



Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαράλαμπος Σαλεβουράκης

Αριθμητικές μέθοδοι τιμολόγησης  
δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου

Στην επιστημονική περιοχή: Χρηματοοικονομικά μαθηματικά

Επιβλέπων:

Μιχαήλ Λουλάκης, Αν. Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2023

---

### **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ:**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή ,κύριο Μιχαήλ Λουλάκη για όλες τις συμβουλές που μου έδωσε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου που με έχουν στηρίξει όλα αυτά τα χρόνια.

Χαράλαμπος Σαλεβουράκης

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved . Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

---

## Περίληψη

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα αποτίμησης αμερικανικών δικαιωμάτων. Στην αρχή θα αποδείξουμε ότι υπάρχει βέλτιστος χρόνος διακοπής και στη συνέχεια επειδή δεν υπάρχει τύπος κλειστής μορφής θα εκτιμήσουμε τη λύση του προβλήματος μέσω κάποιων αριθμητικών μεθόδων. Αυτές είναι το διωνυμικό μοντέλο, πεπερασμένες διαφορές και η Monte Carlo.

**Λέξεις κλειδιά:** Βέλτιστη διακοπή, προβλήματα ελευθέρου ορίου, χρηματοοικονομικά μαθηματικά, αμερικανικά δικαιώματα, μοντέλο Black-Scholes, διωνυμικό μοντέλο, πεπερασμένες διαφορές, Least Square Monte Carlo.

---

## Abstract

In this thesis we will deal with the problem of pricing american options. First we will prove that exists an optimal stopping time and then because there is no closed-form formula we will estimate the solution of the problems by some numerical methods. These are the binomial model, finite differences and Monte Carlo.

**Keywords:**Optimal stopping,free-boundary problems,financial mathematics,american options,Black-Scholes model,binomial model, finite differences,Least Square Monte Carlo.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Κεφάλαιο 1</b>	<b>1</b>
1.1	Γενικές έννοιες στη θεωρία Πιθανοτήτων . . . . .	1
1.1.1	Βασικές έννοιες και ορισμοί . . . . .	1
1.2	Στοχαστική Ανάλυση . . . . .	2
1.2.1	Στοχαστικό Ολοκλήρωμα . . . . .	3
1.2.2	Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις . . . . .	3
1.3	Γενικά για βέλτιστη διακοπή . . . . .	5
1.3.1	Διακριτός Χρόνος: Προσέγγιση martingale . . . . .	5
1.3.2	Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Κεφάλαιο 2: Βασικές έννοιες στα χρηματοοικονομικά</b>	<b>16</b>
2.1	Εισαγωγή . . . . .	16
2.2	Παράγωγα προϊόντα . . . . .	16
2.3	Η αρχή της μη επιτηδειότητας . . . . .	17
2.4	Το μοντέλο Black-Scholes . . . . .	18
2.5	Αδιάφορη κινδύνου αποτίμηση . . . . .	19
2.6	Η Black and Scholes εξίσωση . . . . .	20
2.7	Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Κεφάλαιο 3: Αμερικανικό δικαίωμα</b>	<b>23</b>
3.1	Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς . . . . .	23
3.2	Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Άπειρος ορίζοντας . . . . .	24
3.3	Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Κεφάλαιο 4: Αριθμητικές Μέθοδοι</b>	<b>31</b>
4.1	Διωνυμικό μοντέλο . . . . .	31
4.1.1	Διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου . . . . .	31
4.1.2	Διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων . . . . .	32
4.1.3	Αλγόριθμος αποτίμησης Αμερικανικών Δικαιωμάτων . . . . .	34
4.2	Πεπερασμένες διαφορές . . . . .	35
4.2.1	Άμεση μέθοδος . . . . .	36
4.2.2	Έμμεση μέθοδος . . . . .	36
4.2.3	Μέθοδος Crank -Nicolson . . . . .	37
4.2.4	Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια επαναληπτικών μεθόδων . . . . .	38
4.2.5	Εφαρμογή στο Αμερικανικό δικαίωμα . . . . .	40
4.3	Μέθοδος Monte-Carlo . . . . .	42
4.3.1	Αποτίμηση Αμερικανικού δικαιώματος με Monte-Carlo . . . . .	43

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

<b>5</b>	<b>Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά αποτελέσματα</b>	<b>46</b>
5.1	Σύγκριση των αποτελεσμάτων . . . . .	46
5.2	Ταχύτητα των μεθόδων . . . . .	48
5.3	Μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος σε σχέση με τα $K, r, \sigma$ . . .	54
5.4	Ελεύθερο όριο . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα</b>	<b>61</b>
<b>A'</b>	<b><u>Παράρτημα</u></b>	<b>63</b>

## Κατάλογος Σχημάτων

1	Μεταβολή της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τον αριθμό βημάτων $N$ στο χρόνο. Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ . . . . .	49
2	Η διαφορά των μεθόδων με την 'πραγματική' τιμή σε σχέση με τον αριθμό των βημάτων $N$ στο χρόνο. Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ . Οι τιμές ανάμεσα από τις διακεκομμένες γραμμές είναι το σύνολο $[-0.001, 0.001]$ . . . . .	50
3	Το λογ-σφάλμα των μεθόδων. Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ . . . . .	51
4	Χρόνος που χρειάζεται για τον υπολογισμό της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τον αριθμό των βημάτων $N$ στο χρόνο. Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ . . . . .	52
5	Μεταβολή της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης υπολογισμένο από τη μέθοδο Least Square Monte Carlo σε σχέση με τον αριθμό επαναλήψεων $M$ . Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N = 50$ . . . . .	53
6	Η διαφορά της Least Square Monte Carlo με την 'πραγματική' τιμή σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων $M$ στο χρόνο. Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N = 50$ . Οι τιμές ανάμεσα από τις διακεκομμένες γραμμές είναι το σύνολο $[-0.001, 0.001]$ . . . . .	53
7	Χρόνος που χρειάζεται για τον υπολογισμό της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων για τη Least Square Monte Carlo . Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N = 50$ . . . . .	54
8	Διάγραμμα μεταβολής της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με το επιτόκιο και για τις τρεις μεθόδους με $S_0 = 50, K = 50, \sigma = 0.4, T = 1$ . . . . .	55
9	Διάγραμμα μεταβολής της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τη μεταβλητότητα και για τις τρεις μεθόδους με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, T = 1$ . . . . .	56
10	Διάγραμμα μεταβολής της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τη τιμή άσκησης και για τις τρεις μεθόδους με $S_0 = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ . . . . .	57
11	Διάγραμμα ελεύθερου ορίου από τις μεθόδους Crank-Nicolson , και διωνυμικό μοντέλο. Με $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ . . . . .	58

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

---

- 12 Διάγραμμα μεταβολής ελεύθερου ορίου σε σχέση με το επιτόκιο  $r$  από τις μεθόδους Crank-Nicolson και διωνυμικό μοντέλο. Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N=10000$  βήματα στη διαμέριση του χρόνου για το διωνυμικό μοντέλο,  $N=200$  και  $M=1000$  για τη διαμέριση του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα για τη Crank-Nicolson . . . . . 59
- 13 Διάγραμμα μεταβολής ελεύθερου ορίου σε σχέση με τη μεταβλητότητα  $\sigma$  από τις μεθόδους Crank-Nicolson και διωνυμικό μοντέλο. Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N=10000$  βήματα στη διαμέριση του χρόνου για το διωνυμικό μοντέλο,  $N=200$  και  $M=1000$  για τη διαμέριση του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα για τη Crank-Nicolson . . . . . 60



## 1 Κεφάλαιο 1

### 1.1 Γενικές έννοιες στη θεωρία Πιθανοτήτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μια απλή αναφορά σε διάφορες έννοιες και θεωρήματα που θα χρειαστούν σε όλη την εργασία. Οι αποδείξεις των θεωρημάτων και οι έννοιες που θα αναπτύξουμε υπάρχουν στα [1], [2], [3], [4], [6].

#### 1.1.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Η τριάδα  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  ονομάζεται χώρος πιθανότητας όπου  $\Omega$  ο δειγματοχώρος, δηλαδή το σύνολο των πιθανών γεγονότων. Το  $\mathcal{F}$  είναι μια  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  που περιέχει όλους του πιθανούς συνδυασμούς των γεγονότων  $\Omega$  και  $\mathcal{P}$  το μέτρο πιθανότητας που δείχνει πόσο πιθανό είναι να συμβεί ένα γεγονός.

Διήθηση είναι μια οικογένεια από  $\sigma$ -άλγεβρες  $\mathcal{F}_t$  για τις οποίες ισχύει  $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$  και σαν  $\mathcal{F}_t$  εννοούμε την πληροφορία που γνωρίζουμε μέχρι την χρονική στιγμή  $t$ . Μια σημαντική κατηγορία χρόνων είναι οι χρόνοι διακοπής. Ως χρόνο διακοπής ως προς μία διήθηση λέμε την τυχαία μεταβλητή  $\tau$  για την οποία ισχύει  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in I$ , όπου το  $I$  είναι ένα σύνολο δεικτών. Δηλαδή για να είναι ένας χρόνος διακοπής, η απόφαση να σταματήσουμε ή όχι θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την πληροφορία που γνωρίζουμε μέχρι την χρονική στιγμή  $t$  και όχι από το μέλλον.

Αν σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  προσθέσουμε μια διήθηση τότε η τετράδα  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$  καλείται στοχαστική βάση.

Η ακολουθία τ.μ.  $\{X = X_t\}_{t \in T}$  σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  καλείται **στοχαστική διαδικασία**. Μια στοχαστική διαδικασία θα λέμε ότι είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση  $\mathcal{F}_t$  αν κάθε  $X_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη, δηλαδή η εικόνα της κάθε τυχαίας μεταβλητής  $X_t$  ανήκει στη  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}_t$ . Στην περίπτωση που η  $\sigma$ -άλγεβρα είναι η μικρότερη για την οποία η  $X_t$  είναι μετρήσιμη, θα την συμβολίζουμε με  $\sigma(X_t)$ .

Τώρα θα ορίσουμε κάποιες πολύ σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες.

**Ορισμός 1.1.** : Η διαδικασία  $X = X_t$ , όπου  $X_t$  πραγματικές και ολοκληρώσιμες ( $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ ) τ.μ. και είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t$  καλείται **martingale** (**supermartingale** ή **submartingale**) αν  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = (\leq \text{ ή } \geq) X_s$  για  $s \leq t$

**Ορισμός 1.2.** : Μια διαδικασία ονομάζεται **κίνηση Brown**, ή διαδικασία *Wiener*,  $B_t$  για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα :

(i)  $B_0 = 0$

(ii) οι τροχιές της συνεχείς

(iii) οι  $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  ανεξάρτητες

## 1.2 Στοχαστική Ανάλυση

---

(iv) για  $s \leq t$  οι τ.μ.  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ .

**Ορισμός 1.3.** Μια πολυδιάστατη κίνηση Brown θα είναι μια στοχαστική διαδικασία  $B = (B_{0,t}, \dots, B_{d,t})$  όπου οι  $B_{0,t}, \dots, B_{d,t}$  ανεξάρτητες κινήσεις Brown.

Τέλος θα αναφερθούμε σε μια πάρα πολύ σημαντική ιδιότητα που θα χρειαστούμε στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας, την ιδιότητα *Markov*.

Η ιδιότητα **Markov** λέει ότι για να κάνουμε εκτίμηση για το μέλλον μιας διαδικασίας δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε όλη την "πληροφορία" της στο παρελθόν αλλά μόνο την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, δηλαδή

$$P_x(X_{t+s} \in B | \mathcal{F}_t) = P_{X_t}(X_s \in B) \quad (1.1.1)$$

μια πιο χρήσιμη μορφή της είναι η

$$\mathbb{E}_x[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{B_s}[f(X_{t-s})], \quad s \leq t. \quad (1.1.2)$$

Όπου έχουμε την στοχαστική βάση  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ , ένα μετρήσιμο χώρο  $(E, \mathcal{E})$ ,  $B \in \mathcal{E}$ , η  $X_t$  προσαρμοσμένη στη διήθηση  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  και η  $f$  μια φραγμένη συνάρτηση.

Αν τώρα αντί για ντερτεμινιστικό χρόνο  $t$  ισχύει και για ένα χρόνο διακοπής  $\tau$  τότε έχουμε την **ισχυρή ιδιότητα Markov**. Οι διαδικασίες για τις οποίες ισχύει η ιδιότητα *Markov* ή η ισχυρή ιδιότητα *Markov* λέγονται διαδικασίες *Markov* ή ισχυρές διαδικασίες *Markov* αντίστοιχα.

Μια διαδικασία που έχει την ισχυρή ιδιότητα *Markov* είναι η **γεωμετρική κίνηση Brown (GBM)**[1]. Θα δούμε στη συνέχεια ότι η γεωμετρική κίνηση *Brown* είναι μια διαδικασία που ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

## 1.2 Στοχαστική Ανάλυση

Ο τρόπος με τον οποίο θα μοντελοποιήσουμε το πως μεταβάλλεται μια στοχαστική διαδικασία (στην περίπτωση μας το υποκείμενο προϊόν) θα γίνει με την βοήθεια της στοχαστικής ανάλυσης. Για αυτό θα χρειαστεί να ορίσουμε κάποιες πολύ βασικές έννοιες όπως το στοχαστικό ολοκλήρωμα (ή ολοκλήρωμα Itô).

### 1.2.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

---

#### 1.2.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Θα λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία  $f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1}]}$  είναι διαδικασία βήματος, όπου  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  διαμέριση του  $[a, b]$  και  $\eta_j$  τ.μ. οι οποίες είναι  $\mathcal{F}_{t_j}$ -μετρήσιμες και  $\mathbb{E}[\eta_j^2] < \infty$ . Επίσης ως  $H_0^2([a, b])$  θα συμβολίζουμε το σύνολο τέτοιων διαδικασιών στο  $[a, b]$ .

**Ορισμός 1.4. (Ολοκλήρωμα Itô):** Έστω ότι έχουμε μια διαδικασία βήματος  $f$  τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα θα είναι το

$$\int_a^b f(t) dB_t = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}). \quad (1.2.1)$$

Θα λέμε ότι μια διαδικασία  $f$  ανήκει  $H^2([a, b])$  αν είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s)$ ,  $s \leq t$  και ισχύει  $\mathbb{E}[\int_a^b |f(t)|^2 dt] < \infty$ .

**Θεώρημα 1.5.**  $\forall f \in H^2$  υπάρχει μια ακολουθία διαδικασιών βήματος  $f_{step,n}$  τ.ω.

$$\lim_{n \rightarrow \inf} \mathbb{E}[\int_a^b |f(t) - f_{step,n}(t)|^2 dt] = 0 \quad (1.2.2)$$

**Ορισμός 1.6.** Έστω  $f \in H^2$ . Το ολοκλήρωμα Itô ορίζεται ως:

$$I(f(t)) := \int_a^b f(t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \inf} [f_{step,n}] := \lim_{n \rightarrow \inf} \int_a^b f_{step,n} dB_t \quad (1.2.3)$$

Ιδιότητες στοχαστικού ολοκληρώματος: Έστω  $X, Y \in H^2$

(i)  $\mathbb{E}[I(X)] = 0$

(ii)  $I(aX + bY) = aI(X) + bI(Y)$   $a, b \in R$

(iii)  $\mathbb{E}[\int_a^b X dB_t]^2 = \mathbb{E}[\int_a^b |X(t)|^2 dt]$  (Ισομετρία Itô)

(iv) Η  $I(X) = \int_a^b f(t) dB_t$  είναι *martingale*

(v)  $\int_a^b f(t) dB_t = \int_a^c f(t) dB_t + \int_c^b f(t) dB_t$

#### 1.2.2 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Τώρα θα μιλήσουμε για τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις που είναι πολύ σημαντικές στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, γιατί με την βοήθειά τους κατασκευάζουμε τα μοντέλα που χρειαζόμαστε

## 1.2.2 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

**Ορισμός 1.7.** :Η στοχαστική διαδικασία είναι **διαδικασία Itô** όταν έχει τη μορφή

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s \quad (1.2.4)$$

και ισχύει  $\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty$   $\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty$

ο όρος  $u$  λέγεται συνήθως τάση (*drift*) και ο όρος  $v$  καλείται διάχυση (*diffusion*)

Ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην στοχαστική ανάλυση, με τη βοήθειά του οποίου μπορούμε να λύσουμε στοχαστικά ολοκληρώματα, είναι το διάσημο Λήμμα του Itô (ή τύπος του Itô).

**Θεώρημα 1.8** (Λήμμα Itô). Έστω  $g(t, x) \in C^{1,2}$  και  $X_t$  μια διαδικασία Itô τότε ισχύει:

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial s} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) ds + \int_0^t v \frac{\partial g}{\partial x} dB_s \quad (1.2.5)$$

**Ορισμός 1.9.** Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.) θα λέμε τις εξισώσεις της μορφής :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (1.2.6)$$

όπου  $B_t$  μια  $m$ -διάστατη κίνηση Brown και  $\sigma, b$  μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις

Λύση της Σ.Δ.Ε θα είναι μια διαδικασία Itô που την ικανοποιεί

**Θεώρημα 1.10** (Υπαρξης και Μοναδικότητας). :Αν για  $b, \sigma$  της ΣΔΕ ισχύουν ότι

(i) (γραμμική αύξηση):  $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq (1 + |x|)^2$

(ii) (τοπικά Lipschitz):  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \forall x, y$

Τότε η ΣΔΕ έχει λύση και αυτή είναι μοναδική

**Παράδειγμα 1.11.** (Γεωμετρική κίνηση Brown): Για την εξίσωση

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \Rightarrow \int \frac{dS_t}{S_t} = \mu t + \sigma B_t$$

Τώρα με την βοήθεια του τύπου του Itô θα βρούμε το  $\frac{dS_t}{S_t}$   
Για την  $X_t = \ln(S_t)$  ισχύει ότι

### 1.3 Γενικά για βέλτιστη διακοπή

---

$$dX_t = \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{S_t} \right)^2 (dS_t)^2 = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \Rightarrow$$
$$X_t - X_0 = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \Rightarrow S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma B_t}$$

**Παράδειγμα 1.12.** (Ολοκλήρωση κατά μέρη) Έστω ότι έχουμε 2 διαδικασίες Itô  $X_t, Y_t$  τότε για αυτές ισχύει ότι

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t.$$

Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Itô για την  $g(X_t, Y_t) = X_t Y_t$ .

Άρα θα έχουμε

$$d(X_t Y_t) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{\partial g}{\partial y} dY_t + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dX_t dX_t + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dY_t dY_t + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} dX_t dY_t$$
$$= X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

### 1.3 Γενικά για βέλτιστη διακοπή

Εδώ θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές έννοιες πάνω στη βέλτιστη διακοπή, θα ορίσουμε τον χώρο στον οποίο θα δουλέψουμε, θα δώσουμε τη γενική μορφή ενός προβλήματος βέλτιστης διακοπής, θα αποδείξουμε μια ικανή και μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη βέλτιστου χρόνου διακοπής και θα δώσουμε ένα γενικό συμπέρασμα πάνω στην ύπαρξη του χρόνου αυτού. Γενικά τα προβλήματα αυτά διακρίνονται ανάλογα αν είναι σε συνεχή και διακριτό χρόνο και αν θα χρησιμοποιήσουμε την *martingale* προσέγγιση ή την μαρκοβιανή. Επειδή σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με το πρόβλημα τιμολόγησης του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης το οποίο εξαρτάται από μια μετοχή που είναι μια γεωμετρική διαδικασία *Brown* στην οποία ισχύει η ισχυρή ιδιότητα *Markov* θα αναλύσουμε την περίπτωση του συνεχή χρόνου με μαρκοβιανή προσέγγιση, αλλά πρώτα θα δώσουμε και την προσέγγιση *martingale* σε διακριτό χρόνο. Η θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε και οι αποδείξεις βρίσκονται στα κεφάλαια 1,2 του βιβλίου [6].

#### 1.3.1 Διακριτός Χρόνος: Προσέγγιση *martingale*

Έστω  $G = (G_n)_{n \geq 0}$  μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στη στοχαστική βάση  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathcal{P}_X)$ . Επίσης η  $G$  θα είναι προσαρμοσμένη στη

### 1.3.1 Διακριτός Χρόνος: Προσέγγιση martingale

---

$\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

Η οικογένεια όλων των χρόνων διακοπής θα συμβολίζεται με  $\mathcal{M}$ , και ως

$$\mathcal{M}_n^N = \{\tau \in \mathcal{M} : n \leq \tau \leq N\} \quad (1.3.1)$$

όπου  $0 \leq n \leq N$ . Για λόγους απλότητας θα θέσουμε  $\mathcal{M}^N = \mathcal{M}_0^N$  και  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^\infty$ . Το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής είναι το εξής

$$V_* = \sup_{\tau} \mathbb{E}[G_\tau] \quad (1.3.2)$$

όπου θα πρέπει να βρούμε το βέλτιστο χρόνο  $\tau_*$  στον οποίο επιτυγχάνεται το *supremum* και να υπολογίσουμε το  $V_*$ .

Για να υπάρχει  $\mathbb{E}[G_\tau]$  θα πρέπει να ισχύει η εξής συνθήκη

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n \leq k \leq N} |G_k|\right] < \infty \quad (1.3.3)$$

και χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς για το  $\mathcal{M}_n^N$  θα έχουμε

$$V_n^N = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_n^N} \mathbb{E}[G_\tau] \quad (1.3.4)$$

όπου  $0 \leq n \leq N$ . Για λόγους απλότητας θα θέσουμε  $V^N = V_0^N$ ,  $V_n = V_n^\infty$  και  $V = V_0^\infty$  όταν το *supremum* πάνω σε όλους τους χρόνους διακοπής  $\tau$  στο  $\mathcal{M}$ . Για να λύσουμε το πρόβλημα μας θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής που όμως ισχύει μόνο όταν  $N < \infty$ . Αν έχουμε τη μη πεπερασμένη περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του essential *supremum* που υπάρχει στο [6].

Για  $n = N$  θα πρέπει να σταματήσουμε και το κέρδος μας θα είναι  $G = S_N^N$ . Για  $n = N - 1$  θα πρέπει να ελέγξουμε αν μας συμφέρει να σταματήσουμε ή όχι. Αν σταματήσουμε θα έχουμε κέρδος  $S_{N-1}^N = G_{N-1}$  και αν συνεχίσουμε  $S_{N-1}^N = \mathbb{E}[S_N^N | \mathcal{F}_{N-1}]$ . Άρα αν  $G_{N-1} \geq \mathbb{E}[S_N^N | \mathcal{F}_{N-1}]$  σταματάμε στην  $n = N - 1$  αλλιώς προχωράμε. Αντίστοιχα πράττουμε για  $n = N - 2, \dots, 0$ .

Άρα θα δημιουργηθεί η παρακάτω ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές

$$S_n^N = G_N, \quad n = N \quad (1.3.5)$$

$$S_n^N = \max[G_n, \mathbb{E}[S_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]] \quad , n = N - 1, \dots, 0. \quad (1.3.6)$$

θα έχουμε τον χρόνο διακοπής

$$\tau_n^N = \inf\{n \leq k \leq N : S_k^N = G_k\}. \quad (1.3.7)$$

### 1.3.1 Διακριτός Χρόνος: Προσέγγιση martingale

**Θεώρημα 1.13.** Έστω το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (1.3.4) και ισχύει η (1.3.3). Τότε  $\forall n \in [0, N]$  έχουμε

$$S_n^N \geq \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_n], \quad \tau \in \mathcal{M}_n^N \quad (1.3.8)$$

$$S_n^N = \mathbb{E}[G_{\tau_n^N} | \mathcal{F}_n]. \quad (1.3.9)$$

Επιπλέον, αν  $0 \leq n \leq N$  θα έχουμε:

(i) ο χρόνος διακοπής  $\tau_n^N$  είναι βέλτιστος στο (1.3.4).

(ii) Αν  $\tau_*$  είναι ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής στο (1.3.4) τότε  $\tau_n^N \leq \tau_*$   $P_x$ -σ.β. .

(iii) Η ακολουθία  $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$  είναι το ελάχιστο supermartingale που κυριαρχεί  $(G_k)_{n \leq k \leq N}$ .

(iv) Η σταματημένη ακολουθία  $(S_{k \wedge \tau_n^N}^N)_{k \leq n \leq N}$  είναι martingale.

*Απόδειξη.* Για αρχή θα αποδείξουμε τις σχέσεις (1.3.8) και (1.3.9) με τη χρήση της επαγωγής για  $n = N, N-1, \dots, 0$ .

Για  $n = N$  αυτές οι δύο σχέσεις ισχύουν από την σχέση (1.3.5).

Έστω ότι ισχύουν και για  $n = N, N-1, \dots, k$  για  $k \geq 1$  και αυτή θα είναι η επαγωγική υπόθεση. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι θα ισχύει και για  $n = k-1$ .

(1.3.8.): Έστω  $\tau \in \mathcal{M}_{k-1}^N$  και  $\bar{\tau} = \tau \vee k$ . Τότε  $\bar{\tau} \in \mathcal{M}_{k-1}^N$  και  $\{\tau \geq k \in \mathcal{F}_{k-1}\}$ . Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}(\tau = k-1)G_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}] + \mathbb{E}[\mathbb{1}(\tau \geq k)G_{\bar{\tau}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{1}(\tau = k-1)G_{k-1} + \mathbb{1}(\tau \geq k) \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\bar{\tau}} | \mathcal{F}_k] | \mathcal{F}_{k-1}]. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Αφού  $\bar{\tau} \in \mathcal{M}_{k-1}^N$  τότε θα ισχύει ότι  $\mathbb{E}[G_{\bar{\tau}} | \mathcal{F}_{k-1}] \leq S_k^N$ . Επιπλέον από την σχέση (1.3.6) έχουμε ότι  $G_{k-1} \leq S_{k-1}^N$  και  $\mathbb{E}[S_k^N | \mathcal{F}_{k-1}] \leq S_{k-1}^N$ . Άρα η (1.3.10) θα γίνει

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_\tau | \mathcal{F}_{k-1}] &\leq \mathbb{1}(\tau = k-1)S_{k-1}^N + \mathbb{1}(\tau \geq k) \mathbb{E}[S_k^N | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &\leq \mathbb{1}(\tau = k-1)S_{k-1}^N + \mathbb{1}(\tau \geq k)S_{k-1}^N = S_{k-1}^N. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Άρα η (1.3.8) αποδείχθηκε για  $n = k-1$

(1.3.9): Για να την αποδείξουμε για  $n = k-1$ , έστω  $\tau = \tau_{k-1}^N$  και από (1.3.7)  $\tau_{k-1}^N = \tau_k^N$  όταν  $\{\tau_{k-1}^N \geq k\}$ . Από την (1.3.10) για  $\tau = \tau_{k-1}^N$  έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_{\tau_{k-1}^N} | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{1}(\tau_{k-1}^N = k-1)G_{k-1} + \mathbb{1}(\tau_{k-1}^N \geq k) \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\tau_k^N} | \mathcal{F}_k] | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{1}(\tau_{k-1}^N = k-1)S_{k-1}^N + \mathbb{1}(\tau_{k-1}^N \geq k) \mathbb{E}[S_k^N | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{1}(\tau_{k-1}^N = k-1)S_{k-1}^N + \mathbb{1}(\tau_{k-1}^N \geq k)S_{k-1}^N = S_{k-1}^N. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

Άρα η (1.3.9) αποδείχθηκε για  $n = k - 1$

(i): Αν πάρουμε τη μέση τιμή στις σχέσεις (1.3.8.), (1.3.9) θα έχουμε  $\mathbb{E}[S_n^N] \geq \mathbb{E}[G_\tau] \forall \tau \in \mathcal{M}_n^N$  και παίρνοντας το *supremum* έχουμε  $\mathbb{E}[S_n^N] \geq V_n^N$ . Από την (1.3.9) έχουμε  $\mathbb{E}[S_n^N] = \mathbb{E}[G_{\tau_n^N}]$  που δείχνει ότι  $\mathbb{E}[S_n^N] \leq V_n^N$ . Άρα  $\mathbb{E}[S_n^N] = V_n^N$  και αφού  $\mathbb{E}[S_n^N] = \mathbb{E}[G_{\tau_n^N}]$  θα ισχύει ότι  $V_n^N = \mathbb{E}[G_{\tau_n^N}]$  και αποδείξαμε ότι ο χρόνος  $\tau_n^N$  βέλτιστος στο (1.3.4).

(ii): Για να είναι βέλτιστος ο  $\tau_*$  θα ισχύει ότι  $S_{\tau_*}^N = G_{\tau_*}$  σ.β. Έστω ότι δεν ισχύει αυτό άρα από (1.3.5), (1.3.6) έχουμε ότι  $S_{\tau_*}^N \geq G_{\tau_*}$  με  $P(S_{\tau_*}^N > G_{\tau_*}) > 0$ . Άρα από το θεώρημα επιλεκτικής στάσης, την *supermartingale* ιδιότητα της  $(S_{k \wedge \tau_n^N}^N)_{n \leq k \leq N}$  και από την ισότητα που δείξαμε στο (ii)

$$\mathbb{E}[G_{\tau_*}] < \mathbb{E}[S_{\tau_*}^N] \leq \mathbb{E}[S_n^N] = V_n^N. \quad (1.3.13)$$

Το οποίο είναι άτοπο γιατί αν ισχύει η αυστηρή ανισότητα τότε  $\tau_*$  δεν είναι βέλτιστος. Άρα  $S_{\tau_*}^N = G_{\tau_*}$  και από τον ορισμό του  $\tau_n^N$  θα ισχύει ότι  $\tau_n^N \leq \tau_*$ .

(iii): Από τις σχέσεις (1.3.8), (1.3.9) έχουμε ότι  $(S_k^N)_{n \leq k \leq N}$  είναι *supermartingale* και ότι κυριαρχεί την  $(G_k)_{n \leq k \leq N}$ . Έστω ότι  $(\tilde{S}_k)_{n \leq k \leq N}$  ένα άλλο *supermartingale* που κυριαρχεί την  $(G_k)_{n \leq k \leq N}$ . Με την χρήση της επαγωγής θα δείξουμε ότι  $(S_k^N) \leq (\tilde{S}_k)$ . Για  $k = N$  ισχύει από την (1.3.5). Έστω ότι ισχύει για  $k = N - 1, \dots, l$  με  $l \geq n + 1$  τότε από την (1.3.6) θα έχουμε ότι  $S_{l-1}^N = \max(G_{l-1}, \mathbb{E}[S_l^N | \mathcal{F}_{l-1}]) \leq \max(G_{l-1}, \mathbb{E}[\tilde{S}_l | \mathcal{F}_{l-1}]) \leq \tilde{S}_{l-1}$ . Άρα το αποδείξαμε.

(iv): Για  $n \leq k \leq N - 1$  γνωστό και σταθερό έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}(\tau_k^N \leq k) S_{k \wedge \tau_n^N}^N | \mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[\mathbb{1}(\tau_k^N \geq k + 1) S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N | \mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{1}(\tau_k^N \leq k) S_{k \wedge \tau_n^N}^N + \mathbb{1}(\tau_k^N \geq k + 1) \mathbb{E}[S_{(k+1) \wedge \tau_n^N}^N | \mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{1}(\tau_k^N \leq k) S_{k \wedge \tau_n^N}^N + \mathbb{1}(\tau_k^N \geq k + 1) S_{k \wedge \tau_n^N}^N = S_{k \wedge \tau_n^N}^N \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι η σταματημένη ακολουθία  $(S_{k \wedge \tau_n^N}^N)_{k \leq n \leq N}$  είναι *martingale*.  $\square$

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

Έστω μια ισχυρή Μαρκοβιανή διαδικασία  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  στο  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P}_X)$  που παίρνει τιμές στο  $(E, \mathcal{B})$  μετρήσιμος χώρος όπου  $E = R^d, \mathcal{B} = \mathcal{B}(R^d)$ . Τα μονοπάτια της  $X$  είναι δεξιά και αριστερά συνεχή πάνω σε χρόνους διακοπής. Επίσης η διήθηση  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  πρέπει να είναι δεξιά συνεχή. Τέλος θα υποθέσουμε ότι  $(\Omega, \mathcal{F})$  ισούται με τον κανονικό χώρο  $(E^{[0, \infty)}, \mathcal{B}^{[0, \infty)})$  έτσι ώστε ο



### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

---

τελεστής μετατόπισης  $\theta_t: \Omega \mapsto \Omega$  να είναι καλά ορισμένος μέσω του  $\theta_t(w)(s) = w(t+s)$  για  $w = w(s)_{s \geq 0} \in \Omega$ , και  $t, s \geq 0$ .

Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση  $G: E \mapsto \mathcal{R}$  η οποία ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη (με  $G(X_T) = 0$  εαν  $T = \infty$ )

$$\mathbb{E}_x(\sup_{0 \leq t \leq T} |G(X_t)|) \leq \infty \quad (1.3.14)$$

$\forall x \in E$ , έχουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής

$$V(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_x(G(X_\tau)) \quad (1.3.15)$$

όπου το  $x \in E$  και το *supremum* το παίρνουμε πάνω σε όλους τους χρόνους διακοπής  $\tau$  του  $X$ . Η  $V$  είναι η συνάρτηση αξίας και η  $G$  η συνάρτηση κέρδους. Για να λύσουμε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής στο (1.3.15) σημαίνει δύο πράγματα. Πρώτον θα πρέπει να βρούμε έναν βέλτιστο χρόνο διακοπής  $\tau_*$  στον οποίο παίρνουμε το *supremum*. Δεύτερον να υπολογίζουμε την αξία  $V(X)$  για  $x \in E$  όσο πιο αναλυτικά γίνεται. Η διαδικασία  $X$  είναι μαρκοβιανή, δηλαδή δεν μας απασχολεί τι έχει γίνει στο παρελθόν αλλά μόνο στην τελική κατάσταση που είναι. Για αυτό αν πάρουμε την τροχιά  $t \mapsto X_t(\omega)$  για δοσμένο και σταθερό  $\omega$  και υπολογίσουμε το  $G(X_t(\omega))$  τότε  $\forall t$  μπορούμε να αποφασίσουμε βέλτιστα να συνεχίσουμε την διαδικασία ή να την σταματήσουμε. Έτσι χωρίζεται ο χώρος καταστάσεων  $E$  σε ένα σύνολο συνέχισης  $C$  και σε ένα σύνολο σταματημού  $D$ .

Δεν θα χρειαστεί να πάρουμε ξεχωριστές περιπτώσεις για  $T = \infty$  και  $T < \infty$  απλά για την περίπτωση πεπερασμένου ορίζοντα ( $T \leq \infty$ ) θα υποθέσουμε ότι η  $X_t = Z_t(t, X_t)$  και το πρόβλημα θα γίνει

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}_{t,x} G(t + \tau, X_{t+\tau}). \quad (1.3.16)$$

Για το πρόβλημα (1.3.15) το σύνολο συνέχισης θα είναι το

$$C = \{x \in E: V(x) \geq G(x)\} \quad (1.3.17)$$

και το σύνολο σταματημού

$$D = \{x \in E: V(x) = G(x)\} \quad (1.3.18)$$

και θα ορίσουμε σαν χρόνο διακοπής  $\tau_D$

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0: X_t \in D\}. \quad (1.3.19)$$

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

**Ορισμός 1.14.** : Μια μετρήσιμη συνάρτηση  $F: E \mapsto \mathcal{R}$  είναι υπερ-αρμονική αν

$$\mathbb{E}_F(X_\sigma) \leq F(x) \quad (1.3.20)$$

$\forall$  χρόνο διακοπής  $\sigma$  και  $x \in E$ .

**Πρόταση 1.15.** : Η  $F$  είναι υπερ-αρμονική αν-ν  $(F(X_t))_{t \geq 0}$  είναι δεξιά-συνεχής *supermartingale* υπό  $P_x \forall x \in E$

,με  $F$  κάτω-ημισυνεχής και  $(F(X_t))_{t \geq 0}$  είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

**Θεώρημα 1.16.** : Έστω  $\exists$  βέλτιστος χρόνος διακοπής  $\tau_*$  στην  $V(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}[G(X_\tau)]$ ,  $\forall x \in E$ . Τότε έχουμε

(i) Η  $V$  είναι η ελάχιστη υπερ-αρμονική συνάρτηση που κυριαρχεί την  $G$  στο  $E$ .

Επίσης η  $V$  κάτω-ημισυνεχής και η  $G$  άνω-ημισυνεχής. Τότε έχουμε

(ii) Ο βέλτιστος χρόνος διακοπής  $\tau_D$  ικανοποιεί  $\tau_D \leq \tau_*$   $P_x$  - σ.β.  $\forall x \in E$  και είναι βέλτιστος στο πρόβλημα.

(iii) Η σταματημένη διαδικασία  $(V(X_{t \wedge \tau_D}))_{t \geq 0}$  είναι δεξιά συνεχής *martingale* ύπο το  $P_x \forall x \in E$ .

*Απόδειξη.* (i) Για να δείξω ότι η  $V$  υπερ-αρμονική, από ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα έχουμε :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[V(x_\sigma)] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_\sigma[G(x_{\tau_*})]] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[G(x_{\tau_*}) \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma]] \\ &= \mathbb{E}_x[G(x_{\sigma + \tau \circ \theta_\sigma})] \leq \sup_{\tau} \mathbb{E}_x[G(x_\tau)] = V(x) \end{aligned}$$

,  $\forall$  χρόνο διακοπής  $\sigma$ ,  $\forall x \in E$ .

Αυτό αποδεικνύει ότι η  $V$  υπέρ-αρμονική

Έστω η  $F$  μια άλλη υπέρ-αρμονική που κυριαρχεί την  $G$  πάνω στο  $E$ . Τότε έχουμε  $\mathbb{E}[G(x_\tau)] \leq \mathbb{E}_x[F(x_\tau)] \leq F(x)$ ,  $\forall$  χρόνο διακοπής  $\tau$  και  $\forall x \in E$ .

Αν τώρα πάρουμε το *supremum* πάνω σε κάθε  $\tau$  στην από πάνω ανισότητα τότε θα έχουμε ότι  $V(x) \leq F(x)$  δηλαδή η ελάχιστη υπέρ-αρμονική.

(ii) Από τη στιγμή που  $\tau^*$  βέλτιστος χρόνος διακοπής τότε  $V(X_{\tau^*}) = G(X_{\tau^*})$ . Αλλιώς αν ίσχυε ότι  $P(V(X_{\tau^*}) > G(X_{\tau^*})) > 0$  τότε αφού  $V$  υπερ-αρμονική θα έχουμε ότι  $\mathbb{E}_x[G(X_{\tau^*})] < \mathbb{E}_x[V(X_{\tau^*})] \leq V(x)$ . Άτοπο γιατί  $\tau^*$  βέλτιστος, και θα ισχύει ότι  $\tau_D \leq \tau^*$ , από ορισμό του  $\tau_D$  και αφού  $V(X_{\tau^*}) = G(X_{\tau^*})$ .

Τώρα για να δείξουμε ότι  $\tau_D$  βέλτιστος.

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

Η  $V$  είναι ένα δεξιά συνεχές *supermartingale* αφού υπεραρμονική και από θέωρημα επιλεκτικής στάσης έχουμε  $\mathbb{E}_x[V(X_\tau)] \leq \mathbb{E}_x[V(X_\sigma)]$  όπου  $\tau, \sigma$  χρόνοι διακοπής τ.ω.  $\tau \leq \sigma$   
 Άρα για  $\tau_D \leq \tau^*$

$$\mathbb{E}_x[V(X_{\tau^*})] = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau^*})] = V(X)$$

$$\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})] \leq V(X)$$

Άρα  $V(X) \leq \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})] \leq V(X)$  και  $\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})] = V(X)$  δείξαμε ότι  $\tau_D$  βέλτιστος χρόνος διακοπής για το πρόβλημα.

(iii) Άπο την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[V(X_{\tau \wedge \tau_D}) | \mathcal{F}_{s \wedge \tau_D}] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{t \wedge \tau_D}[G(X_{\tau_D})] | \mathcal{F}_{s \wedge \tau_D}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D}) \circ \theta_{t \wedge \tau_D} | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_D}] | \mathcal{F}_{s \wedge \tau_D}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D}) | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_D}] | \mathcal{F}_{s \wedge \tau_D}] \\ &= \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D}) | \mathcal{F}_{s \wedge \tau_D}] \\ &= \mathbb{E}_{x_{s \wedge \tau_D}}[G(X_{\tau_D})] = V(X_{s \wedge \tau_D}) \end{aligned}$$

,  $\forall 0 \leq s \leq t, \forall x \in E$ ,

έτσι δείξαμε ότι είναι *martingale* και η δεξιά συνέχεια έπεται από την δεξιά συνέχεια του  $(V(X_t))_{t \geq 0}$ .  $\square$

**Θεώρημα 1.17.** : Έστω το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής  $V(X) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)]$

και ισχύει ότι  $\mathbb{E}_x[\sup_{0 \leq t \leq T} |G(X_t)|] < \infty$ . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ελάχιστη

υπερ-αρμονική  $\hat{V}$  που κυριαρχεί την  $G$  στο  $E$ . Ας υποθέσουμε ότι  $\hat{V}$  κάτω-ημισυνεχής και  $G$  άνω-ημισυνεχής θέτοντας  $D = \{x \in E : \hat{V} = G(x)\}$  και  $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$ . Τότε έχουμε :

(i) Εάν  $P_x(\tau_D < \infty) = 1 \forall x \in E \Rightarrow \hat{V} = V$  και  $\tau_D$  βέλτιστος

(ii) Εάν  $P_x(\tau_D < \infty) < 1$  για κάποιο  $x \in E \Rightarrow \nexists$  βέλτιστος χρόνος διακοπής με πιθανότητα 1 για το πρόβλημα μας.

Απόδειξη. : Προφανώς αφού  $\hat{V}$  υπέρ-αρμονική, έχουμε  $\mathbb{E}_x[G(x_\tau)] \leq \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_\tau)] \leq \hat{V}(x) \forall x \in E, \forall$  χρόνο διακοπής  $\tau$

Παίρνοντας το *supremum* στην  $\mathbb{E}_x V(X_\tau) \leq \mathbb{E}_x V(X_\sigma)$  θα έχουμε  $G(x) \leq V(x) \leq \hat{V}(x) \forall x \in E$ .

(i) Τώρα θα αποδείξουμε ότι  $\hat{V} = V$  και ότι  $\tau_D$  βέλτιστο στην περίπτωση

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

---

όπου  $G$  φραγμένο. Για την περίπτωση που δεν είναι φραγμένο η απόδειξη υπάρχει στο [6] στη σελίδα 45.

Για  $\epsilon > 0$  θα έχουμε

$$C_\epsilon = \{x \in E : \hat{V}(x) > G(x) + \epsilon\}$$

$$D_\epsilon = \{x \in E : \hat{V}(x) \leq G(x) + \epsilon\}$$

και  $\tau_{D_\epsilon} = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D_\epsilon\}$ .

Από την ισχυρή ιδιότητα *Markov* θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{X_\sigma}[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})] &= \mathbb{E}_x \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}}) \circ \theta_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbb{E}_x \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\sigma + \tau_{D_\epsilon} \circ \theta_\sigma})] = \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\sigma + \tau_{D_\epsilon} \circ \theta_\sigma})] \\ &\leq \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})] \end{aligned}$$

αφού  $\hat{V}$  υπερ-αρμονική και  $\tau_{D_\epsilon} \leq \sigma + \tau_{D_\epsilon} \circ \theta_\sigma$ .

Άρα η απεικόνιση  $x \mapsto \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})]$  είναι υπερ-αρμονική.

Έστω  $c = \sup_{x \in E} (G(x) - \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})])$  και

$$G(x) \leq c + \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})] \quad \forall x \in E.$$

Έτσι η  $c + \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})]$  επίσης υπέρ-αρμονική και από ορισμό της  $\hat{V}$

$$\hat{V}(X) \leq c + \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})], \quad \forall x \in E$$

Για  $\delta \in (0, \epsilon]$  επιλέγω  $x_\delta \in E$  τέτοιο ώστε

$$G(x_\delta) - \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})] \geq c - \delta$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις

$$\hat{V}(X_\delta) \leq c + \mathbb{E}_{x_\delta}[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})] \leq G(X_\delta) + \delta \leq G(X_\delta) + \epsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι  $X_\delta \in D_\epsilon$  και  $\tau_{D_\epsilon} = 0$  στο  $P_{x_\delta}$ .

Άρα  $c - \delta \leq G(X_\delta) - \hat{V}(X_\delta) \leq 0$ .

Όταν  $\delta \downarrow 0$  έχουμε ότι  $c \leq 0$  αποδεικνύοντας ότι  $G(X) \leq \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})]$ .

Από τον ορισμό της  $\hat{V}$  και  $x \mapsto \mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})]$  υπέρ-αρμονική αποδεικνύεται το  $\mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D_\epsilon}})] = \hat{V}$ .

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

Τέλος από  $\mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D\epsilon}})] = \hat{V}$  παίρνουμε ότι

$$\hat{V}(x) = \mathbb{E}_x[\hat{V}(\tau_{D\epsilon})] \leq \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{D\epsilon}})] + \epsilon \leq V(x) + \epsilon$$

$\forall x \in E$  χρησιμοποιώντας ότι  $\hat{V}(X_{\tau_{D\epsilon}}) \leq G(X_{\tau_{D\epsilon}}) + \epsilon$  αφού  $\hat{V}$  κάτω-ημισυνεχής και  $G$  άνω-ημισυνεχής και καθώς  $\epsilon \downarrow 0$  θα έχουμε ότι  $\hat{V} \leq V \Rightarrow \hat{V} = V$  και  $V(x) \leq \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{D\epsilon}})] + \epsilon \forall x \in E$ .

Τώρα θα δείξουμε ότι  $\tau_D$  βέλτιστος χρόνος διακοπής.

Όταν  $\epsilon \downarrow 0$  το  $D_\epsilon \downarrow D$  και  $\tau_{D\epsilon} \uparrow \tau_0$  όπου το  $\tau_0$  χρόνος διακοπής τέτοιος ώστε  $\tau_0 \leq \tau_D$ . Από το γεγονός ότι η  $V$  κάτω-ημισυνεχής και  $G$  άνω-ημισυνεχής και από τον ορισμό του  $\tau_{D\epsilon}$  ισχύει ότι  $V(X_{\tau_{D\epsilon}}) \leq G(X_{\tau_{D\epsilon}}) + \epsilon \forall \epsilon > 0$ . Άρα όταν το  $\epsilon \downarrow 0$  έχουμε ότι  $V(X_{\tau_\delta}) \leq G(X_{\tau_\delta})$ , αφού  $X$  είναι αριστερά συνεχής πάνω σε χρόνους διακοπής. Άρα  $V(X_{\tau_\delta}) = G(X_{\tau_\delta})$  και  $\tau_0 \geq \tau_D \Rightarrow \tau_0 = \tau_D$ . Δείξαμε ότι καθώς το  $\epsilon \downarrow 0$  το  $\tau_{D\epsilon} \uparrow \tau_D$ .

Με την βοήθεια του Λήμματος *Fatou* στην  $\mathbb{E}_x[\hat{V}(X_{\tau_{D\epsilon}})] = \hat{V}$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(X) &\leq \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_{D\epsilon}})] \leq \mathbb{E}_x[\limsup G(X_{\tau_{D\epsilon}})] \\ &\leq \mathbb{E}_x[G(\limsup X_{\tau_{D\epsilon}})] = \mathbb{E}_x[G(X_{\tau_D})] \end{aligned}$$

Άρα  $\tau_D$  βέλτιστος. Το (ii) του θεωρήματος βγαίνει από το (i) του προηγούμενου θεωρήματος.  $\square$

**Θεώρημα 1.18. :**

- (i) (Περίπτωση άπειρου ορίζοντα) Έχουμε το πρόβλημα βέλτιστου σταματημού  $V(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_x(G(X_\tau))$  και ισχύει ότι  $\mathbb{E}_x(\sup_{0 \leq t \leq T} |G(X_t)|) \leq \infty$ . Έστω ότι  $V$  κάτω-ημισυνεχής και  $G$  άνω-ημισυνεχής. Εάν  $P(\tau_D < \infty) = 1 \forall x \in E \Rightarrow \tau_D$  βέλτιστος χρόνος διακοπής. Αν  $P(\tau_D < \infty) < 1$  για κάποιο  $x \Rightarrow \nexists$  βέλτιστος χρόνος διακοπής με πιθανότητα 1.
- (ii) (Περίπτωση πεπερασμένου ορίζοντα) Για τις ιδιές υποθέσεις έχουμε ότι το  $\tau_D$  βέλτιστος χρόνος διακοπής.

Απόδειξη. : Το (ii) αποδεικνύεται όπως το (i) αλλά αντί για  $X_t \rightarrow (t, X_t)$ .  $V$  μετρήσιμη άρα και η απεικόνιση  $V(X_\sigma) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)]$  είναι μετρήσιμη  $\forall$  χρόνο διακοπής  $\sigma$  που είναι γνωστός και σταθερός.

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

Από ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα έχουμε

$$\mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma] \quad \forall \text{ χρόνο διακοπής } \tau \text{ και } x \in E.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$V(X_\sigma) = \operatorname{ess\,sup}_\tau \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+\tau\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma] \text{ υπό την } P_x \text{ όπου } x \in E \text{ γνωστό και στα-} \\ \text{θερό.}$$

Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία χρόνων διακοπής  $\{t_n : n \geq 1\}$  τέτοια ώστε

$$V(X_\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+t_n\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma] \quad (1.3.21)$$

όπου η ακολουθία  $\mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+t_n\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma]$  να είναι αύξουσα.

Αυτό θα το κάνουμε δείχνοντας ότι το σύνολο  $\{\mathbb{E}_x(X_{\sigma+\tau\circ\theta_\sigma}) : \tau \text{ χρόνος διακο-} \\ \text{πής}\}$  είναι άνω-κατευθυνόμενο, δηλαδή για τυχαίους χρόνους διακοπής  $\rho_1, \rho_2$  υπάρχει χρόνος διακοπής  $\rho$  τέτοιος ώστε

$$\mathbb{E}_x[X_\rho|\mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}_x[X_{\rho_1}|\mathcal{F}_\sigma] \vee \mathbb{E}_x[X_{\rho_2}|\mathcal{F}_\sigma].$$

Έστω  $\tau_1, \tau_2$  χρόνοι διακοπής σταθεροί και γνωστοί και θέτουμε  $\rho_1 = \sigma + \tau_1 \circ \theta_\sigma, \rho_2 = \sigma + \tau_2 \circ \theta_\sigma$  και  $B = \{\mathbb{E}_x[X_{\rho_1}|\mathcal{F}_\sigma] \geq \mathbb{E}_x[X_{\rho_2}|\mathcal{F}_\sigma]\}$  και το  $B \in \mathcal{F}_\sigma$ .

Τότε  $\rho = \rho_1 \mathbb{1}_B + \rho_2 \mathbb{1}_{B^c}$  θα είναι χρόνος διακοπής. Αφού  $B, B^c \in \mathcal{F}_\sigma$  τότε και το  $\{\rho \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

Επίσης αν θέσουμε  $A = \{\mathbb{E}_{X_0}[X_{\tau_1}] \geq \mathbb{E}_{X_0}[X_{\tau_2}]\} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0, B = \theta_\sigma^{-1}(A)$  και θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \rho &= (\sigma + \tau_1 \circ \theta_\sigma) \mathbb{1}_B + (\sigma + \tau_2 \circ \theta_\sigma) \mathbb{1}_{B^c} \\ &= \sigma + ((\tau_1 \circ \theta_\sigma)(\mathbb{1}_A \circ \theta_\sigma) + (\tau_2 \circ \theta_\sigma)(\mathbb{1}_{A^c} \circ \theta_\sigma)) \\ &= \sigma + (\tau_1 \mathbb{1}_A + \tau_2 \mathbb{1}_{A^c}) \circ \theta_\sigma \end{aligned}$$

Άρα  $\rho = \sigma + \tau \circ \theta_\sigma$ , όπου  $\tau = \tau_1 \mathbb{1}_A + \tau_2 \mathbb{1}_{A^c}$ . Επίσης πάλι μπορούμε να δούμε ότι  $\tau$  χρόνος διακοπής, δηλαδή  $\tau \leq t \in \mathcal{F}_t$ , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $A \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$ .

Άρα ισχύει ότι  $\mathbb{E}_x[X_\rho|\mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}_x[X_{\rho_1}|\mathcal{F}_\sigma] \vee \mathbb{E}_x[X_{\rho_2}|\mathcal{F}_\sigma]$  και το σύνολο  $\{\mathbb{E}_x(X_{\sigma+\tau\circ\theta_\sigma}) : \tau \text{ χρόνος διακοπής}\}$  είναι άνω κατευθυνόμενο.

Τέλος η (1.3.21) ισχύει και με την βοήθεια του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_x[V(X_\sigma)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[G(X_{\sigma+t_n\circ\theta_\sigma})|\mathcal{F}_\sigma] \leq V(X)$$

### 1.3.2 Συνεχής Χρόνος: Μαρκοβιανή προσέγγιση

---

$\forall x \in E$ ,  $\forall$  χρόνο διακοπής  $\sigma$

Άρα η  $V$  υπέρ-αρμονική και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα τελειώνει η απόδειξη  $\square$

## 2 Κεφάλαιο 2:Βασικές έννοιες στα χρηματοοικονομικά

### 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο 2 θα αναφερθούμε για το χρηματοοικονομικό κομμάτι της εργασίας. Θα ορίσουμε τα παράγωγα(*derivatives*) και τα δικαιώματα(*options*). Θα αναφερθούμε σε δύο πολύ σημαντικές έννοιες για την αποτίμηση δικαιωμάτων, την αρχή της μη-επιτηδειότητας(*no-arbitrage*) και την έννοια της πλήρους αγοράς(*complete market*) και θα τις αποδείξουμε για το *Black-Scholes* μοντέλος. Τέλος θα δώσουμε την *Black-Scholes Formula* που είναι ένας τύπος κλειστής μορφής για την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος.

### 2.2 Παράγωγα προϊόντα

Στα Χρηματοοικονομικά τα παράγωγα προϊόντα (*derivative securities*) είναι τα συμβόλαια των οποίων η τιμή εξαρτάται από ένα άλλο προϊόν το υποκείμενο αγαθό (*underlying asset*). Το υποκείμενο αγαθό μπορεί να είναι μια μετοχή, ένα ομόλογο ή και ένα άλλο αγαθό.

Ένα παράδειγμα παραγώγου είναι το προθεσμιακό συμβόλαιο (*forward contract*) στο οποίο ο κάτοχος έχει την **υποχρέωση** να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν στο χρόνο ωρίμανσης **T** σε τιμή άσκησης **K**. Περισσότερο ενδιαφέρον έχουν τα δικαιώματα αγοράς(*call options*) και δικαιώματα πώλησης(*put options*) γιατί σε αυτά ο κάτοχος έχει το **δικαίωμα** και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει το υποκείμενο αγαθό

Δύο βασικά είδη τέτοιων δικαιωμάτων είναι το **Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα** και το **Αμερικανικό τύπου δικαίωμα**

Το **Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς(ή πώλησης)** είναι μια συμφωνία στην οποία έχουμε το δικαίωμα να αγοράσουμε(ή να πουλήσουμε) το υποκείμενο αγαθό στο χρόνο ωρίμανσης **T** με τιμή άσκησης **K**. Αυτό που αναμένουμε είναι ο κάτοχος αυτού του δικαιώματος θα το ασκήσει μόνο αν τον συμφέρει δηλαδή στην περίπτωση που η αξία  $S_t$  του υποκείμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη(ή μικρότερη) από την τιμή άσκησης δηλαδή  $\max(S_t - K, 0)$ (ή  $\max(K - S_t, 0)$ )



## 2.3 Η αρχή της μη επιτηδειότητας

---

Η διαφορά του **Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς**(ή πώλησης) με τα αντίστοιχα ευρωπαϊκά είναι ότι τώρα ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να το ασκήσει σε όποια χρονική στιγμή θέλει μέχρι τον χρόνο ωρίμανσης  $T$ . Εδώ φαίνεται το μαθηματικό ενδιαφέρον του αμερικανικού δικαιώματος, γιατί σε κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει ο κάτοχος να αποφασίσει αν θα ασκήσει το δικαίωμα δηλαδή αν η τιμή  $S_t$  ανήκει στην περιοχή σταματημού  $D$ , ή όχι δηλαδή αν η τιμή  $S_t$  ανήκει στην περιοχή συνέχισης  $C$ . Η δυσκολία αυτού του προβλήματος βελτιστοποίησης έγκειται στο γεγονός ότι θα πρέπει να συγκρίνουμε άπειρες διαφορετικές περιπτώσεις για να βρούμε την βέλτιστη.

Λογικό είναι λόγω αυτής της διαφοροποίησης η αξία του αμερικανικού δικαιώματος να είναι μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν του ευρωπαϊκού. Στη συνέχεια θα δούμε ότι για το αμερικανικό δικαίωμα αγοράς το οποίο δεν αποδίδει μέρισμα η αξία του είναι ίση με αυτή του ευρωπαϊκού και δεν μας συμφέρει η πρόωμη άσκηση. Ωστόσο για το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης η διαφορά αυτή είναι σημαντική και καλείται **early exercise premium**.

## 2.3 Η αρχή της μη επιτηδειότητας

Μια πολύ σημαντική έννοια στη Χρηματοοικονομική είναι αυτή της μη επιτηδειότητας (*no – arbitrage*). Επιτηδειότητα λέμε ότι έχουμε όταν υπάρχει με μηδενικό ρίσκο σίγουρο κέρδος. Στην πραγματικότητα μπορεί να υπάρξουν ευκαιρίες επιτηδειότητας, οι οποίες θα οδηγήσουν όμως την αγορά σε ισορροπία.

**Ορισμός 2.1 (Αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο).** Ένα χαρτοφυλάκιο  $\theta(t)$  είναι αυτοχρηματοδοτούμενο αν η αξία του  $V$  εξαρτάται μόνο από τους τίτλους από τους οποίους αποτελείται δηλαδή

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \theta(\tau) d\tau. \quad (2.3.1)$$

**Ορισμός 2.2 (Προϊόν χωρίς κίνδυνο).** Ονομάζουμε προϊόν χωρίς κίνδυνο (*risk – free asset*) με σταθερό επιτόκιο  $r$  ένα προϊόν του οποίου η αξία μεταβάλλεται στον χρόνο σύμφωνα με την σχέση

$$S_0(t) = S_0(0)e^{rt}. \quad (2.3.2)$$

**Ορισμός 2.3.** Προεξοφλημένη τιμή (*discounted value*) ενός προϊόντος είναι η τιμή του πολλαπλασιασμένη με  $S_0^{-1} = \exp(-rt)$ .

## 2.4 Το μοντέλο Black-Scholes

---

Για παράδειγμα η προεξοφλημένη τιμή μιας μετοχής είναι η  $S^*(t) = S_0^{-1}S(t)$ . Η τιμή  $S^*(t)$  είναι η τιμή που θα πάρουμε σε χρόνο  $t$  αν την τοποθετήσουμε σε ομόλογα την χρονική στιγμή  $t = 0$ .

**Ορισμός 2.4.** Ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο  $\theta(t)$  είναι *arbitrage* αν  $V^\theta(0) = 0$  και  $V^\theta(T) \geq 0$  σ.β. και  $P(V(T)) > 0 > 0$ .

**Θεώρημα 2.5.** Η Αγορά δεν έχει *arbitrage* αν υπάρχει μέτρο  $Q$  στην  $\mathcal{F}$  τ.ω.  $P \equiv Q$  και η  $\{S^*(t)\}_{t \in [0, T]}$  είναι *martingale* ως προς το μέτρο  $Q$ .

Το μέτρο  $Q$  καλείται ισοδύναμο μέτρο *martingale*

**Ορισμός 2.6.** Μια αγορά είναι πλήρης αν για κάθε συμβόλαιο τύπου δικαιώματος (*option*) υπάρχει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο  $\theta(t)$  τέτοιο ώστε

$$V_A^\theta(T) = A + \int_0^T \theta(t) dS(t)$$

όπου  $V(T)$  η απόδοση του συμβολαίου την στιγμή  $T$ , και  $A$  ένας πραγματικός αριθμός.

**Θεώρημα 2.7.** Μια αγορά είναι πλήρης αν-ν το ισοδύναμο μέτρο *martingale*  $Q$  είναι μοναδικό.

Ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε ότι μια αγορά είναι πλήρης είναι με τη βοήθεια του θεωρήματος αναπαράστασης *martingale* και του θεωρήματος *Girsanov*. Η απόδειξη υπάρχει στο [2].

## 2.4 Το μοντέλο Black-Scholes

Δύο σημαντικές εργασίες στην αποτίμηση παραγώγων είναι αυτή των *Black* και *Scholes* με όνομα *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (1973) και του *Merton Theory of rational option pricing* (1973) οι οποίοι κάνοντας κάποιες υποθέσεις δώσανε ένα τύπο κλειστής μορφής για την αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων, το μοντέλο *Black – Scholes*, (είναι συχνό να προσθέτουν και το όνομα του *Merton* στο τέλος).

Υποθέσεις του μοντέλου *Black – Scholes*:

- (i) το επιτόκιο είναι γνωστό και σταθερό
- (ii) το υποκείμενο προϊόν δεν αποδίδει μέρισμα
- (iii) το προϊόν με ρίσκο ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση *Brown*
- (iv) δεν υπάρχει *arbitrage*
- (v) δεν υπάρχει επιπλέον κόστος για την συναλλαγή των μετοχών
- (vi) ένας επενδυτής μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει κομμάτι της μετοχής.

## 2.5 Αδιάφορη κινδύνου αποτίμηση

---

Άρα έχουμε το παρακάτω σύστημα για μια αγορά με 2 προϊόντα ένα βέβαιο το  $S_0$  και ένα τυχαίο  $S$

$$dS_0(t) = rS_0(t) dt \quad (2.4.1)$$

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB_t \quad (2.4.2)$$

το οποίο έχει λύση

$$S_0 = e^{rt}$$
$$S(t) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

## 2.5 Αδιάφορη κινδύνου αποτίμηση

Στα μοντέλα που χρησιμοποιούμε για την αποτίμηση παραγώγων δεν δουλεύουμε με το 'πραγματικό' μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}$ , που για την εύρεση του χρησιμοποιούμε εμπειρικές εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου. Χρησιμοποιούμε το μέτρο αδιάφορου κινδύνου που θα το συμβολίζουμε με  $\mathcal{Q}$ . Αν και αυτά τα μέτρα είναι διαφορετικά θέλουμε όμως να είναι ισοδύναμα  $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ , δηλαδή να συμφωνούν ποια ενδεχόμενα είναι πιθανά να συμβούν και ποια όχι.

Ο τρόπος με τον οποίο θα κάνουμε αυτή την αλλαγή μέτρου είναι με τη βοήθεια του θεωρήματος *Girsanov*. Όμως θα πρέπει πρώτα να αναφερθούμε σε ένα άλλο θεώρημα το *Radon Nikodym*.

**Θεώρημα 2.8** (Radon Nikodym). Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και 2 ισοδύναμα μέτρα  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ . Τότε υπάρχει μια σχεδόν βέβαια θετική τυχαία μεταβλητή  $Z$  με  $\mathbb{E}[Z] = 1$  τέτοια ώστε

$$\mathcal{Q}(A) = \int_A Z d\mathcal{P} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (2.5.1)$$

η ποσότητα  $Z$  καλείται παράγωγος *Radon-Nikodym*.

**Θεώρημα 2.9** (Girsanov). Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \dots, \Theta_d(t))$

Τότε ορίζουμε

$$Z(t) = e^{-\int_0^t \Theta(u) dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Theta(u)\|^2 du} \quad (2.5.2)$$

$$\hat{B}(t) = B(t) + \int_0^t \Theta(u) du \quad (2.5.3)$$

και έστω ότι ισχύει

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T \|\Theta(u)\|^2 Z^2(u) du \right] < \infty \quad (2.5.4)$$

## 2.6 Η Black and Scholes εξίσωση

---

Τότε  $\mathbb{E}[Z] = 1$  και το  $\mathcal{Q}$  ισούται με

$\mathcal{Q}(A) = \int_A Z d\mathcal{P}$  και η διαδικασία  $\hat{B}(t)$  είναι  $d$ -διάστατη κίνηση Brown και *martingale* κάτω από το μέτρο  $\mathcal{Q}$ . Επίσης η  $\hat{B}(t)$  έχει την ιδιότητα αναπαράστασης *martingale*, δηλαδή αν το  $M_t$  είναι *martingale* στο μέτρο  $\mathcal{Q}$  τότε υπάρχει μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $\phi$  τέτοια ώστε  $M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s d\hat{B}_s \quad t \leq T$ .

Το θεώρημα *Girsanov* όχι μόνο μας δίνει την παράγωγο  $Z$  Radon – Nikodym αλλά και πόσο θα αλλάξει η κίνηση Brown.

Σύμφωνα με το θεώρημα (2.9) για να μην υπάρχει *arbitrage* στο μοντέλο μας θα πρέπει να υπάρχει ισοδύναμο μέτρο *martingale*. Στην περίπτωση του μοντέλου *Black – Scholes* που έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} dS_0 &= rS_0 dt \\ dS &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0(t) &= e^{rt} \\ S(t) &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \end{aligned}$$

Τότε η προεξοφλημένη τιμή της  $S(t)$  θα είναι

$$S^*(t) = S_0 e^{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

Από ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε ότι

$$d(S^*(t)) = (\mu - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dB_t = \sigma e^{-rt}S(t)(\Theta(t) dt + dB_t)$$

,όπου  $\Theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ .

Από θεώρημα *Girsanov* έχουμε ότι  $d(S^*(t)) = e^{-rt}\sigma S(t)\hat{B}_t$  το οποίο κάτω από το ισοδύναμο μέτρο  $\mathcal{Q}$  είναι *martingale* άρα από το θεώρημα (2.5) στο μοντέλο *Black – Scholes* δεν υπάρχει *arbitrage*.

## 2.6 Η Black and Scholes εξίσωση

Εδώ θα πάμε από το μοντέλο *Black and Scholes* στην Μερική Διαφορική Εξίσωση *Black and scholes*. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε το θεώρημα *Feynman – Kac*.

## 2.6 Η Black and Scholes εξίσωση

---

**Ορισμός 2.10.** Ο απειροστικός γενέτορας μιας χρονικά ομογενούς διαδικασίας Itô είναι:

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t}, x \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση της GBM ισχύει ότι  $\mathcal{L} = rs \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ .

**Θεώρημα 2.11** (Feynman – Kac). Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \mathcal{L}V + cV \\ V(t, x) &\in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \\ V(0, x) &= G(x) \end{aligned}$$

Η λύση  $V(t, x)$  του παραπάνω προβλήματος είναι  $V(t, x) = \mathbb{E}_x[e^{\int_0^t c(X_s) ds} G(X_t)]$

Απόδειξη. Η απόδειξη υπάρχει στο [1]. □

Μια διαφορετική διατύπωση του θεωρήματος είναι

**Θεώρημα 2.12** (Feynman – Kac II). Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t} &= \mathcal{L}V + cV \\ V(t, x) &\in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \\ V(T, x) &= G(x), 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Η λύση  $V(t, x)$  του παραπάνω προβλήματος είναι  $V(t, x) = \mathbb{E}_x[e^{\int_t^T c(X_s) ds} G(X_T)]$

Απόδειξη. Η απόδειξη υπάρχει στο [1]. □

Για ένα παράγωγο με συνάρτηση αποπληρωμής  $G(X)$  η τιμή του στο μέτρο  $Q$  θα είναι

$$V(t, x) = \mathbb{E}_Q[e^{-rT} G(X) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{Q, t, X}[e^{-rT} G(X)].$$

Τότε από το θεώρημα Feynman – Kac II θα έχουμε ότι

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rV = 0 \quad (2.6.1)$$

η οποία είναι η περίφημη εξίσωση Black – Scholes .

## 2.7 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος

---

### 2.7 Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος

Έστω ότι έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς  $C_{EU}$  για το οποίο θα ισχύει στο χρόνο  $T$   $C(T, x) = \max(X - K, 0)$ . Αντικαθιστώντας στην εξίσωση *Black - Scholes* θα έχουμε

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rx \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rC = 0. \quad (2.7.1)$$

Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι αν αντικαταστήσει στην παραπάνω εξίσωση όπου  $x = 0$  θα βρει ότι  $C(t, 0) = 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$  και στην περίπτωση που το  $X \rightarrow \infty$  θα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow \infty} (C(t, X) - (X - e^{-r(T-t)}K)) = 0$ .

Άρα η λύση στην εξίσωση (2.7.1) με συνοριακές συνθήκες τις παραπάνω και τελική συνθήκη την  $C(T, X) = \max(X - K, 0)$  θα είναι η

$$C(t, X) = X\Phi(d_1(T - t, X)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(T - t, X)) \quad (2.7.2)$$

όπου

$$d_1(T - t, X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \frac{\log X}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) \right],$$

$$d_2(T - t, X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \frac{\log X}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) \right]$$

και  $\Phi$  η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Αντίστοιχα για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης θα ισχύει ότι:

$$P(t, X) = Ke^{r(T-t)}\Phi(-d_2(T - t, x)) - S_t\Phi(-d_1(T - t, X)).$$

### 3 Κεφαλαίο 3: Αμερικανικό δικαίωμα

Στο πρόβλημα αποτίμησης του αμερικανικού δικαιώματος δεν υπάρχει κάποιος κλειστός τύπος για να βρούμε τη λύση του, με εξαίρεση κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Αυτές είναι το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης σε άπειρο ορίζοντα και το αμερικανικό δικαίωμα αγοράς όταν το υποκείμενο προϊόν δεν αποδίδει μέρισμα.

Το Θεώρημα 3.1 και η απόδειξη είναι από το [6]. Ενώ τα Θεωρήματα και οι αποδείξεις στα 3.2 και 3.3 είναι από το [4].

#### 3.1 Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς

**Θεώρημα 3.1.** Η αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος αγοράς όπου το υποκείμενο προϊόν δεν αποδίδει μέρισμα είναι ίδια με αυτή του αντίστοιχου ευρωπαϊκού.

*Απόδειξη.* Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι η προεξοφλημένη τιμή

$$S^*(t) = e^{-rt}G(S(t)) = e^{-rt} \max(S(t) - K, 0)$$

είναι *submartingale*.

Η συνάρτηση  $\max(S(t) - K, 0)$  είναι κυρτή, δηλαδή για  $\lambda \in (0,1)$  και  $0 \leq x_1 \leq x_2$  ισχύει ότι

$G((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)G(x_1) + \lambda G(x_2)$ . Στην περίπτωση που  $x_1 = 0$  τότε έχουμε  $G(\lambda x) \leq \lambda G(x)$

Έστω  $0 \leq \sigma \leq t \leq T$  τότε  $0 \leq e^{-r(t-\sigma)} \leq 1$  όπου  $r > 0$ .

Άρα

$$\mathbb{E}[e^{-r(t-\sigma)}G(S(t))|\mathcal{F}_\sigma] \geq \mathbb{E}[G(e^{-r(t-\sigma)}S(t))|\mathcal{F}_\sigma]$$

και από ανισότητα *Jensen* έχουμε

$$\mathbb{E}[G(e^{-r(t-\sigma)}S(t))|\mathcal{F}_\sigma] \geq G(\mathbb{E}[e^{-r(t-\sigma)}S(t)|\mathcal{F}_\sigma]) = G(e^{-r\sigma} \mathbb{E}[e^{-rt}S(t)|\mathcal{F}_\sigma]).$$

Η προεξοφλημένη τιμή  $e^{-rt}S(t)$  είναι *martingale* άρα

$$G(e^{r\sigma} \mathbb{E}[e^{-rt}S(t)|\mathcal{F}_\sigma]) = G(e^{r\sigma} e^{-r\sigma} S(t)) = G(S(t)).$$

Άρα

$$\mathbb{E}[e^{-r(t-\sigma)}G(S(t))] \geq G(S(t)) \Rightarrow \mathbb{E}[e^{-rt}G(S(t))] \geq e^{-r\sigma}G(S(t))$$

και είναι *submartingale*. Για  $t = T$  βλέπουμε ότι η τιμή του ευρωπαϊκού θα κυριαρχεί την εγγενής του αμερικανικού.  $\square$

Για αυτό όταν έχουμε αμερικανικό δικαίωμα αγοράς δεν συμφέρει να το ασκήσουμε πρώιμα αλλά στο χρόνο ωρίμανσης όπως θα κάναμε με το αντίστοιχο ευρωπαϊκό.

### 3.2 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Άπειρος ορίζοντας

---

#### 3.2 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Άπειρος ορίζοντας

Στην περίπτωση που ο χρόνος ωρίμανσης  $T = \infty$  μπορούμε να βρούμε αναλυτικά έναν κλειστό τύπο για την αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. Ο λόγος που συμβαίνει αυτός είναι αφού  $T = \infty$  δεν μας απασχολεί η χρονική στιγμή  $t$  στην οποία βρισκόμαστε αλλά μόνο η κατάσταση  $X$  στην οποία βρισκόμαστε. Έτσι σε αυτό το πρόβλημα ελεύθερου ορίου δεν πρέπει να λύσουμε μια ΜΔΕ αλλά μια συνήθης διαφορική εξίσωση που είναι πιο εύκολο.

Η *no - arbitrage* τιμή του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι

$$V(S) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_s[e^{-r\tau}(K - S)^+] \quad (3.2.1)$$

όπου  $\tau$  χρόνος διακοπής,  $r$  το επιτόκιο και  $S$  *GBM*

$$S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t) \quad (3.2.2)$$

ισχύει η ισχυρή ιδιότητα *Markov* και έχει απειροστικό γενεϊτορα

$$\mathcal{L}_s = rs \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}. \quad (3.2.3)$$

Παρατηρώντας την (3.2.1) και την (3.2.2) βλέπουμε ότι όσο η  $X$  πλησιάζει το 0 τόσο λιγότερο πιθανόν είναι να αυξηθεί η  $G = (K - S(t))^+$ . Άρα υπάρχει μια τιμή  $b \in (0, K)$  τέτοια ώστε  $t_b = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq b\}$  να είναι βέλτιστος για το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής (3.2.1).

Από το γεγονός ότι η  $S$  είναι ισχυρή διαδικασία *Markov* έχουμε το εξής πρόβλημα ελεύθερου ορίου

$$\mathcal{L}_s V = rV, s > b \quad (3.2.4)$$

$$V(s) = (K - S)^+, s = b \quad (3.2.5)$$

$$V'(S) = -1, s = b \quad (3.2.6)$$

$$V(S) > (K - S)^+, s > b \quad (3.2.7)$$

$$V(S) = (K - S)^+, 0 < s < b \quad (3.2.8)$$

όπου θέλουμε να βρούμε τα  $V, b$ .



### 3.3 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας

**Παρατήρηση:** Η εξίσωση (3.2.4) έπεται από το γεγονός ότι χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα *Markov* στον ορισμό (2.10) του απειροστικού τελεστή  $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_S V(t, S(t)) - rV(t, S(t))$  μηδενίζει ο  $\mathcal{L}_S$  και βγαίνει το ζητούμενο.

Η εξίσωση (3.2.4) είναι μια *Cauchy – Euler* εξίσωση

$$Dx^2V'' + rxV' - rV = 0 \quad (3.2.9)$$

με  $D = \frac{\sigma^2}{2}$ , θα έχει λύση της μορφής  $V(x) = x^p$  και θα πάρουμε την εξίσωση 2ου βαθμού

$$p^2 - (1 - \frac{r}{D})p - \frac{r}{D} = 0 \quad (3.2.10)$$

η οποία έχει λύσεις  $p_1 = 1$  και  $p_2 = -\frac{r}{D}$ . Άρα η (3.2.9) θα έχει λύση την  $V(x) = C_1x + C_2x^{-\frac{r}{D}}$ .

Όμως αφού  $x > 0$  και  $V(x) \leq K$  το  $C_1 = 0$  και αν αντικαταστήσουμε  $V(x) = C_2x^{-\frac{r}{D}}$  στις (3.2.4), (3.2.5) θα έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $C_2, b$ , το οποίο θα έχει λύση

$$C_2 = \frac{D}{r} \left( \frac{K}{1 + \frac{D}{r}} \right)^{1 + \frac{r}{D}} \quad (3.2.11)$$

$$b = \frac{K}{1 + \frac{D}{r}}. \quad (3.2.12)$$

Άρα θα έχουμε

$$V(S(t)) = \begin{cases} \frac{D}{r} \left( \frac{K}{1 + \frac{D}{r}} \right)^{1 + \frac{r}{D}} s^{-\frac{r}{D}} & s \geq b \\ (K - S(t))^+ & 0 \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.2.13)$$

**Θεώρημα 3.2.** Η *no-arbitrage* τιμή της  $V(S(t))$  από την (3.2.1) έχει τύπο κλειστής μορφής την (3.2.13) και ο χρόνος διακοπής  $\tau_b$  είναι βέλτιστος στο πρόβλημά μας.

*Απόδειξη.* Η απόδειξη υπάρχει στο [4] στο κεφάλαιο 25. □

### 3.3 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας

Όταν  $T < \infty$  η *no – arbitrage* τιμή για το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης θα είναι η

$$V(t, s) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbb{E}_{t,s}[e^{-r\tau}(K - S_{t+\tau})^+]. \quad (3.3.1)$$

### 3.3 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας

Εδώ αφού η συνάρτηση κέρδους είναι η  $G = (K - S(t))^+$  συνεχής άρα απο Κεφάλαιο 1 υπάρχει βέλτιστος χρόνος διακοπής  $t_{\bar{D}}$ . Θα έχουμε το σύνολο συνέχισης

$$C = \{(t, s) = [0, T) \times (0, \infty) : V(t, s) > G(t, s)\} \quad (3.3.2)$$

και σύνολο σταματημού

$$\bar{D} = \{(t, s) = [0, T) \times (0, \infty) : V(t, s) = G(t, s)\} \quad (3.3.3)$$

και ο βέλτιστος χρόνος διακοπής θα είναι

$$t_{\bar{D}} = \inf\{(t, s) \in [0, T) \times (0, \infty) : V(t, s) > G(t, s)\}. \quad (3.3.4)$$

Από την περίπτωση του άπειρου ορίζοντα είδαμε ότι υπάρχει ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής  $t_* = \inf\{t > 0 : S(t) \leq b^*\}$ , και για αυτό όλα τα σημεία  $(t, s)$  όπου  $t \in [0, T]$  και  $s \in [0, b^*]$  θα ανήκουν στο  $\bar{D}$ . Από αυτό και το γεγονός ότι η συνάρτηση  $s \rightarrow V(t, s)$  είναι κυρτή για  $t \in [0, T]$  υπάρχει μια συνάρτηση  $b(t)$ , το ελεύθερο όριο, για την οποία θα ισχύει ότι  $0 \leq b^* \leq b(t) \leq K$  και το σύνολο  $C$  θα ισούται με

$$C = \{(t, s) \in [0, T) \times (0, \infty) : s > b(t)\}$$

και το  $\bar{D}$  θα είναι το κλείσιμο του

$$D = \{(t, s) \in [0, T) \times (0, \infty) : s < b(t)\}.$$

Η συνάρτηση  $t \mapsto V(t, s)$  θα είναι φθίνουσα, αφού η  $G$  εξαρτάται μόνο από το  $s$ .

Επίσης η συνάρτηση  $t \mapsto b(t)$  θα είναι αύξουσα. Αφού αν πάρουμε ένα σημείο  $(t, s) \in C$  και ένα  $t' \leq t$  θα έχουμε  $V(t', s) - G(s) \geq V(t, s) - G(s) > 0$  και θα ανήκει και αυτό στο  $C$ .

Τότε θα έχουμε το εξής πρόβλημα ελεύθερου ορίου με άγνωστες συναρτήσεις την  $V$  και  $b$

$$V_t + \mathcal{L}_s V = rV \quad V(t, s) > G(s) \quad (3.3.5)$$

$$V(t, s) = (K - S(t))^+ \quad , s = b(t) \quad (3.3.6)$$

$$V_s(t, s) = -1 \quad , s = b(t) \quad (3.3.7)$$

$$V(t, S(t)) > (K - S(t))^+ \quad , V(t, s) > G(s) \quad (3.3.8)$$

$$V(t, S(t)) = (K - S(t))^+ \quad , V(t, s) = G(s) \quad (3.3.9)$$

**Παρατήρηση:** Όπως και στην περίπτωση του άπειρου ορίζοντα, έτσι και εδώ ισχύει το ίδιο για την εξίσωση (3.3.5) αλλά τώρα έχουμε τον απειροστικό τελεστή  $\mathcal{L}_S = \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_S V - rV$ .

### 3.3 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας

**Πρόταση 3.3.** Η συνάρτηση  $(t, s) \mapsto V(t, s)$  είναι συνεχής στο  $[0, T] \times (0, \infty)$ .

*Απόδειξη.* Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(i)  $s \mapsto V(t, s)$  συνεχής στο  $s_0$

(ii)  $t \mapsto V(t, s)$  συνεχής στο  $t_0$  ομοιόμορφα για  $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ .

Το πρώτο έπεται από το γεγονός ότι η  $V$  κυρτή στο  $(0, \infty)$ .

Έστω  $t_1, t_2$  αυθαίρετα τέτοια ώστε  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ,  $s \in (0, \infty)$ , και  $\tau_1$  ο βέλτιστος χρόνος για  $V(t_1, s)$  και  $\tau_2 = \tau_1 \wedge (T - \tau_2)$ . Αφού  $t \mapsto V(t, s)$  φθίνουσα θα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(t_1, s) - V(t, s) \\ &\leq \mathbb{E}[e^{-r\tau_1}(K - sX_{\tau_1})^+] - \mathbb{E}[e^{-r\tau_2}(K - sX_{\tau_2})] \\ &\leq \mathbb{E}[e^{-r\tau_2}((K - sX_{\tau_1})^+ - (K - sX_{\tau_2})^+)] \leq s \mathbb{E}[(X_{\tau_2} - sX_{\tau_1})^+] \end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει  $X_t = e^{\sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$

Αφού  $(K - x)^+ - (K - y)^+ \leq (y - x)^+$ ,  $x, y \in \mathcal{R}$  και αν θέσουμε

$$Y_t = \sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1})^+] &= s \mathbb{E}[e^{(\sigma B_{\tau_2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau_2) - \sigma B_{\tau_1} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau_1})^+ | \mathcal{F}_{\tau_2}] = s \mathbb{E}[X_{\tau_2} (1 - \frac{X_{\tau_1}}{X_{\tau_2}})^+ | \mathcal{F}_{\tau_2}] \\ &= s \mathbb{E}[X_{\tau_2}] \mathbb{E}[(1 - e^{Y_{\tau_1} - Y_{\tau_2}})^+] = s \mathbb{E}[X_{\tau_2}] \mathbb{E}[1 - \inf_{0 \leq t \leq \tau_2 - \tau_1} e^{Y_{\tau_2} + t + Y_{\tau_2}}] \\ &= s \mathbb{E}[X_{\tau_2}] \mathbb{E}[1 - \inf_{0 \leq t \leq \tau_2 - \tau_1} e^{Y_t}] =: \mathbb{E}[X_{\tau_2}] L(2t - t_1). \end{aligned}$$

Όταν το  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$  το  $X_t \rightarrow 0$  και άρα  $L(2t - t_1) \rightarrow 0$ . Επομένως δείξαμε ότι  $0 \leq V(t_1, s) - V(t, s) \leq \mathbb{E}[Z_{\tau_2}] L(2t - t_1) \leq se^{rT} L(2t - t_1)$ .  $\square$

Η σχέση (3.3.7) ονομάζεται λεία προσαρμογή (*smoothfit*) και δείχνει ότι όταν η  $S$  φτάσει στο σύνορο του συνόλου  $C$   $\partial C$ , μπαίνει κατευθείαν στο σύνολο  $D$ . Αν δεν γίνει αυτό, (π.χ. η  $S$  έχει άλματα) τότε η συνθήκη αυτή γίνεται  $V|_{\partial C} = G|_{\partial C}$  (συνεχής προσαρμογή).

**Πρόταση 3.4.** Η  $V$  είναι παραγωγίσιμη στο  $s = b(t)$  και  $V_s(t, b(t)) = G_s(t, b(t)) = -1$

*Απόδειξη.* Έστω ένα σημείο  $(t, s) \in (0, T) \times (0, \infty)$  και  $s = b(t)$ . Τότε  $s < K$  αφού  $s = b(t)$  και  $\epsilon > 0$  τέτοιο ώστε  $s + \epsilon < K$ . Τότε

$$\frac{V(t, s + \epsilon) - V(t, s)}{\epsilon} \geq \frac{G(s + \epsilon) - G(s)}{\epsilon} = -1$$

### 3.3 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας

και αν πάρουμε το όριο για  $\epsilon \rightarrow 0$  θα έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial s} \geq -1$$

Τώρα αρκεί να δείξουμε το αντίθετο.

Έστω πάλι  $\epsilon > 0$  και χρόνος διακοπής  $\tau_\epsilon$  ο οποίος είναι βέλτιστος για το  $V(t, s + \epsilon)$  και έστω  $S_t = e^{\sigma B_{t_\epsilon} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$ . Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} V(t, s + \epsilon) - V(t, s) &\leq \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}(K - (s + \epsilon)S_{\tau_\epsilon})^+] - \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}(K - sS_{\tau_\epsilon})^+] \\ &\leq \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}(K - (s + \epsilon)S_{\tau_\epsilon})^+ - (K - sS_{\tau_\epsilon})^+ \mathbb{1}((s + \epsilon)S_{\tau_\epsilon} < K)] \\ &= \mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}(-\epsilon)S_{\tau_\epsilon} \mathbb{1}((s + \epsilon)S_{\tau_\epsilon} < K)] \end{aligned}$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και το γεγονός ότι  $\tau_\epsilon \rightarrow 0$  καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$ , αφού  $b$  αύξουσα. Θα έχουμε

$$\mathbb{E}[e^{-r\tau_\epsilon}S_{\tau_\epsilon} \mathbb{1}((s + \epsilon)S_{\tau_\epsilon} < K)] \rightarrow 1$$

Άρα

$$\frac{V(t, s + \epsilon) - V(t, s)}{\epsilon} \leq -1. \quad (3.3.10)$$

και δείξαμε το ζητούμενο.  $\square$

**Πρόταση 3.5.** Η συνάρτηση  $b(t)$  είναι συνεχής και  $b(T) = K$ .

*Απόδειξη.* Πρώτα θα δείξουμε την δεξιά συνέχεια. Αφού η  $b(t)$  αύξουσα το δεξιό όριο υπάρχει και θα ισχύει  $b(t) \leq b(t_+)$ . Επίσης αφού το  $D$  κλειστό και  $(t, b(t)) \in D$  για  $t \in (0, T]$  τότε και το  $(t_+, b(t_+)) \in D$ . Από το γεγονός ότι  $t \mapsto V(t, s)$  φθίνουσα,  $b(t) < K$  για  $t < T$  και  $V(t, s) = G(s) = (K - s)^+$  στο  $D$  παίρνουμε ότι  $b(t^+) \leq b(t)$ . Άρα η  $b(t)$  δεξιά συνεχής.

Για την αριστερά συνέχεια, όπως πριν θα έχουμε  $b(t-) \leq b(t)$ . Έστω ότι έχουμε σημείο ασυνέχειας σε κάποιο  $t^* \in (0, T)$  αυθαίρετο, δηλαδή  $b(t_*-) < b(t_*)$ . Επίσης έστω  $t' < t_*$  και  $R \subseteq C$  που ορίζεται από τα σημεία  $(t', b(t'))$ ,  $(t_*, b(t_*-))$ ,  $(t_*, s')$  και  $(t', s')$  όπου  $s' \in (b(t_*-), b(t_*))$ .

Επειδή η  $S$  έχει την ισχυρή ιδιότητα *Markov* η  $V$  θα είναι  $C^{1,2}$  στο  $C$  και  $G$  είναι  $C^2$ . Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα των *Newton - Leibniz*  $\forall (t, s) \in R$  έχουμε

$$V(t, s) - G(s) = \int_{b(t)}^s \int_{b(t)}^v V_{ss}(t, u) - G_{ss}(u) dudv \quad (3.3.11)$$

### 3.3 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας

Επειδή η  $t \mapsto V(t, s)$  και  $s \mapsto V(t, s)$  φθίνουσες από την (3.3.4) θα έχουμε  $V_{ss} = \frac{2}{\sigma^2 s^2}(rV - V_t - rsV_s) \geq c > 0$  και  $G_{ss} = 0$ .  
 Άρα από την (3.3.11) θα έχουμε

$$V(t', s') - G(s') \geq c \frac{(s' - b(t'))^2}{2} > c \frac{(s' - b(t_*))^2}{2} > 0$$

όταν  $t' \uparrow t_*$ . Άρα  $V(t_*, s') > G(s')$  άρα  $(t_*, s') \notin D$   
 Άτοπο και  $b(t) = b(t-)$  και η  $b(t)$  συνεχής και για  $t_* = T \Rightarrow b(T) = K$ .

□

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Itô στην  $e^{-rx}V(t+x, S_{t+x})$  και με την βοήθεια των (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9), του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης και για  $x = T - t$  παίρνουμε την εξίσωση

$$V(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,s} G(S(T)) + rK \int_0^{T-t} e^{-ru} \mathcal{P}_{t,s}(S_{t+u} \leq b(t+u)) du \quad (3.3.12)$$

και αυτή είναι η *early exercise premium* απεικόνιση για  $t = 0$ . Ο πρώτος όρος είναι το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης και ο δεύτερος όρος είναι το *early exercise premium*.

Για  $s = b(t)$  και κάνοντας λίγες πράξεις θα πάρουμε την εξίσωση ελεύθερου ορίου

$$K - b(t) = e^{-rT-t} \int_0^K \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log \frac{K-z}{b(t)} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)\right) dz + rK \int_0^{T-t} e^{-ru} \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{u}} \left(\log \frac{b(s)}{b(0)} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)\right) du \quad (3.3.13)$$

όπου  $\Phi$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Τέτοιου είδους εξισώσεις λέγονται μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις *Volterra* δεύτερου είδους.

**Θεώρημα 3.6.** Η λύση της εξίσωσης (3.3.13) είναι το σύνορο ελεύθερου ορίου του προβλήματος βέλτιστης διακοπής (3.3.1) και είναι μοναδική στην κλάση των συνεχών αυξουσών συναρτήσεων  $c : [0, T] \mapsto T$  με  $0 < c(t) < K, \forall t \in (0, T)$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη υπάρχει στο [4] κεφάλαιο 25 σελίδα 386

□

### 3.3 Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης - Πεπερασμένος ορίζοντας

Ένας τρόπος με τον οποίο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης θα ήταν να βρίσκαμε αριθμητικά τη συνάρτηση ελεύθερου ορίου από την (3.3.13) και μετά αφού γνωρίζουμε την αξία του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού θα βρίσκαμε το ζητούμενο από την (3.3.12). Ενδεικτικά μια εργασία που το κάνει αυτό είναι η [8].

Εμείς όμως θα χρησιμοποιήσουμε πιο συνηθισμένες μεθόδους για να λύσουμε το πρόβλημά μας. Αυτές είναι μέθοδοι δένδρων, μέθοδοι μερικών διαφορικών εξισώσεων και μέθοδοι προσομοιώσεων, των οποίων τη θεωρία θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

## 4 Κεφάλαιο 4:Αριθμητικές Μέθοδοι

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τις μεθόδους που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να δώσουμε μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος. Στην ενότητα 4.1 θα δούμε το διωνυμικό μοντέλο και πιο συγκεκριμένα το Cox, Ross , Rubinstein . Στην 4.2 θα αναλύσουμε τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών και στην 4.3 θα αναφερθούμε στο πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μέθοδο Monte-Carlo για αμερικανικά δικαιώματα. Αναλυτικότερα η θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε υπάρχει για την 4.1 στα [5],[9] ,για την 4.2 στα [9],[10] και για την 4.3 στα [9],[11],[12].

### 4.1 Διωνυμικό μοντέλο

Το πιο απλό μοντέλο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την αποτίμηση δικαιωμάτων είναι το διωνυμικό μοντέλο. Στο οποίο ξεκινάμε από μια αρχική τιμή  $S_0$  και στην αμέσως επόμενη χρονική στιγμή αυτή η αξία θα ισούται με  $S_0u$  ή  $S_0d$  για κάποια πιθανότητα  $p$  ή  $1-p$  αντίστοιχα. Αυτό θα ισχύει για κάθε κόμβο του δέντρου και στη συνέχεια ανάλογα με το είδος του δικαιώματος που έχουμε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αντίστοιχο αλγόριθμο αποτίμησης. Ωστόσο για να κατανοήσουμε καλύτερα τη θεωρία του μοντέλου μας θα αναλύσουμε στην αρχή το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου και μετά θα επεκταθούμε στο μοντέλο πολλαπλών περιόδων.

#### 4.1.1 Διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου

Στο μοντέλο μιας περιόδου υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές η  $t = 0$  και  $t = T$ . Θα ξεκινάμε με αρχική τιμή  $S_0$  και θα υπάρχουν δύο πιθανά ενδεχόμενα ή να αυξηθεί αυτή η τιμή κατά μια ποσότητα  $u$  ,με πιθανότητα  $p$  και να έχει τιμή  $S_0u$  ή να μειωθεί κατά  $d$ , με πιθανότητα  $(1 - p)$  και να έχει τιμή  $S_0d$ . Για να μην υπάρχει *arbitrage* θα πρέπει να ισχύει ο παρακάτω περιορισμός

$$d < e^{rT} < u \quad (4.1.1)$$

Αντίστοιχα η απόδοση  $V$  ενός δικαιώματος θα μπορεί και αυτό να πάρει ή τη τιμή  $V(S_0u) = V_u$  ή  $V(S_0d) = V_d$  με τις αντίστοιχες πιθανότητες . Όμως για να το τιμολογήσουμε θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο από  $\phi$  μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και  $\psi$  μέρη από το προϊόν χωρίς ρίσκο. Θα πρέπει η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου στο χρόνο  $T$  να ισούται με την αξία της απόδοσης του δικαιώματος. Άρα  $V(S_T) = \psi + \phi S_T$  και θα πάρουμε αυτό το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \phi S_0u + \psi = V_u \\ \phi S_0d + \psi = V_d \end{cases} \quad (4.1.2)$$

### 4.1.2 Διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων

---

και αν το λύσουμε ως προς  $\phi$  και  $\psi$  θα πάρουμε

$$\phi = \frac{V_u - V_d}{S_0(u - d)} \quad (4.1.3)$$

$$\psi = \frac{uV_u - dV_d}{(u - d)} \quad (4.1.4)$$

Αντίστοιχα το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και στην χρονική στιγμή  $t = 0$ . Άρα έχουμε

$$V_0 = \phi S_0 + \psi e^{-rT} \quad (4.1.5)$$

και αντικαθιστώντας

$$V_0 = e^{-rT}(qV_u + (1 - q)V_d) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[V(S_T)] \quad (4.1.6)$$

όπου

$$q = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \quad (4.1.7)$$

Οι ποσότητες  $q$  και  $1 - q$  θα είναι οι πιθανότητες αδιάφορου ρίσκου που χρησιμοποιούμε για την αποτίμηση δικαιωμάτων στο διωνυμικό μοντέλο.

### 4.1.2 Διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων

Τώρα αντί για δύο χρονικές στιγμές θα έχουμε το διάστημα  $[0, T]$  το οποίο θα το διαμερίσουμε σε μικρότερα ίσα διαστήματα από τους χρόνους  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , όπου  $t_j = \delta t j$  και  $\delta t = T/N$ . Επίσης το προϊόν χωρίς ρίσκο θα μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό κατά  $e^{r\delta t}$ . Η αρχική αξία του υποκειμένου προϊόντος θα είναι  $S_0$  και την χρονική στιγμή  $t_j$  θα ισούται με

$$S_j = \xi_j S_{j-1} \quad (4.1.8)$$

όπου η  $\xi_j$  είναι ακολουθία από ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ισούται με

$$\xi_k = \begin{cases} u, & \text{με πιθανότητα } p \\ d, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases} \quad (4.1.9)$$

πάλι θα πρέπει να ισχύει για να μην έχουμε *arbitrage*

$$d < e^{r\delta t} < u. \quad (4.1.10)$$

Άρα σε κάθε κόμβο του δέντρου  $(s_i, t_j)$  θα έχουμε

$$S_{i,j} = S_0 u^i d^{j-i}, \quad i = 0, \dots, j, \quad j = 0, \dots, N$$



#### 4.1.2 Διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων

---

Αυτό που μας μένει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις ποσότητες  $u, d, q$ . Θέλουμε το διωνυμικό μοντέλο να είναι μια καλή προσέγγιση του μοντέλου Black-Scholes

$$dS = rSdt + \sigma SdB_t.$$

Αν ξεκινήσουμε από  $S_t$  και μετά από μικρό  $\delta t$  θα έχουμε ότι για την τυχαία μεταβλητή  $S_{t+\delta t}$  θα ισχύει

$$\log\left(\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right) \sim N\left(\left(\frac{r - \sigma^2}{2}\right)\delta t, \sigma^2\delta t\right) \quad (4.1.11)$$

και από ιδιότητες τις λογαριθμικής κατανομής [9]

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right] = e^{r\delta t} \quad (4.1.12)$$

και

$$\text{Var}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right] = e^{2r\delta t}(e^{\sigma^2\delta t} - 1). \quad (4.1.13)$$

Από το διωνυμικό μοντέλο θα ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[S_{t+\delta t}] = quS_t + (1 - q)dS_t \quad (4.1.14)$$

και

$$\text{Var}[S_{t+\delta t}] = \mathbb{E}[S_{t+\delta t}^2] - \mathbb{E}^2[S_{t+\delta t}] = S_t^2(qu^2 + (1 - q)d^2) - S_t^2e^{2r\delta t}. \quad (4.1.15)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις για τις μέσες τιμές και τις σχέσεις για τις διακυμάνσεις παίρνουμε δύο εξισώσεις. Η τρίτη θα είναι η  $u = \frac{1}{d}$  όπου και θα πάρουμε το μοντέλο *CRR* (*Cox, Ross, Rubinstein*).

Από τις (4.1.12) και (4.1.14)

$$S_t e^{r\delta t} = quS_t + (1 - q)dS_t \Rightarrow q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \quad (4.1.16)$$

και από τις (4.1.13) και (4.1.14)

$$\begin{aligned} S_t^2 e^{2r\delta t} (e^{\sigma^2\delta t} - 1) &= S_t^2 (qu^2 + (1 - q)d^2) - S_t^2 e^{2r\delta t} \\ e^{\sigma^2\delta t + 2r\delta t} &= qu^2 + (1 - q)d^2 \end{aligned}$$

### 4.1.3 Αλγόριθμος αποτίμησης Αμερικανικών Δικαιωμάτων

αντικαθιστώντας το  $q$  θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}u^2 + \left(1 - \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}\right)d^2 &= \frac{u^2e^{r\delta t} - u^2d + ud^2 - d^2e^{r\delta t}}{u - d} \\ &= \frac{e^{r\delta t}(u^2 - d^2) - ud(u - d)}{u - d} = e^{r\delta t}(u + d) - ud \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας  $u = \frac{1}{d}$  θα καταλήξουμε στην παρακάτω εξίσωση

$$u^2e^{r\delta t} - u(1 + e^{2r\delta t + \sigma^2\delta t}) = e^{r\delta t} = 0$$

όπου μια της λύση είναι η

$$u = \frac{(1 + e^{2r\delta t + \sigma^2\delta t}) + \sqrt{(1 + e^{2r\delta t + \sigma^2\delta t})^2 - 4e^{r\delta t}}}{2e^{r\delta t}}$$

μπορούμε να δείξουμε[9] κάνοντας κάποιες απλοποιήσεις ότι θα πάρουμε

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \\ q &= \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}. \end{aligned}$$

Επειδή το επιτόκιο  $r$  και η μεταβλητότητα  $\sigma$  είναι γνωστές και σταθερές ποσότητες, σε σχέση με τον χρόνο, θα τις εφαρμόσουμε σε όλο το διωνυμικό δέντρο. Ένα από τα μεγάλα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου, εκτός από την απλότητά της, είναι ότι αν πάρουμε το  $N \rightarrow \infty$  η στοχαστική διαδικασία που θα πάρουμε θα είναι μια γεωμετρική κίνηση *Brown*, δηλαδή το μοντέλο Black-Scholes [5].

### 4.1.3 Αλγόριθμος αποτίμησης Αμερικανικών Δικαιωμάτων

Αφού έχουμε ορίσει τους κόμβους μας και έχουμε βρει τις παραμέτρους μπορούμε να κατασκευάσουμε το διωνυμικό δέντρο. Επειδή έχουμε αμερικανικό δικαίωμα θα πρέπει σε κάθε κόμβο και σε κάθε χρονική στιγμή να ελέγχουμε για το αν μας συμφέρει η πρόωμη άσκηση ή όχι. Ξεκινώντας από την χρονική στιγμή ωρίμανσης  $T$  θα έχουμε

$$V_{i,N} = \max(K - S_{i,N}, 0).$$

Στη συνέχεια θα πρέπει πηγαίνοντας προς τα πίσω στο χρόνο να συγκρίνουμε αναδρομικά την εγγενή αξία του δικαιώματος (δηλαδή την αξία άμεσης άσκησης) με την αξία συνέχισης. Άρα για σημείο  $(i, j)$  θα έχουμε

$$V_{i,j} = \max(K - S_{i,j}, e^{-r\delta t}(qV_{i+1,j+1} + (1 - q)V_{i,j+1})).$$

## 4.2 Πεπερασμένες διαφορές

---

### 4.2 Πεπερασμένες διαφορές

Μια άλλη προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αποτίμησης δικαιωμάτων είναι μέσω αριθμητικών μεθόδων σε μερικές διαφορικές εξισώσεις. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε 3 διαφορετικές μεθόδους πεπερασμένων διαφορών τις: άμεση, έμμεση και *Crank-Nicolson*. Σε αυτό που διαφέρουν είναι στο πως θα προσεγγίσουμε σε κάθε μια τις μερικές παραγώγους.

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις παρακάτω προσεγγίσεις:

Προς τα εμπρός διαφορά (forward difference )

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta x}$$

Προς τα πίσω διαφορά (backward difference )

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\delta x}$$

Κεντρική διαφορά (central difference )

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta x}$$

Για την δεύτερη παράγωγο

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\delta x)^2}$$

Για υπολογιστικούς λόγους θα χρειαστεί να φράξουμε το πλέγμα στο οποίο θα δουλέψουμε. Άρα θα πρέπει να βρούμε μια τιμή  $S_{max}$  αρκετά μεγάλη ώστε η  $S(t)$  να μην μπορεί να την φτάσει στο διάστημα  $[0, T]$  αλλά και όχι υπερβολικά μεγάλη γιατί θα υπολογίζουμε σημεία που δεν θα μας ενδιαφέρουν.

Θα έχουμε την ακόλουθη διαμέριση για το πλέγμα  $(S, t)$

$$S = i\delta S, \quad i = 0, \dots, M$$

$$t = i\delta t, \quad j = 0, \dots, N$$

Τελική συνθήκη στο  $t = T$  θα είναι

$$V_{i,N} = \max(K - i\delta S, 0), \quad i = 0, \dots, M$$

και συνοριακές

$$V_{0,j} = Ke^{-r(N-j)\delta t}, \quad j = 0, \dots, N$$

$$V_{M,j} = 0, \quad j = 0, \dots, N$$

### 4.2.1 Άμεση μέθοδος

---

#### 4.2.1 Άμεση μέθοδος

Στην άμεση μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε την προς τα πίσω διαφορά για το χρόνο  $t$  και την κεντρική για το  $S$ .

Άρα θα έχουμε:

$$\frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t} + ri\delta S \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} + \frac{1}{2}i^2\delta S^2 \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\delta S^2} = rV_{i,j}$$

Επειδή η αρχική τιμή που θα έχουμε στο πρόβλημά μας θα είναι για την χρονική στιγμή  $t = T$  και θα πηγαίνουμε κάθε φορά προς τα πίσω.

Άρα θα ξεχωρίσουμε τα  $V_j$  και τα  $V_{j-1}$  και θα πάρουμε

$$V_{i,j-1} = \alpha_i V_{i-1,j} + \beta_i V_{i,j} + \gamma_i V_{i+1,j} \quad (4.2.1)$$

όπου

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 - ri)$$

$$\beta_i = 1 - \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 + r)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 + ri)$$

Ένα από τα πλεονεκτήματα της μεθόδου αυτής είναι ότι για να υπολογίσουμε το  $V_{i,j-1}$  αρκεί να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση και όχι κάποιο γραμμικό σύστημα όπως πρέπει για μια έμμεση μέθοδο.

Ωστόσο η μέθοδος θα θέλαμε να είναι ευσταθής και να έχει καλή ακρίβεια.

Στην άμεση η ευστάθεια δεν ισχύει πάντα και στις περιπτώσεις που ισχύει θα πρέπει να έχουμε αρκετά μικρό βήμα  $\delta t$ ,  $\delta s$  [9] για να έχουμε καλή ακρίβεια το οποίο είναι υπολογιστικά ακριβό. Για αυτό θα προτιμήσουμε μια έμμεση μέθοδο.

#### 4.2.2 Έμμεση μέθοδος

Στην έμμεση μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε την προς τα εμπρός διαφορά για το χρόνο  $t$  και την κεντρική για το  $S$ .

Άρα θα έχουμε:

$$\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\delta t} + ri\delta S \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} + \frac{1}{2}i^2\delta S^2 \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\delta S^2} = rV_{i,j}$$

Άρα πάλι θα ξεχωρίσουμε τα  $V_{i,j+1}$  με τα  $V_{i,j}$  θα έχουμε

$$\alpha_i V_{i-1,j} + \beta_i V_{i,j} + \gamma_i V_{i+1,j} = V_{i,j+1} \quad (4.2.2)$$

### 4.2.3 Μέθοδος Crank -Nicolson

---

όπου τώρα οι παράμετροι μας θα είναι

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 - ri) \\ \beta_i &= 1 + \delta t(\sigma^2 i^2 + r) \\ \gamma_i &= -\frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 + ri)\end{aligned}$$

Ωστόσο τώρα θα πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή  $t_{j+1}$  για να πάμε στη  $t_j$  να λύσουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & & & & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \alpha_{M-2} & \beta_{M-2} & \gamma_{M-2} & & \\ & & & & \alpha_{M-1} & \beta_{M-1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0,j} \\ V_{1,j} \\ V_{2,j} \\ \vdots \\ V_{M-2,j} \\ V_{M-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{0,j+1} \\ V_{1,j+1} \\ V_{2,j+1} \\ \vdots \\ V_{M-2,j+1} \\ V_{M-1,j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_0 V_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{M-1} V_{M,j} \end{bmatrix}$$

Η έμμεση μέθοδος είναι μια ευσταθής μέθοδος και παρέχει μια καλή ακρίβεια[9]. Ωστόσο μια άλλη μέθοδος η οποία είναι και αυτή ευσταθής και έχει καλύτερη ακρίβεια είναι η Crank -Nicolson .

### 4.2.3 Μέθοδος Crank -Nicolson

Η μέθοδος Crank -Nicolson είναι ένας συνδυασμός των προηγούμενων δύο. Πιο συγκεκριμένα θα πάρουμε την άμεση μέθοδο τη χρονική στιγμή  $t_j$  και την έμμεση τη χρονική στιγμή  $t_{j-1}$  , θα τις προσθέσουμε κατα μέλη και θα πάρουμε

$$\begin{aligned}& \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t} + \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\delta t} + ri\delta S \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\delta S} + ri\delta S \frac{V_{i+1,j-1} - V_{i-1,j-1}}{2\delta S} \\ & + \frac{1}{2}i^2\delta S^2 \frac{V_{i+1,j-1} - 2V_{i,j-1} + V_{i-1,j-1}}{\delta S^2} + \frac{1}{2}i^2\delta S^2 \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\delta S^2} \\ & = rV_{i,j-1} + rV_{i,j}\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

Πάλι θα έχουμε

$$-\alpha_i V_{i-1,j-1} + (1 + \beta_i)V_{i,j-1} - \gamma_i V_{i+1,j-1} = \alpha_i V_{i-1,j} + (1 + \beta_i)V_{i,j} + \gamma_i V_{i+1,j}$$



#### 4.2.4 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια επαναληπτικών μεθόδων

---

υπολογιστικό χρόνο. Τότε θα πάρουμε

$$\begin{aligned}(M - N)X &= b \Rightarrow \\ Mx &= (M - A)x + b \Rightarrow \\ x &= (I - M^{-1}A)x + M^{-1}b\end{aligned}$$

που μας οδηγεί στο παρακάτω επαναληπτικό σχήμα

$$x^{(k+1)} = (I - M^{-1}A)x^{(k)} + M^{-1}b$$

Αν θέσουμε  $B = I - M^{-1}A$ ,  $x^*$  την πραγματική τιμή τότε για το σφάλμα της μεθόδου θα ισχύει

$$e^{k+1} = x^* - x^{k+1} = Bx^* + D^{-1}b - Bx^k - D^{-1}b = B(x^* - x^k) = Be^{(k)}$$

Άρα

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} B^k e^{(0)}$$

Γνωρίζουμε ότι για να ισχύει  $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$  θα πρέπει  $\rho(B) < 1$  [10], όπου  $\rho$  η φασματική ακτίνα του πίνακα  $B$ . Άρα η επαναληπτική μέθοδος θα συγκλίνει αν-ν  $\rho(B) < 1$ .

Τις διαφορετικές μεθόδους τις παίρνουμε διαλέγωντας για τον  $M$  κάποια σχέση μεταξύ των πινάκων  $D, L, U$  που είναι ο διαγώνιος, ο αυστηρά κάτω και ο αυστηρά άνω τριγωνικός πίνακας του  $A$ . Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε μια τροποποιημένη μορφή της μεθόδου  $SOR$  (Successive Overrelaxation) για αυτό θα διαλέξουμε

$$M = \frac{1}{\omega}D - L$$

και η μέθοδος θα γίνει

$$x^{(k+1)} = \left(\frac{D}{\omega} - L\right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right)x^{(k)} + \left(\frac{D}{\omega} - L\right)^{-1}b$$

και το  $i$ -οστό στοιχείο  $x_i$  θα είναι

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^N a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, N$$

Επίσης, μπορεί κάποιος να δείξει ότι η μέθοδος αυτή συγκλίνει για  $\omega \in [0, 2]$  [9]. Εμείς όμως για να ελέγχουμε κάθε φορά για πρώτη άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε μια τροποποίηση της  $SOR$  την  $PSOR$  (Projected Successive Overrelaxation) και θα δούμε στη συνέχεια πως την θα την εφαρμόσουμε για το αμερικανικό δικαίωμα.

## 4.2.5 Εφαρμογή στο Αμερικανικό δικαίωμα

---

### 4.2.5 Εφαρμογή στο Αμερικανικό δικαίωμα

Για την αποτίμηση του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Crank -Nicolson . Ωστόσο λόγω της πρώιμης άσκησης θα πρέπει σε κάθε  $(s_i, t_j)$  να ελέγχουμε αν αξίζει να ασκήσουμε το δικαίωμα τότε ή όχι. Άρα θα έχουμε  $V_{i,j} = \max[V_{i,j}, K - i\delta S]$ . Όμως στη Crank -Nicolson θα πρέπει να λύνουμε κάθε φορά ένα γραμμικό σύστημα το οποίο υπολογιστικά είναι ακριβό. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να το αντιμετωπίσουμε αυτό όμως, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο χαλάρωσης την *PSOR* ( Projected Successive Overrelaxation), η οποία είναι η μέθοδος *SOR* μόνο που κάθε φορά θα πρέπει να ελέγχουμε για πρώιμη άσκηση.

Θα θέσουμε ως

$$b_j = A_2 V_j + \alpha_0 \begin{bmatrix} V_{0,j-1} + V_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

και θα έχουμε το γραμμικό σύστημα  $A_1 V_{j-1} = b_j$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω επαναληπτικό σχήμα

$$V_i^{k+1} = V_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} V_j^{k+1} - \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j^k), \quad i = 1, \dots, N$$

και ελέγχοντας κάθε φορά για την πρώιμη άσκηση θα έχουμε:

$$V_{0,j}^{K+1} = \max(K, V_{0,j}^K + \frac{\omega}{1 - \beta_0} (b_0 - (1 - \beta_0)V_{0,j}^k - \gamma_0 V_{1,j}^k))$$

για  $i = 1, \dots, M - 1$ :

$$V_{i,j}^{K+1} = \max(K - i\delta S, V_{i,j}^K + \frac{\omega}{1 - \beta_i} (\alpha_i V_{i-1,j}^{k+1} + b_i - (1 - \beta_i)V_{i,j}^k - \gamma_i V_{i+1,j}^k))$$

και για  $i = M - 1$

$$V_{M-1,j}^{K+1} = \max(K - (M - 1)\delta S, V_{M-1,j}^K + \frac{\omega}{1 - \beta_M - 1} (\alpha_{M-1} V_{M-2,j}^{k+1} + b_{M-1} - (1 - \beta_{M-1})V_{M-1,j}^k))$$

Στην αρχή υποθέσαμε ότι η διαμέριση των διαστημάτων  $[0, T], [0, S_{max}]$  θα γίνει με σταθερό βήμα. Ίσως μια καλύτερη προσέγγιση θα ήταν να χρησιμοποιούσαμε προσαρμοστικό (adaptive ) βήμα που θα το βρίσκουμε βάση κάποιου κριτηρίου.



#### 4.2.5 Εφαρμογή στο Αμερικανικό δικαίωμα

---

Για την σύγκλιση της *PSOR*, αν κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις στην εξίσωση Black-Scholes :

$$S = Ke^x \quad t = T - \frac{2 * \tau}{\sigma^2} \quad q = \frac{2r}{\sigma^2}$$

$$V(S, t) = V(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) = u(x, \tau)$$

$$u(x, \tau) = K \exp\left\{\frac{x}{2} - \left(\frac{1}{4} + q\right)\tau\right\} y(x, \tau).$$

και θα πάρουμε την εξίσωση της διάχυσης της θερμότητας

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}$$

και το πρόβλημά μας θα γίνει:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}\right)(y - g) = 0$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}\right) \geq 0, \quad y - g \geq 0$$

$$y(x, 0) = g(x, 0), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{\sigma^2 T}{2}$$

$$\lim_{x \pm \infty} y(x, \tau) = \lim_{x \pm \infty} g(x, \tau)$$

όπου

$$g(x, \tau) = \exp\left\{\left(\frac{(q-1)^2}{4} + 4q\right)\tau\right\} \max\left\{e^{\frac{x}{2}(q+1)} - e^{\frac{-x}{2}(q-1)}, 0\right\}$$

Εφαρμόζοντας την *Crank – Nicolson* θα έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα

$$Ay - g \geq 0, \quad y \geq g, \quad (Ay - b)^T (y - g) = 0$$

με  $b$  τις συνοριακές συνθήκες.

**Θεώρημα 4.1.** Έστω  $A \in \mathcal{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας και  $b, g \in \mathcal{R}^{n-1}$  τότε η ακολουθία που ορίζεται από την μέθοδο *PSOR*  $y^{(k)}$  συγκλίνει στην πραγματική λύση του παραπάνω προβλήματος

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στο [14]

□

## 4.3 Μέθοδος Monte-Carlo

---

### 4.3 Μέθοδος Monte-Carlo

Η τελευταία προσεγγιστική μέθοδος που θα δούμε είναι η Προσομοίωση Monte-Carlo . Στην πιο απλή μορφή της θα πρέπει να ορίσουμε το χώρο στον οποίο θα δουλέψουμε, να κάνουμε μια τυχαία δειγματοληψία πάνω στο χώρο αυτό και στη συνέχεια με τα δείγματα που έχουμε πάρει να εκτιμήσουμε το ζητούμενο. Ο Νόμος των Μεγάλων αριθμών μας εγγυάται ότι η εκτίμηση που θα βρούμε θα συγκλίνει στην πραγματική τιμή , όταν αυξάνεται ο αριθμός των δειγμάτων. Επίσης, από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μπορούμε να βρούμε το σφάλμα της εκτίμησης που κάναμε.

Το ενδιαφέρον με τη μέθοδο Monte-Carlo είναι ότι ενώ περιέχει την 'τυχειότητα' , μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε και για ντετερμινιστικά προβλήματα. Αρκεί να μπορούμε να τα μετατρέψουμε κατάλληλα.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

από τη θεωρία Πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι  $I = \mathbb{E}[f(U)]$  όπου η  $U$  τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0,1)$ . Παράγοντας μια ακολουθία  $\{U_i\}$  από ανεξάρτητα τυχαία δείγματα της ομοιόμορφης κατανομής μπορούμε να υπολογίσουμε το δειγματικό μέσο

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m f(U_i)$$

και από τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών θα έχουμε ότι

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n.$$

Αν η  $f$  είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και θέσουμε

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - I)^2 dx$$

τότε το σφάλμα  $\hat{I}_n - I$  θα ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση  $\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}$ .

Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου Monte-Carlo είναι ότι ρυθμός σύγκλισής της είναι  $O(n^{-1/2})$  και δεν εξαρτάται από τη διάσταση του προβλήματος. Για αυτό , ενώ σε απλά προβλήματα μικρών διαστάσεων μπορεί να είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε άλλες μεθόδους, σε περίπλοκα προβλήματα πολλών

### 4.3.1 Αποτίμηση Αμερικανικού δικαιώματος με Monte-Carlo

διαστάσεων είναι πολύ πιθανό η καλύτερη επιλογή να είναι μια μέθοδος Monte-Carlo .

Αν θέλουμε να βελτιώσουμε τη μέθοδό μας μπορούμε να αυξήσουμε τον αριθμό των δειγμάτων ,το οποίο δεν είναι πολύ αποτελεσματικό γιατί όσο αυξάνεται το  $n$  τόσο θα μειώνεται ο ρυθμός βελτίωσης. Για αυτό είναι προτιμότερο ή να μειώσουμε τη  $\sigma_j^2$  στο δείγμα μας χρησιμοποιώντας πιο έξυπνες τεχνικές δειγματοληψίας ή να χρησιμοποιήσουμε quasi Monte-Carlo . Αρκετά αναλυτικά υπάρχουν και οι δύο περιπτώσεις στα [9],[11].

### 4.3.1 Αποτίμηση Αμερικανικού δικαιώματος με Monte-Carlo

Εδώ θα αναλύσουμε τη μέθοδο που πρότειναν οι Longstaff και Schwartz τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων Monte-Carlo (LSM-Monte Carlo).

Όπως και σε κάθε μέθοδο Monte-Carlo θα πρέπει στην αρχή να δημιουργήσουμε τα τυχαία μονοπάτια  $S_j$ , όπου  $j = 0, \dots, M$  η διαμέριση του χρόνου και  $S_{ij}$  θα είναι η τιμή την στιγμή  $t_j$  στο μονοπάτι  $i = 1, \dots, N$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε

$$V_j(S_j) = \max[I_j(S_j), \mathbb{E}_j[e^{-r\delta t}V_{j+1}(\tilde{S}_{j+1})|S_j]]$$

όπου το  $I_j(S_j) = \max[K - S_j, 0]$ . Το πρόβλημα που έχουμε στα αμερικανικά δικαιώματα είναι ότι όταν βρισκόμαστε την χρονική στιγμή  $t_j$  σε ένα από τα μονοπάτια  $S_j$  δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πληροφορίες από μελλοντικές τιμές του μονοπατιού αυτού. Αυτό που θα κάνουμε εμείς είναι ότι θα εκτιμήσουμε την δεσμευμένη μέση τιμή με τη βοήθεια κάποιων συναρτήσεων βάσης  $\psi_l(S_j), l = 1, \dots, L$ . Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε σαν βάση τα πολυώνυμα  $\{1, S, \dots, S^6\}$ . Επιπλέον μπορούμε να διαλέξουμε τα πολυώνυμα *Laguerre* , τα πολυώνυμα *Hermite* ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις και θα πάρουμε παρόμοια αποτελέσματα για την περίπτωση του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης[12]. Άρα θα έχουμε

$$F(i; t_j) = \mathbb{E}_j[e^{-r\delta t}V_{j+1}(\tilde{S}_{j+1})|S_j] \approx \sum_{l=1}^L \alpha_{lj} S_j^{l-1}$$

Τα βάρη  $\alpha_{lj}$  θα τα υπολογίσουμε με τη βοήθεια της γραμμικής παλινδρόμησης πηγαίνοντας προς τα πίσω στο χρόνο.

Την στιγμή  $t = T = M\delta t$  θα έχουμε

$$V_N(S_N) = \max[0, K - S_N].$$

Αυτές οι τιμές θα είναι οι μεταβλητές απόκρισης  $Y$  και οι επεξηγηματικές μεταβλητές  $X$  θα είναι οι τιμές  $S_{i,N-1}$  την χρονική στιγμή  $j = N - 1$  . Ως  $\tilde{F}_{N-1}(i; t)$

### 4.3.1 Αποτίμηση Αμερικανικού δικαιώματος με Monte-Carlo

θα είναι η προβλεπόμενη τιμή από την παλινδρόμηση. Άρα θα έχουμε

$$e^{-r\delta t} \max(K - S_{i,N}, 0) = \sum_{l=1}^L \alpha_{l,N-1} S_{N-1,i}^{l-1} + \epsilon_i, \quad i \in \mathcal{I}_{N-1}.$$

Δεν χρειάζεται να χρησιμοποιούμε κάθε φορά όλα τα μονοπάτια αλλά μόνο αυτά στα οποία το δικαίωμα την στιγμή αυτή ισχύει ότι  $K > S$  (in the money). Ο λόγος που επιλέγουμε μόνο αυτά τα μονοπάτια είναι ότι σε αυτά έχουμε να αποφασίσουμε αν θα ασκήσουμε το δικαίωμα ή όχι. Ενώ στα άλλα δεν μας συμφέρει να το ασκήσουμε. Αυτό το κριτήριο λέγεται *moneyness* και βελτιώνει αρκετά την απόδοση της μεθόδου [12] και θα συμβολίζουμε το υποσύνολο αυτό με τα μονοπάτια ως  $\mathcal{I}_{N-1}$ . Έχοντας βρει τη δεσμευμένη μέση τιμή για την χρονική στιγμή  $t_{N-1}$  μπορούμε να αποφασίσουμε αν μας συμφέρει να ασκήσουμε το δικαίωμα ή όχι συγκρίνοντας τη τιμή αυτή με την τιμή της άμεσης άσκησής του για κάθε μονοπάτι το οποίο είναι in the money. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο μέχρι να έχει προσδιοριστεί για κάθε μονοπάτι η βέλτιστη στρατηγική άσκησης σε κάθε χρονική στιγμή.

Για να βρούμε την αξία του αμερικανικού δικαιώματος θα ξεκινήσουμε από τη χρονική στιγμή  $T$  μέχρι να συναντήσουμε σε κάθε μονοπάτι τον πρώτο χρόνο διακοπής και παίρνουμε την προεξοφλημένη τιμή από τη χρονική στιγμή άσκησης στο 0. Παίρνοντας το μέσο όρο όλων των μονοπατιών θα βρούμε το ζητούμενο.

Για τη σύγκλιση της μεθόδου έχουμε την παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 4.2.** Για πεπερασμένη επιλογή των  $M, L$  και το διάνυσμα  $\theta \in R^{(L-1) \times M}$  που αντιπροσωπεύουν τις σταθερές των  $M$  συναρτήσεων βάσης σε κάθε από της  $L - 1$  στιγμές πρώιμης άσκησης και  $LSM(\omega; M; L)$  οι τιμές που θα πάρουμε όταν η αξία άμεσης άσκησης του δικαιώματος είναι θετική και μεγαλύτερη ή ίση από την  $\tilde{F}(i; t_{j-1})$ . Τότε σχεδόν βέβαια ισχύει ότι

$$V(X) \geq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M LSM(\omega_i; M, L) \quad (4.3.1)$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη υπάρχει στο [12]. □

**Παρατήρηση:** Άρα η αξία του αμερικανικού δικαιώματος που θα υπολογίσουμε με τη βοήθεια της μεθόδου *LSM* θα είναι πάντα μικρότερη ή ίση της πραγματικής αξίας  $V(X)$ . Η χρησιμότητα της πρότασης είναι ότι μας δίνει ένα αντικειμενικό κριτήριο για την σύγκλιση. Με τη βοήθειά του μπορούμε να προσδιο-

### 4.3.1 Αποτίμηση Αμερικανικού δικαιώματος με Monte-Carlo

ρίσουμε των αριθμών των συναρτήσεων βάσης που χρειαζόμαστε για να έχουμε μια ακριβής προσέγγιση.

Για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου μπορεί κάποιος να διαβάσει το παράδειγμα που δώσανε στην εργασία τους οι Longstaff και Schwartz [12].

Μια πιο αναλυτική περιγραφή του γενικού προβλήματος αποτίμησης αμερικανικών δικαιωμάτων και πως μπορούμε να βελτιώσουμε τη μέθοδο σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις υπάρχει στο [11].

### 5 Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συγκρίνουμε τις μεθόδους που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 4. Θα γίνουν με τη βοήθεια της γλώσσας *Python*. Τα αποτελέσματα που θα δούμε παρακάτω και ειδικά η ταχύτητα εξαρτώνται τόσο από τον κώδικα που έχουμε γράψει όσο και από τον υπολογιστή στον οποίο εκτελέστηκε ο κώδικας. Είναι πολύ πιθανό να υπάρχουν καλύτεροι κώδικες από αυτούς που θα χρησιμοποιήσουμε για αυτό είναι καλύτερο να πούμε ότι δεν συγκρίνουμε τις μεθόδους, αλλά την εφαρμογή τους μέσω από τους κώδικες αυτούς.

Ένα πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι ότι δεν γνωρίζουμε την πραγματική τιμή για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων με αυτήν. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε σαν τιμή σύγκρισης (*benchmark*) τα αποτελέσματα που θα πάρουμε από το διωνυμικό μοντέλο για  $N$  πολύ μεγάλο. Ο λόγος που θα το κάνουμε αυτό είναι γιατί γνωρίζουμε ότι όταν  $N \rightarrow \infty$  το διωνυμικό μοντέλο προσεγγίζει το μοντέλο Black and Scholes.

#### 5.1 Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Για αρχή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $S_0, K$  και  $\sigma$ . Το  $S_0$  θα το πάρουμε για τις τιμές  $\{10, 25\}$  και για κάθε μια τιμή θα πάρουμε διαφορετικά  $K$  τέτοια ώστε να δούμε τις περιπτώσεις  $K - S_0 < 0$  (out of the money),  $K - S_0 = 0$  (at the money) και  $K - S_0 > 0$  (in the money). Το  $\sigma$  θα το δούμε για τις τιμές  $\{0.2, 0.4, 0.6\}$ . Για 'πραγματική' τιμή θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα από το διωνυμικό μοντέλο με  $N=20000$ .

Για το διωνυμικό μοντέλο θα πάρουμε  $N = 1000$  βήματα για το χρόνο, για τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών  $N = 100$  στη διαμέριση του χρόνου και  $M = 500$  στη διαμέριση του  $S$  και για τη *Monte Carlo* 100000 επαναλήψεις και  $N = 50$ . Αυτή η επιλογή των διαμερίσεων και των επαναλήψεων είναι αυθαίρετη, αλλά στη συνέχεια θα δούμε πόσο μεγάλα θα πρέπει να είναι αυτά για να έχουμε μια καλή προσέγγιση.

**Παρατήρηση:** Οι τιμές που παίρνουμε από τη μέθοδο Monte Carlo είναι τυχαίες και κάθε φορά θα έχουμε διαφορετικό αποτέλεσμα.

## 5.1 Σύγκριση των αποτελεσμάτων

$S_0$	$K$	$\sigma$	$CRR$		$LSMC$		$CN - FD$	
			αξία	σφάλμα	αξία	σφάλμα	αξία	σφάλμα
8	10	0.2	2.0	0.0	2.0	0.0	2.0	0.0
8	10	0.4	2.35533	-0.0003	2.35427	0.00103	2.35312	0.00218
8	10	0.6	2.95479	0.00002	2.95335	0.00146	2.90495	0.04986
10	10	0.2	0.57982	0.00006	0.57885	0.00104	0.5796	-0.01771
10	10	0.4	1.32939	0.00017	1.32068	0.00888	1.32823	0.00133
10	10	0.6	2.0773	0.00031	2.06926	0.00835	2.05533	0.02228
12	10	0.2	0.12494	-0.00006	0.12562	0.00074	0.12459	0.00029
12	10	0.4	0.73117	-0.0001	0.73451	0.00344	0.73035	0.00072
12	10	0.6	1.47139	-0.00019	1.46677	0.00443	1.46218	0.00902
20	25	0.2	5.0	0.0	5.0	0.0	5.0	0.0
20	25	0.4	5.88834	-0.00009	5.91557	0.02732	5.8833	0.00495
20	25	0.6	7.38697	0.00006	7.37174	0.01529	7.26364	0.12339
25	25	0.2	1.44955	0.00017	1.45166	0.00194	1.44936	0.00036
25	25	0.4	3.32346	0.00045	3.32344	0.00047	3.32135	0.00256
25	25	0.6	5.19325	0.00078	5.20052	0.00649	5.13976	0.05427
30	25	0.2	0.31236	-0.00002	0.31201	0.0002	0.31187	0.00034
30	25	0.4	1.82792	-0.00026	1.84118	0.01352	1.82684	0.00082
30	25	0.6	3.67848	-0.00048	3.69009	0.01209	3.65704	0.02096

**Πίνακας 5.1:** Σύγκριση των τριών διαφορετικών μεθόδων για ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης για διάφορες τιμές των  $S_0, K, \sigma$  με  $\rho = 0.06$  και  $T = 1$ .

## 5.2 Ταχύτητα των μεθόδων

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και η μέθοδος Crank-Nicolson και Least Square Monte Carlo προσεγγίζουν ικανοποιητικά την 'πραγματική' αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος. Ωστόσο εκτός από την ακρίβεια των μεθόδων μας ενδιαφέρει και η ταχύτητα. Για αυτό για να μπορούμε να τις συγκρίνουμε σωστά θα πρέπει να δούμε στον ίδιο χρόνο τι αποτελέσματα βγάζουν.

### 5.2 Ταχύτητα των μεθόδων

Στην αρχή θα δούμε πόσο γρήγορα συγκλίνουν και οι τρεις μέθοδοι στην 'πραγματική' αξία και στη συνέχεια θα δούμε πόσο αλλάζει ο χρόνος αν αυξήσουμε τον αριθμό των βημάτων ή των επαναλήψεων. Θα έχει το δικαίωμα αρχική τιμή  $S_0 = 50$ , τιμή ασκήσεως  $K = 50$ , σταθερό επιτόκιο  $r = 0.1$ , μεταβλητότητα  $\sigma = 0.4$  και  $T=1$ . Η 'πραγματική' αξία ισούται με 5.979139420186129 και την υπολογίσαμε με την βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου με  $N = 20000$ . Για τη μέθοδο Crank-Nicolson θα χρησιμοποιήσουμε  $\omega = 1.5$ ,  $tol = 1e - 5$  και  $M = N$ . Ενώ για τη Least Square Monte Carlo θα έχουμε  $M=100000$ .

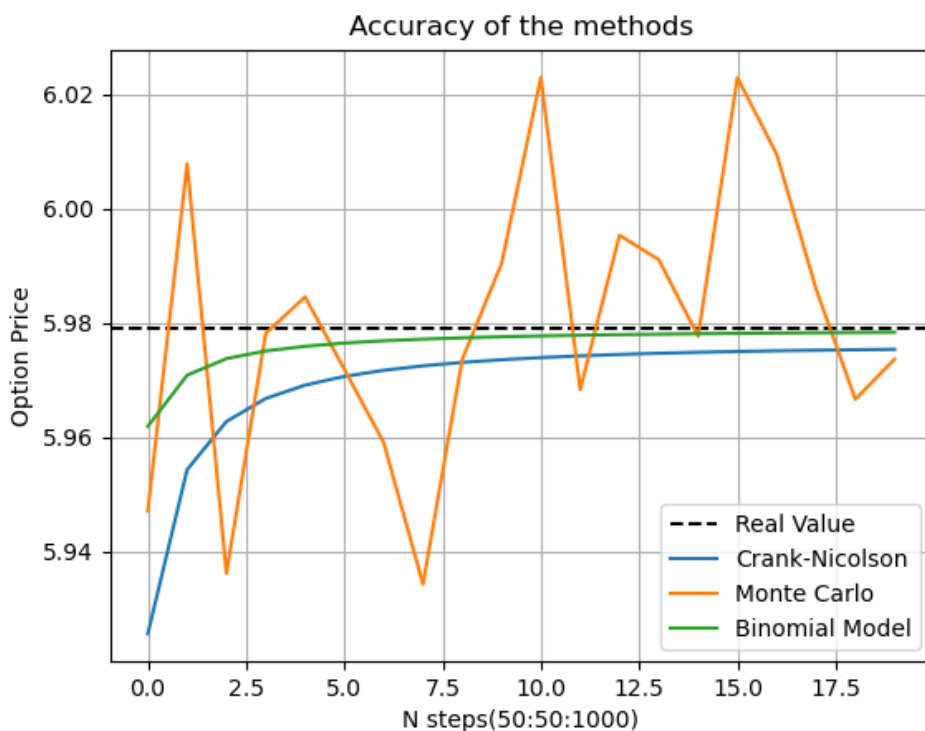
N	CRR			LSMC			CN - FD		
	αξία	σφάλμα	χρόνος	αξία	σφάλμα	χρόνος	αξία	σφάλμα	χρόνος
20	5.93829	-0.04085	0.00200	5.93573	-0.0599	0.43938	5.81416	-0.16498	0.02451
50	5.96193	-0.01721	0.00898	5.94144	-0.02684	1.20799	5.92568	-0.05346	0.11123
70	5.96743	-0.01171	0.02493	5.9259	-0.02205	1.66212	5.94278	-0.03636	0.18666
100	5.97088	-0.00826	0.05089	5.92451	-0.03903	2.96028	5.95437	-0.02477	0.31663

**Πίνακας 5.2:** Τα αποτελέσματα των τριών διαφορετικών μεθόδων για ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με τιμές  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$  και  $T = 1$  για διάφορες τιμές των  $N$ , όπου το σφάλμα είναι η διαφορά με την 'πραγματική' τιμή και ο χρόνος είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να εκτελεστεί η μέθοδος .

Για μικρές τιμές του  $N$  όπως βλέπουμε από τον πίνακα 5.2 και οι τρεις μέθοδοι έχουν μια σχετικά καλή ακρίβεια και ο χρόνος που χρειάζονται για να πραγματοποιηθούν και οι τρεις είναι αρκετά μικρός. Όμως η μέθοδος Monte Carlo φαίνεται να χρειάζεται συγκριτικά με τις άλλες δύο αρκετά περισσότερο χρόνο και να μη πετυχαίνει μια καλή ακρίβεια.



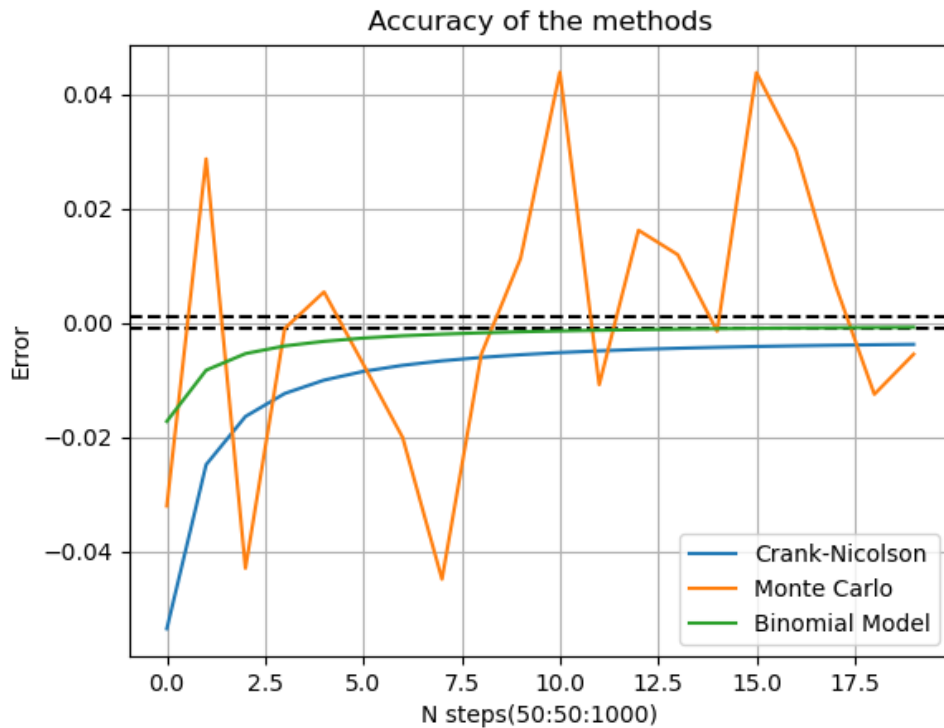
## 5.2 Ταχύτητα των μεθόδων



Σχήμα 1: Μεταβολή της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τον αριθμό βημάτων  $N$  στο χρόνο. Με  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 1$

Και από τα τέσσερα σχήματα είναι ξεκάθαρο ότι η καλύτερη μέθοδος είναι το διωνυμικό μοντέλο σε σύγκριση με τις άλλες δύο μεθόδους. Από τα σχήματα 1, 2 και 3 φαίνεται ότι έχει την καλύτερη ακρίβεια και από το σχήμα 4 ότι είναι η πιο γρήγορη. Για τη μέθοδο Crank-Nicolson φαίνεται να έχει μια καλή ακρίβεια και σχετικά κοντά με αυτήν του διωνυμικού μοντέλου. Αλλά ο χρόνος που χρειάζεται για να πραγματοποιηθεί είναι περισσότερος από αυτόν που χρειάζεται το διωνυμικό μοντέλο. Για τη μέθοδο Monte Carlo δεν φαίνεται να υπάρχει βελτίωση στην ακρίβεια όσο αυξάνουμε το  $N$  από τη τιμή 50 και πάνω. Άρα για τη μέθοδο αυτή δεν χρειάζεται να παίρνουμε σχετικά μεγάλο  $N$ , αφού δεν πετυχαίνουμε καλή ακρίβεια, ενώ παράλληλα αυξάνεται και ο χρόνος πραγματοποίησης της.

## 5.2 Ταχύτητα των μεθόδων

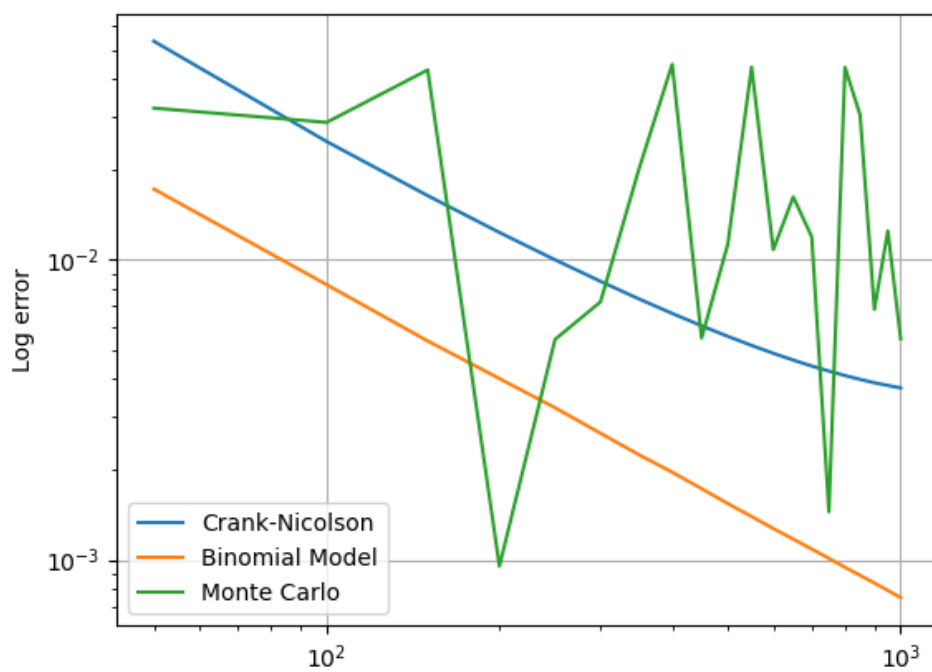


**Σχήμα 2:** Η διαφορά των μεθόδων με την 'πραγματική' τιμή σε σχέση με τον αριθμό των βημάτων  $N$  στο χρόνο. Με  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 1$ . Οι τιμές ανάμεσα από τις διακεκομμένες γραμμές είναι το σύνολο  $[-0.001, 0.001]$ .

Από τα σχήματα 5 και 6 φαίνεται ότι με την αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων να μειώνεται το σφάλμα και να συγκλίνει όλο και πιο κοντά προς την 'πραγματική' τιμή η Monte Carlo . Μάλιστα από τις 42.500 επαναλήψεις και μετά το σφάλμα σε απόλυτη τιμή περιορίζεται κυρίως σε τιμές μικρότερες του 0.05. Ενώ από το σχήμα 6 ο χρόνος πραγματοποίησής της αυξάνεται αλλά δεν φτάνει μεγάλες τιμές.

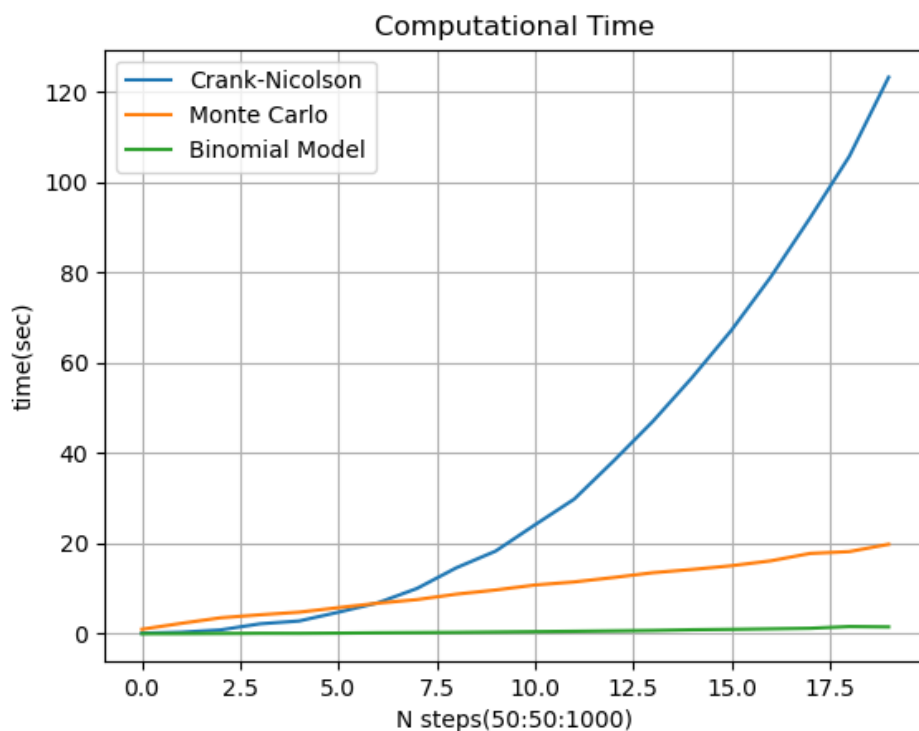
## 5.2 Ταχύτητα των μεθόδων

---



Σχήμα 3: Το λογ-σφάλμα των μεθόδων. Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ .

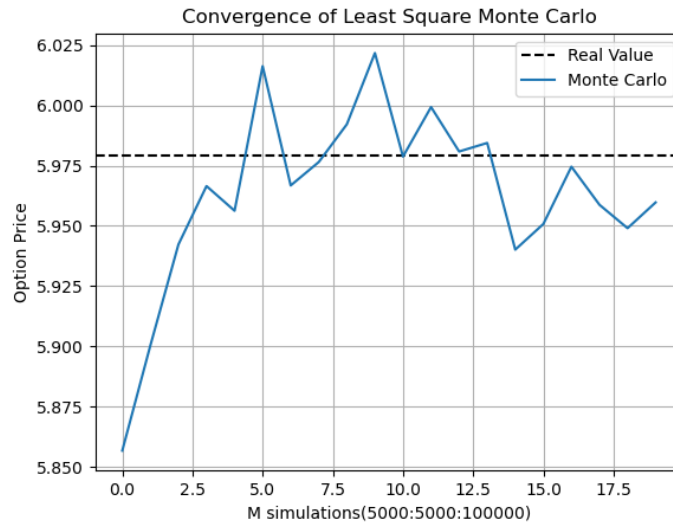
## 5.2 Ταχύτητα των μεθόδων



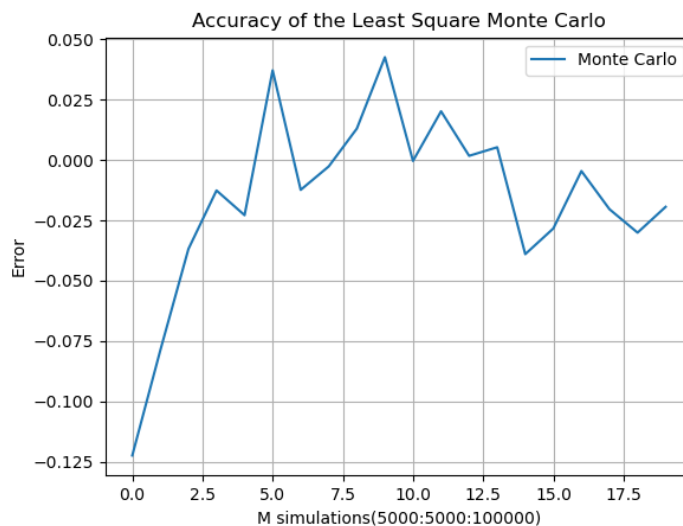
**Σχήμα 4:** Χρόνος που χρειάζεται για τον υπολογισμό της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τον αριθμό των βημάτων  $N$  στο χρόνο. Με  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 1$ .

Αφού είδαμε πως μεταβάλλονται και οι τρεις μέθοδοι σε σχέση με τη χρονική, χωρική διαμέριση και τον αριθμό των επαναλήψεων, είμαστε σε θέση να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα πάνω σε αυτές. Η μέθοδος που φαίνεται να έχει την καλύτερη ακρίβεια σε σχέση και με τον χρόνο που χρειάζεται για να πραγματοποιηθεί είναι το διωνυμικό μοντέλο. Ένω η μέθοδος Least Square Monte Carlo δεν φτάνει την ακρίβεια των άλλων δύο μεθόδων ακόμα και για αρκετά υψηλό αριθμό επαναλήψεων. Όμως για την παραγωγή των τυχαίων μονοπατιών δεν χρησιμοποιήσαμε τεχνικές μείωσης της διασποράς που θα είχαν οδηγήσει σε καλύτερα αποτελέσματα. Ενώ για την περίπτωση της Crank-Nicolson κρατήσαμε σταθερό σε όλους τους υπολογισμούς που κάναμε το  $\omega = 1.5$  και το σφάλμα της επαναληπτικής μεθόδου  $tol = 1e - 5$ . Θα μπορούσαμε να είχαμε υπολογίσει το βέλτιστο  $\omega$  για το οποίο θα χρειαζόταν να γίνουν λιγότερες επαναλήψεις και θα είχαμε μια πιο γρήγορη μέθοδο.

## 5.2 Ταχύτητα των μεθόδων



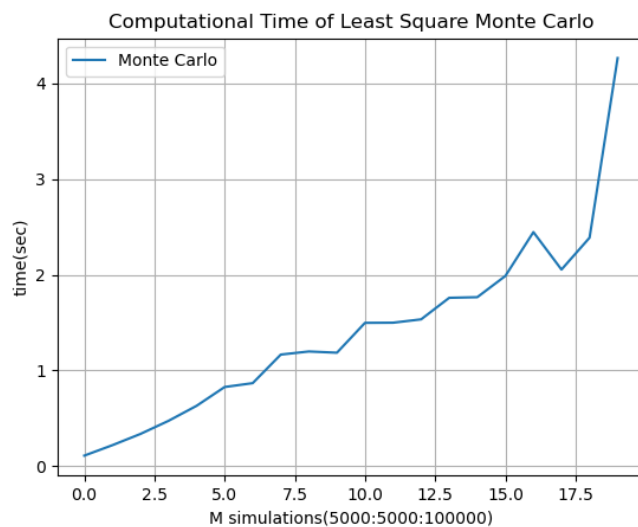
Σχήμα 5: Μεταβολή της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης υπολογισμένο από τη μέθοδο *Least Square Monte Carlo* σε σχέση με τον αριθμό επαναλήψεων  $M$ . Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N = 50$ .



Σχήμα 6: Η διαφορά της *Least Square Monte Carlo* με την 'πραγματική' τιμή σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων  $M$  στο χρόνο. Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N = 50$ . Οι τιμές ανάμεσα από τις διακεκομμένες γραμμές είναι το σύνολο  $[-0.001, 0.001]$ .

### 5.3 Μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος σε σχέση με τα $K$ , $r, \sigma$

---



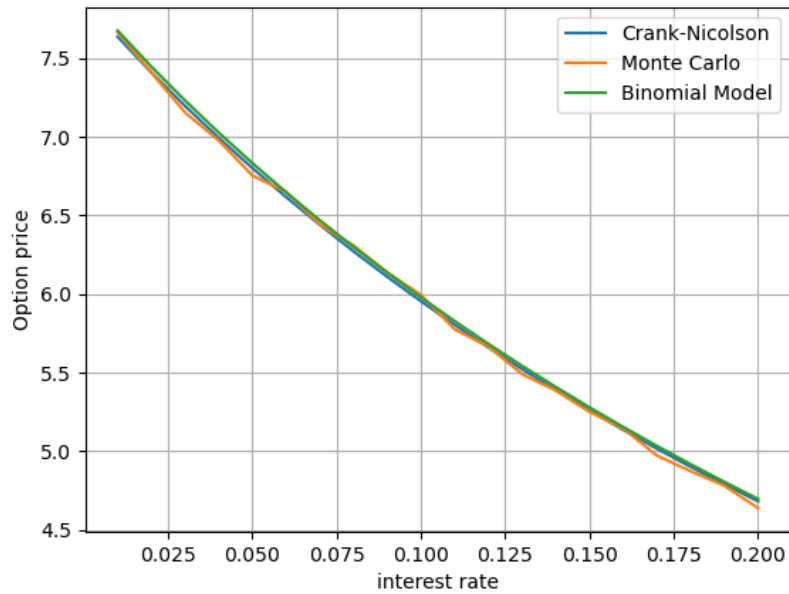
**Σχήμα 7:** Χρόνος που χρειάζεται για τον υπολογισμό της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων για τη *Least Square Monte Carlo*. Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N = 50$ .

### 5.3 Μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος σε σχέση με τα $K, r, \sigma$

Στη συνέχεια θα δούμε πως μεταβάλλεται η αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος σε σχέση με το επιτόκιο  $r$ , τη μεταβλητότητα  $\sigma$  και τη τιμή άσκησης  $K$ . Για το διωνυμικό μοντέλο  $N=1000$ , για τη Crank-Nicolson  $N=100, M=500, \omega = 1.5, tol = 1e - 5$  και για τη Monte Carlo  $N=50$  και  $M=100000$ .

### 5.3 Μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος σε σχέση με τα $K$ $r, \sigma$

---

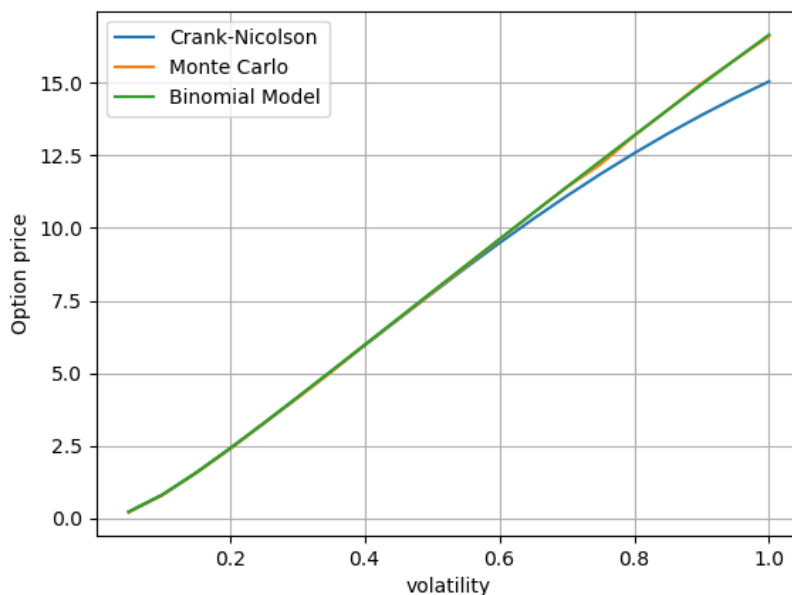


**Σχήμα 8:** Διάγραμμα μεταβολής της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με το επιτόκιο και για τις τρεις μεθόδους με  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 1$ .

Για την περίπτωση του επιτοκίου  $r$  από το Σχήμα 8 βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται το επιτόκιο τόσο μειώνεται η αξία του δικαιώματος.

### 5.3 Μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος σε σχέση με τα $K$ , $r, \sigma$

---



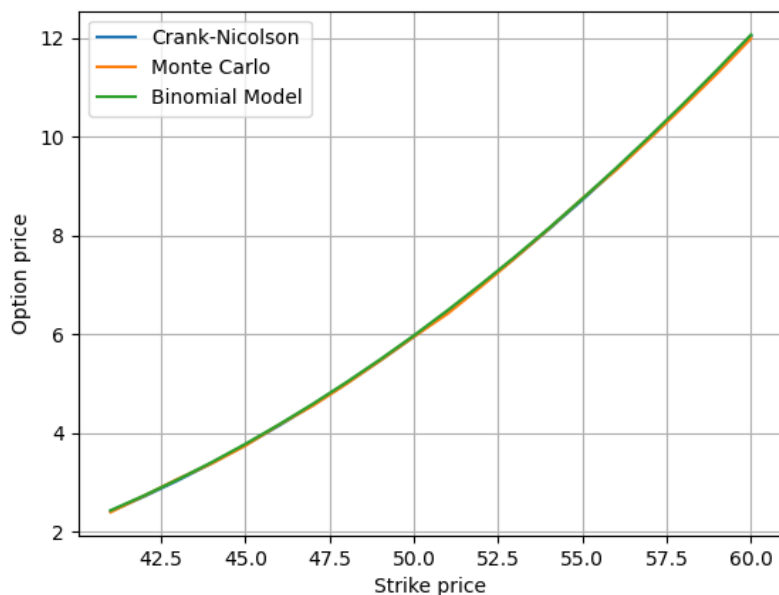
**Σχήμα 9:** Διάγραμμα μεταβολής της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τη μεταβλητότητα και για τις τρεις μεθόδους με  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $T = 1$ .

Για την περίπτωση της μεταβλητότητας από το Σχήμα 9 φαίνεται ότι όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα τόσο αυξάνεται και η αξία του δικαιώματος. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι επειδή όσο πιο μεγάλη είναι η μεταβλητότητα τόσο πιο πιθανό είναι το υποκείμενο αγαθό να πάρει πιο ακραίες τιμές. Άρα είναι πιο πιθανό να πάρει χαμηλότερες τιμές και να ασκήσουμε το δικαίωμα με μεγαλύτερο κέρδος. Κατί πολύ ενδιαφέρον που δείχνει αυτό το διάγραμμα είναι ότι η μέθοδος Crank-Nicolson φαίνεται να δίνει διαφορετικά αποτελέσματα από τις άλλες δύο μεθόδους για μεγάλες τιμές του  $\sigma$ .



### 5.3 Μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος σε σχέση με τα $K$ , $r, \sigma$

---



**Σχήμα 10:** Διάγραμμα μεταβολής της αξίας ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε σχέση με τη τιμή άσκησης και για τις τρεις μεθόδους με  $S_0 = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ .

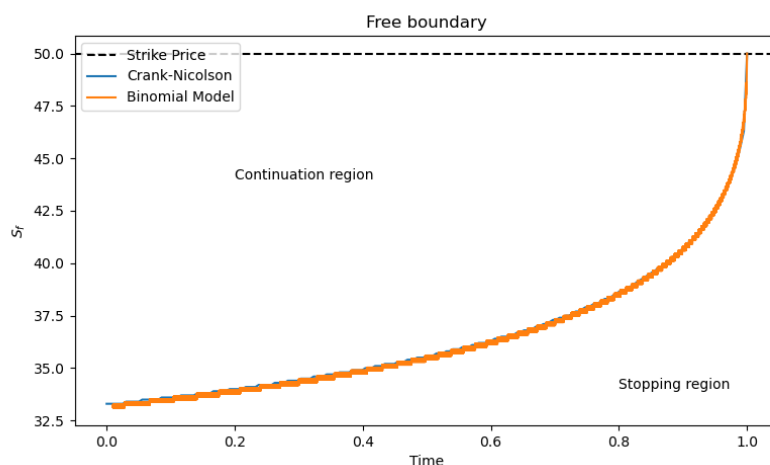
Αυτό που παρατηρούμαι από το Σχήμα 10 είναι ότι όσο αυξάνεται η τιμή άσκησης του δικαιώματος  $K$  τόσο αυξάνεται και η αξία του. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού η συνάρτηση αποπληρωμής του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι  $\max(K - S, 0)$ .

## 5.4 Ελεύθερο όριο

---

### 5.4 Ελεύθερο όριο

Τέλος θα συγκρίνουμε το ελεύθερο όριο  $b(t)$  που παράγεται από τις μεθόδους. Όπως αποδείξαμε και στην Ενότητα 3.3 θα πρέπει το  $b(t)$  να είναι μια αύξουσα συνάρτηση, λεία, και για  $b(t) = K$ .



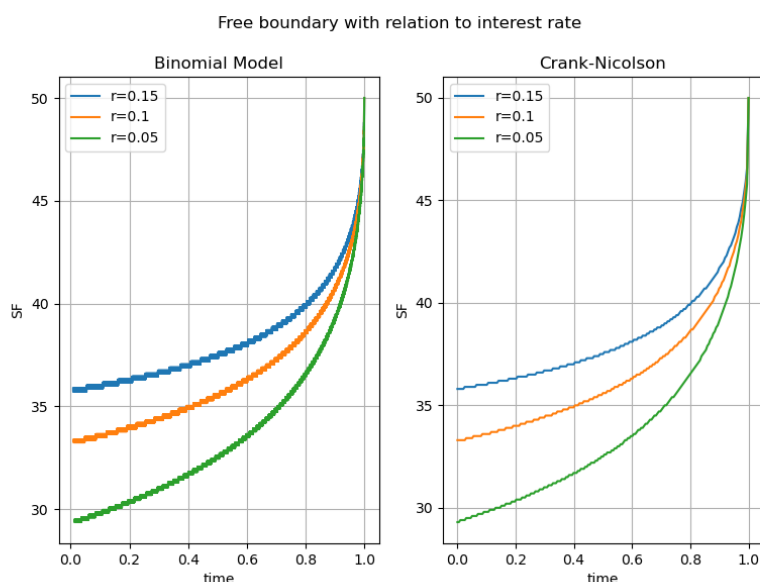
**Σχήμα 11:** Διάγραμμα ελεύθερου ορίου από τις μεθόδους *Crank-Nicolson*, και διωνυμικό μοντέλο. Με  $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 1$ .

Για το διωνυμικό μοντέλο χρησιμοποιήσαμε  $N=10000$  και για τη Crank-Nicolson  $N=200$  και  $M=1000$ . Ένω για τη Least Squares Monte Carlo χρησιμοποιήσαμε  $N=100$ ,  $M=100000$  και επαναλάβαμε τη διαδικασία 100 φορές και πήραμε το μέσο όρο των αποτελεσμάτων.

## 5.4 Ελεύθερο όριο

Από ότι παρατηρούμε από το διάγραμμα η συνάρτηση  $b(t)$  που παίρνουμε από τις μεθόδους διωνυμικό μοντέλο και Crank-Nicolson ικανοποιεί τις ιδιότητες που αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 3. Η συνάρτηση είναι αύξουσα και ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow T} b(t) = K$ . Επίσης, όσο αυξάνουμε τον αριθμό βημάτων διαμέρισης του χρόνου  $N$  και τον αριθμό βημάτων διαμέρισης του χώρου  $M$ , για την περίπτωση της μεθόδου *Crank – Nicolson*, τόσο πιο λεία θα γίνεται η συνάρτηση  $b(t)$ .

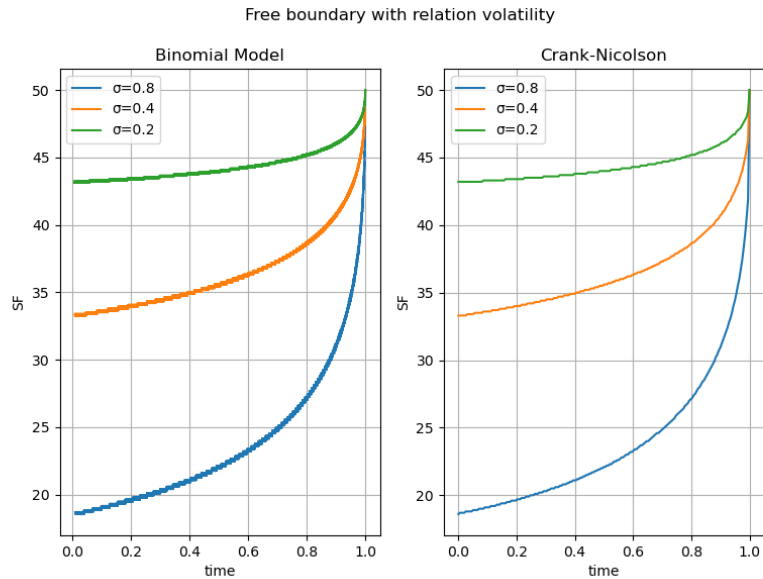
Ενδιαφέρον έχει να δούμε για τις μεθόδους διωνυμικό μοντέλο και Crank-Nicolson τη μεταβολή του ελεύθερου ορίου σε σχέση με κάποια συγκεκριμένα μεγέθη, όπως το επιτόκιο  $r$  και τη μεταβλητότητα  $\sigma$ .



**Σχήμα 12:** Διάγραμμα μεταβολής ελεύθερου ορίου σε σχέση με το επιτόκιο  $r$  από τις μεθόδους *Crank-Nicolson* και διωνυμικό μοντέλο. Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N=10000$  βήματα στη διαμέριση του χρόνου για το διωνυμικό μοντέλο,  $N=200$  και  $M=1000$  για τη διαμέριση του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα για τη *Crank-Nicolson*.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι με την αύξηση του επιτοκίου, αυξάνεται και η συνάρτηση του ελεύθερου ορίου. Άρα θα πρέπει να ασκήσουμε πιο γρήγορα το δικαίωμα που έχουμε, αφού μειώνεται η περιοχή συνέχισης  $C$ .

## 5.4 Ελεύθερο όριο



**Σχήμα 13:** Διάγραμμα μεταβολής ελεύθερου ορίου σε σχέση με τη μεταβλητότητα  $\sigma$  από τις μεθόδους *Crank-Nicolson* και διωνυμικό μοντέλο. Με  $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1, N=10000$  βήματα στη διαμέριση του χρόνου για το διωνυμικό μοντέλο,  $N=200$  και  $M=1000$  για τη διαμέριση του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα για τη *Crank-Nicolson*.

Για την περίπτωση της μεταβλητότητας, αυτό που παρατηρούμε είναι ότι όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα, τόσο μειώνεται η συνάρτηση ελεύθερου ορίου. Άρα αυξάνεται η περιοχή συνέχισης και μας συμφέρει να κρατήσουμε περισσότερο το δικαίωμα.

### 6 Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία ασχοληθήκαμε με την αποτίμηση του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης. Στην αρχή αναφερθήκαμε συνοπτικά στο μαθηματικό υπόβαθρο που χρειάζεται για τη μοντελοποίηση του προβλήματος αυτού και στη συνέχεια αποδείξαμε ότι υπάρχει χρόνος βέλτιστης διακοπής. Ωστόσο για τον υπολογισμό της αξίας εκείνη τη χρονική στιγμή δεν υπάρχει τύπος κλειστής μορφής, για αυτό και εμείς χρησιμοποιήσαμε τις τρεις πιο βασικές μεθόδους που υπάρχουν για την προσέγγιση της τιμής αυτής, οι οποίες είναι το διωνυμικό μοντέλο, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών και η προσομοίωση Monte Carlo . Στο Κεφάλαιο 4 τις αναλύσαμε θεωρητικά και στο Κεφάλαιο 5 τις συγκρίναμε ως προς το χρόνο που χρειάζονται για την αποτίμηση του αμερικανικού δικαιώματος και πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματική τιμή.

Δείξαμε ότι ακόμα και για μικρή διαμέριση του χρόνου και του χώρου και οι τρεις μέθοδοι προσεγγίζουν ικανοποιητικά την πραγματική τιμή ,αλλά η χειρότερη σε σχέση με την ακρίβεια ήταν η Monte Carlo ,κάτι που περιμέναμε μιας και η αξία της φαίνεται σε πιο πολύπλοκα δικαιώματα και σε πολυδιάστατους χώρους [11].Ενώ σε σχέση με τον υπολογιστικό χρόνο που χρειάζεται όσο αυξάνουμε τον αριθμό διαμέρισης του χρόνου  $N$  η χειρότερη είναι η Crank-Nicolson γιατί παράλληλα αυξάνουμε και τον αριθμό διαμέρισης του χώρου  $M$ . Για τον υπολογιστικό χρόνο που χρειάζεται σε σχέση με τον αριθμό των προσομοιώσεων για τη Monte Carlo η διαφορά είναι αισθητή, αλλά όχι μεγάλη. Όμως είναι ξεκάθαρο ότι η καλύτερη είναι το διωνυμικό μοντέλο ,αφού πετυχαίνει τη καλύτερη ακρίβεια και χρειάζεται το λιγότερο χρόνο για να πραγματοποιηθεί. . Σε προβλήματα μεγάλων διαστάσεων ( $> 5$ ) [11] ,λόγου της "κατάρα της διαστατικότητας" η μέθοδος Least Square Monte Carlo είναι μονόδρομος.

Σε κάθε μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε υπάρχουν τρόποι για να βελτιώσουμε όχι μόνο την ακρίβεια, αλλά και τη ταχύτητά τους.

Για την περίπτωση του διωνυμικού μοντέλου θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει ένα προσαρμοστικό βήμα για τη διαμέριση του χρόνου, όπου σε κάποια σημεία να μας αρκεί να έχουμε μεγάλο βήμα, ενώ σε κάποια άλλα να θέλουμε ένα αρκετά μικρότερο.

Για την Crank-Nicolson και εδώ θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει προσαρμοστικό βήμα για τις διαμερίσεις του χρόνου και του χώρου. Έπισης, δεν είδαμε καθόλου πως επηρεάζουν η παράμετρος ανοχής και η παράμετρος χαλάρωσης  $\omega$  την ακρίβεια και τη ταχύτητα της μεθόδου.

Για τη μέθοδο Least Square Monte Carlo θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει κάποιες τεχνικές μείωσης της διασποράς για να πετυχαίναμε καλύτερα

## 6 Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα

---

αποτελέσματα.

Άλλες μεθόδους που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και νευρωνικά δίκτυα.

### A' Παράρτημα

Εδώ υπάρχουν όλοι οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία στη γλώσσα *Python*.

#### 1) Διωνυμικό μοντέλο

```
1 def Am(S0,K,r,sigma,T,N,plot : bool ):
2     import numpy as np
3     import math as m
4     import matplotlib.pyplot as plt
5
6     #S0 starting price of the underlying asset
7     #K strike price
8     #r constant interest rate
9     # sigma volatility
10    # T time of maturity
11    # N number of time steps
12    #plot if True shows plot
13
14    #Grid and parameters definition
15
16    dt=T/N
17    u=np.exp(sigma*m.sqrt(dt))
18    d=1/u
19    p=(np.exp(r*dt)-d)/(u-d)
20    q=1-p
21    dis=np.exp(-r*dt)
22
23
24    #calculation of the nodes
25    S=np.zeros((N+1,N+1))
26    for i in range(0,N+1):
27        for j in range(0,i+1):
28
29            S[i][j]=S0*(u**j)*(d**(i-j))
30
31    S[S==0]=np.nan
32    V=np.zeros((N+1,N+1))
33    V[-1,:]=np.fmax(K-S[-1,:],0)
34
35
36    #early exercise check
37    for k in range(N-1,-1,-1):
38        for l in range(0,k+1):
39
40            V[k,l]=np.fmax(dis*(p*V[k+1,l+1] \
41                +q*V[k+1,l]),K-S[k,l])
```

## A' Παράρτημα

---

```
42
43
44 if plot ==False:
45     return(V[0,0])
46
47     S[S==0]=np.nan
48     SF=np.zeros(N+1)
49
50
51     #free boundary plot
52     for i in range(N,-1,-1):
53         for j in range(0,i):
54             if abs(V[i,j]-K+S[i,j])<1e-10:
55                 SF[i-1]=S[i,j]
56
57
58
59     SF[SF==0]=np.nan
60
61     t=np.linspace(0,T,N+1)
62
63
64     return(V[0,0],SF,t)
65
```



### 2) Μέθοδος Least Square Monte Carlo

```
1 def LSM(S0,K,r,sigma,T,N,M,plot):
2     import numpy as np
3     import time
4     import math
5
6     #S0 initial price of the underlying asset
7     #K Strike price
8     #r constant interest rate
9     #sigma volatility
10    #T time of maturity
11    #N diamerisi xronou
12    #arithnos troxion
13
14    #sample paths generation
15    dt=T/(N)
16    St=np.exp((r-sigma**2/2)*dt \+sigma*np.random.normal(0,np
17    .sqrt(dt),size=(M,N))).T
18    St=np.vstack([np.ones(M),St])
19    St=S0*St.cumprod(axis=0)
20    dis=np.exp(-r*dt)
21
22    Iv=np.maximum(K-St.T,0)
23    CF=np.zeros_like(Iv)
24    CF[:, -1]=Iv[:, -1]
25    SF=np.ones((N))*K
26
27    for i in range(N-1,0,-1):
28        InMoney=np.where(St[i,:].T<K,)
29        XD=St[i, InMoney[0]]
30        L=np.zeros((6, len(XD)))
31        L[0,:]=1
32        L[1,:]=XD**1
33        L[2,:]=XD**2
34        L[3,:]=XD**3
35        L[4,:]=XD**4
36        L[5,:]=XD**5
37        L[6,:]=XD**6
38        YD=CF[InMoney[0],i+1]*(dis)
39        A = np.linalg.lstsq(L.T, YD, rcond=None)[0]
40        CV=A @ L
41        IV=np.array(K-XD)
42        index=np.where(IV>CV)
43        InMoney=np.array(InMoney[0])
44        EP=InMoney[index]
45        CF[EP,i+1]=0
46        CF[EP,i]=IV[index]
47        discount_path = (CF[:,i] == 0)
```

## A' Παράρτημα

---

```
47         CF[discount_path,i] = CF[discount_path,i+1] * dis
48
49     LSM=np.mean(CF[:,1]*dis)
50     LSM=max(K-S0,LSM)
51
52     return(LSM,SF[:,:-1],t)
53
```

### 3) Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών Crank Nicolson

```
1 def AMCN(K,S0,r,sigma,T,N,M,omega,tol,plot):
2     import numpy as np
3     import sys
4
5     #S0
6     #K
7     #r
8     #T
9     #sigma
10    #Smax
11    #M, N
12
13    Smax=2*S0
14    I= np.arange(M)
15    J= np.arange(N)
16    grid = np.zeros(shape=(M+1, N+1))
17    boundary_conds = np.linspace(0, Smax, M+1)
18    dt=T/N
19
20    alpha = 0.25*dt*((sigma**2)*(I**2) -r*I)
21    beta = -dt*0.5*((sigma**2)*(I**2) + r)
22    gamma = 0.25*dt*((sigma**2)*(I**2) +r*I)
23
24    M2 = np.diag(alpha[2:M], -1) + np.diag(1+beta[1:M]) +np.
diag(gamma[1:M-1], 1)
25
26    payoffs = np.maximum(0, K-boundary_conds[1:M])
27    past_values = payoffs
28    boundary_values = K * np.exp(
29        -r*dt*(N-J))
30    aux = np.zeros(M-1)
31    new_values = np.zeros(M-1)
32
33    for j in reversed(range(N)):
34        aux[0] = alpha[1]*(boundary_values[j-1] +
boundary_values[j])
35        rhs = np.dot(M2,past_values) + aux
36        old_values = np.copy(past_values)
37        error = sys.float_info.max
```

## A' Παράρτημα

---

```
38
39     while tol < error:
40         new_values[0] =max(payoffs[0], old_values[0] +
41         omega/(1-beta[1]) * (rhs[0] - (1-beta[1])*old_values[0] +
42         gamma[1]*old_values[1]))
43
44         for k in range(M-2)[1:]:
45             new_values[k] = max(payoffs[k], old_values[k]
46             + omega/(1-beta[k+1]) * (rhs[k] + alpha[k+1]*new_values[k
47             -1] -(1-beta[k+1])*old_values[k] + gamma[k+1]*old_values[k
48             +1]))
49
50             new_values[-1] = max(payoffs[-1], old_values[-1]
51             +omega/(1-beta[-2]) *(rhs[-1] + alpha[-2]*new_values[-2] -
52             (1-beta[-2])*old_values[-1]))
53
54             error = np.linalg.norm(new_values-old_values)
55             old_values = np.copy(new_values)
56
57             past_values = np.copy(new_values)
58
59         values = np.concatenate( ([boundary_values[0]],
60         new_values, [0]))
61
62     t=np.linspace(0,T,N-1)
63
64     SF = np.full((N-1),np.float( K))
65     if plot==False:
66         return np.interp(      S0, S, values)
67
68     for i in range(N-2):
69         for j in range(M-2):
70             if abs(V_plot[j,i]-payoffs[j])>1e-10:
71                 SF[i] = S[j]
72                 break
73
74     return( np.interp(      S0, boundary_conds , values),SF,t)
```

## A' Παράρτημα

---

### 4) Σύγκριση ταχύτητας και ακρίβειας των μεθόδων σε σχέση με τον αριθμό των βημάτων N του χρόνου

```
1 import numpy as np
2 import time
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import warnings
5 warnings.filterwarnings("ignore")
6
7 CN=np.zeros(20)
8 BM=np.zeros(20)
9 MC=np.zeros(20)
10 timeCN=np.zeros(20)
11 timeBM=np.zeros(20)
12 timeMC=np.zeros(20)
13
14 for i in range(20):
15     startBM=time.time()
16     BM[i]=Am(50,50,0.1,0.4,1,i*100+100,False)
17     endBM=time.time()
18     timeBM[i]=endBM-startBM
19
20     startCN=time.time()
21     CN[i]=AMCN(50,50,0.1,0.4,1,i*100+100,100,1.2,1e-5,False)
22     endCN=time.time()
23     timeCN[i]=endCN-startCN
24
25     startMC=time.time()
26     MC[i]=LSM(50,50,0.1,0.4,1,i*100+100,100000)
27     endMC=time.time()
28     timeMC[i]=endMC-startMC
29
30     import matplotlib.pyplot as plt
31
32
33 plt.axhline(y=5.979139420186129,color='black',linestyle='--',
34            label='Real Value')
35 plt.plot(CN,label='Crank-Nicolson')
36 plt.plot(MC,label='Monte Carlo')
37 plt.plot(BM,label='Binomial Model')
38 plt.title('Accuracy of the methods')
39 plt.xlabel('N steps(100:100:2000)')
40 plt.ylabel('Option Price')
41 plt.grid()
42 plt.ylim(5.90,6.0)
43 plt.show()
44
45
```

## A' Παράρτημα

---

```
46
47 plt.axhline(y=0.001,color='black',linestyle='--')
48 plt.axhline(y=-0.001,color='black',linestyle='--')
49 plt.plot(CN-5.979139420186129,label='Crank-Nicolson')
50 plt.plot(MC-5.979139420186129,label='Monte Carlo')
51 plt.plot(BM-5.979139420186129,label='Binomial Model')
52 plt.title('Accuracy of the methods')
53 plt.xlabel('N steps(100:100:2000)')
54 plt.ylabel('Error')
55 plt.grid()
56 plt.ylim(-0.06,0.03)
57 plt.legend()
58
59 plt.show()
60
61
62 plt.plot(timeCN,label='Crank-Nicolson')
63 plt.plot(timeMC,label='Monte Carlo')
64 plt.plot(timeBM,label='Binomial Model')
65 plt.title('Computational Time')
66 plt.xlabel('N steps(100:100:2000)')
67 plt.ylabel('time(sec)')
68 plt.grid()
69 plt.legend()
70
71 plt.show()
72
```

## A' Παράρτημα

---

### 5) Μεταβολή της Least Square Monte Carlo σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων

```
1 import numpy as np
2 import time
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 mc=np.zeros(20)
5 timemc=np.zeros(20)
6
7 for i in range(20):
8     startmc=time.time()
9     mc[i]=LSM(50,50,0.1,0.4,1,200,5000*i+5000)
10    endmc=time.time()
11    timemc[i]=endmc-startmc
12
13 #convergence
14 plt.axhline(y=5.979139420186129,color='black',linestyle='--',
15    label='Real Value')
16 plt.plot(mc,label='Monte Carlo')
17 plt.title('Convergence of Least Square Monte Carlo')
18 plt.xlabel('M simulations(5000:5000:100000)')
19 plt.ylabel('Option Price')
20 plt.grid()
21 plt.ylim()
22 plt.legend()
23 plt.show()
24 #error
25 plt.plot(mc-5.979139420186129,label='Monte Carlo')
26 plt.title('Accuracy of the Least Square Monte Carlo')
27 plt.xlabel('M simulations(5000:5000:100000)')
28 plt.ylabel('Error')
29 plt.grid()
30 plt.ylim()
31 plt.legend()
32 plt.show()
33 #computational time
34 plt.plot(timemc,label='Monte Carlo')
35
36 plt.title('Computational Time of Least Square Monte Carlo')
37 plt.xlabel('M simulations(5000:5000:100000)')
38 plt.ylabel('time(sec)')
39 plt.grid()
40
41 plt.legend()
42 plt.show()
```

### 6) Διάγραμμα ελεύθερου ορίου για κάθε μέθοδο

---

## A' Παράρτημα

---

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 def plot_free_boundary(K,S0,r,sigma,T):
4     fig = plt.figure(figsize=(9,5))
5
6     plt.axhline(y=K,color='black',linestyle='--',label='
7     Strike Price')
8     plt.plot(AMCN(K,S0,r,sigma,T,200,1000,1.2,1e-5,True)[2],
9     AMCN(K,S0,r,sigma,T,200,1000,1.2,1e-5,True)[1],label="
10    Crank-Nicolson")
11    plt.plot(Am(K,S0,r,sigma,T,10000,True)[2],Am(K,S0,r,sigma
12    ,T,10000,True)[1],label="Binomial Model")
13    plt.plot(LSM(K,S0,r,sigma,T,100,100000)[2],SF,label="
14    Monte Carlo")
15    plt.legend(loc="upper left")
16    plt.text(0.2, 44, "Continuation region", fontsize=10)
17    plt.text(0.8, 34, "Stopping region", fontsize=10)
18    plt.xlabel("Time")
19    plt.ylabel("$S_f$")
20    plt.title("Free boundary")
21
22    plt.show()
```

## 7) Μεταβολή του ελεύθερου ορίου για τις μεθόδους Crank-Nicolson και διωνυμικό μοντέλο σε σχέση με $r$

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4
5 fig, axs = plt.subplots(1,2,figsize=(9, 6))
6 fig.suptitle('Free boundary with relation to interest rate')
7
8 axs[0].plot(Am(50,50,0.15,0.4,1,1000,True)[2],Am
9     (50,50,0.15,0.4,1,1000,True)[1],label='r=0.15')
10 axs[0].plot(Am(50,50,0.1,0.4,1,1000,True)[2],Am
11     (50,50,0.1,0.4,1,1000,True)[1],label='r=0.1')
12 axs[0].plot(Am(50,50,0.05,0.4,1,1000,True)[2],Am
13     (50,50,0.05,0.4,1,1000,True)[1],label='r=0.05')
14 axs[1].plot(AMCN(50,50,0.15,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[2],
15     AMCN(50,50,0.15,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[1],label='r
16     =0.15')
17 axs[1].plot(AMCN(50,50,0.1,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[2],
18     AMCN(50,50,0.1,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[1],label='r
19     =0.1')
20 axs[1].plot(AMCN(50,50,0.05,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[2],
21     AMCN(50,50,0.05,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[1],label='r
```

## A' Παράρτημα

---

```
    =0.05')
14 axs[0].legend(loc = 'best')
15 axs[1].legend(loc = 'best')
16 axs[0].grid()
17 axs[1].grid()
18 axs[0].xlabel("time")
19 axs[0].ylabel("SF")
20 axs[1].xlabel("time")
21 axs[1].ylabel("SF")
22 axs[0].title('Binomial Model')
23 axs[1].title('Crank-Nicolson')
24
25
```

### 8) Μεταβολή του ελεύθερου ορίου για τις μεθόδους Crank-Nicolson και διωνυμικό μοντέλο σε σχέση με $\sigma$

---

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4
5 fig, axs = plt.subplots(1,2,figsize=(9, 6))
6 fig.suptitle('Free boundary with relation volatility')
7
8 axs[0].plot(Am(50,50,0.1,0.8,1,1000,True)[2], Am
9             (50,50,0.1,0.8,1,1000,True)[1], label='σ =0.8')
10 axs[0].plot(Am(50,50,0.1,0.4,1,1000,True)[2], Am
11             (50,50,0.1,0.4,1,1000,True)[1], label='σ=0.4')
12 axs[0].plot(Am(50,50,0.1,0.2,1,1000,True)[2], Am
13             (50,50,0.1,0.2,1,1000,True)[1], label='σ=0.2')
14 axs[1].plot(AMCN(50,50,0.1,0.8,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[2],
15            AMCN(50,50,0.1,0.8,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[1], label='σ
16            =0.8')
17 axs[1].plot(AMCN(50,50,0.1,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[2],
18            AMCN(50,50,0.1,0.4,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[1], label='σ
19            =0.4')
20 axs[1].plot(AMCN(50,50,0.1,0.2,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[2],
21            AMCN(50,50,0.1,0.2,1,200,1000,1.5,1e-5,True)[1], label='σ
22            =0.2')
23
24 axs[0].legend(loc = 'best')
25 axs[1].legend(loc = 'best')
26
27 axs[0].grid()
28 axs[1].grid()
29
30 axs[0].set_xlabel("time")
31 axs[0].set_ylabel("SF")
32 axs[1].set_xlabel("time")
33 axs[1].set_ylabel("SF")
34
35 axs[0].set_title('Binomial Model')
```



## A' Παράρτημα

---

```
23 axes[1].set_title('Crank-Nicolson')  
24  
25  
26
```

## A' Παράρτημα

---

### 9) Μεταβολή της αξίας ενός δικαιώματος σε σχέση με τα $K, \rho, \sigma$

```
1 import numpy as np
2 import time
3 import warnings
4 warnings.filterwarnings("ignore")
5
6 #interest rate
7 CNr=np.zeros(20)
8 BMr=np.zeros(20)
9 MCr=np.zeros(20)
10 timeCnr=np.zeros(20)
11 timeBMr=np.zeros(20)
12 timeMcr=np.zeros(20)
13
14 for i in range(20):
15     startBMr=time.time()
16     BMr[i]=Am(50,50,0.01*i+0.01,0.4,1,1000,False)
17     endBMr=time.time()
18     timeBMr[i]=endBMr-startBMr
19
20     startCnr=time.time()
21     CNr[i]=AMCN(50,50,0.01*i+0.01,0.4,1,100,500,1.5,1e-5,
22 False)
23     endCnr=time.time()
24     timeCnr[i]=endCnr-startCnr
25
26     startMcr=time.time()
27     MCr[i]=LSM(50,50,0.01*i+0.01,0.4,1,50,50000)[0]
28     endMcr=time.time()
29     timeMcr[i]=endMcr-startMcr
30
31 r=np.arange(0.01,0.21,0.01)
32 plt.plot(r,CNr,label='Crank-Nicolson')
33 plt.plot(r,MCr,label='Monte Carlo')
34 plt.plot(r,BMr,label='Binomial Model')
35 plt.ylabel('Option price')
36 plt.xlabel('interest rate')
37
38 plt.grid()
39 plt.legend()
40
41
42 #volatility
43 CNs=np.zeros(20)
44 BMs=np.zeros(20)
45 MCs=np.zeros(20)
```

## A' Παράρτημα

---

```
46 timeCNs=np.zeros(20)
47 timeBMs=np.zeros(20)
48 timeMCs=np.zeros(20)
49
50
51 for i in range(20):
52     startBMs=time.time()
53     BMs[i]=Am(50,50,0.1,0.05*i+0.05,1,1000,False)
54     endBMs=time.time()
55     timeBMs[i]=endBMs-startBMs
56
57     startCNs=time.time()
58     CNs[i]=AMCN(50,50,0.1,0.05*i+0.05,1,100,500,1.5,1e-5,
59 False)
60     endCNs=time.time()
61     timeCNs[i]=endCNs-startCNs
62
63     startMCs=time.time()
64     MCs[i]=LSM(50,50,0.1,0.05*i+0.05,1,50,100000)[0]
65     endMCs=time.time()
66     timeMCs[i]=endMCs-startMCs
67
68 s=np.arange(0.05,1.05,0.05)
69 plt.plot(s,CNs,label='Crank-Nicolson')
70 plt.plot(s,MCs,label='Monte Carlo')
71 plt.plot(s,BMs,label='Binomial Model')
72 plt.ylabel('Option price')
73 plt.xlabel('volatility')
74
75 plt.grid()
76 plt.legend()
77
78 #strike price
79 CNk=np.zeros(20)
80 BMk=np.zeros(20)
81 MCK=np.zeros(20)
82 timeCNk=np.zeros(20)
83 timeBMk=np.zeros(20)
84 timeMCK=np.zeros(20)
85
86 for i in range(20):
87     startBMk=time.time()
88     BMk[i]=Am(50,41+i,0.1,0.4,1,1000,False)
89     endBMs=time.time()
90     timeBMk[i]=endBMs-startBMs
91
92     startCNk=time.time()
93     CNk[i]=AMCN(41+i,50,0.1,0.4,1,100,500,1.5,1e-5,False)
94     endCNk=time.time()
```

## A' Παράρτημα

---

```
94     timeCNk[i]=endCNk - startCNk
95
96     startMck=time.time()
97     Mck[i]=LSM(50,41+i,0.1,0.4,1,50,100000)[0]
98     endMck=time.time()
99     timeMck[i]=endMck - startMck
100
101
102 k=np.arange(41,61,1)
103 plt.plot(k,CNk,label='Crank-Nicolson')
104 plt.plot(k,Mck,label='Monte Carlo')
105 plt.plot(k,BMk,label='Binomial Model')
106 plt.ylabel('Option price')
107 plt.xlabel('Strike price')
108
109 plt.grid()
110 plt.legend()
111
112
```

## Βιβλιογραφία

---

- [1] Α.Ν.Γιαννακόπουλος ,*Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική*, Τόμος Ι:Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση ,2003
- [2] Α.Ν.Γιαννακόπουλος ,*Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική*, Τόμος ΙΙ:Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική ,2004
- [3] Χελιώτης ,Δ. , *Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο],Κάλλιπος,Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις ,2015
- [4] Goran Peskir ,Albert Shiryaev. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Birkhäuser Basel(2006).
- [5] Λουλάκης, Μ. . *Εισαγωγή στη μαθηματική χρηματοοικονομία* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις,2015.
- [6] Shreve, Steven E. *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Vol. 11. New York: springer, 2004.
- [7] Black, Fischer, and Myron Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–54,1973. JSTOR, <http://www.jstor.org/stable/1831029>. Accessed 21 Mar. 2023.
- [8] Denis Veliu , Roberto De Marchis , Mario Marino and Antonio Luciano Martire. "An Alternative Numerical Scheme to Approximate the Early Exercise Boundary of American Options," *Mathematics*, MDPI, vol. 11(1), pages 1-12,2022
- [9] Brandimarte, Paolo."*Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction*," John Wiley and Sons, 2013.
- [10] Seydel, Rüdiger, and Rüdiger Seydel.*Tools for computational finance*..Vol. 3. Berlin: Springer, 2006.
- [11] Glasserman, Paul.*Monte Carlo methods in financial engineering*. Vol. 53. New York: springer, 2004.

## Βιβλιογραφία

---

[12]Longstaff, Francis A., and Eduardo S. Schwartz. *"Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach."* The review of financial studies 14.1 : 113-147.2001

[13][https://en.wikipedia.org/wiki/Crank%E2%80%93Nicolson\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Crank%E2%80%93Nicolson_method)

[14]Cryer, Colin W. *"The Solution of a Quadratic Programming Problem Using Systematic Overrelaxation."* SIAM Journal on Control 9, no. 3 : 385–92, (August 1971).