



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΙΙ: ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ
ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΕ ΤΟ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ELMER

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Γεώργιου Ε. Καλλιά

Επιβλέπων: Μιχαήλ Ε. Καβουσανάκης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΙΙ: ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ
ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΕ ΤΟ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ELMER

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Γεώργιου Ε. Καλλιά

Επιβλέπων: Μιχαήλ Ε. Καβουσανάκης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 10^η Ιουλίου 2023

Καβουσανάκης Μιχαήλ
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μπουντουβής Ανδρέας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μπέλτσιος Κωνσταντίνος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2023

Γεώργιος Ε. Καλλιός
Διπλωματούχος Χημικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Copyright © Γεώργιος Ε. Καλλιός, 2023.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην σύγχρονη εποχή, η όλο και μεγαλύτερη ανάγκη για μοντελοποίηση και προσομοίωση φυσικών φαινομένων, τα οποία δεν μπορούν να μελετηθούν μέσω πραγματικών πειραμάτων, είτε επειδή αυτά είναι επικίνδυνα ή ακριβά ή τεχνικά αδύνατα, έχουν οδηγήσει στην δημιουργία δεκάδων υπολογιστικών πακέτων ανοικτού και κλειστού κώδικα προσομοίωσης φυσικών φαινομένων. Τα υπολογιστικά πακέτα ανοικτού κώδικα, σε αντίθεση με του κλειστού κώδικα, είναι ελεύθερα προς χρήση και επιδέχονται οποιαδήποτε τροποποίηση ή βελτίωση από τον χρήστη. Ως αποτέλεσμα, προσφέρουν την δυνατότητα στον εκάστοτε ερευνητή να δημιουργήσει τους δικούς του κώδικες και να προσαρμόσει το λογισμικό στις δικές του ερευνητικές ανάγκες. Ένα από αυτά τα υπολογιστικά πακέτα ανοικτού κώδικα είναι το λογισμικό Elmer. Το Elmer είναι εφοδιασμένο με σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους και προσφέρει μεγάλη ευελιξία ως προς τη χρήση του. Μπορεί να συνδυαστεί με μία πληθώρα από εξωτερικά λογισμικά προ-επεξεργασίας (preprocessing) και μετά-επεξεργασίας (postprocessing), και ο αρθρωτός σχεδιασμός του δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να συνδυάσει τους δικούς του κώδικες με τους ήδη υφιστάμενους. Ωστόσο, για να μπορεί κάποιος να αξιοποιήσει πλήρως όλες τις υπολογιστικές δυνατότητες του λογισμικού πακέτου Elmer, θα πρέπει να έχει άριστη γνώση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και των διαδικασιών επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα. Για τον σκοπό αυτό, στο θεωρητικό μέρος της παρούσας διπλωματικής εργασίας γίνεται εκτενής ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, και μελετώνται διάφορες μέθοδοι σταθεροποίησης και γραμμικοποίησης που χρησιμοποιεί το λογισμικό πακέτο Elmer, σε συνδυασμό με την διακριτοποίηση και επίλυση διάφορων διαφορικών εξισώσεων. Ανάμεσα στις εξισώσεις που μελετώνται είναι η εξίσωση Poisson, η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας σε ρευστά και οι εξισώσεις Navier-Stokes. Στο τεχνικό μέρος της εργασίας, διερευνώνται οι υπολογιστικές δυνατότητες του λογισμικού Elmer σε μία σειρά από γραμμικά, μη γραμμικά και συζευγμένα προβλήματα, παρουσιάζοντας πλήρως όλη την υπολογιστική διαδικασία επίλυσης σε κάθε περίπτωση. Σε αυτά συμπεριλαμβάνονται ένα πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας, μία ροή Stokes με γνωστές αναλυτικές λύσεις, το πρόβλημα της ροής σε κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα (lid-driven cavity) και το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής. Για την επικύρωση ότι το Elmer αποτελεί ένα αξιόπιστο υπολογιστικό πακέτο ανοικτού κώδικα, πραγματοποιείται ανάλυση σφαλμάτων στα προβλήματα που διαθέτουν αναλυτική λύση.

Λέξεις-κλειδιά: Elmer, μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, ασθενής μορφή, μητρική μορφή, συνθήκη ευστάθειας Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi, διαχωριστική προσέγγιση

Abstract

In modern days, the increasing need for natural phenomena modeling stimulation that cannot be studied through actual experiments, either because they are dangerous or expensive and technically impossible, has created tens of open and closed-source computational packages. Unlike closed ones, open-source computing packages are free to use and amenable to any modification or improvement by the user. As a result, they offer the researcher the possibility to create his codes and adapt the software to his research needs. One of these open-source computing packages is Elmer software. Elmer is equipped with modern numerical methods and offers excellent flexibility. It can be combined with various external preprocessing and postprocessing software programs, and its modular design allows the user to combine his own codes with existing ones. However, in order to take full advantage of all the computational capabilities of the Elmer package software, one should have a thorough knowledge of the finite element method and the procedures used to solve partial differential equations that govern physical phenomena. For this purpose, in the theoretical part of this thesis, an extensive analysis of the finite element method is carried out, and various stabilization and linearization methods are introduced, which are used by the Elmer software package in combination with the discretization and solution of various differential equations. Among the equations studied are the Poisson equation, the heat transfer equation in fluids, and the Navier-Stokes equations. In this thesis's technical part, the Elmer software's computational capabilities are explored by solving linear, non-linear, and coupled problems and fully presenting the entire computational solution process in each case. These include a heat transfer problem and a Stokes flow problem with known analytical solutions, the lid-driven cavity problem, and a problem with natural convection. To validate the reliability of the Elmer open-source computing package, error analysis is performed on problems that have an analytical solution.

Keywords: Elmer, finite element method, weak form, matrix form, Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi condition, segregated approach

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχάλη Καβουσανάκη για την υποστήριξή του και την αμέραστη βοήθειά του στην εκπόνησή της. Ο καθηγητής κ. Καβουσανάκης με ενέπνευσε να ασχοληθώ με το αντικείμενο της υπολογιστικής ανάλυσης φαινομένων μεταφοράς και να εντρυφήσω βαθύτερα στο αντικείμενο. Επίσης οφείλω να τον ευχαριστήσω για τον χρόνο που διέθεσε τόσο κατά την διάρκεια αυτής της εργασίας όσο και κατά την συγγραφή της.

Ευχαριστώ επίσης του γονείς μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου καθώς και κατά την τελική μου αυτή προσπάθεια.

Εισαγωγή

Η δυναμική των ρευστών και τα φαινόμενα μεταφοράς, όπως η μεταφορά θερμότητας και μάζας διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ζωή του ανθρώπου. Η ικανότητα να προβλέπουμε και να ελέγχουμε τα φαινόμενα μεταφοράς έχει ουσιώδης σημασία σε διάφορες βιομηχανικές εφαρμογές όπως σε χημικούς αντιδραστήρες και εναλλάκτες θερμότητας. Βάσει της παραδοσιακής προσέγγισης αυτό πραγματοποιείται μέσω παρατηρήσεων, πειραμάτων και μετρήσεων. Ωστόσο, το πλήθος των πληροφοριών που μπορεί να αντλήσει κανείς με αυτόν τον τρόπο είναι συχνά περιορισμένο και ευπαθές σε πειραματικά λάθη. Παρ' όλα αυτά, στην σημερινή εποχή με την εξέλιξη των υπολογιστών είναι πλέον δυνατή η προσομοίωση φαινομένων μεταφοράς λύνοντας αριθμητικά μερικές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες προέρχονται από θεμελιώδεις αρχές όπως η διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Για την κάλυψη αυτής της ανάγκης έχουν δημιουργηθεί δεκάδες υπολογιστικά λογισμικά που χρησιμοποιούν σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους για να επιλύουν αυτές τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Τα λογισμικά αυτά χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, στα ανοικτού και του κλειστού κώδικα. Τα κλειστού κώδικα είναι εμπορικά λογισμικά, απευθύνονται σε ένα ευρύ κοινό και είναι εύκολα στη χρήση. Ωστόσο, τα κύρια μειονεκτήματά τους είναι το υψηλό οικονομικό κόστος για την απόκτησή τους και η μη προσβασιμότητα στους κώδικές τους. Για αυτό το λόγο, όλο και περισσότερα λογισμικά ανοικτού κώδικα κάνουν την εμφάνισή τους με σκοπό να αντικαταστήσουν τα εμπορικά λογισμικά. Μερικά από τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν τα λογισμικά ανοικτού κώδικα είναι η δυνατότητα αλληλεπίδρασης με εξωτερικά λογισμικά, η ικανότητα προσαρμογής τους στις ανάγκες του εκάστοτε ερευνητή και το μηδενικό κόστος αγοράς.

Ένα από αυτά τα λογισμικά ανοικτού κώδικα είναι το Elmer. Το Elmer διαθέτει κώδικες γραμμένους σε γλώσσα Fortran που είναι ευανάγνωστοι και εύκολα τροποποιήσιμοι προσφέροντας την δυνατότητα στον χρήστη να δημιουργήσει τις δικές του υπορουτίνες (solvers) για την επίλυση προβλημάτων. Αυτό προσφέρει μία μεγάλη ευελιξία όσον αφορά την έρευνα καθώς με αυτό τον τρόπο μπορούν να δημιουργηθούν νέα μαθηματικά πρότυπα και να επιλυθούν χωρίς την ανάγκη συμβολής κάποιου τρίτου. Για να μπορεί να γίνει όμως αυτό, ο εκάστοτε ερευνητής θα πρέπει κατέχει καλά το πεδίο της υπολογιστικής μηχανικής και να είναι γνώστης των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιεί το λογισμικό πακέτο Elmer. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να μπορεί να διαβάσει τους κώδικες και να αναγνωρίζει κάθε διαδικασία επίλυσης. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας, λοιπόν, εξετάστηκαν οι διάφορες υπολογιστικές δυνατότητες του λογισμικού πακέτου Elmer στην επίλυση προβλημάτων φαινομένων μεταφοράς δίνοντας έμφαση στην επεξήγηση των διαδικασιών επίλυσης.

Όσο αφορά την δομή της διπλωματικής εργασίας αυτή χωρίζεται σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος απαρτίζεται από τρία κεφάλαια και περιλαμβάνει το θεωρητικό υπόβαθρο των διαδικασιών επίλυσης. Σκοπός αυτών των κεφαλαίων είναι η εξαγωγή της μητρικής μορφής από την μερική διαφορική εξίσωση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για γραμμικά, μη γραμμικά και χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα. Στο δεύτερο μέρος γίνεται μία αναφορά στο λογισμικό πακέτο Elmer, τις δυνατότητές του, στα κυρίως υποπρογράμματα από τα οποία αποτελείται και με τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί κάποιος να τα χρησιμοποιήσει. Επιπλέον, επιλύεται μία γκάμα προβλημάτων φαινομένων μεταφοράς στα οποία περιλαμβάνονται δύο γραμμικά προβλήματα: μεταφορά θερμότητας και ροή Stokes,

ένα μη γραμμικό πρόβλημα: ένα πρόβλημα ιξώδους και ασυμπίεστης ροής και ένα συζευγμένο πρόβλημα φυσικής συναγωγής.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	ii
Ευχαριστίες	iii
Εισαγωγή	iv
Περιεχόμενα.....	vi
Κατάλογος Σχημάτων	x
Κατάλογος Πινάκων	xii
Κατάλογος συμβόλων, συντμήσεων και δεικτών	xiii
Κεφάλαιο 1: Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	1
1.1 Εισαγωγικά και ιστορικά στοιχεία	1
1.2 Τυπικά βήματα εφαρμογής της μεθόδου.....	1
1.3 Διατύπωση προβλήματος συνοριακών τιμών	2
1.4 Ανάπτυξη ασθενούς μορφής	3
1.5 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin.....	4
1.6 Ανάπτυξη μητρικού μορφής	6
1.7 Ανάλυση συνεισφορών	6
1.7.1 Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών.....	8
1.7.2 Αριθμητική ολοκλήρωση.....	10
1.7.3 Υπολογισμός επιφανειακών ολοκληρωμάτων	10
1.8 Ενσωμάτωση συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet	11
Κεφάλαιο 2: Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα: εφαρμογή στην εξίσωση μεταφοράς θερμότητας.....	13
2.1 Διατύπωση του γενικού προβλήματος μεταφοράς θερμότητας	13
2.2 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	14
2.3 Εξαγωγή ασθενούς μορφής.....	14
2.4 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin.....	15
2.5 Εξαγωγή μητρικού μορφής.....	16
2.6 Σταθεροποίηση συναγωγικού όρου.....	17
2.7 Ανάλυση συνεισφορών	18
2.8 Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης.....	19

Κεφάλαιο 3: Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στις εξισώσεις Navier-Stokes	21
3.1 Διατύπωση της χρονικά μεταβαλλόμενης ασυμπίεστης ιξώδους ροής.....	21
3.1 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	22
3.3 Γραμμικοποίηση συναγωγικού όρου	23
3.4 Εξαγωγή ασθενούς μορφής.....	24
3.5 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin.....	27
3.6 Εξαγωγή μητρικούς μορφής.....	29
3.7 Ανάλυση συνεισφορών	31
3.8 Συνθήκες ευστάθειας και επιλυσιμότητας	33
3.9 Σταθεροποίηση.....	36
3.10 Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης.....	38
Κεφάλαιο 4: Εισαγωγή στο λογισμικό πακέτο ανοικτού κώδικα Elmer	40
4.1 Ιστορικά στοιχεία	40
4.2 Επιμέρους προγράμματα του λογισμικού πακέτου Elmer	40
4.3 Προτεινόμενες ροές εργασίας	42
4.4 Βασικές διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων	43
Κεφάλαιο 5: Επίλυση γραμμικών προβλημάτων με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer	45
5.1 Το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα	45
5.1.1 Διατύπωση του προβλήματος	45
5.1.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος.....	45
5.1.3 Κατασκευή γεωμετρίας και πλέγματος.....	46
5.1.4 Αριθμητική επίλυση.....	47
5.1.5 Απεικόνιση αποτελεσμάτων και ανάλυση σφαλμάτων	47
5.2 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση.....	50
5.2.1 Διατύπωση του προβλήματος	50
5.2.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος.....	51
5.2.3 Διακριτοποίηση του προβλήματος.....	52
5.2.4 Αριθμητική επίλυση.....	52
5.2.5 Απεικόνιση αποτελεσμάτων και ανάλυση σφαλμάτων	53
Κεφάλαιο 6: Επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer	58
6.1. Ροή σε τετραγωνική κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα (lid-driven cavity).....	58
6.1.1. Διατύπωση του προβλήματος	58

6.1.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος.....	59
6.1.3 Κατασκευή γεωμετρίας και πλέγματος.....	61
6.1.4 Αριθμητική επίλυση.....	61
6.2 Επίλυση συζευγμένου προβλήματος: φυσική συναγωγή.....	66
6.2.1 Διατύπωση του προβλήματος.....	67
6.2.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος.....	68
6.2.3 Κατασκευή γεωμετρίας και πλέγματος.....	69
6.2.4 Επίλυση συζευγμένου συστήματος με τη διαχωρισμένη προσέγγιση (segregated approach)...	70
6.2.5 Αριθμητική επίλυση.....	70
6.2.5 Απεικόνιση αποτελεσμάτων.....	72
Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	74
7.1 Συμπεράσματα.....	74
7.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	74
Βιβλιογραφία.....	75
Παράρτημα Α: Χρήσιμοι χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.....	79
A.1 Χώρος Hilbert.....	79
A.2 Χώροι Sobolev.....	79
A.3 Επέκταση σε διανυσματικές συναρτήσεις.....	81
Παράρτημα Β: Ανάλυση όρων σταθεροποίησης για τις εξισώσεις Navier-Stokes.....	82
B.1 Ανάλυση όρων σταθεροποίησης GLS για την περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard.....	82
B.2 Ανάλυση όρων σταθεροποίησης GLS για την περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton.....	89
Παράρτημα Γ: Υπορουτίνες σε κώδικα Fortran.....	94
Γ.1 Υπορουτίνα που υπολογίζει τις νόρμες Hilbert και Sobolev για το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα.....	94
Γ.2 Υπορουτίνα που υπολογίζει τις νόρμες Hilbert και Sobolev των σφαλμάτων για το πρόβλημα ροής Stokes με αναλυτική λύση.....	97
Παράρτημα Δ: User-defined Functions σε κώδικα Fortran.....	101
Δ.1: User-defined function για το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα.....	101
Δ.2: User-defined function για το πρόβλημα ροής Stokes με αναλυτική λύση.....	101
Παράρτημα Ε: Αρχεία SIF.....	104
E.1 Δομή αρχείου SIF.....	104

E.2 Αρχείο SIF για το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα.....	104
E.3 Αρχείο SIF για το πρόβλημα ροή Stokes με αναλυτική λύση (για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P ₂ /P ₁ και τύπου P ₁ -bubble/P ₂).....	107
E.4 Αρχείο SIF για το πρόβλημα ροή Stokes με αναλυτική λύση (για πεπερασμένα στοιχεία P ₁ /P ₁ με και χωρίς σταθεροποίηση)	109
E.5: Αρχείο SIF για το πρόβλημα της ροής σε κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα (lid-driven cavity)	111
E.6: Αρχείο SIF για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής.....	113

Κατάλογος Σχημάτων

Σχ. 1-1 Διαμέριση του χωρίου Ω σε υποχωρία Ω_e	5
Σχ. 1-2 Ολική συνάρτηση βάσης Lagrange $\varphi_I(\mathbf{x})$	5
Σχ. 1-3 Απεικόνιση πρότυπου στοιχείου $\hat{\Omega}_e$ σε γενικό στοιχείο Ω_e	8
Σχ. 1-4 Σημείο ολοκλήρωσης Gauss για τριγωνικό στοιχείο 1 ^{ης} τάξης: $\xi_1, \eta_1 = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ με βάρος $\omega_1 = 1$	10
Σχ. 1-5 Στοιχείο Ω_e που εφάπτεται πάνω στο σύνορο $\partial\Omega_N$	11
Σχ. 2-1 Χωρίο Ω , στο οποίο αναζητείται η λύση της εξίσωση μεταφοράς θερμότητας.....	14
Σχ. 3-1 Παραδείγματα μεικτών πεπερασμένων στοιχείων που ικανοποιούν ή παραβιάζουν την συνθήκη LBB.	35
Σχ. 4-1 Γραφικό περιβάλλον χρήση του Elmer, ElmerGUI. Απεικόνιση πλέγματος τρισδιάστατης γεωμετρίας.....	41
Σχ. 4-2 Βασικές λειτουργίες και τρόπος συνδυασμού των επιμέρους υποπρογραμμάτων του Elmer με εξωτερικά λογισμικά.....	42
Σχ. 5-1 Οικογένεια δομημένων πλεγμάτων σε τετραγωνικό χωρίο.....	46
Σχ. 5-2 Ισοϋψείς γραμμές πεδίου θερμοκρασίας για πλέγματα με 50 στοιχεία (αριστερά) και 200 στοιχεία (δεξιά).....	47
Σχ. 5-3 Ισοϋψείς γραμμές πεδίου θερμοκρασίας για πλέγματα με 800 στοιχεία (αριστερά) και 3200 στοιχεία (δεξιά).....	48
Σχ. 5-4 Σύγκριση του ρυθμού μείωσης του σφάλματος σε σχέση με τη μεταβολή πυκνωσης του πλέγματος μεταξύ στοιχείων 1ης και 2ης τάξης μέσω της νόρμας Hilbert (αριστερά) και Sobolev (δεξιά).	49
Σχ. 5-5 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση: πεδίο ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 χωρίς σταθεροποίηση.....	53
Σχ. 5-6 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση: πεδίο ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 με σταθεροποίηση.....	54
Σχ. 5-7 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση: πεδίο ταχύτητας και πίεσης για πεπερασμένα στοιχεία τύπου Taylor-Hood (P_2/P_1) και τύπου Mini (P_1 -bubble/ P_1).....	54
Σχ. 5-8 Νόρμα Hilbert (αριστερά) του σφάλματος του διανύσματος της ταχύτητας και νόρμα Sobolev (δεξιά) του σφάλματος της πίεσης για διαφόρων ειδών πεπερασμένα στοιχεία. Σύγκριση του ρυθμού μείωσης του σφάλματος σε σχέση με την πυκνωση του πλέγματος.....	57
Σχ. 6-1 Τετραγωνική κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα.....	58
Σχ. 6-2 Μη δομημένο πλέγμα για το πρόβλημα της ροής σε τετραγωνική κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα.....	61
Σχ. 6-3 Αλγόριθμος επαναληπτικής διαδικασίας για την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes.....	62
Σχ. 6-4 Διανυσματικό πεδίο ταχύτητας και ροϊκές γραμμές για αριθμούς Reynolds ίσους με 100, 400, 1.000, 3.200 (από αριστερά προς τα δεξιά).....	63
Σχ. 6-5 Διανυσματικό πεδίο ταχύτητας και ροϊκές γραμμές για αριθμούς Reynolds 5000, 7500, 10.000, 20.000, 40.000, 60.000 (από αριστερά προς τα δεξιά).....	64

Σχ. 6-6 Προφίλ ταχύτητας πάνω στην οριζόντια κεντρική γραμμή που δίνεται από την ευθεία $x_1 = 0,5$ m (με αστερίσκο συμβολίζονται οι βιβλιογραφικές των Ghia, Ghia και Shin, 1982).	65
Σχ. 6-7 Πρόβλημα φυσικής συναγωγή: Τετραγωνική κοιλότητα Ω με θερμαινόμενη πλάκα στο πυθμένα.	67
Σχ. 6-8 Αλγόριθμος επίλυσης του συζευγμένου συστήματος της φυσικής συναγωγής.	71
Σχ. 6-9 Κατανομή πεδίου θερμοκρασίας για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής σε χρόνους 0, 2, 4, 6, 8, 10 s (από αριστερά προς τα δεξιά).	72
Σχ. 6-10 Κατανομή πεδίου ταχύτητας για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής σε χρόνους 0, 2, 4, 6, 8, 10 s (από αριστερά προς τα δεξιά).	73

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 3-1. Αντιστοιχία μεταξύ σύνθετων μητρώων και όρων διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.33).....	30
Πίνακας 4-1. Συνιστώμενες ροές εργασίας για την υπολογιστική προσομοίωση φυσικών φαινομένων με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer.....	43
Πίνακας 5-1. Αποτελέσματα για διάφορα μεγέθη πλέγματος στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν 1 ^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange.....	48
Πίνακας 5-2. Αποτελέσματα για διάφορα μεγέθη πλέγματος στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν 2 ^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange.....	49
Πίνακας 5-3. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P ₁ /P ₁ χωρίς σταθεροποίηση.....	55
Πίνακας 5-4. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P ₁ /P ₁ με σταθεροποίηση.....	55
Πίνακας 5-5. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένων στοιχεία P ₂ /P ₁	56
Πίνακας 5-6. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P ₁ -bubble/P ₁	56
Πίνακας 6-1. Ιστορικό επαναλήψεων Picard/Newton για την εύρεση λύσης των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes και απαιτήσεις σε χρόνο CPU.	66
Πίνακας 6-2. Θερμοφυσικές ιδιότητες του αέρα σε θερμοκρασία δωματίου 293 K.....	68
Πίνακας Β-1. Αντιστοιχία μεταξύ πινάκων/διανυσμάτων και όρων σταθεροποίησης διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.77).....	85
Πίνακας Β-2. Αντιστοίχιση μεταξύ πινάκων/διανυσμάτων και όρων σταθεροποίησης διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.78).....	90

Κατάλογος Συμβόλων, Συντμήσεων και Δεικτών

Σύμβολα

α	πολυδείκτης
β	Συντελεστής θερμικής διαστολής
\mathcal{T}	τελεστής διαμέρισης
\bar{F}	δυναδικός τάσης
\bar{Y}	δυναδικός ρυθμού παραμόρφωσης
δ_{ij}	δέλτα του Kronecker
$\partial\Omega$	σύνορο χωρίου
λ	παράμετρος σταθεροποίησης, θετική σταθερά
μ	δυναμικό ιξώδες
ρ	πυκνότητα
τ	Παράμετρος σταθεροποίησης
φ	συνάρτηση βάσης
ψ	συνάρτηση βάσης
Ω	φραγμένο χωρίο
Ω_e	υποχωρίο ή στοιχείο
ω	παράμετρος υποχαλάρωσης, βάρη ολοκλήρωσης Gauss
\mathcal{A}	τελεστής συναρμολόγησης
c_p	θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση
e	ορθοκανονική βάση Ευκλείδειου χώρου
f	όρος πηγής
H^p	χώρος Sobolev
h	μέγεθος πλέγματος
h_K	τοπικό μέγεθος πλέγματος
J	Ιακωβιανή μήτρα
$\bar{\kappa}$	τανυστής θερμικής αγωγιμότητας
κ	θερμική αγωγιμότητα
L^2	χώρος Hilbert
m_K	θετική σταθερά
\mathbf{n}	μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα
N_{nodes}	αριθμός κόμβων πλέγματος
n_{el}	αριθμός στοιχείων
n_{gp}	αριθμός σημείων ολοκλήρωσης Gauss

n_{nodes}	αριθμός κόμβων στοιχείου
n_{gp}	σημεία ολοκλήρωσης Gauss
n_{sd}	αριθμός διαστάσεων
\mathcal{P}	τελεστής σταθεροποίησης
p	στατική πίεση
Pe	αδιάστατος αριθμός Péclet
\mathcal{R}	υπόλοιπο
Re	αδιάστατος αριθμός Reynolds
S	χώρος λύσεων άπειρών διαστάσεων
T	θερμοκρασία
\mathbf{u}	διάνυσμα ταχύτητας
\mathbf{u}	διάνυσμα ταχύτητας από την προηγούμενη επανάληψη του μη γραμμικού συστήματος
V	χώρος συναρτήσεων βάρους άπειρων διαστάσεων
\mathbf{V}	χώρος διανυσματικών συναρτήσεων βάρους άπειρων διαστάσεων
w	συνάρτηση βάρους
\mathbf{w}	διανυσματική συνάρτηση βάρους

Συντμήσεις

CPU	central processing unit
DOF	degree of freedom
GLS	Galerkin least-squares
GUI	Graphical user interface
LAPACK	linear algebra package
LBB	Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi
SIF	solver input file
SUPG	streamline-upwind Petrov-Galerkin
UDF	user-defined function

Δείκτες

\square^h	ανάλογο του μεγέθους πλέγματος h
\square_I	ολική αρίθμηση
\square_i	τοπική αρίθμηση
$\square^{(e)}$	αναφορά στο στοιχείο e

Κεφάλαιο 1: Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει μία εισαγωγή στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (*finite element method*), η οποία χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση και επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν πληθώρα φυσικών φαινομένων.

1.1 Εισαγωγικά και ιστορικά στοιχεία

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία από τις πιο δημοφιλείς αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων ([Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005](#)). Πεδία εφαρμογής της μεθόδου είναι μεταξύ άλλων η δομική ανάλυση, η ροή ρευστών, η μεταφορά θερμότητας και μάζας, ο ηλεκτρομαγνητισμός και η ακουστική. Παρ' όλο που η παραγωγή των διεπουσών εξισώσεων για αυτά τα πεδία είναι εύκολη, η επίλυσή αυτών για προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν πολύπλοκες γεωμετρίες, τάσεις και θερμοφυσικές ιδιότητες δεν είναι πάντα εφικτή με χρήση αναλυτικών μεθόδων. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι, όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, με σκοπό τη μετατροπή των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα αλγεβρικό σύστημα το οποίο επιλύεται υπολογιστικά.

Ιστορικά, η μέθοδος άρχισε να αναπτύσσεται στη δεκαετία του 1940 στο πεδίο της δομικής μηχανικής ([Courant, 1943](#), [Hrennikoff, 1941](#), [McHenry, 1943](#)). Η μέθοδος συνεχίστηκε να εξελίσσεται την επόμενη εικοσαετία στο ίδιο πεδίο με τη συνεισφορά σπουδαίων επιστημόνων ([Argyris & Kelsey, 1960](#), [Levy, 1953](#)), έως ότου το 1963 έγινε αντιληπτό ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων θα μπορούσε να εφαρμοστεί με όρους μεταβολικής διατυπώσεως ([Melosh, 1963](#)). Αυτή η εξέλιξη επέκτεινε τα όρια εφαρμογής της μεθόδου και σε άλλα πεδία πέρα από τη δομική ανάλυση, όπως η ροή ρευστών και η μεταφορά μάζας.

Βασική ιδέα της μεθόδου είναι η υποδιαίρεση του δοθέντος χωρίου σε αλληπάλληλα υποχωρία που ονομάζονται στοιχεία. Σε κάθε ένα από αυτά τα υποχωρία, οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα, προσεγγίζονται με οποιαδήποτε κλασική μεταβολική μέθοδο ([Reddy, 1993](#)). Μία από τις πιο γνωστές μεταβολικές μεθόδους είναι η μέθοδος των σταθμισμένων υπολοίπων, σύμφωνα με την οποία κατασκευάζεται ένα ολοκλήρωμα που περιέχει το εσωτερικό γινόμενο της μερικής διαφορικής εξίσωσης με μία συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση βάρους. Έπειτα, η λύση προσεγγίζεται ως άθροισμα γνωστών συναρτήσεων βάσης με άγνωστους συντελεστές οι οποίοι προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος των υπολοίπων.

1.2 Τυπικά βήματα εφαρμογής της μεθόδου

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων διακρίνεται τόσο για την προχωρημένη μαθηματική ανάλυση όσο και για τους πολύπλοκους τεχνικούς υπολογισμούς. Η εφαρμογή της μεθόδου πραγματοποιείται σε δύο μέρη: στο θεωρητικό μέρος γίνεται χρήση της μαθηματικής ανάλυσης με σκοπό τη μετατροπή των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων και στο υπολογιστικό μέρος γίνεται χρήση υπολογιστικών κωδικών με σκοπό την κατασκευή και την επίλυση του αλγεβρικού αυτού συστήματος.

Τα βήματα που ακολουθούνται σε όλη την παρούσα διπλωματική εργασία, τόσο για τη θεωρητική όσο και για την υπολογιστική εφαρμογή της μεθόδου, δίνονται παρακάτω.

Θεωρητικό μέρος

- (i) Διατύπωση του προβλήματος: διατυπώνονται οι κατάλληλες μερικές διαφορικές εξισώσεις και συνοριακές/αρχικές συνθήκες που περιγράφουν το πρόβλημα.
- (ii) Ανάπτυξη ασθενούς μορφής: η μερική διαφορική εξίσωση πολλαπλασιάζεται με μία συνάρτηση βάρους και έπειτα, ολοκληρώνεται σε όλο το χωρίο. Εφαρμόζεται το θεώρημα της απόκλισης του Gauss, ώστε οι συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann/Robin να εισαχθούν με μορφή ολοκληρωμάτων στην ασθενή μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης.
- (iii) Διακριτοποίηση ασθενούς μορφής: η ασθενής μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης διακριτοποιείται με τη μέθοδο Galerkin.
- (iv) Ανάπτυξη μητρικών μορφής: η διακριτοποιημένη ασθενής μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής $Ku = F$.
- (v) Ανάλυση συνεισφορών: αποσύνθεση των ολικών πινάκων και διανυσμάτων σε συνεισφορές των στοιχείων.

Υπολογιστικό μέρος

- (i) Δημιουργία γεωμετρίας και πλέγματος: παράγεται η γεωμετρία και το πλέγμα του χωρίου στο οποίο διατυπώνεται το πρόβλημα.
- (ii) Τοπολογική συναρμολόγηση συνεισφορών των στοιχείων: κατασκευή του ολικού αλγεβρικού συστήματος αντιστοιχώντας τις συνεισφορές κάθε στοιχείου στις κατάλληλες θέσεις του ολικού πίνακα K και του διανύσματος F .
- (iii) Ενσωμάτωση συνοριακών συνθηκών: ενσωμάτωση των συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet/Neumann ή Robin στο ολικό αλγεβρικό σύστημα.
- (iv) Αριθμητική επίλυση: αριθμητική επίλυση του αλγεβρικού συστήματος χρησιμοποιώντας άμεσες ή επαναληπτικές μεθόδους. Επανάληψη της επίλυσης σε περιπτώσεις όπου το πρόβλημα είναι μη γραμμικό ή/και χρονικά μεταβαλλόμενο.
- (v) Επεξεργασία αποτελεσμάτων: υπολογισμός παραγόμενων μεγεθών και απεικόνιση αποτελεσμάτων.

1.3 Διατύπωση προβλήματος συνοριακών τιμών

Για την εκτενή παρουσίαση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων θα θεωρήσουμε αρχικά ένα απλό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Έστω η εξίσωση Poisson, τιθέμενη σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, το οποίο περιβάλλεται από κατά τμήματα λείο σύνορο $\partial\Omega$,

$$-\nabla^2 u = f \text{ στο } \Omega. \quad (1.1)$$

Επιπλέον, θεωρείται ότι η τιμή του u είναι γνωστή στο σύνορο $\partial\Omega_D \subseteq \partial\Omega$, όπου επιβάλλεται η συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet

$$u = u_D \text{ στο } \Omega_D, \quad (1.2)$$

ενώ στο υπόλοιπο τμήμα του συνόρου $\partial\Omega_N \subseteq \partial\Omega$, επιβάλλεται η συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u = g. \quad (1.3)$$

Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση βρίσκεται στη λεγόμενη ισχυρή μορφή. Οποιαδήποτε συνάρτηση που είναι αρκετά ομαλή, δηλαδή είναι το λιγότερο τάξης C^2 στο Ω και C^0 στο $\partial\Omega$ και ικανοποιεί τις (1.1), (1.2) και (1.3) αποτελεί κλασική λύση του παραπάνω προβλήματος συνοριακών τιμών.

1.4 Ανάπτυξη ασθενούς μορφής

Πρώτο βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων με σκοπό την επίλυση της εξίσωσης Poisson, αποτελεί η εξαγωγή της ασθενούς μορφής με την μέθοδο των σταθμισμένων υπολοίπων (Finlayson, 1972). Αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1.1) με μία συνάρτηση βάρους w και ολοκληρώνοντας σε όλο το χωρίο Ω ,

$$-\int_{\Omega} w \nabla^2 u dx = \int_{\Omega} w f dx. \quad (1.4)$$

Για να έχει νόημα η παραπάνω εξίσωση, η u επιβάλλεται να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Ωστόσο, οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της u δεν απαιτείται πλέον να είναι συνεχείς αλλά τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, δηλαδή αρκεί η u ανήκει στο χώρο $H^2(\Omega)$ (βλ. Παρ. A.2). Ταυτόχρονα, θα πρέπει η συνάρτηση βάρους w να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή να ανήκει στο χώρο $L^2(\Omega)$ (βλ. Παρ. A.1). Για να ολοκληρωθεί η εξαγωγή της ασθενούς μορφής, αρκεί να απομακρύνουμε τις δεύτερες παραγώγους εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} w \nabla^2 u dx &= -\int_{\Omega} (\nabla \cdot (w \nabla u) - \nabla w \cdot \nabla u) dx = \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla u) dx - \int_{\partial\Omega} w (\mathbf{n} \cdot \nabla u) ds \\ &= \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla u) dx - \int_{\partial\Omega_D} w (\mathbf{n} \cdot \nabla u) ds + \int_{\partial\Omega_N} w (\mathbf{n} \cdot \nabla u) ds. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Με την απομάκρυνση των δεύτερων παραγώγων της λαπλασιανής, μειώνονται οι απαιτήσεις ως προς την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης u . Ωστόσο, αυτή την φορά απαιτείται και η w να είναι μία φορά παραγωγίσιμη. Συγκεκριμένα, θα πρέπει οι παράγωγοι και των δύο να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, δηλαδή να ανήκουν στο χώρο $H^1(\Omega)$ (βλ. Παρ. A.2). Επιπλέον, για να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet στο $\partial\Omega_D \subseteq \partial\Omega$, θα πρέπει η συνάρτηση βάρους w να μηδενίζεται στο $\partial\Omega_D$ και άρα η w θα πρέπει να ανήκει στο $V := \{w \in H^1(\Omega) | w = 0 \text{ στο } \partial\Omega_D\}$. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη στην συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann, το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο $\partial\Omega_N$ γίνεται

$$\int_{\partial\Omega_N} w (\mathbf{n} \cdot \nabla u) ds = \int_{\partial\Omega_N} w g ds. \quad (1.6)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας την (1.5) και (1.6) στην (1.4), λαμβάνεται η ασθενής μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1.1),

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla u) dx = \int_{\Omega} w f dx + \int_{\partial\Omega_N} w g ds. \quad (1.7)$$

Η λύση της (1.7) ονομάζεται ασθενής λύση και ανήκει σε ένα συγκεκριμένο χώρο λύσεων $S := \{u \in H^1(\Omega) | u = u_D \text{ στο } \partial\Omega_D\}$. Τελικά, η ισχυρή μορφή του προβλήματος μετατρέπεται σε ισοδύναμη ασθενή (Brenner & Scott, 1994), η διατύπωση της οποίας είναι: Να βρεθεί $u \in S$, έτσι ώστε

$$(\nabla u, \nabla w) = (w, f) + (w, g)_{\partial\Omega_N}, \quad \forall w \in V, \quad (1.8)$$

όπου (\cdot, \cdot) είναι το L^2 εσωτερικό γινόμενο (βλ. Παρ. A.1).

1.5 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin

Έχοντας τροποποιήσει τη μερική διαφορική εξίσωση στην κατάλληλη ασθενή μορφή είναι δυνατή πλέον η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Διακριτοποιείται, λοιπόν, το χωρίο Ω σε μικρότερα υποχωρία που ονομάζονται στοιχεία. Έστω $\mathcal{T}^h(\Omega)$ μία διαμέριση του Ω σε n_{el} υποχωρία Ω^e (βλ. Σχ. 1-1) τέτοια, ώστε

$$\bar{\Omega} \approx \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e. \quad (1.9)$$

Για την παραπάνω διαμέριση $\mathcal{T}^h(\Omega)$, περιορίζουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος (1.8) σε πεπερασμένων διαστάσεων χώρους $S^h \subset S$, $V^h \subset V$ ώστε η προσέγγιση της λύσης u^h να δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης $\{\varphi_I\}_{I=1}^{N_{nodes}}$ στο πεπερασμένο χώρο λύσεων $S^h := \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_{nodes}}\}$, όπου το σύνολο $\{1, 2, \dots, N_{nodes}\}$ είναι η ολική αρίθμηση των κόμβων του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων.

Έτσι, η προσεγγιστική λύση u^h δίνεται ως

$$u^h = \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_I \varphi_I, \quad (1.10)$$

όπου N_{nodes} είναι ο αριθμός των κόμβων.

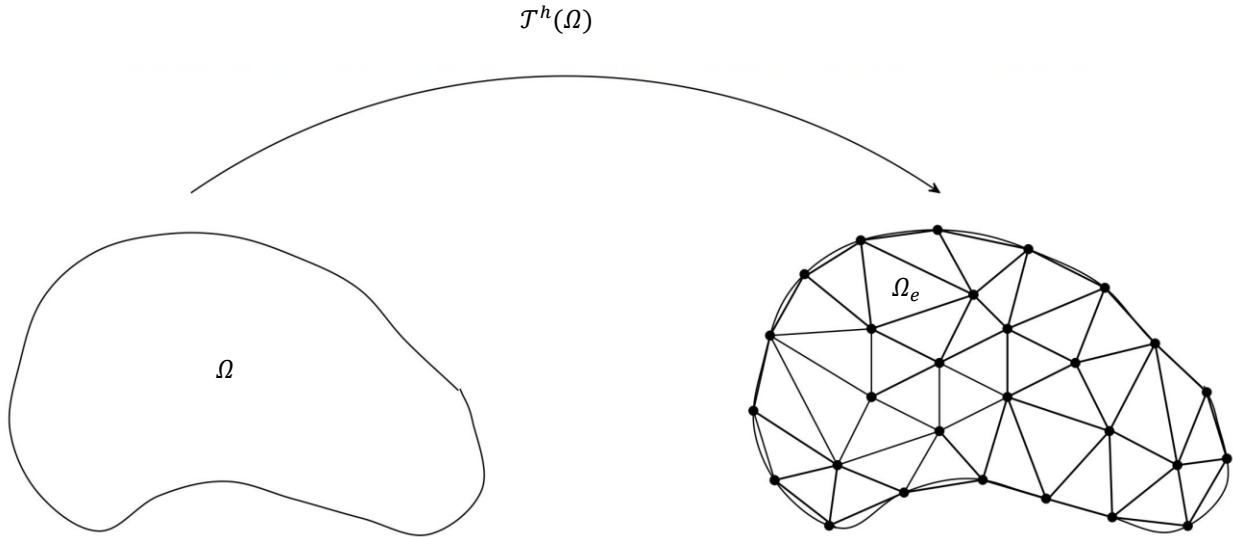
Παρατήρηση 1: Οι συναρτήσεις βάσης $\{\varphi_I\}_{I=1}^{N_{nodes}}$ που επιλέγονται είναι κατάλληλες όταν κατέχουν κάποιες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να ορίζουν μία ορθοκανονική βάση του χώρου λύσεων S^h , δηλαδή

$$\varphi_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}, \quad \delta_{IJ} = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases}$$

όπου \mathbf{x}_J είναι οι συντεταγμένες του κόμβου του πλέγματος με ολική αρίθμηση J .

Η συνάρτηση βάσης $\{\varphi_I\}_{I=1}^{N_{nodes}}$ θα πρέπει επίσης, να έχει φορέα που περιορίζεται μόνο γύρω από τα στοιχεία που περιέχουν τον κόμβο I , δηλαδή

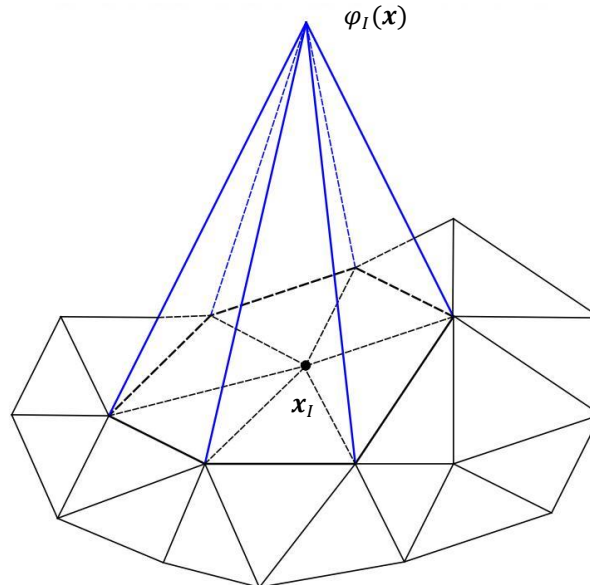
- (i) $\varphi_I(\mathbf{x}) \neq 0$ μόνο σε στοιχεία που περιέχουν τον κόμβο I .
- (ii) $\varphi_I(\mathbf{x})\varphi_J(\mathbf{x}) \neq 0$ αν και μόνο αν I, J είναι ολικοί κόμβοι που ανήκουν στο ίδιο στοιχείο.



Σχ. 1-1 Διαμέριση του χωρίου Ω σε υποχωρία Ω_e .

Η πρώτη ιδιότητα συνεπάγεται ότι η τιμή της άγνωστης λύσης στους κόμβους του πλέγματος δίνεται από την σχέση $u^h(\mathbf{x}_I) = u_I$ και η δεύτερη εξασφαλίζει ότι το γραμμικό σύστημα που θα προκύψει θα απαρτίζεται από ένα αραιό μητρώο. Το τελευταίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς υπάρχουν γρήγορες επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση τέτοιων συστημάτων ([Saad, 2003](#)).

Παρατήρηση 2: Πολλές φορές, ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα Lagrange. Στο Σχήμα [1-2](#) δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνεχούς βάσης Lagrange.



Σχ. 1-2 Ολική συνάρτηση βάσης Lagrange $\varphi_I(\mathbf{x})$.

Αντικαθιστώντας τώρα τον άγνωστο u με την προσέγγιση u^h , λαμβάνεται η διακριτοποιημένη μορφή του μεταβολικού προβλήματος: Να βρεθεί $u^h \in S^h$, έτσι ώστε

$$(\nabla u^h, \nabla w^h) = (w^h, f) + (w^h, g)_{\partial\Omega_N}, \quad \forall w^h \in V^h. \quad (1.11)$$

Η συνάρτηση βάρους w^h μπορεί να ληφθεί από το πεπερασμένων διαστάσεων χώρο V^h που κατασκευάζεται από το ίδιο σύνολο συναρτήσεων βάσης $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_{nodes}}\}$ με αυτό του χώρου των λύσεων S^h . Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η διακριτοποίηση πραγματοποιείται με την μέθοδο Galerkin ([Ciarlet, 1978](#)).

Αντικαθιστώντας στην (1.11), όπου $w^h = \{\varphi_J\}_{J=1}^{N_{nodes}}$ λαμβάνεται

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_J \cdot \nabla \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_I \varphi_I dx = \int_{\Omega} \varphi_J f dx + \int_{\partial\Omega_N} \varphi_J g ds \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes},$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{I=1}^N \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_J \cdot \nabla \varphi_I dx \right) u_I = \int_{\Omega} \varphi_J f dx + \int_{\partial\Omega_N} \varphi_J g ds \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes}. \quad (1.12)$$

1.6 Ανάπτυξη μητρωικούς μορφής

Το σύστημα των εξισώσεων (1.12) για $J = 1, 2, \dots, N_{nodes}$ μπορεί να διατυπωθεί σε αντίστοιχη μητρωική μορφή

$$Ku = F, \quad (1.13)$$

όπου K είναι ο πίνακας των συντελεστών και F το διάνυσμα του δεξιού μέλους, τα στοιχεία των οποίων δίνονται από τις σχέσεις

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_I \cdot \nabla \varphi_J dx \text{ για } I, J = 1, 2, \dots, N_{nodes}, \quad (1.14)$$

$$F_J = \int_{\Omega} \varphi_J f dx + \int_{\Gamma_N} \varphi_J g ds \text{ για } I, J = 1, 2, \dots, N_{nodes}. \quad (1.15)$$

1.7 Ανάλυση συνεισφορών

Το γεγονός ότι ο φορέας των συναρτήσεων βάσης $\{\varphi_I\}_{I=1}^{N_{nodes}}$ περιορίζεται μόνο στα γειτονικά στοιχεία που περιέχουν τον κόμβο με ολική αρίθμηση I , συνεπάγεται ότι η προσεγγιστική λύση σε κάθε στοιχείο Ω_e μπορεί να δοθεί ως γραμμικός συνδυασμός των τοπικών συναρτήσεων βάσης αυτού του στοιχείου

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{nodes}} u_i^{(e)} \varphi_i^{(e)}(\mathbf{x}), \quad (1.16)$$

όπου $\{\varphi_i^{(e)}\}_{i=1}^{n_{nodes}}$ είναι η τοπική συνάρτηση βάσης του στοιχείου Ω_e το οποίο έχει τοπική αρίθμηση $i = 1, 2, \dots, n_{nodes}$.

Έχοντας την δυνατότητα να προσεγγίζουμε την λύση κάθε φορά τοπικά σε κάθε στοιχείο, η κατασκευή των μητρώων K και F μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω μίας διαδικασίας που ονομάζεται τοπολογική συναρμολόγηση συνεισφορών των στοιχείων. Σύμφωνα με την διαδικασία αυτή, υπολογίζονται πρώτα οι τοπικοί πίνακες των συντελεστών $K^{(e)}$ και τα τοπικά διανύσματα του δεξιού μέλους $F^{(e)}$ που αντιστοιχούν στα στοιχεία $\{\Omega_e\}_{e=1}^{n_{el}}$ και έπειτα με την δράση ενός τελεστή $\mathcal{A}^{(e)}$ που συσχετίζει την τοπική αρίθμηση των κόμβων $i = 1, 2, \dots, n_{nodes}$ με την ολική $I = 1, 2, \dots, N_{nodes}$, τα στοιχεία των $K^{(e)}$, $F^{(e)}$ τοποθετούνται στις κατάλληλες θέσεις του ολικού πίνακα K και διανύσματος F ,

$$K_{IJ} = \mathcal{A}^{(e)} K_{ij}^{(e)}, K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_j^{(e)}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_i^{(e)}(\mathbf{x}) dx \text{ για } i, j = 1, 2, \dots, n_{nodes}, \quad (1.17)$$

$$F_J = \mathcal{A}^{(e)} F_j^{(e)}, F_j = \int_{\Omega_e} \varphi_j^{(e)}(\mathbf{x}) g dx + \int_{\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_e} \varphi_j^{(e)}(\mathbf{x}) g ds \text{ για } j = 1, 2, \dots, n_{nodes}. \quad (1.18)$$

Ωστόσο, ένα ζήτημα που προκύπτει είναι ότι οι εκφράσεις των $\{\varphi_i^{(e)}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{n_{nodes}}$ δεν είναι πάντα γνωστές ως προς $\mathbf{x} \in \Omega$, και αν είναι γνωστές αυτό ισχύει για δομημένα πλέγματα απλών γεωμετριών. Σε πρακτικές εφαρμογές, οι γεωμετρίες των χωρίων είναι συχνά πολύπλοκες και η διακριτοποίηση τους πραγματοποιείται με μη δομημένα πλέγματα για τα οποία δεν είναι γνωστές οι συναρτήσεις βάσης. Χρειάζεται, επομένως, ένας γραμμικός μετασχηματισμός που θα απεικονίζει ένα πρότυπο στοιχείο $\hat{\Omega}_e$ για το οποίο υπάρχουν γνωστές πρότυπες συναρτήσεις βάσης $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1}^{n_{nodes}}$ εκφρασμένες ως προς κανονικοποιημένες τοπικές συντεταγμένες $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ σε κάθε στοιχείο του πλέγματος Ω_e . Με αυτόν τον τρόπο, οδηγούμαστε στην λεγόμενη ισοπαραμετρική απεικόνιση, σύμφωνα με την οποία τόσο οι φυσικές συντεταγμένες $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ όσο και η προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης u εκφράζονται μέσω των ίδιων πρότυπων συναρτήσεων βάσης $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1}^{n_{nodes}}$, δηλαδή

$$u^h(x_1, x_2) \equiv u^h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_{nodes}} u_i^{(e)} \hat{\varphi}_i(\xi, \eta), \quad (1.19)$$

$$x_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_{nodes}} x_{1,i}^{(e)} \hat{\varphi}_i(\xi, \eta), \quad (1.20)$$

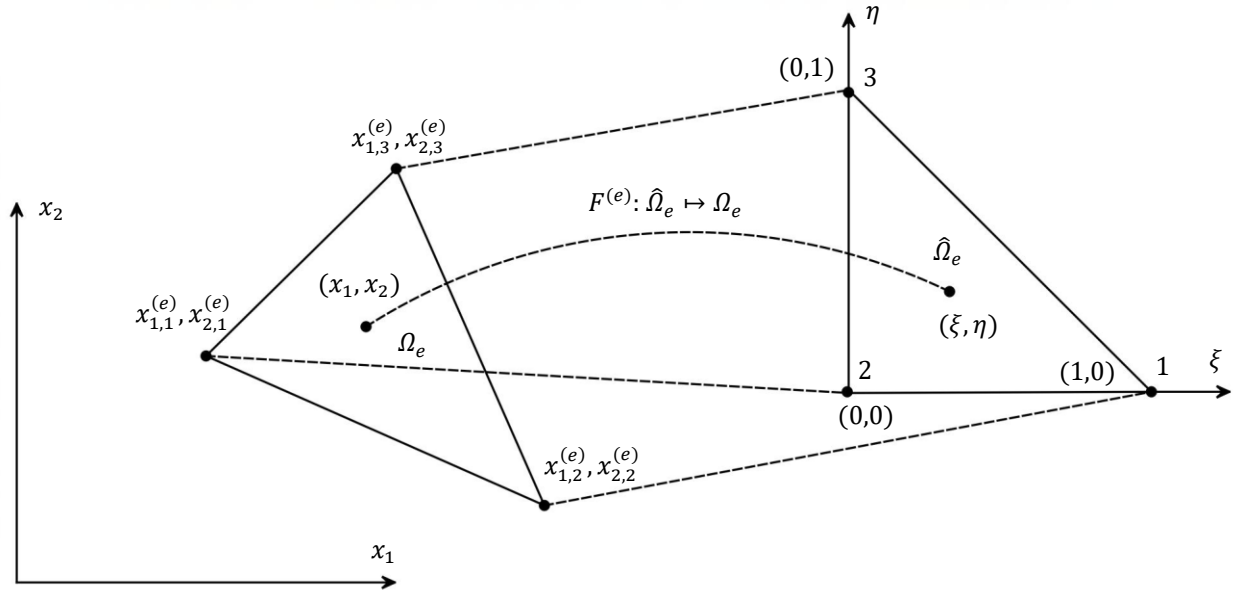
$$x_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_{nodes}} x_{2,i}^{(e)} \hat{\varphi}_i(\xi, \eta). \quad (1.21)$$

Στην περίπτωση, λοιπόν, που το στοιχείο $\Omega_e = F^{(e)}(\hat{\Omega}_e)$ αναπαριστά ένα τριγωνικό στοιχείο (βλ. Σχ. 1-3), οι πρότυπες συναρτήσεις βάσεις δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{\varphi}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad (1.22)$$

$$\hat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \xi, \quad (1.23)$$

$$\hat{\varphi}_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (1.24)$$



Σχ. 1-3 Απεικόνιση πρότυπου στοιχείου $\hat{\Omega}_e$ σε γενικό στοιχείο Ω_e .

1.7.1 Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών

Στην περίπτωση που η διακριτοποίηση του χωρίου Ω έχει πραγματοποιηθεί με τριγωνικά στοιχεία, τότε οι συνεισφορές του τριγωνικού στοιχείου (βλ. Σχ. 1-3) στο ολικό σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων δίνονται από τον τοπικό πίνακα $K^{(e)}$ με διαστάσεις 3×3 και το τοπικό διάνυσμα $f^{(e)}$ με διαστάσεις 3×1 . Κάθε όρισμα του παραπάνω πίνακα και διανύσματος αναπαριστά ένα ολοκλήρωμα πάνω στο στοιχείο Ω_e το οποίο μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα πάνω στο πρότυπο $\hat{\Omega}_e$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\hat{\Omega}_e} f(\mathbf{x}(\xi, \eta)) |J^{(e)}(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad (1.25)$$

όπου $f(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση που πρόκειται να ολοκληρωθεί και ο παράγοντας $|J^{(e)}(\xi, \eta)|$ είναι η ορίζουσα της Ιακωβιανής μήτρας

$$J^{(e)}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Τα ορίσματα της Ιακωβιανής μήτρας $J^{(e)}(\xi, \eta)$ προκύπτουν παραγωγίζοντας τις φυσικές συντεταγμένες ως προς τις πρότυπες ξ, η

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 x_{1,i}^{(e)} \frac{\partial \hat{\varphi}_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 x_{2,i}^{(e)} \frac{\partial \hat{\varphi}_i(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 x_{1,i}^{(e)} \frac{\partial \hat{\varphi}_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 x_{2,i}^{(e)} \frac{\partial \hat{\varphi}_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}.$$

Τα ορίσματα του τοπικού πίνακα $K^{(e)}$ εξαρτώνται, ωστόσο, και από τις μερικές παραγώγους της τοπικής συνάρτησης βάσης $\varphi_i^{(e)}$. Αυτές συσχετίζονται με τις μερικές παραγώγους της πρότυπης συνάρτησης βάσης $\hat{\varphi}_i$ μέσω του κανόνα αλυσίδας

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta}.$$

Ο παραπάνω κανόνας αλυσίδας αναπαριστά ένα γραμμικό σύστημα 2×2 το οποίο σε μητρική μορφή γράφεται

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = J^{(e)}(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \end{Bmatrix}, \quad (1.30)$$

και η επίλυση του οποίου οδηγεί στις σχέσεις

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \left(J^{(e)}(\xi, \eta) \right)^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (1.31)$$

όπου

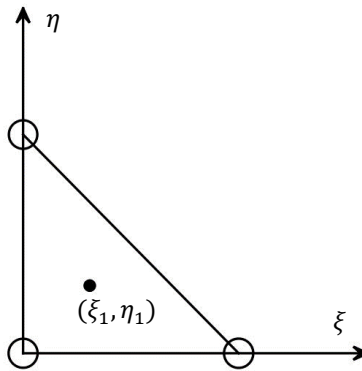
$$(J^{(e)}(\xi, \eta))^{-1} = \frac{\text{adj}(J^{(e)}(\xi, \eta))}{|J^{(e)}(\xi, \eta)|} = \frac{1}{|J^{(e)}(\xi, \eta)|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

1.7.2 Αριθμητική ολοκλήρωση

Η αλλαγή των μεταβλητών στα ολοκληρώματα καθιστά δυνατό τον υπολογισμό όλων των συνεισφορών στο πρότυπο στοιχείο $\hat{\Omega}_e$. Ωστόσο, ο ακριβής προσδιορισμός των διπλών ολοκληρωμάτων πάνω στο στοιχείο $\hat{\Omega}_e$ συνήθως είναι δύσκολος, αν όχι αδύνατος. Γι' αυτό το σκοπό, χρησιμοποιούνται αριθμητικά σχήματα ολοκλήρωσης όπως το Gauss-Legendre, σύμφωνα με το οποίο η προσέγγιση του εκάστοτε ολοκληρώματος προκύπτει από την ακριβή ολοκλήρωση ενός πολυωνύμου παρεμβολής. Το αποτέλεσμα είναι η αντικατάσταση του ολοκληρώματος με ένα ζυγισμένο άθροισμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης σε συγκεκριμένα σημεία, γνωστά ως σημεία ολοκλήρωσης Gauss (βλ. Σχ. 1-4), που προκύπτουν από τις ρίζες των πολυωνύμων Legendre. Η ολοκλήρωση, λοιπόν, πάνω στο πρότυπο στοιχείο $\hat{\Omega}_e$ αντικαθίστανται από την σχέση

$$\int_{\hat{\Omega}_e} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{gp}} \omega_k f(\xi_k, \eta_k), \quad (1.33)$$

όπου ω_k είναι τα βάρη που σχετίζονται με τα σημεία ολοκλήρωσης Gauss (ξ_k, η_k) , $k = 1, 2, \dots, n_{gp}$.



Σχ. 1-4 Σημείο ολοκλήρωσης Gauss για τριγωνικό στοιχείο 1^{ης} τάξης: $(\xi_1, \eta_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ με βάρος $\omega_1 = 1$.

1.7.3 Υπολογισμός επιφανειακών ολοκληρωμάτων

Στην περίπτωση που το άκρο του στοιχείου $\partial\Omega_e$ ταυτίζεται με το σύνορο του χωρίου $\partial\Omega_N$ για το οποίο δίνεται η συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann (1.3), θα πρέπει να υπολογιστεί και το επιφανειακό ολοκλήρωμα που βρίσκεται στα στοιχεία του τοπικού διανύσματος $F^{(e)}$. Ας υποθέσουμε ότι, το στοιχείο Ω_e εφάπτεται στο σύνορο $\partial\Omega_N$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-5. Τότε, το διαφορικό ds , το οποίο βρίσκεται στο επιφανειακό ολοκλήρωμα, δίνεται από την σχέση

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_1}{\partial \eta} d\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} d\eta\right)^2}. \quad (1.31)$$

Όμως, για την πλευρά του στοιχείου που βρίσκεται πάνω σύνορο $\partial\Omega_N$ (βλ. Σχ. 1-5) ισχύει $\eta = 1 - \xi$ και $d\eta = -d\xi$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$ds = J_{\partial\Omega_N}^{(e)}(\xi, 1 - \xi)d\xi, \quad (1.32)$$

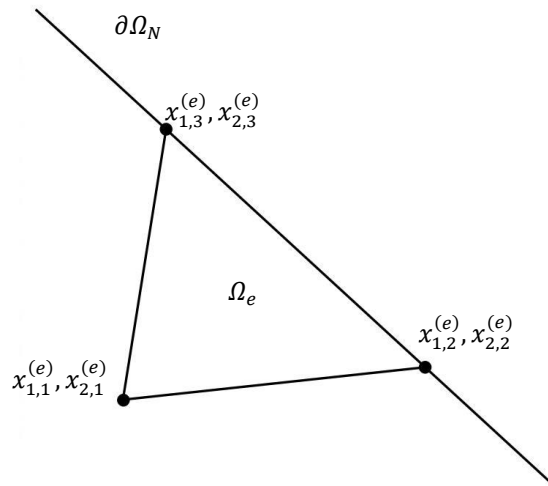
όπου

$$\begin{aligned} & J_{\partial\Omega_N}^{(e)}(\xi, 1 - \xi) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(\xi, 1 - \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial x_1(\xi, 1 - \xi)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(\xi, 1 - \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial x_2(\xi, 1 - \xi)}{\partial \eta}\right)^2}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

οδηγώντας στην παρακάτω σχέση για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος

$$\int_{\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_e} \varphi_j^{(e)}(\mathbf{x}) g ds = - \int_0^1 \hat{\varphi}_j(\xi, 1 - \xi) g J_{\partial\Omega_N}^{(e)}(\xi, 1 - \xi) d\xi \text{ για } j = 1, 2, 3, \quad (1.34)$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά Gauss.



Σχ. 1-5 Στοιχείο Ω_e που εφάπτεται πάνω στο σύνορο $\partial\Omega_N$.

1.8 Ενσωμάτωση συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet

Από την εφαρμογή της τοπολογικής συναρμολόγησης των συνεισφορών των στοιχείων, λαμβάνεται ένα αραιό γραμμικό σύστημα της μορφής

$$Ku = F. \quad (1.13)$$

Ωστόσο, προτού το σύστημα επιλυθεί, θα πρέπει να εισαχθούν σε αυτό οι συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet. Αν \mathbf{x}_I είναι ο κόμβος πάνω στο σύνορο $\partial\Omega_D$, αυτό πραγματοποιείται αντικαθιστώντας την εξίσωση Galerkin που χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση βάρους φ_I με την σχέση

$$u_I = u_D(\mathbf{x}_I) \quad (1.35)$$

Ως αποτέλεσμα, ο πίνακας των συντελεστών K και το διάνυσμα του δεξιού μέλους F θα πρέπει να τροποποιηθούν ως εξής:

$$K_{IJ} := \delta_{IJ} \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes} \quad (1.36)$$

$$F_I := u_D(\mathbf{x}_I) \quad (1.37)$$

Παρατήρηση 1.3: Ορίζοντας ως χώρο των συναρτήσεων βάρους της ασθενούς μορφής το $V := \{w \in H^1(\Omega) | w = 0 \text{ στο } \partial\Omega_D\}$, προσδίδεται η ιδιότητα στις συναρτήσεις βάρους να μηδενίζονται πάνω στο σύνορο τύπου Dirichlet. Με αυτό τον τρόπο, λαμβάνονται μηδενικές αλγεβρικές εξισώσεις στους κόμβους \mathbf{x}_I του συνόρου $\partial\Omega_D$, λόγω μηδενισμού της συνάρτησης βάρους w_I στα σημεία αυτά. Έτσι, αρκεί να αντικαταστήσουμε τα μηδενικά στοιχεία K_{IJ} και F_I με τις σχέσεις (1.36) και (1.37).

Κεφάλαιο 2: Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα: εφαρμογή στην εξίσωση μεταφοράς θερμότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στο μαθηματικό πρότυπο που περιγράφει την χρονικά μεταβαλλόμενη μεταφορά θερμότητας σε ένα κινούμενο ρευστό. Η μετατροπή της διέπουσας εξίσωσης σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων πραγματοποιείται ακολουθώντας τα ίδια βήματα που εφαρμόστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, παράγεται η μεταβολική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας, λαμβάνεται το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων μέσω εφαρμογής της μεθόδου Galerkin, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα αστάθειας του συναγωγικού όρου με την προσθήκη όρων σταθεροποίησης, πραγματοποιείται η ανάλυση συνεισφορών και εφαρμόζονται οι ρητές και πεπλεγμένες μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης.

2.1 Διατύπωση του γενικού προβλήματος μεταφοράς θερμότητας

Έστω ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με κατά τμήματα λείο σύνορο $\partial\Omega$ το οποίο αποτελείται από ένα τμήμα $\partial\Omega_D$ για το οποίο δίνεται η τιμή της θερμοκρασίας και ένα συμπληρωματικό τμήμα $\partial\Omega_N$ για το οποίο δίνεται η ροή θερμότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-1. Η χρονικά μεταβαλλόμενη μεταφορά και παραγωγή θερμότητας σε ένα κινούμενο και ασυμπιεστο ρευστό που βρίσκεται στο Ω , περιγράφεται μαθηματικά από την παρακάτω γενική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας (Bird, Stewart, & Lighfoot, 2001)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\bar{\mathbf{k}} \nabla T) - f = 0 \text{ στο } \Omega \text{ για } t \in (0, \tau], \quad (2.1)$$

όπου $T(\mathbf{x}, t)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο $\mathbf{x} \in \Omega$ και σε χρόνο $t \in (0, \tau]$. Η ταχύτητα $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και ο ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας f θεωρούνται ότι είναι συναρτήσεις του χώρου $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και του χρόνου t .

Η θερμική αγωγιμότητα $\bar{\mathbf{k}}$ στη γενική της μορφή αποτελεί έναν 2×2 τανυστή 2^{ης} τάξης. Σε περίπτωση που το ρευστό είναι ισότροπο, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$\bar{\mathbf{k}} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Σε διαφορετική περίπτωση το ρευστό είναι ανισότροπο. Το ισότροπο ρευστό είναι ομογενές αν το k είναι ανεξάρτητο από τη θέση $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, διαφορετικά είναι μη ομογενές.

Για την ανάλυση που ακολουθεί θα θεωρηθεί ότι ισχύει η περίπτωση που το ρευστό είναι ισότροπο και ομογενές, έτσι ώστε η ροή θερμότητας να είναι ανάλογη της βαθμίδας θερμοκρασίας. Τότε, η θερμική αγωγιμότητα είναι βαθμωτό μέγεθος και η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας (2.1) λαμβάνει την απλοποιημένη μορφή

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (k \nabla T) - f = 0 \text{ στο } \Omega \text{ για } t \in (0, \tau]. \quad (2.3)$$

2.2 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Η αρχική συνθήκη της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας στην γενική της μορφή δίνεται από την σχέση

$$T(\mathbf{x}, 0) = T^0(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

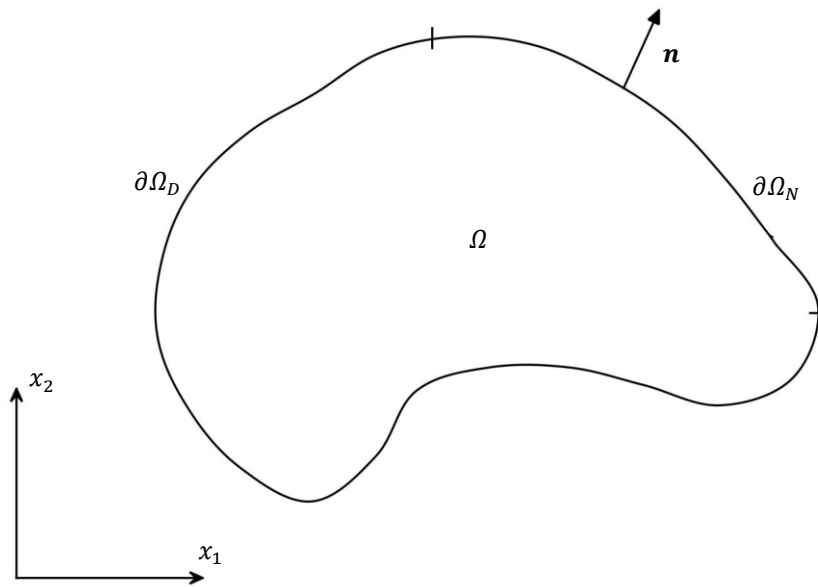
Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, στο σύνορο $\partial\Omega_D$ δίνεται η συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet

$$T(\mathbf{x}, t) = T_D(\mathbf{x}, t) \text{ στο } \partial\Omega_D, \quad (2.5)$$

ενώ στο σύνορο $\partial\Omega_N$ δίνεται η συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann

$$-k\nabla T \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, t) \text{ στο } \partial\Omega_N, \quad (2.6)$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο $\partial\Omega_N$ (βλ. Σχ. 2-1).



Σχ. 2-1 Χωρίο Ω , στο οποίο αναζητείται η λύση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας.

Παρατήρηση 2.1: Αντί για την επιβολή της συνθήκης τύπου Neumann στο σύνορο $\partial\Omega_N$, θα μπορούσε να οριστεί η συνθήκη τύπου Robin: $-k\nabla T \cdot \mathbf{n} = hT + g$ στο $\partial\Omega_N$.

2.3 Εξαγωγή ασθενούς μορφής

Για την εξαγωγή της ασθενούς μορφής της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2.3) με μία συνάρτηση βάρους $w \in V := \{w \in H^1(\Omega) | w = 0 \text{ στο } \partial\Omega_D\}$ και έπειτα ολοκληρώνουμε σε όλο το χωρίο Ω ,

$$\int_{\Omega} w \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_{\Omega} w \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T dx - \int_{\Omega} w \nabla \cdot (k \nabla T) dx = \int_{\Omega} w f dx. \quad (2.7)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης του Gauss στον όρο που περιγράφει την μεταφορά θερμότητας με αγωγή¹

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} w \nabla \cdot (k \nabla T) dx &= \int_{\Omega} k \nabla w \cdot \nabla T dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (k w \nabla T) dx \\ &= \int_{\Omega} k \nabla w \cdot \nabla T dx - \int_{\partial \Omega} w (k \nabla T) \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

και με αντικατάσταση των συνοριακών συνθηκών, λαμβάνεται

$$- \int_{\Omega} w \nabla \cdot (k \nabla T) dx = \int_{\Omega} k \nabla w \cdot \nabla T dx - \int_{\partial \Omega_D} w (k \nabla T) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\partial \Omega_N} w (k \nabla T) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.9)$$

Όμως, το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο τύπου Dirichlet απαλείφεται, καθώς η συνάρτηση βάρους $w \in V$ μηδενίζεται σε αυτό. Έτσι, η εξίσωση (2.9) γίνεται

$$- \int_{\Omega} w \nabla \cdot (k \nabla T) dx = \int_{\Omega} k \nabla w \cdot \nabla T dx - \int_{\partial \Omega_N} w g ds. \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.10) στη (2.7), προκύπτει η ασθενής μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης (2.3)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c_p w \frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \rho c_p w \mathbf{u} \cdot \nabla T dx + \int_{\Omega} k \nabla w \cdot \nabla T dx \\ = \int_{\Omega} w f dx - \int_{\partial \Omega_N} w g ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Επομένως, η μεταβολική μορφή του προβλήματος είναι να βρεθεί: $T \in S := \{T(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega), t \in (0, \tau] | T = T_D \text{ στο } \partial \Omega_D\}$, δοθείσας της αρχικής συνθήκης (2.4), έτσι ώστε

$$\left(\rho c_p w, \frac{\partial T}{\partial t} \right) + (\rho c_p w \mathbf{u}, \nabla T) + (k \nabla w, \nabla T) = (w, f) - (w, g), \quad \forall w \in V, \quad (2.12)$$

όπου $(\cdot; \cdot)$ υπενθυμίζεται ότι είναι το L^2 εσωτερικό γινόμενο (βλ. Παρ. A.1).

2.4 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin

Έστω $\mathcal{T}^h(\Omega)$ μία διαμέριση του χωρίου Ω σε n_{el} στοιχεία Ω^e τέτοια, ώστε

$$\bar{\Omega} \approx \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e. \quad (2.13)$$

Για την παραπάνω διαμέριση $\mathcal{T}^h(\Omega)$, περιορίζουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος (2.12) σε πεπερασμένων διαστάσεων χώρους $S^h \subset S$ και $V^h \subset V$, ώστε η προσέγγιση της λύσης T^h να δίνεται ως

¹ εφαρμόζεται η ταυτότητα $\nabla \cdot \varphi \mathbf{v} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{v} + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{v})$.

γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης $\{\varphi\}_{I=1}^{N_{nodes}}$, οι οποίες παράγουν τον πεπερασμένο χώρο λύσεων $S^h := \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_{nodes}}\}$. Έτσι, η προσεγγιστική λύση δίνεται ως:

$$T^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^{N_{nodes}} T_I(t) \varphi_I(\mathbf{x}). \quad (2.14)$$

Αντικαθιστώντας όπου T την προσέγγιση της λύσης T^h , λαμβάνεται η διακριτοποιημένη μεταβολική μορφή του προβλήματος: να βρεθεί $T^h \in S^h$, δοθείσας της αρχικής συνθήκης (2.4), έτσι ώστε

$$\left(\rho c_p w^h, \frac{\partial T^h}{\partial t} \right) + (\rho c_p w^h \mathbf{u}, \nabla T^h) + (k \nabla w^h, \nabla T^h) = (w^h, f) - (w^h, g)_{\partial \Omega_N}, \quad (2.15)$$

$$\forall w^h \in V^h.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ως συναρτήσεις βάρους τις ίδιες τις συναρτήσεις βάσης $w^h \in V^h := \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_{nodes}}\}$, λαμβάνεται ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\sum_{I=1}^{N_{nodes}} \left[\int_{\Omega} \rho c_p \varphi_J \varphi_I d\mathbf{x} \right] \frac{dT_I}{dt} + \sum_{I=1}^{N_{nodes}} \left[\int_{\Omega} \rho c_p \varphi_J \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_I d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \kappa \nabla \varphi_J \cdot \nabla \varphi_I d\mathbf{x} \right] T_I \quad (2.16)$$

$$= \int_{\Omega} \varphi_J f d\mathbf{x} - \int_{\partial \Omega_N} \varphi_J g ds \text{ για } J = 1, 2, \dots, N_{nodes},$$

το οποίο είναι εφοδιασμένο με N_{nodes} αρχικές συνθήκες

$$T_J^0 = T^0(\mathbf{x}_J), \quad J = 1, 2, \dots, N_{nodes}. \quad (2.17)$$

2.5 Εξαγωγή μητρικών μορφής

Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (2.16) μπορεί να διατυπωθεί και σε αντίστοιχη μητρική μορφή

$$M \frac{dT}{dt} + (C + K)T = F, \quad (2.18)$$

όπου T είναι το διάνυσμα των χρονικά εξαρτώμενων τιμών θερμοκρασίας στους κόμβους του πλέγματος, M το μητρώο μάζας, C το μητρώο που αντιστοιχεί στον συναγωγικό όρο, K το μητρώο που αντιστοιχεί στον όρο μεταφοράς θερμότητας με αγωγή και F το διάνυσμα που αντιστοιχεί στον όρο παραγωγής θερμότητας, τα στοιχεία των οποίων, δίνονται από τις σχέσεις

$$M_{IJ} = \int_{\Omega} \rho c_p \varphi_J \varphi_I d\mathbf{x} \text{ για } I, J = 1, \dots, N_{nodes}, \quad (2.19)$$

$$C_{IJ} = \int_{\Omega} \rho c_p \varphi_J \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_I d\mathbf{x} \text{ για } I, J = 1, \dots, N_{nodes}, \quad (2.20)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} k \nabla \varphi_I \cdot \nabla \varphi_J dx, \quad I, J = 1, \dots, N_{nodes}, \quad (2.21)$$

$$F_J = \int_{\Omega} \varphi_J f dx + \int_{\partial \Omega_N} \varphi_J g ds, \quad J = 1, \dots, N_{nodes}. \quad (2.22)$$

2.6 Σταθεροποίηση συναγωγικού όρου

Η διακριτοποίηση του συναγωγικού όρου της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας με την μέθοδο Galerkin χαρακτηρίζεται από την κακή συμπεριφορά που επιδεικνύει ο μη συμμετρικός πίνακας C . Ως αποτέλεσμα, το διακριτοποιημένο σχήμα (2.16) είναι αριθμητικά ασταθές για μεγάλες τιμές του αδιάστατου αριθμού $Pe = \rho c_p / k$ (Hughes & Brooks, 1979). Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές σταθεροποίησης (Onate & Manzan, 2000) με πιο γνωστές τις μεθόδους Streamline-Upwind Petrov-Galerkin (Brooks & Hughes, 1982) και Galerkin Least-Square (Codina, 1993). Κοινό όλων σχεδόν αυτών των τεχνικών σταθεροποίησης, είναι η προσθήκη ενός επιπλέον όρου στη διακριτοποιημένη ασθενή μορφή της εξίσωσης του προβλήματος, που έχει την μορφή (Donea & Huerta, 2003)

$$s(w^h, u^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \mathcal{P}(w^h) \mathcal{R}(u^h) dx, \quad (2.23)$$

όπου \mathcal{R} είναι το υπόλοιπο της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας (2.3), τ η παράμετρος σταθεροποίησης και \mathcal{P} ένας τελεστής που δρα πάνω στην συνάρτηση βάρους². Ο παράγοντας $\mathcal{P}(w^h)$ είναι και αυτός που χαρακτηρίζει την εκάστοτε τεχνική σταθεροποίησης. Η κύρια τεχνική σταθεροποίησης που χρησιμοποιεί το λογισμικό πακέτο Elmer για την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας είναι η μέθοδος Galerkin Least-Square (Savolainen, Jarvinen, Ruokolainen, & Anttila, 2000), σύμφωνα με την οποία ο τελεστής \mathcal{P} λαμβάνει την μορφή

$$\mathcal{P}(w^h) = \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla w^h + k \nabla^2 w^h. \quad (2.24)$$

Ο όρος σταθεροποίησης σε αυτήν την περίπτωση δίνεται από την σχέση

$$s(w^h, T^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla w^h - k \nabla^2 w^h) \left(\rho c_p \frac{\partial T^h}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T^h - k \nabla^2 T^h - f \right) dx, \quad (2.25)$$

οδηγώντας στην παρακάτω διακριτοποιημένη ασθενή μορφή της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας (2.3),

$$\begin{aligned} & \left(\rho c_p w^h, \frac{\partial T^h}{\partial t} \right) + (\rho c_p w^h \mathbf{u}, \nabla T^h) + (k \nabla w^h, \nabla T^h) + s(w^h, T^h) \\ & = (w^h, f) - (w^h, g), \quad \forall w^h \in V^h. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Η παράμετρος σταθεροποίησης τ , στην προκειμένη περίπτωση, ορίζεται από την σχέση (Franca, Frey, & Hughes, 1992)

² Ο όρος $\mathcal{P}(w^h)$ δεν είναι κατά ανάγκη C^0 διαμέσου των ορίων των στοιχείων. Για αυτό, η ολοκλήρωση στην εξ. (2.23) δεν πραγματοποιείται πάνω σε όλο χωρίο Ω αλλά στο εσωτερικό κάθε στοιχείου Ω_e .

$$\tau = \frac{h_K \xi(Pe^h)}{2\rho c_p \|\mathbf{u}\|_2}, \quad (2.27)$$

όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα και Pe^h ο αριθμός Péclet του πλέγματος, ο οποίος δίνεται από την σχέση

$$Pe^h = \frac{m_K h_K \rho c_p \|\mathbf{u}\|_2}{2k}, \quad (2.28)$$

με

$$\xi(Pe^h) = \begin{cases} Pe^h & \text{αν } 0 \leq Pe^h < 1 \\ 1 & \text{αν } Pe^h \geq 1 \end{cases}. \quad (2.29)$$

Η παράμετρος m_K είναι μια θετική σταθερά και η παράμετρος h_K συμβολίζει το τοπικό μέγεθος του πλέγματος. Η τελευταία ισούται με την απόσταση της μεγαλύτερης πλευράς του εκάστοτε στοιχείου Ω_e .

Χρησιμοποιώντας τώρα ως συναρτήσεις βάρους τις ίδιες τις συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της θερμοκρασίας (μέθοδος Galerkin), η διακριτοποιημένη ασθενής μορφή της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας (2.26) διατυπώνεται σε αντίστοιχη μητρική μορφή

$$(M + M_s) \frac{dT}{dt} + (C + C_s + K + K_s)T = F + F_s, \quad (2.30)$$

όπου τα μητρώα M_s , C_s , K_s και το διάνυσμα F_s περιλαμβάνουν τους όρους σταθεροποίησης της σχέσης (2.25), τα στοιχεία των οποίων δίνονται από τις σχέσεις

$$M_{sIJ} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega} \tau \rho c_p (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J - k \nabla^2 \varphi_J) \varphi_I d\mathbf{x} \right] \text{ για } I, J = 1, 2, \dots, N_{nodes}, \quad (2.31)$$

$$C_{sIJ} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau \rho c_p (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J - k \nabla^2 \varphi_J) \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_I d\mathbf{x} \right] \text{ για } I, J = 1, 2, \dots, N_{nodes}, \quad (2.32)$$

$$K_{sIJ} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau k (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J - k \nabla^2 \varphi_J) \nabla^2 \varphi_I d\mathbf{x} \right] \text{ για } I, J = 1, 2, \dots, N_{nodes}, \quad (2.33)$$

$$F_{sJ} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J - k \nabla^2 \varphi_J) f d\mathbf{x} \right] \text{ για } J = 1, 2, \dots, N_{nodes}. \quad (2.34)$$

2.7 Ανάλυση συνεισφορών

Η κατασκευή των ολικών πινάκων M , C , K και του διανύσματος F πραγματοποιείται με την γνωστή διαδικασία της τοπολογικής συναρμολόγησης των συνεισφορών των στοιχείων. Σύμφωνα με αυτή, υπολογίζονται τα στοιχεία των τοπικών πινάκων $M^{(e)}$, $C^{(e)}$, $K^{(e)}$ και τα στοιχεία του τοπικού διανύσματος

$F^{(e)}$ και μέσω του τελεστή συναρμολόγησης $\mathcal{A}^{(e)}$ τοποθετούνται στις κατάλληλες θέσεις των ολικών πινάκων M , C , K και του διανύσματος F αντιστοίχως

$$M_{IJ} = \mathcal{A}^{(e)} M_{ij}^{(e)}, \quad M_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \rho c_p \varphi_j^{(e)} \varphi_i^{(e)} d\mathbf{x} \text{ για } i, j = 1, 2, \dots, n_{nodes}, \quad (2.35)$$

$$K_{IJ} = \mathcal{A}^{(e)} K_{ij}^{(e)}, \quad K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} d\mathbf{x} \text{ για } i, j = 1, 2, \dots, n_{nodes}, \quad (2.36)$$

$$C_{IJ} = \mathcal{A}^{(e)} C_{ij}^{(e)}, \quad C_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \rho c_p \varphi_j^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} d\mathbf{x} \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes}, \quad (2.37)$$

$$F_j = \mathcal{A}^{(e)} F_j^{(e)}, \quad F_j^{(e)} = \int_{\Omega_e} \varphi_j^{(e)} f^{(e)} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_N} \varphi_j^{(e)} g^{(e)} ds \text{ για } j = 1, \dots, n_{nodes}, \quad (2.38)$$

όπου n_{nodes} είναι ο αριθμός των κόμβων των στοιχείων Ω_e σε τοπική αρίθμηση.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί η προαναφερθείσα τεχνική σταθεροποίησης Galerkin Least-Square τότε, απαιτείται και η κατασκευή των ολικών πινάκων M_S, C_S, K_S και διανύσματος F_S που περιλαμβάνουν τους όρους σταθεροποίησης

$$M_{S_{IJ}} = \mathcal{A}^{(e)} M_{S_{ij}}^{(e)}, \quad M_{S_{ij}}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \tau \rho c_p \left(\rho c_p \mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} - k \nabla^2 \varphi_j^{(e)} \right) \varphi_i^{(e)} d\mathbf{x} \text{ για } i, j = 1, 2, \dots, n_{nodes}, \quad (2.39)$$

$$C_{S_{IJ}} = \mathcal{A}^{(e)} C_{S_{ij}}^{(e)}, \quad C_{S_{ij}}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \tau \rho c_p \left(\rho c_p \mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} - k \nabla^2 \varphi_j^{(e)} \right) \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} \right) d\mathbf{x} \text{ για } i, j = 1, 2, \dots, n_{nodes}, \quad (2.40)$$

$$K_{S_{IJ}} = \mathcal{A}^{(e)} K_{S_{ij}}^{(e)}, \quad K_{S_{ij}}^{(e)} = - \int_{\Omega_e} \tau k \left(\rho c_p \mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} - k \nabla^2 \varphi_j^{(e)} \right) \nabla^2 \varphi_i^{(e)} d\mathbf{x} \text{ για } i, j = 1, 2, \dots, n_{nodes}, \quad (2.41)$$

$$F_{S_j} = \mathcal{A}^{(e)} F_{S_j}^{(e)}, \quad F_{S_j}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \tau \left(\rho c_p \mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} - k \nabla^2 \varphi_j^{(e)} \right) f^{(e)} d\mathbf{x} \text{ για } j = 1, 2, \dots, n_{nodes}. \quad (2.42)$$

2.8 Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης

Για την επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (2.30), απαιτείται μία μέθοδος χρονικής διακριτοποίησης που θα αρχικοποιεί το διάνυσμα των χρονικά εξαρτώμενων τιμών θερμοκρασίας στους κόμβους του πλέγματος $T^{(0)} = \{T_I^{(0)}\}$ και θα χρησιμοποιεί το διάνυσμα $T^{(n)} = \{T_I^{(n)}\}$ σε χρόνο $t^{(n)}$ για να υπολογίσει το διάνυσμα $T^{(n+1)} = \{T_I^{(n+1)}\}$ σε χρόνο $t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t$ όπου Δt το χρονικό βήμα.

Συνήθως, οι μέθοδοι που επιλέγονται σε αυτή την περίπτωση είναι οι έμμεσοι θ μέθοδοι, οι οποίες διακριτοποιούν τη μεταβλητή του χρόνου ως εξής:

$$\tilde{M} \frac{T^{(n+1)} - T^{(n)}}{\Delta t} = \theta [-(\tilde{C} + \tilde{K})T^{(n+1)} + \tilde{F}^{(n+1)}] + (1 - \theta) [-(\tilde{C} + \tilde{K})T^{(n)} + \tilde{F}^{(n)}]$$

ή αναδιατάσσοντας του όρους

$$[\tilde{M} + \theta \Delta t (\tilde{C} + \tilde{K})] T^{(n+1)} = [\tilde{M} - (1 - \theta) \Delta t (\tilde{C} + \tilde{K})] T^{(n)} + \Delta t [\theta \tilde{F}^{(n+1)} + (1 - \theta) \tilde{F}^{(n)}], \quad (2.43)$$

όπου θ είναι μία παράμετρος που παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ και

$$\tilde{M} = M + M_s, \quad (2.44)$$

$$\tilde{C} = C + C_s, \quad (2.45)$$

$$\tilde{K} = K + K_s, \quad (2.46)$$

$$\tilde{F} = F + F_s. \quad (2.47)$$

Διάφορες γνωστές μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης λαμβάνονται για διαφορετικές τιμές θ . Για $\theta < 1/2$, το σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης είναι ευσταθές υπό όρους. Η πιο γνωστή μέθοδος σε αυτή την κατηγορία είναι η ρητή μέθοδος Euler, που προκύπτει για $\theta = 0$. Για $\theta \geq 1/2$, το σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης είναι ευσταθές άνευ όρων με πιο γνωστές στην περίπτωση αυτή, την πεπλεγμένη μέθοδο Euler ($\theta = 1$) και τη Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$).

Κεφάλαιο 3: Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στις εξισώσεις Navier-Stokes

Οι εξισώσεις Navier-Stokes περιγράφουν το πρόβλημα της ασυμπίεστης και ιζώδους ροής και ανήκουν στα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Η πολυπλοκότητά τους και ο μη γραμμικός χαρακτήρας τους, καθιστούν αδύνατη την επίλυση τους για προβλήματα πρακτικού ενδιαφέροντος με αποτέλεσμα αναλυτικές λύσεις να υπάρχουν μόνο για ένα περιορισμένο αριθμό ροών με απλές γεωμετρίες και οριακές συνθήκες. Για το λόγο αυτό, η προσφυγή σε υπολογιστικές μεθόδους, όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μονόδρομο. Η αριθμητική επίλυσή τους, ωστόσο, εμφανίζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Η πρώτη δυσκολία αφορά την παρουσία του μη γραμμικού συναγωγικού όρου στην εξίσωση διατήρησης ορμής. Συγκεκριμένα, σε ροές που οι αδρανειακές δυνάμεις κυριαρχούν έναντι των επιφανειακών, η κλασική μέθοδος Galerkin αποτυγχάνει, και το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας εμφανίζει μία ψευδή ταλαντωτική συμπεριφορά. Η δεύτερη δυσκολία σχετίζεται με τον ρόλο που διαδραματίζει η μεταβλητή της πίεσης στις εξισώσεις Navier-Stokes. Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι η πίεση βρίσκεται μόνο στην εξίσωση διατήρησης ορμής απουσιάζοντας από την εξίσωση συνέχειας, προσδίδει σε αυτήν το χαρακτήρα του πολλαπλασιαστή Lagrange και επομένως, ο ρόλος της είναι να προσδίδει περισσότερους βαθμούς ελευθερίας στο αλγεβρικό σύστημα με σκοπό την ικανοποίηση της συνθήκης ασυμπίεστης ροής. Αυτό καθιστά τις εξισώσεις Navier-Stokes ένα ιδιαίζων σύστημα διαφορικών εξισώσεων, το οποίο για να διακριτοποιηθεί, απαιτείται η ικανοποίηση ορισμένων προϋποθέσεων (βλ. Κεφ. 3.8).

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα διακριτοποιήσουμε τις χρονικά μεταβαλλόμενες εξισώσεις Navier-Stokes χρησιμοποιώντας την κλασική μέθοδο Galerkin. Θα γραμμικοποιήσουμε τον συναγωγικό όρο της εξίσωσης διατήρησης ορμής, θα παράξουμε την μεταβολική και μητρική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes και θα εφαρμόσουμε μεθόδους σταθεροποίησης για την θεραπεία οποιασδήποτε αριθμητικής αστάθειας. Στο πλαίσιο αυτό, θα συζητηθούν και διάφορα θέματα ευστάθειας και επιλυσιμότητας. Τόσο η μητρική μορφή που θα παραχθεί στην γενική της μορφή όσο και οι μέθοδοι που αναλύονται, ταυτίζονται με αυτές που χρησιμοποιεί το λογισμικό πακέτο ανοικτού κώδικα Elmer για να επιλύσει το πρόβλημα της ασυμπίεστης και ιζώδους ροής.

3.1 Διατύπωση της χρονικά μεταβαλλόμενης ασυμπίεστης ιζώδους ροής

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο με κατά τμήματα λείο σύνορο $\partial\Omega$. Η μαθηματική διατύπωση της χρονικά μεταβαλλόμενης ασυμπίεστης ιζώδους ροής για $t \in (0, \tau]$ διέπεται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων, γνωστές ως εξισώσεις Navier-Stokes ([Batchelor, 2000](#)):

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} - \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ στο } \Omega \text{ για } t \in (0, \tau], \quad (3.1)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, \mathbf{f} η ανά μονάδα όγκου σωματική δύναμη που ασκείται στο ρευστό και $\bar{\mathbf{T}}$ ο δυαδικός τάσης. Για νευτωνικά ρευστά, ο δυαδικός τάσης δίνεται από την παρακάτω καταστατική εξίσωση, γνωστή ως νόμος του Stokes:

$$\bar{\Gamma} = -p\bar{\mathbf{I}} + 2\mu\bar{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (3.2)$$

όπου p είναι η πίεση, $\bar{\mathbf{I}}$ ο μοναδιαίος πίνακας και $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ ο δυαδικός ρυθμού παραμόρφωσης, τα στοιχεία του οποίου δίνονται από την σχέση

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.3)$$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Stokes (3.2), η εξίσωση διατήρησης ορμής λαμβάνει την μορφή

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\mu \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}} - \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

3.1 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Οι εξισώσεις Navier Stokes (3.1) για να είναι πλήρεις θα πρέπει να συνοδευτούν με τις κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet

Σε προβλήματα ασυμπίεστης ροής, οι συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet μπορούν να επιβληθούν καθορίζοντας τις τιμές της ταχύτητας στα σύνορα $\partial\Omega_D \subset \partial\Omega$. Τα σύνορα αυτά μπορεί να αφορούν περιοχές όπου η διαμόρφωση της ροής είναι γνωστή *a priori*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}, t) \text{ στο } \partial\Omega_D \quad (3.5)$$

ή σε περιοχές όπου υπάρχει τοίχωμα και ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ στο } \partial\Omega_D. \quad (3.6)$$

Συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

Εκτός από την επιβολή συνοριακών συνθηκών στις συνιστώσες της ταχύτητας, μπορούν να καθοριστούν συνοριακές συνθήκες στο διάνυσμα τάσης των επιφανειακών δυνάμεων

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \bar{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \text{ στο } \partial\Omega_N. \quad (3.7)$$

Αν ο δυαδικός τάσης δίνεται από την καταστατική εξίσωση (3.2), τότε η συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann λαμβάνει την μορφή

$$2\mu\bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} - p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \text{ στο } \partial\Omega_N. \quad (3.8)$$

Στην περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων προβλημάτων, θα πρέπει να οριστεί και το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας στο Ω για $t = 0$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.9)$$

Φυσικά, το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας για $t = 0$ θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη ασυμπίεστης ροής

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)} = 0 \text{ στο } \Omega. \quad (3.10)$$

Παρατήρηση 3.1: Αντί για την επιβολή της συνοριακής συνθήκης τύπου Neumann, θα μπορούσε να οριστεί η συνοριακή συνθήκη τύπου Robin, η οποία έχει την μορφή $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u} + \bar{\Gamma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$, όπου $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ παράμετρος.

Παρατήρηση 3.2: Για ασυμπίεστες ροές δεν δίνονται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet για την πίεση. Η πίεση σε ένα σύνορο ορίζεται πεπλεγμένα μέσω προσδιορισμού του κάθετου διανύσματος τάσης των επιφανειακών δυνάμεων.

3.3 Γραμμικοποίηση συναγωγικού όρου

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι μη γραμμικές λόγω της ύπαρξης του συναγωγικού όρου $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ στην εξίσωση διατήρησης ορμής (3.4). Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε τέτοιες περιπτώσεις, οδηγεί στην δημιουργία ενός μη γραμμικού συστήματος, στο οποίο ο πίνακας των συντελεστών εξαρτάται από την άγνωστη λύση. Η επίλυση τέτοιων συστημάτων απαιτεί συνήθως μία επαναληπτική διαδικασία μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους το σύστημα μπορεί να καταλήξει σε κάποια λύση. Σύμφωνα με το πρώτο τρόπο, πραγματοποιείται πρώτα η διακριτοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes και σε δεύτερη φάση το μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει, γραμμικοποιείται και επιλύεται επαναληπτικά (π.χ. εφαρμογή μεθόδου Newton). Αντίθετα, με τον δεύτερο τρόπο η γραμμικοποίηση προηγείται και η διακριτοποίηση εφαρμόζεται στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes. Η τελευταία μέθοδος χρησιμοποιείται και από το λογισμικό πακέτο Elmer (Raback, κ.α., 2023), για αυτό θα είναι αυτή που θα αναλυθεί.

Για την γραμμικοποίηση του συναγωγικού όρου, χρησιμοποιούνται δύο μέθοδοι: η μέθοδος Picard (ή σταθερού σημείου) και η μέθοδος Newton. Σύμφωνα με την μέθοδο Picard, ο συναγωγικός όρος στην n+1-οστή επανάληψη προσεγγίζεται με μία από τις τρεις παρακάτω εκφράσεις:

$$\mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} \approx \mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n)}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} \approx \mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} \approx \mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n)}. \quad (3.13)$$

Αν και οι απόψεις δίσταται σχετικά με το ποια από τις ανωτέρω σχέσεις οδηγεί σε πιο γρήγορη και εύρωστη σύγκλιση (DeBlois, 1997), θα επικεντρωθούμε αποκλειστικά στην έκφραση (3.12), καθώς είναι εκείνη που χρησιμοποιείται από το λογισμικό πακέτο Elmer (Raback, κ.α., 2023).

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes με χρήση της μεθόδου Picard, στην περίπτωση αυτή είναι

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(n+1)}}{\partial t} + \rho \mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} - 2\mu \nabla \cdot \bar{\gamma}(\mathbf{u}^{(n+1)}) - \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)} = 0. \quad (3.15)$$

Η γραμμικοποίηση με την μέθοδο Newton πραγματοποιείται με εφαρμογή του θεωρήματος Taylor (για συναρτήσεις δυο μεταβλητών) στη $f(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$,

$$f(\mathbf{u}^{(n+1)}, \nabla \mathbf{u}^{(n+1)}) = ((\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}) \cdot \frac{\partial f^{(n)}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + (\nabla \mathbf{u}^{(n+1)} - \nabla \mathbf{u}^{(n)}) \cdot \frac{\partial f^{(n)}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})}{\partial \nabla \mathbf{u}}) + O(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)})^2.$$

Αποκόπτοντας τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης λαμβάνεται

$$\mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} \approx \mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n)}, \quad (3.16)$$

οδηγώντας στις παρακάτω γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier Stokes:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}^{(n+1)}}{\partial t} + \rho \mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n)} + \rho \mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n+1)} - 2\mu \nabla \cdot \bar{\bar{\gamma}}(\mathbf{u}^{(n+1)}) + \nabla p - \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{u}^{(n)} \nabla \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)} = 0. \quad (3.18)$$

Παρατήρηση 3.3: Ένα καλό ερώτημα αναφορικά με τις επαναληπτικές μεθόδους που αναλύθηκαν ανωτέρω είναι το εξής: Πως οι δύο μέθοδοι μπορούν να συνδυαστούν κατάλληλα μεταξύ τους, ώστε να οδηγηθούμε σε μία εύρωστη και γρήγορη σύγκλιση; Καταρχάς, θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι η συμπεριφορά της σύγκλισης τόσο της μεθόδου Picard όσο και της μεθόδου Newton εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό: (α) από τον αριθμό Reynolds, (β) τη φύση του προβλήματος και (γ) από την επιλογή της αρχικής εκτίμησης $\mathbf{u}^{(0)}$. Ειδικότερα, η μέθοδος Newton απαιτεί η αρχική εκτίμηση να βρίσκεται κοντά στην τελική λύση, ώστε να συγκλίνει τετραγωνικά. Διαφορετικά, η σύγκλιση μπορεί να είναι αργή ή η μέθοδος μπορεί να αποκλίνει. Για αυτό, μία καλή στρατηγική είναι η επαναληπτική διαδικασία να ξεκινάει με την μέθοδο Picard που, αν και στην καλύτερη περίπτωση συγκλίνει με γραμμικό ρυθμό, παρέχει μία πιο εύρωστη σύγκλιση και, όταν η λύση αρχίζει να συγκλίνει, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επαναληπτική μέθοδος Newton, ώστε να επιταχυνθεί η διαδικασία. Το σχήμα αυτό, στο οποίο χρησιμοποιείται τόσο η μέθοδος Picard όσο και η μέθοδος Newton, ονομάζεται υβριδικό σχήμα.

Παρατήρηση 3.4: Συνήθως, ως αρχική εκτίμηση επιλέγεται $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$, δηλαδή η απαλοιφή του συναγωγικού όρου. Όταν, όμως, ο αριθμός Reynolds είναι υψηλός, η διαφορά μεταξύ της αρχικής εκτίμησης και της τελικής λύσης είναι μεγάλη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είτε χρησιμοποιείται αποκλειστικά η μέθοδος Picard ή χρησιμοποιείται η υβριδική μέθοδος με περισσότερες επαναλήψεις Picard έναντι της Newton.

3.4 Εξαγωγή ασθενούς μορφής

Έχοντας, πλέον, γραμμικοποιήσει τις εξισώσεις Navier-Stokes, είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στη εξαγωγή της ασθενούς μορφής του προβλήματος της χρονικά μεταβαλλόμενης ασυμπίεστης και ιξώδους ροής. Ας υποθέσουμε ότι, οι εξισώσεις Navier-Stokes έχουν γραμμικοποιηθεί με την μέθοδο Picard, τότε

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla (2\mu \bar{\bar{\gamma}}(\mathbf{u})) + \nabla p - \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{στο } \Omega \text{ για } t \in (0, \tau], \quad (3.19)$$

όπου \mathbf{u} είναι το διάνυσμα της ταχύτητας από την προηγούμενη επανάληψη του μη γραμμικού συστήματος.

Για την εξαγωγή της ασθενούς μορφής των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes, αρχικά, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση διατήρησης ορμής (3.19) με την διανυσματική συνάρτηση βάρους $\mathbf{w}_u \in \mathbf{V}_u := \{\mathbf{w}_u \in \mathbf{H}^1(\Omega) | \mathbf{w}_u = \mathbf{0} \text{ στο } \partial\Omega_N\}$ (βλ. παρ. A.3) και, έπειτα ολοκληρώνουμε σε όλο το χωρίο Ω λαμβάνοντας

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \nabla \cdot (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) dx + \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \nabla p dx \\ - \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{f} dx = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss στον όρο των ιξωδών δυνάμεων¹

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \nabla \cdot (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) dx &= \int_{\Omega} 2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w}_u dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{w}_u \cdot 2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) dx \\ &= \int_{\Omega} 2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w}_u dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_u \cdot 2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

και στον όρο των δυνάμεων πίεσης²

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \nabla p dx &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w}_u d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot p \mathbf{w}_u dx \\ &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w}_u d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{n} dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

οδηγούμαστε στην παρακάτω ασθενή μορφή της γραμμικοποιημένης εξίσωσης διατήρησης ορμής

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dx + \int_{\Omega} 2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w}_u dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w}_u dx \\ = \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{f} dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_u \cdot (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) ds. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Με εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών τύπου Neumann, λαμβάνοντας υπόψη ότι, το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται πάνω στο σύνορο $\partial\Omega_D$, αφού η διανυσματική συνάρτηση βάσης \mathbf{w}_u μηδενίζεται σε αυτό, το επιφανειακό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_u \cdot (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) ds = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{s} ds. \quad (3.24)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.24) στην (3.23), η ασθενής μορφή μετατρέπεται σε

¹ γίνεται εφαρμογή και της ταυτότητας $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})$ όπου $\boldsymbol{\tau}$ τανυστής 2^{ης} τάξης και \mathbf{v} διανυσματικό μέγεθος

² γίνεται εφαρμογή και της ταυτότητας $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{v} + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{v})$ όπου \mathbf{v} διανυσματικό μέγεθος και φ βαθμωτό

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dx + \int_{\Omega} 2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w}_u dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w}_u dx \\ = \rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{f} dx + \int_{\partial \Omega_N} \mathbf{w}_u \cdot \mathbf{s} ds. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Εκτός από την εξίσωση διατήρησης ορμής, σε ασθενή μορφή θα πρέπει να διατυπωθεί και η εξίσωση συνέχειας. Στην περίπτωση αυτή, πολλαπλασιάζουμε την τελευταία με μία συνάρτηση βάρους $w_p := V_p = L^2(\Omega)$ και έπειτα ολοκληρώνουμε σε όλο το χωρίο Ω λαμβάνοντας

$$\int_{\Omega} w_p \nabla \cdot \mathbf{u} dx = 0. \quad (3.26)$$

Παρατήρηση 3.5: Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι ο χώρος V_p είναι διαφορετικός από τον χώρο V_u . Ο λόγος είναι ότι, στην εξίσωση συνέχειας δεν χρειάζεται να πραγματοποιηθεί χαλάρωση ως προς τις απαιτήσεις ολοκληρωσιμότητας της μεταβλητής \mathbf{u} , καθώς αυτή βρίσκεται ήδη σε μορφή πρώτων παραγώγων. Αρκεί, λοιπόν, οι συναρτήσεις βάρους w_p που πολλαπλασιάζουν την εξίσωση συνέχειας να είναι απλώς τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Αξίζει να σημειωθεί ότι, δεν υπάρχει περιορισμός για τις συναρτήσεις βάρους w_p στο σύνορο $\partial \Omega_D$, αφού δεν υπάρχουν συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet για τη μεταβλητή της πίεσης.

Έχοντας εξάγει τις ασθενείς μορφές (3.25), (3.26) των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes (3.19) μπορούμε να προχωρήσουμε στη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος της χρονικά μεταβαλλόμενης ασυμπίεστης και ιξώδους ροής: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_p$ όπου $\mathcal{S}_u := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) | \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ στο } \partial \Omega_D\}$ και $\mathcal{S}_p := \{p \in L^2(\Omega)\}$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \left(\rho \mathbf{w}_u, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + (\rho \mathbf{w}_u, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{w}_u) - (p, \nabla \cdot \mathbf{w}_u) = (\rho \mathbf{w}_u, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}_u, \mathbf{s})_{\partial \Omega_N}, \\ \forall \mathbf{w}_u \in V_u, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$(w_p, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad \forall w_p \in V_p,$$

όπου ο όρος (\cdot, \cdot) αναπαριστά το L^2 εσωτερικό γινόμενο (βλ. παρ. A.1).

Στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton, θα πρέπει να γίνει η προσθήκη άλλων δύο όρων στην ασθενή μορφή της εξίσωσης διατήρησης ορμής (3.25), σύμφωνα με την σχέση (3.16). Προσθέτοντας αυτούς τους όρους, η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος γίνεται: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_p$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \left(\rho \mathbf{w}_u, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + (\rho \mathbf{w}_u, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{w}_u, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{w}_u) - (p, \nabla \cdot \mathbf{w}_u) \\ = (\rho \mathbf{w}_u, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{w}_u, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}_u, \mathbf{s})_{\partial \Omega_N}, \quad \forall \mathbf{w}_u \in V_u, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$(w_p, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad \forall w_p \in V_p.$$

3.5 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin

Έστω $\mathcal{T}^h(\Omega)$ μία διαμέριση του χωρίου Ω σε n_{el} στοιχεία Ω^e τέτοια, ώστε

$$\bar{\Omega} \approx \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e. \quad (3.29)$$

Για την παραπάνω διαμέριση $\mathcal{T}^h(\Omega)$, περιορίζουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος (3.27) σε πεπερασμένων διαστάσεων χώρους λύσεων $\mathbf{S}_u^h \times S_p^h \subset \mathbf{S}_u \times S_p$ και σε πεπερασμένων διαστάσεων χώρους συναρτήσεων βάρους $\mathbf{V}_u^h \times V_p^h \subset \mathbf{V}_u \times V_p$, ώστε η προσέγγιση της λύσης του διανύσματος της ταχύτητας \mathbf{u}^h να δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης $\{\varphi_I\}_{I=1}^{N_{nodes}}$, που παράγουν τον πεπερασμένο χώρο λύσεων $S_{u,i}^h := span\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_{nodes}}\}$ και η προσέγγιση της πίεσης p^h να δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης $\{\psi_I\}_{I=1}^{M_{nodes}}$, που παράγουν τον πεπερασμένο χώρο λύσεων $S_p^h := span\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{M_{nodes}}\}$.

Τότε, οι προσεγγίσεις των άγνωστων συνιστωσών του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας u_k^h δίνονται από την σχέση

$$u_k^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_{k,I}(t) \varphi_I(\mathbf{x}) \text{ για } k = 1, 2 \quad (3.30)$$

και αντίστοιχα, η προσέγγιση της άγνωστης μεταβλητής της πίεσης p^h δίνεται από την σχέση

$$p^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^{M_{nodes}} p_I(t) \psi_I(\mathbf{x}). \quad (3.31)$$

Η προσεγγιστική λύση του διανυσματικού πεδίου της ταχύτητας (3.30) μπορεί να διατυπωθεί και σε αντίστοιχη διανυσματική μορφή χρησιμοποιώντας την ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbf{u}^h = \sum_{k=1}^{n_{sd}=2} u_k^h(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_{k,I}(t) \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{e}_k, \quad (3.32)$$

όπου $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$.

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου \mathbf{u}, p τις προσεγγίσεις \mathbf{u}^h, p^h , λαμβάνεται η διακριτοποιημένη μορφή του μεταβολικού προβλήματος των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes με την μέθοδο Picard: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, p^h\} \in \mathbf{S}_u^h \times S_p^h$, έτσι ώστε

$$\left(\rho \mathbf{w}_u^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) + (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h), \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) = (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}_u^h, \mathbf{s})_{\partial \Omega_N}, \quad (3.33)$$

$$\forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h,$$

$$(w_p^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h) = 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h.$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton, η διακριτοποιημένη μορφή του μεταβολικού προβλήματος είναι: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, p^h\} \in \mathbf{S}_u^h \times S_p^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & \left(\rho \mathbf{w}_u^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}) + (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h), \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) \\ & = \left(\rho \mathbf{w}_u^h, (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \right) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}_u^h, \mathbf{s})_{\partial \Omega_N}, \quad \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h \\ & (w_p^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h) = 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Χρησιμοποιώντας ως συναρτήσεις βάρους τις ίδιες τις συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται για το διάνυσμα της ταχύτητας (μέθοδος Galerkin)

$$\mathbf{w}_{u,i}^h \in V_{u,i}^h := \text{span}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \quad (3.35)$$

και αντικαθιστώντας όπου $\mathbf{w}_u^h \equiv \{\varphi_J \mathbf{e}_l\}_{J=1}^{N_{nodes}}$ για $l = 1, 2$ στην (3.33), λαμβάνεται το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_{k,I} \varphi_I \mathbf{e}_k \right) dx + \int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \left[\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_{k,I} \varphi_I \mathbf{e}_k \right) \right] dx \\ & + \int_{\Omega} 2\mu \bar{\gamma} \left(\sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_{k,I} \varphi_I \mathbf{e}_k \right) : \nabla \varphi_J \mathbf{e}_l dx - \int_{\Omega} \sum_{I=1}^{M_{nodes}} p_I \psi_I \nabla \cdot \varphi_J \mathbf{e}_l dx \\ & = \int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{f} dx + \int_{\partial \Omega_N} \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{s} ds \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2 \end{aligned}$$

ή αναδιατάσσοντας του όρους

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \left\{ \sum_{I=1}^{N_{nodes}} \left[\int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \varphi_I \mathbf{e}_k \right] \frac{du_{k,I}}{dt} \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \left\{ \sum_{I=1}^{N_{nodes}} \left[\int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla (\varphi_I \mathbf{e}_k)) dx + \int_{\Omega} 2\mu \bar{\gamma}(\varphi_I \mathbf{e}_k) : \nabla (\varphi_J \mathbf{e}_l) dx \right] u_{k,I} \right\} \\ & + \sum_{l=1}^{n_{sd}=2} \left\{ \sum_{I=1}^{M_{nodes}} \left[\int_{\Omega} \psi_I \nabla \cdot \varphi_J \mathbf{e}_l dx \right] p_I \right\} = \left(\int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{f} dx \right) + \int_{\partial \Omega} \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{s} ds \\ & \text{για } J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Το παραπάνω σύστημα των $2N_{nodes}$ διαφορικών εξισώσεων είναι εφοδιασμένο με $2N_{nodes}$ αρχικές συνθήκες

$$u_{k,I}^0 = u_{k,I}^0(\mathbf{x}_J), \quad J = 1, 2, \dots, N_{nodes} \text{ και } k = 1, 2. \quad (3.37)$$

Οι βαθμοί ελευθερίας είναι $2N_{nodes}$ για το διάνυσμα της ταχύτητας και M_{nodes} για την πίεση. Επομένως, απαιτούνται ακόμα M_{nodes} εξισώσεις. Αυτές θα προκύψουν από τη διακριτοποιημένη ασθενή μορφή της

εξίσωσης συνέχειας. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, ως συναρτήσεις βάρους για την εξίσωση συνέχειας τις ίδιες συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται για την μεταβλητή της πίεσης $w_p \in V_p^h := \text{span}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{M_{nodes}})$, λαμβάνουμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$\int_{\Omega} \psi_J \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_{I,k} \varphi_I \mathbf{e}_k \, d\mathbf{x} \right) = 0 \quad \text{για } J = 1, \dots, M_{nodes}$$

ή αναδιατάσσοντας τους όρους

$$\sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \left\{ \sum_{I=1}^{N_{nodes}} \left[\int_{\Omega} \varphi_J \nabla \cdot \varphi_I \, d\mathbf{x} \right] u_{k,I} \right\} \quad \text{για } J = 1, \dots, M_{nodes}. \quad (3.38)$$

Το συνολικό σύστημα, επομένως, αποτελείται από $2N_{nodes}$ διαφορικές εξισώσεις, M_{nodes} γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις και $2N_{nodes} + M_{nodes}$ βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στις άγνωστες τιμές των μεταβλητών της ταχύτητας και της πίεσης στους κόμβους του πλέγματος.

Παρατήρηση 3.6: Οι σχέσεις (3.36) και (3.38) αντιστοιχούν στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard. Με ακριβώς ίδιο τρόπο, προκύπτει το σύνολο των διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton.

3.6 Εξαγωγή μητρικών μορφής

Το σύστημα των εξισώσεων που αποτελείται από τις σχέσεις (3.36), (3.38) μπορεί να διατυπωθεί και σε αντίστοιχη σύνθετη μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{u}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1N_{nodes}}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2N_{nodes}})$ περιέχει τις τιμές στους κόμβους των συνιστωσών της ταχύτητας και $p = (p_1, \dots, p_{M_{nodes}})$ περιέχει τις τιμές στους κόμβους των μεταβλητών της πίεσης.

Η σύνθετη μητρική μορφή μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω σε αντίστοιχη υπό-μητρική

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{u}) & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & -Q_1^T \\ K_{21} & K_{22} & -Q_2^T \\ Q_1 & Q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

όπου M_{ii} , $C_{ii}(\mathbf{u})$, K_{ij} , Q_i , F_i είναι τα αντίστοιχα μπλοκ των σύνθετων μητρώων \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , \mathbf{Q} , \mathbf{F} .³

Κάθε στοιχείο των ανωτέρω σύνθετων μητρώων συμβολίζεται με τους δείκτες $\{R, S\}$, οι οποίοι συσχετίζονται με τους ολικούς κόμβους I, J και τις συνιστώσες της ταχύτητας k, l σύμφωνα με την σχέση

³ Τα σύνθετα μητρώα δίνονται με έντονη γραφή.

$$R = I + X_{nodes}(k - 1) \quad \text{για } I = 1, \dots, X_{nodes} \text{ και } \kappa = 1, 2, \quad (3.41)$$

$$S = J + X_{nodes}(l - 1) \quad \text{για } J = 1, \dots, X_{nodes} \text{ και } l = 1, 2, \quad (3.42)$$

όπου X_{nodes} ισούται με N_{nodes} ή M_{nodes} , ανάλογα με τις διαστάσεις του σύνθετου μητρώου στο οποίο αναφέρονται οι δείκτες (βλ. Πίνακα 3-1).

Πίνακας 3-1. Αντιστοιχία μεταξύ σύνθετων μητρώων και όρων διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.33).

Σύνθετο μητρώο	Συνεισφερόμενος όρος διακριτοποιημένης ασθενή μορφής (3.33)	Διαστάσεις
\mathbf{M}	$\rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} dx$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
\mathbf{K}	$\int_{\Omega} 2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h) : \nabla \mathbf{w}_u^h dx$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
\mathbf{C}	$\rho \int_{\Omega} \mathbf{w}_u^h \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) dx$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
\mathbf{Q}^τ	$\int_{\Omega} p^h \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h dx$	$M_{nodes} \times 2N_{nodes}$
\mathbf{Q}	$\int_{\Omega} w_p^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h dx$	$2N_{nodes} \times M_{nodes}$
\mathbf{F}	$\int_{\Omega} (\mathbf{w}_u^h \cdot \mathbf{f}) dx + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{w}_u^h \cdot \mathbf{s} ds$	$1 \times 2N_{nodes}$

Αναλύοντας περαιτέρω του όρους των εξισώσεων (3.36) και (3.38) χρησιμοποιώντας τη σύμβαση άθροισης του Einstein, τα στοιχεία των σύνθετων πινάκων και διανυσμάτων της μητρωικής μορφής (3.39) δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{M}_{RS} = (M_{kl})_{IJ} = \int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \varphi_I \mathbf{e}_k dx = \int_{\Omega} \rho \varphi_J \varphi_I \delta_{kl} dx \quad \text{για } I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } \kappa, l = 1, 2, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{RS} &= (K_{kl})_{IJ} = \int_{\Omega} 2\mu \bar{\gamma}(\varphi_I \mathbf{e}_k) : \nabla(\varphi_J \mathbf{e}_l) dx \\ &= \int_{\Omega} \mu \left[\frac{\partial \varphi_I}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx \quad \text{για } I, J \\ &= 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } \kappa, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{C}_{RS} = (C_{kl})_{IJ} = \int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla(\varphi_I \mathbf{e}_k)) dx = \int_{\Omega} \left[\rho \varphi_J \left(u_1 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx \quad \text{για } I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } \kappa, l = 1, 2, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{Q}_S^T = (Q_l^T)_{IJ} = \int_{\Omega} \psi_I \nabla \cdot (\varphi_J \mathbf{e}_l) dx = \int_{\Omega} \psi_I \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_l} dx \text{ για } I = 1, \dots, M_{nodes} \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{Q}_R = \int_{\Omega} \psi_J \nabla \cdot \varphi_I \mathbf{e}_k dx = (Q_k)_{IJ} = \int_{\Omega} \psi_J \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_k} dx \text{ για } I = 1, \dots, N_{nodes}, \quad (3.47)$$

$$J = 1, \dots, M_{nodes} \text{ και } k = 1, 2,$$

$$\mathbf{F}_S = (F_l)_J = \int_{\Omega} (\varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{f}) dx + \int_{\partial\Omega} (\varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{s}) ds = \int_{\Omega} \varphi_J f_l dx + \int_{\partial\Omega_N} \varphi_J s_l ds \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2. \quad (3.48)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Newton για την γραμμικοποίηση της εξίσωσης διατήρησης ορμής, τότε τα στοιχεία του σύνθετου πίνακα \mathbf{C} και του διανύσματος \mathbf{F} δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{C}_{RS} = (C_{kl})_{IJ} = \int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla (\varphi_I \mathbf{e}_k)) dx + \int_{\Omega} \rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot (\varphi_I \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \quad (3.49)$$

$$= \int_{\Omega} \left[\rho \varphi_J \left(u_1 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx + \int_{\Omega} \rho \varphi_J \varphi_I \frac{\partial u_l}{\partial x_k} dx \text{ για } I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2,$$

$$\mathbf{F}_S = (F_l)_J = \int_{\Omega} (\varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{f}) dx + \int_{\Omega} (\rho \varphi_J \mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})) dx + \int_{\partial\Omega_N} (\varphi_J \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{s}) ds \quad (3.50)$$

$$= \int_{\Omega} \varphi_J f_l dx + \int_{\Omega} \rho \varphi_J \left(u_1 \frac{\partial u_l}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_l}{\partial x_2} \right) dx + \int_{\partial\Omega_N} \varphi_J s_l ds \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2,$$

όπου δ_{kl} το δέλτα του Kronecker.

3.7 Ανάλυση συνεισφορών

Η κατασκευή των ολικών, σύνθετων μητρώων $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T, \mathbf{F}$ πραγματοποιείται με την γνωστή διαδικασία της τοπολογικής συναρμολόγησης των συνεισφορών των στοιχείων. Σύμφωνα με αυτή, υπολογίζονται τα στοιχεία των τοπικών, σύνθετων μητρώων $\mathbf{M}^{(e)}, \mathbf{C}^{(e)}, \mathbf{K}^{(e)}, \mathbf{Q}^{(e)}, \mathbf{Q}^{T(e)}, \mathbf{F}^{(e)}$ και μέσω δράσης του τελεστή $\mathcal{A}^{(e)}$, τοποθετούνται στις κατάλληλες θέσεις των ολικών μητρώων $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T$ και \mathbf{F} .

Αν συμβολίσουμε, λοιπόν, με $\{r, s\}$ τους τοπικούς δείκτες που εκφράζουν τα στοιχεία των παραπάνω τοπικών σύνθετων μητρώων, αυτοί συσχετίζονται με τους τοπικούς κόμβους i, j των στοιχείων Ω^e και τις συνιστώσες της ταχύτητας k, l σύμφωνα με τις σχέσεις

$$r = i + x_{nodes}(k - 1) \text{ για } i = 1, \dots, x_{nodes} \text{ και } k = 1, 2, \quad (3.51)$$

$$s = j + x_{nodes}(l - 1) \text{ για } j = 1, \dots, x_{nodes} \text{ και } l = 1, 2, \quad (3.52)$$

όπου x_{nodes} ισούται με n_{nodes} , ή m_{nodes} , δηλαδή με τον τοπικό αριθμό των κόμβων των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για το διάνυσμα της ταχύτητας ή της πίεσης αντιστοίχως.

Όσον αφορά τα στοιχεία των τοπικών σύνθετων μητρώων, αυτά δίνονται από τις ίδιες σχέσεις με αυτές των ολικών (3.43)-(3.50), εκφρασμένα τοπικά σε κάθε στοιχείο Ω_e ,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{RS} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{M}_{rs}^{(e)}, \mathbf{M}_{rs}^{(e)} = \left(M_{kl}^{(e)} \right)_{i,j} = \int_{\Omega_e} \rho \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k dx = \int_{\Omega_e} \rho \varphi_j^{(e)} \varphi_i^{(e)} \delta_{kl} dx \text{ για } i, j \\ &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{RS} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{K}_{rs}^{(e)}, \mathbf{K}_{rs}^{(e)} = \left(K_{kl}^{(e)} \right)_{i,j} = \int_{\Omega} 2\mu \bar{\nabla} \left(\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) : \nabla \left(\varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) dx \\ &= \int_{\Omega_e} \mu \left[\frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx \text{ για } i, j \\ &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{RS} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{C}_{rs}^{(e)}, \mathbf{C}_{rs}^{(e)} = \left(C_{kl}^{(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \rho \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \left(\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega_e} \left[\rho \varphi_j^{(e)} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx \text{ για } i, j \\ &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_S^\tau &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{Q}_s^{\tau(e)}, \mathbf{Q}_s^{\tau(e)} = \left(Q_i^{\tau(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \psi_i^{(e)} \nabla \cdot \left(\varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) dx = \int_{\Omega_e} \psi_i^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l} dx \text{ για } i \\ &= 1, \dots, m_{nodes}, \quad j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } l = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_R &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{Q}_r^{(e)}, \mathbf{Q}_r^{(e)} = \left(Q_k^{(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \psi_j^{(e)} \nabla \cdot \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k dx = \int_{\Omega_e} \psi_j^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_k} dx \text{ για } i \\ &= 1, \dots, n_{nodes}, \quad j = 1, \dots, m_{nodes} \text{ και } k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_S &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{F}_s^{(e)}, \mathbf{F}_s^{(e)} = \left(F_l^{(e)} \right)_j = \int_{\Omega_e} \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{f}^{(e)} dx + \int_{\partial \Omega_e \cap \partial \Omega_N} \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{s}^{(e)} ds \\ &= \int_{\Omega_e} \varphi_j^{(e)} f_l^{(e)} dx + \int_{\partial \Omega_e \cap \partial \Omega_N} \varphi_j^{(e)} s_l^{(e)} ds \text{ για } j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } l = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Newton για την γραμμικοποίηση της εξίσωσης διατήρησης ορμής, τότε τα στοιχεία των τοπικών μητρώων $\mathbf{C}^{(e)}$ και $\mathbf{F}^{(e)}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{RS} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{C}_{rs}^{(e)}, \mathbf{C}_{rs}^{(e)} = (C_{kl}^{(e)})_{ij} \\
 &= \int_{\Omega_e} \rho \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla (\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k)) dx + \int_{\Omega_e} \rho \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot (\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)}) dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \left[\rho \varphi_j^{(e)} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx \\
 &\quad + \int_{\Omega_e} \rho \varphi_j^{(e)} \varphi_i^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_k} dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_S &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{F}_s^{(e)}, \mathbf{F}_s^{(e)} = (F_l^{(e)})_j \\
 &= \int_{\Omega_e} (\varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{f}^{(e)}) dx + \int_{\Omega_e} (\rho \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot (\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)})) dx \\
 &\quad + \int_{\partial \Omega_e \cap \partial \Omega_N} (\varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{s}^{(e)}) ds \\
 &= \int_{\Omega_e} \varphi_j^{(e)} f_l^{(e)} dx + \int_{\Omega} \rho \varphi_j^{(e)} (u_1^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_2}) dx \\
 &\quad + \int_{\partial \Omega_e \cap \partial \Omega_N} \varphi_j^{(e)} s_l^{(e)} ds \text{ για } j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } l = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

3.8 Συνθήκες ευστάθειας και επιλυσιμότητας

Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (3.39) είναι επιλύσιμο όταν οι βαθμοί ελευθερίας N_{nodes} που χρησιμοποιούνται για το διάνυσμα της ταχύτητας είναι περισσότεροι ή ίσοι από τους βαθμούς ελευθερίας M_{nodes} που χρησιμοποιούνται για τη μεταβλητή της πίεσης ($N_{nodes} \geq M_{nodes}$). Με άλλα λόγια, μία αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη ώστε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (3.39) να έχει μοναδική λύση είναι

$$dim V_p^h \leq dim V_u^h. \tag{3.61}$$

Διαφορετικά, η διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ είναι υπερορισμένη, αφού ο αριθμός των γραμμικών εξισώσεων της καθορίζεται από την διάσταση του χώρου V_p^h , ενώ ο αριθμός των αγνώστων της καθορίζεται από την διάσταση του χώρου V_u^h . Αυτό οφείλεται στο ότι υπάρχει μία μηδενική υπομήτρα στη διαγώνιο του πίνακα

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{u}) & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Ωστόσο, ακόμα και η ικανοποίηση της συνθήκης (3.61) δεν είναι ικανή ώστε η λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (3.39) να είναι μοναδική, καθώς η αριθμητική επίλυσή τους μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση ψευδών ταλαντώσεων τόσο στο πεδίο της ταχύτητας όσο και στο πεδίο της πίεσης. Οι ψευδείς ταλαντώσεις στο πεδίο της ταχύτητας οφείλονται στην αριθμητική αστάθεια που εμφανίζει ο πίνακας \mathbf{C} σε υψηλούς αριθμούς Reynolds και αντιμετωπίζεται με την προσθήκη όρων σταθεροποίησης. Αντίθετα, οι ψευδείς ταλαντώσεις στο πεδίο της πίεσης οφείλονται στην ασυμβατότητα μεταξύ του χώρου

V_u^h και V_p^h . Ας αναλογιστούμε, για παράδειγμα, την περίπτωση μίας έρπουσας ($Re \ll 1$) και ασυμπίεστης ροής σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ σε μόνιμη κατάσταση. Για $Re \ll 1$, μπορούμε να απαλείψουμε τον συναγωγικό όρο της εξίσωσης ορμής καταλήγοντας στην παρακάτω ασυμπτωτική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes

$$\left. \begin{aligned} -\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ στο } \Omega. \quad (3.63)$$

Διακριτοποιώντας τις εξισώσεις (3.63) με την μέθοδο Galerkin και ακολουθώντας όλα τα κλασικά βήματα εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, καταλήγουμε σε ένα αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Ο σύνθετος πίνακας \mathbf{K} της εξίσωσης (3.64) σχετίζεται μόνο με την λαπλασιανή $-\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ και για αυτό, είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος, και άρα αντιστρέψιμος. Οπότε, η λύση της διακριτοποιημένης εξίσωσης ορμής δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}[\mathbf{F} - \mathbf{Q}^T p]. \quad (3.65)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, λαμβάνεται το σύστημα του συμπληρώματος Schur (Zhang, 2005)

$$\mathbf{S}p = \mathbf{Q}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}, \quad (3.66)$$

όπου $\mathbf{S} := \mathbf{Q}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}^T$.

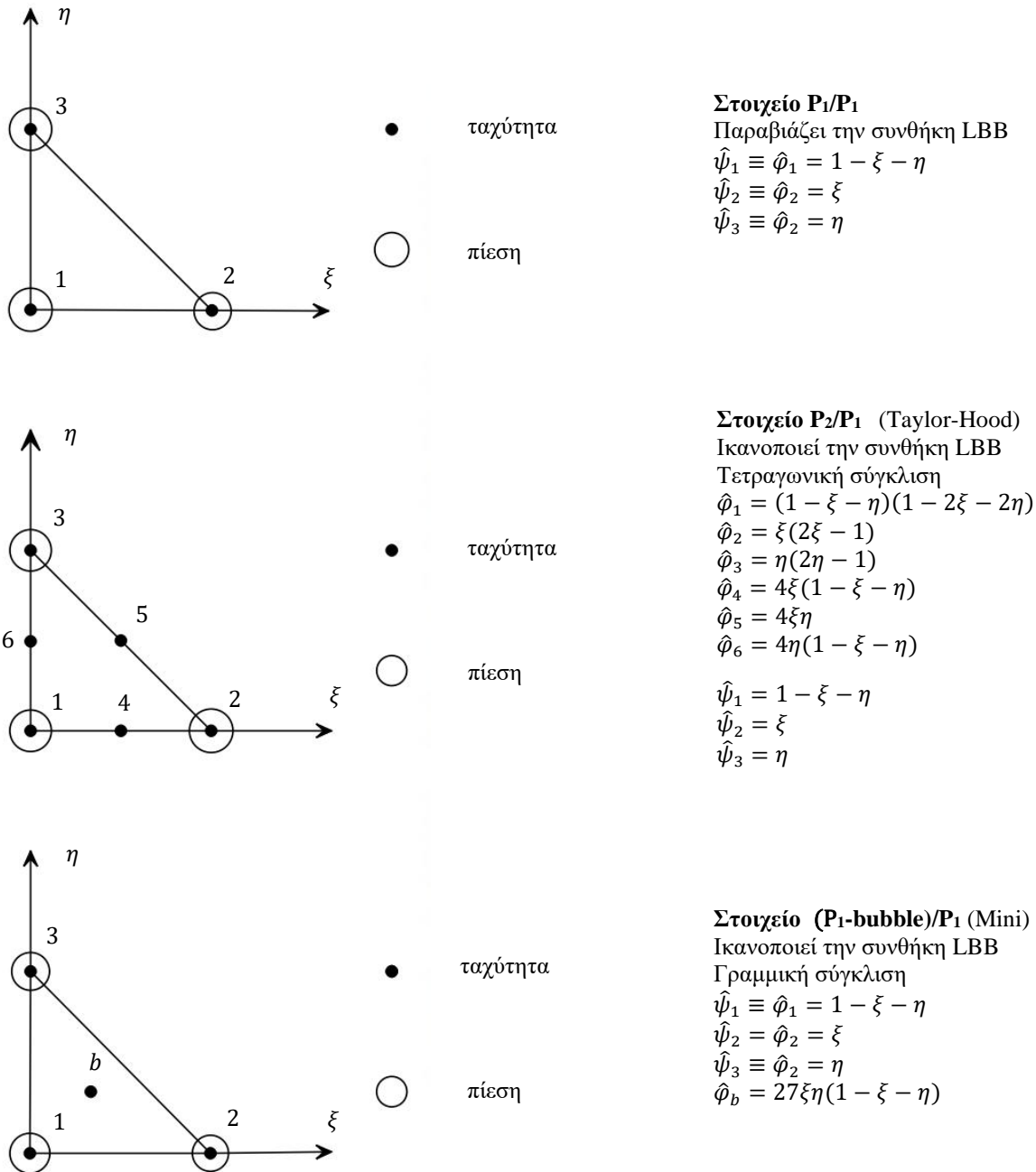
Ο πίνακας \mathbf{S} είναι συμμετρικός και αν $\ker \mathbf{Q}^T = \{0\}$ ⁴ τότε, είναι και θετικά ορισμένος άρα αντιστρέψιμος. Επομένως, λαμβάνεται μοναδική λύση για τις τιμές της πίεσης στους κόμβους του πλέγματος και έχοντας υπολογίσει το διάνυσμα p , μπορούμε, πλέον, να το αντικαταστήσουμε στην σχέση (3.65) για να λάβουμε μοναδική λύση για το διάνυσμα της ταχύτητας. Διαφορετικά, αν $\ker \mathbf{Q}^T \neq \{0\}$, τότε λαμβάνεται μοναδική λύση για το διάνυσμα της ταχύτητας, αλλά εμφανίζονται ψευδείς ταλαντώσεις στο πεδίο της πίεσης. Από την σκοπιά των πεπερασμένων στοιχείων για να ικανοποιείται η συνθήκη $\ker \mathbf{Q}^T = \{0\}$, η επιλογή των χώρων V_u^h και V_p^h θα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (Girault & Raviart, 1986)

$$\inf_{w_p^h \in V_p^h} \sup_{w_u^h \in V_u^h} \frac{(w_p^h, \nabla \cdot w_u^h)}{\|w_p^h\|_{L^2} \|w_u^h\|_{H^1}} \geq \gamma > 0, \quad (3.67)$$

όπου γ είναι μία σταθερά ανεξάρτητη από την πυκνωση του πλέγματος, $\|\cdot\|_{L^2}$ η νόρμα Hilbert (βλ. παρ. A.1) και $\|\cdot\|_{H^1}$ η νόρμα Sobolev (βλ. παρ. A.2).

⁴ Ο πυρήνας (ή μηδενόχωρος) ενός πίνακα \mathbf{Q}^T διαστάσεων $M_{nodes} \times 2N_{nodes}$ ισούται με το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N_{nodes}}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{Q}^T \mathbf{q} = \mathbf{0}$ και ορίζεται ως $\ker \mathbf{Q}^T := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N_{nodes}}; \mathbf{Q}^T \mathbf{q} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^{2N_{nodes}}$.

Παραδείγματα μεικτών πεπερασμένων στοιχείων που ικανοποιούν την συνθήκη Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (LBB) είναι τα στοιχεία Taylor-Hood (P_2/P_1) και τα στοιχεία Mini (P_1 -bubble)/ P_1 (Boffi, Brezzi, & Fortin, 2013). Στα στοιχεία Taylor-Hood, η ταχύτητα προσεγγίζεται από 2^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange, ενώ η πίεση προσεγγίζεται από 1^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange (βλ. Σχ. 3-1).



Σχ. 3-1 Παραδείγματα μεικτών πεπερασμένων στοιχείων που ικανοποιούν ή παραβιάζουν την συνθήκη LBB.

Στα στοιχεία Mini, η ταχύτητα προσεγγίζεται από 1^ο βαθμού πολώνυμα Lagrange και μία συνάρτηση «φουσαλίδας» (bubble function)⁵, ενώ η πίεση από 1^ο βαθμού πολώνυμα Lagrange (βλ. Σχ. 3-1). Αντιθέτως, τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P₁/P₁ παραβιάζουν την συνθήκη ευστάθειας Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi και για αυτό, απαιτείται η προσθήκη όρων σταθεροποίησης.

3.9 Σταθεροποίηση

Για την σταθεροποίηση τόσο της ταχύτητας σε μεγάλους αριθμούς Reynolds όσο και της πίεσης λόγω της μη ικανοποίησης της συνθήκης Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi γίνεται η προσθήκη όρων σταθεροποίησης στην ασθενή διακριτοποιημένη εξίσωση διατήρησης ορμής και εξίσωση συνέχειας. Μία από τις πιο γνωστές μεθόδους σταθεροποίησης, την οποία χρησιμοποιεί και το λογισμικό πακέτο Elmer, είναι η Galerkin Least-Square (GLS), σύμφωνα με την οποία αν η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard, στην διακριτοποιημένη ασθενή μορφή της εξίσωσης διατήρησης ορμής προστίθεται ο όρος σταθεροποίησης (Hughes, Franca, & Hulbert, 1989)

$$s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left[\tau (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h - 2\mu \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{w}_u^h)) \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h - \rho \mathbf{f} \right) + \delta \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h \right] dx, \quad (3.68)$$

και στην διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας, ο όρος σταθεροποίησης (Hughes, Franca, & Hulbert, 1989)

$$s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \nabla w_p^h \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h - \rho \mathbf{f} \right) dx. \quad (3.69)$$

Αντίθετα, αν η γραμμικοποίηση πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton, τότε οι όροι σταθεροποίησης τροποποιούνται ως εξής:

$$s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left[\tau (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{w}_u^h))) \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h + \rho \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h - \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \delta \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h \right] dx, \quad (3.70)$$

⁵ Στα στοιχεία Mini (P₁-bubble)/P₁ η προσεγγιστική λύση του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας στο στοιχείο Ω_e δίνεται από την σχέση: $u^h(\mathbf{x}) = u^h(\xi, \eta) = u_1^{(e)} \hat{\varphi}_1 + u_2^{(e)} \hat{\varphi}_2 + u_3^{(e)} \hat{\varphi}_3 + u_b^{(e)} \hat{\varphi}_b$ όπου $\hat{\varphi}_b$ είναι η συνάρτηση «φουσαλίδας» (bubble function). Η συνάρτηση φουσαλίδα λαμβάνει την τιμή 1 στο κέντρο του στοιχείου και την τιμή μηδέν στις κορυφές (βλ. Σχ. 3-1).

$$s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \rho \nabla w_p^h \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h + \rho \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h - \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) dx. \quad (3.71)$$

Παρατήρηση 3.7: Αξίζει να σημειωθεί ότι, οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης επιβιώνουν μόνο όταν χρησιμοποιούνται συναρτήσεις βάσης 2^{ns} ή μεγαλύτερης τάξης διαφορετικά, η μέθοδος σταθεροποίησης Galerkin-Least Square (GLS) εκφυλίζεται στη Streamline-Upwind Petrov-Galerkin (SUPG).

Αναφορικά με τις παραμέτρους σταθεροποίησης τ και δ , αυτές ορίζονται από τις σχέσεις ([Hughes, Franca, & Hulbert, 1989](#))

$$\tau = \frac{h_K}{2\rho \|\mathbf{u}\|_2} \xi(Re^h), \quad (3.72)$$

$$\delta = \rho \lambda \|\mathbf{u}\|_2 h_K \xi(Re^h), \quad (3.73)$$

όπου $\|\cdot\|_2$ η ευκλείδεια νόρμα και Re^h ο αριθμός Reynolds του πλέγματος, ο οποίος δίνεται από την σχέση

$$Re^h = \frac{\rho m_K h_K \|\mathbf{u}\|_2}{4\mu}, \quad (3.74)$$

με

$$\xi(Re^h) = \begin{cases} Re^h & \text{αν } 0 \leq Re^h < 1 \\ 1 & \text{αν } Re^h \geq 1 \end{cases}. \quad (3.75)$$

Οι παράμετροι m_K και λ είναι θετικές σταθερές και h_K το τοπικό μέγεθος του πλέγματος. Οι τυπικές τιμές για τις θετικές σταθερές είναι $m_K = 1/3$ και $\lambda = 1$.

Προσθέτοντας τώρα, τους όρους σταθεροποίησης (3.68) και (3.69) στην διακριτοποιημένη ασθενή μορφή της εξίσωσης διατήρησης ορμής (3.25) και στην διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας (3.26), η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος της ασυμπίεστης και ιξώδους ροής για την περίπτωση που η γραμμικοποίηση πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο Picard γίνεται: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, p^h\} \in \mathbf{S}_u^h \times S_p^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & \left(\rho \mathbf{w}_u^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) + (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}^h), \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) + s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) \\ & = (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}_u^h, \mathbf{s})_{\partial \Omega_N}, \quad \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h, \\ & (w_p^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h) + s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Αν η γραμμικοποίηση πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton, η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος γίνεται: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, p^h\} \in \mathbf{S}_u^h \times S_p^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
 & \left(\rho \mathbf{w}_u^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}) + (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h), \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) \\
 & + s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) = (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}_u^h, \mathbf{s})_{\partial \Omega_N}, \\
 & \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h, \\
 & (w_p^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h) + s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Έχοντας εισάγει επιπλέον όρους σταθεροποίησης στην διακριτοποιημένη μεταβολική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes, μπορούμε, πλέον, να χρησιμοποιήσουμε ίδιου βαθμού συναρτήσεις βάσης για την προσέγγιση τόσο του διανύσματος της ταχύτητας

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{n_{sd}=2} u_k^h(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n_{sd}=2} \sum_{I=1}^{N_{nodes}} u_{k,I}(t) \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{e}_k, \tag{3.78}$$

όσο και για την προσέγγιση της μεταβλητής της πίεσης

$$p^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^{N_{nodes}} p_I(t) \varphi_I(\mathbf{x}). \tag{3.79}$$

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, τη μέθοδο Galerkin στις (3.77) και (3.78), οδηγούμαστε στην παρακάτω σταθεροποιημένη μητρική μορφή

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{M}_{uu}(\mathbf{u}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{pu}(\mathbf{u}) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(\mathbf{u})} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix}}_{d\mathbf{q}/dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{u}) & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(\mathbf{u})} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) & \mathbf{S}_{up}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{S}_{pu}(\mathbf{u}) & S_{pp}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}(\mathbf{u})} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} \\
 & = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{F}_u(\mathbf{u}) \\ F_p(\mathbf{u}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}(\mathbf{u})}
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Τα στοιχεία των σύνθετων μητρώων $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$ και \mathbf{F} είναι τα ίδια με αυτά που προκύπτουν όταν δεν εφαρμοστεί σταθεροποίηση και δίνονται από τις σχέσεις (3.43)-(3.50) χρησιμοποιώντας ίδιο αριθμό κόμβων, $M_{nodes} \equiv N_{nodes}$ και ίδιες συναρτήσεις βάσης $\{\varphi_I\}_{I=1}^{N_{nodes}} \equiv \{\psi_I\}_{I=1}^{N_{nodes}}$ τόσο για το διάνυσμα της ταχύτητας όσο και για την μεταβλητή της πίεσης. Αναφορικά με τα σύνθετα μητρώα $\mathbf{M}_{uu}, \mathbf{M}_{pu}, \mathbf{S}_{uu}, \mathbf{S}_{up}, \mathbf{S}_{pu}, \mathbf{F}_u$ και τα απλά μητρώα S_{pp}, F_p , αυτά αντιστοιχούν σε όρους σταθεροποίησης και τις ακριβείς εκφράσεις των στοιχείων τους μπορούν να αναζητηθούν στο Παράρτημα B.1 και B.2.

3.10 Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης

Για την επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (3.80) με αρχικές συνθήκες τις (3.37) εφαρμόζονται οι έμμεσοι θ μέθοδοι, όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας (βλ. Κεφ. 2.8). Έτσι, το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (3.80) μετατρέπεται σε γραμμικοποιημένο αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}(\mathbf{u}) \frac{\mathbf{q}^{(n+1)} - \mathbf{q}^{(n)}}{\Delta t} &= \theta [-(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{\Sigma}(\mathbf{u})) \mathbf{q}^{(n+1)} + \mathbf{G}(\mathbf{u})^{(n+1)}] \\
 &+ (1 - \theta) [-(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{\Sigma}(\mathbf{u})) \mathbf{q}^{(n)} + \mathbf{G}(\mathbf{u})^{(n)}]
 \end{aligned}$$

ή αναδιατάσσοντας τους όρους

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \theta \Delta t (\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{\Sigma}(\mathbf{u}))] \mathbf{q}^{(n+1)} &= [\mathbf{N}(\mathbf{u}) - (1 - \theta) \Delta t (\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{\Sigma}(\mathbf{u}))] \mathbf{q}^{(n)} \\
 &+ \Delta t [\theta \mathbf{G}(\mathbf{u})^{(n+1)} + (1 - \theta) \mathbf{G}(\mathbf{u})^{(n)}].
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

όπου $\mathbf{q}^{(n)} \equiv (\mathbf{u}^{(n)}, p^{(n)})$ είναι η λύση των εξισώσεων Navier-Stokes την προηγούμενη χρονική στιγμή $t^{(n)}$ και $\mathbf{q}^{(n+1)} \equiv (\mathbf{u}^{(n+1)}, p^{(n+1)})$ είναι η λύση των εξισώσεων Navier-Stokes που αναζητείται στην τρέχουσα χρονική στιγμή $t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t$.

Παρατήρηση 3.9: Αφού γίνει η προσθήκη των συνθηκών τύπου Dirichlet στο γραμμικό σύστημα (3.81), τότε αυτό επιλύεται με μία κατάλληλη άμεση ή επαναληπτική μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων και σε κάθε χρονική επανάληψη, το άγνωστο διάνυσμα της ταχύτητας και η μεταβλητή της πίεσης επιλύονται ταυτόχρονα (μονολιθική προσέγγιση).

Κεφάλαιο 4: Εισαγωγή στο λογισμικό πακέτο ανοικτού κώδικα Elmer

Το Elmer είναι ένα υπολογιστικό πακέτο ανοικτού κώδικα για τη επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Το Elmer μπορεί να επιλύσει ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων, οι οποίες μπορούν να συζευχθούν μεταξύ τους με οποιοδήποτε τρόπο. Μερικά πεδία εφαρμογής αποτελούν: η μεταφορά θερμότητας, η ροή ρευστών, η μεταφορά μάζας, η δομική ανάλυση, η ακουστική, ο ηλεκτρομαγνητισμός, η μικρορευστομηχανική κ.ά.. Ως ελεύθερο λογισμικό παρέχει την δυνατότητα στον χρήστη να επέμβει ο ίδιος στις υφιστάμενες διαδικασίες επίλυσης ή να αναπτύξει νέους κώδικες για την επίλυση των εξισώσεων που τον ενδιαφέρουν. Στα πλεονεκτήματα του λογισμικού πακέτου Elmer συγκαταλέγονται η παροχή μεγάλης ποικιλίας από σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους, η ευελιξία αναφορικά με την αντιμετώπιση συζευγμένων προβλημάτων και η δυνατότητα για παράλληλη επεξεργασία.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει μία μικρή αναφορά στο λογισμικό πακέτο ανοικτού κώδικα Elmer. Θα αναλυθούν τα επιμέρους προγράμματα από τα οποία απαρτίζεται και θα συζητηθούν διάφοροι τρόποι λειτουργίας του. Τέλος, θα γίνει μία εισαγωγή στις διαδικασίες με τις οποίες το Elmer επιλύει τόσο μεμονωμένες όσο και συζευγμένες εξισώσεις.

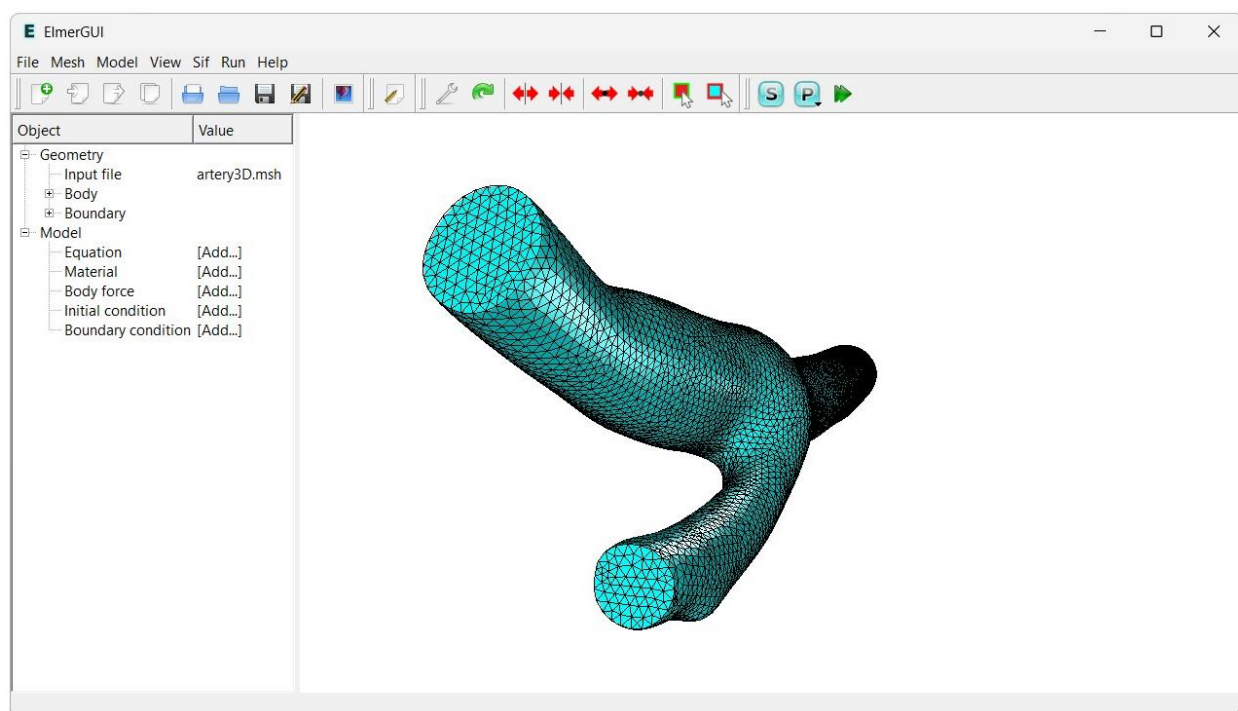
4.1 Ιστορικά στοιχεία

Η ανάπτυξη του λογισμικού πακέτου Elmer ξεκίνησε το 1995 ως μέρος ενός εθνικού προγράμματος τεχνολογίας υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, το οποίο χρηματοδοτήθηκε από τον Φινλανδικό οργανισμό χρηματοδότησης για την τεχνολογία και την καινοτομία, Tekes. Η αρχική ανάπτυξή του πραγματοποιήθηκε σε συνεργασία του CSC – IT Center for Science (γνωστό και ως CSC – Scientific Computing), μία κυβερνητική μη κερδοσκοπική εταιρεία που ανήκει στο Υπουργείο Παιδείας της Φινλανδίας, με το τεχνολογικό πανεπιστήμιο του Ελσίνκι, το τεχνολογικό κέντρο ερευνών της Φινλανδίας, το πανεπιστήμιο του Γυβάσκυλα και την εταιρία Okmetic. Μετά την ολοκλήρωση του αρχικού πενταετούς έργου, η ανάπτυξη του Elmer συνεχίστηκε από το CSC και σε άλλους τομείς εφαρμογών, πέρα από την ρευστοδυναμική. Τον Σεπτέμβριο του 2005, το Elmer κυκλοφόρησε με γενική άδειας δημόσιας χρήσης GNU, ως ελεύθερο λογισμικό ([Raback & Malinen, 2023](#)).

4.2 Επιμέρους προγράμματα του λογισμικού πακέτου Elmer

Για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, το Elmer περιέχει υποπρογράμματα που πραγματοποιούν τις διαδικασίες της προ-επεξεργασίας (preprocessing) της επίλυσης και της μετά-επεξεργασίας (postprocessing). Όπως και σε κάθε άλλο υπολογιστικό πακέτο, έτσι και στο Elmer, σε πρώτη φάση πραγματοποιείται η λεγόμενη προ-επεξεργασία (preprocessing) σύμφωνα με την οποία, κατασκευάζεται το υπολογιστικό χωρίο και το πλέγμα, προσδιορίζονται οι παράμετροι του προβλήματος, οι συνοριακές συνθήκες και επιλέγονται οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης. Σε δεύτερη φάση, καλείται ο επιλύτης (solver) που αναλαμβάνει και όλη την υπολογιστική διαδικασία λύνοντας το πρόβλημα. Τέλος, πραγματοποιείται η διαδικασία της μετά-επεξεργασίας (postprocessing) σύμφωνα με την οποία πραγματοποιείται η ανάλυση των δεδομένων εξόδου από τον επιλύτη (solver) και απεικονίζεται η υπολογιστική λύση σε γραφική μορφή. Το λογισμικό πακέτο

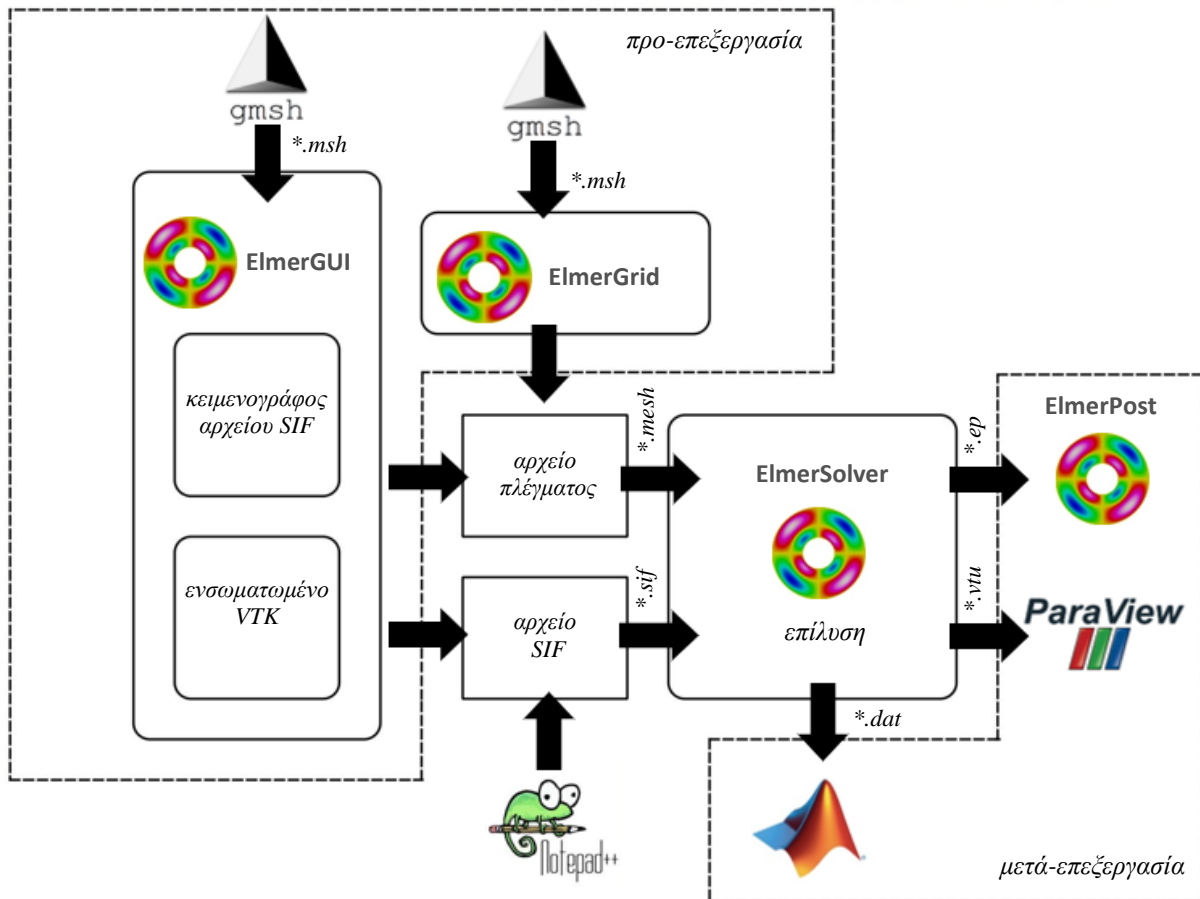
Elmer περιέχει υποπρογράμματα που πραγματοποιούν και τις τρεις παραπάνω διαδικασίες. Ωστόσο, το πιο ανεπτυγμένο τμήμα του είναι ο επιλύτης του, ElmerSolver, ο οποίος παρέχει ένα ευρύ φάσμα από διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων. Το ElmerSolver μπορεί να χρησιμοποιηθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες συνιστώσες του, προσφέροντας την δυνατότητα στον χρήστη να χρησιμοποιήσει εξωτερικά λογισμικά για την διαδικασία της προ-επεξεργασίας και μετά-επεξεργασίας. Αυτό, ωστόσο, δεν σημαίνει ότι και τα υπόλοιπα μέρη του λογισμικού πακέτου Elmer δεν προσφέρουν σημαντικές λειτουργίες για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης.



Σχ. 4-1 Γραφικό περιβάλλον χρήστη του Elmer, ElmerGUI. Απεικόνιση πλέγματος τρισδιάστατης γεωμετρίας.

Για την διαδικασία της προ-επεξεργασίας το λογισμικό πακέτο Elmer περιέχει ένα ανεξάρτητο πρόγραμμα, το οποίο ονομάζεται ElmerGrid (Raback, 2023). Το ElmerGrid δημιουργεί απλές γεωμετρίες και τις διακριτοποιεί με γένεση δομημένου πλέγματος. Σε διαφορετική περίπτωση, το αρχείο του πλέγματος πρέπει να δημιουργηθεί από εξωτερικά λογισμικά και στην συνέχεια να διαβαστεί από το ElmerGrid, ώστε να τα τροποποιήσει στο κατάλληλο μορφότυπο του Elmer. Μόνο τότε, μπορεί να πραγματοποιηθεί η επίλυση των ζητούμενων μερικών διαφορικών εξισώσεων με την εκτέλεση του ElmerSolver. Πέρα από το αρχείο του πλέγματος, για την εκτέλεση του ElmerSolver απαιτείται ένα σύνολο από εντολές που καθορίζουν τα μαθηματικά πρότυπα που επιλέγονται, τις συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται και τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης. Αυτές οι εντολές μπορούν να δοθούν μέσω ενός ειδικού αρχείου κειμένου το οποίο ονομάζεται ElmerSolver Input File (SIF) (Ruokolainen, κ.α., 2023). Όταν χρησιμοποιείται το γραφικό περιβάλλον χρήστη του Elmer, ElmerGUI, το αρχείο δημιουργείται αυτόματα (Lyly & Takayuki, 2023). Σε διαφορετική περίπτωση μπορεί να γραφτεί από το χρήστη χρησιμοποιώντας ένα κειμενογράφο (notepad++). Μαθαίνοντας την σύνταξη του ειδικού αυτού αρχείου, ο χρήστης μπορεί να επέμβει άμεσα διαφοροποιώντας προδιαγραφές επίλυσης ή να προσθέσει επιπλέον ανεπτυγμένες προδιαγραφές που δεν

παρέχονται μέσω του ElmerGUI (βλ. Σχ. 4-1). Έπειτα από την εκτέλεση του ElmerSolver, μέσω της γραμμής εντολών ή μέσω του ElmerGUI, λαμβάνεται ως έξοδος ένα αρχείο με τα αποτελέσματα της επίλυσης. Το αρχείο αυτό μπορεί να διαβαστεί από διάφορα προγράμματα μετά-επεξεργασίας (postprocessing). Ο μετά-επεξεργαστής (postprocessor) του λογισμικού πακέτου Elmer ονομάζεται ElmerPost. Ωστόσο, το ElmerSolver μπορεί να παρέχει ως έξοδο, αρχεία με διαφορετική μορφή από την συνηθισμένη. Για παράδειγμα, εξάγοντας το αρχείο αποτελεσμάτων σε μορφή επέκτασης .vtu μπορεί να πραγματοποιηθεί απεικόνιση των αποτελεσμάτων στην πλατφόρμα ParaView (Ahrens, Geveci, & Law, 2005).



Σχ. 4-2 Βασικές λειτουργίες και τρόπος συνδυασμού των επιμέρους υποπρογραμμάτων του Elmer με εξωτερικά λογισμικά.

4.3 Προτεινόμενες ροές εργασίας

Αναμφισβήτητα, το πιο ανεπτυγμένο επιμέρους πρόγραμμα του λογισμικού πακέτου Elmer είναι ο επιλύτης του, ElmerSolver, στον οποίο επικεντρώνονται και οι περισσότερες προσπάθειες συνεχούς βελτίωσης και ενημέρωσης. Μερικά από τα πλεονεκτήματά του ElmerSolver είναι: η δυνατότητα να προσφέρει παράλληλους υπολογισμούς, η μεγάλη ευχέρεια στο να επιλύει συζευγμένα προβλήματα και η ικανότητά του να προσαρμόζεται σε αλλαγές του πηγαίου κώδικα. Ως αποτέλεσμα, οι πιο προχωρημένοι χρήστες του Elmer συνήθως επιλέγουν εξωτερικά λογισμικά για την διαδικασία της προ-επεξεργασίας και

μετά-επεξεργασίας στα οποία το Elmer υστερεί, ενώ για την διαδικασία της επίλυσης χρησιμοποιούν το ElmerSolver (βλ. Σχ. 4-2). Στον Πίνακα 4-1 δίνονται μερικές από τις συνιστώμενες ροές εργασίας τις οποίες μπορεί να ακολουθήσει ένας χρήστης.

Πίνακας 4-1. Συνιστώμενες ροές εργασίας για την υπολογιστική προσομοίωση φυσικών φαινομένων με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer.

Προ-επεξεργασία	Επίλυση	Μετά-επεξεργασία
Είδη υπάρχων αρχείο πλέγματος + ElmerGUI	ElmerSolver	VTK widget του ElmerGUI
Είδη υπάρχων αρχείο πλέγματος + ElmerGUI	ElmerSolver	Paraview
ElmerGrid με χρήση Notepad + ElmerGUI	ElmerSolver	ElmerPost
FreeCad + Gmsh + ElmerGUI	ElmerSolver	Paraview
Gmsh + ElmerGrid με χρήση Notepad + δημιουργία SIF με χρήση Notepad	ElmerSolver	Paraview

4.4 Βασικές διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που επιλύει το Elmer μπορεί να βρίσκονται σε μόνιμη ή σε μεταβατική κατάσταση και να είναι γραμμικές ή μη γραμμικές. Σε κάθε περίπτωση, ξεκινώντας από την ασθενή διατύπωση του προβλήματος και εφαρμόζοντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε συνδυασμό με έμμεσες μεθόδους χρονικής διακριτοποίησης (για μεταβατικά προβλήματα), καταλήγουμε πάντα σε ένα σύστημα της μορφής

$$F(u) = 0, \quad (4.1)$$

όπου το u αναπαριστά το διάνυσμα της άγνωστης λύσης στα σημεία των κόμβων του πλέγματος στην περίπτωση της μόνιμης κατάστασης ή το διάνυσμα της άγνωστης λύσης στην περίπτωση μεταβατικής κατάστασης σε χρόνο $t = t^{(n)}$.

Για γραμμικά προβλήματα, το αλγεβρικό σύστημα της μορφής (4.1) αναπαριστά ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα, το υπόλοιπο του οποίου δίνεται από την σχέση

$$F(u) = Au - b = 0. \quad (4.2)$$

Σε διαφορετική περίπτωση, αν η F είναι μία μη γραμμική απεικόνιση, τότε απαιτείται μία επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση του προβλήματος (4.1). Οι εξισώσεις στο υπολογιστικό πακέτο Elmer σε αυτή την περίπτωση, γραμμικοποιούνται λαμβάνοντας την μορφή

$$F(u^{(j+1)}) = A(u^{(j)})u^{(j+1)} - b(u^{(j)}) = 0. \quad (4.3)$$

Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι το Elmer έχει σχεδιαστεί με σκοπό να είναι ικανό να επιλύει κυρίως συζευγμένα προβλήματα. Έστω, λοιπόν, ότι ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται από N σε αριθμό μερικές διαφορικές εξισώσεις. Εφαρμόζοντας και πάλι τις ίδιες διαδικασίες επίλυσης, όπως και στην περίπτωση του μεμονωμένου φυσικού μοντέλου (ασθενή διατύπωση, χωρική διακριτοποίηση με την μέθοδο των

πεπερασμένων στοιχείων, εφαρμογή έμμεσων μεθόδων χρονικής διακριτοποίησης), καταλήγουμε σε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}
 F_1(u_1, u_2, \dots, u_N) &= 0, \\
 F_2(u_1, u_2, \dots, u_N) &= 0, \\
 &\dots \\
 F_N(u_1, u_2, \dots, u_N) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

όπου τα διανύσματα u_i του $i = 1, \dots, N$ μοντέλου περιέχουν τις λύσεις των άγνωστων μεταβλητών στα σημεία των κόμβων του πλέγματος σε μόνιμη κατάσταση ή σε μεταβατική κατάσταση σε χρόνο $t = t^{(n+1)}$. Στην περίπτωση που όλες οι μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικές, τότε το πρόβλημα (4.4) παραπέμπει σε ένα γραμμικό σύστημα. Σε διαφορετική περίπτωση πρόκειται για ένα μη γραμμικό πρόβλημα και απαιτείται η γραμμικοποίηση των εκάστοτε εξισώσεων με τις διαθέσιμες μεθόδους που υπάρχουν για κάθε μοντέλο. Προβλήματα αυτής της φύσεως, στα οποία παρουσιάζεται σύζευξη μεταξύ των μερικών διαφορικών εξισώσεων, λύνονται από το λογισμικό πακέτο Elmer κυρίως με την διαχωρισμένη προσέγγιση (segregated approach), σύμφωνα με την οποία οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα επιλύονται με διακριτούς επιλύτες (solvers). Για αυτό το σκοπό, εφαρμόζονται οι επαναλήψεις Gauss-Seidel και αντί να επιλύεται το συζευγμένο πρόβλημα της μορφής (4.4) ταυτόχρονα, τα στοιχεία $u^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_N^{(j)})$ σε κάθε μη γραμμική επανάληψη j , ενημερώνονται με τον εξής διαχωρισμένο τρόπο:

$$\begin{aligned}
 F_1(u_1^{(j)}, u_2^{(j-1)}, u_3^{(j-1)}, \dots, u_N^{(j-1)}) &= 0, \\
 F_2(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j-1)}, \dots, u_N^{(j-1)}) &= 0, \\
 &\dots \\
 F_N(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_N^{(j)}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Δηλαδή, το κ-οστό διακριτό μοντέλο των εξισώσεων (4.5) εξαρτάται ρητά (implicit) μόνο από την κύρια μεταβλητή του μοντέλου u_k , ενώ η εξάρτηση από τις μεταβλητές των άλλων μοντέλων είναι πεπλεγμένη (explicit). Κάθε φορά, λοιπόν, επιλύεται ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$F(u_k^{(j)}) = F_k(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(j)}, \dots, u_N) = 0
 \tag{4.6}$$

με τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τα μεμονωμένα φυσικά μοντέλα.

Κεφάλαιο 5: Επίλυση γραμμικών προβλημάτων με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιλυθούν προβλήματα γραμμικής φύσεως με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer. Σε αυτά συμπεριλαμβάνονται: ένα πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας που διέπεται από την εξίσωση Poisson και ένα πρόβλημα ροής Stokes. Και τα δύο προβλήματα βρίσκονται σε δύο διαστάσεις και το υπολογιστικό τους χωρίο είναι μία τετραγωνική κοιλότητα. Ειδικότερα, τα προβλήματα περιέχουν αναλυτική λύση, ώστε να είναι δυνατή η ανάλυση σφαλμάτων. Συγκεκριμένα, για το πρόβλημα ροής Stokes χρησιμοποιούνται διαφόρων ειδών μεικτά πεπερασμένα στοιχεία (Taylor-Hood, Mini, P_1 - P_1) για την διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, με σκοπό να εξακριβωθεί ποια από αυτά παραβιάζουν και ποια ικανοποιούν την συνθήκη ευστάθειας Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi.

5.1 Το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα

5.1.1 Διατύπωση του προβλήματος

Ξεκινάμε με ένα πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε δύο διαστάσεις, το οποίο διέπεται από την εξίσωση Poisson σε ένα τετραγωνικό χωρίο $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Το χωρίο θερμαίνεται με ρυθμό παραγωγής θερμότητας που δίνεται από την σχέση $f = 2x_2^2(x_2 - 1)(3x_1 - 2) + 2x_1(x_1 - 1)^2(3x_2 - 1)$ [W/m^3]. Η πυκνότητα του στερεού υλικού ισούται με $\rho = 1 \text{ kg}/m^3$, η θερμική αγωγιμότητα με $\kappa = 1 \text{ W}/mK$ και το σύνορο $\partial\Omega$ διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία $T = 0 \text{ K}$. Για την επίλυση του προβλήματος ζητείται το πεδίο θερμοκρασίας $T(\mathbf{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} -\kappa\Delta T &= \rho f \text{ στο } \Omega, \\ T &= 0 \text{ στο } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Η αναλυτική λύση του προβλήματος δίνεται από την σχέση $T(\mathbf{x}) = x_1(x_1 - 1)^2x_2^2(1 - x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, η οποία και χρησιμοποιείται για την ανάλυση σφαλμάτων.

5.1.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος

Η διακριτοποίηση της εξίσωσης (5.1.1) πραγματοποιείται με την μέθοδο Galerkin οδηγώντας στην παρακάτω διατύπωση του μεταβολικού προβλήματος (βλ. Κεφ. 1.4): Να βρεθεί $T^h \in V^h$, έτσι ώστε

$$(\kappa\nabla T^h, \nabla w^h) = (\rho f, w^h), \quad \forall w^h \in V^h. \tag{5.1.2}$$

Ο χώρος V^h κατασκευάζεται είτε από 1^{ου} ή από 2^{ου} βαθμού πολώνυμα Lagrange. Αυτό συνεπάγεται ότι το πλέγμα θα πρέπει να κατασκευαστεί είτε από στοιχεία 1^{ης} ή 2^{ης} τάξης αντίστοιχα.

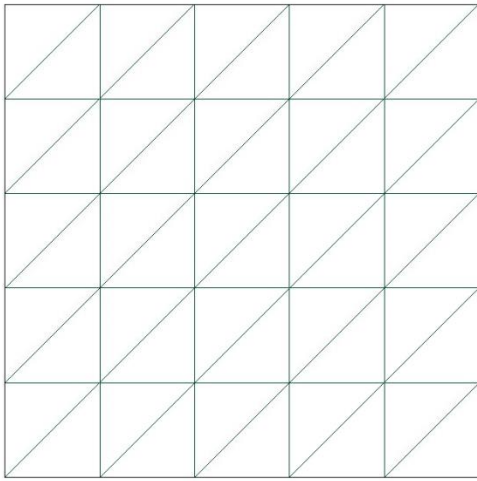
Σε μητρική μορφή, η διακριτοποιημένη εξίσωση Poisson (5.1.2) γράφεται

$$KT = F, \tag{5.1.3}$$

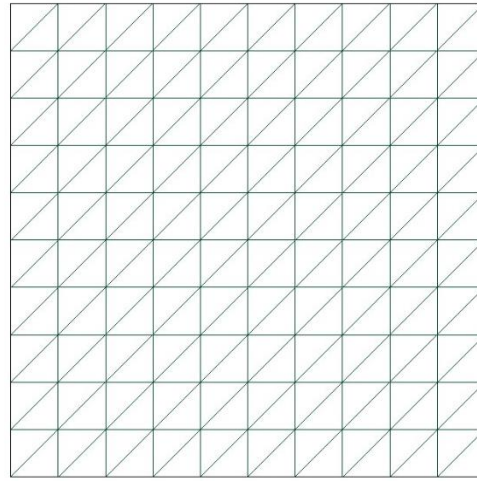
όπου τα στοιχεία του πίνακα K και του διανύσματος F δίνονται από τις εξισώσεις (1.14) και (1.15), εν απουσία του επιφανειακού ολοκληρώματος, αφού δεν επιβάλλονται συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann.

5.1.3 Κατασκευή γεωμετρίας και πλέγματος

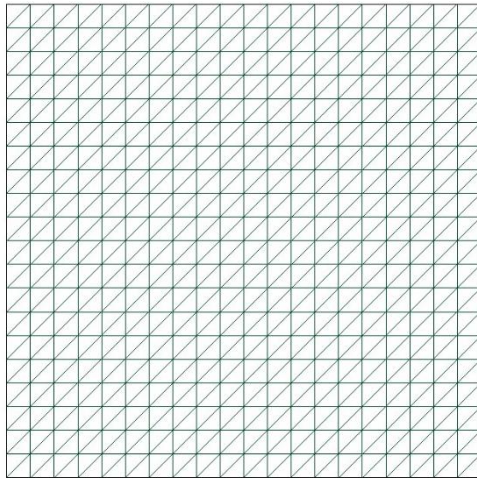
Η κατασκευή της γεωμετρίας και του πλέγματος πραγματοποιείται στο ανοικτό λογισμικό παραγωγής πλεγμάτων Gmsh ([Geuzaine & Remacle, 2022](#)), στο οποίο δημιουργείται μία σειρά από δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων 1^{ης} και 2^{ης} τάξης με διαφορετικό μέγεθος (βλ. Σχ. 5-1).



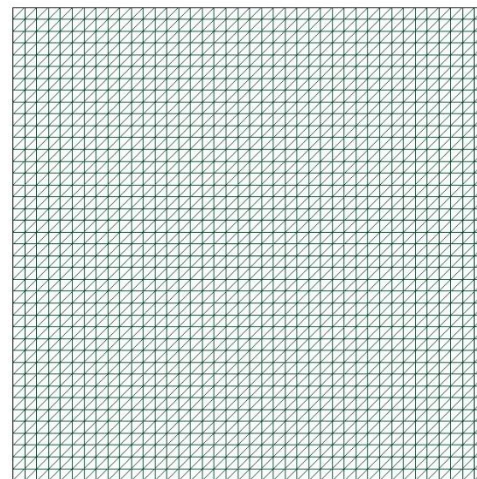
50 στοιχεία



200 στοιχεία



800 στοιχεία



3200 στοιχεία

Σχ. 5-1 Οικογένεια δομημένων πλεγμάτων σε τετραγωνικό χωρίο.

5.1.4 Αριθμητική επίλυση

Για την επίλυση του διακριτοποιημένου προβλήματος (5.1.2) χρησιμοποιείται η υπορουτίνα HeatSolver από την βιβλιοθήκη του ElmerSolver (βλ. Παρ. E.2). Η υπορουτίνα αυτή αναλαμβάνει όλη την υπολογιστική διαδικασία, πραγματοποιώντας την τοπολογική συναρμολόγηση των συνεισφορών των στοιχείων (βλ. Κεφ. 1.7), ενσωματώνοντας τις συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet (βλ. Κεφ. 1.8) και τέλος, επιλύοντας το γραμμικό σύστημα (5.1.3). Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (5.1.3) επιλέγεται η επαναληπτική μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων (Saad, 2003), δεδομένου ότι ο πίνακας των συντελεστών K είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (Elman, Silvester, & Wathen, 2014).

Το κριτήριο τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας τίθεται ίσο με

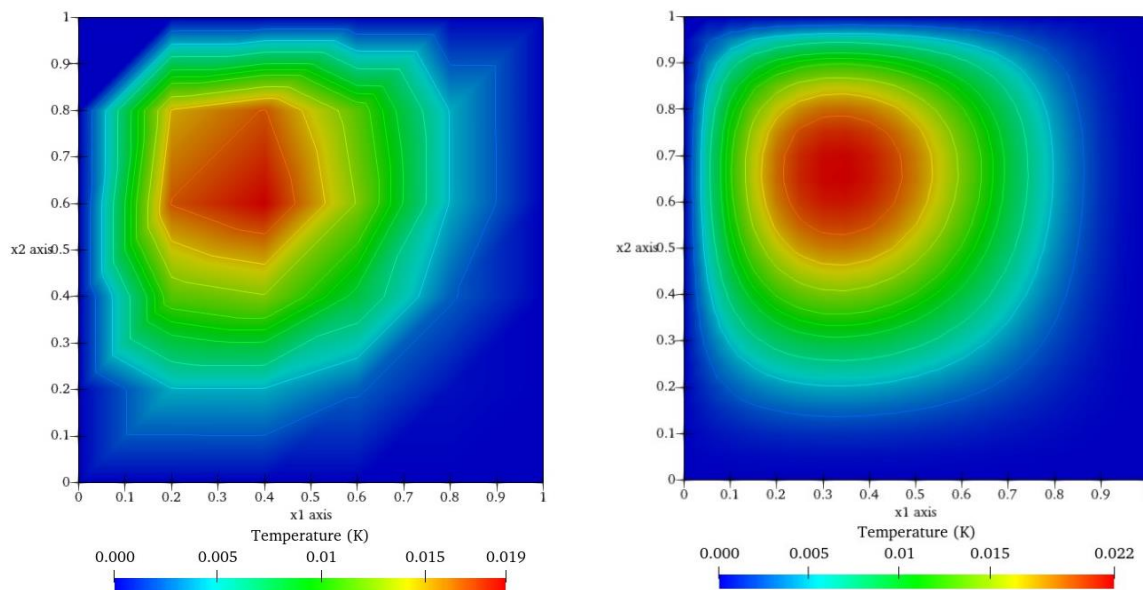
$$\frac{\|Ku - f\|}{\|f\|} \leq 1 \cdot 10^{-12} \quad (5.1.4)$$

και ως μέθοδος προσταθεροποίησης χρησιμοποιείται η μέθοδος Jacobi (Saad, 2003).

Για τον προσδιορισμό του σφάλματος του πεδίου θερμοκρασίας, κατασκευάζεται υπορουτίνα σε κώδικα Fortran, ονομαζόμενη ως HeatCavityNormSolver (βλ. Παρ. Γ.1), η οποία υπολογίζει το σφάλμα ανάμεσα σε υπολογιστική και αναλυτική λύση του πεδίου θερμοκρασίας μέσω της νόρμας L^2 (Hilbert) (βλ. Παρ. A.1) και H^1 (Sobolev) (βλ. Παρ. A.2). Τέλος, η συνάρτηση f που περιγράφει την παραγωγή θερμότητας στο χωρίο Ω , εισάγεται στο αρχείο SIF μέσω μίας User-Defined Function (UDF), γραμμένη σε κώδικα Fortran (βλ. Παρ. A.1).

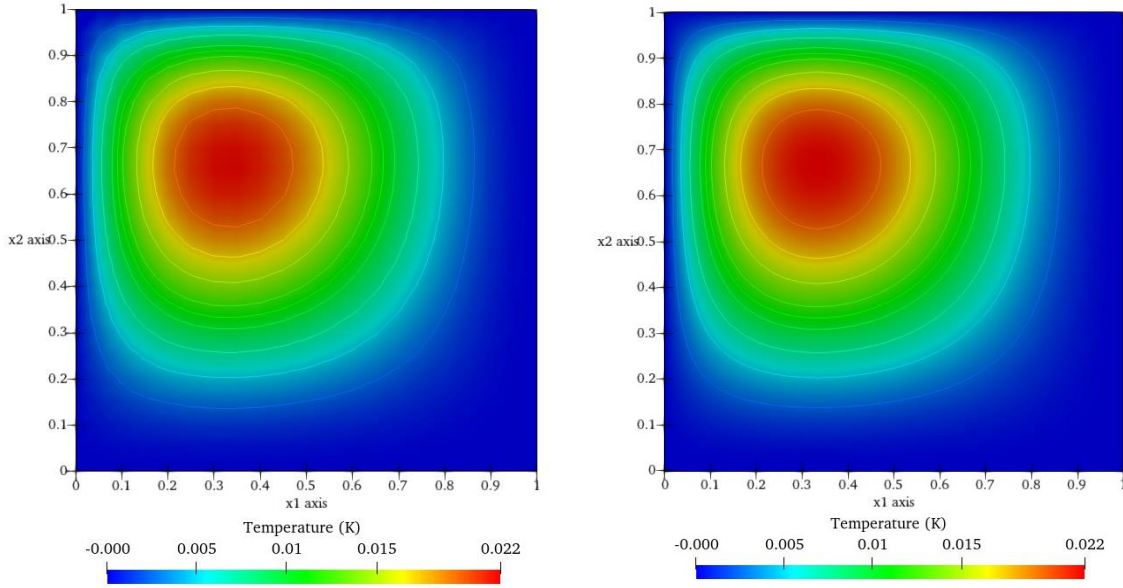
5.1.5 Απεικόνιση αποτελεσμάτων και ανάλυση σφαλμάτων

Η απεικόνιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων πραγματοποιείται με την βοήθεια του ανοικτού λογισμικού ParaView (Ahrens, Geveci, & Law, 2005). Στα Σχήματα 5-2 και 5-3 παρουσιάζονται οι ισοϋψείς γραμμές του πεδίου θερμοκρασίας για πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας.



Σχ. 5-2 Ισοϋψείς γραμμές πεδίου θερμοκρασίας για πλέγματα με 50 στοιχεία (αριστερά) και 200 στοιχεία (δεξιά).

Καλώντας την υπορουτίνα SaveScalars (βλ. παρ. E.2), υπολογίζονται και τυπώνονται: η μέγιστη θερμοκρασία στο χωρίο Ω , οι βαθμοί ελευθερίας (DOF) και ο χρόνος CPU. Στους πίνακες 5-1 και 5-2 δίνονται οι τιμές αυτών των μεγεθών καθώς και οι νόρμες L^2 (Sobolev) και H^1 (Hilbert) του σφάλματος για διάφορα μεγέθη πλέγματος.



Σχ. 5-3 Ισοϋψείς γραμμές πεδίου θερμοκρασίας για πλέγματα με 800 στοιχεία (αριστερά) και 3200 στοιχεία (δεξιά).

Συγκρίνοντας, λοιπόν, τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι με την χρήση πυκνότερων πλεγμάτων λαμβάνονται πιο ακριβείς τιμές θερμοκρασίας, αλλά με κόστος περισσότερο υπολογιστικό χρόνο.

Πίνακας 5-1. Αποτελέσματα για διάφορα μεγέθη πλέγματος στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν 1^{ος} βαθμού πολυώνυμα Lagrange.

Μέγεθος πλέγματος h [m]	DOF	T_{\max} (K)	Νόρμα Hilbert $\ T - T^h\ _{L^2(\Omega)}$	Νόρμα Sobolev $\ T - T^h\ _{H^1(\Omega)}$	Χρόνος CPU [s]
0,283	36	0,0189	1,8030e-003	2,1600e-002	0,081
0,236	49	0,0206	1,3008e-003	1,8149e-002	0,065
0,202	64	0,0203	9,7859e-004	1,5631e-002	0,064
0,177	81	0,0207	7,6109e-004	1,3719e-002	0,096
0,141	121	0,02111	4,9635e-004	1,1013e-002	0,087
0,094	256	0,02172	2,2484e-004	7,3669e-003	0,103
0,071	441	0,02174	1,2733e-004	5,5316e-003	0,102
0,035	1681	0,02189	3,2043e-005	2,7688e-003	0,124
0,018	6561	0,02193	8,0241e-006	1,3848e-003	0,352

Αναφορικά με την ανάλυση των σφαλμάτων, είναι γνωστό από την συναρτησιακή ανάλυση ότι αν ο χώρος των λύσεων V^h κατασκευάζεται από p βαθμού πολυώνυμα Lagrange και η αναλυτική λύση $T \in H^{p+1}$ (βλ. Παρ. A.2), τότε ισχύει η παρακάτω εκτίμηση για το σφάλμα (Farrell, 2021)

$$\|T - T^h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{p+1}|T|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad (5.1.5)$$

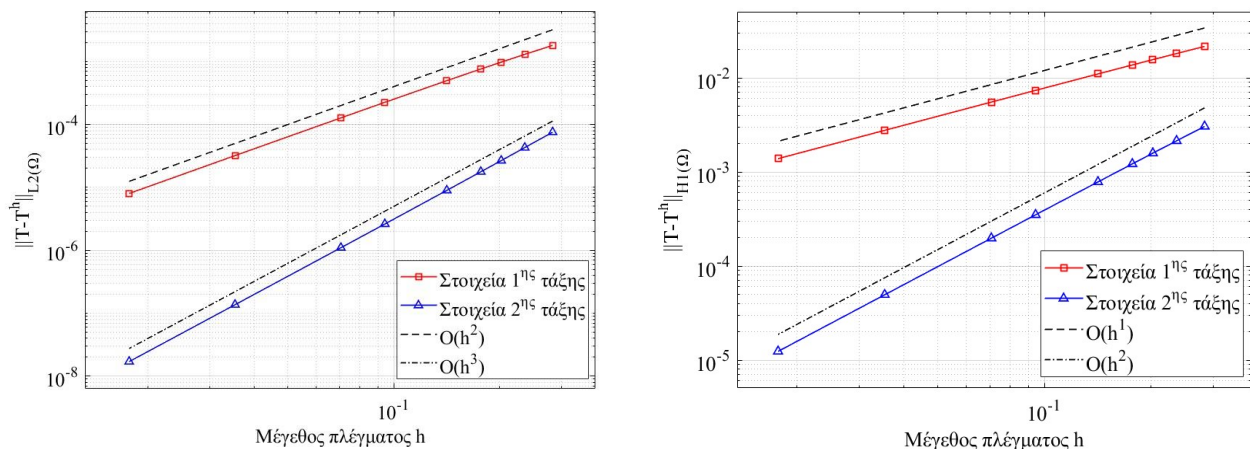
$$\|T - T^h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^p|T|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad (5.1.6)$$

όπου C σταθερά και h το μέγεθος του πλέγματος (ισούται με το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς κάθε στοιχείου).

Πίνακας 5-2. Αποτελέσματα για διάφορα μεγέθη πλέγματος στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν 2^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange.

Μέγεθος πλέγματος h [m]	DOF	T _{max} (K)	Νόρμα Hilbert $\ T - T^h\ _{L^2(\Omega)}$	Νόρμα Sobolev $\ T - T^h\ _{H^1(\Omega)}$	Χρόνος CPU [s]
0,283	121	0,0216	7,5448e-005	3,0512e-003	0,299
0,236	169	0,0220	4,2918e-005	2,1411e-003	0,243
0,202	225	0,0218	2,6694e-005	1,5835e-003	0,144
0,177	289	0,02181	1,7722e-005	1,2179e-003	0,094
0,141	441	0,02186	8,9678e-006	7,8374e-004	0,084
0,094	961	0,02195	2,6230e-006	3,5034e-004	0,123
0,071	1691	0,02193	1,1012e-006	1,9749e-004	0,161
0,035	6561	0,02194	1,3699e-007	4,9478e-005	0,467
0,018	25921	0,02195	1,7104e-008	1,2377e-005	2,58

Στο Σχήμα 5-4 παρουσιάζεται ο ρυθμός μείωσης του σφάλματος ανάμεσα σε υπολογιστική και αναλυτική λύση μέσω της νόρμας L^2 (Hilbert) και H^1 (Sobolev) συναρτήσεως του μεγέθους του πλέγματος για στοιχεία 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.



Σχ. 5-4 Σύγκριση του ρυθμού μείωσης του σφάλματος σε σχέση με τη μεταβολή πύκνωσης του πλέγματος μεταξύ στοιχείων 1ης και 2ης τάξης μέσω της νόρμας Hilbert (αριστερά) και Sobolev (δεξιά).

Από τον έλεγχο του ρυθμού μείωσης του σφάλματος επιβεβαιώνεται αυτό που προβλέπεται από τις σχέσεις (5.1.5) και (5.1.6). Η νόρμα L^2 (Hilbert) συγκλίνει με ρυθμό $O(h^2)$ για 1^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange και με ρυθμό $O(h^3)$ για 2^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange, ενώ η νόρμα H^1 (Sobolev) συγκλίνει με ρυθμό $O(h^1)$ και με ρυθμό $O(h^2)$ αντιστοίχως.

5.2 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση

Η εξίσωση Stokes αντιπροσωπεύει μία απλοποιημένη ασυμπτωτική μορφή της εξίσωσης Navier-Stokes, όταν η ροή ελέγχεται κατά κύριο λόγο από τις ιξώδεις δυνάμεις. Ως αποτέλεσμα, ο μη γραμμικός συναγωγικός όρος των εξισώσεων Navier-Stokes μπορεί να παραληφθεί. Αυτή η παραδοχή είναι ακριβής για μικρούς αριθμούς Reynolds ($Re \ll 1$), όταν η ροή χαρακτηρίζεται είτε από χαμηλές ταχύτητες ή από υψηλές τιμές ιξώδους ([Durbin & Medic, 2007](#)). Λόγω της γραμμικής και απλοποιημένης μορφής της, η εξίσωση Stokes επιδέχεται αναλυτική λύση που την καθιστά κατάλληλη για ανάλυση αριθμητικών σφαλμάτων ([Cioncolini & Boffi, 2019](#)).

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Stokes σε μία τετραγωνική κοιλότητα με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer. Η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου θα πραγματοποιηθεί με διαφόρων ειδών μεικτά πεπερασμένα στοιχεία με σκοπό να διαπιστωθεί κατά πόσο αυτά ικανοποιούν ή παραβιάζουν την συνθήκη ευστάθειας Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 με και χωρίς σταθεροποίηση, τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_2/P_1 (Taylor-Hood) και P_1 -bubbles/ P_1 (Mini). Ακολουθεί ανάλυση σφαλμάτων με έλεγχο της νόρμας L^2 (Hilbert) και H^1 (Sobolev) βασισόμενη στη συναρτησιακή ανάλυση.

5.2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Το πρόβλημα της ροής Stokes που εξετάζεται, παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους [Donea και Huerta, 2003](#) και αφορά μία έρπουσα ροή σε ένα τετραγωνικό χωρίο $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ με γνωστή αναλυτική λύση. Το πρόβλημα περιλαμβάνει: την εύρεση του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ με $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ και του βαθμωτού πεδίου της πίεσης $p \in C^1(\Omega)$, δοθέντος $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ και $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, έτσι ώστε

$$\left. \begin{aligned} -\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ στο } \Omega, \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ στο } \partial\Omega, \quad (5.2.2)$$

όπου $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ το διάνυσμα της σωματικής δύναμης, οι συνιστώσες της οποίας δίνονται από τις σχέσεις

$$f_1 = (12 - 24x_2)x_1^4 + (-24 + 48x_2)x_1^3 + (-48x_2 + 72x_2^2 - 48x_2^3 + 12)x_1^2 + (-2 + 24x_2 - 72x_2^2 + 48x_2^3)x_1 + 1 - 4x_2 + 12x_2^2 - 8x_2^3, \quad (5.2.3)$$

$$f_2 = (8 - 48x_2 + 48x_2^2)x_1^3 + (-12 + 72x_2 - 72x_2^2)x_1^2 + (4 - 24x_2 + 48x_2^2 - 48x_2^3 + 24x_2^4)x_1 - 12x_2^2 + 24x_2^3 - 12x_2^4. \quad (5.2.4)$$

Με τις παραπάνω σωματικές δυνάμεις, το πρόβλημα της ροής Stokes επιδέχεται αναλυτική λύση, η οποία δίνεται από τις σχέσεις ([Donea & Huerta, 2003](#))

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2(2x_2 - 6x_2^2 + 4x_2^3), \quad (5.2.5)$$

$$u_2(x_1, x_2) = -x_2^2(1 - x_2)^2(2x_1 - 6x_1^2 + 4x_1^3), \quad (5.2.6)$$

$$p(x_1 x_2) = x_1(1 - x_2). \quad (5.2.7)$$

5.2.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος

Η διακριτοποίηση της εξίσωσης (5.2.1) πραγματοποιείται με τη μέθοδο Galerkin οδηγώντας στην παρακάτω διατύπωση του μεταβολικού προβλήματος: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, \mathbf{p}^h\} \in \mathbf{V}_u^h \times V_p^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} (\mu \nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) &= (\mathbf{w}_u^h, \rho \mathbf{f}), \quad \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^h, w_p^h) &= 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Ο χώρος \mathbf{V}_u^h κατασκευάζεται από: (α) 1^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange ή (β) 2^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange ή (γ) 1^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange με μία συνάρτηση «φουσαλίδας» (bubble function). Κατά αντιστοιχία, για την κατασκευή του χώρου V_p^h χρησιμοποιούνται και για τα τρεις ανωτέρω περιπτώσεις 1^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange. Δηλαδή, η διακριτοποίηση πραγματοποιείται με μεικτά πεπερασμένα στοιχεία: (α) τύπου P₁/P₁, (β) τύπου Taylor-Hood (P₂/P₁) ή (γ) τύπου Mini (P₁-bubble/P₁) (βλ. Κεφ. 3.8). Σε μητρική μορφή, η διακριτοποιημένη εξίσωση (5.2.9) γράφεται (βλ. Κεφ. 3.8)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.10)$$

Το διακριτοποιημένο πρόβλημα (5.2.9) για να είναι ευσταθές θα πρέπει οι χώροι \mathbf{V}_u^h, V_p^h να ικανοποιούν την συνθήκη ευστάθειας Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (Girault & Raviart, 1986). Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν χρησιμοποιούνται μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P₂/P₁ και P₁-bubble/P₁, ενώ παραβιάζεται από τα στοιχεία τύπου P₁/P₁ οδηγώντας στην εμφάνιση ψευδών ταλαντώσεων στο πεδίο της πίεσης (Boffi, Brezzi, & Fortin, 2013). Σε περίπτωση, λοιπόν, που χρησιμοποιηθούν τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P₁/P₁, πρέπει να προστεθούν επιπλέον όροι σταθεροποίησης για την εξάλειψη των ψευδών ταλαντώσεων στο πεδίο της πίεσης (Hughes, Franca, & Ralestra, 1986).

Η διατύπωση του μεταβολικού προβλήματος με την προσθήκη επιπλέον όρων σταθεροποίησης λαμβάνει την μορφή (βλ. Κεφ. 3.9): Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, \mathbf{p}^h\} \in \mathbf{V}_u^h \times V_p^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} (\mu \nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) + s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) &= (\mathbf{w}_u^h, \rho \mathbf{f}), \quad \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}^h, w_p^h) + s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) &= 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

όπου

$$s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} [-\tau \mu \nabla^2 \mathbf{w}_u^h \cdot (-\mu \nabla^2 \mathbf{u}^h + \nabla p^h - \rho \mathbf{f}) + \delta \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h] dx, \quad (5.2.12)$$

και

$$s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \nabla w_p^h \cdot (-\mu \nabla^2 \mathbf{u}^h + \nabla p^h - \rho \mathbf{f}) dx. \quad (5.2.13)$$

Η παράμετρος σταθεροποίησης τ για την εξίσωση Stokes δίνεται από την σχέση (3.72) θεωρώντας ότι ισχύει $0 < Re^h < 1$, δηλαδή

$$\tau = m_k h_K^2 / (8 * \mu), \quad (5.2.14)$$

όπου η παράμετρος m_k είναι μία σταθερά και h_K το τοπικό μέγεθος του πλέγματος.

Η παράμετρος δ για την περίπτωση της ροής Stokes λαμβάνει την μηδενική τιμή,

$$\delta = 0. \quad (5.2.15)$$

Η μητρική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωση (5.2.11) για την περίπτωση που χρησιμοποιηθούν επιπλέον όροι σταθεροποίησης, λαμβάνει την μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{S}_{uu} & -\mathbf{Q}^T + \mathbf{S}_{pu} \\ \mathbf{Q} + \mathbf{S}_{up} & \mathbf{S}_{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_p \end{pmatrix}, \quad (5.2.16)$$

όπου

$$\mathbf{S}_{uu} \equiv \mathbf{S}_{uu}^{(1)} + \mathbf{S}_{uu}^{(5)}, \quad (5.2.17)$$

$$\mathbf{S}_{up} \equiv \mathbf{S}_{up}^{(1)}, \quad (5.2.18)$$

$$\mathbf{S}_{pu} \equiv \mathbf{S}_{pu}^{(2)}, \quad (5.2.19)$$

$$\mathbf{F}_u \equiv \mathbf{F}_u^{(2)}. \quad (5.2.20)$$

Οι όροι που αντιπροσωπεύουν τα παραπάνω μητρώα δίνονται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3.5 και στο Παράρτημα B.1.

5.2.3 Διακριτοποίηση του προβλήματος

Η κατασκευή της γεωμετρίας και του πλέγματος πραγματοποιείται στο ανοικτό λογισμικό παραγωγής πλεγμάτων Gmsh (Geuzaine & Remacle, 2022), στο οποίο δημιουργείται μία σειρά από δομημένα πλέγματα όμοια με αυτά του Σχήματος 5-1

5.2.4 Αριθμητική επίλυση

Για την επίλυση του διακριτοποιημένου μεταβολικού προβλήματος (5.2.9) με τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P_2/P_1 (Taylor-Hood) και P_1 -bubble/ P_1 (Mini) χρησιμοποιείται η υπορουτίνα Stokes (βλ. Παρ. E.3), ενώ για τη την επίλυση του σταθεροποιημένου σχήματος (5.2.11) με τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 (με και χωρίς σταθεροποίηση) χρησιμοποιείται η υπορουτίνα FlowSolver (βλ. Παρ. E.4). Τα γραμμικά συστήματα (5.2.10) και (5.2.16) επιλύονται με την επαναληπτική μέθοδο Biconjugate Gradient Stabilized, η οποία θεωρείται κατάλληλη για την επίλυση μη συμμετρικών συστημάτων (Vujicic, 2014). Το κριτήριο σύγκλισης τίθεται ίσο με

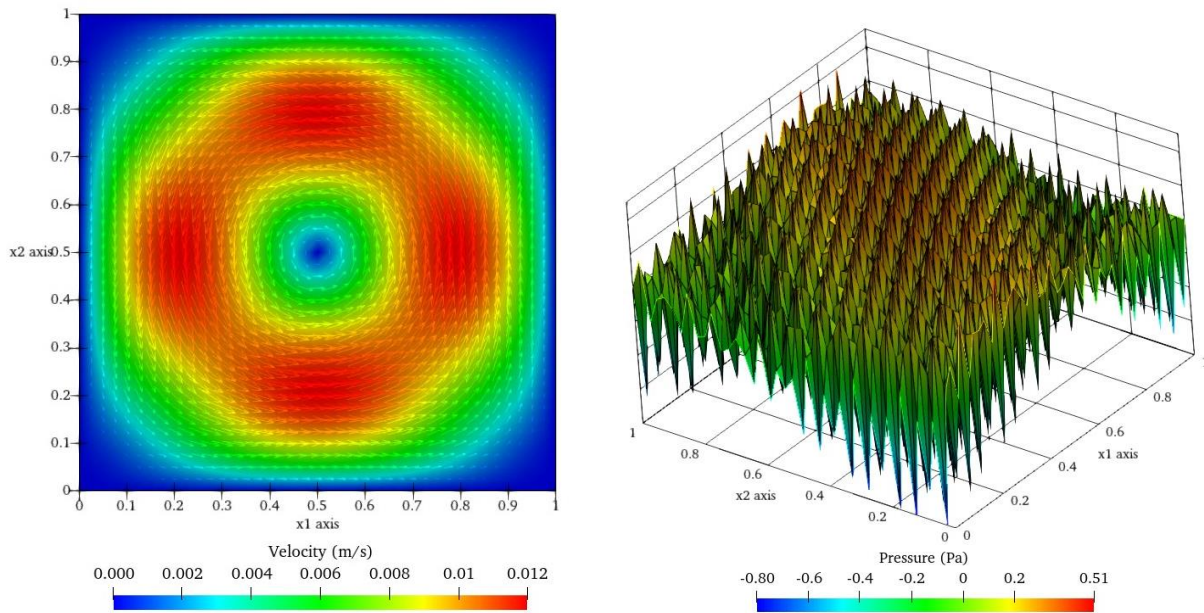
$$\frac{\|Ax - b\|}{\|b\|} \leq 1 \cdot 10^{-12} \quad (5.2.18)$$

και ως μέθοδος προσταθεροποίησης χρησιμοποιείται η μέθοδος της μερικής αποικοδόμησης ILU(1).

Για τον υπολογισμό των σφάλματων του πεδίου ταχύτητας και πίεσης κατασκευάζεται υπορουτίνα σε κώδικα Fortran, ονομαζόμενη ως StokesNormSolver (βλ. Παρ. 4.2). Η υπορουτίνα αυτή υπολογίζει το σφάλμα ανάμεσα στην υπολογιστική και αναλυτική λύση του πεδίου της πίεσης μέσω της νόρμας L^2 (Hilbert) και το σφάλμα ανάμεσα στην υπολογιστική και αναλυτική λύση του διανυσματικού πεδίου της ταχύτητας μέσω της νόρμας H^1 (Sobolev). Τέλος, οι σωματικές δυνάμεις (5.2.3) και (5.2.4) εισάγονται στο αρχείο SIF μέσω δύο UDFs, γραμμένες σε κώδικα Fortran (βλ. Παρ. 4.2).

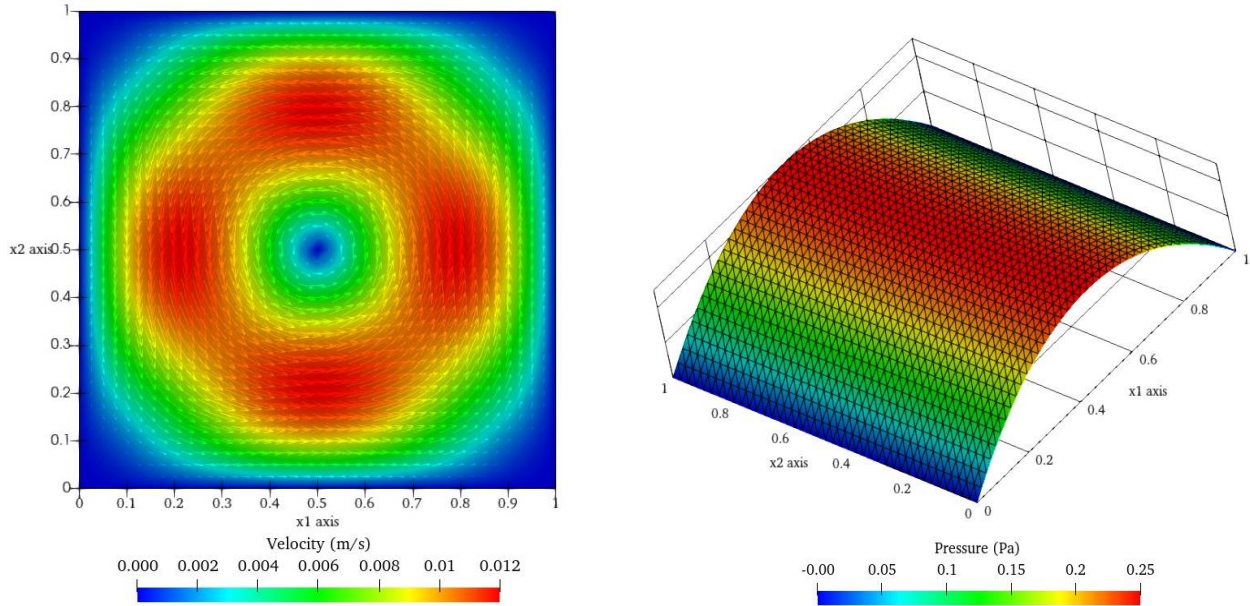
5.2.5 Απεικόνιση αποτελεσμάτων και ανάλυση σφαλμάτων

Η απεικόνιση των αποτελεσμάτων πραγματοποιείται στο ανοικτό λογισμικό ParaView (Ahrens, Geveci, & Law, 2005). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, αποδεικνύεται ότι η χρήση μεικτών πεπερασμένων στοιχείων τύπου P_1/P_1 οδηγεί στην παραβίαση της συνθήκης LBB και ως εκ τούτου στην εμφάνιση ψευδών ταλαντώσεων στο πεδίο της πίεσης (βλ. Σχ. 5-5).

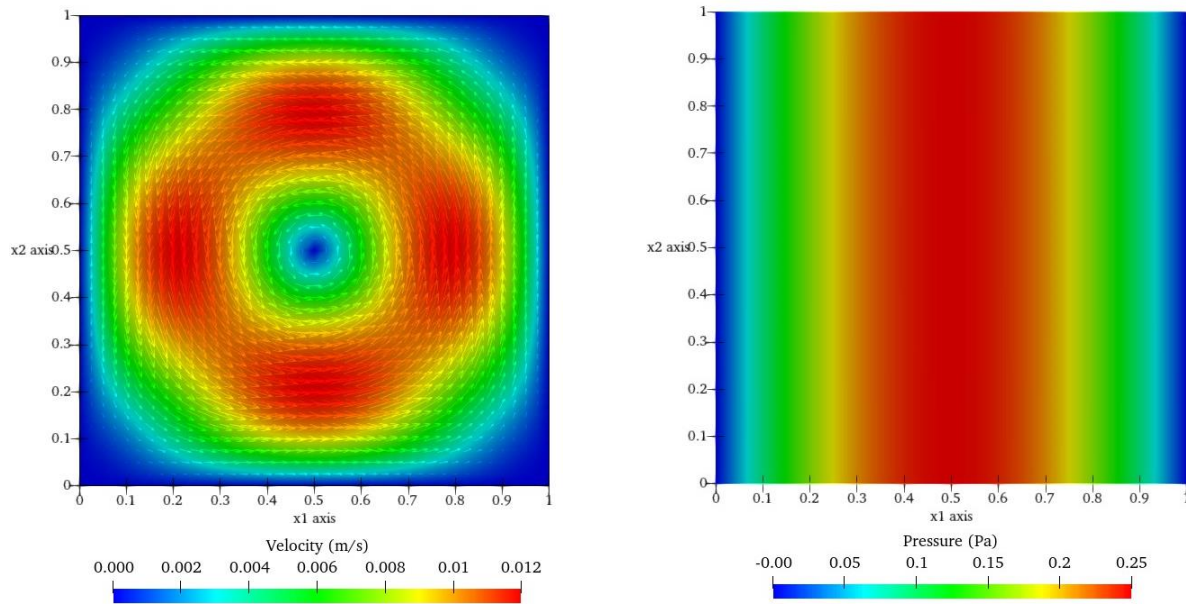


Σχ. 5-5 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση: πεδίο ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 χωρίς σταθεροποίηση.

Ωστόσο, με την προσθήκη επιπλέον όρων σταθεροποίησης, τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία γίνονται ευσταθή και οι ταλαντώσεις στο πεδίο της πίεσης εξαφανίζονται (βλ. Σχ. 5-6). Τόσο για την περίπτωση των μεικτών πεπερασμένων στοιχείων P_1/P_1 με σταθεροποίηση, όσο και για την περίπτωση των μεικτών πεπερασμένων στοιχείων P_1/P_1 χωρίς σταθεροποίηση, το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας είναι πανομοιότυπο. Με χρήση των μεικτών πεπερασμένων στοιχείων Taylor-Hood (P_2/P_1) και Mini (P_1 -bubble/ P_1), που ικανοποιούν την συνθήκη ευστάθειας LBB, λαμβάνονται όμοια αποτελέσματα (βλ. Σχ. 5-7).



Σχ. 5-6 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση: πεδίο ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 με σταθεροποίηση.



Σχ. 5-7 Ροή Stokes σε τετραγωνική κοιλότητα με αναλυτική λύση: πεδίο ταχύτητας και πίεσης για πεπερασμένα στοιχεία τύπου Taylor-Hood (P_2/P_1) και τύπου Mini (P_1 -bubble/ P_1).

Στους πίνακες που ακολουθούν, δίνονται τα σφάλματα του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας και του πεδίου της πίεσης ανάμεσα σε υπολογιστική και αναλυτική λύση, όπως αυτά προσδιορίστηκαν μέσω της νόρμας H^1 (Sobolev) και L^2 (Hilbert) για τις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται: (α) τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P_1/P_1 , (β) Taylor-Hood και (γ) Mini. Τα σφάλματα έχουν υπολογιστεί σε διάφορα μεγέθη πλέγματος για να διαπιστωθεί κατά πόσο τα αυτά μειώνονται με την πυκνωση του πλέγματος. Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι το σφάλμα του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας, στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 , μειώνεται με την πυκνωση του πλέγματος (βλ.

Πίνακα 5-3). Αντιθέτως, το σφάλμα του πεδίου της πίεσης παραμένει σταθερό λόγω μη ικανοποίησης της συνθήκης ευστάθειας LBB (βλ. Πίνακα 5-3).

Πίνακας 5-3. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 χωρίς σταθεροποίηση.

Μέγεθος πλέγματος $h(m)$	Βαθμοί ελευθερίας \mathbf{u}^h	Βαθμοί ελευθερίας p^h	Νόρμα Sobolev $ \mathbf{u} - \mathbf{u}^h _{\mathbf{H}^1(\Omega)}$	Νόρμα Hilbert $\ p - p^h\ _{L^2(\Omega)}$
0,283	36	36	3,8980e-002	3,4234e-001
0,236	49	49	3,3076e-002	2,5678e-001
0,202	64	64	2,8502e-002	3,9489e-001
0,177	81	81	2,4831e-002	3,0096e-001
0,141	121	121	1,9775e-002	2,5834e-001
0,070	441	441	9,7447e-003	2,8931e-001
0,035	1681	1681	4,8349e-003	2,3065e-001
0,018	6561	6561	2,4090e-003	2,6928e-001

Όταν όμως τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 συνδυάζονται με την τεχνική σταθεροποίησης Galerkin Least-Square, τόσο το σφάλμα του πεδίου ταχύτητας όσο και το σφάλμα του πεδίου της πίεσης μειώνεται με την πύκνωση του πλέγματος. (βλ. Πίνακα 5-4).

Πίνακας 5-4. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P_1/P_1 με σταθεροποίηση.

Μέγεθος πλέγματος $h(m)$	Βαθμοί ελευθερίας \mathbf{u}^h	Βαθμοί ελευθερίας p^h	Νόρμα Sobolev $ \mathbf{u} - \mathbf{u}^h _{\mathbf{H}^1(\Omega)}$	Νόρμα Hilbert $\ p - p^h\ _{L^2(\Omega)}$
0,283	36	36	2,7951e-002	1.6690e-002
0,236	49	49	2,6040e-002	1,2624e-002
0,202	64	64	2,2535e-002	9,9171e-003
0,177	81	81	1,9188e-002	8,0036e-003
0,141	121	121	1,5925e-002	5,5300e-003
0,070	441	441	7,9780e-003	1.6492e-003
0,035	1681	1681	3,9865e-003	4,8483e-004
0,018	6561	6561	1,9926e-003	1,4835e-004

Αντίστοιχη συμπεριφορά εμφανίζουν τα σφάλματα και στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία Taylor-Hood (βλ. Πίνακα 5-5) και Mini (βλ. Πίνακα 5-6).

Αναφορικά με την ανάλυση σφαλμάτων, από τη συναρτησιακή ανάλυση είναι γνωστό ότι αν ο χώρος V_p^h κατασκευαστεί από 1^ο, ενώ ο χώρος V_u^h από 2^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange και για τις αναλυτικές λύσεις ισχύει: $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2$, $p \in L^2$, τότε προκύπτει η εξής εκτίμηση για το σφάλμα (Stenberg, 1990)

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p - p^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + C_2 h^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.2.19)$$

όπου C_1, C_2 σταθερές και h το μέγεθος του πλέγματος (ισούται με το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς του στοιχείου)

Πίνακας 5-5. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένων στοιχεία P₂/P₁.

Μέγεθος πλέγματος $h(m)$	Βαθμοί ελευθερίας \mathbf{u}^h	Βαθμοί ελευθερίας p^h	Νόρμα Sobolev $ \mathbf{u} - \mathbf{u}^h _{\mathbf{H}^1(\Omega)}$	Νόρμα Hilbert $\ p - p^h\ _{L^2(\Omega)}$
0,283	121	36	7,7796e-003	1,0046e-002
0,236	169	49	5,4727e-003	7,0462e-003
0,202	225	64	4,0454e-003	5,2352e-003
0,177	289	81	3,1069e-003	4,0624e-003
0,141	441	121	1,9937e-003	2,6677e-003
0,070	1681	441	4,9918e-004	7,2297e-004
0,035	6561	1681	1,2482e-004	1,9161e-004
0,018	25921	6561	3,1210e-005	4,9630e-003

Πίνακας 5-6. Σφάλματα πεδίου ταχύτητας και πίεσης για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P₁-bubble/P₁.

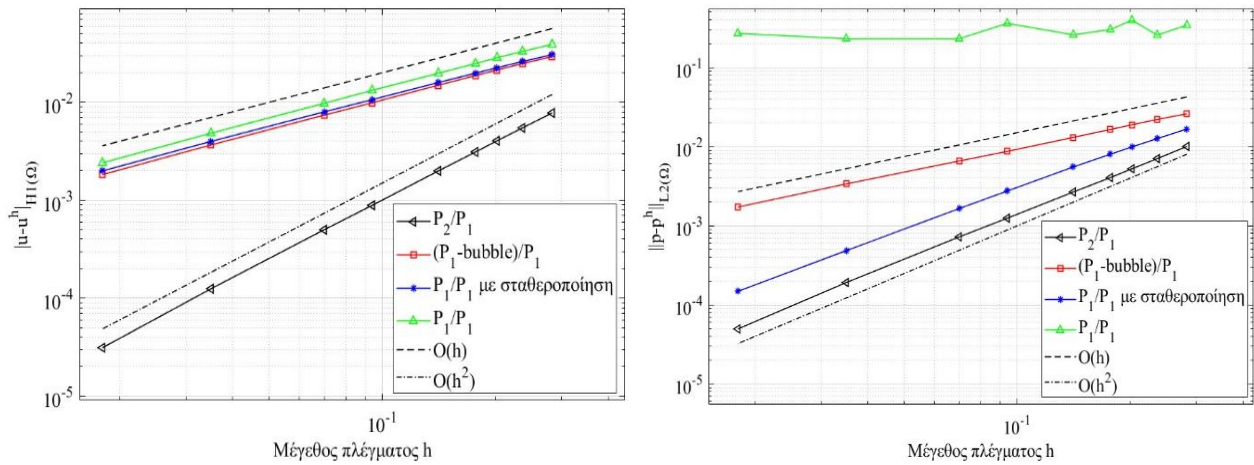
Μέγεθος πλέγματος $h(m)$	Βαθμοί ελευθερίας \mathbf{u}^h	Βαθμοί ελευθερίας p^h	Νόρμα Sobolev $ \mathbf{u} - \mathbf{u}^h _{\mathbf{H}^1(\Omega)}$	Νόρμα Hilbert $\ p - p^h\ _{L^2(\Omega)}$
0,283	86	36	2,9286e-002	2,5961e-002
0,236	121	49	2,4806e-002	2,2074e-002
0,202	162	64	2,1371e-002	1,8895e-002
0,177	209	81	1,8723e-002	1,6470e-002
0,141	321	121	1,4946e-002	1,3075e-002
0,070	1241	441	7,3840e-003	6,5732e-003
0,035	4881	1681	3,6666e-003	3,3757e-003
0,018	19361	6561	1,8275e-003	1,7212e-003

Αντιθέτως, όταν χώρος V_p^h προσεγγιστεί από πολυωνυμικές συναρτήσεις βάσης 1^{ης} τάξης και ο χώρος $V_{\mathbf{u}}$ από γραμμικά πολώνυμα και συναρτήσεις «φυσαλίδας» (bubble functions) παραπέμποντας στα μεικτά στοιχεία Mini, τότε οι αντίστοιχες εκτιμήσεις για το σφάλμα είναι (Boffi, Brezzi, & Fortin, 2013)

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p - p^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + C_2 h \|p\|_{H^1(\Omega)}. \quad (5.2.20)$$

Στο Σχήμα 5-8 δίνεται ο ρυθμός σύγκλισης της νόρμας \mathbf{H}^1 (Sobolev) του σφάλματος του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας και ο ρυθμός σύγκλισης της νόρμας L^2 (Hilbert) του σφάλματος του πεδίου πίεσης για τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία: (α) P₁/P₁ (με και χωρίς σταθεροποίηση), (β) P₂/P₁ και (γ) (P₁-bubble)/P₁.

Από τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι αν η διακριτοποίηση γίνει με μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P₁/P₁ (με και χωρίς σταθεροποίηση), η νόρμα \mathbf{H}^1 που μετράει το σφάλμα του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας και η νόρμα L^2 που μετράει το σφάλμα του πεδίου της πίεσης συγκλίνουν με ρυθμό $O(h)$. Τον ίδιο ρυθμό σύγκλισης σφαλμάτων παρουσιάζουν και τα μεικτά πεπερασμένα στοιχεία (P₁-bubble)/P₁ επιβεβαιώνοντας την σχέση (5.2.19) που προβλέπει γραμμική εξάρτηση των σφαλμάτων σε σχέση με το μέγεθος του πλέγματος h .



Σχ. 5-8 Νόρμα Hilbert (αριστερά) του σφάλματος του διανύσματος της ταχύτητας και νόρμα Sobolev (δεξιά) του σφάλματος της πίεσης για διάφορων ειδών πεπερασμένα στοιχεία. Σύγκριση του ρυθμού μείωσης του σφάλματος σε σχέση με την πυκνωση του πλέγματος.

Αντίθετα, με την χρήση των μεικτών πεπερασμένων στοιχείων P_2/P_1 , ο ρυθμός σύγκλισης των σφαλμάτων της ταχύτητας και της πίεσης είναι τετραγωνικό όσο προβλέπει δηλαδή και η σχέση (5.2.20).

Κεφάλαιο 6: Επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer

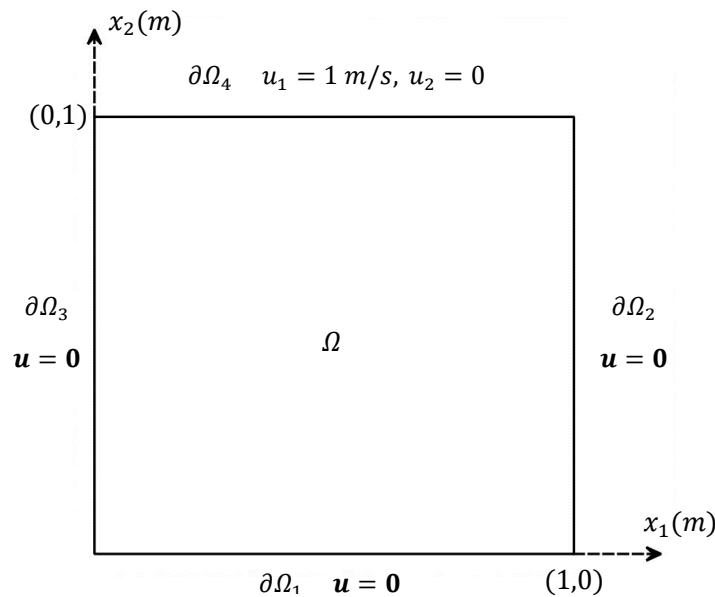
Στο κεφάλαιο αυτό θα επιλυθούν προβλήματα μη γραμμικής φύσεως με χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer. Σε αυτά συμπεριλαμβάνονται, ένα πρόβλημα ιζώδους και ασυμπίεστης ροής σε μία κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα (lid driven cavity) και ένα συζευγμένο πρόβλημα ροής με φυσική συναγωγή. Και τα δύο προβλήματα βρίσκονται σε δύο διαστάσεις και το υπολογιστικό τους χωρίο είναι μία τετραγωνική κοιλότητα.

6.1. Ροή σε τετραγωνική κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα (lid-driven cavity)

Το πρόβλημα ροής σε οδηγούμενη κοιλότητα (lid-driven cavity) είναι ένα κλασικό πρόβλημα ασυμπίεστης ροής για την αξιολόγηση των αριθμητικών μεθόδων, το οποίο έχει αναλυθεί από ένα μεγάλο αριθμό επιστημόνων ([Ghia, Ghia, & Shin, 1982](#), [Schreiber & Keller, 1983](#), [Shankar & Deshpande, 2000](#)).

6.1.1. Διατύπωση του προβλήματος

Το πρόβλημα αφορά την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes σε μία τετραγωνική κοιλότητα $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, της οποίας η άνω πλευρά κινείται οριζόντια με μοναδιαία ταχύτητα, ενώ οι υπόλοιπες πλευρές της παραμένουν σταθερές (βλ. Σχ. 6-1).



Σχ. 6-1 Τετραγωνική κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα.

Για την επίλυση του προβλήματος ζητείται: η εύρεση του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ με $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ και του βαθμωτού πεδίου της πίεσης $p \in C^1(\Omega)$, έτσι ώστε

$$\left. \begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot (2\mu \bar{\nabla}(\mathbf{u})) + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{στο } \Omega, \quad (6.1.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ στο } \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \quad (6.1.2)$$

$$u_1 = 1 \text{ m/s}, u_2 = 0 \text{ στο } \partial\Omega_4. \quad (6.1.3)$$

όπου ρ η πυκνότητα, μ το ιξώδες και $\bar{\gamma}$ ο δυαδικός ρυθμού παραμόρφωσης.

6.1.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων (6.1.1) πραγματοποιείται με εφαρμογή της μεθόδου Galerkin (βλ. Κεφ. 3.5), αφού πρώτα προηγηθεί η γραμμικοποίηση του συναγωγικού όρου της εξίσωσης διατήρησης ορμής με την μέθοδο Picard ή Newton (βλ. Κεφ. 3.3). Για την ικανοποίηση της συνθήκης LBB και την σταθεροποίηση του συναγωγικού όρου εφαρμόζεται η μέθοδος σταθεροποίησης GLS (βλ. Κεφ. 3.9).

Έτσι, στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση της εξίσωσης ορμής έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard, η διακριτοποιημένη μορφή του μεταβολικού προβλήματος είναι: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, p^h\} \in \mathbf{S}_u^h \times S_p^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h, \rho \mathbf{w}_u^h) + (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h), \nabla \mathbf{w}_u^h) + s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) &= \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h, \\ (w_p^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h) + s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) &= 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h, \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

όπου οι όροι σταθεροποίησης δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left[\tau (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h - 2\mu \nabla \cdot \bar{\gamma}(\mathbf{w}_u^h)) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h) + \delta \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h \right] dx, \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

$$s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \nabla w_p^h \cdot (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h) dx. \quad (6.1.6)$$

Αντίθετα, στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton, η διακριτοποιημένη μορφή του μεταβολικού προβλήματος είναι: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, p^h\} \in \mathbf{S}_u^h \times S_p^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) + (\rho \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}) + (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h), \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) + s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) \\ = (\rho \mathbf{w}_u^h, (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})), \quad \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h, \\ (w_p^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h) + s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h, \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

όπου οι όροι σταθεροποίησης δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left[\tau (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{w}_u^h))) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h + \rho \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \delta \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h \right] dx, \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

$$s_p(w_p, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \rho \nabla w_p^h \cdot \left(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h + \rho \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \left(2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}^h) \right) + \nabla p^h - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) dx. \quad (6.1.9)$$

Τώρα, ο χώρος των λύσεων $\mathbf{S}_u^h \times S_p^h$ και ο χώρος των συναρτήσεων βάρους $\mathbf{V}_u^h \times V_p^h$ και για τις δυο ανωτέρω περιπτώσεις κατασκευάζονται από 1^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange.

Τελικά, η μητρική μορφή του μεταβολικού προβλήματος (6.1.4) για την περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard, δίνεται από την σχέση (βλ. Κεφ. 3.9)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{K} + \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) & -\mathbf{Q}^T + \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{Q} + \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) & \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1.10)$$

με

$$\mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{S}_{uu}^{(1)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{uu}^{(2)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{uu}^{(3)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{uu}^{(4)}(\mathbf{u}), \quad (6.1.11)$$

$$\mathbf{S}_{up}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{S}_{up}^{(1)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{up}^{(2)}(\mathbf{u}), \quad (6.1.12)$$

$$\mathbf{S}_{pu}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{S}_{pu}^{(1)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{pu}^{(2)}(\mathbf{u}). \quad (6.1.13)$$

Διαφορετικά, αν η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton, η μητρική μορφή του μεταβολικού προβλήματος (6.1.7) δίνεται από την σχέση (βλ. Κεφ. 3.9)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{K} + \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) & -\mathbf{Q}^T + \mathbf{S}_{up}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{Q} + \mathbf{S}_{pu}(\mathbf{u}) & \mathbf{S}_{pp}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_u(\mathbf{u}) \\ F_p(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (6.1.14)$$

με

$$\mathbf{S}_{uu}(\mathbf{u}) \equiv \underbrace{\mathbf{S}_{uu}^{(1)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{uu}^{(2)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{uu}^{(3)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{uu}^{(4)}(\mathbf{u})}_{\text{Picard}} + \underbrace{\mathbf{S}_{uu}^{(5)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{uu}^{(6)}(\mathbf{u})}_{\text{Newton}}, \quad (6.1.15)$$

$$\mathbf{S}_{pu}(\mathbf{u}) \equiv \underbrace{\mathbf{S}_{pu}^{(1)}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}_{pu}^{(2)}(\mathbf{u})}_{\text{Picard}} + \underbrace{\mathbf{S}_{pu}^{(3)}(\mathbf{u})}_{\text{Newton}}, \quad (6.1.16)$$

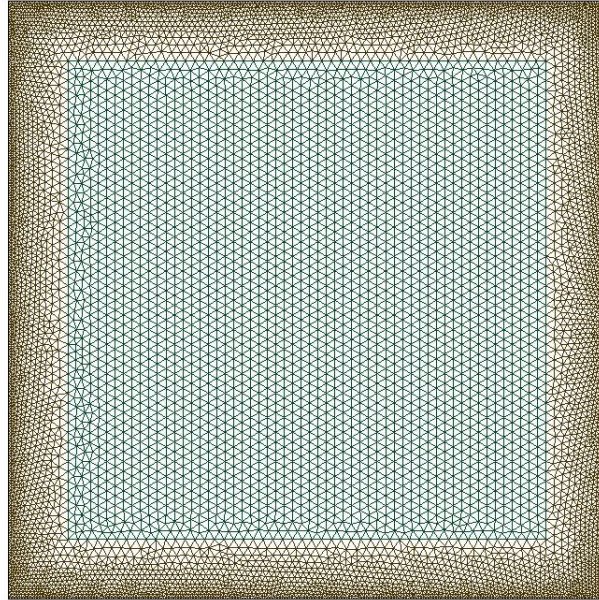
$$\mathbf{F}_u(\mathbf{u}) \equiv \underbrace{\mathbf{F}_u^{(3)}(\mathbf{u})}_{\text{Newton}}, \quad (6.1.17)$$

$$F_p(\mathbf{u}) \equiv \underbrace{F_p^{(2)}(\mathbf{u})}_{\text{Newton}}, \quad (6.1.18)$$

όπου οι αναλυτικές εκφράσεις των ανωτέρω όρων δίνονται στο Κεφάλαιο 3.5 και στα Παραρτήματα B.1, B.2.

6.1.3 Κατασκευή γεωμετρίας και πλέγματος

Η κατασκευή της γεωμετρίας και του πλέγματος πραγματοποιείται στο ανοικτό λογισμικό παραγωγής πλεγμάτων Gmsh ([Geuzaine & Remacle, 2022](#)) στο οποίο δημιουργείται ενός μη δομημένο πλέγμα με πύκνωση κοντά στα τοιχώματα (βλ. Σχ. 6-2). Για τη διακριτοποίηση χρησιμοποιούνται αποκλειστικά τριγωνικά στοιχεία.



Σχ. 6-2 Μη δομημένο πλέγμα για το πρόβλημα της ροής σε τετραγωνική κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα.

6.1.4 Αριθμητική επίλυση

Το διακριτοποιημένο πρόβλημα επιλύεται επαναληπτικά με χρήση της υπορουτίνας FlowSolver (βλ. Παρ. E.5) για αριθμούς Reynolds ίσους με 100, 400, 1.000, 3.200, 5.000, 7.500, 10.000, 20.000, 40.000 και 60.000. Για χαμηλούς αριθμούς Reynold ($Re < 10.000$) χρησιμοποιείται το υβριδικό σχήμα επαναλήψεων σύμφωνα με το οποίο, οι επαναλήψεις πραγματοποιούνται είτε με την μέθοδο Picard ή με την μέθοδο Newton. Η διαδικασία έχει ως εξής: αρχικά επιλύεται το γραμμικοποιημένο με την μέθοδο Picard μεταβολικό πρόβλημα (6.1.4) και σε κάθε επανάληψη ελέγχεται η συνθήκη

$$\delta_1 = 2 \frac{\|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_2 - \|\mathbf{u}^{(n)}\|_2}{\|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_2 + \|\mathbf{u}^{(n)}\|_2} \leq \varepsilon_{s_1}, \quad (6.1.19)$$

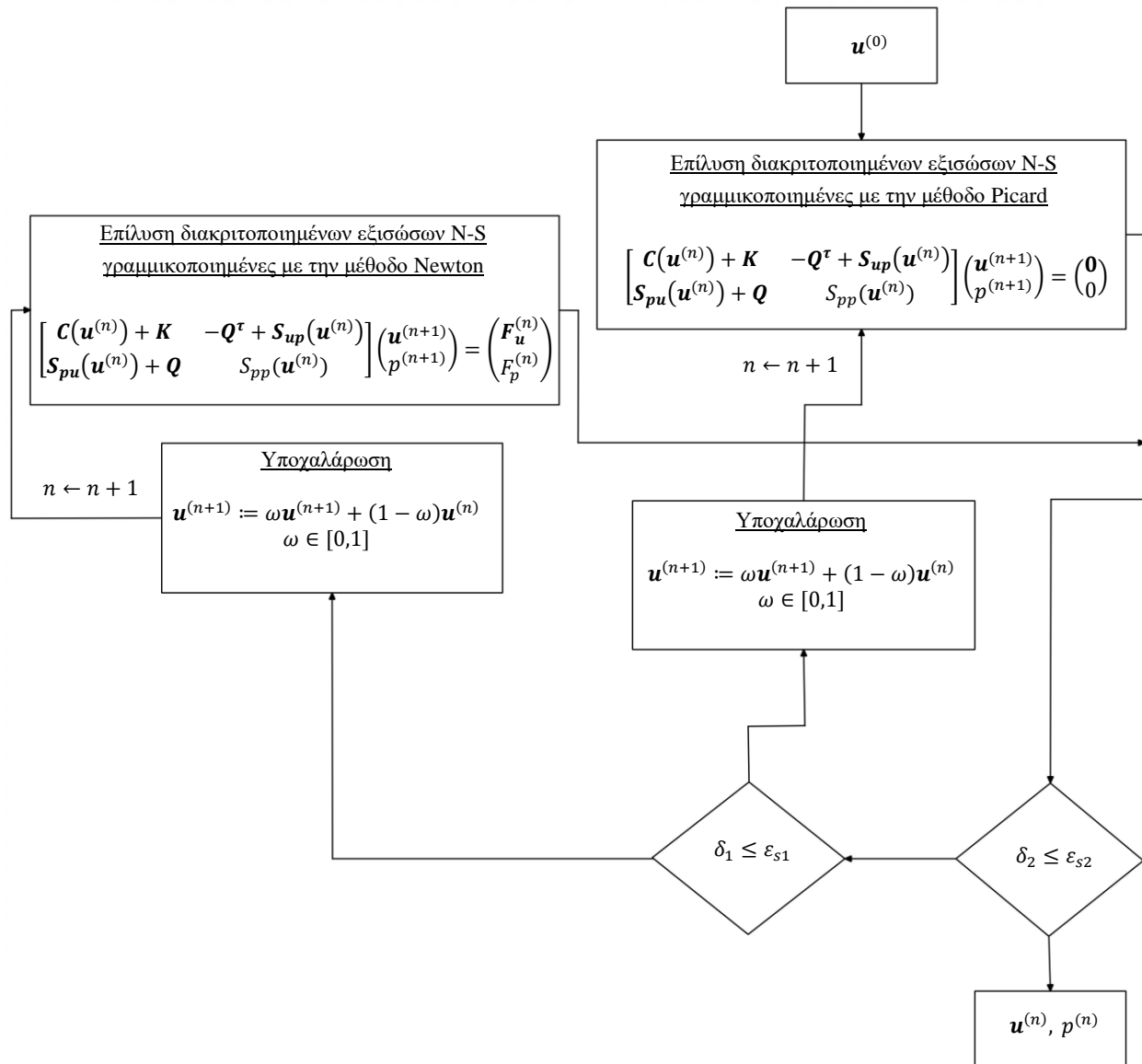
όπου $\|\cdot\|_2$ η ευκλείδεια νόρμα.

Όταν η συνθήκη (6.1.19) ικανοποιηθεί, τότε το μεταβολικό πρόβλημα, στο οποίο η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard (6.1.4), αντικαθίσταται από το μεταβολικό πρόβλημα (6.1.7), στο οποίο η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton. Έπειτα, οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη

$$\delta_2 = 2 \frac{\|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_2 - \|\mathbf{u}^{(n)}\|_2}{\|\mathbf{u}^{(n+1)}\|_2 + \|\mathbf{u}^{(n)}\|_2} \leq \varepsilon_{s_2}. \quad (6.1.20)$$

Το όριο σύγκλισης των επαναλήψεων Picard τέθηκε ίσο με $\varepsilon_{s_1} = 1 \cdot 10^{-3}$, ενώ το όριο σύγκλισης της ολικής επαναληπτικής διαδικασίας τέθηκε ίσο με $\varepsilon_{s_2} = 1 \cdot 10^{-5}$. Όσον αφορά τους υψηλούς αριθμούς Reynolds ($Re \geq 10.000$) χρησιμοποιείται αποκλειστικά η μέθοδος Picard υποβοηθούμενη από την μέθοδο υποχαλάρωσης. Η παράμετρος υποχαλάρωσης στην περίπτωση αυτή τίθεται ίση με $\omega = 0.7$.

Στο Σχήμα 6-3 δίνεται ο αλγόριθμος της επαναληπτικής διαδικασίας που ακολουθείται από τον επιλύτη *Flowsolver* για την λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes.

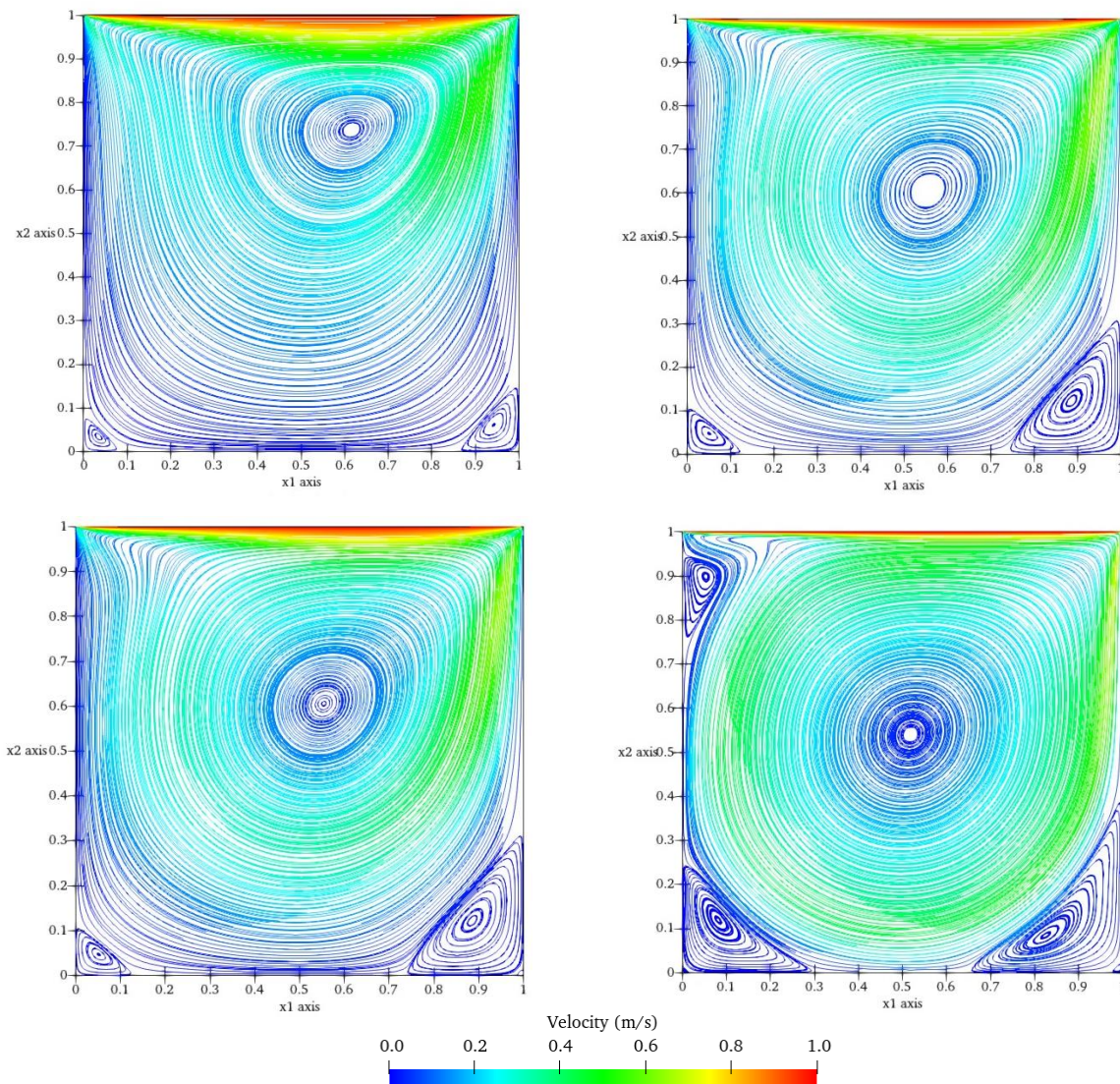


Σχ. 6-3 Αλγόριθμος επαναληπτικής διαδικασίας για την επίλυση των διακριτοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes.

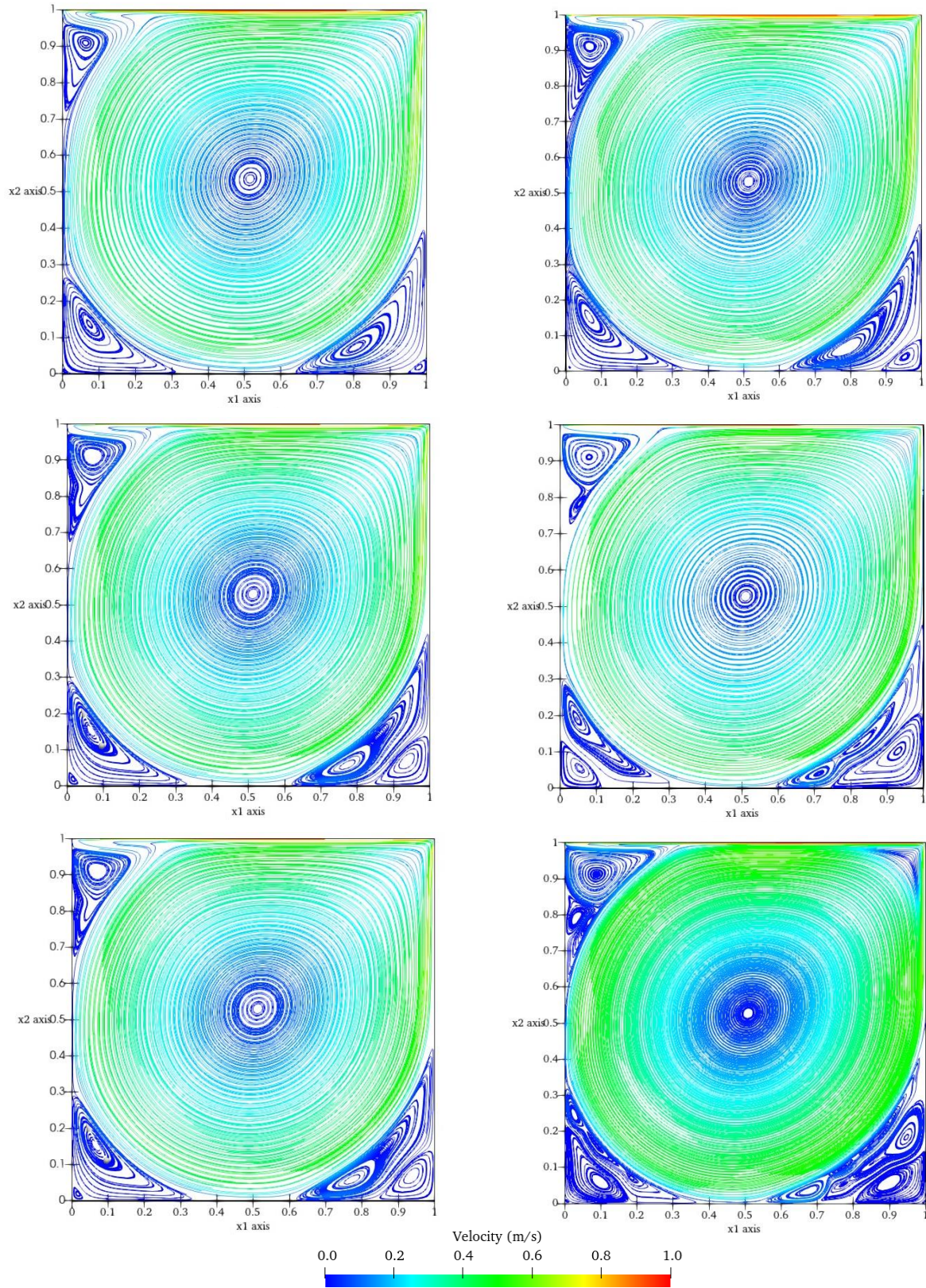
Τώρα, για την επίλυση των γραμμικοποιημένων συστημάτων (6.1.10) και (6.1.14), σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds ($Re \leq 10.000$), χρησιμοποιείται η επαναληπτική μέθοδος Biconjugate gradient stabilized. Το όριο σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας τίθεται ίσο με $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-12}$ και ως μέθοδος προσταθεροποίησης χρησιμοποιείται η μέθοδος μερικής αποικοδόμησης ILU(1). Αντιθέτως, για τους υψηλούς αριθμούς Reynolds ($Re > 10.000$) χρησιμοποιείται αποκλειστικά το πακέτο γραμμικής άλγεβρας LAPACK (Demmel, 1991).

6.1.5 Απεικόνιση και ανάλυση αποτελεσμάτων

Η απεικόνιση των αποτελεσμάτων πραγματοποιείται στο ανοικτό λογισμικό ParaView (Ahrens, Geveci, & Law, 2005). Στα Σχήματα 6-4 και 6-5 απεικονίζονται: το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας και οι ροϊκές γραμμές για αριθμούς Reynolds ίσους με 100, 400, 1.000, 3.200, 5.000 και 7.500, 10.000, 20.000, 40.000, 60.000 αντίστοιχα.

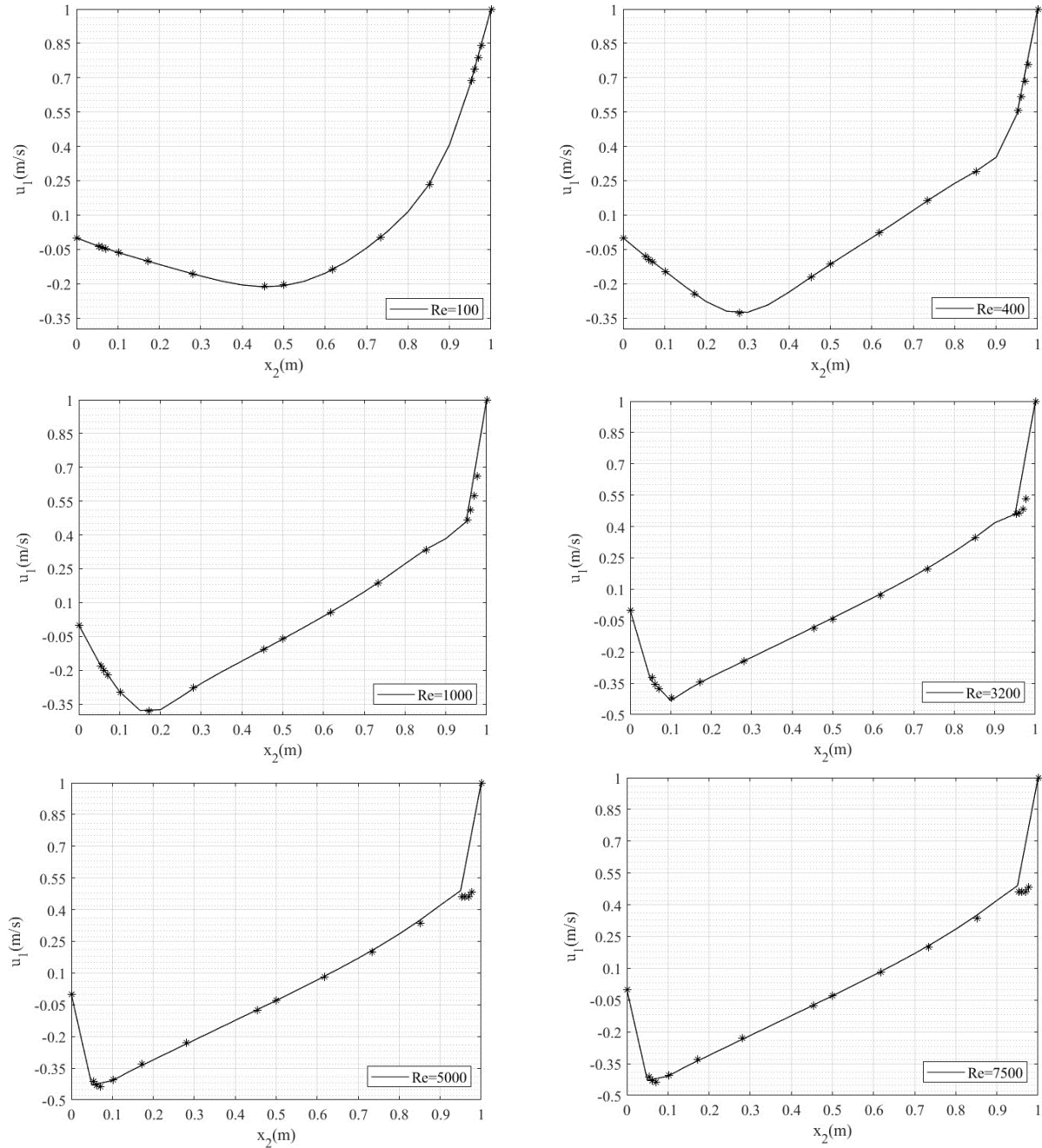


Σχ. 6-4 Διανυσματικό πεδίο ταχύτητας και ροϊκές γραμμές για αριθμούς Reynolds ίσους με 100, 400, 1.000, 3.200 (από αριστερά προς τα δεξιά).



Σχ. 6-5 Διανυσματικό πεδίο ταχύτητας και ροϊκές γραμμές για αριθμούς Reynolds 5000, 7500, 10.000, 20.000, 40.000, 60.000 (από αριστερά προς τα δεξιά).

Για να διαπιστωθεί η εγκυρότητα των υπολογιστικών τιμών που προκύπτουν από το λογισμικό πακέτο Elmer, πραγματοποιείται σύγκριση των υπολογιζόμενων τιμών της συνιστώσας της ταχύτητας u_1 κατά μήκος της κεντρικής γραμμής που δίνεται από την ευθεία $x_1 = 0,5 \text{ m}$ (βλ. Σχ. 6-6) με αντίστοιχες τιμές της βιβλιογραφίας (Ghia, Ghia, & Shin, 1982). Για την εξαγωγή των τιμών u_1 κατά μήκος της ευθείας $x_1 = 0,5 \text{ m}$ χρησιμοποιείται η υπορουτίνα Saveline (βλ. Παρ. E.5).



Σχ. 6-6 Προφίλ ταχύτητας πάνω στην οριζόντια κεντρική γραμμή που δίνεται από την ευθεία $x_1 = 0,5 \text{ m}$ (με αστερίσκο συμβολίζονται οι βιβλιογραφικές των [Ghia, Ghia και Shin, 1982](#)).

Βάσει των διαγραμμάτων του Σχήματος 6-6, οι υπολογιζόμενες τιμές της ταχύτητας συμφωνούν με τις αντίστοιχες βιβλιογραφικές σε μεγάλο βαθμό και μικρές αποκλείσεις υπάρχουν μόνο σε μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds.

Το ιστορικό των επαναλήψεων για την εύρεση λύσης των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes: (α) για την περίπτωση των χαμηλών αριθμών Reynolds, στην οποία χρησιμοποιείται το υβριδικό σχήμα επαναλήψεων και (β) για την περίπτωση των υψηλών αριθμών Reynolds, στην οποία χρησιμοποιείται αποκλειστικά η επαναληπτική μέθοδος Picard καθώς και ο αντίστοιχος χρόνος CPU που απαιτήθηκε δίνεται στον Πίνακα 6-1

Διευκρινίζεται ότι για τους αριθμούς Reynolds 100, 400 και 1.000 οι μέγιστες επαναλήψεις Picard του υβριδικού σχήματος τέθηκαν ίσες με 3, για τον αριθμό Reynolds 5.000 οι μέγιστες επαναλήψεις Picard τέθηκαν ίσες με 8, ενώ για 7.500 και 10.000 οι μέγιστες επαναλήψεις Picard τέθηκαν ίσες με 10.

Πίνακας 6-1. Ιστορικό επαναλήψεων Picard/Newton για την εύρεση λύσης των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes και απαιτήσεις σε χρόνο CPU.

Αριθμός Reynolds	Επαναλήψεις Picard	Επαναλήψεις Newton	Χρόνος CPU [s]
100	3	3	9,66
400	3	4	12,96
1.000	3	5	18,75
3.200	3	6	18,98
5.000	8	5	29,39
7.500	10	5	37,57
10.000	10	5	37,98
20.000	67	-	174,54
40.000	80	-	97,99
60.000	67	-	82,75

Από τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι καθώς αυξάνει ο αριθμός Reynolds απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις Picard για την σύγκλιση του μη γραμμικού συστήματος με παράλληλη αύξηση του υπολογιστικού χρόνου (χρόνος CPU). Μία πιθανή εξήγηση είναι η εξής: Το γεγονός ότι σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds, η αρχική εκτίμηση, $\mathbf{u}^{(0)} = 0$ βρίσκεται πιο κοντά στην τελική λύση, προσφέρει την δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε τον ταχύ ρυθμό με τον οποίο συγκλίνει η μέθοδος Newton στις τελευταίες επαναλήψεις μειώνοντας έτσι το απαραίτητο χρόνο υπολογισμών-χρόνος CPU (βλ. Πίνακα 6-1). Σε αντίθεση, στους υψηλούς αριθμούς Reynolds, η αρχική εκτίμηση $\mathbf{u}^{(0)} = 0$ βρίσκεται μακριά από την τελική λύση και υπάρχει κίνδυνος η μέθοδος Newton να αποκλίνει. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται αποκλειστικά η πιο εύρωστη μέθοδος Picard.

6.2 Επίλυση συζευγμένου προβλήματος: φυσική συναγωγή

Η κίνηση ενός ρευστού λόγω φυσικής συναγωγής συμβαίνει όταν δημιουργούνται ανυψωτικές δυνάμεις λόγω των κλίσεων πυκνότητας που αναπτύσσονται ως αποτέλεσμα της διαφοράς θερμοκρασίας μέσα στο ρευστό. Ένα τέτοιο πρόβλημα περιλαμβάνει την σύζευξη μεταξύ των εξισώσεων Navier-Stokes που

περιγράφουν την κίνηση του ρευστού και της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας που διέπει την χωροχρονική εξέλιξη της θερμοκρασίας (Bird, Stewart, & Lighfoot, 2001).

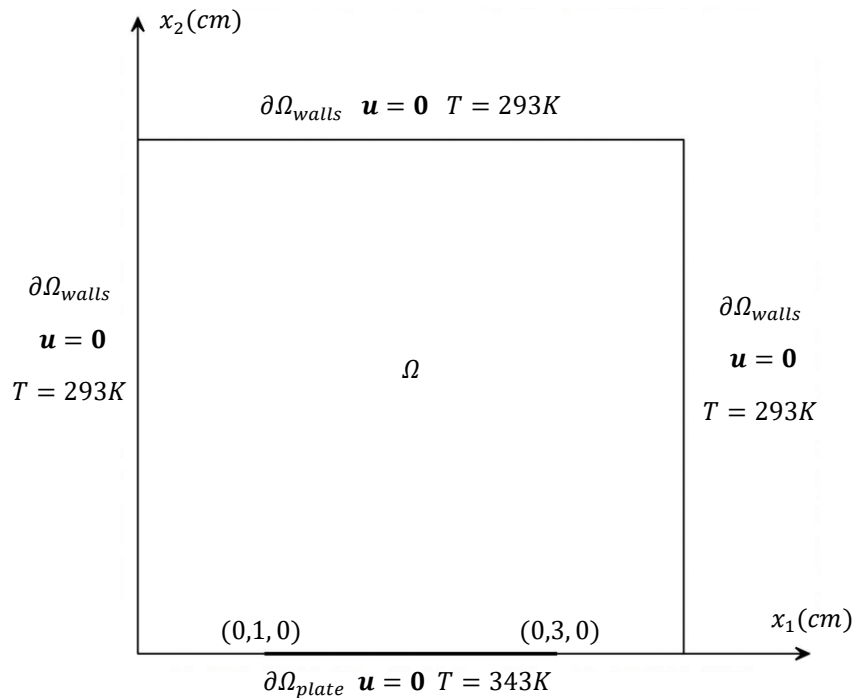
6.2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω μία τετραγωνική κοιλότητα $\Omega = [0,4] \times [0,4] \subset \mathbb{R}^2$ με μία θερμαινόμενη πλάκα στον πυθμένα (βλ. Σχ. 6-7). Το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής σε μία τετραγωνική κοιλότητα Ω περιλαμβάνει την εύρεση του διανυσματικού πεδίου ταχύτητας $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ με $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, του βαθμωτού πεδίου της πίεσης $p \in C^1(\Omega)$ και του βαθμωτού πεδίου της θερμοκρασίας $T \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, έτσι ώστε

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\mu \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}} - \rho_0 \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{στο } \Omega \text{ για } t \in (0, \tau] \quad (6.2.1)$$

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \text{ στο } \Omega \text{ για } t \in (0, t] \quad (6.2.2)$$

όπου $\mathbf{f} = (1 - \beta(T - T_0))\mathbf{g}$ είναι η βαρυτική δύναμη ανά μονάδα μάζας βάση της υπόθεσης Boussinesq, \mathbf{g} το βαρυτικό πεδίο, β ο συντελεστής θερμικής διαστολής του ρευστού, T_0 η θερμοκρασία αναφοράς και ρ_0 η πυκνότητα αναφοράς του ρευστού (η πυκνότητα σε θερμοκρασία αναφοράς T_0).



Σχ. 6-7 Πρόβλημα φυσικής συναγωγής: Τετραγωνική κοιλότητα Ω με θερμαινόμενη πλάκα στο πυθμένα.

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\left. \begin{aligned} T &= 293 \text{ K} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \text{στο } \partial\Omega_{\text{wall}} \text{ για } t \in (0, \tau], \quad (6.2.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 340 \text{ K} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{ στο } \partial\Omega_{\text{plate}} \text{ για } t \in (0, \tau], \quad (6.2.4)$$

και οι αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad (6.2.5)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = 293 \text{ K}. \quad (6.2.6)$$

Για την επίλυση του προβλήματος η θερμοκρασία αναφοράς τίθεται ίση με $T_0 = 293 \text{ K}$ και ως ρευστό χρησιμοποιείται ο αέρας. Οι θερμοφυσικές ιδιότητες του αέρα σε θερμοκρασία δωματίου 293 K δίνονται στον Πίνακα [6-2](#)

Πίνακας 6-2. Θερμοφυσικές ιδιότητες του αέρα σε θερμοκρασία δωματίου 293 K .

Παράμετρος	Τιμή
μ	$1,983 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
ρ	$1,205 \text{ kg/m}^3$
κ	$0,0257 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
c_p	$1005,0 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
β	$3,43 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

6.2.2 Διακριτοποίηση του προβλήματος

Η χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων ([6.2.1](#)) και ([6.2.2](#)) πραγματοποιείται με εφαρμογή της μεθόδου Galerkin (βλ. Κεφ. [2.4](#), [3.5](#)). Ο συναγωγικός όρος της εξίσωσης Navier-Stokes γραμμικοποιείται αποκλειστικά με την μέθοδο Picard (βλ. Κεφ. [3.3](#)) και για την σταθεροποίηση των συναγωγικών όρων: (α) στην εξίσωση μεταφοράς θερμότητας, (β) στις εξισώσεις Navier-Stokes καθώς και για την ικανοποίηση της συνθήκης LBB (βλ. Κεφ. [3.8](#)) χρησιμοποιείται η μέθοδος GLS (βλ. Κεφ. [2.6](#), [3.9](#)). Σύμφωνα με αυτά, η διακριτοποιημένη μορφή του μεταβολικού προβλήματος είναι: Να βρεθεί $\{\mathbf{u}^h, p^h\} \in \mathbf{S}_u^h \times S_p^h$ και $T^h \in S_T^h$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \left(\rho_0 \mathbf{w}_u^h, \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \right) + (\rho_0 \mathbf{w}_u^h, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) + (2\mu \bar{\gamma}(\mathbf{u}^h), \nabla \mathbf{w}_u^h) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h) \\ + s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) = (\rho_0 \mathbf{w}_u^h, \mathbf{f}(T)), \quad \forall \mathbf{w}_u^h \in \mathbf{V}_u^h, \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

$$(w_p^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h) + s_p(w_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = 0, \quad \forall w_p^h \in V_p^h$$

και

$$\left(\rho_0 c_p w^h, \frac{\partial T^h}{\partial t} \right) + (\rho_0 c_p w^h, \nabla T^h) + (k \nabla w^h, \nabla T^h) + s(w^h, T^h) = 0, \quad \forall w^h \in V_T^h, \quad (6.2.8)$$

όπου οι όροι σταθεροποίησης δίνονται από τις σχέσεις

$$s_u(\mathbf{w}_u^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left[\tau(\rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h - 2\mu \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}_u^h)) \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h - \rho_0 \mathbf{f}(T) \right) + \delta \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}^h \right] dx, \quad (6.2.9)$$

$$s_p(\mathbf{w}_p^h, \mathbf{u}^h, p^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \nabla \mathbf{w}_p^h \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot (2\mu \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}^h)) + \nabla p^h - \rho_0 \mathbf{f}(T) \right) dx \quad (6.2.10)$$

και

$$s(w^h, T^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau'(\rho_0 c_p \mathbf{u} \cdot \nabla w^h - k \nabla^2 w^h) \left(\rho_0 c_p \frac{\partial T^h}{\partial t} + \rho_0 c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T^h - k \nabla^2 T^h \right) dx. \quad (6.2.11)$$

Οι παράμετροι σταθεροποίησης τ , δ και τ' δίνονται στα Κεφάλαια [2.6](#) και [3.9](#) αντίστοιχα.

Τόσο οι χώροι των λύσεων $\mathbf{S}_u^h \times S_p^h$, S_T^h όσο και οι χώροι των συναρτήσεων βάρους $\mathbf{V}_u^h \times V_p^h, V_T^h$ κατασκευάζονται από 1^ο βαθμού πολυώνυμα Lagrange και η χρονική ολοκλήρωση πραγματοποιείται με την πεπλεγμένη μέθοδο Euler (βλ. Κεφ. [2.8](#) και [3.10](#)).

Παρατήρηση 6.1: Να σημειωθεί ότι με την χρήση 1^ο βαθμού πολυωνύμων Lagrange απαλείφονται οι συνεισφορές που περιέχουν 2^{ης} τάξης μερικές παραγώγους στους όρους σταθεροποίησης ([6.2.9](#)), ([6.2.10](#)) και ([6.2.11](#)).

Η μητρική μορφή του προβλήματος είναι

$$\left[\tilde{M}(\mathbf{u}^{(n+1)}) + \Delta t \left(\tilde{C}(\mathbf{u}^{(n+1)}) + \tilde{K}(\mathbf{u}^{(n+1)}) \right) \right] T^{(n+1)} = \tilde{M}(\mathbf{u}^{(n+1)}) T^{(n)}, \quad (6.2.12)$$

$$[\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \Delta t(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}))] \mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{N}(\mathbf{u}) \mathbf{q}^n + \Delta t \mathbf{G}(\mathbf{u}, T^{(n+1)}) \quad (6.2.13)$$

με αρχικές συνθήκες $T^{(0)} = 293 \text{ K}$ και $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$ και όπου $\mathbf{q}^{(n+1)} = (\mathbf{u}^{(n+1)}, p^{(n+1)})^T$. Τα στοιχεία των πινάκων και διανυσμάτων των σχέσεων ([6.2.12](#)) και ([6.2.13](#)) δίνονται στα Κεφ. [2.5](#), [2.6](#), [3.6](#), [3.7](#) και στο Παράρτημα [B.1](#).

6.2.3 Κατασκευή γεωμετρίας και πλέγματος

Η κατασκευή της γεωμετρίας και του πλέγματος πραγματοποιήθηκε στο ανοικτό λογισμικό παραγωγής πλεγμάτων Gmsh ([Geuzaine & Remacle, 2022](#)) με την δημιουργία ενός μη δομημένου πλέγματος με πυκνωση κοντά στα τοιχώματα της θερμαινόμενης πλάκας. Για την διακριτοποίηση χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά τριγωνικά στοιχεία.

6.2.4 Επίλυση συζευγμένου συστήματος με τη διαχωρισμένη προσέγγιση (segregated approach)

Τα συστήματα (6.2.12) και (6.2.13) είναι ισχυρά συζευγμένα δεδομένου ότι για την επίλυση του ενός συστήματος απαιτείται η λύση του άλλου. Η μετάδοση της λύσης από το ένα σύστημα στο άλλο πραγματοποιείται με διαδοχικές επαναλήψεις Gauss-Siedel με την εξής διαδικασία: έστω ότι βρισκόμαστε στο χρόνο $t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t$ και στην κ-οστή επανάληψη Gauss-Siedel για την οποία είναι γνωστό το διάνυσμα της ταχύτητας από $\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}$, τότε στην κ+1-οστή επανάληψη, υπολογίζεται το διάνυσμα των άγνωστων τιμών της θερμοκρασίας $T_{(k+1)}^{(n+1)}$ από το αλγεβρικό σύστημα

$$\left[\tilde{M}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) + \Delta t \left(\tilde{C}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) + \tilde{K}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) \right) \right] T_{(k+1)}^{(n+1)} = \tilde{M}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) T^{(n)}. \quad (6.2.14)$$

Έχοντας υπολογίσει το διάνυσμα των άγνωστων τιμών θερμοκρασίας $T_{(k+1)}^{(n+1)}$, υπολογίζεται εκ νέου το διάνυσμα των άγνωστων τιμών της ταχύτητας $\mathbf{u}_{(k+1)}^{(n+1)}$ από το αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{N}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) + \Delta t \left(\mathbf{D}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) \right) \right] \mathbf{q}_{(k+1)}^{(n+1)} \\ = \mathbf{N}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}) \mathbf{q}^{(n)} + \Delta t \mathbf{G}(\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}, T_{(k+1)}^{(n+1)}), \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

όπου $\mathbf{q}_{(k+1)}^{(n+1)} = (\mathbf{u}_{(k+1)}^{(n+1)}, p_{(k+1)}^{(n+1)})^T$ και $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}$.

Οι επαναλήψεις Gauss-Seidel συνεχίζονται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση και των δύο άγνωστων μεταβλητών $T_{(k+1)}^{(n+1)}$, $\mathbf{u}_{(k+1)}^{(n+1)}$ με έλεγχο των σχέσεων

$$\delta_T = \frac{\|T_{(k+1)}^{(n+1)} - T_{(k)}^{(n+1)}\|_2}{\|T_{(k)}^{(n+1)}\|_2} \leq \varepsilon_T (= 10^{-5}) \quad (6.2.16)$$

$$\delta_u = \frac{\|\mathbf{u}_{(k+1)}^{(n+1)} - \mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}\|_2}{\|\mathbf{u}_{(k)}^{(n+1)}\|_2} \leq \varepsilon_u (= 10^{-5}) \quad (6.2.17)$$

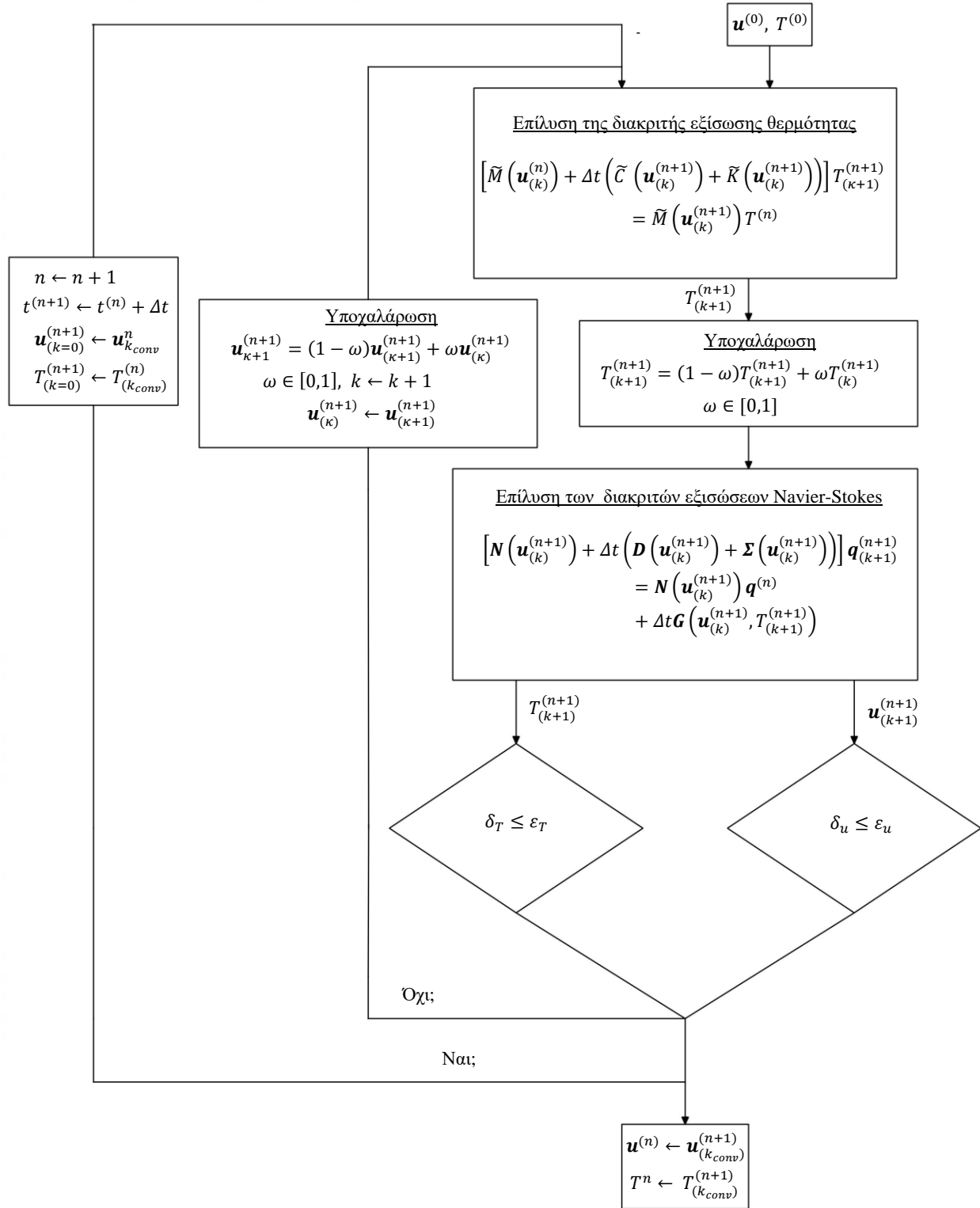
όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμας με τον οποίο πραγματοποιούνται οι επαναλήψεις Gauss-Seidel σε κάθε χρονική επανάληψη δίνεται στον αλγόριθμο του Σχήματος 6-8

6.2.5 Αριθμητική επίλυση

Για την επίλυση του συζευγμένου προβλήματος της φυσικής συναγωγής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (6.2.7) και (6.2.8) χρησιμοποιήθηκαν οι υπορουτίνες `heatsolver` και `flowsolver` από την βιβλιοθήκη του ElmerSolver. (βλ. Παρ. E.6). Τα γραμμικά συστήματα (6.2.14) και (6.2.15) επιλύθηκαν με την επαναληπτική μέθοδο Biconjugate Gradient Stabilized και το κριτήριο σύγκλισης και για τα δύο συστήματα τέθηκε ίσο με

$$\frac{\|Ax - b\|}{\|b\|} \leq 10^{-12} \quad (5.2.18)$$

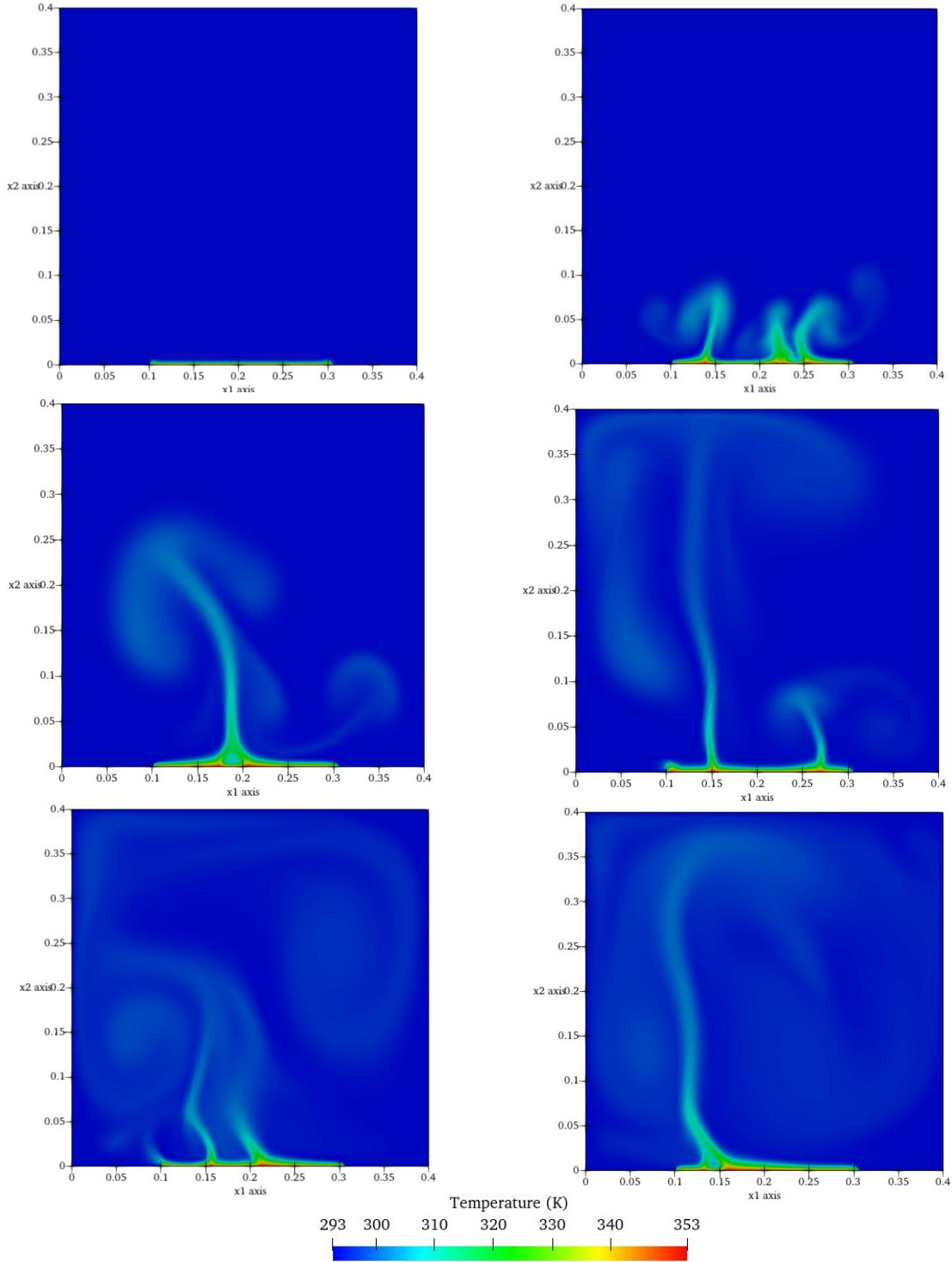
και ως μέθοδος προσταθεροποίησης χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της μερικής αποικοδόμησης ILU(1).



Σχ. 6-8 Αλγόριθμος επίλυσης του συζευγμένου συστήματος της φυσικής συναγωγής.

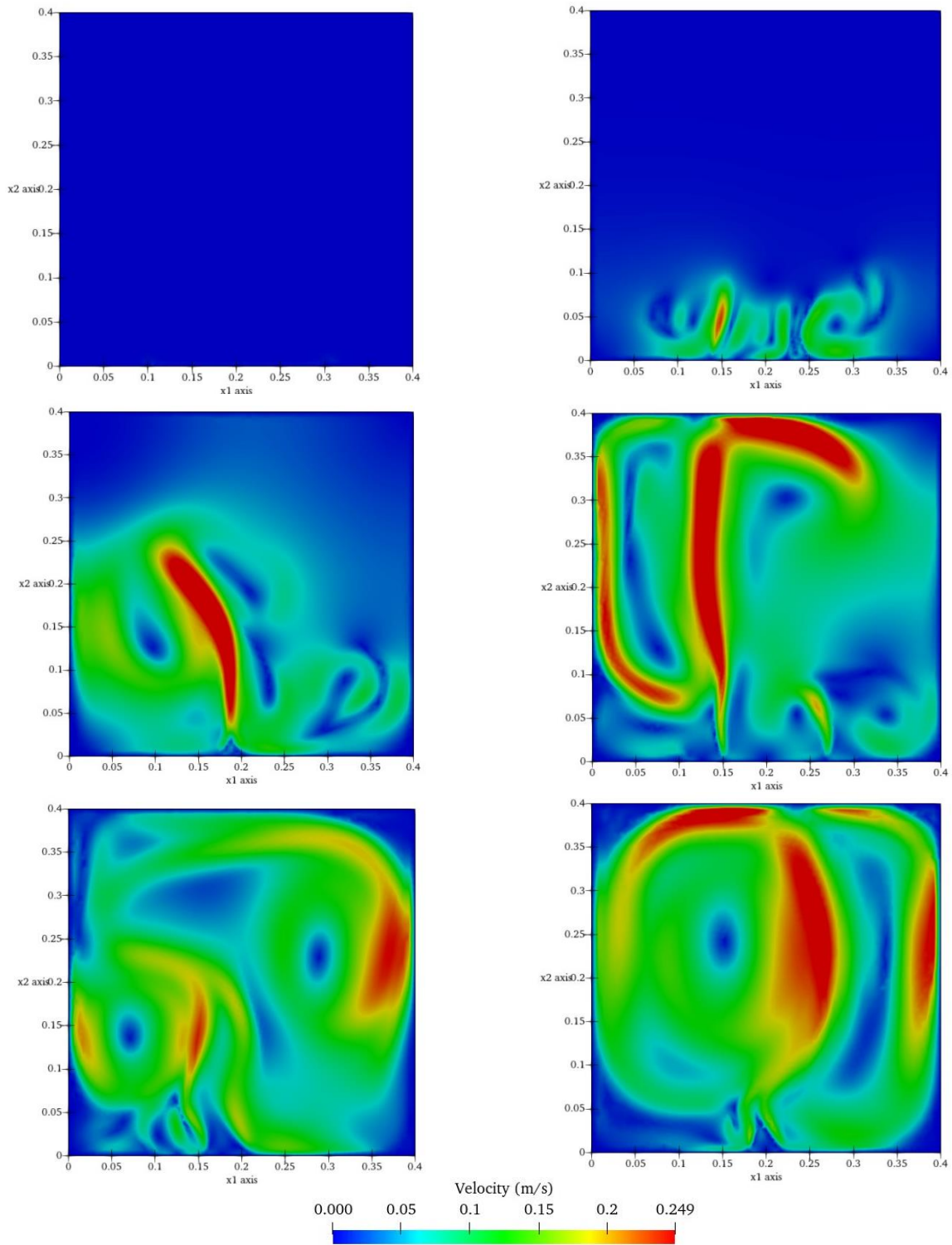
6.2.5 Απεικόνιση αποτελεσμάτων

Η απεικόνιση των αποτελεσμάτων πραγματοποιείται στο ανοικτό λογισμικό ParaView ([Ahrens, Geveci, & Law, 2005](#)). Στο Σχήμα 6-9 απεικονίζονται το πεδίο θερμοκρασίας για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής σε χρόνους 0, 2, 4, 6, 8, 10 s.



Σχ. 6-9 Κατανομή πεδίου θερμοκρασίας για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής σε χρόνους 0, 2, 4, 6, 8, 10 s (από αριστερά προς τα δεξιά).

Αντίστοιχα στο Σχήμα 6-10 απεικονίζεται το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής σε χρόνους 0, 2, 4, 6, 8, 10 s.



Σχ. 6-10 Κατανομή πεδίου ταχύτητας για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής σε χρόνους 0, 2, 4, 6, 8, 10 s (από αριστερά προς τα δεξιά).

Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

7.1 Συμπεράσματα

Βασιζόμενοι στην χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer για την επίλυση προβλημάτων φαινομένων μεταφοράς προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα: Ο χρήστης απαιτείται να έχει βαθιά γνώση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ώστε να μπορεί να εκμεταλλευτεί πλήρως όλες τις δυνατότητες του ElmerSolver καθώς δεν μπορεί να βασιστεί αποκλειστικά στο ElmerGUI για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων. Ταυτόχρονα απαιτείται να γνωρίζει την γλώσσα του ειδικού αρχείου SIF ώστε να μπορεί να επεμβαίνει και να διαφοροποιεί άμεσα τις διαδικασίες επίλυσης. Ένα από τα πλεονεκτήματα του λογισμικού πακέτου Elmer είναι η δυνατότητα που προσφέρει στον χρήστη να γράφει τις δικές του υπορουτίνες και διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων σε κώδικα Fortran και να τις προσθέτει στην βιβλιοθήκη του ElmerSolver. Το Elmer στηριζόμενο κυρίως στην διαχωριστική προσέγγιση επίλυσης σύνθετων προβλημάτων μπορεί να επιλύει συζευγμένα προβλήματα με ευέλικτο τρόπο. Τα διάφορα υποπρογράμματα του λογισμικού πακέτου Elmer μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο προφέροντας έτσι την ευελιξία στο χρήστη να προσαρμόσει τα υποπρογράμματα του Elmer στην δική του ροή εργασίας χωρίς περιορισμούς. Το Elmer μπορεί να συνδυαστεί με πληθώρα εξωτερικών λογισμικών ακόμα και εμπορικών για την πραγματοποίηση του σταδίου της προ-επεξεργασίας και μετά-επεξεργασίας.

7.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Στη παρούσα διπλωματική εργασία εξετάστηκαν οι δυνατότητες του λογισμικού πακέτου Elmer καθώς και οι διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων φαινομένων μεταφοράς σε απλές δισδιάστατες γεωμετρίες. Τα προβλήματα αυτά ήταν με τέτοιο τρόπο επιλεγμένα με σκοπό να αξιολογηθούν οι υπολογιστικές δυνατότητες του επιλύτη του Elmer (benchmarking) και να αποσαφηνιστούν με λεπτομέρεια οι διαδικασίες με τις οποίες η εκάστοτε υπορουτίνα επιλύει το πρόβλημα. Ταυτόχρονα δημιουργήθηκαν και νέες υπορουτίνες σε κώδικα Fortran με σκοπό την ανάλυση σφαλμάτων λαμβάνοντας, έτσι, μία πρώτη προγραμματιστική εμπειρία. Σε επόμενο χρόνο, επιδιώκεται η χρήση του λογισμικού πακέτου Elmer για την προσομοίωση φαινομένων σε τρισδιάστατες γεωμετρίες που βρίσκονται πιο κοντά στην πραγματικά. Παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών είναι η προσομοίωση τρισδιάστατης ροής σε μία αρτηρία με ελαστικά τοιχώματα, η διάχυση άλμης στην θάλασσα από μία μονάδα αφαλάτωσης και η τρισδιάστατη ανάπτυξη καρκινικών όγκων. Πρόκληση αποτελεί και η δημιουργία νέων υπορουτινών για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων που δεν μπορούν να επιλυθούν με τους εκάστοτε επιλύτες του Elmer.

Βιβλιογραφία

- Ahrens, J., Geveci, B., & Law, C. (2005). ParaView: An-User Tool for Large Data Visualization. In *The Visualization Handbook*. Elsevier. Retrieved from <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:56558637>
- Argyris, J. H., & Kelsey, S. (1960). *Energy Theorems and Structural Analysis*. London: Butterworths. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-5850-1>
- Batchelor, G. K. (2000). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955>
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lighfoot, E. N. (2001). *Transport Phenomena* (2nd ed.). New York: John Wiley and Sons. <http://dx.doi.org/10.1115/1.1424298>
- Boffi, D., Brezzi, F., & Fortin, M. (2013). *Mixed Finite Element Methods and Applications* (Vol. 44 of Springer Series in Computational Mathematics). Berlin: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-36519-5>
- Brenner, S. C., & Scott, L. R. (1994). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. New-York: Springer-Verlag. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-4338-8>
- Brooks, A. N., & Hughes, T. J. (1982). Streamline upwind Petrov-Galerkin formulation for convection-dominated flow with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3), 199-259. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8)
- Ciarlet, P. G. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Amsterdam: North-Holland. <https://doi.org/10.1002/nme.1620140514>
- Cioncolini, A., & Boffi, D. (2019). The MINI mixed finite element for the Stokes problem: An experimental investigation. *Computers & Mathematics with Applications*, 77, 2432-2446. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.12.028>
- Codina, R. (1993). *A Finite Element Formulation for the Numerical Solution of the Convection-Diffusion Equation*. Monograph, CIMNE. Ανακτήθηκε από: https://www.scipedia.com/public/Codina_2019b
- Courant, R. (1943). Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49, 1-23. <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07818-4>
- DeBlois, B. M. (1997). Linearizing convection terms in the Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143(3-4), 289-297. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01153-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01153-X)

- Demmel, J. (1991). LAPACK: a portable linear algebra library for high performance computers. *Concurrency: Practice and Experience*, 3(6), 655-666. <https://doi.org/10.1002/cpe.4330030610>
- Donea, A., & Huerta, J. (2003). *Finite Element Methods for Flow Problems*. Chichester : John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/0470013826>
- Durbin, P. A., & Medic, G. (2007). *Fluid Dynamics with a Computational Perspective*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619281>
- Elman, H., Silvester, D., & Wathen, A. (2014). *Finite Elements and Fast Iterative Solvers With Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford: Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199678792.001.0001>
- Farrell, P. E. (2021). *Finite Element Methods for PDEs*. C6.4 Hilary Terms (lecture notes).
- Finlayson, B. A. (1972). *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. New York: Academic Press. <https://doi.org/10.1002/aic.690190349>
- Franca, L., & Frey, S. (1992). Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2-3), 209-233. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90041-H](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90041-H)
- Franca, L., Frey, S., & Hughes, T. J. (1992). Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model. *Applied Mechanics and Engineering*, 95(2), 253-276. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90143-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90143-8)
- Geuzaine, C., & Remacle, J. F. (2022). *Gmsh*. Ανακτήθηκε από: <http://gmsh.info/>
- Ghia, U., Ghia, K. N., & Shin, C. T. (1982). High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *Journal of Computational Physics*, 48, 387-411. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)
- Girault, V., & Raviart, P.-A. (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations* (Vol. 5). Berlin: Springer-Verlag. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-61623-5>
- Hrennikoff, A. (1941). Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method. *Journal of Applied Mechanics*, 8(4), 169-175. <https://doi.org/10.1115/1.4009129>
- Hughes, T. J., & Brooks, A. N. (1979). A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion. In T. J. Hughes, & Ed., *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, AMD* (Vol. 34, pp. 19-35). New York: ASME. Ανακτήθηκε από: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118669634>
- Hughes, T. J., Franca, L. P., & Hulbert, G. M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(2), 173-189. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(89\)90111-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(89)90111-4)

- Hughes, T. J., Franca, L. P., & Ralestra, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the babuska-brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59, 85-99. [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(86\)90025-3](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(86)90025-3)
- Levy, S. (1953). Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. *Journal of Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, 20(7), 449-454. <https://doi.org/10.2514/8.2690>
- Lyly, M., & Takayuki, S. (2023). *ElmerGUI Manual*. CSC-IT Center for Science. Ανακτήθηκε από: <https://www.csc.fi/web/elmer>
- McHenry, D. (1943). A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems. *Journal of Institution of Civil Engineers, Vol. 21, 21(2)*, 59-82. <https://doi.org/10.1680/ijoti.1943.13967>
- Melosh, R. J. (1963). Structural Analysis of Solids. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 89, 205-248. Ανακτήθηκε από: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118357372>
- Onate, E., & Manzan, M. (2000). Stabilization Techniques for Finite Element Analysis of Convection-Diffusion Problems. *CIMNE*(N. 183).
- Raback, P. (2023). *ElmerGrid Manual*. CSC-IT Center for Science. Ανακτήθηκε από: <https://www.csc.fi/web/elmer>
- Raback, P., & Malinen, M. (2023). *Overview of Elmer*. CSC-IT Centre for Science. Ανακτήθηκε από: <http://www.csc.fi/elmer>
- Raback, P., Malinen, M., Ruokolainen, J., Pursula, A., Zwinger, T., & Eds. (2023). *Elmer Models Manual*. CSC-IT Center for Science. Ανακτήθηκε από: <https://www.csc.fi/web/elmer>
- Reddy, J. (1993). *An Introduction to Finite Element Method*. New-York: McGraw-Hill.
- Ruokolainen, J., Malinen, M., Raback, P., Zwinger, T., Pursula, A., & Byckling, M. (2023). *ElmerSolver Manual*. CSC-IT Center for Science. Ανακτήθηκε από: <https://www.csc.fi/web/elmer>
- Ruokolainen, J., Raback, P., Malinen, M., & Zwinger, T. (n.d.). *ElmerFEM [Computer Software]*. Ανακτήθηκε από: <https://github.com/ElmerCSC/elmerfem>
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia: SIAM Press. <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898718003>
- Savolainen, V., Jarvinen, J., Ruokolainen, J., & Anttila, O. J. (2000). A Stabilized Finite Element Analysis for Three-Dimensional Czochralski Silicon Melt Flow. Ανακτήθηκε από: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:195177203>
- Schreiber, R., & Keller, H. B. (1983). Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *Journal of Computational Physics*, 49(2), 310-333. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90129-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90129-8)

- Shankar, N., & Deshpande, M. D. (2000). Fluid Mechanics in the driven cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32, 93-136. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.32.1.93>
- Stenberg, R. (1990). Error Analysis of some Finite Element Methods for the Stokes Problem. *Mathematics of Computation*, 54(190), 495-508. <https://doi.org/10.2307/2008498>
- Vujicic, R. M. (2014 July 14-16). Finite Element Solution of Navier-Stokes Equations Using Krylov Subspace Methods. *10th Interational Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics [Paper presentation]*. Orlando, Florida.
- Zhang, F. (2005). *The Schur Complement and its Applications* (Vol. 4). New-York: Springer. <https://doi.org/10.1007/b105056>
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. (6th, Ed.) Oxford: Butterworth-Heinemann. <https://doi.org/10.1002/nme.1760>

Παράρτημα A: Χρήσιμοι χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

A.1 Χώρος Hilbert

Έστω ένα ανοιχτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ με χωρικές διαστάσεις $n_{sd} = \{1,2,3\}$. Θα συμβολίζονται με $L^2(\Omega)$ τον χώρο των συναρτήσεων $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο σύνολο Ω , δηλαδή

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty. \quad (\text{A.1})$$

Ο χώρος $L^2(\Omega)$ είναι γνωστός ως χώρος Hilbert και είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (\text{A.2})$$

και τη νόρμα

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Χώροι Sobolev

Εν συνεχεία περιγράφεται μια συγκεκριμένη κατηγορία χώρων Sobolev, στους οποίους ανήκουν οι συναρτήσεις $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και έχουν τετραγωνικά ολοκληρώσιμες ασθενείς μερικές παραγώγους. Πριν προχωρήσουμε στο ορισμό των χώρων Sobolev, θα εισαχθεί η έννοια των ασθενών μερικών παραγώγων.

Έστω μία συνάρτηση $u \in L^2(\Omega)$ και μία απείρως ομαλή συνάρτηση $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα το Ω , $v \in C_0^\infty(\Omega)$, τότε ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.4})$$

Ορίζουμε ως ασθενή μερική παράγωγο της συνάρτησης $v \in L^2(\Omega)$ ως προς x_i την συνάρτηση $\partial_i v \in L^2(\Omega)$ τέτοια, ώστε

$$\int_{\Omega} v \partial_i u d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad (\text{A.5})$$

Κατά αναλογία ορίζονται οι ασθενής μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης. Έστω ένας πολυδείκτης $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{sd}}) \in \mathbb{N}^{n_{sd}}$ με μη αρνητικό ακέραιο $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_{sd}}$. Η τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n_{sd}}^{\alpha_{n_{sd}}}} \in L_2(\Omega) \quad (\text{A.6})$$

αναπαριστά την ασθενή μερική παράγωγο τάξης $|\alpha|$ αν ικανοποιείται η σχέση

$$\int_{\Omega} v D^{\alpha} u \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} v \, dx, \quad \forall u, v \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (\text{A.7})$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τους χώρους Sobolev. Έστω k ένας μη αρνητικός ακέραιος, θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και έχουν τετραγωνικά ολοκληρώσιμες ασθενείς μερικές παραγώγους μέχρι k τάξης ανήκουν στο χώρο Sobolev

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^{\alpha} u \in L^2(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq k\}. \quad (\text{A.8})$$

Ο χώρος Sobolev $H^k(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v) \quad (\text{A.9})$$

και τη νόρμα

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{A.10})$$

Δύο σημαντικές κατηγορίες των χώρων Sobolev είναι οι $H_1(\Omega)$ και $H_2(\Omega)$, οι οποίες σύμφωνα με τον ορισμό είναι

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n_{sd} \right\}, \quad (\text{A.11})$$

με νόρμες

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n_{sd}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{A.12})$$

και

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_{sd}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{A.13})$$

Κατά αντιστοιχία ορίζεται ο χώρος $H^2(\Omega)$,

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i = 1, \dots, n_{sd}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \right. \\ \left. \forall i, j = 1, \dots, n_{sd} \right\}, \quad (\text{A.14})$$

με νόρμες

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n_{sd}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n_{sd}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}, \quad (\text{A.15})$$

$$|u|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_{sd}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{A.16})$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι ο χώρος $L^2(\Omega)$ είναι στην πραγματικότητα ο χώρος Sobolev $H^0(\Omega)$. Επίσης κατά τον μαθηματικό φορμαλισμό της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων γίνεται πολλές φορές χρήση του υποχώρου

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}. \quad (\text{A.17})$$

A.3 Επέκταση σε διανυσματικές συναρτήσεις

Πολλές φορές προκύπτουν προβλήματα στα οποία η άγνωστη συνάρτηση που αναζητείται από την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης που διέπει το φυσικό φαινόμενο που μελετάται δεν είναι μία βαθμωτή συνάρτηση όπως η πίεση ή θερμοκρασία αλλά μία διανυσματική συνάρτηση όπως η ταχύτητα ενός ρευστού.

Έστω, λοιπόν, ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ και οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{u}, \mathbf{w}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{sd}}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathbf{H}^\kappa(\Omega) = [H^\kappa(\Omega)]^1 \times [H^\kappa(\Omega)]^2 \times \dots \times [H^\kappa(\Omega)]^{n_{sd}}$ τους χώρους Sobolev στους οποίους ανήκει η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n_{sd}})$, αν κάθε συνιστώσα της $u_i \in H^\kappa(\Omega)$ για $1 \leq i \leq n_{sd}$. Ο χώρος $\mathbf{H}^\kappa(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^\kappa(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n_{sd}} \sum_{|\alpha| \leq \kappa} \|D^\alpha u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{A.18})$$

Π.χ. για $\kappa = 1$, λαμβάνουμε τις νόρμες Sobolev

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_{sd}} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n_{sd}} \sum_{j=1}^{n_{sd}} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{A.19})$$

και

$$|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_{sd}} \sum_{j=1}^{n_{sd}} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{A.20})$$

Παράρτημα Β: Ανάλυση όρων σταθεροποίησης για τις εξισώσεις Navier-Stokes

Β.1 Ανάλυση όρων σταθεροποίησης GLS για την περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard

Στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Picard, η σταθεροποιημένη μητρική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes δίνεται από την σχέση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{M}_{uu}(\mathbf{U}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{pu}(\mathbf{U}) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(\mathbf{U})} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix}}_{d\mathbf{q}/dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{U}) & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(\mathbf{U})} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{U}) & \mathbf{S}_{up}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{S}_{pu}(\mathbf{U}) & \mathbf{S}_{pp}(\mathbf{U}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}(\mathbf{U})} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} \quad (\text{B.1})$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{F}_u(\mathbf{U}) \\ \mathbf{F}_p(\mathbf{U}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}(\mathbf{U})},$$

όπου

$$\mathbf{M}_{uu}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{M}_{uu}^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}_{uu}^{(2)}(\mathbf{U}), \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{S}_{uu}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{S}_{uu}^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(2)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(3)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(4)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(5)}(\mathbf{U}), \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{S}_{up}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{S}_{up}^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{up}^{(2)}(\mathbf{U}), \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{S}_{pu}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{S}_{pu}^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{pu}^{(2)}(\mathbf{U}), \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{F}_u(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{F}_u^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{F}_u^{(2)}(\mathbf{U}). \quad (\text{B.6})$$

Τα στοιχεία των μητρώων που αντιπροσωπεύουν τους ανωτέρω όρους σταθεροποίηση (βλ. Πίνακα [B-1](#)) μπορούν να αναλυθούν περαιτέρω χρησιμοποιώντας την σύμβαση άθροισης του Einstein

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu_{RS}}^{(1)} &= \left(M_{uu_{kl}}^{(1)} \right)_{IJ} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{U}) \rho^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J \mathbf{e}_l) \cdot \varphi_I \mathbf{e}_k dx \right] \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{U}) \rho^2 \left(u_1 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \varphi_I \delta_{kl} dx \right] \quad \gamma \text{ια } I, J \\ &= 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu_{RS}}^{(2)} &= \left(M_{uu_{kl}}^{(2)} \right)_{IJ} = - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \varphi_I \mathbf{e}_k \cdot \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} (2\mu \varphi_J \mathbf{e}_l) dx \right] \\ &= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \mu \varphi_I \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2^2} \right) \delta_{kl} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_k \partial x_l} \right] dx \right\} \quad \gamma \text{ια } I, J \\ &= 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{M}_{pu_{RS}} = (M_{pu_k})_{IJ} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \nabla \varphi_J \cdot \varphi_I \mathbf{e}_k dx \right] = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_k} \varphi_I dx \right] \gamma_{\alpha I, J} \quad (\text{B.9})$$

$= 1, \dots, N_{nodes}$ και $k = 1, 2,$

$$\mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(1)} = (S_{uu_{kl}}^{(1)})_{IJ} = - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J \mathbf{e}_I) \cdot (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} (2\mu \varphi_I \mathbf{e}_k)) dx \right] =$$

$$= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \mu \rho \left[\left(u_1 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_2^2} \right) \delta_{kl} \right. \right. \quad (\text{B.10})$$

$$\left. \left. + \left(u_1 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_k \partial x_l} \right] dx \right\} \gamma_{\alpha I, J} = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2,$$

$$\mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(2)} = (S_{uu_{kl}}^{(2)})_{ij} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} (2\mu \varphi_J \mathbf{e}_I)) \cdot (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} (2\mu \varphi_I \mathbf{e}_k)) dx \right] =$$

$$= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \mu^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_2^2} \right) \delta_{kl} \right. \right. \quad (\text{B.11})$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_l \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_l \partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_l \partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_1 \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_2 \partial x_k} \right) \right] dx \right\} \gamma_{\alpha I, J}$$

$= 1, \dots, N_{nodes}$ και $k, l = 1, 2,$

$$\mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(3)} = (S_{uu_{kl}}^{(3)})_{IJ} = - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} (2\mu \varphi_J \mathbf{e}_I)) \cdot \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_I \mathbf{e}_k) dx \right]$$

$$= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} 2\tau(\mathbf{u}) \mu \rho \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2^2} \right) \left(u_1 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right. \right. \quad (\text{B.12})$$

$$\left. \left. + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_k \partial x_l} \left(u_1 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) \right] dx \right\} \gamma_{\alpha I, J} = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2,$$

$$\mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(4)} = (S_{uu_{kl}}^{(4)})_{IJ} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J \mathbf{e}_I) \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_I \mathbf{e}_k) dx \right]$$

$$= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 \left[\left(u_1 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \left(u_1 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx \right\} \gamma_{\alpha I, J} \quad (\text{B.13})$$

$= 1, \dots, N_{nodes}$ και $k, l = 1, 2,$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{u}u_{RS}}^{(5)} &= \left(S_{\mathbf{u}u_{kl}}^{(5)} \right)_{ij} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \delta(\mathbf{u}) \left(\nabla \cdot (\varphi_J \mathbf{e}_l) \right) \rho \left(\nabla \cdot (\varphi_I \mathbf{e}_k) \right) dx \right] = \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \delta(\mathbf{u}) \rho \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_k} dx \right] \gamma_{\alpha} I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } \kappa, l = 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{u}p_S}^{(1)} &= \left(S_{\mathbf{u}p_S}^{(1)} \right)_{ij} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J \mathbf{e}_l) \cdot \nabla \varphi_I dx \right] \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \left(u_1 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_l} dx \right] \gamma_{\alpha} I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l \\ &= 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{u}p_S}^{(2)} &= \left(S_{\mathbf{u}p_S}^{(2)} \right)_{IJ} = - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \left(\nabla \cdot \bar{\gamma} (2\mu \varphi_J \mathbf{e}_l) \right) \cdot \nabla \varphi_I dx \right] \\ &= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \mu \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_l} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1 \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2 \partial x_l} \right) \left(\frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_l} \right) \right] dx \right\} \gamma_{\alpha} I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{p}u_R}^{(1)} &= \left(S_{\mathbf{p}u_R}^{(1)} \right)_{IJ} = - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla \varphi_J \cdot \left(\nabla \cdot \bar{\gamma} (2\mu \varphi_I \mathbf{e}_k) \right) dx \right] = \\ &= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \mu \left[\frac{\partial \varphi_J}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_1 \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_2 \partial x_k} \right) \right] dx \right\} \gamma_{\alpha} I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k \\ &= 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{p}u_R}^{(2)} &= \left(S_{\mathbf{p}u_R}^{(2)} \right)_{IJ} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \nabla \varphi_J \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_I \mathbf{e}_k) dx \right] \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_k} \left(u_1 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) dx \right] \gamma_{\alpha} I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k \\ &= 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} S_{pp_{IJ}} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla \varphi_J \cdot \nabla \varphi_I dx \right] = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) dx \right] \gamma_{\alpha} I, J \\ &= 1, \dots, N_{nodes}, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Πίνακας Β-1. Αντιστοιχία μεταξύ πινάκων/διανυσμάτων και όρων σταθεροποίησης διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.77).

Πίνακας/διάνυσμα	Όρος σταθεροποίησης της διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.77)	Διαστάσεις
$M_{uu}^{(1)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h) \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} dx$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$M_{uu}^{(2)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu \mathbf{w}_u^h)) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
M_{pu}	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla w_p^h \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} dx \right]$	$N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$S_{uu}^{(1)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h) \cdot (\nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^h))) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$S_{uu}^{(2)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu \mathbf{w}_u^h)) (\nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}^h))) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$S_{uu}^{(3)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu \mathbf{w}_u^h)) \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$S_{uu}^{(4)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h) \cdot \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) dx$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$S_{uu}^{(5)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \delta(\mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{w}_u^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h dx \right]$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$S_{up}^{(1)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h \cdot \nabla p^h dx \right]$	$2N_{nodes} \times N_{nodes}$
$S_{up}^{(2)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu \mathbf{w}_u^h)) \cdot \nabla p^h dx \right]$	$2N_{nodes} \times N_{nodes}$
$S_{pu}^{(1)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla w_p^h \cdot (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu \mathbf{u}^h)) dx \right]$	$N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$S_{pu}^{(2)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla w_p^h \cdot \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) dx$	$N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
S_{pp}	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla w_p^h \cdot \nabla p^h dx \right]$	$N_{nodes} \times N_{nodes}$
$F_u^{(1)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h) \cdot \rho \mathbf{f} dx \right]$	$2N_{nodes} \times 1$
$F_u^{(2)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu \mathbf{w}_u^h) \cdot \rho \mathbf{f} dx \right]$	$2N_{nodes} \times 1$
F_p	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla w_p^h \cdot \rho \mathbf{f} dx \right]$	$N_{nodes} \times 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\mathbf{u}_S}^{(1)} = (F_{u_l}^{(1)})_J &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j \mathbf{e}_l) \cdot \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \right] \\
 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 \left(u_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \right) f_l \, d\mathbf{x} \right] \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\mathbf{u}_S}^{(2)} = (F_{u_l}^{(2)})_J &= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu\varphi_j \mathbf{e}_l)) \cdot \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \right] = \\
 &= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \mu \rho \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_2^2} \right) f_l \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1 \partial x_l} f_1 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2 \partial x_l} f_2 \right) \right] \, d\mathbf{x} \right\} \text{ για } J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
 F_{p_J} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot \rho \mathbf{f}^{(e)} \, d\mathbf{x} \right] = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} f_2 \right) \, d\mathbf{x} \right] \text{ για } J \\
 &= 1, \dots, N_{nodes}
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Η κατασκευή των ολικών πινάκων/διανυσμάτων που περιέχουν όρους σταθεροποίησης πραγματοποιείται μέσω της τοπολογικής συναρμολόγησης των συνεισφορών των στοιχείων,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\mathbf{uu}_{RS}}^{(1)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{M}_{\mathbf{uu}_{rs}}^{(1)(e)}, \mathbf{M}_{\mathbf{uu}_{rs}}^{(1)(e)} = \left(M_{uu_{kl}}^{(1)(e)} \right)_{ij} \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 (\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l) \cdot \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) \varphi_i^{(e)} \delta_{kl} \, d\mathbf{x} \text{ για } i, j \\
 &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\mathbf{uu}_{RS}}^{(2)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{M}_{\mathbf{uu}_{rs}}^{(2)(e)}, \mathbf{M}_{\mathbf{uu}_{rs}}^{(2)(e)} = \left(M_{uu_{kl}}^{(2)(e)} \right)_{ij} \\
 &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}(2\mu\varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l) \cdot \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \, d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \mu \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \delta_{kl} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_k \partial x_l} \right] \varphi_i \, d\mathbf{x} \text{ για } i, j \\
 &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{pu_R} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{M}_{pu_r}^{(e)}, \mathbf{M}_{pu_r}^{(e)} = \left(M_{pu_k}^{(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k dx \\ &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_k} \varphi_i^{(e)} dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(1)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(1)(e)}, \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(1)(e)} = \left(S_{uu_{kl}}^{(1)(e)} \right)_{ij} \\ &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \cdot \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \left(2\mu \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) \right) dx = \\ &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \mu \rho \left[\left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \delta_{kl} \right. \\ &\quad \left. + \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_k \partial x_l} \right] dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l \\ &= 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(2)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(2)(e)}, \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(2)(e)} = \left(S_{uu_{kl}}^{(2)(e)} \right)_{ij} \\ &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \left(2\mu \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \right) \cdot \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \left(2\mu \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \mu^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \delta_{kl} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l \partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l \partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2 \partial x_k} \right) \right] dx \text{ για } i, j \\ &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(3)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(3)(e)}, \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(3)(e)} = \left(S_{uu_{kl}}^{(3)(e)} \right)_{ij} \\ &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \left(2\mu \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \right) \cdot \rho \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) dx = \\ &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \mu \rho \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_k \partial x_l} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) \right] dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l \\ &= 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(4)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(4)(e)}, \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(4)(e)} = \left(S_{uu_{kl}}^{(4)(e)} \right)_{ij} \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \cdot \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) dx = \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left[\left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) \delta_{kl} \right] dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(5)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(5)(e)}, \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(5)(e)} = \left(S_{uu_{kl}}^{(5)(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \delta(\mathbf{u}^{(e)}) \left(\nabla \cdot \left(\varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \right) \rho \left(\nabla \cdot \left(\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \delta(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_k} dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{up_s}^{(1)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{up_s}^{(1)(e)}, \mathbf{S}_{up_s}^{(1)(e)} = \left(S_{up_l}^{(1)(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_l} dx \text{ για } i, j \\
 &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{up_s}^{(2)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{up_s}^{(2)(e)}, \mathbf{S}_{up_s}^{(2)(e)} = \left(S_{up_l}^{(2)(e)} \right)_{ij} = - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \left(2\mu \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \right) \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} dx \\
 &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \mu \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_l} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2 \partial x_l} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) \right] dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } l \\
 &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{pu_R}^{(1)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{pu_r}^{(1)(e)}, \mathbf{S}_{pu_r}^{(1)(e)} = \left(S_{pu_k}^{(1)(e)} \right)_{ij} = - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \nabla \varphi_j \cdot \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \left(2\mu \varphi_i \mathbf{e}_k \right) \right) dx = \\
 &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \mu \left[\frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2 \partial x_k} \right) \right] dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k \\
 &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{pu_R}^{(2)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{pu_r}^{(2)(e)}, \mathbf{S}_{pu_r}^{(2)(e)} = \left(S_{pu_k}^{(2)(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau \rho \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_k} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k \\
 &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}
 S_{pp_{IJ}} &= \mathcal{A}^{(e)} S_{pp_{ij}}^{(e)}, S_{pp_{ij}}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot \nabla \varphi_i^{(e)} dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \left(\frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x_2} \right) dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes}
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{u_s}^{(1)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{F}_{u_s}^{(1)(e)}, \mathbf{F}_{u_s}^{(1)(e)} = \left(F_{u_l}^{(1)(e)} \right)_j = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \cdot \rho \mathbf{f}^{(e)} dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \right) f_l^{(e)} dx \text{ για } j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } l \\
 &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{u_s}^{(2)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{F}_{u_s}^{(2)(e)}, \mathbf{F}_{u_s}^{(2)(e)} = \left(F_{u_l}^{(2)(e)} \right)_j = - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \left(2\mu \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \right) \cdot \rho \mathbf{f}^{(e)} dx = \\
 &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \mu \rho \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2^2} \right) f_l^{(e)} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1 \partial x_l} f_1^{(e)} + \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2 \partial x_l} f_2^{(e)} \right) \right] dx \text{ για } j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned}
 F_{p_j} &= \mathcal{A}^{(e)} F_p^{(e)} \Big|_j, F_p^{(e)} \Big|_j = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot \rho \mathbf{f}^{(e)} dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(\frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} f_1^{(e)} + \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} f_2^{(e)} \right) dx \text{ για } j = 1, \dots, n_{nodes}
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

B.2 Ανάλυση όρων σταθεροποίησης GLS για την περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton

Στην περίπτωση που η γραμμικοποίηση έχει πραγματοποιηθεί με την μέθοδο Newton, τότε η σταθεροποιημένη μητρική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes είναι αντίστοιχη με την (B.1)

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{M}_{uu}(\mathbf{U}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{pu}(\mathbf{U}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(\mathbf{U})} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix}}_{d\mathbf{q}/dt} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{U}) & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(\mathbf{U})} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{U}) & \mathbf{S}_{up}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{S}_{pu}(\mathbf{U}) & \mathbf{S}_{uu}(\mathbf{U}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}(\mathbf{U})} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{F}_u(\mathbf{U}) \\ F_p(\mathbf{U}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}(\mathbf{U})},
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

αλλά με την προσθήκη επιπλέον όρων σταθεροποίησης (βλ. Πίνακα B-2)

$$\mathbf{S}_{uu}(\mathbf{U}) \equiv \underbrace{\mathbf{S}_{uu}^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(2)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(3)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(4)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(5)}(\mathbf{U})}_{Picard} + \underbrace{\mathbf{S}_{uu}^{(6)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{uu}^{(7)}(\mathbf{U})}_{Newton}, \quad (\text{B.39})$$

$$\mathbf{S}_{pu}(\mathbf{U}) \equiv \underbrace{\mathbf{S}_{pu}^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{pu}^{(2)}(\mathbf{U})}_{Picard} + \underbrace{\mathbf{S}_{pu}^{(3)}(\mathbf{U})}_{Newton}, \quad (\text{B.40})$$

$$\mathbf{F}_u(\mathbf{U}) \equiv \underbrace{\mathbf{F}_u^{(1)}(\mathbf{U}) + \mathbf{F}_u^{(2)}(\mathbf{U})}_{Picard} + \underbrace{\mathbf{F}_u^{(3)}(\mathbf{U}) + \mathbf{F}_u^{(4)}(\mathbf{U})}_{Newton}, \quad (\text{B.41})$$

$$F_p \equiv \underbrace{F_p^{(1)}(\mathbf{U})}_{Picard} + \underbrace{F_p^{(3)}(\mathbf{U})}_{Newton}. \quad (\text{B.42})$$

Πίνακας Β-2. Αντιστοίχιση μεταξύ πινάκων/διανυσμάτων και όρων σταθεροποίησης διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.78).

Πίνακας/διάνυσμα	Όρος σταθεροποίησης διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής (3.78)	Διαστάσεις
$\mathbf{S}_{uu}^{(6)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h) \cdot (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$\mathbf{S}_{uu}^{(7)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho (\nabla \cdot \bar{\gamma}(2\mu \mathbf{w}_u^h)) \cdot (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$\mathbf{S}_{pu}^{(3)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \nabla \mathbf{w}_p^h \cdot (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \right]$	$N_{nodes} \times 2N_{nodes}$
$\mathbf{F}_u^{(3)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}_u^h) \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 1$
$\mathbf{F}_u^{(4)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho (\nabla \cdot \bar{\gamma}(2\mu \mathbf{w}_u^h)) \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \right]$	$2N_{nodes} \times 1$
$F_p^{(2)}$	$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \nabla \mathbf{w}_p^h \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \right]$	$N_{nodes} \times 1$

Τα στοιχεία των επιπλέον αυτών όρων δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{uu RS}^{(6)} &= \left(S_{uu kl}^{(6)} \right)_{IJ} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j \mathbf{e}_l) \cdot (\varphi_I \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}) dx \right] \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \rho^2 \left(u_1 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_2} \right) \varphi_I \frac{\partial u_l}{\partial x_k} dx \text{ για } I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k, l \\ &= 1, 2, \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^{(7)} &= \left(S_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^{(7)} \right)_{IJ} \\
 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[- \int_{\Omega_e} \tau \rho(\mathbf{u}) \left(\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}}(2\mu\varphi_l \mathbf{e}_l) \right) (\varphi_l \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}) \, dx \right] \\
 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ - \int_{\Omega_e} \left[\tau(\mathbf{u}) \rho \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2^2} \right) \varphi_l \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1 \partial x_1} \varphi_l \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi_l \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right] dx \right\} \gamma_{\alpha} \quad I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\rho \mathbf{u}}^{(3)} &= \left(S_{\rho \mathbf{u}}^{(3)} \right)_{IJ} \\
 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \nabla \varphi_J \cdot (\varphi_l \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}) \, dx \right] \\
 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \left(\frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} \varphi_l \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \varphi_l \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right) dx \right] \gamma_{\alpha} \quad I, J = 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } k \\
 &= 1, 2,
 \end{aligned} \tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{(3)} &= \left(F_{\mathbf{u}}^{(3)} \right)_J = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_J \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \, dx \right] \\
 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho^2 \left(u_1 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \right) \left(u_1 \frac{\partial u_l}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_l}{\partial x_2} \right) dx \right] \gamma_{\alpha} \quad J \\
 &= 1, 2, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{B.46}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{(4)} &= \left(F_{\mathbf{u}}^{(4)} \right)_J \\
 &= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \left(\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\gamma}}(2\mu\varphi_J \mathbf{e}_l) \right) \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \, dx \right] \\
 &= - \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \mu \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1^2} \right) \left(u_1 \frac{\partial u_l}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_l}{\partial x_2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1 \partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_J}{\partial x_1 \partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] dx \right\} \gamma_{\alpha} \quad J \\
 &= 1, \dots, N_{nodes} \text{ και } l = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

$$\begin{aligned}
 F_p^{(2)} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \nabla \varphi_J \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \, dx \right] \\
 &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}) \rho \left[\frac{\partial \varphi_J}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \varphi_J}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] dx \right\} \gamma_{\alpha} \quad J \\
 &= 1, 2, \dots, N_{nodes}
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

και η κατασκευή τους πραγματοποιείται μέσω της τοπολογικής συναρμολόγησης των συνεισφορών των στοιχείων,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(6)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(6)(e)}, \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(6)(e)} = \left(S_{uu_{kl}}^{(6)(e)} \right)_{ij} \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \cdot \left(\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} \right) \varphi_i^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_k} dx \text{ για } i, j \\
 &= 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.49}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{uu_{RS}}^{(7)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(7)(e)}, \mathbf{S}_{uu_{rs}}^{(7)(e)} = \left(S_{uu_{kl}}^{(7)(e)} \right)_{ij} \\
 &= - \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{r}} \left(2\mu \varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \right) \left(\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega_e} \left[\tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} \right) \varphi_i^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l \partial x_1} \varphi_i^{(e)} \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x_k} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l \partial x_2} \varphi_i^{(e)} \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x_k} \right] dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k, l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.50}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{pu_R}^{(3)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{S}_{pu_r}^{(3)(e)}, \mathbf{S}_{pu_r}^{(3)(e)} = \left(S_{pu_k}^{(3)(e)} \right)_{ij} = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot \left(\varphi_i^{(e)} \mathbf{e}_k \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(\frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} \varphi_i^{(e)} \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \varphi_i^{(e)} \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x_k} \right) dx \text{ για } i, j = 1, \dots, n_{nodes} \text{ και } k \\
 &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.51}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{u_s}^{(3)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{F}_{u_s}^{(3)(e)}, \mathbf{F}_{u_s}^{(3)(e)} = \left(F_{u_l}^{(3)(e)} \right)_j = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \cdot \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho^2 \left(u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} + u_1^{(e)} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} \right) \left(u_1^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_1} + u_1^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_1} \right) dx \text{ για } j \\
 &= 1, 2, \dots, n_{nodes} \text{ και } l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.52}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{u_s}^{(4)} &= \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{F}_{u_s}^{(4)(e)}, \mathbf{F}_{u_s}^{(4)(e)} = \left(F_{u_l}^{(4)(e)} \right)_j \\
 &= - \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left(\nabla \cdot \bar{\mathbf{r}} \left(2\mu \varphi_j^{(e)} \mathbf{e}_l \right) \right) \cdot \left(\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)} \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \mu \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1^2} \right) \left(u_1^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial u_l^{(e)}}{\partial x_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l \partial x_1} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 \varphi_j^{(e)}}{\partial x_l \partial x_2} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x_2} \right) \right] dx \text{ για } j = 1, 2, \dots, n_{nodes} \text{ και } l = 1, 2
 \end{aligned} \tag{B.53}$$

$$\begin{aligned}
 F_p^{(2)} &= \mathcal{A}^{(e)} F_p^{(2)(e)}, F_p^{(2)(e)} = \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \nabla \varphi_j^{(e)} \cdot (\mathbf{u}^{(e)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(e)}) dx \\
 &= \int_{\Omega_e} \tau(\mathbf{u}^{(e)}) \rho \left[\frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_1} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x_2} \left(u_1^{(e)} \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x_1} + u_2^{(e)} \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x_2} \right) \right] dx \text{ για } j = 1, 2, \dots, n_{nodes}
 \end{aligned} \tag{B.54}$$

Παράρτημα Γ: Υπορουτίνες σε κώδικα Fortran

Γ.1 Υπορουτίνα που υπολογίζει τις νόρμες Hilbert και Sobolev για το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα

```

1 SUBROUTINE HeatedCavityNormSolver(Model, Solver, dt, TransientSimulation)
2 !-----
3 !*****
4 !
5 ! υπολογίζει την νόρμα L2 and H1 του σφάλματος του πεδίου θερμοκρασίας
6 !
7 !*****
8   USE DefUtils
9   USE ElementUtils
10  IMPLICIT NONE
11 !-----
12  TYPE(Solver_t) :: Solver
13  TYPE(Model_t) :: Model
14  REAL(KIND=dp) :: dt
15  LOGICAL :: TransientSimulation
16 !-----
17 ! Τοπικές μεταβλητές.
18 !-----
19  TYPE(ValueList_t), POINTER :: SolverParams
20  CHARACTER(LEN=MAX_NAME_LEN) :: SenderName, Varname
21  TYPE(Variable_t), POINTER :: Var
22  LOGICAL :: Found, AllocationsDone
23  INTEGER :: n, t, nd, nb
24  TYPE(Element_t), POINTER :: Element
25  REAL(KIND=dp), ALLOCATABLE :: Varloc(:)
26  REAL(KIND=dp) :: L2normvar, H1normvar, L2normvarloc, H1normvarloc
27
28  SAVE Varloc, AllocationsDone
29 !-----
30  SenderName = 'NormSolver'
31
32      n = Solver % Mesh % MaxElementDOFs
33      ALLOCATE(Varloc(n))
34
35  AllocationsDone = .TRUE.
36
37  ! παραλαβή των τιμών θερμοκρασίας
38  !-----
39  SolverParams => GetSolverParams()
40
41  Varname = GetString(SolverParams, "Var", Found)
42
43  IF(.NOT.Found) THEN
44      WRITE(Message, *) 'Var not found (name unspecified)'
45      CALL Fatal(SenderName, Message)
46  END IF
47

```



```

48  Var => VariableGet(Solver % Mesh % Variables, Varname)
49
50  ! υπολογίζει τις νόρμες L2 και H1
51  !-----
52  L2nrmvar = 0.0d0
53  H1nrmvar = 0.0d0
54
55  DO t = 1, GetNofActive()
56
57      Element => GetActiveElement(t)
58      n = GetElementNOFNodes(Element)
59      nd = GetElementNOFDOfs()
60      nb = GetElementNOFBDOFs()
61
62      CALL GetScalarLocalSolution(Varloc, Varname)
63
64      CALL Compute(Element, n, nd, Varloc, L2nrmvarloc, H1nrmvarloc)
65
66      L2nrmvar = L2nrmvar + L2nrmvarloc
67      H1nrmvar = H1nrmvar + L2nrmvarloc + H1nrmvarloc
68
69  END DO
70
71  L2nrmvar = SQRT(L2nrmvar)
72  H1nrmvar = SQRT(H1nrmvar)
73
74  WRITE(Message, *) 'L2norm =', L2nrmvar
75  CALL Info(SenderName, Message)
76
77  WRITE(Message, *) 'H1norm =', H1nrmvar
78  CALL Info(SenderName, Message)
79
80  CONTAINS
81  SUBROUTINE Compute(Element, n, nd, Var, &
82      L2nrmvar, H1nrmvar)
83  !-----
84      TYPE(Element_t), POINTER :: Element
85      INTEGER :: n, nd
86      REAL(KIND=dp) :: Var(:)
87      REAL(KIND=dp) :: L2nrmvar, H1nrmvar
88      TYPE(GaussIntegrationPoints_t) :: IP
89      REAL(KIND=dp) :: detJ, Basis(n), dBasisdx(n,3)
90      REAL(KIND=dp) :: xP, yP, solatIP, VaratIP
91      REAL(KIND=dp) :: gradVaratIP(n), solatIPdx(n)
92      INTEGER :: t, i
93      LOGICAL :: stat
94      TYPE(Nodes_t) :: Nodes
95      SAVE Nodes
96
97      CALL GetElementNodes(Nodes)
98
99      IP = GaussPoints(Element) ! Gauss Points

```

```

100
101     L2normvar = 0.0d0
102     H1normvar = 0.0d0
103
104     DO t = 1, IP % n
105         stat = ElementInfo(Element, Nodes, &
106             IP % U(t), IP % V(t), IP % W(t), &
107             detJ, Basis, dBasisdx)
108
109         xP = SUM( Nodes % x(1:nd)*Basis(1:nd) ) ! ισοπαραμετρική απεικόνιση
110
111         yP = SUM( Nodes % y(1:nd)*Basis(1:nd) ) ! ισοπαραμετρική απεικόνιση
112
113         VaratIP = SUM(Var(1:nd)*Basis(1:nd))
114
115         gradvaratIP(1:3) = MATMUL(TRANSPPOSE(dBasisdx(1:nd,1:3)),Var(1:nd))
116
117         !αναλυτική λύση
118         !-----
119         solatIP = -xP*(xP-1)**2*yP**2*(yP-1)
120
121         ! παράγωγοι αναλυτική λύσης
122         !-----
123         solatIPdx(1) = -(xP-1)**2*yP**2*(yP-1)-2*(xP-1)*xP*yP**2*(yP-1)
124
125         solatIPdx(2) = -xP*(xP-1)**2*yP**2-xP*(xP-1)**2*2*yP*(yP-1)
126
127         solatIPdx(3) = 0
128
129         ! υπολογισμός L2 σε κάθε στοιχείο
130         !-----
131         L2normvar = L2normvar + (solatIP - VaratIP)**2 * IP % s(t) * detJ
132
133         ! υπολογισμός H1 σε κάθε στοιχείο
134         !-----
135         DO i = 1,3
136
137             H1normvar = H1normvar + &
138                 (solatIPdx(i)-gradVaratIP(i))**2 *IP % s(t) * detJ
139
140         END DO
141
142     END DO
143
144     END SUBROUTINE Compute
145
146 END SUBROUTINE HeatedCavityNormSolve

```

Γ.2 Υπορουτίνα που υπολογίζει τις νόρμες Hilbert και Sobolev των σφαλμάτων για το πρόβλημα ροής Stokes με αναλυτική λύση

```

1 SUBROUTINE StokesNormSolver(Model, Solver, dt, TransientSimulation)
2 !-----
3 !*****
4 !
5 ! υπολογίζει τη νόρμα L2 and H1 του σφάλματος του πεδίου πίεσης και
6 ! ταχύτητας
7 !
8 !*****
9   USE DefUtils
10  IMPLICIT NONE
11 !-----
12  TYPE(Solver_t) :: Solver
13  TYPE(Model_t)  :: Model
14  REAL(KIND=dp) :: dt
15  LOGICAL :: TransientSimulation
16 !-----
17 ! Τοπικές μεταβλητές
18 !-----
19  TYPE(ValueList_t), POINTER :: SolverParams
20  CHARACTER(LEN=MAX_NAME_LEN) :: SenderName, Var1name, Var2name, Var3name
21  TYPE(Variable_t), POINTER :: Var1, Var2, Var3
22  LOGICAL :: Found, AllocationsDone
23  INTEGER :: n, nd, nb, t, Active
24  TYPE(Element_t), POINTER :: Element
25  REAL(KIND=dp), ALLOCATABLE :: Var1loc(:), Var2loc(:), Var3loc(:)
26  REAL(KIND=dp) :: L2nrmvelo, H1nrmvelo, L2nrmveloloc
27  REAL(KIND=dp) :: H1nrmveloloc, L2nrmpres, L2nrmpresloc
28
29  SAVE Var1loc, Var2loc, Var3loc, AllocationsDone
30 !-----
31  SenderName = 'StokesNormSolver'
32
33      n = Solver % Mesh % MaxElementDOFs
34
35      ALLOCATE(Var1loc(n))
36      ALLOCATE(Var2loc(n))
37      ALLOCATE(Var3loc(n))
38
39      AllocationsDone = .TRUE.
40
41  ! Παραλαβή των τιμών της πίεσης και ταχύτητας
42  !-----
43  SolverParams => GetSolverParams()
44
45  Var1name = GetString(SolverParams, "Var1", Found)
46  Var2name = GetString(SolverParams, "Var2", Found)
47  Var3name = GetString(SolverParams, "Var3", Found)
48

```

```
49  IF(.NOT.Found) THEN
50    WRITE(Message, *) 'Var1 or/and Var2 or/and Var3 not found (name unspecified)'
51    CALL Fatal(SenderName, Message)
52  END IF
53
54  Var1 => VariableGet(Solver % Mesh % Variables, Var1name)
55  Var2 => VariableGet(Solver % Mesh % Variables, Var2name)
56  Var3 => VariableGet(Solver % Mesh % Variables, Var3name)
57
58
59  ! υπολόγισιζει τις νόρμες L2, H1
60  !-----
61
62  L2nrmvelo = 0.0d0
63  H1nrmvelo = 0.0d0
64  L2nrmpres = 0.0d0
65
66
67
68  Active = GetNOFActive()
69  DO t = 1, Active
70    Element => GetActiveElement(t)
71
72    n = GetElementNOFNodes()
73    nd = GetElementNOFDOfs()
74    nb = GetElementNOFBDOFs()
75
76    CALL GetScalarLocalSolution(Var1loc, Var1name)
77    CALL GetScalarLocalSolution(Var2loc, Var2name)
78    CALL GetScalarLocalSolution(Var3loc, Var3name)
79
80    CALL Compute(Element, n,nd+nb, Var1loc,Var2loc, Var3loc,&
81      L2nrmveloloc,H1nrmveloloc, L2nrmpresloc)
82
83    L2nrmvelo = L2nrmvelo + L2nrmveloloc
84    H1nrmvelo = H1nrmvelo + H1nrmveloloc
85    L2nrmpres = L2nrmpres + L2nrmpresloc
86
87  END DO
88
89  L2nrmvelo = SQRT(L2nrmvelo)
90  H1nrmvelo = SQRT(H1nrmvelo)
91  L2nrmpres = SQRT(L2nrmpres)
92
93
94  WRITE(Message, *) 'L2nrmvelo =', L2nrmvelo
95  CALL Info(SenderName, Message)
96
97  WRITE(Message, *) 'H1nrmvelo =', H1nrmvelo
98  CALL Info(SenderName, Message)
99
100 WRITE(Message, *) 'L2nrmpres =', L2nrmpres
```

```

101 CALL Info(SenderName, Message)
102
103
104 CONTAINS
105
106 SUBROUTINE Compute(Element, n, nd, Var1, Var2, Var3, &
107     L2nrmvelo, H1nrmvelo, L2nrmpres)
108
109     TYPE(Element_t), POINTER :: Element
110     INTEGER :: n, nd
111     REAL(KIND=dp) :: Var1(:), Var2(:), Var3(:)
112     REAL(KIND=dp) :: L2nrmvelo, H1nrmvelo, L2nrmpres
113
114
115     TYPE(GaussIntegrationPoints_t) :: IP
116     REAL(KIND=dp) :: detJ, Basis(nd), dBasisdx(nd, 3)
117     REAL(KIND=dp) :: Var1atIP, Var2atIP, Var3atIP, xP, yP
118     REAL(KIND=dp) :: soluatIP, solvatIP, solpatIP
119     REAL(KIND=dp) :: gradVar1atIP(nd), gradVar2atIP(nd), gradVar3atIP(nd)
120     REAL(KIND=dp) :: soluatIPdx(nd), solvatIPdx(nd), solpatIPdx(nd)
121     INTEGER :: t, i
122     LOGICAL :: stat
123     TYPE(Nodes_t) :: Nodes
124     SAVE Nodes
125
126     CALL GetElementNodes(Nodes)
127
128     IP = GaussPoints(Element,nd) ! Gauss Points
129
130     L2nrmvelo = 0.0d0
131     H1nrmvelo = 0.0d0
132     L2nrmpres = 0.0d0
133
134     DO t = 1, IP % n
135         stat = ElementInfo(Element, Nodes, &
136             IP % U(t), IP % V(t), IP % W(t), &
137             detJ, Basis, dBasisdx)
138
139
140         xP = SUM( Nodes % x(1:nd)*Basis(1:nd)) ! ισοπαραμετρική αποϊκόνιση
141         yP = SUM( Nodes % y(1:nd)*Basis(1:nd)) ! ισοπαραμετρική αποϊκόνιση
142
143         Var1atIP = SUM( Var1(1:nd) * Basis(1:nd) )
144         Var2atIP = SUM( Var2(1:nd) * Basis(1:nd) )
145         Var3atIP = SUM( Var3(1:nd) * Basis(1:nd) )
146
147         gradVar1atIP(1:3) = MATMUL( TRANSPOSE(dBasisdx(1:nd,1:3)), Var1(1:nd) )
148         gradVar2atIP(1:3) = MATMUL( TRANSPOSE(dBasisdx(1:nd,1:3)), Var2(1:nd) )
149
150         ! αναλυτική λύση
151         !-----
152         soluatIP = xP**2*(1-xP)**2*(2*yP-6*yP**2+4*yP**3)

```

```

153      solvatIP = -yP**2*(1-yP)**2*(2*xP-6*xP**2+4*xP**3)
154      solpatIP = xP*(1-xP)
155
156      ! παράγωγοι αναλυτικής λύσης συνιστώσας u1
157      !-----
158      soluatIPdx(1) = 2*xP*(1-xP)**2*(2*yP-6*yP**2+4*yP**3) &
159      -2*xP**2*(1-xP)*(2*yP-6*yP**2+4*yP**3)
160      soluatIPdx(2) = xP**2*(1-xP)**2*(2-12*yP+12*yP**2)
161      soluatIPdx(3) = 0
162
163      ! παράγωγοι αναλυτικής λύσης συνιστώσας u2
164      !-----
165      solvatIPdx(1) = -yP**2*(1-yP)**2*(2-12*xP+12*xP**2)
166      solvatIPdx(2) = -2*yP*(1-yP)**2*(2*xP-6*xP**2+4*xP**3) &
167      -2*yP**2*(1-yP)*(2*xP-6*xP**2+4*xP**3)
168      solvatIPdx(3) = 0
169
170      ! υπολογισμός L2 σε κάθε στοιχείο
171      !-----
172      L2nravelo = L2nravelo + ( (soluatIP -Var1atIP)**2 &
173      +(solvatIP -Var2atIP)**2 ) * IP % s(t) * detJ
174      L2nrmpres = L2nrmpres + (solpatIP - Var3atIP)**2 * IP % s(t) * detJ
175
176      ! υπολογισμός H1 σε κάθε στοιχείο
177      !-----
178      DO i = 1,3
179          H1nravelo = H1nravelo + ( (soluatIPdx(i)-gradVar1atIP(i))**2 &
180          + (solvatIPdx(i)-gradVar2atIP(i))**2 ) * IP % s(t) * detJ
181      END DO
182
183  END DO
184
185  END SUBROUTINE Compute
186
187 END SUBROUTINE StokesNormSolver

```

Παράρτημα Δ: User-defined Functions σε κώδικα Fortran

Δ.1: User-defined function για το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα

```
1 !-----  
2 ! πηγή θερμότητας ως συνάρτηση των συντεταγμένων x1, x2  
3 !-----  
4  
5 Function getSource(model, n, dummyArgument) RESULT(load)  
6  
7 USE DefUtils  
8  
9 IMPLICIT NONE  
10 TYPE(Model_t) :: model  
11 INTEGER :: n  
12 REAL(KIND=dp) :: dummyArgument, load  
13 INTEGER :: DIM  
14 REAL(KIND = dp) :: x,y  
15 Logical :: FirstVisited = .TRUE.  
16  
17 SAVE DIM, FirstVisited  
18  
19 IF (FirstVisited) THEN  
20  
21 DIM = CoordinateSystemDimension()  
22  
23 IF (DIM/=2) THEN  
24 CALL FATAL('getSource','Dimension of model has to be 2d')  
25 END IF  
26 FirstVisited = .FALSE.  
27 END IF  
28  
29 x = model % Nodes % x(n)  
30 y = model % Nodes % y(n)  
31  
32 load = y**2*(y-1)*2*(3*x-2)+x*(x-1)**2*2*(3*y-1)  
33  
34 END FUNCTION getSource
```

Δ.2: User-defined function για το πρόβλημα ροής Stokes με αναλυτική λύση

```
1 !-----  
2 ! σωματική δύναμη f1 ως συνάρτηση των συντεταγμένων x1, x2  
3 !-----  
4  
5 Function getLoad1(model, n, dummyArgument) RESULT(load1)  
6  
7 USE DefUtils  
8  
9 IMPLICIT NONE
```

```
10 TYPE(Model_t) :: model
11 INTEGER :: n
12 REAL(KIND=dp) :: dummyArgument, load1
13 INTEGER :: DIM
14 REAL(KIND = dp) :: x,y
15 Logical :: FirstVisited = .TRUE.
16
17 SAVE DIM, FirstVisited
18
19 IF (FirstVisited) THEN
20
21 DIM = CoordinateSystemDimension()
22
23 IF (DIM/=2) THEN
24 CALL FATAL('getLoad1','Dimension of model has to be 2d')
25 END IF
26 FirstVisited = .FALSE.
27 END IF
28 x = model % Nodes % x(n)
29 y = model % Nodes % y(n)
30
31 load1 = 1+(-4+(12-8*y)*y)*y+(-2+(24+(-72+48*y)*y)*y &
32 + (12+(-48+(72-48*y)*y)*y+(-24+48*y+(12-24*y)*x)*x)*x)*x
33
34     END FUNCTION getLoad1
35
36
37 !-----
38 ! σωματική δύναμη f2 ως συνάρτηση των συντεταγμένων x1, x2
39 !-----
40
41 Function getLoad2(model, n, dummyArgument) RESULT(load2)
42
43 USE DefUtils
44
45 IMPLICIT NONE
46 TYPE(Model_t) :: model
47 INTEGER :: n
48 REAL(KIND=dp) :: dummyArgument, load2
49 INTEGER :: DIM
50 REAL(KIND = dp) :: x,y
51 Logical :: FirstVisited = .TRUE.
52
53 SAVE DIM, FirstVisited
54
55 IF (FirstVisited) THEN
56
57 DIM = CoordinateSystemDimension()
58
59 IF (DIM/=2) THEN
60 CALL FATAL('getLoad2','Dimension of model has to be 2d')
61 END IF
```



```
26 FirstVisited = .FALSE.
27 END IF
28
29 x = model % Nodes % x(n)
30 y = model % Nodes % y(n)
31
32 load2 = -12*y**2*(1-y)**2+(4+(-24+(48+(-48+24*y)*y)*y)*y&
33 +(-12+(72-72*y)*y+(8+(-48+48*y)*y)*x)*x)*x
34
35 END FUNCTION getLoad2
```

Παράρτημα Ε: Αρχεία SIF

Ε.1 Δομή αρχείου SIF

Το αρχείο SIF ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση αποτελείται από διάφορες ενότητες που περιέχουν συγκεκριμένες εντολές τις οποίες δέχεται ElmerSolver ως είσοδο για πραγματοποιήσει την επίλυση. Οι ενότητες αυτές είναι:

- (i) **Header:** Στην ενότητα αυτή συνήθως δηλώνεται ο φάκελος στον οποίο είναι αποθηκευμένο το αρχείο του πλέγματος σε μορφή .mesh ώστε να αναγνωρίζεται από το ElmerSolver.
- (ii) **Simulation:** Στην ενότητα αυτή δηλώνονται γενικές πληροφορίες οι οποίες δεν αφορούν κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό πρότυπο. Ορίζεται το σύστημα συντεταγμένων (καρτεσιανό, κυλινδρικό, κλπ.), ο τύπος της προσημείωσης (μόνιμη κατάσταση, μεταβατική) και καθορίζονται τα αρχεία που λαμβάνονται ως έξοδος από την εκτέλεση του ElmerSolver.
- (iii) **Constants:** Στην ενότητα Constants ορίζονται συγκεκριμένες φυσικές σταθερές που υπεισέρχονται στο εκάστοτε πρόβλημα (π.χ. επιτάχυνση της βαρύτητας, σταθερά Stefan-Boltzmann, κ.λπ.).
- (iv) **Body j:** Το Elmer ως Body ορίζει το χωρίο Ω στο οποίο επιλύεται η μερικής διαφορική εξίσωση. Ανάλογα με τη εκάστοτε πρόβλημα, μπορεί να υπάρχουν πάνω από ένα Bodies στα οποία επιλύονται διαφορετικές μερικές διαφορικές εξισώσεις σε κάθε ένα από αυτά. Στην ενότητα Body δηλώνεται η μερικής διαφορική εξίσωση που επιλύεται, οι σωματικές δυνάμεις αν υπάρχουν, οι φυσικοχημικές ιδιότητες του υλικού/ρευστού και οι αρχικές συνθήκες αν πρόκειται για πρόβλημα μεταβατικής κατάστασης ή μη γραμμικό πρόβλημα το οποίο επιλύεται επαναληπτικά.
- (v) **Material j:** Το Elmer ως Material ορίζει τις θερμοφυσικές ιδιότητες του ρευστού/υλικού. Σε περιπτώσεις που υπάρχουν πολλαπλά χωρία, μπορεί να υπάρχουν και πολλαπλές ενότητες Material.
- (vi) **Equation j:** Στην ενότητα Equation ορίζεται η μερική διαφορική εξίσωση για την οποία αναζητείται λύση δηλώνοντας τον εκάστοτε Solver που χρησιμοποιείται για την επίλυσή της. Σε περίπτωση συζευγμένων προβλημάτων μπορεί να οριστούν πολλαπλοί Solvers.
- (vii) **Solver j:** Η ενότητα Solver αποτελεί την «καρδιά» του αρχείου SIF. Σε αυτή δηλώνονται οι υπορουτίνες που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση της εκάστοτε μερικής διαφορικής εξίσωσης και διάφορες παραμέτρους επίλυσης.
- (viii) **Boundary Conditions j:** Στην ενότητα Boundary Conditions δηλώνονται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.
- (ix) **Initial Conditions j:** Στην ενότητα Initial Conditions δηλώνονται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Ε.2 Αρχείο SIF για το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα

```
1 Header
2 CHECK KEYWORDS Warn
3 Mesh DB "." "triXXxXX"
4 ! όνομα φακέλου που περιέχει το αρχείο του πλέγματος σε μορφή *.mesh
5 Include Path ""
6 Results Directory ""
```

```
7 End
8
9 Simulation
10 Max Output Level = 5
11 Coordinate System = Cartesian
12 Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
13 Simulation Type = "Steady state"
14 Steady State Max Iterations = 1
15 Output Intervals(1) = 1
16 Post file = case.vtu
17 ! όνομα αρχείου μορφής *.vtu στο οποίο τυπώνονται τα αποτελέσματα
18 End
19
20 Body 1
21 Target Bodies(1) = 1
22 Name = "domain"
23 Equation = 1 !
24 Material = 1
25 Body force = 1
26 End
27
28 Solver 1
29 Equation = "Heat Equation"
30
31 Procedure = "HeatSolve" "HeatSolver"
32 Variable = "Temperature"
33 Exec Solver = "Always"
34 ! Καθορίζει
35 Optimize Bandwidth = True
36 Linear System Solver = Iterative
37 Linear System Iterative Method = CG ! η μέθοδος των συζυγών κλίσεων
38 Linear System Max Iterations = 1000
39 Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-12
40 Linear System Preconditioning = Diagonal ! προσαθεροποίηση με Jacobi
41 Linear System Abort Not Converged = False
42 Linear System Residual Output = 10
43 Linear System Precondition Recompute = 1
44 End
45
46 Solver 2
47 ! υπολογισμός της νόρμας Sobolev και Hilbert του σφάλματος
48 Equation = "NormSolver"
49 Procedure = "HeatedCavityNormSolve" "HeatedCavityNormSolver"
50 Variable = -dofs 1 Var
51 Var =string "Temperature"
52 End
53
54 Solver 3
55 Exec Solver = After Saving
56 Procedure = "SaveData" "SaveScalars"
57 Filename = scalars.dat
58 File Append = True
```

```
59 Variable 1 = Temperature
60 Operator 1 = max
61 Operator 2 = dofs
62 Operator 3 = CPU Time
63
64 End
65
66 Equation 1
67 Name = "Heat Equation"
68 Active Solvers(2) = 1 2
69 End
70
71 Material 1
72 Name = "Ideal solid"
73 Density = 1
74 Heat Capacity = 1
75 Heat Conductivity = 1
76 End
77
78 Body Force 1
79 Name = "Heat Source"
80 Heat Source = Variable Coordinate
81 Real Procedure "getSource" "getSource" ! user defined function
82 End
83
84 Boundary Condition 1
85 ! συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet
86 Target Boundaries(1) = 1
87 Name = "Wall"
88 Temperature = 0
89 End
90
91 Boundary Condition 2
92 ! συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet
93 Target Boundaries(1) = 2
94 Name = "Wall"
95 Temperature = 0
96 End
97
98 Boundary Condition 3
99 ! συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet
100 Target Boundaries(1) = 3
101
102 Name = "Wall"
103 Temperature = 0
104 End
105
106 Boundary Condition 4
107 ! συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet
108 Target Boundaries(1) = 4
109 Name = "Wall"
110 Temperature = 0
```

111 End

E.3 Αρχείο SIF για το πρόβλημα ροή Stokes με αναλυτική λύση (για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P₂/P₁ και τύπου P₁-bubble/P₂)

```
1 Header
2 CHECK KEYWORDS Warn
3 Mesh DB "." "triXXxXX"
4 Include Path ""
5 Results Directory ""
6 End
7
8 Simulation
9 Max Output Level = 5
10 Coordinate System = Cartesian
11 Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
12 Simulation Type = Steady state
13 Steady State Max Iterations = 1
14 Output Intervals(1) = 1
15 Post File = Stokes.vtu
16
17 End
18
19 Constants
20 Gravity(4) = 0 -1 0 9.82
21 Stefan Boltzmann = 5.670374419e-08
22 Permittivity of Vacuum = 8.85418781e-12
23 Permeability of Vacuum = 1.25663706e-6
24 Boltzmann Constant = 1.380649e-23
25 Unit Charge = 1.6021766e-19
26 End
27
28 Body 1
29 Target Bodies(1) = 1
30 Name = "Body 1"
31 Equation = 1
32 Material = 1
33 Body Force = 1
34 End
35
36 Solver 1
37 ! επίλυση με μεικτά πεπερασμένα στοιχεία P2/P1 ή P1-bubble/P1
38 Equation = Stokes
39 Variable = Flow Solution[Velocity:2 Pressure:1]
40 Procedure = "Stokes" "Stokes"
41 Exec Solver = Always
42 Element = "p:2"
43 ! για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P2/P1.
44 Element = "p:1 b:1"
45 ! για μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου(P1-bubble)/P1.
46 Optimize Bandwidth = True
```

```
47 Linear System Solver = Iterative
48 Linear System Iterative Method = BiCGStab
49 ! Biconjugate gradient stabilized.
50 Linear System Max Iterations = 1000
51 Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-10
52 BiCGStabl polynomial degree = 2
53 Linear System Preconditioning = ILU1
54 ! η μέθοδος μερικής αποικοδόμησης ILU(1)
55 Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
56 Linear System Abort Not Converged = False
57 Linear System Residual Output = 10
58 Linear System Precondition Recompute = 1
59 End
60
61 Solver 2
62 Equation = NormSolve
63 ! υπολογισμός της νόρμας L2 και H1 των σφαλμάτων πίεσης και ταχύτητας
64 Procedure = "StokesNormSolve" "StokesNormSolver"
65 Variable 1 = Var1
66 Variable 2 = Var2
67 Variable 3 = Var3
68 Var1 = string "Velocity 1"
69 Var2 = string "Velocity 2"
70 Var3 = string "Pressure"
71 End
72
73 Solver 3
74 Procedure ="SaveData" "SaveScalars"
75 Filame = String stokes.dat
76 Variable 1 = Velocity
77 Operator 1 = Dofs
78 Variable 2 = Pressure
79 Operator 2 = Dofs
80 End
81
82 Equation 1
83 Name = "Equation 1"
84 NS Convect = False ! απαλοιφή συναγωγικού όρου
85 Active Solvers(2) = 1 2
86 End
87
88 Material 1
89 Name = "Material 1"
90 Density = 1
91 Viscosity = 1
92 End
93
94 Body Force 1
95 Name = "BodyForce 1"
96 Source x = Variable Coordinate
97 Real Procedure "getLoad1" "getLoad1" ! user defined function
98 Source y = Variable Coordinate
```

```
99 Real Procedure "getLoad2" "getLoad2" ! user defined function
100 End
101
102 Boundary Condition 1
103 ! συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet
104 Target Boundaries(1) = 1
105 Name = "Walls"
106 Velocity 2 = 0
107 Velocity 1 = 0
108 End
109
110 Boundary Condition 2
111 Name = "SinglePoint"
112 Target Coordinates(1,2) = 0 0
113 Pressure = 0
114 End
```

Ε.4 Αρχείο SIF για το πρόβλημα ροή Stokes με αναλυτική λύση (για πεπερασμένα στοιχεία P₁/P₁ με και χωρίς σταθεροποίηση)

```
1 Header
2 CHECK KEYWORDS Warn
3 Mesh DB "." "triXXXX"
4 Include Path ""
5 Results Directory ""
6 End
7
8 Simulation
9 Max Output Level = 5
10 Coordinate System = Cartesian
11 Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
12 Simulation Type = Steady state
13 Steady State Max Iterations = 1
14 Output Intervals(1) = 1
15 Post File = Stokes.vtu
16 End
17
18 Constants
19 Gravity(4) = 0 -1 0 9.82
20 Stefan Boltzmann = 5.670374419e-08
21 Permittivity of Vacuum = 8.85418781e-12
22 Permeability of Vacuum = 1.25663706e-6
23 Boltzmann Constant = 1.380649e-23
24 Unit Charge = 1.6021766e-19
25 End
26
27 Body 1
28 Target Bodies(1) = 1
29 Name = "Body 1"
30 Equation = 1
31 Material = 1
```

```
32 Body Force = 1
33 End
34
35 Solver 1
36 ! επίλυση με μεικτά πεπερασμένα στοιχεία τύπου P1/P1
37 Equation = Stokes
38 Variable = Flow Solution[Velocity:2 Pressure:1]
39 Procedure = "FlowSolve "Flowsolver"
40 Exec Solver = Always
41 Stabilize = True ! σταθεροποίηση με την μέθοδο GLS.
42 ! False αν δεν εφαρμοστεί σταθεροποίηση
43 Optimize Bandwidth = True
44 Linear System Solver = Iterative
45 Linear System Iterative Method = BiCGStab
46 Linear System Max Iterations = 1000
47 Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-10
48 BiCGStabl polynomial degree = 2
49 Linear System Preconditioning = ILU
50 Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
51 Linear System Abort Not Converged = False
52 Linear System Residual Output = 10
53 Linear System Precondition Recompute = 1
54 End
55
56 Solver 2
57 Equation = NormSolve
58 Procedure = "StokesNormSolve" "StokesNormSolver"
59 Variable 1 = Var1
60 Variable 2 = Var2
61 Variable 3 = Var3
62 Var1 = string "Velocity 1"
63 Var2 = string "Velocity 2"
64 Var3 = string "Pressure"
65 End
66
67 Solver 3
68 Procedure ="SaveData" "SaveScalars"
69 Filename = String stokes.dat
70 Variable 1 = Velocity
71 Operator 1 = Dofs
72 Variable 2 = Pressure
73 Operator 2 = Dofs
74 End
75
76 Equation 1
77 Name = "Equation 1"
78 NS Convect = False
79 Active Solvers(2) =1 2
80 End
81
82 Material 1
83 Name = "Material 1"
```



```
84 Density = 1
85 Viscosity = 1
86 End
87
88 Body Force 1
89 Name = "BodyForce 1"
90 Flow Bodyforce 1 = variable Coordinate
91 Real Procedure "getLoad1" "getLoad1"
92 Flow Bodyforce 2 = Variable Coordinate
93 Real Procedure "getLoad2" "getLoad2"
94 End
95
96 Boundary Condition 1
97 Target Boundaries(1) = 1
98 Name = "Walls"
99 Velocity 2 = 0
100 Velocity 1 = 0
101 End
102
103 Boundary Condition 2
104 Name = "SinglePoint"
105 Target Coordinates(1,2) = 0 0
106 Pressure = 0
107 End
```

E.5: Αρχείο SIF για το πρόβλημα της ροής σε κοιλότητα με κινούμενο άνω τοίχωμα (lid-driven cavity)

```
1 Header
2 CHECK KEYWORDS Warn
3 Mesh DB "." "lid_driven_cavity"
4 Include Path ""
5 Results Directory ""
6 End
7
8 Simulation
9 Max Output Level = 5
10 Coordinate System = Cartesian
11 Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
12 Simulation Type = Steady State
13 Steady State Max Iterations = 1
14 Output Intervals(1) = 1
15 Post File = ReXXXX.vtu
16 End
17
18 Constants
19 Gravity(4) = 0 -1 0 9.82
20 Stefan Boltzmann = 5.670374419e-08
21 Permittivity of Vacuum = 8.85418781e-12
22 Permeability of Vacuum = 1.25663706e-6
23 Boltzmann Constant = 1.380649e-23
```

```
24 Unit Charge = 1.6021766e-19
25 End
26
27 Body 1
28 Target Bodies(1) = 1
29 Name = "Body 1"
30 Equation = 1
31 Material = 1
32 End
33
34 Solver 1
35 Equation = Navier-Stokes
36 Variable = Flow Solution[Velocity:2 Pressure:1]
37 Procedure = "FlowSolve" "FlowSolver"
38 Exec Solver = Always
39 Stabilize = True
40 ! σταθεροποίηση με την μέθοδο Galerkin Least-Square
41 Optimize Bandwidth = True
42 Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-5
43 ! όριο σύγκλισης επαναλήψεων του μη γραμμικού συστήματος
44 Nonlinear System Max Iterations = 8
45 ! μέγιστες επαναλήψεις για την επίλυση των μη γραμμικών εξ. N-S
46 Nonlinear System Newton After Iterations = 3
47 ! μέγιστες επαναλήψεις Picard (υβριδικού σχήματος)
48 Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3
49 ! όριο σύγκλισης επαναλήψεων Picard (υβριδικού σχήματος)
50 Nonlinear System Relaxation Factor = 1
51 ! παράμετρος υποχαλάρωσης
52 Linear System Solver = Iterative
53 Linear System Iterative Method = BiCGstabl
54 Linear System Max Iterations = 500
55 Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-10
56 BiCGstabl polynomial degree = 2
57 Linear System Preconditioning = ILU1
58 Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
59 Linear System Abort Not Converged = False
60 Linear System Residual Output = 10
61 Linear System Precondition Recompute = 1
62 End
63
64 Solver 2
65 Exec Solver = After Simulation
66 Equation = Saveline
67 Procedure = "SaveData" "SaveLine"
68 Filenane = string "ReXXXX.dat"
69 File append = True
70 Variable 1 = Velocity 1
71 Polyline Coordinates(2,2) = 0.5 0 0.5 1
72 Polyline Divisions(1,2) = 20
73 End
74
75 Equation 1
```

```
76 Name = "Equation 1"
77 Active Solvers(2) = 1 2
78 End
79
80 Material 1
81 Name = "fluid"
82 Density = 1
83 Viscosity = 0.01 ! Re=100
84 End
85
86 Boundary Condition 1
87 Target Boundaries(1) = 1
88 Name = "wall"
89 Noslip wall BC = True ! συνθήκη μη ολίσθησης
90 End
91
92 Boundary Condition 2
93 Target Boundaries(1) = 2
94 Name = "lid-driven"
95 Velocity 1 = 1
96 Velocity 2 = 0
97 End
```

E.6: Αρχείο SIF για το πρόβλημα της φυσικής συναγωγής

```
1 Header
2 CHECK KEYWORDS Warn
3 Mesh DB "." "natural_convection"
4 Include Path ""
5 Results Directory ""
6 End
7
8 Simulation
9 Max Output Level = 5
10 Coordinate System = Cartesian
11 Coordinate Mapping(3) = 1 2 3
12 Simulation Type = Transient
13 Steady State Max Iterations = 40 ! επαναλήψεις Gauss-Seidel
14 Output Intervals(1) = 1
15 Timestep intervals(1) = 100
16 Timestep Sizes(1) = 0.1
17 Timestepping Method = BDF ! έμμεση μέθοδος Euler
18 BDF Order = 1
19 Coordinate Scaling = 0.1
20 Post File = natural_convection.vtu
21 End
22
23 Constants
24 Gravity(4) = 0 -1 0 9.82
25 Stefan Boltzmann = 5.670374419e-08
26 Permittivity of Vacuum = 8.85418781e-12
27 Permeability of Vacuum = 1.25663706e-6
```

```
28 Boltzmann Constant = 1.380649e-23
29 Unit Charge = 1.6021766e-19
30 End
31
32 Body 1
33 Target Bodies(1) = 1
34 Name = "Body 1"
35 Equation = 1
36 Body Force = 1
37 Initial condition = 1
38 Material = 1
39 End
40
41 Solver 1
42 Equation = Heat Equation
43 Variable = Temperature
44 Procedure = "HeatSolve" "HeatSolver"
45 Exec Solver = Always
46 Stabilize = True ! σταθεροποίηση με τη μέθοδο GLS
47 Optimize Bandwidth = True
48 Steady State Convergence Tolerance = 1.0e-5 ! ε_T
49 Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-7
50 Nonlinear System Max Iterations = 1
51 Nonlinear System Newton After Iterations = 3
52 Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3
53 Nonlinear System Relaxation Factor = 1
54 Linear System Solver = Iterative
55 Linear System Iterative Method = BiCGstabl
56 Linear System Max Iterations = 500
57 Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-10
58 BiCGstabl polynomial degree = 2
59 Linear System Preconditioning = ILU1
60 Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
61 Linear System Abort Not Converged = False
62 Linear System Residual Output = 10
63 Linear System Precondition Recompute = 1
64 End
65
66 Solver 2
67 Equation = Navier-Stokes
68 Variable = Flow Solution[Velocity:2 Pressure:1]
69 Procedure = "FlowSolve" "FlowSolver"
70 Exec Solver = Always
71 Stabilize = True ! σταθεροποίηση με τη μέθοδο GLS
72 Optimize Bandwidth = True
73 Steady State Convergence Tolerance = 1.0e-5 ! ε_u
74 Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-7
75 Nonlinear System Max Iterations = 1
76 Nonlinear System Newton After Iterations = 3
77 Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3
78 Nonlinear System Relaxation Factor = 1
79 Linear System Solver = Iterative
```

```
80 Linear System Iterative Method = BicGstabl
81 Linear System Max Iterations = 500
82 Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-10
83 BiCGstabl polynomial degree = 2
84 Linear System Preconditioning = ILU1
85 Linear System ILUT Tolerance = 1.0e-3
86 Linear System Abort Not Converged = False
87 Linear System Residual Output = 10
88 Linear System Precondition Recompute = 1
89 End
90
91 Equation 1
92 Name = "Equation 1"
93 Convection = Computed
94 Active Solvers(2) = 1 2
95 End
96
97 Material 1
98 Name = "Air (room temperature)"
99 Viscosity = 1.983e-5
100 Density = 1.205
101 Heat Capacity = 1005.0
102 Heat expansion Coefficient = 3.43e-3
103 Sound speed = 343.0
104 Relative Permittivity = 1.00059
105 Heat Conductivity = 0.0257
106 Reference Temperature = 293
107 End
108
109 Body Force 1
110 Name = "BodyForce 1"
111 Boussinesq = True ! υπόθεση Boussinesq
112 End
113
114 Initial Condition 1
115 Name = "InitialCondition"
116 Velocity 2 = 1e-9
117 Temperature = 293
118 Velocity 1 = 0
119 End
120
121 Boundary Condition 1
122 Target Boundaries(1) = 1
123 Name = "Cold Wall"
124 Velocity 2 = 0
125 Velocity 1 = 0
126 Temperature = 293
127 End
128
129 Boundary Condition 2
130 Target Boundaries(1) = 2
131 Name = "Heated Plate"
```

```
132 Velocity 1 = 0  
133 Velocity 2 = 0  
134 Temperature = 353  
135 End
```