ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διαταραχές Πινάκων & Προβλήματα Ευστάθειας

Γιώργος Γούπος

Επιβλέπων Καθηγητής

Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα - Σεπτέμβριος 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διαταραχές Πινάκων & Προβλήματα Ευστάθειας

Γιώργος Γούπος

Τριμελής Επιτροπή:

Βασίλειος Κανελλόπουλος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Πέτρος Στεφανέας, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Παναγιώτης Ψαρράκος (Επιβλέπων), Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα - Σεπτέμβριος 2023

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τις προπτυχιακές μου σπουδές, θα ήθελα να ευχαριστήσω:

Αρχικά, τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή Ε.Μ.Π., που μου πρότεινε το συγκεκριμένο θέμα, με καθοδήγησε κατά την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας και ήταν διαθέσιμος κάθε φορά που χρειάστηκα τη βοήθειά του.

Επίσης, ευχαριστώ τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, τον Βασίλειο Κανελλόπουλο, Καθηγητή Ε.Μ.Π., και τον Πέτρο Στεφανέα, Αναπλ. Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την συμβολή τους. Επίσης, τους ευχαριστώ για τις πολύτιμες γνώσεις που απέκτησα μέσα από τα μαθήματά τους και που αναμφίβολα θα με στηρίξουν στο μέλλον.

Τέλος, τους γονείς μου Ευάγγελο και Βασιλική, καθώς και τον αδερφό μου Κώστα, για τη στήριξη και την αγάπη τους καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στη θεωρία των πινάκων με εφαρμογές και αποτελεί μια συστηματική μελέτη του θέματος. Αποτελείται από τρία κύρια κεφάλαια, τα οποία καλύπτουν έννοιες και εφαρμογές που προέρχονται από το ευρύτερο πεδίο της γραμμικής άλγεβρας. Το πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζει μια εισαγωγή στη θεωρία των πινάκων και των διανυσματικών χώρων που ορίζονται πάνω σε πραγματικά πεδία. Εξετάζονται βασικές έννοιες, όπως η νόρμα ενός διανύσματος και το εσωτερικό γινόμενο, καθώς και η έννοια της γραμμικής απεικόνισης μεταξύ διανυσμαικών χώρων. Εξετάζεται η νόρμα γραμμικών τελεστών και οι ισοδύναμες νόρμες, καθώς και βασικές ανισότητες που σχετίζονται με τις νορμές διανυσμάτων. Το δεύτερο κεφάλαιο εστιάζει στη φασματική ακτίνα και τη θεωρία διαταραχών. Αναλύονται διάφορες διαταραχές λύσεων γραμμικών εξισώσεων, περιλαμβανομένης της διαταραχής πρώτου και δεύτερου μέλους. Παρουσιάζεται ο υπολογισμός φραγμάτων σφάλματος για γραμμικές εξισώσεις και εξετάζονται διαταραχές ιδιοτιμών απλού πίνακα, καθώς και οι αναλυτικές διαταραχές και πίνακες συνιστωσών. Το τρίτο κεφάλαιο επικεντρώνεται στο σημαντικό πρόβλημα του προσδιορισμού της ευστάθειας ενός φυσικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας. Εξετάζονται οι έννοιες της ευστάθειας και τα μαθηματικά κριτήρια που τη διέπουν. Παρουσιάζονται οι έννοιες της ευστάθειας αλλά και ειδικότερα της ευστάθειας κατά Lyapunov μαζί με κάποιες πρακτικές εφαρμογές ευστάθειας λύσεων γραμμικών εξισώσεων. Τέλος, εξετάζεται η περίπτωση μη γραμμικών συστημάτων και η εφαρμογή κλασικών κριτηρίων στη μελέτη της ευστάθειας.

Λέξεις-Κλειδιά: διανυσματικός χώρος, γραμμική απεικόνιση, πίνακες, νόρμα, φασματική ακτίνα, θεωρία διαταραχών, ιδιοτιμές, ευστάθεια Lyapunov, γραμμικές εξισώσεις, προβλήματα ευστάθειας.

Abstract

This thesis presents an in-depth study of matrix theory with applications. There are three primary chapters that cover the ideas and uses from the broader field of linear algebra. The first chapter provides an introduction to matrix theory and vector spaces defined over real fields. The idea of linear mapping across vector spaces is also addressed, along with fundamental concepts like vector norms and inner products. The norms of linear operators, comparable norms, and fundamental vector norm inequalities are also covered. The spectral radius and perturbation theory are the main topics of the second chapter. Various perturbations of solutions to linear equations are analyzed, including first and second-order perturbations. The determination of error limits for linear equations is addressed and component matrices, analytical perturbations, and changes in the eigenvalues of simple matrices are also explored. The third chapter focuses specifically on the important issue of identifying a natural system's stability at its equilibrium point. Stability concepts and the mathematical standards that regulate it are explored. Lyapunov stability is one of the specific types of stability that is described, along with several useful applications of solution stability for linear equations. Finally, the application of traditional stability research criteria to the instance of nonlinear systems is looked at.

Keywords: vector space, linear mapping, matrices, norm, spectral radius, perturbation theory, eigenvalues, Lyapunov stability, linear equations, stability problems.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή - Βασικές έννοιες

1.1 Διανυσματικοί χώροι - Βασικές έννοιες

Έστω $V \neq \varnothing$ μη κενό σύνολο, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και

$$+ : V \times V \ni (\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} + \vec{v} \in V \tag{1}$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \ni (\lambda, \vec{u}) \to \lambda \cdot \vec{u} \in V \tag{2}$$

νόμοι σύνθεσης (πράξεις).

Η δομή $(V, +, \cdot)$ καλείται **διανυσματικός χώρος** πάνω στο $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ([1], σελ: 192-193) εάν η δομή $(V, +)$ είναι προσθετική **αντιμεταθετική ομάδα**, δηλαδή:

$$\begin{cases} \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}, \ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \\ \exists | \vec{0} \in V \ : \ \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}, \ \forall \vec{u} \in V \\ \forall \vec{u} \in V \ \exists - \vec{u} \in V \ : \ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \end{cases} \tag{3}$$

και ως προς το βαθμωτό γινόμενο ισχύουν οι:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \ \forall \vec{u} \in V \\ \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \\ (\lambda \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \ \forall \vec{u} \in V \\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \end{cases} \tag{3'}$$

όπου $1 \in \mathbb{F}$.

Παραδείγματα 1.1.1.

- *Το σύνολο $\mathcal{F}_{I,\mathbb{R}}$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$, οριζόμενων πάνω στο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, εφοδιασμένο με τις πράξεις*

  $$\begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in I \\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \ \forall x \in I \end{cases}$$

  είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

- *Το σύνολο* $\mathcal{A}_{\mathbb{R}:n\in\mathbb{N}}$ *όλων των πραγματικών ακολουθιών* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *εφοδιασμένο με τις πράξεις*

$$\begin{cases}(\alpha_n)+(\beta_n)=(\alpha_n+\beta_n)\\ \lambda\cdot(\alpha_n)=(\lambda\alpha_n)\end{cases}$$

είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση. *Η έννοια της ισότητας εντός του* $\mathcal{F}_{I,\mathbb{R}}$ *ορίζεται ως*

$$f=g \Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \ \forall x\in I,$$

και εντός του $\mathcal{A}_{\mathbb{R}:n\in\mathbb{N}}$ *ορίζεται ως*

$$(\alpha_n)=(\beta_n)\Leftrightarrow \alpha_n=\beta_n,\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

- *Το σύνολο* $\mathcal{P}_n$ *όλων των πολυωνύμων βαθμού μικροτέρου ή ίσου του* n *με*

$$p\in\mathcal{P}_n\Leftrightarrow p(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_nx^n,\ \ \alpha_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\dots,n$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις του αθροίσματος πολυωνύμων και του γινομένου πραγματικού επί πολυώνυμο, γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

- *Το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους μέχρι k τάξης τέτοιων ώστε*

$$f^{(k)}(x)+\alpha_1f^{(k-1)}(x)+\alpha_2f^{(k-2)}(x)+\dots+\alpha_kf(x)=0$$

όπου $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$, *εφοδιασμένο με τον περιορισμό των συνήθων πράξεων αθροίσματος και βαθμωτού γινομένου πάνω στο συγκεκριμένο σύνολο, γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω στο* $\mathbb{R}$.

- *Επί του συνόλου* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *των* **πινάκων** A,

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\dots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\dots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\dots&\alpha_{mn}\end{bmatrix},$$

τύπου $m\times n$ *με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{F}$, *ορίζονται οι πράξεις ([1], σελ: 142) του αθροίσματος*

$$A+B=(\alpha_{ij}+\beta_{ij})\,,\ \ \forall A=(\alpha_{ij})\,,\ B=(\beta_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$$

και του βαθμωτού γινομένου επί στοιχείου του $\mathbb{F}$,

$$\lambda\cdot A=(\lambda\alpha_{ij})\,,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{F},\ \forall A=(\alpha_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$$

που καθιστούν το $(\mathcal{M}_{m\times n},+,\cdot)$ *διανυσματικό χώρο πάνω στο* $\mathbb{F}$.

Στην συνέχεια αναφερόμαστε επιγραμματικά σε βασικές έννοιες πάνω στους διανυσματικούς χώρους (π.χ: [1], [6], [7]).

Σχόλιο.

- *Υποσύνολο E του διανυσματικού χώρου $(V,+,\cdot)$ πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$, καλείται* **διανυσματικός υπόχωρος** *του V εάν οι περιορισμοί $+_E$, $\cdot_E$ των πράξεων $+$, $\cdot$ επί του E κάνουν το $(E,+_E,\cdot_E)$ διανυσματικό χώρο το $\mathbb{F}$.*
  Χαρακτηρισμός: *$E \subset V$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V εάν και μόνον εάν:*
  $$\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}\in E,\ \ \forall\kappa,\lambda\in\mathbb{F},\ \forall\vec{u},\vec{v}\in E.$$

- **Γραμμικός συνδυασμός** *των $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\in V$ είναι κάθε*
  $$\vec{x}=\lambda_1\cdot\vec{u}_1+\cdots+\lambda_k\cdot\vec{u}_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\vec{u}_i,\ \ \lambda_i\in\mathbb{F},\ i=1,2,\dots,k$$
  και για τυχαίο υποσύνολο $A\subset V$ ορίζεται η **γραμμική θήκη** *του A ως:*
  $$\mathcal{L}(A)=\left\{\vec{x}=\sum_r\lambda_r\cdot\vec{u}_r,\ \ \lambda_r\in\mathbb{F},\ \vec{u}_r\in A\right\}.$$
  Ο $\mathcal{L}(A)$ είναι ο ελάχιστος (ως προς τον εγκλεισμό) διανυσματικός υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει το A.

- *Εάν V_1,V_2 υποσύνολα του V ορίζονται τα σύνολα $V_1+V_2=\{\vec{u}_1+\vec{u}_2\,:\,u_i\in V_i\}$ (διανυσματικό άθροισμα των V_1, V_2) και $\lambda V_1=\{\lambda\cdot\vec{u},\ \ \vec{u}\in V,\ \lambda\in\mathbb{F}\}$.*

- *Εάν $V_1,V_2,\dots,V_k$ διανυσματικοί υπόχωροι του V τότε το διανυσματικό άθροισμα $V_1+V_2+\cdots+V_k$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.*

- *Ο V καλείται* **ευθύ άθροισμα** *των υποχώρων του V_1,V_2, και συμβολίζουμε $V=V_1\oplus V_2$, εάν:*
  $$V=V_1+V_2\ \ \text{και}\ \ V_1\cap V_2=\varnothing.$$
  Χαρακτηρισμός ευθέους αθροίσματος*: $V=V_1\oplus V_2$ εάν και μόνον εάν κάθε $\vec{u}\in V$ αναλύεται μονοσήμαντα ως*
  $$\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2,\ \ \vec{u}_i\in V_i,\ \ i=1,2.$$

- *Τα στοιχεία $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\in V$, V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$, καλούνται* **γραμμικώς ανεξάρτητα** *εάν και μόνον εάν*
  $$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\vec{u}_i=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0.$$
  Στην αντίθετη περίπτωση καλούνται **γραμμικώς εξαρτημένα**.
  Προφανώς εάν το $\vec{0}\in\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\}$ τότε τα $\vec{u}_i$, $i=1,2,\dots,k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

- *Το υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου V πάνω στο $\mathbb{F}$ καλείται* **βάση** *του V εάν $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και για το γραμμικό περίβλημά του ισχύει $\mathcal{L}(\mathcal{B})=V$.*

- *Εάν $\mathcal{B}=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ βάση του V τότε κάθε στοιχείο του V αναλύεται μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S.*

- *Αποδεικνύονται τα παρακάτω, τα οποία μας επιτρέπουν να ορίσουμε την έννοια της διάστασης διανυσματικού χώρου:*

  1. *Κάθε διανυσματικός χώρος $V \neq \{\vec{0}\}$ ο οποίος παράγεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{B}$ έχει και μια βάση.*
  2. *Εάν διανυσματικός χώρος $V \neq \{\vec{0}\}$ έχει πεπερασμένη βάση $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ τότε κάθε άλλη βάση του V έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων.*

- *Έστω διανυσματικός χώρος $V \neq \{\vec{0}\}$ και $\mathcal{B}$ πεπερασμένη βάση του. Το πλήθος n των στοιχείων της $\mathcal{B}$ καλείται* **διάσταση** *του V και έχουμε $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Εάν $V = \{\vec{0}\}$ θέτουμε $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}}\{\vec{0}\} = 0$. Εάν δεν υπάρχει πεπερασμένη βάση του V ο χώρος καλείται* **απειροδιάστατος** *και θέτουμε $\dim_{\mathbb{F}} V = \infty$.*

  Παράδειγμα 1.1.2. *Έστω $\mathcal{M}_{m\times n}$ ο χώρος πινάκων τύπου $m\times n$ με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$. Εάν θεωρήσουμε τους πίνακες :*

  $$U_{ij} = (u_{kl}), \ u_{ij} = 1, \ u_{kl} = 0, \ (k,l) \neq (i,j)$$

  τότε το σύνολο

  $$\mathcal{B} = \{U_{ij} : i = 1,2,\ldots,m, \ j = 1,2,\ldots,n\}$$

  παράγει τον χώρο $\mathcal{M}_{m\times n}$ διότι εάν $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, γράφεται:

  $$A = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}U_{ij}\right).$$

  Επίσης, για την γραμμική ανεξαρτησία των στοιχείων του $\mathcal{B}$ αρκεί να παρατηρήσουμε:

  $$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}U_{ij}\right) = O_{m\times n} \Rightarrow \lambda_{ij} = 0, \ \forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}.$$

  Συνεπώς το γραμμικώς ανεξάρτητο σύστημα $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο άρα το πλήθος των στοιχείων του $m\times n$ ορίζει και την διάσταση

  $$\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M}_{m\times n} = m\cdot n.$$

- *Αποδεικνύεται επίσης ότι, σε κάθε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, κάθε πεπερασμένο υποσύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι επεκτάσιμο σε βάση.*

1.2 Γραμμικές Απεικονίσεις

Στην συγκεκριμένη ενότητα εστιάζουμε σε βασικά σημεία της θεωρίας ειδικού τύπου (γραμμικού) απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, λόγω της στενής (ισομορφικής) σχέσης αυτών με τους πίνακες τύπου $m \times n$ με στοιχεία εντός του $\mathbb{F}$.

Ορισμός 1.2.1. *Εάν U, V διανυσματικοί χώροι πάνω στο $\mathbb{F}$, τότε μια απεικόνιση:*

$$T : U \to V$$

καλείται **γραμμική** *εάν και μόνον εάν:*

$$T(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = T(\vec{u}_1) + T(\vec{u}_2),\ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \tag{i}$$

$$T(\lambda \cdot \vec{u}_1) = \lambda \cdot T(\vec{u}_1)),\ \forall \vec{u}_1 \in U,\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \tag{ii}$$

- **Χαρακτηρισμός** γραμμικών απεικονίσεων: Η απεικόνιση $T : U \to V$ είναι γραμμική εάν και μόνον εάν:

$$T\left(\lambda \cdot \vec{u}_1 + \mu \cdot \vec{u}_2\right) = \lambda \cdot T(\vec{u}_1) + \mu \cdot T(\vec{u}_2),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in U^2.$$

Παράδειγμα 1.2.2. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Ορίζουμε την απεικόνιση:*

$$T : \mathcal{M}_{n\times 1} \ni X \to TX = AX \in \mathcal{M}_{m\times 1}. \tag{1.1}$$

Έστω τυχαίο $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ και για $U \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ ο αντίστοιχος πίνακας - στήλη των συνιστωσών του $\vec{u}$. Μέσω ταυτισμού του χώρου $\mathbb{R}^k$, με τον χώρο $\mathcal{M}_{k\times 1}$, $k \in \mathbb{N}$, η απεικόνιση T αντιστοιχίζει το $\vec{u}$ στον πίνακα στήλη AU.

- Ο χώρος $\mathcal{L}(U, V)$ όλων των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ των $\mathbb{F}$ διανυσματικών χώρων U, V γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{F}$ ως προς τις πράξεις:

$$\begin{cases} (T + S)(\vec{u}) = T(\vec{u}) + S(\vec{u}),\ \forall T, S \in \mathcal{L}(U; V),\ \forall \vec{u} \in U. \\ (\lambda T)(\vec{u}) = \lambda \cdot T(\vec{u}),\ \forall T \in \mathcal{L}(U; V),\ \forall \vec{u} \in U. \end{cases}$$

- Ορίζονται οι διανυσματικοί υπόχωροι, $\mathcal{R}(T)$ - **πεδίο τιμών** ή **εικόνα** και $\mathcal{N}(T)$ - **πυρήνας** του $T \in \mathcal{L}(U, V)$ των V και U αντιστοίχως, ως:

$$\mathcal{R}(T) = \{T(\vec{u}) \in V\ \ \vec{u} \in U\} \subset V,\ \mathcal{N}(T) = \left\{\vec{u} \in U : T(\vec{u}) = \vec{0}_V\right\}.$$

Τα επόμενα αποτελέσματα φανερώνουν την σπουδαιότητα των υποχώρων που ορίστηκαν:

1. Η $T \in \mathcal{L}(U, V)$ είναι $1 - 1$ εάν και μόνον εάν $\mathcal{N} = \{\vec{0}\}$.
2. Εάν $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $\dim_{\mathbb{F}} U = n$ και $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^k$ βάση του $\mathcal{N}(T)$ η οποία επεκτείνεται σε βάση $\{\vec{u}_i^n\}_{i=}^n$ του U, τότε το σύνολο $\{T\vec{u}_{k+1}, \ldots, T\vec{u}_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{R}(T)$.
3. Οι διαστάσεις των χώρων $\mathcal{R}(T)$, $\mathcal{N}(T)$ συνδέονται μέσω της

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{R}(T) + \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{N}(T) = \dim_{\mathbb{F}} U. \tag{1.2}$$

4. Εάν $T \in \mathcal{L}(U,V)$ και $\dim_{\mathbb{F}} U = n$ τότε

$$\mathcal{N}(T) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow T \text{ 1-1 } \Leftrightarrow \{\vec{u}_i\}_{i=1}^{k} \text{ βάση } U \text{ τότε } \{T\vec{u}_i\}_{i=1}^{k} \text{ βάση } \mathcal{R}(T).$$

- Η $T \in \mathcal{L}(U,V)$ η οποία είναι επί και $1-1$ καλείται **ισομορφισμός**.
- Κάθε διανυσματικός χώρος U πάνω στο $\mathbb{F}$ με $\dim_{\mathbb{F}} U = n$ είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^n$.
- Δύο διανυσματικοί χώροι πάνω στο $\mathbb{F}$ είναι ισόμορφοι εάν και μόνον εάν είναι της ίδιας διάστασης.

1.3 Πίνακες - Γραμμικές Απεικονίσεις και ο $\mathcal{L}(U,V)$

Έστω U, V διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$ με βάσεις $\{\vec{u}_i\}_{i=1}^{m}$, $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^{n}$ αντιστοίχως. Τότε ισχύει το παρακάτω ([1], σελ: 248-249):

Θεώρημα 1.3.1.

1. *Για κάθε $T \in \mathcal{L}(U,V)$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ τέτοιος ώστε εάν:*

$$\vec{y} = T\vec{x} \Rightarrow Y = AX,$$

όπου $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ οι πίνακες - στήλες συνιστωσών των $\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i\vec{u}_i$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{v}_j$.

2. *Αντιστρόφως, σε κάθε πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(U,V)$ τέτοια ώστε:*

$$Y = AX \Rightarrow \vec{y} = T\vec{x}.$$

Παρατήρηση. *Επειδή κάθε διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{F}$ διάστασης m είναι ισόμορφος προς τον $\mathbb{F}^m$ έχουμε τον παρακάτω χαρακτηρισμό της γενικής γραμμικής απεικόνισης*

$$T : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$$

ως

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1m}x_m, \ldots, \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nm}x_m), \tag{1.3}$$

για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{F}^m$.

Παράδειγμα 1.3.2. *Δίνεται ο πίνακας*

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

της γραμμικής απεικόνισης $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$, όπου $\mathcal{P}_2$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων δευτέρου βαθμού μίας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές, ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και την βάση $\{1, x, x^2\}$ του $\mathcal{P}_2$. Να προσδιορισθεί η απεικόνιση.

Λύση: *Ως προς την κανονική βάση* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *του* $\mathbb{R}^3$. *Εάν θεωρήσουμε το διάνυσμα*

$$\vec{u} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3,$$

τότε:

$$\begin{aligned} T(\vec{u}) &= T\left(\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3\right) = \alpha T\vec{e}_1 + \beta T\vec{e}_2 + \gamma T\vec{e}_3 \\ &= \alpha\left\{1 - x + 2x^2\right\} + \beta\left\{0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2\right\} + \gamma\left\{1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2\right\} \\ &= \alpha\left\{1 - x + 2x^2\right\} + \beta x + \gamma\left\{1 + x + x^2\right\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$T\vec{u} = T\left(\alpha, \beta, \gamma\right) = \left(\alpha + \gamma\right) + \left(-\alpha + \beta + \gamma\right)\cdot x + \left(2\alpha + \gamma\right)\cdot x^2.$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει το επόμενο θεώρημα, σχετικά με την ισομορφία του χώρου γραμμικών απεικονίσεων με τόν χώρο πινάκων. Ισχύει:

Θεώρημα 1.3.3. *Εάν* U, V *διανυσματικοί χώροι πάνω στο* $\mathbb{F}$ *με* $\dim_{\mathbb{F}} U = m$, $\dim_{\mathbb{F}} V = n$, *τότε ο διανυσματικός χώρος* $\mathcal{L}(U,V)$ *είναι ισόμορφος προς τον διανυσματικό χώρο* $\mathcal{M}_{n\times m}$ *και ισχύει*

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}(U,V) = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M}_{n\times m} = n\cdot m.$$

1.4 Εσωτερικό γινόμενο & νόρμα επί διανυσματικών χώρων

Έστω ένας διανυσματικός χώρος U πάνω στο $\mathbb{C}$, ορίζεται ως **εσωτερικό γινόμενο** επί του U κάθε απεικόνιση ([2])

$$\langle\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C} \tag{1.4}$$

τέτοια ώστε για κάθε $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}\rangle = \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle\vec{w}, \vec{v}\rangle. \tag{i}$$

$$\langle\lambda\cdot\vec{u}, \vec{v}\rangle = \lambda\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle. \tag{ii}$$

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \overline{\langle\vec{v}, \vec{u}\rangle}. \tag{iii}$$

$$\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle \geq 0 \text{ και } \langle\vec{u}, \vec{u}\rangle = 0 \text{ τότε } \vec{u} = \vec{0}. \tag{iv}$$

Η δομή $(U, +, \cdot, \langle,\rangle)$ καλείται **διανυσματικός χώρος** με **εσωτερικό γινόμενο**.
Σε τυχαίο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η **ανισότητα Cauchy - Schwartz**

$$|\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle|^2 \leq \langle\vec{u}, \vec{u}\rangle\cdot\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle, \quad \forall\vec{u}, \vec{v} \in U. \tag{1.5}$$

Ορισμός 1.4.1. *Η συνάρτηση*

$$\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}^+$$

καλείται νόρμα επί του U εάν:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \tag{i}$$

$$\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\| \tag{ii}$$

$$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \tag{iii}$$

για κάθε $\vec{u}, \vec{v} \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παρατήρηση. *Το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot \rangle$ επί του U διανυσματικού χώρου πάνω στο $\mathbb{F}$ ορίζει μια νόρμα επί του U μέσω της*

$$\| \cdot \| : U \to \mathbb{R}^+ \ : \ \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Η επαλήθευση των ιδιοτήτων (ii), (iii) του ορισμού (1.4.1) της νόρμας είναι άμεση ενώ για την ιδιότητα (i) αρκεί να εφαρμόσουμε την ανισότητα (1.5) Cauchy - Schwartz:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2.$$

Έστω $(U, +, \cdot, \langle \cdot \rangle)$ διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$ με νόρμα $\| \cdot \|$ την επαγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε [2]:

- Η απεικόνιση

$$\langle \cdot \rangle : (U, \| \cdot \|) \times (U, \| \cdot \|) \to (\mathbb{C}, | \cdot |) \tag{1.7}$$

  είναι συνεχής.

- Ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2. \tag{1.8}$$

Ορισμός 1.4.2. *Δύο νόρμες $\| \cdot \|_\alpha$, $\| \cdot \|_\beta$ επί του γραμμικού χώρου $\mathbb{U}$ καλούνται* **ισοδύναμες** *([4], [5]) εάν υπάρχουν θετικές σταθερές μ, M τέτοιες ώστε*

$$\mu \|\vec{u}\|_\alpha \leq \|\vec{u}\|_\beta^2 \leq M \|\vec{u}\|_\alpha \tag{1}$$

για κάθε $\vec{u} \in \mathbb{U}$.

Παρατήρηση. *Σε ένα χώρο άπειρης διαστάσεως δυο νόρμες μπορεί να μην είναι ισοδύναμες ([4]). Πράγματι, θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων επί του κλειστού διαστήματος $[0,1]$ και την ακολουθία συναρτήσεων του $C[0,1]$:*

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{k} \\ 2\left(k^{3/2}t - k^{1/2}\right), \ \dfrac{1}{2k} \leq t \leq \dfrac{3}{2k} \\ 2\left(-k^{3/2}t + 2k^{1/2}\right), \ \dfrac{3}{2k} \leq t \leq \dfrac{2}{k} \\ 0, \quad \dfrac{2}{k} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ έχουμε:

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(t)\|_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{k}} = 0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(t)\|_2 = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \\ \lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(t)\|_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{k} = \infty \end{cases}$$

Συνεπώς οι $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι ισοδύναμες επί του χώρου $C[0,1]$.

Παράδειγμα 1.4.3. *Επί του χώρου $\mathbb{C}^n$ ορίζονται οι ισοδύναμες νόρμες:*

$$\|\vec{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i| \ \text{1-νόρμα}. \tag{1.9}$$

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2} \ \text{2-νόρμα (Ευκλείδια)}. \tag{1.10}$$

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |u_i| \ \text{νόρμα} - \infty. \tag{1.11}$$

Ειδικές περιπτώσεις της:

$$\|\vec{u}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p} \ p - \text{νόρμα}\ p \ge 1. \tag{1.12}$$

Η (1.10) προκύπτει από την (1.12) για $p \to \infty$.
Πράγματι ([4]), εάν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\vec{u} = [u_1, u_2, \dots, u_\nu]^T \in \mathbb{C}^\nu$ και ορίσουμε την p - νόρμα:

$$\|\vec{u}\|_p = (|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_p|^p)^{\frac{1}{p}}$$

και την νόρμα ∞:

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, u_p\}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\|\vec{u}\|_p}{\|\vec{u}\|_\infty} = \left(\left|\frac{u_1}{\|\vec{u}\|_\infty}\right|^p + \left|\frac{u_2}{\|\vec{u}\|_\infty}\right|^p + \cdots + \left|\frac{u_p}{\|\vec{u}\|_\infty}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in \left[1, \nu^{\frac{1}{p}}\right].$$

Όμως

$$\lim_{p\to\infty} \nu^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Άρα έπεται, με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής, ότι:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\|\vec{u}\|_p}{\|\vec{u}\|_\infty} = 1.$$

1.5 Συνεχείς - Φραγμένες Γραμμικές Απεικονίσεις

Μια σημαντική κλάση γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων με νόρμα είναι οι συνεχείς. Οι απεικονίσεις αυτές περιέχουν την αλγεβρική δομή, λόγω γραμμικότητας, καθώς και την τοπολογική, λόγω συνέχειας, κάθε διανυσματικού χώρου με νόρμα επομένως η συνέχεια σε ένα σημείο συνεπάγεται την καθολική συνέχεια κι επιπλέον, η έννοια της συνέχειας είναι ισοδύναμη με την έννοια της φραγμένης γραμμικής απεικόνισης ([2]).

Ορισμός 1.5.1. *Ορίζεται η* **νόρμα** *της γραμμικής απεικόνισης T ως:*

$$\|T\| = \sup\{\|T\vec{u}\|_V : \vec{u} \in U, \ \|\vec{u}\|_U \leq 1\} \in [0, +\infty). \tag{1.13}$$

Εάν $\|T\| < +\infty$ η απεικόνιση καλείται **φραγμένη**, *ή ισοδύναμα, εάν ο περιορισμός της T επί της μοναδιαίας μπάλας είναι φραγμένη συνάρτηση*[1]*. Ο χώρος των φραγμένων τελεστών μεταξύ των νορμικών διανυσματικών χώρων U, V συμβολίζεται με $\mathcal{B}(U, V)$. Για τον υπολογισμό της νόρμας φραγμένου τελεστή είναι χρήσιμο το παρακάτω([2]):*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|T\vec{u}\|_V : \vec{u} \in U, \ \|\vec{u}\|_U \leq 1\} = \sup\left\{\frac{\|T\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} : \vec{u} \in U, \ \vec{u} \neq \vec{0}\right\} \\ &= \inf\{c > 0 : \|T\vec{u}\| \leq c\|\vec{u}\|, \ \forall \vec{u} \in U\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Έτσι ισχύει:

$$\|T\vec{u}\| \leq \|T\|\|\vec{u}\|, \ \forall \vec{u} \in U.$$

Η παρακάτω πρόταση συνοψίζει τους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς φραγμένων - συνεχών γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ νορμικών διανυσματικών χώρων.

Πρόταση 1.5.2. *Εάν $T \in \mathcal{L}(U, V)$, U, V χώροι με νόρμα τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *T φραγμένος τελεστής.*
2. *T ομοιόμορφα συνεχής.*
3. *T συνεχής.*
4. *T συνεχής στο $\vec{0}$.*
5. *T συνεχής στο $\vec{u}_0 \in U$.*
6. *$\exists M > 0 : 0 < M < \infty$ τέτοιο ώστε $\|T\vec{u}\| \leq M\|\vec{u}\|$ για κάθε $\vec{u} \in U$.*

Για τις αποδείξεις των σχέσεων (1.14) και της πρότασης (1.5.2) παραπέμπουμε στο ([2] - σελ.40-42). Το επόμενο παράδειγμα σχετικά με γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ νορμικών χώρων πεπερασμένων διαστάσεων είναι σημαντικό ειδικότερα αναφορικά με την σύνδεσή του με το χώρο των πινάκων τύπου $n \times m$ πάνω στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 1.5.3. *Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{U}^m, \mathbb{V}^n)$, όπου $\mathbb{U}^m$, $\mathbb{V}^n$ διανυσματικοί χώροι πάνω στο $\mathbb{C}$ διαστάσεων m, n αντίστοιχα. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ του $\mathbb{U}^m$, τότε το τυχαίο $\vec{u} \in \mathbb{U}^m$ αναλύεται μονοσήμαντα ως:*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} u^i \cdot \vec{e}_i. \tag{1}$$

Συνεπώς:

$$T(\vec{u}) = T\left(\sum_{i=1}^{m} u^i \cdot \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} u^i T(\vec{e}_i). \tag{2}$$

[1] στην αντίθετη περίπτωση $\|T\| = \infty$ και η T καλείται μη φραγμένη

Από την (2) έπεται:

$$\|T(\vec{u})\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} u^i T(\vec{e}_i)\right\| \le \sum_{i=1}^{m} |u^i|\,\|T\vec{e}_i\| \le \max_{1\le i\le n} \|T(\vec{e}_i)\| \sum_{i=1}^{m} |u^i|. \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\|\cdot\|_1 \,:\, \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} u^i \vec{e}_i \to \sum_{i=1}^{m} |u^i|,$$

ορίζει μια νόρμα επί του $\mathbb{U}^m$.

Είναι όμως γνωστό ότι όλες οι νορμικές οι οριζόμενες πάνω σε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι μεταξύ τους ισοδύναμες [4], [5], υπό την έννοια ότι υπάρχει σταθερά $M_0 > 0$ *τέτοια ώστε*

$$\|\vec{u}\|_0 \le M_0 \|\vec{u}\|, \;\; \forall \vec{u} \in \mathbb{U}^m. \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) έπεται ότι:

$$\|T(\vec{u})\| \le M_0 \max_{1\le i\le n} \|T(\vec{e}_i)\| \|\vec{u}\|.$$

Άρα, εάν επιλέξουμε, σύμφωνα με τον ορισμό, $\|\vec{u}\| = 1$, *έχουμε:*

$$\|T\| \le M_0 \max_{1\le i\le n} \|T(\vec{e}_i)\|$$

και για τον T *αποδείχθηκε ότι είναι φραγμένος.*

Σχόλιο. *Στην αποδεικτική διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος δεν λάβαμε υπόψιν μας την διάσταση του χώρου* $\mathbb{V}^m$, *συμπεραίνουμε λοιπόν κάθε γραμμική απεικόνιση* $T : \mathbb{U}^m \to \mathbb{V}$, *με* $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{V} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *είναι φραγμένη.*

Παρατήρηση. *Με βάση το παραπάνω παράδειγμα (1.5.3) έχουμε ότι εντός του χώρου* $\mathcal{L}(\mathbb{U}^m, \mathbb{V}^n)$ *όλοι οι τελεστές είναι φραγμένοι οπότε το ανάλογο συμπεράσμα ισχύει κι εντός του ισομορφικού προς τον* $\mathcal{L}(\mathbb{U}^m, \mathbb{V}^n)$, *χώρου πινάκων* $\mathcal{M}_{n\times m}$ *τύπου* $n \times m$ *με στοιχεία εντός του* $\mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του χώρου $\mathcal{L}(\mathbb{U}^m, \mathbb{V}^n)$ *είναι φραγμένοι τελεστές. Συνεπώς ανήκουν στον χώρο* $\mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ *των φραγμένων τελεστών μεταξύ των γραμμικών χώρων* $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ *(ανεξαρτήτως της διάστασής τους).*

1.5.1 Ο χώρος $\mathbb{B}(U, V)$

Εάν $(\mathbb{U}, \|\cdot\|_U)$, $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_V)$ χώροι με νόρμα και $\mathcal{B}(U, V)$ ο χώρος των φραγμένων (συνεχών) γραμμικών απεικονίσεων $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, ορίζουμε πάνω στον $\mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ τις πράξεις:

$$\begin{cases} (T+S)\vec{u} = T\vec{u} + S\vec{u} \\ (\lambda T)\vec{u} = \lambda \cdot T\vec{u} \end{cases}$$

για κάθε $T, S \in \mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, και ο χώρος αυτός γίνεται γραμμικός πάνω στο $\mathbb{C}$. Ισχύουν οι:

Πρόταση 1.5.4. *Εάν* $T, S \in \mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *τότε, ο* $\lambda T + \mu S \in \mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ *και η συνάρτηση:*

$$\|\cdot\| \,:\, \mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \ni T \to \|T\| = \sup\{\|t\vec{u}\|_V \,:\, \vec{u} \in U, \;\|\vec{u}\|_U \le 1\} \in \mathbb{R}^+,$$

ορίζει νόρμα[2] *επί του* $\mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$.

[2] νόρμα τελεστών

Απόδειξη. Η απόδειξη για το ότι όντως ορίζεται νορμική είναι απλή, για το φραγμένο. Παρατηρούμε:

$$\begin{aligned}\|(\lambda T + \mu S)\vec{u}\| &= \|\lambda T\vec{u} + \mu S\vec{u}\| \le \|\lambda T\vec{u}\| + \|\mu S\vec{u}\| \\ &\le |\lambda|\|T\vec{u}\| + |\mu|\|S\vec{u}\| \le |\lambda|\|T\|\|\vec{u}\| + |\mu|\|S\|\|\vec{u}\| \\ &= (|\lambda|\|T\| + |\mu|\|S\|)\,\|\vec{u}\|.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.5.5. *Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathbb{U},\mathbb{V})$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ τότε ορίζεται η σύνθεση:*

$$S \circ T \equiv ST : U \to W,\ (ST)\vec{u} = S(T\vec{u}).$$

Η παραπάνω σύνθεση είναι στοιχείο του $\mathcal{B}(\mathbb{U},\mathbb{W})$ και επιπλέον

$$\|ST\| \le \|S\| \cdot \|T\|.$$

Απόδειξη. Η γραμμικότητα και η συνέχεια - φραξιμότητα των S, T εγγυάται την γραμμικότητα και την συνέχεια της σύνθεσης. Επιπλέον, παρατηρούμε:

$$\begin{aligned}\|ST\vec{u}\|_W &= \|S(T\vec{u})\|_W \le \|S\|\|T\vec{u}\|_V \\ &\le \|S\|\|T\|\|\vec{u}\|_{\le}\|S\|\|T\|,\ \text{διότι}\ \|\vec{u}\| = 1.\end{aligned}$$

□

1.6 Νόρμα πίνακα - Ιδιότητες

Στην τελευταία ενότητα του παρόντος κεφαλαίου θα εστιάσουμε στην έννοια της νόρμας πινάκων, ως φραγμένων τελεστών λόγω του ότι οι χώροι $\mathcal{B}(\mathbb{U}^m,\mathbb{V}^n)$ και $\mathcal{M}_{n\times m}$ είναι ισομορφικοί κι επομένως όσα ισχύουν για τους χώρους γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών νορμικών χώρων πεπερασμένης διάστασης μεταφέρονται στον αντίστοιχο χώρο πινάκων.

- Από την ισομορφία των χώρων $\mathcal{B}(\mathbb{U}_m,\mathbb{V}_n)$ και $\mathcal{M}_{n\times m}$, με χρήση της έννοιας της νόρμας γραμμικής απεικόνισης όπως αναφερθήκαμε προηγουμένως, ορίζεται και η έννοια της **φυσικής νόρμας πίνακα** $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ μέσω της σχέσης:

$$\|A\| = \max_{\vec{u}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \max_{\|\vec{u}\|=1} \|A\vec{u}\|. \tag{1.15}$$

- Ορίζονται επίσης πάνω στόν $\mathcal{M}_{n\times m}$ οι παρακάτω νόρμες - επεκτάσεις πού έχουμε ήδη ορίσει πάνω στό γραμμικό νορμικό χώρο:

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\ \text{επέκταση νόρμας}\ \|\cdots\|_1. \tag{1.16}$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2},\ \text{επέκταση Ευκλείδιας νόρμας}. \tag{1.17}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j}|a_{ij}|,\ \text{επέκταση νόρμας}\ \|\cdots\|_\infty. \tag{1.18}$$

Παρατήρηση. *Οι παραπάνω νόρμες (1.15)-(1.18) που ορίσαμε στον γραμμικό νορμικό χώρο, είναι ισοδύναμες μεταξύ τους επειδή ο χώρος $\mathcal{M}_{n\times m}$ είναι πεπερασμένης διάστασης.*

- Μια νόρμα πίνακα καλείται **κανονική** εάν για $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

$$|a_{ij}| \le \|A\| \text{ και για } A = (a_{11}) \text{ είναι } \|A\| = |a_{11}|. \tag{1.19}$$

$$|A| < |B| \Rightarrow \|A\| \le \|B\|. \tag{1.20}$$

Η σχέση (1.20) αναφέρεται στην μερική διάταξη πάνω στο σύνολο των πινάκων ([4]).

- Μέσα στην κλάση των τετραγωνικών πινάκων $\mathcal{M}_{n\times n}$ ορίζεται η νόρμα του A ως ο αριθμός $\|A\|$ για τον οποίο ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \|A\| \ge 0. \\ 2) & \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}_{n\times n}. \\ 3) & \|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|,\ \alpha \in \mathbb{C}. \\ 4) & \|A+B\| \ge \|A\| + \|B\|. \\ 5) & \|A\cdot B\| \ge \|A\|\|B\|. \end{array}\right\} \tag{1.21}$$

- Μια νόρμα διανύσματος και μια νόρμα πίνακα καλούνται **συμβιβαστές** εάν:

$$\|A\vec{u}\| \le \|A\|\|\vec{u}\|. \tag{1.22}$$

Στην περίπτωση **τετραγωνικού** πίνακα $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ο ορισμός (1.15) **φυσικής νόρμας**, όταν η νόρμα διανύσματος είναι $\|\cdot\|_U$, γίνεται:

$$\|A\| = \max_{\vec{u}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \max_{\|\vec{u}\|=1} \|A\vec{u}\|. \tag{1.23}$$

1.6.1 Ιδιότητες φυσικής νόρμας τετραγωνικού πίνακα & φασματική ακτίνα

1. Κάθε φυσική νόρμα πίνακα είναι συμβιβαστή με την αντίστοιχη νόρμα διανύσματος.

Απόδειξη. Πράγματι, είναι:

$$\|A\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\frac{\|A\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \|\vec{u}\| \max_{\|\vec{u}\|=1} \frac{\|A\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \|\vec{u}\|\|A\|.$$

□

2. Για κάθε φυσική νόρμα έχουμε $\|I\| = 1$.

Απόδειξη. Πράγματι, ισχύει:

$$\|I\| = \max \vec{u} = 1 \frac{\|I\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \max_{\|\vec{u}\|=1} \|\vec{u}\| = 1.$$

□

3. Μια φυσική νόρμα ικανοποιεί τα αξιώματα (1-5) του ορισμού (1.21) νόρμας πίνακα.

Απόδειξη.

(α′) Έστω $A \neq \mathbf{O}_{n\times n}$, τότε υπάρχει $\vec{u} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε $A\vec{u} \neq \vec{0}$. Εάν επιλέξουμε, μέσω κανονικοποίησης, διάνυσμα τέτοιο ώστε $\|\vec{u}\| = 1$, τότε ισχύει και πάλι:

$$A\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \|A\| > 0.$$

(β′) Εάν $A = \mathbf{O}_{n\times n}$ τότε:

$$A\vec{u} = \vec{0}, \quad \forall \vec{u} \in U \Rightarrow \|A\| = 0.$$

(γ′) Για τυχόν $\alpha \in \mathbb{C}$ έχουμε:

$$\|\alpha A\| = \max_{\|\vec{u}\|=1} \|A\vec{u}\| \leq |\alpha| \cdot \max_{\|\vec{u}\|=1} \|A\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

(δ′) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\|A+B\| = \max_{\|\vec{u}\|=1} \|(A+B)\vec{u}\| \leq \max_{\|\vec{u}\|=1} \|A\vec{u}\| + \max_{\|\vec{u}\|=1} \|B\vec{u}\| = \|A\| + \|B\|.$$

(ε′) Συνδυάζοντας την συμβιβαστότητα της φυσικής νόρμας με τον ορισμό (1.23) της έννοιας της φυσικής νόρμας έχουμε:

$$\begin{aligned}\|A\cdot B\| &= \max_{\|\vec{u}\|=1} \|AB\vec{u}\| = \max_{\|\vec{u}\|=1} \{\|A\| \|B\|\} \\ &= \|A\| \cdot \max_{\|\vec{u}\|=1} \|B\vec{u}\| = \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

□

4. Υπενθυμίζουμε την έννοια της **φασματικής ακτίνας** $\rho(A)$ τετραγωνικού πίνακα A τάξης n (δείτε για παράδειγμα: [4], [2]). Είναι:

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ ιδιοτιμή του πίνακα } A\}. \tag{1.24}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τους τύπους που χρησιμοποιούμε σε βασικές νόρμες πίνακα και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την συνέχεια:

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, τότε για $p = 1$, $p = 2$ και $p = \infty$ προκύπτουν οι αντίστοιχες φυσικές νόρμες:*

$$\|A\|_1 = \max_{\vec{u}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{u}\|_1}{\|\vec{u}\|_1} = \max_{\|\vec{u}\|_1=1} \|A\vec{u}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \tag{1.25}$$

δηλαδή $\|A\|_1$ είναι το μεγαλύτερο άθροισμα των στοιχείων στήλης.

$$\|A\|_\infty = \max_{\vec{u}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{u}\|_\infty}{\|\vec{u}\|_\infty} = \max_{\|\vec{u}\|_\infty=1} \|A\vec{u}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \tag{1.26}$$

δηλαδή $\|A\|_\infty$ είναι το μεγαλύτερο άθροισμα των στοιχείων γραμμής.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A\cdot A^\star)} \tag{1.27}$$

όπου $\rho(AA^\star)$ η φασματική ακτίνα του $AA^\star$, δηλαδή $\|A\|_2$ είναι η **φασματική νόρμα**.

Απόδειξη.

α) Με χρήση της διανυσματικής νόρμας $\|\vec{u}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |u_j|$ γίνεται:

$$\begin{aligned}
\|A\vec{u}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}| \cdot |u_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|u_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |u_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \leq \|\vec{u}\|_1 \cdot \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \Rightarrow \\
\frac{\|A\vec{u}\|_1}{\|\vec{u}\|_1} &\leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|.
\end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$\|A\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|. \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι για $j = k$ είναι $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ik}| = \max_{1\leq j\leq n} |\alpha_{ij}|$, άρα η (1) γίνεται:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|. \tag{1'}$$

Εάν επιλέξουμε $\vec{u} = \vec{e}_k$, όπου $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ η κανονική βάση του χώρου $\mathbb{F}^n$, λαμβάνουμε:

$$\frac{\|A\vec{u}\|_1}{\|\vec{u}\|_1} = \|A\vec{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ik}| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|.$$

Συνεπώς με χρήση της $\|\cdot\|_p$ γίνεται:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|.$$

β) Με χρήση της νόρμας $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\vec{u}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|u_i|,$$

λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\|A\vec{u}\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}u_j\right| \le \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\cdot\max_{1\le i\le n}|u_i|\right\}\\ &= \|\vec{u}\|_\infty \max_{1\le i\le n}\sum_{I=1}^{n}|\alpha_{ij}| \Rightarrow\\ \frac{\|A\vec{u}\|_\infty}{\|\vec{u}\|} &\le \max 1\le i\le n\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|.\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\|A\|_\infty \le \max 1\le i\le n\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|. \tag{2}$$

Επιλέγουμε, ομοίως προς την $\|\cdot\|_1$, $i=k$ οπότε

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}| \Rightarrow \alpha_{kj}u_j = |\alpha_{kj}|,\ \ j=1,2,3,\ldots.$$

Η σχέση (2) , για $\|\vec{u}\|_\infty = 1$, λαμβάνει την μορφή:

$$\frac{\|A\vec{u}\|_\infty}{\|\vec{u}\|_\infty} = \|A\vec{u}\|_\infty = \sum_{j=1}^{n}|\alpha_{kj}| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|.$$

Άρα:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le j}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|.$$

γ) Στην περίπτωση της Ευκλείδιας νορμικής είναι:

$$\|A\|_2 = \max_{\vec{u}\ne\vec{0}}\frac{\|A\vec{u}\|_2}{\|\vec{u}\|_2} = \max_{\vec{u}\ne\vec{0}}\frac{\sqrt{\vec{u}^\star A^\star A\vec{u}}}{\sqrt{\vec{u}^\star\vec{u}}},$$

όπου $A^\star A$ ερμιτιανός και κανονικός. Επομένως, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και εάν $\lambda\in\mathbb{R}$ ιδιοτιμή του τότε υπάρχει $\vec{u}_\lambda\ne\vec{0}$ τέτοιο ώστε

$$A^\star A\vec{u}_\lambda = \lambda\vec{u}_\lambda,\ \text{και}\ \lambda>0.$$

Πράγματι, ισχύει:

$$\begin{aligned}0\le\|A\vec{u}_\lambda\|_2 &= \langle A\vec{u}_\lambda, A\vec{u}_\lambda\rangle = \langle A^\star A\vec{u}_\lambda,\vec{u}_\lambda\rangle\\ &= \langle\lambda\vec{u}_\lambda,\vec{u}_\lambda\rangle = \lambda\|\vec{u}_\lambda\|_2^2.\end{aligned}$$

Επειδή $\|\vec{u}_\lambda\|_2>0$ έπεται $\lambda\ge 0$.

Θεωρούμε λοιπόν τις $\lambda_i\ge 0$, $i=1,2,\ldots,n$ μη αρνητικές ιδιοτιμές με αντίστοιχο ορθοκανονικό σύστημα ιδιοδιανυσμάτων $\vec{u}_{\lambda_i}$, $i=1,2,\ldots,n$:

$$\begin{cases}A^\star A\vec{u}_{\lambda_i} = \lambda_i\vec{u}_{\lambda_i}\\ \langle\vec{u}_{\lambda_i},\vec{u}_{\lambda_j}\rangle = \delta_{ij}\end{cases}$$

Θεωρούμε τυχαίο

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_{\lambda_i}.$$

Λαμβάνουμε:

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\vec{u}^\star \vec{u}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_{\lambda_i}\right)^\star \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_{\lambda_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \vec{\alpha}_i \cdot \vec{u}^\star_{\lambda_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_{\lambda_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2}.$$

Γίνεται λοιπόν:

$$\begin{aligned}\|A\vec{u}\|_2 = \sqrt{\vec{u}^\star A^\star A\vec{u}} &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_{\lambda_i}\right)^\star \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_{\lambda_i}\right)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2} \leq \sqrt{\max_i |\lambda_i|} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2} \\ &= \sqrt{\max_i |\lambda_i|} \cdot \|\vec{u}\|_2.\end{aligned}$$

Άρα:

$$\|A\vec{u}\|_2 \leq \sqrt{\max_i |\lambda_i|} \cdot \|\vec{u}\|_2 \Rightarrow \frac{\|A\vec{u}\|_2}{\|\vec{u}\|_2} \leq \sqrt{\max_i |\lambda_i|} \Rightarrow \|A\|_2 \leq \sqrt{\max_i |\lambda_i|}.$$

Εάν επιλέξουμε $\vec{u} = \vec{e}_k$ όπου $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ η κανονική βάση, έχουμε την ισότητα:

$$\|A\|_2 = \max_i \{|\lambda_i|\}.$$

□

Κεφάλαιο 2

Φασματική ακτίνα και θεωρία διαταραχών

2.1 Φασματική ακτίνα και φράγμα

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας και $\{\lambda_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ το σύνολο των ιδιοτιμών του το οποίο καλείται* **φάσμα**. *Ορίζεται ως* **φασματική ακτίνα** *του A ο αριθμός*

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ ιδιοτιμή του πίνακα } A\}. \tag{2.1}$$

Ορισμός 2.1.2. *Μία νόρμα διανύσματος και μία νόρμα πίνακα ονομάζονται* **συμβιβαστές**, *εάν ισχύει*

$$\|A\vec{u}\| \leq \|A\|\|\vec{u}\| \tag{2.2}$$

Έστω συμβιβαστή νόρμα $\|\cdot\|$. Υποθέτουμε ότι:

$$A\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i.$$

Τότε, ισχύει:

$$\|A\vec{u}_i\| = \|\lambda_i \cdot \vec{u}_i\| = |\lambda_i| \cdot \|\vec{u}_i\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{u}_i\|.$$

Άρα:

$$|\lambda_i| \leq \|A\|.$$

Αποδείχθηκε συνεπώς το:

Πόρισμα 2.1.3. *Για κάθε συμβιβαστή νόρμα $\|\cdot\|$ επί του χώρου των τετραγωνικών πινάκων $\mathcal{M}_{n\times n}$ ισχύει*

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i| \leq \|A\|. \tag{2.3}$$

Εφαρμογή 2.1.4. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τις νόρμες με εφαρμογή του θεωρήματος (1.6.1):

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max\{|2|+|1|+|0|, |-4|+|-2|+|1|, |3|+|1|+|1|\} \\ &= \max\{3,7,5\} = 7. \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max\{|2|+|-4|+|3|, |1|+|-2|+|1|, |0|+|1|+|-1|\} \\ &= \max\{9,4,2\} = 9. \end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\|A\|_2 = \sqrt{2^2+(-4)^2+3^2+1^2+(-2)^2+1^2+0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{37}.$$

Από την

$$\det(A - \lambda I_{3\times 3}) = 0.$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του Α:

$$\lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Συνεπώς:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{|1|, |-1|, |-1|\} = 1.$$

Παραθέτουμε στην συνέχεια δύο από τα πιο χρήσιμα αποτελέσματα σχετικά με την γραμμική ανάλυση:

Πρόταση 2.1.5. *Έστω φυσική νόρμα τέτοια ώστε $\|A\| < 1$. Τότε ([9]):*

α) Ο πίνακας $I \pm A$ είναι αντιστρέψιμος.

β) Ισχύει:

$$\frac{1}{1+\|A\|} \le \|(I \pm A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|}. \tag{2.4}$$

Απόδειξη.

α) Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε τον $I + A$ και υποθέτουμε ότι ο $I + A$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε:

$$\exists \vec{u} \ne \vec{0} \ : \ (I + A)\vec{u} = \vec{0}.$$

Συνεπώς, για $\vec{u}$ με $\|\vec{u}\| = 1$ προκύπτει:

$$A\vec{u} = -\vec{u} \Rightarrow \|A\vec{u}\| = \|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = 1.$$

Όμως

$$\left.\begin{array}{l} \|A\| = \max_{\|\vec{u}\|=1} \|A\vec{u}\| \\ \exists \vec{u} \ : \text{τέτοιο ώστε} \ \ : \|A\vec{u}\| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \|A\| \ge 1$$

δηλαδή άτοπο, συνεπώς $I + A$ αντιστρέψιμος.

β) Από την αντιστρεψιμότητα του $A + I$ έπεται:

$$I = (I + A)^{-1}(I + A). \tag{1}$$

Με χρήση της ιδιότητας:

$$\|A^p\| \leq \|A\|^p$$

της νόρμας τετραγωνικού πίνακα ([4]) καθώς επίσης και τα αξιώματα ([9], [4]) του ορισμού της νόρμας:

$$\left.\begin{aligned} \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|A \cdot B\| &\leq \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}\right\}$$

καθώς και την (1) έπεται:

$$\begin{aligned} 1 = \|I\| = \|(I + A)^{-1}(I + A)\| &\leq \|(I + A)^{-1}\| \cdot \|I + A\| \\ &\leq \|(I + A)^{-1}\| \left(\|I\| + \|A\|\right) \\ &\leq \|(I + A)^{-1}\| \left(1 + \|A\|\right). \end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I + A)^{-1}\|. \tag{2}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε το δεύτερο μέλος της (2.8) γράφουμε την (1) ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= (I + A)^{-1} + (I + A)^{-1}A \Rightarrow \\ (I + A)^{-1} &= I - (I + A)^{-1}A. \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} \|(I + A)^{-1}\| = \|I - (I + A)^{-1}A\| &\leq 1 + \|(I + A)^{-1}A\| \\ &\leq 1 + \|(I + A)^{-1}\| \cdot \|A\|. \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$\|(I + A)^{-1}\| \left(1 - \|A\|\right) \| \leq 1.$$

Επειδή από υπόθεση $\|A\| < 1$ έπεται:

$$\| \, (I + A)^{-1} \, \| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

και το δεύτερο μέλος της (2.8) αποδείχθηκε.

□

Θεώρημα 2.1.6. *Εάν A, B τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας τάξης με A αντιστρέψιμο και για κάθε φυσική νόρμα ισχύει*

$$\|A - B\| < \frac{1}{|A^{-1}\|}. \tag{2.5}$$

Τότε ο B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει η

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|} \tag{2.6}$$

καθώς και η

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \cdot \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}. \tag{2.7}$$

Απόδειξη.
Θέτουμε

$$B = A - (A - B) = A\big(I - A^{-1}(A - B)\big). \tag{1}$$

Με χρήση γνωστών ιδιοτήτων της έννοιας της νόρμας καθώς και της (2.9) γίνεται:

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1.$$

Από την πρόταση (2.1.5) συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $I - A^{-1}(A - B)$ είναι αντιστρέψιμος.
Ο πίνακας $B = A(I - A^{-1}(A - B))$ είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων και ισχύει

$$B^{-1} = (I - A^{-1}(A - B))A^{-1}. \tag{2}$$

Συνεπώς, με χρήση ιδιοτήτων της νόρμας:

$$\begin{aligned}\|B^{-1}\| &= \|(I - A^{-1}(A - B))A^{-1}\| \\ &\leq \|(I - A^{-1}(A - B))\| \cdot \|A^{-1}\|.\end{aligned}$$

Άρα, από την πρόταση (2.1.5) λαμβάνουμε:

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A - B)\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}. \tag{3}$$

Επίσης, από την

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$$

προκύπτει, με χρήση και της (2.10):

$$\begin{aligned}\|A^{-1} - B^{-1}\| &\leq \|A^{-1}(B - A)B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| \cdot \|B^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}.\end{aligned}$$

□

Εφαρμογή 2.1.7. *Θεωρούμε τόν πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \\ & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Τότε:

$$A = 4(I + B),$$

όπου:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & & & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \\ 0 & & \frac{1}{4} & 0 & \end{pmatrix}.$$

Με χρήση της νόρμας $\|\cdot\|_\infty$ διαπιστώνουμε εύκολα ότι:

$$\|B\|_\infty = \frac{1}{2} < 1.$$

Συνεπώς, από την πρόταση (2.1.5), προκύπτει ότι ο αντίστροφος πίνακας $(I+B)^{-1}$ ορίζεται και ισχύει:

$$\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Συνεπώς, θα υπάρχει και ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} και θα ισχύει

$$\left.\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4}(I + B)^{-1} \\ \|A^{-1}\|_\infty &< \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Με χρήση και πάλι της νόρμας $\|\cdot\|_\infty$ αλλά και της ανισότητας (2.3), για την φασματική ακτίνα και την νόρμα τετραγωνικού πίνακα, προκύπτουν τα φράγματα:

$$\left.\begin{aligned} \rho(A) &\leq \|A\|_\infty = 6 \\ \rho(A^{-1}) &\leq \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

2.2 Διαταραχές λύσεων γραμμικών εξισώσεων

Ένα υπολογιστικό πρόβλημα της μορφής

$$Ax = b, \;\; A \in \mathcal{M}_{n\times n}, \;\; \det A \neq 0$$

καλείται **ευσταθές** εάν μικρές διαταραχές του A ή του b αντιστοιχούν σε μικρές διαταραχές του x ([9]). Η εκτίμηση του μεγέθους της διαταραχής συναρτάται άμεσα με τις τιμές των μεγεθών πριν την επιβολής της διαταραχής.

Παρατήρηση. *Της διερεύνησης του γενικότερου προβλήματος για τυχαίο πίνακα A είναι χρήσιμο να εξετάσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα αναφορικά με την μεταβολή των συντελεστών της εξίσωσης $x = b$. Κατά τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε στην μελέτη των λύσεων του προβλήματος:*

$$(I + M)\xi = b,$$

όπου M μικρό σε σχέση προς τον μοναδιαίο τελεστή I. Ο συσχετισμός επίσης του ξ από το x θα είναι σε άμεση συνάρτηση με τον πίνακα $(I+M)^{-1}$ εφόσον ο αντίστροφος ορίζεται - υπάρχει και εκεί σημαντικότατο ρόλο παίζουν τα αποτελέσματα της πρότασης (2.1.5) και του θεωρήματος (2.1.6).

2.2.1 Διαταραχή πρώτου και δευτέρου μέλους

Πρόβλημα 2.2.1. *Έστω*

$$Ax = b,\ \ A \in \mathcal{M}_{n\times n},\ \ \det A \neq 0 \tag{1}$$

και έστω

$$b \to b + k \ \ \textit{και}\ \ A \to A + B. \tag{2}$$

Το διαταραγμένο σύστημα γράφεται:

$$(A+B)(x+y) = b+k. \tag{3}$$

Επιδιώκουμε την εκτίμηση ενός άνω φράγματος της σχετικής διαταραχής $\dfrac{\|y\|_n}{\|x\|_n}$ *για κάποια διανυσματική νόρμα* $\|\cdot\|_n$. *Από τις (3) και (1) με αφαίρεση κατά μέλη έπεται:*

$$\left.\begin{aligned}&(A+F)(x+y) = b+k\\&Ax = b\end{aligned}\right\} \Rightarrow (A+F)y + Fx = k \Rightarrow A(I + A^{-1}F)y = k - Fx. \tag{4}$$

Εάν υποθέσουμε ότι

$$\delta = \|A^{-1}\|\|F\| < 1 \ \ \textit{και}\ \ \|I\| = 1,$$

τότε με χρήση της πρότασης (2.1.5) και της:

$$\|A^{-1}F\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|F\| < 1.$$

Έπεται ότι:

$$\exists (I + A^{-1}F)^{-1} \ \ \textit{και}\ \ \|(I + A^{-1}F)^{-1}\| < (1-\delta)^{-1}.$$

Συνεπώς:

$$y = (I + A^{-1}F)^{-1}A^{-1}k - (I + A^{-1}F)^{-1}A^{-1}Fx. \tag{5}$$

Για τυχαία διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|_n$, *συμβατή με την* $\|\cdot\|$ *έπεται:*

$$\|y\|_n \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\delta}\|k\|_n + \frac{\delta}{1-\delta}\|x\|_n. \tag{6}$$

Προκειμένου να πετύχουμε μια βολική έκφραση για την ποσότητα $\dfrac{\|y\|_n}{\|x\|_n}$, *η οποία μετρά το εύρος της διακύμανσης, παρατηρούμε ότι:*

$$Ax = b \Rightarrow \|b\|_n \leq \|A\|\cdot\|x\|_n \Rightarrow \frac{1}{\|x\|_n} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|_n},\ \ b \neq 0.$$

Άρα:

$$\frac{\|y\|_n}{\|x\|_n} \leq \frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\delta}\cdot\frac{\|k\|_n}{\|b\|_n} + \frac{\delta}{1-\delta}. \tag{7}$$

Παρατήρηση. *Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (7) περιέχει την σχετική διαταραχή του όρου b και ο τελευταίος όρος είναι ανεξάρτητος του δεξιού μέλους της αρχικής εξίσωσης(1).*

Ορίζουμε την παρακάτω ποσότητα για τον τετραγωνικό πίνακα A:

Ορισμός 2.2.2. *Ορίζεται ως* **δείκτη κατάστασης** *του $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ το:*

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|. \tag{2.8}$$

Εάν λαβουμε υπόψιν ότι από την υπόθεση $\delta = \|A^{-1}\| \cdot \|F\|$ με χρήση της (2.3) γίνεται:

$$\delta = \frac{\kappa(A)\|F\|}{\|A\|}. \tag{8}$$

Από τις (7) και (8) καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\frac{\|y\|_n}{\|x\|_n} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \dfrac{\kappa(A)\|F\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|k\|_n}{\|b\|_n} + \frac{\|F\|}{\|A\|} \right). \tag{2.9}$$

Από την εκτίμηση (2.9) καταλήγουμε, σε μορφή πορίσματος, στα παρακάτω συμπεράσματα, αναφορικά με την εκτίμηση διαταραχών γραμμικού συστήματος:

Πόρισμα 2.2.3. *Έστω το γραμμικό σύστημα*

$$AX = b, \ \det A \neq 0, \ A \in \mathcal{M}_{n\times n}, \tag{1}$$

τότε:

- *Η λύση του διαταραγμένου προβλήματος ως προς το δεύτερο μέλος :*

$$A(x + y) = b + k \tag{2}$$

ικανοποιεί την:

$$\frac{\|y\|_n}{\|x\|_n} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|k\|_n}{\|b\|_n}. \tag{2'}$$

- *Η λύση του διαταραγμένου προβλήματος ως προς το πρώτο μέλος:*

$$(A + B)(x + y) = b \tag{3}$$

ικανοποιεί την:

$$\frac{\|y\|_n}{\|x\|_n} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\dfrac{\|F\|}{\|a\|}} \cdot \frac{\|F\|}{\|A\|}. \tag{3'}$$

Σχόλιο. *Η (2.9) παρέχει ένα άνω φράγμα για την σχετική διαταραχή του x συναρτήσει των σχετικών διαταραχών των b, A και του δείκτη κατάστασης $\kappa(A)$.*
Το πρόβλημα στο οποίο εστιάσαμε αφορά διαταραχές μόνο του όρου b, ή μόνο του πίνακα A ή ταυτοχρόνα των A και b.

Σχετικά με τον ορισμό του δείκτη κατάστασης να σημειώσουμε ότι, λόγω του ότι υπάρχει άμεση εξάρτηση από την επιλογή της νόρμας, πολλές φορές χρησιμοποιείται εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός, ανεξαρτήτως της επιλογής νόρμας:

Παρατήρηση. *Είναι γνωστό ότι για τις φασματικές ακτίνες των A, A^{-1} ισχύει:*

$$\rho(A) \le \|A\| \text{ και } \rho(A^{-1}) \le \|A^{-1}\|.$$

Έπεται λοιπόν:

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \ge \rho(A) \cdot \rho(A^{-1}).$$

Είναι όμως γνωστό ότι οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι αντίστροφες των ιδιοτιμών του A, άρα:

$$\kappa(A) \ge \frac{\max\limits_{\lambda\epsilon\sigma(A)} |\lambda|}{\min\limits_{\lambda\epsilon\sigma(A)} |\lambda|} = \kappa(A), \tag{2.10}$$

όπου $\sigma(A)$ το φάσμα του A.
Η (2.10) χρησιμοποιείται ως εναλλακτικός ορισμός για τον δείκτη κατάστασης.

Εφαρμογή 2.2.4. *Θεωρούμε το σύστημα*

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 10x_2 &= b_1 \\ 5x_1 + 7x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

με πίνακα συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ άρα } A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

- *Εάν κάνουμε χρήση της (2.8) για τον δείκτη κατάστασης (χρήση της νόρμας του πίνακα) έχουμε:*

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa(A)_{\|\|_1} = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = (|7| + |10|) \cdot (|-7| + |10|) = 17 \cdot 17 = 289 \\
&\kappa(A)_{\|\|_\infty} = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = (|7| + |10|) \cdot (|-7| + |10|) = 17 \cdot 17 = 289 \\
&\kappa(A)_2 = \sqrt{\rho(A^\star \cdot A)} = \sqrt{\frac{\max\limits_{\lambda\epsilon\sigma(A^\star\cdot A)} \{\lambda\}}{\min\limits_{\lambda\epsilon\sigma(A^\star\cdot A)} \{\lambda\}}} = \sqrt{\frac{\frac{223 + 15\sqrt{221}}{2}}{\left|\frac{223 - 15\sqrt{221}}{2}\right|}} \simeq \sqrt{\frac{445.9910}{0.00896}} \simeq 222.99 \simeq 223
\end{aligned}\right\}$$

και με εφαρμογή του ορισμού (2.10) για τον δείκτη κατάστασης

$$\kappa(A) = \frac{\max\limits_{\lambda\epsilon\sigma(A)} \{|\lambda|\}}{\min\limits_{\lambda\epsilon\sigma(A)} \{|\lambda|\}} = \frac{\max\{|7 \pm 5 \cdot \sqrt{2}|\}}{\min\{|7 \pm 5 \cdot \sqrt{2}|\}} = \frac{7 + 5 \cdot \sqrt{2}}{|7 - 5 \cdot \sqrt{2}|} \simeq 197.994 \simeq 198.$$

- *Οι παραπάνω τιμές για τον δείκτη κατάστασης του πίνακα A φανερώνουν ότι το σύστημα (1) είναι δυνατόν να επηρεάζεται από τις διαταραχές στις οποίες υποβάλλεται το δεύτερο μέλος. Προκειμένου να το διαπιστώσουμε θεωρούμε την ειδική περίπτωση:*

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 10x_2 &= 1 \\ 5x_1 + 7x_2 &= 0.7 \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

του οποίου η λύση είναι

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = 0.1.$$

Εάν θεωρήσουμε μια διαταραχή του δεύτερου μέλους του (1′) το διαταραχθέν σύστημα γράφεται

$$\left.\begin{aligned} 7\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 &= 1.01 \\ 5\tilde{x}_1 + 7\tilde{x}_2 &= 0.69 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

του οποίου η λύση είναι:

$$\tilde{x}_1 = -0.17, \quad \tilde{x}_2 = 0.22.$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι, το σύστημα (1) είναι ασταθές.

Δίνουμε κάποιες επιπλέον εφαρμογές - παραδείγματα σχετικά και με την εκτίμηση (2.9) διαταραχών πρώτου και δεύτερου μέλους γραμμικού συστήματος:

Παραδείγματα 2.2.5.

1. *Εάν $\|A^{-1}\| \cdot \|F\| < 1$ να αποδείξετε ότι $\|F\| < \|A\|$.*

   Απόδειξη. Είναι:
   $$F = A^{-1}AF = AA^{-1}F.$$
   Άρα, με χρήση γνωστών ιδιοτήτων της νόρμας πινάκων έχουμε:
   $$\|F\| = \|AA^{-1}F\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}F\| \cdot \|A\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|F\| \cdot \|F\|,$$
   όπου $\|A^{-1}\| \cdot \|F\| < 1$.
   Συνεπώς:
   $$\|F\| < \|A\| \cdot 1 = \|A\|.$$
   □

2. *Εάν $A = \operatorname{diag}\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ και $\|b\|_{infty} = 10$ και είναι γνωστό ότι τα στοιχεία των F, k φράσονται απολύτως από το $\epsilon > 0$ με $\epsilon < 0.1$ να αποδείξετε ότι*
   $$\frac{\|y\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{20\epsilon}{1 - 10\epsilon}.$$
   Εάν επιπλέον
   $$b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ \vdots \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} -\epsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \cdots & \epsilon \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
   να αποδείξετε ότι :
   $$\frac{\|y\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{20\epsilon}{1 + \epsilon}.$$

   Απόδειξη. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση (2.9) υπολογίζουμε:
   $$\|A\|_\infty = \max\{\operatorname{diag}\{1, 2, 3, \ldots, 10\}\} = 10. \tag{1}$$
   Επίσης:
   $$\|b\|_\infty = 1. \tag{2}$$

Για τα F και k έχουμε τα φράγματα:

$$\|F\|_\infty < \epsilon, \ \ \|k\|_\infty < \epsilon, \ \ \text{όπου } \epsilon < 0.1. \tag{3}$$

Για τον δείκτη κατάστασης:

$$\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = \max\{\operatorname{diag}\{1,2,3,\ldots,10\}\} \cdot \max\left\{\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10},\ldots,1\right\}\right\} = 10 \cdot 1. \tag{4}$$

Εφαρμόζουμε την εκτίμηση (2.9), είναι:

$$\frac{\|y\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\cdot\dfrac{\|F\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \cdot \left(\frac{\|k\|_\infty}{\|b\|_\infty} + \frac{\|F\|_\infty}{\|A\|_\infty}\right)$$

και με χρήση των (2)-(4) γίνεται:

$$\frac{\|y\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{10}{1-10\cdot\dfrac{\|F\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \cdot \left(\frac{\epsilon}{1} + \frac{\epsilon}{10}\right) \le \frac{10}{1-10\cdot\dfrac{\epsilon}{1}}(2\epsilon) = \frac{20\epsilon}{1-10\epsilon}.$$

Εάν θεωρήσουμε ότι $b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ \vdots \\ 1.0 \end{bmatrix}$, $k = \begin{bmatrix} -\epsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ και $F = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \cdots & \epsilon \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ τότε:

$$\left.\begin{aligned} \|b\|_\infty &= \max\{0.1, 0.2, \ldots, 1.0\} = 1 \\ \|F\|_\infty &= \epsilon + \epsilon + \cdots + \epsilon = 10\epsilon \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Όπως είδαμε, μετά από την εφαρμογή της διαταραχής (F,k), θα είναι:

$$y = (I + A^{-1}F)^{-1}A^{-1}k - (I + A^{-1}F)^{-1}A^{-1}Fx, \tag{6}$$

όπου

$$I + A^{-1}F = \begin{bmatrix} 1+\epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με αντίστροφο

$$(I+A^{-1}F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{-\epsilon}{1+\epsilon} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης:

$$A^{-1}k = \begin{bmatrix} -\epsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (I+A^{-1}F)^{-1}A^{-1}k = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Επαληθεύουμε επίσης εύκολα ότι:

$$A^{-1}F = F,$$

οπότε γίνεται:

$$(I+A^{-1}F)^{-1}F = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} & \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Άρα, εάν $x = [x_1\, x_2\, \ldots x_{10}]^T$:

$$(I+A^{-1}F)^{-1}A^{-1}Fx = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}x = \left[\frac{\epsilon x_1}{1+\epsilon}\,\frac{\epsilon x_2}{1+\epsilon}\ldots\frac{\epsilon x_{10}}{1+\epsilon}\right]^T. \tag{9}$$

Από τις (9) και (7) έχουμε:

$$y = (I + A^{-1}F)^{-1}A^{-1}k - (I + A^{-1}F)^{-1}A^{-1}Fx = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon(x_1+1)}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_2}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_3}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_4}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_5}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_6}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_7}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_8}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_9}{1+\epsilon} \\ -\frac{\epsilon x_{10}}{1+\epsilon} \end{bmatrix} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Από την (10) και τις ιδιότητες νόρμας διανυσμάτων συμπεραίνουμε ότι:

$$\|y\|_\infty = \| \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} \|_\infty = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \| \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} \|_\infty .$$

Από την:

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = \mathrm{diag}\{1 \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{10}\} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{5}{10} \\ \frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{8}{10} \\ \frac{9}{10} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

$\square$

3. *Να αποδείξετε ότι ο φασματικός δείκτης κατάστασης $\kappa(A)$ είναι ίσος με την μονάδα εάν και μόνο εάν αA είναι μοναδιαίος πίνακας για κάποιο $\alpha \neq 0$.*

Απόδειξη. Εάν θεωρήσουμε τον φασματικό ορισμό (ανεξάρτητο της νόρμας) του δείκτη κατάστασης[1]

$$\kappa(A) = \frac{\max\limits_{\lambda_i \in \sigma(A)} \{|\lambda_i|\}}{\min\limits_{\lambda_i \in \sigma(A)} \{|\lambda_i|\}}.$$

Παρατηρούμε ότι :

$$\kappa(A) = 1 \Leftrightarrow \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} \{\lambda_i\} = \min_{\lambda_i \in \sigma(A)} \{\lambda_i\}.$$

Άρα:

$$\kappa(A) = 1 \Leftrightarrow \lambda_{\max} = \lambda_{\min}, \ \ \lambda_{\max}, \lambda_{\min} \in \sigma(A)$$

και από την singular value decomposition - SVD συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \neq 0$ τέτοιο ώστε αA μοναδιαίος. □

2.2.2 Υπολογισμός φραγμάτων σφάλματος γραμμικών εξισώσεων

Έστω C_A ο αριθμητικά υπολογισμένος αντίστροφος του πίνακα A, ορίζουμε τον **πίνακα - υπόλοιπο** μέσω της

$$R_A = I - C_A \cdot A \text{ ή } (R_A = I - A \cdot C_A). \tag{2.11}$$

Το επόμενο θεώρημα συνοψίζει αποτελέσματα σχετικά με τον πίνακα υπόλοιπο, τον αριθμητικώς υπολογισμένο αντίστροφο και τον αρχικό πίνακα:

Θεώρημα 2.2.6. *Εάν $\|C_A\| < 1$ για κάθε φυσική νόρμα τότε:*

i) Οι A και C_A είναι αντιστρέψιμοι.

ii) $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{\|C_A\|}{1 - \|R_A\|}$.

iii) $\|A^{-1} - C_A\| \leq \dfrac{\|C_A\| \cdot \|R_A\|}{1 - \|R_A\|}$.

Εάν ο πίνακας $\|R_A\| < 1$ για κάθε φυσική νόρμα τότε

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{C\|_A\| \cdot \|r\|}{1 - \|R_A\|},$$

όπου ως r ορίζεται το **υπόλοιπο διάνυσμα**

$$r = b - A\tilde{x}$$

με $\tilde{x}$ αριθμητική λύση της $Ax = b$.

[1] έχουμε ήδη αναφερθεί στην συγκεκριμένη έννοια

Απόδειξη.

i) Από υπόθεση $\|R_A\| < 1$. Συνεπώς, με εφαρμογή της πρότασης (2.1.5) ο $C_A \cdot A = I - R_A$ θα είναι αντιστρέψιμος κι επιπλέον :

$$\|(I - R_A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|R_A\|} \tag{2.12}$$

και

$$\det(C_A \cdot A) = \det(C_A) \cdot \det(A) = \det(I - R_A) \neq 0.$$

Δηλαδή $\det(A) \neq 0$, $\det(C_A) \neq 0$ το οποίο σημαίνει ότι οι A, C_A είναι αντιστρέψιμοι.

ii) Ο $I - R_A$ αντιστρέψιμος, έπεται

$$C_A = (I - R_A)A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = (I - R_A)^{-1}C_A.$$

Οπότε, από τον ορισμό της έννοιας της νόρμας και την (2.12) έχουμε:

$$\|A^{-1}\| = \|(I - R_A)C_A\| \leq \|C_A\| \cdot \|(I - R_A)^{-1}\| \leq \frac{\|C_A\|}{1 - \|R_A\|}. \tag{*}$$

iii) Είναι:

$$R_A = I - C_A \cdot A = (A^{-1} - C_A) \cdot A \Rightarrow A^{-1} - C_A = R_A A^{-1}.$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του ορισμού της νόρμας καθώς και την ανισότητα ($\star$) στο προηγηθέν μέλος (ii) γίνεται:

$$\|A^{-1} - C_A\| \leq \|R_A\| \cdot \|A^{-1}\| \leq \frac{\|R\| \cdot \|C_A\|}{1 - \|R_A\|}.$$

Επειδή $\|R_A\| < 1$ από το μέλος (i) έπεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και θα υπάρχει μοναδική λύση x του $Ax = b$. Είναι λοιπόν:

$$r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = A\left(x - \tilde{x}\right).$$

Οπότε

$$x - \tilde{x} = A^{-1}r.$$

Έτσι, περνάμε στην εκτίμηση φράγματος για την διαφορά

$$\|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1} \cdot r\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\| \leq \frac{\|C_A\| \cdot \|r\|}{1 - \|R_A\|}.$$

Παρατήρηση. *Η εκτίμηση* $\|x - \tilde{x}\| \leq \dfrac{\|C_A\| \cdot \|r\|}{1 - \|R_A\|}$ *έχει μικρή υπολογιστική σημασία μιας και απαιτείται ο προσδιορισμός του αντιστρόφου* A^{-1}.

□

2.3 Διαταραχές ιδιοτιμών απλού πίνακα

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και για $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ θα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$A = PDP^{-1}.$$

Εάν $\|\cdot\|_n$ διανυσματική νόρμα και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα στον χώρο πινάκων τότε με χρήση του θεωρήματος των Bauer, Stoer, Witzgall - Numerische Math. 3(1961), 257-264 ([9], σελ: 368-369)

$$\|A\| \leq \kappa(A) \max_{1\leq i\leq n} \{|\lambda_i|\},$$

όπου $\kappa(P)$ ο δείκτης κατάστασης του P ως προς την $\|\cdot\|$.

Παρατήρηση. *Η ανάλυση $A = PDP^{-1}$ δεν είναι μονοσήμαντη και μάλιστα ισχύει:*

$$A = QDQ^{-1}$$

για κάθε πίνακα $Q = PD_1$ όπου D_1 μη ιδιάζον διαγώνιος πίνακας.
Είναι λοιπόν φυσικό να ορίσουμε ως το καλύτερο δυνατό φράγμα

$$\nu(A) = \inf_P \kappa(P),$$

όπου P όλοι οι πίνακες για τους οποίους $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το φράγμα είναι το καλύτερο δυνατόν και ισχύει:

$$\|A\| \leq \nu(A) \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|.$$

Θεώρημα 2.3.1. *Εάν $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $\|\cdot\|$ νόρμα πινάκων επαγόμενη από διανυσματική νόρμα $\|\|_n$ και $\nu(A) = \inf_P \{\kappa(P)\}$ με $P^{-1}AP$ διαγώνιο πίνακα, τότε*

$$\frac{\|A\|}{\nu(A)} \leq \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \leq \|A\| \tag{2.13}$$

και

$$l(A) \leq \min_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \leq \nu(A) l(A), \tag{2.14}$$

όπου

$$l(A) = \inf_{x\in\mathbb{F}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_n}$$

το κατώτερο φράγμα του A ως προς την νόρμα $\|\cdot\|$ [9].

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι εάν $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ οι ιδιοτιμές του A με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{x_i\}_{i=1}^n$, τότε ως προς τυχαία διανυσματική νόρμα :

$$\frac{\|Ax_i\|_n}{\|x_i\|_n} = \frac{\|\lambda_i x_i\|_n}{\|x_i\|_n} = \frac{|\lambda_i| \cdot \|x_i\|_n}{\|x_i\|_n} = |\lambda_i|.$$

Άρα:

$$\min_{1\leq i\leq n} \{|\lambda_i|\} \subseteq \inf_{x\neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_n} \right\} \Rightarrow l(A) \leq \min_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$$

και το αριστερό μέλος της ανισότητας (2.13) αποδείχθηκε.
Είναι επίσης σαφές από την παραπάνω σχέση εγκλεισμού ότι:

$$\max_{1\le i\le n}|\lambda_i| \le \|A\|.$$

Επειδή όμως:

$$\min_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\} \le \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$$

η (2.13) αποδείχθηκε.
Σχετικά με την (2.14) παρατηρούμε ότι για $x \neq 0$, $y = Ax \neq 0$:

$$l(A) = \inf_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_n} = \inf_{y\neq 0}\frac{\|y\|_n}{\|A^{-1}y\|_n} = \left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|A^{-1}y\|_n}{\|y\|}\right)^{-1} = \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

δηλαδή

$$l(A) = \begin{cases}\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}, & \det A \neq 0\\ 0, & \det A = 0\end{cases}. \tag{1}$$

Επίσης είναι προφανές ότι για διαγώνιο πίνακα $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$:

$$l(D) = \min_{1\le i\le n}|\lambda_i|. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε :

$$l(AB) = \frac{1}{\|(AB)^{-1}\|} = \frac{1}{\|B^{-1}\cdot A^{-1}\|} \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|\cdot\|B^{-1}\|} = l(A)\cdot l(B).$$

Άρα:

$$l(AB) \ge l(A)\cdot l(B). \tag{3}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τις (2) και (3) στην εξίσωση $A = PDP^{-1}$ και γίνεται:

$$l(A) = l(PDP^{-1}) \ge l(P)l(D)l(P^{-1}) = l(P)l(P^{-1})\min_{1\le i\le n}|\lambda_i|.$$

Συνδυάζοντας με την (1) έχουμε:

$$l(A) \le (\kappa(P))^{-1}\min_{1\le i\le n}|\lambda_i|.$$

□

Παρατήρηση. *Λόγω της δυσκολίας υπολογισμού του κατωτέρου φράγματος του δείκτη κατάστασης το θεώρημα (2.2.6) δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμο. Είναι όμως σαφές καταρχήν ότι από την $P^{-1}P = I$ έπεται ότι :*

$$\kappa(P) = \|P\|\|P^{-1}\| \ge 1,$$

δηλαδή $\kappa(P) \ge 1$ άρα και $\nu(A) \ge 1$.
Εάν ο πίνακας A είναι κανονικός τότε μπορούμε να επιλέξουμε τον P να είναι μοναδιαίος και μάλιστα εάν χρησιμοποιήσουμε την Ευκλείδια νόρμα τότε $\|P\| = \|P^{-1}\| = 1$ το οποίο σημαίνει ότι για ένα κανονικό πίνακα, ως προς την φασματική νόρμα, θα έχουμε $\nu(A) = 1$ και το θεώρημα (2.3.1) ανάγεται στις περιπτώσεις

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|, \ \ \nu(A) = \min_{1\le i\le n}|\lambda_i|.$$

Το επόμενο θεώρημα φανερώνει την σημασία του κάτω φράγματος $\nu(A)$, του δείκτη κατάστασης. Η ποσότητα αυτή συνδέεται άμεσα με την ευστάθεια των ιδιοτιμών όταν ο πίνακας υποβληθεί σε διαταραχές.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με A απλό, εάν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A , μ ιδιοτιμή του $A+B$ και εάν ως προς νόρμα πίνακα επαγόμενη από διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ ισχύει:*

$$r = \|B\|\nu(A)$$

τότε η μ βρίσκεται τουλάχιστον εντός ενός εκ των δίσκων:

$$\{z : |z-\lambda_i| \leq r\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

του μιγαδικού επιπέδου.

Απόδειξη. Επειδή η ιδιοτιμή μ του πίνακα $A+B$ υπάρχει $\vec{y} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε:

$$(A+B)\vec{y} = \mu\vec{y}.$$

Εάν $A = PDP^{-1}$, με $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ τότε

$$\left(D + P^{-1}BP\right)\vec{x} = \mu\vec{y},$$

όπου $\vec{x} = P^{-1}\vec{y} \neq \vec{0}$.
Τότε:

$$(\mu I - D)\,\vec{x} = P^{-1}BP\vec{x}.$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} I\,(\mu I - D) &\leq \frac{\|\,(\mu I - D)\,\vec{x}\|_n}{\|\vec{x}\|_n} = \frac{\|P^{-1}BP\vec{x}\|_n}{\|\vec{x}\|_n} \\ &\leq \|P^{-1}BP\| \leq \kappa(B)\|B\|. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\min_{1\leq i\leq n} |\mu - \lambda_i| \leq \kappa(P)\|B\|.$$

Επειδή η προηγούμενη σχέση αληθεύει για κάθε πίνακα P ο οποίος διαγωνιοποιεί τον πίνακα A, έπεται:

$$\min_{1\leq i\leq n} |\mu - \lambda_i| \leq \nu(A)\|B\| = r.$$

Άρα, η ιδιοτιμή μ βρίσκεται κατά ελάχιστον μέσα σε ένα από τούς δίσκους $|z-\lambda_i| \leq r$, όπου $i = 1, 2, \dots, n$. □

Εάν ο πίνακας διαταραχής B του προηγούμενου θεωρήματος (2.3.2) είναι επίσης απλός, έχουμε το επόμενο θεώρημα σχετικά με τις ακτίνες των δίσκων εντός των οποίων περιέχονται οι ιδιοτιμές του $A+B$:

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με A απλό, εάν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A , μ ιδιοτιμή του $A+B$ και επιπλέον B απλός με ιδιοτιμές $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, τότε η μ βρίσκεται μέσα σε τουλάχιστον ένα από τους δίσκους*

$$\left\{z : |z-\lambda_i| \leq \nu(A,B)\max_i |\mu_i|\right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

όπου

$$\nu(A,B) = \inf_{P,Q} \kappa(P^{-1}Q)$$

με P, Q διαγωνιοποιούντες πίνακες των A, B αντιστοίχως.

Απόδειξη. Η εξίσωση

$$(\mu I - D)\,\vec{x} = P^{-1}BP\vec{x}$$

γράφεται στην μορφή:

$$(\mu I - D)\,\vec{x} = (P^{-1}Q)D_1(P^{-1}Q)^{-1}\vec{x},$$

όπου

$$D_1 = \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}.$$

Συνεπώς:

$$l(\mu I - D) \leq \kappa(P^{-1}Q)\|D_1\| \leq \kappa(P^{-1}Q)\max_i |\mu_i|.$$

Το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Παρατήρηση. *Ο πίνακας P διαγωνιοποιεί τον A εάν και μόνον εάν ο P διαγωνιοποιεί τον $\alpha I + A$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$. Πράγματι, εάν ο P διαγωνιοποιεί τον A:*

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP \Rightarrow P^{-1}(\alpha I + A)\,P = \alpha P^{-1}P + P_{-1}DP = \alpha I + A.$$

Το αντίστροφο είναι προφανές για $\alpha = 0$.

Από την προηγούμενη παρατήρηση, εάν οι P, Q διαγωνιοποιούν τους A, B αντιστοίχως και με εφαρμογή του θεωρήματος (2.3.3) για τους πίνακες $\alpha I + A$, $-\alpha I + B$, λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$(\alpha I + A) + (-\alpha I + B) = A + B,$$

καταλήγουμε στο επόμενο:

Πόρισμα 2.3.4. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με A απλό, εάν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A , μ ιδιοτιμή του $A + B$ και επιπλέον B απλός με ιδιοτιμές $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, τότε η μ βρίσκεται μέσα σε τουλάχιστον ένα από τους δίσκους*

$$\left\{ z : |z - (\alpha + \lambda_i)| \leq \nu(A,B) \max_{1\leq i\leq n} |\mu_i - \alpha|, \right\},\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

για τυχαίο σταθερό $\alpha \in \mathbb{C}$.

Σχόλιο. *Η σημασία του συμπεράσματος του πορίσματος (2.3.4) συνίσταται στο ότι μας επιτρέπει να επιλέξουμε $\alpha \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το εμβαδόν των δίσκων που περιέχουν τις ιδιοτιμές.*

Εάν υποθέσουμε ότι πέρα των υποθέσεων του πορίσματος (2.3.4) οι πίνακες A, B είναι κανονικοί τότε οι αντίστοιχοι διαγωνιοποιούντες πίνακες P, Q είναι μοναδιαίοι οπότε:

$$\nu(A,B) = \inf_{P,Q} \kappa(P^{-1}Q) = 1.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο επόμενο:

Πόρισμα 2.3.5. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με A απλό, εάν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A , μ ιδιοτιμή του $A+B$ και επιπλέον B απλός με ιδιοτιμές $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, και A, B κανονικοί, τότε η μ βρίσκεται μέσα σε τουλάχιστον ένα από τους δίσκους:*

$$\left\{ z : |z-(\alpha+\lambda_i)| \le \max_{1\le i\le n} |\mu_i - \alpha|, \right\}, \;\; i = 1,2,\ldots,n,$$

για τυχαίο σταθερό $\alpha \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 2.3.6. *Εάν A κανονικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και B έχει όλες τις ιδιοτιμές του ίσες με ϵ τότε οι ιδιοτιμές του $A+B$ περιέχονται στους δίσκους*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \left(\frac{n\epsilon}{2} + \lambda_i \right) \right| \le \frac{n}{2}|\epsilon| \right\}, \;\; i = 1,2,\ldots,n.$$

Απόδειξη.

Παρατήρηση. *Εάν $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με ϵ τότε οι ιδιοτιμές του B είναι*

$$\lambda_1 = n\epsilon, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0. \tag{1}$$

Η επαλήθευση μπορεί να γίνει και επαγωγικά. Είναι επίσης γνωστό ότι εάν A κανονικός τότε ως προς την φασματική νορμική

$$\nu(A) = 1. \tag{2}$$

Από το θεώρημα (2.3.1), με χρήση της φασματικής νόρμας θα έχουμε ότι οι ιδιοτιμές του πάνακα $A+B$ θα περιέχονται κατά ελάχιστον σε ένα από τους δίσκους:

$$\{z : |z-\lambda_i| \le r\}, \tag{3}$$

όπου

$$r = \|B\| \cdot \nu(A). \tag{4}$$

Από την κανονικότητα του A έχουμε ότι ως προς την φασματική νόρμα:

$$\nu(A) = 1.$$

Επιπλέον:

$$\|B\| = \max\{|n\epsilon|, 0, 0, \ldots, 0\} = n|\epsilon|. \tag{5}$$

Συνεπώς (3) γίνεται:

$$\{z : |z-\lambda_i| \le n|\epsilon| = n\epsilon\}, \;\; \text{εάν } \epsilon > 0. \tag{6}$$

Όμως:

$$\left| z - \left(\frac{n\epsilon}{2} + \lambda_i \right) \right| \le \frac{n}{2}|\epsilon| \Leftrightarrow -\frac{n}{2}\epsilon \le z - \frac{n}{2}\epsilon - \lambda_i \le \frac{n}{2}|\epsilon|.$$

Για $\epsilon > 0$ έχουμε λοιπόν:

$$\left| z - \left(\frac{n\epsilon}{2} + \lambda_i \right) \right| \le \frac{n}{2}\epsilon \Leftrightarrow 0 < z - \lambda_i < n\epsilon,$$

ή

$$|z-\lambda_i| \le n\epsilon.$$

Το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Παράδειγμα 2.3.7. *Έστω A κανονικός πίνακας και $B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ πραγματικός διαγώνιος. Να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές του $A + B$ ανήκουν στους δίσκους*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - (\alpha + \lambda_i)| \le \beta\}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A και

$$2\alpha = \max_{1\le i\le n} b_i + \min_{1\le i\le n} b_i \text{ και } 2\beta = \max_{1\le i\le n} b_i - \min_{1\le i\le n} b_i.$$

Απόδειξη.

Παρατήρηση. *Επειδή ο πίνακας B είναι διαγώνιος και πραγματικός έπεται ότι B κανονικός.*

Εφαρμόζουμε το πόρισμα (2.3.5) για A, B κανονικούς με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A και $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ιδιοτιμές του $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Οι ιδιοτιμές του $A + B$ βρίσκονται εντός των δίσκων

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z - (\alpha + \lambda_i)| \le \max_{1\le i\le n}\{|b_i - \alpha|\}\right\},$$

για τυχαίο $\alpha \in \mathbb{C}$.
Έστω $\alpha = \frac{1}{2}\left\{\max_{1\le i\le n} b_i + \min_{1\le i\le n} b_i\right\}$ τότε γίνεται:

$$b_i - \alpha = b_i - \frac{1}{2}\left\{\max_{1\le i\le n} b_i + \min_{1\le i\le n} b_i\right\} = \frac{2b_i - \max_{1\le i\le n}\{b_i\} - \min_{1\le i\le n}\{b_i\}}{2} \Rightarrow$$
$$\max_{1\le i\le n}|b_i - \alpha| = \max_{1\le i\le n}\{b_i\} - \min_{1\le i\le n}\{b_i\}. \tag{*}$$

Σχόλιο. *Σχετικά με την $(\star)$: Έστω*

$$b_r = \max_{1\le i\le n} b_r, \ \ b_s = \min_{1\le i\le n} b_r.$$

Τότε

$$\max_{1\le i\le n}|b_i - \alpha| = \frac{2b_r - b_r - b_s}{2} = \frac{b_r - b_s}{2} = \beta.$$

□

2.4 Αναλυτικές διαταραχές & πίνακες συνιστώσες

Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ο αρχικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και θεωρούμε τον πίνακα $A(\zeta) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ του οποίου τα στοιχεία είναι αναλυτικές συναρτήσεις της μεταβλητής ζ εντός περιοχής του ζ_0 με $A(\zeta_0) = A$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\zeta_0 = 0$, $A(0) = A$. Έστω $\lambda_1(\zeta), \lambda_2(\zeta), \ldots, \lambda_n(\zeta)$ οι ιδιοτιμές του $A(\zeta)$. Λόγω της συνεχούς εξάρτησης των ιδιοτιμών του $A(\zeta)$ από τα στοιχεία του $A(\zeta)$ ισχύει:

$$\lim_{\zeta\to 0} \lambda_i(\zeta) = \lambda_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Τα επόμενα παραδείγματα καταδεικνύουν το γεγονός ότι, παρότι οι ιδιοτιμές εξαρτώνται συνεχώς από τα στοιχεία του πίνακα, είναι δυνατόν οι μεταβολές μεταξύ των ιδιοτιμών του αρχικού και του διαταραγμένου πίνακα να εμφανίζουν σημαντικές αποκλίσεις ([9]).

Παραδείγματα 2.4.1.

1. *Έστω ο 10×10 πίνακας $A(\zeta)$, συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής ζ:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & 1 \\ \zeta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του $A(0)$ είναι:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{10} = 0,$$

ενώ οι ιδιοτιμές του $A(10^{-10})$ είναι

$$A(10^{-10}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^{10} = \frac{1}{10^{10}} \Rightarrow \ldots.$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές για $z = 0$ και $z = 10^{-10}$ αποκλίνουν απολύτως κατά 10^{-1}.

> **Σχόλιο.** *Η απόκλιση μεταξύ των $A(0)$, $A(10^{-10})$ είναι απειροστής τάξεως ώστε να είναι δυσδιάκριτη στην αναπαρασταση τους σε υπολογιστικό σύστημα χαμηλής ευκρινείας. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα περί της τάξης μεταβολής των $\lambda_i(\zeta)$, $i = 12, \ldots, n$, όταν τα $|\zeta|$ είναι αρκετά μικρά. Διαπιστώνουμε στην συνέχεια ότι οι $\lambda_i(z)$ είναι επίσης αναλυτικές σε περιοχή του $z_0 = 0$. Το επόμενο παράδειγμα καταδεικνύει ότι αυτό δεν συνιστά γενικότητα.*

2. *Οι ιδιοτιμές του πίνακα*

$$A(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^2 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\det(A(\zeta) - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(\zeta) = \zeta^{\frac{3}{2}} \\ \lambda_2(\zeta) = -\lambda_1(\zeta) \end{cases}$$

και είναι σαφές ότι οι ιδιοτιμές **δεν είναι αναλυτικές** *σε περιοχή του $\zeta = 0$.*

Σχόλιο. *Παρατηρούμε η ορίζουσα* $\det(A(\zeta) - \lambda I)$ *είναι πολυώνυμο με συντελεστές αναλυτικές συναρτήσεις του* ζ *και από την θεωρία των αναλυτικών αλγεβρικών συναρτήσεων έπεται:*

- *Εάν* λ_j *είναι απλή ιδιοτιμή του* A *τότε η* $\lambda_i(\zeta)$ *είναι αναλυτική σε περιοχή του* $z = 0$.
- *Εάν* λ_i *είναι ιδιοτιμή πολλαπλότητας* m *και* $\lambda_k(\zeta) \to \lambda_i$, *για* $k = \alpha_1, \dots, \alpha_m$, *τότε η* $\lambda_k(\zeta)$ *αναλυτική συνάρτηση του* $\lambda^{1/l}$ *περί το* $\zeta = 0$, *για* $l \leq m$ *και* $\zeta^{1/l}$ *είναι ένας από τους* l *κλάδους της συναρτήσεως* $\zeta^{1/l}$, *συνεπώς η* $\lambda_i(\zeta)$ *επιδέχεται ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά του* $\zeta^{1/l}$.

Το επόμενο θεώρημα αφορά την περίπτωση κατά την οποία η αρχική (πριν την διαταραχή) ιδιοτιμή διασπάται σε διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1(\zeta), \dots, \lambda_p(\zeta)$ του διαταραγμένου πίνακα $A(\zeta)$. Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των πρώτων συνιστωσών πινάκων καθεμιάς από τις ιδιοτιμές αυτές είναι αναλυτική περί το $\zeta = 0$.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω* $A(\zeta)$ *αναλυτικός πίνακας εντός περιοχής του* $\zeta = 0$ *και* $A(0) = A$. *Υποθέτουμε ότι* $\lambda_1(\zeta), \dots, \lambda_p(\zeta)$ *είναι διακριτές ιδιοτιμές του* $A(\zeta)$ *για τις οποίες* $\lim_{\zeta \to 0} \lambda_k(\zeta) = \lambda$, $k = 1, 2, \dots, p$ *και έστω* $Z_{k0}(\zeta)$ *ο μηδενοδύναμος πίνακας - συνιστώσα του* $A(\zeta)$ *η οποία αντιστοιχεί στην* $\lambda_k(\zeta)$. *Εάν* Z *είναι ο μηδενοδύναμος πίνακας - συνιστώσα του* $A(\zeta)$ *προσαρτημένος της* $\lambda_k(\zeta)$ *και ορίσουμε*

$$Y(\zeta) = \sum_{k=1}^{p} Z_{k0}(\zeta)$$

τότε υπάρχει περιοχή του $\zeta = 0$ *εντός της οποίας ισχύουν τα παρακάτω αναπτύγματα:*

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= Z + \zeta C_1 + \zeta^2 C_2 + \cdots \\ A(\zeta)Y(\zeta) &= AZ + \zeta B_1 + \zeta^2 B_2 + \cdots \end{aligned}$$

για πίνακες C_r, C_r, $r = 1, 2, \dots$, *ανεξάρτητους του* ζ *([9]).*

Το επόμενο παράδειγμα καταδεικνύει ότι οι πίνακες συνιστώσες δεν πληρούν αναγκαστικά πάντοτε την ιδιότητα του να είναι αναλυτικές γύρω από το σημείο $\zeta = 0$.

Παράδειγμα 2.4.3. *Εάν*

$$A(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^2 & 0 \end{bmatrix}$$

να υπολογιστούν οι πίνακες Z, $Z_{10}(\zeta)$, $Z_{20}(\zeta)$ *και* $Y(\zeta)$.

Απόδειξη.

Στο σημείο $\zeta = 0$ ο πίνακας $A(0) = A$ είναι ο μηδενικός πίνακας και $Z = \mathbb{I}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ιδιοτιμές του $A(\zeta)$ είναι:

$$\mu_1(\zeta) = \zeta^{3/2}, \;\; \mu_2(\zeta) = -\mu_1(\zeta)$$

και

$$R_z(\zeta) = \begin{bmatrix} z & \zeta \\ \zeta^2 & z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 - \zeta^3} \begin{bmatrix} z & \zeta \\ \zeta^2 & z \end{bmatrix}.$$

Είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{z^2-\zeta^3} = \dfrac{z}{(z-\zeta^{3/2})(z+\zeta^{3/2})} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{z-\zeta^{3/2}} + \dfrac{1}{z+\zeta^{3/2}}\right\} \\ \dfrac{\zeta}{z^2-\zeta^3} = \dfrac{\zeta}{(z-\zeta^{3/2})(z+\zeta^{3/2})} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\zeta^{-1/2}}{z-\zeta^{3/2}} - \dfrac{z^{-1/2}}{z+\zeta^{3/2}}\right\} \\ \dfrac{\zeta^2}{z^2-\zeta^3} = \dfrac{\zeta^2}{(z-\zeta^{3/2})(z+\zeta^{3/2})} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\zeta^{1/2}}{z-\zeta^{3/2}} - \dfrac{\zeta^{1/2}}{z+\zeta^{3/2}}\right\} \\ \dfrac{\zeta}{z^2-\zeta^3} = \dfrac{z}{(z-\zeta^{3/2})(z+\zeta^{3/2})} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{z-\zeta^{3/2}} + \dfrac{1}{z+\zeta^{3/2}}\right\} \end{cases}.$$

Συνεπώς:

$$R_z(\zeta) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-\zeta^{3/2}} + \dfrac{1}{z+\zeta^{3/2}} & \dfrac{\zeta^{-1/2}}{z-\zeta^{3/2}} - \dfrac{z^{-1/2}}{z+\zeta^{3/2}} \\ \dfrac{\zeta^{1/2}}{z-\zeta^{3/2}} - \dfrac{\zeta^{1/2}}{z+\zeta^{3/2}} & \dfrac{1}{z-\zeta^{3/2}} + \dfrac{1}{z+\zeta^{3/2}} \end{bmatrix}.$$

Είναι λοιπόν ([9], σελ.332)

$$\begin{cases} Z_{10}(\zeta) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & z^{-1/2} \\ \zeta^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \\ Z_{20}(\zeta) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -z^{-1/2} \\ -\zeta^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$Y(\zeta) = Z_{10}(\zeta) + Z_{20}(\zeta) = I.$$

Σχόλιο. *Επισημαίνεται ότι παρότι ο $Y(\zeta)$ είναι αναλυτικός ως προς ζ (ταυτοτικός) οι πίνακες - συνιστώσες του αθροίσματος δεν είναι κατ΄ ανάγκη αναλυτικοί μιας και οι συγκεκριμένοι $Z_{10}(\zeta)$, $Z_{20}(\zeta)$ εμφανίζουν ιδιάζον σημείο στο $\zeta = 0$. Επιπλέον, να σημειωθεί ότι παρότι οι ιδιοτιμές δεν είναι αναλυτικές σε κάθε περιοχή η οποία περιέχει το $\zeta = 0$, συμπεριφέρονται καλύτερα από ότι οι πίνακες συνιστώσες.*

□

Κεφάλαιο 3

Προβλήματα ευστάθειας

3.1 Εισαγωγή

Ένα πρόβλημα σημαντικού ενδιαφέροντος συνίσταται στον προσδιορισμό της συμπεριφοράς ενός φυσικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας. Εάν το σύστημα επανέρχεται στην πρότερή του κατάσταση, αφού προηγηθεί μία μικρή διαταραχή, καλείται ευσταθές, σε αντίθετη περίπτωση καλείται ασταθές.
Παρότι τα φυσικά συστήματα ελέγχονται συχνά ως προς το εάν ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα, πολλές φορές συμβαίνει το κόστος αυτής της πειραματικής διαδικασίας να είναι ιδιαιτέρως χρονοβόρο και ακριβό. Έπεται λοιπόν ότι αναφορικά με τον σχεδιασμό συστημάτων θα ήταν επιθυμητό να έχουμε διαθέσιμα μαθηματικά κριτήρια ευστάθειας. Για παράδειγμα, η γραμμική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = c. \tag{1}$$

Η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιείται συχνά προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά ενός συστήματος στην εγγύτητα ενός σημείου ισορροπίας, το οποίο στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το $x = 0$. Συνεπώς, θα ξεκινήσουμε την διαδικασία προσδιορίζοντας μια ικανή και αναγκαία συνθήκη υπό την οποία η λύση της (1) θα τείνει στο 0 για $t \to \infty$. Το συγκεκριμένο πρόβλημα (μηχανικής υφής, οικονομικό ή φυσικό) είναι συνήθως πιο περίπλοκο με την περιγράφουσα εξίσωση μη γραμμική της μορφής:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(y), \ \ y(0) = c. \tag{2}$$

Γεννάται λοιπόν το ερώτημα ως προς το εάν και κατά πόσο τα κριτήρια τα οποία λαμβάνονται από τα γραμμικά συστήματα παρέχουν κάποια βοήθεια ως προς την συναγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ευστάθεια μη γραμμικών συστημάτων. Όπως θα δούμε στην συνέχεια, τα συστήματα (1) και (2) είναι ισοδύναμα όταν οι συνθήκες δεν είναι εξεζητημένες. Σε αυτό ακριβώς έγγειται και η ουσία των κλασσικών εργασιών των Poincaré και Lyapunov.

3.2 Θεωρία ευστάθειας - εισαγωγικά

Στην απλή περίπτωση στην οποία θα αναφερθούμε εν συντομία στην παρούσα ενότητα είναι δυνατόν να γίνει μια σημαντική απλοποίηση. Ειδικότερα, δεν θα αναφερθούμε στην έννοια της κατά Lyapunov ευστάθειας την οποία θα εισαγάγουμε στην επόμενη ενότητα και θα παρουσιάσουμε εκτενέστερα. Στην θεωρία ελέγχου μια σημαντική έννοια είναι η έννοια της **ασυμπτωτικής ευστάθειας** αναφορικά με διαφορικές εξισώσεις. Αναφορικά με γραμμικά, χρονικώς ανεξάρτητα συστήματα η έννοια καθίσταται σημαντικά απλούστερη.
Είναι γνωστό ότι ορίζεται η έννοια της ευστάθειας πίνακα A ως εξής ([10], [9]):
Ορισμός 3.2.1. *Ο πίνακας A είναι* **ευσταθής** *εάν και μόνον εάν για κάθε λύση $x(t)$ της εξισώσεως $\dot{x}(t) = Ax(t)$ έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Παρατήρηση. *Μια συνάρτηση η οποία είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $t^k e^{\lambda t}$, όπου οι ποσότητες k είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\lambda \in \mathbb{C}$, καλείται* **συνάρτηση Bohl**. *Οι αριθμοί λ οι καλούνται* **χαρακτηριστικοί εκθέτες** *της συναρτήσεως Bohl και το σύνολο των χαρακτηριστικών εκθετών μιας συναρτήσεως Bohl p καλείται* **φάσμα αυτής** *και συμβολίζεται με $\sigma(p)$ [10].*

Έστω η ομογενής, χρονικώς ανεξάρτητη εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{3.1}$$

όπου A γραμμική απεικόνιση (πίνακας) $n \times n$[1], ισχύει η επόμενη:
Πρόταση 3.2.2.

- *Τα στοιχεία του εκθετικού πίνακα e^{At} είναι συναρτήσεις Bohl. Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες αυτών είναι οι ιδιοτιμές του A και κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται ως χαρακτηριστικός εκθέτης κάποιου στοιχείου του e^{At}.*

- *Εάν p και q είναι συναρτήσεις Bohl τότε και οι συναρτήσεις $p+q$, pq, $\dot{p}$ είναι συναρτήσεις Bohl.*

- *Ισχύουν επίσης οι:*

$$\begin{cases} \sigma(pq) \subset \sigma(p) + \sigma(q) \\ \sigma(p+q) \subset \sigma(p) \cup \sigma(q) \\ \sigma(\dot{p}) \subset \sigma(p) \end{cases}$$

- *Επίσης, εάν:*

$$r(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau$$

τότε, η r είναι συνάρτηση Bohl τέτοια ώστε:

$$\sigma(r) \subset \sigma(p) + \{0\}.$$

[1] A δεν εξαρτάται από τον χρόνο

Ας θεωρήσουμε το μη ομογενές πρόβλημα αρχικής τιμής:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \ x(0) = 0. \tag{3.2}$$

Η λύση του προβλήματος (3.2) είναι δυνατόν να εκφρασθεί συναρτήσει των όρων της εκθετικής συνάρτησης πινάκων. Πράγματι, εάν εισαγάγουμε την συνάρτηση

$$z(t) = e^{-At}x(t).$$

Παρατηρούμε ότι συνάρτηση πληροί την διαφορική εξίσωση

$$\dot{z}(t) = -Az(t) + e^{-At}\left(Ax(t) + f(t)\right) = e^{-At}f(t)$$

η οποία επιλύεται με ολοκλήρωση:

$$z(t) = z(0) + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau)d\tau.$$

Επειδή

$$x(t) = e^{At}z(t)$$

λαμβάνουμε τελικά

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(\tau - t)} f(\tau)d\tau, \ z(0) = x_0. \tag{3.3}$$

Η εξίσωση (3.3) είναι ο **τύπος μεταβολής** των **σταθερών** και ισχύει για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(t)$.

Καταλήξαμε λοιπόν στο επόμενο:

Θεώρημα 3.2.3. *Εάν $f(t)$ συνάρτηση Bohl τότε η λύση της (3.2) είναι επίσης συνάρτηση Bohl.*

Μιά συνθήκη ευστάθειας είναι απόρροια του επομένου αποτελέσματος:

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω p συνάρτηση Bohl, ορίζεται η φασματική τετμημένη της p ως:*

$$\Lambda(p) = \max\left\{\Re\lambda \, : \, \lambda \in \sigma(p)\right\}.$$

Τότε:

i) Εάν $\Lambda(p) < 0$, ή, ισοδυνάμως, κάθε εκθέτης λ της p ικανοποιεί την $\Re\lambda < 0$, ισχύει:

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0.$$

Ειδικότερα για κάθε $\gamma > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε :

$$|p(t)| \leq Me^{-\gamma t}, \ \forall t \geq 0.$$

ii) Γιά κάθε $\alpha > \Lambda(p)$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|p(t)| \leq Me^{\alpha t}, \ \forall t \geq 0.$$

Απόδειξη.

i) Είναι γνωστό ότι:

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{\lambda} = 0, \text{ εάν } \Re\lambda < 0.$$

Έπεται λοιπόν ότι μια συνάρτηση Bohl συγκλίνει στο μηδέν εάν όλοι οι εκθέτες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Ειδικότερα, κάθε τέτοια συνάρτηση είναι φραγμένη.
Έστω $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε $\Lambda(\gamma) < -\gamma$, τότε η συνάρτηση:

$$q(t) = e^{\gamma t} p(t)$$

είναι συνάρτηση Bohl τέτοια ώστε $\Lambda(q) < 0$. Υπάρχει λοιπόν $M > 0$ τέτοιο ώστε:

$$|q(t)| \leq M \Rightarrow |e^{\gamma t} p(t)| \leq M \Rightarrow |p(t)| \leq e^{-\gamma t} M.$$

ii) Εάν p είναι συνάρτηση Bohl με $\beta = \Lambda(p)$, τότε για κάθε $\alpha > \beta$ η

$$q(t) = e^{-\alpha t} p(t)$$

είναι συνάρτηση Bohl τέτοια ώστε $\Lambda(q) < 0$.
Έπεται λοιπόν ότι η q είναι φραγμένη, υπάρχει συνεπώς M τέτοιο ώστε:

$$|p(t)| \leq M e^{\alpha t}.$$

□

Έστω A γραμμική απεικόνιση, ορίζουμε την **φασματική τετμημένη** του A ως:

$$\Lambda(A) = \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{3.4}$$

Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος (3.2.3) έχουμε το επόμενο:
Πόρισμα 3.2.5. *Η εξίσωση (3.1) είναι ευσταθές εάν και μόνον εάν $\Lambda(A) < 0$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν $M > 0$, $\gamma > 0$ τέτοιοι ώστε:*

$$\|e^{At}\| \leq M e^{-\gamma t}, \ \forall t > 0.$$

Απόδειξη. Λόγω του θεωρήματος (3.2.3) αρκεί να αποδείξουμε μόνο το αναγκαίο της συνθήκης.
Έστω λοιπόν $\Lambda(A) \geq 0$ και $\lambda \in \sigma(A)$, $Av = \lambda v$, $v \neq \vec{0}$ και $\Re\lambda \geq 0$.
Τότε, η $e^{\lambda t} v$ είναι λύση της (3.1) τέτοια ώστε:

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} v \neq 0.$$

□

3.3 Θεωρία ευστάθειας Lyapunov και επεκτάσεις

3.3.1 Γραμμικές εξισώσεις πινάκων & γενικευμένος αντίστροφος

Στην παρούσα υποενότητα αναφερόμαστε εν συντομία στην γενικευμένη γραμμική εξίσωση πινάκων [9]

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_pXB_p = C, \tag{3.5}$$

όπου X άγνωστος πίνακας, με ιδιαίτερη έμφαση στην εξίσωση

$$AX + XB = C, \tag{3.6}$$

η οποία παρουσιάζει ιδιαιτέρως σημαντικό θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Ορίζεται η έννοια του δεξιού **τανυστικού γινομένου Kronecker** για $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ως

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix} = [a_{ij}B]_{i,j=1}^{m} \in \mathcal{M}_{mn\times mn}. \tag{3.7}$$

Στην περίπτωση κατά την οποία $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Παρατήρηση. *Ορίζεται το αριστερό τανυστικό γινόμενο*

$$A \times B = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & \cdots & Ab_{1n} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & \cdots & Ab_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Ab_{n1} & Ab_{n2} & \cdots & \cdots & Ab_{nn} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιότητές του είναι ανάλογες του εκ δεξιών τανυστικού γινομένου και στο εξής αναφερόμαστε αποκλειστικά στο αριστερό τανυστικό.

Εν συντομία παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες του ορισθέντος τανυστικού γινομένου [9]:

Πρόταση 3.3.1.

1. *Γιά κάθε τετραγωνικό πίνακα* $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ *ισχύουν οι :*

$$I_n \otimes A = \operatorname{diag}\{A, A, \dots, A\}. \tag{α}$$

$$A \otimes I_n = \begin{bmatrix} a_{11}I_n & a_{12}I_n & \cdots & a_{1m}I_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}I_n & a_{m2}I_n & \cdots & a_{mm}I_m \end{bmatrix}. \tag{β}$$

$$I_m \otimes I_n = I_{mn}. \tag{γ}$$

2. *Εάν οι τάξεις των εμπλεκομένων πινάκων είναι τέτοιες ώστε οι παρακάτω πράξεις ορίζονται, τότε:*

$$(\mu A) \otimes B = A \otimes (\mu B) = \mu(A \otimes B), \forall \mu \in \mathbb{F}. \tag{α}$$

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C). \tag{β}$$

$$A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C). \tag{γ}$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C). \tag{δ}$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T. \tag{ϵ}$$

3. *Εάν* $A, C \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B, D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *τότε :*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \tag{3.9}$$

4. *Εάν* $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *τότε :*

$$\begin{cases} \alpha) & (A \otimes B) = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B) = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n). \\ \beta) & (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}, \ \text{εάν } \exists A^{-1}, B^{-1}. \end{cases} \tag{3.10}$$

5. *Εάν* $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{M}_{m\times m}$ *και* $B_1, B_2, \dots, B_p \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *τότε:*

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\cdots(A_p \otimes B_p) = (A_1A_2\cdots A_p) \otimes (B_1B_2\cdots B_p). \tag{3.11}$$

6. *Το ορισθέν τανυστικό γινόμενο* **δεν είναι** *εν γένει* **αντιμεταθετικό**, *ισχύει όμως: για κάθε* $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *υπάρχει πίνακας μετάθεσης* $P \in \mathbb{R}mn \times mn$ *τέτοιος ώστε:*

$$P^T(A \otimes B)P = B \otimes A. \tag{3.12}$$

7. *Εάν* $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *τότε:*

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m. \tag{3.13}$$

Εάν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση:

$$\operatorname{vec}(A) = \begin{bmatrix} A_{\star 1} \\ A_{\star 2} \\ \vdots \\ A_{\star n} \end{bmatrix}, \tag{I}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} A_{\star 1} & A_{\star 2} & \cdots & A_{\star n} \end{bmatrix}, \ A_{\star j} \in \mathcal{M}_{m\times n}, \ j = 1,2,\ldots,n.$$

Είναι σαφές ότι:

$$\text{vec}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{vec}A + \beta \text{vec}B, \ \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}, \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Η επόμενη πρόταση αφορά την σχέση μεταξύ του τανυστικού γινομένου και της διανυσματικής συναρτήσεως:

Πρόταση 3.3.2. *Εάν $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $X \in \mathcal{M}_{m\times n}$ τότε:*

$$\text{vec}\,(AXB) = \left(B^T \otimes A\right) \text{vec}X.$$

3.3.2 Ιδιοτιμές τανυστικού γινομένου & εφαρμογές σε εξισώσεις πινάκων

Το τανυστικό γινόμενο πινάκων παρέχει μια όμορφη και απλή σύνδεση μεταξύ των ιδιοτιμών των πινάκων A, B και των ιδιοτιμών του $A \otimes B$.

- Εάν $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ θεωρούμε τούς πίνακες μορφής $\mathbb{C}^{mn\times mn}$ με:

  $$p(A;B) = \sum_{i,j=0}^{l} c_{ij} A^i \otimes B^j.$$

  Όπου

  $$p(x,y) = \sum_{i,j=0}^{l} c_{ij} x^i y^j,$$

  για p πολυώνυμο στις μεταβλητές x, y, $c_{ij} \in \mathbb{C}$ δοθέντες μιγαδικοί και l θετικό ακέραιο. Για παράδειγμα, εάν

  $$p(x,y) = 2x + y^4 = 2x^1y^0 + x^1y^4$$

  τότε:

  $$p(A;B) = 2A^1 \otimes B^0 + A^1 \otimes B^4 = 2A \otimes I_n + A \otimes B^4.$$

- Το επόμενο θεώρημα [9] παρέχει την σύνδεση μεταξύ των ιδιοτιμών των A, B με τις ιδιοτιμές του $p(A;B)$:

  Θεώρημα 3.3.3. *Εάν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ιδιοτιμές του $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ και $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ιδιοτιμές του $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε οι ιδιοτιμές του $p(A;B)$ είναι οι mn το πλήθος αριθμοί $p(\lambda_r;\mu_s)$, όπου $r = 1,2,\ldots,m$, $s = 1,2,\ldots,n$.*

- Ως άμεση απόρροια του θεωρήματος (3.4.1) έχουμε το επόμενο πόρισμα - ειδική περίπτωση κατά την οποία $p(x,y) = xy$, $p(x,y) = x + y$:

Πόρισμα 3.3.4. *Εάν*

$$p(x,y) = xy$$

οι ιδιοτιμές του $A \otimes B$ *είναι οι* mn *το πλήθος αριθμοί* $\lambda_r \cdot \mu_s$.
Εάν

$$p(x,y) = x + y$$

οι ιδιοτιμές του $(I_n \otimes A) + (B \otimes I_m)$ *είναι οι* mn *το πλήθος αριθμοί* $\lambda_r + \mu_s$.

Εφαρμογή. *Ως εφαρμογή του ορισθέντος τανυστικού γινομένου πινάκων θα μελετήσουμε την γενική γραμμική εξίσωση πινάκων της μορφής:*

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_pXB_p = C, \tag{3.14}$$

όπου $X, C \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B_j \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *για* $j = 1, 2, \ldots p$.
Η διερεύνηση στηρίζεται στο συμπέρασμα της πρότασης (3.3.2) ανάγοντας την (3.14) σε μια διανυσματικού τύπου εξίσωση πινάκων. Ισχύει το παρακάτω:
Θεώρημα 3.3.5. *Ένας πίνακας* $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *αποτελεί λύση της (3.14) εάν και μόνον εάν το διάνυσμα* $\mathrm{vec}X = x$ *το οποίο ορίσθηκε μέσω της (I) είναι λύση της*

$$Gx = c, \tag{3.15}$$

όπου $c = \mathrm{vec}C$ *και* $G = \sum_{j=1}^{p} \left(B_j^T \otimes A_j\right)$.

Απόδειξη. Από την πρόταση (3.3.2) έπεται ότι

$$\mathrm{vec}\left(A_jXB_j\right) = \left(B_j^T \otimes A_j\right)\mathrm{vec}X, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, p.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η απεικόνιση $\mathrm{vec}A$ είναι γραμμική, έπεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}C &= \mathrm{vec}\left\{A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_pXB_p\right\} = \mathrm{vec}\left\{\sum_{j=1}^{p} A_jXB_j\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{p}\mathrm{vec}\left\{A_jXB_j\right\} = \sum_{j=1}^{p}\left(B_j^T \otimes A_j\right)\mathrm{vec}X = \mathrm{vec}C\end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Ως άμεση απόρροια του ανωτέρω θεωρήματος έχουμε:

- *Η εξίσωση (3.14) έχει μοναδική λύση* X *εάν και μόνον εάν* $\mathrm{rank}[G, c] = \mathrm{rank}G$.
- *Η εξίσωση (3.14) επιδέχεται μοναδική λύση εάν και μόνον εάν ο πίνακας* G *στην εξίσωση (3.15) είναι μη ιδιάζον.*

Εφαρμογή. *Στο τελευταίο μέλος της παρούσας υποενότητας ας δούμε μια επιπλέον εφαρμογή της εξισώσεως (3.14) μελετώντας την εξίσωση*

$$AX + XB = C. \tag{3.16}$$

Ισχύει:

1. *Η εξίσωση (3.16) έχει μοναδική λύση εάν και μόνον εάν οι πίνακες A και $-B$ δεν έχουν κοινές ιδιοτιμές.*

   Απόδειξη. Στην περίπτωσή μας ο πίνακας G της εξισώσεως (3.15) είναι:

   $$G = (I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_n).$$

   Οι ιδιοτιμές του, εφαρμόζοντας το δεύτερο μέλος του πορίσματος (3.3.4), είναι

   $$\lambda_r + \mu_s, \;\; r = 1, 2, \ldots, m, \;\; s = 1, 2, \ldots, n.$$

   Με εφαρμογή του δεύτερου μέλους του πορίσματος του προηγούμενου θεωρήματος (3.3.5) σε συνάφεια με το γεγονός ότι ένας πίνακας είναι μή - ιδιάζον εάν και μόνον εάν οι ιδιοτιμές του είναι όλες διάφορες του μηδενός, συνάγεται ότι πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

   $$\lambda_r + \mu_s \neq 0 \Leftrightarrow r_s \neq \mu_s, \;\; \forall r, s \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}.$$

   Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

2. *Εάν οι ιδιοτιμές των $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε η μοναδική λύση της (3.16) δίνεται από*

   $$X = -\int_0^\infty e^{At} C e^{Bt} dt. \tag{3.17}$$

   Απόδειξη. Από υπόθεση οι A, $-B$ δεν έχουν κοινές ιδιοτιμές συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση X της (3.16):
   Έστω πίνακας $Z(t)$ λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

   $$\frac{dZ}{dt} = AZ(t) + Z(t)B, \;\; Z(0) = C. \tag{3.18}$$

   Είναι γνωστό ότι η λύση του (3.18) είναι

   $$Z(t) = e^{At} C e^{Bt}.$$

   Ισχύει επίσης:

   $$\int_0^\infty \frac{dZ}{dt} = \int_0^\infty \left(AZ(t) + Z(t)B\right) dt,$$

   δηλαδή

   $$Z(\infty) - Z(0) = A \int_0^\infty Z(t)dt + \left(\int_0^\infty Z(t)dt\right) B.$$

   Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι:

   $$Z(\infty) = \lim_{t\to\infty} e^{At} C e^{Bt} = 0, \tag{3.19}$$

έπεται ότι

$$-C = A\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt + \left(\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt\right)B.$$

Άρα:

$$X = -\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt$$

είναι η μοναδική λύση της (3.16). Αρκεί λοιπόν να επαληθεύσουμε ότι για σταθερούς πίνακες A, B οι παραδοχές που κάναμε ισχύουν. Είναι λοιπόν:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{m_k-1} t^j e^{\lambda_k t} Z_{kj}, \tag{3.20}$$

όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακριτές ιδιοτιμές, του A με δείκτες $m_1, \ldots, m_s$ αντιστοίχως. Θεωρούμε την ανάλυση των ιδιοτιμών της μορφής $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ και γράφουμε

$$e^{\lambda_k t} = e^{\alpha_k t}e^{i\beta_k t} = e^{\alpha_k t}\left(\cos\beta_k t + i\sin\beta_k t\right), \quad \forall k = 1, 2, \ldots, s.$$

Όμως, $\alpha_k < 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$, οπότε

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_k t} = 0, \quad \forall k.$$

Συνεπώς:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} e^{At} = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} e^{Bt} = 0 \end{cases}$$

και η (3.19) όπως και η ύπαρξη του ολοκληρώματος της (3.17) απορρέουν. □

3.4 Ευστάθεια Lyapunov

Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ και θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{3.21}$$

Εκτιμάμε τετραγωνική μορφή v αντιστοιχούσα σε λύση $x(t)$ της (3.21) με $x(t) \in \mathbb{R}^n$ για κάθε t. Είναι:

$$v(x) = x^T V x(t).$$

Οπότε, (παραλείποντας το t):

$$\begin{cases} \dot{v}(x) = \dot{x}^T A x + x^T A \dot{x} \\ \dot{x}^T = (Ax)^T = x^T A^T \end{cases}.$$

Άρα:

$$\dot{v}(x) = x^T\left(A^T V + VA\right)x.$$

Εάν θέσουμε:

$$A^T V + VA = -W \tag{3.22}$$

είναι προφανές ότι ο W είναι πραγματικός συμμετρικός και

$$\dot{v}(x) = -w(x), \text{ όπου } w(x) = x^T W x.$$

Παρατήρηση. *Εάν δοθεί μια θετικά ορισμένη μορφή w η ευστάθεια του A χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη θετικού πίνακα - λύση V της (3.22) και η $v(x)$ δίνει πληροφορία για το μέγεθος του x. Έπεται λοιπόν ότι:*
Η εξίσωση $\dot{x} = Ax$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ για κάθε διάνυσμα λύση $x(t)$ εάν και μόνον εάν είναι δυνατόν να βρούμε θετικά ορισμένες μορφές w και v τέτοιες ώστε:

$$\dot{v}(x) = -w(x).$$

Επιπλέον, ο θετικά ορισμένος πίνακας W της εξισώσεως (3.22) είναι αυθαιρέτως επιλέξιμος με την $W = I$ να αποτελεί συνήθη επιλογή.

Στην συνέχεια παρατίθεται μια αλγεβρική εκδοχή του θεωρήματος Lyapunov ([13], [12], [9]):
Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $A, W \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με W θετικά ορισμένο. Τότε:*

α) Εάν A ευσταθής η εξίσωση

$$AH + HA^\star = W, \tag{3.23}$$

έχει μοναδική λύση H με H αρνητικά ορισμένο.

β) Εάν υπάρχει αρνητικά ορισμένος πίνακας H ο οποίος πληροί την (3.23) τότε ο A είναι ευσταθής.

Απόδειξη.

α) Έστω A ευσταθής. Τότε από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες A, $-A^\star$ δεν έχουν κοινές ιδιοτιμές και συνεπώς η εξίσωση επιδέχεται μοναδική λύση της μορφής:

$$H = -\int_0^\infty e^{At}e^{A^\star t}dt. \tag{3.24}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι $H < 0$[2], υπολογίζουμε:

$$x^\star Hx = -\int_0^\infty \left(x^\star e^{At}\right) W \left(x^\star e^{At}\right)^\star dt, \tag{3.25}$$

όπου, από υπόθεση W θετικά ορισμένος και e^{At} μη ιδιάζον για κάθε t. Άρα:

$$\left(x^\star e^{At}\right) W \left(x^\star e^{At}\right)^\star > 0$$

οπότε

$$x^\star Hx < 0, \ \ \forall x \in \mathbb{C}^\star,$$

δηλαδή $H < 0$.

β) Αντιστρόφως, έστω λ ιδιοτιμή του $A^\star$ με $A^\star x = \lambda x$, $x \neq 0$. Τότε:

$$x^\star X = \lambda x^\star.$$

[2] αρνητικά ορισμένος

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.23) με $x^\star$, x το πρώτο και το δεύτερο μέλος αντιστοίχως, λαμβάνουμε:

$$x^\star\left(AH+HA^\star\right)x = x^\star Wx \Rightarrow$$
$$x^\star AHx + x^\star HA^\star x = x^\star Wx \Rightarrow$$
$$\bar{\lambda}x^\star Hx + x^\star H\lambda x = x^\star Wx.$$

Άρα:

$$x^\star\left(AH+HA^\star\right)x = x^\star Wx, \tag{3.26}$$

με H από υπόθεση αρνητικά ορισμένο και W θετικά ορισμένο, δηλαδή

$$x^\star Wx < 0 \text{ και } x^\star Hx > 0.$$

Οπότε από την (3.26) έχουμε:

$$\bar{\lambda}+\lambda < 0 \Rightarrow 2\Re\lambda < 0 \Rightarrow \Re\lambda < 0,$$

για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A. Ο A λοιπόν είναι ευσταθής.

$\square$

Σχόλιο. *Να σημειώσουμε ότι στα προηγούμενα, μια ελαφρώς ισχυρότερη εκδοχή του δευτέρου μέρους του θεωρήματος Lyapunov (3.4.1), αποδείχθηκε:*
Πράγματι, εάν ο H είναι αρνητικά ορισμένος και ικανοποιεί την εξίσωση

$$AH+HA^\star = W,$$

τότε η ευστάθεια του A είναι απόρροια της ισχύος συνθήκης

$$x^\star Wx < 0,$$

μόλις για ένα ιδιοδιάνυσμα x το οποίο αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή του $A^\star$. Επομένως, εάν ο A έχει πολλαπλές ιδιοτιμές, τότε ο W δεν είναι αναγκαίο να ορίζεται επί του όλου χώρου C^n.

Παράδειγμα 3.4.2.

1. *Εάν $\alpha > 0$ τότε οι ιδιοτιμές του*
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$
έχουν θετικά πραγματικά μέρη.
Πράγματι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:
$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0.$$
Οπότε για $a < \alpha < 2$ έχουμε
$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm i\sqrt{|\alpha^2-4|}}{2},\ \Re\lambda_i = \frac{\alpha}{2} > 0,\ i = 1,2.$$

Ενώ για $\alpha \geq 2$, *τότε* $\alpha^2 - 4 \geq 0$ *και* $\alpha \geq \sqrt{\alpha^2 - 4}$, *δηλαδή:*

$$\lambda_i = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \geq 0, \;\; i = 1, 2.$$

2. *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας*

$$H = \begin{bmatrix} 4 + \alpha^2 & -2\alpha \\ -2\alpha & 4 + \alpha^2 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος, όπως επίσης και ο $AH + HA^T$. *Πράγματι, εάν θεωρήσουμε* $x^T = [x_1 \;\; x_2]$, *έχουμε:*

$$x^T H x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 + \alpha^2 & -2\alpha \\ -2\alpha & 4 + \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (4 + \alpha^2)(x_1^2 + x_2^2) - 4\alpha x_1 x_2,$$

όπου

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1 x_2 > x_1 x_2 \\ \alpha_2 + 4 \geq 4\alpha > 0, \;\; \textit{διότι από υπόθεση } \alpha > 0 \end{cases}.$$

Άρα:

$$x^T H x > 0, \;\; \forall x \neq 0 \;:\; H \textit{ θετικά ορισμένος.}$$

Για τον $AH + HA^T$ *υπολογίζουμε:*

$$\begin{aligned} AH + HA^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 + \alpha^2 & -2\alpha \\ -2\alpha & 4 + \alpha^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 + \alpha^2 & -2\alpha \\ -2\alpha & 4 + \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\alpha & -4 - \alpha^2 \\ 4 - \alpha^2 & \alpha^3 + 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha & 4 - \alpha^2 \\ -4 - \alpha^2 & \alpha^3 + 2\alpha \end{bmatrix} \\ &= 2\alpha \cdot \begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha^2 + 2 \end{bmatrix}, \;\; \alpha > 0. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας $x^T = [x_1 \;\; x_2]$ *με* $x_1 \cdot x_2 > 0$, *τότε:*

$$x^T \left(AH + HA^T\right) x = 2\alpha \left\{2x_1^2 + (1 + \alpha^2)x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2\right\} > 0,$$

διότι

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1 x_2 > x_1 x_2 > 0 \\ 1 + \alpha^2 \geq 2\alpha > 0 \end{cases}.$$

Εάν $x_1 x_2 < 0$, *τότε η*

$$x^T \left(AH + HA^T\right) x = 2\alpha \left\{2x_1^2 + (1 + \alpha^2)x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2\right\} > 0$$

είναι προφανής αφού $\alpha > 0$.

3. *Εάν*

$$\Re A = \frac{1}{2}(A + A^\star)$$

είναι αρνητικά ορισμένο τότε ο A είναι ευσταθής. Εξετάστε εάν ισχύει το αντίστροφο.

Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A με αντίστοιο ιδιοδιάνυσμα x. Τότε:

$$\langle A^\star x, x\rangle = \bar{\lambda}\|x\|^2$$

και

$$2\Re\lambda|x|^2 = (\lambda + \bar{\lambda})|x|^2 = \langle Ax, x\rangle + \langle ATx, x\rangle = \langle (A + A^T)x, x\rangle > 0,$$

όπου έγινε χρήση του γινομένου

$$\langle x, y\rangle = y^\star x = y^H x.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει ακόμη και στην περίπτωση διαγωνιοποιήσιμων πινάκων. Πράγματι, εάν θεωρήσουμε τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του είναι θετικές αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο για τον πίνακα:

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 100 \\ 100 & 2 \end{bmatrix},$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = -98 < 0, \quad \lambda_2 = 102 > 0.$$

3.4.1 Μια γενίκευση του θεωρήματος Lyapunov

Σε αυτή την υποενότητα αναφερόμαστε σε γενίκευση του θεωρήματος Lyapunov ([12]) και ειδικότερα στο αποτέλεσμα των Ostrowski και Schneider ([11]). Στο ανάλογο συμπέρασμα είχε καταλήξει η Olga Taussky ([13], [14]).

Προκειμένου να επιτύχουν ευρύτερη προσέγγιση του προβλήματος οι Ostrowski και Schneider εισήγαγαν τις παρακάτω έννοιες για ερμιτιανό πίνακα H:

- $\pi(H)$ ο αριθμός των θετικών ιδιοτιμών του H,
- $\nu(H)$ ο αριθμός των αρνητικών ιδιοτιμών του H,
- $\delta(H)$ ο αριθμός των μηδενικών ιδιοτιμών του H,
- η διατεταγμένη τριάδα $(\pi, \nu, \delta) = \ln H$ ορίσθηκε ως **αδράνεια** του H.
- Γενικότερα για $n \times n$ πίνακα A με $\pi(A)$ ιδιοτιμές θετικού πραγματικού μέρους, $\nu(A)$ ιδιοτιμές αρνητικού πραγματικού μέρους και $\delta(A)$ ιδιοτιμές γνησίως μιγαδικές, ορίζεται η **αδράνεια** του πίνακα A ως:

$$\ln A = (\pi(A), \nu(A), \delta(A)).$$

Προφανώς ισχύει:

$$\pi(A) + \nu(A) + \delta(A) = n, \;\; n = \text{η τάξη του πίνακα } A.$$

Θεωρούμε ερμιτιανό πίνακα H, τότε:

- H είναι **θετικά ορισμένος** εάν $\ln H = (n, 0, 0)$.
- H είναι **αρνητικά ορισμένος** εάν $\ln H = (0, n, 0)$.
- H είναι **θετικά ημιορισμένος** εάν $\nu(H) = 0$.
- H είναι **αρνητικά ημιορισμένος** εάν $\pi(H) = 0$.

Έστω τυχόν $n \times n$ πίνακας A, τότε:

- A είναι **θετικά ευσταθής** εάν $\pi(A) = n$.
- A είναι **αρνητικά ευσταθής** εάν $\nu(A) = n$.
- A είναι **θετικά ημι-ευσταθής** εάν $\nu(A) = n$.
- A είναι **αρνητικά ημι-ευσταθής** εάν $\pi(A) = n$.

Ένας ευσταθής πίνακας A καλείται:

- θετικά H - ευσταθής εάν AH είναι θετικά ευσταθής, H ερμιτιανός πίνακας
- αρνητικά H - ευσταθής εάν AH είναι αρνητικά ευσταθής, H ερμιτιανός πίνακας

και αντιστοίχως ορίζονται οι έννοιες της H - ημιευστάθειας.
Ένα ακόμη βασικό εργαλείο των Ostrowski και Schneider συνίσταται στην **ανάλυση** κατά **Toeplitz** για πίνακα $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, με

$$A = R + iQ, \;\; R = \frac{1}{2}(A + A^{\star}) = \mathfrak{R}A, \;\; Q = \frac{1}{2i}(A - A^{\star}) = \mathfrak{I}A,$$

όπου R, Q ερμιτιανοί.
Προτού διατυπώσουμε και αποδείξουμε το κύριο θεώρημα θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα , σχετικά με την εξίσωση

$$AX - XB = C \tag{3.27}$$

(όπου A, B, X και C πίνακες τάξης n) που αποτελεί γενίκευση της (3.22).
Λήμμα 3.4.3. *Για κάθε πίνακα C υπάρχει μοναδικός X ο οποίος ικανοποιεί την (3.27) εάν και μόνον εάν οι A, B δεν έχουν κοινές ιδιοτιμές, δηλαδή:*

$$\prod_{\sigma,\tau=1}^{n} (\lambda_\sigma - \mu_\tau) \neq 0, \tag{3.28}$$

όπου λ_μ, τ_σ είναι τα πλήρη σύνολα ιδιοτιμών (με τις πολλαπλότητες συμπεριλαμβανόμενες) των A, B αντιστοίχως.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι:

- Η εξίσωση (3.27) αντιστοιχεί σε γραμμικό σύστημα n^2 το πλήθος εξισώσεων ως προς τα στοιχεία του X. Συνεπώς για κάθε C υπάρχει μοναδική λύση της (3.27) εάν και μόνον εάν η εξίσωση

$$AX - XB = 0 \tag{3.29}$$

  επιδέχεται την τετριμμένη λύση $X = 0$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η (3.29) επιδέχεται μη τετριμμένη λύση εάν και μόνον εάν οι A, B έχουν μία κοινή ιδιοτιμή. Πράγματι, εάν λ κοινή ιδιοτιμή, τότε υπάρχουν u, u' τέτοια ώστε:

$$u'B = \lambda u', \;\; Av = \lambda v.$$

  Εύκολα επαληθεύεται ότι για το $X = vu' \neq 0$:

$$Avu' - vu'B = \lambda vu' - v\lambda u' = \lambda(vu' - vu') = 0.$$

- Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B έχει στοιχειώδεις διαιρέτες παράγοντες της μορφής $(\lambda - \mu_\rho)^{\sigma_\rho}$, $\rho = 1, 2, \ldots, r$. Τότε, υπάρχουν n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $v_{\sigma\rho}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, \sigma_\rho$, $\rho = 1, 2, \ldots, r$ τέτοια ώστε:

$$Bv_{\rho_1} = \mu_\rho v_{\rho_1}$$

  και

$$Bv_{\rho,\sigma} = \mu_\rho v_{\rho\sigma} + v_{\rho,\sigma-1}, \;\; \sigma = 2, \ldots, \sigma_\rho, \;\; \rho = 1, 2, \ldots, r.$$

  Εάν X είναι μη μηδενική λύση της (3.29) θα υπάρχουν ρ, σ τέτοια ώστε:

$$Xv_{\rho\sigma} \neq 0.$$

  Για κάποιο ρ, έστω σ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο:

$$Xv_{\rho\sigma} \neq 0.$$

  Τότε, επειδή είτε $\sigma = 1$, ή $Xv_{\rho,\sigma-1}0$, γίνεται:

$$0 = (AX - XB)v_{\rho\sigma} = A(Xv_{\rho\sigma}) - X(Bv_{\rho\sigma}) = A(Xv_{\rho\sigma}) - \mu_\rho(Xv_{\rho\sigma}).$$

  Έπεται λοιπόν ότι η μ_ρ είναι ιδιοτιμή του A και η απόδειξη του λήμματος (3.4.3) ολοκληρώθηκε.

□

Παρατήρηση.

- *Εντός του συνόλου των ζευγών πινάκων* (A, B) *για τους οποίους η (3.28) ισχύει, η λύση* X *της εξισώσεως (3.27) είναι συνεχής.*

- *Επανερχόμενοι στην εξίσωση (3.22), για* C *ερμιτιανό, εάν*

$$AX + XA^{\star} = C \Rightarrow X^{\star}A^{\star} + XA^{\star} = C$$

  τότε και ο $H = \frac{1}{2}(X + X^{\star})$ *επαληθεύει την (3.22) .*
  Οπότε, δοθέντων των A, C *υπάρχει* X *ο οποίος ικανοποιεί την (3.22) και άρα υπάρχει και ερμιτιανός* H *για τον οποίο ισχύει η εν λόγω εξίσωση.*

- *Η εξίσωση (3.28), συνεπάγεται ότι για την ύπαρξη μοναδικής λύσης της (3.22), ισχύει η συνθήκη:*

$$\Delta(A) \equiv \prod_{\sigma,\tau=1}^{n} \left(\lambda_\sigma + \bar{\lambda}_\tau\right) \neq 0, \tag{3.30}$$

  όπου λ_σ *είναι οι ιδιοτιμές του* A.

Λήμμα 3.4.4. *Έστω* A *πίνακας τύπου* $n \times n$ *και* H *ερμιτιανός, εάν* $\Re(AH)$ *είναι θετικά ορισμένος, τότε ο* H *είναι μη ιδιάζων.*

Απόδειξη. Έστω κ ιδιοτιμή του H με

$$Hu = \kappa u,\ u \neq 0 \Rightarrow u^{\star}H = \kappa u^{\star}.$$

Εάν

$$AH + HA^{\star} = 2\Re(AH) = C,$$

τότε

$$u^{\star}Cu = u^{\star}\left(AH - HA^{\star}\right)u = \kappa\left(u^{\star}Au + uA^{\star}u\right).$$

Αλλά $u^{\star}Cu > 0$ εάν C θετικά ορισμένος, από όπου συμπεραίνουμε ότι $\kappa \neq 0$. □

Το κύριο αποτέλεσμα των Ostrowski και Schneider είναι το παρακάτω [11], [9]:

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω* A *πίνακας τύπου* $n \times n$*. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ερμιτιανού πίνακα* H *τέτοιου ώστε* $\Re(AH)$ *θετικά ορισμένος, αποτελεί η συνθήκη του να είναι όλες οι ιδιοτιμές του* A *μη γνησίως φανταστικές, δηλαδή* $\delta(A) = 0$*. Τότε για την αδράνεια των* A, H *θα ισχύει:*

$$\ln A = \ln H.$$

Απόδειξη.

- Με χρήση των παραπάνω λημμάτων για H ερμιτιανό μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την ικανή συνθήκη ως

$$AH + HA^{\star} = 2\Re(AH) = C,\ C > 0 \tag{1}$$

από την οποία προκύπτει ότι τότε H μη ιδιάζουσα και

$$\pi(A) = \pi(H),\ \nu(A) = \nu(H),\ \delta(A) = \delta(H). \tag{2}$$

Όμως από την συνθήκη $C > 0$ [3] έπεται:

$$\lambda + \bar{\lambda} \neq 0.$$

Συνεπώς ο A δεν εχει γνησίως φανταστικές ιδιοτιμές, οπότε:

$$\ln A = (p, n-p, 0)$$

για κάποιο ακέραιο $p \leq n$.

Μια κανονική μορφή Jordan J του A είναι:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

όπου J_1 τύπου $p \times p$, J_2 τύπου $(n-p)\times(n-p)$ και

$$\ln J_1 = (p,0,0)\,,\ \ln J_2 = (0, n-p, 0)\,.$$

Θέτουμε

$$R = P^{-1}H(P^\star)^{-1}$$

και η (1) γράφεται

$$JR + RJ^\star = W_0, \tag{4}$$

όπου $W_0 = P^{-1}W(P^\star)^{-1} > 0.$ [4]

- Η εξίσωση (3), με χρήση της ανάλυσης των R, W_0, γράφεται:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^\star & R_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^\star & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1^\star & 0 \\ 0 & J_2^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^\star & W_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

και από την (5) λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} J_1R_1 + R_1J_1^\star = W_1 \\ J_2R_3 + R_3J_2^\star = W_3 \end{cases} \text{όπου } W_1 > 0,\ W_3 > 0. \tag{6}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα (3.4.1) συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες $R_1 \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $-R_3 \in \mathbb{C}^{(n-p)\times(n-p)}$ είναι θετικά ορισμένοι.

- Μένει να δείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή

$$\ln H = \ln \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^\star & R_3 \end{bmatrix} = (p, n-p, 0) = \ln A. \tag{7}$$

Η (7) είναι απόρροια της σχέσης

$$Q^\star RQ = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -R_2^\star R_1^{-1}R_2 + R_3 \end{bmatrix},\ \text{όπου } Q = \begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}R_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{8}$$

[3] C θετικά ορισμένος
[4] θετικά ορισμένος

- Αντιστρόφως, εάν ισχύει $\delta(A) = 0$ τότε ο J έχει την κανονική μορφή Jordan όπως δίνεται από την (3).

  Κατασκευάζουμε ερμιτιανό πίνακα H τέτοιον ώστε οι εξισώσεις (1) και (2) να ικανοποιούνται. Εφαρμόζουμε το θεώρημα (3.4.1) το οποίο εγγυάται την ύπαρξη αρνητικά ορισμένων πινάκων $H_1 \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $H_2 \in \mathbb{C}^{(n-p)\times(n-p)}$, τέτοιων ώστε:

$$\begin{cases} -J_1H_1 - H_1J_1^\star > 0 \\ -J_2H_2 + H_2J_2^\star > 0 \end{cases}. \tag{9}$$

  Από την (9) με χρήση του νόμου αδράνειας του Sylvester συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας

$$H = P\begin{bmatrix} -H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}P^\star \tag{10}$$

  είναι ερμιτιανός και ικανοποιεί την συνθήκη (1).

  Μένει, με χρήση των H_1, H_2, να υπολογίσουμε:

$$\ln H = ln(-H_1) + \ln(H_2) = (p, n-p, 0) = \ln A,$$

  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Απόρροια του παραπάνω βασικού θεωρήματος αποτελούν τα παρακάτω:

Πόρισμα 3.4.6.

1. *Εάν* $\Delta(A) = \prod_{\sigma,\tau=1}^{n}\left(\lambda_\sigma, \overline{\lambda}_\tau\right) \neq 0$ *και* P *θετικά ορισμένος πίνακας, τότε υπάρχει μοναδικός* H *τέτοιος ώστε* $AH + HA^\star = P$. *Ο πίνακας* H *είναι ερμιτιανός και*

$$\ln A = \ln H.$$

2. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε για τον* $n\times n$ *πίνακα* A *να έχουμε* $\ln(A) = (0, n, 0)$ *αποτελεί η ύπαρξη αρνητικά ορισμένου πίνακα* H *με* $\Re(AH) > 0$[5].

3. *Εάν για τον* $n\times n$ *πίνακα* A, *έχουμε* $\Re A > 0$[6] *και* H *είναι ερμιτιανός, τότε* $\ln(AH) = \ln H$.

4. *Έστω* A *πίνακας τέτοιος ώστε* $\Re A$ *θετικά ημιορισμένος και* H *ερμιτιανός. Εάν*

$$\ln(AH) = (\pi_1, \nu_1, \delta_1) \ \textit{και} \ \ln H = (\pi, \nu, \delta),$$

   τότε

$$\pi_1 \leq \pi \ \textit{και} \ \nu_1 \leq \nu.$$

[5]δηλαδή, θετικά ορισμένου

[6]θετικά ορισμένος

3.5 Παραδείγματα μελέτης ευστάθειας λύσεων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου θα μελετήσουμε ως προς την ευστάθεια, συγκεκριμένα παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων και ειδικότερα θα εστιάσουμε σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις [3].

Παρατήρηση. *Έστω $A(t)$ πίνακας $n \times n$ και $b(t)$ μια n - διανυσματική συνάρτηση, αμφότερες συνεχείς για $t \geq 0$. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση:*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{3.31}$$

της οποίας κάθε λύση ορίζεται για όλα τα $t \geq 0$. Εάν μια λύση $\phi(t)$ της (3.31) είναι ευσταθής τότε όλες οι λύσεις διατηρούν το χαρακτηριστικό της ευστάθειας.
Πράγματι, εάν $\phi(t)$, $\psi(t)$ λύσεις της (3.31) με $\phi(t0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$ και θεωρήσουμε τις γειτονικές λύσεις $\phi(t) + \Delta x(t)$, $\psi(t) + \Delta x(t)$ τέτοιες ώστε $\Delta x(t_0) = \Delta x_0$, τότε:
Εάν $\phi(t)$ ευσταθής, για κάθε $\epsilon > 0$, $t_0 > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\Delta x(t_0)\| = \|\Delta x_0\| < \delta \Rightarrow \|\Delta x(y)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

δηλαδή η λύση $\psi(t)$ είναι ευσταθής.

Σχόλιο. *Εάν ο πίνακας A δεν είναι σταθερός, το να έχει ιδιοτιμές με πραγματικά μέρη αρνητικά, δεν σημαίνει ότι είναι ευσταθής. Για παράδειγμα [15], εάν θεωρήσουμε την εξίσωση:*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

με

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 9\cos^2 6t + 12\sin 6t\cos 6t & 12\cos^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t \\ -12\sin^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t & -(1 + 9\sin^2 6t + 12\sin 6t\cos 6t) \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές του $A(t)$ είναι -1, -10 αλλά ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων της εξισώσεως είναι

$$\begin{bmatrix} e^{2t}(\cos 6t + 2\sin 6t) & e^{-13t}(\sin 6t - 2\cos 6t) \\ e^{2t}(\cos 6t - \sin 6t) & e^{-13t}(2\sin 6t + \cos 6t) \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι προφανώς ασταθής.

Παράδειγμα 3.5.1. *Έστω η διαφορική εξίσωση*

$$\ddot{x} + x = 0. \tag{1}$$

Η (1) οποία σε μορφή ισοδυνάμου συτήματος γράφεται:

$$\dot{x} = Ax, \;\; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1'}$$

Ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1) είναι

$$\{\sin t,\ \cos t\},$$

οπότε ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της (1′) είναι:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\| &= \sup_{\|x\|=1} \|\Phi(t)x\| = \max_{\|x\|=1} \{|x_1 \cos t + x_2 \sin t|, |-x_1 \sin t + x_2 \cos t|\} \\ &\le \max_{\|x\|=1} \{|x_1| + |x_2|\} \le 2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
Έπεται λοιπόν ότι η (1′) είναι ευσταθής, ομοίως και η (1). Επίσης, να παρατηρήσουμε ότι η (1′) είναι ομοιόμορφα ευσταθής αλλά δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής διότι του $t \to \infty$ *ο θεμελιώδης πίνακας παρότι φράσσεται ομοιόμορφα δεν τείνει στον μηδενικό πίνακα.*

Παράδειγμα 3.5.2. *Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x. \tag{1}$$

Το χαρακτηριτικό πολυώνυμου του A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 6$$

και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = i\sqrt{6},\ \ \lambda_2 = -i\sqrt{6}$$

Επειδή

$$\Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 = 0,$$

έπεται ότι κάθε λύση της (1) είναι ευσταθής. Θεωρούμε την έκφραση της γενικής λύσης της (1), είναι:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{6}\sin\sqrt{6}t \\ 2\cos\sqrt{6}t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos\sqrt{6}t \\ 2\sin\sqrt{6}t \end{pmatrix}, \tag{2}$$

όπου c_1, c_2 *αυθαίρετες σταθερές.*
Παρατηρούμε ότι κάθε λύση είναι περιοδική με περίοδο $\dfrac{2\pi}{\sqrt{6}}$ *συνεπώς καμία λύση (εξαιρουμένης της μηδενικής) δεν προσεγγίζει την μηδενική του* $t \to \infty$. *Άρα η λύση (2) δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.*

Παράδειγμα 3.5.3. *Έστω η διαφορική εξίσωση*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x \tag{1}$$

της οποίας ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ *έχει την ιδιοτιμή* $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$*, πολλαπλότητας* 2.
Επειδή η ιδιοτιμή είναι αρνητική έπεται ότι η (1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
Η γενική λύση της (1) δίνεται από:

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{-2t} + c_1 t e^{-2t} \end{pmatrix}$$

με c_1*,* c_2 *αυθαίρετες σταθερές.*

Βιβλιογραφία

[1] Καδιανάκης, Ν., Καρανάσιος, Σ.: **Γραμμική Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία & Εφαρμογές**, Έκδοση 1^{η}, Αθήνα, 2001

[2] Καρακάσιος, Σωτήρης.: **Σημειώσεις Παραδόσεων Θεωρίας Τελεστών**, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Μάρτιος, 2008.

[3] Κυβεντίδης, Θωμάς.: **Διαφορικές Εξισώσεις**, Τόμος 2, Εκδόσεις Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, 1983.

[4] Ψαρράκος, Παναγιώτης.: **Θέματα Ανάλυσης Πινάκων**, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2020.

[5] Νεγρεπόντης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ., Καλαμίδας, Ν., Φαρμάκη, Β.: **Γενική τοπολογία & Συναρτησιακή Ανάλυση**, Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.

[6] Βάρσος, Δ., Δεριζιώτης, Δ., Μαλιάκας, Μ., Παπασταυρίδης, Στ., Ράπτης, Ε., Ταλλέλη, Ο.: **Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος Α**, Εκδόσεις Σοφία, 2008.

[7] Βάρσος, Δ., Δεριζιώτης, Δ., Μαλιάκας, Μ., Παπασταυρίδης, Στ., Ράπτης, Ε., Ταλλέλη, Ο.: **Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος Β**, Εκδόσεις Σοφία, 2009.

[8] Hahn, W.: **Eine Bemerkung zur zweiten Methode von Lyapunov**, *Math Nachblr*, **14**, 349-354, 1955.

[9] Lancaster, P., Tismenetsky, M.: **The Theory of Matrices with Applications**, Second Edition, Academic Press, INC., San Diego, California., 1985

[10] Harry, L. Trentelman, Anton, A. Stoorvogel, Malo, Hautus.: **Control theory for linear systems**, May 15, 2002.

[11] Alexander, Ostrowski., Hans, Schneider.: **Some Theorems on the Inertia of General Matrices**, *Annals of Mathematical Studies*, **17**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1947.

[12] Lyapunov.: **Probléme Général de la Stabilité du Mouvement**, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **4**, 72-84, 1962.

[13] Taussky, Olga.: **A remark on a theorem by Lyapunov**, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **2**, 105-107, 1961.

[14] Taussky, Olga.: **A generalization of a theorem by Lyapunov**, . . . , **..**, ..-.., 1961.

[15] Vinograd, R., E.: **On a criterion of instability in the sense of Lyapunov of the solutions of a linear system of ordinary differential equations**, *Dokl. Acad. Nauk.*, **84**, 201-204, 1952.