



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

**Υπολογιστική και Αναλυτική μελέτη των συνοριακών
συνθηκών για την κατανομή των τάσεων στο 1ο θεμελιώδες
πρόβλημα Βραζιλιανού δίσκου με μερικώς επιπεδωμένα
σύνορα.**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρία Ε. Σταυροπούλου

Επιβλέπων: Δρ. Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ 2023

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

Νικόλαος Δ. Λαγαρός, Καθηγητής, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ

Στον παλπού μου τον Χρήστο

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Μαρκίδη για τον χρόνο που αφιέρωσε και την προσπάθεια που κατέβαλε ώστε να κατανοήσω την θεωρία της παρούσας εργασίας και να μου επιλύσει όλες τις απορίες. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Ερμιόνη Πάσιου για την τις συμβουλές της στο υπολογιστικό μέρος της εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στους κ. Σταύρο Κ. Κουρκουλή και Ευστάθιο Ε. Θεοτόκογλου για την πολύτιμη βοήθειά τους κατά την διάρκεια της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξή τους καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Αποτελέσματα της εργασίας έχουν παρουσιαστεί στα συνέδρια:

- 38th Danubia- Adria Symposium on Advances in Experimental Mechanics (Σεπτέμβριος 2022), “*The actual boundary conditions in the Flattened Brazilian Disc test*”, Christos F. Markides , Ermioni D. Pasiou, Maria E. Stavropoulou.
- 2nd Mediterranean Conference on Fracture and Structural Integrity, ” *Revisiting the flattened Brazilian disc configuration - Part I: The actual boundary conditions* ”, Christos F. Markides, Ermioni D. Pasiou, Maria Stavropoulou, Athanasios Papagiannopoulos, Fotios Sakaropoulos, Stavros K. Kourkoulis.

Περιεχόμενα	
Πρόλογος.....	12
Περίληψη	13
Abstract.....	14
1ο Κεφάλαιο: Επιπεδωμένος Βραζιλιανός Δίσκος (Flattened Brazilian Disc) 16	
1.1 Εισαγωγή	17
1.2 Η εξέλιξη των θεωριών του Βραζιλιανού δίσκου.....	17
1.3 Η εξέλιξη των θεωριών του Επιπεδωμένου Βραζιλιανού δίσκου	22
2ο Κεφάλαιο: Θεωρητική Ανάλυση (Theoretical Analysis) [27]..... 35	
2.1 Εισαγωγή	35
2.2 Η αναλυτική λύση όταν το μήκος επαφής είναι σταθερό	36
2.3 Η λύση του πρώτου θεμελιώδους προβλήματος για τον FBD υπό θλίψη μεταξύ πλακών φόρτισης που το μήκος τους υπερβαίνει το μήκος του επίπεδου συνόρου του δίσκου.....	43
2.4 Η εφελκυστική συνιστώσα της τάσης στο κέντρο του FBD στο ω άνω πρόβλημα (FBD - platen).....	47
3ο Κεφάλαιο: Αναλυτική και αριθμητική λύση 48	
3.1 Εισαγωγή	48
3.2 Περιγραφή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων [5]	50
3.2.1 Βασικές αρχές της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων [5].....	51
3.2.2 Διαδικασία Μοντελοποίησης [34].....	52
3.2.3 Περιορισμοί Μοντελοποίησης [36].....	53
3.3 Έλεγχος σύγκλισης διακριτοποίησης.....	54
3.4 Παραμετρική ανάλυση.....	57
3.4.1 Ο ρόλος του συντελεστή τριβής.....	57
3.4.2 Ο ρόλος του υλικού	58
3.4.3 Ο ρόλος του πάχους της πλάκας φόρτισης	62
3.4.4 Ο ρόλος της γωνίας επαφής	65
3.4.5 Ο ρόλος του πάχους του δοκιμίου.....	71
4ο Κεφάλαιο: Συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων σε δοκίμια με εγκοπή στο κέντρο..... 80	
4.1 Εισαγωγή	80
4.2 Το πεδίο των τάσεων για κάθε διάταξη	83
4.3 Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων.....	88
Σύνοψη – Συμπεράσματα 90	

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	91
Βιβλιογραφικές Αναφορές.....	92

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία με τίτλο «Υπολογιστική και Αναλυτική μελέτη των συνοριακών συνθηκών για την κατανομή των τάσεων στο 1ο θεμελιώδες πρόβλημα Βραζιλιανού δίσκου με μερικώς επιπεδωμένα σύνορα» εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε του Ε.Μ.Π τη χρονική περίοδο από τον Σεπτέμβριο του 2022 έως τον Οκτώβριο του 2023.

Αναπτύχθηκε αναλυτική λύση για την μελέτη της μεταβολής του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων σε θλιβόμενα επιπεδωμένα κυλινδρικά δοκίμια flattened Brazilian discs (FBD) σε δύο περιπτώσεις: (α) πλάκες φόρτισης ίσου πλάτους με τα επίπεδα σύνορα του δίσκου (stamps) και (β) πλάκες φόρτισης μεγαλύτερου πλάτους του επίπεδου συνόρου του δίσκου (platens), συναρτήσει διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος, όπως η γωνία (φ) που αντιστοιχεί στο εύρος του επίπεδου τμήματος του δίσκου, το πάχος (t) του δοκιμίου, τη φύση του υλικού (E, ν), και η τριβή (f).

Δημιουργήθηκαν τα αντίστοιχα αριθμητικά προσομοιώματα και πραγματοποιήθηκε εκτενής παραμετρικός έλεγχος για λόγους σύγκρισης των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα της αναλυτικής λύσης και επαλήθευσης αμφοτέρων των προσεγγίσεων, αναλυτικής και αριθμητικής.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στην περίπτωση της αριθμητικής προσέγγισης μελετάται το τασικό πεδίο και το πεδίο μετατοπίσεων για την περίπτωση που το πάχος των πλακών φόρτισης είναι μεγαλύτερο από το πάχος του δοκιμίου, προσομοιώνοντας ακριβέστερα την πειραματική διάταξη.

Τέλος, μελετάται με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων το τασικό πεδίο σε μοντέλα FBD και σε μοντέλα Βραζιλιανού δίσκου όπως έχουν προταθεί από την International Society (ISTM) και American Society (ASRM) και μία νέα διάταξη η οποία θα συζητηθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο, με μία εγκοπή στο κέντρο του δοκιμίου.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αναλυτική και αριθμητική διερεύνηση του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων σε θλιβόμενα κυλινδρικά δοκίμια τύπου FBD.

Στο 1^ο κεφάλαιο, περιγράφονται οι λόγοι που οδηγούν την επιστημονική κοινότητα στην ανάπτυξη εναλλακτικών, του μονοαξονικού εφελκυσμού, πειραματικών μεθόδων για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής ψαθυρών υλικών, όπως το Brazilian Disc Test και το Flattened Brazilian Disc Test. Αναλύονται καινοτόμες τεχνικές που εφαρμόστηκαν σε δοκίμια FBD και τα αποτελεσματά τους.

Στο 2^ο κεφάλαιο, βασιζόμενοι στην προσέγγιση των μιγαδικών δυναμικών των Kolosov και Muskhelishvili, αναπτύσσεται η θεωρητική λύση για το 1^ο θεμελιώδες πρόβλημα του FBD, και υπολογίζεται το τασικό πεδίο και το πεδίο μετατοπίσεων.

Στο 3^ο κεφάλαιο, γίνεται παραμετρικός έλεγχος και σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της αναλυτικής και της αριθμητικής λύσης.

Στο 4^ο κεφάλαιο, εξετάζονται δοκίμια τύπου FBD και Brazilian Disc κατά ASRM και ISTM καθώς και μία νέα πρόταση των Markides και Kourkoulis, ο Incurved Brazilian Disc (IBD), με κεντρική εγκοπή ορθογωνικής μορφής.

Τέλος, παρατίθενται κάποια συμπεράσματα και προτείνονται μέθοδοι βελτίωσης των αποτελεσμάτων των προσομοιωμάτων που προέκυψαν στην παρούσα εργασία.

Abstract

The aim of this thesis is the analytical and numerical investigation of the tensile field and the displacement field in Flattened Brazilian Disc (FBD) type specimens.

In Chapter 1, the reasons that lead the scientific community to develop alternative, to the direct tension test, experimental methods for the determination of tensile strength of brittle materials, such as the Brazilian Disc Test and the Flattened Brazilian Disc Test are described. Innovative techniques applied to FBD specimens and their results are analyzed.

In Chapter 2, based on Kolosov-Muskhelishvili's complex potentials approach, the theoretical solution for the first fundamental problem of FBD is developed, and the stress field and displacement field are obtained.

In Chapter 3, analytical solution and numerical model are validated against each other after a parametric investigation and comparison of their results.

In Chapter 4, FBD and Brazilian Disc type specimens, according to ISRM and ASTM standards, as well as the new configuration of the Incurved Brazilian Disc, recently proposed by Markides and Kourkoulis, all of them containing a central rectangular notch rather than a mathematical crack, are studied.

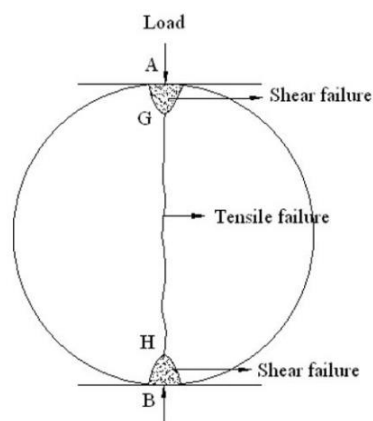
Finally, some conclusions are drawn and methods are proposed to improve the results of the simulations obtained in this paper.

1ο Κεφάλαιο: Επιπεδομένος Βραζιλιανός Δίσκος (Flattened Brazilian Disc)

1.1 Εισαγωγή

Ο προσδιορισμός του μέτρου ελαστικότητας, της εφελκυστικής αντοχής και της δυσθραυστότητας αποτελούν υψίστης σημασίας ζητήματα για τον τομέα της Μηχανικής και ειδικότερα της γεωτεχνικής.

Η υλοποίηση του πειράματος του μονοαξονικού εφελκυσμού στα ψαθυρά υλικά για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής τους εμφανίζει αρκετά προβλήματα όπως η πρόωμη θραύση στις περιοχές σύσφιξης των κεφαλών των δοκιμίων από τις αρπάγες. Για τον λόγο αυτό το 1943 ο Carneiro [1] και λίγους μήνες αργότερα ο Akazawa [2] προτείνουν την μέθοδο του Βραζιλιανού δίσκου (**Εικ. 1.1**) σαν μία εναλλακτική μέθοδο για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής στα γεωϋλικά. Ωστόσο, και στην εφαρμογή αυτής της μεθόδου παρουσιάζονται κάποιες αστοχίες, όπως η εμφάνιση διαξονικού πεδίου αντί για μονοαξονικό στο κέντρο του δίσκου και η εμφάνιση πρόωμης θραύσης στην περιοχή επαφής δίσκου - πλάκας φόρτισης που δημιουργούν προβληματισμούς ως προς την εγκυρότητα του πειράματος, που εξασφαλίζεται μόνο εφόσον η θραύση του δοκιμίου ξεκινάει από το κέντρο του δίσκου, λόγω εφελκυσμού. Η βελτίωση της εν λόγω πειραματικής διαδικασίας απασχόλησε την επιστημονική κοινότητα με αποτέλεσμα να αναπτυχθούν εναλλακτικές μέθοδοι και τεχνικές που θα αναλυθούν εκτενέστερα στην επόμενη ενότητα.



Εικ. 1.1: Το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου [3].

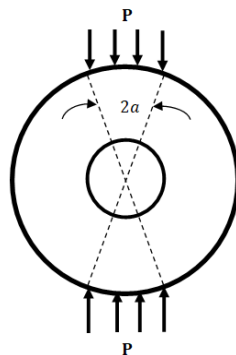
1.2 Η εξέλιξη των θεωριών του Βραζιλιανού δίσκου

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, το 1943 προτάθηκε η μέθοδος του Βραζιλιανού δίσκου από τους Carneiro και Akazawa. Εξαιτίας των αστοχιών που εμφανίζει η μέθοδος δημιουργήθηκαν αμφιβολίες στην επιστημονική κοινότητα σχετικά

με την εγκυρότητα της διαδικασίας. Η θεωρητική θεμελίωση του πειράματος του Βραζιλιανού δίσκου, δηλαδή, η λύση του τασικού πεδίου προτάθηκε από τον H. R. Hertz το 1883 και λίγα χρόνια αργότερα από τον J. H. Mitchell.

Η επιστημονική κοινότητα εστίασε το ενδιαφέρον της στην εφαρμογή τη πειραματικής διαδικασίας και στην βελτίωση των αδυναμιών και των αποτελεσμάτων.

Το 1947 οι Ripperger και Davis [4] εισάγουν την μέθοδο του κυκλικού δακτυλίου (*Εικ. 1.2*), κατά την οποία παρότι εξαλείφεται το πρόβλημα του διαξονικού τασικού πεδίου - το κρίσιμο σημείο θραύσης βρίσκεται πλέον στο σύνορο της οπής, στην τομή με την διάμετρο φόρτισης ώστε το τασικό πεδίο που αναπτύσσεται είναι μονοαξονικό, εξακολουθεί να εμφανίζεται το πρόβλημα της πρώιμης θραύσης εξαιτίας των υψηλών τιμών του φορτίου στην περιοχή της επαφής με τις πλάκες σύνθλιψης.



Εικ. 1.2: Το πείραμα του κυκλικού δακτυλίου [5].

Το 1959 ο Hondros [6], προτείνει την πρώτη ολοκληρωμένη θεωρητική λύση για το τασικό πεδίο σε κυκλικό δίσκο από ισότροπο, ομογενές και γραμμικά ελαστικό υλικό, υπό ομοιόμορφη πίεση κατά μήκος δύο συμμετρικών τόξων της περιμέτρου του. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τάσεις που αναπτύσσονται κατά μήκος της διαμέτρου AA', δηλαδή του άξονα συμμετρίας της εξωτερικής φόρτισης όπου αναμένεται η εμφάνιση (στο κέντρο του δίσκου) της κρίσιμης εφελκυστικής τάσης που θα οδηγήσει στην εφελκυστική αστοχία του δίσκου. Οι τάσεις αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{\theta y} = + \frac{2p}{\pi} \left[\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \sin(2a)}{1 - 2\frac{r^2}{R^2} \cos(2a) + \frac{r^4}{R^4}} - \tan^{-1} \left(\frac{1 + \frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \tan(a) \right] \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ry} = -\frac{2p}{\pi} \left[\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \sin(2a)}{1 - 2\frac{r^2}{R^2} \cos(2a) + \frac{r^4}{R^4}} + \tan^{-1} \left(\frac{1 + \frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \tan(a) \right] \quad (1.2)$$

Όπου :

- $\sigma_{\theta y}$: η εγκάρσια ορθή τάση σε ένα σημείο της AA',
- σ_{ry} : η ακτινική ορθή τάση σε ένα σημείο της AA',
- p : η ομοιόμορφη πίεση ($p=P/at$),
- P : το συνολικό φορτίο της μηχανής,
- R : η ακτίνα του δίσκου,
- r : η επιβατική ακτίνα του τυχαίου σημείου του δίσκου,
- $2a$: η γωνία του τόξου στο οποίο δρα η ομοιόμορφη πίεση p ,
- t : το πάχος του δίσκου.

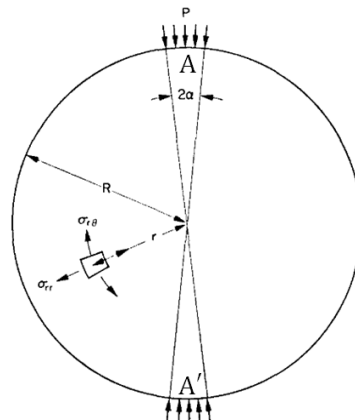
Στο κέντρο του δίσκου ισχύει:

$$\sigma_{\theta y} = +\frac{2p}{\pi} (\sin(2a) - a) \cong \frac{2pa}{\pi}, \quad (a < R/5) \quad (1.3)$$

και με αντικατάσταση (εξήγησε ότι $D=2R$): $P/Dt = pa$,

$$\sigma_{\theta y} = \frac{2P}{\pi Dt} \quad (1.4)$$

Η τελευταία εξίσωση χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η εφελκυστική αντοχή του υλικού όταν $P=P_{\theta}$ (P_{θ} το φορτίο θραύσης του υλικού υπό διαμετρική θλίψη).



Εικ. 1.3: Ο Βραζιλιανός δίσκος υπό ομοιόμορφα κατανεμημένη

φόρτιση πάνω σε πεπερασμένα συμμετρικά τόξα [7].

Το 1964 ο Fairhurst [7] είναι ο πρώτος που εκφράζει τον προβληματισμό του για την εγκυρότητα του πειράματος. Βασιζόμενος στο κριτήριο του Griffith μελετά την ισχύ της μεθόδου. Παρατηρεί ότι η αστοχία μπορεί να επέλθει μακριά από το κέντρο του δίσκου για μικρές γωνίες επαφής στην περιοχή φόρτισης για υλικά με μικρό λόγο θλιπτικής αντοχής προς εφελκυστική αντοχή και επισημαίνει πως για τις περιπτώσεις αυτές, η τιμή της πειραματικής εφελκυστικής αντοχής είναι μικρότερη από την θεωρητική τιμή.

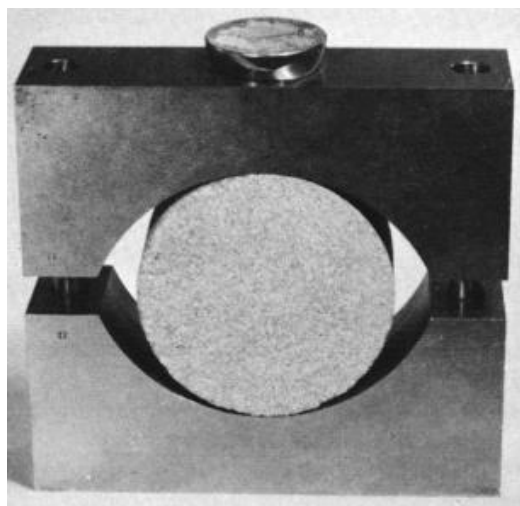
Αργότερα, το 1965 ο Hobbs [8] μελετά την κατανομή των τάσεων σε στερεό δίσκο με μία οπή στο κέντρο υπό διαμετρική θλίψη ή ομοιόμορφη φόρτιση κατά μήκος δυο πεπερασμένων συμμετρικών τόξων στην περιμετρό του. Από τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας προσδιορίζεται η μέγιστη εφελκυστική αντοχή στο σημείο τομής της διαμέτρου φόρτισης με την περιφέρεια της κεντρικής οπής.

$$\sigma_{\max} = q \frac{W}{\pi t R_{\text{out}}} \quad (1.5)$$

Όπου,

- q : ο λόγος $R_{\text{out}}/R_{\text{in}}$
- R_{out} : η εξωτερική ακτίνα και
- R_{in} : εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου και
- t : το πάχος του και
- W : το εξωτερικό φορτίο.

Οι Mellor και Hawkes [9] το 1971 πραγματοποιούν μία εκτενή μελέτη σχετικά με τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής από τα πειράματα του Βραζιλιανού δίσκου και του κυκλικού δακτυλίου. Μελετούν τις τάσεις επαφής σε δοκίμια δίσκου και δακτυλίου στα οποία επενεργούν διαμετρικά θλιπτικά φορτία. Προτείνουν την χρήση καμπύλων πλακών φόρτισης για να μειωθεί η συγκέντρωση τάσης στα σημεία φόρτισης (**Εικ. 1.4**). Η κατασκευή τους δεν είναι εύκολη υπόθεση, αφού εξαρτώνται από την καμπυλότητα των δοκιμίων. Η ακριβής κατανομή των τάσεων επαφής μεταξύ πλακών φόρτισης είναι ακόμα υπό διερεύνηση.



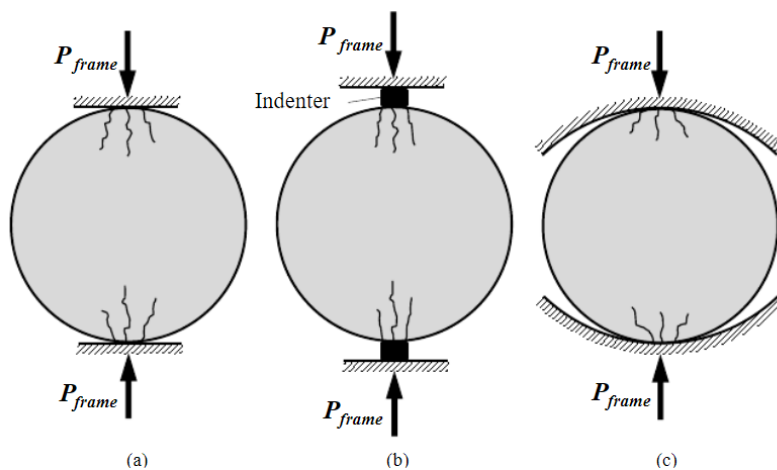
Εικ. 1.4: Η πειραματική διάταξη κατά Mellor και Hawkes [9].

Αργότερα, ο Hudson [10], [11] παρατήρησε ότι η εφελκυστική αντοχή εξαρτάται από την γεωμετρία του δοκιμίου. Όσο μειωνόταν η διάμετρος της οπής τόσο αυξανόταν η αντοχή. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από πειράματα που πραγματοποιήθηκαν κάτω από τις ίδιες πειραματικές συνθήκες αποκάλυψαν διασπορά που είναι αδύνατο να θεωρηθεί ως πειραματικό σφάλμα. Έδωσε τέσσερις πιθανές εξηγήσεις:

1. Η φύση της εφελκυστικής αντοχής κατά την οποία μεγάλα κομμάτια πετρώματος έχουν περισσότερες και μεγαλύτερες ρωγμές και συνεπώς αστοχούν σε μικρότερα αναλογικά φορτία.
2. Η θραύση ξεκινάει αλλά δεν μεταδίδεται.
3. Η τάση που υπολογίζεται δεν είναι η 'πραγματική'.
4. Συνδυασμός όλων των παραπάνω.

Στα πειράματα του Βραζιλιανού δίσκου που χρησιμοποιήθηκαν επίπεδες χαλύβδινες πλάκες για την φόρτιση των δοκιμίων, η θραύση ξεκινούσε κάτω από τα σημεία φόρτισης. Στην περίπτωση του δακτυλίου παρατήρησε ότι η αστοχία ξεκινούσε από τα σημεία αυτά αλλά και από το σημείο τομής του εσωτερικού συνόρου της οπής με την διάμετρο φόρτισης.

Έχει επαληθευτεί και πειραματικά ότι ακόμα και αν δεν πληρούνται ορισμένες συνθήκες η ρωγή μπορεί να ξεκινήσει από την περιοχή φόρτισης και όχι από το κέντρο του δίσκου είτε χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση του πειράματος επίπεδες πλάκες φόρτισης (ASTM 2008) είτε καμπύλες αρπάγες (ISRM 1978) όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



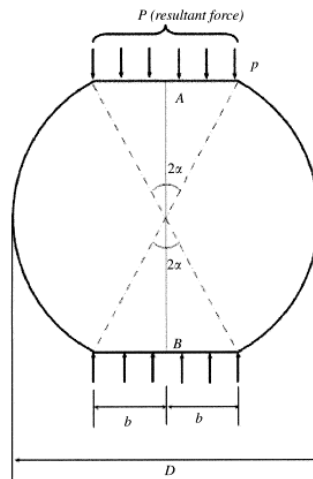
Εικ. 1.5: Τεχνικές φόρτισης Βραζιλιανού δίσκου, (a) επίπεδες πλάκες φόρτισης, (b) επίπεδες πλάκες φόρτισης με παρέμβυσμα, (c) καμπύλες πλάκες φόρτισης [12].

1.3 Η εξέλιξη των θεωριών του Επιπεδωμένου Βραζιλιανού δίσκου

Το 2004 οι Wang et al. [13], [14] προτείνουν ως εναλλακτική μέθοδο το πείραμα του επιπεδωμένου βραζιλιανού δίσκου (FBD: Flattened Brazilian Disc) (**Εικ. 1.6**), που προκύπτει από την αποκοπή δυο κυκλικών τμημάτων που αντιστοιχούν σε δυο παράλληλες ίσες χορδές. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται δυο παράλληλες πεπλατυσμένες επίπεδες πλευρές όπου θα επιβληθούν τα εξωτερικά φορτία. Επιπλέον, παρατηρούν ότι όταν η γωνία δεν υπερβαίνει τις 20° η θραύση ξεκινά από το κέντρο του δίσκου.

Η μέθοδος αυτή προσέλκυσε το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας με αποτέλεσμα πολλά πειραματικά πρωτόκολλα να υλοποιούνται με την χρήση επιπεδωμένων βραζιλιανών δίσκων, τόσο στατικά όσο και δυναμικά, για τον προσδιορισμό όχι μόνο της εφελκυστικής αντοχής των ψαθυρών υλικών αλλά και της δυσθραυστότητας σε περίπτωση παρουσίας τεχνητής κεντρικής ρωγμής.

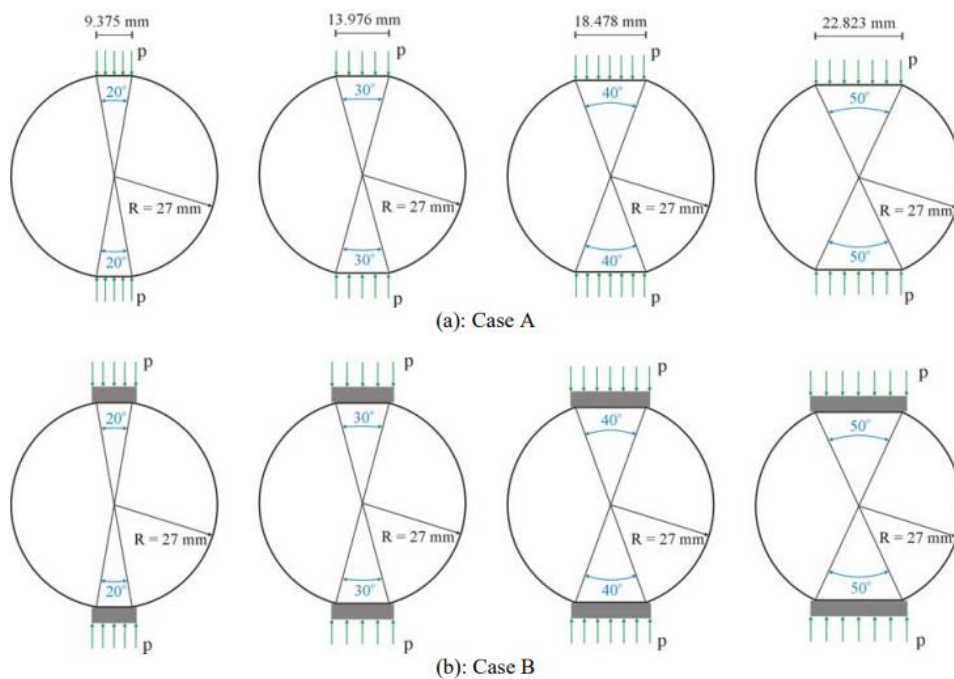
Από το 2004 και την εισαγωγή της μεθόδου των Wang et al. μέχρι και σήμερα έχουν προταθεί εναλλακτικές μέθοδοι για την βέλτισση του πειράματος του FBD.



Εικ. 1.6: Δοκίμιο τύπου *Flattened Brazilian Disc* υπόκειται σε ομοιόμορφη αντιδιαμετρική θλίψη [13].

Πιο συγκεκριμένα το 2005 Kaklis et al. [15] μελέτησαν την περίπτωση του FBD υπό αντιδιαμετρική θλίψη με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για δυο διαφορετικές περιπτώσεις φόρτισης (**Εικ. 1.7**) σε δοκίμια με $2\alpha = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$. Επιπλέον, την προσοχή τους εστίασαν στον προσδιορισμό της κρίσιμης γωνίας 2α που 'επιτρέπει' την έναρξη της θραύσης στο κέντρο του δοκιμίου βασιζόμενοι στο κριτήριο Griffith. Συμπέραναν ότι προκειμένου να ξεκινήσει η ρωγμή από το κέντρο η τιμή της γωνίας 2α δεν πρέπει να είναι μικρότερη από 15° .

Χρησιμοποίησαν δυο κατηγορίες δοκιμών: Στην 1^η κατηγορία εφαρμόστηκε ομοιόμορφη κατανεμημένη φόρτιση στον κατακόρυφο άξονα ενώ ο οριζόντιος άξονας δεν περιορίστηκε στα επιπεδωμένα άκρα του δοκιμίου, ενώ στην 2^η κατηγορία η φόρτιση επιβλήθηκε στο δοκίμιο μέσω μιας πλάκας λαμβάνοντας υπόψη την τριβή μεταξύ δοκιμίου και πλάκας φόρτισης.

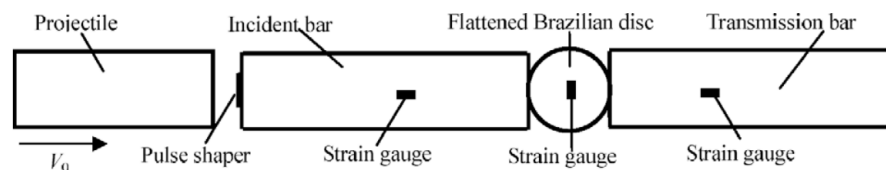


Εικ. 1.7: (a) 1^η κατηγορία δοκιμίων και (b) 2^η κατηγορία δοκιμίων [15].

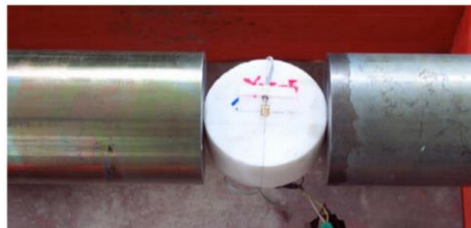
Αργότερα, το 2009 οι Wang et. al. [16] εφάρμοσαν δυναμική αντιδιαμετρική φόρτιση σε δοκίμια FBD από ψαθυρά υλικά με τη χρήση της συσκευής Hopkinson - Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB), με σκοπό να προσδιορισθεί η δυναμική αντοχή σε εφελκυσμό του υλικού. Το σύστημα SHPB γενικά, αποτελείται από δυο μακριές κυλινδρικές μεταλλικές ράβδους, τις ράβδους πρόσπτωσης και μετάδοσης. Η πειραματική διαδικασία πραγματοποιείται ως εξής: Το δοκίμιο τοποθετείται ανάμεσα στις δυο ράβδους (**Εικ. 1.8**), δίνεται ώθηση στην ράβδο κρούσης η οποία προσκρούει στο άκρο της ράβδου πρόσπτωσης με αποτέλεσμα να παράγεται τασικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος της ράβδου. Στην διεπαφή μεταξύ προσπίπτουσας ράβδου και δοκιμίου το κύμα ανακλάται μερικώς και μεταδίδεται στο δείγμα ενώ στην διεπαφή μεταξύ δοκιμίου και ράβδου μετάδοσης το κύμα ανακλάται εν μέρει και μεταδίδεται στη τελευταία ράβδο.

Η εγκυρότητα της πειραματικής διαδικασίας επιβεβαιώθηκε από το γεγονός ότι οι κυματομορφές που δημιουργήθηκαν στα δυο άκρα του δοκιμίου είχαν σχεδόν την ίδια μορφή και η ρωγμή ξεκινούσε για πρώτη φορά από το κέντρο του δίσκου και διαδιδόταν κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης ενώ παρατήρησαν ότι οι ζώνες σύνθλιψης εμφανίστηκαν στο τελικό στάδιο κοντά στα δυο άκρα του δοκιμίου. Τέλος, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι αξίζει να μελετηθούν η επίδραση της διαμέτρου του δοκιμίου στην περιοχή εμφάνισης

των μικρορωγμών και η επιρροή του δυναμικού <<φαινομένου κλίμακος>> από τον χρόνο.

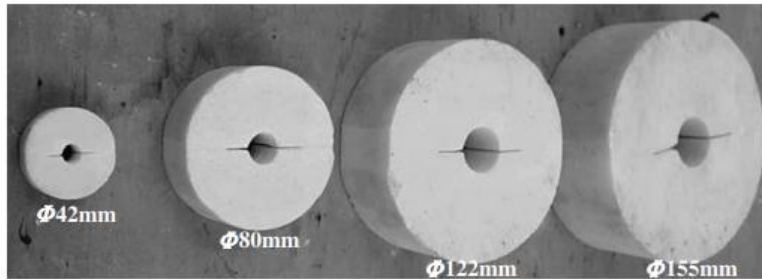


Εικ. 1.8: Πειραματική διάταξη φόρτισης δοκιμίου FBD με την χρήση του συστήματος SHPB [16].

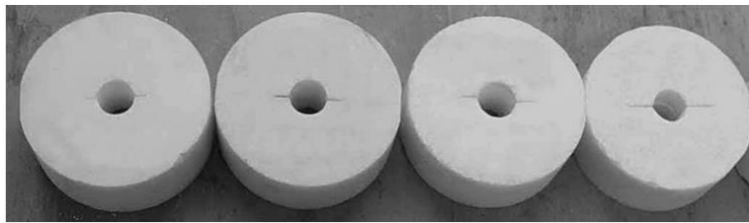


Εικ. 1.9: Στιγμιότυπο από την πειραματική διαδικασία [16].

Σε άλλο πειραματικό πρωτόκολλο οι Wang et. al. [17] χρησιμοποίησαν δοκίμια FBD με οπή και κεντρική ρωγμή, διαφορετικής διαμέτρου (**Εικ. 1.10, 1.11**) τα οποία τοποθετήθηκαν και αυτά στην συσκευή Hopkinson. Παρατήρησαν ότι η δυναμική αντοχή σε θραύση αυξανόταν σε δοκίμια μεγαλύτερης διαμέτρου και παρουσιάζει μικρές αλλαγές σε δοκίμια ίδιας διαμέτρου αλλά με διαφορετικό μήκος ρωγμής. Πιο συγκεκριμένα, για τον τύπο δοκιμίου με εξωτερική διάμετρο 40 mm, 80 mm, 122 mm, 155 mm και αναλογία μεγέθους 1.0:1.9:2.9:3.7, ενώ το μήκος της ρωγμής ήταν ίσο με το ήμισυ της διαμέτρου ο συντελεστής αντοχής σε θραύση αυξανόταν με την αύξηση του μεγέθους του δοκιμίου. Για άλλη κατηγορία δειγμάτων με εξωτερική διάμετρο ίση με 80 mm, με μήκος ρωγμής $25 \text{ mm} \leq 2a_0 \leq 41 \text{ mm}$, δεν μπορούσε να εξαχθεί συμπέρασμα για την επίδραση του μήκους της ρωγμής στον συντελεστή αντοχής σε θραύση.



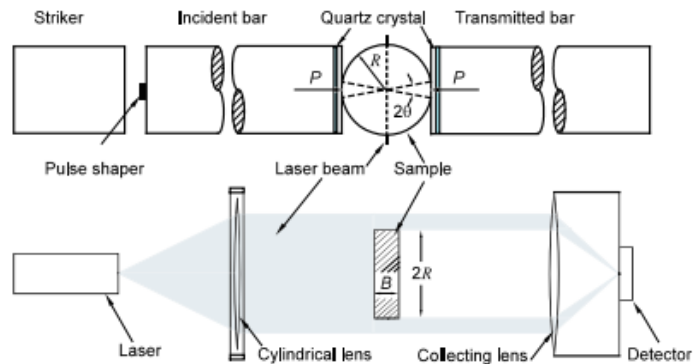
Εικ. 1.10: Δοκίμια FBD διαφορετικής διαμέτρου [17].



Εικ. 1.11: Δοκίμια διαφορετικού μήκους ρωγμής [17].

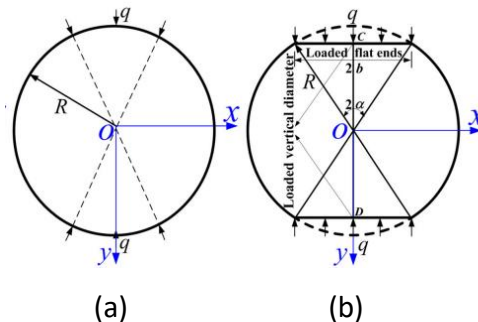
Το 2011 οι Wang et al. [18] επιχειρούν με την χρήση του συστήματος SHPB να προσδιορίσουν την αντοχή σε θραύση για τύπου I και II ρηγματωμένα δοκίμια FBD (CSTFBD) από μάρμαρο. Παρατηρούν ότι η αύξηση της διαμέτρου των δοκιμίων προκαλεί αύξηση των συντελεστών K_{Id} , $K_{II d}$. Επιπλέον, το μέγεθος του δοκιμίου επηρεάζει και τον λόγο $K_I(t)/K_{II}(t)$ με $K_I(t)$ ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων τύπου I και $K_{II}(t)$ για ρωγή ολίσθησης τύπου II. Το αποτέλεσμα αυτό δημιουργεί το εξής πρόβλημα, δεν είναι εφικτός ο προσδιορισμός της γωνίας φόρτισης εκ των προτέρων για δοκίμια CSTFBD για τα πειράματα ρωγμής τύπου II.

Το 2013 οι R. Chen et al. [19] χρησιμοποίησαν ένα τροποποιημένο σύστημα SHPB (*Εικ. 1.12*). Η τάση που προσδιορίστηκε από την πειραματική διαδικασία εισήχθη σαν δεδομένο στο αριθμητικό προσομοίωμα που κατασκεύασαν και με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων προσδιορίστηκε η εξέλιξη της εφελκυστικής τάσης στο κέντρο του δοκιμίου. Χρησιμοποιήθηκαν δυο μέθοδοι για την μέτρηση της παραμόρφωσης, αυτή της συσχέτισης ψηφιακής εικόνας - Digital Image Correlation (DIC) και αυτή που βασίζεται στη χρήση μετρητών παραμόρφωσης Laser - Laser Gap Gauge (LGG). Η αριθμητική προσομοίωση “αποκάλυψε” γραμμική σχέση ανάμεσα στην μέση εφελκυστική παραμόρφωση και στην εφελκυστική παραμόρφωση στο κέντρο του FBD.



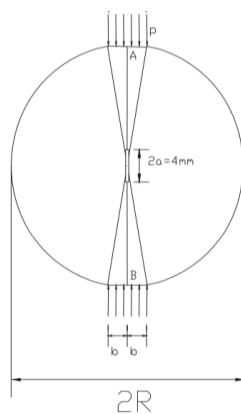
Εικ. 1.12: Απεικόνιση της πειραματικής διάταξης, σύστημα SHPB, δοκίμιο FBD και σύστημα LGG [19].

Το 2015 οι Huang et al. [20] προσπαθούν να βελτιώσουν την πειραματική διαδικασία FBST (Flattened Brazilian splitting test) που χρησιμοποιείται για το έμμεσο προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής. Αποδεχόμενοι την υπόθεση της θεωρίας της ελαστικότητας και της υπέρθεσης των τάσεων κατεφέρνουν να εξάγουν το τασικό πεδίο στο εσωτερικό του FBD. Τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων καθιστώντας με τον τρόπο αυτό την λύση αξιόπιστη. Παρατηρούν ότι η συγκέντρωση τάσεων κοντά στο σημείο φόρτισης και ο λόγος $\frac{\sigma_{\theta\lambda\iota\pi\tau\iota\kappa\eta}}{\sigma_{\epsilon\phi\epsilon\lambda\kappa\upsilon\sigma\tau\iota\kappa\eta}}$ στο εσωτερικό του δίσκου μειώνεται δραματικά καθώς αυξάνεται η γωνία φόρτισης, αποτρέποντας με τον τρόπο αυτό, την θραύση στην περιοχή φόρτισης των δοκιμίων. Προσδιορίζουν ότι η βέλτιστη γωνία φόρτισης βρίσκεται στο διάστημα $[20^\circ, 30^\circ]$, μεγαλύτερη ή μικρότερη τιμή δεν “εγγυάται” την ικανοποίηση της αρχής της αστοχίας λόγω εφελκυσμού στο κέντρο του βραζιλιανού δίσκου.

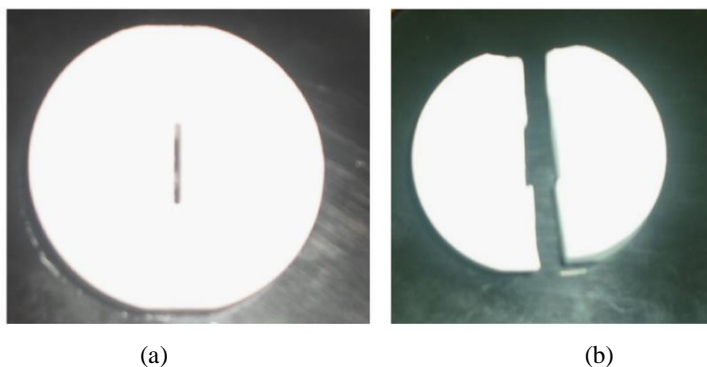


Εικ. 1.13: (a) Το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου (BDT) και (b) το πείραμα του επιπεδωμένου Βραζιλιανού δίσκου (FBDT) [20].

Το 2015 οι Elghazel et al. [21] εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στην μελέτη κεραμικών και σύνθετων βιοκεραμικών υλικών. Η ευθραυστότητά τους, η χαμηλή ικανότητά τους να παραμορφώνονται και ο προσδιορισμός της δυσθραυστότητας εγείρουν το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας. Σε μια προσπάθειά τους να μελετήσουν τα υλικά αυτά, κατασκευάζουν δοκίμια FBD (**Εικ. 1.14**) από φωσφορικό ασβέστιο – φθοραπατίτη με ρωγμή τύπου I, στα οποία εφαρμόστηκε διαμετρική φόρτιση. Η γωνία επαφής θεωρείται ίση με $2\alpha=20^\circ$ ικανή να εξασφαλίσει την έναρξη ρωγμής στο κέντρο του δοκιμίου σύμφωνα με το θεώρημα Griffith. Από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων προσδιορίζουν τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων. Επιτυγχάνεται ικανοποιητική συμφωνία των αποτελεσμάτων της πειραματικής διαδικασίας, της αναλυτικής και της αριθμητικής λύσης με αποτέλεσμα να αποδεικνύεται η αποτελεσματικότητα και η αξιοπιστία της συγκεκριμένης πειραματικής μεθόδου.

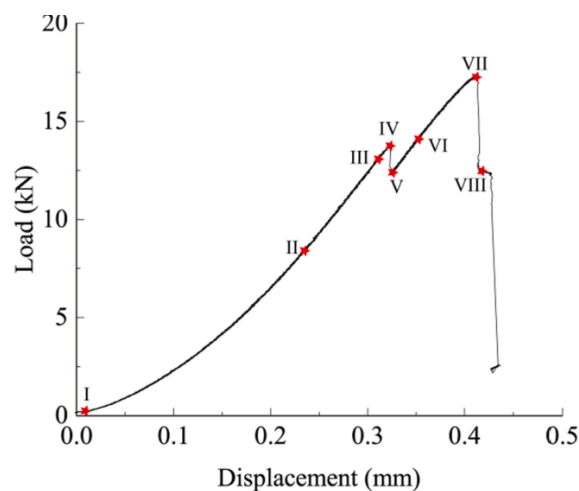


Εικ. 1.14: Δοκίμιο τύπου FBD με ρωγμή στο κέντρο [21].



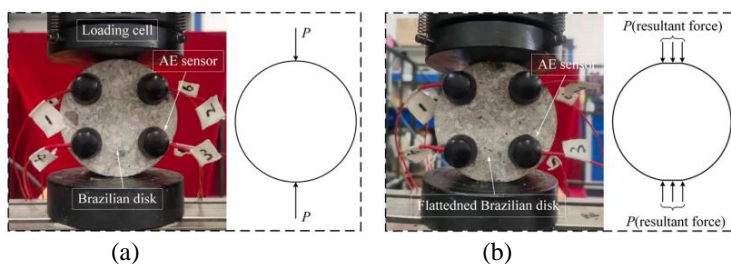
Εικ. 1.15: (a) Το δοκίμιο πριν την πειραματική διαδικασία και (b) το δοκίμιο αφού έχει αστοχήσει [21].

Το 2021 οι Yan et al. [22] χρησιμοποίησαν την τεχνική συσχέτισης ψηφιακής εικόνας (DIC) για την καταγραφή της διαδικασίας εξέλιξης αστοχίας δοκιμίου τύπου FBD. Κάποια συμπεράσματα που προέκυψαν βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση του μηχανισμού θραύσης των δοκιμίων FBD. Πιο συγκεκριμένα, από τα αποτελέσματα της καταγραφής της οριζόντιας εφελκυστικής παραμόρφωσης στο κέντρο του δοκιμίου, την καταγραφή της φόρτισης και την χρήση της μεθόδου DIC ήταν σε θέση να προσδιορίσουν την καμπύλη τάσεων παραμορφώσεων. Επίσης, αναλύοντας την οριζόντια παραμόρφωση και το πεδίο μετατοπίσεων στην περιοχή κοντά στην κεντρική ρωγμή του δοκιμίου μπορούν να ταυτοποιηθούν οι θέσεις του άκρου της ρωγμής. Διαπιστώθηκε ότι τη στιγμή του πρώτου μεγίστου P_{max} της φόρτισης αναπτύχθηκε η ζώνη μικρορωγμών και θραύσης. Μετά το P_{max} η κεντρική ρωγμή διαδίδεται ασταθώς προς τα άκρα του δοκιμίου μέχρι την στιγμή που το φορτίο λαμβάνει την P_{min} . Κρίθηκε λοιπόν, λανθασμένη η χρήση της τιμής P_{min} στον υπολογισμό του συντελεστή K_{IC} . Για τον λόγο αυτό εφαρμόστηκε μια τροποποιημένη μεθοδολογία για τον προσδιορισμό του συντελεστή K_{IC} που βασίστηκε στην πρώτη τιμή της P_{max} και του μήκους της ρωγμής που προσδιορίστηκε από την μέθοδο DIC. Τέλος, κατέληξαν στα συμπεράσματα ότι η δεύτερη αύξηση της φόρτισης προκαλείται από την αστοχία κοντά στα άκρα του FBD λόγω της δευτερεύουσας θλίψης - διάτμησης και η εμφάνιση θλιπτικού τασικού πεδίου κοντά στα άκρα αναστέλλει την διάδοση της κεντρικής ρωγμής.

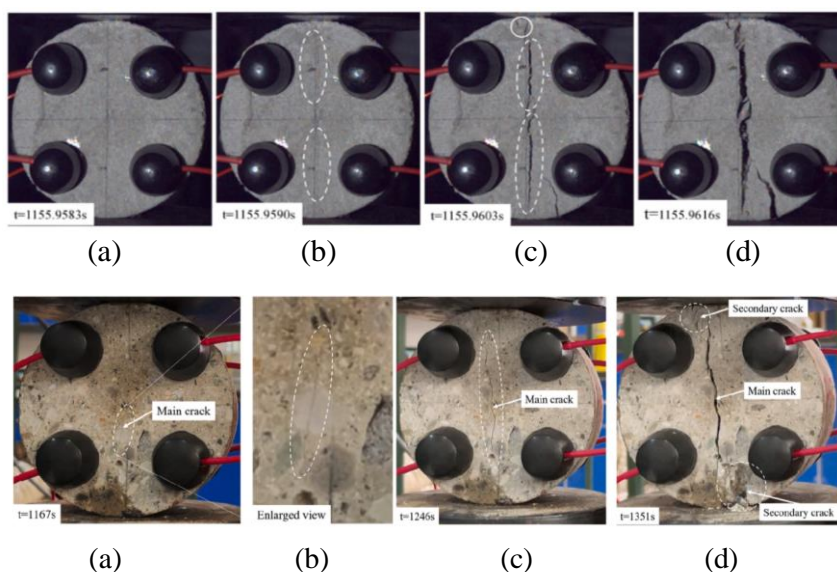


Εικ. 1.16: Το διάγραμμα φόρτισης – μετατόπισης [22].

Οι Ren et al. [23] το 2021 χρησιμοποίησαν την μέθοδο της τεχνικής ακουστικής εκπομπής σε δοκίμια BD (Brazilian Disc) και FBD (Flattened Brazilian Disc) καθώς και την μέθοδο της αναστροφής του ταυστή τροπής μέσω των οποίων επιχειρήθηκε να ερευνηθεί και να ποσοτικοποιηθεί η διαδικασία εξέλιξης της “βλάβης” και η ένταση των μικρορωγμών στα δοκίμια. Τα δοκίμια κατασκευάστηκαν από σκυρόδεμα. Οι ρωγμές κατηγοριοποιήθηκαν σε tensile crack, shear crack και impulsive crack. Τα αποτελέσματα από τα δοκίμια BD δείχνουν ότι οι μικρορωγμές ξεκινούσαν από την περιοχή ανάμεσα στο κέντρο και την διεπαφή δοκιμίου-πλάκα φόρτισης και διαδίδονταν όπως φαίνεται στην **Εικ. 1.18**. Όσον αφορά τα δοκίμια FBD οι θέσεις έναρξης των ρωγμών ήταν τυχαίες και δεν ήταν εφικτό να παρατηρηθεί κάποιο φαινόμενο συσσώρευσης ρωγμών πριν η τιμή της φόρτισης λάβει την μέγιστη τιμή της (first peak load). Συσσώρευση ρωγμών όμως, παρατηρήθηκε την στιγμή που επετεύχθη το first peak load.



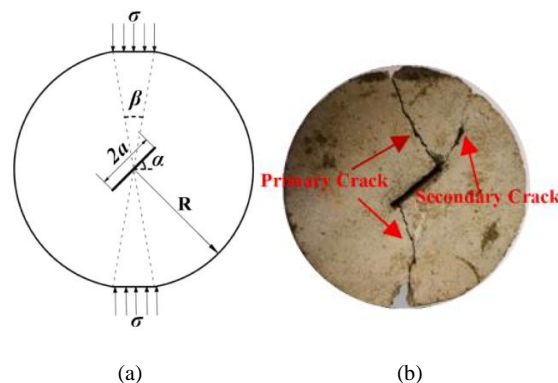
Εικ. 1.17: Διάταξη του πειράματος δοκιμίου (a) Brazilian disk και (b) Flattened Brazilian disk [23].



Εικ. 1.18: Η εξέλιξη της ρωγμής [23].

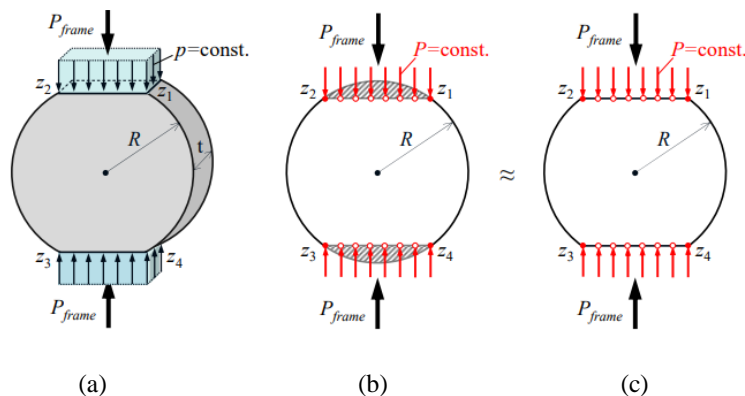
Το 2021 οι Zhang et al. [24] σε μια προσπάθεια να μελετήσουν την διαδικασία αστοχίας σε δοκίμια τύπου Flattened Brazilian Disc εκτελούν πειραματικά πρωτόκολλα σε δοκίμια με μία ρωγμή στο κέντρο υπό κλίσεις 15° , 30° , 45° , 60° , 75° και χρησιμοποιούν το σύστημα φόρτισης SHPB. Μελετώντας τις επιδράσεις των διαφορετικών ρυθμών παραμόρφωσης, την μεταβολή της γωνίας κλίσης της ρωγμής και τα αποτελέσματα της μεθόδου της ακουστικής εκπομπής και οδηγούνται στα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Οι πρωτογενείς ρωγμές ξεκινούν από τις δυο κορυφές των προκατασκευασμένων ρωγμών και εκτείνονται προς το άνω και κάτω άκρο φόρτισης ενώ, οι δευτερογενείς ρωγμές εκτείνονται από την άκρη του δοκιμίου προς το κέντρο (*Εικ. 1.19*). Υψηλότερος ρυθμός παραμόρφωσης οδηγεί σε περισσότερες δευτερογενείς ρωγμές όταν αστοχεί το δοκίμιο. Η διεύθυνση διάδοσης των δευτερογενών ρωγμών είναι παράλληλη με τις προκατασκευασμένες ρωγμές.
2. Αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης και της γωνίας κλίσης συνεπάγεται αύξηση της δυναμικής αντοχής σε εφελκυσμό και του συντελεστή K_{IC} . Όσον αφορά τον συντελεστή K_{IIC} παρατηρήθηκε αύξηση όταν ο ρυθμός παραμόρφωσης αυξανόταν και μειωνόταν με την μείωση της γωνίας. Ο λόγος K_{Id}/K_{IId} επηρεάζεται μόνο από την κλίση της γωνίας. Αύξηση της κλίσης συνεπάγεται αύξηση του λόγου.
3. Ο συντελεστής K_{IIC} μεγιστοποιείται όταν η γωνία είναι ίση με 40° .
4. Παρατηρήθηκε επίσης, ότι ο εντονότερος ρυθμός παραμόρφωσης έχει ως αποτέλεσμα την εντονότερη ακουστική δραστηριότητα και σοβαρότερη βλάβη του δοκιμίου. Αφού επιτεύχθηκε για πρώτη φορά μέγιστη τιμή φορτίου, ύστερα η ακουστική δραστηριότητα εξασθενεί σταδιακά και η γωνία κλίσης αυξάνεται. Τέλος, τα δοκίμια με κλίση ίση με 15° διαπιστώθηκε ότι είναι πιο ευάλωτα σε αστοχία λόγω εφελκυσμού.



Εικ. 1.19: (a) Σχηματική απεικόνιση του FBD και (b) στιγμιότυπο αστοχίας του δοκιμίου [24].

Το 2020 οι Markides and Kourkoulis [25] προτείνουν μία εναλλακτική μαθηματική διατύπωση για το πρόβλημα του FBD βασιζόμενοι στα μιγαδικά δυναμικά του Mushkelisvili. Η διατύπωση αυτή παρέχει μία πλήρη λύση της κατανομής των τάσεων στο δίσκο για την περίπτωση που στο δοκίμιο εφαρμόζεται ομοιόμορφη πίεση στα επίπεδα τμήματα του δίσκου. Την ομοιόμορφη πίεση προσέγγισαν με ισοκατανεμημένες ίσες σημειακές θλιπτικές δυνάμεις. Παρότι τα αρχικά αποτελέσματά τους σε σχέση με τις τάσεις συμφωνούσαν ικανοποιητικά με τα αποτελέσματα των Wang et al. [13], [14] το αντίστοιχο πεδίο των μετατοπίσεων οδηγούσε σε ελαφριά κάμψη των επιπεδωμένων πλευρών του FBD, κάτι που δημιουργούσε προβληματισμούς υπαγορεύοντας περαιτέρω ανάλυση.



Εικ. 1.20: (a) Η διαμόρφωση του FBD, (b) ο κυκλικός δίσκος υπό σταθερή σημειακή φόρτιση κατά μήκος των χορδών z_1z_2 και z_3z_4 , (c) η κατά προσέγγιση ισοδυναμία μεταξύ των περιπτώσεων (a),(b) [25].

Με αφορμή την εμφάνιση του φαινομένου της κάμψης, που δεν θεωρείται φυσιολογικό αν λάβουμε υπόψη την υψηλή ακαμψία και την επιπεδότητα των πλακών φόρτισης, το 2022 οι Markides et al. [26] επιχειρούν εκτενέστερη μελέτη των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων στον FBD.

Αρχικά μελετούν το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα όταν ο FBD θλίβεται μέσω δυο άκαμπτων πλακών φόρτισης με μήκος ίσο με τα επιπεδωμένα άκρα του δοκιμίου. Η κατανομή των ορθών θλιπτικών τάσεων και των αντίστοιχων τάσεων τριβής που αναπτύσσονται στα επίπεδα σύνορα του FBD προσδιορίζονται από τη λύση Mushkelisvili για το πρόβλημα επαφής μεταξύ άκαμπτης πλάκας και ελαστικού ημιεπιπέδου, υπό θλίψη. Από τις ως άνω συνοριακές συνθήκες των τάσεων, υπολογίστηκαν στη συνέχεια τα μιγαδικά δυναμικά - λύσεις του πρώτου θεμελιώδους προβλήματος για τον FBD και τα αντίστοιχα πεδία τάσεων και παραμορφώσεων. Αναπτύχθηκε δε αριθμητικό

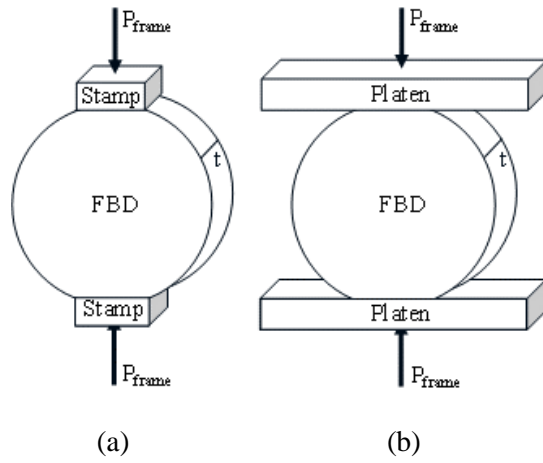
προσομοίωμα με την βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων το οποίο επαληθεύει την αναλυτική λύση.

Η παραπάνω λύση αντιστοιχεί στην περίπτωση που άκαμπτα παρεμβύσματα ίσου πλάτους με τα επίπεδα τμήματα του δοκιμίου παρεμβάλλονται μεταξύ των πλακών σύνθλιψης και του δοκιμίου, κάτι που συχνά συναντάται στην πράξη. Ωστόσο, δεν καλύπτει την περίπτωση δοκιμίου FBD σε άμεση επαφή με τις πλάκες σύνθλιψης της πειραματικής διάταξης που εν γένει το μήκος τους υπερβαίνει το μήκος των επιπεδωμένων άκρων του δοκιμίου.

Σε αυτήν την κατεύθυνση ακολουθούν εργασίες όπου μελετώνται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος στην περίπτωση που οι πλάκες φόρτισης ξεπερνούν σε μήκος τα επίπεδα τμήματα του συνόρου του FBD. Το 2023 οι Markides et al. [27], [28] παρουσιάζουν μία μαθηματική προσέγγιση λαμβάνοντας υπόψη τις πραγματικές συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στην περιοχή διεπαφής. Στη συνέχεια αξιολογείται η προσέγγιση αυτή με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων και την κατασκευή αντίστοιχου προσομοιώματος.

Από τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης μπορούμε να αποφανθούμε ότι οι τάσεις που προκαλούνται στην διεπιφάνεια και στο εσωτερικό του FBD βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με την αναλυτική λύση.

Ακόμα, προέκυψε το συμπέρασμα ότι η συγκεκριμένη διάταξη μειώνει όντως σημαντικά τις τιμές των τάσεων που αναπτύσσονται στην περιοχή της επαφής δοκιμίου - πλάκας σύνθλιψης, ωστόσο, τα ακραία σημεία της διεπαφής είναι σημεία αυξημένων τιμών των τάσεων και πρέπει να λαμβάνεται μέριμνα κατά την προετοιμασία των δοκιμίων στην διαδικασία κοπής στα σημεία αυτά για την ομαλή μεταβολή της καμπυλότητας.



Εικ. 1.21: Οι δυο προσεγγίσεις της εργαστηριακής διάταξης του πειράματος του FBD με πλάκες φόρτισης (a) ίδιου μήκους με τα άκρα του δοκιμίου (stamps) και (b) μεγαλύτερου μήκους (plattens) [27].

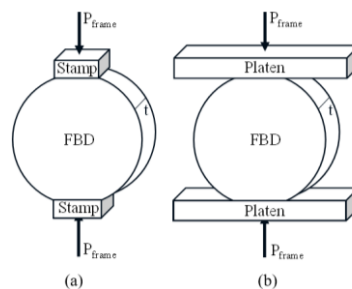
2° Κεφάλαιο: Θεωρητική Ανάλυση (Theoretical Analysis) [27]

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η αναλυτική λύση του Flattened Brazilian Disc Test για τις κατανομές τάσεων και μετατοπίσεων στο εσωτερικό του δοκιμίου με έμφαση επίσης στην ακριβή προσομοίωση των συνοριακών συνθηκών. Θα γίνει αντιληπτό ότι οι συνοριακές συνθήκες εξαρτώνται από την διάταξη της φόρτισης του FBD δοκιμίου που χρησιμοποιείται στο εργαστήριο, δηλαδή:

- Στην περίπτωση που η δοκιμή εκτελείται με την παρεμβολή, μεταξύ πλακών φόρτισης και δοκιμίου, άκαμπτων πλακών (stamps), μήκους ίσου με το μήκος των επιπεδωμένων άκρων του FBD. Τότε το μήκος επαφής μπορεί να θεωρηθεί σταθερό σε όλη την διάρκεια της δοκιμής (**Εικ. 2.1 (α)**).
- Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται οι συνήθεις πλάκες φόρτισης που το μήκος τους υπερβαίνει το μήκος των επίπεδων τμημάτων δοκιμίου σε άμεση επαφή με τον FBD. Τότε το μήκος επαφής αυξάνεται καθώς αυξάνεται το εξωτερικό φορτίο και τμήματα των καμπύλων συνόρων του FBD έρχονται σταδιακά σε επαφή με την πλάκα φόρτισης (**Εικ. 2.1 (β)**).

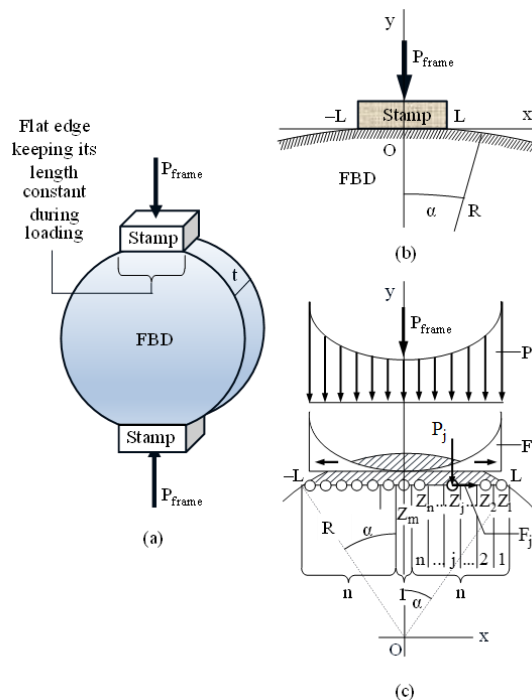
Είναι προφανές ότι οι συνοριακές συνθήκες για τα δυο προβλήματα είναι διαφορετικές και το ίδιο ισχύει και για τα πεδία μετατοπίσεων και τάσεων που αναπτύσσονται τουλάχιστον στα σημεία του δίσκου που είναι σε άμεση γειννίαση με την περιοχή επαφής.



Εικ. 2.1: Οι δυο προσεγγίσεις για την εργαστηριακή εκτέλεση του πειράματος του FBD (α) χρησιμοποιώντας πλάκες φόρτισης (stamps) μήκους ίδιο με το μήκος των επιπεδωμένων άκρων του δίσκου και (β) χρησιμοποιώντας πλάκες φόρτισης (plattens) μήκους που υπερβαίνει το μήκος των συνόρων του δίσκου [27].

2.2 Η αναλυτική λύση όταν το μήκος επαφής είναι σταθερό

Κατά την πειραματική διαδικασία για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής ψαθυρών υλικών χρησιμοποιείται η πειραματική διάταξη της **Εικ. 2.1(α)**. Ο δίσκος συνθλίβεται στατικά μεταξύ δυο άκαμπτων πλακών (stamps) μήκους ίσου με το μήκος του επιπεδωμένου συνόρου του δίσκου υπό έναν υψηλό συντελεστή τριβής στην επιφάνεια επαφής πλάκας - δίσκου, ώστε να μην επιτρέπεται η μεταξύ τους σχετική ολίσθηση. Το συνολικό φορτίο συμβολίζεται με P_{frame} και εφόσον οι άκαμπτες πλάκες θλίψεως (stamps) παραμένουν, λόγω τριβής, «κολλημένες» με το δίσκο, το μήκος επαφής ($-LL$) είναι σταθερό και προκαθορισμένο, ίσο με το μήκος του επίπεδου τμήματος του συνόρου του FBD πριν τη φόρτιση.



Εικ. 2.2: (a) Η μέθοδος FBD με την χρήση άκαμπτων πλακών φόρτισης (stamps), (b) Το πρόβλημα επαφής FBD-stamp, και (c) Το αντίστοιχο πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα για τον FBD [27].

Σύμφωνα με τη λύση Muskhelishvili, οι τάσεις επαφής στο πρόβλημα επαφής FBD - stamp, δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις [29]:

$$\sigma_y = \frac{-(1+\kappa)P_{\text{frame}}}{\pi t \sqrt{\kappa(L^2 - x^2)}} \cos\left(\frac{\log \kappa}{2\pi} \log \frac{L+x}{L-x}\right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{(1+\kappa)P_{\text{frame}}}{\pi t \sqrt{\kappa(L^2 - x^2)}} \sin\left(\frac{\log \kappa}{2\pi} \log \frac{L+x}{L-x}\right)$$
(2.1)

όπου το κ είναι ίσο με $(3-4\nu)$ για επίπεδη παραμόρφωση και $(3-\nu)/(1+\nu)$ για επίπεδη ένταση.

Η λύση που προτάθηκε για το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα για τον μεμονωμένο FBD προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος της **Εικ. 2.2(c)**. Εξαιτίας της δυσκολίας του συνόρου του FBD, θεωρείται ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος ακτίνας R , πάχους t και η χορδή $-LL$ μήκους ίσου με το επίπεδο τμήμα $-LL$ του FBD. Η χορδή $(-LL)$ υπό κατάλληλη φόρτιση θα παίξει το ρόλο του επίπεδου τμήματος $-LL$ του FBD και έτσι η λύση κυκλικού δίσκου φορτιζόμενου κατά μήκος της χορδής $-LL$ θα αποτελέσει την προσεγγιστική λύση του FBD. Για αυτό, η χορδή $-LL$ του κυκλικού δίσκου χωρίζεται σε $2n+1$ επιμέρους τμήματα, κάθε ένα εκ των οποίων έχει στο μέσο του μία απειροστή οπή. Στο εσωτερικό κάθε οπής θεωρείται ένα σημείο Z_j . Τα Z_j $j=1,2,\dots,n$ και Z_m (στο πρώτο τεταρτημόριο μόνο, για λόγους ευκρίνειας) φαίνονται στην **Εικ. 2.2(c)**. Σε κάθε σημείο Z_j , καθώς η ακτίνα της αντίστοιχης κυκλικής οπής τείνει στο μηδέν, θεωρείται ότι ασκούνται οι σημειακές δυνάμεις P_j, F_j , που λόγω των κάτωθι εξ. (2.2) ή (2.3) είναι στατικά ισοδύναμες των τάσεων που περιγράφονται από τις εξ. (2.1).

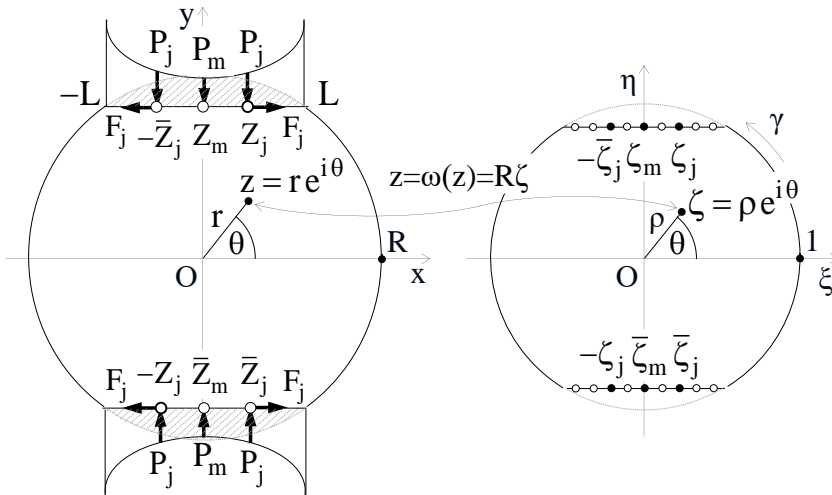
$$x \equiv x_j = (n+1-j) \frac{2R \sin \alpha}{2n+1}, \quad P_j = |\sigma_{y,j}| \frac{2R \sin \alpha}{2n+1}, \quad F_j = |\tau_{xy,j}| \frac{2R \sin \alpha}{2n+1} \quad (2.2)$$

Από τις εξ. (2.1) και (2.2), προκύπτουν [27]:

$$P_j = \frac{2(1+\kappa)P_{\text{frame}}}{\pi t \sqrt{\kappa[8(n+1)j - 4j^2 - 4n - 3]}} \cos\left(\frac{\log \kappa}{2\pi} \log \frac{4n+3-2j}{2j-1}\right), \quad P_m = \frac{2(1+\kappa)P_{\text{frame}}}{(2n+1)\pi t \sqrt{\kappa}},$$
(2.3)

$$F_j = \frac{2(1+\kappa)P_{\text{frame}}}{\pi t \sqrt{\kappa[8(n+1)j - 4j^2 - 4n - 3]}} \sin\left(\frac{\log \kappa}{2\pi} \log \frac{4n+3-2j}{2j-1}\right), \quad F_m = 0$$

Σύμφωνα με τις τελευταίες εξισώσεις ισχύει για το ενδιάμεσο σημείο Z_m του μήκους $-LL$ ότι $P_m, F_m = 0$.



Εικ. 2.3: Διαίρεση της χορδής $-LL$ σε $2n+1$ τμήματα και η σύμμορφη απεικόνιση [27].

Έτσι, ο κυκλικός δίσκος με την παραπάνω φόρτιση κατά μήκος των παραλλήλων χορδών $-LL$, και θεωρώντας την επίδραση των γραμμοσκιασμένων κυκλικών τομέων μικρής σημασίας στην ελαστική ισορροπία, προσεγγίζει τον FBD, οπότε η λύση του μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μία πρώτη προσέγγιση της λύσης του FBD. Για τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες των τάσεων, και υιοθετώντας τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών Kolosov-Muskhelishvili, οι αναλυτικές συναρτήσεις που επιλύουν το πρόβλημα της **Εικ. 2.3** συναρτήσει της μεταβλητής ζ στο μαθηματικό επίπεδο (δυνάμει της σύμμορφης απεικόνισης $z=\omega(\zeta)=R\zeta$) προκύπτουν ως [27]:

$$\varphi_e(\zeta) = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \log \frac{\zeta - \zeta_m}{\zeta - \bar{\zeta}_m} + \sum_{j=1}^n \left[(F_j - iP_j) \log \frac{\zeta + \zeta_j}{\zeta - \zeta_j} + (F_j + iP_j) \log \frac{\zeta + \bar{\zeta}_j}{\zeta - \bar{\zeta}_j} \right] \right\} + \varphi_o(\zeta) \quad (2.4)$$

$$\psi_e(\zeta) = \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \log \frac{\zeta - \zeta_m}{\zeta - \bar{\zeta}_m} + \sum_{j=1}^n \left[(F_j - iP_j) \log \frac{\zeta - \bar{\zeta}_j}{\zeta + \zeta_j} + (F_j + iP_j) \log \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta + \bar{\zeta}_j} \right] \right\} \quad (2.5)$$

$$+ \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \left(\frac{\zeta_m}{\zeta - \bar{\zeta}_m} - \frac{\bar{\zeta}_m}{\zeta - \zeta_m} \right) + \sum_{j=1}^n \left[(F_j - iP_j) \frac{2\bar{\zeta}_j \zeta}{\zeta^2 - \zeta_j^2} + (F_j + iP_j) \frac{2\zeta_j \zeta}{\zeta^2 - \bar{\zeta}_j^2} \right] \right\} + \psi_o(\zeta)$$

Οι άγνωστες ολόμορφες συναρτήσεις $\varphi_o(\zeta)$ και $\psi_o(\zeta)$ προσδιορίζονται από την επίλυση της ακόλουθης συρτησιακής εξίσωσης - συνοριακής συνθήκης στην περιφέρεια του δίσκου με $s=e^{i\theta} \equiv \zeta$ το τυχαίο σημείο στην περιφέρεια γ του μοναδιαίου κύκλου:

$$\varphi_e(s) + s \overline{\varphi_e'(s)} + \overline{\psi_e(s)} = 0 \quad (2.6)$$

Οι $\varphi_o(\zeta)$ και $\psi_o(\zeta)$ υπολογίζονται από την εξ. (2.6) με τη βοήθεια γνωστών ιδιοτήτων των ολοκληρωμάτων Cauchy. Έχοντας προσδιορίσει τις

συναρτήσεις αυτές με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2.4), (2.5) προσδιορίζονται οι συναρτήσεις $\varphi_e(\zeta)$, $\psi_e(\zeta)$ και στη συνέχεια με την αντιστροφή της σύμμορφης απεικόνισης προκύπτει η λύση στο πραγματικό επίπεδο συναρτήσει της μεταβλητής $z=re^{i\theta}$, ως εξής [27]:

$$\begin{aligned} \varphi_e(z) = & \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \log \frac{z-Z_m}{z-\bar{Z}_m} + \sum_{j=1}^n \left[(F_j - iP_j) \log \frac{z+Z_j}{z-Z_j} + (F_j + iP_j) \log \frac{z+\bar{Z}_j}{z-\bar{Z}_j} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} z \left\{ iP_m \left(\frac{z-Z_m}{R^2-\bar{Z}_m z} - \frac{z-\bar{Z}_m}{R^2-Z_m z} \right) + 2 \sum_{j=1}^n \left[(F_j - iP_j) \frac{Z_j z^2 - R^2 \bar{Z}_j}{R^4 - Z_j^2 z^2} + (F_j + iP_j) \frac{\bar{Z}_j z^2 - R^2 Z_j}{R^4 - \bar{Z}_j^2 z^2} \right] \right\} \\ & + \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \log \frac{R^2 - \bar{Z}_m z}{R^2 - Z_m z} + \sum_{j=1}^n \left[(F_j - iP_j) \log \frac{R^2 + \bar{Z}_j z}{R^2 - \bar{Z}_j z} + (F_j + iP_j) \log \frac{R^2 + Z_j z}{R^2 - Z_j z} \right] \right\} \\ & + \frac{\kappa-1}{4\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m (\bar{Z}_m - Z_m) - 2 \sum_{j=1}^n \left[(F_j - iP_j) \bar{Z}_j + (F_j + iP_j) Z_j \right] \right\} \frac{z}{R^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_e(z) = & \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \log \frac{z-Z_m}{z-\bar{Z}_m} + \sum_{j=1}^n \left[(F_j + iP_j) \frac{z-Z_j}{z+Z_j} + (F_j - iP_j) \log \log \frac{z-\bar{Z}_j}{z+\bar{Z}_j} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \left(\frac{Z_m}{z-\bar{Z}_m} - \frac{\bar{Z}_m}{z-Z_m} \right) + \sum_{j=1}^n \left[(F_j + iP_j) \left(\frac{Z_j}{z-\bar{Z}_j} + \frac{Z_j}{z+\bar{Z}_j} \right) + (F_j - iP_j) \left(\frac{\bar{Z}_j}{z-Z_j} + \frac{\bar{Z}_j}{z+Z_j} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \log \frac{R^2 - \bar{Z}_m z}{R^2 - Z_m z} + \sum_{j=1}^n \left[(F_j + iP_j) \log \frac{R^2 - \bar{Z}_j z}{R^2 + \bar{Z}_j z} + (F_j - iP_j) \log \frac{R^2 - Z_j z}{R^2 + Z_j z} \right] \right\} \\ & - \frac{R^2}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ iP_m \left[\frac{R^2 - Z_m \bar{Z}_m}{(R^2 - \bar{Z}_m z)^2} - \frac{R^2 - Z_m \bar{Z}_m}{(R^2 - Z_m z)^2} \right] + \sum_{j=1}^n \left[(F_j + iP_j) \left[\frac{R^2 - Z_j \bar{Z}_j}{(R^2 - \bar{Z}_j z)^2} - \frac{R^2 - Z_j \bar{Z}_j}{(R^2 + \bar{Z}_j z)^2} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + (F_j - iP_j) \left[\frac{R^2 - Z_j \bar{Z}_j}{(R^2 - Z_j z)^2} - \frac{R^2 - Z_j \bar{Z}_j}{(R^2 + Z_j z)^2} \right] \right] \right\} - \frac{iP_m (\bar{Z}_m - Z_m) [(\kappa-1)Z_m \bar{Z}_m + R^2] z}{2\pi(1+\kappa) R^4 - (Z_m + \bar{Z}_m) R^2 z + Z_m \bar{Z}_m z^2} \\ & - \frac{R^2}{\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{R^8 - R^4 (Z_j^2 + \bar{Z}_j^2) z^2 + Z_j^2 \bar{Z}_j^2 z^4} \left\{ (F_j + iP_j) \left[R^2 (R^2 \bar{Z}_j - Z_j \bar{Z}_j^2 + \kappa Z_j^3) z \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\kappa-1}{R^2} Z_j^3 \bar{Z}_j^2 + \bar{Z}_j Z_j^2 \right) z^3 \right] + (F_j - iP_j) \left[R^2 (R^2 Z_j - \bar{Z}_j Z_j^2 + \kappa \bar{Z}_j^3) z - \left(\frac{\kappa-1}{R^2} \bar{Z}_j^3 Z_j^2 + Z_j \bar{Z}_j^2 \right) z^3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Το τασικό και το παραμορφωσιακό πεδίο που προκύπτουν από τα παραπάνω μιγαδικά δυναμικά έχει αποδειχτεί [27] ότι παρέχουν ένα φυσικά αποδεκτό παραμορφωμένο σχήμα του FBD στην περιοχή επαφής με τις πλάκες φόρτισης εξαλείφοντας κάθε είδους αλληλοεπικάλυψη πλάκας θλίψεως - δοκιμίου καθώς επίσης και κάμψης των επίπεδων τμημάτων του συνόρου του FBD.

2.3 Ο FBD υπό θλίψη μεταξύ πλακών που υπερβαίνουν τα επίπεδα άκρα του δίσκου (άμεση επαφή FBD - συνήθων πλακών μηχανής)

Η λύση που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα δεν ισχύει στη συνήθη περίπτωση άμεσης επαφής δοκιμίου - πλακών σύνθλιψης που το μήκος τους υπερβαίνει αυτό των επίπεδων τμημάτων του FBD. Σε αυτήν την περίπτωση το μήκος επαφής δεν είναι σταθερό και προκαθορισμένο όπως πρίν, αλλά αυξάνεται με την αύξηση του φορτίου, με αποτέλεσμα στο αρχικό μήκος επαφής να προστίθενται και τμήματα του καμπύλου συνόρου του FBD. Προφανώς στα νέα αυτά τμήματα αναπτύσσονται τάσεις επαφής. Έτσι αρχικά προσδιορίζεται το πραγματικό μήκος και οι τάσεις επαφής - συνοριακές συνθήκες και μετά επιλύεται το αντίστοιχο πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα του FBD για τις συνοριακές συνθήκες αυτές.

2.3.1 Η λύση του προβλήματος επαφής: Το μήκος επαφής και η κατανομή των τάσεων επαφής

Λαμβάνοντας υπόψη ότι, στα ψαθυρά υλικά η αύξηση του μήκους επαφής κατά την φόρτιση θα είναι σχετικά μικρή συγκριτικά με το αρχικό μήκος του επίπεδου τμήματος του συνόρου του FBD, το μήκος και οι τάσεις επαφής υπολογίζονται υπό τις ακόλουθες υποθέσεις:

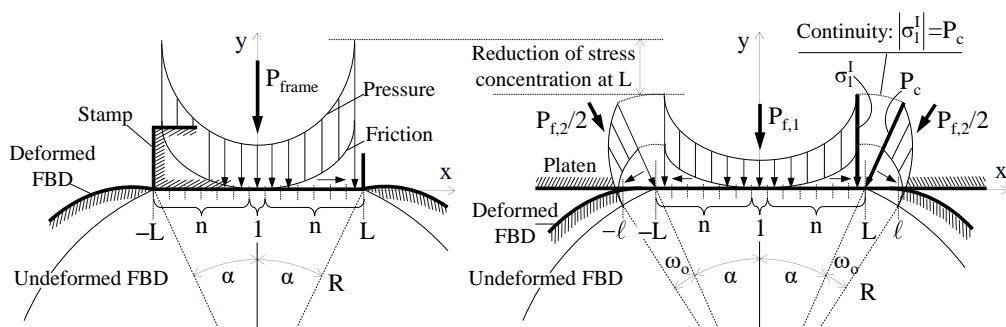
- (a) Η κατανομή των τάσεων επαφής, ορθή τάση και τάση τριβής αν υπάρχει, κατά μήκος του κεντρικού τμήματος της περιοχής επαφής θα είναι κατά προσέγγιση ίσες με αυτές που υπολογίστηκαν στην παράγραφο 2.2.
- (b) Το πρόσθετο τμήμα του μήκους επαφής αριστερά και δεξιά του αρχικού επίπεδου συνόρου του FBD και οι αντίστοιχες τάσεις επαφής που αναπτύσσονται θα προσδιορίζονται θεωρώντας ένα πρόβλημα επαφής δυο ελαστικών σωμάτων FBD - πλάκας φόρτισης όπου το τελευταίο είναι ως συνήθως πιο άκαμπτο από το πρώτο. Ο υπολογισμός της κατανομής των τάσεων επαφής και το μήκος επαφής προσδιορίζονται από την ικανοποίηση της συνθήκης συνέχειας στο ακραίο σημείο του αρχικού επίπεδου συνόρου και του καμπύλου τμήματος του FBD που θα έρθει σε επαφή με την πλάκα φόρτισης (platten).

Η αναλυτική λύση του πρώτου θεμελιώδους προβλήματος για τον μεμονωμένο FBD προκύπτει από την υπέρθεση των λύσεων των δυο παρακάτω προβλημάτων:

- (a) Πρόβλημα I, που είναι το πρόβλημα που επιλύθηκε στην παράγραφο 2.2 (συνοριακές συνθήκες τάσεων λόγω επαφής FBD - stamp).

- (b) Πρόβλημα II, στο οποίο λαμβάνονται υπόψη μόνο οι συνοριακές συνθήκες τάσεων λόγω των επιπλέον τμημάτων του FBD που θα έρθουν σε επαφή με τις πλάκες σύνθλιψης.

Για το πρόβλημα επαφής FBD - stamp (**Εικ. 2.4 (a)**), το μήκος επαφής είναι $(-LL)$ ενώ για το πρόβλημα FBD - platen το αντίστοιχο μήκος θα είναι $(-ll)$. Λόγω συμμετρίας $(-l - L) = (ll)$ (**Εικ. 2.4 (b)**). Στο μήκος $(-LL)$ αντιστοιχεί η γωνία 2α ενώ για το επιπλέον μήκος (ll) η ανάλογη γωνία είναι η ω_0 . Στην περίπτωση επαφής FBD - platen, το ολικό φορτίο P_{frame} κατανέμεται σε μεγαλύτερο μήκος $(-ll)$ (**Εικ. 2.4 (b)**), από ότι στην περίπτωση επαφής FBD - stamp (**Εικ. 2.4 (a)**), που κατανέμονται στο τμήμα $(-LL)$. Οπότε μειώνεται η συγκεντρώση τάσεων επαφής στο σημείο L (και $-L$), ενώ στο νέο ακραίο σημείο επαφής l (και $-l$) οι τάσεις επαφής μηδενίζονται (γενικά μπορεί να θεωρηθούν φραγμένες).



Εικ. 2.4: (a) Η περιοχή επαφής FBD-stamp, και (b) η περιοχή επαφής FBD-platen [27].

Η μαθηματική διατύπωση των παραπάνω θεωρήσεων εκφράζεται ως εξής [27]:

$$P_{frame} = P_{f,1} + P_{f,2} \quad (2.9)$$

με $P_{f,1}$ και $P_{f,2}/2$ τις επιμέρους συνιστώσες της φόρτισης P_{frame} που εφαρμόζονται κατά μήκος των τμημάτων $-LL$ και $(-l - L) \cup (ll)$ αντίστοιχα. Οι $P_{f,1}$, $P_{f,2}$, όπως και το μήκος (L, l) υπολογίζονται από την συνθήκη συνέχειας στο σημείο L (και $-L$) (**Εικ. 2.4 (b)**):

$$|\sigma_1^I| = P_c \quad (2.10)$$

με $|\sigma_1^I|$ το μέτρο της ορθής τάσης καθώς προσεγγίζεται το L από τα αριστερά του αρχικού συνόρου του FBD και $P_c (>0)$ το μέτρο της πίεσης καθώς

προσεγγίζεται το L από τα δεξιά κατά μήκος του καμπύλου τμήματος του FBD.

Σύμφωνα με την προηγούμενη παραδοχή (a), η τιμή της $|\sigma_1^I|$ υπολογίζεται αυστηρά από την 1^η σχέση των εξ. (1). Όμως, χρησιμοποιώντας τις εξ. (1) η σ^I γίνεται ιδιόμορφη στο σημείο $x=L$. Προκειμένου να αποφευχθεί αυτή η ιδιομορφία, η σ^I προσεγγίζεται καθώς $x \rightarrow L$, στο σημείο Z_1 κοντά στο L , χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη μη ιδιόμορφη σημειακή θλιπτική δύναμη (ανά μονάδα πάχους) $P_1 (>0)$, που προσδιορίζεται από την εξ. (3) για $j=1$, αντικαθιστώντας όπου P_{frame} την $P_{f,1}$. Οπότε:

$$|\sigma_1^I| = \frac{P_1}{2R \sin \alpha} = \frac{(2n+1)(1+\kappa)P_{f,1}}{\pi R t \sqrt{(4n+1)\kappa} \sin \alpha} \cos \left[\frac{\log \kappa}{2\pi} \log(4n+1) \right] \quad (2.11)$$

Όσον αφορά την P_c , σύμφωνα με την θεώρηση (b), η τιμή της θα είναι ίση με το μέτρο της παραβολικής κατανομής της ακτινικής πίεσης που αναπτύσσεται στα καμπύλα τμήματα του FBD που έρχονται σε επαφή με την επίπεδη πλάκα φόρτισης, δηλαδή [27]:

$$P_c = \max \left\{ \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi P_{f,2}}{2KRt}} \left[1 - \frac{\sin^2(\pi/2 - \alpha - \theta)}{\sin^2 \omega_0} \right] \right\}^{\theta = \pi/2 - \alpha} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi P_{f,2}}{2KRt}}, \left(K = \frac{\kappa+1}{4\mu} + \frac{\kappa_{pl}+1}{4\mu_{pl}} \right) \quad (2.12)$$

Στην εξ. (12), η κατανομή της πίεσης αναφέρεται στο 1^ο τεταρτημόριο όπως φαίνεται στην **Εικ. 4b**, μ είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού και ο δείκτης (pl) αναφέρεται στην πλάκα φόρτισης (platten). Συνδυάζοντας τις εξ. (2.10), (2.11) και (2.12), η σχέση που συνδέει τις φορτίσεις $P_{f,1}$ και $P_{f,2}$, είναι η ακόλουθη [27]:

$$P_{f,1} = \frac{3\pi\sqrt{(4n+1)\pi R t \kappa} \sin \alpha}{(2n+1)(1+\kappa)\sqrt{32K} \cos \left[\frac{\log \kappa}{2\pi} \log(4n+1) \right]} \sqrt{P_{f,2}} \quad (2.13)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (2.13) στην εξ. (2.9), προκύπτει το φορτίο $P_{f,2}$ συναρτήσει το ολικού φορτίου P_{frame} , ως εξής [27]:

$$P_{f,2} = P_{frame} + \frac{A^2}{2} - A \sqrt{P_{frame} + \frac{A^2}{4}}, \quad A = \frac{3\pi\sqrt{(4n+1)\pi R t \kappa} \sin \alpha}{(2n+1)(1+\kappa)\sqrt{32K} \cos \left[\frac{\log \kappa}{2\pi} \log(4n+1) \right]} \quad (2.14)$$

θεωρώντας $P_{f,1} = P_{frame} - P_{f,2}$:

$$P_{f,1} = A \sqrt{P_{\text{frame}} + \frac{A^2}{4}} - \frac{A^2}{2} \quad (2.15)$$

ενώ η γωνία επαφής ω_0 υπολογίζεται ως [27]:

$$\omega_0 = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{2KP_{f,2}}{\pi Rt}} \right) \cong \sqrt{\frac{2KP_{f,2}}{\pi Rt}}, \quad \left(K = \frac{\kappa + 1}{4\mu} + \frac{\kappa_{p\ell} + 1}{4\mu_{p\ell}} \right) \quad (2.16)$$

Για την περίπτωση ύπαρξης τριβής στο τμήμα $-LL$ η τάση που αναπτύσσεται είναι:

$$\left| \tau_1^I \right| = \frac{F_1}{2R \sin \alpha} = \frac{(2n+1)(1+\kappa)P_{f,1}}{\pi Rt \sqrt{(4n+1)\kappa \sin \alpha}} \sin \left[\frac{\log \kappa}{2\pi} \log(4n+1) \right] \quad (2.17)$$

Η τριβή στο τμήμα LI πρέπει να είναι τύπου Coulomb δεξιά του σημείου L και πρέπει να δίνεται από την σχέση:

$$\tau_L = f P_c \quad (2.18)$$

Όπου f ο συντελεστής στατικής τριβής, και η P_c δίνεται από την εξ. (2.12). Εξισώνοντας, για λόγους συνέχειας, τις σχέσεις (2.17) και (2.18), η f προκύπτει ως [27]:

$$f = \frac{\left| \tau_1^I \right|}{P_c} = \frac{4(2n+1)(1+\kappa)P_{f,1} \sqrt{2KRt}}{3\pi Rt \sqrt{(4n+1)\kappa P_{f,2}} \sin \alpha} \sin \left[\frac{\log \kappa}{2\pi} \log(4n+1) \right] \quad (2.19)$$

με τις $P_{f,1}$ και $P_{f,2}$ δίνονται από τις εξ. (2.15) και (2.14), αντίστοιχα.

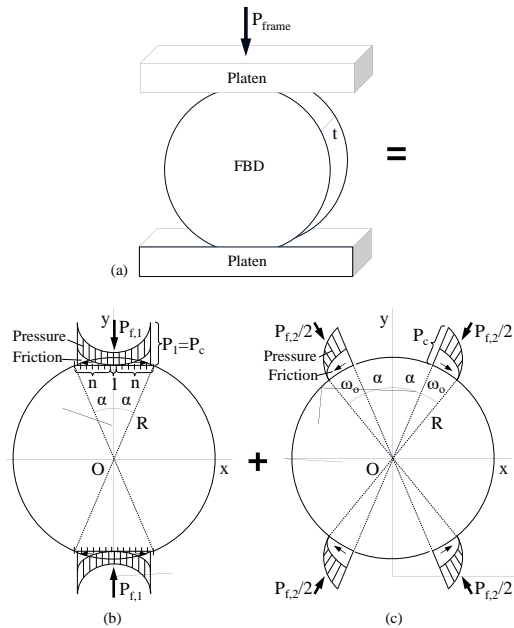
2.3.2 Η λύση του πρώτου θεμελιώδους προβλήματος για τον FBD υπό θλίψη μεταξύ πλακών φόρτισης που το μήκος τους υπερβαίνει το μήκος του επίπεδου συνόρου του δίσκου

Θεωρώντας γνωστές τις παραμέτρους επαφής $P_{f,1}$, $P_{f,2}$, P_c , ω_0 και f από την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου και υπό την παραδοχή ισχύος της γραμμικής ελαστικότητας, η λύση για το εν λόγω πρόβλημα προκύπτει από την υπέρθεση των λύσεων των προβλημάτων I και II. Για το πρόβλημα I η

λύση έχει αναλυθεί στην παράγραφο 2.2, οπότε απομένει η παρουσίαση της λύσης του προβλήματος II.

Τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_I(z)$ και $\psi_I(z)$ είναι κατ' αντιστοιχία οι ποσότητες $\varphi_e(z)$ και $\psi_e(z)$ των εξ. (2.7) και (2.8). Αντικαθιστώντας $P_{frame} \equiv P_{f,1}$ στις εξ. (2.3) προκύπτει ότι:

$$\varphi_I(z) = \varphi_e(z, P_{frame} \equiv P_{f,1}), \quad \psi_I(z) = \psi_e(z, P_{frame} \equiv P_{f,1}) \quad (2.20)$$



Εικ. 2.5: (a) Το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα για τον FBD; (b) Πρόβλημα I; (c) Πρόβλημα II [27].

Η λύση του προβλήματος II όταν δηλαδή στο δίσκο επενεργεί το φορτίο $P_{f,2}$ μπορεί να προσδιορισθεί μέσω μιγαδικών δυναμοσειρών. Αν θεωρήσουμε τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_{II}(z)$ και $\psi_{II}(z)$ σε απλή συνεκτική περιοχή οι σειρές Taylor εκφράζονται ως:

$$\varphi_{II}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q z^q, \quad \psi_{II}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} b_q z^q \quad (2.21)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (2.21) στην αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος προκύπτει ότι:

$$\sigma_R^{II} - i \tau_{R\theta}^{II} = \varphi'_{II}(z) + \overline{\varphi'_{II}(z)} - e^{i2\theta} [\bar{z} \varphi''_{II}(z) + \psi'_{II}(z)] \quad (2.22)$$

Αντικαθιστώντας όπου $q=k+1$ στην εξ. (2.21) έχουμε [27]:

$$\begin{aligned} \sigma_R^{\text{II}} - i\tau_{R\theta}^{\text{II}} = & 2\alpha_1 + 2\bar{a}_2 R e^{-i\theta} - (3a_3 R^2 + b_1) e^{i2\theta} + 3\bar{a}_3 R^2 e^{-i2\theta} - \\ & - \sum_{k=3}^{\infty} (k-1) R^{k-2} [(k+1)a_{k+1} R^2 + b_{k-1}] e^{ik\theta} + \sum_{k=3}^{\infty} (k+1)\bar{a}_{k+1} R^k e^{-ik\theta} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Το μέτρο της σ_R^{II} προσδιορίζεται στο 1ο τεταρτοκύκλιο από την εξ. (2.12) και από ανάλογες εκφράσεις στα υπόλοιπα τεταρτοκύκλια του δίσκου της **Εικ. 2.3** (c), ενώ η $\tau_{R\theta}^{\text{II}}$ υπολογίζεται αν πολλαπλασιάσουμε την σ_R^{II} με τον συντελεστή τριβής της εξ. (2.19).

Αναπτύσσοντας τις $\sigma_R^{\text{II}}, \tau_{R\theta}^{\text{II}}$ σε σειρές Fourier λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση [27]:

$$\sigma_R^{\text{II}} - i\tau_{R\theta}^{\text{II}} = c_0 + (c_2 - ic'_2) e^{i2\theta} + (c_{-2} - ic'_{-2}) e^{-i2\theta} + \sum_{k=3}^{\infty} (c_k - ic'_k) e^{ik\theta} + \sum_{k=3}^{\infty} (c_{-k} - ic'_{-k}) e^{-ik\theta} \quad (2.24)$$

με

$$\begin{aligned} c_0 = & -\frac{2P_c}{\pi} \left(\omega_0 - \frac{\omega_0 - \sin \omega_0 \cos \omega_0}{2 \sin^2 \omega_0} \right), \\ c_2 = c_{-2} = & -\frac{P_c}{\pi} \Im \left\{ e^{i2\alpha} \left[1 - e^{i2\omega_0} - \frac{4(1 - e^{i2\omega_0}) + e^{i4\omega_0} + 4i\omega_0 - 1}{8 \sin^2 \omega_0} \right] \right\}, \quad k = 4, 6, 8, \dots \\ c_k = c_{-k} = & \frac{P_c (1 + e^{ik\pi}) e^{i\frac{k\pi}{2}}}{2\pi \sin^2 \omega_0} \Im \left\{ e^{ik\alpha} \left[\frac{2 \sin^2 \omega_0 - 1}{k} (1 - e^{ik\omega_0}) + \frac{1 - e^{i(k-2)\omega_0}}{2(k-2)} + \frac{1 - e^{i(k+2)\omega_0}}{2(k+2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Οι όροι αυτοί οφείλονται στην πίεση και είναι πραγματικές ποσότητες, ενώ το σύμβολο \Im δηλώνει το φανταστικό μέρος των ποσοτήτων που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες.

$$\begin{aligned} c'_2 = i \frac{f P_c}{\pi} \Re \left\{ e^{i2\alpha} \left[1 - e^{i2\omega_0} - \frac{4(1 - e^{i2\omega_0}) + e^{i4\omega_0} + 4i\omega_0 - 1}{8 \sin^2 \omega_0} \right] \right\}, \quad c'_{-2} = -c'_2, \\ c'_k = -i \frac{f P_c (1 + e^{ik\pi}) e^{i\frac{k\pi}{2}}}{2\pi \sin^2 \omega_0} \Re \left\{ e^{ik\alpha} \left[\frac{2 \sin^2 \omega_0 - 1}{k} (1 - e^{ik\omega_0}) + \frac{1 - e^{i(k-2)\omega_0}}{2(k-2)} + \frac{1 - e^{i(k+2)\omega_0}}{2(k+2)} \right] \right\} \\ c'_{-k} = -c'_k, \quad (k = 4, 6, 8, \dots) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Οι παραπάνω όροι οφείλονται στην τριβή και είναι φανταστικές ποσότητες παρόλο που υπάρχουν πραγματικές ποσότητες που δηλώνονται με το σύμβολο \Re . Στις εξ. (2.25), (2.26) οι όροι που αντιστοιχούν σε περιττή τιμή του k είναι όλοι ίσοι με μηδέν. Επιπροσθέτως, οι ποσότητες P_c , ω_0 , f και $P_{f,2}$ υπολογίζονται από τις εξ. (2.12), (2.16), (2.19) και (2.14) αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (2.23) και (2.24) για την ίδια τιμή του θ προκύπτουν όλοι οι μη μηδενικοί συντελεστές των $\phi_{\text{II}}(z)$ και $\psi_{\text{II}}(z)$ και είναι της μορφής [27]:

$$\alpha_1 = \frac{c_0}{2} = -\frac{P_c}{\pi} \left(\omega_0 - \frac{\omega_0 - \sin \omega_0 \cos \omega_0}{2 \sin^2 \omega_0} \right) \quad (2.27)$$

$$b_1 = -(c_2 + \bar{c}_2) + i(c'_2 - \bar{c}'_2) = \frac{2P_c}{\pi} \Im \left\{ e^{i2\alpha} \left[1 - e^{i2\omega_0} - \frac{4(1 - e^{i2\omega_0}) + e^{i4\omega_0} + 4i\omega_0 - 1}{8 \sin^2 \omega_0} \right] \right\} \quad (2.28)$$

$$a_3 = \frac{\bar{c}_{-2} + i\bar{c}'_{-2}}{3R^2} = -\frac{P_c}{3\pi R^2} \left\{ \Im \left\{ e^{i2\alpha} \left[1 - e^{i2\omega_0} - \frac{4(1 - e^{i2\omega_0}) + e^{i4\omega_0} + 4i\omega_0 - 1}{8 \sin^2 \omega_0} \right] \right\} \right. \\ \left. + f \Re \left\{ e^{i2\alpha} \left[1 - e^{i2\omega_0} - \frac{4(1 - e^{i2\omega_0}) + e^{i4\omega_0} + 4i\omega_0 - 1}{8 \sin^2 \omega_0} \right] \right\} \right\} \quad (2.29)$$

$$a_{k+1} = \frac{\bar{c}_{-k} + i\bar{c}'_{-k}}{(k+1)R^k} = \quad (k=4,6,8,\dots) \\ = \frac{P_c(1 + e^{ik\pi})e^{\frac{i k \pi}{2}}}{2(k+1)\pi R^k \sin^2 \omega_0} \left\{ \Im \left\{ e^{ik\alpha} \left[\frac{2 \sin^2 \omega_0 - 1}{k} (1 - e^{ik\omega_0}) + \frac{1 - e^{i(k-2)\omega_0}}{2(k-2)} + \frac{1 - e^{i(k+2)\omega_0}}{2(k+2)} \right] \right\} \right. \\ \left. + f \Re \left\{ e^{ik\alpha} \left[\frac{2 \sin^2 \omega_0 - 1}{k} (1 - e^{ik\omega_0}) + \frac{1 - e^{i(k-2)\omega_0}}{2(k-2)} + \frac{1 - e^{i(k+2)\omega_0}}{2(k+2)} \right] \right\} \right\} \quad (2.30)$$

$$b_{k-1} = -\frac{c_k - ic'_k}{(k-1)R^{k-2}} - \frac{\bar{c}_{-k} + i\bar{c}'_{-k}}{R^{k-2}} = \quad (k=4,6,8,\dots) \\ = -\frac{P_c k(1 + e^{ik\pi})e^{\frac{i k \pi}{2}}}{2(k-1)\pi R^{k-2} \sin^2 \omega_0} \Im \left\{ e^{ik\alpha} \left[\frac{2 \sin^2 \omega_0 - 1}{k} (1 - e^{ik\omega_0}) + \frac{1 - e^{i(k-2)\omega_0}}{2(k-2)} + \frac{1 - e^{i(k+2)\omega_0}}{2(k+2)} \right] \right\} - \\ - \frac{f(k-2)P_c(1 + e^{ik\pi})e^{\frac{i k \pi}{2}}}{2(k-1)\pi R^{k-2} \sin^2 \omega_0} \Re \left\{ e^{ik\alpha} \left[\frac{2 \sin^2 \omega_0 - 1}{k} (1 - e^{ik\omega_0}) + \frac{1 - e^{i(k-2)\omega_0}}{2(k-2)} + \frac{1 - e^{i(k+2)\omega_0}}{2(k+2)} \right] \right\} \quad (2.31)$$

Θεωρώντας ότι, $a_0 = \varphi_{II}(0) = 0$ και $\beta_0 = \psi_{II}(0) = 0$, αφού αφορούν μόνο σε μετατοπίσεις στερεού σώματος, οι γενικές εκφράσεις των $\varphi_{II}(z)$ και $\psi_{II}(z)$ είναι της μορφής [27]:

$$\varphi_{II}(z) = \alpha_1 z + a_3 z^3 + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1}, \quad \psi_{II}(z) = b_1 z + \sum_{k=3}^{\infty} b_{k-1} z^{k-1} \quad (2.32)$$

Η γενική λύση του πρώτου θεμελιώδους προβλήματος για τον FBD θεωρώντας ότι εφαρμόζεται φόρτιση P_{frame} που προκύπτει από την επαλληλία των φορτίσεων $P_{f,1}$ και $P_{f,2}$, δηλαδή $P_{frame} = P_{f,1} + P_{f,2}$ μέσω πλακών φόρτισης που το μήκος τους υπερβαίνει τη διάμετρο του δίσκου, δίνεται ως εξής:

$$\varphi(z) = \varphi_I(z) + \varphi_{II}(z), \quad \psi(z) = \psi_I(z) + \psi_{II}(z) \quad (2.33)$$

2.4 Η εφελκυστική συνιστώσα της τάσης στο κέντρο του FBD στο ως άνω πρόβλημα (FBD - platen)

Η εφελκυστική συνιστώσα της τάσης στο κέντρο του FBD για την περίπτωση επαφής FBD - platen, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς θεωρείται ότι αντιστοιχεί στην εφελκυστική αντοχή σ_t του υλικού. Με τη βοήθεια των γνωστών εκφράσεων Muskhelishvili [29]:

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y = 4\Re\{\varphi'(z)\} \\ \sigma_r - i\tau_{r\theta} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - e^{i2\theta} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}\end{aligned}\quad (2.34)$$

η $\sigma_t \equiv \sigma_x|_{z=0}$ για το συνολικό πρόβλημα, προκύπτει ως [27]:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \left\{ \frac{P_m}{R} \left[(5-\kappa)\cos\alpha - (3-\kappa)\cos^3\alpha + \frac{\kappa-1}{\cos\alpha} \right] \right. \\ &+ 2\Re \left[\sum_{j=1}^n (F_j + iP_j) \left(\frac{\kappa-1}{R^2} Z_j + \frac{2}{\bar{Z}_j} - \frac{3Z_j\bar{Z}_j^2}{R^4} + \frac{4\bar{Z}_j}{R^2} + \frac{Z_j}{\bar{Z}_j^2} + \frac{\kappa Z_j^3}{R^4} + \frac{\kappa}{Z_j} \right) \right] \left. \right\} \sigma_t^I \\ &+ \frac{2P_c}{\pi} \left\{ \frac{\omega_0 - \sin\omega_0 \cos\omega_0}{2\sin^2\omega_0} - \omega_0 + \Im \left[e^{i2\alpha} \left[\frac{4(1-e^{i2\omega_0}) + e^{i4\omega_0} + 4i\omega_0 - 1}{8\sin^2\omega_0} + e^{i2\omega_0} - 1 \right] \right] \right\} \sigma_t^II\end{aligned}\quad (2.35)$$

με $\sigma_t^I, \sigma_t^{II}$ τις εφελκυστικές τάσεις που αντιστοιχούν στα προβλήματα I και II.

Το μέτρο της P_c και η τιμή της ω_0 δίνονται από τις εξ. (2.12) και (2.16) συναρτήσεως της $P_{f,2}$ που προσδιορίζεται από την εξ. (2.14). Επίσης, η τριβή f δεν εμφανίζεται στην εξ. (2.35) καθώς δεν επηρεάζει το πεδίο τάσεων στο κέντρο του δίσκου.

Οι σημειακές δυνάμεις (ανά μονάδα πάχους) P_m , και P_j , F_j στο σημείο $z = Z_m = iR\cos\alpha$, και στα σημεία $z = Z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $j=1, \dots, n$ στο δεξιό μισό τμήμα της χορδής $-LL$ (1^ο τεταρτοκύκλιο του FBD), προκύπτουν από τις εξ. (2.3) ύστερα από αντικατάσταση του φορτίου P_{frame} από το $P_{f,1}$ στην εξ. (2.15). Τα σημεία $z = Z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $j=1, \dots, n$, στο 1^ο τεταρτοκύκλιο μπορούν να εκφραστούν ως (**Εικ. 2.2 (c)**) [27]:

$$Z_j = r_j e^{i\theta_j} = R \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{4(n+1-j)^2}{(n+1)^2}} \exp \left[i \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2n+1}{2(n+1-j)} \cot \alpha \right) \right] \quad (2.36)$$

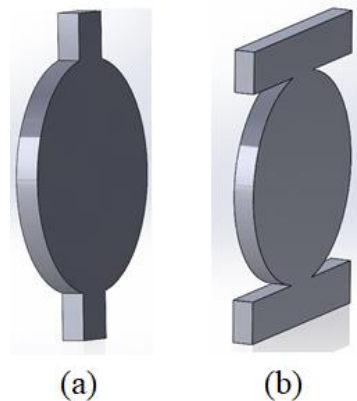
3^ο Κεφάλαιο: Αναλυτική και αριθμητική λύση

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων για τα δυο προβλήματα (**Εικ. 3.1** (α), (β)) βάσει της αναλυτικής λύσης καθώς και με τη βοήθεια της μέθοδου των πεπερασμένων στοιχείων. Σκοπός είναι η σύγκριση της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης και η επαλήθευση των δύο προσεγγίσεων μεταξύ τους. Πραγματοποιείται ακόμα παραμετρικός

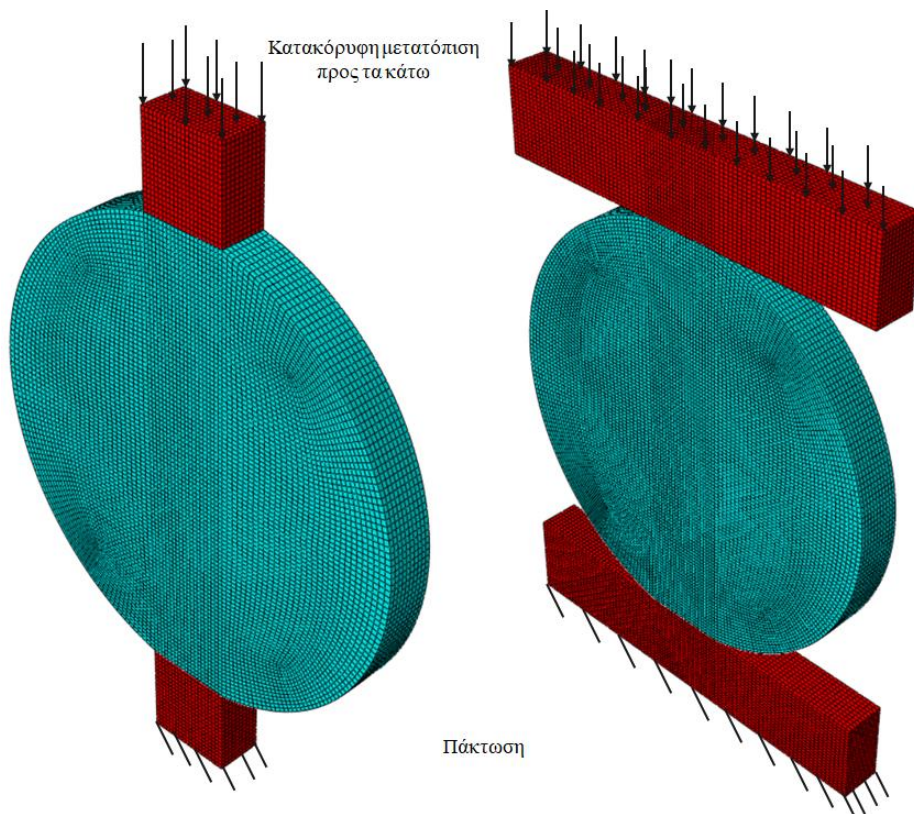
έλεγχος για την μελέτη της συμπεριφοράς του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων.

Πιο συγκεκριμένα μελετάται η κατανομή των τάσεων όταν μεταβάλλεται η γωνία (φ) που αντιστοιχεί στο εύρος του επίπεδου τμήματος, η τριβή (f), και το πάχος του δοκιμίου (t). Όσον αφορά το πεδίο μετατοπίσεων θα προστεθεί και άλλη μία παράμετρος, το υλικό. Αξίζει να μελετηθεί και η περίπτωση που οι πλάκες φόρτισης έχουν μεγαλύτερο πάχος από το δοκίμιο.



Εικ. 3.1: (a) Το δοκίμιο του προβλήματος I, (b) το δοκίμιο του προβλήματος II.

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό λογισμικό ABAQUS. Η μοντελοποίηση έγινε ως εξής: σχεδιάστηκε δοκίμιο ακτίνας 50 mm και πάχους 10 mm και οι αντίστοιχες πλάκες φόρτισης τοποθετήθηκαν στα κομμένα άκρα του FBD (**Εικ. 3.1** (a), (b)). Κατά την διάρκεια της παραμετρικής μελέτης επιβλήθηκε κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω στην άνω πλάκα φόρτισης. Όσον αφορά την κάτω πλάκα περιορίστηκαν όλοι οι βαθμοί ελευθερίας. Για το δοκίμιο FBD θεωρήθηκε ένα ιδεατό υλικό με $E=20$ GPa, $\nu=0.3$ και προσομοιώθηκε ως ισότροπο-γραμμικώς ελαστικό, ενώ οι δυο πλάκες “κατασκευάστηκαν” από χάλυβα με $E=210$ GPa, $\nu=0.3$. Επιλέχθηκαν εξαεδρικά στοιχεία και για τις πλάκες φόρτισης και το δοκίμιο, ενώ δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στο πλέγμα των στοιχείων και στην τοπική πύκνωση του κανάβου. Πιο συγκεκριμένα για την ορθότερη διακριτοποίηση πραγματοποιήθηκε πύκνωση στην επαφή FBD-stamps/platens. Για τις διεπαφές μεταξύ πλακών φόρτισης και δοκιμίου υιοθετήθηκε συντελεστής τριβής ίσος με 0.2.



Εικ. 3.2: Οι γεωμετρίες των προσομοιωμάτων των δυο προβλημάτων.

3.2 Περιγραφή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων [5]

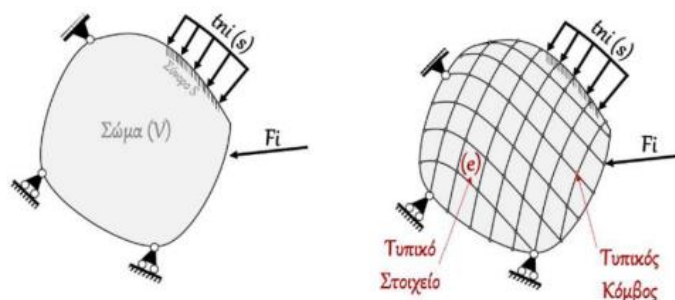
Το 1956 σε δημοσίευση των Turner, Clough, Martin και Topp [30] γίνεται για πρώτη φορά παρουσίαση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Μερικά στοιχεία της είχαν παρουσιαστεί από τους Courant et al. (1943) [31], Hrenikoff (1941) [32], McHenry (1943) [33] κ.λ.π. Ο Έλληνας μηχανικός Argyris το 1950 δίνει μια άμεση προσέγγιση με βάση την αρχή του δυνατού έργου. Μαζί με τους συνεργάτες του αναπτύσσουν μία μεθοδολογία για την επίλυση

πολύπλοκων προβλημάτων με την χρήση υπολογιστικών τεχνικών [34]. Με την πάροδο των χρόνων η μέθοδος παρουσιάζει σημαντική εξέλιξη που οφείλεται στην ραγδαία εξέλιξη της επιστήμης των υπολογιστών. Η συμβολή της είναι σημαντική στην επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων που δεν επιδέχονταν αναλυτικές λύσεις. Η αναλυτική επίλυση ενός προβλήματος προϋποθέτει την ανάπτυξη κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου που αποδίδει τις υπό μελέτη παραμέτρους σε οποιοδήποτε στοιχείο του σώματος που αναλύεται και μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε υπεραπλουστευμένα μοντέλα.

3.2.1 Βασικές αρχές της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων [5]

Θεωρούμε την κατασκευή της **Εικ. 3.3** για την οποία πρέπει να προσδιορισθεί μια μεταβλητή όπως η τάση ή η παραμόρφωση. Αρχικά, διαιρείται η κατασκευή σε μικρότερα τμήματα που καλούνται στοιχεία (elements) και επειδή έχουν πεπερασμένο μέγεθος χαρακτηρίζονται ως πεπερασμένα στοιχεία (finite elements). Τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους με την βοήθεια διακριτών σημείων των κόμβων (nodes). Η διαδικασία αυτή καλείται διακριτοποίηση. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί και μία κομβική παραμετρος. Οι κομβικές παράμετροι είναι μετατοπίσεις με την γενικευμένη έννοια (μετατοπίσεις και οι παράγωγοί τους). Σε διδιάστατο πρόβλημα, θεωρείται ότι σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν δυο βαθμοί ελευθερίας (οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση), ενώ οι βαθμοί ελευθερίας κάθε στοιχείου είναι οι διπλάσιοι από αυτούς των κόμβων.

Εξαιρείται η περίπτωση των δοκών που προστίθεται και άλλη μία κομβική παράμετρος η στροφή του κόμβου περί τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή οι βαθμοί ελευθερίας είναι τριπλάσιοι από το πλήθος των κόμβων. Αφού προσδιορισθεί και το μητρώο-στήλη των δυνάμεων που αποτελείται από τις κομβικές δυνάμεις και το μητρώο δυσκαμψίας διαμορφώνεται το τελικό σύστημα: $\{K\} * \{U\} = \{F\}$.



Εικ. 3. 3: Διακριτοποίηση κατασκευής σε πεπερασμένα στοιχεία [35].

Από την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων σε διδιάστατο πρόβλημα προκύπτει ότι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου δίνεται από την σχέση:

$$k^e = \iint t * B^T * D * B * dA$$

με

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

το μητρώο ελαστικότητας του υλικού, που ικανοποιεί την σχέση $\sigma = D\varepsilon$. Επιπλέον, B, το μητρώο παραμορφώσεως που προκύπτει από τις ανηγμένες παραμορφώσεις.

3.2.2 Διαδικασία Μοντελοποίησης [34]

Η ανάλυση ενός προβλήματος με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε κάποιο λογισμικό περιλαμβάνει τα τρία ακόλουθα βήματα:

- i. Προ – επεξεργαστής (pre-processor): Με βάση το φυσικό πρόβλημα κατασκευάζεται το αντίστοιχο προσομοίωμα. Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει την διακριτοποίηση της γεωμετρίας, την επιλογή κατάλληλων στοιχείων, και τον καθορισμό των μηχανικών και φυσικών ιδιοτήτων των υλικών και της συμπεριφοράς της κατασκευής κατά την φόρτιση (γραμμικώς ελαστική, ανελαστική κ.λ.π). Τέλος, προσδιορίζονται τα είδη φόρτισης και οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν την συμπεριφορά των μελών της κατασκευής.
- ii. Ανάλυση (Analysis): Πραγματοποιούνται οι απαραίτητοι υπολογισμοί ώστε να σχηματισθούν τα μητρώα στιβαρότητας {K} και μάζας {M} (εξαρτάται από το είδος της ανάλυσης). Εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες και οι φορτίσεις και μορφώνεται η τελική μητρική εξίσωση ισορροπίας του συστήματος. Συνεπώς, προκύπτουν αποτελέσματα για τις τάσεις, τις μετατοπίσεις και τις παραμορφώσεις.
- iii. Μετα-επεξεργαστής (post-processor): Πραγματοποιείται η επεξεργασία των αποτελεσμάτων για να περιγραφούν σε γραφικό περιβάλλον σε χρωματική κλίμακα ή να εξαχθούν οι τιμές των τάσεων και μετατοπίσεων για περαιτέρω επεξεργασία. Με τον

τρόπο αυτό δίνεται η δυνατότητα ώστε να επιτευχθεί έλεγχος της εγκυρότητας και της ορθότητας των αποτελεσμάτων των υπολογισμών και να προκύψουν συμπεράσματα για την βελτίωση της λύσης.

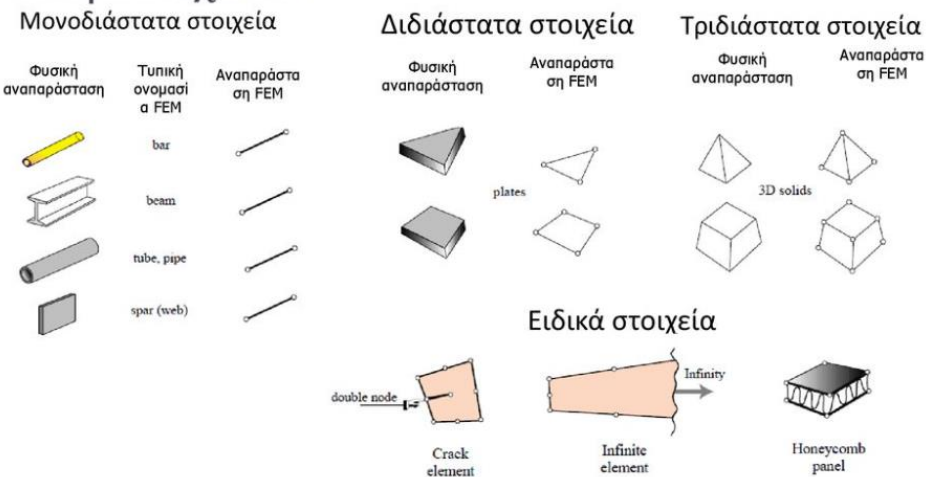
3.2.3 Περιορισμοί Μοντελοποίησης [36]

Προκειμένου να αποφευχθούν σφάλματα κατά την επίλυση ενός προβλήματος πρέπει να ακολουθηθούν κάποιοι γενικοί κανόνες κατά την μοντελοποίηση που αφορούν :

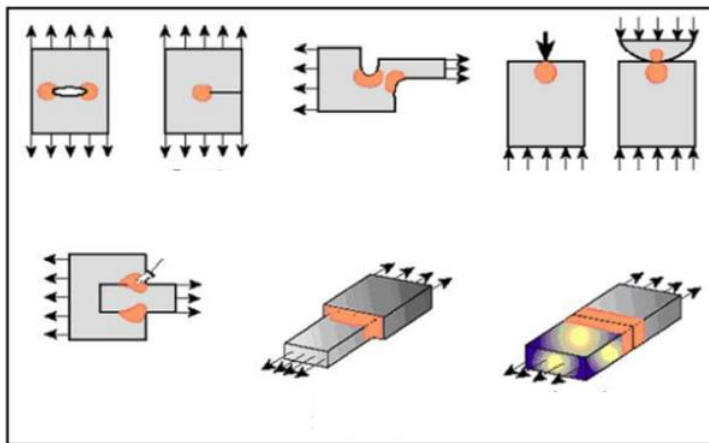
- Την γεωμετρία,
- Την επιλογή κατάλληλων στοιχείων,
- Το πλέγμα.

Στην γεωμετρία πρέπει να εστιάζεται η προσοχή στην σωστή απλοποίησή της. Σχετικά με την επιλογή στοιχείων, σε διδιάστατα προβλήματα, παρότι τα τριγωνικά στοιχεία είναι βολικότερα ως προς την προσέγγιση της γεωμετρίας, μειονεκτούν ως προς την ακρίβεια σε σχέση με τα τετράπλευρα. Άρα, είναι επιθυμητή η χρήση τετράπλευρων. Για τα τρισδιάστατα προβλήματα τα τετράεδρα οδηγούν σε μη ακριβή υπολογισμό των τάσεων αν και ο υπολογισμός των παραμορφώσεων είναι σωστός. Στην κατηγορία αυτή των προβλημάτων είναι επιθυμητό να χρησιμοποιούνται ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ή πλάγια παραλληλεπίπεδα. Τέλος, για το πλέγμα κρίνεται απαραίτητο να χρησιμοποιείται όσο πιο «αραιό» είναι εφικτό ώστε να επιτυγχάνεται ικανοποιητικότερη ακρίβεια. Υπάρχουν όμως, περιπτώσεις στις οποίες είναι αναγκαία η χρήση πυκνότερου πλέγματος, όπως, είναι οι περιοχές που εμφανίζονται υψηλές τάσεις, καμπυλότητα ή έντονες αλλαγές της γεωμετρίας (στην περίπτωση μας στην περιοχή επαφής δοκιμίου FBD-πλακών φόρτισης) και στις περιοχές που ασκούνται εξωτερικά φορτία ή υπάρχουν στηρίξεις.

Είδη στοιχείων



Εικ. 3.4: Είδη στοιχείων [36].

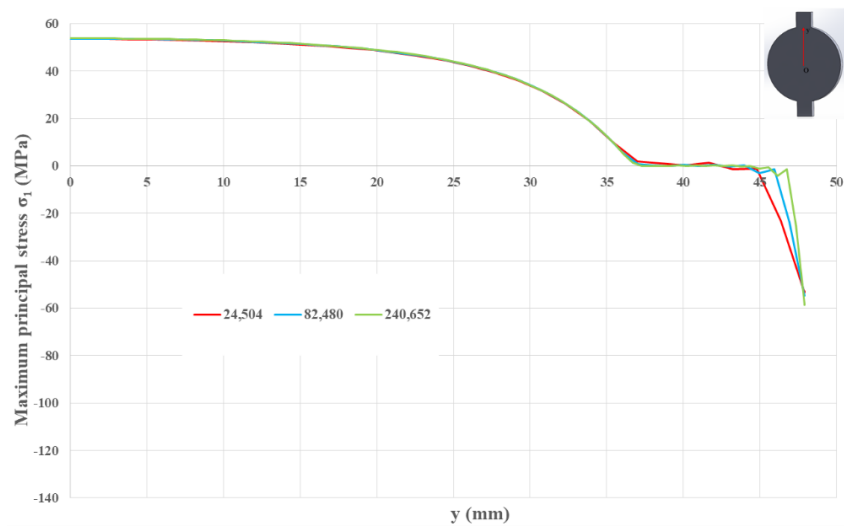


Εικ. 3.5: Περιπτώσεις που χρησιμοποιείται 'πυκνό' πλέγμα [36].

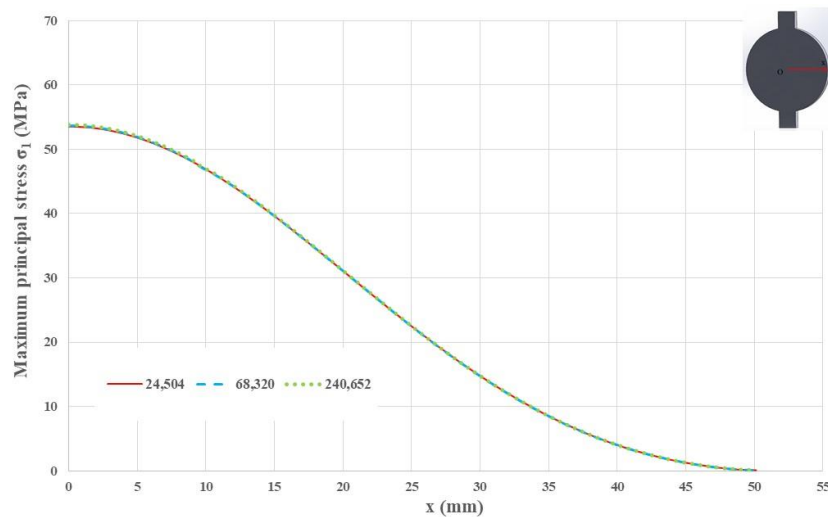
3.3 Έλεγχος σύγκλισης διακριτοποίησης

Πραγματοποιήθηκε μελέτη σύγκλισης για τα προσομοιώματα της **Εικ. 3.2** προκειμένου να διασφαλιστεί ότι το πλήθος των στοιχείων είναι επαρκές ώστε η λύση που θα προκύψει από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων να είναι ακριβής. Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των **Εικ. 3.6** και **Εικ. 3.7**, για το πρόβλημα I επιλέχθηκε μοντέλο με πλήθος στοιχείων ίσο με 68,000

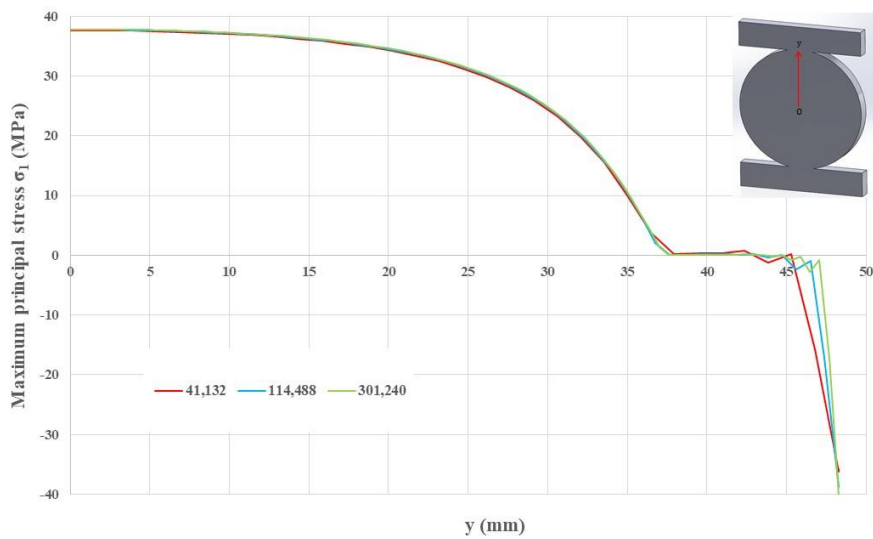
ενώ με βάση τις **Εικ. 3.8** και **Εικ. 3.9**, για το πρόβλημα II ο αριθμός των στοιχείων είναι ίσος με 114,000.



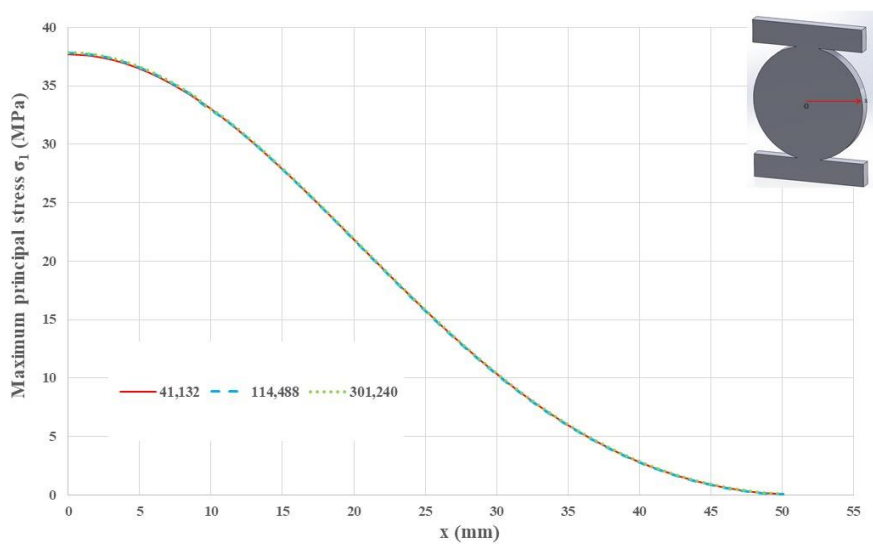
Εικ. 3.6: Η μέγιστη κύρια τάση σ_1 κατά μήκος του άξονα y για το πρόβλημα I.



Εικ. 3.7: Η μέγιστη κύρια τάση σ_1 κατά μήκος του άξονα x για το πρόβλημα I.



Εικ. 3.8: Η μέγιστη κύρια τάση σ_1 κατά μήκος του άξονα y για το πρόβλημα II.



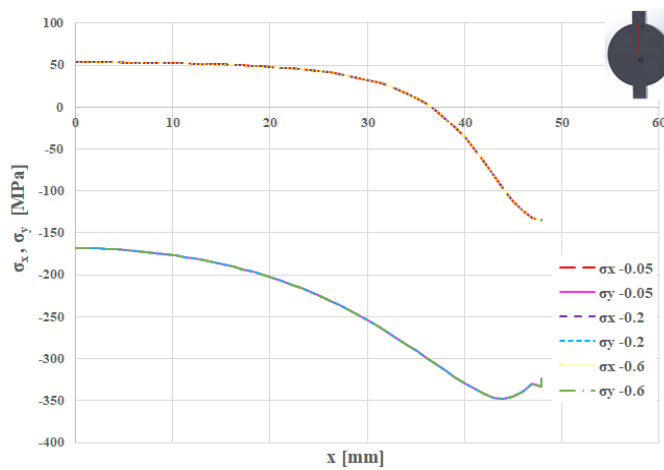
Εικ. 3.9: Η μέγιστη κύρια τάση σ_1 κατά μήκος του άξονα x για το πρόβλημα II.

3.4 Παραμετρική ανάλυση

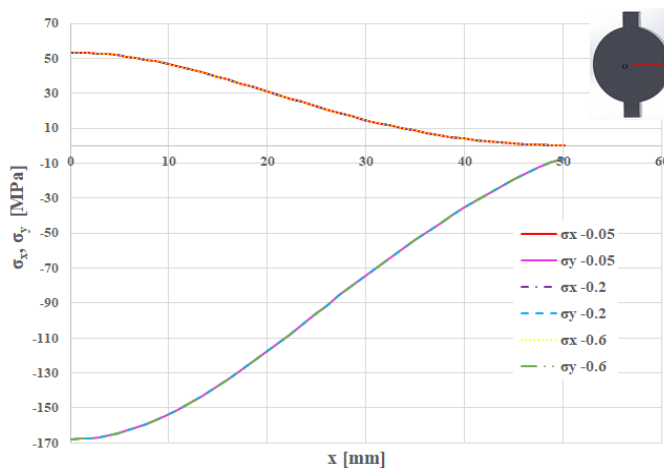
3.4.1 Ο ρόλος του συντελεστή τριβής

Στην ενότητα αυτή μελετάται η επιρροή του τασικού πεδίου μεταβάλλοντας την τιμή του συντελεστή τριβής ($f=0.05, 0.2, 0.6$). Λαμβάνονται υπόψη τα εξής δεδομένα:

- Μέτρο ελαστικότητας και λόγος Poisson: $E=20$ GPa και $\nu=0.3$
- Ακτίνα, πάχος και γωνία επαφής: $R=50$ mm, $t=10$ mm, $\varphi=11^\circ$.



Εικ. 3.10: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα y για διαφορετικές τιμές του συντελεστή τριβής.

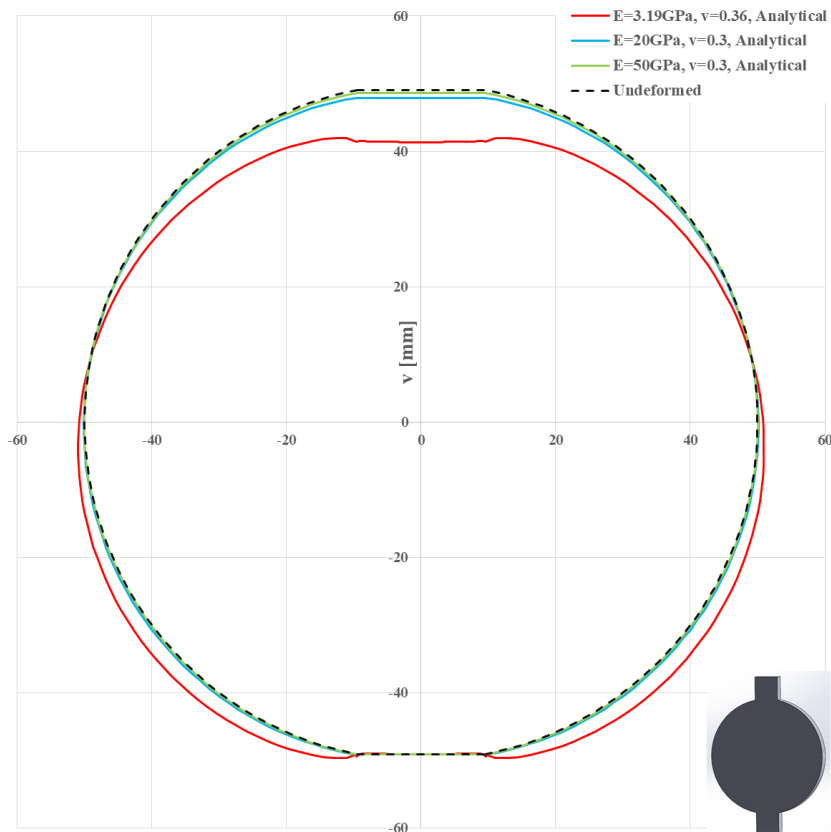


Εικ. 3.11: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα x για διαφορετικές τιμές της τριβής.

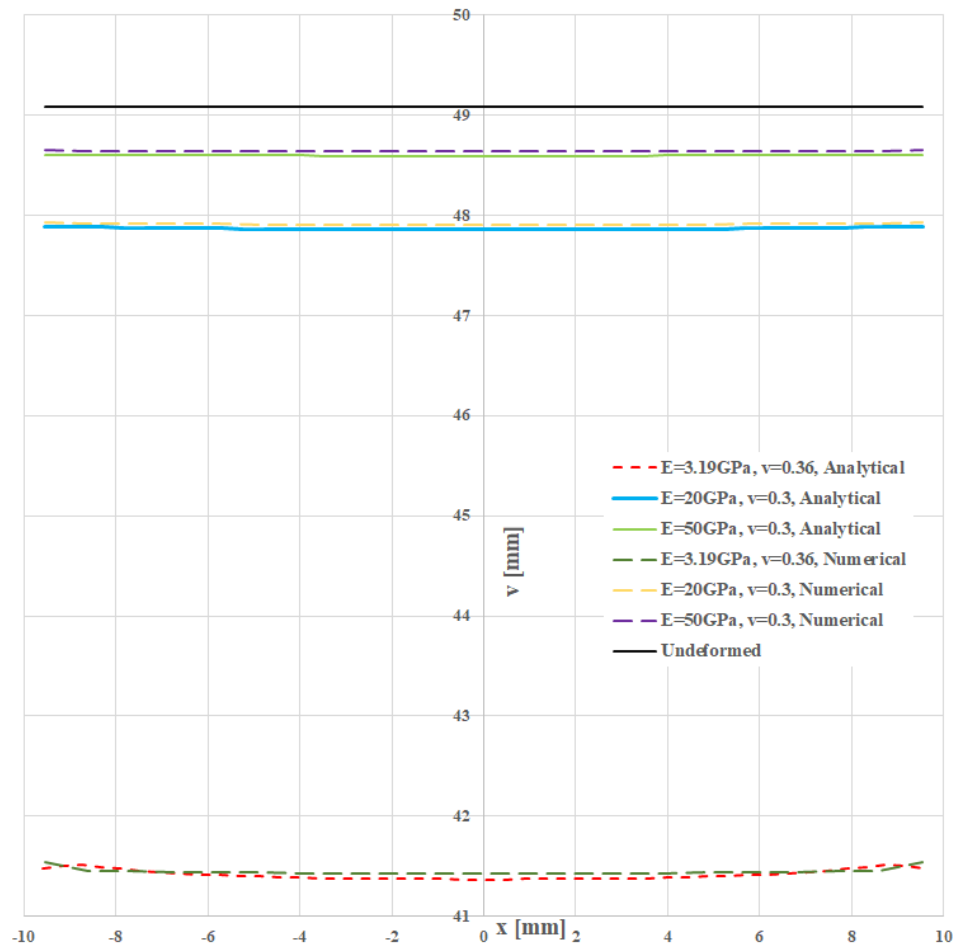
Παρότι μεταβάλλονται οι τιμές του συντελεστή της τριβής υπάρχουν μικρές διαφοροποιήσεις στο τασικό πεδίο.

3.4.2 Ο ρόλος του υλικού

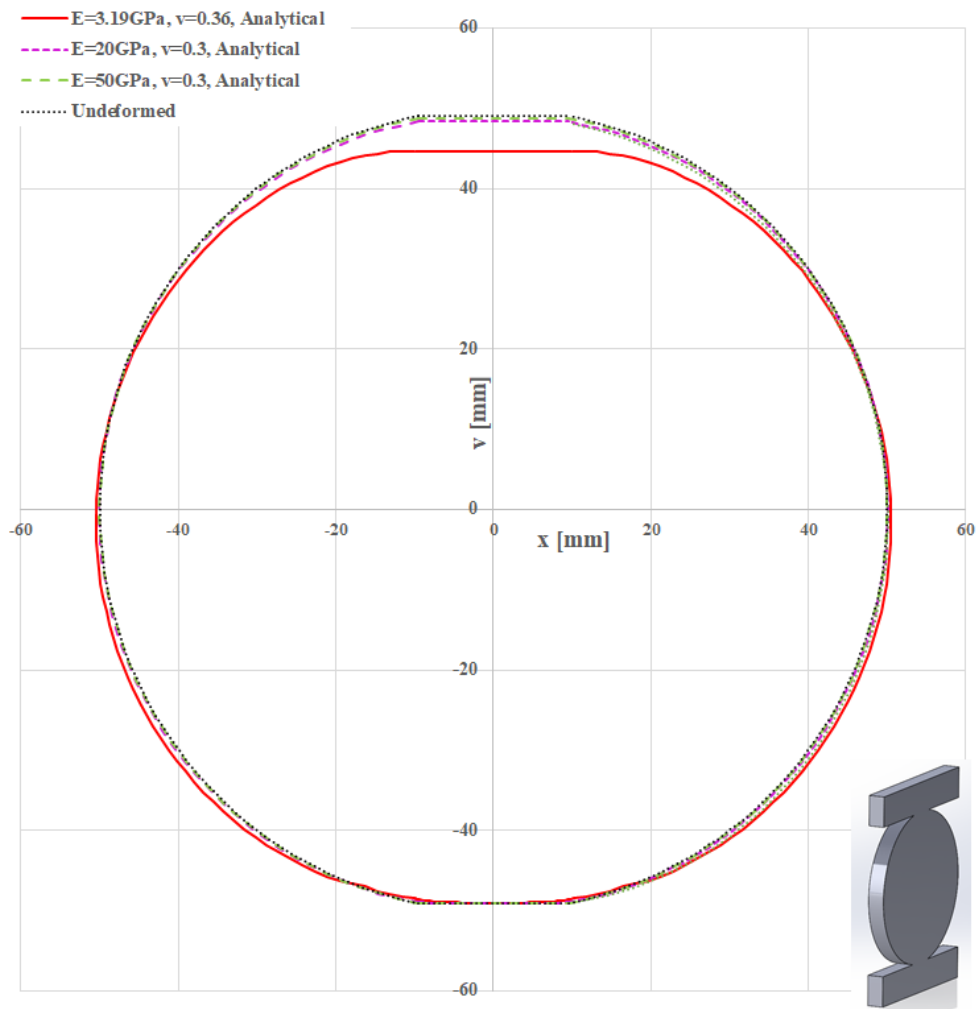
Στην ενότητα αυτή μελετάται η επιρροή του πεδίου μετατοπίσεων μεταβάλλοντας την τιμή του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson ($E=50 \text{ GPa}$ $\nu=0.3$, $E=20 \text{ GPa}$ $\nu=0.3$, $E=3.19 \text{ GPa}$ $\nu=0.36$). Οι τιμές της ακτίνας, του πάχους και της γωνίας επαφής παραμένουν αμετάβλητες, ο συντελεστής τριβής είναι ίσος με 0.2 ενώ για την κατακόρυφη θεωρήθηκαν οι τιμές 0.49 mm, 1.22mm, 7.71mm για το πρόβλημα I και 0.38 mm, 0.85mm, 3.75 mm για το πρόβλημα II όπως υπολογίστηκαν από την αναλυτική λύση.



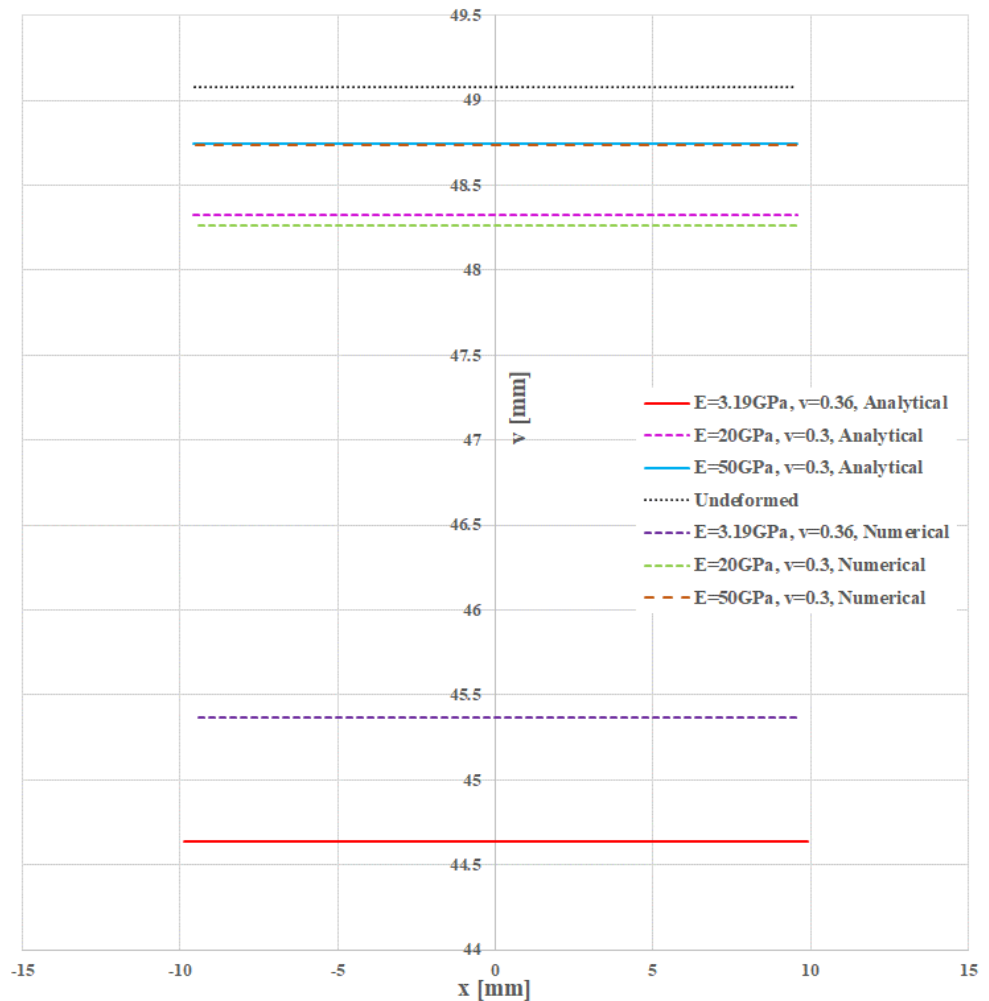
Εικ. 3.12: Η παραμορφωμένη διάταξη του FBD για διαφορετικά υλικά (αναλυτική λύση).



Εικ. 3.13: Η κατακόρυφη μετατόπιση (αριθμητική και αναλυτική λύση) της διεπιφάνειας για διαφορετικά υλικά.



Εικ. 3.14: Η παραμορφωμένη διάταξη του FBD για διαφορετικά υλικά (αναλυτική λύση).

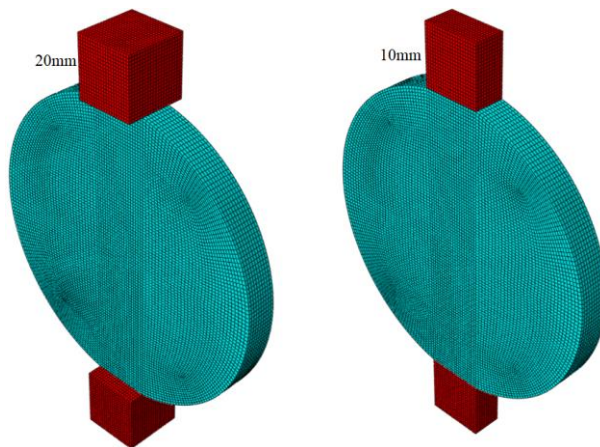


Εικ. 3.15: Η κατακόρυφη μετατόπιση(αριθμητική και αναλυτική λύση) της διεπιφάνειας για διαφορετικά υλικά.

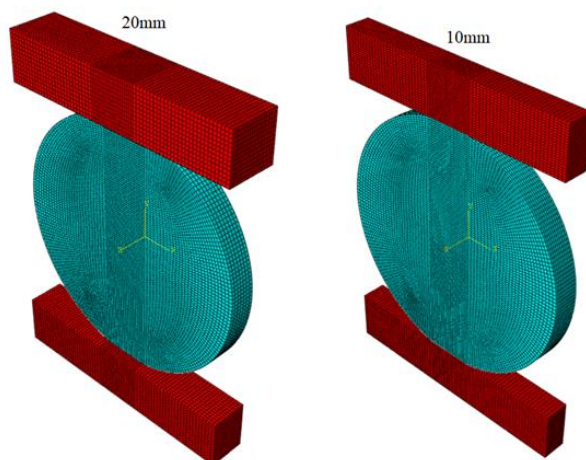
Είναι εμφανές ότι καθώς μειώνεται το μέτρο ελαστικότητας η κατακόρυφη μετατόπιση είναι μεγαλύτερη. Για την περίπτωση που οι πλάκες φόρτισης είναι σχήματος stamps παρατηρείται μία μη φυσιολογική κάμψη, ενώ εξαλείφεται στην περίπτωση που οι πλάκες είναι σχήματος platens. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης επαληθεύουν ικανοποιητικά την αναλυτική λύση.

3.4.3 Ο ρόλος του πάχους της πλάκας φόρτισης

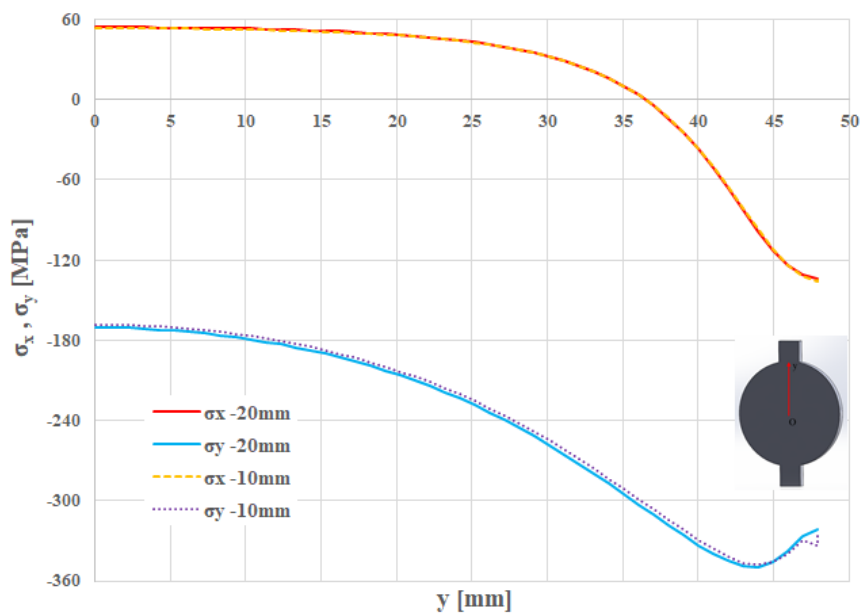
Στην ενότητα αυτή μελετάται η επιρροή του τασικού πεδίου αν αυξηθεί το πάχος των πλακών φόρτισης (από 10 mm σε 20 mm) ενώ το πάχος του δοκιμίου διατηρείται σταθερό (10 mm). Η ακτίνα και η γωνία επαφής παραμένουν αμετάβλητες, το υλικό που χρησιμοποιήθηκε έχει τις εξής ιδιότητες: $E=20$ GPa και $\nu=0.3$, ο συντελεστής τριβής είναι ίσος με 0.2. Οι τιμές της κατακόρυφης μετατόπισης είναι 1.22 mm για το πρόβλημα I και 0.85 mm για το πρόβλημα II αντίστοιχα.



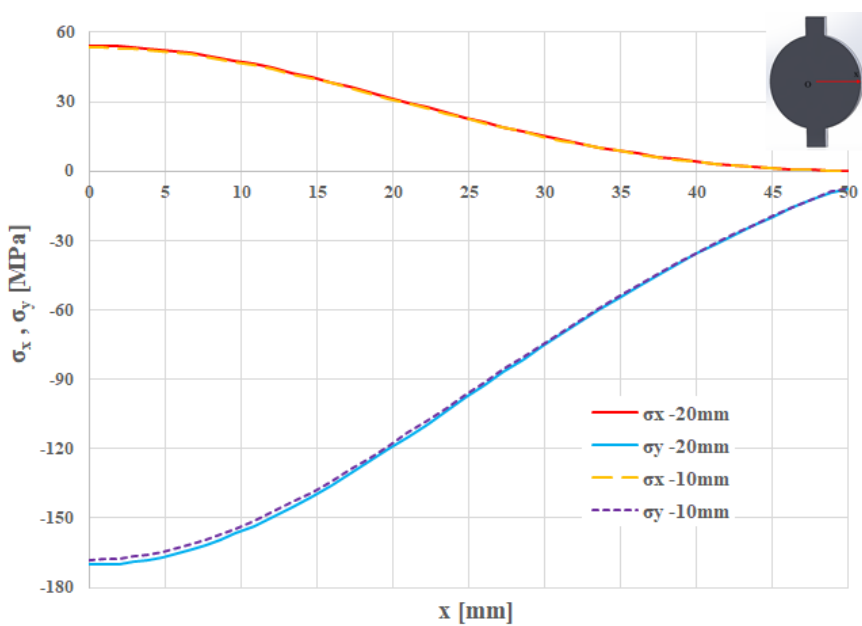
Εικ. 3.16: Οι γεωμετρίες των προσομοιωμάτων για δυο διαφορετικά πάχη των πλακών φόρτισης για το πρόβλημα I.



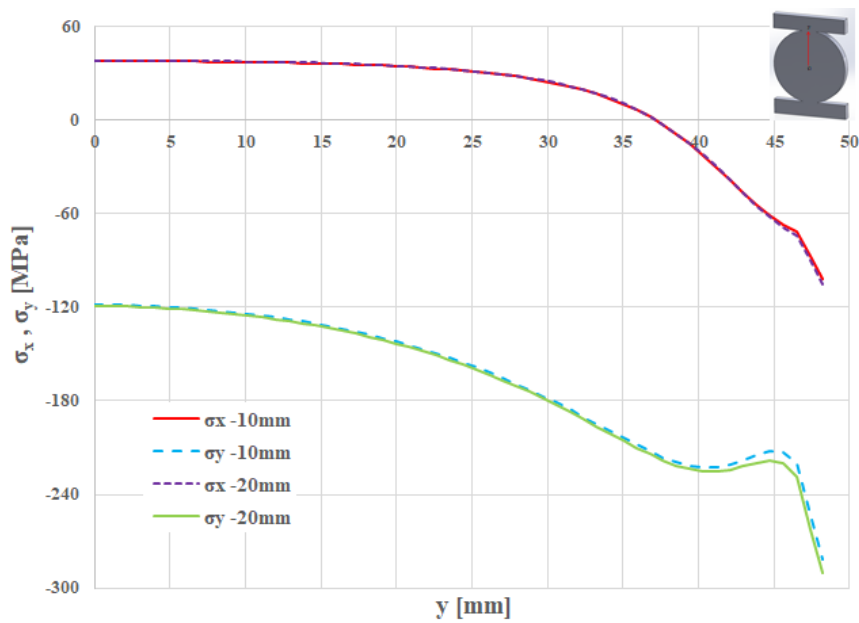
Εικ. 3.17: Οι γεωμετρίες των προσομοιωμάτων για δυο διαφορετικά πάχη των πλακών φόρτισης για το πρόβλημα II.



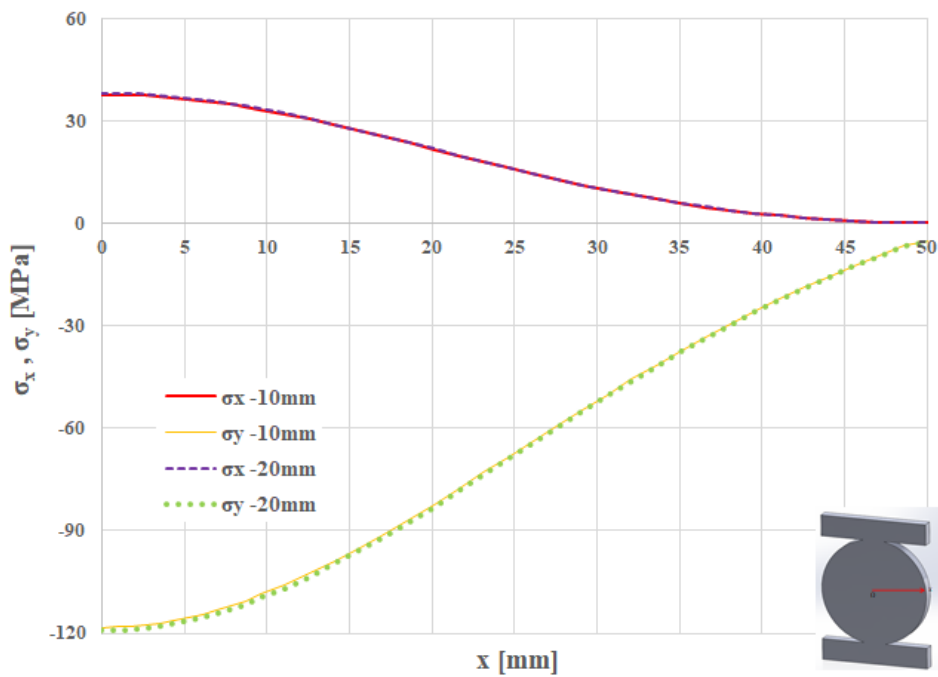
Εικ. 3.18: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα y για διαφορετικές τιμές του πάχους των πλακών φόρτισης για το πρόβλημα I.



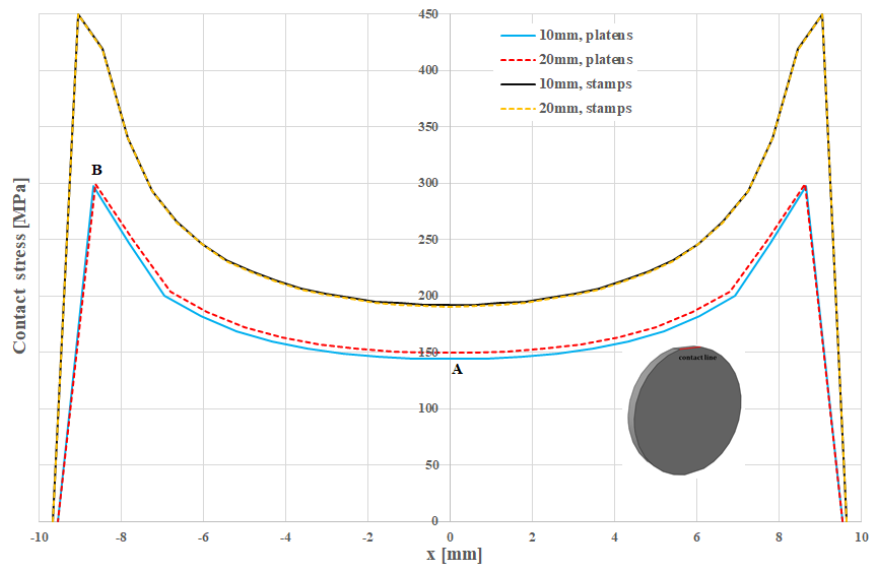
Εικ. 3.19: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα x για διαφορετικές τιμές του πάχους των πλακών φόρτισης για το πρόβλημα I.



Εικ. 3.20: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα y για διαφορετικές τιμές του πάχους των πλακών φόρτισης για το πρόβλημα II.



Εικ. 3.21: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα x για διαφορετικές τιμές του πάχους των πλακών φόρτισης για το πρόβλημα II.

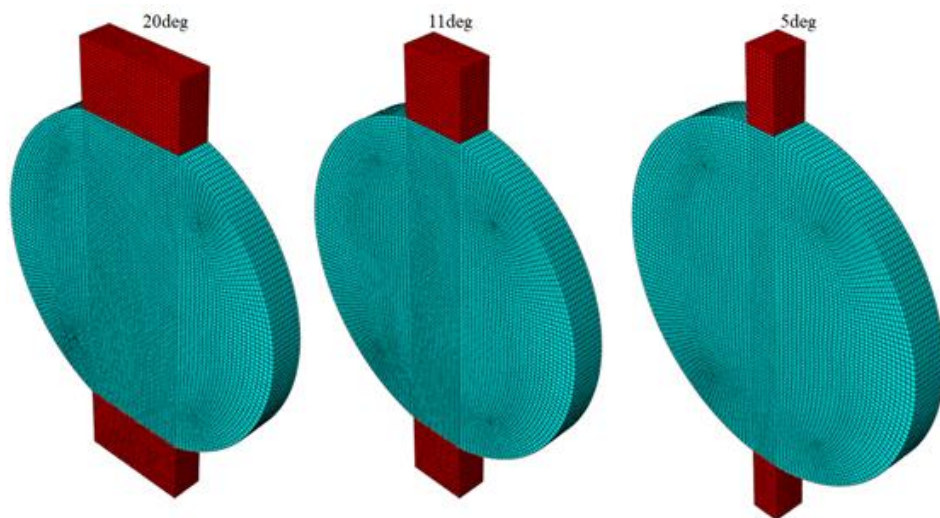


Εικ. 3.22: Η κατανομή της πίεσης κατά μήκος της διεπιφάνειας για διαφορετικές τιμές του πάχους των πλακών φόρτισης για το πρόβλημα I και II.

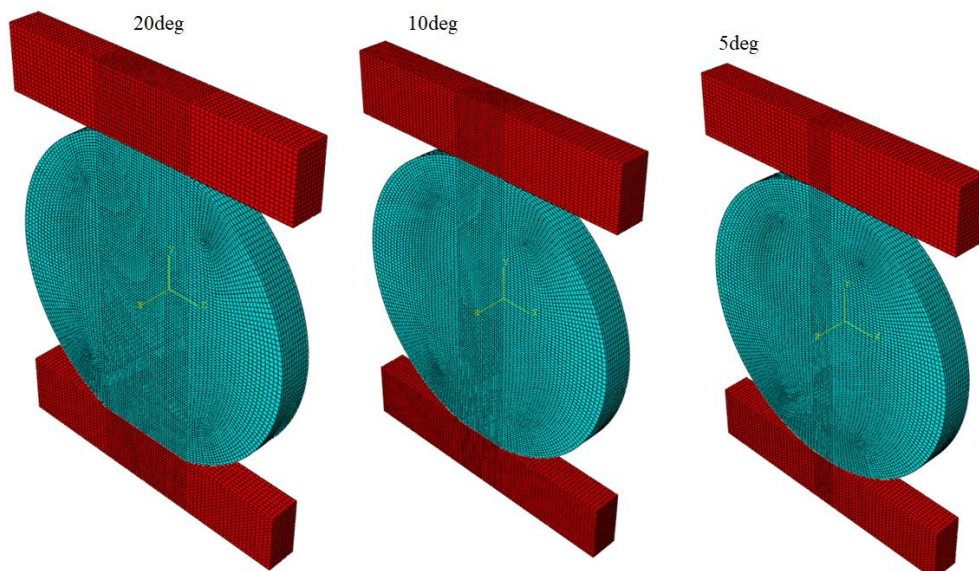
Από τις **Εικ. 3.18** και **Εικ. 3.19** παρατηρούμε ότι η αύξηση του πλάτους της πλάκας φόρτισης τύπου stamp δεν προκαλεί εμφανή μεταβολή στο τασικό πεδίο. Για την περίπτωση που οι πλάκες φόρτισης είναι τύπου platens από τις **Εικ. 3.20** και **Εικ. 3.21** εξάγουμε το συμπέρασμα ότι υπάρχει μία μικρή αύξηση στις τάσεις. Από την **Εικ. 3.22** η αύξηση είναι της τάξης του 3.56% στο σημείο A και 0.68% στο σημείο B.

3.4.4 Ο ρόλος της γωνίας επαφής

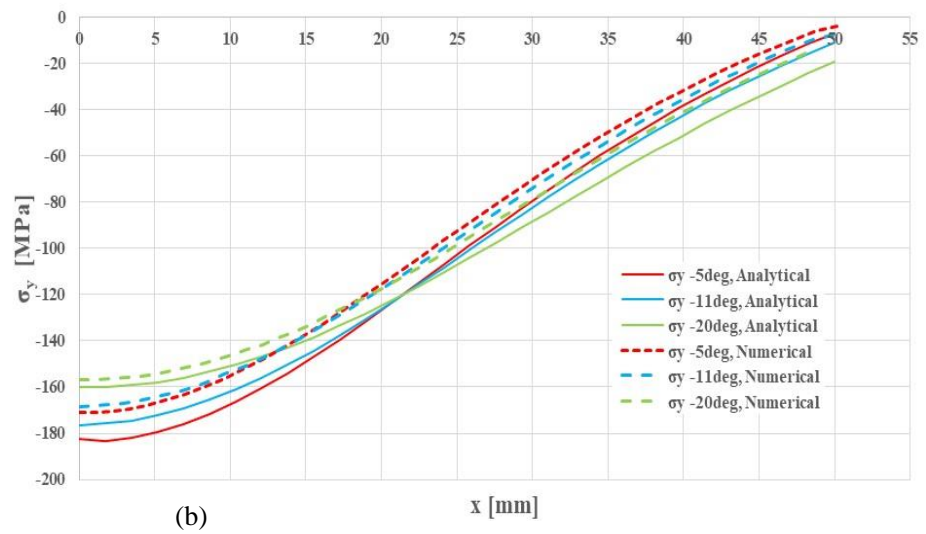
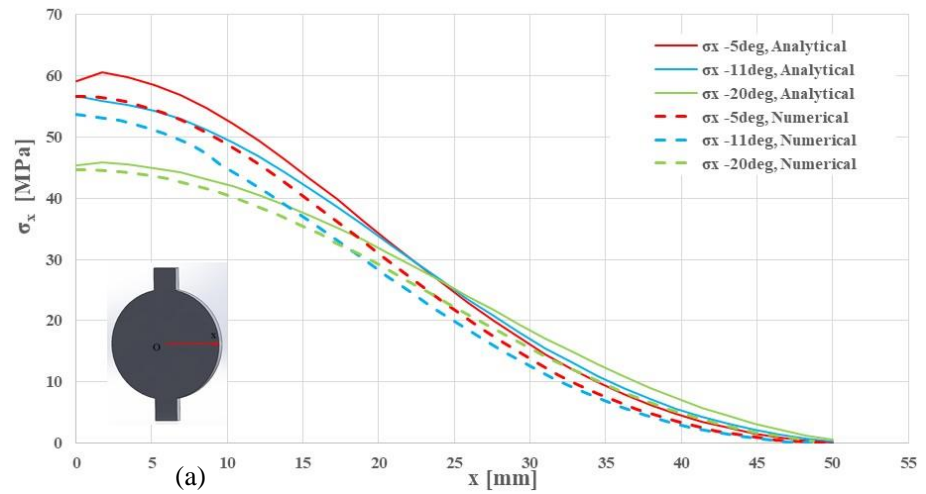
Στην ενότητα αυτή μελετάται η επιρροή του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων αν μεταβληθεί η γωνία επαφής των δοκιμίων (5° , 10° , 20°). Η ακτίνα, το πάχος και ο συντελεστής τριβής δεν μεταβάλλονται, το υλικό είναι το ίδιο με αυτό της προηγούμενης ενότητας. Οι τιμές της κατακόρυφης μετατόπισης είναι 1.69 mm, 1.22 mm, 0.87 mm για το πρόβλημα I και 0.89 mm, 0.85 mm, 0.67 mm για το πρόβλημα II όπως υπολογίστηκαν από την αναλυτική λύση.



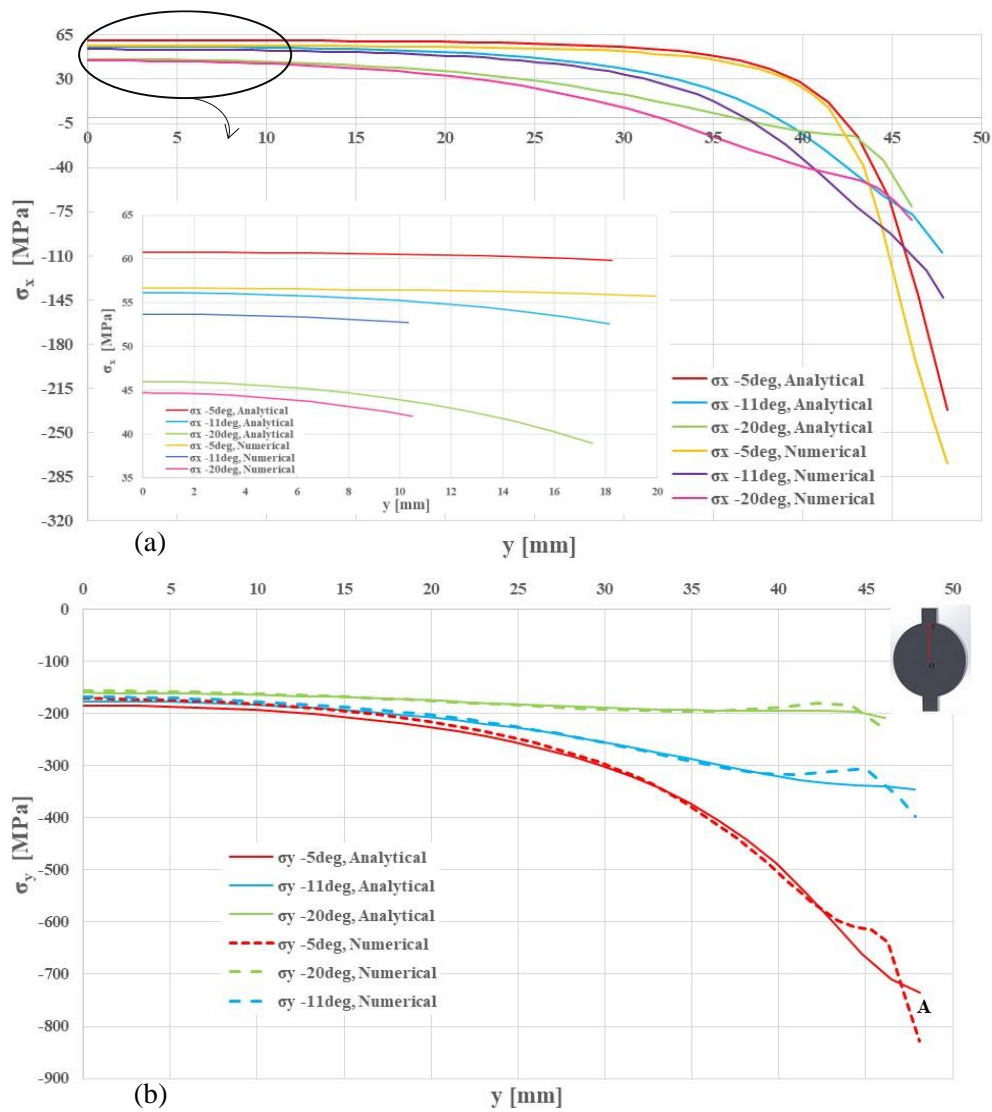
Εικ. 3.23: Οι γεωμετρίες των προσομοιωμάτων διαφορετικών γωνιών για το πρόβλημα I.



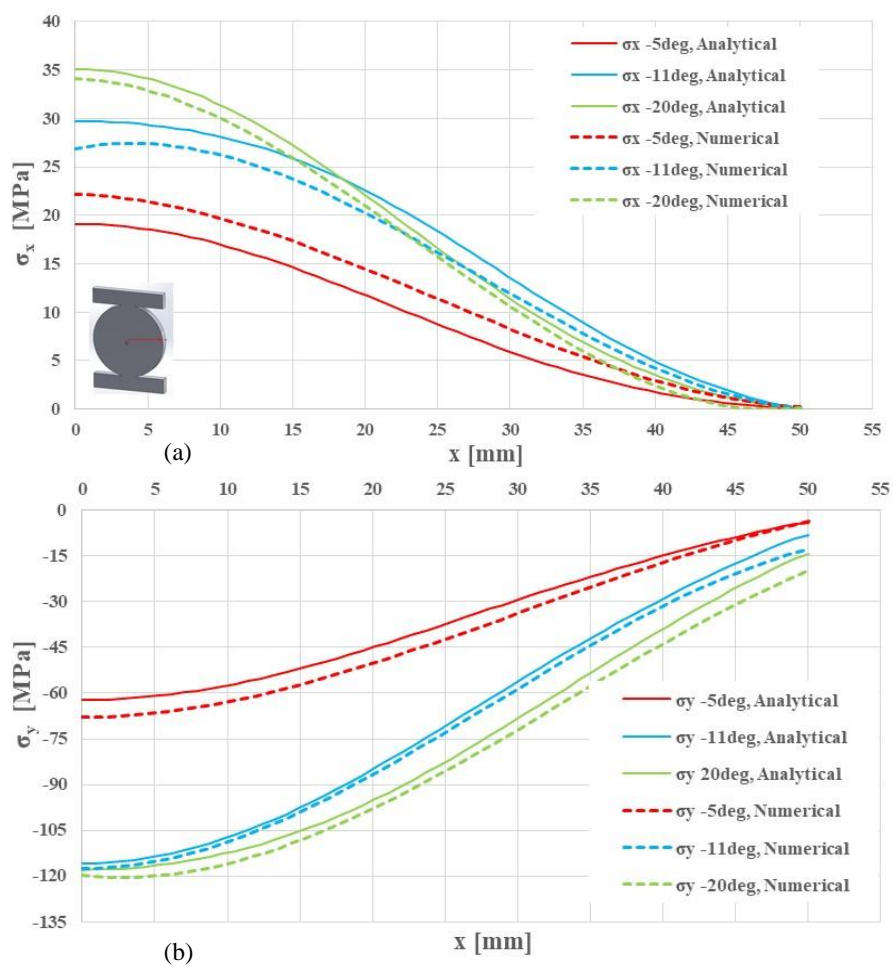
Εικ. 3.24: Οι γεωμετρίες των προσομοιωμάτων διαφορετικών γωνιών για το πρόβλημα II.



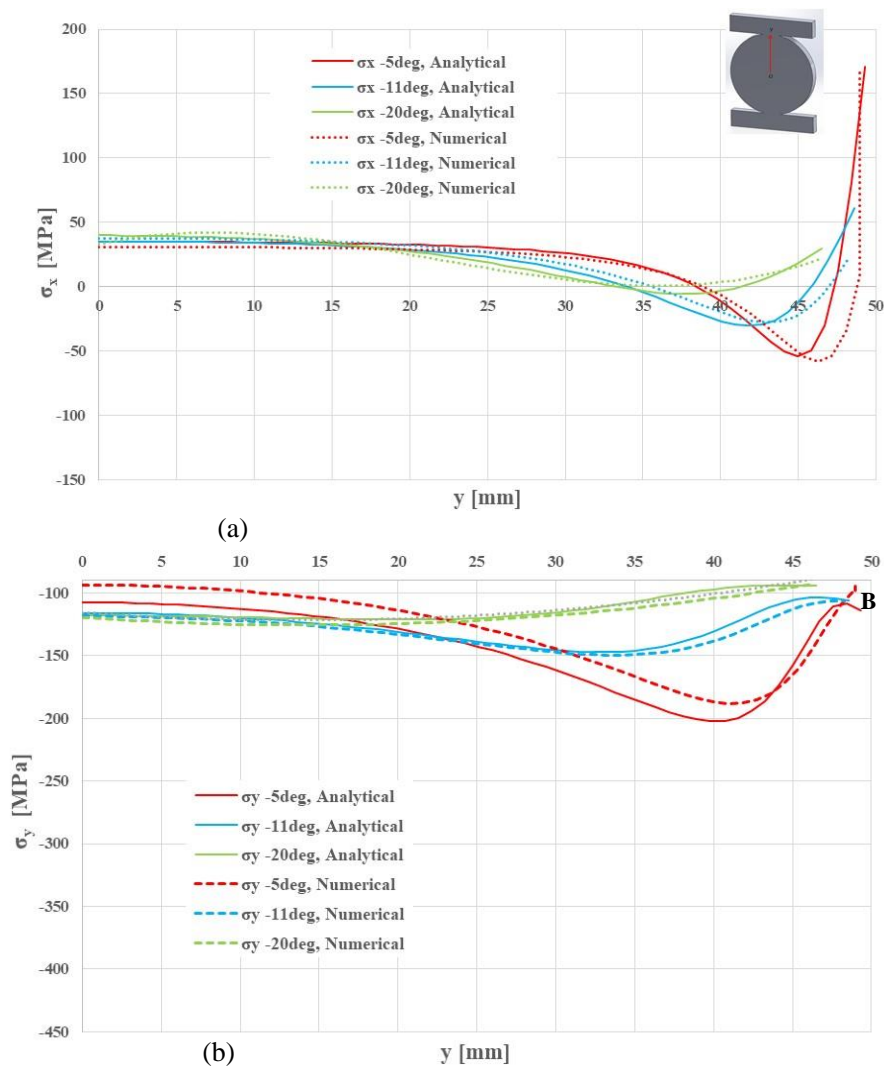
Εικ. 3.25: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα x για διαφορετικές τιμές της γωνίας για το πρόβλημα I.



Εικ. 3.26: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα y για διαφορετικές τιμές της γωνίας για το πρόβλημα I.



Εικ. 3.27: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα x για διαφορετικές τιμές της γωνίας για το πρόβλημα II.

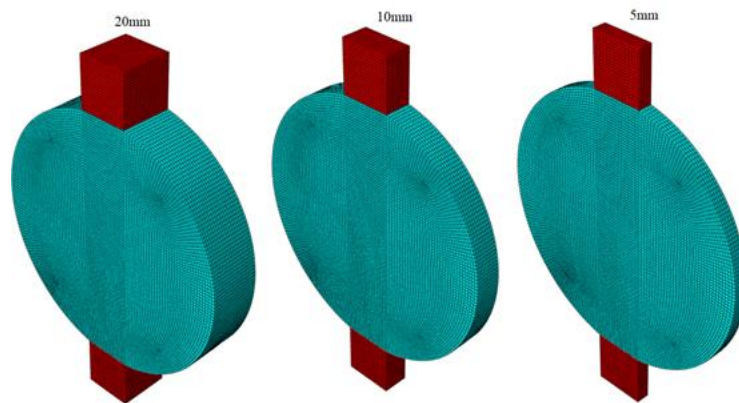


Εικ. 3.28: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα y για διαφορετικές τιμές της γωνίας για το πρόβλημα II.

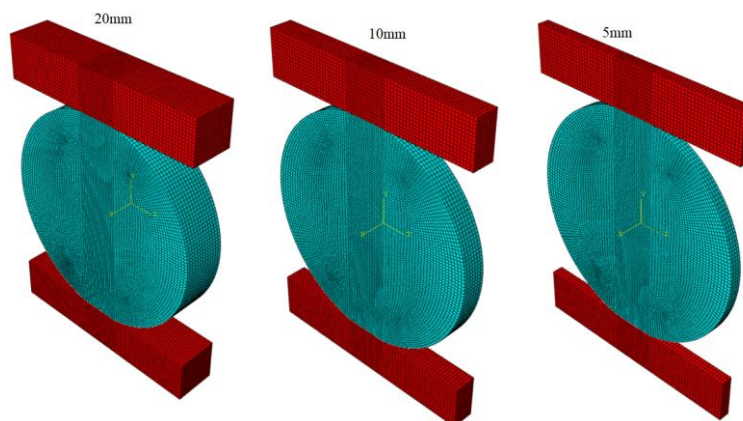
Από τις **Εικ. 3.25 - Εικ. 3.28**, συμπεραίνουμε ότι για τα προβλήματα I και II τα αποτελέσματα του αριθμητικού προσομοιώματος επικυρώνουν την αναλυτική λύση σε ικανοποιητικό βαθμό. Ενδεικτικά, ελέγχουμε τις αποκλίσεις των τάσεων που προκύπτουν από την αναλυτική και την αριθμητική λύση για δυο ακραία σημεία A και B (**Εικ. 3.26 (b)**, **Εικ. 3.28 (b)**). Για το σημείο A η απόκλιση είναι ίση με 11.23% ενώ για το σημείο B είναι 12.3%.

3.4.5 Ο ρόλος του πάχους του δοκιμίου

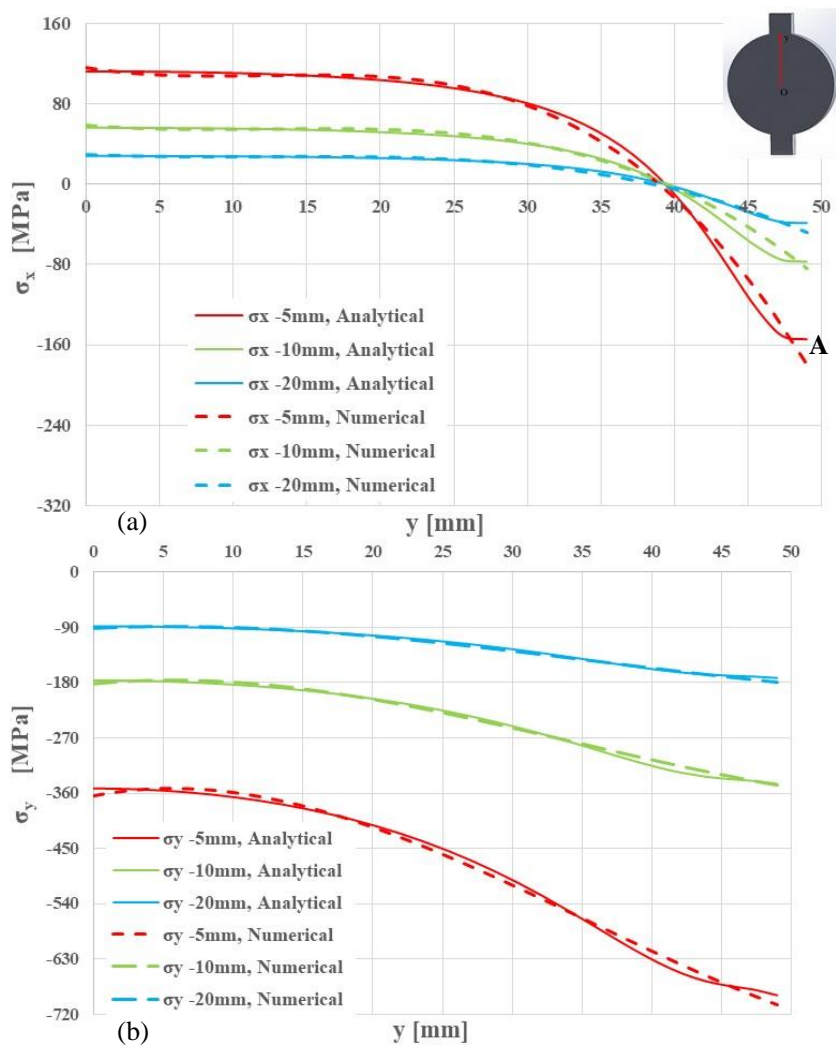
Στην ενότητα αυτή μελετάται η επιρροή του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων αν μεταβληθεί το πάχος των δοκιμίων (5 mm, 10 mm, 20 mm). Η ακτίνα, η γωνία επαφής και ο συντελεστής τριβής δεν μεταβάλλονται, το υλικό είναι το ίδιο με αυτό της προηγούμενης ενότητας. Οι τιμές της κατακόρυφης μετατόπισης είναι 2.45 mm, 1.22mm, 0.61mm για το πρόβλημα I και 1.52 mm, 0.85 mm, 0.46 mm για το πρόβλημα II όπως υπολογίστηκαν από την αναλυτική λύση.



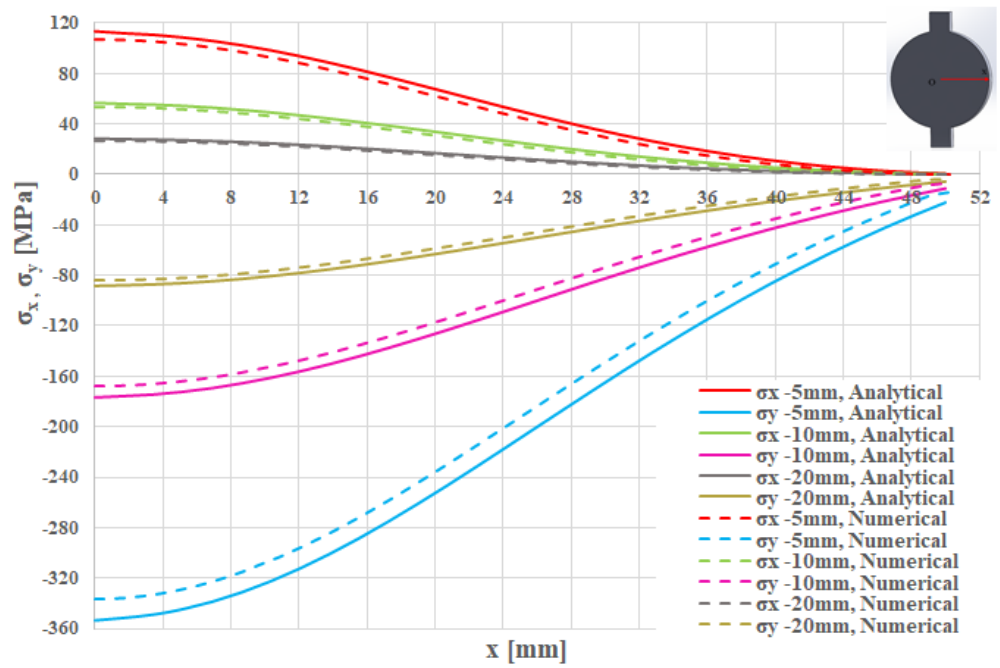
Εικ. 3.29: Οι γεωμετρίες των προσομοιωμάτων για διαφορετικά πάχη για το πρόβλημα I.



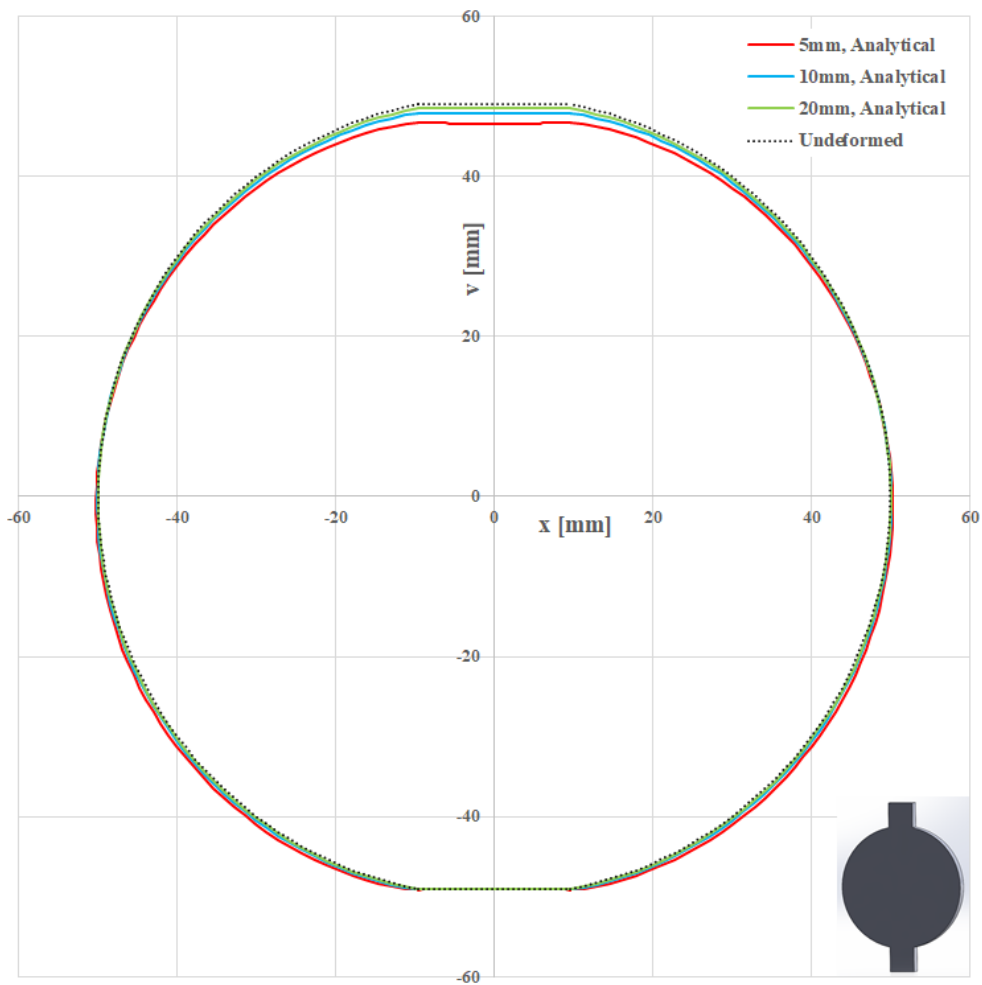
Εικ. 3.30: Οι γεωμετρίες των προσομοιωμάτων για διαφορετικά πάχη για το πρόβλημα II.



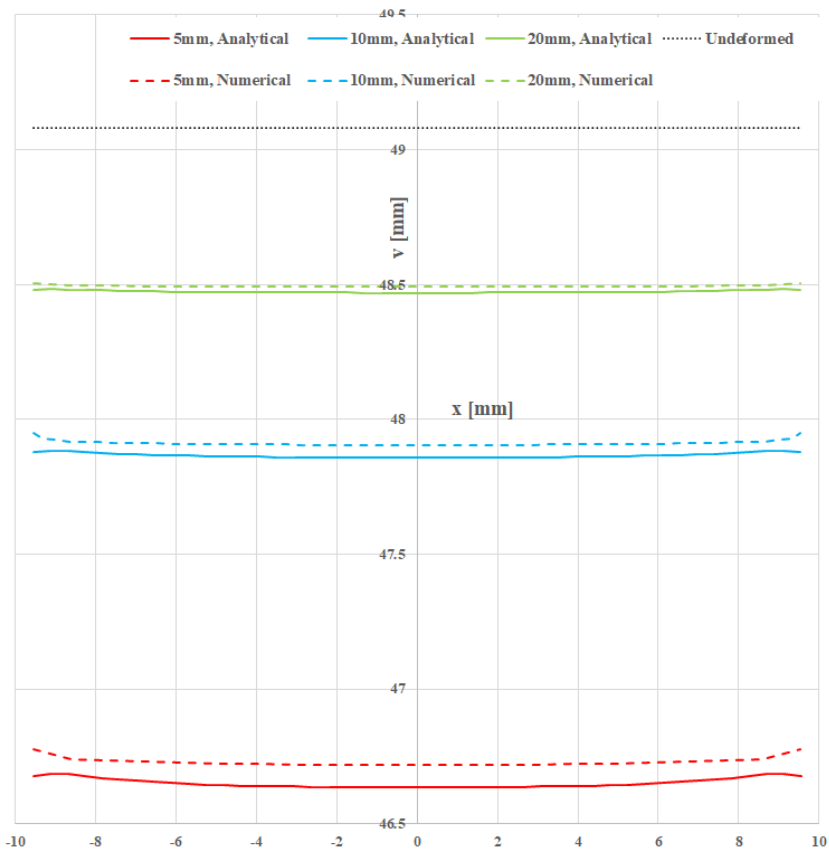
Εικ. 3.31: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα y για διαφορετικές τιμές του πάχους για το πρόβλημα I.



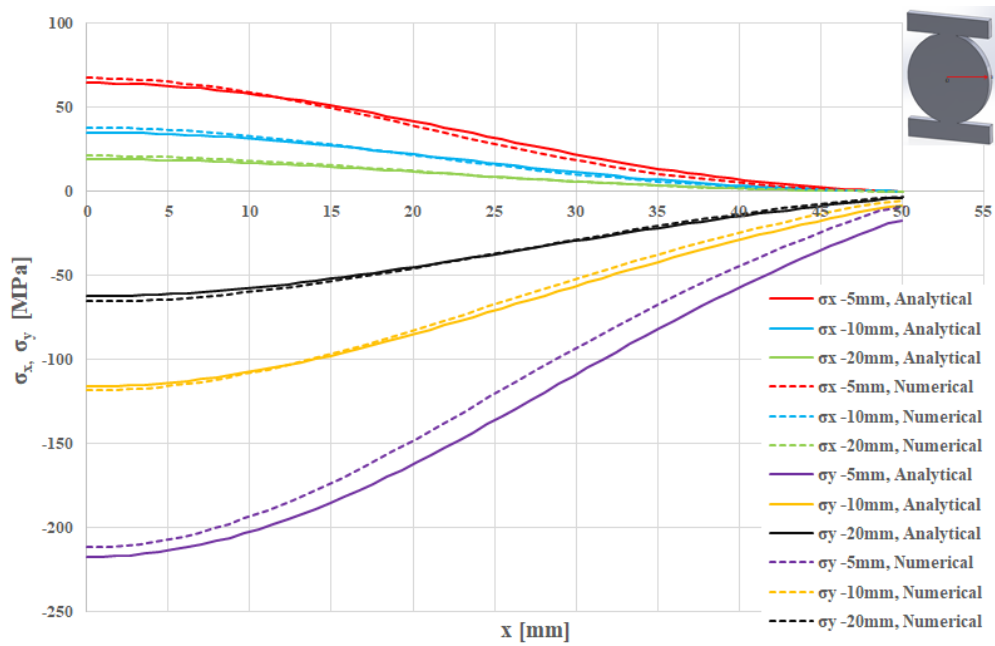
Εικ. 3.32: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα x για διαφορετικές τιμές του πάχους για το πρόβλημα I.



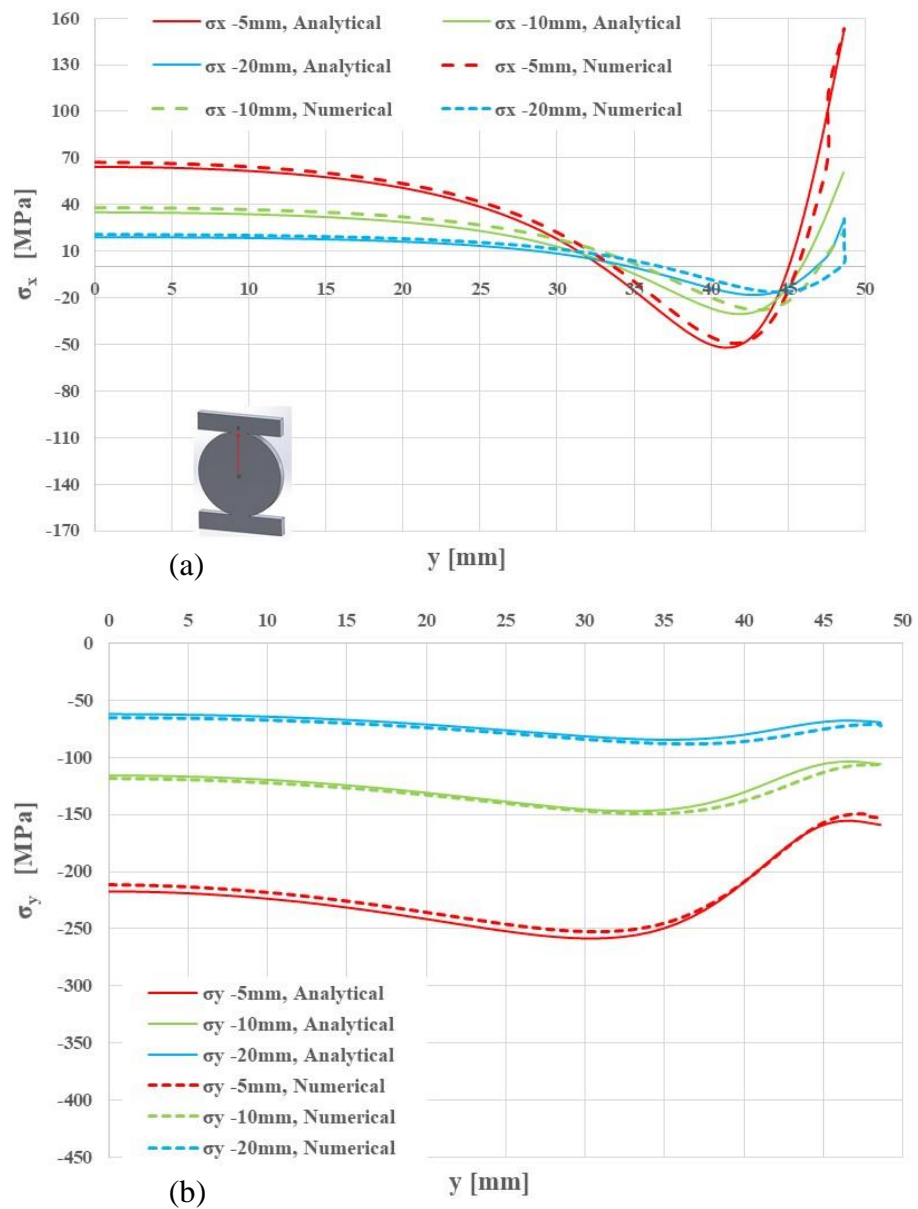
Εικ. 3.33: Η παραμορφωμένη διάταξη του FBD για διαφορετικές τιμές του πάχους για το πρόβλημα I (αναλυτική λύση).



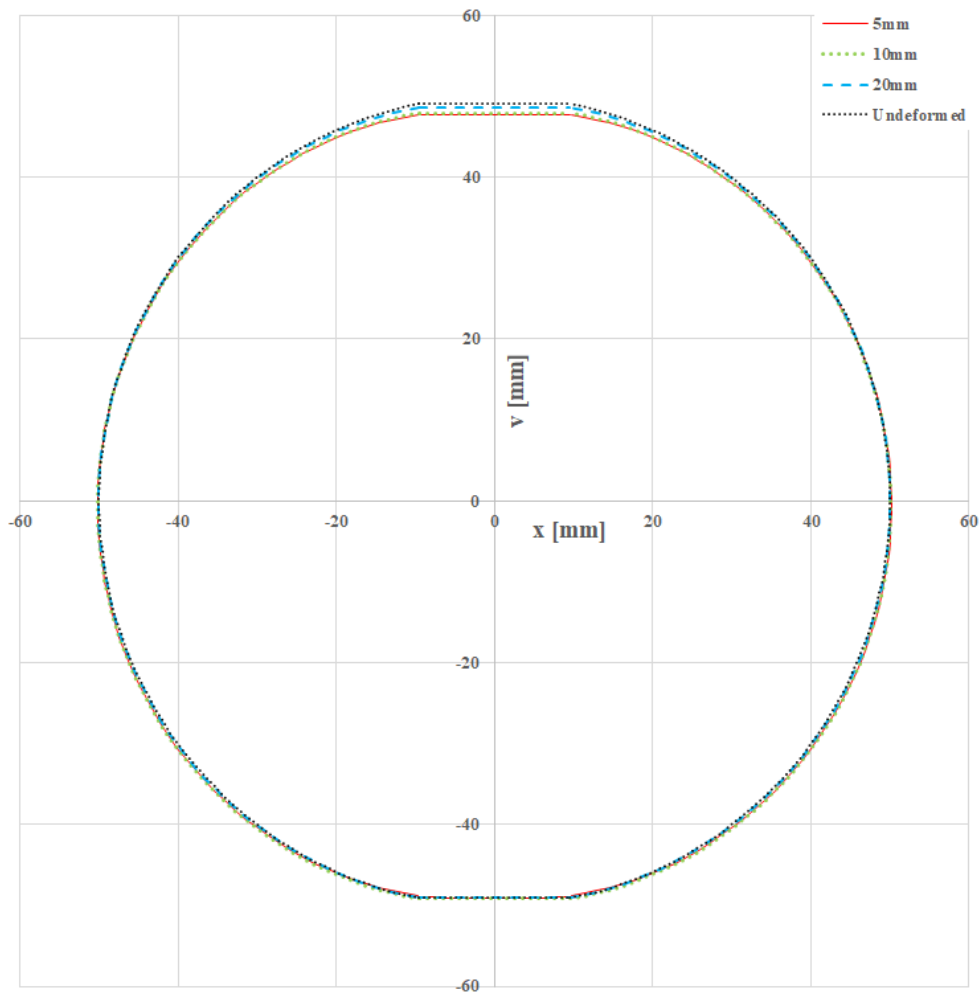
Εικ. 3.34: Η κατακόρυφη μετατόπιση (αριθμητική και αναλυτική λύση) της διεπιφάνειας.



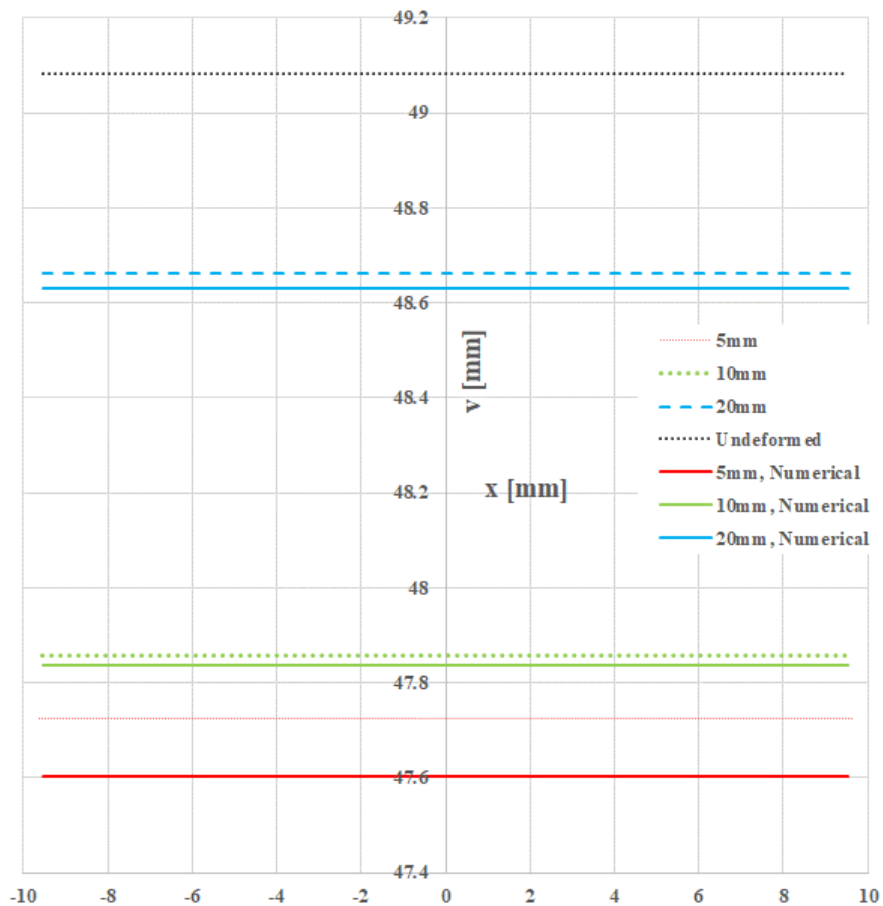
Εικ. 3.35: Η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα x για διαφορετικές τιμές του πάχους για το πρόβλημα II.



Εικ. 3.36: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα y για διαφορετικές τιμές του πάχους για το πρόβλημα II.



Εικ. 3.37: Η παραμορφωμένη διάταξη του FBD για διαφορετικές τιμές του πάχους για το πρόβλημα II (αναλυτική λύση).



Εικ. 3.38: Η κατακόρυφη μετατόπιση (αριθμητική και αναλυτική λύση) της διεπιφάνειας για το πρόβλημα II.

Σε γενικές γραμμές θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η αριθμητική λύση επαληθεύει σε ικανοποιητικό βαθμό την αναλυτική λύση. Υπολογίζοντας για παράδειγμα στο σημείο A (**Εικ. 3.31 (a)**) την απόκλιση των τάσεων από την αναλυτική και την αριθμητική λύση προκύπτει ότι είναι ίση με 14.2%.

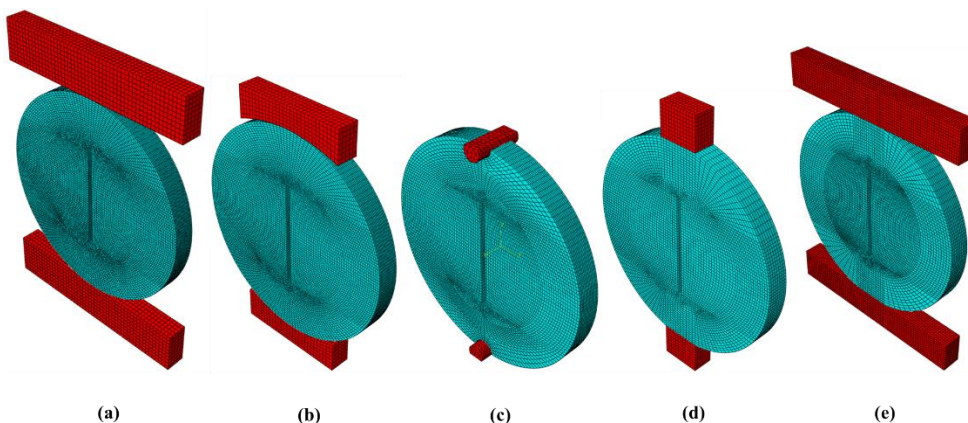
Εν κατακλείδι, από τα αποτελέσματα του παραμετρικού ελέγχου είναι εμφανές ότι η αριθμητική λύση επικυρώνει σε ικανοποιητικό βαθμό την αναλυτική. Συνεπώς, η αναλυτική λύση που αναπτύχθηκε μπορεί να προσεγγίσει σε ικανοποιητικό βαθμό το πρόβλημα του FBD. Τα αποτελέσματα του προσομοιώματος είναι αρκετά ενθαρρυντικά και μας δίνουν την δυνατότητα να επεκτείνουμε την μελέτη μας. Στην κατεύθυνση αυτή θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο μία προσπάθεια υπολογισμού του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων σε δοκίμια με εγκοπή στο κέντρο.

4^ο Κεφάλαιο: Συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων σε δοκίμια με εγκοπή στο κέντρο

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί το τασικό πεδίο και θα γίνει μία προσπάθεια προσδιορισμού του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων σε δοκίμια με ορθογωνική εγκοπή πεπερασμένου μήκους και πλάτους.

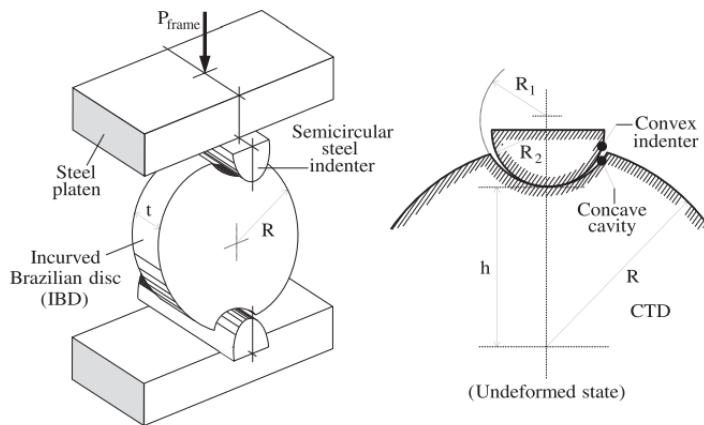
Για την μελέτη αυτή χρησιμοποιήθηκε η διάταξη του Βραζιλιανού δίσκου με επίπεδες πλάκες φόρτισης όπως προτείνεται από την ASTM (**Εικ. 4.1** (a)) και με καμπύλες πλάκες φόρτισης σύμφωνα με την ISRM (**Εικ. 4.1** (b)) και τα δοκίμια τύπου FBD με πλάκες φόρτισης stamps (**Εικ. 4.1** (d)) και plattens (**Εικ. 4.1** (e)). Έγινε ακόμα χρήση ενός μοντέλου που πρόσφατα προτάθηκε από τους Markides και Kourkoulis [37], του Incurved Brazilian Disc (**Εικ. 4.1** (c), **Εικ. 4.2**). Το δοκίμιο του συγκεκριμένου μοντέλου αποτελείται από δυο συμμετρικές κοιλότητες (ακτίνας R_1 σε απόσταση h από το κέντρο του δίσκου) στην περιοχή επαφής. Ανάμεσα στις πλάκες φόρτισης και στο δοκίμιο παρεμβάλλονται δυο ημι-κυκλικές εσοχές ακτίνας R_2 ελαφρώς μικρότερη από την R_1 .



Εικ. 4.1: Οι διατάξεις των μεθόδων που μελετήθηκαν (a) BDT κατά ASTM, (b) BDT κατά ISRM, (c) Incurved BDT, (d) FBDT με stamps, (e) FBDT με plattens.

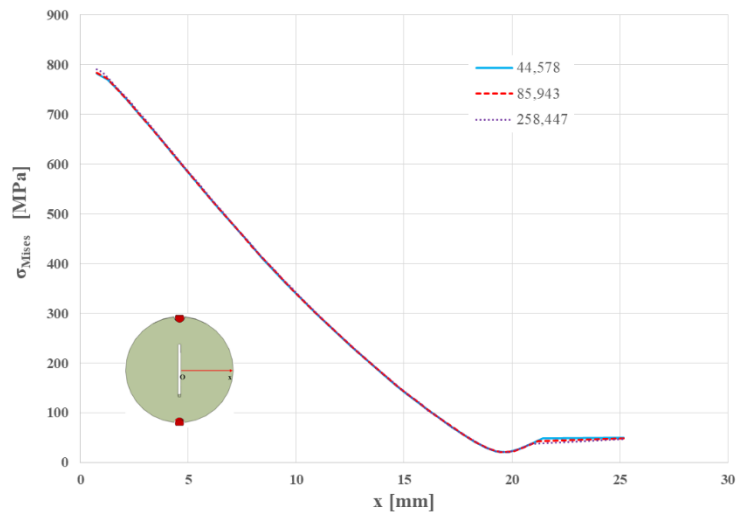
Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν είχαν ακτίνα 25mm, και πάχος 5mm, ενώ η εγκοπή είχε πλάτος 0.25mm και μήκος 25mm και η ακτίνα καμπυλότητας στις γωνίες (κορυφές) της εγκοπής θεωρήθηκε ίση με 0.3mm. Επιβλήθηκε σε όλα τα μοντέλα κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω ίση με 1mm. Η επίλυση

πραγματοποιήθηκε με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων στο πρόγραμμα Abaqus.

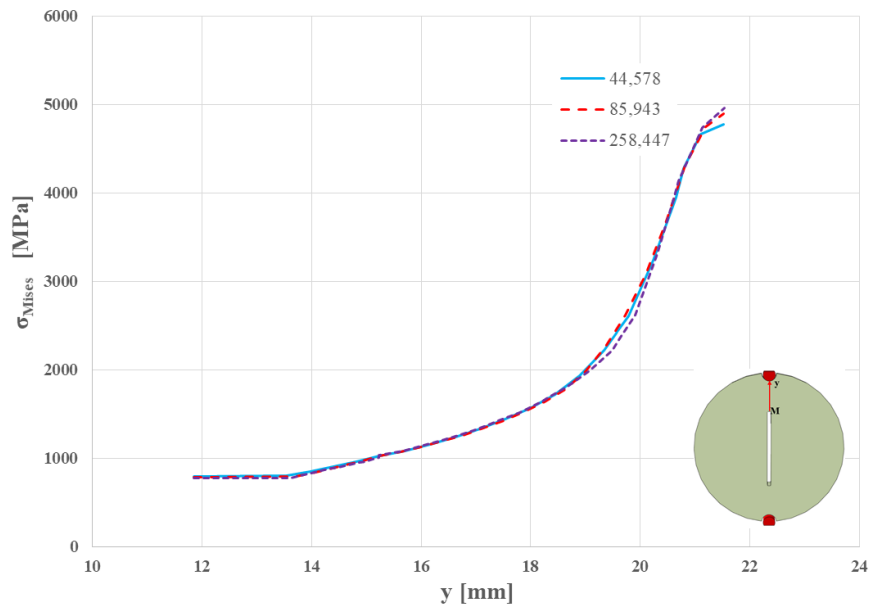


Εικ. 4.2: Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του Incurved Brazilian Disc [37].

Για την διακριτοποίηση πραγματοποιήθηκε έλεγχος σύγκλισης. Ενδεικτικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από το μοντέλο του Incurved Brazilian Disc.



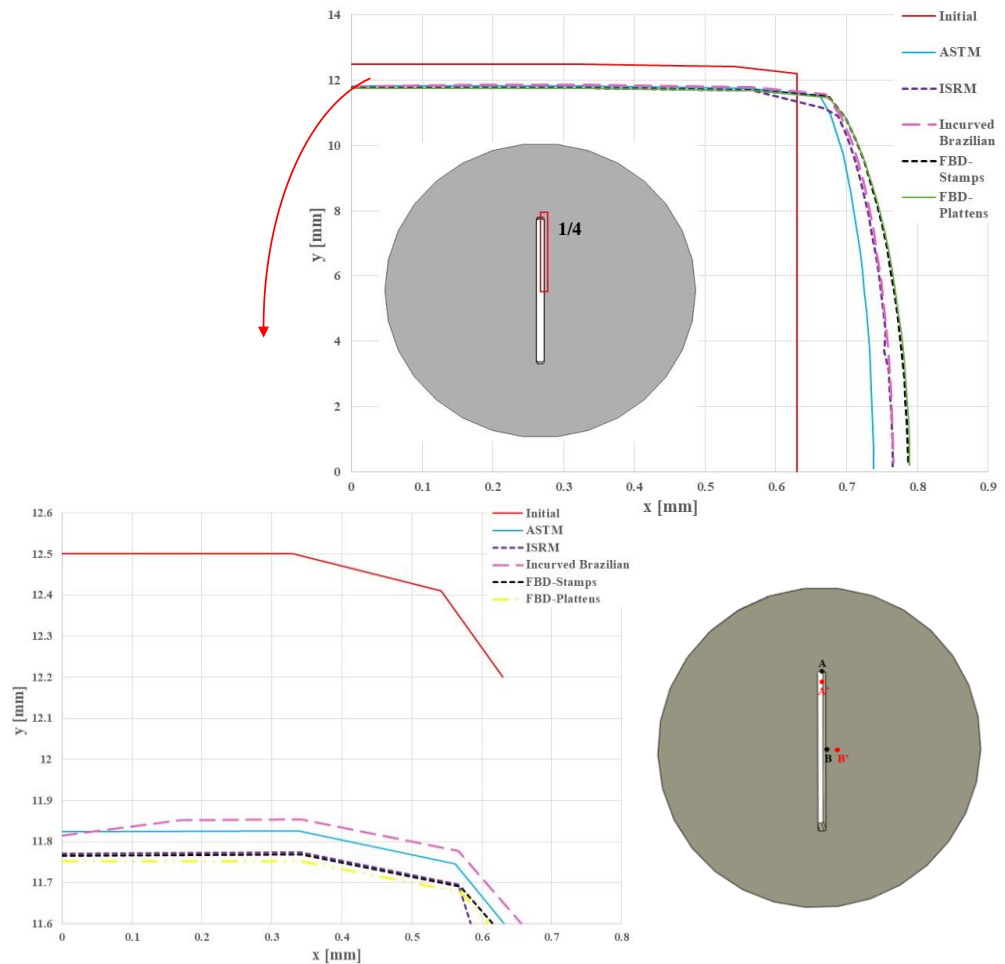
Εικ. 4.3: Η ισοδύναμη τάση von Mises κατά μήκος του άξονα x για το μοντέλο του Incurved Brazilian Disc.



Εικ. 4.4: Η ισοδύναμη τάση von Mises κατά μήκος του άξονα y για το μοντέλο του Incurved Brazilian Disc.

4.2 Το πεδίο των τάσεων για κάθε διάταξη

Λόγω της συμμετρίας τα αποτελέσματα που προκύπτουν θα παρουσιαστούν μόνο για το ένα τέταρτο της εγκοπής. Με την βοήθεια των παρακάτω διαγραμμάτων θα κατανοήσουμε την συμπεριφορά του τασικού πεδίου στη περίμετρο της εγκοπής και κατά μήκος του άξονα x και y.

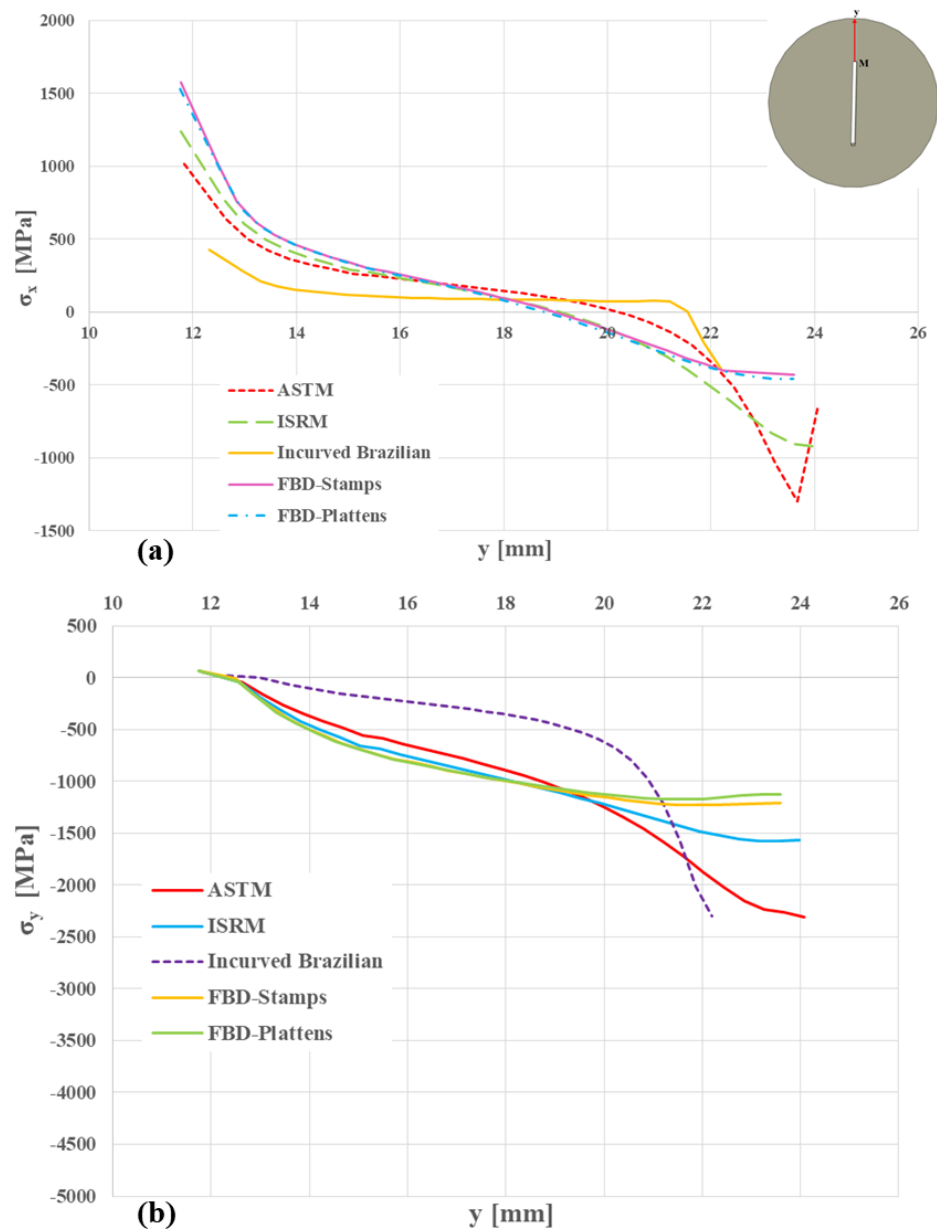


Εικ. 4.5: Η αρχική γεωμετρία του ενός τέταρτου της γεωμετρίας της εγκοπής και η παραμορφωμένη γεωμετρία για κάθε δοκίμιο.

	Y_A	$Y_{A'}$	X_B	$X_{B'}$
BD (ASTM)	12.5 (mm)	11.824 (mm)	0.625 (mm)	0.738 (mm)
BD (ISRM)	12.5 (mm)	11.771 (mm)	0.625 (mm)	0.765 (mm)
Incurved BD	12.5 (mm)	11.815 (mm)	0.625 (mm)	0.766 (mm)
FBD-stamps	12.5 (mm)	11.765 (mm)	0.625 (mm)	0.789 (mm)
FBD-plattens	12.5 (mm)	11.751 (mm)	0.625 (mm)	0.787 (mm)

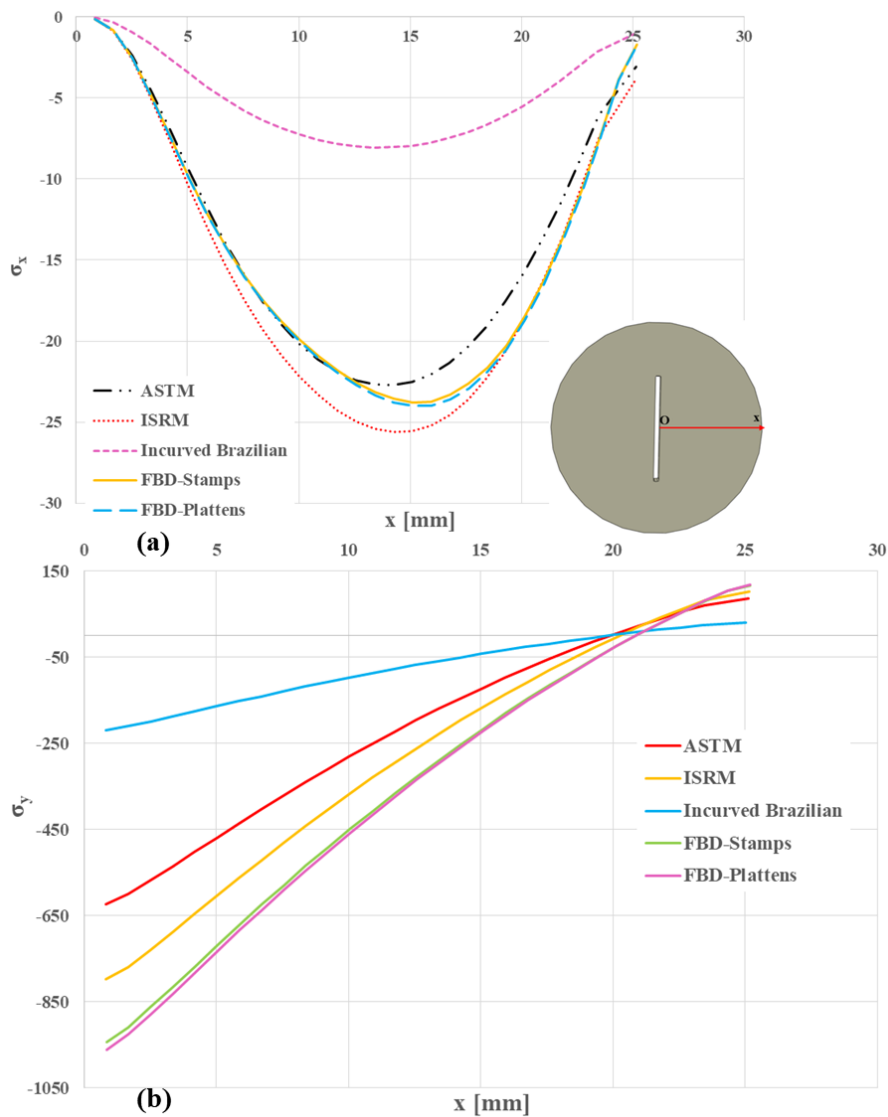
Πίν. 4.1: Οι μεταβολές των ακραίων σημείων του ενός τετάρτου της εγκοπής.

Από την *Εικ. 4.5* και τον *Πίν. 4.1* συμπεραίνουμε ότι για την περίπτωση του FBD με πλάκες φόρτισης τύπου stamps και plattens οι παραμορφωμένες γεωμετρίες παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις. Όσον αφορά τον BD κατά ISRM και τον Incurved BD για τιμές του x μεγαλύτερες του 0.7mm οι παραμορφωμένες γεωμετρίες ταυτίζονται.



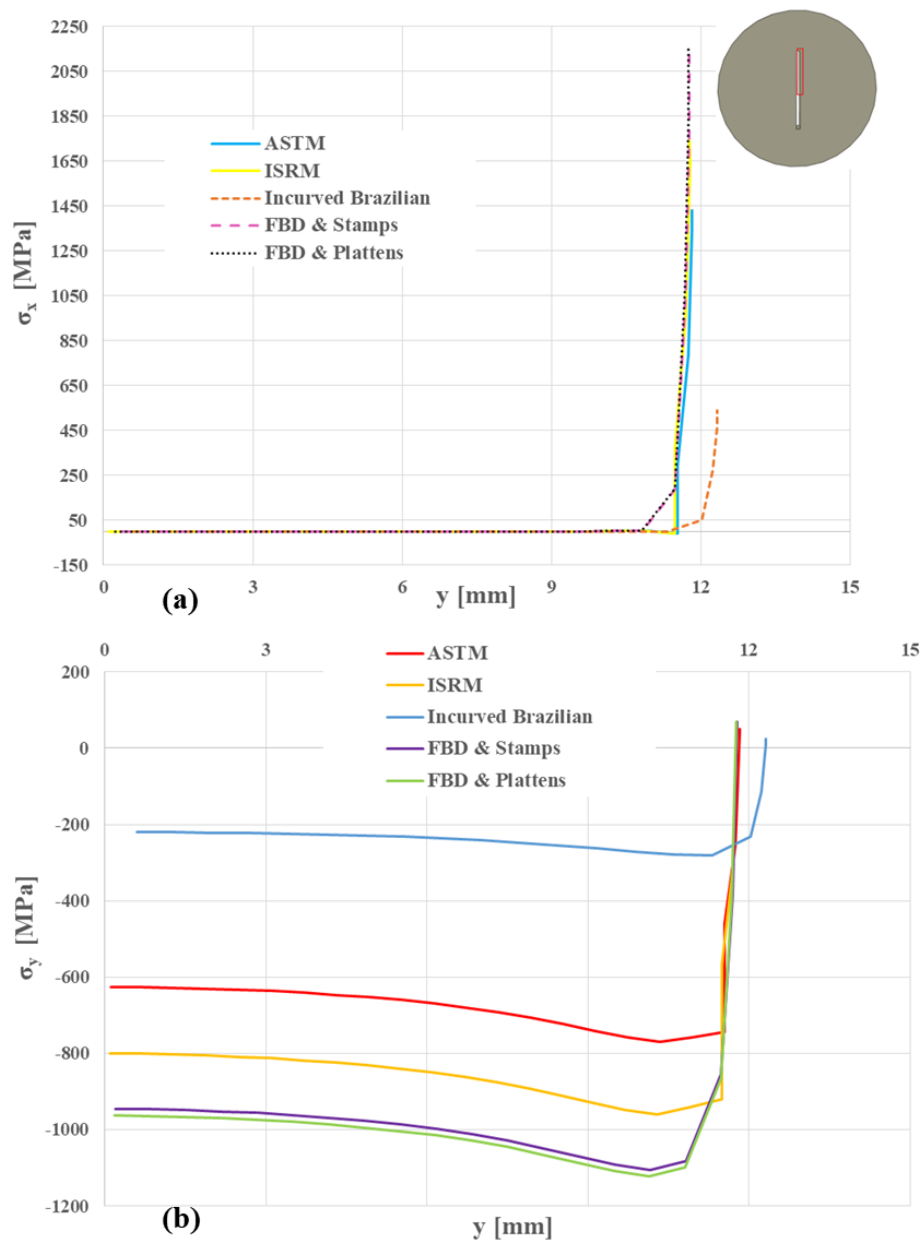
Εικ. 4.6: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα y και για τις υπό μελέτη διατάξεις.

Παρατηρούμε ότι η κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα y ταυτίζεται για την περίπτωση του FBD με πλάκες φόρτισης τύπου plattens και stamps. Για τις διατάξεις κατά ASTM και ISRM η συμπεριφορά των τάσεων παρουσιάζει ομοιότητα. Η διάταξη του Incurved BD εμφανίζει τις χαμηλότερες τιμές τάσεων σ_x κατ' απόλυτη τιμή.



Εικ. 4.7: (a) Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του άξονα x και για τις υπό μελέτη διατάξεις.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω διαγράμματα ότι κατά μήκος του άξονα x η συμπεριφορά της κατανομής των τάσεων για όλες τις διατάξεις είναι παρόμοια. Αξίζει να εστιάσουμε στο γεγονός ότι οι τιμές των τάσεων που αναπτύσσονται στην περίπτωση του Incurved BD είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερες από τις αντίστοιχες των άλλων μεθόδων.



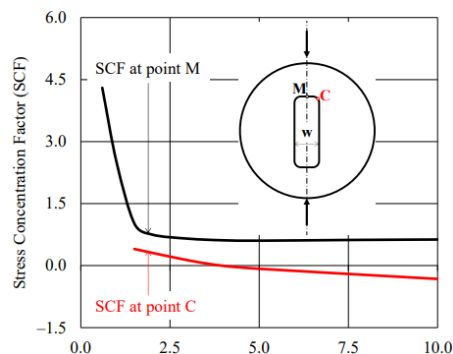
Εικ. 4.8: Η κατανομή της τάσης σ_x και (b) η κατανομή της τάσης σ_y κατά μήκος του ενός τετάρτου της περιμέτρου της εγκοπής και για τις υπό μελέτη διατάξεις.

Παρατηρούμε από τα τελευταία διαγράμματα ότι για την μέθοδο του FBD στην περίμετρο της εγκοπής αναπτύσσονται οι μέγιστες κατ' απόλυτη τιμή τάσεις. Ενώ για την περίπτωση του Incurved BD αναπτύσσονται οι μικρότερες κατ' απόλυτη τιμή τάσεις γεγονός που αποτελεί πλεονέκτημα για την συγκεκριμένη διάταξη.

4.3 Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων

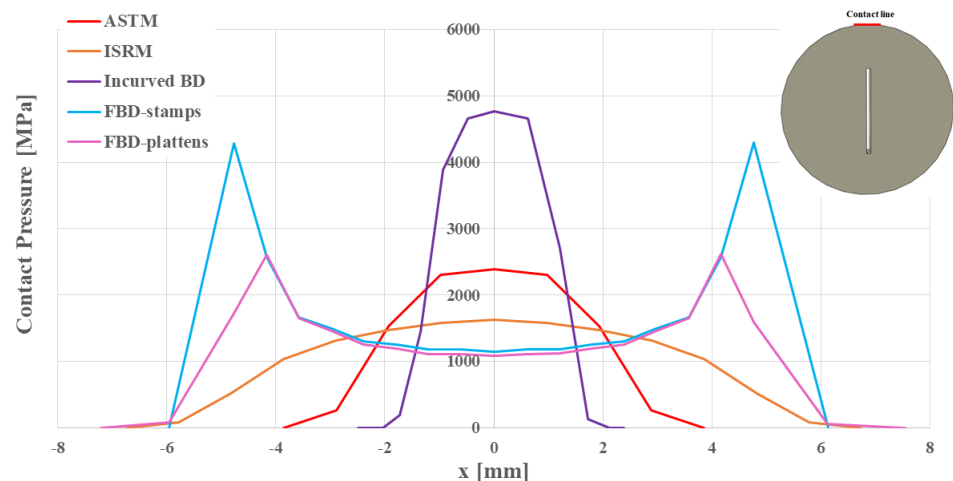
Η θεωρητική διατύπωση για τον προσδιορισμό του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων (SIF) είναι ένα αμφιλεγόμενο ζήτημα. Το 1975 ο Bluhm [38] και αργότερα το 1980 οι Munz et al. [39]. Αναπτύσσουν μαθηματικές λύσεις για τον υπολογισμό του συντελεστή SIF σε δοκίμια που υπόκεινται σε κάμψη, ορθογωνικής διατομής με εγκοπή. Οι λύσεις αυτές προέκυψαν από την αυθαίρετη παραδοχή της γραμμικής ελαστικής συμπεριφοράς του υλικού των δοκιμίων που στην περίπτωση των όλκιμων υλικών είναι αμφισβητήσιμη. Οι θεωρήσεις που συχνά οι ερευνητές αποδέχονται, στην πράξη δεν μπορούν να ληφθούν υπόψη καθώς οι εγκοπές τροποποιούνται π.χ. στρογγυλεμένες γωνίες και δεν είναι ιδανικές ρωγμές ορθογωνικού σχήματος. Επιπλέον, συχνά η φόρτιση είναι ένας συνδυασμός ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων που δρουν κατά μήκος δυο πεπερασμένων τόξων όπως απέδειξαν το 2013 οι Markides-Kourkoulis [40].

Σε μία εκτενή μελέτη οι Markides-Kourkoulis (2014, 2016) [41], [42] και Kourkoulis et al. (2022) [43] εξέτασαν τον ρόλο των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των εγκοπών και τις συνοριακές συνθήκες για το πείραμα του BD χωρίς να βασιστούν σε αυθαίρετες παραδοχές. Οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι η κατανομή των ακτινικών τάσεων που δρουν κατά μήκος των δυο τόξων του δίσκου είναι παραβολική που προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό την πραγματική κατανομή που αναπτύσσεται όταν ο δίσκος θλίβεται με την χρήση καμπύλων πλακών φόρτισης (Markides και Kourkoulis (2013), [40]). Παρατήρησαν ακόμα την εξάρτηση του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων από το πλάτος w της εγκοπής όπως φαίνεται στην **Εικ. 4.9**.



Εικ. 4.9: Ο SCF απεικονίζεται για το μέσο της κορυφής της εγκοπής (σημείο M, μαύρη γραμμή) και για το μέσο της καμπυλωμένης γωνίας (σημείο C, κόκκινη γραμμή) [43].

Θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε αριθμητικά τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων. Η προσεγγιστική μέθοδος που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: από το ακόλουθο διάγραμμα που παρουσιάζει την κατανομή της πίεσης στην διεπιφάνεια κάθε δοκιμίου θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της πίεσης – τάσης (σ_{ave}) και στην συνέχεια κατά μήκος του ενός τετάρτου της περιμέτρου της εγκοπής θα προσδιορίσουμε την μέγιστη τάση που αναπτύσσεται (σ_{max}). Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων θα είναι ίσος με τον λόγο $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$.



Εικ. 4.10: Η κατανομή των τάσεων επαφής κατά μήκος της διεπιφάνειας για τις διατάξεις.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

	σ_{max} (MPa)	σ_{ave} (MPa)	$K = \sigma_{max} / \sigma_{ave}$
BD κατά ASTM	1432.69	1178.21	1.22
BD κατά ISRM	1749.2	907.08	1.93
Incurved BD	1913.77	1727.52	1.11
FBD-stamps	2123.89	1632.32	1.34
FBD-plattens	2147.63	1205.58	1.78

Πίν. 4.2: Ο υπολογισμός του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων.

Οι τιμές που προέκυψαν παρατηρούμε ότι είναι λογικές. Για να μπορέσουμε όμως, να τις επικυρώσουμε είναι αναγκαία η ανάπτυξη θεωρητικής λύσης.

Σύνοψη – Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε μία εκτενής μελέτη μιας εναλλακτικής μεθόδου για τον προσδιορισμό των ψαθρών υλικών.

Το κίνητρο προέκυψε από τις αδυναμίες που εμφανίζει το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου, με αποτέλεσμα να υπονομεύεται την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της διαδικασίας. Πιο συγκεκριμένα, το σημαντικότερο μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η πρόωγη θραύση που εμφανίζεται κατά την διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας στην περιοχή επαφής δοκιμίου – πλακών φόρτισης.

Για να εξαλειφθεί το φαινόμενο αυτό εξετάζεται η εναλλακτική γεωμετρία του επιπεδωμένου Βραζιλιανού δίσκου.

Επιχειρήθηκε η ανάπτυξη αναλυτικής λύσης και η επικυρωσή της με την βοήθεια ενός αριθμητικού προσομοιώματος και την επιβολή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Πραγματοποιήθηκε επιπλέον, εκτενής παραμετρική διερεύνηση των παραγόντων που επηρεάζουν το τασικό πεδίο και το πεδίο μετατοπίσεων.

Τέλος, βασιζόμενοι στα ικανοποιητικά αποτελέσματα του αριθμητικού μοντέλου εξετάζονται δοκίμια τύπου FBD και Brazilian Disc κατά ASRM και ISTM καθώς και η νέα γεωμετρία που έχουν αναπτύξει οι Markides και Kourkoulis, τον Incurved Brazilian Disc (IBD), με κεντρική εγκοπή ορθογωνικής μορφής. Γίνεται μία πρώτη προσπάθεια προσδιορισμού του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Από την ολοκλήρωση της εργασίας μπορούμε να αποφανθούμε ότι η αναλυτική λύση που αναπτύχθηκε για τα μοντέλα του FBD με πλάκες φόρτισης τύπου plattens και stamps επαληθεύεται σε ικανοποιητικό βαθμό από την αριθμητική λύση. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι δεν είναι αναγκαία η βελτίωση του αριθμητικού προσομοιώματος για την εξάλειψη των αστοχιών των αποτελεσμάτων που παρατηρήθηκαν σε κάποιες περιπτώσεις. Προτείνεται λοιπόν, η περαιτέρω μελέτη των συνοριακών συνθηκών του προσομοιώματος καθώς και της σύγκλισης της διακριτοποίησης.

Προκειμένου να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα της αναλυτικής και αριθμητικής λύσης πρέπει να πραγματοποιηθούν πειραματικά πρωτόκολλα από ομοιογενή και ισότροπα υλικά για να αποφευχθεί η διασπορά των αποτελεσμάτων.

Για την περίπτωση που εξετάστηκε στο 4^ο κεφάλαιο, είναι χρήσιμο να πραγματοποιηθεί παραμετρικός έλεγχος για να μελετηθεί η επιρροή του μήκους, του πλάτους και της ακτίνας καμπυλότητας της γωνίας της εγκοπής τόσο στο τασικό πεδίο όσο και στον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάπτυξη αναλυτικής λύσης και η βελτίωση της μεθόδου για τον υπολογισμό του SIF που παρουσιάστηκε στην εν λόγω εργασία, ώστε να προταθεί ένας αποδοτικός τρόπος προσδιορισμού του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεως για τον πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου και των παραλλαγών του.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] Carneiro, F.L.L.B., 1943. A New Method to Determine the Tensile Strength of Concrete. In Proceedings of the 5th meeting of the Brazilian association for technical rules, 3d. section, 16 September 1943, 126–129 (in Portuguese)
- [2] Akazawa, S., 1943. Splitting Tensile Test of Cylindrical Specimens. Journal of the Japanese Civil Engineering Institute 6(1), 12–19.
- [3] Hobbs D. W. (1964), The tensile strength of rocks, Int.J. Rock Mech. Min. Sci. 1, 385-396.
- [4] Ripperger E. A. and Davids N.,(1947), Critical stresses in a circular ring. Trans. Am. Soc. Civil Engrs., 2308: 619-635.
- [5] Μ. Ε. Σταυροπούλου, (2021), Διερεύνηση τασικού πεδίου και πεδίου μετατοπίσεων σε δοκίμια μορφής κυκλικού ημιδακτυλίου, (Διπλωματική εργασία). Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Μηχανικής.
- [6] Hondros, G., (1959), The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. Aust. J. Appl. Sci. 10, 243–268.
- [7] Fairhurst C., (1964), On the validity of the 'Brazilian' test for brittle materials. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech Abstr 1(4): 535-546.
- [8] Hobbs D. W. (1964), The tensile strength of rocks, Int.J. Rock Mech. Min. Sci. 1, 385-396.
- [9] Mellor M, Hawkes I (1971) Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli. Eng Geol 5(3):173– 225.
- [10] Hudson J. A., (1969), Tensile strength and the ring test. Intern. J. Rock Mech. Mining ScL, 6: 91-97.

- [11] Hudson JA, Brown ET, Rummel F (1972) The controlled failure of rock discs and rings loaded in diametral compression. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr* 9(2):241–248.
- [12] Markides, Ch.F., Kourkoulis, S.K., 2012. The stress field in a standardized Brazilian disc: the influence of the loading type acting on the actual contact length. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 45(2), 145–158.
- [13] Wang, Q.Z., Jia, X.M., Kou, S.Q., Zhang, Z.X., Lindqvist, P.-A., 2004. The flattened Brazilian disc specimen used for testing elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks: analytical and numerical results. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 41(2), 245–253.
- [14] Wang, Q.Z., Wu, L.Z. 2004. The flattened Brazilian disc specimen used for determining elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks: experimental results. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 41(3), 26–30.
- [15] K.N. Kaklis, Z. Agioutantis, E. Sarris, A. Pateli, A theoretical and numerical study of discs with flat edges under diametral compression (flat Brazilian test), in: 5th GRACM Int. Congress Comput. Mech., 2005, vol. 1, pp. 437–444.
- [16] Q.Z. Wang, W. Li, H.P. Xie, Dynamic split tensile test of flattened Brazilian disc of rock with SHPB setup, *Mech. Mater.* 41 (3) (2009) 252–260.
- [17] Q.Z. Wang, S. Zhang, H.P. Xie, Rock dynamic fracture toughness tested with holed-cracked flattened Brazilian discs diametrically impacted by SHPB and its size effect, *Exp. Mech.* 50 (7) (2010) 877–885.
- [18] Q.Z. Wang, F. Feng, M. Ni, X.P. Gou, Measurement of mode I and mode II rock dynamic fracture toughness with cracked straight through flattened Brazilian disc impacted by split Hopkinson pressure bar, *Eng. Fract. Mech.* 78 (12) (2011) 2455–2469.
- [19] R. Chen, F. Dai, J. Qin, F. Lu, Flattened Brazilian disc method for determining the dynamic tensile stress-strain curve of low strength brittle solids, *Exp. Mech.* 53 (7) (2013) 1153–1159.

- [20] Y.G. Huang, L.G. Wang, Y.L. Lu, J.R. Chen, J.H. Zhang, Semi-analytical and numerical studies on the flattened Brazilian splitting test used for measuring the indirect tensile strength of rocks, *Rock Mech. Rock Eng.* 48 (5) (2015) 1849–1866.
- [21] A. Elghazel, R. Taktak, J. Bouaziz, Determination of elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of bioceramics using the flattened Brazilian disc specimen: analytical and numerical results, *Ceram. Int.* 41 (9) (2015) 12340–12348.
- [22] Z. Yan, F. Dai, Y. Liu, M. Wei, W. You, New insights into the fracture mechanism of flattened Brazilian disc specimen using digital image correlation, *Eng. Fract. Mech.* 252 (2021).
- [23] H. Ren, S. Song, J. Ning, Investigation into the damage mechanism of concrete in the Brazilian test and flattened Brazilian test through the moment tensor, *Eng. Fract. Mech.* 262 (2022).
- [24] Y. Zhang, C. Ou, H. Liu, J. Lu, C. Cheng, J. He, Experimental and numerical study on the dynamic fracture of flattened Brazilian discs with prefabricated cracks, *Eng. Fract. Mech.* 254 (2021).
- [25] C.F. Markides, S.K. Kourkoulis, Mathematical formulation of an analytic approach to the stress field in a flattened Brazilian disc, *Procedia Struct. Integr.* 28 (1) (2020) 710–719.
- [26] C.F. Markides, E.D. Pasiou, M. Stavropoulou, A. Papagiannopoulos, F. Sakaropoulos, S.K. Kourkoulis, Revisiting the flattened Brazilian disc configuration – Part I: The actual boundary conditions, *Procedia Struct. Integr.* 41 (2022) 351–360.
- [27] C.F. Markides, S.K. Kourkoulis, Revisiting the flattened Brazilian disc configuration - part II: non-constant disc-loading platen contact length, *Rock Mech, Rock Eng.* (2023) Submitted.
- [28] Christos F. Markides, Ermioni D. Pasiou, Maria E. Stavropoulou, The actual boundary conditions in the Flattened Brazilian Disc test, *Materials Today*, (2023).
- [29] N.I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1963.

- [30] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin H. C. and Topp, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23 No. 9, 1956 pp. 805-823.
- [31] Courant R (1943) Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull Am Math Soc* 49:1–23
- [32] HRENNIKOFF, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method", *J. Appl. Mech.* 8, pp. A169-175, 1941.
- [33] McHenry D (1943) A lattice analogy for the solution of stress problems. *J Instit Civ Eng* 21(2):59–82
- [34] Προβατίδης Γ. Χριστόφορος, (2015), ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ, Εκδόσεις Τζιόλα.
- [35] Κωνσταντίνος – Ιάσων Υψηλάντης, (2019), Η Μέθοδος της Ομογενοποίησης στο Πρόβλημα Βελτιστοποίησης Τοπολογίας, Μεταπτυχιακή Διατριβή.
- [36] Α. Θεοδουλίδης, Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, <https://slideplayer.gr/slide/16255278/>
- [37] C.F. Markides, S.K. Kourkoulis, The incurved Brazilian disc as an alternative to the standardized Brazilian disc test, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 127, (2023).
- [38] Bluhm, J.I. (1975), "Slice synthesis of a three-dimensional work of fracture specimen", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 7 No. 3, pp. 593-604, doi: 10.1016/0013-7944(75)90059-4.
- [39] Munz, D., Bubsey, R.T. and Srawley, J.E. (1980), "Compliance and stress intensity coefficients for short bar specimens with chevron notches", *International Journal of Fracture*, Vol. 16 No. 4, pp. 359-374, doi: 10.1007/BF00018240.
- [40] Markides, C.F. and Kourkoulis, S.K. (2013), "Naturally accepted boundary conditions for the Brazilian disc test and the corresponding

stress field”, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, Vol. 46 No. 5, pp. 959-980, doi: 10.1007/s00603-012-0351-x.

- [41] Kourkoulis, S.K. and Markides, C.F. (2014), “Fracture toughness determined by the centrally cracked Brazilian disc test: some critical issues in the light of an alternative analytic solution”, *ASTM Materials Performance and Characterization*, Vol. 3 No. 3, pp. 45-86, doi: 10.1520/MPC20130056.
- [42] Markides, C.F. and Kourkoulis, S.K. (2016), “Mathematical” cracks versus artificial slits: implications in the determination of fracture toughness”, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, Vol. 49 No. 3, pp. 707-729, doi: 10.1007/s00603-015-0794-y.
- [43] Kourkoulis, S.K., Markides, C.F., Pasiou, E.D., Loukidis, A. and Triantis, D. (2022), “The critical influence of some “tiny” geometrical details on the stress field in a Brazilian Disc with a central notch of finite width and length”, *Frattura ed Integrita Strutturale*, Vol. 16 No. 59, pp. 405-422, doi: 10.3221/IGF-ESIS.59.27