

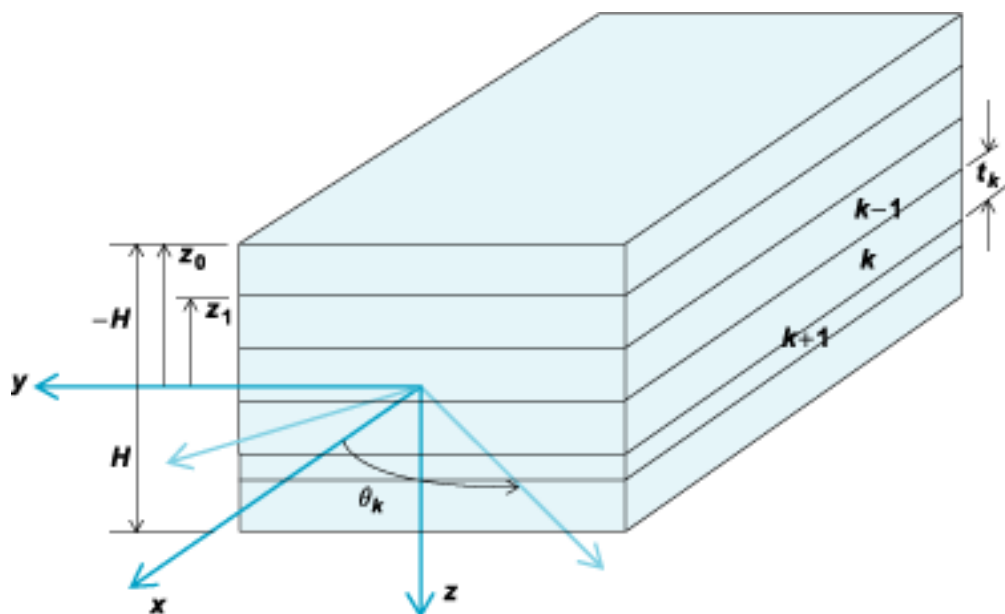


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ &
ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΓΟΥΣΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ - ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«Ελαστοστατική ανάλυση πολυστρωματικής πλάκας σε κάμψη
με χρήση των στοιχείων MZC, BFS και μακροστοιχείου
COONS»**



Επιβλέπων Καθηγητής: Κος Χ. Προβατίδης

Αθήνα 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο στην αεροδιαστημική, στην ναυπηγική αλλά και στην αυτοκινητοβιομηχανία. Η εφαρμογή των σύνθετων υλικών αποτέλεσε την απαρχή μιας μεγάλης προσπάθειας για την ανάλυση των δομικών στοιχείων που είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά. Τα σύνθετα υλικά παρέχουν μοναδικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα αντίστοιχά τους μεταλλικά αλλά επίσης παρουσιάζουν πιο σύνθετα και πολύπλοκα προβλήματα για τους μηχανικούς, τους αναλυτές και τους σχεδιαστές τους. Προκειμένου να αξιοποιηθούν πλήρως οι δυνατότητες των σύνθετων υλικών θα πρέπει οι σχεδιαστές και οι μηχανικοί να έχουν ακριβή μαθηματικά μοντέλα και σχεδιαστικές μεθόδους στην διάθεσή τους. Τα πιο συνήθη δομικά στοιχεία είναι οι πλάκες και τα κελύφη.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά στην μελέτη της συμπεριφοράς πολυστρωματικής πλάκας σε κάμψη υπό στατική (συγκεντρωμένη και κατανομημένη) φόρτιση. Η μελέτη της συμπεριφοράς της γίνεται κάνοντας χρήση 3 διαφορετικών πεπερασμένων στοιχείων (MELOSH, BOGNER, και μακροστοιχεία Coons) και εν συνεχεία συγκρίνονται τα αποτελέσματα τόσο μεταξύ τους όσο και σε σχέση με συμβατικά πεπερασμένα στοιχεία τα οποία ανήκουν στην οικογένεια στοιχείων του SimXpert 2010 Student Edition.

Σε αντιδιαστολή με τις συμβατικές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, η μέθοδος των μακροστοιχείων Coons, επιλύει επιτυχώς στατικά προβλήματα λεπτών πλακών θέτοντας βαθμούς ελευθερίας μόνο στα όρια της πλάκας [1]. Αυτό συνεπάγεται αφενός μεν την αποφυγή δημιουργίας πλέγματος για επίλυση του προβλήματος και αφετέρου την ενδεχόμενη μείωση του υπολογιστικού κόστους, ανάλογα με το προκαθορισμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας. Επίσης, η γενικότητα της μεθόδου την καθιστά ευέλικτη και ικανή για περαιτέρω έρευνα καθότι παρατηρούνται αξιοσημείωτα αποτελέσματα.

Ο σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσει την θεωρία της πολυστρωματικής πλάκας, να δημιουργηθεί το μαθηματικό μοντέλο το οποίο περιγράφει το μητρώο δυσκαμψίας για πολυστρωματικές πλάκες ανισοτροπικών υλικών, και εν συνεχεία να διαπιστώσει ποιο πεπερασμένο στοιχείο επιτυγχάνει ταχύτερα σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, καθηγητή κ. Χριστόφορο Προβατίδη για την καθοδήγηση και την υποστήριξη που μου παρέιχε κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	1
Περιεχόμενα	2
Κεφάλαιο 1^ο – Εισαγωγή στα Σύνθετα Υλικά	4
• 1.1 Κατηγορίες Σύνθετων Υλικών	5
○ 1.1.1 Τεχνητά Σύνθετα Υλικά	6
○ 1.1.2 Πολυμερή Σύνθετα Υλικά	9
Κεφάλαιο 2^ο – Μηχανική της Στρώσης	14
• 2.1 Ανισοτροπική Ελαστικότητα	14
• 2.2 Ισοτροπική Στρώση	15
• 2.3 Μόνο – Διευθυντική Ορθοτροπική Στρώση	17
• 2.4 Μόνο – Διευθυντική Ανισοτροπική Στρώση	20
• 2.5 Ορθογωνικά Ενισχυμένη Ορθοτροπική Στρώση.....	27
• 2.6 Στρώση με Προσανατολισμένα Φύλλα	30
Κεφάλαιο 3^ο – Μηχανική της Πολυστρωματικής Πλάκας	35
• 3.1 Παραδοχές της Θεωρίας	36
• 3.2 Συντελεστές Δυσκαμψίας για Γενικευμένη Ανισοτροπική Στρώση.....	37
• 3.3 Συντελεστές Δυσκαμψίας για Ομοιογενή Στρώση	49
• 3.4 Συντελεστές Δυσκαμψίας Ελάσματος – Πολυστρωματικής Πλάκας	51
• 3.5 Ημι – ομοιογενή Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες	53
• 3.6 Ημι – ισοτροπικά Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες.....	55
• 3.7 Συμμετρικά Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες.....	59
• 3.8 Αντισυμμετρικά Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες	61
• 3.9 Σύνθετα Υλικά με Δομή Τύπου ‘Sandwich’	63
• 3.10 Συντεταγμένες Επιπέδου Αναφοράς	65
• 3.11 Τάσεις σε Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες.....	69
Κεφάλαιο 4^ο – Εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στα Σύνθετα Υλικά	71
• 4.1 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων στην Κάμψη Πολυστρωματικών Πλακών με Ορθογωνικά Στοιχεία	72
• 4.2 Στοιχείο MZC – Rectangular (Μη – συμμορφωμένο)	74
• 4.3 Στοιχείο BFS (Συμμορφωμένο)	80
• 4.4 Μακροστοιχείο Coons.....	85
• 4.5 Στατική Ανάλυση	94
• 4.6 Υπολογισμός Μητρώου Δυσκαμψίας Πολυστρωματικής Πλάκας αποτελούμενη από Ανισοτροπικές Στρώσεις	94
• 4.7 Μετάβαση από το Τοπικό στο Καθολικό Σύστημα Συντεταγμένων	103
• 4.8 Υπολογισμός Μητρώου Δυνάμεων	104
• 4.9 Αριθμητική Ολοκλήρωση.....	105
Κεφάλαιο 5^ο – Εφαρμογή των στοιχείων MZC, BFS και Μακροστοιχείου Coons σε Ελαστοστατική Καταπόνηση Πολυστρωματικής Πλάκας	108
• 5.1 Περιγραφή Διαδικασίας Επίλυσης.....	108

• 5.2 Ελαστοστατική Μελέτη	109
• 5.3 Πανταχόθεν Πακτωμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Συγκεντρωμένο Φορτίο στο κέντρο της	113
• 5.4 Πανταχόθεν Εδρασμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Συγκεντρωμένο Φορτίο στο κέντρο της	119
• 5.5 Πανταχόθεν Πακτωμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Ομοιόμορφα Κατανεμημένο Φορτίο σε όλη την επιφάνεια της	125
• 5.6 Πανταχόθεν Εδρασμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Ομοιόμορφα Κατανεμημένο Φορτίο σε όλη την επιφάνεια της	131
• 5.7 Συμπεράσματα.....	136
• 5.8 Μελλοντική Εργασία	137
Παράρτημα Α	138
Παράρτημα Β	161
Βιβλιογραφία.....	198

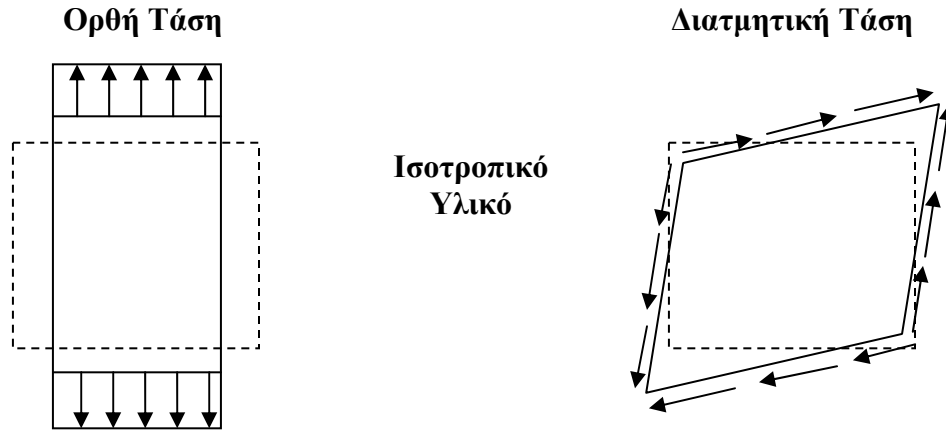
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Ο όρος «σύνθετο υλικό» αναφέρεται σε ένα υλικό το οποίο έχει σχηματιστεί από τον συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών σε μακροσκοπική κλίμακα. Οι κατασκευές από σύνθετα υλικά, λέγονται σύνθετες κατασκευές. Τα σύνθετα υλικά κατασκευάζονται έτσι, ώστε να έχουν καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από ότι τα συμβατικά υλικά, όπως για παράδειγμα τα μέταλλα. Μερικές από τις ιδιότητες που μπορούν να βελτιωθούν κατασκευάζοντας ένα σύνθετο υλικό είναι: η δυσκαμψία, η αντοχή, το βάρος, η αντίσταση σε διάβρωση, οι θερμικές ιδιότητες, η κόπωση και η αντοχή στην φθορά. Τα περισσότερα σύνθετα υλικά είναι κατασκευασμένα από δύο υλικά: το υλικό ενίσχυσης και τη μήτρα. Τα σύνθετα υλικά μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα πολύ μεγάλο εύρος συστημάτων και κατασκευών συμπεριλαμβανομένου τις αεροπορικές κατασκευές, τις ναυπηγικές, τις διαστημικές, την αυτοκινητοβιομηχανία, τον αθλητικό εξοπλισμό, τις ιατρικές προσθετικές συσκευές αλλά και τα ηλεκτρονικά κυκλώματα. Είναι περισσότερο κατάλληλα σε εφαρμογές που απαιτούν υψηλούς λόγους αντοχής προς βάρος και δυσκαμψία προς βάρος.

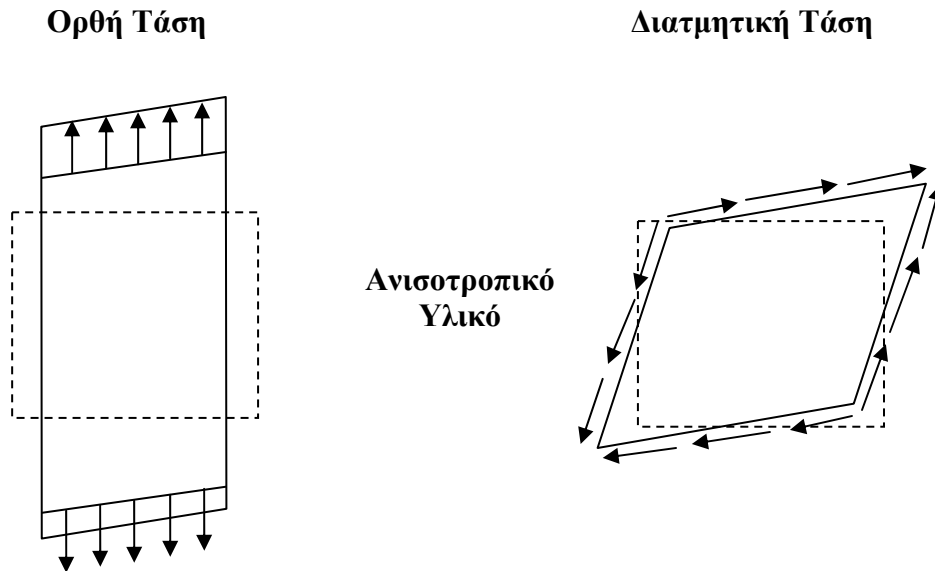
Με την ολοένα αυξανόμενη χρήση των σύνθετων υλικών με ενίσχυση ινών (fiber reinforced) στα δομικά στοιχεία των κατασκευών, οι μελέτες με αντικείμενο την συμπεριφορά των στοιχείων που είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά λαμβάνουν αξιοσημείωτη προσοχή. Οι λειτουργικές προδιαγραφές και τα οικονομικά δεδομένα κατά τον σχεδιασμό αυτών των υλικών, αναγκάζουν τους μηχανικούς να αναζητήσουν αξιόπιστες, ακριβείς αλλά ταυτόχρονα και οικονομικές μεθόδους για να καθορίσουν τα στατικά και τα δυναμικά χαρακτηριστικά των δομικών στοιχείων.

Η αναλυτική μελέτη και ο σχεδιασμός των σύνθετων υλικών απαιτεί γνώση της ελαστικότητας ανισοτροπικών υλικών, θεωρίες ως προς την κατασκευή τους και βέβαια κριτήρια αστοχίας και βλαβών. Σε αντίθεση με τα ισότροπα υλικά, τα ανισοτροπικά υλικά παρουσιάζουν πολύπλοκη μηχανική συμπεριφορά. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα ενός ορθογωνικού μπλοκ ισότροπου και ενός ανισοτροπικού υλικού. Όταν ένα μπλοκ ισότροπου υλικού υπόκειται σε καθαρή διατμητική τάση, παρουσιάζει μόνο διατμητική παραμόρφωση και όχι ορθή. Όμοια, εάν ένα ισότροπο μπλοκ υπόκειται σε κάθετη ως προς αυτό τάση, παρουσιάζει μόνο ορθές παραμορφώσεις και όχι διατμητικές.

Υπό ιδανικές συνθήκες φόρτισης ένα μπλοκ από ανισότροπο υλικό παραμορφώνεται διαφορετικά απ' ότι ένα αντίστοιχο ισότροπο όπως φαίνεται και στα σχήματα 1.1 και 1.2.



Σχήμα 1.1. Παραμόρφωση στοιχείου ισοτροπικού υλικού υπό ορθές και διατμητικές τάσεις (με διακεκομμένες γραμμές συμβολίζεται η αρχική γεωμετρία – προ φόρτισης)



Σχήμα 1.2. Παραμόρφωση στοιχείου ανισοτροπικού υλικού υπό ορθές και διατμητικές τάσεις (με διακεκομμένες γραμμές συμβολίζεται η αρχική γεωμετρία – προ φόρτισης)

1.1 Κατηγορίες σύνθετων υλικών

Τα σύνθετα υλικά μπορούμε να τα χωρίσουμε σε δύο κατηγορίες, στα τεχνητά και στα φυσικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα φυσικού σύνθετου υλικού είναι το ξύλο όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3. Φυσικό σύνθετο υλικό – ξύλο

1.1.1 Τεχνητά σύνθετα υλικά

Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να έχουμε ένα εξαιρετικό υλικό, χρησιμοποιώντας δύο ή περισσότερα υλικά μαζί. Τα πολύ υψηλής αντοχής και σκληρά υλικά είναι συνήθως πολύ εύθραυστα ενώ τα μαλακά είναι ισχυρά αλλά έχουν χαμηλό όριο διαρροής. Σε ένα σύνθετο υλικό με φορτισμένες ίνες (reinforced fibers), υψηλής αντοχής ίνες ενώνονται μαζί με μαλακό αλλά ισχυρό υλικό (μήτρα). Τέτοιο γνωστό παράδειγμα είναι οι ίνες γυαλιού (fiber glass).

Η λειτουργία της μήτρας είναι να ενώνει τις ίνες σε ένα σώμα, να τις προστατεύει και να μεταφέρει το φορτίο από την μια ίνα στην άλλη.

Τα σύνθετα υλικά μπορούμε να τα κατατάξουμε σε τρεις βασικές κατηγορίες:

- 1) Ενισχυμένα με διασπορά (dispersion strengthened), όπου η μήτρα είναι το βασικό υλικό που φέρει την φόρτιση.
- 2) Μερικώς φορτισμένα (particle reinforced), όπου το φορτίο μοιράζεται στη μήτρα και στα άλλα συστατικά του υλικού.
- 3) Ενισχυμένα με ίνες (fiber reinforced), όπου οι ίνες είναι το κυρίως υλικό που φέρει το φορτίο.

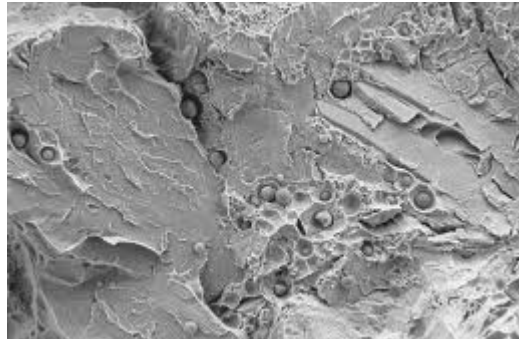
• Σύνθετα υλικά ενισχυμένα με διασπορά και μερικώς φορτισμένα

Ας θεωρήσουμε σύνθετο υλικό που αποτελείται από μια μεταλλική μήτρα στην οποία υπάρχουν διεσπαρμένα σωματίδια. Η αντοχή του είναι ανάλογη με την ικανότητα των σωματιδίων αυτών να εμποδίζουν τις μετατοπίσεις του υλικού, εξαιτίας της φόρτισης. Είναι φανερό ότι όσο πιο καλή είναι η διασπορά των σωματιδίων αυτών στην μήτρα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η αντοχή του σύνθετου υλικού.

Ο στόχος είναι, λοιπόν, να έχουμε σωματίδια τόσο μικρά και έτσι τοποθετημένα ώστε να μην υπάρχουν μετατοπίσεις του υλικού μεταξύ των σωματιδίων αυτών.

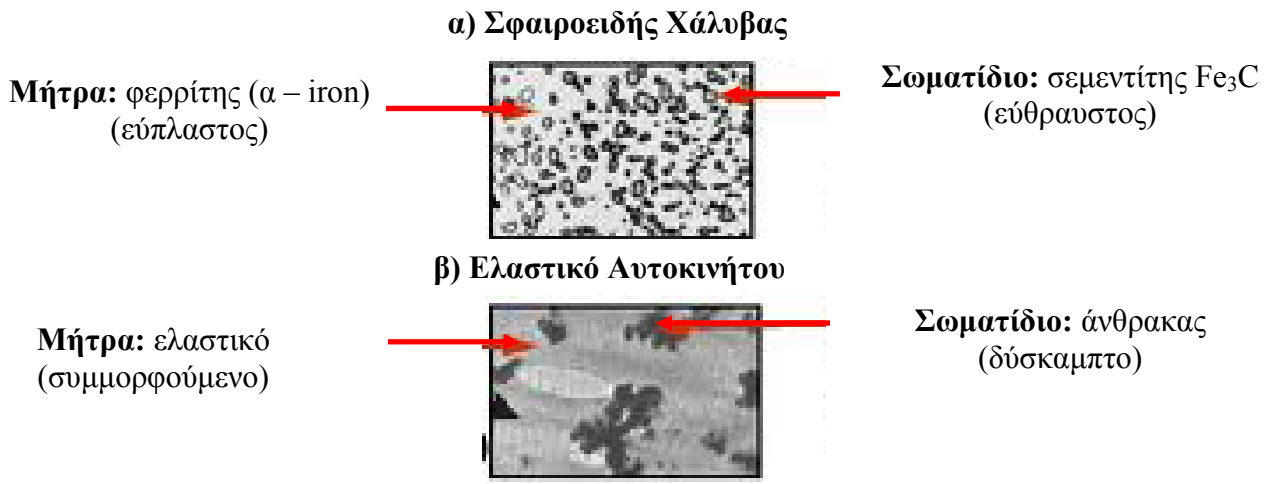
Για να εμποδίζονται οι μετατοπίσεις στα σύνθετα υλικά ενισχυμένα με διασπορά σωματιδίων, θα πρέπει η διάμετρος των σωματιδίων αυτών να είναι μικρότερη από 0.1

μm και ο συνολικός όγκος των σωματιδίων να είναι 1 – 15% του όγκου της μήτρας (βλ. σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4. Σύνθετα υλικά ενισχυμένα με διασπορά σωματιδίων

Αν έχουμε μεγαλύτερο ποσοστό μεταφοράς και μεγαλύτερα σωματίδια, τότε τα σύνθετα υλικά είναι μερικώς φορτισμένα, δηλαδή το φορτίο μοιράζεται από την μήτρα και τα σωματίδια. Γενικά, στα μερικώς φορτισμένα σύνθετα υλικά, η διάμετρος των σωματιδίων είναι μεγαλύτερη από 1μm, ενώ ο συνολικός τους όγκος μεγαλύτερος από 25% του όγκου της μήτρας. Στα ακόλουθα σχήματα 1.5 α) και β) απεικονίζονται δύο ενδεικτικές περιπτώσεις σύνθετων υλικών ενισχυμένων με σωματίδια, ο σφαιροειδής χάλυβας και το ελαστικό αυτοκινήτου.



Σχήμα 1.5. Σύνθετα υλικά ενισχυμένα με διασπορά σωματιδίων. α) Σφαιροειδής Χαλυβός και β) Ελαστικό Αυτοκινήτου

- **Σύνθετα υλικά με φορτισμένες ίνες (Fiber reinforcement)**

Από όλα τα σύνθετα υλικά, οι ίνες γυαλιού σε μήτρα από πλαστικό (fiber glass), είναι βέβαια το πιο γνωστό. Χρησιμοποιείται σαν κατασκευαστικό υλικό εδώ και 40

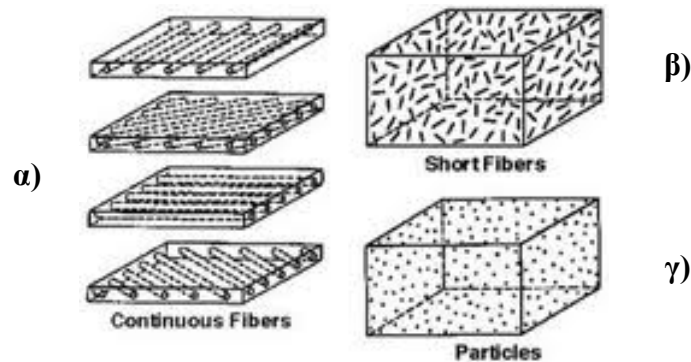
περίπου χρόνια. Σήμερα οι ίνες γυαλιού συνήθως τοποθετούνται σε μήτρα από πολυεστέρα ή εποξική ρητίνη.

Τα τελευταία χρόνια, μεγάλη ανάπτυξη παρουσιάζει η χρήση ινών άνθρακα, οι οποίες χρησιμοποιούνται επιτυχημένα με μήτρα από εποξική ρητίνη και παράγουν σύνθετα υλικά με χαμηλή πυκνότητα και υψηλή αντοχή και μέτρο ελαστικότητας. Το όριο αντοχής των ινών άνθρακα σε εφελκυσμό είναι της τάξεως των 2400 N/mm και το μέτρο ελαστικότητας περίπου 400.000 N/mm.

Τα σύνθετα υλικά με φορτισμένες ίνες χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

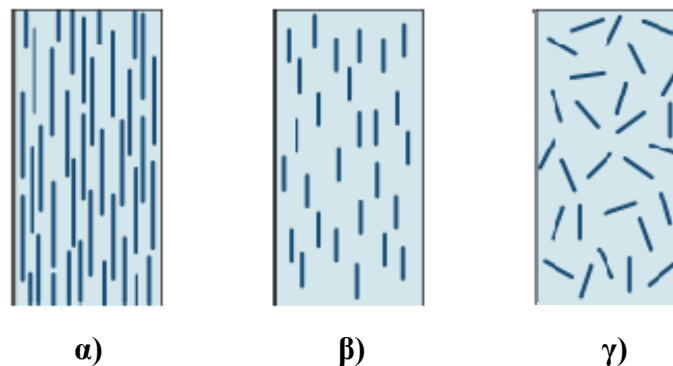
- α) σε αυτά τα οποία οι ίνες είναι συνεχείς.
- β) και σε αυτά τα οποία οι ίνες είναι ασυνεχείς και σε μικρά σωματίδια.

Στο σχήμα 1.6 απεικονίζονται συγκριτικά οι συνεχείς ίνες γυαλιού σε σχέση με τις «κοντές» ίνες και τα σωματίδια.

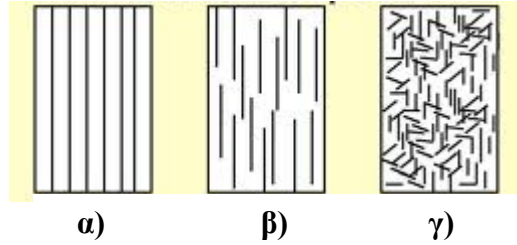


Σχήμα 1.6. Ίνες γυαλιού α) συνεχείς, β) κοντές και γ) σωματίδια

Αντίστοιχη διακριτοποίηση του είδους των ινών φαίνεται και στα σχήματα 1.7 και 1.8.



Σχήμα 1.7. Ίνες γυαλιού α) συνεχείς, β) ασυνεχείς και γ) ασυνεχείς με τυχαίο προσανατολισμό



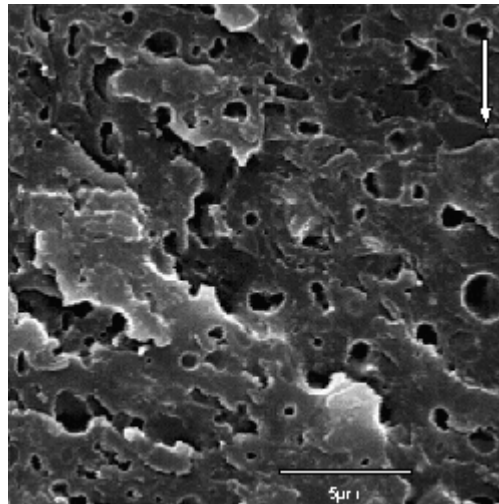
Σχήμα 1.8. Ίνες γυαλιού **α)** συνεχείς, **β)** ασυνεχείς και **γ)** ασυνεχείς με τυχαίο προσανατολισμό

1.1.2 Πολυμερή σύνθετα υλικά

Τα πολυμερή σύνθετα υλικά κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες:

- τα θερμοσκληρυνόμενα
- και τα θερμοπλαστικά

Η ταξινόμηση αυτή αφορά μόνο στο υλικό της μήτρας, διότι οι χρησιμοποιούμενες ίνες είναι ίδιες. Στην περίπτωση των θερμοσκληρυνόμενων υλικών, απαιτείται η μορφοποίηση τους ταυτόχρονα με τον πολυμερισμό τους, διότι μετά τον πολυμερισμό στερεοποιούνται και δεν είναι δυνατόν να αλλάξουν μορφή / σχήμα με την εξάσκηση θέρμανσης ή πίεσης χωρίς να καταστραφούν.



Σχήμα 1.9. Θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή σύνθετα υλικά

Τα θερμοπλαστικά υλικά μπορεί να πολυμεριστούν δίνοντάς τους μορφή πλάκας και, ακολούθως με την εξάσκηση πίεσης ή / και τη θέρμανση, να τους δοθεί το επιθυμητό σχήμα.



Σχήμα 1.10. Θερμοπλαστικά πολυμερή σύνθετα υλικά (honeycomb)

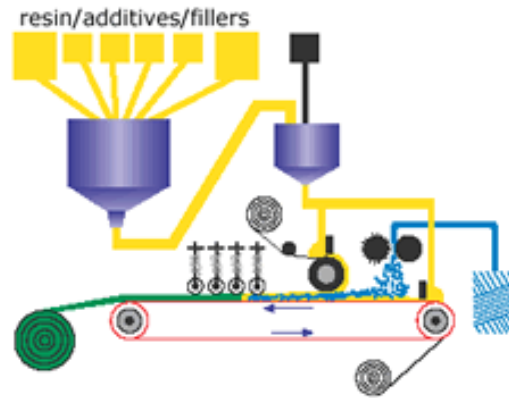
Οι ίνες που χρησιμοποιούνται για ενίσχυση προέρχονται από διάφορα υλικά:

- ίνες υάλου
- ίνες άνθρακα / γραφίτη
- ίνες αραμιδίου
- ίνες Kevlar
- ίνες Spectra
- μεταλλικές ίνες

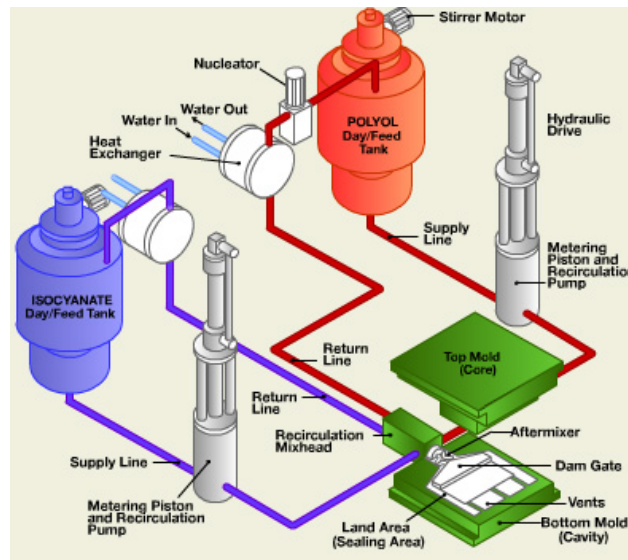
Οι χρησιμοποιούμενες ίνες παρουσιάζουν διαφορετική μέση ή μέγιστη αντοχή και στιβαρότητα, αναλόγως προς τη μορφή τους (μακριές, κοντές ή πεπλεγμένες ίνες). Τα χρησιμοποιούμενα στην αυτοκινητοβιομηχανία υλικά ανήκουν, κυρίως, στην ομάδα των θερμοσκληρυνόμενων και είναι πολυεστερικές και εποξειδικές ρητίνες ενισχυμένες με ίνες υάλου, άνθρακα ή Kevlar. Ευρεία είναι η χρήση των SMC (Sheet Moulding Compounds) που αποτελούνται από κοντές ίνες υάλου προ – εμποτισμένες με πολυεστερική ρητίνη και μορφοποιούνται σε πρέσσα. Άλλα υλικά που επίσης χρησιμοποιούνται, είναι τα προεμποτίσματα (prepregs), RIM (Reaction Injection Moulding) και τα υγρής επίστρωσης. Οι ίνες άνθρακα χρησιμοποιούνται σε περιορισμένο αριθμό εξαρτημάτων όπου απαιτούνται υψηλές μηχανικές ιδιότητες και σε αυτοκίνητα υψηλών επιδόσεων (formula).



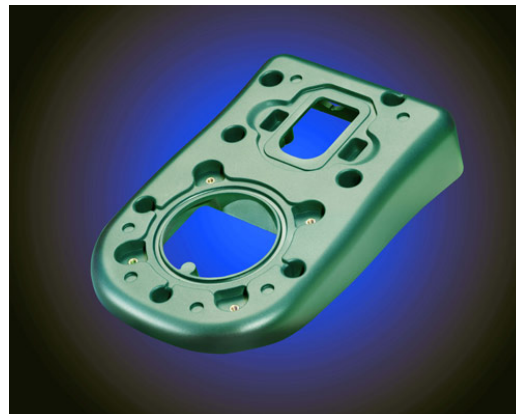
Σχήμα 1.11. Κονσόλα οργάνων αεροσκάφους κατασκευασμένη με την μέθοδο SMC



Σχήμα 1.12. Σχηματική αναπαράσταση παραγωγής σύνθετων υλικών SMC

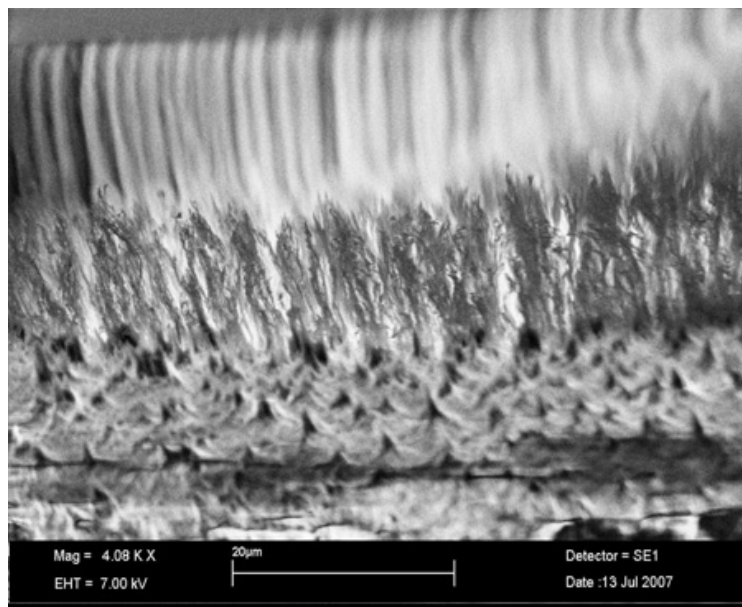


Σχήμα 1.13. Σχηματική αναπαράσταση παραγωγής σύνθετων υλικών RIM

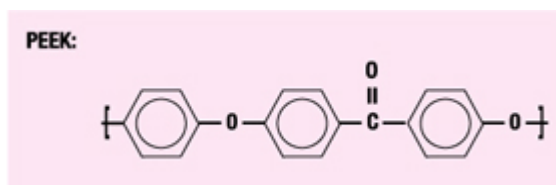


Σχήμα 1.14. Εξάρτημα κατασκευασμένο από σύνθετο υλικό RIM

Τα θερμοπλαστικά υλικά που χρησιμοποιούνται, κυρίως, είναι πολυανθρακικά, πολυαμίδιο, πολυαιθυλένιο και ελαστομερή πολυμερών που, όμως, έχουν περιορισμένη χρήση. Αυτή η πρακτική ευρίσκεται υπό αναθεώρηση, γιατί οι πρόσφατες εξελίξεις οδήγησαν σε νέα θερμοπλαστικά μήτρας πολυεθεριδίου ή πολυεθέρα-εθέρα-κετόνης (PEEK). Τα υλικά αυτά εμφανίζουν καλύτερες ιδιότητες, ενώ οι διεργασίες κατασκευής τους είναι πολύ οικονομικότερες.



Σχήμα 1.15. Απεικόνιση μικροδομής σύνθετων υλικών PEEK



Σχήμα 1.16. Χημικός δεσμός θερμοπλαστικού πολυεθέρα-εθέρα-κετόνης (PEEK)

Τα περισσότερα πραγματικά προβλήματα που αφορούν στις κατασκευές από σύνθετα υλικά, δεν επιδέχονται ακριβείς επιλύσεις, αλλά αντιπροσωπευτικές. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αποτελεσματική προσεγγιστική μέθοδος, που μας παρέχει αριθμητικές επιλύσεις, σε προβλήματα οριακών, αρχικών τιμών και ιδιοτιμών. Η μέθοδος αυτή είναι το πιο δυνατό αριθμητικό διαθέσιμο εργαλείο σήμερα, για να προβλέψει την συμπεριφορά των κατασκευών. Στην τυποποίηση και την ανάλυση οποιουδήποτε μαθηματικού μοντέλου μιας φυσικής επεξεργασίας, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες σχετικές με τον σκοπό της μελέτης.

Για παράδειγμα, η αντιπροσώπευση των πραγματικών φορτίων και των οριακών συνθηκών μπορεί να επιτευχθεί με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια σε κάποιο αριθμητικό μοντέλο. Ωστόσο, η αντιπροσώπευση των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού (φυσικές σταθερές) είναι αναπόφευκτα μια προσέγγιση η οποία απαιτεί προσεκτικές φυσικές μετρήσεις. Χονδρικές προσεγγίσεις κάποιων παραμέτρων και ακριβής αντιπροσώπευση κάποιων άλλων δεν οδηγεί σε ρεαλιστική μοντελοποίηση του συνολικού προβλήματος. Θα πρέπει, λοιπόν, το μοντέλο να αντιπροσωπεύει με ακρίβεια την κινηματική των παραμορφώσεων καθώς και την συμπεριφορά του υλικού.

Στα επόμενα κεφάλαια της Διπλωματικής Εργασίας γίνεται εκτενής αναφορά στις μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν την μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών, τις θεμελιώδεις σχέσεις ανισοτροπικών υλικών και την θεωρία των πολυστρωματικών πλακών / ελασμάτων. Επίσης, παρουσιάζονται τα μοντέλα των πεπερασμένων στοιχείων των πολυστρωματικών πλακών / ελασμάτων και εν συνεχεία τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα των αριθμητικών εφαρμογών που έγιναν κατά την διπλωματική εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΗΣ ΣΤΡΩΣΗΣ

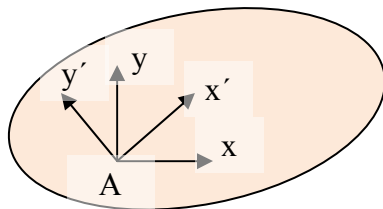
Η ανάλυση των κατασκευών από σύνθετα υλικά απαιτεί γνώση της ανισοτροπικής ελαστικότητας, την κατάλληλη θεωρία κατασκευών που αφορά κινηματική συμπεριφορά και μια αριθμητική μέθοδο που να επιλύει το πρόβλημα των οριακών τιμών σε σχέση με την κατασκευή. Το συγκεκριμένο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας επικεντρώνεται στη μελέτη της ανισοτροπικής συμπεριφοράς και στις θεωρίες κατασκευής που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των στρώσεων.

Η μέχρι τώρα γνωστή θεωρία για τα ιστροπικά υλικά δεν επαρκεί για την μοντελοποίηση των πολυστρωματικών υλικών. Για ένα ετερογενές ανισοτροπικό μέσο, θα πρέπει να έχουμε την κατάλληλη θεωρία με την οποία να μοντελοποιείται σωστά η δυσκαμψία και να προβλέπονται τα πεδία των τάσεων. Η δημιουργία άμεσων αναλογιών μεταξύ των μεγεθών των ιστροπικών και των ανισοτροπικών μέσων με την ελπίδα ότι χρησιμοποιώντας την υπάρχουσα γνώση για τα μεταλλικά υλικά και κάνοντας σχετικές τροποποιήσεις, μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα και συμπεράσματα.

2.1 Ανισοτροπική Ελαστικότητα

Εφόσον αναζητούμε μια θεμελιώδη κατανόηση της μηχανικής των σύνθετων υλικών, θα ξεκινήσουμε με την μελέτη της θεμελιώδους συμπεριφοράς τους. Καταρχήν, πρέπει να αναγνωρίσουμε τις διαφορές μεταξύ ομογενών υλικών.

Ένα υλικό ορίζεται ως ομογενές, όταν οι ιδιότητές του είναι ίδιες σε οποιοδήποτε σημείο του υλικού. Αντίθετα, στα ετερογενή υλικά, οι ιδιότητές τους είναι συνάρτηση της θέσης. Εν συνεχεία, θα διευκρινίσουμε την διαφορά μεταξύ ιστροπικών και ανισοτροπικών υλικών. Ένα υλικό ορίζεται ως ιστροπικό όταν όλες οι ιδιότητές του σε ένα σημείο του είναι ανεξάρτητες της διεύθυνσης που έχει. Αυτό σημαίνει πως οι ιδιότητες ενός σημείου A σε ένα ιστροπικό μέσο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 με σύστημα συντεταγμένων x-y και αρχή αξόνων το σημείο A, θα παραμείνουν σταθερές για οποιαδήποτε τυχαία περιστροφή των αξόνων. Αντίθετα, ένα ανισοτροπικό υλικό είναι αυτό το οποίο παρουσιάζει ιδιότητες, οι οποίες εξαρτώνται από την διεύθυνση. Για παράδειγμα, μια δεδομένη ιδιότητα υλικού μπορεί να έχει διαφορετικές τιμές σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Στα επόμενα κεφάλαια θα μιλήσουμε για διάφορες ειδικές περιπτώσεις ανισοτροπικών υλικών. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα υλικό μπορεί να είναι ιστροπικό και ομογενές, ιστροπικό και ετερογενές, ανισοτροπικό και ομογενές ή ανισοτροπικό και ετερογενές.



\mathbf{m} = Ιδιότητες του υλικού στο σημείο A, μετρημένες με αναφορά στο σύστημα (x,y)

\mathbf{m}' = Ιδιότητες του υλικού στο σημείο A, μετρημένες με αναφορά στο σύστημα (x',y')

Σχήμα 2.1. Ορισμός ιστροπικού και ανισοτροπικού υλικού

2.2 Ισοτροπική Στρώση

Η απλούστερη στρώση που μπορεί να παρατηρηθεί σε πολυστρωματική πλάκα / έλασμα είναι η ισοτροπική, κατασκευασμένη από μέταλλο ή θερμοπλαστικό πολυμερές, το οποίο χρησιμοποιείται για να προστατέψει το σύνθετο υλικό και για να παρέχει συνοχή μεταξύ των στρώσεων. Για παράδειγμα, πιεστικά δοχεία κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά (βλέπε σχήμα 2.2) συνήθως έχουν προστατευτικό μέταλλο ή θερμοπλαστικό εσωτερικά γραμμωμένο, το οποίο επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν άξονας για εκκαθάριση.

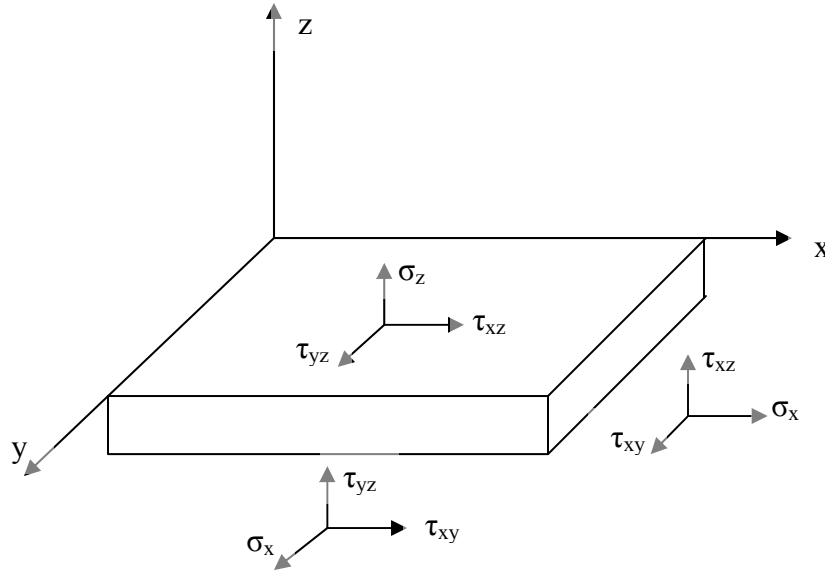


Σχήμα 2.2. Πιεστικά δοχεία κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά



Σχήμα 2.3. Άξονας κατασκευασμένος από σύνθετα υλικά

Εξαιτίας του γεγονότος ότι η στρώση είναι ισοτροπική μας αρκεί μόνο ένα σύστημα συντεταγμένων και έτσι θεωρούμε το καθολικό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4. Η ισοτροπική στρώση

- **Γραμμικό ελαστικό μοντέλο**

Η ρητή μορφή του γενικευμένου νόμου του Hooke μπορεί να γραφεί και ως:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_z), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y), & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας, ν ο λόγος Poisson και G είναι το μέτρο διάτμησης το οποίο μπορεί να εκφραστεί και συναρτήσει των E και ν όπως φαίνεται στην ακόλουθη εξίσωση:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}
 \tag{2.2}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις για ορθές παραμορφώσεις έχουμε $\varepsilon_0 = \frac{1}{K} \cdot \sigma_0$, όπου

$\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ είναι η ογκική παραμόρφωση. Για μικρές παραμορφώσεις, ο όγκος dV_1 για ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού μπορεί να βρεθεί γνωρίζοντας τον όγκο dV πριν από την παραμόρφωση και το ε_0 ως: $dV_1 = (1 + \varepsilon_0) \cdot dV$.

Η ογκική παραμόρφωση συνδέεται με την μέση τάση, $\sigma_0 = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, μέσω του όγκου ή του συντελεστή όγκου: $K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$.

Παρατηρούμε για τις οριακές συνθήκες:

Για $\nu = 1/2$, έχουμε $K \rightarrow \infty$, $\varepsilon_0 = 0$ και $dV_1 = dV$ για οποιεσδήποτε τάσεις. Τα υλικά στα οποία παρατηρούνται αυτές οι ιδιότητες ονομάζονται ασυμπίεστα, λόγω της ιδιότητας τους να διατηρούν τον όγκο τους όταν παραμορφώνονται και να αλλάζει μόνο το σχήμα τους.

Οι προηγούμενες εξισώσεις αναφέρονται στην γενική τρισδιάστατη εντατική κατάσταση της στρώσης. Ωστόσο, αν χρησιμοποιήσουμε ένα σύνθετο υλικό ως δομικό στοιχείο για λεπτότοιχες κατασκευές, μια στρώση συνήθως φορτίζεται με ένα σύστημα τάσεων μια εκ των οποίων ονομάζεται εγκάρσια ορθή τάση, σ_z και είναι πολύ μικρότερη, σαν απόλυτη τιμή, από τις άλλες τάσεις. Έχοντας αυτό κατά νου, μπορούμε να αμελήσουμε τους όρους στις εξισώσεις (2.1) που περιλαμβάνουν την σ_z , και να τους επαναδιατυπώσουμε με μια πιο απλοποιημένη μορφή όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ή

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{E} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y), & \tau_{xy} &= \gamma_{xy} \cdot G \\ \sigma_y &= \bar{E} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x), & \tau_{xz} &= \gamma_{xz} \cdot G \\ \tau_{yz} &= \gamma_{yz} \cdot G \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{Όπου } \bar{E} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}.$$

2.3 Μόνο – διευθυντική Ορθοτροπική Στρώση

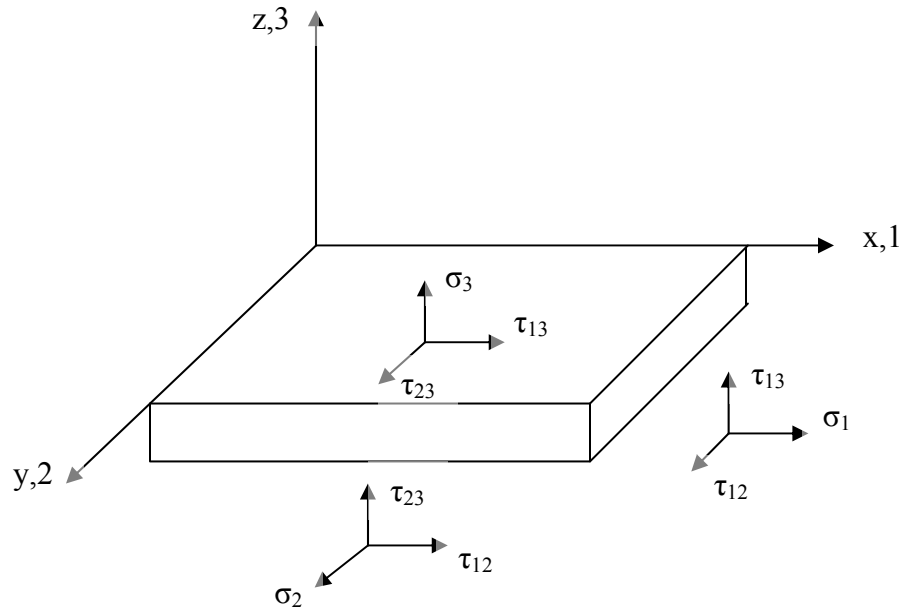
Μια μορφή σύνθετου υλικού με την απλούστερη δομή αποτελείται από μόνο – διευθυντικές στρώσεις των οποίων οι συντεταγμένες 1,2 και 3 συμπίπτουν με αυτές της στρώσης x,y και z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.

• **Γραμμικό ελαστικό μοντέλο**

Για την, υπό μελέτη, στρώση, οι θεμελιώδεις εξισώσεις (πάλι μέσα από τον γενικευμένο Νόμο του Hooke) είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \cdot \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{13} \cdot \frac{\sigma_3}{E_3}, & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{21} \cdot \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{23} \cdot \frac{\sigma_3}{E_3}, & \gamma_{13} &= \frac{\tau_{13}}{G_{13}} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E_3} - \nu_{31} \cdot \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{32} \cdot \frac{\sigma_2}{E_2}, & \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Όπου: $\nu_{12} \cdot E_1 = \nu_{21} \cdot E_2$, $\nu_{13} \cdot E_1 = \nu_{31} \cdot E_3$ και $\nu_{23} \cdot E_2 = \nu_{32} \cdot E_3$.



Σχήμα 2.5. Η ορθοτροπική στρώση

Η αντίστροφη μορφή των παραπάνω εξισώσεων είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= A_1 \cdot (\varepsilon_1 + \mu_{12} \cdot \varepsilon_2 + \mu_{13} \cdot \varepsilon_3), & \tau_{12} &= G_{12} \cdot \gamma_{12} \\ \sigma_2 &= A_2 \cdot (\varepsilon_2 + \mu_{21} \cdot \varepsilon_1 + \mu_{23} \cdot \varepsilon_3), & \tau_{13} &= G_{13} \cdot \gamma_{13} \\ \sigma_3 &= A_3 \cdot (\varepsilon_3 + \mu_{31} \cdot \varepsilon_1 + \mu_{32} \cdot \varepsilon_2), & \tau_{23} &= G_{23} \cdot \gamma_{23} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Όπου: $A_1 = \frac{E_1}{D} \cdot (1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32})$, $A_2 = \frac{E_2}{D} \cdot (1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31})$ και $A_3 = \frac{E_3}{D} \cdot (1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})$ με

$D = 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{23} \cdot \nu_{31} - \nu_{13} \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} - \nu_{13} \cdot \nu_{31} - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32}$ και

$$\begin{aligned}\mu_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13} \cdot \nu_{32}}{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}}, & \mu_{21} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{23} \cdot \nu_{31}}{1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31}} \\ \mu_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23}}{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}}, & \mu_{31} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ \mu_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{13} \cdot \nu_{21}}{1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31}}, & \mu_{32} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}\end{aligned}\quad (2.7)$$

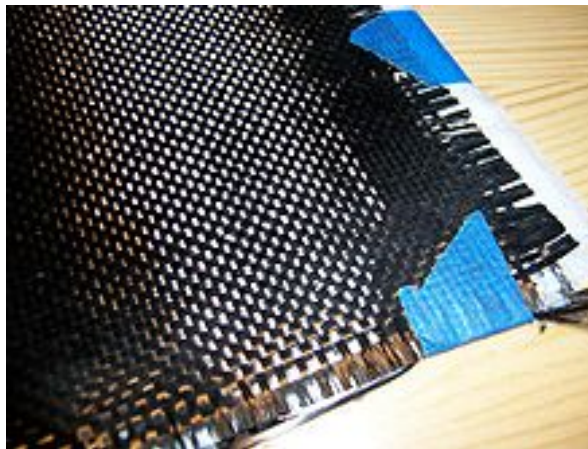
Όπως συμβαίνει για μια ιστροπική στρώση, όπως είδαμε προηγουμένως έτσι και στην ορθοτροπική, οι όροι που συμπεριλαμβάνουν εγκάρσια ορθή τάση, σ_3 , μπορούν να αμεληθούν στις εξισώσεις (2.5) και (2.6). Έτσι λοιπόν μπορούν να αναδιατυπωθούν στις ακόλουθες απλοποιημένες μορφές:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \cdot \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{13} \cdot \frac{\sigma_3}{E_3}, & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{21} \cdot \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{23} \cdot \frac{\sigma_3}{E_3}, & \gamma_{13} &= \frac{\tau_{13}}{G_{13}} \\ \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}}\end{aligned}\quad (2.8)$$

καθώς και,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \bar{E}_1 \cdot (\varepsilon_1 + \nu_{12} \cdot \varepsilon_2), & \tau_{12} &= G_{12} \cdot \gamma_{12} \\ \sigma_2 &= \bar{E}_2 \cdot (\varepsilon_2 + \nu_{21} \cdot \varepsilon_1), & \tau_{13} &= G_{13} \cdot \gamma_{13} \\ \tau_{23} &= G_{23} \cdot \gamma_{23}\end{aligned}\quad (2.9)$$

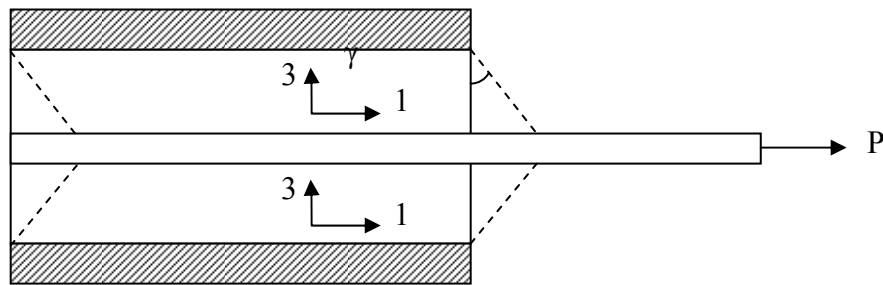
$$\text{Με } \bar{E}_1 = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})} \text{ και } \bar{E}_2 = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}$$



Σχήμα 2.6. Ορθοτροπική στρώση ανθρακονήματος

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν νωρίτερα συμπεριλαμβάνουν ελαστικές σταθερές της στρώσης, οι οποίες έχουν καθοριστεί πειραματικά. Για χαρακτηριστικές ιδιότητες στο επίπεδο, τα μεγέθη E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} ή ν_{21} καθορίζονται από τις ιδιότητες των ινών και της μήτρας του υλικού, την μικροδομή της στρώσης, το σχήμα και το μέγεθος των διατομών των ινών, το κλάσμα του όγκου των ινών και την κατανομή των ινών στην στρώση. Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_3 υπολογίζεται συνήθως ύστερα από την επιβολή θλιπτικών φορτίων στην στρώση κατά την κατεύθυνση z . Ακόμα τα εγκάρσια μέτρα διάτμησης G_{13} και G_{23} μπορούν να υπολογιστούν με διάφορες μεθόδους.

Για παράδειγμα, έχοντας καθαρή διάτμηση σε 2 συμμετρικά δείγματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7, και υπολογίζοντας το μέτρο διάτμησης ίσο με $G_{13}=P/(2A\gamma)$, όπου A είναι το εμβαδό της επιφάνειας των δειγμάτων.



Σχήμα 2.7. Μέθοδος καθορισμού του εγκάρσιου μέτρου διάτμησης, G_{13}

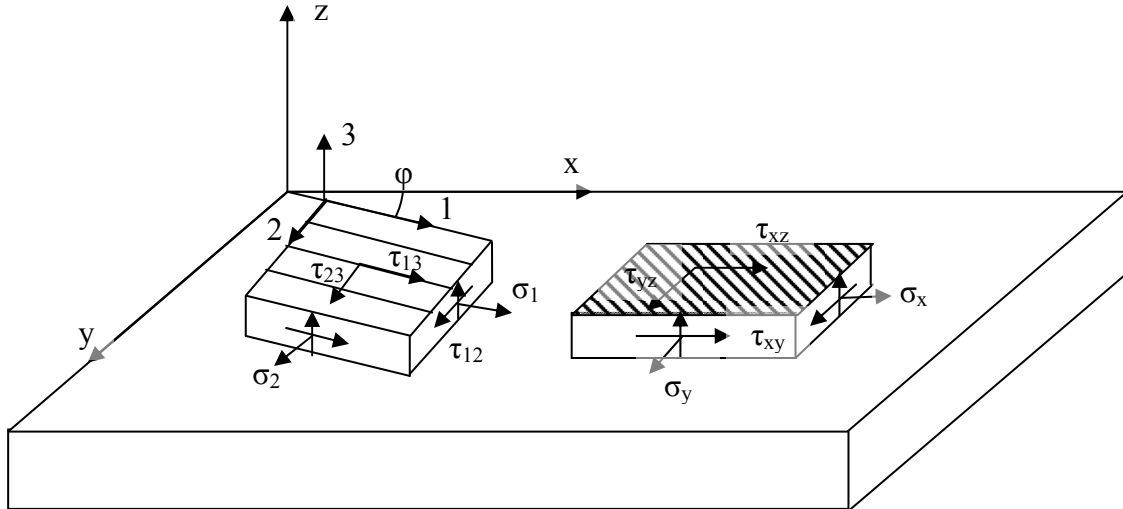
Για μόνο – κατευθυντικά σύνθετα υλικά, ισχύει $G_{13}=G_{12}$, οι λόγοι Poisson ν_{31} και ν_{32} μπορούν να καθοριστούν μετρώντας την μεταβολή του πάχους της στρώσης υπό εφελκυσμό στις κατευθύνσεις 1 και 2.

2.4 Μόνο – διευθυντική Ανισοτροπική Στρώση

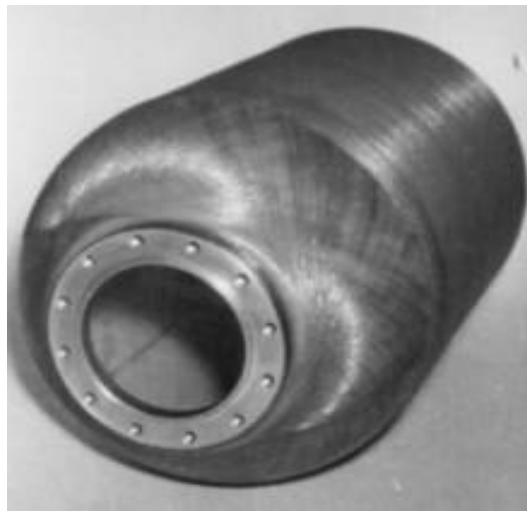
Θεωρούμε τώρα μια μόνο – διευθυντική στρώση όπως μελετήσαμε προηγουμένως και υποθέτουμε ότι ο κύριος άξονας 1 του υλικού βρίσκεται υπό μια γωνία ϕ με τον x – άξονα του καθολικού συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9. Ένα παράδειγμα τέτοιας στρώσης παρουσιάζεται στα σχήματα 2.8 και 2.10.



Σχήμα 2.8. Ανισοτροπική στρώση σύνθετου υλικού



Σχήμα 2.9. Σύνθετο υλικό αποτελούμενο από ένα σύστημα μόνο – διευθυντικών ανισοτροπικών στρώσεων



Σχήμα 2.10. Πιεστικό δοχείο κατασκευασμένο από ανισοτροπικό σύνθετο υλικό

- **Γραμμικό ελαστικό μοντέλο**

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις της υπό μελέτης στρώσης αναφέρονται στις αρχικές / κύριες συντεταγμένες του υλικού οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις (2.8) και (2.9). Χρειάζεται τώρα να παραγωγίσουμε αυτές τις εξισώσεις για το καθολικό σύστημα συντεταγμένων x, y, z . Προκειμένου να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να μετατρέψουμε τις τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ που δρουν μέσα στην στρώση και τις αντίστοιχες παραμορφώσεις $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ σε συνιστώσες τάσεων και παραμορφώσεων $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ και $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τις επόμενες εξισώσεις (2.10), (2.11) και τις (2.12), (2.13) για την μετατροπή συντεταγμένων τάσεων και παραμορφώσεων. Η εξίσωση (2.10) αναφέρεται στην

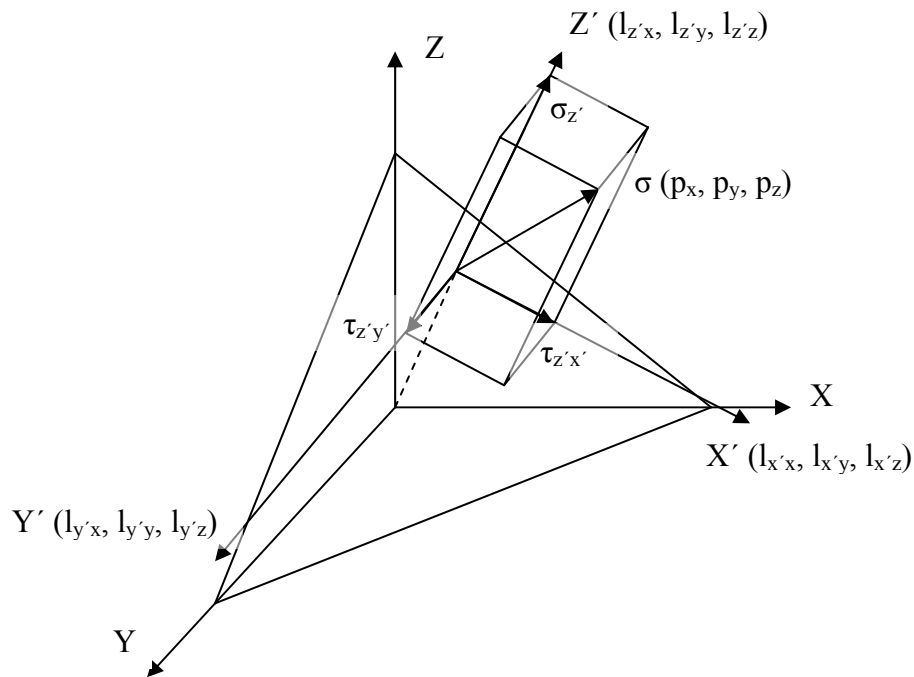
ορθή τάση, $\sigma_{z'}$, συναρτήσει των συνημίτονων κατεύθυνσης, l , των ορθών τάσεων $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ και των διατμητικών $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$. Ο συμβολισμός (x', y', z') , ο οποίος χρησιμοποιείται στην εξίσωση (2.10), δηλώνει την μετάθεση των όρων (x', y', z') με την βοήθεια της οποίας μπορούμε να γράψουμε δύο ακόμα εξισώσεις (για τις ορθές τάσεις σ_y' και σ_x') που αντιστοιχούν στους άλλους δυο άξονες, αλλάζοντας το x για το y , το y για το z , το z για το x . Επιπλέον, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.11, παρουσιάζονται τα συνημίτονα κατεύθυνσης, όχι μόνο του άξονα z' αλλά και τα αντίστοιχα των αξόνων x' και y' .

$$\begin{aligned}\sigma_{z'} &= p_x \cdot l_{z'x} + p_y \cdot l_{z'y} + p_z \cdot l_{z'z} \\ &= \sigma_x \cdot l_{z'x}^2 + \sigma_y \cdot l_{z'y}^2 + \sigma_z \cdot l_{z'z}^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot l_{z'x} \cdot l_{z'y} \\ &\quad + 2 \cdot \tau_{xz} \cdot l_{z'x} \cdot l_{z'z} + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot l_{z'y} \cdot l_{z'z} (x', y', z')\end{aligned}\quad (2.10)$$

Αντίστοιχα η διατμητική τάση για νέες συντεταγμένες περιγράφεται από την εξίσωση (2.11) και είναι:

$$\begin{aligned}\tau_{z'x'} &= p_x \cdot l_{x'x} + p_y \cdot l_{x'y} + p_z \cdot l_{x'z} \\ &= \sigma_x \cdot l_{z'x}^2 + \sigma_y \cdot l_{z'y}^2 + \sigma_z \cdot l_{z'z}^2 + \tau_{xy} \cdot (l_{x'x} \cdot l_{z'y} + l_{x'y} \cdot l_{z'x}) \\ &\quad + \tau_{xz} \cdot (l_{x'x} \cdot l_{z'z} + l_{x'z} \cdot l_{z'x}) + \tau_{yz} \cdot (l_{x'y} \cdot l_{z'z} + l_{x'z} \cdot l_{z'y}) (x', y', z')\end{aligned}\quad (2.11)$$

Όμοια με προηγούμενα, η μετάθεση των όρων παράγει τις εκφράσεις για τις διατμητικές τάσεις $\tau_{x'y'}$ και $\tau_{y'z'}$.



Σχήμα 2.11. Περιστροφή συστήματος συντεταγμένων

$$p_x = \sigma_x \cdot l_{z'x} + \tau_{yx} \cdot l_{z'y} + \tau_{zx} \cdot l_{z'z}$$

Όπου: $p_y = \sigma_y \cdot l_{z'y} + \tau_{zy} \cdot l_{z'z} + \tau_{xy} \cdot l_{z'x}$, είναι οι συνιστώσες της επιφανειακής τάσης.

$$p_z = \sigma_z \cdot l_{z'z} + \tau_{xz} \cdot l_{z'x} + \tau_{yz} \cdot l_{z'y}$$

Αντίστοιχη είναι η διαδικασία για την αναγωγή των παραμορφώσεων σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Οι εξισώσεις (2.12) και (2.13) περιγράφουν την συνολική ορθή και διατμητική παραμόρφωση αντίστοιχα, συναρτήσεως των συνημίτονων κατεύθυνσης και των συνιστωσών των ορθών και διατμητικών παραμορφώσεων.

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cdot l_x^2 + \varepsilon_y \cdot l_y^2 + \varepsilon_z \cdot l_z^2 + \gamma_{xy} \cdot l_x \cdot l_y + \gamma_{xz} \cdot l_x \cdot l_z + \gamma_{yz} \cdot l_y \cdot l_x \quad (2.12)$$

Όπου:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

τις οποίες μπορούμε να θεωρήσουμε ως γραμμικές εξισώσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης. Λαμβάνοντας $l_x = 1, l_y = l_z = 0$, στις παραπάνω εξισώσεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η ε_x είναι η παραμόρφωση που συμπίπτει με τον άξονα x. Παρομοίως, φαίνεται το αντίστοιχο για τις παραμορφώσεις ε_y και ε_z με τους άξονες y και z. Η συνολική διατμητική παραμόρφωση προκύπτει από την εξίσωση (2.13):

$$\gamma = 2 \cdot (\varepsilon_x \cdot l_x \cdot l'_x + \varepsilon_y \cdot l_y \cdot l'_y + \varepsilon_z \cdot l_z \cdot l'_z) + \gamma_{xy} \cdot (l_x \cdot l'_y + l_y \cdot l'_x) + \gamma_{xz} \cdot (l_x \cdot l'_z + l_z \cdot l'_x) + \gamma_{yz} \cdot (l_y \cdot l'_z + l_z \cdot l'_y) \quad (2.13)$$

Βάσει του σχήματος 2.9 τα συνημίτονα κατεύθυνσης $-l_x = \cos(n, x)$, $l_y = \cos(n, y)$, $l_z = \cos(n, z)$ – για μια τέτοια μετατροπή είναι (θεωρούμε $x'=1, y'=2, z'=3$):

$$l_{x'x} = c, \quad l_{x'y} = s, \quad l_{x'z} = 0,$$

$$l_{y'x} = -s, \quad l_{y'y} = c, \quad l_{y'z} = 0,$$

$$l_{z'x} = 0, \quad l_{z'y} = 0, \quad l_{z'z} = 1 \quad (2.14)$$

Όπου $c = \cos\varphi$ και $s = \sin\varphi$. Χρησιμοποιώντας τώρα τις εξισώσεις (2.10) και (2.11) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_x \cdot c^2 + \sigma_y \cdot s^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot c \cdot s \\
 \sigma_2 &= \sigma_x \cdot s^2 + \sigma_y \cdot c^2 - 2 \cdot \tau_{xy} \cdot c \cdot s \\
 \tau_{12} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cdot c \cdot s + \tau_{xy} \cdot (c^2 - s^2) \\
 \tau_{13} &= \tau_{xz} \cdot c + \tau_{yz} \cdot s \\
 \tau_{23} &= -\tau_{xz} \cdot s + \tau_{yz} \cdot c
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Η αντίστροφη μορφή των εξισώσεων (2.15) είναι η κάτωθι:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_1 \cdot c^2 + \sigma_2 \cdot s^2 - 2 \cdot \tau_{12} \cdot c \cdot s \\
 \sigma_y &= \sigma_1 \cdot s^2 + \sigma_2 \cdot c^2 + 2 \cdot \tau_{12} \cdot c \cdot s \\
 \tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot c \cdot s + \tau_{12} \cdot (c^2 - s^2) \\
 \tau_{xz} &= \tau_{13} \cdot c + \tau_{23} \cdot s \\
 \tau_{yz} &= \tau_{13} \cdot s + \tau_{23} \cdot c
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Η αντίστοιχη μετατροπή για τις παραμορφώσεις προκύπτει από τις εξισώσεις (2.12) και (2.13).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \varepsilon_x \cdot c^2 + \varepsilon_y \cdot s^2 + 2 \cdot \gamma_{xy} \cdot c \cdot s \\
 \varepsilon_2 &= \varepsilon_x \cdot s^2 + \varepsilon_y \cdot c^2 - 2 \cdot \gamma_{xy} \cdot c \cdot s \\
 \gamma_{12} &= (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cdot c \cdot s + \gamma_{xy} \cdot (c^2 - s^2) \\
 \gamma_{13} &= \gamma_{xz} \cdot c + \gamma_{yz} \cdot s \\
 \gamma_{23} &= -\gamma_{xz} \cdot s + \gamma_{yz} \cdot c
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

ή

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_1 \cdot c^2 + \varepsilon_2 \cdot s^2 - \gamma_{12} \cdot c \cdot s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_1 \cdot s^2 + \varepsilon_2 \cdot c^2 + \gamma_{12} \cdot c \cdot s \\
 \gamma_{xy} &= 2 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot c \cdot s + \gamma_{12} \cdot (c^2 - s^2) \\
 \gamma_{xz} &= \gamma_{13} \cdot c - \gamma_{23} \cdot s \\
 \gamma_{yz} &= \gamma_{13} \cdot s + \gamma_{23} \cdot c
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Για να παραγωγίσουμε τις θεμελιώδεις εξισώσεις για μία ανισοτροπική στρώση, αντικαθιστούμε τις παραμορφώσεις από την εξίσωση (2.17) στον νόμο του Hooke (2.9) και έτσι υπολογίζουμε τις τάσεις στις σχέσεις (2.16). Το τελικό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= A_{11} \cdot \varepsilon_x + A_{12} \cdot \varepsilon_y + A_{14} \cdot \gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= A_{21} \cdot \varepsilon_x + A_{22} \cdot \varepsilon_y + A_{24} \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{xy} &= A_{41} \cdot \varepsilon_x + A_{42} \cdot \varepsilon_y + A_{44} \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{xz} &= A_{55} \cdot \gamma_{xz} + A_{56} \cdot \gamma_{yz} \\
 \tau_{yz} &= A_{65} \cdot \gamma_{xz} + A_{66} \cdot \gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Τα A_{ij} αποτελούν τους συντελεστές δυσκαμψίας (stiffness coefficients) και προσδιορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \bar{E}_1 \cdot c^4 + \bar{E}_2 \cdot s^4 + 2 \cdot E_{12} \cdot c^2 \cdot s^2 \\
 A_{12} &= A_{21} = \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2 \cdot E_{12}) \cdot c^2 \cdot s^2 \\
 A_{14} &= A_{41} = [\bar{E}_1 \cdot c^2 - \bar{E}_2 \cdot s^2 - E_{12} \cdot (c^2 - s^2)] \cdot c \cdot s \\
 A_{22} &= \bar{E}_1 \cdot s^4 + \bar{E}_2 \cdot c^4 + 2 \cdot E_{12} \cdot c^2 \cdot s^2 \\
 A_{24} &= A_{42} = [\bar{E}_1 \cdot s^2 - \bar{E}_2 \cdot c^2 + E_{12} \cdot (c^2 - s^2)] \cdot c \cdot s \\
 A_{44} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2 \cdot E_{12} \cdot \nu_{12}) \cdot c^2 \cdot s^2 + G_{12} \cdot (c^2 - s^2) \\
 A_{55} &= G_{13} \cdot c^2 + G_{23} \cdot s^2 \\
 A_{56} &= A_{65} = (G_{13} - G_{23}) \cdot c \cdot s \\
 A_{66} &= G_{13} \cdot s^2 + G_{23} \cdot c^2
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

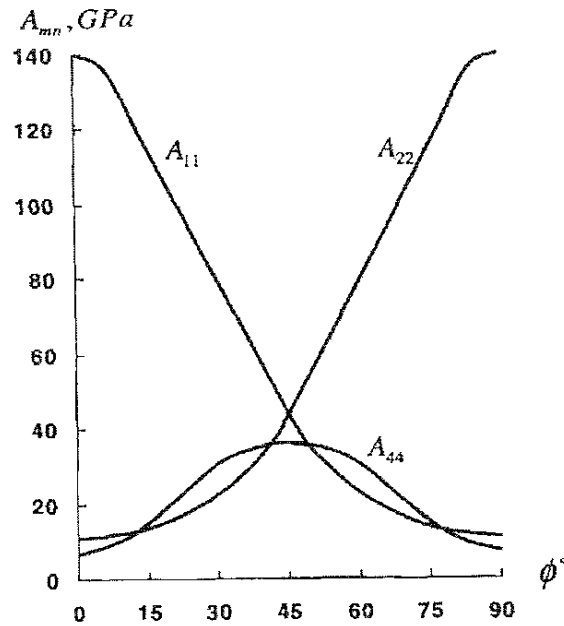
Όπου:

- $\bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$ = μέτρο ελαστικότητας,
- $E_{12} = \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12}$,
- $\nu_{12}, \nu_{21} =$ λόγος poisson,
- $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$, θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του αρχικού άξονα του υλικού με τον άξονα x.

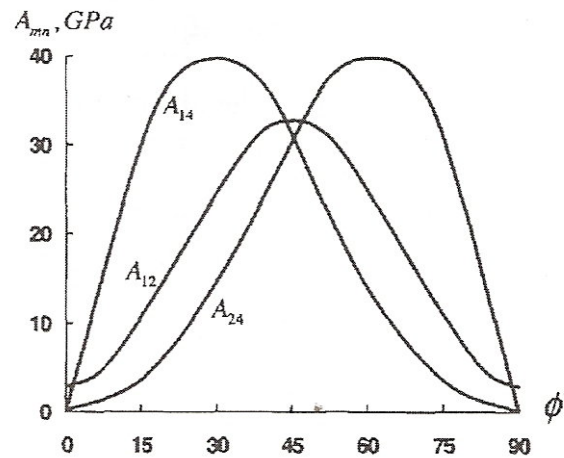
Επειδή όμως αναφερόμαστε στην επίπεδη εντατική κατάσταση οι όροι A_{55} , $A_{56} = A_{65}$ και A_{66} είναι ίσοι με το μηδέν. Αν τώρα θεωρήσουμε την γωνία $\varphi = 0$, τότε οι προαναφερθείσες εξισώσεις (2.19) λαμβάνουν την μορφή των εξισώσεων (2.9) για ορθοτροπική στρώση.

Οι συντελεστές δυσκαμψίας εξαρτώνται άμεσα από την γωνία προσανατολισμού όπως απεικονίζεται από τα σχήματα 2.12 και 2.13. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι μέσα από τις εξισώσεις (2.19) παρατηρούμε ότι κατά τον εφελκυσμό στην x – κατεύθυνση δεν έχουμε μόνο εγκάρσια συστολή (transverse contraction) όπως στα ορθοτροπικά υλικά αλλά και διάτμηση. Αυτή η συμπεριφορά του υλικού απεικονίζεται στο σχήμα 2.14. Το σχήμα 2.14 δείχνει την παραμορφωμένη πλάκα που υπόκειται σε εφελκυσμό. Η συγκεκριμένη παραμόρφωση

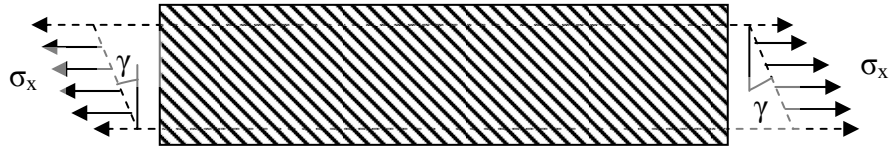
εξηγείται διότι η δυσκαμψία του υλικού κατά μήκος της κατεύθυνσης των ινών είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι κατά την εγκάρσια διεύθυνση τους.



Σχήμα 2.12. Απεικόνιση της συμπεριφοράς των συντελεστών δυσκαμψίας σε εφελκυσμό (A_{11} , A_{22}) και διάτμηση (A_{44}) μίας στρώσης ινών άνθρακα σε συνάρτηση με την γωνία προσανατολισμού των ινών.



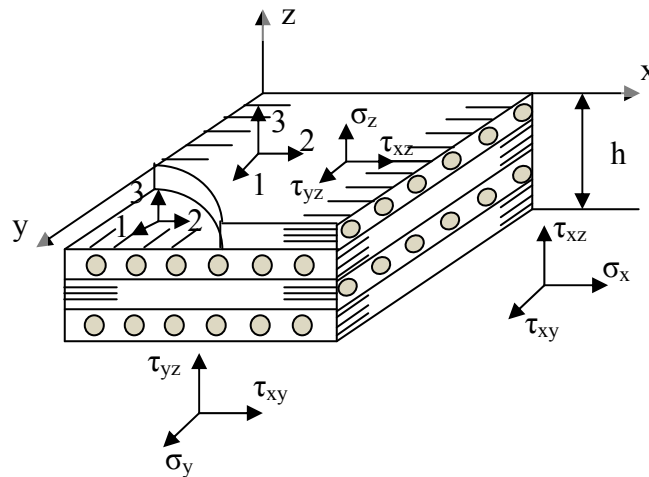
Σχήμα 2.13. Απεικόνιση της συμπεριφοράς των συντελεστών δυσκαμψίας σύζευξης (coupling stiffnesses) (A_{12} , A_{14} και A_{24}) μίας στρώσης ινών άνθρακα σε συνάρτηση με την γωνία προσανατολισμού των ινών.



Σχήμα 2.14. Παραμόρφωση ανισοτροπικής στρώσης φορτισμένη υπό γωνία ως προς τον προσανατολισμό των ινών.

2.5 Ορθογωνικά Ενισχυμένη Ορθοτροπική Στρώση

Η πιο απλή ενισχυμένη, σε δύο κατευθύνσεις, στρώση είναι η επονομαζόμενη «στρώση διασταυρούμενων φύλλων» (cross – ply layer), η οποία αποτελείται από εναλλασσόμενα φύλλα με γωνίες προσανατολισμού 0° και 90° σε σχέση με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων x , y και z όπως φαίνεται στο σχήμα 2.15. Για την ακρίβεια, αυτή είναι μια πολυστρωματική κατασκευή, αλλά εφόσον έχει δομηθεί από αλληπαλά φύλλα, μπορούμε να την θεωρήσουμε ως μια ομογενή ορθοτροπική στρώση.



Σχήμα 2.15. Ορθογωνικά ενισχυμένη ορθοτροπική στρώση.

- **Γραμμικό ελαστικό μοντέλο**

Αν θεωρήσουμε τώρα μια στρώση η οποία αποτελείται από m διαμήκη (0°) φύλλα με πάχη $h_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) και n εγκάρσια (90°) φύλλα με πάχη $h_{90}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) κατασκευασμένα από το ίδιο σύνθετο υλικό. Τότε, οι τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} που συνθέτουν την επίπεδη εντατική κατάσταση στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων μπορούν να εκφραστούν υπό όρους τάσεων κατά τις κύριες συντεταγμένες του υλικού των φύλλων όπως φαίνεται ακολούθως:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x \cdot h &= \sum_{i=1}^m \sigma_1^{(i)} \cdot h_0^{(i)} + \sum_{j=1}^n \sigma_2^{(j)} \cdot h_{90}^{(j)}, \\
 \sigma_y \cdot h &= \sum_{i=1}^m \sigma_2^{(i)} \cdot h_0^{(i)} + \sum_{j=1}^n \sigma_1^{(j)} \cdot h_{90}^{(j)}, \\
 \tau_{xy} \cdot h &= \sum_{i=1}^m \tau_{12}^{(i)} \cdot h_0^{(i)} + \sum_{j=1}^n \tau_{12}^{(j)} \cdot h_{90}^{(j)},
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

όπου, h είναι το συνολικό πάχος της στρώσης (βλ. σχήμα 2.15),

$$h = h_0 + h_{90},$$

με

$$h_0 = \sum_{i=1}^m h_0^{(i)}, \quad h_{90} = \sum_{i=1}^n h_{90}^{(i)}$$

που συμβολίζουν τα συνολικά πάχη των διαμηκών και εγκάρσιων φύλλων αντίστοιχα.

Οι τάσεις στις κύριες συντεταγμένες του υλικού των φύλλων συνδέονται με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις μέσα από τις εξισώσεις (2.19)

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^{(i,j)} &= \bar{E}_1 \cdot \left(\varepsilon_1^{(i,j)} + \nu_{12} \cdot \varepsilon_2^{(i,j)} \right), \\
 \sigma_2^{(i,j)} &= \bar{E}_2 \cdot \left(\varepsilon_2^{(i,j)} + \nu_{21} \cdot \varepsilon_1^{(i,j)} \right), \\
 \tau_{12}^{(i,j)} &= G_{12} \cdot \gamma_{12}^{(i,j)}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\text{όπου, } \bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \text{ και } E_1 \cdot \nu_{12} = E_2 \cdot \nu_{21}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι η παραμόρφωση όλων των φύλλων είναι η ίδια με την παραμόρφωση ολόκληρης της στρώσης, δηλαδή:

$$\varepsilon_1^{(i)} = \varepsilon_2^{(j)} = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2^{(i)} = \varepsilon_1^{(j)} = \varepsilon_y, \quad \gamma_{12}^{(i)} = \gamma_{12}^{(j)} = \gamma_{xy}$$

Τότε, αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.22) στην (2.21) καταλήγουμε στις ακόλουθες θεμελιώσεις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= A_{11} \cdot \varepsilon_x + A_{12} \cdot \varepsilon_y, \\
 \sigma_y &= A_{21} \cdot \varepsilon_x + A_{22} \cdot \varepsilon_y, \\
 \tau_{xy} &= A_{44} \cdot \gamma_{xy},
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

όπου οι συντελεστές δυσκαμψίας ισούνται με:

$$A_{11} = \bar{E}_1 \cdot \bar{h}_0 + \bar{E}_2 \cdot \bar{h}_{90}, \quad A_{22} = \bar{E}_1 \cdot \bar{h}_{90} + \bar{E}_2 \cdot \bar{h}_0, \quad (2.24)$$

$$A_{12} = A_{21} = \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} = \bar{E}_2 \cdot \nu_{21}, \quad A_{44} = G_{12}$$

και

$$\bar{h}_0 = \frac{h_0}{h}, \quad \bar{h}_{90} = \frac{h_{90}}{h}$$

Η αντίστροφη μορφή της εξίσωσης (2.23) είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{E_x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad (2.25)$$

όπου

$$E_x = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, \quad E_y = A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{21}}, \quad G_{xy} = A_{44}, \quad (2.26)$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{11}}, \quad \nu_{yx} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

Προκειμένου τώρα να καθορίσουμε τα εγκάρσια μέτρα διάτμησης G_{xz} και G_{yz} , θεωρούμε ότι έχουμε καθαρή διάτμηση κατά την επιφάνεια xy (όπως φαίνεται στο σχήμα 2.16). Όπως προκύπτει από τις συνθήκες ισορροπίας για τα φύλλα της στρώσης έχουμε:

$$\tau_{13}^{(i)} = \tau_{23}^{(j)} = \tau_{xz}, \quad \tau_{23}^{(i)} = \tau_{13}^{(j)} = \tau_{yz}. \quad (2.27)$$

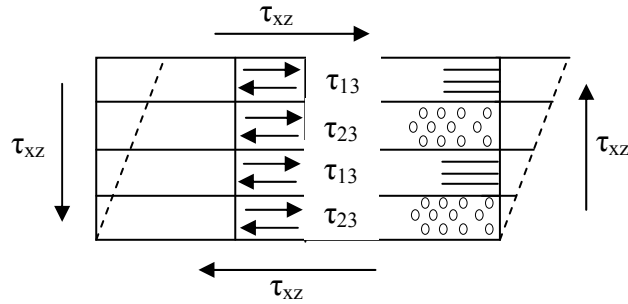
Οι συνολικές διατμητικές παραμορφώσεις λοιπόν μπορούν να βρεθούν ως:

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{h} \cdot \left(\sum_{i=1}^m \gamma_{13}^{(i)} \cdot h_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_{23}^{(j)} \cdot h_{90} \right), \quad (2.28)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{h} \cdot \left(\sum_{i=1}^m \gamma_{23}^{(i)} \cdot h_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_{13}^{(j)} \cdot h_{90} \right),$$

όπου ισχύει

$$\gamma_{13}^{(i,j)} = \frac{\tau_{13}^{(i,j)}}{G_{13}}, \quad \gamma_{23}^{(i,j)} = \frac{\tau_{23}^{(i,j)}}{G_{23}}. \quad (2.29)$$



Σχήμα 2.16. Καθαρή εγκάρσια διάτμηση σε ορθογωνικά ενισχυμένη ορθοτροπική στρώση.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.29) στις (2.28) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.27) φτάνουμε στις σχέσεις:

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}},$$

όπου ισχύει

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{\bar{h}_0}{G_{13}} + \frac{\bar{h}_{90}}{G_{23}}, \quad \frac{1}{G_{yz}} = \frac{\bar{h}_0}{G_{23}} + \frac{\bar{h}_{90}}{G_{13}}.$$

2.6 Στρώση με Προσανατολισμένα Φύλλα

Η στρώση με προσανατολισμένα φύλλα είναι ένας συνδυασμός άρτιου αριθμού εναλλασσόμενων φύλλων με γωνίες $+\varphi$ και $-\varphi$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.17. Η δομή αυτής της στρώσης είναι χαρακτηριστική για κατασκευές κελυφών με περιελίξεις (βλ. σχήμα 2.18). Όπως είδαμε και προηγούμενα στην ορθογωνικά ενισχυμένη ορθοτροπική στρώση, έτσι και στην στρώση με προσανατολισμένα φύλλα αναφερόμαστε ουσιαστικά σε ένα έλασμα, αλλά για μεγάλο αριθμό φύλλων μπορεί να θεωρηθεί και ως ομογενής ορθοτροπική στρώση.

- **Γραμμικό ελαστικό μοντέλο**

Θεωρούμε τώρα δύο συμμετρικά συστήματα από μονό-κατευθυντικά ανισοτροπικά φύλλα αποτελούμενα από τον ίδιο αριθμό φύλλων, κατασκευασμένα όλα από το ίδιο υλικό και έχοντας εναλλασσόμενες γωνίες $+\varphi$ και $-\varphi$. Τότε, οι συνολικές τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} που δρουν στην στρώση μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των αντίστοιχων τάσεων που δρουν στα προσανατολισμένα φύλλα κατά γωνία $+\varphi$ και $-\varphi$ όπως φαίνεται πιο κάτω:

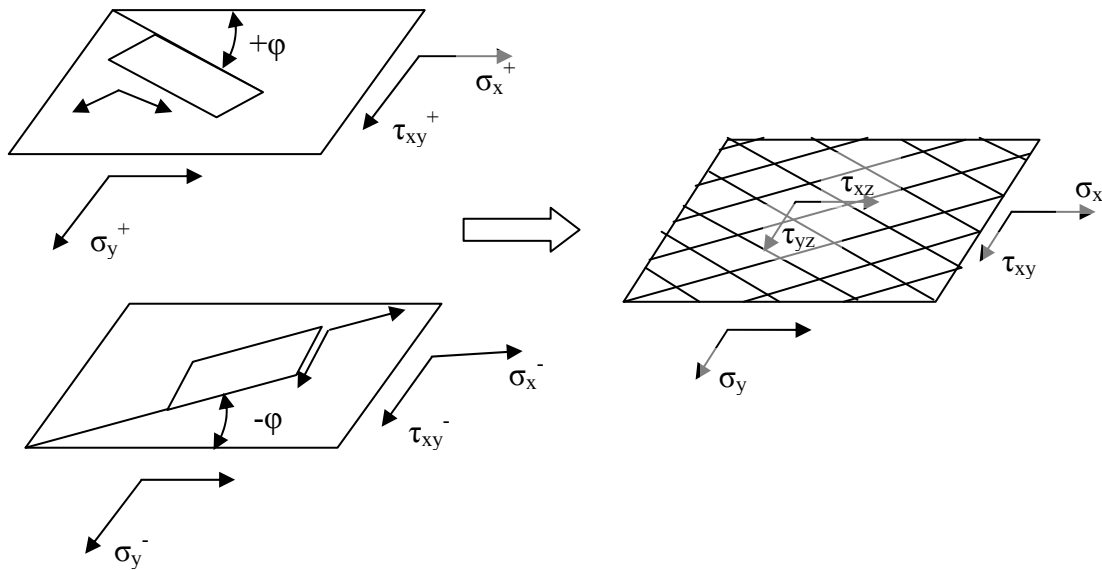
$$\begin{aligned} \sigma_x \cdot h &= \sigma_x^+ \cdot \frac{h}{2} + \sigma_x^- \cdot \frac{h}{2}, & \sigma_y \cdot h &= \sigma_y^+ \cdot \frac{h}{2} + \sigma_y^- \cdot \frac{h}{2}, \\ \tau_{xy} \cdot h &= \tau_{xy}^+ \cdot \frac{h}{2} + \tau_{xy}^- \cdot \frac{h}{2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

όπου h είναι το συνολικό πάχος της στρώσης. Οι τάσεις με εκθέτες '+' και '-' είναι συσχετισμένοι με τις παραμορφώσεις ε_x , ε_y και γ_{xy} οι οποίες έχουν υποτεθεί ίσες για όλα τα φύλλα μέσα από τις εξισώσεις (2.19),

$$\begin{aligned} \sigma_x^\pm &= A_{11}^\pm \cdot \varepsilon_x + A_{12}^\pm \cdot \varepsilon_y + A_{14}^\pm \cdot \gamma_{xy}, & \sigma_y^\pm &= A_{21}^\pm \cdot \varepsilon_x + A_{22}^\pm \cdot \varepsilon_y + A_{24}^\pm \cdot \gamma_{xy}, \\ \tau_{xy}^\pm &= A_{41}^\pm \cdot \varepsilon_x + A_{42}^\pm \cdot \varepsilon_y + A_{44}^\pm \cdot \gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

όπου

$A_{11}^+ = A_{11}^- = A_{11}$, $A_{12}^+ = A_{12}^- = A_{12}$, $A_{22}^+ = A_{22}^- = A_{22}$, $A_{14}^+ = A_{41}^- = A_{14}$, $A_{24}^+ = A_{24}^- = A_{24}$ και $A_{44}^+ = A_{44}^- = A_{44}$, με A_{mn} ($mn = 11, 12, 22, 14, 24, 44$) τα οποία διευκρινίζονται από τις εξισώσεις (2.20).



Σχήμα 2.17. Δύο συμμετρικά φύλλα που σχηματίζουν μια υπό γωνία στρώση.



Σχήμα 2.18. Κέλυφος κατασκευασμένο από στρώση με φύλλα υπό γωνία.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.31) στις αντίστοιχες τους στις εξισώσεις (2.30) φθάνουμε στις ακόλουθες θεμελιώδεις εξισώσεις για στρώση με προσανατολισμένα φύλλα:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11} \cdot \varepsilon_x + A_{12} \cdot \varepsilon_y, \\ \sigma_y &= A_{21} \cdot \varepsilon_x + A_{22} \cdot \varepsilon_y, \\ \tau_{xy} &= A_{44} \cdot \gamma_{xy},\end{aligned}\tag{2.32}$$

Η αντίστροφη μορφή των εξισώσεων αυτών είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{E_x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}},\tag{2.33}$$

όπου

$$\begin{aligned}E_x &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, \quad E_y = A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{21}}, \quad G_{xy} = A_{44}, \\ \nu_{xy} &= \frac{A_{12}}{A_{11}}, \quad \nu_{yx} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (2.32) και (2.33), η υπό μελέτη στρώση είναι ορθοτροπική. Τώρα θα παραγωγίσουμε τις θεμελιώδεις εξισώσεις ως προς τις εγκάρσιες διατμητικές τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} και τις αντίστοιχες διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz} και γ_{yz} . Έστω ότι έχουμε μια τέτοια στρώση φορτισμένη διατμητικά με τάση τ_{xz} . Τότε για όλα τα φύλλα ισχύει $\tau_{xz}^+ = \tau_{xz}^- = \tau_{xz}$ και επειδή η στρώση είναι ορθοτροπική, ισχύει $\gamma_{xz}^+ = \gamma_{xz}^- = \gamma_{xz}$, $\gamma_{yz}^+ = \gamma_{yz}^- = \gamma_{yz} = 0$. Κατά παρόμοιο τρόπο, εφαρμόζοντας την τάση τ_{yz} έχουμε $\tau_{yz}^+ = \tau_{yz}^- = \tau_{yz}$, $\gamma_{yz}^+ = \gamma_{yz}^- = \gamma_{yz}$, $\gamma_{xz}^+ = \gamma_{xz}^- = \gamma_{xz} = 0$. Γράφοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις από την (2.19) για αυτές τις δύο περιπτώσεις φτάνουμε στις παρακάτω ισότητες

$$\tau_{xz} = A_{55} \cdot \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = A_{66} \cdot \gamma_{yz},\tag{2.35}$$

με τους συντελεστές δυσκαμψίας A_{55} και A_{66} να περιγράφονται από τις εξισώσεις (2.20).

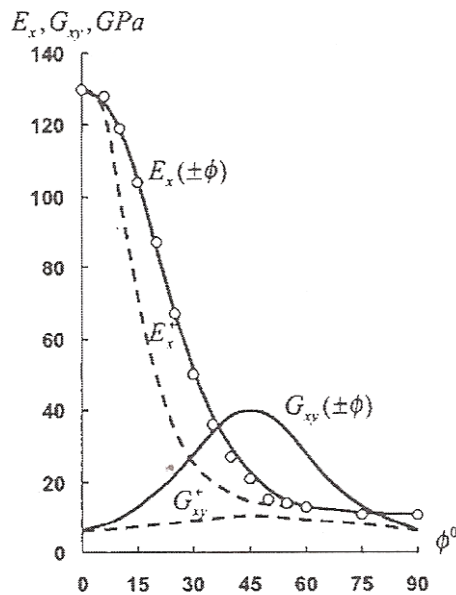
Η εξάρτηση των E_x και G_{xy} από την γωνία φ απεικονίζεται με την βοήθεια των εξισώσεων (2.34) και παρουσιάζονται στο σχήμα 2.19 με συνεχείς γραμμές. Η θεωρητική καμπύλη για το E_x είναι σε συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα που φαίνονται σε κύκλους. Για σύγκριση, οι ίδιες σταθερές παρουσιάζονται και για ανισοτροπική στρώση γωνίας $+\varphi$. Όπως μπορεί να φανεί, $E_x(\pm) \geq E_x^+$. Προκειμένου να εξηγήσουμε αυτή την επίδραση, θεωρούμε μονό-αξονικό εφελκυσμό και των δύο στρώσεων κατά την x διεύθυνση. Καθώς ο εφελκυσμός σε μεμονωμένα φύλλα γωνίας $+\varphi$ και $-\varphi$ συνδυάζεται με διατμητική παραμόρφωση (όπως φαίνεται στο σχήμα 2.20), το σύστημα αυτών των φύλλων δεν επιδεικνύει διάτμηση όταν υπόκειται σε εφελκυσμό, και ως εκ τούτου, έχει υψηλότερη δυσκαμψία. Μελετώντας τα φύλλα μιας συμμετρικής στρώσης με προσανατολισμένα φύλλα, τα μεμονωμένα ανισοτροπικά φύλλα $+\varphi$ και $-\varphi$ φορτίζονται όχι μόνο με την ορθή τάση σ_x που εφαρμόζεται

στην στρώση, αλλά και με την διατμητική τάση τ_{xy} η οποία περιορίζει την διάτμηση μεταξύ των μεμονωμένων φύλλων. Για να βρούμε τις διατμητικές τάσεις μεταξύ των φύλλων που δημιουργούνται λόγω δράσης – αντίδρασης μπορούμε να θεωρήσουμε $\sigma_y = 0$ και $\gamma_{xy} = 0$ έτσι ώστε να έχουμε επίπεδη εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση σε κάθε φύλλο της υπό

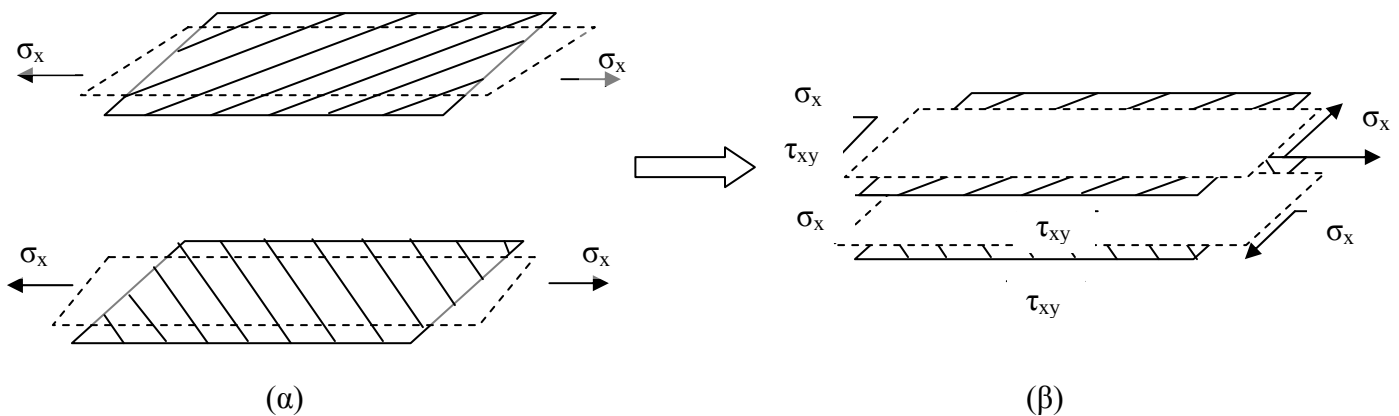
$$\pm\phi \text{ γωνίας στρώσης. Έτσι θα έχουμε: } \tau_{xy} = -\eta_{xy,x}^+ \cdot \frac{G_{xy}^+}{E_x^+} \cdot \sigma_x.$$

Ο εκθέτης ‘+’ υποδεικνύει ότι οι ελαστικές σταθερές αντιστοιχούν σε ένα μεμονωμένο φύλλο με γωνία +φ. Από την σχέση αυτή της διατμητικής τάσης προκύπτει το μέτρο ελαστικότητας

$$\text{των υπό γωνία φύλλων. Δηλαδή: } E_x = \frac{E_x^+}{1 - \eta_{x,xy}^+ \cdot \eta_{xy,x}^+} = \frac{E_x^+}{1 - \frac{G_{xy}^+}{E_x^+} (\eta_{xy,x}^+)^2}.$$



Σχήμα 2.19. Κέλυφος κατασκευασμένο από στρώση με φύλλα υπό γωνία.



Σχήμα 2.20. Παραμόρφωση και τάσεις, που προκαλούνται σε μεμονωμένα φύλλα (α) και σε συμμετρικά ενωμένα φύλλα (β) υπό μονό-αξονικό εφελκυσμό.

Όταν μια τέτοια στρώση υπόκειται σε καθαρή διάτμηση, τα φύλλα της φορτίζονται με πρόσθετες ορθές τάσεις. Αυτές οι τάσεις μπορούν να ευρεθούν αν πάρουμε $\varepsilon_x = 0$ και $\varepsilon_y = 0$ και έτσι θα έχουμε:

$$\sigma_x = -\tau_{xy} \cdot \frac{E_x^+ \cdot (\eta_{x,xy}^+ - \nu_{xy}^+ \cdot \eta_{y,xy}^+)}{G_{xy}^+ \cdot (1 - \nu_{xy}^+ \cdot \nu_{yx}^+)}, \quad \sigma_y = -\tau_{xy} \cdot \frac{E_y^+ \cdot (\eta_{y,xy}^+ + \nu_{yx}^+ \cdot \eta_{x,xy}^+)}{G_{xy}^+ \cdot (1 - \nu_{xy}^+ \cdot \nu_{yx}^+)}.$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει και το μέτρο διάτμησης G_{xy} το οποίο είναι πολύ μεγαλύτερο από το G_{xy}^+ όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.19:

$$G_{xy} = \frac{G_{xy}^+ \cdot (1 - \nu_{xy}^+ \cdot \nu_{yx}^+)}{1 - \nu_{xy}^+ \cdot \nu_{yx}^+ - \eta_{x,xy}^+ \cdot \eta_{xy,x}^+ - \eta_{y,xy}^+ \cdot \eta_{xy,y}^+ - \nu_{xy}^+ \cdot \eta_{y,xy}^+ \cdot \eta_{xy,x}^+ - \nu_{yx}^+ \cdot \eta_{x,xy}^+ \cdot \eta_{xy,y}^+}$$

Στην περίπτωση που έχουμε στρώση με γωνία $\pm 45^\circ$ και την εφελκούμε τότε μπορούμε να καθορίσουμε με σχετικά απλό τρόπο το μέτρο διάτμησης ενός μονό – διευθυντικού φύλλου, G_{12} . Πράγματι, για μια τέτοια στρώση, οι συντελεστές δυσκαμψίας παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$A_{11}^{45} = A_{22}^{45} = \frac{1}{4} \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + 2 \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 4 \cdot G_{12}),$$

$$A_{12}^{45} = \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + \frac{1}{4} \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2 \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} - 4 \cdot G_{12})$$

και

$$E_{45} = \frac{1}{A_{11}^{45}} \cdot (A_{11}^{45} + A_{12}^{45}) \cdot (A_{11}^{45} - A_{12}^{45}), \quad 1 + \nu_{45} = \frac{1}{A_{11}^{45}} \cdot (A_{11}^{45} + A_{12}^{45}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $A_{11}^{45} - A_{12}^{45} = 2 \cdot G_{12}$ έχουμε:

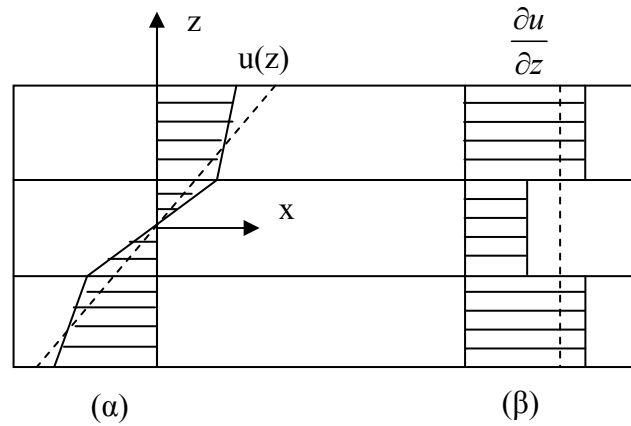
$$G_{12} = \frac{E_{45}}{2 \cdot (1 + \nu_{45})}. \quad (2.36)$$

Έτσι, για την εύρεση του G_{12} , μπορούμε να δοκιμάσουμε ένα δείγμα $\pm 45^\circ$ σε εφελκυσμό, να μετρήσουμε τις ορθές παραμορφώσεις ε_x και ε_y , να καθορίσουμε τα $E_{45} = \sigma_x / \varepsilon_x$, $\nu_{45} = -\varepsilon_y / \varepsilon_x$, και εν τέλει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.36).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΗΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

Μια τυπική πολυστρωματική κατασκευή αποτελείται από ένα σύστημα στρώσεων, ενωμένες μεταξύ τους. Οι στρώσεις αυτές μπορούν να είναι συστοιχία διαφορετικών ιστροπικών ή ανιστροπικών υλικών, και να έχουν διαφορετική δομή, διαφορετικά πάχη και μηχανικές ιδιότητες. Σε αντίθεση με τις απλές τυπικές στρώσεις που περιγράψαμε προηγουμένως και των οποίων οι βασικές ιδιότητες ήταν καθορισμένες πειραματικά, τα χαρακτηριστικά της πολυστρωματικής πλάκας συνήθως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που αφορούν στο πλήθος των στρώσεων, τις γεωμετρικές και μηχανικές ιδιότητες, οι οποίες θα πρέπει να είναι γνωστές. Ένα καθορισμένο πλήθος στρώσεων μπορεί να συνδυαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματιστούν τόσα ελάσματα με αποτέλεσμα η ιδέα να τα μελετήσουμε χρησιμοποιώντας πειραματικές μεθόδους να μην φαίνεται ρεαλιστική. Ενώ η πιο σύνθετη τυπική στρώση περιγράφεται με 9 συντελεστές δυσκαμψίας A_{mn} , μερικοί εκ των οποίων μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, η πολυστρωματική πλάκα χαρακτηρίζεται από 21 συντελεστές και παρουσιάζει συμπτώματα σύζευξης (coupling effects) τα οποία δύσκολα μπορούν να εξομοιωθούν σε πειράματα.

Έτσι, το αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού είναι να δούμε το μαθηματικό μοντέλο που μας επιτρέπει να προβλέψουμε την συμπεριφορά μιας πολυστρωματικής πλάκας ή ενός ελάσματος, σαν σύστημα στρώσεων με δεδομένες ιδιότητες. Ο μόνος περιορισμός που τίθεται σε ό,τι αφορά την πλάκα σαν στοιχείο με σύνθετη δομή είναι, είναι ότι το συνολικό πάχος θεωρείται κατά πολύ μικρότερο από τις άλλες διαστάσεις της. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται θεωρία δύο διαστάσεων για την ανάλυση της πλάκας. Οι θεωρίες των δύο διαστάσεων προέρχονται από την θεωρία σε τρεις διαστάσεις λαμβάνοντας τις κατάλληλες παραδοχές σε σχέση με τις τάσεις και τις παραμορφώσεις καθ' όλο το ύψος της πλάκας. Η κλασική θεωρία πολυστρωματικής πλάκας είναι μια προέκταση της κλασικής θεωρίας πλακών προσαρμοσμένη στις πολυστρωματικές πλάκες. Σε αυτήν την θεωρία, οι μετατοπίσεις εσωτερικά της πλάκας θεωρούνται γραμμικά μεταβαλλόμενες (βλ. σχήμα 3.1) καθ' ύψος του πάχους και η εγκάρσια μετατόπιση θεωρείται σταθερή κατά το πάχος (δηλαδή η εγκάρσια παραμόρφωση είναι μηδενική). Η κλασική θεωρία πολυστρωματικών πλακών θεωρείται κατάλληλη για τις περισσότερες εφαρμογές όπου το πάχος της πλάκας είναι κατά δύο τάξεις μεγέθους μικρότερο σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις της. Όταν η κλασική θεωρία πολυστρωματικής πλάκας δεν είναι εφαρμόσιμη χρησιμοποιείται μια αναθεωρημένη θεωρία της, εν τούτοις εμείς θα ασχοληθούμε και θα αναπτύξουμε την κλασική θεωρία.

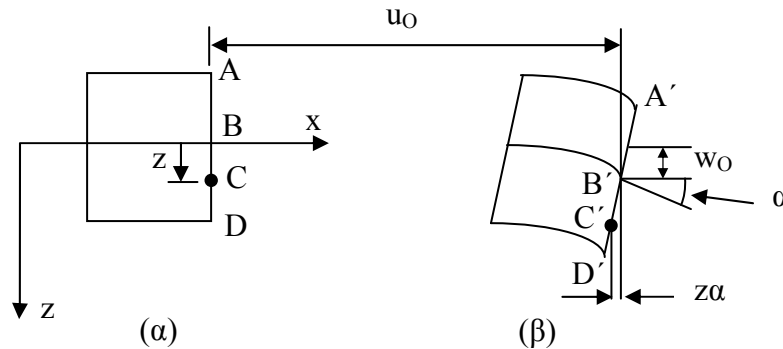


Σχήμα 3.1. Οι πραγματικές (συνεχείς γραμμές) και οι κατά προσέγγιση (διακεκομμένες γραμμές) κατανομές της μετατόπισης (α) και της παραγώγου της (β) καθ' ύψος μιας πολυστρωματικής πλάκας.

3.1 Παραδοχές της Θεωρίας

Η θεωρία των πολυστρωματικών πλακών συμπεριλαμβάνει τις παρακάτω παραδοχές:

- Η καθετότητα των πλακών ως προς το μέσο επίπεδο πριν την παραμόρφωση θεωρείται δεδομένη (βλ. Σχήμα 3.2 (α)).
- Η καθετότητα των πλακών ως προς το μέσο επίπεδο διατηρείται και μετά την παραμόρφωση (βλ. Σχήμα 3.2 (β)).



Σχήμα 3.2. (α) Μη παραμορφωμένη διατομή σε κάμψη κατά το $x - z$ επίπεδο. (β) Παραμορφωμένη διατομή σε κάμψη κατά το $x - z$ επίπεδο.

Οι δύο αυτές παραδοχές μας οδηγούν στο να αμελήσουμε τις εγκάρσιες παραμορφώσεις ϵ_{xz} , ϵ_{yz} και ϵ_{zz} . Αμελώντας το ϵ_{zz} οδηγούμαστε και στην απαλοιφή του σ_{zz} , επειδή το γινόμενο του ϵ_{zz} επί του σ_{zz} είναι μηδέν στην συνολική δυναμική ενέργεια της πλάκας. Για ορθοτροπικές στρώσεις, και για πλάκες δομημένες από ορθοτροπικές στρώσεις, αναντίστοιχα με τις γωνίες προσανατολισμού των στρώσεων, η απαλοιφή του ϵ_{xz} και ϵ_{yz} οδηγεί στο να

αμελήσουμε το σ_{xz} και σ_{yz} . Έτσι, η κλασσική θεωρία πολυστρωματικών πλακών δεν συμπεριλαμβάνει καταστάσεις εγκάρσιων παραμορφώσεων και τάσεων. Αυτό μας οδηγεί στην υπόθεση ότι οι πλάκες είναι απείρως συμπαγείς και στερεές στην εγκάρσια διεύθυνση, αν και στην πραγματικότητα είναι πιο αδύναμες στην εγκάρσια διεύθυνση.

Η κλασσική θεωρία πλακών είναι κατάλληλη για την ανάλυση «λεπτών πλακών», ειδικά όταν η εγκάρσια παραμόρφωση είναι αμελητέα. Ωστόσο, πλάκες κατασκευασμένες από προηγμένα σύνθετα υλικά με ίνες ενίσχυσης, των οποίων ο λόγος μέτρου ελαστικότητας προς μέτρο διάτμησης (E_1/G_{13} και E_1/G_{23}) είναι πολύ μεγάλος, είναι ιδιαίτερα ευπαθείς σε αστοχίες κατά το πάχος τους, επειδή τα μέτρα διάτμησης, G_{13} και G_{23} , είναι σημαντικά μικρότερα απ' ό τι το μέτρο ελαστικότητας, E_1 κατά μήκος της διεύθυνσης των ινών. Παρά το γεγονός ότι οι εγκάρσιες διατμητικές και η ορθή τάση (σ_{xz} , σ_{yz} και σ_{zz}) είναι μιας τάξεως μεγέθους μικρότερες από τις επιφανειακές τάσεις (σ_x , σ_y και σ_z), οι επιτρεπόμενες αντοχές του υλικού για τις εγκάρσιες τάσεις είναι επίσης κατά μια τάξη μεγέθους μικρότερες από τις αντίστοιχες επιφανειακές αντοχές. Έτσι, η κλασσική θεωρία πολυστρωματικών πλακών που αναπτύσσεται σε αυτήν την εργασία, δεν ενδείκνυται να χρησιμοποιηθεί για σύνθετα υλικά τα οποία πρόκειται να καταπονηθούν και να αστοχήσουν με εγκάρσια διάτμηση ή αποκόλληση κάποιας στρώσης.

Εκτός των προαναφερθέντων παραδοχών, έχουν ληφθεί υπόψη και άλλες παραδοχές που αφορούν στις μετατοπίσεις, τις παραμορφώσεις και τις τάσεις στην πολυστρωματική πλάκα. Αν θεωρήσουμε μια πλάκα συνολικού πάχους h , η οποία αποτελείται από N ορθοτροπικές στρώσεις με τις αρχικές συντεταγμένες των υλικών προσανατολισμένες σε γωνίες $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_N$ στην συντεταγμένη x της πλάκας, τότε θεωρούμε ότι:

- οι στρώσεις είναι κατασκευασμένες με τέτοιο τρόπο που δρουν σαν μονοστρωματικό υλικό,
- ο δεσμός μεταξύ δύο στρώσεων θεωρείται τέλειος, απεριόριστα λεπτός και διατμητικά μη – παραμορφώσιμος. Έτσι, δεν υπάρχει ολίσθηση της μιας πλάκας πάνω στην άλλη και οι μετατοπίσεις παραμένουν συνεχείς διαμέσου του δεσμού,
- το υλικό της κάθε στρώσης είναι γραμμικά ελαστικό,
- κάθε στρώση έχει ομοιόμορφο πάχος,
- και ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές και συνεχείς κατά το πάχος της πλάκας, συμπεριλαμβανομένων και των διεπαφών των στρώσεων από ανόμοια υλικά. Αυτή η παραδοχή παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της θεωρίας για τις πολυστρωματικές πλάκες μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε μια πολυστρωματική πλάκα με μία ισοδύναμη στρώση, της οποίας οι μηχανικές ιδιότητες σταθμίζονται καθ' όλο το πάχος της.

3.2 Συντελεστές Δυσκαμψίας για Γενικευμένη Ανισοτροπική Στρώση

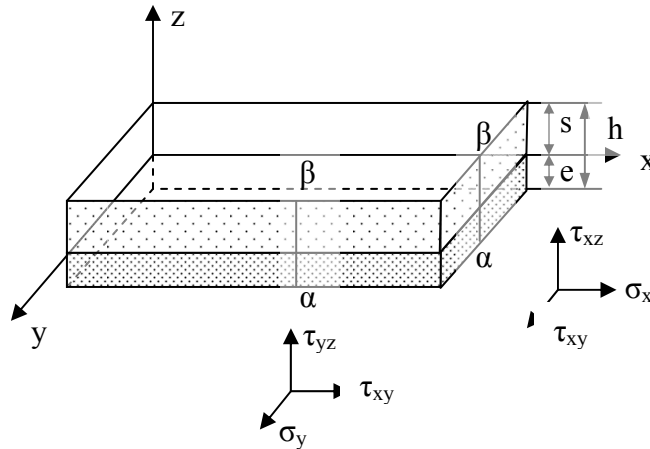
Για χάρη συντομίας, θεωρούμε αρχικά μια λεπτή ομογενή στρώση, η οποία είναι ανισοτροπική στο επίπεδο x - y και της οποίας οι μηχανικές ιδιότητες είναι σε συνάρτηση της

κατακόρυφης συντεταγμένης z (βλ. σχήμα 3.3). Οι συντεταγμένες x και y ανήκουν στο επίπεδο αναφοράς για το οποίο ισχύει ότι $z = 0$ και $-e \leq z \leq s$ για την υπό μελέτη στρώση. Υπάρχουν κάποιες ειδικές περιοχές στο επίπεδο αναφοράς, οι οποίες διευκρινίζονται στην συνέχεια, αλλά σε αυτό το σημείο οι συντεταγμένες e και s δεν είναι καθορισμένες. Θα εισάγουμε δυο παραδοχές θεωρώντας ότι το πάχος $h = e + s$ είναι μικρό.

Κατά την πρώτη παραδοχή, θεωρούμε ότι το πάχος της πλάκας, h , δεν μεταβάλλεται κατά την εφαρμογή των τάσεων όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3. Στην πραγματικότητα, το πάχος όντως αλλάζει, αλλά επειδή η μεταβολή αυτή είναι μικρή, την θεωρούμε αμελητέα. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε παραμόρφωση στην κατεύθυνση z και ότι ισχύει

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad u_z = w(x, y) \quad (3.1)$$

Εδώ, το $w(x, y)$ είναι το βέλος κάμψης, το οποίο είναι μια παράλληλη μετατόπιση του κάθετου στοιχείου $\alpha - \beta$ (βλ. Σχήμα 3.3) ως στερεό ως προς την κατεύθυνση z .

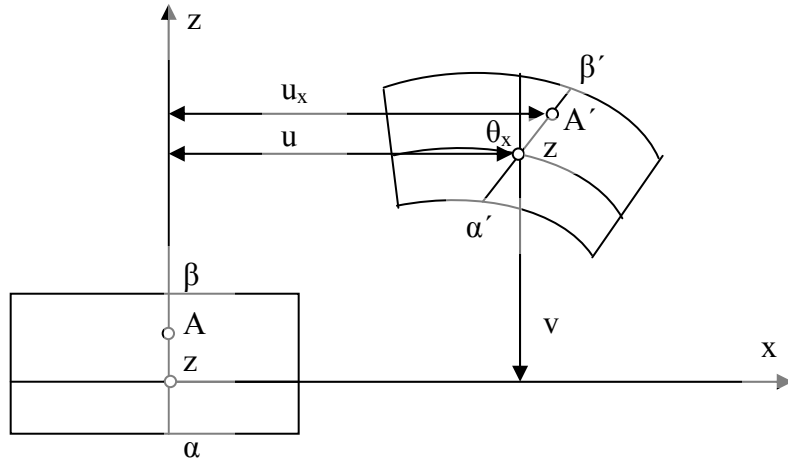


Σχήμα 3.3. Στοιχείο γενικευμένης στρώσης

Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, η δεύτερη παραδοχή αφορά στο γεγονός ότι οι μετατοπίσεις u_x και u_y είναι γραμμικές συναρτήσεις της συντεταγμένης z του πάχους, δηλαδή,

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z \cdot \theta_x(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z \cdot \theta_y(x, y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

όπου u και v είναι οι μετατοπίσεις των σημείων του επιπέδου αναφοράς $z = 0$ ή, που είναι ακριβώς το ίδιο, οι παράλληλες μετατοπίσεις του κάθετου στοιχείου $\alpha - \beta$ (βλ. Σχήμα 3.3) ως στερεό ως προς τις κατευθύνσεις x και y , ενώ οι γωνίες θ_x και θ_y περιγράφουν την περιστροφή του κάθετου στοιχείου $\alpha - \beta$ κατά το xz και yz επίπεδο αντίστοιχα. Η γεωμετρική ερμηνεία των εξισώσεων (3.2) παρουσιάζεται στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4. Ανάλυση της μετατόπισης u_x ενός σημείου A σε μεταφορικές (u) και περιστροφικές ($z\theta_x$) συνιστώσες.

Οι παραμορφώσεις της στρώσης, ε_x , ε_y και γ_{xy} , μπορούν να βρεθούν μέσα από τις παρακάτω εξισώσεις:

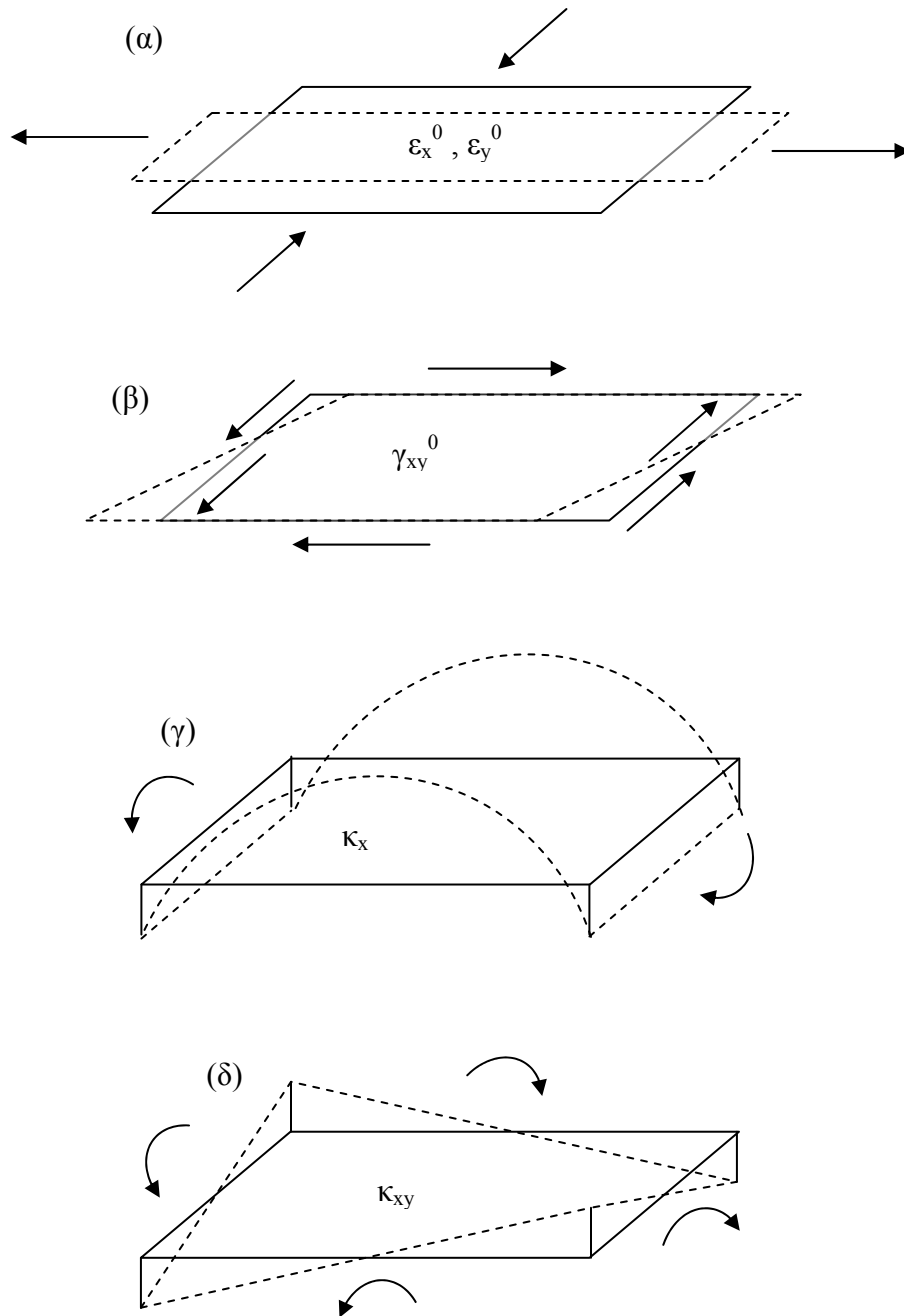
$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z \cdot \kappa_x, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z \cdot \kappa_y, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + z \cdot \kappa_{xy},\end{aligned}\tag{3.3}$$

όπου

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}.\end{aligned}$$

Αυτές οι γενικευμένες παραμορφώσεις αντιστοιχούν στις ακόλουθες τέσσερις βασικές μετατοπίσεις της στρώσης όπως φαίνονται στο σχήμα 3.5:

- εφελκυσμός ή θλίψη (ε_x^0 , ε_y^0)
- διάτμηση (γ_{xy}^0)
- κάμψη κατά το xz και το yz επίπεδο (κ_x , κ_y) και
- συστροφή (κ_{xy})

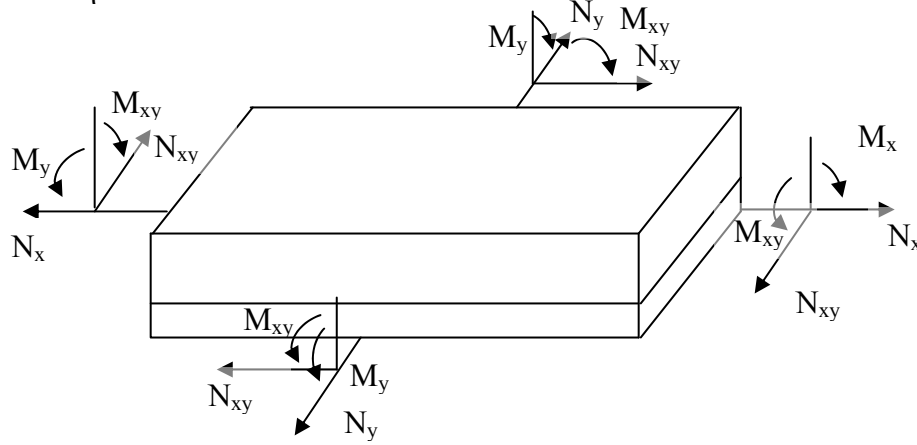


Σχήμα 3.5. Βασικές μετατοπίσεις της στρώσης: (α) επίπεδος εφελκυσμός και θλίψη ($\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$), (β) επίπεδη διάτμηση (γ_{xy}^0), (γ) κάμψη (κ_x) και (δ) συστροφή (κ_{xy}^0).

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις για μια ανισοτροπική στρώση περιγράφονται από τις σχέσεις (2.19), αντικαθιστώντας σε αυτές τις εξισώσεις (3.3) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= A_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + A_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + A_{14} \cdot \gamma_{xy}^0 + z \cdot (A_{11} \cdot \kappa_x + A_{12} \cdot \kappa_y + A_{14} \cdot \kappa_{xy}), \\
 \sigma_y &= A_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + A_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + A_{24} \cdot \gamma_{xy}^0 + z \cdot (A_{21} \cdot \kappa_x + A_{22} \cdot \kappa_y + A_{24} \cdot \kappa_{xy}), \\
 \tau_{xy} &= A_{41} \cdot \varepsilon_x^0 + A_{42} \cdot \varepsilon_y^0 + A_{44} \cdot \gamma_{xy}^0 + z \cdot (A_{41} \cdot \kappa_x + A_{42} \cdot \kappa_y + A_{44} \cdot \kappa_{xy}),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

όπου, $A_{mn} = A_{nm}$ είναι οι συντελεστές δυσκαμψίας του υλικού, που μπορούν γενικά να εξαρτηθούν από την συνιστώσα z .



Σχήμα 3.6. Συνισταμένες τάσεων και ζευγών ροπών που εφαρμόζονται στο επίπεδο αναφοράς της στρώσης.

Όπως προκύπτει λοιπόν από τις εξισώσεις (3.4), οι τάσεις εξαρτώνται από έξι γενικευμένες παραμορφώσεις ε , γ , και κ οι οποίες είναι μόνο συνάρτηση των συντεταγμένων x και y . Για να πραγματοποιήσουμε την παραγωγή των θεμελιωδών εξισώσεων της υπό μελέτη στρώσης, εισάγουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις δυνάμεων ως συνισταμένες των τάσεων (βλ. σχήμα 3.3).

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-e}^s \sigma_x \cdot dz, & N_y &= \int_{-e}^s \sigma_y \cdot dz, & N_{xy} &= \int_{-e}^s \tau_{xy} \cdot dz, \\
 M_x &= \int_{-e}^s \sigma_x \cdot z \cdot dz, & M_y &= \int_{-e}^s \sigma_y \cdot z \cdot dz, & M_{xy} &= \int_{-e}^s \tau_{xy} \cdot z \cdot dz.
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τάσεις από τις εξισώσεις (3.4) στις παραπάνω εξισώσεις φθάνουμε σε θεμελιώδεις εξισώσεις οι οποίες συνδέουν τις συνισταμένες τάσεις και ροπές με τις αντίστοιχες γενικευμένες παραμορφώσεις, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
 N_x &= B_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{14} \cdot \gamma_{xy}^0 + C_{11} \cdot \kappa_x + C_{12} \cdot \kappa_y + C_{14} \cdot \kappa_{xy}, \\
 N_y &= B_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{24} \cdot \gamma_{xy}^0 + C_{21} \cdot \kappa_x + C_{22} \cdot \kappa_y + C_{24} \cdot \kappa_{xy}, \\
 N_{xy} &= B_{41} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{42} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{44} \cdot \gamma_{xy}^0 + C_{41} \cdot \kappa_x + C_{42} \cdot \kappa_y + C_{44} \cdot \kappa_{xy}, \\
 M_x &= C_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + C_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{14} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{11} \cdot \kappa_x + D_{12} \cdot \kappa_y + D_{14} \cdot \kappa_{xy}, \\
 M_y &= C_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + C_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{24} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{21} \cdot \kappa_x + D_{22} \cdot \kappa_y + D_{24} \cdot \kappa_{xy}, \\
 M_{xy} &= C_{41} \cdot \varepsilon_x^0 + C_{42} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{44} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{41} \cdot \kappa_x + D_{42} \cdot \kappa_y + D_{44} \cdot \kappa_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Αυτές οι εξισώσεις συμπεριλαμβάνουν τους μεμβρανοειδείς συντελεστές δυσκαμψίας (membrane stiffness coefficients)

$$B_{mn} = B_{nm} = \int_{-e}^s A_{mn} \cdot dz, \quad (3.6)$$

οι οποίοι προσδιορίζουν την δυσκαμψία της στρώσης σε επιφανειακή παραμόρφωση (βλ. Σχήμα 3.5 (α) και (β)), τους συντελεστές δυσκαμψίας ως προς την κάμψη (bending stiffness coefficients)

$$D_{mn} = D_{nm} = \int_{-e}^s A_{mn} \cdot z^2 \cdot dz, \quad (3.7)$$

οι οποίοι συνδέονται με την κάμψη και την συστροφή της στρώσης (βλ. Σχήμα 3.5 (γ) και (δ)), και τους συντελεστές σύζευξης κάμψης-μεμβράνης (membrane-bending coupling coefficients)

$$C_{mn} = C_{nm} = \int_{-e}^s A_{mn} \cdot z \cdot dz, \quad (3.8)$$

μέσα από τους οποίους οι συνιστάμενες επιφανειακές τάσεις συνδέονται με καμπτικές μετατοπίσεις και τα ζεύγη τάσεων συνδέονται με επιφανειακές παραμορφώσεις.

Οι συντελεστές με δείκτες **11**, **12**, **22**, και **44** συνθέτουν την βασική μορφή δυσκαμψίας της στρώσης σε σχέση με την επιφανειακή επιμήκυνση, συστολή, και διάτμηση (B_{11} , B_{12} , B_{22} , και B_{44}), την κάμψη και την συστροφή (D_{11} , D_{12} , D_{22} , και D_{44}), και τις επιδράσεις σύζευξης (C_{11} , C_{12} , C_{22} , και C_{44}). Για την ανισοτροπική στρώση υπάρχει επίσης συσχέτιση μεταξύ επιμήκυνσης (α) και διάτμησης (β) όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5 (συντελεστές B_{14} , B_{24}), μεταξύ επιμήκυνσης (α) και συστροφής (δ) (συντελεστές C_{14} , C_{24}), κάμψης (γ) και συστροφής (δ) (συντελεστές D_{14} , D_{24}).

Οι δυνάμεις και οι ροπές N και M αντίστοιχα, που καθορίζονται από τις εξισώσεις (3.5), είναι συνισταμένες και ζεύγη των επιφανειακών τάσεων σ_x , σ_y και τ_{xy} (βλ. Σχήμα 3.3). Ωστόσο, υπάρχουν επίσης οι εγκάρσιες διατμητικές τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} οι οποίες θα πρέπει να εκφραστούν με όρους των αντίστοιχων διατμητικών παραμορφώσεων. Δυστυχώς, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε γι αυτόν τον σκοπό την άμεση προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως για να παραγωγίσουμε τις εξισώσεις (3.5). Αυτή η προσέγγιση περιλαμβάνει εξισώσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων,

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (3.9)$$

σε συνδυασμό με τον Νόμο του Hooke

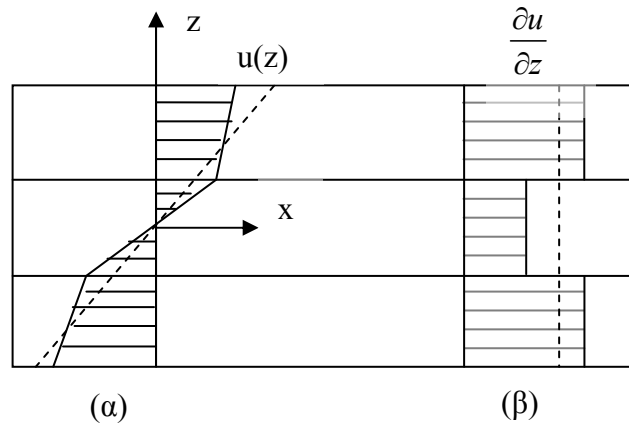
$$\tau_{xz} = A_{55} \cdot \gamma_{xz} + A_{56} \cdot \gamma_{yz}, \quad \tau_{yz} = A_{65} \cdot \gamma_{xz} + A_{66} \cdot \gamma_{yz} \quad (3.10)$$

ή

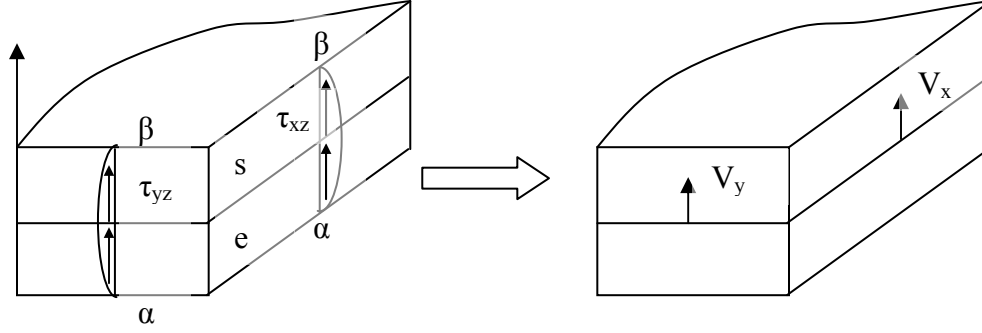
$$\gamma_{xz} = \alpha_{55} \cdot \gamma_{xz} + \alpha_{56} \cdot \gamma_{yz}, \quad \gamma_{yz} = \alpha_{65} \cdot \gamma_{xz} + \alpha_{66} \cdot \gamma_{yz} \quad (3.11)$$

όπου A_{mn} και α_{mn} είναι οι συντελεστές δυσκαμψίας και συμμόρφωσης, αντίστοιχα. Το πρόβλημα σχετίζεται με τις εξισώσεις (3.2), οι οποίες προσδιορίζουν μόνο κατά προσέγγιση την εξάρτηση των μετατοπίσεων u_x και u_y από την z συντεταγμένη (η πραγματική κατανομή των u_x και u_y κατά το πάχος της στρώσης δεν είναι γνωστή) και δεν πρέπει να διαφοριστούν ως προς z . Έτσι λοιπόν δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (3.2) στις εξισώσεις (3.9) οι οποίες περιλαμβάνουν παραγώγους του u_x και u_y ως προς το z . Για να δούμε τι θα συμβεί αν παραβούμε αυτόν τον γνωστό μαθηματικό περιορισμό, θεωρούμε μία κατασκευή τύπου σάντουιτς (sandwich laminate) όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1 (το οποίο για λόγους διευκόλυνσης το παρουσιάζουμε στην συνέχεια ως σχήμα 3.7). Μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι καθώς η γραμμική προσέγγιση του $u(z)$ φαίνεται λογική, οι παράγωγοι των πραγματικών και των προσεγγιστικών μετατοπίσεων παρουσιάζουν ελάχιστα κοινά στοιχεία.

Προκειμένου να δημιουργήσουμε τις θεμελιώδεις εξισώσεις για εγκάρσια διάτμηση, θεωρούμε το σχήμα 3.7. Η πραγματική κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{xz} και τ_{yz} κατά το πάχος της στρώσης δεν είναι γνωστή, μπορούμε όμως να υποθέσουμε ότι δεν είναι σημαντική και την αμελούμε. Πράγματι, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (3.1), τα στοιχεία στο διάστημα $\alpha - \beta$, στα οποία δρουν διατμητικές τάσεις είναι απολύτως στερεά. Αυτό σημαίνει ότι οι μετατοπίσεις αυτών των στοιχείων κατά την z διεύθυνση εξαρτώνται μόνο από τις συνισταμένες των διατμητικών τάσεων.



Σχήμα 3.6. Οι πραγματικές (συνεχείς γραμμές) και οι κατά προσέγγιση (διακεκομμένες γραμμές) κατανομές της μετατόπισης (α) και της παραγώγου της (β) καθ' ύψος μιας πολυστρωματικής πλάκας.



Σχήμα 3.7. Απλοποίηση των εγκάρσιων διατμητικών τάσεων σε συνιστάμενες τάσεις (εγκάρσιες διατμητικές δυνάμεις).

$$V_x = \int_{-e}^s \tau_{xz} \cdot dz, \quad V_y = \int_{-e}^s \tau_{yz} \cdot dz. \quad (3.12)$$

Επειδή η ιδιαίτερη κατανομή των τ_{xz} και τ_{yz} δεν επηρεάζει τις μετατοπίσεις, μπορούμε να εισάγουμε μερικές μέσες τάσεις οι οποίες έχουν τις ίδιες συνιστάμενες με τις πραγματικές, δηλαδή,

$$\tau_x = \frac{V_x}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-e}^s \tau_{xz} \cdot dz, \quad \tau_y = \frac{V_y}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-e}^s \tau_{yz} \cdot dz.$$

Ωστόσο, βάσει των εξισώσεων (3.11), οι διατμητικές παραμορφώσεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διατμητικών τάσεων. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο νόμο για να εισάγουμε τις μέσες διατμητικές παραμορφώσεις όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\gamma_x = \frac{1}{h} \cdot \int_{-e}^s \gamma_{xz} \cdot dz, \quad \gamma_y = \frac{1}{h} \cdot \int_{-e}^s \gamma_{yz} \cdot dz. \quad (3.13)$$

Οι μέσες διατμητικές παραμορφώσεις γ_x και γ_y μπορούν εύκολα να εκφραστούν υπό όρους μετατοπίσεων εάν αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (3.9) στις εξισώσεις (3.13), δηλαδή,

$$\gamma_x = \frac{1}{h} \cdot \left[u_x(s) - u_x(-e) + \int_{-e}^s \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot dz \right],$$

$$\gamma_y = \frac{1}{h} \cdot \left[u_y(s) - u_y(-e) + \int_{-e}^s \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot dz \right].$$

Αυτές οι εξισώσεις, σε αντίθεση με τις εξισώσεις (3.9), δεν συμπεριλαμβάνουν παραγώγους ως προς το z. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) για να έχουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$\gamma_x = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_y = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.14)$$

Έχουμε τις εξισώσεις (3.10) και (3.11), τις ολοκληρώνουμε κατά το πάχος της στρώσης και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.12) και (3.13) λαμβάνουμε

$$V_x = \int_{-e}^s (A_{55} \cdot \gamma_{xz} + A_{56} \cdot \gamma_{yz}) \cdot dz, \quad V_y = \int_{-e}^s (A_{65} \cdot \gamma_{xz} + A_{66} \cdot \gamma_{yz}) \cdot dz,$$

$$\gamma_x = \frac{1}{h} \cdot \int_{-e}^s (a_{55} \cdot \tau_{xz} + a_{56} \cdot \tau_{yz}) \cdot dz, \quad \gamma_y = \frac{1}{h} \cdot \int_{-e}^s (a_{65} \cdot \tau_{xz} + a_{66} \cdot \tau_{yz}) \cdot dz.$$

Επειδή η πραγματική κατανομή των τάσεων και των παραμορφώσεων βάσει του παραπάνω συλλογισμού δεν είναι σημαντική, μπορούμε να τις αλλάξουμε για τις αντίστοιχες μέσες τάσεις και παραμορφώσεις:

$$V_x = S_{55} \cdot \gamma_x + S_{56} \cdot \gamma_y, \quad V_y = S_{65} \cdot \gamma_x + S_{66} \cdot \gamma_y, \quad (3.15)$$

$$\gamma_x = s_{55} \cdot V_x + s_{56} \cdot V_y, \quad \gamma_y = s_{65} \cdot V_x + s_{66} \cdot V_y, \quad (3.16)$$

όπου

$$S_{mn} = S_{nm} = \int_{-e}^s A_{mn} \cdot dz, \quad (3.17)$$

$$s_{mn} = s_{nm} = \frac{1}{h^2} \cdot \int_{-e}^s a_{mn} \cdot dz. \quad (3.18)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι οι εξισώσεις (3.16) δεν είναι η αντίστροφη μορφή των εξισώσεων (3.15). Πράγματι, επιλύοντας τις εξισώσεις (3.16), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.18) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\alpha_{55} = \bar{A}_{66}, \quad \alpha_{56} = -\bar{A}_{56}, \quad \alpha_{66} = \bar{A}_{55}, \quad \bar{A}_{mn} = \frac{A_{mn}}{A_{55} \cdot A_{66} - A_{56}^2}, \quad \text{φθάνουμε στις εξισώσεις (3.15)}$$

$$\text{στις οποίες: } S_{mn} = \frac{h^2 \cdot \int_{-e}^s \bar{A}_{mn} \cdot dz}{\left(\int_{-e}^s \bar{A}_{55} \cdot dz \right) \cdot \left(\int_{-e}^s \bar{A}_{66} \cdot dz \right) - \left(\int_{-e}^s \bar{A}_{56} \cdot dz \right)^2}. \quad (3.19)$$

Αυτές οι εκφράσεις, γενικά, δεν συμπίπτουν με τις εξισώσεις (3.17). Έτσι, οι θεμελιώδεις εξισώσεις για εγκάρσια διάτμηση καθορίζονται από τις εξισώσεις (3.15), και υπάρχουν κατά κανόνα δύο διαφορετικές προσεγγιστικές μορφές συντελεστών δυσκαμψίας – όπως φαίνεται στις εξισώσεις (3.17) και (3.19). Το γεγονός ότι οι εξισώσεις που παρατηρούνται με αυτόν τον τρόπο είναι προσεγγιστικές, είναι πολύ φυσικό επειδή το υποτιθέμενο πεδίο μετατοπίσεων (φαίνεται από τις εξισώσεις (3.1) και (3.2)), είναι επίσης προσεγγιστικό.

Για να συγκρίνουμε δύο πιθανές μορφές των θεμελιωδών εξισώσεων για εγκάρσια διάτμηση, θεωρούμε για χάρη συντομίας μια ορθοτροπική στρώση για την οποία ισχύει:

$$A_{56} = 0, \quad \alpha_{56} = 0, \quad A_{55} = G_{xz}, \quad A_{66} = G_{yz}, \quad \alpha_{55} = \bar{A}_{66} = \frac{1}{G_{xz}}, \quad \alpha_{66} = \bar{A}_{55} = \frac{1}{G_{yz}}.$$

Για εγκάρσια διάτμηση στο xz επίπεδο από τις εξισώσεις (3.15) προκύπτει

$$V_x = S_{55} \cdot \gamma_x, \quad (3.20)$$

όπου

$$S_{55} = \int_{-e}^s G_{xz} \cdot dz \quad (3.21)$$

σε συμφωνία με τις εξισώσεις (3.17), καθώς η (3.19) γίνεται
$$S_{55} = \frac{h^2}{\int_{-e}^s \frac{dz}{G_{xz}}}. \quad (3.22)$$

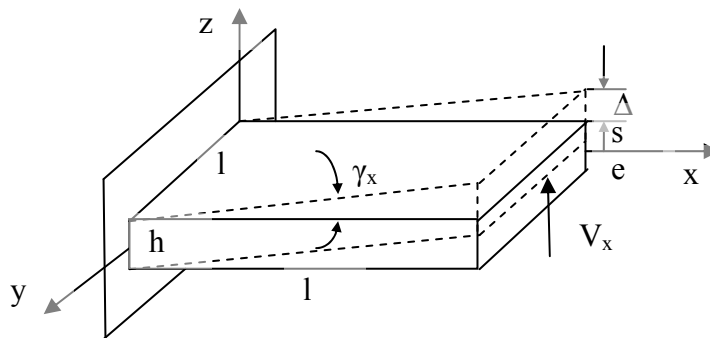
Εάν το μέτρο διάτμησης δεν εξαρτάται από το z , και οι δύο εξισώσεις (3.21) και (3.22), δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα $S_{55} = G_{xz} \cdot h$.

Χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο μπορούμε να δούμε ότι οι εξισώσεις (3.21) και (3.22) μας δίνουν το ανώτερο και το κατώτερο όριο της πραγματικής εγκάρσιας διατμητικής δυσκαμψίας. Πράγματι, υποθέτουμε ότι έχουμε μια ταινία με μοναδιαίο πλάτος, η οποία υπόκειται σε εγκάρσια διάτμηση εξαιτίας της δύναμης V_x όπως φαίνεται στο σχήμα 3.8. Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι η εξίσωση (3.20) συνδέει την πραγματική δύναμη V_x με την πραγματική γωνία $\gamma_x = \Delta/l$ κατά την πραγματική διατμητική δυσκαμψία S_{55} την οποία δεν γνωρίζουμε και θέλουμε να υπολογίσουμε. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο βασικές αρχές. Η πρώτη αφορά στην ελάχιστη συνολική δυναμική ενέργεια δηλαδή $T_{act} \leq T_{adm}$, όπου $T_{act} = U_{act}^E - A_{act}$, $T_{adm} = U_{adm}^E - A_{adm}$ είναι οι συνολικές ενέργειες της πραγματικής κατάστασης (**act**) και μιας παραδεκτής κινηματικής κατάστασης (**adm**) εκφρασμένη με όρους ενέργειας παραμόρφωσης, U , και έργου, A , το οποίο προκύπτει από την δύναμη V_x για μετατόπιση Δ (βλ. σχήμα 3.8). Και για τις δύο καταστάσεις ισχύει:

$$A_{act} = A_{adm} = V_x \cdot \Delta$$

οπότε προκύπτει

$$U_{act}^E \leq U_{adm}^E \quad (3.23)$$



Σχήμα 3.8. Εγκάρσια διάτμηση μιας λωρίδας με μοναδιαίο πάχος.

Για την πραγματική κατάσταση, λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (3.20) έχουμε:

$$U_{act} = \frac{1}{2} \cdot V_x \cdot \gamma_x = \frac{1}{2} \cdot S_{55} \cdot \gamma_x^2 \quad (3.24)$$

Για την παραδεκτή κατάσταση, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη γενική εξίσωση:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 d_x \cdot \int_{-e}^s \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot d_z = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 d_x \cdot \int_{-e}^s G_{xz} \cdot \gamma_{xz}^2 \cdot d_z = U^\varepsilon$$

και αποδεχόμαστε κάποια προσέγγιση για το γ_{xz} . Η απλούστερη είναι να θεωρήσουμε ότι ισχύει η ισότητα $\gamma_{xz} = \gamma_x$, έτσι ώστε:

$$U_{adm}^\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \gamma_x^2 \cdot \int_{-e}^s G_{xz} \cdot d_z \quad (3.25)$$

Τότε οι εξισώσεις (3.23) – (3.25) μας δίνουν την ακόλουθη σχέση

$$S_{55} \leq \int_{-e}^s G_{xz} \cdot d_z$$

Συγκρίνοντας αυτήν την ανισότητα με την εξίσωση (3.21) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτή η εξίσωση καθορίζει το άνω όριο για το S_{55} .

Για να καθορίσουμε το κατώτερο όριο, θα πρέπει να εφαρμόσουμε την αρχή ελάχιστης ενέργειας παραμόρφωσης σύμφωνα με την οποία

$$U_{act} \leq U_{adm}^\sigma \quad (3.26)$$

όπου:

$$U_{act} = \frac{1}{2} \cdot V_x \cdot \gamma_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_x^2}{S_{55}}$$

Για την παραδεκτή κατάσταση, θα πρέπει να εφαρμόσουμε την ενεργειακή σχέση

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 d_x \cdot \int_{-e}^s \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot d_z = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 d_x \cdot \int_{-e}^s \frac{\tau_{xz}^2}{G_{xz}} \cdot d_z = U^\sigma$$

και να χρησιμοποιήσουμε μια παραδεκτή κατανομή για το τ_{xz} . Η απλούστερη προσέγγιση περιγράφεται από την σχέση: $\tau_{xz} = V_x / h$ ούτως ώστε, $U_{adm}^\sigma = \frac{1}{2 \cdot h^2} \cdot V_x^2 \cdot \int_{-e}^s \frac{d_z}{G_{xz}}$.

Αντικατάσταση στην συνθήκη (3.26) μας δίνει $S_{55} \geq \frac{h^2}{\int_{-e}^s \frac{d_z}{G_{xz}}}$.

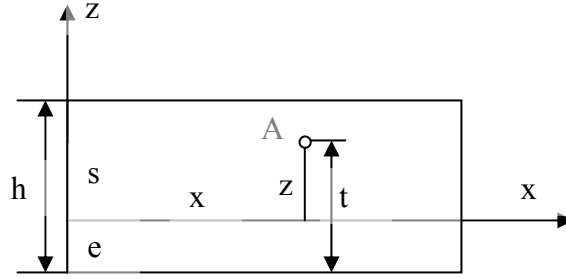
Έτσι, η εξίσωση (3.22) μας δίνει το κατώτερο όριο για το S_{55} , και η πραγματική δυσκαμψία ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:

$$\frac{h^2}{\int_{-e}^s \frac{d_z}{G_{xz}}} \leq S_{55} \leq \int_{-e}^s G_{xz} \cdot d_z.$$

Έτσι, οι θεμελιώδεις εξισώσεις για την υπό μελέτη στρώση προσδιορίζονται από τις εξισώσεις (3.5) και (3.15). Οι συντελεστές δυσκαμψίας οι οποίοι δίδονται από τις εξισώσεις (3.6) – (3.8), και (3.17) ή (3.19) μπορούν να γραφούν με μορφή καταλληλότερη για υπολογισμούς. Για να το κάνουμε αυτό, εισάγουμε νέα συντεταγμένη $t = z + e$ τέτοια ώστε $0 \leq t \leq h$ (βλ. σχήμα 3.9). Μετατρέποντας τα ολοκληρώματα σε αυτήν την καινούργια μεταβλητή λαμβάνουμε:

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}, \quad C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - e \cdot I_{mn}^{(0)}, \quad D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2 \cdot e \cdot I_{mn}^{(1)} + e^2 \cdot I_{mn}^{(0)}, \quad (3.27)$$

$$\text{όπου } mn = 11, 12, 22, 14, 24, 44 \text{ και } I_{mn}^{(r)} = \int_0^h A_{mn} \cdot t^r \cdot dt, \quad r = 0, 1, 2. \quad (3.28)$$



Σχήμα 3.9. Συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου A.

Οι εγκάρσιες διατμητικές δυσκαμψίες, όπως φαίνονται από τις εξισώσεις (3.17) και (3.19), αποκτούν την μορφή:

$$S_{mn} = I_{mn}^{(0)}, \quad (3.29)$$

και

$$S_{mn} = \frac{h^2 \cdot \bar{I}_{mn}^{(0)}}{\bar{I}_{55}^{(0)} \cdot \bar{I}_{66}^{(0)} - (\bar{I}_{56}^{(0)})^2}, \quad (3.30)$$

όπου $mn = 55, 56, 66$ και

$$I_{mn}^{(0)} = \int_0^h \bar{A}_{mn} \cdot dt. \quad (3.31)$$

3.3 Συντελεστές Δυσκαμψίας για Ομοιογενή Στρώση

Θεωρούμε μια στρώση της οποίας οι συντελεστές δυσκαμψίας του υλικού A_{mn} δεν εξαρτώνται από την συντεταγμένη z . Τότε

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{A_{mn}}{r+1} \cdot h^{r+1}, \quad \bar{I}_{mn}^{(0)} = \bar{A}_{mn} \cdot h \quad (3.32)$$

και οι εξισώσεις (3.27), (3.29) και (3.30) εκφράζουν τους ακόλουθους συντελεστές δυσκαμψίας της στρώσης:

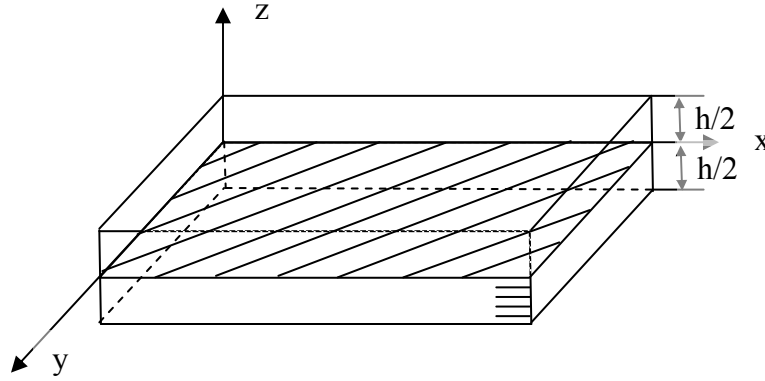
$$\begin{aligned} B_{mn} &= A_{mn} \cdot h, & C_{mn} &= A_{mn} \cdot \left(\frac{h}{2} - 3 \right), \\ D_{mn} &= A_{mn} \cdot \left(\frac{h^3}{3} - e \cdot h + e^2 \right), & S_{mn} &= A_{mn} \cdot h. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Και η εξίσωση (3.29) και η (3.30) μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα για το S_{mn} . Όπως προκύπτει από την δεύτερη εξίσωση, οι συντελεστές σύζευξης C_{mn} γίνονται ίσοι με το μηδέν εάν λάβουμε $e = h/2$, εάν το επίπεδο αναφοράς συμπίπτει με το μέσο επίπεδο της στρώσης όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10. Σε αυτήν την περίπτωση, οι εξισώσεις (3.5) και (3.15) αποκτούν την ακόλουθη αποσυνδεδεμένη μορφή:

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{14} \cdot \gamma_{xy}^0, \\ N_y &= B_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{24} \cdot \gamma_{xy}^0, \\ N_{xy} &= B_{41} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{42} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{44} \cdot \gamma_{xy}^0, \\ M_x &= D_{11} \cdot \kappa_x + D_{12} \cdot \kappa_y + D_{14} \cdot \kappa_{xy}, \\ M_y &= D_{21} \cdot \kappa_x + D_{22} \cdot \kappa_y + D_{24} \cdot \kappa_{xy}, \\ M_{xy} &= D_{41} \cdot \kappa_x + D_{42} \cdot \kappa_y + D_{44} \cdot \kappa_{xy}, \\ V_x &= S_{55} \cdot \gamma_x + S_{56} \cdot \gamma_y, \\ V_y &= S_{65} \cdot \gamma_x + S_{66} \cdot \gamma_y, \end{aligned} \quad (3.34)$$

Όπως φαίνεται, έχουμε φθάσει σε τρεις ανεξάρτητες ομάδες θεμελιωδών εξισώσεων για την επίπεδη εντατική κατάσταση της στρώσης, την κάμψη και την συστροφή και την εγκάρσια διάτμηση. Οι συντελεστές δυσκαμψίας, εξίσωση (3.33), γίνονται:

$$B_{mn} = A_{mn} \cdot h, \quad C_{mn} = \frac{A_{mn}}{12} \cdot h^3, \quad S_{mn} = A_{mn} \cdot h. \quad (3.35)$$



Σχήμα 3.10. Μέσω επίπεδο ελάσματος / πολυστρωματικής πλάκας.

Για μία ορθοτροπική στρώση, δεν υπάρχει σύζευξη επιφανειακής επιμήκυνσης – διάτμησης ($B_{14} = B_{24} = 0$) και σύζευξη εγκάρσιας διάτμησης ($S_{56} = 0$). Τότε, οι εξισώσεις (3.34) περιορίζονται στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{12} \cdot \varepsilon_y^0, & N_y &= B_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{22} \cdot \varepsilon_y^0, & N_{xy} &= B_{44} \cdot \gamma_{xy}^0, \\ N_x &= D_{11} \cdot \kappa_x + D_{12} \cdot \kappa_y, & M_y &= D_{21} \cdot \kappa_x + D_{22} \cdot \kappa_y, & M_{xy} &= D_{44} \cdot \kappa_{xy}, \\ V_x &= S_{55} \cdot \gamma_x, & V_y &= S_{66} \cdot \gamma_y. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Με όρους μηχανικής, οι ελαστικές σταθερές των συντελεστών δυσκαμψίας του υλικού μιας ορθοτροπικής στρώσης μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{E}_x, & A_{12} &= \nu_{xy} \cdot \bar{E}_x, & A_{22} &= \bar{E}_y, & A_{44} &= G_{xy}, \\ A_{55} &= G_{xz}, & A_{66} &= G_{yz}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

όπου $\bar{E}_{xy} = E_{x,y} / (1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx})$. Τότε, οι εξισώσεις (3.35) μας δίνουν:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \bar{E}_x \cdot h, & B_{12} &= \nu_{xy} \cdot \bar{E}_x \cdot h, & B_{22} &= \bar{E}_y \cdot h, & B_{44} &= G_{xy} \cdot h, \\ D_{11} &= \frac{1}{12} \cdot \bar{E}_x \cdot h^3, & D_{12} &= \frac{\nu_{xy}}{12} \cdot \bar{E}_x \cdot h^3, & D_{22} &= \frac{1}{12} \cdot \bar{E}_y \cdot h^3, & D_{44} &= \frac{1}{12} \cdot G_{xy} \cdot h^3 \\ S_{55} &= G_{xz} \cdot h, & S_{66} &= G_{yz} \cdot h. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Εν τέλει, για μια ισοτροπική στρώση έχουμε:

$$\begin{aligned} E_x &= E_y = E, & \nu_{xy} &= \nu_{yx} = \nu, & G_{xy} &= G_{xz} = G_{yz} = G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \text{ και} \\ B_{11} &= B_{22} = \bar{E} \cdot h, & B_{12} &= \nu \cdot \bar{E} \cdot h, & B_{44} &= S_{55} = S_{66} = G_{xy} \cdot h, \\ D_{11} &= D_{22} = \frac{1}{12} \cdot \bar{E} \cdot h^3, & D_{12} &= \frac{\nu}{12} \cdot \bar{E} \cdot h^3, & D_{44} &= \frac{1}{12} \cdot G \cdot h^3 \end{aligned} \quad (3.39)$$

όπου $\bar{E} = E / (1 - \nu^2)$.

3.4 Συντελεστές Δυσκαμψίας Ελάσματος – Πολυστρωματικής Πλάκας

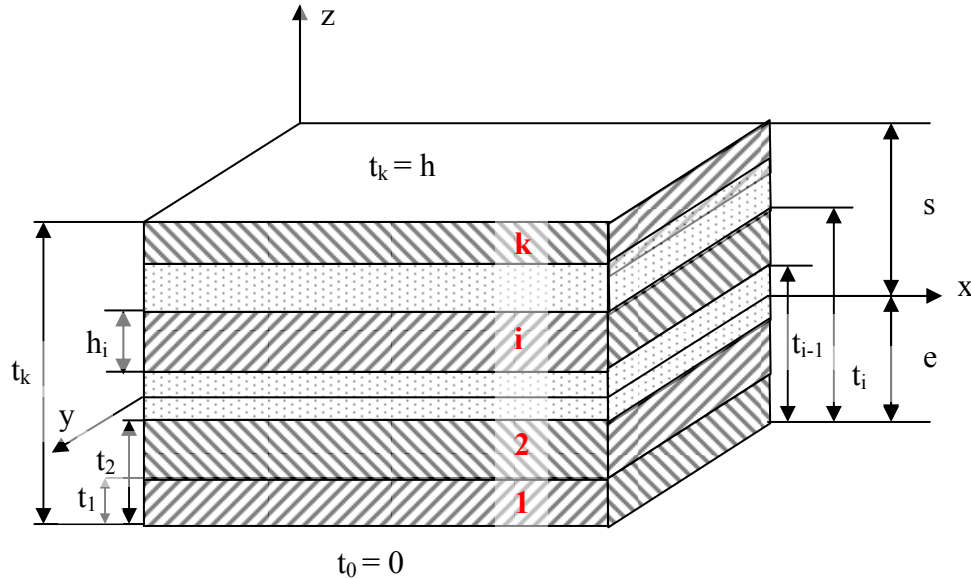
Σε αυτό το σημείο λαμβάνουμε μια γενική περίπτωση, ενός ελάσματος (μιας πολυστρωματικής πλάκας) αποτελούμενο από έναν τυχαίο αριθμό στρώσεων με διαφορετικά πάχη, h_i και δυσκαμψίες $A_{mn}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, \dots, k$). Η θέση μιας τυχαίας στρώσης του ελάσματος προσδιορίζεται από την συντεταγμένη t_i , η οποία είναι η απόσταση της κατώτερης επιφάνειας του ελάσματος έως την ανώτερη επιφάνεια της πρώτης στρώσης (βλ. σχήμα 3.11). Υποθέτοντας ότι οι συντελεστές δυσκαμψίας του υλικού δεν αλλάζουν κατά το πάχος της στρώσης και χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά τμήματα μπορούμε να γράψουμε την παράμετρο I_{mn} από τις εξισώσεις (3.28) και (3.31) στην ακόλουθη μορφή:

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \cdot \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} \cdot (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}), \quad \bar{I}_{mn}^{(0)} = \sum_{i=1}^k \bar{A}_{mn}^{(i)} \cdot (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}), \quad (3.40)$$

όπου $r = 0, 1, 2$ και $t_0 = 0, t_k = h$ (βλ. σχήμα 3.11). Για λεπτές στρώσεις, οι εξισώσεις (3.40) μπορούν να περιοριστούν στην ακόλουθη μορφή, η οποία είναι πιο κατάλληλη για υπολογισμούς:

$$I_{mn}^{(0)} = \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} \cdot h_i, \quad \bar{I}_{mn}^{(0)} = \sum_{i=1}^k \bar{A}_{mn}^{(i)} \cdot h_i, \\ I_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} \cdot h_i \cdot (t_i + t_{i-1}), \quad I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} \cdot h_i \cdot (t_i^2 + t_i \cdot t_{i-1} + t_{i-1}^2), \quad (3.41)$$

όπου $h = t_i - t_{i-1}$ είναι το πάχος της κάθε στρώσης.



Σχήμα 3.11. Δομή πολυστρωματικής πλάκας.

Έτσι, οι συντελεστές δυσκαμψιάς του ελάσματος καθορίζονται από τις εξισώσεις (3.27) και (3.41). Εξετάζουμε τώρα τους συντελεστές εγκάρσιας δυσκαμψιάς οι οποίοι έχουν καθοριστεί με δύο διαφορετικές μορφές από τις εξισώσεις (3.29) και (3.30). Επειδή και οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται όταν έχουμε ομοιογενή στρώση, μπορούμε να περιμένουμε ότι η διαφορά παρατηρείται σε ελάσματα που αποτελούνται από στρώσεις με διαφορετικές εγκάρσιες διατμητικές δυσκαμψίες. Το έλασμα για το οποίο αυτή η διαφορά γίνεται πιο έντονη είναι κατασκευής τύπου σάντουιτς με μεταλλικές όψεις (εσωτερικές και εξωτερικές στρώσεις) και με αφρώδη πυρήνα (μεσαία στρώση) ο οποίος έχει πολύ μικρή διατμητική δυσκαμψία. Για μια τέτοια δομή, έχει βρεθεί πειραματικά ότι η εγκάρσια διατμητική δυσκαμψία είναι $S = 389 \text{ kN/m}$ (Aleksandrov et al., 1960), ενώ οι εξισώσεις (3.29) και (3.30) μας δίνουν, αντίστοιχα, $S = 37200 \text{ kN/m}$ και $S = 383 \text{ kN/m}$. Έτσι η εξίσωση (3.30) μας παρέχει πολύ πιο ακριβές αποτέλεσμα για δομές τύπου σάντουιτς. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει επίσης και για σύνθετα πολυστρωματικά υλικά.

Μια ειδική περίπτωση, σημαντική για τις εφαρμογές, είναι το ορθοτροπικό έλασμα για το οποίο οι εξισώσεις (3.5) και (3.15) αποκτούν την μορφή:

$$\begin{aligned}
 N_x &= B_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{11} \cdot \kappa_x + C_{12} \cdot \kappa_y, \\
 N_y &= B_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{21} \cdot \kappa_x + C_{22} \cdot \kappa_y, \\
 N_{xy} &= B_{41} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{42} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{41} \cdot \kappa_x + C_{42} \cdot \kappa_y, \\
 M_x &= C_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + C_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + D_{11} \cdot \kappa_x + D_{12} \cdot \kappa_y, \\
 M_y &= C_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + C_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + D_{21} \cdot \kappa_x + D_{22} \cdot \kappa_y, \\
 M_{xy} &= C_{44} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{44} \cdot \kappa_{xy}, \\
 V_x &= S_{55} \cdot \gamma_x, \\
 V_y &= S_{66} \cdot \gamma_y,
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

όπου, οι δυσκαμψίες, B_{mn} , C_{mn} και D_{mn} , καθορίζονται από τις εξισώσεις (3.27) και (3.41), ενώ

οι εγκάρσιες διατμητικές δυσκαμψίες από την εξίσωση:
$$S_{mm} = \frac{h^2}{k \sum_{i=1} \frac{h_i}{A_{mm}^{(i)}}}, \tag{3.43}$$

Ελάσματα που αποτελούνται από μόνο – κατευθυντικά φύλλα έχουν ειδικές ακολουθίες συμβολισμών. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός $[0_2^0/+45^0/-45^0/90_2^0]$ σημαίνει ότι το έλασμα αποτελείται από μια στρώση 0^0 η οποία έχει 2 φύλλα, από δύο υπό γωνία $\pm 45^0$ στρώσεις και από μία στρώση 90^0 η οποία έχει επίσης δύο φύλλα. Ο συμβολισμός $[0^0/90^0]_5$ σημαίνει ότι το έλασμα έχει πέντε στρώσεις με διασταυρούμενα φύλλα.

3.5 Ημί-ομοιογενή Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες (Quasi-homogenous laminates)

Μερικές τυπικές στρώσεις που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ήταν πραγματικά ημί-ομοιογενή ελάσματα ή πολυστρωματικές πλάκες, αλλά επειδή αποτελούνταν από έναν αριθμό πανομοιότυπων φύλλων, τις μεταχειριστήκαμε σαν ομοιογενείς στρώσεις. Η ακρίβεια αυτής της παραδοχής αξιολογείται πιο κάτω.

3.5.1 Έλασμα – Πολυστρωματική Πλάκα Αποτελούμενα από Πανομοιότυπες Ομοιογενείς Στρώσεις

Θεωρούμε ένα έλασμα αποτελούμενο από στρώσεις με διαφορετικά πάχη αλλά με τις ίδιες δυσκαμψίες, δηλαδή, έτσι ώστε $A_{mn}^{(i)} = A_{mn}$ στα οποία ισχύει $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Τότε, οι εξισώσεις (3.28) και (3.31) εκφράζονται ως:

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{A_{mn}}{r+1} \cdot h^{r+1}, \quad \bar{I}_{mn}^{(0)} = \bar{A}_{mn} \cdot h$$

Αυτό συμπίπτει με τις εξισώσεις (3.32), πράγμα το οποίο σημαίνει ότι το έλασμα που αποτελείται από στρώσεις με τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες μεταξύ τους, είναι ομοιογενές έλασμα.

3.5.2 Έλασμα – Πολυστρωματική Πλάκα Αποτελούμενα από Ανομοιογενείς Ορθοτροπικές Στρώσεις

Υποθέτουμε ένα έλασμα με δομή $\left[0^\circ / 90^\circ\right]_p$, όπου το $p = 1, 2, 3, \dots$ καθορίζει τον αριθμό των ζευγών των στοιχειωδών διασταυρούμενων φύλλων γωνιών 0° και 90° . Στο προηγούμενο κεφάλαιο την συγκεκριμένη περίπτωση ελάσματος την μεταχειριστήκαμε σαν ομοιογενή στρώση με τους συντελεστές δυσκαμψίας του υλικού να καθορίζονται από τις εξισώσεις (2.24). Λαμβάνοντας $\bar{h}_0 = \bar{h}_{90} = 0.5$ σε αυτές τις εξισώσεις έχουμε

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1}{2} \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2), \quad A_{12} = \bar{E}_1 \cdot \nu_{12}, \quad A_{44} = G_{12}. \quad (3.44)$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.35), οι συντελεστές δυσκαμψίας της στρώσης αυτής θα πρέπει να είναι: $B_{mn}^0 = A_{mn} \cdot h$, $C_{mn}^0 = 0$, $D_{mn}^0 = \frac{1}{12} \cdot A_{mn} \cdot h^3$.

Για να υπολογίσουμε τις πραγματικές δυσκαμψίες του ελάσματος, θα πρέπει να θέσουμε $\mathbf{h}_i = \delta$, $\mathbf{t}_i = i\delta$, $\mathbf{k} = 2p$, $\mathbf{e} = h/2$, και $\mathbf{h} = 2p\delta$ (βλ. σχήμα 3.11), όπου δ είναι το πάχος του μονό – κατευθυντικού φύλλου. Τότε, οι εξισώσεις (3.27) και (3.41) παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}, \quad C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - p \cdot \delta \cdot I_{mn}^{(0)}, \quad D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2 \cdot p \cdot \delta \cdot I_{mn}^{(1)} + (p \cdot \delta)^2 \cdot I_{mn}^{(0)}, \quad (3.46)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 I_{11}^{(0)} = I_{22}^{(0)} &= p \cdot \delta \cdot \bar{E}_1 \cdot (1+a) = \frac{h}{2} \cdot \bar{E}_1 \cdot (1+a), & I_{12}^{(0)} &= 2 \cdot p \cdot \delta \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} = \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} \cdot h, \\
 I_{44}^{(0)} &= 2 \cdot p \cdot \delta \cdot G_{12} = G_{12} \cdot h, & I_{11}^{(1)} &= \frac{\delta^2}{2} \cdot \bar{E}_1 \cdot \sum_{j=1}^p [4 \cdot j \cdot (1+\alpha) - (3+\alpha)], \\
 I_{22}^{(1)} &= \frac{\delta^2}{2} \cdot \bar{E}_1 \cdot \sum_{j=1}^p [4 \cdot j \cdot (1+\alpha) - (3 \cdot \alpha + 1)], & I_{12}^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} \cdot h^2, \\
 I_{44}^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot G_{12} \cdot h^2, & & (3.47) \\
 I_{11}^{(2)} &= \frac{\delta^3}{3} \cdot \bar{E}_1 \cdot \sum_{j=1}^p [12 \cdot j^2 \cdot (1+\alpha) - 6 \cdot j \cdot (3+\alpha) + 7 + \alpha], \\
 I_{22}^{(2)} &= \frac{\delta^3}{3} \cdot \bar{E}_1 \cdot \sum_{j=1}^p [12 \cdot j^2 \cdot (1+\alpha) - 6 \cdot j \cdot (3 \cdot \alpha + 1) + 7 \cdot \alpha + 1], \\
 I_{12}^{(2)} &= \frac{1}{3} \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} \cdot h^3, & I_{44}^{(2)} &= \frac{1}{3} \cdot G_{12} \cdot h^3, \\
 \mu \varepsilon \alpha &= E_2 / E_1.
 \end{aligned}$$

Ταιριάζοντας τις εξισώσεις (3.44), (3.45) και (3.46), (3.47) μπορούμε να δούμε ότι $\mathbf{B}_{mn} = \mathbf{B}_{mn}^0$, δηλαδή, οι μεμβρανοειδής δυσκαμψίες είναι ίδιες και για τα δύο μοντέλα ελάσματος. Οι δυσκαμψίες κάμψης και σύζευξης είναι επίσης ίδιες για $mn = 12, 44$. Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των μοντέλων για $\alpha = 1$ επειδή το έλασμα μειώνεται ουσιαστικά σε αυτήν την περίπτωση σε ομοιογενή στρώση.

Αθροίζοντας κατά μέλος τις εξισώσεις (3.47) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.46) φθάνουμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 C_{11} = -C_{22} &= \frac{1}{2} \cdot \bar{E}_1 \cdot \delta^2 \cdot p \cdot (a-1), & C_{12} = C_{44} &= 0, \\
 D_{11} = D_{22} &= \frac{1}{3} \cdot \bar{E}_1 \cdot \delta^3 \cdot p^3 \cdot (1+\alpha), & D_{12} = D_{12}^0, & D_{44} = D_{44}^0.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (3.45) και δεχόμενοι τους συμβολισμούς $D_{11}^0 = D_{22}^0 = \frac{1}{3} \cdot \bar{E}_1 \cdot \delta^3 \cdot p^3 \cdot (1+\alpha)$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μόνη διαφορά μεταξύ των ομοιογενών και των ανομοιογενών μοντέλων ελασμάτων σχετίζεται στους συντελεστές σύζευξης C_{11} και C_{22} οι οποίοι είναι ίσοι με το μηδέν για το ομοιογενές μοντέλο και καθορίζονται από τις εξισώσεις (3.48) για το ανομοιογενές μοντέλο. Επειδή $p\delta = h/2$, μπορούμε να γράψουμε αυτούς τους συντελεστές στην μορφή $C_{11} = -C_{22} = \frac{1}{4} \cdot \bar{E}_1 \cdot h \cdot \delta \cdot (1+\alpha)$ το οποίο μας δείχνει ότι για $\delta \rightarrow 0$ έχουμε $\mathbf{C}_{mn} \rightarrow \mathbf{0}$.

3.5.3 Έλασμα – Πολυστρωματική Πλάκα Αποτελούμενα από Προσανατολισμένες Στρώσεις

Στην συγκεκριμένη υποενότητα μελετάμε ένα έλασμα με δομή $[+\varphi/-\varphi]_p$, όπου το p είναι ο αριθμός των στρώσεων, όπου η κάθε μια αποτελείται από φύλλα υπό γωνία $+\varphi$ και $-\varphi$. Οι θεμελιώδεις εξισώσεις για αυτό το έλασμα είναι:

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{14} \cdot \kappa_{xy}, \\ N_y &= B_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + C_{24} \cdot \kappa_{xy}, \\ N_{xy} &= B_{44} \cdot \gamma_{xy}^0 + C_{41} \cdot \kappa_x + C_{42} \cdot \kappa_y, \\ M_x &= C_{14} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{11} \cdot \kappa_x + D_{12} \cdot \kappa_y, \\ M_y &= C_{24} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{21} \cdot \kappa_x + D_{22} \cdot \kappa_y, \\ M_{xy} &= C_{41} \cdot \varepsilon_x^0 + C_{42} \cdot \varepsilon_y^0 + D_{44} \cdot \kappa_{xy} \end{aligned} \quad (3.49)$$

όπου

$$B_{mn} = A_{mn} \cdot h, \quad C_{mn} = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \delta, \quad D_{mn} = \frac{1}{12} \cdot A_{mn} \cdot h^3.$$

όπου h είναι το πάχος του ελάσματος, δ είναι το πάχος του φύλλου, και A_{mn} είναι οι συντελεστές δυσκαμψίας του υλικού που καθορίζονται από τις εξισώσεις (2.20). Όπως μπορεί να φανεί, το έλασμα είναι ανισοτροπικό επειδή τα υπό γωνίες $+\varphi$ και $-\varphi$ φύλλα, βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα. Σε ένα ομοιογενές μοντέλο αυτό το γεγονός δεν λαμβάνεται υπόψη και έχουμε $C_{14} = C_{24} = 0$. Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι αυτοί οι συντελεστές, δεν είναι στην πράξη ίσοι με το μηδέν, πρακτικά δεν επηρεάζουν, την συμπεριφορά του ελάσματος για $h / \delta \geq 20$.

Ελάσματα και πολυστρωματικές πλάκες στα οποία κάποιο φύλλο ή στρώση με γωνία προσανατολισμού $+\varphi$ συνδυάζεται με ίδιο φύλλο ή στρώση αλλά με γωνία προσανατολισμού $-\varphi$ αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως ισοροπημένα ελάσματα ή πλάκες (balanced laminates). Αυτά τα ελάσματα όντας δομημένα μόνο από προσανατολισμένες στρώσεις και φύλλα δεν έχουν σύζευξη διάτμησης – επέκτασης ($B_{14} = B_{24} = 0$), κάμψης – επιμήκυνσης και διάτμησης – συστροφής ($C_{11} = C_{12} = C_{22} = C_{44} = 0$). Όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (3.49), μόνο η σύζευξη επιμήκυνσης – συστροφής και κάμψης – διάτμησης μπορεί να υπάρχει σε ένα ισοροπημένο έλασμα ή μια πολυστρωματική πλάκα. Αυτά τα ελάσματα είναι δυνατόν να αποτελούνται από στρώσεις προσανατολισμένες στις 0° και στις 90° , αλλά στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται σύζευξη μεμβράνης – κάμψης.

3.6 Ημί-ισοτροπικά Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες

Οι στρώσεις μιας πολυστρωματικής πλάκας μπορούν να διαταχθούν με τέτοιο τρόπο ώστε η πλάκα να συμπεριφέρεται σαν ισοτροπικό υλικό υπό επιφανειακή φόρτιση. Για την

ακρίβεια, η πλάκα δεν είναι ιστροπική (για τον λόγο αυτό άλλωστε ονομάζεται ημί – ιστροπική) επειδή υπό εγκάρσια (κάθετη στην επιφάνεια της πλάκας) φόρτιση και υπό διαστρωματική διάτμηση η συμπεριφορά της είναι διαφορετική από αυτήν μιας ιστροπικής (π.χ. μεταλλικής) στρώσης.

Για να παράξουμε τις συνθήκες που πρέπει να πληρούνται από την δομή μιας ημί – ιστροπικής πλάκας θεωρούμε επίπεδες φορτίσεις με τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 3.3 και επιφέρουν μόνο επίπεδες παραμορφώσεις ε_x^0 , ε_y^0 και γ_{xy}^0 . Λαμβάνοντας $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_{xy} = 0$ στην εξίσωση (3.5) και εισάγοντας μέσες (κατά το πάχος της πλάκας, h) τάσεις ως $\sigma_x = N_x / h$, $\sigma_y = N_y / h$, $\tau_{xy} = N_{xy} / h$,

μπορούμε να γράψουμε τις τρεις πρώτες εξισώσεις από τις εξισώσεις (3.5) στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \bar{B}_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + \bar{B}_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + \bar{B}_{14} \cdot \gamma_{xy}^0, \\ \sigma_y &= \bar{B}_{21} \cdot \varepsilon_x^0 + \bar{B}_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + \bar{B}_{24} \cdot \gamma_{xy}^0, \\ \tau_{xy} &= \bar{B}_{41} \cdot \varepsilon_x^0 + \bar{B}_{42} \cdot \varepsilon_y^0 + \bar{B}_{44} \cdot \gamma_{xy}^0,\end{aligned}\tag{3.50}$$

όπου σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.27) και (3.41)

$$\bar{B}_{mn} = \sum_{i=1}^k \bar{A}_{mn}^{(i)} \cdot \bar{h}_i, \quad \bar{h}_i = h_i / h,\tag{3.51}$$

με \bar{h}_i να είναι το πάχος της i -στρώσης κανονικοποιημένο ως προς το πάχος της πλάκας και A_{mn} είναι οι συντελεστές δυσκαμψίας. Για μία ιστροπική στρώση, οι θεμελιώδεις εξισώσεις ανάλογες των εξισώσεων (3.50) είναι:

$$\sigma_x = \bar{E}(\varepsilon_x^0 + \nu \cdot \varepsilon_y^0), \quad \sigma_y = \bar{E}(\varepsilon_y^0 + \nu \cdot \varepsilon_x^0), \quad \tau_{xy} = G_{xy} \cdot \gamma_{xy}^0,\tag{3.52}$$

όπου

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \nu) \cdot \bar{E}.\tag{3.53}$$

Αντιπαραβάλλοντας τις εξισώσεις (3.50) και (3.52) μπορούμε να δούμε ότι οι συντελεστές διάτμησης – επιμήκυνσης της πλάκας, δηλαδή, $\bar{B}_{14} = \bar{B}_{41}$ και $\bar{B}_{24} = \bar{B}_{42}$ θα πρέπει να είναι ίσοι με το μηδέν. Όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (2.20) στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτό σημαίνει ότι η πλάκα είναι ισορροπημένη, δηλαδή θα πρέπει να αποτελείται μόνο από στρώσεις με γωνίες προσανατολισμού 0° , $\pm\varphi$ και 90° . Επειδή οι δυσκαμψίες της πλάκας στην x και y διεύθυνση πρέπει να είναι ίσες, απαιτούμε ότι $\bar{B}_{11} = \bar{B}_{22}$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.20), λαμβάνοντας $\bar{h}_i = \bar{h}$ για όλα τα i , και εκτελώντας κάποιον μετασχηματισμό, φτάνουμε στην ακόλουθη συνθήκη:

$$\sum_{i=1}^k \cos 2\varphi_i = 0.$$

Όπως μπορεί να ελεγχθεί με άμεσες αντικαταστάσεις, για $k = 1$ η εξίσωση αυτή ικανοποιείται εάν $\varphi_1 = 45^\circ$ και για $k = 2$ εάν $\varphi_1 = 0^\circ$ και $\varphi_2 = 90^\circ$. Όπως είναι φυσικό, τέτοια υλικά με μια ή

δύο στρώσεις δεν μπορούν να είναι ισοτροπικά ακόμα και σε ένα επίπεδο. Έτσι, βλέπουμε την περίπτωση $k \geq 3$, για την οποία η λύση έχει την μορφή:

$$\varphi_i = (i-1) \cdot \frac{\pi}{k}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (3.54)$$

Χρησιμοποιώντας τα αθροίσματα τα οποία ισχύουν για γωνίες και καθορίζονται από την εξίσωση (3.54) δηλαδή,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sin^2 \varphi_i &= \sum_{i=1}^k \cos^2 \varphi_i = \frac{k}{2}, \\ \sum_{i=1}^k \sin^4 \varphi_i &= \sum_{i=1}^k \cos^4 \varphi_i = \frac{3 \cdot k}{8}, \\ \sum_{i=1}^k \sin^2 \varphi_i \cdot \cos^2 \varphi_i &= \frac{k}{8}, \end{aligned}$$

και υπολογίζοντας τους συντελεστές δυσκαμψίας στις εξισώσεις (3.51) και (2.20) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \bar{B}_{11} &= \bar{B}_{22} = \frac{1}{8} \cdot [3 \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) + 2 \cdot (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12})], \\ \bar{B}_{12} &= \frac{1}{8} \cdot [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + 2 \cdot (3 \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} - 2 \cdot G_{12})], \\ \bar{B}_{44} &= \frac{1}{8} \cdot [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2 \cdot (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} - 2 \cdot G_{12})]. \end{aligned}$$

Αυτές οι δυσκαμψίες παρέχουν τις θεμελιώδεις εξισώσεις στην μορφή των εξισώσεων (3.52) και ικανοποιούν τις συνθήκες (3.53) οι οποίες μπορούν να γραφούν ως

$$\bar{B}_{11} = \bar{B}_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \bar{B}_{44} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

εάν

$$\begin{aligned} E &= \frac{(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + 2 \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12}) \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2 \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 4 \cdot G_{12})}{3 \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) + 2 \cdot (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12})}, \\ \nu &= \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + 2 \cdot (3 \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} - 2 \cdot G_{12})}{3 \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) + 2 \cdot (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12})}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Πιθανές λύσεις της εξίσωσης (3.54) παρέχοντας ημί-ισοτροπικές ιδιότητες των πλακών με διαφορετικό αριθμό στρώσεων παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1 για $k \leq 6$. Όλες οι ημί-ισοτροπικές πλάκες που έχουν διαφορετικές δομές και καθορίζονται από την εξίσωση (3.54) για ένα δεδομένο αριθμό στρώσεων, k , κατέχουν το ίδιο εμφανές μέτρο και λόγο Poisson όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (3.55). Για τα τυπικά προηγμένα σύνθετα υλικά με ιδιότητες που φαίνονται στον πίνακα 3.2, αυτά τα χαρακτηριστικά (Μέτρα ελαστικότητας, λόγος Poisson) παρουσιάζονται στον πίνακα 3.3. Όπως προκύπτει από τον πίνακα 3.3, η συγκεκριμένη δυσκαμψία των ημί-ισοτροπικών σύνθετων υλικών με ίνες άνθρακα και βορίου

ξεπερνούν τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των παραδοσιακών δομικών υλικών – χάλυβας, αλουμίνιο και τιτάνιο.

Αριθμός Στρώσεων, k	Γωνία προσανατολισμού της κάθε στρώσης, φ°					
	φ ₁	φ ₂	φ ₃	φ ₄	φ ₅	φ ₆
3	0	60	120	-	-	-
4	0	45	90	135	-	-
5	0	36	72	108	144	-
6	0	30	60	90	120	150

Πίνακας 3.1. Γωνίες για τις οποίες παρέχονται ημι-ισοτροπικές ιδιότητες στα ελάσματα και στις πολυστρωματικές πλάκες.

Ιδιότητα	Glass – Epoxy	Carbon – Epoxy	Carbon – PEEK	Aramid – Epoxy	Boron – Epoxy	Boron – Al	Carbon – Carbon	Al ₂ O ₃ – Al
Λόγος Όγκου Ινών, v_f	0.65	0.62	0.61	0.6	0.5	0.5	0.6	0.6
Πυκνότητα, ρ (g/cm ³)	2.1	1.55	1.6	1.32	2.1	2.65	1.75	3.45
Διάμηκες Μέτρο Ελαστικότητας, E_1 (GPa)	60	140	140	95	210	260	170	260
Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας, E_2 (GPa)	13	11	10	5.1	19	140	19	150
Μέτρο Διάτμησης, G_{12} (GPa)	3.4	5.5	5.1	1.8	4.8	60	9	60
Λόγος Poisson, ν_{21}	0.3	0.27	0.3	0.34	0.21	0.3	0.3	0.24
Διαμήκης Αντοχή σε Εφελκυσμό, $\bar{\sigma}_1^+$ (MPa)	1800	2000	2100	2500	1300	1300	340	700
Διαμήκης Αντοχή σε Θλίψη, $\bar{\sigma}_1^-$ (MPa)	650	1200	1200	300	2000	2000	180	3400
Εγκάρσια Αντοχή σε Εφελκυσμό, $\bar{\sigma}_2^+$ (MPa)	40	50	75	30	70	140	7	190
Εγκάρσια Αντοχή σε Θλίψη, $\bar{\sigma}_2^-$ (MPa)	90	170	250	130	300	300	50	400
Αντοχή σε Διάτμηση, $\bar{\tau}_{12}$ (MPa)	50	70	160	30	80	90	30	120

Πίνακας 3.2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες για μόνο-διευθυντικά σύνθετα υλικά.

Ιδιότητα	Glass – Epoxy	Carbon – Epoxy	Aramid – Epoxy	Boron – Epoxy	Boron – Al
Μέτρο Ελαστικότητας, E, GPa	27.0	54.8	34.8	80.3	183.1
Λόγος Poisson, ν	0.34	0.31	0.33	0.33	0.28
Ειδική Σταθερά, $k_e \times 10^3$, m	1290	3530	2640	3820	6910

Πίνακας 3.3. Μέτρα Ελαστικότητας και λόγοι Poisson για ημι-ισοτροπικά ελάσματα κατασκευασμένα από χαρακτηριστικά προηγμένα σύνθετα υλικά.

3.7 Συμμετρικά Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες

Τα συμμετρικά ελάσματα αποτελούνται από στρώσεις οι οποίες είναι διατεταγμένες συμμετρικά σε σχέση με το μέσο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10. Για να μελετήσουμε τις γενικές ιδιότητες των συμμετρικών ελασμάτων, θεωρούμε τις εξισώσεις (3.27) και (3.28) και τις εφαρμόζουμε προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές δυσκαμψίας με κάποιους συνδυασμούς δεικτών, δηλαδή, $m = 1$ και $n = 1$. Επειδή οι συντεταγμένες του επιπέδου αναφοράς, e , είναι μία τυχαία παράμετρος, μπορούμε να τις βρούμε από της

$$\text{συνθήκη } C_{11} = 0. \text{ Τότε, } e = \frac{I_{11}^{(1)}}{I_{11}^{(0)}} \quad (3.56)$$

$$\text{και } D_{11} = I_{11}^{(2)} - \left[\frac{\left(I_{11}^{(1)} \right)^2}{I_{11}^{(0)}} \right]. \quad (3.57)$$

Εισάγουμε νέες συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου A όπως φαίνεται στο σχήμα 3.12 ως $z = t - (h/2)$. Αλλάζοντας το t με το z μπορούμε να παρουσιάσουμε την εξίσωση (3.28) στην παρακάτω μορφή:

$$I_{11}^{(r)} = \int_{-h/2}^{h/2} A_{11} \cdot \left(\frac{h}{2} + z \right)^r dz.$$

Αντικαθιστώντας αυτά τα ολοκληρώματα στις εξισώσεις (3.56) και (3.57) έχουμε:

$$e = \frac{h}{2} + \frac{J_{11}^{(1)}}{J_{11}^{(0)}} \quad (3.58)$$

και

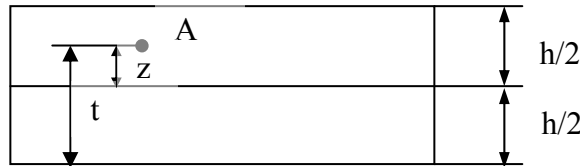
$$D_{11} = J_{11}^{(2)} - \left[\frac{\left(J_{11}^{(1)} \right)^2}{J_{11}^{(0)}} \right], \quad (3.59)$$

όπου

$$J_{11}^{(r)} = \int_{-h/2}^{h/2} A_{11} \cdot z^r dz \quad (3.60)$$

και $r = 0, 1, 2$.

Τώρα αναλύουμε το A_{11} σε συνάρτηση του z σε συμμετρικές και αντισυμμετρικές συνιστώσες, δηλαδή, $A_{11}(z) = A_{11}^s(z) + A_{11}^a(z)$.



Σχήμα 3.12. Συντεταγμένες ενός σημείου A ως προς το μέσο επίπεδο.

Τότε, η εξίσωση (3.60) εκφράζεται με τις ακόλουθες συνιστώσες

$$J_{11}^{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} A_{11}^s dz, \quad J_{11}^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} A_{11}^a \cdot z \cdot dz, \quad J_{11}^{(2)} = \int_{-h/2}^{h/2} A_{11}^a \cdot z^2 \cdot dz.$$

Όπως μπορεί να φανεί από την εξίσωση (3.59), το D_{11} φτάνει την μέγιστη τιμή του εάν $J_{11}^{(1)} = 0$ ή $A_{11}^{(a)} = 0$ και $A_{11}^{(s)} = A_{11}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση (3.58) μας δίνει $e = h/2$.

Έτσι, τα συμμετρικά ελάσματα παρέχουν την μέγιστη καμπτική δυσκαμψία για έναν δεδομένο αριθμό στρώσεων με δεδομένες μηχανικές ιδιότητες και επειδή αναφέρονται στο μέσο επίπεδο δεν έχουν συμπτώματα σύζευξης μεμβράνης – κάμψης. Αυτό κατ' ουσία απλοποιεί, την συμπεριφορά του ελάσματος όταν βρίσκεται υπό φόρτιση και τις θεμελιώδεις εξισώσεις οι οποίες έχουν την μορφή που καθορίζεται από τις εξισώσεις (3.34). Για ένα συμμετρικό έλασμα με συντεταγμένες των στρώσεων όπως φαίνονται στο σχήμα 3.13 οι συντελεστές δυσκαμψίας υπολογίζονται ως κάτωθι:

$$B_{mn} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} \cdot (z_i - z_{i-1}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} \cdot h_i,$$

$$C_{mn} = 0,$$

$$D_{mn} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} \cdot (z_i^3 - z_{i-1}^3) = \frac{2}{3} \cdot \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} \cdot h_i \cdot (z_i^2 + z_i \cdot z_{i-1} + z_{i-1}^2).$$

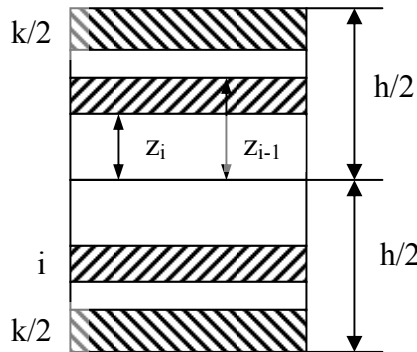
Οι εγκάρσιοι διατμητικοί συντελεστές δυσκαμψίας δίνονται από την εξίσωση (3.30) στην

$$\bar{I}_{mn}^{(0)} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k/2} \bar{A}_{mn}^{(i)} \cdot h_i,$$

οποία:

$$\bar{A}_{mn}^{(i)} = \frac{A_{mn}^{(i)}}{A_{55}^{(i)} \cdot A_{66}^{(i)} - (A_{56}^{(i)})^2}.$$

Προκειμένου να δηλώσουμε συμμετρικά ελάσματα ή πολυστρωματικές πλάκες, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κατάλληλο συμβολισμό αλληλουχίας των στρώσεων δηλαδή, $[0^\circ / 90^\circ / 45^\circ]_s$ αντί για $[0^\circ / 90^\circ / 45^\circ / 45^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$.



Σχήμα 3.13. Συντεταγμένες στρώσεων ενός συμμετρικού ελάσματος – πολυστρωματικής πλάκας.

3.8 Αντισυμμετρικά Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες

Στα αντισυμμετρικά ελάσματα, οι στρώσεις είναι τοποθετημένες συμμετρικά και έχουν αμοιβαία αντεστραμμένους προσανατολισμούς. Για παράδειγμα, ενώ τα ελάσματα με ακολουθία στρώσεων $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ και $[+\varphi / -\varphi / +\varphi / -\varphi]$ είναι συμμετρικά, τα ελάσματα με αλληλουχία στρώσεων $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ]$ ή $[0^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 90^\circ]$ και $[+\varphi / -\varphi / +\varphi / -\varphi]$ είναι αντισυμμετρικά. Σε αντίθεση με τα συμμετρικά ελάσματα τα οποία έχουν μέγιστο συντελεστή δυσκαμψίας σε κάμψη και μηδενικό συντελεστή δυσκαμψίας σε σύζευξη, τα αντισυμμετρικά ελάσματα παρουσιάζουν συγκεκριμένη σύζευξη η οποία μπορεί

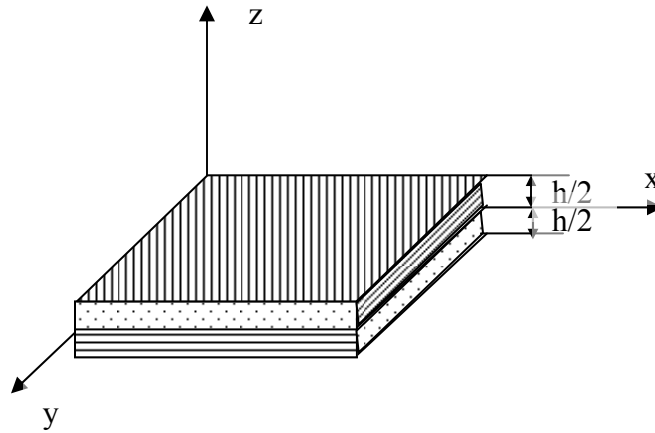
να είναι σημαντική για κάποιες ειδικές εφαρμογές (π.χ. ρομποτικά μέρη που υπόκεινται σε περίπλοκες παραμορφώσεις υπό απλές φορτίσεις, πτερύγια ρότορα που παρουσιάζουν συστροφή υπό φυγόκεντρες δυνάμεις, πτέρυγες αεροπλάνου που παρουσιάζουν συστροφές υπό καμπτικά φορτία κ.α.).

Το πιο απλό αντισυμμετρικό έλασμα, είναι μία στρώση με διασταυρούμενα φύλλα η οποία αποτελείται από δυο φύλλα με γωνίες 0° και 90° , και με ίδιο πάχος $h/2$ (βλ. Σχήμα 3.14). Λαμβάνοντας $e = h/2$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.27) και (3.40) φθάνουμε στους ακόλουθους συντελεστές δυσκαμψίας, εισάγοντας τις εξισώσεις (3.42):

$$B_{11} = B_{22} = \frac{h}{2} \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2), \quad B_{12} = \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} \cdot h, \quad B_{44} = G_{12} \cdot h,$$

$$C_{11} = -C_{22} = \frac{h^2}{8} \cdot (\bar{E}_2 - \bar{E}_1), \quad C_{12} = 0, \quad C_{44} = 0,$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{h^3}{24} \cdot (\bar{E}_1 + \bar{E}_2), \quad D_{12} = \frac{h^3}{12} \cdot \bar{E}_1 \cdot \nu_{12}, \quad D_{44} = \frac{h^3}{12} \cdot G_{12}.$$



Σχήμα 50. Αντισυμμετρικό έλασμα διασταυρούμενων φύλλων

Συγκρίνοντας αυτά τα αποτελέσματα με τις εξισώσεις (3.44) και (3.45) αντίστοιχα, με ένα ημι-ομοιογενές έλασμα διασταυρούμενων φύλλων, βλέπουμε ότι το αντισυμμετρικό έλασμα διασταυρούμενων φύλλων, έχει την ίδια μεμβρανοειδή και καμπτική δυσκαμψία αλλά μη μηδενικούς συντελεστές ζεύξης C_{11} και C_{22} . Το γεγονός αυτό, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.42), μας δείχνει ότι ο επίπεδος εφελκυσμός ή θλίψη αυτού του ελάσματος επιφέρει κάμψη.

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός αντισυμμετρικού ελάσματος, είναι μία κατασκευή η οποία αποτελείται από δυο προσανατολισμένα φύλλα με το ίδιο πάχος $h/2$ και γωνίες προσανατολισμού $+\varphi$ και $-\varphi$ αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 3.15). Τα φύλλα ή οι στρώσεις, χαρακτηρίζονται με τους ακόλουθους συντελεστές δυσκαμψίας:

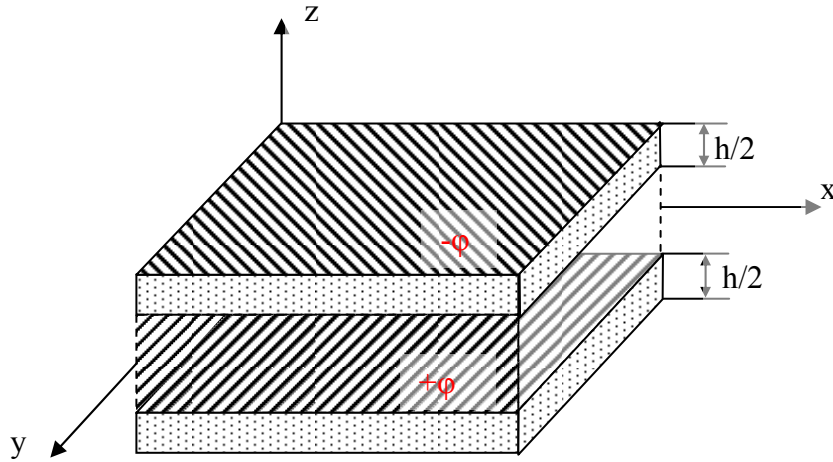
$$A_{11}^{(1)} = A_{11}^{(2)} = A_{11}, \quad A_{12}^{(1)} = A_{12}^{(2)} = A_{12}, \quad A_{22}^{(1)} = A_{22}^{(2)} = A_{22},$$

$$A_{14}^{(1)} = -A_{14}^{(2)} = A_{14}, \quad A_{24}^{(1)} = -A_{24}^{(2)} = A_{24}, \quad A_{44}^{(1)} = -A_{44}^{(2)} = A_{44},$$

Όπου, οι συντελεστές A_m είναι καθορισμένοι από τις εξισώσεις (2.20). Παίρνοντας πάλι $e = h/2$ φθάνουμε στις θεμελιώδεις εξισώσεις (3.49) στις οποίες:

$$B_{mn} = A_{mn} \cdot h, \quad C_{mn} = -\frac{h^2}{4} \cdot A_{mn}, \quad D_{mn} = \frac{h^3}{12} \cdot A_{mn}.$$

Συγκρίνοντας αυτούς τους συντελεστές με αυτούς που εισάγαμε στις εξισώσεις (3.49) και αντιστοιχίζοντας τους σε ένα ημι – ομοιογενές έλασμα με προσανατολισμένα φύλλα, συμπεραίνουμε ότι στο αντισυμμετρικό έλασμα οι συντελεστές σύζευξης C_{14} και C_{24} έχουν πολύ υψηλότερες τιμές και έτσι πολύ πιο συγκεκριμένη επίδραση στην σύζευξη επιμήκυνσης-συστροφής.



Σχήμα 3.15. Όψη ελάσματος αποσυνδεδεμένων στρώσεων υπό γωνία.

3.9 Σύνθετα Υλικά με Δομή Τύπου ‘Sandwich’

Οι κατασκευές τύπου ‘sandwich’, είναι τριστρωματικά ελάσματα που αποτελούνται από λεπτά επιστρώματα και μία ελαφριά κυψέλη ή πυρήνα αφρού όπως απεικονίζεται στα σχήματα 3.16 και 3.17. Επειδή οι επιφανειακές δυσκαμψίες των επιστρωμάτων είναι πολύ πιο υψηλές από αυτές του πυρήνα, ενώ η εγκάρσια διατμητική συμμόρφωση τους είναι πολύ χαμηλότερη από ότι η ίδια παράμετρος του πυρήνα, οι συντελεστές δυσκαμψίας των κατασκευών τύπου ‘Sandwich’, συνήθως υπολογίζονται, κάνοντας την υπόθεση ότι οι επίπεδες δυσκαμψίες του πυρήνα είναι ίσες με το μηδέν. Οι εγκάρσιες διατμητικές δυσκαμψίες των επιστρωμάτων, θεωρούνται απεριόριστα υψηλές. Για το έλασμα του σχήματος 3.18, αυτό σημαίνει ότι:

$$A_{mn}^{(2)} = 0, \quad mn = 11, 12, 14, 24, 44,$$

$$A_{mn}^{(1,2)} \rightarrow \infty, \quad mn = 55, 56, 66.$$

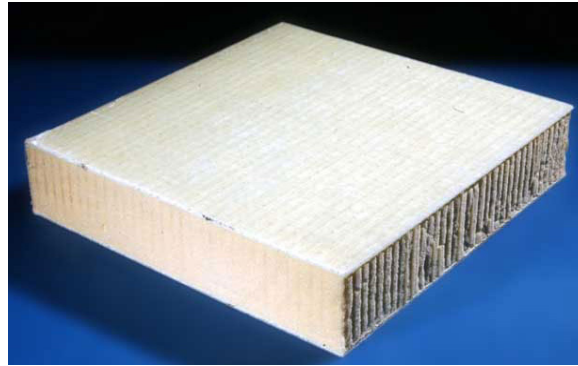
Ως αποτέλεσμα, οι συντελεστές στις εξισώσεις (3.28), γίνονται:

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \cdot \left[A_{mn}^{(1)} \cdot t_1^{r+1} + A_{mn}^{(1)} \cdot (t_3^{r+1} - t_2^{r+1}) \right], \quad (3.61)$$

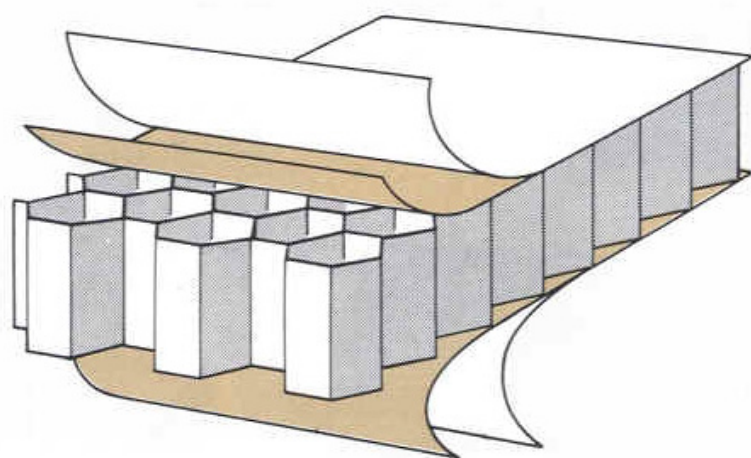
όπου, $mn = 11, 12, 22, 14, 24, 44$. Οι εγκάρσιες διατμητικές δυσκαμψίες, εξίσωση (3.30) για ένα ορθοτροπικό πυρήνα, μπορούν να παρουσιαστούν με την μορφή:

$$S_{55} = \frac{h^2}{h_2} A_{55}^{(2)}, \quad S_{66} = \frac{h^2}{h_2} A_{66}^{(2)},$$

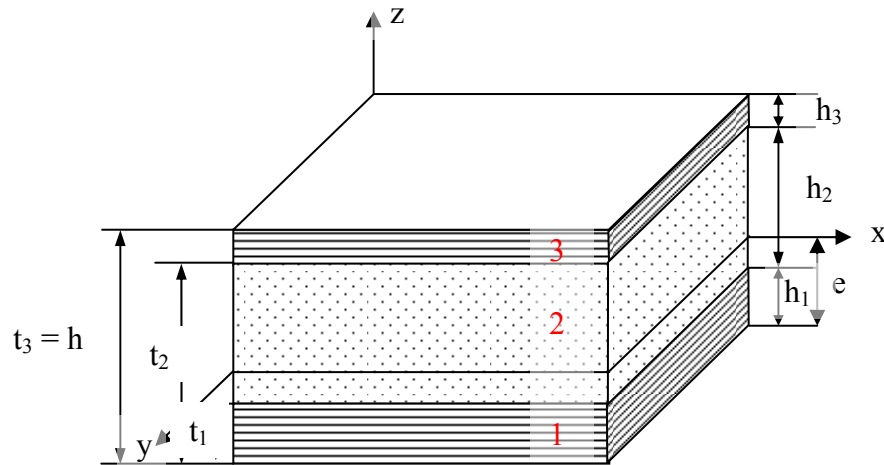
όπου, $A_{55}^{(2)} = G_{xz}$, $A_{66}^{(2)} = G_{yz}$ είναι τα μέτρα διάτμησης του πυρήνα.



Σχήμα 3.16. Σύνθετο υλικό τύπου ‘sandwich’ με κυψελωτό πυρήνα.



Σχήμα 3.17. Σχηματική αναπαράσταση της δομής σύνθετου υλικού τύπου ‘sandwich’.



Σχήμα 3.18. Σύνθετο υλικό τύπου ‘sandwich’ με δύο επιστρώσεις (1 και 3) και πυρήνα με αφρό (2).

3.10 Συντεταγμένες του Επιπέδου Αναφοράς

Οι συντελεστές δυσκαμψίας που καθορίζονται από τις εξισώσεις (3.27) συμπεριλαμβάνουν τις συντεταγμένες του επιπέδου αναφοράς e (βλ. Σχήμα 3.3) το οποίο όντας σωστά προσδιορισμένο, μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε τις θεμελιώδεις εξισώσεις για το έλασμα. Όπως φάνηκε στις προηγούμενες υποενότητες, λαμβάνοντας το μέσο επίπεδο ως επίπεδο αναφοράς, δηλαδή θέτοντας $e=h/2$, μερικές φορές λαμβάνουμε $C_{mn} = 0$, και οι θεμελιώδεις εξισώσεις αποκτούν την απλούστερη μορφή, χωρίς τους όρους ζεύξης μεμβράνης – κάμψης.

Στο σημείο αυτό δημιουργείται το ερώτημα εάν είναι δυνατόν να απλουστεύσουμε τις εξισώσεις (3.4) στη μορφή της γενικευμένης περίπτωσης. Λαμβάνοντας $C_{mn} = 0$ στις εξισώσεις (3.27) έχουμε:

$$e = \frac{I_{mn}^{(1)}}{I_{mn}^{(0)}}. \quad (3.62)$$

Είναι σημαντικό πως το επίπεδο αναφοράς θα πρέπει να είναι το ίδιο για όλους τους δείκτες $mn = 11, 12, 22, 14, 24, 44$ και πως οι έξι αυτές εξισώσεις, θα πρέπει να δίνουν την ίδια τιμή e . Στην γενική περίπτωση αυτό δεν είναι δυνατόν, οπότε το καθολικό επίπεδο αναφοράς παρέχοντάς μας $C_{mn} = 0$ δεν μπορεί να υπάρξει.

Ωστόσο, υπάρχουν κάποια άλλα (εκτός από τις ομοιογενείς και συμμετρικές δομές), ιδιαίτερα ελάσματα για τα οποία πληρούται αυτή η συνθήκη. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα έλασμα αποτελούμενο από ισοτροπικές στρώσεις. Για τέτοια ελάσματα ισχύει:

$$A_{11}^{(i)} = A_{22}^{(i)} = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2}, \quad A_{12}^{(i)} = \frac{E_i \cdot \nu_i}{1 - \nu_i^2}, \quad A_{44}^{(i)} = \frac{E_i}{2 \cdot (1 - \nu_i)},$$

και σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.41)

$$I_{11}^{(0)} = I_{22}^{(0)} = \sum_{i=1}^k \frac{E_i \cdot h_i}{1 - \nu_i^2}, \quad I_{12}^{(0)} = \sum_{i=1}^k \frac{E_i \cdot \nu_i \cdot h_i}{1 - \nu_i^2}, \quad I_{44}^{(0)} = \sum_{i=1}^k \frac{E_i \cdot h_i}{2 \cdot (1 + \nu_i)},$$

$$I_{11}^{(1)} = I_{22}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{E_i \cdot h_i}{1 - \nu_i^2} \cdot (t_i + t_{i-1}), \quad I_{12}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{E_i \cdot \nu_i \cdot h_i}{1 - \nu_i^2} \cdot (t_i + t_{i-1}),$$

$$I_{44}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{E_i \cdot h_i}{2 \cdot (1 + \nu_i)} \cdot (t_i + t_{i-1}).$$

Όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει, αν εισάγουμε αυτές τις παραμέτρους στις εξισώσεις (3.62), παρατηρούμε ότι δεν προκύπτει μια και μόνο τιμή για το μέγεθος e , αλλά εάν ο λόγος Poisson είναι ίδιος για όλες τις στρώσεις π.χ. $\nu_i = \nu$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$), τότε έχουμε:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^k E_i \cdot h_i \cdot (t_i + t_{i-1})}{2 \cdot \sum_{i=1}^k E_i \cdot h_i}.$$

Για πρακτικούς λόγους, αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται συχνά, ακόμα και αν οι λόγοι Poisson μεταξύ των στρώσεων είναι διαφορετικοί. Σε αυτές τις περιπτώσεις, υποθέτουμε ότι όλες οι στρώσεις χαρακτηρίζονται με μία μέση τιμή του λόγου Poisson δηλαδή:

$$\nu = \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^k \nu_i \cdot h_i,$$

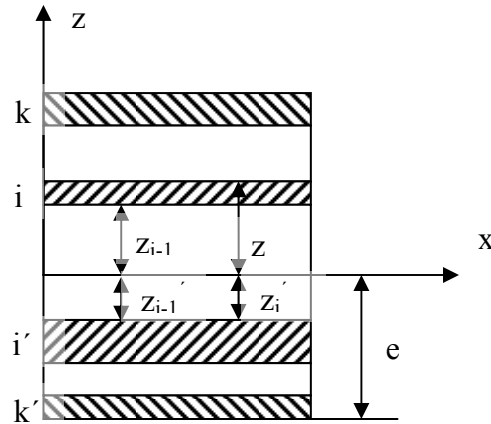
Ένα άλλο παράδειγμα, όπως προαναφέρθηκε είναι η δομή τύπου Sandwich. Στην γενική περίπτωση, πάλι δεν είμαστε σε θέση να βρούμε το επιθυμητό επίπεδο αναφοράς. Ωστόσο, αν υποθέσουμε ότι οι επιστρώσεις είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό (διαφέρουν μόνο τα πάχη των στρώσεων), οι εξισώσεις (3.61) και (3.62) εκφράζονται από την σχέση:

$$e = \frac{h_1^2 + h_3 \cdot (h_3 + 2 \cdot h_1 + 2 \cdot h_2)}{2 \cdot (h_1 + h_3)}.$$

Επιστρέφοντας στην γενική περίπτωση, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το επίπεδο αναφοράς που μας δίνει $C_{mn} = 0$ για όλα τα mn δεν υπάρχει σε αυτήν την περίπτωση παρά μόνο αν μας δίνεται η δομή του ελάσματος. Εάν η αλληλουχία των στρώσεων δεν είναι προκαθορισμένη και υπάρχει επαρκής αριθμός στρώσεων, τότε μπορούν να ταξινομηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε το $C_{mn} = 0$. Πράγματι, θεωρούμε το έλασμα στο σχήμα 3.19 και υποθέτουμε ότι η δομή

του είναι γενικά μη συμμετρική, δηλαδή ισχύει $z_i \neq z'_i$ και $k' \neq k$. Χρησιμοποιώντας ως επίπεδο αναφοράς το επίπεδο $z = 0$, μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές σύζευξης μεμβράνης – κάμψης με την παρακάτω μορφή:

$$C_{mn} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} \cdot h_i \cdot (z_i + z_{i-1}) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i'=1}^{k'/2} A_{mn}^{(i')} \cdot h'_{i'} \cdot (z'_{i'} + z'_{i'-1}),$$



Σχήμα 3.19. Συντεταγμένες των στρώσεων ως προς το επίπεδο αναφοράς.

όπου, $z_i \geq 0$ και $z'_i \geq 0$. Εισάγουμε μία καινούργια συντεταγμένη της στρώσης $\bar{z}_i = (z_i + z_{i-1})/2$, η οποία είναι η απόσταση ανάμεσα στο επίπεδο αναφοράς του ελάσματος και στο μέσο επίπεδο της κάθε στρώσης. Τότε η συνθήκη $C_{mn} = 0$ αποδίδει,

$$\sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} \cdot h_i \cdot \bar{z}_i = \sum_{i'=1}^{k'/2} A_{mn}^{(i')} \cdot h'_{i'} \cdot \bar{z}'_{i'}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε μία ομάδα πανομοιότυπων στρώσεων ή φύλλων με ίδια πάχη και συντελεστές δυσκαμψίας A_{mn} . Για παράδειγμα, το έλασμα θα πρέπει να περιλαμβάνει μία μονό-κατευθυντική στρώση 0° , πάχους 1,5 mm η οποία αποτελείται από 10 φύλλα (το πάχος ενός στοιχειώδους φύλλου είναι 0,15 mm). Ταξινομώντας αυτά τα φύλλα πάνω (\bar{z}_i) και κάτω (\bar{z}'_i) από το επίπεδο αναφοράς, με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$\sum_{j=1}^{10} (\bar{z}_j - \bar{z}'_j) \tag{3.63}$$

Διαπιστώνουμε ότι για αυτή την ομάδα φύλλων δεν έχουμε ζεύξη. Πράττοντας το ίδιο για τις άλλες στρώσεις, καταλήγουμε στην δημιουργία ενός ελάσματος το οποίο δεν παρουσιάζει φαινόμενα σύζευξης, όπως είναι φυσικό, μερικές ακόμα συνθήκες, εξ αιτίας του γεγονότος ότι η δομή του ελάσματος είναι συνεχής, θα πρέπει να ικανοποιούνται. Όμως, ακόμα και με αυτές τις συνθήκες, η εξίσωση (3.63) μπορεί να ικανοποιηθούν μέσω διαφόρων συστημάτων συντεταγμένων των φύλλων και η συμμετρική ταξινόμηση των φύλλων ($\bar{z}_j = \bar{z}'_j$) είναι μόνο ένα από αυτά τα συστήματα.

Επιστρέφοντας στα ελάσματα με προκαθορισμένη αλληλουχία στρώσεων και όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.62), μπορούμε πάντα να θεωρήσουμε έναν από τους συντελεστές δυσκαμψίας ζεύξης ίσο με το μηδέν δηλαδή, θέτοντας $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{st}$ όπου:

$$e = \frac{I_{st}^{(1)}}{I_{st}^{(0)}}, \quad (3.64)$$

Λαμβάνουμε $\mathbf{C}_{st} = \mathbf{0}$ (οι υπόλοιποι συντελεστές δυσκαμψίας σε ζεύξη είναι διάφοροι του μηδενός).

Ένας άλλος τρόπος για να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις για την δυσκαμψία, είναι να θεωρήσουμε $e = 0$, δηλαδή να θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια του ελάσματος, είναι το επίπεδο αναφοράς. Στη περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις (3.27) αποκτούν την μορφή,

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}, \quad C_{mn} = I_{mn}^{(1)}, \quad D_{mn} = I_{mn}^{(2)}.$$

Στην πράξη, οι θεμελιώδεις εξισώσεις για ελάσματα με τυχαία δομή, συχνά απλοποιούνται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ελάχιστης καμπτικής δυσκαμψίας. Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτή τη μέθοδο, θεωρούμε την αντίστοιχη εξίσωση θεωρούμε την αντίστοιχη εξίσωση τής (63) για καμπτική δυσκαμψία, δηλαδή:

$$D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2 \cdot e \cdot I_{mn}^{(1)} + e^2 \cdot I_{mn}^{(0)} \quad (3.65)$$

και βρίσκουμε τη συντεταγμένη e , λαμβάνοντας την ελάχιστη τιμή του \mathbf{D}_{mn} . Χρησιμοποιώντας τις ελάχιστες συνθήκες:

$$\frac{d}{de} D_{mn} = 0, \quad \frac{d^2}{de^2} D_{mn} > 0,$$

έχουμε,

$$e = e_{mn} = \frac{I_{mn}^{(1)}}{I_{mn}^{(0)}}. \quad (3.66)$$

Αυτό το αποτέλεσμα συμπίπτει με την εξίσωση (3.64) και μας δίνει $\mathbf{C}_{mn} = \mathbf{0}$. Έτσι υπολογίζοντας το \mathbf{D}_{mn} και \mathbf{C}_{mn} χρησιμοποιούμε για κάθε $mn = 11, 12, 22, 14, 24, 44$, την αντίστοιχη τιμή e_{mn} η οποία καθορίζεται από την εξίσωση (3.66). Η αντικατάσταση μας αποδίδει:

$$D_{mn}^r = I_{mn}^{(2)} - \frac{\left(I_{mn}^{(1)}\right)^2}{I_{mn}^{(0)}}, \quad C_{mn}^r = 0, \quad (3.67)$$

και οι θεμελιώδεις εξισώσεις (3.4) δεν έχουν σύζευξη. Όπως είναι φυσικό αυτή η προσέγγιση δεν είναι ακριβής επειδή η συντεταγμένη του επιπέδου αναφοράς θα πρέπει να είναι ίδια για όλες τις δυσκαμψίες, κάτι που δεν ισχύει για την υπό μελέτη μέθοδο. Όπως προκύπτει από την προηγούμενη παραγωγή, οι συντελεστές \mathbf{D}_{mn}^r που καθορίζονται από την εξίσωση (3.67), δεν ξεπερνούν τις πραγματικές τιμές της καμπτικής δυσκαμψίας δηλαδή $D_{mn}^r \leq D_{mn}$. Έτσι, η μέθοδος αυτή μας οδηγεί στην υποτίμηση της καμπτικής δυσκαμψίας του ελάσματος. Εν κατακλείδι, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η μέθοδος δεν είναι επίσημα εδραιωμένη και

μπορεί να επιφέρει και ικανοποιητική και ελλιπή προσέγγιση της συμπεριφοράς του ελάσματος.

3.11 Τάσεις σε Ελάσματα – Πολυστρωματικές Πλάκες

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες υποενότητες αυτού του κεφαλαίου, συνδέουν τις δυνάμεις και τις ροπές που δρουν στο έλασμα, με τις αντίστοιχες γενικευμένες παραμορφώσεις. Στις σύνθετες δομές, οι δυνάμεις και οι ροπές θα πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας, ενώ οι παραμορφώσεις να εκφράζονται υπό όρους μετατοπίσεων. Το αποτέλεσμα είναι, να σχηματίζεται ένα πλήρες σύνολο εξισώσεων, το οποίο μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τις δυνάμεις, τις ροπές, τις παραμορφώσεις και τις μετατοπίσεις που αντιστοιχούν σε ένα δεδομένο σύστημα φορτίων που δρα στην κατασκευή. Επειδή το πρόβλημα των μηχανολογικών κατασκευών, ξεπερνά το αντικείμενο αυτής της εργασίας, υποθέτουμε ότι αυτό έχει ήδη λυθεί, δηλαδή ότι γνωρίζουμε, είτε τις γενικευμένες παραμορφώσεις ε , γ και κ εισάγοντάς τες στις εξισώσεις (3.5), είτε τις δυνάμεις και τις ροπές N και M . Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (3.5) προκειμένου να βρούμε τα ε , γ , και κ . Στην συνέχεια, για να ολοκληρώσουμε την ανάλυση αυτή, θα πρέπει να καθορίσουμε την δράση των τάσεων σε κάθε στρώση του ελάσματος / της πλάκας.

Για τον σκοπό αυτό, θα βρούμε πρώτα τις παραμορφώσεις σε κάθε στρώση χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.3) οι οποίες εκφράζονται:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \varepsilon_x^{(0)} + z_i \cdot \kappa_x, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \varepsilon_y^{(0)} + z_i \cdot \kappa_y, \quad \gamma_{xy}^{(i)} = \gamma_{xy}^{(0)} + z_i \cdot \kappa_{xy}, \quad (3.68)$$

όπου, z είναι η κάθετη συντεταγμένη της στρώσης η οποία αλλάζει, σε συνάρτηση με το πάχος της κάθε στρώσης. Αν η εκάστοτε στρώση είναι ορθοτροπική, με τους κύριους άξονες του υλικού να συμπίπτουν με τους άξονες x και y , ο Νόμος του Hooke μας παρέχει την τάση που ζητάμε, δηλαδή,

$$\sigma_x^{(i)} = \bar{E}_x^{(i)} \cdot \left(\varepsilon_x^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \cdot \varepsilon_y^{(i)} \right), \quad \sigma_y^{(i)} = \bar{E}_y^{(i)} \cdot \left(\varepsilon_y^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \cdot \varepsilon_x^{(i)} \right), \quad \tau_{xy}^{(i)} = G_{xy}^{(i)} \cdot \gamma_{xy}^{(i)}, \quad (3.69)$$

όπου, $\bar{E}_{x,y}^{(i)} = E_{x,y}^{(i)} / (1 - \nu_{xy}^{(i)} \cdot \nu_{yx}^{(i)})$ και $E_x^{(i)}, E_y^{(i)}, G_{xy}^{(i)}, \nu_{xy}^{(i)}, \nu_{yx}^{(i)}$ είναι ελαστικές σταθερές της στρώσης που αναφέρεται στους κύριους άξονες του υλικού. Για μία ισοτροπική στρώση (π.χ. μέταλλο ή πολυμερές), πρέπει να λάβουμε στις εξισώσεις (105): $E_x^{(i)} = E_y^{(i)} = E_i$, $\nu_{xy}^{(i)} = \nu_{yx}^{(i)} = \nu_i$, $G_{xy}^{(i)} = G_i = E_i / 2 \cdot (1 + \nu_i)$.

Θεωρούμε μια στρώση αποτελούμενη από μονό-διευθυντικά φύλλα με γωνία προσανατολισμού φ_i . Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.17), μπορούμε να εκφράσουμε τις παραμορφώσεις στις κύριες συντεταγμένες του υλικού όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^{(i)} &= \varepsilon_x^{(i)} \cdot \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_y^{(i)} \cdot \sin^2 \varphi_i + \gamma_{xy}^{(i)} \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \varphi_i, \\
 \varepsilon_2^{(i)} &= \varepsilon_x^{(i)} \cdot \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_y^{(i)} \cdot \cos^2 \varphi_i - \gamma_{xy}^{(i)} \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \varphi_i, \\
 \gamma_{12}^{(i)} &= 2 \cdot (\varepsilon_y^{(i)} - \varepsilon_x^{(i)}) \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \varphi_i + \gamma_{xy}^{(i)} \cdot \cos 2\varphi_i,
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

και να βρούμε τις αντίστοιχες τάσεις δηλαδή:

$$\sigma_x^{(i)} = \bar{E}_x^{(i)} \cdot (\varepsilon_x^{(i)} + \nu_{xy}^{(i)} \cdot \varepsilon_y^{(i)}), \quad \sigma_y^{(i)} = \bar{E}_y^{(i)} \cdot (\varepsilon_y^{(i)} + \nu_{yx}^{(i)} \cdot \varepsilon_x^{(i)}), \quad \tau_{xy}^{(i)} = G_{xy}^{(i)} \cdot \gamma_{xy}^{(i)}, \tag{3.71}$$

όπου, $\bar{E}_{1,2}^{(i)} = E_{1,2}^{(i)} / (1 - \nu_{12}^{(i)} \cdot \nu_{21}^{(i)})$ και $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, G_{12}^{(i)}, \nu_{12}^{(i)}, \nu_{21}^{(i)}$ είναι ελαστικές σταθερές ενός μονό-κατευθυντικού φύλλου.

Έτσι οι εξισώσεις (3.683.71 - 107), μας επιτρέπουν να βρούμε επίπεδες τάσεις που δρουν σε κάθε στρώση ή στοιχειώδες σύνθετο φύλλο.

Η συμβατή παραμόρφωση των στρώσεων παρέχεται από τις διαστρωματικές τάσεις τ_{xz} , τ_{yz} και σ_z . Για να υπολογίσουμε αυτές τις τάσεις, πρέπει να μελετήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας τριών διαστάσεων οι οποίες εκφράζονται ως ακολούθως:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right). \tag{3.72}$$

Αντικαθιστώντας τις τάσεις σ_x , σ_y , και τ_{xy} από τις εξισώσεις (3.4) και ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (3.72) ως προς τις δυνάμεις που ασκούνται στις επιφάνειες του ελάσματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εγκάρσιες διατμητικές και κάθετες τάσεις τ_{xz} , τ_{yz} και σ_z .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

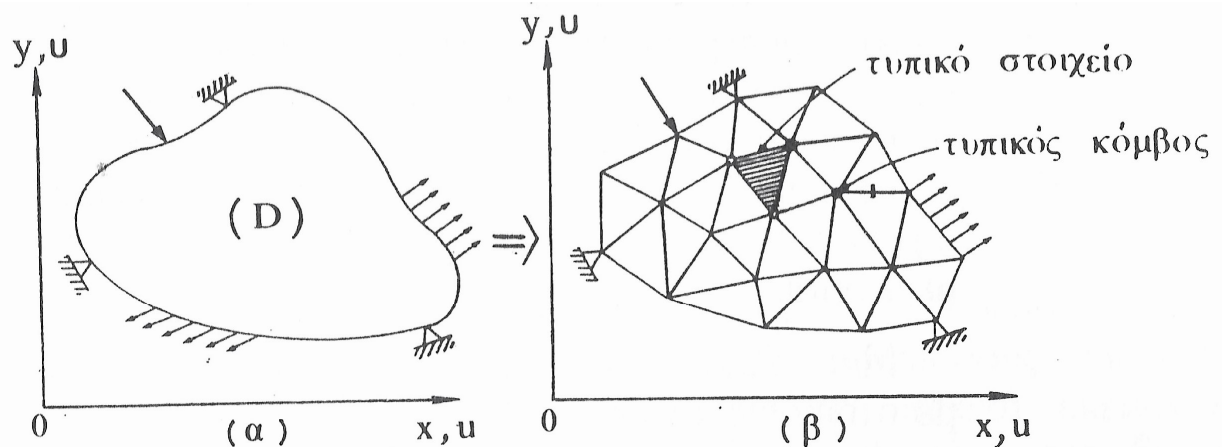
Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τις πολυστρωματικές πλάκες τυχαίας γεωμετρίας και τυχαίων οριακών συνθηκών δεν μπορούν να επιλυθούν σε κλειστή μορφή. Οι αναλυτικές λύσεις για την θεωρία πλακών είναι διαθέσιμες κυρίως για ορθογωνικές πλάκες με απλές στηρίξεις σε όλες τις ακμές τους, ή με τις δύο απέναντι ακμές να έχουν απλές στηρίξεις και οι εναπομείνουσες ακμές να έχουν τυχαίες οριακές συνθήκες. Οι μέθοδοι Rayleigh – Ritz και Galerkin μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό αναλυτικών επιλύσεων, αλλά κι αυτές οι μέθοδοι περιορίζονται σε απλές γεωμετρίες εξαιτίας του αυξημένου βαθμού δυσκολίας που υπάρχει στην κατασκευή των συναρτήσεων προσέγγισης για περίπλοκες γεωμετρίες. Η χρήση αριθμητικών μεθόδων διευκολύνει την επίλυση αυτών των εξισώσεων για προβλήματα πρακτικής σημασίας. Μεταξύ των διαθέσιμων αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση των ζητούμενων διαφορικών εξισώσεων με τυχαίο πεδίο ορισμού, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι η πιο αποτελεσματική μέθοδος.

Στην δεκαετία του 1950 οι αεροναυπηγοί βρέθηκαν μπροστά στην ιδιαίτερα πειστική ανάγκη να βρουν μεθόδους υπολογισμού των αεροναυπηγικών κατασκευών που την εποχή εκείνη είχαν αρχίσει να αναπτύσσονται ραγδαία. Έτσι στα μέσα της δεκαετίας 1950 ανέπτυξαν ιδέες που μπορούν να θεωρηθούν ως οι προπομποί της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Σύμφωνα με τις ιδέες αυτές η κατασκευή χωρίζεται σε μικρότερα τμήματα – στοιχεία που συνδέονται μεταξύ τους με κόμβους. Οι κομβικές δυνάμεις και οι κομβικές μετατοπίσεις συνδέονται μεταξύ τους γραμμικά. Η σύνθεση όλων των στοιχείων γίνεται επίσης με γραμμικό τρόπο. Η παραπέρα ανάπτυξη της προσεγγιστικής αυτής μεθόδου οφείλεται σ' ένα τεράστιο αριθμό εργασιών που δημοσιεύθηκαν αλλά και δημοσιεύονται μέχρι σήμερα από ερευνητές μηχανικούς.

Τα πεπερασμένα στοιχεία αποτελούν επέκταση της μητρικής ανάλυσης κατασκευών στις μη ραβδωτές, δηλαδή τις ολόσωμες κατασκευές. Έτσι η κατασκευή υποδιαιρείται σε στοιχεία. Η υποδιαίρεση εδώ είναι πιο σύνθετη διαδικασία (όπως φαίνεται στα σχήματα 56 α και β) από την αντίστοιχη διαδικασία στους ραβδωτούς φορείς. Τα στοιχεία εξακολουθούν να είναι από το ίδιο υλικό η σύνδεση όμως μεταξύ τους γίνεται σ' έναν αριθμό διακριτών σημείων, τους κόμβους. Η ικανοποίηση των σχέσεων ισορροπίας και συμβιβαστού περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων της κατασκευής. Για να αποκτήσουμε την ακριβή λύση πρέπει το μέγεθος των στοιχείων να γίνει απειροστό. Αν το μέγεθος των στοιχείων είναι πεπερασμένο, τα αποτελέσματα θα είναι προσεγγιστικά, θα περιέχουν δηλαδή κάποιο σφάλμα που θα γίνεται μικρότερο όσο το μέγεθος των στοιχείων μειώνεται.

Μια άλλη προσέγγιση εισάγεται στην σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις στους κόμβους με τις κομβικές δυνάμεις. Η απόδειξη αυτών των σχέσεων βασίζεται σε ενεργειακά θεωρήματα (θεώρημα δυνατών μετατοπίσεων) και διευκολύνεται από την απλή μορφή των στοιχείων. Όπως στην μητρική ανάλυση των κατασκευών έτσι και εδώ έχουμε τη δυνατότητα να εκλέξουμε σαν βασικές μεταβλητές του προβλήματος τις κομβικές μετατοπίσεις ή τις κομβικές δυνάμεις. Έτσι έχουμε δύο μοντέλα ανάπτυξης της μεθόδου, το

μοντέλο των μετατοπίσεων ή κινηματικό μοντέλο και το **μοντέλο των δυνάμεων ή στατικό μοντέλο**. Και τα δύο αυτά μοντέλα έχουν εξελιχθεί για την θεωρία πλακών. Το μοντέλο των μετατοπίσεων για την θεωρία πλακών βασίζεται στην αρχή των δυνατών μετατοπίσεων, όπου όλες οι εξισώσεις που τις διέπουν, εκφράζονται με όρους μετατοπίσεων, ενώ αντίστοιχα το στατικό μοντέλο βασίζεται στην αρχή των δυνατών δυνάμεων. Εκτός από αυτά τα δύο μοντέλα υπάρχει το **μικτό μοντέλο**, στο οποίο μεταβλητές του προβλήματος είναι τόσο οι κομβικές μετατοπίσεις όσο και οι κομβικές δυνάμεις αλλά και το **υβριδικό μοντέλο** το οποίο είναι ακόμη πιο σύνθετο. Μεταξύ των μοντέλων αυτών, το μοντέλο των μετατοπίσεων είναι εκείνο που χρησιμοποιείται κυρίως στα εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων. Η προτίμηση προς το μοντέλο αυτό οφείλεται στην ευκολία της εξαγωγής των σχέσεων και στην μεγάλη προγραμματιστική απλότητα. Έτσι στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το μοντέλο.



Σχήμα 4.1. α) Τυχαία κατασκευή (D) , β) Διακεκριμενοποίηση της κατασκευής (διαμέρισή της σε πεπερασμένα στοιχεία).

4.1 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων στην Κάμψη Πολυστρωματικών Πλακών με Ορθογωνικά Στοιχεία

Όπως είναι γνωστό υπό τον όρο πλάκα (είτε απλή, είτε πολυστρωματική) ορίζουμε ένα επίπεδο σώμα του οποίου το συνολικό πάχος είναι κατά πολύ μικρότερο των άλλων διαστάσεων. Εξαιτίας αυτής της γεωμετρίας δεν χρησιμοποιούνται τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία για την ανάλυση πλακών σε κάμψη. Εάν τα τρισδιάστατα στοιχεία ήταν κατασκευασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι λεπτά μόνο κατά την διεύθυνση του πάχους, θα παρουσιάζονταν προβλήματα κατά την διάτμηση. Ακόμα κι αν αυτά τα προβλήματα επιλύονταν με πολλά πυκνά τρισδιάστατα στοιχεία, θα δημιουργείτο μια κατασκευή πεπερασμένων στοιχείων με πάρα πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτό το πρόβλημα (των πολλών βαθμών ελευθερίας) λοιπόν το αποφεύγουμε χρησιμοποιώντας στοιχεία τα οποία βασίζονται στην κλασική θεωρία πλακών.

Μια επίπεδη πλάκα, όπως και μια ίσια δοκός, φέρει κατά την κάμψη της πλάγιες φορτίσεις. Γενικά, μια πλάκα αναπτύσσει καμπτικές ροπές σε δύο κατευθύνσεις και μια στρεπτική ροπή. Επειδή είναι εύκολο να διατυπώσουμε ένα ικανοποιητικό στοιχείο δοκού, θα μπορούσε να υποθεθεί ότι το ίδιο ισχύει και για ένα στοιχείο πλάκας. Στην πραγματικότητα όμως δεν ισχύει κάτι τέτοιο, τα πρώτα στοιχεία πλακών ταλανίζονταν από διάφορα προβλήματα όπως ανάγκη για υψηλότερης τάξης βαθμούς ελευθερίας ή ανάγκη για πολλούς πλευρικούς κόμβους, ανάγκη για διαφοροποίηση των ρυθμίσεων των βαθμών ελευθερίας από κόμβο σε κόμβο για ένα στοιχείο, αστάθεια λόγω γεωμετρικών περιορισμών ή απλά χαμηλή ακρίβεια και επίδοση.

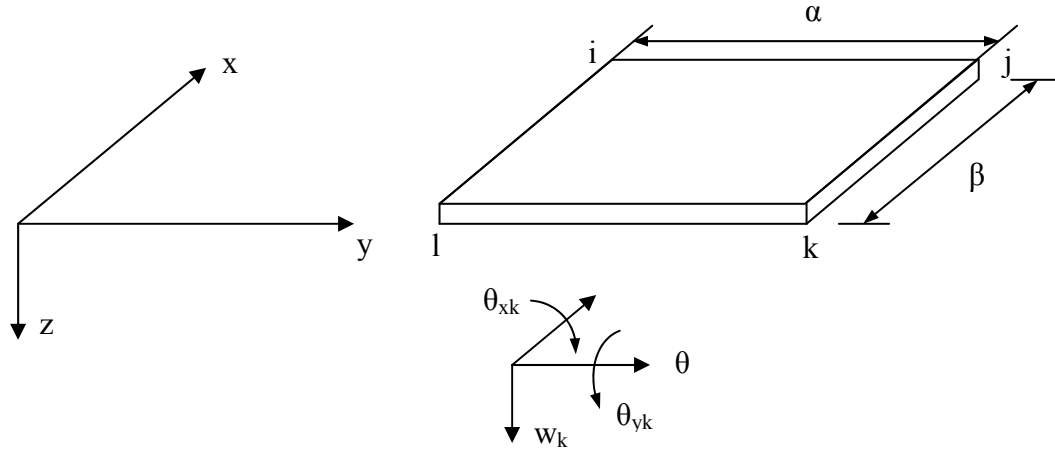
Κατά το τέλος της δεκαετίας του 1950 ο Melosh εφήρμοσε για πρώτη φορά την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, προτείνοντας ορθογωνικά μη – συμμορφωμένα στοιχεία με 12 κομβικές παραμέτρους (3 για κάθε έναν από τους τέσσερις κόμβους). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί μια πλήρη τριτοβάθμια πολυωνυμική ανάπτυξη σε x και y , ευθυγραμμισμένη με τις πλευρές του ορθογωνίου, συν δύο επιπλέον όρους x^3y και yx^3 . Το στοιχείο αυτό ικανοποιεί την πληρότητα όπως και την συνέχεια της εγκάρσιας μετατόπισης ωστόσο οδηγεί σε ασυνεχείς κλίσεις. Παρατηρείται δηλαδή συνέχεια C^0 αλλά όχι C^1 παρά μόνο στις γωνίες. Σε κάθε περίπτωση το στοιχείο αυτό εμφανίζει καλή σύγκλιση σε ορθογωνικές πλάκες. Ο Melosh πρότεινε επίσης κλειστές αναλυτικές εκφράσεις για το μητρώο δυσκαμψίας. Επειδή παρόμοια ευρήματα έχουν αναφερθεί από τους Zienkiewicz και Cheung, το στοιχείο αυτό έχει λάβει το όνομα MZC rectangle, από τα αρχικά των τριών συγγραφέων.

Αναφορικά με την συνέχεια C^1 αξίζει να επισημάνουμε ότι η δημιουργία δισδιάστατων στοιχείων, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για προβλήματα που απαιτούν συνέχεια ως προς την μεταβλητή πεδίου, w καθώς και την κάθετη παράγωγό της, $\partial w / \partial n$ κατά μήκος των ορίων του στοιχείου, είναι πολύ πιο δύσκολη από την δημιουργία στοιχείων μόνο για συνέχεια C^0 . Για να διατηρηθεί η συνέχεια C^1 θα πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι το w και το $\partial w / \partial n$ είναι καθορισμένα μοναδικά κατά μήκος των ορίων του στοιχείου από τους βαθμούς ελευθερίας που έχουν ανατεθεί στους κόμβους κατά μήκος του κάθε ορίου. Έτσι η μετατόπιση του μέσου επιπέδου της πλάκας βάσει της ‘Κλασικής Θεωρίας Πλακών’ είναι η ζητούμενη μεταβλητή πεδίου, w για κάθε στοιχείο και η συνεχεία της στα υπόλοιπα στοιχεία καθώς και η κλίση της, $\partial w / \partial n$ είναι η μία επιθυμητή φυσική αξίωση. Επίσης, εφόσον η συμπεριφορά της πλάκας σε κάμψη συμπεριλαμβάνει παραγώγους 2ας τάξης, η συνέχεια της κλίσης στην διεπαφή του στοιχείου είναι μια μαθηματική απαίτηση επειδή έτσι επιβεβαιώνεται η σύγκλιση όσο το μέγεθος του στοιχείου μειώνεται. Για τους παραπάνω λόγους οι αναλυτές πραγματοποίησαν έρευνες για την εύρεση στοιχείων, τα οποία θα παρέχουν συνέχεια κατά την κλίση, $\partial w / \partial n$.

Αργότερα, ο Bogner πρότεινε ορθογωνικά συμμορφωμένα τετρακομβικά στοιχεία με τέσσερις βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο, δηλαδή συνολικά δεκαέξι βαθμούς ελευθερίας, μέσα από παρεμβολή συναρτήσεων Hermite. Αυτό το στοιχείο είναι πλήρως συμμορφωμένο και ικανοποιεί το κριτήριο σταθερής παραμόρφωσης και φέρει την ονομασία BFS – element. Στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού θα ασχοληθούμε αναλυτικά με τα στοιχεία MZC και BFS καθώς και με τα μακροστοιχεία τα οποία είναι η εξέλιξη των τεχνικών δημιουργίας μεγάλων στοιχείων με τα κομβικά σημεία τους να βρίσκονται μόνο κατά μήκος των ορίων τους.

4.2 Στοιχείο MZC – Rectangular (Μη – Συμμορφωμένο)

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε το στοιχείο MZC για το οποίο αναφερθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα. Θεωρούμε ένα ορθογωνικό στοιχείο ($ijkl$) διαστάσεων $\alpha \times \beta$, με τέσσερις κόμβους στις τέσσερις κορυφές του αντίστοιχα, στα οποία το μέσο επίπεδο συμπίπτει με το επίπεδο xOy (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2. Το στοιχείο MZC και οι θετικές φορές των κομβικών παραμέτρων στον κόμβο k

Το διάνυσμα των μετατοπίσεων \mathbf{q}_k σε κάθε κόμβο k του στοιχείου αποτελείται από το βέλος \mathbf{w}_k και τις δύο στροφές θ_{xk} και θ_{yk} όπως φαίνεται στην σχέση 4.1.

$$\mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} w_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_k \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Το ολικό διάνυσμα των κομβικών παραμέτρων του στοιχείου (\mathbf{e}) θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_l \end{Bmatrix}$$

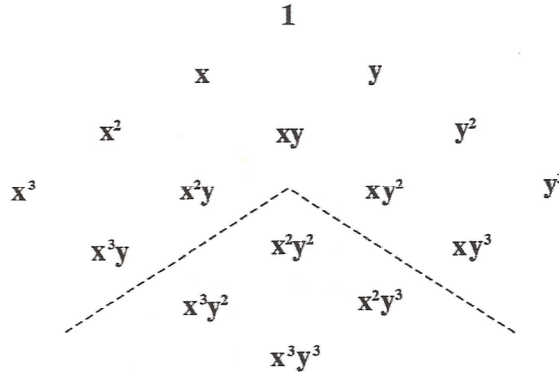
Επομένως υπάρχουν 12 παράμετροι. Το βέλος μπορεί λοιπόν να εκφρασθεί από μία πολυωνυμική έκφραση ως προς x και y που να περιέχει 12 αγνώστους. Δηλαδή:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad \text{ή}$$

$$w = \left[1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3 \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

που σε μητρωϊκή γραφή γίνεται: $w = M(x, y) \cdot \alpha$ (4.3)

Η ανωτέρω έκφραση έχει σαφή πλεονεκτήματα. Είναι συμμετρική ως προς x και y α κατά μήκος ευθειών με σταθερό x ή y , β) το w δίνεται από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού που μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα.



Σχήμα 4.3. Οι 12 όροι που επιλέγονται για το πεδίο των μετατοπίσεων του στοιχείου MZC 12 βαθμών ελευθερίας.

Όπως μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα οι κλίσεις $\partial w / \partial x$ και $\partial w / \partial y$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες κατά μήκος των συνόρων του στοιχείου. Άρα, η κάθετη κλίση εμφανίζει ασυνέχεια κατά την μετάβαση από το ένα στοιχείο στο άλλο. Πράγματι, το $\partial w / \partial y$ για $y =$ σταθερό, είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς x . Όμως οι δύο κλίσεις που διατίθενται στους κόμβους της πλευράς του στοιχείου δεν επαρκούν για τον πλήρη προσδιορισμό των τεσσάρων αγνώστων συντελεστών του κυβικού πολυωνύμου. Οπότε η προσέγγιση που ορίζεται από της σχέση 4.2 είναι γενικά μη - συμμορφωμένη. Τα αντίστοιχα

φαινόμενα παρατηρούνται ως προς την κλίση $\partial w / \partial x$ για $x = \text{σταθερό}$. Οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}$, υπολογίζονται κατά τα γνωστά γράφοντας τις σχέσεις που συνδέουν τα βέλη και τις στροφές στους κόμβους i, j, k, l συναρτήσεως της σχέσης 4.2. Άρα θα έχουμε:

$$q_k = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x_j & 2y_j & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 2x_l & y_l & 0 & 3x_l^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\text{ή σε μητρωϊκή γραφή: } q^e = A \cdot a \quad (4.5)$$

$$\text{αντιστρέφοντας προκύπτει: } a = A^{-1} \cdot q_e \quad (4.6)$$

Άρα, η έκφραση 4.3 γίνεται:

$$w = N \cdot q_e = M \cdot A^{-1} \cdot q_e \quad (4.7)$$

4.2.1 Συναρτήσεις Μορφής του Στοιχείου MZC

Ο Melosh έδωσε την αναλυτική έκφραση των διαφόρων συναρτήσεων μορφής. Μια πλήρης μορφή των συναρτήσεων μορφής, N και των παραγώγων τους για κάθε κόμβο παρουσιάζεται παρακάτω. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι έχουμε θέσει $\xi = x / \alpha$ και $\eta = y / \beta$ και ότι την σχέση 4.3 μπορούμε να την παρουσιάσουμε ως:

$$w = \sum_{i=1}^4 [N_i(x, y)w_i + N_{i+1}(x, y)\theta_{xi} + N_{i+2}(x, y)\theta_{yi}] = \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y)q_i^e, \text{ όπου:}$$

$$N_1 = 1 - \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{8}[(1 + \xi)^2(2 - \xi)(1 - \eta) + (1 - \xi)(1 + \eta)^2(2 - \eta)]$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\alpha}(1 + \eta) + \frac{1}{8} \frac{1}{\alpha} [3(1 - \xi)^2(1 - \eta) + (1 + \eta)^2(2 - \eta)]$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\beta}(1 + \xi) + \frac{1}{8} \frac{1}{\beta} [(1 + \xi)^2(2 - \xi) + 3(1 - \xi)(1 - \eta)^2]$$

$$N_2 = \frac{\beta}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)^2(1 + \eta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{8} \frac{\beta}{\alpha}(1 - \eta)^2(1 + \eta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + 3\eta)$$

$$N_3 = \frac{\alpha}{8}(1 - \eta)(1 - \xi)^2(1 + \xi)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1 - \xi)^2(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \frac{\alpha}{\beta} (1-\xi)^2 (1+\xi)$$

$$N_4 = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta) [(1+\xi)(\xi-2) + (1+\eta)\eta]$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \frac{1}{\alpha} (1-\eta) [3(1-\xi^2) + (1+\eta)\eta]$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \frac{1}{\beta} (1+\xi) [(1+\xi)(\xi-2) - (1-3\eta^2)]$$

$$N_5 = -\frac{\beta}{8} (1+\xi)(1-\eta)^2 (1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \frac{\beta}{\alpha} (1-\eta)^2 (1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1+3\eta)$$

$$N_6 = \frac{\alpha}{8} (1+\xi)^2 (1-\eta)(1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{8} (1+\xi)(1-3\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} \frac{\alpha}{\beta} (1+\xi)^2 (1-\xi)$$

$$N_7 = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta) [2 + (1+\xi)(\xi-2) + (1+\eta)(\eta-2)]$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -\frac{1}{8} \frac{1}{\alpha} (1+\eta) [3\xi^2 - 1 + (1+\eta)(\eta-2)]$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} \frac{1}{\beta} (1+\xi) [(1+\xi)(\xi-2) - 1 + 3\eta^2]$$

$$N_8 = -\frac{\beta}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1+\eta)^2$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{8} \frac{\beta}{\alpha} (1+\eta)^2 (1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1-3\eta)$$

$$N_9 = \frac{\alpha}{8} (1+\xi)^2 (1-\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \xi} = \frac{1}{8} (1+\xi)(1-3\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \frac{\alpha}{\beta} (1+\xi)^2 (1-\xi)$$

$$N_{10} = -\frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta) [(1+\xi)\xi + (1+\eta)(\eta-2)]$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} = -\frac{1}{8} \frac{1}{\alpha} (1+\eta) [(1-3\xi^2) - (1+\eta)(\eta-2)]$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} \frac{1}{\beta} (1-\xi) [(1+\xi)\xi - 3(1-\eta)^2]$$

$$N_{11} = -\frac{\beta}{8} (1-\xi)(1+\eta)^2 (1-\eta)$$

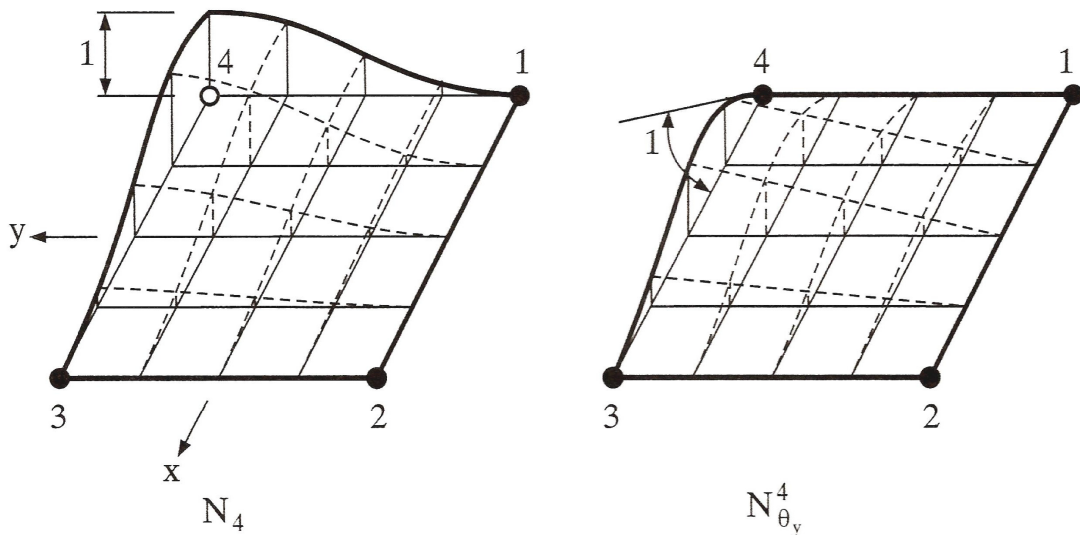
$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \frac{\beta}{\alpha} (1-\eta)(1+\eta)^2$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1-3\eta)$$

$$N_{12} = -\frac{\alpha}{8} (1-\xi)^2 (1+\eta)(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial \xi} = \frac{1}{8} (1+3\xi)(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} \frac{\alpha}{\beta} (1-\xi)^2 (1+\xi)$$



Σχήμα 4.4. Συναρτήσεις μορφής, N_4 και $N_{\theta_y}^4$ του στοιχείου MZC

Προκειμένου να ελέγξουμε την συνέχεια των μετατοπίσεων κατά τα όρια του στοιχείου θεωρούμε την ακμή $k - j$ τους σχήματος 4.2 για $x = a$. Έτσι λοιπόν θα έχουμε:

$$w(\alpha, y) = N_4 w_k + N_5 \theta_{kx} + N_7 w_j + N_8 \theta_{jx}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial N_4}{\partial y} w_k + \frac{\partial N_5}{\partial y} \theta_{kx} + \frac{\partial N_7}{\partial y} w_j + \frac{\partial N_8}{\partial y} \theta_{jx}$$

Όλες οι άλλες συναρτήσεις μορφής είναι μηδέν.

Αυτό μας δείχνει ότι η μετατόπιση, w και η κλίση, $\partial w / \partial y$ κατά το μήκος αυτής της ακμής διέπεται από τις μετατοπίσεις των κόμβων που διέπουν αυτήν την ακμή. Αυτό σημαίνει ότι ένα γειτονικό στοιχείο που ορίζεται από αυτούς τους δύο κόμβους έχει επίσης τις ίδιες μετατοπίσεις κατά μήκος αυτής της ακμής, και με τον τρόπο αυτό διασφαλίζεται η συνέχεια αυτών των δύο μετατοπίσεων.

Κατά τον έλεγχο της κλίσης, $\partial w / \partial y$ ως προς την συνέχεια της στην ακμή $k - j$, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι παράγωγοι των συναρτήσεων μορφής στους κόμβους που ορίζουν την συγκεκριμένη ακμή αλλά και οι αντίστοιχοι στους κόμβους l, k είναι επίσης αμετάβλητοι. Εφόσον σε κάθε ακμή μόνο δύο κόμβοι είναι κοινοί, τότε φαίνεται καθαρά ότι δεν υφίσταται συνέχεια κατά την κλίση,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial N_4}{\partial x} w_k + \frac{\partial N_5}{\partial x} \theta_{kx} + \frac{\partial N_6}{\partial x} \theta_{ky} + \frac{\partial N_7}{\partial x} w_j + \frac{\partial N_8}{\partial x} \theta_{jx} +$$

$$+ \frac{\partial N_9}{\partial x} \theta_{jy} + \frac{\partial N_{10}}{\partial x} w_l + \frac{\partial N_{11}}{\partial x} \theta_{lx} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} w_i + \frac{\partial N_{13}}{\partial x} \theta_{ix}$$

Αυτή η ασυνέχεια σημαίνει ότι οι ροπές είναι θεωρητικά άπειρες (επισημαίνουμε ότι οι ροπές προκύπτουν από την παραγωγή – κατά την γενικευμένη έννοια – μιας ασυνεχούς συνάρτησης στο σημείο της ασυνέχειας) στα σύνορα μεταξύ των στοιχείων χωρίς όμως αυτές οι ροπές να συνεισφέρουν στην ολική δυναμική ενέργεια του σώματος.

Τα στοιχεία αυτά (όπως το MZC που εξετάσαμε μόλις) που παραβιάζουν τις συνθήκες συνέχειας ονομάζονται **μη – συμμορφωμένα**. Παρά το γεγονός αυτό, το στοιχείο MZC χαρακτηρίζεται από απλότητα στον σχηματισμό των συναρτήσεων μορφής και συγκλίνει προς την σωστή λύση χωρίς να εφαρμοσθεί κάποιος επιπλέον περιορισμός. Συνεπώς, το να είναι ένα στοιχείο μη – συμμορφωμένο δεν συνεπάγεται ότι το στοιχείο αυτό δεν συγκλίνει ή η μη ύπαρξη συμμορφίας σε ένα στοιχείο δεν αποτελεί απαραίτητα ένα αριθμητικό μειονέκτημα γι αυτό. Μπορεί μάλιστα να ειπωθεί ότι η ύπαρξη ασυνέχειας κατά την κάθετη διεύθυνση στην κοινή πλευρά μεταξύ δύο στοιχείων επιτρέπει μια μεγαλύτερη ευκαμψία στην παραμόρφωση δύο στοιχείων. Γενικά, το στοιχείο αυτό παρουσιάζει καλή συμπεριφορά και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πολλά προβλήματα πολυστρωματικών και μη πλακών.

4.3 Στοιχείο BFS (Συμμορφωμένο)

Η κατάσταση ασυμμορφίας που εξετάσαμε προηγουμένως μπορεί να διορθωθεί εάν στην συνάρτηση βύθισης, w προστεθούν επιπλέον όροι που θα μηδενίζονται στις ακμές του στοιχείου. Οι όροι αυτοί θα βοηθήσουν ώστε να επιτευχθεί η συνέχεια της κάθετης κλίσης χωρίς να δημιουργηθεί πρόβλημα στην συνέχεια της βύθισης.

Πράγματι, εάν θεωρηθεί η συνάρτηση βύθισης:

$$w_F = w + (1+X)(1+Y)(1-X)(1-Y)(Q_i + Q_j X + Q_k Y + Q_l XY) \quad (4.8)$$

όπου,

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{\beta}$$

τότε η βύθιση και η κάθετη κλίση είναι συνεχείς συναρτήσεις κατά μήκος των ακμών του στοιχείου στην περίπτωση που οι συντελεστές Q_i, Q_j, Q_k, Q_l πάρουν τις τιμές:

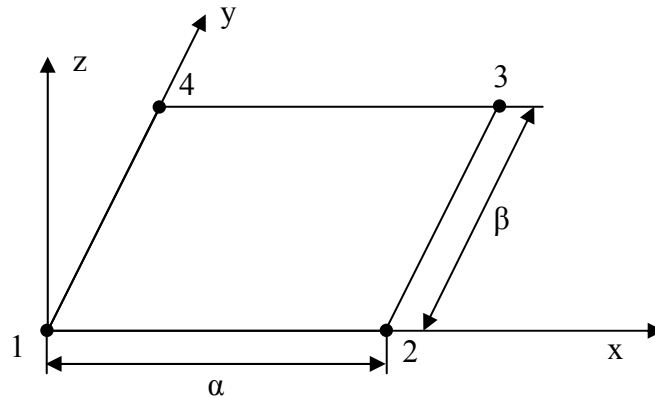
$$\begin{aligned} Q_i &= 0 \\ Q_j &= \beta(-\theta_{xi} + \theta_{xj} - \theta_{xk} + \theta_{xl})/16 \\ Q_k &= \alpha(-\theta_{yi} + \theta_{yj} - \theta_{yk} + \theta_{yl})/16 \\ Q_l &= (w_i - w_j + w_k - w_l + \beta(\theta_{xi} - \theta_{xj} - \theta_{xk} + \theta_{xl}) + \alpha(\theta_{yi} + \theta_{yj} - \theta_{yk} - \theta_{yl}))/10 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Αλλά, αν και το προτεινόμενο πεδίο σύμφωνα με τις εξισώσεις 4.9 είναι εντελώς συμμορφωμένο, εν τούτοις παρουσιάζει ένα σοβαρό μειονέκτημα. Το μειονέκτημα προέκυψε από το γεγονός ότι η διευθέτηση του πεδίου των μετατοπίσεων ούτως ώστε να εξασφαλίσει τη συνέχεια της κάθετης κλίσης έγινε θεωρώντας ότι η στροφή $\partial^2 w / \partial x \partial y$ είναι μηδέν σε όλους τους γωνιακούς κόμβους. Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα ότι μια κατάσταση μη μηδενικής στροφής δεν μπορεί να αναπαρασταθεί σ' αυτό. Άρα η κατάσταση σταθερής παραμόρφωσης δεν αναπαράγεται πλήρως στο συμμορφωμένο στοιχείο και επομένως εμφανίζονται προβλήματα σύγκλισης όσο πυκνοί κάναβοι κι αν χρησιμοποιηθούν.

Η προσπάθεια που έγινε για την δημιουργία συμμορφωμένων ορθογωνικών στοιχείων αφορούσε την προσθήκη σαν πρόσθετης κομβικής παραμέτρου της ποσότητας, $\partial^2 w / \partial x \partial y$. Οπότε, το στοιχείο που προέκυψε είχε συνολικά 16 παραμέτρους. Η σκέψη χρησιμοποίησης της ποσότητας, $\partial^2 w / \partial x \partial y$ σαν κομβικής παραμέτρου προφανώς ξεκίνησε από το γεγονός ότι για να υπάρξει συνέχεια της κάθετης κλίσης απαιτούνται δύο ακόμη βαθμοί ελευθερίας σε κάθε όριο του στοιχείου.

Το 16 – παραμετρικό ορθογωνικό στοιχείο που χρησιμοποιεί τις ποσότητες, $w, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y$ και $\partial^2 w / \partial x \partial y$ σαν κομβικές παραμέτρους στους τέσσερις κόμβους του, αρχικά προτάθηκε από τους Bogner, Fox και Schmit, τα αρχικά των οποίων συνθέτουν και το όνομα του στοιχείου BFS. Το στοιχείο αυτό είναι εντελώς συμμορφωμένο και ικανοποιεί το κριτήριο της σταθερής παραμόρφωσης αν και η χρησιμοποίηση της ποσότητας, $\partial^2 w / \partial x \partial y$ σαν βαθμού

ελευθερίας είναι λίγο ακατάλληλη και δεν επιτρέπει τη χρησιμοποίηση του στοιχείου σε περίπλοκες καταστάσεις μεταβλητού πάχους της πλάκα.



Σχήμα 4.5. Το ορθογωνικό στοιχείο BFS με 16 κομβικές παραμέτρους.

Λαμβάνοντας υπόψη το τρίγωνο του Pascal όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6 και την συμμετρία ως προς x , y στους όρους που χρησιμοποιούνται, το πολυώνυμο της παρεμβολής είναι το γινόμενο δύο κυβικών πολυωνύμων ως προς x και y . Άρα το βέλος μπορεί να προκύψει σαν το γινόμενο δύο κυβικών πολυωνύμων, δηλαδή

$$w(x, y) = (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)(\beta_1 + \beta_2y + \beta_3y^2 + \beta_4y^3) \quad (4.10)$$

Επίσης, το βέλος μπορεί να προκύψει ως το γινόμενο δύο πολυωνύμων του Hermite.

		1		
	x		y	
	x^2	xy	y^2	
x^3	x^2y	xy^2	y^3	
	x^3y	x^2y^2	xy^3	
		x^3y^2	x^2y^3	
			x^3y^3	

Σχήμα 4.6. Οι 16 όροι του γινομένου δύο πλήρων κυβικών πολυωνύμων για το ορθογωνικό στοιχείο BFS με 16 βαθμούς ελευθερίας.

Μία συνάρτηση παρεμβολής ορίζεται μέσω των πολυωνύμων Hermite από την σχέση:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \left[H_{0i}^r \cdot \varphi_i + H_{1i}^r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_i + \dots + H_{ri}^r \cdot \left(\frac{d^r \varphi}{dx^r} \right)_i \right] \quad (4.11)$$

όπου H_{ji}' είναι το πολυώνυμο Hermite στο οποίο συμμετέχουν οι πρώτες, r παράγωγοι. Ο δείκτης j αναφέρεται στην τάξη της παραγώγου και ο δείκτης i αναφέρεται στον αριθμό του κόμβου. Η παρεμβολή αυτή υφίσταται τόσο μεταξύ των κόμβων των οριακών πλευρών όσο και μεταξύ των απέναντι πλευρών.

Τα πολυώνυμα παρεμβολής Hermite χρησιμοποιούνται στις περιπτώσεις εκείνες που, εκτός από τις συντεταγμένες των N δεδομένων κομβικών σημείων (x_i, y_i) $i=1, \dots, N$, θεωρούνται δεδομένες και επιβάλλονται και οι κλίσεις $y'_i = (dy/dx)_i$ στα ίδια σημεία. Συνεπώς, για κάθε τιμή x_i γνωρίζουμε δύο ποσότητες, το y_i και το y'_i . Το ζητούμενο πολυώνυμο θα ικανοποιεί και τα N δεδομένα σημεία, αλλά και τις κλίσεις στα σημεία αυτά. Άρα, ο μέγιστος βαθμός του αναμενόμενου πολυωνύμου θα είναι ίσος με $2N$. Αρχικά ορίζονται τα Hermite πολυώνυμα βάσης $H_j(x)$ και $\bar{H}_j(x)$, με τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{aligned} H_j(x_i) &= \delta_i^j & , & & H'_j(x_i) &= 0 \\ \bar{H}_j(x_i) &= 0 & , & & \bar{H}'_j(x_i) &= \delta_i^j \end{aligned} \quad (4.12)$$

Διαπιστώνουμε ότι οι παραπάνω ιδιότητες βάσης συμπίπτουν με τις ιδιότητες βάσης των συναρτήσεων μορφής. Η προφανής ιδέα των πολυωνύμων βάσης Hermite είναι κάθε πολυώνυμο $H_j(x)$ να συνεισφέρει στην ικανοποίηση της γνωστής τιμής της απόκρισης για καθένα από τα δεδομένα σημεία, χωρίς να εμπλέκεται η ικανοποίηση της τιμής της κλίσης της, ενώ αντίθετος ακριβώς είναι ο ρόλος των πολυωνύμων $\bar{H}_j(x)$.

Έτσι, η παρεμβολή κατά Hermite μεταξύ των σημείων x_i με τιμή $w(x_i)$ και παράγωγο $w'(x_i)$ γίνεται από τη σχέση:

$$w(x) = \sum_{i=1}^N w(x_i) H_i(x) + \sum_{i=1}^N w'(x_i) \bar{H}_i(x) \quad (4.13)$$

όπου $H_i(x)$ και $\bar{H}_i(x)$ τα πολυώνυμα βάσης Hermite:

$$H_i(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i)][L_i(x)]^2 \quad (4.14)$$

$$\bar{H}_i(x) = (x - x_i)[L_i(x)]^2 \quad (4.15)$$

και $L_i(x)$ είναι τα πολυώνυμα βάσης της κατά Lagrange παρεμβολής, που ορίζονται ως:

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (4.16)$$

ενώ ισχύει:

$$L'_i(x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (4.17)$$

4.3.1 Συναρτήσεις Μορφής του Στοιχείου BFS

Στην προκειμένη περίπτωση ορθογωνικού στοιχείου 16 βαθμών ελευθερίας θα έχουμε:

$$w = \sum_{i=1}^4 \left[N_i \cdot w_i + N_{\theta x}^i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + N_{\theta y}^i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i + N_{\psi i} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_i \right] \quad (4.18)$$

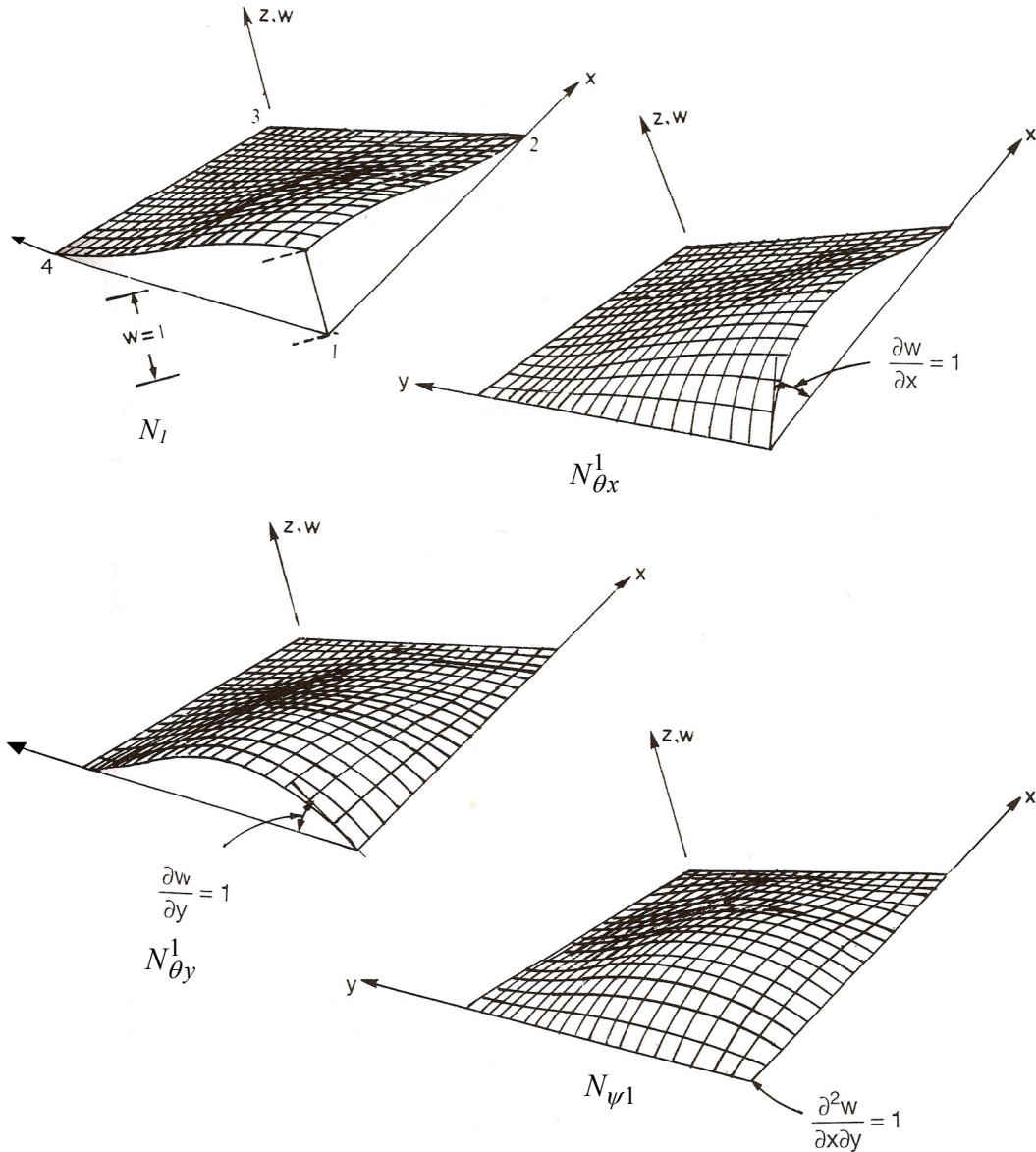
όπου:

$$\begin{aligned} N_1 &= H_{01}^1(x)H_{01}^1(y) & N_2 &= H_{02}^1(x)H_{01}^1(y) \\ N_3 &= H_{02}^1(x)H_{02}^1(y) & N_4 &= H_{01}^1(x)H_{02}^1(y) \\ N_{\theta x}^1 &= H_{01}^1(x)H_{11}^1(y) & N_{\theta x}^2 &= H_{02}^1(x)H_{11}^1(y) \\ N_{\theta x}^3 &= H_{02}^1(x)H_{12}^1(y) & N_{\theta x}^4 &= H_{01}^1(x)H_{12}^1(y) \\ N_{\theta y}^1 &= H_{11}^1(x)H_{01}^1(y) & N_{\theta y}^2 &= H_{12}^1(x)H_{01}^1(y) \\ N_{\theta y}^3 &= H_{12}^1(x)H_{02}^1(y) & N_{\theta y}^4 &= H_{11}^1(x)H_{02}^1(y) \\ N_{\psi 1} &= H_{11}^1(x)H_{11}^1(y) & N_{\psi 2} &= H_{12}^1(x)H_{11}^1(y) \\ N_{\psi 3} &= H_{12}^1(x)H_{12}^1(y) & N_{\psi 4} &= H_{11}^1(x)H_{12}^1(y) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι στον κόμβο 1 ($x = y = 0$) οι τιμές των w , $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$ και $\partial^2 w / \partial x \partial y$ είναι ίσες αντίστοιχα με τις κομβικές παραμέτρους του κόμβου 1. Δηλαδή στον κόμβο 1, οι N_i , $N_{\theta x}^i$, $N_{\theta y}^i$ και η $N_{\psi i}$ θα είναι ίσες με την μονάδα ενώ οι υπόλοιπες μηδενίζονται. Για καλύτερη κατανόηση, η w μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων.

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{i=1}^{16} v_i(x, y)q_i = \\ &= \frac{1}{\alpha^3 \beta^3} \left[(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2)w_1 + (3ax^2 - 2x^3)(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2)w_2 \right. \\ &\quad + (3ax^2 - 2x^3)(3\beta y^2 - 2y^3)w_3 + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3\beta y^2 - 2y^3)w_4 \\ &\quad + ax(x-a)^2(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 + a(x^3 - ax^2)(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \\ &\quad + a(x^3 - ax^2)(3\beta y^2 - 2y^3) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 + ax(x-a)^2(3\beta y^2 - 2y^3) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \\ &\quad + \beta(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)y(y-\beta)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 + \beta(3ax^2 - 2x^3)y(y-\beta)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 \\ &\quad + \beta(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - \beta y^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 + \beta(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - \beta y^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 \\ &\quad + a\beta xy(x-a)^2(y-\beta)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_1 + a\beta xy(x^2 - ax)(y-\beta)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_2 \\ &\quad \left. + a\beta xy(x^2 - ax)(y-\beta y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_3 + a\beta xy(x-a)^2(y^2 - \beta y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_4 \right] \end{aligned}$$

Τα διαγράμματα των συναρτήσεων μορφής N_I , $N_{\theta x}^1$, $N_{\theta y}^1$ και $N_{\psi 1}$ στο σχήμα 62 δείχνουν ότι κάθε συνάρτηση μορφής παριστάνει την επιφάνεια βύθισης του στοιχείου όταν ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας τεθεί ίσος με την μονάδα ενώ οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας είναι ίσοι με το μηδέν.



Σχήμα 4.7. Συναρτήσεις μορφής N_I , $N_{\theta x}^1$, $N_{\theta y}^1$ και $N_{\psi 1}$ που αντιστοιχούν στις κομβικές παραμέτρους του κόμβου 1.

Από την εξίσωση 4.10 φαίνεται ότι για $x = a$, τόσο η βύθιση w όσο και η κλίση $\partial w / \partial y$ κατά μήκος της πλευράς 2 – 3 είναι μονοσήμαντα ορισμένες από τις αντίστοιχες κομβικές παραμέτρους w_2 και w_3 και $(\partial w / \partial y)_2$ και $(\partial w / \partial y)_3$ των κόμβων 2 και 3. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει την συνέχεια των w και $\partial w / \partial y$ κατά την μετάβαση από το θεωρούμενο στοιχείο

στο γειτονικό. Πρέπει τώρα να μελετήσουμε και την συμπεριφορά της κάθετης κλίσης, $\partial w / \partial x$ κατά μήκος της πλευράς (2 – 3) οπότε από την σχέση (4.9) για $x = a$, προκύπτει:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = c(\beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 y^2 + \beta_4 y^3) \quad (4.20)$$

όπου οι τέσσερις σταθερές υπολογίζονται μοναδικά από τις ακόλουθες συνθήκες

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, 0) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(a, 0) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, \beta) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(a, \beta) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_3$$

Άρα και η κάθετη κλίση είναι μονοσήμαντα ορισμένη συνάρτηση των κομβικών παραμέτρων $(\partial w / \partial x)_2$, $(\partial w / \partial x)_3$, $(\partial^2 w / \partial x \partial y)_2$ και $(\partial^2 w / \partial x \partial y)_3$. Επομένως η μεταξύ των στοιχείων συνέχεια διατηρείται και η προσέγγιση της σχέσης (4.9) είναι σύμμορφη.

Εκτός από το ορθογωνικό στοιχείο με τις 16 κομβικές παραμέτρους, οι Bogner, Fox και Schmit εισήγαγαν ορθογωνικά στοιχεία με 24 και 36 κομβικές παραμέτρους αντίστοιχα. Στο πρώτο ως κομβικοί παράμετροι στους γωνιακούς κόμβους θεωρήθηκαν οι w , $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$, $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$, $\partial^2 w / \partial x \partial y$ ενώ στο δεύτερο επιπλέον αυτών θεωρήθηκαν και οι $\partial^3 w / \partial x \partial y^2$, $\partial^3 w / \partial y \partial x^2$ και $\partial^4 w / \partial y^2 \partial x^2$. Τα εξεζητημένα αυτά στοιχεία είναι όλα τους συμμορφωμένα και μπορούν να δώσουν πολύ καλή σύγκλιση. Το βασικό πρόβλημα που παρουσιάζουν προκύπτει από το γεγονός ότι η υπερβολική συνέχεια που παρουσιάζουν στους κόμβους έχει σαν συνέπεια να μην μπορούν να εκφραστούν με ακρίβεια οι συνθήκες συνέχειας όταν υπάρχουν απότομες μεταβολές στο πάχος της πλάκας ή στις ιδιότητες του υλικού.

4.4 Μακροστοιχείο Coons

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάσαμε τα 4 – κομβικά στοιχεία (συμμορφωμένα αλλά και μη – συμμορφωμένα). Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την περιγραφή και την κατανόηση ενός νέου μακροστοιχείου. Η ετοιμολογία της λέξης μακρο – στοιχείο παραπέμπει σε «μεγάλα» στοιχεία στα οποία γίνεται γενική παρεμβολή. Ως μακροστοιχείο ορίζουμε το στοιχείο το οποίο, σε αντιδιαστολή με τα πεπερασμένα στοιχεία που μπορεί να έχουν τρεις (τριγωνικά στοιχεία) ή τέσσερις (τετραγωνικά στοιχεία) κόμβους, έχει n , $n \geq 4$, κόμβους, και μάλιστα με οποιονδήποτε αριθμό κόμβων ανά πλευρά. Το εν λόγω μακροστοιχείο στηρίζεται στην παρεμβολή τύπου Coons.

Μετά από πολλά χρόνια έρευνας σχετικά με τα πεπερασμένα στοιχεία, πολλοί ερευνητές στρέφονται σε τεχνικές μακροστοιχείων μελετώντας τα μειονεκτήματα αλλά και τα πλεονεκτήματα που παρέχουν αυτές. Ένας από τους παράγοντες που στρέφουν πολλούς ερευνητές προς την κατεύθυνση αυτήν, είναι η τάση για μείωση της διάστασης του

απαιτούμενου πλέγματος, σε περίπτωση επίλυσης ενός προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία. Ως εκ τούτου, ένα μακροστοιχείο ενδέχεται να απαιτεί μικρότερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με την επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία, ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας του, καθώς το μακροστοιχείο δεν απαιτεί καν την δημιουργία πλέγματος. Έτσι, με την χρήση μακροστοιχείων, μπορούν να επιλυθούν τόσο στατικά όσο και δυναμικά προβλήματα.

Τα μακροστοιχεία Coons, στηρίζονται στην παρεμβολή με πολυώνυμα Hermite (όπως είδαμε και στο συμμορφωμένο στοιχείο BFS). Η παρεμβολή αυτή υφίσταται τόσο μεταξύ των κόμβων των οριακών πλευρών όσο και μεταξύ των απέναντι πλευρών, προβαίνοντας έτσι σε επιφανειακή παρεμβολή, εφαρμόζοντας την μέθοδο Coons. Έτσι, επιτυγχάνουμε την δημιουργία μακροστοιχείου με C^1 -συνέχεια, με πλεονεκτήματα που θα γίνουν αργότερα ορατά.

Η μέθοδος Coons είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τα πεπερασμένα στοιχεία στη μηχανολογία. Μας προσφέρει την δυνατότητα γεωμετρικής περιγραφής επιφανειών και σωμάτων αλλά και την δυνατότητα διακριτοποίησης της κατασκευής σε πεπερασμένα στοιχεία και υπολογισμού των πεπερασμένων στοιχείων.

4.4.1 Παρεμβολή με την Μέθοδο Coons

Με την μέθοδο Coons είναι δυνατή η περιγραφή μιας υψηλού βαθμού επιφάνειας. Η διαδικασία συνίσταται στην διαίρεση της συνολικής επιφάνειας σε επιμέρους επιφάνειες. Το σύστημα των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων είναι αδιάστατο και οι συντεταγμένες κυμαίνονται μεταξύ:

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq n \leq 1$$

όπου ξ, n οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

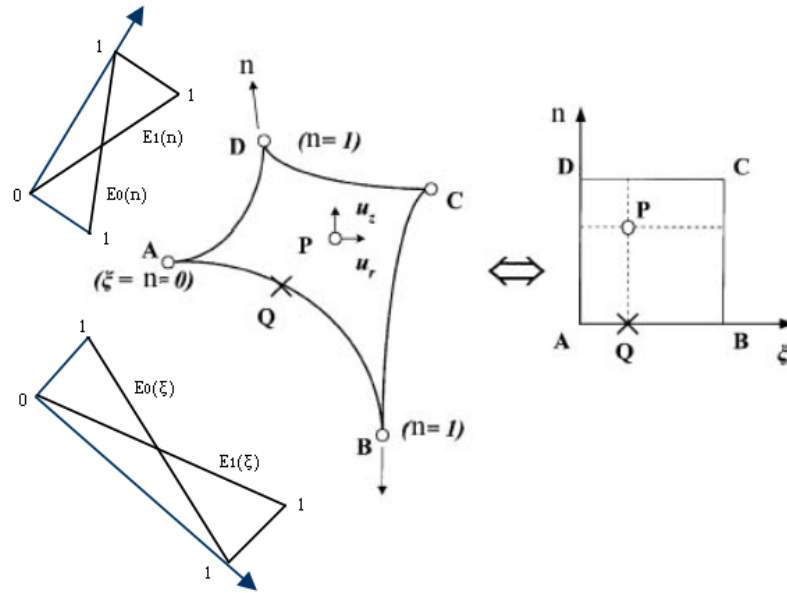
Μια η επιφάνεια $u(\xi, n)$ έχει τις οριακές καμπύλες: $u(0, n)$, $u(1, n)$, $u(\xi, 0)$ και $u(\xi, 1)$. Πρέπει να σημειωθεί ότι η μαθηματική μορφή των οριακών καμπυλών δεν περιορίζεται από καμία συνθήκη και μπορεί να είναι τύπου Fourier, Splines, Lagrange, Hermite κ.λ.π.

Η μέθοδος Coons βασίζεται στον συλλογισμό ότι η επιφάνεια $u(\xi, n)$ μπορεί να περιγραφεί αναλυτικά γνωρίζοντας μόνο τις οριακές καμπύλες $u(0, n)$, $u(1, n)$, $u(\xi, 0)$ και $u(\xi, 1)$. Η αναλυτική περιγραφή της επιφάνειας $u(\xi, n)$ στηρίζεται στην υπόθεση ότι κάθε οριακή καμπύλη έχει μηδενική επιρροή στην απέναντι οριακή καμπύλη.

Με την μέθοδο Coons, μας παρέχεται η δυνατότητα, πέρα από την περιγραφή μιας επιφάνειας μέσω των οριακών της καμπυλών, μετατροπής καμπυλόγραμμων συντεταγμένων σε αδιάστατο σύστημα. Το σύστημα αυτό αποτελεί μοναδιαίο τετράπλευρο, όταν πρόκειται για επιφανειακή παρεμβολή, και μοναδιαίο κύβο όταν πρόκειται για χωρική παρεμβολή.

Όπως φαίνεται, λοιπόν, στο σχήμα 4.8, με την μέθοδο Coons μπορούμε να μεταβούμε από ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων σε ένα ορθογωνικό – φυσικό. Στο σχήμα 4.8 οι

συναρτήσεις επιρροής είναι γραμμικές για λόγους εποπτικούς, αλλά, στην γενική περίπτωση μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου εφόσον ικανοποιούν τις ιδιότητες βάσης.



Σχήμα 4.8. Μετάβαση από καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων σε ορθογωνικό

4.4.2 Εφαρμογή της Μεθόδου Coons στην Δημιουργία Μακροστοιχείων

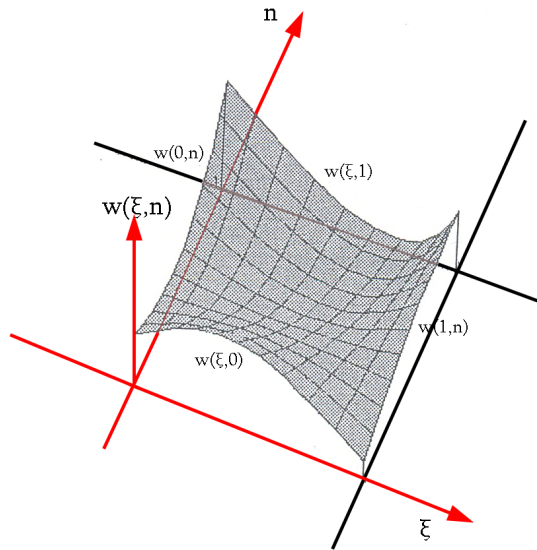
Η κεντρική ιδέα δημιουργίας μακροστοιχείων με παρεμβολή με την μέθοδο Coons έγκειται στην εφαρμογή παρεμβολής επιφανειακού τύπου. Πρακτικά, η ιδέα κατασκευής του μακροστοιχείου έγκειται στην γεωμετρική παρεμβολή των βέλων κάμψης στην πλάκα. Αυτό πραγματοποιείται πραγματοποιώντας γεωμετρική παρεμβολή Hermite μεταξύ των ορίων της πλάκας αλλά και μονοδιάστατη παρεμβολή Hermite μεταξύ των κόμβων στα όρια της πλάκας. Η παρεμβολή Coons που αναπτύξαμε προηγουμένως είναι:

$$w(\xi, n) = E^T(\xi)w(i, n) + E^T(n)w(\xi, j) - E^T(\xi)W(i, j)E(n) \quad (4.21)$$

$$\text{όπου } E(s) = \begin{bmatrix} E_0^0(s) \\ E_1^0(s) \\ E_0^1(s) \\ E_1^1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ 3s^2 - 2s^3 \\ s - 2s^2 + s^3 \\ -s^2 + s^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s = \xi, n \quad (4.22)$$

Πρακτικά, $E_0^0(s)$ και $E_1^0(s)$ είναι τα πολυώνυμα βάσης Hermite $H_1(s)$ και $H_2(s)$ αντίστοιχα, μεταξύ δύο κομβικών σημείων με $s_1=0$, $s_2=1$. Αντίστοιχα, ως $E_0^1(s)$ και $E_1^1(s)$ ορίζονται τα πολυώνυμα βάσης Hermite $\bar{H}_1(s)$ και $\bar{H}_2(s)$ αντίστοιχα, μεταξύ δύο κομβικών

σημείων με $s_1=0$, $s_2=1$. Έτσι, το $E(s)$ πραγματοποιεί παρεμβολή τύπου Hermite μεταξύ των απέναντι οριακών καμπυλών, συνυπολογίζοντας συνέχεια C^1 .



Σχήμα 4.9. Γεωμετρική Παρεμβολή Coons

Από τη σχέση 4.21 συμπεραίνουμε ότι με την εφαρμογή της παρεμβολής Coons πραγματοποιούμε παρεμβολή μεταξύ των οριακών πλευρών του στοιχείου, δηλαδή μεταξύ των $w(\xi,0) - w(\xi,1)$ και $w(0,\eta) - w(1,\eta)$. Ωστόσο, στο μακροστοιχείο που θα δημιουργήσουμε, τα πολυώνυμα που εκφράζουν την γεωμετρία των οριακών πλευρών, θα είναι και αυτά πολυώνυμα παρεμβολής Hermite μεταξύ των κόμβων – βαθμών ελευθερίας κάθε πλευράς.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στην σχέση 4.21 ο πίνακας $w(i, n)$ είναι ο:

$$w(i, n) = \begin{bmatrix} w(0, n) \\ w(1, n) \\ \frac{\partial w(0, n)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w(1, n)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

και αντίστοιχα, ο πίνακας $w(\xi, j)$ είναι ο:

$$w(\xi, j) = \begin{bmatrix} w(\xi, 0) \\ w(\xi, 1) \\ \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w(\xi, 1)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Συνεπώς, οι πίνακες $w(i, n)$ και $w(\xi, j)$ περιλαμβάνουν την πληροφορία που περιέχεται κατά μήκος των απέναντι πλευρών της υπό ανάλυση πλάκας. Επιπλέον, ο όρος $W(i, j)$ της (4.21) είναι ο εξής πίνακας:

$$w(i, j) = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{00,n} & w_{01,n} \\ w_{10} & w_{11} & w_{10,n} & w_{11,n} \\ w_{00,\xi} & w_{01,\xi} & w_{00,\xi n} & w_{01,\xi n} \\ w_{10,\xi} & w_{11,\xi} & w_{10,\xi n} & w_{11,\xi n} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

όπου $w_{kl} = w(k, l)$ και $w_{kl,s} = \frac{\partial w(k, l)}{\partial s}$, $s = \xi, n$

4.4.3 Συναρτήσεις Μορφής Μακροστοιχείου

Σε μια προσπάθεια γενίκευσης της μεθόδου Coons, είναι δυνατόν η επιφάνεια ενός στοιχείου να καθορίζεται από N ($N > 4$) κόμβους. Στην περίπτωση αυτή, αναφερόμαστε, πλέον, σε *μακροστοιχεία* καθώς ελέγχουμε N κόμβους. Μέσω των συναρτήσεων μορφής των μακροστοιχείων μπορούμε να εξαγάγουμε σημαντικά συμπεράσματα για την συμπεριφορά των μακροστοιχείων. Ο αριθμός των κόμβων κάθε πλευράς μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Στην γενική περίπτωση ισχύει ότι, εάν q_1, q_2, q_3 και q_4 ο αριθμός των κόμβων των πλευρών AB, BC, CD και DA του μοναδιαίου τετραπλεύρου αντίστοιχα, ο συνολικός αριθμός των κόμβων του μακροστοιχείου θα είναι:

$$q_m = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - 4 \quad (4.26)$$

καθώς ο αριθμός των τεσσάρων γωνιακών κόμβων (A,B,C,D) εμφανίζονται δύο φορές στις αντίστοιχες οριακές πλευρές. Ο κάθε κόμβος έχει 4 τέσσερις βαθμούς ελευθερίας και εκφράζονται με τις εξής συναρτήσεις μορφής: **α)** Οι συναρτήσεις μορφής των τιμών που αφορούν το βέλος κάμψης, $u(\xi, n)$, **β)** οι συναρτήσεις μορφής των παραγώγων, $\partial u / \partial \xi$, που αφορούν την κλίση ως προς τον άξονα ξ , **γ)** οι συναρτήσεις μορφής των παραγώγων, $\partial u / \partial n$, που αφορούν την κλίση ως προς τον άξονα n , και **δ)** οι συναρτήσεις μορφής των δεύτερων μερικών μικτών παραγώγων, $\partial^2 u / \partial \xi \partial n$, που αφορούν την καμπυλότητα.

Οι τέσσερις συναρτήσεις μορφής που αντιστοιχούν σε κάθε κόμβο, υπακούουν στις ιδιότητες βάσης που προσδίδονται στις συναρτήσεις μορφής. Ωστόσο, δεδομένου ότι η κάθε συνάρτηση μορφής εκφράζει διαφορετικό μέγεθος, η ιδιότητα βάσης κάθε μιας χρήζει ανάλογης ερμηνείας. Οι συναρτήσεις μορφής που αφορούν το βέλος κάμψης επιδεικνύουν την επιρροή του κάθε κόμβου σε σχέση με την θέση του. Επομένως, στην θέση του κόμβου i για τον οποίο ορίζεται η συνάρτηση μορφής, θα έχουμε $N_i = 1$ και στον κόμβο αυτόν η αντίστοιχη επιφάνεια θα έχει την τιμή 1. Η συνάρτηση μορφής του κόμβου i στις θέσεις των κόμβων $j \neq i$ θα έχει την τιμή $N_j = 0$ και η αντίστοιχη επιφάνεια θα έχει την τιμή 0 στις θέσεις αυτές.

Οι συναρτήσεις μορφής που αφορούν την κλίση (ως προς τον άξονα ξ ή n), επιδεικνύουν την επιρροή του κάθε κόμβου σε σχέση με την κλίση του. Επομένως, στην θέση του κόμβου i για τον οποίο ορίζεται η συνάρτηση μορφής κλίσης ως προς τον άξονα ξ ή n , θα έχουμε κλίση με τιμή ίση με 1 στην θέση του κόμβου αυτού, ενώ στις θέσεις των λοιπών κόμβων οι κλίσεις θα είναι ίσες με το 0, αναφερόμενοι πάντα στον αντίστοιχο άξονα. Έτσι, δεδομένου ότι οι κλίσεις εκφράζονται σε ακτίνια, όταν η κλίση είναι 1, σημαίνει ότι η εφαπτόμενη της συνάρτησης μορφής στην θέση αυτή έχει κλίση $\varphi = \text{Arctan}(1) = 45^\circ$, ενώ, όταν η κλίση είναι 0, σημαίνει ότι η εφαπτόμενη της συνάρτησης μορφής στην θέση αυτή έχει κλίση $\varphi = \text{Arctan}(0) = 0^\circ$, αναφερόμενοι πάντα στον άξονα για τον οποίο εκφράζονται οι κλίσεις των συναρτήσεων μορφής.

Συμπερασματικά, κατά την απεικόνιση της επιφάνειας μιας συνάρτησης μορφής κλίσης ως προς έναν άξονα s ($\partial u / \partial s$) κάποιου συγκεκριμένου κόμβου, αναμένουμε ότι η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης μορφής στον κόμβο αυτόν θα είναι 45° και 0° στους υπόλοιπους κόμβους, σε σχέση με τον άξονα s .

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις μορφής κάθε κόμβου, πρέπει να εφαρμόσουμε γεωμετρική παρεμβολή με την μέθοδο Coops. Αρχικά, πραγματοποιούμε γραμμική – μονοδιάστατη παρεμβολή τύπου Hermite (σχέση 4.11) κατά μήκος των κόμβων των (τεσσάρων) οριακών γραμμών. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} w(1, n) &= \sum_{i=1}^{q_{1n}} w(1, n_i) H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{1n}} w'(1, n_i) \bar{H}_i(n) \\ w(0, n) &= \sum_{i=1}^{q_{0n}} w(0, n_i) H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{0n}} w'(0, n_i) \bar{H}_i(n) \\ w(\xi, 1) &= \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w(\xi_i, 1) H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w'(\xi_i, 1) \bar{H}_i(\xi) \\ w(\xi, 0) &= \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w(\xi_i, 0) H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w'(\xi_i, 0) \bar{H}_i(\xi) \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου, q_{1n} , q_{0n} , $q_{\xi 1}$ και $q_{\xi 0}$ ο αριθμός των κόμβων κατά μήκος των οριακών γραμμών $(1, n)$, $(0, n)$, $(\xi, 1)$ και $(\xi, 0)$ αντίστοιχα.

Άρα, η (4.23) λόγω της (4.27) γίνεται:

$$w(i, n) = \begin{bmatrix} w(0, n) \\ w(1, n) \\ \frac{\partial w(0, n)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w(1, n)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \Rightarrow w(i, n) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q_{0n}} w(0, n_i) H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{0n}} w_n(0, n_i) \bar{H}_i(n) \\ \sum_{i=1}^{q_{1n}} w(1, n_i) H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{1n}} w_n(1, n_i) \bar{H}_i(n) \\ \sum_{i=1}^{q_{0n}} w_\xi(0, n_i) H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{0n}} w_{\xi n}(0, n_i) \bar{H}_i(n) \\ \sum_{i=1}^{q_{1n}} w_\xi(1, n_i) H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{1n}} w_{\xi n}(1, n_i) \bar{H}_i(n) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Όμοια, η (4.24) λόγω της (4.27) γίνεται:

$$w(\xi, j) = \frac{\begin{bmatrix} w(\xi, 0) \\ w(\xi, 1) \\ \frac{\partial w(\xi, 0)}{\partial n} \\ \frac{\partial w(\xi, 1)}{\partial n} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial n}{\partial w(\xi, 0)} \\ \frac{\partial n}{\partial w(\xi, 1)} \end{bmatrix}} \Rightarrow w(\xi, j) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w(\xi_i, 0)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w_{\xi}(\xi_i, 0)\bar{H}_i(\xi) \\ \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w(\xi_i, 1)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w_n(\xi_i, 1)\bar{H}_i(\xi) \\ \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w_n(\xi_i, 0)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w_{n\xi}(\xi_i, 0)\bar{H}_i(\xi) \\ \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w_n(\xi_i, 1)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w_{n\xi}(\xi_i, 1)\bar{H}_i(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Επομένως, η (4.21) από τις (4.25), (4.28) και (4.29) γίνεται:

$$\begin{aligned} w(\xi, n) &= E^T(\xi)w(i, n) + E^T(n)w(\xi, j) - E^T(\xi)w(i, j)E(n) \Rightarrow \\ \Rightarrow w(\xi, n) &= \begin{bmatrix} E_0^0(\xi) & E_1^0(\xi) & E_0^1(\xi) & E_1^1(\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q_{0n}} w(0, n_i)H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{0n}} w_n(0, n_i)\bar{H}_i(n) \\ \sum_{i=1}^{q_{1n}} w(1, n_i)H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{1n}} w_n(1, n_i)\bar{H}_i(n) \\ \sum_{i=1}^{q_{0n}} w_{\xi}(0, n_i)H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{0n}} w_{\xi n}(0, n_i)\bar{H}_i(n) \\ \sum_{i=1}^{q_{1n}} w_{\xi}(1, n_i)H_i(n) + \sum_{i=1}^{q_{1n}} w_{\xi n}(1, n_i)\bar{H}_i(n) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} E_0^0(n) & E_1^0(n) & E_0^1(n) & E_1^1(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w(\xi_i, 0)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w_{\xi}(\xi_i, 0)\bar{H}_i(\xi) \\ \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w(\xi_i, 1)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w_{\xi}(\xi_i, 1)\bar{H}_i(\xi) \\ \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w_n(\xi_i, 0)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 0}} w_{n\xi}(\xi_i, 0)\bar{H}_i(\xi) \\ \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w_n(\xi_i, 1)H_i(\xi) + \sum_{i=1}^{q_{\xi 1}} w_{n\xi}(\xi_i, 1)\bar{H}_i(\xi) \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} E_0^0(\xi) & E_1^0(\xi) & E_0^1(\xi) & E_1^1(\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{00n} & w_{01n} \\ w_{10} & w_{11} & w_{10n} & w_{11n} \\ w_{00\xi} & w_{01\xi} & w_{00\xi n} & w_{01\xi n} \\ w_{10\xi} & w_{11\xi} & w_{10\xi n} & w_{11\xi n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0^0(n) & E_1^0(n) & E_0^1(n) & E_1^1(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις μορφής (shape functions) υπακούουν στη γενική σχέση:

$$w(\xi, n) = \sum_{j=1}^q N_j(\xi, n)d_j \quad \text{όπου } \mathbf{d}_j \text{ ο βαθμός ελευθερίας του κόμβου } j, \text{ εξάγονται εύκολα από}$$

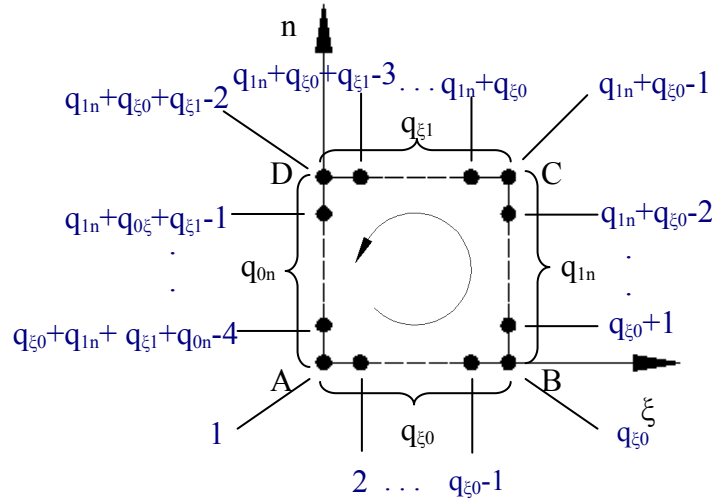
την σχέση (4.30) οι συναρτήσεις μορφής του μακροστοιχείου Coons. Πρέπει να σημειωθεί ότι στις παρακάτω συναρτήσεις μορφής η N_1 αντιστοιχεί στο βέλος κάμψης, η N_2 στην κλίση

$\partial w/\partial \xi$, η N_3 στην κλίση $\partial w/\partial n$ και η N_4 στην καμπυλότητα $\partial^2 w/\partial \xi \partial n$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν 4 συναρτήσεις μορφής και, άρα, 4 βαθμοί ελευθερίας: το βέλος κάμψης, 2 κλίσεις ως προς ξ και n και η καμπυλότητα $\partial^2 w/\partial \xi \partial n$. Κατασκευάζουμε, λοιπόν, ένα σύστημα καθολικών συναρτήσεων μορφής $N_i(\xi, n)$ που επενεργούν μέσα σε ολόκληρο το στοιχείο, έτσι ώστε το βέλος κάμψης $w(\xi, n)$ να προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$w(\xi, n) = \sum_{j=1}^{4q_{tot}} N_j(\xi, n) d_j \quad (4.31)$$

όπου q_{tot} είναι ο συνολικός αριθμός των συνοριακών κόμβων του στοιχείου που ισούται με:

$$q_{tot} = q_{\xi 0} + q_{1n} + q_{\xi 1} + q_{0n} - 4 \quad (4.32)$$



Σχήμα 4.10 Αρίθμηση κόμβων μακροστοιχείου

Έτσι, από τις (4.30) και (4.32) και δεδομένου ότι οι βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου είναι:

$$d_1 = w, \quad d_2 = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad d_3 = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{και} \quad d_4 = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial n},$$

εξάγουμε τις γενικευμένες συναρτήσεις μορφής για το μακροστοιχείο τύπου Coons:

α) Οι συναρτήσεις μορφής στον εκάστοτε κόμβο i , για τους κόμβους των πλευρών (ξ, j) , $j=0,1$, πλην του πρώτου και του τελευταίου, θα είναι:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, n) &= E_j^0(n) H_i(\xi) \\ N_2(\xi, n) &= E_j^0(n) \bar{H}_i(\xi) \\ N_3(\xi, n) &= E_j^1(n) H_i(\xi) \\ N_4(\xi, n) &= E_j^1(n) \bar{H}_i(\xi) \end{aligned} \quad (4.33)$$

β) Οι συναρτήσεις μορφής στον εκάστοτε κόμβο i , για τους κόμβους των πλευρών $w(j, n)$, $j=0,1$, πλην του πρώτου και του τελευταίου, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, n) &= E_j^0(\xi)H_i(n) \\
 N_2(\xi, n) &= E_j^1(\xi)H_i(n) \\
 N_3(\xi, n) &= E_j^0(\xi)\bar{H}_i(n) \\
 N_4(\xi, n) &= E_j^1(\xi)\bar{H}_i(n)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

γ) Οι συναρτήσεις μορφής στον κόμβο A, που βρίσκεται στην θέση $(\xi, n)=(0,0)$, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, n) &= E_0^0(\xi)H_A(n) + E_0^0(n)H_A(\xi) - E_0^0(\xi)E_0^0(n) \\
 N_2(\xi, n) &= E_0^1(\xi)H_A(n) + E_0^0(n)\bar{H}_A(\xi) - E_0^1(\xi)E_0^0(n) \\
 N_3(\xi, n) &= E_0^0(\xi)\bar{H}_A(n) + E_0^0(n)H_A(\xi) - E_0^0(\xi)E_0^0(n) \\
 N_4(\xi, n) &= E_0^1(\xi)\bar{H}_A(n) + E_0^1(n)\bar{H}_A(\xi) - E_0^1(\xi)E_0^1(n)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

δ) Οι συναρτήσεις μορφής στον κόμβο B, που βρίσκεται στην θέση $(\xi, n)=(1,0)$, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, n) &= E_1^0(\xi)H_B(n) + E_0^0(n)H_B(\xi) - E_1^0(\xi)E_0^0(n) \\
 N_2(\xi, n) &= E_1^1(\xi)H_B(n) + E_0^0(n)\bar{H}_B(\xi) - E_1^1(\xi)E_0^0(n) \\
 N_3(\xi, n) &= E_1^0(\xi)\bar{H}_B(n) + E_0^0(n)H_B(\xi) - E_1^0(\xi)E_0^0(n) \\
 N_4(\xi, n) &= E_1^1(\xi)\bar{H}_B(n) + E_0^0(n)\bar{H}_B(\xi) - E_1^1(\xi)E_0^0(n)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

ε) Οι συναρτήσεις μορφής στον κόμβο C, που βρίσκεται στην θέση $(\xi, n)=(1,1)$, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, n) &= E_1^0(\xi)H_C(n) + E_1^0(n)H_C(\xi) - E_1^0(\xi)E_1^0(n) \\
 N_2(\xi, n) &= E_1^1(\xi)H_C(n) + E_1^0(n)\bar{H}_C(\xi) - E_1^1(\xi)E_1^0(n) \\
 N_3(\xi, n) &= E_1^0(\xi)\bar{H}_C(n) + E_1^0(n)H_C(\xi) - E_1^0(\xi)E_1^0(n) \\
 N_4(\xi, n) &= E_1^1(\xi)\bar{H}_C(n) + E_1^0(n)\bar{H}_C(\xi) - E_1^1(\xi)E_1^0(n)
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

στ) Οι συναρτήσεις μορφής στον κόμβο D, που βρίσκεται στην θέση $(\xi, n)=(0,1)$, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, n) &= E_0^0(\xi)H_D(n) + E_1^0(n)H_D(\xi) - E_0^0(\xi)E_1^0(n) \\
 N_2(\xi, n) &= E_0^1(\xi)H_D(n) + E_1^0(n)\bar{H}_D(\xi) - E_0^1(\xi)E_1^0(n) \\
 N_3(\xi, n) &= E_0^0(\xi)\bar{H}_D(n) + E_1^0(n)H_D(\xi) - E_0^0(\xi)E_1^0(n) \\
 N_4(\xi, n) &= E_0^1(\xi)\bar{H}_D(n) + E_1^0(n)\bar{H}_D(\xi) - E_0^1(\xi)E_1^0(n)
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

4.5 Στατική Ανάλυση

Στην εργασία αυτή οι καταπονήσεις στις οποίες υπόκεινται οι υπό μελέτη πολυστρωματικές πλάκες είναι στατικές, συνεπώς θα πρέπει να επιλύσουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$[k] \cdot u = [F] \quad (4.39)$$

όπου $[k]$ = είναι το μητρώο δυσκαμψίας, $[F]$ = το μητρώο δυνάμεων και u = το διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες μετατοπίσεις. Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα αυτό αντιστρέφουμε το μητρώο δυσκαμψίας, δηλαδή:

$$u = [k]^{-1} \cdot [F] \quad (4.40)$$

4.6 Υπολογισμός Μητρώου Δυσκαμψίας Πολυστρωματικής Πλάκας Αποτελούμενη από Ανισοτροπικές Στρώσεις

Στα προηγούμενα δύο κεφάλαια εξετάσαμε σχεδόν όλα τα είδη των στρώσεων και όλες τις πιθανές διατάξεις αλληλουχίας στρώσεων που μπορούν να συνθέσουν μια πολυστρωματική πλάκα ή ένα έλασμα. Στην υποενότητα αυτή θα επικεντρωθούμε στην συγκεκριμένη δομή που μελετήσαμε για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας και στην συνέχεια θα εξάγουμε το μητρώο δυσκαμψίας της πολυστρωματικής πλάκας. Η πολυστρωματική πλάκα που μελετάμε στο σημείο αυτό αποτελείται από ανισοτροπικές στρώσεις με διαφορετικά πάχη και διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες η κάθε μία.

Για να δημιουργήσουμε το μητρώο δυσκαμψίας θα βασιστούμε στις εξισώσεις (2.19) και (2.20) που περιγράφουν τις τάσεις και τους συντελεστές δυσκαμψίας της ανισοτροπικής στρώσης αντίστοιχα. Θα πρέπει ακόμα να επισημάνουμε ότι μας ενδιαφέρει η περίπτωση σε δύο διαστάσεις, επομένως από τις εξισώσεις (2.20) λαμβάνουμε τις ακόλουθες:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{E}_1 \cdot c^4 + \bar{E}_2 \cdot s^4 + 2 \cdot E_{12} \cdot c^2 \cdot s^2 \\ A_{12} = A_{21} &= \bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2 \cdot E_{12}) \cdot c^2 \cdot s^2 \\ A_{14} = A_{41} &= [\bar{E}_1 \cdot c^2 - \bar{E}_2 \cdot s^2 - E_{12} \cdot (c^2 - s^2)] \cdot c \cdot s \\ A_{22} &= \bar{E}_1 \cdot s^4 + \bar{E}_2 \cdot c^4 + 2 \cdot E_{12} \cdot c^2 \cdot s^2 \\ A_{24} = A_{42} &= [\bar{E}_1 \cdot s^2 - \bar{E}_2 \cdot c^2 + E_{12} \cdot (c^2 - s^2)] \cdot c \cdot s \\ A_{44} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2 \cdot E_{12} \cdot \nu_{12}) \cdot c^2 \cdot s^2 + G_{12} \cdot (c^2 - s^2) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Προκειμένου να κάνουμε πιο αντιληπτές και ευανάγνωστες τις παραπάνω παραστάσεις θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες τριγωνομετρικές σχέσεις και θα τις τροποποιήσουμε στην μορφή που μας διευκολύνει:

- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = 1^2 \Rightarrow \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos^4 \theta + \sin^4 \theta = 1 - 2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \Rightarrow \cos^4 \theta + \sin^4 \theta = 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2}$
- $\sin 2\theta = 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \Rightarrow (\sin 2\theta)^2 = (2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta)^2 \Rightarrow \sin^2 2\theta = 4 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$
- $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$

Αντικαθιστούμε τώρα λοιπόν στις (4.41) και έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot c^4 + \frac{E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot s^4 + (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12}) \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{2} \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot \nu_{12} + \left(\frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} + \frac{E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} - 2 \cdot (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12}) \right) \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{4} \\ A_{14} = A_{41} &= \left[\frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot c^2 - \frac{E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot s^2 - (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12}) \cdot \cos 2\theta \right] \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \\ A_{22} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot s^4 + \frac{E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot c^4 + (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12}) \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{2} \\ A_{24} = A_{42} &= \left[\frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot s^2 - \frac{E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot c^2 + (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12}) \cdot \cos 2\theta \right] \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \\ A_{44} &= \left(\frac{E_1}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} + \frac{E_2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} - 2 \cdot (\bar{E}_1 \cdot \nu_{12} + 2 \cdot G_{12}) \cdot \nu_{12} \right) \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{4} + G_{12} \cdot \cos 2\theta \end{aligned} \right\}$$

Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω τελική μορφή των εξισώσεων (4.41):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_1 \cdot \left(\nu_{12} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{2} + c^4 \right) + E_2 \cdot s^4}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} + G_{12} \cdot \sin^2 2\theta \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{E_1 \cdot \left(\nu_{12} + (1-2 \cdot \nu_{12}) \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{4} \right) + E_2 \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{4}}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} - G_{12} \cdot \sin^2 2\theta \\ A_{14} = A_{41} &= \frac{E_1 \cdot (c^2 - \nu_{12} \cdot \cos 2\theta) - E_2 \cdot s^2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} - G_{12} \cdot \frac{\sin 4\theta}{2} \\ A_{22} &= \frac{E_1 \cdot \left(s^4 + \nu_{12} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{2} \right) + E_2 \cdot c^4}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} + G_{12} \cdot \sin^2 2\theta \\ A_{24} = A_{42} &= \frac{E_1 \cdot (s^2 + \nu_{12} \cdot \cos 2\theta) - E_2 \cdot c^2}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} + G_{12} \cdot \frac{\sin 4\theta}{2} \\ A_{44} &= \frac{E_1 \cdot (1-2 \cdot \nu_{12}^2) + E_2 \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{4}}{1-\nu_{12} \cdot \nu_{21}} - G_{12} \cdot (\nu_{12} \cdot \sin^2 2\theta - \cos 2\theta) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Έχοντας δώσει την τελική μορφή στις παραπάνω παραστάσεις μπορούμε να τις αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις των τάσεων και στην συνέχεια να προχωρήσουμε εφαρμόζοντας την «Αρχή των Δυνατών Έργων». Οι εξισώσεις (2.19) λοιπόν λόγω των (4.41) θα γίνουν:

Ο δείκτης i μας υποδεικνύει την κάθε στρώση

$$\begin{aligned} \sigma_x^i = & \left(\frac{E_1^i \cdot \left(\nu_{12}^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{2} + c_i^4 \right) + E_2^i \cdot s_i^4}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} + G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_x + \\ & + \left(\frac{E_1^i \cdot \left(\nu_{12}^i + (1 - 2 \cdot \nu_{12}^i) \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} \right) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} - G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_y + \\ & + \left(\frac{E_1^i \cdot (c_i^2 - \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot s_i^2}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} - G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2} \right) \cdot \gamma_{xy} \\ \\ \sigma_y^i = & \left(\frac{E_1^i \cdot \left(\nu_{12}^i + (1 - 2 \cdot \nu_{12}^i) \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} \right) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} - G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_x + \\ & + \left(\frac{E_1^i \cdot \left(s_i^4 + \nu_{12}^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{2} \right) + E_2^i \cdot c_i^4}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} + G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_y + \\ & + \left(\frac{E_1^i \cdot (s_i^2 + \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot c_i^2}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} + G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2} \right) \cdot \gamma_{xy} \\ \\ \tau_{xy}^i = & \left(\frac{E_1^i \cdot (c_i^2 - \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot s_i^2}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} - G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2} \right) \cdot \varepsilon_x + \\ & + \left(\frac{E_1^i \cdot (s_i^2 + \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot c_i^2}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} + G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2} \right) \cdot \varepsilon_y + \\ & + \left(\frac{E_1^i \cdot (1 - 2 \cdot \nu_{12}^i) + E_2^i}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} - G_{12}^i \cdot (\nu_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i - \cos 2\theta_i) \right) \cdot \gamma_{xy} \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\sigma^i = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{E_1^i \cdot \left(v_{12}^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{2} + c_i^4 \right) + E_2^i \cdot s_i^4}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} + G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_x + \\ + \left(\frac{E_1^i \cdot \left(v_{12}^i + (1 - 2 \cdot v_{12}^i) \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} \right) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4}}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} - G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_y + \\ + \left(\frac{E_1^i \cdot (c_i^2 - v_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot s_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} - G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} \right) \cdot \gamma_{xy} \\ \left(\frac{E_1^i \cdot \left(v_{12}^i + (1 - 2 \cdot v_{12}^i) \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} \right) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4}}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} - G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_x + \\ + \left(\frac{E_1^i \cdot \left(s_i^4 + v_{12}^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{2} \right) + E_2^i \cdot c_i^4}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} + G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) \cdot \varepsilon_y + \\ + \left(\frac{E_1^i \cdot (s_i^2 + v_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot c_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} + G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} \right) \cdot \gamma_{xy} \\ 0 \\ \left(\frac{E_1^i \cdot (c_i^2 - v_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot s_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} - G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} \right) \cdot \varepsilon_x + \\ + \left(\frac{E_1^i \cdot (s_i^2 + v_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot c_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} + G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} \right) \cdot \varepsilon_y + \\ + \left(\frac{E_1^i \cdot (1 - 2 \cdot v_{12}^i) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} - G_{12}^i \cdot (v_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i - \cos 2\theta_i)}{1 - v_{12}^i \cdot v_{21}^i} \right) \cdot \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Και } \varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 0 \\ -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Επίσης αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση, $w(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{4q_{tot}} N_j(\xi, \eta) d_j$, η εξίσωση της παραμόρφωσης θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ 0 \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial x \cdot \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \cdot z \cdot d \quad \text{Ή σε άλλη μορφή: } \varepsilon = B d, \quad \text{όταν } B = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ 0 \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial x \cdot \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \cdot z$$

Το z είναι η απόσταση από το μέσο επίπεδο των στρώσεων. Αν απαλείψουμε τους μηδενικούς όρους από τα μητρώα θα έχουμε:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial x \cdot \partial y} \end{array} \right\} \cdot z \cdot d \quad \text{και} \quad B = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial x \cdot \partial y} \end{array} \right\} \cdot z$$

Επιπλέον το μητρώο ελαστικότητας για την κάθε στρώση είναι:

$$[E_i] = \begin{bmatrix} \left(\frac{E_1^i \cdot \left(\nu_{12}^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{2} + c_i^4 \right) + E_2^i \cdot s_i^4}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} + G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) & \left(\frac{E_1^i \cdot \left(\nu_{12}^i + (1 - 2 \cdot \nu_{12}^i) \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} \right) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} - G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) & \left(\frac{E_1^i \cdot (c_i^2 - \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot s_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} - G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \right) \\ \left(\frac{E_1^i \cdot \left(\nu_{12}^i + (1 - 2 \cdot \nu_{12}^i) \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} \right) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} - G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) & \left(\frac{E_1^i \cdot \left(s_i^4 + \nu_{12}^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{2} \right) + E_2^i \cdot c_i^4}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} + G_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i \right) & \left(\frac{E_1^i \cdot (s_i^2 + \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot c_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} + G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \right) \\ \left(\frac{E_1^i \cdot (c_i^2 - \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot s_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} - G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \right) & \left(\frac{E_1^i \cdot (s_i^2 + \nu_{12}^i \cdot \cos 2\theta_i) - E_2^i \cdot c_i^2 \cdot \frac{\sin 2\theta_i}{2} + G_{12}^i \cdot \frac{\sin 4\theta_i}{2}}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \right) & \left(\frac{E_1^i \cdot (1 - 2 \cdot \nu_{12}^i) + E_2^i \cdot \frac{\sin^2 2\theta_i}{4} - G_{12}^i \cdot (\nu_{12}^i \cdot \sin^2 2\theta_i - \cos 2\theta_i)}{1 - \nu_{12}^i \cdot \nu_{21}^i} \right) \end{bmatrix}$$

Λόγω του μεγέθους του παραπάνω μητρώου θα αντικαταστήσουμε τα μεγέθη του με τις τιμές A_{11} , A_{12} , A_{14} , A_{21} , A_{22} , A_{24} , A_{41} , A_{42} , A_{44} . Δηλαδή:

$$[E_i] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Έστω ότι t_i είναι το ομοιόμορφο πάχος της κάθε στρώσης i και dA_i η διαφορική επιφάνεια αντίστοιχα. Η αρχή δυνατών έργων εκφράζεται ως:

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \cdot \sigma_i \cdot d\Omega \Rightarrow \delta W = d \int_{\text{Στρώσεις}} \delta B^T E_i B d\Omega$$

Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφτεί σε μητρική μορφή ως εξής: $[K] = \int_{\Omega} [B]^T [E_i][B] d\Omega$

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχοληθήκαμε με την μελέτη πολυστρωματικής πλάκας τριών στρώσεων (διαφορετικών μηχανικών ιδιοτήτων), συνεπώς εφαρμόζουμε το μητρώο που προέκυψε από την αρχή δυνατών έργων για $i = 3$ όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1.

Ιδιότητες	1 ^η στρώση	2 ^η στρώση	3 ^η στρώση
Διάμηκες Μέτρο Ελαστικότητας	E_1^1	E_1^2	E_1^3
Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας	E_2^1	E_2^2	E_2^3
Διαμήκης Λόγος Poisson	ν_{12}^1	ν_{12}^2	ν_{12}^3
Εγκάρσιος Λόγος Poisson	ν_{21}^1	ν_{21}^2	ν_{21}^3
Πάχος	t_1	t_2	t_3
Γωνία Προσανατολισμού	θ_1	θ_2	θ_3

Πίνακας 4.1. Μηχανικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά της κάθε στρώσης στην υπό μελέτη τριστρωματική πλάκα.

Έχουμε λοιπόν:

$$k_{kj} = \int_{\text{No 1}} [B]^T [E_1][B]d\Omega + \int_{\text{No 2}} [B]^T [E_2][B]d\Omega + \int_{\text{No 3}} [B]^T [E_3][B]d\Omega \Rightarrow$$

όπου $k, j = 1, \dots, 4 \cdot q_{\text{tot}}$ η μέγιστη διάσταση του μητρώου δυσκαμψίας είναι ίση με τον αριθμό των κόμβων επί τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας.

$$k_{kj} = \int_{\text{No 1}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} & -2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot z \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{14}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{24}^1 \\ A_{41}^1 & A_{42}^1 & A_{44}^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot z \cdot d\Omega +$$

$$+ \int_{\text{No 2}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} & -2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot z \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{14}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{24}^2 \\ A_{41}^2 & A_{42}^2 & A_{44}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot z \cdot d\Omega +$$

$$+ \int_{\text{No 3}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} & -2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot z \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{14}^3 \\ A_{21}^3 & A_{22}^3 & A_{24}^3 \\ A_{41}^3 & A_{42}^3 & A_{44}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot z \cdot d\Omega \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 k_{kj} = & \int_{-t_1/2}^{t_1/2} z^2 dz \cdot \int_{\text{No 1}} \left[-\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \quad -2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{14}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{24}^1 \\ A_{41}^1 & A_{42}^1 & A_{44}^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot dA + \\
 & + \int_{-t_2/2}^{t_2/2} z^2 dz \cdot \int_{\text{No 2}} \left[-\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \quad -2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{14}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{24}^2 \\ A_{41}^2 & A_{42}^2 & A_{44}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot dA + \\
 & + \int_{-t_3/2}^{t_3/2} z^2 dz \cdot \int_{\text{No 3}} \left[-\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \quad -2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{14}^3 \\ A_{21}^3 & A_{22}^3 & A_{24}^3 \\ A_{41}^3 & A_{42}^3 & A_{44}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \cdot dA \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
 k_{kj} = & \left[\frac{\left(\frac{t_1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{t_1}{2}\right)^3}{3} \right] \cdot \int_{\text{No 1}} \left[\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^1 + \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^1 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^1 + \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^1 + \right. \\
 & \left. + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^1 + 4 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^1 \right] \cdot dA + \\
 & + \left[\frac{\left(\frac{t_2}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{t_2}{2}\right)^3}{3} \right] \cdot \int_{\text{No 2}} \left[\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^2 + \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^2 + \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^2 + \right. \\
 & \left. + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^2 + 4 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^2 \right] \cdot dA + \\
 & + \left[\frac{\left(\frac{t_3}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{t_3}{2}\right)^3}{3} \right] \cdot \int_{\text{No 3}} \left[\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^3 + \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^3 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^3 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^3 + \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^3 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^3 + \right. \\
 & \left. + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^3 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^3 + 4 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^3 \right] \cdot dA \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή του μητρώου δυσκαμψίας:

$$\begin{aligned}
 k_{kj} = & \frac{t_1^3}{12} \cdot \int_{\text{No } 1} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^1 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^1 \right] + \\ & \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^1 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^1 \right] + \\ & 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^1 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^1 \right] \end{aligned} \right] \cdot dA + \\
 & + \frac{t_2^3}{12} \cdot \int_{\text{No } 2} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^2 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^2 \right] + \\ & \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^2 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^2 \right] + \\ & 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^2 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^2 \right] \end{aligned} \right] \cdot dA + \\
 & + \frac{t_3^3}{12} \cdot \int_{\text{No } 3} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^3 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^3 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^3 \right] + \\ & \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^3 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^3 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^3 \right] + \\ & 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^3 + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^3 + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^3 \right] \end{aligned} \right] \cdot dA \Rightarrow
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Έχοντας καταλήξει στην τελική μορφή του μητρώου δυσκαμψίας για τρεις στρώσεις (βλ. εξίσωση (4.43)) θα το γενικεύσουμε υπό την μορφή σειράς για i αριθμό στρώσεων:

$$k_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{t_i^3}{12} \cdot \int_{\text{No } i} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^i + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^i + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^i \right] + \\ & \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^i + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^i + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^i \right] + \\ & 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^i + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^i + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^i \right] \end{aligned} \right] \cdot dA$$

Προκειμένου να περιορίσουμε την έκταση του μητρώου δυσκαμψίας θα αντικαταστήσουμε τα μέρη του όπως φαίνεται παρακάτω:

$$B_1^i = \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{11}^i + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{21}^i + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{41}^i \right]$$

$$B_2^i = \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{12}^i + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{22}^i + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{42}^i \right]$$

$$B_3^i = 2 \cdot \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \left[\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \cdot A_{14}^i + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \cdot A_{24}^i + 2 \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \cdot \partial y} \cdot A_{44}^i \right]$$

Αρα λοιπόν η τελική μορφή του μητρώου δυσκαμψίας για i αριθμό στρώσεων είναι:

$$k_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{t_i^3}{12} \cdot \int_{\text{No } i} \left[B_1^i + B_2^i + B_3^i \right] \cdot dA \quad (4.44)$$

4.7 Μετάβαση από το Τοπικό στο Καθολικό Σύστημα Συντεταγμένων

Δεδομένου ότι τα μητρώα \mathbf{B} και \mathbf{N} είναι γνωστά μόνο στο τοπικό – φυσικό σύστημα συντεταγμένων $\xi - \eta$, πρέπει να μετασχηματιστούν τα παραπάνω ολοκληρώματα στον καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Ο μετασχηματισμός αυτός επιτυγχάνεται με την χρήση του **Ιακωβιανού Μητρώου \mathbf{J}** που συνδέει τις παραγώγους ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων με τις παραγώγους ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Το \mathbf{J} δίνεται συναρτήσει των τοπικών συντεταγμένων και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις που συνδέουν τις x, y με το θεωρούμενο *καμπυλόγραμμο* σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, το Ιακωβιανό μητρώο ή Ιακωβιανή ορίζεται ως:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Η στοιχειώδης επιφάνεια dA στην οποία αναφέρονται όλες οι ανωτέρω ολοκληρώσεις, αντιστοιχούν στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων $x-y$. Δεδομένου, όμως, ότι όλα μας τα δεδομένα σχετίζονται με το τοπικό σύστημα $\xi-\eta$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$dA = dx dy = (\det J) d\xi d\eta \quad (4.46)$$

όπου, t_i το πάχος της κάθε στρώσης και

$$\det J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \quad (4.47)$$

Επομένως, το μητρώο δυσκαμψίας $[K]$ στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων, μπορεί να οριστεί σε σχέση με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων ως:

$$[K] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [B]^T [E][B](\det J) d\xi dn d\zeta \quad (4.48)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το στοιχειώδες μήκος κατά την έννοια του πάχους της πολυστρωματικής πλάκας dz στο σύστημα $x-y$, ταυτίζεται με το $d\zeta$ του τοπικού συστήματος $\xi-n$. Έτσι, είναι προφανές ότι η Ιακωβιανή μετασχηματισμού που απαιτείται να χρησιμοποιήσουμε, αρκεί να μετασχηματίζει το σύστημα $x-y$ στο $\xi-n$ χωρίς να είναι ανάγκη να υπεισέρχεται και η διάσταση z καθώς μένει αναλλοίωτη σε κάθε περίπτωση ($z \equiv \zeta$). Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, κάθε στοιχείο k_{kj} του μητρώου $[k]$, βάση της (4.44) ορίζεται ως:

$$k_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{t_i^3}{12} \cdot \int_0^1 \int_0^1 [B_1^i + B_2^i + B_3^i] \cdot (\det J) \cdot d\xi \cdot dn \quad (4.49)$$

όπου i = αριθμός των στρώσεων, $\mathbf{k}, \mathbf{j} = 1, \dots, 4 \cdot q_e$

Επιπλέον, εφόσον οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων μορφής N_i είναι συναρτήσεις του τοπικού συστήματος $N_i = N_i(\xi, n)$, η αναγωγή στο καθολικό σύστημα γίνεται με απλή χρήση του κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \quad (4.50)$$

και αντίστοιχα για τον άξονα y :

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \left(\frac{\partial N}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial n^2} \quad (4.51)$$

ενώ η μεικτή παράγωγος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial N}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial n} \quad (4.52)$$

4.8 Υπολογισμός Μητρώου Δυνάμεων

Αν χρησιμοποιήσουμε την αναλυτική μορφή της εξίσωσης Galerkin – Ritz για το ελαστοδυναμικό πρόβλημα θα έχουμε:

$$\int_{\Omega} \delta w^T \cdot \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \delta w^T \cdot f_{dt} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \delta w^T \cdot s \cdot d\Gamma \quad (4.53)$$

Δυνατό έργο των
Δυνατό έργο των
Δυνατό έργο των
Οριακές συνθήκες
δυνάμεων αδράνειας
ελαστικών δυνάμεων
εξωτερικών και των
(Δυνατό έργο)

δυνάμεων απόσβεσης

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων θα είναι:

$$\int_{\Omega} \delta w^T \cdot f \cdot d\Omega = \int_{\Omega} (N \cdot \delta \alpha)^T \cdot f \cdot d\Omega = \delta \alpha^T \cdot \int_{\Omega} N^T \cdot f \cdot d\Omega$$

όπου $\int_{\Omega} N^T \cdot f \cdot d\Omega =$ διάνυσμα δυνάμεων F

Επομένως, το διάνυσμα των δυνάμεων προσδιορίζεται από την σχέση:

$$F = \int_{\Omega} N^T \cdot f \cdot d\Omega \quad (4.54)$$

το οποίο για σταθερό πάχος, στο τοπικό σύστημα λαμβάνει την μορφή:

$$F = t \cdot \int_0^1 \int_0^1 N^T \cdot f(\det J) \cdot d\xi \cdot dn \quad (4.55)$$

4.9 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε τις παραπάνω ολοκληρώσεις με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, απαιτείται να προσφύγουμε σε μια αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι ολοκλήρωσης, οι οποίες αποσκοπούν στην εύρεση μιας προσεγγιστικής πολυωνυμικής έκφρασης του ολοκληρώματος επειδή τα πολυώνυμα ολοκληρώνονται με απόλυτη ακρίβεια. Η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss – Legendre είναι η κατεξοχήν χρησιμοποιούμενη σε τέτοιου είδους προβλήματα, αφενός λόγω της ευκολίας προγραμματισμού που παρέχει και αφετέρου λόγω της ελεγχόμενης – κλιμακούμενης ακρίβειάς της. Για λόγους πληρότητας, αρχικά, θα παραθέσουμε την μονοδιάστατη ολοκλήρωση Gauss, ενώ, η δισδιάστατη ολοκλήρωση προκύπτει απλά από συνδυασμό δύο μονοδιάστατων ολοκληρώσεων.

4.9.1 Μονοδιάστατη Ολοκλήρωση

Η ολοκλήρωση κατά Gauss χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange για να προσεγγίσει την αντίστοιχη συνάρτηση. Στην περίπτωση της μονοδιάστατης ολοκλήρωσης, εάν η παρεμβολή γίνει σε n σημεία στο διάστημα $[a, b]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης θα είναι:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) dx + E_i = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) dx + E_i \quad (4.56)$$

$$\text{όπου: } w_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad (4.57)$$

Οι τιμές $f(x_i)$ γράφονται έξω από το ολοκλήρωμα (4.56) επειδή είναι σταθερές, για δεδομένα x_i . Επομένως, προκύπτει η σχέση:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_t \cong \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4.58)$$

Εάν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[-1,1]$, τότε το σφάλμα της παραπάνω έκφρασης ελαχιστοποιείται, όταν τα x_i αποτελούν τις ρίζες ενός ορθογώνιου πολυωνύμου Legendre $p_i(x)$.

Τα πολυώνυμα Legendre είναι μια οικογένεια πολυωνύμων τα οποία είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$, με συντελεστή βαρύτητας $w(x)=1$. Με τον όρο ορθογώνια πολυώνυμα προσδιορίζουμε μια σειρά από πολυώνυμα $p_i(x)$ βαθμού $i=0,1,2,\dots,n$, για τα οποία στο διάστημα $[a,b]$, με συνάρτηση βαρύτητας $w(x)$ ισχύει:

$$\int_a^b w(x)p_k(x)p_m(x)dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ c(m) \neq 0, & k = m \end{cases} \quad (4.59)$$

Έτσι, τα πρώτα πολυώνυμα της σειράς αυτής είναι:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x \\ p_2(x) &= 0.5(3x^2 - 1) \\ p_3(x) &= 0.5(5x^3 - 3x) \\ p_4(x) &= 0.125(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

Έτσι, εάν η παρεμβολή γίνει σε δύο σημεία της συνάρτησης, οι τιμές x_i θα είναι οι ρίζες $p_2(x)$, δηλαδή $\pm (1/3)^{0.5}$, ενώ για τρία σημεία θα είναι οι ρίζες του $p_3(x)$, δηλαδή $\pm (3/5)^{0.5}$. Για κάθε τιμή του x_i υπολογίζεται η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης $f(x_i)$, ενώ οι συντελεστές βαρύτητας προκύπτουν από τη σχέση:

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(x)dx = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx \quad (4.60)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην μέθοδο Gauss-Legendre η εξίσωση (4.58) είναι ακριβής για πολυώνυμα **μέχρι $(2n-1)$ βαθμού**. Επιπλέον, αν n είναι το πλήθος σημείων ολοκλήρωσης Gauss, το προκύπτον σφάλμα είναι $E_t = O(d^{2n}f/dx^{2n})$.

4.9.2 Δισδιάστατη Ολοκλήρωση

Η δισδιάστατη ολοκλήρωση προκύπτει από συνδυασμό δύο μονοδιάστατων ολοκληρώσεων, κατά τα γνωστά:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n w_k w_l f(\xi_k, \eta_l) \quad (4.61)$$

Τα σημεία και τα βάρη της ολοκλήρωσης κατά Gauss συνοψίζονται στον πίνακα 4.2 που ακολουθεί.

n	Πολυώνυμο μέχρι βαθμού	k	ξ_k	w_k
1	ξ	1	0,000000000000000	2
		2	0,577350269189626	1
2	ξ^2	1	0,000000000000000	0,888888888888889
		2	0,774596669241483	0,555555555555556
3	ξ^5	3	-0,774596669241483	0,555555555555556
		1	0,861136311594053	0,348754845137454
		2	-0,861136311594053	0,348754845137454
4	ξ^7	3	0,339981043584856	0,652145154862546
		4	-0,339981043584856	0,652145154862546
		1	0,906179845938664	0,236926885056189
		2	-0,906179845938664	0,236926885056189
5	ξ^9	3	0,538469310105683	0,478628670499366
		4	-0,538469310105683	0,478628670499366
		5	0,000000000000000	0,568888888888889
		1	0,932469514203152	0,171324492379170
		2	-0,932469514203152	0,171324492379170
6	ξ^{11}	3	0,661209386466265	0,360761573048139
		4	-0,661209386466265	0,360761573048139
		5	0,238619186083197	0,467913934572691
		6	-0,238619186083197	0,467913934572691
		1	0,949107912342759	0,129484966168870
		2	-0,949107912342759	0,129484966168870
7	ξ^{13}	3	0,741531185599394	0,279705391489277
		4	-0,741531185599394	0,279705391489277
		5	0,405845151377397	0,381830050505119
		6	-0,405845151377397	0,381830050505119
		7	0,000000000000000	0,417959183673469
		1	0,960289856497536	0,101228536290376
		2	-0,960289856497536	0,101228536290376
8	ξ^{15}	3	0,796666477413627	0,222381034453374
		4	-0,796666477413627	0,222381034453374
		5	0,525532409916329	0,313706645877887
		6	-0,525532409916329	0,313706645877887
		7	0,183434642495650	0,362683783378362
		8	-0,183434642495650	0,362683783378362
		1	0,968160239507626	0,081274388361574
		2	-0,968160239507626	0,081274388361574
9	ξ^{17}	3	0,836031107326636	0,180648160694857
		4	-0,836031107326636	0,180648160694857
		5	0,613371432700590	0,260610696402935
		6	-0,613371432700590	0,260610696402935
		7	0,324253423403809	0,312347077040003
		8	-0,324253423403809	0,312347077040003
		9	0,000000000000000	0,330239355001260
		1	0,973906528517172	0,066671344308688
		2	-0,973906528517172	0,066671344308688
10	ξ^{19}	3	0,865063366688985	0,149451349150581
		4	-0,865063366688985	0,149451349150581
		5	0,679409568299024	0,219086362515982
		6	-0,679409568299024	0,219086362515982
		7	0,433395394129247	0,269266719309996
		8	-0,433395394129247	0,269266719309996
		9	0,148874338981631	0,295524224714753
		10	-0,148874338981631	0,295524224714753

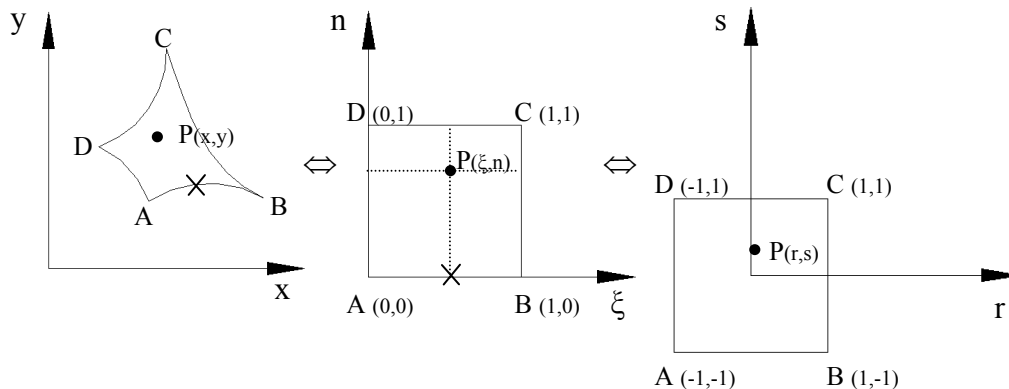
Πίνακας 4.2 Κόμβοι και βάρη μεθόδου ολοκλήρωσης Gauss

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΖC, BSF ΚΑΙ ΜΑΚΡΟΣΤΟΙΧΕΙΟΥ COONS ΣΕ ΕΛΑΣΤΟΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

5.1 Περιγραφή Διαδικασίας Επίλυσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την αριθμητική εφαρμογή των στοιχείων που μελετήσαμε. Θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν τόσο μεταξύ τους όσο και σε σχέση με έτοιμο εμπορικό λογισμικό (SimXpert 2010 Student Edition). Όλοι οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν σε κώδικα ανεπτυγμένο σε περιβάλλον Fortran 77 (βλ. Παράρτημα Α). Η διαδικασία που ακολουθεί το πρόγραμμα για την μελέτη κάμψης πολυστρωματικής πλάκας προκειμένου να εξάγει τα αποτελέσματα είναι η εξής:

- ‘Διαβάζει’ από εξωτερικό αρχείο τα δεδομένα που αφορούν στο υλικό της κάθε στρώσης, το πλήθος των κόμβων, τις οριακές συνθήκες, τον τρόπο φόρτισης αλλά και το είδος του πεπερασμένου στοιχείου με το οποίο θα γίνει η επίλυση.
- Εν συνεχεία, υπολογίζεται το μητρώο δυσκαμψίας, $[K]$ με τον τρόπο που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πρέπει να επισημάνουμε όμως ότι ο υπολογισμός του μητρώου προϋποθέτει την μετάβαση από το καθολικό σύστημα συντεταγμένων, $x - y$, στο φυσικό, $\xi - \eta$, και μετέπειτα στο $r - s$, το σύστημα στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση Gauss. Η μετάβαση αυτή αποτυπώνεται ενδεικτικά στο παρακάτω σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1. Μετάβαση από το σύστημα $x - y$ στο $\xi - \eta$ και τελικά στο $r - s$ για υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας $[K]$.

- Το επόμενο βήμα είναι η πραγματοποίηση των απαραίτητων αριθμητικών ολοκληρώσεων. Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε μια αριθμητική ολοκλήρωση θα πρέπει να επιλέξουμε εάν θα προβούμε σε καθολική ολοκλήρωση (global integration) ή σε τοπική ολοκλήρωση (local integration). Η καθολική ολοκλήρωση (την οποία και χρησιμοποιήσαμε

στην παρούσα διπλωματική εργασία) εφαρμόζεται σε όλη την επιφάνεια αμέσως, αντίθετα η τοπική ολοκλήρωση 'χωρίζει' την συνολική επιφάνεια σε μικρότερες επιφάνειες και πραγματοποιούνται τοπικές ολοκληρώσεις, οι οποίες εν συνεχεία αθροίζονται μεταξύ τους. Επίσης, για την καθολική ολοκλήρωση, αρκετά σημαντικό ρόλο παίζει και ο υπολογισμός των σημείων Gauss, τα οποία θα πρέπει να αρκούν ούτως ώστε να έχουμε ακριβή αποτελέσματα. Οι συνθήκες που θα πρέπει να πληρούνται για N αριθμό κόμβων ανά πλευρά για το μακροστοιχείο, το BFS και το MZC είναι οι παρακάτω:

α) Η μέγιστη τάξη των πολυωνύμων Lagrange θα είναι $N - 1$ βαθμού.

β) Η μέγιστη τάξη των πολυωνύμων βάσης Hermite θα είναι $2(N - 1) + 1 = 2N - 1$ βαθμού.

γ) Η μέγιστη τάξη των συναρτήσεων μορφής θα είναι $2N - 1$ βαθμού.

δ) Ο απαιτούμενος αριθμός σημείων Gauss θα είναι $2n_{\text{gauss}} - 1 \geq 2(2N - 1) \rightarrow n_{\text{gauss}} \geq 2N - 0,5 \rightarrow n_{\text{gauss}} \approx 2N$.

- Τέλος, εξάγεται ένα καινούργιο αρχείο το οποίο περιλαμβάνει όλα τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες του στοιχείου, των φορτίσεων, των στρώσεων, των οριακών συνθηκών και κυρίως τις μετατοπίσεις κάθε κόμβου που είναι άλλωστε και το αποτέλεσμα που αναζητούμε μέσα από την επίλυση του προβλήματος.

5.2 Ελαστοστατική Μελέτη

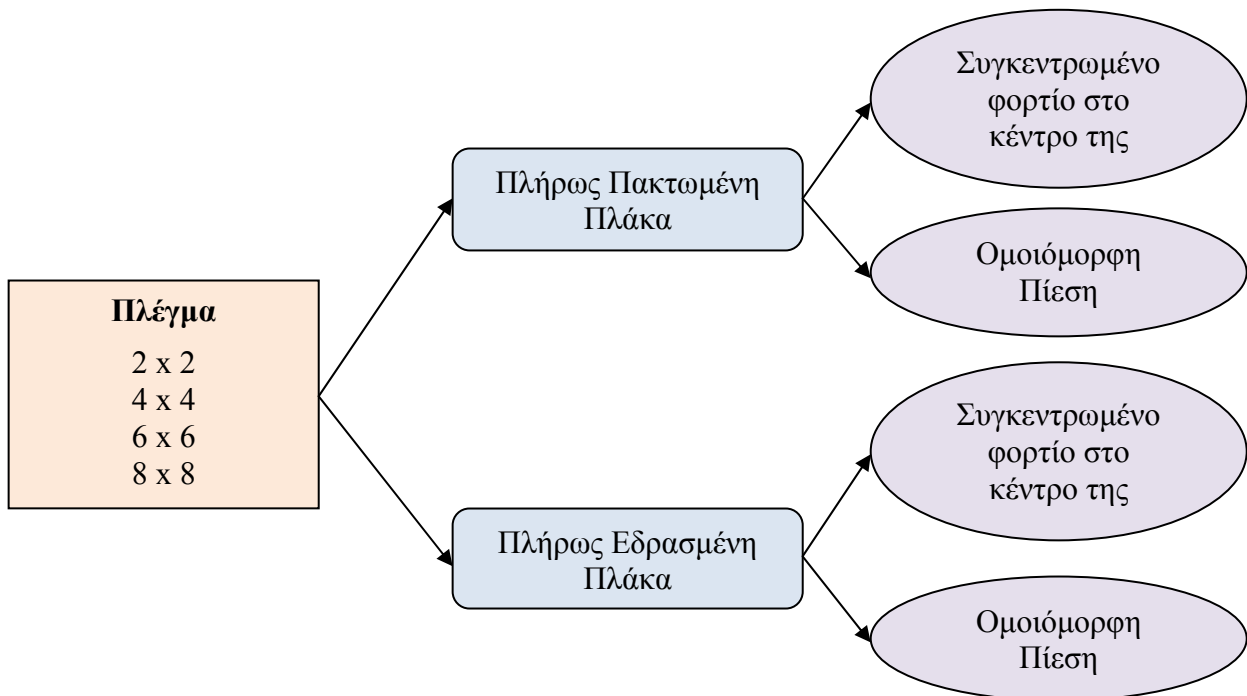
Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε την συμπεριφορά τετράγωνης πολυστρωματικής πλάκας (3 στρώσεων) ανισοτροπικού υλικού υπό στατική φόρτιση κάνοντας χρήση των 3 στοιχείων που αναλύσαμε στην θεωρία του 4ου κεφαλαίου. Οι περιπτώσεις που εξετάσαμε είναι οι κάτωθι:

- Πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της.
- Πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της.
- Πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της.
- Πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της.

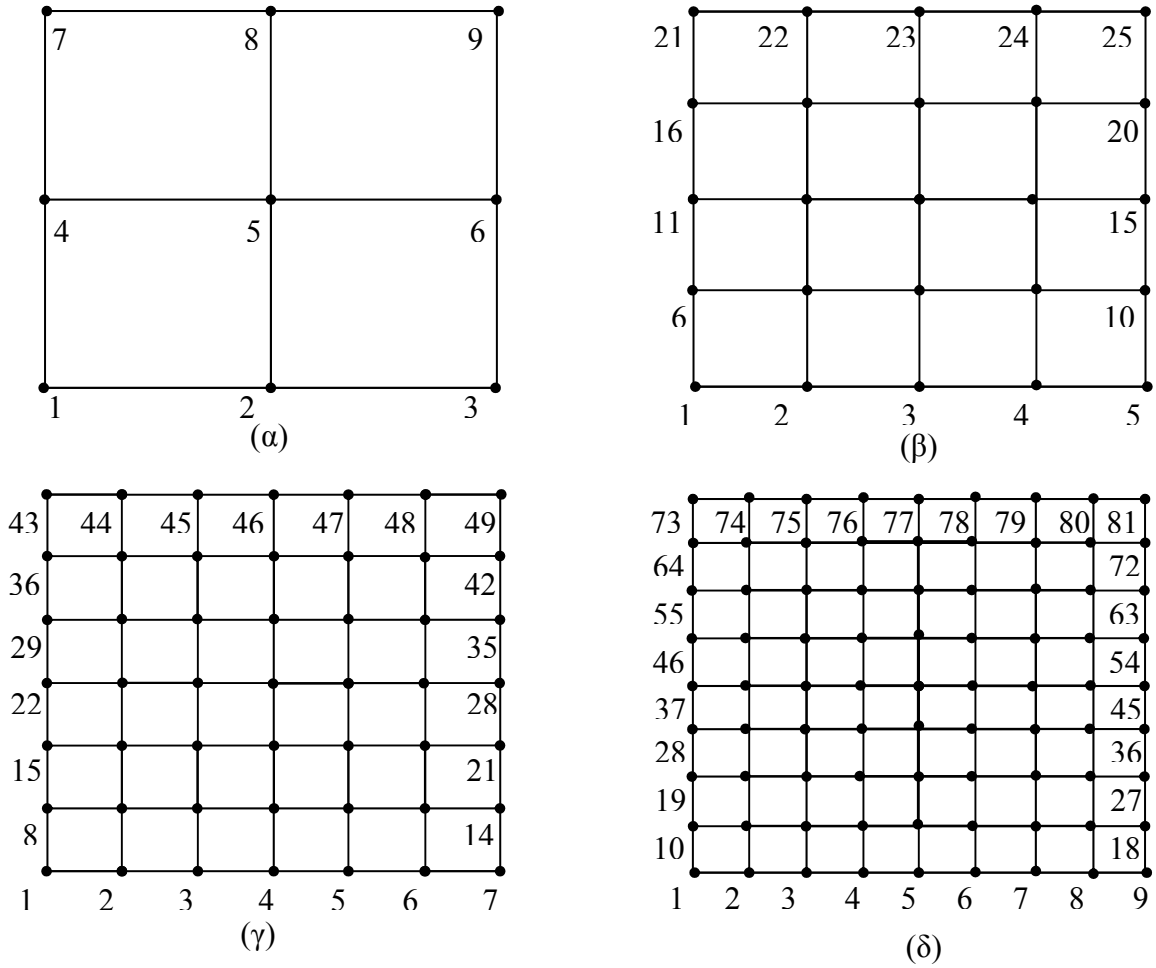
Στον πίνακα 5.1 φαίνονται όλα τα αριθμητικά μεγέθη που εισάγαμε στο πρόβλημα. Επισημαίνουμε ότι στην ομοιόμορφη καταπόνηση η συνισταμένη δύναμη είναι πάλι 100N, με διαφορετικό μέτρο συνιστωσών ανά κόμβο ανάλογα με την διάσταση του πλέγματος. Η μελέτη που κάνουμε υλοποιείται για πλέγματα 2×2 , 4×4 , 6×6 και 8×8 για τα BFS και MZC, ενώ για το μακροστοιχείο Coons, οι υπολογισμοί θα γίνουν με ένα στοιχείο, το οποίο θα έχει τις διαμερίσεις 2, 4, 6 και 8 ανά πλευρά όπως φαίνεται στα σχήματα 5.3 και 5.4.

Σύνθετη Πλάκα	1 ^η Στρώση	2 ^η Στρώση	3 ^η Στρώση
F (N)	100		
E_x (GPa)	76	220	76
E_y (GPa)	5,5	6,9	5,5
G_{xy} (GPa)	20,8	5,51	20,8
ν_{xy}	0,474	0,25	0,474
ν_{yx}	0,199	0,021	0,199
πάχος (m)	0,00125	0,0025	0,00125
θ (°)	45	-45	45
ρ (kg/m³)	1,4	1,7	1,4
Διαστάσεις Πλάκας	α (m)		β (m)
	1		1

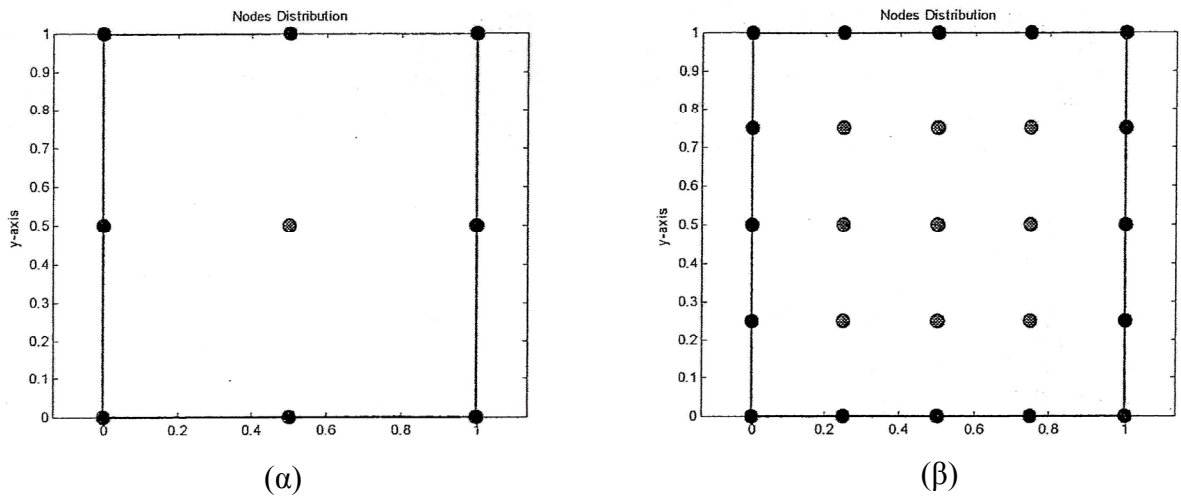
Πίνακας 5.1. Ιδιότητες στρώσεων και γεωμετρικές διαστάσεις πλάκας.

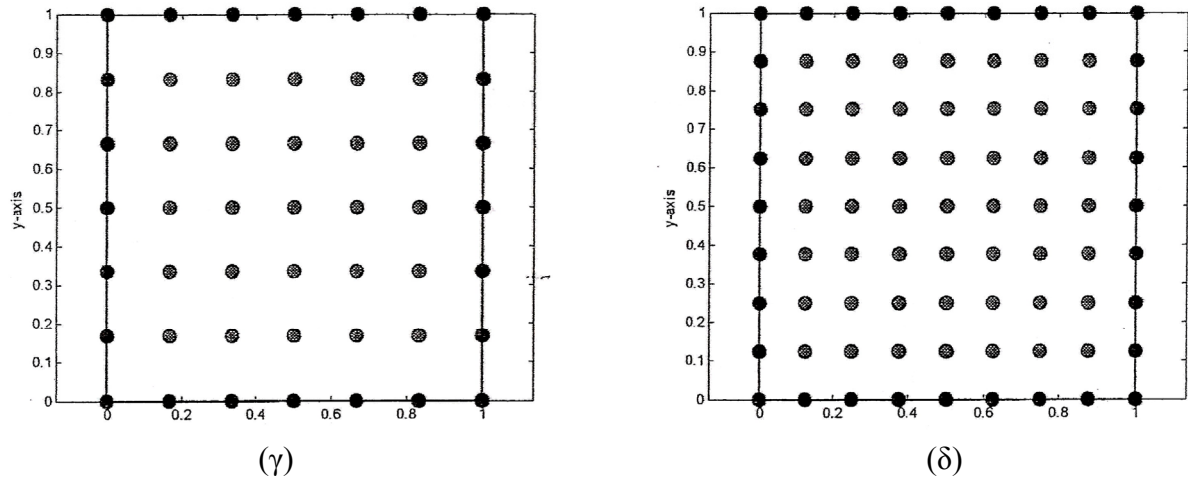


Σχήμα 5.2. Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας που ακολουθήθηκε στο ελαστοστατικό πρόβλημα.



Σχήμα 5.3. α) Πλέγμα 2x2, β) Πλέγμα 4x4, γ) Πλέγμα 6x6 και δ) Πλέγμα 8x8.





Σχήμα 5.4. Μακροστοιχείο **α)** 2 διαμερίσεις ανά πλευρά, **β)** 4 διαμερίσεις ανά πλευρά, **γ)** 6 διαμερίσεις ανά πλευρά και **δ)** 8 διαμερίσεις ανά πλευρά.

Το αντίστοιχο μοντέλο το δημιουργήσαμε και σε έτοιμο εμπορικό λογισμικό (SimXpert 2010 Student Edition) με ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες και χαρακτηριστικά προκειμένου να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Ακόμα για τους βαθμούς ελευθερίας ισχύουν τα εξής:

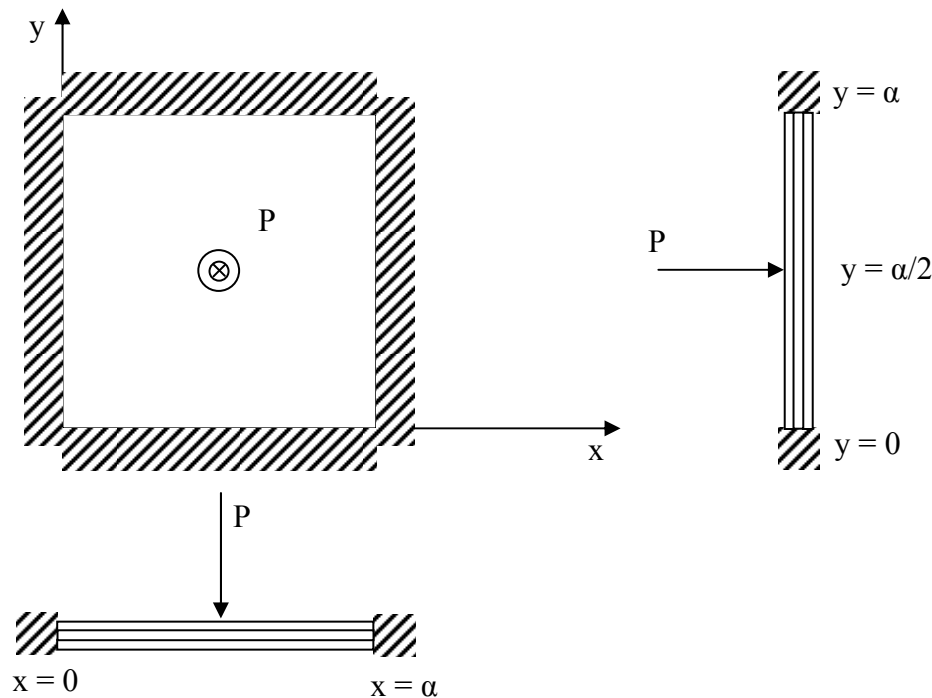
Είδος Στήριξης	Βαθμοί Ελευθερίας
Πάκτωση	$w_i = 0, \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \frac{\partial w_i}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} = 0$
Έδραση	$w_i = 0, \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0$ ή $\frac{\partial w_i}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \neq 0$

Πίνακας 5.2. Οριακές συνθήκες και δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας

Σημειώνουμε ότι για το στοιχείο MZC το οποίο φέρει 3 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο, ισχύουν οι 3 πρώτοι όροι βαθμών ελευθερίας του Πίνακα 5.2 για κάθε είδος στήριξης, δεν έχουμε δηλαδή τον όρο $\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}$.

5.3 Πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της

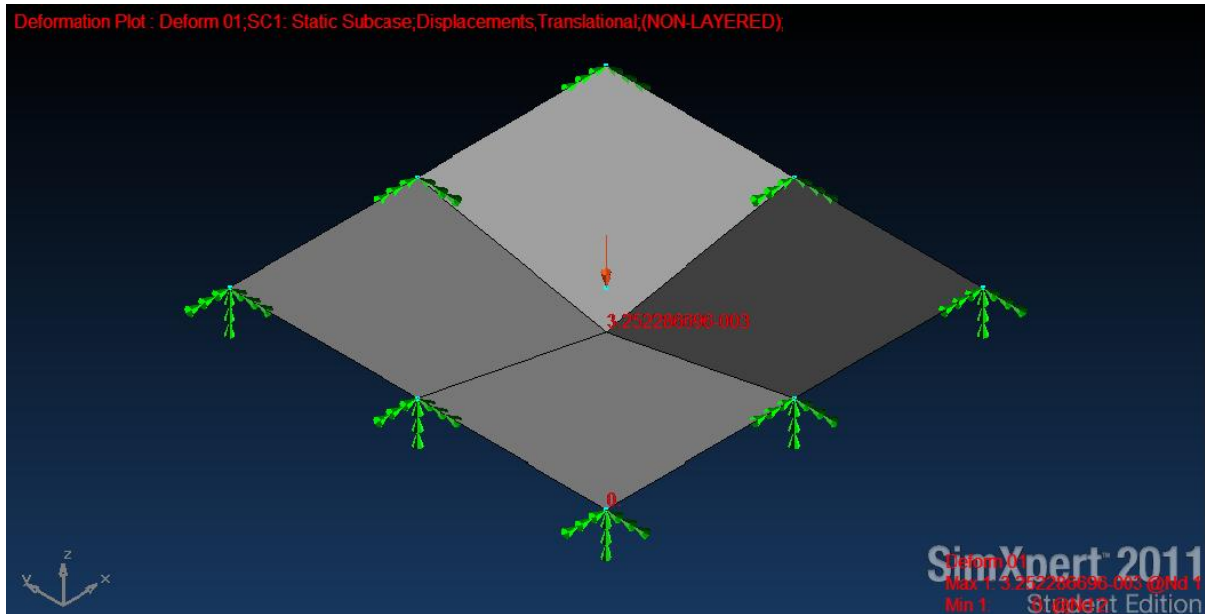
Η πρώτη περίπτωση που εξετάζουμε αφορά σε πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της. Το πρόβλημα αυτό έχει δύο άξονες συμμετρίας και θα μπορούσε να επιλυθεί επιμέρους (επίλυση του $\frac{1}{4}$ της πλάκας) για λόγους όμως διευκόλυνσης στον προγραμματισμό, αλλά λόγω του γεγονότος ότι η πλάκα αποτελείται από ανισοτροπικό υλικό, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει πάντα συμμετρία ως προς τις ιδιότητες του υλικού, επιλύεται συνολικά και όχι επιμέρους. Επίσης, σε ενδεχόμενη δυναμική καταπόνηση αυτή η συμμετρία δεν θα ίσχυε. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη αλλά και το γεγονός ότι η εφαρμογή συγκεντρωμένου φορτίου στο κέντρο της πλάκας προϋποθέτει την ύπαρξη αντίστοιχου κόμβου τα πλέγματα που δημιουργήσαμε είναι πολλαπλάσια του 2 όπως είδαμε στα σχήματα 5.3 και 5.4.



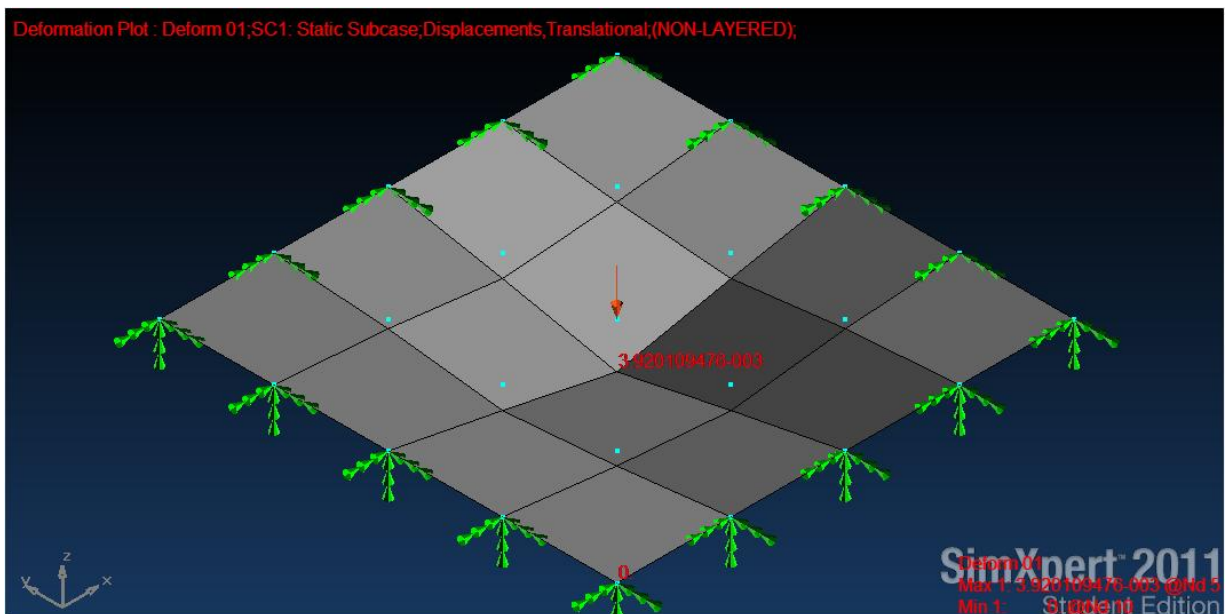
Σχήμα 5.5. Πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της.

Λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων που περιγράφουν την συμπεριφορά μιας πολυστρωματικής πλάκας αποτελούμενη από ανισοτροπικές στρώσεις, πρακτικά δεν είναι δυνατή η αναλυτική επίλυση τους, ούτως ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους με αυτά του κώδικα που έχουμε δημιουργήσει. Για τον λόγο αυτό δημιουργήσαμε ένα πανομοιότυπο μοντέλο σε ένα αξιόπιστο έτοιμο εμπορικό πακέτο (SimXpert 2010 Student Edition) λαμβάνοντας τις ίδιες παραμέτρους με αυτές του κώδικα που προγραμματίσαμε (παρουσιάζεται αναλυτικά στο Παράρτημα Β). Συγκεκριμένα οι υπολογισμοί έγιναν με το στοιχείο CQUAD4 το οποίο είναι γραμμικό τετρακομβικό

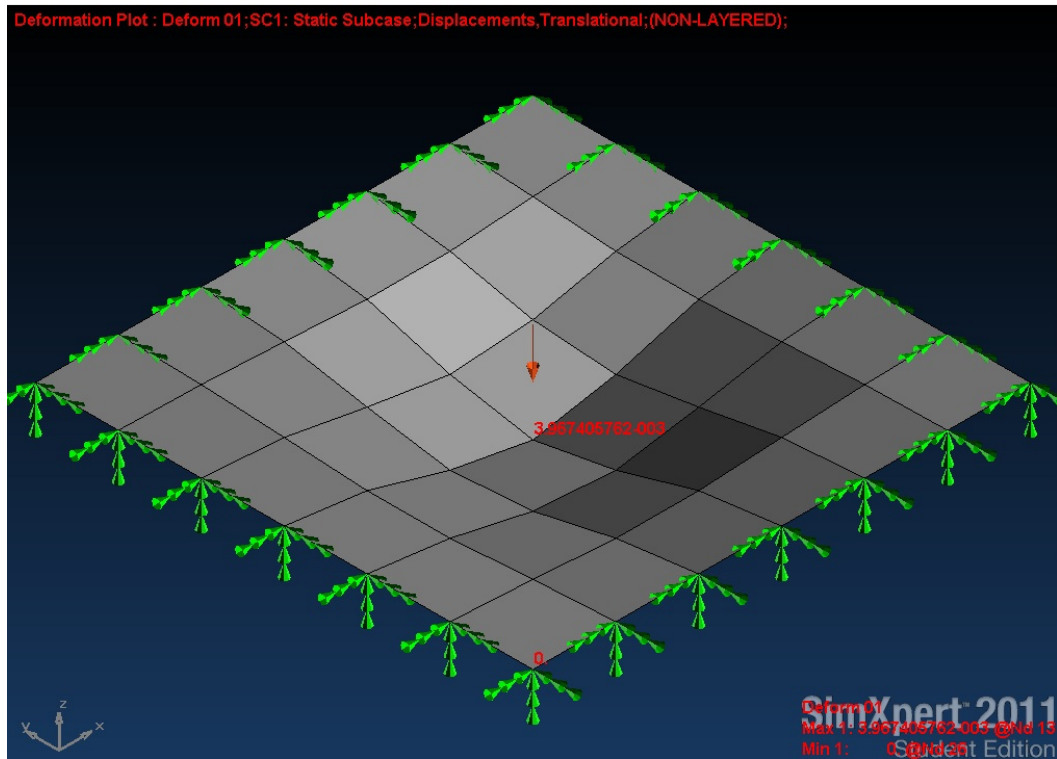
ισοπαραμετρικό στοιχείο πλάκας με 6 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο και κατάλληλο για ανισοτροπικό υλικό. Στην συνέχεια παρατίθενται σχηματικά οι επιλύσεις για κάθε πλέγμα όπως τις εξάγαμε από το SimXpert. Στον πίνακα 5.3 βρίσκονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κώδικα για κάθε στοιχείο αλλά και του έτοιμου πακέτου. Επίσης στον πίνακα 5.4 παραθέτουμε την διακύμανση του απολύτου σφάλματος των 3 στοιχείων σε σχέση με την ακριβή λύση από το εμπορικό πακέτο, η οποία παρουσιάζεται για πλέγμα 60 x 60 (δεν παρουσιάζεται περαιτέρω σύγκλιση για πυκνότερο πλέγμα).



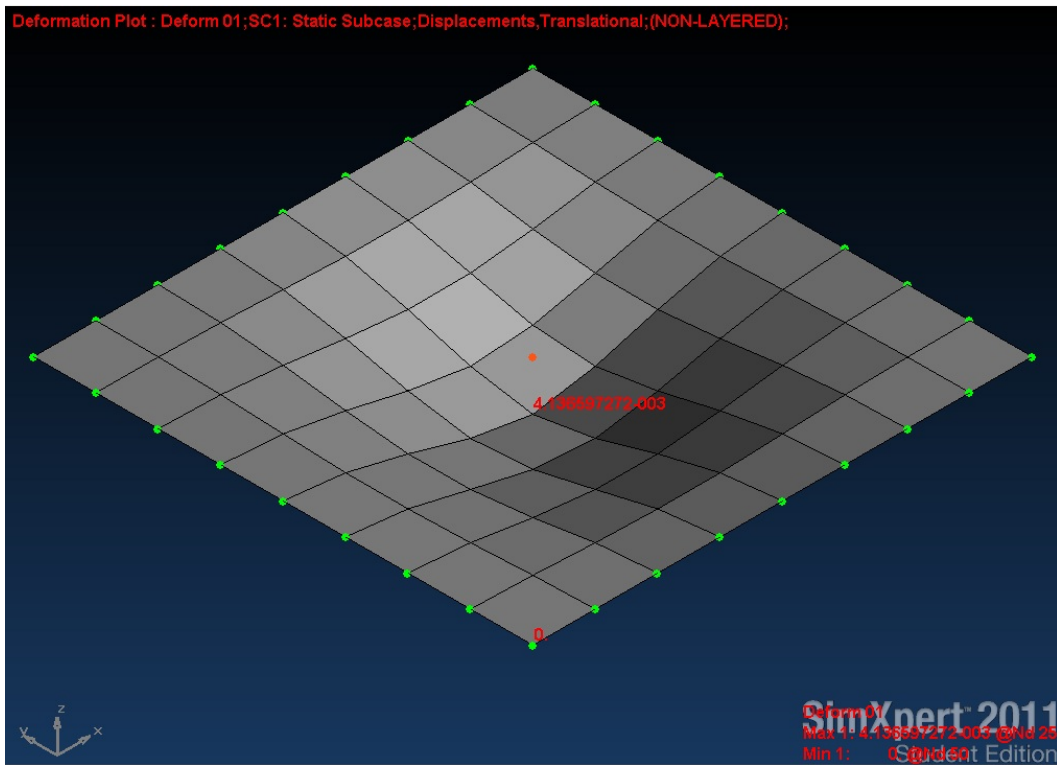
Σχήμα 5.6. Πλέγμα 2 x 2, παραμορφωμένο σχήμα.



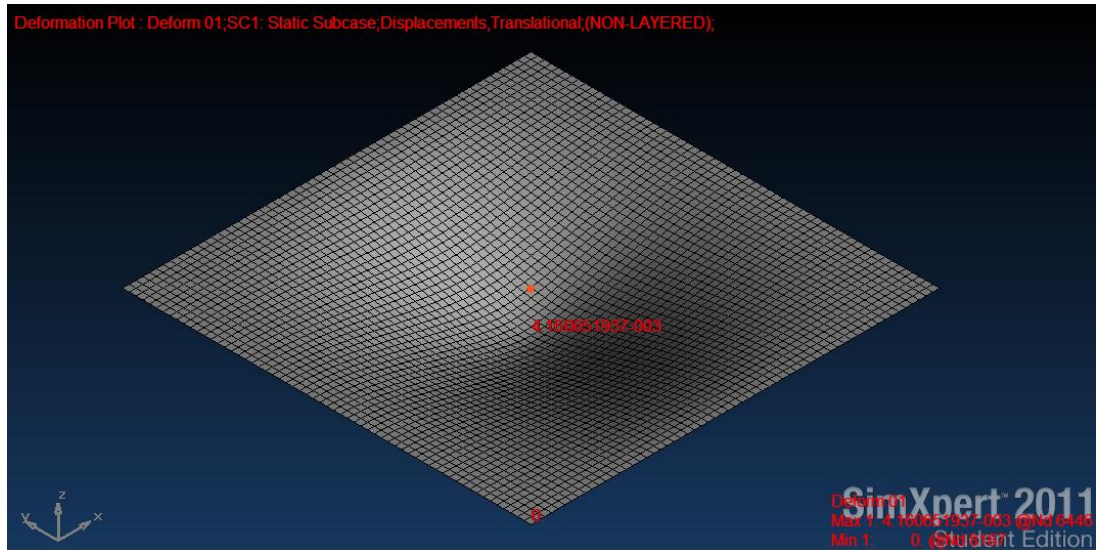
Σχήμα 5.7. Πλέγμα 4 x 4, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.8. Πλέγμα 6 x 6, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.9. Πλέγμα 8 x 8, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.10. Πλέγμα 60 x 60, παραμορφωμένο σχήμα.

Πλέγμα	Βέλος Κάμψης			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	SimXpert 2010 Student Edition
2 x 2 (Κόμβος 5)	0,0036888270	0,0035042620	0,0032269810	0,003252287
4 x 4 (Κόμβος 13)	0,0046107870	0,0040651700	0,0039775260	0,003920109
6 x 6 (Κόμβος 25)	0,0044916450	0,0041543310	0,0041179380	0,004074058
8 x 8 (Κόμβος 41)	0,0043749730	0,0041852530	0,0041665150	0,004136597
60 x 60 (Κόμβος 121)				0,0041606500
$\text{Σχετικές Αποκλίσεις } \%, f\% = \frac{ f_{SIMXPRT} - f_{MZC,BFS,MACRO} }{f_{SIMXPRT}} \cdot 100$				
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	
2 x 2 (Κόμβος 5)	13,42	7,75	0,78	
4 x 4 (Κόμβος 13)	17,62	3,70	1,46	
6 x 6 (Κόμβος 25)	10,25	1,97	1,08	
8 x 8 (Κόμβος 41)	5,76	1,18	0,72	

Πίνακας 5.3. Καταγραφή βέλους κάμψης σε πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της και οι σχετικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων σε σχέση με το SimXpert.

$\text{Απόλυτες Αποκλίσεις } \%, f\% = \frac{f_{SIMXPert(60 \times 60)} - f_{MZC,BFS,MACRO}}{f_{SIMXPert}} \cdot 100$			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons
2 x 2 (Κόμβος 5)	11,34	8,78	4,44
4 x 4 (Κόμβος 13)	10,82	2,29	2,40
6 x 6 (Κόμβος 25)	7,96	0,75	0,63
8 x 8 (Κόμβος 41)	5,15	0,49	0,14

Πίνακας 5.4. Απόλυτες αποκλίσεις σε σχέση με την ακριβή λύση του SimXpert.

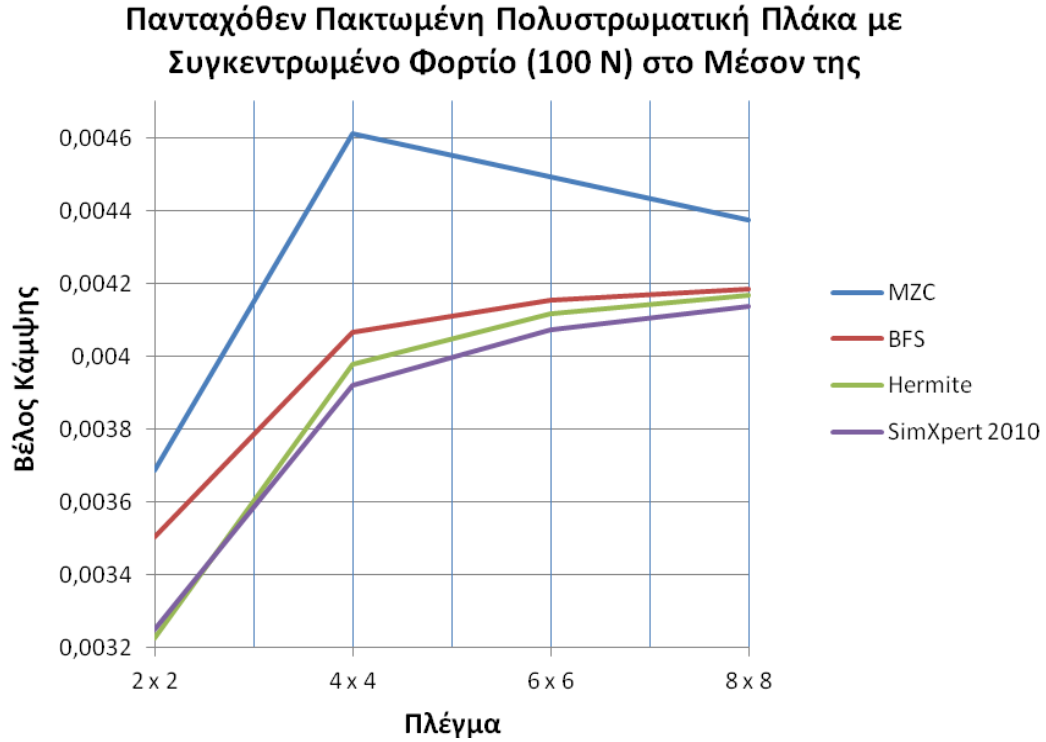
Τα αποτελέσματα που αναγράφονται στον πίνακα 5.3, αλλά και στους αντίστοιχους επόμενους πίνακες αποτελεσμάτων, αναφέρονται στο μέγιστο βέλος κάμψης (κατά την z – διεύθυνση) που παρουσιάζεται στο κέντρο της πλάκας στον κεντρικό της κόμβο. Στο ακόλουθο σχήμα (Σχ. 5.11) απεικονίζεται γραφικά η διαδικασία σύγκλισης για κάθε στοιχείο (βάσει των αποτελεσμάτων του Πίνακα 5.3) σε συνάρτηση με την μεταβολή στην πυκνότητα του πλέγματος. Μέσα από το σχήμα 5.11 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα αποτελέσματα του μακροστοιχείου Coons βρίσκονται πλησιέστερα στην επίλυση του εμπορικού πακέτου σε σχέση με το στοιχείο BFS και πολύ περισσότερο σε σχέση με το στοιχείο MZC του οποίου τα αποτελέσματα δεν κρίνονται ιδιαίτερα ικανοποιητικά. Επίσης μπορούμε να διαπιστώσουμε για το μακροστοιχείο ότι ήδη για 6 διαμερίσεις ανά πλευρά έχουμε πολύ ικανοποιητική σύγκλιση.

Η συμπεριφορά των στοιχείων μπορεί να αποτυπωθεί και αριθμητικά υπό την μορφή σχετικής απόκλισης ως προς τα αποτελέσματα του SimXpert το οποίο έχουμε και σαν σημείο αναφοράς για τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων του κώδικα. Η σχετική αυτή

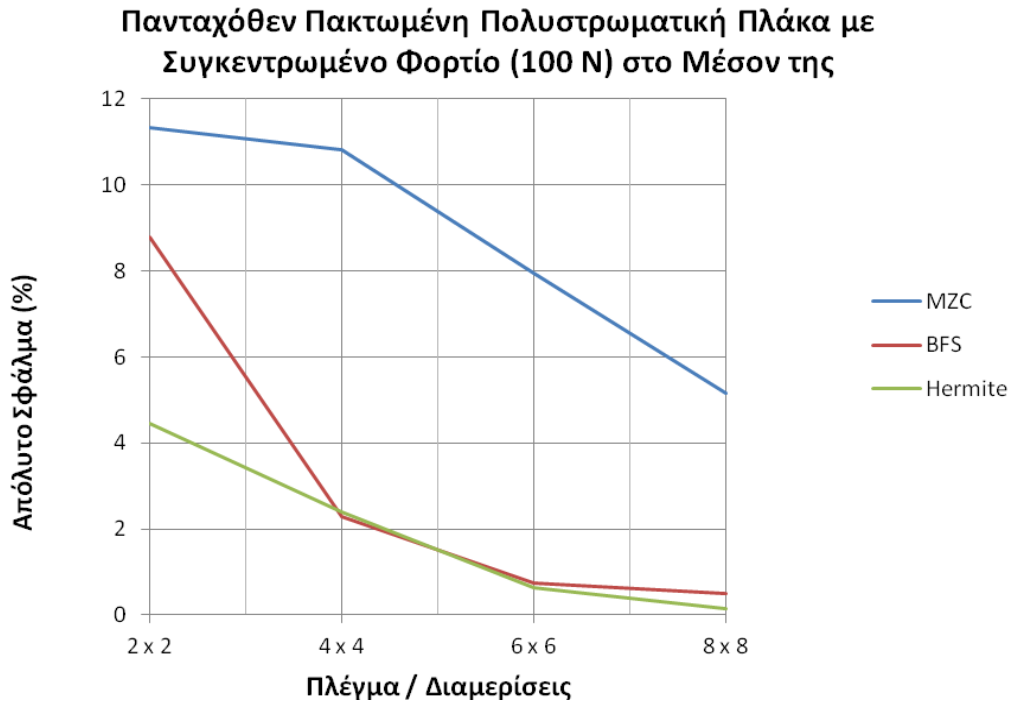
απόκλιση ορίζεται από την σχέση: $f\% = \frac{f_{SIMXPert} - f_{MZC,BFS,MACRO}}{f_{SIMXPert}} \cdot 100$, και πρέπει να

σημειωθεί ότι το αποδεκτό σφάλμα στις αναλύσεις των μηχανικών πρέπει να είναι κατά κανόνα μικρότερο του 3%. Όπως αναφέραμε νωρίτερα η συμπεριφορά του στοιχείου MZC δεν κρίνεται ικανοποιητική και αυτό αποδεικνύεται και μέσα από το εύρος του σχετικού σφάλματος των αποτελεσμάτων του που κυμαίνεται από 5 έως 13 %. Αντίθετα για το στοιχείο BFS η τιμή του σχετικού σφάλματός του μετά το πλέγμα 4 x 4 βρίσκεται εντός του ορίου αποδοχής (3,7%) και για τα πλέγματα 6 x 6 και 8 x 8 τα αποτελέσματα είναι θετικότερα μιας και έχουμε τιμές 1,97% και 1,17% αντίστοιχα. Ακόμα πιο ενθαρρυντικά είναι τα αποτελέσματα του μακροστοιχείου Coons. Η σχετική απόκλιση τους κυμαίνεται από 0,723% έως 1,46% για τις αντίστοιχες διαμερίσεις και είναι σαφώς αποδεκτά.

Προκειμένου όμως να έχουμε καθολικότερη αποδοχή των αποτελεσμάτων συγκρίναμε τα αποτελέσματα των τριών στοιχείων με την ακριβή λύση του SimXpert η οποία παρουσιάζεται για πλέγμα 60 x 60 και καταγράψαμε το απόλυτο σφάλμα – το οποίο υπολογίζεται από την ίδια σχέση με αυτήν της σχετικής απόκλισης με μόνη διαφορά ότι η τιμή αναφοράς είναι εκείνη του SimXpert για πλέγμα 60 x 60 – όπως φαίνεται στον πίνακα 5.4 και στο σχήμα 5.12. Τα αποτελέσματα είναι πάλι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά.



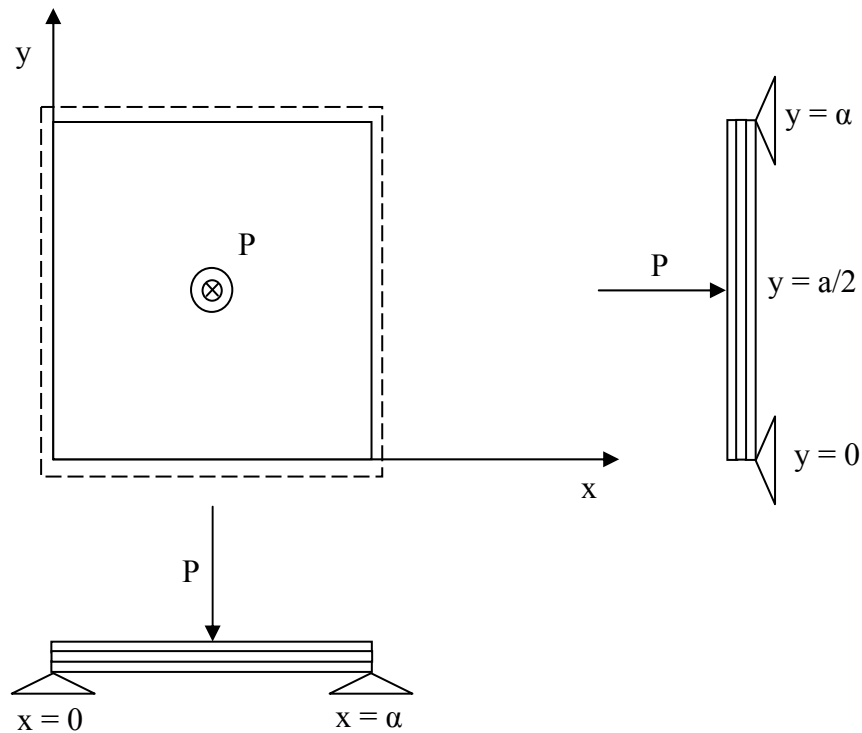
Σχήμα 5.11. Γραφική απεικόνιση αποτελεσμάτων σε συνάρτηση του πλήθους των στοιχείων, για τα στοιχεία MZC & BFS, και των αντίστοιχων διαμερίσεων για το μακροστοιχείο.



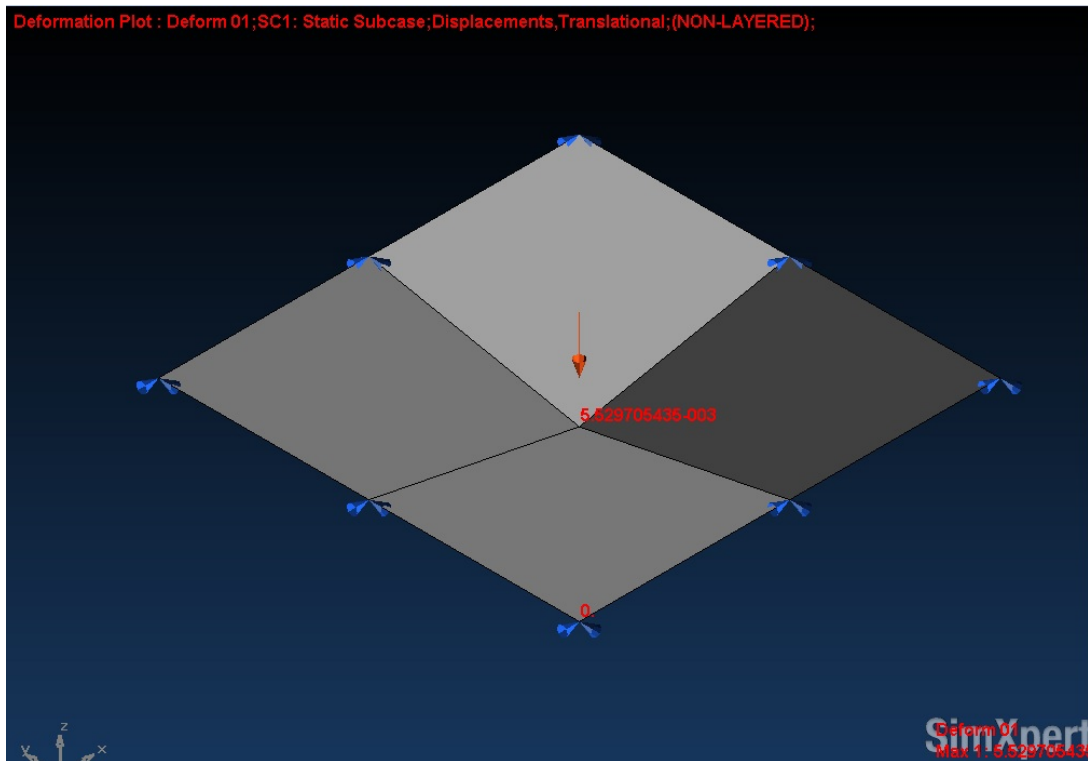
Σχήμα 5.12. Απεικόνιση απόλυτου σφάλματος συναρτήσει των διαμερίσεων ανά πλευρά.

5.4 Πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της

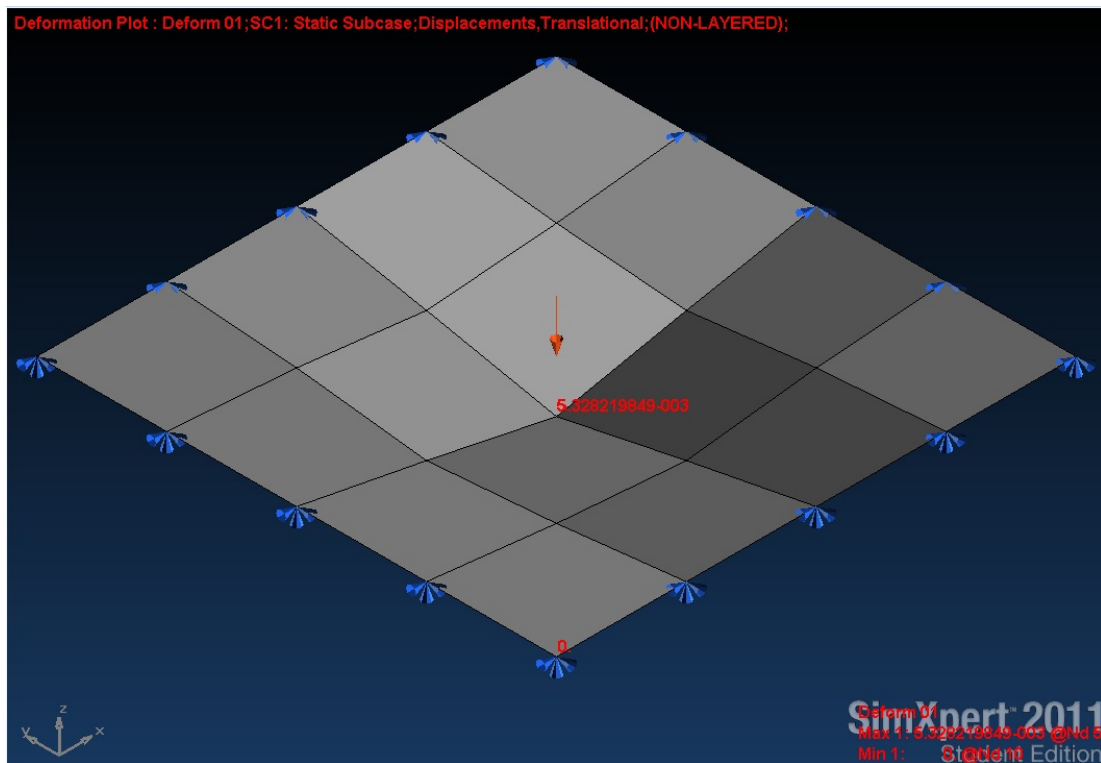
Η δεύτερη περίπτωση που εξετάσαμε αφορά στην κάμψη πανταχόθεν εδρασμένης πολυστρωματικής πλάκας με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της. Όπως και προηγουμένως το πρόβλημα αυτό έχει δύο άξονες συμμετρίας και η επίλυσή του γίνεται με το ίδιο πλήθος στοιχείων και διαμερίσεων με την προηγούμενη περίπτωση. Εν αντιθέσει με την περίπτωση της πακτωμένης πλάκας εδώ έχουμε δεσμευμένο έναν βαθμό ελευθερίας λιγότερο ανά κόμβο οποίος είναι ο $\frac{\partial w_i}{\partial y}$.



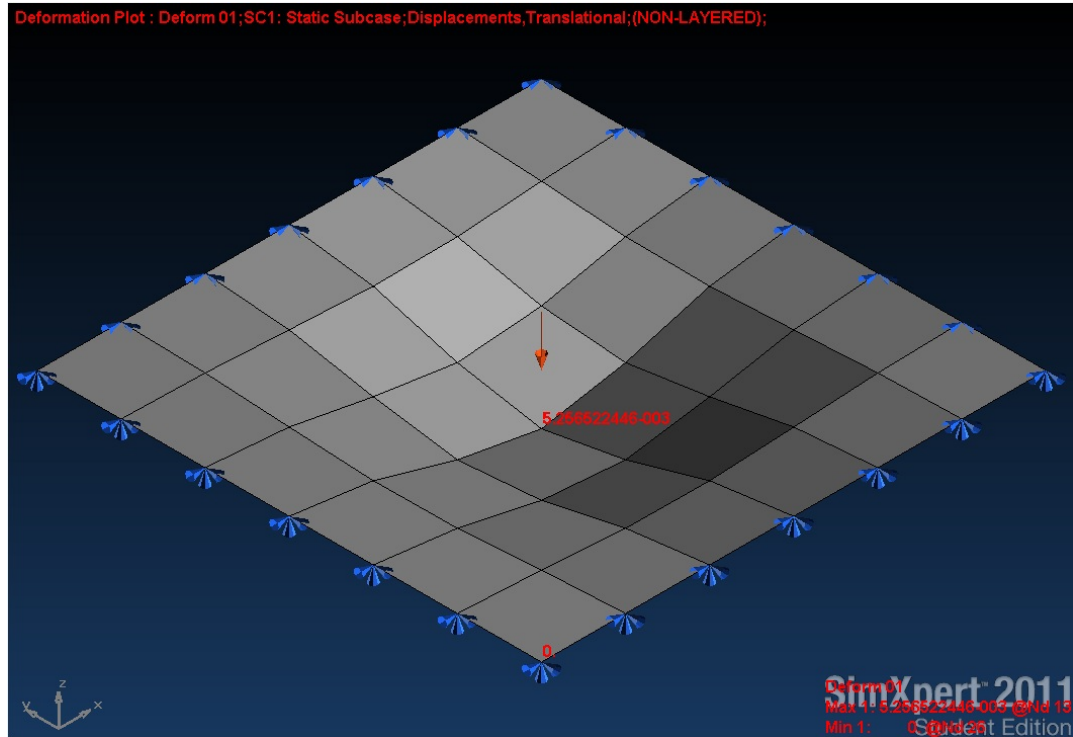
Σχήμα 5.13. Πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της.



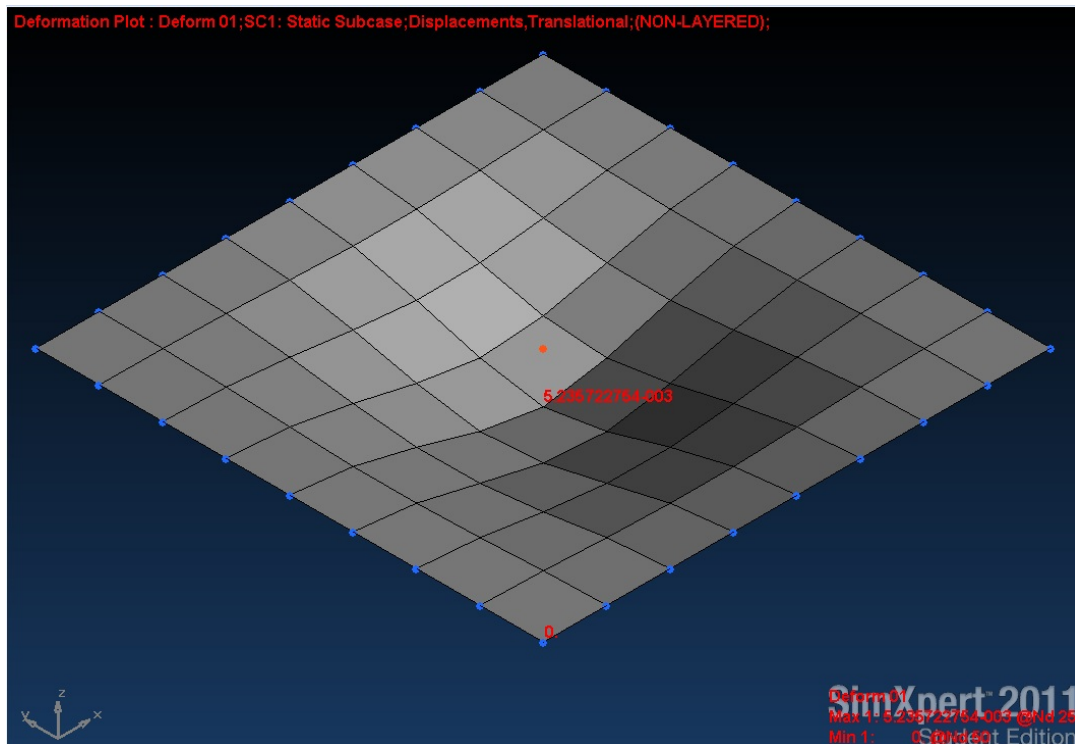
Σχήμα 5.14. Πλέγμα 2 x 2, παραμορφωμένο σχήμα.



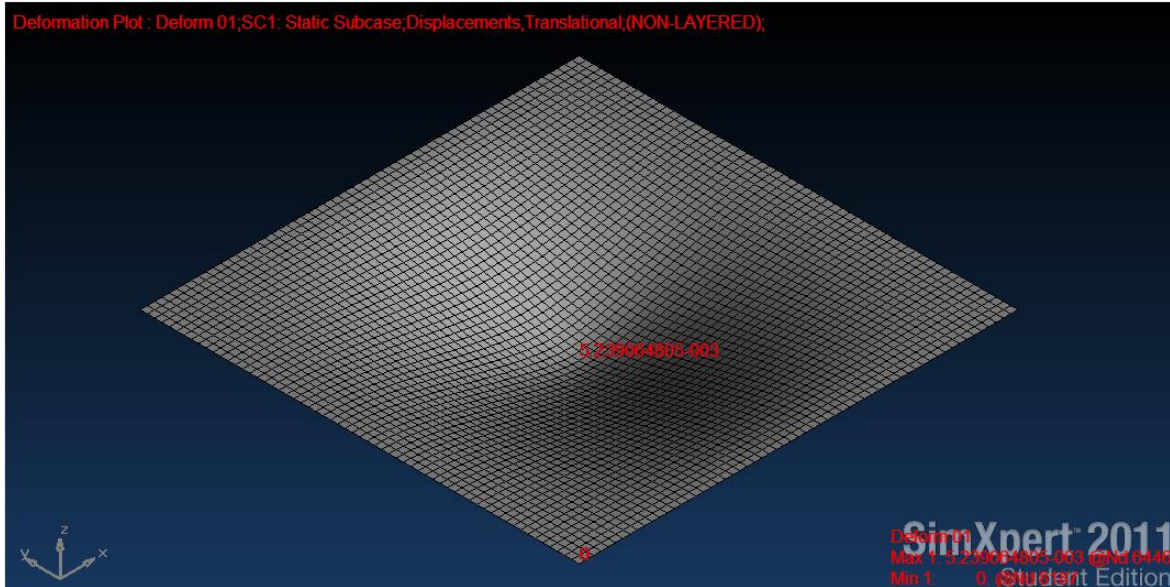
Σχήμα 5.15. Πλέγμα 4 x 4, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.16. Πλέγμα 6 x 6, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.17. Πλέγμα 8 x 8, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.18. Πλέγμα 60 x 60, παραμορφωμένο σχήμα.

Πλέγμα	Βέλος Κάμψης			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	SimXpert 2010 Student Edition
2 x 2 (Κόμβος 5)	0,0055904840	0,0059325950	0,0055057480	0,0055297054
4 x 4 (Κόμβος 13)	0,0057405460	0,0053479010	0,0053107060	0,0053282198
6 x 6 (Κόμβος 25)	0,0055290620	0,0052943100	0,0052921810	0,0052865224
8 x 8 (Κόμβος 41)	0,0053861300	0,0052582230	0,0052451280	0,0052467248
60 x 60 (Κόμβος 121)				0,0052390000
$\text{Σχετικές Αποκλίσεις } \%, f\% = \frac{ f_{SIMXPRT} - f_{MZC,BFS,MACRO} }{f_{SIMXPRT}} \cdot 100$				
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	
2 x 2 (Κόμβος 5)	1,10	7,29	0,43	
4 x 4 (Κόμβος 13)	7,74	0,37	0,33	
6 x 6 (Κόμβος 25)	4,59	0,04	0,11	
8 x 8 (Κόμβος 41)	2,66	0,41	0,03	

Πίνακας 5.5. Καταγραφή βέλους κάμψης σε πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της και οι σχετικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων σε σχέση με το SimXpert.

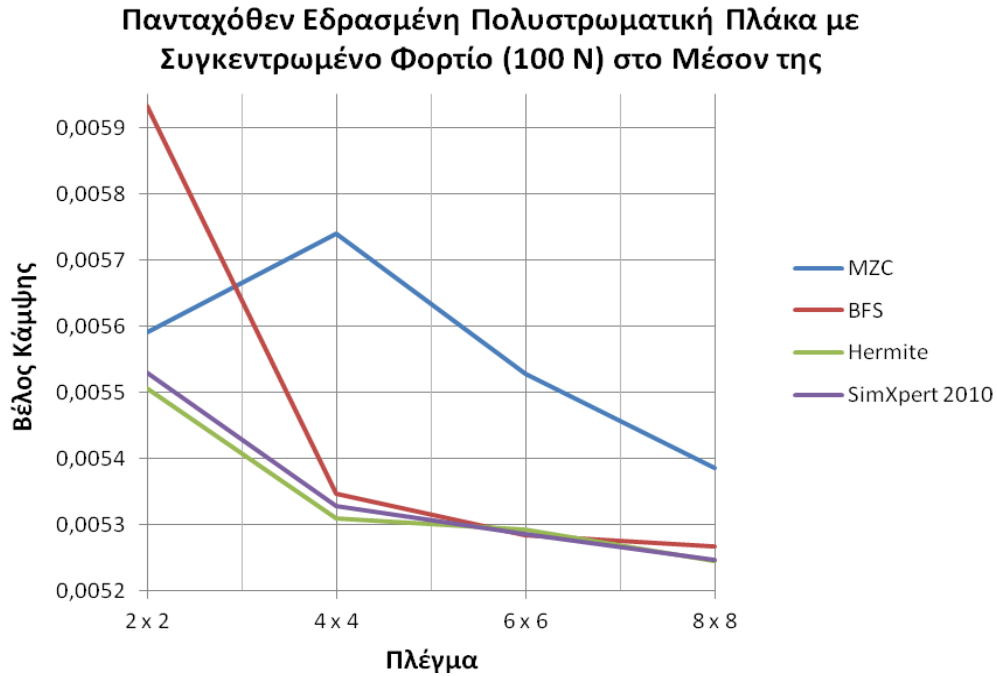
$\text{Απόλυτες Αποκλίσεις } \%, f\% = \frac{f_{SIMXPert(60 \times 60)} - f_{MZC,BFS,MACRO}}{f_{SIMXPert}} \cdot 100$			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons
2 x 2 (Κόμβος 5)	6,71	8,24	5,09
4 x 4 (Κόμβος 13)	9,57	2,08	1,37
6 x 6 (Κόμβος 25)	5,54	0,86	1,02
8 x 8 (Κόμβος 41)	2,81	0,56	0,12

Πίνακας 5.6. Απόλυτες αποκλίσεις σε σχέση με την ακριβή λύση του SimXpert.

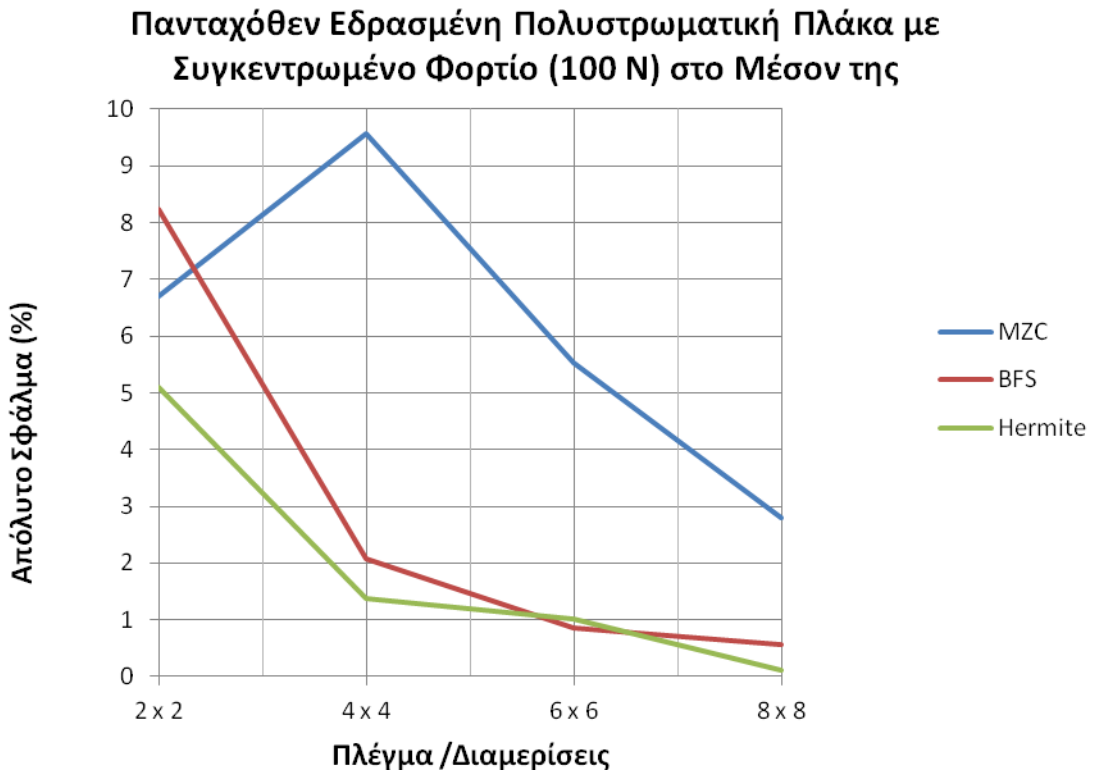
Τα αποτελέσματα της περίπτωσης αυτής αναγράφονται στον πίνακα 5.5 και απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 5.19. Μέσα από το σχήμα 5.19 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα αποτελέσματα του μακροστοιχείου Coons βρίσκονται πάλι πλησιέστερα στην επίλυση του εμπορικού πακέτου και συγκεκριμένα παρατηρούμε μια πολύ ομοιόμορφη σύγκλιση ακόμα και από τις 4 διαμερίσεις ανά πλευρά. Το στοιχείο BFS ενώ αρχικά για το πλέγμα 2 x 2 αποκλίνει σημαντικά από την επίλυση του SimXpert, στην συνέχεια η σύγκλιση του κρίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητική, εν αντιθέσει με το στοιχείο MZC το οποίο πάλι υστερεί ως προς την σύγκλιση σε σχέση με τα άλλα 3 στοιχεία εν τούτοις το εύρος της σχετικής απόκλισης του είναι αισθητά πιο περιορισμένο (1 – 7%).

Όπως και προηγουμένως η σχετική απόκλιση για το στοιχείο BFS κρίνεται πολύ ικανοποιητική αφού βρίσκεται κάτω του 1% για τα πλέγματα 4 x 4, 6 x 6 και 8 x 8. Εντυπωσιακή είναι και η συμπεριφορά του μακροστοιχείου Coons, η οποία χαρακτηρίζεται από σχετική απόκλιση μικρότερη του 0.5% για όλες τις διαμερίσεις. Αυτή η συμπεριφορά αποκτά μεγαλύτερη αξία αν αναλογιστούμε ότι αναφερόμαστε σε ένα μόνο στοιχείο.

Οι αντίστοιχες τιμές για την απόλυτη απόκλιση παρουσιάζονται στον πίνακα 5.6 και στο σχήμα 5.20.



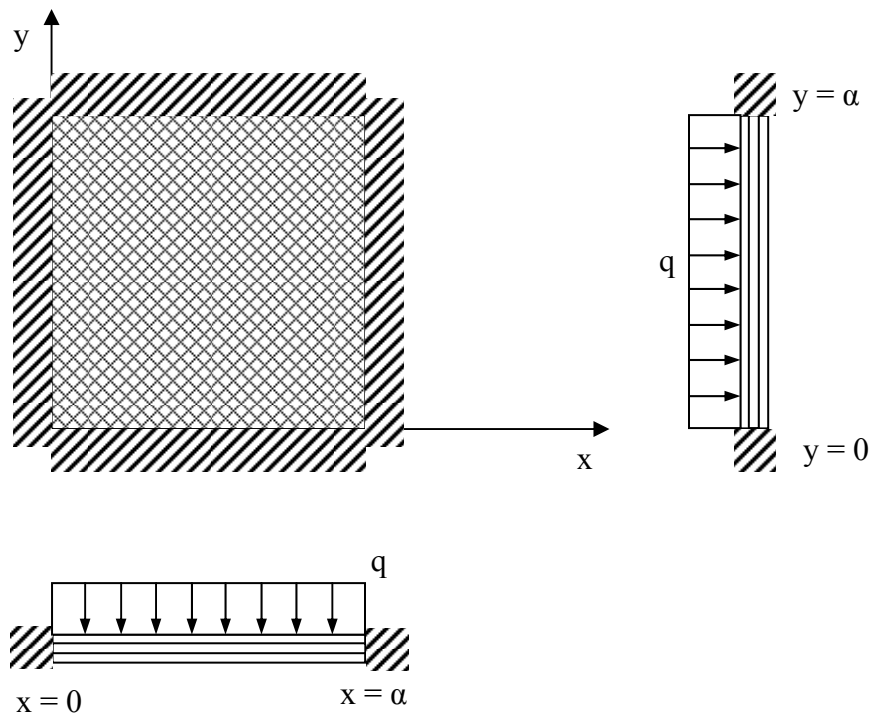
Σχήμα 5.19. Γραφική απεικόνιση αποτελεσμάτων σε συνάρτηση του πλήθους των στοιχείων, για τα στοιχεία MZC & BFS, και των αντίστοιχων διαμερίσεων για το μακροστοιχείο.



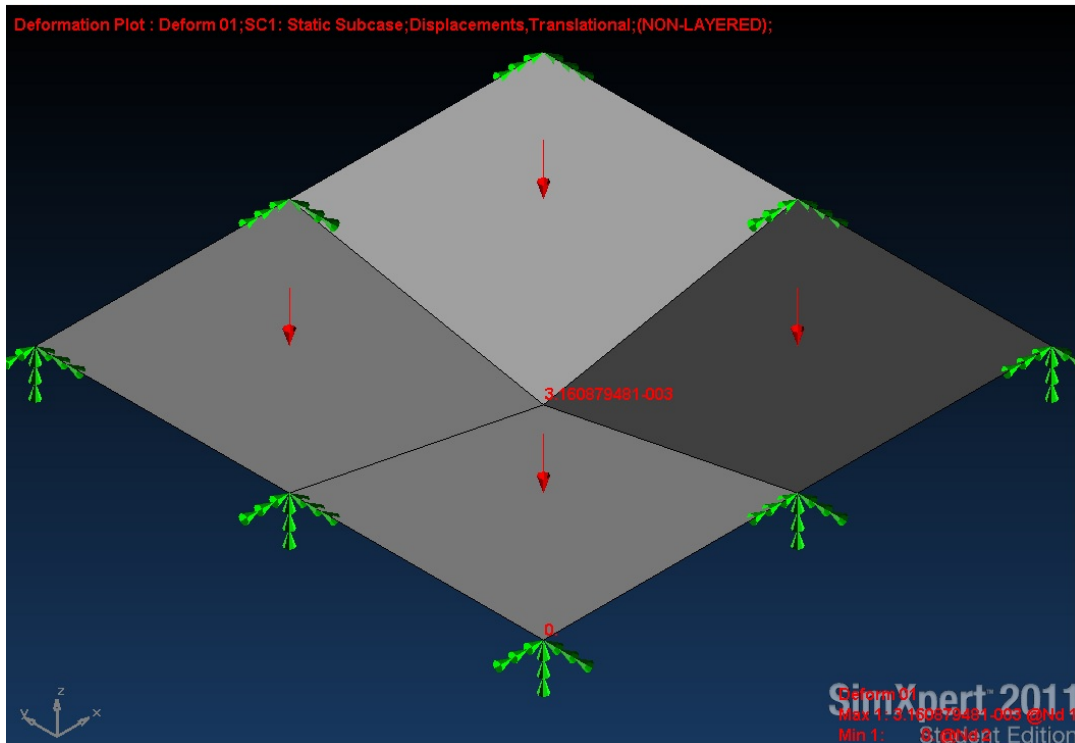
Σχήμα 5.20. Απεικόνιση απολύτου σφάλματος συναρτήσει των διαμερίσεων ανά πλευρά.

5.5 Πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της

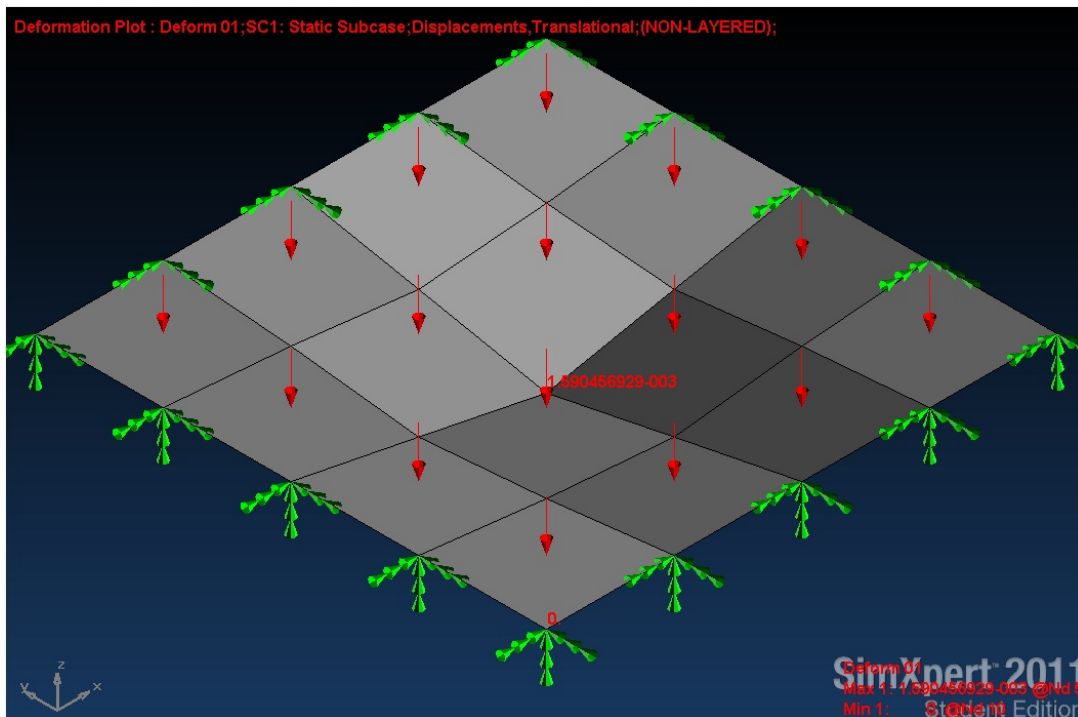
Στην περίπτωση αυτή έχουμε μεταβολή του τρόπου φόρτισης της πολυστρωματικής πλάκας, από συγκεντρωμένο φορτίο σε ομοιόμορφα καταναμημένο. Η ιδιαιτερότητα αυτού του τρόπου φόρτισης έγκειται στο γεγονός ότι η συνισταμένη δύναμη πρέπει να καταναμηθεί ισομερώς στους κόμβους του πλέγματος (εξαιρουμένων εκείνων που φέρουν δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας λόγω οριακών συνθηκών). Μεταβάλλοντας το πλήθος των κόμβων του πλέγματος (και των διαμερίσεων ανά πλευρά για το μακροστοιχείο Coors αντίστοιχα) πρέπει να γίνει και η αντίστοιχη αναπροσαρμογή της κατανομής της φόρτισης στους κόμβους αυτούς.



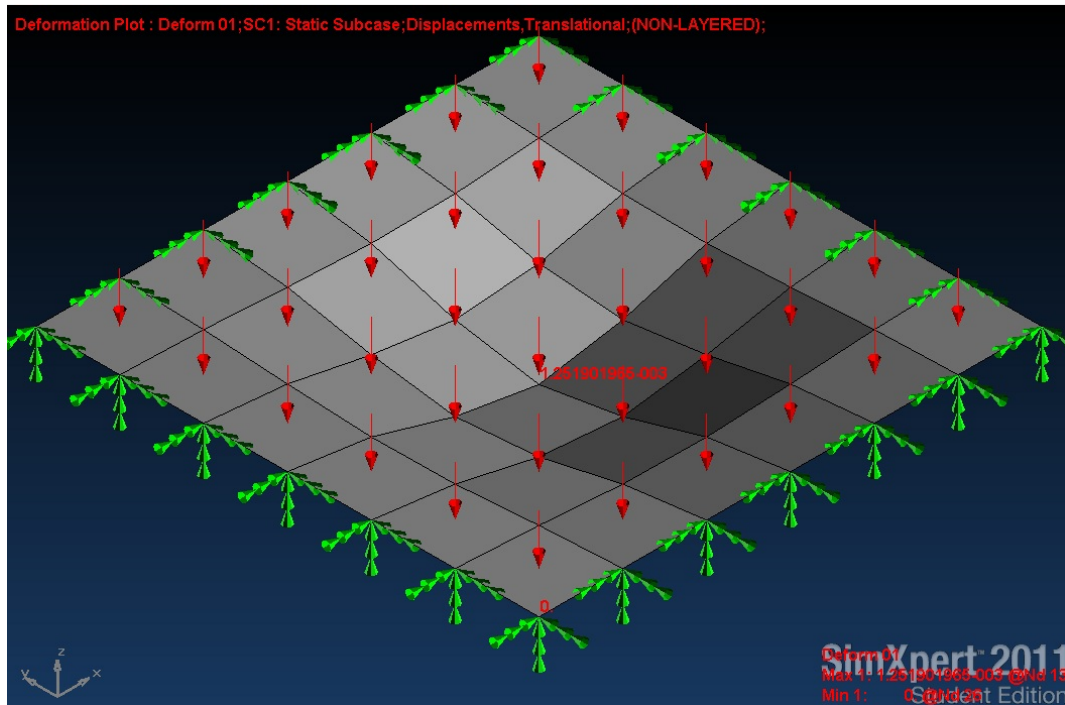
Σχήμα 5.21. Πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με καταναμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της.



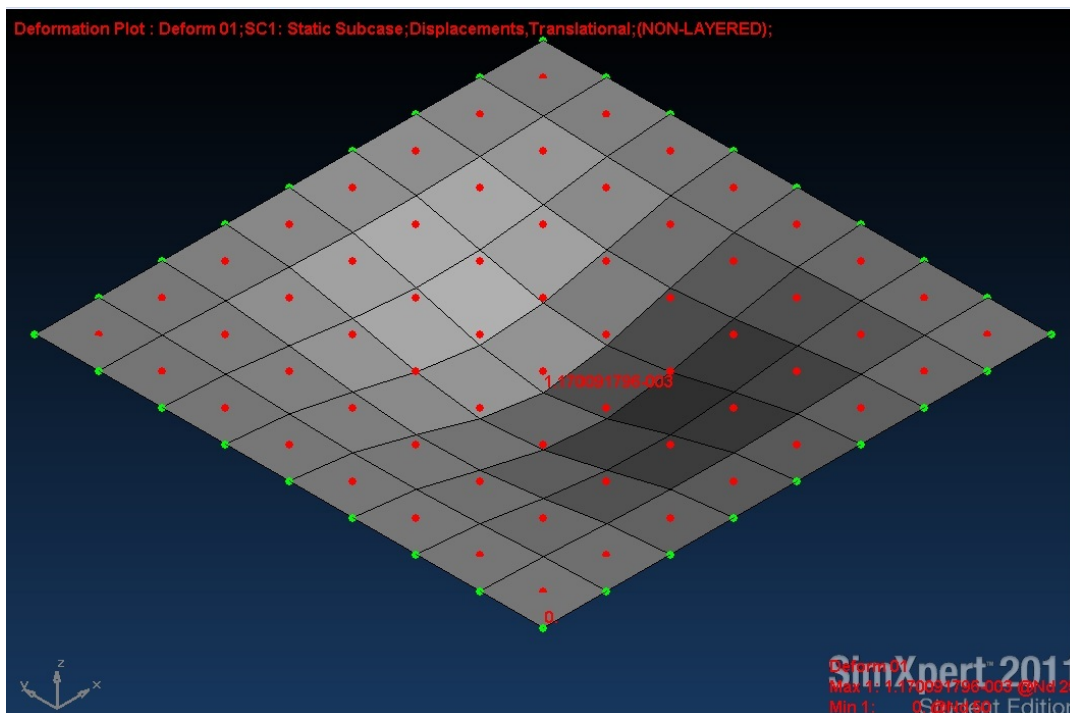
Σχήμα 5.22. Πλέγμα 2 x 2, παραμορφωμένο σχήμα.



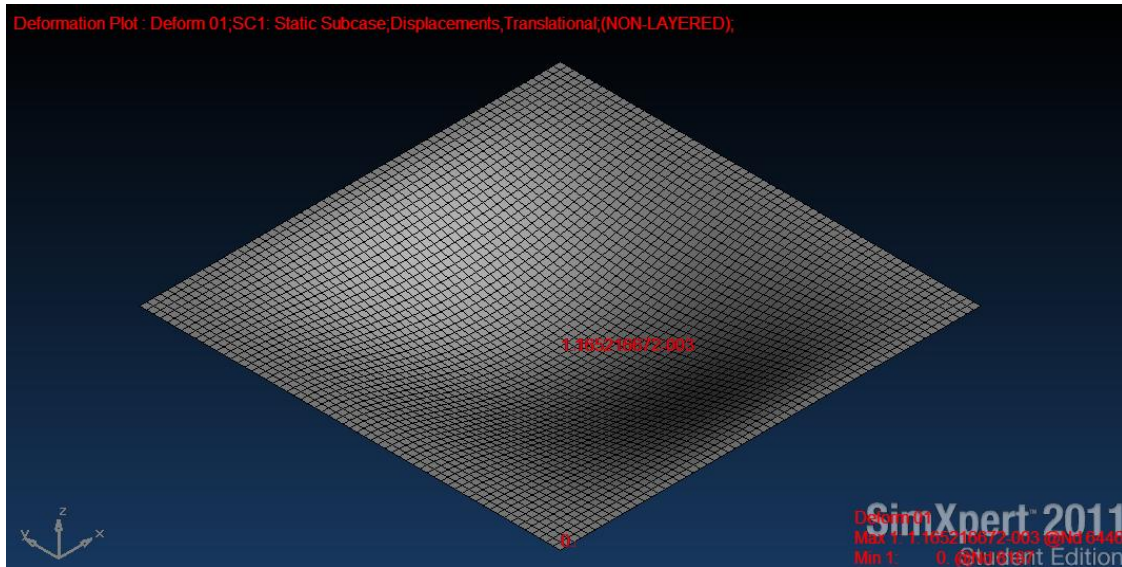
Σχήμα 5.23. Πλέγμα 4 x 4, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.24. Πλέγμα 6 x 6, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.25. Πλέγμα 8 x 8, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.26. Πλέγμα 60 x 60, παραμορφωμένο σχήμα.

Πλέγμα	Βέλος Κάμψης			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	SimXpert 2010 Student Edition
2 x 2 (Κόμβος 5)	0,0036888270	0,0035042620	0,0032269810	0,0031608795
4 x 4 (Κόμβος 13)	0,0017764550	0,0015801340	0,0015781220	0,0015904569
6 x 6 (Κόμβος 25)	0,0013678580	0,0012860270	0,0012879700	0,0012790197
8 x 8 (Κόμβος 41)	0,0012045860	0,0011680640	0,0011690590	0,0011700018
60 x 60 (Κόμβος 121)				0,0011652000
$\text{Σχετικές Αποκλίσεις } \%, f\% = \frac{ f_{SIMXPRT} - f_{MZC,BFS,MACRO} }{f_{SIMXPRT}} \cdot 100$				
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	
2 x 2 (Κόμβος 5)	16,70	10,86	2,09	
4 x 4 (Κόμβος 13)	11,69	0,65	0,78	
6 x 6 (Κόμβος 25)	6,95	0,55	0,70	
8 x 8 (Κόμβος 41)	2,96	0,17	0,08	

Πίνακας 5.7. Καταγραφή βέλους κάμψης σε πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με μοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και οι σχετικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων σε σχέση με το SimXpert.

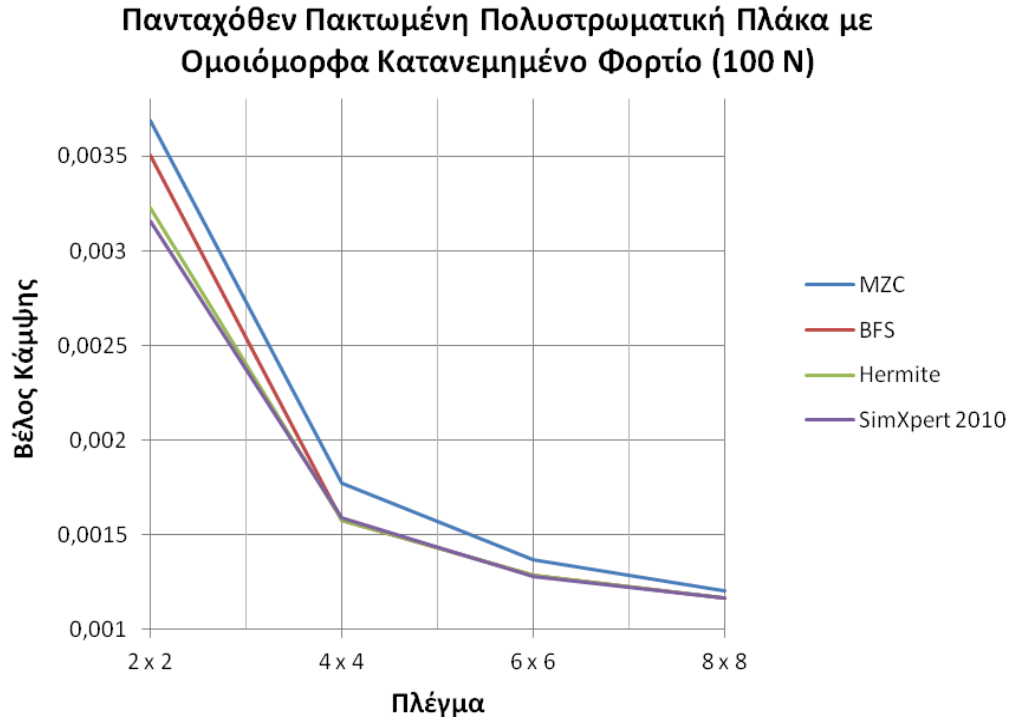
$\text{Απόλυτες Αποκλίσεις \%}, f\% = \frac{ f_{SIMXPert(60 \times 60)} - f_{MZC,BFS,MACRO} }{f_{SIMXPert}} \cdot 100$			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons
2 x 2 (Κόμβος 5)	10,83	10,04	8,85
4 x 4 (Κόμβος 13)	5,25	3,56	3,54
6 x 6 (Κόμβος 25)	1,74	1,04	1,05
8 x 8 (Κόμβος 41)	1,38	0,25	0,33

Πίνακας 5.8. Απόλυτες αποκλίσεις σε σχέση με την ακριβή λύση του SimXpert.

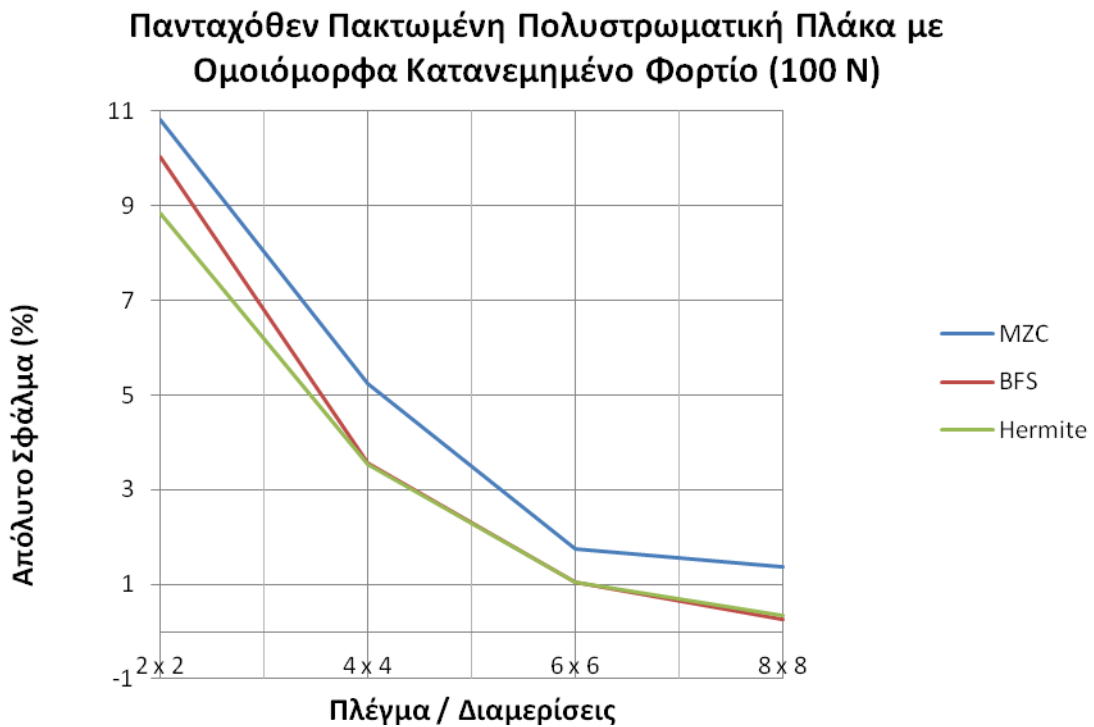
Τα αποτελέσματα της περίπτωσης κατανεμημένης φόρτισης αναγράφονται στον πίνακα 5.7 και απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 5.27. Παρατηρώντας το σχήμα 5.27 διαπιστώνουμε εν γένει μια ομαλότητα ως προς την σύγκλιση των αποτελεσμάτων, εν τούτοις πάλι το στοιχείο MZC είναι εκείνο το οποίο παρουσιάζει σύγκλιση με πιο αργό ρυθμό. Το στοιχείο BFS παρουσιάζει πολύ καλή συμπεριφορά από το πλέγμα 4 x 4 και έπειτα ενώ πάλι για το πλέγμα 2 x 2 αποκλίνει (μη αποδεκτό αποτέλεσμα) σημαντικά από την επίλυση του SimXpert. Το μακροστοιχείο παρουσιάζει εξαιρετική (και αποδεκτή) σύγκλιση ακόμα και με 2 μόνο διαμερίσεις ανά πλευρά. Συγκεκριμένα για 2 διαμερίσεις ανά πλευρά παρουσιάζει σφάλμα 2,09123% ενώ για 4, 6 και 8 σημαντικά μικρότερο του 1%.

Για τα άλλα δύο στοιχεία παρατηρείται η σημαντική σχετική απόκλιση αποτελεσμάτων στο πλέγμα 2 x 2, η οποία όμως για το στοιχείο BFS διορθώνεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στα επόμενα πλέγματα, φέρνοντας πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και για το στοιχείο MZC του οποίου η απόκλιση ξεπερνά τα αποδεκτά όρια που έχουν τεθεί (μεγαλύτερη του 3%) εκτός από την περίπτωση πλέγματος 8 x 8 κατά την οποία βρίσκεται οριακά εντός του περιορισμού.

Στον πίνακα 5.8 και στο σχήμα 5.28 παρουσιάζονται οι τιμές του απόλυτου σφάλματος των τριών στοιχείων.



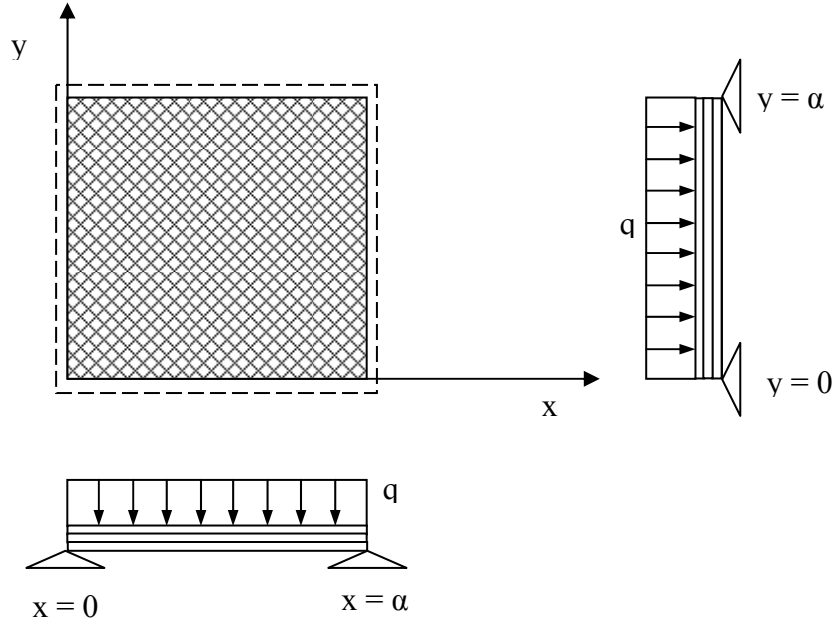
Σχήμα 5.27. Πανταχόθεν πακτωμένη πολυστρωματική πλάκα με κατανεμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της.



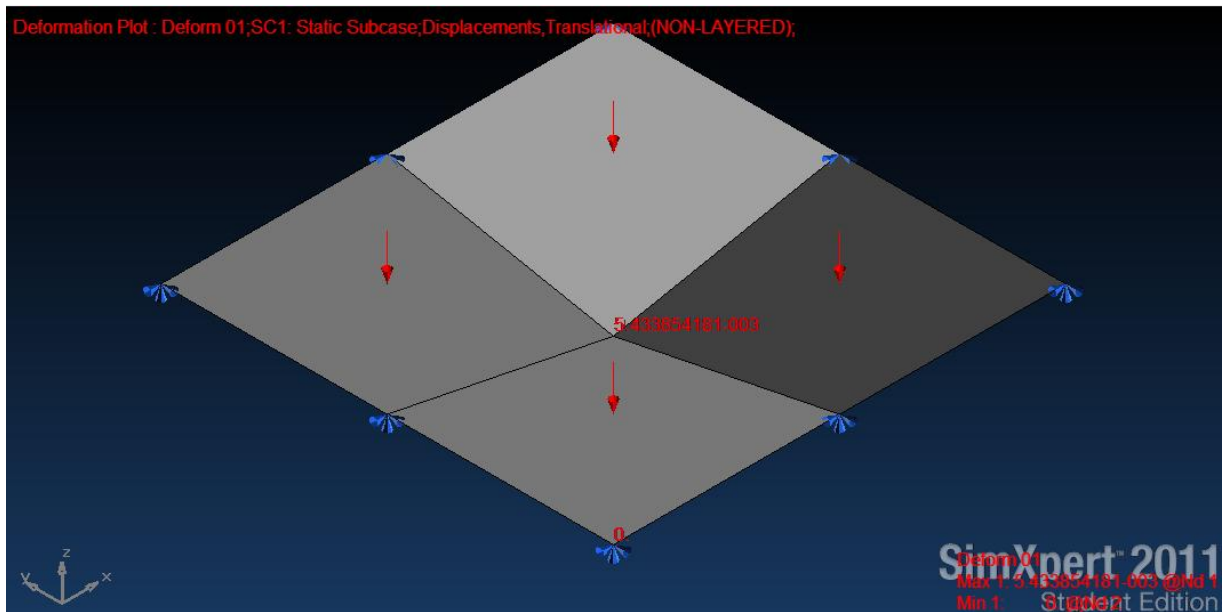
Σχήμα 5.28. Απεικόνιση απολύτου σφάλματος συναρτήσει των διαμερίσεων ανά πλευρά.

5.6 Πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της

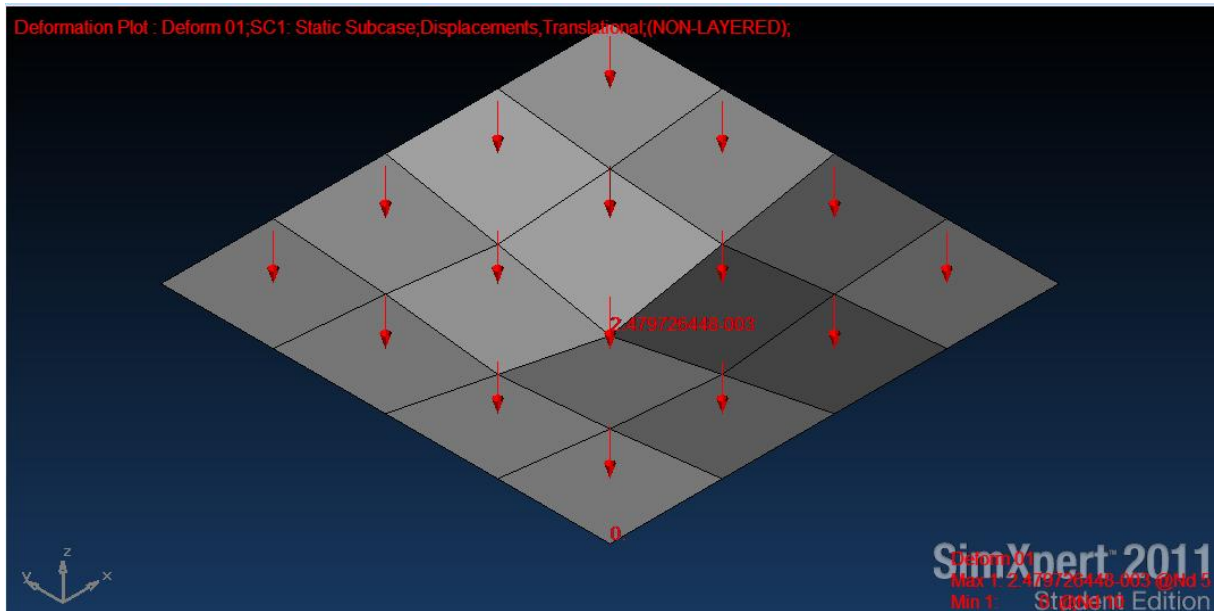
Η 4η περίπτωση που εξετάζουμε έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με την 3η με μοναδική διαφορά στις οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην πλάκα. Πλέον έχουμε πλήρως εδρασμένη πλάκα εν αντιθέσει με την πακτωμένη που εξετάσαμε πιο πριν.



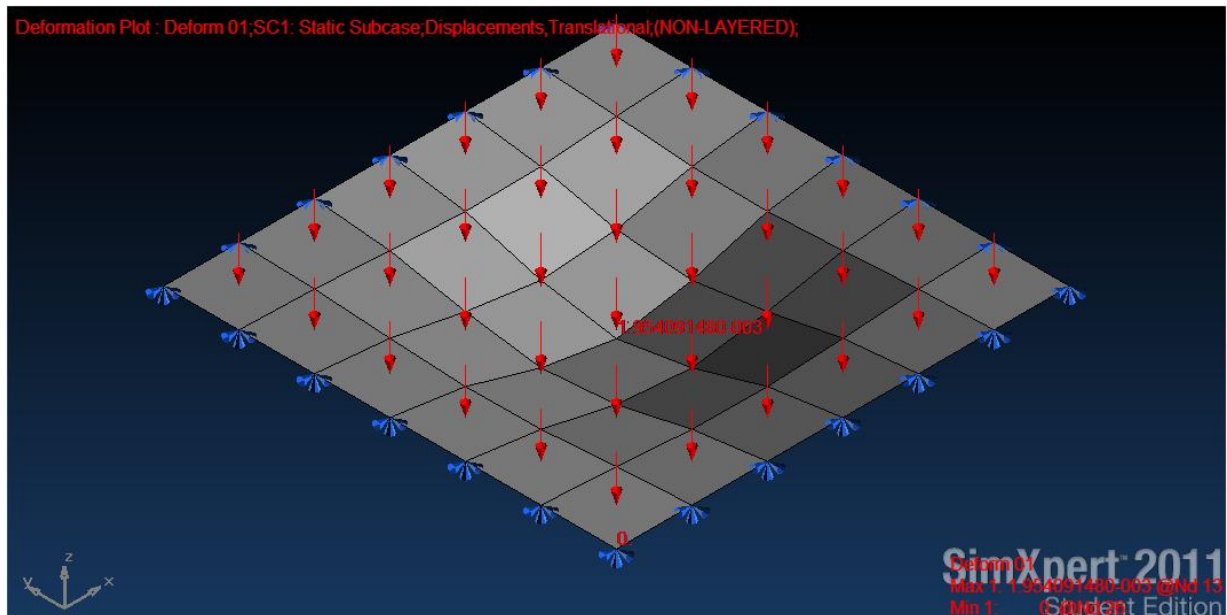
Σχήμα 5.29. Πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με κατανεμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της.



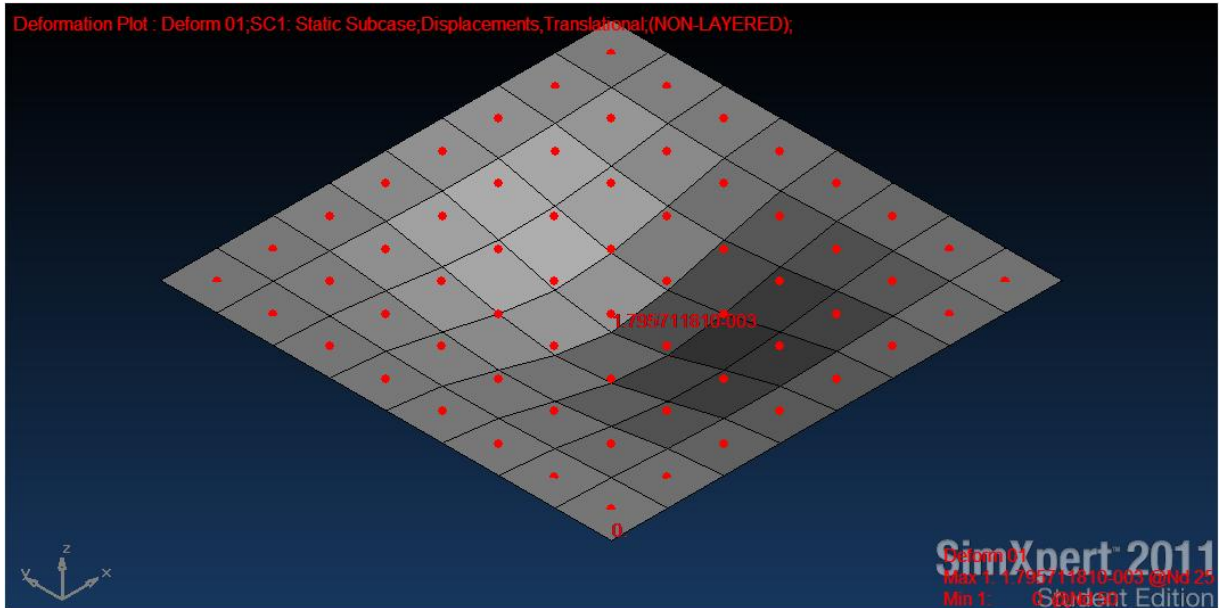
Σχήμα 5.30. Πλέγμα 2 x 2, παραμορφωμένο σχήμα.



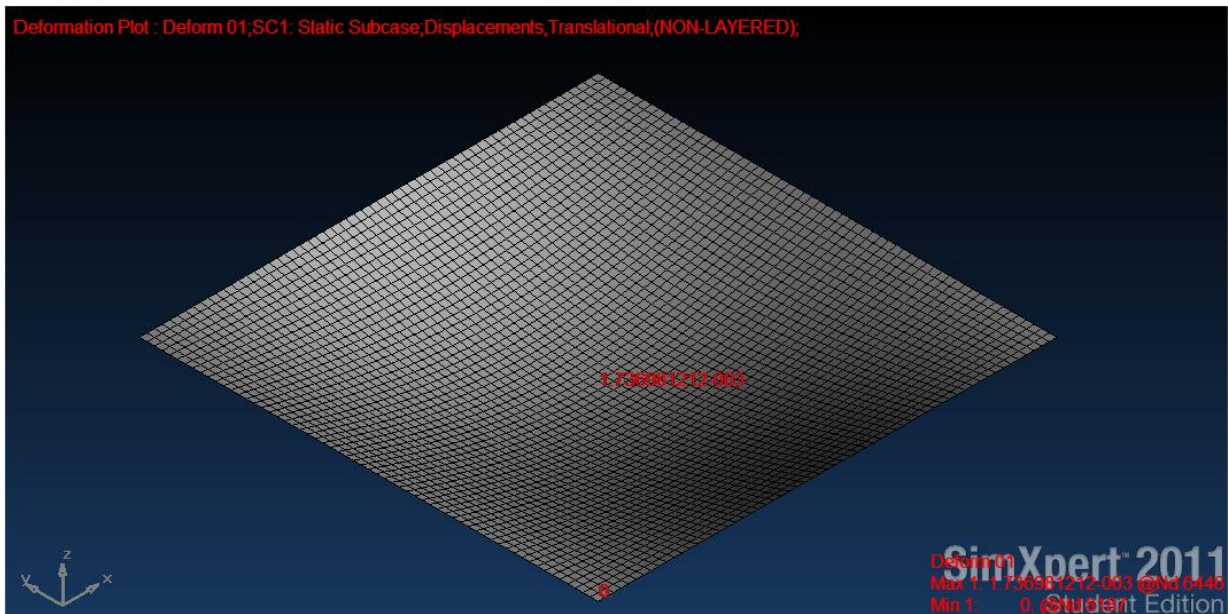
Σχήμα 5.31. Πλέγμα 4 x 4, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.32. Πλέγμα 6 x 6, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.32. Πλέγμα 8 x 8, παραμορφωμένο σχήμα.



Σχήμα 5.33. Πλέγμα 60 x 60, παραμορφωμένο σχήμα.

Πλέγμα	Βέλος Κάμψης			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	SimXpert 2010 Student Edition
2 x 2 (Κόμβος 5)	0,0055904840	0,0059325950	0,0055057480	0,0054338542
4 x 4 (Κόμβος 13)	0,0025756320	0,0024463950	0,0024607270	0,0024797264
6 x 6 (Κόμβος 25)	0,0020073590	0,0019531950	0,0019796220	0,0019682015
8 x 8 (Κόμβος 41)	0,0017828600	0,0017640850	0,0017647850	0,0017751161
60 x 60 (Κόμβος 121)				0,0017598000
$\text{Σχετικές Αποκλίσεις } \%, f\% = \frac{ f_{SIMXPRT} - f_{MZC,BFS,MACRO} }{f_{SIMXPRT}} \cdot 100$				
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons	
2 x 2 (Κόμβος 5)	2,88	9,18	1,32	
4 x 4 (Κόμβος 13)	3,87	1,34	0,77	
6 x 6 (Κόμβος 25)	1,99	0,76	0,58	
8 x 8 (Κόμβος 41)	0,44	0,62	0,58	

Πίνακας 5.9. Καταγραφή βέλους κάμψης σε πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με μοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και οι σχετικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων σε σχέση με το SimXpert.

$\text{Απόλυτες Αποκλίσεις } \%, f\% = \frac{ f_{SIMXPRT(60 \times 60)} - f_{MZC,BFS,MACRO} }{f_{SIMXPRT}} \cdot 100$			
	MZC	BFS	Μακροστοιχείο Coons
2 x 2 (Κόμβος 5)	10,88	11,86	10,64
4 x 4 (Κόμβος 13)	4,64	3,90	3,98
6 x 6 (Κόμβος 25)	1,41	1,10	1,25
8 x 8 (Κόμβος 41)	1,31	0,24	0,28

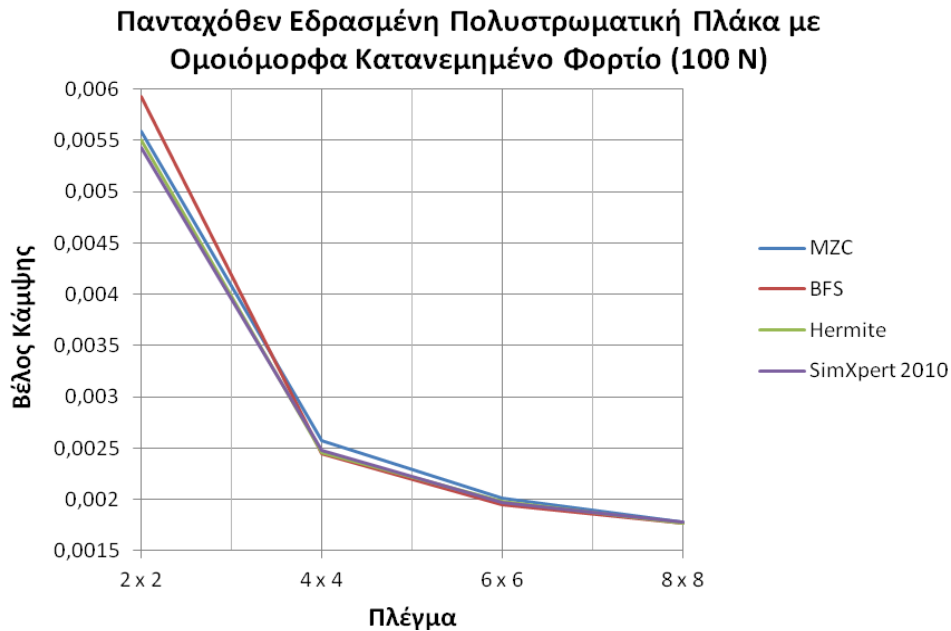
Πίνακας 5.10. Απόλυτες αποκλίσεις σε σχέση με την ακριβή λύση του SimXpert.

Τα αποτελέσματα της περίπτωσης κατανεμημένης φόρτισης εδρασμένης πλάκας αναγράφονται στον πίνακα 5.9 και απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 5.34. Παρατηρώντας το σχήμα 5.34 διαπιστώνουμε την ίδια ομαλότητα όπως και προηγουμένως ως προς την σύγκλιση των αποτελεσμάτων, εν τούτοις πάλι το στοιχείο MZC είναι εκείνο το οποίο παρουσιάζει σύγκλιση με πιο αργό ρυθμό. Το στοιχείο BFS παρουσιάζει πολύ καλή συμπεριφορά από το πλέγμα 4 x 4 και έπειτα ενώ πάλι για το πλέγμα 2 x 2 αποκλίνει (μη αποδεκτό αποτέλεσμα) σημαντικά από την επίλυση του SimXpert. Το μακροστοιχείο παρουσιάζει εξαιρετική (και αποδεκτή) σύγκλιση ακόμα και με 2 μόνο διαμερίσεις ανά πλευρά. Συγκεκριμένα για 2 διαμερίσεις ανά πλευρά παρουσιάζει σφάλμα 1,323% ενώ για 4, 6 και 8 σημαντικά μικρότερο του 1%.

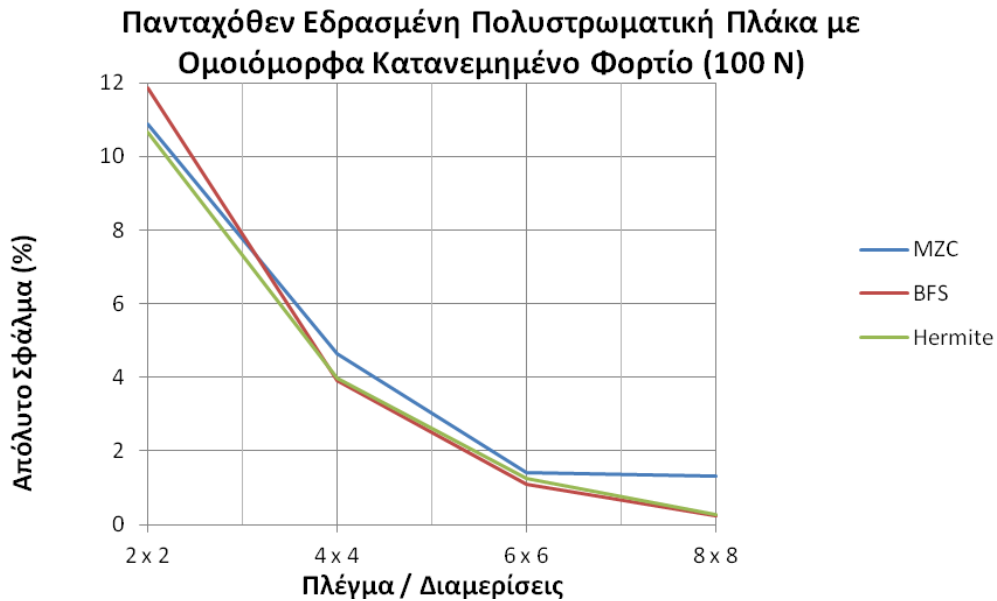
Για τα άλλα δύο στοιχεία παρατηρείται πιο μεγάλη σχετική απόκλιση αποτελεσμάτων στο πλέγμα 2 x 2 (ειδικά για το BFS), η οποία όμως και για τα δύο στοιχεία διορθώνεται σε

πολύ μεγάλο βαθμό στα επόμενα πλέγματα (για το στοιχείο ικανοποιητικότερα), φέρνοντας πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις το στοιχείο MZC συμπεριφέρθηκε σημαντικά θετικότερα μέσα στα πλαίσια του αποδεκτού ορίου που έχουμε θέσει.

Στον πίνακα 5.10 και στο σχήμα 5.35 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του απολύτου σφάλματος των αποτελεσμάτων των τριών στοιχείων.



Σχήμα 5.34. Πανταχόθεν εδρασμένη πολυστρωματική πλάκα με κατανεμημένο φορτίο σε όλη την επιφάνεια της.



Σχήμα 5.35. Απεικόνιση απολύτου σφάλματος συναρτήσεως των διαμερίσεων ανά πλευρά.

5.7 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας και σχολιάζοντας τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε προηγουμένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μακροστοιχείο Coops ανταπεξήλθε επιτυχώς και πολύ θετικότερα από τα άλλα δύο στοιχεία στην επίλυση ελαστοστατικού προβλήματος πολυστρωματικής ορθογωνικής πλάκας σε κάμψη. Είδαμε ότι συγκλίνει επιτυχώς με 8 διαμερίσεις ανά πλευρά αλλά παρατηρήσαμε επιτυχή σύγκλιση, με πολύ μικρή τιμή σφάλματος και αξιόπιστα αποτελέσματα, ακόμα και με 4 διαμερίσεις. Σε θετικά επίπεδα κυμάνθηκε και η συμπεριφορά του στοιχείου BFS το οποίο παρουσίαζε πολύ ικανοποιητική σύγκλιση από πλέγμα 4 x 4 και πυκνότερο. Το στοιχείο MZC ήταν εκείνο το οποίο υστερούσε σημαντικά σε σχέση με τα άλλα δυο ως προς την σύγκλιση των αποτελεσμάτων και παρουσίασε την μεγαλύτερη τιμή σφάλματος, τις περισσότερες φορές εκτός των αποδεκτών ορίων.

Ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος (στον προσωπικό υπολογιστή του γράφοντος) κρίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητικός παρά την πολυπλοκότητα του μαθηματικού μοντέλου που το περιγράφει. Για το μακροστοιχείο Coops και 8 διαμερίσεις ανά πλευρά ο χρόνος αυτός κυμάνθηκε περίπου στα 40 δευτερόλεπτα. Ωστόσο τα περιθώρια βελτίωσης της επίδοσης αυτής είναι υπαρκτά βελτιώνοντας τον προγραμματισμό του κώδικα και κατανέμοντας ορθότερα την αλληλουχία των πράξεων.

Τέλος είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι τα εξαιρετικά αποτελέσματα που παρουσίασε το μακροστοιχείο, αναφέρονται σε ένα μόνο στοιχείο σε αντίθεση με το MZC, το BFS και το SimXpert που επέλυσαν την συγκεκριμένη μελέτη με περισσότερα από 4 έως και 64 στοιχεία. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η ακρίβεια του μακροστοιχείου γίνεται ακόμα μεγαλύτερη αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα 2 ή 3 μακροστοιχεία σε μια πιο σύνθετη περίπτωση καταπόνησης και οριακών συνθηκών.

5.8 Μελλοντική Εργασία

Όπως είδαμε μέσα από αυτήν την διπλωματική εργασία, το μακροστοιχείο Coons έχει μεγάλη αξιοπιστία σε σύγκριση με άλλα τετρακομβικά στοιχεία καθώς και σε σχέση με έτοιμο εμπορικό πακέτο όπως το SimXpert 2010 Student Edition για την μελέτη τετραγωνικών πολυστρωματικών πλακών.

Εντούτοις, η χρήση του μακροστοιχείου δεν μπορεί να περιοριστεί μόνο στα πλαίσια του πεδίου ενασχόλησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η παρούσα μελέτη αφορούσε στην στατική καταπόνηση τετραγωνικής πολυστρωματικής πλάκας, αποτελούμενη από ανισοτροπικές στρώσεις, συνεπώς μια πρώτη εξέλιξη της θα μπορούσε να αφιερωθεί στην συγκριτική μελέτη των στοιχείων που εξετάσαμε (MZC, BFS, μακροστοιχείο Coons) σε δυναμική καταπόνηση.

Επίσης, ένα επόμενο βήμα προκειμένου να γίνει εκτενέστερη χρήση και αξιοποίηση του πλεονεκτήματος της θεωρίας του Coons, θα μπορούσε να είναι η εφαρμογή του σε πιο περίπλοκες γεωμετρίες (όπως κυκλική, ελλειψοειδής ή και τυχαίου σχήματος) και σε πιο σύνθετες οριακές συνθήκες και φορτίσεις. Μια ακόμα εφαρμογή θα μπορούσε να αποτελέσει και η σύγκριση του μακροστοιχείου Coons με τριγωνικά στοιχεία τα οποία θεωρούνται κατάλληλα για κυκλικές επιφάνειες.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στον παρόν παράρτημα παραθέτουμε τον κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 77 που χρησιμοποιήσαμε για τους υπολογισμούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Αναφέρουμε ότι στο παράρτημα παρουσιάζονται μόνο οι κύριες υπορουτίνες των τριών στοιχείων που μελετήσαμε λόγω της μεγάλης έκτασης του συνολικού πηγαίου κώδικα.

• Στοιχείο MZC

```

SUBROUTINE ELMTO8(D,ELD,UL,XL,IX,TL,S,P,NDF,NDM,NST,ISW)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C  C23456IMLPICIT INTEGER (I-N)
C
C
C *****
C                               MELOSH ELEMENT 04
C                               Composite Material (3 Layers)
C *****
C
C   PARAMETER (NL=3) !NL represents the number of layers
C   COMMON /CDATA/ NUMNP,NUMEL,NUMMAT,NEN,NEQ,IPR
C   COMMON /LABEL/ O,HEAD(20),PDIS(6),ZZ(6),BC(2),DI(6),CD(3),TE(3),
1     FD(3)
C   COMMON /ELDATA/ IDOF(6),DM,N,MA,MCT,IEL,NEL
C   COMMON /GAUSD/ GI(40,40), OMED(40,40)
C   DIMENSION D(1),UL(NDF,1),XL(NDM,1),IX(1),TL(1),S(NST,1),P(1)
1     ,SHP(6,12),SG(9),TG(9),WG(9),SIG(8),EPS(5),ULL(12),ELD(1)
C   DIMENSION Ex(NL),Ey(NL),Gxy(NL),XNUxy(NL),XNUyx(NL),AN(NL),DEN(NL)
1     ,THCK(NL),E(11),C(9),F(3) !added for composite layers

C   DOUBLE PRECISION K1(12,12),K2(12,12),K3(12,12),K4(12,12)
c   !                               ,HELPSUM(12,12),HELP(12,12)
C   DIMENSION Fnodal(12) !NODAL FORCES/MOMENTS DUE TO DISTRIBUTED
PRESSURE
C   character*1 O
C   character*2 ZZ
C   character*4 HEAD,PDIS,BC,DI,CD,TE,FD
C-----GO TO CORRECT ARRAY PROCESSOR
C   GO TO (1,2,3,4,5,3),ISW
C-----INPUT MATERIAL PROPERTIES
C
1   READ(*,*)
c...memo: L,K = du,,y integers (useful in conventional elements only!)

C   pi=3.141592653589793;

C-----Material Properties for LAYER 1 - Composite Aramid - Epoxy

C   D(1)=Ex(1); D(2)=Ey(1); D(3)=Gxy(1); D(4)=XNUxy(1); D(5)=XNUyx(1);
C   D(6)=DEN(1); D(9)=THCK(1); D(14)=AN(1);

C   Ex(1)=76.0d09; Ey(1)=5.5d09; Gxy(1)=20.8d09; XNUxy(1)=0.647D+00;
C   XNUyx(1)=0.199D+00; DEN(1)=1.4D+00; THCK(1)=0.00125D+00;

```



```

DO L=1,NGaussY
  CS=GI(K,NGaussX)
  HT=GI(L,NGaussY)

CALL SHAPE_MELOSH(CS,HT,XL,SHP,RJAC,NDM,IX)

DO M=1,NL

C-----E(1-11) Matrix, Status:OK

E(1)=(THCK(M)**3)/12.0
E(2)=(Ex(M)*(XNUxy(M)*((sin(2.0*AN(M)))**2/2.0)
1 +(cos(AN(M)))**4)+Ey(M)*(sin(AN(M)))**4)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(3)=(Ex(M)*(XNUxy(M)+(1.0D+00-2.0*XNUxy(M))
1 *(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0)+Ey(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(4)=(Ex(M)*((cos(AN(M)))**2-XNUxy(M)*cos(2.0*AN(M)))
1 -Ey(M)*(sin(AN(M)))**2)*sin(2.0*AN(M))/2)
2 /(1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(5)=(Ex(M)*((sin(AN(M)))**4+XNUxy(M)*
1 (sin(2.0*AN(M)))**2/2.0)+Ey(M)*(cos(AN(M)))**4)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(6)=(Ex(M)*((sin(AN(M)))**2+XNUxy(M)*cos(2.0*AN(M)))
1 -Ey(M)*(cos(AN(M)))**2)*sin(2.0*AN(M))/2.)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(7)=(Ex(M)*(1.0D+00-2.0*(XNUxy(M)**2))+Ey(M))/
1 (1.0-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(8)=Gxy(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2
E(9)=Gxy(M)*sin(4.0*AN(M))/2.0
E(10)=Gxy(M)*(XNUxy(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2-cos(2.0*AN(M)))
E(11)=(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0

C----- C(1-9) (stiffness coefficients), Status:OK

C(1)=E(2)+E(8)      !A11 according to diploma thesis
C(2)=E(3)-E(8)      !A21      >>
C(3)=E(4)-E(8)      !A41      >>
C(4)=E(3)-E(8)      !A12      >>
C(5)=E(5)+E(8)      !A22      >>
C(6)=E(6)+E(9)      !A42      >>
C(7)=E(4)-E(9)      !A14      >>
C(8)=E(6)+E(9)      !A24      >>
C(9)=E(7)*E(11)-E(10) !A44      >>

C----- F(1-3) B1, B2, B3 declaration, Status:OK

F(1)=SHP(4,I)*(C(1)*SHP(4,J)          !B1
1 +C(2)*SHP(5,J)+C(3)*2.*SHP(6,J))
F(2)=SHP(5,I)*(C(4)*SHP(4,J)          !B2
1 +C(5)*SHP(5,J)+C(6)*2.*SHP(6,J))
F(3)=2*SHP(6,I)*(C(7)*SHP(4,J)        !B3
1 +C(8)*SHP(5,J)+C(9)*2.*SHP(6,J))

C----- Stifness Matrix Calculation

```



```

C.....
!   READ(15,*) E,XNU,D(5),D(6)
!   D(6)=THICKNESS
!   FLEXURAL RIGIDITY: D(1)=E*(D(6)**3)/(12.0*(1.0-XNU*XNU))
C.....
      D(2)=XNU*D(1)
      D(3)=(1.0-XNU)*D(1)/2.0
!     D(4)=E*D(6)/(2.4*(1+XNU))
C...NEW
      XNU=D(9)
      Emod=(2.4*(1+XNU))*D(4)/D(6)
      coef=Emod/(1.0d00-xnu*xnu)
      E11=coef      ; E22=E11
      E12=xnu*coef; E21=E12
      E33=(1.0d00-xnu)*coef/2.0d00

C
C-----COMPUTE ELEMENT STRESSES AND STRAINS
      DO 400 L=1,LINT
C-----COMPUTE ELEMENT SHAPE DOUBLE PRECISION FUNCTIONS
          WRITE(*,*) SG(L),TG(L)
          WRITE(16,*) 'SG(L),TG(L)=' ,SG(L),TG(L)
          CALL SHAPE_MELOSH(SG(L),TG(L),XL,SHP,XSJ,NDM,IX)
C-----COMPUTE COORDINATES OF GAUSS POINT
          XX=0.0
          YY=0.0
          DO J=1,NEL
              Jdof=3*J-2
              XX=XX+SHP(1,Jdof)*XL(1,J)
              YY=YY+SHP(1,Jdof)*XL(2,J)
          ENDDO
C-----COMPUTE CURVATURE VECTOR (F1=è^2w/èx^2,F2=è^2w/èy^2,F3=2.è^2w/èxèy)
          J2=1
          DO I=1,NEL
              ULL(J2)=UL(1,I)
              ULL(J2+1)=UL(2,I)
              ULL(J2+2)=UL(3,I)
              J2=J2+NDF
          ENDDO
          f1=0.0d00; f2=0.0d00; f3=0.0d00
          do j=1,12
              f1=f1+shp(4,j)*ULL(J)
              f2=f2+shp(5,j)*ULL(J)
              f3=f3+shp(6,j)*ULL(J)
          enddo
          f3=2.0d00*f3

          WRITE(*,*) 'CURVATURES =' ,F1,F2,F3
          WRITE(*,*) 'ELASTIC CONSTANTS=' ,E11,E12,E21,E22,E33

C-----COMPUTE MOMENTS (Mxx,Myy,Mxy):
          coef2=(D(6)**3)/12.0d00
          RMxx=(E11*f1+E12*f2) * coef2  !(Nm/m): normalized to y-
dir width
          RMyy=(E21*f1+E22*f2) * coef2  !(Nm/m): normalized to x-
dir length
          RMxy=E33*f3 * coef2

```



```

write(*,*) 'Mxx=',RMxx
write(*,*) 'Myy=',RMy
write(*,*) 'Mxy=',RMxy
pause

C
!
!           Zmax=D(6)/2.0d00  !Half of thickness
!           Sxx=-12.0d00*Zmax*RMxx/(D(6)**3)
!           Syy=-12.0d00*Zmax*RMyy/(D(6)**3)
!           Sxy=-12.0d00*Zmax*RMxy/(D(6)**3)
C...FOR Zmax=D(6)/2.0d00: (UPPER/LOWER INES):
!           Sxx=-6.0d00*RMxx/(D(6)**2)
!           Syy=-6.0d00*RMyy/(D(6)**2)
!           Sxy=-6.0d00*RMxy/(D(6)**2)

!   WRITE(*,*) SXX,SYY,SXY
write(*,*) 'Sxx=',Sxx
write(*,*) 'Syy=',Syy
write(*,*) 'Sxy=',Sxy
PAUSE

           SIG(1)=Sxx
           SIG(2)=Syy
           SIG(3)=Sxy

C
C-----COMPUTE STRAINS AND COORDINATES
!   DO 410 I=1,5
! 410 EPS(I)=0.0
!   XX=0.0
!   YY=0.0
!   DO 420 J=1,NEL
!   XX=XX+SHP(3,J)*XL(1,J)
!   YY=YY+SHP(3,J)*XL(2,J)
!   EPS(1)=EPS(1)-SHP(1,J)*UL(2,J)
!   EPS(2)=EPS(2)-SHP(2,J)*UL(3,J)
!   EPS(3)=EPS(3)-SHP(1,J)*UL(3,J)-SHP(2,J)*UL(2,J)
!   EPS(4)=EPS(4)+SHP(1,J)*UL(1,J)-SHP(3,J)*UL(2,J)
! 420 EPS(5)=EPS(5)+SHP(2,J)*UL(1,J)-SHP(3,J)*UL(3,J)
C-----COMPUTE STRESSES
!   SIG(1)=D(1)*EPS(1) + D(2)*EPS(2)
!   SIG(2)=D(2)*EPS(1) + D(1)*EPS(2)
!   SIG(3)=D(3)*EPS(3)
!   SIG(4)=D(4)*EPS(4)
!   SIG(5)=D(4)*EPS(5)
!   CALL PBNST(SIG,SIG(6),SIG(7),SIG(8))
C-----OUTPUT STRESSES AND STRAINS
MCT=MCT-2
IF(MCT.GT.0) GO TO 430
WRITE(16,2001) O,HEAD
MCT=50
430 WRITE(16,2002) N,MA,XX,YY,SIG,EPS
400 CONTINUE
RETURN

C
5   RETURN

```

```

C
C-----FORMATS FOR INPUT-OUTPUT
1000 FORMAT(4F10.0,3I5)
2000 FORMAT(/5X,'PLATE BENDING 4-NODED MELOSH LAYER 1'//
1 10X,'MODULUS - X',E18.5//10X,'MODULUS - Y',E18.5/
2 10X,'SHEARING MODULUS',E18.5/10X,'POISSON RATIO - XY',F8.5/
3 10X,'POISSON RATIO - YX',F8.5/10X,'DENSITY',E18.5/
4 10X,'THICKNESS OF THE PLATE',E18.5/10X,'ORIENTATION ANGLE',E18.5)
2100 FORMAT(/5X,'PLATE BENDING 4-NODED MELOSH LAYER 2'//
1 10X,'MODULUS - X',E18.5//10X,'MODULUS - Y',E18.5/
2 10X,'SHEARING MODULUS',E18.5/10X,'POISSON RATIO - XY',F8.5/
3 10X,'POISSON RATIO - YX',F8.5/10X,'DENSITY',E18.5/
4 10X,'THICKNESS OF THE PLATE',E18.5/10X,'ORIENTATION ANGLE',E18.5)
2200 FORMAT(/5X,'PLATE BENDING 4-NODED MELOSH LAYER 3'//
1 10X,'MODULUS - X',E18.5//10X,'MODULUS - Y',E18.5/
2 10X,'SHEARING MODULUS',E18.5/10X,'POISSON RATIO - XY',F8.5/
3 10X,'POISSON RATIO - YX',F8.5/10X,'DENSITY',E18.5/
4 10X,'THICKNESS OF THE PLATE',E18.5/10X,'ORIENTATION ANGLE',E18.5)
2300 FORMAT (/10X,'GAUSS PTS/DIR',I3/10X,'STRESS PTS',I6)
2001 FORMAT(A1,20A4//5X,'ELEMENT STRESSES'//'ELEMENT MATERIAL'
1 ,1X,'X-COORD',1X,'Y-COORD',2X,'X-MOMENT',3X,'Y-MOMENT',3X,
2 'XY-MOMENT',2X,'X-FORCE',3X,'Y-FORCE',2X,'1-MOMENT',3X,
3 '2-MOMENT',3X,'ANGLE'//48X,'X-STRAIN',3X,'Y-STRAIN',4X,
4 'XY-STRAIN',3X,'X-ANGLE',4X,'Y-ANGLE')
2002 FORMAT(I6,I8,2F9.3,3E11.3,3E10.3,E11.3,F8.2//45X,
15E12.4)
3000 FORMAT(2I5,3F10.6)
RETURN
END

```

• Στοιχείο BFS

```
SUBROUTINE ELMTO9(D,ELD,UL,XL,IX,TL,S,P,NDF,NDM,NST,ISW)
```

```

C*****
C*
C*                                BOGNER ELEMENT O2
C*                                Composite Material (3 Layers)
C*
C*****

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PARAMETER (NL=3) !NL represents the number of layers
COMMON /CDATA/ NUMNP,NUMEL,NUMMAT,NEN,NEQ,IPR
COMMON /LABEL/ O,HEAD(20),PDIS(6),ZZ(6),BC(2),DI(6),CD(3),TE(3),
1 FD(3)
COMMON /ELDATA/ IDOF(6),DM,N,MA,MCT,IEL,NEL
COMMON /GAUSD/ GI(40,40), OMED(40,40)
DIMENSION D(1),UL(NDF,1),XL(NDM,1),IX(1),TL(1),S(NST,1),P(1)
1 ,SHP(6,16),SG(9),TG(9),WG(9),SIG(8),EPS(5),ULL(24),ELD(1)
DIMENSION Ex(NL),Ey(NL),Gxy(NL),XNUxy(NL),XNUyx(NL),AN(NL),DEN(NL)
1 ,THCK(NL),E(11),C(9),F(3) !added for composite layers

```

```
C DOUBLE PRECISION K1(12,12),K2(12,12),K3(12,12),K4(12,12),R(12,12)
```

```

C      !                               ,HELPSUM(12,12),HELP(12,12)
      character*1 O
      character*2 ZZ
      character*4 HEAD,PDIS,BC,DI,CD,TE,FD
C-----GO TO CORRECT ARRAY PROCESSOR
      GO TO (1,2,3,4,5,3),ISW
C-----INPUT MATERIAL PROPERTIES
C
1      READ(*,*)
c...memo: L,K = du,,y integers (useful in conventional elements only!)

      pi=3.141592653589793;

C-----Material Properties for LAYER 1 - Composite Aramid - Epoxy

      D(1)=Ex(1); D(2)=Ey(1); D(3)=Gxy(1); D(4)=XNUxy(1); D(5)=XNUyx(1);
      D(6)=DEN(1); D(9)=THCK(1); D(14)=AN(1);

      Ex(1)=76.0d09; Ey(1)=5.5d09; Gxy(1)=20.8d09; XNUxy(1)=0.647D+00;
      XNUyx(1)=0.199D+00; DEN(1)=1.4D+00; THCK(1)=0.00125D+00;
      AN(1)=pi/4.;

C-----Material Properties for LAYER 2 - Composite HM Carbon - Epoxy

      D(15)=Ex(2); D(16)=Ey(2); D(17)=Gxy(2); D(18)=XNUxy(2);
      D(19)=XNUyx(2); D(20)=DEN(2); D(21)=THCK(2); D(22)=AN(2);

      Ex(2)=220.0d09; Ey(2)=6.9d09; Gxy(2)=5.51d09; XNUxy(2)=0.25D+00;
      XNUyx(2)=0.021D+00; DEN(2)=1.7D+00; THCK(2)=0.0025D+00;
      AN(2)=-pi/4.;

C-----Material Properties for LAYER 3 - Composite Aramid - Epoxy

      D(23)=Ex(3); D(24)=Ey(3); D(25)=Gxy(3); D(26)=XNUxy(3);
      D(27)=XNUyx(3); D(28)=DEN(3); D(29)=THCK(3); D(30)=AN(3);

      Ex(3)=76.0d09; Ey(3)=5.5d09; Gxy(3)=20.8d09; XNUxy(3)=0.647D+00;
      XNUyx(3)=0.199D+00; DEN(3)=1.4D+00; THCK(3)=0.00125D+00;
      AN(3)=pi/4.;

      L=MIN0(3,MAX0(1,L))
      D(7)=L
      L=3;
      K=MIN0(3,MAX0(1,K))
      D(8)=K
      K=1;
!      D(9)=XNU

      WRITE(16,2000) Ex(1),Ey(1),Gxy(1),XNUxy(1),XNUyx(1),DEN(1),
1      THCK(1),AN(1)
      WRITE(16,2100) Ex(2),Ey(2),Gxy(2),XNUxy(2),XNUyx(2),DEN(2),
1      THCK(2),AN(2)
      WRITE(16,2200) Ex(3),Ey(3),Gxy(3),XNUxy(3),XNUyx(3),DEN(3),
1      THCK(3),AN(3)
      WRITE(16,2300) L,K

```

```

        RETURN

C
2      RETURN
C
3      CONTINUE
      !   L=D(7)
      !   IF(L*L.NE.LINT) CALL PGAUSS(L,LINT,SG,TG,WG)
C-----ISOPARAMETRIC ELEMENT STIFFNESS COMPUTATION FOR ANISOTROPIC COMPOSITE
PLATE BENDING
C-----Material Properties Input for each layer
C-----NL = number of layers
C-----Ex(NL) = Young Modulous of elasticity in x direction
C-----Ey(NL) = Young Modulous of elasticity in y direction
C-----Gxy(NL) = Shear Modulous in xy - plane
C-----XNUxy(NL) = Poisson Ratio in xy
C-----XNUyx(NL) = Poisson Ration in yx
C-----AN(NL) = Orientation angle
C-----THCK(NL) = Thickness of the plate
C-----DEN(NL) = Density of the plate
C-----DV IS AN AREA WEIGHTING
C-----LINT IS THE NUMBER OF INTEGRATION POINTS
C-----NEL IS THE NUMBER OF NODES ON THE ELEMENT
C-----S IS THE ELEMENT STIFFNESS
C-----SG,TG ARE INTEGRATION POINTS IN NATURAL COORDINATES
C-----SHP CONTAINS VALUES OF X,Y DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS
C-----XL IS THE ARRAY OF NODAL COORDINATES
C-----XSJ IS THE JACOBIAN DETERMINANT
C-----WG IS THE INTEGRATION WEIGHT
C
C-----ANALYTICAL FORMULAS FOR STIFFNESS
      A=XL(1,2)-XL(1,1); B=XL(2,3)-XL(2,2)
      WRITE(16,*) 'A / B=',A,B
      XSJ=(A*B)/4.
      !   RJAC=(A*B)
C
      !   XNU=D(9)
      !   WRITE(*,*) 'XNU=',XNU
C
      !   WRITE(*,*) 'LINT=',LINT
      !   PAUSE

      CALL PGAU_RECTANGLE

      NGaussX=4
      NGaussY=4

      DO I=1,NEL*4
        DO J=1,NEL*4
          S(I,J)=0.0D+00
          DO K=1,NGaussX
            DO L=1,NGaussY
              DO M=1,NL

                CS=0.5*(GI(K,NGaussX)+1.)

```

```

HT=0.5*(GI(L,NGaussY)+1.)

CALL SHAPEBOGNER(CS,HT,SHP,A,B)

C-----E(1-11) Matrix, Status:OK

E(1)=(THCK(M)**3)/12.0
E(2)=(Ex(M)*(XNUxy(M)*((sin(2.0*AN(M)))**2/2.0)
1 +(cos(AN(M)))**4)+Ey(M)*(sin(AN(M)))**4)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(3)=(Ex(M)*(XNUxy(M)+(1.0D+00-2.0*XNUxy(M))
1 *(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0)+Ey(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(4)=(Ex(M)*((cos(AN(M)))**2-XNUxy(M)*cos(2.0*AN(M)))
1 -Ey(M)*(sin(AN(M)))**2)*sin(2.0*AN(M))/2)
2 /(1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(5)=(Ex(M)*((sin(AN(M)))**4+XNUxy(M)*
1 (sin(2.0*AN(M)))**2/2.0)+Ey(M)*(cos(AN(M)))**4)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(6)=(Ex(M)*((sin(AN(M)))**2+XNUxy(M)*cos(2.0*AN(M)))
1 -Ey(M)*(cos(AN(M)))**2)*sin(2.0*AN(M))/2.)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(7)=(Ex(M)*(1.0D+00-2.0*(XNUxy(M)**2))+Ey(M))/
1 (1.0-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(8)=Gxy(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2
E(9)=Gxy(M)*sin(4.0*AN(M))/2.0
E(10)=Gxy(M)*(XNUxy(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2-cos(2.0*AN(M)))
E(11)=(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0

C----- C(1-9) (stiffness coefficients), Status:OK

C(1)=E(2)+E(8)      !A11 according to diploma thesis
C(2)=E(3)-E(8)      !A21      >>
C(3)=E(4)-E(8)      !A41      >>
C(4)=E(3)-E(8)      !A12      >>
C(5)=E(5)+E(8)      !A22      >>
C(6)=E(6)+E(9)      !A42      >>
C(7)=E(4)-E(9)      !A14      >>
C(8)=E(6)+E(9)      !A24      >>
C(9)=E(7)*E(11)-E(10) !A44      >>

C----- F(1-3) B1, B2, B3 declaration, Status:OK

F(1)=SHP(3,I)*(C(1)*SHP(3,J)      !B1
1 +C(2)*SHP(4,J)+C(3)*2.*SHP(5,J))
F(2)=SHP(4,I)*(C(4)*SHP(3,J)      !B2
1 +C(5)*SHP(4,J)+C(6)*2.*SHP(5,J))
F(3)=2*SHP(5,I)*(C(7)*SHP(3,J)    !B3
1 +C(8)*SHP(4,J)+C(9)*2.*SHP(5,J))

VALUE=E(1)*(F(1)+F(2)+F(3))

C----- Stifness Matrix Calculation

S(I,J)=S(I,J)+VALUE*XSJ*OMED(K,NGaussX)*OMED(L,NGaussY)
ENDDO

```

```

                ENDDO
            ENDDO
        ENDDO
    ENDDO

C
    IF(N.EQ.1) THEN
        SUM=0.0D+00
        DO I=1,16,1
!           WRITE(*,9999) I,S(1,I),S(I,1)
            SUM=SUM+S(1,I)
            ENDDO
            WRITE(*,*) 'SUM OF THE FIRST ROW =',SUM
            PAUSE
        ENDIF
    9999 FORMAT(I5,2(2X,E12.5))
C
        IF (ISW.EQ.3) GO TO 330
C-----COMPUTE INTERNAL FORCES
C-----P IS THE INTERNAL FORCE VECTOR
        J2=1
        DO 610 I=1,NEL
            ULL(J2)=UL(1,I)
            ULL(J2+1)=UL(2,I)
            ULL(J2+2)=UL(3,I)
            ULL(J2+3)=UL(4,I)
        610  J2=J2+NDF
            DO 620 I=1,16
                P(I)=0.0
                DO 620 K=1,16
                    P(I)=P(I)-S(I,K)*ULL(K)
        620  CONTINUE
C
C-----CHECK IF P=0
C        DO 66 I=1,24
C66     IF(P(I).EQ.0.) GO TO 330
C-----PRINT INTERNAL FORCE VECTOR FOR EACH ELEMENT
C        WRITE (16,666) N,(P(I),I=1,24)
C666   FORMAT ('N=',I3,/, (3(E15.4)))
C
    330  RETURN
C
    4    L=D(8)
        IF(L*L.NE.LINT) CALL PGAUSS(L,LINT,SG,TG,WG)
C-----ISOPARAMETRIC ELEMENT STRESSES AND STRAINS
C-----UL IS THE ARRAY OF NODAL DISPLACEMENTS
C
C-----COMPUTE ELEMENT STRESSES AND STRAINS
        DO 400 L=1,LINT
C-----COMPUTE ELEMENT SHAPE DOUBLE PRECISION FUNCTIONS
            CALL SHAPE1(SG(L),TG(L),XL,SHP,XSJ,NDM,IX)
C-----COMPUTE STRAINS AND COORDINATES
            DO 410 I=1,5
        410  EPS(I)=0.0
                XX=0.0
                YY=0.0

```

```

DO 420 J=1,NEL
XX=XX+SHP(3,J)*XL(1,J)
YY=YY+SHP(3,J)*XL(2,J)
EPS(1)=EPS(1)-SHP(1,J)*UL(2,J)
EPS(2)=EPS(2)-SHP(2,J)*UL(3,J)
EPS(3)=EPS(3)-SHP(1,J)*UL(3,J)-SHP(2,J)*UL(2,J)
EPS(4)=EPS(4)+SHP(1,J)*UL(1,J)-SHP(3,J)*UL(2,J)
420 EPS(5)=EPS(5)+SHP(2,J)*UL(1,J)-SHP(3,J)*UL(3,J)
C-----COMPUTE STRESSES
SIG(1)=D(1)*EPS(1) + D(2)*EPS(2)
SIG(2)=D(2)*EPS(1) + D(1)*EPS(2)
SIG(3)=D(3)*EPS(3)
SIG(4)=D(4)*EPS(4)
SIG(5)=D(4)*EPS(5)
CALL PBNST(SIG,SIG(6),SIG(7),SIG(8))
C-----OUTPUT STRESSES AND STRAINS
MCT=MCT-2
IF(MCT.GT.0) GO TO 430
WRITE(16,2001) O,HEAD
MCT=50
430 WRITE(16,2002) N,MA,XX,YY,SIG,EPS
400 CONTINUE
RETURN
C
5 RETURN
C
C-----FORMATS FOR INPUT-OUTPUT
1000 FORMAT(4F10.0,3I5)
2000 FORMAT(/5X,'PLATE BENDING 4-NODED MELOSH LAYER 1'//
1 10X,'MODULUS - X',E18.5//10X,'MODULUS - Y',E18.5/
2 10X,'SHEARING MODULUS',E18.5/10X,'POISSON RATIO - XY',F8.5/
3 10X,'POISSON RATIO - YX',F8.5/10X,'DENSITY',E18.5/
4 10X,'THICKNESS OF THE PLATE',E18.5/10X,'ORIENTATION ANGLE',E18.5)
2100 FORMAT(/5X,'PLATE BENDING 4-NODED MELOSH LAYER 2'//
1 10X,'MODULUS - X',E18.5//10X,'MODULUS - Y',E18.5/
2 10X,'SHEARING MODULUS',E18.5/10X,'POISSON RATIO - XY',F8.5/
3 10X,'POISSON RATIO - YX',F8.5/10X,'DENSITY',E18.5/
4 10X,'THICKNESS OF THE PLATE',E18.5/10X,'ORIENTATION ANGLE',E18.5)
2200 FORMAT(/5X,'PLATE BENDING 4-NODED MELOSH LAYER 3'//
1 10X,'MODULUS - X',E18.5//10X,'MODULUS - Y',E18.5/
2 10X,'SHEARING MODULUS',E18.5/10X,'POISSON RATIO - XY',F8.5/
3 10X,'POISSON RATIO - YX',F8.5/10X,'DENSITY',E18.5/
4 10X,'THICKNESS OF THE PLATE',E18.5/10X,'ORIENTATION ANGLE',E18.5)
2300 FORMAT (/10X,'GAUSS PTS/DIR',I3/10X,'STRESS PTS',I6)
2001 FORMAT(A1,20A4//5X,'ELEMENT STRESSES'//'ELEMENT MATERIAL'
1 ,1X,'X-COORD',1X,'Y-COORD',2X,'X-MOMENT',3X,'Y-MOMENT',3X,
2 'XY-MOMENT',2X,'X-FORCE',3X,'Y-FORCE',2X,'1-MOMENT',3X,
3 '2-MOMENT',3X,'ANGLE'//48X,'X-STRAIN',3X,'Y-STRAIN',4X,
4 'XY-STRAIN',3X,'X-ANGLE',4X,'Y-ANGLE')
2002 FORMAT(I6,I8,2F9.3,3E11.3,3E10.3,E11.3,F8.2//45X,
15E12.4)
END
C
subroutine opfiles
c

```

```

c-----open an existing data file(15) ,a new output file(16) and up to 10
c-----new scratch files with user defined logical numbers
c-----file names and other data must exist in file 'FILES.DAT'(7)
c
      COMMON /OFILES/ NFILOP,IFILOP(10)
      dimension files(10)
      dimension formst(2)
      character*43 files,input,output,filnam
      character*11 formst
      character*1 fm
      data nio/7/
      data formst/'formatted ','unformatted'/
      if(nio.ne.0) open(nio,file='FILES.DAT')
      read(nio,1000) input
      open(15,file=input)
      read(nio,1000) output
      open(16,file=output,status='new')
c      nfilop=0
c 200 read(nio,1010,end=100) nl,fm,filnam
c      nfilop=nfilop+1
c      if(nfilop.gt.10) then
c                write(*,2000)
c                stop
c      endif
c      ifilop(nfilop)=nl
c      files(nfilop)=filnam
c      kk=1
c      if(fm.eq.'f') kk=1
c      if(fm.eq.'u') kk=2
c      open(nl,file=filnam,status='new',form=formst(kk))
c      go to 200
      100 return
      1000 format(a43)
      1010 format(i3,1x,a1,1x,a12)
      2000 format(5x,'more than 10 files to be opened')
      end

```

• Μακροστοιχείο Coons

```

      SUBROUTINE ELMTO7(D,ELD,UL,XL,IX,TL,S,P,NDF,NDM,NST,ISW)
C-----
C      ARBITRARY-NODED HERMITEAN-TYPE PLATE MACRO-ELEMENT
C      BASED ON TENSOR-PRODUCTS OF HERMITE POLYNOMIALS
C      FOR COMPOSITE LAMINATES (3 LAYERS)
C-----
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      parameter (NEmax=100,NDFmax=4*NEmax,NL=3)!NL represents the number of
layers
      COMMON /CDATA/ NUMNP,NUMEL,NUMMAT,NEN,NEQ,IPR
      COMMON /LABEL/ O,HEAD(20),PDIS(6),ZZ(6),BC(2),DI(6),CD(3),TE(3),
1      FD(3)
      COMMON /ELDATA/ IDOF(6),DM,N,MA,MCT,IEL,NEL
C

```



```

COMMON /GAUSD/ GI(40,40), OMED(40,40)      !PGAU_RECTANGLE (MORE
COMPLETE, WITHOUT INDEX SHIFTING)
C
  DIMENSION D(1),UL(NDF,1),XL(NDM,1),IX(1),TL(1),S(NST,1),P(1)
  1 ,SHP(6,NDFmax),SG(9),TG(9),WG(9),SIG(8),EPS(5),ULL(NDFmax),ELD(1)
  DIMENSION Ex(NL),Ey(NL),Gxy(NL),XNUxy(NL),XNUyx(NL),AN(NL),DEN(NL)
  1 ,THCK(NL),E(11),C(9),F(3) !added for composite layers

  DIMENSION NTOCUR(4),Fnodal(4*81)
  character*1 O
  character*2 ZZ
  character*4 HEAD,PDIS,BC,DI,CD,TE,FD
C-----GO TO CORRECT ARRAY PROCESSOR
  GO TO (1,2,3,4,5,3),ISW
C-----INPUT MATERIAL PROPERTIES
C
1  READ(*,*)
c...memo: L,K = du,,y integers (useful in conventional elements only!)

  pi=3.141592653589793;

C-----Material Properties for LAYER 1 - Composite Aramid - Epoxy

  D(1)=Ex(1); D(2)=Ey(1); D(3)=Gxy(1); D(4)=XNUxy(1); D(5)=XNUyx(1);
  D(6)=DEN(1); D(9)=THCK(1); D(14)=AN(1);

  Ex(1)=76.0d09; Ey(1)=5.5d09; Gxy(1)=20.8d09; XNUxy(1)=0.647D+00;
  XNUyx(1)=0.199D+00; DEN(1)=1.4D+00; THCK(1)=0.00125D+00;
  AN(1)=pi/4.;

C-----Material Properties for LAYER 2 - Composite HM Carbon - Epoxy

  D(15)=Ex(2); D(16)=Ey(2); D(17)=Gxy(2); D(18)=XNUxy(2);
  D(19)=XNUyx(2); D(20)=DEN(2); D(21)=THCK(2); D(22)=AN(2);

  Ex(2)=220.0d09; Ey(2)=6.9d09; Gxy(2)=5.51d09; XNUxy(2)=0.25D+00;
  XNUyx(2)=0.021D+00; DEN(2)=1.7D+00; THCK(2)=0.0025D+00;
  AN(2)=-pi/4.;

C-----Material Properties for LAYER 3 - Composite Aramid - Epoxy

  D(23)=Ex(3); D(24)=Ey(3); D(25)=Gxy(3); D(26)=XNUxy(3);
  D(27)=XNUyx(3); D(28)=DEN(3); D(29)=THCK(3); D(30)=AN(3);

  Ex(3)=76.0d09; Ey(3)=5.5d09; Gxy(3)=20.8d09; XNUxy(3)=0.647D+00;
  XNUyx(3)=0.199D+00; DEN(3)=1.4D+00; THCK(3)=0.00125D+00;
  AN(3)=pi/4.;

  L=MIN0(3,MAX0(1,L))
  D(7)=L
L=3;
  K=MIN0(3,MAX0(1,K))
  D(8)=K
K=1;
! D(9)=XNU

```

```

WRITE(16,2000) Ex(1),Ey(1),Gxy(1),XNUxy(1),XNUyx(1),DEN(1),
1 THCK(1),AN(1)
WRITE(16,2100) Ex(2),Ey(2),Gxy(2),XNUxy(2),XNUyx(2),DEN(2),
1 THCK(2),AN(2)
WRITE(16,2200) Ex(3),Ey(3),Gxy(3),XNUxy(3),XNUyx(3),DEN(3),
1 THCK(3),AN(3)
WRITE(16,2300) L,K

read(15,*) NS1,NT1,NS2,NT2 !Number of segments along the four
sides
D(10)=NS1; D(11)=NT1; D(12)=NS2; D(13)=NT2
write(16,3000) NS1,NT1,NS2,NT2

RETURN

2 CONTINUE
C...COMPUTE NODAL FORCES DUE TO UNIFORMLY DISTRIBUTED PRESSURE
C
NS1=D(10); NT1=D(11); NS2=D(12); NT2=D(13)
C
NTOCUR(1)=NS1+1
NTOCUR(2)=NTOCUR(1)+NT1
NTOCUR(3)=NTOCUR(2)+NS2
NTOCUR(4)=NTOCUR(3)+NT2
C
A=XL(1,NS1+1)-XL(1,1) ; B=XL(2,NEL)-XL(2,NS1+1) !XL(2,NS1+NT1+1)-
XL(2,NS1+1)
WRITE(16,*) 'A / B=',A,B
RJAC=(A*B)/4.
C
C...FOR MORE GPTs: COMPLETE LIBRARY OF GPTs
C
CALL PGAU_RECTANGLE
WRITE(*,*) 'NGAUX / NGAUY =?'
READ(*,*) NGAUX , NGAUY
C
! Ngauss=2*(NS1+1) !16 !4,8,10
! Ngau=Ngauss !WITHOUT CHANGE
C
-----
-
PRESSURE=1.0D00
Fnodal=0.0D+00
C
C...CHOOSE TYPE OF LOADING
WRITE(*,*) '*** UNIFORM PRESSURE <1> OR NODAL FORCE <2> ?'
READ(*,*) ICHOICE
C
IF(ICHoice.EQ.1) THEN
C---UNIFORMLY DISTRIBUTED PRESSURE
C
DO K=1,NGAUX
DO L=1,NGAUY
CS=0.5*(GI(K,NGAUX)+1.)
HT=0.5*(GI(L,NGAUY)+1.)

```

```

        CALL SHAPEHERM(CS,HT,Scur,Tcur,NTOcur,XL,SHP,XSJ,NDM,NEL,IX)
    DO I=1,NST
        Fnodal(I)=Fnodal(I)+SHP(1,I)*PRESSURE*RJAC*
%           OMED(K,NGAUX)*OMED(L,NGAUY)
    ENDDO
    ENDDO
ENDDO
C
WRITE(16,*)
WRITE(16,*) '*** NODAL FORCES DUE TO DISTRIBUTED PRESSURE ***'
    J2=1
    DO I=1,NEL
        WRITE(16,4000) I,0,Fnodal(J2),Fnodal(J2+1),
%           Fnodal(J2+2),Fnodal(J2+3)
        J2=J2+NDF
    ENDDO
C
ELSE
C----CONCENTRATED FORCE
    CentralForce=0.25D+00
    CS=1.00D00; HT=1.00D00
    CALL SHAPEHERM(CS,HT,Scur,Tcur,NTOcur,XL,SHP,XSJ,NDM,NEL,IX)
    DO I=1,NST
        Fnodal(I)=SHP(1,I)*CentralForce
    ENDDO
WRITE(16,*)
WRITE(16,*) '*** NODAL FORCES DUE TO CENTRAL FORCE ***'
    J2=1
    DO I=1,NEL
        WRITE(16,4000) I,0,Fnodal(J2),Fnodal(J2+1),
%           Fnodal(J2+2),Fnodal(J2+3)
        J2=J2+NDF
    ENDDO
ENDIF
C
4000 FORMAT(2I5,4F10.8)
! 4000 FORMAT(2I5,4F10.7)
! 4000 FORMAT(2I5,4F10.6)

    RETURN
C
3    CONTINUE
!!   L=D(7)
!!   IF (L*L.NE.LINT) CALL PGAUSS(L,LINT,SG,TG,WG)
C-----ISOPARAMETRIC ELEMENT STIFFNESS COMPUTATION FOR ANISOTROPIC COMPOSITE
PLATE BENDING
C-----Material Properties Input for each layer
C-----NL = number of layers
C-----Ex(NL) = Young Modulous of elasticity in x direction
C-----Ey(NL) = Young Modulous of elasticity in y direction
C-----Gxy(NL) = Shear Modulous in xy - plane
C-----XNUxy(NL) = Poisson Ratio in xy
C-----XNUyx(NL) = Poisson Ration in yx
C-----AN(NL) = Orientation angle
C-----THCK(NL) = Thickness of the plate
C-----DEN(NL) = Density of the plate

```

```
C-----DV IS AN AREA WEIGHTING
C-----LINT IS THE NUMBER OF INTEGRATION POINTS
C-----NEL IS THE NUMBER OF NODES ON THE ELEMENT
C-----S IS THE ELEMENT STIFFNESS
C-----SG,TG ARE INTEGRATION POINTS IN NATURAL COORDINATES
C-----SHP CONTAINS VALUES OF X,Y DERIVATIVES OF SHAPE FUNCTIONS
C-----XL IS THE ARRAY OF NODAL COORDINATES
C-----XSJ IS THE JACOBIAN DETERMINANT
C-----WG IS THE INTEGRATION WEIGHT
C
C-----
!   WRITE(*,*) XL(1,3),XL(1,1)
!   WRITE(*,*) XL(2,5),XL(2,3)
!   PAUSE

C
C...NUMBER OF SUBDIVISIONS PER SIDE:
!!  NS1=1; NT1=1; NS2=1; NT2=1
!!  NS1=2; NT1=2; NS2=2; NT2=2
!!  NS1=3; NT1=3; NS2=3; NT2=3
!!  NS1=4; NT1=4; NS2=4; NT2=4
!!  NS1=8; NT1=8; NS2=8; NT2=8
C
      NS1=D(10); NT1=D(11); NS2=D(12); NT2=D(13)
C
      NTOCUR(1)=NS1+1
      NTOCUR(2)=NTOCUR(1)+NT1
      NTOCUR(3)=NTOCUR(2)+NS2
      NTOCUR(4)=NTOCUR(3)+NT2
C
      A=XL(1,NS1+1)-XL(1,1) ; B=XL(2,NEL)-XL(2,NS1+1)

      WRITE(16,*) 'KUKU-1'
      WRITE(16,*) 'A / B=',A,B
      RJAC=(A*B)/4.
C
!   XNU=D(9)
C
C
C...FOR MORE GPTs: COMPLETE LIBRARY OF GPTs
C
      CALL PGAU_RECTANGLE
!   WRITE(*,*) 'NGAUX / NGAUY =?'
!   READ(*,*) NGAUX , NGAUY
      NGAUX=2*(NS1+1); NGAUY=2*(NT1+1)
C
!   Ngauss=2*(NS1+1)    !16    !4,8,10
!   Ngau=Ngauss        !WITHOUT CHANGE

C
      OPEN(5,FILE='VALUEPRINT_FEAP')

      DO I=1,NST
        DO J=1,NST
          S(I,J)=0.0D+00
          DO K=1,NGAUX
```

```

DO L=1,NGAUY
CS=0.5*(GI(K,NGAUX)+1.)
HT=0.5*(GI(L,NGAUY)+1.)
CALL SHAPEHERM(CS,HT,Scur,Tcur,NTOcur,XL,SHP,XSJ,NDM,NEL,IX)

DO M=1,NL

C-----E(1-11) Matrix, Status:OK

E(1)=(THCK(M)**3)/12.0
E(2)=(Ex(M)*(XNUxy(M)*((sin(2.0*AN(M)))**2/2.0)
1 +(cos(AN(M)))**4)+Ey(M)*(sin(AN(M)))**4)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(3)=(Ex(M)*(XNUxy(M)+(1.0D+00-2.0*XNUxy(M))
1 *(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0)+Ey(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(4)=(Ex(M)*((cos(AN(M)))**2-XNUxy(M)*cos(2.0*AN(M)))
1 -Ey(M)*(sin(AN(M)))**2)*sin(2.0*AN(M))/2)
2 /(1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(5)=(Ex(M)*((sin(AN(M)))**4+XNUxy(M)*
1 (sin(2.0*AN(M)))**2/2.0)+Ey(M)*(cos(AN(M)))**4)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(6)=(Ex(M)*((sin(AN(M)))**2+XNUxy(M)*cos(2.0*AN(M)))
1 -Ey(M)*(cos(AN(M)))**2)*sin(2.0*AN(M))/2.)/
2 (1.0D+00-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(7)=(Ex(M)*(1.0D+00-2.0*(XNUxy(M)**2))+Ey(M))/
1 (1.0-XNUxy(M)*XNUyx(M))
E(8)=Gxy(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2
E(9)=Gxy(M)*sin(4.0*AN(M))/2.0
E(10)=Gxy(M)*(XNUxy(M)*(sin(2.0*AN(M)))**2-cos(2.0*AN(M)))
E(11)=(sin(2.0*AN(M)))**2/4.0

C----- C(1-9) (stiffness coefficients), Status:OK

C(1)=E(2)+E(8) !A11 according to diploma thesis
C(2)=E(3)-E(8) !A21 >>
C(3)=E(4)-E(8) !A41 >>
C(4)=E(3)-E(8) !A12 >>
C(5)=E(5)+E(8) !A22 >>
C(6)=E(6)+E(9) !A42 >>
C(7)=E(4)-E(9) !A14 >>
C(8)=E(6)+E(9) !A24 >>
C(9)=E(7)*E(11)-E(10) !A44 >>

C----- F(1-3) B1, B2, B3 declaration, Status:OK

F(1)=SHP(2,I)*(C(1)*SHP(2,J) !B1
1 +C(2)*SHP(3,J)+C(3)*2.*SHP(4,J))
F(2)=SHP(3,I)*(C(4)*SHP(2,J) !B2
1 +C(5)*SHP(3,J)+C(6)*2.*SHP(4,J))
F(3)=2*SHP(4,I)*(C(7)*SHP(2,J) !B3
1 +C(8)*SHP(3,J)+C(9)*2.*SHP(4,J))

VALUE=E(1)*(F(1)+F(2)+F(3))

C----- Stifness Matrix Calculation

```

```

S(I,J)=S(I,J)+VALUE*RJAC*OMED(K,NGAUX)*OMED(L,NGAUY)

C-----
!           IF(I.EQ.1.AND.J.EQ.6) THEN
!           VALUEPRINT=D(1)*VALUE*RJAC*OMED(K,Ngau)*OMED(L,Ngau)
!           WRITE(*,*) VALUEPRINT
!           VAL1=SHP(2,I)           !D2NxI
!           VAL2=SHP(2,J)           !D2NxJ           !AN ERROR EXISTS...
!           VAL3=SHP(3,J)           !D2NyJ
!           VAL4=SHP(3,I)           !D2NyI
!           VAL5=SHP(4,I)           !D2NxyI
!           VAL6=SHP(4,J)           !D2NxyJ
!           WRITE(5,2222) CS,HT,OMED(K,Ngau),OMED(L,Ngau),VALUEPRINT
!           %           ,VAL1,VAL2,VAL3,VAL4,VAL5,VAL6
!           ENDIF
C-----

        ENDDO
        ENDDO
        ENDDO
        ENDDO
        ENDDO
2222 FORMAT(11(1X,E12.5))
C
C...PRINT SOME STIFFNESS VALUES:
C
!   WRITE(*,*) 'K(1,1)=' ,S(1,1)
!   PAUSE
C
C...PRINT STIFFNESS MATRIX (CP: 17/06/2006)
        OPEN(4,FILE='N2_FEAP')
        DO J=1,16
            WRITE(4,1111) J,S(2,J)
        ENDDO
1111 FORMAT(I5,E12.5)
C
C
        OPEN(7,FILE='K_FEAP')
        DO I=1,NST
            DO J=1,NST
                WRITE(7,8888) I,J,S(I,J)
            ENDDO
        ENDDO
8888 FORMAT(2I5,E12.5)
C
!   STOP
C
C-----
        IF(N.EQ.1) THEN
            SUM=0.0D+00
            DO I=1,4*nel,4
!           WRITE(*,9999) I,S(1,I),S(I,1)
            SUM=SUM+S(1,I)
        ENDDO
        WRITE(*,*) 'SUM OF THE FIRST ROW =' ,SUM

```

```

CC   PAUSE
      ENDIF
      9999 FORMAT(I5,2(2X,E12.5))
C
      IF (ISW.EQ.3) GO TO 330
C-----COMPUTE INTERNAL FORCES
C-----P IS THE INTERNAL FORCE VECTOR
      J2=1
      DO 610 I=1,NEL
          ULL(J2) =UL(1,I)
          ULL(J2+1)=UL(2,I)
          ULL(J2+2)=UL(3,I)
          ULL(J2+3)=UL(4,I)
610   J2=J2+NDF
      DO 620 I=1,NST      !16
          P(I)=0.0
          DO 620 K=1,NST  !16
              P(I)=P(I)-S(I,K)*ULL(K)
620   CONTINUE
C
C-----CHECK IF P=0
C      DO 66 I=1,24
C66   IF(P(I).EQ.0.) GO TO 330
C-----PRINT INTERNAL FORCE VECTOR FOR EACH ELEMENT
C      WRITE (16,666) N,(P(I),I=1,24)
C666  FORMAT ('N=',I3,/, (3(E15.4)))
C
      330 RETURN
C
      4 CONTINUE
C-----MOMENTS AT ANY DESIRED POINT (BOUNDARY OR NOT)
! MEMO:      D(1)=D
!           D(9)=XNU
!!  WRITE(*,*) 'D(1)/D(9)=' , D(1),D(9)
!!  WRITE(*,*) 'NEL=' ,NEL
C
      J2=1
      DO I=1,NEL
          ULL(J2) =UL(1,I)
          ULL(J2+1)=UL(2,I)
          ULL(J2+2)=UL(3,I)
          ULL(J2+3)=UL(4,I)
          J2=J2+NDF
      ENDDO
C
      401 CONTINUE
C
      WRITE(*,*) 'CS / HT = ??'
      READ(*,*) CS,HT
      CALL SHAPEHERM(CS,HT,Scur,Tcur,NTOcur,XL,SHP,XSJ,NDM,NEL,IX)
      CURVx=0.0D00; CURVy=0.0D00; CURVxy=0.0D00
      DO K=1,NST
C
          WRITE(*,7777) K,SHP(2,K),SHP(3,K),ULL(K)
          PAUSE
7777  FORMAT(I5,5E12.5)

```


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Στον παρόν παράρτημα παρουσιάζουμε όλα τα δεδομένα που εισάγαμε στο πρόγραμμα SimXpert 2010 Student Edition προκειμένου να πραγματοποιήσουμε τους αντίστοιχους υπολογισμούς με αυτούς που υλοποιήσαμε στο πρόγραμμα της γλώσσας Fortran 77. Τα δεδομένα παρουσιάζονται και για τις 4 περιπτώσεις φορτίσεων που μελετήσαμε, για 4 πλέγματα ανά περίπτωση και περιλαμβάνουν γεωμετρικές ιδιότητες, ιδιότητες υλικών, φορτίσεις, οριακές συνθήκες, το είδος του πεπερασμένου στοιχείου που πραγματοποίησε την επίλυση καθώς και τις συντεταγμένες των κόμβων του κάθε πλέγματος.

A) Πανταχόθεν Πακτωμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Συγκεντρωμένο Φορτίο στο Κέντρο της

- Πλέγμα 2 x 2

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Fully Clamped Central Force/CLCF_2_x_2.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
    SPC = 4
    LOAD = 3
    DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
    STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.5 0.5 0.0
GRID 2 0.0 0.0 0.0
GRID 3 0.5 0.0 0.0
GRID 4 0.0 0.5 0.0
GRID 5 1. 0.0 0.0
GRID 6 1. 0.5 0.0
GRID 7 0.5 1. 0.0
GRID 8 0.0 1. 0.0
GRID 9 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 2 3 1 4
CQUAD4 2 1 3 5 6 1
CQUAD4 3 1 4 1 7 8
CQUAD4 4 1 1 6 9 7
SPC1 1 123456 2 THRU 9
SPC1 2 123 2 THRU 9
$!
FORCE 3 1 1. 0.0 0.0 -100.
    
```

```

$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1 ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2 ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1 PCOMP "3 layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1 "P1"
$SXCOLORCOMP 1 0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1 SPC1 "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1 0
$SXNAME LOADCOL 2 SPC1 "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2 0
$SXNAME LOADCOL 3 FORCE "Central Force"
$SXCOLORLOADCOL 3 0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD 4 1 2
ENDDATA cbd36fe5

```

- **Πλέγμα 4 x 4**

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Diploma Thesis (Simxpert)/Fully Clamped
Central Force/CLCF_4_x_4.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
    SPC = 4
    LOAD = 3
    DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
    STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1 +
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.7500360.749987 0.0

```

GRID	2	0.500016	0.75	0.0
GRID	3	0.2499980.750013		0.0
GRID	4	0.750.499975		0.0
GRID	5	0.49999	0.5	0.0
GRID	6	0.249990.500025		0.0
GRID	7	0.7499870.249925		0.0
GRID	8	0.499972	0.24995	0.0
GRID	9	0.2499730.249975		0.0
GRID	10	0.0	0.0	0.0
GRID	11	0.2499	0.0	0.0
GRID	12	0.0	0.25	0.0
GRID	13	0.49995	0.0	0.0
GRID	14	0.75	0.0	0.0
GRID	15	1.	0.0	0.0
GRID	16	1.	0.2499	0.0
GRID	17	0.0	0.50005	0.0
GRID	18	1.	0.49995	0.0
GRID	19	0.0	0.7501	0.0
GRID	20	1.	0.75	0.0
GRID	21	0.25	1.	0.0
GRID	22	0.0	1.	0.0
GRID	23	0.50005	1.	0.0
GRID	24	0.7501	1.	0.0
GRID	25	1.	1.	0.0

\$!

\$!

CQUAD4	1	1	10	11	9	12
CQUAD4	2	1	11	13	8	9
CQUAD4	3	1	13	14	7	8
CQUAD4	4	1	14	15	16	7
CQUAD4	5	1	12	9	6	17
CQUAD4	6	1	9	8	5	6
CQUAD4	7	1	8	7	4	5
CQUAD4	8	1	7	16	18	4
CQUAD4	9	1	17	6	3	19
CQUAD4	10	1	6	5	2	3
CQUAD4	11	1	5	4	1	2
CQUAD4	12	1	4	18	20	1
CQUAD4	13	1	19	3	21	22
CQUAD4	14	1	3	2	23	21

```

CQUAD4      15      1      2      1      24      23
CQUAD4      16      1      1      20      25      24
SPC1        1 123456      10  THRU      25
SPC1        2      123      10  THRU      25
$!
FORCE       3      5              1.      0.0      0.0  -100.
$!  SX Names for Materials
$SXNAME MAT    1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT    2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$!  SX Names for Properties
$SXNAME PROP   1      PCOMP   "3 Layers"
$!  SX Names for Parts
$SXNAME COMP   1              "P1"
$SXCOLORCOMP              1      0
$!  SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1      SPC1   "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL              1      0
$SXNAME LOADCOL 2      SPC1   "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL              2      0
$SXNAME LOADCOL 3      FORCE   "Cocentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL              3      0
$!  SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD      4      1      2
ENDDATA d0e5adb0

```

- **Πλέγμα 6 x 6**

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/CLCF_6_x_6.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1      DefaultLbcSet
  SPC = 4
  LOAD = 3
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8      1 76E+9  5.5E+9 0.474  0.199  20.8E+9      1.4Composit

```

MAT8	2	220E+9	6.9E+9	0.25	0.021	5.51E+9	1.7	Composit
PCOMP	1							
+	1	0.00125	45.		NO	2	0.0025	-45.
+	1	0.00125	45.		NO			3 layers
GRID	1		0.833365	0.83335		0.0		
GRID	2		0.666687	0.83335		0.0		
GRID	3		0.5	0.83335		0.0		
GRID	4		0.333313	0.83335		0.0		
GRID	5		0.166635	0.83335		0.0		
GRID	6		0.833348	0.6667		0.0		
GRID	7		0.666679	0.6667		0.0		
GRID	8		0.5	0.6667		0.0		
GRID	9		0.333321	0.6667		0.0		
GRID	10		0.166652	0.6667		0.0		
GRID	11		0.833344	0.5		0.0		
GRID	12		0.666677	0.5		0.0		
GRID	13		0.5	0.5		0.0		
GRID	14		0.333323	0.5		0.0		
GRID	15		0.166656	0.5		0.0		
GRID	16		0.833345	0.3333		0.0		
GRID	17		0.666678	0.3333		0.0		
GRID	18		0.5	0.3333		0.0		
GRID	19		0.333322	0.3333		0.0		
GRID	20		0.166655	0.3333		0.0		
GRID	21		0.833352	0.1666		0.0		
GRID	22		0.666684	0.1666		0.0		
GRID	23		0.5	0.1666		0.0		
GRID	24		0.333316	0.1666		0.0		
GRID	25		0.166648	0.1666		0.0		
GRID	26		0.0	0.0		0.0		
GRID	27		0.1666	0.0		0.0		
GRID	28		0.0	0.1666		0.0		
GRID	29		0.3333	0.0		0.0		
GRID	30		0.5	0.0		0.0		
GRID	31		0.6667	0.0		0.0		
GRID	32		0.8334	0.0		0.0		
GRID	33		1.	0.0		0.0		
GRID	34		1.	0.1666		0.0		
GRID	35		0.0	0.3333		0.0		
GRID	36		1.	0.3333		0.0		
GRID	37		0.0	0.5		0.0		
GRID	38		1.	0.5		0.0		
GRID	39		0.0	0.6667		0.0		
GRID	40		1.	0.6667		0.0		
GRID	41		0.0	0.8334		0.0		
GRID	42		1.	0.8334		0.0		
GRID	43		0.1666	1.		0.0		
GRID	44		0.0	1.		0.0		
GRID	45		0.3333	1.		0.0		
GRID	46		0.5	1.		0.0		
GRID	47		0.6667	1.		0.0		
GRID	48		0.8334	1.		0.0		
GRID	49		1.	1.		0.0		
\$!								
\$!								
CQUAD4	1	1	26	27	25	28		
CQUAD4	2	1	27	29	24	25		
CQUAD4	3	1	29	30	23	24		
CQUAD4	4	1	30	31	22	23		
CQUAD4	5	1	31	32	21	22		
CQUAD4	6	1	32	33	34	21		
CQUAD4	7	1	28	25	20	35		
CQUAD4	8	1	25	24	19	20		
CQUAD4	9	1	24	23	18	19		

```

CQUAD4      10      1      23      22      17      18
CQUAD4      11      1      22      21      16      17
CQUAD4      12      1      21      34      36      16
CQUAD4      13      1      35      20      15      37
CQUAD4      14      1      20      19      14      15
CQUAD4      15      1      19      18      13      14
CQUAD4      16      1      18      17      12      13
CQUAD4      17      1      17      16      11      12
CQUAD4      18      1      16      36      38      11
CQUAD4      19      1      37      15      10      39
CQUAD4      20      1      15      14      9      10
CQUAD4      21      1      14      13      8      9
CQUAD4      22      1      13      12      7      8
CQUAD4      23      1      12      11      6      7
CQUAD4      24      1      11      38      40      6
CQUAD4      25      1      39      10      5      41
CQUAD4      26      1      10      9      4      5
CQUAD4      27      1      9      8      3      4
CQUAD4      28      1      8      7      2      3
CQUAD4      29      1      7      6      1      2
CQUAD4      30      1      6      40      42      1
CQUAD4      31      1      41      5      43      44
CQUAD4      32      1      5      4      45      43
CQUAD4      33      1      4      3      46      45
CQUAD4      34      1      3      2      47      46
CQUAD4      35      1      2      1      48      47
CQUAD4      36      1      1      42      49      48
SPC1         1 123456      26      THRU      49
SPC1         2      123      26      THRU      49
$!
FORCE        3      13      1.      0.0      0.0      -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT  1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT  2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1      PCOMP  "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1      "P1"
$SXCOLORCOMP 1      0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1      SPC1  "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1      0
$SXNAME LOADCOL 2      SPC1  "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2      0
$SXNAME LOADCOL 3      FORCE  "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3      0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD       4      1      2
ENDDATA 7d4a513d

```

• Πλέγμα 8 x 8

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Fully Clamped Central Force/8 x
8/CLCF_8_x_8.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control section

```

```

SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 4
  LOAD = 3
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. + NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.8750630.874997 0.0
GRID 2 0.7500530.875006 0.0
GRID 3 0.6250310.875016 0.0
GRID 4 0.5000090.875025 0.0
GRID 5 0.3749890.875034 0.0
GRID 6 0.249980.875044 0.0
GRID 7 0.1249830.875053 0.0
GRID 8 0.8750120.749994 0.0
GRID 9 0.7500010.750012 0.0
GRID 10 0.6249820.750031 0.0
GRID 11 0.499961 0.75005 0.0
GRID 12 0.3749450.750069 0.0
GRID 13 0.2499450.750088 0.0
GRID 14 0.1249660.750106 0.0
GRID 15 0.8749930.624969 0.0
GRID 16 0.7499770.624987 0.0
GRID 17 0.6249570.625006 0.0
GRID 18 0.4999350.625025 0.0
GRID 19 0.3749220.625044 0.0
GRID 20 0.2499250.625063 0.0
GRID 21 0.1249550.625081 0.0
GRID 22 0.8749870.499944 0.0
GRID 23 0.749970.499962 0.0
GRID 24 0.6249490.499981 0.0
GRID 25 0.499928 0.5 0.0
GRID 26 0.3749140.500019 0.0
GRID 27 0.2499190.500038 0.0
GRID 28 0.124950.500056 0.0
GRID 29 0.8749860.374919 0.0
GRID 30 0.7499690.374937 0.0
GRID 31 0.6249480.374956 0.0
GRID 32 0.4999270.374975 0.0
GRID 33 0.3749130.374994 0.0
GRID 34 0.2499180.375013 0.0
GRID 35 0.1249490.375031 0.0
GRID 36 0.8749860.249894 0.0
GRID 37 0.7499690.249912 0.0
GRID 38 0.6249480.249931 0.0
GRID 39 0.499927 0.24995 0.0
GRID 40 0.3749120.249969 0.0
GRID 41 0.2499160.249988 0.0
GRID 42 0.1249470.250006 0.0
GRID 43 0.8749880.124869 0.0
GRID 44 0.7499710.124887 0.0
GRID 45 0.6249490.124906 0.0
GRID 46 0.4999260.124925 0.0
GRID 47 0.3749080.124944 0.0
GRID 48 0.2499050.124963 0.0

```


GRID	49	0.1249350	.124981	0.0
GRID	50	0.0	0.0	0.0
GRID	51	0.12485	0.0	0.0
GRID	52	0.0	0.125	0.0
GRID	53	0.249875	0.0	0.0
GRID	54	0.3749	0.0	0.0
GRID	55	0.499925	0.0	0.0
GRID	56	0.62495	0.0	0.0
GRID	57	0.749975	0.0	0.0
GRID	58	0.875	0.0	0.0
GRID	59	1.	0.0	0.0
GRID	60	1.	0.12485	0.0
GRID	61	0.00	.250025	0.0
GRID	62	1.0	.249875	0.0
GRID	63	0.0	0.37505	0.0
GRID	64	1.	0.3749	0.0
GRID	65	0.00	.500075	0.0
GRID	66	1.0	.499925	0.0
GRID	67	0.0	0.6251	0.0
GRID	68	1.	0.62495	0.0
GRID	69	0.00	.750125	0.0
GRID	70	1.0	.749975	0.0
GRID	71	0.0	0.87515	0.0
GRID	72	1.	0.875	0.0
GRID	73	0.125	1.	0.0
GRID	74	0.0	1.	0.0
GRID	75	0.250025	1.	0.0
GRID	76	0.37505	1.	0.0
GRID	77	0.500075	1.	0.0
GRID	78	0.6251	1.	0.0
GRID	79	0.750125	1.	0.0
GRID	80	0.87515	1.	0.0
GRID	81	1.	1.	0.0

\$!
\$!

CQUAD4	1	1	50	51	49	52
CQUAD4	2	1	51	53	48	49
CQUAD4	3	1	53	54	47	48
CQUAD4	4	1	54	55	46	47
CQUAD4	5	1	55	56	45	46
CQUAD4	6	1	56	57	44	45
CQUAD4	7	1	57	58	43	44
CQUAD4	8	1	58	59	60	43
CQUAD4	9	1	52	49	42	61
CQUAD4	10	1	49	48	41	42
CQUAD4	11	1	48	47	40	41
CQUAD4	12	1	47	46	39	40
CQUAD4	13	1	46	45	38	39
CQUAD4	14	1	45	44	37	38
CQUAD4	15	1	44	43	36	37
CQUAD4	16	1	43	60	62	36
CQUAD4	17	1	61	42	35	63
CQUAD4	18	1	42	41	34	35
CQUAD4	19	1	41	40	33	34
CQUAD4	20	1	40	39	32	33
CQUAD4	21	1	39	38	31	32
CQUAD4	22	1	38	37	30	31
CQUAD4	23	1	37	36	29	30
CQUAD4	24	1	36	62	64	29
CQUAD4	25	1	63	35	28	65
CQUAD4	26	1	35	34	27	28
CQUAD4	27	1	34	33	26	27
CQUAD4	28	1	33	32	25	26
CQUAD4	29	1	32	31	24	25

```

CQUAD4      30      1      31      30      23      24
CQUAD4      31      1      30      29      22      23
CQUAD4      32      1      29      64      66      22
CQUAD4      33      1      65      28      21      67
CQUAD4      34      1      28      27      20      21
CQUAD4      35      1      27      26      19      20
CQUAD4      36      1      26      25      18      19
CQUAD4      37      1      25      24      17      18
CQUAD4      38      1      24      23      16      17
CQUAD4      39      1      23      22      15      16
CQUAD4      40      1      22      66      68      15
CQUAD4      41      1      67      21      14      69
CQUAD4      42      1      21      20      13      14
CQUAD4      43      1      20      19      12      13
CQUAD4      44      1      19      18      11      12
CQUAD4      45      1      18      17      10      11
CQUAD4      46      1      17      16      9       10
CQUAD4      47      1      16      15      8       9
CQUAD4      48      1      15      68      70      8
CQUAD4      49      1      69      14      7       71
CQUAD4      50      1      14      13      6       7
CQUAD4      51      1      13      12      5       6
CQUAD4      52      1      12      11      4       5
CQUAD4      53      1      11      10      3       4
CQUAD4      54      1      10      9       2       3
CQUAD4      55      1      9       8       1       2
CQUAD4      56      1      8       70      72      1
CQUAD4      57      1      71      7       73      74
CQUAD4      58      1      7       6       75      73
CQUAD4      59      1      6       5       76      75
CQUAD4      60      1      5       4       77      76
CQUAD4      61      1      4       3       78      77
CQUAD4      62      1      3       2       79      78
CQUAD4      63      1      2       1      80      79
CQUAD4      64      1      1      72      81      80
SPC1        1 123456      50      THRU      81
SPC1        2      123      50      THRU      81
$!
FORCE       3      25      1.      0.0      0.0      -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1      PCOMP   "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1      "P1"
$SXCOLORCOMP 1      0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1      SPC1   "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1      0
$SXNAME LOADCOL 2      SPC1   "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2      0
$SXNAME LOADCOL 3      FORCE   "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3      0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD      4      1      2
ENDDATA ccbd3176

```

B) Πανταχόθεν Εδρασμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Συγκεντρωμένο Φορτίο στο Κέντρο της

• Πλέγμα 2 x 2

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/SSCF_2_x_2.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 4
  LOAD = 3
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. + NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.5 0.5 0.0
GRID 2 0.0 0.0 0.0
GRID 3 0.5 0.0 0.0
GRID 4 0.0 0.5 0.0
GRID 5 1. 0.0 0.0
GRID 6 1. 0.5 0.0
GRID 7 0.5 1. 0.0
GRID 8 0.0 1. 0.0
GRID 9 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 2 3 1 4
CQUAD4 2 1 3 5 6 1
CQUAD4 3 1 4 1 7 8
CQUAD4 4 1 1 6 9 7
SPC1 1 123456 2 THRU 9
SPC1 2 12 2 THRU 9
$!
FORCE 3 1 1. 0.0 0.0 -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1 ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2 ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1 PCOMP "3 layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1 "P1"
$SXCOLORCOMP 1 0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1 SPC1 "Fully clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1 0
$SXNAME LOADCOL 2 SPC1 "Simply supported"
$SXCOLORLOADCOL 2 0
$SXNAME LOADCOL 3 FORCE "Central Force"
$SXCOLORLOADCOL 3 0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD 4 1 2

```

ENDDATA ab095a6c

• Πλέγμα 4 x 4

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/SSCF_4_x_4.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 4
  LOAD = 3
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.7500360.749987 0.0
GRID 2 0.500016 0.75 0.0
GRID 3 0.2499980.750013 0.0
GRID 4 0.750.499975 0.0
GRID 5 0.49999 0.5 0.0
GRID 6 0.249990.500025 0.0
GRID 7 0.7499870.249925 0.0
GRID 8 0.499972 0.24995 0.0
GRID 9 0.2499730.249975 0.0
GRID 10 0.0 0.0 0.0
GRID 11 0.2499 0.0 0.0
GRID 12 0.0 0.25 0.0
GRID 13 0.49995 0.0 0.0
GRID 14 0.75 0.0 0.0
GRID 15 1. 0.0 0.0
GRID 16 1. 0.2499 0.0
GRID 17 0.0 0.50005 0.0
GRID 18 1. 0.49995 0.0
GRID 19 0.0 0.7501 0.0
GRID 20 1. 0.75 0.0
GRID 21 0.25 1. 0.0
GRID 22 0.0 1. 0.0
GRID 23 0.50005 1. 0.0
GRID 24 0.7501 1. 0.0
GRID 25 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 10 11 9 12
CQUAD4 2 1 11 13 8 9
CQUAD4 3 1 13 14 7 8
CQUAD4 4 1 14 15 16 7
CQUAD4 5 1 12 9 6 17
CQUAD4 6 1 9 8 5 6
CQUAD4 7 1 8 7 4 5

```

```

CQUAD4      8      1      7      16      18      4
CQUAD4      9      1     17      6      3     19
CQUAD4     10      1      6      5      2      3
CQUAD4     11      1      5      4      1      2
CQUAD4     12      1      4     18     20      1
CQUAD4     13      1     19      3     21     22
CQUAD4     14      1      3      2     23     21
CQUAD4     15      1      2      1     24     23
CQUAD4     16      1      1     20     25     24
SPC1        1 123456 10  THRU 25
SPC1        2      123 10  THRU 25
$!
FORCE       3      5      1.     0.0    0.0   -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1     PCOMP  "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1     "P1"
$SXCOLORCOMP 1     0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1  SPC1  "Fully clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1  0
$SXNAME LOADCOL 2  SPC1  "Simply supported"
$SXCOLORLOADCOL 2  0
$SXNAME LOADCOL 3  FORCE  "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3  0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD      4      1      2
ENDDATA 7f35cbfa

```

• Πλέγμα 6 x 6

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/SSCF_6_x_6.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 4
  LOAD = 3
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8      1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8      2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP     1
+         1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. NO+
+         1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID      1 0.833365 0.83335 0.0
GRID      2 0.666687 0.83335 0.0
GRID      3 0.5 0.83335 0.0

```

GRID	4	0.333313	0.83335	0.0
GRID	5	0.166635	0.83335	0.0
GRID	6	0.833348	0.6667	0.0
GRID	7	0.666679	0.6667	0.0
GRID	8	0.5	0.6667	0.0
GRID	9	0.333321	0.6667	0.0
GRID	10	0.166652	0.6667	0.0
GRID	11	0.833344	0.5	0.0
GRID	12	0.666677	0.5	0.0
GRID	13	0.5	0.5	0.0
GRID	14	0.333323	0.5	0.0
GRID	15	0.166656	0.5	0.0
GRID	16	0.833345	0.3333	0.0
GRID	17	0.666678	0.3333	0.0
GRID	18	0.5	0.3333	0.0
GRID	19	0.333322	0.3333	0.0
GRID	20	0.166655	0.3333	0.0
GRID	21	0.833352	0.1666	0.0
GRID	22	0.666684	0.1666	0.0
GRID	23	0.5	0.1666	0.0
GRID	24	0.333316	0.1666	0.0
GRID	25	0.166648	0.1666	0.0
GRID	26	0.0	0.0	0.0
GRID	27	0.1666	0.0	0.0
GRID	28	0.0	0.1666	0.0
GRID	29	0.3333	0.0	0.0
GRID	30	0.5	0.0	0.0
GRID	31	0.6667	0.0	0.0
GRID	32	0.8334	0.0	0.0
GRID	33	1.	0.0	0.0
GRID	34	1.	0.1666	0.0
GRID	35	0.0	0.3333	0.0
GRID	36	1.	0.3333	0.0
GRID	37	0.0	0.5	0.0
GRID	38	1.	0.5	0.0
GRID	39	0.0	0.6667	0.0
GRID	40	1.	0.6667	0.0
GRID	41	0.0	0.8334	0.0
GRID	42	1.	0.8334	0.0
GRID	43	0.1666	1.	0.0
GRID	44	0.0	1.	0.0
GRID	45	0.3333	1.	0.0
GRID	46	0.5	1.	0.0
GRID	47	0.6667	1.	0.0
GRID	48	0.8334	1.	0.0
GRID	49	1.	1.	0.0

\$!

\$!

CQUAD4	1	1	26	27	25	28
CQUAD4	2	1	27	29	24	25
CQUAD4	3	1	29	30	23	24
CQUAD4	4	1	30	31	22	23
CQUAD4	5	1	31	32	21	22
CQUAD4	6	1	32	33	34	21
CQUAD4	7	1	28	25	20	35
CQUAD4	8	1	25	24	19	20
CQUAD4	9	1	24	23	18	19
CQUAD4	10	1	23	22	17	18
CQUAD4	11	1	22	21	16	17
CQUAD4	12	1	21	34	36	16
CQUAD4	13	1	35	20	15	37
CQUAD4	14	1	20	19	14	15
CQUAD4	15	1	19	18	13	14
CQUAD4	16	1	18	17	12	13

```

CQUAD4      17      1      17      16      11      12
CQUAD4      18      1      16      36      38      11
CQUAD4      19      1      37      15      10      39
CQUAD4      20      1      15      14      9      10
CQUAD4      21      1      14      13      8      9
CQUAD4      22      1      13      12      7      8
CQUAD4      23      1      12      11      6      7
CQUAD4      24      1      11      38      40      6
CQUAD4      25      1      39      10      5      41
CQUAD4      26      1      10      9      4      5
CQUAD4      27      1      9      8      3      4
CQUAD4      28      1      8      7      2      3
CQUAD4      29      1      7      6      1      2
CQUAD4      30      1      6      40      42      1
CQUAD4      31      1      41      5      43      44
CQUAD4      32      1      5      4      45      43
CQUAD4      33      1      4      3      46      45
CQUAD4      34      1      3      2      47      46
CQUAD4      35      1      2      1      48      47
CQUAD4      36      1      1      42      49      48
SPC1         1 123456 26 THRU 49
SPC1         2      123 26 THRU 49
$!
FORCE        3      13      1.      0.0      0.0      -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT  1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT  2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1      PCOMP  "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1      "P1"
$SXCOLORCOMP 1      0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1      SPC1  "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1      0
$SXNAME LOADCOL 2      SPC1  "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2      0
$SXNAME LOADCOL 3      FORCE  "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3      0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD       4      1      2
ENDDATA 6d6baca9

```

- Πλέγμα 8 x 8

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/SSCF_8_x_8.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1      DefaultLbcSet
  SPC = 4
  LOAD = 3
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK

```

```

$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. + NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3
layers
GRID 1 0.8750630.874997 0.0
GRID 2 0.7500530.875006 0.0
GRID 3 0.6250310.875016 0.0
GRID 4 0.5000090.875025 0.0
GRID 5 0.3749890.875034 0.0
GRID 6 0.249980.875044 0.0
GRID 7 0.1249830.875053 0.0
GRID 8 0.8750120.749994 0.0
GRID 9 0.7500010.750012 0.0
GRID 10 0.6249820.750031 0.0
GRID 11 0.499961 0.75005 0.0
GRID 12 0.3749450.750069 0.0
GRID 13 0.2499450.750088 0.0
GRID 14 0.1249660.750106 0.0
GRID 15 0.8749930.624969 0.0
GRID 16 0.7499770.624987 0.0
GRID 17 0.6249570.625006 0.0
GRID 18 0.4999350.625025 0.0
GRID 19 0.3749220.625044 0.0
GRID 20 0.2499250.625063 0.0
GRID 21 0.1249550.625081 0.0
GRID 22 0.8749870.499944 0.0
GRID 23 0.749970.499962 0.0
GRID 24 0.6249490.499981 0.0
GRID 25 0.499928 0.5 0.0
GRID 26 0.3749140.500019 0.0
GRID 27 0.2499190.500038 0.0
GRID 28 0.124950.500056 0.0
GRID 29 0.8749860.374919 0.0
GRID 30 0.7499690.374937 0.0
GRID 31 0.6249480.374956 0.0
GRID 32 0.4999270.374975 0.0
GRID 33 0.3749130.374994 0.0
GRID 34 0.2499180.375013 0.0
GRID 35 0.1249490.375031 0.0
GRID 36 0.8749860.249894 0.0
GRID 37 0.7499690.249912 0.0
GRID 38 0.6249480.249931 0.0
GRID 39 0.499927 0.24995 0.0
GRID 40 0.3749120.249969 0.0
GRID 41 0.2499160.249988 0.0
GRID 42 0.1249470.250006 0.0
GRID 43 0.8749880.124869 0.0
GRID 44 0.7499710.124887 0.0
GRID 45 0.6249490.124906 0.0
GRID 46 0.4999260.124925 0.0
GRID 47 0.3749080.124944 0.0
GRID 48 0.2499050.124963 0.0
GRID 49 0.1249350.124981 0.0
GRID 50 0.0 0.0 0.0
GRID 51 0.12485 0.0 0.0
GRID 52 0.0 0.125 0.0
GRID 53 0.249875 0.0 0.0
GRID 54 0.3749 0.0 0.0
GRID 55 0.499925 0.0 0.0

```


GRID	56	0.62495	0.0	0.0
GRID	57	0.749975	0.0	0.0
GRID	58	0.875	0.0	0.0
GRID	59	1.	0.0	0.0
GRID	60	1. 0.12485		0.0
GRID	61	0.00.250025		0.0
GRID	62	1.0.249875		0.0
GRID	63	0.0 0.37505		0.0
GRID	64	1. 0.3749		0.0
GRID	65	0.00.500075		0.0
GRID	66	1.0.499925		0.0
GRID	67	0.0 0.6251		0.0
GRID	68	1. 0.62495		0.0
GRID	69	0.00.750125		0.0
GRID	70	1.0.749975		0.0
GRID	71	0.0 0.87515		0.0
GRID	72	1. 0.875		0.0
GRID	73	0.125	1.	0.0
GRID	74	0.0	1.	0.0
GRID	75	0.250025	1.	0.0
GRID	76	0.37505	1.	0.0
GRID	77	0.500075	1.	0.0
GRID	78	0.6251	1.	0.0
GRID	79	0.750125	1.	0.0
GRID	80	0.87515	1.	0.0
GRID	81	1.	1.	0.0

\$!

\$!

CQUAD4	1	1	50	51	49	52
CQUAD4	2	1	51	53	48	49
CQUAD4	3	1	53	54	47	48
CQUAD4	4	1	54	55	46	47
CQUAD4	5	1	55	56	45	46
CQUAD4	6	1	56	57	44	45
CQUAD4	7	1	57	58	43	44
CQUAD4	8	1	58	59	60	43
CQUAD4	9	1	52	49	42	61
CQUAD4	10	1	49	48	41	42
CQUAD4	11	1	48	47	40	41
CQUAD4	12	1	47	46	39	40
CQUAD4	13	1	46	45	38	39
CQUAD4	14	1	45	44	37	38
CQUAD4	15	1	44	43	36	37
CQUAD4	16	1	43	60	62	36
CQUAD4	17	1	61	42	35	63
CQUAD4	18	1	42	41	34	35
CQUAD4	19	1	41	40	33	34
CQUAD4	20	1	40	39	32	33
CQUAD4	21	1	39	38	31	32
CQUAD4	22	1	38	37	30	31
CQUAD4	23	1	37	36	29	30
CQUAD4	24	1	36	62	64	29
CQUAD4	25	1	63	35	28	65
CQUAD4	26	1	35	34	27	28
CQUAD4	27	1	34	33	26	27
CQUAD4	28	1	33	32	25	26
CQUAD4	29	1	32	31	24	25
CQUAD4	30	1	31	30	23	24
CQUAD4	31	1	30	29	22	23
CQUAD4	32	1	29	64	66	22
CQUAD4	33	1	65	28	21	67
CQUAD4	34	1	28	27	20	21
CQUAD4	35	1	27	26	19	20
CQUAD4	36	1	26	25	18	19

```

CQUAD4      37      1      25      24      17      18
CQUAD4      38      1      24      23      16      17
CQUAD4      39      1      23      22      15      16
CQUAD4      40      1      22      66      68      15
CQUAD4      41      1      67      21      14      69
CQUAD4      42      1      21      20      13      14
CQUAD4      43      1      20      19      12      13
CQUAD4      44      1      19      18      11      12
CQUAD4      45      1      18      17      10      11
CQUAD4      46      1      17      16      9       10
CQUAD4      47      1      16      15      8       9
CQUAD4      48      1      15      68      70      8
CQUAD4      49      1      69      14      7       71
CQUAD4      50      1      14      13      6       7
CQUAD4      51      1      13      12      5       6
CQUAD4      52      1      12      11      4       5
CQUAD4      53      1      11      10      3       4
CQUAD4      54      1      10      9       2       3
CQUAD4      55      1      9       8       1       2
CQUAD4      56      1      8       70      72      1
CQUAD4      57      1      71      7       73      74
CQUAD4      58      1      7       6       75      73
CQUAD4      59      1      6       5       76      75
CQUAD4      60      1      5       4       77      76
CQUAD4      61      1      4       3       78      77
CQUAD4      62      1      3       2       79      78
CQUAD4      63      1      2       1       80      79
CQUAD4      64      1      1       72      81      80
SPC1        1 123456      50      THRU      81
SPC1        2      123      50      THRU      81
$!
FORCE       3      25      1.      0.0      0.0      -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1      PCOMP   "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1      "P1"
$SXCOLORCOMP 1      0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1      SPC1   "Fully clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1      0
$SXNAME LOADCOL 2      SPC1   "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2      0
$SXNAME LOADCOL 3      FORCE   "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3      0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD      4      1      2
ENDDATA bae1d942

```

Γ) Πανταχόθεν Πακτωμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Ομοιόμορφα Καταναμημένο Φορτίο

- Πλέγμα 2 x 2

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Fully Clamped Distributed
Pressure/CLDP_2_x_2.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section

```

```

$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 1
  LOAD = 2
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.5 0.5 0.0
GRID 2 0.0 0.0 0.0
GRID 3 0.5 0.0 0.0
GRID 4 0.0 0.5 0.0
GRID 5 1. 0.0 0.0
GRID 6 1. 0.5 0.0
GRID 7 0.5 1. 0.0
GRID 8 0.0 1. 0.0
GRID 9 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 2 3 1 4
CQUAD4 2 1 3 5 6 1
CQUAD4 3 1 4 1 7 8
CQUAD4 4 1 1 6 9 7
SPC1 1 123456 2 THRU 9
$!
PLOAD4 2 1 -100.
PLOAD4 2 2 -100.
PLOAD4 2 3 -100.
PLOAD4 2 4 -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1 ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2 ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1 PCOMP "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1 "P1"
$SXCOLORCOMP 1 0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1 SPC1 "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1 0
$SXNAME LOADCOL 2 PLOAD4 "Distributed Pressure"
$SXCOLORLOADCOL 2 0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
ENDDATA 4d986bda

```

- Πλέγμα 4 x 4

c:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/CLDP_4_x_4.bdf

```

$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 5
  LOAD = 6
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. + NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.7500360.749987 0.0
GRID 2 0.500016 0.75 0.0
GRID 3 0.2499980.750013 0.0
GRID 4 0.750.499975 0.0
GRID 5 0.49999 0.5 0.0
GRID 6 0.249990.500025 0.0
GRID 7 0.7499870.249925 0.0
GRID 8 0.499972 0.24995 0.0
GRID 9 0.2499730.249975 0.0
GRID 10 0.0 0.0 0.0
GRID 11 0.2499 0.0 0.0
GRID 12 0.0 0.25 0.0
GRID 13 0.49995 0.0 0.0
GRID 14 0.75 0.0 0.0
GRID 15 1. 0.0 0.0
GRID 16 1. 0.2499 0.0
GRID 17 0.0 0.50005 0.0
GRID 18 1. 0.49995 0.0
GRID 19 0.0 0.7501 0.0
GRID 20 1. 0.75 0.0
GRID 21 0.25 1. 0.0
GRID 22 0.0 1. 0.0
GRID 23 0.50005 1. 0.0
GRID 24 0.7501 1. 0.0
GRID 25 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 10 11 9 12
CQUAD4 2 1 11 13 8 9
CQUAD4 3 1 13 14 7 8
CQUAD4 4 1 14 15 16 7
CQUAD4 5 1 12 9 6 17
CQUAD4 6 1 9 8 5 6
CQUAD4 7 1 8 7 4 5
CQUAD4 8 1 7 16 18 4
CQUAD4 9 1 17 6 3 19
CQUAD4 10 1 6 5 2 3
CQUAD4 11 1 5 4 1 2
CQUAD4 12 1 4 18 20 1
CQUAD4 13 1 19 3 21 22
CQUAD4 14 1 3 2 23 21

```

```

CQUAD4      15      1      2      1      24      23
CQUAD4      16      1      1      20      25      24
SPC1        1 123456      10  THRU      25
SPC1        2      123      10  THRU      25
$!
FORCE       3      5              1.      0.0      0.0      -100.
$!
PLOAD4     4      1     -100.
PLOAD4     4      2     -100.
PLOAD4     4      3     -100.
PLOAD4     4      4     -100.
PLOAD4     4      5     -100.
PLOAD4     4      6     -100.
PLOAD4     4      7     -100.
PLOAD4     4      8     -100.
PLOAD4     4      9     -100.
PLOAD4     4     10     -100.
PLOAD4     4     11     -100.
PLOAD4     4     12     -100.
PLOAD4     4     13     -100.
PLOAD4     4     14     -100.
PLOAD4     4     15     -100.
PLOAD4     4     16     -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1      PCOMP   "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1              "P1"
$SXCOLORCOMP 1      0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1      SPC1  "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1      0
$SXNAME LOADCOL 2      SPC1  "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2      0
$SXNAME LOADCOL 3      FORCE  "Cocentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3      0
$SXNAME LOADCOL 4      PLOAD4 "Distribured Force"
$SXCOLORLOADCOL 4      0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD      5      1      2
LOAD        6      1.      1.      3      1.      4
ENDDATA ca6856f5

```

• Πλέγμα 6 x 6

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/CLDP_6_x_6.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1      DefaultLbcSet
  SPC = 5
  LOAD = 6
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL

```

```

STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. + NO+
+ 1 0.00125 45. NO NO 3 layers
GRID 1 0.833365 0.83335 0.0
GRID 2 0.666687 0.83335 0.0
GRID 3 0.5 0.83335 0.0
GRID 4 0.333313 0.83335 0.0
GRID 5 0.166635 0.83335 0.0
GRID 6 0.833348 0.6667 0.0
GRID 7 0.666679 0.6667 0.0
GRID 8 0.5 0.6667 0.0
GRID 9 0.333321 0.6667 0.0
GRID 10 0.166652 0.6667 0.0
GRID 11 0.833344 0.5 0.0
GRID 12 0.666677 0.5 0.0
GRID 13 0.5 0.5 0.0
GRID 14 0.333323 0.5 0.0
GRID 15 0.166656 0.5 0.0
GRID 16 0.833345 0.3333 0.0
GRID 17 0.666678 0.3333 0.0
GRID 18 0.5 0.3333 0.0
GRID 19 0.333322 0.3333 0.0
GRID 20 0.166655 0.3333 0.0
GRID 21 0.833352 0.1666 0.0
GRID 22 0.666684 0.1666 0.0
GRID 23 0.5 0.1666 0.0
GRID 24 0.333316 0.1666 0.0
GRID 25 0.166648 0.1666 0.0
GRID 26 0.0 0.0 0.0
GRID 27 0.1666 0.0 0.0
GRID 28 0.0 0.1666 0.0
GRID 29 0.3333 0.0 0.0
GRID 30 0.5 0.0 0.0
GRID 31 0.6667 0.0 0.0
GRID 32 0.8334 0.0 0.0
GRID 33 1. 0.0 0.0
GRID 34 1. 0.1666 0.0
GRID 35 0.0 0.3333 0.0
GRID 36 1. 0.3333 0.0
GRID 37 0.0 0.5 0.0
GRID 38 1. 0.5 0.0
GRID 39 0.0 0.6667 0.0
GRID 40 1. 0.6667 0.0
GRID 41 0.0 0.8334 0.0
GRID 42 1. 0.8334 0.0
GRID 43 0.1666 1. 0.0
GRID 44 0.0 1. 0.0
GRID 45 0.3333 1. 0.0
GRID 46 0.5 1. 0.0
GRID 47 0.6667 1. 0.0
GRID 48 0.8334 1. 0.0
GRID 49 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 26 27 25 28
CQUAD4 2 1 27 29 24 25
CQUAD4 3 1 29 30 23 24

```

CQUAD4	4	1	30	31	22	23	
CQUAD4	5	1	31	32	21	22	
CQUAD4	6	1	32	33	34	21	
CQUAD4	7	1	28	25	20	35	
CQUAD4	8	1	25	24	19	20	
CQUAD4	9	1	24	23	18	19	
CQUAD4	10	1	23	22	17	18	
CQUAD4	11	1	22	21	16	17	
CQUAD4	12	1	21	34	36	16	
CQUAD4	13	1	35	20	15	37	
CQUAD4	14	1	20	19	14	15	
CQUAD4	15	1	19	18	13	14	
CQUAD4	16	1	18	17	12	13	
CQUAD4	17	1	17	16	11	12	
CQUAD4	18	1	16	36	38	11	
CQUAD4	19	1	37	15	10	39	
CQUAD4	20	1	15	14	9	10	
CQUAD4	21	1	14	13	8	9	
CQUAD4	22	1	13	12	7	8	
CQUAD4	23	1	12	11	6	7	
CQUAD4	24	1	11	38	40	6	
CQUAD4	25	1	39	10	5	41	
CQUAD4	26	1	10	9	4	5	
CQUAD4	27	1	9	8	3	4	
CQUAD4	28	1	8	7	2	3	
CQUAD4	29	1	7	6	1	2	
CQUAD4	30	1	6	40	42	1	
CQUAD4	31	1	41	5	43	44	
CQUAD4	32	1	5	4	45	43	
CQUAD4	33	1	4	3	46	45	
CQUAD4	34	1	3	2	47	46	
CQUAD4	35	1	2	1	48	47	
CQUAD4	36	1	1	42	49	48	
SPC1	1	123456	26	THRU	49		
SPC1	2	123	26	THRU	49		
\$!							
FORCE	3	13		1.	0.0	0.0	-100.
\$!							
PLOAD4	4	1	-100.				
PLOAD4	4	2	-100.				
PLOAD4	4	3	-100.				
PLOAD4	4	4	-100.				
PLOAD4	4	5	-100.				
PLOAD4	4	6	-100.				
PLOAD4	4	7	-100.				
PLOAD4	4	8	-100.				
PLOAD4	4	9	-100.				
PLOAD4	4	10	-100.				
PLOAD4	4	11	-100.				
PLOAD4	4	12	-100.				
PLOAD4	4	13	-100.				
PLOAD4	4	14	-100.				
PLOAD4	4	15	-100.				
PLOAD4	4	16	-100.				
PLOAD4	4	17	-100.				
PLOAD4	4	18	-100.				
PLOAD4	4	19	-100.				
PLOAD4	4	20	-100.				
PLOAD4	4	21	-100.				
PLOAD4	4	22	-100.				
PLOAD4	4	23	-100.				
PLOAD4	4	24	-100.				
PLOAD4	4	25	-100.				
PLOAD4	4	26	-100.				

```

PLOAD4      4      27    -100.
PLOAD4      4      28    -100.
PLOAD4      4      29    -100.
PLOAD4      4      30    -100.
PLOAD4      4      31    -100.
PLOAD4      4      32    -100.
PLOAD4      4      33    -100.
PLOAD4      4      34    -100.
PLOAD4      4      35    -100.
PLOAD4      4      36    -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1     PCOMP    "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1     "P1"
$SXCOLORCOMP 1     0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1  SPC1    "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1  0
$SXNAME LOADCOL 2  SPC1    "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2  0
$SXNAME LOADCOL 3  FORCE    "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3  0
$SXNAME LOADCOL 4  PLOAD4  "Distributed Pressure"
$SXCOLORLOADCOL 4  0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD      5      1      2
LOAD        6      1.     1.     3      1.     4
ENDDATA 0714b845

```

• Πλέγμα 8 x 8

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Temp/CLDP_8_x_8.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 5
  LOAD = 6
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8      1  76E+9  5.5E+9  0.474  0.199  20.8E+9  1.4Composit
MAT8      2  220E+9  6.9E+9  0.25  0.021  5.51E+9  1.7Composit
PCOMP     1
+         1  0.00125  45.    NO      2  0.0025  -45.    +
+         1  0.00125  45.    NO      3 layers
GRID     1  0.8750630.874997  0.0
GRID     2  0.7500530.875006  0.0
GRID     3  0.6250310.875016  0.0

```


GRID	4	0.5000090.875025	0.0
GRID	5	0.3749890.875034	0.0
GRID	6	0.249980.875044	0.0
GRID	7	0.1249830.875053	0.0
GRID	8	0.8750120.749994	0.0
GRID	9	0.7500010.750012	0.0
GRID	10	0.6249820.750031	0.0
GRID	11	0.499961 0.75005	0.0
GRID	12	0.3749450.750069	0.0
GRID	13	0.2499450.750088	0.0
GRID	14	0.1249660.750106	0.0
GRID	15	0.8749930.624969	0.0
GRID	16	0.7499770.624987	0.0
GRID	17	0.6249570.625006	0.0
GRID	18	0.4999350.625025	0.0
GRID	19	0.3749220.625044	0.0
GRID	20	0.2499250.625063	0.0
GRID	21	0.1249550.625081	0.0
GRID	22	0.8749870.499944	0.0
GRID	23	0.749970.499962	0.0
GRID	24	0.6249490.499981	0.0
GRID	25	0.499928 0.5	0.0
GRID	26	0.3749140.500019	0.0
GRID	27	0.2499190.500038	0.0
GRID	28	0.124950.500056	0.0
GRID	29	0.8749860.374919	0.0
GRID	30	0.7499690.374937	0.0
GRID	31	0.6249480.374956	0.0
GRID	32	0.4999270.374975	0.0
GRID	33	0.3749130.374994	0.0
GRID	34	0.2499180.375013	0.0
GRID	35	0.1249490.375031	0.0
GRID	36	0.8749860.249894	0.0
GRID	37	0.7499690.249912	0.0
GRID	38	0.6249480.249931	0.0
GRID	39	0.499927 0.24995	0.0
GRID	40	0.3749120.249969	0.0
GRID	41	0.2499160.249988	0.0
GRID	42	0.1249470.250006	0.0
GRID	43	0.8749880.124869	0.0
GRID	44	0.7499710.124887	0.0
GRID	45	0.6249490.124906	0.0
GRID	46	0.4999260.124925	0.0
GRID	47	0.3749080.124944	0.0
GRID	48	0.2499050.124963	0.0
GRID	49	0.1249350.124981	0.0
GRID	50	0.0 0.0	0.0
GRID	51	0.12485 0.0	0.0
GRID	52	0.0 0.125	0.0
GRID	53	0.249875 0.0	0.0
GRID	54	0.3749 0.0	0.0
GRID	55	0.499925 0.0	0.0
GRID	56	0.62495 0.0	0.0
GRID	57	0.749975 0.0	0.0
GRID	58	0.875 0.0	0.0
GRID	59	1. 0.0	0.0
GRID	60	1. 0.12485	0.0
GRID	61	0.00.250025	0.0
GRID	62	1.0.249875	0.0
GRID	63	0.0 0.37505	0.0
GRID	64	1. 0.3749	0.0
GRID	65	0.00.500075	0.0
GRID	66	1.0.499925	0.0
GRID	67	0.0 0.6251	0.0

GRID	68		1.	0.62495		0.0
GRID	69		0.00	0.750125		0.0
GRID	70		1.0	0.749975		0.0
GRID	71		0.0	0.87515		0.0
GRID	72		1.	0.875		0.0
GRID	73		0.125	1.		0.0
GRID	74		0.0	1.		0.0
GRID	75		0.250025	1.		0.0
GRID	76		0.37505	1.		0.0
GRID	77		0.500075	1.		0.0
GRID	78		0.6251	1.		0.0
GRID	79		0.750125	1.		0.0
GRID	80		0.87515	1.		0.0
GRID	81		1.	1.		0.0
\$!						
\$!						
CQUAD4	1	1	50	51	49	52
CQUAD4	2	1	51	53	48	49
CQUAD4	3	1	53	54	47	48
CQUAD4	4	1	54	55	46	47
CQUAD4	5	1	55	56	45	46
CQUAD4	6	1	56	57	44	45
CQUAD4	7	1	57	58	43	44
CQUAD4	8	1	58	59	60	43
CQUAD4	9	1	52	49	42	61
CQUAD4	10	1	49	48	41	42
CQUAD4	11	1	48	47	40	41
CQUAD4	12	1	47	46	39	40
CQUAD4	13	1	46	45	38	39
CQUAD4	14	1	45	44	37	38
CQUAD4	15	1	44	43	36	37
CQUAD4	16	1	43	60	62	36
CQUAD4	17	1	61	42	35	63
CQUAD4	18	1	42	41	34	35
CQUAD4	19	1	41	40	33	34
CQUAD4	20	1	40	39	32	33
CQUAD4	21	1	39	38	31	32
CQUAD4	22	1	38	37	30	31
CQUAD4	23	1	37	36	29	30
CQUAD4	24	1	36	62	64	29
CQUAD4	25	1	63	35	28	65
CQUAD4	26	1	35	34	27	28
CQUAD4	27	1	34	33	26	27
CQUAD4	28	1	33	32	25	26
CQUAD4	29	1	32	31	24	25
CQUAD4	30	1	31	30	23	24
CQUAD4	31	1	30	29	22	23
CQUAD4	32	1	29	64	66	22
CQUAD4	33	1	65	28	21	67
CQUAD4	34	1	28	27	20	21
CQUAD4	35	1	27	26	19	20
CQUAD4	36	1	26	25	18	19
CQUAD4	37	1	25	24	17	18
CQUAD4	38	1	24	23	16	17
CQUAD4	39	1	23	22	15	16
CQUAD4	40	1	22	66	68	15
CQUAD4	41	1	67	21	14	69
CQUAD4	42	1	21	20	13	14
CQUAD4	43	1	20	19	12	13
CQUAD4	44	1	19	18	11	12
CQUAD4	45	1	18	17	10	11
CQUAD4	46	1	17	16	9	10
CQUAD4	47	1	16	15	8	9
CQUAD4	48	1	15	68	70	8

CQUAD4	49	1	69	14	7	71	
CQUAD4	50	1	14	13	6	7	
CQUAD4	51	1	13	12	5	6	
CQUAD4	52	1	12	11	4	5	
CQUAD4	53	1	11	10	3	4	
CQUAD4	54	1	10	9	2	3	
CQUAD4	55	1	9	8	1	2	
CQUAD4	56	1	8	70	72	1	
CQUAD4	57	1	71	7	73	74	
CQUAD4	58	1	7	6	75	73	
CQUAD4	59	1	6	5	76	75	
CQUAD4	60	1	5	4	77	76	
CQUAD4	61	1	4	3	78	77	
CQUAD4	62	1	3	2	79	78	
CQUAD4	63	1	2	1	80	79	
CQUAD4	64	1	1	72	81	80	
SPC1	1	123456	50	THRU	81		
SPC1	2	123	50	THRU	81		
\$!							
FORCE	3	25		1.	0.0	0.0	-100.
\$!							
PLOAD4	4	1	-100.				
PLOAD4	4	2	-100.				
PLOAD4	4	3	-100.				
PLOAD4	4	4	-100.				
PLOAD4	4	5	-100.				
PLOAD4	4	6	-100.				
PLOAD4	4	7	-100.				
PLOAD4	4	8	-100.				
PLOAD4	4	9	-100.				
PLOAD4	4	10	-100.				
PLOAD4	4	11	-100.				
PLOAD4	4	12	-100.				
PLOAD4	4	13	-100.				
PLOAD4	4	14	-100.				
PLOAD4	4	15	-100.				
PLOAD4	4	16	-100.				
PLOAD4	4	17	-100.				
PLOAD4	4	18	-100.				
PLOAD4	4	19	-100.				
PLOAD4	4	20	-100.				
PLOAD4	4	21	-100.				
PLOAD4	4	22	-100.				
PLOAD4	4	23	-100.				
PLOAD4	4	24	-100.				
PLOAD4	4	25	-100.				
PLOAD4	4	26	-100.				
PLOAD4	4	27	-100.				
PLOAD4	4	28	-100.				
PLOAD4	4	29	-100.				
PLOAD4	4	30	-100.				
PLOAD4	4	31	-100.				
PLOAD4	4	32	-100.				
PLOAD4	4	33	-100.				
PLOAD4	4	34	-100.				
PLOAD4	4	35	-100.				
PLOAD4	4	36	-100.				
PLOAD4	4	37	-100.				
PLOAD4	4	38	-100.				
PLOAD4	4	39	-100.				
PLOAD4	4	40	-100.				
PLOAD4	4	41	-100.				
PLOAD4	4	42	-100.				
PLOAD4	4	43	-100.				

```

PLOAD4      4      44    -100.
PLOAD4      4      45    -100.
PLOAD4      4      46    -100.
PLOAD4      4      47    -100.
PLOAD4      4      48    -100.
PLOAD4      4      49    -100.
PLOAD4      4      50    -100.
PLOAD4      4      51    -100.
PLOAD4      4      52    -100.
PLOAD4      4      53    -100.
PLOAD4      4      54    -100.
PLOAD4      4      55    -100.
PLOAD4      4      56    -100.
PLOAD4      4      57    -100.
PLOAD4      4      58    -100.
PLOAD4      4      59    -100.
PLOAD4      4      60    -100.
PLOAD4      4      61    -100.
PLOAD4      4      62    -100.
PLOAD4      4      63    -100.
PLOAD4      4      64    -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1 ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2 ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1 PCOMP "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1 "P1"
$SXCOLORCOMP 1 0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1 SPC1 "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1 0
$SXNAME LOADCOL 2 SPC1 "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2 0
$SXNAME LOADCOL 3 FORCE "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3 0
$SXNAME LOADCOL 4 PLOAD4 "Distributed Pressure"
$SXCOLORLOADCOL 4 0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD 5 1 2
LOAD 6 1. 1. 3 1. 4
ENDDATA 917636c0

```

Δ) Πανταχόθεν Εδρασμένη Πολυστρωματική Πλάκα με Ομοιόμορφα Καταναμημένο Φορτίο

- Πλέγμα 2 x 2

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Simply Supported Distributed Force/2 x
2/SSDP_2_x_2.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet

```

```

SPC = 4
LOAD = 2
DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.5 0.5 0.0
GRID 2 0.0 0.0 0.0
GRID 3 0.5 0.0 0.0
GRID 4 0.0 0.5 0.0
GRID 5 1. 0.0 0.0
GRID 6 1. 0.5 0.0
GRID 7 0.5 1. 0.0
GRID 8 0.0 1. 0.0
GRID 9 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 2 3 1 4
CQUAD4 2 1 3 5 6 1
CQUAD4 3 1 4 1 7 8
CQUAD4 4 1 1 6 9 7
SPC1 1 123456 2 THRU 9
$!
PLOAD4 2 1 -100.
PLOAD4 2 2 -100.
PLOAD4 2 3 -100.
PLOAD4 2 4 -100.
SPC1 3 123 2 THRU 9
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1 ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2 ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1 PCOMP "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1 "P1"
$SXCOLORCOMP 1 0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1 SPC1 "Fully clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1 0
$SXNAME LOADCOL 3 SPC1 "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 3 0
$SXNAME LOADCOL 2 PLOAD4 "Distributed Pressure"
$SXCOLORLOADCOL 2 0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD 4 1 3
ENDDATA 7dcc24d3

```

• Πλέγμα 4 x 4

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Simply Supported Distributed Force/4 x
4/SSDP_4_x_4.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section

```

```

SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 5
  LOAD = 6
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. + NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.7500360.749987 0.0
GRID 2 0.500016 0.75 0.0
GRID 3 0.2499980.750013 0.0
GRID 4 0.750.499975 0.0
GRID 5 0.49999 0.5 0.0
GRID 6 0.249990.500025 0.0
GRID 7 0.7499870.249925 0.0
GRID 8 0.499972 0.24995 0.0
GRID 9 0.2499730.249975 0.0
GRID 10 0.0 0.0 0.0
GRID 11 0.2499 0.0 0.0
GRID 12 0.0 0.25 0.0
GRID 13 0.49995 0.0 0.0
GRID 14 0.75 0.0 0.0
GRID 15 1. 0.0 0.0
GRID 16 1. 0.2499 0.0
GRID 17 0.0 0.50005 0.0
GRID 18 1. 0.49995 0.0
GRID 19 0.0 0.7501 0.0
GRID 20 1. 0.75 0.0
GRID 21 0.25 1. 0.0
GRID 22 0.0 1. 0.0
GRID 23 0.50005 1. 0.0
GRID 24 0.7501 1. 0.0
GRID 25 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 10 11 9 12
CQUAD4 2 1 11 13 8 9
CQUAD4 3 1 13 14 7 8
CQUAD4 4 1 14 15 16 7
CQUAD4 5 1 12 9 6 17
CQUAD4 6 1 9 8 5 6
CQUAD4 7 1 8 7 4 5
CQUAD4 8 1 7 16 18 4
CQUAD4 9 1 17 6 3 19
CQUAD4 10 1 6 5 2 3
CQUAD4 11 1 5 4 1 2
CQUAD4 12 1 4 18 20 1
CQUAD4 13 1 19 3 21 22
CQUAD4 14 1 3 2 23 21
CQUAD4 15 1 2 1 24 23
CQUAD4 16 1 1 20 25 24
SPC1 1 123456 10 THRU 25

```

```

SPC1          2      123      10      THRU      25
$!
FORCE         3         5              1.      0.0      0.0      -100.
$!
PLOAD4        4         1     -100.
PLOAD4        4         2     -100.
PLOAD4        4         3     -100.
PLOAD4        4         4     -100.
PLOAD4        4         5     -100.
PLOAD4        4         6     -100.
PLOAD4        4         7     -100.
PLOAD4        4         8     -100.
PLOAD4        4         9     -100.
PLOAD4        4        10     -100.
PLOAD4        4        11     -100.
PLOAD4        4        12     -100.
PLOAD4        4        13     -100.
PLOAD4        4        14     -100.
PLOAD4        4        15     -100.
PLOAD4        4        16     -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT   1          ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT   2          ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP   1          PCOMP   "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP   1          "P1"
$SXCOLORCOMP   1          0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1          SPC1   "Fully clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1          0
$SXNAME LOADCOL 2          SPC1   "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2          0
$SXNAME LOADCOL 3          FORCE   "Cocentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3          0
$SXNAME LOADCOL 4          PLOAD4 "Distribured Force"
$SXCOLORLOADCOL 4          0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD        5          1          2
LOAD          6          1.      1.      3          1.      4
ENDDATA 3e1c5519

```

- Πλέγμα 6 x 6

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Simply Supported Distributed Force/6 x
6/SSDP_6_x_6.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1          DefaultLbcSet
    SPC = 5
    LOAD = 6
    DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
    STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK

```

```

$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. + NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.833365 0.83335 0.0
GRID 2 0.666687 0.83335 0.0
GRID 3 0.5 0.83335 0.0
GRID 4 0.333313 0.83335 0.0
GRID 5 0.166635 0.83335 0.0
GRID 6 0.833348 0.6667 0.0
GRID 7 0.666679 0.6667 0.0
GRID 8 0.5 0.6667 0.0
GRID 9 0.333321 0.6667 0.0
GRID 10 0.166652 0.6667 0.0
GRID 11 0.833344 0.5 0.0
GRID 12 0.666677 0.5 0.0
GRID 13 0.5 0.5 0.0
GRID 14 0.333323 0.5 0.0
GRID 15 0.166656 0.5 0.0
GRID 16 0.833345 0.3333 0.0
GRID 17 0.666678 0.3333 0.0
GRID 18 0.5 0.3333 0.0
GRID 19 0.333322 0.3333 0.0
GRID 20 0.166655 0.3333 0.0
GRID 21 0.833352 0.1666 0.0
GRID 22 0.666684 0.1666 0.0
GRID 23 0.5 0.1666 0.0
GRID 24 0.333316 0.1666 0.0
GRID 25 0.166648 0.1666 0.0
GRID 26 0.0 0.0 0.0
GRID 27 0.1666 0.0 0.0
GRID 28 0.0 0.1666 0.0
GRID 29 0.3333 0.0 0.0
GRID 30 0.5 0.0 0.0
GRID 31 0.6667 0.0 0.0
GRID 32 0.8334 0.0 0.0
GRID 33 1. 0.0 0.0
GRID 34 1. 0.1666 0.0
GRID 35 0.0 0.3333 0.0
GRID 36 1. 0.3333 0.0
GRID 37 0.0 0.5 0.0
GRID 38 1. 0.5 0.0
GRID 39 0.0 0.6667 0.0
GRID 40 1. 0.6667 0.0
GRID 41 0.0 0.8334 0.0
GRID 42 1. 0.8334 0.0
GRID 43 0.1666 1. 0.0
GRID 44 0.0 1. 0.0
GRID 45 0.3333 1. 0.0
GRID 46 0.5 1. 0.0
GRID 47 0.6667 1. 0.0
GRID 48 0.8334 1. 0.0
GRID 49 1. 1. 0.0
$!
$!
CQUAD4 1 1 26 27 25 28
CQUAD4 2 1 27 29 24 25
CQUAD4 3 1 29 30 23 24
CQUAD4 4 1 30 31 22 23
CQUAD4 5 1 31 32 21 22

```


CQUAD4	6	1	32	33	34	21	
CQUAD4	7	1	28	25	20	35	
CQUAD4	8	1	25	24	19	20	
CQUAD4	9	1	24	23	18	19	
CQUAD4	10	1	23	22	17	18	
CQUAD4	11	1	22	21	16	17	
CQUAD4	12	1	21	34	36	16	
CQUAD4	13	1	35	20	15	37	
CQUAD4	14	1	20	19	14	15	
CQUAD4	15	1	19	18	13	14	
CQUAD4	16	1	18	17	12	13	
CQUAD4	17	1	17	16	11	12	
CQUAD4	18	1	16	36	38	11	
CQUAD4	19	1	37	15	10	39	
CQUAD4	20	1	15	14	9	10	
CQUAD4	21	1	14	13	8	9	
CQUAD4	22	1	13	12	7	8	
CQUAD4	23	1	12	11	6	7	
CQUAD4	24	1	11	38	40	6	
CQUAD4	25	1	39	10	5	41	
CQUAD4	26	1	10	9	4	5	
CQUAD4	27	1	9	8	3	4	
CQUAD4	28	1	8	7	2	3	
CQUAD4	29	1	7	6	1	2	
CQUAD4	30	1	6	40	42	1	
CQUAD4	31	1	41	5	43	44	
CQUAD4	32	1	5	4	45	43	
CQUAD4	33	1	4	3	46	45	
CQUAD4	34	1	3	2	47	46	
CQUAD4	35	1	2	1	48	47	
CQUAD4	36	1	1	42	49	48	
SPC1	1	123456	26	THRU	49		
SPC1	2	123	26	THRU	49		
\$!							
FORCE	3	13		1.	0.0	0.0	-100.
\$!							
PLOAD4	4	1	-100.				
PLOAD4	4	2	-100.				
PLOAD4	4	3	-100.				
PLOAD4	4	4	-100.				
PLOAD4	4	5	-100.				
PLOAD4	4	6	-100.				
PLOAD4	4	7	-100.				
PLOAD4	4	8	-100.				
PLOAD4	4	9	-100.				
PLOAD4	4	10	-100.				
PLOAD4	4	11	-100.				
PLOAD4	4	12	-100.				
PLOAD4	4	13	-100.				
PLOAD4	4	14	-100.				
PLOAD4	4	15	-100.				
PLOAD4	4	16	-100.				
PLOAD4	4	17	-100.				
PLOAD4	4	18	-100.				
PLOAD4	4	19	-100.				
PLOAD4	4	20	-100.				
PLOAD4	4	21	-100.				
PLOAD4	4	22	-100.				
PLOAD4	4	23	-100.				
PLOAD4	4	24	-100.				
PLOAD4	4	25	-100.				
PLOAD4	4	26	-100.				
PLOAD4	4	27	-100.				
PLOAD4	4	28	-100.				

```

PLOAD4      4      29  -100.
PLOAD4      4      30  -100.
PLOAD4      4      31  -100.
PLOAD4      4      32  -100.
PLOAD4      4      33  -100.
PLOAD4      4      34  -100.
PLOAD4      4      35  -100.
PLOAD4      4      36  -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT 1 ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT 2 ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1 PCOMP "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1 "P1"
$SXCOLORCOMP 1 0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1 SPC1 "Fully clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1 0
$SXNAME LOADCOL 2 SPC1 "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2 0
$SXNAME LOADCOL 3 FORCE "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3 0
$SXNAME LOADCOL 4 PLOAD4 "Distributed Pressure"
$SXCOLORLOADCOL 4 0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD 5 1 2
LOAD 6 1. 1. 3 1. 4
ENDDATA a6cc44b8

```

• Πλέγμα 8 x 8

```

$# C:/Users/Dimitris/Desktop/Simply Supported Distributed Force/8 x
8/SSDP_8_x_8.bdf
$! NASTRAN Control Section
$! File Management Section
$! Executive Control Section
SOL 101
CEND
ECHO = SORT
$! Case Control Section
SUBCASE 1
$! Subcase name : DefaultLoadCase
$LBCSET SUBCASE1 DefaultLbcSet
  SPC = 5
  LOAD = 6
  DISPLACEMENT(SORT1,PRINT,REAL)=ALL
  STRESS(SORT1,PRINT,REAL,VONMISES,CORNER)=ALL
BEGIN BULK
$! Bulk Data Pre Section
PARAM POST 0
$! Bulk Data Model Section
MAT8 1 76E+9 5.5E+9 0.474 0.199 20.8E+9 1.4Composit
MAT8 2 220E+9 6.9E+9 0.25 0.021 5.51E+9 1.7Composit
PCOMP 1
+ 1 0.00125 45. NO 2 0.0025 -45. NO+
+ 1 0.00125 45. NO 3 layers
GRID 1 0.8750630.874997 0.0
GRID 2 0.7500530.875006 0.0
GRID 3 0.6250310.875016 0.0
GRID 4 0.5000090.875025 0.0

```

GRID	5	0.3749890.875034	0.0
GRID	6	0.249980.875044	0.0
GRID	7	0.1249830.875053	0.0
GRID	8	0.8750120.749994	0.0
GRID	9	0.7500010.750012	0.0
GRID	10	0.6249820.750031	0.0
GRID	11	0.499961 0.75005	0.0
GRID	12	0.3749450.750069	0.0
GRID	13	0.2499450.750088	0.0
GRID	14	0.1249660.750106	0.0
GRID	15	0.8749930.624969	0.0
GRID	16	0.7499770.624987	0.0
GRID	17	0.6249570.625006	0.0
GRID	18	0.4999350.625025	0.0
GRID	19	0.3749220.625044	0.0
GRID	20	0.2499250.625063	0.0
GRID	21	0.1249550.625081	0.0
GRID	22	0.8749870.499944	0.0
GRID	23	0.749970.499962	0.0
GRID	24	0.6249490.499981	0.0
GRID	25	0.499928 0.5	0.0
GRID	26	0.3749140.500019	0.0
GRID	27	0.2499190.500038	0.0
GRID	28	0.124950.500056	0.0
GRID	29	0.8749860.374919	0.0
GRID	30	0.7499690.374937	0.0
GRID	31	0.6249480.374956	0.0
GRID	32	0.4999270.374975	0.0
GRID	33	0.3749130.374994	0.0
GRID	34	0.2499180.375013	0.0
GRID	35	0.1249490.375031	0.0
GRID	36	0.8749860.249894	0.0
GRID	37	0.7499690.249912	0.0
GRID	38	0.6249480.249931	0.0
GRID	39	0.499927 0.24995	0.0
GRID	40	0.3749120.249969	0.0
GRID	41	0.2499160.249988	0.0
GRID	42	0.1249470.250006	0.0
GRID	43	0.8749880.124869	0.0
GRID	44	0.7499710.124887	0.0
GRID	45	0.6249490.124906	0.0
GRID	46	0.4999260.124925	0.0
GRID	47	0.3749080.124944	0.0
GRID	48	0.2499050.124963	0.0
GRID	49	0.1249350.124981	0.0
GRID	50	0.0 0.0	0.0
GRID	51	0.12485 0.0	0.0
GRID	52	0.0 0.125	0.0
GRID	53	0.249875 0.0	0.0
GRID	54	0.3749 0.0	0.0
GRID	55	0.499925 0.0	0.0
GRID	56	0.62495 0.0	0.0
GRID	57	0.749975 0.0	0.0
GRID	58	0.875 0.0	0.0
GRID	59	1. 0.0	0.0
GRID	60	1. 0.12485	0.0
GRID	61	0.00.250025	0.0
GRID	62	1.0.249875	0.0
GRID	63	0.0 0.37505	0.0
GRID	64	1. 0.3749	0.0
GRID	65	0.00.500075	0.0
GRID	66	1.0.499925	0.0
GRID	67	0.0 0.6251	0.0
GRID	68	1. 0.62495	0.0

GRID	69		0.00.750125		0.0
GRID	70		1.0.749975		0.0
GRID	71		0.0 0.87515		0.0
GRID	72		1. 0.875		0.0
GRID	73		0.125 1.		0.0
GRID	74		0.0 1.		0.0
GRID	75		0.250025 1.		0.0
GRID	76		0.37505 1.		0.0
GRID	77		0.500075 1.		0.0
GRID	78		0.6251 1.		0.0
GRID	79		0.750125 1.		0.0
GRID	80		0.87515 1.		0.0
GRID	81		1. 1.		0.0

\$!

\$!

CQUAD4	1	1	50	51	49	52
CQUAD4	2	1	51	53	48	49
CQUAD4	3	1	53	54	47	48
CQUAD4	4	1	54	55	46	47
CQUAD4	5	1	55	56	45	46
CQUAD4	6	1	56	57	44	45
CQUAD4	7	1	57	58	43	44
CQUAD4	8	1	58	59	60	43
CQUAD4	9	1	52	49	42	61
CQUAD4	10	1	49	48	41	42
CQUAD4	11	1	48	47	40	41
CQUAD4	12	1	47	46	39	40
CQUAD4	13	1	46	45	38	39
CQUAD4	14	1	45	44	37	38
CQUAD4	15	1	44	43	36	37
CQUAD4	16	1	43	60	62	36
CQUAD4	17	1	61	42	35	63
CQUAD4	18	1	42	41	34	35
CQUAD4	19	1	41	40	33	34
CQUAD4	20	1	40	39	32	33
CQUAD4	21	1	39	38	31	32
CQUAD4	22	1	38	37	30	31
CQUAD4	23	1	37	36	29	30
CQUAD4	24	1	36	62	64	29
CQUAD4	25	1	63	35	28	65
CQUAD4	26	1	35	34	27	28
CQUAD4	27	1	34	33	26	27
CQUAD4	28	1	33	32	25	26
CQUAD4	29	1	32	31	24	25
CQUAD4	30	1	31	30	23	24
CQUAD4	31	1	30	29	22	23
CQUAD4	32	1	29	64	66	22
CQUAD4	33	1	65	28	21	67
CQUAD4	34	1	28	27	20	21
CQUAD4	35	1	27	26	19	20
CQUAD4	36	1	26	25	18	19
CQUAD4	37	1	25	24	17	18
CQUAD4	38	1	24	23	16	17
CQUAD4	39	1	23	22	15	16
CQUAD4	40	1	22	66	68	15
CQUAD4	41	1	67	21	14	69
CQUAD4	42	1	21	20	13	14
CQUAD4	43	1	20	19	12	13
CQUAD4	44	1	19	18	11	12
CQUAD4	45	1	18	17	10	11
CQUAD4	46	1	17	16	9	10
CQUAD4	47	1	16	15	8	9
CQUAD4	48	1	15	68	70	8
CQUAD4	49	1	69	14	7	71

CQUAD4	50	1	14	13	6	7	
CQUAD4	51	1	13	12	5	6	
CQUAD4	52	1	12	11	4	5	
CQUAD4	53	1	11	10	3	4	
CQUAD4	54	1	10	9	2	3	
CQUAD4	55	1	9	8	1	2	
CQUAD4	56	1	8	70	72	1	
CQUAD4	57	1	71	7	73	74	
CQUAD4	58	1	7	6	75	73	
CQUAD4	59	1	6	5	76	75	
CQUAD4	60	1	5	4	77	76	
CQUAD4	61	1	4	3	78	77	
CQUAD4	62	1	3	2	79	78	
CQUAD4	63	1	2	1	80	79	
CQUAD4	64	1	1	72	81	80	
SPC1	1	123456	50	THRU	81		
SPC1	2	123	50	THRU	81		
\$!							
FORCE	3	25		1.	0.0	0.0	-100.
\$!							
PLOAD4	4	1	-100.				
PLOAD4	4	2	-100.				
PLOAD4	4	3	-100.				
PLOAD4	4	4	-100.				
PLOAD4	4	5	-100.				
PLOAD4	4	6	-100.				
PLOAD4	4	7	-100.				
PLOAD4	4	8	-100.				
PLOAD4	4	9	-100.				
PLOAD4	4	10	-100.				
PLOAD4	4	11	-100.				
PLOAD4	4	12	-100.				
PLOAD4	4	13	-100.				
PLOAD4	4	14	-100.				
PLOAD4	4	15	-100.				
PLOAD4	4	16	-100.				
PLOAD4	4	17	-100.				
PLOAD4	4	18	-100.				
PLOAD4	4	19	-100.				
PLOAD4	4	20	-100.				
PLOAD4	4	21	-100.				
PLOAD4	4	22	-100.				
PLOAD4	4	23	-100.				
PLOAD4	4	24	-100.				
PLOAD4	4	25	-100.				
PLOAD4	4	26	-100.				
PLOAD4	4	27	-100.				
PLOAD4	4	28	-100.				
PLOAD4	4	29	-100.				
PLOAD4	4	30	-100.				
PLOAD4	4	31	-100.				
PLOAD4	4	32	-100.				
PLOAD4	4	33	-100.				
PLOAD4	4	34	-100.				
PLOAD4	4	35	-100.				
PLOAD4	4	36	-100.				
PLOAD4	4	37	-100.				
PLOAD4	4	38	-100.				
PLOAD4	4	39	-100.				
PLOAD4	4	40	-100.				
PLOAD4	4	41	-100.				
PLOAD4	4	42	-100.				
PLOAD4	4	43	-100.				
PLOAD4	4	44	-100.				

```

PLOAD4      4      45    -100.
PLOAD4      4      46    -100.
PLOAD4      4      47    -100.
PLOAD4      4      48    -100.
PLOAD4      4      49    -100.
PLOAD4      4      50    -100.
PLOAD4      4      51    -100.
PLOAD4      4      52    -100.
PLOAD4      4      53    -100.
PLOAD4      4      54    -100.
PLOAD4      4      55    -100.
PLOAD4      4      56    -100.
PLOAD4      4      57    -100.
PLOAD4      4      58    -100.
PLOAD4      4      59    -100.
PLOAD4      4      60    -100.
PLOAD4      4      61    -100.
PLOAD4      4      62    -100.
PLOAD4      4      63    -100.
PLOAD4      4      64    -100.
$! SX Names for Materials
$SXNAME MAT  1      ANISOTR "Composite Aramid Epoxy"
$SXNAME MAT  2      ANISOTR "Composite HM Carbon Epoxy"
$! SX Names for Properties
$SXNAME PROP 1      PCOMP   "3 Layers"
$! SX Names for Parts
$SXNAME COMP 1      "P1"
$SXCOLORCOMP 1      0
$! SX Names for LBC entities
$SXNAME LOADCOL 1    SPC1   "Fully Clamped"
$SXCOLORLOADCOL 1    0
$SXNAME LOADCOL 2    SPC1   "Simply Supported"
$SXCOLORLOADCOL 2    0
$SXNAME LOADCOL 3    FORCE   "Concentrated Force"
$SXCOLORLOADCOL 3    0
$SXNAME LOADCOL 4    PLOAD4 "Distributed Pressure"
$SXCOLORLOADCOL 4    0
$! SX Names for Generic Physical entities
$! Bulk Data Post Section
SPCADD      5      1      2
LOAD        6      1.     1.     3      1.     4
ENDDATA dcb00b36

```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- “Analysis and Performance of Fiber Composites”, Bhagwan D. Agarwal, Lawrence J. Broutman, 2nd edition, 1990
- “Practical Analysis of Composite Laminates”, J. N. Reddy, A. Miravete, 1995
- “Finite Element Analysis of Composite Laminates”, O. O. Ochoa and J. N. Reddy, Kluwer Academic Publishers, 1992
- “Mechanics and Analysis of Composite Materials”, Valery V. Vasiliev and Evgeny v. Morozov, Elsevier, 2001
- Διπλωματική εργασία Διονυσίου Ι. Αγγελίδη, “Ανάπτυξη μικροστοιχείων Coons για την στατική ανάλυση λεπτών πλακών”, Αθήνα, Ιούλιος 2005
- Master’s thesis of Nikolaos Kesimoglou, “Static and dynamic analysis of plates in bending with the use of computational geometry elements”, Athens 2008
- “Ελαφρές Κατασκευές”, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Χριστόφορος Προβατίδης , Αθήνα 2003
- “Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών ΙΙ”, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Χριστόφορος Προβατίδης , Αθήνα 2004
- “Composite Materials for Aircraft Structures”, 2nd edition, AIAA
- “Finite Element Analysis for Composite Structures”, Lazarus Teneketzis & John Argyris, 1998 Kluwer Academic Publishers
- “Introduction to Composite Materials Design”, Ever J. Barbero, 1999 Taylor & Francis Group
- “Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, Volume 1: Element Technology”, Thomas J. R. Hughes & Ernest Hinton, 1986 Pineridge Press Limited
- “Analysis of Shells and Plates”, Phillip L. Gould, 1988, Springer – Verlag New York Inc.
- ‘Ανάλυση Φορέων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων’, Μ. Παπαδρακάκης, Αθήνα 2001, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, σελ. 332 – 343
- ‘Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων Ι’, Γ. Ι. Τσαμασφύρος, Ε. Ε. Θεοτόκογλου, Αθήνα 2005, Εκδόσεις Συμμετρία, σελ. 200 – 214
- ‘Programming the Finite Element Method’, I. M. Smith, D. V. Griffiths, 4th Edition, Chinchester: John Wiley & Sons, c2004, pages 40 – 43
- ‘Finite Elements for Solids, Fluids and Optimization’, G. A. Mohr, Oxford University Press, Oxford 1992, pages 184 – 188
- ‘The Finite Element Method for Engineers’, Kenneth H. Huebner, John Wiley and Sons, New York 1975, pages 162 – 165 & 223 – 226.