



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής σε χρονικά μη-μόνιμες ροές με
τη συνεχή συζυγή μέθοδο και checkpointing.

Διπλωματική Εργασία
Αντωνίου Β.Τάση

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

Φεβρουάριος 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
& ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής σε χρονικά μη-μόνιμες ροές με τη συνεχή συζυγή μέθοδο και checkpointing.

Διπλωματική Εργασία
Αντωνίου Β.Τάση

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου

Καθηγητής ΕΜΠ

Φεβρουάριος 2012

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία αναπτύσσεται λογισμικό για βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής σε χρονικά μη-μόνιμη, μη-συνεκτική ροή. Η βελτιστοποίηση γίνεται με τη μέθοδο της απότομης καθόδου για την οποία απαιτούνται οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου, που είναι ένα ολοκλήρωμα στον χρόνο, ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Αυτές βρίσκονται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο και, εδώ, έμφαση δίνεται στη χρήση της μεθόδου της επιλεκτικής αποθήκευσης στιγμιότυπων του πεδίου ροής με τη βοήθεια δεικτών μνήμης (checkpoints). Κίνητρο για τη μελέτη της μεθόδου αποτελεί η εξοικονόμηση μνήμης κατά τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών με αποδεκτή όμως αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Εξοικονομείται μνήμη αποθηκεύοντας επιλεκτικά σε ορισμένα χρονικά βήματα, τις λύσεις του ευθέως προβλήματος αντί σε κάθε χρονικό βήμα. Στη συνέχεια, για να επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις, επαναυπολογίζονται οι μεταβλητές της ροής σε όποιο χρονικό βήμα δεν έχουν αποθηκευτεί λύνοντας το ευθύ πρόβλημα με αρχή το τελευταίο αποθηκευμένο στιγμιότυπο πεδίο λύσεων. Τα checkpoints κατανέμονται κατά τη λύση του ευθέως προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιούνται οι φορές που πρέπει να επαναυπολογιστούν οι εξισώσεις ροής σε κάθε χρονικό βήμα. Οι εξισώσεις ροής επιλύονται με χρονοπροέλαση (και οι συζυγείς εξισώσεις με ανάποδη χρονοπροέλαση) με τη μέθοδο Runge-Kutta τρίτης τάξης. Εδώ προγραμματίστηκε κώδικας σε Fortran77 που διαχειρίζεται τους επιλύτες του εργαστηρίου και την τοποθέτηση των δεικτών μνήμης με βάση τη θεωρία του checkpointing. Τα παραπάνω εφαρμόστηκαν σε δύο περιπτώσεις βελτιστοποίησης με κριτήρια την αύξηση του συντελεστή άνωσης και τη μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας κατά τη διάρκεια ενός μεταβατικού φαινομένου. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν οδήγησαν στη διεξαγωγή συμπερασμάτων για την αξιοπιστία της μεθόδου του checkpointing για το κόστος της σε υπολογιστικό χρόνο και τα πλεονεκτήματά της.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF FLUIDS
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

Aerodynamic shape optimization for unsteady flows using the continuous
adjoint method and checkpointing.

Diploma thesis
Antony V.Tatsis

Supervisor: K.C. Giannakoglou, Professor NTUA

February 2012

In this diploma thesis, an aerodynamic shape optimization method for unsteady flows governed by Euler equations is set up. Optimization is carried out through the steepest descent method, where the sensitivity derivatives of the objective function with respect to the design variables are computed using the continuous adjoint method. This diploma thesis lays emphasis to the use of the checkpointing method for saving memory whilst the computation of the adjoint variables. In checkpointing, memory is saved by selectively storing solutions to the primal (flow) problem at certain time steps, instead of every time step. Consequently, during the solution of the adjoint equations, the instantaneous flow fields are recomputed at each time step for which no stored solutions are available, starting from the solutions of the last saved time step and solving it until the current time step. The checkpoints are distributed during the solution of the direct problem in such way, so as to minimize the recomputation of the direct variables on each time step. The flow equations are solved by time-marching (and the adjoint equations by reverse time-marching) using the method of third-order Runge-Kutta. In this thesis, a code programmed in Fortran77 manages existing flow and adjoint equations' solvers and the distribution of the checkpoints according to the checkpointing theory. All the above was used to solve two optimization cases which targeted at matching a prescribed lift coefficient value and the reduction in the drag coefficient for the duration of the unsteady flow phenomenon. The output results of these cases led to conclusions about the reliability, the cost and the advantages of the checkpointing method.

Ευχαριστίες

Με αυτή τη διπλωματική εργασία ολοκλήρωσα τις σπουδές μου ως φοιτητής στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών αλλά και τον τρόπο σκέψης μου. Για τη γνώση και την τεχνική βοήθεια που έλαβα θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας Κ. Γιαννάκογλου, Καθηγητή ΕΜΠ με την καθοδήγηση του οποίου μπόρεσα και ασχολήθηκα με το ενδιαφέρον αυτό θέμα. Επίσης, ευχαριστώ τη Β.Ασούτη για τη συνεργασία της και το χρόνο που μου αφιέρωσε για την ολοκλήρωση του προγραμματιστικού κομματιού της εργασίας καθώς και για τη γενικότερη βοήθειά της. Ακόμη, ευχαριστώ τον διδάκτορα Δ.Παπαδημητρίου για τη σημαντική υποστήριξή του στην κατανόηση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης για την εμπειρία και τις γνώσεις που μου μετέδωσαν καθόλη τη διάρκεια της εργασίας μου.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου Βασίλη και Καλλιόπη για την υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου καθώς και τους φίλους μου για τη στήριξή τους κατά τη φοίτησή μου.

Φεβρουάριος 2012

Περιεχόμενα

| | |
|--|------------|
| Περιεχόμενα | 8 |
| 1 Εισαγωγή | 1-1 |
| 2 Το ευθύ πρόβλημα και η επίλυσή του | 2-1 |
| 2.1 Μοντέλο ροής: Εξισώσεις Euler | 2-1 |
| 2.2 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων Euler | 2-3 |
| 2.3 Διακριτοποίηση του ευθέος προβλήματος - Οριακές συνθήκες | 2-5 |
| 2.3.1 Διακριτοποίηση του χωρίου ροής | 2-5 |
| 2.3.2 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων σε χρονικά μεταβαλλόμενη ροή | 2-5 |
| 2.3.3 Υπολογισμός των διανυσμάτων ροής | 2-6 |
| 2.3.4 Αρχικές και οριακές συνθήκες για το ευθύ πρόβλημα | 2-10 |
| 2.4 Αριθμητική επίλυση - Η μέθοδος Runge-Kutta τρίτης τάξης | 2-11 |
| 2.4.1 Ημιπεπλεγμένες εξισώσεις Runge-Kutta | 2-20 |
| 2.5 Αποτελέσματα επίλυσης του ευθέος προβλήματος | 2-21 |
| 3 Η συνεχής συζυγής μέθοδος | 3-1 |
| 3.1 Εύρεση παραγώγων ευαισθησίας με συνεχή συζυγή μέθοδο | 3-1 |
| 3.2 Αριθμητικά σχήματα και διακριτοποίηση | 3-8 |
| 4 Επιλεκτική κατανομή των δεικτών μνήμης ή checkpointing | 4-1 |
| 4.1 Η ιδέα του checkpointing. Επισκόπηση | 4-1 |
| 4.2 Δυναμικός αλγόριθμος κατανομής δεικτών μνήμης | 4-6 |
| 4.3 Διάγραμμα ροής | 4-12 |
| 5 Αποτελέσματα | 5-1 |
| 5.1 Περίπτωση 1 | 5-1 |
| 5.2 Περίπτωση 2 | 5-8 |
| 6 Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα | 6-1 |
| Βιβλιογραφία | i |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τις τελευταίες δεκαετίες έδωσε το έναυσμα για την αεροδυναμική βελτιστοποίηση γεωμετρικών μορφών με υπολογιστικές μεθόδους, πέραν των πειραματικών που ήταν οι καθιερωμένες. Οι υπολογιστικές μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί κατηγοριοποιούνται στις **στοχαστικές** και τις **αιτιοκρατικές**. Οι αιτιοκρατικές στηρίζονται στη **θεωρία ελέγχου** σύμφωνα με την οποία η βελτιστοποίηση γίνεται με τον έλεγχο των γεωμετρικών παραμέτρων, που καθορίζουν τη μορφή προς βελτιστοποίηση, ώστε να ελαχιστοποιείται ή να μεγιστοποιείται μία συνάρτηση που εξαρτάται από τα γεωμετρικά μεγέθη και τις **μεταβλητές ροής**. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **συνάρτηση-στόχος** ή **αντικειμενική συνάρτηση** και η τιμή της διαμορφώνεται από τις λύσεις των εξισώσεων που εκφράζουν τη φυσική της ροής (Euler ή Navier-Stokes). Αλλάζοντας τη γεωμετρία, αλλάζουν αλλάζουν τα πεδία ροής και, κατά συνέπεια, αυξάνεται ή μειώνεται η τιμή της συνάρτησης-στόχου. Στις στοχαστικές μεθόδους [5], ακολουθείται η αρχή της φυσικής επιλογής σε εξελικτικά στάδια-γενιές, όπου τα πιο ισχυρά δείγματα ενός πλήθους γεωμετρικών μορφών 'επιβιώνουν' από στάδιο σε στάδιο ενώ τα αδύναμα αποκλείονται. Ένα δείγμα είναι ισχυρότερο όσο πιο κοντά στη στοχευμένη τιμή βρίσκεται η αντικειμενική συνάρτηση που του αντιστοιχεί. Από γενιά σε γενιά, μεσολαβεί μία διαδικασία αποκλεισμού των αδύναμων και διατήρησης των ισχυρών δειγμάτων από τα οποία στη συνέχεια προκύπτει ο νέος πληθυσμός με μίξη των γεωμετρικών χαρακτηριστικών τους.

Τα πλεονεκτήματα των στοχαστικών μεθόδων [3, 9] είναι ότι εντοπίζουν το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης-στόχου και διαχειρίζονται προβλήματα βελτιστοποίησης πολλών στόχων όπου πρέπει να ελαχιστοποιηθούν πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις ταυτόχρονα. Όμως, το υπολογιστικό κόστος που απαιτείται ώστε να υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πολλών δειγμάτων σε κάθε εξελικτικό στάδιο είναι μεγάλο. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι [2], σε αντίθεση με τις στοχαστικές, ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση-στόχο με χρήση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις γεωμετρικές μεταβλητές που περιγράφουν το σώμα προς βελτιστοποίηση, τις ονομαζόμενες και μεταβλητές σχεδιασμού.

Χαρακτηριστική αιτιοκρατική μέθοδος ελαχιστοποίησης είναι η απότομη κάθοδος (steepest descent) [1]. Η μέθοδος δεν εγγυάται ότι η τιμή της συνάρτησης στόχου θα φτάσει στο ολικό ελάχιστο κατά την επαναληπτική διαδικασία του αλγορίθμου ελαχιστοποίησης της. Μερικές φορές η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης συγκλίνει σε τοπικό ελάχιστο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο, με διαφορετικό σημείο εκκίνησης κάθε φορά, η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει στο ολικό ακρότατο. Επειδή η σύγκλιση της συνάρτησης-στόχου επιτυγχάνεται γρήγορα με τους αιτιοκρατικούς αλγόριθμους, αρκεί να μπορεί να υπολογιστεί η κλίση της αντικειμενικής, συνάρτησης η παραπάνω ταχτική είναι συνολικά λιγότερο απαιτητική σε υπολογιστικό χρόνο από τη χρήση στοχαστικών μεθόδων (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι πάντα θα επιτυγχάνεται ολικό ελάχιστο).

Συνεχής συζυγής μέθοδος και χρονικά μη-μόνιμη ροή

Αυτή η διπλωματική εργασία χρησιμοποιεί αποκλειστικά στην αιτιοκρατική μέθοδο της απότομης καθόδου. Σε αυτήν, η γεωμετρική μορφή βελτιστοποιείται αεροδυναμικά με το επαναληπτικό σχήμα

$$b_{i,new} = b_{i,old} - \eta \frac{\partial F}{\partial b_i} \quad (1.1)$$

όπου η το βήμα της βελτιστοποίησης που μπορεί να διαφέρει από κύκλο σε κύκλο βελτιστοποίησης και b_i ($i=1, 2, \dots$ πλήθος μεταβλητών) οι μεταβλητές σχεδιασμού.

Σε χρονικά μεταβαλλόμενα φαινόμενα, για να γίνει βελτιστοποίηση με την απότομη κάθοδο, θα πρέπει να αλλάξει η παράγωγος στο σχήμα 1.1 ώστε να περιλαμβάνει τον χρόνο. Αν f η τιμή της συνάρτησης στόχου σε κάθε χρονική τιμή, τότε η "συνολική" συνάρτηση-στόχος στο εξεταζόμενο χρονικό διάστημα T είναι $F = \int_0^T f dt$. Η τιμή της παραγώγου της χρονικά ολοκληρωτικής συνάρτησης στόχου είναι $\frac{\partial F}{\partial b_i} \Big|_T = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial b_i} dt$ και έτσι οι εξισώσεις 1.1 γίνονται

$$b_{i,new} = b_{i,old} - \eta \frac{\partial F}{\partial b_i} \Big|_T \quad (1.2)$$

Ο υπολογισμός της $\frac{\partial F}{\partial b_i}|_T$ για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού μπορεί να γίνει με πεπερασμένες διαφορές. Για αυτό απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων κατάστασης για $b_{i,new} = b_{i,old} + \epsilon$, η εύρεση της νέας τιμής της $F(b_{i,new})$ και ο υπολογισμός της παραγώγου μέσω του διακριτοποιημένου σχήματος $\frac{F(b_{i,new}) - F(b_{i,old})}{\epsilon}$. Ως μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να χρησιμοποιούνται οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των πολυωνύμων Bezier, όπως και σε αυτήν την διπλωματική εργασία. Έτσι, για μία αεροτομή που περιγράφεται από δέκα σημεία Bezier, θα πρέπει να λυθούν δέκα φορές οι εξισώσεις της ροής για πρώτης τάξης ακρίβειας.

Η συζυγής μέθοδος [6, 7], δίνει μια οικονομική λύση για τον υπολογισμό των παραγώγων, μειώνοντας το κόστος στην επίλυση δύο μόνο συστημάτων εξισώσεων αντί για N εξισώσεις, ανεξάρτητα από το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού N : τις εξισώσεις ροής και τις συζυγείς τους. Οι συζυγείς εξισώσεις έχουν όμοια μορφή με τις εξισώσεις ροής, αλλά λύνονται ως προς τα συζυγή μεγέθη των μεταβλητών ροής, δηλαδή τις συζυγείς μεταβλητές (πολλαπλασιαστές Lagrange). Επίσης, ενώ οι εξισώσεις κατάστασης λύνονται με χρονοπροέλαση, οι συζυγείς εξισώσεις λύνονται πρὸς τα πίσω στον χρόνο (ανάποδη χρονοπροέλαση). Για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών [8] σε κάθε κόμβο του πεδίου και σε κάθε χρονικό βήμα πρὸς τα πίσω, χρειάζονται οι τιμές των μεταβλητών της ροής στον κόμβο αυτό. Δηλαδή, πρέπει να είναι αποθηκευμένο το διάνυσμα \vec{U} των μεταβλητών ροής ή με κάποιο τρόπο να μπορεί να ανακτηθεί.

Σε κάθε χρονικό βήμα για το οποίο υπολογίζονται οι συζυγείς μεταβλητές, στη συνέχεια υπολογίζεται η τιμή της παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial b_i}$. Ολοκληρώνοντας τις $\frac{\partial f}{\partial b_i}$ για όλα τα χρονικά βήματα προκύπτει τελικά η $\frac{\partial F}{\partial b_i}|_T$. Η τιμή της παραγώγου ευαισθησίας ($\frac{\partial F}{\partial b_i}|_T$) που αφαιρείται από τις μεταβλητές σχεδιασμού στις εξισώσεις 1.2 μπορεί να προκαλέσει πολύ μεγάλη ή ανεπαίσθητα μικρή μεταβολή στις μεταβλητές σχεδιασμού και κατά συνέπεια, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να απομακρυνθεί από την ελάχιστη τιμή ή να παγιδευτεί σε τοπικό ακρότατο. Για αυτό εισάγεται το βήμα η με το οποίο ρυθμίζεται η βαρύτητα με την οποία μεταβάλλονται οι μεταβλητές σχεδιασμού και άρα η τιμή της συνάρτησης-στόχου. Στο βήμα η δίνονται τέτοιες τιμές ώστε από κύκλο σε κύκλο ώστε η F να ελαχιστοποιείται.

Στη συνέχεια, η νέα τιμή της παραγώγου $\frac{\partial F}{\partial b_i}$ προκύπτει συναρτήσει των τιμών του πεδίου ροής με τη συζυγή μέθοδο και με την εξ.1.2 υπολογίζονται οι νέες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται έως ότου συγκλίνει η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε μία ελάχιστη τιμή.

Υπάρχουν προβλήματα όπου η τρέχουσα μνήμη είναι περιορισμένη και δεν είναι δυνατή η αποθήκευση όλων των λύσεων \vec{U} . Για αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν δύο λύσεις για το υπολογισμό της $\frac{\partial F}{\partial b_i}$ που βασίζονται σε μερική αποθήκευση των λύσεων \vec{U} . Αν το φαινόμενο που εξετάζεται είναι περιοδικό, τότε η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών (Harmonic Balance Method)[10] ή του πεδίου των γραμμικοποιημένων συ-

χνοτήτων [10] δίνουν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα με μικρό υπολογιστικό κόστος, ενώ αν είναι μη-περιοδικό μία μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος των δεικτών μνήμης (ή checkpointing). Η τελευταία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε μεταβαλλόμενη ροή αλλά κοστίζει περισσότερο σε υπολογιστικό χρόνο από τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών όταν πρόκειται για περιοδικά φαινόμενα. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία χρησιμοποιούνται οι δείκτες μνήμης για τη μείωση της απαιτούμενης υπολογιστικής μνήμης της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό της παραγώγου $\left. \frac{\partial F}{\partial b_i} \right|_T$.

Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών προσεγγίζει όσες τιμές του πεδίου ροής δεν αποθηκεύονται χρησιμοποιώντας αναπτύγματα κατά Fourier. Οι λύσεις \vec{U} αποθηκεύονται σε τόσα χρονικά βήματα όσοι είναι οι συντελεστές Fourier που απαιτούνται για ικανοποιητικής ακρίβειας παρεμβολή. Τα χρονικά βήματα στα οποία αποθηκεύονται οι λύσεις είναι ισαπέχοντα μεταξύ τους. Όσο μεγαλύτερα τα χρονικά διαστήματα, για ίδιο διακριτό χρονικό βήμα dt , απαιτείται η αποθήκευση περισσότερων σημείων για να διατηρηθεί η ακρίβεια της παρεμβολής. Η ακρίβεια της μεθόδου, εκφράζεται από τον αριθμό των αρμονικών N_H . Οι αρμονικές είναι συχνότητες σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί και ένας όρος του αναπτύγματος κατά Fourier των όρων μεταφοράς και των χρονικών όρων (είτε οι εξισώσεις ροής είναι οι Euler ή οι Navier-Stokes). Ο αριθμός των αρμονικών είναι ίσος με τον αριθμό των διαστημάτων μεταξύ των αποθηκευμένων στιγμιότυπων N_H . Έτσι ισχύει πάντα η σχέση $N_H = 2N_T + 1$ με βάση την οποία διατυπώνεται η μέθοδος. Η μέθοδος του πεδίου των γραμμικοποιημένων συχνοτήτων βασίζεται στη μέθοδο των αρμονικών αλλά, πλέον, τα αναπτύγματα κατά Fourier των χρονικών όρων και των όρων μεταφοράς είναι διακριτοποιημένα [10]. Οι δύο αυτές μέθοδοι παρεμβολής μπορούν να περιγράψουν αξιόπιστα περιοδικά φαινόμενα χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Fourier αλλά δεν είναι κατάλληλες για μη περιοδική ροή.

Η μέθοδος του checkpointing ή αλλιώς της τοποθέτησης δεικτών μνήμης (checkpoints) δίνει τη δυνατότητα να υπολογιστεί η $\left. \frac{\partial F}{\partial b_i} \right|_T$ για χρονικά μη-περιοδικά φαινόμενα με περιορισμένη χρήση μνήμης. Επίσης, η ακρίβεια της λύσης είναι αυτή με την οποία λύνεται η ροή καθώς δεν γίνεται προσέγγιση τιμών αλλά λύνονται ξανά οι εξισώσεις της ροής. Κατά τη μέθοδο αυτή, καθώς λύνονται οι εξισώσεις της ροής, δεν αποθηκεύονται όλες οι λύσεις \vec{U} , παρά κάποια στιγμιότυπα σε ορισμένα χρονικά βήματα που υποδεικνύονται από τους δείκτες μνήμης.

Για την εύρεση της παραγώγου $\left. \frac{\partial F}{\partial b_i} \right|_T$ με την επίλυση των συζυγών εξισώσεων για κάθε χρονικό βήμα που γίνεται πρὸς τα πίσω στον χρόνο χρειάζεται το διάνυσμα των \vec{U} σε εκείνο το βήμα. Αν έχει αποθηκευτεί για εκείνο το βήμα, τότε συνεχίζεται η επίλυση των συζυγών εξισώσεων για το χρονικά προηγούμενο. Αν το διάνυσμα \vec{U} δεν είναι αποθηκευμένο, τότε επιλύονται οι εξισώσεις ροής από το τελευταίο αποθηκευμένο χρονικό βήμα μέχρι το τρέχον για να βρεθεί. Υπάρχει μια μοναδική κατανομή

των δεικτών μνήμης ανά αριθμό χρονικών βημάτων και checkpoint (δεικτών μνήμης) η οποία είναι βέλτιστη [13]. Αυτή είναι η λεγόμενη διωνυμική κατανομή την οποία πρότεινε ο Griewank [13]. Για γνωστό αριθμό χρονικών βημάτων και δεικτών μνήμης, λύνονται οι εξισώσεις ροής και αποθηκεύονται στα προκαθορισμένα χρονικά βήματα όπως υποδεικνύεται από τα checkpoints.

Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος που για άγνωστο αριθμό βημάτων αλλά δεδομένο αριθμό checkpoint ανακατανέμει τους δείκτες μνήμης (ή checkpoint) ώστε για τον εκάστοτε συνδιασμό χρονικών βημάτων - checkpoint να προκύπτει η βέλτιστη κατανομή, όπως διατυπώθηκε από τον Griewank. Βασιζόμενοι σε αυτόν τον αλγόριθμο οι Q.Wang και P.Moin σχεδίασαν έναν αλγόριθμο που ανακατανέμει τα checkpoints ώστε η κατανομή να είναι διωνυμική [14]. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, ο αλγόριθμος αυτός γράφτηκε σε κώδικα Fortran77 και προσαρμόστηκε έτσι ώστε να συνεργάζεται με τον κώδικα επίλυσης του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος.

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η βελτιστοποίηση αεροδυναμικής μορφής σε χρονικά μεταβαλλόμενη ροή με χρήση συζυγών τεχνικών και εφαρμογή των δεικτών μνήμης (checkpointing). Αρχικά, γίνεται βελτιστοποίηση χωρίς checkpoints ενώ στη συνέχεια με checkpoints και εξετάζεται η αποτελεσματικότητά τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το ευθύ πρόβλημα και ο τρόπος επίλυσής του. Το ευθύ πρόβλημα λύνεται κατά την αρχική χρονοπροέλαση αλλά και ενδιάμεσα κατά τη λύση των συζυγών εξισώσεων για την ανάκτηση των στιγμιοτύπων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος και τα σχετικά αριθμητικά σχήματα. Με αυτή τη συζυγή μέθοδο υπολογίζονται και αθροίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας ($\frac{\partial F}{\partial b_i}$) σε κάθε χρονικό βήμα.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται η μέθοδος των δεικτών μνήμης και δίνονται παραδείγματα κατανόησης της λειτουργίας τους.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση και σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 2

Το ευθύ πρόβλημα και η επίλυσή του

2.1 Μοντέλο ροής: Εξισώσεις Euler

Οι εξισώσεις ροής διέπουν το πεδίο ροής που εξετάζεται και λύνοντάς τις αριθμητικά προκύπτουν οι τιμές των ροϊκών μεταβλητών σε όλους τους κόμβους του πλέγματος. Η επίλυσή τους αποτελεί το ονομαζόμενο ευθύ (direct) ή πρωτεύον (primal) πρόβλημα. Στις εφαρμογές που εξετάζονται σε αυτήν την εργασία, το ρευστό είναι συμπιεστό, η ροή είναι διδιάστατη (2Δ) και χρονικά μεταβαλλόμενη και χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Euler ως το μοντέλο ροής μίας και η ροή θεωρείται ατριβής. Σε συντηρητική γραφή, αυτές είναι οι:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_k(U)}{\partial x_k} = 0 \quad (2.1)$$

όπου ο δείκτης $k = 1, 2$ δηλώνει τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} είναι

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ενώ, επίσης,

$$\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1 v_1 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho h_t v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

και

$$\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_2 v_2 + p \\ \rho h_t v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

όπου v_k οι συνιστώσες της ταχύτητας ανά καρτεσιανή κατεύθυνση, ρ η στατική πυκνότητα, p η στατική πίεση, E η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και h_t η ολική ενθαλπία.

Το σύστημα κλείνει με την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων που δίνεται από τη σχέση

$$p = R_g \rho T \quad (2.5)$$

όπου R_g είναι η σταθερά του αερίου.

Η πίεση p συνδέεται με τις υπόλοιπες ποσότητες του διανύσματος ροής \vec{U} μέσω της

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho E - \frac{1}{2\rho} ((\rho v_1)^2 + (\rho v_2)^2) \right] = (\gamma - 1) \left[U_4 - \frac{U_2^2 + U_3^2}{2U_1} \right] \quad (2.6)$$

όπου γ είναι ο λόγος ειδικών θερμοχωρητικότητων. Τέλος, η ολική ενθαλπία h_t δίνεται από τη σχέση

$$h_t = \frac{\gamma \rho E}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(\rho v_1)^2 + (\rho v_2)^2}{\rho^2} = \frac{\gamma U_4}{U_1} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U_2^2 + U_3^2}{U_1^2} \quad (2.7)$$

2.2 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων Euler

Κατά τη συνήθη πρακτική στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (Computational Fluid Dynamics), της επίλυσης του προβλήματος ροής προηγείται η αδιαστατοποίηση των μεγεθών ροής, άρα και των εξισώσεων ροής (μερικών διαφορικών εξισώσεων) που διέπουν το πρόβλημα. Αρχικά αδιαστατοποιούνται οι συντεταγμένες του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς x_k , οι αντίστοιχες ταχύτητες u_k , η πυκνότητα ρ και ο χρόνος t ως εξής

$$y = \frac{x_k}{L_{ref}}, \quad \check{u}_k = \frac{u_k}{U_{ref}}, \quad \check{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \quad \check{t} = \frac{t}{t_{ref}} \quad (2.8)$$

όπου L_{ref} το μήκος αναφοράς, U_{ref} η ταχύτητα αναφοράς, ρ_{ref} η πυκνότητα αναφοράς και t_{ref} ο χρόνος αναφοράς.

Η καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων γίνεται

$$\check{p} = \check{R}_g \check{T} \check{\rho} \quad (2.9)$$

όπου πλέον, η αδιαστατοποιημένη σταθερά του αερίου \check{R}_g είναι η

$$\check{R}_g = \gamma - 1 = \frac{R_g}{c_v} \quad (2.10)$$

και η αδιαστατοποιημένη πίεση \check{p} είναι

$$\check{p} = \frac{p}{\rho_{ref} U_{ref}^2} \quad (2.11)$$

Οι αδιάστατες ποσότητες σημειώνονται με το σύμβολο $\check{\cdot}$. Η ολική ενέργεια αδιαστατοποιείται με βάση τα ίδια μεγέθη αναφοράς ως εξής

$$\check{E} = \frac{E}{\rho_{ref} U_{ref}^2} \quad (2.12)$$

Ο τρόπος αυτός αδιαστατοποίησης είναι βολικός γιατί οι αδιάστατες εξισώσεις Euler είναι ακριβώς ίδιες με τις διαστατές. Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις Euler στην αδιάστατη μορφή τους γράφονται ως ($k = 1, 2$ για 2Δ προβλήματα)

• Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \check{U}_1}{\partial \check{t}} + \frac{\partial f_{1k}(\vec{U})}{\partial \check{x}_k} = 0 \quad (2.13)$$

• Εξισώσεις ορμής

κατά x_1 :

$$\frac{\partial \check{U}_2}{\partial \check{t}} + \frac{\partial f_{2k}(\vec{U})}{\partial \check{x}_k} = 0 \quad (2.14)$$

κατά x_2 :

$$\frac{\partial \check{U}_3}{\partial \check{t}} + \frac{\partial f_{3k}(\vec{U})}{\partial \check{x}_k} = 0 \quad (2.15)$$

• Εξίσωση ενέργειας

$$\frac{\partial \check{U}_4}{\partial \check{t}} + \frac{\partial f_{4k}(\vec{U})}{\partial \check{x}_k} = 0 \quad (2.16)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν την ίδια ακριβώς μορφή με τις διαστατές, οπότε για λόγους ευκολίας θα χρησιμοποιείται πλέον ο συμβολισμός των αρχικών εξισώσεων, χωρίς το σύμβολο $\check{}$, αλλά οι εξισώσεις που θα επιλύονται θα είναι οι αδιαστατοποιημένες.

2.3 Διακριτοποίηση του ευθέος προβλήματος - Οριακές συνθήκες

2.3.1 Διακριτοποίηση του χωρίου ροής

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν τη διπλωματική εργασία για την επίλυση της ροής έχει αναπτυχθεί στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ [3, 4] και χρησιμοποιεί μη-δομημένο πλέγμα αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία. Οι **κυψέλες ελέγχου** ορίζονται με κέντρο κάθε κόμβο P του πλέγματος, πρόκειται δηλαδή για **κεντροκομβική διατύπωση** πεπερασμένων όγκων (**vertex centered finite volume formulation**)(σχήμα 2.1). Οι κυψέλες ελέγχου (σχήμα 2.1) δημιουργούνται φέροντας τις διαμέσους στα τρίγωνα και φυσικά δεν αλληλοκαλύπτονται. Διακριτοποιώντας τις εξισώσεις ροής σε όλους τους όγκους αναφοράς που ορίζει το πλέγμα, προκύπτει σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τα μεγέθη της ροής πάνω στους κόμβους. Επιλύοντας επαναληπτικά αυτό το σύστημα, υπολογίζονται οι κομβικές τιμές των μεταβλητών της ροής για κάθε χρονική στιγμή και έτσι περιγράφεται χωρικά και χρονικά το πεδίο ροής.

2.3.2 Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων σε χρονικά μεταβαλλόμενη ροή

Οι εξισώσεις ροής κατά Euler σε αδιάστατη μορφή γράφονται διανυσματικά ως

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_k(\vec{U})}{\partial x_k} = 0 \quad (2.17)$$

με $k = 1, 2$.

Ολοκληρώνοντας την 2.18 στην κυψέλη ελέγχου ενός τυχαίου εσωτερικού κόμβου P του χωρίου ροής προκύπτει:

$$\int_{cell_P} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_k(\vec{U})}{\partial x_k} \right] dx_1 dx_2 = 0 \quad (2.18)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss και θεωρώντας ότι $\int_{cell_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dx_1 dx_2 = \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P \Omega_P$, όπου Ω_P το εμβαδόν της κυψέλης του P , προκύπτει

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P \Omega_P + \int_{\Pi_P} \vec{f}_k(\vec{U}) \hat{n}_k dS = 0 \quad (2.19)$$

με \hat{n}_k οι συνιστώσες $k = 1, 2$ των κάθετων μοναδιαίων διανυσμάτων στα επιμέρους στοιχειώδη ευθύγραμμα τμήματα που συνθέτουν την περίμετρο της κυψέλης (Π_P) και κατευθύνονται προς το εξωτερικό αυτής ενώ dS είναι το μήκος καθενός τέτοιου ευθύγραμμου τμήματος.

Συμβολίζεται με $\vec{H}(H_1, H_2, H_3, H_4)$ η μη-συνεκτική ροή (μάζας, ορμής ή ενέργειας) ανά μονάδα μήκους που διέρχεται από κάθε πεπερασμένο τμήμα ΔS του ορίου του πεπερασμένου όγκου. Για κάθε εξίσωση ($m = 1, 4$), είναι

$$\vec{H}_m = f_{m1}(\vec{U}) \hat{n}_1 + f_{m2}(\vec{U}) \hat{n}_2 \quad (2.20)$$

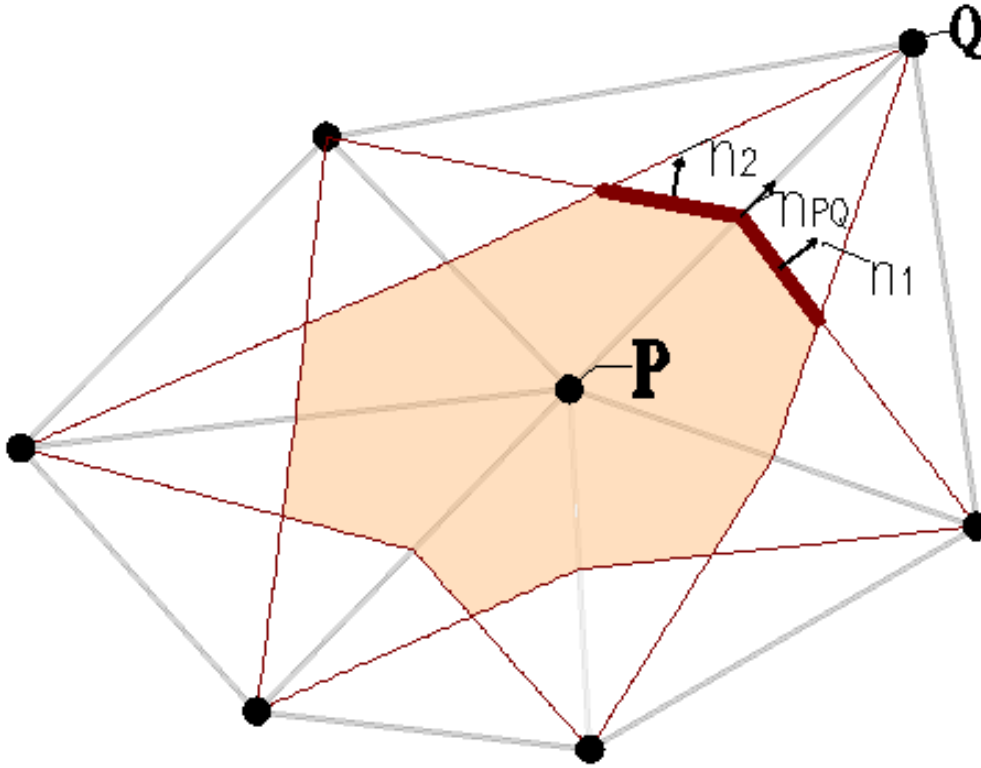
Τότε, η 2.19 γράφεται και ως

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P \Omega_P + \sum_{nei=1}^{Nei} \vec{H}_m \Delta S|_{nei} = 0 \quad (2.21)$$

Με nei συμβολίζεται ο δείκτης των ευθύγραμμων τμημάτων του συνόρου πάνω στο οποίο υπολογίζονται τα διανύσματα της ροής ανά μήκος \vec{H} , ενώ Nei είναι το πλήθος των κόμβων που γειτνιάζουν με τον κεντρικό κόμβο P . Το εκάστοτε μήκος $\Delta S|_{nei}$ είναι το κοινό όριο των κυψελών ελέγχου του κόμβου P και του εκάστοτε γειτονικού Q , όπως φαίνεται με έντονη γραμμή στο σχήμα 2.1.

2.3.3 Υπολογισμός των διανυσμάτων ροής

Κάθε πεπερασμένη ροή \vec{H}_m ($m = 1, 2, 3, 4$) που διασχίζει κάθετα ένα τμήμα ΔS υπολογίζεται συναρτήσει των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών στον εκάστοτε κόμβο P και στον αντίστοιχο γειτονικό κόμβο Q . Επίσης, για το τμήμα του περιγράμματος της κυψέλης που αντιστοιχεί στην ακμή PQ υπολογίζεται και ένα διάνυσμα \vec{n}_{PQ} το οποίο είναι κάθετο στο τμήμα αυτό και αποτελεί το άθροισμα των διανυσμάτων \vec{n}_1 και \vec{n}_2 (σχήμα 2.1). Αυτά τα διανύσματα είναι κάθετα στα δύο ευθύγραμμα τμήματα που συνθέτουν το υπόψη τμήμα της ακμής και είναι τα σύνορα των κυψελών με κέντρα και τα P και Q .



Σχήμα 2.1: Κυψέλη ελέγχου με κέντρο τον κόμβο P . Με Q συμβολίζονται, γενικά, οι γειτονικοί κόμβοι του P .

Τα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν το σύνορο φαίνονται στο σχήμα 2.1 με έντονη μαύρη γραμμή. Τα παραπάνω διανύσματα έχουν μήκος ίσο με το μήκος του ενδιάμεσου συνόρου που τους αντιστοιχεί ως

$$\vec{n}_{PQ} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 \quad (2.22)$$

$$\vec{H}_m(\vec{U}_{PQ}, \vec{n}_{PQ}) = \sum_{k=1}^2 f_{mk}(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R) n_{PQ_k} \quad (2.23)$$

όπου τα διανύσματα $\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R$ εκφράζουν τις τιμές των ποσοτήτων ροής εκατέρωθεν του συνόρου της ακμής PQ . Οι εκθέτες L (Left), R (Right) κατά σύμβαση αναφέρονται στις αριστερά και δεξιά καταστάσεις του ενδιάμεσου συνόρου.

Για τον υπολογισμό του διανύσματος \vec{H} χρησιμοποιείται το σχήμα Roe 2.24.

Σχήμα Roe

Για το ενδιαμέσο σύνορο των κυψελών του P και του Q ισχύει ($m=1, 2, 3, 4$)

$$\vec{H}_m \Delta S = \frac{1}{2} \left[H_m^R(\vec{U}^R, \vec{n}_{PQ}) + H_m^L(\vec{U}^L, \vec{n}_{PQ}) \right] - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{PQ}| \left(\vec{U}^R - \vec{U}^L \right) \Big|_m \quad (2.24)$$

όπου το μητρώο $|\tilde{A}_{PQ}|$ είναι το μητρώο που προκύπτει από τις απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού μητρώου \underline{A} υπολογισμένου όμως με τις μέσες τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών κατά Roe. Τα $H_m^R(\vec{U}^R, \vec{n}_{PQ})$ και $H_m^L(\vec{U}^L, \vec{n}_{PQ})$ υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$H_m^L(\vec{U}^L, \vec{n}_{PQ}) = \underline{A}^L \vec{U}^L \Big|_m \quad (2.25)$$

$$H_m^R(\vec{U}^R, \vec{n}_{PQ}) = \underline{A}^R \vec{U}^R \Big|_m \quad (2.26)$$

όπου \underline{A}^P και \underline{A}^Q τα Ιακωβιανά μητρώα υπολογισμένα στους κόμβους P και Q αντίστοιχα. Οι τιμές των \vec{U}^L, \vec{U}^R υπολογίζονται με αναπτύγματα Taylor ως εξής

$$\vec{U}^L = \vec{U}_P + \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} \cdot \nabla \vec{U} \Big|_P \quad (2.27)$$

$$\vec{U}^R = \vec{U}_Q - \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} \cdot \nabla \vec{U} \Big|_Q \quad (2.28)$$

όπου οι κλίσεις $\nabla \vec{U} \Big|_Q$ και $\nabla \vec{U} \Big|_P$ υπολογίζονται με ανάπτυγμα Green-Gaess.

Σημειώνεται, ότι το διάνυσμα \vec{n}_{PQ} έχει μέτρο ίσο με το μήκος της προβολής των τμημάτων ΔS . Η φυσική σημασία του είναι το μήκος μέσα από το οποίο διέρχεται η ροή ανά μονάδα μήκους \vec{H} , με την οποία πολλαπλασιαζόμενο δίνει το συνολικό μέγεθος της ροής πάνω στο σύνορο των κυψελών με κέντρα τα P και Q .

Το ιακωβιανό μητρώο $\underline{A} = \frac{\partial \vec{f} \cdot \vec{n}}{\partial \vec{U}}$ γράφεται ως εξής (κατά στήλη)

$$\underline{A}[:, 1] = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1(\vec{v} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(v_1^2 + v_2^2)n_1 \\ v_2(\vec{v} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(v_1^2 + v_2^2)n_2 \\ \left[-h_t + \frac{\gamma-1}{2}(v_1^2 + v_2^2) \right] (\vec{v} \cdot \vec{n}) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\underline{A}[:, 2] = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)v_1n_1 \\ v_2n_1 - (\gamma-1)v_1n_2 \\ h_tn_1 - (\gamma-1)v_1(\vec{v} \cdot \vec{n}) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\underline{A}[:, 3] = \begin{pmatrix} n_2 \\ v_1n_2 - (\gamma-1)v_2n_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)v_2n_2 \\ h_tn_2 - (\gamma-1)v_2(\vec{v} \cdot \vec{n}) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$\underline{A}[:, 4] = \begin{pmatrix} 0 \\ (\gamma-1)n_1 \\ (\gamma-1)n_2 \\ \gamma(\vec{v} \cdot \vec{n}) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Οι μη-συντηρητικές μεταβλητές στο σύνορο PQ υπολογισμένες κατά Roe είναι

$$\vec{U}_{PQ} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Ο τέταρτος όρος αυτού του διανύσματος (\tilde{p}) υπολογίζεται από την τιμή της ενθαλπίας κατά Roe. Συγκεκριμένα, για τα $\tilde{\rho}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, h_t$ (ας συμβολίζονται με $\tilde{\Phi}$), η μέση τιμή $\tilde{\Phi}$ κατά Roe στο ενδιάμεσο σύνορο των κυψελών με κέντρα τα P και Q είναι

$$\tilde{\Phi} = \frac{\sqrt{\rho^L U^L} + \sqrt{\rho^R U^R}}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \quad (2.34)$$

Η τιμή της πίεσης προκύπτει από τη μέση τιμή κατά Roe της ολικής ενθαλπίας επιλύοντας την παρακάτω εξίσωση ως προς \tilde{p}

$$\tilde{h}_t = \frac{\gamma \tilde{p}}{(\gamma-1)\tilde{\rho}} + \frac{1}{2}(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2) \quad (2.35)$$

2.3.4 Αρχικές και οριακές συνθήκες για το ευθύ πρόβλημα

Η εξίσωση 2.19 επιλύεται από το ένα χρονικό βήμα στο επόμενο με τη μέθοδο Runge-Kutta όπως παρουσιάζεται παρακάτω. Για να ξεκινήσει όμως η επίλυση απαιτούνται οι αρχικές τιμές του \vec{U} σε όλο το πεδίο. Για την εύρεση αυτών των τιμών λύνεται ένα χρονικά μόνιμο πρόβλημα με τη μέθοδο των ψευδοχρονικών βημάτων η οποία, για τις εξισώσεις χρονικά μόνιμης ροής κατά Euler, γράφεται

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}\right)_P \Omega_P + \int_{\Pi_P} \vec{f}_k(\vec{U}) \hat{n}_k dS = 0 \quad (2.36)$$

όπου τ ο ψευδοχρόνος.

Ως οριακές συνθήκες για την παραπάνω εξίσωση δίνονται στο επάπειρο σύνορο γύρω από την αεροτομή η ολική πίεση (p_t), η γωνία της ροής (a_∞) και η ταχύτητα της ροής (\vec{v}). Στα τοιχώματα επικρατεί η συνθήκη μη-εισχώρησης, δηλαδή οι ταχύτητες v_1, v_2 είναι μηδενικές εκεί.

Οι χρονικές οριακές συνθήκες, οι οποίες επιβάλλονται για χρονικά μεταβαλλόμενη ροή στα όρια του πεδίου ροής, αφορούν το εκάστοτε μέγεθος της ροής στο οποίο οφείλεται η μη-μονιμότητά της. Θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι η ολική πίεση, η γωνία της ροής ή η ολική θερμοκρασία. Στις εφαρμογές που εξετάζονται σε αυτή την εργασία, είναι η γωνία της ροής (a_∞). Η μεταβολή της γωνίας a_∞ επηρεάζει τα μεγέθη της ροής στο μέσο του πεδίου ροής κάποιες χρονικές στιγμές αφότου αλλάξει η a_∞ .

2.4 Αριθμητική επίλυση - Η μέθοδος Runge-Kutta τρίτης τάξης

Για την επίλυση των χρονικά μεταβαλλόμενων ροών, δηλαδή του συστήματος των εξισώσεων 2.21, το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών χρησιμοποίησε μέχρι τώρα διττό χρονικό βήμα (dual time stepping). Δηλαδή το σύστημα 2.21 επαναδιατυπώνεται εισάγοντας έναν επιπλέον ψευδοχρονικό όρο. Έτσι, έπρεπε να λυθεί η

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}\right)_P \Omega_P + \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)_P \Omega_P \int_{\Pi_P} \vec{f}_k(\vec{U}) \hat{n}_k dS = 0 \quad (2.37)$$

όπου t ο αληθινός χρόνος και τ ο ψευδοχρόνος.

Για δεύτερης τάξης ακρίβειας, ο χρονικός όρος διακριτοποιείται ως

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \Big|^{n+1} = \frac{-3\vec{U}^{n+1} + 4\vec{U}^n - \vec{U}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.38)$$

Ωστόσο, η διακριτοποίηση αυτή απαιτεί την αποθήκευση του διανύσματος των μεταβλητών της ροής \vec{U} των δύο προηγούμενων χρονικών βημάτων. Αυτό όπως θα φανεί και στο σχετικό κεφάλαιο δεν είναι επιθυμητό κατά τη βελτιστοποίηση με χρήση checkpoints καθώς αυτή 'μπορεί' να χρησιμοποιεί μόνο το διάνυσμα \vec{U} του προηγούμενου χρονικού βήματος.

Αντί λοιπόν της χρήσης διττού χρονικού βήματος, η εξίσωση 2.21 θα λυθεί με τη μέθοδο Runge-Kutta τρίτης τάξης [11, 12]. Ακολουθώντας τη γενική λογική της κάθε μεθόδου τύπου Runge-Kutta, το διάνυσμα των μεταβλητών της ροής \vec{U} στη νέα χρονική στιγμή $n+1$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t (w_1 \vec{k}_1 + w_2 \vec{k}_2 + w_3 \vec{k}_3) \quad (2.39)$$

ή

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = (w_1 \vec{k}_1 + w_2 \vec{k}_2 + w_3 \vec{k}_3) \quad (2.40)$$

όπου

$$\vec{k}_1 = \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) \quad (2.41)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{R}(t^n + a_2 \Delta t, \vec{U}^n + \Delta t b_{21} \vec{k}_1) \quad (2.42)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{R}(t^n + a_3 \Delta t, \vec{U}^n + \Delta t (b_{31} \vec{k}_1 + b_{32} \vec{k}_2)) \quad (2.43)$$

όπου \vec{R} είναι το χρονικά μη-μόνιμο υπόλοιπο της ροής (με "μείον", αφού μεταφέρθηκε στο δεξί μέλος τς εξίσωσης).

Η υλοποίηση της μεθόδου Runge-Kutta, στη γενική μορφή των εξισώσεων (2.40) έως (2.43) απαιτεί τον υπολογισμό των σταθερών ($w_1, w_2, w_3, a_1, a_2, b_{21}, b_{31}, b_{32}$). Αυτό θα γίνει στη συνέχεια με γνώμονα την ακρίβεια της μεθόδου. Λόγω της 2.19 είναι

$$\vec{R}(t^n, U^n) = \frac{-\sum_{nei=1}^{Nei} \vec{H} \Delta S}{\Omega_P} \quad (2.44)$$

και έτσι είναι

$$\vec{R} = \vec{R}(t^n, U^n) \quad (2.45)$$

Το γενικό ανάπτυγμα κατά Taylor δεύτερης τάξης ακρίβειας της \vec{R} είναι

$$\vec{R}(t+a, \vec{U}+b) = \vec{R} + a \vec{R}_t + b \vec{R}_U + \frac{1}{2} (a^2 \vec{R}_{tt} + 2ab \vec{R}_{tU} + b^2 \vec{R}_{UU}) \quad (2.46)$$

όπου \vec{R}_t και \vec{R}_U οι μερικές παράγωγοι της R αντίστοιχα ως προς τον χρόνο t και των μεταβλητών της ροής που εκφράζονται από το διάνυσμα \vec{U} . Με \vec{R}_{tt} , \vec{R}_{UU} , \vec{R}_{tU} συμβολίζονται αντίστοιχα και οι δεύτερες παράγωγοι. Οι τιμές των \vec{k}_i προκύπτουν από αυτό το ανάπτυγμα. Έτσι, είναι

$$\vec{k}_1 = \vec{R}(t^n, U^n) = \vec{R}^n \quad (2.47)$$

Το διάνυσμα των μεταβλητών της ροής \vec{U}^n είναι γνωστό και κατ' επέκταση η $\vec{R}(t^n, U^n)$. Έτσι, το σφάλμα αποκοπής για το \vec{k}_1 είναι μηδενικό.

Είναι

$$\vec{k}_2 = \vec{R} + \Delta t(a_2 \vec{R}_t + b_{21} \vec{k}_1 \vec{R}_U) + \frac{\Delta t^2}{2}(a_2^2 \vec{R}_{tt} + 2a_2 b_{21} \vec{k}_1 \vec{R}_{tU} + b_{21}^2 \vec{k}_1^2 \vec{R}_{UU}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.48)$$

ή

$$\vec{k}_2 = \vec{R} + \Delta t(a_2 \vec{R}_t + b_{21} \vec{R} \vec{R}_U) + \frac{\Delta t^2}{2}(a_2^2 \vec{R}_{tt} + 2a_2 b_{21} \vec{R} \vec{R}_{tU} + b_{21}^2 \vec{R}^2 \vec{R}_{UU}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.49)$$

Ο υπογραμμισμένος όρος έχει σφάλμα αποκοπής τάξης $\mathcal{O}(h^2)$ που είναι μεγαλύτερο του όρου που πολλαπλασιάζεται με $\frac{h^2}{2}$. Επομένως, αυτό είναι το σφάλμα αποκοπής για το \vec{k}_2 .

$$\begin{aligned} \vec{k}_3 = \vec{R} + \Delta t(a_3 \vec{R}_t + (b_{31} \vec{R} + b_{32} \vec{R}_2) \vec{R}_U) + \frac{\Delta t^2}{2}(a_3^2 \vec{R}_{tt} + \mathcal{O}(h^2)) \\ + 2a_3(b_{31} \vec{R} + b_{32} \vec{k}_2) \vec{R}_{tU} + (b_{31} \vec{R} + b_{32} \vec{k}_2)^2 \vec{R}_{UU} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Το \vec{k}_2 στην εξίσωση 2.50 μπορεί να αντικατασταθεί χωρίς ολόκληρη την έκφρασή του αλλά με σφάλμα αποκοπής υπό την προϋπόθεση ότι ο όρος του αθροίσματος μέσα στον οποίο αντικαθίσταται διατηρεί συνολικό σφάλμα της τάξης $\mathcal{O}(h^3)$. Έτσι, η εξίσωση 2.50 γίνεται:

$$\begin{aligned} \vec{k}_3 = \vec{R} + \Delta t(a_3 \vec{R}_t + b_{31} \vec{R} \vec{R}_U) + \frac{\Delta t^2}{2}(a_3^2 \vec{R}_{tt} + 2a_3 b_{31} \vec{R} \vec{R}_{tU} + b_{31}^2 \vec{R}^2 \vec{R}_{UU}) \\ + \Delta t b_{32} \vec{R}_U (\vec{R} + \Delta t(a_2 \vec{R}_t + b_{21} \vec{R} \vec{R}_U) + \mathcal{O}(h^2)) \\ + \frac{h^2}{2}(2a_3 b_{32} \vec{R}_{tU} + 2b_{31} \vec{R} b_{32} \vec{R}_{UU}) (\vec{R} + \mathcal{O}(h)) \\ + \frac{\Delta t^2}{2} b_{32}^2 \vec{R}_{UU} (\vec{R} + \mathcal{O}(h))^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

ή

$$\begin{aligned} \vec{k}_3 = \vec{R} + \Delta t(a_3 \vec{R}_t + (b_{31} + b_{32}) \vec{R} \vec{R}_U) \\ + \frac{\Delta t^2}{2}(a_3^2 \vec{R}_{tt} + 2a_3(b_{31} + b_{32}) \vec{R} \vec{R}_{tU}) + \Delta t^2(a_2 b_{32} \vec{R}_t \vec{R}_U + b_{32} b_{31} \vec{R} \vec{R}_U^2) \\ + \frac{\Delta t^2}{2}(b_{31} + b_{32})^2 \vec{R}^2 \vec{R}_{UU} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Αντικαθιστώντας τα \vec{k}_i στην εξίσωση 2.40 και βγάζοντας κοινούς παράγοντες προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} &= \Delta t R && (w_1 + w_2 + w_3) \\
&+ \Delta t^2 R_t && (w_3 a_3 + w_2 a_2) \\
&+ \Delta t^2 R R_U && (w_3 (b_{32} + b_{31}) + w_2 b_{21}) \\
&+ \frac{\Delta t^3}{2} R_{tt} && (w_3 a_3^2 + w_2 a_2^2) \\
&+ \frac{\Delta t^3}{2} R R_{tU} && 2(w_3 a_3 (b_{32} + b_{31}) + w_2 a_2 b_{21}) \\
&+ \frac{\Delta t^3}{2} R R R_{UU} && (w_3 (b_{32} + b_{31})^2 + w_2 b_{21}^2) \\
&+ \frac{\Delta t^3}{2} R_t R_U && 2(w_3 a_2 b_{32}) \\
&+ \frac{\Delta t^3}{2} R R_t R_U && 2(w_3 b_{32} b_{21})
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Το ανάπτυγμα *Taylor* της $\vec{U}(t + \Delta t) = \vec{U}(t^{n+1})$ γράφεται:

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \frac{\partial \vec{U}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{U}^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \vec{U}^n}{\partial t^3} \tag{2.54}$$

Επειδή ορίστηκε

$$R(t^n, \vec{U}^n) = - \frac{\sum_{nei=1}^{N_{ei}} \vec{H} \Delta S|_{nei}}{\Omega_P} = \vec{U}^{n'} \tag{2.55}$$

η εξίσωση 2.54 γράφεται:

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \vec{R}'(t^n, \vec{U}^n) + \frac{\Delta t^3}{6} \vec{R}''(t^n, \vec{U}^n) \tag{2.56}$$

ή

$$\begin{aligned}
\vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + \Delta t \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) + \frac{\Delta t^2}{2} (\vec{R}_t + \vec{R}_U \vec{R}) + \\
&\frac{\Delta t^3}{6} (\vec{R}_{tt} + 2\vec{R} \vec{R}_{tU} + \vec{R} \vec{R} \vec{R}_{UU} + \vec{R}_t \vec{R}_U + \vec{R} \vec{R}_U \vec{R}_U)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

αφού

$$\vec{R}'(t^n, \vec{U}^n) = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \vec{R} \quad (2.58)$$

Οι όροι των αναπτυγμάτων των εξισώσεων 2.39 και 2.57 πρέπει να είναι ίσοι. Έτσι, προκύπτει το παρακάτω σύστημα

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0 \quad (2.59)$$

$$w_3 a_3 + w_2 a_2 = \frac{1}{2} \quad (2.60)$$

$$+ w_3 (b_{31} + b_{32}) + w_2 b_{21} = \frac{1}{2} \quad (2.61)$$

$$w_3 a_3^2 + w_2 a_2^2 = \frac{1}{3} \quad (2.62)$$

$$w_3 a_3 (b_{31} + b_{32}) + w_2 a_2 b_{21} = \frac{1}{3} \quad (2.63)$$

$$w_3 (b_{31} + b_{32})^2 + w_2 b_{21}^2 = \frac{1}{3} \quad (2.64)$$

$$w_3 a_2 b_{32} = \frac{1}{6} \quad (2.65)$$

$$w_3 b_{32} b_{31} = \frac{1}{6} \quad (2.66)$$

Ένας συνδιασμός που ικανοποιεί το παραπάνω σύστημα είναι

| Τιμές | Επαλήθευση Εξισώσεων |
|------------------------|--|
| $w_1 = \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$ |
| $w_2 = \frac{4}{6}$ | $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ |
| $w_3 = \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6} \cdot (\frac{1}{2} + 2) + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ |
| $a_2 = \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ |
| $a_3 = 1$ | $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (-1 + 2) + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ |
| $b_{21} = \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6} \cdot (-1 + 2)^2 + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ |
| $b_{31} = -1$ | $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{6}$ |
| $b_{32} = 2$ | $\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ |

Ένας άλλος πιθανός συνδιασμός είναι

| Τιμές | Επαλήθευση Εξισώσεων |
|-------------------------|---|
| $w_1 = \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$ |
| $w_2 = \frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ |
| $w_3 = \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ |
| $a_2 = \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$ |
| $a_3 = \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ |
| $b_{21} = \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right)^2 + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$ |
| $b_{31} = -\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ |
| $b_{32} = 1$ | $\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ |

Για τον τελευταίο συνδιασμό τιμών η μέθοδος Runge-Kutta είναι

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{4} \vec{k}_1 + \frac{2}{4} \vec{k}_2 + \frac{1}{4} \vec{k}_3 \quad (2.67)$$

όπου

$$\vec{k}_1 = \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) \quad (2.68)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{R}\left(t^n + \frac{2}{3}\Delta t, \vec{U}^n + \frac{2}{3}\Delta t \vec{k}_1\right) \quad (2.69)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{R}\left(t^n + \frac{2}{3}\Delta t, \vec{U}^n + \Delta t\left(-\frac{1}{3}\vec{k}_1 + \vec{k}_2\right)\right) \quad (2.70)$$

Θέτοντας

$$\vec{U}' = \vec{U}^n + \frac{2}{3}\Delta t \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) \quad (2.71)$$

είναι

$$\vec{k}_2 = \vec{R}(t^n + \frac{2}{3}\Delta t, \vec{U}')$$
 (2.72)

και θέτοντας

$$\vec{U}'' = \vec{U}^n - \Delta t \frac{1}{3}\vec{R}(t^n, \vec{U}^n) + \Delta t \vec{R}(t^n + \frac{2}{3}\Delta t, \vec{U}')$$
 (2.73)

είναι

$$\vec{k}_3 = \vec{R}(t^n + \frac{2}{3}\Delta t, \vec{U}'')$$
 (2.74)

Τελικά, η 2.75 γράφεται

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{4}\vec{R}(t^n, \vec{U}^n) + \frac{2}{4}\vec{R}(t^n + \frac{2}{3}\Delta t, \vec{U}') + \frac{1}{4}\vec{R}(t^n + \frac{2}{3}\Delta t, \vec{U}'')$$
 (2.75)

Ο υπολογισμός των \vec{U}' (σχέση 2.71) είναι το πρώτο βήμα πριν τον υπολογισμό των \vec{U}'' (σχέση 2.73) που είναι το δεύτερο. Στο τρίτο και τελευταίο υπολογίζονται οι τιμές των \vec{U}^{n+1} .

Λύνοντας την 2.40 ως προς \vec{U}' θέτοντας κατά την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων

$$\frac{\vec{U}' - \vec{U}^n}{\Delta t} = b_{21} \vec{R}(t^n, \vec{U}^n)$$
 (2.76)

υπολογίζεται το \vec{k}_2 ως

$$\vec{k}_2 = \vec{R}(t^n + a_2\Delta t, \vec{U}')$$
 (2.77)

όπου ο πίνακας \vec{U}' απαιτείται να αποθηκευτεί.

Λύνοντας την 2.40 ως προς U''

$$\frac{\vec{U}'' - \vec{U}^n}{\Delta t} = b_{31} \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) + b_{32} \vec{R}(t^n + a_2 \Delta t, \vec{U}') \quad (2.78)$$

υπολογίζεται το \vec{U}'' και αποθηκεύεται σε διαφορετική περιοχή της μνήμης.

Στη συνέχεια υπολογίζεται το \vec{k}_3 ως

$$\vec{k}_3 = \vec{R}(t^n + a_3 \Delta t, \vec{U}'') \quad (2.79)$$

Τελικά, η τελική τιμή \vec{U}^{n+1} υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = w_1 \vec{R}(t^n, \vec{U}^n) + \underbrace{w_2 \vec{R}(t^n + a_2 \Delta t, \vec{U}')} + w_3 \vec{R}(t^n + a_3 \Delta t, \vec{U}'') \quad (2.80)$$

για τον υπολογισμό της οποίας δεσμεύτηκε διπλή μνήμη μίας και (μέχρι το τελευταίο βήμα) έπρεπε να είναι αποθηκευμένα στη μνήμη τόσο το \vec{U}' όσο και το \vec{U}'' .

Γενικά οι εξισώσεις 2.59 ικανοποιούνται για άπειρους συνδιασμούς τιμών. Αν αντί οποιουδήποτε άλλου σχήματος, τεθεί $w_2 = 0$, τότε, στο βήμα που υπολογίστηκε το \vec{U}'' , αντί να δεσμευτεί νέα μνήμη για την αποθήκευσή του, σβήνεται το \vec{U}' (ως μη-χρήσιμο για τη συνέχεια) και καθώς γίνεται ο υπολογισμός, τη θέση του παίρνει το \vec{U}'' . Το \vec{U}' δεν θα ξαναχρειαστεί, αφού στον τελικό υπολογισμό των \vec{U}^{n+1} ο όρος με την αγκύλη από κάτω δεν χρειάζεται να υπολογιστεί λόγω του ότι $w_2 = 0$. Έτσι, υποδιπλασιάζεται η απαραίτητη μνήμη.

Σημειώνεται ότι όταν $w_2 = 0$, αθροίζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις των σχέσεων 2.59 και εξισώνοντάς τις με την πέμπτη εξίσωση, προκύπτει ότι $a_2 = a_3$. Όπως φαίνεται και από τον δεύτερο συνδιασμό τιμών που παρουσιάστηκε παραπάνω, δεν ισχύει το αντίθετο.

Το σχήμα που χρησιμοποιείται εδώ, γνωστό και ως σχήμα Nikitin-Dwight [11, 12] έχει τις εξής σταθερές

| | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| $w_1 = \frac{1}{4}$ | $w_2 = 0$ | $w_3 = \frac{3}{4}$ |
| $a_2 = \frac{2}{3}$ | $a_3 = \frac{2}{3}$ | |
| $b_{21} = \frac{2}{3}$ | $b_{31} = \frac{1}{3}$ | $b_{32} = \frac{1}{3}$ |

Τελικά, αυτό το σχήμα υιοθετείται για την επίλυση των εξισώσεων ροής και γράφεται

$$\frac{\vec{U}' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{2}{3}R(U^n) \quad (2.81)$$

$$\frac{\vec{U}'' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{3}\vec{R}(\vec{U}^n) + \frac{1}{3}\vec{R}(\vec{U}')$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{4}\vec{R}(\vec{U}^n) + \frac{3}{4}\vec{R}(\vec{U}'') \quad (2.82)$$

Στο τρίτο βήμα, οι δύο όροι που φαίνονται, είναι αυτοί που αντιστοιχούν στα $w_1 \vec{k}_1$ και $w_3 \vec{k}_3$, ενώ στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιείται ο ίδιος πίνακας για την αποθήκευση του \vec{U}' και στη συνέχεια του \vec{U}'' .

2.4.1 Ημιπεπλεγμένες εξισώσεις Runge-Kutta

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος του R.Dwight [12]. Σε καθεμιά από τις σχέσεις 2.81 προστίθεται ένας επιπλέον όρος χωρίς να αυξάνεται το σφάλμα αποκοπής για λόγους υπολογιστικής ευστάθειας. Ο όρος αυτός αποτελείται από έναν συντελεστή βαρύτητας γ , το Ιακωβιανό μητρώο και τη διαφορά μεταξύ του τρέχοντος και του προηγούμενου βήματος και δεν επηρεάζει την υπολογιστική ακρίβεια του σχήματος. Οι εξισώσεις 2.81 γίνονται:

$$\frac{\vec{U}' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{2}{3} \vec{R}(\vec{U}^n) + \gamma \underline{A}(\vec{U}' - \vec{U}^n) \quad (2.83)$$

$$\frac{\vec{U}'' - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{U}^n) + \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{U}') - \gamma \underline{A}(\vec{U}'' - \vec{U}^n)$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} = \frac{1}{4} R(\vec{U}^n) + \frac{3}{4} R(\vec{U}'') - \gamma \underline{A}(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n) \quad (2.84)$$

$$(2.85)$$

όπου το \vec{U}^{n+1} υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\vec{U}^{n+1} = \frac{3}{2}(\alpha \vec{U}' + (1 - \alpha) \vec{U}'') - \frac{1}{2} \vec{U}^n \quad (2.86)$$

και ισχύει ότι

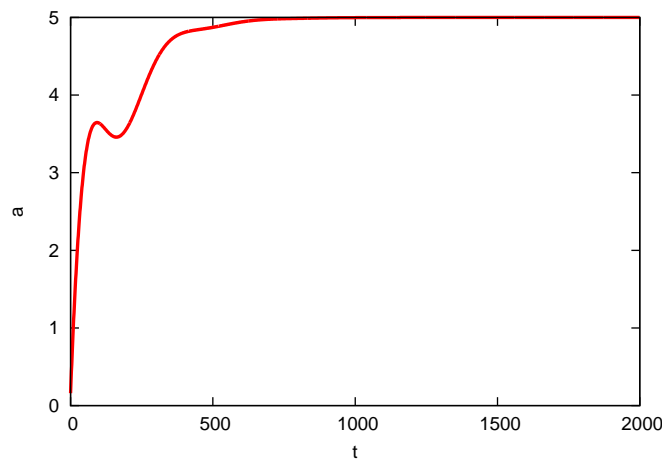
$$\vec{U}' = \vec{U}^n(t^n + \frac{2}{3}\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.87)$$

$$\vec{U}'' = \vec{U}^n(t^n + \frac{2}{3}\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^{n+1}(t^{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Αν δεν ίσχυε $a_2 = a_3$, τότε τα υπόλοιπα των παραπάνω διαφορών δεν θα ίσχυαν γιατί οι διαφορές των $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ θα έδιναν μεγαλύτερο υπόλοιπο. Ως αποτέλεσμα, οι πεπλεγμένοι όροι που χρησιμοποιούνται για την ευστάθεια της μεθόδου, θα μείωναν την ακρίβειά της.

Οι σταθερές γ και α που φαίνονται στις εξισώσεις 2.83, 2.86 λειτουργούν ως συντελεστές βαρύτητας και επιλέγονται αυθαίρετα. Για το γ , για να έχουν πρακτικά αποτελέσματα οι όροι ευστάθειας ([12]) προτείνονται τιμές κοντά στη μονάδα.



Σχήμα 2.2: Περιπτώσεις 1 & 2: Χρονική μεταβολή της γωνίας της επάπειρο ροής.

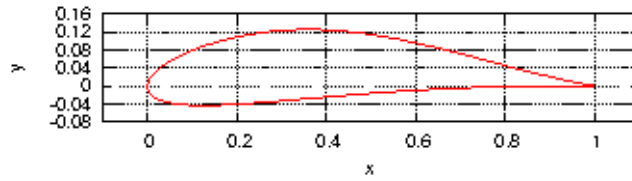
2.5 Αποτελέσματα επίλυσης του ευθέως προβλήματος

Έγινε χρήση του λογισμικού του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών με το οποίο λύθηκε το ίδιο ευθύ πρόβλημα για δύο διαφορετικές αεροτομές. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και γίνεται σύγκριση μεταξύ των δύο περιπτώσεων.

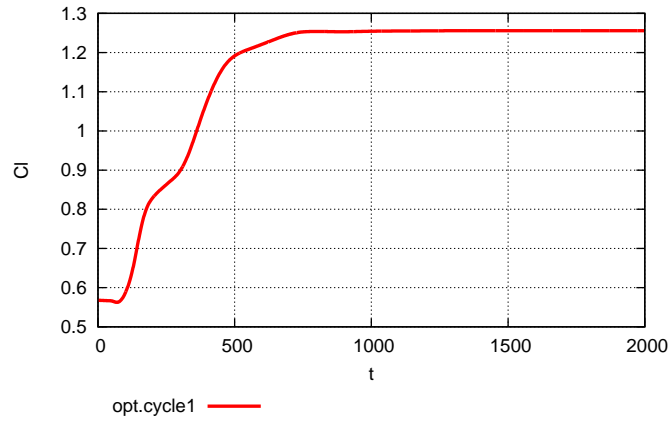
Το ευθύ πρόβλημα που λύνεται είναι μη-συνεκτική ροή πάνω σε αεροδυναμική μορφή με χρονικά μεταβαλλόμενη επάπειρο γωνία της ροής. Στην Περίπτωση 1, χρησιμοποιείται μία αεροτομή που προέκυψε μετά από βελτιστοποίηση με κριτήρια την αύξηση του συντελεστή άνωσης και μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας.

Στην Περίπτωση 2 χρησιμοποιείται το σώμα από το οποίο προέκυψε η παραπάνω αεροτομή πριν τη βελτιστοποίηση.

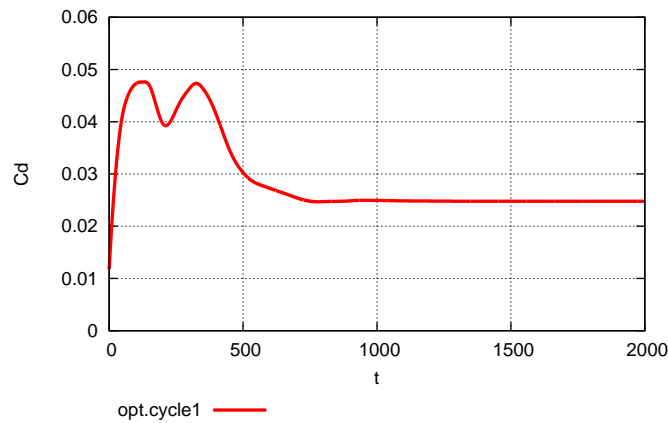
Σκοπός της παρουσίασης των αποτελεσμάτων είναι να φανεί η διαφορά στη μεταβολή του C_l και του C_d καθώς μεταβάλλεται η γωνία της ταχύτητας με το χρόνο και ότι οι τιμές τους τελικά σταθεροποιούνται με την πάροδο κάποιων δευτερολέπτων μετά τη σταθεροποίηση της γωνίας ταχύτητας (ως προς το οριζόντιο επίπεδο). Και στις δύο περιπτώσεις ο επάπειρο αριθμός Mach είναι 0,5. Στα παρακάτω σχήματα το συνολικό διάστημα που εξετάζεται είναι 50 δευτερόλεπτα σε 2000 χρονικά βήματα, δηλαδή κάθε χρονικό βήμα είναι 0,025 δευτερόλεπτα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5 η βελτιστοποιημένη αεροτομή είναι πιο ευαίσθητη στην μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης με αποτέλεσμα οι συντελεστές οπισθέλκουσας και άνωσης να παρουσιάζουν ελαφρώς μεγαλύτερες διακυμάνσεις από αυτούς του αρχικού σώματος.



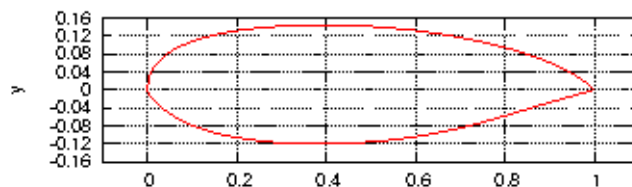
Σχήμα 2.3: Περίπτωση 1: Η αεροτομή.



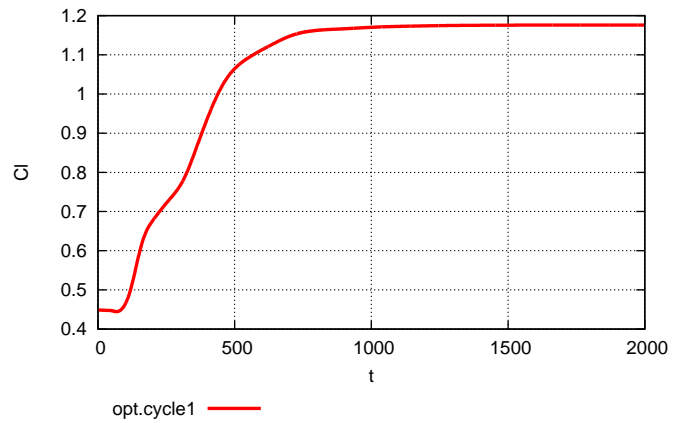
Σχήμα 2.4: Περίπτωση 1: Ο συντελεστής άνωσης της αεροτομής ανά χρονική στιγμή.



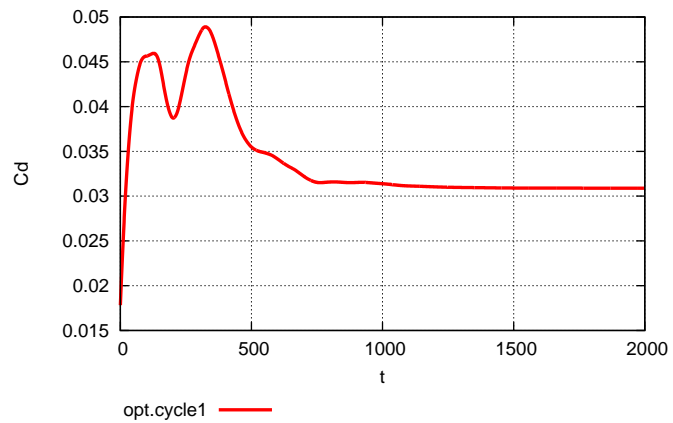
Σχήμα 2.5: Περίπτωση 1: Ο συντελεστής οπισθέλκουσας της αεροτομής ανά χρονική στιγμή.



Σχήμα 2.6: Περίπτωση 2: Η αεροτομή.



Σχήμα 2.7: Περίπτωση 2: Ο συντελεστής άνωσης της αεροτομής ανά χρονική στιγμή.



Σχήμα 2.8: Περίπτωση 2: Ο συντελεστής οπισθέλκουσας της αεροτομής ανά χρονική στιγμή.

Κεφάλαιο 3

Η συνεχής συζυγής μέθοδος

3.1 Εύρεση παραγώγων ευαισθησίας με συνεχή συζυγή μέθοδο

Η ροή συμπιεστού ρευστού περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler.

Η συνάρτηση-στόχος που τίθεται προς ελαχιστοποίηση είναι:

$$F = w_{Cl}(C_l - C_{l,tar})^2 + w_{Cd}C_d^2 \quad (3.1)$$

ή

$$F = w_{Cl}C_l^2 - 2w_{Cl}C_{l,tar}C_l + w_{Cl}C_{l,tar}^2 + w_{Cd}C_d^2 \quad (3.2)$$

$$F = w_{Cl} \left(\frac{\int_T \int_S p n_k r_k dS dt}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 l} \right)^2 - 2w_{Cl} C_{l,tar} \frac{\int_T \int_S p n_k r_k dS dt}{\frac{1}{2} \rho v_\infty} + w_{Cl} C_{l,tar}^2 + w_{Cd} \left(\frac{\int_T \int_S p n_k \kappa_k dS dt}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} \right)^2 \quad (3.3)$$

όπου n_k μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο τμήμα dS , r_k μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση αυτή της επάπειρο ροής κ_k διάνυσμα κάθετο στο r_k και l το μήκος της χορδής.

Για $C_1 = \frac{w_{Cl}}{(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 l)^2}$, $C_2 = \frac{-2w_{Cl} C_{l,tar}}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 l}$, $C_4 = \frac{w_{Cd}}{(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2)^2}$ και $C_3 = w_{Cl} C_{l,tar}^2$ η 3.3 γίνεται

$$F = C_1 \left(\int_T \int_S p n_k r_k dS dt \right)^2 + C_2 \int_T \int_S p n_k r_k dS dt + C_3 + C_4 \left(\int_T \int_S p n_k \kappa_k dS dt \right)^2 \quad (3.4)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις ροής, που είναι μηδενικές εξ' ορισμού, στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η επαυξημένη συνάρτηση:

$$F_{aug} = F + \int_T \int_{\Omega} \Psi_n R_n d\Omega dt \quad (3.5)$$

Η παράγωγος του όρου των εξισώσεων ροής είναι μηδενική εφόσον και οι εξισώσεις ροής είναι παντού και πάντα μηδενικές. Έτσι, θα είναι $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \frac{\delta F}{\delta b_i}$. Στη συνέχεια γίνεται η παραγωγή της επαυξημένης συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\delta R_n}{\delta b_i} d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} \Psi_n R_n \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_i} dt \quad (3.6)$$

Παρακάτω, χρησιμοποιούνται οι εξής ταυτότητες [2]:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial b_i} \quad (3.7)$$

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_i} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial x_l}{\partial b_i} \right) d\Omega \quad (3.8)$$

Οπότε η εξίσωση (3.6) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\delta R_n}{\delta b_i} d\Omega dt + \int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} d\Omega dt \\ &+ \int_T \int_{\Omega} \Psi_n R_n \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\delta x_l}{\delta b_i} \right) d\Omega dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\delta R_n}{\delta b_i} d\Omega dt + \int_T \int_S \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} \eta_l dS dt \\ &+ \int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} d\Omega dt - \int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} d\Omega dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ισοδύναμα

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega dt + \int_T \int_S \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} \eta_l dS dt \quad (3.11)$$

Σκοπός είναι η γραφή της (3.11) με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύπτουν τρεις ομάδες όρων. Η πρώτη θα μηδενίζεται και θα δίνει χωρικές και χρονικές οριακές συνθήκες και η δεύτερη θα αποτελεί τις συζυγείς εξισώσεις από τις οποίες θα προκύπτουν οι τιμές των συζυγών μεταβλητών. Η τρίτη ομάδα όρων θα αποτελείται από συζυγείς και μη συζυγείς μεταβλητές (των οποίων οι τιμές θα είναι γνωστές από την επίλυση του ευθέως) και θα δίνει την τιμή της παραγώγου. Είναι

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \int_\Omega \Psi_n \left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial t \partial b_i} + \frac{\partial^2 f_{nk}}{\partial x_k \partial b_i} \right) d\Omega dt + \int_T \int_S \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS dt \quad (3.12)$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial^2 U_n}{\partial t \partial b_i} d\Omega dt + \int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial^2 f_{nk}}{\partial x_k \partial b_i} d\Omega dt \\ &+ \int_T \int_S \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS dt \end{aligned} \quad (3.13)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} &= \frac{\delta F}{\delta b_i} + \int_\Omega [\Psi_n \frac{\partial U_n}{\partial b_i}]_0^T d\Omega - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} \frac{\partial U_n}{\partial b_i} d\Omega dt \\ &+ \underbrace{\int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial^2 f_{nk}}{\partial x_k \partial b_i} d\Omega dt}_I + \int_T \int_S \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_l dS dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss, το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$\int_T \int_\Omega \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega dt = - \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} d\Omega dt + \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS dt \quad (3.15)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους, γράφεται

$$- \int_T \int_\Omega \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} d\Omega dt = - \int_T \int_\Omega A_{nmk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} d\Omega dt \quad (3.16)$$

όπου A_{nmk} το Ιακωβιανό μητρώο των ατριβών ρών το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$A_{nmk} = \frac{\partial f_{nk}}{\partial U_m} \quad (3.17)$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.14 χωρίζεται σε δύο ολοκληρώματα, ένα πάνω στο στερεό όριο και ένα κατά μήκος των επ'άπειρον ορίων.

$$\begin{aligned} \int_T \int_S \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS dt &= \int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS dt \\ &+ \int_T \int_{S_{i,o}} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

Κατά μήκος των στερεών ορίων, η f_{nk} εξαρτάται από το b_i τόσο άμεσα όσο και έμμεσα (λόγω της μετακίνησης των κόμβων του στερεού ορίου x_l που προέκυψε από τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού b_m), έτσι η ολική ευαισθησία του f_{nk} δίνεται από την εξίσωση εξ. 3.7 για $\Phi = f_{nk}$.

Χρησιμοποιώντας την εξ. 3.7, το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξ. 3.18 εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS dt &= \int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\delta f_{nk}}{\delta b_i} n_k dS dt \\ &- \int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS dt \end{aligned} \quad (3.19)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της εξ.3.19 δίνει

$$\begin{aligned} \int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\delta f_{nk}}{\delta b_i} n_k dS dt &= \int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\delta (f_{nk} n_k dS)}{\delta b_i} dt \\ &- \int_T \int_{S_w} \Psi_n f_{nk} \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

Από τον ορισμό των ατριβών ρών, τις 2.3, 2.4 και λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη μη-εισχώρησης του στερεού τοιχώματος για την ταχύτητα, προκύπτει

$$\begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \\ f_{4k} \end{bmatrix} n_k|_{S_w} = \begin{bmatrix} \rho u_k n_k \\ \rho u_k n_k u_1 + p \delta_{k1} n_k \\ \rho u_k n_k u_2 + p \delta_{k2} n_k \\ u_k n_k (E + p) \end{bmatrix}_{S_w} = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_1 \\ p n_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{S_w} = p \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{S_w} \quad (3.21)$$

Συνεπώς,

$$\frac{\delta}{\delta b_m} (f_{ni} n_i|_{S_w}) = \frac{\delta p}{\delta b_m} N_n + p \frac{\delta N_n}{\delta b_m} \quad (3.22)$$

Χρησιμοποιώντας την εξ.3.22, η εξ. 3.20 γίνεται

$$\begin{aligned}
\int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\delta f_{n_k}}{\delta b_i} n_k dS dt &= \int_T \int_{S_w} \Psi_{k+1} n_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS dt + \int_T \int_{S_w} \Psi_{k+1} p \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt - \\
&= \int_T \int_{S_w} \Psi_n f_{n_k} \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt + \int_T \int_{S_w} \Psi_{k+1} n_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS dt + \\
&= \int_T \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_n f_{n_k}) \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Βάζοντας την εξ.3.14 στην 3.23 η τελική έκφραση για το ολοκλήρωμα I που φαίνεται στην εξ. 3.14 γίνεται

$$\begin{aligned}
\int_T \int_{\Omega} \Psi_n \frac{\partial R_n}{\partial b_i} d\Omega dt &= - \int_T \int_{\Omega} A_{nmk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial b_i} d\Omega dt + \int_T \int_{S_{i,o}} \Psi_n \frac{\partial f_{n_i}}{\partial b_i} n_k dS dt \quad (3.24) \\
&+ \int_T \int_{S_w} \Psi_{k+1} n_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS dt + \int_T \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_n f_{n_i}) \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt \\
&- \int_T \int_{S_w} \Psi_n \frac{\partial f_{n_i}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS dt
\end{aligned}$$

Η ολική παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, όπως αυτή δίνεται από την εξ.3.4, είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_i} &= C_1 \left(\int_T \int_S p n_k r_k dS dt \right)^2 \frac{\delta}{\delta b_i} \left(\left(\int_T \int_S p n_k r_k dS dt \right)^2 \right) + C_2 \int_T \int_S p n_k r_k dS dt \frac{\delta}{\delta b_i} \left(\int_T \int_S p n_k r_k dS dt \right) \\
&\quad (3.25) \\
&+ C_4 \left(\int_T \int_S p n_k \kappa_k dS dt \right)^2 \frac{\delta}{\delta b_i} \left(\left(\int_T \int_S p n_k \kappa_k dS dt \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_i} &= 2C_1 L^2 \int_T \int_S \frac{\delta p}{\delta b_i} n_k r_k dS dt + 2C_1 L^2 \int_T \int_S p r_k \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt + C_2 L \int_T \int_S \frac{\delta p}{\delta b_i} n_k r_k dS dt \\
&\quad (3.26) \\
&+ C_2 L \int_T \int_S p r_k \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt + 2C_1 D^2 \int_T \int_S \frac{\delta p}{\delta b_i} n_k \kappa_k dS dt + 2C_1 D^2 \int_T \int_S p \kappa_k \frac{\delta (n_k dS)}{\delta b_i} dt
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_i} = & \int_T \int_S (2C_1 L^2 + C_2 L + 2C_1 D^2) n_k r_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS dt \\ & + \int_T \int_S (2C_1 L^2 p r_k + C_2 L p r_k + 2C_1 D^2 p \kappa_k) \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} dt \end{aligned} \quad (3.27)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.24, 3.27 και 3.14 οι παράγωγοι ευαισθησίας της F_{aug} εκφράζονται ως

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = & \int_T \int_S (2C_1 L^2 p r_k + C_2 L p r_k + 2C_1 D^2 p \kappa_k) \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} dt \\ & + \underbrace{\int_T \int_S (2C_1 L^2 + C_2 L + 2C_1 D^2) n_k r_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS dt}_{SWCR} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} [\Psi_n \frac{\delta U_m}{\delta b_i}]_0^T d\Omega}_{0T} - \underbrace{\int_T \int_{\Omega} (\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + A_{nmk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k}) \frac{\partial U_m}{\partial b_i} d\Omega dt}_{FAE} \\ & + \underbrace{\int_T \int_{S_{i,o}} \Psi_n \frac{\partial f_{nk}}{\partial b_i} n_k dS dt}_{IOBC} + \underbrace{\int_T \int_{S_w} \Psi_{k+1} n_k \frac{\delta p}{\delta b_i} dS dt}_{SWCR} \\ & + \int_T \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_n f_{nk}) \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} dt + \int_T \int_S \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_l dS dt \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

Στην εξ. 3.28, το χωρικό ολοκλήρωμα που εξαρτάται από τις παραγώγους ευαισθησίας των μεταβλητών ροής $\frac{\partial U_m}{\partial b_i}$ (σημειωμένο ως FAE) μηδενίζεται καθώς αποτελεί τις συζυγείς εξισώσεις

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + A_{nmk} \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} = 0 \quad (3.29)$$

Όπως και με τις εξισώσεις ροής, οι συζυγείς εξισώσεις 3.29 λύνονται με τη μέθοδο *Runge – Kutta* τρίτης τάξης. Ο τρόπος λύσης τους παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Οι χρονικές οριακές συνθήκες για τη λύση των συζυγών εξισώσεων προκύπτουν από τον μηδενισμό του χωρικού ολοκληρώματος $0T$

$$[\Psi_n \frac{\delta U_m}{\delta b_i}]_0^T = 0 \quad (3.30)$$

Οι οριακές συνθήκες στο στερεό όριο για τις συζυγείς εξισώσεις προκύπτουν από την εξ.3.28 μηδενίζοντας τα ολοκληρώματα των στερεών ορίων που εξαρτώνται από τις παραγώγους ευαισθησίας των μεταβλητών ροής (σημειωμένα με $SWCR$) Έτσι, η συζυγής οριακή συνθήκη πάνω στο όριο δίνει

$$(2C_1L^2 + C_2L + 2C_1D^2)n_k r_k + \Psi_{k+1}n_k \frac{\delta p}{\delta b_i} = 0 \quad (3.31)$$

Οι οριακές συνθήκες στο επάπειρο όριο γύρω από την αεροτομή προκύπτουν μηδενίζοντας τα όρια σημειωμένα ως $IOBC$ στην εξίσωση 3.28.

Αφού μηδενίστηκαν τα χωρικά και οριακά ολοκληρώματα που εξαρτώνταν από τις $\frac{\delta U_m}{\delta b_i}$ και $\frac{\delta p}{\delta b_i}$, οι υπόλοιποι όροι τις εξ.3.28 δίνουν την παράγωγο ευαισθησίας της συνάρτησης-στόχου όπως δίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_i} = & \int_T \int_S (2C_1L^2 p r_k + C_2L p r_k + 2C_1D^2 p \kappa_k) \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} dt dt \\ & + \int_T \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_n f_{nk}) \frac{\delta(n_k dS)}{\delta b_i} dt + \int_T \int_S \Psi_n R_n \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_l \frac{\delta x_l}{\delta b_i} n_k dS dt \quad (3.32) \end{aligned}$$

Αυτή η έκφραση είναι ανεξάρτητη από χωρικά ολοκληρώματα παραγώγων γεωμετρικών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (ονομαζόμενες και γεωμετρικές παράγωγοι ευαισθησίας). Το πλεονέκτημα αυτής της έκφρασης είναι ότι δεν απαιτεί επαναληπτικές διαδικασίες επαναπροσδιορισμού του πλέγματος εντός κάθε κύκλου βελτιστοποίησης. Ως αποτέλεσμα, ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας είναι γρηγορότερος και ακριβέστερος. Σύμφωνα με την εξ.3.32, οι παράγωγοι ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου εκφράζονται αποκλειστικά από όρους οριακών ολοκληρωμάτων κατά μήκος του στερεού τοιχώματος.

3.2 Αριθμητικά σχήματα και διακριτοποίηση

Οι συζυγείς εξισώσεις όπως περιγράφονται από τη σχέση (3.29) λύνονται πάνω στο ίδιο πλέγμα που χρησιμοποιείται για την επίλυση του ευθέως προβλήματος. Η διακριτοποίηση του χωρίου γίνεται με κυψέλες ελέγχου στα σύνορα των οποίων υπολογίζεται η συζυγής ροή ανά μονάδα μήκους με το σχήμα Roe. Εφαρμόζοντας την κεντροκομβική διατύπωση στις σχέσεις 3.29 και μετά την εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss, οι 3.29 γράφονται

$$\left(\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t}\right)_P \Omega_P + \sum_{nei=1}^{Nei} \vec{Y}_n \Delta S \Big|_{nei} = 0 \quad (3.33)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση υπολογισμού της συζυγούς ροής ανά μονάδα μήκους κατά Roe, η οποία συμβολίζεται εδώ με \vec{Y}_n παίρνει τη μορφή

$$\vec{Y}_m \cdot \Delta S = \frac{1}{2} \left[\vec{Y}_m^R \left(\vec{\Psi}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ} \right) + \vec{Y}_m^L \left(\vec{\Psi}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ} \right) \right] - \frac{1}{2} |\tilde{A}_{PQ}| \left(\vec{\Psi}_{PQ}^R - \vec{\Psi}_{PQ}^L \right) \Big|_m \quad (3.34)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης 3.33 χρησιμοποιείται η Runge-Kutta τρίτης τάξης όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.4. Το τελικό σχήμα που ακολουθείται εδώ περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\frac{\vec{\Psi}^{n+1} - \vec{\Psi}'}{\Delta t} = \frac{2}{3} \vec{R}(\vec{\Psi}^n) - \gamma \underline{A}(\vec{\Psi}' - \vec{\Psi}^n) \quad (3.35)$$

$$\frac{\vec{\Psi}^{n+1} - \vec{\Psi}''}{\Delta t} = \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{\Psi}^n) + \frac{1}{3} \vec{R}(\vec{\Psi}') - \gamma \underline{A}(\vec{\Psi}'' - \vec{\Psi}^n)$$

$$\frac{\vec{\Psi}^n - \vec{\Psi}^{n+1}}{\Delta t} = \frac{1}{4} \vec{R}(\vec{\Psi}^n) + \frac{3}{4} \vec{R}(\vec{\Psi}'') - \gamma \underline{A}(\vec{\Psi}^{n+1} - \vec{\Psi}^{n+1})$$

$$(3.36)$$

$$(3.37)$$

όπου

$$\vec{R}(\vec{\Psi}) = - \frac{\sum_{nei=1}^{Nei} \vec{Y}_n \Delta S}{\Omega_P} \Big|_{nei} \quad (3.38)$$

Κεφάλαιο 4

Επιλεκτική κατανομή των δεικτών μνήμης ή checkpointing

4.1 Η ιδέα του checkpointing. Επισκόπηση

Στη βελτιστοποίηση σε χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα ροής (μη-περιοδικά), για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων χρειάζονται οι λύσεις του ευθέος προβλήματος (δηλαδή τα στιγμιαία πεδία ροής) σε κάθε χρονικό βήμα. Αν η διαθέσιμη μνήμη δεν επαρκεί για την αποθήκευση των λύσεων του ευθέος προβλήματος σε κάθε χρονικό βήμα, ένας οικονομικός επαναυπολογισμός των λύσεων αυτών κατά την επίλυση των συζυγών εξισώσεων (καθώς, δηλαδή, επιχειρείται η αντίστροφη σάρωση στο χρόνο ώστε να λυθούν οι χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις ροής) μπορεί να γίνει με μερική επιλεκτική αποθήκευση των στιγμιαίων πεδίων ροής σε κάποιες χρονικές στιγμές και χρήση της μεθόδου των checkpoints. Τα checkpoints είναι δείκτες που υποδεικνύουν σε ποια χρονικά βήματα αποθηκεύονται τα στιγμιαία πεδία ροής καθώς επιλύεται το ευθύ πρόβλημα.

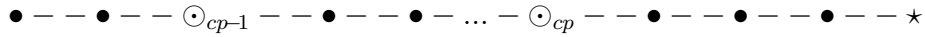
Ξεκινώντας την επίλυση των συζυγών εξισώσεων και σαρώνοντας αντίστροφα στο χρόνο, για κάθε χρονικό βήμα για το οποίο δεν έχουν αποθηκευτεί οι λύσεις του ευθέος προβλήματος, οι ζητούμενες λύσεις του ευθέος προβλήματος προκύπτουν από την επίλυση (ξανά, τμήματος) του ευθέος προβλήματος ξεκινώντας από το τελευταίο (προηγούμενο δηλαδή στον χρόνο) αποθηκευμένο στιγμιότυπο.

Παράδειγμα 1 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα χρονικά βήματα στα οποία έχει διακριτοποιηθεί χρονικά το μετρούμενο διάστημα χρόνου. Σε κάποια από αυτά, επιλεκτικά, θα αποθηκευτούν τα στιγμιαία πεδία ροής και είναι αυτά που θα συμβολίζονται με \odot , δηλαδή θα είναι αυτά στα οποία είναι τοποθετημένα τα checkpoints. Οι χρονικές στιγμές που συμβολίζονται με \bullet δεν διατηρούν αποθηκευμένα τα αντίστοιχα πεδία-λύσεις του ευθέος προβλήματος.



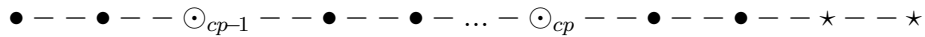
Με βάση το παραπάνω σχήμα, αν ξεκινούσε η διαδικασία επίλυσης των συζυγών εξισώσεων, αυτή θα είχε ως αφετηρία την τελευταία χρονική στιγμή επίλυσης του ευθέως προβλήματος. Εκεί βρίσκεται πάντα τοποθετημένο το τελευταίο checkpoint (\odot_{cp}). Σε εκείνο το χρονικό βήμα, είναι αποθηκευμένες οι λύσεις του ευθέως προβλήματος. Λύνονται οι συζυγείς εξισώσεις στο τελευταίο χρονικό βήμα και απελευθερώνεται το checkpoint που ήταν τοποθετημένο εκεί. Στο προηγούμενο χρονικό βήμα δεν είναι αποθηκευμένες οι λύσεις του ευθέως. Έτσι λύνεται το ευθύ πρόβλημα από το χρονικό βήμα \odot_{cp-1} έως το τρέχον και κατά την χρονοπροέλαση αυτή τοποθετείται σε μια πιο πρόσφατη χρονική στιγμή το \odot_{cp} .

Είναι

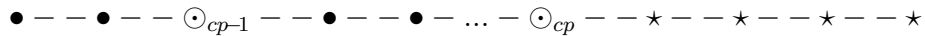
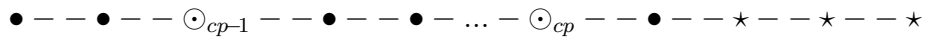


όπου με * συμβολίζεται το χρονικό βήμα στο οποίο έχουν επιλυθεί οι συζυγείς εξισώσεις.

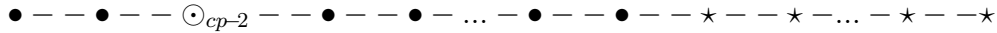
Λύνεται το συζυγές πρόβλημα στο τρέχον χρονικό βήμα και το παραπάνω σχήμα γίνεται



Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι η επίλυση των συζυγών εξισώσεων να φτάσει το χρονικό βήμα \odot_{cp} . Είναι



Καθώς συνεχίζεται η προέλαση στο χρόνο προς τα πίσω, για όποιο χρονικό βήμα δεν είναι αποθηκευμένες οι λύσεις του ευθέος, επαναλαμβάνεται η επίλυση του εξισώσεων ροής από το προηγούμενο στο χρόνο χρονικό βήμα με checkpoint. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου το χρονικό βήμα \odot_{cp} είναι το επόμενο από το \odot_{cp-1} . Τότε, οι συζυγείς εξισώσεις θα λυθούν για αυτά τα χρονικά βήματα και θα απελευθερωθούν δύο checkpoints. Το σχήμα μετά από αυτό θα είναι



όπου με \odot_{cp-2} το τελευταίο χρονικό βήμα πλέον με checkpoint.

Στη συνέχεια λύνεται το ευθύ πρόβλημα από το χρονικό βήμα \odot_{cp-2} μέχρι το χρονικό βήμα για το οποίο μένει ακόμη να λυθούν οι συζυγείς εξισώσεις και κατά την χρονοπροέλαση αυτή ανακατανέμονται τα δύο ελεύθερα checkpoints. Η ανακατανομή των δύο αυτών checkpoints θα συνεχίζεται μέχρι η ανάποδη χρονοπροέλαση να φτάσει στο χρονικό βήμα \odot_{cp-2} . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με ανατοποθετήσεις των checkpoints και χρονοπροελάσεις από το εκάστοτε τελευταίο χρονικό βήμα με checkpoint έως ότου λυθούν οι συζυγείς εξισώσεις για όλα τα χρονικά βήματα.

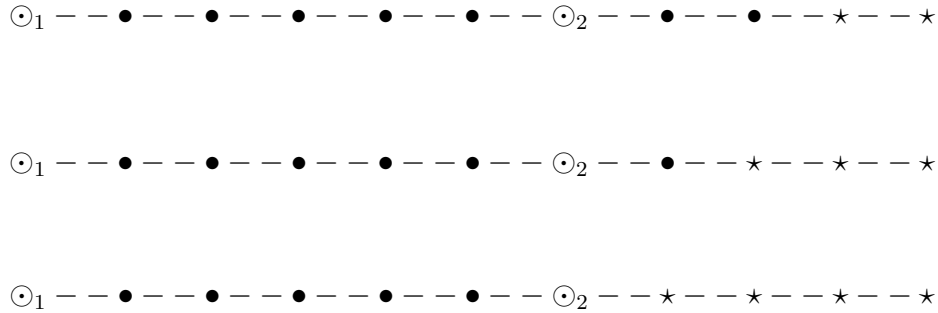
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι η μέθοδος των checkpoints έχει κόστος λόγω των επαναλαμβανόμενων επιλύσεων του ευθέος προβλήματος το οποίο είναι και το κόστος της μεθόδου. Στη συνέχεια γίνεται μία επισκόπηση των βημάτων που θα χρειαστούν για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων για 11 χρονικές στιγμές και χρησιμοποιώντας 2 checkpoint. Το πρώτο checkpoint τοποθετείται αναγκαστικά στο πρώτο χρονικό βήμα για να μην χαθεί η λύση ή η αρχικοποίηση που τέθηκε στο πρόβλημα.

Το δεύτερο checkpoint τοποθετείται σε ενδιάμεσο χρονικό βήμα (παρακάτω θα τοποθετείται σε θέση υπολογισμένη με βελτιστοποίηση), έστω εδώ ότι τοποθετείται στο 7ο χρονικό βήμα. Η κατανομή τους θα είναι



Ξεκινώντας την επίλυση των συζυγών εξισώσεων το 11ο στιγμιότυπο είναι γνωστό, οπότε συνεχίζεται η ανάποδη χρονοπροέλαση στο 10ο χρονικό βήμα. Ξεκινά η επίλυση του ευθέος προβλήματος από το 6ο βήμα μέχρι το 10ο όπου και τοποθετείται το ελεύθερο checkpoint.

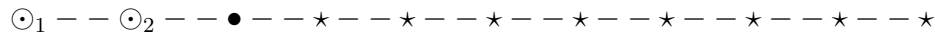
Το παραπάνω σχήμα, καθώς λύνονται οι συζυγείς εξισώσεις γίνεται βήμα-βήμα



Το κόστος είναι η επίλυση με χρονοπροέλαση των χρονικών βημάτων $7 - 10$, $7 - 9$, $7 - 8$. Έτσι το κόστος του παραπάνω σχήματος ήταν η επίλυση $3+2+1=6$ φορές του ευθέως προβλήματος απο το τελευταίο αποθηκευμένο checkpoint. Γενικά, το κόστος του σχήματος αυτού, αν n είναι τα χρονικά βήματα για τα οποία πρέπει να λυθούν οι συζυγείς εξισώσεις, είναι $\frac{n(n+1)}{2}$. Αν το 2ο checkpoint ήταν τοποθετημένο στο 8ο χρονικό βήμα, το κόστος αυτό θα ήταν $\frac{2(2+1)}{2} = 3$ φορές η επίλυση του ευθέως αντί 6. Επιπλέον, θα απελευθερωνόταν πιο γρήγορα από πριν και θα καταναμεόταν σε προηγούμενο χρονικό βήμα. Συνεχίζοντας το αρχικό σχήμα από το 7ο χρονικό βήμα όπου λύνονται οι συζυγείς εξισώσεις, πρέπει να γίνει χρονοπροέλαση από το 1ο έως το 6ο χρονικό βήμα. Είναι

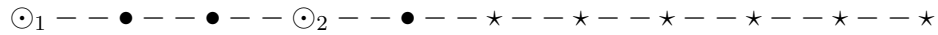
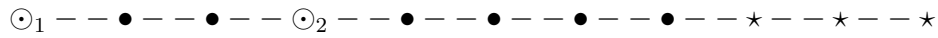


Γίνεται επίλυση του ευθέως προβλήματος για 6 χρονικά βήματα. Λύνονται οι συζυγείς εξισώσεις στο 6ο και στη συνέχεια λύνεται το ευθύ για το 5ο βήμα, άρα το συνολικό κόστος ανέρχεται στις $7+6=13$ επιλύσεις του ευθέως. Για το 4ο, η λύση είναι γνωστή και, τελικά, γίνεται μία τελευταία χρονοπροέλαση από το 1ο έως το 3ο βήμα. Το συνολικό κόστος είναι 15 επιλύσεις.



Αν τοποθετηθεί το 2ο checkpoint στο 8ο αντί στο 7ο χρονικό βήμα , το κόστος της μεθόδου θα είναι, μέχρι το 8ο χρονικό βήμα, 3 επιλύσεις του ευθέος προβλήματος. Συνεχίζοντας από το σημείο εκείνο, γίνεται επίλυση του ευθέος προβλήματος από το 1ο έως το 7ο βήμα και τοποθετείται το 2ο checkpoint στο 4ο βήμα.

Είναι



Ός εδώ το επιπλέον κόστος είναι $\frac{3(3+1)}{2} = 6$ επιλύσεις του ευθέος για χρονοπροέλαση 6 συνολικά βημάτων. Λύνονται οι συζυγείς εξισώσεις για το 4ο βήμα και γίνεται μία τελευταία χρονοπροέλαση από το 1ο έως και το 3ο βήμα. Το συνολικό κόστος είναι $3+6+2 = 12$ επιλύσεις του ευθέος προβλήματος. Συμπεραίνεται ότι συμφέρει τα checkpoints να είναι κατανομημένα πιο πυκνά στο τέλος ώστε να γίνεται γρήγορα η απελευθέρωση και αξιοποίησή τους στα πιο πρώιμα χρονικά βήματα. Ωστόσο, μία κατανομή που θα ακολουθούσε αυτό το σκεπτικό, με τα περισσότερα checkpoints στο τέλος των χρονικών βημάτων, θα μπορούσε να είναι ασύμφορη για πολλά χρονικά βήματα και σχετικά λίγα checkpoints.

Η βέλτιστη κατανομή των checkpoints για δεδομένα checkpoints και χρονικά βήματα και η μοναδικότητά αυτής αποδεικνύεται από τον A.Griewank[13]. Ως βέλτιστη ορίζεται η κατανομή για την οποία επιλύονται με ελάχιστα υπολογιστικά βήματα (κατά οποία επαναυπολογίζεται το ευθύ πρόβλημα) οι συζυγείς εξισώσεις. Αρχικά ο A.Griewank απέδειξε τη σχέση

$$\beta(s, p) = \binom{s+p}{s} = \frac{(s+p)!}{s! p!} \quad (4.1)$$

όπου $\beta(s, p)$ το μέγιστο των χρονικών βημάτων για τα οποία μπορούν να υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις για δεδομένο αριθμό checkpoints s και για το πολύ p επιλύσεις του ευθέος προβλήματος στο ίδιο χρονικό βήμα ([15]).

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για 2 checkpoints και $p = 2$ το πολύ επιλύσεις ανά χρονικό βήμα προκύπτει ότι μπορούν να επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις για το πολύ 6 χρονικά βήματα.

Για 3 checkpoints και $p = 2$ το πολύ επιλύσεις ανά χρονικό βήμα προκύπτει ότι μπορούν να επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις για το πολύ 10 χρονικά βήματα.

Για 2 checkpoints και $p = 3$ το πολύ επιλύσεις ανά χρονικό βήμα προκύπτει ότι μπορούν να επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις για το πολύ 10 χρονικά βήματα.

Δοκιμάζοντας για 2 checkpoints και $p = 4$ το πολύ επιλύσεις ανά χρονικό βήμα προκύπτει ότι μπορούν να επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις για το πολύ 15 χρονικά βήματα.

Παρατηρείται λοιπόν εδώ, ότι για 2 checkpoints, τα 15 χρονικά βήματα του παραδείγματος 1 είναι λιγότερα από τα μέγιστα που μπορούν να λυθούν με $p = 4$. Για $p = 3$ και 2 checkpoints θα ήταν αδύνατο.

Η σχέση 4.1, δίνει τα μέγιστα χρονικά βήματα, αλλά δεν είναι αυτή που δίνει τη βέλτιστη κατανομή για δεδομένα χρονικά βήματα, όπως στην περίπτωση των 11 χρονικών βημάτων. Ο A.Griewank[13], βασιζόμενος στη σχέση 4.1, έφτιαξε τον αλγόριθμο revolve ο οποίος για δίνει τη βέλτιστη κατανομή των checkpoint για δεδομένα χρονικά βήματα. Επειδή οι θέσεις των checkpoint προκύπτουν από τη διωνυμική σχέση 4.1 μέθοδος του ονομάζεται διωνυμική (binomial checkpointing).

4.2 Δυναμικός αλγόριθμος κατανομής δεικτών μνήμης

Τον αλγόριθμο που πρότεινε ο A.Griewank[13] τον εξέλιξαν οι Q.Wang και P.Moin [14] ώστε να δίνει τις θέσεις των checkpoint για άγνωστο αριθμό βημάτων ώστε να ελαχιστοποιούνται οι λύσεις του ευθέος προβλήματος και άρα τα περάσματα t . Επειδή ο αλγόριθμος αυτός λειτουργεί παράλληλα με την επίλυση του ευθέος προβλήματος είναι γνωστός και ως online checkpointing ή δυναμικό checkpointing (dynamic checkpointing). Καθώς γίνεται η χρονοπροέλαση, ο κώδικας αυτός, απομακρύνει πάντα ένα δείκτη μνήμης από ένα προηγούμενο βήμα και τον τοποθετεί στο νέο χρονικό βήμα. Η 'διωνυμική' κατανομή κατά A.Griewank είναι τέτοια που σε μια σειρά χρονικών βημάτων, για κάθε χρονικό βήμα που προστίθεται αρκεί να αλλάξει η τοποθέτηση ενός μόνο checkpoint ώστε να διατηρηθεί η διωνυμική κατανομή. Αυτή η ιδιότητα είναι πολύ σημαντική, γιατί επιτρέπει την κατανομή των δεικτών μνήμης με μία μόνο χρονοπροέλαση. Το ενδιαφέρον σε αυτόν τον αλγόριθμο είναι ότι ζητά τον αριθμό των checkpoint, που ενδεχομένως προκύπτει ανάλογα με τη διαθέσιμη μνήμη των υπολογιστών.

Η αυστηρή διατύπωσή του αλγόριθμου των Q.Wang και P.Moin είναι:

Αλγόριθμος 1 Δυναμικός καταμερισμός των checkpoints

Δεδομένο: το πλήθος $\delta > 0$ των checkpoints (ορίζεται από τον χρήστη)

Αποθήκευση του πεδίου λύσης για την αρχική χρονική στιγμή επιπέδου

∞

for $i = 0, 1, \dots$ **do**

(Πρώτο ενδεχόμενο)

If ο αριθμός των ήδη χρησιμοποιούμενων checkpoints $\leq \delta$

Then

Αποθήκευση της λύσης του ευθέως προβλήματος της χρονικής στιγμής $i+1$ σε checkpoint επιπέδου 0

(Δεύτερο ενδεχόμενο)

ElseIf τουλάχιστον ένα από τα ήδη τοποθετημένα checkpoints είναι αναλώσιμο **Then**

Διαγραφή του αναλώσιμου checkpoint που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο χρονικό βήμα

Αποθήκευση του πεδίου ροής που υπολογίστηκε στο χρονικό βήμα $i + 1$ και αντιστοιχισή του με checkpoint επιπέδου 0.

(Τρίτο ενδεχόμενο)

Else

Το επίπεδο του checkpoint στο χρονικό βήμα i αυξάνεται κατά 1. ($l_{high} = l_{low} + 1$) **Απομάκρυνση** του checkpoint (επιπέδου l_{high}) που αντιστοιχεί στο βήμα i και τοποθέτησή του στο βήμα $i + 1$.

EndIf

Επίλυση των συζυγών εξισώσεων για το χρονικό βήμα $i + 1$, με αφετηρία τη λύση του συζυγούς προβλήματος στο βήμα $i + 2$ και την αποθηκευμένη διαθέσιμη λύση τη στιγμή $i + 1$.

end for

Επίπεδο του checkpoint είναι ο αριθμός των επαναυπολογισμών που χρειάζονται ώστε να βρεθούν οι λύσεις του πεδίου ροής στα χρονικά βήματα μεταξύ αυτού στο οποίο τοποθετείται το checkpoint και του βήματος στο οποίο τοποθετείται checkpoint ίδιου ή μεγαλύτερου επιπέδου.

Ως αναλώσιμο ορίζεται το checkpoint το οποίο είναι σε θέση να απομακρυνθεί ή να αναποδοθετηθεί κατά το επόμενο χρονικό βήμα της χρονοπροέλασης ή της επίλυσης των συζυγών εξισώσεων. Το στιγμιότυπο που αντιστοιχεί σε απομακρυνόμενο ή αναποδοθετούμενο checkpoint διαγράφεται από τη θέση μνήμης στην οποία βρίσκεται. Το πότε ένα checkpoint είναι αναλώσιμο (dispensable) παρουσιάζεται αναλυτικά στη συνέχεια. Στον παραπάνω αλγόριθμο αξιοποιούνται δ θέσεις μνήμης, όσες και τα δοσμένα checkpoint.

Ωστόσο, ένα επιπλέον checkpoint ($\delta+1$ -στο) είναι πάντα στο βήμα $i+1$ όπου η λύση δεν έχει υπολογιστεί ακόμη. Έτσι, στο τελευταίο checkpoint δεν αποθηκεύεται κάποια λύση και δεν καταλαμβάνεται χώρος στη μνήμη αλλά δείχνει ποιό στιγμιότυπο θα αποθηκευτεί στη θέση κάποιου άλλου κατά το επόμενο χρονικό βήμα. Ως στιγμιότυπο ορίζεται το σύνολο των λύσεων του πεδίου ροής σε μία χρονική στιγμή. Στις εφαρμογές που παρουσιάζονται παρακάτω, για δεδομένο αριθμό δ θα εμφανίζονται $\delta+1$ checkpoints αλλά το checkpoint στο βήμα που λύθηκε τελευταία φορά το ευθύ πρόβλημα δεν αντιστοιχίζεται με κάποια θέση μνήμης.

Στο συνέχεια, παρατίθενται δύο επεξηγηματικά παραδείγματα. Σε αυτά, το συζυγές πεδίο συμβολίζεται με Ψ .

Παράδειγμα 2 Αυτό το παράδειγμα δίνεται για την επεξήγηση της ‘αναλωσιμότητας’ των checkpoints. Δίνονται 3 checkpoints και 11 χρονικά βήματα. Η εύρεση της λύσης του ευθέως προβλήματος συμβολίζεται ως $DIR(U_i, U_{i+1})$. Με αυτή τη διαδικασία για χρονοπροέλαση ενός χρονικού βήματος με τη μέθοδο Runge-Kutta τρίτης τάξης και ξεκινώντας από το πεδίο U_i προκύπτει το U_{i+1} . Οι τιμές των U_{i+1} αποθηκεύονται πριν τον υπολογισμό του επόμενου χρονικού βήματος.

Η επίλυση των συζυγών εξισώσεων συμβολίζεται με την κλήση του ‘κώδικα’ ADJF που δέχεται ως δεδομένα τις τιμές των μεταβλητών ροής στο χρονικό βήμα i , τις τιμές των συζυγών μεταβλητών Ψ_{i+1} στο χρονικό βήμα $i+1$ και δίνει τις τιμές των συζυγών μεταβλητών Ψ_i στο χρονικό βήμα i . Στον παρακάτω πίνακα, οι στήλες CPU^n δείχνουν τις θέσεις μνήμης που καλύπτονται από τα checkpoints, η στήλη Ψ δείχνει για ποιό χρονικό βήμα ολοκληρώθηκε τελευταία φορά η διαδικασία ADJF και η στήλη CPU UNITS τα υπολογιστικό κόστος (μία μονάδα κόστους ισούται με τον χρόνο που απαιτείται για να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός της ροής για ένα χρονικό βήμα και θεωρείται ότι ισούται με το χρόνο που απαιτείται για την επίλυση της συζυγούς εξίσωσης για ένα, πάλι, χρονικό βήμα). Ο συμβολισμός $0[\infty]$ αναφέρεται στο πρώτο checkpoint επιπέδου ∞ ενώ οι συμβολισμοί $n[level]$ αναφέρονται στο χρονικό βήμα που είναι αποθηκευμένα ανά checkpoint και το επίπεδο (level) αυτού. Η τέταρτη στήλη είναι το επιπλέον checkpoint.

| Θέσεις μνήμης | | | | | | |
|---------------|---------|---------|---------|--------|-----------------|-----------|
| CPU^1 | CPU^2 | CPU^3 | CPU^4 | Ψ | Κλήση του | CPU UNITS |
| $0[\infty]$ | - | - | - | - | $DIR(U_0, U_1)$ | 1 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | - | - | - | $DIR(U_1, U_2)$ | 2 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | - | - | $DIR(U_2, U_3)$ | 3 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $3[0]$ | - | $DIR(U_3, U_4)$ | 4 |

Από αυτό το χρονικό βήμα και μετά θα πρέπει να αφαιρεθεί το στιγμιότυπο από ένα checkpoint και να μπει στη θέση του ένα άλλο. Αν όλα τα checkpoints είναι του ίδιου επιπέδου, αναλώσιμο είναι το checkpoint με το στιγμιότυπο του μεγαλύτερου χρονικά βήματος.

Έτσι ο αλγόριθμος συνεχίζεται ως:

| | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|---|-----------------|---|
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $4[1]$ | - | $DIR(U_4, U_5)$ | 5 |
|-------------|--------|--------|--------|---|-----------------|---|

Σε αυτή τη φάση, υπάρχει ένα checkpoint με μεγαλύτερο επίπεδο από τα υπόλοιπα. Αναλώσιμο σε αυτή την περίπτωση είναι το checkpoint που έχει το στιγμιότυπο του μεγαλύτερου χρονικά βήματος από όλα τα checkpoints που βρίσκονται αριστερά από το checkpoint με το μέγιστο επίπεδο.

| | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|---|-----------------|---|
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $4[1]$ | $5[0]$ | - | $DIR(U_5, U_6)$ | 6 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $4[1]$ | $5[0]$ | - | $DIR(U_5, U_6)$ | 6 |
| $0[\infty]$ | $4[1]$ | $5[0]$ | $6[0]$ | - | $DIR(U_6, U_7)$ | 7 |

Από τη στιγμή που δεν υπάρχει checkpoint αριστερά από το checkpoint με το μέγιστο επίπεδο, αναλώσιμο είναι το checkpoint με το στιγμιότυπο του μέγιστου χρονικά βήματος που βρίσκεται δεξιά του.

| | | | | | | |
|-------------|--------|--------|---------|---|-----------------------|----|
| $0[\infty]$ | $4[1]$ | $5[0]$ | $7[1]$ | - | $DIR(U_7, U_8)$ | 8 |
| $0[\infty]$ | $4[1]$ | $7[1]$ | $8[0]$ | - | $DIR(U_8, U_9)$ | 9 |
| $0[\infty]$ | $4[1]$ | $7[1]$ | $9[1]$ | - | $DIR(U_9, U_{10})$ | 10 |
| $0[\infty]$ | $4[1]$ | $7[1]$ | $10[2]$ | - | $DIR(U_{10}, U_{11})$ | 11 |

Στη συνέχεια, ξεκινά ο υπολογισμός των συζυγών μεταβλητών διατρέχοντας αντίστροφα το χρόνο. Η τιμές των μεταβλητών ροής του χρονικού βήματος για το οποίο καλείται η ADJF απομακρύνονται στο τέλος από το checkpoint στο οποίο ήταν αποθηκευμένες.

| CPU^1 | CPU^2 | CPU^3 | CPU^4 | Ψ | Κλήση του | CPU UNITS |
|---------------|---------|---------|---------|--------|---|-----------|
| 0[∞] | 4[1] | 10[2] | 11[1] | - | Αρχικοποίηση $ADJF(\Psi_{11}, U_{11})$ | - |
| 0[∞] | 4[1] | 10[2] | - | 11 | $ADJF(\Psi_{11}, \Psi_{10}, U_{10})$ | 12 |
| 0[∞] | 4[1] | - | - | 10 | $DIR(U_4, U_5)$ | 13 |
| 0[∞] | 4[1] | 5[0] | - | 10 | $DIR(U_5, U_6)$ | 14 |
| 0[∞] | 4[1] | 5[0] | 6[0] | 10 | $DIR(U_6, U_7)$ | 15 |
| 0[∞] | 4[1] | 5[0] | 7[1] | 10 | $DIR(U_7, U_8)$ | 16 |
| 0[∞] | 4[1] | 7[1] | 8[0] | 10 | $DIR(U_8, U_9)$ | 17 |
| 0[∞] | 4[1] | 7[1] | 9[1] | 10 | $ADJF(\Psi_{10}, \Psi_9, U_9)$ | 18 |
| 0[∞] | 4[1] | 7[1] | 9[1] | 10 | $ADJF(\Psi_{10}, \Psi_9, U_9)$ | 18 |
| 0[∞] | 4[1] | 7[1] | - | 9 | $DIR(U_7, U_8)$ | 19 |
| 0[∞] | 4[1] | 7[1] | - | 9 | $ADJF(\Psi_9, \Psi_8, U_8)$ | 20 |
| 0[∞] | 4[1] | - | - | 8 | $ADJF(\Psi_8, \Psi_7, U_7)$ | 21 |
| 0[∞] | 4[1] | - | - | 7 | $DIR(U_4, U_5)$ | 22 |
| 0[∞] | 4[1] | 5[0] | - | 7 | $DIR(U_5, U_6)$ | 23 |
| 0[∞] | 4[1] | 5[0] | 6[0] | 7 | $ADJF(\Psi_7, \Psi_6, U_6)$ | 24 |
| 0[∞] | 4[1] | 5[0] | - | 6 | $ADJF(\Psi_6, \Psi_5, U_5)$ | 25 |
| 0[∞] | 4[1] | - | - | 5 | $ADJF(\Psi_5, \Psi_4, U_4)$ | 26 |
| 0[∞] | - | - | - | 4 | $DIR(U_0, U_1)$ | 27 |
| 0[∞] | 1[0] | - | - | 4 | $DIR(U_1, U_2)$ | 28 |
| 0[∞] | 1[0] | 2[0] | - | 4 | $DIR(U_2, U_3)$ | 29 |
| 0[∞] | 1[0] | 2[0] | 3[0] | 4 | $ADJF(\Psi_4, \Psi_3, U_3)$ | 30 |
| 0[∞] | 1[0] | 2[0] | - | 3 | $ADJF(\Psi_3, \Psi_2, U_2)$ | 31 |
| 0[∞] | 1[0] | - | - | 2 | $ADJF(\Psi_2, \Psi_1, U_1)$ | 32 |
| 0[∞] | - | - | - | 2 | $ADJF(\Psi_1, \Psi_0, U_0)$ | 33 |

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των συζυγών μεταβλητών ολοκληρώθηκε σε 33 βήματα έναντι 22 που θα χρειαζόταν αν αποθηκεύονταν τα στιγμιότυπα των μεταβλητών ροής σε κάθε χρονικό βήμα.

Παράδειγμα 3 Στον αλγόριθμο 1 διακρίνονται τρία διαφορετικά ενδεχόμενα, ένα για κάθε 'if'. Σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται πότε και για ποιο ενδεχόμενο αλλάζουν τα checkpoints, δηλαδή τα χρονικά βήματα για τα οποία αποθηκεύονται τα αντίστοιχα στιγμιότυπα της ροής. Δίνονται 11 χρονικά βήματα και 5 checkpoints. Ο συμβολισμός παραμένει ο ίδιος με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος.

| CPU^1 | CPU^2 | CPU^3 | CPU^4 | CPU^5 | Ψ | Κλήση του | CPU UNITS |
|-------------|---------|---------|---------|---------|--------|-----------------|-----------|
| $0[\infty]$ | - | - | - | - | - | $DIR(U_0, U_1)$ | 1 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | - | - | - | - | $DIR(U_1, U_2)$ | 2 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | - | - | - | $DIR(U_2, U_3)$ | 3 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $3[0]$ | - | - | $DIR(U_3, U_4)$ | 4 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $3[0]$ | $4[0]$ | - | $DIR(U_4, U_5)$ | 5 |

Ός εδώ ίσχυε το πρώτο ενδεχόμενο, προστίθενταν δηλαδή checkpoints μέχρι να φτάσουν σε αριθμό τα πέντε. Για το επόμενο χρονικό βήμα ισχύει το τρίτο ενδεχόμενο, έτσι θα διαγραφεί το στιγμιότυπο του αναλώσιμου checkpoint και το επίπεδο του checkpoint θα αυξηθεί στο αμέσως μεγαλύτερο. Μόνο σε αυτήν την περίπτωση αυξάνεται το μέγιστο επίπεδο των checkpoints.

| | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--------|---|-----------------|---|
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $3[0]$ | $5[1]$ | - | $DIR(U_5, U_6)$ | 6 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|---|-----------------|---|

Από το επόμενο χρονικό βήμα μέχρι να ξαναγίνει αναλώσιμο το πέμπτο checkpoint, επαναλαμβάνεται το δεύτερο ενδεχόμενο. Επομένως, η συνέχεια του αλγόριθμου είναι η εξής:

| | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|---------|---------|----|---|----|
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | - | $DIR(U_6, U_7)$ | 7 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | $7[0]$ | - | $DIR(U_7, U_8)$ | 8 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | $7[0]$ | $8[0]$ | - | $DIR(U_8, U_9)$ | 9 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | $7[0]$ | $9[1]$ | - | $DIR(U_9, U_{10})$ | 10 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | $9[1]$ | $10[0]$ | - | $DIR(U_{10}, U_{11})$ | 11 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $9[1]$ | $10[0]$ | $11[0]$ | - | Αρχικοποίηση $ADJF(\Psi_{11}, U_{11})$ | - |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $9[1]$ | $10[0]$ | - | 11 | $ADJF(\Psi_{11}, \Psi_{10}, U_{10})$ | 12 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $9[1]$ | - | - | 10 | $ADJF(\Psi_{10}, \Psi_9, U_9)$ | 13 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | - | - | - | 9 | $DIR(U_5, U_6)$ | 14 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | - | - | 9 | $DIR(U_6, U_7)$ | 15 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | $7[0]$ | - | 9 | $DIR(U_7, U_8)$ | 16 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | $7[0]$ | $8[0]$ | 9 | $ADJF(\Psi_9, \Psi_8, U_8)$ | 17 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | $7[0]$ | - | 8 | $ADJF(\Psi_8, \Psi_7, U_7)$ | 18 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | $6[0]$ | - | - | 7 | $ADJF(\Psi_7, \Psi_6, U_6)$ | 19 |
| $0[\infty]$ | $5[1]$ | - | - | - | 6 | $ADJF(\Psi_6, \Psi_5, U_5)$ | 20 |
| $0[\infty]$ | - | - | - | - | 5 | $DIR(U_0, U_1)$ | 21 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | - | - | - | 5 | $DIR(U_1, U_2)$ | 22 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | - | - | 5 | $DIR(U_2, U_3)$ | 23 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $3[0]$ | - | 5 | $DIR(U_3, U_4)$ | 24 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $3[0]$ | $4[0]$ | 5 | $ADJF(\Psi_5, \Psi_4, U_4)$ | 25 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | $3[0]$ | - | 4 | $ADJF(\Psi_4, \Psi_3, U_3)$ | 26 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | $2[0]$ | - | - | 3 | $ADJF(\Psi_3, \Psi_2, U_2)$ | 27 |
| $0[\infty]$ | $1[0]$ | - | - | - | 2 | $ADJF(\Psi_2, \Psi_1, U_1)$ | 28 |
| $0[\infty]$ | - | - | - | - | 1 | $ADJF(\Psi_1, \Psi_0, U_0)$ | 29 |

4.3 Διάγραμμα ροής

Ένας επαναληπτικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης μορφής στην αεροδυναμική αποτελείται από κύκλους μέσα στους οποίους καλείται μία σειρά προγραμμάτων προκειμένου να γίνει αλλαγή στη γεωμετρία με σκοπό τη βελτίωση της τιμής της συνάρτησης-στόχου, έστω, αλλά όχι αποκλειστικά, με τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

Η διαδικασία που ακολουθείται φαίνεται από το διάγραμμα.

Υπολογισμός των σημείων (x, y) της αεροτομής από τα δοσμένα σημεία Bezier



Ευθύ πρόβλημα

Αρχικοποίηση του πεδίου της χρονικά μη-μόνιμης ροής.



DO $timestep=1, 2, 3 \dots T$ χρονικά βήματα

Επίλυση της χρονικά μη-μόνιμης ροής με τη μέθοδο Runge-Kutta τρίτης τάξης

Αν τοποθετείται checkpoint στο τρέχον χρονικό βήμα, τότε αποθηκεύονται οι μεταβλητές ροής για αυτό το βήμα

ENDDO



Συζυγές πρόβλημα

DO $timestep=T$ χρονικά βήματα ...3, 2, 1

Αν είναι αποθηκευμένες οι λύσεις του ευθέος στο τρέχον χρονικό βήμα τότε:

Επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις και υπολογίζονται οι παραγώγοι ευαισθησίας

Αλλιώς:

Επιλύονται οι εξισώσεις ροής με αρχή το τελευταίο αποθηκευμένο στιγμιότυπο, που υποδεικνύεται από το τελευταίο checkpoint

ENDDO



Απότομη κάθοδος

Υπολογισμός των νέων τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού (σε αυτή την εργασία είναι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου των πολυωνύμων Bezier) με τις παραγώγους ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (εδώ, ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bezier)

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα

Εφαρμογές

Η μελέτη της μεθόδου της επιλεκτικής αποθήκευσης του πεδίου ροής με χρήση checkpoints, έγινε σε δύο περιπτώσεις βελτιστοποίησης με απότομη κάθοδο όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις μελετάται χρονικά μη-μόνιμη και μή-περιοδική ροή ενώ η συνάρτηση στόχος δίνεται από τη σχέση 5.1 η οποία ξαναγράφεται εδώ για λόγους πληρότητας.

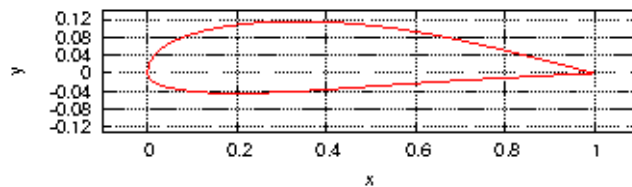
$$F = w_{Cl} \int_T (C_l - C_{l,tar})^2 dt + w_{Cd} \int_T C_d^2 dt \quad (5.1)$$

Στη σχέση αυτή οι συντελεστές w_{Cl} και w_{Cd} είναι συντελεστές βαρύτητας. Δίνοντας μεγαλύτερη ή μικρότερη τιμή στον έναν αντί του άλλου, η αεροτομή βελτιστοποιείται με κύριο κριτήριο την επίτευξη συγκεκριμένης τιμής ($C_{l,target}$) του συντελεστή άνωσης ή τη μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας.

5.1 Περίπτωση 1

Σε αυτή την περίπτωση, η αρχική αεροτομή που υπόκειται σε βελτιστοποίηση είναι προσέγγιση της αεροτομής NACA4412. Η αεροτομή φαίνεται στο σχήμα 5.1. Σκοπός, είναι η αλλαγή της αεροτομής ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση

$$F = 1 \cdot \int_{0sec}^{25sec} (C_l - C_{l,tar})^2 dt + 0.001 \cdot \int_0^{25sec} C_d^2 dt \quad (5.2)$$



Σχήμα 5.1: Αρχική αεροτομή.

Η αύξηση του συντελεστή άνωσης (γενικά η τιμή-στόχος του συντελεστή άνωσης είναι μεγαλύτερη από εκείνη της αρχικής αεροτομής) με παράλληλη μείωση του συντελεστή οπισθέλκουσας είναι αντικρουόμενοι στόχοι. Οι συντελεστές βαρύτητας στην παραπάνω σχέση τέθηκαν έτσι ώστε η τελική αεροτομή να έχει κατά προτεραιότητα αυξημένο συντελεστή άνωσης ενώ δευτερεύων στόχος είναι διατήρηση του συντελεστή οπισθέλκουσας σε όσο το δυνατόν χαμηλότερη τιμή.

Η ροή για την οποία βελτιστοποιείται η αεροτομή έχει επάπειρο αριθμό Mach

$$M_{\infty} = 0.5 \quad (5.3)$$

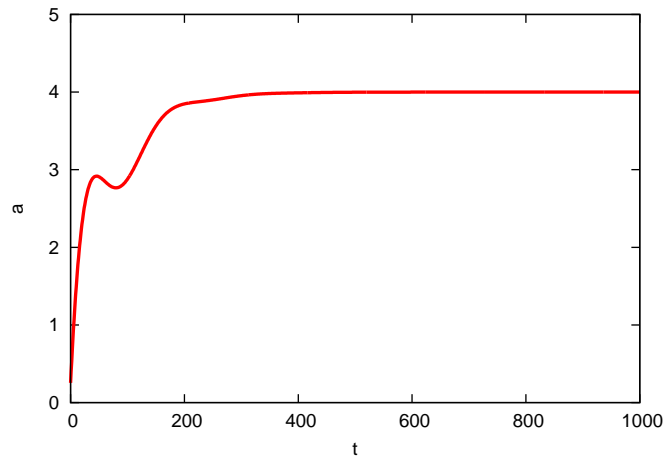
Η ροή είναι χρονικά μη-μόνιμη με μεταβαλλόμενη γωνία της ταχύτητας που περιγράφεται από τη σχέση

$$a_{input} = 4 \cdot (1 - e^{-15t} + 0.6 \cdot e^{-20t} \cdot \sin(40 \cdot t)) \quad (5.4)$$

όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

Στο σχήμα 5.2 φαίνεται η μορφή της γωνίας της ταχύτητας ως προς τον χρόνο που έχει διακριτοποιηθεί σε 1000 βήματα ($25 \cdot 10^{-3}$ δευτερόλεπτα το καθένα). Παρατηρείται ότι η γωνία έχει σταθεροποιηθεί από το 400-στό βήμα. Ενώ το φαινόμενο που εξετάζεται είναι μεταβαλλόμενο, η γωνία είναι σταθερή για περίπου 600 βήματα από τα 1000 που αποτελούν το εξεταζόμενο χρονικό διάστημα. Ο λόγος για την εξέταση τόσο μεγάλου χρονικού διαστήματος όπου η γωνία δεν μεταβάλλεται είναι ότι οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας σταθεροποιούνται με μία καθυστέρηση φάσης. Συγκεκριμένα, το μεταβατικό φαινόμενο διαρκεί για τους συντελεστές C_l και C_d περίπου μέχρι το 700-στό χρονικό βήμα. Η μεταβολή του καθενός ως προς τον χρόνο και για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης φαίνονται στα σχήματα 5.3(C_l) και 5.4(C_d).

Στην αρχή, από κύκλο-σε-κύκλο το σχήμα της αεροτομής αλλάζει και η τιμή της συνάρτησης-στόχου μειώνεται σημαντικά. Όσο προχωράει η επαναληπτική διαδικασία της απότομης καθόδου, το σχήμα της αεροτομής συγκλίνει προς το τελικό και η τιμή της συνάρτησης στόχου προς μία ελάχιστη τιμή. Η αρχική αεροτομή και η βελτιστο-

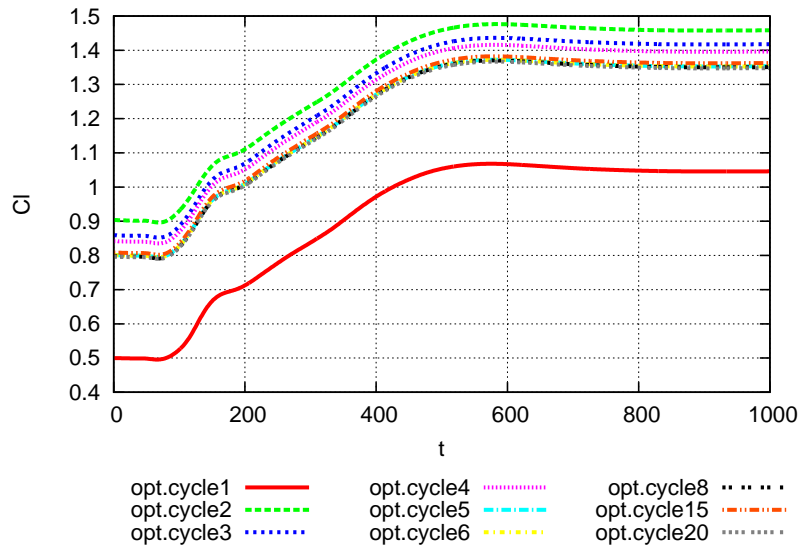


Σχήμα 5.2: Περίπτωση 1: Γωνία της επ'άπειρο ροής ανά χρονικό βήμα.

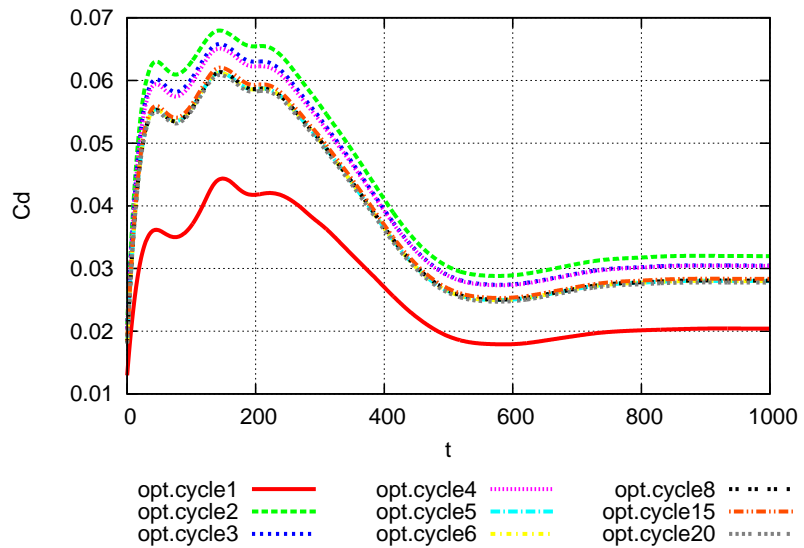
ποιημένη φαίνονται στο σχήμα 5.5 με άξονες ίδιας κλίμακας και στο 5.6 με τον άξονα των y υπό κλίμακα.

Ως μέτρο αναφοράς για το πόσο βελτιώθηκε η αεροτομή λαμβάνεται η τιμή της συνάρτησης-στόχου. Η μείωση της συνολικής τιμής της συνάρτησης-στόχου F δίνεται στο σχήμα 5.7. Από το σχήμα τις καμπύλης φαίνεται ότι έγινε "απότομη κάθοδος".

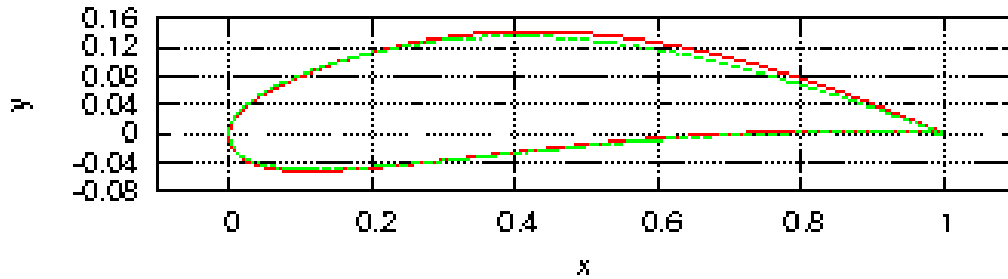
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η τιμή του συναρτησιακού $w_{C_l}(C_l - C_{l_{tar}})^2 + w_{C_d}C_d^2$ ανά χρονική στιγμή και για διαφορετικούς κύκλους βελτιστοποίησης. Στο σχήμα 5.8, το εμβαδόν κάτω από κάθε μία γραμμή που σχηματίζουν οι τιμές του συναρτησιακού είναι ίσο με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για εκείνο τον κύκλο και φθίνει από κύκλο-σε-κύκλο (όπως δείχνει και το σχήμα 5.8). Ωστόσο, ενώ η F μειώνεται, η τιμή του συναρτησιακού δεν μειώνεται ομοιόμορφα παντού και μάλιστα μετά το τέλος της μεταβολής παρατηρείται αύξηση. Αυτό συμβαίνει γιατί η ιδανική αεροτομή που θα ανταποκρινόταν με ελάχιστες απώλειες και μέγιστη άνωση στη μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης και γενικά σε ένα μεταβαλλόμενο φαινόμενο, δεν είναι ίδια με την ιδανική αεροτομή για γωνία πρόσπτωσης σταθερή στις 0 μοίρες. Μια αεροτομή που πρέπει να ανταποκριθεί και στις δύο καταστάσεις δεν θα είναι βέλτιστη σε κάθε χρονικό βήμα (που θα σήμαινε ομοιόμορφη ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού σε όλα τα εξεταζόμενα χρονικά βήματα) αλλά θα είναι βέλτιστη στο σύνολο του χρόνου.



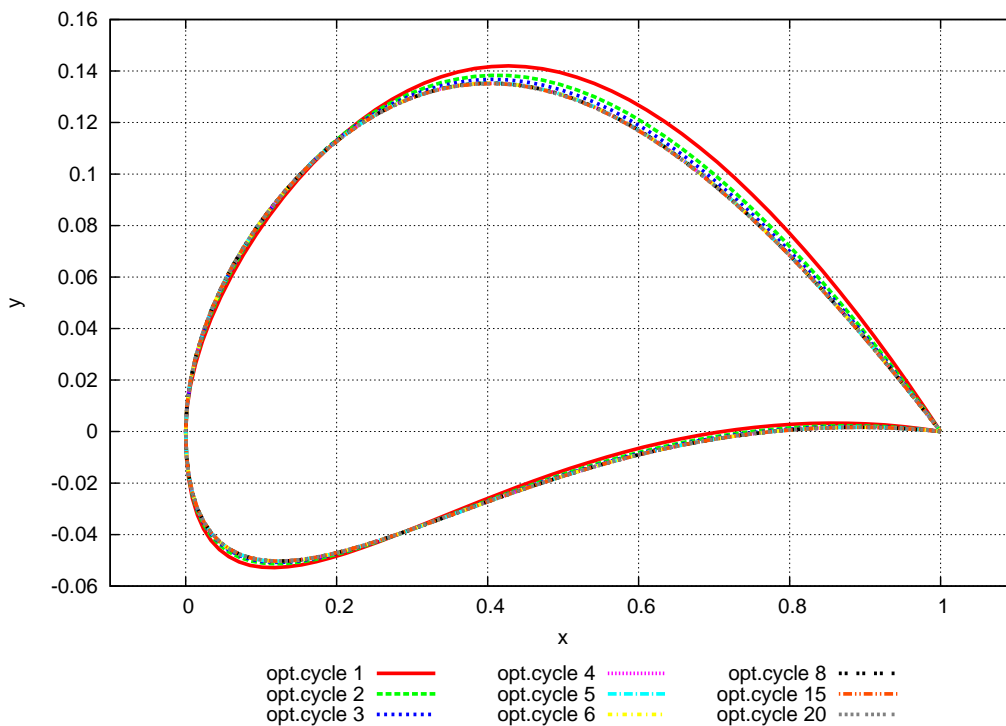
Σχήμα 5.3: Περίπτωση 1: Ο συντελεστής άνωσης για κάθε χρονική στιγμή, για την αρχική αεροτομή και για τις αεροτομές που προκύπτουν από το κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.



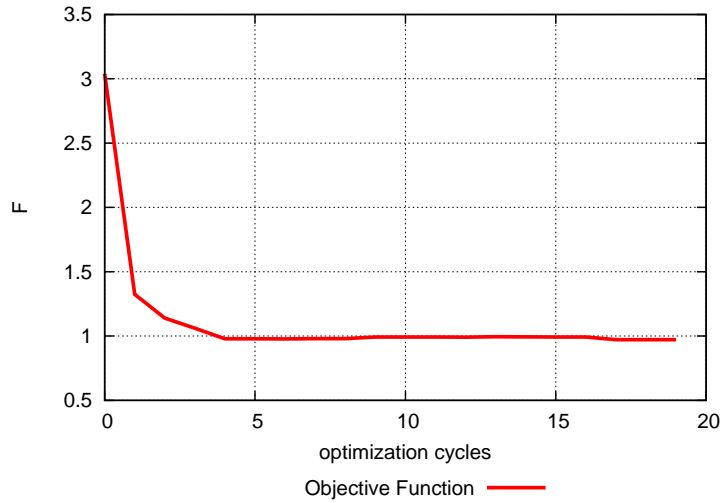
Σχήμα 5.4: Περίπτωση 1: Ο συντελεστής οπισθέλκουσας για κάθε χρονική στιγμή, για την αρχική αεροτομή και για τις αεροτομές που προκύπτουν από το κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.



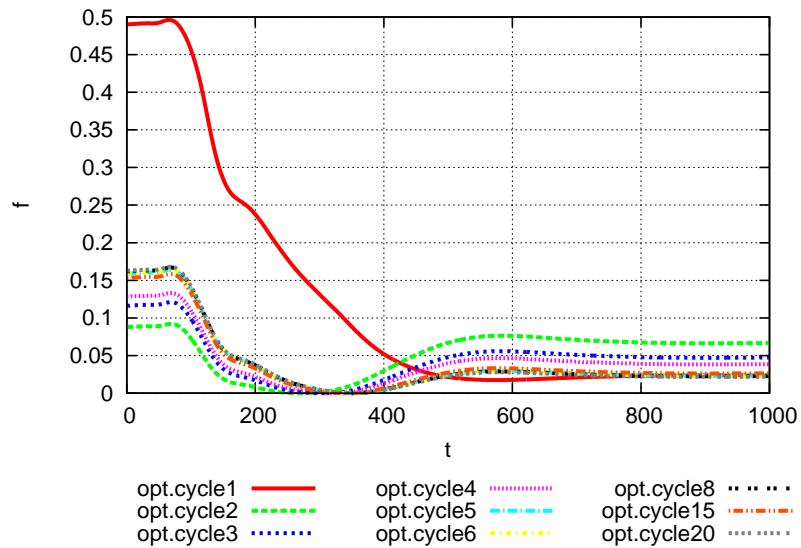
Σχήμα 5.5: Περίπτωση 1: Η αεροτομή πριν και μετά τη βελτιστοποίηση.



Σχήμα 5.6: Περίπτωση 1: Η αρχική αεροτομή, οι αεροτομές που προέκυψαν από τους ακόλουθους κύκλους βελτιστοποίησης και η τελική αεροτομή. Χωρίς κλίμακα στους δύο άξονες.



Σχήμα 5.7: Περίπτωση 1: Η τιμή της συνάρτησης-στόχου από κύκλο-σε-κύκλο βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.8: Περίπτωση 1: Το συναρτησιακό $1 \cdot (C_l - C_{l_{tar}})^2 + 0,001 \cdot C_d^2$ ανα χρονικό βήμα και για τις αεροτομές που προέκυψαν μετά από τους αντίστοιχους κύκλους βελτιστοποίησης.

Σχολιασμός αποτελεσμάτων της πρώτης περίπτωσης

Στην παραπάνω περίπτωση, για τα 1000 χρονικά βήματα χρησιμοποιήθηκαν 40, 50 και 100 δείκτες μνήμης σε 3 διαφορετικές υποπεριπτώσεις. Και οι 3 έδωσαν τις ίδιες τελικές βέλτιστες λύσεις της αεροτομής και τις ίδιες τιμές για τα C_l, C_d , δηλαδή είχαν τα ίδια ποιοτικά αποτελέσματα. Ωστόσο, το υπολογιστικό κόστος από περίπτωση σε περίπτωση διέφερε σημαντικά για μικρές διαφορές στην χρήση της μνήμης. Οι θέσεις μνήμης που χρησιμοποιήθηκαν είναι σε πλήθος ίσες με τον αριθμό των checkpoints. Καθώς σε κάθε θέση αποθηκεύεται το πεδίο ροής του ίδιου πλήθους κόμβων, η κάθε θέση μνήμης αποθηκεύει την ίδια ποσότητα πληροφορίας και έτσι μπορεί να αποτελεί εδώ μονάδα αναφοράς για τη μέτρηση της χρησιμοποιούμενης μνήμης. Επειδή ο αριθμός των θέσεων μνήμης είναι ίσος με τα checkpoints που χρησιμοποιούνται, το πλήθος των checkpoints αποτελεί από μόνο του ένα μέτρο της μνήμης που χρησιμοποιείται. Το μέτρο σύγκρισης για το υπολογιστικό κόστος των παραπάνω είναι το συνολικό κόστος σε υπολογιστικά βήματα χωρίς χρήση checkpointing.

Για 1000 χρονικά βήματα, αυτό ανέρχεται στα 2000 υπολογιστικά βήματα, 1000 για το ευθύ πρόβλημα και άλλα 1000 για την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, αν αποθηκευτούν όλα τα στιγμιότυπα-πεδία λύσεων του ευθέως προβλήματος. Επειδή οι συζυγείς εξισώσεις είναι όμοιες με τις εξισώσεις κατάστασης το κόστος επίλυσης του ευθέως και των συζυγών εξισώσεων θεωρείται ισοδύναμο. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα υπολογιστικά βήματα ανά στάδιο και το συνολικό κόστος σε υπολογιστικά βήματα. Με DIR συμβολίζεται η επίλυση του ευθέως προβλήματος και με ADJ+DIR η επίλυση των συζυγών εξισώσεων συμπεριλαμβανομένου όσων υπολογιστικών βημάτων γίνονται για τον επαναυπολογισμό των μη-αποθηκευμένων πεδίων.

| | χωρίς checkpoints | 100 checkpoints | 50 checkpoints | 40 checkpoints |
|---|-------------------|-----------------|----------------|----------------|
| DIR | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| ADJ+DIR | 1000 | 1900 | 1950 | 2780 |
| Total | 2000 | 2900 | 2950 | 3780 |
| Χρόνος σε λεπτά ανά κύκλο βελτιστοποίησης | 16.00" | 21.50" | 22.00" | 26.50" |

Παρατηρώντας το πόσο αυξάνεται ο αριθμός των υπολογιστικών βημάτων μειώνοντας τα checkpoints από 100 σε 50 και από 50 σε 40 φαίνεται ότι για 50 checkpoints τα 1000 χρονικά βήματα είναι κοντά στα μέγιστο αριθμό βημάτων για τα οποία μπορούν να υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις. Με 100 checkpoints μπορούν να υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις για περισσότερα χρονικά βήματα για τον ίδιο αριθμό ελάχιστων επαναυπολογισμών του ευθέως προβλήματος ανά χρονικό βήμα p . Με 40 checkpoints και με βάση τη σχέση 4.1 παρατηρείται ότι αυξάνεται (αναγκαστικά) ο αριθμός p των επιλύσεων του ευθέως προβλήματος σε κάθε χρονικό βήμα, όπως φαίνεται και από τη δυσανάλογη αύξηση των υπολογιστικών βημάτων συγκριτικά με τη μείωση των checkpoints.

5.2 Περίπτωση 2

Σε αυτή την περίπτωση, βελτιστοποιείται η ίδια αρχική αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη περίπτωση (σχήμα 5.1) με τα ίδια κριτήρια αλλά για διαφορετικές συνθήκες. Το φαινόμενο που εξετάζεται εδώ είναι φθίνουσα γωνία ταχύτητας που ξεκινά από τις 4 μοίρες τη χρονική στιγμή $p=0$ και καταλήγει σχεδόν στις 0 μοίρες. Η μεταβολή της γωνίας ταχύτητας ως προς τον χρόνο φαίνεται στο σχήμα 5.9 και δίνεται από τη σχέση

$$a_{input} = 4 \cdot (e^{-15 \cdot t} - 1.5 \cdot e^{-20 \cdot t} \cdot \sin(30 \cdot t)) \quad (5.5)$$

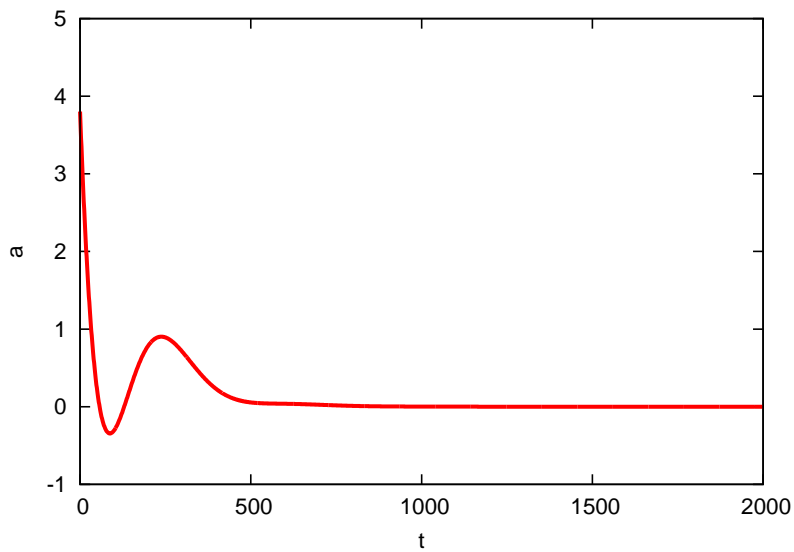
Ο αριθμός Mach της επάπειρο ροής είναι

$$M_{\infty} = 0.5 \quad (5.6)$$

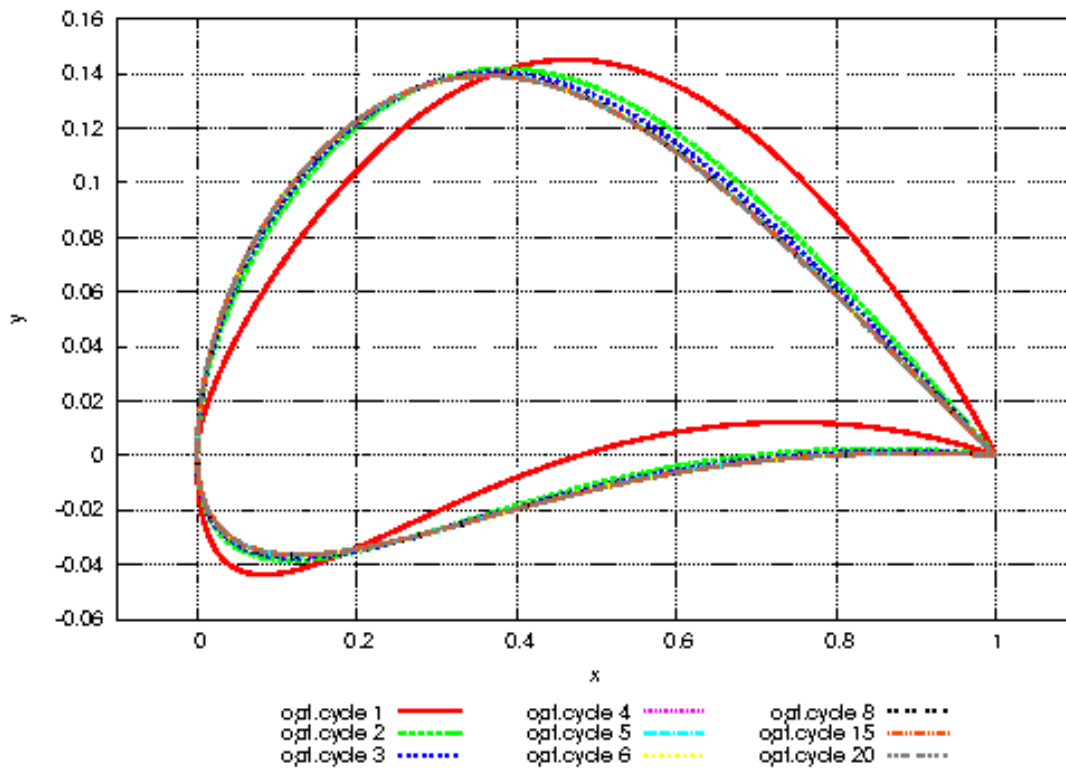
Ο εξεταζόμενος χρόνος είναι 50 δευτερόλεπτα και διακριτοποιείται σε 2000 χρονικά βήματα καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε $25 \cdot 10^{-3}$ δευτερόλεπτα. Η συνάρτησης στόχος γράφεται

$$F = 1 \cdot \int_{0sec}^{50sec} (C_l - C_{l,tar})^2 dt + 0.001 \cdot \int_0^{50sec} C_d^2 dt \quad (5.7)$$

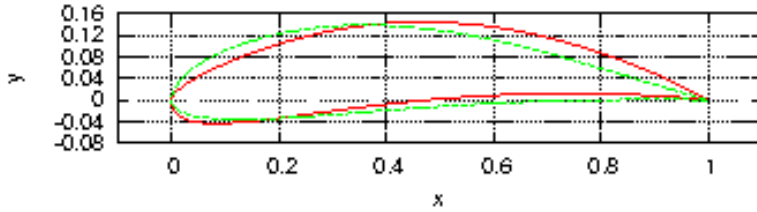
Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το άνω αριστερά κομμάτι της αεροτομής έχει πιο απότομη κλίση στην ακμή πρόσπτωσης και η αεροτομή είναι πιο λεπτή στην ακμή εκφυγής συγκριτικά με την αρχική αεροτομή. Η αρχική αεροτομή και η βελτιστοποιημένη φαίνονται στο σχήμα 5.11 με άξονες ίδιας κλίμακας. Στο σχήμα 5.10 φαίνονται η αρχική και οι ενδιάμεσες αεροτομές μέχρι την τελική, από κύκλο-σε-κύκλο, με τον άξονα των y υπό κλίμακα.



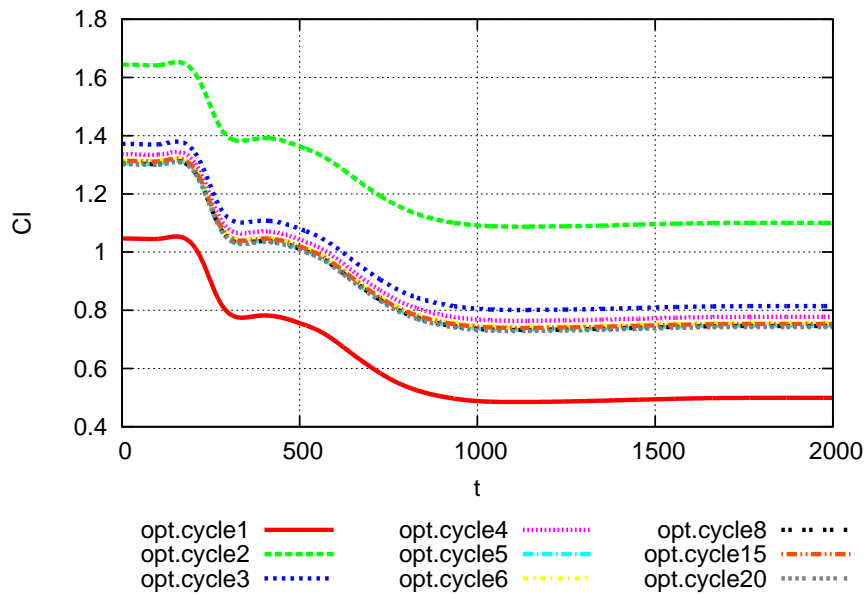
Σχήμα 5.9: Περίπτωση 2: Γωνία της επάπειρο ροής ανά χρονικό βήμα.



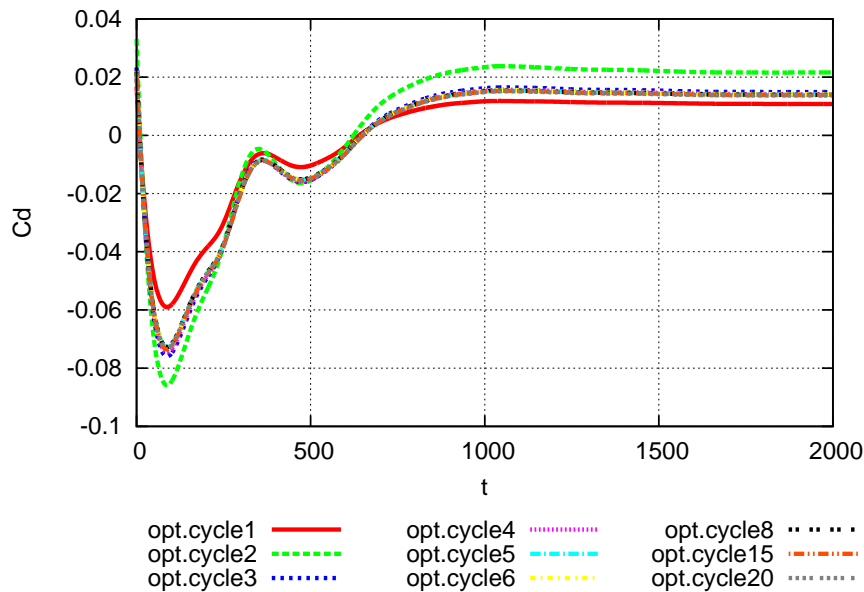
Σχήμα 5.10: Περίπτωση 2: Η αρχική αεροτομή, οι αεροτομές που προέκυψαν από τους ακόλουθους κύκλους βελτιστοποίησης και η τελική αεροτομή. Χωρίς κλίμακα στους δύο άξονες.



Σχήμα 5.11: Περίπτωση 2: Η αεροτομή πριν και μετά τη βελτιστοποίηση.



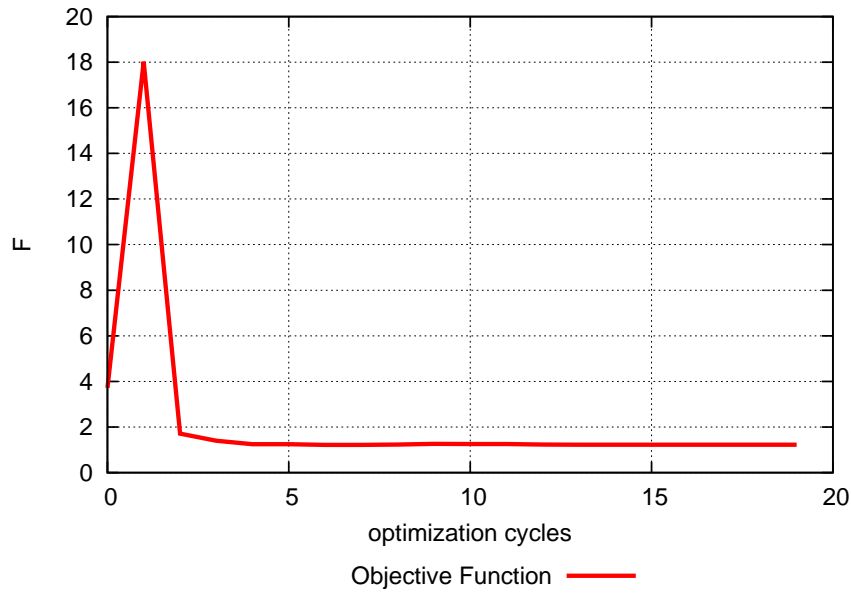
Σχήμα 5.12: Περίπτωση 2: Ο συντελεστής άνωσης για κάθε χρονική στιγμή, για την αρχική αεροτομή και για τις αεροτομές που προκύπτουν από το κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.



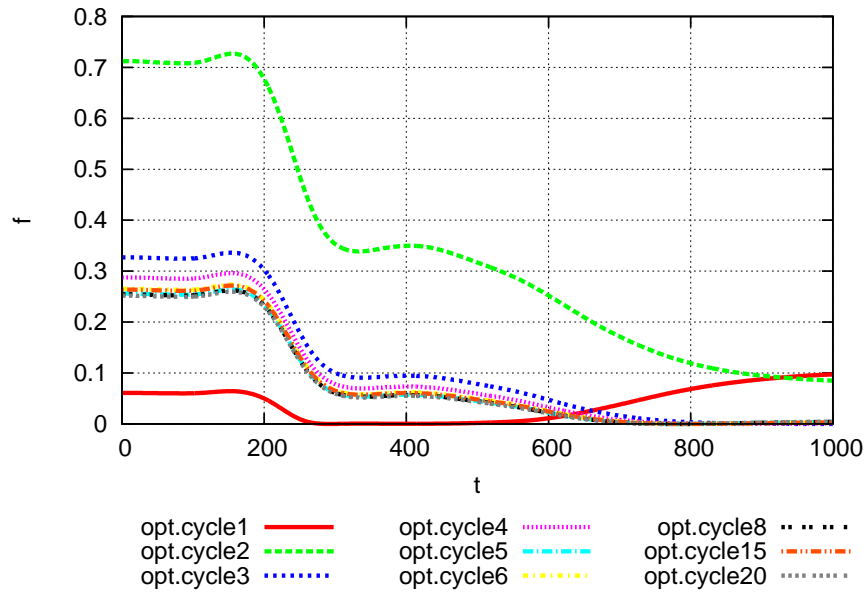
Σχήμα 5.13: Περίπτωση 2: Ο συντελεστής οπισθέλκουσας για κάθε χρονική στιγμή, για την αρχική αεροτομή και για τις αεροτομές που προκύπτουν από το κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

Σε αυτή την περίπτωση, η βελτιστοποίηση της αεροτομής ικανοποίησε τόσο το κριτήριο της αύξησης του συντελεστή άνωσης όσο και της μείωσης (στον χρόνο που αντιστοιχεί στο μεταβατικό κομμάτι του φαινομένου) ή μη αύξησης (στον χρόνο που το φαινομενο έχει σταθεροποιηθεί) του συντελεστή οπισθέλκουσας. Στα σχήματα 5.12 και 5.13 φαίνεται η μεταβολή των συντελεστών για κάθε χρονική στιγμή και για κάθε αεροτομή μεταγενέστερη της αρχικής και προγενέστερη της τελικής.

Η μείωση της συνολικής τιμής της συνάρτησης-στόχου F δίνεται στο σχήμα 5.14. Η μεγάλη αύξηση της συνάρτησης-στόχου στο δεύτερο κύκλο οφείλεται στη μεγάλη τιμή του η που επιλέχθηκε για εκείνο τον κύκλο. Στη συνέχεια ωστόσο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώθηκε σημαντικά και συνέκλινε σε τιμή χαμηλότερη της αρχικής, κάτι που αποδεικνύει την αξιοπιστία της μεθόδου της απότομης καθόδου. Πιθανόν αυτή η τιμή να μην είναι ολικό ελάχιστο και ίσως χρησιμοποιώντας διαφορετικό συντελεστή η από κύκλο-σε-κύκλο στη σχέση της απότομης καθόδου να προκύπτει το ολικό ελάχιστο. Ο λόγος για να το υποψιαστεί κανείς αυτό, είναι η υπερακόντιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης στο δεύτερο κύκλο. Στο σχήμα 5.15 παρουσιάζονται οι τιμές του συναρτησιακού $1 \cdot (C_l - C_{l_{tar}})^2 + 0.001C_d^2$ ανά χρονική στιγμή και για διαφορετικούς κύκλους βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.14: Περίπτωση 2: Η τιμή της συνάρτησης-στόχου από κύκλο-σε-κύκλο βελτιστοποίησης .



Σχήμα 5.15: Περίπτωση 2: Το συναρτησιακό $w_{C_l}(C_l - C_{l_{tar}})^2 + w_{C_d}C_d^2$ ανα χρονικό βήμα και για τις αεροτομές που προέκυψαν μετά από τους αντίστοιχους κύκλους βελτιστοποίησης.

Σχολιασμός αποτελεσμάτων της δεύτερης περίπτωσης

Στη δεύτερη περίπτωση, για λόγους σύγκρισης με την πρώτη, βελτιστοποιήθηκε ξανά η αεροτομή με χρήση 100 και 50 checkpoints. Η βελτιστοποιημένη αεροτομή που προκύπτει και στις δύο υποπεριπτώσεις είναι ταυτόσημη με εκείνη που προκύπτει χωρίς τη χρήση δεικτών μνήμης. Όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα, τα 100 checkpoints είναι μία καλή επιλογή για βέλτιστη αξιοποίηση της μνήμης ενώ με 50 checkpoints αυξάνεται δυσανάλογα το υπολογιστικό κόστος.

| | | |
|---------------------|----------------|---------------|
| 2000 χρονικά βήματα | 100 checkpoint | 50 checkpoint |
| DIR | 2000 | 2000 |
| ADJ+DIR | 3900 | 5225 |
| Total | 5900 | 7225 |

Για λόγους σύγκρισης με την πρώτη περίπτωση παρατίθεται ο παρακάτω πίνακας. Η δεύτερη στήλη δίνει την τιμή της αναλογίας (checkpoints / χρονικά βήματα στα οποία διακριτοποιείται ο χρόνος) και η τρίτη στήλη την τιμή της αναλογίας (συνολικά υπολογιστικά βήματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών/checkpoint)

| Περίπτωση | $\frac{\text{checkpoints}}{\text{timesteps}}$ | $\frac{\text{computational steps}}{\text{checkpoint}}$ |
|-----------|---|--|
| 1 | $\frac{50}{1000} = \frac{1}{20}$ | $\frac{2900}{50} = 58$ |
| 2 | $\frac{100}{2000} = \frac{1}{20}$ | $\frac{5900}{100} = 59$ |

Στην πρώτη περίπτωση, η αύξηση του υπολογιστικού κόστους είναι αποδεκτή για χρήση 50 checkpoints (ένα εικοστό της αρχικής μνήμης) ή περισσότερων, χωρίς τα χρονικά βήματα για τα οποία υπολογίζονται οι συζυγείς εξισώσεις να είναι απαραίτητα τα μέγιστα (για τα οποία μπορούν να υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις) για ελάχιστο p και τα δεδομένα checkpoints.

Στην δεύτερη περίπτωση, στη χρήση του ενός εικοστού της αρχικής μνήμης φάνηκε να βρίσκεται η χρυσή τομή από άποψη ελαχιστοποίησης του υπολογιστικού κόστους για μειωμένη χρήση της μνήμης. Επίσης, για ίδια αναλογία checkpoints προς χρονικά βήματα με την πρώτη περίπτωση, αντιστοιχούν περισσότερα υπολογιστικά βήματα για κάθε checkpoint. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι για ελάχιστο αριθμό p , τα 58 υπολογιστικά βήματα ανά checkpoint (Περίπτωση 1) δεν αξιοποιούνται για το μέγιστο αριθμό χρονικών βημάτων (βλ. εξίσωση 4.1).

Κεφάλαιο 6

Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία έγινε ανάπτυξη μεθόδου για την βελτιστοποίηση αεροτομής σε χρονικά μη-μόνιμη, μη-συνεκτική ροή. Η βελτιστοποίηση έγινε με τη μέθοδο της απότομης καθόδου, όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίστηκαν με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Για τον υπολογισμό των συζυγών μεταβλητών, αρχικά λύνεται το ευθύ πρόβλημα με χρονοπροέλαση και στη συνέχεια οι συζυγείς εξισώσεις με αντίστροφη χρονοπροέλαση. Επίσης, προγραμματίστηκε κώδικας ώστε να μπορεί γίνεται χρήση του online checkpointing κατά επιλογή του χρήστη, προκειμένου να εξοικονομείται μνήμη κατά την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Με τη χρήση του online checkpointing αποθηκεύονται τα στιγμιαία πεδία ροής σε ορισμένα χρονικά βήματα που υποδεικνύονται από τους δείκτες μνήμης, αντί να αποθηκεύονται σε όλα. Στις περιπτώσεις του κεφαλαίου 4 όπου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της δυναμικής επιλεκτικής τοποθέτησης δεικτών μνήμης (online checkpointing) μειώθηκε σημαντικά η χρησιμοποιούμενη μνήμη συγκριτικά με τις περιπτώσεις όπου αποθηκεύονταν όλες οι λύσεις του ευθέος προβλήματος. Μάλιστα, οι τιμές των παραγώγων ευαισθησίας με ή χωρίς χρήση του online checkpointing ήταν οι ίδιες, δηλαδή η μέθοδος προσφέρει μειωμένη χρήση μνήμης χωρίς να επηρεάζεται η ακρίβεια των υπολογισμών.

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε δίνει μία πολύ καλή λύση για την αξιοποίηση της μεθόδου των δεικτών μνήμης (checkpoints) όταν είναι άγνωστος ο αριθμός των χρονικών βημάτων. Συμφέρει, για περιπτώσεις που είναι εξ αρχής γνωστός ο αριθμός αυτός, να γίνεται μία εκτίμηση πρώτα ανάλογα με τα διαθέσιμα checkpoints (δηλαδή ανάλογα με τη διαθέσιμη μνήμη) για το ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός χρονικών βημάτων για τα οποία μπορούν να υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις με ελάχιστο αριθμό p (όπου p το πλήθος των επαναυπολογισμών του ευθέος προβλήματος ανά χρονικό βήμα).

Στη συνέχεια, διακριτοποιώντας το χρονικό πεδίο ώστε να προκύπτουν οι μέγιστες χρονικές στιγμές για τις οποίες μπορούν να λυθούν οι συζυγείς εξισώσεις, αυξάνεται μέγιστα η διακριτοποίηση και, άρα, η ακρίβεια υπολογισμού. Υπάρχει πάντα η δυνατότητα, αν περισσεύουν checkpoints, αντί να αυξηθεί η διακριτοποίηση του χρονικού πεδίου, να χρησιμοποιηθούν όλα τα διαθέσιμα checkpoints και να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος.

Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Ο υπάρχων κώδικας μπορεί εύκολα να μετατραπεί ώστε να κάνει μία εκτίμηση του πόσα checkpoints συμφέρει να χρησιμοποιηθούν. Αρκεί η επανειλημμένη κλήση της υπορουτίνας που κατανέμει τα checkpoints χωρίς να επιλύεται το ευθύ πρόβλημα και οι συζυγείς εξισώσεις.

Αν ο χρήστης επιθυμεί να έχει συγκεκριμένο αριθμό χρονικών βημάτων καλεί την υπορουτίνα για παραπλήσια checkpoints και επιλέγει το πλήθος για το οποίο ελαχιστοποιείται ο αριθμός των υπολογιστικών βημάτων. Αν ο χρήστης επιθυμεί να έχει συγκεκριμένο αριθμό checkpoints, τότε από τη σχέση 4.1, για διάφορα p υπολογίζεται ο μέγιστος αριθμός χρονικών βημάτων για τα οποία μπορούν να υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις (δηλαδή, για τα οποία επαρκούν τα checkpoints ώστε να υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις με το πολύ p επαναυπολογισμούς τους ευθέως προβλήματος).

Το παρόν λογισμικό μπορεί να γενικευτεί ώστε με αυτό να γίνεται επίλυση συνεκτικών, τρισδιάστατων ροών με τους επιλύτες των εξισώσεων Navier-Stokes.

Βιβλιογραφία

- [1] Α.Ζυμάρης, Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές, Διδακτορική διατριβή, Εργ.Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2010
- [2] Δ.Παπαδημητρίου, Συζυγείς (adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος, Διδακτορική διατριβή, Εργ.Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011,
- [3] Β.Ασούτη, Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον, Διδακτορική διατριβή, Εργ.Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009
- [4] Θ. Ζερβογιάννης, Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου, Διδακτορική διατριβή, Εργ. Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011
- [5] Α.Π.Γιώτης, Χρήση εξελικτικών τεχνικών, υπολογιστικής ευφυΐας και μεθόδων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής στη βελτιστοποίηση - αντίστροφη σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών μέσω παράλληλης επεξεργασίας, Διδακτορική Διατριβή, Εργ.Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., , Αθήνα 2003
- [6] V.G. Asouti, A.S. Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, Continuous and Discrete Adjoint Approaches for Aerodynamic Shape Optimization with Low Number preconditioning, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 57, pp. 1485-1504, 2008
- [7] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, Aerodynamic Shape Optimization using Adjoint and Direct Approaches, Archives of Computational Methods in Engineering (State of the Art Reviews), Vol. 15(4), pp. 447-488, Dec. 2008
- [8] D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou, A Continuous Adjoint Method with Objective Function Derivatives Based on Boundary Integrals for Inviscid and Viscous Flows, Computers & Fluids, Vol. 36, pp. 325-341, 2007

- [9] V.G. Asouti, K.C. Giannakoglou, Aerodynamic Optimization Using a Parallel Asynchronous Evolutionary Algorithm Controlled by Strongly Interacting Demes, *Engineering Optimization*, Vol. 41, No. 3, pp. 241-257, 2009
- [10] Γ.Κανέλλης, Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής, Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, Οκτώβριος 2011
- [11] N.Nikitin, Third-order-accurate semi-implicit Runge–Kutta scheme for incompressible Navier–Stokes equations, Published online 17 November 2005 in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com) , volume 51, pages 221–233
- [12] R.P. Dwight - U. Mayer, A Fourth Order Semi-Implicit Runge-Kutta Method for the Compressible Euler Equations, April 2007, Report of the Institute of Aerodynamics and Flow Technology, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. Institut für Aerodynamik und Stromungstechnik Lilienthalplatz 7, 38108 Braunschweig
- [13] A.Griewank, Achieving logarithmic growth of temporal and spatial complexity in reverse automatic differentiation, 1992, Mathematics and computer science division, Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois 60439
- [14] Q.Wang-P.Moin, Minimal repetition dynamic checkpointing algorithm for unsteady adjoint calculation, 2008, Center for Turbulence Research Annual Research Briefs 2008
- [15] A.Griewank and A. Walther, Algorithm 799: Revolve: An Implementation of Checkpointing for the Reverse or Adjoint Mode of Computational Differentiation, March 2000, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 26, No. 1