ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

2023

Στοχαστική ανάλυση στη μουσική

Ανάλυση μελωδιών με το μοντέλο Hurst-Kolmogorov

Μπίζας Κυριάκος

Αρχική ανάθεση διπλωματικής: Δημήτρης Κουτσογιάννης, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ

Επιβλέπουσα: Θεανώ Ηλιοπούλου, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, ΕΔΙΠ ΕΜΠ

Συνεπιβλέπων: Παναγιώτης Δημητριάδης, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Στοχαστική ανάλυση στη μουσική

Ανάλυση μελωδιών με το μοντέλο Hurst-Kolmogorov

Διπλωματική Εργασία

Μπίζας Κυριάκος

Αρχική ανάθεση διπλωματικής: Δημήτρης Κουτσογιάννης, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ

Επιβλέπουσα: Θεανώ Ηλιοπούλου, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, ΕΔΙΠ ΕΜΠ

Συνεπιβλέπων: Παναγιώτης Δημητριάδης, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός

Περιεχόμενα

Πίνακας Εικόνων

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Δ. Κουτσογιάννη και την Α. Ηλιοπούλου που μου δώσαν το θάρρος και τον χώρο να εκπονήσω την παρούσα εργασία. Η εργασία αυτή φυσικά δε θα ήταν όμως δυνατή χωρίς την συνεχή προσοχή του Π. Δημητριάδη αλλά και τις καταλυτικές του συμβουλές σε όλη τη διάρκεια της μελέτης.

Φυσικά ένα τεράστιο ευχαριστώ στους γονείς μου και τον αδελφό μου που είναι δίπλα μου χωρίς δεύτερη σκέψη απ’ όσο θυμάμαι τον εαυτό μου, σε όλους τους φίλους που μου θυμίζουν συχνά πόσο όμορφη είναι η ζωή, και φυσικά στον μουσικό δάσκαλο μου, που μου ξύπνησε το ενδιαφέρον για το αντικείμενο.

Κυριάκος Μπιζας,

Αθήνα, Νοέμβρης 2023.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία έχει αντικείμενο την μελέτη μουσικών μελωδιών από μια μαθηματική σκοπιά. Θα επιχειρηθεί μια μεθοδική μελέτη για εύρεση μαθηματικών μοτίβων συμπεριφοράς μονοφωνικών μελωδιών. Τα μοτίβα αυτά θα μελετηθούν σε στατιστική και στοχαστική βάση. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στις στοχαστικές παραμέτρους του μοντέλου Hurst Kolmogorov.

Για τον σκοπό αυτό αναπτύσσεται ένα εκτενές πρόγραμμα σε python με το οποίο επεξεργαζόμαστε αρχεία MIDI (Musical Instrument Digital Interface) τραγουδιών από πέντε διαφορετικά είδη. Τα είδη αυτά είναι η μπαρόκ, κλασσική και ρομαντική εποχή αλλά και η soul και η rock & roll σαν δυο χωριστά πλαίσια μοντέρνας μουσικής.

Κεντρικός άξονας της επεξεργασίας είναι η σύγκριση στατιστικών ιδιοτήτων, ροπών, κατανομών και κλιμακογραμμάτων. Η μελέτη χρησιμοποιεί ως τυχαία μεταβλητή των χρονοσειρών (μελωδιών) κατά βάση τις νότες των τραγουδιών. Ωστόσο σε ορισμένες περιπτώσεις έχει νόημα η μελέτη στη βάση των διαστημάτων κίνησης ή των αποστάσεων από την τονική νότα.

Η εφαρμογή του μοντέλου Hurst-Kolmogorov (HK) & Generalized H-K γίνεται με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για την εμμονή στη μουσική τέχνη και μια προσπάθεια σε κατηγοριοποίηση μουσικών κανόνων και τεχνικών. Επιπλέον επιχειρείται μια προσπάθεια εφαρμογής του μοντέλου σε ένα μη φυσικό φαινόμενο, το οποίο έχει πραγματικούς κανόνες, όπως είναι η μουσική αλλά χαρακτηρίζεται από την ανθρώπινη δημιουργία.

Abstract

The current thesis discusses the study of musical melodies from a mathematical perspective. A methodical study regarding the finding of mathematical motif behavior of monophonic melodies will be attempted. Said motifs will be examined on a statistical and stochastic basis with an accentuation on the stochastic parameters of the Hurst Kolmogorov model.

To achieve this, a thorough python code will be developed, in order to process MIDI (Musical Instrument Digital Interface) song files from five genres. These genres consist of baroque, classical and romantic periods as well as soul and rock & roll as two separate types of contemporary music.

The central axis of the processing is the comparison of statistical properties, moments, distributions and climacogramms. The study utilizes the tracks' notes as the time series' random variable. However the study of musical intervals or distances from the tonic note in certain points of the analysis also serves a purpose.

The application of the Hurst-Kolmogorov (HK) & Generalized H-K model aims to deduce conclusions about the persistence in musical arts and attempts to categorize harmonic rules and techniques. In addition, an attempt to apply the model on a non-natural phenomenon, which consists of actual rules, is being made, considering that music is characterized by human creation.

1. Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο και στόχοι

Η μουσική αποτελεί μια ανθρώπινη τέχνη. Αποτελεί μάλιστα μια από τις αρχαιότερες τέχνες που έχει δημιουργήσει η ανθρωπότητα. Στην πορεία της ανάπτυξης της έχουν αναπτυχθεί μια σειρά από τεχνοτροπίες και νόρμες για την σύνθεση αλλά και την παραγωγή της. Με το πέρασμα αιώνων, η μελέτη μουσικής αποτελεί πλέον σχεδόν ένα αυτόνομο επιστημονικό πεδίο με παρακλάδια και πηγές από πολλές άλλες «παραδοσιακές» επιστήμες.

Η μελέτη της μουσικής μπορεί να γίνει με μια σειρά από τρόπους, αξιοποιώντας κάθε φορά εργαλεία άλλων επιστημών. Μερικά παραδείγματα είναι η ανάλυση με εργαλεία φυσικής για διαμόρφωση εύηχων οργάνων ή η παραγωγή συγκεκριμένων ήχων (sound design) με μαθηματικά και προγραμματιστικά εργαλεία. Ακόμα και σε ιστορικές αναλύσεις η κοινωνική διάσταση της μουσικής σαν τέχνη αντανακλά κοινωνικές και πολιτικές τάσεις.

Ειδικά την σύγχρονη εποχή που η πληθώρα των τεχνολογικών μέσων έχει δίδει μεγάλη πρόσβαση και ευκολία στην δημιουργία της μουσικής, παρατηρείται μια ραγδαία εξέλιξη και ποικιλομορφία στα αναπτυσσόμενα είδη. Αυτή συμβαίνει σε επίπεδο τόσο μουσικού και αρμονικού περιεχομένου όσο και στον τρόπο προσέγγισης της παραγωγής των ήχων αυτών καθ' αυτών. Στο πλαίσιο διαφορετικών προσεγγίσεων για μια ανάλυση της μουσικής είναι λοιπόν δυνατή και μια στατιστική προσέγγιση.

Η στατιστική μελέτη είναι ιδανική για την εύρεση των κοινών χαρακτηριστικών μεταξύ ειδών μουσικής, μοτίβων και χαρακτηριστικών τους. Για τον σκοπό αυτό είναι αναγκαία η μαζική επεξεργασία μουσικών δεδομένων από διαφορετικές εποχές και είδη. Από τα τραγούδια αυτά θα μελετηθούν οι δεσπόζουσες μονοφωνικές μελωδίες οι οποίες με απλό και σαφή τρόπο μπορούν να μετατραπούν σε αριθμητικές χρονοσειρές. Η ανάλυση αυτή θα γίνει αφενός με χρήση παραδοσιακών στατιστικών εργαλείων για την διερεύνηση κοινών ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών μεταξύ των ειδών. Θα επιχειρηθεί επιπλέον μια στοχαστική προσέγγιση, με χρήση του μοντέλου Generalized Hurst-Kolmogorov για ανάλυση κλιμακογραμμάτων, με σκοπό τον προσδιορισμό της εμμονικής και φράκταλ συμπεριφοράς που έχει η μουσική, καθώς, αν και δεν είναι φυσικό φαινόμενο, διέπεται από την ανθρώπινη δημιουργία.

Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόζεται σε μια εκτενή βάση μουσικών δεδομένων. Αυτή αποτελείται από περισσότερα από 200 τραγούδια σε μορφή MIDI (Musical Instrument Digital Interface), χωρισμένα σε 5 διαφορετικά είδη με χρονολογική σειρά. Τα είδη αυτά εν τέλει θα τεθούν σε σύγκριση στις βάσεις των κατανομών κίνησης των νοτών των τραγουδιών τους, θα γίνει η σύγκριση των κεντρικών ροπών τους και θα συγκριθούν οι παράμετροι των παραγόμενων κλιμακογραμμάτων για το μοντέλο GHK.

1.2 Διάρθρωση Εργασίας

Αρχικά στο **κεφάλαιο 1** παρουσιάζεται το αντικείμενο της μελέτης και τίθενται οι στόχοι της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Έπειτα στο **κεφάλαιο 2** αναπτύσσονται οι βασικές μουσικές έννοιες απαραίτητες για την εκπόνηση αλλά και κατανόηση της μελέτης αλλά και κάποιες σημαντικές παραδοχές για την ανάλυση. Στο **κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται η μορφή των μουσικών δεδομένων που επεξεργάζεται η παρούσα εργασία και η κατηγοριοποίηση τους. Στο **κεφάλαιο 4** γίνεται μια συνοπτική αναφορά στα μαθηματικά και στοχαστικά εργαλεία που τίθενται σε χρήση. Στο **κεφάλαιο 5** αναλύονται οι δυνατές επιλογές για τις μεταβλητές που μπορούμε να μελετήσουμε και τα πλεονεκτίματα τους για διαφορετικές πτυχές της παρούσας μελέτης. Εν συνεχεία στα **κεφάλαια 6 & 7** γίνεται η εφαρμογή του στοχαστικού μοντέλου και αναλύονται τα αποτελέσματα και τα δυνατά συμπεράσματα τόσο στο επίπεδο του συνόλου των δεδομένων όσο και επί της σύγκρισης μεταξύ των ειδών. Τέλος, στο **κεφάλαιο 8** γίνεται μια σύνοψη των συμπερασμάτων.

2. Στοχαστική οπτική στη μουσική

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια εισαγωγή στο βασικό σκεπτικό της εργασίας. Θα παρουσιαστούν κάποιες σημαντικές μουσικές έννοιες και απαραίτητες μουσικές – τεχνολογικές γνώσεις για την εκπόνηση και κατανόηση της εργασίας. Στη συνέχεια θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των καίριων παραδοχών για την ανάπτυξη της παρούσας μελέτης.

Αφετηρία κάθε μελέτης είναι η περιγραφή αφενός του αντικειμένου μελέτης και της συμπεριφοράς του, και αφετέρου την αιτιολόγηση της χρησιμότητας της ανάλυσης αυτής και τα δυνατά συμπεράσματα. Το πρώτο εκ των δυο είναι το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου, συνοδευόμενο από εισαγωγικές έννοιες σχετικές με το αντικείμενο.

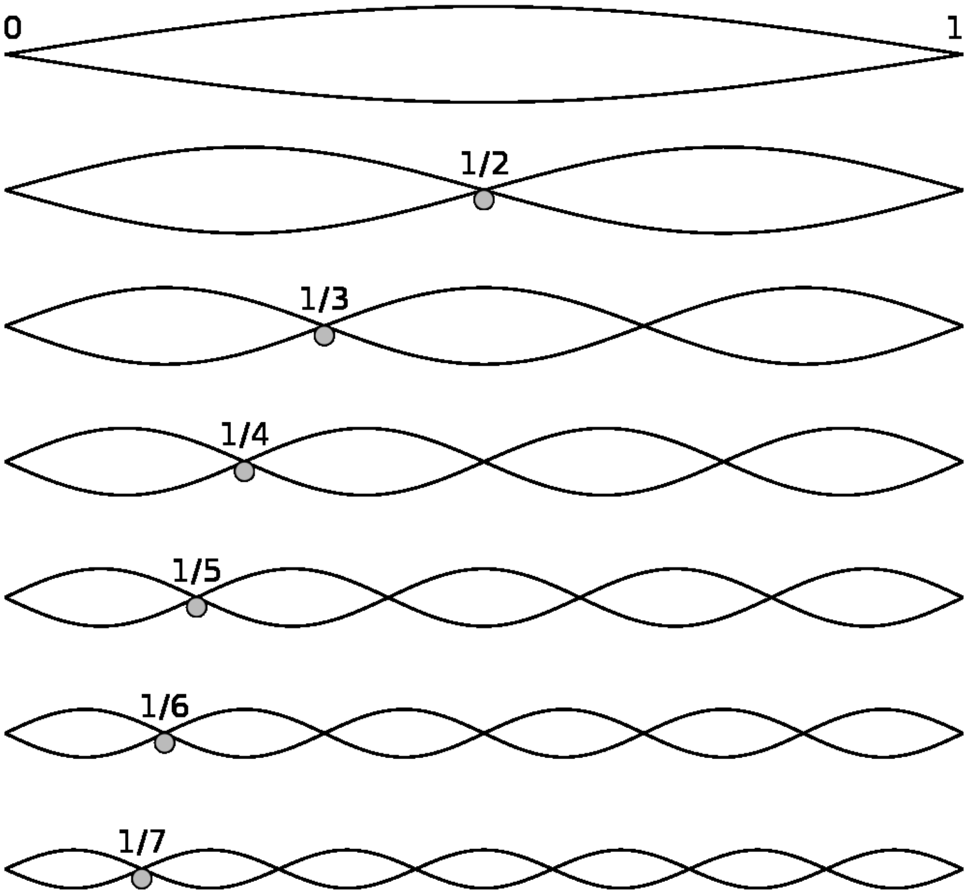
2.1 Σημαντικές μουσικές έννοιες

Μουσική είναι μια αλληλουχία ήχων, σε ρυθμό, που έχουν σκοπό την αισθητική ή και συναισθηματική ικανοποίηση του ακροατή. Πρόκειται για μια από τις αρχαιότερες τέχνες που ανέπτυξε η ανθρωπότητα. Με διάφορους τρόπους μπορούμε να πούμε ότι και άλλα είδη έχουν “μουσική αίσθηση”, με το πιο απλό παράδειγμα το τιτίβισμα των πουλιών.

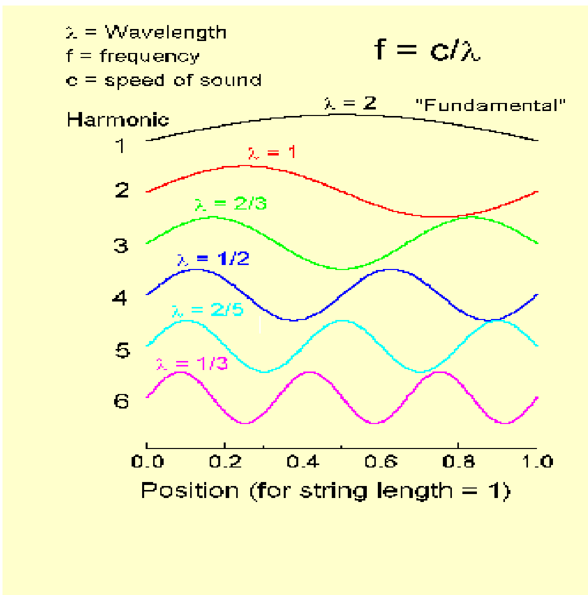
Οι ήχοι οι οποίοι συντελούν τη μουσική ονομάζονται νότες. Η έννοια αυτή αποκτά σημασία λόγω του γεγονότος ότι εδώ και πολλούς αιώνες αυτές οι νότες έχουν καθιερωθεί και ονομαστεί, ώστε να αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες συχνότητες ήχων, για παράδειγμα η “κεντρική” Λα είναι 440.6 Hz. Αν και οι συγκεκριμένες τιμές των συχνοτήτων αυτών δεν έχουν από μόνες τους ιδιαίτερη αξία, είναι σημαντική αυτή η καθιέρωση ώστε να υπάρχει πλέον ένα διεθνές στάνταρ κουρδίσματος.

Η συνήχηση νοτών, το ακόρντο, είναι μια επίσης σημαντική έννοια για την ανάπτυξη της μουσικής. Οι σχέσεις (λόγοι συχνοτήτων) μεταξύ των διαφορετικών νοτών κρύβουν την πραγματική σημασία της αισθητικής της συνήχησης και συνολικά της μουσικής. Στο πλέον καθιερωμένο “επτατονικό” σύστημα της δυτικής μουσικής, οι σχέσεις των συχνοτήτων εμφανίζονται καθαρά στο παρακάτω διάγραμμα.

Από το παρακάτω, φαίνεται η φυσική σημασία του ζητήματος. Αυτό διότι τα στάσιμα κύματα που παράγουν τους ήχους-νότες, συνεργάζονται για να παράγουν “εύηχους” συνδυασμούς όταν έχουν κοινούς τρόπους ταλάντωσης. Συγκεκριμένα, χρειάζεται το πλήθος των μηκών κυμάτων των διαφορετικών ταλαντώσεων να έχει συγκεκριμένους λόγους (βλ. 4/3, 5/4 κτλ.). Κατά τον τρόπο αυτό το παραγόμενο ηχητικό κύμα, που είναι το παραγόμενο άθροισμα των στάσιμων κυμάτων αυτών, δεν έχει πολύπλοκους τρόπους ταλάντωσης του ηχητικού τυμπάνου στο ανθρώπινο αυτί. Χαρακτηριστικό «κακόηχο» διάστημα είναι αυτό της τέταρτης αυξημένης, διάστημα 6 ημιτονίων, το οποίο έχει λόγο $\sqrt{2}$ (!).



Εικόνα 1 Οι αρμονικές ταλαντώσεις ενός στάσιμου κύματος (πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(music))



Εικόνα 2. Προβολή των αρμονικών ταλαντώσεων με σύγκριση των μηκών κυμάτων τους(πηγή: https://pages.mtu.edu/~suits/overtone.html)

Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι στο “επτατονικό” σύστημα έχουμε 7 τόνους και 5 αλλοιωμένους τόνους, συνολικά δώδεκα φθόγγους. Κάθε ένας από αυτούς έχει μοναδική ονομασία. Οι νότες όμως είναι πολύ περισσότερες, και τυπικά άπειρες, αν και δε χρησιμοποιούνται όλες ή ακόμα δεν είναι δυνατό να ακουστούν στο ανθρώπινο αυτί (Schmidt-Jones, Catherine, 2013).

Η σειρά των 12 φθόγγων επαναλαμβάνεται σε σειρά, με την “13η νότα” κάθε φορά να έχει το ίδιο όνομα της 1ης. Οι νότες με το ίδιο όνομα ονομάζονται αρμονικές, και σε σειρά έχουν ακέραιο πολλαπλάσιο συχνοτήτων(πχ. Λα(4)=440.6Hz – Λα(5)=881.2Hz). Γενικά η κ-οστή αρμονική μιας νότας ‘α’ έχει συχνότητα κ*f(α) (Hz). Κατά τον τρόπο αυτό ισομοιράζοντας τους 12 φθόγγους μεταξύ δυο αρμονικών νοτών καταλήγουμε σε ένα σύστημα συχνοτήτων με σταθερή αναλογία συχνοτήτων:

$$f(a) = 2^{\frac{n}{12}} f(a-n) \tag{1}$$

Το σύστημα αυτό ονομάζεται συγκερασμένο και είναι το πλέον διαδεδομένο σύστημα κουρδίσματος. Αυτό οφείλεται στο ότι σε αντίθεση με άλλα συστήματα (βλ. Πυθαγόρας) διατηρεί αναλλοίωτη την αναλογία των αρμονικών, διατηρώντας τις σχέσεις μεταξύ των φθόγγων από τις ιδανικές τους αναλογίες με σφάλμα μικρότερο του 0,1% (*Bisel, Larry David, 1987)*.

Interval Name	Exact value in 12-TET	Decimal value in 12-TET	Cents	Just intonation interval	Cents in just intonation	Difference
Unison (C)	$2^{0/12} = 1$	1	0	$1/1 = 1$	0	0
Minor second (D♭)	$2^{1/12} = \sqrt[12]{2}$	1.059463	100	$16/15 = 1.06666...$	111.73	-11.73
Major second (D)	$2^{2/12} = \sqrt[6]{2}$	1.122462	200	$9/8 = 1.125$	203.91	-3.91
Minor third (E♭)	$2^{3/12} = \sqrt[4]{2}$	1.189207	300	$6/5 = 1.2$	315.64	-15.64
Major third (E)	$2^{4/12} = \sqrt[3]{2}$	1.259921	400	$5/4 = 1.25$	386.31	+13.69
Perfect fourth (F)	$2^{5/12} = \sqrt[12]{32}$	1.33484	500	$4/3 = 1.33333...$	498.04	+1.96
Tritone (G♭)	$2^{6/12} = \sqrt{2}$	1.414214	600	$64/45 = 1.42222...$	609.78	-9.78
Perfect fifth (G)	$2^{7/12} = \sqrt[12]{128}$	1.498307	700	$3/2 = 1.5$	701.96	-1.96
Minor sixth (A♭)	$2^{8/12} = \sqrt[3]{4}$	1.587401	800	$8/5 = 1.6$	813.69	-13.69
Major sixth (A)	$2^{9/12} = \sqrt[4]{8}$	1.681793	900	$5/3 = 1.66666...$	884.36	+15.64
Minor seventh (B♭)	$2^{10/12} = \sqrt[6]{32}$	1.781797	1000	$16/9 = 1.77777...$	996.09	+3.91
Major seventh (B)	$2^{11/12} = \sqrt[12]{2048}$	1.887749	1100	$15/8 = 1.875$	1088.270	+11.73
Octave (C)	$2^{12/12} = 2$	2	1200	$2/1 = 2$	1200.00	0

Εικόνα 3: Αριθμητική περιγραφή των σχέσεων και σφαλμάτων των διαστημάτων του συγκερασμένου συστήματος, πηγη: *https://en.wikipedia.org/wiki/Equal_temperament*

Στην πλειοψηφία τους, οι ίδιες σχέσεις διατηρούνται και όσον αφορά αλληλουχία νοτών. Μια ορισμένη τέτοια αλληλουχία ονομάζουμε μελωδία και θα αναφερθούμε εκτενώς στην επόμενη ενότητα.

Το δεύτερο θεμέλιο της μουσικής είναι ο ρυθμός. Πρόκειται για αναπόσπαστο κομμάτι της μουσικής καθώς δίνει περιεχόμενο στην συνύπαρξη των νοτών αλλά και ορίζει την συνέχεια τους. Αυτό κατά μια έννοια φαίνεται λογικό στη βάση ότι ο ρυθμός αναπαραγωγής νοτών, δηλαδή συχνοτήτων, έχει και αυτός συχνότητα εξ ορισμού.

Ο ρυθμός στη βάση του χωρίζεται σε δυο συνθετικά (Schmidt-Jones, Catherine, 2013):

- την ταχύτητα, σε μουσικούς όρους τέμπο, δηλαδή το πλήθος μονάδων διάρκειας νοτών(συχνά λέμε χτύπους) σε ορισμένο χρόνο. Συνήθως εκφράζεται με χτύπους ανά λεπτό (BPM).
- το μέτρο, δηλαδή τον τρόπο οργάνωσης των χτύπων. Το μέτρο είναι το βασικό κλάσμα του χρόνου ενός κομματιού μουσικής και οριοθετεί αυτόν. Το μέτρο εκφράζεται πάντα σαν ένα κλάσμα χτύπων. Αυτό το στοιχείο δίνει μουσική ουσία στην αλληλουχία νοτών και οργάνωσης τους.

Σαν παράδειγμα ένα τραγούδι μπορεί να έχει τέμπο 60 BPM (χτύποι ανά λεπτό), και μέτρο 4/4. Δηλαδή σε τέσσερα δευτερόλεπτα ακούγονται 4 χτύποι αξίας ¼ ή 8 αξίας 1/8. Αντίστοιχα σε ένα τραγούδι με τέμπο 90 BPM και ίδιο μέτρο θα ακουστούν σε τέσσερα δευτερόλεπτα 6 χτύποι αξίας ¼ ή 12 χτύποι αξίας 1/8.

2.2 Τα βασικά χαρακτηριστικά μιας μελωδίας

Μελωδία είναι μια ακουστική δομή που αποτελείται από μία σειρά νοτών που παράγουν ένα συνεκτικό και απολαυστικό αποτέλεσμα. Οι μελωδίες είναι ουσιώδες συστατικό της μουσικής και μπορεί να βρεθεί σε κάθε είδος μουσικής, από την κλασική και την παραδοσιακή μέχρι το ροκ, την ποπ, την τζαζ και πολλά άλλα.

Τα βασικά χαρακτηριστικά μιας μελωδίας περιλαμβάνουν τα εξής (Schmidt-Jones, 2013):

1. Ύψος: Αναφέρεται στην κατάσταση της νότας ως χαμηλή ή υψηλή. Κάθε νότα έχει μια συγκεκριμένη συχνότητα και η αλληλεπίδραση μεταξύ των νοτών σχηματίζει τη μελωδία.
2. Διάρκεια: Ο χαρακτήρας ή το ύφος μιας μελωδίας έγκειται στην διάρκεια κάθε νότας. Οι νότες μπορούν να είναι μακρές ή σύντομες, και η συνδυασμένη διάρκεια των νοτών καθορίζει τον ρυθμό της μελωδίας.
3. Σειρά: Οι νότες της μελωδίας ακολουθούν μια συγκεκριμένη σειρά. Η δομή και η ακολουθία των νοτών μπορεί να παρουσιάζει ποικίλες συμπεριφορές, όπως ανάβαση, κατάβαση, επανάληψη και αρμονικές αλυσίδες, για να δημιουργήσει ένα εύηχο και ευχάριστο σύνολο.
4. Τονικότητα: Κάθε μελωδία έχει μια κύρια νότα, που ονομάζεται τονικό κέντρο. Η επιλογή της τονικότητας μπορεί να επηρεάσει την ατμόσφαιρα και το συναίσθημα της μελωδίας.
5. Μοτίβα και δυναμική: Τα μοτίβα είναι μικρά μελωδικά σχήματα που επαναλαμβάνονται και συνθέτουν την μελωδία. Επιπλέον, η έμφαση σε

συγκεκριμένες νότες μπορεί να δημιουργήσει αντίθεση και να προσδώσει δυναμικότητα στη μελωδία.

Μια επιτυχημένη μελωδία μπορεί να προκαλέσει συναισθήματα, να καθηλώσει το ακροατή και να αποτελέσει τον πυρήνα του μουσικού έργου. Η μελωδία είναι ο βασικός παράγοντας που δίνει ζωή στη μουσική και συνδέεται με τα ανθρώπινα συναισθήματα.

2.3 Η μελωδία σαν χρονοσειρά

Σαν χρονοσειρά ονομάζουμε μια ακολουθία αξιών ή μετρήσεων ενός μεγέθους συναρτήσει του χρόνου. Είναι ένας εύχρηστος τρόπος αποτύπωσης της προόδου ενός φαινομένου έτσι ώστε να βγάζουμε συμπεράσματα για την συμπεριφορά του.

Η βασική παραδοχή για την παρούσα μελέτη, είναι η αναγωγή μιας μελωδίας σε μια χρονοσειρά. Φυσικά κάθε μελωδία, είναι μια ακολουθία νοτών στον χρόνο και συνεπώς είναι ήδη ενός τύπου χρονοσειρά.

Εικόνα 4 Η ίδια μελωδία σε μορφή χρονοσειράς αριθμημένων νοτών (πάνω) και γραμμένη σε πεντάγραμμο (κάτω)

Αν και το κλασσικό πεντάγραμμο είναι μια υπαρκτή μορφή αποτύπωσης χρονοσειρών για μελωδίες και μουσική γενικά, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κανενός τύπου στατιστική μελέτη. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την κωδικοποίηση MIDI (κεφάλαιο 3.1). Συνοπτικά η μετατροπή των κομματιών σε MIDI επιτρέπει την μετατροπή των χρονοσειρών νοτών σε αριθμητικές χρονοσειρές.

3. Μουσικά δεδομένα

Για τις ανάγκες αυτής της μελέτης, η αφετηρία μας είναι η συλλογή μουσικών δεδομένων. Φυσικά αυτά είναι υπαρκτά τραγούδια. Η λογική επιλογής τους θα αναλυθεί σε επόμενη παράγραφο, ωστόσο είναι βασικό κομμάτι της μελέτης. Φυσικά μια στατιστική – στοχαστική ανάλυση σε μουσική δεν είναι μια εντελώς γραμμική διαδικασία. Στην παράγραφο αυτή θα περιγραφούν οι παραδοχές και θα δικαιολογηθούν οι επιλογές που γίνονται για την διαμόρφωση των δεδομένων μας.

3.1 Η κωδικοποίηση MIDI

Ο αρχικός στόχος είναι διαμόρφωση των χρονοσειρών μελέτης. Η προφανής λύση για αυτό θα ήταν δημιουργία μιας χρονοσειράς συχνοτήτων βάσει μια ηχογράφησης. Μια σειρά προγραμμάτων/εφαρμογών μπορούν να μας δώσουν γρήγορα αποτελέσματα για αυτή την εργασία ωστόσο γρήγορα αναδεικνύονται δυο προβλήματα:

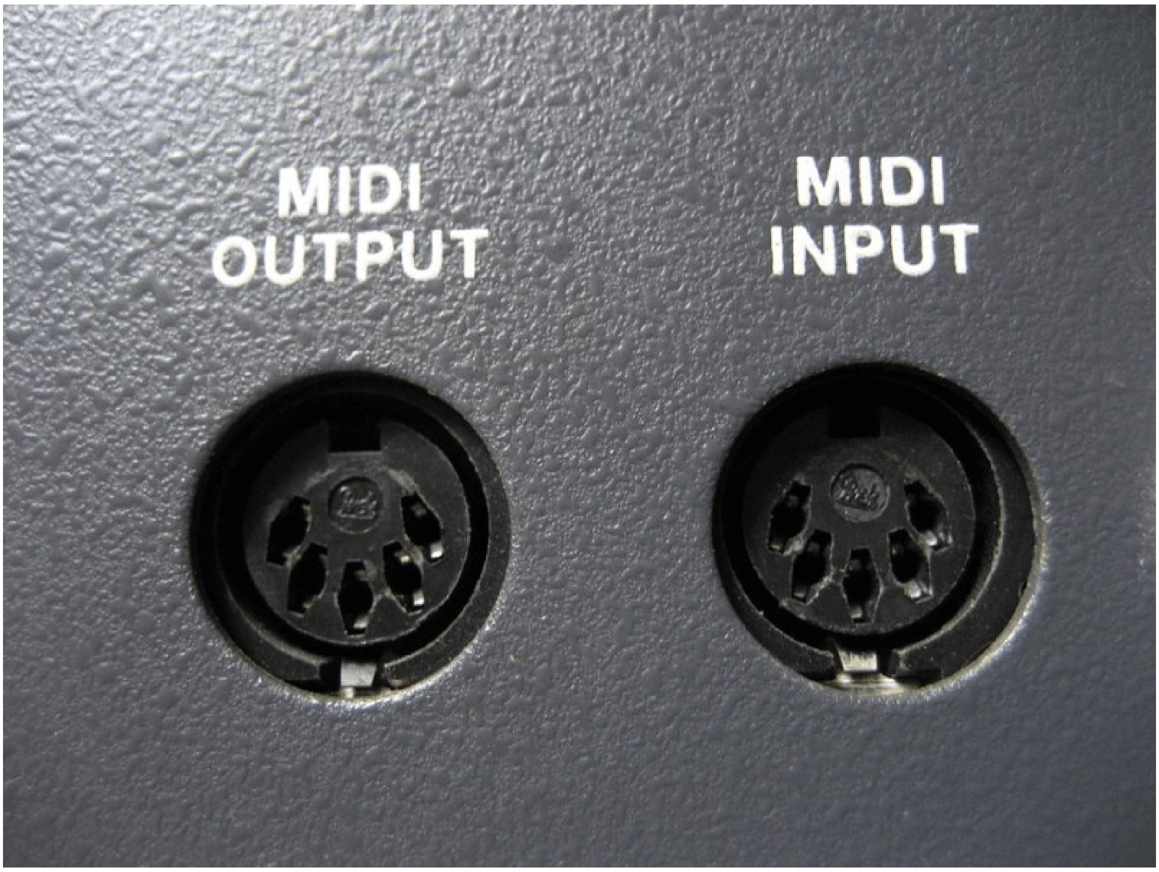
- Η εξαγωγή μιας μελωδίας – χρονοσειράς από ηχογράφηση φέρει τον κίνδυνο εξαγωγής λάθος δεδομένων σε περίπτωση πολυφωνικής μουσικής, νοτών που δεν ανήκουν δηλαδή στην υπό μελέτη μελωδία.
- Η δημιουργία χρονοσειράς βάσει συχνοτήτων δεν είναι πρακτική. Αυτό συμβαίνει για τρείς απλούς λόγους:
i)Οι τιμές των συχνοτήτων, συνεχόμενων νοτών, ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο κατά τον αναδρομικό τύπο:

$$n_i = n_{i-a} 2^{\frac{a}{12}} \tag{2}$$

Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα κατά τους υπολογισμούς μας όταν πρέπει να λάβουμε υπόψη την μουσική οπτική μιας χρονοσειράς.
ii)Οι τιμές των συχνοτήτων είναι περίπλοκοι αριθμοί (π.χ. η συχνότητα της «κεντρικής Ντο» είναι 261.63 Hz). Αυτό δημιουργεί δύσκολους υπολογισμούς και δυσανάγνωστα αποτελέσματα χωρίς κάποιο σαφές πλεονέκτημα.
iii)Το μεγαλύτερο πρόβλημα είναι η ατέλεια που (πιθανώς) έχει μια ηχογράφηση. Αφενός αυτό είναι τροχοπέδη για την μελέτη διότι δημιουργεί εσφαλμένες χρονοσειρές, αλλά σημαντικότερα, μετατρέπει την κατανομή της ΤΜ μας σε συνεχή.

Μια εύκολη λύση σε αυτά τα προβλήματα δίδει η χρήση της κωδικοποίησης MIDI (Musical Instrument Digital Interface) για τα δεδομένα μας. Πρόκειται για μια μορφή μεταφοράς ή αποθήκευσης μουσικών δεδομένων. Αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας 1980 από τεχνικούς synthesizer (αξιοσημείωτα I. Kakehashi, Dave Smith & Robert Moog το 1982) διαφορικών εταιριών.

Σκοπός ήταν η επικοινωνία μεταξύ διαφορετικών μουσικών οργάνων και ειδικότερα synthesizer διαφορετικών παραγωγών. Η απλότητα της κωδικοποίησης αυτής ήταν καταλυτική για την ανάπτυξη της σύγχρονής μουσικής λόγω της απλότητας και πρακτικότητας της. Φυσικά αυτό ισχύει και για την παρούσα μελέτη (Cancino-Chacón, Carlos, et al, 2022).

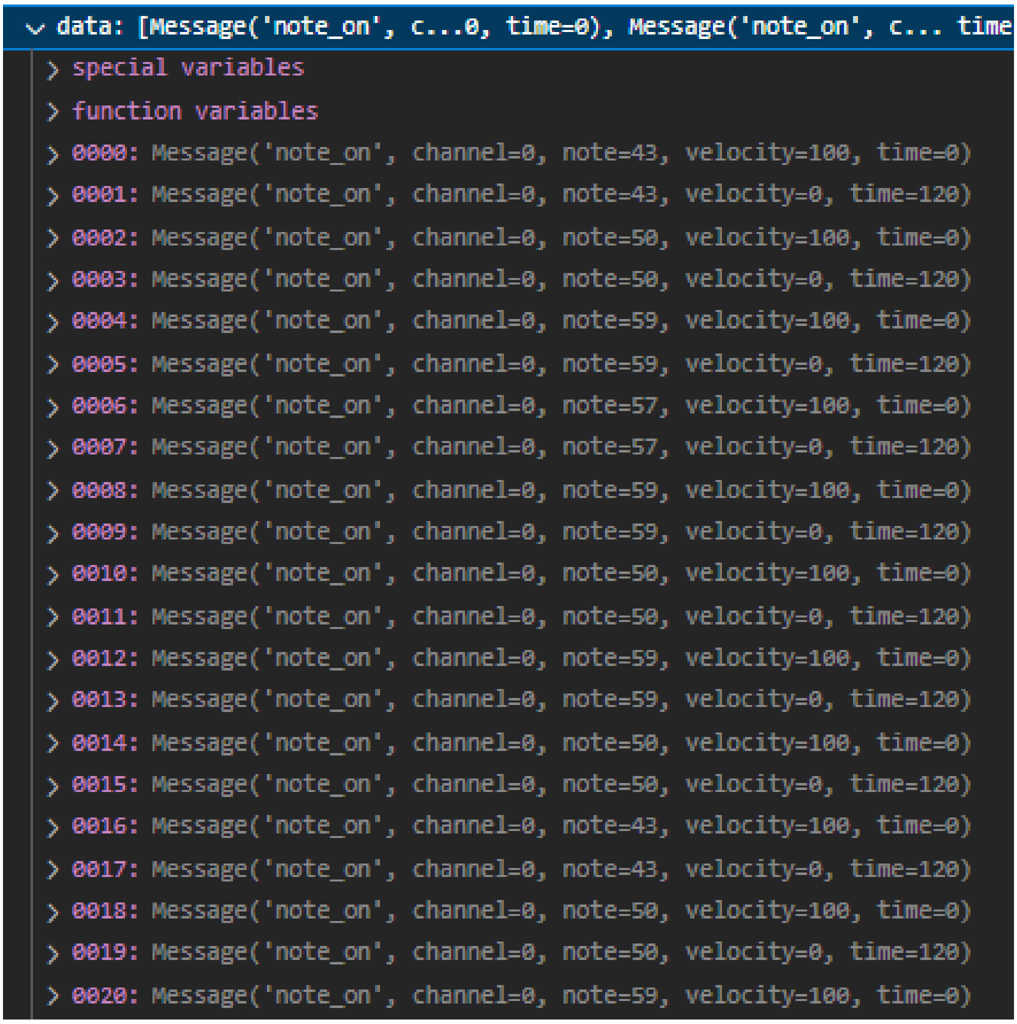


Εικόνα 5 Θύρες για υποδοχή MIDI σε αρμόνιο.

Μια «μοναδιαία» πληροφορία MIDI περιλαμβάνει πέντε βασικές πληροφορίες για να μεταφέρουν μια νότα:

- Την αριθμημένη ονομασία της νότας,
- Το κανάλι αναπαραγωγής,
- Την χρονική διάρκεια της νότας,
- Και την «μετα-πληροφορία» για τον τρόπο παραγωγής της νότας ή το τέλος της.
- Την επιτάχυνση της νότας, την ένταση δηλαδή με την οποία «παίζουμε» την νότα.

Η αριθμημένη ονομασία των νοτών που χρησιμοποιεί η κωδικοποίηση MIDI γίνεται με την χρήση των δεικτών του αναδρομικού τύπου 3.1, θέτοντας σαν n_1 την χαμηλότερη συχνότητα ικανή να ακούσει το ανθρώπινο αυτί. Με τον τρόπο αυτό έχουμε 88 αριθμημένες και οργανωμένες σε αύξουσα συχνότητα νότες. Η χρήση του MIDI μας επιτρέπει να υπερβούμε άμεσα και ολοκληρωτικά όλα τα προαναφερθέντα προβλήματα (Clinton, William, 2019)



Εικόνα 6 Η αρχή ενός αρχείου MIDI.

3.2 Οι τέσσερις κατηγορίες δεδομένων

Όπως είναι λογικό, η στατιστική μελέτη που ακολουθεί έχει σαν αντικείμενο μελέτης κομμάτια μουσικής. Ωστόσο είναι γνωστό ότι οι διαφοροποιήσεις ύφους, διάθεσης, είδους ή και εποχής συγγραφής μπορούν να δώσουν πολύ διαφορετικά μουσικά ρεύματα και ακόμα μουσικές καινοτομίες και ιδιαιτερότητες.

Αυτή η ποικιλομορφία δημιουργεί και το ερώτημα της παρούσας εργασίας. Είναι δυνατός ο προσδιορισμός του είδους ενός κομματιού από ένα στατιστικό μοντέλο; Κομμάτια ίδιου είδους ή εποχής παρουσιάζουν ομοιότητες σε στατιστικές ιδιότητες και παραμέτρους τους;

Η μελέτη θα κινηθεί γύρω από την δειγματοληψία από τέσσερις κατηγορίες βάσει εποχής συγγραφής. Η δειγματοληψία αφορά την κλασσική παράδοση της Ευρωπαϊκής/Δυτικής μουσικής, πάνω στην οποία είναι στηριγμένα και τα μουσικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε για την παρούσα μελέτη. Οι εποχές αυτές είναι αντίστοιχα οι τέσσερις γνωστές εποχές της τέχνης:

- Προ-Κλασσική, ή Μπαρόκ 1600-1750. Η μπαρόκ εποχή χαρακτηρίζεται από την πλούσια ορχηστρική μουσική και θέματα βασισμένα σε παραδοσιακούς χορούς. Η χρήση της αντίστιξης και η έμφαση στη δραματική έκφραση με έντονο «στολισμό» είναι επίσης κλασσικά σημάδια της μπαρόκ εποχής. Σημαντικοί συνθέτες περιλαμβάνουν τον Johann Sebastian Bach, τον George Frideric Handel, και τον Antonio Vivaldi.

- Κλασσική, 1750-1820. Η κλασική μουσική είναι γνωστή για την ισορροπία μεταξύ έκφρασης και αρμονίας. Την περίοδο αυτή εκτενή αναπτύχθηκαν ορχηστικά έργα όπως τα κονσέρτα και η όπερα. Σημαντικοί συνθέτες της περιόδου είναι ο Wolfgang Amadeus Mozart, ο Ludwig van Beethoven και ο Joseph Haydn.
- Ρομαντική, 1820-1900. Η ρομαντική μουσική επικεντρώνεται στην έκφραση των συναισθημάτων και την ποικιλία της έκφρασης. Οι συνθέτες δημιούργησαν μουσικές που είναι συχνά παθιασμένες και εκκεντρικές. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τον Isaac Albeniz, Lidzt, Tchaikovsky και τον Richard Wagner.
- Μοντέρνα, 1900-σήμερα. Η σύγχρονη μουσική είναι πολυμορφική και πειραματική, επιτρέποντας σε καλλιτέχνες να εξερευνήσουν νέες ιδέες και τεχνικές. Συχνά χρησιμοποιεί ατονικές κλίμακες και ατονικές αρμονίες. Σημαντικοί σύγχρονοι συνθέτες περιλαμβάνουν τον Igor Stravinsky και τον John Cage. Φυσικά πέρα από τα στεγανά της κλασσικής μουσικής την μοντέρνα περίοδο έχουμε την ανάπτυξη δεκάδων ειδών με την τεχνολογία να επιταχύνει την πρόοδο και ποικιλομορφία τους.

Για κάθε κατηγορία μπορεί να υπάρχουν επιμέρους παρατηρήσεις ή αξιοσημείωτες ομαδοποιήσεις. Η ανάλυση αυτών και ο εντοπισμός ομαδοποιήσεων θα γίνει στο έκτο και έβδομο κεφάλαιο. Η τέταρτη κατηγορία, η μοντέρνα μουσική, θα περιλαμβάνει από την δειγματοληψία της διαφορετικά είδη (πχ. τζαζ, ροκ κτλ.). Ωστόσο αν και δεν γίνεται τέτοιος διαχωρισμός, αναμένεται να υπάρχει συσχέτιση σε τραγούδια ίδιου τύπου (πχ: γερμανικοί χοροί στην μπαρόκ εποχή έχουν παρόμοιους ρυθμούς).

4. Αρχές Στοχαστικής ανάλυσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγραφούν τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που θα τεθούν σε χρήση για την παρούσα μελέτη. Δεδομένου ότι η ανάλυση μας θα γίνει στη βάση των στοχαστικών ανελίξεων θα πρέπει πρώτα να θέσουμε τα θεμέλια των γνώσεων από το πεδίο των πιθανοτήτων και της στατιστικής, έστω στο μέρος των εννοιών που θα αντιμετωπίσουμε. Τέλος θα αναπτύξουμε τις αρχές του μοντέλου *Hurst-Kolmogorov* και του *κλιμακογράμματος* βάσει των οποίων θα γίνει η εξαγωγή όλων τα καίριων συμπερασμάτων της παρούσας μελέτης.

4.1 Βασικά Εργαλεία πιθανοτήτων και Στατιστικής

Η θεωρία πιθανοτήτων είναι ένα κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την μελέτη της αβεβαιότητας. Παρέχει ένα πλαίσιο για την κατανόηση και ανάλυση τυχαίων γεγονότων και των αποτελεσμάτων τους. Η θεμελιώδης έννοια στη θεωρία πιθανοτήτων είναι η πιθανότητα ενός γεγονότος η οποία αντιπροσωπεύει την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός και συμβολίζεται ως P(A). Οι τιμές της πιθανότητας κυμαίνονται από 0 έως 1, όπου το 0 υποδηλώνει αδύνατο σενάριο και το 1 υποδηλώνει βεβαιότητα.

Στη θεωρία πιθανοτήτων, οι τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να αντιπροσωπεύσουν μεταβλητές που είναι υπό αβεβαιότητα. Μια τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει διάφορες τιμές με βάση το αποτέλεσμα ενός τυχαίου γεγονότος. Υπάρχουν δύο τύποι τυχαίων μεταβλητών: διακριτές και συνεχείς. Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές έχουν μια αριθμήσιμη πληθώρα διακριτών τιμών, ενώ οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές παίρνουν οποιαδήποτε τιμή σε ένα εύρος.

Μια κατανομή πιθανοτήτων περιγράφει την πιθανότητα διαφορετικών αποτελεσμάτων για μια τυχαία μεταβλητή. Για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, η κατανομή περιγράφεται από μια συνάρτηση πιθανοτήτων μάζας, η οποία αντιστοιχεί πιθανότητες σε κάθε πιθανή τιμή. Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η κατανομή περιγράφεται από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία δίνει τη σχετική πιθανότητα διάφορων τιμών.

Πολλές κατανομές πιθανοτήτων χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν φαινόμενα στον πραγματικό κόσμο. Η διωνυμική κατανομή μοντελοποιεί τον αριθμό των επιτυχιών σε έναν προκαθορισμένο αριθμό ανεξάρτητων δοκιμών. Η κανονική κατανομή, γνωστή και ως κατανομή Gauss, χρησιμοποιείται ευρέως λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος και περιγράφει πολλά φυσικά φαινόμενα. Η εκθετική κατανομή μοντελοποιεί τον χρόνο μεταξύ της εμφάνισης γεγονότων σε μία διαδικασία Poisson. Αυτές οι κατανομές έχουν καλά καθορισμένες μαθηματικές ιδιότητες, καθιστώντας τις χρήσιμες για στατιστική ανάλυση.

Η στατιστική περιλαμβάνει τη συλλογή, ανάλυση, ερμηνεία, παρουσίαση και οργάνωση δεδομένων. Χρησιμοποιεί πιθανοτικές τεχνικές για να εξάγει συμπεράσματα για τον πληθυσμό βάσει δεδομένων δείγματος.

Η στατιστική συνοψίζει και παρουσιάζει τα δεδομένα με κατανόηση. Μετρήσεις όπως η μέση τιμή, η διακύμανση κτλ. παρέχουν πληροφορίες για την κεντρική τάση ενός συνόλου δεδομένων. Μετρήσεις όπως η διακύμανση και η τυπική απόκλιση ποσοτικοποιούν τη διάδοση ή την απόκλιση των δεδομένων. Γραφικές απεικονίσεις, όπως ιστογράμματα, διαγράμματα κουτιού και διαγράμματα διάσπασης, χρησιμοποιούνται συχνά για την οπτικοποίηση των δεδομένων.

Η στατιστική επαγωγή μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για έναν πληθυσμό βάσει ενός δείγματος. Περιλαμβάνει τον έλεγχο υποθέσεων και τα διαστήματα εμπιστοσύνης. Ο έλεγχος υποθέσεων αξιολογεί τα στοιχεία που παρέχονται από τα δεδομένα για να υποστηρίξει ή να απορρίψει μια διεκδίκηση για μια παράμετρο του πληθυσμού. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης παρέχουν ένα εύρος αξιοπιστίας για μια παράμετρο του πληθυσμού μαζί με ένα επίπεδο εμπιστοσύνης.

Η δειγματοληψία είναι η διαδικασία επιλογής ενός υποσυνόλου ατόμων από έναν μεγάλο πληθυσμό για την ανάλυση και τη σύλληψη στατιστικών συμπερασμάτων. Οι τεχνικές δειγματοληψίας περιλαμβάνουν την τυχαία δειγματοληψία, όπου κάθε μέλος του πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, και τη συστηματική δειγματοληψία, όπου οι επιλογές γίνονται με μια προκαθορισμένη διαδικασία.

Αυτή είναι μια συνοπτική επισκόπηση της βασικής θεωρίας πιθανοτήτων και στατιστικής. Αυτές οι έννοιες και τεχνικές αποτελούν τη βάση για την κατανόηση και την ανάλυση που ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια.

4.2 Στοχαστικές ανελίξεις

Στοχαστική μεταβλητή ονομάζουμε μια τυχαία μεταβλητή η οποία ενώνει το πεδίο γεγονότων (ενός πειράματος/διαδικασίας με την οποία σχετίζεται η μεταβλητή) με έναν αριθμό το οποίο αντιπροσωπεύει το γεγονός. Σύμφωνα με το μαθηματικό ορισμό (A. Kolmogorov, 1933), μια “ένα προς ένα” συνάρτηση $x(\omega)$, ορισμένη σε χώρο Ω, ονομάζεται τυχαία ή στοχαστική μεταβλητή εάν για κάθε $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x(\omega)<\alpha\}$ για κάθε ω για το οποίο $x(\omega)<\alpha$ είναι αληθές, ανήκει στο σύνολο Σ, των *αλγεβρικών αριθμών* (koutsoyannis, 2020)

Μια τέτοια τυχαία μεταβλητή, είναι πολύ χρήσιμη καθώς συνδέει την φυσική έκφανση ενός προβλήματος με μια μαθηματική του έκφραση . Συνδέει δηλαδή τον χώρο P των πιθανοτήτων με αυτό των αλγεβρικών αριθμών Σ. Αυτό είναι απαραίτητο για κάθε μαθηματική διεργασία ενός πραγματικού φαινομένου, και ο τρόπος ένωσης είναι διαφορετικός για κάθε επιστημονικό κλάδο. Συνήθης πρακτική είναι η αντιστοίχιση βάσει μιας μονάδας μέτρησης(βλ. μάζα σε χιλιόγραμμα), έτσι ώστε να δίδεται στην μαθηματική έκφραση φυσικό και λογικό περιεχόμενο.

Όταν έχουμε μια ακολουθία φυσικών γεγονότων, και συνεπώς δεδομένων για μελέτη, τότε έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη. Η στοχαστική ανέλιξη είναι μια μαθηματική διαδικασία με την οποία συνδέεται, με τον χρόνο, το παραγόμενο αποτέλεσμα μιας τυχαίας μεταβλητής.

Εναλλακτική και πιο πρακτική οπτική μιας ανέλιξης είναι η αυτή της χρονοσειράς. Ουσιαστικά, μια στοχαστική ανέλιξη είναι μια χρονοσειρά εξέλιξης μιας μαθηματικής διαδικασίας. Ειδικότερα σε ανελίξεις που περιγράφουν φυσικά φαινόμενα ή ποσοτικοποιούν γεγονότα, η χρήση μιας στοχαστικής ανέλιξης είναι σημαντικότατη για την μαθηματική ανάλυση του φαινομένου στη βάση της χρονοσειράς του. Η πιο απλή τέτοια έκφραση που βρίσκει εφαρμογή σε μια σειρά φαινομένων είναι:

$$y(x,t) := x_0 + \sum_{0}^{t} x(t) \quad (3)$$

Όπου x_0 είναι η αρχική τιμή μελέτης και x(t) η τυχαία μεταβλητή βάσει της οποίας εξελίσσεται το φαινόμενο, και έχει στατιστικές ιδιότητες που τίθενται προς μελέτη. Η παραπάνω έκφραση βρίσκει τόπο για ανάλυση από αποθέματα ταμιευτήρων (πχ: y το απόθεμα νερού και x η διαφορά εισροής-εκροής) μέχρι και την μελέτη του αντικειμένου της παρούσας εργασίας, δηλαδή τη στοχαστική ανάλυση μελωδιών. Μια σειρά στοχαστικών μοντέλων, που θα αναλύσουμε σε επόμενα κεφάλαια, χρησιμοποιούν αυτή τη βάση.

Σημαντικό είναι ότι οι ανελίξεις κληρονομούν στατιστικές ιδιότητες από την τυχαία μεταβλητή που «ενέχουν». Για την παραπάνω απλή ανέλιξη με τυχαία μεταβλητή x(t) μέσης τιμής E(x) έχουμε E(y)= x_0 + E(x) όπως είναι λογικό. Αυτή η γνώση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επαγωγή σε συνολική ανάλυση μιας χρονοσειράς γεγονότων και συνολικής αντίληψης για την πορεία τους. Οι μαθηματικές και στατιστικές γνώσεις ειδικότερα μπορούν να μας δίνουν έτσι πολύτιμες απαντήσεις και για το *μέλλον* του υπό μελέτης φαινομένου.

4.3 Στοχαστικά Μοντέλα

Έχουν αναπτυχθεί μια σειρά από μοντέλα στοχαστικών ανελίξεων με ιδιαιτερότητες τόσο ως προς την πολυπλοκότητα όσο και την χρησιμότητα τους. Στην παρακάτω παράγραφο θα περιγραφούν μόνο γνησίως στοχαστικά μοντέλα.

4.3.1 Ο λευκός Θόρυβος

Λευκός θόρυβος ονομάζεται η απλούστερη στοχαστική ανέλιξη. Το στοχαστικό μοντέλο του λευκού θορύβου αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών και την ανάλυση στοχαστικών συστημάτων. Πρόκειται για μια ανέλιξη με μηδενική αυτοσυσχέτιση για κάθε υστέρηση. Αυτό σημαίνει ότι το σήμα του λευκού θορύβου είναι στατιστικά ανεξάρτητο, και κάθε στιγμιότυπο του είναι ανεξάρτητο από τα προηγούμενα και τα επόμενα.

Ένα στοχαστικό μοντέλο του λευκού θορύβου μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά με τη χρήση τυχαίων αριθμών, δημιουργώντας ανεξάρτητες τυχαίες τιμές σε κάθε χρονική στιγμή. Ο λευκός θόρυβος είναι απλούστερο να κατανοηθεί σε σύγκριση με άλλες πολύπλοκες στοχαστικές διαδικασίες, καθώς οι συσχετίσεις μεταξύ των διαφορετικών χρονικών στιγμών είναι μηδενικές.

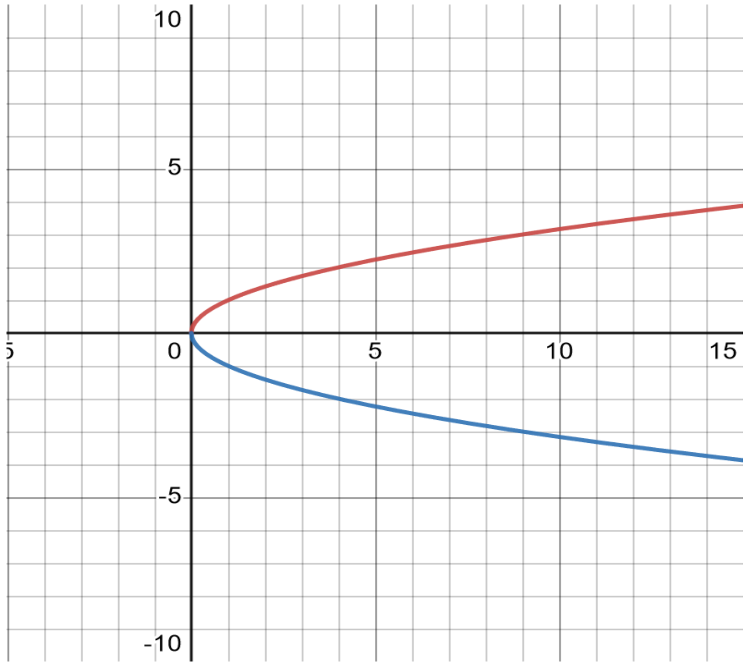
Στην πράξη, ο λευκός θόρυβος χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές όπως η επεξεργασία σημάτων, η εκτέλεση πειραμάτων, η μοντελοποίηση θορύβου στη φυσική, και η πρόβλεψη στοχαστικών διαδικασιών. Αν και ο λευκός θόρυβος είναι ένα ιδανικοποιημένο μοντέλο και σπάνια συναντάται στην πραγματικότητα, η ανάλυση του παρέχει βαθιές εισάγει στην κατανόηση των στοχαστικών διαδικασιών και την ανάπτυξη αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων πρόβλεψης και εκτίμησης.

4.3.2 Ο τυχαίος περίπατος

Τυχαίος περίπατος ονομάζεται μια ανέλιξη με τύπο:

$$y(x,t) := x_0 + \sum_{0}^{t} x(t) \;\; όπου \; x(t) = \{-1,1\} \tag{4}$$

στην απλούστερη μορφή του, με x_0 την αρχική θέση ενός «περιπατητή» και x(t) τα βήματα που κάνει πάνω σε μια ευθεία, με το -1 να σημαίνει βήμα «προς τα πίσω» και +1 βήμα «προς τα μπροστά». Υπό την μορφή αυτή κάνουμε την παραδοχή ομοιόμορφης κατανομής στην τυχαία μεταβλητή του βήματος. Παρά την απλότητα του έχει φανταστικές εφαρμογές και είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα για την κατανόηση των ιδιοτήτων των στοχαστικών ανελίξεων. Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η τυπική απόκλιση (y(t)) ενός περιπάτου x(t) βημάτων.



Εικόνα 7 Η γραφική παράσταση της τυπικής απόκλισης ενός απλού τυχαίου περιπάτου.

Μια εφαρμογή του τυχαίου περιπάτου είναι στο χρηματιστήριο. Το μοντέλο συχνά χρησιμοποιείται από οικονομολόγους για την περιγραφή της αξίας των μετοχών σαν χρονοιστορία με προσαρμογή του εύρους και της κατανομής του βήματος.

4.3.3 Ανέλιξη Markov

Μια στοχαστική ανέλιξη ονομάζεται Markov όταν η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής εξαρτάται μονάχα από την τιμή στην προηγούμενη υπο μελέτη στιγμή ή κατάσταση της, και είναι ανεξάρτητη με κάθε άλλη τιμή. Σε μαθηματικούς όρους:

$$P\{\underline{x}(t)|\underline{x}(s) = x(s), s \leq 0 < t\} = P\{\underline{x}(t)|\underline{x}(0) = x(0)\} \quad (5)$$

(Koutsoyannis, 2020). Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει μια γραμμική ανέλιξη Markov και είναι γνωστή και ως Ornstein-Uhlenbeck.

Καίριο σημείο στις ανελίξεις Markov είναι η έννοια της μετάβασης από κατάσταση σε κατάσταση με μια συγκεκριμένη πιθανότητα. Κάθε κατάσταση αντιπροσωπεύει ένα διακριτικό βήμα στον χρόνο και οι πιθανότητες μετάβασης καθορίζουν το πώς η διαδικασία εξελίσσεται από μια κατάσταση στην επόμενη. Οι μεταβάσεις αυτές μπορεί να είναι ανεξάρτητες του παρελθόντος, δηλαδή να ικανοποιούν την ιδιότητα του Markov, ή να εξαρτώνται από τις προηγούμενες καταστάσεις, όπως συμβαίνει στις χρονοσειρές Markov.

4.4 Το μοντέλο Hurst-Kolmogorov

Στα φυσικά φαινόμενα παρατηρείται αλλαγή σε διαφορετικές κλίμακες και ταχύτητες. Η μεταβολή αυτή ωστόσο δεν είναι εντελώς τυχαία. Αντίθετα, ένα ακραίο φυσικό φαινόμενο συχνά εμφανίζει μοτίβα αλλαγών, όπως ένας αξιοσημείωτος καύσωνας δεν διαρκεί μερικές ώρες, αλλά συνήθως προηγούνται από μέρες υψηλών θερμοκρασιών. Αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται εμμονή, η τάση δηλαδή ομαδοποίησης των τιμών των φυσικών φαινομένων.

Ουσιαστικά αυτή η δυναμική περιγράφει μια αυτοσυσχέτιση, ιδιαίτερα εμφανή στα φυσικά φαινόμενα. Ακόμα πιο έντονη απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι η ύπαρξη (ολότελα) των εποχών για τα κλιματικά φαινόμενα. Δηλαδή σε περιοδική βάση τα κλιματικά φαινόμενα φανερώνουν μεγάλη αυτοσυσχέτιση.

Αυτή την ιδιότητα ονομάζουμε εμμονή και είναι η βασική διαφορά του μοντέλου Hurst Kolmogorov που θα αναλύσουμε σε αυτή τη παράγραφο. Η ιδιότητα αυτή είναι διαφορά με τα στοχαστικά μοντέλα που προαναφέραμε.

4.4.1 Το κλιμακόγραμμα

Η συνάρτηση της διασποράς της μέσης συναθροισμένης ανέλιξης συναρτήσει της κλίμακας συνάθροισης ονομάζεται κλιμακόγραμμα. Η βασική μεθοδολογία για τον προσδιορισμό του κλιμακογράμματος, από koutsoyannis 2020, είναι η εξής:

1. Θεωρώ ανέλιξη $\underline{x}_i$, i=1,2,3…n

2. Θέτω διακριτές κλίμακες k=1,2,3,…n/10

3. Για κάθε μια από τις κλίμακες φτιάχνω μια ανέλιξη «κινούμενων μέσων» ως εξής:

$$\underline{x}_1^{(2)} = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, \underline{x}_2^{(2)} = \frac{(x_3 + x_4)}{2}, \kappa\tau\lambda.$$

4. Υπολογίζω τις διακυμάνσεις για κάθε μια κλίμακα χρησιμοποιώντας τους κινούμενους μέσους που μόλις υπολογίσαμε και μέση τιμή της αρχικής ανέλιξης:

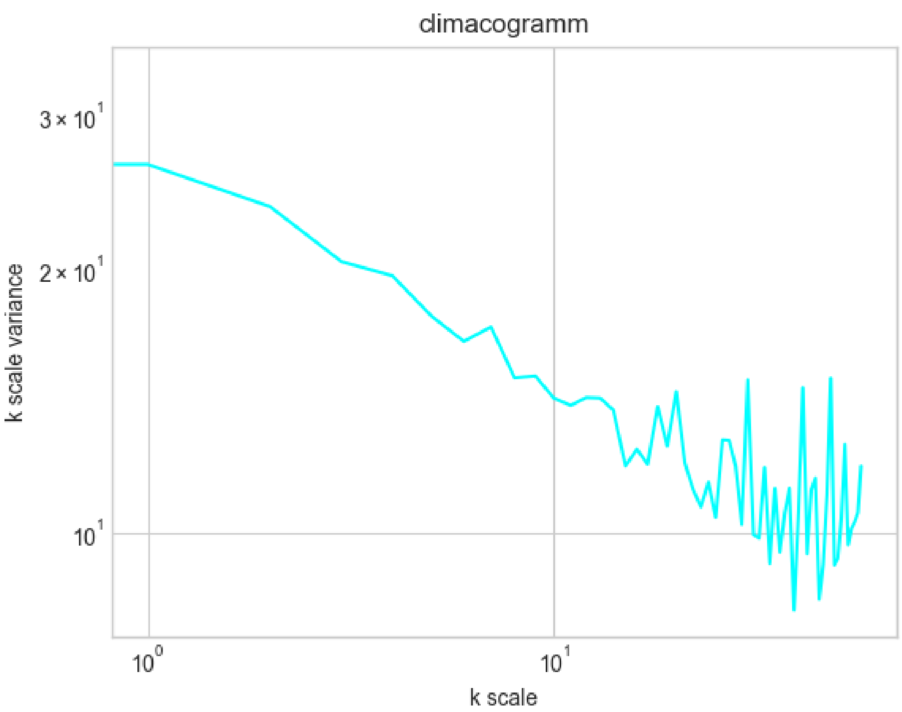
$\gamma(k)$ = $Var[xi(\kappa)]$ = $\hat{\gamma}(\kappa) = \frac{\Sigma(x_i - \hat{\mu})}{n-1}$

5. Εκτιμώ την τιμή της παραμέτρου H από την σχέση:

$$\gamma(k) = \frac{\gamma(0)}{k^{2-2H}}$$

όπου η αντίθετη τιμή του εκθέτη, στον παρονομαστή, είναι η κλίση της γραμμικής παλινδρόμησης του κλιμακογράμματος. Η παράμετρος Η εκφράζει την εμμονή του φαινομένου και θα αναλυθεί εκτενώς σε επόμενες παραγράφους.

Τυπώνοντας τις διακυμάνεις ως προς τις κλίμακες σε διπλό λογαριθμικό διάγραμμα μας δίνει το κλιμακόγραμμα.



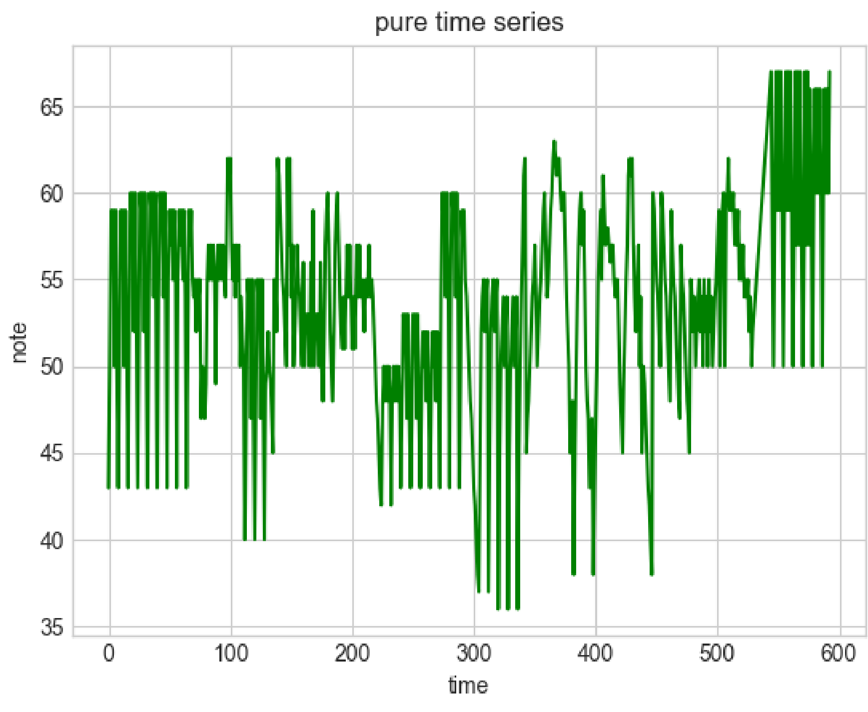
Εικόνα 8 Παράδειγμα κλιμακογράμματος.

Η μελέτη με χρήση κλιμακογράμματος γίνεται διότι έχει διαπιστωθεί ότι έχει λιγότερο αβέβαια αποτελέσματα στην εκτίμηση σε σύγκριση με τα εργαλεία με βάση την αυτοσυσχέτιση (Dimitriadis, P., Koutsoyiannis, 2015)

4.4.2 Ο Συντελεστής Hurst

Η σταθερά του μοντέλου Hurst-Kolmogorov είναι το *H,* που ανήκει στο διάστημα [0,1), φανερώνει τον ρυθμό που οι αυτοσυσχετίσεις μια χρονοσειράς μεταβάλλονται όσο η υστέρηση σε κλίμακα αυξάνεται. Οι του συντελεστή Η δείχνουν την σχέση των τιμών μιας ανέλιξης σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Για H>0.5 η χρονοσειρά εμφανίζει εμμονή, δηλαδή οι εμφανίζουν ομαδοποιήσεις. Αυτό αναγκαστικά συνεπάγεται και θετική αυτοσυσχέτηση της μεταβλητής της ανέλιξης. Για τιμή του Hurst *H*=0.5 οι προς εξέταση τιμές είναι χρονικά ανεξάρτητες, αυξάνονται και μειώνονται τυχαία (συμπεριφορά λευκού θορύβου). Για *H*<0.5 υπάρχει άντι- εμμονή, δηλαδή εμφανίζονται μεγάλες διακυμάνσεις των τιμών της ανέλιξης σε κοντινές στιγμές, π.χ. μικρές τιμές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες τιμές.

Παρακάτω φαίνεται ένα παράδειγμα χρονοσειράς ενός τραγουδιού με υψηλό συντελεστή Hurst:



Εικόνα 9 Παράδειγμα χρονοσειράς υψηλού συντελεστή Hurst.

5. Υπό εξέταση μεταβλητές της μουσικής μελωδίας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μια προκαταρκτική θεωρητική ανάλυση της μελέτης. Μια στοχαστική μελέτη στην μουσική μπορεί να εξετάσει δεκάδες διαφορετικές παραμέτρους με πολλές ενδιαφέρουσες απολήξεις. Ωστόσο κάθε μία από αυτές τις παραμέτρους έχουν πολύ διαφορετικό τρόπο μελέτης.

Βασικός στόχος των επόμενων παραγράφων είναι να περιγραφούν τα σημαντικά χαρακτηριστικά που έχει κάθε διαφορετική επιλογή τυχαίας μεταβλητής για μελέτη. Οι βασικές τέσσερεις είναι:

1) Το διάστημα κίνησης της μελωδίας.
2) Η «καθαρή» θέση της νότας – η συχνότητα της.
3) Η απόσταση της νότας από την τονική.
4) Η διάρκεια της νότας.

Κάθε μια από τις παραπάνω ανοίγει διαφορετικές δυνατότητες για εξαγωγή συμπερασμάτων, κατηγοριοποίηση κομματιών ανά εποχή, είδος ή καλλιτέχνη. Αντίστοιχα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναγνώριση των παραπάνω χαρακτηριστικών!

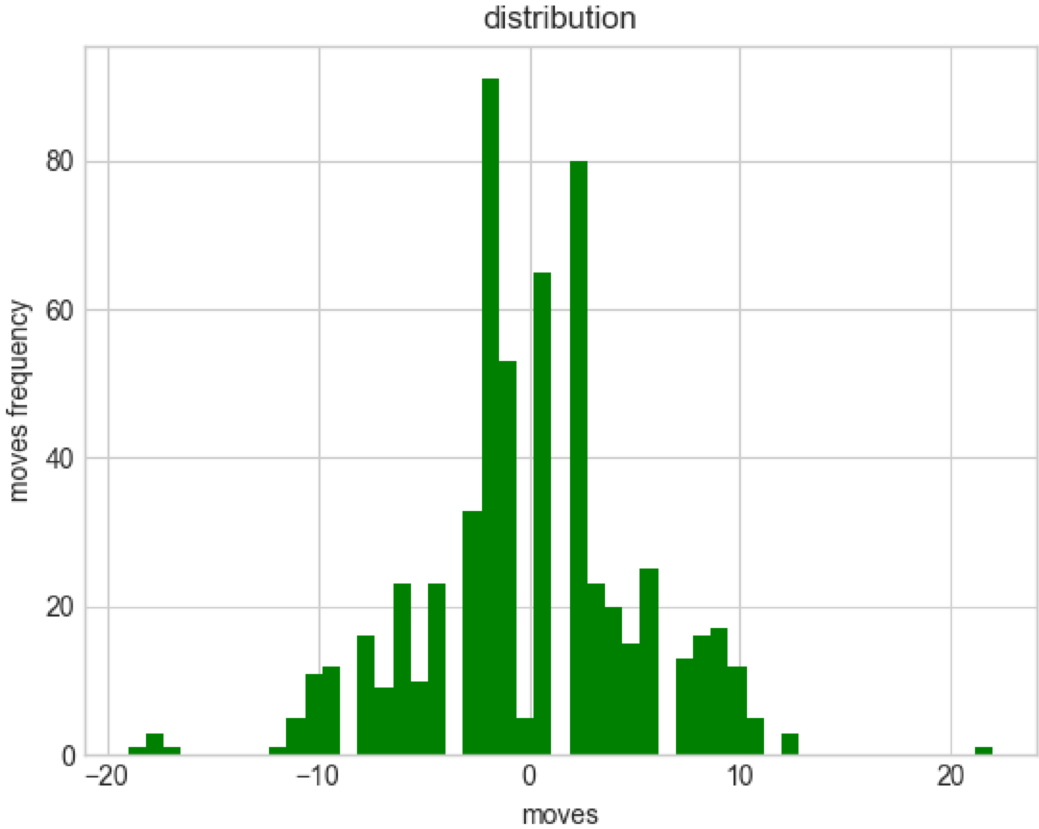
Η ανάλυση και η περιγραφή των διαφορών μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών, κινείται γύρω από την χρονοσειρά που μπορούν να αποτυπώσουν και από την κατανομή που διαμορφώνουν.

Όπως θα σημειωθεί και σε επόμενα κεφάλαια, ο κορμός της μελέτης θα κινηθεί κατά βάσει γύρω από την δεύτερη και τρίτη, που βέβαια έχουν ιδιαίτερα πολλά κοινά. Ωστόσο το διάστημα κίνησης έχει ιδιαίτερη χρησιμότητα για την μουσική οπτική της εργασίας, ενώ η χρονοσειρές διαρκειών μπορούν να δώσουν άμεσες απαντήσεις πάνω στη μορφολογία των υπό μελέτη κομματιών, αν και αυτές δε θα παρουσιαστούν στην παρούσα μελέτη.

Για την ευκολία αποτύπωσης των διαφορών μεταξύ των τεσσάρων υπό μελέτη μεταβλητών θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο κομμάτι για τα διαγράμματα.

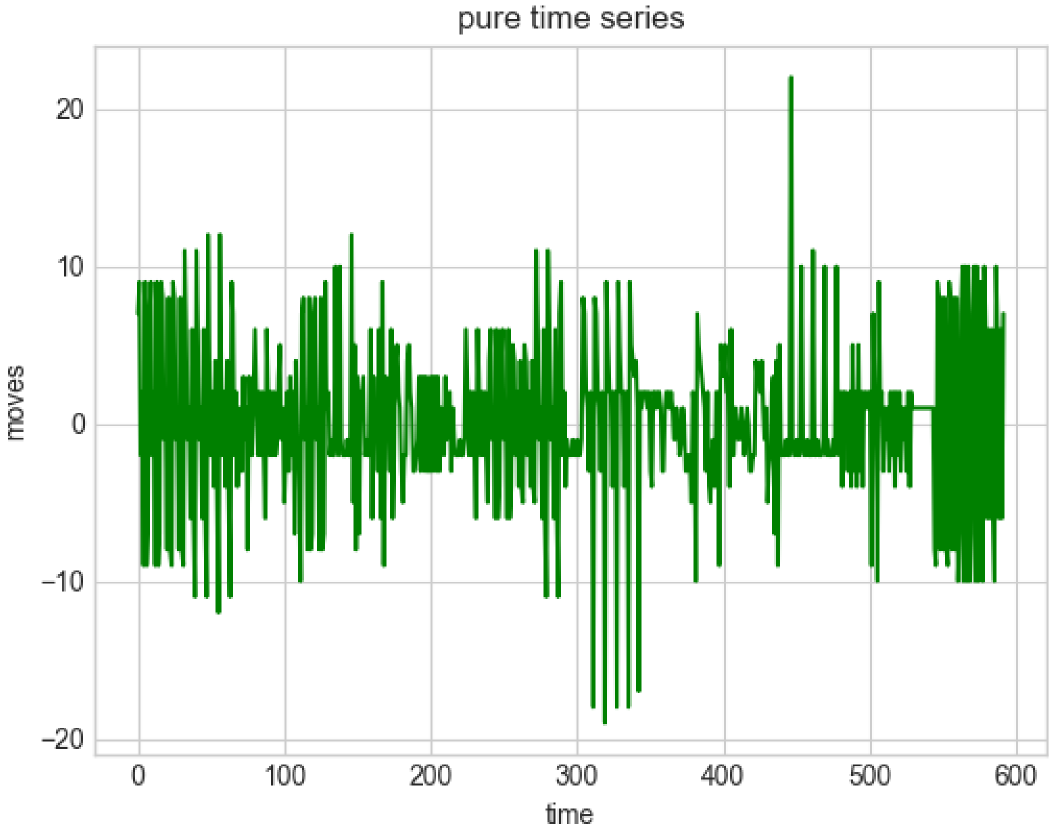
5.1 Το διάστημα κίνησης ως τυχαία μεταβλητή

Όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 2.2, το διάστημα κίνησης μιας νότας είναι η απόσταση μεταξύ δυο συνεχόμενων νοτών μετρημένη σε ημιτόνια. Κάθε διάστημα έχει διακριτό χαρακτήρα, δηλαδή η αλληλουχία των νοτών είναι διακριτή μεταξύ διαφορετικών συνδυασμών. Για τον λόγο αυτό τα διαστήματα είναι με μοναδικό τρόπο ονομασμένα στην εικόνα 3. Η επιλογή του διαστήματος κίνησης σαν τυχαία μεταβλητή ενέχει την περισσότερη «μουσική πληροφορία» για αυτό το λόγο.



Εικόνα 10 Κατανομή διαστήματος κίνησης

Η χρησιμότητα του διαστήματος κίνησης ως τ.μ. εμφανίζεται στην κατανομή που διαμορφώνει. Η κατανομή διαστήματος κίνησης εμφανίζει σε κάθε κατηγορία δεδομένων πολλά κοινά χαρακτηριστικά. Η έντονη τάση να έχει μορφή διπλής κανονικής κατανομής με πολλά κενά είναι χαρακτηριστική για ένα φαινόμενο το οποίο διέπεται από ένα δεδομένο σύστημα κανόνων όπως η μουσική. Ιδιαίτερα τα «κενά» των κατανομών εμφανίζονται κατά βάσει στα λεγόμενα «κακόηχα διαστήματα».



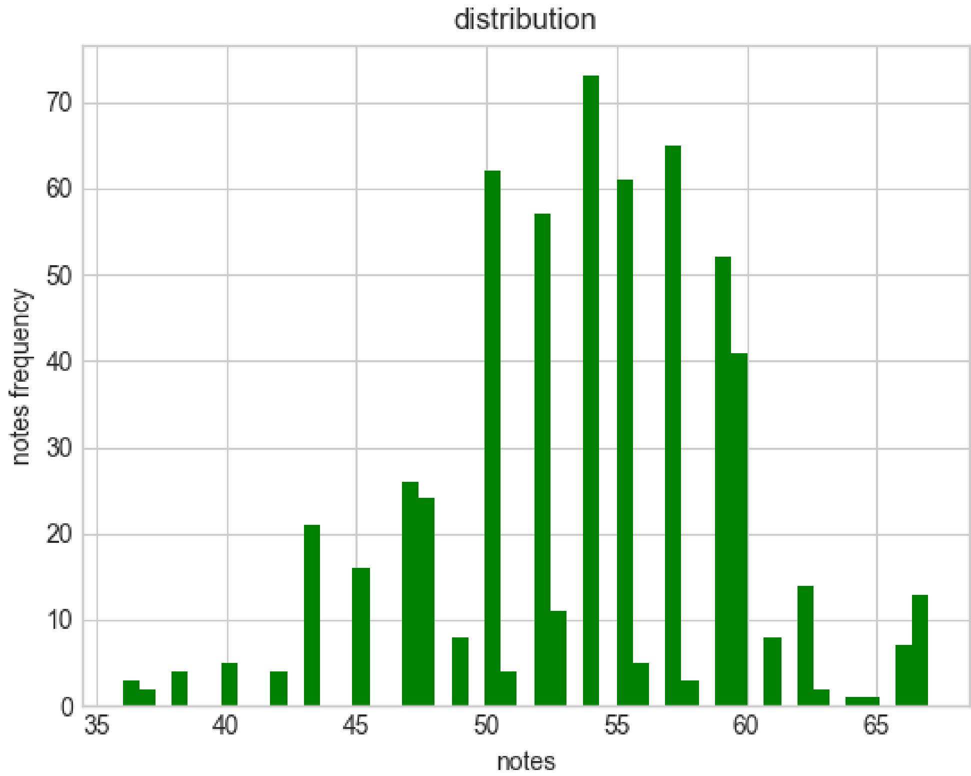
Εικόνα 11 Χρονοσειρά διαστήματος κίνησης.

Η παραγόμενη χρονοσειρά του διαστήματος κίνησης ωστόσο είναι πολύ λιγότερο χρήσιμη. Διαγράμματα τέτοιας μορφής κάνουν δύσκολη την εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος για κάθε τύπου στατιστική μελέτη. Η κβαντισμένη μορφή της τυχαίας μας μεταβλητής με τεράστιο βάρος σε ορισμένες τιμές κάνουν το διάγραμμα δυσνόητο και ελάχιστα χρήσιμο.

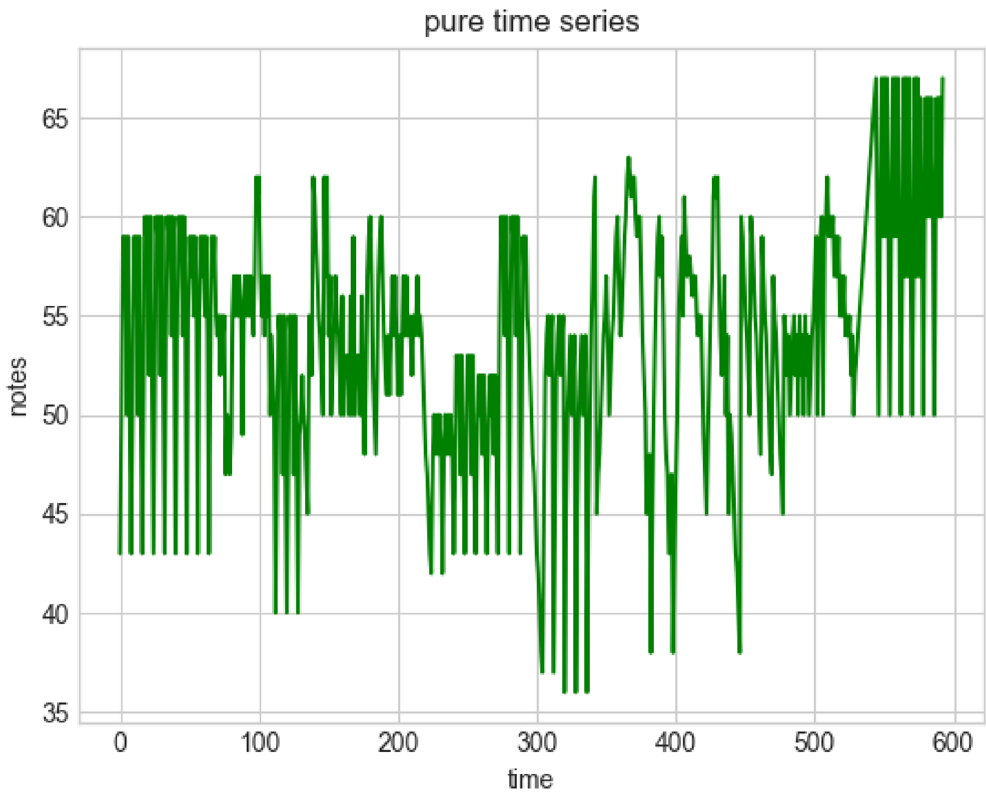
5.2 Η θέση της νότας ως τυχαία μεταβλητή

Η θέση της νότας είναι ισοδύναμη έννοια με την συχνότητα της. Όπως έχει περιγράφει στην παράγραφο 3.1, η κωδικοποίηση MIDI μετατρέπει τις συχνότητες σε γραμμικώς αυξανόμενα νούμερα με αξίες 1 έως 88. Με τον τρόπο αυτό έχουμε μια λογική και απλή έκφραση για την αποτύπωσή των χρονοσειρών μας.

Η θέση της νότας ως τυχαία μεταβλητή έχει χρησιμότητα τόσο στην αποτύπωσή κατανομών όσο και χρονοσειρών.



Εικόνα 12 Κατανομή θέσης νοτών.



Εικόνα 13 Χρονοσειρά θέσης νότας.

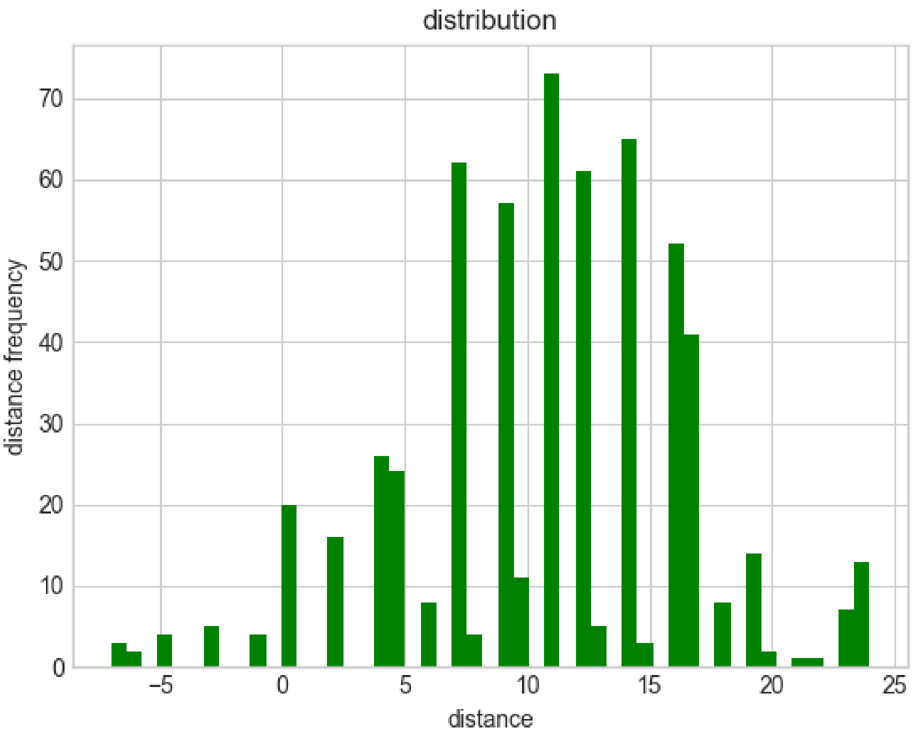
Το διάγραμμα κατανομής μας φανερώνει σε ποιες «τονικές περιοχές» βρίσκεται περισσότερο χρόνο η μελωδία. Αν και φαινομενικά μικρής αξίας πληροφορία, σε μαζική μελέτη κομματιών, με αυτό το κριτήριο μπορούμε να ομαδοποιήσουμε συμπεριφορές των καλλιτεχνών ή ακόμα και να προβλέψουμε το είδος ή την φόρμα του τραγουδιού.

Η καθαρή χρονοσειρά της θέσης είναι μάλλον η χρησιμότερη εκ των τεσσάρων επιλογών. Πρόκειται για την πιο κλασσική έκφραση της μελωδίας στον χρόνο και στην πράξη είναι σε πλήρη «ευθυγράμμιση» με την παραδοσιακή μουσική αποτύπωση του πενταγράμμου. Όπως είναι αναμενόμενο, αυτή είναι η πιο εύχρηστη μεταβλητή για την μελέτη μελωδιών με μοντέλα Hurst-Kolmogorov καθώς μπορούν να παρουσιάσουν εμμονές σε διαφορετικές κλίμακες.

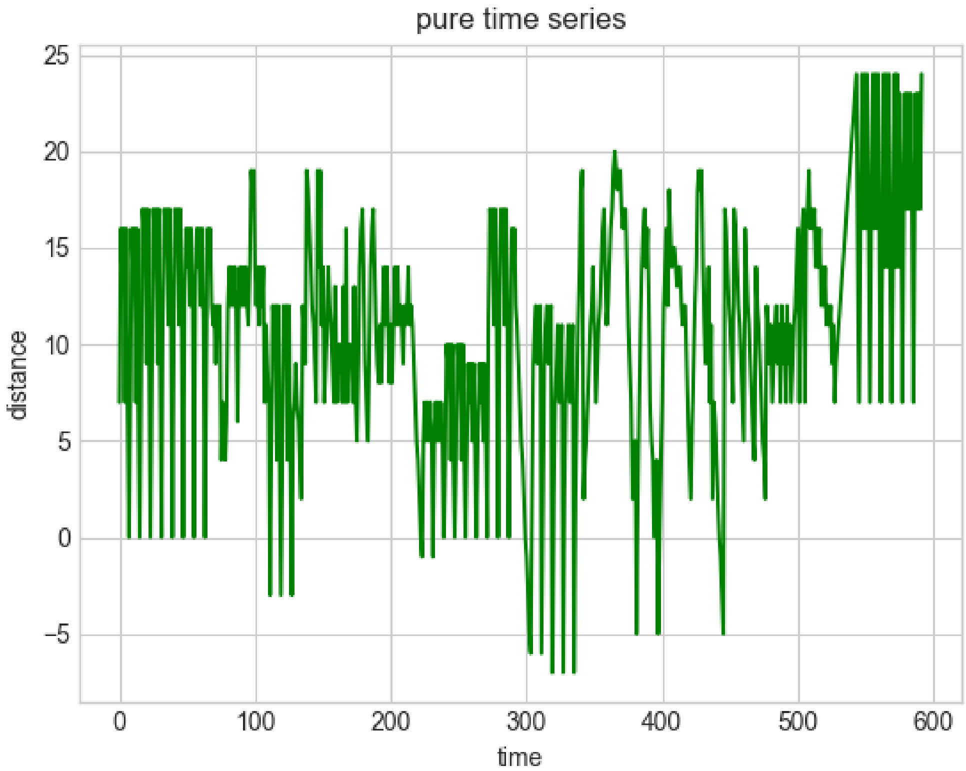
5.3 Η απόσταση από την τονική νότα ως τυχαία μεταβλητή

Κατά βάσει, στην δυτική μουσική, τα μουσικά κομμάτια γράφονται πάνω σε ένα τονικό κέντρο. Τονικό κέντρο ονομάζεται μια νότα γύρω από την οποία εναρμονίζεται το κομμάτι και ακολουθεί συγκεκριμένη κλίμακα για να αναδεικνύει το τονικό κέντρο. Η κεντρική αυτή νότα ονομάζεται τονική, το ίδιο και οι αρμονικές της νότες.

Για τις ανάγκες της μελέτης διαμορφώνουμε την απόσταση σε ημιτόνια κάθε χρονική στιγμή ως μια τυχαία μεταβλητή. Αυτή έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με την θέση της νότας. Όπως φαίνεται παρακάτω τα διαγράμματα είναι όμοια, ουσιαστικά όμως σε διαφορετικές κλίμακες. Συχνά η απόσταση αυτή μεγαλώνοντας δημιουργεί ένα κλασσικό αίσθημα έντασης στον ακροατή και συνδυάζεται με ιδιαίτερες δυναμικές στην εκτέλεση.



Εικόνα 14 Κατανομή αποστάσεων από την τονική.



Εικόνα 15 Χρονοσειρά απόστασης από την τονική.

6. Εφαρμογή του μοντέλου

Στο παρακάτω κεφάλαιο θα περιγραφεί αναλυτικά η μέθοδος επεξεργασίας των δεδομένων μας. Θα γίνει η παρουσίαση του κώδικα που χρησιμοποιείται για την εφαρμογή των μοντέλων και δοκιμές για βελτιστοποίηση αυτών. Τέλος για παρουσιαστούν μια σειρά από εφαρμογές που εφαρμόζονται για τα διάφορα μοντέλα και τις διαφορετικές τ.μ. και θα σχολιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο τα συμπεράσματα από τα παραπάνω.

6.1 Ο Κώδικας για την δημιουργία του μοντέλου

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση του κώδικα που χρησιμοποιείται για την εκτέλεση της παρούσας εργασίας. Θα περιγραφή η βασική χρησιμότητα των διαφορετικών αλγορίθμων με σκοπό την ευκολότερη κατανόηση των επόμενων βημάτων της ανάλυσης. Ο πλήρης κώδικας μπορεί να βρεθεί στο τέλος του κειμένου μέσω συνδέσμου για το github.

```python
from termcolor import colored
import mido
import os
from modelo import Modelz

class InputFile():
    def __init__(self, folder_name, file_name, data):
        self.folder_name = folder_name
        self.file_name = file_name
        self.data = data


def extract_midi(input_file):
    mid = mido.MidiFile(f'{input_file}', clip=True)
    tracks=mid.tracks
    track=max(tracks,key=len)
    maintrack = Modelz(track)                           ########## KALESMA MODELS ############# !!!!

    dist=maintrack.hist
    dist=dist[0]
    dist=list(dist)
    dump=dist.pop(-1)
    return maintrack

################################################################

def take_input_from_user():
    intake=input(colored('dwse onoma csv:\n', 'red'))
    print(f'diabazw to {intake}')
    os.chdir('C:/Users/user/Desktop/bigg/')
    return extract_midi(intake)

def take_input_from_folder():
    folders=os.listdir('C:/Users/user/Desktop/bigg/data/input')
    data = []
    for folder in folders:
        files = os.listdir('C:/Users/user/Desktop/bigg/data/input/' + folder)
        for file in files:
            maintrack = extract_midi('C:/Users/user/Desktop/bigg/data/input/' + folder + '/' + file)
            data.append(InputFile(folder, file, maintrack))
    return data
```

Εικόνα 16 Η συνάρτηση ανάγνωσης των αρχείων MIDI

```python
import numpy as np

class Modelz():

    def __init__(self, data):
        self.main = data
        self.data = self.descrap()
        self.trim = self.trim_doubles()
        self.notes= self.grab_notes()
        self.times= self.grab_times()
        self.move = self.grab_move()
        self.k = len(self.move)//10
        self.hist = self.get_histo()
        self.heat =  self.make_heat()
```

Εικόνα 17 Η κλάση Modelz, υπεύθυνη για την μετατροπή των μουσικών δεδομένων σε αριθμητικές χρονοσειρές (στην εικόνα φαίνεται μόνο η δήλωση των ιδιοτήτων της κλάσης).

```python
import numpy as np
import scipy as sp

def scale_averages(k,move):...

def var_estimator(moving_averages):...

def h_define(k, h_estimates):...

def conditionals(varest, HK):...

def m_define(k, varest):...

def HK_base_theoretical(H, varest):...

def bias_define(varest, var_theoretical):...


def FHKC(varest ,H ,M):...

def FHKCperiodic(varest ,H ,M):...


############# JUICE ##########################

def GHK(k, H, M, a, var_0):
    return var_0 * ( (1 + k/a)**(2*M) ) ** ( (H-1) / M )

def log_GHK(k, H, M, a, var_0):
    return np.log( GHK(k, H, M, a, var_0) )

def refine_GHK(varest):
    k = range(len(varest))
    popt, pcov = sp.optimize.curve_fit( log_GHK, k, np.log(varest), p0=[0.5, 0.5, 1, varest[0]], bounds=([0.1, 0.3, 1, varest[0]*0.95], [1, 1, 15, varest[0]*1.05]))
    return popt
```

Εικόνα 18 Οι υπολογιστικές συναρτήσεις αναγκαίες για την στατιστική ανάλυση

```python
from model_calc import  scale_averages, var_estimator, GHK, refine_GHK
from termcolor import colored
import matplotlib.pyplot as plt
from diabasma import  take_input_from_folder #take_input_from_user,
import os


def execute_thesis(data, temp):···

# maintrack = take_input_from_user()
# execute_thesis(maintrack)

data = take_input_from_folder()
temp=1
for dato in data:
    execute_thesis(dato, temp)
    temp=temp+1
```

Εικόνα 19 Ο βασικός κώδικας εκτέλεσης του μοντέλου για το σύνολο των δεδομένων μας.

6.2 Στοχαστική ανάλυση των Δεδομένων

6.2.1 Εφαρμογή του μοντέλου Hurst Kolmogorov

Η επεξεργασία των μουσικών δεδομένων μπορεί να γίνει σε διαφορετικές βάσεις. Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε να γίνει ανάλυση μονοφωνικών μελωδιών ως απλές χρονοσειρές. Εναλλακτικές προσεγγίσεις θα προταθούν στην ενότητα 9. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον κώδικα που περιγράψαμε παραπάνω στην ενότητα 6.1. Επιπλέον θα βάλουμε υπό επεξεργασία και την μεροληψία του μοντέλου και θα τη συμπεριλάβουμε στην ανάπτυξη του μοντέλου μας.

Αρχικά εφαρμόζουμε το μοντέλο Hurst Kolmogorov απλή ομοιοθεσίας για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του. Η βασική υπολογιστική πορεία φαίνεται στην παρακάτω εικόνα του κώδικα:

```python
def scale_averages(k,move):
    return [np.mean(move[i:i+k]) for i in range(0, len(move), k)]

def var_estimator(moving_averages):
    meanie=np.mean(moving_averages)
    return sum( [ (element-meanie)**2 for element in moving_averages ] ) / (len(moving_averages) - 1 )

def h_define(k, h_estimates):
    kapa=range(len(h_estimates))
    slope, intercept, r_value, p_value, std_err = sp.stats.linregress(kapa,h_estimates)
    return (slope+2)/2

def conditionals(varest, HK):
    varcon = []
    epsilon = 1 / (1 - 2 ^ (2-2*HK))
    for k in range(0, len(varest)):
        varcon.append[epsilon*(varest[k]-varest[2*k])]
    return varcon
```

Εικόνα 20 Οι συναρτήσεις υπολογισμού των ιδιοτήτων των εμπειρικών χρονοσειρών

Βάσει των δεδομένων – στην προκειμένη η μεταβλητή moves – εφαρμόζουμε την μεθοδολογία από την παράγραφο 4.4.2. Η τελική προσέγγιση της παραμέτρου H γίνεται από την συνάρτηση-αλγόριθμο h_define η οποία υπολογίζει την κλίση του θεωρητικού κλιμακογράμματος με χρήσης απλής γραμμικής παλινδρόμησης.

Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα θεωρητικά κλιμακογράμματα σε αντιπαράθεση με τα εμπειρικά. Για να φανερωθούν τα διάφορα βήματα της προσαρμογής του μοντέλου θα γίνουν συγκρίσεις κλιμμακογραμμάτων του ίδιου τραγουδιού ώστε να υπάρχει μια πιο ευθύς σύγκριση των βημάτων.

Επιπλέον τα παρακάτω παραδείγματα κλιμακογραμμάτων αλλά και τα κομμάτια κώδικα που παρουσιάζονται χρησιμοποιούν σαν τυχαία μεταβλητή την απόλυτη θέση της μεταβλητής (βλ. ενότητα 5.2), καθώς δίνει μια σχετικά πιο ευνόητη αποτύπωση της κίνησης της χρονοσειράς.

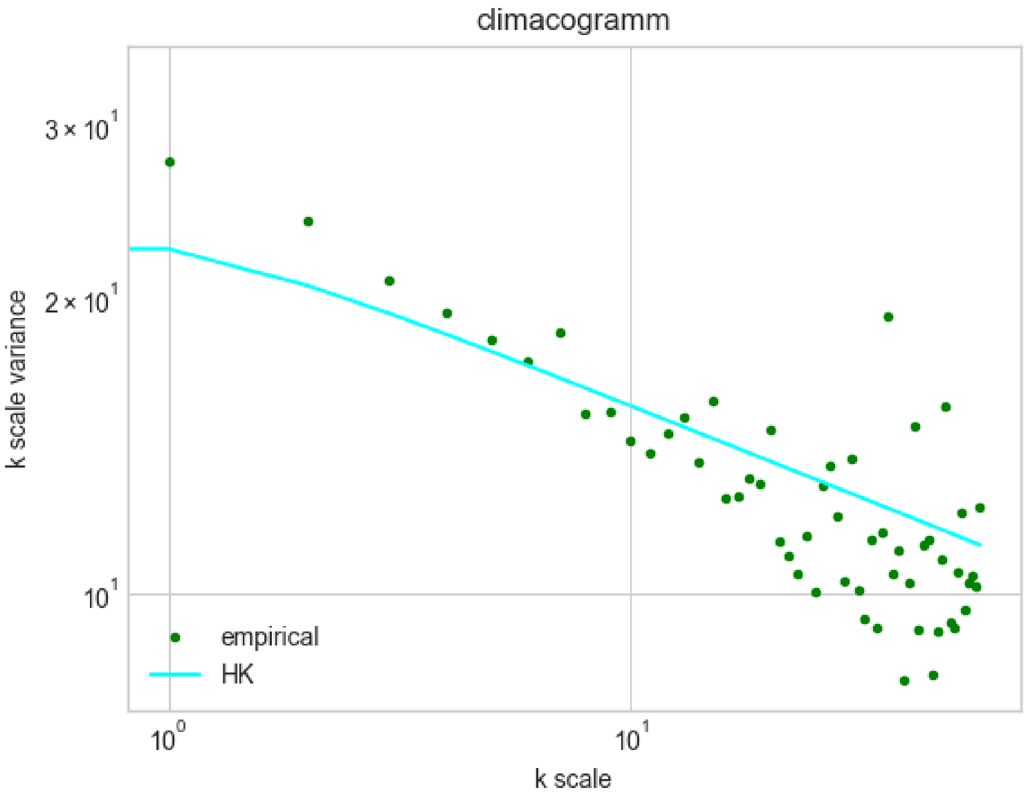
Είναι όμως σαφές ότι στο κλιμμακόγραμμα πρέπει να λάβουμε υπόψη την μεροληψία της διακύμανσης(Koutsoyannis, 2017) :

$$E\left[\underline{\hat{\gamma}(k)}\right] = \theta(\,k, T)\gamma(k) \tag{6}$$

Όπου:

$$\theta(\,k, T) = \frac{1 - \gamma(T)/\gamma(\kappa)}{1 - k/T} \tag{7}$$

Κατόπιν της παραπάνω επεξεργασίας μπορούμε να παρουσιάσουμε το αρχικό κλιμμακόγραμμα του βασικού μοντέλου Hurst Kolmogorov.



Εικόνα 21 Θεωρητικό κλιμακόγραμμα του βασικού μοντέλου HK

6.2.2 Εφαρμογή του μοντέλου FHK

Το μοντέλο HK συχνά χρησιμοποιείται για μελέτη φαινομένων σε μεγάλες κλίμακες και είναι χρήσιμο για φαινόμενα εκθετικής μείωσης της αυτοσυσχέτησης τους στον χρόνο. Ωστόσο παρόλο που αυτή η αδυναμία είναι υπαρκτή και θέτει το μοντέλο λιγότερο βοηθητικό από άλλα όπως πχ ο Markov, υπάρχει τρόπος βελτιστοποίησης του σε μικρές κλίμακες.

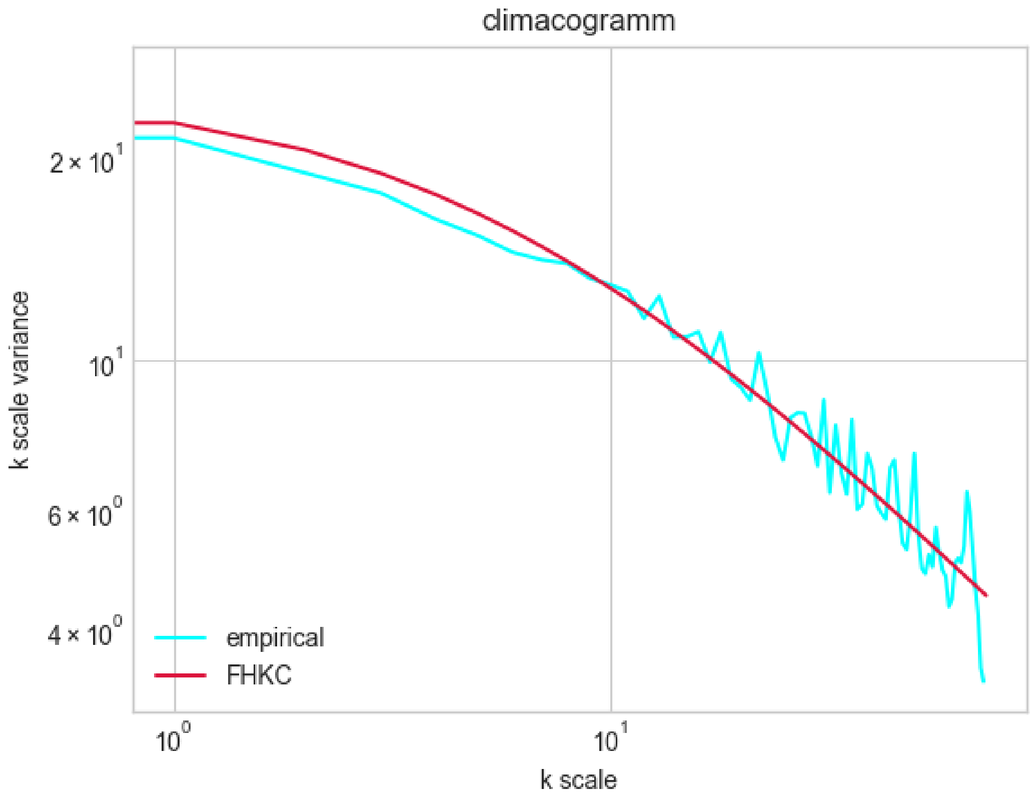
Το μοντέλο Filtered Hurst-Kolmogorov (ή Generalized H-K) δίδει λύση στο παραπάνω πρόβλημα (Koytsoyannis, 2020). Σύμφωνα με την μεθοδολογία από την παράγραφο 4.5, προσδιορίζουμε την παράμετρο M (παράμετρος που προσδιορίζει την βραχυπρόθεσμη εμμονή της χρονοσειράς).

$$\gamma(\kappa) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha}\right)^{2M}\right)^{\left[\frac{H-1}{M}\right]} \tag{8}$$

Η παράμετρος *M* εκφράζει επιπλέον την φράκταλ συμπεριφορά (Kenneth J. Hsu, Andreas J. Hsu, 1990) μιας χρονοσειράς, και εκτιμάται με τον τύπο (Koutsoyannis, 2017):

$$M = \varphi(0) - 1 = \frac{\left(\gamma(k) - \gamma(2k)\right)}{ln2} \tag{9}$$

Με το μοντέλο GHK τα κλιμακογράμματα έχουν εν τέλει πολύ καλύτερη προσέγγιση όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 22 Θεωρητικό κλιμακόγραμμα του μοντέλου FHK

Η εκτέλεση του μοντέλου γίνεται με τον ακόλουθο αλγόριθμο:

```
def GHK(k, H, M, a, var_0):
    return var_0 * ( (1 + k/a)**(2*M) ) ** ( (H-1) / M )

def log_GHK(k, H, M, a, var_0):
    return np.log( GHK(k, H, M, a, var_0) )

def GHK_M_fit(k, varest):
    k = range(len(varest))
    popt, pcov = sp.optimize.curve_fit( GHK, k, varest, p0=[0.5, 0.5, 1, varest[0]],
                                        bounds=([0.1, 0, 0.01, varest[0]*0.95], [1, 1, 64, varest[0]*1.05]))
    return popt

def refine_GHK(k, varest):
    k = range(len(varest))
    # M_spectrum = m_define(varest)
    H_drop, M_fitted, a_drop, var_0_drop = GHK_M_fit(k, varest)
    popt, pcov = sp.optimize.curve_fit( log_GHK, k, np.log(varest), p0=[0.5, M_fitted, 1, varest[0]],
                                        bounds=([0.1, 0.5*M_fitted, 0.01, varest[0]*0.95], [1, 1, 64, varest[0]*1.05]))
    if popt[1]>1:
        popt[1]=M_fitted
    return popt
```

Εικόνα 23 Αλγόριθμος υπολογισμού και βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει αναλυτική αναφορά στους περιορισμούς που βάλαμε στο μοντέλο:

1. Για την παράμετρο *H* τέθηκε *κάτω όριο 0.1*
2. Για την παράμετρο *M* τέθηκε κάτω όριο 50% της εκτίμησης από το κλιμακοφάσμα. Αυτό έγινε διότι βελτίωσε σημαντικά το μέσο σφάλμα ραγδαία.
3. Για την παράμετρο α τέθηκαν τα όρια τιμών [0.1, 64]

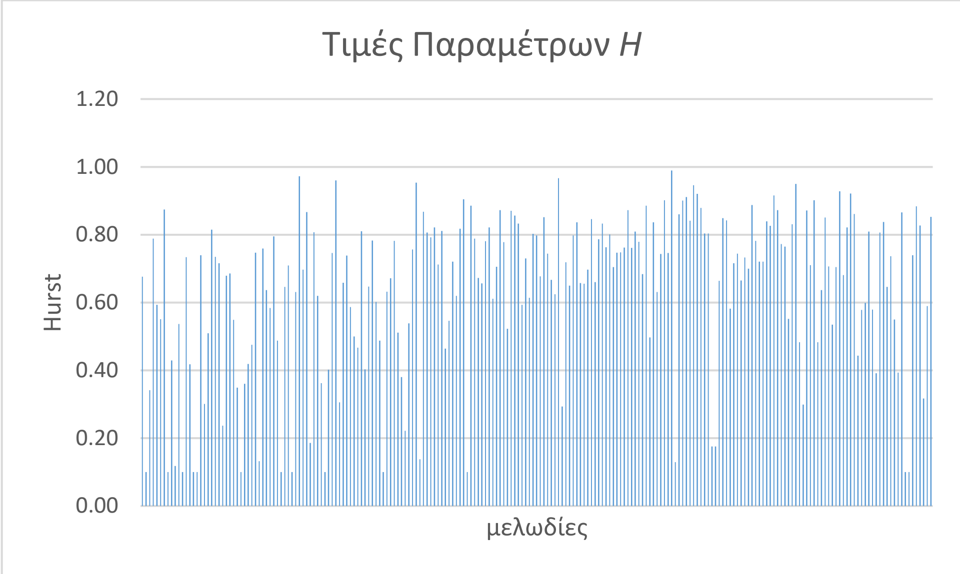
Η εφαρμογή των παραπάνω ορίων έγινε πρωτευόντως για την μείωση των σφαλμάτων του μοντέλου και την καλύτερη εφαρμογή του στα «ιστορικά δεδομένα». Δευτερευόντως, για να υπάρχει κοινή βάση ανάλυσης όλων των τραγουδιών και την αντικειμενική οπτική στις διαφορετικές συμπεριφορές που γίνεται να εμφανίζουν διάφορες ομαδοποιήσεις τους ανά είδος, εποχή κ.ο.κ.

Επιπλέον ο υπολογισμός του σφάλματος γίνεται βάσει του σχετικού σφάλματος των παραγόμενων κλιμακογραμμάτων. Η μη εφαρμογή σχετικού σφάλματος θα κατέληγε στην προσαρμογή του μοντέλου σχεδόν αποκλειστικά βάση των αρχικών τιμών, δηλαδή με βάση την παράμετρο Μ. Αυτό διότι στα κλιμμακογράμματα υπάρχει πάντα εκθετική τάση μείωσης των διακυμάνσεων δεδομένης αύξησης της κλίμακας μελέτης.

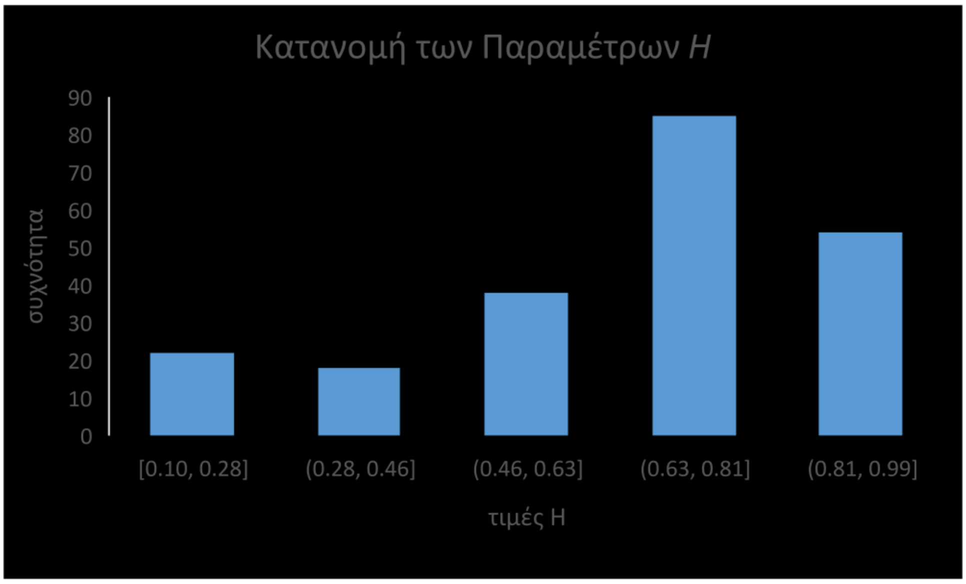
Η επίτευξη της εφαρμογής του μοντέλου βάσει σχετικού σφάλματος γίνεται με χρήση λογαρίθμων. Το μέσο σχετικό σφάλμα μπορεί να υπολογιστεί σαν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του λογαρίθμου της εμπειρικής τιμής έναντι του λογαρίθμου του μοντέλου (SK Morley, 2018).

6.3 Εφαρμογή των μοντέλων σε όλη τη βάση δεδομένων

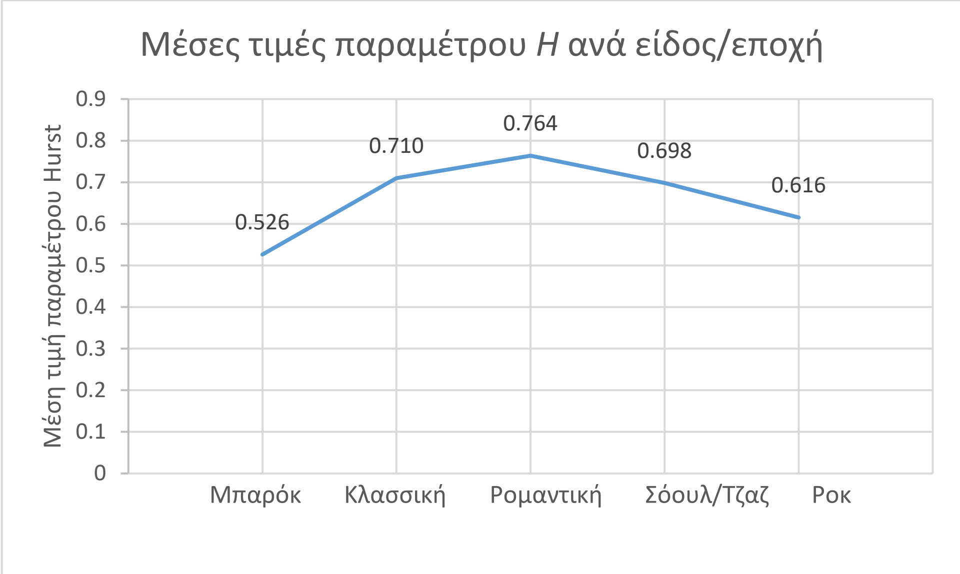
Η επεξεργασία του συνόλου των τραγουδιών είναι δυνατή με χρήση του κώδικα που παρουσιάζεται στην παράγραφο 5.1. Η προσέγγιση των παραμέτρων των τραγουδιών φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.



Εικόνα 24 Τιμές Η τραγουδιών σε χρονολογική σειρά ειδών



Εικόνα 25 Κατανομή παραμέτρων Η



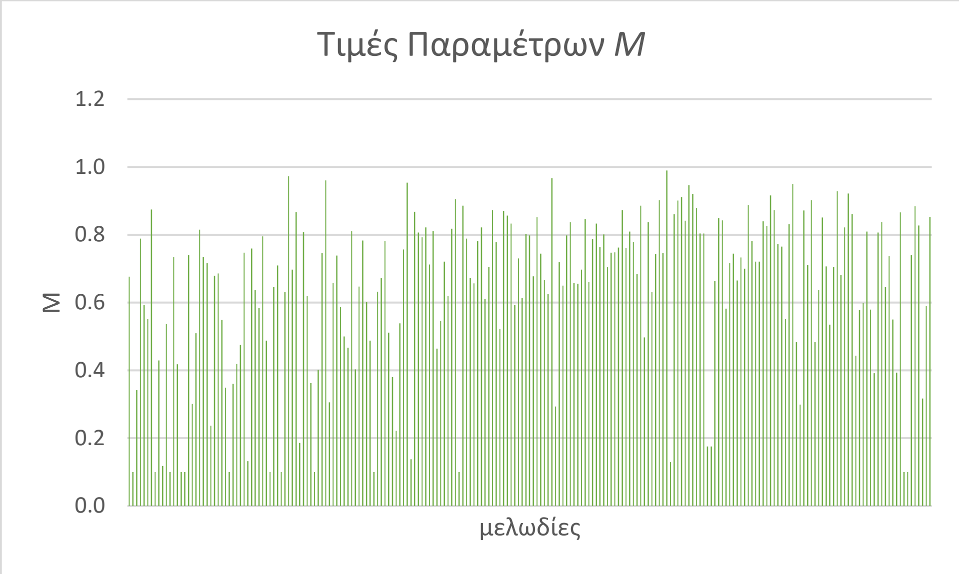
Εικόνα 26 Μέσες τιμές παραμέτρου Hurst ανά είδος (σε σειρά: μπαρόκ, κλασσική, ρομαντική, σόουλ, ροκ)

Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι σαφές ότι σαν γενικό συμπέρασμα, η μουσική παρουσιάζει συστηματικά εμμονική συμπεριφορά. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν τραγούδια με την ελάχιστη τιμή H, είναι σαφές από το διάγραμμα 25 ότι και στις 5 κατηγορίες που έχουμε χωρίσει, η μέση τιμή του H είναι μεγαλύτερη του 0.5.

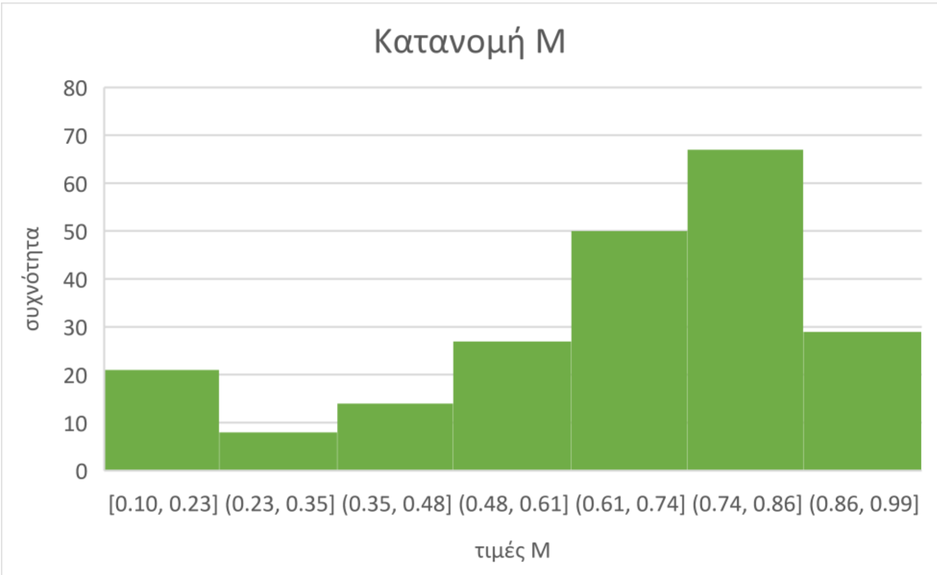
Φυσικά οι μέσες τιμές από το διάγραμμα 26 δεν υποδηλώνουν αξιοσημείωτη εμμονή. Ωστόσο το διάγραμμα 25 δείχνει ότι στην περιοχή [0.63, 1] ανήκουν 145 τραγούδια (περίπου το 65% των δειγμάτων) συνεπώς η εμμονική συμπεριφορά είναι αδιαπραγμάτευτη.

Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με την παλιότερη έρευνα Stochastic investigation of the Hurst Kolmogorov behavior in Arts (Sargedis & Dimitriadis, 2018). Στην έρευνα αυτή τα αποτελέσματα όλων των τραγουδιών έδιναν τιμές Hurst μικρότερες του 0.5. Ωστόσο υπάρχουν τρις μεθοδολογικές διαφορές με εκείνη την έρευνα:

1. Η βάση δεδομένων στην παρούσα εργασία είναι πολύ μεγαλύτερη και συνολική (διότι επικεντρώνεται αυστηρά στην μουσική και δεν μελετάει άλλα είδη τεχνών).
2. Η παρούσα εργασία επεξεργάζεται αριθμημένες νότες και όχι συχνότητες που μπορούν να επηρεάσουν τα αποτελέσματα λόγω της εκθετικής κλίμακας που ακολουθούν τα νούμερα.
3. Η αναφερθείσα μελέτη επεξεργάζεται ηχογραφήσεις και όχι αρχεία MIDI και συνεπώς επηρεάζεται συστηματικά από τα ζητήματα που προβλέψαμε στο τρίτο κεφάλαιο της παρούσας επεξεργασίας.



Εικόνα 27 Τιμές των παραμέτρων M σε χρονολογική σειρά ειδών

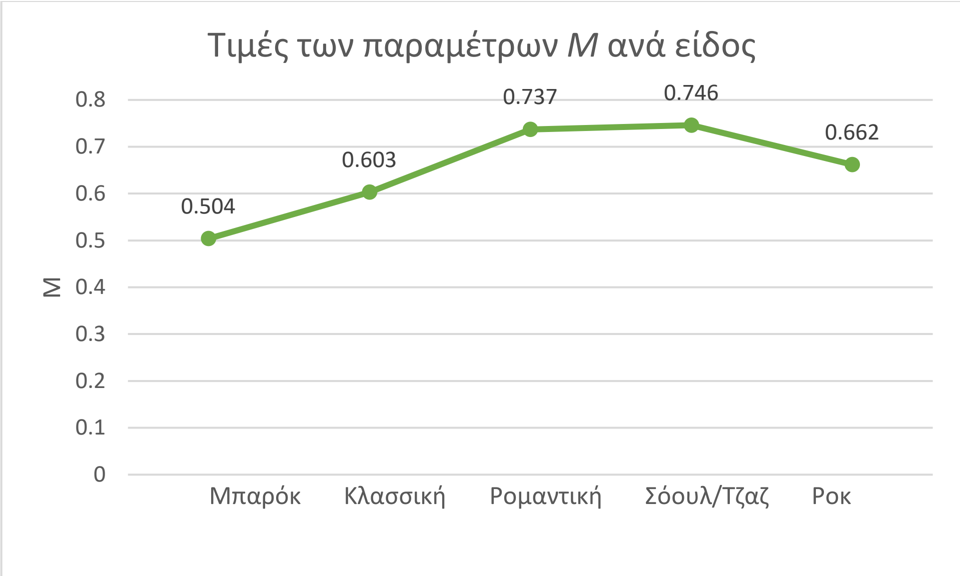


Εικόνα 28 Κατανομή παραμέτρων M

Από τα διαγράμματα με τα συνολικά αποτελέσματα των παραμέτρων *M* μπορούν να γίνουν τρία άμεσα σχόλια:

1. Αρχικά η συγκέντρωση των παραμέτρων κάτω από την τιμή 0.5 είναι πολύ μεγάλη. Δεδομένου του περιορισμού του αλγοριθμικού μοντέλου σε $M>=0.3$, τα φυσικά μεγέθη των εμπειρικών χρονοσειρών δείχνουν μια rough συμπεριφορά.
2. Δεδομένης της φύσης που εκφράζει η παράμετρος M, είναι λογική η ψηλή συγκέντρωση σε ακραίες τιμές. Ειδικά για τιμές $M>0.9$ είναι εντυπωσιακή η συγκέντρωση του 40% σχεδόν του δείγματος. Άλλωστε η βραχυπρόθεσμη εμμονή στην μουσική δεν είναι θεμιτή, αντίθετα αποφεύγεται!

3. Η μέση τιμή του Μ μεταξύ των εποχών έχει αμελητέα απόκλιση.



Εικόνα 29 Μέσες τιμές παραμέτρων M ανά είδος (σε σειρά: μπαρόκ, κλασσική, ρομαντική, σόουλ, ροκ)

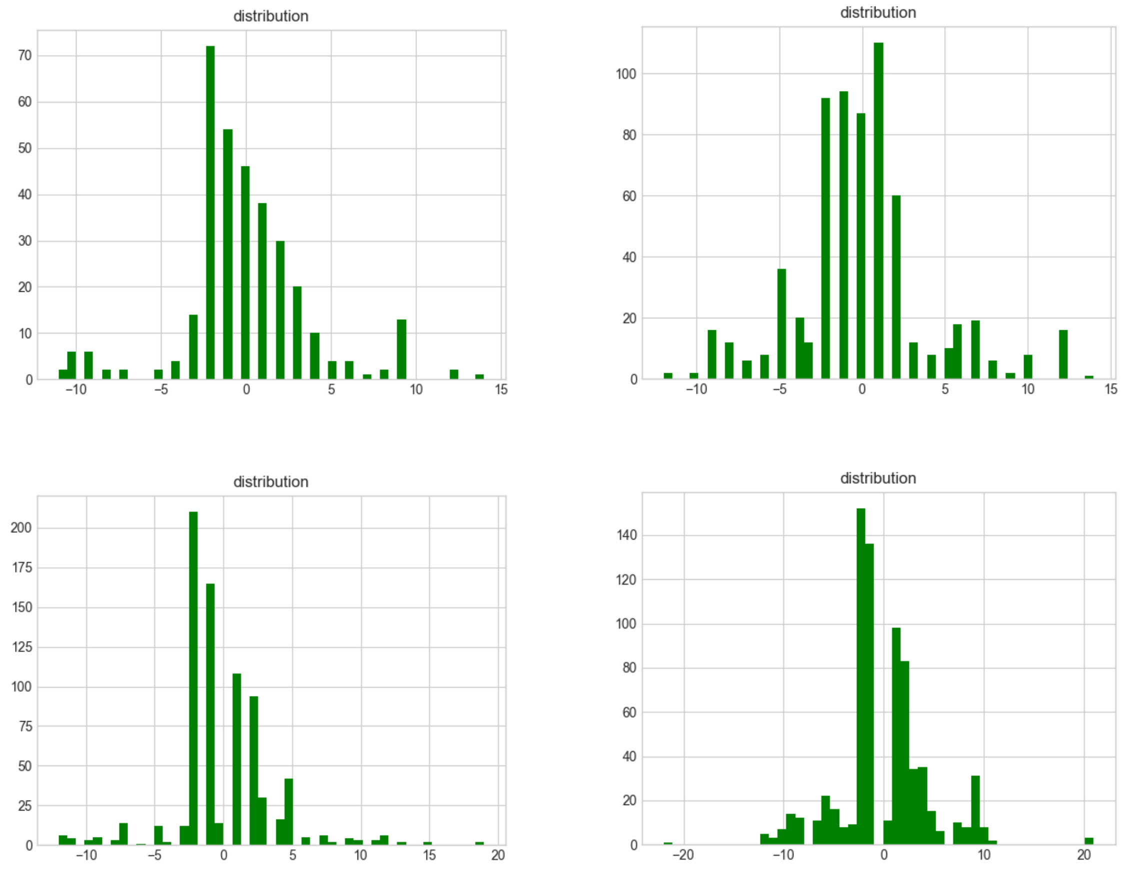
7.Σύγκριση ειδών μουσικής

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια αντιπαραβολή μεταξύ των ειδών μουσικής υπό μελέτη. Η βάση αυτής θα γίνει μέσα από μία σειρά ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών που εντοπίστηκαν.

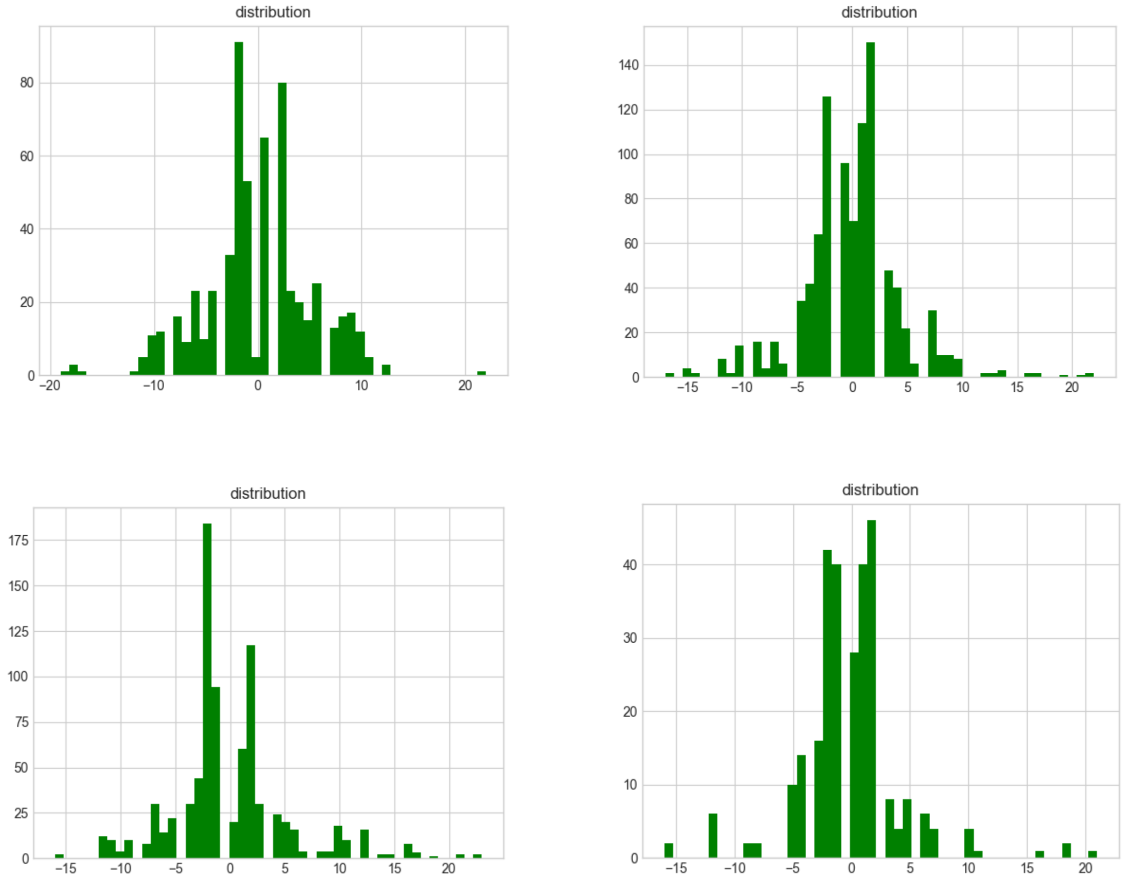
7.1 Σύγκριση κατανομών διαστημάτων κίνησης

Όπως είχε περιγραφεί στην ενότητα 5.1 η κατανομή των διαστημάτων κίνησης είναι ιδιαίτερα σημαντική για την μελέτη μια χρονοσειράς. Στην περίπτωση μια μελωδίας μπορεί να παρουσιάσει χαρακτηριστικά του τρόπου συγγραφής όπως τη στατικότητα της μελωδίας, την συχνότητα αλλαγής σκάλας ή το είδος αρμονίας που χρησιμοποιείται.

Παρακάτω παρουσιάζονται παραδείγματα κατανομών ανά είδος:



Εικόνα 30 Κατανομές από την 2η σουίτα για λαούτο του Μπαχ (Μπαρόκ)

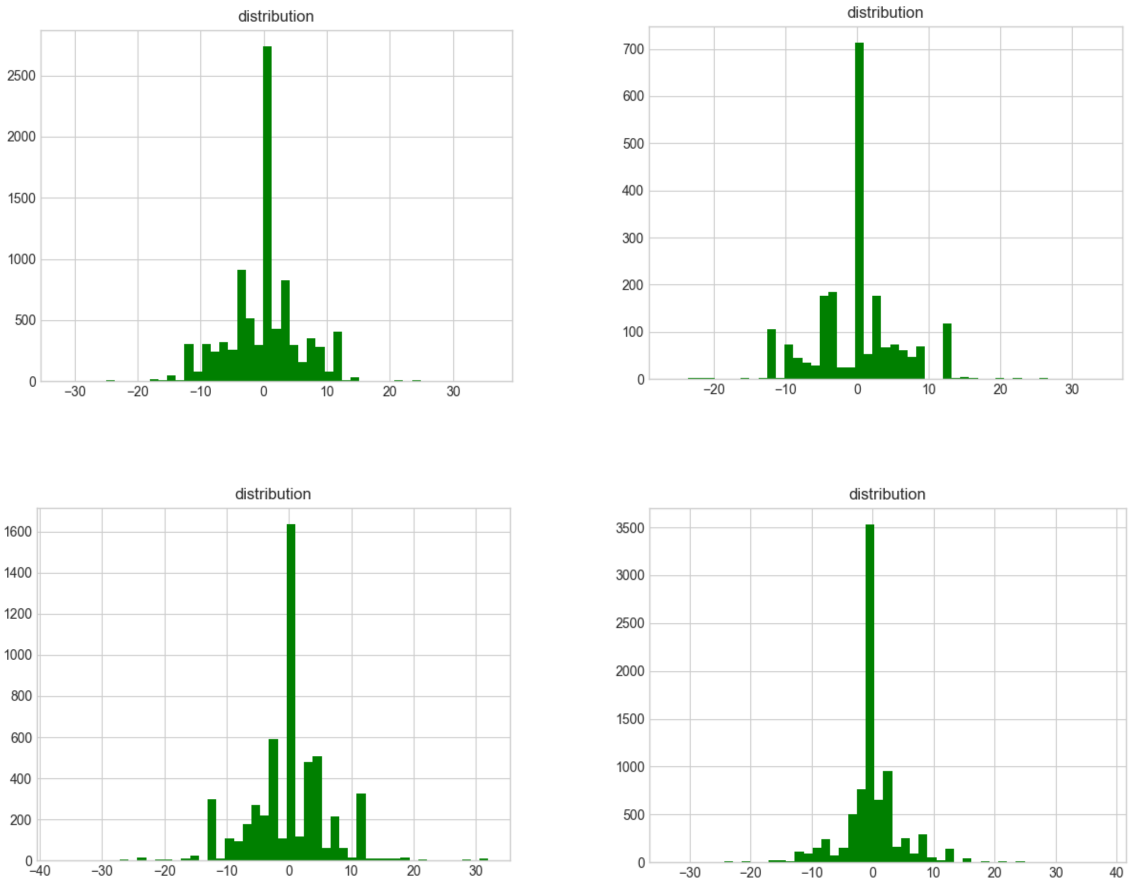


Εικόνα 31 Κατανομές από την 1η σουίτα για τσέλο του Μπαχ (Μπαρόκ)

Οι κατανομές διαστημάτων κίνησης στην μπαρόκ ακολουθούν πολλά μοτίβα. Αφενός έχουν πλατιές κατανομές συχνά με εμφανή ασυμμετρία. Είναι πολύ συχνή η εμφάνιση μιας είδους διπλής κανονικής κατανομής. Είναι αρκετά λογικό αποτέλεσμα δεδομένου ότι τα διαστήματα δευτέρας και τρίτης (τιμές -4 έως +4) είναι αυτά που καθορίζουν την αρμονική συνοχή των μελωδιών από την μουσική θεωρία.

Επίσης οι κατανομές εμφανίζουν συστηματικά κενές τιμές. Όπως είχε περιγραφεί όμως σε προηγούμενα κεφάλαια αυτό δεν είναι απίθανο καθώς υποδηλών εμμονή της μελωδίας σε ορισμένες μουσικές κλίμακες, παραμελώντας την χρήση κακόηχων διαστημάτων.

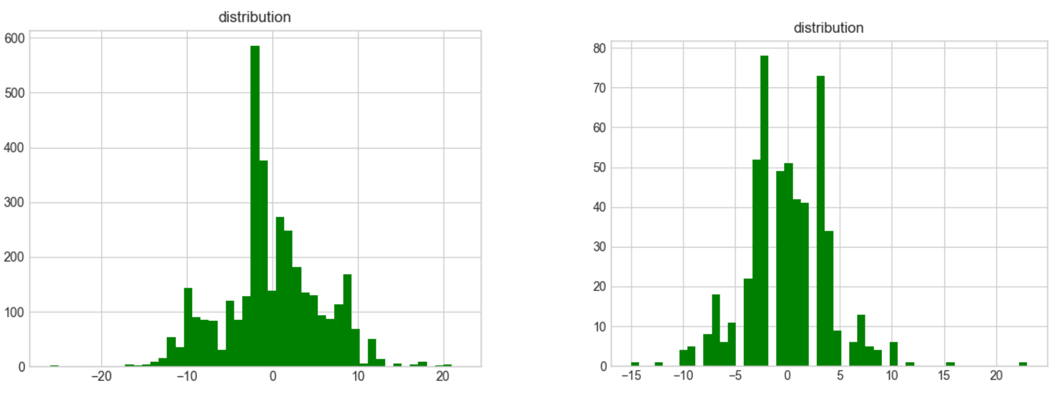
Αξιοσημείωτη στην μπαρόκ μουσική είναι η ομοιομορφία των κατανομών από ίδια έργα. Στα παραπάνω διαγράμματα είναι ιδιαίτερα σαφής η κοινή μορφολογία τραγουδιών από την ίδια σουίτα. Για παράδειγμα στην πρώτη σουίτα παρατηρείται καθαρή θετική ασσυμετρία ενώ στην δεύτερη παρατηρείται αρνητική ασσυμετρία και δικόρυφη (bimodal) μορφή.



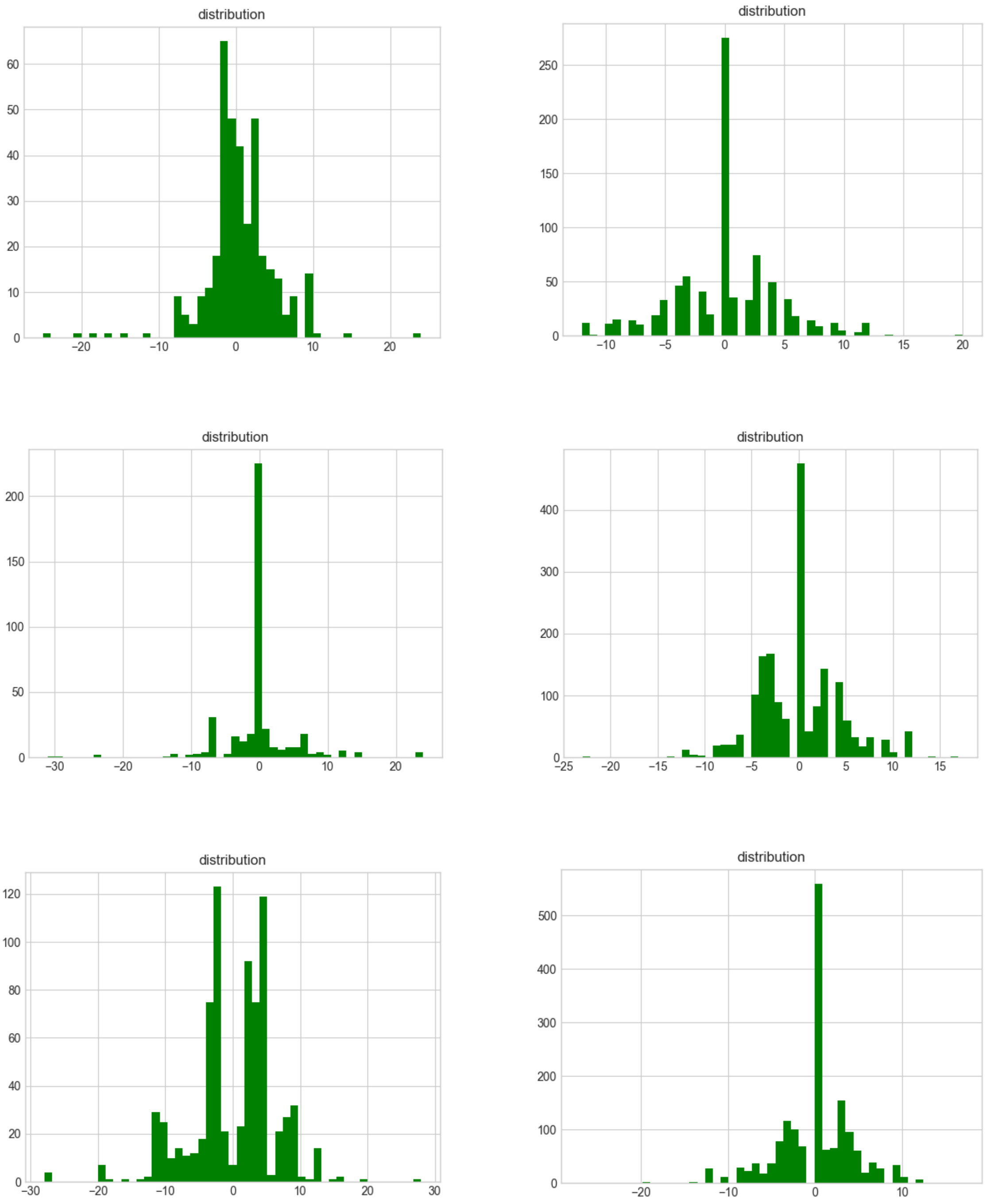
Εικόνα 12 Κατανομές διαστημάτων από την 29η σονάτα του Μπετόβεν (Κλασσική)

Όπως και στην μπαρόκ εποχή από την παραπάνω εικόνα είναι σαφές ότι κατανομές από ίδια έργα έχουν κοινά χαρακτηριστικά. Στην κλασσική εποχή υπάρχουν πολλά κοινά στοιχεία με την μπαρόκ εποχή. Μια πολύ βασική διαφορά είναι η πιο σπάνια εμφάνιση κατανομών με πολλά κενά. Σε μουσικούς όρους αυτό είναι σε ένα βαθμό αναμενόμενο καθώς η συχνή αλλαγή κλίμακας ήταν δημοφιλής τεχνική (βλ πιβότ ακόρντα).

Οι κατανομές αυτές εμφανίζουν συχνά πιο ομαλές και πλατιές κατανομές. Ξανά όπως και στη μπαρόκ η διπλή κανονική κατανομή είναι η συχνότερη ωστόσο η απλή κανονική είναι αρκετά συχνή.



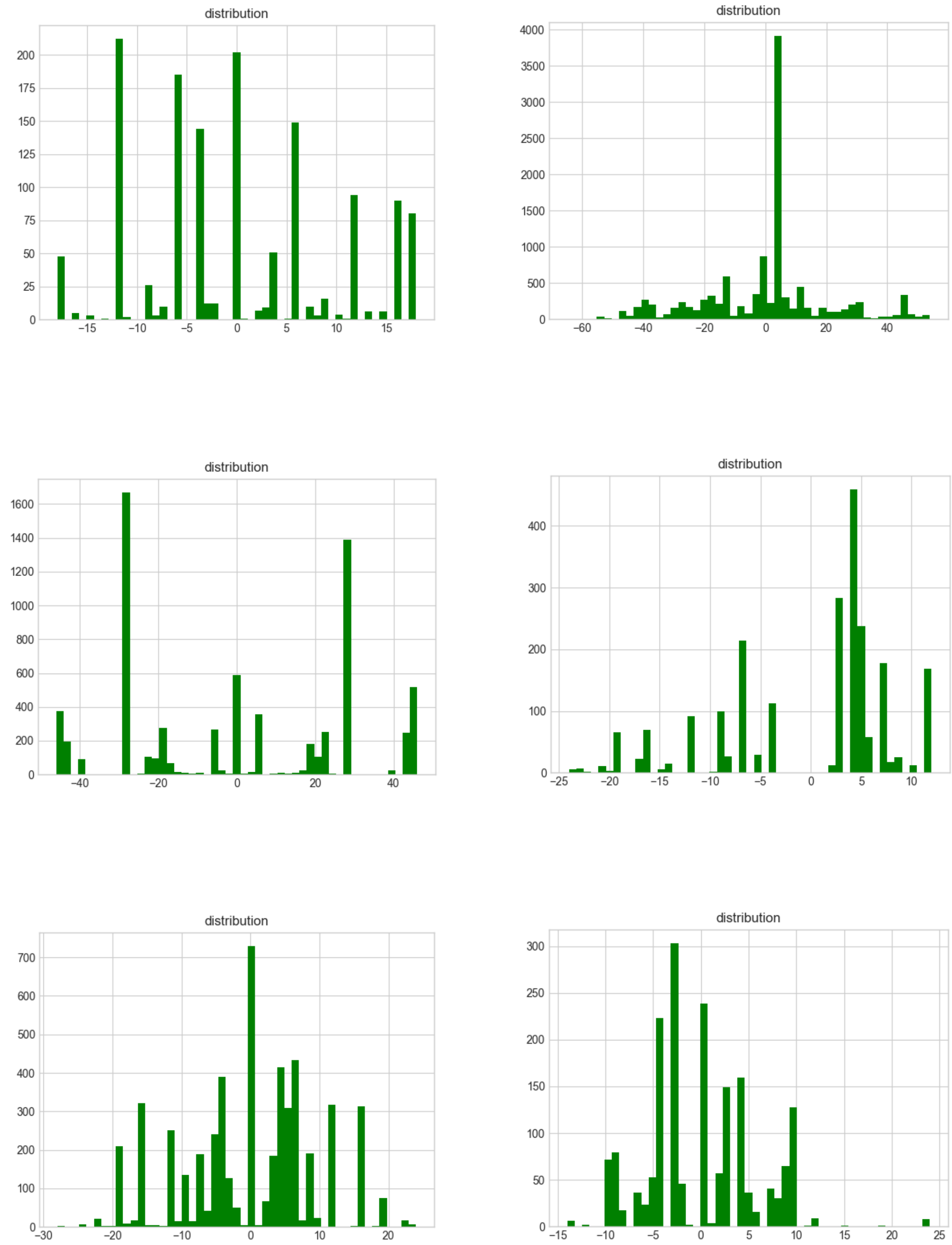
Εικόνα 33 Κατανομές από δυο τραγούδια "ροντό" του Μότσαρτ (Κλασσική)



Εικόνα 34 Κατανομές από την Ισπανική σουίτα του Αλμπένιζ (Ρομαντική)

Η ρομαντική εποχή παρουσιάζει μια μεγάλη ποικιλομορφία στις παραγόμενες κατανομές. Ο χαρακτηριστικός τρόπος συγγραφής με βάσει απλά αλλά πολύ σαφείς και έντονα εκφραστικές μελωδίες γύρω από θέματα δημιουργούν κάθε είδους κατανομή που εμφανίζεται στην παρούσα ανάλυση. Επίσης πολύ συχνή είναι η συστηματική εμφάνιση κορυφής της κατανομής στο μηδενικό διάστημα, δηλαδή έχουμε στασιμότητα μελωδίας.

Ιδιαίτερα χαρακτηριστικό είναι στις παραπάνω κατανομές από το ίδιο έργο έχουμε πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά σε είδη κατανομής ύπαρξη κενών και ακόμα και πρόσημο ασσυμετρίας.



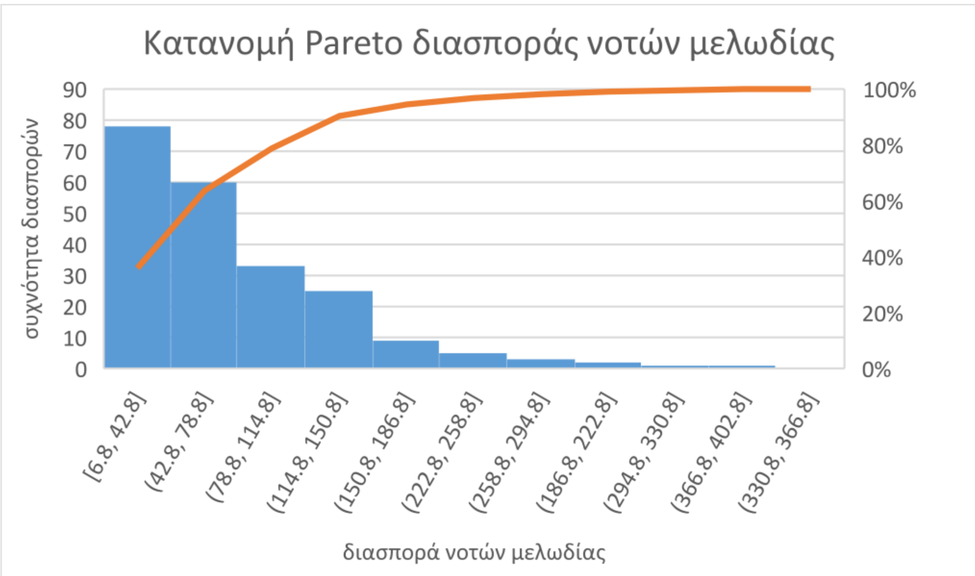
Εικόνα 35 Κατανομές απο μοντέρνα τραγούδια διάφορων ειδών (Soul - Jazz - Rock&Roll ανά δύο αντίστοιχα)

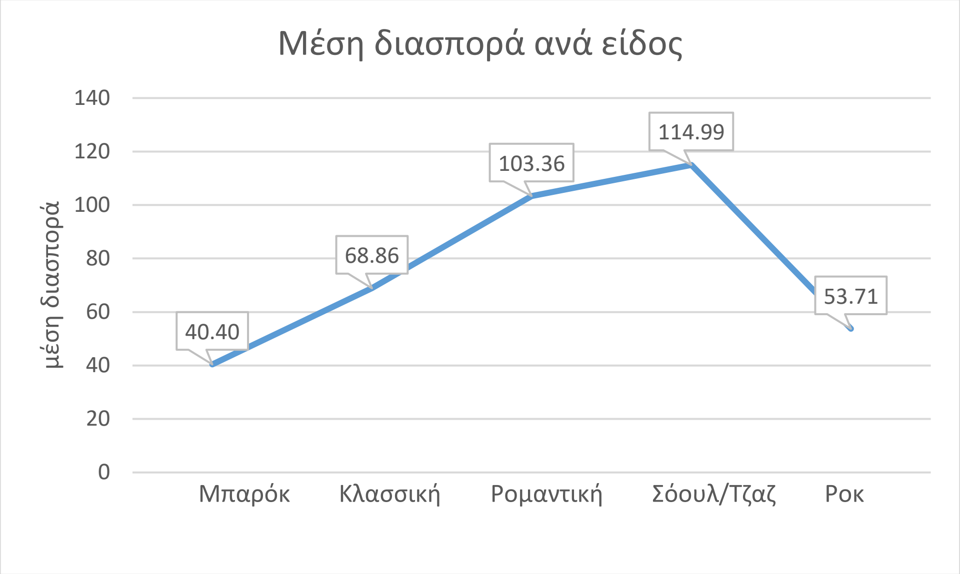
Στα μοντέρνα είδη υπάρχει πολύ μεγάλη ποικιλομορφία ξανά. Η απλή και διπλή κανονική είναι φυσικά συχνές ωστόσο, εμφανίζονται συχνά τραπεζοειδής κατανομές με έντονη ασυμμετρία. Συχνότερα οι κατανομές αυτές έχουν λίγες εμφανείς τιμές με μεγάλη πυκνότητα σε αυτές που δηλώνει συγκεκριμένη αυστηρή θεματολογία. Στη κατανόηση αυτού βοηθάει ιδιαίτερα και το γεγονός ότι έχουμε μεγάλα κενά σε όλες σχεδόν τις κατανομές. Η αυστηρή θεματολογία είναι αναμενόμενη προφανών με την καθιέρωση της οργάνωσης των τραγουδιών με κουπλέ και ρεφρέν.

Σαν γενικό σχόλιο το συχνότερο διάστημα κίνησης είναι η «προς τα πάνω» χρωματική κίνηση, δηλαδή το διάστημα ενός ημιτονίου προς τα πάνω. Αυτό είναι ξανά αναμενόμενο σε ένα βαθμό καθώς είναι πολύ συχνό στην ανάπτυξη κάθε είδους μελωδίας με βηματικές κινήσεις και σημαντικότερα είναι η κίνηση λύσης του προσαγωγέα στην τονική νότα.

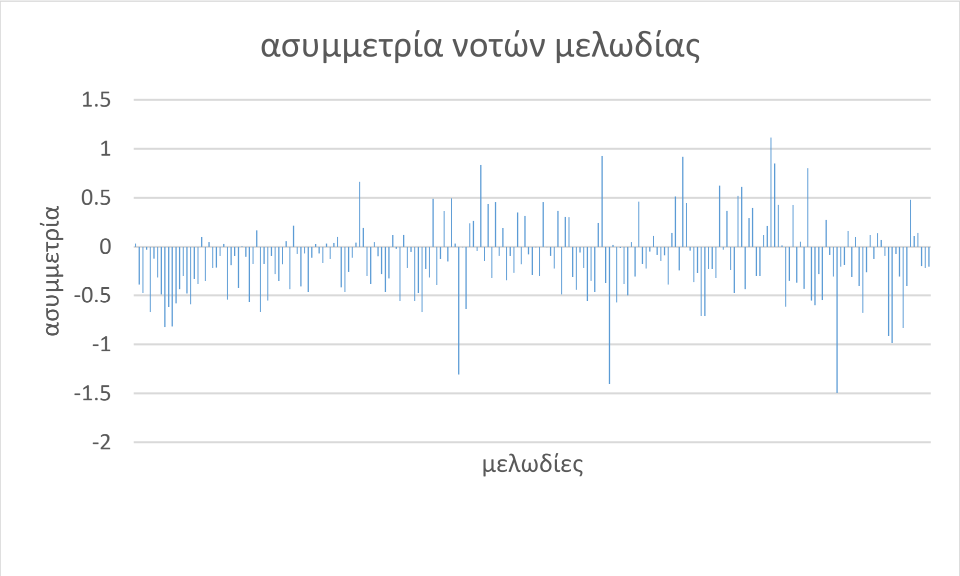
7.2 Σύγκριση των ροπών

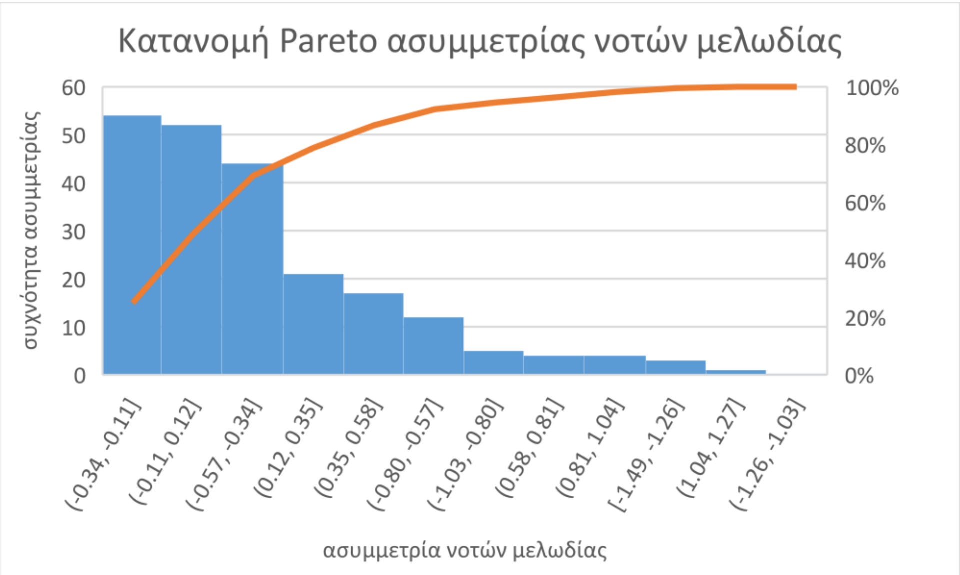
Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των ροπών των χρονοσειρών-τραγουδιών που μελετάμε. Η μέση τιμή θα παραλειφθεί καθώς δεν έχει κάποια ουσιαστική αξία στην παρούσα μελέτη.

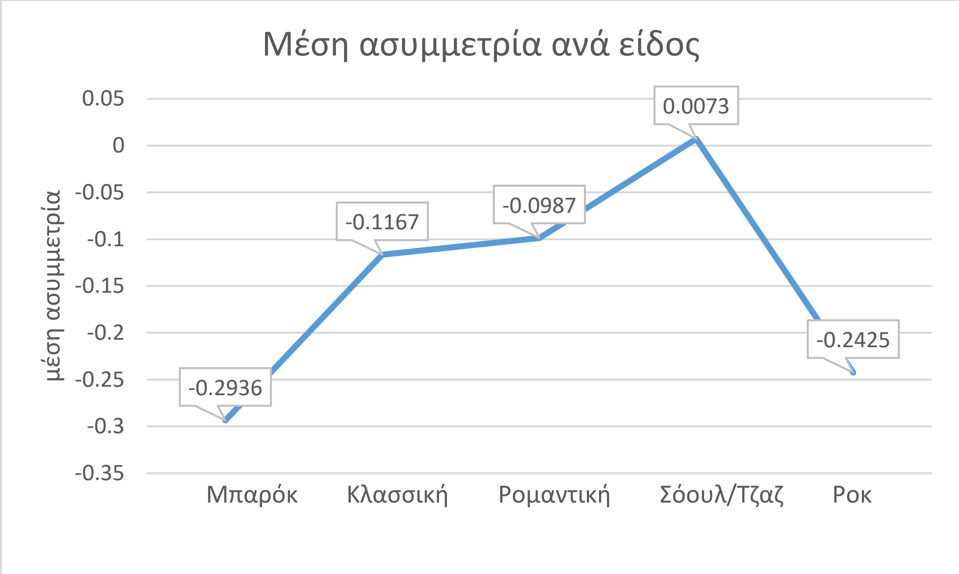




Εικόνα 36 Διαγράμματα διασποράς

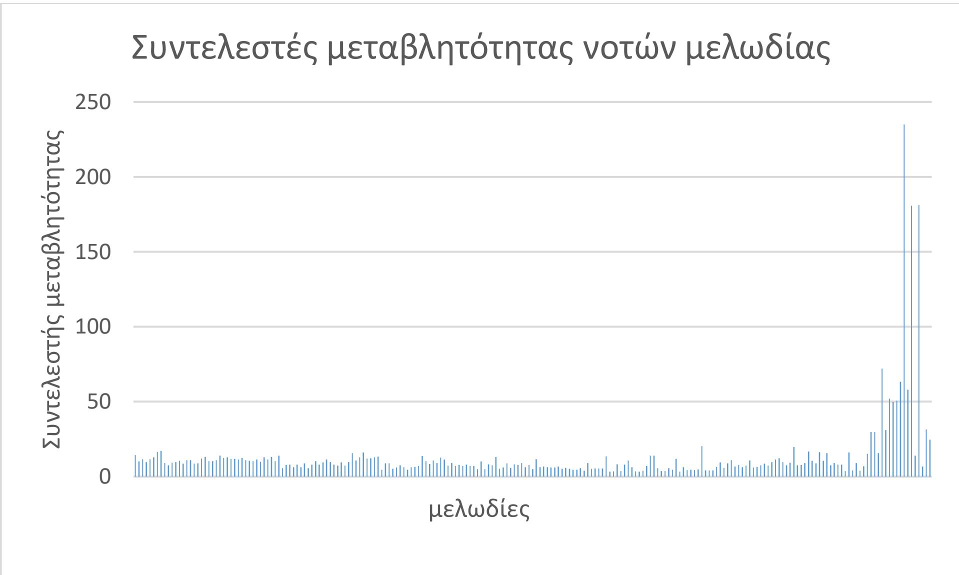


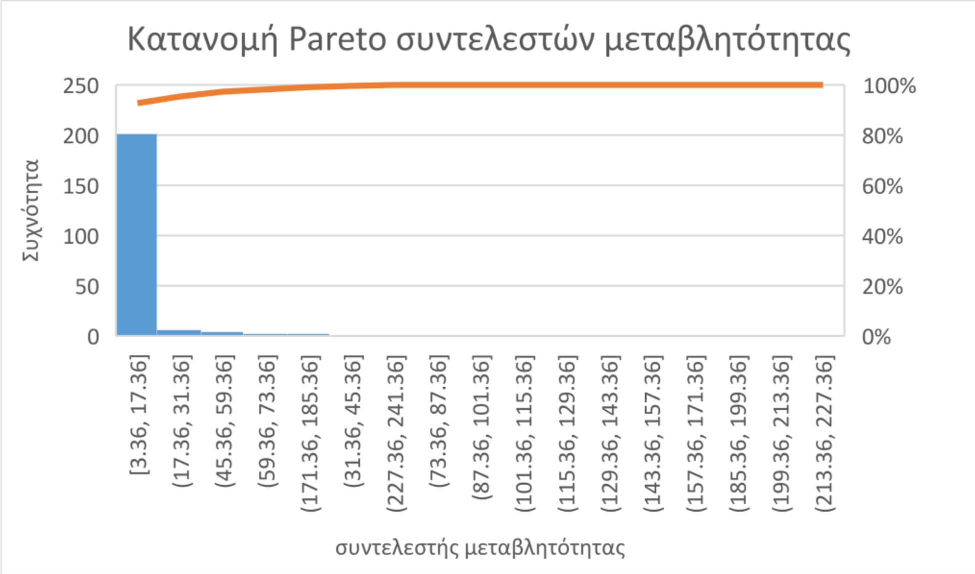


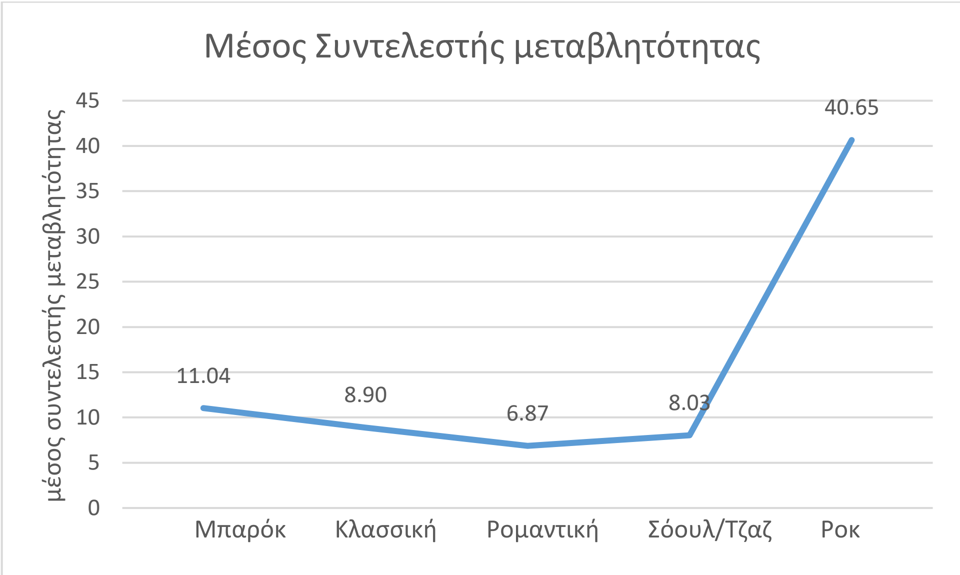


Εικόνα 37 Διαγράμματα ασυμμετρία

Η ασυμμετρία παρουσιάζει έντονη τάση να λαμβάνει αρνητικές τιμές. Αν και οι μέσες ασυμμετρίες ανά είδος είναι πολύ μικρές κατ' απόλυτο, η τάση είναι σαφής. Η συχνή εμφάνιση κατανομών απλής κατανομής με κορυφή στο διάστημα ενός ημιτονίου προς τα πάνω οφείλεται κατά βάσει στην συμπεριφορά αυτή.







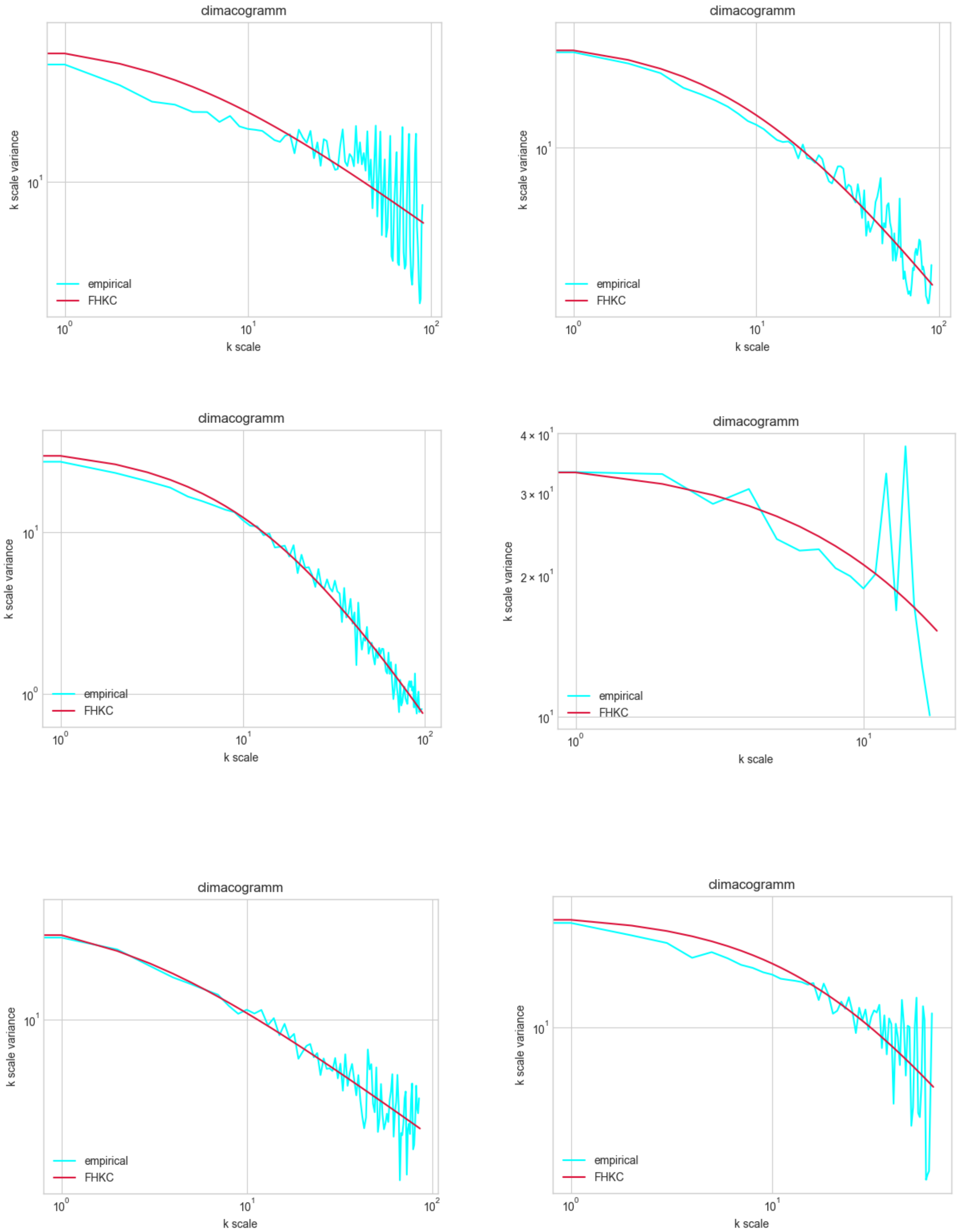
Εικόνα 38 Διαγράμματα συντελεστών μεταβλητότητας

Οι συντελεστές μεταβλητότητας εμφανίζουν πολύ συγγενική συμπεριφορά σε κάθε είδος πέρα από το rock & roll. Σε γενικές γραμμές αυτό οφείλεται στην δειγματοληψία η οποία αποτελείται από ροκ τραγούδια με αντρικά φωνητικά (χαμηλές συχνότητες) με απλές και στάσιμες μελωδίες.

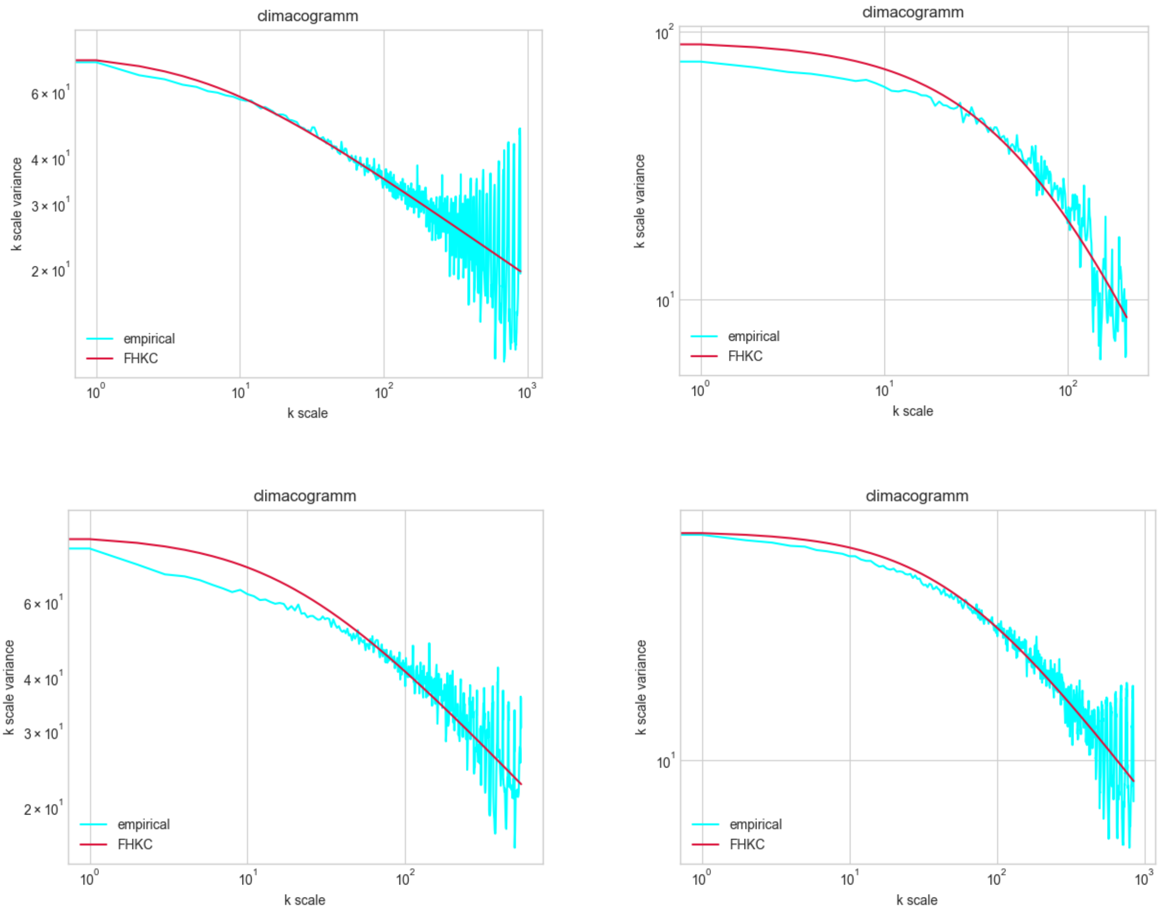
Τα τελευταία διαγράμματα θα ήταν αρκετά διαφορετικά εάν αντί για την αρίθμηση που ακολουθεί η κωδικοποίηση MIDI είχαμε καθαρές συχνότητες. Αυτό διότι με την παρούσα μέθοδο έχουμε μετατρέψει την εκθετική σχέση μεταξύ συνεχόμενων νοτών σε γραμμικές σχέσεις.

7.3 Κλιμακογράμματα

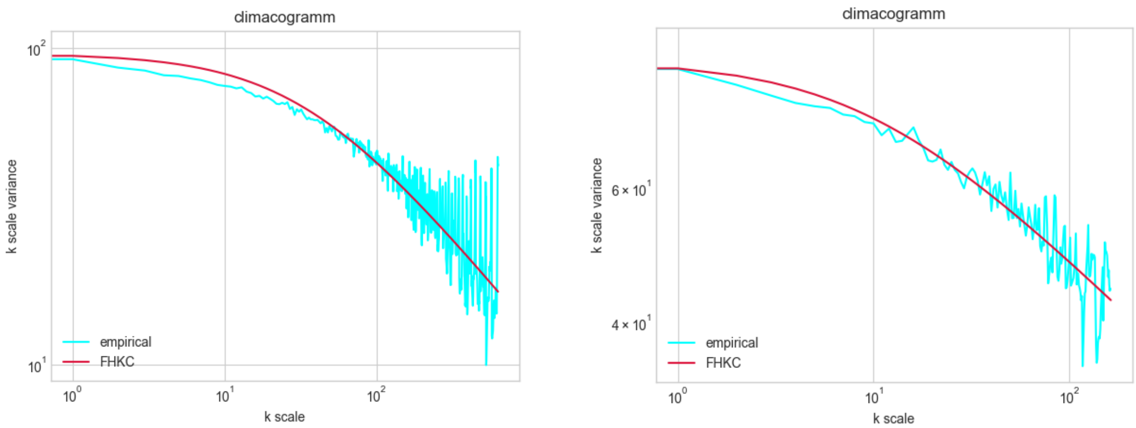
Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση κλιμακογραμμάτων τραγουδιών που μελετάμε. Θα δοθούν κάποια παραδείγματα με παρόμοιο τρόπο παρουσίασης των κατανομών και ακολούθως κάποια αξιοσημείωτα διαγράμματα που βρέθηκαν.

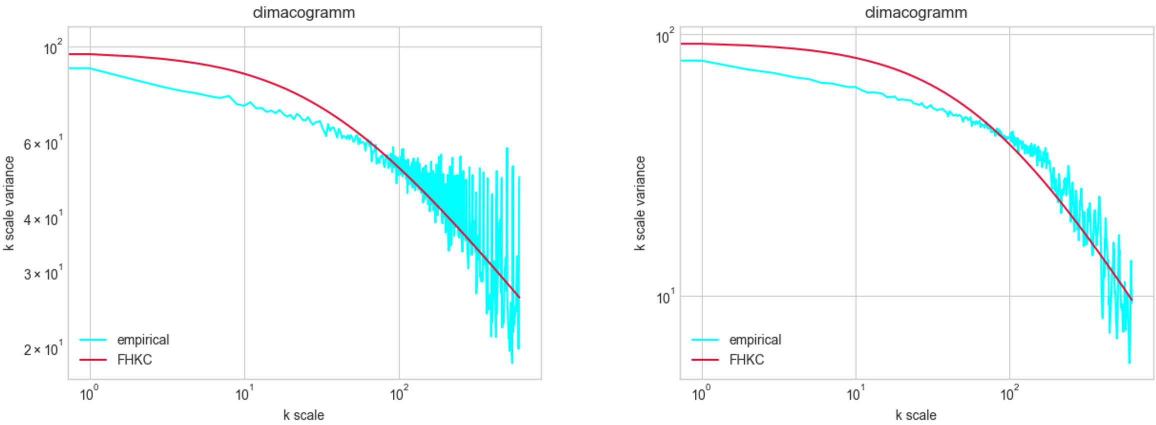


Εικόνα 39 Κλιμακογράμματα από την 3η σουίτα για τσέλο του Μπαχ (Μπαρόκ)

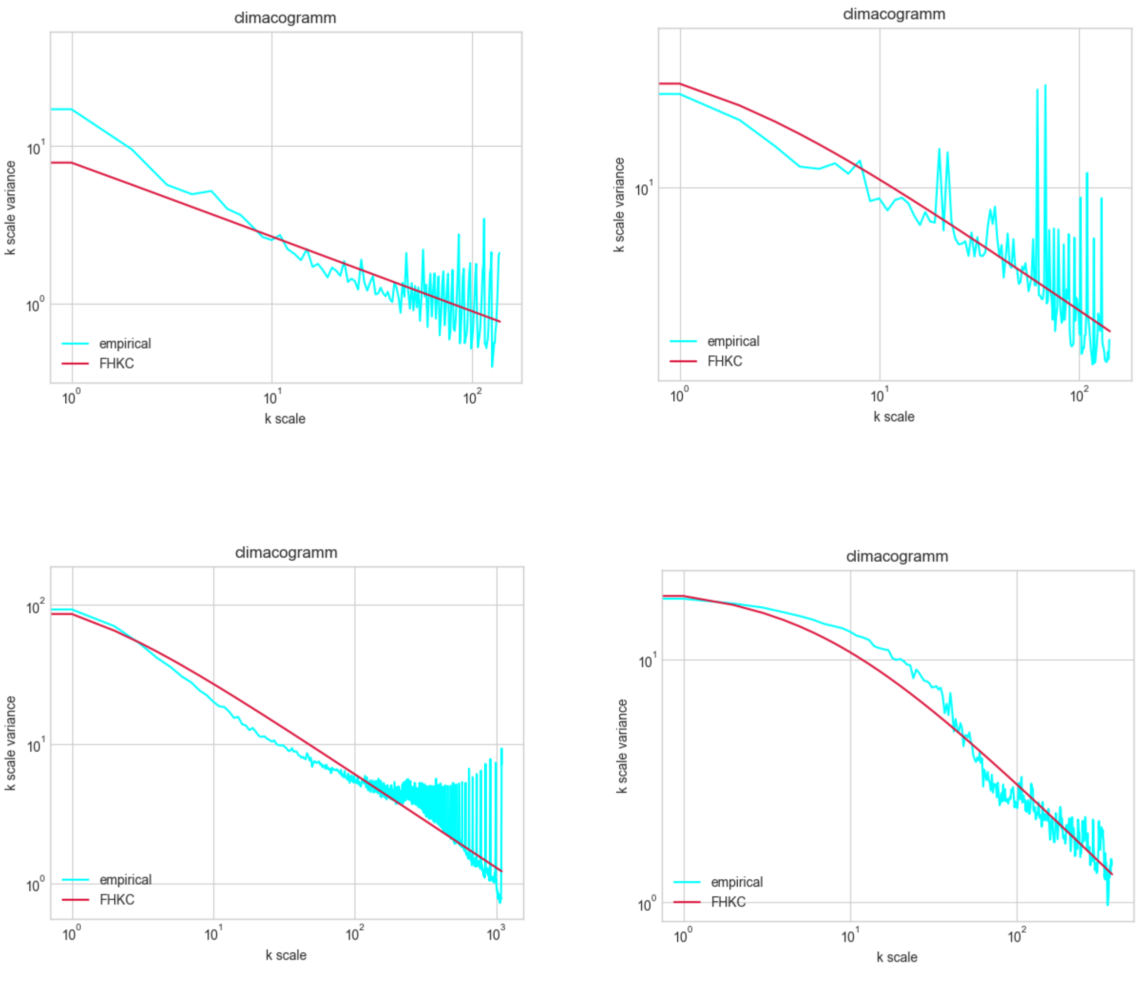


Εικόνα 40 Διαγράμματα από την 29η σονάτα για πιάνο του Μπετόβεν (κλασσική)

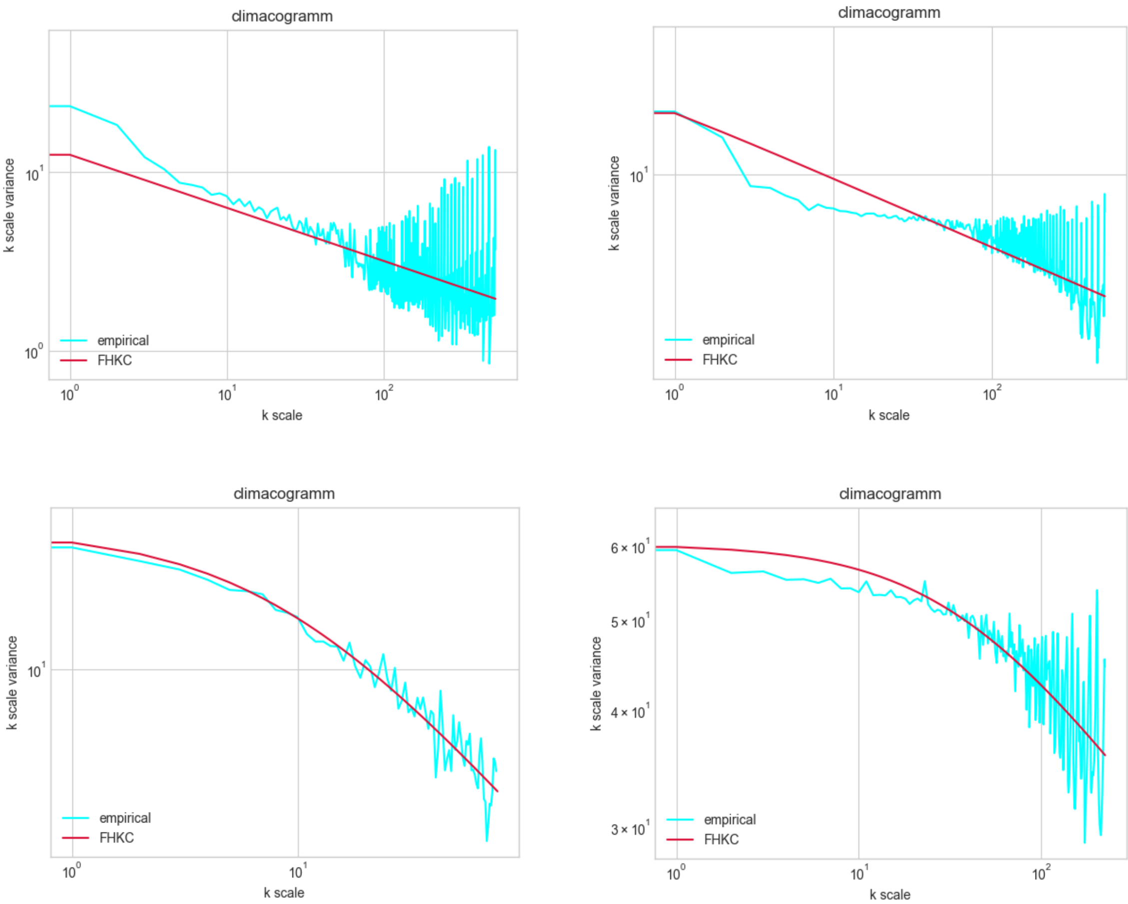




Εικόνα 41 Κλιμακογράμματα από την 1η σονάτα για πιάνο του Μπράμς (ρομαντική)

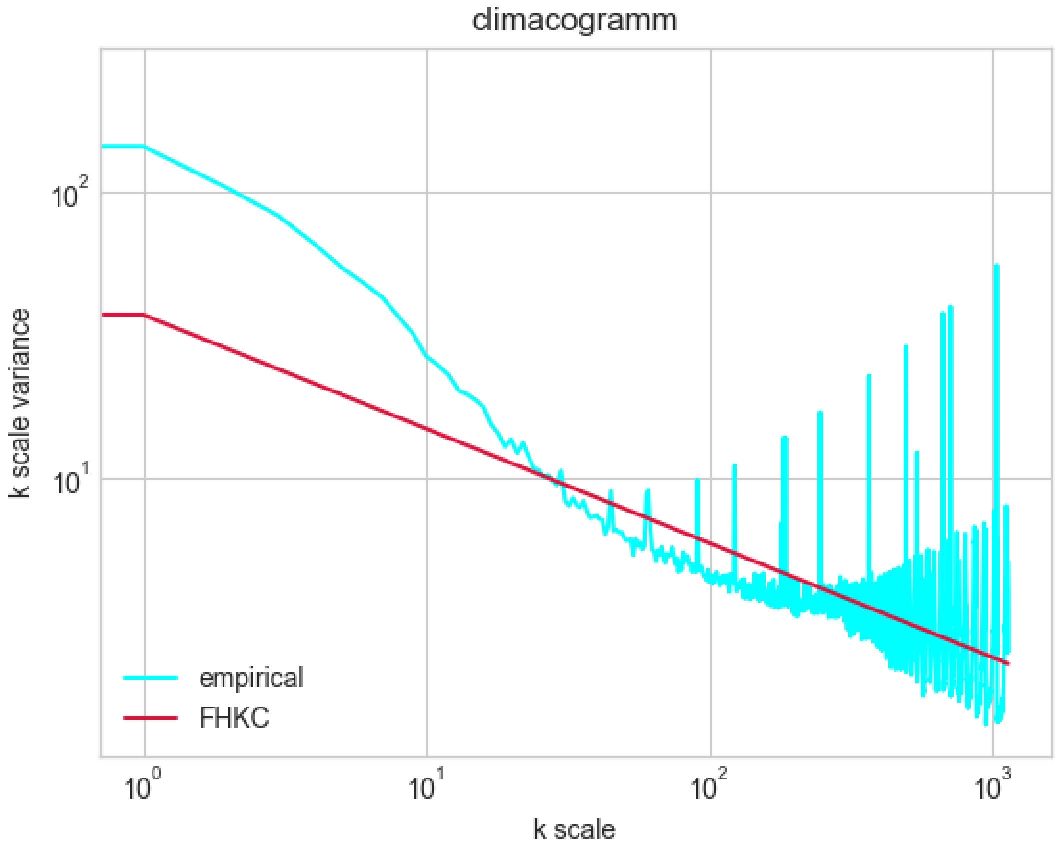


Εικόνα 42 Κλιμακογράμματα απο Soul τραγούδια (Aretha Franklin & Stevie Wonder)



Εικόνα 43 Κλιμακογράμματα τραγουδιών των Beatles (Rock & Roll)

Ένα αξιοσημείωτο μοτίβο κλιμακογραμμάτων παρουσιάζεται στην μουσική ανάλυση. Όπως και από τα προηγούμενα σύγχρονα τραγούδια πολύ συχνά εμφανίζεται μια δίκλαδη απόληξη. Αυτό είναι συχνότερο σε τραγούδια των οποίων η κλίμακα ξεπερνάει τα 500-600 βήματα. Ωστόσο είναι μια λογική συμπεριφορά για τραγούδια με επαναλαμβανόμενα μέρη (βλ μοντέρνα) όπου για μεγάλες κλίμακες ξεκινάει το βήμα της κλίμακας να είναι μεγαλύτερο από το μουσικό μέρος (πχ ρεφρέν).



Εικόνα 44 Παράδειγμα τραγουδιού με «πολλούς κλάδους» στην απόληξη (Aretha Franklin - Think)

8 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε ένα ολοκληρωμένο πλαίσιο για την στοχαστική ανάλυση στην μουσική, συνδυάζοντας διαφορετικά μοντέλα και τεχνικές για εκτίμηση της στατιστικής και εμμονικής συμπεριφοράς χρονοσειρών – μελωδιών.

Εν είδη σύνοψης των συμπερασμάτων στη βάση της ανάλυσης με το μοντέλο GHK και για το δεδομένο δείγμα 220 τραγουδιών και πέντε μουσικών ειδών που μελετήθηκε:

1) Η μουσική παρουσιάζει σαφή εμμονή. Οι τιμές των παραμέτρων *H* είναι σε κάθε είδος μελέτης μεγαλύτερες από 0.5 κατά μέσο όρο με μέγιστη μέση τιμή 0.77 στη ρομαντική εποχή. Επιπλέον αξιοσημείωτο είναι ότι το 65% των τραγουδιών εμφανίζει H>0.6 ενώ το 15% παρουσιάζει H>0.9.
2) Η μουσική παρουσιάζει βραχυπρόθεσμη συμπεριφορά φράκταλ με τη μελέτη να καταδεικνύει μια γενική τάση της παραμέτρου M με τιμές άνω του 0.5.
3) Η χρήση της τεχνολογίας MIDI μας επέτρεψε την δημιουργία διακριτών κατανομών κίνησης. Με αυτές περιγράφεται η κίνηση των νοτών της μελωδίας ως διαφορά μεταξύ δυο συνεχόμενων σημείων της μελωδίας. Για τις κατανομές αυτές σημειώνεται:
   i. Η συχνότερη κατανομή είναι τύπου δικόρυφης (bimodal), για το 40% των τραγουδιών. Η κατανομή αυτή έχει σχεδόν πάντα πιθανοτικές μέγιστες κορυφές είτε στα διαστήματα δευτέρας είτε στα διαστήματα τρίτης της φυσικής κλίμακας του τραγουδιού.
   ii. Δεύτερη συχνότερη είναι κατανομή τύπου απλής καμπάνας. Η κατανομή αυτή έχει σχεδόν πάντα την πιθανοτική κορυφή στα διαστήματα πρώτης της φυσικής κλίμακας του τραγουδιού. Συχνότερα αυτή η κορυφή είναι στο μικρό διάστημα δευτέρας προς τα πάνω, διάστημα δηλαδή ενός ημιτονίου, υποδεικνύοντας συχνά μια αρνητική ασυμμετρία.
   iii. Συχνά υπάρχει εμφάνιση κατανομών μεγάλης κύρτωσης και έντονης ασυμμετρίας. Αυτές είναι συχνότερες σε σύγχρονα και ειδικά rock & roll τραγούδια.
4) Οι εμπειρικές κατανομές κίνησης των νοτών παρουσιάζουν συχνά κενά και συστηματικά ανά είδη. Αυτό το δεδομένο επιβεβαιώνει τις επιλογές σύνθεσης των μουσικών ανά περίοδο να συνθέτουν αυστηρά κατά τους μουσικούς κανόνες (π.χ. στην μπαρόκ εποχή που έχουμε αυστηρή τήρηση των κανόνων υπάρχουν συστηματικά κενά στις κατανομές).
5) Οι κατανομές που μελετώνται παρουσιάζουν συστηματικά μικρή αρνητική ασσυμετρία. Αξιοσημείωτα ανα είδος έχουμε αυστηρά αρνητικούς μέσους όρους στις τιμές της τρίτης ροπής.
6) Τα κλιμακογράμματα παρουσιάζουν συστηματικά μικρές κλίσεις στις μεγάλες κλίμακες δηλαδή εμμονική συμπεριφορά. Σημειώνεται όμως πως η έντονη περιοδικότητα σε πολλές μελωδίες, είχε την αναμενόμενη επίδραση περιοδικότητας και στα αντίστοιχα κλιμακογράμματα τους. Η συντριπτική πλειοψηφία τέτοιων παραδειγμάτων ανήκει σε μελωδίες με κλίμακες μεγαλύτερες από 500.

Αναφορές

Morley, Steven Karl, Thiago Vasconcelos Brito, and Daniel T. Welling. "Measures of model performance based on the log accuracy ratio." Space Weather 16.1 (2018): 69-88.

Cancino-Chacón, Carlos, et al. "Partitura: A Python Package for Symbolic Music Processing." arXiv preprint arXiv:2206.01071 (2022).

Luque, Sergio. "The stochastic synthesis of Iannis Xenakis." Leonardo Music Journal 19 (2009): 77-84.

Clinton, William. "Music improvisation in Python using a Markov Chain Algorithm." (2019).

Koutsoyiannis, Demetris. "Entropy production in stochastics." Entropy 19.11 (2017): 581.

Koutsoyiannis, Demetris. "Hurst–Kolmogorov dynamics as a result of extremal entropy production." Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 390.8 (2011): 1424-1432.

Kenneth J. Hsu, Andreas J. Hsu. "Fractal geometry of music (physics of melody).", Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 87 pp. 938-941 (1990).

Schmidt-Jones, Catherine. "Understanding basic music theory." (2013).

Sargedis & Dimitriadis, Stochastic investigation of the Hurst Kolmogorov behavior in Arts (2018)

Dimitriadis, P., Koutsoyiannis, D. Climacogram versus autocovariance and power spectrum in stochastic modelling for Markovian and Hurst–Kolmogorov processes. Stoch Environ Res Risk Assess 29, 1649–1669 (2015).

Bisel, Larry David. Seeking a perceptual preference among Pythagorean tuning, just intonation, one-quarter comma meantone tuning, and equal temperament (computer). University of Michigan, 1987.

Πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων

Παρακάτω δίνεται σύνδεσμος για τον πλήρη κώδικα επεξεργασίας δεδομένων. Στον σύνδεσμο αυτόν περιλαμβάνονται:

1. Τα τέσσερα αρχεία κώδικα που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 5,
2. Η κλάση που αναπτύχθηκε για την μετατροπή των αρχείων MIDI σε αριθμητικές χρονοσειρές,
3. Το σύνολο των διαγραμμάτων-αποτελεσμάτων για όλα τα είδη.

https://github.com/KBizas/Thesis-Stochastic-analysis-in-Music