
Παρατηρούμε ότι στο εξαγωνικό πρίσμα οι δευτερεύοντες άξονες δεν υφίστανται πλέον, ενώ ο πρωτεύων είναι ένας 3-πλός άξονας (από 6-πλός). Οι συμμετρίες του συστήματος συμβολίζονται με D_{3v}, όπου το D_3 συμβολίζει το είδος των στροφικών συμμετριών, ενώ το v δηλώνει την ύπαρξη κάθετων επιπέδων συμμετρίας.

Ένα πολύεδρο με συμμετρίες τύπου D_{6v} είναι ένα εξαγωνικό αντιπρίσμα. Άλλο παράδειγμα συμμετρίας D_{6v} είναι το εξαγωνικό ισοσκελές τραπεζόεδρο:

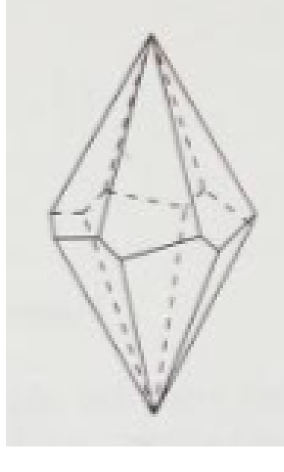


Τύπος συμμετρίας D_n

Αν ζωγραφίσουμε τα τετράγωνα του πρίσματος όπως στο παρακάτω σχήμα:



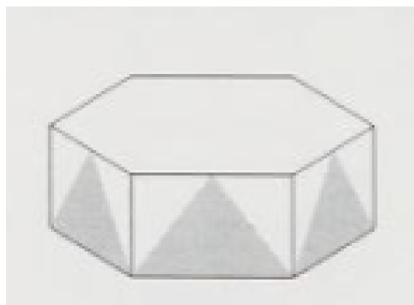
τότε δεν υπάρχουν πλέον επίπεδα συμμετρίας και όλες οι συμμετρίες αυτού του στερεού είναι οι στροφικές του, δηλαδή το σύστημα συμμετριών του είναι το D_6. Παράδειγμα αυτού του τύπου συμμετρίας αποτελεί το εξαγωνικό σκαληνό τραπεζόεδρο:



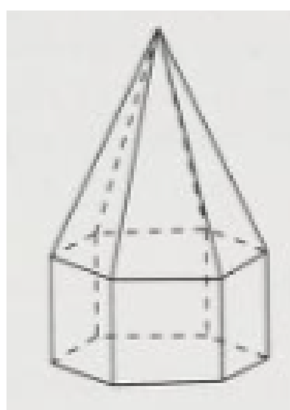
Τύπος συμμετρίας C_{nv}

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τις συμμετρίες D_{nv}, αλλά με όλα τα τρίγωνα να έχουν τη βάση τους πάνω στο ίδιο n-γωνο, παίρνουμε τον τύπο συμμετρίαςC_{nv}. Οι 2-πλοί άξονες δεν είναι πλέον άξονες συμμετρίας. Άρα, οι στροφικές συμμετρίες είναι πλέον κυκλικές. Το C_n υποδηλώνει ακριβώς αυτό. Τα κάθετα επίπεδα συμμετρίας εξακολουθούν να παράγουν συμμετρίες, αλλά όχι το οριζόντιο επίπεδο. Αυτό υποδηλώνεται με το δείκτη v.

Το χρωματισμένο εξαγωνικό πρίσμα του παρακάτω σχήματος έχει τύπο συμμετρίας C_{6v}:

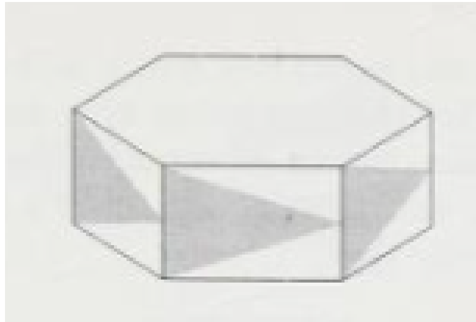


ενώ ένα άλλο παράδειγμα πολυέδρου με τέτοιο τύπο συμμετρίας είναι η επιμήκης εξαγωνική πυραμίδα:



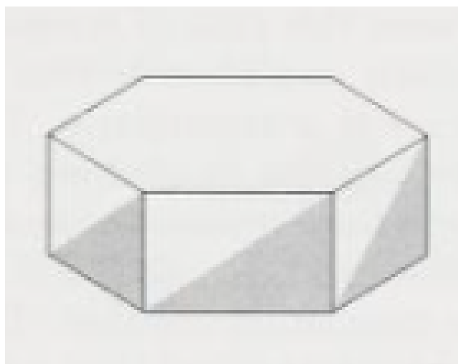
Τύπος συμμετρίας C_{nh}

Χρωματίζουμε, τώρα, τα ορθογώνια του πρίσματος, όπως στο παρακάτω εξαγωνικό πρίσμα. Η στροφική συμμετρία είναι πάλι η κυκλική. Εδώ, δεν υπάρχουν πια κατακόρυφα επίπεδα συμμετρίας, επομένως, το μόνο επίπεδο συμμετρίας είναι το οριζόντιο.

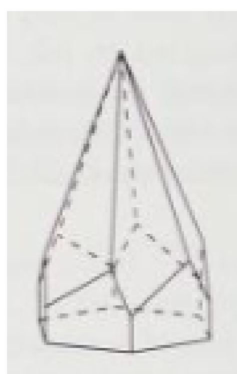


Τύπος συμμετρίας C_n

Χρωματίζοντας το πρίσμα όπως στο παρακάτω σχήμα, καταστρέφονται όλες οι ανακλάσεις. Παραμένουν, όμως, οι στροφές τύπου C_n.

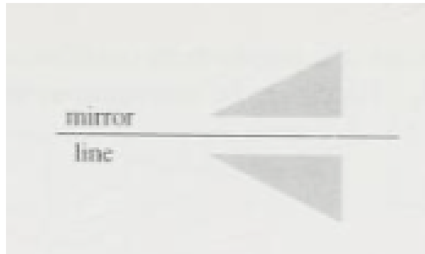


Ένα ακόμα παράδειγμα πολυέδρου με συμμετρίες τύπου C_6 φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



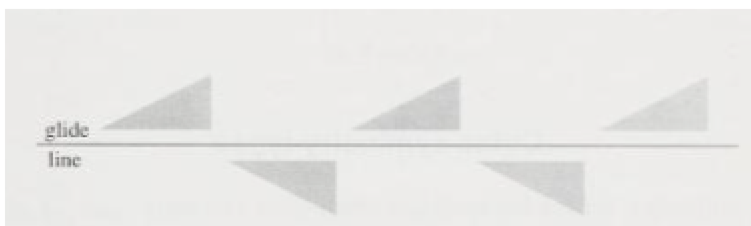
Συνδυαστική συμμετρία και ο τύπος S_{2n}

Θεωρούμε ένα σκαληνό τρίγωνο και παρατηρούμε ότι δεν έχει άλλη συμμετρία από την ταυτοτική. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να πάρουμε μια ανάκλαση του τριγώνου ως προς μία ευθεία:



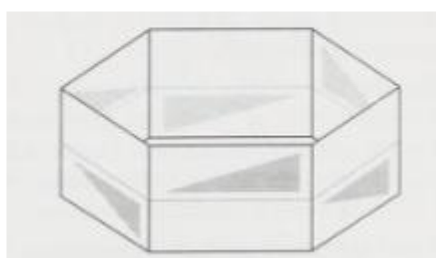
Επίσης, μπορούμε να εκτελέσουμε μεταφορά (translation) στο σκαληνό τρίγωνο:

Εκτελώντας μεταφορά και ανάκλαση στο τρίγωνο, μπορούμε να πάρουμε ένα μοτίβο όπως το παρακάτω:



Η παραπάνω διαδικασία καλείται ανάκλαση ολίσθησης.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω μοτίβο για να χρωματίσουμε τα ορθογώνια ενός πρίσματος:



Η ευθεία ολίσθησης (glide line) έχει πλέον μετατραπεί σε επίπεδο ολίσθησης.

Σε ένα τέτοιο πολύεδρο, μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξής συμμετρία: να πάρουμε στροφή γύρω από τον πρωτεύοντα άξονα κατά $\frac{360°}{n}$ και στη συνέχεια ανάκλαση ως προς το επίπεδο ολίσθησης. Η διαδικασία αυτή είναι μία σύνθετη συμμετρία και καλείται στροφή-ανάκλαση. Ο πρωτεύων άξονας καλείται άξονας στροφής-ανάκλασης. Συμβολίζουμε αυτόν τον τύπο συμμετρίας με S_n και οι στροφικές συμμετρίες που περιλαμβάνονται στο S_n είναι οι C_n.

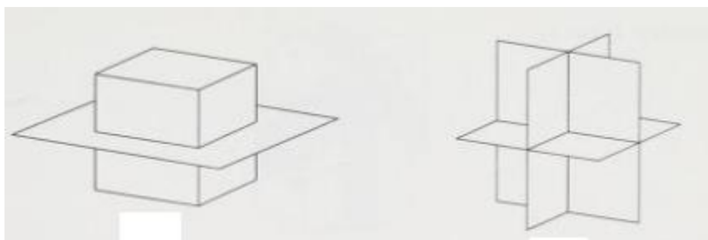
Το n πρέπει να είναι άρτιος, αλλιώς παίρνουμε τις ίδιες συμμετρίες με το C_{nh}.

Αν $n = 2$, έχουμε μόνο 2 μοτίβα, άρα καμία στροφική συμμετρία.

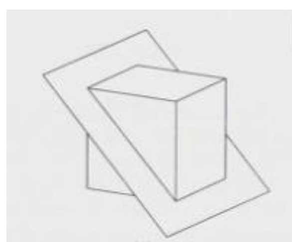
Κυβικές συμμετρίες

Τύπος συμμετρίας O_h

Ξεκινάμε με τον κύβο, ο οποίος έχει 3 4-πλούς άξονες, που ενώνουν τα κέντρα απέναντι εδρών, 4 3-πλούς, που ενώνουν διαγώνια απέναντι κορυφές και 6 2-πλούς που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών. Αυτός είναι ο στροφικός τύπος συμμετρίας του οκταέδρου, δηλαδή ο O. Όσον αφορά τις ανακλάσεις, ο κύβος έχει 3 επίπεδα συμμετρίας που περιλαμβάνουν 2 4-πλούς άξονες το καθένα και είναι ανά 2 κάθετα μεταξύ τους:



Επίσης, ο κύβος έχει, ακόμα, 6 επίπεδα συμμετρίας που περιλαμβάνουν 2 3-πλούς άξονες:



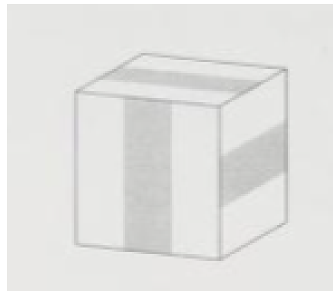
Οι συμμετρίες του κύβου παράγουν τον τύπο O_h, που περιλαμβάνει τις στροφικές συμμετρίες τύπου O.

Τύπος συμμετρίας O

Αν ζωγραφίσουμε τον κύβο όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε δεν έχει πλέον επίπεδα ανάκλασης, αλλά διατηρεί όλες τις στροφικές συμμετρίες. Παράδειγμα πολυέδρου με συμμετρίες τύπου O αποτελεί ο κόλουρος κύβος.

Τύπος συμμετρίας T_h

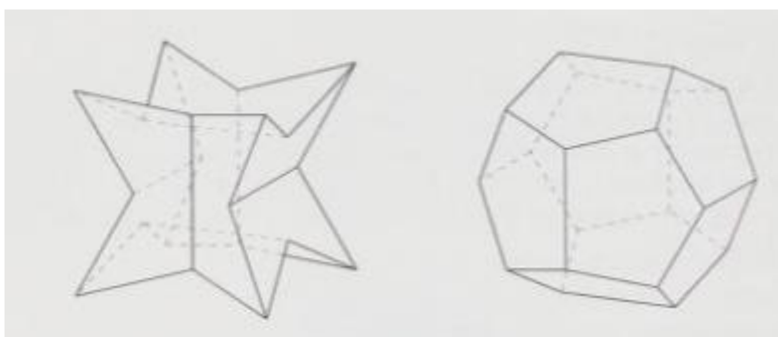
Αν ζωγραφίσουμε τον κύβο όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε διατηρούνται οι στροφές γύρω από τους 3-πλούς άξονες.



Οι 4-πλοί άξονες είναι πλέον 2-πλοί, ενώ οι 2-πλοί έχουν καταστραφεί. Δηλαδή, απομένουν 4 3-πλοί και 3 2-πλοί άξονες στροφικής συμμετρίας. Αυτό είναι και το σύστημα στροφών του κανονικού τετραέδρου.

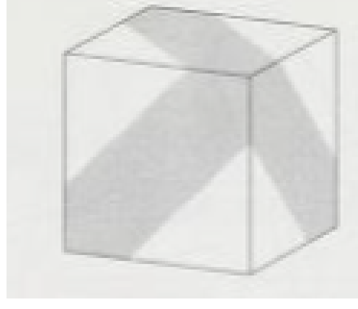
Όσον αφορά τις ανακλάσεις, διατηρούνται τα 3 κάθετα ανά 2 επίπεδα συμμετρίας, αλλά κανένα άλλο.

Παραδείγματα συμμετρίας T_h φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Τύπος συμμετρίας T

Αν ζωγραφίσουμε τον κύβο όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε δεν έχει πλέον επίπεδα ανάκλασης, αλλά διατηρεί τις στροφικές συμμετρίες του τετραέδρου, δηλαδή τύπου T.



Εικοσαεδρικές συμμετρίες

Τα συστήματα που προκύπτουν από το εικοσάεδρο είναι 2 τύπων: αυτά που περιέχουν ανακλάσεις (I_h) και αυτά που περιέχουν μόνο στροφές (I). Πολύεδρα τύπου I_h το δωδεκάεδρο και τα 4 αστερεροειδή πολύεδρα Kepler-Poinsot, ενώ το κόλουρο δωδεκάεδρο είναι τύπου I.

ΜΕΡΟΣ 3ο

3.1 Συμμετρότητα πολυέδρων

Έστω δύο πολύεδρα P και Q τα οποία έχουν, τουλάχιστον, μία πανομοιότυπη έδρα. Τότε, μέσω μεταφοράς, περιστροφής και ανάκλασης του ενός από τα δύο στο χώρο, είναι εφικτό να το μετακινήσουμε ώστε η κοινή έδρα των δύο να συμπίπτει. Το νέο πολύεδρο που προκύπτει καλείται η ένωση των P και Q.

Από την άλλη μεριά, αν ένα επίπεδο Π χωρίζει το εσωτερικό ενός πολύεδρου P, τότε προκύπτουν δύο πολύεδρα P_1 και P_2, η ένωση των οποίων δίνει πάλι το P. Η διαδικασία αυτή καλείται διαμέριση του πολύεδρου P ως προς το επίπεδο Π.

Θέλουμε, τώρα, να φτιάξουμε μία διαμέριση του P από πολύεδρα $P_1, P_2, \ldots, P_n$ για κάποιο n, τα οποία όμως να είναι όλα πανομοιότυπα. Φυσικά, μία τέτοια διαμέριση δεν είναι μοναδική. Έτσι, προκύπτει η ανάγκη να οριστεί η έννοια της συμμετρότητας:

Ορισμός: Λέμε ότι δύο πολύεδρα P και Q είναι σύμμετρα, αν η ένωση ενός αριθμού k πολυέδρων P δίνει ένα νέο πολύεδρο R το οποίο μπορεί να διαμεριστεί σε l πολύεδρα Q, όπου k,l θετικοί ακέραιοι.

Τότε, ισχύει η σχέση:

$$vol(R) = k \cdot vol(P) = l \cdot vol(Q)$$

$$\text{ή } vol(Q) = \frac{k}{l} \cdot vol(P).$$

Η σχέση αυτή αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε τα P και Q να είναι σύμμετρα, αλλά όχι ικανή. Αυτό σημαίνει, ότι αν το κλάσμα $\frac{vol(P)}{vol(Q)}$ είναι άρρητος αριθμός, τότε τα P και Q δεν μπορεί να είναι σύμμετρα.

3.2 Το 3ο πρόβλημα του Hilbert

Είναι, λοιπόν, δυνατό να ισχύει η παραπάνω σχέση για δύο πολύεδρα, αλλά να μην είναι σύμμετρα! Για να δώσουμε αντιπαράδειγμα, χρειάζεται πρώτα να εισάγουμε ένα νέο όρο: την αναλλοίωτη του Dehn.

Ο Dehn ήταν μαθητής του Hilbert και εισήγαγε τη συγκεκριμένη αναλλοίωτη, προκειμένου να δώσει απάντηση στο 3ο από τα 23 προβλήματα που άφησε το 1900 στη μαθηματική κοινότητα ο δάσκαλός του. Ο ίδιος ο Hilbert θεωρούσε ότι η λύση αυτών των προβλημάτων θα οδηγούσε στη βαθύτερη κατανόηση και εξέλιξη των Μαθηματικών.

Το 3ο πρόβλημα του Hilbert διατυπώνεται ως εξής:

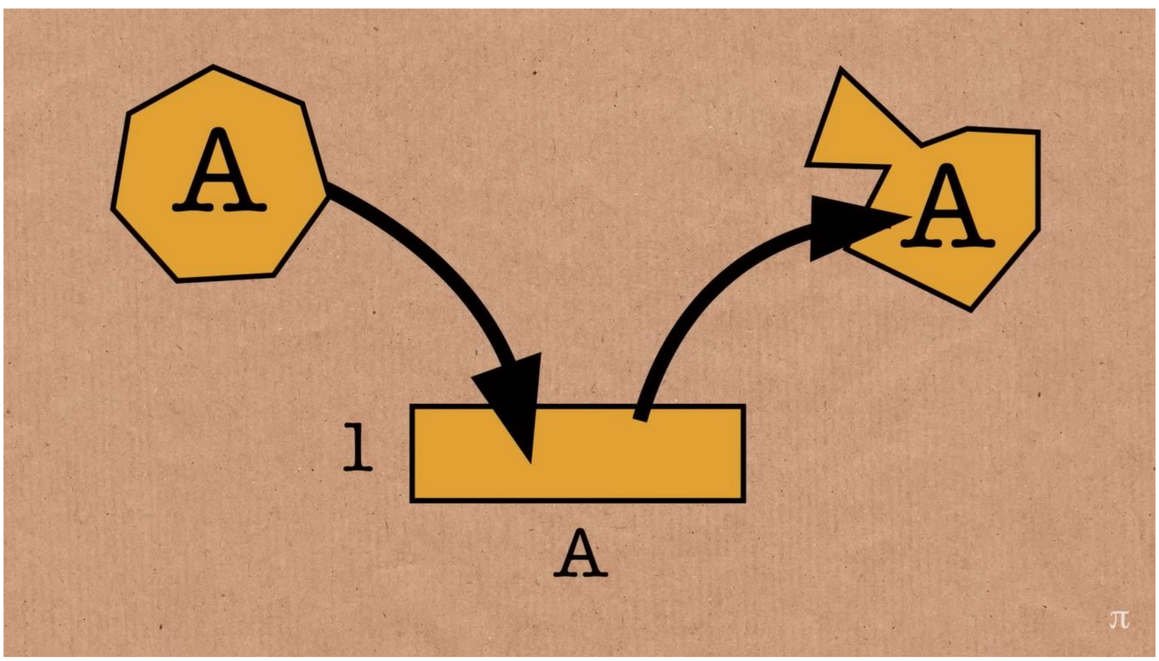
Έστω δύο πολύεδρα με τον ίδιο όγκο. Είναι πάντα εφικτό να κόψουμε το πρώτο σε πεπερασμένο αριθμό πολυέδρων, ώστε μετά να τα ενώσουμε με κάποιο τρόπο και να πάρουμε το δεύτερο;

3.3 Το ανάλογο του 3ου προβλήματος του Hilbert στις 2 διαστάσεις

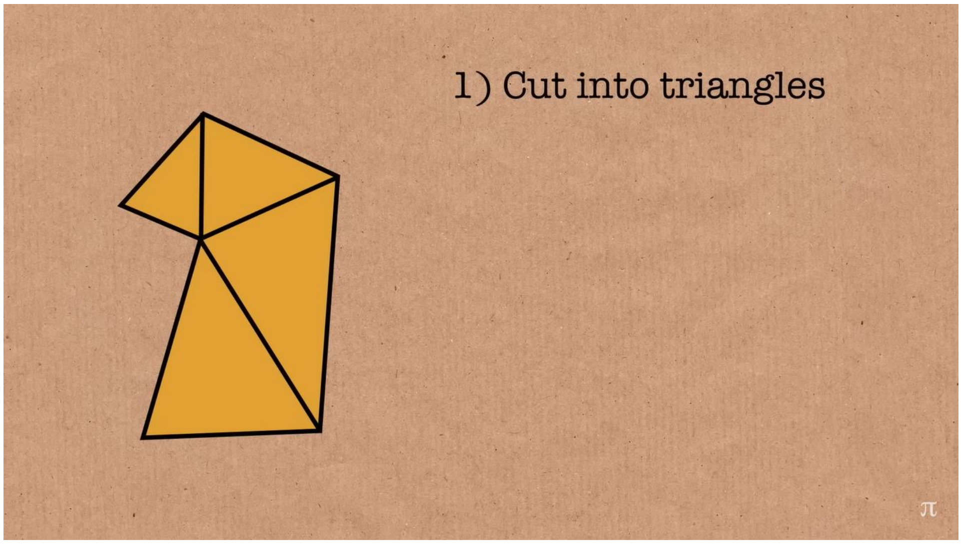
Η απάντηση του Dehn στο παραπάνω πρόβλημα ήταν αρνητική! Πριν δούμε, όμως, πώς το χειρίστηκε ο Dehn, ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε το ανάλογο πρόβλημα στις 2 διαστάσεις:

Έστω δύο πολύγωνα με το ίδιο εμβαδόν. Είναι πάντα εφικτό να κόψουμε το πρώτο σε πεπερασμένο αριθμό πολυγώνων, ώστε μετά να τα ενώσουμε με κάποιο τρόπο και να πάρουμε το δεύτερο;

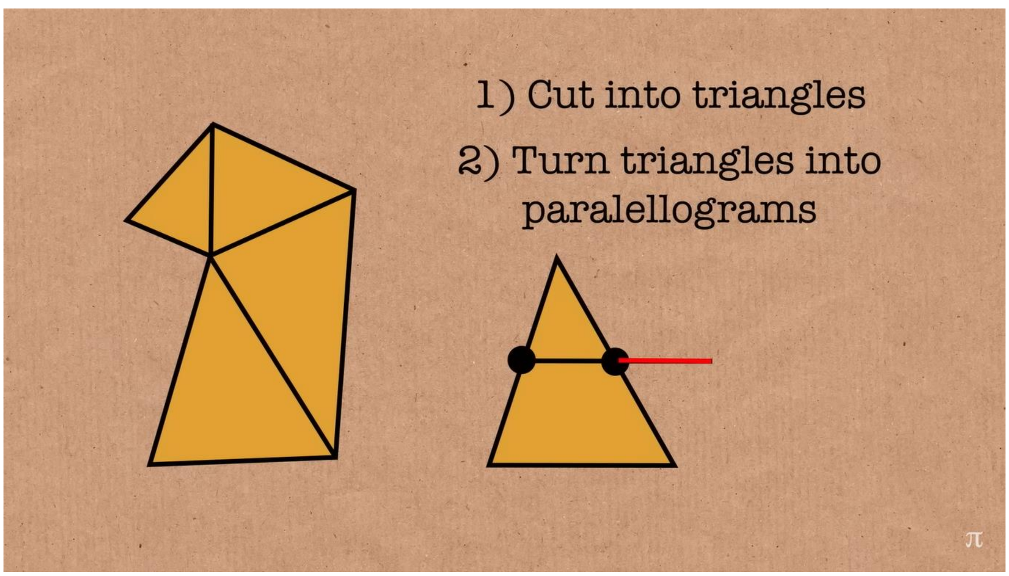
Εδώ η απάντηση είναι καταφατική! Θα δουλέψουμε κατασκευαστικά: Θα φτιάξουμε μία διαδικασία ώστε με δοσμένο πολύγωνο εμβαδού Α να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο διαστάσεων 1xΑ. Τότε, ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να παράξουμε το δεύτερο πολύγωνο εμβαδού Α.

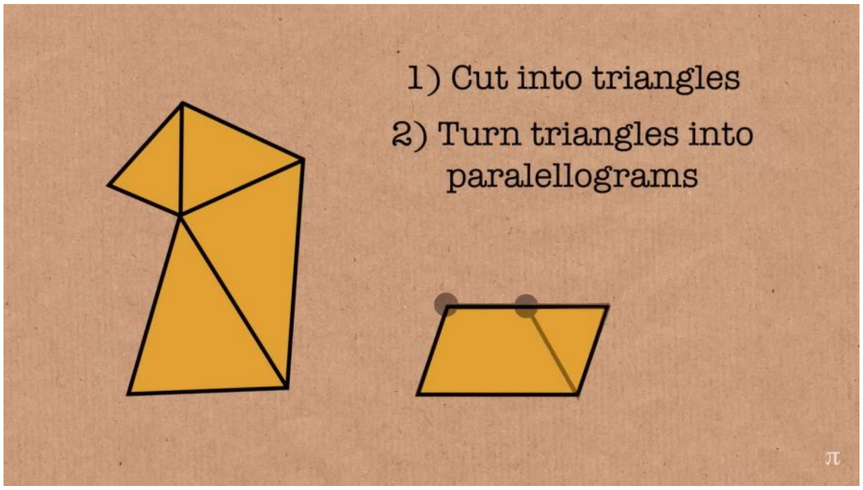


1ο βήμα: Χωρίζουμε το πολύγωνο σε τρίγωνα.

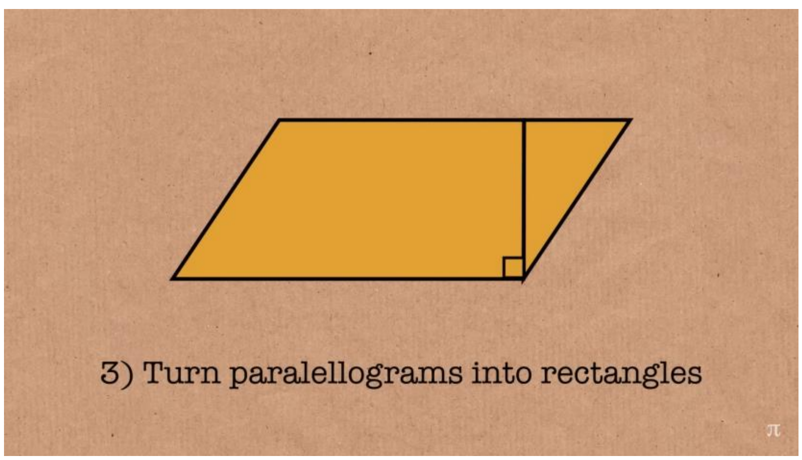


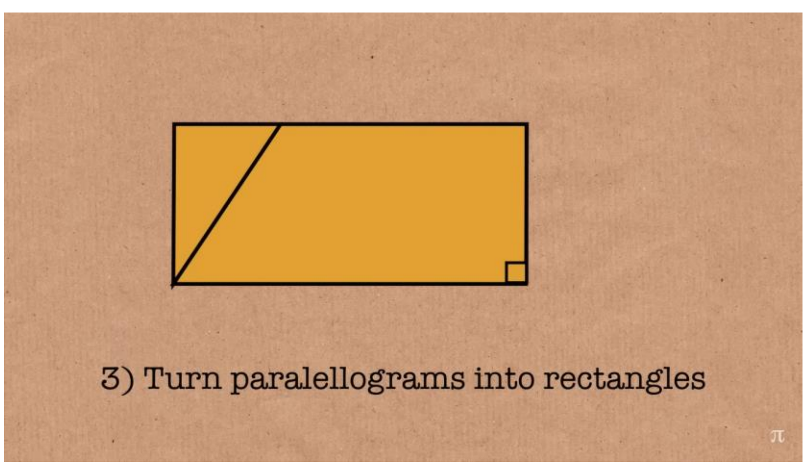
2ο βήμα: Μετατρέπουμε τα τρίγωνα σε παραλληλόγραμμα, ως εξής: Σχεδιάζουμε τους μέσους στις 2 από τις 3 πλευρές του τριγώνου και τους ενώνουμε. Τώρα το τρίγωνο έχει χωριστεί σε ένα μικρότερο τρίγωνο και σε ένα τραπέζιο. Επεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα που προέκυψε από τη μία μόνο πλευρά, δημιουργώντας ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσου μήκους. Τέλος, περιστρέφουμε το μικρό τρίγωνο, ώστε η βάση του (που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τους μέσους) να συμπέσει στην προέκταση (που έχει το ίδιο μήκος).



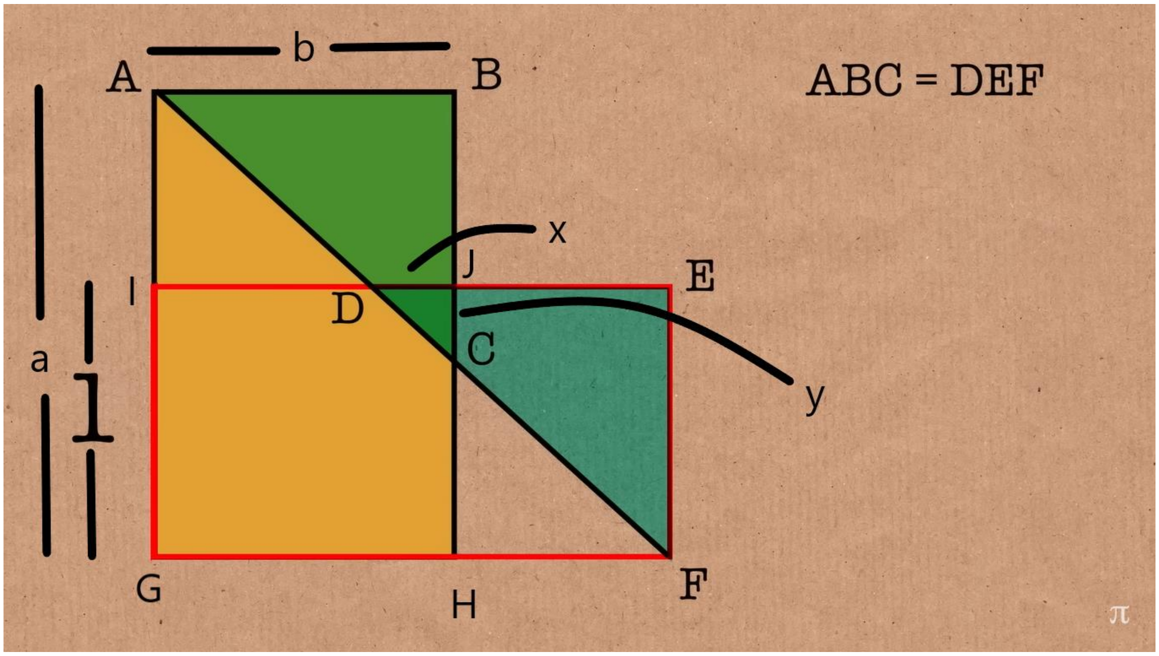


3ο βήμα: Μετατρέπουμε τα παραλληλόγραμμα σε ορθογώνια, ως εξής: Φέρνουμε από μία κορυφή του παραλληλογράμμου, κάθετη στην απέναντι ευθεία (στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου). Μεταφέρουμε το ορθογώνιο τρίγωνο που προέκυψε, ώστε η υποτείνουσά του να συμπέσει με την πλευρά του παραλληλογράμμου που είναι παράλληλή της.





4ο βήμα: Πάνω στη μεγάλη πλευρά κάθε ορθογωνίου GABH σχεδιάζουμε μία νέα πλευρά GI μοναδιαίου μήκους και ένα νέο ορθογώνιο GIEF ίδιου εμβαδού με το αρχικό. Έπειτα, ενώνουμε τις κορυφές AF. Τα τρίγωνα ABC και DEF είναι ίσα, οπότε μεταφέρουμε το πρώτο ,ώστε να συμπέσει πάνω στο δεύτερο. Επίσης, το τρίγωνο ADI είναι ίσο με το CFH, οπότε μεταφέρουμε το πρώτο ,ώστε να συμπέσει πάνω στο δεύτερο. Κι έτσι μετασχηματίσαμε το αρχικό ορθογώνιο σε ένα ορθογώνιο ίσου εμβαδού, αλλά με μία μοναδιαία πλευρά.



$$(GABH) = (GIEF) \Rightarrow GF \cdot 1 = ab \Longrightarrow GF = ab$$

$$B = E = 90°$$
$$ACB = DFE\ (εντός\ εκτός\ κι\ επί\ τ'αυτά\ μέρη\ γωνίες\ ίσες)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή στα τρίγωνα AID, AGF:

$$\frac{AI}{AG} = \frac{ID}{GF} \Longrightarrow \frac{a-1}{a} = \frac{ID}{ab} \Longrightarrow ID = b(a-1)$$

Τότε:

$$x = b - ID \Rightarrow x = 2b - ab \Longrightarrow x = b(2-a)$$

Εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα του Θαλή στα τρίγωνα DJC, DEF:

$$\frac{CJ}{EF} = \frac{DJ}{DE} \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x}{ab - b + x} \Rightarrow y = \frac{b(2-a)}{ab - b + 2b - ab} \Rightarrow y = 2 - a$$

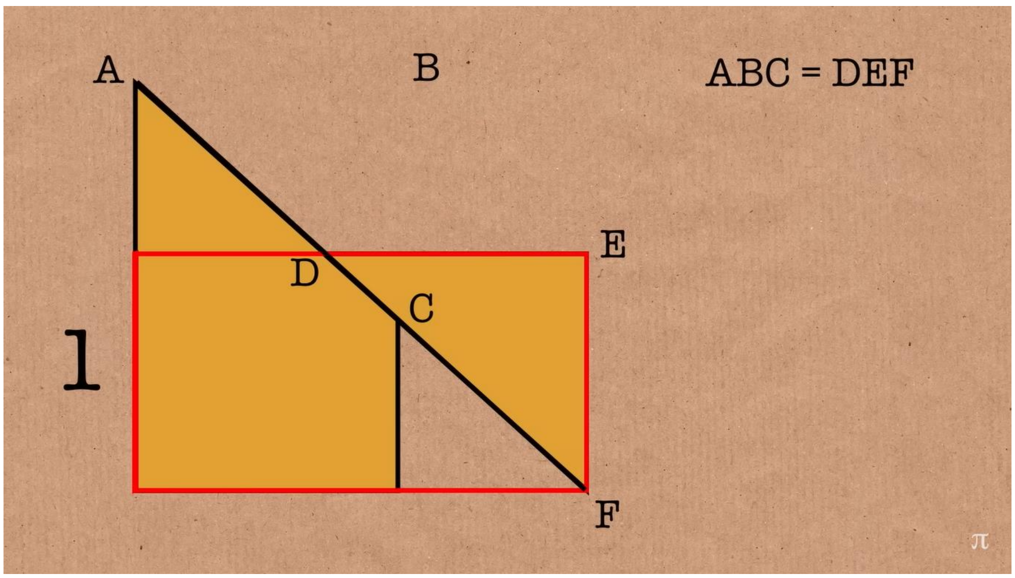
Άρα,

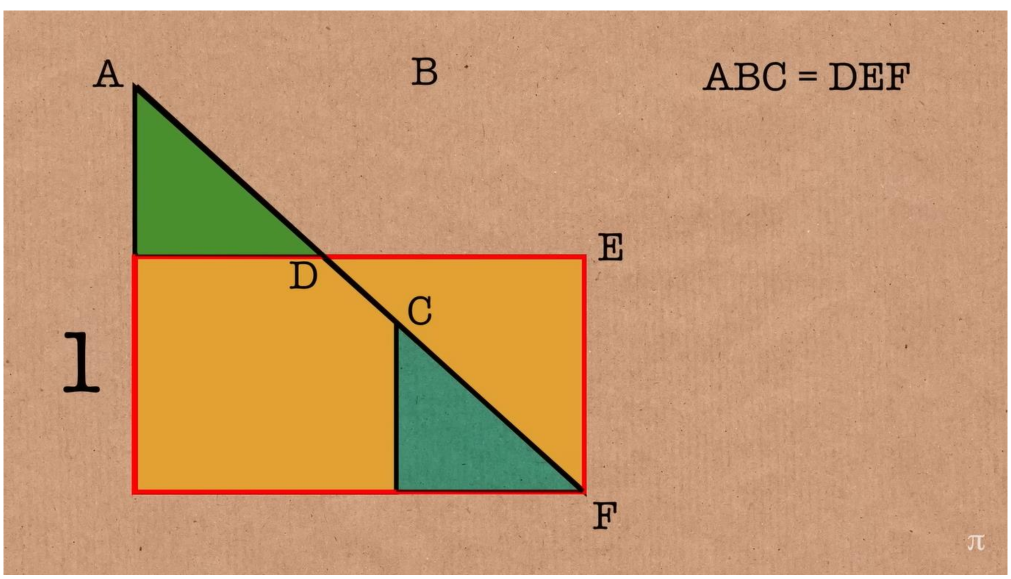
$$BC = BJ + y \Rightarrow BC = (a - 1) + (2 - a) \Rightarrow BC = 1$$

Άρα,

$$BC = EF = 1$$

$$\Gamma\Pi\Gamma \Rightarrow ABC = DEF$$





$$I = H = 90°$$
$$GAF = HCF \ (εντός\ εκτός\ κι\ επί\ τ'\ αυτά\ μέρη\ γωνίες\ ίσες)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή στα τρίγωνα FCH, FAG:

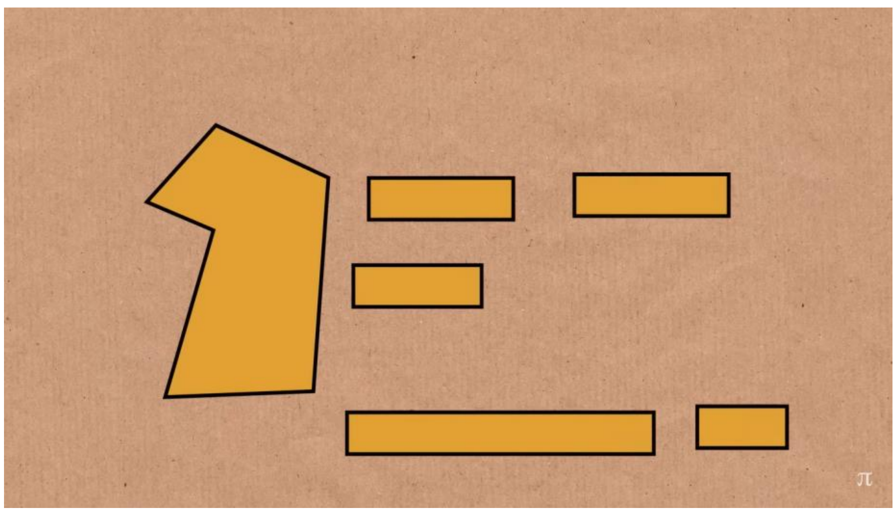
$$\frac{CH}{AG} = \frac{FH}{FG} \Longrightarrow \frac{CH}{a} = \frac{ab-b}{ab} \Longrightarrow CH = a-1$$

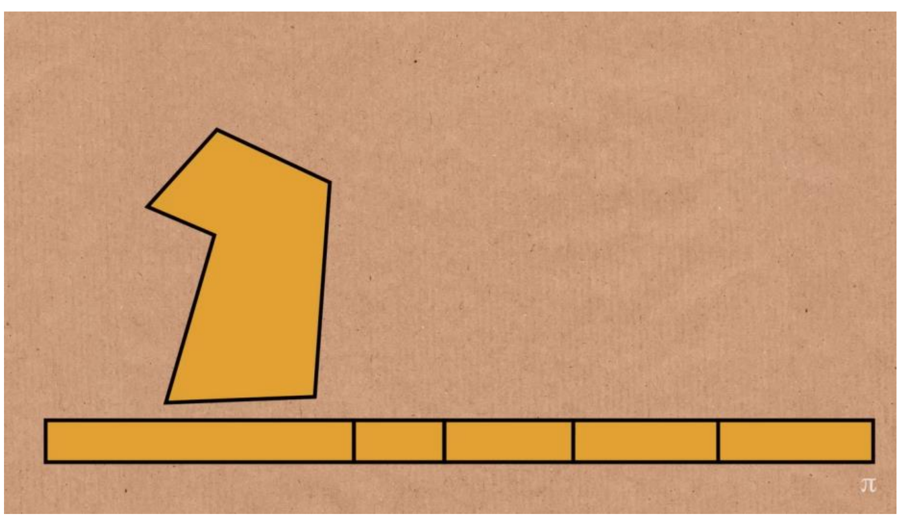
Άρα,

$$CH = AI = a-1$$

$$ΓΠΓ \Rightarrow ADI = CFH$$

5ο βήμα: Ενώνουμε όλα τα ορθογώνια που προέκυψαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο με μήκη πλευρών 1 και το άθροισμα των εμβαδών των αρχικών τριγώνων, δηλαδή το εμβαδόν του αρχικού πολυγώνου.



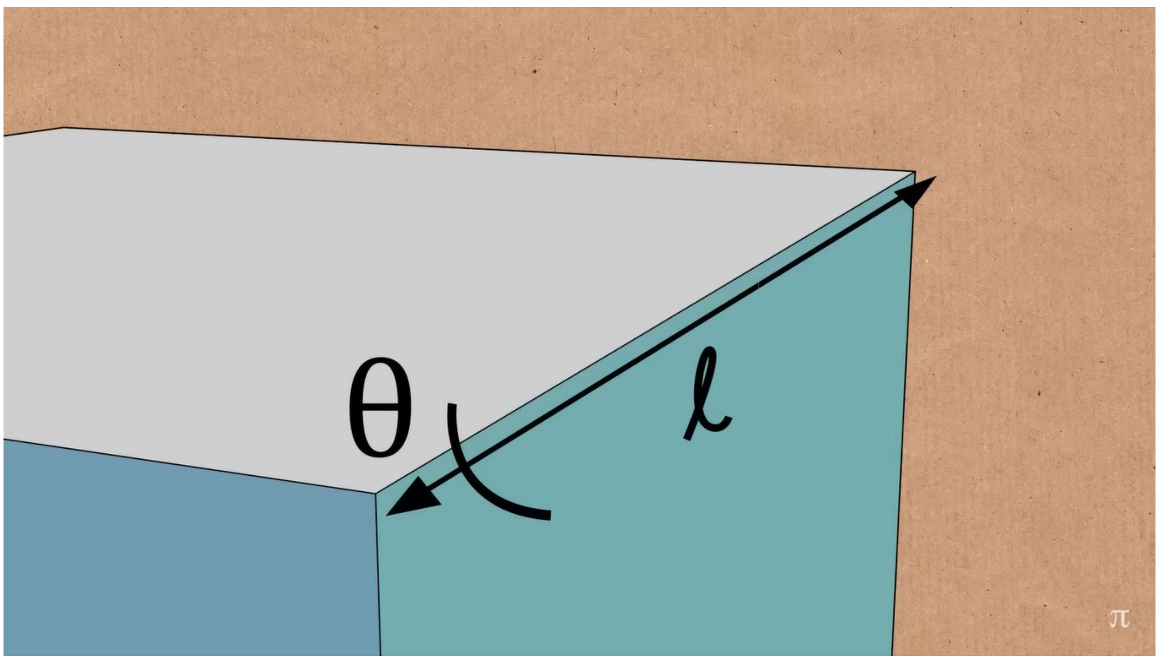


Ακολουθώντας, τώρα, την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να κατασκευάσουμε το δεύτερο πολύγωνο από το ορθογώνιο (1xA). Διαφορετικά, μπορούμε να εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία και στα 2 πολύγωνα και να καταλήξουμε στο ίδιο ορθογώνιο (1xA).

3.4 Η αναλλοίωτη του Dehn και η απάντησή του στο 3ο πρόβλημα του Hilbert

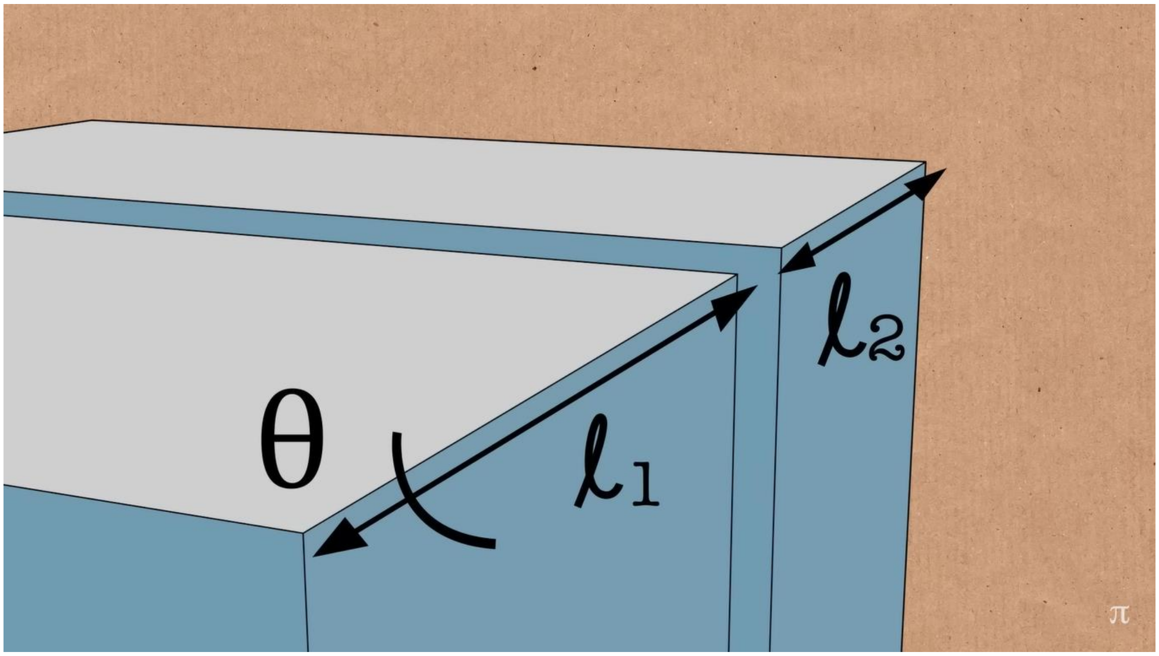
Στις τρεις διαστάσεις, όμως, δεν είναι αρκετή μία αντίστοιχη υπόθεση για τους όγκους των πολυέδρων. Πρέπει τα πολύεδρα να έχουν κοινή και μία άλλη ποσότητα, που καλείται αναλλοίωτη του Dehn.

Η ιδέα του Dehn ήταν η εξής: Έστω μία ακμή ενός πολυέδρου. Παρατηρούμε ότι έχει δύο χαρακτηριστικές ποσότητες: το μήκος της l και τη γωνία $\theta \in [0,2\pi)$ που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο έδρες του πολυέδρου με κοινή τη συγκεκριμένη ακμή (διεδρική γωνία).

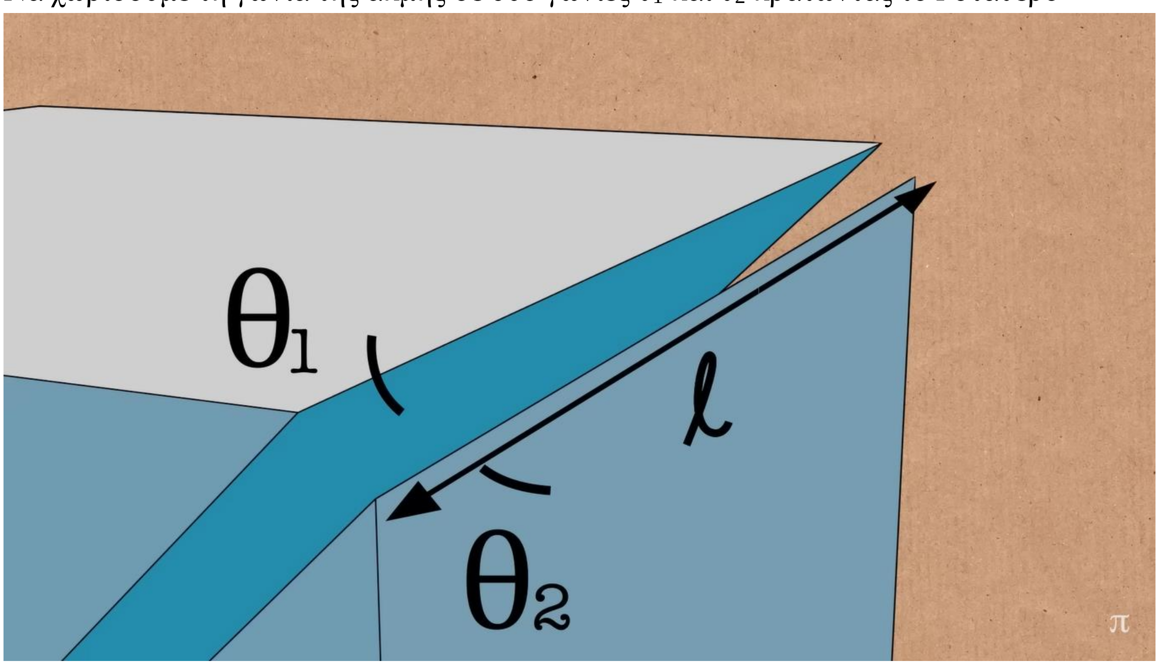


Τότε μπορούμε να κόψουμε το πολύεδρο στη συγκεκριμένη ακμή με δύο τρόπους:

1. Να χωρίσουμε το μήκος l της ακμής σε δύο μήκη l_1 και l_2 κρατώντας τη θ σταθερή



2. Να χωρίσουμε τη γωνία της ακμής σε δύο γωνίες $θ_1$ και $θ_2$ κρατώντας το l σταθερό



Παρατηρώντας αυτό ο Dehn σκέφτηκε να ορίσει την ποσότητα:

$$D(P) = \sum_{\alpha\kappa\mu\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau o\upsilon\ P} l_i \otimes \theta_i \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/2\pi$$

για ένα πολύεδρο P, η οποία αποτελεί αναλλοίωτη για το πολύεδρο. Ονομάστηκε <u>αναλλοίωτη του Dehn</u> και απέδειξε ότι δύο πολύεδρα με τον ίδιο όγκο, αλλά διαφορετική αναλλοίωτη του Dehn δεν είναι σύμμετρα.

Το σύμβολο $\otimes$ καλείται τανυστικό γινόμενο.

Στο χώρο $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/2\pi$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$a \otimes b = a \otimes (b + 2\pi)$$

$$a_1 \otimes b + a_2 \otimes b = (a_1 + a_2) \otimes b$$

$$a \otimes b_1 + a \otimes b_2 = a \otimes (b_1 + b_2)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε έναν κύβο C ακμής 1 (μοναδιαίου όγκου) και ένα τετράεδρο T επίσης μοναδιαίου όγκου. Ο τύπος του όγκου ενός τετραέδρου δίνεται από τον τύπο:

$$vol(T) = \frac{a^3}{6\sqrt{2}},$$

από τον οποίο προκύπτει ότι η ακμή α του συγκεκριμένου τετραέδρου είναι ίση με:

$$\alpha = \sqrt[3]{72},$$

ενώ η διεδρική γωνία είναι ίση με:

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Συνεπώς,

$$D(C) = \sum_{i=1}^{12} 1 \otimes \frac{\pi}{2} = 12 \otimes \frac{\pi}{2}, \varepsilon\nu\acute{\omega}\ D(T) = \sum_{i=1}^{6} a \otimes \theta = 6\alpha \otimes \theta$$

Παρατηρούμε ότι:

$$D(C) \neq D(T).$$

Δηλαδή τα δύο πολύεδρα ενώ έχουν τον ίδιο όγκο, δεν έχουν την ίδια αναλλοίωτη του Dehn. Συνεπώς, δεν είναι σύμμετρα!

Πηγές

1) Coxeter, H.S.M. *Regular polytopes*. Toronto, 1973
2) Παπασπυροπούλου Α. *Πολύεδρα – Πολύτοπα, διπλωματική εργασία*. Αθήνα, 2010
3) Cromwell, P.R. *Polyhedra*. Cambridge, 1997
4) Kuvina.Saydaki. *The almost platonic solids* https://www.youtube.com/watch?v=_QxrkEqOrWM&t=1088s
5) Νικολόπουλος Σ., Γεωργιάδης Λ., Παληός Λ. *Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων*. Αθήνα, 2015
6) 3Blue1Brown. *Euler's Formula and Graph Duality* https://www.youtube.com/watch?v=-9OUyo8NFZg
7) Emanuel Lazar. *Polyhedral Graphs and the Platonic Solids*. Philadelphia, 2016
8) Weisstein, Eric W. "Icosian Game." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html
9) *Το δωδεκάεδρο του ταξιδιώτη (the icosian game), οι πύργοι του Ανόι και το Tetris,παιχνίδι και μαθηματικά!!!!!* http://mathhmagic.blogspot.com/2011/05/icosian-game-tetris.html
10) Στερεό του Johnson https://www.hellenicaworld.com/Science/Mathematics/gr/StereoTouJohnson.html
11) Linda Roper. *Star polygons* https://www.youtube.com/watch?v=pfhO3HctMQA
12) Fraleigh, John. *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*. 2019
13) Guglielmetti R., Jacquemet M. *Polyhedra and Commensurability*. 2016
14) *The Dehn Invariant – Numberphile* https://www.youtube.com/watch?v=eYfpSAxGakI