Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

URL: http://www.semfe.ntua.gr

Μαρκοβιανές αλυσίδες, Μαρκοβιανές διαδικασίες απόφασης και προσομοίωση

Αλέξάνδρα Βλάχου ge17002
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Κατεύθυνση «Μαθηματικού Εφαρμογών»
Ροές «Εφαρμοσμένη Ανάλυση και Στατιστική»
Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η τριμελής εξεταστική επιτροπή

Ι.Κολέτσος	**Α.Συμβώνης**	**Π.Ψαρράκος**
Αναπλ.Καθηγητής	**Καθηγητής**	**Καθηγητής**

Αθήνα, Ιούνιος 2023

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα

1.1.1 Μια σύντομη ιστορική αναδρομή .

Τα πρώτα σημάδια ύπαρξης της Επιχειρησιακής Έρευνας παρατηρούνται τον 17ο αιώνα, όταν ο Charles Babbage - ο οποίος χαρακτηρίστηκε ως ο "πατέρας της Επιχειρησιακής Έρευνας" - διερεύνησε το κόστος μεταφοράς και το κόστος για την ταξινόμηση της αλληλογραφίας που συνέβαλαν στη δημιουργία του γενικού αγγλικού "Ταχυδρομείου της πένας". Στη συνέχεια, πολλοί ακόμα επιστήμονες όπως οι μαθηματικοί Blaise Pascal και Christiaan Huygens έλυσαν προβλήματα που αφορούσαν σύνθετες αποφάσεις (πρόβλημα σημείων) χρησιμοποιώντας θεωρητικές ιδέες της θεωρίας των παιγνίων και αναμενόμενες τιμές. Άλλοι, όπως ο Pierre de Fermat και ο Jacob Bernoulli, έλυσαν αυτού του είδους τα προβλήματα χρησιμοποιώντας συνδυαστικό συλλογισμό.

Στην πραγματικότητα όμως, το έτος γέννησής της θεωρείται το 1940. Εκείνη την εποχή, στην Αγγλία, κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, προέκυψε κατά τις στρατιωτικές επιχειρήσεις το πρόβλημα της κατανομής περιορισμένων πόρων. Κρίθηκε συνεπώς απαραίτητη η χρήση τεχνικών της Επιχειρησιακής Έρευνας με στόχο την καλύτερη διαχείρηση του πολεμικού εξοπλισμού. Έτσι, σχεδόν 1.000 άνδρες και γυναίκες στη Βρετανία ασχολήθηκαν με τον εν λόγω κλάδο, ενώ περίπου 200 επιστήμονες Επιχειρησιακής Έρευνας εργάστηκαν για τον βρετανικό στρατό. Ο Πάτρικ Μπλάκετ εργάστηκε για πολλούς διαφορετικούς οργανισμούς κατά τη διάρκεια του πολέμου, το 1941 η ομάδα του στο Τμήμα Επιχειρησιακής Έρευνας της Παράκτιας Διοίκησης (CC-ORS) -η οποία περιελάμβανε δύο μελλοντικούς νικητές του βραβείου Νόμπελ και πολλούς άλλους ανθρώπους που συνέχισαν να είναι εξέχοντες στους τομείς τους- ανέλαβαν μια σειρά από κρίσιμες αναλύσεις που βοήθησαν την πολεμική προσπάθεια και οδήγησαν στη νίκη της μάχης του Ατλαντικού αλλά και της μάχης της Βρετανίας.

Ξεκινώντας από τον 20ο αιώνα, η μελέτη της διαχείρισης αποθεμάτων θα μπορούσε να θεωρηθεί η προέλευση της σύγχρονης Επιχειρησιακής Έρευνας με την "economic order quantity" που αναπτύχθηκε από τον Ford W. Harris το 1913, όμως η Επιχειρησιακή Έρευνα γρήγορα διείσδυσε και σε άλλες επιστήμες, όπως η φυσική όπου ο Percy Bridgman την ένταξε για την επίλυση προβλημάτων στη δεκαετία του 1920 και αργότερα προσπάθησε να τα επεκτείνει τις μεθόδους της και στις κοινωνικές επιστήμες.

Αφετηρία της σύγχρονης Επιχειρησιακής Έρευνας θεωρείται ο ερευνητικός σταθμός Bawdsey στο Ηνωμένο Βασίλειο το 1937 με μια πρωτοβουλία του επιθεωρητή του σταθμού, A. P. Rowe και Robert Watson-Watt. Ο Rowe συνέλαβε την ιδέα ως ένα μέσο ανάλυσης και βελτίωσης της λειτουργίας του συστήματος ραντάρ έγκαιρης προειδοποίησης του Ηνωμένου Βασιλείου, με την κωδική ονομασία "Chain Home" . Αρχικά, ο Rowe ανέλυσε τη λειτουργία του εξοπλισμού ραντάρ και των δικτύων επικοινωνίας του, επεκτάθηκε αργότερα στο να συμπεριλάβει τη συμπεριφορά του επιχειρησιακού προσωπικού.΄Οσον αφορά την εμφάνιση της Επιχειρησιακής Έρευνας στην χώρα μας, συνέβη το 1963 όταν μια ομάδα επιστημόνων ανέλαβε την πρωτοβουλία να την προάγει στην Ελλάδα ιδρύοντας την μη κερδοσκοπική εταιρία "Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών"[1] .

1.1.2 Προσπάθεια ορισμού της Επιχειρησιακής Έρευνας

Όπως αναφέραμε η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει ως στόχο την ανάληψη αποφάσεων που σχετίζονται με την βέλτιστη λειτουργία συστημάτων, βοηθά επομένως στην ορθολογιστική αντιμετώπιση της λύσης πολύπλοκων προβλημάτων αλλά και προβλημάτων της καθημερινότητας. Ένα απλόϊκό παράδειγμα για να γίνει ευρέως αντιληπτό είναι το εξής, κάποιο απόγευμα αποφασίζουμε να μαγειρέψουμε στην κουζίνα μας έχοντας μια περιορισμένη ποσότητα σε λάδι. Το πως θα κατανείμουμε το λάδι που έχουμε στη διάθεσή μας ανάμεσα στα διάφορα φαγητά που πρόκειται να μαγειρέψουμε αποτελεί ένα πρόβλημα Επιχειρησιακής Έρευνας.

Έχουν προταθεί αρκετοί ορισμοί κατά καιρούς χωρίς όμως να υπάρχουν αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ τους , ας δούμε μερικούς από αυτους.

Ένας ορισμός που μπορεί να δοθεί για την Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ο εξής :

Πρόκειται για την επιστήμη λήψης αποφάσεων ή επιστήμη της διαχείρισης, μια μαθηματική επιστήμη που χρησιμοποιεί πληθώρα τεχνικών από τομείς των μαθηματικών όπως η μοντελοποίηση, η στατιστική και η βελτιστοποίηση. Στόχος της; Να καταλήξει σε βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις σε πολύπλοκα προβλήματα λήψης αποφάσεων.

Ενώ ο ορισμός που δόθηκε από την Ε.Ε.Ε.Ε (Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών) έχει ως εξής:

"Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προετοιμασία των αποφάσεων της Διοικήσεως (με την επιστημονική ανάλυση των δεδομένων και τη δημιουργία μαθηματικών προτύπων)".[2]

1.1.3 Μεθοδολογία/προσέγγιση του επιχειρησιακού ερευνητή

1. Προσανατολισμός

Το πρώτο βήμα, ο πρωταρχικός στόχος αυτού του βήματος είναι να συγκροτηθεί η ομάδα που θα αντιμετωπίσει το πρόβλημα και να διασφαλιστεί ότι όλα τα μέλη της έχουν μια σαφή εικόνα για τα σχετικά ζητήματα.

2. Διατύπωση προβλήματος

Το πιο δύσκολο βήμα στην διαδικασία, ο στόχος του δεύτερου βήματος είναι να υπάρχει σαφής ορισμός του προβλήματος ως προς την οπτική του και τα επιθυμητά αποτελέσματα και έχει 3 στάδια: πρώτον δήλωση ενός αδιαμφισβήτητου στόχου, δεύτερον μια ξεκάθαρη περιγραφή των παραγόντων που θα επηρεάσουν τον στόχο και τρίτον ένας προσδιορισμός των περιορισμών στις πορείες δράσης, δηλαδή ο καθορισμός ορίων για συγκεκριμένες ενέργειες που μπορεί να λάβει ο λήπτης της απόφασης.

3. Συλλογή δεδομένων

Τα δεδομένα διεργασίας συλλέγονται ούτως ώστε να γίνει η μετάφραση του προβλήματος που ορίστηκε στη δεύτερη φάση σε ένα μοντέλο που μπορεί στη συνέχεια να αναλυθεί αντικειμενικά.

---

[1] Wikimedia Foundation. (2023, June 25). *Operations research*. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Operations_research

[2] I Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2021). Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία, Αλγόριθμοι και εφαρμογές. Εκδόσεις Συμεών.

4. Κατασκευή ενός μοντέλου για την αναπαράσταση του υπό μελέτη συστήματος
Ένα μοντέλο μπορεί να οριστεί επίσημα ως μια επιλεκτική αφαίρεση της πραγματικότητας. Συνήθως είναι πολύ πιο εύκολο να αναλυθεί ένα απλουστευμένο μοντέλο από το να αναλυθεί το αρχικό σύστημα, και εφόσον το μοντέλο είναι μια εύλογα ακριβής αναπαράσταση, τα συμπεράσματα που προκύπτουν από μια τέτοια ανάλυση μπορούν να επεκταθούν έγκυρα πίσω στο αρχικό σύστημα.
5. Επίλυση
Από την οπτική γωνία ενός επαγγελματία συχνά αρκεί να αποκτηθεί μια καλή λύση ακόμα κι αν δεν είναι εγγυημένο ότι είναι η καλύτερη, καθώς είναι πιο σημαντικό να επιτυγχάνεται γρήγορα μια ικανοποιητική λύση από την καταβολή πολλών προσπαθειών για τον προσδιορισμό της βέλτιστης.
6. Επικύρωση Μοντέλου και Ανάλυση Δεδομένων Εξόδου
Μόλις επιτευχθεί μια λύση λαμβάνουν χώρα δύο δράσεις, πρώτα επαλήθευση ότι η λύση έχει νόημα και έπειτα η ανάλυση ευαισθησίας -η χρησιμότητα ενός μοντέλου ελέγχεται διαπιστώνοντας πόσο καλά προβλέπει την επίδραση των αλλαγών.
7. Εφαρμογή της λύσης
Το τελευταίο βήμα είναι η εφαρμογή της τελικής λύσης. Εδώ, περιλαμβάνεται η μετατροπή των αποτελεσμάτων σε κατανοητές λειτουργικές οδηγίες έτσι ώστε οι αρμόδιοι διαχείρησης του δοθέντος συστήματος να υλοποιήσουν και να διατηρήσουν τη βελτίωση που επιτεύχθηκε.[3]

1.1.4 Στοιχεία-κλειδιά της Επιχειρησιακής Έρευνας

Τα τρία στοιχεία-κλειδιά οποιουδήποτε θέματος Επιχειρησιακής Έρευνας:

- Αλγόριθμοι και Στατιστική

Όπως αναφέραμε η Επιχειρησιακή Έρευνα βασίζεται κατά ένα μεγάλο βαθμό σε αλγόριθμους, μαθηματικά και στατιστική. Μια πολύ σημαντική οικογένεια αλγορίθμων στην Επιχειρησιακή Έρευνα είναι οι Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης, πρόκειται για αλγόριθμους που προσπαθούν να βρουν ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο, δεδομένου ενός συγκεκριμένου συνόλου δυνατοτήτων.
Δηλαδή, παραδείγματος χάρη, ένας τέτοιος αλγόριθμος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την ελαχιστοποίηση του κόστους στελέχωσης ενός εργοστασίου, δίνοντας ως δεδομένο ένα σύνολο περιορισμών στον αριθμό των ατόμων που χρειάζονται.

- Βελτιστοποίηση

Πρόκειται για τη διαδικασία που αποσκοπεί στην εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης σε μια ερώτηση, δοθέντων πιθανών πρακτικών περιορισμών. Η βελτιστοποίηση μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση ενός κόστους ή οφέλους που αποφασίζεται πριν από την έναρξη.
Συχνά, είναι πιθανό να έχουμε πολλαπλούς στόχους, οπότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση συνδυασμένου κόστους εφαρμόζοντας σταθμίσεις των διαφορετικών δαπανών μας.

- Προσομοίωση

[3] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2021). Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία, Αλγόριθμοι και εφαρμογές. Εκδόσεις Συμεών.

Η προσομοίωση μοιάζει στην πραγματικότητα με τη βελτιστοποίηση. Η προσομοίωση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης με διαφορετική διαμόρφωση εισόδου για να προσομοιώσουμε ποιό θα ήταν το βέλτιστο αποτέλεσμα με αυτές τις διαφορετικές εισόδους.[4]

1.1.5 Τομείς Εφαρμογής της

- Μεταφορές/Αεροπορικές εταιρίες

Προβλήματα ροής και διαδρομών, προγραμματισμός δρομολογίων διανομής κλπ για την ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς

- Αυτοκινητοβιομηχανία

Προβλήματα αξιοπιστίας, αντικατάστασης και επισκευής

- Υγεία

Προβλήματα επιλογής υπό περιορισμούς, σε δύσκολες υγειονομικά συνθήκες όπως σε πανδημίες προβλήματα διαλογής ασθενών και προτεραιοποίηση τους για εισαγωγή σε κλίνες ΜΕΘ.

- Χρηματιστήριο
- Δημόσιος Τομέας

Προβλήματα προγραμματισμού έργων

Προβλήματα ανθρώπινου δυναμικού

- Εμπόριο/ Εξυπηρέτηση πελατών

Προβλήματα ουρών εξυπηρέτησης και αναμονής, όπου διερευνώνται τρόποι επιτάχυνσης της εξυπηρέτησης

Προβλήματα ελέγχου αποθεμάτων και παραγγελιών, όπου δαπανηρά κυκλοφορούντα κεφάλαια αποδεσμεύονται με τον καθορισμό της κατάλληλης πολιτικής παραγγελιών

- Βιομηχανία

Προβλήματα κατανομής επενδύσεων ή διαφημίσεων

Προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής, καθορισμός της σειράς επεξεργασίας προϊόντων για την καλύτερη αξιοποίησης του εξοπλισμού και τον περιορισμό των αδρανών χρόνων

- Οικονομία

Προβλήματα ανταγωνισμού ή παιγνίων

- Φυσικοί πόροι

Προβλήματα μεταφοράς και καταμερισμού

Προβλήματα τροφοδοσίας και διατροφής

Προβλήματα κατανομής διαθέσιμων πόρων σε πολλαπλές χρήσεις με τρόπο που να επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή απόδοση.

[4] Korstanje, J. (2020, March 1).*What is operations research?*. Medium. https://towardsdatascience.com/what-is-operations-research-1541fb6f4963

1.2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Η έρευνα και η μελέτη διαφόρων φυσικών φαινομένων έδωσαν στους επιστήμονες όλων των κλάδων το έναυσμα για την ανάπτυξη μιας ενιαίας Θεωρίας που θα αφορά τη μοντελοποίηση και την ανάλυση φαινομένων που εξελίσσονται στο χρόνο με τρόπο που εμφανίζει κάποια τυχαιοτητα. Το πρώτο βήμα για τη δημιουργία αυτής της Θεωρίας έγινε από τον κλάδο της Φυσικής με τη μελέτη φυσικών φαινομένων όπως ο θερμικός θόρυβος στα ηλεκτρικά κυκλώματα, η κίνηση Brown και πολλά άλλα. Έτσι, λοιπόν, έγινε έκδηλη η ανάγκη για να αναπαραστήσουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος περιγράφοντας όλες τις διαφορετικές καταστάσεις που μπορεί να καταλαμβάνει και υποδεικνύοντας πώς κινείται μεταξύ αυτών των καταστάσεων. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι το σύστημα που μοντελοποιείται καταλαμβάνει μία και μόνο μία κατάσταση ανά πάσα στιγμή και η εξέλιξή του αντιπροσωπεύεται από μεταβάσεις από κατάσταση σε κατάσταση, οι οποίες συμβαίνουν στιγμιαία οδηγηθήκαμε στη ανάπτυξη της Θεωρίας των Στοχαστικών Ανελίξεων. Γιατί είναι όμως ιδιαίτερα χρήσιμη αυτή η Θεωρία; Διότι οι πληροφορίες που θα θέλαμε να λάβουμε σχετικά με ένα σύστημα (και μας αρκούν) είναι η πιθανότητα να βρεθούμε σε μια δεδομένη κατάσταση ή σύνολο καταστάσεων σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή αφότου το σύστημα τεθεί σε λειτουργία.

Μια στοχαστική διαδικασία, λοιπόν, ορίζεται ως μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$ δηλαδή, κάθε X(t) είναι μια τυχαία μεταβλητή και ως εκ τούτου ορίζεται σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων. Το T ονομάζεται σύνολο δεικτών ή χώρος παραμέτρων και είναι υποσύνολο του $(-\infty, +\infty)$, μπορεί να είναι ένα συνεχές ή διακριτό υποσύνολο. Η παράμετρος t συνήθως αντιπροσωπεύει το χρόνο, οπότε το X(t) υποδηλώνει την τιμή που λαμβάνει η τυχαία μεταβλητή τη στιγμή t, η οποία ονομάζεται κατάσταση και το σύνολο όλων των τιμών που λαμβάνει Χώρος Καταστάσεων.

Εάν η μελλοντική εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάστασή του και όχι από την προηγούμενη ιστορία του, τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε το σύστημα ως μια Μαρκοβιανή διαδικασία. Μια Μαρκοβιανή διαδικασία είναι ένας ειδικός τύπος στοχαστικής διαδικασίας της οποίας η συνάρτηση κατανομής, υπό όρους πιθανότητας, ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ή χωρίς μνήμη ιδιότητα :

$$\mathrm{Prob}\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0\} = \mathrm{Prob}\{X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\} \ ,$$

όπου n φυσικοί αριθμοί και x_n μια κατάσταση.

Όταν ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός τότε η διαδικασία ονομάζεται αλυσίδα (Markov Chain). Έστω μια κατάσταση της αλυσίδας Markov i και μια άλλη καταστασή της j , τότε συμβολίζουμε την πιθανότητα μέταβασης της αλυσίδας από την κατάσταση i (Xn= i) στην j (Xn+1= j) ως

$$\mathrm{Prob}\{Xn+1 = j | Xn = i\} = p_{ij}\,(n),$$

όταν η παράμετρος του χρόνου αυξάνεται απο n σε n+1. O πίνακας P(n) που έχει ως στοιχεία του τα pij (n) και παράλληλα ικανοποιεί τις ιδιότητες :

- $0 \leq p_{ij}(n) \leq 1$ και
- $\sum p_{ij}(n) = 1$ για όλα τα i

ονομάζεται Πίνακας Markov ή Στοχαστικός Πίνακας.[5]

1.3 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Απόφασης

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφερθήκαμε στις Μαρκοβιανές αλυσίδες οι οποίες χρησιμοποιούνται, στην δίκη μας περίπτωση της Επιχειρησιακής Έρευνας, για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος (π.χ σύστημα ουράς) με στόχο να αξιολογηθεί η απόδοση του . Είναι όμως εξίσου - ίσως και περισσότερο- σημαντικό να μοντελοποιήσουμε τη λειτουργία του συστήματος ώστε να βελτιώσουμε την απόδοση του, μέσω του σχεδιασμού μια Μαρκοβιανής Αλυσίδας διακριτού χρόνου. Έτσι ο Ronald Howard, στο βιβλίο του Dynamic Programming and Markov Processes το 1960 , κατέληξε ότι αντί απλώς να αποδεχόμαστε την εκάστοτε αλυσίδα Markov και τον αντίστοιχο στοχαστικό της πίνακα, να διαγράψουμε ένα νέο μονοπάτι. Έτσι, για κάθε πιθανή κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας λαμβάνουμε μια απόφαση σχετικά με το ποιά ενέργεια θα πρέπει να εκτελεστεί -ανάμεσα από τις πολλές εναλλακτικές ενέργειες- σε αυτή την κατάσταση. Είναι προφανές ότι η ενέργεια που τελικά επιλέχθηκε επηρεάζει αφενός τις πιθανότητες μετάβασης αφετέρου το άμεσο και το επακόλουθο κόστος του εν λειτουργία συστήματος. Στόχος; Να επιλέξουμε τις βέλτιστες ενέργειες για τις αντίστοιχες καταστάσεις λαμβάνοντας υπόψην τόσο το άμεσο όσο και το επακόλουθο κόστος. Η διαδικασία λήψης αποφάσεων που περιγράφτηκε αναφέρεται ως Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης (Markov decision process).

Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες απόφασης (MDP) (πήραν το όνομα τους από τον Ρώσο μαθηματικό Andrey Markov καθώς αποτελούν προέκταση των αλυσίδων Markov) παρέχουν ένα μαθηματικό πλαίσιο για τη μοντελοποίηση της διαδικασίας λήψης αποφάσεων σε καταστάσεις όπου τα αποτελέσματα είναι εν μέρει τυχαία και εν μέρει υπό τον έλεγχο ενός υπεύθυνου λήψης αποφάσεων. Είναι ιδιαιτέρως χρήσιμες για τη μελέτη προβλημάτων βελτιστοποίησης που επιλύονται μέσω δυναμικού προγραμματισμού, γεγονός που φαίνεται και από την ευρεία χρήση τους σε διάφορους κλάδους όπως αυτόν της ρομποτικής, του αυτόματου ελέγχου, της οικονομίας, της κατασκευής κ.α.

1.4 Προσομοίωση

Η προσομοίωση είναι μία μέθοδος η οποία θεωρείται η βέλτιστη εναλλακτική της παρατήρησης ενός πραγματικού συστήματος. Κατατάσσεται πολύ ψηλά ανάμεσα στις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες από τις τεχνικές καθώς ανάμεσα στα πολλά προτερήματα της είναι και η ταχύτητα, αφού ο υπολογιστής μπορεί να προσομοιώσει ακόμη και χρόνια λειτουργίας μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα. Πρόκειται για μία τεχνική κατά την οποία αρχικά αναπτύσσουμε ένα μοντέλο το οποίο περιγράφει κατάλληλα το σύστημα μας, και στη συνέχεια εκτελούμε πειράματα πάνω σε αυτό το μοντέλο με στόχο να προβλεφθεί με επιτυχία η συμπεριφορά του πραγματικού συστήματος κατά τη διάρκεια του χρόνου. Περιλαμβάνει μαθηματικούς τύπους και λογικές σχέσεις που είναι απαραίτητες για την περιγραφή της συμπεριφοράς και της δομής ενός πολύπλοκου και πραγματικού συστήματος για μεγάλο χρονικό διάστημα. Αυτό είναι ένα και σύνηθες λάθος, δηλαδή, η εκτέλεση του μοντέλου για αυθαίρετη χρονική περίοδο καθώς η έξοδος της προσομοίωσης

[5] Μ.Λουλάκης (2019). Στοχαστικές Διαδικασίες.Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

αλλάζει (συχνά δραστικά) κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης, για το λόγο αυτό, η μοντελοποίηση προσομοίωσης ασχολείται με ένα στατιστικό πείραμα του οποίου η έξοδος πρέπει να ερμηνευτεί με κατάλληλες στατιστικές δοκιμές. Τα δύο βασικά εργαλεία προσομοίωσης είναι η δημιουργία τυχαίων αριθμών και η δημιουργία τυχαίων παρατηρήσεων από κατανομές πιθανοτήτων.

Η προσομοίωση χρησιμοποιείται συχνά για τη διενέργεια ανάλυσης κινδύνου σε χρηματοοικονομικές διαδικασίες με επανειλημμένη μίμηση της εξέλιξης των συναλλαγών που εμπλέκονται για τη δημιουργία ενός προφίλ των πιθανών αποτελεσμάτων. Χρησιμοποιείται επίσης ευρέως και για την ανάλυση στοχαστικών συστημάτων που θα συνεχίσουν να λειτουργούν επ' αόριστον μέσω της τυχαίας δημιουργίας και της καταγραφής περιστατικών-γεγονότων σαν δηλαδή το σύστημα να λειτουργούσε φυσικά. Θεωρείται "method of last resort"[6] καθώς καταφεύγουμε εκεί όταν καμιά άλλη τακτική δεν είναι κατάλληλη είτε για παράδειγμα γιατί η πραγματική παρατήρηση του συστήματος μπορεί να είναι ιδιαίτερα δαπανηρή, είτε γιατί το πρόβλημα είναι αρκετά πολύπλοκο για να χρησιμοποιήσουμε γραμμικά, δυναμικά και τυπικά μοντέλα, είτε γιατί δεν υπάρχει επαρκής χρόνος για να επιτρέψουμε στο σύστημα να λειτουργήσει εκτενώς κ.ο.κ.

[6] Simulation in operations research. (n.d.). http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch16/simintro.htm

2.Μαρκοβιανές Αλυσίδες

2.1 Γενικά Στοιχεία

Ας ξεκινήσουμε κατηγοριοποιώντας τις στοχαστικές διαδικασίες. Ο βασικός διαχωρισμός μιας στοχαστικής διαδικασίας γίνεται είτε με βάση τον χώρο παραμέτρων T, είτε με βάση τον χώρο καταστάσεων. Έτσι, μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να έχει έναν διακριτό χώρο καταστάσεων, τότε η διαδικασία καλείται αλυσίδα, ή έναν συνεχή χώρο καταστάσεων και μπορεί να εξελίσσεται σε ένα διακριτό σύνολο χρονικών σημείων ή συνεχώς στο χρόνο. Επιπλέον, σε συγκεκριμένα συστήμα ένας ακόμη διαχωρισμός μπορεί να συμβεί με κριτήριο το χρόνο εκκίνησης της διαδικασίας, έτσι χαρακτηρίζεται ως μη-στάσιμη αν η εξέλιξή της εξαρτάται από τον χρόνο τον οποίο ξεκινά, ενώ μια στοχαστική διαδικασία λέγεται ότι είναι στάσιμη όταν παραμένει αμετάβλητη υπό μια αυθαίρετη χρονική μετατόπιση. Τέλος, όταν οι μεταβάσεις σε μια στοχαστική διαδικασία εξαρτώνται από το χρονικό διάστημα που έχει παρέλθει, η στοχαστική διαδικασία λέγεται μη ομοιογενής. Όταν αυτές οι μεταβάσεις είναι ανεξάρτητες από τον χρόνο που έχει παρέλθει, λέμε ότι είναι ομοιογενής.

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία είναι μια στοχαστική διαδικασία της οποίας η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ή χωρίς μνήμη ιδιότητα. Κατά συνέπεια, μπορούμε να ορίσουμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου (DTMCs) και τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου (CTMCs) καθώς και τις Μαρκοβιανές διαδικασίες διακριτού χρόνου και Μαρκοβιανές διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Το ενδιαφέρον μας έγκειται μόνο στις Μαρκοβιανές αλυσίδες (διακριτού χώρου καταστάσεων) που εκτυλίσσονται τόσο σε διακριτό όσο και σε συνεχή χρόνο.

Όσον αφορά τον χώρο (χρονικών) παραμέτρων T, για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου παρατηρούμε την κατάστασή της σε ένα διακριτό αλλά άπειρο σύνολο χρονικών σημείων. Οι μεταβάσεις από τη μια κατάσταση στην άλλη μπορούν να πραγματοποιηθούν, ή όχι, μόνο σε αυτές τις χρονικές στιγμές που ως επί το πλείστον θεωρούνται ότι απέχουν μία μονάδα χρόνου. Επομένως, μπορούμε να αναπαραστήσουμε, χωρίς βλάβη γενικότητας, το διακριτό σύνολο δεικτών T της υποκείμενης στοχαστικής διαδικασίας με το σύνολο των φυσικών αριθμών {0, 1, 2, ...} όπου οι διαδοχικές παρατηρήσεις ορίζουν τις τυχαίες μεταβλητές $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ στα χρονικά βήματα $0,1,\dots,n,\dots$, αντίστοιχα.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, μια Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ένας ειδικός τύπος στοχαστικής διαδικασίας αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η δεσμευμένη κατανομή της X_{n+1} δοθέντων των $(X_0, \dots, X_n)$, ταυτίζεται με τη δεσμευμένη κατανομή της X_{n+1} με μόνη δοθείσα την X_n. Επομένως, η με $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τιμές σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x_0, \dots, x_{n+1}$, έχουμε:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x\,] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n]\,. \tag{2.1}$$

Η κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα στο χρονικό βήμα $n+1$ εξαρτάται μόνο από το πού βρίσκεται στο χρονικό βήμα n.

Για τη διευκόλυνσή μας θα συμβολίζουμε μια κατάσταση x_i της αλυσίδας χρησιμοποιώντας μόνο το γράμμα της, i, και για μια άλλη κατάστασή της αντίστοιχα το εκάστοτε, έτσι θα συμβολίζουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες οι οποίες αποτελούν τις πιθανότητες μέταβασης της αλυσίδας από την κατάσταση i ($x_n = i$) στην j ($x_{n+1} = j$) όταν η παράμετρος του χρόνου αυξάνεται από n σε n+1 ως

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij}(n). \tag{2.2}$$

Ο πίνακας $P(n)$, που σχηματίζεται με την τοποθέτηση του $p_{ij}(n)$ στη σειρά i και στη στήλη j, για όλα τα i και j, ονομάζεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και γράφεται:

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) & \cdots & p_{0j}(n) & \cdots \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) & \cdots & p_{1j}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0}(n) & p_{i1}(n) & \cdots & p_{ij}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Όταν τα στοιχεία του δοθέντος πίνακα ικανοποιούν τις εξής 2 ιδιότητες:

- $0 \leq p_{ij}(n) \leq 1$,
- $\sum_{\forall j} p_{ij}(n) = 1$ (2.4)

ο πίνακας καλείται Μαρκοβιανός ή Στοχαστικός πίνακας.

Ας συμβολίσουμε με π_0 την αρχική κατανομή της αλυσίδας, ισχύει δηλαδή

$$\pi_0 : \mathbb{X} \rightarrow [0,1] \text{ με τύπο } \pi_0(x) = \mathbb{P}[X_0 = x].$$

Πρόκειται για την συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_0 επομένως ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

$$\pi_0(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{X} \text{ και } \sum_{x \in \mathrm{X}} \pi_0(x) = 1. \tag{2.5}$$

Η π_0 και ο στοχαστικός πίνακας P καθορίζουν πλήρως τις στατιστικές ιδιότητες της μαρκοβιανής αλυσίδας . Επιπλέον, το Θεώρημα Συνέπειας του Kolmogorov μας εξασφαλίζει ότι για κάθε π_0 και για κάθε στοχαστικό πίνακα P μπορούμε να κατασκευάσουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με αυτά ακριβώς τα χαρακτηριστικά, αρχική κατανομή π_0 και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P.

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα εκτυλίσσεται στο χρόνο ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι αρχίζει σε κάποια αρχική ώρα 0 και σε κάποια αρχική κατάσταση i. Με δεδομένο κάποιο (άπειρο) σύνολο χρονικών βημάτων, η αλυσίδα μπορεί να αλλάξει κατάσταση σε καθένα από αυτά τα βήματα αλλά μόνο σε αυτά τα χρονικά βήματα. Για παράδειγμα, εάν στο χρονικό βήμα n η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i, τότε η επόμενη κίνησή της θα είναι η κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}(n)$. Συγκεκριμένα, εάν $p_{ii}(n) > 0$, μια κατάσταση που αναφέρεται ως αυτο-βρόχος, η αλυσίδα, με πιθανότητα $p_{ii}(n)$, θα παραμείνει στην τρέχουσα κατάστασή της.

Η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση j στο χρονικό βήμα $n + 1$ και στην κατάσταση k στο χρονικό βήμα $n + 2$, δεδομένου ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i στο χρονικό βήμα n, είναι

$$\mathbb{P}[X_{n+2}=k, X_{n+1}=j \mid X_n=i]$$

$$=\mathbb{P}[X_{n+2}=k \mid X_{n+1}=j, X_n=i]\,\mathbb{P}[X_{n+1}=j \mid X_n=i]$$

$$=\mathbb{P}[X_{n+2}=k \mid X_{n+1}=j]\,\mathbb{P}[X_{n+1}=j \mid X_n=i]$$

$$= p_{jk}(n+1)p_{ij}(n),$$

Για να λάβουμε το παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε πρώτα ιδιότητες δεσμευμένων πιθανοτήτων και εν συνεχεία χρησιμοποιήσαμε την ίδια την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Μια ακολουθία καταστάσεων που επισκέπτεται η αλυσίδα ονομάζεται διαδρομή: $p_{jk}(n+1)p_{ij}(n)$ είναι η πιθανότητα της διαδρομής δείγματος i, j, k που ξεκινά στην κατάσταση i στο χρονικό βήμα n. Πιο γενικά,

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = a, X_{n+m-1} = b, \dots, X_{n+2} = k, X_{n+1} = j \mid X_n = i] \tag{2.6}$$

$$=\mathbb{P}[X_{n+m} = a \mid X_{n+m-1} = b]\,\mathbb{P}[X_{n+m-1} = b \mid X_{n+m-2} = c]\cdots$$

$$\cdots\mathbb{P}[X_{n+2} = k \mid X_{n+1} = j]\,\mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$$

$$= p_{ba}(n+m-1)p_{cb}(n+m-2)\cdots p_{jk}(n+1)p_{ij}(n).$$

Όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ομοιογενής εξ ορισμού ισχύει ότι για όλες τις καταστάσεις i και j:

$\mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = \mathbb{P}[X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = i]$ για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m \geq 0$, επομένως βρίσκουμε:

$\mathbb{P}[X_{n+m} = a, X_{n+m-1} = b, \dots, X_{n+2} = k, X_{n+1} = j \mid X_n = i] = p_{ij}\, p_{jk} \cdots p_{cb}\, p_{ba}$ για όλες τις πιθανές τιμές του n.[7][8]

Ας δούμε ένα παράδειγμα για να γίνουν πιο κατανοητά όλα τα παραπάνω.

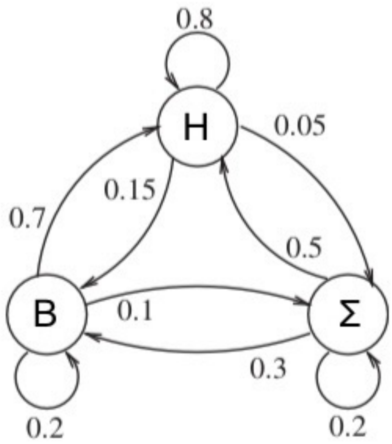
Παράδειγμα 2.1.[9] Έστω ένα μοντέλο πρόβλεψης του καιρού. Ας υποθέσουμε ότι μια ομοιογενής, διακριτού χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα περιγράφει καθημερινά τον καιρό στα Ιωάννινα, μια πόλη στη βορειοδυτική Ελλάδα γνωστή για τις παρατεταμένες περιόδους βροχών. Έστω ότι υπάρχουν μόνο 3 τύποι καιρού: βροχερός, συννεφιασμένος και ηλιόλουστος. Αυτοί οι 3 τύποι καιρικών συνθηκών περιγράφουν τις 3 καταστάσεις της Μαρκοβιανής μας αλυσίδας: κατάσταση 1 (Β) περιγράφει μια ως επί το πλείστον βροχερή μέρα, κατάσταση 2 (Σ) περιγράφει μια ως επί το πλείστον συννεφιασμένη μέρα και κατάσταση 3 (Η) περιγράφει μια ως επί το πλείστον ηλιόλουστη μέρα. Ο καιρός παρακολουθείται καθημερινά. Σε μια οποιαδήποτε βροχερή μέρα, η πιθανότητα να βρέχει και την επόμενη μέρα υπολογίζεται 0.8, η πιθανότητα να έχει συννεφιά την επόμενη μέρα είναι 0.15 ενώ η πιθανότητα η αυριανή μέρα να είναι ηλιόλουστη είναι μόλις 0.05. Ομοίως, πιθανότητες μπορούν να εκχωρηθούν όταν μια συγκεκριμένη ημέρα είναι συννεφιασμένη ή ηλιόλουστη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτή είναι η πιθανότητα του δείγματος

---

7 TAHA, H. A. (2007). Operations research: An introduction. Pearson Prentice Hall.

8 Μ.Λουλάκης (2019). Στοχαστικές Διαδικασίες.Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

9 Stewart, W. J. (2013).Probability, markov chains, queues, and simulation: The mathematical basis of performance modeling. World Publishing Corporation.



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P για τη δοθείσα Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία του πίνακα P αποτελούν δεσμευμένες πιθανότητες. Για παράδειγμα, το στοιχείο p_{13} μας δίνει την πληροφορία ότι η πιθανότητα αύριο να έχει ήλιο, δεδομένου ότι σήμερα έβρεχε, είναι 0.05. Μπορούμε να υπολογίσουμε μεγέθη όπως η πιθανότητα η αυριανή μέρα να έχει συννεφιά και μεθαύριο να είναι μια βροχερή μέρα, δεδομένου ότι σήμερα έχει ήλιο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε, για όλα τα n = 0,1,2,...,

$$\text{Prob}\{X_{n+2} = B, X_{n+1} = \Sigma | X_n = H\} = p_{H\Sigma}\, p_{\Sigma B} = 0.3 \times 0.7 = 0.21.$$

2.2 Πιθανότητες μετάβασης ανωτέρας τάξης

Ας υποθέσουμε ότι μελετάμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με έναν γνωστό πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P. Ένα ερώτημα που μας ενδιαφέρει είναι το εξής: Εάν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i τη χρονική στιγμή m, ποιά είναι η πιθανότητα n περιόδους αργότερα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j; Εφόσον έχουμε να κάνουμε με μια στάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα, αυτή η πιθανότητα θα είναι ανεξάρτητη από το m, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = j | X_m = i] = \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] = p_{ij}(n)$$

Όπου οι $p_{ij}(n)$ ονομάζονται πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης της αλυσίδας.

Οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης της αλυσίδας μπορούν να υπολογιστούν από τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο, που ονομάζεται εξίσωση Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{\forall k} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(m-l)} \quad \gamma\iota\alpha \quad 0 < l < m. \tag{2.7}$$

Για πίνακες, οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov γράφονται ως

$$P^{(m)} = P^{(l)}\, P^{(m-l)}\,,$$

όπου, $P^{(0)} = I$, ο ταυτοτικός πίνακας. Αυτή η σχέση δηλώνει ότι είναι δυνατό οποιοσδήποτε m-τάξης ομοιογενής πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης να γραφεί ως το άθροισμα των γινομένων των πινάκων πιθανότητας μετάβασης l-βήματος και $(m - l)$- βήματος. Για να μεταβείτε από το i στο j σε m βήματα, είναι απαραίτητο να πάτε από το i σε μια ενδιάμεση κατάσταση k σε l βήματα, και στη συνέχεια από το k στο j στα υπόλοιπα βήματα $m - l$. Αθροίζοντας όλες τις πιθανές ενδιάμεσες καταστάσεις k, θεωρούμε όλα τα πιθανά διακριτά μονοπάτια που οδηγούν από το i στο j σε m βήματα. Σημειώνουμε ειδικότερα ότι

$$P^{(m)} = PP^{(m-1)} = P^{(m-1)}\, P\,.$$

Έστω $\pi_i^{(0)}$ η πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να ξεκινάει από την κατάσταση i, και έστω $\pi^{(0)}$ να είναι το διάνυσμα σειρά του οποίου το στοιχείο i είναι το $\pi_i^{(0)}$. Τότε το j στοιχείο του διανύσματος που προκύπτει από το γινόμενο $\pi^{(0)}P^{(0)}$ δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση j μετά το πρώτο χρονικό βήμα. Το γράφουμε ως $\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P^{(0)}$.

Για μια ομοιογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα γράφεται $\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P$.

Γενικά, μετά από n βήματα, η κατανομή πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο,για μια ομοιογενή

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P = \pi^{(0)}P^n\,. \tag{2.8}$$

Δηλαδή, αναφερόμενοι στο προηγούμενο παράδειγμα, θέλουμε να μπορούμε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις όπως “ποιά η πιθανότητα ενώ σήμερα έχει ήλιο σε δύο μέρες από τώρα να έχει συννεφιά;”. Δεδομένου ότι ο καιρός την ενδιάμεση μέρα μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε απο τις τρείς πιθανές καταστάσεις (βροχερός, συννεφιασμένος, ηλιόλουστος), πρέπει να εξετάσουμε τα πιθανά μονοπάτια που περιλαμβάνουν αυτές τις καταστάσεις, έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned} & p_{HB}p_{B\Sigma} + p_{H\Sigma}p_{\Sigma\Sigma} + p_{HH}p_{H\Sigma} \\ &= \sum_{\kappa=\mathrm{B},\Sigma,\mathrm{H}} p_{H\kappa}p_{\kappa\Sigma} \\ &= 0.5 \times 0.15 + 0.3 \times 0.2 + 0.2 \times 0.3 = 0.195, \end{aligned}$$

στην πραγματικότητα αναφερόμαστε στα παρακάτω 3 μονοπάτια:

$$\mathrm{H} \xrightarrow{0.5} \mathrm{B} \xrightarrow{0.15} \Sigma,\ \mathrm{H} \xrightarrow{0.3} \Sigma \xrightarrow{0.2} \Sigma,\ \mathrm{H} \xrightarrow{0.2} \mathrm{H} \xrightarrow{0.3} \Sigma.$$

Γνωρίζουμε ότι ο καιρός σήμερα μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια μια από τις 3 πιθανές καταστάσεις {Β, Σ, Η}, η πιθανότητα όμως ο καιρός να είναι Β, Σ ή Η σε δύο μέρες από τώρα δίνεται στον πίνακα P^2, τα στοιχεία του οποίου αποτελούν τις 9 διαφορετικές δυνατότητες.

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.770 & 0.165 & 0.065 \\ 0.750 & 0.175 & 0.075 \\ 0.710 & 0.195 & 0.095 \end{pmatrix}.$$

Έτσι το στοιχείο (3,1) το οποίο είναι ίσο με 0,710 δίνει την πιθανότητα να έχει βροχή σε δύο ημέρες, δεδομένου ότι έχει συννεφιά ήλιο. Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, το στοιχείο (i,j) του τετραγώνου ενός πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης μιας ομοιογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου είναι η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση j δύο χρονικά βήματα από τώρα, δεδομένου ότι η τρέχουσα κατάσταση είναι η κατάσταση i. Ομοίως, τα στοιχεία του P^3 δίνουν τις δεσμευμένες πιθανότητες σε τρία βήματα από τώρα και ούτω καθεξής. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι αν συνεχίσουμε να παίρνουμε όλο και μεγαλύτερες δυνάμεις του πίνακα P, τότε αυτή η ακολουθία συγκλίνει σε έναν πίνακα στον οποίο όλες οι σειρές είναι πανομοιότυπες. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \\ 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \\ 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \end{pmatrix}.$$

Για τη λήψη αυτών των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήσαμε ουσιαστικά το θεώρημα της ολικής πιθανότητας. Απαιτείται να αθροίσουμε όλα τα δείγματα μονοπατιών μήκους 2 που οδηγούν από την κατάσταση i στην κατάσταση k. Για μια ομοιογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, έχουμε, για οποιαδήποτε n = 0, 1, 2, . . . , $\mathbb{P}[X_{n+2} = k | X_{n+1} = i] = p_{ij}p_{jk}$

και από το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$\mathbb{P}[X_{n+2} = k | X_{n+1} = i] = \sum_{\forall j} p_{ij} p_{jk}.$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός σταδίου μιας ομοιογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας σε έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης m-βήματος του οποίου τα στοιχεία υπολογίζονται από τον αναδρομικό τύπο που αναφέραμε προηγουμένως (εξίσωση Chapman-Kolmogorov). Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό κατανομής, $\pi_i^{(j)},\ j = 0,\ldots,n,$ τα στοιχεία του διανύσματος $\pi^{(1)}$ παρέχουν την πιθανότητα να βρισκόμαστε στις διάφορες καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας μετά το πρώτο χρονικό βήμα. Για παράδειγμα, αν ανατρέξουμε πίσω στο παράδειγμα καιρού των Ιωαννίνων και υποθέσουμε ότι οι παρατηρήσεις ξεκινούν στο χρονικό βήμα 0 με τον καιρό να είναι συννεφιασμένος έχουμε $\pi^{(0)} = (0, 1, 0)$ και

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P(0) = (0,\ 1,\ 0) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} = (0.7,\ 0.2,\ 0.1),$$

που επιστρέφει τη δεύτερη σειρά του πίνακα P. Έτσι, ξεκινώντας από την ημέρα μηδέν με μια συννεφιασμένη ημέρα, η πιθανότητα ότι η πρώτη ημέρα είναι επίσης συννεφιασμένη είναι 0.2, όπως υπολογίστηκε προηγουμένως. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να είμαστε σε οποιαδήποτε κατάσταση μετά από δύο χρονικά βήματα (ή μετά από n-χρονικά βήματα), σχηματίζουμε (για ομοιογενή αλυσίδα)

$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)} P = \pi^{(0)} P^2,$$

$$\pi^{(2)} = (0,\ 1,\ 0) \begin{pmatrix} 0.770 & 0.165 & 0.065 \\ 0.750 & 0.175 & 0.075 \\ 0.710 & 0.195 & 0.095 \end{pmatrix} = (0.750,\ 0.175,\ 0.075),$$

Έτσι, η πιθανότητα να έχει συννεφιά δύο ημέρες μετά την έναρξη των παρατηρήσεων σε μια συννεφιασμένη ημέρα δίνεται με 0.175. Κατά τον υπολογισμό αυτής της ποσότητας, έχουμε αθροίσει όλες τις διαδρομές δείγματος μήκους 2 που ξεκινούν και τελειώνουν στην κατάσταση 2.
Ενώ για τη γενικευμένη περίπτωση για n-χρονικά βήματα χρησιμοποιούμε τον τύπο 2.8.
Στο παράδειγμά μας για $n\to\infty$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\pi^{(n)} = \pi^{(0)}\lim_{n\to\infty}P^{(n)} = (0,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix} 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \\ 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \\ 0.76250 & 0.16875 & 0.06875 \end{pmatrix} = (0.76250,\ 0.16875,\ 0.06875).$$

Ωστόσο το όριο, $\lim_{n\to\infty}\pi^{(n)}$, δεν υπάρχει απαραίτητα για όλες τις Μαρκοβιανές αλυσίδες.

2.3 Δομή του χώρου καταστάσεων

Ξεκινάμε οργανώνοντας τις καταστάσεις του χώρου μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια ομοιογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n\}n\in N_0$ στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = \{p(x, y)\}_{x,y\in\mathbb{X}}$.

Η κατάσταση $y \in \mathbb{X}$ είναι προσβάσιμη από την κατάσταση $x \in \mathbb{X}$, αν υπάρχει $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $p\ (x, y) > 0$, συμβολίζεται $x \to y$. Ενώ δύο καταστάσεις $x, y \in \mathbb{X}$ επικοινωνούν αν $x \to y$ και $y \to x$ και θα συμβολίζεται $x \leftrightarrow y$.
Ο χώρος καταστάσεων διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (communication classes) εντός των οποίων η αλυσίδα είναι πιο εύκολο να αναλυθεί.

Ορισμός 2.3.1 Μια κλάση επικοινωνίας C θα λέγεται ανοιχτή, αν υπάρχουν καταστάσεις $x \in C$ και $y \notin C$ τέτοιες ώστε $x \to y$. Αν μια κλάση δεν είναι ανοιχτή, τότε είναι κλειστή.
Ανοιχτές είναι οι κλάσεις από τις οποίες η Μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να φύγει προς άλλες κλάσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η αλυσίδα φύγει από μια ανοιχτή κλάση, δεν μπορεί να ξαναγυρίσει σε αυτήν, ενώ αν η αλυσίδα ξεκινήσει ή βρεθεί σε μια κλειστή κλάση, θα παραμείνει σε αυτή την κλάση για πάντα.

Ορισμός 2.3.2 Μια κατάσταση j καλείται απορροφητική εάν επιστρέφει στον εαυτό της με βεβαιότητα σε μία μετάβαση, δηλαδή $p_{jj} = 1$.
Εάν η κλειστή κλάση επικοινωνίας C αποτελείται από μία κατάσταση, τότε αυτή η κατάσταση είναι απορροφητική κατάσταση. Κάθε μεμονωμένη κατάσταση που δεν είναι απορροφητική κατάσταση αποτελεί από μόνη της ένα ανοιχτό σύνολο.

Ορισμός 2.3.3 Εάν το σύνολο όλων των καταστάσεων είναι κλειστό και δεν περιέχει κανένα κατάλληλο υποσύνολο που είναι κλειστό -δηλαδή αν ολόκληρος ο χώρος καταστάσεων είναι μια κλάση- τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται ότι είναι μη υποβιβάσιμη. Αντιθέτως, εάν περιέχει κατάλληλα υποσύνολα που είναι κλειστά, η αλυσίδα λέγεται ότι είναι υποβιβάσιμη.

Ένα κλειστό υποσύνολο καταστάσεων λέγεται ότι είναι μη υποβιβάσιμο υποσύνολο εάν δεν περιέχει κατάλληλο υποσύνολο που να είναι κλειστό.Οποιοδήποτε κατάλληλο υποσύνολο ενός μη υποβιβάσιμου υποσυνόλου αποτελεί ένα σύνολο καταστάσεων που είναι ανοιχτό.

<u>Ορισμός 2.3.4</u> Μια κατάσταση j είναι παροδική εάν μπορεί να φτάσει σε άλλη κατάσταση αλλά δεν μπορεί να προσεγγιστεί από μια άλλη κατάσταση. Μαθηματικά, αυτό θα συμβεί εάν $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,$ για όλα τα i. Μια κατάσταση j είναι επαναληπτική εάν η πιθανότητα επανεπίσκεψης από άλλες καταστάσεις είναι 1. Αυτό μπορεί να συμβεί εάν και μόνο εάν η κατάσταση δεν είναι παροδική.

Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ (αρηθμήσιμος). Ορίζουμε το συνολικό πλήθος των επισκέψεων της αλυσίδας στην κατάσταση x, για $x\in\mathbb{X}$,

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta\{X_k = x\}.$$

Η V(x) είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}_0 \bigcup \{\infty\}$.

Ένας εναλλακτικός ορισμός για την επαναληπτικότητα-παροδικότητα μιας κατάστασης είναι ο παρακάτω:

Μια κατάσταση $x\in\mathbb{X}$ λέγεται επαναληπτική αν $P_x[V(x) < \infty] = 0.$ Αντιθέτως, μια κατάσταση $x\in\mathbb{X}$ ονομάζεται παροδική αν $P_x[V(x) < \infty] = 1.$

Τονίζουμε σε αυτό το σημείο ότι η επαναληπτικότητα και η παροδικότητα είναι ιδιότητες κλάσης.

Θα αναφερθούμε σε κάποια σημαντικά θεωρήματα (παραλείποντας τις αποδείξεις) που συνδέουν τους ανωτέρω ορισμούς.

Θεώρημα 2.3.1 Κάθε ανοιχτή κλάση είναι παροδική.

Θεώρημα 2.3.2 Κάθε κλειστή και πεπερασμένη κλάση είναι επαναληπτική.

Παράδειγμα 2.2 Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που εξελίσσεται στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ και έχει πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρώντας ποιές καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους βρίσκουμε τις κλάσεις επικοινωνίες (για διευκόλυνση μπορούμε να φτιάξουμε και τον αντίστοιχο γράφο). Για παράδειγμα βλεπουμε ότι $1 \leftrightarrow 2$ και δεν επικοινωνούν με καμία άλλη κατάσταση, επομένως πρόκειται για μια κλειστή κλάση επικοινωνίας. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε τελικά ότι η διαμέριση του $\mathbb{X}$ σε κλάσεις επικοινωνίας είναι:

$\mathbb{X} = C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3 = \{1,2\} \bigcup \{3,4\} \bigcup \{5,6,7,8\}$.

Η C_2 είναι ανοιχτή -αφού $3 \rightarrow 1$- συνεπώς και παροδική, ενώ οι κλάσεις C_1 και C_3 είναι κλειστές και πεπερασμένες επομένως είναι επαναληπτικές.[10]

Ορισμός 2.3.5 Μια κατάσταση j είναι περιοδική με περίοδο t > 1 εάν μια επιστροφή είναι δυνατή μόνο σε t, 2t, 3t, . .. βήματα. Αυτό σημαίνει ότι $p_{jj}(n) = 0$, όποτε το n δεν διαιρείται με το t.

2.4 Χρόνοι Διακοπής-Στατιστικά χρόνου άφιξης

Ορισμός 2.4.1 Μια τυχαία μεταβλητή T: $\Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \bigcup \{\infty\}$ αποτελεί χρόνο διακοπής της αλυσίδας, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ το ενδεχόμενο {T=n} ανήκει στην οικογένεια ενδεχομένων $\mathcal{F}_n$.

Έστω $\mathbb{X}$ ο χώρος καταστάσεων και i μια κατάσταση ο χρόνος πρώτης άφιξης στην i είναι χρόνος διακοπής της αλυσίδας $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ και συμβολίζεται

$$\mathrm{T}_i = \inf\{k \geq 0 : X_k = i\}.$$

Συμβολίζουμε επιπλέον, τον χρόνο πρώτης επιστροφής στην κατάσταση i ως $T_i^+ = \inf\{k > 0 : X_k = i\}$.

Ορίζουμε στη συνέχεια, την δεσμευμένη πιθανότητα $f_{jj}^{(n)}$, την πιθανότητα δηλαδή ότι η αλυσίδα εγκαταλείποντας την κατάσταση j επανέρχεται για πρώτη φορά ξανά σε αυτή την κατάσταση n-βήματα μετά, συμβολίζεται

$$f_{jj}^{(n)} = P[X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = j] \quad , \quad n = 1,2,\ldots.$$

Πιο πριν είχαμε αναφερθεί στην πιθανότητα $p_{jj}^{(n)}$, την πιθανότητα δηλαδή να επιστρέψει η αλυσίδα στην κατάσταση j σε n- βήματα χωρίς όμως να αποκλείουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να έχει επισκεφθεί ξανά την κατάσταση j στα ενδιάμεσα βήματα, ίσως και παραπάνω από μια φορές.

Ας δούμε πως συσχετίζονται οι δύο προαναφερθείσες πιθανότητες.

Ισχύει ότι $f_{jj}^{(1)} = p_{jj}^{(1)} = p_{jj}$, αφού προφανώς η πιθανότητα η πρώτη επιστροφή στη κατάσταση j να συμβαίνει 1 βήμα μετά είναι απλώς η πιθανότητα p_{jj}. Επιπλέον, εφόσον ξεκινάμε από την κατάσταση j ισχύει $p_{jj}^{(0)} = 1$. Έτσι γράφουμε

$$p_{jj}^{(1)} = f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(0)}.$$

[10] Μ.Λουλάκης (2019). Στοχαστικές Διαδικασίες.Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Όσον αφορά την $p_{jj}^{(2)}$, πρόκειται για την πιθανότητα να βρεθεί η αλυσίδα στην κατάσταση *j* 2 βήματα αφότου την εγκατέλειψε, επομένως αυτό μπορεί να συμβεί με 2 τρόπους: είτε η αλυσίδα φεύγει από την κατάσταση *j,* επιστρέφει στο επόμενο βήμα με πιθανότητα $f_{jj}^{(1)}$ και επιστρέφει ξανά και στο δεύτερο βήμα που σημαίνει πιθανότητα $p_{jj}^{(1)}$, είτε η αλυσίδα εγκαταλείπει την κατάσταση *j* και δεν επιστρέφει σε αυτή μέχρι το δεύτερο βήμα, δηλαδή με πιθανότητα $f_{jj}^{(2)}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στον εξής τύπο

$$p_{jj}^{(2)} = f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(1)} + f_{jj}^{(2)} = f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(1)} + f_{jj}^{(2)} p_{jj}^{(0)}.$$

Ομοίως, και με τη βοήθεια του θεωρήματος ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{jj}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}, \ \ n \geq 1. \tag{2.9}$$

Τελικά, για τον υπολογισμό της πιθανότητας $f_{jj}^{(n)}$, $n \geq 1$, καταλήγουμε στον εξής αναδρομικό τύπο

$$f_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_{jj}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}, \ \ n \geq 1.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα επιστροφής της αλυσίδας στην κατάσταση *j* οποιαδήποτε στιγμή στο μέλλον υπολογίζεται ως

$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}, \text{ όπου } f_{jj} = P_j[T_j^+ < \infty],$$

και χρησιμοποιείται για το έλεγχο επαναληπτικότητας ή παροδικότητας μιας κατάστασης *j.* Πιο συγκεκριμένα, αν $f_{jj} = 1$, η κατάσταση είναι επαναληπτική. Αντιθέτως, αν $f_{jj} < 1$, η κατάσταση *j* είναι παροδική.

Γενικότερα, κάθε κατάσταση είναι είτε επαναληπτική είτε παροδική.

Αναφερόμενοι σε μια επαναληπτική κατάσταση *j* - $f_{jj} = 1$ - ορίζουμε τον μέσο χρόνο επιστροφής M_{jj} της κατάστασης *j* ως

$$M_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}.$$

Είναι, δηλαδή, ο μέσος αριθμός βημάτων που έγιναν για να επιστρέψει η αλυσίδα στην κατάσταση j για πρώτη φορά αφού την εγκατέλειψε.

<u>Ορισμός 2.4.2</u> Μια κατάσταση θα λέγεται γνησίως επαναληπτική όταν το M_{jj} είναι πεπερασμένο, δηλαδή $M_{jj} < \infty$.

Η γνήσια επαναληπτικότητα είναι μια έννοια ισχυρότερη της επαναληπτικότητας.

Θεώρημα 2.4.1 Η γνήσια επαναληπτικότητα είναι ιδιότητα κλάσης, δηλαδή αν η κατάσταση *i* είναι γνησίως επαναληπτική και $j \in C_i$, τότε και η *j* είναι γνησίως επαναληπτική.

Ορίζουμε επιπροσθέτως, την πιθανότητα $f_{ij,}$ να περάσει δηλαδή τουλάχιστον 1 φορά από την *i* κατάσταση στην κατάσταση *j* ως

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

όπου $f_{ij}^{(n)}$ είναι η πιθανότητα πρώτης άφιξης από την *i* κατάσταση στην κατάσταση *j* σε n βήματα-μεταβάσεις, που μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά ως

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{ij}^{(n-l)}, n = 1,2,...$$

Αν $f_{ij} < 1$, η αλυσίδα που ξεκινά από την κατάσταση *i* μπορεί να μη φτάσει ποτέ την κατάσταση *j*, ενώ όταν $f_{ij} = 1$, ορίζουμε την αναμενόμενη τιμή της ακολουθίας $f_{ij}^{(n)}$, $n = 1,2,...$, για ένα σταθερό ζεύγος *i* και *j* $(i \neq j)$, που ονομάζεται μέσος χρόνος πρώτης άφιξης και συμβολίζεται με M_{ij}. Ισχύει, ομοίως με πριν,

$$M_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}, \ i \neq j.$$

Ορισμός 2.4.3 Μια κατάσταση *j* λέγεται ότι είναι περιοδική με περίοδο p εάν εγκαταλείποντας την κατάσταση *j* μια επιστροφή είναι δυνατή μόνο σε έναν αριθμό μεταβάσεων που είναι πολλαπλάσιο του ακέραιου αριθμού p > 1. Με άλλα λόγια, η περίοδος της κατάστασης *j* ορίζεται ως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου των ακεραίων n όπου ισχύει $p_{jj}^{(n)} > 0$. Μια κατάσταση της οποίας η περίοδος είναι p = 1 λέγεται απεριοδική.

Ορισμός 2.4.4 Μια κατάσταση απεριοδική και γνησίως επαναληπτική καλείται εργοδική.

Αν όλες οι καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι εργοδικές τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα ονομάζεται εργοδική.[11]

2.5 Αναλλοίωτες κατανομές

Αν μια αλυσίδα ξεκινήσει από μια αναλλοίωτη κατανομή της θα παραμείνει σε αυτή για πάντα. Κατά μια έννοια οι αναλλοίωτες κατανομές είναι οι φυσικές καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας, ενώ παράλληλα χαρακτηρίζουν και την ασυμπτωματική συμπεριφορά της αλυσίδας.

Συμβολίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_n με π_n, δηλαδή $\pi_n = P[X_n = x], \quad \forall x \in \mathbb{X}$.

[11] Stewart, W. J. (2013).Probability, markov chains, queues, and simulation: The mathematical basis of performance modeling. World Publishing Corporation.

Το σύνολο των κατανομών στον $\mathbb{X}$ θα συμβολίζεται με $\mathscr{M}(\mathbb{X})$.

<u>Ορισμός 2.5.1</u> Μια κατανομή π $\in \mathscr{M}(\mathbb{X})$ θα ορίζεται ως αναλλοίωτη κατανομή για την αλυσίδα $\{X_n\}_n$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P, αν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\pi = \pi \mathrm{P}, \text{ δηλαδή } \pi(x) = \sum_{y\in\mathbb{X}} \pi(y)p(y,x), \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{2.10}$$

Θεώρημα 2.5.1 Αν η αρχική κατανομή $\pi_0 \in \mathrm{M}(\mathbb{X})$ μιας αλυσίδας στον χώρο καταστάσεων έστω $\mathbb{X}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P ικανοποιεί την παραπάνω σχέση τότε

$$\pi_n = \pi_0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επιπλέον η αλυσίδα είναι στάσιμη, δηλαδή έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, για κάθε $n,k \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{X}$ έχουμε

$$P[X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, ..., X_{n+k} = x_k] = P[X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_k = x_k]. \tag{2.11}$$

Απόδειξη Το παραπάνω αποδεικνύεται επαγωγικά. Θα δείξουμε αρχικά ότι $\pi_n = \pi_0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Για n=1 ισχύει $\pi_1 = \pi_0 P = \pi_0$, και έχουμε υποθέσει ότι ικανοποιεί την (2.10). Έστω, ακόμη, ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\pi_n = \pi_0$. Τότε $\pi_{n+1} = \pi_n P = \pi_0 P = \pi_0$.Συνεπώς, ισχύει $\pi_n = \pi_0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Για την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού και με χρήση της Μαρκοβιανής ιδιότητας έχουμε,

$$\begin{aligned} P[X_n = x_0, ..., X_{n+k} = x_k] &= P[X_n = x_0]P[X_{n+1} = x_1 \mid X_n = x_0] \cdots P[X_{n+k} = x_k \mid X_{n+k-1} = x_{k-1}] \\ &= \pi_n(x_0)p(x_0, x_1) \cdots p(x_{k-1}, x_k) \\ &= \pi_0(x_0)p(x_0, x_1) \cdots p(x_{k-1}, x_k) \\ &= P[X_n = x_0, X1 = x_1, ..., X_k = x_k]. \end{aligned}$$

□

Αναφέρουμε κάποια χρήσιμα πορίσματα για τις αναλλοίωτες κατανομές:

Πόρισμα 1 Αν π μια αναλλοίωτη κατανομή και $j \in \mathbb{X}$ τότε

$$M_{jj} = +\infty \Rightarrow \pi(j) = 0.$$

Δηλαδή, οποιαδήποτε αναλλοίωτη κατανομή μιας αλυσίδας στηρίζεται σε γνησίως επαναληπτικές καταστάσεις.

Πόρισμα 2 Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει αναλλοίωτη κατανομή, τότε έχει τουλάχιστον μια γνησίως επαναληπτική κατάσταση.

Πόρισμα 3 Μια μη υποβιβάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι γνησίως επαναληπτική, αν και μόνο αν έχει αναλλοίωτη κατανομή.

Πόρισμα 4 Μια μη υποβιβάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων είναι γνησίως επαναληπτική.

Θεώρημα 2.5.2 Αν $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μη υποβιβάσιμη γνησίως επαναληπτική αλυσίδα, τότε έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή.

Θεώρημα 2.5.3 Έστω μια μη υποβιβάσιμη γνησίως επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, τότε για κάθε κατάσταση j της αλυσίδας αν $T_j^+ = \inf\{k>0 : X_k = j\}$, η $\pi(j)$ είναι η αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας και ισχύει

$$\pi(j) = \frac{1}{M_{jj}}.$$

2.6 Αντιστρεψιμότητα

Ισχύει ότι, όπως αναφέραμε, η κατάσταση ισορροπίας μια Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι μια κατάσταση δυναμικής ισορροπίας, δηλαδή, η αλυσίδα εκτυλίσσεται στο χρόνο με τρόπο τέτοιο ώστε να διατηρεί σταθερή την κατανομή της. Ας υποθέσουμε τώρα, αντί να παρακολουθούμε τη διαδικασία να κινείται προς τα εμπρός στο χρόνο, την παρακολουθούμε να κινείται προς τα πίσω στο χρόνο, δηλαδή από την κατάσταση που καταλαμβάνει κάποια στιγμή το βήμα n στην κατάσταση που καταλαμβάνει στο χρονικό βήμα n − 1 στην κατάστασή της στο χρονικό βήμα n − 2, και ούτω καθεξής. Σε αναλογία με την παρακολούθηση ταινίας, η αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ αντιπροσωπεύει τη συνήθη προβολή της ταινίας με ένα καρέ ανά n, ενώ η παρακολούθηση της διαδικασίας ανάποδα αντιστοιχεί στην προβολή της ταινίας προς τα πίσω. Όταν ο χρόνος γυρίζει προς τα πίσω με αυτόν τον τρόπο, η διαδικασία ονομάζεται αντίστροφη διαδικασία. Πώς μοιάζει η δυναμική της αλυσίδας όταν ο χρόνος κυλάει ανάποδα;

Θεώρημα 2.6.1 Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια μη υποβιβάσιμη στάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα με π ισορροπία κατανομής. Ορίζουμε την ακολουθία για χρόνο $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, $\{\mathrm{Y}_n\}_{0\le n\le N}$ με $Y_n = X_{N-n}$. Τότε η $\{Y_n\}_n$ είναι μια στάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα με κατανομή π, όμως με πιθανότητες μετάβασης $\hat{p}$ που δίνονται από την εξής σχέση

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji}, \quad \forall i,j\in\mathbb{X}.$$

<u>Ορισμός 2.6.1</u> Αν η κατανομή π ικανοποιεί την $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad \forall i,j\in\mathbb{X}$, λέμε ότι η κατανομή π και οι πιθανότητες μετάβασης p βρίσκονται σε ακριβή ισορροπία και ότι η αλυσίδα είναι χρονικά αντιστρέψιμη.

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν βιντεογραφούσαμε την $\{X_n\}_n$, βλέποντας το φιλμ δε θα μπορούσαμε να διακρίνουμε τη φορά του χρόνου.

Παράδειγμα 2.3 Έστω ένας $\{X_n\}_n$ τυχαίος περίπατος σε ένα συνεκτικό, μη προσανοτολισμένο γράφο με M κορυφές. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε τυχαία μια από τις ακμές της κορυφής που βρισκόμαστε και μεταβαίνουμε στην άλλη κορυφή.

Έστω ότι βρισκόμαστε στην κορυφή $i \in$ M με βαθμό m(i), είναι προφανές ότι όλες οι m(i) κορυφές που συνδέονται με την i είναι ισοπίθανες για τη μετάβασή μας. Έστω A το σύνολο των ακμών του γράφου, για τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας έχουμε

$$p_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{m(i)},\ i,j \in A \\ 0,\ \ i,j \notin A \end{array} \right\}.$$

Πρόκειται προφανώς για μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα και έχει επομένως μοναδική αναλλοίωτη κατανομή.

$$m(i)p_{ij} = m(j)p_{ji},\quad \forall i,j \in M,$$

όπου από την προηγούμενη σχέση ισούται με 1 αν $i,j \in M$ και 0 εναλλακτικά. Άρα, για c μια σταθερά παίρνουμε $\pi_i = cm(i)$, και η π βρίσκεται σε ακριβή ισορροπία με τις πιθανότητες μετάβασης p. Από τη συνθήκη κανονικοποίησης παίρνουμε για c

$$1 = \sum_{i \in M} \pi_i = c \sum_{i \in M} m(i) = 2c\,|\,A\,|,$$

όπου |A| το πλήθος ακμών. Άρα,

$$\pi_i = \frac{m(i)}{2\,|\,A\,|},\ \ \forall i \in M.$$

2.7 Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, ορίζουμε μια άπειρη (αριθμήσιμη) ακολουθία χρονικών βημάτων στα οποία η αλυσίδα μπορεί είτε να αλλάξει κατάσταση είτε να παραμείνει στην τρέχουσα κατάστασή της. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να έχει μη μηδενικές πιθανότητες στη διαγώνιο, που ονομάζονται αυτο-βρόχοι, που επιτρέπει την πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να παραμείνει στην τρέχουσα κατάστασή της σε οποιοδήποτε χρονικό βήμα. Αντιθέτως, σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, μια αλλαγή κατάστασης μπορεί να συμβεί ανά πάσα στιγμή.

Ανάλογα με τον ορισμό μιας Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t),\ t \geq 0\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου εάν για όλους τις καταστάσεις n, και για οποιαδήποτε ακολουθία $t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1}$ έτσι ώστε $t_0 < t_1 < ..t_n < t_{n+1}$,

$$P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0]$$
$$= \mathrm{P}[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n].$$

Με άλλα λόγια λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία {X(t), t ≥ 0} είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου είναι για τις καταστάσεις i, j, k και για όλες τις χρονικές στιγμές s, t, u με t ≥0 και 0 ≤ u ≤ s, και ισχύει

$$P[X(s+t) = k \mid X(s) = j, X(u) = i] = P[X(s+t) = k \mid X(s) = j].$$

Όταν Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου είναι ομογενής οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται από τις διαφορές τ = t - s, σε αυτή την περίπτωση οι πιθανότητες μετάβασεις συμβολίζονται ως

$$p_{ij}(\tau) = P[X(s+\tau) = j \mid X(s) = i], \quad \forall s \geq 0.$$

3. Μαρκοβιανές Διαδικασίες Απόφασης

Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες απόφασης (MDP) μοντελοποιούν τη λήψη αποφάσεων σε διακριτά-στοχαστικά περιβάλλοντα. Η ουσία του μοντέλου είναι ότι ένας υπεύθυνος λήψης αποφάσεων, ή ο αποκαλούμενος "πράκτορας", κατοικεί σε ένα περιβάλλον, το οποίο αλλάζει κατάσταση τυχαία ως απάντηση στον τρόπο που επιλέγει να δράσει ο λήπτης αποφάσεων. Η κατάσταση του περιβάλλοντος επηρεάζει την άμεση ανταμοιβή που λαμβάνει ο πράκτορας, καθώς και τις πιθανότητες μελλοντικών μεταβάσεων κατάστασης. Ο στόχος του πράκτορα είναι να επιλέξει τις κατάλληλες ενέργειες για να μεγιστοποιήσει μακροπρόθεσμα τη συνολική του ανταμοιβή.

Τις Μαρκοβιανές διαδικασίες απόφασης μπορούμε να τις δούμε ως ένα μαθηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αντιμετωπίζονται όλα τα προβλήματα ενισχυμένης εκμάθησης (Reinforcement Learning - RL). Σε γενικές γραμμές, πρόκειται για ένα πλαίσιο που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση προβλημάτων λήψης αποφάσεων όπου τα αποτελέσματα είναι εν μέρει τυχαία και εν μέρει προκαθορισμένα.

Αποτελεσματικοί αλγόριθμοι για MDPs που βασίζονται σε δυναμικό προγραμματισμό και γραμμικό προγραμματισμό, και πιο πρόσφατα σε συμπαγείς αναπαραστάσεις, επιτρέπουν τη μοντελοποίηση και επίλυση μεγάλων προβλημάτων σχεδιασμού από την τεχνητή νοημοσύνη, την επιχειρησιακή έρευνα, την οικονομία, τη ρομποτική και τις επιστήμες συμπεριφοράς.[12]

3.1 Βασικές Έννοιες

Για να γίνουν όμως καλύτερα κατανοητές οι Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσης πρέπει πρώτα να αναφερθούμε σε κάποιους σημαντικούς όρους που αποτελούν και την βάση της ενισχυμένης εκμάθησης.

Όπως αναφερθήκαμε και στην εισαγωγή μας υπάρχει:

- Ο πράκτορας (υπεύθυνος λήψης αποφάσεων), ένα software πρόγραμμα που είναι υπεύθυνο για την λήψη αποφάσεων, πρόκειται για μια μία οντότητα την οποία εμείς εκπαιδεύουμε στο πλαίσιο της ενισχυμένης εκμάθησης για να λαμβάνει τις σωστές αποφάσεις. Αυτοί οι πράκτορες αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον με ενέργειες και λαμβάνουν ανταμοιβές ανάλογα με το αποτέλεσμα της εκάστοτε ενέργειας.
- Το περιβάλλον είναι ο "χώρος" με τον οποίο αλληλεπιδρά ο πράκτορας, πρόκειται για ένα πραγματικό ή ένα περιβάλλον προσομοίωσης. Στην πραγματικότητα είναι η διατύπωση του προβλήματός μας προς επίλυση. Ο πράκτορας δεν μπορεί να ελέγξει το περιβάλλον μπορεί μόνο να ελέγξει τις δικές του ενέργειες.
- Ενέργεια, είναι η επιλογή που κάνει ο πράκτορας στο τρέχουν χρονικό βήμα. Σημειώνουμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων το σύνολο ενεργειών – αποφάσεων που ο πράκτορας μπορεί να εκτελέσει.
- Η κατάσταση είναι η θέση του πράκτορα σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο περιβάλλον έτσι κάθε φορά που ο πράκτορας εκτελεί μία ενέργεια το περιβάλλον του επιστρέφει μία ανταμοιβή και μία νέα κατάσταση στην οποία βρίσκεται ο πράκτορας εκτελώντας την ενέργεια.

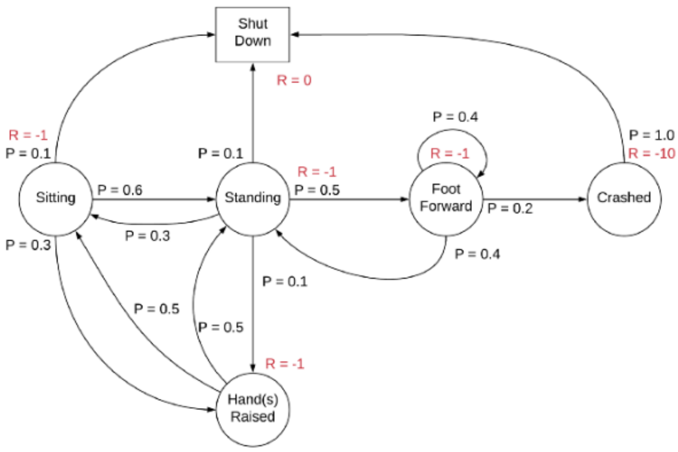
[12] M.L. Littman (2001) International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences.

- Ανταμοιβές (rewards) είναι οι αριθμητικές τιμές που λαμβάνει ο πράκτορας κατά την εκτέλεση μίας ενέργειας σε κάποια κατάσταση στο περιβάλλον. Οι αριθμητικές τιμές είναι είτε θετικές είτε αρνητικές ανάλογα με την εκάστοτε ενέργεια.
- Πολιτική, η πολιτική είναι η διαδικασία σκέψης πίσω από την επιλογή μίας ενέργειας. Πρακτικά, είναι μία κατανομή πιθανότητας που εκχωρείται στο σύνολο των ενεργειών δηλαδή οι ενέργειες με μεγάλη ανταμοιβή θα έχουν πιο μεγάλη πιθανότητα και το αντίστροφο.[13]

3.2 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Ανταμοιβής (MRP)

Στην ενισχυμένη εκμάθηση στόχος είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής ανταμοιβής. Στην ενισχυμένη εκμάθηση δεν εκπαιδεύεις τον πράκτορα αλλά του δίνεις θετικές οι αρνητικές ανταμοιβές ανάλογα με τις αποφάσεις του.

Ορίζουμε τις Μαρκοβιανές διαδικασίες ανταμοιβής, πρόκειται για Μαρκοβιανές αλυσίδες που επιστρέφουν μία τιμή για κάθε κατάσταση που βρίσκεται ο πράκτορας. Ορίζονται από το σύνολο (X_t, p, r, α), όπου X_t η κατάσταση του συστήματος στο τέλος του χρόνου t, p_{ij} η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση *i* στην *j*, r η ανταμοιβή και α ο παράγοντας προεξόφλησης. Θεωρούμε ότι ο πράκτορας λαμβάνει την ανταμοιβή του εφόσον εγκαταλείψει την κατάσταση, σε χρόνο δηλαδή t+1. Για να γίνει πιο κατανοητό, έστω ότι έχουμε ένα ρομπότ με συγκεκριμένες λειτουργίες που ακολουθεί μια Μαρκοβιανή διαδικασία. Υπάρχουν πολλές καταστάσεις, από την καθιστή θέση έως τον τερματισμό λειτουργίας που είναι η τελική κατάσταση.



[14]

[13] Blackburn. (2022, May 2). *Introduction to reinforcement learning : Markov-Decision process*. Medium. https://towardsdatascience.com/introduction-to-reinforcement-learning-markov-decision-process-44c533ebf8da

[14] *Understanding the markov decision process (MDP)*. Built In. (n.d.). https://builtin.com/machine-learning/markov-decision-process

3.3 Ένα Τυπικό Μοντέλο MDP

Στις Μαρκοβιανές διαδικασίες ανταμοιβής η πιθανότητα μετάβασης και οι ανταμοιβές ήταν περισσότερο ή λιγότερο τύχες δηλαδή στοχαστικές, τώρα όμως οι ανταμοιβές και η νέα κατάσταση που μεταφέρεται ο πράκτορας εξαρτώνται επίσης και από την ενέργεια που επιλέγει ο πράκτορας. Στην πραγματικότητα και με απλά λόγια ο πράκτορας τώρα έχει τον έλεγχο της μοίρας του.

Εστιάζουμε στον τρόπο σχεδιασμού της λειτουργίας μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου ώστε να βελτιστοποιηθεί η απόδοσή της. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι Μαρκοβιανές διαδικασίες απόφασης έχουν την εξής ιδιαιτερότητα σε σχέση με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες με τις οποίες ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εδώ, για κάθε πιθανή κατάσταση της αλυσίδας λαμβάνουμε μια απόφαση σχετικά με το ποιά από τις διάφορες εναλλακτικές ενέργειες θα εκτελέσουμε σε αυτή την κατάσταση. Στην ουσία, δεν δεχόμαστε τον προκαθορισμένο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, αλλά με την ενέργεια που επιλέγουμε επηρεάζονται τόσο οι πιθανότητες μετάβασης όσο και το άμεσο και επακόλουθο κόστος (ανταμοιβή). Η ενέργεια που επιλέγουμε είναι η βέλτιστη όσον αφορά το άμεσο και επακόλουθο κόστος.

Προχωράμε σε κάποιους συμβολισμούς που θα χρειαστούμε για να περιγράψουμε ένα μοντέλο διαδικασίας λήψης αποφάσεων. Ορίζουμε i την κατάσταση μιας διακριτού χρόνου Μαρκοβιανής αλυσίδας που παρατηρείται μετά από κάθε μετάβαση, $i \in \{0,1,...,M\}$. Ορίζουμε ως d_i=k την απόφαση που λαμβάνεται στην κατάσταση *i*, και με K το σύνολο αποφάσεων (ενεργειών). Το διάνυσμα (d_0,d_1,…,d_M) προσδιορίζει τις αποφάσεις που λαμβάνονται για τις αντίστοιχες καταστάσεις και αποτελεί μια πολιτική της Μαρκοβιανής διαδικασίας απόφασης, η πολιτική που ακολουθείται θα συμβολίζεται με R. ‘Ετσι, ως d_i(R) ορίζεται η απόφαση που λαμβάνεται στην πολιτική R στην κατάστση *i*. Το άμεσο κόστος δηλαδή η αναμενόμενη τιμή του αν ληθφεί η απόφαση d_i=k συμβολίζεται με C_{ik}. Η απόφαση d_i=k που λαμβάνεται στην κατάσταση *i* καθορίζει, όπως αναφέραμε, και ποιές θα είναι οι πιθανότητες μετάβασης για την επόμενη μετάβαση από την *i* οι οποίες συμβολίζονται με p_{ij}(k). Τέλος ορίζουμε ως α τον συντελεστή-παράγοντας προεξόφλησης ο οποίος λαμβάνει τιμές από το 0 μέχρι το 1. Ο α μπορεί να ισούται με 1/(1+*i*) όπου *i* το τρέχον επιτόκιο ανά περίοδο, είναι λοιπόν η τωρινή αξία μιας μονάδας κόστους σε μια περίοδο στο μέλλον. Αντίστοιχα, ορίζουμε το a^m ως η τωρινή αξία μιας μονάδας κόστους σε m περιόδους στο μέλλον.

3.3.1 Κριτήρια Κόστους

Στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική, σύμφωνα με κάποιο κριτήριο κόστους, που θα λαμβάνει υπόψιν και το άμεσο και το επακόλουθο κόστος που προκύπτει από την εξέλιξη της διαδικασίας.

Υπάρχουν ποικίλα κριτήρια αναφέρουμε επιγραμματικά 2 από αυτά, ένα κριτήριο είναι η “ελαχιστοποίηση του μακροπορόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου” και το “κριτήριο προεξοφλημένου κόστους”. Το τελευταίο κριτήριο κρίνεται προτιμότερο από το κριτήριο μέσου κόστους όταν οι χρονικές περίοδοι για την Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αρκετά μεγάλες ώστε το χρηματικό και χρονικό κόστος θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι το κριτήριο του προεξοφλημένου κόστους μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί στην αντιμετώπιση μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας απόφασης πεπερασμένης περιόδου όπου η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα τερματιστεί μετά από ένα συγκεκριμένο πλήθος περιόδων.

Ελαχιστοποίηση του μακροπορόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου

Το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου E(C) υπολογίζεται ως:

$E(C) = \sum_{i=0}^{M} C_{ik}\pi_i$, όπου $k = d_i(R)$ για κάθε i και $(\pi_0, \pi_1, ..., \pi_M)$ συμβολίζει την κατανομή σταθερής κατάστασης της κατάστασης του συστήματος υπό την πολιτική R που αξιολογούμε. Αφού λύσουμε το $(\pi_0, \pi_1, ..., \pi_M)$ για κάθε μια από τις πολιτικές υπολογίζουμε το E(C). Ψάχνουμε, λοιπόν, ποιά πολιτική διαθέτει το ελάχιστο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Αυτή θεωρείται και η βέλτιστη.

Κριτήριο προεξοφλημένου κόστους

Αυτό το κριτήριο μπορεί να εφαρμοστεί στις 2 από τις 4 μεθόδους που θα εξετάσουμε στη συνέχεια, στη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής και στη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού. Θα αναφερθούμε σε αυτό το κριτήριο εκτενέστερα κατά τη διάρκεια περιγραφής των μεθόδων.

Παράδειγμα 3.1 Μια εταιρία εμφιάλωσης διαθέτει ένα μηχάνημα βασικό στη διαδικασία παραγωγής. Λόγω του όγκου εργασίας που συνεπάγεται μεγάλη χρήση του μηχανήματος το μηχάνημα φθείρεται γρήγορα με αποτέλεσμα να μειώνεται η απόδοση και να πέφτει η ποιότητα παραγωγής. Για να αποφευχθούν περεταίρω προβλήματα γίνεται έλεγχος του μηχανήματος κάθε εβδομάδα και η κατάσταση “υγείας” του ταξινομείται σε 4 κατηγορίες: 0 το μηχάνημα είναι σαν καινούριο, 1 το μηχάνημα είναι λειτουργικό αλλά με μικρές αλλοιώσεις, 2 το μηχάνημα είναι μεν λειτουργικό αλλά με μεγάλες αλλοιώσεις και 3 το μηχάνημα θεωρείται μη λειτουργικό. Μετά από στατιστική ανάλυση πήραμε τον κάτωθι πίνακα που δείχνει τη σχετική συχνότητα (πιθανότητες) της κάθε πιθανής μετάβασης από την κατάσταση του ενός μήνα στην κατάσταση του επόμενου.[15]

Κατάσταση	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	1/2	1/2
3	0	0	0	1

Λαμβάνουμε υπόψιν ότι οι πιθανότητες μετάβασης δεν επηρεάζονται από την κατάσταση τους προγενέστερους μήνες. Δηλαδή ικανοποιείται η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Επομένως, έστω X_t η κατάσταση του μηχανήματος στο τέλος του μήνα t. Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t = 0,1,2,...\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι όταν το μηχάνημα εισέλθει στην κατάσταση 3 παραμένει εκεί, όπως είναι εξάλλου λογικό όταν το μηχάνημα καταστεί μη λειτουργικό παραμένει μη λειτουργικό εκτός και αν παρέμβει τρίτος. Με

[15] LIEBERMAN, G. J., & HILLIER, F. S. (2005). *Introduction to operations research*. McGraw-Hill.

άλλα λόγια η κατάσταση 3 είναι απορροφητική. Το εργοστάσιο δεν μπορεί να αφήσει το μηχάνημα στην κατάσταση 3 διότι έτσι αναστέλλεται η παραγωγή, άρα πρέπει να το αντικαταστήσει (στην κατάσταση 3 δεν επιδιορθώνεται), και το νέο μηχάνημα ξεκινά από την κατάσταση 0. Και πριν την κατάσταση 3, όμως, ενδέχεται να προκύψουν ελαττωματικά ανταλλακτικά που χρειάζονται αντικατάσταση.

Το κόστος της χαμένης παραγωγής είναι 2,000€ ενώ το κόστος αντικατάστασης 4,000€. Άρα το συνολικό κόστος κάθε φορά που το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση 3 είναι 6,000€. Το αναμενόμενο κόστος ανά εβδομάδα από ελαττωματικά ανταλλακτικά έχει ως εξής:

Κατάσταση	Αναμενόμενο κόστος ανά εβδομάδα,€
0	0
1	1,000
2	3,000

Παρατηρούμε ότι ακολουθείται μια συγκεκριμένη πολιτική συντήρησης, στο μηχάνημα δεν γίνονται επισκευές μόνο αντικατάσταση όταν κάτι δε λειτουργεί.

Άρα ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης τροποποιείται ως:

Κατάσταση	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	1/2	1/2
3	1	0	0	0

Για να αξιολογήσουμε αυτή την πολιτική συντήρησης πρέπει να εξετάσουμε τόσο το άμεσο κόστος που προκύπτει την ακόλουθη εβδομάδα όσο και το επακόλουθο κόστος που προκύπτει από τον συγκεκριμένο τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται το σύστημα.

Το μέτρο απόδοσης για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου, το οποίο υπολογίζουμε με τις πιθανότητες κατάστασης και λύνοντας το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\pi_0 = \pi_3$$

$$\pi_1 = \frac{7}{8}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1$$

$$\pi_2 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_3 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

Και $1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$

Επομένως από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων προκύπτει:

$$\pi_0 = \frac{2}{13},\ \pi_1 = \frac{7}{13},\ \pi_2 = \frac{2}{13},\ \pi_3 = \frac{2}{13}.$$

Ως εκ τούτου το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά εβδομάδα για τη δοθείσα πολιτική συντήρησης είναι:

$$0\pi_0 + 1{,}000\pi_1 + 3{,}000\pi_2 + 6{,}000\pi_3 = \frac{25{,}000}{13} = 1{,}923.08€.$$

Ωστόσο αυτή είναι μια από τις πολλές πολιτικές συντήρησης που υπάρχουν και θα πρέπει να συγκριθούν ώστε να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική με τη μικρότερη ζημία για την επιχείρηση.

Συγκεντρώνουμε σε ένα πίνακα τις πιθανές αποφάσεις με τις αντίστοιχες ενέργειες που μπορούν να ληθφούν μετά από κάθε έλεγχο.

Απόφαση	Ενέργεια	Σχετικές καταστάσεις
1	Καμία ενέργεια	0,1,2
2	Γενική επισκευή	2
3	Αντικατάσταση	1,2,3

Συγκεντρωτικός πίνακας με κόστη:

Απόφαση	Κατάσταση	Αναμενόμενο κόστος λόγω ελαττωματικών ανταλλακτικών	Κόστος συντήρησης	Κόστος από αναστολή παραγωγής	Συνολικό κόστος ανά εβδομάδα
1	0	0	0	0	0
	1	1,000	0	0	1,000
	2	3,000	0	0	3,000
2	2	0	2,000	2,000	4,000
3	1, 2, 3	0	4,000	2,000	6,000

Αυτό που ψάχνουμε είναι η βέλτιστη πολιτική συντήρησης.

Οι καταστάσεις από το εκάστοτε επίπεδο που βρισκόταν η , περιγράφονταν από την MC. Είχαμε 3 πιθανές αποφάσεις που μπορούσαμε να λάβουμε, να μην προβούμε σε καμία ενέργεια, να επισκευάσουμε το μηχάνημα ή να το αντικαταστήσουμε. Αποφασίσαμε και αναλύσαμε μια συγκεκριμένη πολιτική: $(d_0, d_1, d_2, d_3) = (1,1,1,3)$, δηλαδή στις καταστάσεις 0, 1, 2 δεν κάνουμε τίποτα και όταν εισέλθει στην κατάσταση 3 προβαίνουμε στην αντικατάσταση.

Το γενικό μας μοντέλο πληροί τις προϋποθέσεις για να είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης επειδή διαθέτει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα που χαρακτηρίζει οποιαδήποτε Μαρκοβιανή διαδικασία. Ειδικότερα, δεδομένης της τρέχουσας κατάστασης και απόφασης, οποιαδήποτε πιθανολογική δήλωση σχετικά με το μέλλον της διαδικασίας δεν επηρεάζεται καθόλου από την παροχή οποιασδήποτε πληροφορίας σχετικά με το ιστορικό της διαδικασίας. Αυτή η ιδιότητα ισχύει εδώ αφού πρώτον έχουμε να κάνουμε με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, δεύτερον οι νέες πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και απόφαση και τέλος το άμεσο αναμενόμενο κόστος εξαρτάται επίσης μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και απόφαση.

Η περιγραφή μιας πολιτικής συνεπάγεται δύο ιδιότητες. Μια ιδιότητα είναι ότι μια πολιτική είναι στάσιμη. Δηλαδή, όποτε το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *i*, ο κανόνας για τη λήψη της απόφασης είναι πάντα ο ίδιος ανεξάρτητα από την τιμή του τρέχοντος χρόνου t. Η δεύτερη ιδιότητα είναι ότι μια πολιτική είναι ντετερμινιστική. Δηλαδή, όποτε το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *i,* ο κανόνας για τη λήψη της απόφασης επιλέγει σίγουρα μια συγκεκριμένη απόφαση.

Χρησιμοποιώντας αυτό το γενικό πλαίσιο, επιστρέφουμε τώρα στο πρωτότυπο παράδειγμα και βρίσκουμε τη βέλτιστη πολιτική απαριθμώντας και συγκρίνοντας όλες τις σχετικές πολιτικές. Κάνοντας αυτό, θα αφήσουμε το R να υποδηλώνει μια συγκεκριμένη πολιτική και το $d_i(R)$ να υποδηλώνει την αντίστοιχη απόφαση που πρέπει να ληφθεί στην κατάσταση *i*.

3.3.2 Η μέθοδος της Εξαντλητικής Απαρίθμησης

Πρόκειται για μια μέθοδο ιδιαίτερα χρήσιμη όταν αναφερόμαστε σε μικρά προβλήματα με λίγα δεδομένα - όπως το παράδειγμά μας- καθώς είναι ταυτόχρονα απλή και γρήγορη.

Στη διάθεσή μας έχουμε τις εξής πολιτικές που μπορούμε να ακολουθήσουμε:

- R_1 →Αντικατάσταση στην κατάσταση 3
- R_2 →Αντικατάσταση στην κατάσταση 3 και συντήρηση στη 2
- R_3 →Αντικατάσταση στις καταστάσεις 2 και 3
- R_4 →Αντικατάσταση στις καταστάσεις 1, 2 και 3

Πολιτική	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_1	1	1	1	3
R_2	1	1	2	3
R_3	1	1	3	3
R_4	1	3	3	3

Προφανώς κάθε πολιτική έχει δικό της διαφορετικό πίνακα μετάβασης, ο οποίος υπολογίζεται εύκολα.

Πολιτική 1η:

Κατάσταση	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	1/2	1/2
3	1	0	0	0

Πολιτική 2η:

Κατάσταση	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	0	0
3	1	0	0	0

Πολιτική 3η:

Κατάσταση	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0

Πολιτική 4η:

Κατάσταση	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0

Ενώ παράλληλα γνωρίζουμε ότι για τα κόστη (σε δολάρια) ισχύει το εξής:

Κατάσταση	Απόφαση		
	1	2	3
0	0	-	-
1	1,000	-	6,000
2	3,000	4,000	6,000
3	-	-	6,000

Αφού λύσουμε το $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ για κάθε μια από τις πολιτικές, στο δοθέν παράδειγμα έχουμε 4 πιθανές πολιτικές, υπολογίζουμε το E(C).

Τελικά, υπολογίζουμε το E(C) για κάθε πολιτική, με το αντίστοιχο σύνολο $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ και έχουμε:

Πολιτική	(π_0, π_1, π_2, π_3)	Αναμενόμενο μέσο κόστος ($)
R_1	$(\frac{2}{13},\frac{7}{13},\frac{2}{13},\frac{2}{13})$	$\frac{1}{13}\left[2*0+7*1{,}000+2*3{,}000+2*6{,}000\right]=\$1{,}923$
R_2	$(\frac{2}{21},\frac{5}{7},\frac{2}{21},\frac{2}{21})$	$\frac{1}{21}\left[2*0+15*1{,}000+2*4{,}000+2*6{,}000\right]=\$1{,}667$
R_3	$(\frac{2}{11},\frac{7}{11},\frac{1}{11},\frac{1}{11})$	$\frac{1}{11}\left[2*0+7*1{,}000+1*6{,}000+1*6{,}000\right]=\$1{,}727$
R_4	$(\frac{1}{2},\frac{7}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{32})$	$\frac{1}{32}\left[16*0+14*6{,}000+1*6{,}000+1*6{,}000\right]=\$3{,}000$

Με βάση το κριτήριο ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου κόστους προκύπτει ότι η βέλτιστη πολιτική είναι η 2η, δηλαδή αντικατάσταση του μηχανήματος όταν βρεθεί στην κατάσταση 3 και επιδιόρθωση όταν βρεθεί στην κατάσταση 2. Το προκύπτον αναμενόμενο μακροπρόθεσμο κόστος ανά εβδομάδα είναι 1,667$.

Η μέθοδος της εξαντλητικής απαρίθμησης, με την οποία λύσαμε το πρόβλημά μας, είναι κατάλληλη για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής σε παραδείγματα όπως αυτό με πολύ μικρό όγκο δεδομένων και λίγες πολιτικές. Σε προβλήματα, όμως που υπάρχει πληθώρα πιθανών πολιτικών αυτή η μέθοδος είναι μη βιώσιμη για προφανείς λόγους, σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτούνται αλγόριθμοι ώστε να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική.

3.3.3 Γραμμικός Προγραμματισμός

Γραμμικός Προγραμματισμός και Κριτήριο Ελαχιστοποίησης Μέσου Κόστους

Για να περάσουμε στην περιγραφή της επόμενης μεθόδου του "Γραμμικού Προγραμματισμού" πρέπει πρώτα να αναφερθούμε στις τυχαιοποιημένες πολιτικές.

Είδαμε ότι η εκάστοτε πολιτική χαρακτηρίζεται από τις τιμές $d_i(R)$ με i=0, 1, …, M

$$\left\{d_0(R),d_1(R),...,d_M(R)\right\}.$$

Θα μπορούσε όμως, ισοδύναμα, να ορίζεται από έναν πίνακα με στοιχεία τις τιμές της D_{ik}, η οποία παίρνει την τιμή 1 αν η απόφαση k λαμβάνεται στην κατάσταση i με i=0, 1, …, M και k =1, 2, …,K, και 0 σε όποια άλλη περίπτωση. Συνεπώς κάθε σειρά του πίνακα μπορεί να περιέχει μόνο ένα 1 και τα υπόλοιπα 0.

Η ευκολότερη λύση για να επιλυθεί οποιοδήποτε πρόβλημα με γραμμικό προγραμματισμό θα ήταν αν το αναμενόμενο κόστος της εκάστοτε πολιτικής μπορούσε να εκφραστεί ως γραμμική συνάρτηση του D_{ik} ή κάποιας συσχετιζόμενης μεταβλητής, με τους αντίστοιχους γραμμικούς περιορισμούς. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι εφικτό καθώς το D_{ik} λαμβάνει ακέραιες τιμές, ενώ στο γραμμικό προγραμματισμό απαιτούνται συνεχείς μεταβλητές. Για να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο ορίζουμε, λοιπόν, εκ νέου την πολιτική αντί να απατείται η ίδια απόφαση κάθε φορά που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, τώρα θα απαιτείται ο καθορισμός μιας κατανομής πιθανοτήτων για να ληθφεί η απόφαση όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i. Ο "νέος" ορισμός της πολιτικής που χρησιμοποιεί κατανομές πιθανοτήτων ονομάζεται τυχαιοποιημένη πολιτική και προσδιορίζεται ως:

D_{ik}=P{απόφαση = k | κατάσταση = i}.

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην διατύπωση του γραμμικού προγραμματισμού. Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης y_{ik} για κάθε i =0, 1, …, M και k =1, 2, …,K, ως τη μη δεσμευμένη πιθανότητα σταθερής κατάστασης όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i και λαμβάνεται η απόφαση k.
y_{ik} =P{κατάσταση = i και απόφαση = k}.
Ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$y_{ik} = \pi_i D_{ik}$ και $\pi_i = \sum_{k=1}^{K} y_{ik}$, όπου αν τις συνδυάσουμε παίρνουμε τον τύπο για τις τυχαιοποιημένες μεταβλητές,

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^{K} y_{ik}}.$$

Η μεταβλητή y_{ik} υπόκειται στους εξής περιορισμούς:

- $\sum_{i=1}^{M} \pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} y_{ik} = 1.$
- $\pi_{ij} = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij} \Rightarrow \sum_{k=1}^{K} y_{jk} = \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} y_{ik} p_{ij}(k), \; j = 0,1,...,M.$
- $y_{ik} \geq 0, \quad i = 0,1,...,M, \; k = 1,2,...,K.$

Το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο κόστος τώρα ορίζεται ως

$$E(C) = \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} \pi_i C_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} C_{ik} y_{ik}.$$

Επομένως, στόχος του γραμμικού μοντέλου προγραμματισμού είναι να επιλεχθεί το κατάλληλο y_{ik} έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο κόστος Z = E(C), έχοντας πάντα υπόψιν τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται.
Αν το μοντέλο που προκύπτει δεν είναι πολύ πολύπλοκο μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex.
Συνεχίζοντας στο παράδειγμά μας έχουμε:
Παρατηρώντας τους πιθανούς συνδυασμούς καταστάσεων και αποφάσεων καταλήγουμε ότι οι μεταβλητές απόφασης που χρειάζονται στο μοντέλο (δηλαδή όσες δεν είναι 0) είναι οι y_{01}, y_{11}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23} και y_{33}. Καταλήγουμε έτσι στο εξής μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού

$$Z = 1{,}000 y_{11} + 6{,}000 y_{13} + 3{,}000 y_{21} + 4{,}000 y_{22} + 6{,}000 y_{23} + 6{,}000 y_{33}.$$

Με τους παρακάτω περιορισμούς

$$y_{01}+y_{11}+y_{13}+y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{33}=1$$
$$y_{01}-(y_{13}+y_{23}+y_{33})=0$$
$$y_{21}+y_{22}+y_{23}-(\tfrac{1}{16}y_{01}+\tfrac{1}{8}y_{11}\tfrac{1}{2}y_{21})=0$$
$$y_{33}-(\tfrac{1}{16}y_{01}+\tfrac{1}{8}y_{11}\tfrac{1}{2}y_{21})=0$$
$$y_{ik}\geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex παίρνουμε τη βέλτιστη λύση:

$$y_{01}=\frac{2}{21},\ (y_{11},y_{13})=\left(\frac{5}{7},0\right),\ (y_{21},y_{22},y_{23})=\left(0,\frac{2}{21},0\right),\ y_{33}=\frac{2}{21},$$

συνεπώς,

$$D_{01}=1,\ (D_{11},D_{13})=(1,0),\ (D_{21},D_{22},D_{23})=(0,1,0),\ D_{33}=1.$$

Καταλήγωντας, έτσι ότι η βέλτιστη πολιτική είναι η ίδια στην οποία καταλήξαμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο επαυξημένες απαρίθμησης.

Γραμμικός Προγραμματισμός και Κριτήριο Προεξοφλημένου Κόστους

Ορίζουμε τις σταθερές β_j με j=0,1,…,M, μπορούν να επιλεχθούν αυθαίρετα χωρίς να επηρεαστεί η βέλτιστη πολιτική που θα προκύψει από το μοντέλο πρέπει όμως να ικανοποιούν τους κάτωθι περιορισμούς

$$\sum_{j=0}^{M}\beta_j=1 \qquad \text{και} \qquad \beta_j>0 \quad \text{με } j=0,1,\ldots,M.$$

Στη συνέχεια επιλέγονται οι τιμές για τις συνεχείς μεταβλητές απόφασης με στόχο να ελαχιστοποιηθεί η

$Z=\sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K}C_{ik}y_{ik}$, με τους περιορισμούς

- $\sum_{k=1}^{K}y_{jk}-a\sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K}y_{ik}p_{ij}(k)=\beta_j,\quad \text{j}=0,1,\ldots,\text{M},$
- $y_{ik}\geq 0,\quad i=0,1,\ldots,M;k=1,2,\ldots,K.$

Όμοια με πριν βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση με τη μέθοδο Simplex και η αντίστοιχη πολιτική ορίζεται από την $D_{ik}=\dfrac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^{K}y_{ik}}$.

Οι μεταβλητές y_{ik} θεωρούνται ως ο προεξοφλημένος αναμενόμενος χρόνος όντας στην κατάσταση i να ληφθεί η απόφαση k όταν η αρχική κατανομή πιθανοτήτων είναι $P\{X_0=j\},\ j=0,1,\ldots,M$.

Ορίζοντας $z_{ik}^{n}=P$ {στο χρόνο n, κατάσταση=i και απόφαση=k} τότε $y_{ik}=z_{ik}^{0}+az_{ik}^{1}+a^2z_{ik}^{2}+a^3z_{ik}^{3}+\ldots$.

Αν θεωρηθεί το β_j ως οι πιθανότητες αρχικής κατάστασης τότε το Z μπορεί να θεωρηθεί ως το αντίστοιχο αναμενόμενο συνολικό προεξοφλημένο κόστος.

3.3.4 Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής

Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής και Κριτήριο Ελαχιστοποίησης Μέσου Κόστους

Γενικά όταν επιλεγέι και εφαρμοστεί μια πολιτική και βρισκόμαστε στην κατάσταση *i* λαμβάνοντας την απόφαση $d_i(k)$, πρώτον προκύπτει το αναμενόμενο κόστος C_{ik} και δεύτερον το σύστημα μετακινείται στην επόμενη παρατηρούμενη χρονική περίοδο στην κατάσταση *j* με πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(k)$. Εάν η κατάσταση *j* επηρεάζει το κόστος το οποίο έχει προκύψει, τότε ορίζουμε ως $q_{ij}(k)$ αναμενόμενο κόστος που έχει προκύψει όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *i* λαμβάνεται η απόφαση k και μετακινείται στην κατάσταση *j* , και τότε το αναμενόμενο κόστος C_{ik} υπολογίζεται ως

$$C_{ik} = \sum_{j=0}^{M} q_{ij}(k) p_{ij}(k).$$

Για να συνεχίσουμε στην περιγραφή του αλγόριθμου βελτίωσης πολιτικής θα αναφερθούμε σύντομα σε κάποιες σχέσεις. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε δοθείσα πολιτική R υπάρχουν οι τιμές g(R), $v_0(R)$, … , $v_M(R)$, οι οποίες ικανοποιούν

$$g(R) + v_i(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j(R), \quad i = 0,1,2,...,M.$$

Ισχύει επίσης η αναδρομική σχέση

$$v_i^n(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j^{n-1}(R), \quad i = 0,1,2,...,M, \text{ όπου } \quad v_i^1(R) = C_{ik}, \ \forall i.$$

Επίσης, δεδομένου ότι,

$$g(R) = \sum_{i=0}^{M} \pi_i C_{ik},$$

καταλήγουμε στην

$$v_i^n(R) - v_j^n(R) \approx v_i(R) - v_j(R).$$

Ο αλγόριθμος βελτίωσης πολιτικής στην ουσία επιλύει το σύστημα εξισώσεων με στόχο να βρεθούν οι τιμές $g(R_1)$, $v_0(R_1)$, … , $v_{M-1}(R_1)$ δεδομένου ότι συμβατικά επιλέγεται $v_M(R_1)=0$, αφού έχει επιλεχθεί αυθαίρετα μι

πολιτική R_1. Στη συνέχεια επιλέγεται μια καλύτερη πολιτική R_2, και οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική, μέχρι δηλαδή οι επαναλήψεις να δώσουν διαδοχικά 2 πανομοιότυπες πολιτικές.

Επιλύοντας τις $g(R_n) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j(R_n) - v_i(R_n), \quad i = 0,1,...,M$, βρίσκουμε τους “αγνώστους” έτσι

ώστε να προχωρήσουμε στη βελτίωση πολιτικής R_n, δηλαδή στην R_{n+1}, που συνεπάγεται στην πραγματικότητα την ελαχιστοποίηση της

$$C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k)v_j(R_n) - v_i(R_n).$$

Ο αλγόριθμος έχει δύο ιδιότητες

- $g(R_{n+1}) \leq g(R_n), \quad n = 1,2,...$
- Για να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική ο αλγόριθμος χρειάζεται έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας:

Επιλέγουμε αρχικά αυθαίρετα μια πολιτική, έστω την R_1, δηλαδή αντικατάσταση στην κατάσταση 3 (απόφαση 3) αλλά δεν κάνουμε τίποτα στις υπόλοιπες καταστάσεις (απόφαση 1).

1η Επανάληψη. Επιλύουμε τις κάτωθι εξίσώσεις, δεδομένου ότι $v_3(R_1)=0$.

$$g(R_1) = \tfrac{7}{8}v_1(R_1) + \tfrac{1}{16}v_2(R_1) - v_0(R_1)$$
$$g(R_1) = 1{,}000 + \tfrac{3}{4}v_1(R_1) + \tfrac{1}{8}v_2(R_1) - v_1(R_1)$$
$$g(R_1) = 3{,}000 + \tfrac{1}{2}v_2(R_1) - v_2(R_1)$$
$$g(R_1) = \tfrac{7}{8}6{,}000 + v_0(R_1)$$

Τελικά,

$$g(R_1) = 1{,}923$$
$$v_0(R_1) = -4{,}077$$
$$v_0(R_1) = -2{,}615$$
$$v_2(R_1) = 2{,}154.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη βελτίωση της πολιτικής, με στόχο να βρούμε τη βελτιωμένη πολιτική R_2, τέτοια ώστε η απόφαση k στην κατάσταση i να ελαχιστοποιεί

Κατάσταση 0: $C_{0k} - p_{00}(k)(4{,}077) - p_{01}(k)(2{,}165) + p_{02}(k)(2{,}154) + 4{,}077$

Κατάσταση 1: $C_{1k} - p_{10}(k)(4{,}077) - p_{11}(k)(2{,}165) + p_{12}(k)(2{,}154) + 2{,}615$

Κατάσταση 2: $C_{2k} - p_{20}(k)(4{,}077) - p_{21}(k)(2{,}165) + p_{22}(k)(2{,}154) - 2{,}154$

Κατάσταση 3: $C_{3k} - p_{30}(k)(4{,}077) - p_{31}(k)(2{,}165) + p_{32}(k)(2{,}154)$

Στην κατάσταση 0 μπορούμε να λάβουμε μόνο την απόφαση 1, ενώ στην κατάσταση 3 ξέρουμε ότι παίρνουμε την απόφαση 3. Για την κατάσταση 1, οι πιθανές αποφάσεις είναι οι 1 και 3, έτσι

Κατάσταση 1						
Απόφαση	**C_{1k}**	**$p_{10}(k)$**	**$p_{11}(k)$**	**$p_{12}(k)$**	**$p_{13}(k)$**	**Αξία**
1	1,000	0	3/4	1/8	1/8	1,923
3	6,000	1	0	0	0	4,538

Παρατηρούμε ότι το ελάχιστο είναι στην απόφαση 1, επομένως στην κατάσταση 1 λαμβάνουμε την απόφαση 1, δηλαδή να μη προχωρήσουμε σε καμία ενέργεια για το μηχάνημα, στην πολιτική R_2.
Αντίστοιχα για την κατάσταση 2 έχουμε

Κατάσταση 2						
Απόφαση	**C_{2k}**	**$p_{20}(k)$**	**$p_{21}(k)$**	**$p_{22}(k)$**	**$p_{23}(k)$**	**Αξία**
1	3,000	0	0	1/2	1/2	1,923
2	4,000	0	1	0	0	-769
3	6,000	1	0	0	0	-231

Είναι εμφανές ότι το ελάχιστο (-769) είναι στην απόφαση 2, επομένως στην κατάσταση 2 λαμβάνουμε την απόφαση 2 στην πολιτική R_2, κάτι που τη διαφοροποιεί από την R_1 και έτσι μπορούμε να προχωρήσουμε στην επόμενη επανάληψη.

2η Επανάληψη. Επιλύουμε τις κάτωθι εξίσώσεις, δεδομένου ότι $v_3(R_2)=0$.

$$g(R_2)=\tfrac{7}{8}v_1(R_2)+\tfrac{1}{16}v_2(R_2)-v_0(R_1)$$
$$g(R_2)=1{,}000+\tfrac{3}{4}v_1(R_2)+\tfrac{1}{8}v_2(R_2)-v_1(R_2)$$
$$g(R_2)=4{,}000+v_1(R_2)-v_2(R_2)$$
$$g(R_2)=6{,}000+v_0(R_2)$$

Η λύση είναι

$$g(R_2)=1{,}667$$
$$v_0(R_2)=-4{,}333$$
$$v_0(R_2)=-3{,}000$$
$$v_2(R_2)=-667.$$

Προχωράμε στην ελαχιστοποίηση της

Κατάσταση 1: $C_{1k}-p_{10}(k)(4{,}333)-p_{11}(k)(3{,}000)+p_{12}(k)(667)+3{,}000$

Κατάσταση 2: $C_{2k}-p_{20}(k)(4{,}333)-p_{21}(k)(3{,}000)+p_{22}(k)(667)+667.$

Έχουμε τις τιμές-αξίες για κάθε κατάσταση

Απόφαση	Αξία Κατάστασης 1	Αξία Κατάστασης 2
1	1,667	3,333
2	-	1,667
3	4,667	2,334

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι η απόφαση 1 στην κατάσταση 1 ελαχιστοποιεί την αξία και η απόφαση 2 στην κατάσταση 2. Είναι εμφανές όμως ότι η R_3 είναι πανομοιότυπη με την R_2, έτσι τεραματίζεται ο αλγόριθμος και η βέλτιστη πολιτική είναι

Κατάσταση	Απόφαση
0	1
1	1
2	2
3	3

Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής και Κριτήριο Προεξοφλημένου Κόστους

Ακολουθώντας όμοιο τρόπο με πριν, επιλέγουμε τυχαία μια πολιτική R_1 και ξεκινάμε τις n επαναλήψεις. Αρχικά για την R_n πολιτική επιλύουμε το σύστημα M+1 εξισώσεων

$$V_i(R_n) = C_{ik} + a\sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k)V_j(R_n), \quad i = 0,1,...,M.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις τιμές που βρέθηκαν στο προηγούμενο βήμα την εναλλακτική πολιτική R_{n+1} ώστε για κάθε *i* η απόφαση $d_i(R_{n+1})$ =k να ελαχιστοποιεί την

$$C_{ik} + a\sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k)V_j(R_n).$$

Έπειτα, συνεχίζουμε με το έλεγχο βελτιστότητας, δηλαδή τεραματισμός των επαναλήψεων αν η νέα πολιτική R_{n+1} ταυτίζεται με την προηγούμενη R_n.

Ενώ ισχύουν οι 2 ιδιότητες που ίσχυαν για τον αλγόριθμο με την εφαρμογή ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου κόστου (με τις αντιστοιχίες που απαιτούνται) τώρα ισχύει και μια τρίτη ιδιαίτερα χρήσιμη ιδιότητα, ο αλγόριθμος είναι έγκυρος και χωρίς την υπόθεση ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα που σχετίζεται με κάθε πίνακα μετάβασης είναι μη υποβιβάσιμη.

3.3.5 Μέθοδος Διαδοχικών Προσεγγίσεων

Έστω ότι η Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης θα λειτουργεί επ'άπειρον και ψάχνουμε τη βέλτιστη πολιτική για αυτή τη διαδικασία. Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων βασίζεται στην ιδέα εύρεσης βέλτιστης πολιτικής για τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν στην πρώτη χρονική περίοδο όταν η διαδικασία έχει μόνο n χρονικές περιόδους πριν τερματιστεί. Ξεκινάμε με n=1, n=2, … και καθώς το n μεγαλώνει οι βέλτιστες πολιτικές που βρίσκονται θα συγκλίνουν σε μια βέλτιστη πολιτική για το μη πεπερασμένο πρόβλημα που μας ενδιαφέρει. Δηλαδή, οι πολιτικές που υπολογίζονται στις χρονικές περιόδους n=1, n=2, … αποτελούν τις διαδοχικές προσεγγίσεις.

Ορίζουμε για αυτή τη μέθοδο το αναμενόμενο συνολικό εκπτωτικό κόστος, δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση *i* και συνεχίζει μόνο για n περιόδους, το συμβολίζουμε με V_i^n και ισχύει ο αναδρομικός τύπος

$$V_i^n = \min_k \left\{ C_{ik} + a\sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) V_j^{n-1} \right\}, \quad i = 0,1,...,M.$$

Η τιμή ελαχιστοποίησης του k αποτελέι τη βέλτιστη απόφαση που μπορεί να ληφθεί στην πρώτη περίοδο όταν η διαδικασία έχει ως εφαλτήριο την κατάσταση *i*. Η μέθοδος ξεκινά με n=1 και $V_i^0 = 0$, ώστε

$$V_i^1 = \min_k \{C_{ik}\}, \quad i = 0,1,...,M.$$

Συνεχίζοντας στην επίλυση του προβλήματος,

Απόφαση	Κατάσταση	Αναμενόμενο κόστος λόγω ελαττωματικών ανταλλακτικών	Κόστος συντήρησης	Κόστος από αναστολή παραγωγής	Συνολικό κόστος ανά εβδομάδα
1	0	0	0	0	0
	1	1,000	0	0	1,000
	2	3,000	0	0	3,000
2	2	0	2,000	2,000	4,000
3	1, 2, 3	0	4,000	2,000	6,000

Παρατηρώντας τον πίνακά μας βλέπουμε ότι στην κατάσταση *i*=0 η η μόνη πιθανή απόφαση είναι η k=1, για *i*=1 οι πιθανές αποφάσεις είναι οι k=1 ή 3, για *i*=2 είναι οι k=1 ή 2 ή 3 και στην *i*=3 η μόνη απόφαση που μπορεί να ληφθεί είναι η k=3.

Επιλέγοντας τον συντελεστή προεξόφλησης α=0.9 έχουμε τα κάτωθι αποτελέσματα.

Για n=1 λαμβάνουμε τις τιμές του k για τις οποίες ελαχιστοποιείται η V_i^1.

$V_0^1 = \min_{k=1}\{C_{0k}\} = 0$ k=1

$V_1^1 = \min_{k=1,3}\{C_{1k}\} = 1{,}000$ k=1

$V_2^1 = \min_{k=1,2,3}\{C_{2k}\} = 3{,}000$ k=1

$V_3^1 = \min_{k=3}\{C_{3k}\} = 6{,}000$ k=3

Επομένως, βλέπουμε ότι λαμβάνουμε την απόφαση 1 στις καταστάσεις 0,1,2 και όταν το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση 3 λαμβάνουμε την απόφαση 3 .

Στη δεύτερη επανάληψη έχουμε

$$V_0^2 = 0 + 0.9\left[\tfrac{7}{8}(1{,}000) + \tfrac{1}{16}(3{,}000) + \tfrac{1}{16}(6{,}000)\right] = 1{,}294 \qquad \text{k=1}$$

$$V_1^2 = \min\left\{1{,}000 + 0.9\left[\tfrac{3}{4}(1{,}000) + \tfrac{1}{8}(3{,}000) + \tfrac{1}{8}(6{,}000)\right]\ ,\ 6{,}000 + 0.9\left[1(0)\right]\right\} = 2{,}688 \qquad \text{k=1}$$

$$V_2^2 = \min\left\{\begin{matrix} 3{,}000 + 0.9\left[\tfrac{1}{2}(3{,}000) + \tfrac{1}{2}(6{,}000)\right]\ ,\ 4{,}000 + 0.9\left[1(1{,}000)\right]\ , \\ 6{,}000 + 0.9\left[1(0)\right] \end{matrix}\right\} = 4{,}900 \qquad \text{k=2}$$

$$V_3^2 = \left\{6{,}000 + 0.9\left[1(0)\right]\right\} = 6{,}000 \qquad \text{k=3}$$

Εδώ στην κατάσταση 0 και 1 αφήνουμε το μηχάνημα στην κατάσταση που είναι (απόφαση 1), όταν βρεθεί στην κατάσταση 2 εκτελούνται επιδιορθώσεις (απόφαση 2) και όταν φτάσει στην κατάσταση 3 τότε γίνεται η αντικατάστασή του (απόφαση 3).

Συνεχίζονται οι επαναλήψεις, καθώς το αναμενόμενο συνολικό εκπτωτικό κόστος όταν ξεκινάμε από την κατάσταση i σε ένα πρόβλημα 2 χρονικών περιόδων V_i^2, δεν συγκλίνει ακόμη στο αντίστοιχο κόστος ενός προβλήματος με μη πεπερασμένες χρονικές περιόδους, V_i .

Έτσι στην τρίτη επανάληψη έχουμε

$$V_0^3 = 0 + 0.9\left[\tfrac{7}{8}(2{,}668) + \tfrac{1}{16}(4{,}900) + \tfrac{1}{16}(6{,}000)\right] = 2{,}730 \qquad \text{k=1}$$

$$V_1^3 = \min\left\{1{,}000 + 0.9\left[\tfrac{3}{4}(2{,}688) + \tfrac{1}{8}(4{,}900) + \tfrac{1}{8}(6{,}000)\right]\ ,\ 6{,}000 + 0.9\left[1(1{,}2{,}94)\right]\right\} = 4{,}041 \qquad \text{k=1}$$

$$V_2^3 = \min\left\{\begin{matrix} 3{,}000 + 0.9\left[\tfrac{1}{2}(4{,}900) + \tfrac{1}{2}(6{,}000)\right]\ ,\ 4{,}000 + 0.9\left[1(2{,}688)\right]\ , \\ 6{,}000 + 0.9\left[1(1{,}294)\right] \end{matrix}\right\} = 6{,}419 \qquad \text{k=2}$$

$$V_3^3 = \left\{6{,}000 + 0.9\left[1(1{,}294)\right]\right\} = 7{,}165 \qquad \text{k=3}$$

Οι επαναλήψεις μπορούν να συνεχιστούν μέχρι να ισχύουν οι συγκλίσεις

$V_0^n \to 14{,}949$, $V_1^n \to 16{,}262$, $V_2^n \to 18{,}636$, $V_3^n \to 19{,}454$.

Παρατηρούμε ωστόσο, ότι αυτή η βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα μη πεπερασμένων περιόδων, που είναι ίδια με αυτή που προέκυψε στη δεύτερη επανάληψη, ταυτίζεται με τη βέλτιστη πολιτική που βρέθηκε από τον αλγόριθμο βελτείωσης πολιτικής αλλά και από τον γραμμικό προγραμματισμό. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι όπως προκύπτει εάν τερματίζαμε τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων στη δεύτερη επανάληψη θα βρίσκαμε τη βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα μη πεπερασμένων περιόδων, κάτι όμως που δε θα μπορούσαμε να ξέραμε εκ των προτέρων χωρίς να έχουν εφαρμοστεί οι προηγούμενες μέθοδοι.

4. Προσομοίωση

Η προσομοίωση με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή -η οποία βασίζεται στη μαθηματική μοντελοποίηση- χρησιμοποιείται καθημερινά στην επιστημονική έρευνα όλων των τύπων, για πληροφόρηση στη λήψη αποφάσεων στις επιχειρήσεις και την κυβέρνηση, συμπεριλαμβανομένης της εθνικής άμυνας, και για το σχεδιασμό και τον έλεγχο πολύπλοκων συστημάτων όπως αυτά για τις μεταφορές, τις αλυσίδες προμήθειας, και ούτω καθεξής.

Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται για την απόκτηση εικόνας σχετικά με την αναμενόμενη ποιότητα και τη λειτουργία αυτών των συστημάτων και για τη διεξαγωγή αξιολογήσεων "τί θα συνέβαινε εάν" συστημάτων που μπορεί να μην υπάρχουν ακόμη ή να μην υπόκεινται σε πειραματισμό. Για παράδειγμα, ένα από τα πιο σημαντικά και θεαματικά γεγονότα στο σύμπαν είναι η έκρηξη ενός αστεριού σε σουπερνόβα. Τέτοιες εκρήξεις δημιούργησαν το δικό μας ηλιακό σύστημα με όλα τα βαρύτερα στοιχεία του και έχουν συνδράμει στην άντληση πληροφοριών σχετικά με το μέγεθος, την ηλικία και τη σύνθεση του σύμπαντός μας. Ωστόσο, μέσα στον γαλαξία μας, η σουπερνόβα είναι εξαιρετικά σπάνια. Πώς μπορούμε, λοιπόν, να μελετήσουμε κάτι που δεν μπορεί να αντιγραφεί σε ένα εργαστήριο; Εκεί μπαίνει στην ιστορία η προσομοίωση. Σε πολλές εφαρμογές, από τη φυσική στη βιολογία στη χημεία και τη μηχανική, οι επιστήμονες χρησιμοποιούν μοντέλα υπολογιστών - η κατασκευή των οποίων απαιτεί τη διατύπωση μαθηματικών και στατιστικών μοντέλων, την ανάπτυξη αλγορίθμων και τη δημιουργία λογισμικού - για να μελετήσουν φαινόμενα που είναι πολύ μεγάλα, μικρά, πολύ γρήγορα, πολύ αργά, πολύ σπάνια ή πολύ επικίνδυνα για μελέτη σε εργαστήριο

Η προσομοίωση κατατάσσεται πολύ ψηλά ανάμεσα στις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας και μια από τις πιο βασικές τεχνικές της καθώς πρόκειται για ένα εξαιρετικά ευέλικτο και ισχυρό εργαλείο. Μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα ή λεπτά, μπορούν να προσομοιωθούν ακόμη και χρόνια λειτουργίας ενός τυπικού συστήματος, ενώ παράγεται μια σειρά από στατιστικές παρατηρήσεις σχετικά με την απόδοση του συστήματος κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Χρησιμοποιείται επίσης ευρέως για την ανάλυση στοχαστικών συστημάτων που θα συνεχίσουν να λειτουργούν επ' αόριστον. Για τέτοια συστήματα, ο υπολογιστής δημιουργεί τυχαία και καταγράφει τα περιστατικά των διαφόρων γεγονότων που οδηγούν το σύστημα σαν να λειτουργούσε φυσικά. Λόγω της ταχύτητάς του, ο υπολογιστής μπορεί να προσομοιώσει ακόμη και χρόνια λειτουργίας μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα. Η καταγραφή της απόδοσης της προσομοιωμένης λειτουργίας του συστήματος για έναν αριθμό εναλλακτικών σχεδίων ή διαδικασιών λειτουργίας επιτρέπει στη συνέχεια την αξιολόγηση και τη σύγκριση αυτών των εναλλακτικών προτού επιλεγεί μια.[16]

[16] "*fueling innovation and Discovery: The mathematical sciences in the 21st Century" at nap.edu*. Mathematical Simulations / When the Lab Isn't Big Enough | Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century | The National Academies Press. (n.d.). https://nap.nationalacademies.org/read/13373/chapter/5

4.1 Εφαρμογές της Προσομοίωσης

Όπως προαναφέραμε η προσομοίωση είναι μία τεχνική η οποία διακρίνεται για την ιδιαίτερη ευελιξία της και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την διερεύνηση σχεδόν κάθε είδους στοχαστικού συστήματος με τον αντίστοιχο φυσικά βαθμό δυσκολίας. Θα αναφερθούμε σύντομα σε κάποιες από τις πιο σημαντικές κατηγορίες συστημάτων που εφαρμόζεται η προσομοίωση, ενώ πρέπει να επισημανθεί ότι είναι σύνηθες να χρησιμοποιούνται αλλά μαθηματικά μοντέλα για την ανάλυση απλοποιημένων μορφών των συστημάτων και στη συνέχεια να εφαρμόζεται η προσομοίωση με σκοπό τη βελτίωση του αποτελέσματος.

- Σχεδιασμός και λειτουργία ουρών αναμονής

Οι αποφάσεις που αφορούν τον προσδιορισμό της δυναμικότητας αυτών των συστημάτων είναι συχνά δύσκολες επειδή είναι αδύνατον να προβλεφθεί επακριβώς ο χρόνος άφιξης και ο χρόνος εξυπηρέτησης των μονάδων. Πολλά μαθηματικά μοντέλα είναι διαθέσιμα για την ανάλυση σχετικά απλών τύπων συστημάτων ουράς. Δυστυχώς, αυτά τα μοντέλα μπορούν να παρέχουν μόνο πρόχειρες προσεγγίσεις στην καλύτερη περίπτωση πιο περίπλοκων συστημάτων ουράς. Ωστόσο, η προσομοίωση είναι κατάλληλη για την αντιμετώπιση ακόμη και πολύ περίπλοκων συστημάτων ουράς, έτσι πολλές από τις εφαρμογές της εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία.

- Έλεγχος αποθεμάτων

Ο έλεγχος αποθεμάτων σε συστήματα των οποίων τα προϊόντα έχουν αβέβαιη ζήτηση, μπορεί να αναλυθεί με μαθηματικά μοντέλα όμως όταν τα συστήματα είναι πιο πολύπλοκα η προσομοίωση βοηθά σημαντικά.

- Εκτίμηση της πιθανότητας ολοκλήρωσης ενός έργου εντός της προθεσμίας

Και ενώ υπάρχουν διάφορες πιο "απλοϊκές" προσεγγίσεις όπως η προσέγγιση τριών εκτιμήσεων PERT για πιο χονδρικές εκτιμήσεις της πιθανότητας να ολοκληρωθεί το τρέχον έργο εντός προθεσμίας δυστυχώς, συνήθως η εν λόγω εκτίμηση είναι αρκετά πιο αισιόδοξη με σημαντικές αποκλίσεις από την πραγματικότητα. Έτσι, με τη δημιουργία τυχαίων παρατηρήσεων από τις κατανομές πιθανοτήτων της διάρκειας των διαφόρων δραστηριοτήτων του εκάστοτε project προσομοιώνεται πότε αρχίζει και πότε τελειώνει η κάθε δραστηριότητα και κατεπέκταση συνολικά το έργο. Επαναλαμβάνοντας την προσομοίωση αρκετές φορές -χιλιάδες ή όσες κριθεί απαραίτητο- μπορούμε να λάβουμε μία πολύ καλή εκτίμηση της πιθανότητας να ολοκληρωθεί το project εντός προθεσμίας.

- Σχεδιασμός και Λειτουργία Συστημάτων Διανομής

Κάθε μεγάλη εταιρεία παραγωγής χρειάζεται ένα αποτελεσματικό σύστημα διανομής για τη διανομή των προϊόντων της από τα εργοστάσια και τις αποθήκες στους πελάτες της. Υπάρχουν πολλές μεταβλητές που εμπλέκονται στη λειτουργία ενός τέτοιου συστήματος, όπως για παράδειγμα ποιά οχήματα και πότε είναι διαθέσιμα για την αποστολή εμπορεύματος, πόσο διαρκεί μία αποστολή κλπ. Λειτουργώντας όμοια με την προηγούμενη κατηγορία δημιουργώντας δηλαδή τυχαίες παρατηρήσεις από τις σχετικές κατανομές πιθανοτήτων, η προσομοίωση μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει αυτού του είδους τις αβεβαιότητες. Έτσι, χρησιμοποιείται αρκετά συχνά για τη δοκιμή διαφόρων συνδυασμών για τη βελτίωση του σχεδιασμού και της λειτουργίας αυτών των συστημάτων.

- Σχεδιασμός και Λειτουργία Κατασκευαστικών Συστημάτων

Ένα μεγάλο ποσοστό των εφαρμογών της προσομοίωσης αφορά συστήματα παραγωγής. Πολλά από αυτά τα συστήματα μπορούν να θεωρηθούν ως ένα σύστημα ουράς κάποιου είδους (π.χ. ένα σύστημα ουράς όπου οι μηχανές είναι οι "εξυπηρετητές" και οι εργασίες προς επεξεργασία είναι οι "πελάτες"). Ωστόσο, διάφορες προβλήματα που έχουν εκ φύσεως αυτά τα συστήματα (π.χ. περιστασιακές βλάβες μηχανών, ελαττωματικά εξαρτήματα που χρειάζονται επιδιόρθωση ή αντικατάσταση) ξεπερνούν το πεδίο εφαρμογής των συνηθισμένων μοντέλων ουράς. Γι' αυτό είναι επιτακτική η χρήση της προσομοίωσης ώστε να απαντηθούν τα διάφορα ερωτήματα που προκύπτουν όπως πόσες μηχανές πρέπει να χρησιμοποιηθούν, την ποσότητα υλικών, ποιά μπορεί να είναι η διάρκεια των εργασιών, ποιός είναι ο συντελεστής της παραγωγικής διαδικασίας και όλα αυτά με στόχο να έχουμε την βέλτιστη λειτουργία του συστήματος.

- Ανάλυση Χρηματοοικονομικού Κινδύνου

Η ανάλυση χρηματοοικονομικού κινδύνου ήταν ένας από τους πρώτους τομείς εφαρμογής της προσομοίωσης και συνεχίζει να είναι ένας πολύ ενεργός τομέας. Έστω ότι θέλουμε να αξιολογήσουμε μια προτεινόμενη κεφαλαιακή επένδυση με μελλοντικό cash flow αβέβαιο. Δημιουργώντας τυχαίες παρατηρήσεις από τις κατανομές πιθανοτήτων για το cash flow σε κάθε μία από τις αντίστοιχες χρονικές περιόδους (και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις μεταξύ χρονικών περιόδων), η προσομοίωση μπορεί να δημιουργήσει χιλιάδες σενάρια για την έκβαση της επένδυσης και παρέχει μια κατανομή πιθανότητας της απόδοσης από την επένδυση ούτως ώστε η διοίκηση να αξιολογήσει τον κίνδυνο που συνεπάγεται η πραγματοποίηση της επένδυσης. Μια παρόμοια προσέγγιση επιτρέπει την ανάλυση του κινδύνου που σχετίζεται με την επένδυση σε διάφορους τίτλους, συμπεριλαμβανομένων των πιο εξωτικών χρηματοοικονομικών μέσων όπως πωλήσεις, κλήσεις, συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, μετοχές κ.λπ

Υπάρχουν όμως και εφαρμογές της προσομοίωσης σε διάφορες επιστήμες όπως η Δομική Βιολογία όπου καλείται να δώσει απαντήσεις σε θέματα νευραλγικής σημασίας, η απάντηση των οποίων μπορεί να βελτιώσει την ποιότητα ζωής χιλιάδων ασθενών. Για παράδειγμα, πολλές από τις λειτουργίες του κυττάρου εκτελούνται από πρωτεΐνες - μεγάλα μόρια που διπλώνουν σε ένα ακριβές σχήμα για να ολοκληρώσουν μια συγκεκριμένη εργασία. Προς το παρόν, κανείς δεν ξέρει πώς να πάρει τη χημική φόρμουλα για μια πρωτεΐνη και να προβλέψει το σχήμα που θα πάρει. Ένα λάθος σε υπό κυτταρικό επίπεδο μπορεί να έχει επιπτώσεις που επηρεάζουν ολόκληρο το σώμα και να προκαλέσει σοβαρές ασθένειες όπως η κυστική ίνωση. Το σχήμα καθορίζεται από τις δυνάμεις μεταξύ των πολλών ατόμων εντός της πρωτεΐνης και μεταξύ αυτών των ατόμων και του περιβάλλοντός τους. Ο υπολογισμός του καθαρού αποτελέσματος όλων αυτών των δυνάμεων είναι μια τρομακτική υπολογιστική πρόκληση, αλλά η προσομοίωση πλησιάζει αυτόν τον στόχο.

Πέρα όμως από τους προαναφερθέντες τομείς η προσομοίωση κρίνεται χρήσιμη και σε πολλούς άλλους όπως η υγειονομική περίθαλψη και η ιατρική όπου απαντούνται ερωτήματα όπως χρόνος και ανταπόκριση ασθενοφόρων, κόστος και αποτελεσματικότητα έγκαιρης ανίχνευσης μίας νόσου, αντιστοίχιση δότη - μοσχεύματος κλπ, άλλες βιομηχανίες υπηρεσιών έχουν επίσης αποδειχθεί γόνιμα πεδία για την εφαρμογή της προσομοίωσης. Αυτές οι βιομηχανίες περιλαμβάνουν τις κρατικές υπηρεσίες, τις τράπεζες, τη διαχείριση ξενοδοχείων, τα εστιατόρια, τα εκπαιδευτικά ιδρύματα, τον σχεδιασμό αντιμετώπισης καταστροφών, τον στρατό, τα πάρκα αναψυχής και πολλούς άλλους. Σε πολλές περιπτώσεις, τα συστήματα που προσομοιώνονται είναι, στην πραγματικότητα, συστήματα ουράς κάποιου τύπου. Σε άλλες επιστήμες όπως η αστροφυσική όπου σε κάποιες περιπτώσεις όπως αναφέραμε δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθούν τα φαινόμενα, ούτε όμως και να δημιουργηθούν εργαστηριακά άρα θα πρέπει να προσομοιωθούν.[17]

4.2 Η Προσομοίωση στις Μελέτες Επιχειρησιακής Έρευνας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η Επιχειρησιακή Έρευνα χρησιμοποιεί ευρέως την προσομοίωση για την ανάλυση στοχαστικών συστημάτων. Μερικά από αυτά τα στοχαστικά συστήματα μοιάζουν με Μαρκοβιανές αλυσίδες και με τα συστήματα ουράς και άλλα είναι πιο περίπλοκα. Χρησιμοποιώντας κατανομές πιθανοτήτων για τη δημιουργία διαφόρων τυχαίων γεγονότων που συμβαίνουν στο σύστημα, η μέθοδος της προσομοίωσης μιμείται τη λειτουργία του πραγματικού συστήματος. Επομένως, ένα μοντέλο προσομοίωσης συνθέτει το σύστημα δημιουργώντας το συστατικό προς συστατικό και γεγονός προς γεγονός. Στη συνέχεια, το μοντέλο εκτελεί το προσομοιωμένο σύστημα για να λάβει στατιστικές παρατηρήσεις της απόδοσης του συστήματος που προκύπτουν από διάφορα τυχαία δημιουργούμενα συμβάντα.

Όταν η προσομοίωση χρησιμοποιείται ως μέρος μιας μελέτης της Επιχειρησιακής Έρευνας, γίνεται πρώτα κάποια προκαταρκτική ανάλυση (με προσεγγιστικά μαθηματικά μοντέλα) για να αναπτυχθεί ένας πρόχειρος σχεδιασμός του συστήματος (συμπεριλαμβανομένων των διαδικασιών λειτουργίας του). Στη συνέχεια, η προσομοίωση χρησιμοποιείται για να "τρέξει" συγκεκριμένους σχεδιασμούς ώστε να εκτιμηθεί πόσο καλά αποδίδει ο καθένας. Αφού αναπτυχθεί και επιλεγεί ένας λεπτομερής σχεδιασμός με αυτόν τον τρόπο, το σύστημα -αν είναι εφικτό- δοκιμάζεται σε πραγματική χρήση για να τελειοποιηθεί το τελικό σχέδιο.

Η προσομοίωση ενός σύνθετου συστήματος χρείαζεται κάποια προετοιμασία, πρέπει να σχεδιαστεί ένα λεπτομερές μοντέλο προσομοίωσης για να περιγράψει τη λειτουργία του συστήματος και τον τρόπο προσομοίωσής του. Αρχικά, ορίζεται η κατάσταση του συστήματος. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος και τα πιθανά γεγονότα που μπορούν να αλλάξουν την κατάσταση του συστήματος. Έπειτα, μέσα στο πρόγραμμα προσομοίωσης πρέπει να βρίσκεται το "ρολόι προσομοίωσης" το οποίο καταγράφει την πάροδο του (προσομοιωμένου) χρόνου. Το επόμενο βήμα είναι να επιλεγεί μια μέθοδος για την τυχαία παραγωγή γεγονότων. Τέλος, προσδιορίζεται ένας τύπος για την αναγνώριση των μεταβάσεων κατάστασης που προκαλούνται από τα διάφορα είδη γεγονότων.

Ωστόσο, όταν πρόκειται για σχετικά πολύπλοκα συστήματα, η προσομοίωση τείνει να είναι μια σχετικά δαπανηρή διαδικασία. Μετά τη διαμόρφωση ενός λεπτομερούς μοντέλου προσομοίωσης, συχνά απαιτείται πολύς χρόνος για την ανάπτυξη και τον εντοπισμό σφαλμάτων των προγραμμάτων που απαιτούνται για την εκτέλεση της προσομοίωσης. Στη συνέχεια, μπορεί να χρειαστούν πολλές και χρονοβόρες εκτελέσεις του υπολογιστή για να ληφθούν καλές εκτιμήσεις για το πόσο καλά θα λειτουργούσαν όλα τα εναλλακτικά σχέδια του συστήματος. Τέλος, όλα αυτά τα δεδομένα θα πρέπει να αναλυθούν προσεκτικά πριν εξαχθούν τελικά συμπεράσματα. Όλη αυτή η διαδικασία απαιτεί συνήθως πολύ χρόνο και προσπάθεια. Επομένως, η προσομοίωση δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται όταν είναι διαθέσιμη μια λιγότερο δαπανηρή διαδικασία που μπορεί να παρέχει τις ίδιες πληροφορίες. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα ενός μαθηματικού μοντέλου είναι ότι αφαιρεί την ουσία του προβλήματος και αποκαλύπτει την υποκείμενη δομή του, παρέχοντας έτσι

[17] LIEBERMAN, G. J., & HILLIER, F. S. (2005). *Introduction to operations research*. McGraw-Hill.

εικόνα για τις σχέσεις αιτίου-αποτελέσματος μέσα στο σύστημα. Επομένως, εάν υπάρχει η επιλογή να κατασκευάστει ένα μαθηματικό μοντέλο που είναι ταυτόχρονα μια λογική εξιδανίκευση του προβλήματος και υπάγεται σε λύση, αυτή η προσέγγιση είναι συνήθως προτιμότερη από την προσομοίωση. Ωστόσο, πολλά προβλήματα είναι πολύ περίπλοκα για να επιτρέψουν αυτή την προσέγγιση. Έτσι, η προσομοίωση παρέχει συχνά τη μόνη πρακτική προσέγγιση σε ένα πρόβλημα.

4.2.1 Τα Βήματα για την Εφαρμογή της Προσομοίωσης

Θα περιγράψουμε εν συντομία όλα τα τυπικά βήματα που εμπλέκονται σε μια μεγάλη μελέτη επιχειρησιακής έρευνας που βασίζεται στην εφαρμογή της προσομοίωσης. Στην πραγματικότητα πρόκειται για μια διαδικασία 8 βημάτων, πρέπει όμως να υπογραμμιστεί ότι ορισμένες εφαρμογές της προσομοίωσης δεν απαιτούν όλα τα βήματα.

Πρώτο βήμα, διατύπωση του προβλήματος και σχεδιασμός της μελέτης. Απαντώνται ερωτήματα όπως ποίο είναι το πρόβλημα που η διοίκηση θέλει να μελετηθεί, ποιά μέτρα απόδοσης του συστήματος την ενδιαφέρουν και ούτω καθεξής. Βήμα δεύτερο, συλλογή των δεδομένων και διατύπωση του μοντέλου προσομοίωσης. Οι κατανομές πιθανοτήτων των σχετικών ποσοτήτων είναι ένα δεδομένο που χρεάζεται, για παράδειγμα, για ένα σύστημα ουράς οι πληροφορίες που απαιτούνται είναι η κατανομή του χρόνου μεταξύ αφίξεων και η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης. Προκειμένου να δημιουργηθούν αντιπροσωπευτικά σενάρια για την απόδοση ενός συστήματος, είναι σημαντικό μια προσομοίωση να δημιουργεί τυχαίες παρατηρήσεις από αυτές τις κατανομές αντί να χρησιμοποιεί απλώς μέσους όρους. Πρακτικά, είναι δυνατή μόνο η εκτίμηση αυτών των κατανομών. Αυτό γίνεται μετά από άμεσες παρατηρήσεις από μια υπάρχουσα εκδοχή του υπό μελέτη συστήματος ή από ένα παρόμοιο σύστημα. Μετά την εξέταση αυτών των δεδομένων για μια συγκεκριμένη ποσότητα, εάν η μορφή της κατανομής είναι ασαφής αλλά μοιάζει με τη μορφή ενός τυπικού τύπου κατανομής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια στατιστική δοκιμή που ονομάζεται έλεγχος χ^2 καλής προσαρμογής για να ελεγχθεί εάν τα δεδομένα ταιριάζουν σε αυτό τυποποιημένη μορφή. Εάν δεν μπορούν να ληφθούν σχετικά δεδομένα επειδή δεν υπάρχει παρόμοιο σύστημα, χρησιμοποιούνται άλλες πιθανές πηγές πληροφοριών για την εκτίμηση. Ένα μοντέλο προσομοίωσης συχνά διατυπώνεται με βάση ένα διάγραμμα ροής που συνδέει μεταξύ τους τα διάφορα στοιχεία του συστήματος. Δίνονται κανόνες λειτουργίας για κάθε στοιχείο, συμπεριλαμβανομένων των κατανομών πιθανοτήτων που ελέγχουν πότε θα συμβούν γεγονότα εκεί. Το μοντέλο χρειάζεται μόνο να περιέχει αρκετές λεπτομέρειες για να αποτυπώσει την ουσία του συστήματος. Τρίτο βήμα περιλαμβάνει τον έλεγχο ακρίβειας του μοντέλου προσομοίωσης. Αυτό επιτυγχάνεται κυρίως με την εμπλοκή τους ανθρώπων που είναι πιο εξοικειωμένοι με τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος πριν από την κατασκευή ενός προγράμματος υπολογιστή. Βήμα τέταρτο, επιλογή του λογισμικού και κατασκευή προγράμματος. Υπάρχουν τέσσερις κύριες κατηγορίες λογισμικού που χρησιμοποιούνται για προσομοιώσεις υπολογιστή: το λογισμικό υπολογιστικών φύλλων (spread-shit software), οι γενικής χρήσης γλώσσες προγραμματισμού όπως C, FORTRAN,PASCAL κλπ, οι γενικής χρήσης γλώσσες προσομοίωσης όπως οι πιο πρόσφατες εκδόσεις των GPSS, SLAM κλπ, και η τέταρτη κατηγορία είναι οι προσομοιωτές. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ένας προσομοιωτής μπορεί να είναι ένα εξαιρετικό εργαλείο εάν το σύστημα προς προσομοίωση ταιριάζει ακριβώς στην προβλεπόμενη κατηγορία για τον προσομοιωτή καθότι η περιγραφή των επιτρεπόμενων χαρακτηριστικών του συστήματος είναι αρκετά περιορισμένη. Πέμπτο βήμα, έλεγχος της εγκυρότητας του μοντέλου προσομοίωσης. Μετά την κατασκευή και τον εντοπισμό σφαλμάτων του προγράμματος υπολογιστή, το επόμενο βασικό βήμα είναι να ελεγχθεί εάν το μοντέλο προσομοίωσης που ενσωματώνεται στο πρόγραμμα παρέχει έγκυρα αποτελέσματα για το σύστημα που αντιπροσωπεύει. Συγκεκριμένα, τα μέτρα απόδοσης για το πραγματικό σύστημα θα πρέπει να προσεγγιστούν επαρκώς από τις τιμές των μετρήσεων που παράγονται από το μοντέλο προσομοίωσης. Έκτο βήμα, σχεδιασμός των προσομοιώσεων που θα εκτελεστούν. Σε αυτό το σημείο, λαμβάνονται αποφάσεις σχετικά με το ποιές συνθέσεις του συστήματος θα προσομοιωθούν. Πρέπει να ληφθούν τώρα αποφάσεις και για ορισμένα στατιστικά ζητήματα, όπως για παράδειγμα η διάρκεια της περιόδου “προθέρμανσης”, δηλαδή της περιόδου μέχρι το σύστημα να φτάσει στη συνθήκη σταθερής κατάστασης ώστε να ξεκινήσει η συλλογή δεδομένων, ή η διάρκεια εκτέλεσης της προσομοίωσης. Έβδομο βήμα, διεξαγωγή των εκτελέσεων της προσομοίωσης και ανάλυση των αποτελεσμάτων. Ό,τι παράγει η κάθε εκτέλεση προσομοίωσης παρέχει στατιστικές εκτιμήσεις για τα επιθυμητά μέτρα απόδοσης του εκάστοτε συστήματος.Τελευταίο βήμα είναι η παρουσίαση προτάσεων βάσει συμπερασμάτων που έχουν εξαχθεί από τα αποτελέσματα των επαναλήψεων της προσομοίωσης στη Διοίκηση.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η προσομοίωση δεν παράγει ακριβείς τιμές για τα μέτρα απόδοσης ενός συστήματος. Αντίθετα, κάθε εκτέλεση προσομοίωσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στατιστικό πείραμα που δημιουργεί στατιστικές παρατηρήσεις της απόδοσης του προσομοιωμένου συστήματος. Αυτές οι παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή στατιστικών εκτιμήσεων των μέτρων απόδοσης. Η αύξηση της διάρκειας μιας εκτέλεσης αυξάνει την ακρίβεια αυτών των εκτιμήσεων. Ένα κοινό λάθος στη χρήση της προσομοίωσης είναι ότι τα συμπεράσματα βασίζονται σε υπερβολικά μικρά δείγματα, επειδή η στατιστική ανάλυση ήταν ανεπαρκής ή τελείως ελλιπής. Ως εκ τούτου, απαιτείται ένα πολύ μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος για να μπορέσουμε να βγάλουμε ένα έγκυρο συμπέρασμα σε εύλογο επίπεδο στατιστικής σημασίας.

4.3 Κατηγορίες της Προσοσμοίωσης

Δύο ευρείες κατηγορίες της μεθόδου προσομοίωσης είναι η προσομοίωση διακριτών γεγονότων και η συνεχής προσομοίωση.

Μια προσομοίωση διακριτών γεγονότων είναι αυτή όπου οι αλλαγές στην κατάσταση του συστήματος συμβαίνουν στιγμιαία σε τυχαία σημεία του χρόνου ως αποτέλεσμα της εμφάνισης διακριτών γεγονότων.

Μια συνεχής προσομοίωση είναι αυτή όπου αλλαγές στην κατάσταση του συστήματος συμβαίνουν αδιάκοπα με την πάροδο του χρόνου. Οι συνεχείς προσομοιώσεις τυπικά απαιτούν τη χρήση διαφορικών εξισώσεων για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής των μεταβλητών κατάστασης. Έτσι, η ανάλυση τείνει να είναι σχετικά πολύπλοκη. Προσεγγίζοντας τις συνεχείς αλλαγές στην κατάσταση του συστήματος με περιστασιακές διακριτές αλλαγές, είναι συχνά δυνατό να χρησιμοποιηθεί μια προσομοίωση διακριτών γεγονότων για να προσεγγιστεί η συμπεριφορά ενός συνεχούς συστήματος. Αυτό τείνει να απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση.

4.3.1 Ο Χρόνος στην Προσομοίωση

Όσον αφορά το “ρολόι προσομείωσης ” και την καταγραφή της λειτουργίας του συστήματος υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι. Η μέθοδος “Fixed- Time Incrementing”, όπου αρχικά γίνεται αύξηση του χρόνου κατά ένα μικρό σταθερό μέγεθος και στη συνέχεια γίνεται ενημέρωση του συστήματος προσδιορίζοντας ποιά γεγονότα έχουν λάβει χώρα κατά τη διάρκεια του χρόνου που πέρασε και πως διαμορφώθηκε η κατάσταση του συστήματος μετά. Η δεύτερη μέθοδος “Next-Event Incrementing” όπου ο χρόνος αυξάνεται στο χρόνο

που συμβαίνει το επόμενο γεγονός και στη συνέχεια ενημερώνεται το σύστημα προσδιορίζοντας τη νέα του κατάσταση που προκύπτει από αυτό το συμβάν και τυχαία παράγοντας το χρόνο μέχρι να συμβεί το οποιοδήποτε επόμενο γεγονός που μπορεί να προκύψει από αυτή την κατάσταση.

4.4 Γεννήτρια Τυχαίων Αριθμών

Η εφαρμογή ενός μοντέλου προσομοίωσης απαιτεί τυχαίους αριθμούς για να ληφθούν τυχαίες παρατηρήσεις από κατανομές πιθανοτήτων.

Η διαδικασία που χρησιμοποιείται από έναν υπολογιστή για να ληφθεί μια σειρά τυχαίων αριθμών ονομάζεται “γεννήτρια τυχαίων αριθμών”.

<u>Όρισμος 4.4.1:</u> Μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών είναι ένας αλγόριθμος που παράγει ακολουθίες αριθμών που ακολουθούν μια καθορισμένη κατανομή πιθανοτήτων και έχουν την εμφάνιση τυχαιότητας. Η κατανομή πιθανοτήτων υποδηλώνει ότι μια πιθανότητα μπορεί να συσχετιστεί με την εμφάνιση κάθε αριθμού που παράγεται από τον αλγόριθμο. Με τον όρο τυχαίος αριθμός υποδηλώνουμε μια τυχαία παρατήρηση από κάποια μορφή ομοιόμορφης κατανομής, έτσι ώστε όλοι οι πιθανοί αριθμοί να είναι ισοπίθανοι.

Οι τυχαίοι αριθμοί μπορούν να χωριστούν σε δύο κύριες κατηγορίες, τους τυχαίους ακέραιους αριθμούς και τους ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς, που ορίζονται ως εξής:

Τυχαίος ακέραιος αριθμός : πρόκειται για μια τυχαία παρατήρηση από μια διακριτή ομοιόμορφη κατανομή σε ένα εύρος $\underline{n},\ \underline{n}+1,\ldots,\overline{n}$. Οι πιθανότητες για αυτή την κατανομή είναι

$$P(\underline{n}) = P(\underline{n}+1) = \cdots = P(\overline{n}) = \frac{1}{\overline{n}-\underline{n}+1}. \tag{4.1}$$

Συνήθως ισχύει ότι $\underline{n}=0$ ή 1.

Ομοιόμορφος τυχαίος αριθμός : είναι μια τυχαία παρατήρηση από μια συνεχή ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο διάστημα [a, b]. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής της ομοιόμορφης κατανομής είναι

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{b-a}, \alpha\nu\ \ \alpha \le \mathrm{x} \le b \\ \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα πρόκειται για ψευδοτυχαίους αριθμούς καθώς αυστηρά μιλώντας, οι αριθμοί που παράγονται από τον υπολογιστή δεν θα πρέπει να ονομάζονται τυχαίοι αριθμοί επειδή είναι προβλέψιμοι και αναπαραγόμενοι (κάτι που μερικές φορές δίνει πλεονέκτημα), δεδομένης της γεννήτριας τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιείται.

4.5 Δημιουργία Τυχαίων Παρατηρήσεων από μια Κατανομή Πιθανότητας

Με δεδομένη μια ακολουθία τυχαίων αριθμών, πώς μπορεί κανείς να δημιουργήσει μια ακολουθία τυχαίων παρατηρήσεων από μια δεδομένη κατανομή πιθανότητας; Πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις είναι διαθέσιμες, ανάλογα με τη φύση της κατανομής. Θα αναφερθούμε επιγραμματικά.

- Απλές Διακριτές Κατανομές

Για μερικές απλές διακριτές κατανομές, μια ακολουθία τυχαίων ακεραίων αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία τυχαίων παρατηρήσεων με απλό τρόπο. Απλώς κατανείμετε τις πιθανές τιμές ενός τυχαίου αριθμού στα διάφορα αποτελέσματα στην κατανομή πιθανοτήτων σε ευθεία αναλογία με τις αντίστοιχες πιθανότητες αυτών των αποτελεσμάτων.

- Η Μέθοδος Αντίστροφου Μετασχηματισμού

Για πιο περίπλοκες κατανομές, είτε διακριτές είτε συνεχείς, η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού (Inverse Transformation Method) μπορεί μερικές φορές να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία τυχαίων παρατηρήσεων. Αφήνοντας το X να είναι η τυχαία μεταβλητή, συμβολίζουμε τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής με

$F(x) = P\{X \le x\}$.

Στη συνέχεια, η δημιουργία κάθε παρατήρησης απαιτεί τα ακόλουθα δύο βήματα. Αρχικά, παράγοντας έναν ομοιόμορφο τυχαίο αριθμό έστω z ανάμεσα από το 0 και το 1. Έπειτα, ορίζεται F(x)=z και λύνοντας ως προς x παίρνουμε την τυχαία παρατήρηση από την κατανομή.

Η δοθείσα μέθοδος χρησιμοποιείται και για κατανομές όπως η εκθετική, η Erlang και η κανονική κατανομή (σε αυτή την περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, που όμως δεν κρίνεται ιδιαίτερα αποτελεσματική).

Όταν όμως δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός της αντίστροφης -ένα αρκετά συχνό φαινόμενο- τότε δε μπορεί να εφαρμοστεί η Μέθοδος του Αντίστροφου Μετασχηματισμού και εφαρμόζεται η Μέθοδος Απόρριψης-Αποδοχής (Acceptance-Rejection Method). Συχνα αυτές οι μέθοδοι είναι πολύ πιο γρήγορες, ακόμα και σε περιπτώσεις που είναι εφικτή η εφαρμογή της μεθόδου του αντίστροφου μετασχηματισμού.

4.6 Τεχνικές Μείωσης της Διασποράς

Επειδή συνήθως απαιτείται σημαντικός χρόνος στον υπολογιστή για να διεξάγει τις εκτελέσεις προσομοίωσης, είναι σημαντικό να ληφθούν όσο το δυνατόν περισσότερες και ακριβείς πληροφορίες από το σύστημα ώστε να εφαρμοστεί η προσομοίωση έχοντας δώσει έμφαση στην αποτελεσματικότητα του πειραματικού σχεδιασμού. Υπάρχουν αρκετές τεχνικές για την αύξηση της ακρίβειας, δηλαδή τη μείωση της διασποράς, των εκτιμητριών του δείγματος. Οι τεχνικές μείωσης της διασποράς συχνά ονομάζονται τεχνικές Monte Carlo.

Η στρωματοποιημένη δειγματοληψία (Stratified Sampling) είναι μια σχετικά απλή τεχνική Monte Carlo για τη λήψη καλύτερων εκτιμήσεων. Αυτή η μέθοδος έχει 2 προτερήματα που οδηγούν σε πιο ακριβείς προσεγγίσεις.Πρώτον, από την ίδια τη φύση της τυχαιότητας, ένα τυχαίο δείγμα μπορεί να μην παρέχει μια ιδιαίτερα ομοιόμορφη διατομή της κατανομής. Δεύτερον, ορισμένα τμήματα μιας διανομής μπορεί να είναι πιο κρίσιμα από άλλα για την απόκτηση ακριβούς εκτίμησης, αλλά η τυχαία δειγματοληψία δεν δίνει ιδιαίτερη προτεραιότητα στη λήψη παρατηρήσεων από αυτά τα τμήματα. Για παράδειγμα, η ουρά μιας εκθετικής κατανομής είναι ιδιαίτερα κρίσιμη για τον προσδιορισμό του μέσου όρου της. Η στρωματοποιημένη δειγματοληψία παρακάμπτει αυτές τις δυσκολίες διαιρώντας την κατανομή σε τμήματα που ονομάζονται στρώματα, όπου κάθε στρώμα θα δειγματοληπτόταν ξεχωριστά με δυσανάλογα βαριά δειγματοληψία από τα πιο κρίσιμα στρώματα.

Η δεύτερη τεχνική μείωσης της διασποράς είναι η μέθοδος των συμπληρωματικών τυχαίων αριθμών (Method of Complementary Random Numbers). Αυτή η μέθοδος είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των αντιθετικών παραλλαγών, η οποία επιχειρεί να δημιουργήσει ζεύγη τυχαίων παρατηρήσεων με υψηλή αρνητική συσχέτιση, έτσι ώστε ο συνδυασμένος μέσος όρος να τείνει να είναι πιο κοντά στον μέσο όρο. Το κίνητρο αυτής της μεθόδου είναι ότι η τυχαιότητα επιλογής στους ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς που δημιουργούνται μπορεί να κάνει τον μέσο όρο των τυχαίων παρατηρήσεων που προκύπτουν να να είναι ουσιαστικά στη μία πλευρά του αληθινού μέσου όρου, ενώ τα συμπληρώματα αυτών των ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών (που είναι επίσης ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί) θα έτειναν να αποδώσουν σχεδόν αντίθετο αποτέλεσμα. Επομένως, χρησιμοποιώντας τόσο τους αρχικούς ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς όσο και τα συμπληρώματά τους για τη δημιουργία τυχαίων παρατηρήσεων και στη συνέχεια υπολογιζοντας το συνδυασμένο μέσο όρο του δείγματος παρέχεται μια πιο ακριβή εκτίμηση του μέσου όρου.

4.7 Συμπέρασμα

Η προσομοίωση είναι ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο για την εκτίμηση της απόδοσης πολύπλοκων στοχαστικών συστημάτων εάν πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σχεδιασμοί ή λειτουργικές πολιτικές. Ωστόσο, με την έναρξη μιας σειράς εκτελέσεων με τις προδιαγεγραμμένες συνθήκες εκκίνησης, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την προσομοίωση για να περιγράψουμε την παροδική συμπεριφορά ενός προτεινόμενου συστήματος. Επιπλέον, εάν χρησιμοποιήσουμε διαφορικές εξισώσεις, η προσομοίωση μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα των οποίων οι καταστάσεις αλλάζουν συνεχώς με το χρόνο.

Η προσομοίωση είναι μια από τις πιο δημοφιλείς τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας επειδή είναι ένα τόσο ευέλικτο, ισχυρό και διαισθητικό εργαλείο. Όπως αναφέραμε, μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα ή λεπτά, μπορεί να προσομοιώσει ακόμη και χρόνια λειτουργίας ενός τυπικού συστήματος, ενώ παράγει μια σειρά από στατιστικές παρατηρήσεις σχετικά με την απόδοση του συστήματος κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Από την άλλη πλευρά, η προσομοίωση δεν πρέπει να θεωρείται πανάκεια κατά τη μελέτη στοχαστικών συστημάτων. Παρέχει μόνο στατιστικές εκτιμήσεις και όχι ακριβή αποτελέσματα και συγκρίνει εναλλακτικές αντί να παράγει μια βέλτιστη. Επιπλέον, παρά τις εντυπωσιακές προόδους στο λογισμικό, η προσομοίωση μπορεί να είναι ένας σχετικά αργός και δαπανηρός τρόπος.

Τέλος, η προσομοίωση αποδίδει μόνο αριθμητικά δεδομένα σχετικά με την απόδοση του συστήματος, έτσι ώστε να μην παρέχει καμία πρόσθετη εικόνα για τις σχέσεις αιτίας-αποτελέσματος εντός του συστήματος, εκτός από τις ενδείξεις που μπορούν να εξαχθούν από αυτούς τους αριθμούς (και από την ανάλυση που απαιτείται για κατασκευάστε το μοντέλο προσομοίωσης).

Για όλους αυτούς τους λόγους, οι αναλυτικές μέθοδοι (όταν είναι διαθέσιμες) και η προσομοίωση έχουν σημαντικούς συμπληρωματικούς ρόλους για τη μελέτη στοχαστικών συστημάτων.

Η προσομοίωση έχει αναμφισβήτητα μια πολύ σημαντική θέση στη θεωρία και την πράξη της επιχειρησιακής έρευνας αποτελεί ένα ανεκτίμητο εργαλείο για χρήση σε εκείνα τα προβλήματα όπου οι αναλυτικές τεχνικές είναι ανεπαρκείς.

Βιβλιογραφία

1. Blackburn. (2022, May 2). Introduction to reinforcement learning : Markov-Decision process. Medium. https://towardsdatascience.com/introduction-to-reinforcement-learning-markov-decision-process-44c533ebf8da
2. Korstanje, J. (2020, March 1). What is operations research?. Medium. https://towardsdatascience.com/what-is-operations-research-1541fb6f4963
3. LIEBERMAN, G. J., & HILLIER, F. S. (2005). Introduction to operations research. McGraw-Hill.
4. Read “fueling innovation and Discovery: The mathematical sciences in the 21st Century” at nap.edu. Mathematical Simulations / When the Lab Isn’t Big Enough | Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century | The National Academies Press. (n.d.). https://nap.nationalacademies.org/read/13373/chapter/5
5. Simulation in operations research. (n.d.). http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch16/simintro.htm
6. Stewart, W. J. (2013). Probability, markov chains, queues, and simulation: The mathematical basis of performance modeling. World Publishing Corporation.
7. TAHA, H. A. (2007). Operations research: An introduction. Pearson Prentice Hall.
8. Understanding the markov decision process (MDP). Built In. (n.d.). https://builtin.com/machine-learning/markov-decision-process
9. Wikimedia Foundation. (2023, June 25). Operations research. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Operations_research
10. Μ.Λουλάκης (2019). Στοχαστικές Διαδικασίες. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.
11. Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2021). Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία, Αλγόριθμοι και εφαρμογές. Εκδόσεις Συμεών.