



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Ευκαμπτών Επιμήκων
Σωμάτων Υποκειμένων σε Μεγάλες Μετατοπίσεις και
Περιστροφές στο Θαλασσιο Περιβάλλον**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Μ. ΚΑΤΣΑΟΥΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Σ. ΜΑΥΡΑΚΟΣ, ΟΜ. ΚΑΘ. ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Ευκαμπτών Επιμηκών
Σωμάτων Υποκειμένων σε Μεγάλες Μετατοπίσεις και
Περιστροφές στο Θαλασσιο Περιβάλλον**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Μ. ΚΑΤΣΑΟΥΝΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΣΠ. ΜΑΥΡΑΚΟΣ, ΟΜ. ΚΑΘ. ΕΜΠ, ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΕΜΜ. ΣΑΜΟΥΗΛΙΔΗΣ ΚΑΘ. ΕΜΠ

Γρ.ΓΡΗΓΟΡΟΠΟΥΛΟΣ ΚΑΘ. ΕΜΠ

Ι. ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ ΚΑΘ. ΕΜΠ

Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΟΜ.ΚΑΘ. ΕΜΠ

Κ. ΜΠΕΛΙΜΠΑΣΑΚΗΣ ΚΑΘ. ΕΜΠ

ΕΥΣΤ. ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ Τ.ΚΑΘ. ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2023

στην Πόπη

στην Εύη

στη Μαρία

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα.....	1
Περίληψη - Abstract	4
Προλεγόμενα.....	6
1 Εισαγωγή	8
1.1 Εύκαμπτοι σωλήνες στη θαλάσσια τεχνολογία.....	8
1.2 Βιβλιογραφική επισκόπηση.....	11
1.3 Διάγραμμα Διατριβής.....	13
2 Αναλυτικό μοντέλο εύκαμπτων δοκών.....	15
2.1 Περιγραφή γεωμετρίας και κινηματική δοκών	16
2.2 Παραμετροποίηση περιστροφών	18
2.3 Σταθερά και κινούμενα πλαίσια αναφοράς	20
2.4 Παραμορφώσεις εύκαμπτης δοκού	21
2.5 Κινητική δοκών	22
2.6 Διαφορικές εξισώσεις στατικής ισορροπίας.....	23
2.7 Καταστατικές εξισώσεις.....	25
2.8 Εξωτερικά φορτία.....	25
2.8.1 Ενεργό βάρος και δρώσα τάση.....	25
2.8.2 Υδροδυναμικές δυνάμεις.....	26
2.9 Γωνίες Euler	27
2.10 Δοκός χωρίς διατμητικές παραμορφώσεις	28
2.11 Αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών.....	29

3	Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός εύκαμπτου κατακόρυφου φορέα	31
3.1	Εξισώσεις στατικής ισορροπίας κατακόρυφης διάταξης	32
3.2	Οριακές συνθήκες.....	34
3.3	Στρεπτικές ροπές λυγισμού	36
3.3.1	Περιπτώσεις χωρίς περιορισμούς εγκάρσιων μετατοπίσεων στα άκρα. 36	
3.3.2	Περιπτώσεις με περιορισμό εγκάρσιων μετατοπίσεων στα άκρα.....	42
3.3.3	Ασυμπτωτική λύση για πολύ εύκαμπτους φορείς με εγκάρσιο περιορισμό στα άκρα.....	46
4	Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων	49
4.1	Παραμετροποίηση περιστροφών	49
4.2	Οι στοιχειώδεις μεταβολές των παραμορφώσεων.....	52
4.3	Διακριτοποίηση της γεωμετρίας.....	53
4.4	Εσωτερικά φορτία	56
4.4.1	Συνεισφορά εφελκυστικών και διαμητικών παραμορφώσεων.....	56
4.4.2	Συνεισφορά καμπτικών παραμορφώσεων	58
4.4.3	Ολικοί πίνακες.....	59
4.5	Επίλυση στατικού προβλήματος	60
5	Χρονική ολοκλήρωση.....	64
5.1	Μεταβολές στη μέση χρονική στιγμή	66
5.2	Μεταβολές δυναμικής και κινητικής ενέργειας	67
6	Παραδείγματα εφαρμογής	71
6.1	Μεγάλες περιστροφές ελαστικής δοκού.....	71
6.2	Δυναμική ανάλυση εύκαμπτου σωλήνα (riser) σε διάταξη Lazy wave.	73
6.3	Συγκρίσεις με αποτελέσματα του API (1992), BULLETIN 16J.....	77
6.4	Μεταλυγισμική ανάλυση εύκαμπτου σωλήνα, υπό την επίδραση στρεπτικών φορτίων	81
6.5	Μεγάλες καμπτικές καταπονήσεις ελαστικής δοκού	82
6.6	Αμφιέρειστη δοκός σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο	83

7 Συμπεράσματα	85
7.1 Προτάσεις μελλοντικής έρευνας	87
7.2 Δημοσιεύσεις	88
Παράρτημα Α.....	90
Βιβλιογραφία	96

Περίληψη - Abstract

Εύκαμπτοι σωλήνες και γενικά εύκαμπτες επιμήκεις κατασκευές χρησιμοποιούνται σε πληθώρα εφαρμογών στη θαλάσσια τεχνολογία. Στην υπεράκτια βιομηχανία πετρελαίου και κατά τις διάφορες φάσεις της διαδικασίας ανεύρεσης, παραγωγής και μεταφοράς του από εγκαταστάσεις στη θάλασσα απαντώνται συστήματα σωλήνων είτε αποκλειστικά για τη μεταφορά του υγρού ή και για τη συγκρότηση διατάξεων εξόρυξης, αποτελώντας κρίσιμο στοιχείο των συνολικών συστημάτων. Λόγω της μεγάλης τους ευκαμψίας τα σώματα αυτά υπόκεινται σε ιδιαίτερες παραμορφώσεις, υποκείμενα στις δράσεις του θαλάσσιου περιβάλλοντος.

Αντικείμενο της διατριβής είναι η ανάπτυξη κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου για τα εύκαμπτα αυτά σώματα, με σκοπό την επίλυση των κινήσεών τους στο πεδίο του χρόνου. Αναπτύχθηκε αρχικά μοντέλο βασισμένο στη παραμετροποίηση των γωνιών περιστροφής των εγκαρσίων διατομών με βάση τις γνωστές γωνίες Euler και χρησιμοποιήθηκε για αναλυτικές λύσεις στο πρόβλημα του λυγισμού κατακόρυφων σωλήνων υπό την επίδραση στρεπτικής ροπής στα άκρα, αξονικής δύναμης και βαρύτητας. Για τις περιπτώσεις μεγάλης ευκαμψίας εξήχθησαν ασυμπτωτικές τιμές λυγισμού μέσω ολοκληρωμάτων των ελλিপών συναρτήσεων Airy.

Για το γενικότερο πρόβλημα της δυναμικής συμπεριφοράς εφαρμόστηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, ακολουθώντας μια γεωμετρικά ακριβή διατύπωση, με παραμετροποίηση των περιστροφών στο $SO(3)$, για τη δυνατότητα προσομοίωσης κάθε μεγέθους περιστροφών. Ακολουθώντας την ενεργειακή μέθοδο Rayleigh–Ritz, η παραμορφωμένη γεωμετρία καθώς και οι μετατοπίσεις προσεγγίζονται με ισοπαραμετρικά πολώνυμα παρεμβολής. Για την επίτευξη αντικειμενικότητας του στοιχείου και ανεξαρτησίας από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται σωματοπαγής παρεμβολή των περιστροφών, στον εφαπτομενικό χώρο μεταβολών των γωνιών κάθε κόμβου (διανυσματικός χώρος $T_{R}SO3$). Με τον τρόπο αυτό επιτεύχθηκε η απλούστευση των εκφράσεων παραμορφώσεων καθώς και η πλήρης γραμμικοποίηση των εφαπτομενικών μητρώων δυσκαμψίας. Για την ελαστική ενέργεια των διατμητικών παραμορφώσεων χρησιμοποιήθηκε μέθοδος ολοκλήρωσης χαμηλότερης τάξης με παρεμβολή των διατμητικών παραμορφώσεων στα σημεία της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η μέθοδος είναι γενική ως προς τον αριθμό των κόμβων του στοιχείου, με ακρίβεια δεύτερης (2 κόμβοι) και τέταρτης τάξης (3 και 4 κόμβοι).

Για το δυναμικό πρόβλημα αναπτύχθηκε μέθοδος χρονικής ολοκλήρωσης με εφαρμογή της αρχής HLVA (Hamilton law of varying action) προσαρμοσμένη στο πεδίο των πεπερασμένων περιστροφών. Η ενεργειακή βάση της μεθόδου της προσδίδει συμπλεκτικό χαρακτήρα με ιδιαίτερα ευνοϊκά χαρακτηριστικά για τη διατήρηση της ορμής αλλά και της μηχανικής ενέργειας του συστήματος. Ειδικότερα, σε συντηρητικά προβλήματα η μέθοδος διατηρεί επακριβώς τη συνολική γραμμική και γωνιακή ορμή, ενώ

έχει ιδιαίτερα καλή συμπεριφορά στη διατήρηση της συνολικής μηχανικής ενέργειας. Η αναπτυγμένη μέθοδος χρονικής ολοκλήρωσης είναι ενός βήματος με ακρίβεια δεύτερης τάξης.

Η απόδοση των αριθμητικών μεθοδολογιών παρουσιάζεται με επιλύσεις υποδειγματικών προβλημάτων από τη βιβλιογραφία αλλά και με συγκρίσεις με δημοσιευμένα αποτελέσματα αναλύσεων πραγματικών κατασκευών.

Flexible slender structures, like pipes and risers, are used in a variety of applications in the marine industry. Especially in the offshore oil industry sector and during the various phases of oil production and transportation from facilities at sea, pipe systems are used either exclusively for the conveyance of liquids or for the completion of extraction facilities, being a critical element of the overall systems. Due to their large flexibility and under the actions of the marine environment, these structures can be seriously deformed, subjected to large displacements.

The thesis presents a nonlinear numerical model for the analysis of the motion of such flexible bodies in the time domain. A formulation based on the parameterization of the cross section rotation angles using the well-known Euler angles is initially developed and used for analytical solutions to the problem of buckling of vertical beams under the influence of end torque, axial force and gravity. For the cases of high flexibility, asymptotic buckling values were approximated under the above loads through integrals of incomplete Airy functions.

For the more general problem of dynamic behavior, special finite elements were developed, applying a geometrically exact formulation, with rotations parameterized in $SO(3)$ giving the possibility of simulating any size of rotations. The development follows the Rayleigh–Ritz methodology of variational energy methods. The deformed geometry is approximated by isoparametric interpolation polynomials. To achieve objectivity of the element and independence from a specific coordinate system, corotational interpolation of the rotations was used, in the tangential space of the rotation of each node (vector space $T_{R}SO3$). In this way, the simplification of the expressions for the calculation of bending and shear deformations as well as the complete linearization of the tangent stiffness matrices was achieved. For the elastic energy of the shear deformations, a lower order integration method was used by interpolating the shear deformations at the integration points. The method is general in terms of the number of nodes having accuracy of second (elements with two nodes) and fourth order (elements with three or four nodes).

For the dynamic problem, a time integration method is developed applying the HLVA principle (Hamilton law of varying action) adapted to the field of finite rotations. The energy basis of the method gives it a symplectic character with particularly favorable characteristics for maintaining the momentum and also the mechanical energy of the system. In conservative problems the method exactly conserves the total linear and angular momentum, while it has a particularly good behavior in the conservation of the total mechanical energy. The developed time integration method is one-step with second-order accuracy.

The performance of the numerical methodologies is presented by solving problems from the literature as well as by comparisons with published results of analyzes of real structures.

Προλεγόμενα

Συνήθως οι υποψήφιοι διδάκτορες ευχαριστούν όσους τους βοήθησαν να ολοκληρώσουν τη, πάντα δύσκολη, εκπόνηση της εργασίας τους. Εγώ έχω να ευχαριστήσω περισσότερους και για περισσότερους λόγους.

Καθώς ο δικός μου δρόμος μάκρυνε, ακολουθώντας την επαγγελματική πλέον πορεία μου, οι αρωγοί μου στην εκπαίδευση έγιναν και οδηγοί στα πρώτα έργα μου. Αφετηρία οπωσδήποτε ο Βασίλης Παπάζογλου, τη μνήμη του οποίου τιμώ με ευγνωμοσύνη για την πατρική φροντίδα και καθοριστική βοήθεια στα χρόνια της νεότητας. Δίπλα του ο νυν επιβλέπων της διατριβής, ομότιμος καθηγητής κ. Σπύρος Μαυράκος, με τις οδηγίες του οποίου ολοκλήρωσα σειρά ερευνητικών προγραμμάτων με πλούσιο επιστημονικό ενδιαφέρον. Τον ευχαριστώ που και τώρα αγωνιά και με συνδράμει. Και βέβαια ο ομότιμος καθηγητής Θόδωρος Λουκάκης, ακαδημαϊκός και επαγγελματικός μου δάσκαλος, που με περιέβαλε με εμπιστοσύνη και μου έδωσε την ευκαιρία συμμετοχής σε πλήθος έργων, πάντοτε με υποστήριξη και καθοδήγηση.

Για τις ευκαιρίες τόσων συνεργασιών, την ενίσχυση και την εκτίμηση που με περιέβαλε, ευχαριστώ τον καθηγητή Μανόλη Σαμουηλίδη,

Θα ήταν παράβλεψή μου επίσης, να μην ευχαριστήσω τους διευθυντές του εργαστηρίου ANYM καθηγητές Γρηγόρη Γρηγορόπουλο και Γιώργο Τζαμπίρα για τη φιλία τους και τη μέριμνα της καθημερινής μου εργασίας.

Για την ιδιαίτερα τιμητική για εμένα διάθεση συμμετοχής στην εξέταση της διατριβής μου ευχαριστώ τον πρότανη του Ιδρύματος καθηγητή Ιωάννη Χατζηγεωργίου και τους ομότιμους καθηγητές Γεώργιο Τριανταφύλλου και Ευστάθιο Θεοτόκογλου.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον κοσμήτορα της Σχολής καθηγητή Κώστα Μπελιμπασάκη, για την ενθάρρυνση, φροντίδα και τις διαρκείς παραινέσεις για την ολοκλήρωση της διατριβής.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον πολύτιμο φίλο, λέκτορα Στέλιο Πολύζο, για την αμέριστη επιστημονική βοήθεια και προσωπική υποστήριξη.

Αισθάνομαι υποχρέωση να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους μου στο εργαστήριο ANYM για την πολύχρονη αγαστή συνεργασία τους.

Και επιστρέφοντας στην αρχή, αισθάνομαι ευεργετημένος από την πολύχρονη και αδελφική φιλία του καθηγητή Νίκου Τσούβαλη, συμπαραστάτη μου σε όλες τις προσωπικές και επαγγελματικές μου στιγμές.

Η οικογένειά μου, βοηθός αλλά και συνεργάτης, μου συμπαραστάθηκε σε όλη αυτή τη διαδρομή. Την ευχαριστώ.

1

Εισαγωγή

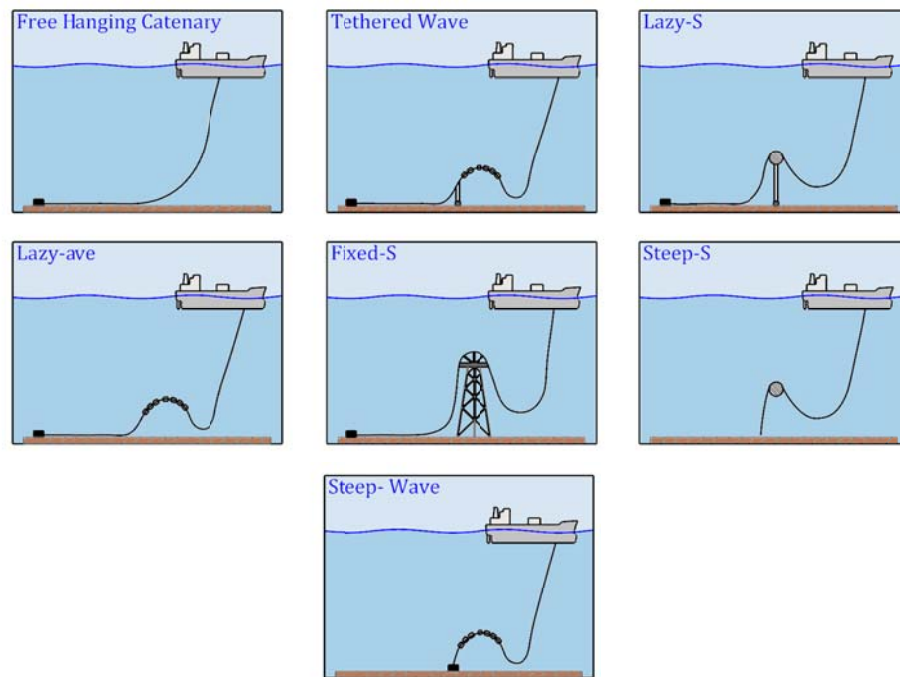
1.1 Εύκαμπτοι σωλήνες στη θαλάσσια τεχνολογία

Στην υπεράκτια βιομηχανία, κατά τις διάφορες φάσεις της συνολικής διαδικασίας ανεύρεσης, παραγωγής και μεταφοράς πετρελαίου ή φυσικού αερίου από εγκαταστάσεις στη θάλασσα χρησιμοποιούνται ευρύτατα συστήματα σωληνώσεων είτε αποκλειστικά για τη μεταφορά του υγρού ή και για τη συγκρότηση διατάξεων εξόρυξης. Σε αντίθεση με τη περίπτωση των εφαρμογών ξηράς, όπου η σταθερότητα του περιβάλλοντος επιτρέπει τη χρήση σχετικά άκαμπτων δικτύων, η περίπτωση της θάλασσας απαιτεί τη χρήση διατάξεων ικανών να εξυπηρετούν τις συγκριτικά μεγαλύτερες μεταβολές της σχετικής θέσης των υπό σύνδεση άκρων.

Τα συνήθη συστήματα που χρησιμοποιούνται κατά τη φάση της εξόρυξης χρησιμοποιούν χαλύβδινους σωλήνες σε σχεδόν κατακόρυφες διατάξεις [Dareing D.W. 2012], με σχετικά μεγάλη καμπτική αντοχή, οι οποίοι περικλείουν το στέλεχος διάτρησης καθώς και το υγρό εξόρυξης. Οι κεντρικοί σωλήνες συνοδεύονται από παράλληλους μικρότερους, για την διαχείριση του συστήματος. Το συγκρότημα αυτό συνδέεται με διατάξεις προέντασης στο πλωτό γεωτρύπανο και με σύστημα αποφυγής υπερπίεσεων στον πυθμένα, όπου βρίσκεται και η γεώτρηση.

Κατά τη φάση της παραγωγής και μεταφοράς του πετρελαίου χρησιμοποιούνται είτε συστήματα υπό προένταση αντίστοιχα των παραπάνω (tensioned production risers), είτε συστήματα παράλληλων ή και απλών εύκαμπτων σωλήνων, συνήθως κατασκευασμένων από σύνθετα υλικά (compliant, flexible risers). Οι εύκαμπτοι αυτοί σωλήνες χρησιμοποιούνται τόσο για τη μεταφορά του πετρελαίου από τον πυθμένα σε μια πλωτή

εξέδρα, όσο και για τη μετέπειτα μεταφορά του σε κάποιο δεξαμενόπλοιο ή σε πλωτό σταθμό αποθήκευσης, συγκροτούν δε ποικίλες διατάξεις, ανάλογα με την ειδικότερη εφαρμογή τους (Σχήμα 1.1). Η χρήση ή όχι υλικών πρόσθετης άντωσης (buoyancy modules), μπορεί να τα διαχωρίσει σε ‘buoyant’ ή ‘catenary risers’. Τα πρώτα παρουσιάζουν μικρό συνολικό βάρος στο νερό (λόγω της πρόσθετης άντωσης), σε αντίθεση με τα δεύτερα, των οποίων το σχήμα πλησιάζει αυτό της αλυσσοειδούς καμπύλης. Ανάλογα με τον τρόπο σύνδεσής τους στο πυθμένα, τα συστήματα εύκαμπτων σωλήνων διακρίνονται σε κατηγορίες όπως Lazy S, Lazy wave, Steep S, Steep wave, Free hanging, κλπ. (Σχήμα 1.1)



Σχήμα 1.1: Διατάξεις εύκαμπτων σωλήνων

Το κύριο πλεονέκτημα των εύκαμπτων σωλήνων είναι ότι μπορούν να παραλάβουν μεγάλες καμπτικές παραμορφώσεις, εξυπηρετώντας έτσι ένα μεγάλο εύρος μεταβολών στη σχετική απόσταση των άκρων τους. Συγκριτικά αναφέρεται [Fergestad D. and Løtveit S.A 2017] ότι μπορούν να υποστούν έως και 25 φορές μεγαλύτερη καμπυλότητα από χαλύβδινους σωλήνες.

Η κατασκευή των εύκαμπτων σωλήνων περιλαμβάνει μία εσωτερική στρώση πολυμερούς για την μόνωση του μεταφερόμενου υγρού και στη συνέχεια επάλληλες

στρώσεις πολυμερών υλικών και ελικοειδών χαλύβδινων λωρίδων αντοχής, για την ανάληψη της εσωτερικής πίεσης. Τέλος, το συγκρότημα θωρακίζεται από εξωτερικό πολυμερές στρώμα για την μόνωση από το θαλασσινό νερό και την αποφυγή διάβρωσης των εσωτερικών λωρίδων.

Τα συστήματα εύκαμπτων σωλήνων υπερέχουν επίσης των άκαμπτων επειδή παρουσιάζουν ευκολία κατά τη μεταφορά, αποθήκευση και εγκατάστασή τους. Οι εύκαμπτοι σωλήνες παράγονται από τη βιομηχανία σε μεγάλα μήκη, μειώνοντας έτσι τον απαιτούμενο αριθμό συνδέσεων. Επίσης, τα συστήματα αυτά δεν χρειάζονται διατάξεις προέντασης, ενώ η σύνδεσή τους στα άκρα είναι σχετικά απλή. Το γεγονός ότι μεταβάλλουν εύκολα το σχήμα τους στο χώρο, έχει σαν αποτέλεσμα την απρόσκοπτη λειτουργία τους, ακόμα και όταν το συνδεδεμένο σε κάποιο πλωτό άνω άκρο τους εκτελεί μεγάλες αργές κινήσεις.



Σχήμα 1.2: Τυπική κατασκευή εύκαμπτου σωλήνα [Vaz & Rizzo 2011]

Το πρόβλημα του σχεδιασμού των παραπάνω συστημάτων προσεγγίζεται σε δύο γενικά κλίμακες. Η πρώτη αφορά την ανάλυση της γενικής συμπεριφοράς, την εξέταση δηλαδή των κινήσεων και των καταπονήσεων των σωλήνων όταν υπόκεινται στα φορτία του κυματισμού, των ρευμάτων, των εσωτερικών και εξωτερικών πιέσεων, των επαφών με τα γειτονικά όρια (πυθμένας θάλασσας) κλπ. Η δεύτερη προσέγγιση αφορά στην εξέταση της κατασκευής στο επίπεδο της διατομής, με την επιλογή των υλικών, τη σχεδίαση των ανθεκτικών θωρακίσεων και στρώσεων, και την εξέταση της αντοχής στα φορτία τα υπολογιζόμενα από τη πρώτη και στις συνθήκες του περιβάλλοντος. Βέβαια, και οι δύο θεωρήσεις είναι αλληλένδετες, καθώς στοιχεία της μιας είναι αναγκαία και χρησιμοποιούνται από την άλλη, σε ένα επαναληπτικό κύκλο σχεδίασης. Για το γενικό σχεδιασμό απαιτούνται αυτονόητα οι μηχανικές ιδιότητες της διατομής, σαν

ολοκληρωμένο τοπικό μέγεθος, ενώ οι προκύπτουσες καταπονήσεις από το γενικό μοντέλο οδηγούν τον επαρκή σχεδιασμό της τοπικής αντοχής. Η εγγενής ιδιότητα των εύκαμπτων στοιχείων να παρουσιάζουν χαμηλή αντοχή σε εγκάρσιες μετατοπίσεις έχει σαν αποτέλεσμα να παραμορφώνονται σε τρισδιάστατες καμπύλες σύνθετης γεωμετρίας, στη περίπτωση χαμηλής αξονικής δύναμης, ή ακόμα και να επέρχεται λυγισμός στην περίπτωση θλιπτικών αξονικών φορτίων, ή και στρεπτικών φορτίσεων. Περιοχή στην οποία μπορούν να εμφανιστούν αυτά τα φαινόμενα είναι το σημείο επαφής με τον πυθμένα (Touch down point TDP), όπου η αξονική δύναμη έχει τη μικρότερη τιμή. Σε περίπτωση επιβαλλόμενης στρεπτικής ροπής, υφίσταται ο κίνδυνος της δημιουργίας βρόγχου και η επιδείνωση της εντατικής κατάστασης με καταστροφή των ελικοειδών ενισχύσεων και διάρρηξη των προστατευτικών στρώσεων.

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η εξέταση ιδιαίτερα μεγάλων μετατοπίσεων και στροφών στις σχετικές αναλύσεις δεν ήταν συνήθης, καθώς τα σχετικά μοντέλα περιλάμβαναν εξέταση αποκρίσεων σε επίπεδα κοντινά στη θέση ισορροπίας. Για το λόγο αυτό, η παρούσα διατριβή επικεντρώνεται στην ανάλυση του προβλήματος των τρισδιάστατων καταπονήσεων μεγάλου μεγέθους καθώς επίσης και στην εξέταση ειδικότερων θεμάτων αντοχής που αφορούν τις καταστάσεις λυγισμού στο κατώτερο άκρο παρουσία αξονικής δύναμης και στρεπτικής ροπής.

1.2 Βιβλιογραφική επισκόπηση

Οι μέθοδοι προσομοίωσης της δυναμικής συμπεριφοράς των εξεταζομένων σωμάτων όπως ήταν φυσικό ξεκίνησαν από αναλυτικές προσεγγιστικές θεωρήσεις και πλέον παρακολουθούν τις εξελίξεις της γενικότερης περιοχής της υπολογιστικής μηχανικής. Αρχικά αφορούσαν σωλήνες υψηλής ακαμψίας αλλά σταδιακά επεκτείνοντας και σε πιο εύκαμπτες κατασκευές. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη δεκαετία του '80, όπου ακολουθήθηκαν αναλυτικές προσεγγίσεις με χωρισμό της κατασκευής σε τμήματα και επίλυση με αναλυτικό τρόπο των συναφών διαφορικών εξισώσεων [Brouwers, 1982]. Στη συνέχεια ξεκίνησε η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων [Ahmad & Datta, 1992] με διακριτοποίηση της κατασκευής με στοιχεία δοκού (beam elements) και ανάλυση της χρονικής ιστορίας με χρήση των ιδιομορφών για το γραμμικό αλλά και το μη γραμμικό πρόβλημα, που αφορά τη μη γραμμικότητα των υδροδυναμικών φορτίων και την αλλαγή της θέσης λόγω της αργής οριζόντιας κίνησης της πλωτής πλατφόρμας. Βεβαίως, η

χρήση των ιδιομορφών του γραμμικού προβλήματος οδηγεί σε δυνατότητα προσομοίωσης περιορισμένου μεγέθους απομακρύνσεων.

Στη περίοδο αυτή ξεκίνησαν και οι προσπάθειες σύγκρισης των αποτελεσμάτων των ακολουθούμενων μεθοδολογιών, [Larsen,1992], όπου αναφέρονται συμμετοχές μετέπειτα διαδεδομένων εμπορικών προγραμμάτων που χρησιμοποιούσαν ήδη διάφορους συνδυασμούς πεπερασμένων στοιχείων δοκού και μεθόδων χρονικής ολοκλήρωσης.

Αναλυτικές προσεγγίσεις, πάντοτε χρήσιμες στην κατανόηση της συμπεριφοράς των κατασκευών, παρουσιάζονται για τη καμπτική ροπή στο σημείο επαφής με τον πυθμένα [Aranha, Martins & Pesce 1997], με τη δυναμική τάση [Aranha & Pinto 2001] και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού [Aranha, Pinto & DaSilva, 2001].

Τα πεπερασμένα στοιχεία δοκού χρησιμοποιούνται για την εξέταση του προβλήματος της παραμετρικής διέγερσης εγκάρσιας ταλάντωσης λόγω μεταβολών στην αξονική δύναμη [Park H., Jung D.H., 2002]. Για το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκαν και αναπτύγματα σε σειρές [Chatjigeorgiou and Mavrakos, 2005] ή σχήματα πεπερασμένων διαφορών [Chatjigeorgiou 2004] για χρονική ολοκλήρωση, το οποίο επεκτείνεται και στο 2D μη γραμμικό πρόβλημα [Chatjigeorgiou 2008] και στη συνέχεια στο 3D μη γραμμικό δυναμικό [Chatjigeorgiou, 2010]

Η εξέταση της επαφής με ανομοιόμορφο πυθμένα γίνεται με χρήση στοιχείου χωρίς περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας, που περιλαμβάνει όμως και στρεπτική ροπή [Chai, Varyani, Barltrop 2002], μια ιδιαίτερη προσέγγιση.

Στη περιοχή της εξέτασης των μεγάλων μετατοπίσεων αναλύθηκε η μεταλυγισμική συμπεριφορά κατακόρυφου σωλήνα σε διδιάστατη διάταξη [Vaz, Mascaro 2005], με αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης και ικανοποίηση των γεωμετρικών συνθηκών συμβατότητας παραμορφώσεων. Αργότερα, η ανάλυση επεκτάθηκε και σε πλάγιους σωλήνες [Vaz & Castelproggi 2012].

Στις προηγούμενες εργασίες, είτε εξετάζονταν μικρές περιστροφές της κατασκευής γύρω από τη θέση ισορροπίας, είτε η αντιμετωπίζονταν μόνο οι μεγάλες μετατοπίσεις με θεώρηση μικρών κλίσεων γύρω από τη παραμορφωμένη θέση.

Στη περίοδο αυτή εμφανίζονται στη περιοχή την θαλάσσιων εφαρμογών και οι πρώτες εργασίες με πεπερασμένα στοιχεία που ικανοποιούν τις γεωμετρικές συνθήκες των μεγάλων περιστροφών. Έτσι παρουσιάζεται μεθοδολογία ANCF (absolute node coordinate formulation) [Chai and Varyani 2006], σύμφωνα με την οποία οι περιστροφές της διατομής του σωλήνα προσδιορίζονται από τις συντεταγμένες κόμβων που βρίσκονται

πάνω στη διατομή. Η μέθοδος ANCF έχει το πλεονέκτημα να μη χρησιμοποιεί απευθείας περιστροφές σαν κινηματικούς αγνώστους, προσδίδοντας απλότητα στην ανάπτυξη, συνήθως όμως απαιτεί περισσότερους βαθμούς ελευθερίας.

Στη κατηγορία των ANCF ανήκουν και οι πρόσφατες εργασίες των [Li B., Wang C. 2023] και [Wang et al, 2023].

Η δεύτερη κατηγορία των μεθόδων για την ανάλυση μεγάλων περιστροφών είναι η ονομαζόμενη γεωμετρικά ακριβής μέθοδος, η οποία αναπτύχθηκε αρχικά από τους Simo και Vu-Quoc [Simo & Vu-Quoc 1988] και χρησιμοποιεί παραμετροποίηση της γεωμετρίας μέσω των ορθογωνίων μετασχηματισμών περιστροφής. Εφαρμογές της μεθοδολογίας αυτής παρουσιάζονται για εφαρμογές εύκαμπτων σωλήνων στις εργασίες [Neto, 2016a] και των συνεργατών [Neto et al, 2016], [Neto 2016b], [Neto et al 2015]. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στη παρούσα εργασία ανήκει στην παραπάνω κατηγορία της γεωμετρικά ακριβούς διατύπωσης, διαφοροποιούμενη από τις προηγούμενες ως προς τον τρόπο παρεμβολής των περιστροφών και τη μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης.

1.3 Διάγραμμα Διατριβής

Στην εισαγωγή παρουσιάστηκαν γενικά στοιχεία για την τεχνολογία των εύκαμπτων αγωγών και τη χρήση τους σε θαλάσσιες εφαρμογές. Ειδικότερα, περιγράφηκαν οι συνήθως χρησιμοποιούμενες διατάξεις για τη σύνδεση πλωτών ή σταθερών πλατφορμών με τον εξοπλισμό του πυθμένα της θάλασσας καθώς και τα ειδικότερα προβλήματα στα οποία επικεντρώνεται η εργασία. Επίσης δίδεται μια γενική βιβλιογραφική επισκόπηση της επιστημονικής περιοχής.

Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται το αναλυτικό μοντέλο με τις εξισώσεις στατικής και δυναμικής ισορροπίας σε διατύπωση για δοκό υποκείμενη σε μεγάλες μετατοπίσεις και περιστροφές.

Ο λυγισμός υπό στρέψη κατακόρυφων διατάξεων εξετάζεται στο Κεφάλαιο 3, όπου παρουσιάζονται πρωτότυπες αναλυτικές λύσεις για τις ασυμπτωτικές τιμές λυγισμού στη περίπτωση των πολύ εύκαμπτων σωλήνων. Περιλαμβάνονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί οριακών συνθηκών, και παρουσιάζονται εκφράσεις για τις ασυμπτωτικές τιμές λυγισμού για τις περιπτώσεις τόσο με ακίνητα όσο και με ελεύθερα κατά το εγκάρσιο άκρα. Τα αναλυτικά αποτελέσματα συγκρίνονται με αριθμητικά, με εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.

Στο Κεφάλαιο 4 αναπτύσσεται μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματος στη γενική του μορφή. Η παραμορφωμένη γεωμετρία της δοκού στον τρισδιάστατο χώρο περιγράφεται με την ειδική ομάδα του μη γραμμικού χώρου των περιστροφών $SO(3)$ για τις περιστροφές των διατομών. Η δοκός θεωρείται ότι καταπονείται τόσο σε κάμψη όσο και σε διάτμηση. Αναλύεται η κινηματική του φορέα με παραμετροποίηση των περιστροφών μέσω του ψευδοδιανύσματος περιστροφής και αναπτύσσεται ειδική μέθοδος παρεμβολής ώστε να προκύπτει αντικειμενικότητα στη συμπεριφορά του στοιχείου, η οποία πλέον δεν εξαρτάται από την επιλογή συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων ούτε από την παραμορφωσιακή ιστορία.

Παρουσιάζονται οι συναρτήσεις παρεμβολής για στοιχεία από 2 έως 4 κόμβους που παρέχουν ακρίβεια 2ης και 4ης τάξης και εκτίθεται ο σχηματισμός των μητρώων ακαμψιάς.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η μέθοδος ολοκλήρωσης των δυναμικών εξισώσεων στο πεδίο του χρόνου, με εφαρμογή ενεργειακών μεθόδων μεταβολών (variational methods). Η μέθοδος αποδίδει σχήματα ολοκλήρωσης στην οικογένεια των συμπλεκτικών χρονικών ολοκληρωτών (symplectic time integration), τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερα ελκυστικά χαρακτηριστικά αναφορικά με τη διατήρηση της ενέργειας και την τάξη ακρίβειας.

Εφαρμογές της αναπτυχθείσας μεθοδολογίας παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 6, με έμφαση τόσο σε παραδείγματα από τη βιβλιογραφία, αντιπροσωπευτικών για την εξέταση της απόδοσης των πεπερασμένων στοιχείων, όσο και παραδειγμάτων από συγκριτικές μελέτες διατάξεων σε θαλάσσιες πετρελαϊκές εγκαταστάσεις.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 συνοψίζονται τα συμπεράσματα της εργασίας και υπογραμμίζονται τα στοιχεία πρωτοτυπίας σχετικά με τις αναπτυχθείσες ασυμπτωτικές λύσεις του στρεπτικού λυγισμού, την ανάπτυξη των πεπερασμένων στοιχείων στο μη γραμμικό χώρο καθώς και τις αναπτυχθείσες μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης.

2

Αναλυτικό μοντέλο εύκαμπτων δοκών

Στην επιστήμη του Μηχανικού, σε αναλύσεις στατικής και δυναμικής συμπεριφοράς γραμμικών φορέων αλλά και όπου υπεισέρχονται θεωρίες κάμψης, είναι συνήθης η αναφορά σε μοντέλα δοκών (κατά Euler, Timoshenko, Rayleigh κλπ.) για τα γραμμικά κατασκευαστικά στοιχεία που μπορούν να φέρουν τρεις δυνάμεις και ροπές στη διατομή τους.

Μπορεί να ειπωθεί περιγραφικά ότι η εύκαμπτη δοκός είναι ένα επίμηκες στερεό που προσομοιώνεται από μια τρισδιάστατη στο χώρο καμπύλη και μια εγκάρσια διατομή. Πληρέστερα, ο φορέας ορίζεται σαν το στερεό που παράγεται από την μετακίνηση στο χώρο μιας αμετάβλητης επίπεδης διατομής της οποίας οι διαστάσεις θεωρούνται σημαντικά μικρότερες από το μήκος του.

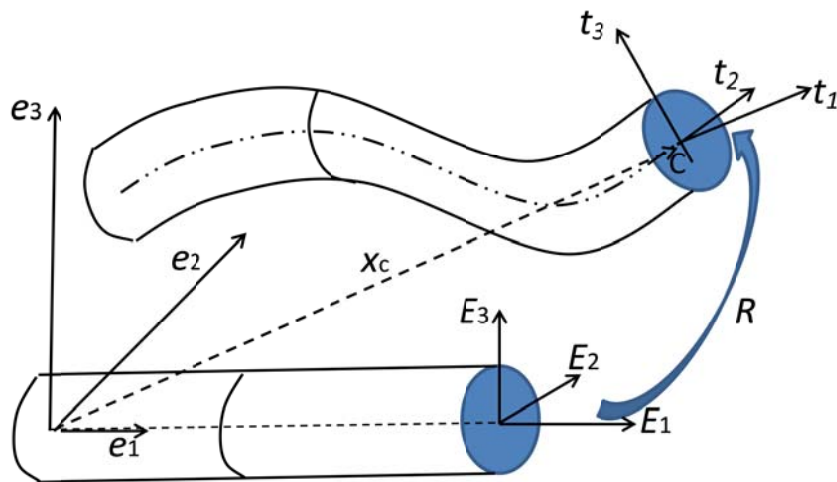
Στη διεθνή βιβλιογραφία χρησιμοποιείται για την περιγραφή των γραμμικών φορέων ο γενικός όρος *beam* και, σχετικά λιγότερο, ο όρος *rod*, τους οποίους αποδίδουν οι όροι *δοκός* και *ράβδος*. Μολονότι οι πρώτοι εξ αυτών υποδηλώνουν φορείς με προορισμό την παραλαβή κυρίως εγκάρσιων φορτίων, ενώ οι δεύτεροι αξονικών, χρησιμοποιούνται και οι δύο για να δηλώσουν ικανότητα για παραλαβή τόσο αξονικών όσο και εγκάρσιων φορτίων, με ταυτόχρονη ανάπτυξη τριών εσωτερικών δυνάμεων (αξονικών και διατμητικών) και τριών ροπών (στρεπτικών και καμπτικών) πάνω στη διατομή. Έτσι, οι εν λόγω όροι αντιδιαστέλλουν τους εξεταζόμενους φορείς από τους ικανούς να φέρουν μόνο αξονικά φορτία (trusses, σχοινιά, αλυσίδες κλπ).

Στη συνέχεια της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί συχνά ο όρος *εύκαμπτη δοκός*, ή, απλά, *δοκός*, σαν γενικός όρος για τους εξεταζόμενους φορείς, ανεξάρτητα της γεωμετρίας τους

(ευθύγραμμης ή καμπυλόγραμμης) ή και της διατομής τους (διατομή σωλήνα ή γενικής γεωμετρίας).

2.1 Περιγραφή γεωμετρίας και κινηματική δοκών

Τα εξεταζόμενα σώματα παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 2.1. Στην απαραμόρφωτη κατάσταση αποτελούν ορθά πρίσματα, με τις εγκάρσιες διατομές να συμβάλλουν κάθετα στον *διαμήκη άξονα*. Ο τελευταίος ορίζεται σαν τη γραμμή που ενώνει τα κέντρα των εγκάρσιων διατομών.



Σχήμα 2.1: Δοκός πριν και μετά την παραμόρφωση.

Με τον όρο *κινηματική* νοείται εδώ ο προσδιορισμός της γεωμετρίας του φορέα, τόσο πριν όσο και μετά τις παραμορφώσεις, είτε σε στατική θέση είτε σε κίνηση. Αυτή βασίζεται στις υποθέσεις κάμψης δοκών, περιλαμβάνοντας καμπτικές, στρεπτικές εφελκυστικές, αλλά και διατμητικές παραμορφώσεις. Σύμφωνα με τις υποθέσεις αυτές, οι εγκάρσιες διατομές θεωρούνται *απαράμορφωτες* (επίπεδες) υποκείμενες σε μεγάλες μετατοπίσεις και περιστροφές στον χώρο. Η κεντρική γραμμή του φορέα (άξονας της δοκού) σχηματίζει, γενικά, τρισδιάστατες ομαλές καμπύλες. Οι εγκάρσιες διατομές μπορεί να έχουν οποιοδήποτε επίπεδο σχήμα, που παραμένει, όμως, σταθερό κατά το μήκος του φορέα. Στην παραμορφωμένη κατάσταση η συμβολή των εγκάρσιων διατομών με την εφαπτόμενη του καμπύλου, πλέον, *διαμήκους άξονα* γίνεται σε γωνία εξαρτώμενη, γενικά, από τις αναπτυσσόμενες διατμητικές παραμορφώσεις.

Την *απαράμορφωτη κατάσταση* ονομάζουμε *κατάσταση αναφοράς*. Ο προσανατολισμός των διατομών στην κατάσταση αυτή καθορίζεται με τη χρήση ενός

πλασιίου αναφοράς ($O; E_1, E_2, E_3$), το οποίο συμβατικά θεωρείται ότι ταυτίζεται με ένα γενικό, αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων ($O; e_1, e_2, e_3$). Ο διαμήκης άξονας φορέα συμπίπτει με τον άξονα OE_1 του πλασιίου αναφοράς. Η θέση κάθε εγκάρσιας διατομής προσδιορίζεται από το μήκος s του απαραμόρφωτου άξονα, μετρούμενο από την αρχή της δοκού μέχρι την υπό εξέταση θέση.

Σε κάθε εγκάρσια διατομή εισάγεται ένα ορθογώνιο πλαίσιο ($C; t_1, t_2, t_3$). Αυτό παρακολουθεί τις μετατοπίσεις και περιστροφές της διατομής, διατηρώντας την αρχή του στο κέντρο της, τους άξονες Ct_2 και Ct_3 παράλληλους με τους κύριους άξονες αδρανείας, και, τέλος, τον άξονα Ct_1 πάντα κάθετο στο επίπεδο της διατομής. Το σύστημα αυτό θα αναφέρεται σαν *κινούμενο* ή *σωματόδετο* ή *πλαίσιο διατομής*. Στην απαραμόρφωτη κατάσταση όλα τα πλαίσια διατομής θεωρούνται παράλληλα με το γενικό σύστημα συντεταγμένων.

Για την περιγραφή της γεωμετρίας στη παραμορφωμένη κατάσταση απαιτούνται οι προσδιορισμοί τόσο της καμπύλης του άξονα, όσο και του προσανατολισμού των εγκάρσιων διατομών. Ο άξονας περιγράφεται από τις συντεταγμένες στο γενικό σύστημα του κέντρου των διατομών x_c , ο δε προσανατολισμός από το μητρώο σχετικής περιστροφής \mathbf{R} (για το οποίο θα εκτεθούν περισσότερα στη συνέχεια) μεταξύ των δύο πλασιίων, γενικού και κινούμενου. Έτσι, αν ένα σημείο P πάνω σε μία εγκάρσια διατομή στη θέση s της δοκού έχει στην κατάσταση αναφοράς συντεταγμένες:

$$Y_P = s E_1 + X_2 E_2 + X_3 E_3, \text{ ή:}$$

$$Y_P = \begin{bmatrix} s \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

τότε, μετά τη παραμόρφωση, οι συντεταγμένες του στο γενικό σύστημα θα δίνονται από την έκφραση :

$$x_P = x_c + \mathbf{R} X_P \quad (2.2)$$

όπου:

$$X_P = \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

και x_c οι νέες συντεταγμένες του κέντρου C της διατομής στο αδρανειακό σύστημα. Βέβαια, λόγω της υπόθεσης της απουσίας παραμορφώσεων στο επίπεδο της διατομής, το διάνυσμα-στήλη X_P , με τις συντεταγμένες του σημείου P στο σύστημα διατομής, παραμένει αμετάβλητο για κάθε σημείο της διατομής, αλλά και για αντίστοιχα σημεία

(σημεία πάνω στην ίδια διαμήκη ίνα) πάνω σε διαφορετικές διατομές. Το τελευταίο ισχύει λόγω της υπόθεσης του αμετάβλητου των διατομών.

Με χρήση του μήκους s για τον προσδιορισμό των θέσεων των διατομών η σχέση (2.2) γίνεται:

$$\mathbf{x}_p(s) = \mathbf{x}_c(s) + \mathbf{R}(s) \mathbf{X}_p \quad (2.4)$$

Σημειώνεται ότι το απαραμόρφωτο μήκος s του άξονα της δοκού διαφέρει από το αντίστοιχο μήκος στη παραμορφωμένη κατάσταση, λόγω των ενδεχόμενων εφελκυστικών ή θλιπτικών παραμορφώσεων. Έτσι, η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα μπορεί να νοηθεί σαν μια αντιστοίχιση:

$$s \in [0, L] \rightarrow (\mathbf{x}_c(s), \mathbf{R}(s)) \in \mathfrak{R}^3 \times \mathbf{SO}(3) \quad (2.5)$$

όπου L το συνολικό απαραμόρφωτο μήκος. Ο πίνακας περιστροφής \mathbf{R} ανήκει στην ονομαζόμενη ομάδα Lie των κανονικών ορθογώνιων γραμμικών μετασχηματισμών $\mathbf{SO}(3)$ [Simo & Vu-Quoc 1988].

Στο δυναμικό πρόβλημα υπεισέρχεται και ο χρόνος σαν ανεξάρτητη μεταβλητή, οπότε η παραπάνω αντιστοίχιση μετατρέπεται στην:

$$(s, t) \in [0, L] \times [t_1, t_2] \rightarrow (\mathbf{x}_c(s, t), \mathbf{R}(s, t)) \in \mathfrak{R}^3 \times \mathbf{SO}(3) \quad (2.6)$$

Το μοντέλο της παραμορφώσιμης δοκού, που προκύπτει από την παραπάνω περιγραφή της γεωμετρίας, αναφέρεται στη βιβλιογραφία σαν ‘γεωμετρικά ακριβές’, δεδομένου ότι σέβεται τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς μεταξύ του γενικού πλαισίου και των πλαισίων διατομής, τόσο στη κατάσταση αναφοράς όσο και στην παραμορφωμένη.

Οι υποθέσεις που έγιναν παραπάνω στη κινηματική περιγραφή της παραμόρφωσης της δοκού συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Η απαραμόρφωτη κατάσταση της δοκού έχει γεωμετρία ορθού πρίσματος.
- Οι κάθετες στο διαμήκη άξονα επίπεδες εγκάρσιες διατομές της δοκού παραμένουν επίπεδες και στην παραμορφωμένη κατάσταση.
- Οι εγκάρσιες διατομές δεν παραμένουν αναγκαστικά κάθετες και μετά τις παραμορφώσεις, λόγω των επιτρεπόμενων διατμητικών παραμορφώσεων.
- Οι διατομές δεν παραμορφώνονται στο επίπεδό τους.

2.2 Παραμετροποίηση περιστροφών

Στις κλασσικές γραμμικές θεωρίες κάμψης πρισματικών φορέων υποκείμενων σε μικρές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις (π.χ. Bernoulli-Euler, Timosenko), είναι συνήθης (αλλά

και αναγκαστική, στα πλαίσια της γραμμικότητας) η υπόθεση απειροστού μεγέθους περιστροφών των διατομών του φορέα. Αποτέλεσμα είναι να αποτελούν οι τελευταίες στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου, στον οποίο ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των διανυσμάτων, όπως η μεταθετικότητα.

Τα εξεταζόμενα εύκαμπτα σώματα υπό την επίδραση φορτίων και κινήσεων στα άκρα τους καθώς και φορτίσεων (υδροδυναμικών, βαρύτητας) κατά το μήκος τους μπορούν να πάρουν στο χώρο σύνθετα σχήματα, με τον άξονά τους να σχηματίζει ιδιαίτερα παραμορφωμένες τρισδιάστατες καμπύλες.

Κάθε απόπειρα για ανάλυση περιστροφών μεγαλύτερου (πεπερασμένου) μεγέθους καλείται να αντιμετωπίσει τις σύμφυτες ιδιαιτερότητες τους, οι οποίες οφείλονται κατά βάση στον μη γραμμικό χαρακτήρα των μεγάλων περιστροφών. Για το λόγο αυτό, αλλά και για την υποστήριξη των μαθηματικών διατυπώσεων που θα ακολουθήσουν κατά την ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων, προτάσσονται εδώ μερικά εισαγωγικά στοιχεία αναφορικά με τις πεπερασμένες περιστροφές και με την αναπαράστασή τους μέσω της χρήσης τετραγωνικών πινάκων. Αφετηρία αποτελεί η διατύπωση της σχέσης μετασχηματισμού ενός διανύσματος υποκειμένου σε περιστροφή στον τρισδιάστατο χώρο. Η σχέση αυτή γράφεται:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{X} \quad (2.7)$$

όπου \mathbf{X} είναι το διάνυσμα-στήλη υποκειμένο στη περιστροφή, \mathbf{x} το προκύπτον διάνυσμα και \mathbf{R} είναι το μητρώο περιστροφής (πίνακας 3×3).

Ακολουθώντας την ακριβή μαθηματική διατύπωση [Simo & Vu-Quoc 1988], ο πίνακας \mathbf{R} ορίζεται σαν ο γραμμικός τελεστής με τις ιδιότητες :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : \mathfrak{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{R}^3 \\ \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T &= \mathbf{I} \text{ (ο μοναδιαίος πίνακας)} \\ \det(\mathbf{R}) &= 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

και ανήκει στην ομάδα $SO(3)$. Σημειώνεται ότι η ομάδα αυτή δεν αποτελεί γραμμικό χώρο, καθώς, για παράδειγμα, δεν ισχύει η μεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό:

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad (2.9)$$

Παρότι διάστασης 3×3 , ο τελεστής \mathbf{R} διαθέτει τρεις μόνο ελεύθερες παραμέτρους, λόγω των σχέσεων ορθοκανονικότητας (2.8). Η παραμετροποίηση περιστροφών έγκειται ακριβώς στην επιλογή των τριών αυτών παραμέτρων. Ιστορικά έχουν γίνει διάφορες επιλογές, ξεκινώντας από τις γωνίες Euler, τις παραμέτρους Euler, το ψευδοδιάνυσμα περιστροφής, τα ονομαζόμενα τετραδόνια (quaternions) και, τέλος, το διάνυσμα

περιστροφής [Geradin & Cardona 2001]. Οι γωνίες Euler έχουν τύχει ευρείας εφαρμογής στη περιοχή της Ναυπηγικής, για την περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς των πλοίων και χρησιμοποιούνται και στο αριθμητικό μοντέλο του παρόντος κεφαλαίου. Για την ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων θα χρησιμοποιηθεί το διάνυσμα περιστροφής.

Με βάση τον πίνακα περιστροφής R το διάνυσμα-στήλη με τις συντεταγμένες του OA στο σύστημα αναφοράς Ox_1, x_2, x_3 θα μετασχηματίζεται μετά την περιστροφή στο OB , μέσω του τύπου:

$$OB = R OA \quad (2.10)$$

2.3 Σταθερά και κινούμενα πλαίσια αναφοράς

Με τον παραπάνω τρόπο μπορούμε να διατυπώσουμε και το μετασχηματισμό των συντεταγμένων μεταξύ δύο πλαισίων, που βρίσκονται σε σχετική περιστροφή. Αν υποθέσουμε ότι ένα ορθοκανονικό κινούμενο σύστημα $(O; t_1, t_2, t_3)$ ταυτίζεται πριν τη περιστροφή με το σύστημα $(O; E_1, E_2, E_3)$, τότε, μετά τη περιστροφή, οι συνιστώσες των μοναδιαίων διανυσμάτων, που θα βρίσκονται τώρα πάνω στους άξονες Ox'_{1-3} έχοντας παρακολουθήσει την περιστροφή, θα δίνονται, μετρούμενες στους άξονες Ox_{1-3} , από τη σχέση:

$$t_i = R E_i \quad i=1,2,3 \quad (2.11)$$

Ισοδύναμα, ο μετασχηματισμός συντεταγμένων των διανυσμάτων δίνεται από τον παρόμοιο τύπο (2.10).

Στα επόμενα, για να διακρίνεται το πλαίσιο στο οποίο αναφέρονται (μετρώνται) διανύσματα και τελεστές, ακολουθείται ο συμβολισμός:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1	
Μέγεθος	Συμβολισμός
Διάνυσμα	Έντονη πλάγια γραφή (bold italics)
Τελεστής	Έντονη όρθια γραφή
Διανύσματα, τανυστές στο αδρανειακό σύστημα	Πεζά, έντονα \mathbf{n}, \mathbf{k}
Διανύσματα, τανυστές στο κινούμενο σύστημα	Κεφαλαία, έντονα \mathbf{N}, \mathbf{K}

2.4 Παραμορφώσεις εύκαμπτης δοκού

Ακολουθώντας την θεωρία των ελαστικών παραμορφώσεων συνεχούς μέσου, ο πιο πρόσφορος τρόπος προσδιορισμού των παραμορφώσεων του φορέα γίνεται παρακολουθώντας τις μεταβολές της θέσης των σημείων των διαμήκων ινών (γραμμών με σταθερές τις συντεταγμένες X_2 και X_3), εκφράζοντας αυτές στο πλαίσιο διατομής και υπολογίζοντας τη διαφορά μετά και πριν τη παραμόρφωση [Geradin & Cardona 2001].

$$\mathbf{D}_P(s, X_2, X_3) = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{x}_P}{ds} - \frac{d\mathbf{Y}_P}{ds} \quad (2.12)$$

(στη περίπτωση δυναμικού προβλήματος οι παραγωγίσεις θα είναι μερικές). Με χρήση των σχέσεων (2.3) και (2.4) η παραπάνω έκφραση γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_P(s, X_2, X_3) &= \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{x}_c}{ds} + \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds} \mathbf{X}_P - \mathbf{E}_1 \\ &= \mathbf{\Gamma}(s) + \mathbf{B}_P(s, X_2, X_3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου η συνολική παραμόρφωση σε ένα σημείο P της διατομής εμφανίζεται σαν το άθροισμα των παραμορφώσεων του διαμήκους άξονα:

$$\mathbf{\Gamma}(s) = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{x}_c}{ds} - \mathbf{E}_1 \quad (2.14)$$

και των εξαρτώμενων από τις περιστροφές της διατομής καμπτικών και στρεπτικών παραμορφώσεων:

$$\mathbf{B}_P(s, X_2, X_3) = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds} \mathbf{X}_P \equiv \mathbf{K} \mathbf{X}_P \quad (2.15)$$

όπου:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds} \quad (2.16)$$

Το μητρώο \mathbf{K} είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας του διαμήκους άξονα, προσδιορίζοντας τις απειροστές μεταβολές του πίνακα περιστροφής \mathbf{R} κατά το μήκος της δοκού, και ανάγοντας αυτές στο τοπικό πλαίσιο της διατομής. Πρόκειται για ένα αντισυμμετρικό μητρώο, ιδιότητα που προκύπτει από την ορθοκανονικότητα του πίνακα \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}^T}{ds} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}^T + \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Έτσι, το μητρώο αυτό θα συμβολίζεται στη συνέχεια με χρήση του αντίστοιχου αξονικού του διανύσματος \mathbf{K} (για τους συμβολισμούς των αντισυμμετρικών μητρώων βλ. και σχόλιο στη σχέση 4.2, κεφ. 4) :

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}} \equiv skew(\mathbf{K}) \text{ και } \tilde{\mathbf{K}}(s) = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds} \quad (2.18)$$

Οι εκφράσεις (2.14) και (2.18) για τις παραμορφώσεις επιτρέπουν και την γεωμετρική ερμηνεία των συνιστώσών τους. Έτσι, η συνιστώσα Γ_1 κατά τον άξονα E_1 της διατομής μετρά την αξονική παραμόρφωση, ενώ οι συνιστώσες Γ_2 και Γ_3 τις διατμητικές παραμορφώσεις κατά τους άξονες E_2 και E_3 . Αντίστοιχα, η συνιστώσα K_1 αντιστοιχεί στην στρεπτική παραμόρφωση του άξονα της δοκού, ενώ οι K_2 και K_3 στις καμπτικές παραμορφώσεις, γύρω από τους άξονες της διατομής E_2 και E_3 .

Ο άξονας του φορέα μεταβάλλει το μήκος του υπό την επίδραση των εφελκυστικών και διατμητικών παραμορφώσεων. Το στοιχειώδες μήκος μετά τις παραμορφώσεις υπολογίζεται από τις συντεταγμένες του κέντρου της διατομής:

$$ds' = \|d\mathbf{x}_c\| \quad (2.19)$$

Με εισαγωγή της σχέσης (2.14) έχουμε:

$$ds' = \|d\mathbf{x}_c\| = \|\mathbf{R}(\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1)\| ds = \|\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1\| ds \quad (2.20)$$

2.5 Κινητική δοκών

Για το δυναμικό πρόβλημα απαιτείται ο προσδιορισμός των συντεταγμένων του άξονα $\mathbf{x}_c(s,t)$ και των αντίστοιχων πινάκων περιστροφής $\mathbf{R}(s,t)$, για κάθε χρονική στιγμή t . Οι μεταβολές των μεγεθών αυτών στο πεδίο του χρόνου δίδουν αντίστοιχα τις μεταφορικές (γραμμικές) και τις περιστροφικές (γωνιακές) ταχύτητες και επιταχύνσεις. Ειδικότερα, η έκφραση των μεταφορικών ταχυτήτων στο αδρανειακό σύστημα η σχέση (2.4) δίνει για τη ταχύτητα του σημείου P της διατομής:

$$\mathbf{v}_P = \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \mathbf{X}_P \quad (2.21)$$

και για τις αντίστοιχη γραμμική επιτάχυνση:

$$\mathbf{a}_P = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_c}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} \mathbf{X}_P \quad (2.22)$$

Οι γωνιακές ταχύτητες προκύπτουν από την παραγωγή ως προς τον χρόνο του πίνακα περιστροφής:

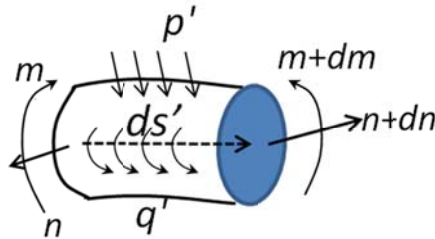
$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}, \text{ με } \boldsymbol{\Omega} = \text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}) \quad (2.23)$$

Το αντίστοιχο διάνυσμα στο αδρανειακό σύστημα θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R}^T = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \mathbf{R}^T \quad (2.24)$$

2.6 Διαφορικές εξισώσεις στατικής ισορροπίας

Από την θεώρηση της ισορροπίας ενός στοιχειώδους τμήματος ds' υπό την επίδραση των επιβεβλημένων σ' αυτό στατικών δυνάμεων και ροπών προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας. Η εξισορρόπηση αυτή παρουσιάζεται γραφικά στο επόμενο σχήμα, όπου χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι συμβολισμοί:



ds' στοιχειώδες μήκος, μετά την παραμόρφωση του άξονα.

p', p κατανεμημένες εξωτερικές δυνάμεις, ανά μονάδα μήκους του παραμορφωμένου και απαραμόρφωτου άξονα αντίστοιχα. Ο συμβολισμός ($'$) χρησιμοποιείται εδώ για να δηλώσει κατανεμημένα μεγέθη που αναφέρονται στον παραμορφωμένο άξονα.

q', q κατανεμημένες εξωτερικές ροπές δυνάμεων ως προς το κέντρο του πλαισίου διατομής.

f διάνυσμα εσωτερικών στοιχειωδών δυνάμεων πάνω στη διατομή, παραγόμενων από τις εσωτερικές τάσεις.

\mathbf{n} διάνυσμα εσωτερικών δυνάμεων διατομής, που προκύπτει σαν συνισταμένη των εσωτερικών στοιχειωδών δυνάμεων (τάσεων):

$$\mathbf{n} = \int_A \mathbf{f} dA \quad (2.25)$$

\mathbf{m} διάνυσμα εσωτερικών ροπών που προκύπτει σαν συνισταμένη των ροπών των εσωτερικών στοιχειωδών δυνάμεων με αναφορά το κέντρο C του πλαισίου διατομής:

$$\mathbf{m} = \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \mathbf{f} dA \quad (2.26)$$

Ακολουθώντας τον εισαχθέντα συμβολισμό στον Πίνακα 2.1 για τις συνιστώσες διανυσμάτων στο πλαίσιο διατομής έχουμε:

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}^T \mathbf{n} \text{ και } \mathbf{M} = \mathbf{R}^T \mathbf{m} \quad (2.27)$$

και:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}^T \mathbf{p}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}' \text{ και } \mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{R}^T \mathbf{q}' \quad (2.28)$$

Η ισορροπία δυνάμεων στο αδρανειακό σύστημα δίνει:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds'} + \mathbf{p}' = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.20) μεταξύ απαραμόρφωτου και παραμορφωμένου στοιχειώδους μήκους άξονα έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} + \|\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1\| \mathbf{p}' = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

Στο πλαίσιο διατομής η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \mathbf{K} \times \mathbf{N} + \|\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1\| \mathbf{P}' = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

Η ισορροπία ροπών ως προς το κέντρο της διατομής δίνει:

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds'} + \frac{d\mathbf{x}_c}{ds'} \times \mathbf{n} + \mathbf{q}' = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

ή, ισοδύναμα:

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} + \frac{d\mathbf{x}_c}{ds} \times \mathbf{n} + \|\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1\| \mathbf{q}' = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

Στο πλαίσιο διατομής η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται, με χρήση και της σχέσης (2.14) σε:

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{K} \times \mathbf{M} + (\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1) \times \mathbf{N} + \|\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1\| \mathbf{Q}' = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

ή, ισοδύναμα:

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{M} + (\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} + \tilde{\mathbf{E}}_1) \mathbf{N} + \|\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{E}_1\| \mathbf{Q}' = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

$$\tilde{\Gamma} + \tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{R}^T \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_c}{ds} = \mathbf{R}^T \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_c}{ds} \mathbf{R} \quad (2.36)$$

2.7 Καταστατικές εξισώσεις

Οι καταστατικές εξισώσεις συνδέουν γραμμικά τα εντατικά μεγέθη της διατομής (δυνάμεις \mathbf{N} και ροπές \mathbf{M}) με τις παραμορφώσεις της δοκού ($\mathbf{\Gamma}$ και \mathbf{K}) μέσω των μητρώων \mathbf{S} και \mathbf{C} .

$$\mathbf{N} = \mathbf{S} \mathbf{\Gamma} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \mathbf{K} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} EA & & 0 \\ & kGA_2 & \\ 0 & & kGA_3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} GI_t & & 0 \\ & EI_2 & \\ 0 & & EI_3 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

όπου EA , kGA_2 και kGA_3 η αξονική και οι διατμητικές παράμετροι δυσκαμψίας, ενώ GI_t , EI_2 και EI_3 η στρεπτική και οι καμπτικές δυσκαμψίες.

2.8 Εξωτερικά φορτία

Τα εξωτερικά φορτία αναφέρονται στο σύνολο των δυνάμεων-ροπών που ασκούνται στο σώμα και προέρχονται από τις επιδράσεις του περιβάλλοντος. Τα κυριότερα από αυτά είναι οι δυνάμεις βαρύτητας, τα υδροδυναμικά φορτία από την εξωτερική ροή, οι δυνάμεις από την επαφή με εξωτερικά όρια όπως ο πυθμένας και οι δυνάμεις προερχόμενες από το εσωτερικό υγρό.

2.8.1 Ενεργό βάρος και δρώσα τάση

Οι κατανεμημένες δυνάμεις βαρύτητας προκύπτουν από τη βαρυτική επιτάχυνση και τη γραμμική πυκνότητα μάζας:

$$\mathbf{w} = \mu \mathbf{g} \quad (2.40)$$

Οι εύκαμπτοι σωλήνες υπόκεινται επίσης και σε εξωτερικές και εσωτερικές πιέσεις από το θάλασσα και το εσωτερικό ρευστό. Συνήθως πρακτική [Fergestad & Løtveit 2017] να συνδυάζονται οι δυνάμεις αυτές μαζί με τη βαρύτητα και την αξονική δύναμη στη διατομή, ώστε να προκύπτει το λεγόμενο ενεργό βάρος και ένταση:

$$\mathbf{w}_{ef} = \mu \mathbf{g} + (\rho_i A_i - \rho_e A_e) \mathbf{g} \quad (2.41)$$

όπου ρ_i η πυκνότητα του εσωτερικού υγρού, ρ_e της θάλασσας, A_i η επιφάνεια της εσωτερικής διατομής και A_e της εξωτερικής.

Παράλληλα, διορθώνεται ανάλογα και η τάση στη διατομή (κάθετη εσωτερική δύναμη στο τοπικό σύστημα), ώστε να προκύψει μια δρώσα τάση:

$$N_{1ef} = N_1 + (p_e A_e - p_i A_i) \quad (2.42)$$

με p_e και p_i τις αντίστοιχες εσωτερικές και εξωτερικές υδροστατικές πιέσεις.

2.8.2 Υδροδυναμικές δυνάμεις

Για την περιγραφή των υδροδυναμικών δυνάμεων ακολουθείται το μοντέλο Morison. Το μοντέλο περιλαμβάνει δυνάμεις αντίστασης (drag) και αδρανειακές, οι οποίες υπολογίζονται με βάση τις ταχύτητες και επιταχύνσεις της ροής του περιρρέοντος νερού και του σώματος στο τοπικό σύστημα της διατομής.

Ειδικότερα, οι δυνάμεις f_n , κάθετα στο στοιχειώδες μήκος άξονα ds , προσεγγίζονται:

$$\begin{aligned} f_n = & \frac{1}{2} \rho_w C_{Dn} D_h n ({}^w v_n - \dot{x}_n) |{}^w v_n - \dot{x}_n| ds \\ & + \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} C_{Mn} {}^w \ddot{v}_n ds - \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} C_{An} \ddot{x}_n ds \end{aligned} \quad (2.43)$$

όπου:

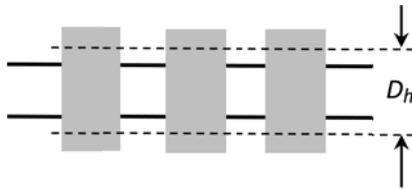
${}^w v_n$, ${}^w \ddot{v}_n$ ταχύτητα και επιτάχυνση νερού κάθετα στον άξονα, προερχόμενες από τον θαλάσσιο κυματισμό και από το θαλάσσιο ρεύμα, στο μέρος της ταχύτητας.

\dot{x}_n , \ddot{x}_n ταχύτητα και επιτάχυνση του σώματος, κάθετα στον άξονα.

ρ_w η πυκνότητα του νερού,

C_{Dn} , C_{Mn} , C_{An} συντελεστές αντίστασης, αδράνειας και πρόσθετης μάζας στην κάθετη στον άξονα διεύθυνση. Ισχύει $C_{An} = C_{Mn} - 1$.

D_h υδροδυναμική διάμετρος (μέσο προβαλλόμενο πλάτος στη ροή). Στη περίπτωση απλού κυλινδρικού σωλήνα είναι η διάμετρος της διατομής. Όταν παρεμβάλλονται ανωστικοί δακτύλιοι, είναι μία ισοδύναμη διάμετρος που αντιστοιχεί στο μέσο προβαλλόμενο πλάτος στη ροή.



D_b ισοδύναμη διάμετρος, ώστε ο όρος $\frac{\pi D_b^2}{4} ds$ να αντιστοιχεί στον μέσο ανωστικό όγκο.

Οι υδροδυναμικοί συντελεστές γενικά εξαρτώνται από πολλές παραμέτρους, όπως από το σχήμα της διατομής, τους αριθμούς Reynolds και Keulegan-Carpenter της ροής,

τραχύτητα επιφάνειας κ.α. [Sarpkaya & Isaacson, 1981]. Για πρακτικές εφαρμογές, σαν πρώτη προσέγγιση προτείνεται [Lienhard, 2010] η χρήση συντελεστών για σταθερή ροή. Για κυκλική διατομή $C_M = 2$ και $C_D = 0.7 \sim 1$

Όταν υπάρχουν ανωστικοί δακτύλιοι, αναπτύσσεται δύναμη και κατά την εφαπτομενική διεύθυνση του σωλήνα, η οποία γράφεται με παρόμοιο τρόπο:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t = & \frac{1}{2} \rho_w C_{Dt} D_{ht} ({}^w \mathbf{v}_t - \dot{\mathbf{x}}_t) |{}^w \mathbf{v}_t - \dot{\mathbf{x}}_t| ds \\ & + \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} C_{Mt} {}^w \dot{\mathbf{v}}_t ds - \rho_w \frac{\pi D_b^2}{4} C_{At} \dot{\mathbf{x}}_t ds \end{aligned} \quad (2.44)$$

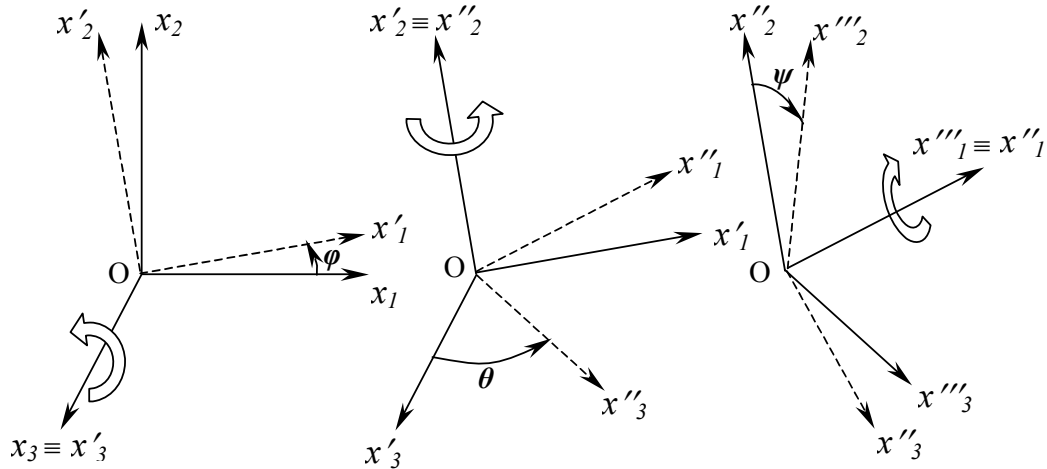
με τους υδροδυναμικούς συντελεστές και τις ταχύτητες, επιταχύνσεις να αντιστοιχούν στην εφαπτομενική διεύθυνση.

Σημειώνεται ότι η εξωτερική ροή στη περίπτωση κατανεμημένων ανωστικών σωμάτων είναι ιδιαίτερα περίπλοκη, και οι αντίστοιχοι συντελεστές θα πρέπει να βασίζονται σε πειραματικά δεδομένα για τη συγκεκριμένη διάταξη [Berge & Olufsen, 1992].

2.9 Γωνίες Euler

Για τον καθορισμό του μητρώου περιστροφής R είναι συνήθης στη περιοχή της ναυπηγικής η παραμετροποίηση των περιστροφών με χρήση των προσαρμοσμένων γωνιών Euler. Κατ' αυτή, το αρχικό πλαίσιο Ox_1, x_2, x_3 , έρχεται στη τελική του θέση ύστερα από περιστροφές κατά γωνίες:

- φ γύρω από τον άξονα Ox_3
- θ γύρω από τον άξονα Ox'_2
- ψ γύρω από τον άξονα Ox''_1



Από τις επιμέρους περιστροφές προκύπτει το τελικό μητρώο :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \phi & \sin \vartheta \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \sin \vartheta \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi & \sin \vartheta \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \vartheta \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.10 Δοκός χωρίς διατμητικές παραμορφώσεις

Ακολουθώντας την παραμετροποίηση των περιστροφών με γωνίες Euler και με την υπόθεση ότι δεν υφίστανται διατμητικές παραμορφώσεις (θεωρία Euler), παρά μόνο αξονική παραμόρφωση ε , δηλαδή $\mathbf{\Gamma} = [\varepsilon, 0, 0]^T$ προκύπτουν από την (2.14) οι εξισώσεις:

$$\frac{dx}{ds} = (1 + \varepsilon) \cos \vartheta \cos \phi$$

$$\frac{dy}{ds} = (1 + \varepsilon) \cos \vartheta \sin \phi$$

$$\frac{dz}{ds} = -(1 + \varepsilon) \sin \vartheta$$

και από την (2.18):

$$\frac{d\phi}{ds} = (K_2 \sin \psi + K_3 \cos \psi) / \cos \vartheta$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = K_2 \cos \psi - K_3 \sin \psi$$

$$\frac{d\psi}{ds} = K_1 + (K_2 \sin \psi + K_3 \cos \psi) \tan \vartheta$$

Ισορροπία δυνάμεων στο σύστημα διατομής (2.31):

$$\frac{dN_1}{ds} + K_2 N_3 - K_3 N_2 + (1 + \varepsilon) P_1' = 0$$

$$\frac{dN_2}{ds} - K_1 N_3 + K_3 N_1 + (1 + \varepsilon) P_2' = 0$$

$$\frac{dN_3}{ds} + K_1 N_2 - K_2 N_1 + (1+\varepsilon)P_3' = 0$$

Ισορροπία ροπών (2.34):

$$\frac{dM_1}{ds} + K_2 M_3 - K_3 M_2 + (1+\varepsilon)Q_1' = 0$$

$$\frac{dM_2}{ds} - K_1 M_3 + K_3 M_1 - (1+\varepsilon)N_3 + (1+\varepsilon)Q_2' = 0$$

$$\frac{dM_3}{ds} + K_1 M_2 - K_2 M_1 + (1+\varepsilon)N_2 + (1+\varepsilon)Q_3' = 0 \quad (2.46)$$

Καταστατικές εξισώσεις (2.39):

$$K_1 = M_1 / GI_t$$

$$K_2 = M_2 / EI_2$$

$$K_3 = M_3 / EI_3$$

$$\varepsilon = N_1 / EA$$

2.11 Αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών

Οι εξισώσεις (2.46) συγκροτούν ένα σύστημα δώδεκα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για τους αγνώστους $Y = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi, N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3]$, της μορφής:

$$\frac{dY}{ds} = C \quad (2.47)$$

το οποίο επιλύεται με διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών σε κόμβους i και $i+1$:

$${}^{i+1}Y - {}^iY = \Delta s ({}^{i+1}C + {}^iC) / 2 \quad (2.48)$$

συνοδευόμενο από δώδεκα οριακές συνθήκες που συνήθως αφορούν συνθήκες θέσεων ή δυνάμεων στα άκρα.

Για την αντιμετώπιση της μη γραμμικότητας εφαρμόστηκε η επαναληπτική μέθοδος Newton Raphson, με τις εμπλεκόμενες παραγώγους να υπολογίζονται αριθμητικά.

Η επίδραση του πυθμένα προσομοιώθηκε με εισαγωγή ελατηρίων στη κατακόρυφη διεύθυνση, για τα σημεία του σωλήνα κάτω από το όριο του πυθμένα (penalty contact formulation).

Το παραπάνω αριθμητικό σχήμα χρησιμοποιήθηκε και στην επίλυση του δυναμικού προβλήματος, με εισαγωγή στην εξίσωση ισορροπίας των αδρανειακών δυνάμεων καθώς και των δυνάμεων αντίστασης από το νερό. Για τις αναγκαίες ταχύτητες και επιταχύνσεις εφαρμόστηκε η μέθοδος χρονικής ολοκλήρωσης Newmark [Bathe, 1982]. Ειδικότερα, με την υπόθεση ότι τα μεγέθη είναι γνωστά τη χρονική στιγμή t , εκφράζονται σε συνάρτηση των γραμμικών μετατοπίσεων x οι ταχύτητες και επιταχύνσεις στο αδρανειακό σύστημα για τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ βάσει των τύπων:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{x}} = \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) {}^t\dot{\mathbf{x}} + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) {}^t\ddot{\mathbf{x}} - \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^t\mathbf{x} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} \quad (2.49)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{x}} = \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) {}^t\ddot{\mathbf{x}} - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^t\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} \quad (2.50)$$

Η μέθοδος εφαρμόστηκε με $\delta=1/2$ και $\alpha=1/4$, που αντιστοιχεί στον κανόνα του τραπεζίου και είναι ευσταθής μέθοδος ολοκλήρωσης σε γραμμικά προβλήματα.

Το ανωτέρω αριθμητικό σχήμα έχει απλότητα στη δομή, ευκολία στον προγραμματισμό και απέδωσε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα σε συνήθη προβλήματα, όπως θα εκτεθεί στο κεφάλαιο 6. Είναι όμως χαμηλής τάξης στη χωρική διακριτοποίηση απαιτώντας πυκνή διαμέριση για την επίτευξη ομαλής λύσης σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας, όπως πακτωμένα άκρα ή περιοχές μεταβολών στη διατομή. Επίσης, συνδέεται αναπόσπαστα με την παραμετροποίηση των περιστροφών Euler, με συνέπεια να μην είναι αδιάφορο ως προς μια αλλαγή συστήματος αναφοράς, και επίσης να υπόκειται στους περιορισμούς εύρους των γωνιών Euler. Έτσι, είναι μεν κατάλληλο για περιγραφή παραμορφωμένης κατάστασης πλησίον της αρχικής, αλλά δεν μπορεί να αντιμετωπίσει μεγάλο εύρος περιστροφές. Για τους λόγους αυτούς ακολουθήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, με ανάπτυξη στο κεφάλαιο 4 ειδικού στοιχείου ικανού να περιγράψει τη γενική παραμόρφωση.

3

Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός εύκαμπτου κατακόρυφου φορέα

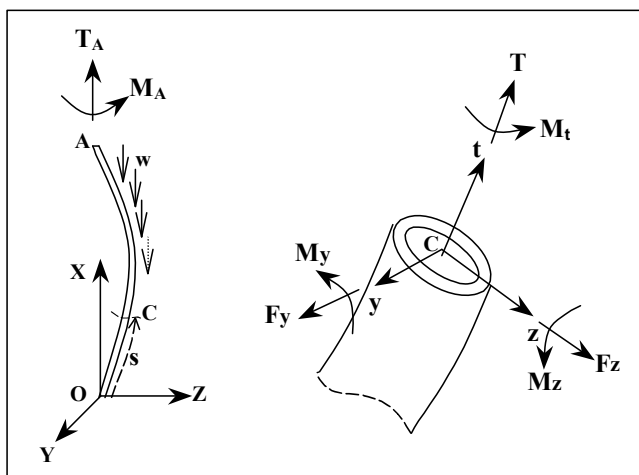
Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται το πρόβλημα του λυγισμού εύκαμπτου φορέα, υπό την επίδραση του βάρους του και επιβεβλημένων αξονικών δυνάμεων και στρεπτικών ροπών. Οι στρεπτικές καταπονήσεις είναι σημαντικές δεδομένου ότι επηρεάζουν την ισορροπία διατάξεων με χαμηλή προένταση (όπως, για παράδειγμα, εύκαμπτοι σωλήνες σε ‘Lazy S’ διάταξη [O’Brien et al, 1992]), ή μπορούν να συντελέσουν σε λυγισμό του φορέα, για ευθύγραμμες διατάξεις, όπως θα αναλυθεί και στη συνέχεια.

Για τη περίπτωση των εύκαμπτων σωλήνων στο θαλάσσιο περιβάλλον η στρεπτική ροπή μπορεί να αναπτυχθεί είτε από τη σύνδεση του σωλήνα στο πλωτό είτε λόγω κατανομημένων υδροδυναμικών φορτίων κατά το μήκος του σωλήνα, όπως αναφέρεται και στο [Chung et al, 1994]. Στην εργασία [Kodaissi et al, 1992] παρουσιάζονται αποτελέσματα από πειραματική ανάλυση που διεξήχθη σε ελαστική αλυσίδα και σε τμήμα πραγματικού εύκαμπτου σωλήνα, υποκείμενου σε στρεπτική ροπή στο κάτω άκρο. Συγκρίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων διαφόρων αριθμητικών κωδίκων για το εξεταζόμενο πρόβλημα παρουσιάστηκαν σε αναφορά του [ISSC 1994], όπου και περιλήφθησαν αποτελέσματα και από τους κώδικες που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσης εργασίας. Οι [Antman and Kenney, 1981] έχουν παρουσιάσει μια λεπτομερή ποιοτική ανάλυση των λυγισμένων μορφών για αρχικά ευθύγραμμους εύκαμπτους φορείς. Επίσης, οι [Lu and Perkins 1994, 1995] έχουν παρουσιάσει τα σύνθετα τρισδιάστατα σχήματα που παίρνουν εύκαμπτοι φορείς χαμηλής προέντασης, υποκείμενοι σε στρέψη, ένταση και βαρύτητα.

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η περίπτωση κατακόρυφου εύκαμπτου φορέα, υποκείμενου στο ίδιο βάρος, σε αξονική δύναμη και σε στρεπτικό φορτίο στα άκρα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα αυτό, το οποίο δεν φαίνεται από πρώτη άποψη ιδιαίτερα πρωτότυπο, δεν έχουν βρεθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Έτσι, η εργασία επικεντρώθηκε στην μαθηματική ανάλυση του προβλήματος και στην παραγωγή προσεγγιστικών αναλυτικών σχέσεων για τα κρίσιμα φορτία. Η ανάλυση αφορά τόσο τη περίπτωση κατακόρυφης κολώνας στον αέρα, όσο και στο νερό. Για τη τελευταία περίπτωση γίνεται χρήση της δρώσας τάσης, που συνδυάζει τις επιδράσεις της βαρύτητας και των εξωτερικών και εσωτερικών υδροστατικών πιέσεων.

3.1 Εξισώσεις στατικής ισορροπίας κατακόρυφης διάταξης

Η εξεταζόμενη διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 3.1, και είναι παρόμοια με συνήθεις περιπτώσεις χρήσης σωλήνων στο θαλάσσιο περιβάλλον.



Σχήμα 3.1 Διάταξη εύκαμπτου κατακόρυφου σωλήνα.

Η διατομή του σωλήνα θεωρείται συμμετρική περί τον άξονα C_t , με ίσες καμπτικές σταθερές EI_y και EI_z κατά τους άξονες C_y και C_z . Επίσης, θεωρείται ικανή να παραλάβει δύο διατμητικές δυνάμεις, ένταση (εφελκυσμό ή θλίψη), δύο καμπτικές ροπές και μια ροπή στρέψης. Για την εξέταση του προβλήματος του λυγισμού και την παρέκκλιση του φορέα από την κατακόρυφη διάταξη, οι γενικές εξισώσεις στατικής ισορροπίας (2.46) γραμμικοποιούνται γύρω από την κατακόρυφη θέση, με την υπόθεση απειροστών εγκάρσιων μετατοπίσεων Y και Z , απειροστών γωνιών περιστροφής φ και θ . Ταυτόχρονα, οι τιμές της στρεπτικής ροπής και της αξονικής δύναμης θεωρούνται πεπερασμένες. Η γραμμικοποίηση αυτή δίνει:

$$EI \frac{d^2\varphi}{ds^2} - M_t \frac{d\theta}{ds} = \varphi(T_0 + ws) - H_1 \quad (3.1)$$

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} + M_t \frac{d\varphi}{ds} = \theta(T_0 + ws) + H_2$$

και :

$$\frac{dY}{ds} = \varphi \text{ και } \frac{dZ}{ds} = -\theta \quad (3.2)$$

όπου τα H_1 και H_2 είναι δυνάμεις στην αρχή O, κατά τους άξονες Oy και Oz αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι λόγω της υπόθεσης συμμετρικής εγκάρσιας διατομής καθώς και λόγω της απουσίας κατανεμημένων στρεπτικών φορτίων κατά το μήκος του φορέα, η στρεπτική ροπή M_t παραμένει κατά το μήκος σταθερή. Επίσης, στις παραπάνω εξισώσεις οι τιμές των EI , T_0 , w , H_1 and H_2 είναι σταθερές, ανεξάρτητες του s.

Σε αδιάστατη μορφή οι εξισώσεις (3.1) γράφονται:

$$\begin{aligned} \varphi'' - \alpha\theta' &= \varphi(t_0 + t) - D_1 \\ \theta'' + \alpha\varphi' &= \theta(t_0 + t) + D_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου ο τονισμός ()' δηλώνει παραγωγή ως προς την αδιάστατη ανεξάρτητη μεταβλητή t και:

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{wL^3}{EI} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{s}{L} = \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \frac{s}{L}, \quad \left(\varepsilon = \frac{EI}{wL^3} \right) \\ \alpha &= \frac{M_t}{wL^2\varepsilon^{\frac{2}{3}}}, \quad t_0 = \frac{T_0}{wL\varepsilon^{\frac{1}{3}}}, \quad D_1 = \frac{H_1}{wL\varepsilon^{\frac{1}{3}}}, \quad D_2 = \frac{H_2}{wL\varepsilon^{\frac{1}{3}}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Οι σχέσεις (3.3) συγκροτούν ένα σύστημα συζευγμένων, μέσω της στρεπτικής ροπής α, γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Για την αποσύζευξή τους χρησιμοποιείται η αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t) \cos z(t) - h(t) \sin z(t) \\ \theta(t) &= f(t) \sin z(t) + h(t) \cos z(t) \\ z(t) &= -\frac{a}{2}t, \quad z' = -\frac{a}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

και οι εξισώσεις (3.3) γίνονται:

$$\begin{aligned} f''(t) &= f(t) \cdot \left(t + t_0 - \frac{a^2}{4} \right) + D_1 \cos z + D_2 \sin z \\ h''(t) &= h(t) \cdot \left(t + t_0 - \frac{a^2}{4} \right) - D_1 \sin z + D_2 \cos z \end{aligned} \quad (3.6)$$

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων εκφράζεται μέσω των συναρτήσεων Airy Ai και Bi [Abramowitz & Stegun 1964].

$$f(t) = C_1 \cdot Ai\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) + C_2 \cdot Bi\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) + D_1 \cdot I_1 + D_2 \cdot I_2 \quad (3.7)$$

$$h(t) = C_3 \cdot Ai\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) + C_4 \cdot Bi\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) - D_1 \cdot I_2 + D_2 \cdot I_1$$

με $C_1 \dots C_4$ είναι σταθερές ολοκλήρωσης, και:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\pi^{-1} Ai\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \int_0^t Bi\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \cos\left(\frac{a}{2}t\right) dt \\ &\quad + \pi^{-1} Bi\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \int_0^t Ai\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \cos\left(\frac{a}{2}t\right) dt \\ I_2 &= \pi^{-1} Ai\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \int_0^t Bi\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \sin\left(\frac{a}{2}t\right) dt \\ &\quad - \pi^{-1} Bi\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \int_0^t Ai\left(t + t_0 - \frac{a^2}{4}\right) \sin\left(\frac{a}{2}t\right) dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

Με χρήση των εξισώσεων (3.7) και (3.8) οι γωνίες περιστροφής φ και θ μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις (3.7), ενώ οι μετατοπίσεις Y και Z προκύπτουν από την ολοκλήρωση των εξισώσεων (3.2).

Οι κρίσιμες τιμές λυγισμού για τη στρεπτική ροπή προκύπτουν από τις τιμές της παραμέτρου α , που δίνουν μη μηδενική λύση στο σύστημα των ομογενών διαφορικών εξισώσεων, όπως αυτό συμπληρώνεται από τις οριακές συνθήκες.

3.2 Οριακές συνθήκες

Η γενικότερη θεώρηση περιλαμβάνει επτά συνδυασμούς οριακών συνθηκών, που συνοψίζονται στον Πίνακα 3.1. Οι συνδυασμοί αυτοί προκύπτουν από την επιβολή σε κάθε άκρο του φορέα των ακόλουθων συνθηκών:

Πακτωμένο άκρο: Ακίνητο άκρο, με περιορισμό στις εγκάρσιες μετατοπίσεις και τις καμπτικές περιστροφές. Η συνθήκη αυτή δίνει:

$$Y = 0, Z = 0, \varphi = 0, \theta = 0, \text{ (ή ισοδύναμα } f = 0, h = 0) \quad (3.9)$$

Κυλιόμενο άκρο: Αναφέρεται έτσι το άκρο με ελεύθερες τις εγκάρσιες μετατοπίσεις και περιορισμό στις καμπτικές περιστροφές.

$$H_1 = 0, H_2 = 0, \varphi = 0, \theta = 0, \text{ (ή ισοδύναμα } f = 0, h = 0) \quad (3.10)$$

Αρθρωμένο άκρο: Ακίνητο άκρο κατά την εγκάρσια διεύθυνση, ελεύθερο από περιορισμούς κατά τη κάμψη. Η συνθήκη για μηδενικές εγκάρσιες μετατοπίσεις δίνει:

$$Y = 0, \quad Z = 0 \quad (3.11)$$

Για να εκφραστεί η συνθήκη της ελευθερίας των καμπτικών περιορισμών μέσα από σχέσεις που θα περιέχουν τις περιστροφές ϕ , θ και τις παραγώγους τους στο εξεταζόμενο άκρο, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί ο ακριβής τρόπος επιβολής της στρεπτικής ροπής στο άκρο αυτό. Έτσι, αν υποθέσουμε προς στιγμήν ότι ο άξονας της επιβαλλόμενης στρεπτικής ροπής παρακολουθεί διαρκώς τη διεύθυνση του άξονα της δοκού στο σημείο επιβολής, τότε έχουμε την περίπτωση της ‘ακολουθούσας’ – (*follower*) ροπής, όπου, στο εξεταζόμενο αρθρωμένο άκρο, οι καμπτικές ροπές M_y και M_z θα είναι μηδενικές. Αυτή, όμως, η *ακολουθούσα* ροπή, είναι ένα μη συντηρητικό φορτίο, όπως έχει αναλυθεί σε εργασίες σχετικές με το έργο των ροπών στη περιοχή των πεπερασμένων (μη απειροστών) περιστροφών [Argyris 1978]. Την ίδια μη συντηρητική συμπεριφορά έχει και η λεγόμενη σταθερή (*fixed*) στο χώρο ροπή, ο άξονας και το μέτρο της οποίας δεν μεταβάλλεται, παρά τις παραμορφώσεις της κατασκευής. Στις ίδιες εργασίες έχει αναπτυχθεί το μοντέλο των λεγόμενων εφαπτομενικών (*tangential*) και ημιαπτομενικών (*semitangential*) ροπών, σαν υπόδειγμα συντηρητικών φορτίων. Ακολουθώντας τη διατύπωση αυτή, εξετάζεται εδώ μόνο η περίπτωση των ημιαπτομενικών ροπών, σαν το πιο διαδεδομένο μοντέλο συντηρητικής ροπής. Η θεώρηση αυτή δίδει για το εξεταζόμενο άκρο τις ακόλουθες συνθήκες:

$$EI \frac{d\theta}{ds} + \frac{M_t}{2} \varphi = 0, \quad EI \frac{d\varphi}{ds} - \frac{M_t}{2} \theta = 0, \text{ ή} \quad (3.12)$$

$$f' = h' = 0 \quad (3.13)$$


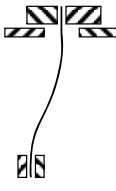





Ελεύθερο άκρο: Ελεύθερες εγκάρσιες μετατοπίσεις και καμπτικές περιστροφές, με ταυτόχρονη επιβολή στρεπτικής ροπής. Η συνθήκη αυτή δίδει:

$$H_1 = H_2 = 0 \quad (3.14)$$

Η συνθήκη για τις καμπτικές περιστροφές είναι ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε για το αρθρωμένο άκρο:

$$f' = h' = 0 \quad (3.15)$$

Πίνακας 3.1 Εξετασθείσες περιπτώσεις οριακών συνθηκών

Περίπτωση	1	2	3a	3b	4a	4b	5
Άνω άκρο	Πακτωμένο	Κυλιόμενο	Ελεύθερο	Πακτωμένο	Αρθρωμένο	Πακτωμένο	Αρθρωμένο
							
Κάτω άκρο	Πακτωμένο	Πακτωμένο	Πακτωμένο	Ελεύθερο	Πακτωμένο	Αρθρωμένο	Αρθρωμένο

3.3 Στρεπτικές ροπές λυγισμού

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι στρεπτικές ροπές που προκαλούν λυγισμό στο φορέα μπορούν να υπολογιστούν από τις ιδιοτιμές α που δίνουν μη μηδενική λύση στο σύστημα των ομογενών εξισώσεων (3.3). Όμως, η απευθείας επιβολή των σχέσεων (3.7) και (3.8) για τη περίπτωση πολύ μικρών τιμών της παραμέτρου ε (φορείς με σημαντικό βάρος και μικρή καμπτική δυσκαμψία), είναι προβληματική, λόγω του ιδιαίζοντος χαρακτήρα της συνάρτησης $\text{Ai}_2 Bi$, για μεγάλες τιμές του ορίσματός της. Για το λόγο αυτό, επιλύθηκε το σύστημα των εξισώσεων (3.1) και (3.2) με εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Στα Σχήματα 3.2 έως 3.8 παρουσιάζονται οι κρίσιμες αυτές ροπές λυγισμού, υπολογισμένες με το αριθμητικό σχήμα, για μια σειρά τιμών της παραμέτρου ευκαμψίας του φορέα ($wL^3/EI=\varepsilon^{-1}$), και της αδιάστατης αξονικής δύναμης που εφαρμόζεται στο κάτω άκρο.

3.3.1 Περιπτώσεις χωρίς περιορισμούς εγκάρσιων μετατοπίσεων στα άκρα

Η σε κλειστή μορφή λύση (3.7) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή προσεγγιστικών λύσεων για τη περίπτωση φορέων με σημαντικό βάρος, άκρα χωρίς εγκάρσιους περιορισμούς και μικρή τάση στο κατώτερο σημείο, περίπτωση που είναι αρκετά συνηθισμένη στη πράξη. Για τη περίπτωση αυτή έχουμε:

$$H_1 = H_2 = D_1 = D_2 = 0 \quad (3.16)$$

Από την άλλη πλευρά, η επιβολή των οριακών συνθηκών (3.10) ή (3.14) και (3.15) στο πάνω άκρο (για $t = \varepsilon^{-1/3} \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$), απαιτεί:

$$C_2 \approx C_4 \approx 0, \text{ καθώς } \lim_{t \rightarrow \infty} Bi(t) = \infty \quad (3.17)$$

και η εξίσωση (3.7) γίνεται:

$$f(t) \approx C_1 Ai \left(t + t_0 - \frac{a^2}{4} \right), \quad h(t) \approx C_3 Ai \left(t + t_0 - \frac{a^2}{4} \right) \quad (3.18)$$

Η επιβολή των οριακών συνθηκών στο κατώτατο άκρο ($t = 0$) δίδει:

- Για τη περίπτωση πακτωμένου ή κυλιόμενου άκρου (περιπτώσεις 2 και 3a):

$$Ai \left(t_0 - \frac{a^2}{4} \right) = 0 \rightarrow t_0 - \frac{a^2}{4} = -2.338107 \quad (3.19)$$

- Για ελεύθερο κάτω άκρο (περίπτωση 3b)

$$Ai' \left(t_0 - \frac{a^2}{4} \right) = 0 \Rightarrow t_0 - \frac{a^2}{4} = -1.01879 \quad (3.20)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να συμπτυχθούν στην ασυμπτωτική έκφραση:

$$M_t \approx 2 \sqrt{T_0 EI - \lambda(w(EI)^2)^{2/3}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

όπου το λ ισούται με -2.338107 για τις περιπτώσεις 2 και 3a, και με -1.01879 για τη περίπτωση 3b.

Υψηλότερες μορφές λυγισμού μπορούν να υπολογιστούν στη βάση των τιμών μηδενισμού των συναρτήσεων Airy, στις σχέσεις (3.19) και (3.20). Για τις περιπτώσεις 2 και 3a η δεύτερη και τρίτη μορφή λυγισμού αντιστοιχεί στις παραμέτρους $\lambda_2 = -4.08795$ και $\lambda_3 = -5.52056$ αντίστοιχα. Για την περίπτωση 3b, $\lambda_2 = -3.2482$ και $\lambda_3 = -4.8201$. Στη πράξη, βέβαια, η πρώτη μορφή λυγισμού είναι αυτή που συνήθως συγκεντρώνει το ενδιαφέρον.

Η ασυμπτωτική σχέση που παρουσιάστηκε παραπάνω συμφωνεί πολύ καλά με τα εξαγχθέντα αριθμητικά αποτελέσματα: για τιμές της παραμέτρου μήκους ε^{-1} μεγαλύτερες από 10^2 οι υπολογισμένες καμπύλες από το αριθμητικό σχήμα (γραφήματα 3.3 και 3.5) και οι ασυμπτωτικές τους προσεγγίσεις ουσιαστικά ταυτίζονται (βλ. και γράφημα 3.10).

Μια περαιτέρω επαλήθευση των αποτελεσμάτων, για τιμές της παραμέτρου μήκους σημαντικά μεγαλύτερες από αυτές που παρουσιάζονται στα σχήματα 3.3 και 3.5 έγινε με εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και χρήση του εμπορικού κώδικα FEM SOLVIA. Η σύγκριση μεταξύ των δύο μεθόδων παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.2 και είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα από την ανάλυση FEM συμφωνούν με μια παραδοχή ημι-εφαπτομενικής (semitangential) μεταβολής της στρεπτικής ροπής, κάτι το οποίο δεν διευκρινίζονταν στα εγχειρίδια του κώδικα, αλλά είναι συμβατό με μια θεώρηση της στρεπτικής ροπής σαν συντηρητικό φορτίο.

Πίνακας 3.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με ασυμπτωτικές τιμές

$\varepsilon = 10^{-6}, \quad T_0 = 0$		
Περίπτωση	$(M_t L) / EI$	
	FEM	Σχέση (3.21)
2, 3a	305.821	305.817
3b	201.952	201.870

Ο κατακόρυφος φορέας μοντελοποιήθηκε με ένα σημαντικό αριθμό (1000) πεπερασμένων στοιχείων δοκού 2 κόμβων, ώστε να προκύψουν αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια. Σημειώνεται ότι η χρήση λιγότερων στοιχείων (100) έδωσε αποτελέσματα με ακρίβεια στο επίπεδο του 2%, κάτι που συνδέεται με την απαίτηση για λεπτομερή περιγραφή της μορφής λυγισμού, ιδίως στο κατώτερο άκρο, όπου και παρατηρούνται έντονες μεταβολές. Μια τέτοια μορφή λυγισμού φαίνεται στο σχήμα 3.9. Παρατηρείται ότι οι μετατοπίσεις είναι σημαντικές μόνο σε μια περιοχή μερικών μηκών της τάξεως του $\varepsilon^{1/3}$ κοντά στο κάτω άκρο, ενώ το υπόλοιπο τμήμα του φορέα παραμένει πρακτικά απαραμόρφωτο. Το αποτέλεσμα αυτό επαληθεύεται και από την παρατήρηση της σχέσης (3.18), καθώς η συνάρτηση Airy $Ai(t)$ τείνει γρήγορα προς το μηδέν, για μεγάλες τιμές του ορίσματος της t . Αυτό επίσης εξηγεί και το γιατί οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στις γωνίες περιστροφής στο πάνω άκρο έχουν μικρή επίδραση στο αποτέλεσμα για τη κρίσιμη ροπή, όταν εξετάζονται φορείς με σημαντικό βάρος. Πράγματι, οι καμπύλες για τις περιπτώσεις 2 και 3a ταυτίζονται για μεγάλες τιμές της παραμέτρου μήκους. Η ίδια παρατήρηση μπορεί να γίνει και μεταξύ των περιπτώσεων 1 και 4a καθώς και μεταξύ των περιπτώσεων 4b και 5.

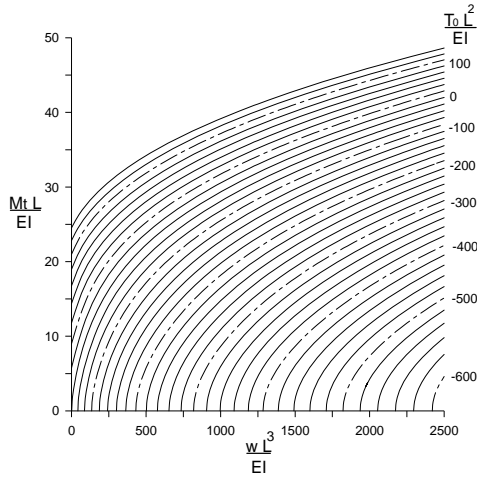
Σημειώνεται ότι, καθώς οι παραμορφώσεις επικεντρώνονται στη περιοχή κοντά στο κάτω άκρο, μια ενίσχυση μόνο του μέρους αυτού (αύξηση του EI) μπορεί να επιτύχει σημαντική αύξηση στο κρίσιμο φορτίο.

Ο Πίνακας 3.3 παρουσιάζει μια σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων από όλες τις αναλύσεις (πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένα στοιχεία και ασυμπτωτικά αποτελέσματα), όπου περιλαμβάνεται και η κρίσιμη στρεπτική ροπή λυγισμού που αντιστοιχεί στον φορέα χωρίς κατανεμημένο βάρος [Argyris, 1978].

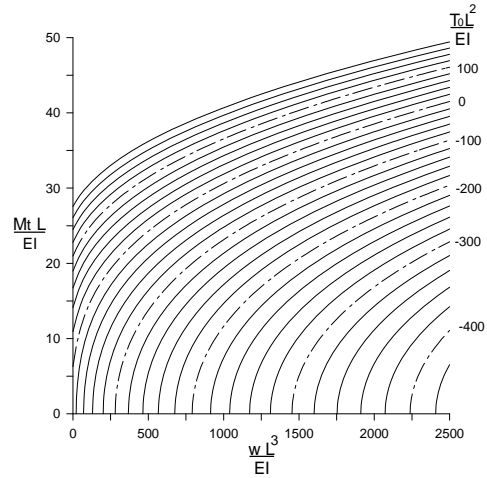
Πίνακας 3.3 Σύγκριση μεταξύ αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων

Περίπτωση	wL^3/EI	T_0L^2/EI	Αναλυτικά	Πεπ. Διαφορές	FEM	Ασυμπτωτικά
2	0	0	6.2832	6.2832	6.2832	-
2	10	0		7.6838	7.6838	6.5886
2	100	0		14.204	14.204	14.195
2	1000	0		30.582	30.582	30.582
3a	0	0	3.1416	3.1416	3.1416	-
3a	10	0		6.0884	6.0886	6.5886
3a	100	0		14.185	14.185	14.195
3a	1000	0		30.582	30.582	30.582
3b	0	0	3.1416	3.1416	3.1417	-
3b	10	0		4.5821	4.5820	4.3492
3b	100	0		9.3711	9.3703	9.3700
3b	1000	0		20.189	20.187	20.187

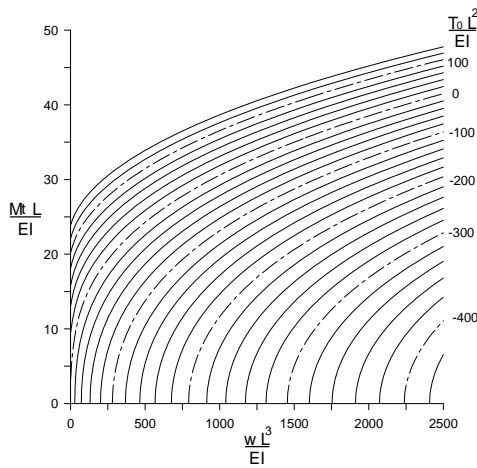
Οι καμπύλες των σχημάτων 3.2 έως 3.8 μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον προσδιορισμό της δρώσας έντασης στο κάτω άκρο, όταν η γεωμετρία και η επιβαλλόμενη στρεπτική ροπή είναι γνωστές. Για παράδειγμα, τα σημεία τομής των καμπυλών με τον οριζόντιο άξονα αντιστοιχούν στις κρίσιμες τιμές της δρώσας έντασης στο κάτω άκρο, απουσία της στρεπτικής ροπής, μια περίπτωση που έχει αναλυθεί από τους [Wang, 1983], [Bernitsas & Kokkinis 1983a,b,c, 1984a,b] και [Kokkinis & Bernitsas 1985,1987].



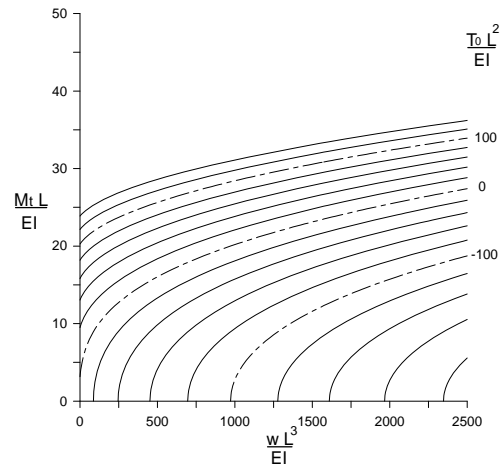
Σχήμα 3.2 Στρεπτικές ροπές λυγισμού.
Περίπτωση 1 (Πακτωμένα άκρα)



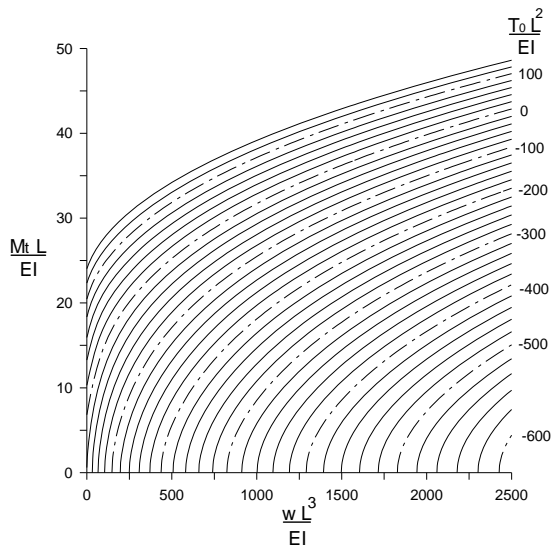
Σχήμα 3.3 Στρεπτικές ροπές λυγισμού.
Περίπτωση 2 (Κάτω άκρο πακτωμένο, άνω άκρο κυλιόμενο)



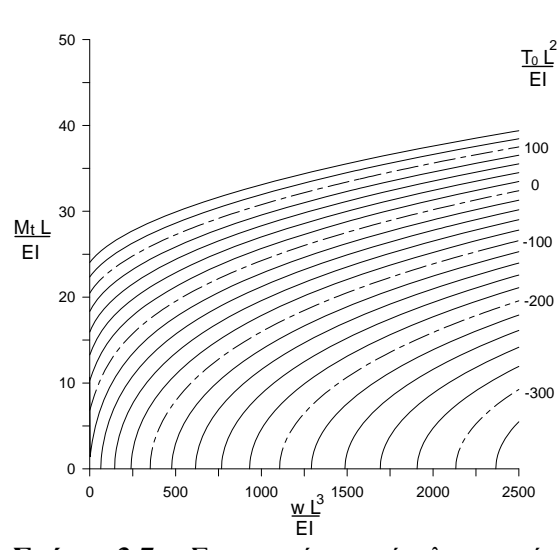
Σχήμα 3.4 Στρεπτικές ροπές λυγισμού.
Περίπτωση 3a (Κάτω άκρο πακτωμένο, άνω άκρο ελεύθερο)



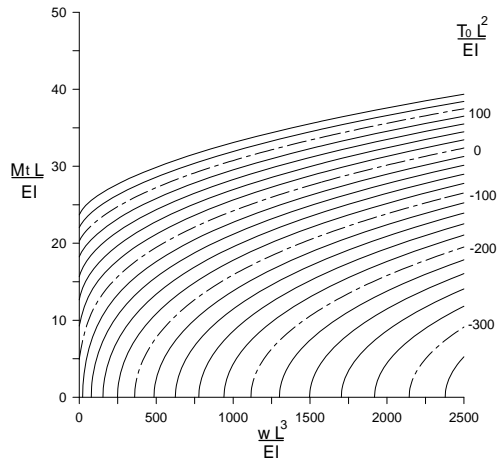
Σχήμα 3.5 Στρεπτικές ροπές λυγισμού.
Περίπτωση 3b (Κάτω άκρο ελεύθερο, άνω άκρο πακτωμένο)



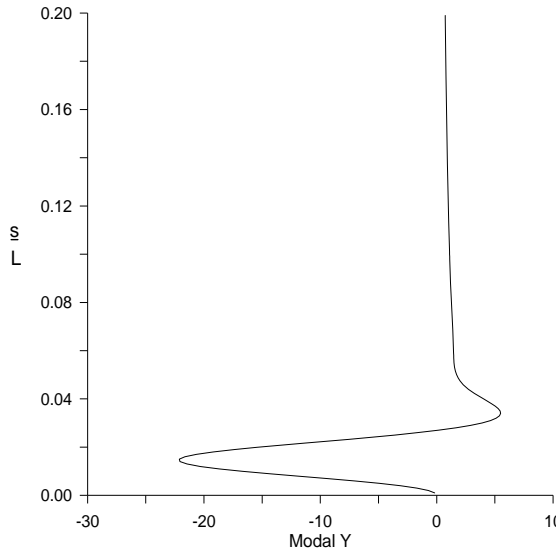
Σχήμα 3.6 Στρεπτικές ροπές λυγισμού. Περίπτωση 4a (Κάτω άκρο πακτωμένο, άνω άκρο αρθρωμένο)



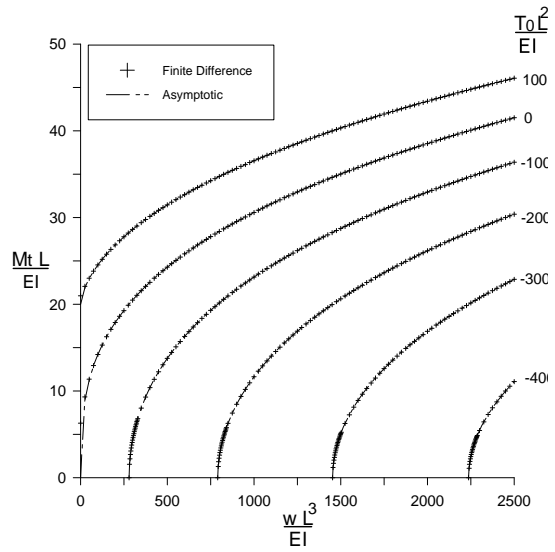
Σχήμα 3.7 Στρεπτικές ροπές λυγισμού. Περίπτωση 4b (Κάτω άκρο αρθρωμένο, άνω άκρο πακτωμένο)



Σχήμα 3.8 Στρεπτικές ροπές λυγισμού. Περίπτωση 5 (Άκρα αρθρωμένα)



Σχήμα 3.9 Μορφή λυγισμού από αποτελέσματα FEM. (Περίπτωση 1)



Σχήμα 3.10 Σύγκριση μεταξύ ασυμπτωτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων (Περίπτωση 2)

3.3.2 Περιπτώσεις με περιορισμό εγκάρσιων μετατοπίσεων στα άκρα

Οι περιπτώσεις με περιορισμό εγκάρσιων μετατοπίσεων στα άκρα απαιτούν ιδιαίτερη ανάλυση. Για την εξέτασή τους, είναι πρόσφορο να συμπυκνωθεί το σύστημα των εξισώσεων (3.1), εκφραζόμενο σε μία μόνο εξίσωση, μιγαδικών μεταβλητών:

$$w'' + i a w' = w(t + t_0) + D \quad (3.22)$$

όπου ορίζονται:

$$w = \varphi + i \theta$$

$$D = -D_1 + i D_2 \quad (3.23)$$

(i η φανταστική μονάδα)

Οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης εκφράζονται σαν (βλ. κατ' αναλογία σχέση (3.7))

$$w(t; t_0, a) = C_1 e^{-i \frac{a}{2}(t+t_0)} Ai \left(t + t_0 - \frac{a^2}{4} \right) + C_2 e^{-i \frac{a}{2}(t+t_0)} Bi \left(t + t_0 - \frac{a^2}{4} \right) \quad (3.24)$$

Για την μη ομογενή (3.22) θεωρούμε λύση της μορφής:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C q(z) e^{t z} dz \quad (3.25)$$

όπου C καμπύλη ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Τόσο η καμπύλη αυτή όσο και η μιγαδική συνάρτηση $q(z)$ πρέπει να προσδιοριστούν κατάλληλα, ώστε να επιλύεται η (3.22)

Για την αντικατάσταση της 3.24 στην 3.22 υπολογίζονται:

$$w' = \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z q(z) e^{tz} dz \quad (3.26)$$

$$w'' = \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^2 q(z) e^{tz} dz \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} w \cdot (t + t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (t + t_0) q(z) e^{tz} dz \\ &= \frac{t_0}{2\pi i} \int_C q(z) e^{tz} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C q'(z) e^{tz} dz \\ &\quad + \left[\frac{1}{2\pi i} q(z) e^{tz} \right]_{C_1}^{C_2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

όπου C_1 και C_2 τα άκρα της καμπύλης ολοκλήρωσης C στο μιγαδικό επίπεδο.

Μετά την αντικατάσταση των 3.24-3.27 στην 3.22, επιλέγονται οι ακόλουθες συνθήκες, για να αποτελεί η w λύση της 3.22:

$$\begin{aligned} z^2 q(z) + i \alpha q(z) + q'(z) - t_0 q(z) &= 0 \Rightarrow \\ (z^2 + i \alpha z - t_0) dz &= -\frac{dq}{q} \Rightarrow \\ \left(\frac{z^3}{3} + i \alpha \frac{z^2}{2} - z t_0 \right) &= -\ln q + \ln C_3 \\ \Rightarrow q(z) & \\ &= C_3 e^{(-\frac{z^3}{3} - i \alpha \frac{z^2}{2} + z t_0)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Επίσης, για την ικανοποίηση της 3.22 θα πρέπει:

$$\left[\frac{1}{2\pi i} q(z) e^{tz} \right]_{z=C_1}^{C_2} + D = 0 \quad (3.30)$$

Για την επίτευξη της συνθήκης αυτής επιλέγεται η καμπύλη ολοκλήρωσης C να ξεκινά από την αρχή των αξόνων ($C_1=0$) και να βαίνει προς το άπειρο, σε τομείς του μιγαδικού επιπέδου όπου η ποσότητα :

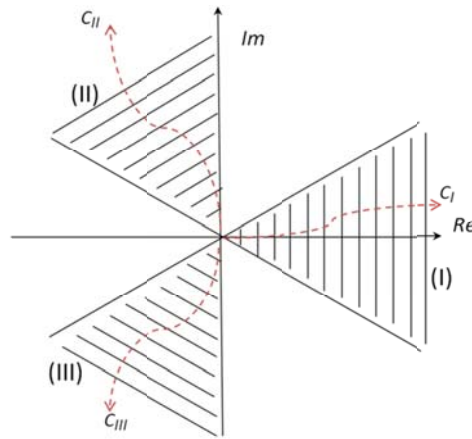
$$q(z) e^{tz} = C_3 e^{(-\frac{z^3}{3} - i \alpha \frac{z^2}{2} + z(t+t_0))} \quad (3.31)$$

να τείνει στο μηδέν. Ουσιαστικά είναι οι τομείς όπου το πραγματικό μέρος του παράγοντα z^3 είναι θετικό:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{6} + \delta &\leq \operatorname{arg} z \leq \frac{\pi}{6} - \delta \quad (\text{I}) \\ \frac{\pi}{2} + \delta &\leq \operatorname{arg} z \leq \frac{5\pi}{6} - \delta \quad (\text{II}) \\ -\frac{5\pi}{6} + \delta &\leq \operatorname{arg} z \leq -\frac{\pi}{2} - \delta \quad (\text{III}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

όπου δ ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός [Olver 1997, p53].

Οι τομείς αυτοί παρουσιάζονται σκιαγραφημένοι στο ακόλουθο σχήμα, μαζί με ενδεικτικές καμπύλες ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.11 Καμπύλες ολοκλήρωσης C στο μιγαδικό επίπεδο, της λύσης 3.25

Για τη λύση της μη ομογενούς επιλέγεται ο τομέας II:

$$w(t) = D \int_0^{C_{II}} e^{(-\frac{z^3}{3} - i\alpha \frac{z^2}{2} + z(t+t_0))} dz \quad (3.33)$$

Η επιλογή του συγκεκριμένου τομέα (II) έγινε σε συνάρτηση με τη συμπεριφορά της λύσης $w(t)$ για μεγάλα t , σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες στο άνω άκρο του φορέα: οι λύσεις που αντιστοιχούν στους τομείς II και III τείνουν στο μηδέν για μεγάλα t , σε αντίθεση με τον τομέα I, όπου η λύση απειρίζεται. Σημειώνεται εδώ ότι μία άλλη εύλογη επιλογή θα ήταν ο τομέας II, ή και ένας γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων στους δύο τομείς I και II. Μάλιστα, το ημίθροισμα των συναρτήσεων στους δύο τομείς προσομοιάζει στη συνάρτηση Scorer $Gi(z)$ [Olver 1997], στην οποία μάλιστα καταλήγει, πέρα από μια πολλαπλασιαστική σταθερά, στην περίπτωση μηδενικής στρεπτικής ροπής. Πράγματι, για μηδενικά α και t_0 , η εξίσωση (3.22) μεταπίπτει στη γνωστή μη ομογενή εξίσωση Airy, οι λύσεις της οποίας είναι οι συναρτήσεις Scorer $Gi(t)$ και $Hi(t)$ [Olver 1997].

Μετά την επιλογή της καμπύλης ολοκλήρωσης απομένει για την 3.29 η ικανοποίηση της σχέσης:

$$-\frac{1}{2\pi i} q(0) + D = 0 \Rightarrow C_3 = 2\pi i D \quad (3.34)$$

Με την αντικατάσταση $u=z+i a/2$ η λύση γράφεται :

$$\begin{aligned} w(t) &= D e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} e^{i\frac{a^3}{12} \int_{i\frac{a}{2}}^{C_{II}} e^{(u(t+t_0-\frac{a^2}{4})-\frac{u^3}{3})} du \\ &\equiv D e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} gi\left(t+t_0-\frac{a^2}{4}; a\right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

με

$$gi(x; a) = e^{i\frac{a^3}{12} \int_{i\frac{a}{2}}^{C_{II}} e^{u x - \frac{u^3}{3}} du \quad (3.36)$$

Το ολοκλήρωμα στη παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί μέσω με των καλουμένων ελλειπών συναρτήσεων Airy και ειδικότερα της g_0 [Constantinides et al,1993]:

$$\int_{i\frac{a}{2}}^{C_{II}} e^{u x - \frac{u^3}{3}} du = i \int_{\frac{a}{2}}^{\infty \exp(i\psi_0)} e^{i(t x + \frac{t^3}{3})} dt = i g_0(x; a/2) \quad (3.37)$$

με

$$\delta \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{3} - \delta$$

Ενσωματώνοντας και την ομογενή λύση, η γενική λύση της (3.22) γράφεται:

$$w(t; t_0, a) = e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} \{C_1 Ai(\zeta) + C_2 Bi(\zeta) + D gi(\zeta; a)\} \quad (3.38)$$

με $\zeta = t + t_0 - a^2/4$ και $C_{1,2}, D$ μιγαδικές σταθερές. Η σχέση αυτή εκφράζει τις γωνίες των εγκάρσιων διατομών κατά το μήκος του φορέα (σχήμα. 3.1). Οι αντίστοιχες εγκάρσιες μετατοπίσεις προκύπτουν από την ολοκλήρωση αυτής της έκφρασης, όπως περιγράφεται στη συνέχεια.

Οριακές συνθήκες

Οι περιπτώσεις με περιορισμό των εγκάρσιων μετατοπίσεων στο άνω άκρο του φορέα απαιτούν:

$$\int_0^{\bar{L}} w(t) dt = 0 \quad (3.39)$$

όπου $\bar{L} = \varepsilon^{-1/3}$ είναι το αδιαστατοποιημένο μήκος του φορέα, βλ. (3.4).

Επιπλέον, ανάλογα με τον ειδικότερο τρόπο στήριξης στα άκρα, οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες εκφράζονται ως εξής:

Πακτωμένο άκρο:

$$w = 0 \text{ για } t=0 \text{ ή/και } \bar{L} \quad (3.40)$$

Ελεύθερο άκρο (ημιαφαπτομενικές στρεπτικές ροπές α):

$$w' + i \frac{\alpha}{2} w = 0 \text{ για } t = 0 \text{ ή/και } \bar{L} \quad (3.41)$$

3.3.3 Ασυμπτωτική λύση για πολύ εύκαμπτους φορείς με εγκάρσιο περιορισμό στα άκρα

Εξετάζοντας την 3.38 για τις περιπτώσεις πολύ εύκαμπτων φορέων ($\varepsilon \rightarrow 0$ ή, ισοδύναμα, $\bar{L} \rightarrow \infty$), οι οποίες και ενδιαφέρουν στις εφαρμογές των εύκαμπτων σωλήνων στο θαλάσσιο περιβάλλον, και με βάση την συμπεριφορά των συναρτήσεων Bi Airy για μεγάλα ορίσματα:

$$Bi(\bar{L}) \rightarrow \infty \text{ για } \bar{L} \rightarrow \infty \quad (3.42)$$

συνάγεται από τις οριακές συνθήκες 3.40 ή 3.41 ότι:

$$C_2 \approx 0 \quad (3.43)$$

Οι απομένουσες μιγαδικές σταθερές C_1, D προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες για τις γωνίες ή ροπές στο κάτω άκρο (σχέσεις 3.41 ή 3.42) καθώς και τη σχέση για τις εγκάρσιες μετατοπίσεις στο άνω άκρο (σχέση 3.40). Οι σχέσεις αυτές συγκροτούν ένα ομογενές γραμμικό σύστημα, το οποίο αναλύεται στο Παράρτημα Α, όπου εξάγεται και η συνθήκη για μη τετριμμένες λύσεις, η οποία αποδίδει και τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για τις τιμές λυγισμού, για συνδυασμούς των παραμέτρων L, α και t_0 , για πάκτωση κάτω άκρο:

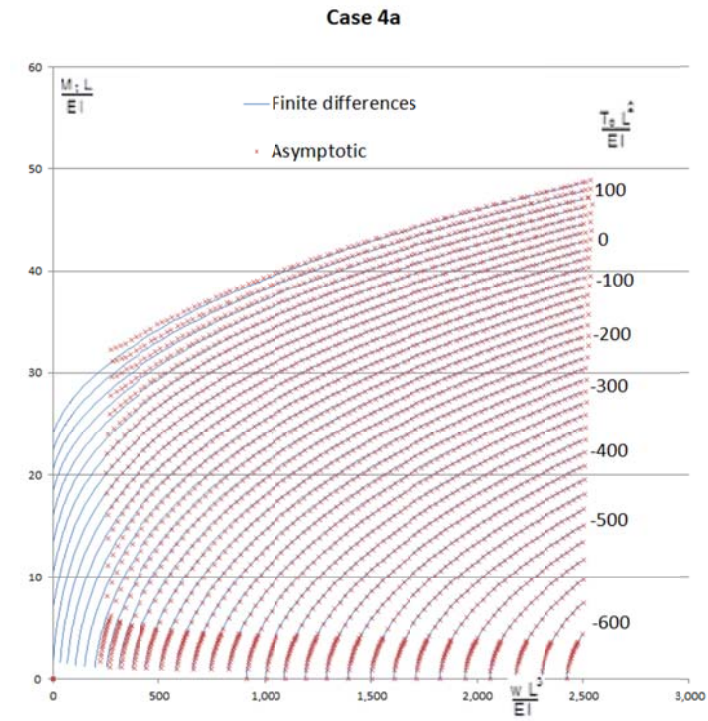
$$\bar{L} = \exp\left\{-\Re(I_1) \frac{\Re(gi(\zeta_0; a))}{Ai(\zeta_0)} + \Im(I_1) \frac{\Im(gi(\zeta_0; a))}{Ai(\zeta_0)} + \Re(I_{21} - I_{2c} - \gamma)\right\} - t_0 \quad (3.44)$$

και για απλή έδραση στο κάτω άκρο:

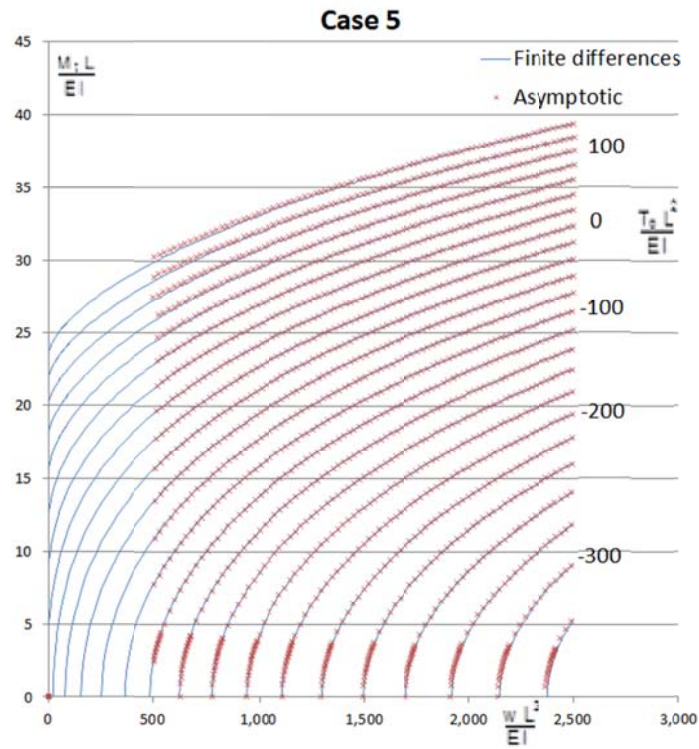
$$\bar{L} = \exp\left\{-\Re(I_1) \frac{\Re(gi'(\zeta_0; a))}{Ai'(\zeta_0)} + \Im(I_1) \frac{\Im(gi'(\zeta_0; a))}{Ai'(\zeta_0)} + \Re(I_{21} - I_{2c} - \gamma)\right\} - t_0 \quad (3.45)$$

με τα ολοκληρώματα I_1, I_{21}, I_{2c} οριζόμενα στο Παράρτημα Α.

Στα επόμενα σχήματα 3.12 και 3.13 παρουσιάζεται μια σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών και των ασυμπτωτικών τιμών λυγισμού, όπως υπολογίζονται από τις παραπάνω σχέσεις (3.44) και (3.45). Από τα σχήματα συνάγεται η πολύ καλή συμφωνία για το εύρος τιμών των εξεταζομένων παραμέτρων.



Σχήμα 3.12 Σύγκριση ασυμπτωτικών τιμών λυγισμού. Περίπτωση οριακών συνθηκών 4a.



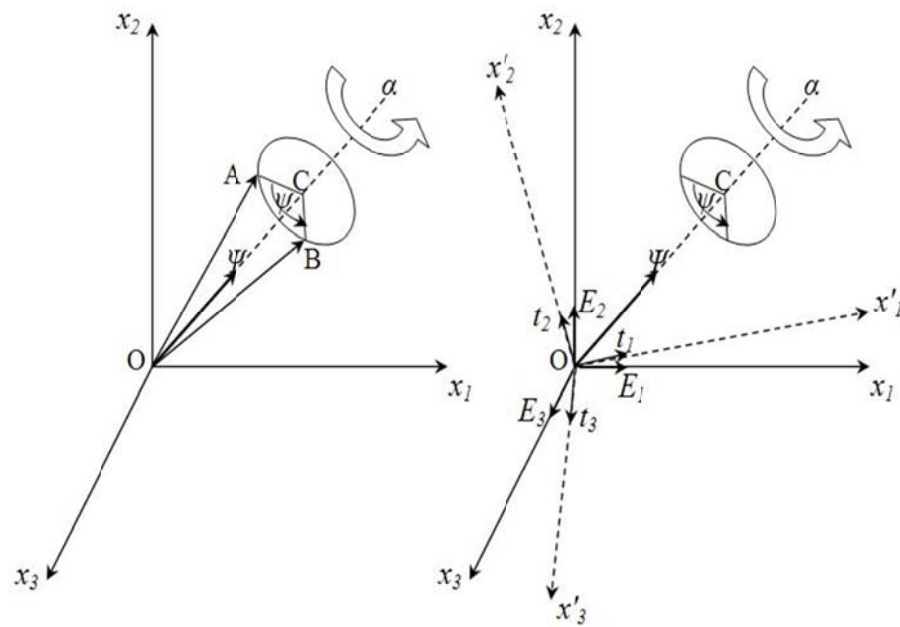
Σχήμα 3.13 Σύγκριση ασυμπτωτικών τιμών λυγισμού. Περίπτωση οριακών συνθηκών 5.

4

Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

4.1 Παραμετροποίηση περιστροφών

Για τις αριθμητικές μεθόδους της εργασίας ακολουθήθηκε παραμετροποίηση με βάση το 'διάνυσμα' περιστροφής. Ο τρόπος αυτός είναι εποπτικός, απλός και μπορεί να αποδώσει περιστροφές οποιουδήποτε μεγέθους, καθώς στον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων κάθε περιστροφή ορίζεται πλήρως από τον άξονά της και το μέτρο της γωνίας περιστροφής γύρω από τον άξονα αυτό.



Σχήμα 4.1 Περιστροφή υπό την επίδραση διανύσματος περιστροφής Ψ

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1, το διάνυσμα \mathbf{OA} μετασχηματίζεται στο \mathbf{OB} υπό την επίδραση περιστροφής κατά γωνία ψ , γύρω από άξονα Oa . Η περιστροφή αυτή μπορεί να καθοριστεί πλήρως από το διάνυσμα Ψ , συγγραμμικό του άξονα Oa , με φορά καθοριζόμενη από το δεξιόστροφο κανόνα και μέτρο ίσο με τη γωνία ψ . Το σχετικό μητρώο περιστροφής \mathbf{R} υπολογίζεται με βάση το διάνυσμα περιστροφής Ψ από τη σχέση:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin\|\Psi\|}{\|\Psi\|} \tilde{\Psi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\frac{\|\Psi\|}{2}}{\frac{\|\Psi\|}{2}} \right]^2 \tilde{\Psi}\tilde{\Psi} \quad (4.1)$$

όπου $\tilde{\Psi}$ είναι το αντισυμμετρικό μητρώο που σχηματίζεται από τις συνιστώσες :

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & -\Psi_3 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & 0 & -\Psi_1 \\ -\Psi_2 & \Psi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ο συμβολισμός $\tilde{\cdot}$, ή και $skew(\cdot)$, χρησιμοποιείται για το αντισυμμετρικό μητρώο που σχηματίζεται από τις συνιστώσες ενός ‘αξονικού’ διανύσματος Ψ σύμφωνα με τη σχέση (4.2). Η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή η εξαγωγή του αξονικού διανύσματος περιστροφής από ένα αντισυμμετρικό μητρώο θα συμβολίζεται με $vect(\tilde{\cdot})$.

Η ανάπτυξη σε σειρά της σχέσης (4.1) δίδει:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \tilde{\Psi} + \frac{1}{2!} \tilde{\Psi}^2 + \frac{1}{2!} \tilde{\Psi}^3 + \dots = \exp(\tilde{\Psi}) \quad (4.3)$$

Σύνθεση διαδοχικών περιστροφών

Θεωρούμε δύο διαδοχικές περιστροφές \mathbf{R} και \mathbf{R}_l . Με την πρώτη, το πλαίσιο $(O; E_1, E_2, E_3)$ περιστρέφεται στο $(O; t_1, t_2, t_3)$. Με τη δεύτερη περιστροφή, το $(O; t_1, t_2, t_3)$ έρχεται στη θέση $(O; t'_1, t'_2, t'_3)$. Για τα μοναδιαία διανύσματα θα ισχύει:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{R} \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{t}'_i = \mathbf{R}_l \mathbf{t}_i = \mathbf{R}_l \mathbf{R} \mathbf{E}_i, \quad i=1,2,3 \quad (4.4)$$

Έτσι, ο συνολικός πίνακας περιστροφής θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_l \mathbf{R} \quad (4.5)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (4.4), η δεύτερη (αυξητική) περιστροφή εφαρμόζεται στις συνιστώσες των διανυσμάτων t_i εκφρασμένες στο ακίνητο πλαίσιο και για το λόγο αυτό αναφέρεται σαν περιστροφή γύρω από τους σταθερούς άξονες [Argyris 1978] ή, επίσης και σαν χωρική (spatial) αύξηση.

Η ίδια συνολική περιστροφή μπορεί να προκύψει και με εφαρμογή μιας δεύτερης περιστροφής \mathbf{R}_r στο ήδη περιστραμμένο πλαίσιο (περιστροφή γύρω από ακολουθούντες άξονες. Αναφέρεται και σαν υλική ή και σωματοπαγής αύξηση). Έτσι θα ισχύει:

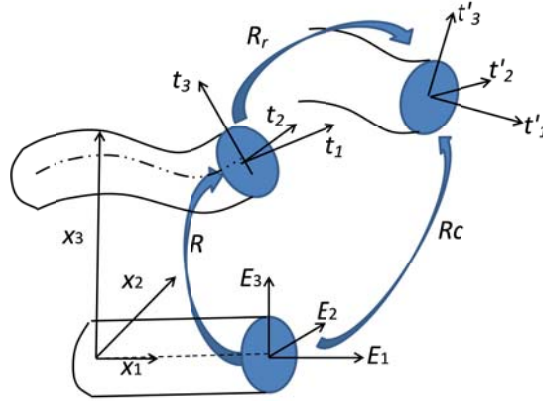
$$\mathbf{E}'_i = \mathbf{R}_r \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{t}''_i = \mathbf{R} \mathbf{E}'_i = \mathbf{R} \mathbf{R}_r \mathbf{E}_i \quad i=1,2,3 \quad (4.6)$$

Η συνολική περιστροφή θα δίνεται τώρα από τον τύπο:

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R} \mathbf{R}_r \quad (4.7)$$

Για τα δύο μητρώα των περιστροφών θα ισχύει:

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{R} \mathbf{R}_r \mathbf{R}^T \quad (4.8)$$



Σχήμα 4.2 : Σύνθεση περιστροφών

Συμβολίζοντας με Θ και ϑ τα διανύσματα περιστροφής που αντιστοιχούν στους δύο τρόπους επιβολής της αύξησης:

$$\mathbf{R}_l = \exp(\tilde{\vartheta}), \quad \mathbf{R}_r = \exp(\tilde{\Theta}) \quad (4.9)$$

θα ισχύει:

$$\vartheta = \mathbf{R} \Theta \quad (4.10)$$

Απειροστές μεταβολές περιστροφών

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο για την κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας περιστρεφόμενου σώματος όσο και για την περαιτέρω γραμμικοποίησή τους παρουσιάζουν οι μεταβολές των μητρώων περιστροφής, υπό την επίδραση απειροστών αυξήσεων, για τις οποίες το αντίστοιχο μητρώο περιστροφής γίνεται, κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους στη (4.3):

$$\exp(\tilde{\delta\vartheta}) \cong \mathbf{I} + \tilde{\delta\vartheta} \quad (4.11)$$

και για την αυξητική περιστροφή του προηγούμενου εδαφίου έχει απειροστό μέγεθος $\delta\vartheta$ ή $\delta\Theta$, τότε για τη συνολική περιστροφή θα ισχύει:

$$\mathbf{R}_c \cong \mathbf{R} + \delta\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \tilde{\delta\vartheta})\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{I} + \tilde{\delta\Theta}) \quad (4.12)$$

Οπότε:

$$\delta \mathbf{R} = \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R} = \mathbf{R} \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.13)$$

Οι απειροστές περιστροφές αποτελούν διανυσματικό χώρο και μπορούν να προστίθενται.

4.2 Οι στοιχειώδεις μεταβολές των παραμορφώσεων

Ο υπολογισμός των στοιχειωδών μεταβολών των παραμορφώσεων του εδαφίου επιβάλλεται τόσο για την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων και την περαιτέρω ανάπτυξη ενός αριθμητικού μοντέλου βασισμένου στη θεωρία των μεταβολών, όσο και για τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας.

Η στοιχειώδης μεταβολή των εφελκυστικών-διατμητικών παραμορφώσεων προκύπτει από τη σχέση (2.14):

$$\delta \boldsymbol{\Gamma} = \delta \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{x}_c}{ds} + \mathbf{R}^T \frac{d(\delta \mathbf{x}_c)}{ds} = -\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{x}_c}{ds} + \mathbf{R}^T \frac{d(\delta \mathbf{x}_c)}{ds} \quad (4.14)$$

Εισάγοντας τις χωρικές μεταβολές των περιστροφών στη θέση των *σωματόδετων* έχουμε:

$$\delta \boldsymbol{\Gamma} = -\mathbf{R}^T \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \frac{d\mathbf{x}_c}{ds} + \mathbf{R}^T \frac{d(\delta \mathbf{x}_c)}{ds} = \mathbf{R}^T \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_c}{ds} \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}^T \frac{d(\delta \mathbf{x}_c)}{ds} \quad (4.15)$$

Οι στοιχειώδεις μεταβολές των στρεπτικών-καμπτικών παραμορφώσεων εξάγονται από τη σχέση (2.18):

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{K}} &= -\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds} + \mathbf{R}^T \frac{d}{ds} (\mathbf{R} \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= -\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}} \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{d}{ds} (\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Με χρήση των χωρικών περιστροφών:

$$\delta \tilde{\mathbf{K}} = -\mathbf{R}^T \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \frac{d\mathbf{R}}{ds} + \mathbf{R}^T \frac{d}{ds} (\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R}) = \mathbf{R}^T \left\{ \frac{d}{ds} (\delta \boldsymbol{\theta}) \right\} \mathbf{R} \quad (4.17)$$

το δε αντίστοιχο αξονικό διάνυσμα δίνεται από τον τύπο:

$$\delta \mathbf{K} = \mathbf{R}^T \frac{d}{ds} (\delta \boldsymbol{\theta}) = \tilde{\mathbf{K}} \delta \boldsymbol{\theta} + \frac{d}{ds} (\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \quad (4.18)$$

Τα διανύσματα των στοιχειωδών μεταβολών των παραμορφώσεων εκφραζόμενα στους γενικούς άξονες παίρνουν τη μορφή:

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R} \delta \boldsymbol{\Gamma} = \frac{d(\delta \mathbf{x}_c)}{ds} + \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_c}{ds} \delta \boldsymbol{\theta} \quad (4.19)$$

και

$$\delta \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R} \delta \mathbf{K} = \frac{d}{ds} (\delta \boldsymbol{\theta}) \quad (4.20)$$

4.3 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Η εύκαμπτη κατασκευή διακριτοποιείται με N ισαπέχοντες κόμβους στον άξονά της στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Η θέση και ο προσανατολισμός της διατομής στον κόμβο i προσδιορίζονται από τις συντεταγμένες του κέντρου της \mathbf{x}_i και από τον πίνακα περιστροφής της σε σχέση με το γενικό σύστημα \mathbf{R}_i , που μπορεί να εκφραστεί μέσω του διανύσματος περιστροφής $\boldsymbol{\psi}_i$:

$$\mathbf{R}_i = \exp(\boldsymbol{\psi}_i), \quad \boldsymbol{\psi}_i = \text{vec}(\mathbf{R}_i) = \exp^{-1}(\mathbf{R}_i) \quad (4.21)$$

Κύριο σημείο στην εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων παρεμβολής, τόσο των μετατοπίσεων όσο και των περιστροφών. Για τις μετατοπίσεις δεν υφίσταται κάποιο ουσιαστικό πρόβλημα, δεδομένου ότι αυτές ανήκουν σε γραμμικό χώρο, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ισο-παραμετρικές συναρτήσεις παρεμβολής πολωνύμων Lagrange $h_i(s)$ [Bathe, 1982]:

$$\mathbf{x}(s) = \sum_{i=1}^N h_i(s) \mathbf{x}_i \quad (4.22)$$

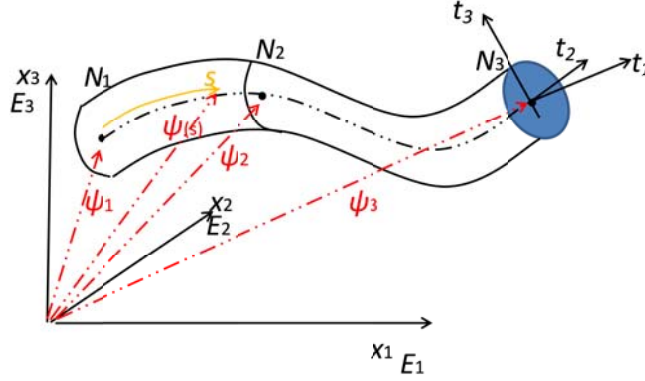
Για τις περιστροφές, μια παρεμβολή των μητρώων περιστροφής των κόμβων, για παράδειγμα:

$$\mathbf{R}(s) = \sum_{i=1}^N h_i(s) \mathbf{R}_i \quad (4.23)$$

θα απέδιδε μητρώα $\mathbf{R}(s)$ μη ορθοκανονικά (μη ανήκοντα στο SO_3), αποκλίνοντας από μια γεωμετρικά ακριβή αναπαράσταση.

Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν να χρησιμοποιηθεί παρεμβολή για τα διανύσματα περιστροφής, ανάλογη αυτής των μετατοπίσεων (βλ. σχήμα 4.3):

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \sum_{i=1}^N h_i(s) \boldsymbol{\psi}_i \quad \text{και} \quad \mathbf{R}(s) = \exp(\boldsymbol{\psi}(s)) \quad (4.24)$$



Σχήμα 4.3: Παρεμβολή περιστροφών με βάση τα διανύσματα περιστροφής των κόμβων

Μια τέτοια παρεμβολή οδηγεί ευθέως σε μη αντικειμενική περιγραφή της παραμορφωμένης κατάστασης, που θα εξαρτάται πλέον από το επιλεγθέν γενικό σύστημα αναφοράς. Έτσι, η χρήση ενός άλλου γενικού συστήματος αναφοράς στραμμένου ως προς το πρώτο, ή ισοδύναμα μιας περιστροφής ‘στερεού σώματος’ \mathbf{R}_G σε ολόκληρη την παραμορφωμένη δοκό, οδηγεί γενικά σε διαφορετική γεωμετρία και συνεπώς διαφορετική παραμορφωσιακή κατάσταση. Αν:

$${}^2\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_G {}^1\mathbf{R}_i \quad (4.25)$$

τότε:

$${}^2\mathbf{R}(s) = \exp\left(\sum_{i=1}^N h_i(s) \text{vec}(\mathbf{R}_G {}^1\mathbf{R}_i)\right) \neq \mathbf{R}_G {}^1\mathbf{R}(s) \quad (4.26)$$

ή, διαφορετικά:

$$\sum_{i=1}^N h_i(s) \text{vec}(\mathbf{R}_G {}^1\mathbf{R}_i) \neq \mathbf{R}_G \sum_{i=1}^N h_i(s) \text{vec}({}^1\mathbf{R}_i) \quad (4.27)$$

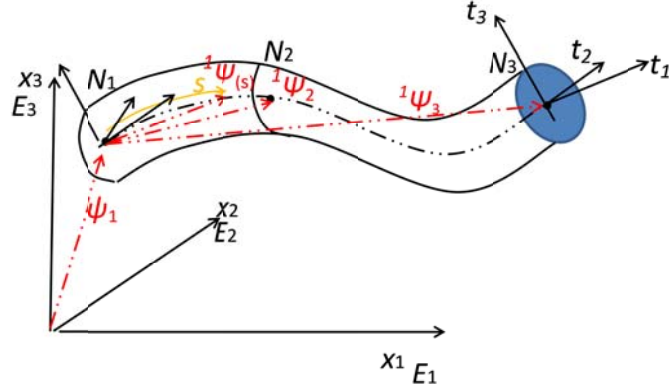
λόγω της μη γραμμικότητας της συνάρτησης $\text{vec}()$.

Για τους ανωτέρω λόγους επιλέχθηκε η παρεμβολή των τοπικών περιστροφών των διατομών, σε σχέση με τον προσανατολισμό ενός επιλεγμένου ‘κόμβου βάσης’ j (βλ. Σχήματα 4.4 και 4.5), και ειδικότερα η παρεμβολή των αντίστοιχων διανυσμάτων περιστροφής, τα οποία ανήκουν στον διανυσματικό χώρο jT_1SO3 και συνεπώς επιδέχονται παρεμβολής. Πρόκειται δηλαδή για μια παρεμβολή η οποία παρακολουθεί τις παραμορφώσεις του σώματος και έτσι δεν εξαρτάται από την επιλογή γενικού συστήματος συντεταγμένων, ούτε επηρεάζεται από συνολικές περιστροφές τύπου στερεού σώματος (στα επόμενα ο πάνω αριστερά δείκτης αριθμεί τον κόμβο βάσης).

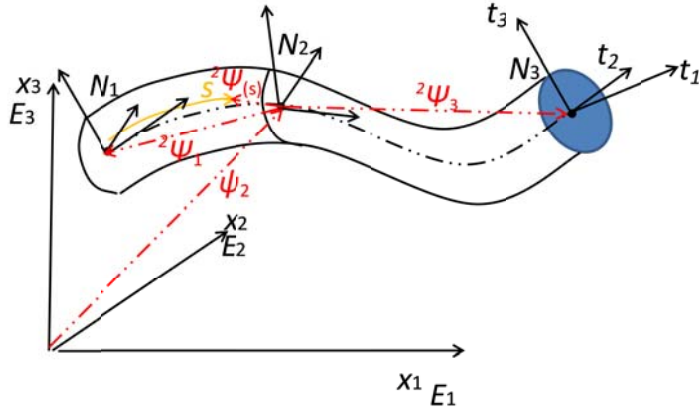
$${}^j\boldsymbol{\Psi}(s) = \sum_{i=1}^N h_i(s) {}^j\boldsymbol{\Psi}_i \quad (4.28)$$

Τα διανύσματα ${}^j\boldsymbol{\Psi}_i$ υπολογίζονται από τη σχέση:

$${}^j\mathbf{R} \exp({}^j\boldsymbol{\Psi}_i) = {}^i\mathbf{R} \rightarrow {}^j\boldsymbol{\Psi}_i = \exp^{-1}({}^j\mathbf{R}^T {}^i\mathbf{R}) \quad (4.29)$$



Σχήμα 4.4: Τοπική παρεμβολή περιστροφών με βάση τον κόμβο 1



Σχήμα 4.5: Τοπική παρεμβολή περιστροφών με βάση τον κόμβο 2

Ακολουθώντας τη παρεμβολή αυτή, ο πίνακας περιστροφής κάθε διατομής θα δίδεται:

$$\mathbf{R}(s) = \exp(\boldsymbol{\psi}(s)) = \exp(\boldsymbol{\Psi}_j) \exp({}^j\boldsymbol{\Psi}(s)) \quad (4.30)$$

και οι καμπυλότητες στους κόμβους θα είναι:

$${}^j\mathbf{K}(s) = \mathbf{T}({}^j\boldsymbol{\Psi}(s)) \sum_{i=1}^N h'_i(s) {}^j\boldsymbol{\Psi}_i \quad (4.31)$$

με εφαπτομενικό τελεστή [Geradin & Cardona 2001]:

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{I} + \frac{\cos\|\boldsymbol{\Psi}\| - 1}{\|\boldsymbol{\Psi}\|^2} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi} + \left(1 - \frac{\sin\|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}\|}\right) \frac{\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}}{\|\boldsymbol{\Psi}\|^2} \quad (4.32)$$

Ειδικότερα για τις καμπυλότητες στον κόμβο-βάση της παρεμβολής, όταν $s=s_j$, η παραπάνω έκφραση απλοποιείται σημαντικά:

$${}^j\mathbf{K}(s_j) = \sum_{i=1}^N h'_i(s_j) {}^j\boldsymbol{\Psi}_i \quad (4.33)$$

καθώς:

$${}^j\boldsymbol{\Psi}(s_j) = \mathbf{0} \text{ και } \mathbf{T}({}^j\boldsymbol{\Psi}(s_j)) = \mathbf{I} \quad (4.34)$$

Όπως θα αναφερθεί και στη συνέχεια, στην συγκριτικά απλούστερη αυτή σχέση για τις καμπυλότητες θα στηριχθεί η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης της ελαστικής ενέργειας τύπου Newton-Cotes, με σημεία ολοκλήρωσης τους κόμβους του στοιχείου.

4.4 Εσωτερικά φορτία

Οι, συνολικά έξι, βαθμοί ελευθερίας σε κάθε κόμβο του στοιχείου είναι οι γραμμικές μετατοπίσεις του κέντρου της διατομής και οι αυξητικές χωρικές (δηλαδή γύρω από τους άξονες του γενικού συστήματος) περιστροφές της, και διατάσσονται σε πίνακα στήλη:

$$\delta\mathbf{q}^T = [\delta\mathbf{x}_1, \delta\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \delta\mathbf{x}_N, \delta\boldsymbol{\theta}_N] \quad (4.35)$$

όπου N είναι ο αριθμός των κόμβων του στοιχείου.

Τα εσωτερικά φορτία (δυνάμεις και ροπές) f_1 στους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου προκύπτουν, με βάση την αρχή των δυνατών έργων, από τη μεταβολή της ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων:

$$\delta\mathcal{V} = \int_0^L (\delta\boldsymbol{\Gamma}^T \mathbb{S} \boldsymbol{\Gamma} + \delta\mathbf{K}^T \mathbb{C} \mathbf{K}) ds = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}_1 \quad (4.36)$$

Οι δύο όροι του ολοκληρώματος εξετάζονται στη συνέχεια.

4.4.1 Συνεισφορά εφελκυστικών και διατμητικών παραμορφώσεων

Για τις παραμορφώσεις του άξονα της δοκού (εφελκυστικές και διατμητικές) (ή, συνεκδοχικά, αξονικές) παραμορφώσεις η ολοκλήρωση του δυνατού έργου γίνεται μειωμένη κατά μία τάξη (reduced integration) ώστε να αποφευχθεί το φαινόμενο της αδυναμίας παραμόρφωσης του στοιχείου λόγω διάτμησης (shear locking). Έτσι χρησιμοποιείται ολοκλήρωση Gauss [Bathe, 1982], με σημεία ολοκλήρωσης g ενδιάμεσα των κόμβων (στα επόμενα, ο δείκτης g αναφέρεται στο σημείο ολοκλήρωσης Gauss και ο δείκτης i στον κόμβο του στοιχείου):

$$\delta \mathcal{V}_s = \int_0^L (\delta \mathbf{\Gamma}^T \mathbb{S} \mathbf{\Gamma}) ds \cong \sum_{g=1}^{N-1} c_g \delta \mathbf{\Gamma}_g^T \mathbb{S} \mathbf{\Gamma}_g = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{1s} \quad (4.37)$$

Οι αξονικές παραμορφώσεις στα σημεία ολοκλήρωσης s_g υπολογίζονται με παρεμβολή από τις αντίστοιχες τιμές των κόμβων του στοιχείου:

$$\mathbf{\Gamma}(s_g) = \sum_{i=1}^N h_i(s_g) \mathbf{\Gamma}_i \quad (4.38)$$

Οι εσωτερικές δυνάμεις στη διατομή γράφονται:

$$\mathbf{N}(s_g) = \mathbf{N}_g = \sum_{i=1}^N h_i(s_g) \mathbb{S} \mathbf{\Gamma}_i = \sum_{i=1}^N h_i(s_g) \mathbf{N}_i \quad (4.39)$$

Οι τιμές της αξονικής παραμόρφωσης στον κόμβο i δίνονται σαν (2.14):

$$\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{x}'_i - \mathbf{E}_1 = \mathbf{R}_i^T \sum_{j=1}^N \{h'_j(s_i) \mathbf{x}_j\} - \mathbf{E}_1 \quad (4.40)$$

και οι μεταβολές τους:

$$\delta \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{R}_i^T \sum_{j=1}^N \{h'_j(s_i) \delta \mathbf{x}_j\} + \mathbf{R}_i^T \widetilde{\mathbf{x}}'_i \delta \boldsymbol{\theta}_i \quad (4.41)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να αναδιαταχθεί με τη μορφή πίνακα:

$$\delta \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{B}_i \delta \mathbf{q} \quad (4.42)$$

με τον πίνακα \mathbf{B} διαστάσεων $(3 \times 6N)$:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{H}_i + \mathbf{R}_i^T \widetilde{\mathbf{x}}'_i \mathbf{Q}_i \quad (4.43)$$

και τους πίνακες \mathbf{H} και \mathbf{Q} , επίσης διαστάσεων $(3 \times 6N)$:

$$\mathbf{H}_i = [h'_1(s_i) \mathbf{I} \ \mathbf{0} \ h'_2(s_i) \mathbf{I} \ \mathbf{0} \dots h'_N(s_i) \mathbf{I} \ \mathbf{0}] \quad (4.44)$$

και, ενδεικτικά:

$$\mathbf{Q}_i = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \ \mathbf{I} \dots \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \quad (4.45)$$

Στον πίνακα \mathbf{Q} ο μοναδιαίος υποπίνακας \mathbf{I} καταχωρείται στη θέση των περιστροφικών βαθμών ελευθερίας του κόμβου i .

Από τα ανωτέρω, για τις μεταβολές των αξονικών παραμορφώσεων στο σημείο Gauss g προκύπτει:

$$\delta \mathbf{\Gamma}(s_g) = \sum_{i=1}^N h_i(s_g) \mathbf{B}_i \delta \mathbf{q} = \mathbf{B}_g \delta \mathbf{q} \quad (4.46)$$

και η συνεισφορά στα εσωτερικά φορτία είναι:

$$\mathbf{f}_{1S} = \sum_{g=1}^{N-1} c_g \mathbf{B}_g^T \mathbf{N}_g \quad (4.47)$$

Για τη συνεισφορά στον εφαπτομενικό πίνακα ακαμψίας του στοιχείου απαιτείται η γραμμικοποίηση των παραπάνω φορτίων για απειροστές αυξήσεις Δq . Ειδικά ή συνεισφορά στον συμμετρικό πίνακα εξάγεται εύκολα:

$$\text{sym} \mathbf{K}_S = \sum_{g=1}^{N-1} c_g \mathbf{B}_g^T \mathbb{S} \mathbf{B}_g \quad (4.48)$$

Η συνεισφορά στον μη συμμετρικό πίνακα ακαμψίας απαιτεί τη γραμμικοποίηση της σχέσης (4.43), μέσω της κατευθυντικής παραγώγου (directional derivative) $D\mathbf{B}_i^T \cdot \Delta \mathbf{q}_i$ του πίνακα \mathbf{B}_i και τον υπολογισμό του όρου:

$$D\mathbf{B}_i^T \cdot \Delta \mathbf{q}_i \mathbf{N}_g \quad (4.49)$$

Ο όρος αυτός συνεισφέρει στον μη συμμετρικό πίνακα ακαμψίας (geometric stiffness matrix):

$$\mathbf{W}_i^g = -\mathbf{H}_i^T \widetilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{N}_g \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_i^T \widetilde{\mathbf{x}}_i \widetilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{N}_g \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_i^T \widetilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{N}_g \mathbf{H}_i \quad (4.50)$$

και παρεμβάλλοντας στο σημείο gauss:

$$\mathbf{W}_g = \sum_{i=1}^N h_i(s_g) \mathbf{W}_i^g \quad (4.51)$$

Η ολοκλήρωση στο μήκος του στοιχείου δίνει για τον μη συμμετρικό πίνακα ακαμψίας:

$$\text{geom} \mathbf{K}_S = \sum_{g=1}^{N-1} c_g \mathbf{W}_g \quad (4.52)$$

4.4.2 Συνεισφορά καμπτικών παραμορφώσεων

Για το δυνατό έργο των καμπτικών παραμορφώσεων ακολουθείται ολοκλήρωση Newton-Cotes [Bathe, 1982], με σημεία ολοκλήρωσης τους κόμβους, όπου η παρεμβολή των περιστροφών με βάση τον κόμβο αυτό γίνεται:

$$\delta \mathcal{V}_B = \int_0^L (\delta \mathbf{K}^T \mathbb{C} \mathbf{K}) ds \cong \sum_{i=1}^N c_i \delta \mathbf{K}_i^T \mathbb{C} \mathbf{K}_i = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{1B} \quad (4.53)$$

με c_i τους συντελεστές ολοκλήρωσης Newton-Cotes.

Οι καμπτικές παραμορφώσεις στον κόμβο i του στοιχείου δίνονται από τη σχέση (4.33):

$$\mathbf{K}_i = \sum_{j=1}^N h'_j(s_i) {}^i\boldsymbol{\Psi}_j \quad (4.54)$$

και οι εσωτερικές ροπές στη διατομή:

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j=1}^N \mathbb{C} h'_j(s_i) {}^i\boldsymbol{\Psi}_j \quad (4.55)$$

Για τις μεταβολές τους, απαιτούνται οι δυνατές μεταβολές των διανυσμάτων περιστροφής:

$$\delta {}^i\boldsymbol{\Psi}_j = \mathbf{T}^{-1}({}^i\boldsymbol{\Psi}_j) \mathbf{R}_j^T (\delta \boldsymbol{\vartheta}_j - \delta \boldsymbol{\vartheta}_i) \quad (4.56)$$

και οι μεταβολές των καμπτικών παραμορφώσεων μπορούν να γραφούν σαν:

$$\delta \mathbf{K}_i = (\mathbf{A}_i + \mathbf{J}_i) \Delta \mathbf{q}_i \quad (4.57)$$

με:

$$\mathbf{A}_i = [\mathbf{0}, {}^i h'_1 \mathbf{T}^{-1}({}^i\boldsymbol{\Psi}_1) \mathbf{R}_1^T, \mathbf{0}, {}^i h'_2 \mathbf{T}^{-1}({}^i\boldsymbol{\Psi}_2) \mathbf{R}_2^T, \dots] \quad (4.58)$$

και

$$\mathbf{J}_i = [\mathbf{0}, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{0}, -\sum_{j=1}^N {}^i h'_j \mathbf{T}^{-1}({}^i\boldsymbol{\Psi}_j) \mathbf{R}_j^T, \dots] \quad (4.59)$$

όπου το στοιχείο του αθροίσματος είναι στη θέση των περιστροφικών βαθμών ελευθερίας του κόμβου i .

Με τα παραπάνω, ο πίνακας των εσωτερικών ροπών υπολογίζεται με την ολοκλήρωση:

$$\mathbf{f}_{1B} = \sum_{i=1}^N c_i (\mathbf{A}_i^T + \mathbf{J}_i^T) \mathbb{C} \mathbf{K}_i \quad (4.60)$$

Η γραμμικοποίησή του συνεισφέρει στον συμμετρικό πίνακα ακαμψίας:

$$\text{sym} \mathbf{K}_B = \sum_{i=1}^N c_i (\mathbf{A}_i^T + \mathbf{J}_i^T) \mathbb{C} (\mathbf{A}_i + \mathbf{J}_i) \quad (4.61)$$

Για τον μη γραμμικό (γεωμετρικό) πίνακα ακαμψίας απαιτείται η γραμμικοποίηση :

$$\text{geom} \mathbf{K}_{Bi} = D(\mathbf{A}_i^T + \mathbf{J}_i^T) \cdot \Delta \mathbf{q}_i \mathbf{M}_i \quad (4.62)$$

ο οποίος έχει υπολογιστεί αναλυτικά.

4.4.3 Ολικοί πίνακες

Δεδομένου ότι οι επιλεγθέντες κατά την προηγούμενη ανάπτυξη βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου αναφέρονται στο κύριο σύστημα συντεταγμένων, κοινό για όλη τη κατασκευή, για τη συγκρότηση του γενικού πίνακα γίνεται απευθείας άθροιση των επιμέρους πινάκων κάθε πεπερασμένου στοιχείου στις αντίστοιχες θέσεις των βαθμών ελευθερίας του

συνολικού πίνακα, ώστε να προκύψουν οι συνολικοί πίνακες εσωτερικών δυνάμεων και ακαμψίας:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_I &= \sum_{elem} \mathbf{f}_{Is} + \mathbf{f}_{IB} , \\ \mathbf{K} &= \sum_{elem} sym\mathbf{K}_S + geom\mathbf{K}_B + sym\mathbf{K}_B + geom\mathbf{K}_B \end{aligned} \quad (4.63)$$

4.5 Επίλυση στατικού προβλήματος

Η επίλυση του μη γραμμικού στατικού προβλήματος γίνεται με επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson [Bathe, 1982], και αναδιαμόρφωση του μητρώου ακαμψίας σε κάθε βήμα της επανάληψης.

Δεδομένου ότι τα εξεταζόμενα εύκαμπτα σώματα παρουσιάζουν μεγάλες μεταβολές στο σχήμα τους, η επιβολή των στατικών φορτίων μπορεί να γίνεται και σταδιακά, υπό τον τύπο μιας ‘χρονικής’ ιστορίας φόρτισης. Σε κάθε τέτοιο στάδιο επιλύεται με επαναληπτική διαδικασία η εξίσωση ισορροπίας εξωτερικών \mathbf{f}_{EXT} και εσωτερικών \mathbf{f}_I δυνάμεων. Στην επανάληψη $iter$ επιλύεται:

$${}^{(iter)}\mathbf{f}_I = \mathbf{f}_{EXT} \quad (4.64)$$

η οποία γράφεται στη γραμμικοποιημένη μορφή:

$${}^{(iter-1)}\mathbf{K} \quad {}^{(iter)}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{f}_{EXT} - {}^{(iter-1)}\mathbf{f}_I \quad (4.65)$$

και επιλύεται για τις αυξητικές μετατοπίσεις-περιστροφές ${}^{(iter)}\Delta\mathbf{q}$.

Η επιβολή των τελευταίων στις γραμμικές συντεταγμένες των κόμβων για την ανανέωση της λύσης γίνεται απλά:

$${}^{(iter)}\mathbf{x}_i = {}^{(iter-1)}\mathbf{x}_i + {}^{(iter)}\Delta\mathbf{x}_i \quad (4.66)$$

όπου ${}^{(iter)}\Delta\mathbf{x}_i$ είναι τα στοιχεία του ${}^{(iter)}\Delta\mathbf{q}$ που αναφέρονται στις αυξήσεις των γραμμικών μετατοπίσεων του κόμβου i .

Η ανανέωση των περιστροφών των κόμβων γίνεται με τρόπο συμβατό με το χώρο των περιστροφών SO3. Υπολογίζεται κατ’ αρχήν ο ορθοκανονικός πίνακας που αντιστοιχεί στην αυξητική περιστροφή κάθε κόμβου:

$${}^{(iter)}_{incr}\mathbf{R}_i = \exp({}^{(iter)}\Delta\boldsymbol{\theta}_i) \quad (4.67)$$

όπου ${}^{(iter)}\Delta\boldsymbol{\theta}_i$ είναι οι αυξήσεις του ${}^{(iter)}\Delta\boldsymbol{q}$ που αναφέρονται στις περιστροφές του κόμβου i . Η επιβολή αυτών απαιτεί ειδικό τρόπο:

Καθώς οι επιλεγέντες περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας αφορούν σε περιστροφές γύρω από τους σταθερούς άξονες του γενικού συστήματος, η επιβολή της αύξησης γίνεται με ανανέωση από αριστερά:

$${}^{(iter)}\mathbf{R}_i = {}_{incr}^{(iter)}\mathbf{R}_i {}^{(iter-1)}\mathbf{R}_i \quad (4.68)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα νέα διανύσματα της παρεμβολής των περιστροφών:

$${}^{(iter)j}\boldsymbol{\Psi}_i = \exp^{-1}({}^{(iter)j}\mathbf{R}^T {}^{(iter)i}\mathbf{R}) \quad (4.69)$$

Με βάση την ανανεωμένη παραμορφωσιακή κατάσταση εξετάζεται εκ νέου η ικανοποίηση της ισορροπίας στη σχέση (4.64) και αν η νόρμα των υπολοίπων είναι μικρότερη της επιζητούμενης ακρίβειας, οι επαναλήψεις σταματούν επιτυχώς.

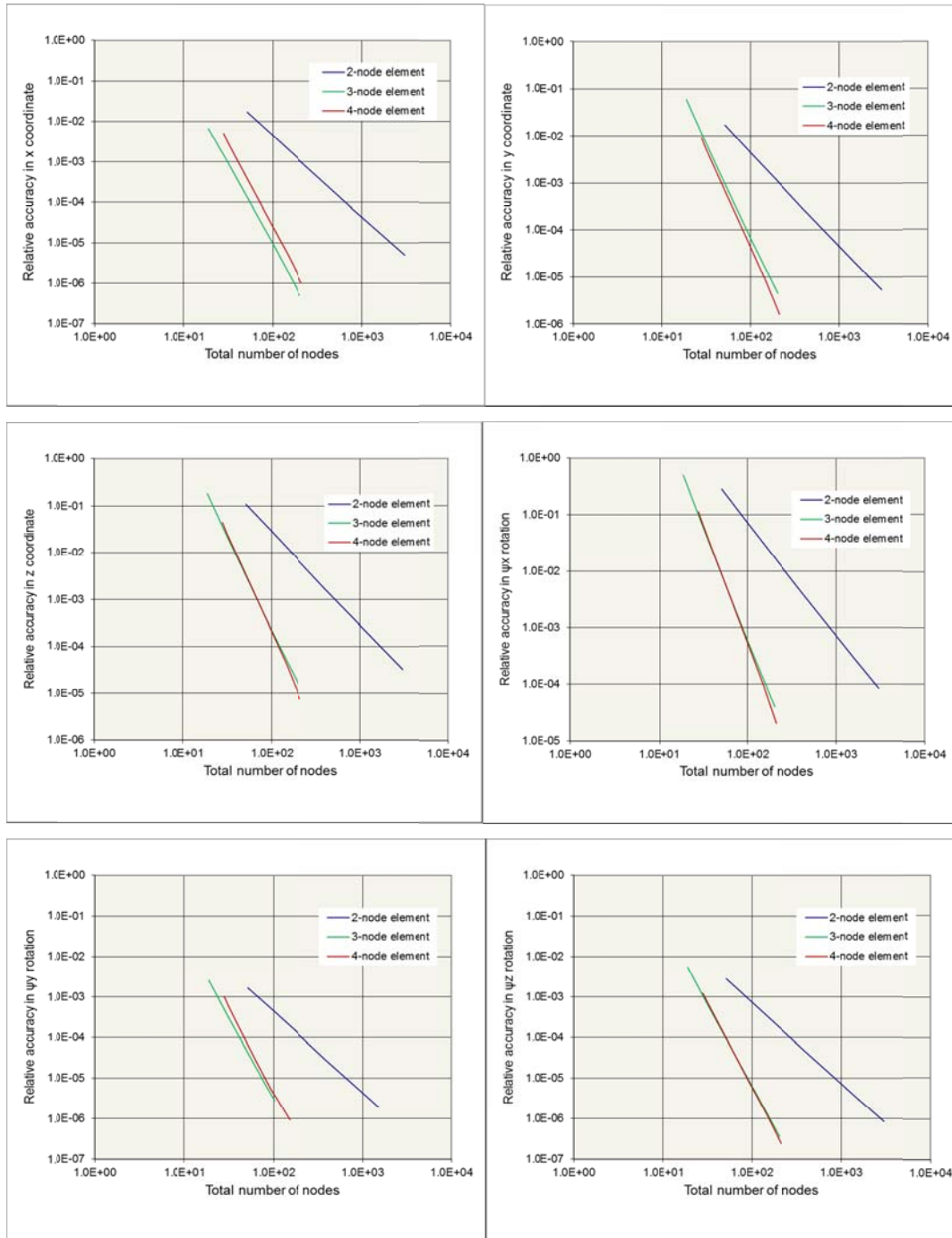
Στη σχέση ισορροπίας (4.64) τα εξωτερικά φορτία υποτίθενται σαν ανεξάρτητα των παραμορφώσεων του σώματος. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει γενικώς τις συντηρητικές δυνάμεις όπως τα βαρυτικά φορτία και τις σταθερές στο χώρο δυνάμεις. Στη περίπτωση εξωτερικών φορτίων που εξαρτώνται από τις μετακινήσεις/ περιστροφές του σώματος απαιτείται και ο συνυπολογισμός των μεταβολών τους, κατά τη γραμμικοποιημένη σχέση:

$$\mathbf{f}_{EXT} \equiv {}^{(iter)}\mathbf{f}_{EXT} \cong {}^{(iter-1)}\mathbf{f}_{EXT} + {}_{EXT}^{(iter-1)}\mathbf{K} {}^{(iter)}\Delta\boldsymbol{q} \quad (4.70)$$

Με βάση τα παραπάνω, εκπονήθηκαν στα πλαίσια της εργασίας οι πλήρεις αναπτύξεις των μητρώων δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου, τόσο του γραμμικού όσο και του μη γραμμικού του μέρους. Επίσης, έγινε ιδιαίτερη εξέταση της συμμετρίας του πίνακα ακαμψίας, δεδομένου ότι αυτή συνδέεται με τον ενεργειακό χαρακτήρα των ροπών διατομής, όταν αυτές υπόκεινται σε πεπερασμένες περιστροφές. Σαν αποτέλεσμα της ακολουθούμενης μεθοδολογίας, ο πίνακας ακαμψίας παρουσιάζει αντισυμμετρικό μέρος που αντιστοιχεί στον συντηρητικό χαρακτήρα των εσωτερικών ροπών, οι οποίες μάλιστα προσιδιάζουν στις αναφερόμενες ως ημι-εφαπτομενικές ροπές (semi-tangential moment). Επακόλουθο των παραπάνω είναι ότι ο συνολικός πίνακας ακαμψίας της συνάθροισης των στοιχείων είναι στη κατάσταση ισορροπίας, και σε απουσία μη συντηρητικών φορτίων, συμμετρικός. Αυτό αποτελεί εκδήλωση της ενεργειακής αφετηρίας της ανάπτυξης (variational approach) και απλοποιεί τις περαιτέρω αναλύσεις ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών υπό παραμορφωμένη κατάσταση, αλλά και φορτίων

λυγισμού, οι οποίες θα μπορούν να γίνονται με συνήθεις αριθμητικούς αλγορίθμους που χειρίζονται συμμετρικούς πίνακες.

Η εξέταση σύγκλισης των πεπερασμένων στοιχείων δύο, τριών και τεσσάρων κόμβων παρουσιάζεται στα επόμενα σχήματα, για πρόβλημα που αφορούσε τις μεγάλες παραμορφώσεις ελαστικής δοκού φορτισμένης με δυνάμεις και ροπές στα άκρα.



Σχήμα 4.6: Εξέταση ρυθμού σύγκλισης σε στατικό πρόβλημα.

Από τα αποτελέσματα συνάγεται ότι ο ρυθμός σύγκλισης του στοιχείου με δύο κόμβους είναι δεύτερης τάξης, ενώ τα στοιχεία με τρεις και τέσσερις κόμβους παρουσιάζουν ρυθμό σύγκλισης τέταρτης τάξης.

5

Χρονική ολοκλήρωση

Για την επίλυση του δυναμικού προβλήματος στο πεδίο του χρόνου εφαρμόζεται η ασθενής διατύπωση της αρχής του Hamilton για τη μεταβολή της ποσότητας Lagrange μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t+\Delta t$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \delta(\mathcal{T} - \mathcal{V})dt + \int_t^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{EXT}} dt - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \Big|_t^{t+\Delta t} = 0 \quad (5.1)$$

όπου \mathcal{T} η συνολική κινητική ενέργεια του σώματος, \mathcal{V} η συνολική δυναμική, \mathbf{f}_{EXT} οι εξωτερικές δυνάμεις ή, γενικότερα, όσες δεν έχουν περιληφθεί στο \mathcal{V} συμπεριλαμβανομένων συντηρητικών δυνάμεων και \mathbf{Q} το διάνυσμα των ορμών στα άκρα του χρονικού διαστήματος. Σημειώνεται ότι η ανάπτυξη της μεθόδου με τη θεωρία των μεταβολών (variational) της προσδίδει τον λεγόμενο συμπλεκτικό χαρακτήρα [Kane et al 2000], με ιδιαίτερα καλά χαρακτηριστικά στη διατήρηση ενέργειας και ορμής.

Για την κινητική ενέργεια ισχύει:

$$\mathcal{T} = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} \right) ds \quad (5.2)$$

με \mathbf{M} τον πίνακα κατανομής μάζας (γραμμική μάζα ανά μήκος), \mathbf{J} η αντίστοιχη κατανομή των μαζικών ροπών αδράνειας διατομής, $\dot{\mathbf{x}}$ οι μεταφορικές ταχύτητες του κέντρου των διατομών και $\boldsymbol{\Omega}$ οι γωνιακές ταχύτητες στο τοπικό σύστημα της διατομής.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος κατά το μήκος θεωρούμε σημεία ολοκλήρωσης στους κόμβους του στοιχείου, που ισοδυναμεί με συγκέντρωση της κατανεμημένης στο μήκος του στοιχείου μάζας στον κάθε κόμβο (lumped mass matrix). Άμεσο και ιδιαίτερα

χρήσιμο αποτέλεσμα για την απλότητα της μεθόδου είναι ότι οι προκύπτουσες αδρανειακές δυνάμεις δεν επηρεάζονται από γειτονικούς κόμβους.

Η επίλυση στον διακριτό χρόνο προάγεται με βήμα Δt . Θεωρούμε γραμμική μεταβολή των μετατοπίσεων στο διάστημα αυτό, ώστε να προκύπτει σταθερή γραμμική ταχύτητα:

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \tau + \mathbf{x}(t) \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t \quad (5.3)$$

Επίσης, θεωρούμε ότι η περιστροφική κίνηση των διατομών περιγράφεται από διάνυσμα περιστροφής $\boldsymbol{\varphi}$, με:

$$\boldsymbol{\varphi}(t + \tau) = \frac{\boldsymbol{\varphi}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\varphi}(t)}{\Delta t} \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t \quad (5.4)$$

ώστε

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R} \exp(\boldsymbol{\varphi}) \quad (5.5)$$

Η επιλογή αυτή αποδίδει ανεξαρτησία από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων, καθώς ορίζεται με βάση τα τοπικά συστήματα διατομής, τα οποία παρακολουθούν τις παραμορφώσεις.

Για την ολοκλήρωση της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας στο χρονικό διάστημα χρησιμοποιείται ολοκλήρωση Gauss, με ένα σημείο στο μέσον του διαστήματος, ώστε να προκύψει μέθοδος ολοκλήρωσης του τύπου της midpoint rule, η οποία αποδίδει ακρίβεια δεύτερης τάξης.

Οι θέσεις του σώματος στο μέσον του χρονικού διαστήματος (Σχήμα 5.1) δίνονται:

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{x} = \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}}{2} \quad (5.6)$$

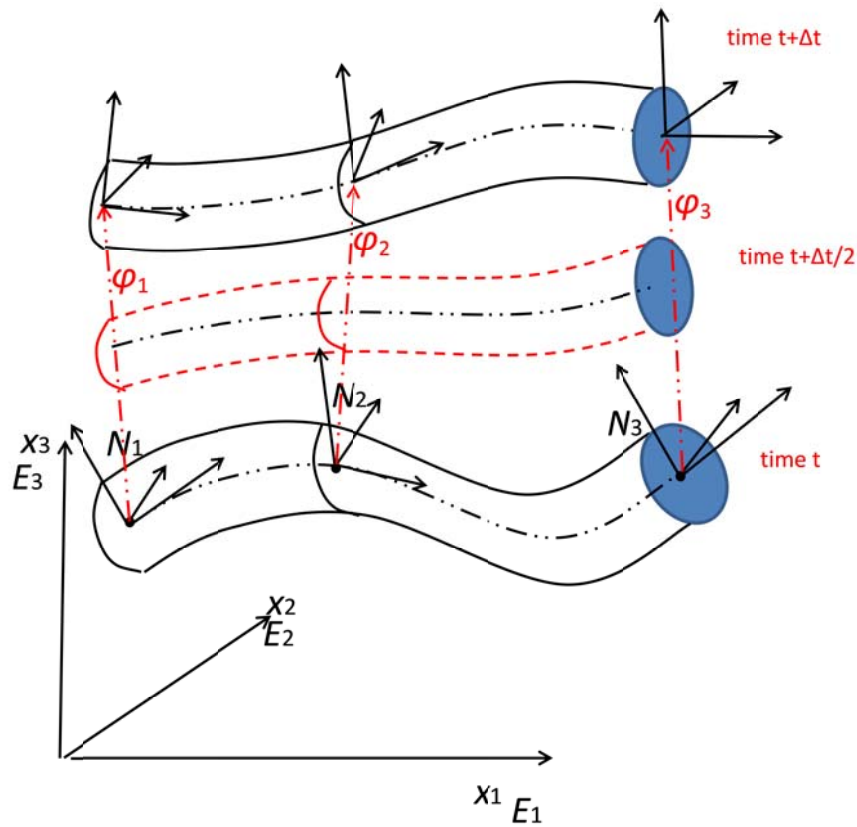
και:

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R} \exp\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}\right) \quad (5.7)$$

Επίσης ισχύει:

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}\right) \quad (5.8)$$

Για απλοποίηση συμβολίζονται στα επόμενα οι ποσότητες στο χρόνο t με τον δείκτη 1, στο χρόνο $t+\Delta t$ με τον δείκτη 2 και οι ποσότητες στο μεσαίο χρονικά σημείο με τον δείκτη m .



Σχήμα 5.1: Περιγραφή γεωμετρίας στις χρονικές t , $t+\Delta t/2$ και $t+\Delta t$

5.1 Μεταβολές στη μέση χρονική στιγμή

Σύμφωνα με την ακολουθούμενη παρεμβολή, οι μεταβολές των μεταφορικών βαθμών ελευθερίας στη μέση χρονική στιγμή θα δίνονται από:

$$\delta({}^m\mathbf{x}) = \frac{\delta({}^2\mathbf{x}) + \delta({}^1\mathbf{x})}{2} \quad (5.9)$$

Για τη μεταβολή της περιστροφής κάθε κόμβου i μπορεί ναδειχθεί ότι:

$$\delta({}^m\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{1}{2}({}^2\mathbf{A}_i \delta({}^2\boldsymbol{\theta}_i) + {}^1\mathbf{A}_i \delta({}^1\boldsymbol{\theta}_i)) \quad (5.10)$$

με:

$${}^1\mathbf{A}_i = \left(\mathbf{I} + \frac{\tan \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{4}}{\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{4}} {}^m\widetilde{\mathbf{R}}_i \boldsymbol{\varphi}_i \right) \quad (5.11)$$

και

$${}^2\mathbf{A}_i = \left(\mathbf{I} - \frac{\tan \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{4}}{\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{4}} \widetilde{m\mathbf{R}_i\boldsymbol{\varphi}_i} \right) = {}^1\mathbf{A}_i^T \quad (5.12)$$

5.2 Μεταβολές δυναμικής και κινητικής ενέργειας

Το ολοκλήρωμα των μεταβολών της δυναμικής ενέργειας ελαστικών παραμορφώσεων υπολογίζεται με σημείο ολοκλήρωσης στη μέση χρονική στιγμή:

$$\int_t^{t+\Delta t} \delta(\mathcal{V}) dt \cong \Delta t \delta({}^m\mathbf{q}^T) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial ({}^m\mathbf{q})} = \Delta t \delta({}^m\mathbf{q}^T) {}^m\mathbf{f}_i \quad (5.13)$$

όπου ${}^m\mathbf{f}_i$ είναι ο πίνακας στήλη των εσωτερικών φορτίων, υπολογιζόμενος στη μέση χρονική θέση ${}^m\mathbf{x}$ και ${}^m\mathbf{R}$. Ο πίνακας αυτός υπολογίζεται με τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στο στατικό πρόβλημα.

Εισάγοντας τις (5.9) και (5.10) και δημιουργώντας συνολικούς πίνακες ${}^1\mathbf{A}$ και ${}^2\mathbf{A}$ με μηδενικά στοιχεία, εκτός από τις θέσεις των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου i , όπου θα υπάρχουν οι υποπίνακες:

$${}^1\mathbf{A} : \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^1\mathbf{A}_i \end{bmatrix} \text{ και } {}^2\mathbf{A} : \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^2\mathbf{A}_i \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \delta(\mathcal{V}) dt &\cong \frac{1}{2} \Delta t \delta({}^2\mathbf{q}^T) {}^2\mathbf{A}^T {}^m\mathbf{f}_i \\ &+ \frac{1}{2} \Delta t \delta({}^1\mathbf{q}^T) {}^1\mathbf{A}^T {}^m\mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (5.15)$$

Η γραμμικοποίηση του όρου ${}^1\mathbf{A}^T {}^m\mathbf{f}_i$ ως προς τις μεταβολές $\Delta({}^2\boldsymbol{\vartheta}_i)$, (directional derivative) θα χρησιμοποιηθεί κατά την επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων. Με τον πολλαπλασιασμό με τις εσωτερικές δυνάμεις του κόμβου i ${}^m\mathbf{f}_{i_i}$ η γραμμικοποίηση δίδει:

$$\mathbf{E}_i \Delta({}^2\boldsymbol{\vartheta}_i) = \{D {}^1\mathbf{A}_i \cdot (\Delta {}^2\boldsymbol{\vartheta}_i)\} {}^m\mathbf{f}_{i_i} \quad (5.16)$$

και έχει αναπτυχθεί σε κλειστή μορφή.

Για την κινητική ενέργεια, η γραμμική ταχύτητα σε κάθε κόμβο, σταθερή στο διάστημα Δt , δίνεται από:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{{}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}}{\Delta t} \quad (5.17)$$

και οι γωνιακές ταχύτητες, εκφρασμένες στον σύστημα της διατομής, υπολογίζονται από την ακολουθούμενη παρεμβολή (5.4):

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \frac{{}^2\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} \quad (5.18)$$

Οι γραμμικές ορμές:

$$\mathbf{p} = \mathcal{M} \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{M} \frac{{}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}}{\Delta t} \quad (5.19)$$

και οι στροφορμές στο σύστημα διατομής:

$$\mathbf{G} = \mathcal{J}\boldsymbol{\Omega} = \mathcal{J} \frac{{}^2\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} \quad (5.20)$$

Σημειώνεται ότι σαν αποτέλεσμα της γραμμικής παρεμβολής των γωνιών (5.4), οι γωνιακές ταχύτητες και οι στροφορμές εκφρασμένες στο τοπικό σύστημα διατομής του κόμβου είναι σταθερές για όλο το διάστημα Δt .

Για τις μεταβολές έχουμε:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\delta({}^2\mathbf{x}) - \delta({}^1\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (5.21)$$

Οι μεταβολές του $\boldsymbol{\Omega}$ δίνονται με βάση τις μεταβολές των γωνιών στα άκρα του χρονικού διαστήματος :

$$\delta\boldsymbol{\Omega} = \delta({}^2\boldsymbol{\varphi})/\Delta t = \mathbf{T}^{-1}({}^2\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{}^2\mathbf{R}^T (\delta({}^2\boldsymbol{\vartheta}) - \delta({}^1\boldsymbol{\vartheta}))/\Delta t \quad (5.22)$$

και η συνεισφορά του κόμβου στη μεταβολή της γραμμικής και γωνιακής κινητικής ενέργειας είναι:

$$\int_t^{t+\Delta t} \delta\mathcal{T}_{LIN} dt = c (\delta({}^2\mathbf{x}^T) - \delta({}^1\mathbf{x}^T)) \mathbf{p} \quad (5.23)$$

και

$$\int_t^{t+\Delta t} \delta\mathcal{T}_{ANG} dt = c (\delta({}^2\boldsymbol{\vartheta}^T) - \delta({}^1\boldsymbol{\vartheta}^T)) \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{}^2\mathbf{R} \mathbf{G} \quad (5.24)$$

όπου c ο συντελεστής της διαμήκου ολοκλήρωσης στη θέση του κόμβου.

Με βάση τα παραπάνω, ο πίνακας-στήλη των αδρανειακών φορτίων (ορμών) του κόμβου γίνεται:

$$\mathbf{B}_{INERTi} = c \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{}^2\mathbf{R}_i \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Η γραμμικοποίηση αυτού έχει αναπτυχθεί σε κλειστή μορφή και συμβολίζεται:

$$\mathbf{U}_{INERTi} = c \begin{bmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ \frac{\Delta t}{0} & b_{symm} + b_{asymm} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

με

$$b_{symm} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\varphi}) {}^2\mathbf{R}_i) \mathcal{J} {}^2\mathbf{R}_i^T \mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) \quad (5.27)$$

$$b_{asymm} = \{D(\mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\varphi}) {}^2\mathbf{R}_i) \cdot \Delta({}^2\boldsymbol{\vartheta}_i)\} \cdot \mathbf{G}_i$$

Οι πίνακες αυτοί αθροίζονται σε συνολικούς πίνακες της κατασκευής, στους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας για την συγκρότηση των συνολικών μητρώων.

Σε κάθε χρονικό βήμα και σε πρώτο στάδιο επιλύονται επαναληπτικά οι εξισώσεις ισορροπίας, σχετικές με το $\delta({}^1\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta t}{2} {}^{iter-1}\mathbf{E} + {}^{iter-1}\mathbf{U} \right) {}^{iter}\Delta({}^2\mathbf{q}) \\ & = {}^1\mathbf{Q} - \frac{\Delta t}{2} {}^{iter-1}({}^1\mathbf{A}^T ({}^m\mathbf{f}_I - {}^m\mathbf{f}_{EXT})) - {}^{iter-1}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (5.28)$$

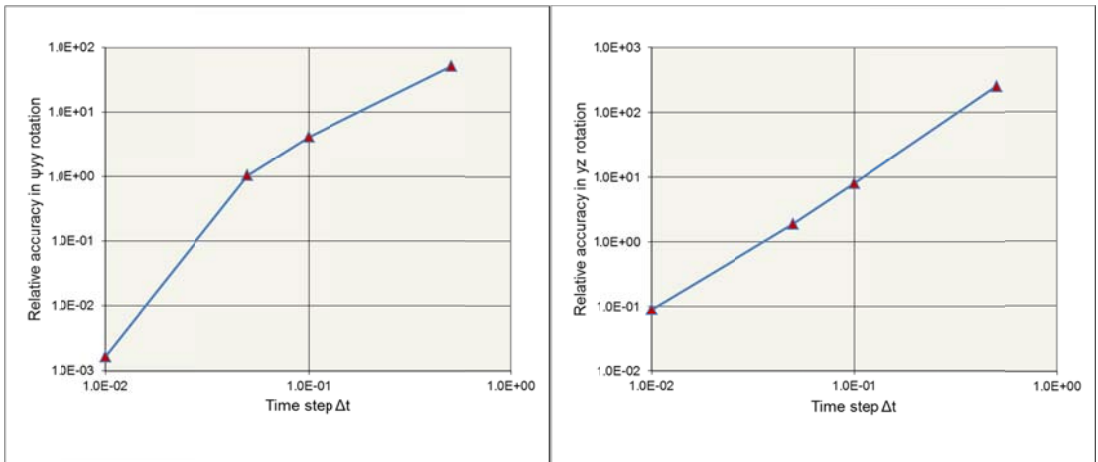
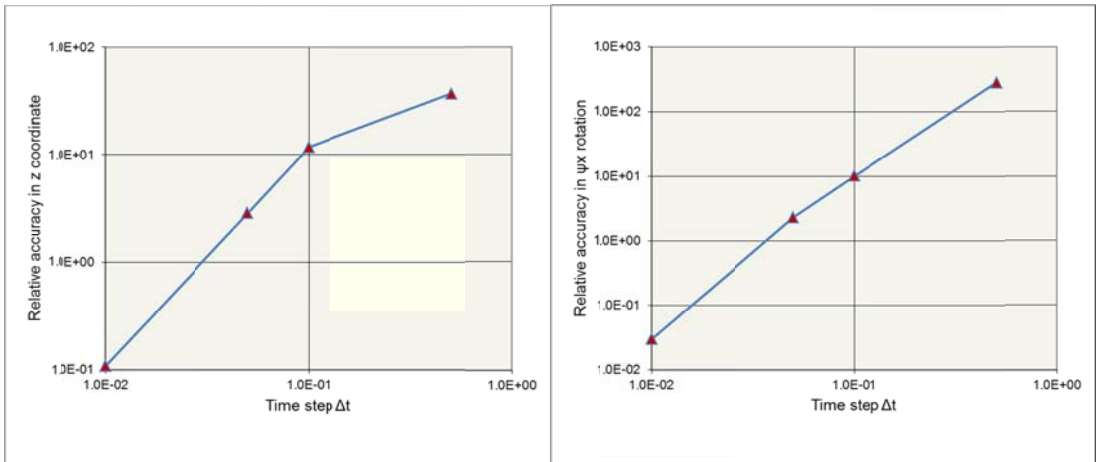
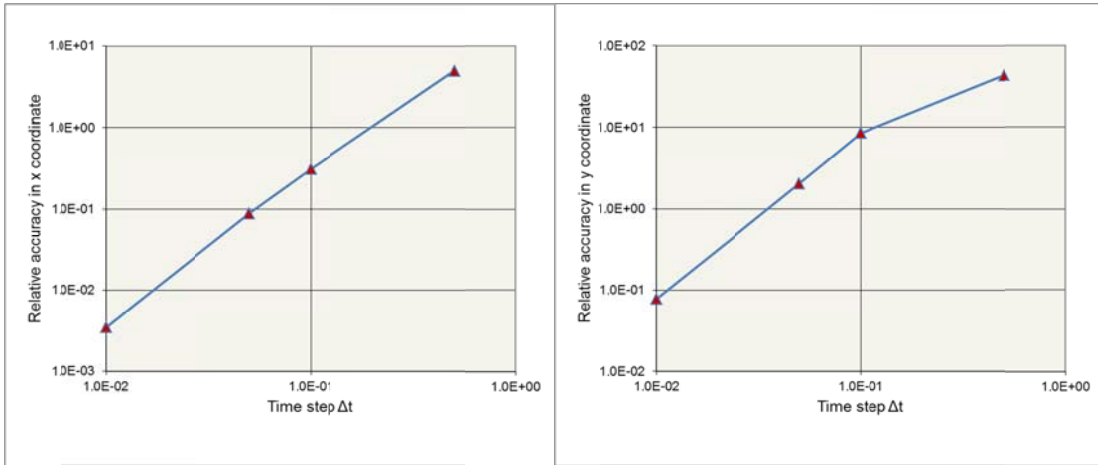
Σε κάθε επανάληψη ανανεώνεται το ${}^2\mathbf{q} \equiv {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}$, όπως στο στατικό πρόβλημα.

Μετά τη σύγκλιση των επαναλήψεων, σε δεύτερο στάδιο, υπολογίζονται οι ορμές στη χρονική στιγμή $t+\Delta t$:

$${}^2\mathbf{Q} = -\frac{\Delta t}{2} {}^1\mathbf{A}^T ({}^m\mathbf{f}_I - {}^m\mathbf{f}_{EXT}) + \mathbf{B} \quad (5.29)$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις θεωρήθηκε ότι τα εξωτερικά φορτία είναι ανεξάρτητα των κινήσεων και δεν περιλαμβάνουν κατανεμημένες ροπές.

Η εξέταση του ρυθμού σύγκλισης της μεθόδου παρουσιάζεται στα επόμενα σχήματα, που αφορούν το πρόβλημα της ελαστικής δοκού που εξετάζεται στο πρώτο παράδειγμα του Κεφαλαίου 6. Δεύτερης τάξης ακρίβεια παρατηρείται για τη μέθοδο που αναπτύχθηκε, κάτι που είναι συμβατό με τη διακριτοποίηση στο χρόνο (mid point rule).



Σχήμα 6.1 Ρυθμός σύγκλισης των μετατοπίσεων και περιστροφών με την ακολουθούμενη μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης.

6

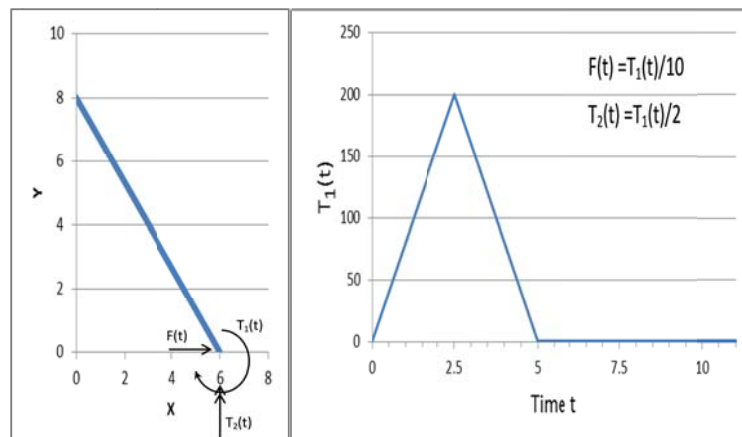
Παραδείγματα εφαρμογής

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής των ανεπτυγμένων μεθοδολογιών επίλυσης, για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων τους.

6.1 Μεγάλες περιστροφές ελαστικής δοκού.

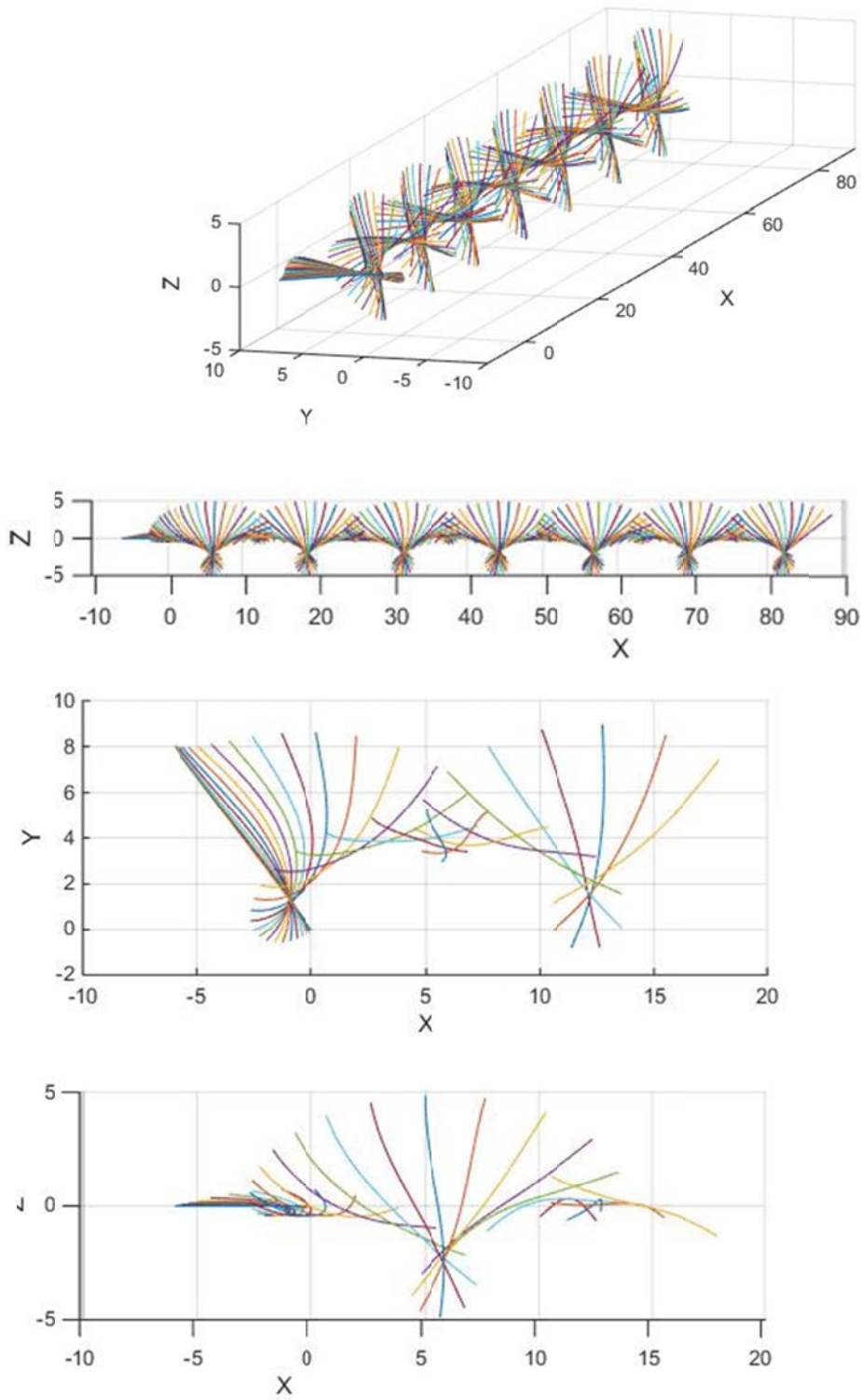
Το παράδειγμα έχει προταθεί από τους [Simo & Vu-Quoc 1988] και αναφέρεται σε μια δοκό μήκους $L=10\text{m}$, με πίνακα μάζας $\text{diag}(10, 10, 10, 1, 1, 1)$ και πίνακα ακαμψίας $\text{diag}(5 \cdot 10^2, 5 \cdot 10^2, 5 \cdot 10^2, 10^4, 10^4, 10^4)$.

Στο άκρο της επιβάλλονται αρχικά αυξανόμενες και μετά μειούμενες δυνάμεις και ροπές, που παρουσιάζονται στα επόμενα σχήματα.

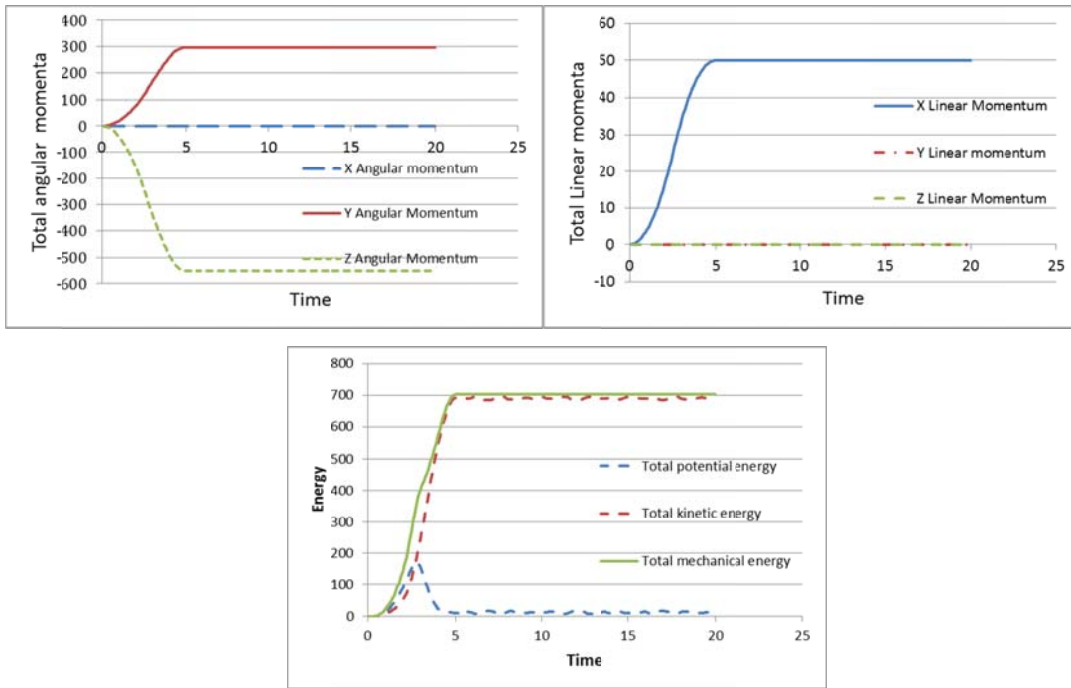


Σχήμα 6.1.1: Δοκός και φορτία.

Μετά την αρχική διέγερση και την ελαστική παραμόρφωση η δοκός εκτελεί ελεύθερες περιστροφές στο χώρο, περιστρεφόμενη γύρω από τους τρεις άξονες.

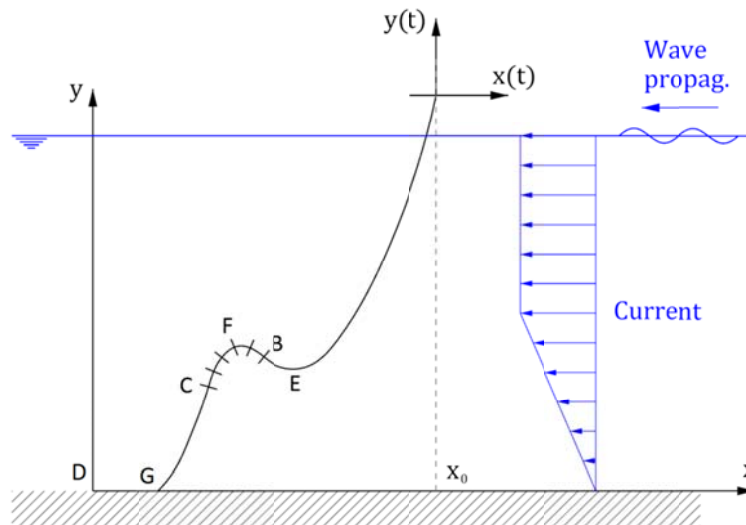


Σχήμα 6.1.2: Στιγμιότυπα κίνησης με $\Delta t = 0.2$



Σχήματα 6.1.3: Χρονικές ιστορίες συνολικών ορμών, στροφορμών και ενέργειας
 Το παράδειγμα αναδεικνύει τη δυνατότητα της αναπτυγμένης μεθόδου να χειριστεί αυτές τις μεγάλες μεταβολές χωρίς πρόβλημα. Ειδικότερα επισημαίνεται η ακριβής διατήρηση των γραμμικών ορμών και στροφορμών, αλλά και η πολύ καλή διατήρηση της συνολικής μηχανικής ενέργειας.

6.2 Δυναμική ανάλυση εύκαμπτου σωλήνα (riser) σε διάταξη Lazy wave.



Η διάταξη του σχήματος έχει μελετηθεί στα πλαίσια συγκριτικής ανάλυσης μεταξύ έντεκα ερευνητικών ομάδων [Larsen, 1992]. Αναφέρεται σε εύκαμπτο σωλήνα διάταξης Lazy wave, σε περιοχή εγκατάστασης βάθους 355m. Στην ανάλυση λαμβάνεται υπόψη θαλάσσιο ρεύμα με ταχύτητα 1m/s στην επιφάνεια και μέχρι του μέσου βάθους, και στη συνέχεια γραμμική ελάττωση, μέχρι μηδενισμού στον πυθμένα. Το άνω άκρο του σωλήνα συνδέεται στο σημείο A με συντεταγμένες (350,375), ενώ το κατώτερο τμήμα εφάπτεται στον πυθμένα, μέχρι το σημείο D στην αρχή των αξόνων.

Ο σωλήνας συγκροτείται από τρία τμήματα, AB 360m, BC 91m και CD 200m. Στο τμήμα BC παρεμβάλλονται 31 ανωστικά στοιχεία, μήκους 1m σε μεταξύ τους αποστάσεις 2m. Για το τμήμα αυτό υπολογίστηκαν ισοδύναμες σταθερές τιμές για τη μάζα και την καμπτική αντοχή EI.

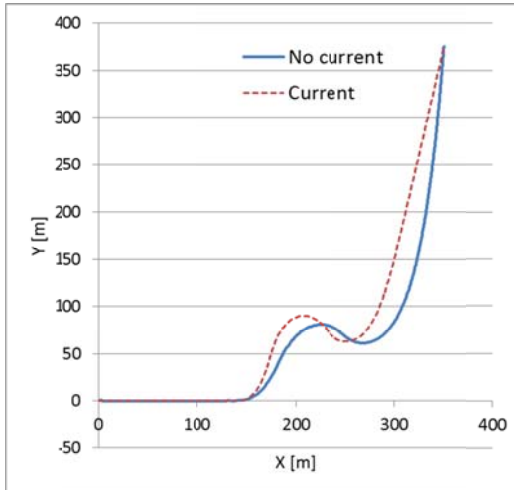
Οι παράμετροι των διατομών δίνονται στον επόμενο πίνακα:

(A) Εύκαμπτος σωλήνας χωρίς στοιχεία άντωσης (B) Εύκαμπτος σωλήνας με στοιχεία άντωσης		
	A	B
EA [kN]	10000	10000
EI [kN m ²]	6.57	100
GJ [kN m ² /rad]	1000	1000
Συνολική μάζα [kg/m]	89	352
Εξωτερική διάμετρος [m]	0.2154	0.855
Υδροδυναμικές παράμετροι		
Συντελεστής αδράνειας C _M	2.0	2.0
Συντελεστής αντίστασης C _D	1.0	1.0
Εφαπτομενικός συντελεστής αντίστασης C _{DT}	0.05	0.05

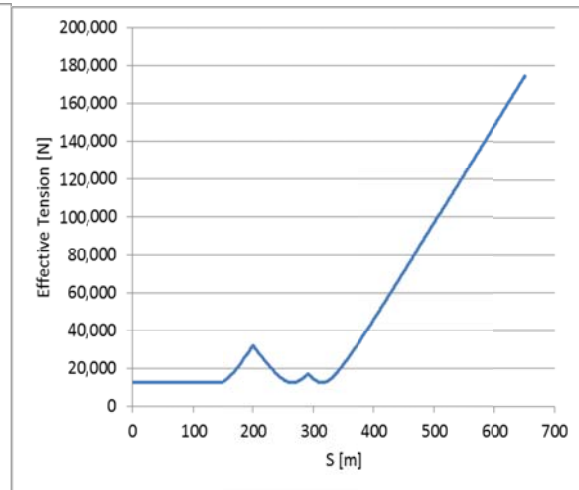
Για τον υπολογισμό των υδροδυναμικών φορτίων εφαρμόστηκε ο τύπος του Morison.

Εξετάστηκαν στατικές καταστάσεις χωρίς και με την επίδραση ρεύματος τόσο στο επίπεδο της διάταξης όσο και σε κάθετο επίπεδο.

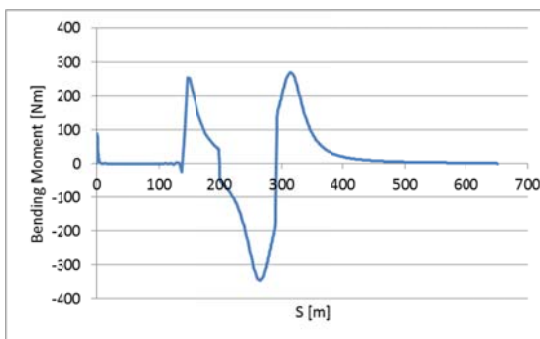
Για τις δυναμικές φορτίσεις εξετάστηκε η επίδραση αρμονικού κυματισμού με ύψος 15m και περίοδο 12sec καθώς και ο συνδυασμός κίνησης στο σημείο A με κατακόρυφη συνιστώσα $y(t) = y_a \sin(-kx_0 - \omega t)$ και οριζόντιας $y(t) = x_a \sin(-kx_0 - \omega t + \pi/2)$, με $y_a=6m$ και $x_a=4m$.



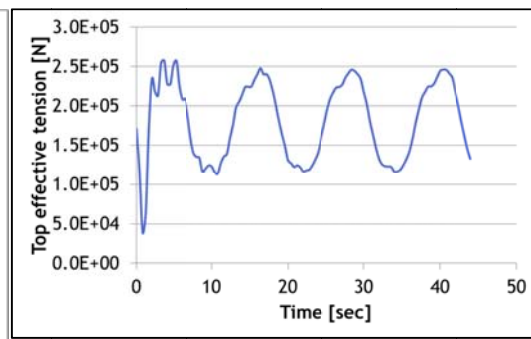
Σχήμα 6.2.1: Στατική διάταξη σωλήνα



Σχήμα 6.2.2: Δρώσα ένταση κατά το μήκος του σωλήνα (στατική, χωρίς ρεύμα)



Σχήμα 6.2.3: Καμπτική ροπή (στατική, χωρίς ρεύμα)



Σχήμα 6.2.4: Δρώσα ένταση στο άνω άκρο, (ρεύμα, κυματισμός, κίνηση άκρου)

Στον πίνακα που ακολουθεί συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων, και συγκρίνονται με τον μέσο όρο (MO) και την τυπική απόκλιση (SD) των αποτελεσμάτων από [Larsen, 1992].

	MO	SD	Παρούσα ανάλυση
<i>Στατική ανάλυση, θαλάσσιο ρεύμα ν στο επίπεδο της διάταξης</i>			
Δρώσα τάση στο άνω άκρο, ν=0 [kN]	176.8	3.26	174.6
Δρώσα τάση στον πυθμένα, ν=0 [kN]	19.0	20.9	12.6
Δρώσα τάση στο άνω άκρο, ν=1 [kN]	173.7	3.69	171.2
Δρώσα τάση στον πυθμένα, ν=1 [kN]	16.0	19.8	7.3

Σημείο G, x	v=0 [m]	140.0	7.42	141.6
Σημείο G, x	v=1 [m]	142.0	6.10	141.5
Σημείο F, x	v=0 [m]	225.1	2.26	225.0
Σημείο F, y	v=0 [m]	79.34	2.01	80.8
Σημείο F, x	v=1 [m]	209.2	3.08	207.5
Σημείο F, y	v=1 [m]	88.24	1.64	90.2*
Σημείο F καμπυλότητα	v=0 [1/m]	0.0357	0.0112	0.03622
Σημείο F καμπυλότητα	v=1 [1/m]	0.04985	0.0246	0.05053
<i>Στατική ανάλυση, θαλάσσιο ρεύμα κάθετα στο επίπεδο της διάταξης</i>				
Σημείο E, x [m]		263.6	4.33	265.7
Σημείο E, y [m]		61.8	1.67	63.3
Σημείο E, z [m]		29.56	2.68	30.93
Σημείο E, Δρώσα τάση [kN]		13.48	0.8	13.38
Σημείο F, x [m]		222.5	3.76	223.5
Σημείο F, y [m]		77.55	1.70	80.24*
Σημείο F, z [m]		25.7	3.65	27.3
Σημείο F, Δρώσα τάση [kN]		13.56	1.49	13.35
<i>Δυναμική ανάλυση, θαλάσσιο ρεύμα και κυματισμός</i>				
Μέγιστη δρώσα τάση στο A [kN]		182.7	3.97	177.6*
Ελάχιστη δρώσα τάση στο A [kN]		166.3	8.80	164.3
Εύρος δυναμικής τάσης [kN]		16.4	11.91	13.0
<i>Δυναμική ανάλυση, θαλάσσιο ρεύμα, κυματισμός και διέγερση στο A</i>				
Μέγιστη δρώσα τάση στο A [kN]		248.8	16.05	246.0
Ελάχιστη δρώσα τάση στο A [kN]		105.6	11.67	116.0
Εύρος δυναμικής τάσης [kN]		143.2	25.09	130.0

Στον πίνακα παρατηρείται γενικά πολύ καλή σύγκλιση των αποτελεσμάτων με τους μέσους όρους των ερευνητικών ομάδων. Σε τρεις μόνο περιπτώσεις, οι οποίες σημειώνονται στον πίνακα με αστερίσκο, οι διαφορές ευρέθησαν μεγαλύτερες από την τυπική απόκλιση του δείγματος, σε ποσοστό όμως μικρότερο του 3.5% του μέσου όρου και πιθανόν οφείλονται στις γενικότερες αβεβαιότητες της διακριτοποίησης. Με βάση τη παραπάνω σύγκριση συνάγεται η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της παρούσης εργασίας.

6.3 Συγκρίσεις με αποτελέσματα API (1992), BULLETIN 16J

Το Αμερικανικό Ινστιτούτο Πετρελαίου API στο BULLETIN 16J (1992) περιέλαβε συγκριτικά αποτελέσματα υπολογισμών για σωλήνα γεώτρησης (marine drilling riser) με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

Εξωτερική διάμετρος σωλήνα	21 in	
Εσωτερική διάμετρος	20 in	
Βάρος τμήματος 50ft στον αέρα	8.8 Kips	
Βάρος τμήματος 50ft στο νερό	7.66 Kips	
Μέτρο ελαστικότητας υλικού E	30e06 psi	
Πυκνότητα υγρού γεώτρησης	89.8 lb/ft ³	
Συντελεστής αντίστασης Cd	0.7	
Συντελεστής αδράνειας Cm	1.5	
Μήκος σωλήνα	520 ft	
Στατική οριζόντια απομάκρυνση στη κορυφή		15ft
Απόσταση ανώτερου σημείου από επιφάνεια θάλασσας		50 ft
Απόσταση κατώτερου σημείου (LBJ) από πυθμένα		30 ft
Βάθος νερού		500 ft

Θαλάσσιο ρεύμα:

Προφίλ A: γραμμική μεταβολή από 0.5 kn στην επιφάνεια της θάλασσας έως μηδενισμού στο κάτω άκρο (σύνδεση με LBJ)

Προφίλ B: γραμμική μεταβολή από 2.0 kn στην επιφάνεια έως 0.4 kn στο κάτω άκρο.

Αξονική δύναμη στη κορυφή:

Περίπτωση -1- 170 Kips

Περίπτωση -2- 240 Kips

Περίπτωση -FREE- Αποσυνδεδεμένο το κάτω άκρο.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα συγκριτικά αποτελέσματα των στατικών αναλύσεων. Κάθε εξεταζόμενη περίπτωση επισημαίνεται με το βάθος νερού, το προφίλ του ρεύματος και τη περίπτωση της δύναμης στο άνω άκρο. Σε παρένθεση δίπλα από την επισήμανση της κάθε περίπτωσης εμφανίζεται ο αριθμός των συμμετεχόντων στους συγκριτικούς υπολογισμούς. Τα αποτελέσματα της παρούσας ανάλυσης εμφανίζονται σε στήλη με κόκκινο χρώμα και βρίσκονται σε ιδιαίτερα καλή συμφωνία με τα στατιστικά στοιχεία του δείγματος.

RESULTS OF STATIC ANALYSES - COMPARISON

CASE	Max. Bending				Max. Total				Angle from vertical [deg]			
	Stress		Location		Stress		Location		LBJ		TOP	
	[Ksi]	[Ft]	[Ksi]	[Ft]	[Ksi]	[Ft]	[Ksi]	[Ft]				
	API	Present	API	Present	API	Present	API	Present	API	Present	API	Present
500-A-1-S (10)												
MEAN	2.05	2.03	127.40	124.00	5.69	5.72	444.90	444.00	2.51	2.50	1.00	1.02
ST. DEVIATION	0.09		6.22		0.15		27.22		0.03		0.04	
COEF. VARIATION	4.53		4.88		2.61		6.12		1.24		3.62	
RANGE	0.36		21.00		0.52		90.00		0.10		0.12	
500-A-2-S (11)												
MEAN	1.14	1.14	126.27	123.00	7.75	7.79	470.91	474.00	2.17	2.16	1.22	1.22
ST. DEVIATION	0.05		6.99		0.08		19.62		0.02		0.02	
COEF. VARIATION	4.77		5.53		1.02		4.17		0.71		1.45	
RANGE	0.23		26.00		0.31		75.00		0.04		0.06	
500-B-FREE-S (5)												

MEAN	1.59	1.57	391.20	392.00	7.19	7.24	413.20	420.00	-0.03	-0.03	-1.04	-1.04
STANDARD	0.03		14.04		0.08		21.53		0.02		0.03	
COEF.	1.63		3.59		1.16		5.21		55.90		-3.12	
RANGE	0.07		34.00		0.22		54.00		0.04		0.09	

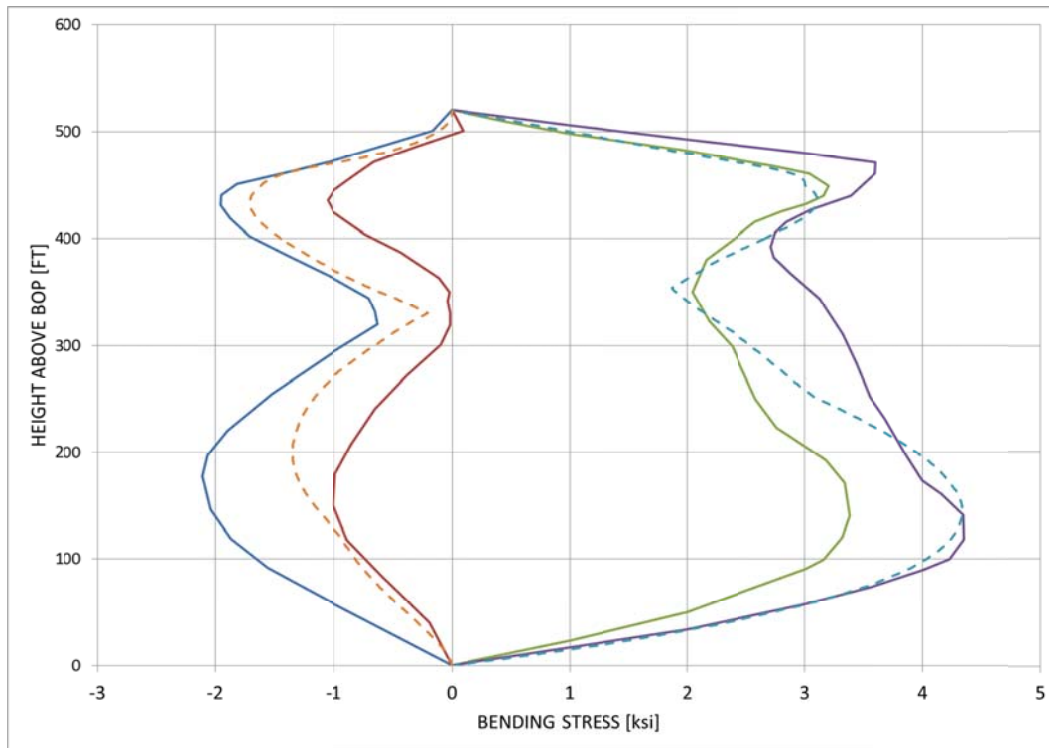
500-B-1-S (9)

MEAN	3.59	3.56	168.00	163.00	7.53	7.63	369.67	370.00	3.28	3.28	0.19	0.19
STANDARD	0.09		9.68		0.08		14.14		0.05		0.03	
COEF.	2.44		5.75		1.01		3.83		1.42		17.15	
RANGE	0.31		26.00		0.27		42.00		0.17		0.11	

500-B-2-S (10)

MEAN	2.17	2.18	352.80	363.00	8.92	9.04	420.00	411.00	2.62	2.62	0.67	0.67
STANDARD	0.06		38.23		0.14		13.94		0.02		0.02	
COEF.	2.75		10.84		1.62		3.32		0.64		2.97	
RANGE	0.18		132.00		0.50		44.00		0.06		0.07	

Επιπρόσθετα των στατικών αναλύσεων εξετάστηκε και η απόκριση σε θαλάσσιο αρμονικό κυματισμό ύψους 20ft και περιόδου 9 sec, με ταυτόχρονη οριζόντια κίνηση (surge) του ανώτερου σημείου εύρους 4ft (peak to peak) και φάσης -90deg καθώς και με την επίδραση του θαλάσσιου ρεύματος της περίπτωσης A. Οι υπολογισμένες καμπτικές τάσεις κατά το μήκος του σωλήνα παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα, σε σύγκριση και γενική συμφωνία με το εύρος των υπολογισμών του δείγματος API.

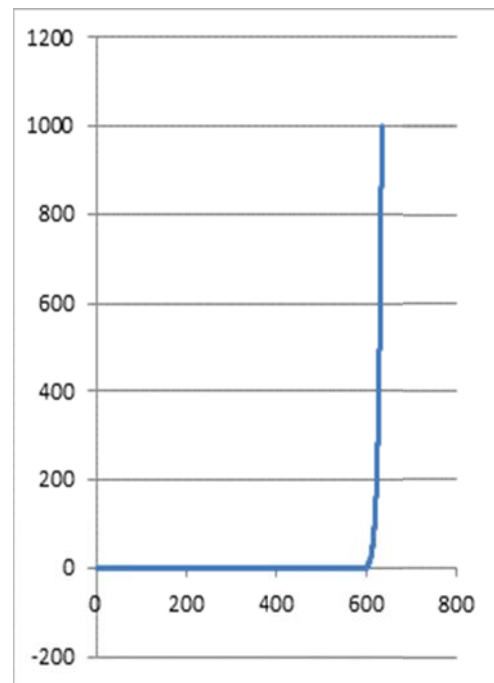


Σχήμα 6.3: Εύρος καμπτικών τάσεων σε διέγερση από κυματισμό. Περίπτωση 500-20-2-D. Συνεχείς γραμμές: αποτελέσματα API. Διακεκομμένες: Παρούσα ανάλυση.

6.4 Μεταλυγισμική ανάλυση εύκαμπτου σωλήνα, υπό την επίδραση στρεπτικών φορτίων

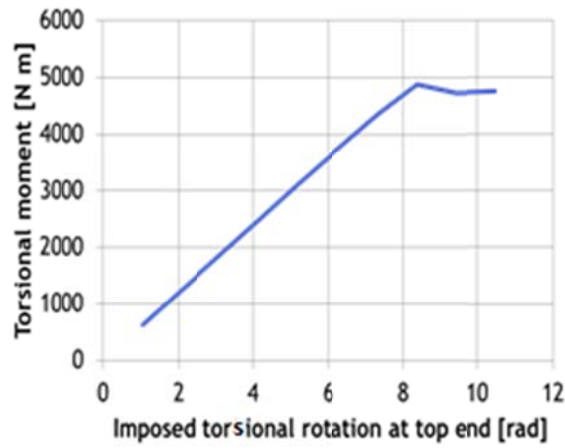
Η εξέταση αναφέρεται σε κατακόρυφο σωλήνα, υποκείμενο σε στρεπτικά φορτία στο άνω άκρο και στην επίδραση της επαφής με τον πυθμένα. Τα χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου σωλήνα είναι:

Ιδιότητες σωλήνα [Neto, 2016b]		
Αξονική δυσκαμψία	EA	409 MN
Καμπτική δυσκαμψία	EI	5.03 kN m ²
Στρεπτική	GJ	1.00 MN m ²
Διατμητική δυσκαμψία	kGA	40.60 GN
Ισοδύναμο βάρος		140.30 N/m
Βάθος νερού		1000 m
Μήκος σωλήνα στον πυθμένα		600 m
Πυκνότητα νερού		1024 kg/m ³
Κλίση στη κορυφή		89.6 deg

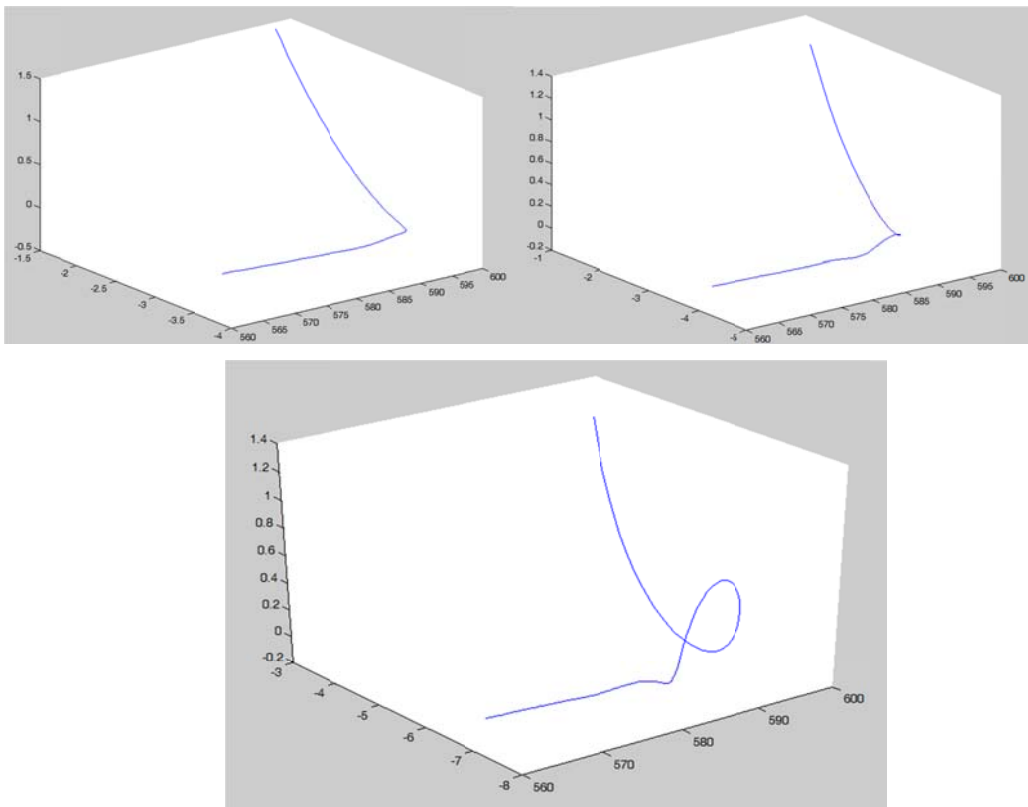


Σχήμα 6.4.1: Διάταξη κατακόρυφου σωλήνα.

Το συνολικό μήκος του σωλήνα μοντελοποιήθηκε σε όλη του την έκταση, τόσο το τμήμα στο νερό όσο και το μήκος πάνω στον πυθμένα. Η επαφή με τον πυθμένα μοντελοποιήθηκε με μη γραμμικά (ενεργά-μη ενεργά) διανεμημένα ελατήρια κατά το μήκος επαφής. Στο άνω άκρο του σωλήνα επιβλήθηκε στρεπτικό φορτίο επιβάλλοντας αυξανόμενες γωνίες στρέψης. Η μεταβολή της στρεπτικής ροπής στο άκρο αυτό καθώς και η φάση του λυγισμού είναι εμφανής στα σχήματα που ακολουθούν, μαζί με την παραμορφωμένη γεωμετρία στη περιοχή της επαφής στον πυθμένα κατά τα μεταλυγισμικά στάδια. Σημειώνεται ότι η τιμή της στρεπτικής ροπής κατά την οποία επέρχεται ο λυγισμός συμφωνεί με τις τιμές λυγισμού που παρουσιάστηκαν στο τρίτο κεφάλαιο της διατριβής.



Σχήμα 6.4.2: Επιβαλλόμενη γωνία στρέψης και στρεπτική ροπή στο άνω άκρο



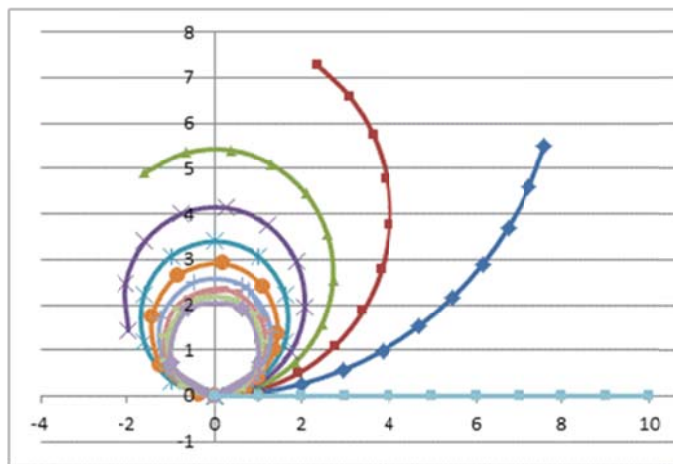
Σχήμα 6.4.3: Δημιουργία βρόγχων στη περιοχή επαφής με τον πυθμένα κατά τη μεταλουργική καταπόνηση.

6.5 Μεγάλες καμπτικές καταπονήσεις ελαστικής δοκού

Το παράδειγμα αυτό είναι τυπικό για την εξέταση των δυνατοτήτων της μεθόδου για την προσομοίωση ιδιαίτερα μεγάλων καμπτικών καταπονήσεων και περιστροφών. Η

εξεταζόμενη εύκαμπτη πρόβολος δοκός με τα χαρακτηριστικά του πίνακα διακριτοποιείται με δέκα στοιχεία 2 κόμβων και υπόκειται στο ελεύθερο άκρο σε καμπτική ροπή η οποία θεωρητικά αντιστοιχεί σε διπλή συστροφή κατά το μήκος της. Η λύση συγκλίνει στο θεωρητικό αποτέλεσμα, με τα πεπερασμένα στοιχεία να σχηματίζουν δύο επάλληλους κύκλους, παραμορφούμενα σε γωνίες στο επίπεδο των 72deg.

Μήκος	10
EI	100
EA	120
kGA	33.33
Καμπτική ροπή στο άκρο, επιβεβλημένη σε 10 βήματα	40π



Σχήμα 6.5: Στιγμιότυπα παραμόρφωσης προβόλου δοκού.

6.6 Αμφιέρειστη δοκός σε ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο

Για τη διακρίβωση της απόδοσης των αναπτυχθέντων πεπερασμένων στοιχείων όταν υπόκεινται σε κάμψη και διάτμηση και για την εξέταση του φαινομένου shear locking μοντελοποιήθηκε αμφιέρειστη δοκός υποκειμένη σε καταναμημένο φορτίο [Reddy, 1997], με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: Μέτρο ελαστικότητας $E=10^6$, λόγος Poisson $\nu=0.25$, Μήκος $L=1$, Διατομή ορθογωνική πλάτους 0.1 και ύψους H , συντελεστής διάτμησης διατομής $k=5/6$, καταναμημένη φόρτιση $q=1$ για $L/H=10$ και $q=10^{-3}$ για $L/H=100$. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για διακριτοποιήσεις με τα αναπτυχθέντα στοιχεία 2,3 και 4 κόμβων. Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα συγκλίνουν

στις θεωρητικές τιμές χωρίς να παρουσιάζονται προβλήματα σχετιζόμενα με την διάτμηση (shear locking). Σημειώνεται ότι η σύγκλιση είναι άμεση για τα στοιχεία 4 κόμβων και ταχεία για τα στοιχεία 3 κόμβων.

N: αριθμός στοιχείων στο μισό της δοκού.

	Μετατόπιση στο L/2			Γωνία στο L		
	w x10 ²			- φ x10 ²		
	L/H=10					
Στοιχεία	N=1	N=2	N=4	N=1	N=2	N=4
2 κόμβων	0.09750	0.14437	0.15609	0.37500	0.46875	0.49218
3 κόμβων	0.12875	0.16000	0.16000	0.50001	0.50000	0.50000
4 κόμβων	0.16000	0.16000	0.16000	0.49999	0.49999	0.49999
Ακριβής λύση*	0.16000			0.50000		
	L/H=100					
2 κόμβων	0.09379	0.14066	0.15238	0.37500	0.46875	0.49218
3 κόμβων	0.12504	0.15629	0.15629	0.50001	0.50000	0.50000
4 κόμβων	0.15629	0.15629	0.15629	0.50000	0.50000	0.50000
Ακριβής λύση*	0.15629			0.50000		

*Σύμφωνα με [Reddy (1997)], με ανάλυση κατά Timoshenko για γραμμικό πρόβλημα

7

Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα της εργασίας καθώς και τα πρωτότυπα αποτελέσματα τα οποία παρήχθησαν στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου εύκαμπτων σωλήνων, μη συμμετρικής γενικά διατομής, κατάλληλο για το μη γραμμικό πρόβλημα των κινήσεων στο θαλάσσιο περιβάλλον, για μεγάλες μετατοπίσεις και περιστροφές. Το μοντέλο αυτό αφορά σε δοκό με καμπτικές, στρεπτικές και αξονικές παραμορφώσεις, με την υπόθεση απουσίας διατμητικών παραμορφώσεων. Για την παραμετροποίηση των γωνιών περιστροφής των εγκαρσίων διατομών χρησιμοποιήθηκαν οι γνωστές γωνίες Euler. Τα υδροδυναμικά φορτία ακολουθήθηκε το μοντέλο Morison, ενώ η επαφή με τον πυθμένα μοντελοποιήθηκε με μη γραμμικά δύσκαμπτα ελατήρια. Για την αριθμητική επίλυση των συστήματος των διαφορικών εξισώσεων αναπτύχθηκε σχήμα πεπερασμένων διαφορών. Η επίλυση στο πεδίο του χρόνου έγινε με εφαρμογή της μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης Newmark, η δε επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων έγινε με τη μέθοδο Newton-Raphson.

Το μοντέλο αυτό βρέθηκε ιδιαίτερα εύχρηστο και αποδοτικό για προβλήματα που απαντώνται στη πράξη και αφορούν ήπιας μορφής αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας της διάταξης. Μεγαλύτερες καταπονήσεις συναντούν τα εγγενή προβλήματα των γωνιών περιστροφής Euler (περιορισμένο εύρος γωνιών, εξάρτηση από το συγκεκριμένο γενικό πλαίσιο αναφοράς, gimbal locking). Για τη υπέρβαση των προβλημάτων αυτών αναπτύχθηκε ειδικός τύπος πεπερασμένου στοιχείου δοκού, που περιγράφεται στη συνέχεια.

- Παρήχθησαν αναλυτικές λύσεις για τον λυγισμό κατακόρυφων διατάξεων εύκαμπτων σωλήνων υπό την επίδραση στρεπτικής συντηρητικής ροπής, αξονικής δύναμης καθώς και σταθερών βαρυτικών και υδροστατικών δυνάμεων διανεμημένων κατά το μήκος. Η ανάλυση απέδωσε πρωτότυπες αναλυτικές σχέσεις κλειστής μορφής για τις κρίσιμες τιμές φορτίων ελαστικού λυγισμού στις περιπτώσεις οριακών συνθηκών με ελεύθερα κατά το εγκάρσιο άκρα. Στη περίπτωση αυτή η επίλυση έγινε μέσω των συναρτήσεων $Airy$. Για τη περίπτωση μεγάλης ευκαμψίας εξήχθησαν ασυμπτωτικές τιμές, στις οποίες συγκλίνουν γρήγορα οι τιμές λυγισμού για αυξανόμενο λόγο βάρους προς ευκαμψία. Οι μορφές λυγισμού βρέθηκαν σαν τρισδιάστατες καμπύλες, με μεγάλες παραμορφώσεις στο κατώτερο τμήμα, όπου και οι μικρότερες τιμές των αξονικών δυνάμεων. Διερευνήθηκαν τρεις περιπτώσεις συνδυασμών οριακών συνθηκών, με ιδιαίτερη εξέταση του χαρακτήρα της επιβαλλόμενης στρεπτικής ροπής, οι οποίες θεωρήθηκαν σαν συντηρητικά φορτία, ημιεφαπτομενικού τύπου. Για πολύ εύκαμπτους φορείς, τα κρίσιμα φορτία βρέθηκαν εξαρτώμενα από την οριακή συνθήκη του κάτω άκρου, όπου υπάρχει εκτεταμένη περιοχή καμπτικών παραμορφώσεων, ενώ στο ανώτερο άκρο η αντίστοιχη περιοχή είναι σημαντικότερα μικρότερη. Για τις περιπτώσεις με εγκάρσιους περιορισμούς βρέθηκαν και πάλι δυο ομάδες αποτελεσμάτων, σε συνάρτηση με τις οριακές συνθήκες στο κάτω άκρο. Για τις περιπτώσεις αυτές οι λύσεις δόθηκαν μέσω ολοκληρωμάτων των ελλিপών μη ομογενών συναρτήσεων $Airy$ και εξήχθησαν ασυμπτωτικές τιμές για τα ολοκληρώματα αυτά. Εξετάστηκαν τέσσερις περιπτώσεις οριακών συνθηκών και παρήχθησαν διαγράμματα με τις τιμές λυγισμού, χρήσιμα σε πρακτικές εφαρμογές. Για τις περιπτώσεις αυτές τα φορτία λυγισμού συγκλίνουν προς αυτά της προηγούμενης περίπτωσης με ελεύθερα άκρα για πολύ εύκαμπτους σωλήνες, όμως η σύγκλιση αυτή είναι βραδεία. Συγκριτικά διαγράμματα με αριθμητικές και ασυμπτωτικές λύσεις κατέδειξαν τη εξαιρετική προσέγγιση και τη χρησιμότητα των τελευταίων.

- Αναπτύχθηκε ειδικός τύπος πεπερασμένων στοιχείων, ακολουθώντας την γεωμετρικά ακριβή διατύπωση, με παραμετροποίηση των περιστροφών στο $SO(3)$ και δυνατότητα προσομοίωσης κάθε μεγέθους περιστροφών. Η ανάπτυξη ακολούθησε τη μεθοδολογία Rayleigh–Ritz των ενεργειακών μεθόδων μεταβολών (variational). Τα στοιχεία παραλαμβάνουν καμπτικές, στρεπτικές αλλά και διατμητικές παραμορφώσεις. Η παραμορφωμένη γεωμετρία καθώς και οι μετατοπίσεις προσεγγίζονται με ισοπαραμετρικά

πολύωνυμα παρεμβολής. Για την επίτευξη αντικειμενικότητας του στοιχείου και ανεξαρτησίας από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιήθηκε μια σωματοπαγής παρεμβολή των περιστροφών, στον εφαπτομενικό χώρο μεταβολών της περιστροφής κάθε κόμβου (διανυσματικός χώρος $T_{R}SO3$). Στη διατριβή αναπτύχθηκε μια ειδική εφαρμογή των παρεμβολών αυτών βασισμένη στο συνδυασμό των εφαπτομενικών χώρων $T_{R}SO3$ σε κάθε κόμβο του στοιχείου. Με τον τρόπο αυτό επιτεύχθηκε η απλούστευση των εκφράσεων για τον υπολογισμό των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων καθώς και η πλήρης γραμμικοποίηση των εφαπτομενικών μητρώων δυσκαμψίας. Για την ολοκλήρωση της ενέργειας των διατμητικών παραμορφώσεων χρησιμοποιήθηκε μέθοδος ολοκλήρωσης χαμηλότερης τάξης με παρεμβολή των διατμητικών παραμορφώσεων στα σημεία της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η μέθοδος είναι γενική ως προς τον αριθμό των κόμβων. Στη διατριβή παρουσιάζονται εφαρμογές με στοιχεία γραμμικής γεωμετρίας δύο κόμβων αλλά και στοιχεία με τρεις και τέσσερις κόμβους. Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζουν ακρίβεια δεύτερης (2 κόμβοι) και τέταρτης τάξης (3 και 4 κόμβοι) ως προς τον ρυθμό σύγκλισης.

- Ανάπτυξη μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης με εφαρμογή της αρχής HLVA (Hamilton law of varying action) στο πεδίο των πεπερασμένων περιστροφών. Η ενεργειακή βάση της μεθόδου της προσδίδει συμπλεκτικό χαρακτήρα (symplectic integrator) με ιδιαίτερα ευνοϊκά χαρακτηριστικά για τη διατήρηση της ορμής αλλά και της ενέργειας του συστήματος. Ειδικότερα, σε συντηρητικά προβλήματα η μέθοδος διατηρεί ακριβώς τη συνολική γραμμική και γωνιακή ορμή, ενώ έχει ιδιαίτερα καλή συμπεριφορά στη διατήρηση της συνολικής μηχανικής ενέργειας. Η συμπεριφορά αυτή παρουσιάστηκε σε σειρά σχετικών εφαρμογών. Η μέθοδος είναι ενός βήματος και παρουσιάζει ακρίβεια δεύτερης τάξης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο συμπλεκτικός χαρακτήρας της μεθόδου εξαιρεί τη δυνατότητα αριθμητικής απόσβεσης, όπου αυτή είναι επιθυμητή.

Οι παραπάνω μεθοδολογίες εφαρμόστηκαν με επιτυχία σε σειρά προβλημάτων ελέγχου της τάξης ακρίβειας της μεθόδου αλλά και σε περιπτώσεις που αφορούν πρακτικές εφαρμογές.

7.1 Προτάσεις μελλοντικής έρευνας

Καθώς η αναπτυχθείσα εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και η συνδυασμένη χρονική ολοκλήρωση παρουσιάζουν ιδιαίτερα ελκυστικά χαρακτηριστικά ως

προς τη διατήρηση των κινηματικών παραμέτρων (ορμής και ενέργειας) είναι εξαιρετικά αποδοτική η χρήση της σε προβλήματα κινούμενων εύκαμπτων σωμάτων ιδιαίτερης μαζικής αδράνειας, στη περιοχή των δυναμικής συστήματος σωμάτων (multibody dynamics). Μια τέτοια εφαρμογή προτείνεται να είναι η εξέταση των πτερύγων των ανεμογεννητριών, οι οποίες λόγω του μεγέθους τους κινούνται με ιδιαίτερη στροφορμή και παραμορφώνονται σαν εύκαμπτες επιμήκεις κατασκευές. Ιδιαίτερα για τη περίπτωση των πλωτών ανεμογεννητριών, η οποία αποτελεί τεχνολογία αιχμής, η αναπτυχθείσα μεθοδολογία μπορεί να εισφέρει στην ακριβή αναπαράσταση της εντατικής και κινηματικής κατάστασης του περιστρεφόμενου ρότορα, η στήριξη του οποίου υπόκειται και στις περιστροφές της πλωτής πλατφόρμας με τα αποτελέσματα της επίδρασης των δυνάμεων Coriolis. Η ανάλυση θα μπορεί να λάβει υπόψη όλες τις μη γραμμικές κινηματικές επιδράσεις και θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η σύγκριση με τα αποτελέσματα των συνήθων μεθοδολογιών. Αξίζει να αναφερθεί ότι τέτοιες διερευνήσεις έχουν ήδη ξεκινήσει [Wang et al 2015, 2015b].

Μία άλλη πρόταση αναφέρεται και πάλι στην πλωτή ανεμογεννήτρια και ειδικότερα στην ανάλυση της συμπεριφοράς του εύκαμπτου καλωδίου ηλεκτρικής σύνδεσης, το οποίο υπόκειται σε όλες τις φορτίσεις των σωλήνων του θαλάσσιου περιβάλλοντος, είναι ιδιαίτερα κρίσιμο στοιχείο για τη λειτουργία της μονάδας και επιπλέον παρουσιάζει σύνθετη εσωτερική δομή, που θα μπορούσε να προσομοιωθεί με μη γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, σε επέκταση της παρούσης εργασίας.

7.2 Δημοσιεύσεις

Στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής δημοσιεύθηκαν σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά και πρακτικά αντιστοίχων συνεδρίων οι εργασίες που ακολουθούν.

Ειδικότερα, παρουσιάστηκαν εφαρμογές της αναπτυγμένης μεθοδολογίας στα πλαίσια διερεύνησης της συμπεριφοράς των τενόντων (χαλύβδινοι σωλήνες) των αγκυρώσεων TLP εξεδρών, η οποία διερευνήθηκε και πειραματικά, (κατωτέρω εργασία 1, διεθνούς συνεδρίου 2017, με κρίση του πλήρους κειμένου) καθώς επίσης και παρουσίαση της μεθοδολογίας πεπερασμένων στοιχείων (κατωτέρω εργασία 2, διεθνούς συνεδρίου 2017, με κρίση επί της περίληψης). Επίσης σημειώνεται ότι εφαρμογές της αναπτυχθείσης μεθοδολογίας για την εξέταση του τρισδιάστατου μη γραμμικού δυναμικού προβλήματος και ειδικότερα για τις υδροδυναμικές φορτίσεις σε εύκαμπτα στοιχεία στα πλαίσια πειραματικών και αριθμητικών διερευνήσεων, έχουν περιληφθεί στις εργασίες (3) και (4)

σε διεθνές συνέδριο και περιοδικό με κρίση πλήρους κειμένου. Οι αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις για το πρόβλημα του λυγισμού κατακόρυφων διατάξεων στο νερό υπό στρέψη και αξονική φόρτιση, με εξέταση των έντονων μεταβολών στις οριακές περιοχές στο άκρο των σωλήνων έχουν περιληφθεί σε σχετική εργασία (5), σε διεθνές συνέδριο με κρίση του πλήρους κειμένου:

1. Katsaounis G.M., Polyzos S. and S.A. Mavrakos, “An Experimental Study of the Hydrodynamic Behavior of a TLP Platform for a 5mw Wind Turbine with OWC Devices” Proc. of the VII International Conference on Computational Methods in Marine Engineering MARINE 2017, p.722.
2. Katsaounis G.M., “Finite Element Formulation for Static and Dynamic Nonlinear Analysis of Highly Flexible Beams Subjected to Large Rotations and Displacements”, Presented in VII International Conference on Computational Methods in Marine Engineering MARINE 2017.
3. Riziotis V.A., Katsaounis G.M., Papadakis G., Voutsinas S.G., Bergeles G. and Tzabiras G.D, “Numerical and experimental analysis of the hydroelastic behaviour of purse seine nets”, Ocean Engineering, Vol. 58, pp. 88–105, (2012).
4. Katsaounis G.M., Tzabiras G., Voutsinas S. and Bergeles G. “Measurements of Drag Resistance on Purse Seine Nets with Application to their Submergence Problem”, 13th Congress of Intl. Maritime Assoc. of Mediterranean, IMAM, İstanbul, Turkey, 12-15 Oct. 2009.
5. Katsaounis, G.M. and Papazoglou, V.J., “Torsional Buckling of Vertical Risers”, Proceedings of the 9th ISOPE Conference, Vol. 2 , June. 1999.

Παράρτημα Α

Στο Παράρτημα αυτό παρουσιάζεται η εφαρμογή των οριακών συνθηκών στη λύση (3.38) της μιγαδικής διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας (3.22):

$$w(t; , t_0) = \varphi + i \theta = e^{-i\frac{\alpha}{2}(t+t_0)} \{C_1 Ai(\zeta) + C_2 Bi(\zeta) + D gi(\zeta)\}$$

με $\zeta = t + t_0 - \frac{\alpha^2}{4}$ και t, α, t_0 οριζόμενα στις σχέσεις (3.4).

Οι έξι παράμετροι των μιγαδικών σταθερών C_1, C_2, D προσδιορίζονται από τις συνθήκες για τις γωνίες στροφής ή τις ροπές στα δύο άκρα (τέσσερις εξισώσεις) καθώς και από τη συνθήκη για τις εγκάρσιες μετατοπίσεις στο άνω άκρο. Οι τελευταίες δίνονται από:

$$\bar{y}_L - i \bar{z}_L = \int_0^{\bar{L}} w(t; a, t_0) dt \quad (\text{με } \bar{y}_0 = 0 \text{ και } \bar{z}_0 = 0)$$

Όπως έχει ήδη περιγραφεί και στην παράγραφο 3.3.1, η περίπτωση των πολύ εύκαμπτων φορέων ($\varepsilon \rightarrow 0$ ή, ισοδύναμα, $\bar{L} \rightarrow \infty$) οδηγεί στην επιλογή:

$$C_2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

καθώς:

$$Ai(\zeta), gi(\zeta) \rightarrow 0 \text{ και } Bi(\zeta) \rightarrow \infty \text{ για } \zeta \rightarrow \infty \quad (\text{A.2})$$

Με την επιλογή αυτή προσεγγίζονται για το άνω άκρο και οι ομογενείς οριακές συνθήκες για μηδενικές τιμές είτε των γωνιών (περιπτώσεις πάκτωσης) είτε των ημειφαπτομενικών ροπών (περιπτώσεις ελεύθερου άκρου).

Οι υπόλοιπες τέσσερις σταθερές προσδιορίζονται από τις απομένουσες οριακές συνθήκες για το κάτω άκρο και για τις εγκάρσιες μετατοπίσεις.

Εξετάζοντας το σύστημα των συζευγμένων εξισώσεων ισορροπίας στην μορφή με πραγματικούς συντελεστές:

$$\begin{aligned}\varphi'' - \alpha\theta' &= \varphi(t_0 + t) - D_1 \\ \theta'' + \alpha\varphi' &= \theta(t_0 + t) + D_2\end{aligned}\tag{A.3}$$

πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξ αυτών με θ , τη δεύτερη με $-\varphi$, προσθέτοντας κατά μέλη και ολοκληρώνοντας από το κάτω μέχρι το άνω άκρο, προκύπτει:

$$\left[\theta \left(\varphi' - \frac{\alpha}{2} \theta \right) - \varphi \left(\theta' + \frac{\alpha}{2} \varphi \right) \right]_0^{\bar{L}} = D_1 z_{\bar{L}} - D_2 y_{\bar{L}}\tag{A.4}$$

όπου ήδη έχει θεωρηθεί για το κάτω άκρο:

$$\bar{y}_0 = 0 \text{ και } \bar{z}_0 = 0\tag{A.5}$$

Το αριστερό μέλος της σχέσης (A.6) μηδενίζεται για κάθε εξεταζόμενο συνδυασμό οριακών συνθηκών στα δύο άκρα, είτε πάκτωσης είτε άρθρωσης (βλ. σχέσεις 3.9-3.15). Ακολουθώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας, και λόγω της αξονικής συμμετρίας της γεωμετρίας του φορέα, μπορεί να θεωρηθεί σύστημα συντεταγμένων κατάλληλα περιστραμμένο ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $z_{\bar{L}} = 0$, οπότε η σχέση (A.6) αποδίδει για κάθε $y_{\bar{L}} : D_2 = 0$. Έτσι, οι μιγαδικές σταθερές στη λύση (3.38) εκφράζονται τελικά από τρεις πραγματικές σταθερές $f_{1,2,3}$:

$$C_1 = f_1 + i f_2 \text{ και } D = f_3\tag{A.6}$$

Για τη περίπτωση του πακτωμένου κάτω άκρου, οι οριακές συνθήκες των μηδενικών γωνιών καθώς και της μηδενικής εγκάρσιας μετατόπισης $y_{\bar{L}}$ καταλήγει στο ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned}f_1 Ai(\zeta_0) + f_3 \Re e gi(\zeta_0; a) &= 0 \\ f_2 Ai(\zeta_0) + f_3 \Im m gi(\zeta_0; a) &= 0 \\ f_1 \Re e \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} Ai(\zeta) dt - f_2 \Im m \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} Ai(\zeta) dt + f_3 \Re e \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} gi(\zeta; a) dt &= 0\end{aligned}\tag{A.7}$$

με: $\zeta = t + t_0 - \frac{a^2}{4}$ και $\zeta_0 = t_0 - \frac{a^2}{4}$

Συμβολίζοντας με:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} Ai(\zeta) dt \\ I_2 &= \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} gi(\zeta; a) dt\end{aligned}\tag{A.8}$$

η συνθήκη για μη τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος γίνεται:

$$\begin{aligned}
& Ai(\zeta_0) \Re(I_2) + \Im(I_1) \Im(gi(\zeta_0; a)) \\
& = \Re(I_1) \Re(gi(\zeta_0; a))
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Παρομοίως, για την περίπτωση του αρθρωμένου κάτω άκρου, με επιβολή της στρεπτικού φορτίου υπό τον τύπο της ημιεφαπτομενικής ροπής, συνάγεται το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned}
& f_1 Ai'(\zeta_0) + f_3 \Re gi'(\zeta_0; a) = 0 \\
& f_2 Ai'(\zeta_0) + f_3 \Im gi'(\zeta_0; a) = 0 \\
& f_1 \Re \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} Ai(\zeta) dt - f_2 \Im \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} Ai(\zeta) dt + f_3 \Re \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} gi(\zeta; a) dt = 0
\end{aligned} \tag{A.10}$$

και η συνθήκη για μη τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος εκφράζεται σαν:

$$Ai'(\zeta_0) \Re(I_2) + \Im(I_1) \Im(gi'(\zeta_0; a)) = \Re(I_1) \Re(gi'(\zeta_0; a)) \tag{A.11}$$

Εξετάζονται στη συνέχεια οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις των ολοκληρωμάτων που εμπλέκονται στις παραπάνω σχέσεις, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου του μήκους του φορέα.

Ολοκλήρωμα I_I

Το ολοκλήρωμα γράφεται :

$$I_1 = e^{-i\frac{a^3}{8}} \int_{\zeta_0}^0 e^{-i\frac{a}{2}\zeta} Ai(\zeta) d\zeta + e^{-i\frac{a^3}{8}} \int_0^{\bar{L}+t_0-\frac{a^2}{4}} e^{-i\frac{a}{2}\zeta} Ai(\zeta) d\zeta \equiv I_{11} + I_{12} \tag{A.12}$$

Το I_{11} μπορεί να υπολογίζεται εύκολα, με αριθμητική ολοκλήρωση καθώς το όριο ολοκλήρωσης ζ_0 παίρνει μικρές τιμές. Το απομένον ολοκλήρωμα I_{12} χρήζει ιδιαίτερης μεταχείρισης κατά το ότι το άνω όριό του παίρνει τιμές που τείνουν στο άπειρο για την εξεταζόμενη περίπτωση των πολύ εύκαμπτων φορέων. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να προσεγγιστεί με [Vallee and Soares 2004]:

$$I_{12} \approx e^{-i\frac{a^3}{12}} \left\{ \frac{1}{3} - i \frac{a}{2} \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{ia^3}{24}\right)}{3^{\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} - \frac{a^2}{4} \frac{{}_1F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{ia^3}{24}\right)}{3^{\frac{5}{3}} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \right\} (\bar{L} \rightarrow \infty) \tag{A.13}$$

όπου ${}_1F_1$ η *συρρέουσα* υπεργεωμετρική συνάρτηση (confluent hypergeometric function) και Γ η συνάρτηση γάμμα [Olver 1997].

Ολοκλήρωμα I_2

Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\bar{L}} e^{-i\frac{a}{2}(t+t_0)} gi(\zeta; a) dt \\ &= \int_{t_0}^0 e^{-i\frac{a}{2}t} gi(t - a^2/4; a) dt \\ &\quad + \int_0^{\bar{L}+t_0} dt \int_0^{\infty \exp(i\frac{2\pi}{3})} e^{(-\frac{z^3}{3} - i\alpha\frac{z^2}{2} + tz)} dz = I_{21} + I_{22} \end{aligned} \quad (A.14)$$

Και πάλι, το I_{21} μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά, χρησιμοποιώντας αλγόριθμους για την ελλiptική συνάρτηση Airy, g_0 , [Constantinides and Marhefka 1993]

Για το I_{22} ορίζουμε την συνάρτηση $gg(x)$ σαν:

$$gg(t; a) = \int_0^{\infty \exp(i\frac{2\pi}{3})} e^{(-\frac{z^3}{3} - i\alpha\frac{z^2}{2} + tz)} dz \quad (A.15)$$

Για την ασυμπτωτική προσέγγιση του ολοκληρώματος της συνάρτησης αυτής για μεγάλες τιμές του άνω ορίου ολοκλήρωσης, ακολουθείται παρόμοια μέθοδος με αυτή του υπολογισμού του αντίστοιχου ολοκληρώματος της $Gi(x)$, [Olver 1997].

Σε αντιστοιχία με την gg , θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση hh :

$$hh(x'; a') = \int_0^{\infty} e^{(-\frac{z^3}{3} - i\alpha'\frac{z^2}{2} + x'z)} dz \quad (A.16)$$

Με χρήση αυτής, η gg γράφεται:

$$gg(t; a) = e^{i\frac{2\pi}{3}} hh(te^{i\frac{2\pi}{3}}; \alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}) \quad (A.17)$$

και το I_{22} μετασχηματίζεται σε:

$$I_{22} = \int_0^{\bar{L}+t_0} gg(t; a) dt = e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^{\bar{L}+t_0} hh(te^{i\frac{2\pi}{3}}; \alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}) dt \quad (A.18)$$

Συμβολίζοντας με $p = -te^{i\frac{2\pi}{3}}$, $a' = \alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}$ και $L' = (\bar{L} + t_0)e^{-i\frac{\pi}{3}}$ το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I_{22} = - \int_0^{-(\bar{L}+t_0)e^{i\frac{2\pi}{3}}} hh(-p; a') dp = - \int_0^{L'} hh(-p; a') dp \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= - \int_0^{L'} dp \int_0^\infty e^{\left(-\frac{z^3}{3} - i\alpha' \frac{z^2}{2} - pz\right)} dz \\ &= - \int_0^\infty e^{\left(-\frac{z^3}{3} - i\alpha' \frac{z^2}{2}\right)} \frac{1 - e^{-L'z}}{z} dz \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Εφαρμόζοντας την παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned} I_{22} &= - \left[e^{\left(-\frac{z^3}{3} - i\alpha' \frac{z^2}{2}\right)} (1 - e^{-L'z}) \ln(z) \right]_{z \rightarrow 0}^\infty \\ &\quad + \int_0^\infty e^{\left(-\frac{z^3}{3} - i\alpha' \frac{z^2}{2}\right)} L' e^{-L'z} \ln(z) dz \\ &\quad + \int_0^\infty (z^2 + i\alpha'z) e^{\left(-\frac{z^3}{3} - i\alpha' \frac{z^2}{2}\right)} e^{-L'z} \ln(z) dz - \int_0^\infty (z^2 + i\alpha'z) e^{\left(-\frac{z^3}{3} - i\alpha' \frac{z^2}{2}\right)} \ln(z) dz \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Η ποσότητα στις αγκύλες είναι μηδενική. Συμβολίζουμε τα ολοκληρώματα της σχέσης σαν:

$$I_{22} = I_{2a} + I_{2b} + I_{2c} \quad (\text{A.22})$$

Τα ολοκληρώματα είναι I_{2a} , I_{2b} είναι της μορφής:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} q(z) \ln(z) dz \quad (\text{A.23})$$

Η ασυμπτωτική τους συμπεριφορά για $\lambda \rightarrow \infty$ (ισοδύναμα $L' \rightarrow \infty$), με εφαρμογή του λήμματος Watson [Olver 1997] βρίσκεται:

$$I_{2a} + I_{2b} \cong I_{2a} \cong i \frac{\pi}{3} - \gamma - \ln(\bar{L} + t_0) \quad (\text{A.24})$$

όπου γ η σταθερά Euler.

Το I_{2c} δεν εξαρτάται από το L' και υπολογίζεται αριθμητικά.

Έτσι, τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 γίνονται:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \quad (\text{A.25})$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22} \cong I_{21} - I_{2c} + i \frac{\pi}{3} - \gamma - \ln(\bar{L} + t_0) \quad (\text{A.26})$$

με τα I_{11} και I_{21} , I_{2c} να υπολογίζονται αριθμητικά.

Η σχέση (A.11) δίδει για πακτωμένο κάτω άκρο συνδυασμούς (\bar{L}, t_0, a) (συνθήκη λυγισμού):

$$\bar{L} = \exp\left\{-\Re e(I_1) \frac{\Re e(gi(\zeta_0; a))}{Ai(\zeta_0)} + \Im m(I_1) \frac{\Im m(gi(\zeta_0; a))}{Ai(\zeta_0)} + \Re e(I_{21} - I_{2c} - \gamma)\right\} - t_0$$

(A.27)

και η (A.13) για απλά εδρασμένο:

$$\bar{L} = \exp\left\{-\Re e(I_1) \frac{\Re e(gi'(\zeta_0; a))}{Ai'(\zeta_0)} + \Im m(I_1) \frac{\Im m(gi'(\zeta_0; a))}{Ai'(\zeta_0)} + \Re e(I_{21} - I_{2c} - \gamma)\right\} - t_0$$

(A.28)

Βιβλιογραφία

- Abramowitz M. and Stegun I. A. (Eds.) (1964) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- Ahmad S and, Datta T.K.,1992, “Nonlinear response analysis of marine risers”, Computers & Structures, Volume 43, Issue 2, 17 April 1992, Pages 281-295.
- Antman, S.S. and Kenney, C.S. (1981). ‘Large Buckled States of Nonlinearly Elastic Rods under Torsion, Thrust, and Gravity’, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 76, pp. 289-338.
- API (1992), BULLETIN 16J, *Bulletin on Comparison of Marine Drilling Riser Analyses*, First Edition, August 1992.
- Aranha J.A.P. and Pinto M.O., 2001, “Dynamic tension in risers and mooring lines: an algebraic approximation for harmonic excitation”, Applied Ocean Research, Volume 23, Issue 2, April, p. 63-81.
- Aranha J.A.P., Pinto M.O and da Silva R.M.C, 2001, “On the dynamic compression of risers: an analytic expression for the critical load”, Applied Ocean Research, Volume 23, Issue 2, April, Pages 83-91.
- Aranha JAP, Martins CA, Pesce CP (1997) Analytical approximation for the dynamic bending moment at the touchdown point of a catenary riser. Int J Offshore Polar Eng 7:293–300
- Argyris, J.H., Dunne, P.C. and Scharpf, D.W. (1978), “On Large Displacement-Small strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 14, pp. 401-451.
- Athisakul C., Monprapussorn T.,Chucheepsakul S., 2011. “A variational formulation for three-dimensional analysis of extensible marine riser transporting fluid” Ocean Eng.38,609–620. [http://refhub.elsevier.com/S0029-8018\(14\)00437-5/sbref1](http://refhub.elsevier.com/S0029-8018(14)00437-5/sbref1)

- Athisakul C., Phanyasahachar T., Klaycham K., Chucheesakul S., 2012. “Static equilibrium configurations and appropriate applied top tension of extensible marine riser with specified total arc-length using finite element method”. *Eng Struct.*34, 271–277.
- Bai Q., Bai Y. and Ruan W. (2017) “*Flexible Pipes*” John Wiley & Sons, Inc., NJ USA, 2017
- Bai Y. and Bai Q., 2005, “*Subsea Pipelines and Risers*”, (2005) Elsevier Ltd., Oxford UK, 2005
- Bai Y., 2001, “*Pipelines and risers*”, Elsevier Science Ltd, Oxford UK, 2001
- Bai Y., Lu Y., & Peng Cheng P., 2015, “Theoretical and finite-element study of mechanical behaviour of central, large-diameter umbilical cables under tension and torsion”, *Ships and Offshore Structures*, 10:4, 393-403.
- Bathe, K.-J.(1982), “Finite element procedures in engineering analysis”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA.
- Berge S., and Olufsen, A. (1992). “Handbook on design and operation of flexible pipes”, Technical report, SINTEF – Structures and Concrete. ISBN 82-595-7266-4.
- Bernitsas, M. and Kokkinis, T. (1983a), ‘Buckling of Risers in tension due to Internal Pressure: Nonmovable Boundaries’, *Proc. of the 2nd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pp. 481-488.
- Bernitsas, M.M., Kokkinis, T., 1983b, “Buckling of columns with movable boundaries”, *J. Struct. Mechanics*, 11, pp. 351-370.
- Bernitsas, M.M., Kokkinis, T., 1983c, “Buckling of columns with nonmovable boundaries”, *J. Struct. Engineering*, 109, pp. 2113-2127.
- Bernitsas, M.M., Kokkinis, T., 1984a, “Asymptotic behaviour of heavy columns and riser stability boundaries”, *ASME J. Appl. Mech.*, 51, pp. 560-565.
- Bernitsas, M.M., Kokkinis, T., 1984b, “Global static instability of risers”, *SNAME J. Ship Research*, 28, pp. 261-271.
- Brouwers J.J.H., 1982, “Analytical methods for predicting the response of marine risers”, *Mechanics Proceedings B* 85 (4), December 13.
- Brüls O., A. Cardona, (2010) On the use of Lie group time integrators in multibody dynamics, *J. Comput. Nonlinear Dynam.* 5 031002,
- Brüls O., Cardona A., Arnold M., (2012) Lie Group generalized- α time integration of constrained flexible multibody systems, *Mech. Mach. Theory* 48 121–137.

- Chai Y.T. and Varyani K.S. 2006. "An Absolute Coordinate Formulation for Three-Dimensional Flexible Pipe Analysis," *Ocean Eng.*, Vol.(33), pp.23-58.
- Chai Y.T., Varyani K.S. and Barltrop N.D.P., 2002, "Three-dimensional Lump-Mass formulation of a catenary riser with bending, torsion and irregular seabed interaction effect", *Ocean Engineering*, Volume 29, Issue 12, September, Pages 1503-1525.
- Chatjigeorgiou I.K., 2004, "On the parametric excitation of vertical elastic slender structures and the effect of damping in marine applications *Applied Ocean Research* 26 (2004) 23–33.
- Chatjigeorgiou I.K., 2008, "A finite differences formulation for the linear and nonlinear dynamics of 2D catenary risers". *OceanEng.*35, 616–636.
- Chatjigeorgiou, I.K. 2010, "Three dimensional nonlinear dynamics of submerged, extensible catenary pipes conveying fluid and subjected to end-imposed excitations", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45, 667-680.
- Chatjigeorgiou, I.K., 2013, "Second-order nonlinear dynamics of catenary pipelines: A frequency domain approach, *Computers and Structures*", 123, 1-14.
- Chatjigeorgiou, I.K., Mavrakos, S.A, 2005, "Nonlinear resonances of parametrically excited risers-numerical and analytic investigation for $\Omega=2\omega_1$,*Computers and Structures*. 83: 560-573.
- Chen J., Ziheng H., Tian Q. 2022, *A multisymplectic Lie algebra variational integrator for flexible multibody dynamics on the special Euclidean group SE(3)* *Mechanism and Machine Theory* 174
- Chung, J. S., Cheng, B.-R. and Huttelmaier, H.-P. (1994), "Three-dimensional coupled responses of a vertical deep-ocean pipe: Part I. Excitation at pipe ends and external torsion, Part II. Excitation at pipe top and external torsion ", *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, Vol. 4, No. 4, Dec., pp. 320-339.
- Constantinides E.D. and Marhefka R. J. (1993), "Efficient and accurate computation of the incomplete Airy functions". *Radio Science* 28 (4), pp. 441–457.
- Dareing D.W. 2012, "Mechanics of Drillstrings and Marine Risers" ASME, NY USA.
- Fergestad D. and Løvteit S.A., ed., 2017, "Handbook on Design and Operation of Flexible Pipes" Report no. OC2017 A-001 MARINTEK/ NTNU/ 4Subsea, Norway.
- Geradin M. and Cardona A., 2001, "Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach", John Wiley & sons LTD., NY.

- Hante S. and Arnold M., (2021) “RATTLie: *A variational Lie group integration scheme for constrained mechanical systems*” *Journal of Computational and Applied Mathematics* 387.
- Huang T. and Dareing D. W. 1968, “Buckling and Lateral Vibration of Drill Pipe,” *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 90, Series B, No. 4, 1968, pp. 613–619.
- Huang, T. and Dareing, D. W., (1966) “Predicting the Stability of Long Vertical Pipe Transmitting Torque in a Viscous Medium,” *Trans., ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 88, Series B, No. 2, pp. 191–200.
- Huang, T., Dareing, D.W., 1968, “Buckling and lateral vibration of drill pipe”, *J. Engineering for Industry*, pp. 613-619.
- Huang, T., Dareing, D.W., 1969, “Buckling and frequencies of long vertical pipes”, *J. Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 95, 167-181.
- Hung, L. Q., Kang Z. and Shaojie Li. 2021, “Numerical Investigation of Dynamics of the Flexible Riser by Applying Absolute Nodal Coordinate Formulation”, *Marine Technology Society Journal*, Volume 55, Number 5 pp. 179-195(17)
- Ibrahimbegovic A, Mamouri S. On rigid components and joint constraints in nonlinear dynamics of flexible multibody systems employing 3D geometrically exact beam model. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2000;188:805–31.
- Ibrahimbegovic A, Mikdad MA. Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. *Int J Numer Methods Eng* 1998;41:781–814.
- Invernizzi D., Lorenzo Dozio L., “A fully consistent linearized model for vibration analysis of rotating beams in the framework of geometrically exact theory *Journal of Sound and Vibration*”, 370 (2016) 351–371.
- Iserles A., Munthe-Kaas H., Nørsett S., Zanna A., (2000) Lie-group methods, *Acta Numer.* 9 215–365.
- ISSC (1994), *Proceedings of the 12th International Ship and Offshore Structures Congress*, Vol. 2, Canada.
- Jelenic, G., Crisfield, M.A., 1998. Interpolation of Rotational Variables in Nonlinear Dynamics of 3D beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43.

- Kane C., Marsden J. E., Ortiz M. and West M. 2000, “Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems”, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 49:1295-1325
- Kodaissi, E. Lenouveau, J., Momplot, G. and Cacas, M. (1992), “On the Combined Bending/Torsion Behaviour of Flexible Risers”, *Proc. of the 11th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pp. 257-263.
- Kokkinis, T., Bernitsas, M.M., 1985, “Post-buckling analysis of heavy columns with application to marine risers”, *SNAME J. Ship Research*, 29, pp. 162-169.
- Kokkinis, T., Bernitsas, M.M., 1987, “Effect of fluid static pressure on the immediate postbuckling behavior of heavy tubular columns”, *Appl. Ocean Research*, 9, pp. 141-149.
- L. Levey and L. B. Felsen (1969) On incomplete Airy functions and their application to diffraction problems. *Radio Sci.* 4 (10), pp. 959–969.
- Ladau, L.D. and Lifshitz, E.M. (1959), *Theory of Elasticity*, Pergamon Press.
- Lanczos, C. (1952) “*The Variational Principles of Mechanics*”, University of Toronto Press, Toronto.
- Lang H., Arnold M., (2012) Numerical aspects in the dynamic simulation of geometrically exact rods, *Appl. Numer. Math.* 62 (10) 1411–1427
- Larsen C.M., 1992, ‘Flexible Riser Analysis -- Comparison of Results from Computer Programs’, *Marine Structures* 5, 103-119.
- Leung A.Y.T. 2010, “Dynamic buckling of columns by biaxial moments and uniform end torque”, *Journal of Sound and Vibration*, 329, 2218–2240.
- Li B., Wang C. 2023, “The absolute nodal coordinate formulation in the analysis of offshore floating operations, Part I: Theory and modeling, 114645.
- Liao J., 2012, “Boundary layer analysis for the eigenvalues of hanging rod”, *J. Math. Anal. Appl.* 389, 608–617.
- Liao M., Wang G., Gao Z., Zhao Y., and Li R., 2020, “Mathematical Modelling and Dynamic Analysis of an Offshore Drilling Riser”, *Hindawi Shock and Vibration* Volume 2020, Article ID 8834011.
- Love, A.E.H. (1927), *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publ., 1944 reprint.
- Love, A.E.H., 1944, “A Treatise On The Mathematical Theory Of Elasticity”, 4th ed., New York: Dover Publications.

- Lu, C.L. and Perkins, N.C. (1994), ‘Non-linear Spatial Equilibria and Stability of Cables under Uni-axial Torque and Thrust’, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 879-886.
- Lu, C.L. and Perkins, N.C. (1995), ‘Complex Spatial Equilibria of U-Joint supported Cables under Torque, Thrust and Self-Weight’, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 30, No. 3, pp. 271-285.
- Marsden J., West M., (2001) Discrete mechanics and variational integrators, *Acta Numer.* 10.
- Neto A.G., 2016a, “Dynamics of offshore risers using a geometrically-exact beam model with hydrodynamic loads and contact with the seabed”, *Engineering Structures* 125 438–454.
- Neto A.G., 2016b, “Structural stability of flexible lines in catenary configuration under torsion *Marine Structures*”, 34 16–40.
- Neto A.G., Martins C.A. and Pimenta P.M., 2016, “*Static analysis of offshore risers with a geometrically-exact 3D beam model subjected to unilateral contact*”, *Engineering Structures*, Volume 125, Pages 438-454.
- Neto A.G., Pimenta P.M., Wriggers P., “Self-contact modeling on beams experiencing loop formation”, *Comput Mech* 2015;
- O’Brian, P., McNamara, J.F. and Grealish, F. (1992), ‘Extreme Bending and Torsional Responses of Flexible Pipelines’, *Proc. of the 11th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pp. 319-324.
- Olver F.W.J, (1997), “Asymptotics and Special Functions”, A. K. Peters, Wellesley, MA.
- OrcaFlex QA, Testing and Validation Document 99/005:7 www.orcina.com (2015)
- Park H., Jung D.H., 2002: A finite element method for dynamic analysis of long slender marine structures under combined parametric and forcing excitations”, *Ocean Engineering*. 29 p.1313-1325.
- Patel M. H. and Sarohia S., 1984, “Dynamic Response of Free Hanging Risers in Waves”, *Proc. of the 3rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pp. 455-470.
- Patel M. H. and Seyed F. B., 1995, “Review of flexible riser modelling and analysis techniques”, *Engineering Structures*, Volume 17, Issue 4, Pages 293-304.
- Ruan W., Bai Y., Cheng S., 2014 “Static analysis of deep water lazy-wave umbilical on elastic seabed” *Ocean Engineering* 91 73–83.
- Santillan S.T. and Virgin L.N., 2011, “Numerical and experimental analysis of the static behavior of highly deformed risers”, *Ocean Engineering* 38, 1397–1402.

- Santillan S.T., Virgin L.N., Plaut, R.H., 2010 “Static and dynamic behavior of highly deformed risers and pipelines”, *J. Offshore Mech. Arct* 132,1–6.
- Simo J., Vu-Quoc L., (1988) On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 66 125–161.
- Simo JC, Vu Quoc L. A geometrically exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. *Int J Solids Struct* 1991;27(3):371–93.
- Simo JC. A finite strain beam formulation. Three-dimensional dynamic problem. Part I. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1985;49:55–70.
- Tikhonov V. S. and Ageeva I. Yu. (2000) “Calculation of the Fundamental Frequencies of a Rotating Long Vertical Rod *International Applied Mechanics*”. Vol. 36. No. 3.
- Tjavaras A.A, Zhu. Q. Liu, Triantafyllou M.S. and Yue D.K.P, “The Mechanics of Highly-Extensible Cables”, *Journal of Sound and Vibration* 1998 213 4 709-737.
- Triantafyllou, M. S. and Triantafyllou, G. S. (1991), "*The paradox of the hanging string: an explanation using singular perturbations*", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 148, No. 2, pp. 343-351.
- Vallee O. and Soares M. (2004), “Airy Functions and Applications to Physics”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore
- Vaz M.A., Castelpoggi F.A. 2012, “Geometrically Non-Linear Analysis of Inclined Elastic Rods Subjected to Self-Weight”, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, Vol. XXXIV, No. 1.
- Vaz M.A., Mascaro G.H.W., (2005) “Post-buckling analysis of slender elastic vertical rods subjected to terminal forces and self-weight *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40, 1049 – 1056.
- Vaz, M. & Rizzo, N. (2011), ‘A finite element model for flexible pipe armor wire instability’, *Marine Structures* 24(3), 275–291.
- Wang C., Liu J., Li B., Huang W., 2023, “The absolute nodal coordinate formulation in the analysis of offshore floating operations, Part II: Code validation and case study”, *Ocean Engineering* Volume 281, 114650.
- Wang J., Duan M. 2015 “A nonlinear model for deep water steel lazy-wave riser configuration with ocean current and internal flow”, *Ocean Engineering* 94 2015 155–162.
- Wang, C.Y. (1983), “Buckling and Postbuckling of a Long-Hanging Elastic Column Due to a Bottom Load”, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 311-314.

- Wang Q., Jonkman J. and Sprague M.A. 2015, “HAWC2 and BeamDyn: Comparison Between Beam Structural Models for AeroServo-Elastic Frameworks”, Presented at the European Wind Energy Association Annual Conference and Exhibition 2015 (EWEA 2015) Paris, France November 17–20 2015.
- Wang Q., Sprague M., Jonkman J. and Johnson N., 2015b, “BeamDyn: A High-Fidelity Wind Turbine Blade Solver in the FAST Modular Framework”, SciTech 2015, Kissimmee, Florida.
- Yang, Y.B. and Kuo, S.R. (1991), ‘Buckling of Frames under Various Torsional Loadings’, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 8, pp. 1681-1697.
- Yuan J-R, Ding H. 2022, “Dynamic model of curved pipe conveying fluid based on the absolute nodal coordinate formulation”, *International Journal of Mechanical Sciences*” Volume 232, 107625.