



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Σθεναρός Προσαρμοστικός Μη Γραμμικός PI
Έλεγχος για Συστήματα Πολλαπλών Εισόδων -
Πολλαπλών Εξόδων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΑΡΓΥΡΙΟΥ ΜΕΛΛΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ε. Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2023



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Σθεναρός Προσαρμοστικός Μη Γραμμικός ΡΙ
Έλεγχος για Συστήματα Πολλαπλών Εισόδων -
Πολλαπλών Εξόδων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΑΡΓΥΡΙΟΥ ΜΕΛΛΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ε. Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 14η Νοεμβρίου 2023.
(Υπογραφή) (Υπογραφή) (Υπογραφή)

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης Κων/νος Τζαφέστας Αντώνιος Αλεξανδρίδης
Λέκτορας Ε.Μ.Π. Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Καθηγητής Παν. Πατρών

Αθήνα, Νοέμβριος 2023



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Copyright ©–All rights reserved Αργύριος Μέλλιος, 2023.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση ότι αναφέρεται η πηγή προέλευσης και ότι διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

(Υπογραφή)

.....
ΑΡΓΥΡΙΟΣ ΜΕΛΛΙΟΣ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© 2023 – All rights reserved

Περίληψη

Σκοπό της διπλωματικής αυτής εργασίας αποτελεί η ανάπτυξη και η υλοποίηση ενός προσαρμοστικού νόμου ελέγχου, ο οποίος στηρίζεται στη χρήση της μεθόδου του μη γραμμικού αναλογικού - ολοκληρωτικού ελέγχου (nonlinear PI control). Η σχεδίαση του προτεινόμενου ελεγκτή πραγματοποιείται με στόχο την επίλυση του προβλήματος ρύθμισης σε σημείο αναφοράς για μη γραμμικά δυναμικά συστήματα πολλαπλών εισόδων - πολλαπλών εξόδων, γραμμικά ως προς την είσοδο (input affine), των οποίων η δυναμική θεωρείται άγνωστη. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου και μη φραγμένες, μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες. Το ζητούμενο πρόβλημα επιλύεται, συνδυάζοντας επιτυχώς την τεχνική του προσαρμοστικού προσεγγιστικού ελέγχου (adaptive approximation control) με τη μέθοδο του μη γραμμικού αναλογικού - ολοκληρωτικού ελέγχου (nonlinear PI control). Αυτό το σχήμα ελέγχου αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση σε σχέση με τις τεχνικές που βασίζονται στα κέρδη Nussbaum. Για την αναλύση του συνδυαστικού προβλήματος και τη γενίκευση της PI μεθοδολογίας για συστήματα πολλαπλών εισόδων - πολλαπλών εξόδων, νέα θεωρητικά αποτελέσματα έχουν συναχθεί στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Τονίζεται ότι ο συγκεκριμένος νόμος ελέγχου κληρονομεί τις ιδιότητες σθεναρότητας των γραμμικών ελεγκτών. Τέλος, παρουσιάζονται προσομοιώσεις για το πρόβλημα ελέγχου σε σημείο αναφοράς αφενός για ένα ρομποτικό βραχίονα 2 βαθμών ελευθερίας κι αφετέρου για το PERA των 7 βαθμών ελευθερίας. Οι προσομοιώσεις αυτές επιβεβαιώνουν την εγκυρότητα των θεωρητικών αποτελεσμάτων.

Λέξεις Κλειδιά

Μη γραμμικός αναλογικός - ολοκληρωτικός έλεγχος, Προσαρμοστικός έλεγχος, Σύστημα πολλαπλών εισόδων - πολλαπλών εξόδων & γραμμικό ως προς την είσοδο, Κέρδη Nussbaum, Άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου, Μη φραγμένες μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to develop and implement an adaptive control law, which rests on the utilization of the nonlinear PI control method. The proposed controller solves the regulation problem to a reference point for nonlinear multiple - input multiple - output input - affine systems with unknown dynamics. More specifically, we assume unknown control directions and unbounded unmatched nonlinearities. The given problem is resolved by successfully combining the technique of the adaptive approximation control with the method of the nonlinear PI control method. This control scheme constitutes an alternative approach to the techniques which are based on the Nussbaum gains. For the analysis of the combined problem and the generalization of the nonlinear PI methodology for multiple - input multiple - output systems, new theoretical results have been inferred. It is noted that the proposed controller inherits the robustness properties of linear control laws. Last but not least, simulations are presented regarding the regulation problem to a reference point for both a 2-DOF robotic manipulator and the 7-DOF PERA. These simulations verify the validity of the theoretical analysis.

Keywords

Nonlinear PI control, Universal adaptive control, Multiple - input multiple - output & input affine system, Nussbaum gains, Unknown control directions, Unbounded unmatched nonlinearities.

Ευχαριστίες

Για όλο αυτό το όμορφο, πλην απαιτητικό, ταξίδι, θέλω να ευχαριστήσω, αρχικά, τον κύριο Χ. Ψυλλάκη, ο οποίος έδειξε πίστη σε εμένα και μού το έδειξε ακόμα και στις περιόδους εκείνες που ούτε εγώ ο ίδιος δεν πίστευα στον εαυτό μου κι αναζητούσα διαρκώς την εσωτερική φλόγα που ένιωθα να έχει σβήσει. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω εγκάρδια για όλα αυτά τα χρόνια στήριξης, πίστης σε εμένα και απεριόριστης αγάπης την οικογένειά μου: τη μαμά και τον μπαμπά, Εύα και Φίλιππα, τον αδερφό και την αδερφή μου, Νικολάκη και Αγγελικούλα, τις γιαγιάδες μου, Φιλαρέτη και Αγγελική, και τους παππούδες μου, Αργύρη και Νίκο, τη θεία και το θείο μου, Εμμανουέλα και Γιάννη, τις ξαδέρφες μου, Αγγελική και Φαίη, καθώς και όλους τους υπόλοιπους συγγενείς μου που φρόντιζαν καθημερινά να μού δείχνουν πόσο πιστεύουν σε εμένα και πόσο υπερήφανοι νιώθουν για την πορεία που διαγράφω στη ζωή μου. Έπειτα, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην κοπέλα μου, την Εύα, αλλά και σε πολλούς φίλους και φίλες μου που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη ζωή μου μέχρι τώρα και συνέβαλαν στο να γίνω ο άνθρωπος που είμαι σήμερα: κο. Χρήστο, Τόλη, Δημήτρη, Βαγγέλη, Άννα, Θοδωρή, Πάρη, Σπύρο, Τάσο, Νίκο, Γιάννη, Χρόνη, Ελένη, Ιωάννα, Σωκράτη, Παναγιώτη, Παναγιώτη, Νικολέττα και Τόνια.

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	5
Περιεχόμενα	9
Κατάλογος Σχημάτων	11
Κατάλογος Πινάκων	13
1 Εισαγωγή	15
1.1 Συστήματα Ελέγχου	15
1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής Εργασίας	18
1.3 Οργάνωση Τόμου	18
2 Μαθηματικό Υπόβαθρο - Συγγενικές Εργασίες	21
2.1 Ορισμοί	21
2.1.1 Χώροι Συναρτήσεων	21
2.1.2 Κλάση Συναρτήσεων \mathcal{A}	21
2.1.3 Νεκρή Ζώνη (Dead Zone)	22
2.1.4 Χαμιλτονιανή Συνάρτηση	23
2.1.5 Ανισότητα Hölder	24
2.1.6 Ανισότητα Young	24

2.1.7	Νόρμα Frobenius	24
2.1.8	Λήμμα Barbalat	24
2.1.9	Τοπική Lipschitz Συνέχεια	25
2.1.10	Ομοιόμορφη Συνέχεια	25
2.1.11	Θεώρημα Rademacher	25
2.1.12	Θεώρημα Πεπερασμένου Χρόνου Απόδρασης	25
2.2	Θεωρία Lyapunov	25
2.3	Nussbaum Gains	27
2.3.1	Περιγραφή Προβλήματος	27
2.3.2	Μέθοδος Nussbaum	28
2.4	Μη Γραμμικός PI Έλεγχος	31
2.5	Σύγκριση Μη Γραμμικού PI Ελέγχου με Κλασικό Προσαρμοστικό Έλεγχο και Μέθοδο Nussbaum	34
3	Διατύπωση Προβλήματος - Θεωρητικά Αποτελέσματα	39
3.1	Πρόβλημα Ελέγχου MIMO Συστήματος με Άγνωστες Κατευθύνσεις Ελέγχου	39
3.1.1	Βασικές Υποθέσεις	39
3.2	Προτεινόμενος Νόμος Ελέγχου	40
3.2.1	Ικανότητα Προσέγγισης του Πίνακα \bar{K}	41
3.3	Θεώρημα Έπαρξης Φραγμένων Λύσεων και Σύγκλισης	46
4	Προσομοιώσεις	65
4.1	Έλεγχος Ρύθμισης σε Σημείο Αναφοράς για Ρομποτικό Βραχίονα 2 Βαθμών Ελευθερίας	65
4.1.1	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	68
4.1.1.1	Προσομοίωση 1	68
4.1.1.2	Προσομοίωση 2	71
4.1.1.3	Προσομοίωση 3	72
4.1.1.4	Προσομοίωση 4	73
4.1.1.5	Προσομοίωση 5	74
4.1.1.6	Προσομοίωση 6	75

4.1.2	Σχολιασμός Αποτελεσμάτων Προσομοιώσεων	76
4.2	Έλεγχος Ρύθμισης σε Σημείο Αναφοράς για Ρομποτικό Βραχίονα 7 Βαθμών Ελευθερίας	77
4.2.1	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	81
4.2.1.1	Προσομοίωση 1	82
4.2.1.2	Προσομοίωση 2	85
4.2.1.3	Προσομοίωση 3	86
4.2.1.4	Προσομοίωση 4	87
4.2.1.5	Προσομοίωση 5	88
4.2.1.6	Προσομοίωση 6	89
4.2.2	Σχολιασμός Αποτελεσμάτων Προσομοιώσεων	90
5	Επίλογος	93
5.1	Σύνοψη και Συμπεράσματα	93
5.2	Μελλοντικές Επεκτάσεις	94
	Βιβλιογραφία	99

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Κλασσική μορφή συστήματος ανάδρασης	16
2.1	Συνάρτηση Nussbaum $N(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και το $\int_0^\zeta N(s)ds$	28
2.2	Επιλογέας τύπου ρουλέτα ($\omega =$ δείκτης απόδοσης)	30
2.3	Κλασσική μορφή PI ελεγκτή	31
2.4	Το συνολικό σύστημα κλειστού βρόχου	35
2.5	Το συνολικό σύστημα κλειστού βρόχου	36
4.1	Τυπικός ρομποτικός βραχίονας με 2 DOFs	66
4.2	Ρομποτικός βραχίονας PERA με 7 DOFs	78

Κατάλογος Πινάκων

4.1	Παράμετροι ρομποτικού βραχίονα με 2 DOFs	68
4.2	Παράμετροι ρομποτικού βραχίονα PERA με 7 DOFs	81

Κεφάλαιο 1

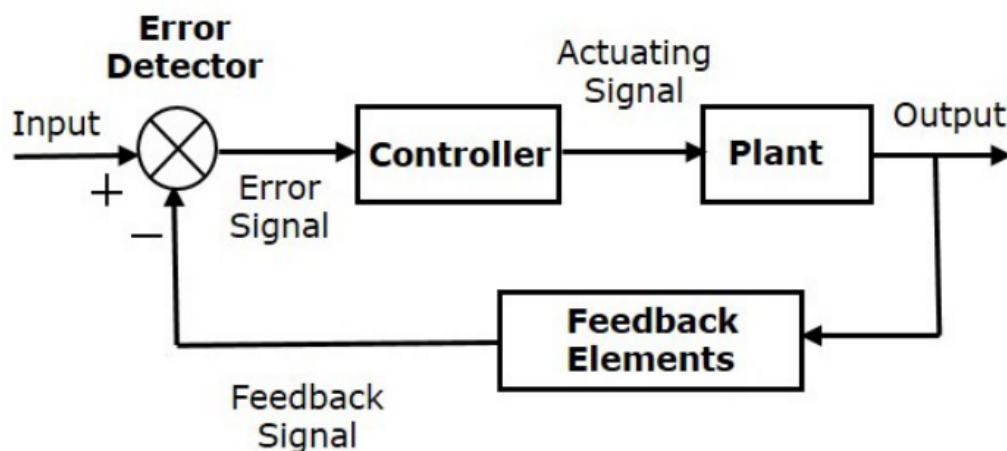
Εισαγωγή

1.1 Συστήματα Ελέγχου

Η θεωρία του αυτομάτου ελέγχου αποτελεί ένα κομμάτι των μαθηματικών που ασχολείται αφενός με την ανάλυση δυναμικών συστημάτων και, αφετέρου, με τη σχεδίαση ελεγκτών, με θεμελιώδη στόχο την επίτευξη επιθυμητών ιδιοτήτων και συμπεριφοράς. Ειδικότερα, ο τομέας αυτός περιλαμβάνει ολόκληρη τη διαδικασία από τη μοντελοποίηση ενός φυσικού συστήματος, την περιγραφή και την ανάλυσή του μέσω της επιστράτευσης διαφόρων μεθόδων, μέχρι και τον έλεγχό του και την αλλαγή των χαρακτηριστικών και των αποκρίσεών του. Κάποιες από τις κεντρικές έννοιες στον αυτόματο έλεγχο είναι η μοντελοποίηση, η ανάδραση, η επίδοση, η ευστάθεια και η ευαισθησία στο θόρυβο ή / και στις διαταραχές. Φυσικά, οι τεχνικές και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται ποικίλουν, ανάλογα με τον τύπο του μοντέλου του συστήματος.

Το πιο θεμελιώδες τμήμα της θεωρίας του αυτομάτου ελέγχου, καθώς και το πρώτο που μελετήθηκε χρονολογικά – ιστορικά, είναι αυτό των γραμμικών συστημάτων, στα οποία βρίσκει εφαρμογή η αρχή της επαλληλίας ή, αλλιώς, αρχή της υπέρθεσης. Ο τρόπος με τον οποίον περιγράφονται τα συστήματα που υπάγονται σε αυτήν την κατηγορία είναι η χρήση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για συνεχή χρόνο ή γραμμικών εξισώσεων διαφορών για διακριτό, ανάλογα την περίπτωση. Μάλιστα, όταν οι παράμετροι ενός γραμμικού συστήματος, και, ισόδυναμα, οι συντελεστές των προαναφερθεισών εξισώσεων, δε μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου, τότε το σύστημα αυτό ονομάζεται χρονικά αμετάβλητο. Δημιουργείται, έτσι, το πολύ σημαντικό υποσύνολο των γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων συστημάτων, για τη μελέτη των οποίων έχουν αναπτυχθεί ορισμένες ξεχωριστές τεχνικές. Η βασική μεθοδολογία των τεχνικών αυτών είναι η μεταφορά και ανάλυση του συστήματος στο χώρο – πεδίο των συχνοτήτων, όπου γίνεται χρήση μαθηματικών μεθόδων - εργαλείων, όπως οι μετασχηματισμοί Laplace, Fourier και Z, τα διαγράμματα Bode, ο γεωμετρικός τόπος ριζών (Γ.Τ.Ρ.) και το κριτήριο ευστάθειας του Nyquist. Επιπλέον, όροι όπως το εύρος ζώνης, η απόκριση συχνότητας, οι πόλοι και τα μηδενικά αποτελούν ακρογωνιαίους λίθους, οι οποίοι, στο προαναφερθέν

πλαίσιο, δίνουν τη δυνατότητα επίλυσης μεγάλου πλήθους προβλημάτων και σχεδίασης κατάλληλου ελεγκτή για καθένα από αυτά.



Σχήμα 1.1: Κλασσική μορφή συστήματος ανάδρασης

Ωστόσο, παρά την ευκολία της ανάλυσης, αλλά και τις δυνατότητες που προσφέρει η γραμμικότητα, στην πραγματικότητα, η συντριπτική πλειοψηφία των συστημάτων είναι μη γραμμικά. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική συμπεριφορά τους περιγράφεται από μη γραμμικά μοντέλα, δηλαδή από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών. Κατά αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται ένα άλλο σύνολο συστημάτων, το οποίο αποτελεί μια πολύ ευρύτερη κατηγορία, ενώ, συγχρόνως, αναδεικνύεται η ανάγκη για μελέτη και ανάλυση της κατηγορίας αυτής. Ειδικότερα, αυτό το σύνολο συστημάτων αποτελεί το αντικείμενο – πεδίο μελέτης του μη γραμμικού αυτομάτου ελέγχου. Παρόλα αυτά, οι μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη αυτού του συνόλου συστημάτων, αλλά και για τη δημιουργία κατάλληλων ελεγκτών, είναι σημαντικά λιγότερο καθολικά εφαρμόσιμες, αφού μπορούν να επιστρατευθούν σε συγκεκριμένα και πολύ μικρότερα υποσύνολα συστημάτων. Ορισμένες από τις τεχνικές – εργαλεία που χρησιμοποιούνται αποτελούν η θεωρία ευστάθειας του Lyapunov, ο οριακός κύκλος και οι απεικονίσεις Poincaré.

Εντούτοις, παρά τα προαναφερθέντα δεδομένα, υπάρχουν τρόποι αντιμετώπισης των μη γραμμικών συστημάτων, οι οποίοι απλοποιούν σημαντικά την ανάλυσή τους. Ειδικότερα, υπό την προϋπόθεση ότι σε ένα μη γραμμικό σύστημα μάς ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές που βρίσκονται «κοντά» - γύρω από ένα σημείο ισορροπίας, μπορούμε να αξιοποιήσουμε την τεχνική της γραμμικοποίησης, δηλαδή να προσεγγίσουμε το υπό μελέτη μη γραμμικό σύστημα με ένα γραμμικό και να εφαρμόσουμε, σε περιοχές κοντά στο σημείο ισορροπίας, κατάλληλες τεχνικές ελέγχου που χρησιμοποιούνται στα γραμμικά συστήματα. Επομένως, δεν προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη το γεγονός ότι οι γραμμικές τεχνικές ελέγχου είναι διαδεδομένες σε τόσο μεγάλο βαθμό και ότι ο γραμμικός έλεγχος θεωρείται ο βασικός τρόπος ανάλυσης μη γραμμικών συστημάτων, αφού παρά την απλότητα της γραμμικής προσέγγισης, μπορεί να επιλύσει ικανοποιητικά αρκετά μη γραμμικά προβλήματα. Φυσικά, όπως προαναφέρθηκε, η επίλυση αυτή έχει τοπικό χαρακτήρα, πραγματεύεται, δηλαδή, συνήθως, «μικρές» περιοχές γύρω από ένα σημείο ισορ-

ροπίας. Ωστόσο, σε ένα πιο γενικό πλαίσιο, υπάρχουν ορισμένες φορές που η εφαρμογή της γραμμικοποίησης δεν είναι εφικτή ή, ακόμα κι αν είναι, οι λύσεις που προκύπτουν μέσω αυτής της μεθόδου αφορούν μικρές – τοπικές περιοχές λειτουργίας, οι οποίες, συγχρόνως, συχνά δεν πληρούν τα απαιτούμενα επίπεδα ακριβείας. Επομένως, προκειμένου να εξάγουμε πιο καθολικά και ακριβή αποτελέσματα, καταφεύγουμε στην ανάλυση των πιο αντιπροσωπευτικών – ως προς την πραγματικότητα – μη γραμμικών μοντέλων. Συν τοις άλλοις, χρήζει αναφοράς το γεγονός ότι έχει αποδειχθεί πως μερικές φορές η σχεδίαση μη γραμμικών ελεγκτών είναι αποτελεσματική ακόμα και στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων, καθώς επιτυγχάνει καλύτερες επιδόσεις με μικρότερο κόστος. Χαρακτηριστική επιβεβαίωση του παραπάνω ισχυρισμού αποτελεί το αντιπαράδειγμα του Witsenhausen [1], όπου κι αποδεικνύεται ότι η λύση του γραμμικού – τετραγωνικού προβλήματος του βέλτιστου στοχαστικού ελέγχου δεν είναι πάντα γραμμικός ελεγκτής.

Ο χωρισμός των μελετώμενων συστημάτων σε γραμμικά και μη γραμμικά οδηγεί, κατά αντιστοιχία, στις δύο κυρίαρχες κατηγορίες ελέγχου. Ωστόσο, το χαρακτηριστικό αυτό δεν αποτελεί τη μόνη διακριτική ιδιότητα στο ευρύ πεδίο των ελεγκτών. Πιο συγκεκριμένα, ένα πολύ ιδιαίτερο πρόβλημα, το οποίο είχε προκύψει ήδη κατά τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων αποτελεί το αν είναι εφικτή η σχεδίαση ελεγκτή στην περίπτωση που το σύστημα περιέχει άγνωστες ή συνεχώς μεταβαλλόμενες παραμέτρους. Από την άλλη, όσον αφορά τα μη γραμμικά συστήματα, το ίδιο ερώτημα χρήζει ανάλυσης στην περίπτωση που - ενδεχομένως και ολόκληρα - τμήματα της δυναμικής τους είναι άγνωστα. Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα μάς δίνει η μεθοδολογία του προσαρμοστικού ελέγχου, η οποία χρησιμοποιείται ακριβώς για τη σχεδίαση ελεγκτών σε συστήματα με τις προαναφερθείσες ιδιότητες. Σε αντίθεση με το σθεναρό έλεγχο, ο οποίος, επίσης, επιλύει προβλήματα ελέγχου συστημάτων με αβέβαιες παραμέτρους, ο προσαρμοστικός έλεγχος δεν απαιτεί a priori πληροφορίες για τα φράγματα - το εύρος των αβέβαιων όρων του υπό μελέτη συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, η μεθοδολογία αυτή εστιάζει στην ιδιότητα του ελεγκτή να προσαρμόζεται, ανάλογα με την άγνωστη δυναμική του συστήματος, αξιοποιώντας, ουσιαστικά, την «ιστορία» του. Επεξηγώντας, οι επιστρατευόμενοι ελεγκτές περιλαμβάνουν, εκτός από την τρέχουσα, και προηγούμενες τιμές των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος, συνήθως υπό τη μορφή ολοκληρώματος είτε των ιδίων είτε κάποιας συνάρτησής τους:

$$u = \gamma(x(s)), \quad s \leq t \quad (1.1)$$

ή

$$u = \gamma \left(x(t), \int_0^t x(s) ds \right) \quad (1.2)$$

ή

$$\begin{aligned} u &= \gamma(x(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= f(x(t), z(t)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Αν και η μεθοδολογία του προσαρμοστικού ελέγχου χρησιμεύει σε αρκετές περιπτώσεις, διακρίνεται και από ένα σημαντικό μειονέκτημα. Ειδικότερα, οι προτεινόμενοι ελεγκτές δυναμικά

αυξάνουν τη δυναμική τάξη των συστημάτων, μέσω της εισαγωγής νέων διαφορικών εξισώσεων για την εκτίμηση των αγνώστων όρων ($z(t)$). Ως εκ τούτου, αυξάνεται και η πολυπλοκότητα των συστημάτων. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως *curse of dimensionality* και, συχνά, οδηγεί σε προβλήματα που αφορούν τη σύγκλιση των παραμέτρων και την υλοποίηση του ελέγχου.

1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής Εργασίας

Στη διπλωματική αυτή εργασία, μελετάται μια κατηγορία μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων της μορφής:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t)) + g(t, x(t)) u(t) \\ y(t) &= h(t, x(t))\end{aligned}\tag{1.4}$$

όπου $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης, $u \in \mathbb{R}^m$ η είσοδος του συστήματος και $y \in \mathbb{R}^p$ η έξοδος του. Επιπροσθέτως, οι $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ και $h : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ συνιστούν τοπικά Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις.

Στόχο της παρούσας εργασίας αποτελεί η σχεδίαση ενός νόμου ελέγχου που θα επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης σε σημείο αναφοράς για την περίπτωση της συγκεκριμένης κατηγορίας συστημάτων με χρήση ενός προσαρμοστικού, μη γραμμικού αναλογικού - ολοκληρωτικού (PI) ελεγκτή. Επιπλέον, αποσκοπεί στην αναζήτηση και εύρεση ενός γραμμικού κέρδους (gain), μέσω του οποίου θα κληροδοτούνται στο εξεταζόμενο μη γραμμικό σύστημα οι εκάστοτε ιδιότητες ευρωστίας (robustness properties) που συναντώνται στο γραμμικό έλεγχο.

Στην ουσία, πραγματοποιείται επέκταση και τροποποίηση της μεθόδου του καθολικού προσαρμοστικού ελέγχου, η οποία προτάθηκε κι αναλύθηκε στην έρευνα [14] του Pchmann. Μάλιστα, σε αντίθεση με την έρευνα αυτή, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου δε χρησιμοποιεί αποκλειστικά ολοκληρωτικούς, αλλά και αναλογικούς όρους για το κέρδος. Στην παρούσα εργασία, η χρήση της προαναφερθείσας τροποποιημένης μεθόδου γίνεται καθαρά στο πλαίσιο συστημάτων πολλαπλών εισόδων – πολλαπλών εξόδων (MIMO) που είναι γραμμικά ως προς την είσοδο (input affine).

1.3 Οργάνωση Τόμου

Η παρούσα εργασία είναι οργανωμένη σε έξι κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο Κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή, η οποία, ως επί το πλείστον, περιλαμβάνει ορισμένα γενικά, πλην θεμελιώδη, στοιχεία για τη θεωρία αυτόματου ελέγχου. Στο Κεφάλαιο 2, δίνεται ένα βασικό μαθηματικό υπόβαθρο για την ενίσχυση του βαθμού κατανόησης του μη γραμμικού ελέγχου και γίνεται παρουσίαση τεχνικών σχεδίασης ελεγκτών, που έχουν προταθεί για την επίλυση του προβλήματος αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου σε παρόμοιες κατηγορίες συστημάτων

με το εξεταζόμενο. Επιπρόσθετα, αναφέρονται άλλες εργασίες που έχουν συνδράμει στη θεμελίωση και επέκταση των μεθόδων αυτών και πραγματοποιείται συγκριτική μελέτη τους. Το τρίτο Κεφάλαιο περιλαμβάνει την ακριβή, φορμαλιστική περιγραφή του προβλήματος που επιχειρείται να επιλυθεί, καθώς και τις υποθέσεις που λαμβάνονται υπόψη. Έπειτα, γίνεται παρουσίαση του προτεινόμενου σθεναρού προσαρμοστικού μη γραμμικού PI ελεγκτή, ενώ με τη βοήθεια ενός λήμματος κι ενός θεωρήματος, αποδεικνύεται η καταλληλότητα του συγκεκριμένου νόμου ελέγχου για την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος. Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αφενός ενός συστήματος ρομποτικού βραχίονα με 2 βαθμούς ελευθερίας κι αφετέρου ενός αντίστοιχου με 7 βαθμούς ελευθερίας, υπό την επίδραση του προτεινόμενου νόμου ελέγχου, με σκοπό τη διαπίστωση της αποδοτικής λειτουργίας του. Το επόμενο Κεφάλαιο, το 5ο κατά σειρά, αποτελεί τον επίλογο της παρούσας εργασίας, όπου συνοψίζονται ορισμένα συμπεράσματα, αποτιμάται η συνεισφορά της εργασίας αυτής και προτείνονται πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις της προτεινόμενης μεθόδου επίλυσης του μελετώμενου προβλήματος.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Υπόβαθρο - Συγγενικές Εργασίες

2.1 Ορισμοί

2.1.1 Χώροι Συναρτήσεων

Οι χώροι συναρτήσεων που απαντώνται, κατά κύριο λόγο, στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι οι ακόλουθοι:

- \mathcal{L}_∞ , ο οποίος περιέχει όλες τις ομοιόμορφα φραγμένες συναρτήσεις
- \mathcal{L}_q , ο οποίος περιέχει όλες τις q -ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, με $q \in \mathbb{N}^*$
- \mathbb{K}_∞ , ο οποίος περιέχει όλες τις γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, με $k(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$.

2.1.2 Κλάση Συναρτήσεων \mathcal{A}

Ορίζουμε την κλάση συναρτήσεων $\mathcal{A} \subset C([0, +\infty), [0, +\infty))$. Αν μια συνάρτηση $\tilde{\phi} \in \mathcal{A}$ τότε:

1. Η $\tilde{\phi}$ είναι γνησίως αύξουσα με $\tilde{\phi}(0) = 0$ και
2. Το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\phi}^{-1}(x + \epsilon) - \tilde{\phi}^{-1}(x)}{[\tilde{\phi}^{-1}(x)]^{\nu+1}} = +\infty, \forall \epsilon > 0, \nu \geq 1 \quad (2.1)$$

Η μελετώμενη κλάση συναρτήσεων αποτελεί ένα μη κενό σύνολο. Πιο συγκεκριμένα, ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης αυτής της κλάσης είναι η ακόλουθη:

$$\tilde{\phi}(x) = \sqrt{\ln(\ln(x + e))} \quad (2.2)$$

Η αντίστροφη της παραπάνω συνάρτησης, η οποία και χρησιμοποιείται στο όριο (2.1), είναι η:

$$\tilde{\phi}^{-1}(x) = \exp(\exp(x^2)) - e \quad (2.3)$$

Πράγματι, η επιλεχθείσα συνάρτηση $\tilde{\phi}(x)$ πληροί τις επιθυμητές ιδιότητες, αφού:

- Για κάθε $x > 0$ η παράγωγος:

$$\frac{d\tilde{\phi}(x)}{dx} = \left(\sqrt{\ln(\ln(x+e))} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\ln(x+e))}} \frac{1}{\ln(x+e)} \frac{1}{x+e} > 0$$

, αφού:

- * $x+e > e > 0$
- * $\ln(x+e) > \ln(e) = 1$
- * $\ln(\ln(x+e)) > \ln(1) = 0$

Επομένως, η συνάρτηση $\tilde{\phi}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, πληρώντας, κατά αυτόν τον τρόπο, τη σχετική ιδιότητα της ορισθείσας κλάσης συναρτήσεων.

- Εφόσον η δεδομένη συνάρτηση $\tilde{\phi}(x)$ είναι συνεχής, ορίζεται στο $[0, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της θα είναι το $[\tilde{\phi}(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}(x)]$. Έχουμε, λοιπόν, ότι:

$$\begin{aligned} - \tilde{\phi}(0) &= 0 \\ - \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(\ln(x+e))} = +\infty \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σύνολο τιμών της μελετώμενης συνάρτησης είναι το $[0, +\infty)$, πληρώντας, κατά αυτόν τον τρόπο, την εξ ορισμού ιδιότητα της ορισθείσας κλάσης συναρτήσεων.

- Όσον αφορά το όριο (2.1), λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\phi}^{-1}(x+\epsilon) - \tilde{\phi}^{-1}(x)}{[\tilde{\phi}^{-1}(x)]^{\nu+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{e^{(x+\epsilon)^2}} - e \right) - \left(e^{e^{x^2}} - e \right)}{\left(e^{e^{x^2}} - e \right)^{\nu+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^{x^2+2x\epsilon+\epsilon^2}} - e^{e^{x^2}}}{e^{(\nu+1)e^{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^{x^2}} e^{2x\epsilon+\epsilon^2} - e^{e^{x^2}}}{e^{(\nu+1)e^{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{e^{x^2}(e^{2x\epsilon+\epsilon^2-\nu-1})} - e^{-\nu e^{x^2}} = +\infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\forall \epsilon > 0, \nu \geq 1$. Ως εκ τούτου, πληρείται και η ιδιότητα (2.1) της ορισθείσας κλάσης συναρτήσεων.

Έτσι, αποδείχθηκε ότι η μελετώμενη συνάρτηση $\tilde{\phi}(x)$ ανήκει στην κλάση \mathcal{A} .

2.1.3 Νεκρή Ζώνη (Dead Zone)

Αν στην κατάσταση x εφαρμοστεί ο τελεστής νεκρής ζώνης (dead zone) με κατώφλι $\delta > 0$, τότε η έξοδος που προκύπτει, σύμφωνα με το τρίτο κεφάλαιο του βιβλίου [26], θα είναι:

$$D_\delta(x) := \begin{cases} x - \delta \operatorname{sgn}(x) & , |x| > \delta \\ 0 & , |x| \leq \delta \end{cases} \quad (2.5)$$

Η έννοια της νεκρής ζώνης (dead zone) επιστρατεύεται με διπλό σκοπό: Αφενός, για την αύξηση της σθεναρότητας του ελεγκτή σε διαταραχές ή / και μη μοντελοποιημένες δυναμικές του μελετώμενου συστήματος κι, αφετέρου, για τη μετρίαση της ταλαντωτικής συμπεριφοράς στις αποκρίσεις της εισόδου και της εξόδου του συστήματος κατά το μεταβατικό στάδιο.

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη ιδότητα, η οποία κι αξιοποιείται στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας:

$$D_{\delta}^{\nu}(x) \leq x^{\nu}, \forall x > 0, \nu \geq 1 \quad (2.6)$$

2.1.4 Χαμιλτονιανή Συνάρτηση

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφική αναφορά [24], η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων q_i , των ταχυτήτων \dot{q}_i και, εν γένει, του χρόνου, δηλαδή αποτελεί μια συνάρτηση της μορφής:

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (2.7)$$

Έπειτα, οι κανονικές ορμές που ορίζονται ως:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.8)$$

είναι συναρτήσεις των q_i, \dot{q}_i και του χρόνου, ενώ, όπως φαίνεται από τον ορισμό τους, αποτελούν μαθηματικά κατασκευάσματα, τα οποία προκύπτουν άμεσα από τη Λαγκρανζιανή. Η Χαμιλτονιανή, λοιπόν, ορίζεται ως ο μετασχηματισμός *Legendre* της Λαγκρανζιανής ως προς όλες τις γενικευμένες ταχύτητες, δηλαδή είναι συνάρτηση της μορφής:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (2.9)$$

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη σχέση:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.10)$$

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η Χαμιλτονιανή συνδέεται άμεσα με την Λαγκρανζιανή και δίνεται από τη σχέση:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (2.11)$$

Στη σχέση αυτή, τα \dot{q}_i θεωρούνται συναρτήσεις των q_i και p_i και, εν γένει, του χρόνου. Μπορούμε, μάλιστα, να τα προσδιορίσουμε, επιλύοντας τις αλγεβρικές εξισώσεις (2.8) ως προς \dot{q}_i .

Τέλος, για να μπορεί να επιτευχθεί αυτή η αντιστροφή, που είναι αναγκαία για τον προσδιορισμό της Χαμιλτονιανής, είναι απαραίτητο ο εσσιανός πίνακας:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.12)$$

να είναι θετικά ορισμένος.

2.1.5 Ανισότητα Hölder

Η ανισότητα του Hölder εφαρμόζεται σε συναρτήσεις και ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Αν $1 < r, q < +\infty$ και $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ (τέτοιοι αριθμοί r, q ονομάζονται «συζυγείς εκθέτες»), τότε για όλες τις συναρτήσεις $f \in \mathcal{L}_r(A)$ και $g \in \mathcal{L}_q(A)$, η $f g$ ανήκει στο $\mathcal{L}_1(A)$ και ισχύει:

$$\left| \int_A f(s)g(s)ds \right| \leq \|f(\cdot)\|_r \|g(\cdot)\|_q \quad (2.13)$$

όπου:

$$\|f(\cdot)\|_r = \left[\int_A \|f(s)\|^r ds \right]^{\frac{1}{r}} \text{ και } \|g(\cdot)\|_q = \left[\int_A \|g(s)\|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \quad (2.14)$$

2.1.6 Ανισότητα Young

Η ανισότητα του Young εφαρμόζεται σε πραγματικούς αριθμούς και ορίζεται με τον εξής τρόπο:

Αν $1 < r^*, q^* < +\infty$ και $\frac{1}{r^*} + \frac{1}{q^*} = 1$ (τέτοιοι αριθμοί r^*, q^* ονομάζονται «συζυγείς εκθέτες»), τότε, αν α, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, θα ισχύει:

$$\alpha \beta \leq \frac{\alpha^{r^*}}{r^*} + \frac{\beta^{q^*}}{q^*} \quad (2.15)$$

2.1.7 Νόρμα Frobenius

Έστω ο πίνακας A διαστάσεων $m \times p$, με στοιχεία a_{ij} , $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, p$. Η $\ell_{a,b}$ νόρμα του πίνακα A ορίζεται ως ακολούθως:

$$\|A\|_{a,b} = \left(\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|^a \right)^{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (2.16)$$

Για $a = b = 2$, η νόρμα που προκύπτει ονομάζεται νόρμα Frobenius και ορίζεται ως:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,p\}} \sigma_i^2(A)} \quad (2.17)$$

όπου $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$ οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A .

2.1.8 Λήμμα Barbalat

Το λήμμα Barbalat αποτελεί βασικό κομμάτι της θεωρίας του μη γραμμικού ελέγχου. Η διατύπωσή του παρατίθεται από το [16]:

Λήμμα. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $[0, +\infty)$. Έστω, επίσης, ότι το $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Τότε, $f(t) \rightarrow 0$, καθώς το $t \rightarrow +\infty$.

2.1.9 Τοπική Lipschitz Συνέχεια

Ο ορισμός της τοπικά Lipschitz συνάρτησης παρατίθεται στην πηγή [19] και είναι ο κάτωθι:

Έστω D ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^m . Μια συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται τοπικά Lipschitz στο D , αν για κάθε $x_0 \in D$, υπάρχει μια ϵ -γειτονιά του x_0 , έστω $N_\epsilon(x_0)$, που είναι υποσύνολο του D , και μια σταθερά K_0 , τέτοια ώστε για όλα τα $x, y \in N_\epsilon(x_0)$ να ισχύει:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K_0 \|x - y\| \quad (2.18)$$

Η έννοια της ϵ -γειτονιάς ενός σημείου $x_0 \in D$ είναι ισοδύναμη με μια ανοιχτή μπάλα θετικής ακτίνας $\epsilon > 0$, δηλαδή:

$$N_\epsilon(x_0) = \{x \in D : \|x - x_0\| < \epsilon\} \quad (2.19)$$

2.1.10 Ομοιόμορφη Συνέχεια

Ο ορισμός της ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης παρουσιάζεται στην αναφορά [27] ως εξής:

Έστω μια συνάρτηση $f \in A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Η f καλείται ομοιόμορφα συνεχής στο A , αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\text{Αν } x, y \in A \text{ και } \|x - y\| < \delta \text{ τότε } \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad (2.20)$$

2.1.11 Θεώρημα Rademacher

Το θεώρημα Rademacher για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών διατυπώνεται στο βιβλίο [18]:

Έστω $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση και Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^m . Τότε, η f είναι διαφορίσιμη, δηλαδή οι μερικές της παράγωγοι υπάρχουν σχεδόν παντού.

Σημείωση: Διαφορίσιμη f σχεδόν παντού στο Ω σημαίνει ότι η f είναι, γενικά, διαφορίσιμη στο Ω εκτός από ένα σύνολο σημείων $E \subset \Omega$, για το οποίο ισχύει ότι το μέτρο Lebesgue του είναι 0 ή, αλλιώς, ότι το σύνολο E είναι αμελητέας πληθικότητας.

2.1.12 Θεώρημα Πεπερασμένου Χρόνου Απόδρασης

Ένα σημαντικό θεώρημα για το μη γραμμικό έλεγχο που αφορά το διάστημα στο οποίο ορίζεται η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, διατυπώνεται ως εξής [25]:

Έστω μια συνάρτηση $f(t, x(t))$ τοπικά Lipschitz σε ένα ανοιχτό, συνεκτικό σύνολο D κι έστω ότι η λύση του $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ έχει πεπερασμένο χρόνο απόδρασης t_e . Τότε, η λύση $x(t)$ του συστήματος θα «αποδρά» από κάθε συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του D , καθώς το $t \rightarrow t_e$.

2.2 Θεωρία Lyapunov

Ένα θεμελιώδες κεφάλαιο των μαθηματικών που βρίσκει συστηματική εφαρμογή στον τομέα του μη γραμμικού ελέγχου είναι αυτό της ευστάθειας κατά Lyapunov. Στην ενότητα αυτήν,

παραθέτουμε, αρχικά, τον ορισμό της ευστάθειας αυτής, όπως διατυπώνεται στο [20]:

Έστω ένα αυτόνομο μη γραμμικό δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.21)$$

όπου $x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, D ένα ανοιχτό σύνολο που εμπεριέχει το $x = \mathbf{0}$ και $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια τοπικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση στο D . Έστω, επιπλέον, ότι το διάνυσμα $x = \mathbf{0}$ αποτελεί σημείο ισορροπίας του συστήματος (2.21), δηλαδή ισχύει $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Τότε:

- Το σημείο ισορροπίας $x = \mathbf{0}$ είναι (τοπικά) ευσταθές κατά Lyapunov, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, τέτοιο ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$, τότε $\|x(t)\| < \epsilon$, για κάθε $t \geq 0$.
- Το σημείο ισορροπίας $x = \mathbf{0}$ είναι (τοπικά) ασυμπτωτικά ευσταθές, αν είναι ευσταθές κατά Lyapunov και μπορεί να επιλεγεί $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \mathbf{0}$.
- Το σημείο ισορροπίας $x = \mathbf{0}$ είναι (τοπικά) εκθετικά ευσταθές, αν είναι ευσταθές κατά Lyapunov και υπάρχουν σταθερές $M, \alpha > 0$ και $\delta > 0$, τέτοια ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$, τότε $\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}$, για κάθε $t \geq 0$.

Θεώρημα 1. Έμμεση μέθοδος ευστάθειας Lyapunov Έστω $x = \mathbf{0}$ ένα σημείο ισορροπίας του αυτόνομου μη γραμμικού συστήματος $\dot{x} = f(x)$, όπου $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση και $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό, συνεκτικό σύνολο που εμπεριέχει το $x = \mathbf{0}$. Επίσης, έστω $\dot{x} = Ax$ το γραμμικοποιημένο σύστημα του αρχικού, όπου A ο Ιακωβιανός πίνακας της f στο $x = \mathbf{0}$:

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\mathbf{0}} \quad (2.22)$$

Τέλος, έστω $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A . Τότε:

- Αν για κάθε λ_i ισχύει $Re\{\lambda_i\} < 0$, τότε το σημείο ισορροπίας $x = \mathbf{0}$ είναι (τοπικά) ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Αν τουλάχιστον για ένα λ_i ισχύει $Re\{\lambda_i\} > 0$, τότε το σημείο ισορροπίας $x = \mathbf{0}$ είναι (τοπικά) ασταθές.
- Αν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή $\lambda_k, k < n$, έχει $Re\{\lambda_k\} = 0$ και για τα υπόλοιπα λ_i ισχύει $Re\{\lambda_i\} < 0$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την (τοπική) ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x = \mathbf{0}$.

Θεώρημα 2. Άμεση μέθοδος ευστάθειας/Θεώρημα Lyapunov Έστω ένα αυτόνομο μη γραμμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$, όπου το $x = \mathbf{0}$ είναι ένα σημείο ισορροπίας του, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση και $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό, συνεκτικό σύνολο που εμπεριέχει το $x = \mathbf{0}$. Έστω, επίσης $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε:

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad (2.23)$$

$$V(x) > 0, \forall x \in D \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (2.24)$$

Αν, επιπλέον, ισχύει:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = V'(x) f(x) \leq 0, \forall x \in D \quad (2.25)$$

τότε το σημείο ισορροπίας $x = \mathbf{0}$ είναι (τοπικά) ευσταθές κατά Lyapunov.

Αν, αντί της (2.25), ισχύει:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = V'(x) f(x) < 0, \forall x \in D \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (2.26)$$

τότε το σημείο ισορροπίας $x = \mathbf{0}$ είναι (τοπικά) ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.3 Nussbaum Gains

Όσον αφορά το κομμάτι του προσαρμοστικού ελέγχου, μια αρκετά διαδεδομένη μέθοδος για την αντιμετώπιση του προβλήματος που δημιουργείται από την άγνωστη κατεύθυνση ελέγχου είναι τα κέρδη τύπου Nussbaum. Η τεχνική αυτή προτάθηκε από τον Roger D. Nussbaum στην εργασία του [2]:

2.3.1 Περιγραφή Προβλήματος

Η εργασία αυτή καταπιάνεται, ως επί το πλείστον, με την επίλυση του προβλήματος των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου (unknown control directions). Στην απλούστερη μορφή του προβλήματος, θεωρούμε το γραμμικό σύστημα πρώτης τάξης της μορφής:

$$\dot{x}(t) = x(t) + \lambda u \quad (2.27)$$

όπου x είναι η κατάσταση του συστήματος, u η είσοδος του και λ μια άγνωστη παράμετρος με, επιπλέον, άγνωστο πρόσημο (κατεύθυνση ελέγχου). Η ιδιότητα αυτή, δηλαδή η απροσδιορίστου προσήμου άγνωστη παράμετρος λ , αποτελεί το πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό του μελετώμενου προβλήματος. Η δυσκολία με την ανάλυση και τον έλεγχο συστημάτων της προαναφερθείσας μορφής έγκειται ακριβώς στον άγνωστο όρο λ . Αυτό συμβαίνει, καθώς είναι αδύνατον να γνωρίζουμε από πριν τον τρόπο με τον οποίον ή την κατεύθυνση προς την οποία θα επηρεάσει ο εφαρμοζόμενος έλεγχος το σύστημα.

Η αρχή για το συγκεκριμένο ζήτημα έγινε με το ερώτημα που τέθηκε από τον A.S. Morse για το αν είναι εφικτό να βρεθεί δυναμικός ελεγκτής που να οδηγεί το x στο μηδέν, ανεξάρτητα από το πρόσημο του λ . Συγκεκριμένα, το ερώτημα είχε την ακόλουθη διατύπωση:

Υπάρχουν κατάλληλες διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα ότι για κάθε μη μηδενικό, πραγματικό αριθμό λ και κάθε ζεύγος αρχικών τιμών $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

η λύση $(x(t), y(t))$ του συστήματος:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + \lambda f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)) \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ και ικανοποιεί τη συνθήκη $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, αλλά και με την ιδιότητα ότι το $y(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο στο $[0, +\infty)$;

Η ισοδυναμία μεταξύ των προβλημάτων φαίνεται από το γεγονός ότι αν στην (2.27) επιλέξουμε ως είσοδο του συστήματος την έξοδο ενός δυναμικού ελεγκτή της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)) \\ u &= f(x(t), y(t)) \end{aligned} \quad (2.29)$$

τότε προκύπτουν οι σχέσεις (2.28).

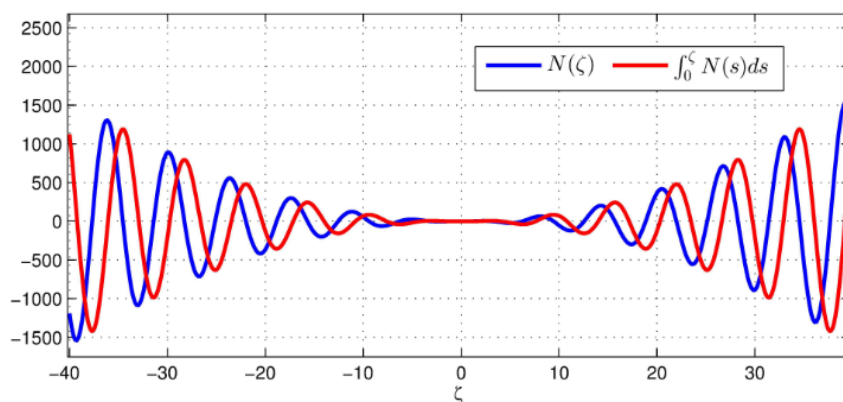
Με άλλα λόγια, θεωρώντας τη δυναμική $\dot{y} = g(x(t), y(t))$ ως τη δυναμική των εκτιμώμενων παραμέτρων ενός προσαρμοστικού μοντέλου ελέγχου και τη συνάρτηση $f(x(t), y(t))$ ως τον εφαρμοζόμενο έλεγχο στο σύστημα (2.27), διατυπώνουμε το πρόβλημα που, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ονομάζεται πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου.

2.3.2 Μέθοδος Nussbaum

Ο R. Nussbaum επιλύει το πρόβλημα αυτό, εισάγοντας ως κέρδος στη συνάρτηση ελέγχου $u = f(x, y)$ μια συνάρτηση, $h(y)$, των παραμέτρων y με τις εξής ιδιότητες:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{y} \int_{y_0}^y h(s) ds = +\infty \quad (2.30)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \inf \frac{1}{y} \int_{y_0}^y h(s) ds = -\infty \quad (2.31)$$



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση Nussbaum $N(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και το $\int_0^\zeta N(s) ds$

Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται συναρτήσεις τύπου Nussbaum. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας συναρτήσεων αποτελεί η $h(y) = e^{y^2} \cos(\frac{\pi y}{2})$ ή, γενικότερα, η συνάρτηση $h(y) = k(y) \cos(y)$, όπου $\frac{k(y)}{y} \in \mathbb{K}_\infty$.

Η βασική ιδέα είναι ότι χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση κέρδους $h(y)$, για την οποίαν ισχύουν οι (2.30) και (2.31), καθώς $y \rightarrow +\infty$, κάποια στιγμή, αφενός θα επιτευχθεί το αντίθετο πρόσημο από αυτό της άγνωστης παραμέτρου λ , θα βρεθεί, δηλαδή, η σωστή κατεύθυνση ελέγχου και αφετέρου θα έχουμε κατάλληλα υψηλό κέρδος, ώστε να σταθεροποιηθεί το σύστημα. Έκτοτε, το όρισμα της συνάρτησης Nussbaum δε μεταβάλλεται ουσιαστικά, αφού οι παράμετροι συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές τους. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση δεν αλλάζει ξανά πρόσημο, ενώ ο έλεγχος ασκείται κατά την επιθυμητή κατεύθυνση και έχει πλέον τη μορφή μιας κλασικής ανάδρασης $u = -Kx$.

Η λύση και ο νόμος ελέγχου που προτείνει ο R. Nussbaum θεωρητικά λύνουν το πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου και αποτέλεσαν την αφορμή για αρκετές επεκτάσεις της μεθόδου, όπως, ενδεικτικά, η γενίκευσή της σε συστήματα αυστηρής ανάδρασης. Παρόλο που η μέθοδος των κερδών Nussbaum φαίνεται κατάλληλη και παρουσιάζεται να έχει λύσει, ουσιαστικά, το βασικό και δύσκολο πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου, χαρακτηρίζεται από ένα πολύ σημαντικό δομικό μειονέκτημα, το οποίο αφορά τα υψηλά κέρδη που εισάγει αυτή η μέθοδος. Πιο συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται το y , τα κέρδη που εισάγονται μπορούν να λάβουν πολύ υψηλές τιμές. Έτσι, αν και η χρήση υψηλών κερδών έχει παρατηρηθεί ότι προσφέρει ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες στο σύστημα, όπως η βελτίωση της δυναμικής του απόδοσης με αύξηση της ταχύτητας απόκρισης και η μείωση του σφάλματος μόνιμης κατάστασης, οι αρνητικές επιδράσεις τους, όπως η ενίσχυση του παρεμβαλλόμενου θορύβου και ο κίνδυνος αστάθειας για υψηλή τιμή του σήματος ανάδρασης, καθιστούν αρκετά δύσκολη έως αδύνατη την υλοποίησή τους σε πραγματικές εφαρμογές. Εξάλλου, όπως έχει αποδειχθεί στις εργασίες [6], [11] και [12], η χρήση σχημάτων ελέγχου με κέρδη Nussbaum δεν είναι σθεναρή σε μη μοντελοποιημένες δυναμικές. Εν ολίγοις, αν και η προαναφερθείσα λύση ανταποκρίνεται σε μαθηματικό πλαίσιο, δεν είναι καθολικά εφαρμόσιμη στην πράξη.

Προς αυτήν την κατεύθυνση, έρχεται να συνεισφέρει και η έρευνα [7] του Mårtensson, μέσω της οποίας αποδεικνύεται ότι για συστήματα της μορφής $\dot{x} = x^{2r} \pm u$, $r = \{1, 2\}$, ο ελεγκτής:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= x^{2r} & , r &= \{1, 2\} \\ u &= -k \max\{x, x^{2r}\} & , r &= \{1, 2\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

είναι πιο αποτελεσματικός από τον αντίστοιχο ελεγκτή τύπου Nussbaum, ο οποίος έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= x^2 \\ u &= k^2 \cos(k) \max\{x, x^2\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

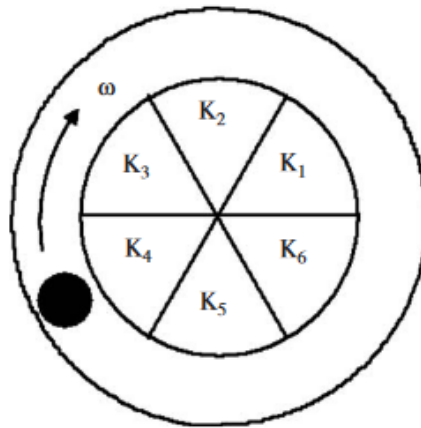
Πιο συγκεκριμένα, όπως παρατηρείται με χρήση προσομοιώσεων σε διάφορα συστήματα, η μεταβατική συμπεριφορά στην περίπτωση του ελεγκτή τύπου Nussbaum είναι πολύ απότομη και οι τιμές που λαμβάνονται στη διάρκεια του μεταβατικού διαστήματος είναι αρκετά υψηλές, ακόμα και συγκριτικά με εκείνες του αντίστοιχου γραμμικού ελεγκτή.

Αυτό το μειονέκτημα της μεθόδου του Nussbaum έγινε γρήγορα αντιληπτό και, από τότε, έχουν γίνει προσπάθειες για την αντιμετώπισή του. Μία από τις προταθείσες μεθόδους επίλυσης του ζητήματος είναι η σχεδίαση με χρήση χωρικά φραγμένων συναρτήσεων Lyapunov (Barrier Lyapunov Functions, BLFs), η οποία και επιτρέπει τον περιορισμό της εξέλιξης της εξόδου και της εισόδου του συστήματος μέσα σε ένα συμπαγές σύνολο. Η τεχνική αυτή προτάθηκε από τον X. Ψυλλάκη στην εργασία [3], ενώ χρησιμοποιείται και στην έρευνα [4]. Έπειτα, τη δεύτερη τεχνική αντιμετώπισης του προαναφερθέντος ζητήματος αποτελεί η επιστράτευση φραγμένων k -τύπου συναρτήσεων Nussbaum που εισήχθησαν στο [5], ώστε να βελτιωθεί η σθεναρότητα της μεθόδου του Nussbaum.

Τέλος, μια άλλη περίπτωση χρήσιμης εφαρμογής της λογικής Nussbaum αναλύεται στην έρευνα [15]. Πιο συγκεκριμένα, στην έρευνα αυτή, τα κέρδη (gains) του άγνωστου πίνακα εκτίμησης κερδών για MIMO σύστημα επιλέγονται με τρόπο που προσομοιάζει εκείνον της ρουλέτας, όπως φαίνεται στο ενδεικτικό σχήμα που παρατίθεται παρακάτω.

Η επιλογή του προαναφερθέντος πίνακα εκτίμησης κερδών μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της παρακάτω σχέσης, η οποία βασίζεται στη θέση της «μπάλας» που, με τη σειρά της, εμπίπτει στο εύρος $[\tau_{lN+j}, \tau_{lN+j+1})$, όπου $\tau_1 = \theta_0 = 0$:

$$K(\theta) = K_j, \text{ αν } \theta \in [\tau_{lN+j}, \tau_{lN+j+1}), l = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, N$$



Σχήμα 2.2: Επιλογέας τύπου ρουλέτα (ω = δείκτης απόδοσης)

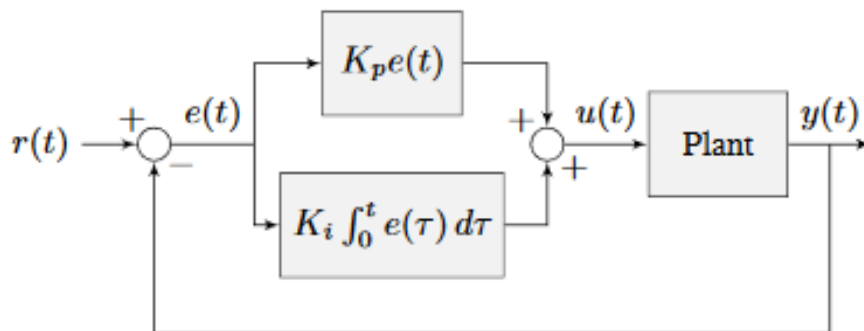
Επεξηγώντας, τα ανωτέρω K_j συνιστούν στοιχεία που ανήκουν στο πεπερασμένο σύνολο πινάκων $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$. Το σύνολο αυτό αποτελεί υποσύνολο της γενικής γραμμικής ομάδας $GL_m(\mathbb{R})$, η οποία ορίζεται ως το σύνολο των $m \times m$ αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, εφοδιασμένο με την πράξη του συνήθη πολλαπλασιασμού πινάκων. Βάσει του λήμματος του Mårtensson, όπως αυτό παρατίθεται και στο [21], υπάρχει σύνολο $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ που πληροί τις παραπάνω ιδιότητες, προκειμένου για οποιοδήποτε $M \in GL_m(\mathbb{R})$ να υπάρχει $j \in 1, \dots, N$, τέτοιο ώστε το φάσμα του πίνακα MK_j να είναι στο ανοιχτό αριστερό μισό του μιγαδικού επιπέδου. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύνολο

λο $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$, όπου N η πληθικότητα (cardinality) του συνόλου, καλείται σύνολο διαχωρισμού (unmixing set).

Έτσι, καθώς μεταβάλλεται το θ , το οποίο αποτελεί παράμετρο Nussbaum και συνδέεται με το ω μέσω της σχέσης $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, η «μπάλα» περνάει από όλα τα K_j , εξασφαλίζοντας την αναγκαία πυκνότητα (density), με σκοπό τον ακριβή και ορθό προσδιορισμό του άγνωστου πίνακα κερδών του υπό μελέτη συστήματος.

2.4 Μη Γραμμικός PI Έλεγχος

Οι γραμμικοί PID ελεγκτές, και κατ' επέκταση οι γραμμικοί PI, αποτελούν ίσως τον πιο διαδεδομένο τύπο ελεγκτή και η χρήση τους συνιστά μια αρκετά αποτελεσματική τεχνική ελέγχου. Αυτό συμβαίνει, διότι ακόμη και χωρίς πλήρη εικόνα της δυναμικής του εκάστοτε μελετώμενου συστήματος, είναι εφικτό, με τη ρύθμιση τριών παραμέτρων, και πιο συγκεκριμένα των κερδών K_P , K_I και K_D , να επιτευχθούν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση, ως επί το πλείστον, των γραμμικών συστημάτων. Ωστόσο, όσον αφορά τα μη γραμμικά συστήματα, η συμπεριφορά των ελεγκτών αυτών αποδεικνύεται σε μεγάλο βαθμό ανεπαρκής και η εφαρμογή τους δεν μπορεί παρά να πραγματοποιείται τοπικά, σε γραμμικοποιημένες περιοχές (gain scheduling methods). Επομένως, χρειάζονται θεμελιώδεις αλλαγές στη δομή τους, ώστε να είναι σε θέση να αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο στο μη γραμμικό έλεγχο.



Σχήμα 2.3: Κλασική μορφή PI ελεγκτή

Προκειμένου να αντιμετωπισθούν τα προβλήματα που επιφέρουν οι, συνήθως, άγνωστες μη γραμμικότητες, αναπτύχθηκε, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, ο προσαρμοστικός έλεγχος, ο οποίος, φυσικά, δεν αποτελεί αυστηρώς αλάνθαστη μέθοδο, αλλά συνδράμει σημαντικά στην επίλυση πολλών ζητημάτων που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της φύσης των μη γραμμικών συστημάτων.

Μια διαφορετική μεθοδολογία, η οποία συνεισφέρει καθοριστικά στην εξάλειψη πολλών εκ των προβλημάτων που δημιουργεί η μέθοδος που αναφέρθηκε παραπάνω κι αφορά την εφαρμογή του προσαρμοστικού ελέγχου σε μη γραμμικά συστήματα είναι η εφαρμογή μη γραμμικών PI ελεγκτών, όπως αυτή αναλύεται στο [8], αλλά και στο [6]. Σε αμφότερες αυτές τις βιβλιογραφικές αναφορές, η νέα προτεινόμενη μεθοδολογία εμπνεύστηκε από την απλότητα και τη

λειτουργικότητα των γραμμικών PID ελεγκτών. Η προαναφερθείσα τεχνική παρουσιάζεται και αναλύεται περιληπτικά εντός της παρούσας ενότητας.

Σε αυτό το σημείο, λοιπόν, παρουσιάζεται ο ορισμός των μη γραμμικών PI ελεγκτών, όπως περιγράφεται στο [8]:

Δεδομένου ενός διανύσματος μετρήσιμων σημάτων $y \in \mathbb{R}^n$, ενός διανύσματος τροχιών αναφοράς $y^* = y^*(t) \in \mathbb{R}^n$ και μιας βαθμωτής μεταβλητής $u \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τρεις απεικονίσεις $\beta_P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $w_I : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$, $v : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η τριπλέτα $[\beta_P, w_I, v]$, ορίζει ένα μη γραμμικό PI ελεγκτή q -τάξης, μέσω του δυναμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} u &= v(\beta_P(y, y^*) + \beta_I, y, y^*) \\ \dot{\beta}_I &= w_I(y, y^*, \beta_I) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Αν θέσουμε $n = q = 1$ και διαλέξουμε τις γραμμικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} \beta_P(y, y^*) &= K_P(y - y^*) \\ w_I(y, y^*) &= K_I(y - y^*) \\ v &= -\beta_P(y, y^*) - \beta_I \end{aligned} \quad (2.35)$$

προκύπτει ο κλασικός ορισμός του PI ελεγκτή για συστήματα μιας εισόδου - μιας εξόδου με K_P το αναλογικό κέρδος και K_I το ολοκληρωτικό.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, προτείνεται μία διαφορετική μεθοδολογία για τον προσαρμοστικό έλεγχο, στην οποία δεν χρησιμοποιείται η παραμετρική μορφή. Πιο αναλυτικά, σε αυτήν την περίπτωση, δεν επιχειρείται εκτίμηση του άγνωστου μοντέλου του συστήματος μέσω ενός εκτιμητή παραμέτρων μεγάλης δυναμικής τάξης, κάτι το οποίο χρησιμοποιείται κατά κόρον στον κλασικό προσαρμοστικό έλεγχο. Αντίθετα, στόχο των προαναφερθεισών αναφορών αποτελεί η δημιουργία μιας ευσταθούς εξίσωσης για το σφάλμα μεταξύ της δυναμικής του συστήματος και της επιθυμητής δυναμικής, με έναν όρο διαταραχής, ο οποίος γίνεται μηδενικός. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγεται η συνάρτηση διαταραχής, ώστε να έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Έτσι, επιλέγοντας κατάλληλα τα κέρδη του μη γραμμικού PI ελεγκτή, τα οποία πλέον είναι μη γραμμικές συναρτήσεις, οι τροχιές του συστήματος υποχρεώνονται σε σύγκλιση σε αυτή τη ρίζα, με αποτέλεσμα η δυναμική του συστήματος να συγκλίνει στην επιθυμητή δυναμική. Για μια πιο φορμαλιστική περιγραφή και για την καλύτερη κατανόηση της προαναλυθείσας μεθόδου, παρουσιάζεται και το εξής παράδειγμα από την εργασία [8]:

Έστω το βαθμωτό σύστημα:

$$\dot{y} = \phi(y) + u \quad (2.36)$$

όπου $\phi(y)$ μια άγνωστη συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε να ισχύει: $\phi_m < \phi(y) < \phi_M$, για σταθερές $\phi_m < \phi_M$.

Αρχικά, επιλέγουμε την επιθυμητή δυναμική $\dot{y} = -\lambda y$, με $\lambda > 0$, την οποία θέλουμε να έχει το σύστημα κλειστού βρόχου. Στη συνέχεια, ορίζουμε: $z = \beta_P(y) + \beta_I$ και $u = v(z, y)$. Ως εκ τούτου, προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\dot{y} = -\lambda y + [\phi(y) + v(z, y) + \lambda y] \quad (2.37)$$

Σε αυτό το στάδιο, λοιπόν, στόχο μας αποτελεί να οδηγηθεί ο όρος $f(z, y) = \phi(y) + v(z, y) + \lambda y$ ασυμπτωτικά στο μηδέν. Καταλήγουμε, συνεπώς, στο πρόβλημα αναζήτησης ρίζας, στο πλαίσιο του οποίου επιχειρείται να ορισθεί - επιλεχθεί κατάλληλη τριάδα $[\beta_P, w_I, v]$, τέτοια ώστε, αφενός, για κάθε y , να υπάρχει ένα \tilde{z}_y που να λύνει την αλγεβρική εξίσωση $f(z, y) = 0 \iff \phi(y) + v(z, y) + \lambda y = 0$, να ισχύει, δηλαδή, ότι $f(\tilde{z}_y, y) = 0$ και, αφετέρου, η τροχιά $z(t)$ να συγκλίνει ασυμπτωτικά στο \tilde{z}_y .

Επακολούθως, αναλύοντας τη δυναμική του z , προκύπτει ότι:

$$\dot{z} = w_I(y, \beta_I) + \frac{\partial \beta_P}{\partial y} [\phi(y) + v(z, y)] \quad (2.38)$$

Από την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να προσδιορίσουμε κατάλληλα τον ολοκληρωτικό όρο, ορίζοντάς τον ως:

$$w_I = \frac{\partial \beta_P}{\partial y} \lambda y \quad (2.39)$$

Με αυτήν την επιλογή του w_I , κατορθώνουμε να φέρουμε τη δυναμική του z στη μορφή $\dot{z} = A(y)f(z, y)$. Κατά αυτόν τον τρόπο, η ρίζα \tilde{z}_y αποτελεί, πλέον, σημείο ισορροπίας της δυναμικής του z .

Επομένως, στο τελευταίο βήμα πρέπει να επιλέξουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις β_P , v , προκειμένου το επιλεγμένο σημείο ισορροπίας να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και οι τροχιές του z να καταλήγουν σε αυτό. Αυτό πραγματοποιείται με την επιλογή μιας κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov, η οποία εξασφαλίζει τη σχεδίαση της τριπλέτας $[\beta_P, w_I, v]$, έχοντας ως προσανατολισμό να καταστεί εφικτή η επίτευξη του προαναφερθέντος στόχου. Μέσω αυτής της προσέγγισης, ο μη γραμμικός PI ελεγκτής προσδιορίζεται, τελικά, πλήρως.

Όπως προαναφέρθηκε, την ίδια προσέγγιση ακολουθεί και η έρευνα [6], στην οποία, συγχρόνως, παρουσιάζεται η χρήση της προτεινόμενης μεθόδου σχεδίασης μη γραμμικών PI ελεγκτών για την επίλυση του προβλήματος των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, προτείνεται κι αποδεικνύεται η λειτουργία του ακόλουθου σθεναρού ελέγχου:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^2}{2} + \lambda \int_0^t x^2(s) ds \\ u &= z \cos(z)x \end{aligned} \quad (2.40)$$

Η ιδέα αυτή επεκτείνεται στην εργασία [9] του Χ. Ψυλλάκη, όπου εφαρμόζεται η τεχνική σχεδίασης μη γραμμικών PI ελεγκτών για την αναδρομική σχεδίαση των εικονικών ελέγχων, με αποτέλεσμα η επιλογή τους να γίνεται μέσω κατάλληλων μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Με τη χρήση αυτής της σχεδίασης, αποδεικνύεται πως επιτυγχάνεται ασυμπτωτική, σθεναρή σταθεροποίηση χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων αυστηρής ανάδρασης με άγνωστες τις κατευθύνσεις ελέγχου, αλλά με φραγμένες τις μη γραμμικότητες από γνωστές συναρτήσεις της κατάστασης.

2.5 Σύγκριση Μη Γραμμικού PI Ελέγχου με Κλασικό Προσαρμοστικό Έλεγχο και Μέθοδο Nussbaum

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η ανάδειξη της αξίας της σχεδίασης ελεγκτών με αυτή τη νέα τεχνική, καθώς και τα πλεονεκτήματα και τα πιθανά μειονεκτήματά της. Αυτό γίνεται μέσω της σύγκρισής της, αρχικά με τον κλασικό προσαρμοστικό έλεγχο κι έπειτα με την τεχνική των κερδών Nussbaum.

Ο κλασικός προσαρμοστικός έλεγχος στην πιο διαδεδομένη μορφή του επιτυγχάνεται μέσω ενός παραμετροποιημένου νόμου ελέγχου κι ενός εκτιμητή των άγνωστων παραμέτρων, ο οποίος σχεδιάζεται με κριτήριο την ελαχιστοποίηση κάποιου σφάλματος παρακολούθησης / εκτίμησης [30]. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} u &= \gamma(x, \hat{\theta}) \rightarrow \text{Παραμετροποιημένος νόμος ανάδρασης} \\ \dot{\hat{\theta}} &= f(x, \hat{\theta}) \rightarrow \text{Εκτιμητής άγνωστων παραμέτρων} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Όπως αναλύθηκε στην εισαγωγή, το βασικό μειονέκτημα αυτής της τεχνικής είναι ότι, για να προσεγγισθούν ικανοποιητικά οι άγνωστες μη γραμμικότητες, η τάξη του εκτιμητή πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη. Αυτό έχει ως συνέπεια να προκύπτει το πρόβλημα των πολλών διαστάσεων (curse of dimensionality). Μια λύση σε αυτό το πρόβλημα συνιστά η μη γραμμική παραμετροποίηση, η οποία, ωστόσο, αποτελεί από μόνη της ένα πολύπλοκο πρόβλημα. Επιπλέον, αξιοσημείωτο είναι ότι, ενώ η κυρτότητα εξασφαλίζει σύγκλιση ορισμένων μεθόδων (όπως της ταχίστης καθόδου) σε ορισμένες περιοχές του χώρου καταστάσεων, στις υπόλοιπες περιοχές επιστρατεύονται συνήθως υψηλά κέρδη, ώστε να αντιμετωπισθούν οι άγνωστες μη γραμμικότητες. Τέλος, πολλές φορές, απαιτείται εκ των προτέρων γνώση ορισμένων χαρακτηριστικών του συστήματος.

Στα προαναφερθέντα θέματα, οι μη γραμμικοί PI ελεγκτές εμφανίζουν τα εξής πλεονεκτήματα:

- Δε χρειάζεται να επιλυθούν προβλήματα σε πολυδιάστατο χώρο παραμέτρων, καθώς η σχεδίαση απαιτεί απλώς την επίλυση ενός προβλήματος εύρεσης ρίζας στη δυναμική του σφάλματος.
- Δεν απαιτείται εκ των προτέρων γνώση παραμέτρων του συστήματος. Ωστόσο, αν είναι διαθέσιμη, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης στην επιθυμητή δυναμική.
- Οι παράμετροι που πρέπει να ρυθμισθούν (κέρδη) είναι πολύ λιγότερες, με αποτέλεσμα ορισμένες φορές να είναι δυνατή η πρόβλεψη των επιδράσεών τους στο εκάστοτε υπό μελέτη σύστημα.

Ακολούθως, σε σχέση με την τεχνική σχεδίασης με χρήση κερδών τύπου Nussbaum, οι μη γραμμικοί PI ελεγκτές υπερτερούν σε θέματα ευρωστίας. Προς απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, οι Georgiou και Smith αποδεικνύουν στην εργασία τους [10] ότι οι ελεγκτές με κέρδη Nussbaum δεν είναι εύρωστοι αφενός σε εξωτερικές διαταραχές (θόρυβος) κι, αφετέρου, σε

μη μοντελοποιημένα τμήματα της δυναμικής, των οποίων η επίδραση μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή στο μοντέλο του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, ακόμα και στην περίπτωση ενός απλού γραμμικού συστήματος (με άγνωστη κατεύθυνση ελέγχου), μικρές διαταραχές, υπό την επίδραση ενός νόμου ελέγχου με κέρδος τύπου Nussbaum, μπορούν να οδηγήσουν το σύστημα σε αστάθεια. Αντιθέτως, ο μη γραμμικός PI ελεγκτής παρουσιάζει ευρωστία τόσο σε ταχέως μεταβαλλόμενα τμήματα μη μοντελοποιημένης δυναμικής όσο και στην περίπτωση επίδρασης μετρήσιμου θορύβου, κάτι το οποίο είναι λογικό, εφόσον η σχεδιάσή του πραγματοποιείται με επιστράτευση τεχνικών ευστάθειας που εγγυώνται σθεναρότητα σε μικρές διαταραχές.

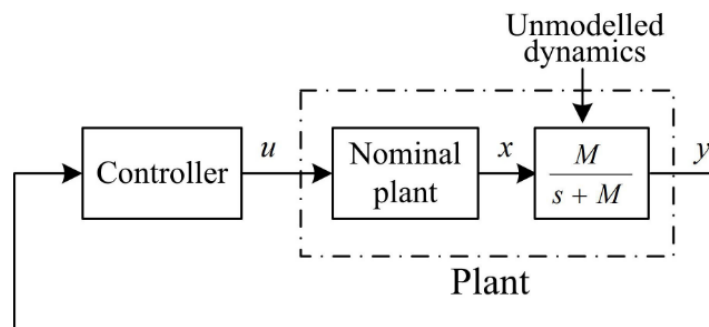
Πιο αναλυτικά, οι Georgiou και Smith [10] εξετάζουν την επίδραση του νόμου ελέγχου με χρήση κερδών τύπου Nussbaum:

$$\begin{aligned} u &= \zeta^2 \cos(\zeta)y \\ \dot{\zeta} &= y^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

στο σύστημα ενός απλού ολοκληρωτή που έχει μια μη μοντελοποιημένη δυναμική πρώτης τάξης στην έξοδο:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bu \\ \dot{y} &= M(x - y) \end{aligned} \quad (2.43)$$

με άγνωστη την παράμετρο b (κατεύθυνση ελέγχου).



Σχήμα 2.4: Το συνολικό σύστημα κλειστού βρόχου

Αποδεικνύουν, λοιπόν, ότι το συγκεκριμένο σύστημα με τον παραπάνω νόμο ελέγχου οδηγείται σε αστάθεια.

Από την άλλη, η εφαρμογή ενός μη γραμμικού PI νόμου ελέγχου:

$$\begin{aligned} u &= z \cos(z)y \\ z &= \frac{y^2}{2} + \lambda \int_0^t y^2(s)ds \end{aligned} \quad (2.44)$$

στη λογική που προτείνουν οι Ortega, Astolfi, Barabanov στο [6] σταθεροποιεί το σύστημα για $\lambda < M$. Επομένως, ο μη γραμμικός PI ελεγκτής αντιμετωπίζει το πρόβλημα των γρήγορων παρασιτικών διαταραχών πρώτης τάξης, στην περίπτωση που το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές.

Στην εργασία [11], αποδεικνύεται η ευρωστία του μη γραμμικού PI ελεγκτή και για συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + bu \\ \dot{y} &= M(x - y) \end{aligned} \quad (2.45)$$

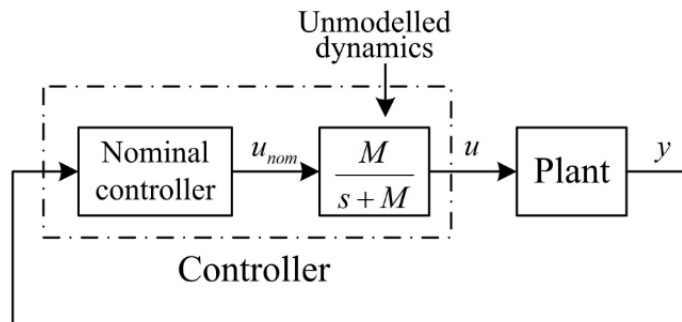
όπου $f(x) = a(x)x$ και $a(x) \in [a_1, a_2], \forall x \in \mathbb{R}$. Σε αυτό το σημείο, αξίζει να σημειωθεί ότι η δυναμική είναι άγνωστη κι, επομένως, πιθανώς το σύστημα να είναι ασταθές, ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν τα a_1 και a_2 .

Στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή ενός μη γραμμικού PI νόμου ελέγχου:

$$\begin{aligned} u &= k(z)y \\ z &= \frac{y^2}{2} + \lambda \int_0^t y^2(s)ds \end{aligned} \quad (2.46)$$

εξασφαλίζει την ευστάθεια του συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι η σχεδίαση ικανοποιεί ορισμένες προδιαγραφές.

Επιπροσθέτως, στην εργασία [12], η ευρωστία του μη γραμμικού PI ελεγκτή επεκτείνεται και στην περίπτωση που αγνοείται η δυναμική του επενεργητή, η οποία θεωρείται γρήγορη. Το φαινόμενο αυτό είναι συχνό σε πολλά συστήματα, όπως αυτό του ρομποτικού βραχίονα, στο οποίο αφενός οι ροπές θεωρούνται ως είσοδοι κι αφετέρου αγνοούνται οι δυναμικές των ηλεκτρικών κινητήρων που ασχούν τις ροπές αυτές. Εξετάζεται, λοιπόν, το κάτωθι σύστημα:



Σχήμα 2.5: Το συνολικό σύστημα κλειστού βρόχου

το οποίο εκφράζεται από τις εξισώσεις:

$$\dot{y} = f(y) + b u \quad (2.47)$$

$$\dot{u} = M(u_{nom} - u) \quad (2.48)$$

με πρώτης τάξης μη μοντελοποιημένη δυναμική στην είσοδο και την προϋπόθεση ότι:

$$f(y) = a(y) y \quad (2.49)$$

$$a(y) \in [a_1, a_2], \forall y \in \mathbb{R} \quad (2.50)$$

Για το σύστημα αυτό αποδεικνύεται ότι αν εφαρμόσουμε τον έλεγχο:

$$u_{nom} = k(z) y \quad (2.51)$$

$$z = \frac{y^2}{2} + \lambda \int_0^t y^2(s) ds \quad (2.52)$$

του οποίου η σχεδίαση πληροί ορισμένες προδιαγραφές, εξασφαλίζεται ότι όλα τα σήματα παραμένουν φραγμένα και επιτυγχάνεται σταθεροποίηση.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να γίνει αναφορά στο γεγονός ότι τα δύο προαναφερθέντα προβλήματα είναι εφικτό να επιλυθούν και με την αξιοποίηση της τεχνικής του καθολικού προσαρμοστικού ελέγχου (universal adaptive control), όπως αυτή αναλύεται στις έρευνες [13], [14] και [17]. Η τεχνική αυτή, ωστόσο, παρουσιάζει προβλήματα στη διάρκεια της μεταβατικής κατάστασης, όπως, παραδείγματος χάριν, μεγάλη υπερύψωση και μικρή ταχύτητα σύγκλισης του συστήματος στην επιθυμητή κατάσταση, εξαιτίας της αργής σύγκλισης των εκτιμώμενων παραμέτρων.

Εν κατακλείδι, η δυνατότητα αποφυγής υπερπαραμετροποίησης και η αποδεδειγμένα βελτιωμένη ευρωστία αποτελούν τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά των μη γραμμικών PI ελεγκτών εν συγκρίσει με τους υπόλοιπους τύπους ελεγκτών που επιλύουν τα ίδια προβλήματα, όπως για παράδειγμα η άγνωστη δυναμική και οι άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου. Παρόλα αυτά, όπως άλλωστε και στις περισσότερες τεχνικές σχεδίασης σθεναρού ελέγχου, συνήθως αναγκαία προϋπόθεση αποτελεί να είναι φραγμένα τα άγνωστα τμήματα της δυναμικής και, μάλιστα, τα φράγματά τους / οι συναρτήσεις που τα φράσσουν να είναι γνωστά / γνωστές αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 3

Διατύπωση Προβλήματος - Θεωρητικά Αποτελέσματα

3.1 Πρόβλημα Ελέγχου MIMO Συστήματος με Άγνωστες Κατευθύνσεις Ελέγχου

Έστω η ακόλουθη κλάση μη γραμμικών συστημάτων:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

όπου $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης, $u \in \mathbb{R}^m$ η είσοδος του συστήματος και $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ τοπικά Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η $f(t, 0)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ως προς t στο $[0, +\infty)$.

Έστω, επιπλέον, ότι η έξοδος του συστήματος, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, ορίζεται ως εξής:

$$y(t) = h(t, x(t)) \quad (3.2)$$

όπου $h : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ μια τοπικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση.

3.1.1 Βασικές Υποθέσεις

Υπόθεση 1. Σε αυτό το σημείο, υποθέτουμε την ύπαρξη κατάλληλων σταθερών \hat{g} , \hat{h} και c_h , ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\|g(t, x(t))\| \leq \hat{g}, \quad \hat{g} > 0, \quad \forall (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

$$\|h(t, x(t))\| \leq \hat{h} \|x(t)\|, \quad \hat{h} > 0, \quad \forall (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

$$\left\| \frac{\partial h(t, x(t))}{\partial t} \right\| \leq c_h, \quad c_h > 0, \quad \forall (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

Υπόθεση 2. Θεωρούμε ότι υπάρχει κατάλληλο $K_0 \in \mathbb{R}^{m \times p}$, όπου m το πλήθος των εισόδων του συστήματος και p το πλήθος των εξόδων του, τέτοιο ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}, f(t, x(t)) + g(t, x(t)) K_0 h(t, x(t)) \right\rangle \leq -\alpha_3 \|x(t)\|^\nu \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right)^T g(t, x(t)) K_0 h(t, x(t)) \leq -\alpha_5 \|x(t)\|^\nu \quad (3.7)$$

για $\alpha_3, \alpha_5 > 0$, $\nu \geq 1$ και κάποια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση Lyapunov:

$$V : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

Υπόθεση 3. Για τη συνάρτηση Lyapunov, πέραν από τις συνθήκες που παρατέθηκαν παραπάνω, θεωρούμε ότι ισχύουν και οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha_1 \|x(t)\|^\nu \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|x(t)\|^\nu, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \nu \geq 1 \quad (3.8)$$

$$\left\| \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right\| \leq \alpha_4 \|x(t)\|^{\nu-1}, \quad \alpha_4 > 0, \quad \nu \geq 1 \quad (3.9)$$

3.2 Προτεινόμενος Νόμος Ελέγχου

Για τον έλεγχο του συστήματος πολλαπλών εισόδων - πολλαπλών εξόδων (3.1) - (3.2) σχεδιάζουμε ένα μη γραμμικό PI νόμο ελέγχου, ο οποίος είναι της ακόλουθης μορφής:

$$u(t) = K(\kappa(t)) y(t) \quad (3.10)$$

Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση $\kappa(t)$ αποτελεί τον PI όρο και ορίζεται ως:

$$\kappa(t) = \|h(t, x(t))\|^\nu + \lambda \int_0^t D_\delta^\nu (\|h(\tau, x(\tau))\|) d\tau, \quad \lambda > 0, \quad \kappa(0) = \kappa_0, \quad \nu \geq 1 \quad (3.11)$$

Τέλος, όσον αφορά τη συνάρτηση $K(\kappa)$, έχει την εξής μορφή:

$$K(\kappa) = \phi(\kappa) \bar{K} \left(\tilde{\phi}(\kappa) \right) \quad (3.12)$$

όπου:

- $\phi(\kappa) \in \mathbb{K}_\infty$
- $\tilde{\phi}(\kappa) \in \mathcal{A}$, δηλαδή μία γνησίως αύξουσα ως προς το κ συνάρτηση, με $\tilde{\phi}(0) = 0$, η οποία πληροί την ιδιότητα (2.1)

και επιπλέον:

$$\bar{K} \left(\tilde{\phi}(\kappa) \right) := \left[\sin(\omega_{ij} \tilde{\phi}(\kappa)) \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, p}} \quad (3.13)$$

$$\omega_{ij} := \omega_0 N^{p(i-1)+j-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p, \quad N \in \mathbb{R}_+ \quad (3.14)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας τη σχέση (3.10) στην (3.1), προκύπτει:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) K(\kappa(t)) y(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.15)$$

Τέλος, με τη χρήση της (3.2) στην (3.15), λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) K(\kappa(t)) h(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.16)$$

3.2.1 Ικανότητα Προσέγγισης του Πίνακα \bar{K}

Ο πίνακας \bar{K} , όπως αυτός παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα, μπορεί να προσεγγίσει με κατάλληλη επιλογή του N οποιονδήποτε πίνακα $m \times p$ με στοιχεία στο διάστημα $[-1, 1]$. Η ιδιότητα αυτή περιγράφεται αναλυτικά στο παρακάτω λήμμα:

Λήμμα. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει κατάλληλα μεγάλο $N = N(\epsilon)$, $\rho = \rho(\epsilon) > 0$ και ακολουθία $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ με $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = +\infty$ τέτοια ώστε για όλα τα διαστήματα της μορφής $[\xi_i - \rho, \xi_i]$ να ισχύει:

$$\left\| \bar{K}(\tilde{\phi}) - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right\|_F \leq \epsilon, \quad \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i], \quad i \in \mathbb{N}_+ \quad (3.17)$$

Με το σύμβολο $\|\cdot\|_F$ αναπαριστούμε τη Frobenius νόρμα, η οποία, βάσει του ορισμού στο Κεφάλαιο 2, θα είναι για τον $(m \times p)$ πίνακα K_0 ίση με:

$$\|K_0\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p |K_{0_{ij}}|^2}$$

Σημείωση: Ο όρος $\frac{K_0}{\|K_0\|_F}$ της (3.17) είναι $(m \times p)$ πίνακας με στοιχεία στο $[-1, 1]$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε την ανάλυσή μας από την πιο αργή συχνότητα, ω_0 . Πιο ειδικά, ορίζουμε ως $\tilde{\phi}_0$ το μικρότερο θετικό $\tilde{\phi}$ για το οποίο ισχύει ότι:

$$\sin(\omega_0 \tilde{\phi}) = \frac{K_{0,11}}{\|K_0\|_F}$$

Στη συνέχεια, γύρω από το $\tilde{\phi}_0$ (κέντρο) και με ακτίνα $\rho_1 = \frac{3}{8}T_1$ (όπου T_1 : η περίοδος του ημιτόνου με συχνότητα $\omega_1 = \omega_0 N$) εκατέρωθεν του $\tilde{\phi}_0$, ορίζουμε το διάστημα $I_1 = [\tilde{\phi}_0 - \rho_1, \tilde{\phi}_0 + \rho_1]$. Επιπρόσθετα, θεωρούμε $I_1^- = [\tilde{\phi}_0 - \rho_1, \tilde{\phi}_0)$ και $I_1^+ = [\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_0 + \rho_1]$. Τότε, έχουμε ότι:

$$\exists \tilde{\phi}_1 \in I_1 : \sin(\omega_1 \tilde{\phi}_1) = \frac{K_{0,12}}{\|K_0\|_F}$$

Φυσικά, όπως είναι απόλυτα λογικό βάσει του τρόπου ορισμού των ξένων υποδιαστημάτων I_1^- και I_1^+ , θα ισχύει ότι $\tilde{\phi}_1 \in I_1^-$ ή $\tilde{\phi}_1 \in I_1^+$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, λοιπόν, έστω $\tilde{\phi}_1 \in I_1^+$.

Ομοίως με προηγούμενως, γύρω από το $\tilde{\phi}_1$ (κέντρο) και με ακτίνα $\rho_2 = \frac{3}{8}T_2$ (όπου T_2 : η περίοδος του ημιτόνου με συχνότητα $\omega_2 = \omega_0 N^2$) εκατέρωθεν του $\tilde{\phi}_1$, ορίζουμε το διάστημα $I_2 =$

$[\tilde{\phi}_1 - \rho_2, \tilde{\phi}_1 + \rho_2]$. Επιπρόσθετα, θεωρούμε $I_2^- = [\tilde{\phi}_1 - \rho_2, \tilde{\phi}_1)$ και $I_2^+ = [\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_1 + \rho_2]$. Τότε, έχουμε ότι:

$$\exists \tilde{\phi}_2 \in I_2 : \sin(\omega_2 \tilde{\phi}_2) = \frac{K_{0,13}}{\|K_0\|_F}$$

Φυσικά, όπως είναι απόλυτα λογικό βάσει του τρόπου ορισμού των ξένων υποδιαστημάτων I_2^- και I_2^+ , θα ισχύει ότι $\tilde{\phi}_2 \in I_2^-$ ή $\tilde{\phi}_2 \in I_2^+$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, λοιπόν, έστω $\tilde{\phi}_2 \in I_2^+$.

Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή μέχρι και τον όρο ημιτόνου με τη δεύτερη πιο γρήγορη συχνότητα, ω_{mp-2} , καταλήγουμε στο εξής:

$$\exists \tilde{\phi}_{mp-2} \in I_{mp-2} : \sin(\omega_{mp-2} \tilde{\phi}_{mp-2}) = \frac{K_{0,mp-1}}{\|K_0\|_F}$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\tilde{\phi}_{mp-2} \in I_{mp-2}^+$.

Εν συνεχεία, γύρω από το $\tilde{\phi}_{mp-2}$ (κέντρο) και με ακτίνα $\rho_{mp-1} = \frac{3}{8}T_{mp-1}$ (όπου T_{mp-1} : η περίοδος του ημιτόνου με συχνότητα $\omega_{mp-1} = \omega_0 N^{mp-1}$) εκατέρωθεν του $\tilde{\phi}_{mp-2}$, ορίζουμε το διάστημα $I_{mp-1} = [\tilde{\phi}_{mp-2} - \rho_{mp-1}, \tilde{\phi}_{mp-2} + \rho_{mp-1}]$. Επιπρόσθετα, θεωρούμε τα υποδιαστήματα $I_{mp-1}^- = [\tilde{\phi}_{mp-2} - \rho_{mp-1}, \tilde{\phi}_{mp-2})$ και $I_{mp-1}^+ = [\tilde{\phi}_{mp-2}, \tilde{\phi}_{mp-2} + \rho_{mp-1}]$. Τότε, έχουμε ότι:

$$\exists \tilde{\phi}_{mp-1} \in I_{mp-1} : \sin(\omega_{mp-1} \tilde{\phi}_{mp-1}) = \frac{K_{0,mp}}{\|K_0\|_F} \quad (3.18)$$

Κατά την ίδια λογική με τις προηγούμενες περιπτώσεις, είναι προφανές βάσει του τρόπου ορισμού των ξένων υποδιαστημάτων I_{mp-1}^- και I_{mp-1}^+ πως θα ισχύει ότι $\tilde{\phi}_{mp-1} \in I_{mp-1}^-$ ή $\tilde{\phi}_{mp-1} \in I_{mp-1}^+$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, λοιπόν, έστω $\tilde{\phi}_{mp-1} \in I_{mp-1}^+$.

Στο σημείο αυτό, ορίζουμε το:

$$\tilde{\phi}_{mp-1}^* := \tilde{\phi}_{mp-1} - \frac{\epsilon'}{\omega_{mp-1}} < \tilde{\phi}_{mp-1} \quad (3.19)$$

με $\tilde{\phi}_{mp-1}^* \in I_{mp-1}^+$, αλλά και το διάστημα:

$$I_{mp-1}^* := [\tilde{\phi}_{mp-1}^*, \tilde{\phi}_{mp-1}] \quad (3.20)$$

Κατά αυτόν τον τρόπο, έχει ορισθεί, πλέον, το διάστημα, στο οποίο θα πραγματοποιηθεί η μελέτη σχετικά με τον τρόπο μεταβολής των επιμέρους όρων $|\Delta K_{(i-1)p+j-1}| = \left| \bar{K}_{ij} - \frac{K_{0,ij}}{\|K_0\|_F} \right|$ κι, ως εκ τούτου, της νόρμας $\|\Delta K\| = \left\| \bar{K}(\tilde{\phi}) - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right\|_F$.

Τότε, ξεκινώντας από τον όρο ημιτόνου με την πιο γρήγορη συχνότητα, ω_{mp-1} , κι επιστρατεύοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής, θα ισχύει για κάθε $\tilde{\phi} \in I_{mp-1}^*$ και κάποιο $\xi \in [\omega_{mp-1} \tilde{\phi}, \omega_{mp-1} \tilde{\phi}_{mp-1}]$ ότι:

$$\begin{aligned} |\Delta K_{mp-1}| &:= \left| \sin(\omega_{mp-1} \tilde{\phi}) - \sin(\omega_{mp-1} \tilde{\phi}_{mp-1}) \right| \\ &= |\cos(\xi)| \left| \omega_{mp-1} \tilde{\phi} - \omega_{mp-1} \tilde{\phi}_{mp-1} \right| \leq \omega_{mp-1} \left| \tilde{\phi} - \tilde{\phi}_{mp-1} \right| \\ &\leq \omega_{mp-1} \left| \tilde{\phi}_{mp-1}^* - \tilde{\phi}_{mp-1} \right| = \omega_{mp-1} \left| -\frac{\epsilon'}{\omega_{mp-1}} \right| \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε:

$$|\Delta K_{mp-1}| \leq \epsilon' \quad (3.21)$$

Υπό το ίδιο πρίσμα λογικής, προχωράμε, ενδεικτικά, στη μελέτη και των δύο επόμενων όρων.

Συνεπώς, λαμβάνουμε ότι:

$$|\Delta K_{mp-2}| \leq \omega_{mp-2} |\tilde{\phi}_{mp-1} - \tilde{\phi}_{mp-2}|$$

Ωστόσο, εξ ορισμού των $\tilde{\phi}_{mp-1}$ και $\tilde{\phi}_{mp-2}$, θα ισχύει ότι:

$$\tilde{\phi}_{mp-1} - \tilde{\phi}_{mp-2} \leq \rho_{mp-1}$$

Κατόπιν, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο λόγος μεταξύ δύο διαδοχικών συχνοτήτων είναι σταθερός και ίσος με $\frac{\omega_r}{\omega_{r-1}} = N \iff \frac{T_r}{T_{r-1}} = \frac{1}{N}$, οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση:

$$|\Delta K_{mp-2}| \leq \frac{2\pi}{T_{mp-2}} \rho_{mp-1} = \frac{2\pi}{T_{mp-2}} \frac{3}{8} T_{mp-1} = \frac{3\pi}{4} \frac{T_{mp-1}}{T_{mp-2}} = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{N}$$

Όσον αφορά τον ακριβώς επόμενο όρο, ισχύει ότι:

$$|\Delta K_{mp-3}| \leq \omega_{mp-3} |\tilde{\phi}_{mp-1} - \tilde{\phi}_{mp-3}| = \omega_{mp-3} \left| (\tilde{\phi}_{mp-1} - \tilde{\phi}_{mp-2}) + (\tilde{\phi}_{mp-2} - \tilde{\phi}_{mp-3}) \right|$$

Κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας, προκύπτει:

$$|\Delta K_{mp-3}| \leq \omega_{mp-3} \left\{ \left| \tilde{\phi}_{mp-1} - \tilde{\phi}_{mp-2} \right| + \left| \tilde{\phi}_{mp-2} - \tilde{\phi}_{mp-3} \right| \right\}$$

Ωστόσο, εξ ορισμού των $\tilde{\phi}_{mp-1}$, $\tilde{\phi}_{mp-2}$ και $\tilde{\phi}_{mp-3}$, θα ισχύουν τα εξής:

$$\tilde{\phi}_{mp-1} - \tilde{\phi}_{mp-2} \leq \rho_{mp-1}$$

$$\tilde{\phi}_{mp-2} - \tilde{\phi}_{mp-3} \leq \rho_{mp-2}$$

Επειτα, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο λόγος μεταξύ δύο οποιωνδήποτε συχνοτήτων είναι σταθερός και ίσος με $\frac{\omega_r}{\omega_{r-i}} = N^i \iff \frac{T_r}{T_{r-i}} = \frac{1}{N^i}$, οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} |\Delta K_{mp-3}| &\leq \frac{2\pi}{T_{mp-3}} \rho_{mp-1} + \frac{2\pi}{T_{mp-3}} \rho_{mp-2} \\ &= \frac{2\pi}{T_{mp-3}} \frac{3}{8} T_{mp-1} + \frac{2\pi}{T_{mp-3}} \frac{3}{8} T_{mp-2} = \frac{3\pi}{4} \frac{T_{mp-2} + T_{mp-1}}{T_{mp-3}} \\ &= \frac{3\pi}{4} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \right) \end{aligned}$$

Ομοίως, ακολουθούμε την ίδια λογική και για όλους τους υπόλοιπους όρους, οπότε και φτάνουμε στον τελευταίο όρο $|\Delta K_0|$, για τον οποίον, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο λόγος μιας οποιασδήποτε συχνότητας προς την ω_0 είναι σταθερός και ίσος με $\frac{\omega_r}{\omega_0} = N^r \iff \frac{T_r}{T_0} = \frac{1}{N^r}$, οδηγούμαστε, μετά από πράξεις, στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} |\Delta K_0| &\leq \frac{3\pi}{4} \frac{T_1 + T_{mp-2} + \dots + T_{mp-1}}{T_0} \\ &= \frac{3\pi}{4} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \dots + \frac{1}{N^{mp-1}} \right) \end{aligned}$$

Συγκεντρωτικά, λοιπόν, έχοντας καταλήξει σε μια κλειστή μορφή για το άνω φράγμα καθενός από τους όρους $|\Delta K_i|$, $i = 0, 1, \dots, mp-1$, λαμβάνουμε για τη ζητούμενη νόρμα:

$$\|\Delta K\|_F^2 \leq \epsilon'^2 + \left(\frac{3\pi}{4} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{mp-1} \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{N^j} \right)^2 \right\}$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η ακολουθία $\frac{1}{N^j}$ του εσωτερικού αθροίσματος του διπλού αθροίσματος αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $a_1 = \frac{1}{N}$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{N}$. Σύμφωνα με τη σχετική θεωρία, λοιπόν, το άθροισμα i -το-πλήθος όρων της γεωμετρικής προόδου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_{j=1}^i \frac{1}{N^j} = \frac{1}{N} \frac{1 - \frac{1}{N^i}}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1 - \frac{1}{N^i}}{N - 1} = \frac{1}{N - 1} - \frac{1}{N - 1} \frac{1}{N^i}$$

Επομένως, για το τετράγωνο του παραπάνω αθροίσματος έχουμε ότι:

$$\left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{N^j} \right)^2 = \frac{1}{(N - 1)^2} - 2 \frac{1}{(N - 1)^2} \frac{1}{N^i} + \frac{1}{(N - 1)^2} \frac{1}{N^{2i}}$$

Ως εκ τούτου, το άνω φράγμα της μελετώμενης νόρμας μετασχηματίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\|\Delta K\|_F^2 \leq \epsilon'^2 + \frac{9\pi^2}{16} \sum_{i=1}^{mp-1} \left\{ \frac{1}{(N - 1)^2} - 2 \frac{1}{(N - 1)^2} \frac{1}{N^i} + \frac{1}{(N - 1)^2} \frac{1}{N^{2i}} \right\}$$

και, με απλές πράξεις, οδηγούμαστε στην εξής έκφραση:

$$\|\Delta K\|_F^2 \leq \epsilon'^2 + \frac{9\pi^2}{16} \left\{ \frac{mp-1}{(N-1)^2} - \frac{2}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^{mp-1} \frac{1}{N^i} + \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^{mp-1} \frac{1}{N^{2i}} \right\} \quad (3.22)$$

Ακολουθώντας την προηγούμενη ανάλυση, το πρώτο άθροισμα της (3.22) αποτελεί άθροισμα $(mp - 1)$ -το-πλήθος όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = \frac{1}{N}$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{N}$. Ειδικότερα, το άθροισμα αυτό θα δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{mp-1} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N} \frac{1 - \frac{1}{N^{mp-1}}}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1 - \frac{1}{N^{mp-1}}}{N - 1} = \frac{1}{N - 1} - \frac{1}{N - 1} \frac{1}{N^{mp-1}}$$

Ομοίως, το δεύτερο άθροισμα της (3.22) αποτελεί άθροισμα $(mp - 1)$ -το-πλήθος όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = \frac{1}{N^2}$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{N^2}$. Έτσι, το επιθυμητό άθροισμα υπολογίζεται μέσω της έκφρασης:

$$\sum_{i=1}^{mp-1} \frac{1}{N^{2i}} = \frac{1}{N^2} \frac{1 - \frac{1}{N^{2(mp-1)}}}{1 - \frac{1}{N^2}} = \frac{1 - \frac{1}{N^{2(mp-1)}}}{N^2 - 1} = \frac{1}{N^2 - 1} - \frac{1}{N^2 - 1} \frac{1}{N^{2(mp-1)}}$$

Επομένως, η σχέση (3.22) μετασχηματίζεται κατά τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} \|\Delta K\|_F^2 \leq \epsilon'^2 + \frac{9\pi^2}{16} \left\{ \frac{mp-1}{(N-1)^2} - \frac{2}{(N-1)^2} \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N-1} \frac{1}{N^{mp-1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(N-1)^2} \left(\frac{1}{N^2-1} - \frac{1}{N^2-1} \frac{1}{N^{2(mp-1)}} \right) \right\} \end{aligned}$$

και, τελικώς, μετά από πράξεις:

$$\begin{aligned} \|\Delta K\|_F^2 \leq \epsilon'^2 + \frac{9\pi^2}{16} \frac{1}{(N-1)^2} \left\{ (mp-1) - \frac{2}{N-1} \left(1 - \frac{1}{N^{mp-1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{N^2-1} \left(1 - \frac{1}{N^{2(mp-1)}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της ανισότητας (3.23) σχετίζεται αντιστρόφως ανάλογα με την τιμή του N . Πιο συγκεκριμένα, είναι ευκρινές από τη μελετώμενη σχέση (3.23) ότι ο δεύτερος όρος του αθροίσματος του δεξιού μέλους της ανισότητας είναι αντιστρόφως ανάλογος διαφόρων πολυωνυμικών εκφράσεων του N . Μεταξύ των εκφράσεων αυτών, εκείνη που 'μικραίνει' με τον πιο αργό ρυθμό, όταν η τιμή του N αυξάνεται, είναι η $\frac{1}{(N-1)^2}$, εφόσον τα πολυώνυμα των παρονομαστών στις υπόλοιπες εκφράσεις έχουν βαθμό στο εύρος $[3, 2(mp+1)]$. Έτσι, λαμβάνοντας κατάλληλο N , δηλαδή επαρκώς μεγάλο, ώστε ακόμα και η έκφραση $\frac{1}{(N-1)^2}$ να θεωρείται αμελητέα, ο δεύτερος όρος του αθροίσματος της σχέσης (3.23) λαμβάνει πολύ μικρή τιμή και η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στη ζητούμενη ανισότητα για την υπό εξέταση νόρμα. Πιο συγκεκριμένα:

$$\|\Delta K\|_F^2 \leq \epsilon'^2 + \epsilon_N'^2 := \epsilon^2 \implies \left\| \bar{K}(\tilde{\phi}) - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right\|_F \leq \epsilon \quad (3.24)$$

Φυσικά, είναι προφανές, λόγω περιοδικότητας, ότι η προηγούμενη ανάλυση ισχύει για κάθε διάστημα της μορφής:

$$I_{mp-1, i}^* = \left[\tilde{\phi}_{mp-1}^* + \frac{2\pi}{\omega_0} i, \tilde{\phi}_{mp-1} + \frac{2\pi}{\omega_0} i \right] = [\xi_i - \rho, \xi_i], \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.25)$$

Ο λόγος που το περιοδικό διάστημα της σχέσης (3.25) ορίζεται κατά αυτόν τον τρόπο είναι διότι για δύο διαδοχικούς όρους της ακολουθίας $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ μάς δίνει:

$$\xi_{i+1} - \xi_i = \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 \quad (3.26)$$

Πιο ειδικά, το αποτέλεσμα της (3.26) είναι το επιθυμητό, καθώς στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή που η $\tilde{\phi}(\kappa)$ λαμβάνει την τιμή ξ_i μέχρι τη στιγμή που λαμβάνει την τιμή ξ_{i+1} , θέλουμε ο όρος ημιτόνου με την πιο αργή συχνότητα, $\sin(\omega_0 \tilde{\phi})$, να έχει μόλις προλάβει να ολοκληρώσει μια περίοδο του.

Τέλος, από όλη την παραπάνω διαδικασία, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.18), (3.20) και (3.25), αποδεικνύεται ότι η σχέση (3.17) ισχύει για:

$$\xi_i = \frac{1}{\omega_{mp-1}} \sin^{-1} \left(\frac{K_{0,mp}}{\|K_0\|_F} \right) + \frac{2\pi}{\omega_0} i \quad (3.27)$$

και για:

$$\rho = \frac{\epsilon'}{\omega_{mp-1}} \quad (3.28)$$

■

3.3 Θεώρημα Ύπαρξης Φραγμένων Λύσεων και Σύγκλισης

Έχοντας ως βάση αφενός τον μη γραμμικό PI νόμο ελέγχου που σχεδιάστηκε και παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.2 κι αφετέρου το λήμμα που παρατέθηκε στην υποενότητα 3.2.1, καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα, για το σύστημα (3.1) - (3.2), όπως αυτό ορίστηκε στην αρχή του παρόντος Κεφαλαίου.

Θεώρημα. Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (3.1) με έξοδο που δίνεται από τη σχέση (3.2). Αν οι υποθέσεις που παρουσιάζονται στην υποενότητα 3.1.1 ικανοποιούνται από το μελετώμενο σύστημα και εφαρμοστεί σε αυτό ο νόμος ελέγχου (3.10) - (3.14), τότε, για κατάλληλα μεγάλο N , όπως αυτό προκύπτει από τις σχέσεις (3.23) - (3.24) και (3.43), ισχύουν τα κάτωθι:

- * Η $\kappa(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για $t \in [0, +\infty)$.
- * Η $x(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για $t \in [0, +\infty)$.
- * Η $y(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για $t \in [0, +\infty)$.
- * Δεν υφίσταται πεπερασμένος χρόνος απόδρασης.
- * Η $y(t)$, για $t \rightarrow +\infty$, τείνει στη δ -γειτονιά του 0, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| \leq \delta$$

Απόδειξη. Η σχέση (3.16) μετασχηματίζεται διαμέσου της χρήσης της εξίσωσης (3.12) στην παρακάτω έκφραση:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) \phi(\kappa(t)) \bar{K} \left(\tilde{\phi}(\kappa(t)) \right) h(t, x(t)), \quad x_0 = x(0) \quad (3.29)$$

Για λόγους διευκόλυνσης και απλότητας, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\dot{x} = \dot{x}(t), \quad f = f(t, x(t)), \quad g = g(t, x(t)), \quad \phi = \phi(\kappa(t)), \quad \bar{K} = \bar{K} \left(\tilde{\phi}(\kappa(t)) \right), \quad h = h(t, x(t)) \quad (3.30)$$

Συνεπώς, η σχέση (3.29) τροποποιείται και λαμβάνει τη μορφή:

$$\dot{x} = f + g \phi \bar{K} h \iff \dot{x} = f + g K_0 h + g (\phi \bar{K} - K_0) h \quad (3.31)$$

Έπειτα, η χρονική παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα (3.31) ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T \dot{x} \iff \\ \dot{V} &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T [f + g K_0 h + g (\phi \bar{K} - K_0) h] \iff \\ \dot{V} &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T (f + g K_0 h) + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ο συνδυασμός των εκφράσεων (3.6) και (3.32) μάς δίνει την παρακάτω σχέση:

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 \|x\|^\nu + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h \quad (3.33)$$

Κατόπιν, από τη δεξιά ανισότητα της σχέσης (3.8), λαμβάνουμε ότι:

$$\|x\|^\nu \geq \frac{V}{\alpha_2} \iff -\|x\|^\nu \leq -\frac{V}{\alpha_2}$$

Έτσι, η (3.33) λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\dot{V} \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h \quad (3.34)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας (3.34) με την ποσότητα $e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} \dot{V} &\leq -e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} V + e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h \iff \\ e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} \dot{V} + e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} V &\leq e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h \iff \\ \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} V \right) &\leq e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h \iff \\ \frac{d}{dt} \underbrace{\left(e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} V - \int_0^t e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} s} \left(\frac{\partial V(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds \right)}_{Q(t)} &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Επομένως, από τη σχέση (3.35), λαμβάνουμε ότι η συνάρτηση $Q(t)$ είναι φθίνουσα. Έτσι, ισχύει ότι:

$$t \geq 0 \implies Q(t) \leq Q(0) \implies$$

$$e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} V(t) - \int_0^t e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} s} \left(\frac{\partial V(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds \leq V_0 \iff$$

$$V(t) \leq e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t} V_0 + \int_0^t e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} (t-s)} \left(\frac{\partial V(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds \quad (3.36)$$

Στη συνέχεια, απομονώνουμε τον προς ολοκλήρωση όρο της σχέσης (3.36) και, κάνοντας επιστράτευση των συμβολισμών (3.30), έχουμε:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g \frac{K_0}{\|K_0\|_F} h + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g \left[\bar{K}(\tilde{\phi}) - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right] h \quad (3.37)$$

Όσον αφορά τον πρώτο όρο του αθροίσματος της έκφρασης (3.37), λόγω της σχέσης (3.7), προκύπτει:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g \frac{K_0}{\|K_0\|_F} h \leq -\frac{\alpha_5}{\|K_0\|_F} \|x\|^\nu \quad (3.38)$$

Προκειμένου να προχωρήσουμε στη μελέτη του δεύτερου όρου του αθροίσματος της σχέσης (3.37), θεωρούμε πρώτα ότι η συνάρτηση $\kappa(t)$ δεν είναι φραγμένη.

Σημείωση: Εφόσον η συνάρτηση $\tilde{\phi}$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα κι έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$, θα ισχύει ότι: Αν $\kappa(t) \rightarrow +\infty$, τότε και $\tilde{\phi}(\kappa(t)) \rightarrow +\infty$.

Υπό αυτήν την προϋπόθεση, λοιπόν, λόγω συνέχειας, θα υπάρχουν χρονικές ακολουθίες $\{t'_i\}_{i=1}^\infty$ και $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ με:

- $t'_i = \min \{t \mid \tilde{\phi}(\kappa(t)) = \xi_i\}$
- $t_i = \max \{t < t'_i \mid \tilde{\phi}(\kappa(t)) = \xi_i - \rho\}$, δηλαδή η t_i είναι η τελευταία χρονική στιγμή πριν την t'_i , κατά την οποία η συνάρτηση $\tilde{\phi}(\kappa)$ λαμβάνει την τιμή $\xi_i - \rho$

για κάθε ξ_i της ακολουθίας $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, όπως αυτά ορίζονται στη σχέση (3.27) και στο λήμμα της υποενότητας 3.2.1, αντίστοιχα.

Έτσι, εξ ορισμού λαμβάνουμε ότι τη χρονική στιγμή t_i ισχύει $\tilde{\phi}(\kappa(t_i)) = \xi_i - \rho$, ενώ τη χρονική στιγμή t'_i έχουμε $\tilde{\phi}(\kappa(t'_i)) = \xi_i$. Επιπλέον, όπως έχουμε ορίσει στην υποενότητα 2.1.2, η συνάρτηση $\tilde{\phi}$ είναι συνεχής. Επομένως, οι τιμές που θα λαμβάνει στο (t_i, t'_i) θα ανήκουν στο διάστημα $(\xi_i - \rho, \xi_i)$.

Προκύπτει, κατά αυτόν τον τρόπο, ότι:

$$\tilde{\phi}(\kappa(t)) \in [\xi_i - \rho, \xi_i], \quad \forall t \in [t_i, t'_i] \quad (3.39)$$

Σημείωση: Με βάση τους ορισμούς των ακολουθιών $\{t'_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ και επειδή οι συναρτήσεις ϕ , $\tilde{\phi}$ είναι 1-1, θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\tilde{\phi}(\kappa(t_i)) = \xi_i - \rho \iff \kappa(t_i) = \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \iff \phi(\kappa(t_i)) = \phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)) \quad (3.40)$$

$$\tilde{\phi}(\kappa(t'_i)) = \xi_i \iff \kappa(t'_i) = \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i) \iff \phi(\kappa(t'_i)) = \phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i)) \quad (3.41)$$

Λαμβάνοντας υπόψη, λοιπόν, τις σχέσεις (3.3) - (3.4), (3.9), (3.17) και (3.39), οδηγούμαστε στην εξής σχέση για τον δεύτερο όρο του αθροίσματος της εξίσωσης (3.37):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g \left[\bar{K}(\tilde{\phi}) - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right] h &\leq \alpha_4 \|x\|^{\nu-1} \hat{g} \in \hat{h} \|x\|, \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \iff \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g \left[\bar{K}(\tilde{\phi}) - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right] h &\leq \alpha_4 \epsilon \hat{g} \in \hat{h} \|x\|^\nu, \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Συνεπώς, η σχέση (3.37) μετασχηματίζεται, μέσω της χρήσης των (3.38) και (3.42), στην ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h &\leq -\frac{\alpha_5}{\|K_0\|_F} \|x\|^\nu + \alpha_4 \epsilon \hat{g} \in \hat{h} \|x\|^\nu, \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \iff \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h &\leq -\left(\frac{\alpha_5}{\|K_0\|_F} - \alpha_4 \epsilon \hat{g} \in \hat{h}\right) \|x\|^\nu, \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \end{aligned}$$

Τέλος, επιλέγοντας:

$$\epsilon < \frac{\alpha_5}{2 \alpha_4 \hat{g} \in \hat{h} \|K_0\|_F} \quad (3.43)$$

λαμβάνουμε την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h &\leq -\left(\frac{\alpha_5}{\|K_0\|_F} - \alpha_4 \frac{\alpha_5}{2 \alpha_4 \hat{g} \in \hat{h} \|K_0\|_F} \hat{g} \in \hat{h}\right) \|x\|^\nu, \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \iff \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h &\leq -\frac{\alpha_5}{2 \|K_0\|_F} \|x\|^\nu, \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Επανεκφράζοντας το σύστημα (3.29) και επιστρατεύοντας τους συμβολισμούς (3.30), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f + g \phi \bar{K} h \iff \\ \dot{x} &= f + g K_0 h + g \phi \left(\bar{K} - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right) h + g \left(\frac{\phi K_0}{\|K_0\|_F} - K_0 \right) h \end{aligned} \quad (3.45)$$

Έπειτα, η χρονική παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov για το επανεκφρασμένο σύστημα (3.45) ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T \dot{x} \\
&= \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \left[f + g K_0 h + g \phi \left(\bar{K} - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right) h + g \left(\frac{\phi K_0}{\|K_0\|_F} - K_0 \right) h \right] \\
&= \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T (f + g K_0 h)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g \phi \left(\bar{K} - \frac{K_0}{\|K_0\|_F} \right) h}_{\textcircled{2}} \\
&\quad + \underbrace{\left(\frac{\phi - \|K_0\|_F}{\|K_0\|_F} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g K_0 h}_{\textcircled{3}} \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Εν συνεχεία, για i αρκετά μεγάλο, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\phi > \|K_0\|_F, \forall t \in [t_i, t'_i]$$

θα έχουμε:

$$\left(\frac{\phi - \|K_0\|_F}{\|K_0\|_F} \right) > 0$$

Κατόπιν, η εφαρμογή των σχέσεων (3.3) - (3.7), (3.9), (3.17) και (3.39) στους όρους $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ και $\textcircled{3}$ της (3.46) έχει ως αποτέλεσμα το μετασχηματισμό της στην ακόλουθη έκφραση:

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 \|x\|^\nu + \alpha_4 \epsilon \hat{g} \hat{h} \phi \|x\|^\nu - \alpha_5 \|x\|^\nu \left(\frac{\phi - \|K_0\|_F}{\|K_0\|_F} \right), \forall t \in [t_i, t'_i] \tag{3.47}$$

Θεωρώντας ότι για την τιμή του ϵ ισχύει η σχέση (3.43), κι επομένως για αρκετά μεγάλο $N = N(\epsilon)$, η (3.47) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\alpha_3 \|x\|^\nu + \alpha_4 \frac{\alpha_5}{2 \alpha_4 \hat{g} \hat{h} \|K_0\|_F} \hat{g} \hat{h} \phi \|x\|^\nu - \frac{\alpha_5 \phi}{\|K_0\|_F} \|x\|^\nu + \alpha_5 \|x\|^\nu \\
&\leq -\alpha_3 \|x\|^\nu + \frac{\alpha_5 \phi}{2 \|K_0\|_F} \|x\|^\nu - \frac{\alpha_5 \phi}{\|K_0\|_F} \|x\|^\nu + \alpha_5 \|x\|^\nu \\
&\leq -\alpha_3 \|x\|^\nu - \frac{\alpha_5 \phi}{2 \|K_0\|_F} \|x\|^\nu + \alpha_5 \|x\|^\nu \\
&\leq - \left(\alpha_3 + \frac{\alpha_5 \phi}{2 \|K_0\|_F} - \alpha_5 \right) \|x\|^\nu, \forall t \in [t_i, t'_i] \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Έπειτα, έστω i^* ένα επαρκώς μεγάλο i , τέτοιο ώστε για $i > i^*$ να ισχύει:

$$\phi \geq 2 \|K_0\|_F \left(1 + \frac{\alpha_6}{\alpha_5} \right), \alpha_6 > 0, \forall t \in [t_i, t'_i]$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω ανισότητα, η (3.48) γίνεται:

$$\dot{V} \leq -(\alpha_3 + \alpha_6) \|x\|^\nu, \forall t \in [t_i, t'_i] \tag{3.49}$$

Ακολουθώντας, από τη σχέση (3.4) λαμβάνουμε το κάτωθι:

$$\|h\|^\nu \leq \hat{h}^\nu \|x\|^\nu \iff \|x\|^\nu \geq \frac{\|h\|^\nu}{\hat{h}^\nu} \iff -\|x\|^\nu \leq -\frac{\|h\|^\nu}{\hat{h}^\nu}$$

Αξιοποιώντας την προηγούμενη σχέση και σε συνδυασμό με την εξίσωση (3.2), η έκφραση (3.49) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\dot{V} \leq -\frac{\alpha_3 + \alpha_6}{\hat{h}^\nu} \|y\|^\nu, \forall t \in [t_i, t'_i]$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας αυτής ως προς το χρόνο, από t_i μέχρι t'_i , λαμβάνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t'_i} \dot{V} dt &\leq \int_{t_i}^{t'_i} \left(-\frac{\alpha_3 + \alpha_6}{\hat{h}^\nu} \right) \|y\|^\nu dt \iff \\ V(t'_i, x(t'_i)) - V(t_i, x(t_i)) &\leq -\frac{\alpha_3 + \alpha_6}{\hat{h}^\nu} \int_{t_i}^{t'_i} \|y(t)\|^\nu dt \end{aligned} \quad (3.50)$$

Όμως, ισχύει ότι $V(t, x(t)) \geq 0$, $\forall t \geq 0$ και άρα έχουμε:

$$V(t'_i, x(t'_i)) \geq 0 \iff V(t'_i, x(t'_i)) - V(t_i, x(t_i)) \geq -V(t_i, x(t_i))$$

Επομένως, αξιοποιώντας την ανισότητα αυτή, η σχέση (3.50) τροποποιείται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$-V(t_i, x(t_i)) \leq -\frac{\alpha_3 + \alpha_6}{\hat{h}^\nu} \int_{t_i}^{t'_i} \|y(t)\|^\nu dt \iff \int_{t_i}^{t'_i} \|y(t)\|^\nu dt \leq \frac{\hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} V(t_i, x(t_i)) \quad (3.51)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη δεξιά ανισότητα της σχέσης (3.8) και θέτουμε $t = t_i$. Τότε, λαμβάνουμε ότι:

$$V(t_i, x(t_i)) \leq \alpha_2 \|x(t_i)\|^\nu \quad (3.52)$$

Τελικώς, από τη συνδυαστική αξιοποίηση των εξισώσεων (3.51) και (3.52), προκύπτει:

$$\int_{t_i}^{t'_i} \|y(t)\|^\nu dt \leq \frac{\alpha_2 \hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} \|x(t_i)\|^\nu \quad (3.53)$$

Σε αυτό το σημείο, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$W(t, x(t)) := [V(t, x(t))]^{\frac{1}{\nu}} \quad (3.54)$$

Συνεπώς, οι μερικές παράγωγοι της νέας συνάρτησης Lyapunov υπολογίζονται ως έκφραση των μερικών παραγώγων της συνάρτησης $V(t, x(t))$ κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\frac{\partial W(t, x(t))}{\partial x} = \frac{dW(t, x(t))}{dV(t, x(t))} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{[V(t, x(t))]^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \quad (3.55)$$

Αντίστοιχα, η μερική παράγωγος ως προς t ισούται με:

$$\frac{\partial W(t, x(t))}{\partial t} = \frac{dW(t, x(t))}{dV(t, x(t))} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{[V(t, x(t))]^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} \quad (3.56)$$

Όσον αφορά τη νόρμα της μερικής παραγώγου της συνάρτησης $W(t, x(t))$ ως προς το διάνυσμα κατάστασης x , θα έχουμε:

$$\left\| \frac{\partial W(t, x(t))}{\partial x} \right\| = \left\| \frac{1}{\nu} \frac{\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}}{[V(t, x(t))]^{1-\frac{1}{\nu}}} \right\| = \frac{1}{\nu} \frac{1}{[V(t, x(t))]^{1-\frac{1}{\nu}}} \left\| \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right\| \quad (3.57)$$

Επομένως, μπορούμε, πλέον, κάνοντας χρήση των (3.55), (3.56) και (3.57), καθώς και των συμβολισμών απλούστευσης (3.30), να καταλήξουμε στις αντίστοιχες σχέσεις των (3.6) - (3.9) και (3.44), αλλά για τη συνάρτηση $W(t, x(t))$. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f + g K_0 h \right\rangle &= \frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T (f + g K_0 h) \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T (f + g K_0 h) \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T (f + g K_0 h) \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T (f + g K_0 h) \right] \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, επιστρατεύεται η σχέση (3.6) και με παράλληλη χρήση της αριστερής ανισότητας της (3.8) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T (f + g K_0 h) \right] &\leq \frac{1}{\nu} \frac{1}{(\alpha_1 \|x\|^\nu)^{1-\frac{1}{\nu}}} (-\alpha_3 \|x\|^\nu) \\ &= - \left(\frac{1}{\nu} \frac{1}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}}} \alpha_3 \right) \frac{1}{\|x\|^{\nu-1}} \|x\|^\nu \end{aligned}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην εξής έκφραση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t, x(t))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial W(t, x(t))}{\partial x}, f(t, x(t)) + g(t, x(t)) K_0 h(t, x(t)) \right\rangle &\leq -\alpha'_3 \|x(t)\|, \\ \alpha'_3 &:= \frac{1}{\nu} \frac{1}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}}} \alpha_3 > 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Έπειτα, για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης σχέσης της (3.7), αξιοποιούμε την ίδια την (3.7), την αριστερή ανισότητα της (3.8) και την (3.55). Τότε, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T g K_0 h &= \left(\frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g K_0 h = \frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g K_0 h \right] \\ &\leq \frac{1}{\nu} \frac{1}{(\alpha_1 \|x\|^\nu)^{1-\frac{1}{\nu}}} (-\alpha_5 \|x(t)\|^\nu) = - \left(\frac{1}{\nu} \frac{1}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}}} \alpha_5 \right) \frac{1}{\|x\|^{\nu-1}} \|x\|^\nu \end{aligned}$$

Τελικώς, λοιπόν, λαμβάνουμε ότι:

$$\left(\frac{\partial W(t, x(t))}{\partial x} \right)^T g(t, x(t)) K_0 h(t, x(t)) \leq -\alpha'_5 \|x(t)\|, \quad \alpha'_5 := \frac{1}{\nu} \frac{1}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}}} \alpha_5 > 0 \quad (3.59)$$

Όσον αφορά την αντίστοιχη σχέση της (3.8), επιστρατεύουμε την ίδια την εξίσωση (3.8) και υψώνουμε και τα τρία μέλη της εις την $\frac{1}{\nu}$. Έτσι, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \|x(t)\|^\nu]^{\frac{1}{\nu}} &\leq [V(t, x(t))]^{\frac{1}{\nu}} \leq [\alpha_2 \|x(t)\|^\nu]^{\frac{1}{\nu}} \iff \\ \alpha_1^{\frac{1}{\nu}} \|x(t)\| &\leq W(t, x(t)) \leq \alpha_2^{\frac{1}{\nu}} \|x(t)\| \iff \\ \alpha'_1 \|x(t)\| &\leq W(t, x(t)) \leq \alpha'_2 \|x(t)\|, \quad \alpha'_1 := \alpha_1^{\frac{1}{\nu}} > 0, \quad \alpha'_2 := \alpha_2^{\frac{1}{\nu}} > 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Κατόπιν, περνώντας στον υπολογισμό της αντίστοιχης σχέσης της (3.9), λαμβάνουμε υπόψη την αριστερή ανισότητα της (3.8) και την έκφραση (3.9). Τότε, η εξίσωση (3.57) μετασχηματίζεται κατά τον εξής τρόπο:

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \leq \frac{1}{\nu} \frac{\alpha_4 \|x\|^{\nu-1}}{(\alpha_1 \|x\|^\nu)^{1-\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\nu} \frac{\alpha_4 \|x\|^{\nu-1}}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}} \|x\|^{\nu-1}} = \frac{1}{\nu} \frac{\alpha_4}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}}}$$

Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left\| \frac{\partial W(t, x(t))}{\partial x} \right\| \leq \alpha'_4, \quad \alpha'_4 := \frac{1}{\nu} \frac{\alpha_4}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}}} > 0 \quad (3.61)$$

Τέλος, προκειμένου να βρούμε την ισοδύναμη σχέση της (3.44), προβαίνουμε στα ακόλουθα βήματα και χρησιμοποιούμε την αριστερή ανισότητα της (3.8), την ίδια τη σχέση (3.44), αλλά και την (3.55):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h &= \left(\frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{1}{V^{1-\frac{1}{\nu}}} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h \right] \\ &\leq \frac{1}{\nu} \frac{1}{(\alpha_1 \|x\|^\nu)^{1-\frac{1}{\nu}}} \left(-\frac{\alpha_5}{2 \|K_0\|_F} \|x\|^\nu \right) \\ &= \left(-\frac{1}{\nu} \frac{1}{\alpha_1^{1-\frac{1}{\nu}}} \frac{\alpha_5}{2 \|K_0\|_F} \right) \frac{1}{\|x\|^{\nu-1}} \|x\|^\nu \\ &= -\frac{\alpha'_5}{2 \|K_0\|_F} \|x\|, \quad \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \end{aligned}$$

Η παραπάνω διαδικασία οδηγεί, λοιπόν, στην ακόλουθη σχέση:

$$\left(\frac{\partial W(t, x(t))}{\partial x} \right)^T g \bar{K}(\tilde{\phi}) h \leq -\frac{\alpha'_5}{2 \|K_0\|_F} \|x(t)\|, \quad \forall \tilde{\phi} \in [\xi_i - \rho, \xi_i] \quad (3.62)$$

Έπειτα, ακολουθώντας το ίδιο πρότυπο ανάλυσης που οδήγησε στη σχέση (3.36), καταλήγουμε ότι η αντίστοιχη έκφραση για τη συνάρτηση $W(t, x(t))$ είναι η κάτωθι:

$$W(t) \leq e^{-\frac{\alpha'_5}{\alpha'_2} t} W_0 + \int_0^t e^{-\frac{\alpha'_5}{\alpha'_2} (t-s)} \left(\frac{\partial W(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds \quad (3.63)$$

Κατόπιν, επικαλούμαστε τη σχέση (3.63) και την αριστερή ανισότητα της (3.8). Θεωρώντας, επιπλέον, i αρκετά μεγάλο και $N_i = \{t : \tilde{\phi}(t) \notin (\xi_i - \rho, \xi_i)\}$, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 \|x(t)\| \leq W(t) \leq e^{-\frac{\alpha'_2}{2}t} W_0 + \\ + \int_{[0, t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_2}{2}(t-s)} \left(\frac{\partial W(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in [t_i, t'_i] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Σημείωση: Για το δεδομένο N_i , όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω, ισχύει ότι $[0, t_i] \cap N_i = [0, t'_i] \cap N_i$, αφού στο διάστημα $(t_i, t'_i]$, η συνάρτηση $\tilde{\phi}$ λαμβάνει τιμές στο $(\xi_i - \rho, \xi_i]$.

Επεξηγώντας την παραπάνω σχέση, το διάστημα (ή, αν δεν είναι ενιαίο, η ένωση διαστημάτων) ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος της (3.64) έχει αυτή τη μορφή, καθώς ισχύει ότι:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h \leq 0, \quad \forall t \notin [0, t_i] \cap N_i \quad (3.65)$$

και, ως εκ τούτου, για κάθε $t \in [t_i, t'_i]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\frac{\alpha'_2}{2}(t-s)} \left(\frac{\partial W(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds \leq \\ \int_{[0, t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_2}{2}(t-s)} \left(\frac{\partial W(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds \end{aligned} \quad (3.66)$$

Συνεπώς, η (3.63), λόγω της (3.66), λαμβάνει τη μορφή:

$$W(t) \leq e^{-\frac{\alpha'_2}{2}t} W_0 + \int_{[0, t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_2}{2}(t-s)} \left(\frac{\partial W(s, x(s))}{\partial x} \right)^T g(s, x(s)) (\phi \bar{K} - K_0) h(s, x(s)) ds \quad (3.67)$$

Τέλος, αν ενσωματώσουμε την αριστερή ανισότητα της (3.8) στη σχέση (3.67), προκύπτει πράγματι η (3.64).

Σημείωση: Στο πλαίσιο της παραπάνω ανάλυσης, συμπεραίνεται ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η συνάρτηση $\tilde{\phi}$ στο $[0, t_i] \cap N_i$ είναι η $\xi_i - \rho$.

Σε αυτό το σημείο, θα δειχθεί ότι ισχύει η σχέση (3.65) και, κατ' επέκταση, η συλλογιστική πορεία που αποτέλεσε τη βάση για την εξίσωση (3.64). Ειδικότερα:

Για κάθε $t \notin [0, t_i] \cap N_i$, ισχύει:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T g (\phi \bar{K} - K_0) h = \phi \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T g \bar{K} h \right] + \left(- \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^T g K_0 h \right)$$

Στη συνέχεια, φράσσουμε το δεύτερο όρο του αθροίσματος της παραπάνω σχέσης από το άνω φράγμα του με χρήση των σχέσεων (3.3) - (3.4) και (3.61), ενώ για τον πρώτο όρο αξιοποιούμε την εξίσωση (3.62). Τότε, προκύπτει η εξής έκφραση:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^T g(\phi \bar{K} - K_0) h &\leq -\phi \frac{\alpha'_5}{2 \|K_0\|_F} \|x\| + \alpha'_4 \hat{g} \|K_0\|_F \hat{h} \|x\| \\ &\leq -\frac{\alpha'_5}{2 \|K_0\|_F} \left(\phi - \frac{2 \alpha'_4 \hat{g} \|K_0\|_F^2 \hat{h}}{\alpha'_5}\right) \|x\| \end{aligned}$$

Τέλος, όπως επισημάνθηκε κατά τον ορισμό του N_i , θεωρούμε i αρκετά μεγάλο, τέτοιο, μάλιστα, ώστε να ισχύει:

$$\phi > \frac{2 \alpha'_4 \hat{g} \|K_0\|_F^2 \hat{h}}{\alpha'_5}$$

Τότε, πράγματι, η σχέση που προκύπτει είναι και η ζητούμενη:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^T g(\phi \bar{K} - K_0) h \leq 0, \quad \forall t \notin [0, t_i] \cap N_i$$

Επανερχόμαστε, λοιπόν, στη σχέση (3.64) και αξιοποιούμε το αριστερό και το δεξί μέλος της διπλής ανισότητας. Στη συνέχεια, φράσσουμε τον κάθε όρο του ολοκληρώματος από το αντίστοιχο άνω φράγμα του, κάνοντας παράλληλη χρήση των σχέσεων (3.3), (3.40) και (3.61). Έτσι, οδηγούμαστε στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} t} + \\ &+ \frac{1}{\alpha'_1} \hat{g} \left[\phi \left(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)\right) \|\bar{K}\|_F + \|K_0\|_F \right] \int_{[0, t_i] \cap N_i} \alpha'_4 e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} \|h(s, x(s))\| ds \end{aligned}$$

Ακολούθως, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.2), καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} t} + \\ &+ \frac{\alpha'_4 \hat{g}}{\alpha'_1} \left[\phi \left(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)\right) \bar{k} + k_0 \right] \int_{[0, t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} \|y(s)\| ds, \quad \forall t \in [t_i, t'_i] \end{aligned} \quad (3.68)$$

όπου: $\bar{k} := \|\bar{K}\|_F > 0$ και $k_0 := \|K_0\|_F > 0$.

Έπειτα, επιστρατεύουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.68), για το οποίο ισχύει η ανισότητα:

$$\int_{[0, t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} \|y(s)\| ds \leq \int_{[0, t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} (\delta + D_\delta(\|y(s)\|)) ds = A(s) \quad (3.69)$$

Σημείωση: Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης παρατίθεται στο Παράρτημα 5.2 της παρούσας διπλωματικής.

Η ποσότητα $A(s)$ αναλύεται σε άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων με απλή εφαρμογή της σχετικής ιδιότητας:

$$A(s) = \int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} \delta ds + \int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} D_\delta(\|y(s)\|) ds$$

Όσον αφορά τους επιμέρους όρους της ποσότητας $A(s)$, για τον πρώτο εξ αυτών λαμβάνουμε ότι:

$$\int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} \delta ds = \delta \int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} ds \leq \alpha_7, \alpha_7 > 0$$

Ο μελετώμενος όρος, δηλαδή, είναι άνω φραγμένος από μία θετική σταθερά, έστω α_7 .

Αναφορικά με το δεύτερο όρο της ποσότητας $A(s)$, επιστρατεύουμε την ανισότητα Hölder, σύμφωνα με τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στην υποενότητα 2.1.5. Έτσι:

$$\int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} D_\delta(\|y(s)\|) ds \leq \left(\int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}r(t-s)} ds \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{[0,t_i] \cap N_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

Ομοίως με τον πρώτο όρο του $A(s)$, έχουμε ότι:

$$\left(\int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}r(t-s)} ds \right)^{\frac{1}{r}} \leq \alpha_8, \alpha_8 > 0$$

Ο όρος αυτός, δηλαδή, είναι άνω φραγμένος από μία θετική σταθερά, έστω α_8 .

Επομένως, η σχέση (3.69) λαμβάνει τη μορφή:

$$\int_{[0,t_i] \cap N_i} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} \|y(s)\| ds \leq \alpha_7 + \alpha_8 \left(\int_{[0,t_i] \cap N_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \right)^{\frac{1}{\nu}} \quad (3.70)$$

Εν συνεχεία, η σχέση (3.68) μετασχηματίζεται, με τη χρήση της (3.70), κατά τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}t} + \\ &+ \frac{\alpha'_4 \hat{g}}{\alpha'_1} \left[\phi \left(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right) \bar{k} + k_0 \right] \left[\alpha_7 + \alpha_8 \left(\int_{[0,t_i] \cap N_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \right)^{\frac{1}{\nu}} \right], \forall t \in [t_i, t'_i] \end{aligned} \quad (3.71)$$

Κατόπιν, από το συνδυασμό των εξισώσεων (3.2) και (3.11), οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \kappa(t) = \|y(t)\|^\nu + \lambda \int_0^t D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds &\geq \lambda \int_0^t D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \iff \\ \int_0^t D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds &\leq \frac{\kappa(t)}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Έπειτα, εξ ορισμού, έχουμε ότι:

$$[0, t_i] \cap N_i \subseteq [0, t_i]$$

και επειδή $D_\delta^\nu(\|y(s)\|) \geq 0$, $\forall s \geq 0$, θα ισχύει ότι:

$$\int_{[0, t_i] \cap N_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \leq \int_0^{t_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \quad (3.73)$$

Αντικαθιστώντας όπου $t = t_i$ στην (3.72) λαμβάνουμε:

$$\int_0^{t_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \leq \frac{\kappa(t_i)}{\lambda}$$

Συνεπώς, η (3.73) μετασχηματίζεται στην παρακάτω σχέση:

$$\int_{[0, t_i] \cap N_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \leq \frac{\kappa(t_i)}{\lambda}$$

Στο επόμενο βήμα, υψώνουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας αυτής εις την $1/\nu$ και προκύπτει η ανισότητα:

$$\left(\int_{[0, t_i] \cap N_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \right)^{\frac{1}{\nu}} \leq \frac{[\kappa(t_i)]^{\frac{1}{\nu}}}{\lambda^{\frac{1}{\nu}}} \quad (3.74)$$

Έτσι, λοιπόν, η σχέση (3.71), με τη βοήθεια της (3.74), λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} t} + \frac{\alpha'_4 \hat{g}}{\alpha'_1} \left[\phi \left(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right) \bar{k} + k_0 \right] \left[\alpha_7 + \alpha_8 \frac{\kappa(t_i)^{\frac{1}{\nu}}}{\lambda^{\frac{1}{\nu}}} \right] \\ \|x(t)\| &\leq \frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} t} + \frac{\alpha'_4 \alpha'_8 \hat{g} \bar{k}}{\alpha'_1} \left[\phi \left(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right) + k'_0 \right] \left[\alpha'_7 + \kappa(t_i)^{\frac{1}{\nu}} \right], \quad \forall t \in [t_i, t'_i] \end{aligned}$$

όπου:

- $\alpha'_7 := \frac{\lambda^{1/\nu}}{\alpha_8} \alpha_7 > 0$
- $\alpha'_8 := \frac{\alpha_8}{\lambda^{1/\nu}} > 0$
- $k'_0 = \frac{k_0}{\bar{k}} > 0$

Έπειτα, σύμφωνα με τις σχέσεις (3.40) και (3.41), η συνάρτηση $\kappa(t)$ για $t = t_i$ και $t = t'_i$, αντίστοιχα, λαμβάνει τις τιμές:

$$\kappa(t_i) = \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \quad (3.75)$$

$$\kappa(t'_i) = \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i) \quad (3.76)$$

Επομένως, κάνοντας χρήση της σχέσης (3.75), προκύπτει η έκφραση:

$$\|x(t)\| \leq \frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} t} + \frac{\alpha'_4 \alpha'_8 \hat{g} \bar{k}}{\alpha'_1} \left[\phi \left(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right) + k'_0 \right] \left\{ \alpha'_7 + \left[\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right]^{\frac{1}{\nu}} \right\}, \quad \forall t \in [t_i, t'_i] \quad (3.77)$$

Όσον αφορά τη μεταβολή της συνάρτησης $\kappa(t)$ στο διάστημα $[t_i, t'_i]$, λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} |\Delta\kappa(t)|_{t_i}^{t'_i} &= |\kappa(t'_i) - \kappa(t_i)| \\ &= \left| \|y(t'_i)\|^\nu + \lambda \int_0^{t'_i} D^\nu \delta(\|y(s)\|) ds - \|y(t_i)\|^\nu - \lambda \int_0^{t_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \right| \\ &= \left| \|y(t'_i)\|^\nu - \|y(t_i)\|^\nu + \lambda \int_{t_i}^{t'_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \right| \end{aligned}$$

Ακολούθως, κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας, προκύπτει η εξής σχέση:

$$|\kappa(t'_i) - \kappa(t_i)| \leq \left| \|y(t'_i)\|^\nu - \|y(t_i)\|^\nu \right| + \lambda \int_{t_i}^{t'_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds$$

Όμως, ισχύει ότι:

$$\left| \|y(t'_i)\|^\nu - \|y(t_i)\|^\nu \right| \leq \max_{t \in \{t_i, t'_i\}} \|y(t)\|^\nu$$

Επομένως, καταλήγουμε ότι η μεταβολή της συνάρτησης $\kappa(t)$ στο διάστημα $[t_i, t'_i]$ είναι:

$$|\kappa(t'_i) - \kappa(t_i)| \leq \max_{t \in \{t_i, t'_i\}} \|y(t)\|^\nu + \lambda \int_{t_i}^{t'_i} D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \quad (3.78)$$

Κατόπιν, από τη σχέση (3.53) και μέσω της ιδιότητας 2.6, οδηγούμαστε στην ανισότητα:

$$\int_{t_i}^{t'_i} D_\delta^\nu(\|y(t)\|) dt \leq \frac{\alpha_2 \hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} \|x(t_i)\|^\nu \quad (3.79)$$

Τέλος, η σχέση (3.78), αξιοποιώντας τις εξισώσεις (3.2), (3.4) και (3.53), μετασχηματίζεται στην τελική της μορφή:

$$|\kappa(t'_i) - \kappa(t_i)| \leq \hat{h}^\nu \max_{t \in \{t_i, t'_i\}} \|x(t)\|^\nu + \frac{\lambda \alpha_2 \hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} \|x(t_i)\|^\nu \quad (3.80)$$

Ως επόμενο βήμα στην ανάλυσή μας, υψώνουμε εις την ν αμφότερα τα μέλη της σχέσης (3.77), ενώ, συγχρόνως, εφαρμόζουμε την ιδιότητα $(A + B)^\nu \leq 2^{\nu-1}(A^\nu + B^\nu)$ στο δεξί μέλος της ανισότητας. Τότε, λαμβάνουμε ότι για κάθε $t \in [t_i, t'_i]$:

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^\nu &\leq \left(\frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} t} + \frac{\alpha'_4 \alpha'_8 \hat{g} \bar{k}}{\alpha'_1} \left[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)) + k'_0 \right] \left[\alpha'_7 + [\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)]^{\frac{1}{\nu}} \right] \right)^\nu \\ &\leq 2^{\nu-1} \left[\left(\frac{W_0}{\alpha'_1} e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} t} \right)^\nu + \left(\frac{\alpha'_4 \alpha'_8 \hat{g} \bar{k}}{\alpha'_1} \left[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)) + k'_0 \right] \left[\alpha'_7 + [\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)]^{\frac{1}{\nu}} \right] \right)^\nu \right] \end{aligned}$$

Πραγματοποιώντας τις πράξεις κι επιστρατεύοντας ξανά την ιδιότητα $(A + B)^\nu \leq 2^{\nu-1}(A^\nu + B^\nu)$, οδηγούμαστε σε μια πιο απλουστευμένη έκφραση. Ειδικότερα, για το δεύτερο όρο του δεξιού μέλους έχουμε:

$$\begin{aligned} \left[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)) + k'_0 \right]^\nu \left[\alpha'_7 + [\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)]^{\frac{1}{\nu}} \right]^\nu &\leq 2^{\nu-1} \left[\left[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)) \right]^\nu + k_0^{\nu} \right] \\ &\quad \cdot 2^{\nu-1} \left[\alpha_7^\nu + \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right] \end{aligned}$$

Αφού ολοκληρωθούν οι τελευταίες διαδικαστικές πράξεις, έχουμε, πλέον, καταλήξει στην τελική σχέση για τη νόρμα $\|x(t)\|^\nu$. Πιο ειδικά, αυτή είναι:

$$\|x(t)\|^\nu \leq \frac{2^{\nu-1}W_0^\nu}{\alpha_1^\nu} e^{-\frac{\alpha_3^\nu}{\alpha_2^\nu}t} + \frac{2^{3\nu-3}\alpha_4^\nu\alpha_8^\nu\hat{g}^\nu\bar{k}^\nu}{\alpha_1^\nu} \left[[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho))]^\nu + k_0^\nu \right] \left[\alpha_7^\nu + \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right] \quad (3.81)$$

για κάθε $t \in [t_i, t'_i]$.

Στο σημείο αυτό, αξιοποιούμε τη νεοσύστατη εξίσωση (3.81), η οποία μάς δίνει την ακόλουθη ανισότητα:

$$\|x(t_i)\|^\nu \leq \max_{t \in \{t_i, t'_i\}} \|x(t)\|^\nu \leq A + B \left[[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho))]^\nu + \Gamma \right] \left[\Delta + \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right] \quad (3.82)$$

όπου:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{\nu-1}W_0^\nu}{\alpha_1^\nu} > 0 \\ B &= \frac{2^{3\nu-3}\alpha_4^\nu\alpha_8^\nu\hat{g}^\nu\bar{k}^\nu}{\alpha_1^\nu} > 0 \\ \Gamma &= k_0^\nu > 0 \\ \Delta &= \alpha_7^\nu > 0 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, η (3.80), κάνοντας επίκληση των σχέσεων (3.75) - (3.76) και (3.82), μετασχηματίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i) - \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \leq A' + B' \left[[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho))]^\nu + \Gamma' \right] \left[\Delta' + \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho) \right] \quad (3.83)$$

όπου:

$$\begin{aligned} A' &= A \left(\hat{h}^\nu + \frac{\lambda\alpha_2\hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} \right) > 0 \\ B' &= B \left(\hat{h}^\nu + \frac{\lambda\alpha_2\hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} \right) > 0 \\ \Gamma' &= \Gamma \left(\hat{h}^\nu + \frac{\lambda\alpha_2\hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} \right) > 0 \\ \Delta' &= \Delta \left(\hat{h}^\nu + \frac{\lambda\alpha_2\hat{h}^\nu}{\alpha_3 + \alpha_6} \right) > 0 \end{aligned}$$

Φυσικά, είναι προφανές από τη σχέση (3.83) ότι:

$$\limsup_{\xi_i \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i) - \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)}{[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho))]^\nu \tilde{\phi}^{-1}(\xi_i - \rho)} \leq B' \quad (3.84)$$

Έτσι, αν επιλεγεί συνάρτηση $\tilde{\phi}$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\phi}^{-1}(x + \epsilon) - \tilde{\phi}^{-1}(x)}{[\phi(\tilde{\phi}^{-1}(x))]^\nu \tilde{\phi}^{-1}(x)} = +\infty \quad (3.85)$$

τότε οδηγούμαστε σε άτοπο και αποδεικνύεται ότι ο αρχικός ισχυρισμός, σύμφωνα με τον οποίον το $\kappa(t)$ δεν είναι φραγμένο, δεν είναι αληθής.

Χάρην απλούστευσης, θεωρούμε $\phi(x) = x$. Η συνάρτηση αυτή είναι κατάλληλη, αφού ικανοποιεί τις ιδιότητες που τίθενται στον ορισμό της ϕ στην ενότητα 3.2. Έτσι, η (3.85) λαμβάνει τη μορφή:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\phi}^{-1}(x + \epsilon) - \tilde{\phi}^{-1}(x)}{[\tilde{\phi}^{-1}(x)]^{\nu+1}} = +\infty \quad (3.86)$$

Σε αυτό το σημείο, παρατηρούμε ότι η σχέση (3.86) που προέκυψε ταυτίζεται με την εξίσωση (2.1), η οποία αποτελεί ιδιότητα των συναρτήσεων της κλάσης \mathcal{A} . Από τον ορισμό, όμως, της $\tilde{\phi}$ στην ενότητα 3.2, έχουμε ότι η συνάρτηση αυτή ανήκει στην κλάση \mathcal{A} και, άρα, πληροί τη συνθήκη (2.1).

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση $\kappa(t)$ είναι φραγμένη και, μάλιστα, ομοιόμορφα φραγμένη.

Ακολουθώντας, από το συνδυασμό των εξισώσεων (3.2) και (3.11), οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση, με τη χρήση της οποίας θα διερευνήσουμε αν η έξοδος $y(t)$ είναι φραγμένη:

$$\kappa(t) = \|y(t)\|^\nu + \lambda \int_0^t D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \quad (3.87)$$

$$\geq \|y(t)\|^\nu \quad (3.88)$$

Πιο συγκεκριμένα, επειδή, όπως αποδείχθηκε προηγουμένως, η $\kappa(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, τότε, από τη σχέση (3.88), συνεπάγεται ότι η νόρμα $\|y(t)\|^\nu$ είναι φραγμένη και, κατά συνέπεια, το ίδιο ισχύει και για την $\|y(t)\|$. Επομένως, το $y(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Κατόπιν, από τη σχέση (3.72), προκύπτει ότι, εφόσον η συνάρτηση $\kappa(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και λ μια θετική παράμετρος, το ολοκλήρωμα $\int_0^t D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds$ είναι, επίσης, ομοιόμορφα φραγμένο.

Στο επόμενο βήμα της ανάλυσης, εξετάζουμε αν το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ είναι φραγμένο. Για αρχή, λοιπόν, επικαλούμαστε τη σχέση (3.63). Αρχικά, λοιπόν, αφού η συνάρτηση $\kappa(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, τότε και η συνάρτηση ϕ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Επιπλέον, η συνάρτηση g εξ' ορισμού (3.3) φράσσεται, ενώ η h , που αποτελεί τη συνάρτηση εξόδου, αποδείχθηκε ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Έπειτα, η νόρμα της μερικής παραγώγου της συνάρτησης W ως προς x είναι εξ' ορισμού φραγμένη λόγω της (3.61). Κατόπιν, για τον πίνακα \bar{K} , έχουμε εκ κατασκευής του (3.13) ότι $\|\bar{K}\|_\infty \leq k_\infty > 0$, δηλαδή η ∞ -νόρμα του είναι άνω φραγμένη από μία θετική σταθερά. Ομοίως, ο πίνακας K_0 έχει εξ' ορισμού φραγμένη νόρμα. Τέλος, ισχύει ότι $\int_0^t e^{-\frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}(t-s)} ds \leq \frac{\alpha'_2}{\alpha'_3}$ για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της (3.63) φράσσονται και άρα η συνάρτηση $W(t, x(t))$ είναι φραγμένη. Μεταβαίνοντας, πλέον, στην αριστερή ανισότητα της εξίσωσης (3.60), λαμβάνουμε ότι η νόρμα $\|x(t)\|$ είναι φραγμένη και, κατά συνέπεια, ότι το $x(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Όσον αφορά το χρόνο απόδρασης, η μορφή της απεικόνισης που αποτελεί το σύστημα των εξισώσεων (3.1) - (3.2), (3.10) - (3.14), συνεπάγεται ότι θα υπάρχει μια λύση τοπικά στο διάστημα $[0, \omega)$. Τότε, βάσει του θεωρήματος της υποενότητας 2.1.12, αν ο χρόνος απόδρασης είναι πεπερασμένος, θα υπάρχει χρονική στιγμή t προγενέστερη του ω , κατά την οποία η λύση «αποδρά» από κάθε φραγμένο υποσύνολο του συστήματος. Στην περίπτωση μας, όμως, έχουμε ότι το επαυξημένο διάλυμα κατάστασης:

$$\left[x^T(t) \int_0^t D_\delta^\nu(\|y(s)\|) ds \right]^T$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Συνεπώς, δεν υφίσταται πεπερασμένος χρόνος απόδρασης και, ως εκ τούτου, ισχύει ότι $\omega = +\infty$.

Έτσι, αυτό που μένει, πλέον, να αποδειχθεί είναι ότι το $D_\delta(\|y(t)\|)$ τείνει στο 0, καθώς το t τείνει στο $+\infty$.

Ξεκινάμε, λοιπόν, τη σχετική απόδειξη, επικαλούμενοι το \dot{y} , για το οποίο ισχύει:

$$\dot{y} = \dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} \quad (3.89)$$

Αναλύοντας όρο προς όρο τη σχέση (3.89), έχουμε ότι:

* Το $\dot{x}(t)$, αποτελεί, όπως φαίνεται από τη σχέση (3.16), μια έκφραση των συναρτήσεων $f(t, x(t))$, $g(t, x(t))$, $K(\kappa(t))$ και $h(t, x(t))$. Πιο ειδικά, όσον αφορά τη συνάρτηση g , από την εξίσωση (3.3) λαμβάνουμε ότι είναι φραγμένη. Έπειτα, έχοντας αποδείξει πως το $y(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο και αξιοποιώντας τη σχέση (3.2), προκύπτει άμεσα ότι και η συνάρτηση h είναι φραγμένη. Στη συνέχεια, όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, έχουμε ότι $\|\bar{K}\|_\infty \leq k_\infty > 0$. Συγχρόνως, έχουμε θεωρήσει ότι $\phi(\kappa) = \kappa$ και, εφόσον αποδείξαμε ότι η συνάρτηση $\kappa(t)$ είναι φραγμένη, είναι αυτονόητο πως και η συνάρτηση $\phi(\kappa)$ φράσσεται. Έτσι, αφού, όπως φαίνεται από την (3.12), η συνάρτηση K αποτελεί έκφραση των ϕ και \bar{K} , λαμβάνουμε ότι και αυτή, με τη σειρά της, είναι φραγμένη. Τέλος, η συνάρτηση f είναι τοπικά Lipschitz ως προς x σε ένα σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, κι, επομένως, ισχύει:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad L > 0, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [0, +\infty) \times \Omega \quad (3.90)$$

Αν, επιπλέον, τα x_1 και x_2 είναι φραγμένα, όπως στην περίπτωση μας, τότε λαμβάνουμε ότι $\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$, για κάποιο $M > 0$. Τότε, η σχέση (3.90) μετασχηματίζεται κατά τον εξής τρόπο:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L M := L', \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [0, +\infty) \times \Omega \quad (3.91)$$

Κατόπιν, επιστρατεύουμε την τριγωνική ανισότητα, από την οποία προκύπτει:

$$\left| \|f(t, x_1)\| - \|f(t, x_2)\| \right| \leq \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L', \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [0, +\infty) \times \Omega \quad (3.92)$$

ή ισοδύναμα:

$$\|f(t, x_1)\| \leq \|f(t, x_2)\| + L' , \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [0, +\infty) \times \Omega \quad (3.93)$$

Επιλέγοντας $x_1 = x$ και $x_2 = 0$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι το $f(t, 0)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο στο $[0, +\infty)$, προκύπτει ότι και η $f(t, x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0, +\infty) \times \Omega$.

Επομένως, μέσα από την προηγούμενη εκτενή ανάλυση, αποδείχθηκε ότι το $\dot{x}(t)$ είναι φραγμένο.

* Στο επόμενο βήμα της απόδειξης, περνάμε στον όρο $\frac{\partial h(t, x(t))}{\partial x}$. Αρχικά, ισχύει ότι $x \in \mathbb{L}_\infty$ και ότι η συνάρτηση $h(t, x(t))$ είναι τοπικά Lipschitz ως προς x , σε ένα σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της υποενότητας 2.1.9, έχουμε ότι:

$$\|h(t, x_1) - h(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\| , \quad C > 0 , \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [0, +\infty) \times \Omega \quad (3.94)$$

Σε αυτό το σημείο, επιστρατεύουμε το θεώρημα Rademacher της υποενότητας 2.1.11 και το εφαρμόζουμε στη συνάρτηση h , η οποία είναι τοπικά Lipschitz ως προς x στο σύνολο Ω . Τότε, λαμβάνουμε ότι για κάθε σημείο του Ω που η h είναι διαφορίσιμη ισχύει:

$$\left\| \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right\| \leq C, \quad \forall (t, x) \in A \subseteq \Omega_\infty := [0, +\infty) \times \Omega, \quad A := \left\{ (t, x) \in \Omega_\infty : \left\| \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right\| < +\infty \right\} \quad (3.95)$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι στο σύνολο που η h είναι διαφορίσιμη, η μερική της παράγωγος ως προς x είναι φραγμένη.

* Τέλος, όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.5), η μερική παράγωγος της h ως προς το χρόνο $\frac{\partial h(t, x(t))}{\partial t}$ είναι εξ ορισμού φραγμένη.

Συγκεντρωτικά, λοιπόν, αποδείχθηκε ότι όλα εκ των \dot{x} , $\frac{\partial h}{\partial x}$ και $\frac{\partial h}{\partial t}$ είναι φραγμένα και, ως εκ τούτου, οποιοδήποτε μεταξύ τους άθροισμα και γινόμενο θα είναι φραγμένο.

Επαναφέροντας στην ανάλυση τη σχέση (3.89), παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\dot{y}(t)$ αποτελεί έκφραση των συναρτήσεων $\dot{x}(t)$, $\frac{\partial h(t, x(t))}{\partial x}$ και $\frac{\partial h(t, x(t))}{\partial t}$. Επομένως, οδηγούμαστε στο πόρισμα ότι το \dot{y} είναι φραγμένο.

Κατόπιν, όπως αποδείχθηκε παραπάνω, το \dot{y} είναι φραγμένο και, επομένως, η συνάρτηση y είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του dead zone στη σχέση (2.5), καταλήγουμε ότι η συνάρτηση $D_\delta(\|y\|)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Φυσικά, αυτό συνεπάγεται πως και η $D'_\delta(\|y\|)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επιπλέον, όπως έχει δειχθεί σε προηγούμενο στάδιο της ανάλυσης με βάση την εξίσωση (3.72), το $\int_0^t D'_\delta(\|y(s)\|) ds$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο στο $[0, +\infty)$. Παράλληλα, το όρισμα του ολοκληρώματος αυτού είναι μη αρνητική ποσότητα και, άρα, αυτό συνεπάγεται ότι το $\int_0^t D'_\delta(\|y(s)\|) ds$ αποτελεί αύξουσα συνάρτηση. Έτσι, εφόσον το $\int_0^t D'_\delta(\|y(s)\|) ds$ είναι αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση, από το Θεώρημα

Σύγκλισης έπεται ότι συγκλίνει, δηλαδή ότι υπάρχει το όριο της καθώς το $t \rightarrow +\infty$ και ότι είναι πεπερασμένο.

Τελικώς, λοιπόν, επιστρατεύουμε το λήμμα Barbalat, που παρουσιάζεται αναλυτικά στην υποενότητα (2.1.8), και το εφαρμόζουμε για τη συνάρτηση $D'_\delta(\|y(t)\|)$. Πιο συγκεκριμένα, διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι απαραίτητες υποθέσεις, αφού ισχύει ότι η συνάρτηση $D'_\delta(\|y(t)\|)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, ενώ, συγχρόνως, το $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t D'_\delta(\|y(s)\|) ds$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D'_\delta(\|y(t)\|) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} D_\delta(\|y(t)\|) = 0 \implies \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| \leq \delta \quad (3.96)$$

■

Κεφάλαιο 4

Προσομοιώσεις

4.1 Έλεγχος Ρύθμισης σε Σημείο Αναφοράς για Ρομποτικό Βραχίονα 2 Βαθμών Ελευθερίας

Σε αυτήν την ενότητα του κεφαλαίου, κάνουμε χρήση του προτεινόμενου ελεγκτή που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και τον εφαρμόζουμε σε έναν τυπικό ρομποτικό βραχίονα δύο βαθμών ελευθερίας, του οποίου η δυναμική περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση [22]:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (4.1)$$

όπου: $q \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα γωνιακών θέσεων των αρθρώσεων, $\dot{q} \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα γωνιακών ταχυτήτων των αρθρώσεων, $\ddot{q} \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα των γωνιακών επιταχύνσεων των αρθρώσεων και $\tau \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα των εφαρμοζόμενων ροπών στο ρομποτικό σύστημα. Επιπρόσθετα, για τους πίνακες και το διάνυσμα που χρησιμοποιούνται στην (4.1), έχουμε ότι: $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ο πίνακας που ονομάζεται πίνακας αδράνειας και είναι θετικά ορισμένος, $C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και $G \in \mathbb{R}^2$.

Οι πίνακες M και C , καθώς και το διάνυσμα G αντιπροσωπεύουν τη μη-γραμμική δυναμική του μοντέλου και για το συγκεκριμένο σύστημα ορίζονται ως εξής:

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \cos(q_1) + m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] \\ m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$C(q, \dot{q}) = b \sin(q_2) \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

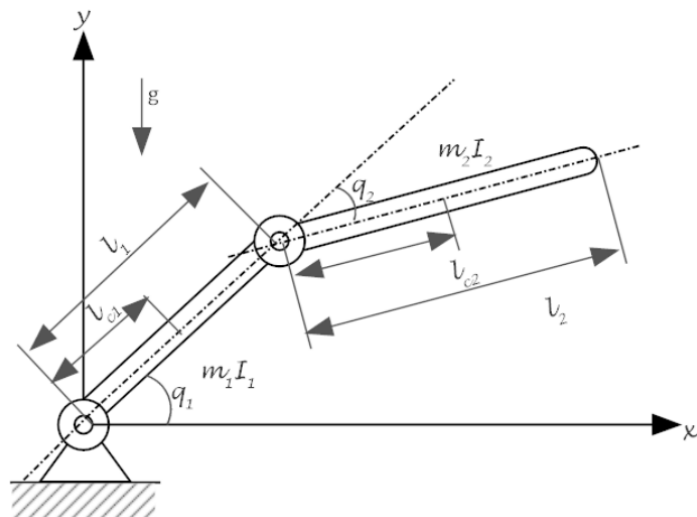
$$M(q) = \begin{bmatrix} a + b + 2c \cos(q_2) & b + c \cos(q_2) \\ b + c \cos(q_2) & b \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Ειδικότερα, οι παράμετροι a , b και c δίνονται από τις σχέσεις::

- $a = I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2$

- $b = I_2 + m_2 l_{c2}^2$
- $c = m_2 l_1 l_{c2}$

όπου τα I_1, I_2 αποτελούν τις ροπές αδράνειας των αρθρώσεων q_1 και q_2 αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1: Τυπικός ρομποτικός βραχίονας με 2 DOFs

Οι παράμετροι m_1, m_2 είναι οι μάζες των συνδέσμων (1) και (2) αντίστοιχα, l_1 και l_2 τα μήκη τους, l_{c1} και l_{c2} οι αποστάσεις μέχρι τα κέντρα μάζας των αντίστοιχων συνδέσμων και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Έτσι, ο πίνακας $M(q)$ μπορεί να υλοποιηθεί μέσω της παρακάτω έκφρασης:

$$M(q) = M_0 + M_1 \cos(q_2) \quad (4.5)$$

όπου:

- $M_0 = \begin{bmatrix} I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_2 + m_2 l_{c2}^2 & I_2 + m_2 l_{c2}^2 \\ I_2 + m_2 l_{c2}^2 & I_2 + m_2 l_{c2}^2 \end{bmatrix}$
- $M_1 = \begin{bmatrix} 2 m_2 l_1 l_{c2} & m_2 l_1 l_{c2} \\ m_2 l_1 l_{c2} & 0 \end{bmatrix}$

Με όμοια λογική, για τον πίνακα $C(q, \dot{q})$, λαμβάνουμε ότι:

$$C(q, \dot{q}) = b \sin(q_2) (C_0 \dot{q}_1 + C_1 \dot{q}_2) \quad (4.6)$$

όπου:

- $C_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $C_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Τέλος, αναλύουμε το διάνυσμα $G(q)$ με αντίστοιχο τρόπο:

$$G(q) = G_0 \cos(q_1) + G_1 \cos(q_1 + q_2) \quad (4.7)$$

όπου:

- $G_0 = \begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} + m_2 g l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $G_1 = \begin{bmatrix} m_2 g l_{c2} \\ m_2 g l_{c2} \end{bmatrix}$

Κατόπιν, ως διάνυσμα κατάστασης και ως συνάρτηση $h(t, x(t))$, όπως αυτά χρησιμοποιούνται στην ανάλυση του Κεφαλαίου 3, ορίζουμε:

$$x = h(t, x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q - q_{ref} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

όπου $q_{ref} \in \mathbb{R}^2$ η επιθυμητή τελική θέση του ρομποτικού μηχανισμού.

Επιπλέον, επιλέγοντας $\nu = 2$, η συνάρτηση $\kappa(t)$, η οποία αποτελεί μέρος του νόμου ελέγχου που προτείνεται στο Κεφάλαιο 3, γράφεται ως εξής:

$$\kappa(t) = \|h(t, x(t))\|^2 + \lambda \int_0^t D_\delta^2 (\|h(\tau, x(\tau))\|) d\tau \quad (4.9)$$

Έπειτα, ο πίνακας \bar{K} του Κεφαλαίου 3, ο οποίος αποτελεί, επίσης, τμήμα του προτεινόμενου νόμου ελέγχου, στο παρόν πλαίσιο λαμβάνει τη μορφή:

$$\bar{K}(\tilde{\phi}(\kappa)) = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

όπου:

- $\bar{K}_{11} = \sin [\omega_0 \tilde{\phi}(\kappa)]$
- $\bar{K}_{13} = \sin [\omega_0 N^2 \tilde{\phi}(\kappa)]$
- $\bar{K}_{21} = \sin [\omega_0 N^4 \tilde{\phi}(\kappa)]$
- $\bar{K}_{23} = \sin [\omega_0 N^6 \tilde{\phi}(\kappa)]$
- $\bar{K}_{12} = \sin [\omega_0 N \tilde{\phi}(\kappa)]$
- $\bar{K}_{14} = \sin [\omega_0 N^3 \tilde{\phi}(\kappa)]$
- $\bar{K}_{22} = \sin [\omega_0 N^5 \tilde{\phi}(\kappa)]$
- $\bar{K}_{24} = \sin [\omega_0 N^7 \tilde{\phi}(\kappa)]$

Η τελική μορφή του συστήματος, η οποία είναι κι εκείνη που επιστρατεύεται στις προσομοιώσεις της παρούσας ενότητας είναι η ακόλουθη:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) u - M^{-1}(q) C(q, \dot{q}) \dot{q} - M^{-1}(q) G(q) \quad (4.11)$$

όπου ως τ τίθεται ο νόμος ελέγχου $u(t)$, η μορφή του οποίου ορίσθηκε στο Κεφάλαιο 3 και ο οποίος προκύπτει από την αξιοποίηση των σχέσεων (4.8) - (4.10).

Για την υλοποίηση της προσομοίωσης, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ρομποτικού βραχίονα:

$I_1 = 0.0083$	$I_2 = 0.0667$	$g = 9.81$
$m_1 = 0.1$	$m_2 = 0.2$	$l_1 = 1$
$l_2 = 2$	$l_{c1} = 0.5$	$l_{c2} = 1$

Πίνακας 4.1: Παράμετροι ρομποτικού βραχίονα με 2 DOFs

Όσον αφορά τις συναρτήσεις ελέγχου του βραχίονα, επιλέγουμε $\phi(\kappa) = \kappa$ και $\tilde{\phi}(\kappa) = \sqrt{\ln(\ln(\kappa + e))}$.

4.1.1 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

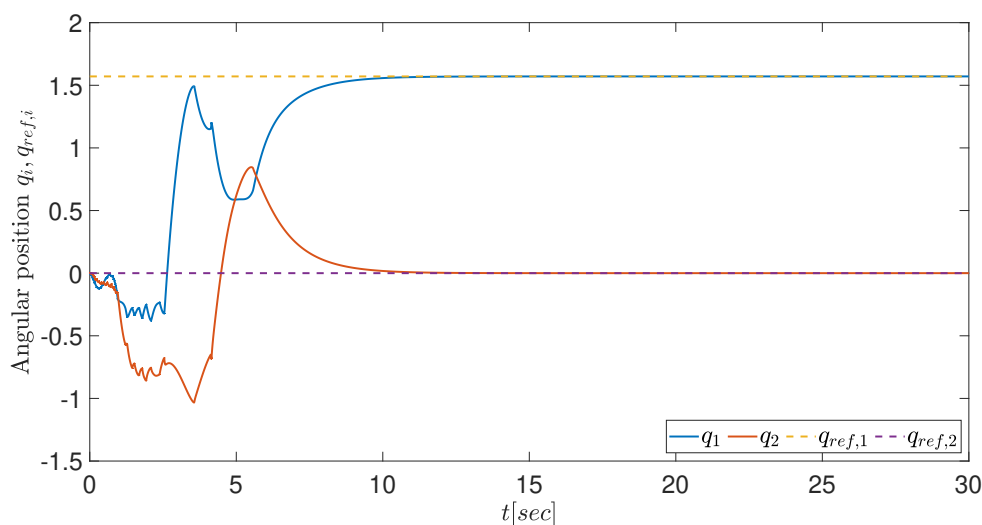
Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που υλοποιήθηκαν στο περιβάλλον Matlab Simulink. Για τις προσομοιώσεις αυτές επιλέξαμε ως αρχικές συνθήκες τις $q_0 = [0 \ 0]^T$ και $p_0 = [0 \ 0]^T$. Επιπλέον, θεωρήσαμε $q_{ref} = [\pi/2 \ 0]^T$, ώστε η επιθυμητή γωνιακή θέση να απέχει αρκετά από την αρχική.

4.1.1.1 Προσομοίωση 1

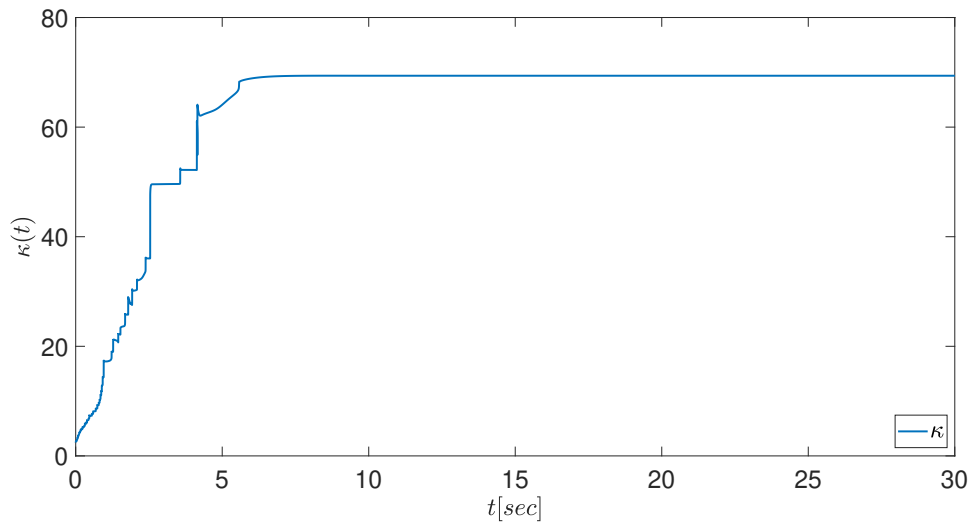
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	2.8
N	2
ω_0	5
δ	0.06

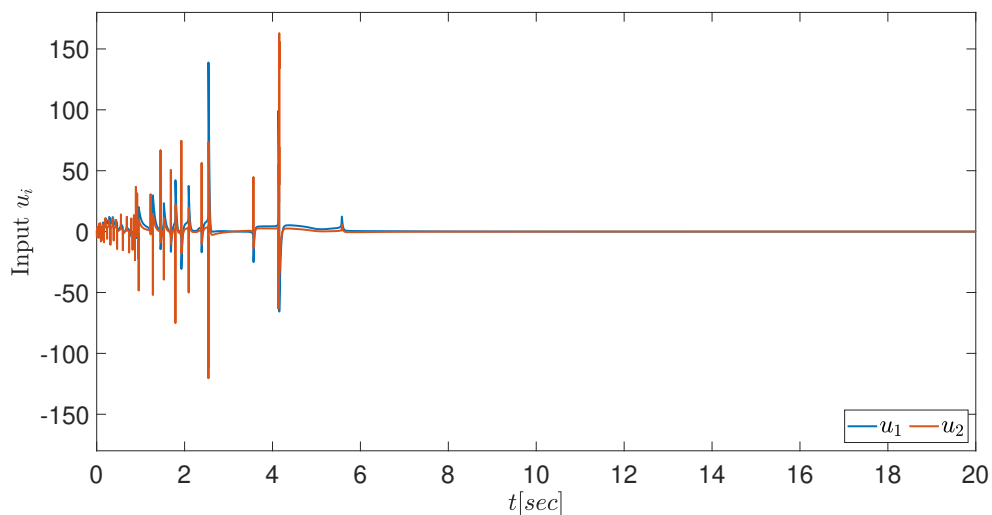
Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:



Είσοδος $u(t)$:



Στη μόνιμη κατάσταση, όταν, δηλαδή, το μελετώμενο σύστημα έχει πλέον σταθεροποιηθεί, θα ισχύει ότι $\ddot{q} = \dot{q} = 0$. Επομένως, η σχέση (4.1) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

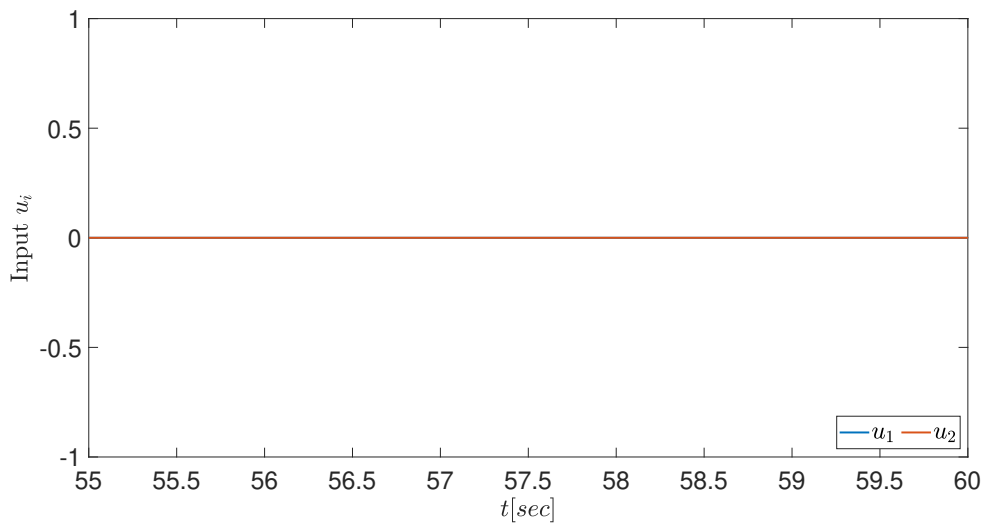
$$G(q) = u \iff \begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \cos(q_1) + m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] \\ m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Όπως παρατηρούμε, όλες οι παράμετροι είναι γνωστές σταθερές, των οποίων οι τιμές δίνονται από τον πίνακα 4.1. Παράλληλα, στη μόνιμη κατάσταση που εξετάζουμε, τα q_1 και q_2 είναι επίσης σταθερά και ίσα, κατά αντιστοιχία, με τις συνιστώσες $q_{ref,1}$ και $q_{ref,2}$ του διανύσματος της επιθυμητής θέσης, q_{ref} , του ρομποτικού βραχίονα. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει ότι $q_1 = \pi/2$ και $q_2 = 0$. Έτσι, η (4.12) μετασχηματίζεται κατά τον εξής τρόπο:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 9.81 \cdot 0.5 \cdot \cos(\pi/2) + 0.2 \cdot 9.81 \cdot [\cos(\pi/2) + \cos(\pi/2 + 0)] \\ 0.2 \cdot 9.81 \cdot \cos(\pi/2 + 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ότι το θεωρητικό αποτέλεσμα που μόλις εξάγαμε συνάδει με το πειραματικό, δηλαδή αυτό της προσομοίωσης, παραθέτουμε ένα μεγεθυμένο στιγμιότυπο της γραφικής παράστασης της εισόδου της παραπάνω προσομοίωσης, εστιασμένο σε ένα τυχαίο διάστημα της μόνιμης κατάστασης:

Είσοδος $u(t)$ στη μόνιμη κατάσταση:



Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι πράγματι τα θεωρητικά και τα πειραματικά αποτελέσματα ταυτίζονται μεταξύ τους, αφού οι τιμές που λαμβάνουν οι συνιστώσες u_1 και u_2 του διανύσματος εισόδου $u(t)$ στη μόνιμη κατάσταση της προσομοίωσης είναι ίδιες με τις θεωρητικά αναμενόμενες της σχέσης (4.13).

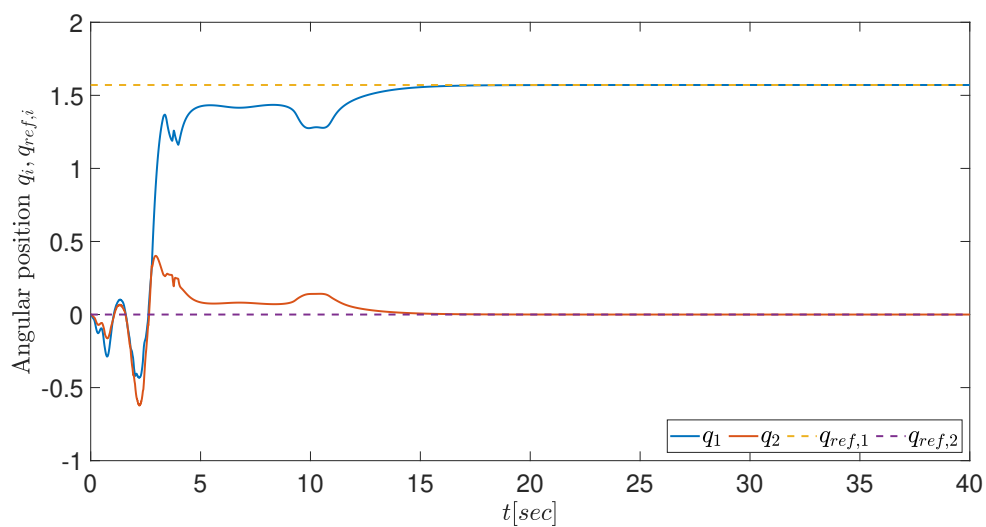
Σημείωση: Η ανάλυση που προηγήθηκε, πραγματοποιήθηκε και οδήγησε στα ίδια συμπεράσματα για καθεμία από τις προσομοιώσεις που έπονται. Στις Προσομοιώσεις 4.1.1.2 - 4.1.1.5, όπως φαίνεται, απεικονίζονται μόνο τα διανύσματα γωνιακής θέσης q και q_{ref} και η συνάρτηση $\kappa(t)$. Η λογική πίσω από αυτήν την επιλογή είναι ότι όσο μεγαλώνει το γινόμενο $N \cdot \omega_0$, τόσο μεγαλύτερες προκύπτουν και οι συχνότητες των ημιτόνων - στοιχείων του πίνακα (4.10). Ο πίνακας αυτός, με τη σειρά του, αποτελεί τμήμα της εισόδου του συστήματος. Έτσι, λοιπόν, όσο μεγαλώνουν οι τιμές των N και ω_0 , τόσο αυξάνονται και οι ρυθμοί μεταβολής των εισόδων, με αποτέλεσμα να λαμβάνουμε υψίσυχνες εισόδους, οι οποίες δεν είναι ευδιάκριτες στις προσομοιώσεις και απαιτείται μεγάλη μεγέθυνση για να είναι ευκρινείς. Τέλος, στην προσομοίωση 4.1.1.5 ορίζουμε διαφορετικό διάνυσμα επιθυμητής γωνιακής θέσης, q_{ref} , ενώ στην προσομοίωση 4.1.1.6 διαφορετική αρχική συνθήκη για τη γωνιακή θέση.

4.1.1.2 Προσομοίωση 2

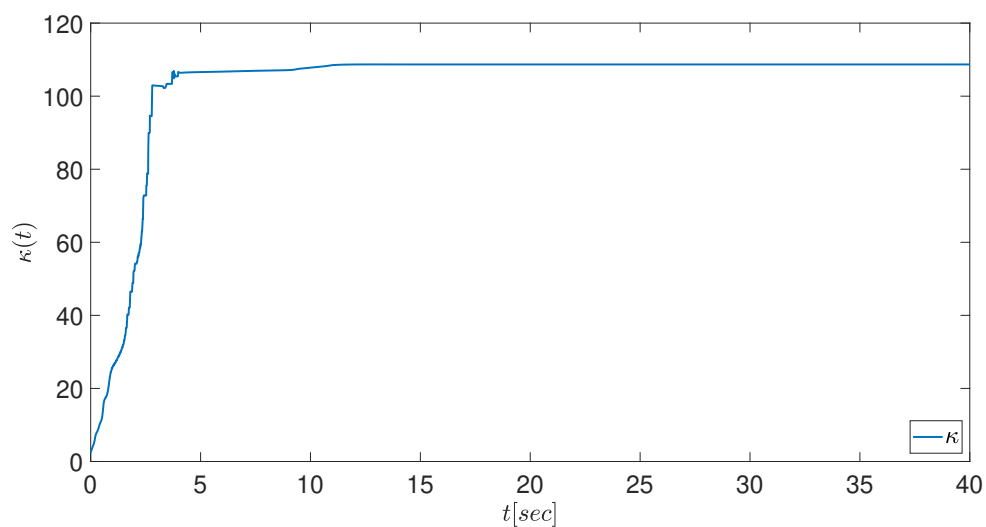
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	6
N	3
ω_0	5
δ	0.07

Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

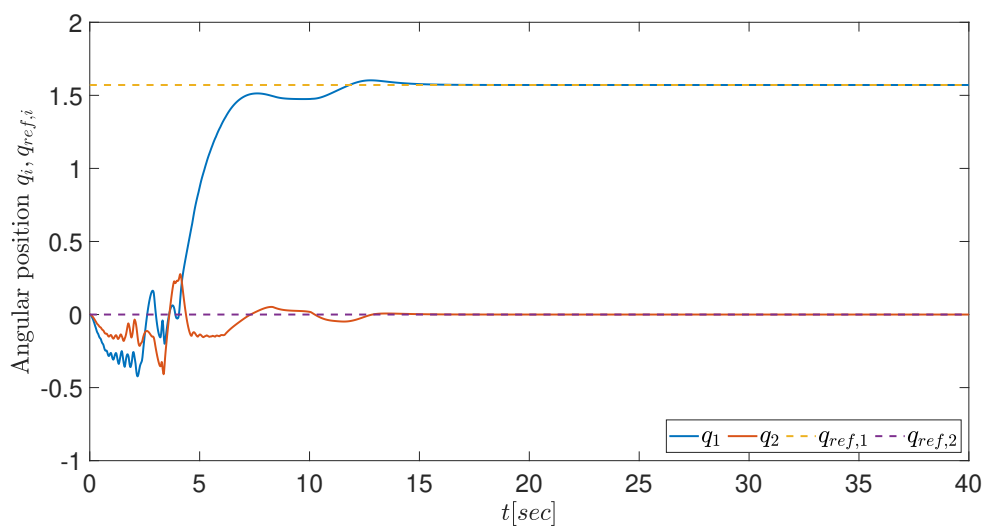


4.1.1.3 Προσομοίωση 3

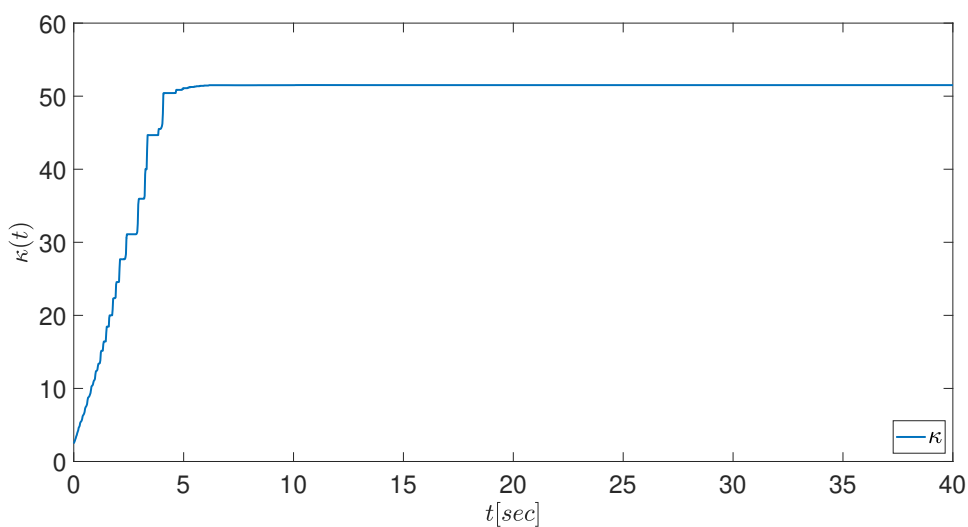
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	2.6
N	4
ω_0	14
δ	0.09

Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

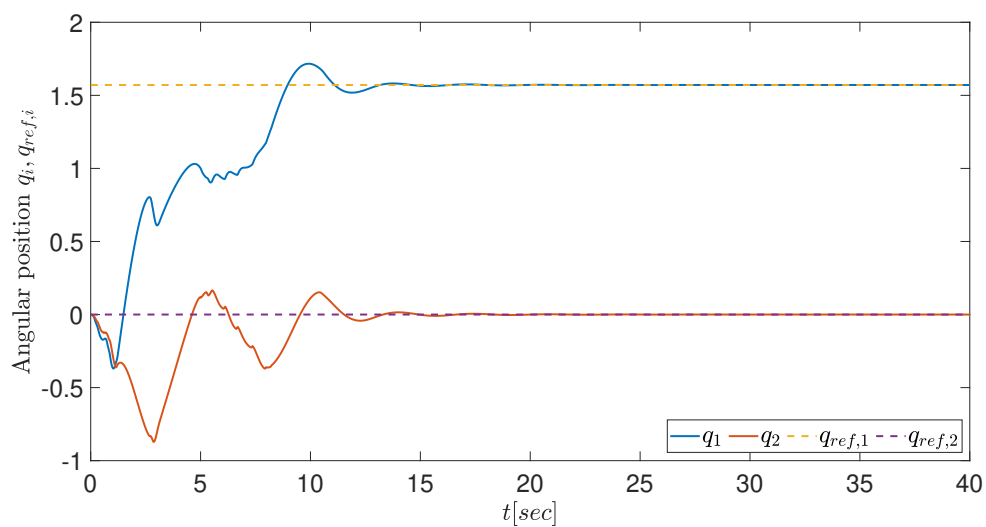


4.1.1.4 Προσομοίωση 4

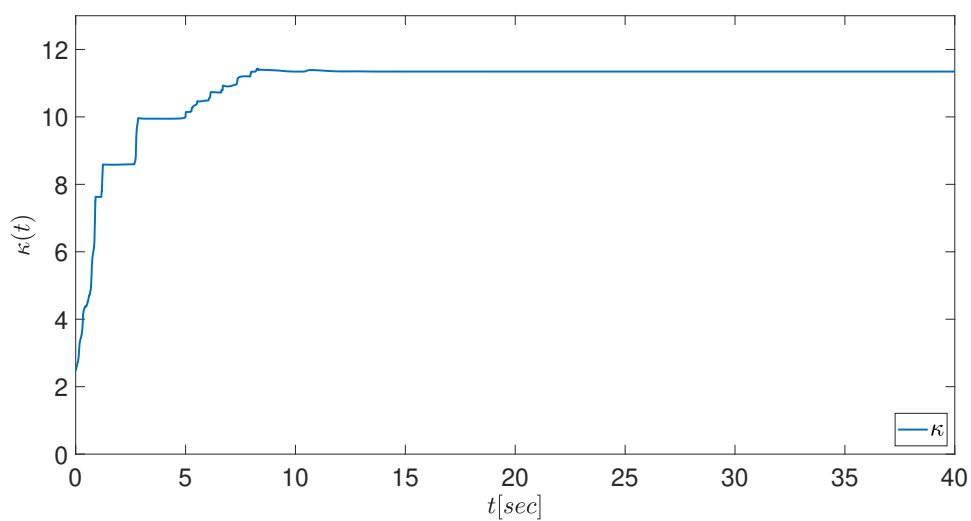
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	0.9
N	2
ω_0	30
δ	0.08

Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

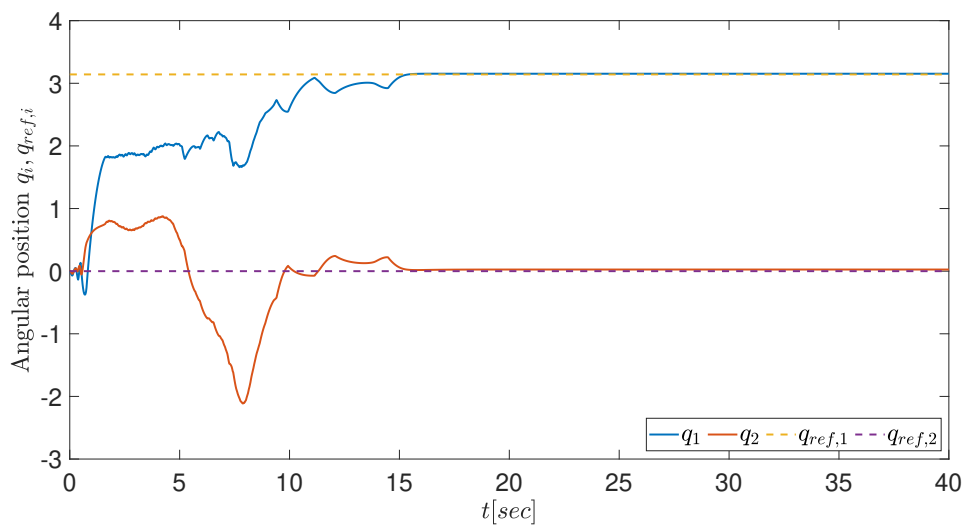


4.1.1.5 Προσομοίωση 5

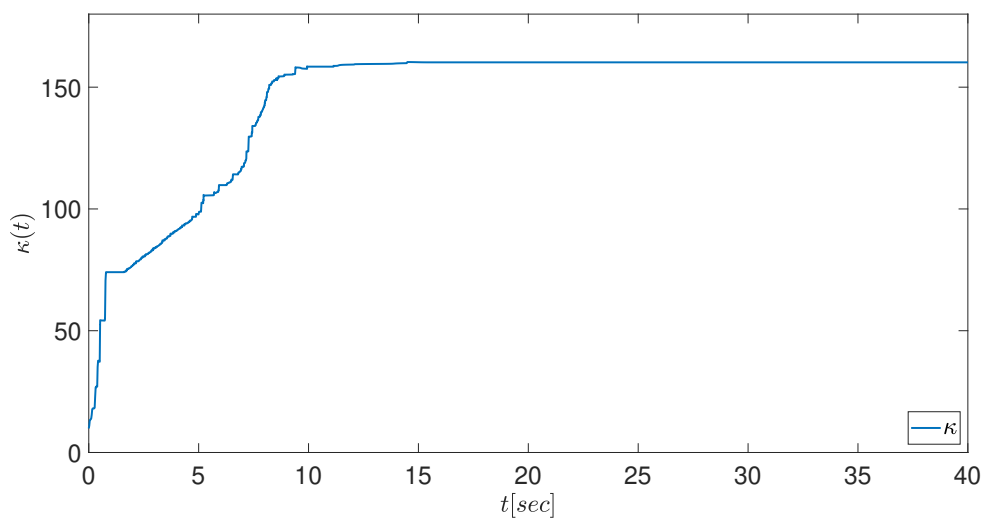
Στην παρούσα προσομοίωση, αλλάζουμε το διάνυσμα επιθυμητής γωνιακής θέσης και, πιο ειδικά, θεωρούμε $q_{ref} = [\pi \ 0]^T$. Επιπλέον, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	3
N	3
ω_0	8
δ	0.07

Διάνυσμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

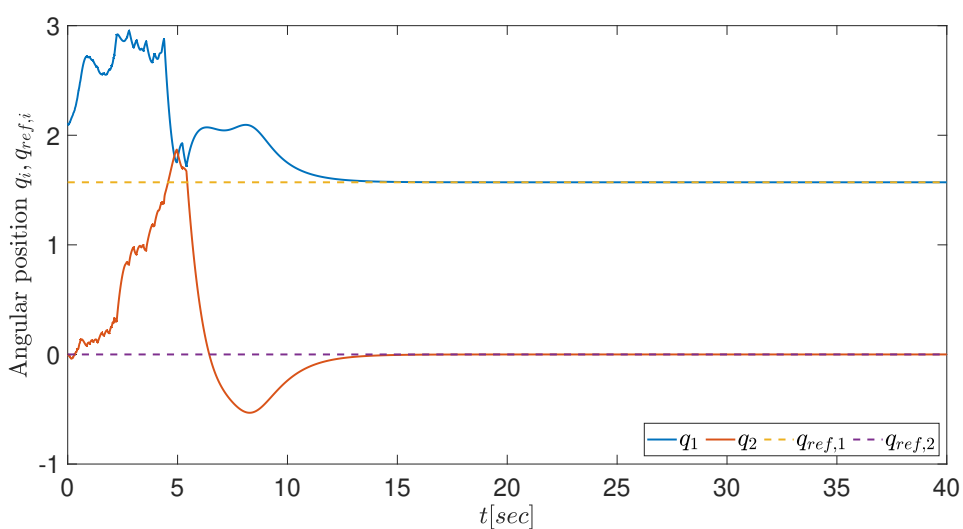


4.1.1.6 Προσομοίωση 6

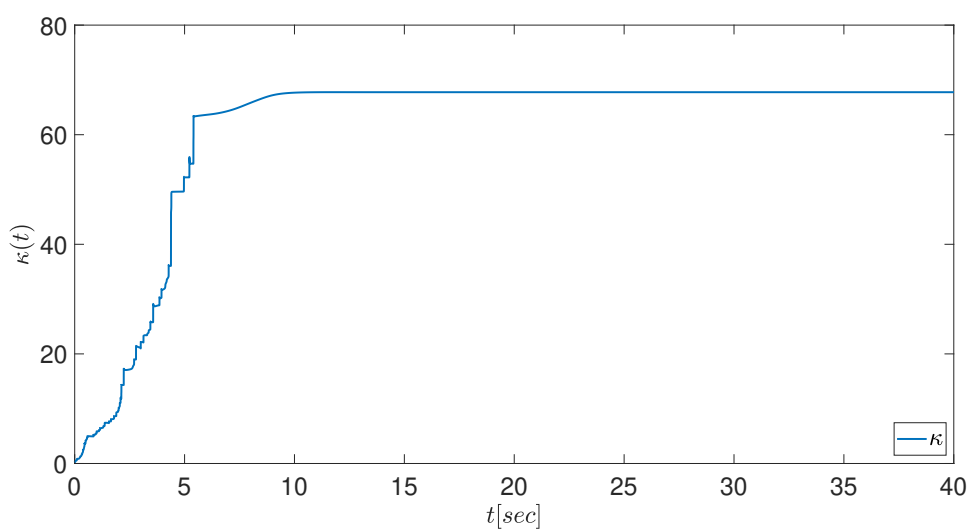
Στην παρούσα προσομοίωση, αλλάζουμε την αρχική συνθήκη που αφορά το διάνυσμα γωνιακής θέσης και, πιο ειδικά, θεωρούμε $q_0 = [2\pi/3 \ 0]^T$. Επιπλέον, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	2.8
N	2
ω_0	5
δ	0.06

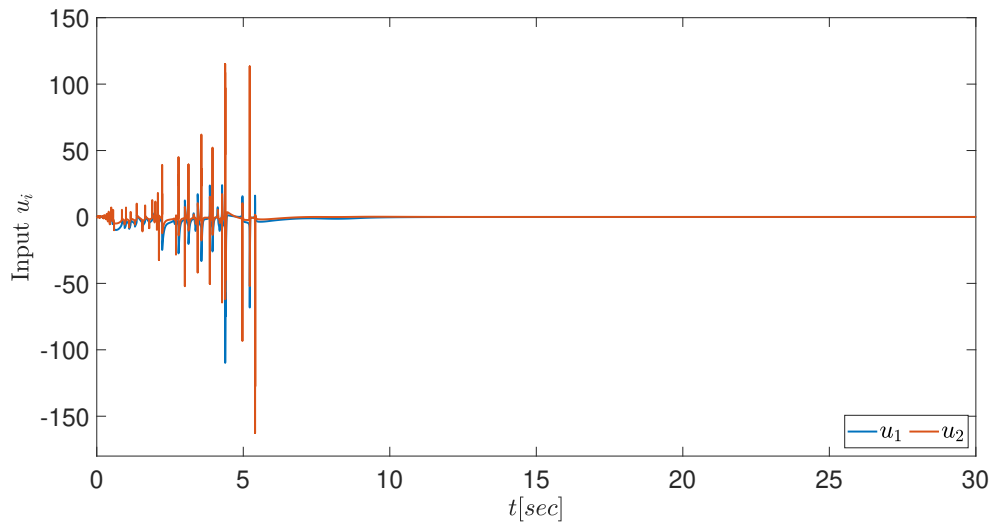
Διάνυσμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:



Είσοδος $u(t)$:



4.1.2 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων Προσομοιώσεων

Τα συμπεράσματα που εξάγονται και οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από τη μελέτη των γραφημάτων - αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων είναι τα ακόλουθα:

- Από τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν, προκύπτει ότι ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης σε σημείο αναφοράς για ρομποτικό βραχίονα 2 βαθμών ελευθερίας, ανεξάρτητα από τις κατευθύνσεις ελέγχου και τη δυναμική του συστήματος.
- Συγχρόνως, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μικρή καθυστέρηση στη σύγκλιση του συστήματος στο επιθυμητό σημείο αναφοράς. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς για τη σχεδίαση του παρόντος νόμου ελέγχου χρησιμοποιήθηκαν συναρτήσεις με χαμηλό κέρδος. Στον αντίποδα, βέβαια, η χρήση τέτοιων συναρτήσεων αποτελεί και ένα σημαντικό πλεονέκτημα συγκριτικά με άλλες τεχνικές ελέγχου, αφού έτσι αυξάνεται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου όσον αφορά την πρακτική της εφαρμογή.
- Επιπλέον, μέσω της σχετικής γραφικής παράστασης για καθεμία από τις παραπάνω προσομοιώσεις, επιβεβαιώνεται ότι η συνάρτηση $\kappa(t)$ είναι φραγμένη, όπως αρχικά υποτέθηκε και αργότερα αποδείχθηκε στην ενότητα 3.3 στο πλαίσιο της θεωρητικής ανάλυσης.
- Επιπρόσθετα, μέσα από τις προσομοιώσεις και, συγκεκριμένα, τα γραφήματα που αφορούν το διάλυμα γωνιακής θέσης, συμπεραίνουμε ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης συγκλίνει στο εύρος του - από εμάς καθορισμένου - dead zone και, συνεπώς, με κατάλληλη ρύθμιση αυτής της παραμέτρου (και προσαρμογές των υπολοίπων) μπορεί να λάβει οσοδήποτε μικρή τιμή επιθυμούμε.
- Έπειτα, παρατηρούμε ότι στη διάρκεια της μεταβατικής κατάστασης, σημειώνονται αλληλεπάλλινες αλλαγές κατευθύνσεων, αυξομειούμενες ταλαντώσεις γύρω από κάποια σημεία

και επιτρεπόμενα μεγάλες υπερυψώσεις (overshootings) είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω σε σχέση με την επιθυμητή τιμή. Αυτό συμβαίνει διότι, κατά το μεταβατικό στάδιο, ο - βασιζόμενος στη χρήση ημιτόνων - εφαρμοζόμενος νόμος ελέγχου καταβάλλει σαφώς μεγαλύτερη προσπάθεια από ό,τι στη μόνιμη κατάσταση μέχρις ότου να προσδιορίσει τη σωστή κατεύθυνση ελέγχου.

- Επίσης, μετά από τη δοκιμή διαφόρων συναρτήσεων $\phi(\kappa)$ και $\tilde{\phi}(\kappa)$ στις προσομοιώσεις, διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζεται το πολυδιάστατο δίλημμα συμβιβασμού ανάμεσα στη χρήση υψηλού κέρδους και την εξασφάλιση γρήγορης μεταβατικής απόκρισης, στο οποίο οφείλουμε να αποφανθούμε σύμφωνα με τις απαιτήσεις του προβλήματός μας, ρυθμίζοντας κατάλληλα τις παραμέτρους του εφαρμοζόμενου ελεγκτή.
- Κατόπιν, σε καθεμία από τις παραπάνω προσομοιώσεις, έχει επιλεγθεί dead zone σχετικά μικρού εύρους, το οποίο ανταποκρίνεται αποτελεσματικά στα διάφορα συστήματα που εφαρμόζεται μέσω του προτεινόμενου ελεγκτή.
- Τέλος, όσον αφορά την προσομοίωση 4.1.1.6, ορίστηκε ώστε να διαφέρει από την προσομοίωση 4.1.1.1 μόνο ως προς την αρχική συνθήκη q_0 . Πιο συγκεκριμένα, η αρχική γωνιακή θέση, q_0 , επιλέχθηκε λίγο πιο κοντά στο επιθυμητό σημείο αναφοράς σε σχέση με την 4.1.1.1. Συνεπώς, ισχύει ότι το σφάλμα $q - q_{ref}$, το οποίο αποτελεί όχι μόνο αναλογικό όρο αλλά και ολοκληρωτικό παράγοντα του προτεινόμενου ελεγκτή, είναι μεγαλύτερο στην αρχή της προσομοίωσης 4.1.1.1. Ως άμεση συνέπεια, τόσο τα αρχικά gains όσο και οι αρχικές εισοδοί λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές στην περίπτωση της προσομοίωσης 4.1.1.1 σε σχέση με την 4.1.1.6.

4.2 Έλεγχος Ρύθμισης σε Σημείο Αναφοράς για Ρομποτικό Βραχίονα 7 Βαθμών Ελευθερίας

Σε αυτήν την ενότητα του κεφαλαίου, χρησιμοποιούμε ξανά τον προτεινόμενο ελεγκτή που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και, αυτή τη φορά, τον εφαρμόζουμε σε ένα ρομποτικό βραχίονα επτά βαθμών ελευθερίας, τον PERA, του οποίου η δυναμική περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων [23]:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} & \mathbb{I}_m \\ -\mathbb{I}_m & -D(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H(q, p) \\ \nabla_p H(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{m \times m} \\ G \end{bmatrix} u \quad (4.14)$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + U(q) \quad (4.15)$$

$$y_{qp} = G^T M^{-1}(q) p \quad (4.16)$$

όπου: $q, p \in \mathbb{R}^m$ τα γενικευμένα διανύσματα γωνιακών θέσεων και γωνιακών ταχυτήτων (ορμών) των αρθρώσεων, αντίστοιχα, $\mathbb{O}_{m \times m}$ ο τετραγωνικός μηδενικός πίνακας διαστάσεων $m \times m$, \mathbb{I}_m ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $m \times m$, $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος, $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ η δυναμική ενέργεια του συστήματος, $M :$

$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ ο πίνακας που ονομάζεται πίνακας αδράνειας μάζας και είναι θετικά ορισμένος, $D : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας που αναπαριστά τη φυσική απόσβεση του συστήματος, $u, y_{qp} \in \mathbb{R}^p$ ο προτεινόμενος έλεγχος του προηγούμενου κεφαλαίου και η έξοδος, αντίστοιχα, με $p \leq m$, και $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$ το διάνυσμα εισόδου με $\text{rank}(G) = p$ που ορίζεται ως ακολούθως:

$$G := \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{(m-p) \times p} \\ \mathbb{I}_p \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Οι πίνακες D και M , καθώς και η συνάρτηση U αντιπροσωπεύουν τη μη-γραμμική δυναμική του μοντέλου. Σε αυτήν την ενότητα, επιλέγουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα του πλήρως οδηγούμενου (fully actuated) ρομποτικού μηχανισμού, για το οποίο ισχύει $p = m$. Τότε, υπό αυτές τις προϋποθέσεις, και για $m = p = 3$, τα παραπάνω μη γραμμικά στοιχεία ορίζονται ως εξής:

$$D(q, p) = \mathbb{O}_{m \times m} \implies D(q, p) = \mathbb{O}_{3 \times 3} \quad (4.18)$$

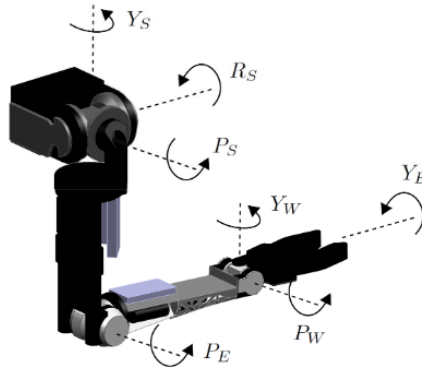
$$U(q) = m_2 d_{c2} g (1 - \cos(q_2)) \quad (4.19)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & 0 \\ m_{13}^T & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Ειδικότερα, οι παράμετροι $m_{11}, m_{13}, m_{13}^T, m_{22}$ και m_{33} δίνονται από τις σχέσεις:

- $m_{11} := \sum_{i=1}^3 I_i + m_2 d_{c2}^2 \sin^2(q_2)$
- $m_{13} := I_3 \cos(q_2) = m_{13}^T$
- $m_{22} := \sum_{j=2}^3 I_j + m_2 d_{c2}^2$
- $m_{33} := I_3$

όπου τα I_1, I_2, I_3 αποτελούν τις ροπές αδράνειας των αρθρώσεων q_3, q_4 και q_5 , οι οποίες αντιστοιχούν στα Y_S, P_E και Y_E αντίστοιχα.



Σχήμα 4.2: Ρομποτικός βραχίονας PERA με 7 DOFs

Επίσης, m_2 είναι η μάζα του συνδέσμου που ενώνει τον αγκώνα και τον καρπό του ρομποτικού βραχίονα, d_{c2} η απόσταση μέχρι το κέντρο μάζας του συνδέσμου μάζας m_2 και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Έτσι, ο πίνακας $M(q)$ μπορεί να υλοποιηθεί μέσω της παρακάτω έκφρασης:

$$M(q) = M_0 + M_1 \sin^2(q_2) + M_2 \cos(q_2) \quad (4.21)$$

όπου:

$$\bullet M_0 = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + I_3 + m_2 d_{c2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet M_1 = \begin{bmatrix} m_2 d_{c2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$(4.17) \iff G = \mathbb{I}_3 \quad (4.22)$$

και άρα:

$$(4.16) \iff y_{qp} = \mathbb{I}_3 M^{-1}(q) p \iff y_{qp} = M^{-1}(q) p \quad (4.23)$$

Στη συνέχεια, όσον αφορά τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση, όπως αυτή ορίζεται στις σχέσεις (4.15), λαμβάνουμε ότι:

$$\nabla_p H(q, p) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} = \frac{1}{2} 2 M^{-1}(q) p \implies \nabla_p H(q, p) = M^{-1}(q) p \quad (4.24)$$

$$\nabla_q H(q, p) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_1} p + \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_2} p + \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ \frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_3} p + \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Στο επόμενο στάδιο, επιστρατεύουμε το σύστημα (4.14) - (4.15), το οποίο, μέσω των (4.18) - (4.22), (4.24) και (4.25), μετασχηματίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\dot{q} = M^{-1}(q) p \quad (4.26)$$

$$\dot{p} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_1} p + \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_2} p + \frac{\partial U}{\partial q_2} \\ \frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_3} p + \frac{\partial U}{\partial q_3} \end{bmatrix} + u \quad (4.27)$$

Όσον αφορά την (4.27), είναι σαφές ότι χρήζει περαιτέρω ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να υπολογίσουμε τους πίνακες $\frac{\partial M^{-1}}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, 3$, προβαίνουμε στην εξής διαδικασία:

Όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό αντίστροφου πίνακα ενός τετραγωνικού πίνακα, έστω M , διαστάσεων $m \times m$, ισχύει ότι:

$$MM^{-1} = \mathbb{I}_m \quad (4.28)$$

Παραγωγίζοντας την (4.28) ως προς q_i , οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\frac{\partial M}{\partial q_i} M^{-1} + M \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_i} = \mathbb{O}_m \implies \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_i} = -M^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_i} M^{-1} \quad (4.29)$$

Ως εκ τούτου, οι επιμέρους ποσότητες της (4.27) επαναπροσδιορίζονται ως εξής:

- $\frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_1} p = -\frac{1}{2} p^T M^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_1} M^{-1} p = 0$, αφού $\frac{\partial M}{\partial q_1} = 0$
- $\frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_3} p = -\frac{1}{2} p^T M^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_3} M^{-1} p = 0$, αφού $\frac{\partial M}{\partial q_3} = 0$
- $\frac{1}{2} p^T \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_2} p = -\frac{1}{2} p^T M^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_2} M^{-1} p$
- $\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial(m_2 d_{c2} g (1-\cos(q_2)))}{\partial q_1} = 0$
- $\frac{\partial U}{\partial q_3} = \frac{\partial(m_2 d_{c2} g (1-\cos(q_2)))}{\partial q_3} = 0$
- $\frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{\partial(m_2 d_{c2} g (1-\cos(q_2)))}{\partial q_2} = m_2 d_{c2} g \sin(q_2)$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τους ανωτέρω υπολογισμούς, η σχέση (4.27) μετασχηματίζεται στην εξής μορφή:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} p^T M^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_2} M^{-1} p - m_2 d_{c2} g \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} + u \quad (4.30)$$

Κατόπιν, ως διάνυσμα κατάστασης και ως συνάρτηση $h(t, x(t))$, όπως αυτά χρησιμοποιούνται στην ανάλυση του Κεφαλαίου 3, ορίζουμε:

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q - q_{ref} \end{bmatrix} \text{ και } h = \begin{bmatrix} y_{qp} \\ \mathbb{I}_3(q - q_{ref}) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

όπου $q_{ref} \in \mathbb{R}^3$ η επιθυμητή τελική θέση του ρομποτικού μηχανισμού.

Με αξιοποίηση της σχέσης (4.23), η συνάρτηση h στην (4.31) μετασχηματίζεται κατά τον εξής τρόπο:

$$h = \begin{bmatrix} M^{-1}(q) p \\ q - q_{ref} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Επιπλέον, επιλέγοντας $\nu = 2$, η συνάρτηση $\kappa(t)$, η οποία αποτελεί μέρος του νόμου ελέγχου που προτείνεται στο Κεφάλαιο 3, γράφεται ως εξής:

$$\kappa(t) = \|h(t, x(t))\|^2 + \lambda \int_0^t D_\delta^2 (\|h(\tau, x(\tau))\|) d\tau \quad (4.33)$$

Έπειτα, ο πίνακας \bar{K} του Κεφαλαίου 3, ο οποίος αποτελεί, επίσης, τμήμα του προτεινόμενου νόμου ελέγχου, στο παρόν πλαίσιο λαμβάνει τη μορφή:

$$\bar{K}(\tilde{\phi}(\kappa)) = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & 0 & 0 & \bar{K}_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_{22} & 0 & 0 & \bar{K}_{25} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_{33} & 0 & 0 & \bar{K}_{36} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \bullet \bar{K}_{11} &= \sin \left[\omega_0 \tilde{\phi}(\kappa) \right] & \bar{K}_{14} &= \sin \left[\omega_0 N^3 \tilde{\phi}(\kappa) \right] \\ \bullet \bar{K}_{22} &= \sin \left[\omega_0 N \tilde{\phi}(\kappa) \right] & \bar{K}_{25} &= \sin \left[\omega_0 N^4 \tilde{\phi}(\kappa) \right] \\ \bullet \bar{K}_{33} &= \sin \left[\omega_0 N^2 \tilde{\phi}(\kappa) \right] & \bar{K}_{36} &= \sin \left[\omega_0 N^5 \tilde{\phi}(\kappa) \right] \end{aligned}$$

Οι λόγοι που ο πίνακας της σχέσης (4.34) έχει την παραπάνω μορφή είναι οι ακόλουθοι δύο: Αρχικά, αν ήταν πλήρης, θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν απαγορευτικά μεγάλες συχνότητες στα ημίτονα - στοιχεία του πίνακα. Επιπλέον, μια διαγώνια μορφή στα κέρδη που αφορούν τις μεταβλητές του διανύσματος εξόδου είναι αρκετή για να σταθεροποιήσει το σύστημα.

Τέλος, ο νόμος ελέγχου $u(t)$, η μορφή του οποίου ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3, προκύπτει, επιστρατεύοντας τις σχέσεις (4.32) - (4.34).

Η τελική μορφή του συστήματος, η οποία είναι κι εκείνη που επιστρατεύεται στις προσομοιώσεις της παρούσας ενότητας είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{3 \times 3} & \mathbb{I}_3 \\ -\mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H(q, p) \\ \nabla_p H(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{3 \times 3} \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} u \quad (4.35)$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + U(q) \quad (4.36)$$

$$y_{qp} = M^{-1}(q) p \quad (4.37)$$

Περνώντας, πλέον, στην υλοποίηση της προσομοίωσης που αναλύσαμε, ορίζουμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ρομποτικού βραχίονα:

$I_1 = 1$	$I_2 = 1$	$I_3 = 1$
$m_2 = 1$	$d_{c2} = 0.16$	$g = 9.81$

Πίνακας 4.2: Παράμετροι ρομποτικού βραχίονα PERA με 7 DOFs

Όσον αφορά τις συναρτήσεις ελέγχου του βραχίονα, επιλέγουμε $\phi(\kappa) = \kappa$ και $\tilde{\phi}(\kappa) = \sqrt{\ln(\ln(\kappa + e))}$.

4.2.1 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

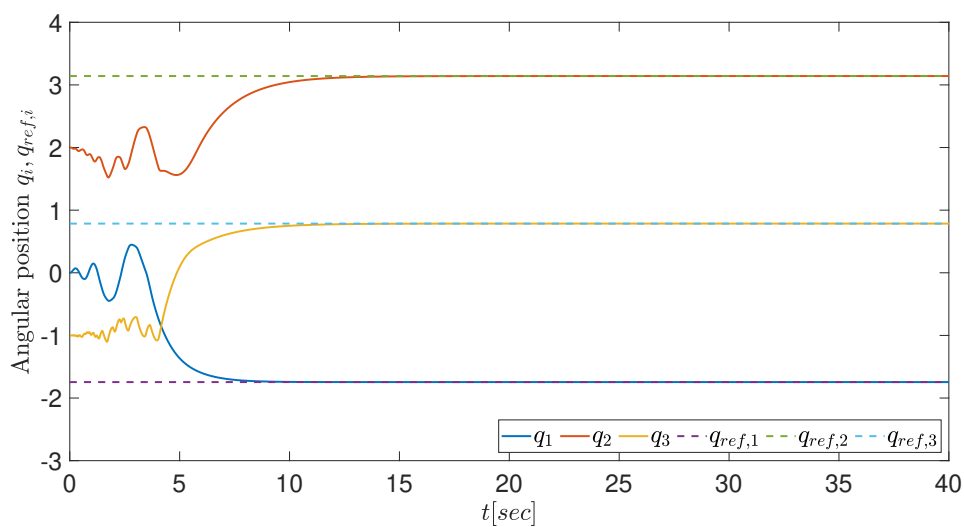
Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που υλοποιήθηκαν στο περιβάλλον Matlab Simulink. Για τις προσομοιώσεις αυτές επιλέξαμε ως αρχικές συνθήκες τις $q_0 = [0 \ 2 \ -1]^T$ και $p_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Επιπλέον, θεωρήσαμε $q_{ref} = [-5\pi/9 \ \pi \ \pi/4]^T$, ώστε η επιθυμητή γωνιακή θέση να απέχει αρκετά από την αρχική.

4.2.1.1 Προσομοίωση 1

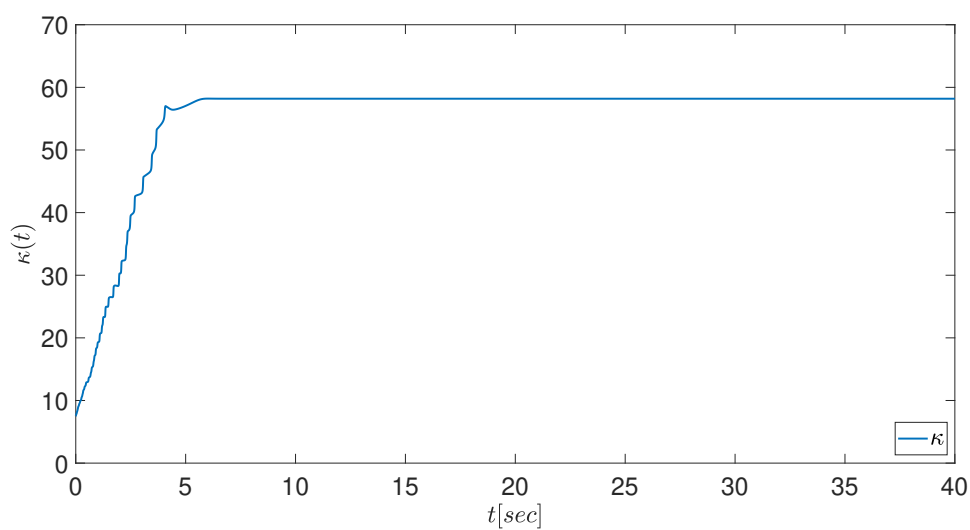
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	1.2
N	2.5
ω_0	4
δ	0.03

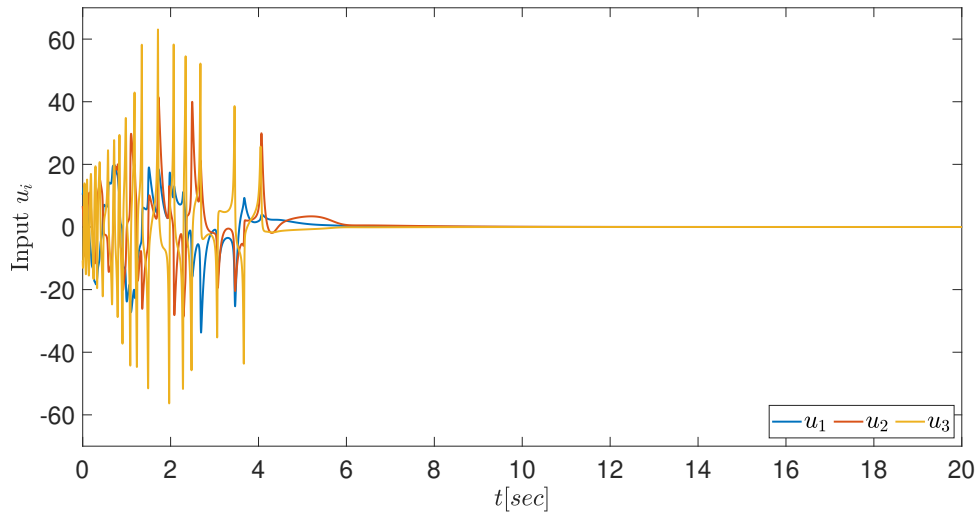
Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:



Είσοδος $u(t)$:



Στη μόνιμη κατάσταση, όταν, δηλαδή, το μελετώμενο σύστημα έχει πλέον σταθεροποιηθεί, θα ισχύει ότι $\dot{q} = \dot{p} = p = 0$. Επομένως, η σχέση (4.30) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

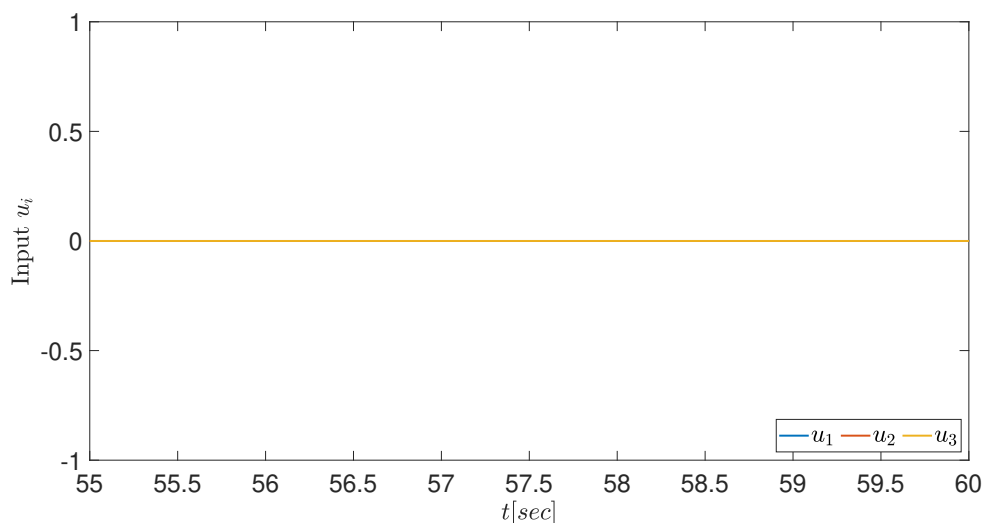
$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 d_{c2} g \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} + u \iff \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_{c2} g \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Όπως παρατηρούμε, όλες οι παράμετροι είναι γνωστές σταθερές, των οποίων οι τιμές δίνονται από τον πίνακα 4.2. Παράλληλα, στη μόνιμη κατάσταση που εξετάζουμε, τα q_1 , q_2 και q_3 είναι επίσης σταθερά και ίσα, κατά αντιστοιχία, με τις συνιστώσες $q_{ref,1}$, $q_{ref,2}$ και $q_{ref,3}$ του διανύσματος της επιθυμητής θέσης, q_{ref} , του ρομποτικού βραχίονα. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει ότι $q_1 = -5\pi/9$, $q_2 = \pi$ και $q_3 = \pi/4$. Έτσι, η (4.38) μετασχηματίζεται κατά τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.16 \cdot 9.81 \cdot \sin(\pi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ότι το θεωρητικό αποτέλεσμα που μόλις εξάγαμε συνάδει με το πειραματικό, δηλαδή αυτό της προσομοίωσης, παραθέτουμε ένα μεγεθυμένο στιγμιότυπο της γραφικής παράστασης της εισόδου της παραπάνω προσομοίωσης, εστιασμένο σε ένα τυχαίο διάστημα της μόνιμης κατάστασης:

Είσοδος $u(t)$ στη μόνιμη κατάσταση:



Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι πράγματι τα θεωρητικά και τα πειραματικά αποτελέσματα ταυτίζονται μεταξύ τους, αφού οι τιμές που λαμβάνουν οι συνιστώσες u_1 , u_2 και u_3 του διανύσματος εισόδου $u(t)$ στη μόνιμη κατάσταση της προσομοίωσης είναι ίδιες με τις θεωρητικά αναμενόμενες της σχέσης (4.39).

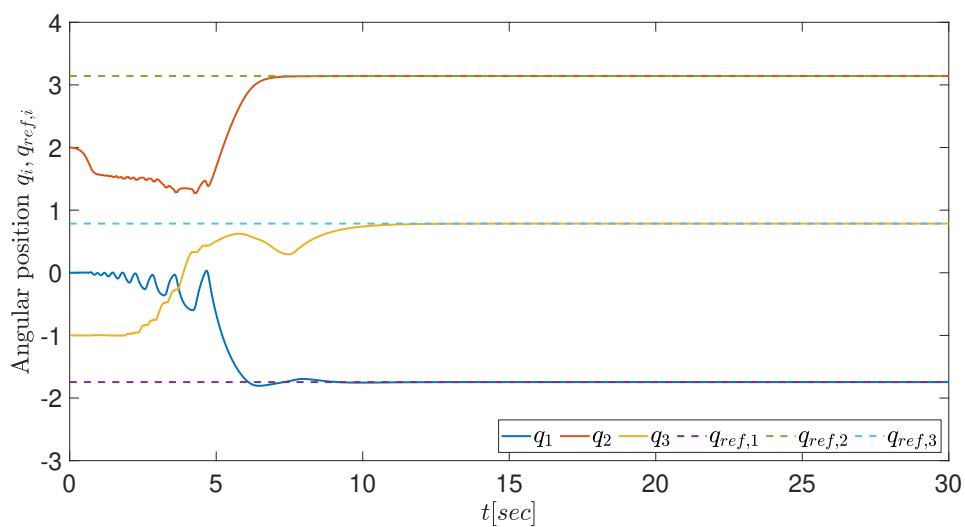
Σημείωση: Η ανάλυση που προηγήθηκε, πραγματοποιήθηκε και οδήγησε στα ίδια συμπεράσματα για καθεμία από τις προσομοιώσεις που έπονται. Στις προσομοιώσεις 4.2.1.2 - 4.1.1.5, όπως φαίνεται, απεικονίζονται μόνο τα διανύσματα γωνιακής θέσης q και q_{ref} και η συνάρτηση $\kappa(t)$. Η λογική πίσω από αυτήν την επιλογή είναι ότι όσο μεγαλώνει το γινόμενο $N \cdot \omega_0$, τόσο μεγαλύτερες προκύπτουν και οι συχνότητες των ημιτόνων - στοιχείων του πίνακα (4.34). Ο πίνακας αυτός, με τη σειρά του, αποτελεί τμήμα της εισόδου του συστήματος. Έτσι, λοιπόν, όσο μεγαλώνουν οι τιμές των N και ω_0 , τόσο αυξάνονται και οι ρυθμοί μεταβολής των εισόδων, με αποτέλεσμα να λαμβάνουμε υψίσυχνες εισόδους, οι οποίες δεν είναι ευδιάκριτες στις προσομοιώσεις και απαιτείται μεγάλη μεγέθυνση για να είναι ευκρινείς. Τέλος, στην προσομοίωση 4.2.1.5 ορίζουμε διαφορετικό διάνυσμα επιθυμητής γωνιακής θέσης, q_{ref} , ενώ στην προσομοίωση 4.2.1.6 διαφορετική αρχική συνθήκη για τη γωνιακή θέση.

4.2.1.2 Προσομοίωση 2

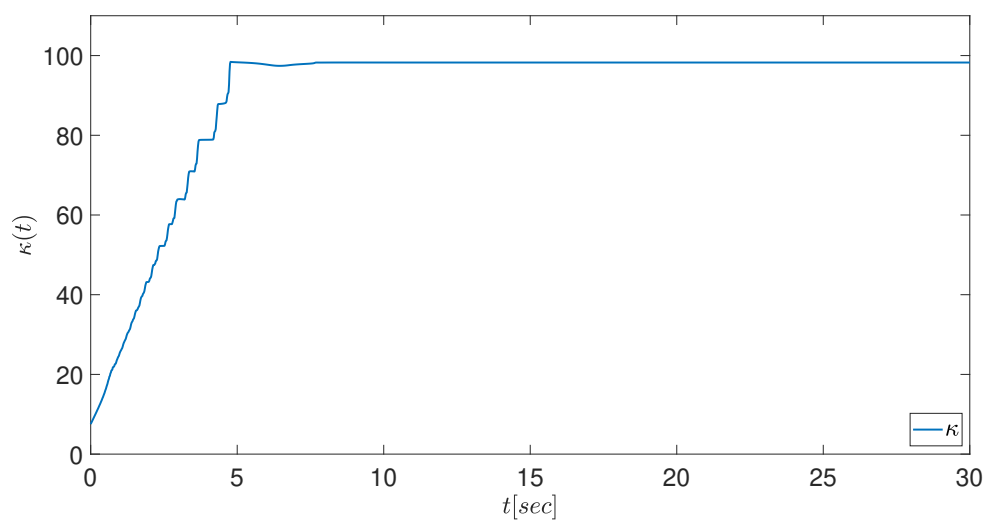
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	2
N	4
ω_0	5
δ	0.04

Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

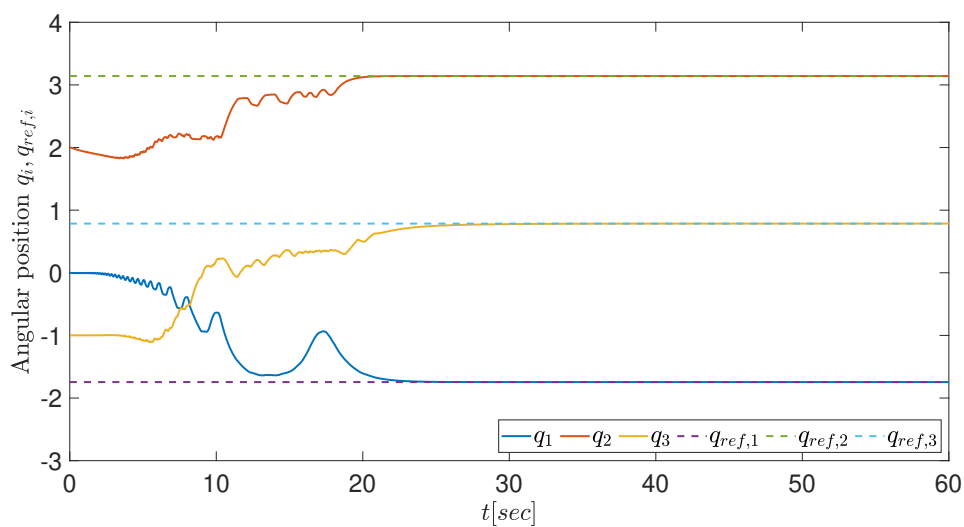


4.2.1.3 Προσομοίωση 3

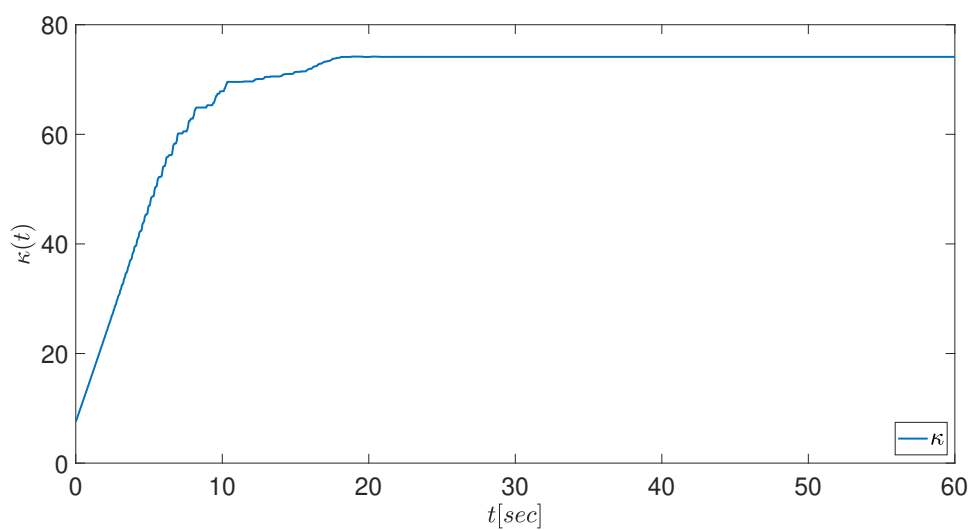
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	1
N	6
ω_0	4
δ	0.04

Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

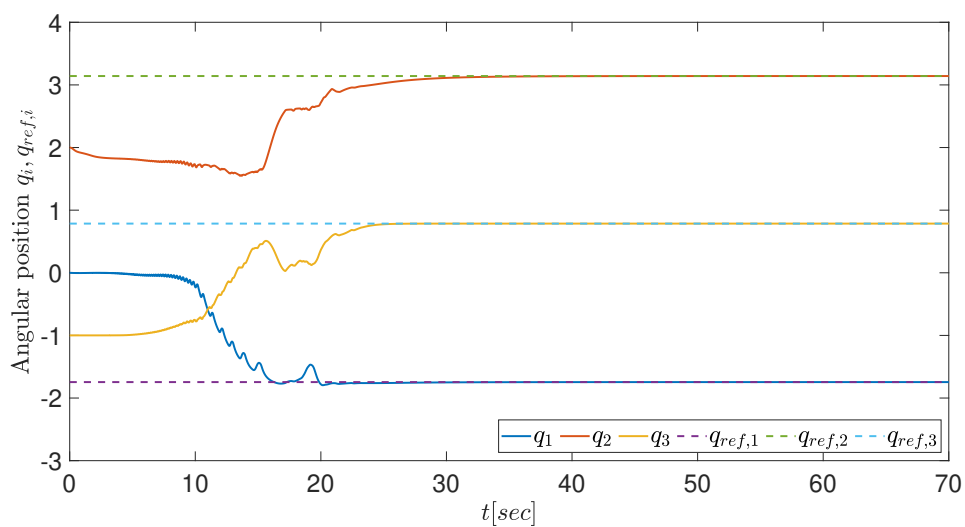


4.2.1.4 Προσομοίωση 4

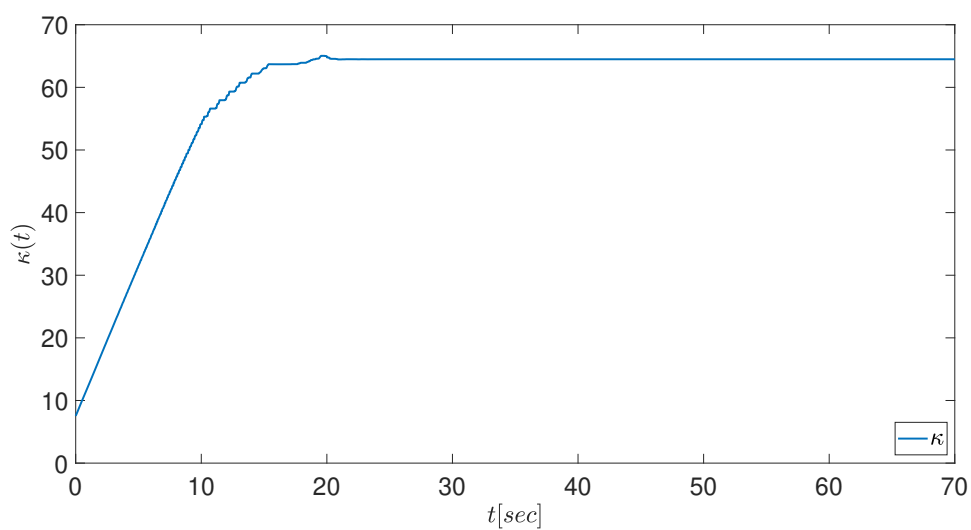
Στην παρούσα προσομοίωση, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	0.6
N	7
ω_0	8
δ	0.02

Διάγραμμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

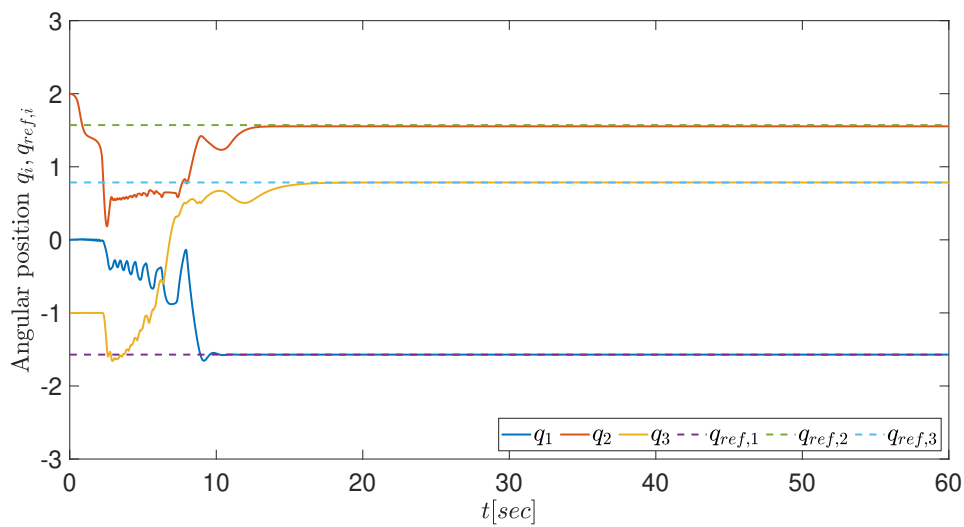


4.2.1.5 Προσομοίωση 5

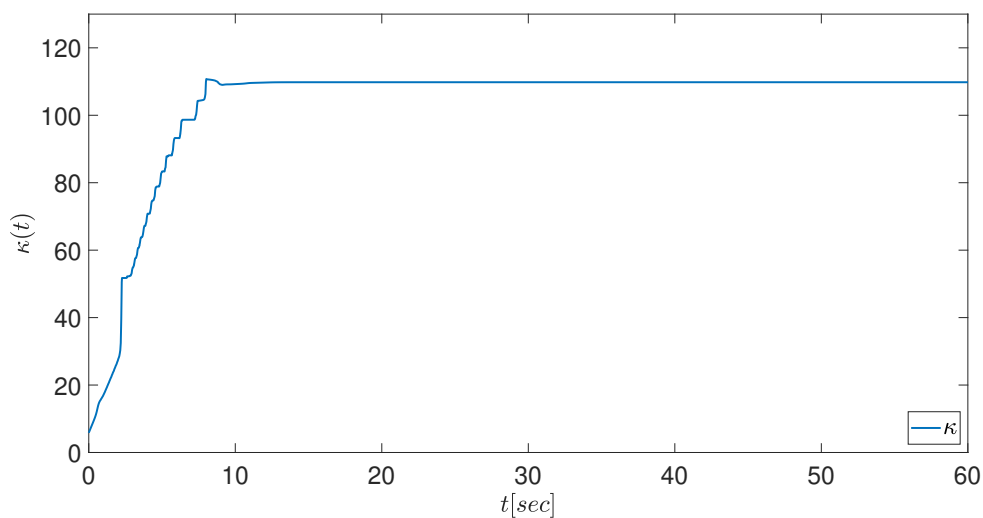
Στην παρούσα προσομοίωση, αλλάζουμε το διάνυσμα επιθυμητής γωνιακής θέσης και, πιο ειδικά, θεωρούμε $q_{ref} = [-\pi/2 \ \pi/2 \ \pi/4]^T$. Επιπλέον, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	1.8
N	4
ω_0	10
δ	0.02

Διάνυσμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:

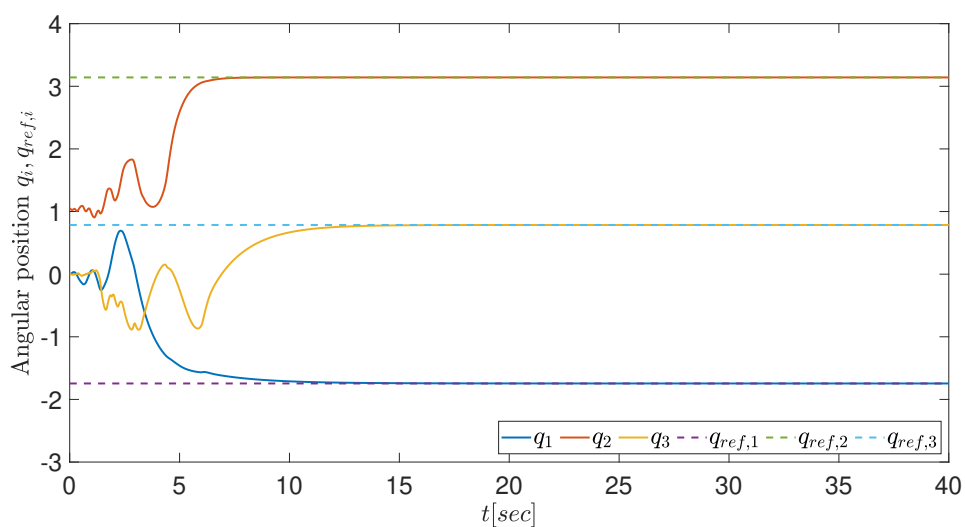


4.2.1.6 Προσομοίωση 6

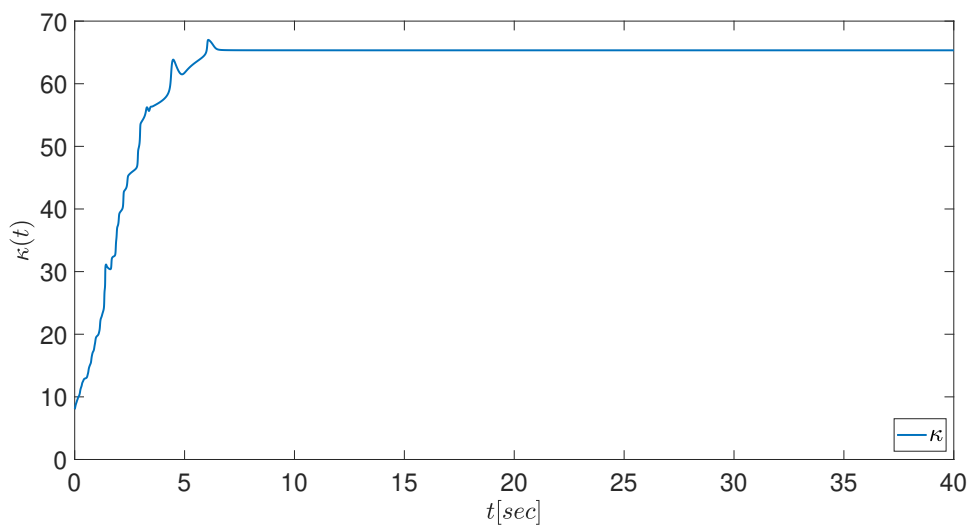
Στην παρούσα προσομοίωση, αλλάζουμε την αρχική συνθήκη που αφορά το διάνυσμα γωνιακής θέσης και, πιο ειδικά, θεωρούμε $q_0 = [0 \ \pi/3 \ 0]^T$. Επιπλέον, για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου θεωρούμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του ελεγκτή:

Παράμετρος	Τιμή
λ	1.2
N	2.5
ω_0	4
δ	0.03

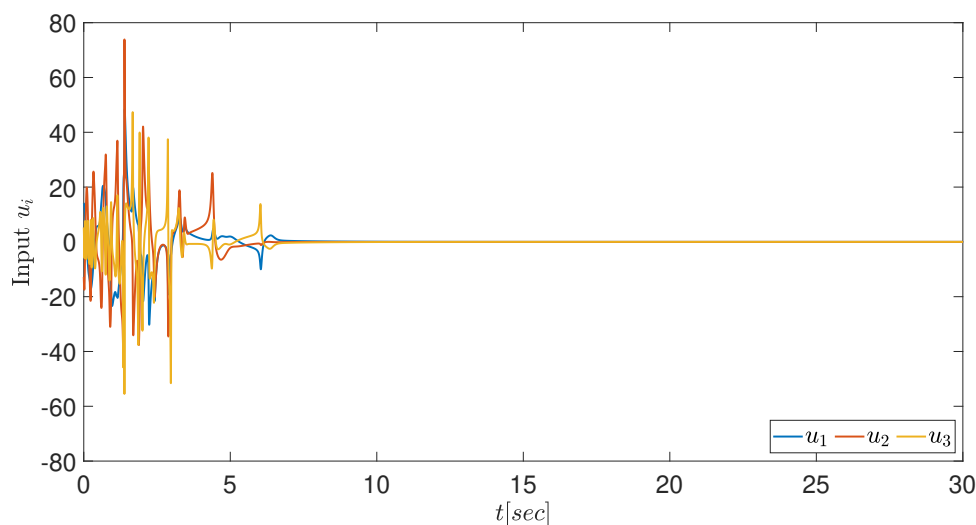
Διάνυσμα γωνιακής θέσης q και q_{ref} :



Συνάρτηση $\kappa(t)$:



Είσοδος $u(t)$:



4.2.2 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων Προσομοιώσεων

Τα συμπεράσματα που εξάγονται και οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από τη μελέτη των γραφημάτων - αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων είναι τα ακόλουθα:

- Από τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν, προκύπτει ότι ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιλύει το πρόβλημα ρύθμισης σε σημείο αναφοράς για ρομποτικό βραχίονα 7 βαθμών ελευθερίας, ανεξάρτητα από τις κατευθύνσεις ελέγχου και τη δυναμική του συστήματος.
- Συγχρόνως, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μικρή καθυστέρηση στη σύγκλιση του συστήματος στο επιθυμητό σημείο αναφοράς. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς για τη σχεδίαση του προτεινόμενου νόμου ελέγχου χρησιμοποιήθηκαν συναρτήσεις με χαμηλό κέρδος. Από την άλλη, βέβαια, η χρήση τέτοιων συναρτήσεων αποτελεί και ένα σημαντικό πλεονέκτημα συγκριτικά με άλλες τεχνικές ελέγχου, αφού έτσι αυξάνεται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου όσον αφορά την πρακτική της εφαρμογή.
- Επιπλέον, μέσω της σχετικής γραφικής παράστασης για καθεμία από τις παραπάνω προσομοιώσεις, επιβεβαιώνεται ότι η συνάρτηση $\kappa(t)$ είναι φραγμένη, όπως αρχικά υποτέθηκε και αργότερα αποδείχθηκε στην ενότητα 3.3 στο πλαίσιο της θεωρητικής ανάλυσης.
- Επιπρόσθετα, μέσα από τις προσομοιώσεις και, συγκεκριμένα, τα γραφήματα που αφορούν το διάλυμα γωνιακής θέσης, συμπεραίνουμε ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης συγκλίνει στο εύρος του - από εμάς καθορισμένου - dead zone και, συνεπώς, με κατάλληλη ρύθμιση αυτής της παραμέτρου (και προσαρμογές των υπολοίπων) μπορεί να λάβει οσοδήποτε μικρή τιμή επιθυμούμε.
- Έπειτα, παρατηρούμε ότι στη διάρκεια της μεταβατικής κατάστασης, σημειώνονται αλληλεπάλλινες αλλαγές κατευθύνσεων, αυξομειούμενες ταλαντώσεις γύρω από κάποια σημεία

και επιτρεπόμενα μεγάλες υπερυψώσεις (overshootings) είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω σε σχέση με την επιθυμητή τιμή. Αυτό συμβαίνει διότι, κατά το μεταβατικό στάδιο, ο - βασιζόμενος στη χρήση ημιτόνων - εφαρμοζόμενος νόμος ελέγχου καταβάλλει σαφώς μεγαλύτερη προσπάθεια από ό,τι στη μόνιμη κατάσταση μέχρις ότου να προσδιορίσει τη σωστή κατεύθυνση ελέγχου.

- Επίσης, μετά από τη δοκιμή διαφόρων συναρτήσεων $\phi(\kappa)$ και $\tilde{\phi}(\kappa)$ στις προσομοιώσεις, διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζεται το πολυδιάστατο δίλημμα συμβιβασμού ανάμεσα στη χρήση υψηλού κέρδους και την εξασφάλιση γρήγορης μεταβατικής απόκρισης, στο οποίο οφείλουμε να αποφανθούμε σύμφωνα με τις απαιτήσεις του προβλήματός μας, ρυθμίζοντας κατάλληλα τις παραμέτρους του εφαρμοζόμενου ελεγκτή.
- Κατόπιν, σε καθεμία από τις παραπάνω προσομοιώσεις, έχει επιστρατευθεί dead zone σχετικά μικρού εύρους, το οποίο ανταποκρίνεται αποτελεσματικά στα διάφορα συστήματα που εφαρμόζεται μέσω του προτεινόμενου ελεγκτή.
- Τέλος, όσον αφορά την προσομοίωση 4.2.1.6, ορίστηκε ώστε να διαφέρει από την προσομοίωση 4.2.1.1 μόνο ως προς την αρχική συνθήκη q_0 . Πιο συγκεκριμένα, η αρχική γωνιακή θέση, q_0 , επιλέχθηκε λίγο πιο μακριά από το επιθυμητό σημείο αναφοράς σε σχέση με την 4.2.1.1. Συνεπώς, ισχύει ότι το σφάλμα $q - q_{ref}$, το οποίο αποτελεί όχι μόνο αναλογικό όρο αλλά και ολοκληρωτικό παράγοντα του προτεινόμενου ελεγκτή, είναι μεγαλύτερο στην αρχή της προσομοίωσης 4.2.1.6. Ως άμεση συνέπεια, τόσο τα αρχικά gains όσο και οι αρχικές είσοδοι λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές στην περίπτωση της προσομοίωσης 4.2.1.6 σε σχέση με την 4.2.1.1.

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

5.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα

Όπως αποδεικνύεται τόσο από τα θεωρητικά αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 όσο και από τις προσομοιώσεις του Κεφαλαίου 4, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου (3.10) - (3.14) επιλύει επιτυχώς το πρόβλημα της ρύθμισης σε σημείο αναφοράς για συστήματα της μορφής (3.1) - (3.2). Ως εκ τούτου, έχει, πλέον, αναπτυχθεί μια νέα μέθοδος σχεδίασης προσαρμοστικού μη γραμμικού PI ελεγκτή για τη δεδομένη κατηγορία γραμμικών ως προς την είσοδο συστημάτων πολλαπλών εισόδων - πολλαπλών εξόδων, τα οποία διέπονται από τις προαναφερθείσες εξισώσεις.

Υποθέτοντας την ύπαρξη γραμμικού νόμου ελέγχου ανατροφοδότησης εξόδου που σταθεροποιεί το σύστημα, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου δε χρησιμοποιεί μεθόδους προσέγγισης των άγνωστων μη γραμμικοτήτων του συστήματος. Συνεπώς, ο ελεγκτής της παρούσας εργασίας δεν έχει την πολυπλοκότητα των μη γραμμικών ελεγκτών που βασίζονται σε νευρωνικά δίκτυα [31] ή συστήματα ασαφούς λογικής [28], [29], καθώς αποφεύγεται η υπερπαραμετροποίηση, η οποία αποτελεί ένα από τα βασικά προβλήματα σε άλλες τεχνικές ελέγχου. Κατά αυτόν τον τρόπο, κατορθώνεται η γενίκευση και, συγχρόνως, η ενίσχυση των αποτελεσμάτων της έρευνας [14] για συστήματα πολλαπλών εισόδων - πολλαπλών εξόδων. Ως εκ τούτου, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε λύνει υπό προϋποθέσεις το πρόβλημα των μη φραγμένων μη αντιστοιχισμών μη γραμμικοτήτων (αβεβαιοτήτων).

Επιπλέον, η προτεινόμενη προσέγγιση λύνει το πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου, το οποίο επιλύει και η τεχνική ελέγχου με χρήση κερδών Nussbaum. Ειδικότερα, ο ελεγκτής της παρούσας εργασίας υπάγεται στην κατηγορία των μη γραμμικών PI νόμων ελέγχου, για τους οποίους έχει αποδειχθεί στις αναφορές [6], [11] και [12] ότι για ορισμένες κλάσεις συστημάτων, και συγκριτικά με τις μεθόδους ελέγχου που χρησιμοποιούν κέρδη Nussbaum, βελτιώνουν την ευρωστία σε εξωτερικές διαταραχές (θόρυβος) και μη μοντελοποιημένη δυναμική. Αυτό που διακρίνει τον προτεινόμενο ελεγκτή είναι ότι, αν και πρόκειται για μη γραμμικό ελεγκτή, κληρονομεί τις ιδιότητες σθεναρότητας του γραμμικού νόμου ελέγχου.

Τέλος, μέσω της προτεινόμενης μεθοδολογίας, δε χρειάζεται κάποια πληροφορία αναφορικά με τους περιορισμούς στο μέγεθος της αβεβαιότητας. Αντιθέτως, η γνώση των περιορισμών αυτών είναι προαπαιτούμενο για τη σχεδίαση των περισσότερων σθνεαρών μεθόδων ελέγχου [9]. Επεξηγώντας, λοιπόν, ο προτεινόμενος ελεγκτής μπορεί να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά τις μη φραγμένες μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες (αβεβαιότητες), αφού δεν απαιτείται a priori γνώση των φραγμάτων των αβέβαιων όρων - παραμέτρων του συστήματος.

5.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφενός θέτει τα θεμέλια για μεγαλύτερη εμβάθυνση και περαιτέρω βελτίωση σε όσα αναλύθηκαν στο πλαίσιο του θεωρητικού της μέρους και αφετέρου ανοίγει το δρόμο για την αξιοποίησή της σε νέες κατευθύνσεις με καινοτόμες και πιο πρακτικές εφαρμογές. Ειδικότερα:

- Μία από τις μελλοντικές εμβιθύνσεις που θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί αφορά τη μελέτη της σθνεαρότητας του μελετώμενου συστήματος και του ελεγκτή. Πιο συγκεκριμένα, λόγω της επιστράτευσης της έννοιας του dead zone στην ανάλυσή μας, υφίσταται μια εν γένει ανοχή σε σφάλματα μέτρησης και διαταραχές. Ωστόσο, ο βαθμός, στον οποίον ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι σθνεαρός και σε δυναμικές διαταραχές όπως γίνεται στις αναφορές [10], [11] και [12] αποτελεί ένα υποσχόμενο αντικείμενο για μελλοντική διερεύνηση.
- Έπειτα, η απαλλαγή του συστήματός μας από την αναγκαιότητα χρήσης του dead zone αποτελεί άλλο ένα ενδιαφέρον εγχείρημα, αφού τότε τόσο η έξοδος όσο και το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος θα συγκλίνουν στο 0. Αυτό, ισοδύναμα, σημαίνει ότι θα εξασφαλίζεται μεγαλύτερη ακρίβεια στο σύστημα, καθώς το q , μετά από ένα διάστημα μεταβατικής φάσης, θα ταυτίζεται ακριβώς με το q_{ref} .
- Ακολούθως, μια πολύ ουσιαστική πρακτική εφαρμογή, στην οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ο προτεινόμενος ελεγκτής είναι η επίλυση του προβλήματος παρακολούθησης τροχιάς αναφοράς (tracking) σε ρομποτικό βραχίονα όταν οι κατευθύνσεις ελέγχου είναι άγνωστες.
- Στη συνέχεια, ένα ακόμα πολύ σημαντικό πρόβλημα προς επίλυση αποτελεί το Uncalibrated Visual Servoing [34] είτε για την περίπτωση της ρύθμισης σε σημείο αναφοράς είτε για την παρακολούθηση τροχιάς στο χώρο της κάμερας, της οποίας ο προσανατολισμός και ο συντελεστής κλίμακας είναι άγνωστοι.
- Παράλληλα, η «καθολική» (ανεξάρτητη των ρομποτικών μοντέλων) λογική στην οποία βασίστηκε η σχεδίαση του προτεινόμενου νόμου ελέγχου αποτελεί ισχυρό θεμέλιο για την επέκταση της εφαρμογής του συγκεκριμένου ελεγκτή και σε άλλα συστήματα, εκτός ρομποτικών βραχιόνων.
- Τέλος, μια μελλοντική επέκταση που, επίσης, παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η διερεύνηση

της δυνατότητας ενσωμάτωσης προδιαγραφών απόδοσης για το σύστημα, ούτως ώστε να εξασφαλίζεται η επιθυμητή μεταβατική συμπεριφορά. Ενδεικτικά, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση των Barrier Lyapunov functions, όπως συμβαίνει στα [3], [4], [32] και [33].

Παράρτημα

Προκειμένου να αποδείξουμε τη σχέση (3.69), αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα: $\|y\| \leq \delta + D_\delta(\|y\|)$, για κάθε $y \in \mathbb{R}^p$.

Βασιζόμενοι στον τύπο της νεκρής ζώνης (2.5) που παρατέθηκε στο Κεφάλαιο 2, λαμβάνουμε την εξής σχέση:

$$D_\delta(\|y\|) := \begin{cases} \|y\| - \delta \cdot \operatorname{sgn}(\|y\|) & , \|y\| > \delta \\ 0 & , \|y\| \leq \delta \end{cases}$$

Ισοδύναμα:

$$D_\delta(\|y\|) := \begin{cases} \|y\| - \delta & , \|y\| > \delta \\ 0 & , \|y\| \leq \delta \end{cases} \quad (5.1)$$

Τότε, έχουμε:

Για $\|y\| > \delta$:

$$D_\delta(\|y\|) + \delta = (\|y\| - \delta) + \delta = \|y\|$$

Για $\|y\| \leq \delta$:

$$D_\delta(\|y\|) + \delta = 0 + \delta = \delta \geq \|y\|$$

Επομένως, συγκεντρωτικά, λαμβάνουμε ότι:

$$\|y\| \leq \delta + D_\delta(\|y\|), \quad \forall y \in \mathbb{R}^p \quad (5.2)$$

που είναι και το ζητούμενο. ■

Βιβλιογραφία

- [1] Witsenhausen, H. S. (1968). A Counterexample in Stochastic Optimum Control. *SIAM Journal on Control*, 6(1), 131–147.
- [2] Nussbaum, R.D. (1983). Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems & Control Letters*, 3 (5), 243-246.
- [3] Psillakis, H.E. (2012). Improving Transient Performance Of Nussbaum Gain-Based Controllers With Barrier Lyapunov Functions. *Proceedings of the IASTED International Conference Control and Applications (CA 2012)*, Crete, Greece.
- [4] Yan-Jun, L., Schaocheng, T. (2017). Barrier Lyapunov functions for Nussbaum gain adaptive control of full state constrained nonlinear systems. *Automatica*, 76(), 143–152.
- [5] Junwei, L., Guorong, Z., Yong, L., Huali, W., Shixing, W., & Xiuxia Y. (2007). Research on Bounded Nussbaum Gain Adaptive Method.
- [6] Ortega, R., Astolfi, A., Barabanov, N.E. (2002). Nonlinear PI control of uncertain systems: an alternative to parameter adaptation. *Systems & Control Letters*, 47 (3), 259-278.
- [7] Mårtensson, B. (1990). Remarks on adaptive stabilization of first order non-linear systems. *Systems & Control Letters*, 14(1), 1–7.
- [8] Astolfi, A., Karagiannis, D., Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. 1st Edition, Springer.
- [9] Psillakis, H.E. (2015). Integrator backstepping with the nonlinear PI method: An integral equation approach. *European Journal of Control*, 28, 49-55.
- [10] Georgiou, T.T., Smith, M.C. (1997). Robustness analysis of nonlinear feedback systems: an input-output approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(9), 1200–1221.
- [11] Psillakis, H.E. (2016). An extension of the Georgiou–Smith example: Boundedness and attractivity in the presence of unmodelled dynamics via nonlinear PI control. *Systems & Control Letters*, 92, 1-4.

- [12] Psillakis, H.E. (2016). Further results on robustness of the nonlinear PI control method: the ignored actuator dynamics case. 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Athens, Greece, 77-81.
- [13] Mårtensson, B., Polderman, J.W. (1993). Correction and simplification to “The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization”. *Systems & Control Letters*, 20, 465-470.
- [14] Ilchmann, A. (1997). Universal adaptive stabilization of nonlinear systems. *Dynamics & Control*, 7, 199-213.
- [15] Ping, J., Huadong, C., Bamforth L.C.A. (2006). A universal iterative learning stabilizer for a class of MIMO systems., 42(6), 973–981.
- [16] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. 3rd Edition, Prentice Hall.
- [17] Gorban, A. N., Tyukin, I. Y., Steur, E., & Nijmeijer, H. (2013). Lyapunov-like conditions of forward invariance and boundedness for a class of unstable systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(3), 2306-2334.
- [18] Federer, H.; Eckmann, B.; van der Waerden, B. L. (1996). *Classics in Mathematics: Geometric Measure Theory*. Springer.
- [19] Beer, G., Garrido, M. I. (2015). Locally Lipschitz functions, cofinal completeness, and UC spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 428(2), 804–816.
- [20] Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems Analysis, Stability and Control.*, Vol 10., Springer.
- [21] Mårtensson, B. (1986). *Adaptive Stabilization*. [Doctoral Thesis (monograph), Department of Automatic Control]. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).
- [22] Siciliano B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G. (2009). *Robotics Modelling, Planning and Control*. 1st Edition, Springer.
- [23] Chan-Zheng, C., Borja, L. P., Monshizadeh, N., & Scherpen, J. M. A. (2021). Exponential Stability and Tuning for a Class of Mechanical Systems. In *Proceedings of the European Control Conference 2021* arXiv.
- [24] Dirac, P.A.M. (1950). Generalized Hamiltonian dynamics., 2(0), 129–148.
- [25] Getz, W.M., Jacobson, D.H. (1977). Sufficiency Conditions for Finite Escape Times in Systems of Quadratic Differential Equations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 19(4), 377–383.
- [26] Ioannou, P., Fidan, B. (2006). *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

-
- [27] Garrido, I., Montalvo, F. (2004). Generation of the uniformly continuous functions. *Topology and its Applications.*, 137(1-3), 167–174.
- [28] Boulkroune, A., Tadjine, M., M'Saad, M., Farza, M. (2010). Fuzzy adaptive controller for MIMO nonlinear systems with known and unknown control direction., 161(6), 797–820.
- [29] Boulkroune, A., M'Saad, M., Chekireb, H. (2010). Design of a fuzzy adaptive controller for MIMO nonlinear time-delay systems with unknown actuator nonlinearities and unknown control direction., 180(24), 5041–5059.
- [30] Psillakis, H.E., Lagos, A.-R. (2017). Unifying adaptive control with the nonlinear PI methodology: Designs for unknown strict-feedback nonlinear systems with non-smooth actuator nonlinearities. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing.*
- [31] Psillakis, H.E., Oikonomidis, K. A. (2021). Nonlinear PI robust adaptive control for uncertain multiple-input multiple-output nonlinear systems: Application to the visual servoing problem. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing.*
- [32] Niu, B., Zhao, J. (2013). Barrier Lyapunov functions for the output tracking control of constrained nonlinear switched systems. *Systems & Control Letters.*, 62(10), 963–971.
- [33] An, H., Xia, H., Wang, C. (2017). Barrier Lyapunov function-based adaptive control for hypersonic flight vehicles., *Nonlinear Dynamics.*, 88 (3), 1833–1853.
- [34] Astolfi, A., Hsu, L., Netto, M.S., Ortega, R. (2002). Two solutions to the adaptive visual servoing problem. *IEEE Transactions on Robotics and Automation.*, 18(3), 387–392. Hsu

