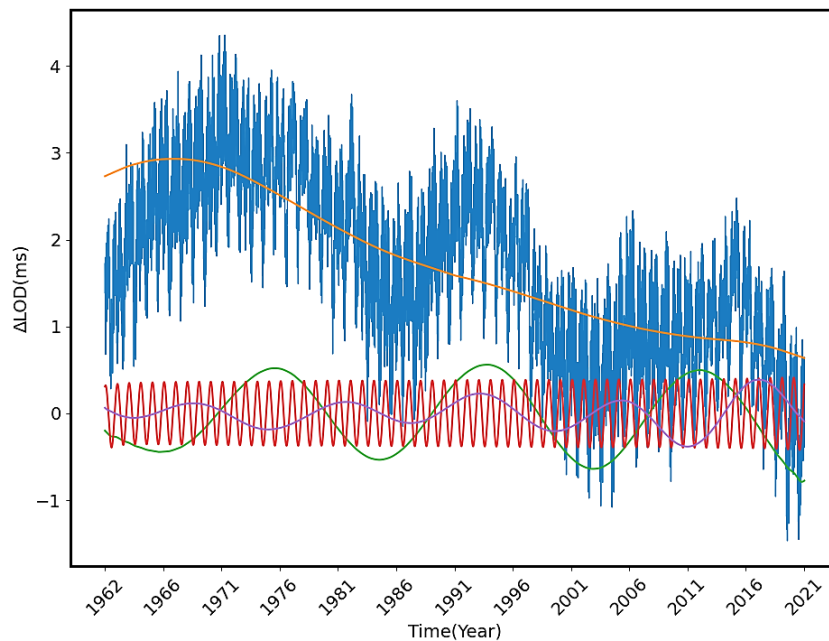




**Μελέτη της Μεταβολής του Μήκους της Ημέρας
με Φασματική Ανάλυση**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αγγελική Παππά



Επιβλέπων: Γεώργιος Πάνου
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

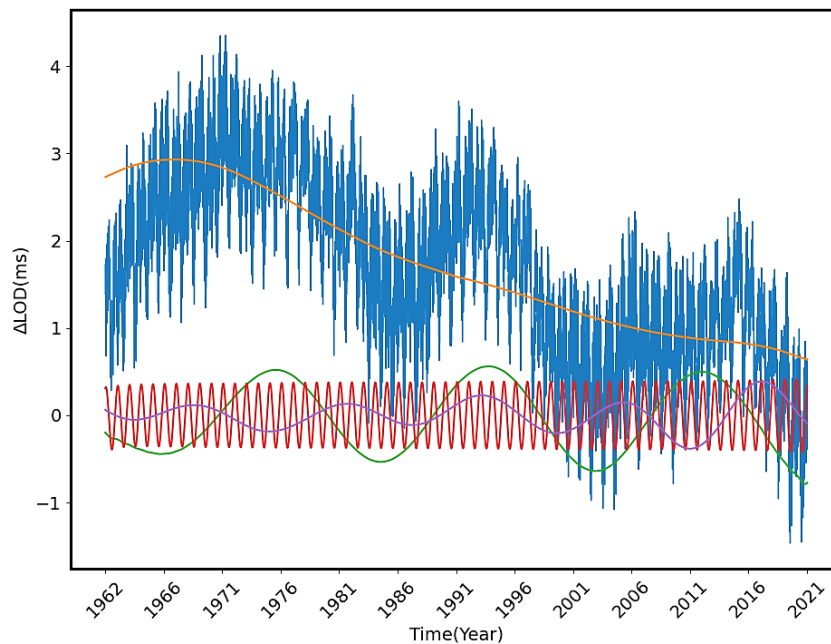
Αθήνα, Οκτώβριος 2023



**Study on the Length of Day Variation
through Singular Spectrum Analysis**

DIPLOMA THESIS

Angeliki Pappa



Supervisor: Georgios Panou
Assistant Professor at N.T.U.A.

Athens, October 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ -
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ / ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

Μελέτη της Μεταβολής του Μήκους της Ημέρας
με Φασματική Ανάλυση

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αγγελική Παππά

Επιβλέπων: Γεώργιος Πάνου
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

.....
Γ. Πάνου
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γ. Πανταζής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ν. Δουλάμης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2023

.....
Αγγελική Παππά

Διπλωματούχος Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός –
Μηχανικός Γεωπληροφορικής Ε.Μ.Π.

Copyright © Αγγελική Παππά, 2023.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τη συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τη συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Πάνου, Επίκουρο Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του, δείχνοντας εμπιστοσύνη στις δυνατότητές μου, και να ασχοληθώ με ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα που μου ανέθεσε. Ο κ. Πάνου δεν υπήρξε μόνο επιβλέπων καθηγητής για εμένα αλλά και μέντορας, που με τη συνεχή στήριξη και καθοδήγησή του ήταν επιτυχής η έκβαση της εργασίας που κατέληξε σε πολύ αξιόλογα αποτελέσματα.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Χ. Ιωσηφίδη, Ε.ΔΙ.Π. της σχολής Α.Τ.Μ.-Μ.Γ. του Ε.Μ.Π., για τις χρήσιμες συμβουλές του σε τεχνικά θέματα της γλώσσας προγραμματισμού Python. Επίσης, δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τον κ. Ι. Κώτση, πρόσφατα διπλωματούχο της σχολής, για την πολύτιμη βοήθειά του στην ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή του 7^{ου} Κεφαλαίου.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω τον κ. Γ. Πανταζή και τον κ. Ν. Δουλάμη, Καθηγητές του Ε.Μ.Π., για την συμμετοχή τους στην επιτροπή αξιολόγησης.

Με το πέρας της διπλωματικής αυτής, μπορώ να πω με σιγουριά ότι ήταν μια πολύ όμορφη εμπειρία που με έκανε σοφότερη και μου προσέφερε χρήσιμα εργαλεία για το μέλλον μου.

I have loved the stars too fondly to be fearful of the night ~ S. Williams

Αγγελική Παππά

Αθήνα, Οκτώβριος 2023

στην οικογένειά μου...

Περίληψη

Είναι ήδη γνωστό από τον 20^ο αιώνα ότι η ταχύτητα περιστροφής της Γης δεν είναι σταθερή, αλλά παρουσιάζει κάποιες ακανόνιστες μεταβολές. Το θέμα της παρούσας εργασίας είναι η επεξεργασία μιας χρονοσειράς που έχει ως τιμές τη μεταβολή του μήκους της ημέρας, με βήμα μιας ημέρας, στο διάστημα από 1^η Ιανουαρίου του 1962 έως και 1^η Ιανουαρίου του 2022. Η μέθοδος που επιλέχθηκε για την ανάλυση της χρονοσειράς είναι η Ιδιόμορφη Φασματική Ανάλυση (Singular Spectrum Analysis, SSA), μέσω της οποίας προέκυψαν η τάση της και 17 από τις βασικές της περιοδικότητες. Αρχικά, πραγματοποιήθηκε η εφαρμογή της μεθόδου σε προσομοιωμένα δεδομένα που κατασκευάστηκαν για τις ανάγκες της εργασίας αυτής, προκειμένου να υπάρξει μια εξοικείωση με τον τρόπο εφαρμογής της και να βρεθούν τυχόν αδυναμίες της. Ακολούθως, πραγματοποιήθηκε επεξεργασία μιας μικρής χρονοσειράς της μεταβολής του μήκους της ημέρας, με βήμα ενός έτους, στο διάστημα από το 1623 έως και το 2008. Έπειτα, στις περιοδικότητες και στην τάση που προέκυψαν από την ανάλυση της μεγάλης χρονοσειράς, έγινε ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή κατάλληλων συναρτήσεων, προκειμένου να βρεθούν οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων τους. Τέλος, με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά, έγινε μια προσπάθεια ερμηνείας κάθε περιοδικότητας με φυσικά αίτια, σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Λέξεις κλειδιά: γωνιακή ταχύτητα, ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή, κλίμακες χρόνου, παλίνροιες, περιοδικότητες

Abstract

It is already known from the 20th century, that the angular velocity of the Earth is not fixed, but it shows some fluctuations. The purpose of this study is the analysis of a time series with values for the variation of the length of day, taken at intervals of one day, from January 1st, 1962 to January 1st, 2022. The method of time series analysis was the Singular Spectrum Analysis (SSA), from which the trend and 17 of the most important periodic signals of the series were derived. Firstly, SSA was applied to some simulated time series that were invented for the purposes of this work, in order to become familiar with its application and to identify any of its weaknesses. Furthermore, an analysis of a smaller time series for the variation of the length of day was conducted. The data were taken at intervals of one year, from 1623 to 2008. Next, a least-square fitting was applied to the periodic signals and the trend that emerged from the SSA analysis for the larger series, in order to find the best values of their parameters. Based on these characteristics, an attempt was made to interpret each periodicity and find the corresponding physical causes, in accordance with the existing bibliography.

Keywords: angular velocity, least-square fitting, periodicities, tides, time scales

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	vii
Περίληψη.....	ix
Abstract.....	xi
Κατάλογος Εικόνων.....	xv
Κατάλογος Πινάκων.....	xix
1. Εισαγωγή.....	1
1.1. Γενικά.....	1
1.2. Στόχος.....	2
1.3. Διάρθρωση εργασίας.....	2
2. Θεωρητικό υπόβαθρο.....	5
2.1. Συστήματα χρόνου.....	5
2.1.1. Αστρικός Χρόνος.....	5
2.1.2. Παγκόσμιος Χρόνος.....	6
2.1.3. Το δευτερόλεπτο του SI.....	7
2.1.4. Ατομικός Χρόνος.....	8
2.1.5. Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος.....	9
2.2. Μεταβολές στη γωνιακή ταχύτητα της Γης.....	11
2.3. Χρονοσειρές.....	12
3. Μέθοδος επεξεργασίας.....	13
3.1. Γενικά.....	13
3.2. Περιγραφή αλγορίθμου.....	14
3.2.1. Ανάλυση (decomposition).....	14
3.2.2. Ανακατασκευή (reconstruction).....	17
3.3. Επιλογή παραμέτρων στην SSA.....	18
3.4. Διαδικασία ομαδοποίησης συνιστωσών.....	18
3.4.1. Προκαταρκτική ανάλυση.....	19
3.4.2. Διάφορα εργαλεία ομαδοποίησης.....	19
4. Προσομοιωμένα δεδομένα.....	21
4.1. Χρονοσειρά με τάση και λευκό θόρυβο.....	21
4.2. Αρμονική χρονοσειρά μίας περιόδου.....	24
4.3. Αρμονική χρονοσειρά διαφορετικών περιόδων.....	26
4.4. Αρμονική χρονοσειρά με τάση και λευκό θόρυβο.....	30
4.4.1. Μήκος παραθύρου $L = 70$	31

4.4.2. Μήκος παραθύρου $L = 40$	33
4.4.3. Μήκος παραθύρου $L = 100$	36
4.5. Συμπεράσματα	39
5. Δεδομένα μελέτης	41
6. Αποτελέσματα.....	43
6.1. Δεδομένα από 1623 έως 2008.....	43
6.2. Δεδομένα από 1962 έως 2022.....	52
7. Ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή.....	75
7.1. Προσαρμογές στην τάση και στις περιοδικότητες.....	75
7.2. Πειραματικός έλεγχος.....	87
7.3. Προσαρμογή στη συνολική χρονοσειρά.....	90
7.4. Ερμηνεία περιοδικοτήτων	92
8. Συμπεράσματα και προτάσεις	95
8.1. Γενικά συμπεράσματα και παρατηρήσεις.....	95
8.2. Μελλοντικές εργασίες.....	96
Παράρτημα Α.....	97
Παράρτημα Β.....	107
Βιβλιογραφία.....	113

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 2.1: Η διαφορά ηλιακής και αστρικής ημέρας. (Καστανάς, 2020).....	7
Εικόνα 2.2: Διαφορά UT1-TAI για το 1962 έως το 2022 (Δεδομένα IERS)	9
Εικόνα 2.3: Η πορεία του UT1 – TAI (μπλε γραμμή) και του UTC – TAI (μαύρη γραμμή) από το 1972 έως 2021 (δεδομένα IERS, ίδια επεξεργασία).....	10
Εικόνα 3.1: Γενικό σχεδιάγραμμα της μεθόδου SSA (Golyandina et al., 2018)	13
Εικόνα 4.1: Διάγραμμα χρονοσειράς ts_1 με τάση και θόρυβο	21
Εικόνα 4.2: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη ts_1	22
Εικόνα 4.3: Διάγραμμα 5 πρώτων συνιστωσών της σειράς ts_1	23
Εικόνα 4.4: Χρονοσειρά με την τάση και το θόρυβο της ts_1 που προέκυψαν από την SSA	23
Εικόνα 4.5: Σύγκριση αρχικής τάσης και θορύβου με αυτή από την SSA της ts_1	24
Εικόνα 4.6: Διάγραμμα χρονοσειράς ts_2	25
Εικόνα 4.7: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη ts_2	25
Εικόνα 4.8: Διάγραμμα των 2 συνιστωσών της σειράς ts_2	26
Εικόνα 4.9: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων με αυτών από την SSA για τη ts_2	26
Εικόνα 4.10: Διάγραμμα χρονοσειράς ts_3	27
Εικόνα 4.11: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη ts_3	28
Εικόνα 4.12: Διάγραμμα των 4 συνιστωσών της σειράς ts_3	28
Εικόνα 4.13: Χρονοσειρά με τις 3 περιοδικότητες της ts_3 που προέκυψαν από την SSA	29
Εικόνα 4.14: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων με αυτών από SSA για τη ts_3	29
Εικόνα 4.15: Διάγραμμα χρονοσειράς ts_4	30
Εικόνα 4.16: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη ts_4 ($L = 70$).....	31
Εικόνα 4.17: Διάγραμμα των 4 πρώτων συνιστωσών της σειράς ts_4 ($L = 70$).....	31
Εικόνα 4.18: Χρονοσειρά με την τάση, το θόρυβο και τις 3 περιοδικότητες της ts_4 που προέκυψαν από την SSA ($L = 70$)	32
Εικόνα 4.19: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων, τάσης και θορύβου με αυτών από την SSA για τη ts_4 ($L = 70$)	33
Εικόνα 4.20: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη ts_4 ($L = 40$).....	33
Εικόνα 4.21: Διάγραμμα των 8 πρώτων συνιστωσών της σειράς ts_4 ($L = 40$).....	34
Εικόνα 4.22: Διάγραμμα των 4 πρώτων συνιστωσών της σειράς ts_4 ($L = 40$).....	35
Εικόνα 4.23: Χρονοσειρά με την τάση, το θόρυβο και τις 3 περιοδικότητες της ts_4 που προέκυψαν από την SSA ($L = 40$)	35
Εικόνα 4.24: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων, τάσης και θορύβου με αυτών από την SSA για τη ts_4 ($L = 40$)	36
Εικόνα 4.25: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη ts_4 ($L = 100$)	37
Εικόνα 4.26: Διάγραμμα των 3 πρώτων συνιστωσών της σειράς ts_4 ($L = 100$).....	37
Εικόνα 4.27: Διάγραμμα των 8 πρώτων συνιστωσών της σειράς ts_4 ($L = 100$).....	38

Εικόνα 4.28: Χρονοσειρά με την τάση, το θόρυβο και τις 3 περιοδικότητες της ts_4 που προέκυψαν από την SSA ($L = 100$)	38
Εικόνα 4.29: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων, τάσης και θορύβου με αυτών από την SSA για τη ts_4 ($L = 100$)	39
Εικόνα 5.1: Μεταβολή του μήκους της ημέρας από το 1962 έως το 2022 (δεδομένα IERS)	41
Εικόνα 6.1: Διάγραμμα χρονοσειράς της μεταβολής του μήκους της ημέρας ανά έτος, για την περίοδο 1623 έως 2008	43
Εικόνα 6.2: Αντιδιαγώνιος πίνακας τροχιάς X (δεδομένα 1623-2008).....	44
Εικόνα 6.3: Διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς (δεδομένα 1623-2008)	45
Εικόνα 6.4: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (δεδομένα 1623-2008).....	45
Εικόνα 6.5: W-correlation πίνακας (δεδομένα 1623-2008).....	46
Εικόνα 6.6: Διάγραμμα 2 πρώτων συνιστωσών (δεδομένα 1623-2008).....	46
Εικόνα 6.7: Διαγράμματα υπό μελέτη συνιστωσών (δεδομένα 1623-2008)	48
Εικόνα 6.8: Οι ομαδοποιημένες συνιστώσες (τάση, περιοδικότητες, θόρυβος) της χρονοσειράς (δεδομένα 1623-2008)	49
Εικόνα 6.9: Τάση χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008).....	49
Εικόνα 6.10: Η 1 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	50
Εικόνα 6.11: Η 2 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	50
Εικόνα 6.12: Η 3 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	50
Εικόνα 6.13: Η 4 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	50
Εικόνα 6.14: Η 5 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	51
Εικόνα 6.15: Η 6 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	51
Εικόνα 6.16: Η 7 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	51
Εικόνα 6.17: Η 8 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	51
Εικόνα 6.18: Ο θόρυβος της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)	52
Εικόνα 6.19: Διάγραμμα χρονοσειράς της μεταβολής του μήκους της ημέρας ανά ημέρα, για την περίοδο 1962 έως 2022.....	52
Εικόνα 6.20: Αναπαράσταση της αντιδιαγωνιότητας του πίνακα τροχιάς X (δεδομένα 1962-2022).....	53
Εικόνα 6.21: Διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς για τις 500 πρώτες συνιστώσες (δεδομένα 1962-2022)	54
Εικόνα 6.22: Διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς για τις 50 πρώτες συνιστώσες (δεδομένα 1962-2022)	54
Εικόνα 6.23: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς για τις 10 πρώτες συνιστώσες (δεδομένα 1962-2022)	55
Εικόνα 6.24: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από F_0 έως F_{10} (δεδομένα 1962-2022)	56

Εικόνα 6.25: Διάγραμμα συνιστωσών $F1$ έως $F4$ (δεδομένα 1962-2022).....	56
Εικόνα 6.26: Διάγραμμα συνιστωσών $F5$ και $F6$ (δεδομένα 1962-2022).....	57
Εικόνα 6.27: Διάγραμμα συνιστωσών $F7$ και $F8$ (δεδομένα 1962-2022).....	57
Εικόνα 6.28: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από $F10$ έως $F20$ (δεδομένα 1962-2022).....	58
Εικόνα 6.29: Διάγραμμα συνιστωσών $F9$, $F10$ και $F11$ (δεδομένα 1962-2022).....	58
Εικόνα 6.30: Διάγραμμα συνιστωσών $F12$ και $F13$ (δεδομένα 1962-2022).....	59
Εικόνα 6.31: Διάγραμμα συνιστωσών $F14$ και $F15$ (δεδομένα 1962-2022).....	59
Εικόνα 6.32: Διάγραμμα συνιστωσών $F16$ έως $F19$ (δεδομένα 1962-2022).....	60
Εικόνα 6.33: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από $F20$ έως $F30$ (δεδομένα 1962-2022).....	61
Εικόνα 6.34: Διάγραμμα συνιστωσών $F23$ έως $F27$ (δεδομένα 1962-2022).....	62
Εικόνα 6.35: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από $F30$ έως $F40$ (δεδομένα 1962-2022).....	63
Εικόνα 6.36: Διάγραμμα συνιστωσών $F30$ και $F31$ (αριστερά) & $F32$ και $F33$ (δεξιά) (δεδομένα 1962-2022).....	63
Εικόνα 6.37: Διάγραμμα συνιστωσών $F34$ και $F35$ (αριστερά) & $F36$ και $F37$ (δεξιά) (δεδομένα 1962-2022).....	64
Εικόνα 6.38: Διάγραμμα συνιστωσών $F38$ έως $F40$ (δεδομένα 1962-2022).....	64
Εικόνα 6.39: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από $F40$ έως $F50$ (δεδομένα 1962-2022).....	65
Εικόνα 6.40: Διάγραμμα συνιστωσών $F40$ και $F41$ (δεδομένα 1962-2022).....	65
Εικόνα 6.41: Διάγραμμα συνιστωσών $F42$ και $F43$ (δεδομένα 1962-2022).....	66
Εικόνα 6.42: Διάγραμμα συνιστωσών $F45$ και $F46$ (δεδομένα 1962-2022).....	66
Εικόνα 6.43: Διάγραμμα συνιστωσών $F48$ και $F49$ (δεδομένα 1962-2022).....	67
Εικόνα 6.44: Οι ομαδοποιημένες συνιστώσες (τάση, περιοδικότητες, θόρυβος) της χρονοσειράς (δεδομένα 1962-2022).....	68
Εικόνα 6.45: Τάση χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)....	68
Εικόνα 6.46: Η 1 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	68
Εικόνα 6.47: Η 2 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	69
Εικόνα 6.48: Η 3 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	69
Εικόνα 6.49: Η 4 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	69
Εικόνα 6.50: Η 5 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	69
Εικόνα 6.51: Η 6 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	70
Εικόνα 6.52: Η 7 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	70
Εικόνα 6.53: Η 8 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	70
Εικόνα 6.54: Η 9 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022).....	70

Εικόνα 6.55: Η 10 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	71
Εικόνα 6.56: Η 11 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	71
Εικόνα 6.57: Η 12 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	71
Εικόνα 6.58: Η 13 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	71
Εικόνα 6.59: Η 14 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	72
Εικόνα 6.60: Η 15 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	72
Εικόνα 6.61: Η 16 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	72
Εικόνα 6.62: Η 17 ^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	72
Εικόνα 6.63: Ο θόρυβος της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)	73
Εικόνα 7.1: Συνόρθωση τάσης	76
Εικόνα 7.2: Συνόρθωση περιοδικότητας 1	78
Εικόνα 7.3: Συνόρθωση περιοδικότητας 2	79
Εικόνα 7.4: Συνόρθωση περιοδικότητας 3	79
Εικόνα 7.5: Συνόρθωση περιοδικότητας 4	80
Εικόνα 7.6: Συνόρθωση περιοδικότητας 5	80
Εικόνα 7.7: Συνόρθωση περιοδικότητας 6	81
Εικόνα 7.8: Συνόρθωση περιοδικότητας 7	81
Εικόνα 7.9: Συνόρθωση περιοδικότητας 8	82
Εικόνα 7.10: Συνόρθωση περιοδικότητας 9	82
Εικόνα 7.11: Συνόρθωση περιοδικότητας 10	83
Εικόνα 7.12: Συνόρθωση περιοδικότητας 11	83
Εικόνα 7.13: Συνόρθωση περιοδικότητας 12	84
Εικόνα 7.14: Συνόρθωση περιοδικότητας 13	84
Εικόνα 7.15: Συνόρθωση περιοδικότητας 14	85
Εικόνα 7.16: Συνόρθωση περιοδικότητας 15	85
Εικόνα 7.17: Συνόρθωση περιοδικότητας 16	86
Εικόνα 7.18: Συνόρθωση περιοδικότητας 17	86
Εικόνα 7.19: Συνόρθωση συνολικής χρονοσειράς χωρίς το θόρυβο	89
Εικόνα 7.20: Συνόρθωση συνολικής χρονοσειράς	91

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 5.1: Αβεβαιότητες ημερήσιων τιμών των παραμέτρων περιστροφής της Γης (δεδομένα IERS)	42
Πίνακας 7.1: Αποτελέσματα συνόρθωσης της τάσης	76
Πίνακας 7.2: Αποτελέσματα συνόρθωσης των περιοδικοτήτων	78
Πίνακας 7.3: Αποτελέσματα συνόρθωσης της συνολικής χρονοσειράς πλην του θορύβου	88
Πίνακας 7.4: Αποτελέσματα συνόρθωσης της συνολικής χρονοσειράς.....	90
Πίνακας 7.5: Φυσική ερμηνεία κάθε περιοδικότητας	92

1. Εισαγωγή

1.1. Γενικά

Ένα από τα βασικά αντικείμενα της επιστήμης της Αστρονομικής Γεωδαισίας και κατ' επέκταση της Γεωδαισίας είναι η μελέτη των κινήσεων της Γης. Αν υποθέσουμε ότι η Γη αποτελούσε ένα τέλειο σφαιρικό σώμα χωρίς επιδράσεις από το εσωτερικό της ή την αλληλεπίδραση της με άλλα ουράνια σώματα, θα περιστρέφονταν ομοιόμορφα και με σταθερή ταχύτητα. Στην πραγματικότητα όμως, η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Η Γη αποτελεί ένα παραμορφώσιμο στερεό, με στερεό εσωτερικό και ρευστό εξωτερικό πυρήνα, ανελαστικό μανδύα και ωκεάνια ρεύματα, που δέχεται βαρυτική έλξη από τον Ήλιο, τη Σελήνη και άλλα ουράνια σώματα.

Είναι ήδη γνωστό εδώ και κάποιες δεκαετίες ότι η γωνία περιστροφής της Γης δεν είναι σταθερή αλλά ούτε και μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο. Ωστόσο, παρουσιάζει πολλές διακυμάνσεις που αντιστοιχούν σε αρκετά milliseconds (ms) στο μήκος της ημέρας (Length Of Day, LOD) (Dickey, 1995). Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται και ως αιώνια επιβράδυνση της Γης. Πολλοί είναι οι ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με το φαινόμενο αυτό και το έχουν αποδώσει σε διάφορες φυσικές αιτίες και μηχανισμούς.

Συγκεκριμένα, κάποιες από τις έρευνες που έχουν γίνει πάνω στο θέμα αυτό, είναι αρχικά αυτή των Shen και Peng (2016), όπου μελετάται η μεταβολή του μήκους της ημέρας, για δεδομένα από τον Ιανουάριο του 1962 έως και το Μάρτιο του 2015. Την ανάλυση του σήματος την πραγματοποίησαν με τη μέθοδο εμπειρικής ανάλυσης (Ensemble Empirical Mode Decomposition, EEMD). Επίσης, αντίστοιχη έρευνα έχει γίνει από τους Le Mouél et al. (2019), για τη χρονική περίοδο 1962 έως και 2018, όπου χρησιμοποίησαν ως μέθοδο επεξεργασίας της χρονοσειράς τη φασματική ανάλυση (Singular Spectrum Analysis, SSA). Και στις δύο αυτές δημοσιεύσεις έγινε μια προσπάθεια ερμηνείας μερικών από τις περιοδικότητες του σήματος και αποδόθηκαν σε αιτίες όπως οι παλίρροιες ή το φαινόμενο El-Niño. Ωστόσο, η έρευνα παραμένει ανοιχτή όσον αφορά την πλήρη εξήγηση του φαινομένου και την ερμηνεία όλων των περιοδικοτήτων.

Η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας της Γης προκαλείται από ανακατανομές μάζας μεγάλης κλίμακας και κινήσεων στο εσωτερικό της, από ανέμους και ωκεάνια ρεύματα, καθώς και από τις σεληνοηλιακές παλίρροιες του στερεού φλοιού, της θάλασσας και της ατμόσφαιρας, όπως περιγράφονται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία. Γενικά, σε χρονική κλίμακα αρκετών ετών, οι αλλαγές στην περιστροφή της Γης οφείλονται στο μανδύα και τον πυρήνα, ενώ σε μικρότερες κλίμακες χρόνου, οι μεταβολές αυτές οφείλονται σε κλιματικές αλλαγές (Wilson, 2000). Ωστόσο, το θέμα αυτό παραμένει ακόμα ανοιχτό και υπάρχουν περιθώρια περαιτέρω ανάλυσης και ερμηνείας.

Λαμβάνοντας λοιπόν, καθημερινά δεδομένα για τη διαφορά του μήκους της ημέρας από μία σταθερή τιμή, γίνεται εύκολα αντιληπτή αυτή η μεταβολή. Προκειμένου όμως, να εντυπώσει κάποιος περισσότερο στο θέμα αυτό και να καταλάβει τους λόγους που κρύβονται πίσω από αυτή τη μεταβολή, θα πρέπει να μελετήσει και να αναλύσει σε μεγαλύτερο βάθος την εν λόγω χρονοσειρά.

1.2. Στόχος

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάλυση μιας χρονοσειράς για δεδομένα της μεταβολής του μήκους της ημέρας για τα τελευταία 60 χρόνια (1962 – 2022) που λήφθηκαν από την αρμόδια υπηρεσία Διεθνή Υπηρεσία για την Περιστροφή της Γης και των Συστημάτων Αναφοράς (International Earth Rotation and Reference Systems Service, IERS). Η μέθοδος ανάλυσης σήματος που επιλέχθηκε για τη συγκεκριμένη χρονοσειρά, είναι η Ιδιόμορφη Φασματική Ανάλυση (Singular Spectrum Analysis, SSA). Η SSA είναι μια ισχυρή μέθοδος ανάλυσης σήματος που εφαρμόζεται αποτελεσματικά σε μια χρονοσειρά, αναδεικνύοντας την τάση της, τις περιοδικότητές της και το θόρυβο. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την κατανόηση και την εφαρμογή της SSA, είναι αυτή που περιγράφεται και στο βιβλίο των Golyandina και Zhigljavsky, με τίτλο *Singular Spectrum Analysis for Time Series* (2020). Η μελέτη της χρονοσειράς συνεχίζεται μέσω της ελαχιστοτετραγωνικής προσαρμογής στις συνιστώσες που θα προκύψουν από την SSA. Σκοπός είναι η ανάλυση κάθε μίας από τις συνιστώσες και η σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα δύο άλλων εργασιών των Shen και Peng (2016) και των Le Mouél et al. (2019).

1.3. Διάρθρωση εργασίας

Η παρούσα εργασία διαρθρώνεται σε 8 κεφάλαια, μαζί με το Κεφάλαιο 1 της Εισαγωγής, και έχει την εξής δομή:

Στο Κεφάλαιο 2, παρατίθεται όλο το θεωρητικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατανόηση του υπό μελέτη προβλήματος. Συγκεκριμένα, αναφέρονται πληροφορίες για τα διάφορα συστήματα χρόνου που βασίζεται το φαινόμενο που μελετάται, καθώς και οι διάφορες κινήσεις της Γης. Επίσης, γίνεται μια αναφορά στις χρονοσειρές και του οφέλους της ανάλυσής τους.

Στο Κεφάλαιο 3, περιγράφονται τα μαθηματικά που κρύβονται πίσω από τη μέθοδο Singular Spectrum Analysis, καθώς και το πως μπορεί να εφαρμοστεί πιο αποδοτικά, προκειμένου να προκύψουν όσο το δυνατόν καλύτερα αποτελέσματα.

Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου SSA σε προσομοιωμένα δεδομένα τα οποία συντάχθηκαν για τις ανάγκες αυτής της εργασίας. Έτσι, υπήρξε καλύτερη κατανόηση της εφαρμογής, των ενδεχόμενων δυσκολιών ή αδυναμιών της μεθόδου, καθώς και πιθανών τρόπων αντιμετώπισης.

Στο Κεφάλαιο 5, περιγράφονται τα δεδομένα για το μήκος της ημέρας που είναι διαθέσιμα και που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, η πηγή των δεδομένων αυτών, καθώς και οι τρόποι απόκτησής τους.

Στο Κεφάλαιο 6, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου στα πραγματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν, αρχικά στα δεδομένα από το 1623 έως το 2008 με βήμα ενός έτους και στη συνέχεια στα δεδομένα από το 1962 έως το 2022 με βήμα μιας ημέρας.

Στο Κεφάλαιο 7, δίνονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της ελαχιστοτετραγωνικής προσαρμογής που έγινε στην τάση και στις περιοδικότητες που προέκυψαν από την εφαρμογή της SSA στα δεδομένα από το 1962 έως το 2022.

Η εργασία ολοκληρώνεται με το Κεφάλαιο 8, στο οποίο καταγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν με το πέρας της εφαρμογής της μεθόδου και της ανάλυσης των αποτελεσμάτων, αλλά και προτάσεις για μελλοντικές εργασίες.

Τέλος, η εφαρμογή της μεθόδου SSA στην εν λόγω χρονοσειρά, έγινε με τη χρήση κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Python που συντάχθηκε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας και περιλαμβάνεται στο Παράρτημα Α, υλοποιώντας την αντίστοιχη θεωρία. Επίσης, η εφαρμογή της ελαχιστοτετραγωνικής προσαρμογής έγινε με τη χρήση κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Python και περιλαμβάνεται στο Παράρτημα Β. Οι κώδικες είναι διαμορφωμένοι ώστε να εκτελούνται μέσω της πλατφόρμας Jupyter Notebook και Google Colab. Η εκτέλεση τους πραγματοποιήθηκε σε 64-bit υπολογιστή με λειτουργικό σύστημα Linux (Ubuntu) λόγους ταχύτητας, με μνήμη RAM 16 GB και επεξεργαστή CPU Intel Core i7, 8 πυρήνων. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε διπλή ακρίβεια 16 σημαντικών ψηφίων.

2. Θεωρητικό υπόβαθρο

2.1. Συστήματα χρόνου

Η χρήση της ώρας στη διάρκεια της ημέρας είναι μια κοινή καθημερινή εμπειρία για όλους τους ανθρώπους και μάλιστα η χρήση διαφόρων μέσων καταγραφής της με αρκετά καλή ακρίβεια θεωρείται πλέον δεδομένη. Ωστόσο, η μέτρηση του χρόνου με ακρίβεια είναι ένα αρκετά πολύπλοκο θέμα.

Η ανάγκη του ανθρώπου για τη μέτρηση του χρόνου και την καταγραφή της εναλλαγής των ημερών και των εποχών, υπήρξε σχεδόν από πάντα. Ήδη από την αρχαιότητα, υπήρχαν διάφοροι τρόποι μέτρησης της ώρας, με ρολόγια που βασίζονταν κυρίως σε φυσικά φαινόμενα όπως η κίνηση του Ήλιου και των αστεριών και κάπως έτσι δημιουργήθηκαν τα ηλιακά ρολόγια. Έπειτα, ανακαλύφθηκαν τα μηχανικά ρολόγια με λίγο καλύτερη ακρίβεια, όπως τα ρολόγια νερού ή αλλιώς κλεψύδρες και τα ρολόγια κεριού, όπου ένα λεπτό κεριό δείχνει το πέρασμα του χρόνου καθώς καίγεται. Ύστερα, το 17^ο αιώνα εισάγεται ένας ακόμη πιο ακριβής τρόπος μέτρησης του χρόνου, το εκκρεμές. Τέλος, το 1955 οι Louis Essen και Jack Perry κατασκευάζουν το πρώτο ατομικό ρολόι καισίου, που έρχεται πλέον να αντικαταστήσει τα μηχανικά ρολόγια, με την απίστευτη ακρίβεια τους.

Το κοινό όλων των παραπάνω μηχανισμών είναι ότι βασίζονται σε ένα σύστημα χρόνου. Για την κατασκευή ενός συστήματος χρόνου χρειάζεται να ορισθεί μια κλίμακα χρόνου. Ο καλύτερος τρόπος για να ορισθεί μια κλίμακα χρόνου είναι να μελετηθεί ένα ιδεατά σταθερά επαναλαμβανόμενο φαινόμενο και να ληφθεί η διάρκεια του ως μονάδα μέτρησης.

Οι αστρονόμοι της αρχαιότητας παρατήρησαν ότι διάφορα ουράνια σώματα (πχ. Ήλιος, Σελήνη), ακολουθούσαν μια σχετικά σταθερή και προβλέψιμη κίνηση και έτσι θεωρήθηκε ότι θα μπορούσαν να προσφέρουν έναν ομοιόμορφο τρόπο μέτρησης του χρόνου. Συνεπώς, ήταν λογικό να χρησιμοποιηθούν αυτές οι κινήσεις ως βάση για ένα σύστημα μέτρησης χρόνου. Έτσι, ένα από τα φαινόμενα στα οποία βασίστηκαν οι πρώτες κλίμακες, ήταν η περιστροφική κίνηση της Γης ή/και η φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας.

Ωστόσο, ήδη από τον 20^ο αιώνα ήταν πλέον γνωστό ότι η περιστροφική κίνηση της Γης δεν ήταν σταθερή, αλλά παρουσίαζε κάποιες μεταβολές, με αποτέλεσμα η χρήση αυτού του τρόπου καταγραφής του χρόνου, να μην εξυπηρετεί πλέον την επιστημονική κοινότητα και τις ιδιαίτερα αυξημένες απαιτήσεις της σε ακρίβεια.

Παράλληλα, ήρθε η ανακάλυψη των ατομικών ρολογιών, που προσέφεραν μια ομοιόμορφη μέτρηση του χρόνου, με υπερβολικά αυξημένη ακρίβεια μέτρησης και σταθερότητα. Με τον τρόπο αυτό οδήγησαν και στη διόρθωση του χρόνου που υπολογίζονταν από την περιστροφή της Γης, όπως θα αναλυθεί και στη συνέχεια.

2.1.1. Αστρικός Χρόνος

Η περιστροφική κίνηση της Γης, μπορεί να μελετηθεί κάνοντας παρατηρήσεις με βάση τον Ήλιο ή με βάση διάφορα άστρα. Ωστόσο, οι παρατηρήσεις που γίνονται με βάση τον Ήλιο παρουσιάζουν δυσκολίες και δεν εγγυώνται την ακρίβεια που προσφέρουν οι

παρατηρήσεις των άστρων. Συνεπώς, καθιερώθηκε ο προσδιορισμός της αστρικής ώρας, να γίνεται με βάση τα άστρα.

Λαμβάνοντας υπόψη την φαινόμενη περιστροφή της ουράνιας σφαίρας και σε αντιστοιχία με την ανάγνωση ενός κοινού ρολογιού, προκύπτει ο λεγόμενος Αστρικός Χρόνος (Sidereal Time). Δηλαδή, η ουράνια σφαίρα αντιπροσωπεύει την πλάκα ενός ρολογιού και τα άστρα αντιστοιχούν στις διάφορες υποδιαίρεσεις του κύκλου. Έπειτα, θεωρώντας τον αστρονομικό μεσημβρινό του τόπου ως δείκτη του ρολογιού, ο οποίος προφανώς κινείται μαζί με τη Γη όπως περιστρέφεται, προσδιορίζεται ο Αστρικός Χρόνος, ανάλογα με το ποια άστρα περνούν από τον μεσημβρινό την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Να σημειωθεί ότι, ίσες γωνίες στροφής ισοδυναμούν με ίσα διαστήματα Αστρικού Χρόνου, προκειμένου ο Αστρικός Χρόνος να αντανακλά στην πραγματική περιστροφή της Γης και με τον τρόπο αυτό να μπορεί εύκολα να προσδιορισθεί από παρατηρήσεις μεσουράνησης ουράνιων σωμάτων, με αρκετά καλή ακρίβεια.

Για τη συγκεκριμένη κλίμακα χρόνου, ως μονάδα μέτρησης ορίστηκε η μέση αστρική μέρα (Mean Sidereal Time), όπου πρόκειται για το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αυξηθεί κατά 24 h ο αστρικός χρόνος Greenwich θ (Greenwich Sidereal Time, GST). Η αριθμητική τιμή του αστρικού χρόνου Greenwich, αντιστοιχεί στην ωριαία γωνία του Εαρινού Ισημερινού σημείου (vernal equinox) ή αλλιώς πρώτο σημείο του Κριού (first point of Aries) Υ , που αναφέρεται στο μεσημβρινό του Greenwich.

Σήμερα, ο Αστρικός Χρόνος προσδιορίζεται με ακόμα καλύτερη ακρίβεια, μέσω παρατηρήσεων της Διαστημικής Γεωδαισίας, VLBI και με μετρήσεις LLR και SLR.

2.1.2. Παγκόσμιος Χρόνος

Υπήρξε, ωστόσο, η πρακτική αναγκαιότητα για ένα σύστημα χρόνου το οποίο θα συμβαδίζει με την εναλλαγή ημέρας και νύχτας. Αυτή η ανάγκη καλύφθηκε με την καθιέρωση του Παγκόσμιου Χρόνου (Universal Time). Ο Παγκόσμιος χρόνος (UT) είναι στην πραγματικότητα η ώρα με βάση το ρολόι της Γης, που πραγματοποιεί μια πλήρη περιστροφή σε 24 ώρες και είναι πρακτικά ανάλογο του Αστρικού χρόνου. Μάλιστα, ο UT1 συνδέεται με το Μέσο Αστρικό Χρόνο Greenwich (GMST) μέσω μιας συμβατικής μαθηματικής σχέσης. Η σχέση αυτή, η οποία θεωρήθηκε και ως ένας από τους ορισμούς του Παγκόσμιου Χρόνου, είναι:

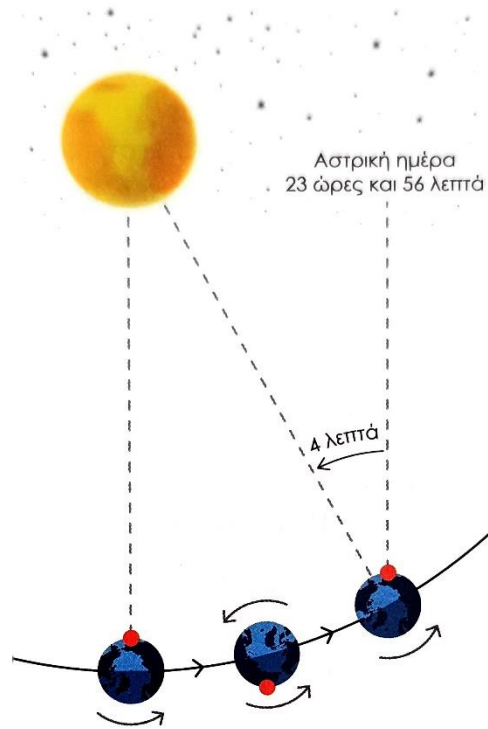
$$GMST1 \text{ of } 0^h \text{ UT1} = 24110.54841^s + 8640184.812866^s T_u + 0.093104^s T_u^2 - 6.2^s \cdot 10^{-6} T_u^3 \quad (2.1)$$

όπου $T_u = d_u/36525$ και d_u είναι το διάστημα σε μέρες από την 12^h UT1 της 1^{ης} Ιανουαρίου 2000 (εποχή J2000) (Aoki et al., 1982).

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβληθεί ο Μέσος Αστρικός Χρόνος Greenwich θ, για δύο διαδοχικές τιμές του d_u (που διαφέρουν ακριβώς μία ακέραια μονάδα), λέγεται μέση ηλιακή ημέρα (mean solar day). Χωρίζεται σε 24 ηλιακές ώρες, κάθε ώρα σε 60 ηλιακά λεπτά και κάθε λεπτό σε 60 ηλιακά δευτερόλεπτα. Μια μέση ηλιακή μέρα, δηλαδή, αποτελείται από 86400 ηλιακά δευτερόλεπτα.

Στην πραγματικότητα όμως, από τον τύπο του Παγκόσμιου Χρόνου προκύπτει ότι η μέση ηλιακή ημέρα περιέχει 86636.5553679051 αστρικά δευτερόλεπτα, δηλαδή 236.555... δευτερόλεπτα επιπλέον από την αστρική ημέρα. Αυτό οφείλεται στο

συνδυασμό περιστροφής και περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο. Δηλαδή, για να συμπληρωθεί μια πλήρης περιστροφή της Γης ως προς τον Ήλιο (ηλιακή μέρα), χρειάζεται να περιστραφεί ακόμη μία μοίρα, το οποίο επιτυγχάνεται σε περίπου 4 λεπτά (Εικόνα 2.1).



Εικόνα 2.1: Η διαφορά ηλιακής και αστρικής ημέρας. (Καστανάς, 2020)

Παράλληλα, μέσω παρατηρήσεων της περιστροφής της Γης, από μεσουρανήσεις άστρων σε συγκεκριμένο τόπο, προκύπτει μια κλίμακα μέτρησης του Παγκόσμιου Χρόνου γνωστή ως UT0 (McCarthy and Seidelmann, 2009). Εάν διορθωθεί ο UT0 ως προς την κίνηση του Πόλου, προκύπτει ο UT1, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από τη θέση παρατήρησης, σε αντίθεση με τον UT0, αλλά επηρεάζεται από τη μεταβαλλόμενη περιστροφή της Γης.

2.1.3. Το δευτερόλεπτο του SI

Από τα μέσα του 20^{ου} αιώνα, ήταν πλέον βέβαιο ότι η περιστροφή της Γης δεν είναι ομοιόμορφη, παρουσιάζει δηλαδή επιταχύνσεις και επιβραδύνσεις. Η συνειδητοποίηση αυτή και οι πλέον ιδιαίτερες απαιτήσεις σε ακρίβεια του προσδιορισμού της ώρας, από την επιστημονική κοινότητα, οδήγησαν στην ανάγκη ορισμού κλιμάκων χρόνου, που θα είναι ομοιόμορφες (θα έχουν σταθερό μέτρο) και κατ' επέκταση θα είναι ανεξάρτητες της περιστροφής της Γης. Μάλιστα η εποχή κατά την οποία η μέση ηλιακή μέρα διαρκούσε ακριβώς 86400 s στο SI ήταν περίπου το 1820. Αυτή ήταν περίπου και η εποχή κατά την οποία μέσω αναλύσεων κάποιων παρατηρήσεων ο Newcomb οδηγήθηκε στον ορισμό του Χρόνου Εφημερίδων (Ephemeris Time) από τον οποίο προέκυψε το δευτερόλεπτο του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων (Système International, SI) (McCarthy, 2004).

Έτσι, ορίστηκε το δευτερόλεπτο SI, που ξεκίνησε με την εξέλιξη του προτύπου συχνότητας των μικροκυμάτων καισίου και ακολούθησε με τη διαπίστωση της πιθανής χρήσης του προτύπου καισίου ως ρολογιού. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την 8^η έκδοση του φυλλαδίου του SI, ο ορισμός του δευτερόλεπτου έχει ως εξής:

Το δευτερόλεπτο ορίζεται ως η διάρκεια 9192631770 περιόδων της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στη μετάπτωση μεταξύ των δύο επιπέδων υπέρλεπτης υφής της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου καισίου 133 (BIPM, 2006).

Επίσης, σημειώνεται ότι αυτός ο ορισμός, αναφέρεται σε ένα άτομο καισίου που βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας στους 0 βαθμούς Kelvin.

Τέλος, ο ορισμός αυτός, βασίζεται σε ένα παρατηρήσιμο φαινόμενο, γεγονός που του επιτρέπει να εφαρμοστεί σε κάθε σύστημα αναφοράς. Συνεπώς, οι κλίμακες χρόνου που βασίζονται στο δευτερόλεπτο του SI, μπορούν να υλοποιηθούν σε κάθε σημείο ενδιαφέροντος, όπως η επιφάνεια της Γης ή οποιουδήποτε άλλου πλανήτη ή δορυφόρου.

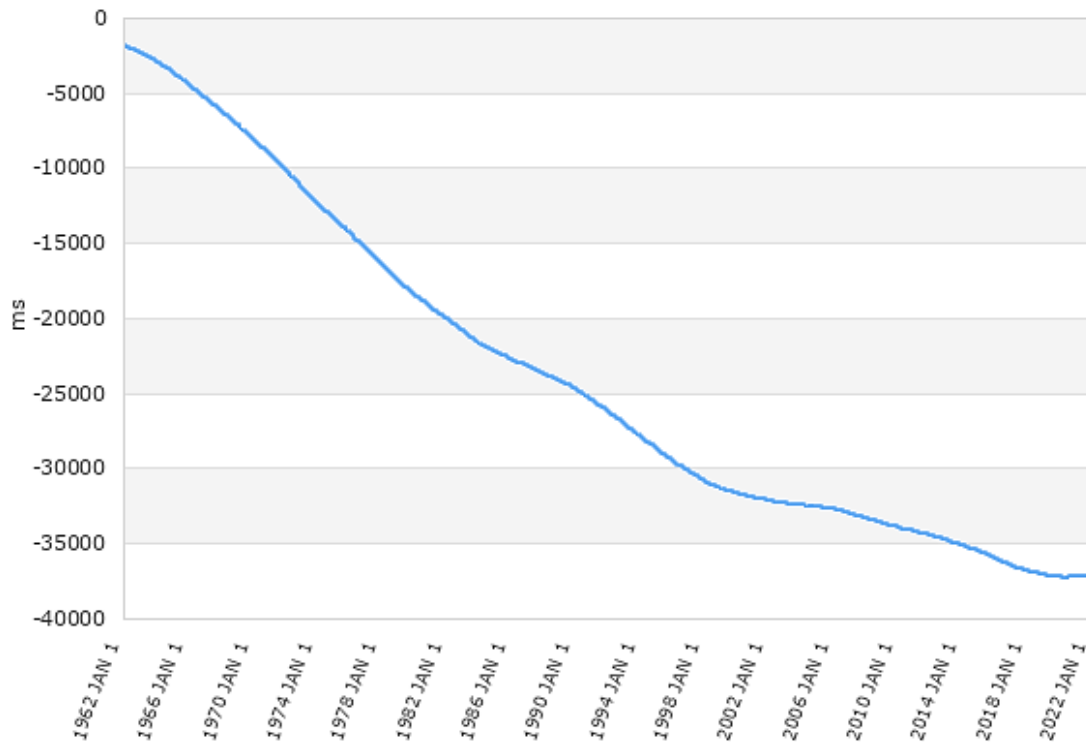
2.1.4. Ατομικός Χρόνος

Τον Ιανουάριο του 1972, εισήχθη επίσημα για πρώτη φορά ο Ατομικός Χρόνος (Temps Atomique International, TAI). Ο TAI είναι μια συντονισμένη κλίμακα αναφοράς, που καθιερώθηκε από την Bureau International de l'Heure (BIH), βασισμένος στις μετρήσεις ατομικών ρολογιών που λειτουργούν σε διάφορες συσκευές, σύμφωνα με τον ορισμό του δευτερολέπτου, της μονάδας μέτρησης χρόνου που έχει οριστεί από το SI (Terrien, 1971).

Συγκεκριμένα, ο υπολογισμός του TAI γίνεται από το συνδυασμό μετρήσεων διαφόρων χρονομέτρων ακριβείας (πρότυπα χρονόμετρα καισίου ή MASER υδρογόνου) που είναι καταναμημένα σε όλη τη Γη, μέσω μιας στατιστικής διαδικασίας, αφού αφαιρεθούν οι συστηματικές διαφορές ανάμεσα τους. Ο TAI έχει σχεδιαστεί για να εγγυάται αξιοπιστία, μακροπρόθεσμη σταθερότητα, ακρίβεια συχνότητας και προσβασιμότητα (Guinot and Arias, 2005).

Επιπλέον, ο TAI μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε σταθερό ή κινούμενο σημείο κοντά στο γεωειδές, εάν εφαρμοστούν βέβαια οι διορθώσεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Η μοναδιαία τιμή του χρόνου TAI είναι ακριβώς 1 δευτερόλεπτο του SI στο επίπεδο της θάλασσας. Επίσης, ο αρχικός προσδιορισμός του ήταν τέτοιος ώστε η διαφορά UT1 - TAI να είναι μηδέν την 1^η Ιανουαρίου του 1958 (Dick and Richter, 2000). Παρακάτω παρατίθεται ένα διάγραμμα που δείχνει αυτή τη διαφορά του TAI από τον UT1 στο πέρασμα του χρόνου.



Εικόνα 2.2: Διαφορά UT1-TAI για το 1962 έως το 2022 (Δεδομένα IERS)

Παρόλο που ο TAI είναι μία αναγνωρισμένη κλίμακα χρόνου, δεν έχει αναγνωριστεί ως η παγκόσμια σταθερά για την καταγραφή του χρόνου. Λόγω της μείωσης της ταχύτητας περιστροφής της Γης, ο TAI παρουσιάζει μια συνεχόμενα αυξανόμενη (παραβολική) μετάθεση σε σχέση με τον UT1. Σύμφωνα με σύγχρονες αναλύσεις αστρομετρικών καταγραφών του 19^{ου} αιώνα, η μονάδα χρόνου του TAI συμφωνεί με το δευτερόλεπτο της μέσης ηλιακής μέρας την εποχή 1830-1850. Επομένως εάν ο Πολιτικός Χρόνος βασίζονταν στον TAI, ακόμα και με συγχρονισμό του ενός δευτερολέπτου με τη μέση ηλιακή μέρα, δεν θα μπορούσε να διατηρηθεί μετά από μερικά χρόνια. Συνεπώς, η παγκόσμια κοινότητα αποφάσισε να εισάγει τον Συντονισμένο Παγκόσμιο Χρόνο (Earth Orientation Center, 2023).

2.1.5. Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος

Ο Συντονισμένος Παγκόσμιος Χρόνος (Universal Time Coordinated, UTC) είναι μια ομοιόμορφη κλίμακα χρόνου η οποία συμβαδίζει με τον παραδοσιακό ηλιακό χρόνο στο μεσημβρινό του Greenwich και χρησιμοποιείται ως βάση για όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες. Για να συμβαδίζει όμως, σε όλα τα μέρη του πλανήτη, η Γη έχει χωριστεί σε 24 ζώνες 15 μοιρών γεωγραφικού μήκους η κάθε μία και έτσι προκύπτει ο λεγόμενος Πολιτικός Χρόνος (Civil Time) ή Χρόνος Ζώνης (Zone Time) που διαφέρει από τον UTC έναν ακέραιο αριθμό ωρών.

Στα τέλη του 1971, προστέθηκε στο UTC ένα ειδικό αντιστάθμισμα (offset) των -0.1077580 δευτερολέπτων, έτσι ώστε η διαφορά TAI-UTC να είναι ακριβώς 10 δευτερόλεπτα. Ο UTC τέθηκε σε ισχύ την 1^η Ιανουαρίου του 1972 και από τότε η κλίμακα UTC προσαρμόζεται προσθέτοντας ή αφαιρώντας ένα εμβόλιμο δευτερόλεπτο (leap second), προκειμένου να εξασφαλιστεί η συμφωνία του με τον UT1 (Εξ. (2.2)) (McCarthy and Seidelmann, 2009)

$$DUT1 = |UT1 - UTC| \leq 0.9 \text{ s} \quad (2.2)$$

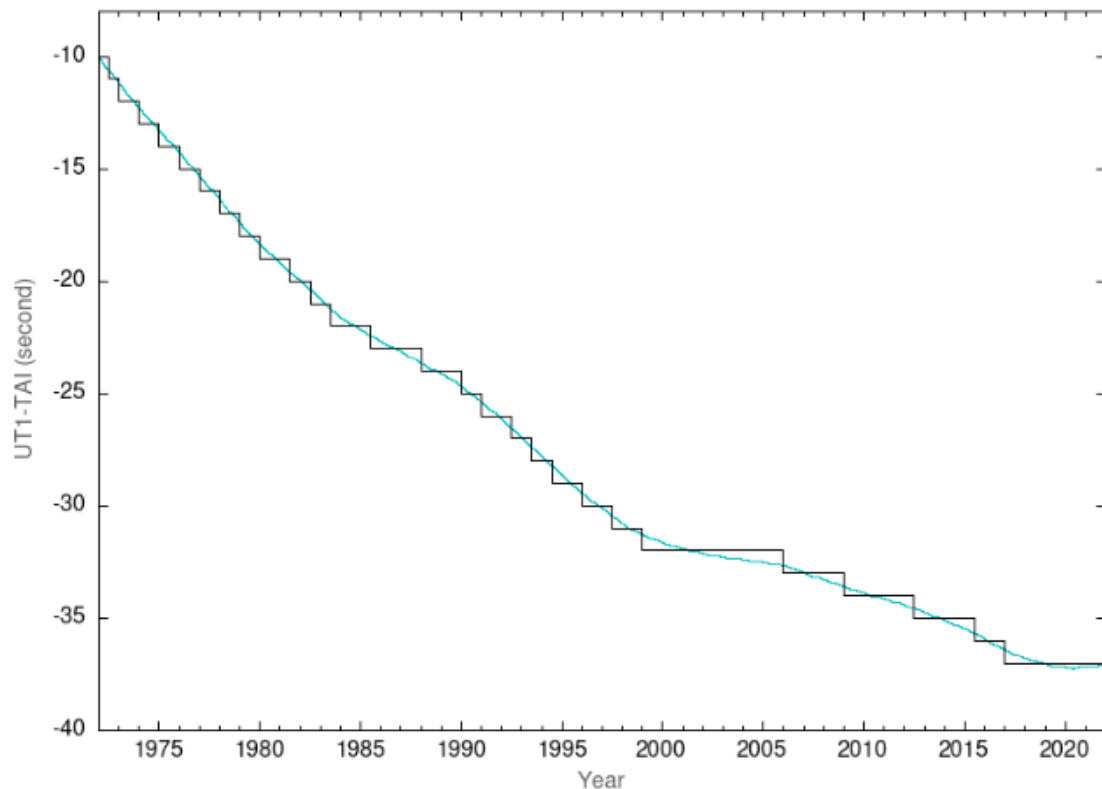
όπου DUT1 είναι η διαφορά του UTC από τον UT1, η οποία εκφράζεται με ακρίβεια των 0.1 δευτερολέπτων και μεταδίδεται με τα σήματα χρόνου. Οι αλλαγές της DUT1 αποφασίζονται από τη Διεθνή Υπηρεσία για την Περιστροφή της Γης (Dick and Richter, 2000).

Τα εμβόλιμα δευτερόλεπτα, κρίθηκαν απαραίτητα λόγω της αιώνιας επιβράδυνσης της Γης. Η διαδικασία αυτή των εμβόλιμων δευτερολέπτων επηρεάζει τις δραστηριότητες των σύγχρονων τηλεπικοινωνιών και των συστημάτων πλοήγησης (Dick and Richter, 2000). Για την απόφαση της εισαγωγής εμβόλιμων δευτερολέπτων και την ανακοίνωση τους είναι επιφορτισμένη η IERS. Συνεπώς, ο UTC υπολογίζεται από τον τύπο:

$$UTC = TAI - (10 + \text{leap seconds}) \quad (2.3)$$

Από όταν υιοθετήθηκε αυτό το σύστημα το 1972, έχουν προστεθεί μέχρι τώρα 27 εμβόλιμα δευτερόλεπτα στον UTC. Η τελευταία φορά που προστέθηκε, ήταν την 1^η Ιανουαρίου 2017 ώρα 0^h UTC.

Στην Εικόνα 2.2 φαίνεται η πορεία του UTC και η διαφορά UT1 - TAI για το χρονικό διάστημα 1972-2021



Εικόνα 2.3: Η πορεία του UT1 - TAI (μπλε γραμμή) και του UTC - TAI (μαύρη γραμμή) από το 1972 έως 2021 (δεδομένα IERS, ίδια επεξεργασία)

2.2. Μεταβολές στη γωνιακή ταχύτητα της Γης

Υποθέτοντας ότι η Γη έχει ομοιόμορφο σχήμα και περιστρέφεται ομοιόμορφα γύρω από ένα σταθερό άξονα περιστροφής (σε σχέση με το γήινο φλοιό και το ουράνιο σύστημα), οι μεταβολές της περιστροφής της Γης θα περιγράφονταν μέσω μίας μόνο παραμέτρου: της γωνίας περιστροφής, η οποία μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, ή της χρονικής κλίμακας που μπορεί να προκύψει από τη γωνία περιστροφής (Παγκόσμιος Χρόνος)(Earth Orientation Center, 2023).

Στην πραγματικότητα όμως, η Γη δεν ακολουθεί αυτή την ιδεατή περιστροφή, αλλά παρουσιάζει κάποιες μεταβολές, τόσο ως προς τη γωνιακή ταχύτητα, όσο και ως προς τον προσανατολισμό του άξονα περιστροφής της, που οφείλονται σε διάφορους παράγοντες. Κάποιοι από αυτούς είναι ερμηνεύσιμοι, όπως είναι η επίδραση άλλων ουράνιων σωμάτων του ηλιακού συστήματος (βαρυτική έλξη) ή το ακανόνιστο σχήμα της Γης. Υπάρχουν όμως και άλλοι παράγοντες που προκαλούν πιο απρόβλεπτες και ανώμαλες κινήσεις.

Οι διαταραχές στην περιστροφή της Γης περιγράφονται από μια ομάδα παραμέτρων που ονομάζονται παράμετροι προσανατολισμού της Γης (Earth Orientation Parameters, EOP). Πρόκειται για τις επίγειες συντεταγμένες του ουράνιου πόλου (Celestial Ephemeris Pole, CEP) x_p και y_p , για τις μεταθέσεις σε γεωγραφικό μήκος και στη λόξωση του ουράνιου πόλου σε σχέση με τη θέση που ορίζεται από το μοντέλο κλόνησης-μετάπτωσης (precession-nutation) της International Astronomical Union (IAU), d_ψ και d_ε και τέλος η διαφορά Παγκόσμιου και Συντονισμένου Παγκόσμιου Χρόνου, UT1-UTC.

Ωστόσο, αφαιρώντας τις παραπάνω προβλέψιμες διαταραχές, η κίνηση της Γης παρουσιάζει μια πολύ ενδιαφέρουσα συμπεριφορά. Η γωνιακή της ταχύτητα, όπως έχει διαπιστωθεί, μεταβάλλεται με το χρόνο. Η Γη δηλαδή παρουσιάζει μια αιώνια επιβράδυνση, με μερικές επιταχύνσεις ανά μερικά έτη.

Η μεταβολή αυτή της γωνιακής ταχύτητας οφείλεται σε διάφορους παράγοντες, ο σημαντικότερος εκ των οποίων είναι οι παλίρροιες, αλλά και άλλοι όπως μεγάλες ανακατανομές μάζας στο εσωτερικό της, άνεμοι και ωκεάνια ρεύματα, μεγάλοι σεισμοί, ακόμη και η κλιματική αλλαγή.

Η διαφορά μεταξύ της αστρονομικά μετρήσιμης διάρκειας της ημέρας με την σταθερή τιμή των 86400 s του TAI, ονομάζεται μήκος της ημέρας D ή LOD (Length Of Day). Η σχέση που συνδέει το D με τη γωνιακή ταχύτητα ω είναι:

$$\omega = \Omega \left(1 - \frac{D}{T}\right) \quad (2.4)$$

όπου $T = 86400$ s και Ω η μέση τιμή του πόλου. Άρα έχουμε:

$$\omega = 72921151.467064 - 0.843994809 D \quad (2.5)$$

όπου το ω είναι σε picoradians/s και το D σε milliseconds (Dick and Richter, 2000).

Μάλιστα, σήμερα είναι πλέον γνωστό ότι ο UT1 έχει βραχυχρόνια αστάθεια της τάξης 10^{-8} και η διάρκεια της ημέρας μειώνεται σταδιακά (περίπου 0.002 s/century) (IERS, 2023).

2.3. Χρονοσειρές

Γενικά, ως χρονοσειρά ορίζεται ένα σύνολο δεδομένων, τα οποία συλλέγονται διαχρονικά και εκφράζουν την εξέλιξη μιας μεταβλητής στο χρόνο, κατά τη διάρκεια χρονικών περιόδων (οι οποίες συνήθως είναι ίσες μεταξύ τους και διαδοχικές) (Ανδρώνης, 2021).

Υπάρχουν διάφορα είδη χρονοσειρών, οι οποίες διακρίνονται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους, όπως συνεχείς ή διακριτές, ομοιόμορφες ή ανομοιόμορφες, γραμμικές και μη, πολυδιάστατες ή μονοδιάστατες κλπ. Στην περίπτωση του παρόντος προβλήματος η χρονοσειρά που μελετάται είναι μονοδιάστατη, διακριτού χρόνου, καθώς οι τιμές λαμβάνονται με βήμα μιας ημέρας, μη γραμμική και ομοιόμορφη.

Σκοπός της ανάλυσης χρονοσειρών, είναι η μελέτη της εξέλιξης μιας μεταβλητής μέσα στο χρόνο, η ανάλυση και κατανόηση ενός φαινομένου καθώς επίσης και η πρόβλεψη μελλοντικών τιμών της χρονοσειράς. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται κυρίως στην ανάλυση μιας χρονοσειράς.

Με τον όρο ανάλυση χρονοσειράς νοείται η ανίχνευση των βασικών χαρακτηριστικών της, που είναι η τάση, η περιοδικότητα ή εποχικότητα και η τυχαιότητα (λευκός θόρυβος). Συγκεκριμένα, η τάση (trend) παρουσιάζει τη μεταβολή του μέσου όρου των τιμών της χρονοσειράς, δηλαδή την πορεία της σειράς μέσα στο χρόνο. Ανάλογα με τη χρονοσειρά, η τάση διακρίνεται σε καθοριστική (deterministic) ή στοχαστική (stochastic). Στην πρώτη περίπτωση η τάση περιγράφεται από μια συγκεκριμένη συνάρτηση του χρόνου ή από κάποια που μπορεί να εκτιμηθεί, ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι αδύνατον.

Ως περιοδικότητα (periodicity) ορίζεται μια συνιστώσα ταλάντωσης που έχει μια συγκεκριμένη περίοδο (T), πλάτος ή εύρος (A) και αρχική φάση (φ_0). Ως περίοδος ορίζεται η χρονική διάρκεια που χρειάζεται ένα φαινόμενο για να ολοκληρώσει μια πλήρη επανάληψη. Πλάτος μιας ταλάντωσης είναι η απόλυτη τιμή της μέγιστης τιμής που λαμβάνει το περιοδικό φαινόμενο, το οποίο δεν είναι πάντα σταθερό. Τέλος, η αρχική φάση, ή απλώς φάση της ταλάντωσης, εξαρτάται από το σημείο αρχής μέτρησης του χρόνου.

Μια χρονοσειρά μπορεί να αποτελείται από περισσότερες από μία περιοδικότητες και μέσω αυτών μπορεί να εξηγηθεί ένα φαινόμενο και οι πιθανές αιτίες που επηρεάζουν την εξέλιξη του. Ωστόσο, μπορεί το εκάστοτε φαινόμενο να επηρεάζεται και από εποχικές διακυμάνσεις. Σε αυτή την περίπτωση, η περιοδικότητα αναφέρεται και ως εποχικότητα (seasonality). Στην παρούσα εργασία, αυτές οι δύο έννοιες θεωρήθηκαν ταυτόσημες.

Με τον όρο θόρυβος (noise) νοούνται όλες οι διαταραχές που δεν παρουσιάζουν κάποια τάση ή περιοδικότητα και συνεπώς δεν μπορούν να ερμηνευτούν. Επομένως, επιδιώκεται να εντοπιστεί και να αφαιρεθεί, προκειμένου να αναδειχθούν οι συνιστώσες που έχουν ξεκάθαρη περιοδικότητα. Οι διαταραχές αυτές οφείλονται σε εξωτερικές επιδράσεις, στα σφάλματα των μετρήσεων και σε απρόβλεπτες μεταβολές.

3. Μέθοδος επεξεργασίας

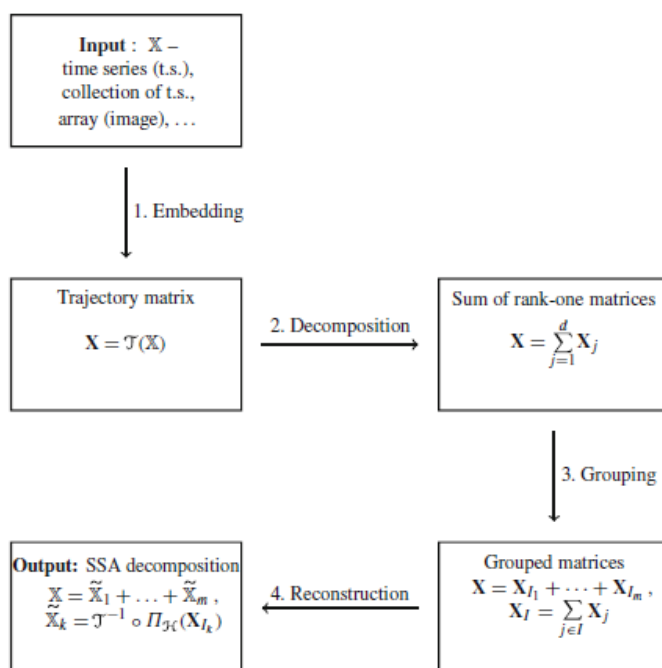
3.1. Γενικά

Η μέθοδος ανάλυσης του σήματος που επιλέχθηκε για το παρόν πρόβλημα, είναι η Ιδιόμορφη Φασματική Ανάλυση (Singular Spectrum Analysis, SSA). Η SSA είναι μια μέθοδος ανάλυσης χρονοσειρών που βρίσκει εφαρμογή σε διάφορα προβλήματα που αφορούν, λόγω χάρη, την πρόβλεψη (forecasting), την απόδοση αγνώστων τιμών ή την ανάλυση μιας χρονοσειράς σε μικρότερες συνιστώσες, όπως είναι η τάση (trend) της σειράς, οι περιοδικότητες (periodicities) και ο λευκός θόρυβος (white noise). Στην εν λόγω εργασία έγινε εμβάθυνση στην επεξεργασία μιας χρονοσειράς. Μάλιστα, χρησιμοποιήθηκε η κλασική μέθοδος SSA, παρόλο που έχουν αναπτυχθεί και διάφορες άλλες παραλλαγές της.

Μέχρι στιγμής, η SSA έχει αποδειχτεί ότι είναι μία πολύ επιτυχημένη μέθοδος στην επεξεργασία σήματος, σε διάφορους κλάδους, παρόλο που δεν έχει κερδίσει μέχρι στιγμής τη δημοτικότητα που της αξίζει.

Πρόκειται για μία σχετικά περίπλοκη μέθοδο, καθώς συνδυάζει εργαλεία από διάφορα γνωστικά αντικείμενα, όπως είναι η γραμμική άλγεβρα, η ανάλυση σήματος, τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, η συναρτησιακή ανάλυση κλπ.

Η μέθοδος SSA συνίσταται από 4 βασικά βήματα: την “ενσφήνωση” της σειράς (embedding), την ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition, SVD), την ομαδοποίηση (grouping) και το μέσο όρο διαγωνίων (diagonal averaging). Τα δύο πρώτα βήματα αποτελούν το λεγόμενο στάδιο της ανάλυσης (decomposition) και τα άλλα δύο το στάδιο της ανακατασκευής (reconstruction). Στην Εικόνα 3.1 παρουσιάζεται ένα σχεδιάγραμμα που προσφέρει μια πρώτη περιγραφή του αλγορίθμου.



Εικόνα 3.1: Γενικό σχεδιάγραμμα της μεθόδου SSA (Golyandina et al., 2018)

3.2. Περιγραφή αλγορίθμου

Θεωρείται σειρά με πραγματικές τιμές $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$, όπου N το μέγεθος του δείγματος με $N > 2$ και υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή μη μηδενική ($f_i \neq 0$). Επίσης, έστω L ένας ακέραιος αριθμός, όπου $1 < L < N$, και ορίζεται ως το μήκος του παραθύρου (Window Length), το οποίο θα αναλυθεί στη συνέχεια, και ένας ακέραιος $K = N - L + 1$. Ο αλγόριθμος της κλασικής μεθόδου SSA περιγράφεται στη συνέχεια αναλύοντας τα δύο βασικά της στάδια (decomposition και reconstruction).

3.2.1. Ανάλυση (decomposition)

Το πρώτο στάδιο της ανάλυσης (decomposition), ονομάζεται ενσφήνωση (embedding) και περιλαμβάνει τη μετατροπή της χρονοσειράς σε μια ακολουθία από K “μετατοπισμένα” διανύσματα (lagged vectors) (εννοώντας τη χρονική μετατόπιση τους, η αλλιώς καθυστέρηση, από την αρχική σειρά) μεγέθους L της μορφής

$$\mathbf{X}_i = (f_i, \dots, f_{i+L-1})^T, \quad (0 \leq i \leq N - L) \quad (3.1)$$

Τα διανύσματα \mathbf{X}_i ονομάζονται L -lagged διανύσματα και όλα μαζί σχηματίζουν τον πίνακα “τροχιάς” (Trajectory Matrix) \mathbf{X} που έχει τη μορφή

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \dots : \mathbf{X}_K] = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Τα διανύσματα \mathbf{X}_i είναι οι στήλες του πίνακα τροχιάς \mathbf{X} και οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα είναι υποσειρές της αρχικής σειράς. Συνεπώς, ο πίνακας \mathbf{X} έχει διαστάσεις $L \times K$.

Παρατηρώντας τον πίνακα στην Εξ. (3.2), είναι εμφανές ότι τα στοιχεία στις αντιδιαγωνίους του πίνακα είναι ίδια. Πίνακες με αυτό το χαρακτηριστικό ονομάζονται αντιδιαγώνιοι ή Hankel πίνακες.

Αφού δημιουργήθηκε ο πίνακας τροχιάς, το επόμενο βήμα είναι η ανάλυσή του (decomposing) μέσω μιας μεθόδου που ονομάζεται ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές (Singular Value Decomposition). Αυτό που επιδιώκεται είναι η ανάλυση του πίνακα \mathbf{X} σε τρεις άλλους πίνακες ως ακολούθως:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (3.3)$$

Αρχικά, υπολογίζεται ο πίνακας $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ και βρίσκονται οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$, σε φθίνουσα σειρά ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$) και τα $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_L$, το ορθοκανονικό σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα, σε αντιστοιχία με τις ιδιοτιμές του. Έτσι, δημιουργείται ένας ορθομοναδιαίος πίνακας \mathbf{U} , διαστάσεων $L \times L$, με στήλες αυτά τα ιδιοδιανύσματα.

Αν οριστεί ως $\mathbf{V}_i = \mathbf{X}^T \mathbf{U}_i / \sigma_i$, όπου $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ και $i = 1, \dots, d$, τότε ο SVD του πίνακα τροχιάς \mathbf{X} θα γραφτεί ως

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d = \sum_{i=1}^d \sigma_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T \quad (3.4)$$

όπου $\mathbf{X}_i = \sigma_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T$ και $d = \max\{i, \text{τέτοιο ώστε } \lambda_i > 0\}$ ο βαθμός του πίνακα \mathbf{X} . Οι πίνακες \mathbf{X}_i έχουν βαθμό 1 και ονομάζονται στοιχειώδεις πίνακες του \mathbf{X} . Οι ποσότητες $\{\sigma_i, \mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i\}$ ονομάζονται ιδιοτριπλέτα (eigentriple) του SVD.

Από την Εξ. (3.4) φαίνεται ότι ο SVD κατέχει την ιδιότητα της συμμετρίας, όπου τα $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_d$ σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ σε αντιστοιχία με τις ίδιες ιδιοτιμές λ_i . Συνεπώς, συνηθίζεται να λέγεται ότι οι πίνακες \mathbf{U} και \mathbf{V} περιέχουν τις αριστερές και τις δεξιές ιδιάζουσες τιμές (singular values) $\sqrt{\lambda_i}$ του πίνακα \mathbf{X} , αντίστοιχα.

Για μεγαλύτερη κατανόηση του ρόλου κάθε πίνακα στην SVD, αναλύεται ο κάθε πίνακας ξεχωριστά.

- Πίνακας \mathbf{U} :

Ο πίνακας \mathbf{U} είναι ένας ορθοκανονικός πίνακας διαστάσεων $L \times L$ και ισχύει:

$$\mathbf{U}_i \mathbf{U}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.5)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας \mathbf{U} είναι μοναδιαίος πίνακας και άρα ισχύει:

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{1} \quad (3.6)$$

Έστω $\mathbf{Z}_i = \sigma_i \mathbf{V}_i$ ένα διάνυσμα στήλη τέτοιο ώστε

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \mathbf{U}_i \mathbf{Z}_i^T \quad (3.7)$$

και κάθε L -lagged διάνυσμα στήλης \mathbf{X}_j δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{X}_j = \sum_{i=1}^d z_{ji} \mathbf{U}_i \quad (3.8)$$

όπου z_{ji} είναι η j συνιστώσα του διανύσματος \mathbf{Z}_i . Επίσης, η Εξ. (3.7) υποδηλώνει ότι το $u = \{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_d\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση στον d -διάστατο χώρο των στηλών του πίνακα τροχιάς \mathbf{X} και ότι το z_{ji} είναι ο i συντελεστής του “μετατοπισμένου” (lagged) διανύσματος \mathbf{X}_j που αναπαρίσταται στη βάση u (Golyandina et al., 2001). Με άλλα λόγια, οι στήλες του πίνακα \mathbf{U} σχηματίζουν ένα σύνολο ορθοκανονικών βάσεων που περιγράφουν την υποσειρά $\{f_i, \dots, f_{i+L-1}\}_{i=1}^{N-L-1}$ στις στήλες του πίνακα τροχιάς.

- Πίνακας \mathbf{V} :

Αντίστοιχα, ο πίνακας \mathbf{V} είναι ένα ορθοκανονικός μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $K \times K$. Αρχικά, να σημειωθεί ότι για κάθε πίνακα \mathbf{A} και \mathbf{B} , καταλλήλων διαστάσεων, ισχύει

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (3.9)$$

Επομένως, αν υπολογιστεί ο ανάστροφος πίνακας του \mathbf{X} από την Εξ. (3.3), τότε προκύπτει

$$\mathbf{X}^T = \sum_{i=1}^d \mathbf{V}_i \mathbf{Y}_i^T \quad (3.10)$$

όπου $\mathbf{Y}_i = \sigma_i \mathbf{U}_i$. Τότε το κάθε K -lagged διάνυσμα \mathbf{X}_j , δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{X}_j^{(T)} = \sum_{i=1}^d y_{j,i} \mathbf{V}_i \quad (3.11)$$

όπου $\mathbf{X}_j^{(T)}$ είναι η j στήλη του \mathbf{X}^T και το y_{ji} είναι η j συνιστώσα του διανύσματος \mathbf{Y}_i . Η Εξ. (3.7) υποδηλώνει ότι το $v = \{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_d\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση στον d -διάστατο χώρο των στηλών του ανάστροφου πίνακα τροχιάς \mathbf{X}^T και ότι το y_{ji} είναι ο i συντελεστής του “μετατοπισμένου” (lagged) διανύσματος $\mathbf{X}_j^{(T)}$ που αναπαρίσταται στην βάση v . Με άλλα λόγια, οι στήλες του πίνακα \mathbf{V} σχηματίζουν ένα σύνολο ορθοκανονικών βάσεων που περιγράφουν την υποσειρά $\{f_i, \dots, f_{i+L-1}\}_{i=1}^L$ στις γραμμές του πίνακα τροχιάς.

- Πίνακας Σ :

Ο πίνακας Σ είναι ένας ορθογώνιος διαγώνιος πίνακας, διαστάσεων $L \times K$, που περιέχει όλες τις ιδιάζουσες τιμές (singular values) του $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, οι οποίες είναι κατανομημένες σε φθίνουσα σειρά ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_L \geq 0$). Τα σ_i μπορούν να ερμηνευτούν ως συντελεστές κλίμακας που καθορίζουν τη σχετική συνεισφορά της ιδιοτριπλέτας $\{\sigma_i, \mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i\}$ στην έκφραση $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sigma_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T$.

Έπειτα, όπως είναι γνωστό η νόρμα του Frobenius του \mathbf{X} δίνεται από τη σχέση:

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^K |x_{jk}|^2} \quad (3.12)$$

όπου x_{jk} το στοιχείο στη j γραμμή και k στήλη του \mathbf{X} .

Αρχικά, είναι γνωστό ότι για ένα εξωτερικό γινόμενο όπως το $\mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T$, ισχύει $\|\mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T\|_F = \|\mathbf{U}_i\|_F \|\mathbf{V}_i\|_F$ το οποίο ισούται με 1 καθώς τα \mathbf{U}_i και \mathbf{V}_i είναι κανονικοποιημένα. Συνεπώς, προκύπτει ότι $\|\mathbf{X}_i\|_F = \sigma_i$ από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\|\mathbf{X}\|_F^2 = \sum_{i=1}^d \sigma_i^2 \quad (3.13)$$

Δηλαδή, το τετράγωνο της Frobenius νόρμας του πίνακα τροχιάς, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ιδιάζουσών τιμών. Κατά συνέπεια, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο λόγος $\sigma_i^2 / \|\mathbf{X}\|_F^2$ ως μονάδα μέτρησης της συνεισφοράς των στοιχειωδών πινάκων \mathbf{X}_i της Εξ.(3.4) στον πίνακα \mathbf{X} .

3.2.2. Ανακατασκευή (reconstruction)

Το επόμενο στάδιο της SSA περιλαμβάνει την ανακατασκευή (reconstruction) του πίνακα \mathbf{X} . Το πρώτο βήμα είναι η ομαδοποίηση (grouping), όπου καθορίζονται οι ομάδες των στοιχειωδών πινάκων της Εξ. (3.4).

Αρχικά, από την Εξ. (3.4) προκύπτει ότι ο αρχικός αντιδιαγώνιος πίνακας (trajectory matrix) \mathbf{X} , διασπάστηκε σε d υποπίνακες $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d$. Έστω, m υποσύνολα I_1, \dots, I_m , όπου το καθένα περιέχει μια συλλογή από το αρχικό σύνολο δεικτών $\{1, \dots, d\}$. Επίσης, έστω ένα από αυτά τα υποσύνολα $I = \{i_1, \dots, i_p\}$. Τότε, ο αντίστοιχος πίνακας του θα είναι \mathbf{X}_I , ο οποίος προκύπτει από το άθροισμα των πινάκων που σχετίζονται με τους δείκτες του υποσυνόλου I . Δηλαδή, θα είναι $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}$. Αυτοί οι πίνακες, υπολογίζονται για κάθε υποσύνολο $I = I_1, \dots, I_m$ και η Εξ. (3.4) αναλύεται ως εξής:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m} \quad (3.14)$$

Η διαδικασία με την οποία επιλέγεται το σύνολο I_1, \dots, I_m ονομάζεται ομαδοποίηση ιδιοτριπλέτας (eigentriple grouping).

Το επόμενο βήμα είναι ο μέσος όρος των διαγωνίων (diagonal averaging), κατά το οποίο μετατρέπεται κάθε ομαδοποιημένος πίνακας από την Εξ. (3.14), σε μια νέα χρονοσειρά $\tilde{F}^{(j)}$ μήκους N , υπολογίζοντας τον μέσο όρο των αντίστοιχων αντιδιαγωνίων των πινάκων. Δηλαδή, μετατρέπεται κάθε στοιχειώδης πίνακας $\mathbf{X}^{(j)}$ σε έναν αντιδιαγώνιο (Hankel) πίνακα $\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}$ και στη συνέχεια σε χρονοσειρά.

Το κάθε στοιχείο $\tilde{x}_{m,n}$ των $\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}$ για $s = m + n$, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\tilde{x}_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} \sum_{l=1}^{s-1} x_{l,s-l}, & 2 \leq s \leq L-1, \\ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L x_{l,s-l}, & L \leq s \leq K+1, \\ \frac{1}{K+L-s+1} \sum_{l=s-K}^L x_{l,s-l}, & K+2 \leq s \leq K+L \end{cases} \quad (3.15)$$

Με απλά λόγια, η Εξ. (3.15) για το κάθε $\tilde{x}_{m,n}$, υπολογίζει το μέσο όρο όλων των στοιχείων της αντιδιαγωνίου το οποίο ανήκει. Ο αριθμός των στοιχείων που πρέπει να προσθέσει, για τον υπολογισμό του μέσου όρου, εξαρτάται από τη θέση m και n στον πίνακα.

Στην πράξη δεν χρειάζεται να υπολογιστεί όλος ο Hankel πίνακας $\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}$ αλλά μπορεί να γίνει κατευθείαν η κατασκευή των χρονοσειρών $\tilde{F}^{(j)}$.

Επίσης, να σημειωθεί ότι ο πίνακας \mathbf{X} είναι ήδη ένας Hankel πίνακας, συνεπώς μπορεί να εκφραστεί και με τους αντιδιαγώνιους στοιχειώδεις πίνακες που προέκυψαν:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \tilde{\mathbf{X}}_i \quad (3.16)$$

Κατ' επέκταση, η αρχική χρονοσειρά F ορίζεται από το άθροισμα των συνιστωσών \tilde{F}_i .

3.3. Επιλογή παραμέτρων στην SSA

Σε αυτή την παράγραφο αναλύεται η επιλογή των κατάλληλων παραμέτρων και του ρόλου που παίζουν στη κλασική μέθοδο SSA. Στην πραγματικότητα μία είναι η βασική παράμετρος που πρέπει να οριστεί και είναι το μήκος του παραθύρου (window length) L . Η σωστή επιλογή του είναι πολύ σημαντική καθώς μια λανθασμένη επιλογή μήκους παραθύρου μπορεί να οδηγήσει σε κακή ομαδοποίηση και ανάδειξη των συνιστωσών της σειράς. Δεν υπάρχει κάποιος κανόνας για την επιλογή του L , αλλά υπάρχουν κάποιες γενικές αρχές οι οποίες αναλύονται στη συνέχεια.

Αρχικά, όταν γίνεται η αποσύνθεση του πίνακα \mathbf{X} μέσω της SVD, με ένα συγκεκριμένο L και το αντίστοιχο K , αυτός αναλύεται σε άλλους μικρότερους πίνακες, οι οποίοι παρουσιάζουν μια επικάλυψη μεταξύ τους. Αν όμως το μήκος του παραθύρου είναι πολύ μεγάλο, δεν θα υπάρχει επαρκής επικάλυψη και έτσι η ανάλυση του πίνακα δεν θα έχει γίνει σωστά. Συνεπώς, θεωρείται ο περιορισμός $L \leq N/2$.

Όσο μεγαλύτερο είναι το L , θεωρώντας πάντα ότι $L \leq N/2$, τόσο πιο λεπτομερής γίνεται η ανάλυση της χρονοσειράς. Η πιο λεπτομερής ανάλυση επιτυγχάνεται όταν είναι $L \simeq N/2$. Επίσης, η επιλογή μικρού μήκους παραθύρου, μπορεί να οδηγήσει σε μια σύγχυση μεταξύ των συνιστωσών που σε άλλες περιπτώσεις θα ήταν ερμηνεύσιμες (Golubandina and Zhigljavsky, 2020).

Αν από την άλλη το μήκος παραθύρου είναι σχετικά μεγάλο, τότε καλύπτεται ένα ουσιαστικό μέρος των δεδομένων που αναλύονται. Παράλληλα, με ένα μεγάλο μήκος L , οι μικρές αλλαγές στο μήκος παραθύρου, δεν θα προκαλέσουν σημαντικές αλλαγές στην ανάλυση της σειράς, ενώ παρουσιάζεται μεγάλη σταθερότητα.

Ωστόσο, εντοπίζεται μια δυσκολία που σχετίζεται με την εγγύτητα που παρουσιάζουν οι ιδιάζουσες τιμές. Αυτό μπορεί να ξεπεραστεί παρά μόνο με δοκιμές στην τιμή του L . Αναφορικά με την εγγύτητα των ιδιαζουσών τιμών, να σημειωθεί ότι για σειρές με πολύπλοκη δομή, μια πολύ μεγάλη τιμή για το L μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένη ανάλυση των επιθυμητών συνιστωσών της σειράς, το οποίο εν συνεχεία, μπορεί να προκαλέσει την ανάμειξή τους με άλλες συνιστώσες (Golubandina and Zhigljavsky, 2020). Αυτό μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη στην ανάλυση, ιδιαίτερα εάν αναλογιστεί κανείς ότι μια σημαντική μείωση του L , θα οδηγήσει σε κακής ποιότητας διαχωρισμό των συνιστωσών.

Τέλος, είναι σημαντικό, λαμβάνοντας πάντα υπόψη τα παραπάνω, να επαναληφθεί η διαδικασία της SSA, για διαφορετικές τιμές του L , έως ότου να καταλήξει η ανάλυση σε ένα αποδεκτό επίπεδο.

3.4. Διαδικασία ομαδοποίησης συνιστωσών

Έστω ότι έχει επιλεγεί ένα κατάλληλο μήκος παραθύρου L και έχει ήδη εκτελεστεί η διαδικασία της SVD στον πίνακα τροχιάς της αρχικής χρονοσειράς. Το επόμενο και βασικότερο βήμα είναι η κατάλληλη ομαδοποίηση των συνιστωσών. Θα πρέπει να γίνει μια σωστή ανάλυση, προκειμένου να αποφασιστεί ποια θεωρείται η πλέον κατάλληλη ομαδοποίηση. Ωστόσο, η ομαδοποίηση μπορεί να αποβεί μια αρκετά πολύπλοκη διαδικασία. Παρακάτω θα παρουσιαστούν μερικά εργαλεία που θα βοηθήσουν στο να γίνει λίγο πιο απλή και να οδηγήσει στα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα.

3.4.1. Προκαταρκτική ανάλυση

Σε πρώτη φάση, εξετάζεται συνολικά η σειρά. Παρατηρείται λόγου χάριν, το γενικό σχήμα της τάσης και η πολυπλοκότητά της, καθώς υπάρχει πιθανότητα να αντιστοιχούν παραπάνω από μία συνιστώσες στην τάση. Συνεπώς, με αυτό τον τρόπο θα γίνουν πιο εύκολα αντιληπτές, σε επόμενο στάδιο, ποιες είναι οι εν λόγω συνιστώσες.

Επίσης, αρκετά σημαντικό είναι να ληφθεί υπόψιν η φύση του σήματος, προκειμένου να υπάρχει μια γενική ιδέα των περιόδων (T) που αναμένεται να έχουν οι συνιστώσες που θα προκύψουν.

Παράλληλα, εφόσον έχει διασπαστεί ο αρχικός πίνακας \mathbf{X} σε συνιστώσες και αυτές με τη σειρά τους μετατράπηκαν σε χρονοσειρές, μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα διάγραμμα μερικές από αυτές. Με αυτό τον τρόπο, θα φανεί ποιες συνιστώσες θα πρέπει να ομαδοποιηθούν μαζί, παρατηρώντας απλώς ποιες θα έχουν παρόμοια μορφή.

Χάρη στα παραπάνω, επιτυγχάνεται μια οπτική ανάλυση των συνιστωσών και προσφέρεται μια πρώτη ματιά για το πως θα πρέπει να γίνει η ομαδοποίηση. Ωστόσο, αυτή δεν θα πρέπει να βασίζεται μόνο σε αυτά τα εργαλεία, αλλά να χρησιμοποιηθούν και άλλα, που προσφέρουν μια πιο ποσοτική ανάλυση, που είναι και πιο εύχρηστη για πιο μεγάλες και πολύπλοκες χρονοσειρές.

3.4.2. Διάφορα εργαλεία ομαδοποίησης

Ένα άλλο από τα εργαλεία που θα διευκολύνουν την ομαδοποίηση των συνιστωσών είναι τα διαγράμματα σχετικής (relative contribution) και αθροιστικής (cumulative contribution) συνεισφοράς. Η πρώτη υπολογίζεται από το λόγο $\sigma_i^2 / \sum_{k=0}^{d-1} \sigma_k^2$ και η δεύτερη από το λόγο $\sum_{j=0}^i \sigma_j^2 / \sum_{k=0}^{d-1} \sigma_k^2$, όπου σ τα στοιχεία του πίνακα Σ (βλ. Παρ. 3.2.1).

Αρχικά, το διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς, υποδεικνύει τη συνεισφορά που έχει η κάθε συνιστώσα στον πίνακα τροχιάς. Έτσι, μπορούν εύκολα να αναδειχτούν οι συνιστώσες της τάσης, καθώς οι συνιστώσες αυτές θα έχουν τη μεγαλύτερη συνεισφορά στον πίνακα. Επιπλέον, συνιστώσες που φαίνεται να έχουν περίπου ίδια συνεισφορά ($\sigma_i \approx \sigma_{i+1}$), είναι πιο πιθανό να ομαδοποιηθούν μαζί.

Εν συνέχεια, η αθροιστική συνεισφορά, δίνει μια απεικόνιση της σημαντικότητας της κάθε συνιστώσας στον πίνακα τροχιάς. Με άλλα λόγια, εκεί που η καμπύλη του διαγράμματος αρχίζει να σταθεροποιείται σημαίνει ότι οι συνιστώσες αυτές δεν συνεισφέρουν αρκετά και άρα δεν είναι τόσο σημαντικές. Αυτό διευκολύνει την διαδικασία της ομαδοποίησης, καθώς αποκλείει ένα μεγάλο μέρος των συνιστωσών, δείχνοντας ποιες είναι οι κρίσιμες συνιστώσες στις οποίες πρέπει να επικεντρωθεί περισσότερο η μελέτη. Έτσι, η διαδικασία ομαδοποίησης γίνεται πιο γρήγορη και λιγότερο περίπλοκη.

Ένα άλλο χρήσιμο εργαλείο είναι ο πίνακας συσχέτισης (W -correlation). Ο πίνακας αυτός, όπως υποδηλώνει και το όνομα του, είναι ένας πίνακας που δείχνει το βαθμό συσχέτισης μεταξύ δύο συνιστωσών. Για την κατασκευή αυτού του πίνακα χρειάζεται αρχικά να υπολογιστεί το σταθμισμένο εσωτερικό γινόμενο για δύο από τις παραγόμενες χρονοσειρές \tilde{F}_i και \tilde{F}_j , μεγέθους N και μήκους παραθύρου L , ως:

$$(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)_w = \sum_{k=0}^{N-1} w_k \tilde{f}_{ik} \tilde{f}_{jk} \quad (3.17)$$

όπου τα \tilde{f}_{ik} και \tilde{f}_{jk} είναι το k στοιχείο των χρονοσειρών \tilde{F}_i και \tilde{F}_j αντίστοιχα. Το βάρος w_k προκύπτει εάν για κάθε \tilde{f}_{ik} και \tilde{f}_{jk} , υπολογιστεί πόσες φορές συναντώνται στους αντιδιαγώνιους πίνακες $\tilde{\mathbf{X}}_i$ και $\tilde{\mathbf{X}}_j$, από τους οποίους προέκυψαν οι χρονοσειρές \tilde{F}_i και \tilde{F}_j , αντίστοιχα. Δηλαδή, δίνεται από τη σχέση:

$$w_k = \begin{cases} k + 1, & 0 \leq k \leq L - 1 \\ L, & L \leq k \leq K - 1 \\ N - k, & K \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Έτσι, στη συνέχεια ορίζεται ο $d \times d$ σταθμισμένος πίνακας συσχέτισης \mathbf{W} , που προκύπτει από τις αποκλίσεις των \tilde{F}_i και \tilde{F}_j από την w -ορθογωνικότητα $(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)_w = 0$. Δηλαδή, είναι:

$$W_{ij} = \frac{(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)_w}{\|\tilde{F}_i\|_w \|\tilde{F}_j\|_w} \quad (3.17)$$

όπου $\|\tilde{F}_k\|_w = \sqrt{(\tilde{F}_k, \tilde{F}_k)_w}$, για $k = i, j$. Με άλλα λόγια, όταν $(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)_w \rightarrow \|\tilde{F}_i\|_w \|\tilde{F}_j\|_w$ δηλαδή $W_{i,j} \rightarrow 1$, σημαίνει ότι τα \tilde{F}_i και \tilde{F}_j είναι πολύ κοντά μεταξύ τους (αλλά δεν είναι ταυτόσημα), ενώ αντιθέτως αν $W_{i,j} \rightarrow 0$, δεν έχουν καμία συσχέτιση μεταξύ τους.

4. Προσομοιωμένα δεδομένα

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου, τον έλεγχο και τη διαπίστωση ενδεχόμενων λαθών του κώδικα και αδυναμιών της μεθόδου SSA, παράχθηκαν μερικά προσομοιωμένα δεδομένα (toy problems). Για τα δεδομένα αυτά, τα αποτελέσματα ήταν προβλέψιμα και βοήθησαν στην καλύτερη λήψη διαφόρων αποφάσεων για τα πραγματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, τα πειράματα αυτά βοήθησαν στην επιλογή του μήκους παραθύρου (window length) του πίνακα τροχιάς X , καθώς έδωσαν και μία πρώτη ματιά για τη συλλογιστική πορεία που θα πρέπει να ακολουθηθεί, την ομαδοποίηση των συνιστωσών και την εξαγωγή των τελικών συμπερασμάτων.

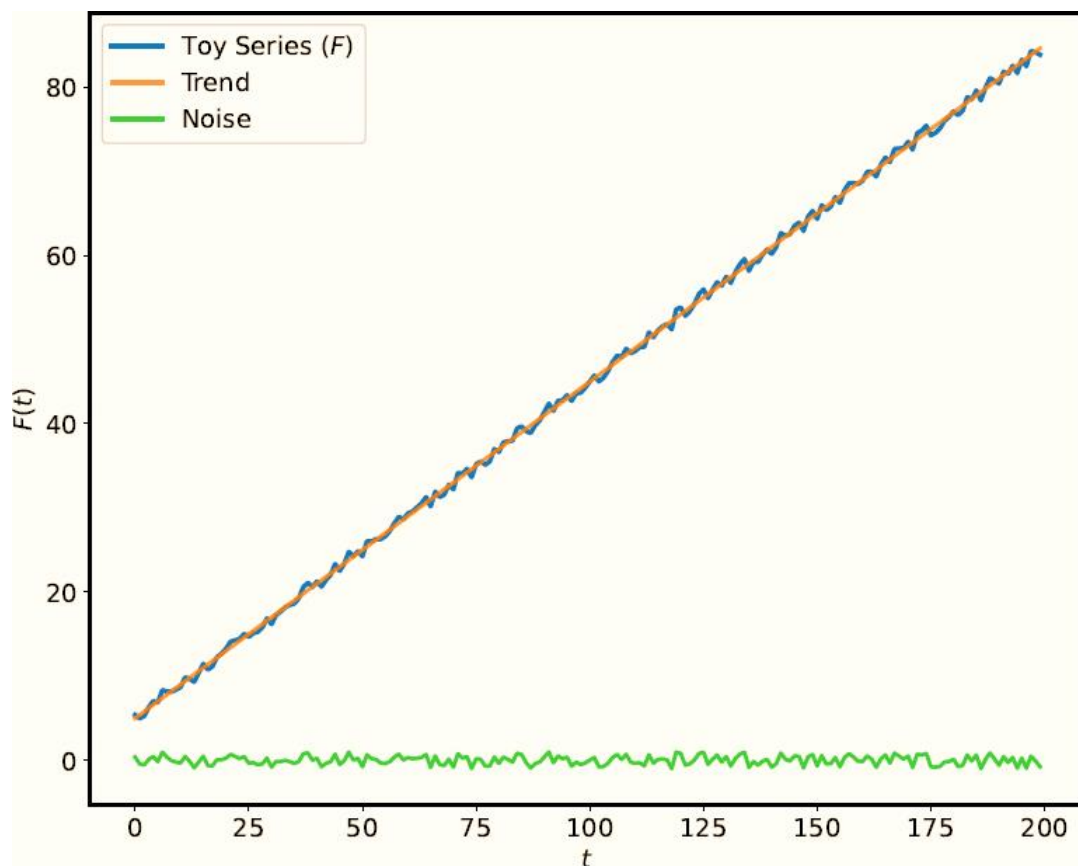
4.1. Χρονοσειρά με τάση και λευκό θόρυβο

Το πρώτο toy problem που εξετάστηκε ήταν μία χρονοσειρά με γραμμική τάση (trend) και λευκό θόρυβο (noise), που είχε την εξής μορφή:

$$ts1 = 5 + 0.4t + a \quad (4.1)$$

όπου a ο λευκός θόρυβος.

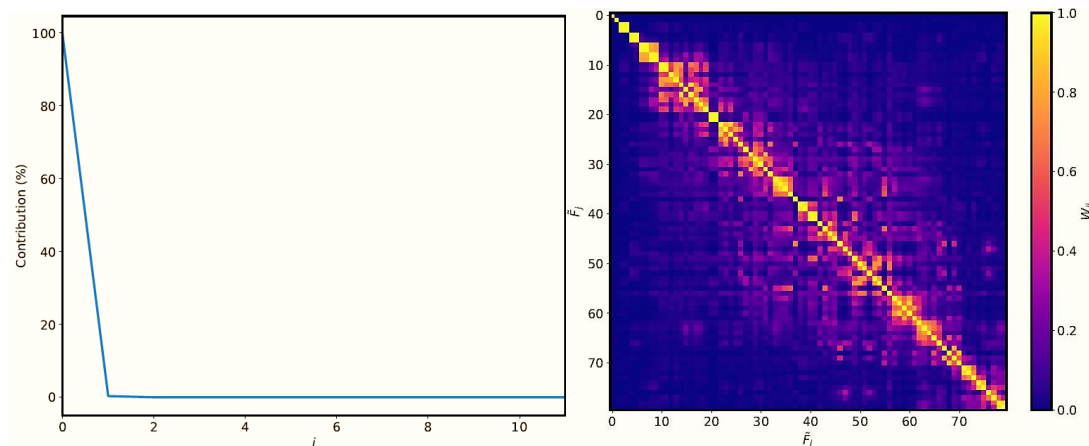
Το διάγραμμα της σειράς φαίνεται στην Εικόνα 4.1, μαζί με την τάση και το λευκό θόρυβο, όπως έχουν οριστεί εξ αρχής.



Εικόνα 4.1: Διάγραμμα χρονοσειράς $ts1$ με τάση και θόρυβο

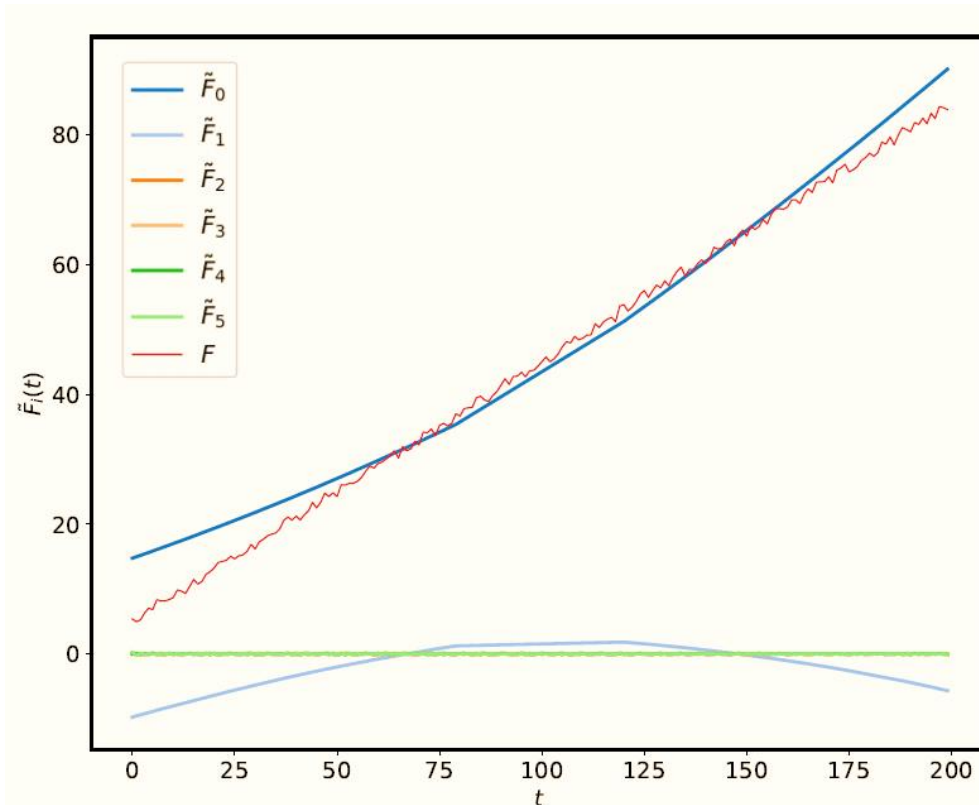
Όπως παρουσιάζεται το πλήθος των δεδομένων της σειράς επιλέχθηκε να είναι $N = 200$, καθώς και το μήκος του παραθύρου να είναι $L = 80$.

Από το διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (Εικόνα 4.2) φαίνεται ότι την περισσότερη συνεισφορά στον αντιδιαγώνιο πίνακα έχει η πρώτη συνιστώσα. Παράλληλα, από τον πίνακα συσχέτισης φαίνεται ότι η πρώτη συνιστώσα έχει υψηλή συσχέτιση με τον εαυτό της και καθόλου με τις υπόλοιπες. Αυτό υποδηλώνει ότι αποτελεί την τάση της σειράς. Το ίδιο ωστόσο παρατηρείται να συμβαίνει και με τη δεύτερη συνιστώσα, κάτι το οποίο θα εξηγηθεί στη συνέχεια.



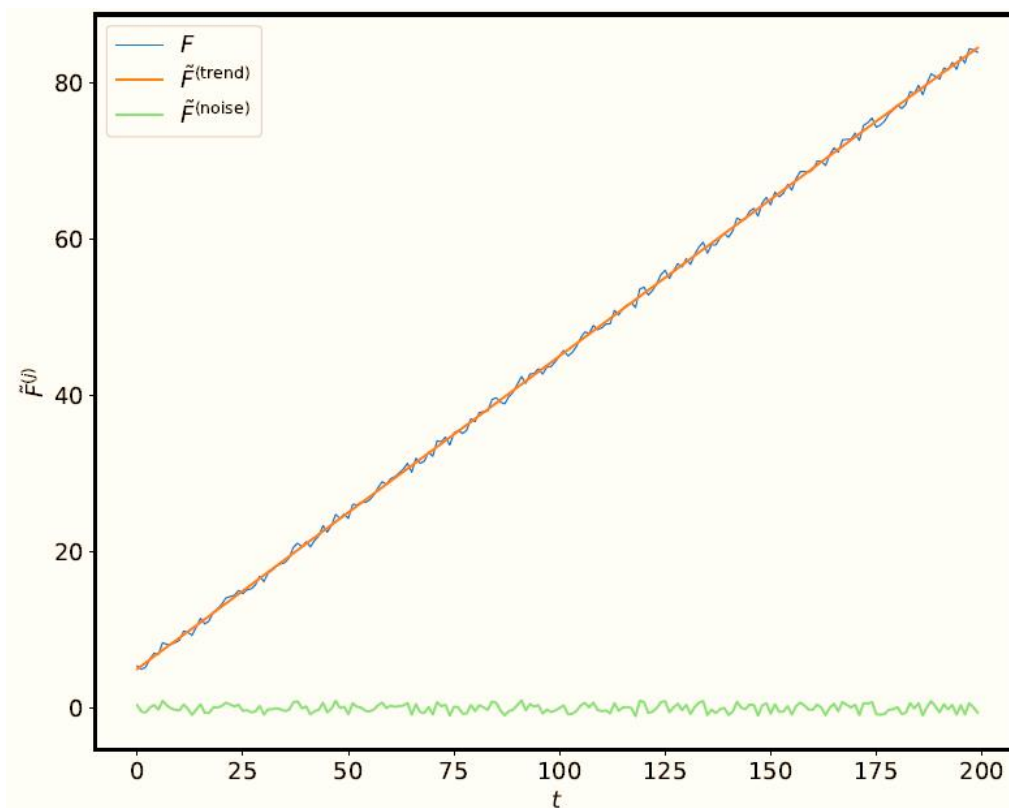
Εικόνα 4.2: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη *ts1*

Από το διάγραμμα των 5 πρώτων συνιστωσών της σειράς (Εικόνα 4.3) είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι από την τρίτη συνιστώσα και έπειτα πρόκειται για θόρυβο. Η πρώτη συνιστώσα είναι εμφανές ότι δείχνει την τάση της σειράς, όπως και ήταν αναμενόμενο από την ανάλυση που προηγήθηκε. Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει η δεύτερη συνιστώσα, η οποία δεν φαίνεται να είναι θόρυβος, αλλά αν ληφθεί υπόψη και ο πίνακας συσχέτισης της Εικόνας 4.2, θα μπορούσε να ομαδοποιηθεί με την πρώτη συνιστώσα και να συνθέσουν μαζί την τάση.

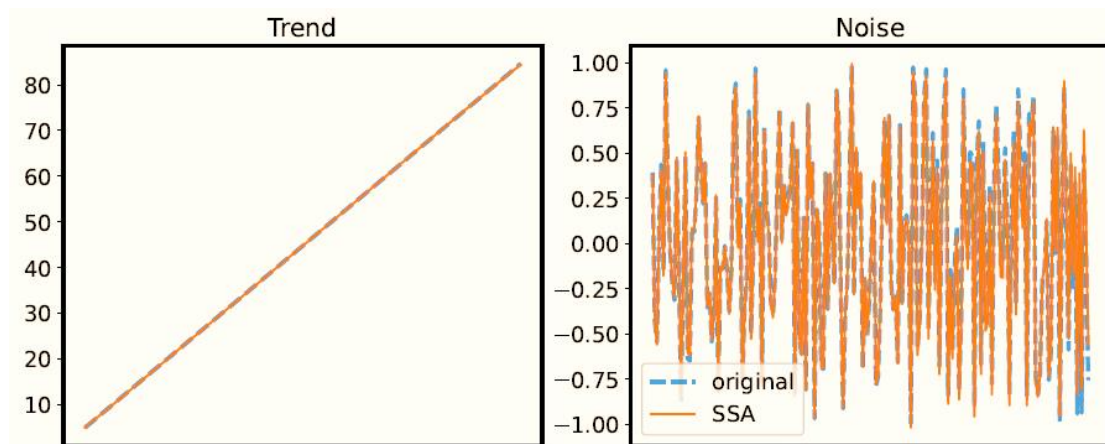


Εικόνα 4.3: Διάγραμμα 5 πρώτων συνιστωσών της σειράς $ts1$

Αφού έγινε η κατάλληλη ομαδοποίηση των συνιστωσών, προέκυψαν τα αποτελέσματα της Εικόνας 4.4 και 4.5.



Εικόνα 4.4: Χρονοσειρά με την τάση και το θόρυβο της $ts1$ που προέκυψαν από την SSA



Εικόνα 4.5: Σύγκριση αρχικής τάσης και θορύβου με αυτή από την SSA της $ts1$

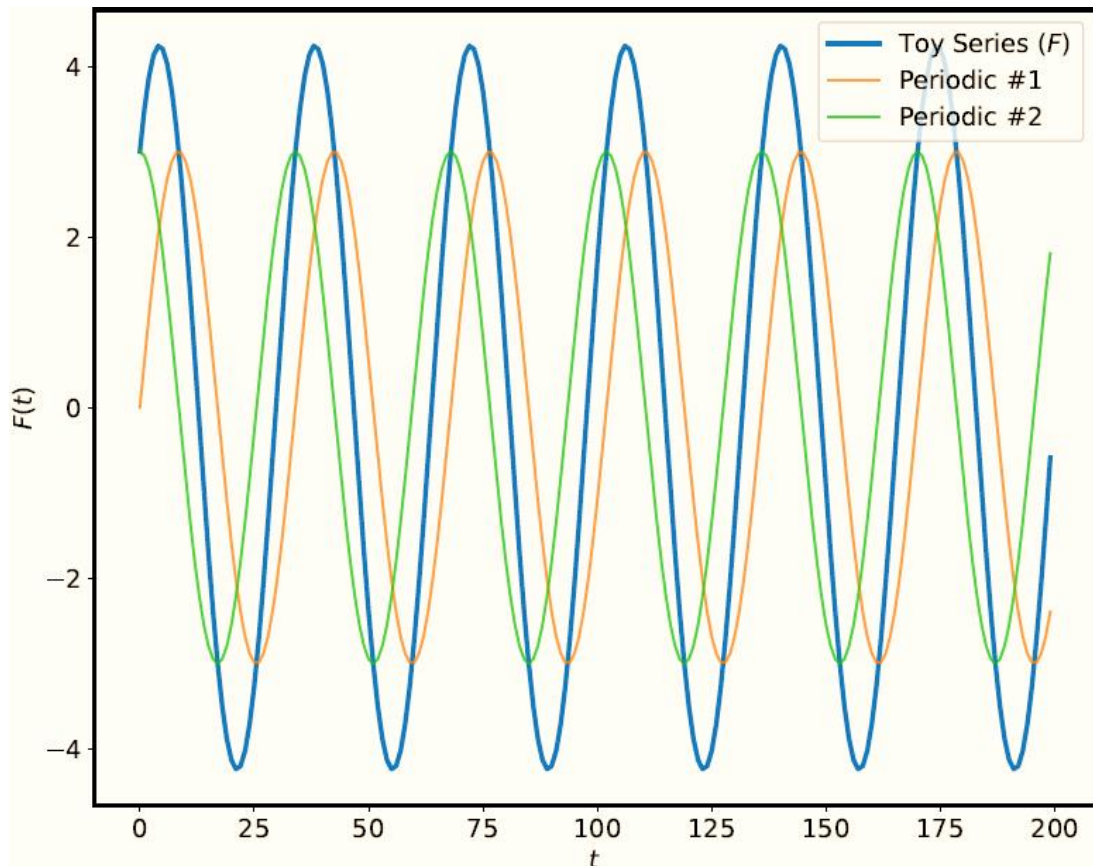
Πράγματι, από τα διαγράμματα της Εικόνας 4.5, συμπεραίνεται ότι έγινε καλή ομαδοποίηση των συνιστωσών και φαίνεται να υπάρχει σχεδόν ταύτιση μεταξύ της τάσης και του θορύβου που ορίστηκαν στην αρχή, σε σχέση με αυτά που προέκυψαν από τη μέθοδο.

4.2. Αρμονική χρονοσειρά μίας περιόδου

Η δεύτερη χρονοσειρά δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας τις αρμονικές συναρτήσεις του ημιτόνου (\sin) και του συνημιτόνου (\cos), με την ίδια περίοδο (μήκος κύματος) και το ίδιο εύρος (πλάτος κύματος), που στην προκειμένη περίπτωση επιλέχθηκαν 34 και 3, αντίστοιχα. Οπότε, η σειρά έχει την εξής μορφή:

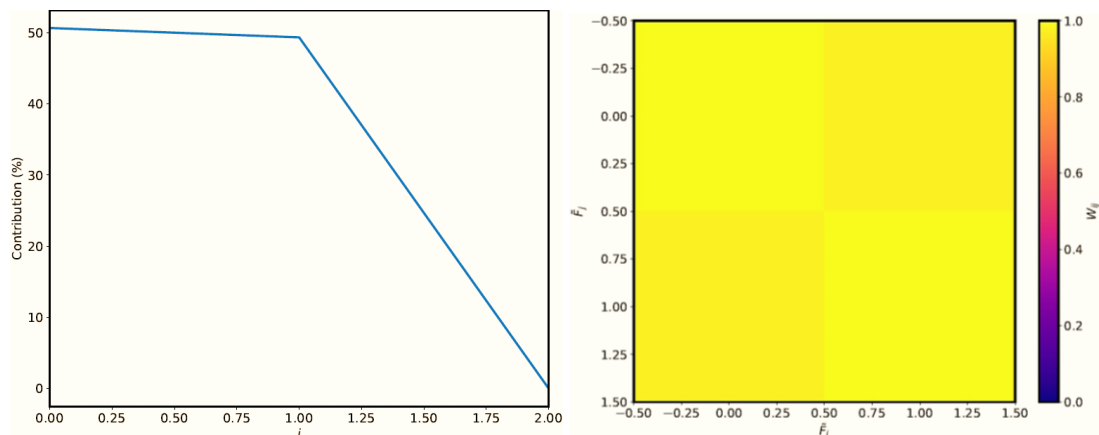
$$ts2 = 3 \sin \frac{2\pi}{34} t + 3 \cos \frac{2\pi}{34} t \quad (4.2)$$

Το διάγραμμα της σειράς $ts2$ με τις δύο συνιστώσες της παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.6.



Εικόνα 4.6: Διάγραμμα χρονοσειράς ts_2

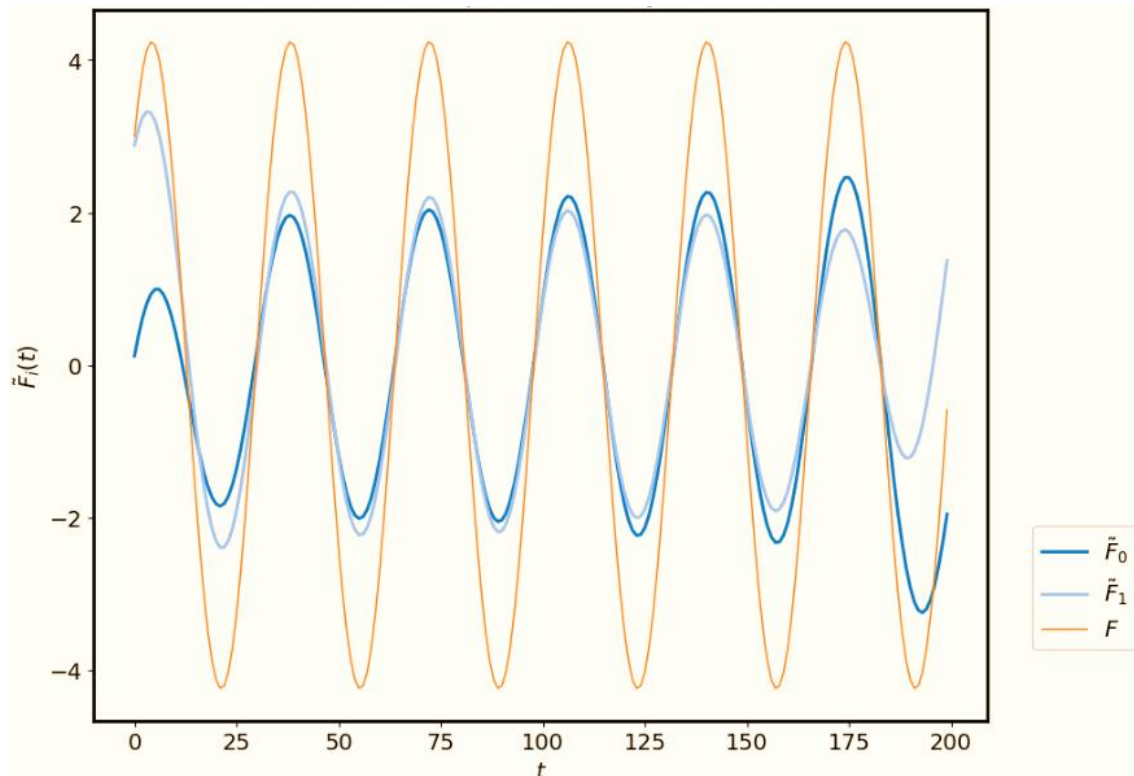
Επίσης, για αυτή τη χρονοσειρά, το πλήθος των δεδομένων της επιλέχθηκε $N = 200$ και το μήκος του παραθύρου $L = 100$.



Εικόνα 4.7: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη ts_2

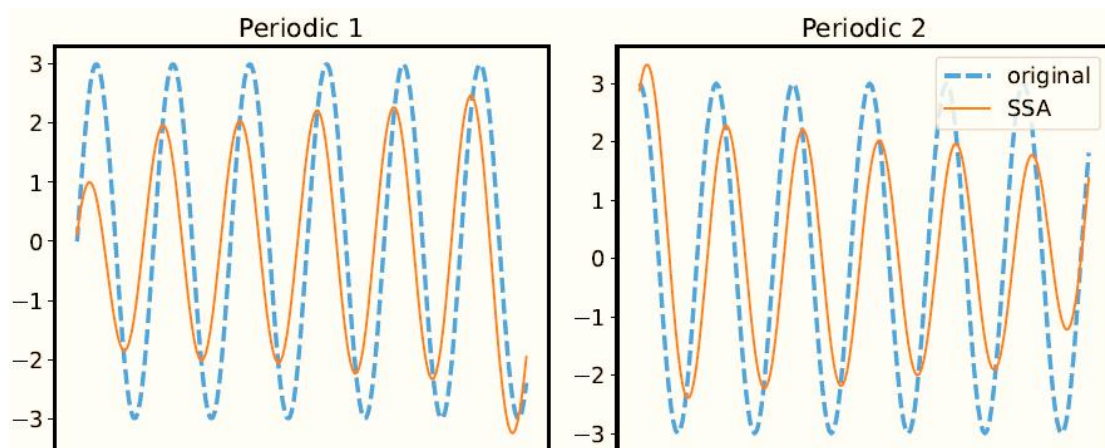
Από την Εικόνα 4.7, συμπεραίνεται ότι υπάρχουν μόνο δύο συνιστώσες (η \tilde{F}_0 και \tilde{F}_1), οι οποίες μάλιστα από το διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς φαίνεται να συνεισφέρουν εξίσου στον αντιδιαγώνιο πίνακα. Από τον πίνακα συσχέτισης συμπεραίνεται ότι οι δύο συνιστώσες έχουν υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι, η SSA αναγνωρίζει πως υπάρχει μόνο μία αρμονική συνάρτηση στη σειρά ts_2 . Συμπερασματικά, το ίδιο αποτέλεσμα θα παραχθεί εάν χρησιμοποιηθεί μόνο το ημίτονο ή μόνο το συνημίτονο στη

σειρά. Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα των δύο συνιστωσών που προέκυψαν από την SSA για τη σειρά $ts2$.



Εικόνα 4.8: Διάγραμμα των 2 συνιστωσών της σειράς $ts2$

Αν συγκριθούν αυτές οι δύο συνιστώσες με αυτές που ορίστηκαν εξαρχής (Εικόνα 4.9), φαίνεται ότι η αντιστοιχία είναι καλή, αλλά υπάρχει απόκλιση μιας μονάδας ως προς το πλάτος του κύματος.



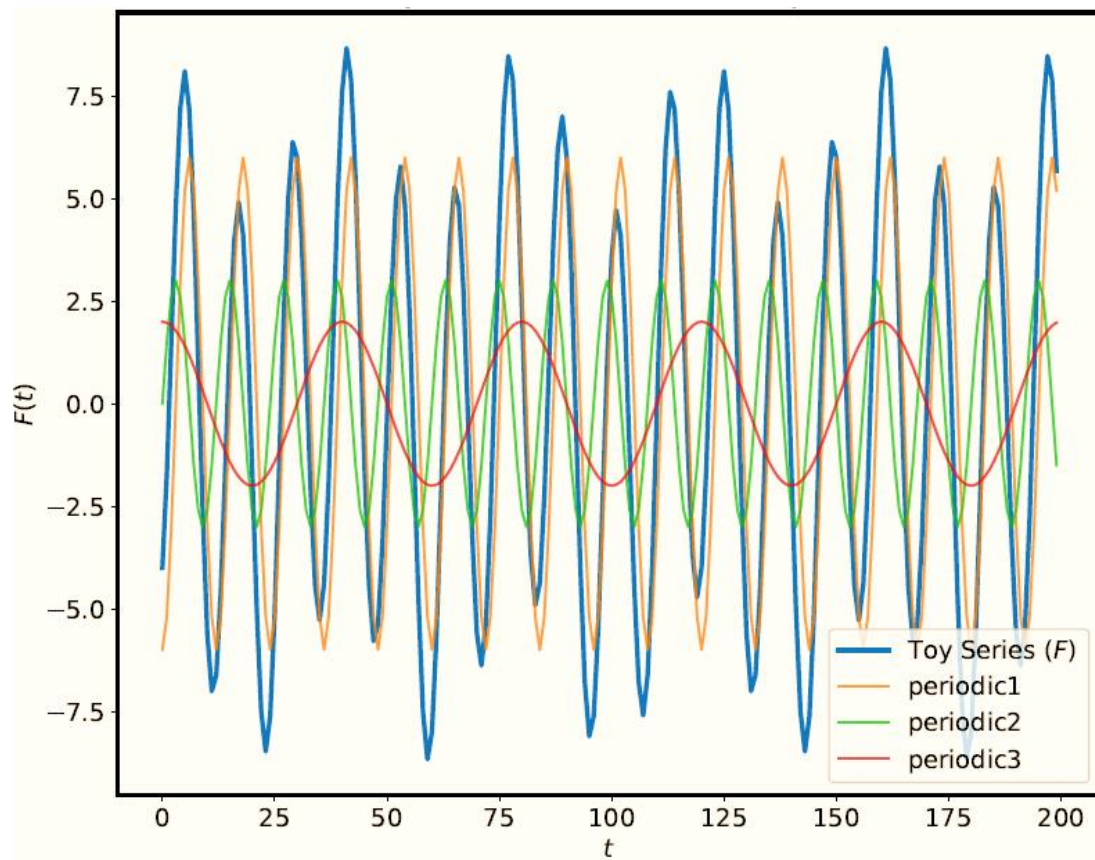
Εικόνα 4.9: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων με αυτών από την SSA για τη $ts2$

4.3. Αρμονική χρονοσειρά διαφορετικών περιόδων

Η τρίτη χρονοσειρά, που χρησιμοποιήθηκε ως toy problem, αποτελείται από δυο αρμονικές συναρτήσεις με διαφορετικές περιόδους, ως ακολούθως:

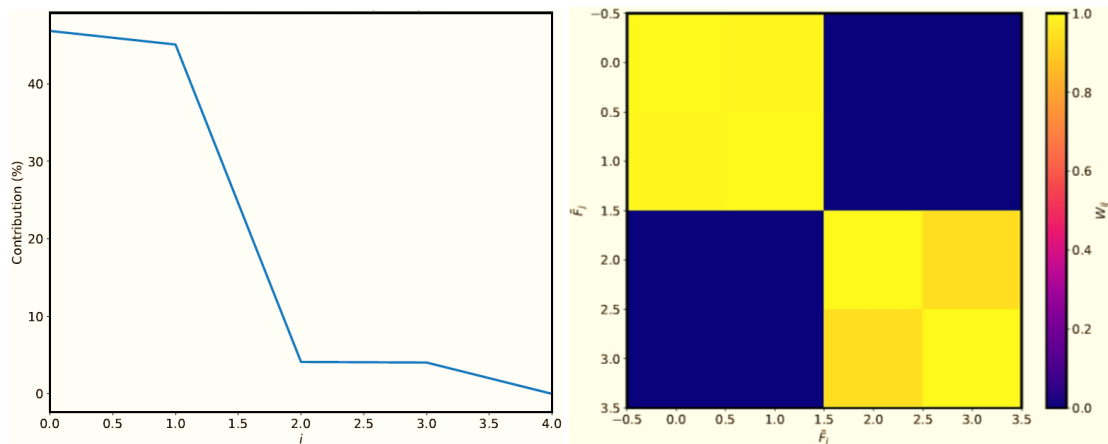
$$ts3 = -6 \cos \frac{2\pi}{12} t + 3 \sin \frac{2\pi}{12} t + 2 \cos \frac{2\pi}{40} t \quad (4.3)$$

Το διάγραμμα της σειράς $ts3$ με τις συνιστώσες της παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.10.



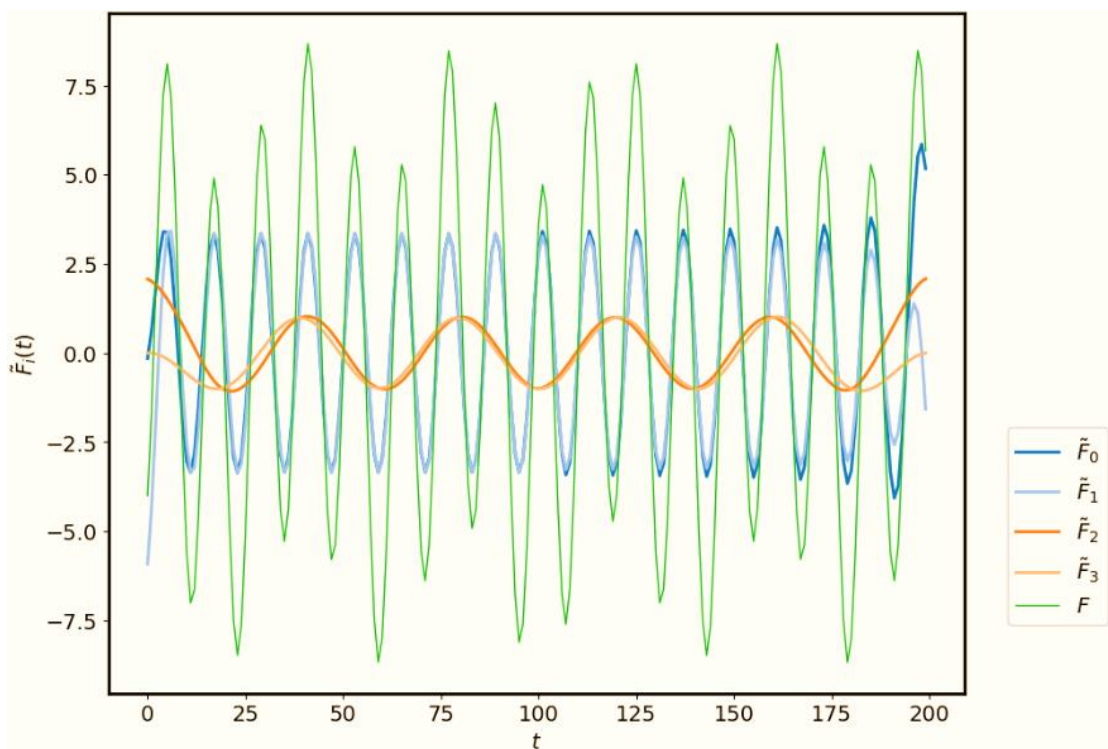
Εικόνα 4.10: Διάγραμμα χρονοσειράς $ts3$

Το πλήθος των δεδομένων παραμένει $N = 200$ και το μήκος του παραθύρου $L = 100$. Από το διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (Εικόνα 4.11) είναι αρκετά εμφανής η ομαδοποίηση που πρέπει να γίνει, καθώς η συνιστώσα \tilde{F}_0 και \tilde{F}_1 έχουν περίπου την ίδια συνεισφορά στον αντιδιαγώνιο πίνακα και η \tilde{F}_2 με την \tilde{F}_3 , αντίστοιχα. Αυτή η παρατήρηση επιβεβαιώνεται και από τον W -correlation πίνακα (Εικόνα 4.11), όπου επίσης φαίνεται ότι ομαδοποιούνται ανά δύο μεταξύ τους.



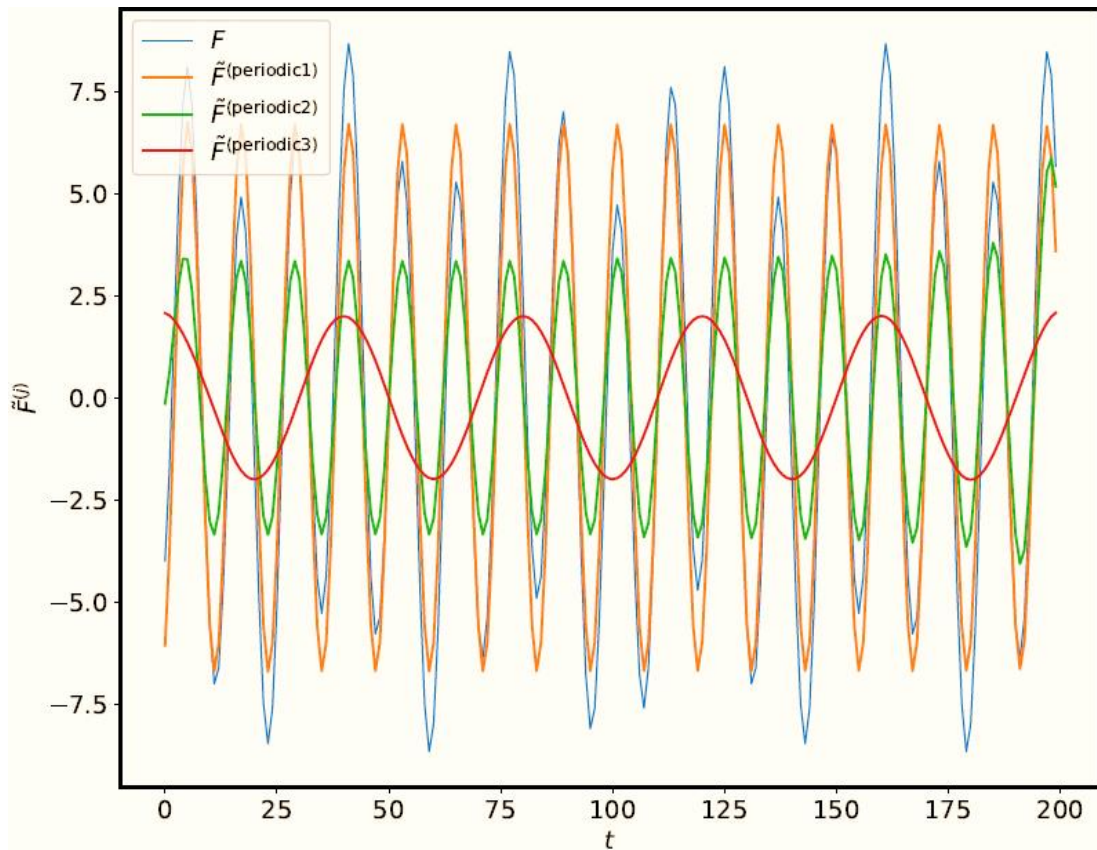
Εικόνα 4.11: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη $ts3$

Να σημειωθεί ότι, ο βαθμός (rank) του αντιδιαγώνιου πίνακα είναι $d = 4$, που δικαιολογεί και τις 4 συνιστώσες. Συνεπώς, κάποια από τις συνιστώσες θα ομαδοποιηθεί και με τον εαυτό της για να προκύψουν και οι τρεις αρχικές περιοδικότητες της σειράς. Οι 4 αυτές συνιστώσες παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.12.

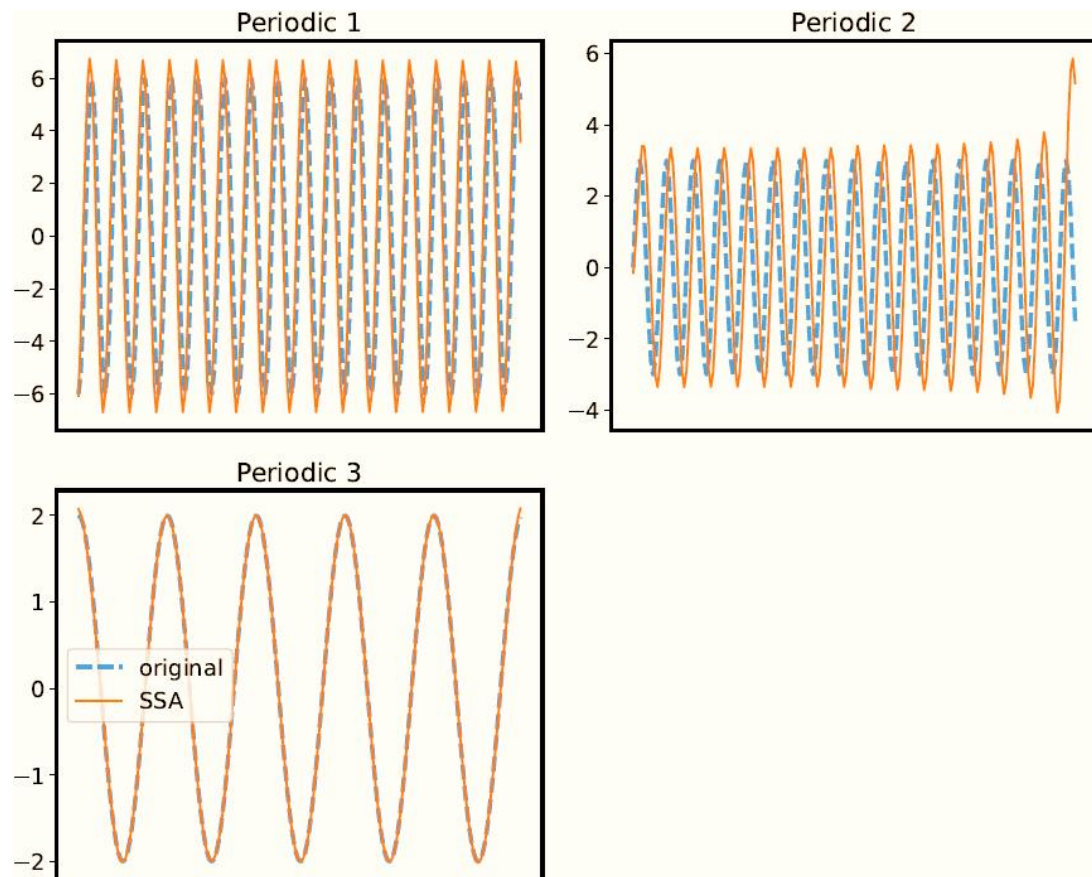


Εικόνα 4.12: Διάγραμμα των 4 συνιστωσών της σειράς $ts3$

Η πρώτη περιοδικότητα παράχθηκε από την ομαδοποίηση της συνιστώσας \tilde{F}_0 με την \tilde{F}_1 , η δεύτερη από τη συνιστώσα \tilde{F}_0 και η τρίτη από τις \tilde{F}_2 και \tilde{F}_3 . Έτσι, προέκυψαν τα αποτελέσματα της Εικόνας 4.13 και 4.14.



Εικόνα 4.13: Χρονοσειρά με τις 3 περιοδικότητες της $ts3$ που προέκυψαν από την SSA



Εικόνα 4.14: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων με αυτών από SSA για τη $ts3$

Η αντιστοίχιση είναι πάρα πολύ καλή, με εξαίρεση τη δεύτερη περιοδικότητα που φαίνεται να αποκλίνει ελάχιστα από την αρχική.

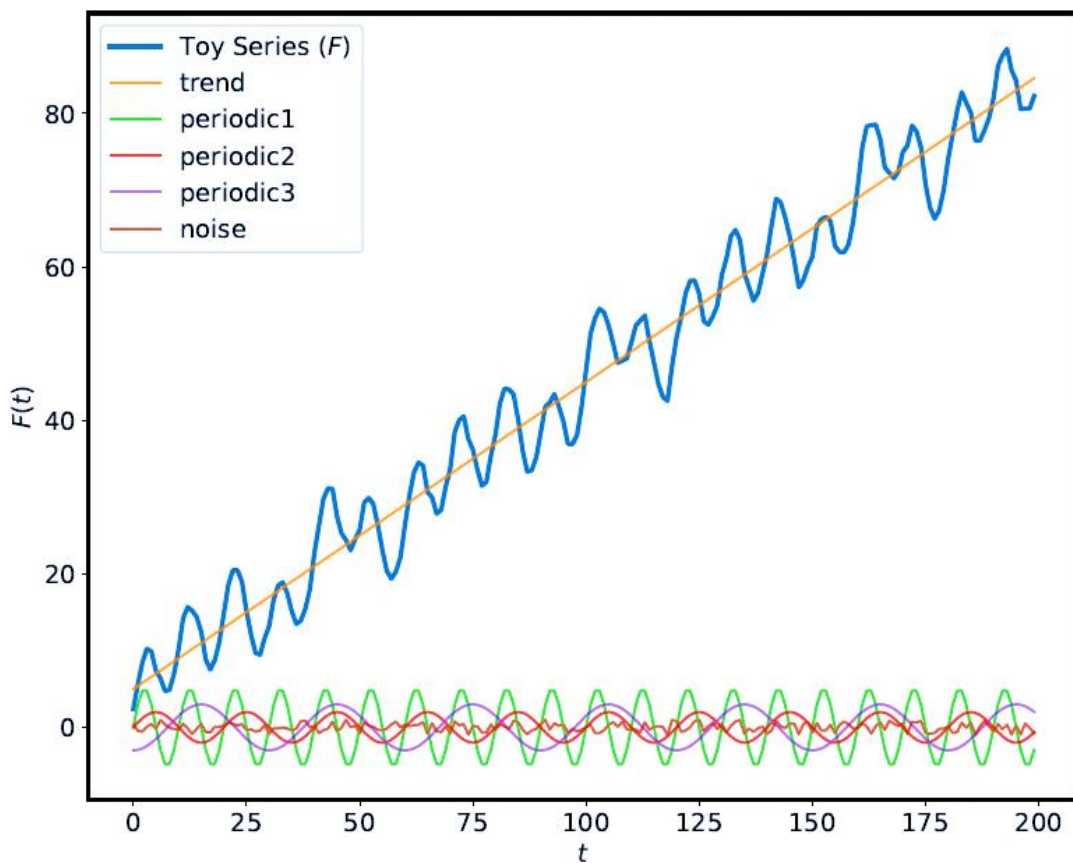
4.4. Αρμονική χρονοσειρά με τάση και λευκό θόρυβο

Τέλος, η χρονοσειρά $ts4$ είναι μια σύνθεση όλων των παραπάνω. Περιέχει δηλαδή τάση, αρμονικές συναρτήσεις διαφορετικών περιόδων και λευκό θόρυβο. Η εξίσωση της είναι:

$$ts4 = 5 + 0.4t + 5 \sin \frac{2\pi}{10} t + 2 \sin \frac{2\pi}{20} t - 3 \cos \frac{2\pi}{30} t + a \quad (4.4)$$

όπου a ο λευκός θόρυβος.

Επίσης, η σειρά με τις συνιστώσες της παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.15.

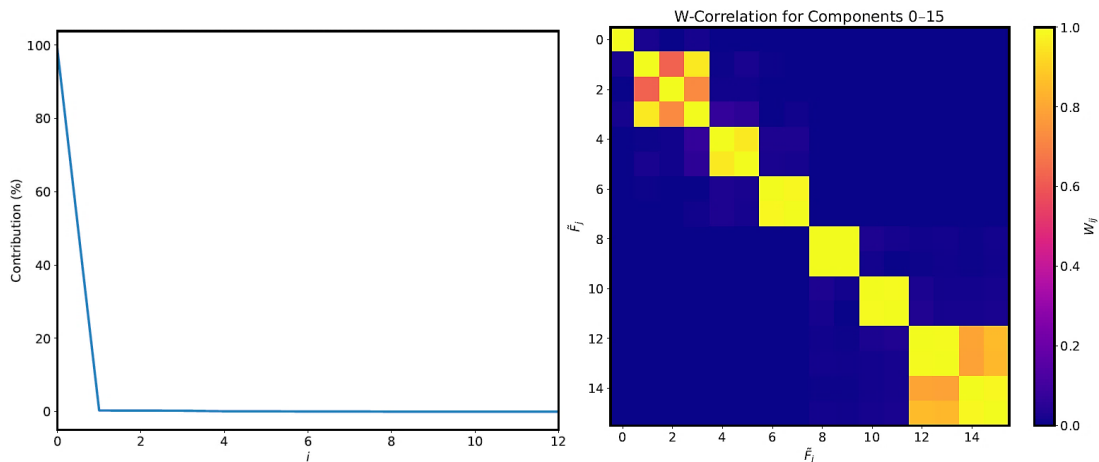


Εικόνα 4.15: Διάγραμμα χρονοσειράς $ts4$

Η παρούσα χρονοσειρά, επειδή προσεγγίζει καλύτερα την εξέλιξη πραγματικών φαινομένων, μελετήθηκε περισσότερο σε σχέση με τις προηγούμενες. Συγκεκριμένα, έγιναν διάφορες δοκιμές για το μήκος του παραθύρου, έτσι ώστε να υπάρξει μια καλύτερη κατανόηση όσον αφορά την επιλογή του. Να σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις επιλέχθηκε το πλήθος των δεδομένων να είναι $N = 200$.

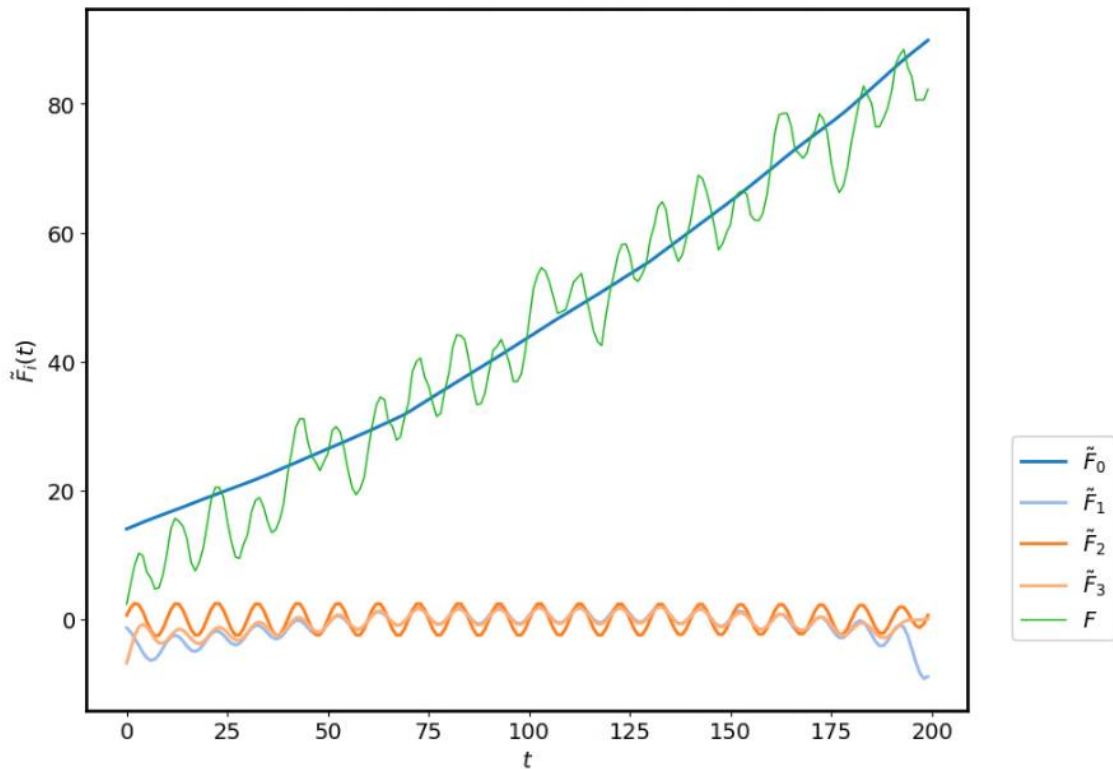
4.4.1. Μήκος παραθύρου $L = 70$

Η πρώτη δοκιμή έγινε με μήκος παραθύρου $L = 70$.



Εικόνα 4.16: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη $ts4$ ($L = 70$)

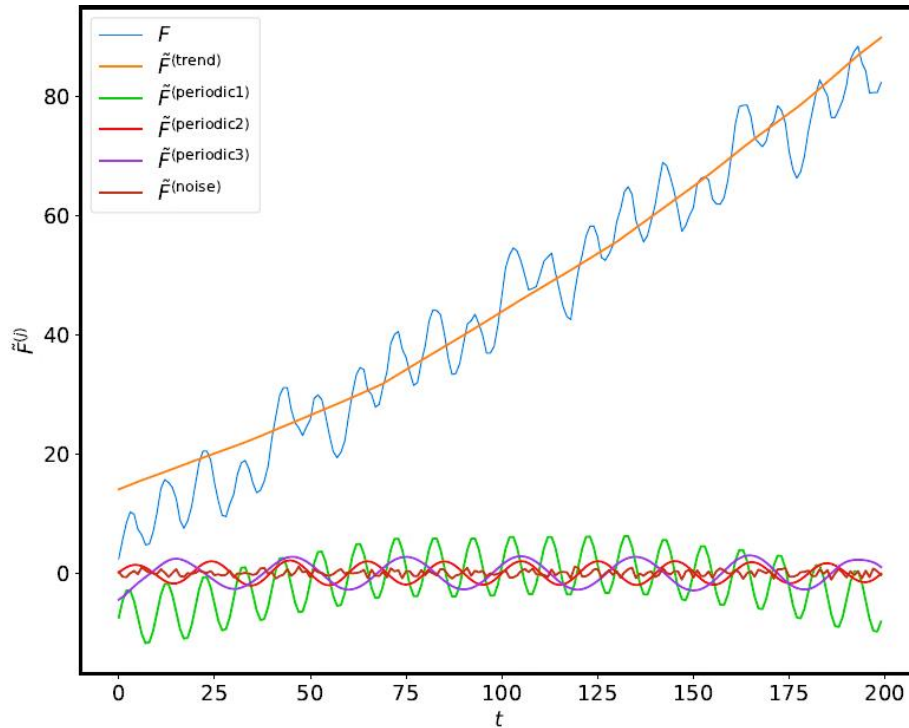
Από τα διαγράμματα της Εικόνας 4.16 είναι εμφανές ότι, η πρώτη συνιστώσα είναι η τάση της σειράς, καθώς έχει και τη μεγαλύτερη συνεισφορά στον αντιδιαγώνιο πίνακα. Έπειτα, από την 5^η συνιστώσα και μετά, οι συνιστώσες έχουν μεγάλη συσχέτιση ανά δύο μεταξύ τους. Από την άλλη, οι συνιστώσες \tilde{F}_1 , \tilde{F}_2 και \tilde{F}_3 θέλουν περαιτέρω μελέτη, που θα γίνει μέσω του γραφήματος της Εικόνας 4.17.



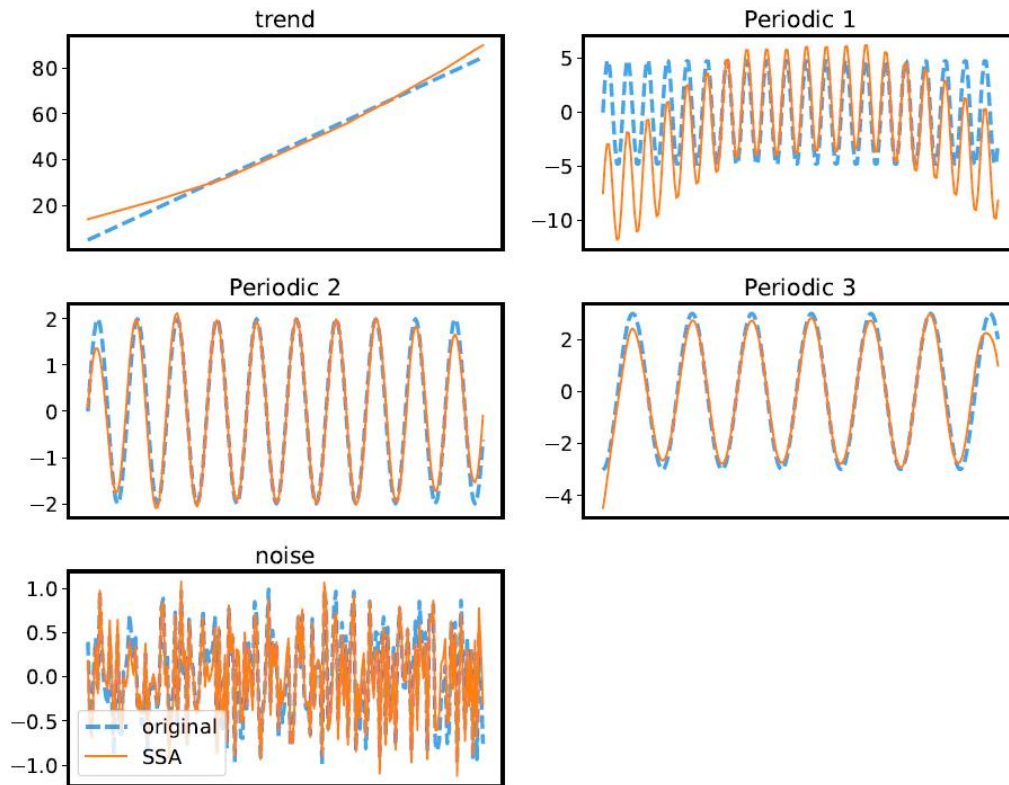
Εικόνα 4.17: Διάγραμμα των 4 πρώτων συνιστωσών της σειράς $ts4$ ($L = 70$)

Φαίνεται λοιπόν ότι οι συνιστώσες \tilde{F}_1 , \tilde{F}_2 και \tilde{F}_3 είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους και επομένως θα μπορούσαν να ομαδοποιηθούν όλες μαζί.

Τα αποτελέσματα αυτής της ομαδοποίησης παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα.



Εικόνα 4.18: Χρονοσειρά με την τάση, το θόρυβο και τις 3 περιοδικότητες της $ts4$ που προέκυψαν από την SSA ($L = 70$)

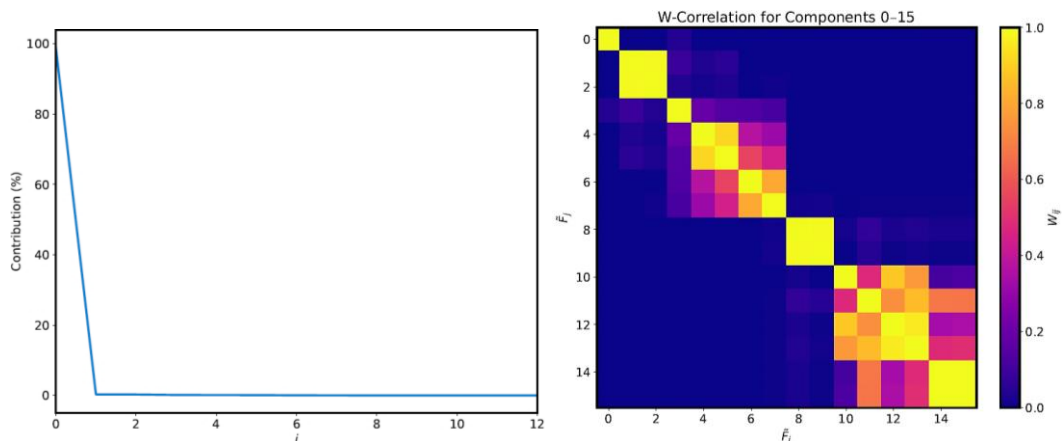


Εικόνα 4.19: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων, τάσης και θορύβου με αυτών από την SSA για τη $ts4$ ($L = 70$)

Εν κατακλείδι, οι περιοδικότητες 2 και 3 αντιστοιχίζονται πολύ καλά με τις αρχικές, σε αντίθεση με την 1^η που φαίνεται να υστερεί στα άκρα. Το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται και στην τάση, όπου υπάρχει καλή αντιστοιχία στη μέση και μια μικρή απόκλιση στα άκρα.

4.4.2. Μήκος παραθύρου $L = 40$

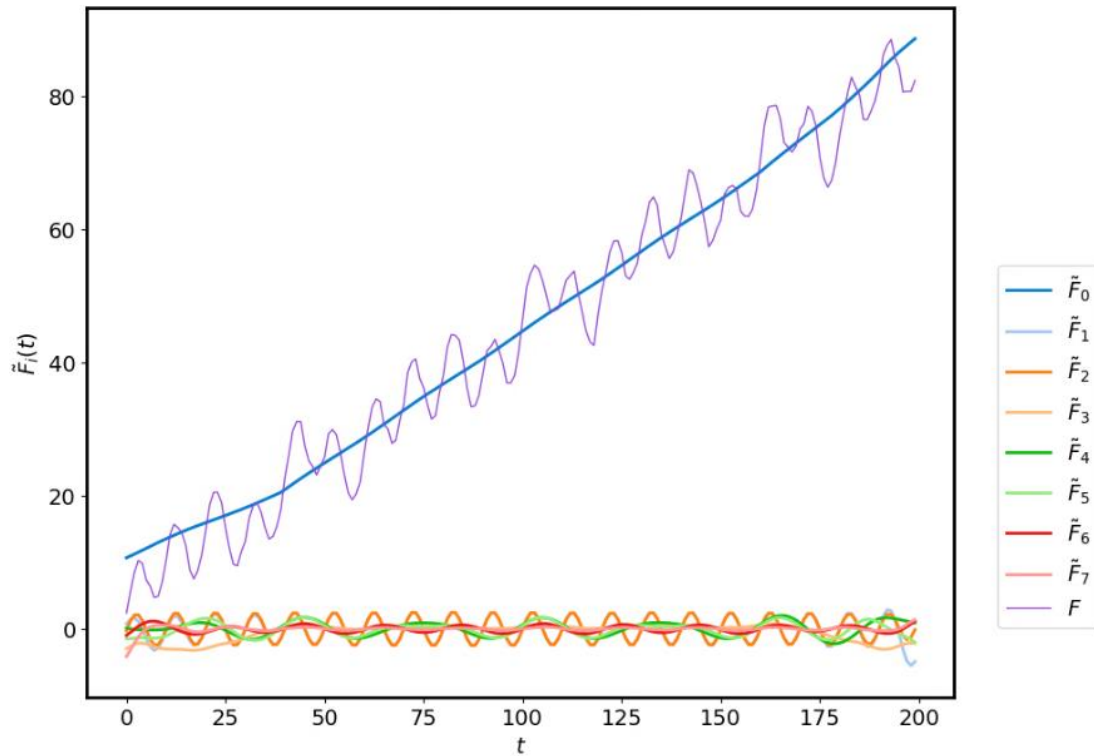
Στο δεύτερο πείραμα για τη σειρά $ts4$ επιλέχθηκε ως μήκος παραθύρου $L = 40$. Τα γραφήματα σχετικής συνεισφοράς και του W -correlation πίνακα παρατίθενται στη συνέχεια.



Εικόνα 4.20: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W -correlation πίνακας (δεξιά) για τη $ts4$ ($L = 40$)

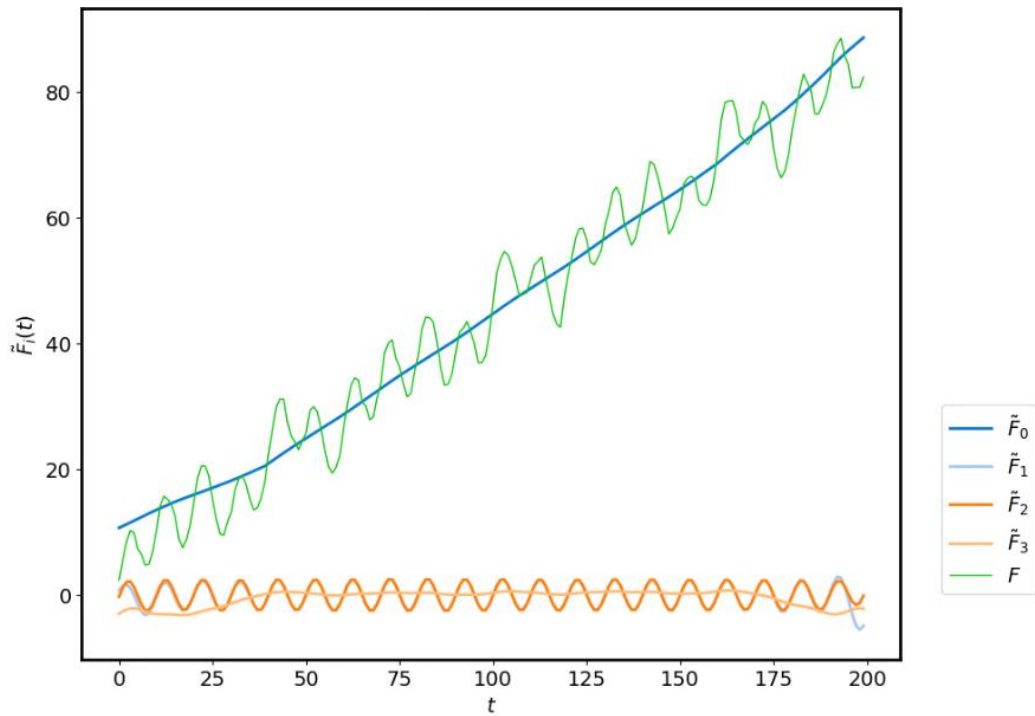
Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, η συνιστώσα \tilde{F}_0 είναι προφανές ότι ξεχωρίζει από τις υπόλοιπες και επομένως συμπεραίνεται ότι αποτελεί την τάση της σειράς. Οι συνιστώσες \tilde{F}_1 με την \tilde{F}_2 , η \tilde{F}_4 με την \tilde{F}_5 , και η \tilde{F}_6 με την \tilde{F}_7 , εφόσον έχουν υψηλή συσχέτιση ανά δύο μεταξύ τους θα ομαδοποιηθούν μαζί και θα συνθέσουν τις τρεις περιοδικότητες της σειράς.

Αναπαριστώντας αυτές τις συνιστώσες σε ένα διάγραμμα (Εικόνα 4.21) επιβεβαιώνεται ο παραπάνω ισχυρισμός.



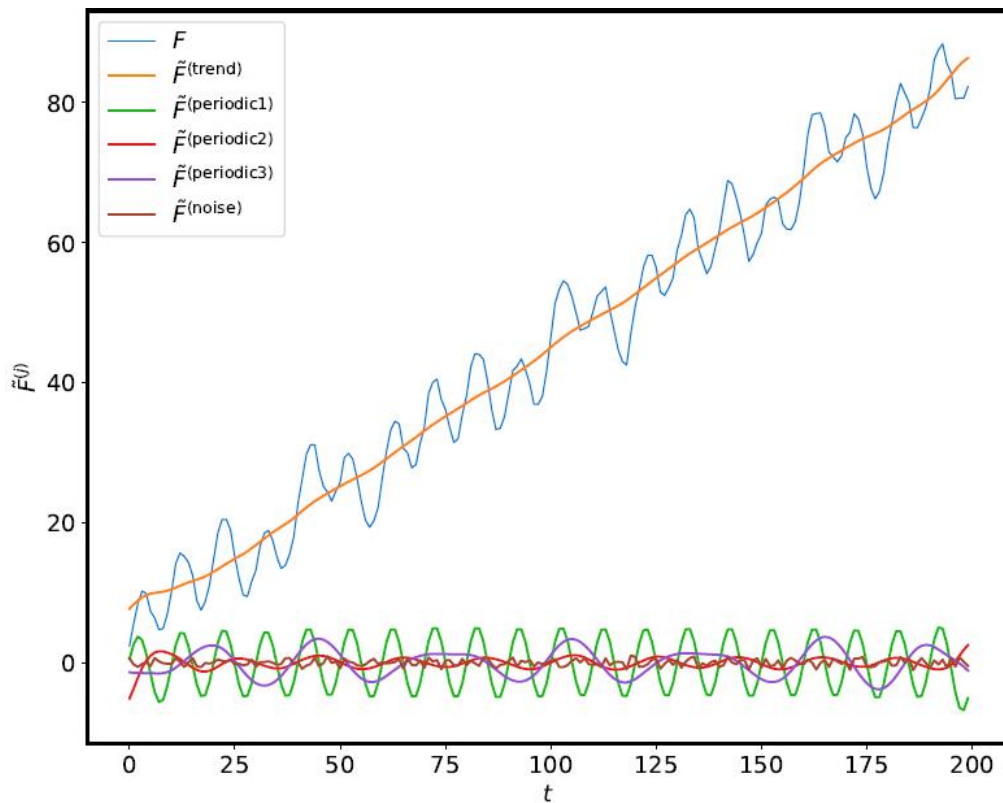
Εικόνα 4.21: Διάγραμμα των 8 πρώτων συνιστωσών της σειράς $ts4$ ($L = 40$)

Παρατηρώντας πιο προσεχτικά τη συνιστώσα \tilde{F}_3 γίνεται αντιληπτό, από το διάγραμμα της Εικόνας 4.22, ότι δεν έχει κάποια περιοδικότητα. Ωστόσο, θα μπορούσε να συμβάλει στη σύσταση της τάσης της σειράς.

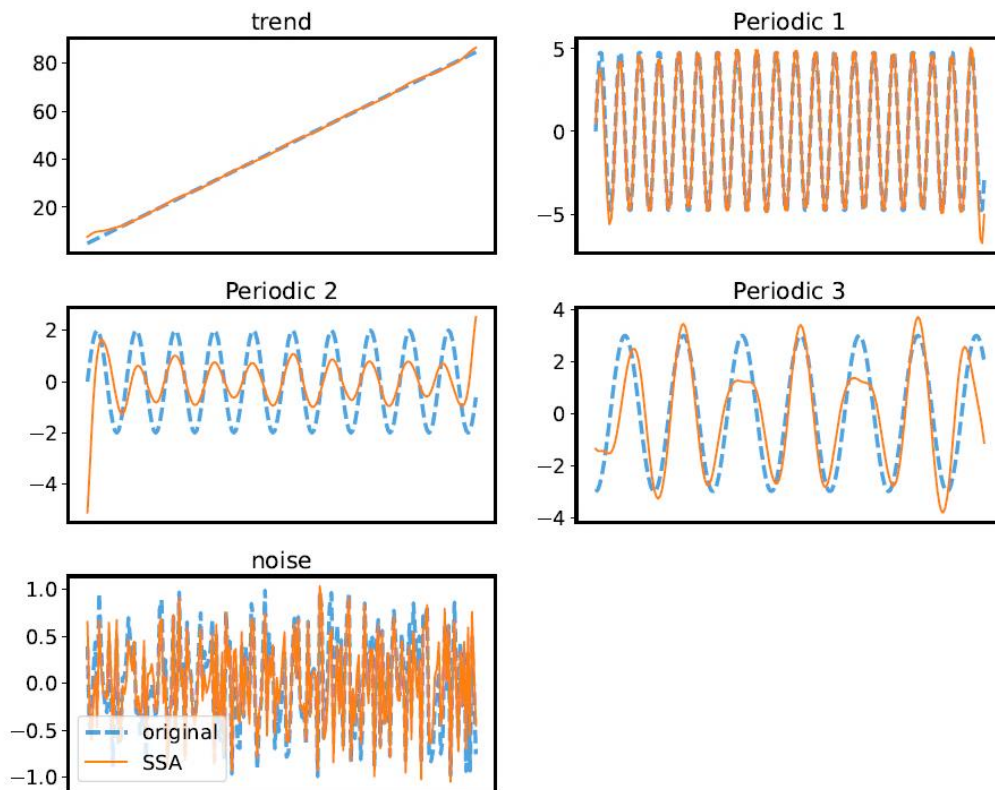


Εικόνα 4.22: Διάγραμμα των 4 πρώτων συνιστωσών της σειράς $ts4$ ($L = 40$)

Κάνοντας, λοιπόν, την ομαδοποίηση των συνιστωσών που αναφέρθηκε παραπάνω, προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:



Εικόνα 4.23: Χρονοσειρά με την τάση, το θόρυβο και τις 3 περιοδικότητες της $ts4$ που προέκυψαν από την SSA ($L = 40$)



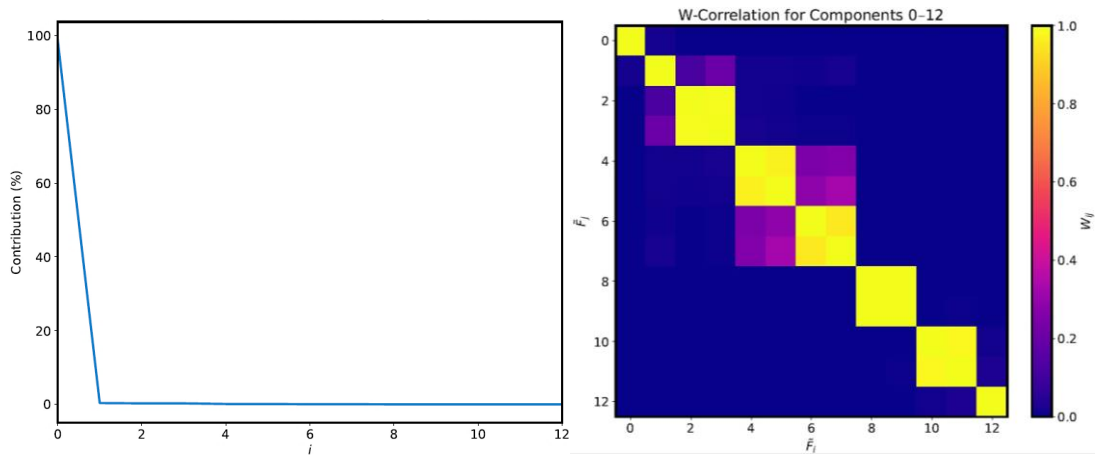
Εικόνα 4.24: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων, τάσης και θορύβου με αυτών από την SSA για τη $ts4$ ($L = 40$)

Από τα διαγράμματα στην Εικόνα 4.24 γίνεται εμφανές ότι, οι περιοδικότητες 2 και 3 αποκλίνουν κατά πολύ από τις αρχικές, σε αντίθεση με την 1^η περιοδικότητα και την τάση που έχουν πολύ καλή αντιστοίχιση.

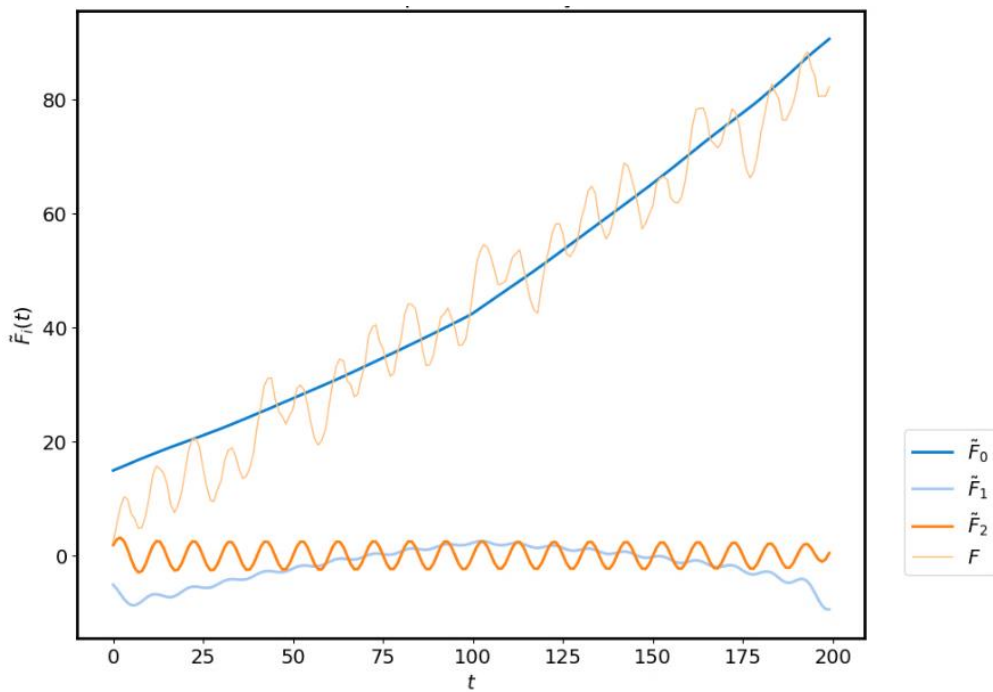
4.4.3. Μήκος παραθύρου $L = 100$

Στο πείραμα αυτό, επιλέχθηκε ως μήκος παραθύρου $L = 100$, όπου είναι και η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει για $N = 200$, σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στην Παράγραφο 3.3.

Αναπαριστώντας αντίστοιχα τα γράφημα της σχετικής συνεισφοράς και του πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 4.25), συμπεραίνεται ότι η συνιστώσα \tilde{F}_0 κατέχει για άλλη μια φορά το ρόλο της τάσης καθώς ξεχωρίζει από όλες τις υπόλοιπες. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η συνιστώσα \tilde{F}_1 , όπου και από το διάγραμμα των 3 πρώτων συνιστωσών (Εικόνα 4.26), θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι συμβάλει επίσης στη σύνθεση της τάσης.

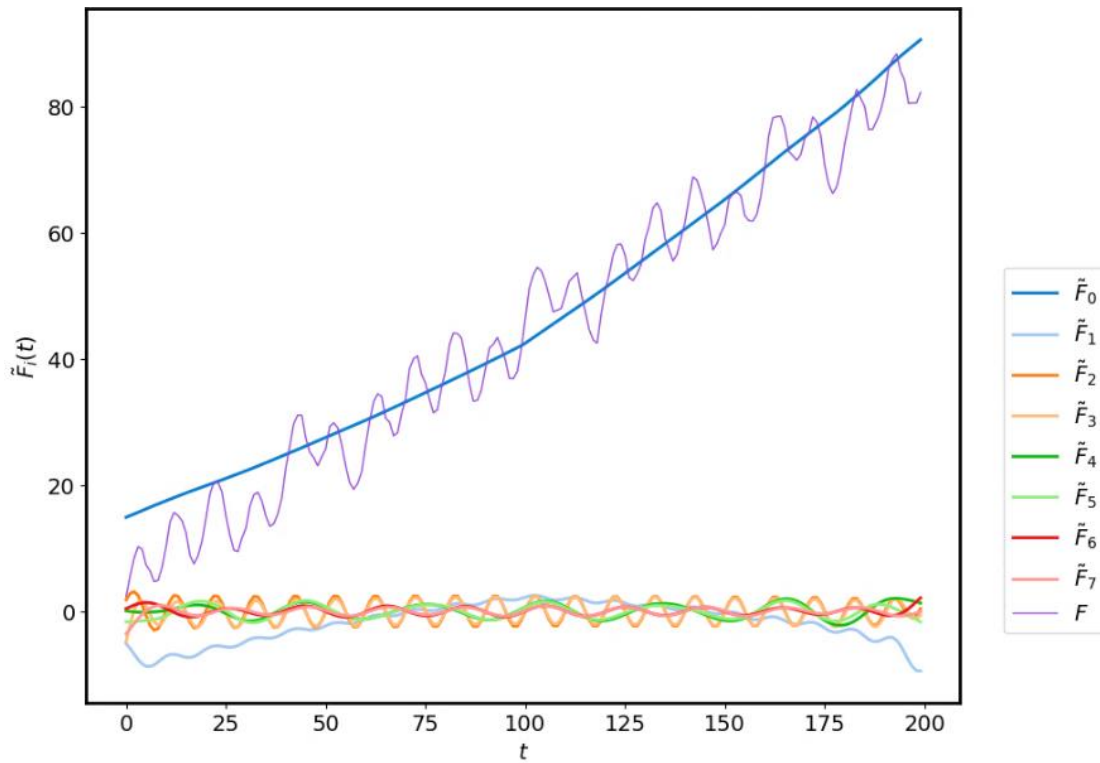


Εικόνα 4.25: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (αριστερά) & W-correlation πίνακας (δεξιά) για τη $ts4$ ($L = 100$)



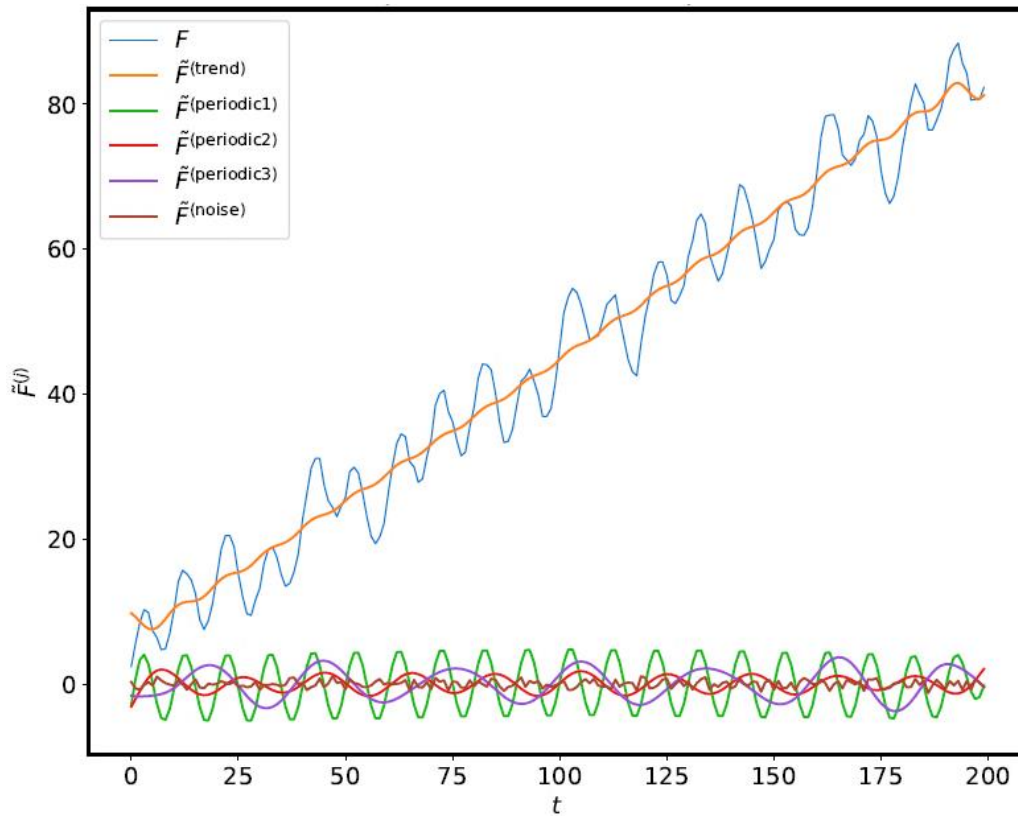
Εικόνα 4.26: Διάγραμμα των 3 πρώτων συνιστωσών της σειράς $ts4$ ($L = 100$)

Για τις υπόλοιπες συνιστώσες, η ομαδοποίηση γίνεται ανά δύο μεταξύ τους. Δηλαδή, η \tilde{F}_2 με την \tilde{F}_3 , η \tilde{F}_4 με την \tilde{F}_5 και η \tilde{F}_6 με την \tilde{F}_7 , ενώ από την \tilde{F}_8 και μετά πρόκειται για θόρυβο. Από την Εικόνα 4.27 επιβεβαιώνονται οι παραπάνω ισχυρισμοί.

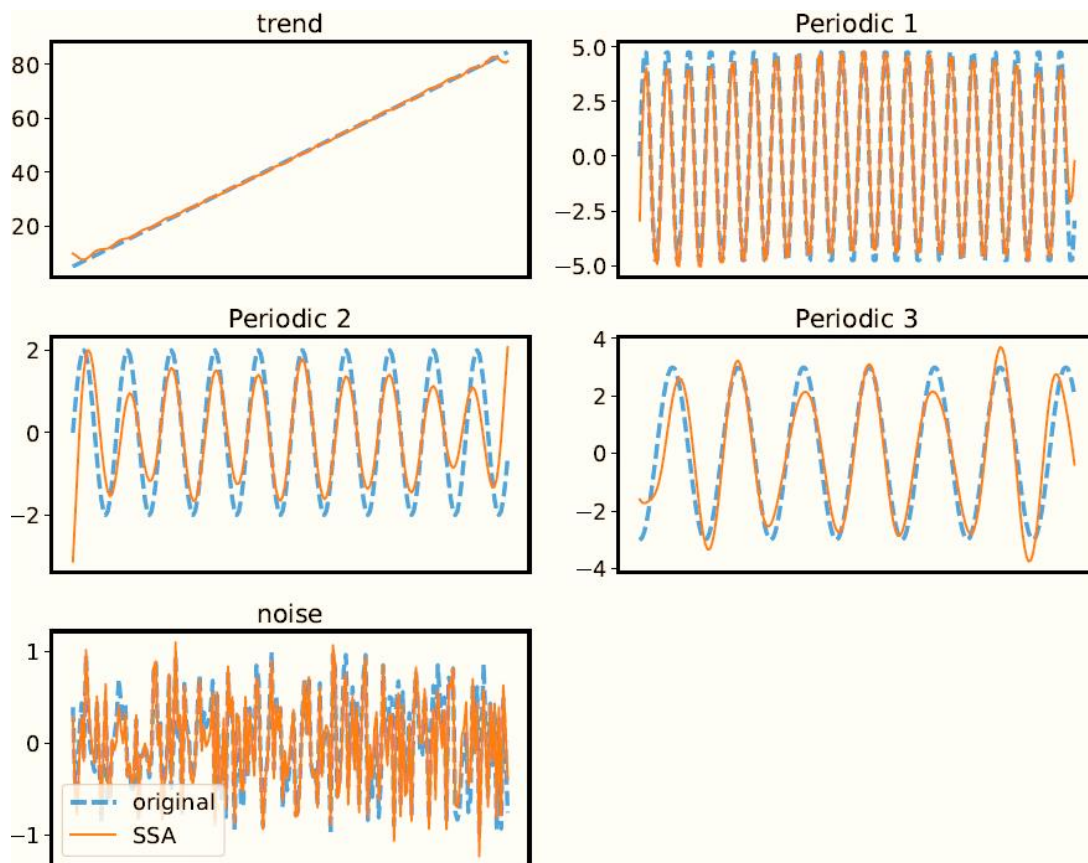


Εικόνα 4.27: Διάγραμμα των 8 πρώτων συνιστωσών της σειράς $ts4$ ($L = 100$)

Τελικώς, αφού έγινε η ομαδοποίηση που αναφέρθηκε, προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:



Εικόνα 4.28: Χρονοσειρά με την τάση, το θόρυβο και τις 3 περιοδικότητες της $ts4$ που προέκυψαν από την SSA ($L = 100$)



Εικόνα 4.29: Σύγκριση αρχικών περιοδικοτήτων, τάσης και θορύβου με αυτών από την SSA για τη $ts4$ ($L = 100$)

Από τη σύγκριση των περιοδικοτήτων με τις αρχικές, στην Εικόνα 4.29, συμπεραίνεται ότι τα αποτελέσματα από την SSA, είναι αρκετά ικανοποιητικά. Ωστόσο, υπάρχει μια μικρή απόκλιση στην περιοδικότητα 2 όσον αφορά το πλάτος του κύματος.

4.5. Συμπεράσματα

Εν κατακλείδι, από την ανάλυση που έγινε στα δεδομένα προσομοίωσης συμπεραίνεται ότι, η χρήση μικρού μήκους παραθύρου εξυπηρετεί στην ανάδειξη της τάσης της χρονοσειράς, επειδή λειτουργεί ως γραμμικό φίλτρο ομαλοποίησης. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας μεγάλο μήκος παραθύρου, η SSA οδηγεί σε πιο λεπτομερή ανάλυση (decomposition) των επιμέρους συνιστωσών.

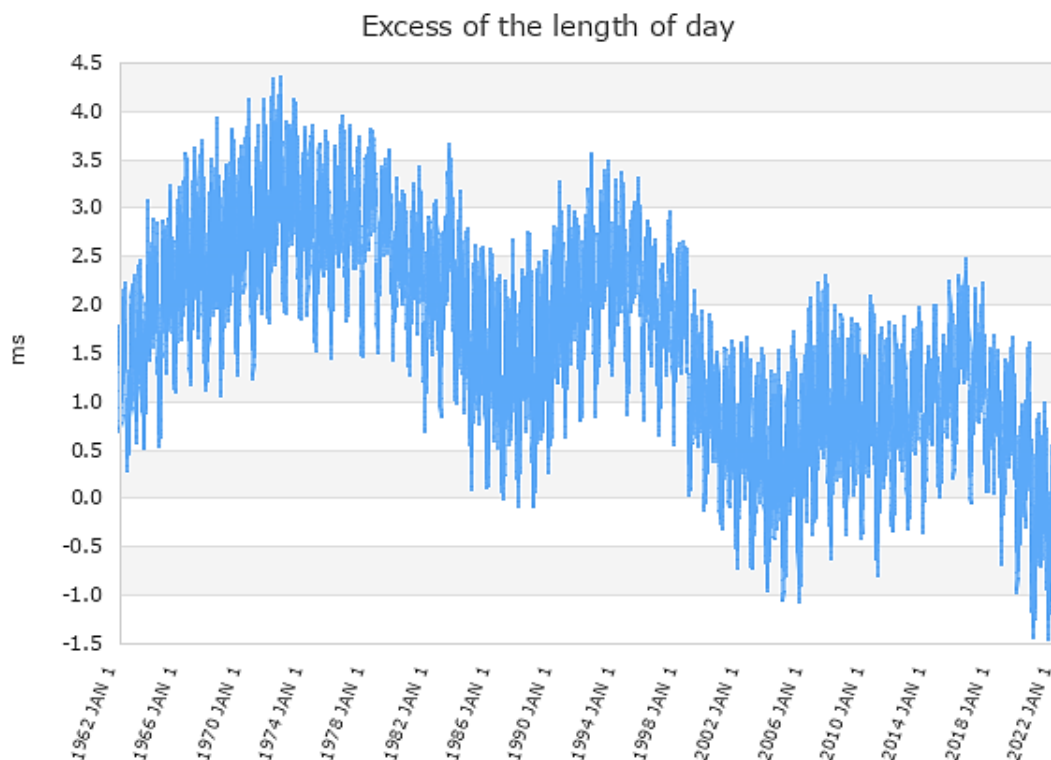
Επιπλέον, αν η σειρά θεωρείται μικρού πλήθους δεδομένων N , το μήκος του παραθύρου θα πρέπει να είναι σε αναλογία με την αρμονική περίοδο. Εάν όμως, θεωρείται σχετικά μεγάλο πλήθος δεδομένων, τότε χρησιμοποιείται όσο το δυνατόν πιο μεγάλο μήκος παραθύρου γίνεται και φυσικά μικρότερο του $N/2$ (Deng, 2014). Το πλήθος των δεδομένων της πραγματικής σειράς που μελετάται στην παρούσα εργασία, θεωρείται μεγάλο, επομένως είναι ασφαλέστερο να επιλεγθεί το μήκος παραθύρου κοντά στο $N/2$.

5. Δεδομένα μελέτης

Τα δεδομένα του προβλήματος παρέχονται από τη Διεθνή Υπηρεσία για την Περιστροφή της Γης και των Συστημάτων Αναφοράς (IERS). Πρόκειται για μια υπηρεσία που ιδρύθηκε το 1987, από τη Διεθνή Αστρονομική Ένωση (International Astronomical Union, IAU) και τη Διεθνή Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής (International Union of Geodesy and Geophysics, IUGG), με σκοπό να παρέχει διάφορα δεδομένα, εργαλεία και πληροφορίες χρήσιμα για την αστρονομική, τη γεωδαιτική και τη γεωφυσική επιστημονική κοινότητα.

Συγκεκριμένα, τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν αντλήθηκαν από το Κέντρο για την Περιστροφή της Γης (Earth Orientation Center) και μάλιστα από το ειδικό δελτίο (Bulletin C). Σε αυτό παρέχονται, μεταξύ άλλων, οι καθημερινές τιμές για τη μεταβολή του μήκους της ημέρας (ΔLOD) και για τη γωνιακή ταχύτητα της Γης ($\Delta\omega$), από το 1962 έως και σήμερα, καθώς επίσης και κάποιες τιμές πρόβλεψης για τα επόμενα περίπου 8 χρόνια.

Η περίοδος των δεδομένων που αναλύθηκαν στην παρούσα εργασία είναι από την 1^η Ιανουαρίου του 1962 έως και την 1^η Ιανουαρίου του 2022 (60 χρόνια). Να σημειωθεί ότι, επιλέχθηκε να εξεταστεί η ΔLOD αντί της $\Delta\omega$, χωρίς ωστόσο αυτό να έχει κάποια ουσιαστική διαφορά, εφόσον τα δύο συνδέονται μέσω της γραμμικής Εξ. (2.5) που αναφέρθηκε στην Παράγραφο 2.2. Παρακάτω παρατίθεται ένα διάγραμμα των δεδομένων αυτών.



Εικόνα 5.1: Μεταβολή του μήκους της ημέρας από το 1962 έως το 2022 (δεδομένα IERS)

Στα δεδομένα αυτά, έχει προηγηθεί μια κατάλληλη επεξεργασία από το κέντρο της IERS για τις παραμέτρους της περιστροφής της Γης (Earth Orientation Parameters

Product Center, EOP-PC) για την απαραίτητη εξομάλυνση των δεδομένων και τη συνεχή βελτίωση της ακρίβειας αυτών. Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται οι αβεβαιότητες των ημερήσιων τιμών των παραμέτρων περιστροφής της Γης για κάθε περίοδο από το 1962 έως το 2000.

Πίνακας 5.1: Αβεβαιότητες ημερήσιων τιμών των παραμέτρων περιστροφής της Γης (δεδομένα IERS)

EOP	Unit	1962-67	1968-71	1972-79	1980-83	1984-95	1996-2000
X	mas	30	20	15	2	0.5	0.2
Y	mas	30	20	15	2	0.5	0.2
UT1-UTC	0.1 ms	20	15	10	4	0.4	0.2
LOD	0.1 ms	14	10	7	2	0.3	0.2
dPsi.sin(Eps)	mas	-	-	-	3	0.6	0.3
dEps	mas	-	-	-	2	0.6	0.3

Παράλληλα, έγινε μια πρωταρχική μελέτη σε ένα άλλο, μικρότερο σύνολο δεδομένων, που αφορούσαν τη μέση ετήσια τιμή της μεταβολής του μήκους της ημέρας, για τους τελευταίους 4 αιώνες (1623 έως 2008) που παρέχονται επίσης από την IERS.

Σύμφωνα με την ιστοσελίδα της IERS, τα δεδομένα από το 1623 έως το 1955 λήφθηκαν από το άρθρο των Morrison et al., όπου η μέση ηλιακή ημέρα αναφέρεται στην κλίμακα Δυναμικού Χρόνου (Dynamical Time), που βασίζεται στα ορίσματα χρόνου σεληνιακής εφημερίδας.

Οι τιμές για τη διάρκεια της ημέρας, από το 1623 έως το 1860, προέκυψαν ύστερα από επεξεργασία μέσω προσαρμογής (cubic spline), εφαρμοσμένης σε κάποιες τιμές της διαφοράς ανάμεσα στο μέσο ηλιακό χρόνο και το δυναμικό χρόνο. Αντίθετα, οι τιμές από το 1861 έως το 1955, έχουν προκύψει μέσω τετραγωνικής συνέλιξης (5-point quadratic convolution). Τέλος, οι τιμές από το 1955 και μετά προέκυψαν μέσω της διαφοράς UT1-TAI που παρέχει η IERS. Να σημειωθεί επίσης, ότι για το επίπεδο ακρίβειας που έχουν οι τιμές αυτές, η μονάδα του δυναμικού χρόνου με τη μονάδα του ατομικού χρόνου, θεωρείται ίση (Dick and Richter, 2000).

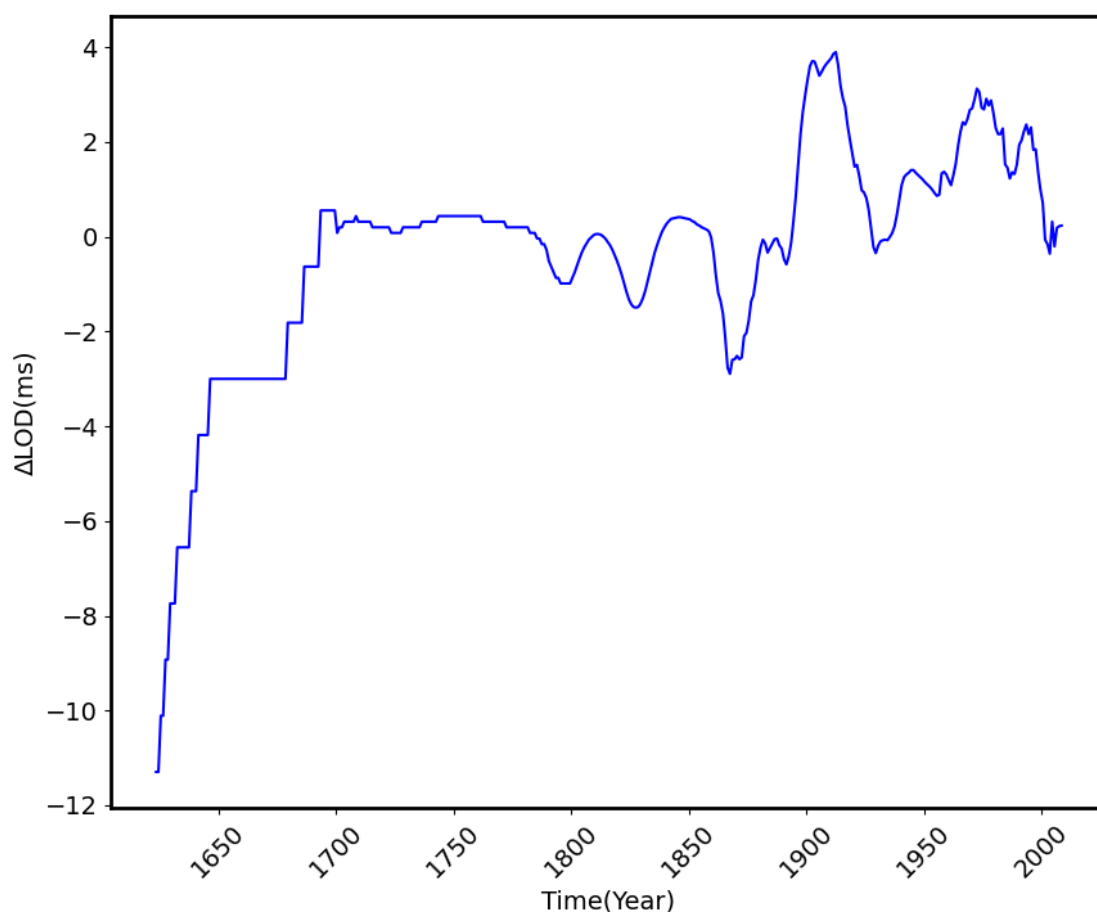
Αξίζει να σημειωθεί ότι, τα δεδομένα συλλέγονται μέσω συνδυασμού διαφόρων γεωδαιτικών τεχνικών όπως αυτών των VLBI (Very Long Baseline Interferometry), LLR (Lunar Laser Ranging), SLR (Satellite Laser Ranging), GPS (Global Positioning System) και της Αστρομετρίας σε διάφορα μέρη του πλανήτη χρησιμοποιώντας ένα φίλτρο Kalman προκειμένου να συνδυαστούν. Πριν το συνδυασμό τους, οι σειρές των δεδομένων αυτών επεξεργάζονται ώστε να έχουν την ίδια αρχή και ρυθμό. Επιπλέον, οι δηλωμένες αβεβαιότητες των μετρήσεων προσαρμόζονται και τέλος τα σημεία των δεδομένων που θεωρούνται ακραίες τιμές διαγράφονται (Dick and Richter, 2000).

6. Αποτελέσματα

Ακολουθώντας τη θεωρία και τη μεθοδολογία που αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, εφαρμόστηκε η SSA στα πραγματικά δεδομένα, αρχικά στο μικρό σύνολο των 386 τιμών (από το 1623 έως το 2008, με βήμα 1 έτος) και ύστερα στο μεγάλο σύνολο δεδομένων των 21916 τιμών (από 1/1/1962 έως 1/1/2022, με βήμα 1 ημέρα). Στη συνέχεια, παρατίθεται όλη η συλλογιστική που ακολουθήθηκε κατά την εφαρμογή της μεθόδου, καθώς και τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

6.1. Δεδομένα από 1623 έως 2008

Αρχικά, μελετήθηκε το μικρό σύνολο τιμών, όπως ήδη αναφέρθηκε, όπου περιλαμβάνει μία τιμή για κάθε έτος από το 1623 έως και το 2008. Στην Εικόνα 6.1 παρουσιάζεται το διάγραμμα της χρονοσειράς.

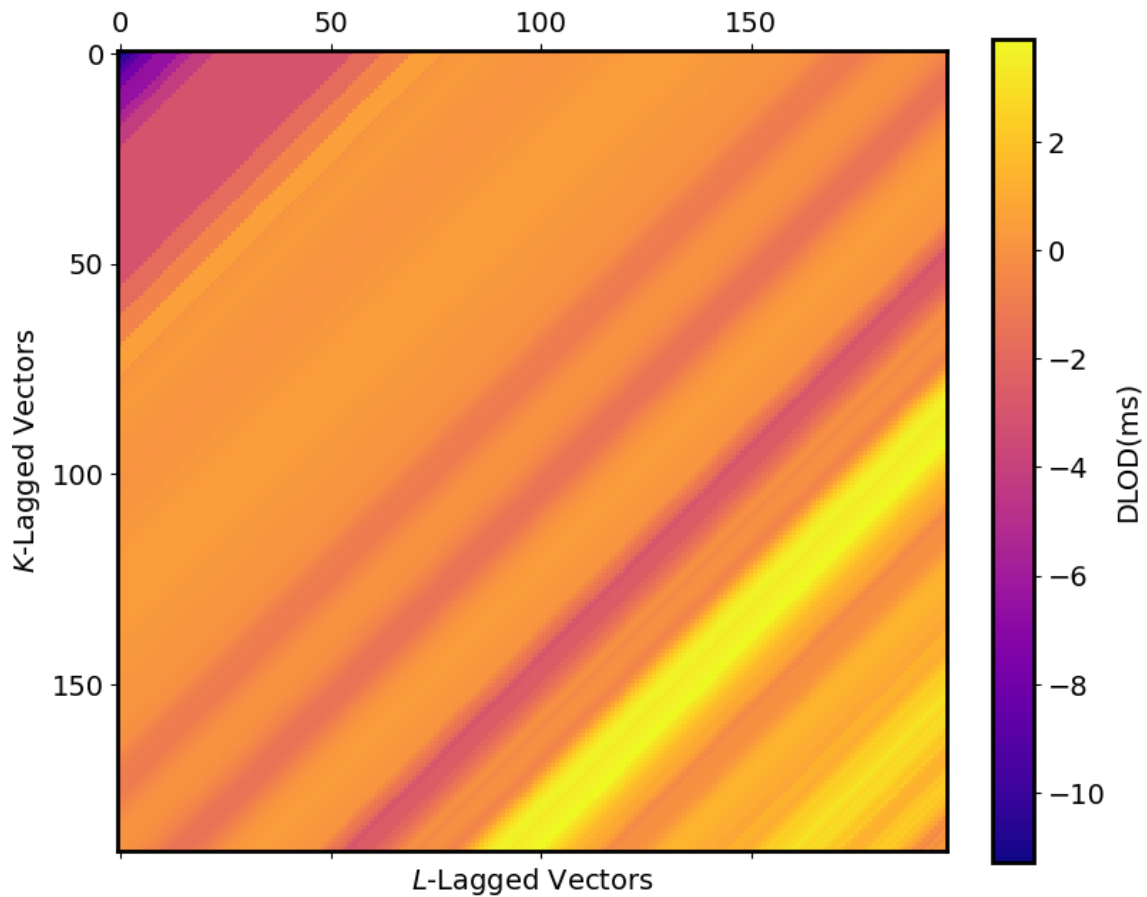


Εικόνα 6.1: Διάγραμμα χρονοσειράς της μεταβολής του μήκους της ημέρας ανά έτος, για την περίοδο 1623 έως 2008

Από το διάγραμμα αυτό είναι εμφανής η μειωμένη ακρίβεια που παρουσιάζεται στις τιμές του μήκους της ημέρας, έως περίπου και το 1750, το οποίο είναι λογικό εφόσον είχε χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό τους ο δυναμικός χρόνος αντί του ατομικού. Επίσης, είναι πιθανό να μην υπήρχαν πολλά δεδομένα για κάθε έτος, καθώς φαίνεται κατά τη

διάρκεια κάποιων ετών να μη μεταβάλλεται το μήκος της ημέρας (πχ. από το 1646 έως το 1678), κάτι το οποίο είναι αδύνατο.

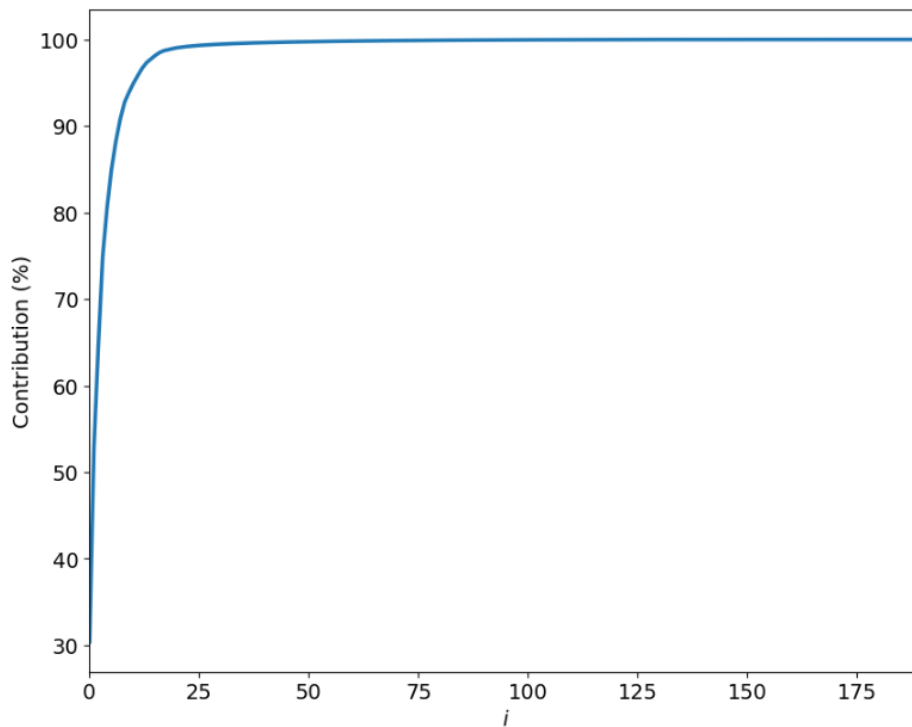
Το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων περιλαμβάνει $N = 386$ τιμές και επιλέχθηκε ένα μεγάλο μήκος παραθύρου, τιμής $L = 190$ (σχεδόν $N/2$). Έτσι, δημιουργήθηκε ο πίνακας τροχιάς \mathbf{X} διαστάσεων 190×197 (Εικόνα 6.2).



Εικόνα 6.2: Αντιδιαγώνιος πίνακας τροχιάς \mathbf{X} (δεδομένα 1623-2008)

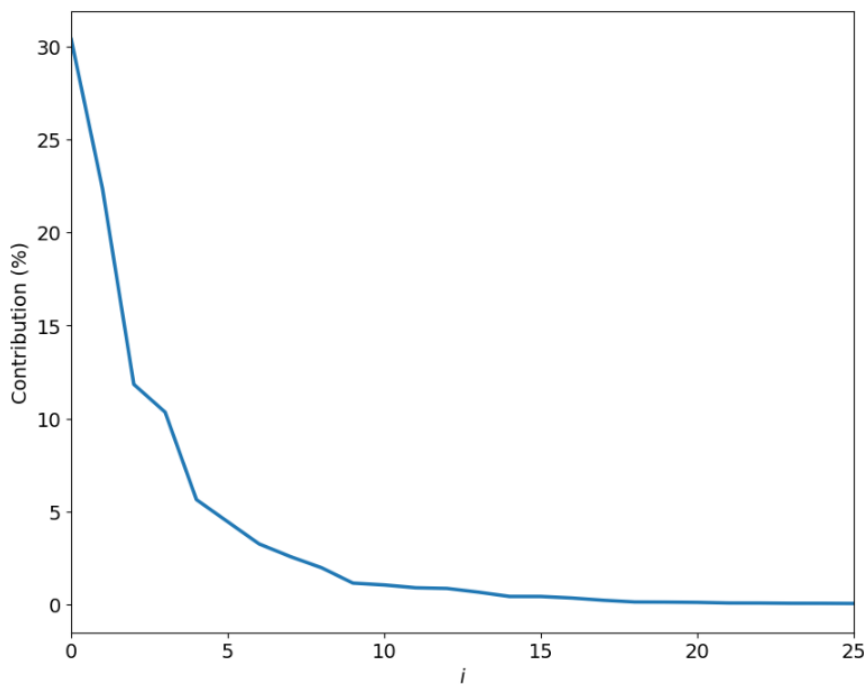
Ύστερα, το επόμενο στάδιο σύμφωνα με τη θεωρία είναι η διάσπαση του πίνακα \mathbf{X} σε υποπίνακες μέσω της συνάρτησης SVD και της μετατροπής τους στη συνέχεια, σε χρονοσειρές.

Παρατηρώντας αρχικά το διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς (Εικόνα 6.3), διαπιστώνεται ότι είναι χρήσιμο η μελέτη να επικεντρωθεί στις πρώτες 26 συνιστώσες, καθώς οι υπόλοιπες δεν φαίνεται να συνεισφέρουν αρκετά στο συνολικό πίνακα \mathbf{X} .



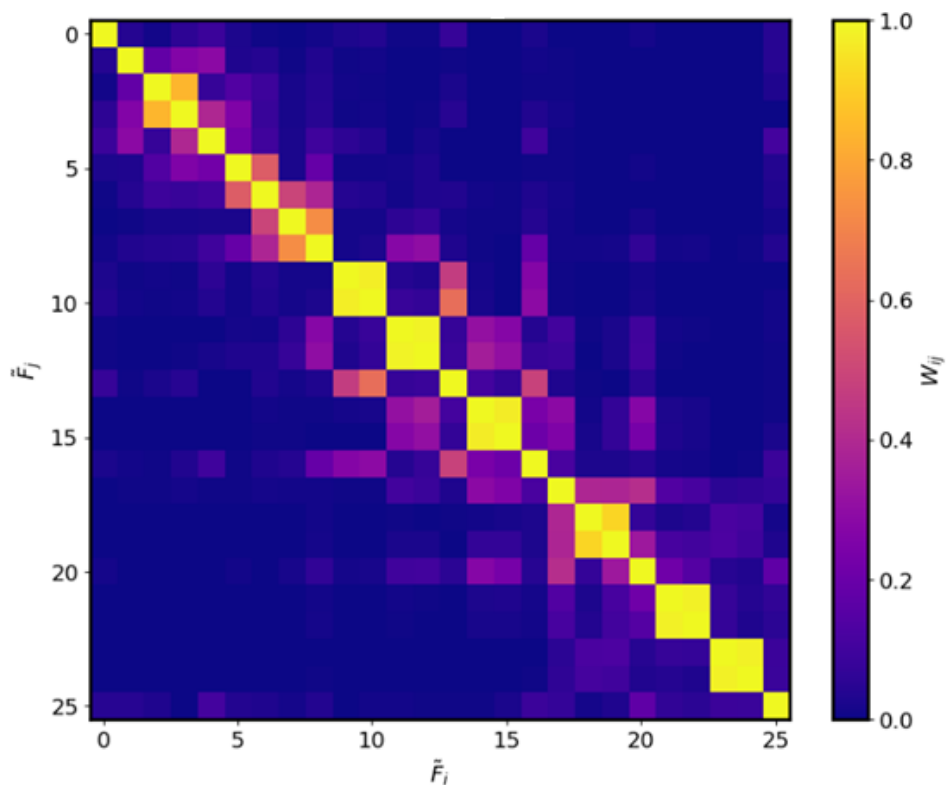
Εικόνα 6.3: Διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς (δεδομένα 1623-2008)

Έπειτα, τα διαγράμματα σχετικής συνεισφοράς και ο πίνακας W-correlation παρέχουν κάποιες επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες.



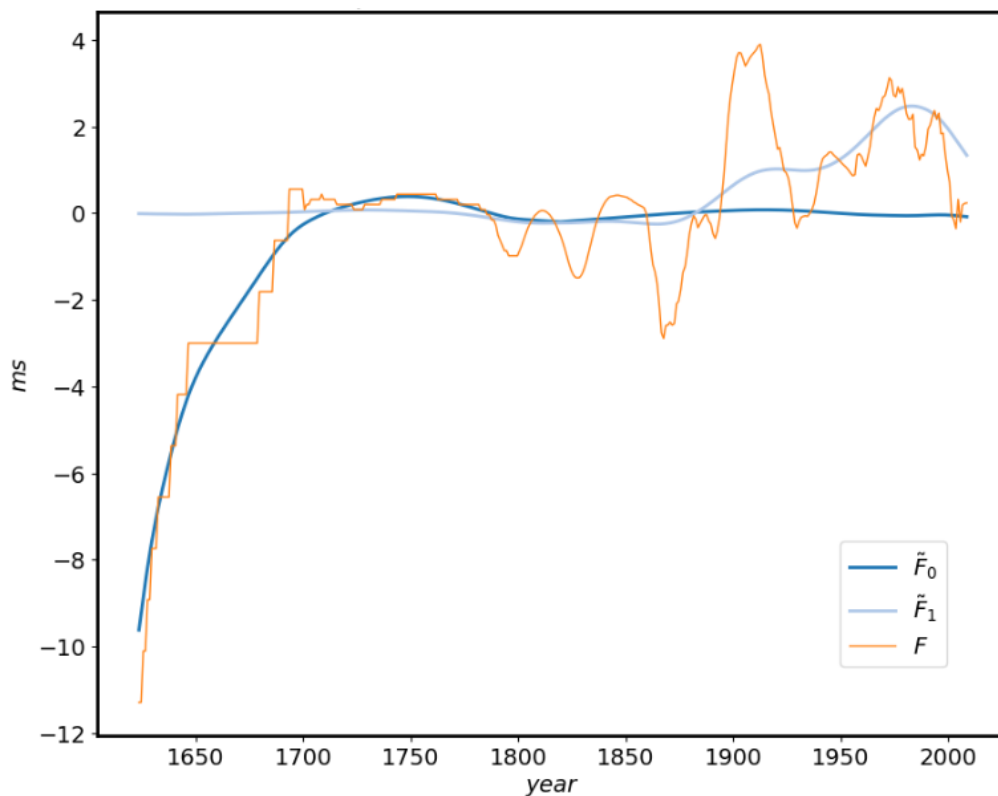
Εικόνα 6.4: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (δεδομένα 1623-2008)

Αρχικά, είναι εμφανής η μεγάλη συνεισφορά των συνιστωσών \tilde{F}_0 και \tilde{F}_1 στον πίνακα τροχιάς από το διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς, συνεπώς είναι αρκετά πιθανό να συνθέτουν μαζί την τάση της σειράς. Ο ισχυρισμός αυτός επιβεβαιώνεται και από τον πίνακα W-correlation (Εικόνα 6.5), όπου δεν φαίνεται να σχετίζονται με κάποια άλλη συνιστώσα.



Εικόνα 6.5: W-correlation πίνακας (δεδομένα 1623-2008)

Πράγματι, παρατηρώντας το διάγραμμα της Εικόνας 6.6, οι συνιστώσες αυτές ακολουθούν την πορεία της τάσης της χρονοσειράς.

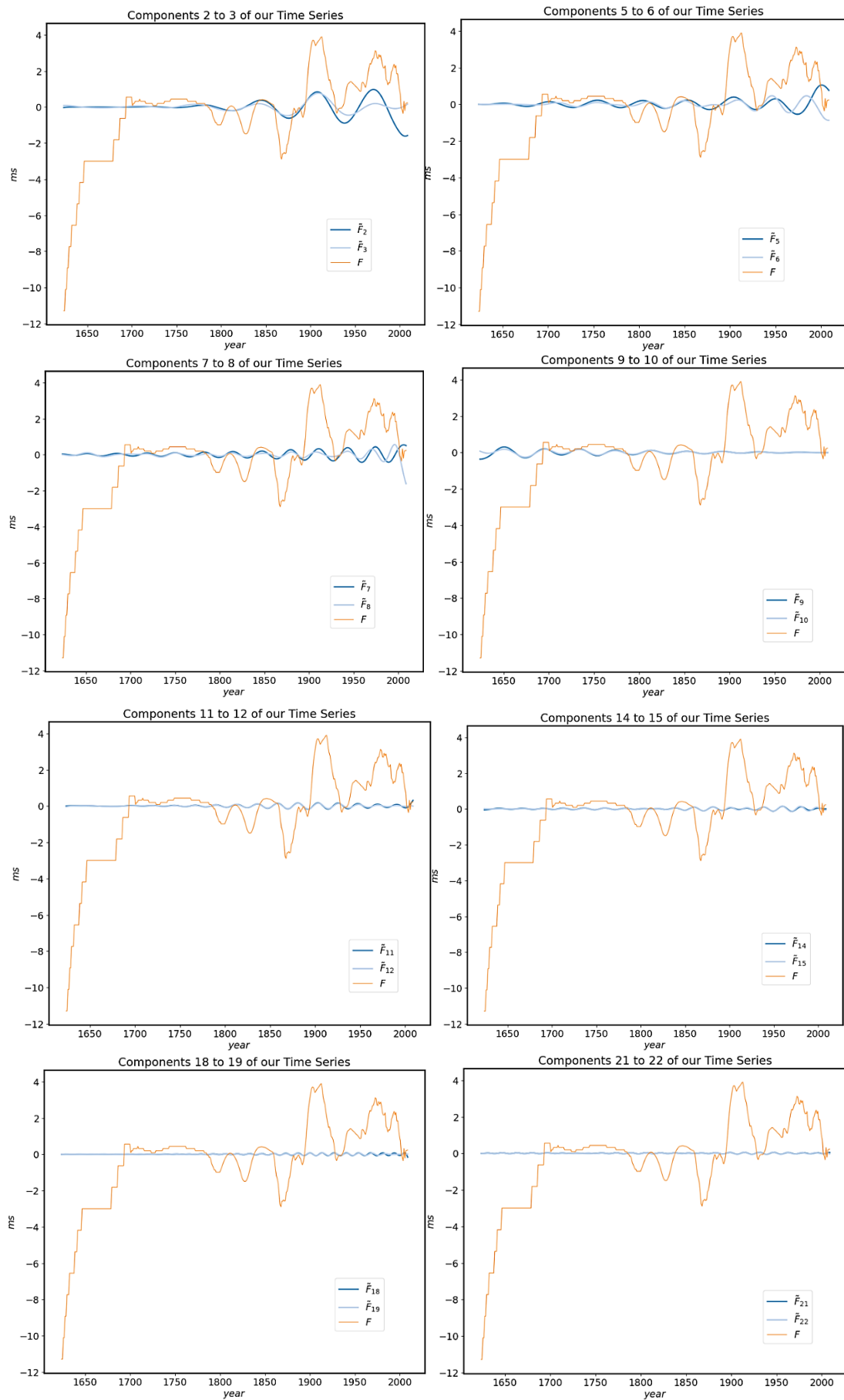


Εικόνα 6.6: Διάγραμμα 2 πρώτων συνιστωσών (δεδομένα 1623-2008)

Όσον αφορά τις υπόλοιπες συνιστώσες, είναι χρήσιμο να εξεταστεί πιο λεπτομερώς ο πίνακας W-correlation. Ξεκινώντας από τις συνιστώσες \tilde{F}_2 και \tilde{F}_3 παρατηρείται ότι η τιμή συσχέτισης τους βρίσκεται κοντά στο 0.8. Η τιμή αυτή μπορεί να θεωρηθεί αρκετά καλή για να ομαδοποιηθούν μαζί, τουλάχιστον για την τάξη ακρίβειας που αναμένεται στα συγκεκριμένα δεδομένα. Το ίδιο διαπιστώνεται και για τις συνιστώσες \tilde{F}_7 και \tilde{F}_8 .

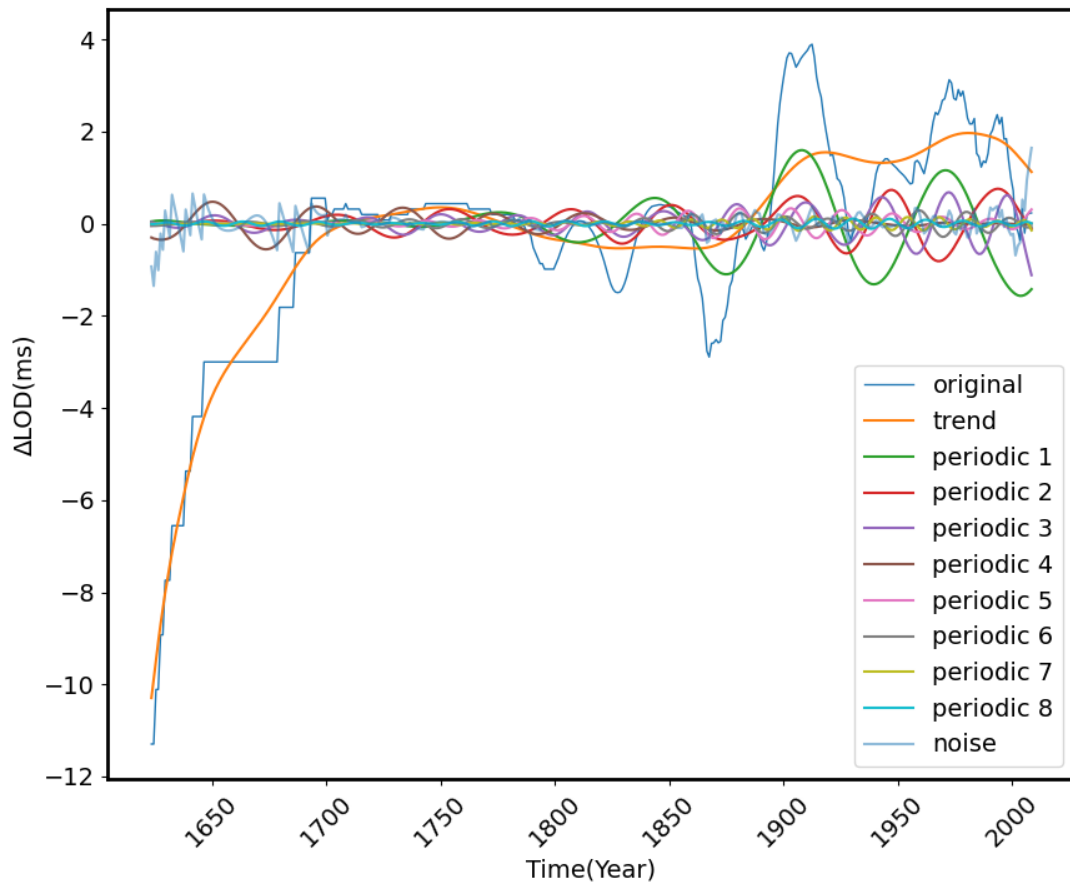
Έπειτα, για τα ζεύγη συνιστωσών, \tilde{F}_9 - \tilde{F}_{10} , \tilde{F}_{11} - \tilde{F}_{12} , \tilde{F}_{14} - \tilde{F}_{15} , \tilde{F}_{18} - \tilde{F}_{19} και \tilde{F}_{21} - \tilde{F}_{22} , η συσχέτιση τους είναι αρκετά υψηλή (σχεδόν 1), ενώ οι συνιστώσες που περισσεύουν συγκαταλέγονται στο θόρυβο.

Η συσχέτιση των συνιστωσών αυτών μπορεί να ελεγχθεί και οπτικά από τα διαγράμματα της Εικόνας 6.7.



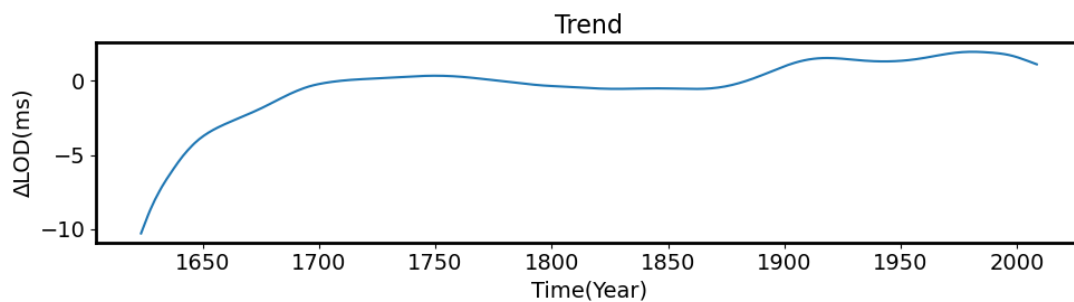
Εικόνα 6.7: Διαγράμματα υπό μελέτη συνιστωσών (δεδομένα 1623-2008)

Συμπερασματικά, κάνοντας την ομαδοποίηση που προαναφέρθηκε προέκυψαν οι περιοδικότητες που περιλαμβάνονται στο υπό μελέτη σήμα και παρουσιάζονται στις ακόλουθες εικόνες.

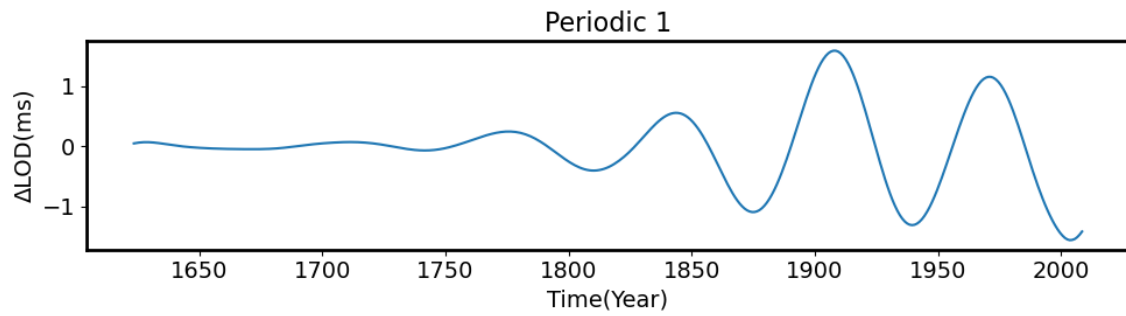


Εικόνα 6.8: Οι ομαδοποιημένες συνιστώσες (τάση, περιοδικότητες, θόρυβος) της χρονοσειράς (δεδομένα 1623-2008)

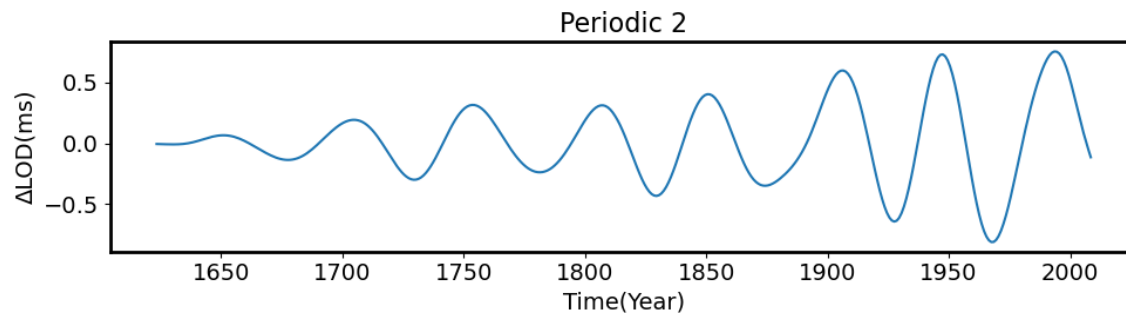
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των περιοδικοτήτων όπου απεικονίζονται η κάθε μια ξεχωριστά.



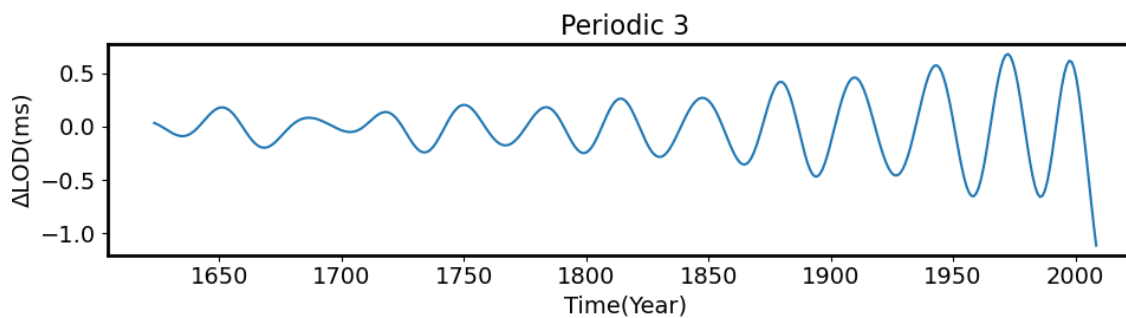
Εικόνα 6.9: Τάση χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



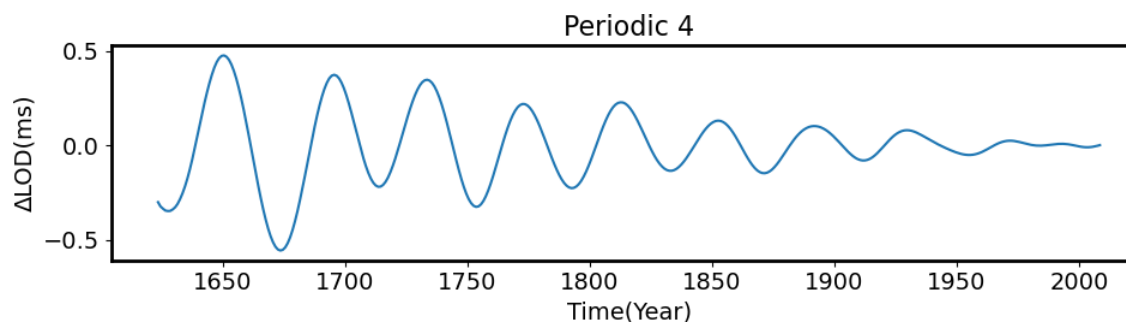
Εικόνα 6.10: Η 1^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



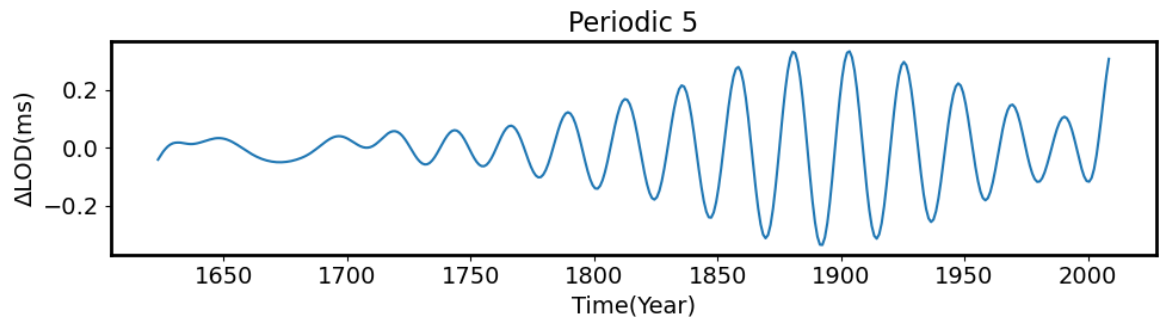
Εικόνα 6.11: Η 2^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



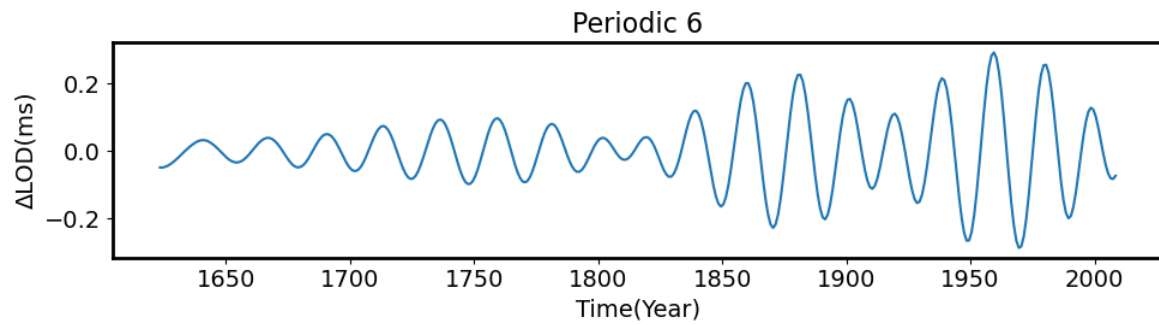
Εικόνα 6.12: Η 3^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



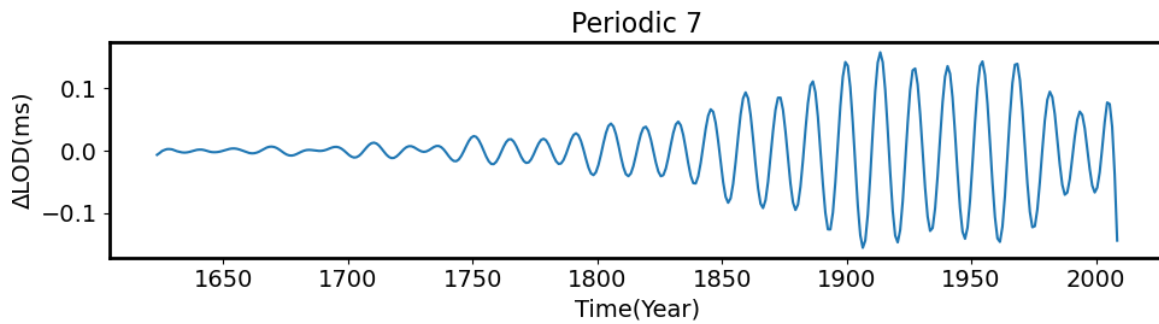
Εικόνα 6.13: Η 4^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



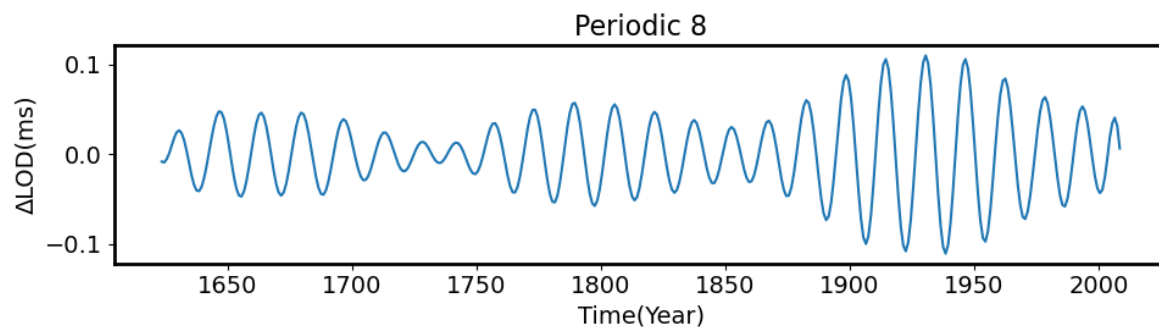
Εικόνα 6.14: Η 5^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



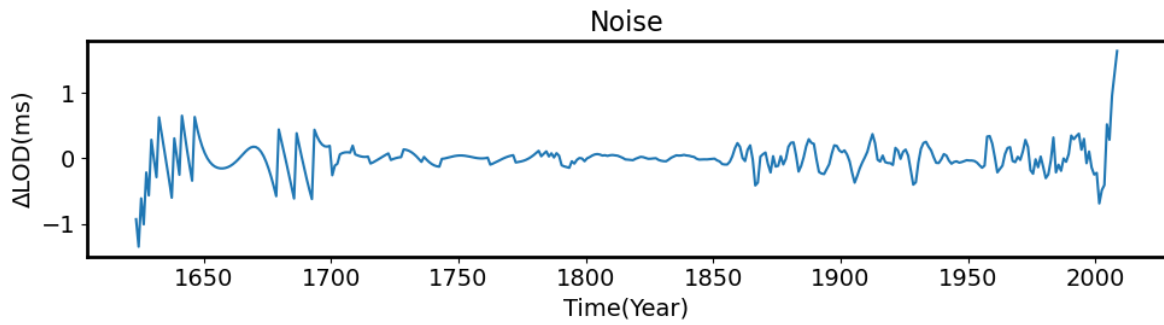
Εικόνα 6.15: Η 6^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



Εικόνα 6.16: Η 7^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)



Εικόνα 6.17: Η 8^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)

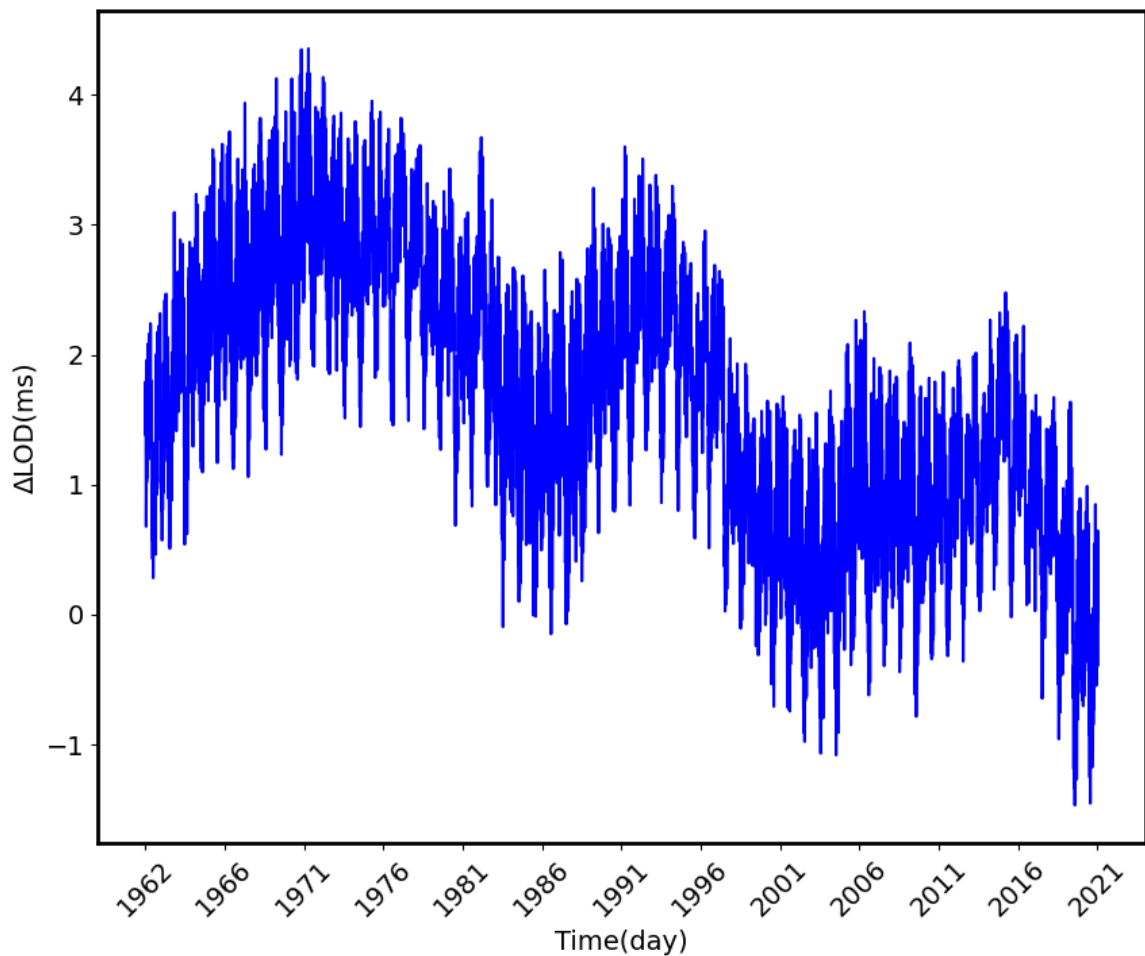


Εικόνα 6.18: Ο θόρυβος της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1623-2008)

6.2. Δεδομένα από 1962 έως 2022

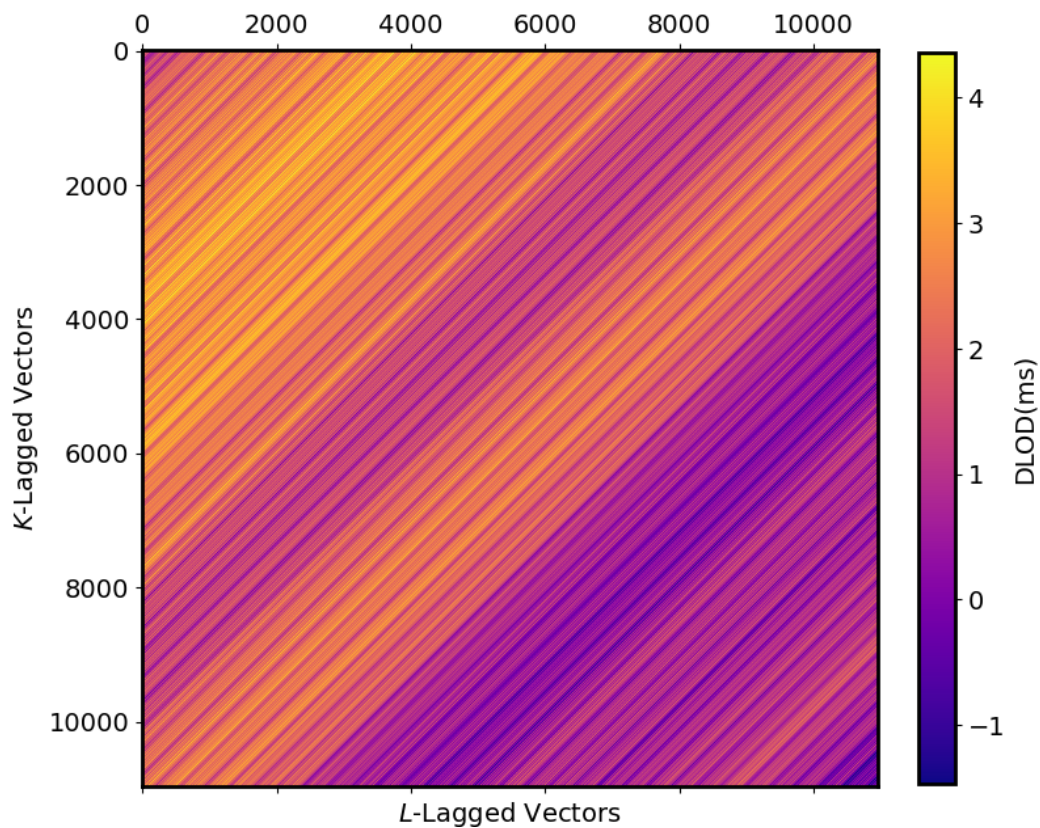
Αφού έγινε η ανάλυση της μικρής χρονοσειράς, υπάρχει πλέον μια γενική ιδέα για το τι αναμένεται να προκύψει και στη χρονοσειρά των δεδομένων από το 1962 έως το 2022. Φυσικά, είναι λογικό η ανάλυση να καταλήξει σε καλύτερα και πιο ακριβή αποτελέσματα λόγω του μεγαλύτερου πλήθους δεδομένων και της καλύτερης ακρίβειας με την οποία έχουν υπολογιστεί.

Το διάγραμμα της εν λόγω χρονοσειράς, με πλήθος δεδομένων $N = 21916$, φαίνεται στην Εικόνα 6.19.



Εικόνα 6.19: Διάγραμμα χρονοσειράς της μεταβολής του μήκους της ημέρας ανά ημέρα, για την περίοδο 1962 έως 2022

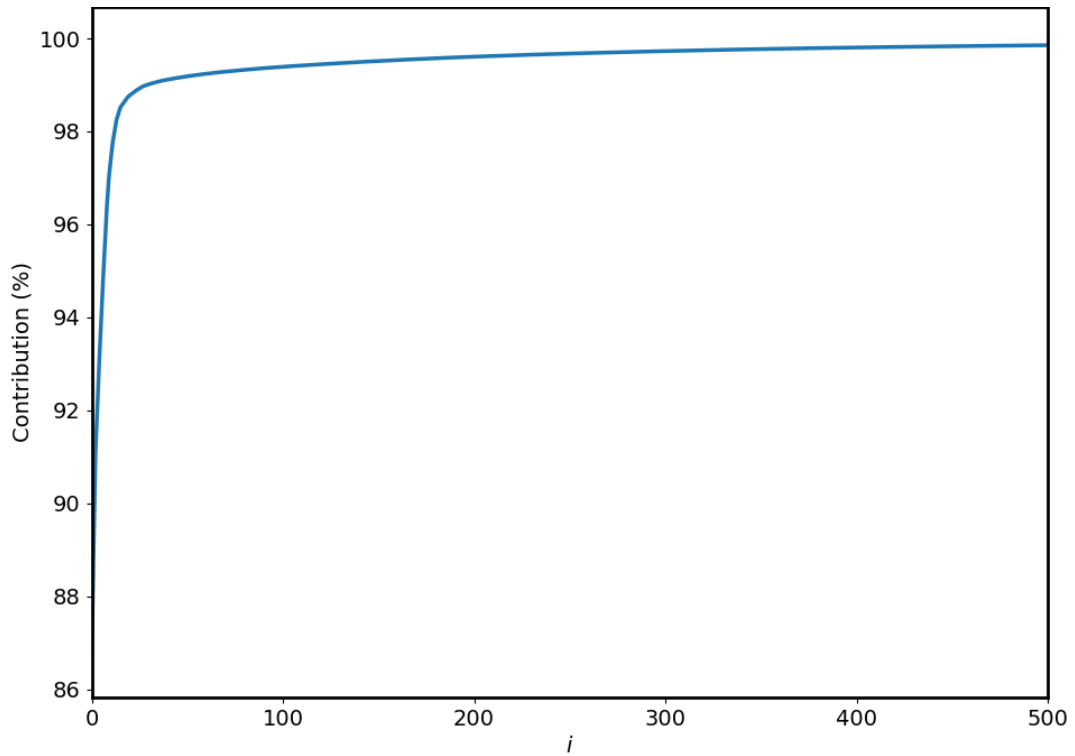
Ξεκινώντας λοιπόν με την ίδια μεθοδολογία, κατασκευάζεται ο πίνακας τροχιάς \mathbf{X} , διαστάσεων 10958×10958 , εφόσον επιλέχθηκε ως μήκος παραθύρου $L = 10958$.



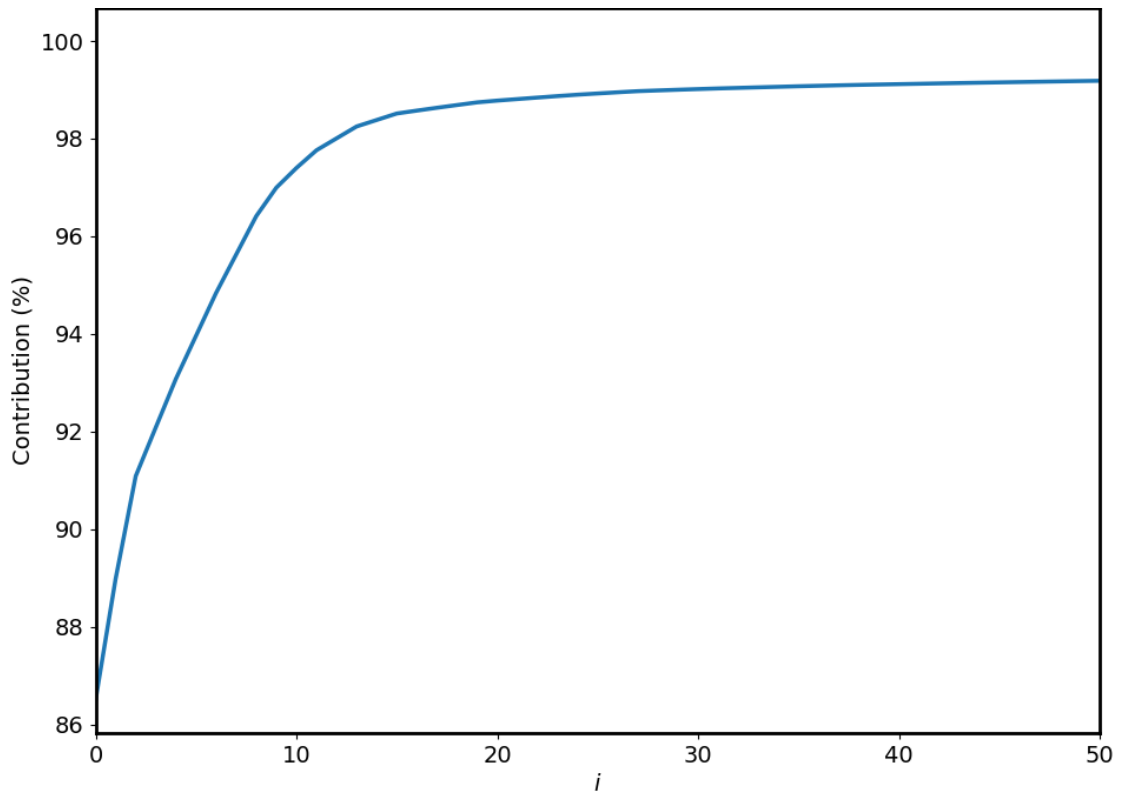
Εικόνα 6.20: Αναπαράσταση της αντιδιαγωνιότητας του πίνακα τροχιάς \mathbf{X} (δεδομένα 1962-2022)

Αρχικά, με την εφαρμογή της SVD και τον υπολογισμό του πίνακα Σ , κατασκευάστηκαν τα διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς, όπως παρουσιάζονται παρακάτω.

Συνεπώς, εμφανίζοντας τις 500 πρώτες συνιστώσες, φαίνεται ότι τη συνολική σειρά τη συνθέτουν κυρίως οι 50 πρώτες συνιστώσες (καθώς δίνουν την περισσότερη συνεισφορά). Συνεπώς, σε αυτές θα πρέπει να επικεντρωθεί περισσότερο η μελέτη.



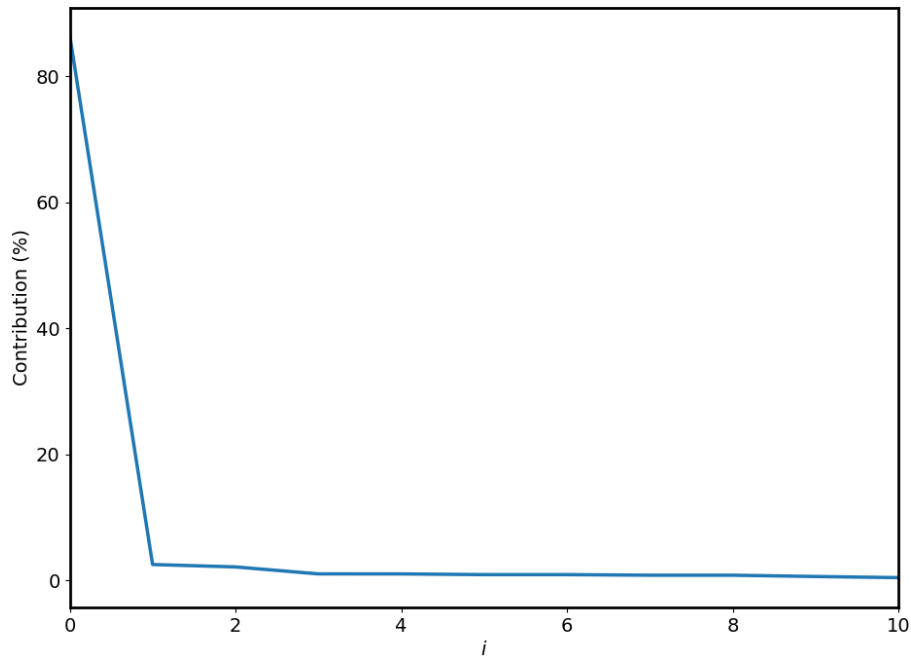
Εικόνα 6.21: Διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς για τις 500 πρώτες συνιστώσες (δεδομένα 1962-2022)



Εικόνα 6.22: Διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς για τις 50 πρώτες συνιστώσες (δεδομένα 1962-2022)

Έπειτα, από το διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς (Εικόνα 6.23), φαίνεται ότι η περισσότερη συνεισφορά οφείλεται στην πρώτη συνιστώσα. Αυτό προδιαθέτει ότι η

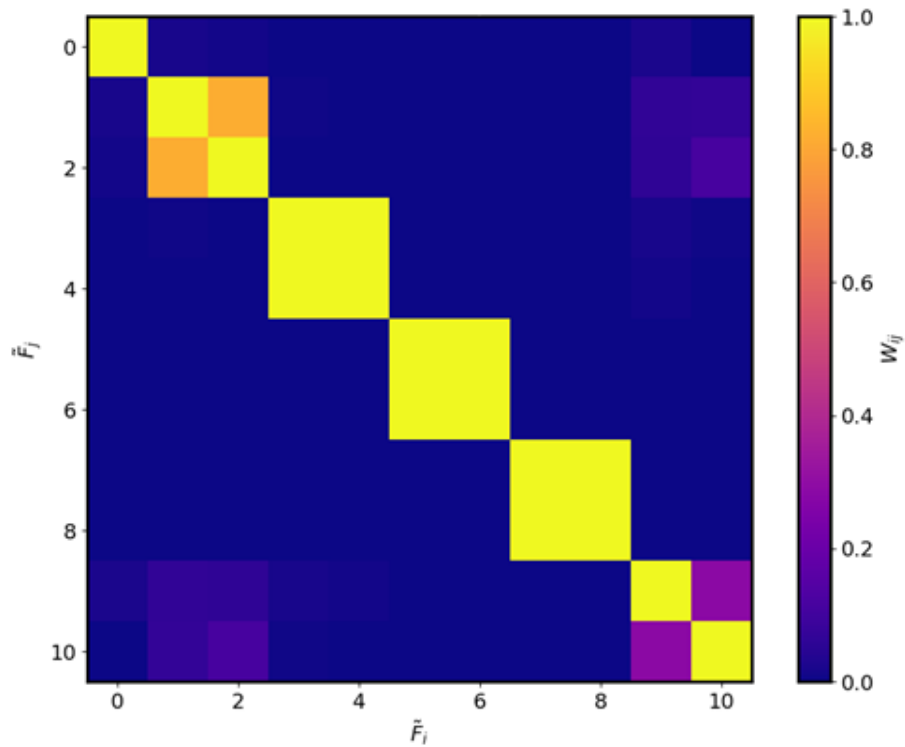
συνιστώσα \tilde{F}_0 αποτελεί την τάση της σειράς. Περαιτέρω πληροφορίες για τις συνιστώσες συλλέγονται στη συνέχεια από τον πίνακα W-correlation.



Εικόνα 6.23: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς για τις 10 πρώτες συνιστώσες (δεδομένα 1962-2022)

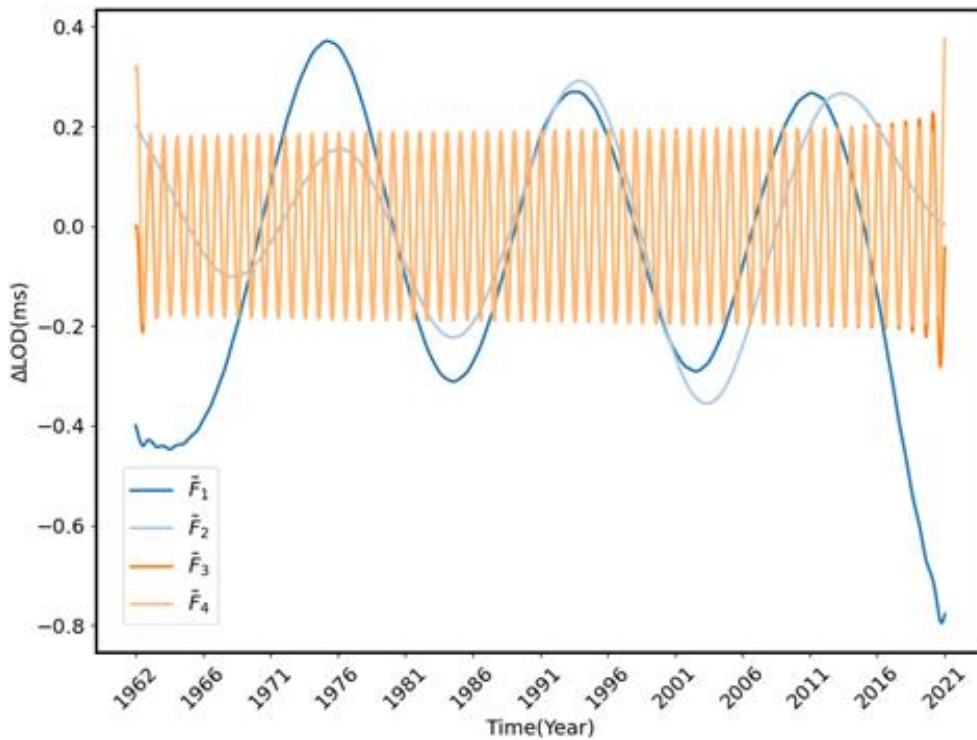
Λόγω του μεγάλου όγκου των δεδομένων, η ανάλυση θα πρέπει να γίνει πιο λεπτομερής και να εξεταστεί ο πίνακας W-correlation ανά 10 περίπου συνιστώσες σε συνδυασμό με τα διαγράμματα των αντίστοιχων χρονοσειρών τους.

Οπότε ξεκινώντας με τις 10 πρώτες συνιστώσες, ο πίνακας W-correlation απεικονίζεται ως:

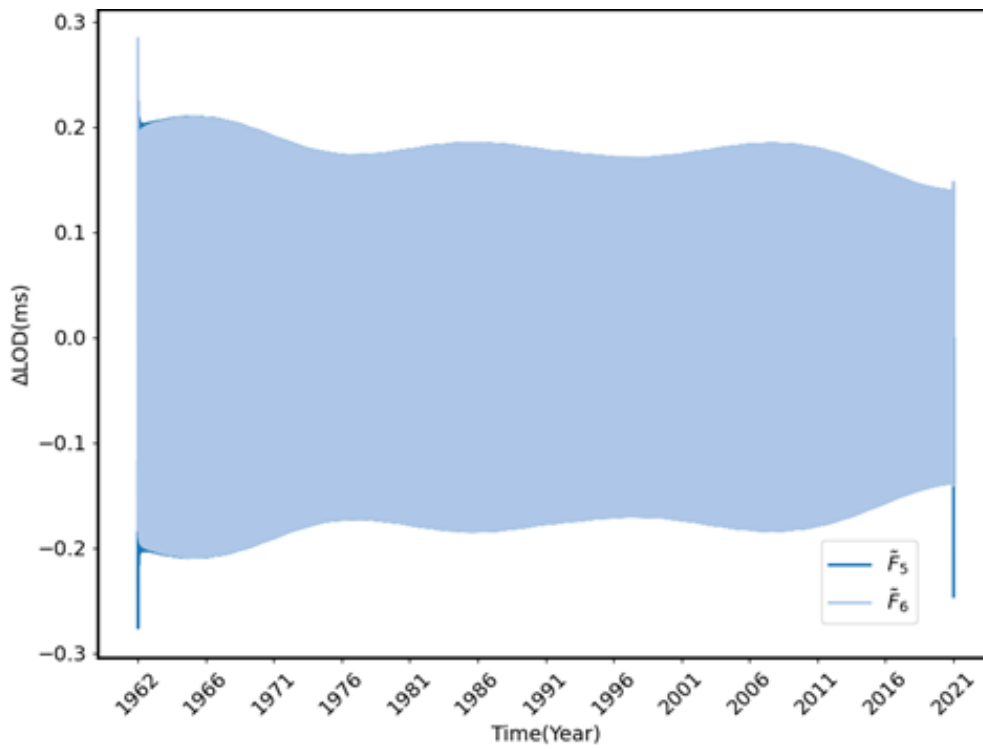


Εικόνα 6.24: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από \tilde{F}_0 έως \tilde{F}_{10} (δεδομένα 1962-2022)

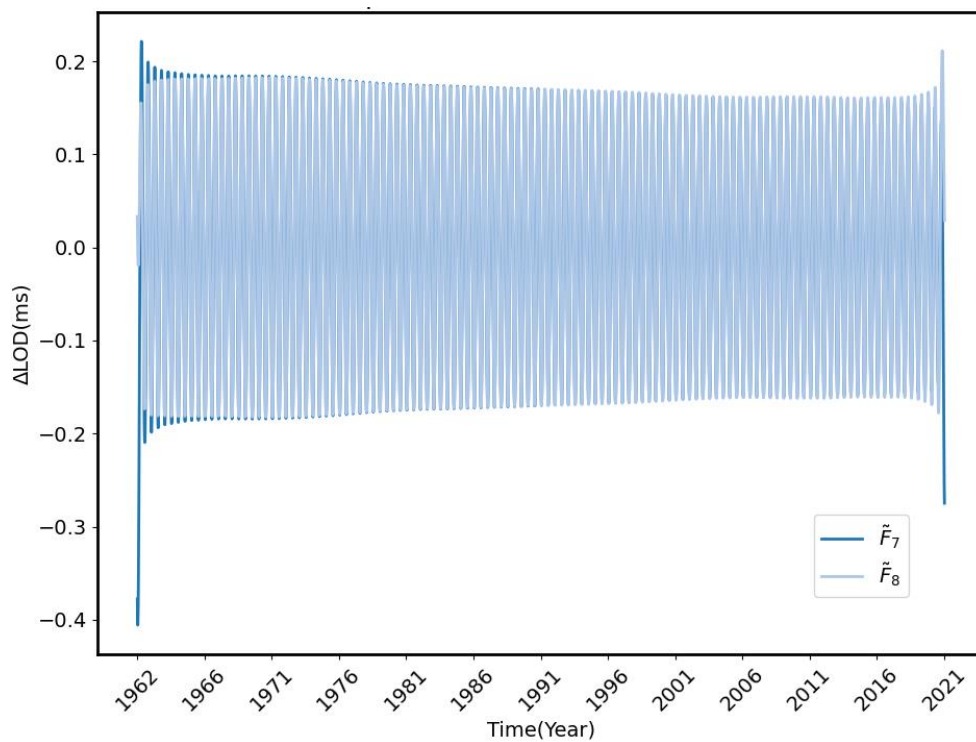
Όπως διαπιστώθηκε και προηγουμένως, η συνιστώσα \tilde{F}_0 αποτελεί την τάση της σειράς. Οι συνιστώσες \tilde{F}_1 έως και τη \tilde{F}_8 , έχουν ισχυρή συσχέτιση ανά δύο μεταξύ τους, επομένως είναι συνετό να ομαδοποιηθούν ανά δύο (\tilde{F}_1 με \tilde{F}_2 , \tilde{F}_3 με \tilde{F}_4 κ.ο.κ.). Οι ισχυρισμοί επιβεβαιώνονται και οπτικά, ελέγχοντας τα παρακάτω διαγράμματα.



Εικόνα 6.25: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_1 έως \tilde{F}_4 (δεδομένα 1962-2022)

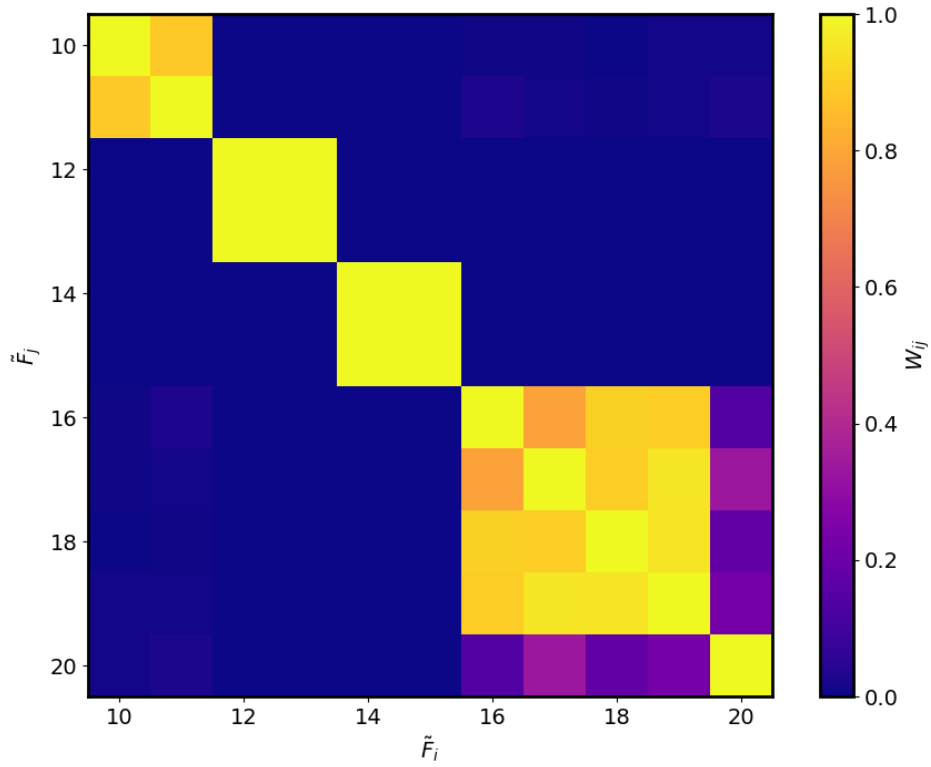


Εικόνα 6.26: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_5 και \tilde{F}_6 (δεδομένα 1962-2022)



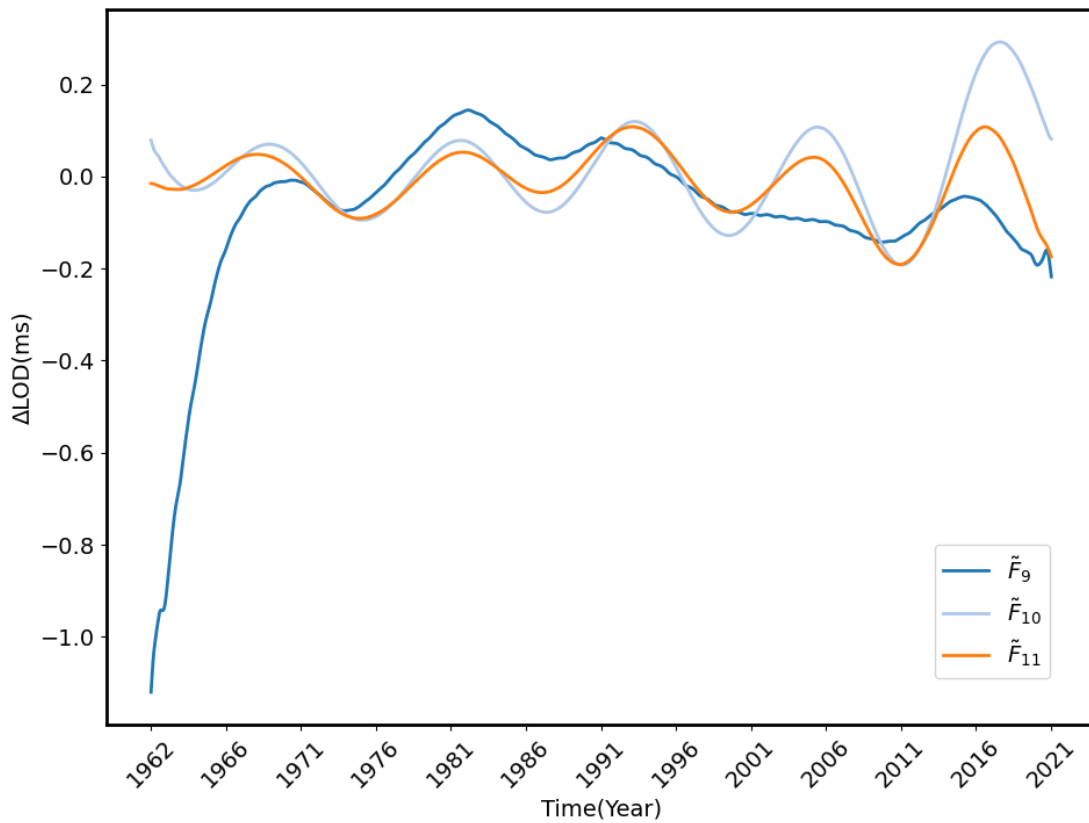
Εικόνα 6.27: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_7 και \tilde{F}_8 (δεδομένα 1962-2022)

Συνεχίζοντας, με τον πίνακα W -correlation των επόμενων 10 συνιστωσών (Εικόνα 6.28), φαίνεται ότι οι συνιστώσες από τη \tilde{F}_{10} έως και τη \tilde{F}_{15} έχουν συσχέτιση κοντά στο 1.

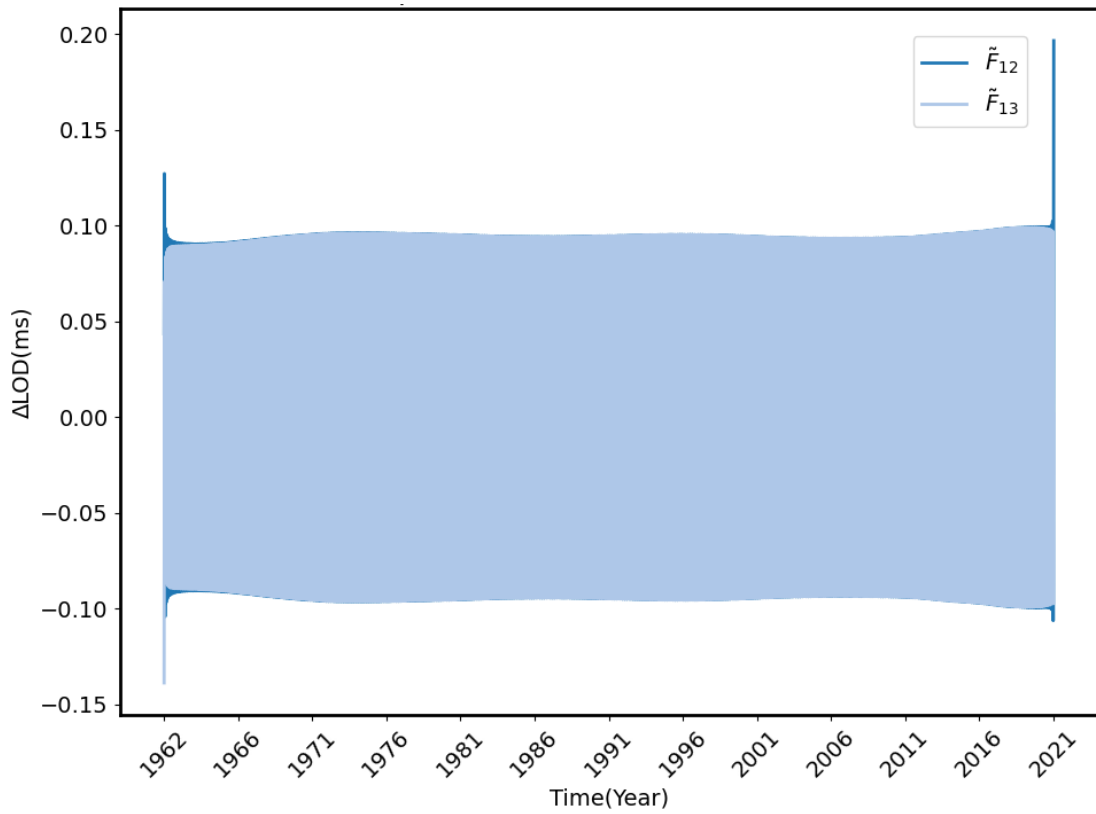


Εικόνα 6.28: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από \tilde{F}_{10} έως \tilde{F}_{20} (δεδομένα 1962-2022)

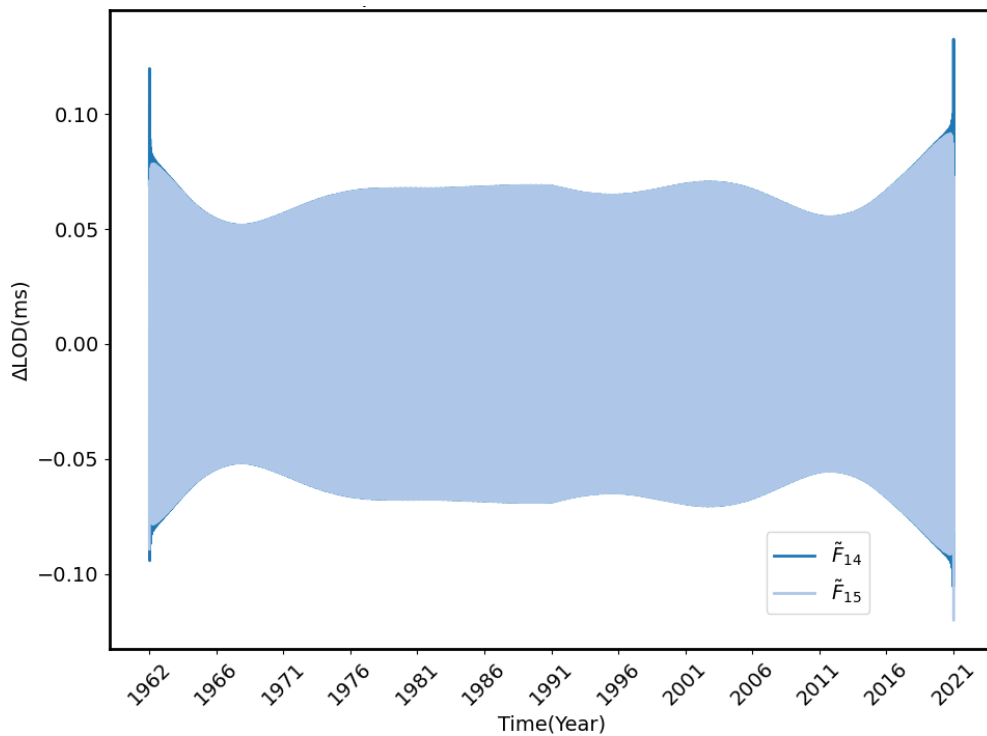
Παρουσιάζονται και τα αντίστοιχα διαγράμματα.



Εικόνα 6.29: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_9 , \tilde{F}_{10} και \tilde{F}_{11} (δεδομένα 1962-2022)



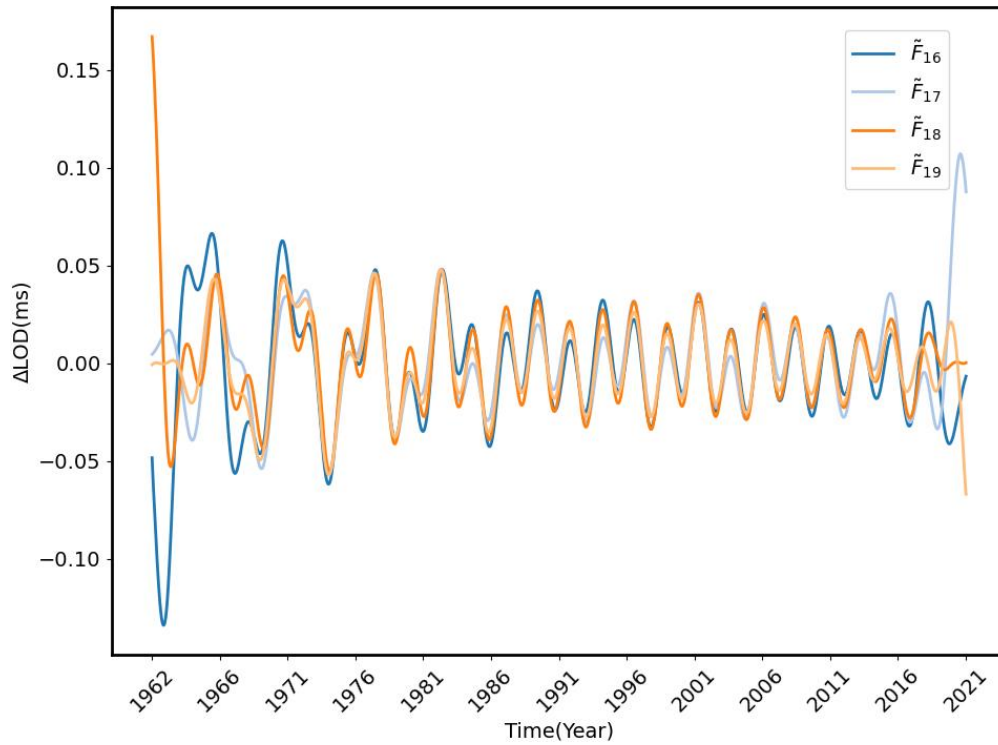
Εικόνα 6.30: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{12} και \tilde{F}_{13} (δεδομένα 1962-2022)



Εικόνα 6.31: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{14} και \tilde{F}_{15} (δεδομένα 1962-2022)

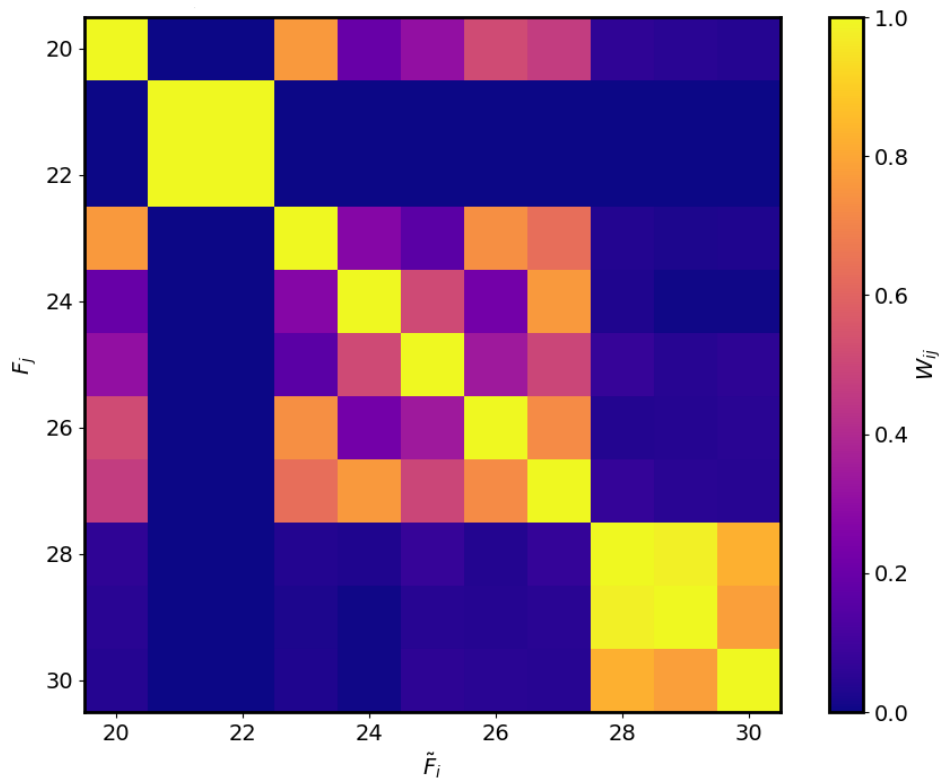
Όσον αφορά τις συνιστώσες από την \tilde{F}_{16} έως και την \tilde{F}_{19} , έχουν υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους με τιμές από 0.8 έως 1. Από το αντίστοιχο διάγραμμά τους διαπιστώνεται ότι όντως μπορούν να ομαδοποιηθούν και οι τέσσερις μαζί. Οι διαφορές που

εντοπίζονται στα άκρα, μπορούν να αγνοηθούν καθώς δεν θα επηρεάσουν σε μεγάλο βαθμό την εικόνα της περιοδικότητας αυτής.



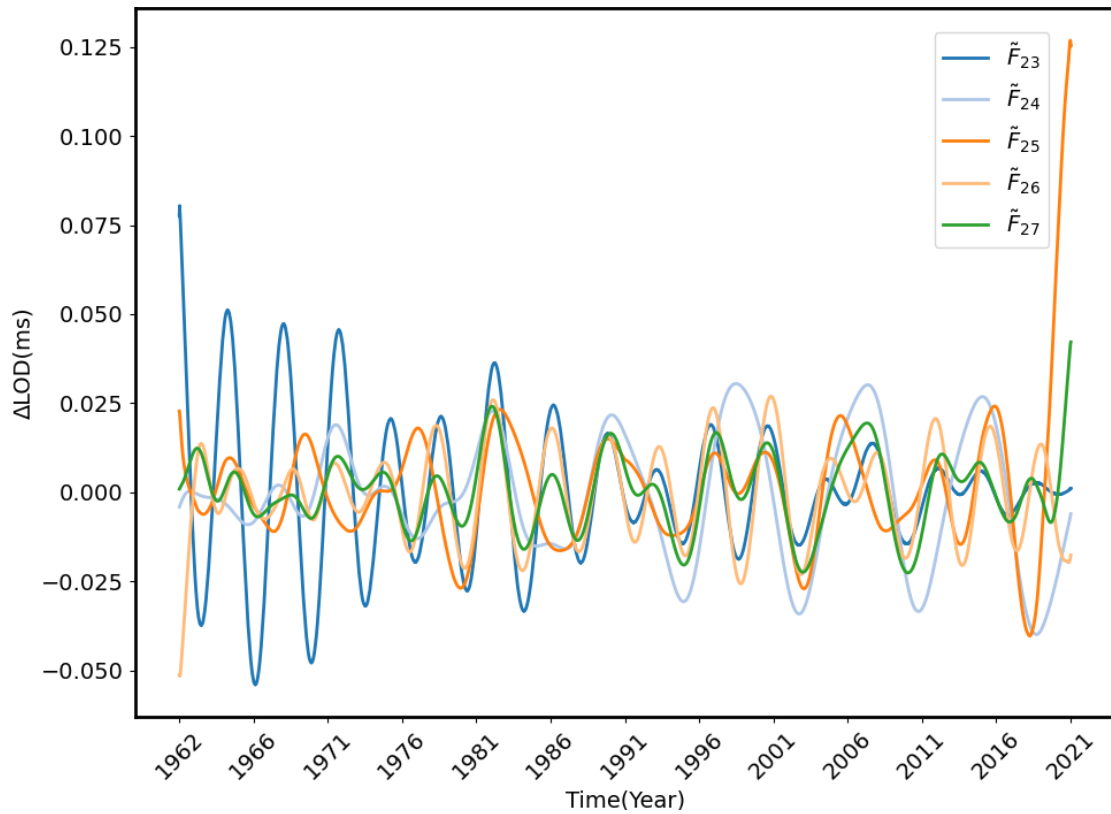
Εικόνα 6.32: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{16} έως \tilde{F}_{19} (δεδομένα 1962-2022)

Συνεχίζοντας με τις επόμενες 10 συνιστώσες, ο πίνακας W -correlation απεικονίζεται ως εξής:



Εικόνα 6.33: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από \tilde{F}_{20} έως \tilde{F}_{30} (δεδομένα 1962-2022)

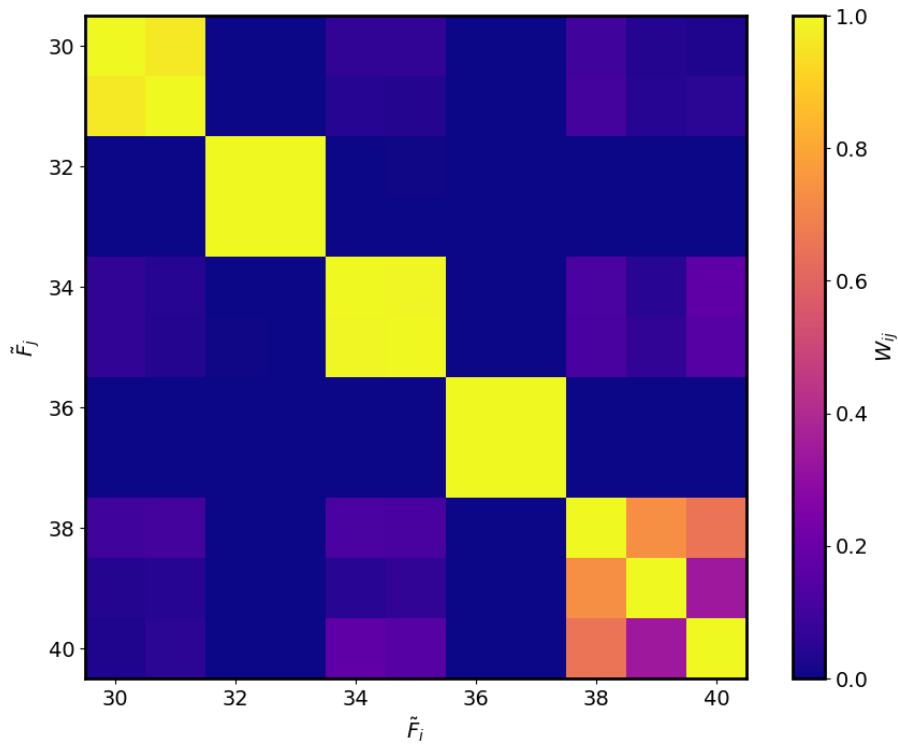
Είναι εμφανές ότι, οι συνιστώσες \tilde{F}_{21} , \tilde{F}_{22} και \tilde{F}_{28} , \tilde{F}_{29} θα πρέπει να ομαδοποιηθούν ανά δύο. Αντιθέτως, από τη συνιστώσα \tilde{F}_{23} έως και τη \tilde{F}_{27} , η κατάσταση γίνεται πιο περίπλοκη. Φαίνεται ότι δεν έχει καλή συσχέτιση κάποια από αυτές με κάποια άλλη, αλλά ούτε βρίσκονται οι τιμές τους κοντά στο μηδέν. Παρατηρώντας πιο προσεκτικά τα διαγράμματά τους, θα είναι πιο εύκολο να παρθεί κάποια απόφαση σχετικά με το αν πρέπει να ομαδοποιηθούν τελικά ή όχι.



Εικόνα 6.34: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{23} έως \tilde{F}_{27} (δεδομένα 1962-2022)

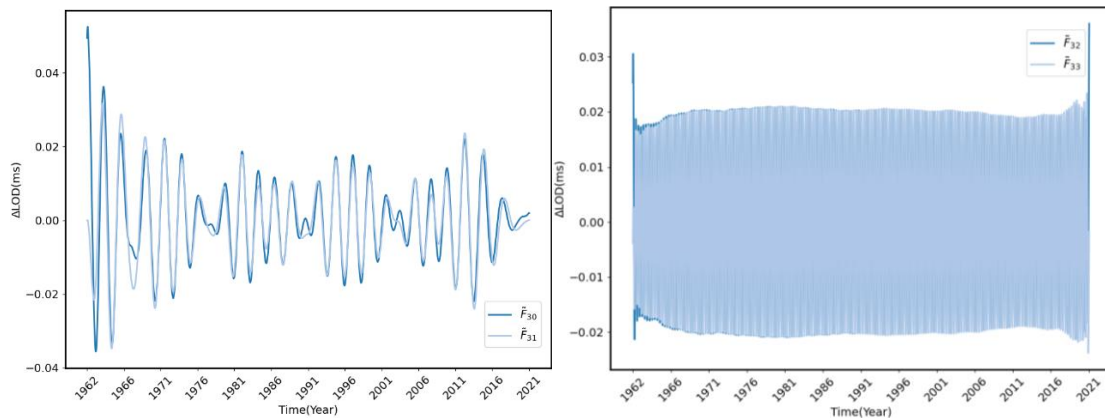
Θα μπορούσε να πει κανείς ότι, παρουσιάζουν κάποια ταύτιση μερικές από αυτές σε ορισμένα σημεία, ωστόσο δεν δημιουργούν κάποια “καθαρή” περιοδικότητα, επομένως επιλέχθηκε να αγνοηθούν και να ταξινομηθούν ως θόρυβος.

Συνεχίζοντας με τις επόμενες 10 συνιστώσες, ο πίνακας W-correlation απεικονίζεται ως εξής:

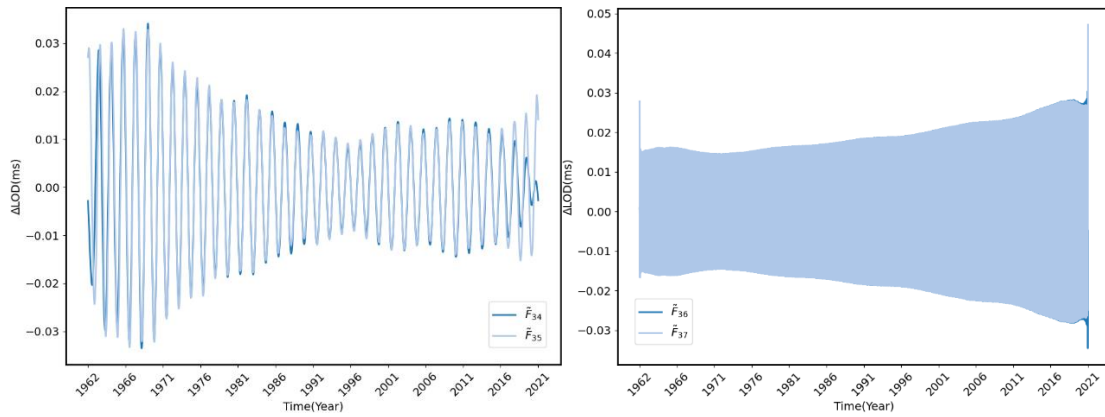


Εικόνα 6.35: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από \tilde{F}_{30} έως \tilde{F}_{40} (δεδομένα 1962-2022)

Παρατηρείται λοιπόν παρόμοιο μοτίβο με τα προηγούμενα, όπου από τη συνιστώσα \tilde{F}_{30} έως τη \tilde{F}_{37} , συσχετίζονται σχεδόν πλήρως ανά δύο μεταξύ τους. Ελέγχοντας και οπτικά τα διαγράμματά τους, προκύπτει η καλή ταύτιση.

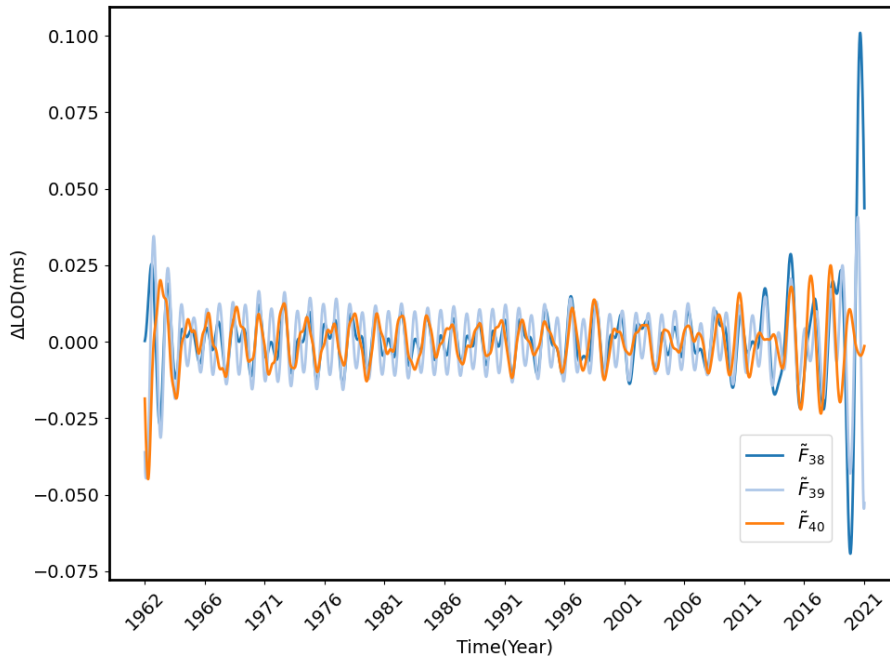


Εικόνα 6.36: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{30} και \tilde{F}_{31} (αριστερά) & \tilde{F}_{32} και \tilde{F}_{33} (δεξιά) (δεδομένα 1962-2022)



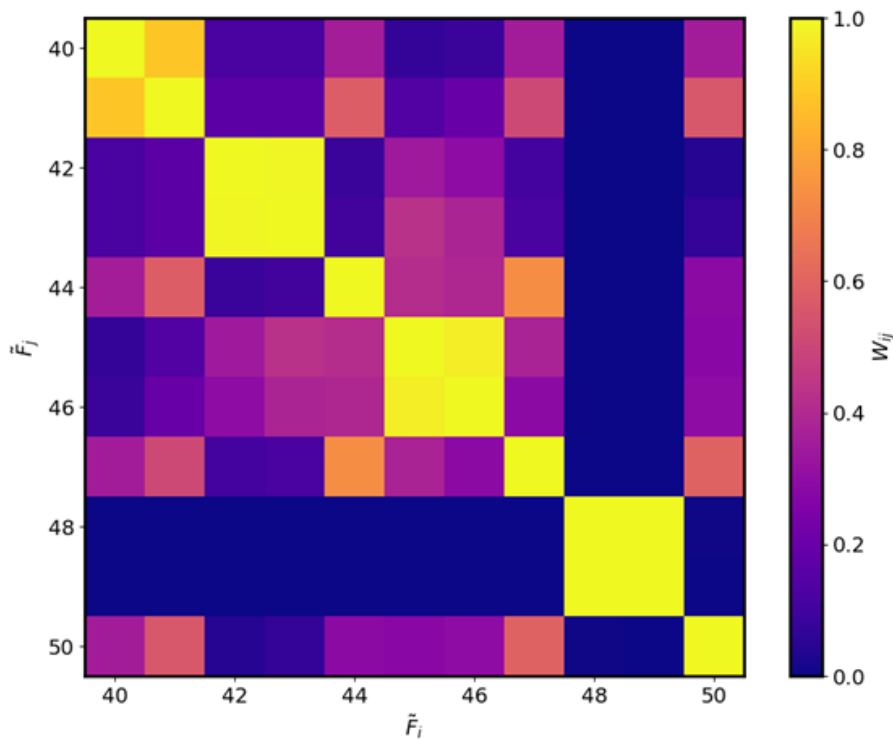
Εικόνα 6.37: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{34} και \tilde{F}_{35} (αριστερά) & \tilde{F}_{36} και \tilde{F}_{37} (δεξιά) (δεδομένα 1962-2022)

Έπειτα, οι συνιστώσες \tilde{F}_{38} έως \tilde{F}_{40} δεν έχουν τόσο καλή συσχέτιση έτσι ώστε να είναι εύκολη η ομαδοποίησή τους. Από το διάγραμμα (Εικόνα 6.38) ωστόσο, φαίνεται ότι δεν συνθέτουν κάποια καλή περιοδικότητα.



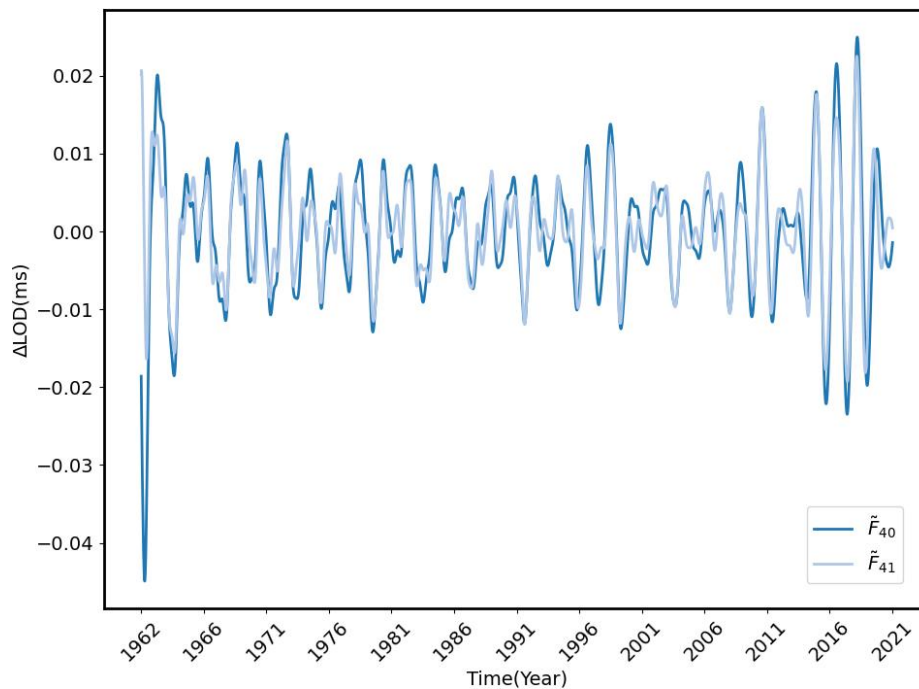
Εικόνα 6.38: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{38} έως \tilde{F}_{40} (δεδομένα 1962-2022)

Τέλος, μελετάται ο πίνακας W -correlation για τις συνιστώσες από \tilde{F}_{40} έως \tilde{F}_{50} . Διαπιστώνεται ήδη από την Εικόνα 6.39, ότι οι συνιστώσες αρχίζουν να υπερκαλύπτονται αρκετά η μία από την άλλη, κάτι που προδιαθέτει ότι οι συνιστώσες μοιάζουν περισσότερο με θόρυβο παρά με καθαρές περιοδικότητες. Επομένως, ήταν σωστή η παρατήρηση που έγινε από το διάγραμμα αθροιστικής συσχέτισης. Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν ακόμη μερικές συνιστώσες που να συνθέτουν μια καλή περιοδικότητα.



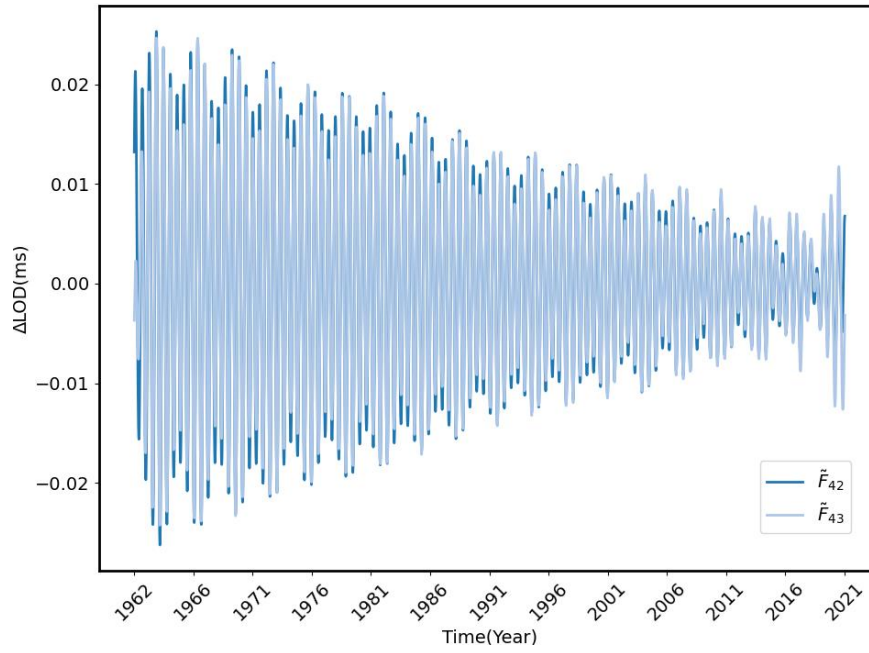
Εικόνα 6.39: W-correlation πίνακας με συνιστώσες από \tilde{F}_{40} έως \tilde{F}_{50} (δεδομένα 1962-2022)

Μελετώνται λοιπόν και τα αντίστοιχα διαγράμματα των συνιστωσών που έχουν τιμή συσχέτισης κοντά στη μονάδα.

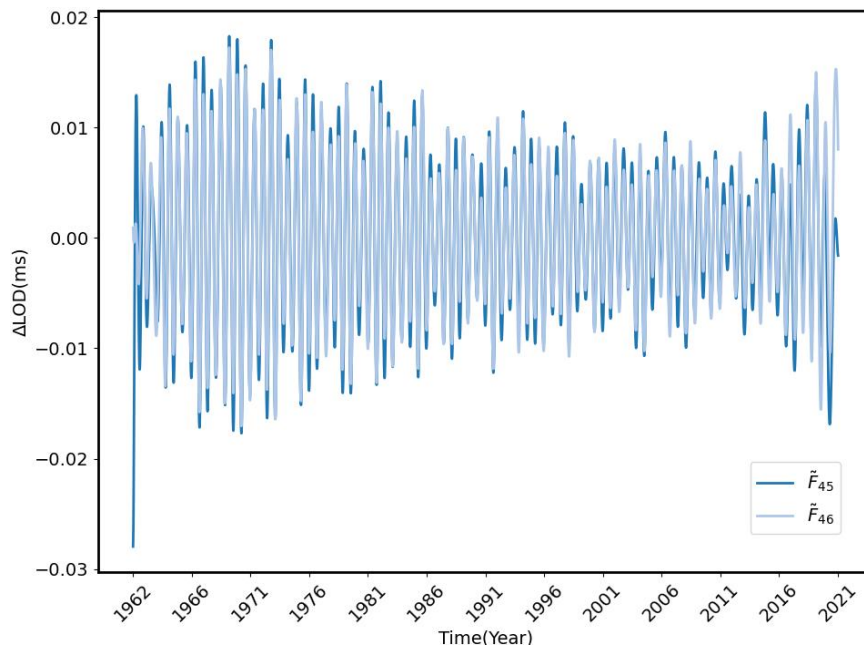


Εικόνα 6.40: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{40} και \tilde{F}_{41} (δεδομένα 1962-2022)

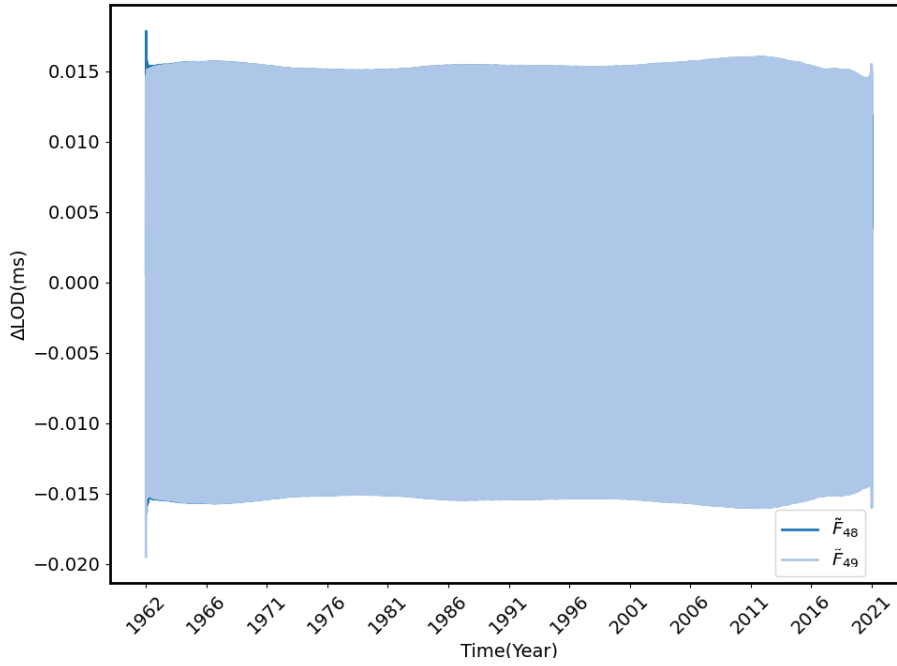
Αρχικά, παρατηρώντας τις συνιστώσες \tilde{F}_{40} και \tilde{F}_{41} , φαίνεται πράγματι να έχουν παρόμοια μορφή, ωστόσο δεν ταυτίζονται πλήρως, κάτι που δικαιολογείται από τον πίνακα W-correlation, εφόσον έχουν τιμή πιο κοντά στο 0.8 παρά στο 1. Συνεπώς, δεν επιλέγονται για ομαδοποίηση.



Εικόνα 6.41: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{42} και \tilde{F}_{43} (δεδομένα 1962-2022)



Εικόνα 6.42: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{45} και \tilde{F}_{46} (δεδομένα 1962-2022)



Εικόνα 6.43: Διάγραμμα συνιστωσών \tilde{F}_{48} και \tilde{F}_{49} (δεδομένα 1962-2022)

Τέλος, τα ζεύγη $\tilde{F}_{42} - \tilde{F}_{43}$, $\tilde{F}_{45} - \tilde{F}_{46}$ και $\tilde{F}_{48} - \tilde{F}_{49}$ ταυτίζονται σχεδόν πλήρως ανά δύο μεταξύ τους και αν ομαδοποιηθούν θα συνθέσουν καλές περιοδικότητες. Εδώ ολοκληρώνεται και η ομαδοποίηση των συνιστωσών, ταξινομώντας τις υπόλοιπες συνιστώσες ως θόρυβο.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι συνιστώσες ομαδοποιήθηκαν ως εξής:

$$Trend = \tilde{F}_0$$

$$Periodic\ 1 = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2$$

$$Periodic\ 2 = \tilde{F}_3 + \tilde{F}_4$$

$$Periodic\ 3 = \tilde{F}_5 + \tilde{F}_6$$

$$Periodic\ 4 = \tilde{F}_7 + \tilde{F}_8$$

$$Periodic\ 5 = \tilde{F}_{10} + \tilde{F}_{11}$$

$$Periodic\ 6 = \tilde{F}_{12} + \tilde{F}_{13}$$

$$Periodic\ 7 = \tilde{F}_{14} + \tilde{F}_{15}$$

$$Periodic\ 8 = \tilde{F}_{16} + \tilde{F}_{17} + \tilde{F}_{18} + \tilde{F}_{19}$$

$$Periodic\ 9 = \tilde{F}_{21} + \tilde{F}_{22}$$

$$Periodic\ 10 = \tilde{F}_{28} + \tilde{F}_{29}$$

$$Periodic\ 11 = \tilde{F}_{30} + \tilde{F}_{31}$$

$$Periodic\ 12 = \tilde{F}_{32} + \tilde{F}_{33}$$

$$Periodic\ 13 = \tilde{F}_{34} + \tilde{F}_{35}$$

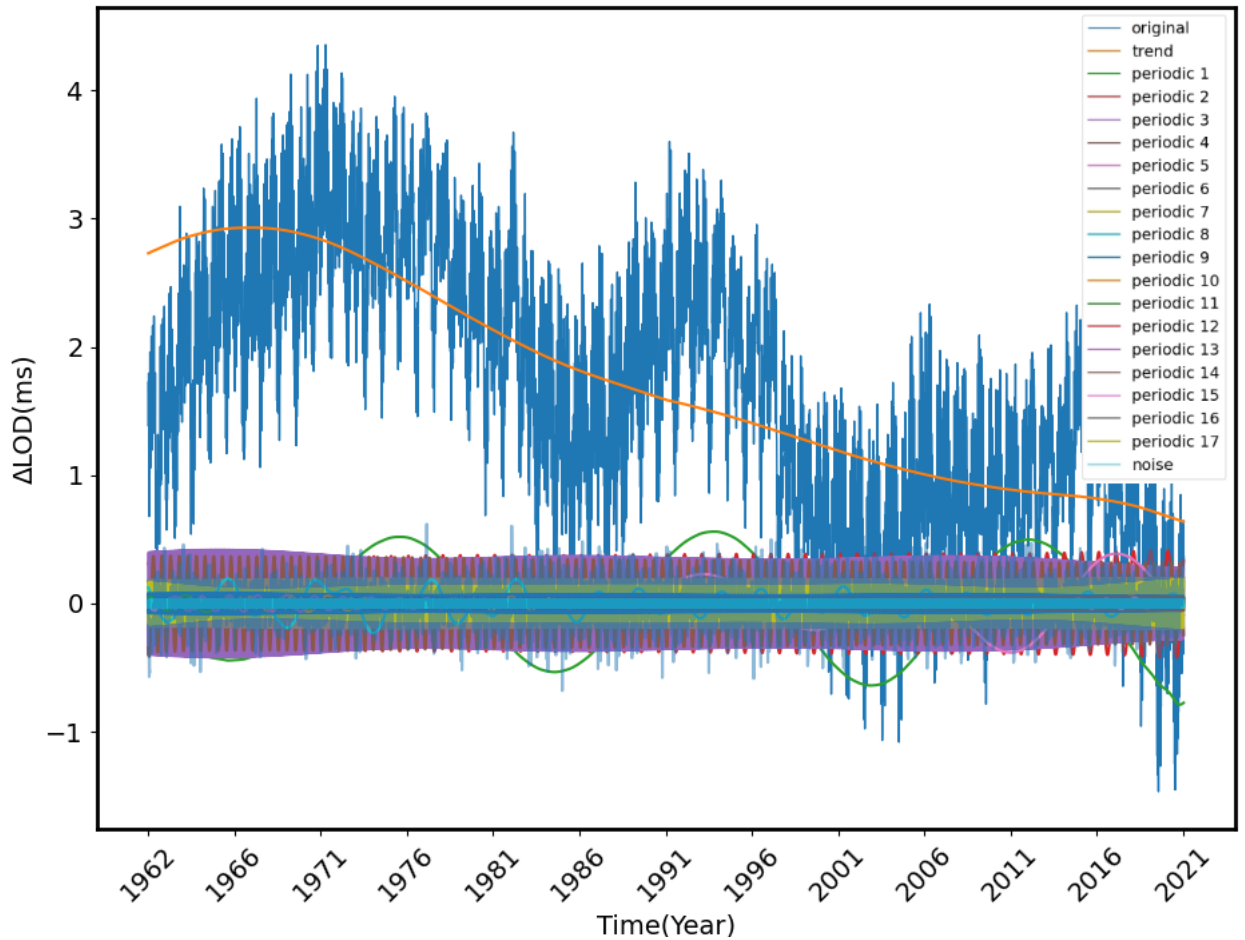
$$Periodic\ 14 = \tilde{F}_{36} + \tilde{F}_{37}$$

$$Periodic\ 15 = \tilde{F}_{42} + \tilde{F}_{43}$$

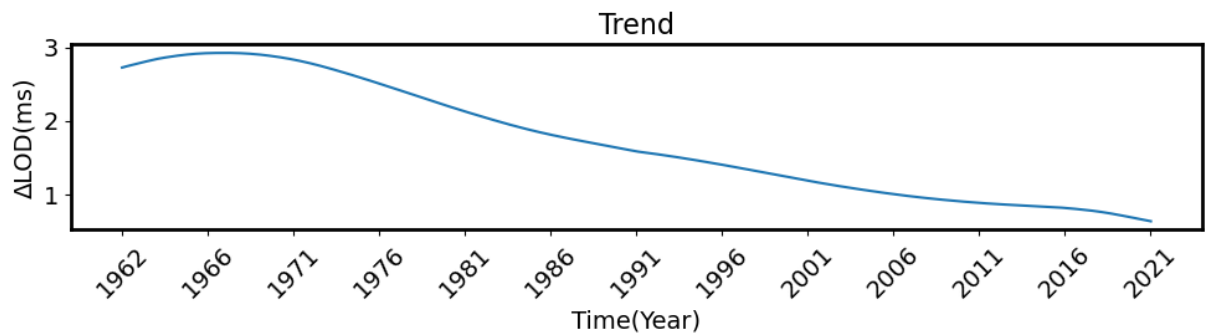
$$Periodic\ 16 = \tilde{F}_{45} + \tilde{F}_{46}$$

$$Periodic\ 17 = \tilde{F}_{48} + \tilde{F}_{49}$$

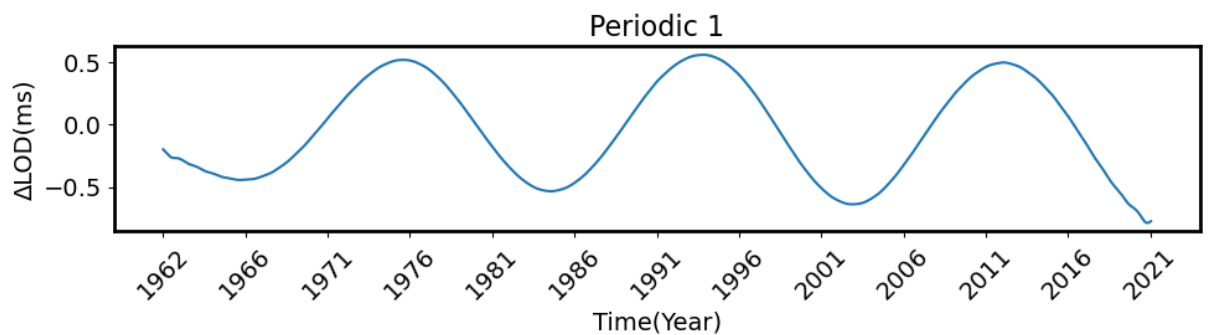
Και προέκυψαν τα παρακάτω διαγράμματα:



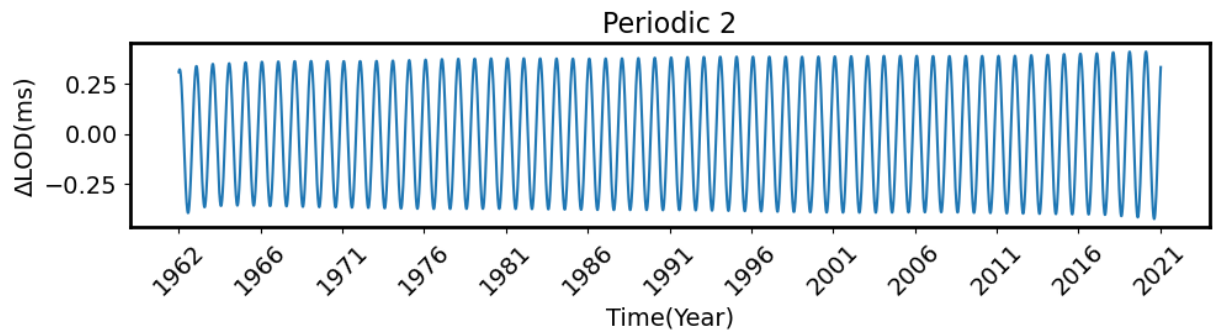
Εικόνα 6.44: Οι ομαδοποιημένες συνιστώσες (τάση, περιοδικότητες, θόρυβος) της χρονοσειράς (δεδομένα 1962-2022)



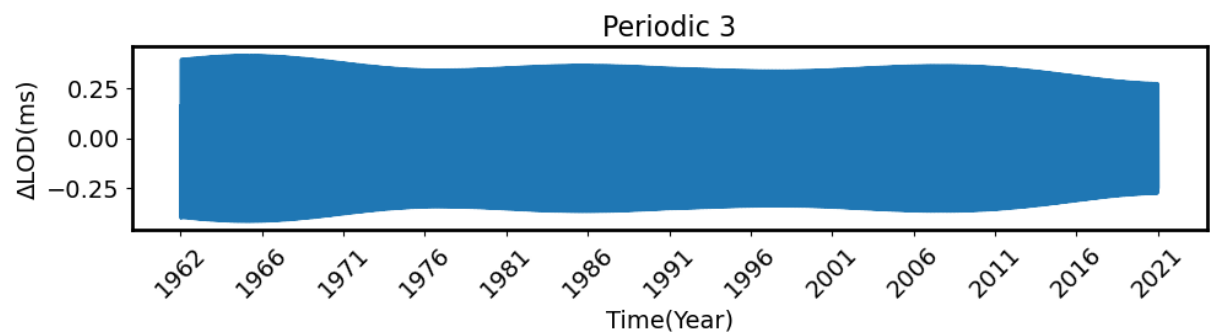
Εικόνα 6.45: Τάση χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



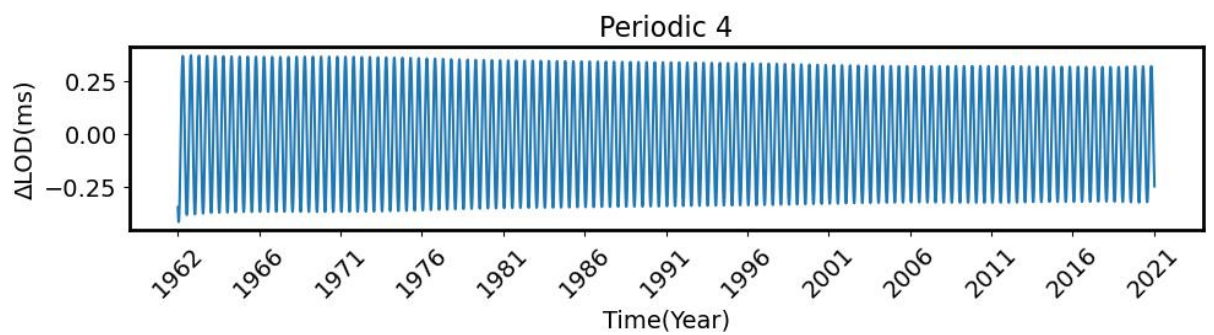
Εικόνα 6.46: Η 1^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



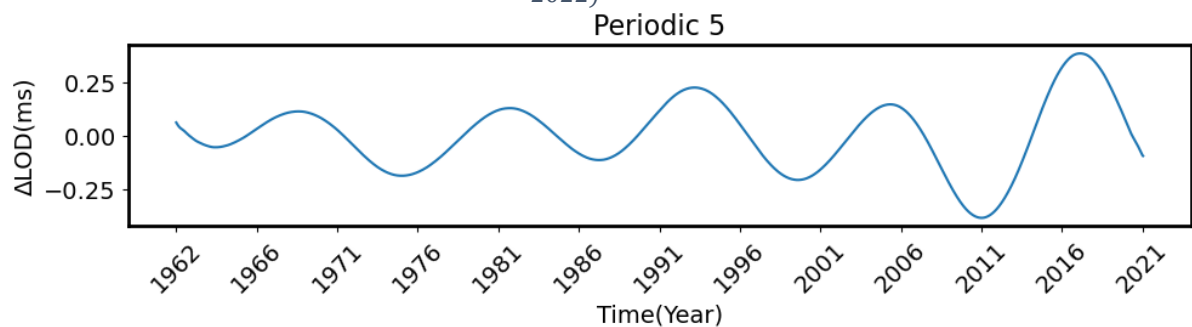
Εικόνα 6.47: Η 2^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



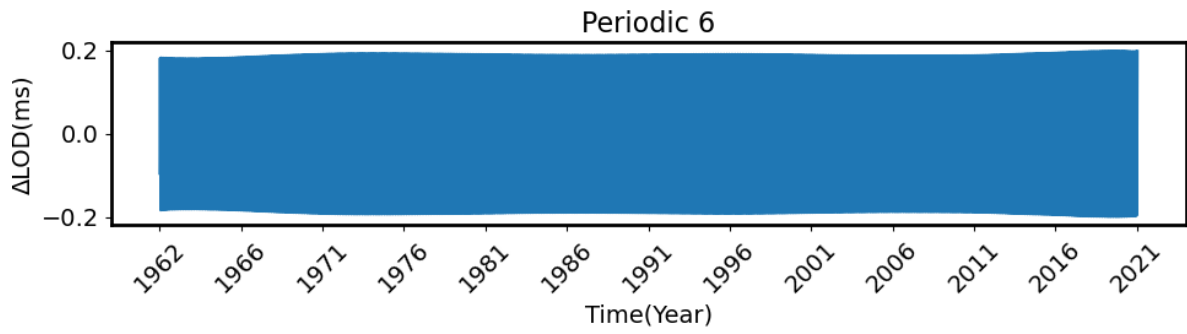
Εικόνα 6.48: Η 3^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



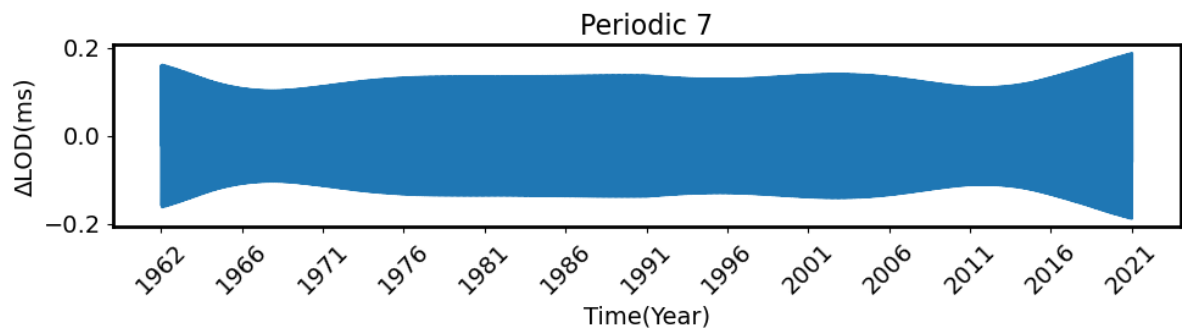
Εικόνα 6.49: Η 4^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



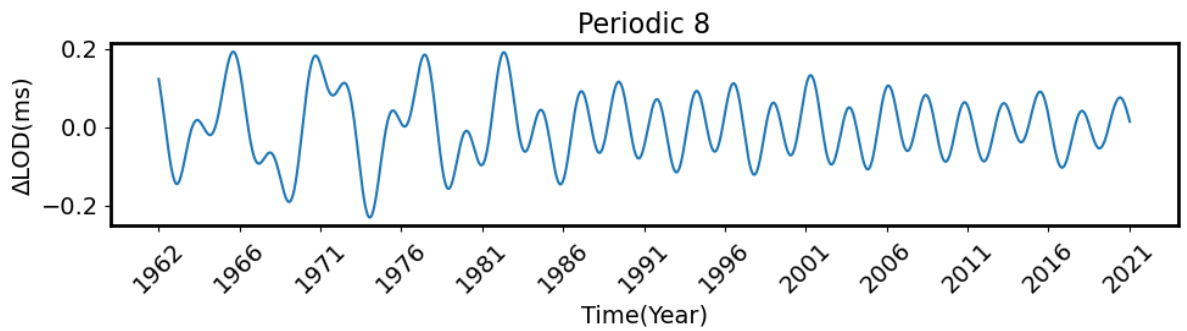
Εικόνα 6.50: Η 5^η περιοδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



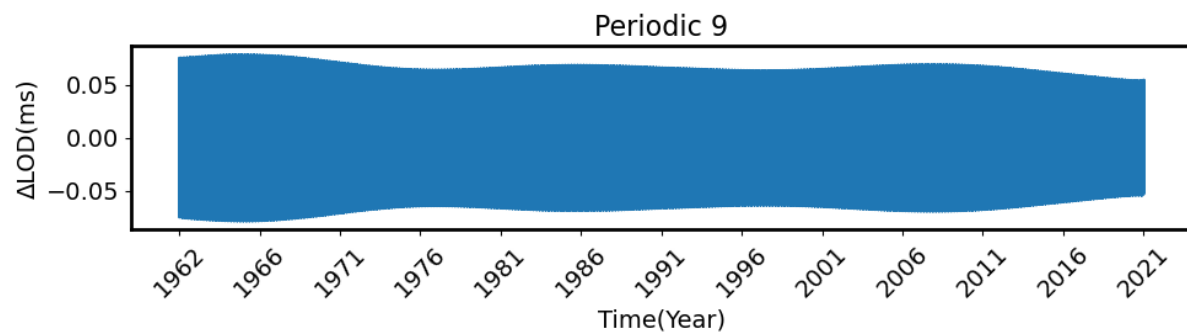
Εικόνα 6.51: Η 6^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



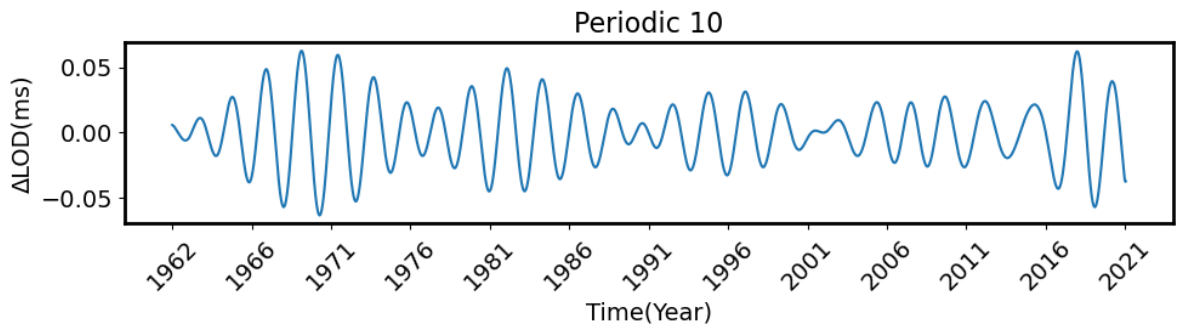
Εικόνα 6.52: Η 7^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



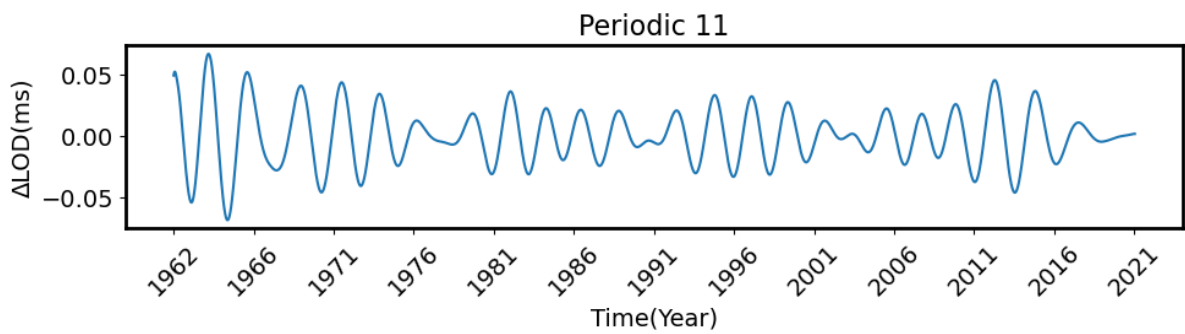
Εικόνα 6.53: Η 8^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



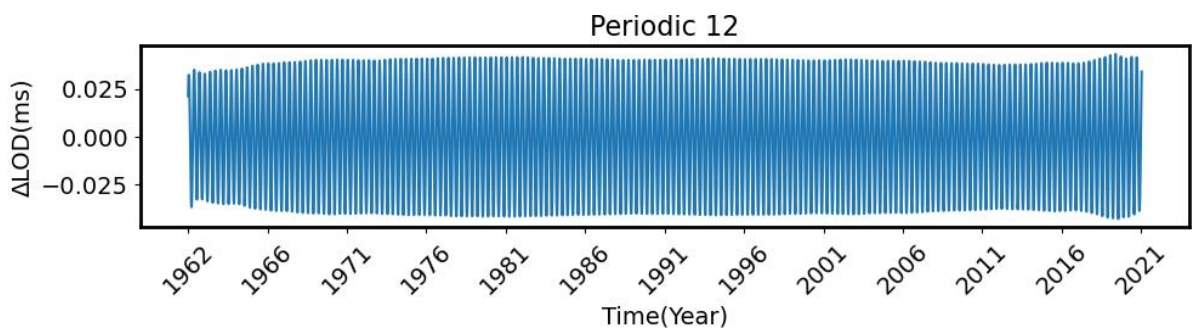
Εικόνα 6.54: Η 9^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



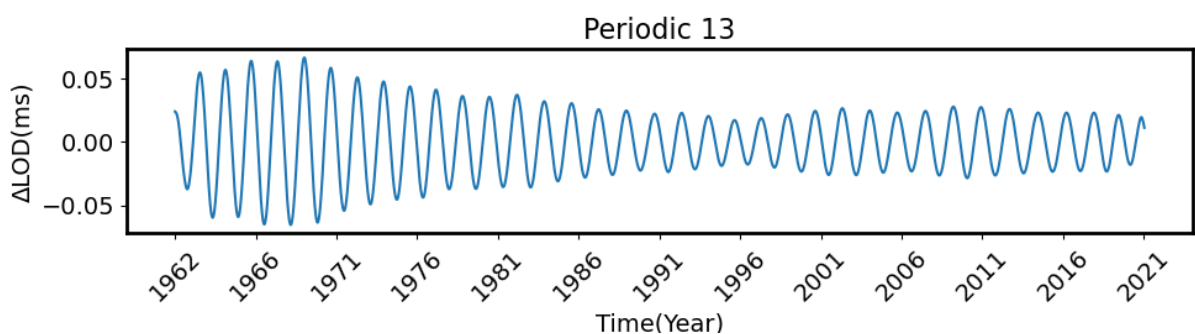
Εικόνα 6.55: Η 10^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



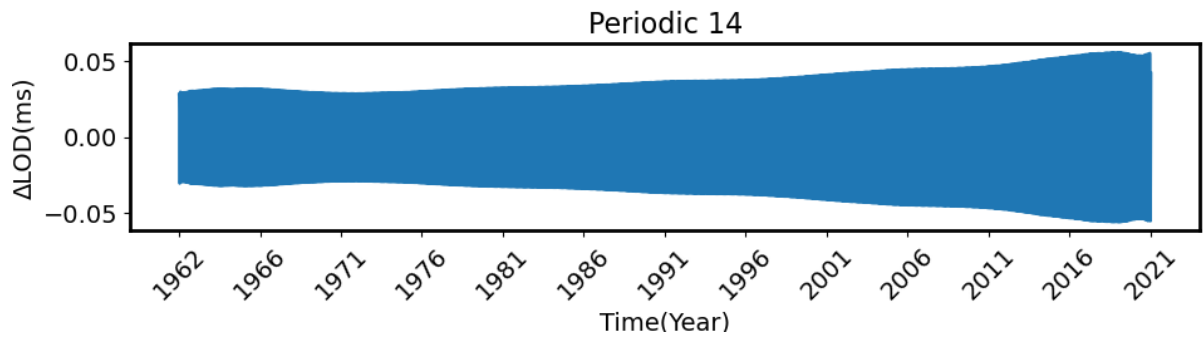
Εικόνα 6.56: Η 11^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



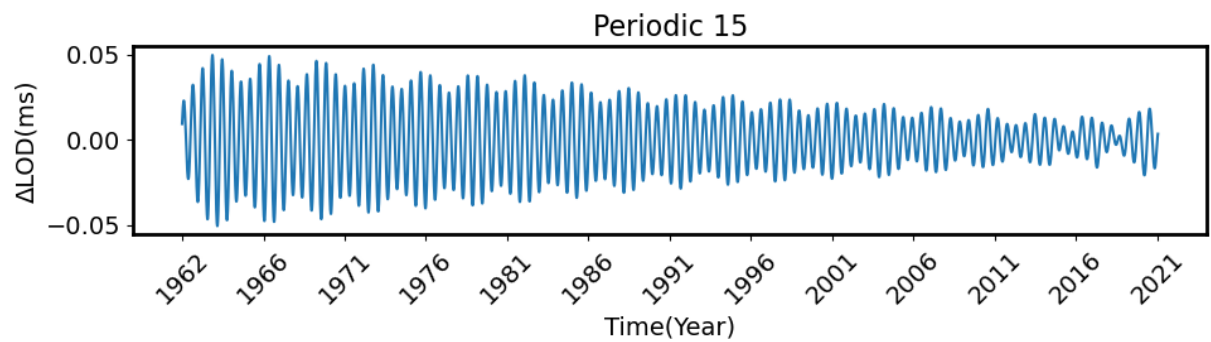
Εικόνα 6.57: Η 12^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



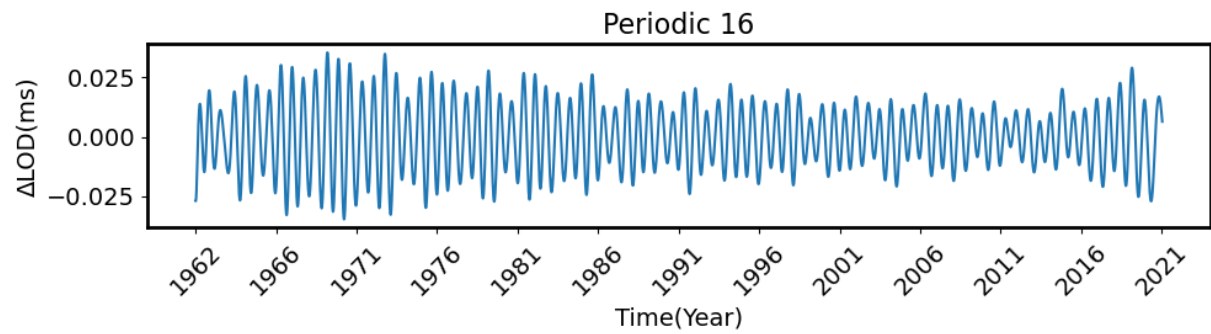
Εικόνα 6.58: Η 13^η περιodicότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



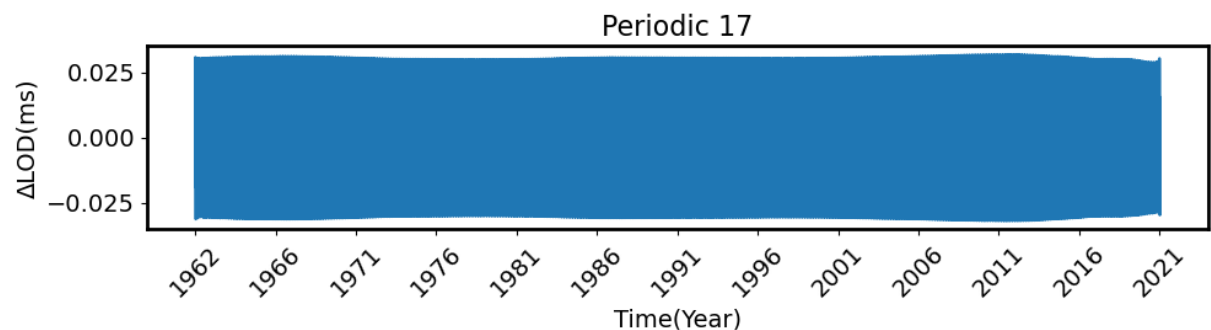
Εικόνα 6.59: Η 14^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



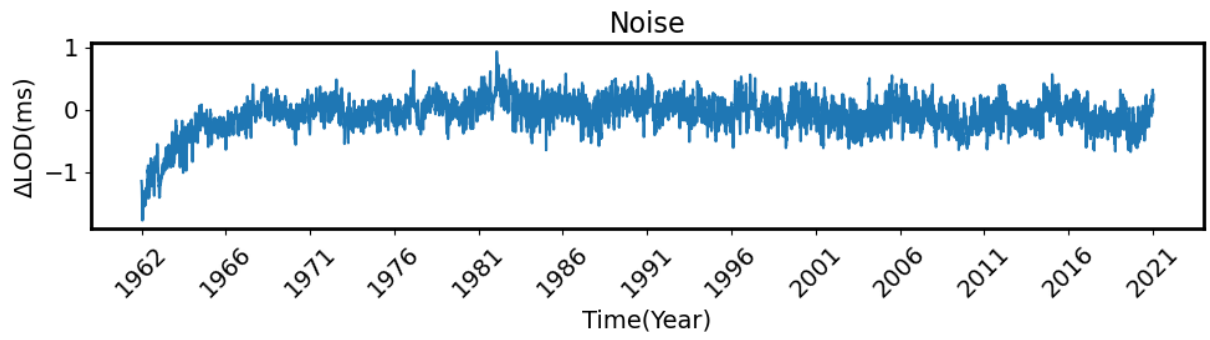
Εικόνα 6.60: Η 15^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



Εικόνα 6.61: Η 16^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



Εικόνα 6.62: Η 17^η περιδικότητα της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)



Εικόνα 6.63: Ο θόρυβος της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA (δεδομένα 1962-2022)

7. Ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή

7.1. Προσαρμογές στην τάση και στις περιοδικότητες

Αφού ολοκληρώθηκε η διαδικασία εφαρμογής της SSA στη χρονοσειρά των 21916 τιμών και προέκυψαν 17 περιοδικότητες και η τάση της, πραγματοποιήθηκε ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή συναρτήσεων, προκειμένου να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές των χαρακτηριστικών τους, όπως το πλάτος, η περίοδος και η φάση για τις περιοδικότητες και των συντελεστών της εξίσωσης ευθείας για την τάση.

Θεωρώντας τα δεδομένα ΔLOD της τάσης y_{1i} , για $i = 1, \dots, 21916$, ίσης ακρίβειας και ασυσχέτιστα, η εξίσωση παρατήρησης που χρησιμοποιείται είναι της μορφής:

$$\hat{st}_i + \hat{c} = y_{1i} + v_{1i} \quad (7.1)$$

η οποία σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{v}_1 \quad (7.2)$$

όπου

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_{21916} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

ο 21916×2 πίνακας σχεδιασμού,

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

το 2×1 διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων, \mathbf{y}_1 το 21916×1 διάνυσμα των δεδομένων και \mathbf{v}_1 το 21916×1 διάνυσμα των υπολοίπων. Επομένως, η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}_1 \quad (7.5)$$

Επιπλέον, το a-posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους δίνεται από:

$$\hat{\sigma}_{0_1} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1}{r_1}} \quad (7.6)$$

όπου $r_1 = 21916 - 2 = 21914$ οι βαθμοί ελευθερίας.

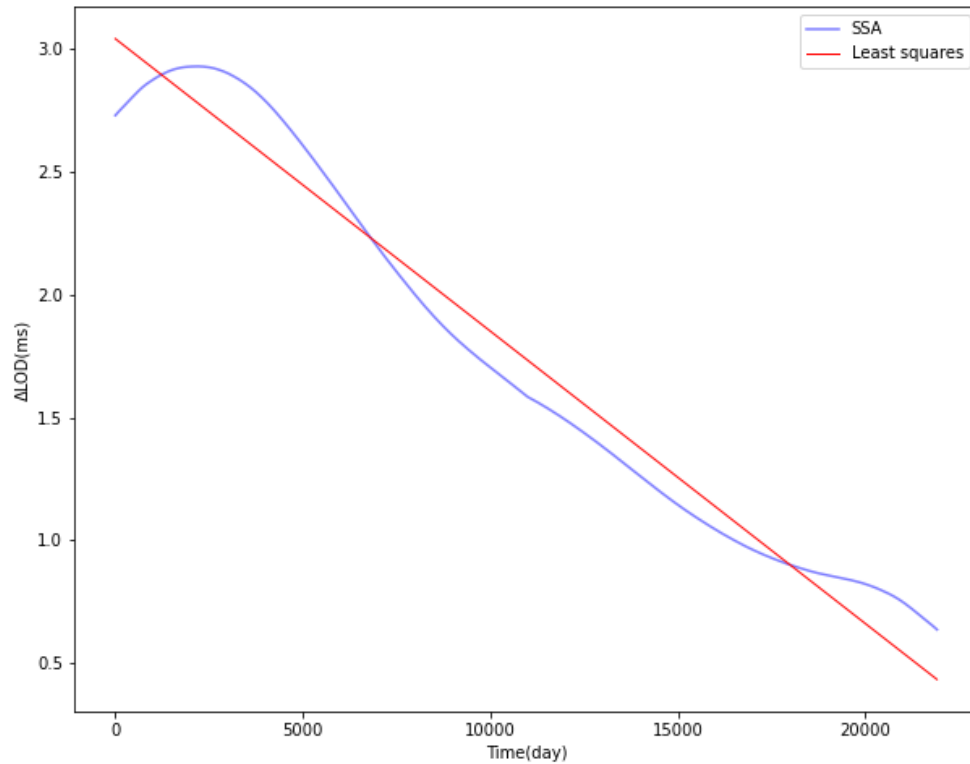
Τέλος, ο a-posteriori πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του διανύσματος $\hat{\mathbf{t}}_1$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{t}}_1} = \hat{\sigma}_{0_1}^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \quad (7.7)$$

Στον Πίνακα 7.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συνόρθωσης των δεδομένων της τάσης από την SSA καθώς και το αντίστοιχο γράφημα στην Εικόνα 7.1.

Πίνακας 7.1: Αποτελέσματα συνόρθωσης της τάσης

	\hat{s} (ms/day)	$\hat{\sigma}_s$ (ms/day)	\hat{c} (ms)	$\hat{\sigma}_c$ (ms)	$\hat{\sigma}_{0_1}$ (ms)
Trend	-0.0001190	$1.455 \cdot 10^{-7}$	3.04178	0.001841	0.1363



Εικόνα 7.1: Συνόρθωση τάσης

Φαίνεται ότι το a-posteriori τυπικό σφάλμα της συνόρθωσης αυτής είναι σχετικά μεγάλο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, η τάση που προέκυψε από την SSA δεν είναι ευθεία, αλλά παρουσιάζει μια καμπύλωση. Επομένως, η συνάρτηση ευθείας που προσαρμόστηκε δεν ήταν αρκετά καλή για τα συγκεκριμένα δεδομένα.

Στη συνέχεια, θεωρώντας τα δεδομένα ΔLOD για κάθε περιοδικότητα y_{2i} , για $i = 1, \dots, 21916$, ίσης ακρίβειας και ασυσχέτιστα, η εξίσωση παρατήρησης που χρησιμοποιείται είναι της μορφής:

$$\hat{A} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t_i + \hat{\phi}_0\right) + \hat{c} = y_{2i} + v_{2i} \quad (7.8)$$

η οποία είναι μη γραμμική εξίσωση και συνεπώς απαιτείται γραμμικοποίηση κατά Taylor χρησιμοποιώντας προσωρινές τιμές \mathbf{t}_2^0 για τις παραμέτρους ώστε

$$\hat{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{t}_2^0 + \delta \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{T} \\ \hat{\phi}_0 \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

και οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις σε μορφή πινάκων γράφονται:

$$\mathbf{J}_2 \delta \mathbf{t}_2 = \delta \mathbf{y}_2 + \mathbf{v}_2 \quad (7.10)$$

όπου

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{r}} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{\varphi}_0} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{c}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{r}} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{\varphi}_0} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{c}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{21916}}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_{21916}}{\partial \hat{r}} & \frac{\partial y_{21916}}{\partial \hat{\varphi}_0} & \frac{\partial y_{21916}}{\partial \hat{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_1 + \hat{\varphi}_0\right) & \frac{2\pi t_1}{\hat{r}^2} \hat{A} \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_1 + \hat{\varphi}_0\right) & -\hat{A} \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_1 + \hat{\varphi}_0\right) & 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_2 + \hat{\varphi}_0\right) & \frac{2\pi t_2}{\hat{r}^2} \hat{A} \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_2 + \hat{\varphi}_0\right) & -\hat{A} \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_2 + \hat{\varphi}_0\right) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_{21916} + \hat{\varphi}_0\right) & \frac{2\pi t_{21916}}{\hat{r}^2} \hat{A} \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_{21916} + \hat{\varphi}_0\right) & -\hat{A} \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{r}} t_{21916} + \hat{\varphi}_0\right) & 1 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

ο 21916×4 πίνακας σχεδιασμού,

$$\delta \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2^0 \quad (7.12)$$

το 21916×1 διάνυσμα της διαφοράς των προσωρινών τιμών των δεδομένων (που υπολογίζονται από τις προσωρινές τιμές των παραμέτρων \mathbf{t}_2^0) από τις τιμές των δεδομένων και \mathbf{v}_2 το 21916×1 διάνυσμα των υπολοίπων. Επομένως, οι διορθώσεις τις επαναληπτικής διαδικασίας υπολογίζονται από τον τύπο:

$$\delta \mathbf{t}_2 = (\mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2)^{-1} \mathbf{J}_2^T \delta \mathbf{y}_2 \quad (7.13)$$

Ομοίως, το a-posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{\sigma}_{0_2} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2}{r_2}} \quad (7.14)$$

όπου $r_2 = 21916 - 4 = 21912$ οι βαθμοί ελευθερίας.

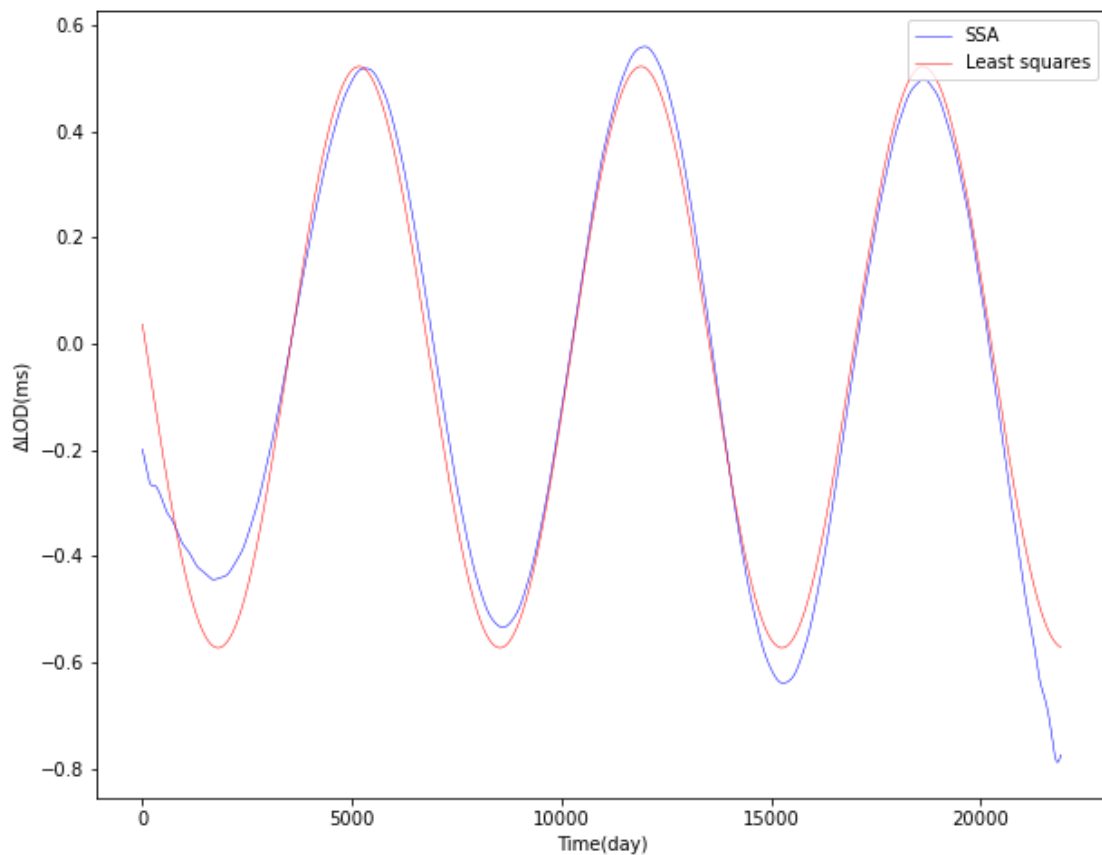
Αντίστοιχα, ο a-posteriori πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του διανύσματος $\hat{\mathbf{t}}_2$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{t}}_2} \equiv \hat{\mathbf{V}}_{\delta \mathbf{t}_2} = \hat{\sigma}_{0_2}^2 (\mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2)^{-1} \quad (7.15)$$

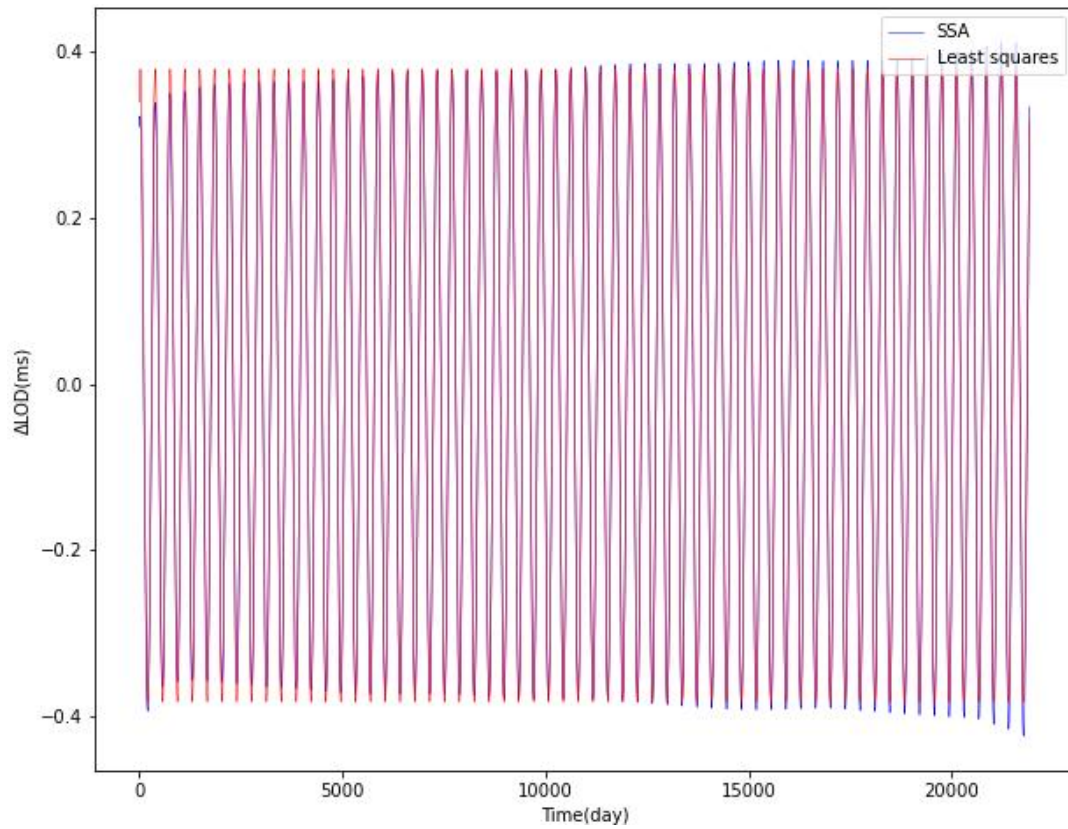
Από τα διαγράμματα που προέκυψαν από την SSA, επιλέχθηκαν οι προσωρινές τιμές των παραμέτρων. Θέτοντας ως όριο σύγκλισης την τιμή 10^{-12} και όριο επαναλήψεων 40, προέκυψαν οι παρακάτω καλύτερες τιμές των παραμέτρων για κάθε περίπτωση και παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.2, καθώς και τα αντίστοιχα γραφήματα τους στη συνέχεια.

Πίνακας 7.2: Αποτελέσματα συνόρθωσης των περιοδικοτήτων

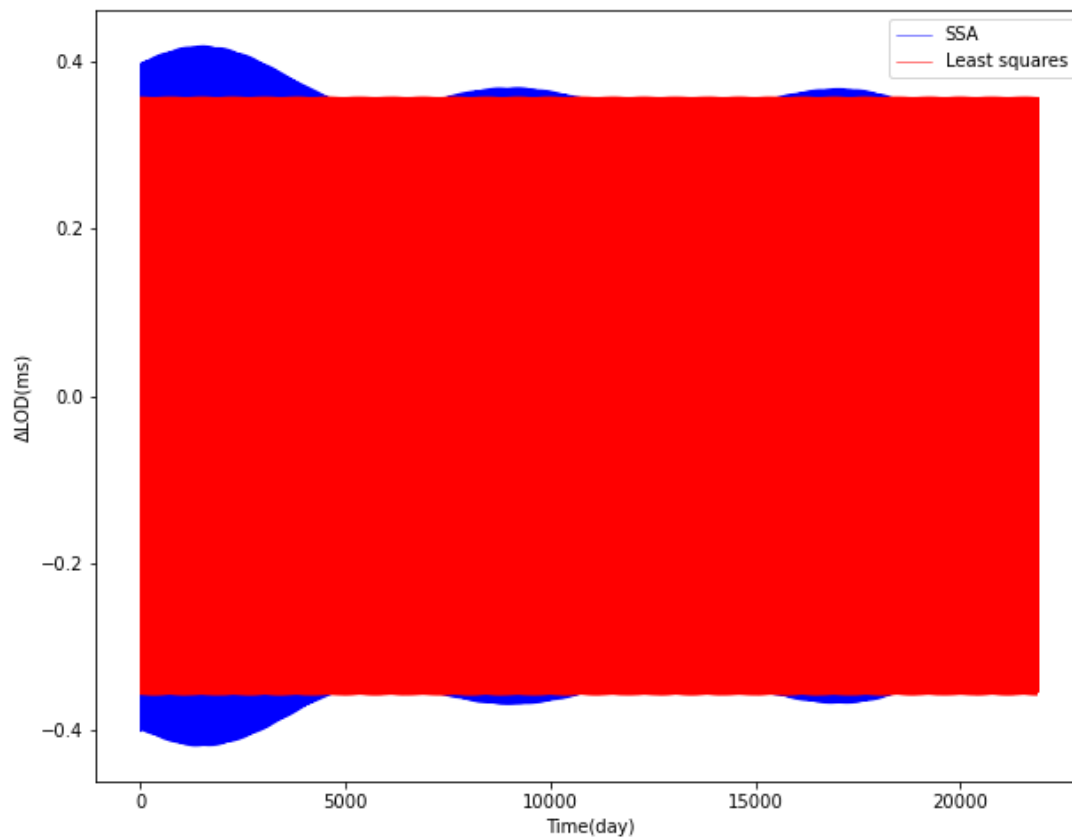
Περιοδικότητα	\hat{A} (ms)	$\hat{\sigma}_{\hat{A}} \cdot 10^{-4}$ (ms)	\hat{T} (days)	$\hat{\sigma}_{\hat{T}}$ (ms)	$\hat{\varphi}_0$ (rad)	$\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_0}$ (rad)	$\hat{c} \cdot 10^{-4}$ (ms)	$\hat{\sigma}_{\hat{c}} \cdot 10^{-4}$ (ms)	$\hat{\sigma}_{0_2}$ (ms)
1	0.548	6.15	6728.25	0.258	1.4573	0.0022	-250.09	4.36	0.063
2	0.381	1.16	365.37	0.00102	-0.4611	0.0006	-12.62	0.82	0.012
3	0.358	2.39	13.66	0.000003	1.2364	0.0013	-0.08	1.69	0.025
4	0.342	1.26	182.64	0.000309	2.5907	0.0007	-2.70	0.89	0.013
5	0.192	8.20	4390.51	2.077	2.0532	0.0087	24.09	5.81	0.086
6	0.190	0.27	27.55	0.000003	4.1631	0.0003	-0.02	0.19	0.003
7	0.130	1.51	13.63	0.000005	1.6599	0.0023	0.07	1.07	0.016
8	0.083	5.74	867.86	0.130	0.2093	0.0137	-9.64	4.05	0.060
9	0.067	0.44	9.13	0.000001	2.2335	0.0013	0.03	0.31	0.005
10	0.024	1.65	775.86	0.102	0.7062	0.0135	0.10	1.16	0.017
11	0.016	1.84	777.68	0.175	-9.2939	0.0230	0.34	1.30	0.019
12	0.040	0.17	121.70	0.000161	-0.9894	0.0009	0.02	0.12	0.002
13	0.028	1.57	611.48	0.0526	1.5752	0.0112	1.21	1.11	0.016
14	0.039	0.56	31.81	0.000037	-0.2775	0.0029	-0.04	0.40	0.006
15	0.025	0.82	212.42	0.003728	1.7946	0.0066	-0.09	0.58	0.009
16	0.017	0.70	260.78	0.00703	-2.7815	0.0082	-0.27	0.49	0.007
17	0.031	0.10	14.77	0.000002	-2.3921	0.0006	0.01	0.07	0.001



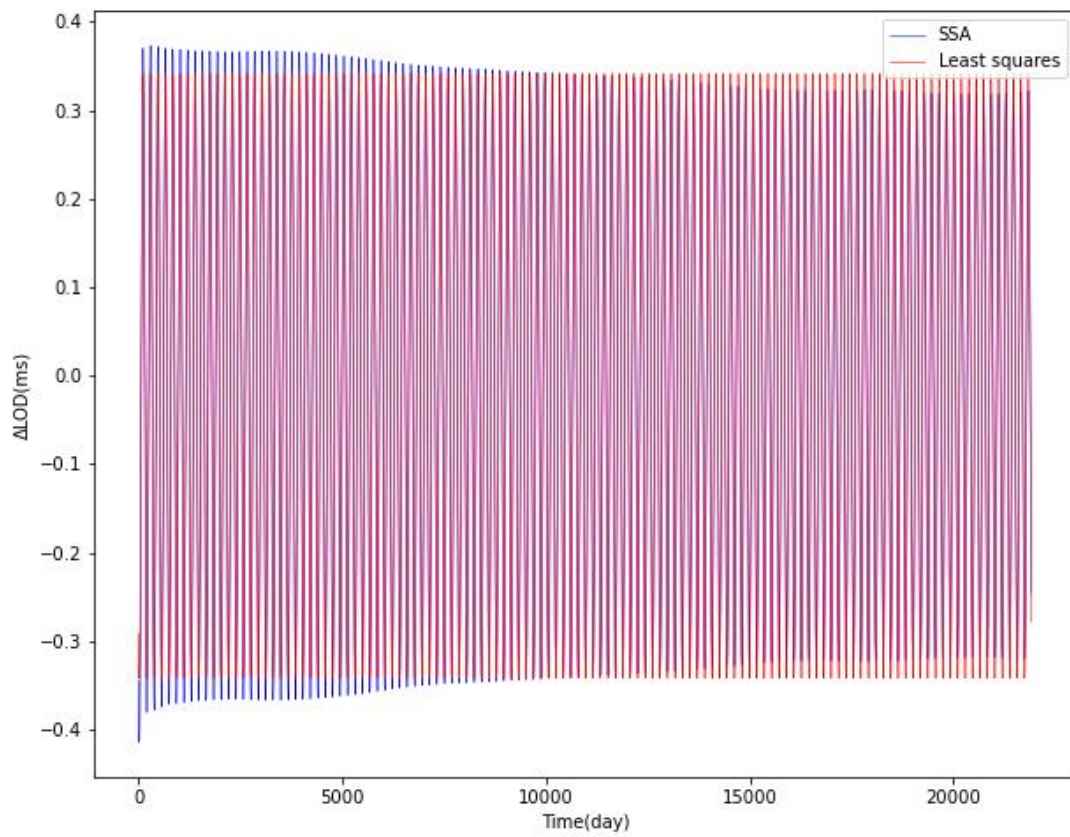
Εικόνα 7.2: Συνόρθωση περιοδικότητας 1



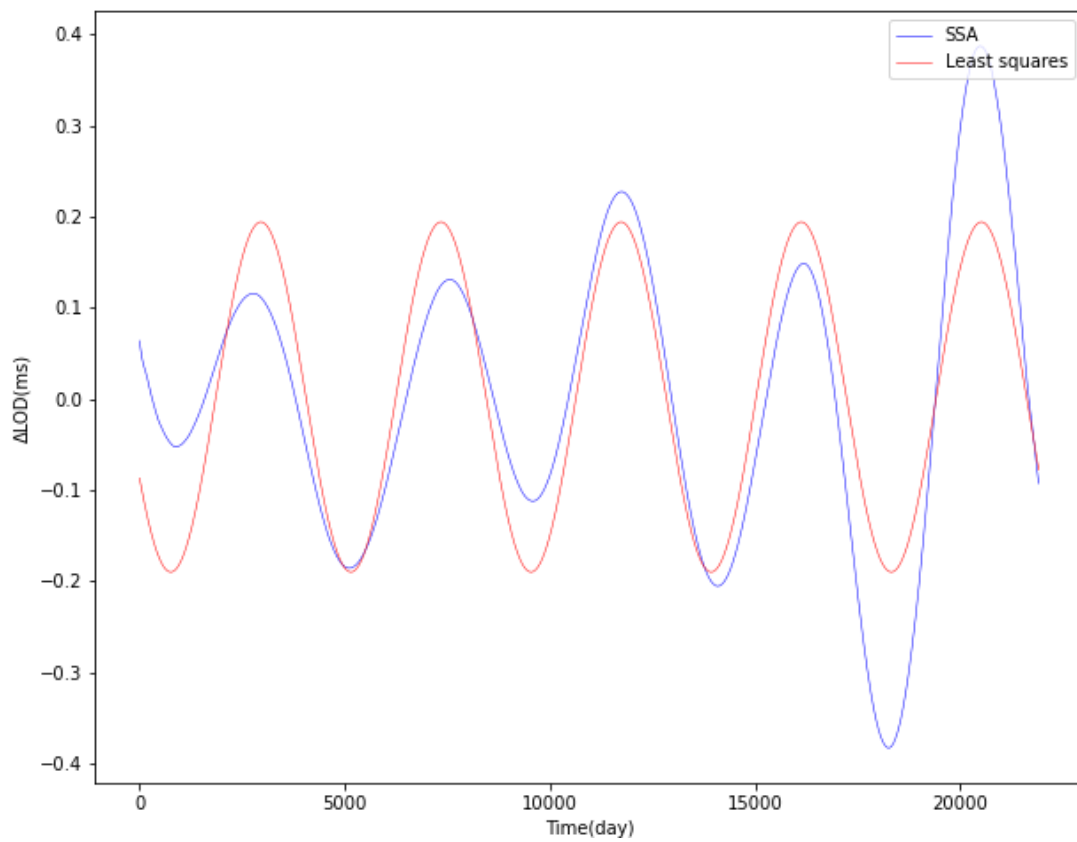
Εικόνα 7.3: Συνόρθωση περιοδικότητας 2



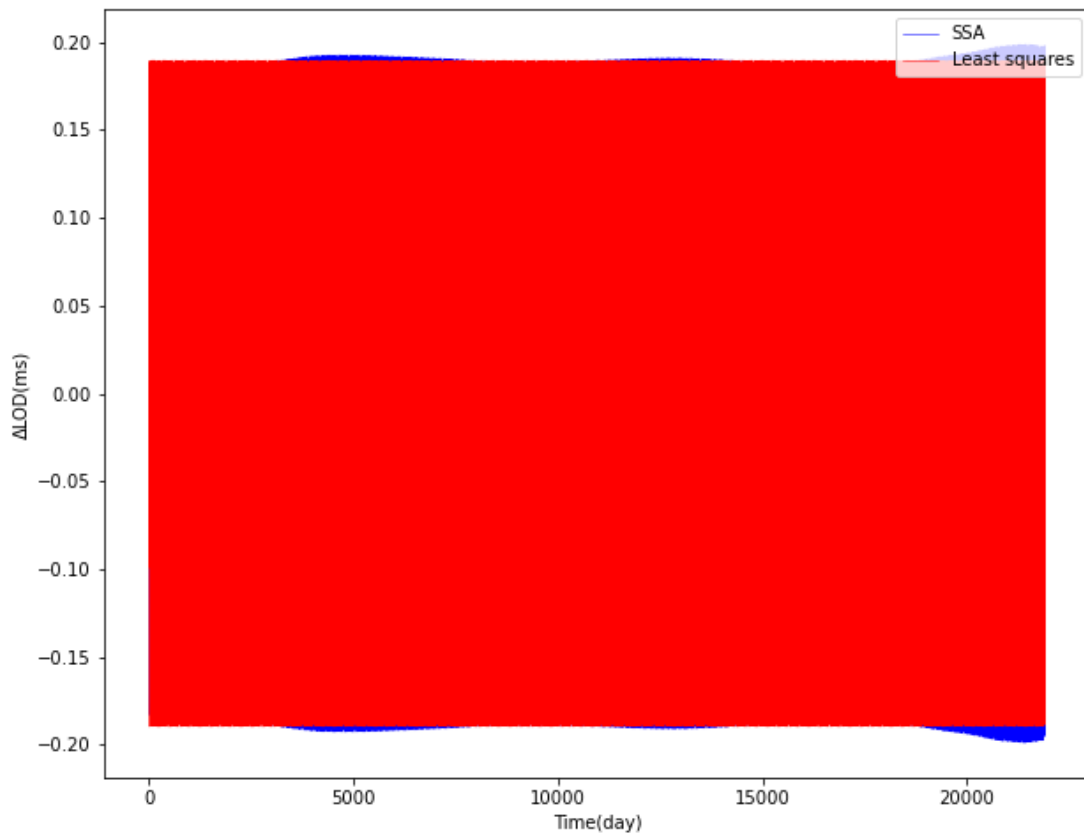
Εικόνα 7.4: Συνόρθωση περιοδικότητας 3



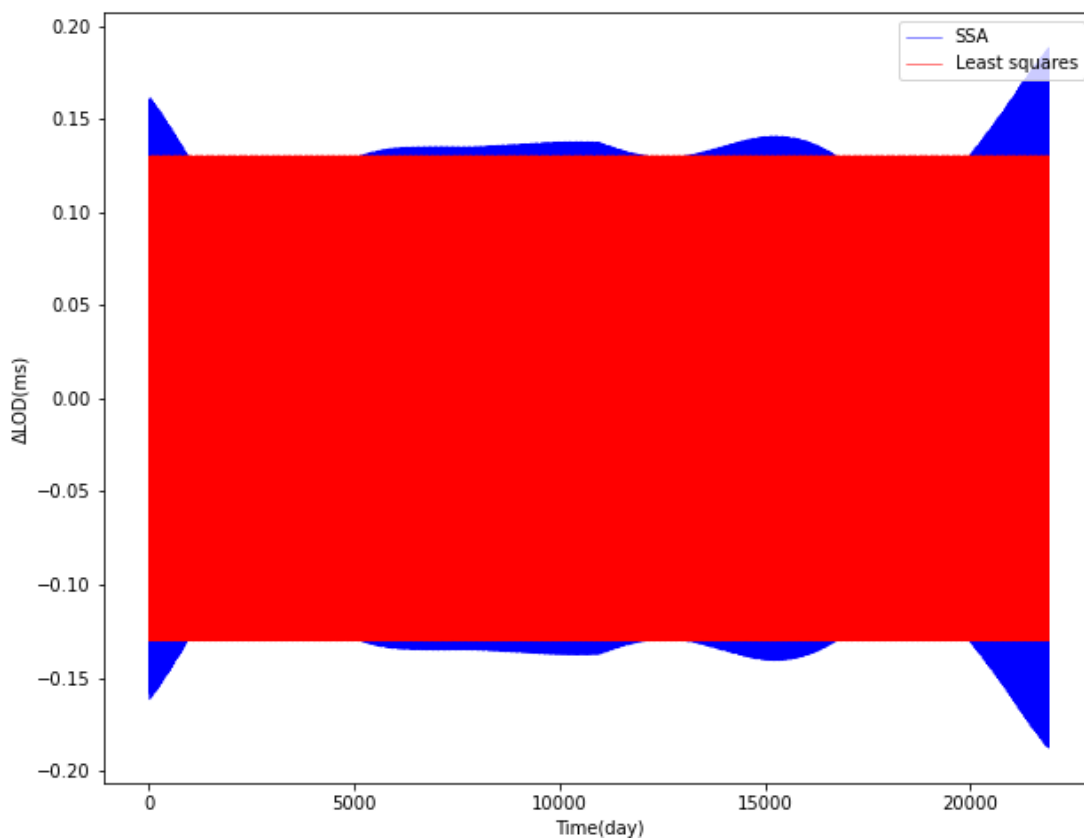
Εικόνα 7.5: Συνόρθωση περιοδικότητας 4



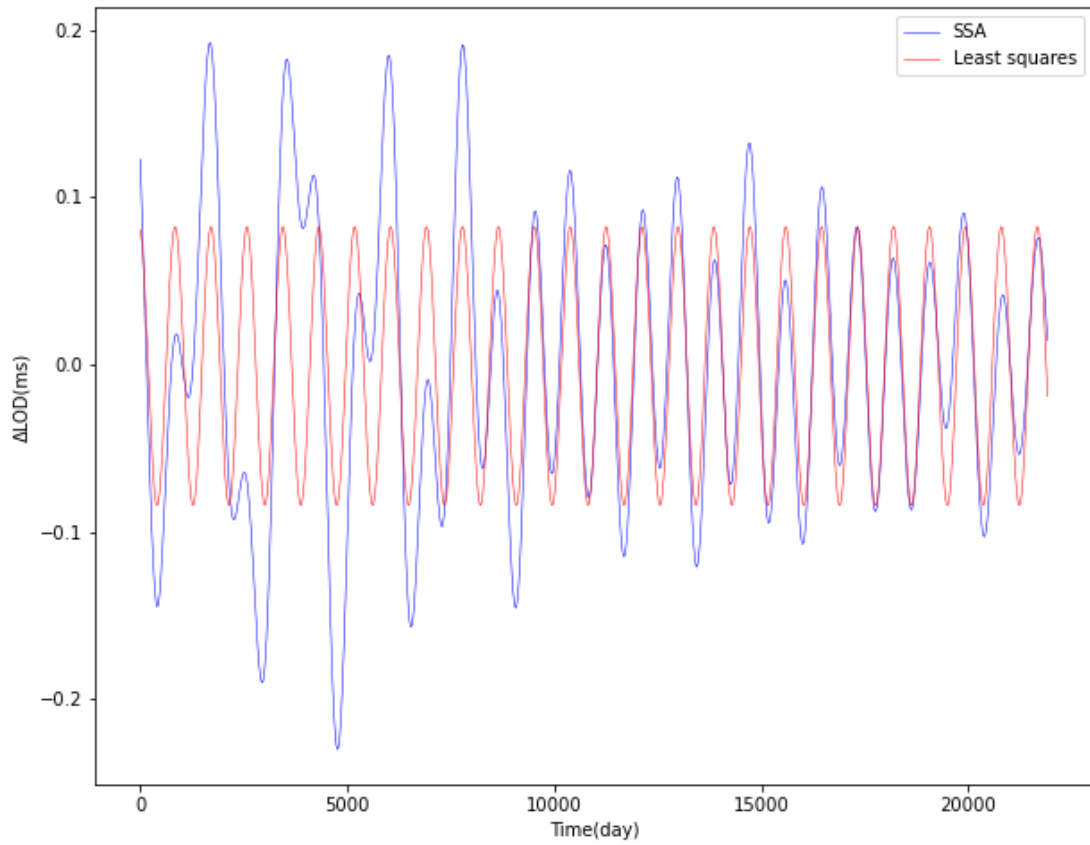
Εικόνα 7.6: Συνόρθωση περιοδικότητας 5



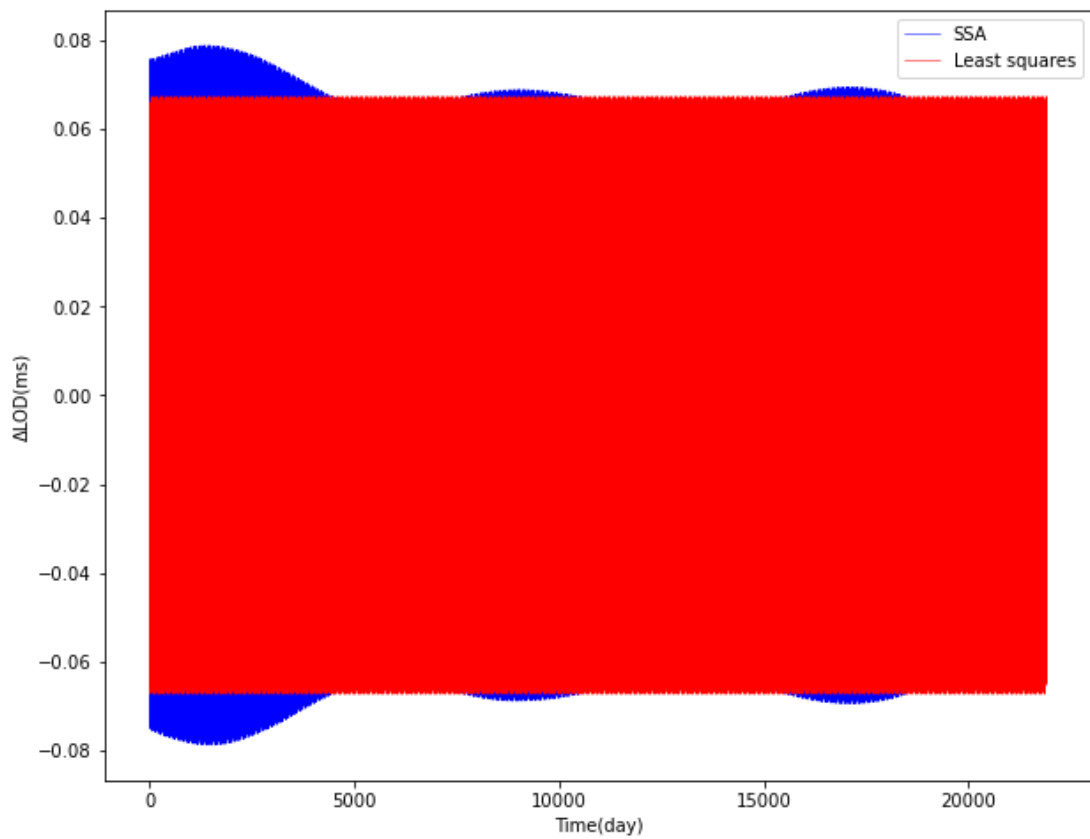
Εικόνα 7.7: Συνόρθωση περιοδικότητας 6



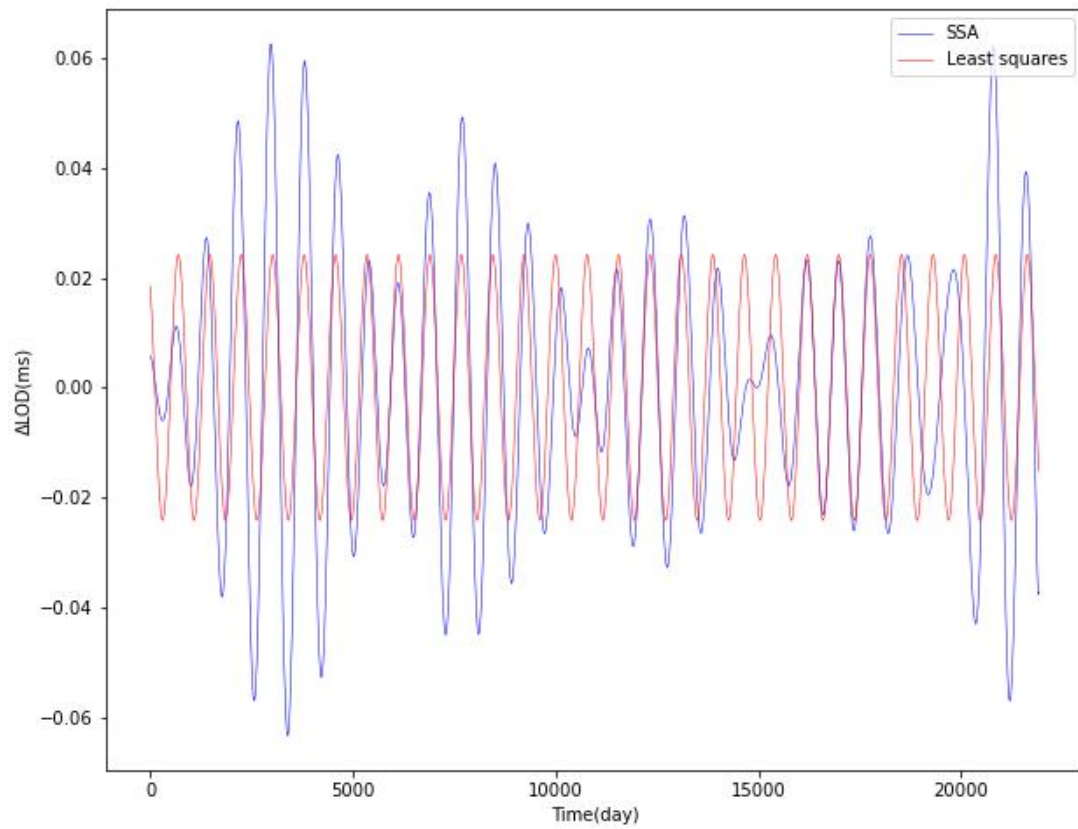
Εικόνα 7.8: Συνόρθωση περιοδικότητας 7



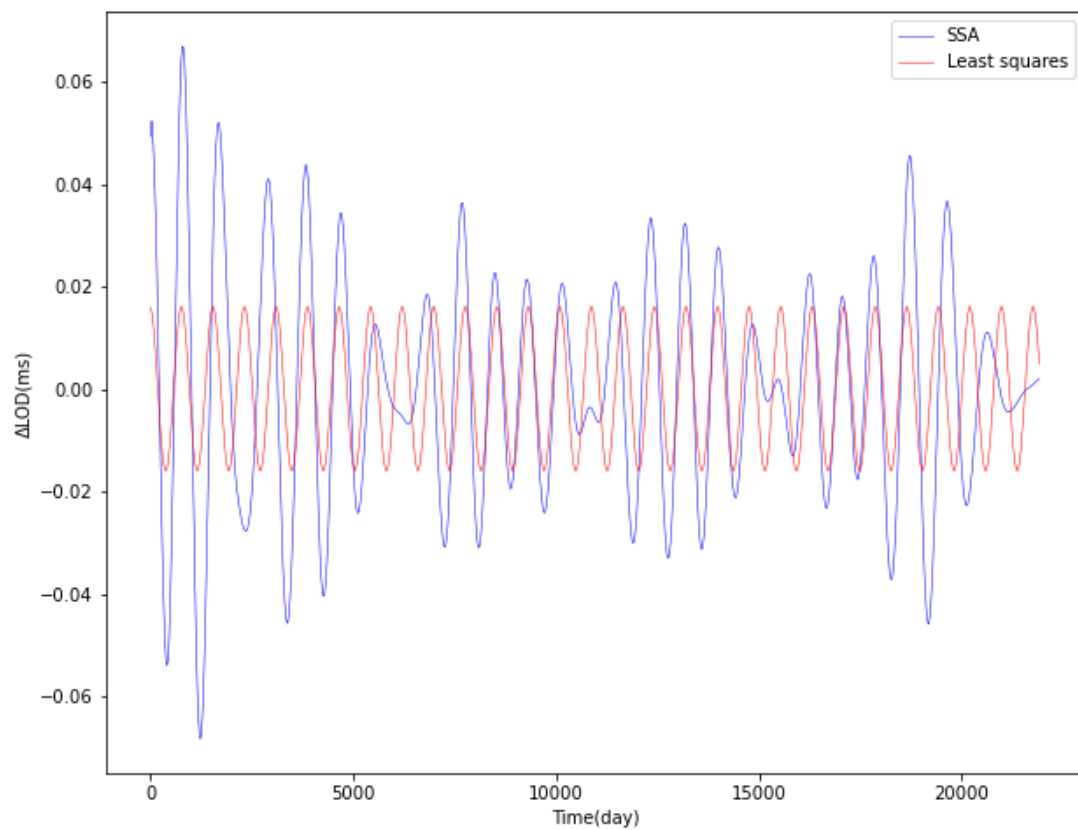
Εικόνα 7.9: Συνόρθωση περιοδικότητας 8



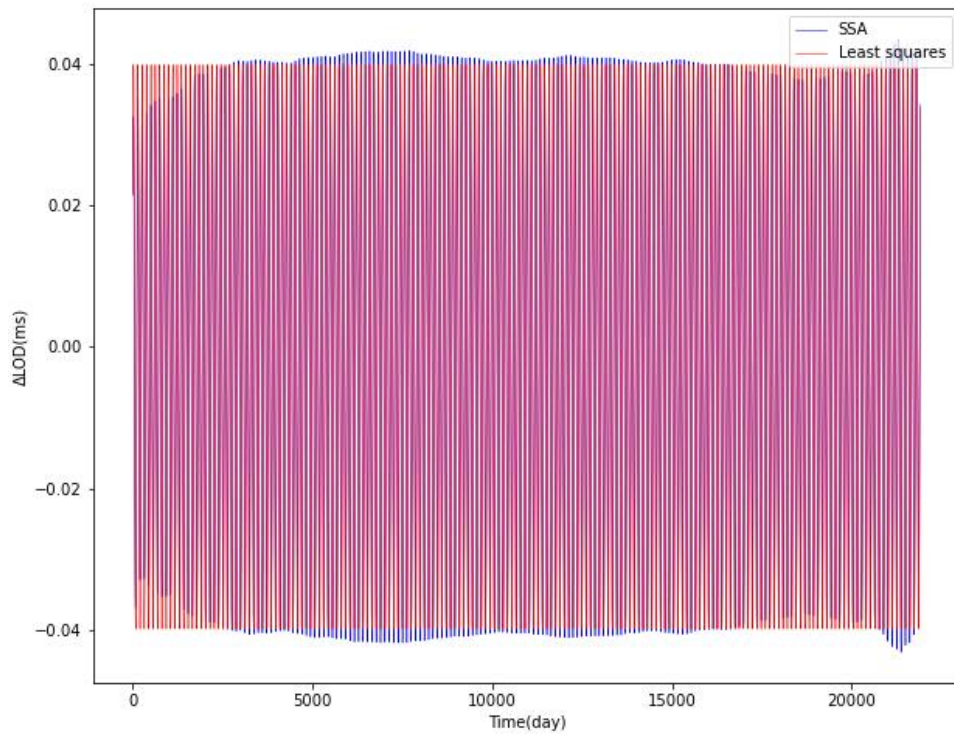
Εικόνα 7.10: Συνόρθωση περιοδικότητας 9



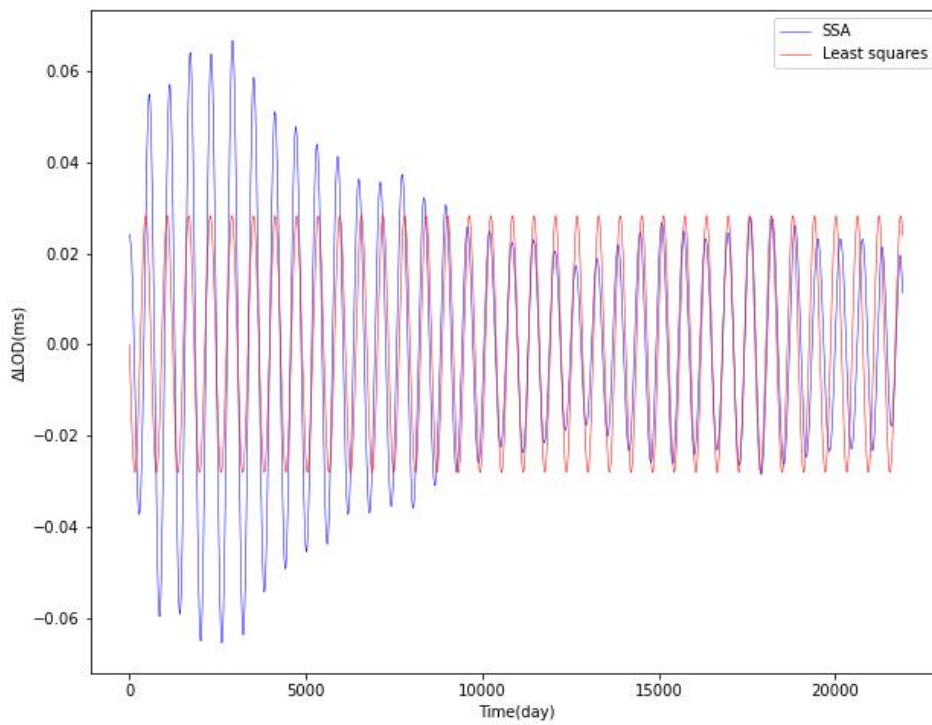
Εικόνα 7.11: Συνόρθωση περιοδικότητας 10



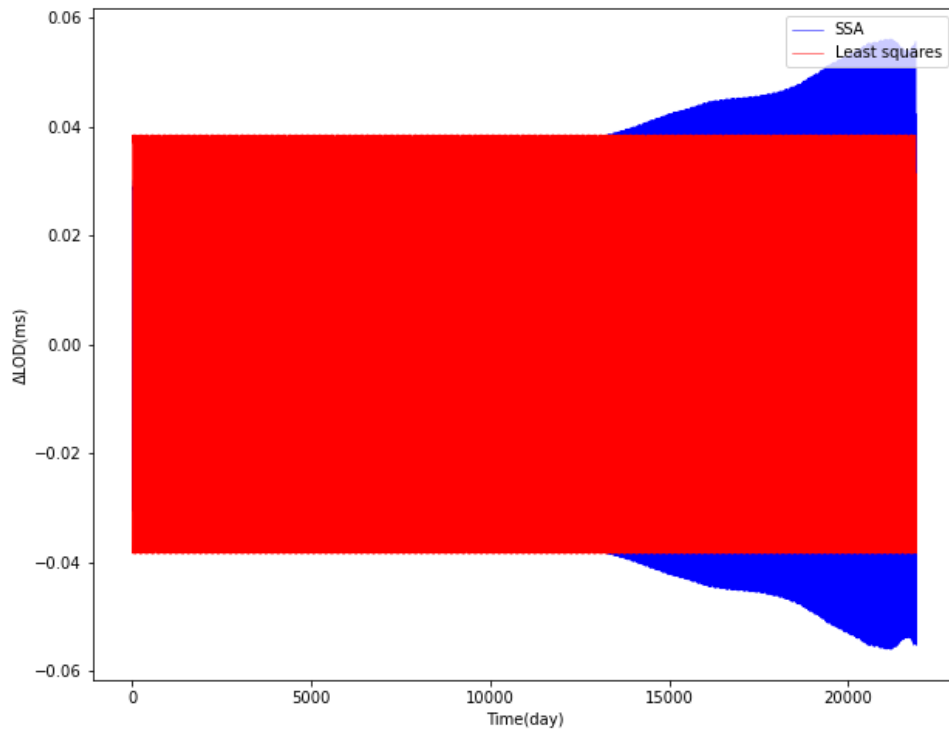
Εικόνα 7.12: Συνόρθωση περιοδικότητας 11



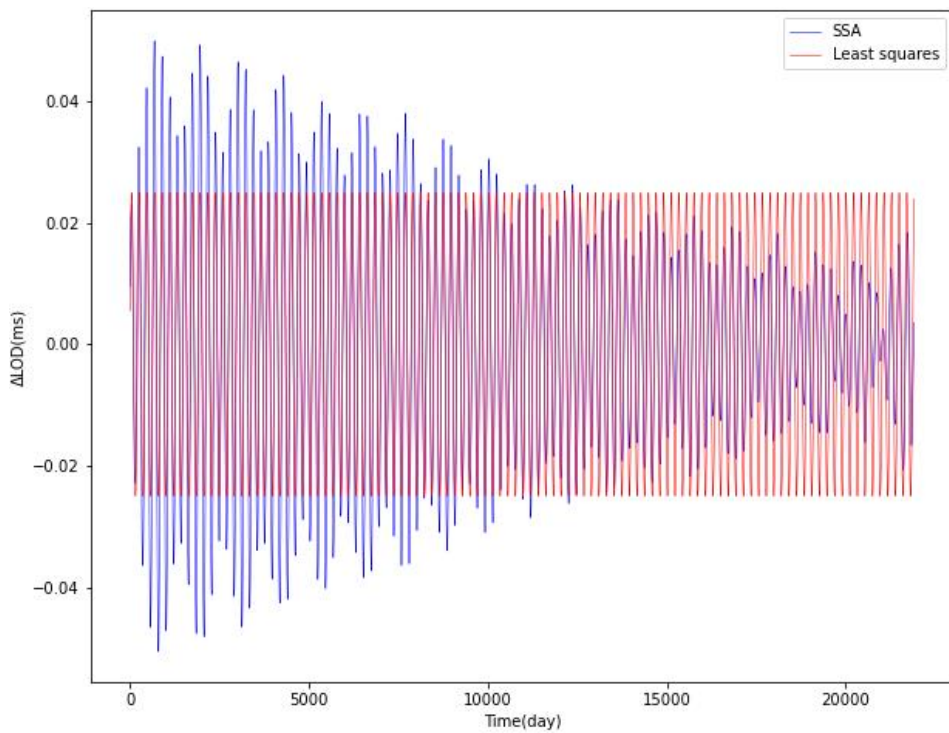
Εικόνα 7.13: Συνόρθωση περιοδικότητας 12



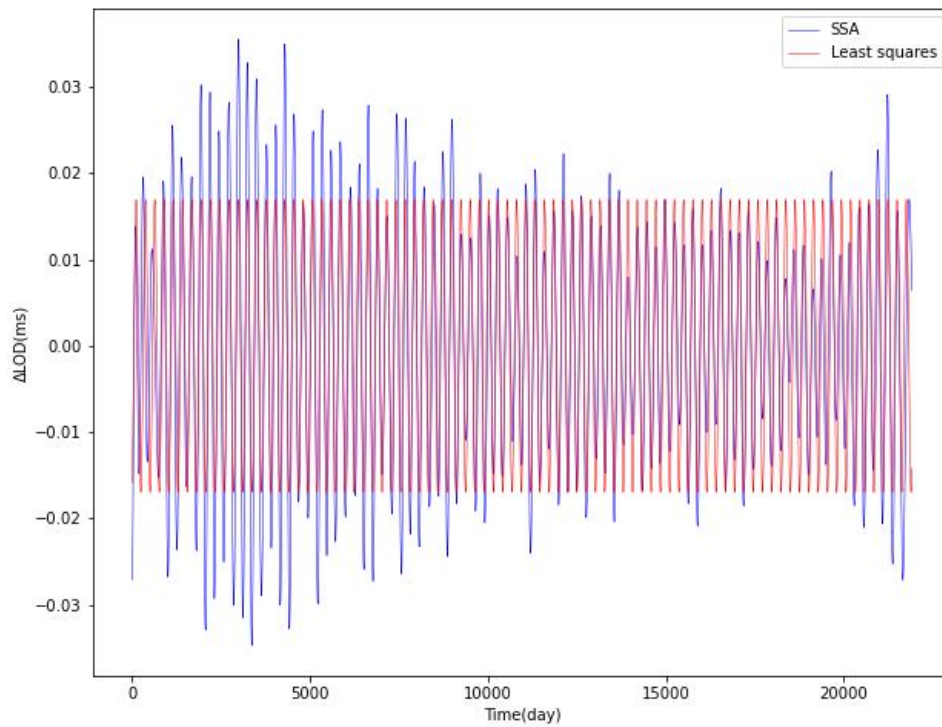
Εικόνα 7.14: Συνόρθωση περιοδικότητας 13



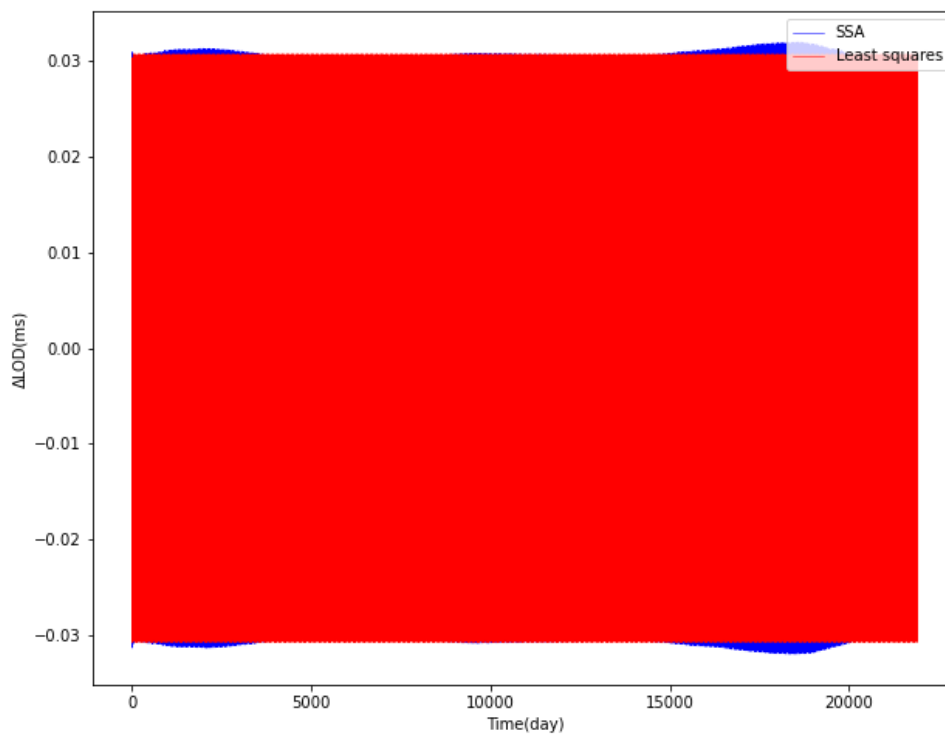
Εικόνα 7.15: Συνόρθωση περιοδικότητας 14



Εικόνα 7.16: Συνόρθωση περιοδικότητας 15



Εικόνα 7.17: Συνόρθωση περιοδικότητας 16



Εικόνα 7.18: Συνόρθωση περιοδικότητας 17

Η προσαρμογή στις περιοδικότητες ήταν αρκετά καλή, το οποίο φαίνεται και από το a-posteriori τυπικό σφάλμα αλλά και από τα αντίστοιχα γραφήματα, που σημαίνει ότι η επιλογή του μοντέλου προσαρμογής ήταν ικανοποιητική.

7.2. Πειραματικός έλεγχος

Προκειμένου να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα των παραπάνω προσαρμογών, έγινε ένας πειραματικός έλεγχος, κατά τον οποίο πραγματοποιήθηκε ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή σε ολόκληρη τη χρονοσειρά, πλην του θορύβου που προέκυψε από την SSA. Επομένως, θεωρώντας τις τιμές y_{3i} , για $i = 1, \dots, 21916$, της συνολικής χρονοσειράς ΔLOD , τα δεδομένα στα οποία έγινε η προσαρμογή ήταν τα εξής:

$$\tilde{y}_{3i} = y_{3i} - noise \quad (7.16)$$

και η εξίσωση παρατήρησης που χρησιμοποιήθηκε, για $k = 17$, όσες και ο αριθμός των περιοδικοτήτων που προέκυψαν από την SSA, ήταν της μορφής:

$$\sum_{j=1}^k \left(\hat{A}_j \cos\left(\frac{2\pi}{\hat{T}_j} t_i + \hat{\varphi}_{0j}\right) \right) + \hat{s}t_i + \hat{c} = \tilde{y}_{3i} + v_{3i} \quad (7.17)$$

η οποία είναι μη γραμμική εξίσωση και συνεπώς απαιτείται γραμμικοποίηση κατά Taylor χρησιμοποιώντας προσωρινές τιμές \mathbf{t}_3^0 για τις παραμέτρους ώστε

$$\hat{\mathbf{t}}_3 = \mathbf{t}_3^0 + \delta\mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \vdots \\ \hat{A}_{17} \\ \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \\ \vdots \\ \hat{T}_{17} \\ \hat{\varphi}_{01} \\ \hat{\varphi}_{02} \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{017} \\ \hat{s} \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

και οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις σε μορφή πινάκων γράφονται:

$$\mathbf{J}_3 \delta\mathbf{t}_3 = \delta\tilde{\mathbf{y}}_3 + \mathbf{v}_3 \quad (7.19)$$

όπου

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{A}_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{A}_{17}} & \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{T}_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{T}_{17}} & \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{\varphi}_{01}} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{\varphi}_{017}} & \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{s}} & \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial \hat{c}} \\ \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{A}_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{A}_{17}} & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{T}_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{T}_{17}} & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{\varphi}_{01}} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{\varphi}_{017}} & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{s}} & \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \hat{c}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{A}_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{A}_{17}} & \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{T}_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{T}_{17}} & \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{\varphi}_{01}} & \cdots & \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{\varphi}_{017}} & \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{s}} & \frac{\partial \tilde{y}_{21916}}{\partial \hat{c}} \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

ο 21916×53 πίνακας σχεδιασμού, όπου για $k = 1, \dots, 17$ και $i = 1, \dots, 21916$ είναι

- $\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \hat{A}_k} = \cos\left(\frac{2\pi}{\hat{T}_k} t_i + \hat{\varphi}_{0_k}\right)$
- $\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \hat{T}_k} = \frac{2\pi t_i}{\hat{T}_k^2} \hat{A}_k \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{T}_k} t_i + \hat{\varphi}_{0_k}\right)$
- $\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \hat{\varphi}_{0_k}} = -\hat{A}_k \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{T}_k} t_i + \hat{\varphi}_{0_k}\right)$
- $\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \hat{s}} = t_i$
- $\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial \hat{c}} = 1$

$$\delta \tilde{\mathbf{y}}_3 = \tilde{\mathbf{y}}_3 - \tilde{\mathbf{y}}_3^0 \quad (7.21)$$

το 21916×1 διάνυσμα της διαφοράς των προσωρινών τιμών των δεδομένων (που υπολογίζονται από τις προσωρινές τιμές των παραμέτρων \mathbf{t}_3^0) από τις τιμές των δεδομένων και \mathbf{v}_3 το 21916×1 διάνυσμα των υπολοίπων. Επομένως, οι διορθώσεις τις επαναληπτικής διαδικασίας υπολογίζονται από τον τύπο:

$$\delta \mathbf{t}_3 = (\mathbf{J}_3^T \mathbf{J}_3)^{-1} \mathbf{J}_3^T \delta \tilde{\mathbf{y}}_3 \quad (7.22)$$

Ομοίως, το a-posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{\sigma}_{0_3} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3}{r_3}} \quad (7.23)$$

όπου $r_3 = 21916 - 53 = 21863$ οι βαθμοί ελευθερίας.

Αντίστοιχα, ο a-posteriori πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του διανύσματος $\hat{\mathbf{t}}_2$ υπολογίζεται από τον τύπο:

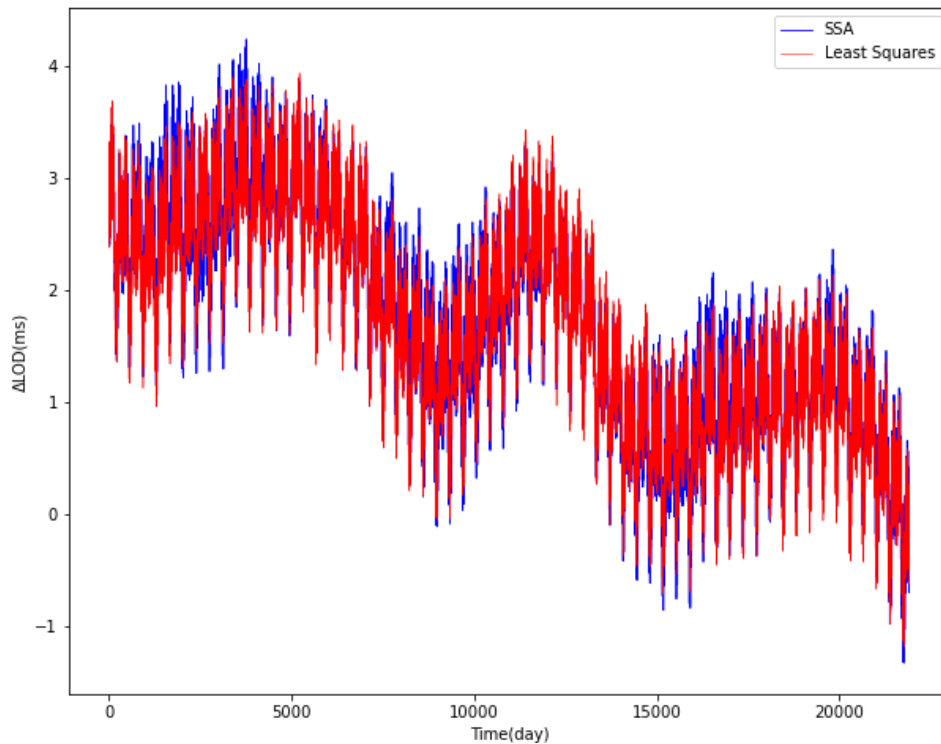
$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{t}_3} \equiv \hat{\mathbf{V}}_{\delta \mathbf{t}_3} = \hat{\sigma}_{0_3}^2 (\mathbf{J}_3^T \mathbf{J}_3)^{-1} \quad (7.24)$$

Επιλέγοντας ως αρχικές τιμές αυτές που προέκυψαν από τις συνορθώσεις της Παραγράφου 7.1, με όριο σύγκλισης 10^{-13} και όριο επαναλήψεων 20, προέκυψαν οι παρακάτω καλύτερες τιμές των παραμέτρων που παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.3, καθώς και στο αντίστοιχο γράφημα στην Εικόνα 7.19.

Πίνακας 7.3: Αποτελέσματα συνόρθωσης της συνολικής χρονοσειράς πλην του θορύβου

Περιοδικότητα	\hat{A} (ms)	$\hat{\sigma}_{\hat{A}} \cdot 10^{-3}$ (ms)	\hat{T} (days)	$\hat{\sigma}_{\hat{T}}$ (ms)	$\hat{\varphi}_0$ (rad)	$\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_0}$ (rad)
1	0.606	1.64	7105.78	3.61884	1.9491	0.0058055
2	0.382	1.55	365.37	0.013627	-0.4800	0.008128
3	0.355	1.55	13.66	0.00002049	0.7729	0.008729
4	0.342	1.55	182.64	0.0038085	2.5540	0.0090838
5	0.227	1.62	4586.32	4.06102	2.8977	0.015428

6	0.190	1.55	27.55	0.0001560	3.9353	0.016329
7	0.004	1.55	13.58	0.003279	-10.0022	1.41728
8	-0.044	1.58	780.15	0.56493	-8.5887	0.073079
9	-0.002	1.55	9.08	0.00317	-39.5887	3.05081
10	0.083	1.58	864.81	0.36420	-25.1290	0.0385354
11	0.031	1.55	613.81	0.491933	39.5768	0.103243
12	0.040	1.55	121.71	0.014475	-1.0197	0.077734
13	0.002	1.55	519.19	3.4724	45.0860	1.03528
14	0.039	1.55	31.81	0.001021	-0.4685	0.08025
15	-0.028	1.55	212.38	0.061794	1.6778	0.10894
16	0.024	1.55	260.54	0.11150	-3.0527	0.13045
17	0.031	1.55	14.77	0.0002764	-2.8170	0.100814
\hat{s} (ms/day)	$\hat{\sigma}_s$ (ms/day)	\hat{c} (ms)	$\hat{\sigma}_c$ (ms)	$\hat{\sigma}_{\sigma_s}$ (ms)		
-0.0001307	$1.800 \cdot 10^{-7}$	3.1239	0.0022874	0.1620		



Εικόνα 7.19: Συνόρθωση συνολικής χρονοσειράς χωρίς το θόρυβο

Δυστυχώς, δεν υπήρξε σύγκλιση στην προσαρμογή αλλά σταμάτησε στο ανώτατο όριο επαναλήψεων. Το a-posteriori τυπικό σφάλμα είναι σχετικά μεγάλο, το οποίο δικαιολογείται από το μεγάλο σφάλμα της προσαρμογής στην τάση, τις αβεβαιότητες στις περιοδικότητες αλλά και τα υπολογιστικά σφάλματα. Ωστόσο, η προσαρμογή θεωρείται ικανοποιητική.

7.3. Προσαρμογή στη συνολική χρονοσειρά

Χρησιμοποιώντας ως αρχικές τιμές των παραμέτρων αυτές που προέκυψαν από τις προσαρμογές της Παραγράφου 7.1, πραγματοποιήθηκε προσαρμογή στη συνολική χρονοσειρά με τιμές y_{4i} , για $i = 1, \dots, 21916$. Σε αυτή την προσαρμογή χρησιμοποιήθηκε και το σφάλμα μέτρησης κάθε τιμής ΔLOD , $\sigma_{y_{4i}}$, της αρχικής σειράς, όπως δίνεται από την ιστοσελίδα της IERS (2023). Έτσι, δημιουργείται ο διαγώνιος πίνακας βαρών \mathbf{P} που έχει τη μορφή:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ & p_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & p_{21916} \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

όπου $p_i = \frac{1}{\sigma_{y_{4i}}^2}$, για $i = 1, \dots, 21916$, το βάρος κάθε μέτρησης. Συνεπώς, οι εξισώσεις επίλυσης τροποποιούνται ως εξής:

$$\delta \hat{\mathbf{t}}_4 = (\mathbf{J}_4^T \mathbf{P} \mathbf{J}_4)^{-1} \mathbf{J}_4^T \mathbf{P} \mathbf{y}_4 \quad (7.26)$$

καθώς και το a-posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους

$$\hat{\sigma}_{0_4} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_4^T \mathbf{P} \mathbf{v}_4}{r_4}} \quad (7.21)$$

όπου $r_4 = 21916 - 53 = 21863$ οι βαθμοί ελευθερίας και τέλος, ο a-posteriori πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας του διανύσματος $\hat{\mathbf{t}}_4$ που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{t}}_4} = \hat{\sigma}_{0_4}^2 (\mathbf{J}_4^T \mathbf{P} \mathbf{J}_4)^{-1} \quad (7.22)$$

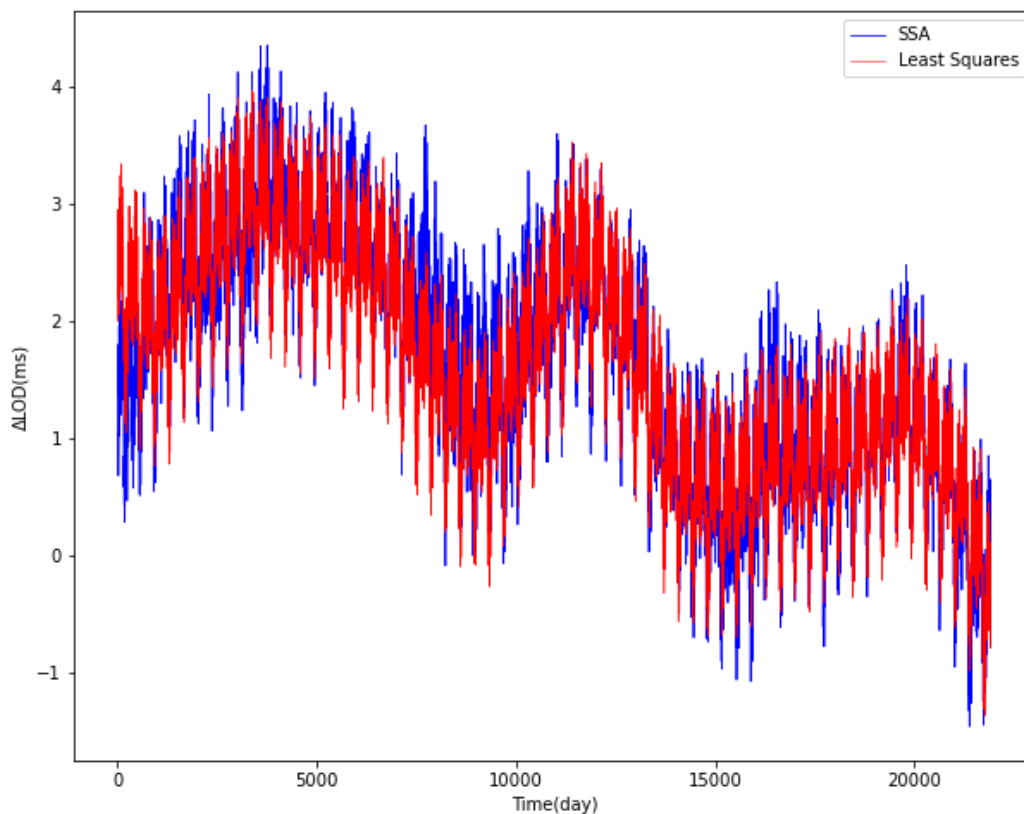
Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τα βάρη δεν ήταν εφικτό, λόγω επιδράσεων αριθμητικών σφαλμάτων, να γίνει καλή προσαρμογή καθώς η τάξη μεγέθους των σφαλμάτων των τιμών ήταν αρκετά διαφορετική από την αρχή έως το τέλος της χρονοσειράς. Συγκεκριμένα, το σφάλμα της πρώτης τιμής ήταν 1.4 ms και της τελευταίας 0.0066 ms. Επομένως, έγινε η προσαρμογή χωρίς τη χρήση των βαρών.

Στον Πίνακα 7.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή στα δεδομένα της συνολικής χρονοσειράς καθώς και το αντίστοιχο γράφημα στην Εικόνα 7.20.

Πίνακας 7.4: Αποτελέσματα συνόρθωσης της συνολικής χρονοσειράς

Περιοδικότητα	\hat{A} (ms)	$\hat{\sigma}_{\hat{A}} \cdot 10^{-3}$ (ms)	\hat{T} (days)	$\hat{\sigma}_{\hat{T}}$ (ms)	$\hat{\varphi}_0$ (rad)	$\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_0}$ (rad)
1	0.665	3.21	7171.71	6.39733	2.1203	0.0101
2	0.374	3.02	365.46	0.027214	-0.4221	0.0162
3	0.354	3.02	13.66	0.00004018	0.7772	0.0171

4	0.346	3.02	182.63	0.0073514	2.5139	0.0175
5	0.307	3.19	4510.92	5.48061	2.6061	0.0216
6	0.190	3.02	27.55	0.0003043	3.9432	0.0319
7	-0.004	3.02	13.52	0.003148	-32.0561	1.3693
8	0.007	3.06	1202.48	15.7720	78.5531	0.7659
9	0.003	3.02	9.10	0.00324	9.7008	3.1142
10	0.038	3.04	609.93	1.1914	-118.1515	0.2495
11	0.024	3.05	899.36	9.1200	283.5755	0.7413
12	0.035	3.02	121.77	0.032027	-0.6626	0.1718
13	0.019	3.05	678.10	2.52468	50.3338	0.4233
14	0.039	3.02	31.81	0.001961	-0.3817	0.1541
15	-0.029	3.02	211.99	0.11624	1.1617	0.2054
16	0.027	3.02	260.28	0.19398	-3.5706	0.2274
17	0.030	3.02	14.77	0.0005511	-2.7453	0.2010
\hat{s} (ms/day)	$\hat{\sigma}_s$ (ms/day)	\hat{c} (ms)	$\hat{\sigma}_c$ (ms)	$\hat{\sigma}_{0_4}$ (ms)		
-0.00012688	0.00000036	3.0040	0.004470	0.3168		



Εικόνα 7.20: Συνόρθωση συνολικής χρονοσειράς

Δυστυχώς, η προσαρμογή δεν συνέκλινε αλλά σταμάτησε στο ανώτατο όριο των 20 επαναλήψεων. Φαίνεται ότι σε αυτή την προσαρμογή, το a-posteriori τυπικό σφάλμα είναι σχετικά μεγάλο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι αρχικές τιμές θεωρήθηκαν ισοβαρείς αλλά και ότι δεν επιλέχθηκε το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο. Για παράδειγμα, πιθανόν να υπάρχουν κι άλλες περιοδικότητες κρυμμένες στην αρχική σειρά που δεν εντοπίστηκαν από την SSA. Εξάλλου, η ανάλυση σταμάτησε εσκεμμένα

στην 17^η περιοδικότητα, καθώς θεωρήθηκε από την ανάλυση της SSA ότι δεν ήταν αρκετά σημαντικές οι επόμενες.

7.4. Ερμηνεία περιοδικοτήτων

Έχοντας πλέον κάποιες τιμές από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 7.1 για τις περιοδικότητες και τα πλάτη (που παρουσιάζονται στη 2^η και 3^η στήλη του Πίνακα 7.5, αντίστοιχα), γίνεται μια προσπάθεια να ερμηνευτούν κάποιες από αυτές, σύμφωνα με τις μελέτες που έχουν γίνει μέχρι στιγμής και υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Οι πληροφορίες που βρέθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.5.

Πίνακας 7.5: Φυσική ερμηνεία κάθε περιοδικότητας

Περιοδικότητες	T (days)	A (ms)	Φυσικά αίτια	Αναφορές	T (days) (αναφοράς)	A (ms) (αναφοράς)
1	6728.25	0.548	Σεληνιακές παλίρροιες	Lambeck, 1980	6789	.*
2	365.37	0.381	Ηλιακή ετήσια παλίρροια (Sa)	Lambeck, 1980	365	0.316
3	13.66	0.358	Σεληνοηλιακή δεκαπενθήμερη παλίρροια (Mf)	Lambeck, 1980/Seitz & Schuh, 2010	13.66	- / 0.35
4	182.64	0.342	Ηλιακή ημι-ετήσια παλίρροια (Ssa)	Lambeck, 1980/Ray-Erofeeva, 2014	182.5/182.62	- / 0.173
5	4390.51	0.192	Schwabe cycle	Currie, 1980 / Hathaway, 2015	3832.5-4161/about 4015	0.06-0.31/-
6	27.55	0.190	Σεληνιακή μηνιαία παλίρροια (Mm)	Lambeck, 1980/Seitz & Schuh, 2010	27.55	- / 0.19
7	13.63	0.130	Σεληνοηλιακή δεκαπενθήμερη παλίρροια (Mf)	Seitz & Schuh, 2010/ Lambeck, 1980	13.63	- / 0.15
8	867.86	0.083	quasi-biennial oscillation (QBO)	Chao, 1989/Baldwin et al., 2001	730-912.5/657-1022	-
9	9.13	0.067	Σεληνιακή παλίρροια (Mt)	Seitz & Schuh, 2010	9.13	0.07
10	775.86	0.024	quasi-biennial oscillation (QBO)	Chao, 1989/Baldwin et al., 2001	730-912.5/657-1022	-
11	777.68	0.016	quasi-biennial oscillation (QBO)	Chao, 1989/Baldwin et al., 2001	730-912.5/657-1022	-
12	121.70	0.040	Παλίρροια (Sta)	Ray-Erofeeva, 2014	121.75	0.010

13	611.48	0.028	Ελεύθερη ταλάντωση πυρήνα (FCN)	Roosbeek et al., 1999/ IERS, 2023	427.05-675.25/430.2	-
14	31.81	0.039	Παλίρροια (MSm)	Ray-Erofeeva, 2014	31.81	0.037
15	212.42	0.025	Ηλιακή ετήσια παλίρροια (Sa)	Ray-Erofeeva, 2014	212.32	0.0001
16	260.78	0.017	άγνωστη	-	-	-
17	14.77	0.031	Σεληνοηλιακή συνοδική δεκαπενθήμερη παλίρροια (MSf)	Lambeck, 1980/ Ray-Erofeeva, 2014	14.77	0.032

*Σημείωση: το σύμβολο (-) υποδηλώνει έλλειψη τιμής

Είναι εμφανές ότι ένα από τα πιο σημαντικά αίτια, είναι οι παλίρροιες από την επίδραση της Σελήνης και του Ηλίου. Φαίνεται ότι αρκετές από τις περιοδικότητες συνάδουν με αυτές που προέκυψαν από το μοντέλο των Ray και Erofeeva (2014).

Γενικότερα, οι τιμές της περιόδου και του πλάτους που προέκυψαν από την ανάλυση της παρούσας εργασίας, είναι αρκετά κοντά στις τιμές της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, παρουσιάζοντας ωστόσο, κάποιες μικρές διαφορές. Αλλά είναι σημαντικό, αρχικά, να ληφθεί υπόψη ότι τα χαρακτηριστικά των περιοδικοτήτων από την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή επιφέρουν ορισμένα μικρά σφάλματα στις τιμές τους, αλλά και ότι το ίδιο το μοντέλο προσαρμογής δεν ήταν το βέλτιστο. Από την άλλη, γενικότερα στη βιβλιογραφία υπάρχει μια ασυμφωνία μεταξύ διαφορετικών ερευνών. Επομένως, συμπεραίνεται ότι η μελέτη του συγκεκριμένου φυσικού φαινομένου είναι αρκετά δύσκολη τόσο στο επίπεδο της επεξεργασίας των δεδομένων, όσο και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

8. Συμπεράσματα και προτάσεις

8.1. Γενικά συμπεράσματα και παρατηρήσεις

Από την εφαρμογή της μεθόδου Singular Spectrum Analysis (SSA), για τα δεδομένα της μεταβολής του μήκους της ημέρας, που διατίθενται από την ιστοσελίδα της IERS, φαίνεται ότι η SSA είναι μια ισχυρή και αποτελεσματική μέθοδος ανάλυσης μιας χρονοσειράς, για την ανάδειξη της τάσης, των περιοδικοτήτων και του θορύβου της.

Αν και πρόκειται για μια περίπλοκη σχετικά μέθοδο, μπορεί ωστόσο να εφαρμοστεί εύκολα με τη χρήση ενός ευρείας χρήσης ηλεκτρονικού υπολογιστή. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, των 21916 τιμών και μήκους παραθύρου $L = 10958$, ήταν απαραίτητη η χρήση μνήμης RAM τουλάχιστον 10 GB, καθώς μπορεί να χειριστεί πίνακες μεγέθους 10958×10959 . Επίσης, συνίσταται η χρήση λειτουργικού Linux, για την ταχύτερη εκτέλεση του προγράμματος. Στο παρόν πρόβλημα η εκτέλεση του κώδικα διήρκεσε 6 ώρες, χωρίς να συμπεριλαμβάνονται οι ώρες της συνολικής ανάλυσης και ερμηνείας από το χρήστη. Πιθανόν, ο χρόνος να μπορεί να ελαχιστοποιηθεί ως ένα βαθμό, με τη χρήση άλλης γλώσσας προγραμματισμού ή με κάποια βελτιστοποίηση στον κώδικα.

Γενικά, κατά την εφαρμογή της SSA σε μια χρονοσειρά, προτείνεται να γίνει κάποιος πειραματισμός πάνω στην επιλογή του μήκους παραθύρου για να βρεθεί το κατάλληλο για την εκάστοτε σύνολο δεδομένων. Ωστόσο, λόγω των δυσκολιών που αναφέρθηκαν, δεν ήταν εφικτός αυτός ο πειραματισμός στα πραγματικά δεδομένα. Έτσι, χρησιμοποιήθηκαν κάποια προσομοιωμένα δεδομένα, αλλά και μια μικρότερη χρονοσειρά των 386 τιμών, που παρέχεται επίσης από την IERS, με διάστημα μελέτης 1623 έως 2008 με βήμα ενός έτους.

Αρχικά, από την εφαρμογή της SSA στα προσομοιωμένα δεδομένα, συμπεραίνεται ότι τα αποτελέσματά της είναι αρκετά ικανοποιητικά και σε μεγάλο βαθμό κοντά στα αναμενόμενα. Με τις προσομοιωμένες χρονοσειρές, έγινε πιο κατανοητή η μέθοδος SSA και συγκεκριμένα η κατάλληλη επιλογή του μήκους παραθύρου L του πίνακα τροχιάς αλλά και η συλλογιστική για την ομαδοποίηση των συνιστωσών που θα συνθέσουν την τάση, τις περιοδικότητες και το θόρυβο. Διαπιστώθηκε λοιπόν, ότι η χρήση μεγάλου μήκους παραθύρου είχε καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά την ανάδειξη των περιοδικοτήτων, ενώ η χρήση μικρού μήκους παραθύρου, βοήθησε στην ανάδειξη κυρίως της τάσης αλλά και της 1^{ης} περιοδικότητας. Επίσης, έγινε φανερό ότι γενικότερα η μέθοδος παρουσιάζει μια αδυναμία στα άκρα κάθε συνιστώσας.

Στα δεδομένα μελέτης επιλέχθηκε μήκος παραθύρου μεγέθους $N/2$ (όπου N το πλήθος των δεδομένων της χρονοσειράς) και αναδείχθηκαν κατάλληλα η τάση της χρονοσειράς, ενώ βρέθηκαν 17 περιοδικότητες, χρησιμοποιώντας τις 50 πρώτες συνιστώσες που θεωρήθηκε ότι ήταν και οι πιο σημαντικές. Τα αποτελέσματα, συγκρινόμενα με αυτά της αντίστοιχης έρευνας των Le Mouél et al. (2019), είχαν μεγάλο βαθμό συμφωνίας. Οι μικροδιαφορές οφείλονται πιθανόν στη διαφορετική χρήση μήκους παραθύρου αλλά και στο μικρότερο σύνολο δεδομένων που χρησιμοποιήσαν.

Στη συνέχεια, από την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή που έγινε στις 17 περιοδικότητες και στην τάση, εξήχθησαν τα χαρακτηριστικά κάθε μιας από αυτές (περίοδος, πλάτος, φάση, σταθεροί συντελεστές κλπ.). Από τον πειραματικό έλεγχο που ακολούθησε έγινε φανερό ότι, οι τιμές που προέκυψαν ήταν σχετικά καλές, καθώς η

προσαρμογή του μοντέλου με αυτές ως αρχικές τιμές, σε ολόκληρη τη χρονοσειρά πλην του θορύβου, ήταν ικανοποιητική. Ωστόσο, σε μερικές περιδικότητες το πλάτος δεν ήταν σωστό, κάτι που μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι συγκεκριμένες δεν έχουν σταθερό εύρος, αλλά είναι πιο ακανόνιστες. Μάλιστα σε αυτές τις περιδικότητες, παρατηρήθηκε ότι η αρχική φάση ξέφευγε αρκετά από την αναμενόμενη τιμή, κάτι που υποδηλώνει ότι το μοντέλο προσαρμογής που χρησιμοποιήθηκε ήταν αρκετά ασταθές. Συνεπώς, η σωστή επιλογή των αρχικών τιμών για την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή είναι αρκετά σημαντική. Αυτό υποδηλώνει τη σημαντικότητα του να προηγηθεί η SSA, καθώς χωρίς αυτή δεν είναι εφικτό αφενός μεν να προσδιοριστούν κατάλληλα οι αρχικές τιμές των αγνώστων παραμέτρων και αφετέρου να είναι γνωστό το πλήθος τους.

Ένα από τα προβλήματα που προέκυψε στην εκτέλεση της ελαχιστοτετραγωνικής προσαρμογής ήταν η έλλειψη αριθμητικής ευστάθειας στην αντιστροφή του πίνακα των κανονικών εξισώσεων. Πράγματι, η προσαρμογή με 53 αγνώστους διαφορετικής τάξης μεγέθους ο καθένας, αποτελεί δύσκολο πρόβλημα. Επιπλέον για λόγους αριθμητικής ευστάθειας, δεν ήταν εφικτή και η χρήση βαρών στην κάθε τιμή της διαφοράς του μήκους της ημέρας, που δίνονται επίσης από την IERS. Ένας πιθανός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού, είναι η αντιστροφή του πίνακα με χρήση της γνωστής μεθόδου Cholesky, αλλά και η χρήση πολλαπλής ακρίβειας ψηφίων (πχ. τετραπλής ακρίβειας).

8.2. Μελλοντικές εργασίες

Η εφαρμογή της SSA σε συνδυασμό με την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή αποδείχθηκε ένα πολύ ισχυρό εργαλείο, που θα μπορούσε να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα. Μερικά από αυτά είναι η ανάλυση του φαινομένου των γήινων και θαλάσσιων παλιρροιών, της κίνησης του πόλου αλλά και ίσως μια αντίστοιχη μελέτη της μεταβολής του μήκους της ημέρας και σε άλλους πλανήτες.

Με βάση κάποιες τελευταίες έρευνες, φαίνεται ότι ο πλανήτης Άρης περιστρέφεται ταχύτερα σε σχέση με το παρελθόν μειώνοντας έτσι το μήκος της ημέρας του κατά ένα κλάσμα του χιλιοστού του δευτερολέπτου ανά έτος, χωρίς να είναι γνωστές οι ακριβείς αιτίες που προκαλούν το φαινόμενο αυτό (NASA, 2023). Χρησιμοποιώντας λοιπόν μια ανάλυση παρόμοια με αυτή που έγινε στην παρούσα εργασία, θα μπορούσαν να διερευνηθούν διάφορα χαρακτηριστικά για τον πλανήτη αυτό.

Μια άλλη σημαντική πτυχή της μελέτης του φαινομένου της μεταβολής του μήκους της ημέρας, είναι η πρόβλεψη αυτής της μεταβολής για τα επόμενα χρόνια. Έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν για την πρόβλεψη μιας χρονοσειράς και φυσικά μια από αυτές είναι η παραλλαγή της SSA για πρόβλεψη (SSA forecasting). Επιπλέον, τα τελευταία χρόνια έχει στραφεί το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας στη χρήση Τεχνητής Νοημοσύνης (Artificial Intelligence) (πχ. η μελέτη των Lei et al. (2015)) για τέτοιου είδους προβλήματα και σίγουρα έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμη, έχοντας περιθώρια και για περαιτέρω βελτίωση.

Παράρτημα Α

```
## Διάγραμμα αρχικής σειράς & Δημιουργία αντιδιαγώνιου πίνακα
#
# Σε αυτό το notebook επιλέγουμε αρχικά ποια δεδομένα θέλουμε να εξετάσουμε (από
τα συνολικά δεδομένα) και τα αποθηκεύουμε σε ένα binary αρχείο ('Smallseries.npy')
καθώς θα το ανακαλέσουμε σε άλλο notebook για να εισάγουμε τα δεδομένα αυτά και
να τα επεξεργαστούμε.
# Στη συνέχεια, ορίζουμε το window length (L) και σχηματίζουμε τον αντιδιαγώνιο
πίνακα σύμφωνα με τη θεωρία τον οποίο επίσης αποθηκεύουμε σε ένα binary αρχείο
(trajjectory.npy) καθώς θα το χρησιμοποιήσουμε επίσης στη συνέχεια.
#
# ***Δεδομένα εισόδου:** DLOD.csv (όλα τα δεδομένα)
#
# ***Δεδομένα εξόδου:** 1. Smallseries.npy (δεδομένα από 0 έως n)
# 2. trajectory.npy (αντιδιαγώνιος πίνακας)
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
#Εισαγωγή δεδομένων
```

```
series = np.genfromtxt("DLOD(1962_2022).csv", delimiter=";") #Διάβασε όλα τα
δεδομένα
```

```
n = 21916 #Αριθμός δεδομένων που θα εξετάσουμε από το csv
```

```
smallseries = [] #Λίστα για να αποθηκευτούν τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε
dlod = [] #Τιμές του ΔLOD
num = [] #Αρίθμηση (1 έως n)
year = [] #Χρονολογίες
for idx, row in enumerate(series):
    if idx in range(0, n):
        smallseries.append(row)
        dlod.append(float(row[4]))
        num.append(int(row[0]))
        year.append(int(row[1]))

with open('smallseries.npy', 'wb') as f: #Αποθήκευση σε ένα binary αρχείο
    np.save(f, smallseries)
```

```
#Ρύθμιση των χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων
```

```
plt.rcParams['figure.figsize'] = (10, 8) #Διαστάσεις διαγράμματος
plt.rcParams['font.size'] = 14 #Μέγεθος του τίτλου
plt.rcParams['axes.linewidth'] = 2 #Πάχος γραμμών των αξόνων
```

```

#Εμφανίζουμε το διάγραμμα της σειράς

plt.plot(dlod, color="blue", lw=1.5)
plt.xticks(num[:,365*5],year[:,365*5], rotation=45) #Ορίζουμε τις ετικέτες των τιμών
του άξονα των x

plt.xlabel('Time(Year)')
plt.ylabel('ΔLOD(ms)')
plt.title('Excess of the length of day')
plt.savefig("dlod.png")
plt.show()

N = len(dlod) #Πλήθος δεδομένων της σειράς

L = 10958 #Ορίζουμε το μήκος του παραθύρου του πίνακα τροχιάς X (ή αλλιώς τον
αριθμό των γραμμών του πίνακα)
if (L>N/2 or L<2): #Το L πρέπει να είναι από 2 έως N/2
    print(f'Warning! Give a number from 2 to {N//2}')

K = N - L + 1 #Υπολογισμός του αριθμού των στηλών του πίνακα

#Δημιουργία του πίνακα τροχιάς X (L x K): "Hankel Matrix"

columns = []
for i in range(0,K):
    column = dlod[j:i+L]
    columns.append(column)
X = np.column_stack(columns)

#Αποθηκεύουμε τον πίνακα σε ένα binary αρχείο για να μη χαθούν σημαντικά ψηφία
και προκύψουν σφάλματα στρογγυλοποίησης

with open('trajectory.npy', 'wb') as f:
    np.save(f, X)

print("Dimensions of trajectory matrix: ",np.shape(X)) #Έλεγχος ότι ο πίνακας X έχει
τις σωστές διαστάσεις

```

#Ελέγχουμε και οπτικά ότι ο πίνακας X είναι αντιδιαγώνιος

```
plt.rcParams['image.cmap'] = 'plasma' #Χρωματική παλέτα
ax = plt.matshow(X)
plt.xlabel("$L$-Lagged Vectors")
plt.ylabel("$K$-Lagged Vectors")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("DLOD(ms)")
plt.title("The Trajectory Matrix for our Time Series")
plt.savefig("Trajectory.png")
plt.show()
```

Ομαδοποίηση συνιστωσών

#

*# ***Δεδομένα εισόδου:** 1. trajectory.npy (αντιδιαγώνιος πίνακας)*

2. smallseries.npy (δεδομένα από 0 έως n)

#

*# ***Δεδομένα εξόδου:** 1. Διαγράμματα αθροιστικής και σχετικής συνεισφοράς*

2. Διάγραμμα με τις n πρώτες συνιστώσες

3. W-correlation πίνακας

4. Διαγράμματα με ομαδοποιημένες συνιστώσες

5. csv με τις τιμές κάθε περιοδικότητας

Αρχικά, δημιουργούμε κάποιες στοιχειώδεις συνιστώσες της αρχικής σειράς. Δηλαδή, κατακερματίζουμε τον πίνακα τροχιάς X σε μικρότερους πίνακες μέσω της συνάρτησης SVD (singular value decomposition), η οποία εκτελείται μέσω της numpy βιβλιοθήκης και στη συνέχεια μέσω μιας συνάρτησης, elem_matr(), κατασκευάζονται οι στοιχειώδεις πίνακες. Έπειτα, με μια άλλη συνάρτηση, X_to_TS(), οι στοιχειώδεις πίνακες μετατρέπονται σε στοιχειώδεις σειρές, σύμφωνα με τη θεωρία, και έτσι μπορούν μετά να αναπαρασταθούν σε ένα διάγραμμα.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import csv
import time
```

```
def elem_matr(U,S,V):
```

```
    """
```

Υπολογίζει τους στοιχειώδεις πίνακες X_i του X,
όταν τους χρειαζόμαστε και συνεχίζει κάθε φορά από εκεί που έχουμε μείνει,
χωρίς να τους αποθηκεύει όλους με τη μία στη μνήμη μας.

```
    """
```

```
    for i in range(0,d):
```

```
        outer_product = np.outer(U[:,i],V[:,i]) #Εξωτερικό γινόμενο της i στήλης του U με  
        την i στήλη του V
```

```
        X_elem =S[i]*outer_product
```

```
        yield X_elem
```

```

def X_to_TS(X_i):
    """
    Υπολογίζει το μέσο όρο των αντιδιαγωνίων ενός στοιχειώδους
    πίνακα X_i και επιστρέφει μια χρονοσειρά.

    """
    X_rev = X_i[::-1]    #Αντιστροφή της σειράς των γραμμών του X_i γιατί
    #χρειαζόμαστε αντιδιαγώνιους,
    #ενώ η Python κάνει υπολογισμούς με διαγώνιους
    anti_diagonal_means = [] #Δημιουργία μιας άδειας λίστας για να αποθηκεύσουμε
    #τους μέσους όρους των αντιδιαγωνίων

    #Κάνουμε μια επανάληψη για ένα σύνολο δεικτών
    #που αντιστοιχούν στη θέση των διαγωνίων (οι θέσεις ξεκινάνε από -k+1 έως l-1,
    #για πίνακα k x l)

    for i in range(-X_i.shape[0]+1, X_i.shape[1]):

        anti_diagonal = X_rev.diagonal(i) #Βρίσκουμε τη διαγώνιο στη θέση i από τον
        #πίνακα X_rev

        mean = anti_diagonal.mean()    #Υπολογίζουμε το μέσο όρο των τιμών των
        #αντιδιαγωνίων

        anti_diagonal_means.append(mean) #Προσθέτουμε στη λίστα των αντιδιαγωνίων
        #το μέσο όρο που βρήκαμε προηγουμένως

    return np.array(anti_diagonal_means) #Μετατρέπουμε τη λίστα σε numpy array και
    #επιστρέφουμε

#Ρύθμιση χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων

plt.rcParams['figure.figsize'] = (11,8) #Διαστάσεις διαγραμμάτων
plt.rcParams['font.size'] = 14    #Μέγεθος τίτλου
plt.rcParams['image.cmap'] = 'plasma' #Χρωματική παλέτα
plt.rcParams['axes.linewidth'] = 2    #Πάχος γραμμών αξόνων

#Ορισμός των χρωμάτων που θα έχουν τα διαγράμματα
from cycler import cycler
cols = cycler(color=plt.get_cmap('tab20').colors)

#Φορτώνουμε τον αντιδιαγώνιο πίνακα από το binary αρχείο και τον αποθηκεύουμε σε
ένα 2-D numpy array (L x K)

with open('trajectory.npy', 'rb') as f:
    X = np.load(f)

```



```

#Φορτώνουμε τη χρονοσειρά μας από το binary αρχείο

with open('smallseries.npy', 'rb') as f:
    F = np.load(f)

#Δημιουργούμε μια άδεια λίστα για να αποθηκεύσουμε τα δεδομένα
dlod = []    #Τιμές του lod
num = []    #Αρίθμηση (1 έως n)
year = []    #Χρονολογίες
for row in F:
    dlod.append(float(row[4]))
    num.append(int(row[0]))
    year.append(int(row[1]))

d = np.linalg.matrix_rank(X) #Ο βαθμός του πίνακα τροχιάς X (για σειρές χωρίς
θόρυβο)
print("The intrinsic dimensionality of the trajectory space is: ",d)

N=len(dlod)    #Το μέγεθος του δείγματος της σειράς

L,K = X.shape    #Αποθηκεύουμε τις διαστάσεις του αντιδιαγώνιου πίνακα L x K

#Υπολογισμός SVD μέσω της βιβλιοθήκης numpy

start = time.time()

U, Sigma, VT = np.linalg.svd(X)
V = np.transpose(VT)    #Η numpy υπολογίζει τον ανάστροφο του V αλλά εμείς
χρησιμοποιούμε τον κανονικό

end = time.time()

t = end - start

print(f"SVD: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60} seconds")

#Μετατροπή των στοιχειωδών πινάκων σε χρονοσειρές

start = time.time()

elem_matrices = elem_matr(U,Sigma,V)
F_elem = []    #Δημιουργία κενού array για τις στοιχειώδεις σειρές

#Προσπέλαση όλων των στοιχειωδών πινάκων και μετατροπή τους σε χρονοσειρά
for i,X_elem in enumerate(elem_matrices):
    ts = X_to_TS(X_elem)    #Μετατροπή σε χρονοσειρά μέσω της συνάρτησης X_to_TS

```

```
F_elem.append(ts)    #Όλες οι στοιχειώδεις χρονοσειρές αποθηκεύονται ως στήλες
στο F_elem array
```

```
end = time.time()
```

```
t = end - start
```

```
print(f"Elementary: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60} seconds")
```

```
## Διάγραμμα Αθροιστικής & Σχετικής Συνεισφοράς
```

```
#
```

```
# Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τα singular values του αντιδιαγώνιου πίνακα X, που
υπολογίστηκε μέσω του SVD και δημιουργούμε τα διαγράμματα αθροιστικής και
σχετικής συνεισφοράς.
```

```
#Δημιουργία διαγράμματος αθροιστικής συνεισφοράς
```

```
n = 50 #Αριθμός στοιχειωδών συνιστωσών
```

```
sigma_sumsq = (Sigma**2).sum()
```

```
plt.plot((Sigma**2).cumsum() / sigma_sumsq * 100, lw=2.5)
```

```
plt.xlim(0,n)
```

```
plt.title("Cumulative Contribution of  $\mathbf{X}_i$  to Trajectory Matrix")
```

```
plt.xlabel("$i$")
```

```
plt.ylabel("Contribution (%)")
```

```
plt.savefig(f"Cumulative_Con_{n}.png")
```

```
plt.show()
```

```
#Δημιουργία διαγράμματος σχετικής συνεισφοράς
```

```
n = 50 #Αριθμός στοιχειωδών συνιστωσών
```

```
plt.plot(Sigma**2 / sigma_sumsq * 100, lw=2.5)
```

```
plt.xlim(0,n)
```

```
plt.title("Relative Contribution of  $\mathbf{X}_i$  to Trajectory Matrix")
```

```
plt.xlabel("$i$")
```

```
plt.ylabel("Contribution (%)")
```

```
plt.savefig(f"Relative_Con_{n}.png")
```

```
plt.show()
```

```
## W-correlation πίνακας
```

```
#
```

```
# Έπειτα, υπολογίζουμε τον W-correlation πίνακα, σύμφωνα με τη θεωρία. Η
αναπαράστασή του θα μας βοηθήσει στην ομαδοποίηση των στοιχειωδών συνιστωσών
στη συνέχεια, καθώς θα δούμε ποιες συνιστώσες συσχετίζονται καλύτερα μεταξύ τους.
```

```
#Πίνακας βαρών w. Δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται ένα στοιχείο στον πίνακα τροχιάς
X, ανάλογα με τη θέση του
```

```
w = np.empty(N,dtype=int)
```

```

for i in range(N):
    if i < L:
        w[i] = i + 1
    elif i < K:
        w[i] = L
    else:
        w[i] = N - i

#Υπολογίζουμε το κάθε βάρος

start = time.time()

F_wnorms = np.array([w.dot(F_elem[i]**2) for i in range(d)]) #Εσωτερικό γινόμενο
F_wnorms = F_wnorms**(-0.5) #και μετά υπολογίζουμε την αντίστροφη τετραγωνική
ρίζα γιατί χρειάζεται στη συνέχεια

#Υπολογισμός του Wcorr πίνακα
#Προσπέλαση όλων των ζευγαριών i και j (i != j). Να σημειωθεί ότι Wij = Wji.
Wcorr = np.identity(d)
for i in range(d):
    for j in range(i+1,d):
        Wcorr[i,j] = abs(w.dot(F_elem[i]*F_elem[j])) * F_wnorms[i] * F_wnorms[j]
        Wcorr[j,i] = Wcorr[i,j]

end = time.time()

t = end - start

print(f"W-correlation matrix: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60}
seconds")

#Εμφανίζουμε σχηματικά ολόκληρο τον W-correlation πίνακα

ax = plt.imshow(Wcorr)
plt.xlabel(r"$\tilde{F}_i$")
plt.ylabel(r"$\tilde{F}_j$")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("$W_{ij}$")
plt.clim(0,1)
plt.title("The W-Correlation Matrix for our Time Series")
plt.savefig("W-corr.png")
plt.show()

#Εστίαση σε ένα συγκεκριμένο μέρος του πίνακα για καλύτερη ανάλυση

n1 = 0
n2 = 10
ax = plt.imshow(Wcorr)
plt.xlabel(r"$\tilde{F}_i$")

```

```

plt.ylabel(r"$\tilde{F}_j$")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("$W_{ij}$")
plt.xlim(n1-0.5,n2+0.5)
plt.ylim(n2+0.5,n1-0.5)
plt.clim(0,1)
plt.title(f"W-Correlation for Components {n1}-{n2}")
plt.savefig(f"W-corr({n1}_{n2}).png')
plt.show()

```

*# # Διάγραμμα της κάθε συνιστώσας
Στο στάδιο αυτό είναι βολικό να εμφανίσουμε την κάθε συνιστώσα μόνη της για να ελέγξουμε και οπτικά ποιες συνιστώσες πρέπει να ομαδοποιηθούν μεταξύ τους.*

```

fig = plt.subplot()
fig.axes.set_prop_cycle(cols)

```

#Ορίζουμε από ποια μέχρι ποια συνιστώσα θέλουμε να δούμε (από n1 έως n2)
n1 = 1
n2 = min(4,d) *#Σε περίπτωση σειράς χωρίς θόρυβο, όπου δηλαδή d < n2.*

```

for i in range(n1,n2+1):
    fig.axes.plot(F_elem[i], lw=2)    #Δημιουργούμε το διάγραμμα με τις συνιστώσες

```

```

fig.axes.plot(dlod, alpha=1, lw=1)    #Βάζουμε στο ίδιο διάγραμμα και την αρχική σειρά
fig.set_xticks(num[:,365*5],year[:,365*5], rotation=45) #Ορίζουμε τις ετικέτες των τιμών του άξονα των x

```

```

fig.set_xlabel("Time(Year)") #Τίτλος άξονα x
fig.set_ylabel("ΔLOD(ms)") #Τίτλος άξονα y
legend = [r"$\tilde{F}_{\%s}$" %i for i in range(n1,n2+1)] + ["$F$"] #Υπόμνημα
fig.set_title(f"Components {n1} to {n2} of our Time Series") #Τίτλος διαγράμματος
fig.legend(legend, loc=(1.01,0.4))
plt.savefig(f"Components({n1}_{n2}).png")
plt.show()

```

*# # Ομαδοποίηση στοιχειωδών συνιστωσών

Τέλος, γίνεται η ομαδοποίηση των στοιχειωδών συνιστωσών, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μας από τον W-correlation πίνακα και το διάγραμμα κάθε στοιχειώδους συνιστώσας και η παρουσίασή τους σε διαγράμματα.*

#Κάνουμε την ομαδοποίηση των συνιστωσών

```

trend = F_elem[0]    #Τάση της σειράς
periodic1 = F_elem[1]+F_elem[2]
periodic2 = F_elem[3]+F_elem[4]
periodic3 = F_elem[5]+F_elem[6]
periodic4 = F_elem[7]+F_elem[8]

```

```

periodic5 = F_elem[10]+F_elem[11]
periodic6 = F_elem[12]+F_elem[13]
periodic7 = F_elem[14]+F_elem[15]
periodic8 = F_elem[16]+F_elem[17]+F_elem[18]+F_elem[19]
periodic9 = F_elem[21]+F_elem[22]
periodic10 = F_elem[28]+F_elem[29]
periodic11 = F_elem[30]+F_elem[31]
periodic12 = F_elem[32]+F_elem[33]
periodic13 = F_elem[34]+F_elem[35]
periodic14 = F_elem[36]+F_elem[37]
periodic15 = F_elem[42]+F_elem[43]
periodic16 = F_elem[45]+F_elem[46]
periodic17 = F_elem[48]+F_elem[49]

```

```

components = [periodic1, periodic2, periodic3, periodic4, periodic5, periodic6,
              periodic7, periodic8, periodic9, periodic10, periodic11, periodic12,
              periodic13, periodic14, periodic15, periodic16, periodic17]

```

#Οι υπόλοιπες συνιστώσες είναι θόρυβος

```

noise=np.zeros_like(trend)
for i in range(50,d):
    noise += F_elem[i]

```

```

noise
+=F_elem[9]+F_elem[20]+F_elem[23]+F_elem[24]+F_elem[25]+F_elem[26]+F_elem[
27]+F_elem[38]+F_elem[39]+F_elem[44]+F_elem[40]+F_elem[41]

```

#Αποθήκευση των τιμών κάθε περιοδικότητας σε διαφορετικά csv για την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή

```

for j in range(17):
    data=[]
    for n,i in enumerate(components[j]):
        data.append([n,i])          #Βάζουμε μια αρίθμηση στα δεδομένα

    with open(f"periodic{j+1}.csv", 'w', newline='') as csvfile:
        csvwriter = csv.writer(csvfile, delimiter=";")
        csvwriter.writerows(data)
    csvfile.close()

```

#Τα απεικονίζουμε όλα μαζί σε ένα διάγραμμα

```

plt.plot(dlod, lw=1)
plt.plot(trend)
for i in range(17):
    plt.plot(components[i])
plt.plot(noise, alpha=0.5)

```

```

plt.xticks(num[::365*5],year[::365*5], rotation=45)
plt.xlabel("Time(Year)")
plt.ylabel("ΔLOD(ms)")
groups = ["trend"]+[ f"periodic {x+1}" for x in range(17)]+["noise"]

```

```

legend = ["original"] + [group for group in groups]
plt.legend(legend, loc=(1.01,0.0))
plt.title("Grouped Time Series Components")
plt.savefig("Grouped.png")
plt.show()

```

```

plt.rcParams['figure.figsize'] = (10,3) #Διαστάσεις διαγραμμάτων
#Διάγραμμα κάθε συνιστώσας χωριστά

```

```

plt.plot(trend)
plt.xticks(num[::365*5],year[::365*5], rotation=45)
plt.xlabel("Time(Year)")
plt.ylabel("ΔLOD(ms)")
plt.title("Trend",fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.savefig('trend.png')
plt.show()

```

```

for i in range(17):
    plt.plot(components[i])
    plt.xticks(num[::365*5],year[::365*5], rotation=45)
    plt.xlabel("Time(Year)")
    plt.ylabel("ΔLOD(ms)")
    plt.title(f"Periodic {i+1}", fontsize=16)
    plt.tight_layout()
    plt.savefig(f'periodic{i+1}.png')
    plt.show()

```

```

plt.plot(noise)
plt.xticks(num[::365*5],year[::365*5], rotation=45)
plt.xlabel("Time(Year)")
plt.ylabel("ΔLOD(ms)")
plt.title("Noise",fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.savefig('noise.png')
plt.show()

```

Παράρτημα Β

#Ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή στην τάση

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 2          #Αριθμός αγνώστων παραμέτρων
data = np.genfromtxt('trend.csv', delimiter = ';')

xd = data[:,0]
yd = data[:,1]
t = len(yd)
step = 1
x = xd[0:t:step]
y = yd[0:t:step]

n = len(y)

N11 = 0
N12 = sum(x)
N22 = n
u1 = 0
u2 = sum(y)
sumli2 = 0
for i in range(0,n):
    N11 += x[i]**2
    u1 += x[i] * y[i]
    sumli2 += y[i]**2

det = N11 * N22 - N12**2
s = (N22 * u1 - N12 * u2) / det
c = (N11 * u2 - N12 * u1) / det
s0_apo = np.sqrt((sumli2 - u1 * s - u2 * c) / (n - 2))
s_s = np.sqrt(s0_apo * s0_apo * N22 / det)
sc = np.sqrt(s0_apo * s0_apo * N11 / det)

print(f' s = {s:.10f} +/- {s_s:.10f} ms/day')
print(f' c = {c:.10f} +/- {sc:.10f} ms')
print(f' s0_aposteriori = +/- {s0_apo:.5f} ms')

xx = np.arange(min(x),max(x),0.01)
yy = s * xx + c

plt.rcParams['figure.figsize'] = (10,8)
plt.title("Trend")
plt.plot(x, y, c = "b", linewidth = 1.5, alpha = 0.5, label = 'SSA')
plt.plot(xx, yy, c = "r", linewidth = 1, label = 'Least squares')
plt.xlabel("Time(day)")
```

```
plt.ylabel('ΔLOD(ms)')
plt.legend(loc='upper right')
plt.savefig("trend.png")
```

#Ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή στις περιοδικότητες

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
m = 4      #Αριθμός αγνώστων παραμέτρων
data = np.genfromtxt('periodic1.csv', delimiter = ';')
```

```
xd = data[:,0]
yd = data[:,1]
xmin = 0
xmax = len(yd)
step = 1
x = xd[xmin:xmax:step]
y = yd[xmin:xmax:step]
```

```
n = len(y)
```

```
A0 = (np.max(y) - np.min(y)) / 2      #Πλάτος σε ms
c0 = A0 + np.min(y)
f0 = np.arccos((y[xmin] - c0) / np.abs(A0)) #Φάση σε rad
T0 = 6728.25                          #Περίοδος σε μέρες
```

```
dx = np.ones(4) * 10
threshold = 10**(-12)                  #Όριο σύγκλισης
it = 0                                 #Επαναλήψεις
```

```
while (np.abs(np.sum(dx)) > threshold and it < 30):
    w = 2 * np.pi / T0
    N11 = 0.
    N12 = 0.
    N13 = 0.
    N14 = 0.
    N22 = 0.
    N23 = 0.
    N24 = 0.
    N33 = 0.
    N34 = 0.
    u1 = 0.
    u2 = 0.
    u3 = 0.
    u4 = 0.
    sumdli2 = 0.
    for i in range(n):
        sinX = np.sin(w * x[i] + f0)
```



```

cosX = np.cos(w * x[i] + f0)
dli = y[i] - A0 * cosX - c0
dF_dA = cosX
dF_dT = 2. * np.pi * A0 * x[i] * sinX / T0**2
dF_df = -A0 * sinX
N11 += dF_dA **2
N12 += dF_dA * dF_dT
N13 += dF_dA * dF_df
N14 += dF_dA
N22 += dF_dT **2
N23 += dF_dT * dF_df
N24 += dF_dT
N33 += dF_df **2
N34 += dF_df
u1 += dF_dA * dli
u2 += dF_dT * dli
u3 += dF_df * dli
u4 += dli
sumdli2 += dli **2

N = np.array([[N11, N12, N13, N14], [N12, N22, N23, N24], [N13, N23, N33, N34],
[N14, N24, N34, n]])
u = np.array([u1, u2, u3, u4])
dx = np.linalg.solve(N,u)
A0 += dx[0]
T0 += dx[1]
f0 += dx[2]
c0 += dx[3]
it += 1
s0 = np.sqrt(sumdli2 / (n - 4))

Vx = (s0 **2) * np.linalg.inv(N)
sA = np.sqrt(Vx[0,0])
sT = np.sqrt(Vx[1,1])
sf = np.sqrt(Vx[2,2])
sc = np.sqrt(Vx[3,3])

print(' n = %d points' % n)
print('\n iterations = %d' % it)
print('\n A = %.10f +/- %.10f ms' %(abs(A0),sA))
print(' T = %.10f +/- %.10f day' %(T0,sT))
print('\n phi = %.10f +/- %.10f rad' %(f0,sf))
print(' c = %.10f +/- %.10f ms' %(c0,sc))
print('\n s0_aposteriori = +/- %.10f ms' % s0)

yadj = []
for i in range (n):
    j = A0 * np.cos(2 * np.pi * x[i] *(1/ T0) + f0) + c0
    yadj.append(j)

plt.rcParams['figure.figsize'] = (10,8)
plt.title("Periodic 1")
plt.plot(x, y, c = "b", linewidth = 0.5, label = 'SSA')

```

```
plt.plot(x, yadj, linewidth = 0.5, color = 'r', label = 'Least squares')
plt.xlabel('Time(day)')
plt.ylabel('ΔLOD(ms)')
plt.legend(loc='upper right')
plt.savefig("periodic1.png")
```

#Ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή στη συνολική χρονοσειρά

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
k = 17      #Αριθμός αγνώστων παραμέτρων
m = 3 * k + 2
data = np.genfromtxt('DLOD.csv', delimiter = ';')
```

```
x = data[:, 0]
y = data[:, 1]
```

```
n = len(y)
```

#Αρχικές τιμές

```
A0 = np.array([0.548, 0.381, 0.358, 0.342, 0.192, 0.190, 0.130, 0.083, 0.067, 0.024,
0.016, 0.040, 0.028, 0.039, 0.025, 0.017, 0.031])
T0 = np.array([6728.25, 365.37, 13.66, 182.64, 4390.51, 27.55, 13.63, 867.86, 9.13,
775.86, 777.68, 121.70, 611.48, 31.81, 212.42, 260.78, 14.77])
f0 = np.array([1.4573, -0.4611, 1.2364, 2.5907, 2.0532, 4.1631, 1.6599, 0.2093, 2.2335,
0.7062, -9.2939, -0.9894, 1.5752, -0.2775, 1.7946, -2.7815, -2.3921])
s0 = 0.1
c0 = 3.
```

```
dx = np.ones(m)
threshold = 10**(-13)
it = 0      #Επαναλήψεις
A = np.ones((n, m)) #Πίνακας σχεδιασμού
A[:, m - 2] = x
dL = np.zeros(n)
N = np.zeros((m, m))
u = np.zeros(m)
```

```
while (sum(abs(dx)) > threshold and it < 20):
    w = 2 * np.pi / T0
    dL = y - s0 * x - c0
    for i in range(0, k):
        A[:, i] = np.cos(w[i] * x + f0[i])
```

```

A[:, i + k] = 2 * np.pi * x * A0[i] * np.sin(w[i] * x + f0[i]) / (T0[i]**2)
A[:, i + 2 * k] = -A0[i] * np.sin(w[i] * x + f0[i])
dL -= A0[i] * np.cos(w[i] * x + f0[i])
N = np.dot(np.transpose(A), A)
u = np.dot(np.transpose(A), dL)
dx = np.linalg.inv(N)@u
for i in range(0, k):
    A0[i] += dx[i]
    T0[i] += dx[k + i]
    f0[i] += dx[2 * k + i]
    s0 += dx[m - 2]
    c0 += dx[m - 1]
    it += 1
sumdli2 = np.dot(np.transpose(dL), dL)
s0_apo = np.sqrt(sumdli2 / (n - m))

```

```

Vx = np.linalg.inv(N) * s0_apo**2
sA = np.zeros(k)
sT = np.zeros(k)
sf = np.zeros(k)

```

```

for i in range(0, k):
    sA[i] = np.sqrt(Vx[i][i])
    sT[i] = np.sqrt(Vx[k + i][k + i])
    sf[i] = np.sqrt(Vx[2 * k + i][2 * k + i])

```

```

s_s = np.sqrt(Vx[m - 2][m - 2])
sc = np.sqrt(Vx[m - 1][m - 1])

```

```

print(' n = %d points  m = %d parameters' % (n, m))
print('\n iterations =', it)

```

```

for i in range(0, k):
    print('\n A{} = {:.8f} +/- {:.8f} ms'.format(i, A0[i], sA[i]))
    print('\n T{} = {:.8f} +/- {:.8f} days'.format(i, T0[i], sT[i]))
    print('\n f{} = {:.8f} +/- {:.8f} rad'.format(i, f0[i], sf[i]))

```

```

print('\n s = %.8f +/- %.8f ms/days' % (s0, s_s))
print(' c = %.8f +/- %.8f ms' % (c0, sc))
print('\n s0_aposteriori = +/- %.8f ms' % (s0_apo))

```

```

data = np.vstack((A0, sA, T0, sT, f0, sf)).T
np.savetxt("data.txt", data, fmt='%.8f', newline="\n", delimiter=",")

```

```

xx = np.arange(0, max(x), 0.2)

```

```
yy = np.zeros(len(xx))
```

```
for i in range(0,len(xx)):
    for j in range(0,k):
        yy[i] += A0[j]*np.cos(2*np.pi*xx[i]/T0[j]+f0[j])
        yy[i] += s0*xx[i]+c0
```

```
plt.rcParams['figure.figsize'] = (10,8)
plt.plot(x,y, c='b',linewidth = 0.8, label="SSA")
plt.plot(xx,yy, linewidth = 0.5, c='r', label="Least Squares")
plt.xlabel("Time(day)")
plt.ylabel('ΔLOD(ms)')
plt.legend(loc='upper right')
plt.savefig("total.png")
```

Βιβλιογραφία

- Aoki, S., Guinot, B., Kaplan, G. H., Kinoshita, H., McCarthy, D. D., & Seidelmann, P. K. (1982). The new definition of Universal Time. *Astronomy and Astrophysics*, *105*(2), 359–361.
<https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1982A%26A...105..359A>
- Audoin, C., & Guinot, B. (2001). The Measurement of Time: Time, Frequency and the Atomic Clock. In *Measurement Science and Technology* (Issue 2). Cambridge University Press.
- Baldwin, M. P., Gray, L. J., Dunkerton, T. J., Hamilton, K., Haynes, P. H., Randel, W. J., Holton, J. R., Alexander, M. J., Hirota, I., Horinouchi, T., Jones, D. B. A., Kinnnersley, J. S., Marquardt, C., Sato, K., & Takahashi, M. (2001). The quasi-biennial oscillation. *Reviews of Geophysics*, *39*(2), 179–229. <https://doi.org/10.1029/1999RG000073>
- BIPM. (2006). *Le Système international d'unités (SI)-The International System of Units (SI), 8th edition*. <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure>
- BIPM. (2022). *Le Système international d'unités (SI) - The International System of Units (SI), 9th edition*. <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure>
- Chao, B. F. (1989). Length-of-Day variations caused by El Niño-Southern oscillation and quasi-biennial oscillation. *Science*, *243*(4893), 923–925.
<https://doi.org/10.1126/science.243.4893.923>
- Currie, R. G. (1980). Detection of the 11-yr sunspot cycle signal in Earth rotation. *Geophysical Journal International*, *61*(1), 131–140.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1980.tb04309.x>
- D'Arcy, J. (2018). *Introducing SSA for Time Series Decomposition*.
<https://www.kaggle.com/code/jdarcy/introducing-ssa-for-time-series-decomposition/notebook>
- Deng, C. (2014). *Time Series Decomposition Using Singular Spectrum Analysis* [East Tennessee State University]. <https://dc.etsu.edu/etd/2352/>
- Dickey, J. O. (1995). Earth rotation variations from hours to centuries. *Highlights of Astronomy*, *10*, 17–44. <https://doi.org/10.1017/S1539299600010339>
- Dick, W., & Richter, B. (2001). *IERS Annual Report 2000*.
<https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/AnnualReports/AnnualReport2000.html?nn=94904>
- EARTH ORIENTATION CENTER. (2023). <https://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php?index=mission&lang=en>
- Golyandina, N., Korobeynikov, A., & Zhigljavsky, A. (2018). *Singular Spectrum Analysis with R*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57380-8>
- Golyandina, N., Nekrutkin, V., & Zhigljavsky, A. A. (2001). *Analysis of Time Series Structure*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9780367801687>

- Golyandina, N., & Zhigljavsky, A. (2020). *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-62436-4>
- Guinot, B., & Arias, E. F. (2005). Atomic time-keeping from 1955 to the present. *Metrologia*, *42*(3), S20–S30. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/42/3/S04>
- Hathaway, D. H. (2015). The Solar Cycle. *Living Reviews in Solar Physics*, *12*(4). <https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4>
- International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS)*. (2023). <https://www.iers.org>
- Lambeck, K. (1980). *The Earth's Variable Rotation*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511569579>
- Lei, Y., Zhao, D., & Cai, H. (2015). Prediction of length-of-day using extreme learning machine. *Geodesy and Geodynamics*, *6*(2), 151–159. <https://doi.org/10.1016/j.geog.2014.12.007>
- Le Mouël, J. L., Lopes, F., Courtillot, V., & Gibert, D. (2019). On forcings of length of day changes: From 9-day to 18.6-year oscillations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, *292*, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2019.04.006>
- Margolis, H. (2018). A brief history of timekeeping. *Physics World*, *31*(11), 27–30. <https://doi.org/10.1088/2058-7058/31/11/36>
- McCarthy, D. D. (2004). Precision time and the rotation of the Earth. *Proceedings of the International Astronomical Union, 2004*(IAUC196), 180–197. <https://doi.org/10.1017/S1743921305001377>
- McCarthy, D. D., & Seidelmann, P. K. (2009). *Time: From Earth Rotation to Atomic Physics*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim. <https://doi.org/10.1002/9783527627943>
- Morrison, L. V., Stephenson, F. R., Hohenkerk, C. Y., & Zawilski, M. (2021). Addendum 2020 to 'Measurement of the Earth's rotation: 720 BC to AD 2015.' *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *477*(2246), 20200776. <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0776>
- National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA)*. (2023). <https://www.noaa.gov/>
- Ray, R. D., & Erofeeva, S. Y. (2014). Long-period tidal variations in the length of day. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *119*(2), 1498–1509. <https://doi.org/10.1002/2013JB010830>
- Roosbeek, F., Defraigne, P., Feissel, M., & Dehant, V. (1999). The free core nutation period stays between 431 and 434 sidereal days. *Geophysical Research Letters*, *26*(1), 131–134. <https://doi.org/10.1029/1998GL900225>
- Seitz, F., & Schuh, H. (2010). Earth Rotation. In *Sciences of Geodesy - I* (pp. 185–227). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-11741-1_6
- Shen, W., & Peng, C. (2016). Detection of different-time-scale signals in the length of day variation based on EEMD analysis technique. *Geodesy and Geodynamics*, *7*(3), 180–186. <https://doi.org/10.1016/j.geog.2016.05.002>

- Stephenson, F. R., Morrison, L. V., & Hohenkerk, C. Y. (2016). Measurement of the Earth's rotation: 720 BC to AD 2015. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2196), 20160404. <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0404>
- Terrien, J. (1971). News from the Bureau International des Poids et Mesures. *Metrologia*, 7(1), 43–44. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/7/1/008>
- The National Aeronautics and Space Administration (NASA)*. (2023). <https://www.nasa.gov/solar-system/nasa-insight-study-finds-mars-is-spinning-faster/>
- Wilson, C. R. (2000). Geodetic and geophysical applications of high precision astrometry. *International Astronomical Union Colloquium*, 180, 182–189. <https://doi.org/10.1017/S0252921100000270>
- Αγατζά Μπαλοδήμου, Α. Μ., & Πάνου, Γ. (2018). *Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων και Εφαρμογές*. Τζιόλα.
- Ανδρώνης, Β. (2021). *Σημειώσεις επί των Χρονοσειρών*. Εργαστήριο Τηλεπισκόπησης.
- Καλλιανού, Φ. (2006). *Συστήματα και Πλαίσια Αναφοράς στη Γεωδαιτική Αστρονομία - Οι Διεθνείς Συμβάσεις, Διπλωματική Εργασία*. Ε.Μ.Π.
- Καστανάς, Π. (2020). *Προς τ' άστρα*. Κάκτος.
- Κορακίτης, Ρ. (2008). *Σημειώσεις Γεωδαιτικής Αστρονομίας*. Σ.Α.Τ.Μ. - Ε.Μ.Π.