ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

A-Posteriori Εκτιμήσεις Σφάλματος για Γραμμικές Παραβολικές Εξισώσεις

Διπλωματική Εργασία

Ιωάννης - Παναγιώτης Καμηλούδης

Επιβλέπων:

Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος, Καθηγητής ΕΜΠ

Τριμελής Επιτροπή:

Εμμανουήλ Γεωργούλης, Καθηγητής ΕΜΠ

Βασίλειος Κοκκίνης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2023

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τις προπτυχιακές μου σπουδές με αυτήν την διπλωματική εργασία, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσοι στάθηκαν δίπλα μου τα 5 τελευταία (ενίοτε δύσκολα) χρόνια.

Θα ήθελα αρχικά να δείξω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της εργασίας, Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο, για την καθοδήγηση και την υποστήριξή του κατά τη διάρκεια αυτού του ταξιδιού τον τελευταίο χρόνο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, επίσης, τους καθηγητές Εμμανουήλ Γεωργούλη και Βασίλειο Κοκκίνη οι οποίοι θα συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή για την παρουσίαση αυτής της εργασίας.

Θα ήταν τεράστια παράλειψη αν δεν ευχαριστούσα τους γονείς μου οι οποίοι με στηρίζουν όλα αυτά τα χρόνια για να καταφέρω να σπουδάσω και να ανακαλύψω τι πραγματικά μου αρέσει. Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω όλους μου τους φίλους καθώς και έναν πολύ σημαντικό μου άνθρωπο για την στήριξη και την συμπαράσταση που μου προσέφεραν καθώς και για όλες τις συζητήσεις που κάναμε όχι μόνο επί του θέματος της εργασίας αυτής αλλά και γενικότερα. Χωρίς όλους αυτούς, δεν θα ήμουν σε θέση να γράφω αυτές τις προτάσεις.

....

Ιωάννης - Παναγιώτης Καμηλούδης

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με εκτιμήσεις σφάλματος σχετικά με την αριθμητική επίλυση της Εξίσωσης Θερμότητας. Ειδικότερα, θα χρησιμοποιήσουμε την Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων που είναι κατηγορία αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Η διαδικασία ξεκινάει ορίζοντας την ασθενή διατύπωση του προβλήματος της Εξίσωσης Θερμότητας και έπειτα συνεχίζει με τη διακριτοποίηση. Πιο συγκεκριμένα, θα ορίσουμε χώρους πεπερασμένης διάστασης μετατρέποντας το πρόβλημα της εύρεσης ασθενούς λύσης (πρόβλημα άπειρης διάστασης, δηλαδή, με άπειρους βαθμούς ελευθερίας) σε πεπερασμένο μεν, προσεγγιστικό δε, πρόβλημα, το οποίο για να το λύσουμε θα πρέπει να προσδιορίσουμε πεπερασμένο πλήθος αγνώστων παραμέτρων. Άρχικά, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο Galerkin για την ημι-διακριτοποίηση (στο χώρο) με βάση την Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το πλήρως διακριτοποιήμενο πρόβλημα για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε την ασυνεχή -στο χρόνο- μέθοδο Galerkin σε συνδυασμό με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για την διακριτοποίηση στο χώρο.

Λέξεις Κλειδιά. Αριθμητική Ανάλυση, Διακριτοποίηση, Εκτιμήσεις Σφάλματος, Εξίσωση Θερμότητας, Μέθοδος Galerkin, Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Abstract

In this thesis, we will focus on error estimates related to the numerical solution of the Heat Equation. Specifically, we will use the Finite Element Method, which belongs to the category of numerical methods for solving Partial Differential Equations. The process begins by defining the weak formulation of the Heat Equation problem and then proceeds with discretization. More precisely, we will define finite dimensional spaces and then we will continue our work by transforming the problem of finding a weak solution (an infinite dimensional problem, i.e., with infinite degrees of freedom) into a finite, approximate problem, which requires determining a finite number of unknown parameters. Initially, we will apply the Galerkin method for semi-discretization (in space) based on the Finite Element Method. Then, we will deal with the fully discretized problem for which we will use the discontinuous -in time- Galerkin method in combination with the Finite Element Method for spatial discretization.

Keywords. Discretization, Error Estimates, Finite Element Method, Galerkin Method, Heat Equation, Numerical Analysis

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

1.1 Στοιχεία της Θεωρίας Μέτρου

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να δώσουμε τον Ορισμό για το μέτρο Lebesgue ώστε να μιλήσουμε για Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ καθώς και για Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Αυτή η παράγραφος ακολουθεί τον συμβολισμό από το [12].

Συμβολισμός. *Έστω X σύνολο, το $\mathcal{P}(X)$ είναι το δυναμοσύνολο του X, δηλαδή $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.*

Αρχικά, δίνουμε κάποιους ορισμούς που αφορούν οικογένειες συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Ορισμός 1.1.1. *Μια οικογένεια $\mathscr{A}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X λέγεται σ-άλγεβρα στο X αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(i) $X \in \mathscr{A}$,

(ii) *Αν* $A \in \mathscr{A}$ *τότε* $A^c = X \setminus A \in \mathscr{A}$,

(iii) *Αν* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία στοιχείων της* $\mathscr{A}$ *τότε* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Έτσι, το ζεύγος $(X, \mathscr{A})$ θα το ονομάζουμε *μετρήσιμο χώρο.*

Πρόταση 1.1.2. *Αν $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ τότε υπάρχει η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$ στο X που περιέχει την $\mathcal{F}$. Λέμε τότε ότι η $\mathscr{A}$ παράγεται από την $\mathcal{F}$ και την συμβολίζουμε με $\sigma(\mathcal{F})$.*

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στην σελίδα 3 του [12].

Ορισμός 1.1.3. *Έστω $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η οικογένεια τ λέγεται τοπολογία αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Τα σύνολα* $\emptyset, X$ *ανήκουν στην* τ,

(ii) *Αν* $(A_i)_{i=1}^n$ *πεπερασμένη επιλογή στοιχείων της* τ *τότε* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,

(iii) *Αν* $(A_i)_{i\in I}$ *οικογένεια στοιχείων της* τ *τότε* $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

Ορισμός 1.1.4. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος (βλ. [8], σελ. 9). Η σ-άλγεβρα $\sigma(\tau)$ λέγεται σ-άλγεβρα Borel και τα στοιχεία της σύνολα Borel. Την συμβολίζουμε με $\mathscr{B}(X)$.*

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε μήκος στα υποσύνολα ενός σύνολου για αυτό ξεκινάμε δίνοντας την έννοια της συνολοσυνάρτησης μέτρο.

Ορισμός 1.1.5. *Έστω X σύνολο και $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Η συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ λέγεται μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *Αν* $A_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ *ξένα ανά δύο τότε* $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Θα λέμε την τριάδα $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρο μέτρου.

Και παρακάτω γενικεύουμε την έννοια του μέτρου.

Ορισμός 1.1.6. *Έστω X σύνολο. Μια συνολοσυνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

(i) $\varphi(\emptyset) = 0$,

(ii) *Αν* $A \subseteq B \subseteq X$ *τότε* $\varphi(A) \leq \varphi(B)$,

(iii) *Αν* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία υποσυνόλων του* X *τότε* $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Στον $\mathbb{R}^d$ θα λέμε ανοιχτό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}^d$ κάθε σύνολο της μορφής:

$$I = \prod_{i=1}^{k} (a_i, b_i), \quad a_i \leq b_i.$$

Ο όγκος του θα είναι $v(I) = \prod\limits_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$.

Ορισμός 1.1.7. *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ^* στον $\mathbb{R}^d$*

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$$

ορίζεται ως εξής:

$$\lambda^*(A) =$$
$$inf\left\{\sum_{n\geq 1} v(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n,\ I_n \text{ ανοιχτό φραγμένο διάστημα του } \mathbb{R}^d, n = 1, \ldots\right\}.$$

Ορισμός 1.1.8. *Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $N \subseteq X$ λέγεται μ-μηδενικό αν υπάρχει $M \in \mathscr{A}$ ώστε $\mu(M) = 0$ και $N \subseteq M$. Το μ είναι πλήρες μέτρο αν κάθε μ-μηδενικό σύνολο N ανήκει στην $\mathscr{A}$.*

Ορισμός 1.1.9. *Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Ένα σύνολο $B \subseteq X$ λέγεται φ-μετρήσιμο αν*

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B)$$

για κάθε $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με $\mathscr{M}_\varphi$ την οικογένεια με όλα τα φ-μετρήσιμα υποσύνολα του X.

Θεώρημα 1.1.10 (Καραθεοδωρή)**.** *Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Τότε η $\mathscr{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα στο X και ο περιορισμός του φ στην $\mathscr{M}_\varphi$ είναι πλήρες μέτρο.*

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στην σελίδα 25 του [12].

Πόρισμα 1.1.11. *Ο περιορισμός του λ^* στην $\mathscr{M}_{\lambda^*}$ είναι μέτρο (και μάλιστα πλήρες) και συμβολίζεται με λ. Το λ το καλείται μέτρο Lebesgue του $\mathbb{R}^\kappa$ και συμβολίζεται και ως $|\cdot|$ ενώ τα στοιχεία της $\mathscr{M}_{\lambda^*}$ καλούνται Lebesgue μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{R}^d$.*

Στην ουσία, το μέτρο Lebesgue λ είναι ο συνηθισμένος τρόπος να αντιστοιχίσουμε μέτρο σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Οπότε έχουμε τον Ορισμό:

Ορισμός 1.1.12. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμη (ή απλώς μετρήσιμη) αν:*

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{M}_{\lambda^*} \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Ορισμός 1.1.13. *Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Το essential supremum της f, το οποίο συμβολίζεται με $\operatorname{ess\,sup} f$, ορίζεται ως εξής:*

$$\operatorname{ess\,sup} f = inf\{\mu \in \mathbb{R} : |f > \mu| = 0\}.$$

Συμβολισμός. *Αν κάποια ιδιότητα ισχύει παντού στον $\mathbb{R}^d$ εκτός από ένα μετρήσιμο σύνολο με μέτρο Lebesgue ίσο με 0, τότε λέμε ότι η ιδιότητα ισχύει Lebesgue σχεδόν παντού ή απλούστερα σχεδόν παντού (σ.π.) στον $\mathbb{R}^d$.*

Στην πραγματικότητα, από τον Ορισμό 1.1.13 το $\operatorname{ess\,sup} f$ μιας μετρήσιμης $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι μια γενίκεση του supremum και πρόκειται για το μικρότερο $\mu \in \mathbb{R}$ για το οποίο η f είναι σχεδόν παντού φραγμένη.

Φυσικά, το $\operatorname{ess\,sup} f$ μπορεί να απειρίζεται, αλλά αν είναι πεπερασμένο τότε, όπως θα δούμε παρακάτω, μιλάμε για ουσιωδώς φραγμένες συναρτήσεις.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ (συνάρτηση Dirichlet - χαρακτηριστική των ρητών) που ορίζεται ως:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

η οποία έχει $\operatorname{ess\,sup} f = 0$ επειδή:

αν $\mu < 0$ τότε το $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \mu\}$ περιέχει (πέρα από ρητούς) άρρητους με αποτέλεσμα να είναι υπεραριθμήσιμο και έτσι να μην έχει μέτρο 0

ενώ από την άλλη είναι $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} = \mathbb{Q}$ το οποίο είναι αριθμήσιμο και έτσι έχει $|f > 0| = 0$.

Προφανώς, όμως, $supf = 1$.

Στην συνέχεια θα θέλαμε να ορίσουμε την Bochner μετρησιμότητα για μια συνάρτηση $f : [0, T] \to X$ με $T > 0$ και $(X, \|\cdot\|_X)$ χώρο Banach (πλήρης χώρος με νόρμα).

Ξεκινάμε με τον Ορισμό της απλής συνάρτησης:

Ορισμός 1.1.14. *Μια συνάρτηση $s : [0, T] \to X$ λέγεται απλή αν το σύνολο των τιμών της είναι πεπερασμένο.*

Αν η s είναι απλή, τότε υπάρχει μοναδική μετρήσιμη διαμέριση $\{E_1, \ldots, E_m\}$ του $[0, T]$ $(E_1 \neq \emptyset)$ και μοναδικά $u_1, \ldots, u_m \in X$ ξένα ανά δύο ώστε:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i, \quad 0 \leq t \leq T,$$

όπου χ_{E_i} η χαρακτηριστική του E_i η οποία ορίζεται όπως στο παραπάνω παράδειγμα με την χαρακτηριστική των ρητών.

Και έτσι καταλήγουμε στον Ορισμό:

Ορισμός 1.1.15. *Η $f : [0, T] \to X$ είναι Bochner μετρήσιμη (ή ισχυρά μετρήσιμη) αν υπάρχουν απλές $s_k : [0, T] \to X$ με $f(t) = \lim_{k\to\infty} s_k(t)$ σ.π. στο $[0, T]$.*

1.2 Χώροι Συνεχών Συναρτήσεων

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και $u : U \to \mathbb{R}$.

Συμβολισμός. *Ένα διάνυσμα της μορφής $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ θα λέγεται multi-index τάξης $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.*

Ορισμός 1.2.1. *Δοθέντος, λοιπόν, ενός multi-index α, η α - μερική παράγωγος της u στο $x \in U$ (αν υπάρχει) ορίζεται ως:*

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Τώρα αν $k \in \mathbb{N}_0$ τότε γράφουμε: $D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$.

Παραδείγματα

• Για $k = 1$, η $D^1 u = Du$ συμβολίζει την Βαθμίδα (Gradient) της u, δηλαδή:

$$Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = \nabla u.$$

• Για $k = 2$, η $D^2 u$ συμβολίζει τον Εσσιανό της u, δηλαδή:

$$D^2 u = \begin{bmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση. Για την Λαπλασιανή της u μπορούμε να δούμε ότι ισχύει:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = tr(D^2 u),$$

όπου $tr(A)$ το ίχνος ένος πίνακα A.

Ορισμός 1.2.2. *Αν $k \in \mathbb{N}_0$ τότε, έχουμε τον χώρο των k φορές συνεχών παραγωγήσιμων συναρτήσεων:*

$$C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid D^\alpha u \text{ συνεχής στο } U \ \forall \alpha \text{ με } |\alpha| \leq k\}.$$

Φυσικά, για $k = 0$ παίρνουμε τον χώρο των συνεχών $u : U \to \mathbb{R}$ που συμβολίζεται ως $C(U)$.

Επίσης, έχουμε τον χώρο των απείρως φορές παραγωγήσιμων συναρτήσεων $C^\infty(U)$ τον οποίο μπορούμε να γράψουμε και ως:

$$C^\infty(U) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(U).$$

Αν θεωρήσουμε ότι το $U \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο, τότε έχουμε τον παρακάτω χώρο:

Ορισμός 1.2.3. *Έστω $k \in \mathbb{N}_0$ τότε θεωρούμε:*

$$C^k(\bar{U}) = \{u \in C^k(U) \mid D^\alpha u \text{ ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε φραγμένο } V \subseteq U \ \forall \alpha \text{ με } |\alpha| \leq k\}$$

με νόρμα:

$$\|u\|_{C^k(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in U} |D^\alpha u(x)|.$$

Στην ουσία, αν $u \in C^k(\bar{U})$ τότε η $D^\alpha u$ επεκτείνεται με συνεχή τρόπο στο $\bar{U}$ για κάθε multi-index α με $|\alpha| \leq k$.

Πάλι, αν $k = 0$, παίρνουμε τον χώρο των $u \in C(U)$ που είναι ομοιόμορφα συνεχείς για κάθε φραγμένο υποσύνολο του U ο οποίος συμβολίζεται με $C(\bar{U})$ και έχει νόρμα:

$$\|u\|_{C(\bar{U})} = \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

Όπως και πριν, γράφουμε: $C^\infty(\bar{U}) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\bar{U})$.

Ορισμός 1.2.4. *Ο φορεάς της u στο U είναι το κλειστό σύνολο $\bar{S} \subseteq U$ όπου $S = \{x \in U \mid u(x) \neq 0\}$. Συμβολίζεται με supp$(u)$.*

Συμβολισμός. *Ο $C_c^\infty(U)$ αποτελείται από τις απείρως φορές παραγωγήσιμες συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα στο U. Αυτές οι συναρτήσεις συνήθως ονομάζονται συναρτήσεις "δοκιμής" (test functions).*

Πρόταση 1.2.5. *Αν $U \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\varphi \in C^2(U)$, $\psi \in C^1(U)$, τότε ο 1ος τύπος του Green είναι:*

$$\int_U (\psi \Delta\varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi)\, dV = \oint_{\partial U} \psi(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}) dS,$$

όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω κάθετο στο ∂U.

Η παραπάνω σχέση προκύπτει εύκολα εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απόκλισης του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\psi\nabla\varphi$.

Τέλος, αν θεωρήσουμε ότι ο $(X, \|\cdot\|_X)$ είναι χώρος Banach τότε έχουμε τον επόμενο χώρο:

Ορισμός 1.2.6. $C([0,T];X) = \{u : [0,T] \to X$ *συνεχής* $\mid \|u\|_{C([0,T];X)} < \infty\}$ *με νόρμα:*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X.$$

1.3 Χώροι L^p

Σε αυτή την ενότητα, θα ασχοληθούμε με χώρους που αποτελούνται από ολοκληρώσημες συναρτήσεις. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω* $1 \le p \le \infty$. *Ορίζουμε τον* L^p *χώρο ως εξής:*

$$L^p(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη} \mid \|u\|_{L^p(U)} < \infty\}$$

όπου η αντίστοιχη νόρμα του $L^p(U)$, $1 \le p \le \infty$ *υπολογίζεται ως:*

$$\|u\|_{L^p(U)} = \begin{cases} \left(\int_U |u(x)|^p dx\right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \le p < \infty, \\ \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in U} |u(x)|, & \text{αν } p = \infty. \end{cases}$$

Στην ουσία θα λέμε ότι ο χώρος $L^p(U)$ αποτελείται απο συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$ που είναι p - ολοκληρώσιμες όταν $1 \le p < \infty$ ή αλλιώς ουσιωδώς φραγμένες αν $p = \infty$.

Αν $p = 2$, τοτε ο $L^2(U)$ είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο:

$$(u,v) = (u,v)_{L^2(U)} = \int_U u(x)v(x)dx, \quad u,v \in L^2(U),$$

και έτσι η επαγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο νόρμα στον $L^2(U)$ (φυσικά είναι η παραπάνω νόρμα για $p = 2$) θα είναι:

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(U)} = \left(\int_U u^2(x)dx\right)^{1/2}, \quad u \in L^2(U).$$

Εν συνεχεία, θα αναφερθού με στους τοπικά L^p χώρους με την έννοια του ότι τα στοιχεία τους ανήκουν στον $L^p(V)$ για κάθε V ώστε το $\bar{V}$ να είναι συμπαγές υποσύνολο του U. Τέτοιες συναρτήσεις θα λέμε ότι είναι τοπικά p - ολοκληρώσιμες. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον Ορισμό:

Ορισμός 1.3.2. *Αν* $1 \le p \le \infty$ *τότε έχουμε τον χώρο:*

$$L^p_{loc}(U) = \{u : U \to \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη} \mid u|_K \in L^p(K) \ \forall\ K \subset\subset U\}$$

όπου στον παραπάνω Ορισμό ο συμβολισμός $u|_K$ δηλώνει τον περιορισμό της u στο K και ο $V \subset\subset U$ δείχνει ότι το V περιέχεται συμπαγώς στο U, δηλαδή ισχύει $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ και $\bar{V}$ συμπαγές.

Από τον παραπάνω Ορισμό, είναι εμφανές ότι $L^p(U) \subseteq L^p_{loc}(U)$.

Τώρα, έχουμε μερικές χρήσιμες ανισότητες:

Πρόταση 1.3.3 (Ανισότητα Hölder). *Έστω p, q συζυγείς εκθέτες, δηλαδή είναι θετικοί και ισχύει $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $1 \leq p, q \leq \infty$ και $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$ ισχύει:*

$$\|uv\|_{L^1(U)} = \int_U |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^q(U)}$$

από την οποία παίρνουμε επίσης ότι $uv \in L^1(U)$.

Από αυτή την ανισότητα μπορούμε να δούμε επίσης ότι αν $u \in L^p(U)$ τότε έχουμε $u \in L^1(U)$ ή $L^p(U) \subseteq L^{p'}(U)$ για $p' \leq p$.

Για $p = 2$, (οπότε και $q = 2$) παίρνουμε την γνωστή ανισότητα Cauchy - Schwarz, δηλαδή:

$$\left| \int_U u(x)v(x)dx \right| = |(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(U)}\|v\|_{L^2(U)}.$$

Πρόταση 1.3.4 (Ανισότητα Minkowski). *Έστω p, q συζυγείς εκθέτες, δηλαδή είναι θετικοί και ισχύει $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $1 \leq p \leq \infty$ και u, $v \in L^p(U)$ τότε:*

$$\|u + v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}$$

όπου βλέπουμε ότι $u + v \in L^p(U)$.

Η παραπάνω σχέση αποτελεί μια γενίκευση της τριγωνικής ανισότητας στους L^p χώρους.

Τέλος, θα θέλαμε να κατασκευάσουμε χώρους ώστε να γενικεύσουμε τους L^p με την έννοια ότι θα θέλαμε τα στοιχεία αυτών των χώρων να αντιστοιχίζουν τον χρόνο σε χώρους Banach. Τέτοιοι χώροι λέγονται χώροι Bochner. Έτσι έχουμε τον Ορισμό:

Ορισμός 1.3.5. *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ χώρος Banach. Ορίζουμε τον χώρο:*

$$L^p(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \text{ Bochner μετρήσιμη} \mid \|u\|_{L^p(0,T;X)} < \infty\},$$

με νόρμα:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \leq p < \infty, \\ \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X, & \text{αν } p = \infty. \end{cases}$$

1.4 Χώροι Sobolev

Για να μελετήσουμε Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις καθώς και την θεωρία πίσω από αυτές, συχνά χρειάζεται να δουλέψουμε με χώρους που έχουν λιγότερο ομαλές συναρτήσεις από κάποιους $C^k(U)$. Έτσι, λοιπόν, θα χρειαστούμε κάποιους χώρους Sobolev για τους οποίους θα μιλήσουμε σε αυτή την ενότητα.

Πρωτού αναφερθούμε σε αυτούς τους χώρους, θα γενικεύσουμε την α - μερική παραγώγο μιας συνάρτησης u, εισάγοντας την έννοια της α - ασθενούς μερικής παραγώγου.

Ξεκινάμε δίνοντας την ιδέα πίσω από την ανάγκη ύπαρξης αυτής της έννοιας.

Έστω $u \in C^1(U)$ όπου $U = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και έστω φ μια αρκετά ομαλή συνάρτηση που σβήνει στο σύνορο του U (δηλαδή $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$), π.χ. $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Τότε με χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης, έχουμε:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = [u(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b u\varphi'(x)dx \Rightarrow \int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b u\varphi'(x)dx.$$

Τώρα αν πάμε σε μεγαλύτερη διάσταση, θεωρούμε $u \in C^k(U)$ όπου $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό, $\varphi \in C_c^\infty(U)$ και multi-index α για το οποίο έχουμε $|\alpha| \leq k$ οπότε με χρήση του 1ου τύπου Green (Πρόταση 1.2.5) έχουμε:

$$\int_U D^\alpha u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U uD^\alpha\varphi(x)dx.$$

Γενικά θα θέλαμε να ισχύει η παραπάνω σχέση ακόμα και αν δεν ισχύει $u \in C^k(U)$. Για αυτό λοιπόν ορίζουμε την α - ασθενή μερική παράγωγο της u με τον παρακάτω τρόπο.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό, $u, v \in L^1_{loc}(U)$ και α multi-index. Η v είναι η α - ασθενής μερική παράγωγος της u και θα λέμε ότι $D^\alpha u = v$ με ασθενή τρόπο αν:*

$$\int_U u(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U v\varphi(x)dx$$

για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(U)$.

Φυσικά, η α - ασθενής μερική παράγωγος, αν υπάρχει, ορίζεται μοναδικά σχεδόν παντού στο U.

Τώρα, πλέον, μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους Sobolev ως χώρους συναρτήσεων με τις α - ασθενείς μερικές παραγώγους των συναρτήσεων αυτών να είναι p - ολοκληρώσιμες. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Ορισμός 1.4.2. *Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε:*

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^1_{loc}(U) \mid D^a u \in L^p(U) \ \forall \text{ multi-index } \alpha \text{ με } |\alpha| \leq k\},$$

όπου με $D^a u$ αναφερόμαστε προφανώς στην α - ασθενή μερική παράγωγο της u.

Στον $W^{k,p}(U)$ έχουμε την νόρμα:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^a u\|^p_{L^p(U)}\right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^a u\|_{L^\infty(U)}, & \text{αν } p = \infty. \end{cases}$$

Στην πραγματικότητα, ο παραπάνω Ορισμός για τον $W^{k,p}(U)$ είναι ισοδύναμος με τον

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U) \mid D^a u \in L^p(U)\ \forall \text{ multi-index } \alpha \text{ με } |\alpha| \leq k\}$$

επειδή αν $u \in L^p(U)$ τότε $u \in L^1(U)$ και έτσι $u \in L^1_{loc}(U)$.
Επιπλέον,
αν $u \in L^1_{loc}(U)$ και γνωρίζοντας ότι $D^\alpha u \in L^p(U)$ για κάθε multi-index α με $|\alpha| \leq k$ παίρνουμε το $\alpha = (0, \dots, 0)$ και τότε θα είναι $u = D^\alpha u \in L^p(U)$.

Παραπάνω για $p = 2$ γράφουμε $H^k(U) = W^{k,2}(U),\ k = 0, 1, \dots$ ο οποίος είναι και χώρος Hilbert. Για $k = 0$ παίρνουμε τον $L^2(U)$, δηλαδή: $H^0(U) = L^2(U)$.

Το εσωτερικό γινόμενο του $H^k(U)$ είναι:

$$(u, v)_k = (u, v)_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad \forall u, v \in H^k(U).$$

Και έτσι η επαγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο νόρμα στον $H^k(U)$ (φυσικά είναι η παραπάνω νόρμα για $p = 2$) θα είναι:

$$\|u\|_k = \|u\|_{H^k(U)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall u \in H^k(U).$$

Επίσης, έχουμε τους χώρους Sobolev $W^{k,p}_0(U)$ οι οποίοι προκύπτουν ως την κλειστότητα των $C^\infty_c(U)$ στους $W^{k,p}(U)$.

Στην ουσία, αυτοί οι χώροι έχουν στοιχεία $u \in W^{k,p}(U)$ που ικανοποιούν $D^a u = 0$ για κάθε multi-index α με $|\alpha| \leq k - 1$ στο σύνορο ∂U.

Παραδείγματα

- $H^1(U) = \left\{ u \in L^2(U) \mid \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(U),\ i = 1, \dots, n \right\}$

με αντίστοιχη νόρμα: $\|u\|_1 = \left(\|u\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{1/2}$

- $H^2(U) = \left\{ u \in L^2(U) \mid \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(U),\ i = 1, \dots, n,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(U),\ i, j = 1, \dots, n \right\}$

με αντίστοιχη νόρμα: $\|u\|_2 = \left(\|u\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2 \right)^{1/2}$

- $H^1_0(U) = \{u \in H^1(U) \mid u = 0 \text{ στο σύνορο } \partial U\}$

Παρακάτω παραθέτουμε ένα σημαντικό Θεώρημα Εγκλεισμού Sobolev από το οποίο μπορούμε να αντιληφθούμε ότι μερικοί χώροι Sobolev μπορεί να περιέχουν αρκετά ομαλές συναρτήσεις. Το Θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1.4.3. *Αν $U \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο και ∂U αρκετά ομαλό τότε για $m > k + n/2$ έχουμε:*

$$H^m(U) \subseteq C^k(\bar{U})$$

(βλ. [13], σελίδα 51).

Δηλαδή, από το παραπάνω Θεώρημα βλέπουμε, για παράδειγμα, ότι αν $u \in H^1(a,b)$ τότε $u \in C([a,b])$ όπου $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Μερικές χρήσιμες ανισότητες είναι οι επόμενες:

Πρόταση 1.4.4 (Ανισότητα Poincare)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο και $u \in H_0^1(U)$. Τότε υπάρχει $c > 0$ ώστε:*

$$\|u\| \leq c\|\nabla u\|.$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στην σελίδα 49 του [13].

Πόρισμα 1.4.5 (Ανισότητα Friedrichs)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο και $u \in H_0^1(U)$. Τότε από την ανισότητα της Πρότασης* 1.4.4 προκύπτει η επόμενη ανισότητα:

$$\|u\|_1 \leq c'\|\nabla u\|,$$

όπου $c' = 1 + c^2$ και c η σταθερά της Πρότασης 1.4.4.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στην σελίδα 51 του [13].

Τώρα, αν $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό, θα ορίσουμε τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(U)$, δηλαδή τον χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών του $H_0^1(U)$. Δηλαδή, έχουμε τον ορισμό:

Ορισμός 1.4.6. *Ορίζουμε τον δυικό χώρο του $H_0^1(U)$:*

$$H^{-1}(U) = (H^{-1}(U))^* = \{f : H_0^1(U) \to \mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένο και γραμμικό}\},$$

ο οποίος έχει νόρμα:

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = sup\left(\langle f,v\rangle \mid v \in H_0^1(U),\ \|v\|_1 \leq 1\right), \quad f \in H^{-1}(U),$$

όπου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ το εσωτερικό γινόμενο ως προς την δυϊκότητα, δηλαδή μεταξύ του $H^{-1}(U)$ και του $H_0^1(U)$.

Έχουμε ότι ισχύει $H_0^1(U) \subseteq L^2(U) \subseteq H^{-1}(U)$.

Όσον αφορά τον δυϊκό χώρο $H^{-1}(U)$ έχουμε το επόμενο σημαντικό Θεώρημα:

Θεώρημα 1.4.7. *Έστω $f \in H^{-1}(U)$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f^i \in L^2(U)$, $i = 0, \ldots, n$ ώστε:*

$$\langle f, v\rangle = \int_U \left(f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} \right) dx.$$

Επίσης, για $u \in H_0^1(U)$, $v \in L^2(U) \subseteq H^{-1}(U)$ έχουμε:

$$(v, u) = \langle v, u\rangle.$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στην σελίδα 299 του [3].

Λήμμα 1.4.8 (Bramble - Hilbert). *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $n \geq 1$ φραγμένο και $l : W^{m,p}(U) \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Αν $\|l\|_{W^{m,p}(U)'}$ η νόρμα του l στον δυικό του $W^{m,p}(U)$ και ισχύει ότι $l(v) = 0$ για κάθε v πολυώνυμο βαθμού $m-1$ τότε υπάρχει σταθερά C εξαρτούμενη μόνο από το χωρίο U ώστε:*

$$|l(u)| \leq C\, \|l\|_{W^{m,p}(U)'}\, |u|_{W^{m,p}(U)}\,, \ \forall u \in W^{m,p}(U),$$

όπου η επόμενη ποσότητα λέγεται seminorm και είναι:

$$|u|_{W^{m,p}(U)} = \sum_{|\alpha|=m} \left(\|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty \text{ (βλ. [2]).}$$

Τέλος, θα θέλαμε να κατασκευάσουμε χώρους Sobolev με την ίδια ιδέα που κατασκευάσαμε τους $L^p(0,T;X)$. Πάλι θεωρούμε ότι ο $(X, \|\cdot\|_X)$ είναι χώρος Banach.

Πρώτα θα πρέπει να δωσουμε όμως τον ορίσμό για την ασθενή παράγωγο μιας $u \in L^p(0,T;X)$ (άρα και $u \in L^1(0,T;X)$).

Ορισμός 1.4.9. *Έστω $u \in L^1(0,T;X)$. Η $v \in L^1(0,T;X)$ είναι η ασθενής παράγωγος της u (και γράφουμε τότε $u' = v$) αν ισχύει:*

$$\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = -\int_0^T \varphi(t)v(t)dt, \quad \text{για κάθε } \varphi \in C_c^\infty(0,T).$$

Τώρα, πλέον, μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ με βάση το κάτωθι:

Ορισμός 1.4.10. $W^{1,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X) \mid u' \in L^p(0,T;X)\}$ *με νόρμα:*

$$\|v\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \left(\|u(t)\|^p_X + \|u'(t)\|^p_X \right) dt \right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|u(t)\| + \|u'(t)\|_X, & \text{αν } p = \infty. \end{cases}$$

Φυσικά, για $p = 2$ έχουμε $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.

Και έχουμε το επόμενο Θεώρημα που μας εξασφαλίζει κάποια ομαλότητα στα στοιχεία του $W^{1,p}(0,T;X)$:

Θεώρημα 1.4.11. *Έστω $u \in W^{1,p}(0,T;X), 1 \leq p \leq \infty$. Τότε:*

(i) $u \in C([0,T];X)$,

(ii) $\max\limits_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X \leq C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$, *όπου C σταθερά που εξαρτάται μόνο από τον χρόνο T.*

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στην σελίδα 302 του [3].

Τέλος, έχουμε το επόμενο Θεώρημα περί ομαλότητας στοιχείων χώρων Bochner:

Θεώρημα 1.4.12. *Έστω* $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ *με* $u \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$. *Τότε:*

$$u \in C([0,T];L^2(U)).$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στην σελίδα 303 του [3].

Κεφάλαιο 2

Εξίσωση Θερμότητας

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών με ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet για την Εξίσωση Θερμότητας:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, \quad \text{στο } \Omega, \quad \text{για } t > 0, \\ u &= 0, \quad \text{στο } \partial\Omega, \text{ για } t \geq 0, \\ u &= v, \quad \text{στο } \Omega, \quad \text{για } t = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και φραγμένο, με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$.

Η Εξίσωση Θερμότητας (καθώς και κάποιες διαφοροποιήσεις της) είναι πολύ σημαντική στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, η Διαφορική Εξίσωση των Black-Scholes είναι στην ουσία μια τροποποίηση της Εξίσωσης Θερμότητας.

2.1 Ασθενής Διατύπωση

Θα θέλαμε αρχικά να δώσουμε την ιδέα πίσω από τον ορισμό της ασθενούς λύσης του παραβολικού προβλήματος (2.1). Έστω $u = u(x,t)$ μια αρκετά ομαλή συνάρτηση, λύση της (2.1) και έστω $[0,T]$ το χρονικό διάστημα το οποίο μας ενδιαφέρει στο πρόβλημα όπου μια σταθερά $T > 0$.

Θεωρούμε την επόμενη συνάρτηση $\mathbf{u} : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ με:

$$[\mathbf{u}(t)](x) = u(x,t), \quad x \in \Omega, \ t \in [0,T],$$

όπου παραπάνω δεν θεωρούμε ότι η συνάρτηση είναι ταυτόχρονα μεταβλητής x και t αλλά αντιστοιχίζουμε τον χρόνο t στον χώρο Sobolev $H_0^1(\Omega)$ συναρτήσεων του x.

Όμοια και για την f, θεωρούμε την $\mathbf{f} : [0,T] \to L^2(\Omega)$ με:

$$[\mathbf{f}(t)](x) = f(x,t), \quad x \in \Omega, \ t \in [0,T].$$

Τώρα παίρνουμε μια $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση της (2.1) με την φ και ολοληρώνουμε στο Ω.

$$\int_\Omega \mathbf{u}'\varphi \, dx - \int_\Omega \Delta\mathbf{u}\varphi \, dx = \int_\Omega \mathbf{f}\varphi \, dx.$$

Εξαιτίας του Τύπου του Green (Πρόταση 1.2.5) έχουμε:

$$\int_\Omega \Delta \mathbf{u}\varphi \, dx = -\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = -\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \nabla \varphi \, dx$$

αφού $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ και έτσι $\varphi(x) = 0, \ x \in \partial\Omega$.

Με βάση τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας το L^2 εσωτερικό γινόμενο για τον συμβολισμό έχουμε:

$$(\mathbf{u}', \varphi) + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi) = (\mathbf{f}, \varphi), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

Από την διαφορική εξίσωση της (2.1) βλέπουμε ότι:

$$u_t = f + \sum_{i=1}^{d} (u_{x_i})_{x_i}$$

και έτσι από το Θεώρημα 1.4.7 έχουμε ότι $\mathbf{u}' \in H^{-1}(\Omega)$ σχεδόν για κάθε χρόνο t στο διάστημα $[0, T]$. Έτσι, χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο ως προς την δυϊκότητα $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στην πιο πάνω εξίσωση. Δηλαδή, γράφουμε:

$$\langle \mathbf{u}', \varphi \rangle + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi) = (\mathbf{f}, \varphi), \quad \forall t \in [0, T].$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση έχει νόημα ακόμα και για μη ομάλες u, f.

Έτσι καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό για την ασθενή λύση του προβλήματος (2.1).

Ορισμός 2.1.1. *Μια $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ με $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ λέγεται ασθενή λύση του προβλήματος* (2.1) *αν ισχύει:*

(i) $\langle \mathbf{u}', \varphi \rangle + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi) = (\mathbf{f}, \varphi),$ *για κάθε $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ και σχεδόν για κάθε $t \in [0, T]$,*

(ii) $\mathbf{u}(0) = v.$

Παρατήρηση. *Από το Θεώρημα 1.4.12 βλέπουμε ότι $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ και έτσι η (ii) τον Ορισμό 2.1.1 έχει νόημα.*

Πρόταση 2.1.2. *Για το παραβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών* (2.1) *υπάρχει μοναδική ασθενής λύση σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Για την ύπαρξη παραπέμπουμε στο [3].

Για την μοναδικότητα αρκεί να δείξουμε ότι αν $v \equiv 0, \ f \equiv 0$ τότε $u \equiv 0$.

Θέτουμε στην ασθενή μορφή του προβλήματος (2.1) $\varphi = u$ οπότε η σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned} &(u_t, u) + (\nabla u, \nabla u) = 0, \\ &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Από την Ανισότητα Poincare (Πρόταση 1.4.4), η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \frac{1}{c}\|u\|^2 &\leq 0,\\ \frac{d}{dt}\left(e^{2t/c}\|u\|^2\right) &\leq 0,\\ u &= 0 \text{ σ.π..}\end{aligned}$$

όπου παραπάνω στην τελευταία σχέση ολοκληρώσαμε ως προς τον χρόνο.

Άρα, η ασθενής λύση είναι μοναδική σχεδόν παντού.

□

Έχοντας μιλήσει για τις ασθενείς λύσεις, ήρθε η ώρα να περάσουμε στο επόμενο βήμα το οποίο είναι η ενασχόληση με την προσεγγιστική λύση του προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών (2.1) το οποίο θα χωριστεί σε 2 μέρη: διακριτοποίηση ως προς των χώρο και έπειτα ως προς των χρόνο.

2.2 Διακριτοποίηση στον χώρο

Αυτή η παράγραφος της Εργασίας ακολουθεί το Κεφάλαιο 1 του [7]. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε αρχικά ότι το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Εν προκειμένω, η ανάλυση μας θα είναι σε 2 (χωρικές) διαστάσεις, δηλαδή, θα επιλέξουμε $d = 2$, άρα, θα έχουμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Παίρνουμε $\mathcal{T}_h$ την διαμέριση του Ω σε ξένα τρίγωνα τ ώστε καμία κορυφή από κανένα τρίγωνο να μην είναι στο εσωτερικό πλευράς κάποιου άλλου τριγώνου. Η ένωση όλων αυτών των τριγώνων θα ορίζει στην ουσία ένα πολυγωνικό χωρίο Ω_h το οποίο θα είναι υποσύνολο του Ω.

Έστω h το μέγιστο μήκος των πλευρών των τριγώνων της $\mathcal{T}_h$. Είναι προφανές ότι όσο το h μικραίνει τόσο η διαμέριση θα γίνεται καλύτερη / πιο λεπτομερής. Μερικές από τις υποθέσεις που πρέπει να κάνουμε είναι οι εξής:

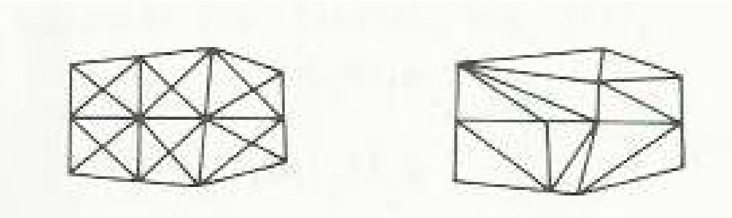
1. Οι γωνίες των τριγώνων της $\mathcal{T}_h$ πρέπει να είναι κάτω φραγμένες από κάποια θετική σταθερά, ανεξάρτητη του h.
2. Τα τρίγωνα της $\mathcal{T}_h$ έχουν το "ίδιο" μέγεθος με την έννοια ότι το εμβαδό του κάθε τριγώνου είναι κάτω φραγμένο από το ch^2 όπου $c > 0$ μια θετική σταθερά ανεξάρτητη του h, δηλαδή $area(\tau) \geq ch^2$. Τριγωνοποιήσεις με αυτή την ιδιότητα συχνά λέγονται Σχεδόν Ομοιόμορφες (Quasiuniform).

Με άλλα λόγια υποθέτουμε για Quasiuniform Τριγωνοποιήσεις ότι:

$$C_1 \leq \frac{h}{\rho} \leq C_2,\ \forall \tau \in \mathcal{T}_h$$

όπου C_1, C_2 είναι θετικές σταθερές ανεξάρτητες του τριγώνου $\tau \in \mathcal{T}_h$ και ρ η διάμετρος του μέγιστου εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

Για παράδειγμα, στο επόμενο Σχήμα έχουμε στα αριστερά μία καλή και στα δεξιά μία κακή Τριγωνοποίηση σε κάποιο κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ (με βάση τις παραπάνω υποθέσεις).



Σχήμα 2.1: Διάφορες Τριγωνοποιήσεις σε χωρίο του $\mathbb{R}^2$

Θεωρούμε τώρα τον εξής χώρο S_h:

$$S_h = \{\chi \in C(\bar{\Omega}) \mid \chi \text{ γραμμική σε κάθε } \tau \in \mathcal{T}_h,\ \chi|_{\Omega_h} = 0\}.$$

Αν $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$ οι εσωτερικές κορυφές των τριγώνων της $\mathcal{T}_h$ τότε μια $\chi \in S_h$ ορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στις κορυφές $P_j,\ j = 1, \ldots, N_h$ με αποτέλεσμα να βασίζεται αποκλείστικα σε N_h παραμέτρους.

Δηλαδή, ο S_h πρόκειται για χώρο πεπερασμένης διάστασης και μάλιστα από τον ορισμό του παίρνουμε ότι $S_h \subseteq H_0^1(\Omega)$.

Αν, για παράδειγμα, πάρουμε Φ_j μια συνάρτηση πυραμίδα στον S_h η οποία παίρνει την τιμή 1 στο σημείο P_j και 0 στα υπόλοιπα, τότε η $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ θα είναι βάση του S_h και κάθε $\chi \in S_h$ γράφεται ως:

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Phi_j(x), \text{ όπου } \alpha_j = \chi(P_j).$$

Έτσι, λοιπόν, στο πρώτο βήμα προσεγγίζουμε την $u(x,t)$ από την $u_h(x,t)$ η οποία για καθορισμένο χρόνο t ανήκει στιν χώρο S_h που περιγράψαμε παραπάνω.

Ως εκ τούτου, με βάση την ασθενή διατύπωση του προβλήματος (2.1), το (χωρικά) ημιδιακριτό πρόβλημα είναι να βρούμε μια $u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in S_h\ \forall\ t \geq 0$ που να ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\begin{aligned} (u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) &= (f, \chi), \quad \forall\ \chi \in S_h,\ t > 0, \\ u_h(0) &= v_h, \end{aligned} \tag{2.3}$$

όπου v_h κάποια προσέγγιση της v στον S_h.

Χρησιμοποιώντας την συνήθη βάση $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ του S_h, δηλαδή τις συναρτήσεις πυραμίδα που περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε ότι η προσεγγίστικη λύση u_h παίρνει την μορφή:

$$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \Phi_j(x),$$

και έτσι το πρόβλημα (2.3) είναι ισοδύναμο με την εύρευση των συντελεστών $\alpha_j(t)$.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω μορφή της u_h στο πρόβλημα (2.3) και θέτοντας $\chi = \Phi_k$ παίρνουμε:

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j'(t)(\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)(\nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k) = (f, \Phi_k), \quad k = 1, \ldots, N_h. \tag{2.4}$$

Η αρχική συνθήκη (πλέον για τους συντελεστές $\alpha(t)$) λαμβάνει την μορφή:

$$\alpha_j(0) = \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, N_h,$$

όπου γ_j οι συντελεστές της προσέγγισης v_h της δοθείσης αρχικής συνθήκης v.

Οι εξισώσεις (2.4) μπορούν να γραφούν με την βοήθεια πινάκων ως:

$$\begin{aligned} B\alpha'(t) + A\alpha(t) &= \tilde{f}, \quad t > 0, \\ \alpha(0) &= \gamma, \end{aligned} \tag{2.5}$$

όπου:

- $B = (b_{jk}),\ b_{jk} = (\Phi_j, \Phi_k),\ j,k = 1, \ldots, N_h$ είναι ο πίνακας μάζας,
- $A = (a_{jk}),\ b_{jk} = (\nabla\Phi_j, \nabla\Phi_k),\ j,k = 1, \ldots, N_h$ είναι ο πίνακας ακαμψίας,
- $\tilde{f} = (f_k),\ f_k = (f, \Phi_k),\ k = 1, \ldots, N_h,$
- $\alpha(t) = (\alpha_j(t)),\ \alpha_j(t),\ j = 1, \ldots, N_h$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές $\forall\ t > 0$ και
- $\gamma = (\gamma_j), \gamma_j,\ j = 1, \ldots, N_h$ είναι οι συντελεστές που περιγράψαμε παραπάνω.

Τώρα θα θέλαμε να δούμε ότι το πρόβλημα (2.4) έχει μοναδική λύση. Για να το κάνουμε αυτό, θα πρέπει να ελέγξουμε την μορφή του συστήματος (2.5).

Πρόταση 2.2.1. *Ο πίνακας μάζας B είναι θετικά ορισμένος.*

Απόδειξη. Φυσικά ο B είναι συμμετρικός από τον ορισμό του L^2 εσωτερικού γινομένου.

Θα δειξουμε ότι αν $\xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \neq 0$ τότε $\xi^T B \xi > 0$.

Έστω, λοιπόν, $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_{N_h}]^T \neq 0$, άρα, υπάρχει $i \in \{1, \ldots, N_h\}$ ώστε $\xi_i \neq 0$. Έχουμε:

$$\xi^T B \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_{N_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Phi_1, \Phi_1) & \ldots & (\Phi_1, \Phi_{N_h}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Phi_{N_h}, \Phi_1) & \ldots & (\Phi_{N_h}, \Phi_{N_h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{N_h} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_{N_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N_h} (\Phi_1, \Phi_i)\xi_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{N_h} (\Phi_{N_h}, \Phi_i)\xi_i \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N_h} \xi_j \sum_{i=1}^{N_h} (\Phi_j, \Phi_i)\xi_i = \left(\sum_{j=1}^{N_h} \xi_j \Phi_j, \sum_{j=i}^{N_h} \xi_i \Phi_i \right) =$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{N_h} \xi_j \Phi_j \right\|^2 \geq 0$$

Έστω ότι $\left\| \sum\limits_{j=1}^{N_h} \xi_j \Phi_j \right\|^2 = 0$, άρα, $\sum\limits_{j=1}^{N_h} \xi_j \Phi_j = 0$ λόγω ιδιότητας της νόρμας

και από το γεγονός ότι η $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ είναι βάση του S_h, οι συναρτήσεις $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ θα είναι γρ. ανεξάρτητες και έτσι $\xi_i = 0,\ \forall\ i \in \{1, \ldots, N_h\}$, άτοπο.

Άρα, $\xi^T B \xi = \left\| \sum\limits_{j=1}^{N_h} \xi_j \Phi_j \right\|^2 > 0$ και έτσι ο B είναι θετικά ορισμένος.

□

Ο B είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα, θα αντιστρέφεται και έτσι το πρόβλημα (2.5) θα γράφεται:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) + B^{-1}A\alpha(t) &= B^{-1}\tilde{f}, \quad t > 0, \\ \alpha(0) &= \gamma. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το παραπάνω σύστημα να έχει μοναδική λύση για κάθε $t > 0$ και έτσι το (χωρικά) ημιδιακριτό πρόβλημα (2.4) έχει μοναδική λύση για κάθε $t > 0$.

2.3 Διακριτοποίηση ως προς τον χρόνο

Σε αυτή τη παράγραφο ακολουθούμε το Κεφάλαιο 12 του [7]. Αναλυτικότερα, έχοντας διακριτοποιήσει το παραβολικό πρόβλημα (2.1) ως προς τον χώρο χρησιμοποιώντας την συνεχή Galerkin μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, τώρα ήρθε η ώρα να διακριτοποιήσουμε και ως προς τον χρόνο. Μια κλασσική μέθοδος θα ήταν να εφαρμόσουμε μία μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, όπως την Crank - Nicolson, την Backward Euler κ.α. Ωστόσο, εμείς θα εφαρμόσουμε την μέθοδο Galerkin για την μεταβλητή του χρόνου και, για την ακρίβεια, θα επιλέξουμε την προσεγγιστική λύση (πολυώνυμο βαθμού $q-1$ ως προς τον χρόνο t) να μην είναι κατ' ανάγκη συνεχής στα σημεία της διαμέρισης. Για αυτό, λοιπόν, αυτή η μέθοδος λέγεται και ασυνεχής μέθοδος Galerkin.

Θεωρούμε, αρχικά, την (μη ομοιόμορφη) διαμέριση στον χρόνο t: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ και έχουμε τα διαστήματα $J_n = (t_{n-1}, t_n]$ με μήκος $k_n = t_n - t_{n-1}$ και $k = \max k_n$.

Θεωρούμε, επίσης, τον χώρο συναρτήσεων:

$$S_{kh} = \left\{ X : [0,\infty) \to S_h \mid X|_{J_n} = \sum_{j=0}^{q-1} X_j t^j, X_j \in S_h \right\}.$$

ο οποίος αποτελείται από συναρτήσεις που είναι μεν ασυνεχείς στα t_n αλλά είναι συνεχείς από αριστερά (upwind flux). Οι συντελεστές του πολυωνύμου στο κάθε διάστημα J_n ανήκουν στον χώρο Hilbert S_h (με το L^2 εσωτερικό γινόμενο) ο οποίος έχει οριστεί με βάση την παραπάνω ενότητα.

Παρατήρηση. *Αν $X \in S_{kh}$ τότε το $X(0)$ πρέπει να οριστεί διαφορετικά διότι $0 \notin J_1$.*

Συμβολισμός. *Αν $X \in S_{kh}$ τότε γράφουμε $X^n = X(t_n)$ και $X_+^n = \lim_{t \to t_n^+} X(t)$.*

Επίσης, έχουμε τον χώρο S_{kh}^n με συναρτήσεις που ανήκουν στον S_{kh} αλλά είναι περιορισμένες στο διάστημα J_n.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε την έννοια της διακριτής λαπλασιανής.

Ορισμός 2.3.1. *Ο τελεστής $\Delta_h : S_h \to S_h$ ονομάζεται διακριτή λαπλασιανή και ισχύει:*

$$(\Delta_h \psi, \chi) = -(\nabla\psi, \nabla\chi), \quad \psi, \chi \in S_h.$$

Φυσικά, ο τελεστής $-\Delta_h$ είναι θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής ως προς το L^2 εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ (άρα ισχύει και $(\Delta_h\psi,\chi)=(\psi,\Delta_h\chi),\ \psi,\chi\in S_h$).

Έχουμε την ασθενή διατύπωση του παραβολικού προβλήματος (2.1) και θεωρούμε τώρα την ομαλή συνάρτηση $\varphi:[0,t_N]\to H_0^1(\Omega)$ με $\varphi(t_N)=0$.

$$(u_t,\varphi)+(\nabla u,\nabla\varphi)=(f,\varphi),\quad t\in(0,t_N].$$

Ολοκληρώνοτας την παραπάνω σχέση ως προς τον χρόνο t στο διάστημα $[0,t_N]$, παίρνουμε:

$$\int_0^{t_N}\big((u_t,\varphi)+(\nabla u,\nabla\varphi)\big)\,dt=\int_0^{t_N}(f,\varphi)\,dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες λαμβάνουμε:

$$[(u,\varphi)]_0^{t_N}+\int_0^{t_N}\big(-(u,\varphi_t)+(\nabla u,\nabla\varphi)\big)\,dt=\int_0^{t_N}(f,\varphi)\,dt,$$

$$(u(t_N),\varphi(t_N))-\big(u_+(0),\varphi_+(0)\big)+\int_0^{t_N}\big(-(u,\varphi_t)+(\nabla u,\nabla\varphi)\big)\,dt=\int_0^{t_N}(f,\varphi)\,dt.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\varphi(t_N)=0$, καταλήγουμε:

$$\int_0^{t_N}\big(-(u,\varphi_t)+(\nabla u,\nabla\varphi)\big)\,dt=(v_h,\varphi_+(0))+\int_0^{t_N}(f,\varphi)\,dt,$$

όπου v_h κάποια προσέγγιση της $u(\cdot,0)=v$ στον S_h.

Αν στην παραπάνω σχέση, που περιγράφεται ο ασθενής φορμαλισμός του προβλήματος, αντικαταστήσουμε την u με μια συνάρτηση $U_h\in S_{kh}$ και ολοκληρώσουμε στο $[0,t_N]$ (ή για να είμαστε πιο ακριβείς σε κάθε χρονικό διάστημα J_n) τότε με παραγόντική ολοκλήρωση παίρνουμε τα εξής για το επόμενο ολοκλήρωμα:

$$-\int_0^{t_N}(U_h,\varphi_t)\,dt.$$

Παρατηρούμε ότι ακολουθώντας παρόμοια βήματα με την ”συνεχή” περίπτωση σε καθένα από τα υποδιαστήματα $J_n,1,\ldots,N$, παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{t_N} (U_h, \varphi_t)\,dt &= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (U_h, \varphi_t)\,dt = -\sum_{n=1}^{N} \left([(U_h, \varphi)]_{t_{n-1}}^{t_n} - \int_{J_n} (U_{h,t}, \varphi)\,dt \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (U_{h,t}, \varphi)\,dt - \sum_{n=1}^{N} \Big((U_h^n, \varphi^n) - (U_{h,+}^{n-1}, \varphi^{n-1}) \Big) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (U_{h,t}, \varphi)\,dt - \sum_{n=1}^{N} (U_h^n, \varphi^n) + \sum_{n=0}^{N-1} (U_{h,+}^n, \varphi^n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (U_{h,t}, \varphi)\,dt + \sum_{n=1}^{N-1} (U_{h,+}^n - U_h^n, \varphi^n) + (U_{h,+}^0, \varphi^0) - (U_h^N, \varphi^N) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (U_{h,t}, \varphi)\,dt + \sum_{n=1}^{N-1} ([U_h]_n, \varphi^n) + (U_{h,+}^0, \varphi^0).
\end{aligned}
$$

όπου: $[U_h]_n = U_{h,+}^n - U_h^n$ το άλμα της U_h στον κόμβο t_n, $\varphi^n = \varphi(t_n)$ και χρησιμοποιήσαμε ότι $\varphi^N = \varphi(t_N) = 0$ ενώ $U_{h,t}$ είναι η κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $q-2$ ως προς t που συμφωνεί με την χρονική παράγωγο της U_h στο κάθε διάστημα J_n.

Συνεπώς, το ολικά διακριτό σχήμα αποτελείται από την εύρεση της $U_h \in S_{kh}$ ώστε:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \big((U_{h,t}, X) + (\nabla U_h, \nabla X) \big)\,dt &+ \sum_{n=1}^{N-1} ([U_h]_n, X^n) + (U_{h,+}^0, X^0) \\
&= (v, X_+^0) + \int_0^{t_N} (f, X)\,dt, \quad \forall\ X \in S_{kh}, \\
U_h^0 &= v_h.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Ορίζοντας βέβαια τη Διγραμμική Μορφή $B_N : S_{kh} \times S_{kh} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$
B_N(V, W) = \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} ((V_t, W) + (\nabla V, \nabla W))dt + \sum_{n=1}^{N-1} ([V]_n, W_+^n) + (V_+^0, W_+^0) \tag{2.8}
$$

το ολικά διακριτό σχήμα μετατρέπεται στην εύρεση $U_h \in S_{kh}$ ώστε:

$$
\begin{aligned}
B_N(U_h, X) &= (v_h, X_+^0) + \int_0^{t_N} (f, X)\,dt, \quad \forall\ X \in S_{kh}, \\
U_h^0 &= v_h.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Παρατήρηση. *Η διγραμμικότητα της $B_N(\cdot,\cdot)$ προκύπτει από την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου $(\cdot,\cdot)$, του ολοκληρώματος και του τελεστη ∇.*

Από την στιγμή που η X δεν είναι συνεχής στους κόμβους t_n, μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές της ανεξάρτητα σε κάθε χρόνικο διάστημα. Έτσι, παίρνοντας την X να μηδενίζει έξω από το χρονικό διάστημα J_n, βλέπουμε το παραπάνω πρόβλημα να είναι ισοδύναμο με μια εξίσωση για κάθε J_n με $1 \leq n \leq N$.

Έτσι, το ολικά διακριτό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση $U_h \in S_{kh}$ ώστε:

$$\int_{J_n} \big((U_{h,t}, X) + (\nabla U_h, \nabla X)\big)\, dt + \big(U_{h,+}^{n-1}, X_+^{n-1}\big)$$
$$= (U_h^{n-1}, X_+^{n-1}) + \int_{J_n} (f, X)\, dt, \quad \forall\ X \in S_{kh}^n,\ 1 \leq n \leq N, \tag{2.10}$$
$$U_h^0 = v_h.$$

Η παραπάνω σχέση, βέβαια, δείχνει και ότι η διακριτή λύση είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του τελικού σημείου t_N στον χρόνο.

Πρόταση 2.3.2. *Το πρόβλημα* (2.10) *έχει μοναδική λύση στο* J_n *για* $q = 1$ *ή* $q = 2$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για $f|_{J_n} = U_h^{n-1} = 0$ τότε παίρνουμε $U_h = 0$.
Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$$2(U_{h,t}, U_h) = 2\int_\Omega U_{h,t} U_h\, dx = \int_\Omega \frac{\partial U_h^2}{\partial t}\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega U_h^2\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\|U_h\|^2.$$

Οπότε θέτοντας $X = U_h$ στην (2.10) παίρνουμε:

$$\int_{J_n} \big((U_{h,t}, U_h) + (\nabla U_h, \nabla U_h)\big)\, dt + \big(U_{h,+}^{n-1}, U_{h,+}^{n-1}\big) = 0,$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial}{\partial t}\|U_h\|^2\, dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + \|U_{h,+}^{n-1}\|^2 = 0,$$
$$\|U_h^n\|^2 - \|U_{h,+}^{n-1}\|^2 + 2\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt + 2\|U_{h,+}^{n-1}\|^2 = 0,$$
$$\|U_h^n\|^2 + \|U_{h,+}^{n-1}\|^2 + 2\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla U_h\|^2\, dt = 0.$$

Επειδη στην παραπάνω σχέση όλες οι ποσότητες είναι μη αρνητικές, για να ισχύει το παραπάνω τότε θα πρέπει $\|U_h^n\| = \|U_{h,+}^{n-1}\| = 0$.

Οπότε αν $q = 1$ ή $q = 2$ τότε έχουμε ότι η U_h είναι το πολύ πολυώνυμο βαθμού 1, δηλαδη γραμμική ως προς t. Άρα, $U_h = 0$. Όμως αυτό δεν ισχύει απαραίτητα για μεγαλύτερες τιμές του q.

Έτσι καταλήξαμε στην μοναδικότητα. Όμως έχουμε και την ύπαρξη καθώς γνωρίζουμε ότι η μοναδικότητα συνεπάγεται την ύπαρξη σε προβλήματα πεπερασμένης διάστασης (αφού ο S_h είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης).

□

Επίσης, έχουμε τον επόμενο τρόπο γραφής της Διγραμμικής Μορφής $B_N(\cdot,\cdot)$.

Πρόταση 2.3.3. *Η Διγραμμική Μορφή $B_N : S_{kh} \times S_{kh} \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί και ως εξής:*

$$B_N(V,W) = \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left(-(V, W_t) + (\nabla V, \nabla W)\right) dt - \sum_{n=1}^{N-1} (V^n, [W]_n) + (V^N, W^N).$$

Απόδειξη. Έχουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}\int_0^{t_N} (V_t, W)\, dt &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (V_t, W)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \left((V,W)|_{t_{n-1}}^{t_n} - \int_{J_n} (V, W_t)\, dt \right) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (V, W_t)\, dt + \sum_{n=1}^{N} \left((V^n, W^n) - (V_+^{n-1}, W_+^{n-1}) \right)\end{aligned}$$

Οπότε, αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (V_t, W)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1} ([V]_n, W_+^n) + (V_+^0, W_+^0) = \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (V, W_t)\, dt + \sum_{n=1}^{N} \left((V^n, W^n) - (V_+^{n-1}, W_+^{n-1}) \right) + \sum_{n=1}^{N-1} ([V]_n, W_+^n) + (V_+^0, W_+^0) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (V, W_t)\, dt + \sum_{n=1}^{N} \left((V^n, W^n) - (V_+^{n-1}, W_+^{n-1}) \right) + \sum_{n=1}^{N-1} \left((V_+^n, W_+^n) - (V^n, W_+^n) \right) + (V_+^0, W_+^0) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (V, W_t)\, dt - \sum_{n=1}^{N-1} (V^n, W_+^n - W^n) + (V^N, W^N) - \sum_{n=1}^{N} (V_+^{n-1}, W_+^{n-1}) + \sum_{n=0}^{N-1} (V_+^n, W_+^n) \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (V, W_t)\, dt - \sum_{n=1}^{N-1} (V^n, [W]_n) + (V^N, W^N).\end{aligned}$$

□

Προφανώς η ακριβής λύση u του προβλήματος (2.1) ικανοποιεί την σχέση (2.9) από τον τρόπο με τον οποίο έχει κατασκευαστεί το ολικά διακριτό σχήμα. Οπότε:

$$B_N(u, X) = (v, X_+^0) + \int_0^{t_N} (f, X)\, dt \quad \forall\, X \in S_{kh}. \tag{2.11}$$

Άρα, αν έχουμε το σφάλμα $e = U_h - u$ τότε αφαιρώντας κατα μέλη τις (2.9), (2.11) και χρησιμοποιώντας την διγραμμικότητα της $B_N(\cdot,\cdot)$ παίρνουμε:

$$B_N(e, X) = (v_h - v, X_+^0), \quad \forall\, X \in S_{kh}. \tag{2.12}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι με την χρήση του τελεστή της Διακριτής Λαπλασιανής, το (χωρικά) ημιδιακριτό πρόβλημα (2.3) μετατρέπεται στην εύρεση $u_h(t) \in S_h$ $\forall t \geq 0$ ώστε:

$$\begin{aligned}(u_{h,t}, \chi) + (\Delta_h u_h, \chi) &= (f, \chi), \quad \forall\, \chi \in S_h,\ t > 0, \\ u_h(0) &= v_h,\end{aligned}$$

όπου v_h κάποια προσέγγιση της v στον S_h.

Έτσι, λοιπόν, θα μπορούσαμε να δούμε ότι στα προβλήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} u_t + Au &= f, t > 0, \\ u(0) &= v, \end{aligned}$$

όπου A κάποιος τελεστής θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής ως προς το εσωτερικό γινόμενο κάποιου Hilbert χώρου $\mathcal{H}$ εφαρμόζεται με τον ίδιο περίπου τρόπο η ασυνεχής Galerkin στον χρόνο, αναζητώντας βέβαια την προσεγγιστική λύση στον χώρο:

$$S_k = \left\{ X : [0,\infty) \to \mathcal{H} \mid X|_{J_n} = \sum_{j=0}^{q-1} X_j t^j, X_j \in \mathcal{H} \right\}.$$

2.4 Backward Ομογενές Πρόβλημα

Θεωρούμε τώρα το Backward (προς τα πίσω) Ομογενές Πρόβλημα ως εξής:

$$\begin{aligned} -z_t - \Delta z &= 0, \quad \text{στο } \Omega, \quad \text{για } t < t_N, \\ z &= 0, \quad \text{στο } \partial\Omega, \text{ για } t \leq t_N, \\ z &= \varphi, \quad \text{στο } \Omega, \quad \text{για } t = t_N. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Για να ορίσουμε το ολικά διακριτό πρόβλημα για το (2.13) θα πρέπει να εκτελέσουμε παρόμοια διαδικάσία με αυτή που κάναμε για το παραβολικό πρόβλημα (2.1).

Αρχικά, αν z λύση του (2.13), πολλαπλασιάζουμε με μια ομαλή συνάρτηση $u : [0, t_N] \to H_0^1(\Omega)$ με $u(0) = 0$ και ολοκληρώνουμε στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

$$-(u, z_t) - (u, \Delta z) = 0, \quad t \in [0, t_N).$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση ως προς τον χρόνο t στο διάστημα $[0, t_N]$ και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε:

$$\int_0^{t_N} \big(-(u, z_t) - (u, \Delta z) \big)\, dt = 0,$$

$$[-(u,z)]_0^{t_N} + \int_0^{t_N} \big((u_t, z) - (u, \Delta z) \big)\, dt = 0,$$

$$-(u(t_N), z(t_N)) + (u(0), z(0)) + \int_0^{t_N} \big((u_t, z) - (u, \Delta z) \big)\, dt = 0,$$

$$\int_0^{t_N} \big((u_t, z) - (u, \Delta z) \big)\, dt = (u(t_N), \varphi).$$

Επίσης, εξαιτίας, του γεγονότος ότι $u(x) \in H_0^1(\Omega),\ \forall x \in \Omega$ και της Πρότασης (1.2.5) (Τύπος του Green), έχουμε:

$$(u, \Delta z) = -(\nabla u, \nabla z).$$

Οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\int_0^{t_N} \big((u_t, z) + (\nabla u, \nabla z)\big)\, dt = (u(t_N), \varphi).$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$B_N(u, z) = (u(t_N), \varphi). \tag{2.14}$$

Αν στην παραπάνω σχέση, που περιγράφεται ο ασθενής φορμαλισμός του προβλήματος, αντικαταστήσουμε την z με μια συνάρτηση $Z_h \in S_{kh}$ και ολοκληρώσουμε στο $[0, t_N]$ (ή για να είμαστε πιο ακριβείς σε κάθε χρονικό διάστημα J_n) τότε με παραγόντικη ολοκλήρωση παίρνουμε τα εξής για το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{t_N} (u_t, Z_h)\, dt.$$

Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_N} (u_t, Z_h)\, dt &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (u_t, Z_h)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \left([(u, Z_h)]_{t_{n-1}}^{t_n} - \int_{J_n} (u, Z_{h,t})\, dt \right) \\
&= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (u, Z_{h,t})\, dt + \sum_{n=1}^{N} \left((u^n, Z_h^n) - (u^{n-1}, Z_{h,+}^{n-1}) \right) \\
&= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (u, Z_{h,t})\, dt + \sum_{n=1}^{N} (u^n, Z_h^n) - \sum_{n=0}^{N-1} (u^n, Z_{h,+}^n) \\
&= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (u, Z_{h,t})\, dt - \sum_{n=1}^{N-1} (u^n, Z_{h,+}^n - Z_h^n) - (u^0, Z_{h,+}^0) + (u^N, Z_h^N) \\
&= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (u, Z_{h,t})\, dt - \sum_{n=1}^{N-1} (u^n, [Z_h]_n) + (u^N, Z_h^N).
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $u^0 = u(0) = 0$ και η $Z_{h,t}$ είναι η κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $q-2$ ως προς t που συμφωνεί με την χρονική παράγωγο της Z_h στο κάθε διάστημα J_n.

Συνεπώς, το ολικά διακριτό σχήμα για το Backward Ομογενές Πρόβλημα αποτελείται από την εύρεση της $Z_h \in S_{kh}$ ώστε:

$$\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \big(-(X, Z_{h,t}) + (\nabla X, \nabla Z_h)\big)\, dt - \sum_{n=1}^{N-1} (X^n, [Z_h]_n) + (X^N, Z_h^N) = (X^N, \varphi), \ \ \forall\, X \in S_{kh}, \\
Z_{h,+}^N = \varphi.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Χρησιμοποιώντας βέβαια τη 2η μορφή της Διγραμμικής Μορφής $B_N : S_{kh} \times S_{kh} \to \mathbb{R}$ (Πρόταση 2.3.3), το διακριτό σχήμα για το Backward Ομογενές Πρόβλημα μετατρέπεται στην εύρεση $Z_h \in S_{kh}$ ώστε:

$$\begin{aligned} B_N(X, Z_h) &= (X^N, \varphi), \quad \forall\ X \in S_{kh}, \\ Z^N_{h,+} &= \varphi. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Φυσικά, η κλασσική λύση z του Προβλήματος (2.13) ικανοποιεί το παραπάνω διακριτό σχήμα γράφουμε:

$$B_N(X, z) = (X^N, \varphi). \tag{2.17}$$

Έτσι, αν αφαιρέσουμε τις (2.16), (2.17) κατά μέλη και χρησιμοποιήσουμε την διγραμμικότητα της $B_N(\cdot,\cdot)$ παίρνουμε:

$$B_N(X, Z_h - z) = 0, \quad \forall\ X \in S_{kh}. \tag{2.18}$$

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση Σφάλματος

3.1 Προετοιμασία

Στο κεφάλαιο αυτό, αντλήσαμε βασικά στοιχεία από το Κεφάλαιο 12 του [7].

Συμβολισμός. *Με τον όρο $P_h\psi$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$ συμβολίζουμε την ορθογώνια προβολή της ψ στον χώρο πεπερασμένης διάστασης S_h ως προς το L^2 εσωτερικό γινόμενο $(\cdot\,,\cdot)$, δηλαδή ισχύει:*

$$(P_h\psi, \chi) = (\psi, \chi)\,,\ \forall \chi \in H_0^1(\Omega).$$

Συμβολισμός. *Με τον όρο $R_h\psi$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$ συμβολίζουμε την Ritz προβολή στον χώρο πεπερασμένης διάστασης S_h, δηλαδή την ορθογώνια προβολή της ψ στον S_h ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\nabla\cdot\,,\nabla\cdot)$, που σημαίνει:*

$$(\nabla R_h\psi, \nabla\chi) = (\nabla\psi, \nabla\chi),\ \forall \chi \in H_0^1(\Omega).$$

Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής νόρμες:

$$\|\varphi\|_{J_n} = \sup_{t\in J_n} \|\varphi(t)\|,\quad \|\varphi\|_{r,J_n} = \sup_{t\in J_n} \|\varphi(t)\|_r.$$

Παρατήρηση. *Στο εξής, οι θετικές σταθερές $C > 0$ που εμφανίζονται στα επόμενα Λήμματα και Θεωρήματα δεν είναι απαραίτητα ίδιες μεταξύ τους.*

Επίσης, παρακάτω εμφανίζονται οι εξής σταθερές:

$$L_N = \left(\ln\frac{t_N}{k_N}\right)^{1/2} + 1,\ L_N^* = \left(\ln\frac{t_N}{k_1}\right)^{1/2} + 1.$$

Αρχικά, μιας και έχουμε αναφέρει ότι ο S_h αποτελείται από γραμμικές - αφινικές συναρτήσεις σε κάθε τρίγωνο τ της Τριγωνοποποίησης $\mathcal{T}_h$, έχουμε ότι η τάξη ακρίβειας του S_h είναι ίση με $r = 2$. Υπενθυμίζουμε, επίσης, ότι ο S_h είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του $H_0^1(\Omega)$. Άρα, για μικρό h υποθέτουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά C ώστε:

$$\inf_{\chi\in S_h} \{\|g-\chi\| + h\,\|\nabla\,(g-\chi)\|\} \le Ch^s\,\|g\|_s\,,\quad 1\le s\le r=2, \tag{3.1}$$

όπου $g \in H^s(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

Μιας και έχουμε να κάνουμε με Σχεδόν Ομοιόμορφες Τριγωνοποιήσεις, υποθέτουμε οτι ισχύει, επίσης, η ανίσωση:

$$\|(P_h - I)\, g\| + h\,\|\nabla\,(P_h - I)\, g\| \leq Ch^2\,\|g\|_2\,,\ g \in H^s \cap H_0^1(\Omega), \tag{3.2}$$

καθώς και η αντίστροφη εκτίμηση -inverse estimate- (βλ. [7], σελίδα 4):

$$\|\nabla\chi\| \leq Ch^{-1}\,\|\chi\|\,, \chi \in S_h. \tag{3.3}$$

Λήμμα 3.1.1. *Έστω $x \in \mathbb{R}^2$ και $u(\cdot, x)$ συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[t_{n-1}, t_n]\,,\ n \geq 0$. Έστω $\tilde{u}$ η μοναδική γραμμική παρεμβάλουσα στα σημεία $(t_{n-1}, u(t_{n-1}))\,, (t_n, u(t_n))$. Τότε, έχουμε την εξής εκτίμηση:*

$$|u - \tilde{u}| \leq Ck_n^2 \max_{\xi \in J_n} |u_{tt}(\xi)|\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\alpha \in [t_{n-1}, t_n]\,,\ n \geq 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$\Phi(t) = u(t) - \tilde{u}(t) - \frac{u(\alpha) - \tilde{u}(\alpha)}{(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)}\,(t - t_{n-1})\,(t - t_n)\,.$$

Η Φ έχει τουλάχιστον σαν ρίζες τουλάχιστον τις εξής 3: t_{n-1}, t_n, α.

Εξαιτίας της ομαλότητας της Φ και του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, η Φ_t θα έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

Παρόμοια, εξαιτίας της ομαλότητας της Φ_t και του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, η Φ_{tt} θα έχει τουλάχιστον 1 ρίζα, ας πούμε $\xi \in (t_{n-1}, t_n)$.

Οπότε παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο t έχουμε:

$$\Phi_{tt}(t) = u_{tt}(t) - \tilde{u}_{tt}(t) - 2\ \frac{u(\alpha) - \tilde{u}(\alpha)}{(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)} = u_{tt}(t) - 2\ \frac{u(\alpha) - \tilde{u}(\alpha)}{(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)}$$

αφού $\tilde{u}$ πολυώνυμο 1ου βαθμού.

Επομένως,

$$0 = \Phi_{tt}(\xi) = u_{tt}(\xi) - 2\ \frac{u(\alpha) - \tilde{u}(\alpha)}{(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)} \Rightarrow u(\alpha) - \tilde{u}(\alpha) = \frac{u_{tt}(\xi)}{2}\,(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)\,.$$

Το μέγιστο της ποσότητας $(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)$ είναι για $\alpha = \dfrac{t_{n-1} + t_n}{2}$, άρα:

$$|(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)| \leq \frac{k_n^2}{4}.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στο εξής:

$$|u(\alpha) - \tilde{u}(\alpha)| = \frac{|u_{tt}(\xi)|}{2}\,|(\alpha - t_{n-1})\,(\alpha - t_n)| \leq \frac{k_n^2}{8} \max_{\xi \in J_n} |u_{tt}(\xi)|\,.$$

Άρα, υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε:

$$|u - \tilde{u}| \leq Ck_n^2 \max_{\xi \in J_n} |u_{tt}(\xi)|\,.$$

$\square$

Λήμμα 3.1.2. *Αν ισχύει η (3.1) για μια $g \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $1 \le s \le r = 2$ τότε υπάρχει θετική σταθέρα C ώστε να ισχύει η επόμενη ανισότητα:*

$$\|R_h g - g\| + h \|\nabla (R_h g - g)\| \le C h^s \|g\|_s , \quad 1 \le s \le r = 2 \text{ (βλ. [7], σελίδα 8).}$$

Λήμμα 3.1.3. *Έστω U_h και u λύσεις των προβλημάτων (2.9) και (2.1) αντίστοιχα με U_h να είναι κατά τμήματα σταθερή ($q = 1$). Επίσης, αν z λύση του Backward Ομογενούς Προβλήματος (2.13), τότε για το σφάλμα $e = U_h - u$ θα έχουμε:*

$$(e^N, \varphi) = \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla U_h, \nabla (X - z)) \, dt - \sum_{n=0}^{N-1} \left([U_h]_n , X_+^n - z^n \right) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, X - z) \, dt$$

όπου $X \in S_{kh}$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του σφάλματος $e = U_h - u$, την (2.17) για $X = U_h$ καθώς και την (2.14) παίρνουμε:

$$(e^N, \varphi) = (U_h^N, \varphi) - (u(t_N), \varphi) = B_N(U_h, z) - B_N(u, z) = B_N(U_h - u, z) = B_N(e, z),$$

εξαιτίας της διγραμμικότητας της $B_N(\cdot,\cdot)$.

Οπότε χρησιμοποιώντας τώρα και την σχέση (2.12) παίρνουμε:

$$(e^N, \varphi) = B_N(e, z) = B_N(e, z - X) = B_N(U_h, z - X) - B_N(u, z - X), \ \forall X \in S_{kh}.$$

Οπότε χρησιμοποιώντας για τον πρώτο όρο την εναλλακτική μορφή για την Διγραμμική Μορφή (Πρόταση 2.3.3) και για τον δεύτερο όρο την σχέση (2.11), γράφουμε:

$$\begin{aligned}
& B_N(U_h, z - X) = \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left((U_{h,t}, z - X) - (\nabla U_h, \nabla (z - X)) \right) dt + \sum_{n=1}^{N-1} \left([U_h]_n , (z - X)_+^n \right) + (U_{h,+}^0, (z - X)_+^0) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} - (\nabla U_h, \nabla (z - X)) \, dt + \sum_{n=1}^{N-1} \left([U_h]_n , (z - X)_+^n \right) + (U_{h,+}^0, (z - X)_+^0),
\end{aligned}$$

αφού U_h κατά τμήματα σταθερή ως προς τον χρόνο t και έτσι $U_{h,t} = 0$ στο J_n, $\forall n = 1, \ldots, N$.

Επίσης,

$$\begin{aligned}
B_N(u, z - X) &= \left(v, (z - X)_+^0 \right) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, z - X) \, dt \\
&= \left(v_h, (z - X)_+^0 \right) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, z - X) \, dt \\
&= \left(U_h^0, (z - X)_+^0 \right) + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, z - X) \, dt.
\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(e^N,\varphi) &= -\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\nabla U_h,\nabla(z-X))\,dt+\sum_{n=1}^{N-1}\left([U_h]_n,(z-X)_+^n\right)\\
&\quad+(U_{h,+}^0,(z-X)_+^0)-\left(U_h^0,(z-X)_+^0\right)-\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(f,z-X)\,dt\\
&=-\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\nabla U_h,\nabla(z-X))\,dt+\sum_{n=0}^{N-1}\left([U_h]_n,(z-X)_+^n\right)-\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(f,z-X)\,dt\\
&=\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\nabla U_h,\nabla(X-z))\,dt-\sum_{n=0}^{N-1}\left([U_h]_n,(X_+^n-z)\right)+\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(f,X-z)\,dt,
\end{aligned}$$

αφού z ομαλή λύση του (2.13).

□

Λήμμα 3.1.4. *Για την λύση z του Backward Ομογενούς Προβλήματος* (2.13) *έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε:*

$$\int_0^{t_{N-1}}\|z_t\|\,dt+\|z\|_{J_N}\le CL_N\|\varphi\|.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την αντίστοιχη ανισότητα για το (προς τα εμπρός) πρόβλημα θερμότητας με $f=0$. Δηλαδή, αρκει να δείξουμε:

$$\int_{k_1}^{t_N}\|u_t\|\,dt+\|u\|_{J_1}\le CL_N^*\|v\|.$$

Θα αποδείξουμε πρώτα την επόμενη ανισότητα:

$$\int_0^{\infty}t\|u_t\|^2\,dt\le\frac{1}{4}\|v\|^2.$$

Στην ασθενή διατύπωση της εξίσωσης θερμότητας, δηλαδή την σχέση (2.2) θα θέσουμε σαν test - function $\varphi=u$ (και φυσικά έχουμε πάρει ήδη $f=0$) και θα ολοκληρώσουμε ως προς τον χρόνο σε ένα διάστημα $[0,T]$ οπου $T>0$ αυθαίρετος χρόνος. Οπότε:

$$\begin{aligned}
\int_0^T(u_t,u)\,dt+\int_0^T(\nabla u,\nabla u)\,dt&=0,\\
\int_0^T\int_\Omega u_tu\,dx\,dt+\int_0^T\|\nabla u\|^2\,dt&=0,\\
\frac{1}{2}\|u(T)\|^2-\frac{1}{2}\|v\|^2+\int_0^T\|\nabla u\|^2\,dt&=0,\\
\int_0^T\|\nabla u\|^2\,dt&\le\frac{1}{2}\|v\|^2,
\end{aligned}$$

όπου παραπάνω αλλάξαμε την σειρά ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini και ισχύει $\|u(T)\|^2\ge 0$.

Επίσης, θέτοντας στην (2.2) την $\varphi = tu_t$ και ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο στο διάστημα $[0,T]$ θα πάρουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
(u_t, tu_t) + (\nabla u, \nabla(tu_t)) &= 0,\\
t(u_t, u_t) + t\int_\Omega \nabla u \nabla u_t \, dx &= 0,\\
t\|u_t\|^2 + \frac{t}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)^2 \, dx &= 0,\\
t\|u_t\|^2 + \frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση στο χρονικό διάστημα $[0,T]$, έχουμε:

$$\int_0^T t\|u_t\|^2 \, dt + \int_0^T \frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^2 \, dt = 0,$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
\int_0^T t\|u_t\|^2 \, dt + \left[\frac{t}{2}\|\nabla u\|^2\right]_0^T - \int_0^T \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 \, dt &= 0,\\
\int_0^T t\|u_t\|^2 \, dt + \frac{T}{2}\|\nabla u(T)\|^2 - 0 - \int_0^T \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 \, dt &= 0,\\
\int_0^T t\|u_t\|^2 \, dt &\le \int_0^T \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Φυσικά χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε:

$$\int_0^T t\|u_t\|^2 \, dt \le \frac{1}{4}\|v\|^2.$$

Άρα, καθώς τοδεξί μέλος δεν εξαρτάται από το Ω, λαμβάνουμε:

$$\int_0^\infty t\|u_t\|^2 \, dt \le \frac{1}{4}\|v\|^2.$$

Επιστρέφοντας, τώρα στην αρχική ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε.

Έχουμε:

$$\left(\int_{k_1}^{t_N} \|u_t\|\, dt\right)^2 = \left(\int_{k_1}^{t_N} \frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{t}\|u_t\|\, dt\right)^2 \leq \int_{k_1}^{t_N} \frac{1}{t}\, dt \int_{k_1}^{t_N} t\|u_t\|^2\, dt =$$
$$= [\ln(|t|)]_{k_1}^{t_N} \int_{k_1}^{t_N} t\|u_t\|^2\, dt \leq (\ln(t_N) - \ln(k_1))\,\frac{1}{4}\|v\|^2 = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{t_N}{k_1}\right)\|v\|^2.$$

Οπότε ισχύει:

$$\int_{k_1}^{t_N} \|u_t\|\, dt \leq \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t_N}{k_1}\right)^{1/2}\|v\|.$$

Για την επόμενη ανισότητα του Λήμματος, εξαιτίας του Προβλήματος της Εξίσωσης Θερμότητας (2.1), ξέρουμε ότι:

$$\|u(t)\| \leq \|v\|,\ \forall t > 0.$$

αφού δεν έχουμε κάποια πηγή ενέργειας f, και έτσι, ισχύει:

$$\|u\|_{J_1} = \sup_{t\in J_1}\|u(t)\| \leq \|v\|.$$

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Για να συνεχίσουμε με το επόμενο Λήμμα, αλλά και γενικά με τα επόμενα αποτελέσματα θα χρειαστεί να αναφερθούμε σε δύο έννοιες που θα χρειαστούμε στις εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος:

• Διαισθητικά, είναι φυσικό να θέλουμε να αντικαταστήσουμε την χρονική παράγωγο u_t στο J_n με την διαιρεμένη διαφορά 1ης τάξης της U_h, επομένως για την ακολουθία $\{U_h^n\}_{n=0}^N$ ορίζουμε:

$$\bar{\partial}_n U_h^n = \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{k_n},\ n = 1, \ldots, N$$

• Θα θέλαμε, επίσης, να αντικαταστήσουμε την νόρμα στον Χώρο Sobolev $H^2(\Omega)$ της ακριβούς λύσης u του (2.1), δηλαδή την $\|u\|_2$, με την παρακάτω ποσότητα:

$$\|U_h^n\|_{2,h} = \left(\sum_{\gamma}\left|\left[\frac{\partial U_h^n}{\partial n}\right]_{\gamma}\right|^2\right)^{1/2},\quad 1 \leq n \leq N$$

όπου:

(i) $\{\gamma\}$ είναι το σύνολο των εσωτερικών ακμών της Τριγωνοποίησης $\mathcal{T}_h$, και,

(ii) $\left[\frac{\partial U_h^n}{\partial n}\right]_{\gamma}$ είναι το άλμα της κάθετης παραγώγου στην ακμή γ, το οποίο δεν είναι μηδέν διότι το ∇U_h^n είναι σταθερό στο κάθε τρίγωνο $\tau \in \mathcal{T}_h$ αφού η U_h^n είναι γραμμική - αφινική στον χώρο, άρα, και αυτή η κατευθυνόμενη παράγωγος θα είναι σταθερή στην γ αλλά από την μέσα πλευρά του τριγώνου $\tau \in \mathcal{T}_h$. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι θα είναι η ίδια η κάθετη παράγωγος και στο γειτονικό τρίγωνο που έχει κοινή ακμή την γ.

Λήμμα 3.1.5. *Έστω $W \in S_h$ και $g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Τότε έχουμε την ανισότητα:*

$$|(\nabla W, \nabla (P_h - I)g)| \leq Ch^2 \|W\|_{2,h} \|g\|_2,$$

όπου $C > 0$ σταθερά.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι αν $W \in S_h$ και $g \in H_0^1(\Omega)$ τότε ισχύει η επόμενη ανισότητα:

$$|(\nabla W, \nabla g)| \leq Ch^2 \|W\|_{2,h} \left(\|g\| + h\|\nabla g\| \right). \tag{3.4}$$

Ξεκινάμε παίρνοντας ένα τρίγωνο $\tau \in \mathcal{T}_h$ με ακμές $\gamma_{\tau,j}$, $j = 1, 2, 3$ οπότε από τον Τύπο του Green (Πρόταση 1.2.5), έχουμε:

$$\int_\tau (g\Delta W + \nabla W \cdot \nabla g)\, dx = \int_{\partial\tau} g(\nabla W \cdot \mathbf{n})\, ds = \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_{\tau,j}} g \frac{\partial W}{\partial n}\, ds.$$

Όμως $W \in S_h$, άρα, η W όπως είπαμε είναι γραμμική - αφινική και έτσι $\Delta W = 0$ στο $\tau \in \mathcal{T}_h$.

Επίσης, η κάθετη παράγωγος της W στην πλευρά $\gamma_{\tau,j}$, $j = 1, 2, 3$ του τριγώνου τ είναι σταθερή επειδή η W ως γραμμική θα έχει σταθερή την κλίση της (δηλάδή η ποσότητα ∇W είναι σταθερή στο τ).

Οπότε:

$$\int_\tau \nabla W \cdot \nabla g\, dx = \sum_{j=1}^{3} \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{\gamma_{\tau,j}} \int_{\gamma_{\tau,j}} g\, ds,$$

Αθροίζοντας σε όλα τα τρίγωνα $\tau \in \mathcal{T}_h$ βλέπουμε ότι κάθε ακμή γ εμφανίζεται 2 φορές οπότε ο συντελεστής του $\int_\gamma v\, ds$ είναι $\left[\dfrac{\partial W}{\partial n}\right]_\gamma$, δηλαδή:

$$(\nabla W, \nabla g) = \int_\Omega \nabla W \cdot \nabla g\, dx = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \int_\tau \nabla W \cdot \nabla g\, dx = 2 \sum_\gamma \left[\frac{\partial W}{\partial n}\right]_\gamma \int_\gamma g\, ds.$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την Ανισότητα Cauchy - Schwarz παίρνουμε:

$$|(\nabla W, \nabla g)|^2 \leq C \sum_\gamma \left| \left[\frac{\partial W}{\partial n}\right]_\gamma \right|^2 \sum_\gamma \left(\int_\gamma g\, ds \right)^2,$$

$$|(\nabla W, \nabla g)| \leq C \|W\|_{2,h} \left(\sum_\gamma \left(\int_\gamma g\, ds \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Για το παραπάνω ολοκλήρωμα για μια τυχαία ακμή γ στην Τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_h$ μπορούμε να γράψουμε με την Ανισότητα Cauchy - Schwarz:

$$\left(\int_\gamma g\, ds \right)^2 = \left(\int_\gamma 1g\, ds \right)^2 \leq \int_\gamma 1^2\, ds \int_\gamma g^2\, ds \leq Ch \int_\gamma g^2\, ds.$$

Με την βοήθεια κάποιας ανισότητας ίχνους (βλ. [7] σελίδα 28) παίρνουμε:

$$\int_\gamma g^2\, ds \le C\left(h\int_\tau |\nabla g|^2\ dx + h^{-1}\int_\tau g^2\, dx\right).$$

Άρα, αθροίζοντας σε όλες τις ακμές γ έχουμε:

$$\sum_\gamma \int_\gamma g^2\, ds \le C\left(h\int_\Omega |\nabla g|^2\ dx + h^{-1}\int_\Omega g^2\, dx\right) = C\left(h\,\|\nabla g\|^2 + h^{-1}\,\|g\|^2\right).$$

Συνοψίζοντας:

$$|(\nabla W, \nabla g)| \le C\,\|W\|_{2,h}\left(h^2\,\|\nabla g\|^2 + \|g\|^2\right)^{1/2} \le C\,\|W\|_{2,h}\left(h\,\|\nabla g\| + \|g\|\right).$$

Έτσι, καταλήξαμε ότι ισχύει η (3.4).

Τώρα εξαιτίας της Σχεδόν Ομοιόμορφης (Quasiuniform) Τριγωνοποίησης $\mathcal{T}_h$ ισχύει η (3.2):

$$\|(P_h - I)\,g\| + h\,\|\nabla\,(P_h - I)\,g\| \le Ch^2\,\|g\|_2\,.$$

Συνεπώς, θέτονας στην (3.4) όπου g την $(P_h - I)\,g$ παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

□

Λήμμα 3.1.6. *Έστω ότι* $\dfrac{k_{n+1}}{k_n} \ge c$ *για* $n \ge 0$ *όπου* c *θετική σταθερά. Τότε για την λύση* Z_h *του προβλήματος* (2.16) *υπάρχει θετική σταθερά* C *ώστε:*

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left(\|Z_{h,t}\| + \|\Delta_h Z_h\|\right)\,dt + \sum_{n=1}^{N}\|[Z_h]_n\| \le CL_N\,\|\varphi\|$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στη σελίδα 216 του [7].

3.2 A - Priori Εκτίμηση

Σε αυτή την παράγραφο, θα ασχοληθούμε με την A - Priori Εκτίμηση Σφάλματος θεωρώντας $q = 1$, δηλαδή ότι έχουμε κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις ως προς τον χρόνο, δηλαδή οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι σταθερές στα διαστήματα J_n, $n = 1, \ldots, N$. Οι A - Priori Εκτιμήσεις είναι από η βασική εκτίμηση σφάλματος που γίνεται στην Ανάλυση Σφάλματος σε κάποια αριθμητική μέθοδο για κάποιο πρόβλημα (για αυτό και η ονομασία τους). Μπορεί αυτές οι ανισότητες να μην φαίνονται πρακτικά χρήσιμες εξαιτίας του γεγονότος ότι για να φράξουμε το σφάλμα χρειάζεται να γνωρίζουμε άγνωστες ποσότητες, όπως την ακριβή λύση u του προβλήματος, παρόλα αυτά μπορούμε να ελέγξουμε αν συγκλίνει η μέθοδος μας και μάλιστα την τάξη ακρίβειάς της.

Συνέπως έχουμε το επόμενο Θεώρημα που δίνει μια τέτοια Εκτίμηση Σφάλματος.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω* $\dfrac{k_{n+1}}{k_n} \ge c$ *για* $n \ge 0$ *όπου* c *θετική σταθερά και* $q = 1$, *δηλαδή η προσεγγιστική λύση* U_h *του* (2.9) *είναι κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση* *ως προς τον χρόνο. Άρα, αν $v_h = P_h v$ τότε για τις λύσεις u, U_h των (2.1) και (2.9) αντίστοιχα υπάρχει θετική σταθερά C ώστε να ισχύει:*

$$\|U_h^N - u(t_N)\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n\|u_t\|_{J_n}).$$

Απόδειξη. Έστω $\tilde{u}$ κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση ως προς τον χρόνο t για την οποιά ισχύει $\tilde{u}(t) = u(t_n),\ t \in J_n$.

Έτσι, το σφάλμα μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$e = U_h - u = (U_h - R_h\tilde{u}) + (R_h\tilde{u} - u) = \theta + \rho.$$

Στην ουσία, παραπάνω προσθέσαμε και αφαιρέσαμε την Ritz προβολή της $\tilde{u}$ έτσι ώστε να φράξουμε τους δύο όρους του σφάλματος, δηλαδή τους θ και ρ ξεχωριστά.

Ξεκινάμε φράσσοντας τον όρο ρ^N.

$$\|\rho^N\| = \|(R_h\tilde{u}-u)(t_N))\| = \|R_h\tilde{u}(t_N)-u(t_N)\| = \|R_h u(t_N)-u(t_N)\| = \|(R_h u-u)(t_N)\|.$$

Και έτσι από το Λήμμα 3.1.2 υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε:

$$\begin{aligned}\|\rho^N\| &= \|(R_h u - u)(t_N)\| \leq \|(R_h u - u)(t_N)\| + h\|\nabla(R_h u - u)(t_N)\| \leq Ch^2\|u(t_N)\|_2 \\ &\leq Ch^2 \sup_{t\in J_N} \|u\|_2 = Ch^2\|u\|_{2,J_N} \leq Ch^2 \max_{1\leq n\leq N} \|u\|_{2,J_n}.\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε τώρα με το φράξιμο του όρου θ^N, που είναι το δυσκολότερο.

Έστω $\varphi \in L^2(\Omega)$ και έστω Z_h η λύση του διακριτού ανάλογου του Backward Ομογενούς Προβλήματος. Άρα, η Z_h αφού είναι λύση θα ικανοποιεί την (2.16). Δηλαδή, έχουμε:

$$B_N(X, Z_h) = (X^N, \varphi),\ \forall X \in S_{kh}.$$

Θέτονας στην παραπάνω σχέση $X = \theta \in S_{kh}$ (Αφού ο S_{kh} είναι γραμμικός χώρος και είναι $U_h \in S_{kh}$ και $R_h\tilde{u} \in S_{kh}$. Το τελευταίο ισχύει εξαιτίας του ορισμού της Ritz προβολής και του ότι η $\tilde{u}$ είναι κατά τμήματα σταθερή ως προς τον χρόνο.), έχουμε:

$$(\theta^N, \varphi) = B_N(\theta, Z_h) = B_N(e - \rho, Z_h) = B_N(e, Z_h) - B_N(\rho, Z_h) = -B_N(\rho, Z_h),$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την αρχική μας σχέση για το σφάλμα $e = \theta + \rho$, την διγραμμικότητα της B_N και την (2.12) για $X = \varphi$ (όπου το δεξί μέρος της μηδενίζεται καθώς $v_h = P_h v$).

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τον εναλλακτικό τρόπο γραφής της B_N (Πρόταση 2.3.3) και το γεγονός ότι $Z_{h,t} = 0$ σε κάθε διάστημα J_n αφού είναι κατά τμήματα σταθερή ως προς t. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\left(\theta^N, \varphi\right) &= -\left(\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left(-\left(\rho, Z_{h,t}\right) + \left(\nabla\rho, \nabla Z_h\right)\right)\, dt - \sum_{n=1}^{N-1}\left(\rho^n, [Z_h]_n\right) + \left(\rho^N, Z_h^N\right)\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left(\nabla\rho, \nabla Z_h\right)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1}\left(\rho^n, [Z_h]_n\right) - \left(\rho^N, \varphi\right).\end{aligned}$$

Από τον ορισμό της προβολής Ritz και της Διακριτής Λαπλασιανής, έχουμε:

$$(\nabla\rho, \nabla Z_h) = (\nabla R_h\rho, \nabla Z_h) = -\left(R_h\rho, \Delta_h Z_h\right).$$

Οπότε γράφουμε:

$$\begin{aligned}
\left(\theta^N, \varphi\right) &= \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left(R_h\rho, \Delta_h Z_h\right)\, dt + \sum_{n=1}^{N-1}\left(\rho^n, [Z_h]_n\right) - \left(\rho^N, \varphi\right), \\
\left|\left(\theta^N, \varphi\right)\right| &\leq \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left|\left(R_h\rho, \Delta_h Z_h\right)\right|\, dt + \sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(\rho^n, [Z_h]_n\right)\right| + \left|\left(\rho^N, \varphi\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left\|R_h\rho\right\|\left\|\Delta_h Z_h\right\|\, dt + \sum_{n=1}^{N-1}\left\|\rho^n\right\|\left\|[Z_h]_n\right\| + \left\|\rho^N\right\|\left\|\varphi\right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\sup_{t\in J_n}\left\|R_h\rho\right\|\int_{J_n}\left\|\Delta_h Z_h\right\|\, dt + \max_{1\leq n\leq N}\left\|\rho^n\right\|\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left\|[Z_h]_n\right\| + \left\|\varphi\right\|\right) \\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\left\|R_h\rho\right\|_{J_n}\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left\|\Delta_h Z_h\right\|\, dt + \max_{1\leq n\leq N}\sup_{t\in J_n}\left\|\rho(t)\right\|\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left\|[Z_h]_n\right\| + \left\|\varphi\right\|\right) \\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\left(\left\|R_h\rho\right\|_{J_n} + \left\|\rho\right\|_{J_n}\right)\left(\int_0^{t_N}\left\|\Delta_h Z_h\right\|\, dt + \sum_{n=1}^{N-1}\left\|[Z_h]_n\right\| + \left\|\varphi\right\|\right),
\end{aligned}$$

όπου παραπάνω από την μετάβαση από την 2η στην 3η γραμμή χρησιμοποιήσαμε την Ανισότητα Cauchy - Schwarz.

Οπότε από το Λήμμα 3.1.6, η παρένθεση στο δεξί μέρος της παραπάνω ανίσοτητας γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left\|\Delta_h Z_h\right\|\, dt + \sum_{n=1}^{N-1}\left\|[Z_h]_n\right\| + \left\|\varphi\right\| \leq \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left\|\Delta_h Z_h\right\|\, dt + \sum_{n=1}^{N}\left\|[Z_h]_n\right\| + \left\|\varphi\right\| \\
&\leq CL_N\left\|\varphi\right\| + \left\|\varphi\right\| \leq CL_N\left\|\varphi\right\|.
\end{aligned}$$

Οπότε, ισχύει ότι:

$$\left|\left(\theta^N, \varphi\right)\right| \leq \max_{1\leq n\leq N}\left(\left\|R_h\rho\right\|_{J_n} + \left\|\rho\right\|_{J_n}\right) CL_N\left\|\varphi\right\|.$$

Θέτοντας $\varphi = \theta^N$ καταλήγουμε στην επόμενη σχέση:

$$\left\|\theta^N\right\| \leq CL_N\max_{1\leq n\leq N}\left(\left\|R_h\rho\right\|_{J_n} + \left\|\rho\right\|_{J_n}\right). \tag{3.5}$$

Τώρα θέλουμε να φράξουμε τις ποσότητες $\left\|R_h\rho\right\|_{J_n}$, $\left\|\rho\right\|_{J_n}$. Οπότε, έχουμε:

$$\left\|\rho\right\|_{J_n} = \left\|R_h\tilde{u} - u\right\|_{J_n} = \left\|R_h\tilde{u} - \tilde{u} + \tilde{u} - u\right\|_{J_n} \leq \left\|R_h\tilde{u} - \tilde{u}\right\|_{J_n} + \left\|\tilde{u} - u\right\|_{J_n}.$$

Για τον πρώτο όρο έχουμε,

$$\left\|R_h\tilde{u}-\tilde{u}\right\|_{J_n}=\left\|\left(R_h-I\right)\tilde{u}(t)\right\|_{J_n}\overset{\tilde{u}(t)=u(t_n),\ t\in J_n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\left\|\left(R_h-I\right)u(t_n)\right\|.$$

Άρα, από το Λήμμα 3.1.2, υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε:

$$\left\|\left(R_h-I\right)u(t_n)\right\|\le Ch^2\left\|u(t_n)\right\|_2\le Ch^2\sup_{t\in J_n}\left\|u(t)\right\|_2=Ch^2\left\|u\right\|_{2,J_n}.$$

Για τον δεύτερο όρο από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού και εξαιτίας του γεγονότος ότι $\tilde{u}(t)=u(t_n),\ t\in J_n$, έχουμε:

$$\tilde{u}(t)-u(t)=u(t_n)-u(t)=\int_t^{t_n}u_t(\tau)\,d\tau,\ t\in J_n.$$

Οπότε παίρνοντας τις L^2 νόρμες προκύπτει:

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{u}(t)-u(t)\right\|&=\left\|\int_t^{t_n}u_t(\tau)\,d\tau\right\|\le\int_t^{t_n}\left\|u_t(\tau)\right\|\,d\tau\le\sup_{\tau\in[t,t_n]}\left\|u_t(\tau)\right\|\int_t^{t_n}\,d\tau\\&\le\sup_{\tau\in J_n}\left\|u_t(\tau)\right\|\left(t_n-\tau\right)\le\left\|u_t\right\|_{J_n}k_n.\end{aligned}$$

Άρα, λαμβάνουμε ότι:

$$\left\|\tilde{u}(t)-u(t)\right\|_{J_n}\le k_n\left\|u_t\right\|_{J_n}.$$

Συνεπώς φράξαμε την μέγιστη τιμή της νόρμας $\|\rho\|$, ως εξής:

$$\left\|\rho\right\|_{J_n}\le C\left(h^2\left\|u\right\|_{2,J_n}+k_n\left\|u_t\right\|_{J_n}\right).$$

Τώρα θα φράξουμε την $\left\|R_h\rho\right\|_{J_n}$. Έχουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}R_h\rho&=R_h\left(R_h\tilde{u}-u\right)=R_h\left(R_h\tilde{u}\right)-R_hu\overset{R_h\,\text{προβολή}}{=\!=\!=\!=\!=}R_h\tilde{u}-R_hu=R_h\tilde{u}-u+u-R_hu\\&=\rho-\left(R_hu-u\right).\end{aligned}$$

Οπότε, προφανώς, έχουμε:

$$\begin{aligned}\left\|R_h\rho\right\|&=\left\|\rho-\left(R_hu-u\right)\right\|\le\left\|\rho\right\|+\left\|\left(R_hu-u\right)\right\|,\\\left\|R_h\rho\right\|_{J_n}&\le\left\|\rho\right\|_{J_n}+\left\|\left(R_hu-u\right)\right\|_{J_n}.\end{aligned}$$

Επομένως για $t\in J_n$ από το Λήμμα 3.1.2 υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε:

$$\begin{aligned}\left\|R_hu\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|&=\left\|\left(R_h-I\right)u\left(t\right)\right\|\le Ch^2\left\|u(t)\right\|_2,\\\left\|R_hu-u\right\|_{J_n}&\le Ch^2\sup_{t\in J_n}\left\|u(t)\right\|_2=Ch^2\left\|u\right\|_{2,J_n}.\end{aligned}$$

Άρα, με βάση όλα τα παραπάνω, η (3.5) γίνεται:

$$\begin{aligned}\left\|\theta^N\right\| &\leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left(\|R_h\rho\|_{J_n}+\|\rho\|_{J_n}\right) \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left(\|R_h u-u\|_{J_n}+\|\rho\|_{J_n}\right)\\ &\leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left(h^2\|u\|_{2,J_n}+h^2\|u\|_{2,J_n}+k_n\|u_t\|_{J_n}\right)\\ &\leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left(h^2\|u\|_{2,J_n}+k_n\|u_t\|_{J_n}\right).\end{aligned}$$

Έχοντας φράξει τωρα τις ποσότητες $\left\|\theta^N\right\|$, $\left\|\rho^N\right\|$, έχουμε το εξής σφάλμα στο N βήμα:

$$\begin{aligned}\left\|e^N\right\| = \left\|\theta^N+\rho^N\right\| \leq \left\|\theta^N\right\|+\left\|\rho^N\right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left(h^2\|u\|_{2,J_n}+k_n\|u_t\|_{J_n}\right)\\ + Ch^2\max_{1\leq n\leq N}\|u\|_{2,J_n} \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left(h^2\|u\|_{2,J_n}+k_n\|u_t\|_{J_n}\right),\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε:

$$\left\|e^N\right\| = \left\|U_h^N-u\left(t_N\right)\right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left(h^2\|u\|_{2,J_n}+k_n\|u_t\|_{J_n}\right).$$

□

Όπως βλέπουμε παραπάνω έχουμε ότι η ως προς τον χρόνο τάξη ακρίβειας στο διάστημα στον κόμβο t_N είναι ίση με 1 ενώ από την άλλη, ως είθισται, η ως προς τον χώρο τάξη ακρίβειας είναι ίση με 2.

3.3 Υπερσύγκλιση

Σε αυτή την παράγραφο, θα ασχοληθούμε ξανά με μια A - Priori Εκτίμηση Σφάλματος θεωρώντας, όμως, τώρα, $q=2$, δηλαδή ότι έχουμε κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις ως προς τον χρόνο. Θα αποδείξουμε, ωστόσο, δύο εκτιμήσεις σφαλματος: η πρώτη θα δείχνει την τάξη σύγκλισης σε όλο το χρονικό διάστημα J_N ενώ η δεύτερη αφορά μόνο τον κόμβο t_N. Ο όρος υπερσύγκλιση δηλώνει ότι η τάξη σύγκλισης στους κόμβους είναι υψηλότερη από την τάξη σύγκλισης σε όλο το διάστημα. Εν προκειμένω θα δούμε ότι η τάξη σύγκλισης στο διάστημα J_N είναι ίση με 2 ενώ στον κόμβο t_N είναι ίση με 3.

Ξεκινάμε αποδεικνύοντας το επόμενο Θεώρημα που δίνει την Εκτίμηση Σφάλματος στον κόμβο t_N.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $\dfrac{k_{n+1}}{k_n} \geq c$ για $n \geq 0$ όπου c θετική σταθερά και $q=2$, δηλαδή η προσεγγιστική λύση U_h του (2.9) είναι κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση ως προς τον χρόνο. Άρα, αν $v_h = P_h v$ και η u_{tt} ορίζεται για κάθε $x \in \Omega$ και για κάθε $t \in [0, t_N]$ τότε για τις λύσεις u, U_h των (2.1) και (2.9) αντίστοιχα υπάρχει θετική σταθερά C ώστε να ισχύει:*

$$\|U_h^N - u(t_N)\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^3\|u_{tt}\|_{J_n}).$$

Απόδειξη. Έστω $\tilde{u}$ κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση (παρεμβάλλουσα) ως προς τον χρόνο t και το σφάλμα της παρεμβάλλουσας είναι κάθετο στα χρονικά πολυώνυμα μηδενικού βαθμού ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ στο J_n για την οποιά ισχύει:

$$\tilde{u}(t_n) = u(t_n),\ n \geq 0,$$

$$\int_{J_n} (\tilde{u}\,(t) - u\,(t))\ dt = 0,\ n \geq 1.$$

Έτσι, το σφάλμα μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$e = U_h - u = (U_h - R_h\tilde{u}) + (R_h\tilde{u} - u) = \theta + \rho.$$

Ο όρος $\left\|\rho^N\right\|$ φράσσεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στην A - priori εκτίμηση σφάλματος για $q = 1$ (Θεώρημα 3.2.1), δηλαδή, υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε:

$$\|\rho^N\| \leq Ch^2 \max_{1\leq n\leq N} \|u\|_{2,J_n}.$$

Συνεχίζουμε τώρα με το φράξιμο του όρου θ^N.

Έστω $\varphi \in L^2(\Omega)$ και έστω Z_h η λύση του διακριτού ανάλογου του Backward Ομογενούς Προβλήματος. Άρα, η Z_h αφού είναι λύση θα ικανοποιεί την (2.16). Δηλαδή, έχουμε:

$$B_N(X, Z_h) = (X^N, \varphi),\ \forall X \in S_{kh}.$$

Θέτονας στην παραπάνω σχέση $X = \theta \in S_{kh}$, έχουμε όπως στην Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1:

$$(\theta^N, \varphi) = B_N(\theta, Z_h) = -B_N(\rho, Z_h).$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε τη διγραμμικότητα της B_N και την (2.12) για $X = \varphi$.

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τον εναλλακτικό τρόπο γραφής της B_N (Πρόταση 2.3.3), οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left(\theta^N, \varphi\right) &= -\left(\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left(-\left(\rho, Z_{h,t}\right) + \left(\nabla\rho, \nabla Z_h\right)\right) dt - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\rho^n, [Z_h]_n\right) + \left(\rho^N, Z_h^N\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left(\left(\rho, Z_{h,t}\right) - \left(\nabla\rho, \nabla Z_h\right)\right) dt + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\rho^n, [Z_h]_n\right) - \left(\rho^N, \varphi\right). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Τώρα για τον πρώτο όρο στο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.6), έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\int_{J_n} (\rho, Z_{h,t})\ dt = \int_{J_n} (R_h\tilde{u} - u, Z_{h,t})\ dt = \int_{J_n} (R_h\tilde{u}, Z_{h,t})\ dt - \int_{J_n} (u, Z_{h,t})\ dt \\
&\overset{(*)}{=} \int_{J_n} (R_h u, Z_{h,t})\ dt - \int_{J_n} (u, Z_{h,t})\ dt = \int_{J_n} (R_h u - u, Z_{h,t})\ dt,
\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$\int_{J_n} (\rho, Z_{h,t}) = \int_{J_n} (R_h u - u, Z_{h,t})\, dt. \tag{3.7}$$

Παραπάνω, στην ισότητα $(*)$, γράφουμε τα εξής:

$$\int_{J_n} (R_h\tilde{u}, Z_{h,t})\, dt = \int_{J_n}\int_{\Omega} R_h\tilde{u} Z_{h,t}\, dx\, dt = \int_{\Omega}\int_{J_n} R_h\tilde{u} Z_{h,t}\, dt\, dx = \int_{\Omega} Z_{h,t} \int_{J_n} R_h\tilde{u}\, dt\, dx$$
$$= \int_{\Omega} Z_{h,t} R_h \int_{J_n} \tilde{u}\, dt\, dx = \int_{\Omega} Z_{h,t} R_h \int_{J_n} u\, dt\, dx = \int_{\Omega}\int_{J_n} R_h u Z_{h,t}\, dt\, dx = \int_{J_n} (R_h u, Z_{h,t})\, dt.$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε:

- το Θεώρημα Fubini για την εναλλαγή των ολοκληρωμάτων,
- το γεγονός ότι επειδή $q = 2$, η λύση Z_h του ολικά διακριτού Backward Προβλήματος είναι κατά τμήματα γραμμική ως προς τον χρόνο t και έτσι η $Z_{h,t}$ είναι κατά τμήματα σταθερή ως προς τον χρόνο στα διαστήματα J_n,
- το γεγονός ότι η λύση u του (2.1) είναι αρκετά ομαλή και έτσι δεν έχει σημασία αν πρώτα ολοκληρώσουμε στο χρονικό διάστημα J_n και μετά εφαρμόσουμε τον τελεστή R_h ή το ανάποδο,
- την ιδιότητα ότι το σφάλμα $\tilde{u} - u$ της παρεμβάλλουσας είναι κάθετο στα χρόνικα πολυώνυμα μηδενικού βαθμού ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ στο J_n.

Οπότε η (3.7) με την Ανισότητα Cauchy - Schwarz γίνεται:

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} (\rho, Z_{h,t})\, dt\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} (R_h u - u, Z_{h,t})\, dt\right| \le \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} |(R_h u - u, Z_{h,t})|\, dt$$
$$\le \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} \|R_h u - u\|\, \|Z_{h,t}\|\, dt \le \sum_{n=1}^{N} \|R_h u - u\|_{J_n} \int_{J_n} \|Z_{h,t}\|\, dt$$
$$\le \max_{1\le n\le N} \|R_h u - u\|_{J_n} \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} \|Z_{h,t}\|\, dt.$$

Από το Λήμμα 3.1.2 υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε:

$$\|R_h u - u\|_{J_n} = \sup_{t\in J_n} \|R_h u - u\| \le \sup_{t\in J_n} Ch^2 \|u\|_2 = Ch^2 \|u\|_{2,J_n}.$$

Από το Λήμμα 3.1.6 υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε:

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} \|Z_{h,t}\|\, dt \le \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n} (\|Z_{h,t}\| + \|\Delta_h Z_h\|)\, dt + \sum_{n=1}^{N} \|[Z_h]_n\| \le CL_N \|\varphi\|.$$

Άρα, έχουμε:

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(\rho, Z_{h,t})\ dt\right| \leq CL_N h^2 \max_{1\leq n\leq N}\|u\|_{2,J_n}\|\varphi\|.$$

Οι δύο τελευταίοι όροι της (3.6) γίνονται (και με την βοήθεια της ανισότητας Cauchy Schwarz):

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{N-1}\left(\rho^n, [Z_h]_n\right)\right| + \left|\left(\rho^N, \varphi\right)\right| &\leq \sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(\rho^n, [Z_h]_n\right)\right| + \left|\left(\rho^N, \varphi\right)\right| \\
&= \sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(\left(R_h\tilde{u} - u\right)(t_n), [Z_h]_n\right)\right| + \left|\left(\left(R_h\tilde{u} - u\right)(t_N), \varphi\right)\right| \\
&\overset{\tilde{u}(t_n)=u(t_n)}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(\left(R_h u - u\right)(t_n), [Z_h]_n\right)\right| + \left|\left(\left(R_h u - u\right)(t_N), \varphi\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}\left\|\left(R_h u - u\right)(t_n)\right\|\left\|[Z_h]_n\right\| + \left\|\left(R_h u - u\right)(t_N)\right\|\|\varphi\| \\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\left\|\left(R_h u - u\right)(t_n)\right\|\sum_{n=1}^{N-1}\left(\left\|[Z_h]_n\right\| + \|\varphi\|\right) \\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\left\|\left(R_h u - u\right)\right\|_{J_n}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\left\|[Z_h]_n\right\| + \|\varphi\|\right).
\end{aligned}$$

Όπως έχουμε δει παραπάνω, από το Λήμμα 3.1.2 μπορούμε να βρούμε σταθερά $C > 0$ ώστε:

$$\|R_h u - u\|_{J_n} \leq Ch^2\|u\|_{2,J_n}.$$

Επομένως από το Λήμμα 3.1.6 υπάρχει πάλι σταθερά $C > 0$ ώστε:

$$\sum_{n=1}^{N-1}\left\|[Z_h]_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left(\|Z_{h,t}\| + \|\Delta_h Z_h\|\right)\ dt + \sum_{n=1}^{N}\left\|[Z_h]_n\right\| \leq CL_N\|\varphi\|.$$

Άρα, με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε στην ύπαρξη σταθεράς $C > 0$ ώστε:

$$\left|\sum_{n=1}^{N-1}\left(\rho^n, [Z_h]_n\right)\right| + \left|\left(\rho^N, \varphi\right)\right| \leq CL_N h^2 \max_{1\leq n\leq N}\|u\|_{2,J_n}\|\varphi\|.$$

Τέλος, για τον όρο

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}\left(\nabla\rho, \nabla Z_h\right)\ dt,$$

της (3.6) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla Z_h)\; dt &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla (R_h\tilde{u} - u), \nabla Z_h)\; dt \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla R_h\tilde{u}, \nabla Z_h)\; dt - \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla u, \nabla Z_h)\; dt \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla\tilde{u}, \nabla Z_h) - (\nabla u, \nabla Z_h)\; dt \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla (\tilde{u} - u), \nabla Z_h)\; dt \\
&= -\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\Delta (\tilde{u} - u), Z_h)\; dt \\
&=: \sum_{n=1}^{N} K_n,
\end{aligned}$$

όπου ορίζουμε:

$$K_n = \int_{J_n} (\Delta (\tilde{u} - u), Z_h)\; dt, \quad n = 1, \ldots, N$$

και πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε τον Ορισμό του ρ και της Ritz Προβολής καθώς και τον Τύπο του Green (Πρόταση 1.2.5).

Όμως η Z_h είναι γραμμική στο J_n, άρα, η $Z_{h,t}$ είναι σταθερή, οπότε γράφουμε:

$$Z_h(t) = Z_h^{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t} Z_{h,t}(s)\, ds = Z_h^{n-1} + Z_{h,t}\,(t - t_{n-1})\,,\ t \in J_n.$$

Οπότε, για τις ποσότητες K_n έχουμε:

$$\begin{aligned}
K_n &= -\int_{J_n} (\Delta (\tilde{u} - u), Z_h)\; dt = -\int_{J_n} \big(\Delta (\tilde{u} - u), Z_h^{n-1} + Z_{h,t}\,(t - t_{n-1})\big)\; dt \\
&= -\int_{J_n} (\Delta (\tilde{u} - u), Z_{h,t}\,(t - t_{n-1}))\; dt.
\end{aligned}$$

αφού όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω το σφάλμα $\tilde{u} - u$ της παρεμβάλλουσας, άρα και το $\Delta(\tilde{u} - u)$ είναι κάθετο στα χρόνικα πολυώνυμα μηδενικού βαθμού ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ στο J_n.

Οπότε χρησιμοποιώντας και την Ανισότητα Cauchy Schwarz θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
|K_n| &= \left| \int_{J_n} (\Delta (\tilde{u} - u), Z_{h,t}\,(t - t_{n-1}))\; dt \right| \\
&\le \int_{J_n} |(\Delta (\tilde{u} - u), Z_{h,t}\,(t - t_{n-1}))|\; dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{J_n} \|\Delta(\tilde{u}-u)\| \, \|Z_{h,t}(t-t_{n-1})\| \; dt \\
&\leq \int_{J_n} \|\Delta(\tilde{u}-u)\| \, \|Z_{h,t}\| \, |t-t_{n-1}| \; dt \\
&\leq k_n \int_{J_n} \|\tilde{u}-u\|_2 \, \|Z_{h,t}\| \; dt \\
&\leq k_n \|\tilde{u}-u\|_{2,J_n} \int_{J_n} \|Z_{h,t}\| \; dt,
\end{aligned}
$$

αφού για την H^2 νόρμα μιας συνάρτησης ψ ισχύει:

$$\|\psi\|_2 = \sqrt{\|\psi\|^2 + \|\nabla\psi\|^2 + \|\Delta\psi\|^2} \Rightarrow \|\Delta\psi\| \leq \|\psi\|_2 .$$

Τώρα από το Λήμμα 3.1.1 έχουμε για το σφάλμα παρεμβολής $\tilde{u}-u$ (αφού η $\tilde{u}$ είναι πρώτου βαθμού) ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε:

$$|\tilde{u}-u| \leq Ck_n^2 \max_{\xi \in J_n} |u_{tt}(\xi)| .$$

Άρα, αθροίζοντας όλα τα K_n έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla Z_h) \; dt \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} K_n \right| \leq \sum_{n=1}^{N} |K_n| \leq \sum_{n=1}^{N} k_n \|\tilde{u}-u\|_{2,J_n} \int_{J_n} \|Z_{h,t}\| \; dt \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} Ck_n^3 \|u_{tt}\|_{2,J_n} \int_{J_n} \|Z_{h,t}\| \; dt \leq C \max_{1\leq n\leq N} \left(k_n^3 \|u_{tt}\|_{2,J_n} \right) \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|Z_{h,t}\| \; dt.
\end{aligned}
$$

Οπότε από το Λήμμα 3.1.6 βρίσκουμε σταθερά $C>0$ ώστε:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \|Z_{h,t}\| \; dt = \int_0^{t_N} \|Z_{h,t}\| \; dt \leq CL_N \|\varphi\| .$$

Άρα καταλήγουμε στην επόμενη ανισότητα:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla Z_h) \; dt \right| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(k_n^3 \|u_{tt}\|_{2,J_n} \right) \|\varphi\| .$$

Τώρα, έχουμε φράξει από πάνω όλους τους όρους της (3.6), οπότε, με βάση όλα τα παραπάνω έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\left| \left(\theta^N, \varphi\right) \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\rho, Z_{h,t}) \; dt \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla\rho, \nabla Z_h) \; dt \right| + \left| \sum_{n=1}^{N-1} (\rho^n, [Z_h]_n) \right| + \left| \left(\rho^N, \varphi\right) \right| \\
&\leq CL_N h^2 \max_{1\leq n\leq N} \|u\|_{2,J_n} \|\varphi\| + CL_N \max_{1\leq n\leq N} k_n^3 \|u_{tt}\|_{2,J_n} \|\varphi\| + CL_N h^2 \max_{1\leq n\leq N} \|u\|_{2,J_n} \|\varphi\| \\
&\leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \|u\|_{2,J_n} + k_n^3 \|u_{tt}\|_{2,J_n} \right) \|\varphi\| .
\end{aligned}
$$

Οπότε θέτοντας στην παραπάνω σχέση $\varphi = \theta^N$ καταλήγουμε στο εξής:

$$\left\|\theta^N\right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\|u\right\|_{2,J_n} + k_n^3 \left\|u_{tt}\right\|_{2,J_n}\right).$$

Έχοντας φράξει τωρα τις ποσότητες $\left\|\theta^N\right\|$, $\left\|\rho^N\right\|$, έχουμε το εξής σφάλμα στο N βήμα:

$$\left\|e^N\right\| = \left\|\theta^N + \rho^N\right\| \leq \left\|\theta^N\right\| + \left\|\rho^N\right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\|u\right\|_{2,J_n} + k_n^3 \left\|u_{tt}\right\|_{J_n}\right)$$

$$+ Ch^2 \max_{1\leq n\leq N} \|u\|_{2,J_n} \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\|u\right\|_{2,J_n} + k_n^3 \left\|u_{tt}\right\|_{J_n}\right).$$

Άρα, τελικά έχουμε:

$$\left\|U_h^N - u\left(t_N\right)\right\| = \left\|e^N\right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\|u\right\|_{2,J_n} + k_n^3 \left\|u_{tt}\right\|_{J_n}\right).$$

□

Όπως βλέπουμε παραπάνω έχουμε ότι η ως προς τον χρόνο τάξη ακρίβειας στον κόμβο t_N είναι ίση με 3 ενώ από την άλλη, ως είθισται, η ως προς τον χώρο τάξη ακρίβειας είναι ίση με 2.

Στη συνέχεια, δίνουμε το επόμενο Θεώρημα το οποίο μπορεί να μας δώσει ένα άνω φράγμα για το σφάλμα σε όλο το διάστημα J_n, $n = 1, \ldots, N$ χρησιμοποιώντας τις τιμές του σφάλματος στους κόμβους t_{n-1} και t_n, το supremum της L^2 νόρμας της u_{tt} στο J_n, το supremum της H^2 νόρμας της u στο J_n και τις παραμέτρους τόσο της χωρικής όσο και της χρονικής διαμέρισης.

Θεώρημα 3.3.2. *Αν $v_h = P_h v$ τότε αντίστοιχα για τις λύσεις u, U_h των* (2.1) *και* (2.9) *(ή ισοδυνάμως* (2.10)*) με $q = 2$ υπάρχει θετική σταθερά C ώστε να ισχύει:*

$$\left\|U_h - u\right\|_{J_n} \leq \left\|U_h^n - u(t_n)\right\| + C\left\|U_h^{n-1} - u(t_{n-1})\right\| + C\left(h^2 \left\|u\right\|_{2,J_n} + k_n^2 \left\|u_{tt}\right\|_{J_n}\right)$$

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο Θεώρημα 12.2 της σελίδας 209 του [7].

Τώρα, έχοντας το παραπάνω αποτέλεσμα, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την Εκτίμηση Σφάλματος για το διάστημα J_N μέσα από το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.3. *Αν $v_h = P_h v$ τότε αντίστοιχα για τις λύσεις u, U_h των* (2.1) *και* (2.9) *(ή ισοδυνάμως* (2.10)*) με $q = 2$ υπάρχει θετική σταθερά C ώστε να ισχύει:*

$$\left\|U_h - u\right\|_{J_n} \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\|u\right\|_{2,J_n} + k_n^2 \left\|u_{tt}\right\|_{J_n}\right).$$

Απόδειξη. Στην ουσία το αποτέλεσμα ειναι άμεσο από τα Θεωρήματα 3.3.1, 3.3.2.

Πιο αναλυτικά, στο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.3.2 παίρνουμε $n = N$, δηλαδή το χρονικό διάστημα J_N, και θέτουμε την Εκτίμηση Σφάλματος που έχουμε αποδείξει στο 3.3.1 και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|U_h - u\|_{J_N} &\leq \left\|U_h^N - u(t_N)\right\| + C\left\|U_h^{N-1} - u(t_{N-1})\right\| + C\left(h^2\|u\|_{2,J_N} + k_n^2\|u_{tt}\|_{J_N}\right) \\
&\leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^3\|u_{tt}\|_{J_n}) + CL_N \max_{1\leq n\leq N}(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^3\|u_{tt}\|_{J_n}) \\
&\quad + C\left(h^2\|u\|_{2,J_N} + k_n^2\|u_{tt}\|_{J_N}\right) \\
&\leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^3\|u_{tt}\|_{J_n}) + C\left(h^2\|u\|_{2,J_N} + k_n^2\|u_{tt}\|_{J_N}\right) \\
&\leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}(h^2\|u\|_{2,J_n} + k_n^2\|u_{tt}\|_{J_n}),
\end{aligned}$$

μιας και επιλέγουμε πάντα $k_n < 1$ οπότε έχουμε $k_n^2 > k_n^3$.

□

Όπως βλέπουμε παραπάνω έχουμε ότι η ως προς τον χρόνο τάξη ακρίβειας στο διάστημα J_N είναι ίση με 2 ενώ από την άλλη, όπως ξέρουμε, η ως προς τον χώρο τάξη ακρίβειας είναι ίση με 2.

Παρατηρούμε πως αν η προσεγγιστική λύση U_h ήταν εν γένει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $q-1$ ως προς τον χρόνο με $q \geq 2$ τότε θα είχαμε το φαινόμενο της υπερσύγκλισης διότι η τάξη ακρίβειας στον κόμβο t_N θα ήταν ίση με $2q-1$ ενώ η τάξη ακρίβειας σε όλο το διάστημα J_N ισούται με q.

3.4 A - Posteriori Εκτίμηση

Σε αυτή την παράγραφο, θα ασχοληθούμε με την A - Posteriori Εκτίμηση Σφάλματος θεωρώντας $q = 1$, δηλαδή ότι έχουμε κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις ως προς τον χρόνο, δηλαδή είναι σταθερές στα διαστήματα J_n, $n = 1, \ldots, N$. Οι A - Posteriori Εκτιμήσεις δεν είναι πάντα εύκολο να αποδειχθούν για πληθώρα προβλημάτων και συνήθως μελετώνται μετέπειτα κατά την Ανάλυση Σφάλματος. Σε αντίθεση με τις A - Priori Εκτιμήσεις, μπορούμε να φράξουμε το σφάλμα από γνωστές ποσότητες, δηλαδή από τα δεδομένα του προλήματος μας, όπως κάποια νόρμα της συνάρτησης f στο (2.1) ή την νόρμα της προσέγγισης της λύσης U_h^n σε κάποιο βήμα $n = 1, \ldots, N$.

Τέτοιες Εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται κυρίως για την κατασκευή προσαρμοστικών αλγορίθμων. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μη ομοιόμορφα πλέγματα (Τριγωνοποιήσεις) και να πυκνώσουμε τα πεπερασμένα στοιχεία μόνον εκεί που η λύση παρουσιάζει μη ομαλότητα / ιδιομορφία για να μειώσουμε το σφάλμα χωρις να χρειαστεί να πάρουμε εξ' αρχής κάποιο πυκνό ομοιόμορφο πλέγμα το οποίο θα έκανε το (αριθμητικό) πρόβλημα μας να έχει αχρείαστα πολλές πράξεις. Αυτό γίνεται πυκνώνοντας τα πεπερασμένα στοιχεία όταν η ποσότητα που φράζει το σφάλμα είναι μεγαλύτερη από κάποια τιμή (tolerance) που έχουμε επιλέξει εμείς.

Συνέπως, έχουμε το επόμενο Θεώρημα που δίνει μια τέτοια Εκτίμηση Σφάλματος.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $q = 1$, δηλαδή η προσεγγιστική λύση U_h του (2.9) είναι κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση ως προς τον χρόνο. Άρα, αν $v_h = P_h v$ τότε για τις λύσεις u, U_h των (2.1) και (2.9) αντίστοιχα υπάρχει θετική σταθερά C ώστε:*

$$\|U_h^N - u(t_N)\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N}\left((h^2 + k_n)\|f\|_{J_n} + h^2\|U_h\|_{2,h} + k_n\|\bar{\partial}_n U_h^n\|\right).$$

Απόδειξη. Για το σφάλμα $e = U_h - u$ έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα από το Λήμμα 3.1.3:

$$\begin{aligned}\left(e^N, \varphi\right) &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla U_h, \nabla(X-z))\, dt - \sum_{n=0}^{N-1} \left([U_h]_n, X_+^n - z^n\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (f, X-z)\, dt = I + II + III, \ \forall X \in S_{kh}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Φυσικά, $U_h^0 = P_h v$ και σαν συνάρτηση $X \in S_{kh}$ θα πάρουμε την L^2 - προβολή της μέσης τιμής της λύσης του Backward Ομογενούς Προβλήματος 2.13 στο J_n, δηλαδή:

$$X = P_h \bar{z}|_{J_n},$$

όπου:

$$\bar{z}|_{J_n} = \int_{J_n} \frac{1}{k_n}\, z\, dt.$$

Η διαφορά $X - z$ προσθέτοντας και αφαιρόντας τον όρο $P_h z$ γίνεται:

$$X - z = (P_h \bar{z}|_{J_n} - P_h z) + (P_h z - z)\,.$$

- Ξεκινώντας ο όρος I στην (3.8) γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla U_h, \nabla(X-z))\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla U_h, \nabla\left(P_h \bar{z}|_{J_n} - P_h z\right))\, dt + \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} (\nabla U_h, \nabla\left(P_h z - z\right))\, dt. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της Διακριτής Λαπλασιανής Δ_h έχουμε:

$$\int_{J_n} (\nabla U_h, \nabla\left(P_h \bar{z}|_{J_n} - P_h z\right))\, dt = -\int_{J_n} (\Delta_h U_h, \bar{z}|_{J_n} - z)\, dt = 0, \ \forall n = 1, \ldots, N,$$

αφού για $n = 1, \ldots, N$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &\int_{J_n} (\Delta_h U_h, \bar{z}|_{J_n} - z)\, dt = \int_{J_n} \int_{\Omega} \Delta_h U_h \left(\bar{z}|_{J_n} - z\right) dx\, dt = \int_{\Omega} \int_{J_n} \Delta_h U_h \left(\bar{z}|_{J_n} - z\right) dt\, dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{J_n} \Delta_h U_h \left(\frac{1}{k_n} \int_{J_n} z\, ds\right) dt\, dx - \int_{\Omega} \int_{J_n} \Delta_h U_h z\, dt\, dx \\ &= \int_{\Omega} \Delta_h U_h^n\ k_n \left(\frac{1}{k_n} \int_{J_n} z\, ds\right) dx - \int_{\Omega} \Delta_h U_h^n \int_{J_n} z\, dt\, dx \\ &= \int_{\Omega} \Delta_h U_h^n \int_{J_n} z\, ds\, dx - \int_{\Omega} \Delta_h U_h^n \int_{J_n} z\, dt\, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε:

(i) το Θεώρημα Fubini για την εναλλαγή των ολοκληρώματων,

(ii) το γεγονός ότι αφού η U_h είναι σταθερή στο J_n ως προς τον χρόνο t, το ίδιο θα ισχυεί και για την $\Delta_h U_h$ και θα είναι ίση με $\Delta_h U_h^n$,

(iii) το γεγονός ότι η μέση τιμή της z στο J_n είναι σταθερή ως προς τον χρόνο.

Δηλαδή, μένει να φράξουμε την εξής ποσότητα:

$$\left| \int_{J_n} \left(\nabla U_h, \nabla \left(P_h z - z \right) \right) \, dt \right|.$$

Για αυτό το φράγμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{J_n} \left(\nabla U_h, \nabla \left(P_h z - z \right) \right) \, dt \right| &= \left| \int_{J_n} \int_{\Omega} \nabla U_h \nabla \left(P_h - I \right) z \, dx \, dt \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \int_{J_n} \nabla U_h \nabla \left(P_h - I \right) z \, dt \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \nabla U_h^n \nabla \left(P_h - I \right) \int_{J_n} z \, dt \, dx \right| \\
&\leq C h^2 \left\| U_h^n \right\|_{2,h} \left\| \int_{J_n} z \, dt \right\|_2 .
\end{aligned}$$

Παραπάνω πάλι χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Fubini για την εναλλαγή των ολοκληρωμάτων και το ότι η U_h είναι σταθερή στο J_n ως προς τον χρόνο t και έτσι η ∇U_h στο J_n θα είναι ίση με ∇U_h^n. Επίσης, η λύση z του (2.13) είναι αρκετά ομαλή και έτσι δεν έχει σημασία αν πρώτα ολοκληρώσουμε στο χρονικό διάστημα J_n και μετά εφαρμόσουμε τον τελεστή $\nabla \left(P_h - I \right)$ ή το ανάποδο. Τέλος, για την ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 3.1.5.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_2 , \|\Delta \cdot\|$ είναι ισοδύναμες, τότε εφαρμόζοντας την ισοδυναμία αυτή για τη συνάρτηση $\int_{J_n} z \, dt$ έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$, η οποία εξαρτάται από το Ω, ώστε:

$$\left\| \int_{J_n} z \, dt \right\|_2 \leq C \left\| \Delta \int_{J_n} z \, dt \right\| = C \left\| \int_{J_n} \Delta z \, dt \right\| .$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε, επίσης, το γεγονός ότι η λύση z του (2.13) είναι αρκετά ομαλή ώστε είτε ολοκληρώσουμε πρώτα στο χρονικό διάστημα J_n είτε εφαρμόσουμε την Λαπλασιανή να καταλήγουμε στο ίδιο.

Έτσι, χρησιμοποιώντας την Διαφορική Εξίσωση του (2.13) έχουμε:

$$\int_{J_n} \Delta z \, dt = - \int_{J_n} z_t \, dt,$$

που σημαίνει,

$$\int_{J_N} \Delta z \, dt = -\int_{t_{N-1}}^{t_N} z_t \, dt = z(t_N) - z(t_{N-1}).$$

Οπότε, με βάση τα παραπάνω, αθροίζοντας από το $n = 1$ έως το N, φράζουμε το I ως εξής:

$$\begin{aligned}
|I| &= \left| \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} \left(\nabla U_h, \nabla \left(P_h z - z\right)\right) dt \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \left| \int_{J_n} \left(\nabla U_h, \nabla \left(P_h z - z\right)\right) dt \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} Ch^2 \left\|U_h^n\right\|_{2,h} \left\| \int_{J_n} \Delta z \, dt \right\| \leq Ch^2 \max_{1 \leq n \leq N} \left\|U_h^n\right\|_{2,h} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left\| \int_{J_n} \Delta z \, dt \right\| + \left\| \int_{J_N} \Delta z \, dt \right\| \right) \\
&\leq Ch^2 \max_{1 \leq n \leq N} \left\|U_h^n\right\|_{2,h} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left\| \int_{J_n} z_t \, dt \right\| + \left\| z(t_N) - z(t_{N-1}) \right\| \right) \\
&\leq Ch^2 \max_{1 \leq n \leq N} \left\|U_h^n\right\|_{2,h} \left(\int_0^{t_{N-1}} \left\|z_t\right\| \, dt + 2 \left\|z\right\|_{J_N} \right) \\
&\leq Ch^2 \max_{1 \leq n \leq N} \left\|U_h^n\right\|_{2,h} \left(\int_0^{t_{N-1}} \left\|z_t\right\| \, dt + \left\|z\right\|_{J_N} \right) \\
&\leq Ch^2 \max_{1 \leq n \leq N} \left\|U_h^n\right\|_{2,h} L_N \left\|\varphi\right\|.
\end{aligned}$$

όπου μεταξύ άλλων χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 3.1.4.

Άρα, καταλήξαμε στο εξής:

$$|I| \leq C L_N h^2 \max_{1 \leq n \leq N} \left\|U_h^n\right\|_{2,h} \left\|\varphi\right\|.$$

• Συνεχίζουμε με τον όρο II στην (3.8):

Γράφουμε αρχικά το άλμα της U_h στον κόμβο t_{n-1} ως εξής:

$$\left[U_h\right]_{n-1} = U_{h,+}^{n-1} - U_h^{n-1} \overset{U_h \text{ σταθ. στο } J_n}{=\!=\!=\!=\!=} U_h^n - U_h^{n-1} = k_n \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{k_n} = k_n \bar{\partial}_n U_h^n.$$

Επειδή $X \in S_{kh}$ και ο S_{kh} αποτελείται από κατά τμήματα σταθερές ως προς τον χρόνο συναρτήσεις ($q = 1$), έχουμε ότι $X_+^n = X^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ και έτσι αφού $X^n = P_h \bar{z}|_{J_n}$ γράφουμε:

$$
\begin{aligned}
|II| &= \left|\sum_{n=0}^{N-1}\left([U_h]_n\, , X_+^n - z^n\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N-1}\left([U_h]_n\, , X^{n+1} - P_h z^n\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{N}\left([U_h]_{n-1}\, , X^{n} - P_h z^{n-1}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{N}\left(k_n\bar{\partial}_n U_h^n, P_h\left(\bar{z}|_{J_n} - z^{n-1}\right)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{N}\left(k_n\bar{\partial}_n U_h^n, \bar{z}|_{J_n} - z^{n-1}\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\left|\left(k_n\bar{\partial}_n U_h^n, \bar{z}|_{J_n} - z^{n-1}\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\left\|k_n\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\left\|\bar{z}|_{J_n} - z^{n-1}\right\| \\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\left(k_n\left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right)\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left\|\bar{z}|_{J_n} - z^{n-1}\right\| + \left\|\bar{z}|_{J_N} - z^{N-1}\right\|\right).
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για ορισμένα ολοκληρώματα) για την z στο $[t_{N-1}, t_N]$ έχουμε την ύπαρξη ένος $\xi \in (t_{N-1}, t_N)$ ώστε:

$$
\bar{z}|_{J_N} = \frac{1}{k_n}\int_{t_{N-1}}^{t_N} z\, dt = \frac{k_n}{k_n}\, z(\xi) = z(\xi).
$$

Τώρα από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού γράφουμε (για $n = 1, \ldots, N-1$):

$$
z(t) - z^{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t} z_t(s)\, ds,\ t \in J_n.
$$

Επομένως,

$$
\left\|z(t) - z^{n-1}\right\| = \left\|\int_{t_{n-1}}^{t} z_t(s)\, ds\right\| \leq \int_{t_{n-1}}^{t}\|z_t(s)\|\, ds \leq \int_{J_n}\|z_t(s)\|\, ds,
$$

όπου χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|z_t\| \geq 0$, λαμβάνουμε:

$$\left\|\bar{z}|_{J_n} - z^{n-1}\right\| = \left\|\frac{1}{k_n}\int_{J_n}\left(z(t) - z^{n-1}\right)\,dt\right\| \leq \frac{1}{k_n}\int_{J_n}\left\|z(t) - z^{n-1}\right\|\,dt$$
$$\leq \frac{1}{k_n}\int_{J_n}\int_{J_n}\|z_t(s)\|\,ds\,dt = \int_{J_n}\|z_t\|\,dt.$$

Οπότε με βάση τα παραπάνω οι πράξεις στο II συνεχίζουν ως εξής:

$$\begin{aligned}
|II| &\leq \max_{1\leq n\leq N}\left(k_n\left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right)\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left\|\bar{z}|_{J_n} - z^{n-1}\right\| + \left\|\bar{z}|_{J_N} - z^{N-1}\right\|\right)\\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\left(k_n\left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right)\left(\sum_{n=1}^{N-1}\int_{J_n}\|z_t\|\,dt + \|z(\xi)\| + \left\|z^{N-1}\right\|\right)\\
&\leq C\max_{1\leq n\leq N}\left(k_n\left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right)\left(\int_0^{t_{N-1}}\|z_t\|\,dt + \|z\|_{J_N}\right)\\
&\leq CL_N\max_{1\leq n\leq N}\left(k_n\left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right)\|\varphi\|,
\end{aligned}$$

όπου παραπάνω η C είναι θετική σταθερά και χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 3.1.4.

Δηλαδή, καταλήξαμε στο εξής φράγμα:

$$|II| \leq CL_N\max_{1\leq n\leq N}\left(k_n\left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right)\|\varphi\|.$$

- Συνεχίζουμε με τον όρο III στην (3.8):

Θέτοντας $X = P_h\bar{z}|_{J_n}$ και χρησιμοποιώντας την Ανισότητα Cauchy - Schwarz παίρνουμε:

$$\left|\int_{J_n}\left(f, P_h\bar{z}|_{J_n} - z\right)\,dt\right| \leq \int_{J_n}\left|\left(f, P_h\bar{z}|_{J_n} - z\right)\right|\,dt \leq \int_{J_n}\|f\|\left\|P_h\bar{z}|_{J_n} - z\right\|\,dt$$
$$\leq \|f\|_{J_n}\int_{J_n}\left\|P_h\bar{z}|_{J_n} - z\right\|\,dt, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Για την ολοκληρωτέα ποσότητα για $1 \leq n < N$ (χρησιμοποιώντας και τον ορισμό του τελεστή P_h - L^2 προβολής) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|P_h\bar{z}|_{J_n} - z\| &= \|P_h\bar{z}|_{J_n} - P_h z + P_h z - z\| \\
&\leq \|P_h\bar{z}|_{J_n} - P_h z\| + \|P_h z - z\| \\
&= \left(P_h\left(\bar{z}|_{J_n} - z\right), P_h\left(\bar{z}|_{J_n} - z\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \|(P_h - I)\, z\| \\
&= \left(\left(\bar{z}|_{J_n} - z\right), \left(\bar{z}|_{J_n} - z\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \|(P_h - I)\, z\| \\
&= \|\bar{z}|_{J_n} - z\| + \|(P_h - I)\, z\| \\
&\leq \int_{J_n} \|z_t\|\, dt + Ch^2 \|z\|_2\,, \quad \forall n = 1, \dots, N-1,
\end{aligned}$$

επειδή:

(i) όπως είπαμε παραπάνω στο φράγμα του II, για την μέση τιμή της z στο χρονικό διάστημα J_n βρίσκουμε $\xi \in J_n$ από το Θεώρημα Μέσης Τιμής ώστε:

$$\bar{z}|_{J_n} = z(\xi)$$

και έτσι έχουμε (χρησιμοποιώντας και το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού):

$$\|\bar{z}|_{J_n} - z\| = \|z(\xi) - z(t)\| = \left\|\int_t^{\xi} z_t(s)\, ds\right\| \leq \int_t^{\xi} \|z_t(s)\|\, ds \leq \int_{J_n} \|z_t(s)\|\, ds,$$

(ii) εξαιτίας της Σχεδόν Ομοιόμορφης (Quasiuniform) Τριγωνοποίησης $\mathcal{T}_h$ ισχύει η (3.2):

$$\|(P_h - I)\, v\| + h\,\|\nabla\,(P_h - I)\, v\| \leq Ch^2 \|v\|_2\,,$$

που σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned}
\int_{J_n} \|P_h\bar{z}|_{J_n} - z\|\, dt &\leq \int_{J_n} \left(\int_{J_n} \|z_t(s)\|\, ds + Ch^2 \|z\|_2\right) dt \\
&\leq k_n \int_{J_n} \|z_t\|\, dt + Ch^2 \int_{J_n} \|z\|_2\, dt.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_2\,, \|\Delta\cdot\|$ είναι ισοδύναμες, τότε εφαρμόζοντας την ισοδυναμία αυτή για την z έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε:

$$\begin{aligned}
\int_{J_n} \|P_h\bar{z}|_{J_n} - z\|\, dt &\leq k_n \int_{J_n} \|z_t\|\, dt + Ch^2 \int_{J_n} \|\Delta z\|\, dt \\
&\leq k_n \int_{J_n} \|z_t\|\, dt + Ch^2 \int_{J_n} \|-z_t\|\, dt \\
&\leq \left(k_n + Ch^2\right) \int_{J_n} \|z_t\|\, dt, \quad 1 \leq n < N.
\end{aligned}$$

Για $n = N$, δηλαδή για το χρονικό διάστημα J_N, για την ολοκληρωτέα ποσότητα έχουμε:

$$\|P_h\bar{z}|_{J_N} - z\| \leq \|P_h\bar{z}|_{J_N}\| + \|z\| \leq 2\,\|z\|_{J_N}\,,$$

αφού:

$$\|P_h\bar{z}|_{J_N}\| = (P_h\bar{z}|_{J_N}, P_h\bar{z}|_{J_N})^{\frac{1}{2}} = (\bar{z}|_{J_N}, \bar{z}|_{J_N})^{\frac{1}{2}} = \|\bar{z}|_{J_N}\| = \left\|\frac{1}{k_N}\int_{J_N} z\,dt\right\|$$

$$\leq \frac{1}{k_N}\int_{J_N}\|z\|\;dt \leq \frac{1}{k_N}\,\|z\|_{J_N}\int_{J_N} dt = \|z\|_{J_N}\,.$$

Έτσι, λοιπόν, παίρνουμε:

$$\int_{J_N}\|P_h\bar{z}|_{J_N} - z\|\;dt \leq 2k_N\,\|z\|_{J_N}\,.$$

Συνολικά για τον όρο III με βάση τα προηγούμενα παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
|III| &= \left|\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(f, X - z)\;dt\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\int_{J_n}(f, P_h\bar{z}|_{J_n} - z)\;dt\right| = \sum_{n=1}^{N}\left|\int_{J_n}(f, P_h\bar{z}|_{J_n} - z)\;dt\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\|f\|_{J_n}\int_{J_n}\|P_h\bar{z}|_{J_n} - z\|\;dt \\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\|f\|_{J_n}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\int_{J_n}\|P_h\bar{z}|_{J_n} - z\|\;dt + \int_{J_N}\|P_h\bar{z}|_{J_N} - z\|\;dt\right) \\
&\leq \max_{1\leq n\leq N}\|f\|_{J_n}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\left(k_n + Ch^2\right)\int_{J_n}\|z_t\|\;dt + 2k_N\,\|z\|_{J_N}\right) \\
&\leq C\max_{1\leq n\leq N}\left(\left(h^2 + k_n\right)\|f\|_{J_n}\right)\left(\sum_{n=1}^{N-1}\int_{J_n}\|z_t\|\;dt + \|z\|_{J_N}\right) \\
&\leq CL_N\max_{1\leq n\leq N}\left(\left(h^2 + k_n\right)\|f\|_{J_n}\right)\|\varphi\|\,,
\end{aligned}$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 3.1.4.

Δηλαδή, καταλήξαμε στο εξής:

$$|III| \leq CL_N\max_{1\leq n\leq N}\left(\left(h^2 + k_n\right)\|f\|_{J_n}\right)\|\varphi\|\,.$$

Έτσι, με βάση τα παραπάνω και θέτοντας στην (3.8) $\varphi = e^N$ παίρνουμε το εξής τελικό αποτέλεσμα:

$$\left\|e^N\right\|^2 \leq CL_N\max_{1\leq n\leq N}\Big(h^2\,\|U_h^n\|_{2,h} + \left(k_n\left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right) + \left(\left(h^2 + k_n\right)\|f\|_{J_n}\right)\Big)\left\|e^N\right\|\,.$$

Ή αλλιώς υπάρχει θετική σταθερά C ώστε:

$$\left\|U_h^N - u(t_N)\right\| = \left\|e^N\right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\|U_h^n\right\|_{2,h} + \left(k_n \left\|\bar{\partial}_n U_h^n\right\|\right) + \left(\left(h^2 + k_n\right) \left\|f\right\|_{J_n}\right)\right).$$

□

3.5 Sharpness της Α - Posteriori Εκτίμησης

Για να κατασκευάσουμε προσαρμοστικούς αλγορίθμους, χρειαζόμαστε Α - Posteriori Εκτιμήσεις Σφάλματος οι οποίες θα πρέπει να θεωρούνται "καλές" με την έννοια ότι η ποσότητα που χρησιμοποιούμε για να φράξουμε το σφάλμα της μεθόδου δεν είναι πολύ μεγαλύτερη από το σφάλμα. Αυτή η ιδιότητα λέγεται Sharpness ("Αιχμηρότητα") της Εκτίμησης και την χρειαζόμαστε για τον εξής λόγο: αν η ποσότητα από την οποία φράσσεται το σφάλμα είναι πολύ μεγάλη τότε έχουμε λανθασμένη ένδειξη ότι το σφάλμα σε αυτή την γειτονιά είναι πολύ μεγάλο και έτσι ο προσαρμοστικός αλγόριθμος θα πυκνώσει τα πεπερασμένα στοιχεία εκεί χωρίς να χρειάζεται στην ουσιά με αποτέλεσμα να κάνει το υπολογιστικό μας πρόβλημα αχρείαστα πιο πολύπλοκο.

Για αυτό λοιπόν, ιδανικά, θα θέλαμε εκτιμήσεις που η ποσότητα που φράζει το σφάλμα να είναι αρκετά κοντά, σχεδόν ίση θα έλεγε κανείς, με το σφάλμα. Η παραπάνω Α - Posteriori Εκτίμηση που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο έχει αυτή την ιδιότητα και αυτό το το βλέπουμε στο επόμενο Θέωρημα το οποίο αποδεικνύει ότι η ποσότητα που φράσσει το σφάλμα στην Α - Posteriori Εκτίμηση δεν είναι μεγαλύτερη από το αντίστοιχη ποσότητα που φράζει το σφάλμα στην Α - Priori Εκτίμηση (Θεώρημα 3.2.1).

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω $\dfrac{k_{n+1}}{k_n} \geq c$ για $n \geq 0$ όπου c θετική σταθερά και $q = 1$, δηλαδή η προσεγγιστική λύση U_h του (2.9) είναι κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση ως προς τον χρόνο. Άρα, αν $v_h = P_h v$ τότε για τις λύσεις u, U_h των (2.1) και (2.9) αντίστοιχα υπάρχει θετική σταθερά C ώστε να ισχύει:*

$$h^2 \left\|U_h^N\right\|_{2,h} + k_N \left\|\bar{\partial}_N U_h^N\right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\|u\right\|_{2,J_n} + k_n \left\|u_t\right\|_{J_n}\right).$$

Απόδειξη. Έστω $\tilde{u}_h$ η γραμμική παρεμβάλουσα της u στα σημεία της διαμέρισης $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N$. Οπότε γράφουμε:

$$h^2 \left\|U_h^N\right\|_{2,h} = h^2 \left\|U_h^N - \tilde{u}_h^N + \tilde{u}_h^N\right\|_{2,h} \leq h^2 \left\|U_h^N - \tilde{u}_h^N\right\|_{2,h} + h^2 \left\|\tilde{u}_h^N\right\|_{2,h}.$$

Χρησιμοποιώντας το Bramble - Hilbert Λήμμα (Λήμμα 1.4.8) για $m = p = 2$ και με συναρτησιακό:

$$l(u) = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\gamma,$$

όπου γ ακμή της Τριγωνοποίησης, έχουμε ότι υπάρχει $C > 0$ ώστε:

$$\left\|\tilde{u}_h^N\right\|_{2,h} \leq C \left\|u^N\right\|_2,$$

αφού για g πολυώνυμο βαθμού 1 (γραμμική - αφινική συνάρτηση) έχουμε ότι έχει παντού στο Ω σταθερή κάθετη παράγωγο και έτσι $l(g) = 0$.

Τώρα, για $\chi \in S_h$ γράφουμε:

$$\|\chi\|_{2,h} = \left(\sum_{\gamma} \left| \left[\frac{\partial \chi}{\partial n} \right]_{\gamma} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Όμως επειδή η χ είναι γραμμική στον χώρο, η κάθετη παράγωγος όπως έχουμε πει θα είναι σταθερή μέσα στο τρίγωνο $\tau \in \mathcal{T}_h$ και ισχύει:

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = \nabla \chi \cdot \mathbf{n},$$

όπου $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα προς τα έξω, κάθετο στην γ.

Οπότε από τον Ορισμό της L^∞ νόρμας έχουμε:

$$\left(\sum_{\gamma} \left| \left[\frac{\partial \chi}{\partial n} \right]_{\gamma} \right|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{\gamma} \|\nabla \chi\|^2_{L^\infty(\tau)} \right)^{1/2}.$$

Και από την Ισοδυναμία των L^∞, L^2 νορμών, παίρνουμε:

$$C \left(\sum_{\gamma} \|\nabla \chi\|^2_{L^\infty(\tau)} \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{\gamma} (\mathrm{area}\,(\tau))^{-1} \|\nabla \chi\|^2_{L^2(\tau)} \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{\gamma} h^{-2} \|\nabla \chi\|^2_{L^2(\tau)} \right)^{1/2},$$

εξαιτίας της Σχεδόν Ομοιόμορφης Τριγωνοποίησης $\mathcal{T}_h$ έχουμε $\mathrm{area}\,(\tau) \geq Ch^2$.

Αθροίζοντας σε όλα τα τρίγωνα $\tau \in \mathcal{T}_h$ και χρησιμοποιώντας την Αντίστροφη Εκτίμηση (3.3), παίρνουμε:

$$C \left(\sum_{\gamma} h^{-2} \|\nabla \chi\|^2_{L^2(\tau)} \right)^{1/2} = Ch^{-1} \|\nabla \chi\|_{L^2(\Omega)} = Ch^{-1} \|\nabla \chi\| \leq Ch^{-2} \|\chi\|.$$

Άρα, καταλήξαμε στην σχέση:

$$\|\chi\|_{2,h} \leq Ch^{-2} \|\chi\|.$$

Θέτονας στην παραπάνω ανισότητα που μόλις αποδείξαμε την ποσότητα:

$$\chi = U_h^N - \tilde{u}_h^N \in S_h,$$

έχουμε:

$$h^2 \left\| U_h^N - \tilde{u}_h^N \right\|_{2,h} \leq C \left\| U_h^N - \tilde{u}_h^N \right\| \leq C \left\| U_h^N - u(t_N) \right\| + C \left\| u(t_N) - \tilde{u}_h^N \right\|.$$

Όμως από το Θεώρημα 3.2.1 έχουμε την εξής Εκτίμηση Σφάλματος:

$$\left\| U_h^N - u(t_N) \right\| \leq CL_N \max_{1 \leq n \leq N} \left(h^2 \|u\|_{2,J_n} + k_n \|u_t\|_{J_n} \right).$$

Και από το Λήμμα 3.1.1 μπορούμε να βρούμε με εντελώς όμοιο τρόπο ότι για το Σφάλμα της γραμμικής παρεμβάλουσας έχουμε:

$$\left\| u(t_N) - \tilde{u}_h^N \right\| \leq Ck_n \|u_t\|_{J_N}.$$

Δηλαδή, με βάση τις 3 παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$h^2 \left\| U_h^N - \tilde{u}_h^N \right\|_{2,h} \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\| u \right\|_{2,J_n} + k_n \left\| u_t \right\|_{J_n} \right).$$

Και έτσι έχουμε:

$$h^2 \left\| U_h^N \right\|_{2,h} \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\| u \right\|_{2,J_n} + k_n \left\| u_t \right\|_{J_n} \right).$$

Για τον όρο $k_N \left\| \bar{\partial}_N U_h^N \right\|$, έχουμε:

$$\begin{aligned} k_N \left\| \bar{\partial}_N U_h^N \right\| &= \left\| U_h^N - U_h^{N-1} \right\| = \left\| U_h^N - u(t_N) - U_h^{N-1} + u(t_{N-1}) + u(t_N) - u(t_{N-1}) \right\| \\ &\leq \left\| U_h^N - u(t_N) \right\| + \left\| U_h^{N-1} - u(t_{N-1}) \right\| + \left\| u(t_N) - u(t_{N-1}) \right\|. \end{aligned}$$

Όπου οι πρώτοι δύο όροι φράσσονται από το Θεώρημα 3.2.1, δηλαδή ισχύει:

$$\left\| U_h^N - u(t_N) \right\| + \left\| U_h^{N-1} - u(t_{N-1}) \right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\| u \right\|_{2,J_n} + k_n \left\| u_t \right\|_{J_n} \right).$$

Και ο τρίτος όρος από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού γίνεται:

$$\left\| u(t_N) - u(t_{N-1}) \right\| = \left\| \int_{t_{N-1}}^{t_N} u_t \, dt \right\| \leq \int_{k_N} \left\| u_t \right\| \, dt \leq k_N \left\| u_t \right\|_{J_N}.$$

Δηλαδή, είναι:

$$k_N \left\| \bar{\partial}_N U_h^N \right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\| u \right\|_{2,J_n} + k_n \left\| u_t \right\|_{J_n} \right).$$

Και έτσι, καταλήξαμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$h^2 \left\| U_h^N \right\|_{2,h} + k_N \left\| \bar{\partial}_N U_h^N \right\| \leq CL_N \max_{1\leq n\leq N} \left(h^2 \left\| u \right\|_{2,J_n} + k_n \left\| u_t \right\|_{J_n} \right).$$

$\square$

Επίλογος

Συνοψίζοντας αυτή την εργασία, καταφέραμε να ορίσουμε το πλήρες διακριτό σχήμα και να αποδείξουμε διάφορες εκτιμήσεις σφάλματος ώστε να μελετήσουμε την τάξη ακρίβειας και την σύγκλιση της μεθόδου αλλά και να ποσοτικοποιήσουμε ένα άνω φράγμα για το σφάλμα αυτό (το οποίο άνω φράγμα δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από το σφάλμα).

Σε επέκταση της εργασίας αυτής, θα μπορούσαμε να ασχοληθούμε με την ανάπτυξη προσαρμοστικών αλγορίθμων που θα χρησιμοποιούν την a - posteriori εκτίμηση σφάλματος που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και έτσι να μπορέσουμε να παρουσιάσουμε και κάποια υπολογιστικά παραδείγματα. Εκτός αυτού, θα μπορούσαμε να ασχοληθούμε εκτός από την Εξίσωση Θερμότητας και με γενικότερα γραμμικά παραβολικά προβήματα ή ακόμα και με σχεδόν γραμμικά παραβολικά προβλήματα.

Βιβλιογραφία

[1] Philippe G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, SIAM's Classics in Applied Mathematics, 2002.

[2] Jan Mandel - University of Colorado Denver, *The Bramble-Hilbert Lemma*, URL: https://arxiv.org/pdf/0710.5148.pdf.

[3] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations: Second Edition*, American Mathematical Society, 2010.

[4] Kenneth Eriksson - Claes Johnson, *Adaptive Finite Element Methods For Parabolic Problems I: A Linear Model Problem.*

[5] Susanne C. Brenner L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2008.

[6] Walter A. Strauss, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις: Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, 2017.

[7] Vidar Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, 1997.

[8] Σπύρος Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*, 2003.

[9] Εμμανουήλ Γεωργούλης, *Part III.1 Finite Element Methods for Elliptic Problems.*

[10] Γεώργιος Δ. Ακρίβης - Βασίλειος Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικες Εξισώσεις*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

[11] Γεώργιος Δ. Ακρίβης - Βασίλειος Α. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2010.

[12] Γεώργιος Κουμουλής - Στυλιανός Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[13] Αλέξανδρος Μπακόπουλος - Ίων Χρυσοβέργης, *Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων - Πεπερασμενα Στοιχεία και Διαφορές*, Εκδόσεις Συμεών, 2003.