



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

# ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΒΛΑΒΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

---

ΤΟΥ  
ΜΙΧΑΗΛΙΔΗ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ

---

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:  
ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΜΙΧΑΗΛ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2023

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1	ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	1
2	ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ .....	2
3	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	3
3.1	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΒΛΑΒΗΣ .....	3
3.2	ΒΑΣΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΙΔΕΑ.....	4
4	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ .....	5
4.1	ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ .....	5
4.2	ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΟΥ ΘΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ.....	5
4.3	ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΤΗΣ ΒΛΑΒΗΣ.....	6
5	ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΥ ΘΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ .....	7
5.1	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ (INVERSE METHOD).....	7
5.1.1	ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	7
5.1.2	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ .....	16
5.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ .....	56
5.2.1	ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	56
5.2.2	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ .....	60
6	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ .....	67
6.1	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ .....	67
6.1.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 1: ΜΕΙΩΣΗ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΤΑ 5% ΣΕ ΟΛΟ ΤΟ ΚΑΤΑΣΤΡΩΜΑ.....	68
6.1.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 2: ΤΟΠΙΚΕΣ ΒΛΑΒΕΣ .....	85
6.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ .....	103
7	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	107
7.1	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ .....	107
7.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ .....	108
8	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΙΣΤΟΓΡΑΦΙΑ.....	110
9	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ .....	111
9.1	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ .....	111
9.1.1	ΠΡΟΒΟΛΟΣ .....	111

9.1.2	ΓΕΦΥΡΑ .....	116
9.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ .....	122
9.2.1	ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ-ΜΑΖΩΝ.....	122
9.2.2	ΔΙΚΤΥΩΜΑ .....	126
9.3	ΤΕΧΝΙΚΗ SVD.....	130
9.3.1	ΠΡΟΒΟΛΟΣ .....	130
9.3.2	ΓΕΦΥΡΑ .....	132



ΕΙΚΟΝΑ 50: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	44
ΕΙΚΟΝΑ 51: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	45
ΕΙΚΟΝΑ 52: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	45
ΕΙΚΟΝΑ 53: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	46
ΕΙΚΟΝΑ 54: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	46
ΕΙΚΟΝΑ 55: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	47
ΕΙΚΟΝΑ 56: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	47
ΕΙΚΟΝΑ 57: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	48
ΕΙΚΟΝΑ 58: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	48
ΕΙΚΟΝΑ 59: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	49
ΕΙΚΟΝΑ 60: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	49
ΕΙΚΟΝΑ 61: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	50
ΕΙΚΟΝΑ 62: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	50
ΕΙΚΟΝΑ 63: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	51
ΕΙΚΟΝΑ 64: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	51
ΕΙΚΟΝΑ 65: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	52
ΕΙΚΟΝΑ 66: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	52
ΕΙΚΟΝΑ 67: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	53
ΕΙΚΟΝΑ 68: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	53
ΕΙΚΟΝΑ 69: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	54
ΕΙΚΟΝΑ 70: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	54
ΕΙΚΟΝΑ 71: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	55
ΕΙΚΟΝΑ 72: ΣΥΣΤΗΜΑ 3 ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ ΜΕ 2 ΜΑΖΕΣ .....	60
ΕΙΚΟΝΑ 73: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	62
ΕΙΚΟΝΑ 74: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	62
ΕΙΚΟΝΑ 75: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	63
ΕΙΚΟΝΑ 76: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	64
ΕΙΚΟΝΑ 77: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΘΟΡΥΒΟΥ-ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	64
ΕΙΚΟΝΑ 78: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ-ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	65
ΕΙΚΟΝΑ 79: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	66
ΕΙΚΟΝΑ 80: ΓΕΦΥΡΑ 3 ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ .....	67
ΕΙΚΟΝΑ 81: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	68
ΕΙΚΟΝΑ 82: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	68
ΕΙΚΟΝΑ 83: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	69
ΕΙΚΟΝΑ 84: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	69
ΕΙΚΟΝΑ 85: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	70
ΕΙΚΟΝΑ 86: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	70
ΕΙΚΟΝΑ 87: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	71
ΕΙΚΟΝΑ 88: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	71
ΕΙΚΟΝΑ 89: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	72
ΕΙΚΟΝΑ 90: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	72
ΕΙΚΟΝΑ 91: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	73
ΕΙΚΟΝΑ 92: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	73
ΕΙΚΟΝΑ 93: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	74
ΕΙΚΟΝΑ 94: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	74
ΕΙΚΟΝΑ 95: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	75
ΕΙΚΟΝΑ 96: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	75
ΕΙΚΟΝΑ 97: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ .....	76
ΕΙΚΟΝΑ 98: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	76
ΕΙΚΟΝΑ 99: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	77
ΕΙΚΟΝΑ 100: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	77
ΕΙΚΟΝΑ 101: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ .....	78
ΕΙΚΟΝΑ 102: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ .....	78



# 1 ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η ανίχνευση βλάβης σε ένα φορέα ή μια κατασκευή μέσω της εφαρμογής και ανάπτυξης ορισμένων αντίστροφων μεθόδων. Αρχικά, ορίζεται η έννοια της βλάβης και πώς μπορεί να αποτυπωθεί σε επίπεδο υπολογισμών. Αυτή αποτυπώνεται σε επίπεδο προγραμματισμού, αναφέροντας και σύντομα περιγράφοντας τα προγράμματα που θα χρησιμοποιηθούν, και ύστερα αναλύοντας την συνολική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων βλάβης, βήμα προς βήμα. Στη συνέχεια, αναφέρονται και αναλύονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση μιας βλάβης και για την επίλυση προβλημάτων βλάβης. Οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούν εξισώσεις που αποσκοπούν στην ανίχνευση ή την επαλήθευση της, περιγράφοντας βήμα προς βήμα τη πορεία εκτέλεσης για κάθε μέθοδο ξεχωριστά, με χρήση παραδειγμάτων απλών μικρών φορέων, μέσα από τους οποίους θα καταγραφούν παρατηρήσεις και συμπεράσματα για τη λειτουργία τους, με πίνακες και διαγράμματα. Έπειτα, θα παρατεθούν πιο σύνθετες εφαρμογές βλαβών προς επίλυση σε ένα ξεχωριστό κεφάλαιο, για την καταγραφή παρατηρήσεων και ενδεχόμενων σφαλμάτων που προκύπτουν κατά την εφαρμογή των μεθόδων. Τέλος, θα γίνει σύγκριση των μεθόδων μεταξύ τους, προς έλεγχο της αξιοπιστίας τους. Οι κώδικες που συντάχθηκαν για όλα τα χρησιμοποιούμενα παραδείγματα θα προστεθούν στο τέλος του τεύχους αυτού σε μορφή παραρτημάτων, για τη παρακολούθηση της πορείας επίλυσης προβλημάτων βλάβης.

## 2 ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία, εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Αντισεισμικής Τεχνολογίας του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, κατά το ακαδημαϊκό έτος 2022-2023, υπό την εποπτεία του Αναπληρωτή Καθηγητή και Διευθυντή του Εργαστηρίου Αντισεισμικής τεχνολογίας Μιχαήλ Φραγκιαδάκη.

Η γνωριμία μου με τον κ. Φραγκιαδάκη έγινε κατά τη διάρκεια παρακολούθησης του μαθήματος του Αντισεισμικού Σχεδιασμού 1 στο 7<sup>ο</sup> εξάμηνο του προγράμματος σπουδών και στην συνέχεια στο μάθημα του Αντισεισμικού Σχεδιασμού 2 στο 9<sup>ο</sup> εξάμηνο. Ωστόσο, το πεδίο των αντισεισμικών σχεδιασμών αποτέλεσε πεδίο μεγάλου ενδιαφέροντος, δημιουργώντας μου την επιθυμία να εκπονήσω διπλωματική εργασία με θέμα σχετικό με την σεισμική ανάλυση. Στις αρχές του 10<sup>ου</sup> εξαμήνου, μετά από συνάντηση με τον κ. Φραγκιαδάκη στο Εργαστήριο και συζήτηση προς επιλογή θέματος, μου πρότεινε να ασχοληθώ με το θέμα της βλάβης σε έναν φορέα ή μια κατασκευή, καθώς και μου περιέγραψε τη κεντρική ιδέα και τη λογική της ανίχνευσης μιας βλάβης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την θετική μου ανταπόκριση και συνεπώς, την εκπόνηση της εργασίας αυτής.

Λίγο πριν τη λήξη της προπτυχιακής ακαδημαϊκής μου περιόδου, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο για την απόκτηση σημαντικών γνώσεων που ήταν χρήσιμοι καθ' όλη της διάρκειας εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας αυτής, χάρη στο πρόγραμμα σπουδών και τα προσφερόμενα μαθήματα.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω εκ βαθέων τον κ. Φραγκιαδάκη για την επίλυση αποριών που διατυπώνονταν καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές που πήρα, τόσο στην κεντρική ιδέα του αντικειμένου της παρούσας εργασίας, όσο και στη σωστή δομή της τεχνικής περιγραφής.

Επίσης, θερμές ευχαριστίες αποδίδονται στους Σπυρίδων Διαμαντόπουλο, διδάκτορα του ΕΜΠ και Ιωάννη Πρέντζα, υποψήφιο διδάκτορα του ΕΜΠ, για τις πολύτιμες συμβουλές που μου έχουν δώσει στην σωστή μελέτη και έρευνα, με επισημάνσεις στο τομέα της μοντελοποίησης των φορέων για τον εντοπισμό βλαβών.

Σε πιο προσωπικό επίπεδο, θα ήθελα να αποδώσω ευχαριστίες στους φίλους μου που με στήριξαν κατά τη περίοδο εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Τελευταίες αλλά εξίσου σημαντικές ευχαριστίες αποδίδονται στην οικογένειά μου, η οποία με στήριξε με τη θετική της διάθεση και με την εμπύχωσή της στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα της εργασίας αυτής.



## 3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΒΛΑΒΗΣ

Ως βλάβη νοείται η μεταβολή των παραμέτρων ενός φορέα ή μιας κατασκευής, η οποία αφορά είτε τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά (διατομή), είτε ιδιότητες του υλικού (μέτρο ελαστικότητας/διάτμησης, πυκνότητα μάζας/ειδικό βάρος), είτε και ο συνδυασμός τους. Αυτές οι ιδιότητες αποτελούν ένα σύνολο δομικών παραμέτρων, καθώς οι ιδιότητες αυτοί συνθέτουν το μητρώο της μάζας, της ακαμψίας και της απόσβεσης. Επίσης, βλάβες μπορούν να εντοπιστούν ακόμα και στις συνοριακές συνθήκες (συνθήκες στήριξης στα άκρα, ή μείωση δυσκαμψίας στροφικών/μεταφορικών ελατηρίων), όπως και στη σύνδεση μεταξύ υποφορέων ενός φορέα.

Ανά τακτά χρονικά διαστήματα πραγματοποιούνται παρακολουθήσεις προς συλλογή μετρήσεων (συνήθως ιδιοσυχνότητες  $\omega$ , ιδιοπερίοδοι  $T$  ή φυσικές συχνότητες  $f$ ), για τον έλεγχο της κατάστασης του φορέα. Οι μετρήσεις αυτές αποτελούν μια επιπλέον κατηγορία παραμέτρων που χαρακτηρίζεται ως μορφικές παράμετροι. Αποτελέσματα της μέτρησης αυτής είναι η πληροφορία για την ικανότητά του να εκτελεί τη λειτουργία για την οποία έχει σχεδιαστεί. Οι ιδιοσυχνότητες αυτές ερμηνεύουν την ύπαρξη ή μη, της υγιούς κατάστασης του φορέα. Στην περίπτωση μη υγιούς κατάστασης του μοντέλου, ακολουθούν έγκαιρες προειδοποιήσεις.

Σε πρακτικό επίπεδο, αυτή η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για παράδειγμα, σε μια γέφυρα, η οποία υφίσταται μια βλάβη στο κατάστρωμα. Η ακεραιότητα της κατασκευής, αποτυπώνεται σε μια ιδιομορφική ανάλυση, παραλαμβάνοντας τιμές ιδιοσυχνοτήτων, φυσικών συχνοτήτων ή και ιδιοπεριόδων, εξετάζοντας τη διαφορά ή μη, από αυτές σε υγιή κατάσταση. Στη δεύτερη περίπτωση, υπάρχει άμεση κινητοποίηση και η προειδοποίηση είναι το κλείσιμο της γέφυρας.

Η συνεχής πρόοδος της τεχνολογίας αποτελεί καθοριστικός παράγοντας στον τομέα της καταγραφής δεδομένων και της λήψη της πληροφορίας για την κατάσταση του φορέα. Αυτό αποδίδεται στην ύπαρξη και εξέλιξη αισθητήρων που παρέχουν τη δυνατότητα καταγραφής τέτοιων μορφικών παραμέτρων με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Βλάβη μπορεί να εντοπιστεί κυρίως σε τοπικό επίπεδο. Η διαφοροποίηση ενός τοπικού επιπέδου από το ολικό έγκειται στη προσέγγιση ενός συνεχούς μοντέλου από ένα πεπερασμένο πλήθος μεμονωμένων στοιχείων, εργαλείο το οποίο αποτελεί θεμέλιο για την παραγωγή ενός προβλήματος επίλυσης βλάβων. Ένας φορέας μπορεί να διαιρεθεί σε ένα πλήθος πεπερασμένων στοιχείων, με σκοπό την επίτευξη της ακρίβειας υπολογισμών των μετακινήσεων, την εντατικών μεγεθών, ακόμα και της ακρίβειας της ιδιομορφικής ανάλυσης, λαμβάνοντας ακριβέστερες πληροφορίες για τις ιδιομορφικές παραμορφώσεις και τις μορφικές παραμέτρους όπως αναφέρθηκαν προηγουμένως. Επομένως μια βλάβη έχει μεγάλες πιθανότητες να έχει προκύψει σε ένα ή περισσότερα διάσπαρτα τέτοια στοιχεία, από ότι να υπάρχει ομοιόμορφη βλάβη σε όλο τον φορέα. (Χριστοδούλου, 2006)

### 3.2 ΒΑΣΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΙΔΕΑ

Ωστόσο, η κεντρική ιδέα της εργασίας αυτής δεν αποτελεί τόσο η πληροφορία που μεταδίδεται από τους αισθητήρες, όσο η διαδικασία η οποία ακολουθεί για να βρεθεί η αιτία της αλλαγής της πληροφορίας αυτής. Για αυτό το λόγο, μελετάται η επικαιροποίηση ενός μοντέλου κατασκευής, η οποία συμβάλλει στον εντοπισμό μιας βλάβης, είτε ολικής, είτε τοπικής. Η διαδικασία αυτή γίνεται μέσω διαφόρων αντίστροφων επαναληπτικών μεθόδων, οι οποίοι συνίστανται στην αντίστροφη ιδιομορφική ανάλυση. (Χριστοδούλου, 2006)

Η επικαιροποίηση μοντέλων κατασκευών είναι ένα αντίστροφο πρόβλημα, σύμφωνα με το οποίο το μοντέλο μίας κατασκευής προσαρμόζεται έτσι ώστε είτε οι χρονικές ιστορίες απόκρισης είτε οι μορφικές ιδιότητες που προβλέπει, να συμπίπτουν όσο γίνεται περισσότερο με τις αντίστοιχες μετρούμενες ποσότητες. Σκοπός αυτής της αντίστροφης διαδικασίας είναι να αποδοθούν αναθεωρημένα μοντέλα και οι αντίστοιχες αβεβαιότητες, βασισμένα στα μετρητικά δεδομένα. Τα αναθεωρημένα αυτά μοντέλα αναμένεται να είναι ακριβέστερα στις προβλέψεις απόκρισης σε μελλοντικά φορτία, και να μπορούν να δώσουν μία εκτίμηση των αβεβαιοτήτων που σχετίζονται με τις προβλέψεις απόκρισης. Συνήθως, στην πράξη κατά την εφαρμογή του αντίστροφου προβλήματος της αναθεώρησης μοντέλων παρουσιάζονται προβλήματα αριθμητικής δυσεπιλυσιμότητας (ill-conditioning) λόγω της μη ευαισθησίας της απόκρισης σε μεταβολές των παραμέτρων των μοντέλων, και μη μοναδικότητας (Udwadia and Sharma 1978; Berman 1989; Katafygiotis and Beck 1998; Katafygiotis et al. 2000) λόγω του περιορισμένου αριθμού μετρητικών δεδομένων σε σχέση με τον μεγάλο αριθμό των παραμέτρων που απαιτούνται για την περιγραφή λεπτομερειών των κατασκευών κατά τη μοντελοποίηση.

Δεδομένης και σταθερής της γεωμετρίας και της πυκνότητας μάζας του υλικού, ιδιότητες που ευχερούν στο να μεταβάλλονται συνήθως αποτελούν το μέτρο ελαστικότητας ( $E$ ) ενός στοιχείου ενός φορέα, ή η σταθερά ενός ελατηρίου  $k$ .

Συνεπώς, στο εξής, θα αναφερθούν και θα αναλυθούν τρεις από τις μεθόδους που θα χρησιμοποιηθούν για την ανίχνευση μιας βλάβης, περιγράφοντας τον αλγόριθμο που θα χρησιμοποιηθεί σε κάθε μέθοδο, παραθέτοντας και σχετικές εφαρμογές. Τέλος, θα αποτυπωθούν τα τελικά συμπεράσματα για τις ιδιότητες και την αξιοπιστία των μεθόδων, με σχετικές συγκρίσεις μεταξύ τους.

## 4 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

### 4.1 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Σε συνδυασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων όπως έχει προαναφερθεί, ένα πολύ σημαντικό εργαλείο που εξυπηρετεί στην επίλυση προβλημάτων βλάβης είναι η επαλήθευσή της μέσω τοποθέτησης μιας «τεχνητής» βλάβης (συνήθως αυτή ισοδυναμεί με μείωση του μέτρου ελαστικότητας σε πεπερασμένο στοιχείο), η αλλιώς προτοποθέτηση.

Αν και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα αυθαίρετες ιδιοσυχνότητες που ενδέχεται να καταγράφοντας, η επίλυση του προβλήματος βλάβης, ενδέχεται να αντιμετωπίσει προβλήματα ασφαλείας και αξιοπιστίας των μεθόδων (όπως απόκλιση των παραμέτρων σε κάθε επανάληψη ή ακόμα και αδυναμία εκτέλεσης του αλγορίθμου). Επομένως οι ιδιοσυχνότητες που χαρακτηρίζονται ως «μετρούμενες» θα προέρχονται από τη τεχνητή βλάβη. Μέσω των αλγορίθμων, θα γίνει μετάβαση από τις ιδιομορφές υγιούς κατάστασης στις μετρούμενες, υπολογίζοντας σε κάθε επανάληψη, τις παραμέτρους που επικρατούν. Πλέον, τα προβλήματα βλάβης αυτόματα αποκτούν ένα επαληθευτικό χαρακτήρα.

### 4.2 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΟΥ ΘΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ

Τα προγράμματα που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων βλάβης σε φορείς και κατασκευές είναι ο συνδυασμός ενός περιβάλλοντος προσομοίωσης OpenSees και ενός προγραμματιστικού περιβάλλοντος MATLAB.

Μερικές λεπτομέρειες για το κάθε πρόγραμμα:

1. Το OpenSees (Open System for Earthquake Engineering Simulation) είναι ένας ανοιχτός κώδικας που χρησιμοποιείται για τη προσομοίωση ενός φορέα ή μιας κατασκευής, για την παρακολούθηση της απόκρισής τους υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης, ειδικά τη σεισμική. Ορισμένες δυνατότητες που παρέχει το πρόγραμμα αυτό είναι τα πεπερασμένα στοιχεία, μοντέλα υλικών, τύποι μελών όπως και φορτία και συνοριακές συνθήκες. Μέσω του OpenSees, οι μοντελοποιήσεις γίνονται σε περιβάλλον Notepad++. Οι χρήστες του OpenSees μπορούν να συντάξουν κώδικα είτε στην απλή έκδοση του OpenSees, είτε στην έκδοση σύνδεσης OpenSees με Python (OpenSeesPy). Λειτουργεί ως επί τω πλείστω σε ένα περιβάλλον γραμμών εντολών (Command Prompt ή αλλιώς cmd). (OpenSees, n.d.)
2. Το MATLAB (συντομογραφία του "MATrix LABoratory") είναι μια ιδιόκτητη γλώσσα προγραμματισμού πολλών παραδειγμάτων και ένα αριθμητικό υπολογιστικό περιβάλλον που αναπτύχθηκε από την εταιρεία Mathworks. και επιτρέπει μητρικούς χειρισμούς, σχεδίαση συναρτήσεων και δεδομένων, υλοποίηση αλγορίθμων, δημιουργία διεπαφών χρήστη και διασύνδεση με προγράμματα γραμμένα σε άλλες γλώσσες. Αν και το MATLAB προορίζεται κυρίως για αριθμητικούς υπολογιστές, μια προαιρετική εργαλειοθήκη χρησιμοποιεί τη συμβολική μηχανή MuPAD που επιτρέπει την πρόσβαση σε συμβολικές

υπολογιστικές ικανότητες. Ένα πρόσθετο πακέτο, το Simulink, προσθέτει γραφική προσομοίωση πολλαπλών τομέων και σχεδιασμό βασισμένο σε μοντέλα για δυναμικά και ενσωματωμένα συστήματα. Από το 2020, το MATLAB έχει περισσότερους από 4 εκατομμύρια χρήστες παγκοσμίως. Προέρχονται από διάφορα υπόβαθρα της μηχανικής, της επιστήμης και της οικονομίας. Από το 2017, περισσότερα από 5000 παγκόσμια κολέγια και πανεπιστήμια χρησιμοποιούν το MATLAB για την υποστήριξη της διδασκαλίας και της έρευνας. (MATLAB, n.d.)

### 4.3 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΤΗΣ ΒΛΑΒΗΣ

Σε αρχικό στάδιο, γίνεται η μοντελοποίηση του φορέα μέσω του OpenSees και τη χρήση εφαρμογής σημειωματαρίου Notepad++ σε ένα κείμενο το οποίο θα έχει ονομασία `foreas.tcl` (Tool Command Language αρχείο). Προσδιορίζονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής (εμβαδόν, γεωμετρική ροπή αδρανείας) όπως και τα αδρανειακά του χαρακτηριστικά (μέτρο ελαστικότητας ή σταθερά ελατηρίου, πυκνότητα μάζας). Στη συνέχεια, σχηματοποιείται ο φορέας ορίζοντας κόμβους αρχής και τέλους των πεπερασμένων στοιχείων που ορίζεται ότι θα χωριστεί. Συνεπώς, θα τεθούν συνθήκες στήριξης σε κόμβους, δεσμεύοντας βαθμούς ελευθερίας. Στους κόμβους ασκούνται μάζες. Ανάμεσά τους ορίζονται στοιχεία τα οποία δέχονται κατάλληλα ορίσματα εισόδου, ανάλογα με το είδος του στοιχείου, θεωρώντας το στοιχείο μονοαξονικό. Αφού έχει μοντελοποιηθεί ο φορέας, εφαρμόζεται ιδιομορφική ανάλυση όπου θα υπολογιστούν οι ιδιοτιμές  $\{\lambda\}$ , οι ιδιοτιμές  $\{w\}$  και οι φυσικές συχνότητες  $\{f\}$ . Τα αποτελέσματα των τελευταίων, θα τυπωθούν σε νέο αρχείο τυχαίου ονόματος `frequencies_foreas.out`, έχοντας τη μορφή σημειωματαρίου.

Έπειτα ακολουθεί ο τομέας του προγραμματισμού στο MATLAB. Φτιάχνεται μια συνάρτηση τυχαίου ονόματος `foreas_function`, η οποία εκτελεί ευθεία ιδιομορφική ανάλυση με ορίσματα εισόδου τις παραμέτρους των πεπερασμένων στοιχείων και ορίσματα εξόδου τις φυσικές συχνότητες. Ωστόσο, λόγω της ανάγκης για εύρεση νέων παραμέτρων σε κάθε επανάληψη, οι παράμετροι πολλαπλασιάζονται με συντελεστές  $d$ , οι οποίοι θα αλλάζουν σε κάθε βήμα. Επομένως, όρισμα εισόδου θα είναι ένα μητρώο με τις μεταβλητές  $d$  που θα είναι οι ανηγμένες παράμετροι σε κάθε επανάληψη, ως προς τις αρχικές.

Με τη χρήση του MATLAB, επιτυγχάνεται η εξής διαδικασία:

Όταν καλείται η συνάρτηση `foreas_function` του MATLAB, το μητρώο-όρισμα εισόδου  $d$  θα εισάγεται σε ένα βοηθητικό αρχείο ονομασίας `parameters_foreas.tcl`, το οποίο θα το μεταφέρει στο προσομοίωμα του OpenSees και τα στοιχεία του μητρώου αυτού θα πολλαπλασιαστούν με τις αρχικές παραμέτρους που υφίστανται βλάβη, θέτοντας μια «παραμετροποίηση» των ίδιων των παραμέτρων. Έπειτα, εντός του περιβάλλοντος του OpenSees, θα ανοίχτει ένα αρχείο ονόματος `Modal_foreas.tcl` το οποίο θα εκτελέσει την ιδιομορφική ανάλυση εξάγοντας ένα πίνακα που θα περιέχει τις ιδιοτιμές που θα εκτελεστούν

Τέλος, διατυπώνεται ο κύριος κώδικας μέσω MATLAB ο οποίος θα δείχνει γραμμή προς γραμμή τους απαραίτητους υπολογισμούς, σύμφωνα με τις απαιτήσεις των μεθόδων και θα τυπώνει τα διαγράμματα κατάστασης των μεγεθών.

## 5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΥ ΘΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα όλων αυτών των μεθόδων είναι η επαναληψιμότητά τους. Αυτό συμβαίνει διότι για την ακριβή και αξιόπιστη ανίχνευση μιας βλάβης, πρέπει να γίνεται μια αναθεώρηση ενός μοντέλου (επανάληψη) μέσω ενός αλγορίθμου που θα έχει ως δεδομένες τις ιδιοσυχνότητες και θα στοχεύει στον εντοπισμό των αλλαγών στις δομικές ιδιότητες της κατασκευής. (Friswell & Mottershead, 1990)

Οι 2 βασικές μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν για τον εντοπισμό βλαβών είναι:

- Αντίστροφη Μέθοδος
- Μέθοδος των Ελαχίστων Διασπορών

Ωστόσο, θα προσδιοριστεί μια τεχνική η οποία αφορά μόνο τη διαδικασία της επικαιροποίησης, η οποία είναι η μέθοδος αποσύνθεσης σε μοναδικά μητρώα (Μέθοδος SVD). Δεν αποτελεί μια ξεχωριστή μέθοδο, για λόγους που θα αναφερθούν στη συνέχεια.

Οι μέθοδοι που θα περιγραφούν και οι εξισώσεις που θα διατυπωθούν για την επαλήθευση των βλαβών είναι διατυπωμένοι από τους M.I Friswell και J.E. Mottershead.

### 5.1 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ (INVERSE METHOD)

Η μέθοδος αυτή, όπως και οι επόμενες που θα αναλυθούν, αποτελούν έναν συνδυασμό ενός αρχικού μοντέλου μιας κατασκευής και μετρούμενων δεδομένων, με σκοπό την εξέταση ή την επαλήθευση ενός σεναρίου. Βασικό αντικείμενο της μεθόδου αυτής είναι η βελτίωση της συσχέτισης μεταξύ των μετρούμενων δεδομένων και του μοντέλου. (Friswell & Mottershead, 1990).

Στην περίπτωση της αντίστροφης μεθόδου αυτής, η συσχέτιση αυτή προσδιορίζεται από μια αντικειμενική συνάρτηση σφάλματος που συμπεριλαμβάνει δομικές και μορφικές ιδιότητες και ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των μετρούμενων ιδιοτιμών και των ιδιοτιμών σε κάθε επανάληψη.

#### 5.1.1 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη γραμμική και έχει τύπο:

$$J = \varepsilon^T \varepsilon \quad (1)$$

Όπου:

$$\varepsilon = dz - S \cdot d\theta \quad (2)$$

είναι το σφάλμα της διαφοράς των ιδιοτιμών,

$$dz = z_m - z_j \quad (3)$$

είναι το σφάλμα μεταξύ των μετρούμενων σε κάθε επανάληψη

$$z_m = \begin{pmatrix} z_{m,1} \\ z_{m,2} \\ z_{m,n} \end{pmatrix}, \text{ το διάνυσμα των ιδιοτιμών βλάβης}$$

$$z_m = \begin{pmatrix} z_{j,1} \\ z_{j,2} \\ z_{j,n} \end{pmatrix}, \text{ το διάνυσμα των ιδιοτιμών σε κάθε επανάληψη}$$

$$d\theta = \theta_{j+1} - \theta_j \quad (4)$$

το σφάλμα μεταξύ παραμέτρων σε 2 διαδοχικές επαναλήψεις

$$\theta_j = \begin{pmatrix} \theta_{j,1} \\ \theta_{j,2} \\ \theta_{j,k} \end{pmatrix}, \text{ το διάνυσμα των υπολογιζόμενων παραμέτρων στην επανάληψη } j$$

$$\theta_{j+1} = \begin{pmatrix} \theta_{j+1,1} \\ \theta_{j+1,2} \\ \theta_{j+1,k} \end{pmatrix}, \text{ το διάνυσμα των υπολογιζόμενων παραμέτρων στην επανάληψη } j+1$$

n το πλήθος των ιδιοτιμών

k το πλήθος των παραμέτρων

Η μέθοδος συνάρτησης σφάλματος, χρησιμοποιεί συνάρτηση Taylor για να περιγράψει τη σχέση που συνδέει τη σύγκλιση των μετρούμενων ιδιοτιμών με τις ιδιοτιμές σε κάθε επαναληπτικό βήμα, ως:

$$z_m = z_j + S_j * d\theta + \text{όροι ανώτερης τάξης} \quad (5)$$

οι οποίοι απαλείφονται, σταματώντας στον 2<sup>ο</sup> όρο της εξίσωσης

$S_j$ , είναι το μητρώο ευαισθησίας του φορέα. Περιγράφει την ευκολία που διαθέτει μια ποσοστιαία μεταβολή σε μια μόνο παράμετρο να αλλάζει ένα πλήθος ιδιοτιμών. Σε μαθηματικούς όρους, T στοιχεία του μητρώου ευαισθησίας υπολογίζονται με την αριθμητική Μέθοδο των Κεντρικών Διαφορών ως η πρώτη παράγωγος των ιδιοτιμών ως προς την εκάστοτε παράμετρο, δηλαδή:

$$S_j = \frac{\partial z}{\partial \theta_i} = \frac{z(\theta_i+h) - z(\theta_i-h)}{2h} \quad (6)$$

με h να είναι περίπου ίσο με 5-10% της παραμέτρου  $\theta_j$

Αν  $dz_{\text{measurements}} \times 1$  και  $d\theta_{\text{parameters}} \times 1$  τότε ο πίνακας S θα είναι διαστάσεων **measurements x parameters**. Επομένως, σε κάθε στήλη θα πρέπει με τη μεταβολή της εκάστοτε παραμέτρου  $\theta_j$  να υπολογιστεί η παράγωγος των ιδιομορφών λ ως προς τη μεταβολή της παραμέτρου.

Επομένως, με ανάπτυξη της εξίσωσης (5) θέτοντας ένα ποσοστό  $h=10\%$ ,

Με επέκταση του υπολογισμού του μητρώου αυτού:

$$S_a = \frac{dz}{d\theta_i} = z'(\theta_j) = \frac{z(\theta_i+h) - z(\theta_i-h)}{2h} = \frac{z(1.1\theta_i) - z(0.9\theta_i)}{0.2\theta_i} = 4\pi^2 \frac{[f(1.1\theta_i)]^2 - [f(0.9\theta_i)]^2}{0.2\theta_i} \quad (7)$$

Πιο αναλυτικά:

$$S_1(:,1)=4\pi^2 \frac{[f(A^1*d(:,1))]^2-[f(B^1*d(:,1))]^2}{0.2\theta_1}$$

$$S_1(:,2)=4\pi^2 \frac{[f(A^2*d(:,1))]^2-[f(B^2*d(:,1))]^2}{0.2\theta_2}$$

$$S_1(:,3)=4\pi^2 \frac{[f(A^3*d(:,1))]^2-[f(B^3*d(:,1))]^2}{0.2\theta_3}$$

,

,

,

$$S_1(:,k)=4\pi^2 \frac{[f(A^k*d(:,1))]^2-[f(B^k*d(:,1))]^2}{0.2\theta_k}$$

Όπου:

$A^j$  είναι ένας αυξητικός πίνακας, ο οποίος έχει διαγώνια στοιχεία ίσα με 1 εκτός από το στοιχείο  $A_{jj}^j=A_{11}$  (για  $j=1$ ), του οποίου η τιμή είναι ίση με 1,1 δηλαδή:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1,1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$B^j$  είναι ένας μειωτικός πίνακας ο οποίος έχει διαγώνια στοιχεία ίσα με 1 εκτός από το στοιχείο  $B_{jj}^j=B_{11}$ , (για  $j=1$ ) του οποίου η τιμή είναι ίση με 0,9, δηλαδή:

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0,9 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Αν πχ ένα αρχικό διάνυσμα  $d_{undamaged}$  7 στοιχείων πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα  $A$  θα προκύψει αυξητικό διάνυσμα ανηγμένων παραμέτρων

$$d_{plus} = \left\{ \begin{matrix} 1,1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

και με τον πίνακα  $B$  ένα μειωτικό διάνυσμα ανηγμένων παραμέτρων

$$d_{\text{minus}} = \begin{Bmatrix} 0.9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

τα οποία θα παράξουν τις ποσότητες  $f(x+h)$  και  $f(x-h)$  της διαφορικής εξίσωσης.

Ομοίως για  $j=2, \dots, n$  παράμετροι

Η φυσική ερμηνεία της ύπαρξης της αντικειμενικής συνάρτησης αυτής είναι ότι αποτελεί μια μέθοδο εξέτασης της συμπεριφοράς της κατασκευής καθ' όλη τη πορεία των επαναλήψεων, με μοναδικό-και ίσως το πιο βασικό κριτήριο- η τιμή της συνάρτησης  $J$  να είναι κοντά στο μηδέν, το οποίο συμβαίνει όταν:

$$J \approx 0 \Rightarrow \varepsilon \approx 0 \Rightarrow dz \approx S d\theta \Rightarrow z_m - z_j \approx z_{j+1} - z_j \approx z_m \approx z_{j+1}$$

Αν ισχύσει αυτό σε ένα τυχαίο  $j$  βήμα, τότε επιτυγχάνεται σύγκλιση μεταξύ στιγμιαίων ιδιοτιμών (δηλαδή ιδιοτιμών σε μια επανάληψη  $j$ ) και ιδιοτιμών βλάβης και συνεπώς, η μέθοδος είναι επιτυχής.

Σύμφωνα με τους M.I Friswell και J.E.Mottershead, διακρίνονται 2 περιπτώσεις μεθόδων, ανάλογα με το πλήθος των παραμέτρων σε σύγκριση με το πλήθος των μετρούμενων ιδιοτιμών.

- Το πλήθος των μετρούμενων ιδιοτιμών να είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των παραμέτρων
- Το πλήθος των παραμέτρων να είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των μετρούμενων ιδιοτιμών

#### 5.1.1.1 Περίπτωση 1: Πλήθος παραμέτρων < Πλήθος ιδιοτιμών

Στη περίπτωση αυτή, η εξίσωση (6) έχει περισσότερες εξισώσεις παρά αγνώστους και το σύνολο των ταυτόχρονων εξισώσεων είναι υπέρ-καθορισμένο. Επομένως, στην εξίσωση αυτή, τα 2 μέλη πολλαπλασιάζονται με το ανάστροφο μητρώο ευαισθησίας  $S^T$ :

$$S^T dz = S^T S d\theta \quad (8)$$

Και με επίλυση ως προς  $d\theta$ , προκύπτει:

$$d\theta = [S^T S]^{-1} S^T dz \quad (9)$$

Σε πιο ανεπτυγμένη μορφή:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T S_j]^{-1} S_j^T (z_m - z_j) \quad (9')$$

Και η αντικειμενική συνάρτηση  $J$  με βάση τις εξισώσεις (1) και (2), θα εκφραστεί ως:

$$J = \{dz - S d\theta\}^T \{dz - S d\theta\} = dz^T dz - 2d\theta^T S^T dz + d\theta^T S^T S d\theta \quad (10)$$



Η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης αυτής προέρχεται όταν παραγωγιστεί ως την μεταβολή κάθε παραμέτρου ξεχωριστά, και στη συνέχεια μηδενιστεί.

Ωστόσο, αυτό συμβαίνει σε συνθήκες ίσης στάθμησης μεταξύ ιδιοτιμών, γεγονός που οδηγεί σε μεγαλύτερη ανακρίβεια προσέγγισης των μεγαλύτερων ιδιοσυχνοτήτων απ' ό,τι οι μικρότερες. Επομένως, δοκιμάζεται η περίπτωση ελαχιστοποίησης σταθμισμένης αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία θα έχει τύπο:

$$J = \varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon \quad (11)$$

Όπου:

$W_{\varepsilon\varepsilon}$ , είναι ένα βαρυτικό μητρώο των σφαλμάτων  $\varepsilon$ . Το μητρώο αυτό είναι ένας τετραγωνικός διαγώνιος πίνακας με πλήθος γραμμών και στηλών ίσο με το πλήθος των ιδιοτιμών και τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με τις αντιστρόφους των διασπορών των μετρούμενων ιδιοτιμών.

Ωστόσο, στα προβλήματα που θα επιλυθούν στη συνέχεια, δεν υπάρχουν δεδομένα για τα στατιστικά μεγέθη ιδιοτιμών ή και παραμέτρων. Για αυτό το λόγο θα τεθεί μια αυθαίρετη παραδοχή, σύμφωνα με την οποία, η τυπική απόκλιση θα είναι ένα ποσοστό  $\alpha(\%)$  των ιδιοτιμών βλάβης. Σε μητρική μορφή:

$$W_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(\frac{\alpha(\%)}{100} * z_{m,1}\right)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\left(\frac{\alpha(\%)}{100} * z_{m,n}\right)^2} \end{bmatrix}$$

Παίρνοντας την εξίσωση (6) και πολλαπλασιάζοντας με το μητρώο  $S^T W_{\varepsilon\varepsilon}$

$$S^T W_{\varepsilon\varepsilon} dz = S^T W_{\varepsilon\varepsilon} S d\theta \quad (12)$$

Λύνοντας ως προς  $d\theta$

$$d\theta = [S^T W_{\varepsilon\varepsilon} S]^{-1} S^T W_{\varepsilon\varepsilon} dz \quad (13)$$

Σε ανεπτυγμένη μορφή

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j]^{-1} S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} (z_m - z_j) \quad (13)'$$

Η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει τύπο

$$J = \{dz - Sd\theta\}^T W_{\varepsilon\varepsilon} \{dz - Sd\theta\} = dz^T W_{\varepsilon\varepsilon} dz - 2 * d\theta^T S^T W_{\varepsilon\varepsilon} dz + d\theta^T S^T W_{\varepsilon\varepsilon} S d\theta \quad (14)$$

Συνοψίζοντας:

**Περίπτωση 1**

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T S_j]^{-1} S_j^T (z_m - z_j) \quad (9)'$$

$$J = \varepsilon^T \varepsilon \quad (10)$$

**Περίπτωση 2**

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j]^{-1} S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} (z_m - z_j) \quad (13)'$$

$$J = \varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon \quad (11)$$

### 5.1.1.2 Περίπτωση 2: Πλήθος παραμέτρων > Πλήθος ιδιοτιμών

Στη περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους και έτσι, ένας φορέας χαρακτηρίζεται ως ασθενούς κατάστασης. Εδώ, θα χρησιμοποιηθούν 2 τεχνικές, οι οποίες εξυπηρετούν εξίσου την περίπτωση αυτή, αλλά διαφέρουν στο τομέα της επικαιροποίησης των παραμέτρων. Η μια είναι η τεχνική ελαχίστων τετραγώνων και η άλλη είναι η τεχνική αποσύνθεσης σε μοναδικές τιμές (Μέθοδος SVD).

#### 5.1.1.2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ/ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Η Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, είναι μια μέθοδος η οποία, όπως έχει περιγραφεί και στην περίπτωση λιγότερων παραμέτρων από ιδιοτιμές, στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος των μετρήσεων. Στην περίπτωση εκείνη, περιγράφηκε από την αντικειμενική συνάρτηση J, η οποία ελαχιστοποιούσε το σφάλμα των ιδιοτιμών που μετρούσε σε κάθε επανάληψη από τις ιδιοτιμές βλάβης. Όταν αυτή συνέκλινε κοντά σε μηδενική τιμή, τότε η επαναληπτική διαδικασία ολοκληρωνόταν και το σενάριο βλάβης επαληθευόταν επιτυχώς.

Στη περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους και έτσι, ο πολλαπλασιασμός  $S^T S$  θα είναι μικρότερου βαθμού, και το πλήθος των εξισώσεων είναι υποβαθμισμένο. Άρα, στην εξίσωση (6), θα θεωρηθεί ότι το α' μέλος είναι πολλαπλασιασμένο με το γινόμενο  $[S^* S^T]^* [S^* S^T]^{-1}$ , όπου πλέον παράγοντας είναι η αντιμετάθεση του γινομένου  $S^T S$  δηλαδή:

$$[S^* S^T][S^* S^T]^{-1} dz = S^* d\theta \quad (15)$$

Λύνοντας ως προς το  $d\theta$ ,

$$d\theta = S^T [S^* S^T]^{-1} dz \quad (16)$$

Σε πιο ανεπτυγμένη μορφή:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + S_j^T [S_j S_j^T]^{-1} (z_m - z_j) \quad (16)'$$

Στην περίπτωση αυτή, η αντικειμενική συνάρτηση έχει ως επίκεντρο την ελαχιστοποίησή της ως προς το  $d\theta$ , ως εξής:

$$J = d\theta^T d\theta \quad (17)$$

Οι παράμετροι έχουν μεγέθη που διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους, για παράδειγμα αν έχει αναθεωρηθεί το μέτρο ελαστικότητας ή το πάχος μια πλάκας ή η γεωμετρία της διατομής. Έτσι, οι παράμετροι αυτοί πρέπει να κανονικοποιηθούν, με τέτοιο τρόπο ώστε οι αρχικές τιμές να είναι ίσες με τη μονάδα για την βελτίωση των αριθμητικών συνθηκών στο πρόβλημα. Συνήθως σε ένα

πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων, κάποιες παράμετροι αλλάζουν λιγότερο από κάποιες άλλες. Το γεγονός αυτό αντανακλάται στην εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης (1.4), όταν συμπεριληφθεί ένα νέο βαρυτικό μητρώο  $W_{\theta\theta}$  και η αντικειμενική συνάρτηση γραφτεί ως:

$$J=d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta \quad (18)$$

Το μητρώο  $W_{\theta\theta}$ , είναι ένας διαγώνιος πίνακας με γραμμές και στήλες ίσες με το πλήθος των παραμέτρων και τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα με τις αντιστρώφους των διασπορών των αρχικών παραμέτρων. Όπως και στη περίπτωση του  $W_{\varepsilon\varepsilon}$ , τίθεται παραδοχή, σύμφωνα με την οποία, η τυπική απόκλιση είναι ίση με ένα ποσοστό  $\beta$  του αρχικού μητρώου παραμέτρων  $\theta_0$ . Σε μητρική μορφή:

$$W_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \left(\frac{\beta(\%)}{100}\right)^2 * \theta_{0,1} & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ & & & \left(\frac{\beta(\%)}{100}\right)^2 * \theta_{0,k} \end{bmatrix}$$

Άρα, στην εξίσωση (6), θα θεωρηθεί ότι το  $\alpha'$  μέλος είναι πολλαπλασιασμένο με το γινόμενο  $[S^* W_{\theta\theta}^{-1} S^T] * [S^* W_{\theta\theta}^{-1} S^T]^{-1}$  και έτσι η εξίσωση γράφεται:

$$[S^* W_{\theta\theta}^{-1} S^T] [S^* W_{\theta\theta}^{-1} S^T]^{-1} dz = S^* d\theta \quad (19)$$

Λύνοντας ως προς το  $d\theta$ ,

$$d\theta = W_{\theta\theta}^{-1} S^T [S^* W_{\theta\theta}^{-1} S^T]^{-1} dz \quad (20)$$

Σε πιο ανεπτυγμένη μορφή

$$\theta_{j+1} = \theta_j + W_{\theta\theta}^{-1} S^T [S^* W_{\theta\theta}^{-1} S^T]^{-1} (z_m - z_j) \quad (20)'$$

Μια εναλλακτική προσέγγιση της μεθόδου αυτής είναι η στάθμιση τόσο των παραμέτρων όσο και των σφαλμάτων, προσδιορίζοντας με μεγαλύτερη ακρίβεια τις μετρούμενες ιδιοτιμές, συμπεριλαμβανοντας στην εξίσωση (1.5) και έναν 2ο όρο που να υποδηλώνει ελαχιστοποίηση και των σφαλμάτων των ιδιοτιμών, διαμορφώνοντας την εξίσωση ως εξής

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta + \varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon \quad (21)$$

Στην ουσία, το βαρυτικό μητρώο  $W_{\varepsilon\varepsilon}$  στην αντικειμενική συνάρτηση, είναι απλώς ένας πρόσθετος όρος των τετραγωνικών όρων Ακολουθώντας τη διαδικασία για την ελαχιστοποίησή της, οι παράμετροι σε κάθε επανάληψη θα υπολογιστούν ως εξής:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} (z_m - z_j) \quad (22)$$

Προς επέκταση της μεθόδου αυτής, υπάρχει και μια ακόμα περίπτωση, στην οποία συνυπάρχουν και τα 2 μητρώα βαρύτητας, ωστόσο, σταθμίζονται οι αρχικές εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων, παρά των παραμέτρων σε κάθε επανάληψη. Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση θα έχει τύπο:

$$J=(\theta_j-\theta_0)^T W_{\theta\theta}(\theta_j-\theta_0) + \varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon \quad (23)$$

Όπου  $\theta_0$  το αρχικό διάνυσμα παραμέτρων (στην υγιή κατάσταση)

Με την ελαχιστοποίησή της αντικειμενικής συνάρτησης, οι παράμετροι σε κάθε βήμα θα υπολογιστούν ως:

$$\theta_{j+1}=\theta_j+[S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j+W_{\theta\theta}]^{-1}\{S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon}(z_m-z_j)-W_{\theta\theta}(\theta_j-\theta_0)\} \quad (24)$$

Συγκεντρωτικά:

### Περίπτωση 1

$$\theta_{j+1}=\theta_j+S_j^T [S_j S_j^T]^{-1}(z_m-z_j) \quad (16)'$$

$$\text{Ελαχιστοποίηση } J=d\theta^T d\theta \quad (17)$$

### Περίπτωση 2

$$\theta_{j+1}=\theta_j+W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T [S_j W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T]^{-1}(z_m-z_j) \quad (20)'$$

$$\text{Ελαχιστοποίηση } J=d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta \quad (18)$$

### Περίπτωση 3

$$\theta_{j+1}=\theta_j+[S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j+W_{\theta\theta}]^{-1} S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon}(z_m-z_j) \quad (22)$$

$$\text{Ελαχιστοποίηση } J=d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta+\varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon \quad (21)$$

### Περίπτωση 4

$$\theta_{j+1}=\theta_j+[S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j+W_{\theta\theta}]^{-1}\{S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon}(z_m-z_j)-W_{\theta\theta}(\theta_j-\theta_0)\} \quad (24)$$

$$\text{Ελαχιστοποίηση } J=(\theta_j-\theta_0)^T W_{\theta\theta}(\theta_j-\theta_0) + \varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon \quad (23)$$

#### 5.1.1.2.2 ΤΕΧΝΙΚΗ SVD

Η μέθοδος SVD (Singular Value Decomposition), αποτελεί μια επιπλέον τεχνική η οποία βασίζεται σε μητρικές πράξεις μεταξύ πινάκων. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε προβλήματα ασθενούς κατάστασης (δηλαδή πλήθος παραμέτρων>πλήθος ιδιοτιμών).

Ένας πίνακας  $A_{m \times n}$  μπορεί να γραφτεί ως το γινόμενο 3 πινάκων  $U, S$  και  $V$ , και ισχύει:

$$A=U * \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \quad (25)$$

Όπου:

$\Sigma$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας, του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ονομάζονται «μοναδικές» τιμές του μητρώου  $A$ . Για τη διάσταση  $p$  του πίνακα  $\Sigma$  πρέπει να ισχύει:

- $p < \min\{m, n\}$
- Η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου πρέπει να είναι κατά φθίνουσα σειρά ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p$ )

U είναι τετραγωνικός πίνακας διάστασης m και περιλαμβάνει τα αριστερά μοναδικά διανύσματα του πίνακα A ως στήλες

V είναι τετραγωνικός πίνακας διάστασης n και περιλαμβάνει τα δεξιά μοναδικά διανύσματα του πίνακα A ως στήλες.

Στη γενική περίπτωση της τεχνικής αυτής, γίνεται μια θεώρηση, σύμφωνα με την οποία:

$$\|b-A*\theta\|^2 = \|U^T(b-A*V*V^T*\theta)\|^2 \quad (26)$$

$b-A*\theta$  είναι το σφάλμα το οποίο πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Στο πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων και στα προβλήματα βλάβης, υπάρχει ένας παραλληλισμός, καθώς σκοπός είναι η μέγιστη δυνατή ελαχιστοποίηση του σφάλματος υπολογισμού των μετρούμενων ιδιοτιμών . Για αυτό το λόγο:

$b \equiv dz = z_m - z_j$  το σφάλμα μέτρησης των ιδιοτιμών σε κάθε επανάληψη

$A \equiv S$ , το μητρώο ευαισθησίας

$\theta \equiv d\theta = \theta_{j+1} - \theta_j$  και είναι η διαφορά των 2 εκτιμήσεων των παραμέτρων σε 2 διαδοχικές επαναλήψεις

Και ορίζεται:

$$c = U^T b = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$d = V^T \theta = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Τίθεται μια παραδοχή, στην οποία η 2<sup>η</sup> νόρμα του σφάλματος (ή αλλιώς η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος του σφάλματος), γράφεται ως:

$$\|b-A*\hat{\theta}\|^2 = \|c-U^T A*V*d\|^2 = \left\| \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{Bmatrix} c_1 - \Sigma*d_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \right\|^2 \quad (29)$$

Η λύση της νόρμας αυτής προέρχεται όταν:

- $c_1 - \Sigma*d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = \Sigma^{-1}c_1$
- $d_2$  αυθαίρετη τιμή (έστω  $d_2 = 0$ )

Επομένως, σε συσχέτιση με το 1<sup>ο</sup> μέλος της εξίσωσης,

$$\hat{\theta} = V^T \begin{Bmatrix} \Sigma^{-1}c_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = V^T \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = V^T \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T b \quad (30)$$

Σε τελική φάση, με τους απαραίτητους παραλληλισμούς σε όρους σφαλμάτων

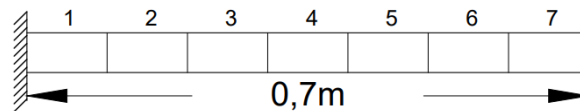
$$\theta_{j+1} = \theta_j + V_j^T \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_j^T (z_m - z_j) \quad (30)'$$

Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι η τεχνική SVD δεν είναι μια ξεχωριστή μέθοδος από ότι η περίπτωση της αντίστροφης μεθόδου. Αποτελεί απλά μια διαφορετική προσέγγιση ως προς τον τομέα υπολογισμού των παραμέτρων.

Μια ομοιότητα που εντοπίζεται μεταξύ των 2 αυτών τεχνικών είναι η ύπαρξη του μητρώου ευαισθησίας  $S$ , η οποία υπολογίζεται επίσης, με τη μέθοδο των Κεντρικών Διαφορών. Παρόλα αυτά, στην τεχνική SVD, το μητρώο αυτό αποσυντίθεται σε 3 επιμέρους μητρώα, και η διαδικασία αυτή, σε προγραμματιστικό επίπεδο, γίνεται μέσω μιας γραμμής του.

### 5.1.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ο φορέας του παρακάτω σχήματος είναι διατομής 25mm x 50mm και μήκους 0,7m και θεωρείται ότι πακτώνεται στο ένα άκρο (πρόβολος). Θεωρείται κάμψη ως προς τον άξονα κάθετο στην μικρή διάστασή του (ασθενής άξονας). Η δέσμη έχει μέτρο ελαστικότητας  $E=30$  GPa και πυκνότητα μάζας  $\rho=2,64$  Mg/m<sup>3</sup>



Εικόνα 1: Πρόβολος μήκους 70cm

Η πρώτη δοκιμή οποιασδήποτε μεθόδου είναι η εφαρμογή της σε ένα προσομοιωμένο παράδειγμα χωρίς θόρυβο ή συστηματικά λάθη. Οποιοσδήποτε αλλαγές παραμέτρων στο μοντέλο πρέπει να προσδιορίζονται επακριβώς.

Οι προσομοιωμένες μετρήσεις υποτίθεται ότι είναι οι σχετικές αλλαγές στις κατώτερες φυσικές συχνότητες του προβόλου και λαμβάνονται από μοντέλο διαιρεμένο σε 7 πεπερασμένα στοιχεία.

Οι φυσικές συχνότητες λαμβάνονται από την ομοιόμορφη ακαμψία, ενώ οι συχνότητες βλάβης προέρχονται από ένα μοντέλο όπου δημιουργούνται τα εξής σενάρια:

- Η ακαμψία του προβόλου είναι ομοιόμορφα μειούμενη κατά 10% σε όλο το μήκος της
- Η ακαμψία του προβόλου είναι μειούμενη κατά 20% στο 4<sup>ο</sup> πεπερασμένο στοιχείο.

Στόχος είναι η διερεύνηση της περίπτωσης αν η ομοιόμορφη βλάβη σε όλο τον πρόβολο ή η τοπική βλάβη μπορεί να εντοπιστεί καλύτερα.

Εδώ, οι παράμετροι θα είναι το γινόμενο  $E \cdot I$ , όπου

$E$ : Το μέτρο ελαστικότητας του στοιχείου και

$I$ , η γεωμετρική ροπή αδρανείας της διατομής που είναι ίση με  $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$

και το μετρούμενο μέγεθος θα είναι οι ιδιοτιμές  $z = \omega^2 = [2\pi f]^2$

Θ ληφθούν υπ' όψιν 6 ιδιομορφές, για τη καλύτερη δυνατή προσέγγιση της επίλυσης του προβλήματος αυτού στο σενάριο βλάβης που τίθεται

Παρακάτω θα περιγραφούν οι παρακάτω διαδικασίες βήμα προς βήμα για την εφαρμογή των μεθόδων αυτών.

Σε αρχικό στάδιο, υπολογίζονται οι φυσικές συχνότητες της κατασκευής πριν και μετά τη βλάβη. Ορίζεται μια συνάρτηση  $f = \text{pronoios\_function}(d)$ , το οποίο σημαίνει ότι με όρισμα εισόδου το

διάνυσμα  $d$ , πρέπει να παραληφθεί ένα διάνυσμα-στήλη με τις φυσικές συχνότητες του φορέα  $f$  που υπολογίζονται με ιδιομορφική ανάλυση.

Τίθεται ένα αρχικό διάνυσμα-στήλη  $d$  (=ανηγμένες παράμετροι), με πλήθος στοιχείων όσο τα στοιχεία στα οποία έχει χωριστεί ο φορέας, το οποίο σε περίπτωση μη ύπαρξης βλάβης, έχει στοιχεία ίσα με 1 (διάνυσμα  $d_{undamaged}$ ). Έτσι, καλώντας την παραπάνω συνάρτηση, υπολογίζονται οι φυσικές συχνότητες πριν τη τοποθέτηση της βλάβης  $f_{initial}$ . Και έπειτα οι αντίστοιχες ιδιοτιμές ως  $z=\omega^2=(2\pi f)^2$ :

$$z_0 = \begin{Bmatrix} 68914.83 \\ 2587560.60 \\ 19492750.41 \\ 32821642.23 \\ 71749487.02 \\ 185349970.70 \end{Bmatrix}$$

Κατά τη τοποθέτηση βλάβης σε μια κατασκευή, αλλάζει το μέτρο ελαστικότητας  $E$  των πεπερασμένων στοιχείων, με αποτέλεσμα να τροποποιηθεί το μητρώο δυσκαμψίας  $[K]$  του φορέα και να αλλάξουν οι φυσικές ιδιοσυχνότητες  $f$ . Τίθεται ένα διάνυσμα  $d_{damaged}$ , με τα τελικά ποσοστά του μέτρου ελαστικότητας, το οποίο υπολογίζει ένα διάνυσμα  $f_{measured}$ , με τις τιμές των συχνοτήτων λόγω βλάβης. Τα δεδομένα αυτά καταλήγουν σε μια διαδρομή όπου από τα  $f_{initial}$  καταλήγουμε στα  $f_{measured}$  μέσω μιας επαναληπτικής αντίστροφης μεθόδου η οποία θα καταλήξει στις τελικές ανηγμένες παραμέτρους  $d_{damaged}$ . Εάν αυτές που θα υπολογιστούν είναι ίδιες ή παρεμφερείς με τη βλάβη που προτοποθετήθηκε στη κατασκευή, τότε η μέθοδος είναι επιτυχής.

Παρακάτω, θα εξεταστούν οι δύο περιπτώσεις ολικής και τοπικής βλάβης αντίστοιχα

#### 5.1.2.1 Σενάριο 1: Ομοιόμορφη κατανομή βλάβης κατά μήκος του προβόλου

##### Περίπτωση 1

$$\theta_{j+1} = \theta_j + S_j^T [S_j S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

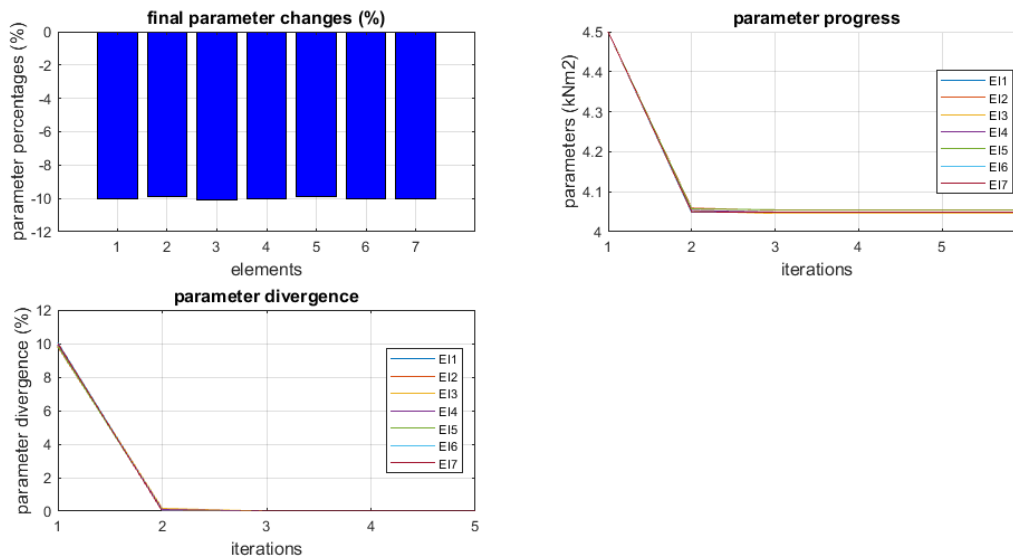
$$J = d\theta^T d\theta$$

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου αυτού, πρώτα υπολογίζονται οι φυσικές συχνότητες που προκύπτουν από ιδιομορφική ανάλυση μετά τη τοποθέτηση βλάβης. Εδώ θεωρείται 10% βλάβη σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία του προβόλου.

Με εκτέλεση της ιδιομορφικής ανάλυσης θα υπολογιστούν οι φυσικές συχνότητες και στη συνέχεια οι μετρούμενες ιδιοτιμές ως  $z_m = \omega_{measured}^2 = (2\pi f_{measured})^2$

$$z_m = \begin{Bmatrix} 62023.34 \\ 2328804.54 \\ 17543475.37 \\ 29539478.01 \\ 64574538.32 \\ 166814973.63 \end{Bmatrix}$$

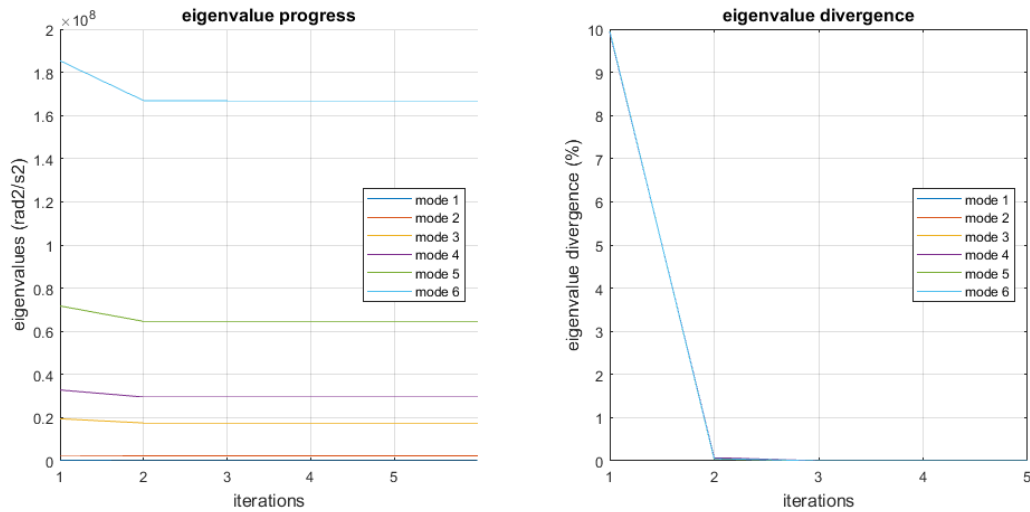
Έπειτα, εφαρμόζοντας τον τύπο εύρεσης του παραμέτρων  $\theta_{j+1}$ , και με κατάλληλους αριθμούς επαναλήψεων, παραλαμβάνονται τα παρακάτω αποτελέσματα,



Εικόνα 2: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

Στα διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων, το επάνω αριστερό διάγραμμα είναι ένα ραβδόγραμμα τελικής μεταβολής των παραμέτρων ανά στοιχείο, το επάνω δεξιά διάγραμμα καταγράφει τη πορεία των τιμών των παραμέτρων με τη πάροδο των επαναλήψεων και το κάτω αριστερά το ποσοστό σύγκλισης μεταξύ 2 διαδοχικών επαναλήψεων.

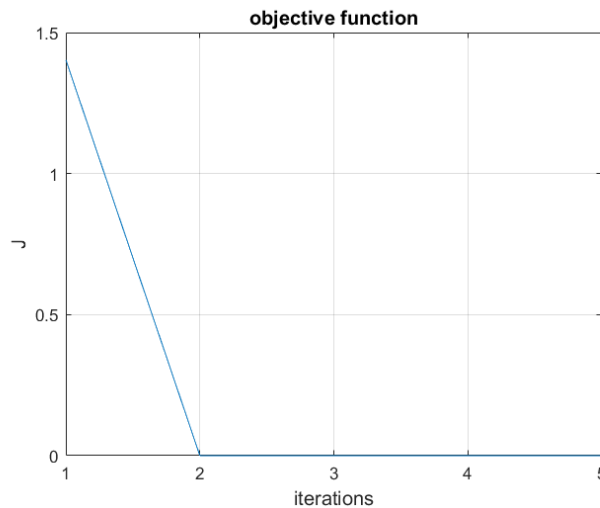




Εικόνα 3: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

Στα διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών, το αριστερό διάγραμμα απεικονίζει τη πορεία των μετρούμενων ιδιοτιμών καθ' όλη τη πορεία των επαναλήψεων και το δεξί το ποσοστό απόκλισης μεταξύ 2 διαδοχικών επαναλήψεων.

Συμπληρωματικά, για την εύρεση της  $n$ -επανάληψης για την οποία θα γίνει σύγκλιση των παραμέτρων θα χρησιμοποιηθεί η εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης  $J(d\theta)$ , με κριτήριο  $J(d\theta) \sim 0$  και το διάγραμμα που θα προκύψει από αυτό θα είναι:

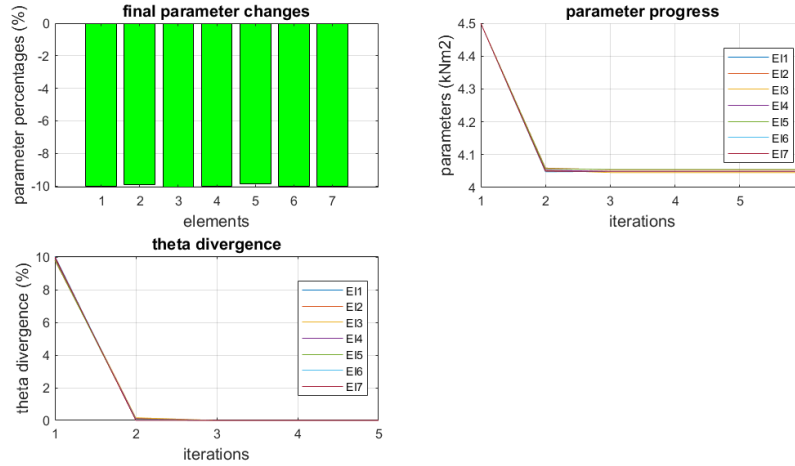


Εικόνα 4: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

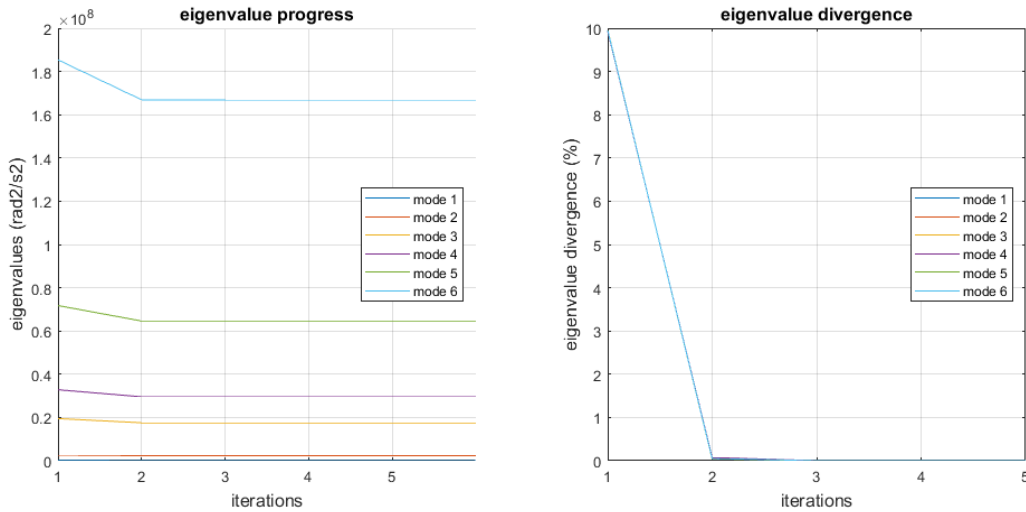
Επομένως, μπορεί μέχρι στιγμής να διατυπωθεί το συμπέρασμα ότι η μέθοδος αυτή με χρήση της εξίσωσης αυτής είναι αρκετά επιτυχής. Από το διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης, χρησιμοποιούνται μόλις 2 επαναλήψεις για σύγκλιση των παραμέτρων και των ιδιοτιμών.

Με την ίδια λογική θα μελετηθούν και οι επόμενες υποπεριπτώσεις, για την καταγραφή ενδεχόμενης διαφοράς η ομοιότητας με την υποπερίπτωση που διερευνήθηκε.

Δοκιμάζοντας και τη τεχνική του SVD, παραλαμβάνονται τα αποτελέσματα:



Εικόνα 5: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 6: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

Συνεπώς αποδεικνύεται ότι η μέθοδος SVD είναι μια εναλλακτική τεχνική της αντίστροφης μεθόδου, μαζί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, καθώς το σενάριο της βλάβης που τέθηκε επαληθεύτηκε και επίσης, τα διαγράμματα κατάστασης δεν μεταβλήθηκαν καθόλου.

### Περίπτωση 2

$$\theta_{j+1} = \theta_j + W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T [S_j W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta$$

Στην περίπτωση αυτή, μαζί με το μητρώο ευαισθησίας  $S$ , εντάσσεται και το μητρώο βάρους των παραμέτρων του φορέα,  $W_{\theta\theta}$ , το οποίο είχε περιγραφεί. Εδώ, γίνεται εύλογη παραδοχή ότι η τυπική απόκλιση των  $\theta$  είναι ίση με ένα ποσοστό των αρχικών  $\theta$ .

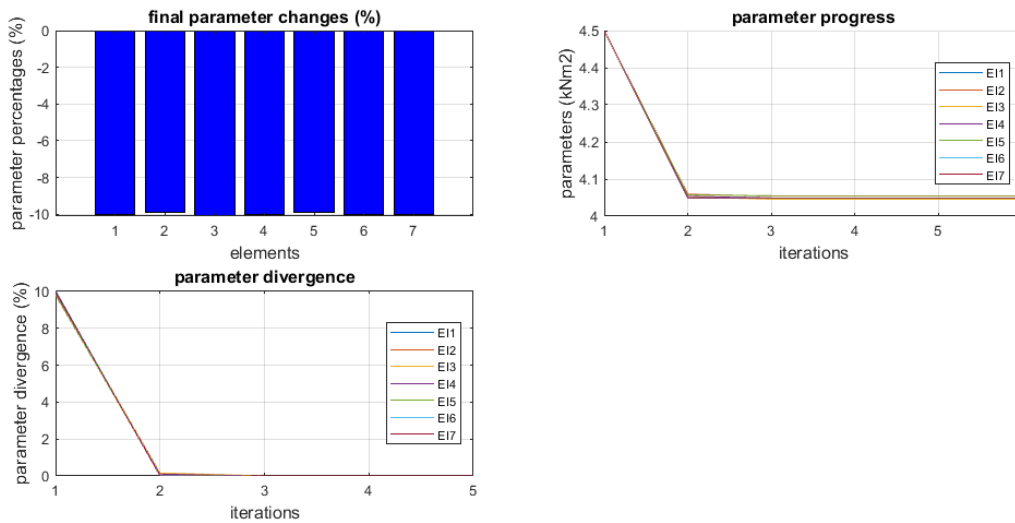
Τίθενται κατώτερο και ανώτερο ποσοστό το 0,5% και το 5% και μάλιστα ομοιόμορφα κατά μήκος του φορέα.

Υποπερίπτωση 1:  $\alpha=0.5\%$

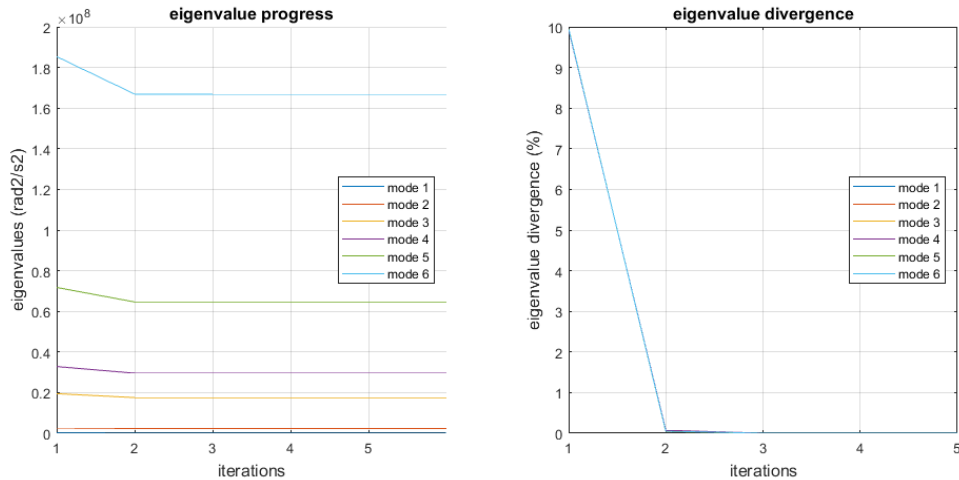
Το βαρυτικό μητρώο θα είναι:

$$W_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 1975.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1975.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1975.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1975.31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1975.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1975.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1975.31 \end{bmatrix}$$

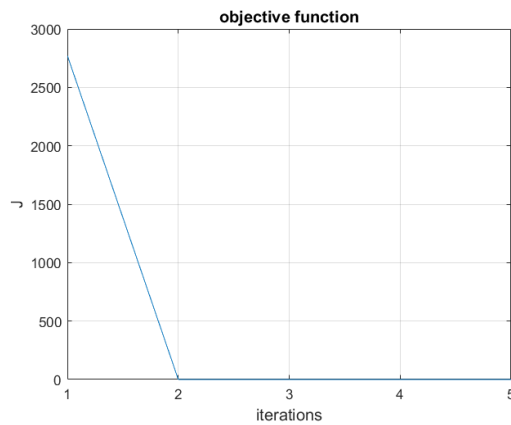
Και τα διαγράμματα κατάστασης των μεγεθών θα είναι:



Εικόνα 7: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 8 Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 9: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

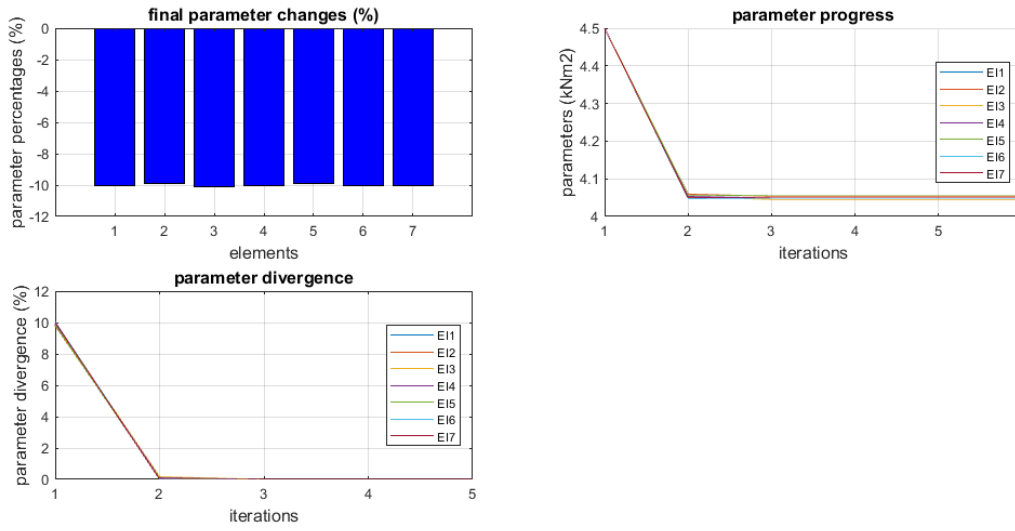
Παρατηρείται ότι η παρουσία του βαρυτικού μητρώου  $W_{\theta\theta}$ , δεν επηρεάζει καθόλου τη συμπεριφορά των παραμέτρων σε σχέση με την 1<sup>η</sup> περίπτωση, καθώς το μητρώο ευαισθησίας παραμένει ίδιο, όπως και η κατάσταση που επικρατεί καθ' όλη την επαναληπτική διαδικασία. Επομένως και αυτή η περίπτωση μπορεί να είναι το ίδιο αξιόπιστη με τη προηγούμενη.

Υποπερίπτωση 2:  $\alpha=5\%$

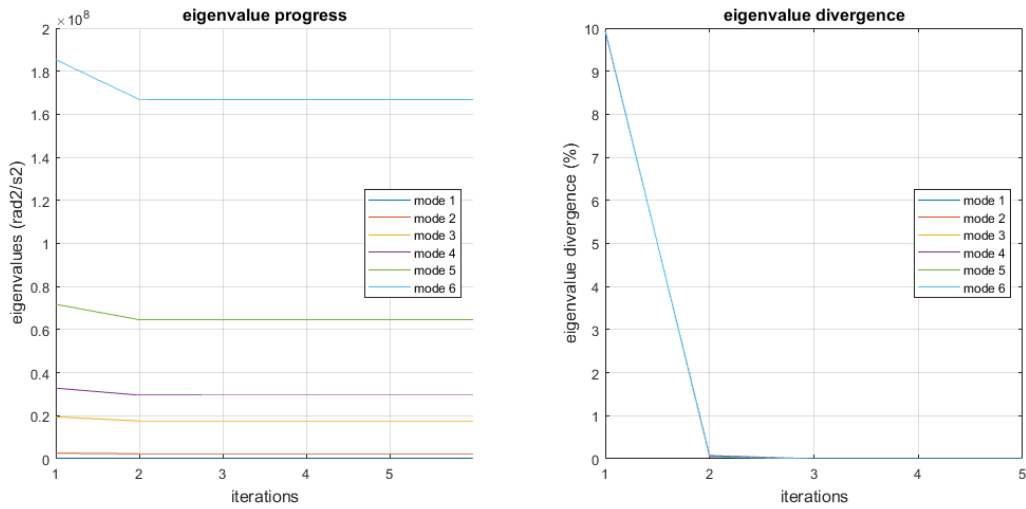
Το βαρυτικό μητρώο θα είναι ίσο με:

$$W_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 19.753 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.753 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19.753 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.753 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.753 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19.753 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19.753 \end{bmatrix}$$

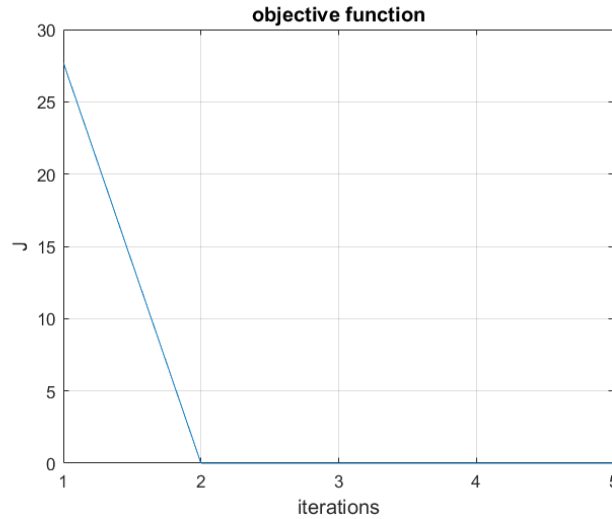
Και τα διαγράμματα των μεγεθών θα είναι:



Εικόνα 10: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 11: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 12: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Στην υποπερίπτωση αυτή, παρατηρείται ότι με την αύξηση της τυπικής απόκλισης των παραμέτρων (που συνεπάγεται μείωση διαγώνιων στοιχείων του  $W_{\theta\theta}$ ), η συμπεριφορά των μεγεθών παραμένει αμετάβλητη, όπως και το πλήθος των επαναλήψεων για «απόλυτη» σύγκλιση, ενώ το μονό που μεταβάλλεται είναι η αρχική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από τη τιμή 2550 στη τιμή 27.5

### Περίπτωση 3

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta + \varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon$$

Πλέον συμπεριλαμβάνεται και το βαρυτικό μητρώο ιδιοτιμών  $W_{\varepsilon\varepsilon}$ , για το οποίο, τίθεται εύλογη παραδοχή ότι η τυπική απόκλιση είναι ίση με το 0.5% των μετρούμενων ιδιοτιμών.

Λόγω αλληλεπίδρασης μεταξύ των 2 μητρώων βαρών αυτών, η περίπτωση αυτή θα εξεταστεί σε 4 συνολικές υποπεριπτώσεις, για διάφορους συνδυασμούς κατώτερων και ανώτερων τυπικών αποκλίσεων των ιδιοτιμών και των παραμέτρων.

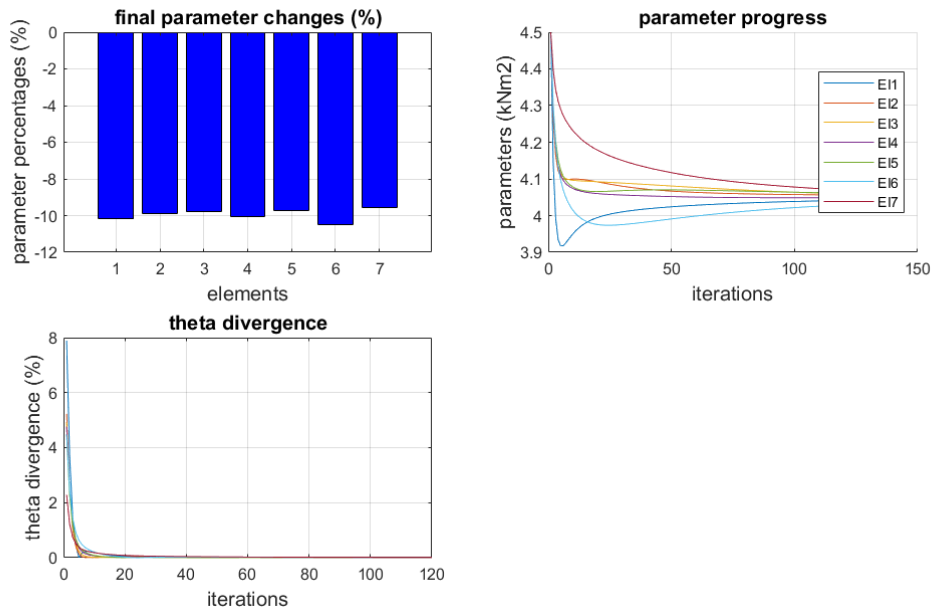
Τίθενται κατώτερο και ανώτερο ποσοστό το 0,5% και το 5% και μάλιστα ομοιόμορφα κατά μήκος του φορέα.

#### Υποπερίπτωση 1: $\alpha_\varepsilon=0.5\%$ , $\alpha_\theta=0.5\%$

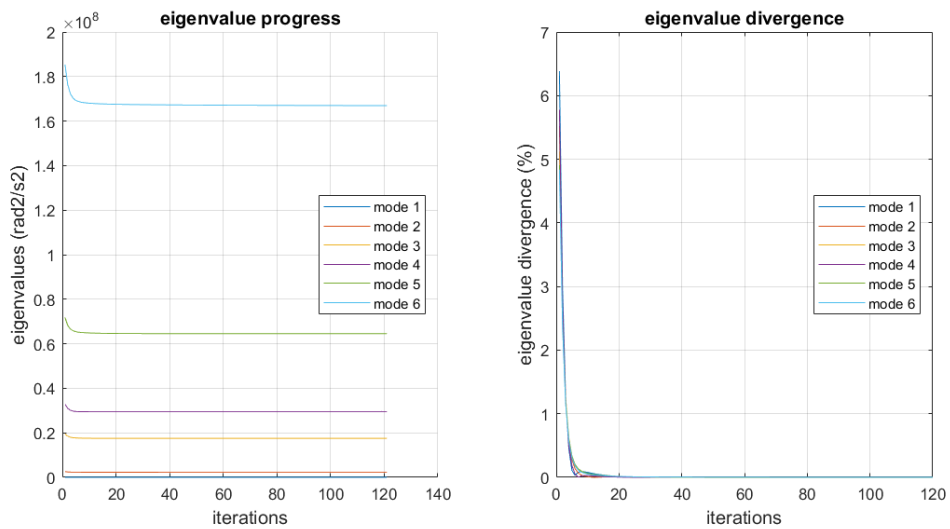
Για ποσοστό 0,5%, το βαρυτικό μητρώο  $W_{\varepsilon\varepsilon}$  θα είναι:

$$W_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1.04 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.38 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \cdot 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.58 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.59 \cdot 10^{-12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.44 \cdot 10^{-12} & 0 \end{bmatrix}$$

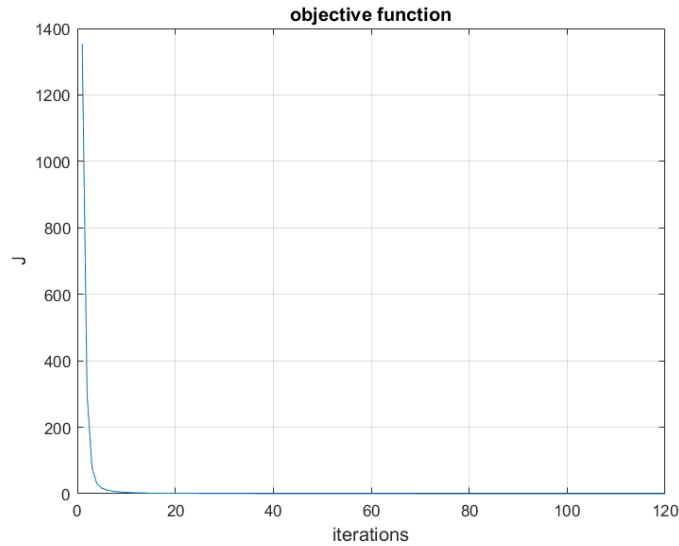
Και η τελική κατάσταση των μεγεθών θα είναι:



Εικόνα 13: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 14: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



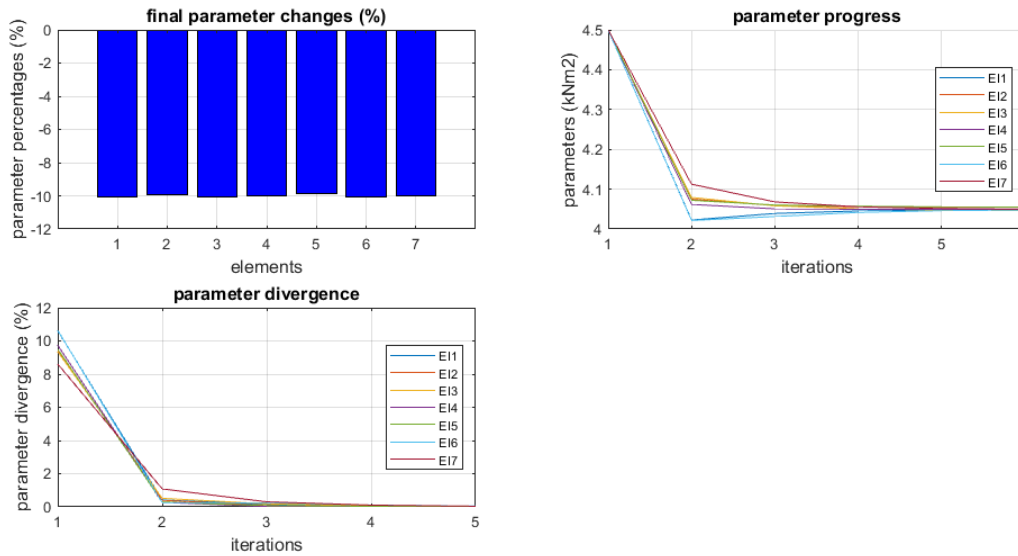
Εικόνα 15: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Στην υποπερίπτωση αυτή, παρατηρείται ότι η σύγκλιση των παραμέτρων και των ιδιοτιμών είναι πιο αργή, καθώς από το διάγραμμα πορείας των παραμέτρων με τις επαναλήψεις, απαιτούνται 100 και παραπάνω επαναλήψεις για σύγκλιση (20 φορές παραπάνω από τις 2 προηγούμενες υποπεριπτώσεις).



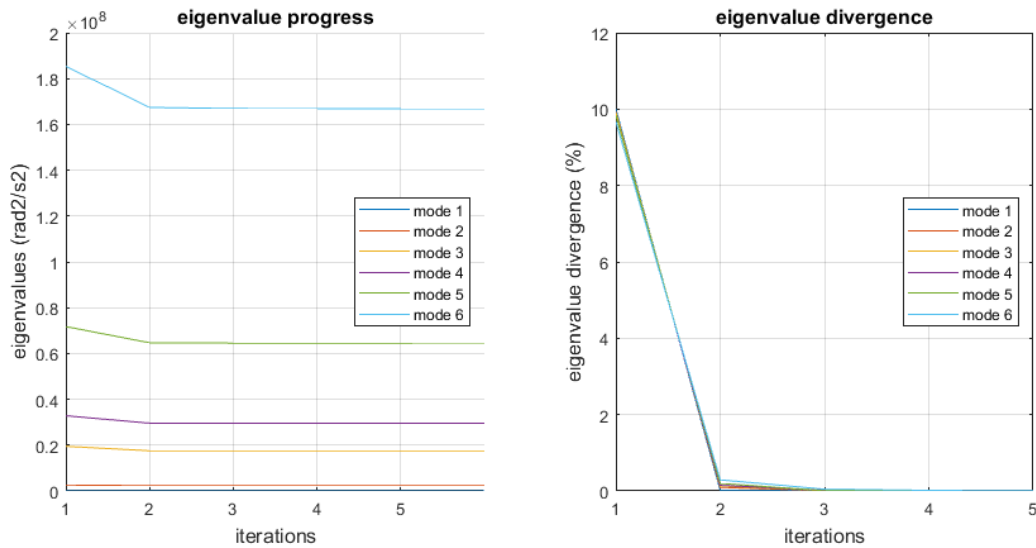
Υποπερίπτωση 2:  $\alpha_\epsilon=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$

Τα διαγράμματα των μεγεθών θα είναι:

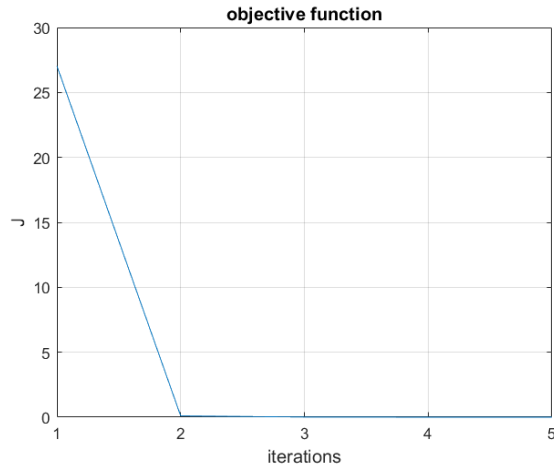


Εικόνα 16: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

Στο σημείο αυτό, με αύξηση προς τυπικής απόκλισης των παραμέτρων παρατηρείται μια ροπή των διαγραμμάτων προς αυτά των προηγούμενων περιπτώσεων, δηλαδή η μια καμπύλη να ταυτίζεται με την άλλη.



Εικόνα 17: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



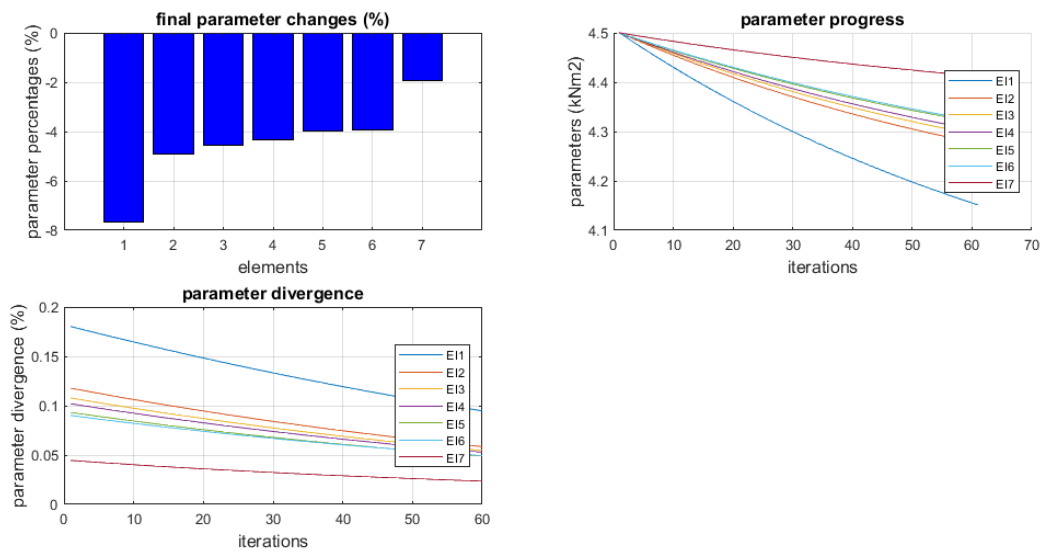
Εικόνα 18: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Υποπερίπτωση 3:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$

Για ποσοστό τυπικής απόκλισης των παραμέτρων 5%, το μητρώο  $W_{\epsilon\epsilon}$ , θα είναι ίσο με:

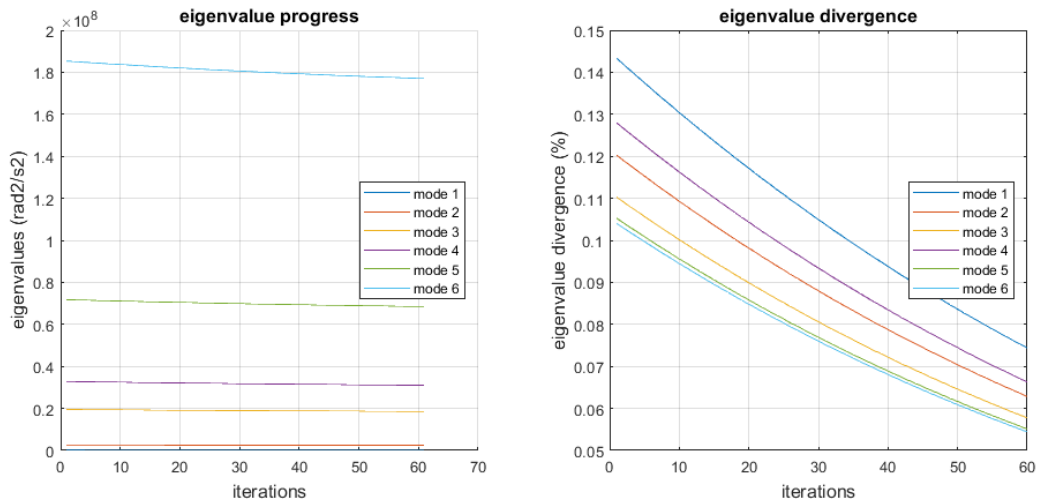
$$W_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} 1.04 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.38 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \cdot 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.58 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.59 \cdot 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.44 \cdot 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Και τα διαγράμματα μεγεθών θα είναι:

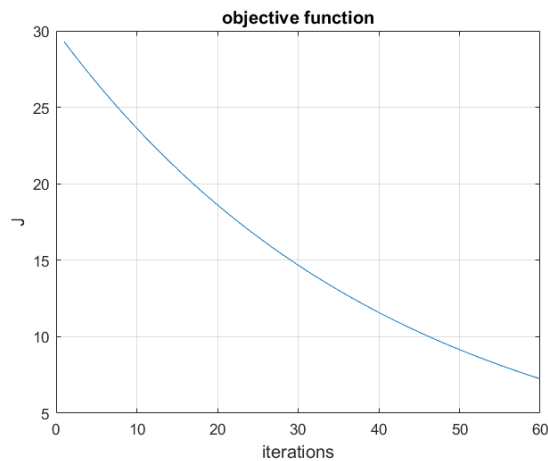


Εικόνα 19: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

Εδώ, η αύξηση της τυπικής απόκλισης του σφάλματος, οδηγεί σε μη επαλήθευση του σεναρίου που τέθηκε, καθώς εντοπίζεται μεγάλη βλάβη στο πακτωμένο πεπερασμένο στοιχείο και τα υπόλοιπα ακολουθούν μια φθίνουσα σειρά.



Εικόνα 20: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

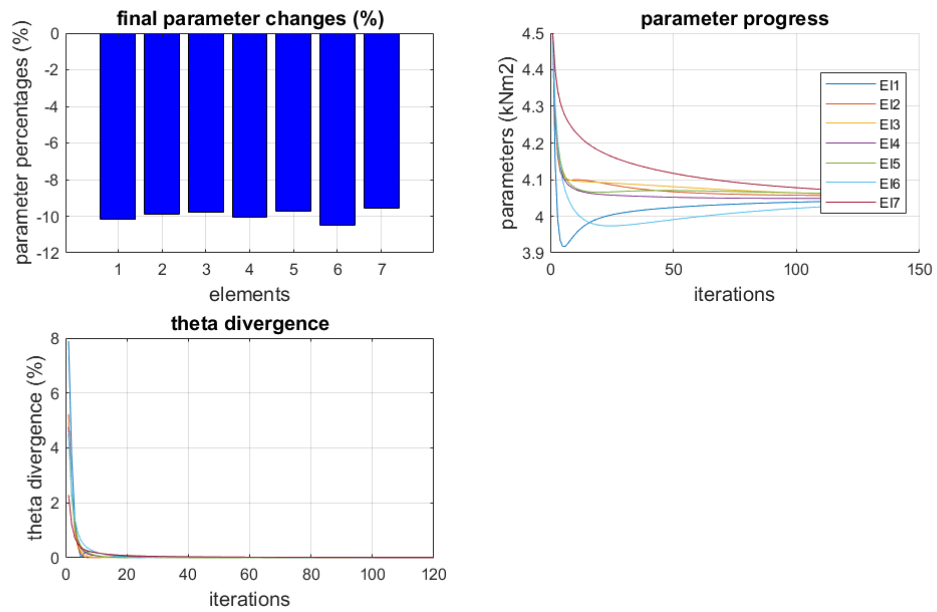


Εικόνα 21: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

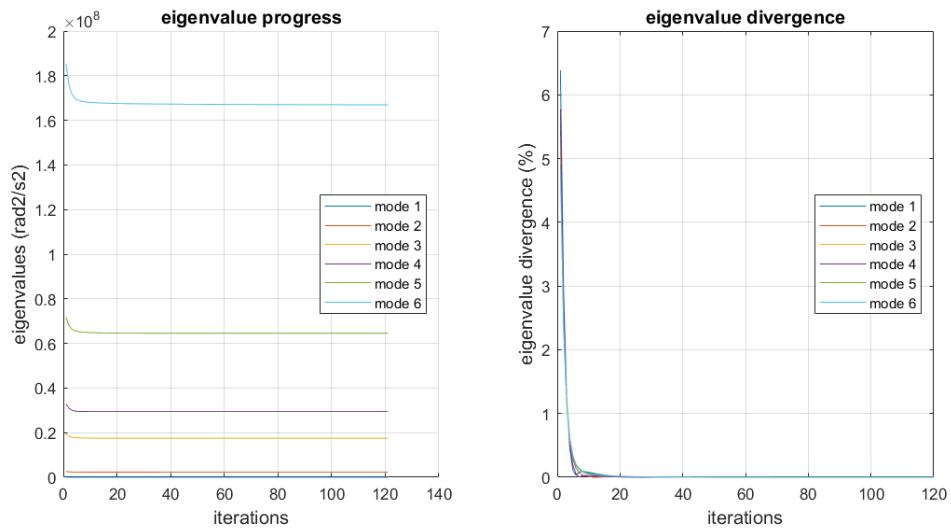
Ωστόσο, ενδείκνυται να χρειαστούν περισσότερες επαναλήψεις για περαιτέρω παρατηρήσεις της συμπεριφοράς των μεγεθών.

Υπο περίπτωση 4:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$

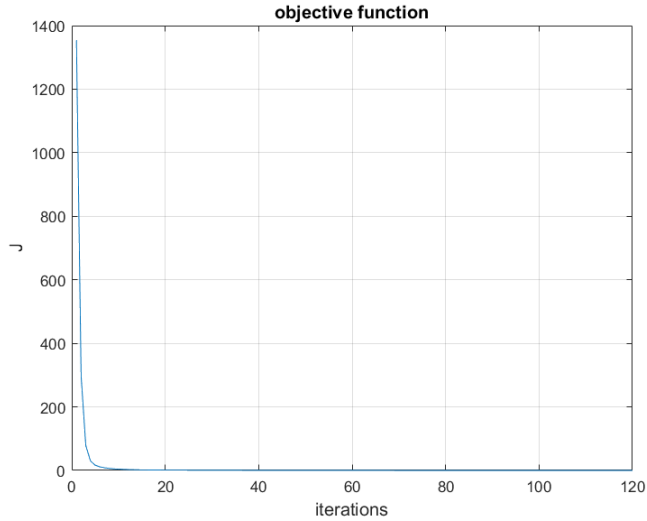
Τα διαγράμματα των μεγεθών είναι:



Εικόνα 22: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 23: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 24: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

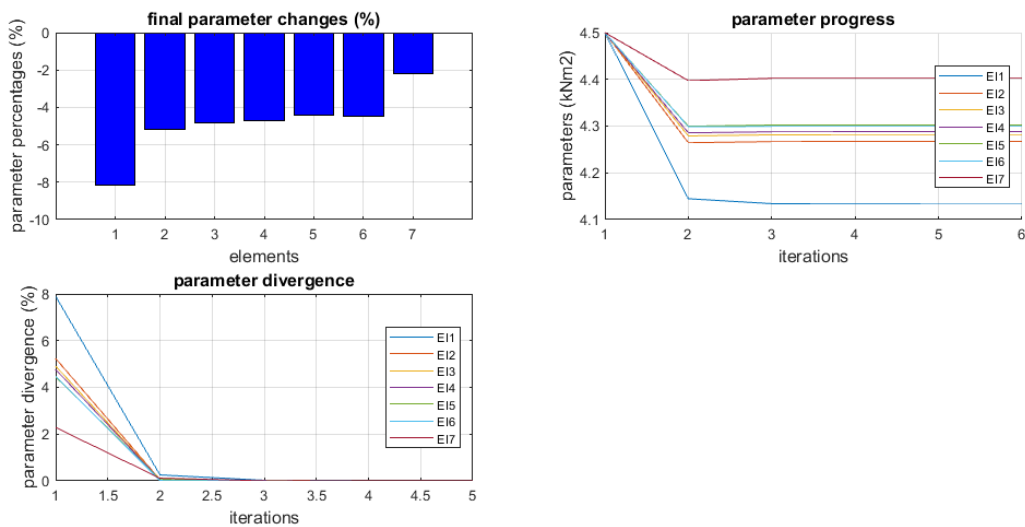
Η συμπεριφορά των μεγεθών είναι η ίδια με την υποπερίπτωση 1. Επομένως εξάγεται ένα αρχικό συμπέρασμα ότι για ίσα ποσοστά τυπικών αποκλίσεων, η διαδικασία είναι αρκετά αργή. Απομένει η εξέταση η περίπτωση σφάλματος των παραμέτρων ως προς το αρχικό διάνυσμα  $\theta_0$ .

#### Περίπτωση 4

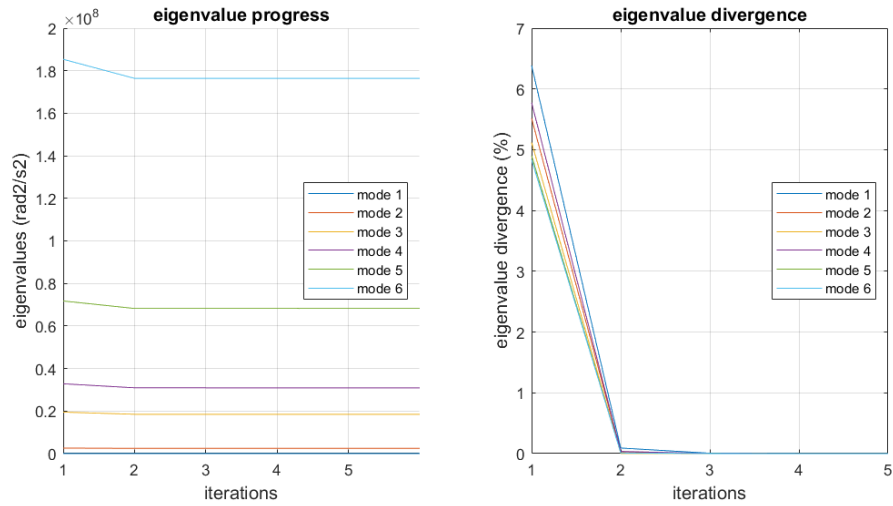
$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\epsilon\epsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} \{S_j^T W_{\epsilon\epsilon} (z_m - z_j) - W_{\theta\theta} (\theta_j - \theta_0)\}$$

$$J = (\theta_j - \theta_0)^T W_{\theta\theta} (\theta_j - \theta_0) + \epsilon^T W_{\epsilon\epsilon} \epsilon$$

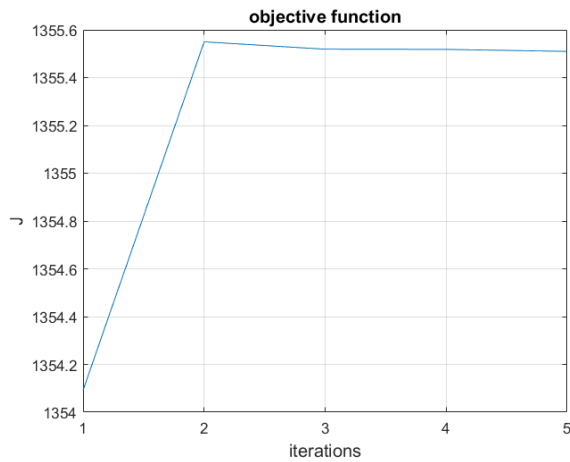
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\epsilon = 0.5\%$ ,  $\alpha_\theta = 0.5\%$



Εικόνα 25: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 26: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



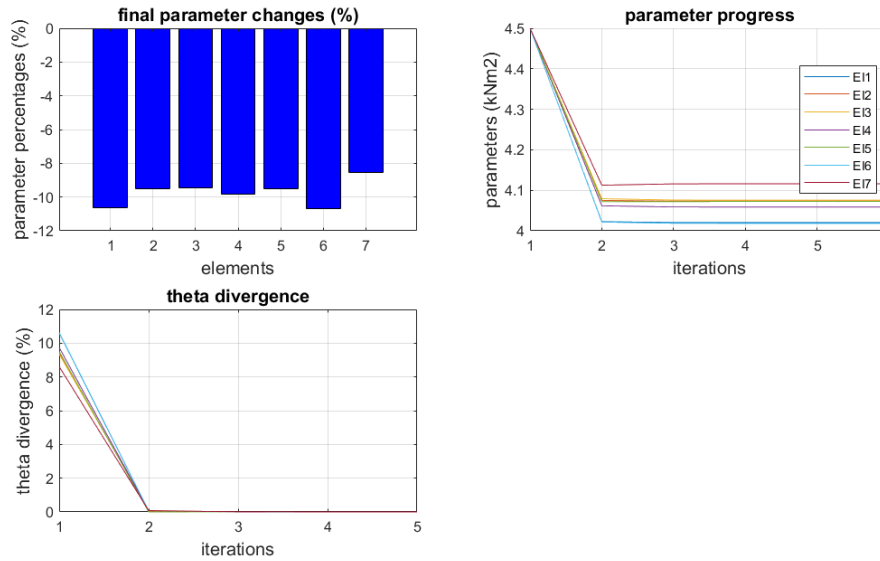
Εικόνα 27: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Στην περίπτωση αυτή, οι δυσκαμψίες των στοιχείων, εμφάνισαν μια συγκλίνουσα μεν συμπεριφορά από τη 3<sup>η</sup> επανάληψη και ύστερα, αποκλίνουσα δε από την ομοιόμορφη βλάβη που είχε τεθεί σαν σενάριο. Αυτό αποτελεί ένα δείγμα ακαταλληλότητας του συνδυασμού αυτού για επίλυση προβλήματος βλάβης.

Το διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης, σε αντίθεση με τις προηγούμενες εκδοχές, εμφανίζει αντίθετη συμπεριφορά, λόγω ανοδικής πορείας, αλλά και της μεγάλης μη μηδενικής τιμής που δέχεται, παρόλης της σύγκλισης.

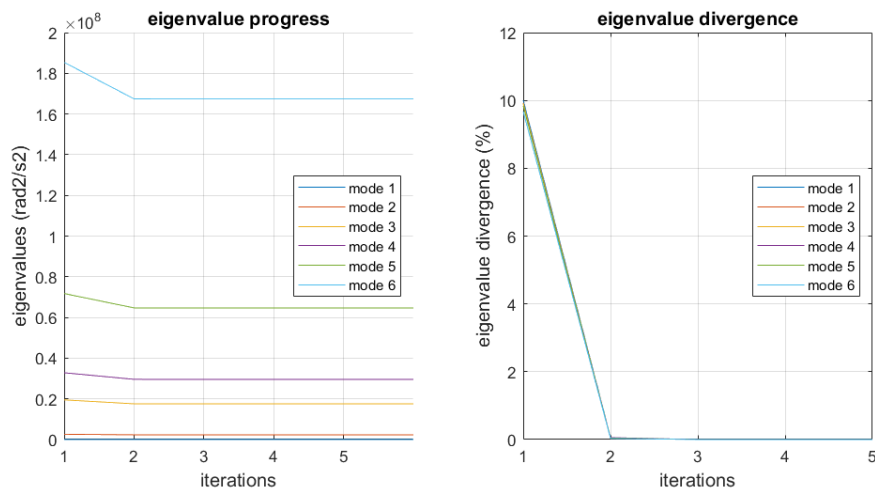
Υποπερίπτωση 2:  $\alpha_\epsilon=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$

Τα διαγράμματα των μεγεθών θα είναι:

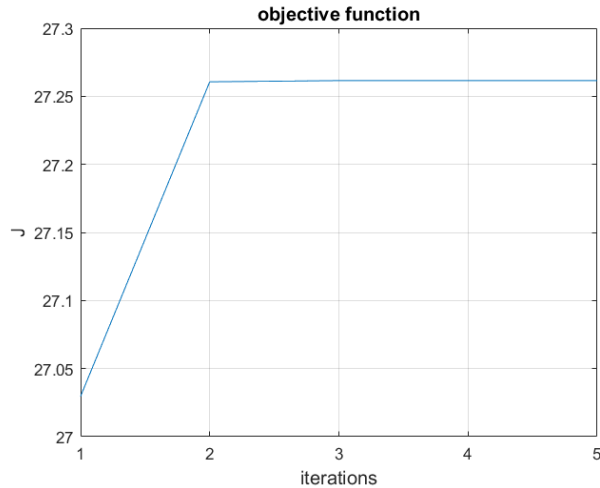


Εικόνα 28: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

Η αύξηση της τυπικής απόκλισης των παραμέτρων, βελτιώνει την συμπεριφορά των δυσκαμψιών ως προς την αναμενόμενη, ωστόσο δεν θα την επαληθεύσει λόγω τελικής σύγκλισης από τη 2<sup>η</sup> επανάληψη και ύστερα



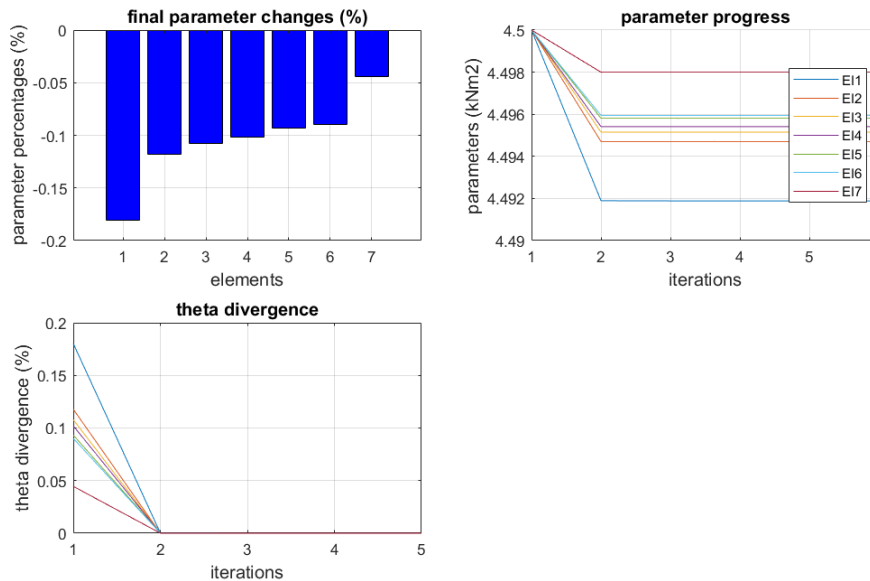
Εικόνα 29: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 30: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Όπως και στην προηγούμενη υποπερίπτωση, η αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει ανοδική πορεία, συγκλίνοντας τη τιμή 27.27 ικανοποιώντας όμως τη μία από τις 2 ιδιότητες της αντικειμενικής συνάρτησης, που είναι η σύγκλιση των δυσκαμψιών. Αυτή που δεν ικανοποιείται είναι η σχεδόν μηδενική τιμή στην τελευταία επανάληψη.

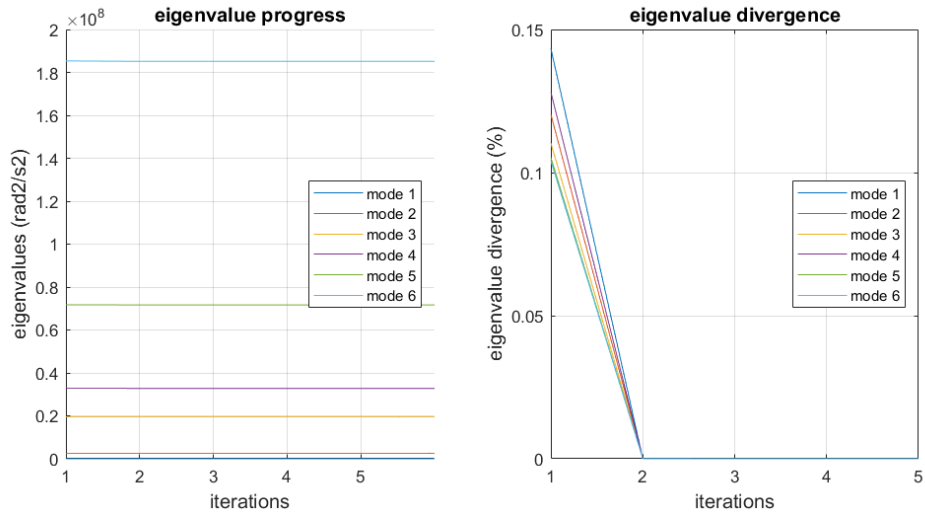
Υποπερίπτωση 3:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$



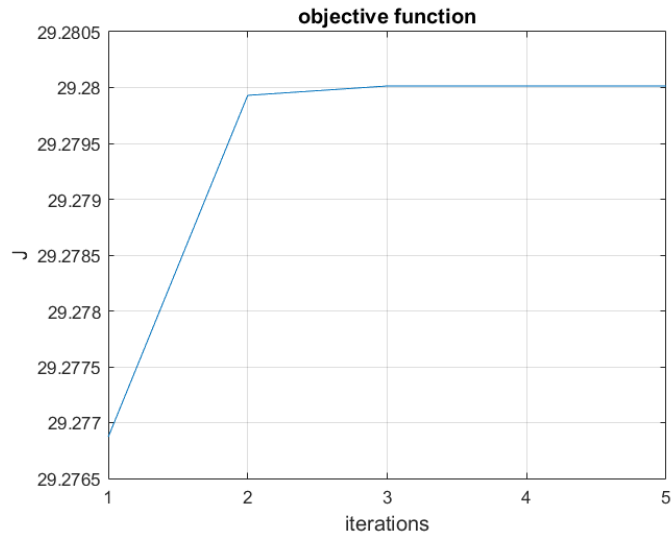
Εικόνα 31: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

Εδώ, η συμπεριφορά των παραμέτρων είναι παρόμοια με την 1<sup>η</sup> υποπερίπτωση. Συγκλίνουσα μεν καθ' όλη τη πορεία των επαναλήψεων, αποκλίνουσα δε από το αρχικό σενάριο βλάβης.



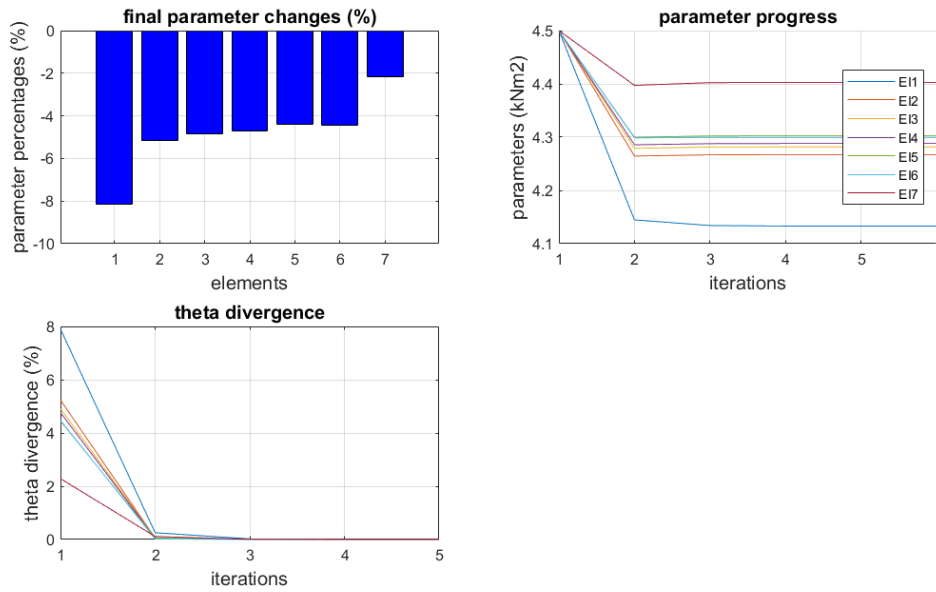


Εικόνα 32: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

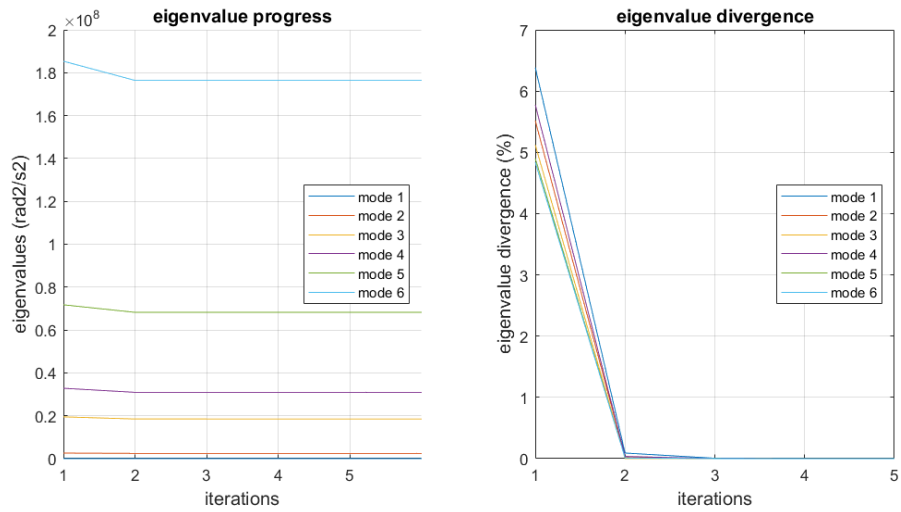


Εικόνα 33: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

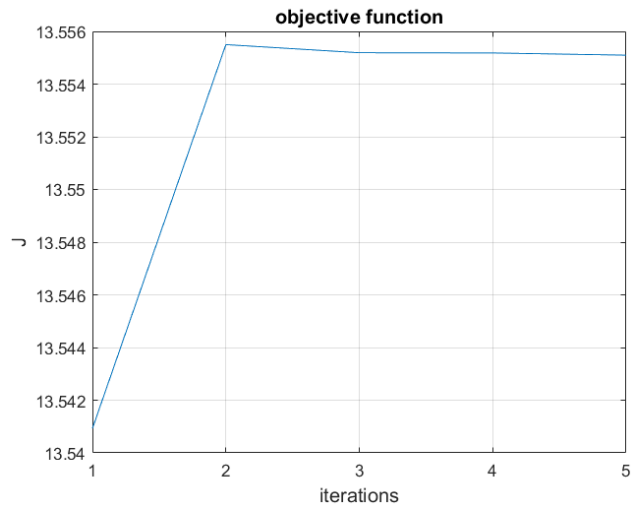
Υποπερίπτωση 4:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 34: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 35: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 36: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

5.1.2.2 Σενάριο 2:Μείωση του μέτρου ελαστικότητας κατά 20% στο 4<sup>ο</sup> στοιχείο

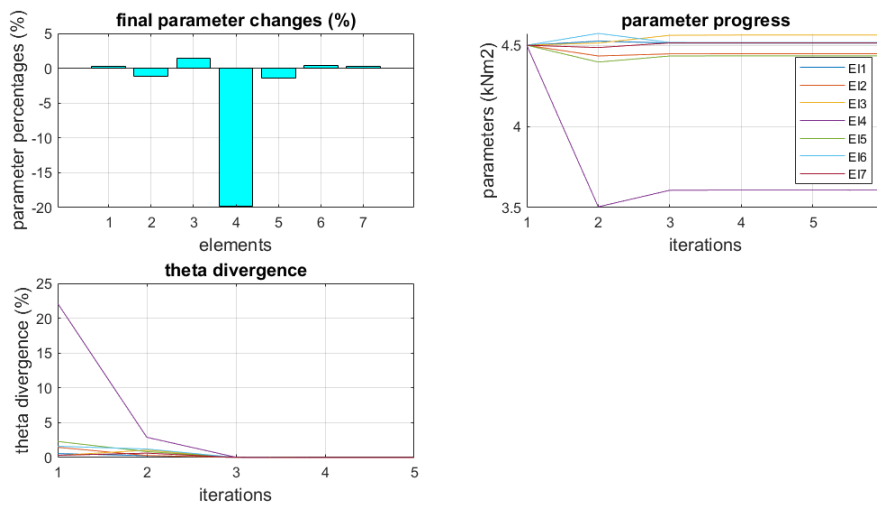
Το διάνυσμα των ιδιοτιμών βλάβης θα είναι ίσο με:

$$z_m = \begin{Bmatrix} 67743,64 \\ 2425404,38 \\ 19344423,04 \\ 31680513,49 \\ 68532666,25 \\ 180171399,89 \end{Bmatrix}$$

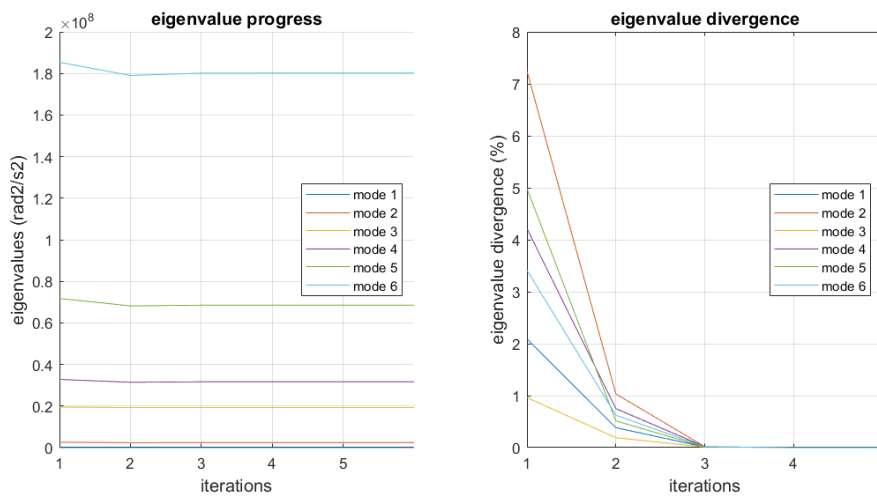
Περίπτωση 1

$$\theta_{j+1} = \theta_j + S_j^T [S_j S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

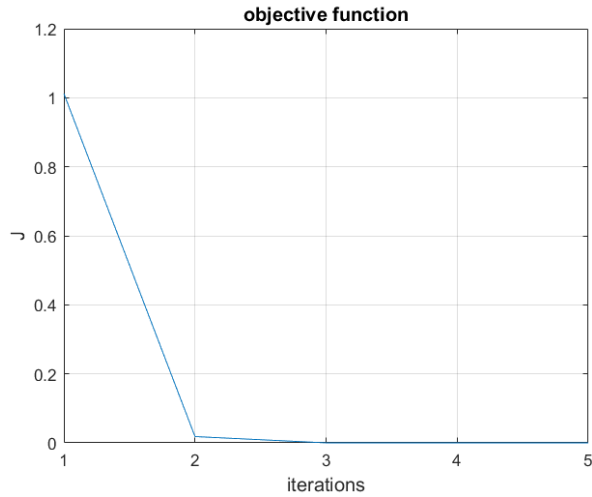
$$J = d\theta^T d\theta$$



Εικόνα 37: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



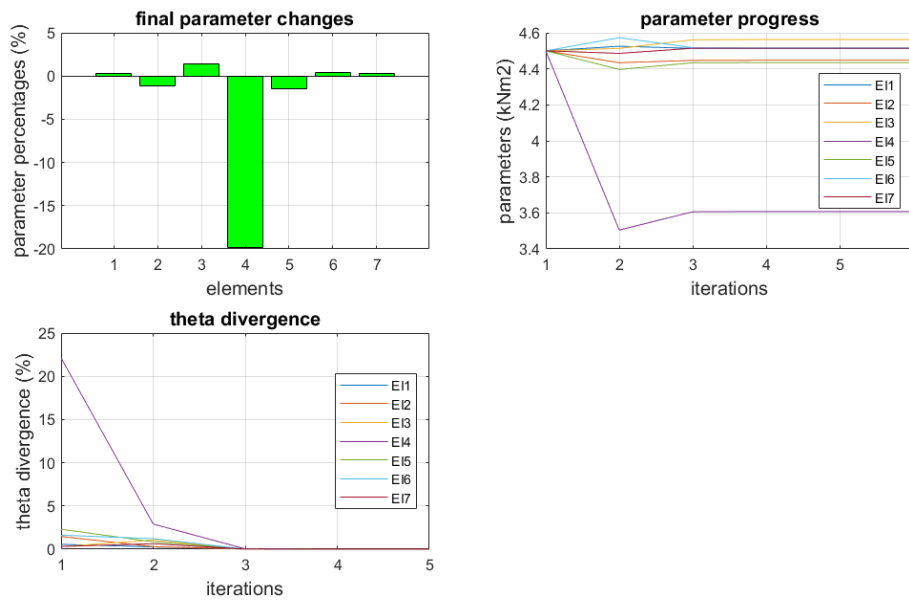
Εικόνα 38: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



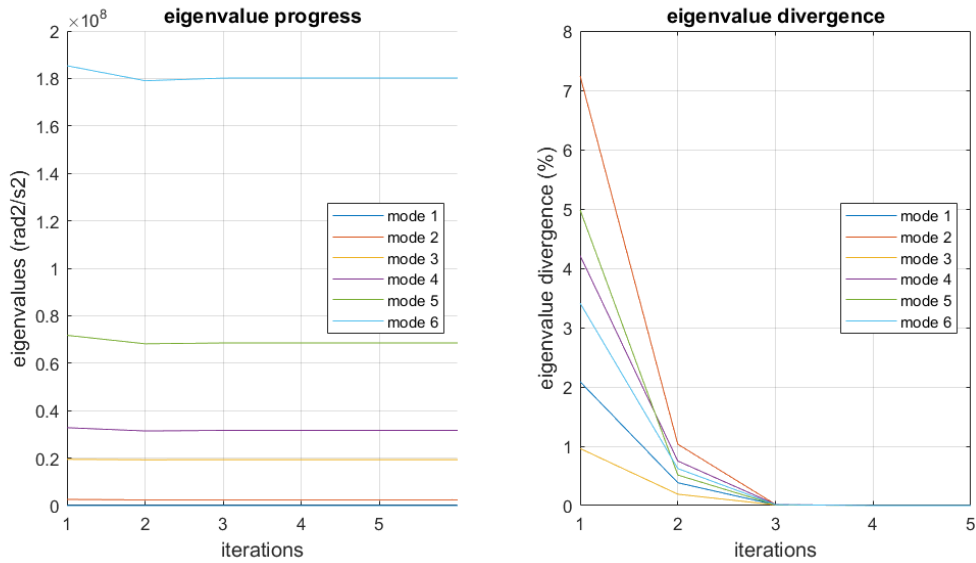
Εικόνα 39: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Επομένως, όπως και στη περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής βλάβης, η διαδικασία είναι πολύ γρήγορη, με μόλις 2-3 επαναλήψεις για σχεδόν απόλυτη σύγκλιση

Εφαρμόζοντας την τεχνική του SVD, προκύπτει:



Εικόνα 40: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 41: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

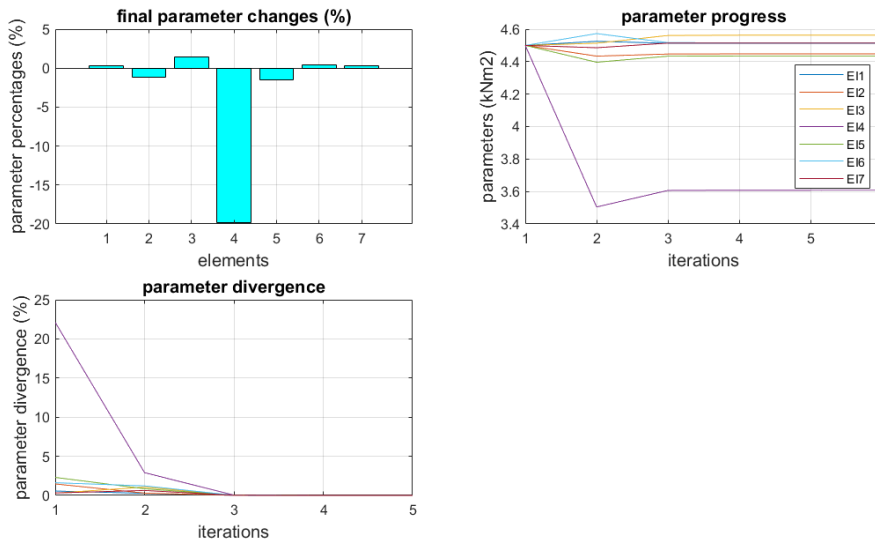
Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα ότι δεν αποτελεί μια ανεξάρτητη μέθοδος για την επίλυση ενός προβλήματος βλάβης, αλλά στην πραγματικότητα η επικαιροποίηση των μεγεθών έχει διαφορετική μορφή.

### Περίπτωση 2

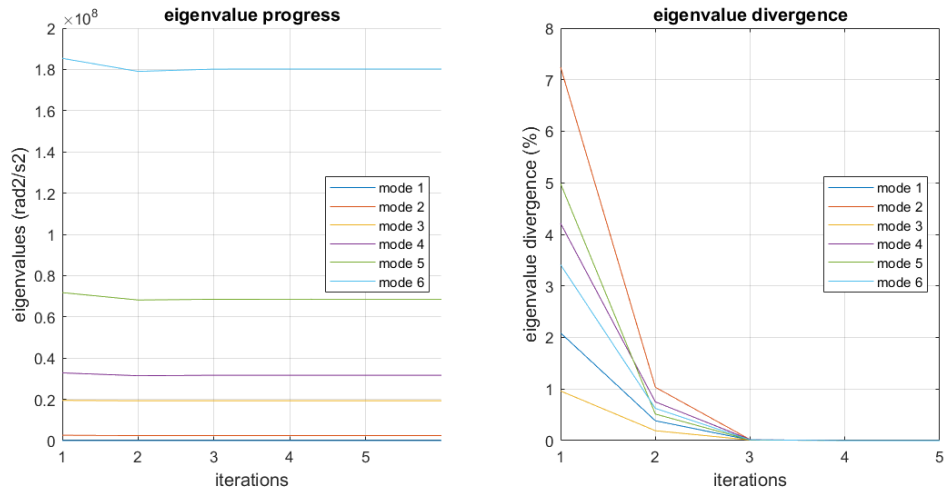
$$\theta_{j+1} = \theta_j + W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T [S_j W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta$$

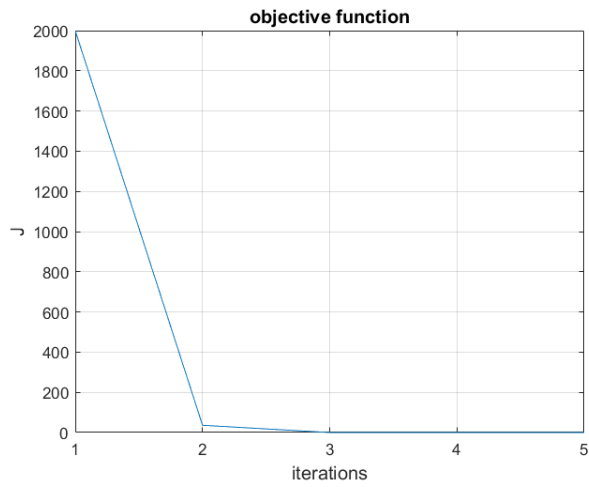
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha=0.5\%$



Εικόνα 42: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

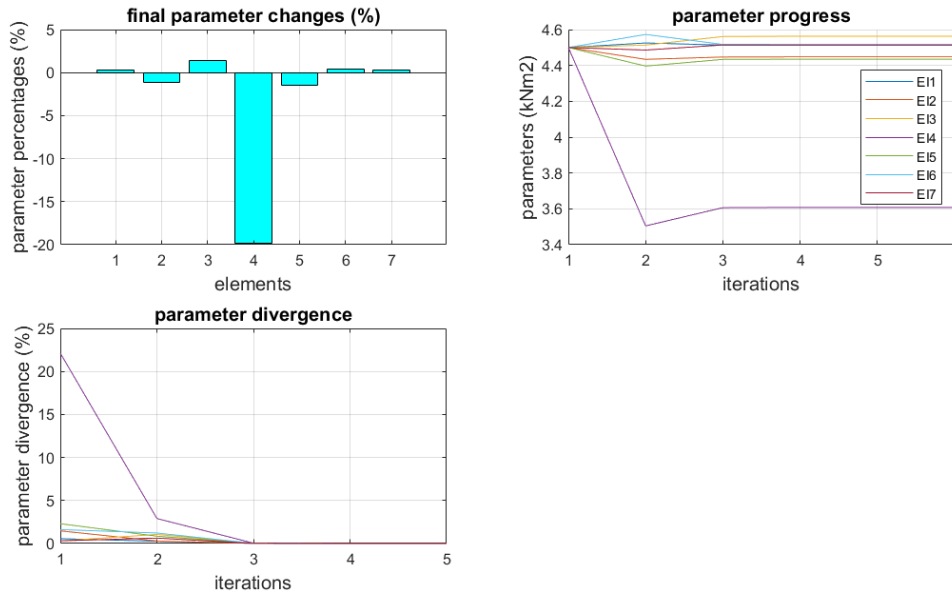


Εικόνα 43: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

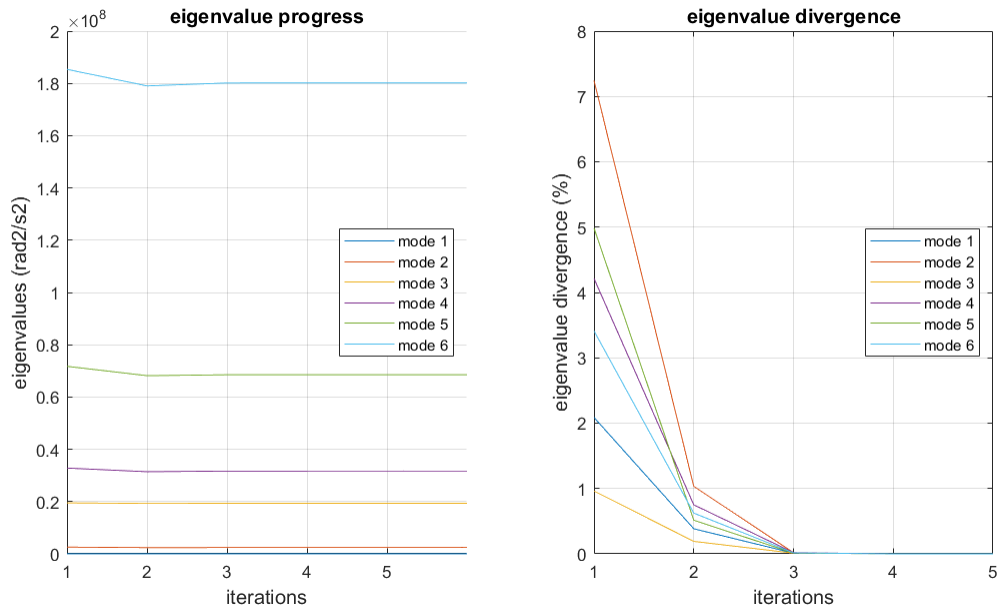


Εικόνα 44: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Υποερίπτωση 2:  $\alpha=5\%$

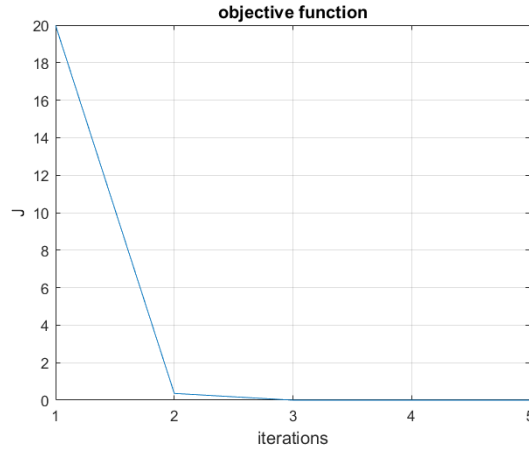


Εικόνα 45: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 46: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών





Εικόνα 47: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

**Περίπτωση 3**

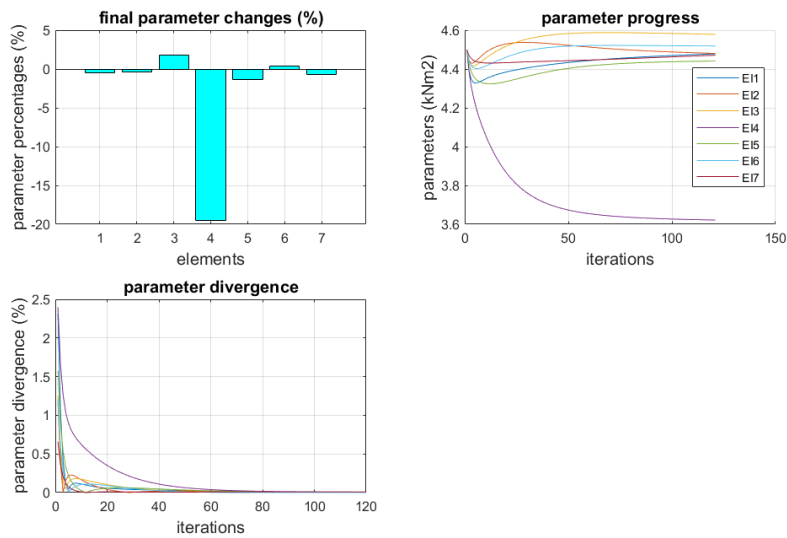
$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\epsilon\epsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} S_j^T W_{\epsilon\epsilon} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta + \epsilon^T W_{\epsilon\epsilon} \epsilon$$

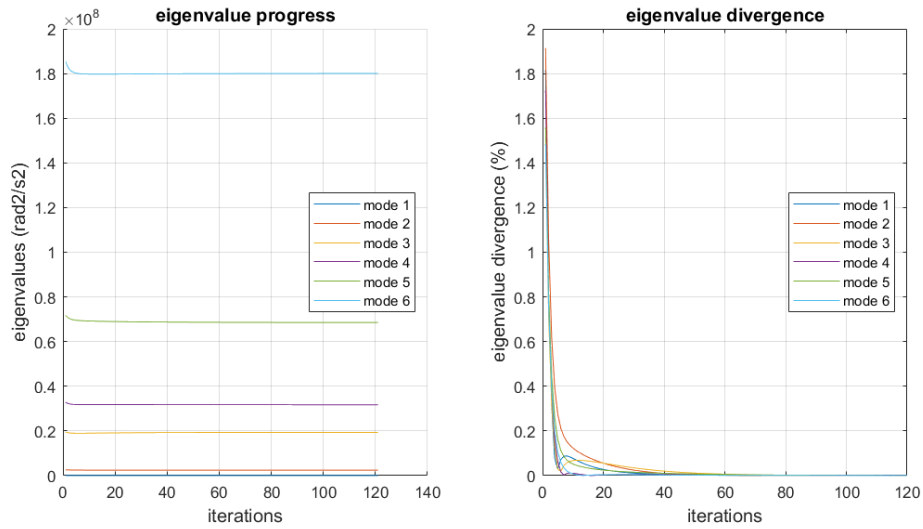
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\epsilon = 0.5\%$ ,  $\alpha_\theta = 0.5\%$

Για ποσοστό 0.5%, το βαρυτικό μητρώο  $W_{\epsilon\epsilon}$ , είναι ίσο με:

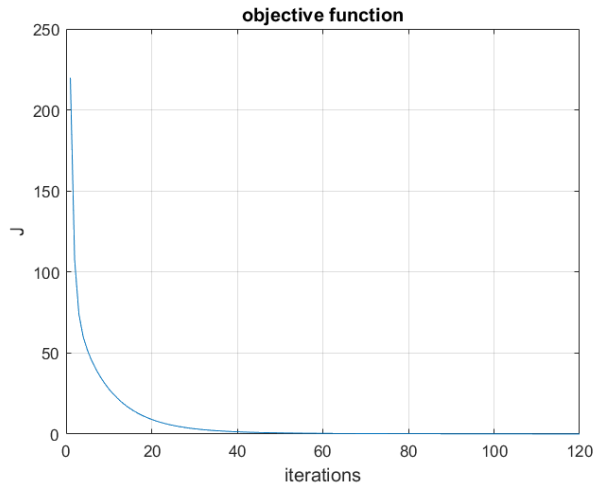
$$W_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} 8.72 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.8 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \cdot 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.99 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.52 \cdot 10^{-12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.23 \cdot 10^{-12} & 0 \end{bmatrix}$$



Εικόνα 48: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



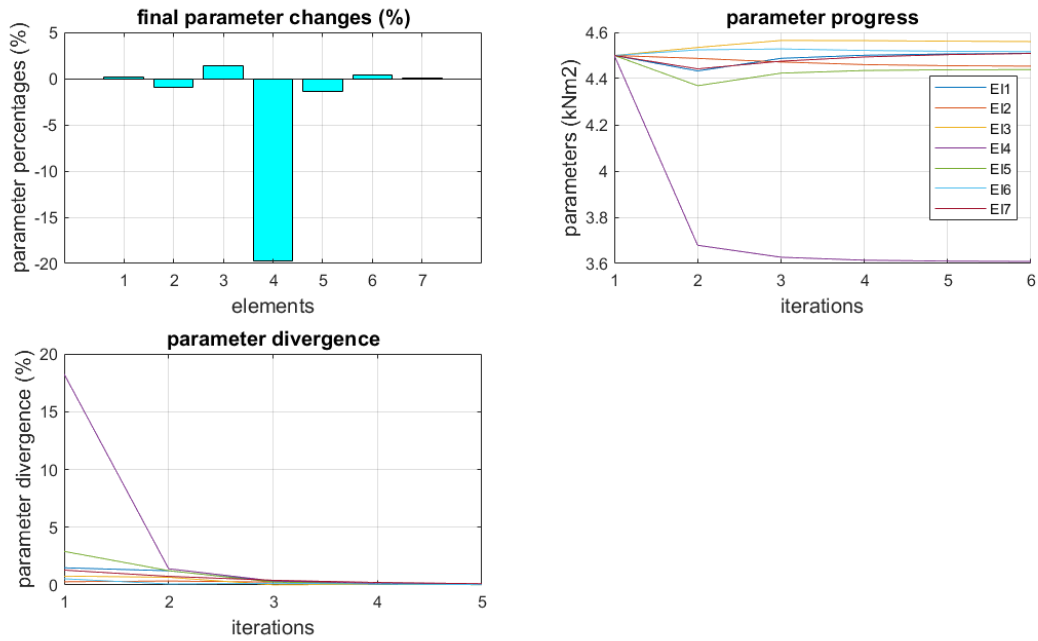
Εικόνα 49: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



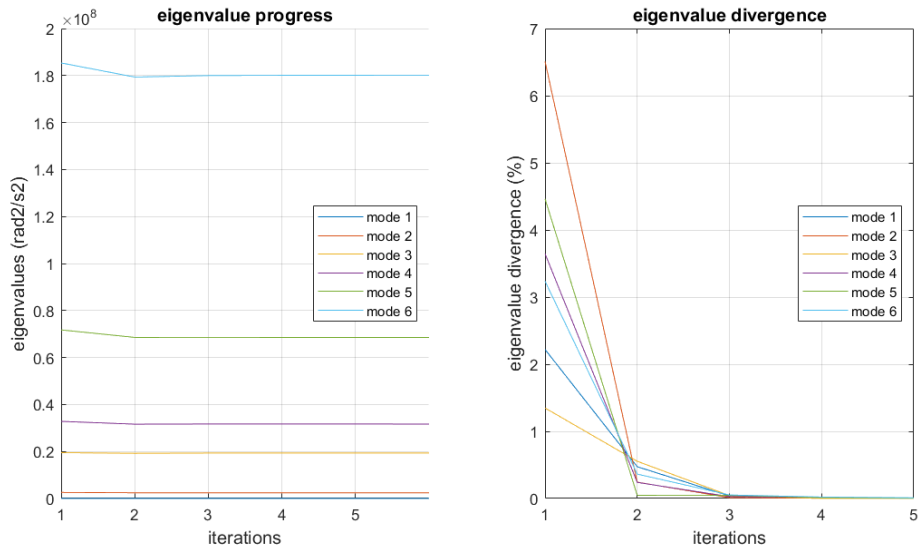
Εικόνα 50: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Η αντικειμενική συνάρτηση, εμφανίζει ένα διάγραμμα υπερβολής, όπως επίσης τα υπόλοιπα διαγράμματα εμφανίζουν μια καμπυλότητα, η οποία διαμορφώνεται επίσης από τις μικρές διαδοχικές μεταβολές που υφίστανται οι παράμετροι και οι ιδιοτιμές.

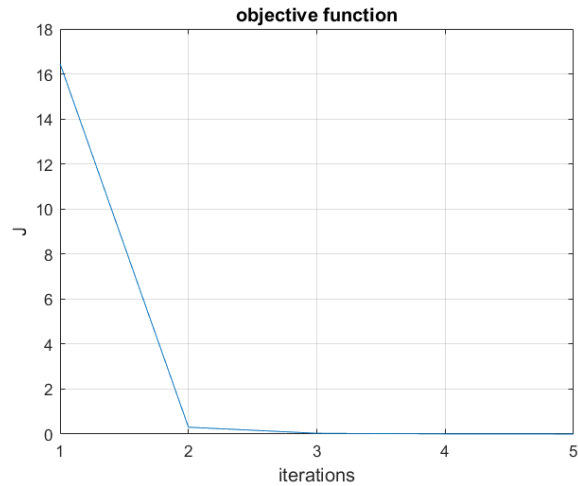
Υποερίπτωση 2:  $\alpha_\epsilon=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 51: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 52: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



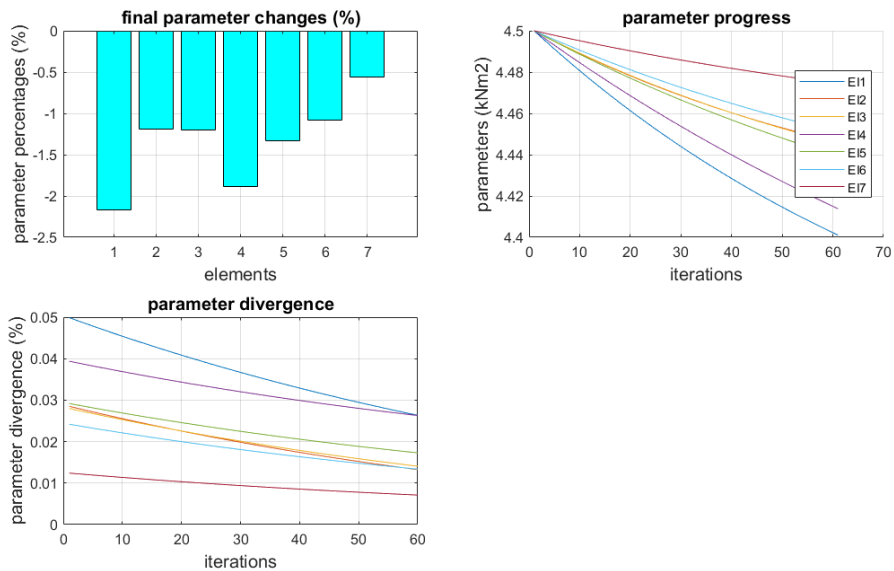
Εικόνα 53: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Υποπερίπτωση 3:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$

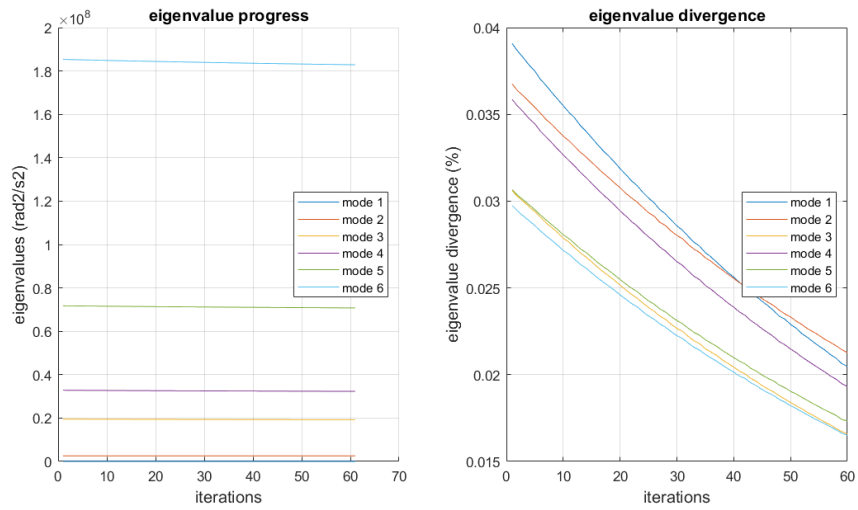
Το βαρυτικό μητρώο είναι ίσο με:

$$W_{\epsilon\epsilon} = \begin{bmatrix} 8.72 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.8 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \cdot 10^{-12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.99 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.52 \cdot 10^{-14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.23 \cdot 10^{-14} & 0 \end{bmatrix}$$

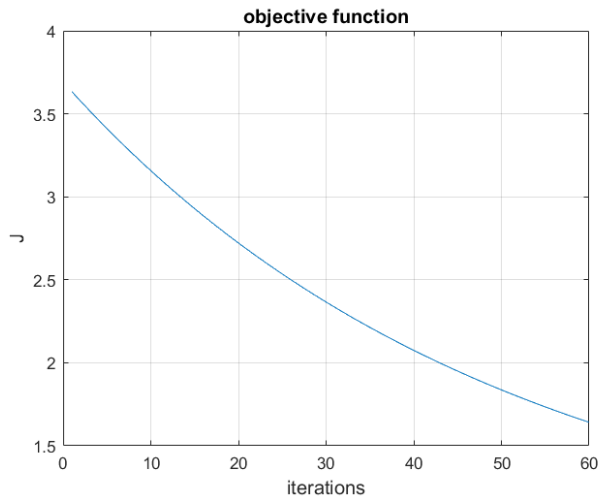
Και τα διαγράμματα μεγεθών θα είναι:



Εικόνα 54: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



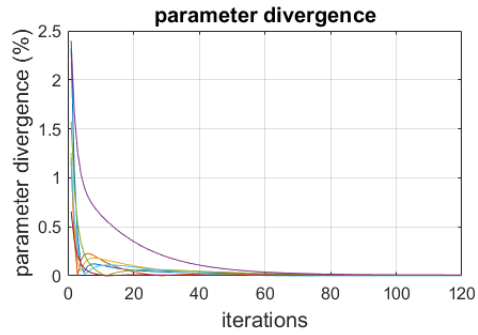
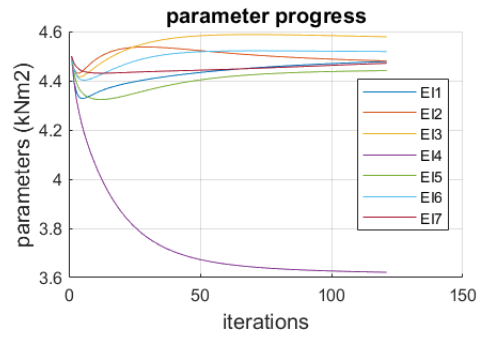
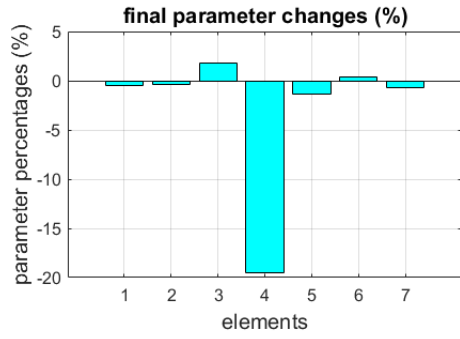
Εικόνα 55: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



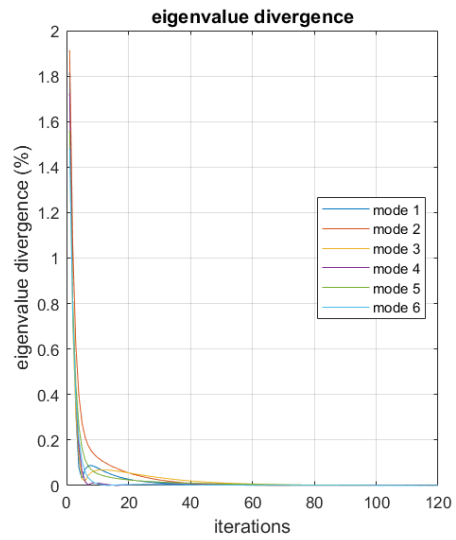
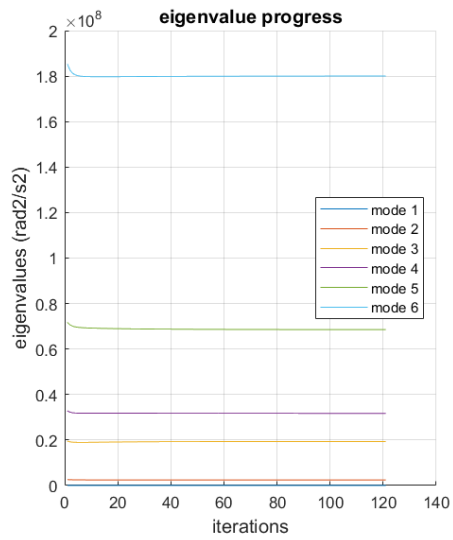
Εικόνα 56: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Υποερίπτωση 4:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$

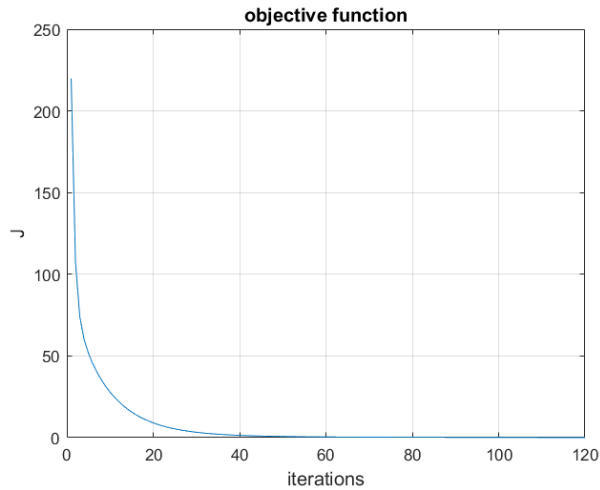
Τα διαγράμματα των μεγεθών θα είναι:



Εικόνα 57: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 58: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 59: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

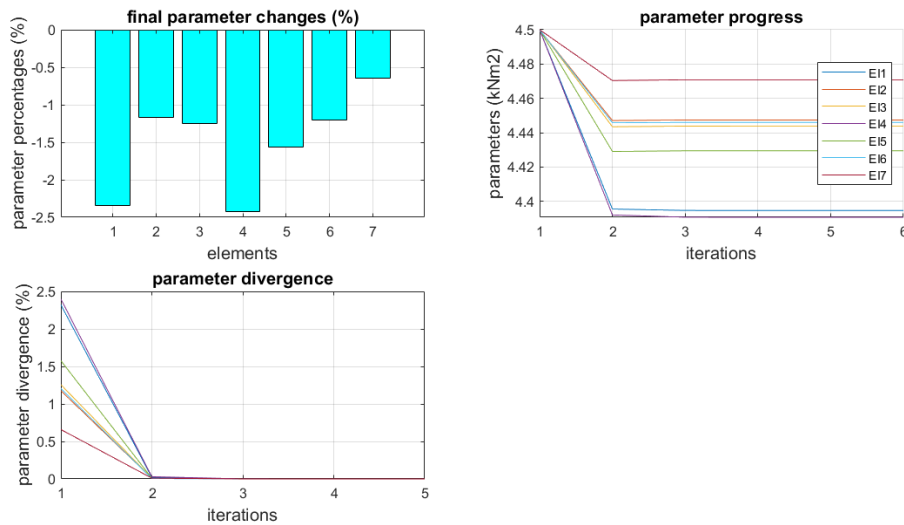
Παρατηρείται ότι οι δυσκαμψίες και οι ιδιοτιμές, παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά σε σύγκριση με το σενάριο ομοιόμορφης βλάβης.

**Περίπτωση 4**

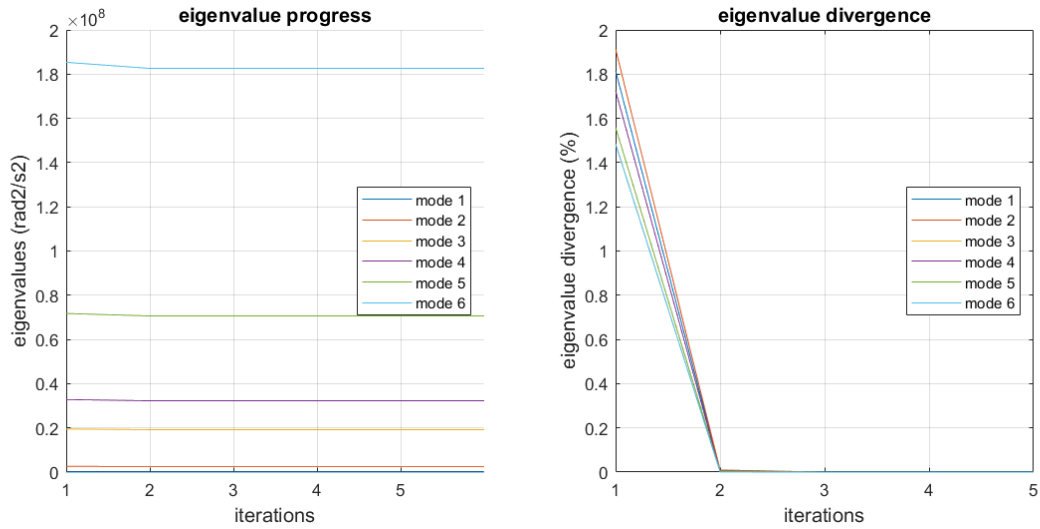
$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\epsilon\epsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} \{S_j^T W_{\epsilon\epsilon} (z_m - z_j) - W_{\theta\theta} (\theta_j - \theta_0)\}$$

$$J = (\theta_j - \theta_0)^T W_{\theta\theta} (\theta_j - \theta_0) + \epsilon^T W_{\epsilon\epsilon} \epsilon$$

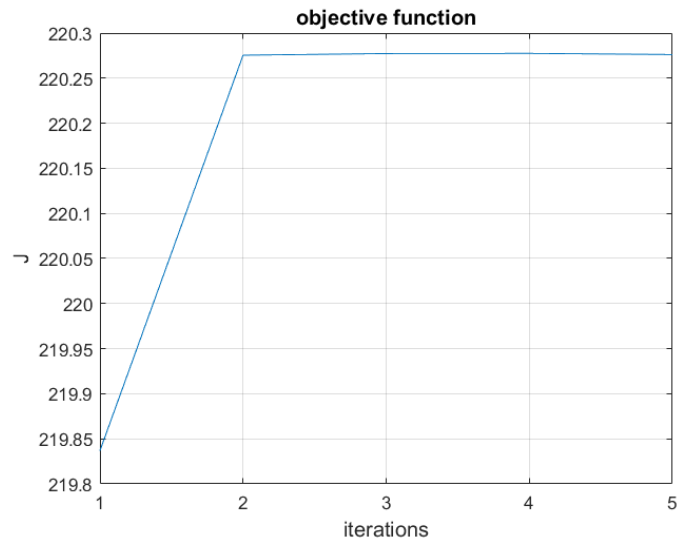
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\epsilon = 0.5\%$ ,  $\alpha_\theta = 0.5\%$



Εικόνα 60: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 61: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

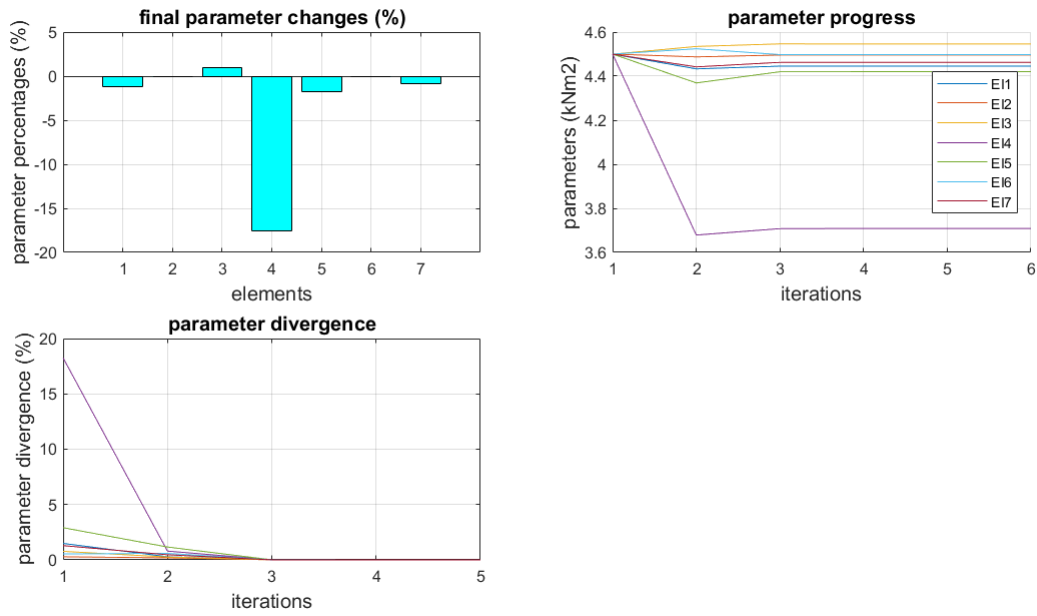


Εικόνα 62: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

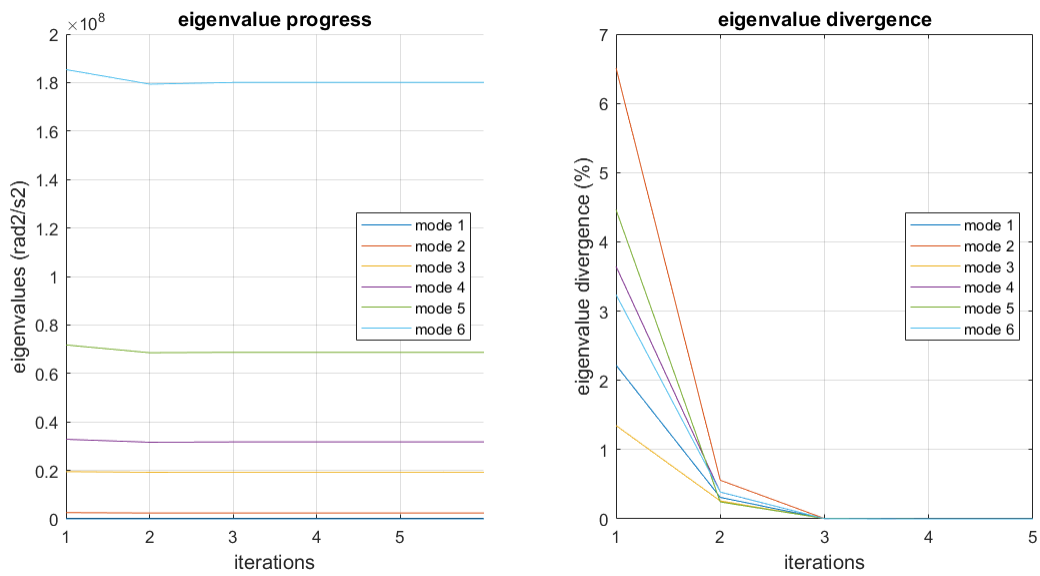
Παρατηρείται ανοδική πορεία της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης προς μη μηδενικές τιμές, γεγονός που συνεπάγεται την μη σύγκλιση των παραμέτρων προς το αρχικό σενάριο βλάβης



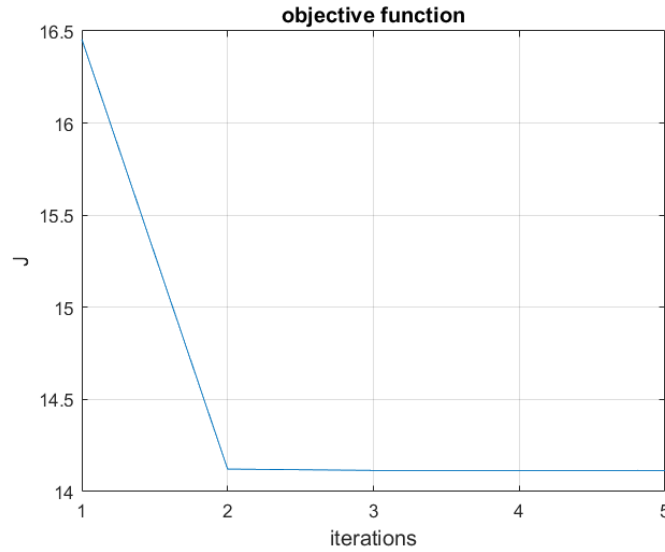
Υποερίπτωση 2:  $\alpha_\epsilon=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 63: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



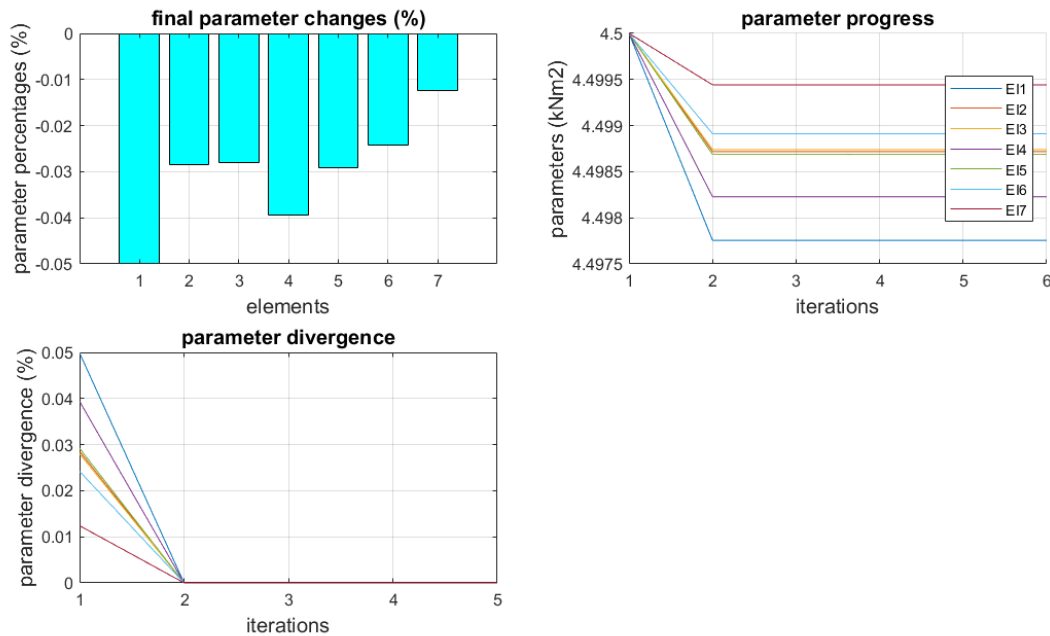
Εικόνα 64: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



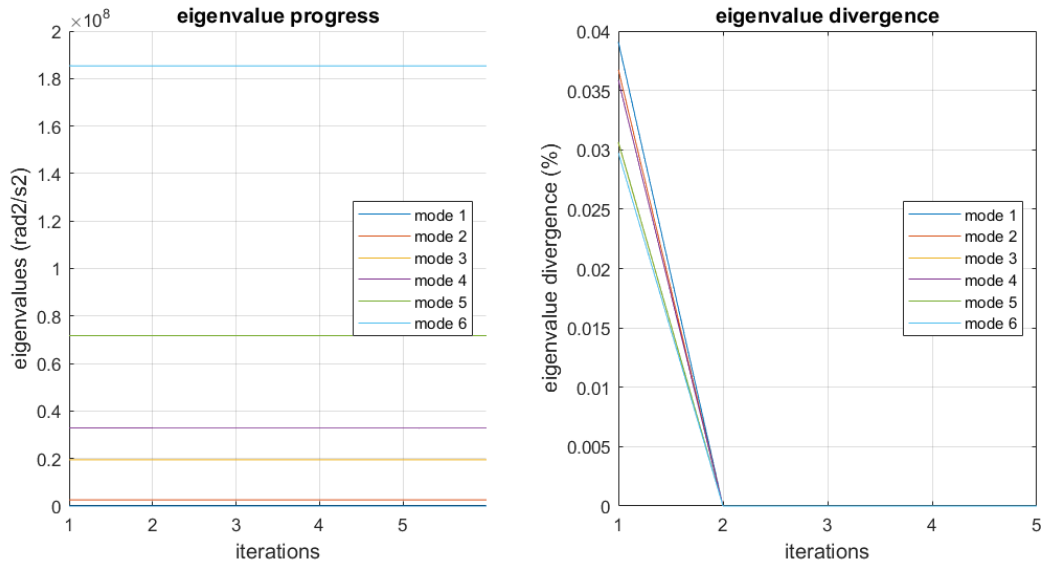
Εικόνα 65: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Εδώ, σε αντίθεση με την ομοιόμορφη βλάβη, η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η προσδοκώμενη (καθοδική), ωστόσο, συνέκλινε στη τιμή 14.1 (μη μηδενική) και επομένως, δεν επαληθεύεται το αρχικό σενάριο βλάβης.

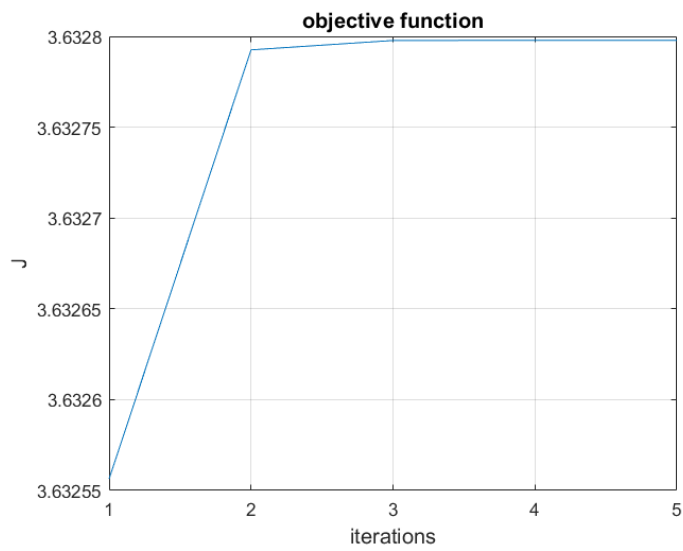
Υποπερίπτωση 3:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$



Εικόνα 66: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



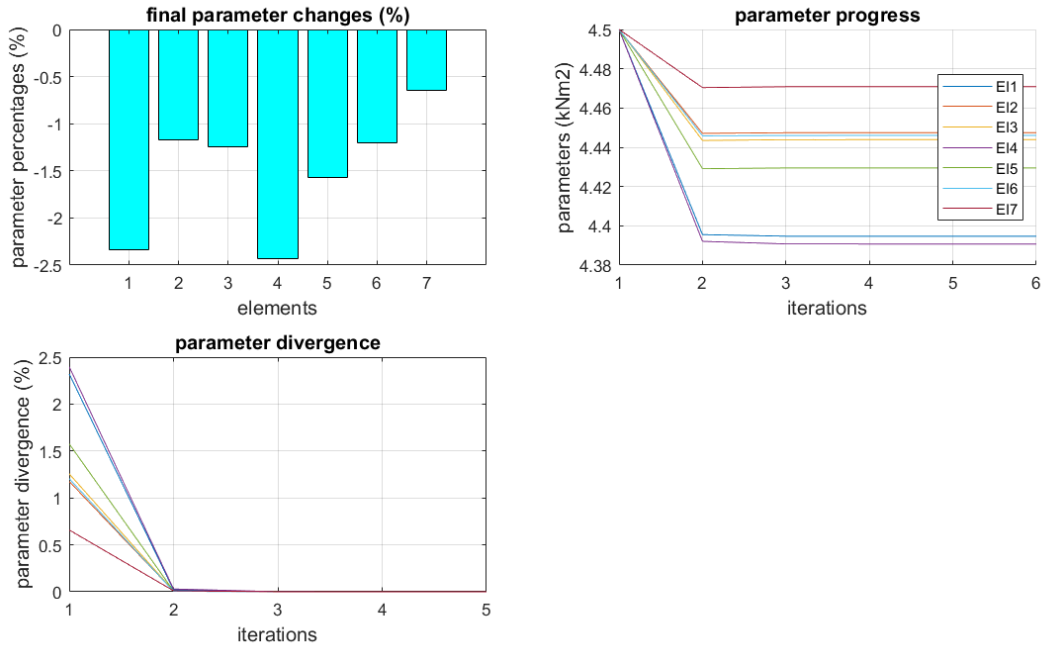
Εικόνα 67: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



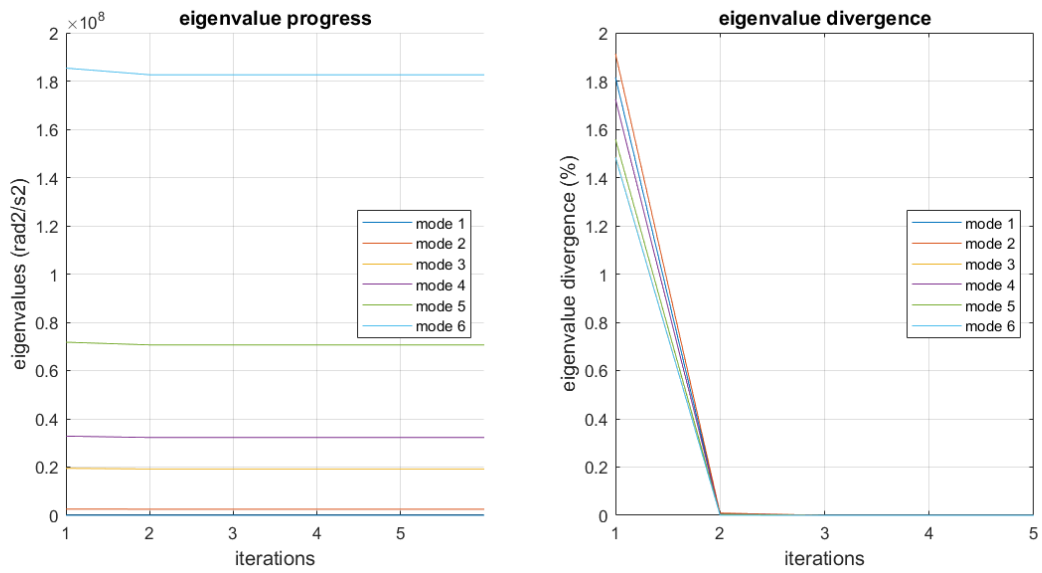
Εικόνα 68: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Υποερίπτωση 4:  $\alpha_\varepsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$

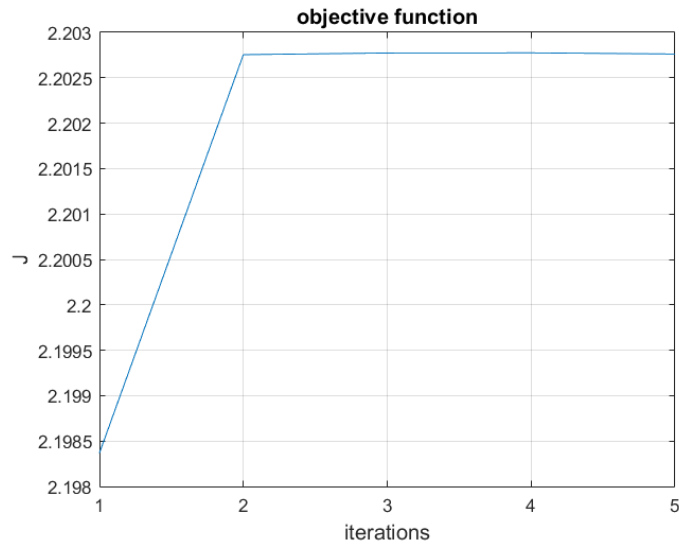
Τα διαγράμματα μεγεθών θα είναι:



Εικόνα 69: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 70: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 71: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Εξετάζοντας και τη 2<sup>ο</sup> σενάριο βλάβης, η συμπεριφορά των μεγεθών παραμένει παρεμφερής, όσον αφορά τη πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης και την επαλήθευση ή μη, των βλαβών. Η μόνη διαφορά βρίσκεται στην 4<sup>η</sup> περίπτωση για ποσοστά τυπικών αποκλίσεων  $\alpha_\epsilon$  και  $\alpha_\theta$  0.5% και 5% αντίστοιχα. Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης για το σενάριο τοπικής βλάβης ήταν καθοδική ενώ στο σενάριο τοπικής βλάβης ανοδική.

## 5.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ

Η Μέθοδος των Ελαχίστων Διασπορών (Minimum Variance Method) είναι μια εναλλακτική μέθοδος εντοπισμού μιας ή περισσότερων βλαβών, ακολουθώντας όμως μια πιο στατιστική προσέγγιση των μεγεθών. Μπορεί και να διατυπωθεί ο εξής ισχυρισμός ότι βασική ιδιότητά της είναι η μεταβολή του βαρυτικού μητρώου  $W_{\theta\theta}$  των παραμέτρων από βήμα σε βήμα, με σκοπό την μέγιστη δυνατή ελαχιστοποίησή του, ενώ στην αντίστροφη μέθοδο, θεωρούταν αμετάβλητο. Με άλλα λόγια, ότι η Μέθοδος Ελαχίστων Διασπορών είναι προέκταση της Αντίστροφης Μεθόδου Στατιστικές μέθοδοι είναι πολύ χρήσιμοι όταν το πλήθος των διαθέσιμων μετρήσεων είναι μεγάλο. Η μέθοδος αυτή, επιπρόσθετα, μέσω των διασπορών, μπορεί να περιγράψει ποιοτικά τη πορεία των παραμέτρων.

Απαραίτητες προϋποθέσεις για την μέθοδο αυτή, είναι

- Οι εκτιμήσεις των μετρήσεων να είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις των παραμέτρων, όπως και:
- Οι παράμετροι και οι ιδιοτιμές να έχουν σφάλματα εκπεφρασμένα σε όρους μητρώων διασπορών.

Ο Collins et al (1972 και 1974), εισήγαγε την μέθοδο των ελαχίστων διασπορών, θέτοντας άλλη μια προϋπόθεση: Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και οι ιδιοτιμές βλάβης να είναι μεγέθη στατιστικά ανεξάρτητα. Αυτό αποδεικνύεται περισσότερο κατά την πρώτη επανάληψη, όταν το σφάλμα των μετρήσεων είναι απίθανο να προέχεται από σφάλμα στον υπολογισμό των παραμέτρων. Σε επόμενες επαναλήψεις, η ιδιότητα αυτή, αποτελεί απλά μια γενική απλούστευση.

Ο M.I. Friswell, εισήγαγε τη συσχέτιση μεταξύ των παραμέτρων και των ιδιοτιμών σε κάθε επανάληψη, χρησιμοποιώντας το ίδιο όρισμα με αυτό του Collins et al, μέσω ενός μητρώου συσχέτισης. Εάν αυτό το μητρώο είναι ίσο με το μηδενικό σε κάθε επανάληψη, τότε η μέθοδος του Collins et al αναπαράγεται και αυτό θα περιγραφεί στο τέλος της ενότητας αυτής.

### 5.2.1 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σε κάθε επανάληψη, το διάνυσμα των ιδιοτιμών βλάβης, θα είναι ίσο με το άθροισμα των επικαιροποιημένων ιδιοτιμών και ενός σφάλματος, ή αλλιώς θορύβου, δηλαδή:

$$z_m = z + \varepsilon \quad (25)$$

Του οποίου τα στατιστικά χαρακτηριστικά είναι η μηδενική μέση τιμή και διασπορά ίση με  $V_\varepsilon$

$$E[\varepsilon] = 0 \quad \text{var}(\varepsilon) = E[\varepsilon \varepsilon^T] = V_\varepsilon \quad (26), (27)$$

$E[\ ]$  είναι η αναμενόμενη τιμή.

Επίσης, ορίζεται διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων  $\theta_0$ , του οποίου η μέση τιμή είναι ίση με  $\theta$  και διασπορά ίση με  $V_\theta$

$$E[\theta_0] = \theta \quad \text{var}(\theta_0) = V_\theta \quad (28), (29)$$

Επιπλέον, όπως έχει προαναφερθεί, εισάγεται ένα μητρώο συσχέτισης μεταξύ των εκτιμώμενων παραμέτρων και του θορύβου

$$D_j = E[\theta_j^* \varepsilon^T] \quad (30)$$

και στην αρχή της επαναληπτικής διαδικασίας θεωρείται μηδενική συσχέτιση ( $D_0=0$ )

#### Ανάπτυξη των εξισώσεων της μεθόδου

Αρχικά, γίνεται θεώρηση ότι η εύρεση του διάνυσματος παραμέτρων σε μια επανάληψη συναρτήσει της προηγούμενης γράφεται ως

$$\theta_{j+1} = \theta_j + T^*(z_m - z_j) \quad (31)$$

T ένα μητρώο το οποίο θα υπολογιστεί στη συνέχεια

Μια επιπλέον θεώρηση είναι ότι το διάνυσμα παραμέτρων  $\theta_j$  είναι αμερόληπτο, δηλαδή:

$$E[\theta_j] = \theta \quad (32)$$

Η αναμενόμενη τιμή του διάνυσματος  $\theta_{j+1}$ , θα είναι:

$$\begin{aligned} E[\theta_{j+1}] &= E[\theta_j + T(z_m - z_j)] = \\ &= E[\theta_j] + E[T(z_m - z_j)] = E[\theta_j] + T^* E[z_m - z_j] = \\ &= E[\theta_j] + T^* E[z - z_j + \varepsilon] = E[\theta_j] + T^* E[z - z_j] + T^* E[\varepsilon] = \\ &= E[\theta_j] + T^* S_j^* E[\theta - \theta_j] + T^* E[\varepsilon] = \\ &= \theta \end{aligned} \quad (33)$$

Επομένως, και για την επανάληψη  $j+1$ , το διάνυσμα είναι αμερόληπτο

Η διασπορά των παραμέτρων σε κάθε βήμα  $j$ , υπολογίζεται εξ' ορισμού ως:

$$V_j = E[(\theta_j - \theta)(\theta_j - \theta)^T] \quad (34)$$

Επομένως, πρέπει να υπολογιστεί και η διασπορά των παραμέτρων  $\theta_{j+1}$ , ως:

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= E[(\theta_{j+1} - \theta)(\theta_{j+1} - \theta)^T] = E[(\theta_j - \theta + T(z_m - z_j))((\theta_j - \theta + T(z_m - z_j))^T)] = \\ &= E[(\theta_j - \theta)(\theta_j - \theta)^T] + E[(\theta_j - \theta)(z_m - z_j)^T] T^T + T E[(z_m - z_j)(\theta_j - \theta)^T] + E[T(z_m - z_j)(z_m - z_j)^T T^T] = \\ &= V_j + E[(\theta_j - \theta)(z - z_j + \varepsilon)^T] T^T + T E[(z - z_j + \varepsilon)(\theta_j - \theta)^T] + T V_{z_j} T^T = \\ &= V_j + E[(\theta_j - \theta)(S_j(\theta - \theta_j) + \varepsilon)^T] T^T + T E[(S_j(\theta - \theta_j) + \varepsilon)(\theta_j - \theta)^T] + T V_{z_j} T^T = \\ &= V_j + E[(\theta_j - \theta)(-S_j(\theta_j - \theta) + \varepsilon)^T] T^T + T E[(-S_j(\theta_j - \theta) + \varepsilon)(\theta_j - \theta)^T] + T V_{z_j} T^T = \end{aligned}$$

$$V_j + (-E[(\theta_j - \theta)(\theta_j - \theta)^T S_j^T] + E[(\theta_j - \theta)\varepsilon^T])^T + T \left( E \left[ (-S_j(\theta_j - \theta)(\theta_j - \theta)^T] + E \left[ ((\theta_j - \theta) * \varepsilon^T)^T \right] \right) + TV_{z_j} T^T = \right. \\ \left. V_j + (-V_j S_j^T + D_j) T^T + T(-S_j V_j + D_j^T) + TV_{z_j} T^T \right. \quad (35)$$

Όπου:

$$V_{z_j} = E \left[ (z_m - z_j)(z_m - z_j)^T \right] = E \left[ (z_m - z + z - z_j)(z_m - z + z - z_j)^T \right] = \\ E \left[ (\varepsilon - S_j(\theta_j - \theta)) (\varepsilon - S_j(\theta_j - \theta))^T \right] = E \left[ \varepsilon * \varepsilon^T - \varepsilon * (S_j(\theta_j - \theta))^T - (S_j(\theta_j - \theta)) * \varepsilon^T + S_j(\theta_j - \theta)(\theta_j - \theta)^T S_j^T \right] = \\ V_\varepsilon - E \left[ ((\theta_j - \theta)\varepsilon^T)^T \right] S_j^T - S_j * E[(\theta_j - \theta)\varepsilon^T] + S_j * E[(\theta_j - \theta)(\theta_j - \theta)^T] S_j^T = \\ S_j V_j S_j^T - D_j^T S_j^T - S_j D_j + V_\varepsilon \quad (36)$$

Ο υπολογισμός του μητρώου συσχέτισης D στην επανάληψη j+1 θα είναι ίσο με:

$$D_{j+1} = E[\theta_{j+1} \varepsilon^T] = E \left[ (\theta_j + T(z_m - z_j)) \varepsilon^T \right] = \\ E[\theta_j \varepsilon^T] + TE[(z_m - z + z - z_j)\varepsilon^T] = D_j + T(E[(z_m - z)\varepsilon^T] + E[-S_j(\theta_j - \theta)\varepsilon^T]) = \\ D_j + T(V_\varepsilon - S_j D_j) \quad (37)$$

Το ζητούμενο μητρώο T θα βρεθεί από την ελαχιστοποίηση της εξίσωσης (35) ως προς το μητρώο T, και έτσι:

$$V_{j+1} = V_j + (V_j S_j - D_j) V_{z_j}^{-1} (V_j S_j - D_j)^T + [(V_j S_j - D_j) V_{z_j}^{-1} - T] V_{z_j} [(V_j S_j - D_j) V_{z_j}^{-1} - T]^T \quad (38)$$

Με ελαχιστοποίηση της διασποράς, το μητρώο T που προκύπτει θα είναι ίσο με

$$T = (V_j S_j^T - D_j) V_{z_j}^{-1} \quad (39)$$

Και η εξίσωση (38), θα γίνει:

$$V_{j+1} = V_j + (V_j S_j^T - D_j) V_{z_j}^{-1} (V_j S_j^T - D_j)^T \quad (40)$$

Από την εξίσωση (37), το μητρώο συσχέτισης θα αναγραφεί

$$D_{j+1} = D_j + (V_j S_j^T - D_j) V_{z_j}^{-1} (V_\varepsilon - S_j D_j) \quad (41)$$

Εν τέλει, ο τελικός τύπος εύρεσης των παραμέτρων  $\theta_{j+1}$  της εξίσωσης (31), θα γίνει:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + (V_j S_j - D_j) V_{z_j}^{-1} (z_m - z_j) \quad (42)$$



Εξετάζοντας τη περίπτωση που αγνοείται ο θόρυβος, το μητρώο συσχέτισης είναι πάντα μηδενικός καθ' όλη τη πορεία των επαναλήψεων ( $D_j=[0], \Psi_j$ ). Ωστόσο, ο θόρυβος δεν μπορεί να είναι απόλυτως μηδενικός, παρά μόνο να θεωρηθεί μια πολύ μικρή τιμή διασποράς κοντά στο μηδέν (πχ  $V_\varepsilon=10^{-6}$ ).

Επομένως, η εξίσωση (36) που υπολογίζει τη διασπορά των ιδιοτιμών, θα γίνει:

$$V_{z_j}=S_j V_j S_j^T + V_\varepsilon \quad (43)$$

Και συνεπώς, οι παράμετροι σε κάθε επανάληψη, όπως και το μητρώο διασπορών θα υπολογιστούν ως:

$$\theta_{j+1}=\theta_j+V_j S_j^T (S_j V_j S_j^T + V_\varepsilon)^{-1} (z_m - z_j) \quad (44)$$

$$V_{j+1}=V_j - V_j S_j^T (S_j V_j S_j^T + V_\varepsilon)^{-1} S_j V_j \quad (45)$$

Συνοπτικά:

**Στη περίπτωση όπου συμπεριλαμβάνεται ο θόρυβος**

$$V_{z_j}=S_j V_j S_j^T - S_j D_j - D_j^T S_j^T + V_\varepsilon \quad (36)$$

$$\theta_{j+1}=\theta_j+(V_j S_j^T - D_j) V_{z_j}^{-1} (z_m - z_j) \quad (42)$$

$$V_{j+1}=V_j - (V_j S_j^T - D_j) V_{z_j}^{-1} (V_j S_j^T - D_j)^T \quad (40)$$

$$D_{j+1}=D_j - (V_j S_j^T - D_j) V_{z_j}^{-1} (S_j D_j - V_\varepsilon) \quad (41)$$

**Στη περίπτωση όπου δεν συμπεριλαμβάνεται ο θόρυβος**

$$\theta_{j+1}=\theta_j+V_j S_j^T (S_j V_j S_j^T + V_\varepsilon)^{-1} (z_m - z_j) \quad (44)$$

$$V_{j+1}=V_j - V_j S_j^T (S_j V_j S_j^T + V_\varepsilon)^{-1} S_j V_j \quad (45)$$

Ωστόσο, αξίζει να μελετηθεί και η σχέση μεταξύ της μεθόδου αυτής και τη μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων η οποία θυμίζει την αντίστροφη μέθοδο που είχε εξεταστεί προηγουμένως.

Σύμφωνα με την 2<sup>η</sup> μέθοδο, η αντικειμενική συνάρτηση που είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων των μετρήσεων και των παραμέτρων θα είναι ίσο με

$$J(\theta)=\varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon + (\theta - \theta_j)^T W_{\theta\theta} (\theta - \theta_j) \quad (46)$$

Όπου  $W_{\varepsilon\varepsilon}$  και  $W_{\theta\theta}$ , είναι τα βαρυτικά μητρώα σφαλμάτων και παραμέτρων.

Η αντικειμενική συνάρτηση, ελαχιστοποιώντας τη θα προκύψει η εξίσωση (22), η οποία, σε παραλληλισμό με την αντίστοιχη εξίσωση επικαιροποίησης των παραμέτρων, προκύπτει ότι:

$$W_{\varepsilon\varepsilon}=(V_\varepsilon - D_j^T S_j^T)^{-1} \quad (47)$$

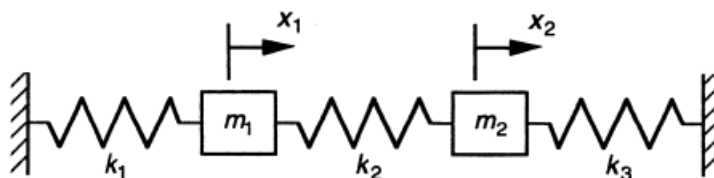
$$W_{\theta\theta}=(V_j-D_jS_j(S_j^T S_j)^{-1})^{-1} \quad (48)$$

(Friswell M. I., 1989)

Γεγονός που επαληθεύει τον αρχικό ισχυρισμό ότι η μέθοδος ελαχίστων διασπορών είναι μια προέκταση της αντίστροφης μεθόδου, λόγω της πλέον επικαιροποίησης των βαρυτικών μητρώων

### 5.2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται ένα σύστημα στερεών σωμάτων-ελατηρίων όπως απεικονίζεται στο σχήμα παρακάτω



Εικόνα 72: Σύστημα 3 ελατηρίων με 2 μάζες

Οι σταθερές ελατηρίου στην υγιή κατάσταση είναι ίσες με

- $k_1=130$  N/m,
- $k_2=50$  N/m και
- $k_3=220$  N/m

Τα στερεά που βρίσκονται ανάμεσα στα ελατήρια έχουν μάζα  $m_1=4$ kg και  $m_2=9$ kg αντίστοιχα. Συνεπώς, από ιδιομορφική ανάλυση, οι ιδιοτιμές που καταγράφονται είναι ίσες με

- $\lambda_1=26,28$  (rad/s)<sup>2</sup>
- $\lambda_2=48,71$  (rad/s)<sup>2</sup>

Το σενάριο που τίθεται στο πρόβλημα αυτό είναι η μεταβολή των σταθερών των ελατηρίων στις τιμές:

- $k_1=120$  N/m
- $k_2=60$  N/m
- $k_3=210$  N/m

διαμορφώνοντας το διάνυσμα ανηγμένων παραμέτρων βλάβης ίσο με

$$d_{\text{damaged}} = \begin{Bmatrix} 0.9231 \\ 1.2 \\ 0.9545 \end{Bmatrix}$$

Και οι ιδιοτιμές που καταγράφονται είναι ίσες με:

- $\lambda_1=25$  (rad/s)<sup>2</sup>

- $\lambda_2=50 \text{ (rad/s)}^2$

Λαμβάνεται ως παραδοχή οι παράμετροι και ο θόρυβος να έχουν αρχική διασπορά  $10 \text{ (N/m)}^2$  και  $0.1 \text{ (r/s)}^4$  αντίστοιχα.

### Περίπτωση 1: Ύπαρξη θορύβου

Τα τελικά μητρώα για τα στατιστικά μεγέθη είναι

$$V_{z,\text{final}} = \begin{bmatrix} 0.051755612 & -0.004099382 \\ -0.004099382 & 0.005970751 \end{bmatrix}$$

$$D_{\text{final}} = \begin{bmatrix} 0.129531977 & 0.108977485 \\ -0.0900770 & 0.204805045 \\ 0.472393971 & -0.027658675 \end{bmatrix}$$

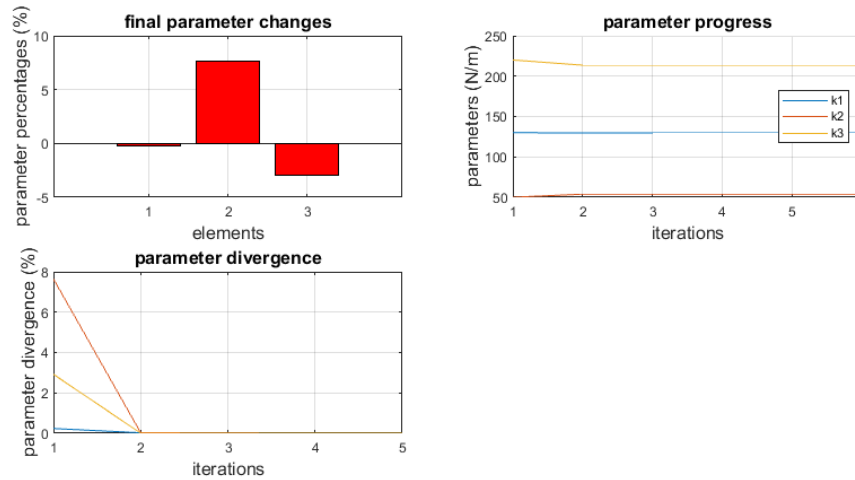
Εδώ, παρατηρείται πλέον ότι σε βάθος επαναλήψεων, η ανεξαρτησία μεταξύ διαφόρων συνδυασμών μεγεθών χάνεται, γεγονός αναμενόμενο μιας και οι επικαιροποιημένες σταθερές ελατηρίου βασίζονταν στα ίδια μετρούμενα δεδομένα.

$$V_{\text{final}} = \begin{bmatrix} 7.21641548 & -3.90067243 & -1.413178118 \\ -3.90067243 & 2.876129237 & 0.461654783 \\ -1.41317812 & 0.461654783 & 5.681897773 \end{bmatrix}$$

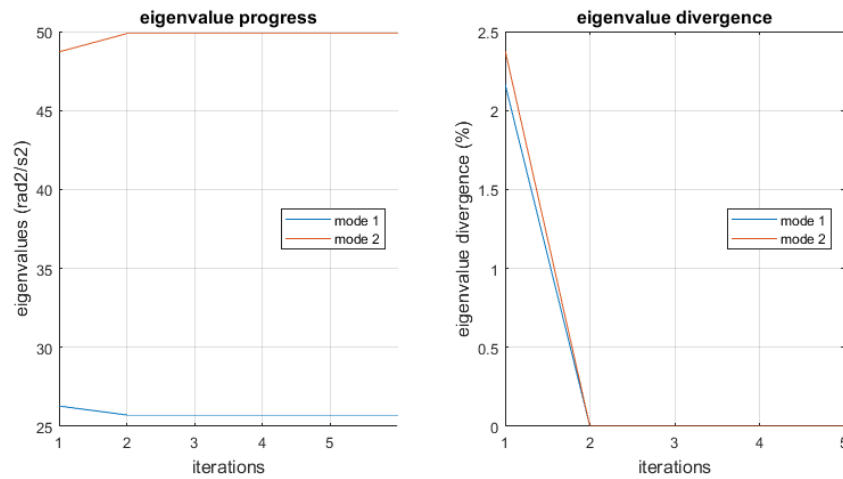
Εδώ, παρατηρείται ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου μειώθηκαν, γεγονός που επαληθεύει το αντικείμενο της μεθόδου. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι τα υπόλοιπα στοιχεία έχουν αλλάξει σημαντικά, γεγονός που δείχνει την έλλειψη ανεξαρτησίας μεταξύ συνδυασμών διαφορετικών παραμέτρων.

Δίνοντας ένα τελικό διάνυσμα σταθερών ελατηριων ίσο με:

$$\theta_{\text{end}} = \begin{Bmatrix} 129.73 \\ 53.8 \\ 213.55 \end{Bmatrix}$$



Εικόνα 73: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 74: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

Παρατηρείται ότι για ομοιόμορφη διασπορά του θορύβου και των παραμέτρων, η βλάβη συνέκλιε σε ένα αποτέλεσμα, το οποίο όμως δεν επαληθεύει το αρχικό σενάριο βλάβης. Αυτό συμβαίνει διότι οι μετρούμενες ιδιοτιμές μπορούν να υπολογιστούν μέσα από ένα άπειρο πλήθος σταθερών ελατηρίων. Επομένως, εξάγεται ένα αρχικό συμπέρασμα ότι για την επαλήθευση ενός σεναρίου, πρέπει να υπάρχει μοναδικότητα στα δομικά χαρακτηριστικά του φορέα.

Στη συνέχεια, θα εξεταστεί η περίπτωση απουσίας θορύβου, επομένως θα τεθεί θόρυβος διασποράς σχεδόν μηδενικής, έστω  $V_\epsilon = 10^{-6}$

### Περίπτωση 2 (Περίπτωση απουσίας θορύβου)

$$\theta_{j+1} = \theta_j + V_j S_j^T (S_j V_j S_j^T + V_\epsilon)^{-1} (z_m - z_j)$$

$$V_{j+1} = V_j - V_j S_j^T (S_j V_j S_j^T + V_\epsilon)^{-1} S_j V_j$$

Τα τελικά μητρώα των διασπορών των παραμέτρων και των ιδιοτιμών θα είναι:

$$V_{\text{end}} = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.11 & -0.07 \\ -0.11 & 0.06 & 0.04 \\ -0.07 & 0.04 & 0.03 \end{bmatrix}$$

$$V_{z,\text{end}} = \begin{bmatrix} 1.20474 \cdot 10^{-6} & -4.75649 \cdot 10^{-9} \\ -4.75649 \cdot 10^{-9} & 1.20474 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

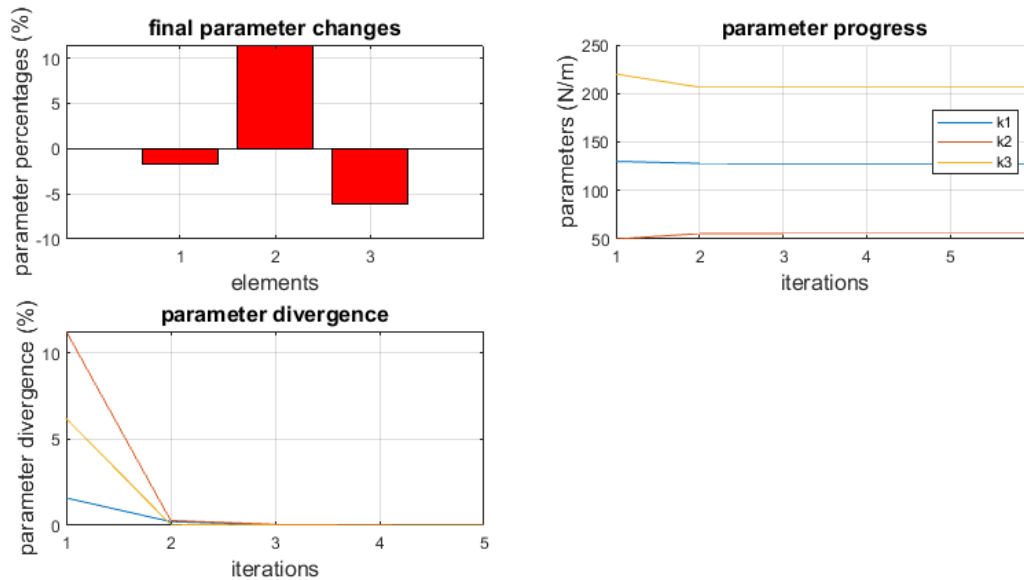
Το μητρώο συσχέτισης  $D_j$  παρέμεινε μηδενικό

Δίνοντας ένα τελικό διάνυσμα σταθερών ελατηρίων ίσο με:

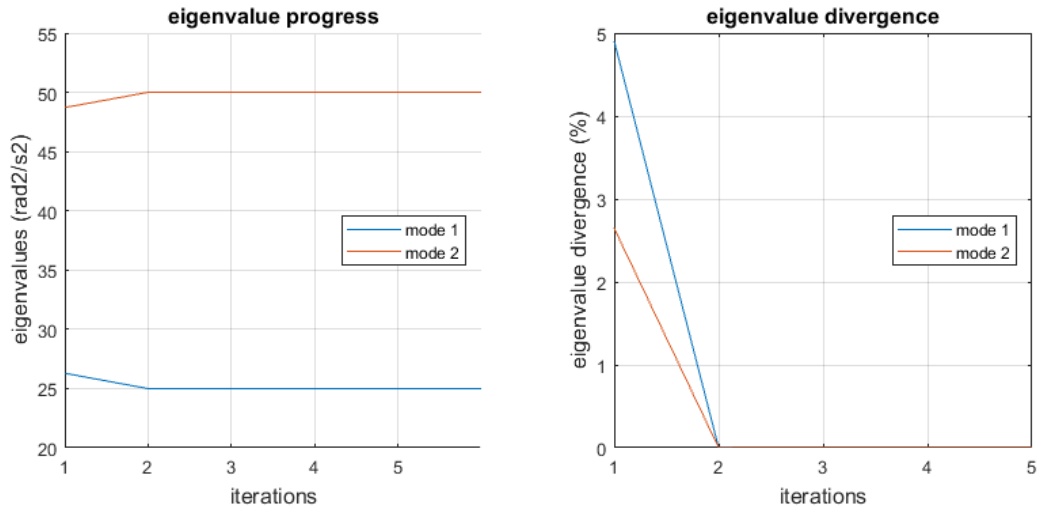
$$\theta_{\text{end}} = \begin{Bmatrix} 127.23 \\ 56.01 \\ 206.67 \end{Bmatrix}$$

Το οποίο προσεγγίζει περισσότερο το αρχικό σενάριο βλάβης

Παρακάτω τα διαγράμματα κατάστασης των μεγεθών



Εικόνα 75: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

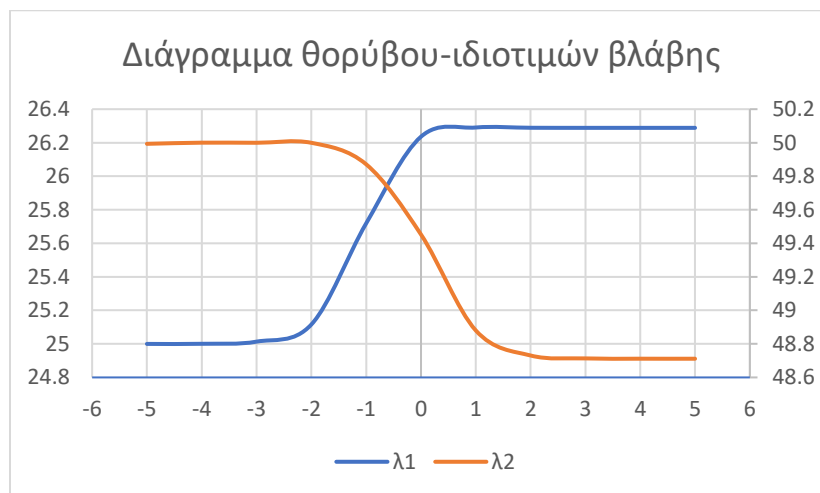


Εικόνα 76: Διάγραμμα κατάστασης ιδιοτιμών

Και στη περίπτωση απουσίας θορύβου, τα διαγώνια στοιχεία του μητρώου διασποράς των παραμέτρων μειώθηκαν σε τιμές χαμηλότερες από αυτές της ύπαρξης θορύβου. Ακόμη, τα εκτός κύριας διαγωνίου στοιχεία απέκτησαν χαμηλότερες τιμές από την προηγούμενη περίπτωση, με αποτέλεσμα την αύξηση του βαθμού ανεξαρτησίας των μεγεθών.

Ωστόσο, το τελικό διάνυσμα των παραμέτρων, όπως και στη προηγούμενη περίπτωση, τείνει να αποκλίνει από το αρχικό σενάριο βλάβης, στο στάδιο σύγκλισης ως προς τις επαναλήψεις.

Το κεφάλαιο της στατιστικής αποτελεί ενδιαφέρον, διότι ο θόρυβος μπορεί να λάβει από μικρές έως και μεγάλες τιμές διασπορών. Επομένως, αξίζει να μελετηθεί η συμπεριφορά των παραμέτρων και των ιδιοτιμών βλάβης, όπως και στατιστικών μεγεθών, για διάφορες τιμές θορύβου. Λαμβάνεται ένα λογαριθμικό εύρος τιμών διασπορών θορύβου μεταξύ -5 και 5 (δηλαδή  $N_\epsilon$ , ανάμεσα σε  $10^{-5}$  και  $10^5$

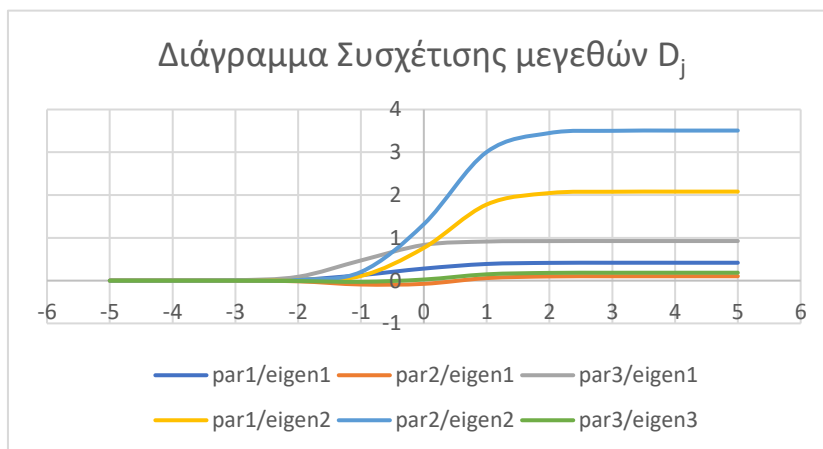


Εικόνα 77: Διάγραμμα θορύβου-μετρούμενων ιδιοτιμών

Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται οι ιδιοτιμές σε κατάσταση βλάβης της κατασκευής για διάφορες τιμές του θορύβου. Ο οριζόντιος άξονας είναι λογαριθμικός και αντιστοιχεί στη διασπορά του θορύβου και οι 2 κατακόρυφοι άξονες αντιστοιχούν στις 2 ιδιοτιμές (ο αριστερός για το εύρος τιμών των ιδιοτιμών  $z_1$  και ο δεξιός για το εύρος τιμών ιδιοτιμών  $z_2$ ).

Παρατηρείται ότι για θόρυβο διασποράς  $V_\epsilon < 0,001$ , (ή αλλιώς  $\log(V_\epsilon) < -3$ ), οι ιδιοτιμές εμφανίζουν μια συγκλίνουσα συμπεριφορά προς τις ιδιοτιμές της βλάβης, ενώ για θόρυβο διασποράς  $V_\epsilon > 100$ , οι ιδιοτιμές εμφανίζουν συγκλίνουσα συμπεριφορά προς τις τιμές υγιούς κατάστασης.

Παρακάτω, μελετώνται και οι στατιστικές ιδιότητες του φορέα.

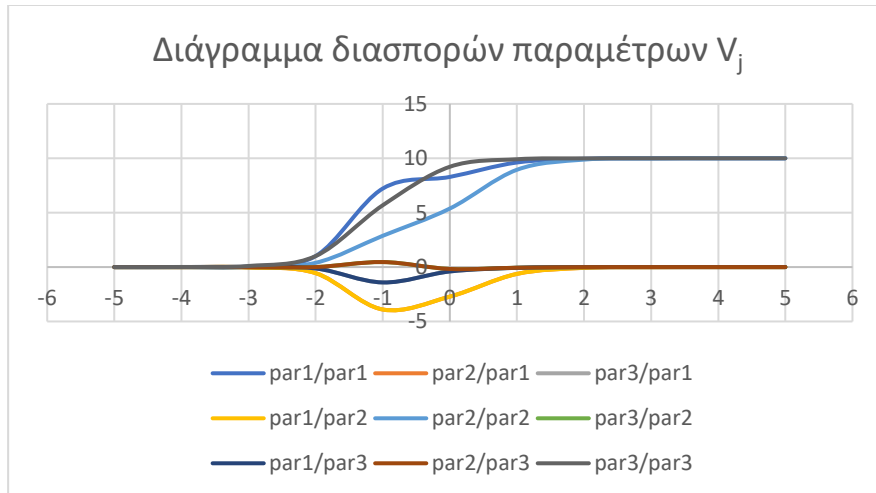


Εικόνα 78: Διάγραμμα Συσχέτισης παραμέτρων-ιδιοτιμών

Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει τη πορεία των τιμών-στοιχείων του πίνακα συσχέτισης  $D$ , (ή αλλιώς των συσχετίσεων μεταξύ διαφόρων συνδυασμών μεγεθών), σε σχέση με τον θόρυβο. Ο οριζόντιος άξονας διατηρείται λογαριθμικός. Παρατηρείται ότι για θόρυβο διασποράς  $V_\epsilon < 0,01$ , οι παράμετροι και οι ιδιοτιμές συγκλίνουν προς μια μηδενική συσχέτιση, ενώ για θόρυβο διασποράς  $V_\epsilon > 100$ , οι συσχετίσεις εμφανίζουν μια συγκλίνουσα συμπεριφοράς, διαμορφώνοντας το μητρώο συσχέτισης σε:

$$D_{5 \text{ (end)}} = \begin{bmatrix} 0.418646627 & 2.081314310 \\ 0.102778370 & 3.508265898 \\ 0.925980762 & 0.185124785 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, για πολύ μικρές τιμές θορύβου, υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των μεγεθών



Εικόνα 79: Διάγραμμα διασπορών παραμέτρων

Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει τη πορεία των διασπορών των παραμέτρων  $V_j$  λόγω μεταβολής της διασποράς του θόρυβου. Για λογαριθμικό θόρυβο  $\log(V_\epsilon) < -2,3$  περίπου (ή αλλιώς θόρυβο διασποράς  $V_\epsilon < 10^{-2,3}$ ), οι διασπορές των παραμέτρων τείνουν στο μηδέν, ενώ για θόρυβο λογαριθμικής διασποράς  $\log(V_\epsilon) > 2$  ( $V_\epsilon > 100$ ), οι διασπορές συγκλίνουν στις τιμές του μητρώου  $V_j$  που τέθηκε σαν παραδοχή για την επίλυση της εφαρμογής.

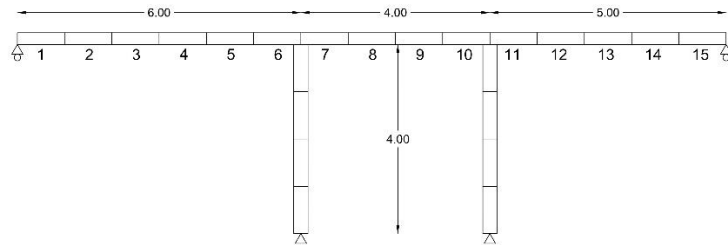
Παρακάτω, θα ακολουθήσουν εφαρμογές με πιο σύνθετους φορείς, για την καταγραφή ομοιοτήτων και διαφορών καθ' όλη τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου.



## 6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 6.1 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Δίνεται η γέφυρα του παρακάτω σχήματος



Εικόνα 80: Γέφυρα 3 ανοιγμάτων

Τα ανοίγματα είναι άνισου μήκους με επιμέρους μήκη  $L_1=6\text{m}$ ,  $L_2=4\text{m}$  και  $L_3=5\text{m}$  αντίστοιχα. Το ύψος των βάθρων είναι  $H=4\text{m}$ . Και τα καταστρώματα και τα βάθρα διακριτοποιούνται σε πεπερασμένα στοιχεία μήκους  $L_i=1\text{m}$

Το κατάστρωμα είναι διατομής  $20 \times 25\text{cm}$  και τα βάθρα  $25 \times 30\text{mm}$ , με τοπικούς άξονες σε τέτοια θέση ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη δυσκαμψία ( $EI$ ) της γέφυρας.

Το μέτρο ελαστικότητας λαμβάνεται ίσο με  $E=30\text{ GPa}$  και ειδικό βάρος υλικού  $\gamma=2.5\text{ Mg/m}^3$

Θα μελετηθούν, όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές 2 σενάρια:

- 1<sup>ο</sup> σενάριο: Η ομοιόμορφη μείωση του μέτρου ελαστικότητας κατά 5% σε όλο το μήκος του καταστρώματος και:
- 2<sup>ο</sup> σενάριο: Η μείωση κατά 10% του μέτρου ελαστικότητας στο 3<sup>ο</sup> στοιχείο, κατά 20% στο 6<sup>ο</sup> στοιχείο, κατά 15% στο 10<sup>ο</sup> και κατά 25% στο 13<sup>ο</sup>.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, οι παράμετροι είναι η δυσκαμψία  $EI$  και οι ιδιοτιμές είναι οι  $z=\omega^2$ .

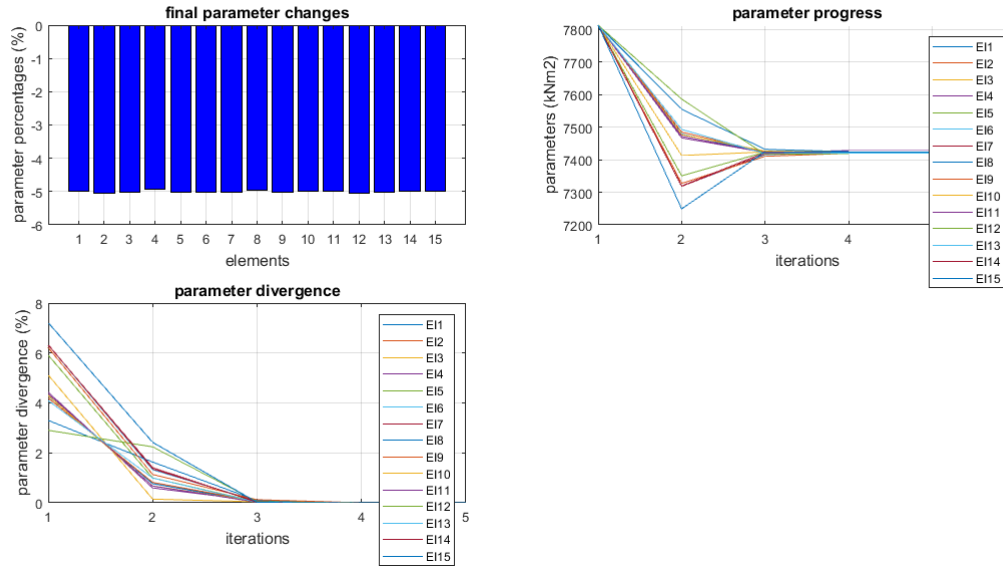
Θα ληφθούν υπ' όψιν 14 ιδιομορφές για την καλύτερη δυνατή προσέγγιση οποιουδήποτε σεναρίου βλάβης

### 6.1.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 1: ΜΕΙΩΣΗ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΤΑ 5% ΣΕ ΟΛΟ ΤΟ ΚΑΤΑΣΤΡΩΜΑ

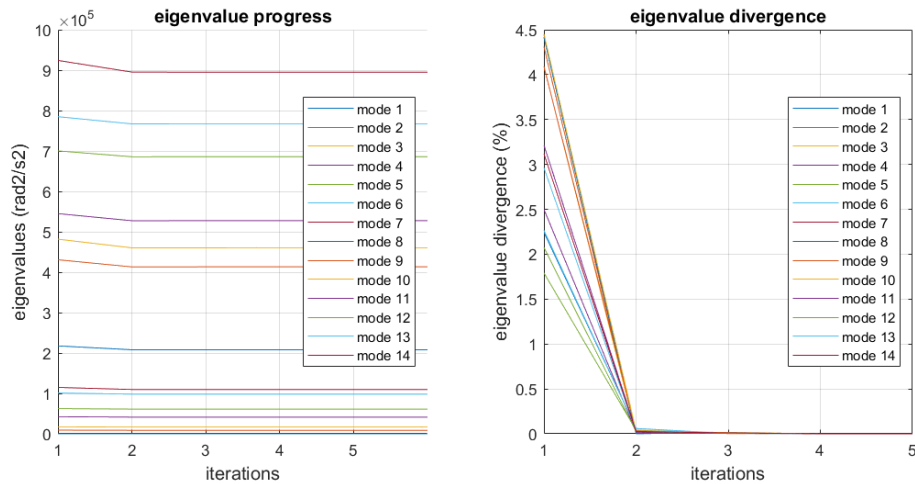
Περίπτωση 1

$$\theta_{j+1} = \theta_j + S_j^T [S_j S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T d\theta$$

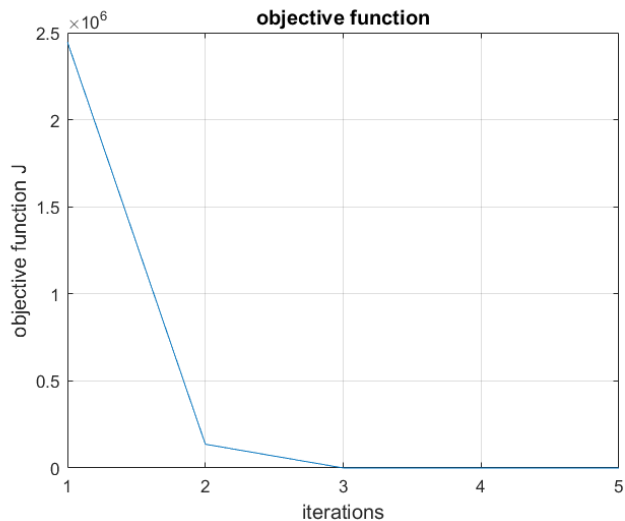


Εικόνα 81: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



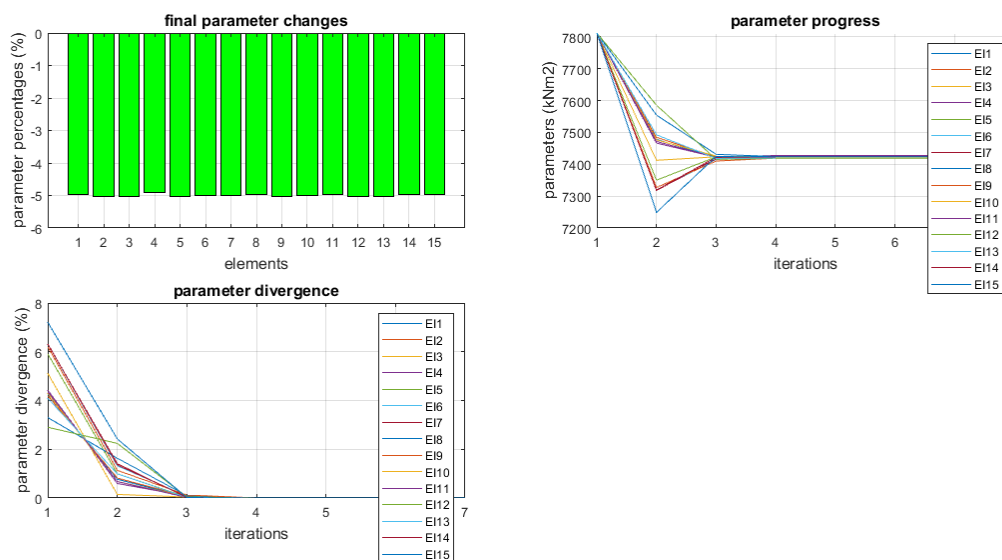
Εικόνα 82: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

Εδώ, παρατηρείται ότι με μόλις 2-3 επαναλήψεις, επέρχεται σύγκλιση των δυσκαμψιών στις δυσκαμψίες βλάβης, όπως και στη περίπτωση του προβόλου.

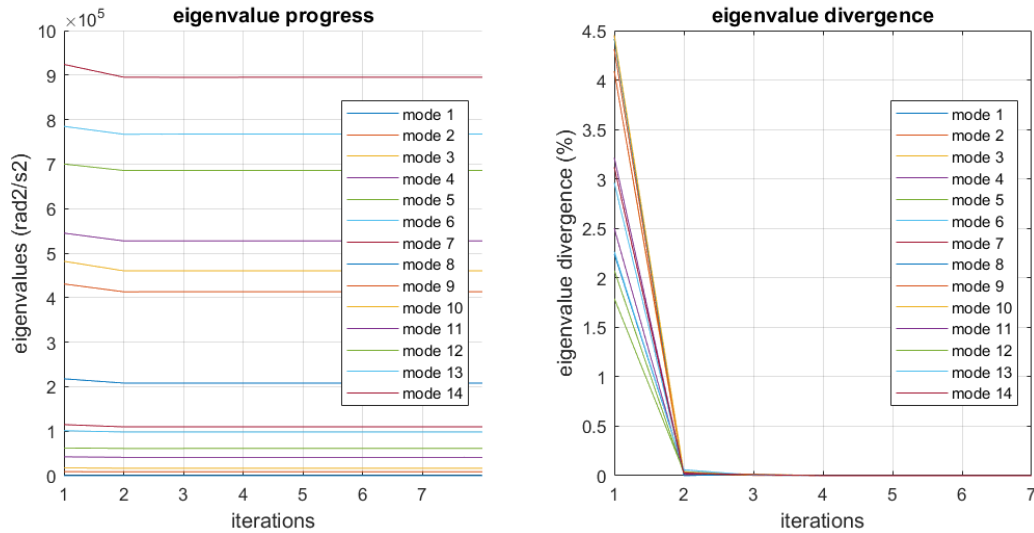


Εικόνα 83: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Δοκιμάζοντας τη τεχνική του SVD για την εκτέλεση των επαναλήψεων, θα παραχθούν τα ακόλουθα διαγράμματα μεγεθών



Εικόνα 84: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 85: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

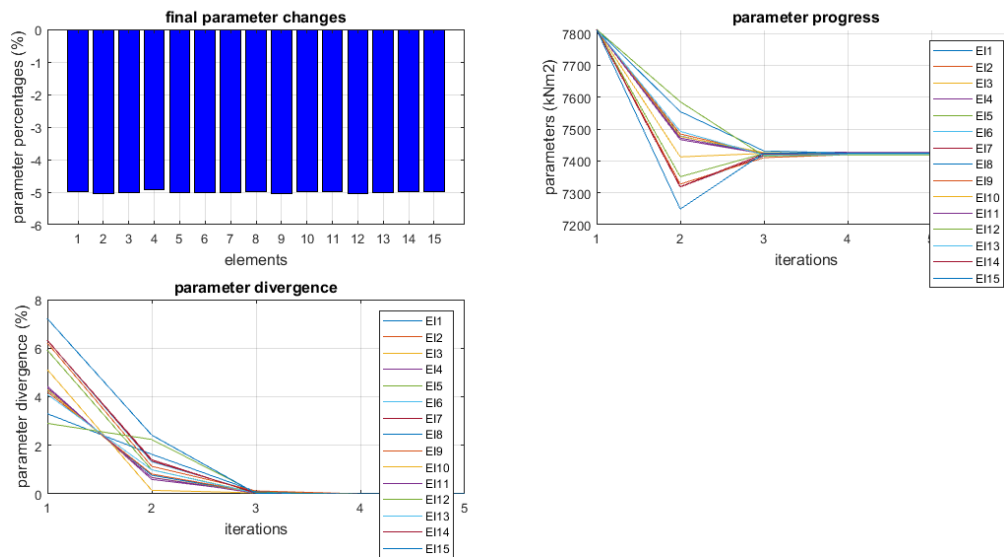
Ομοίως με τον πρόβολο, έτσι και στη γέφυρα, η τεχνική SVD παράγει τα ίδια αποτελέσματα με την περίπτωση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, με τη μόνη διαφορά να αποτελεί ο τρόπος επικαιροποίησης των παραμέτρων σε κάθε επανάληψη.

### Περίπτωση 2

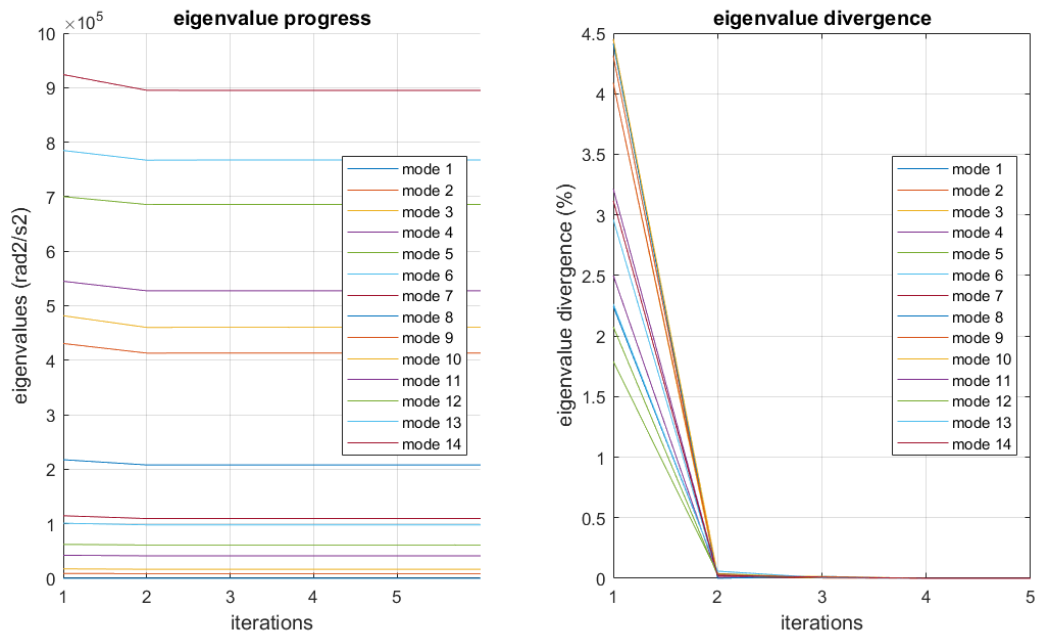
$$\theta_{j+1} = \theta_j + W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T [S_j W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta$$

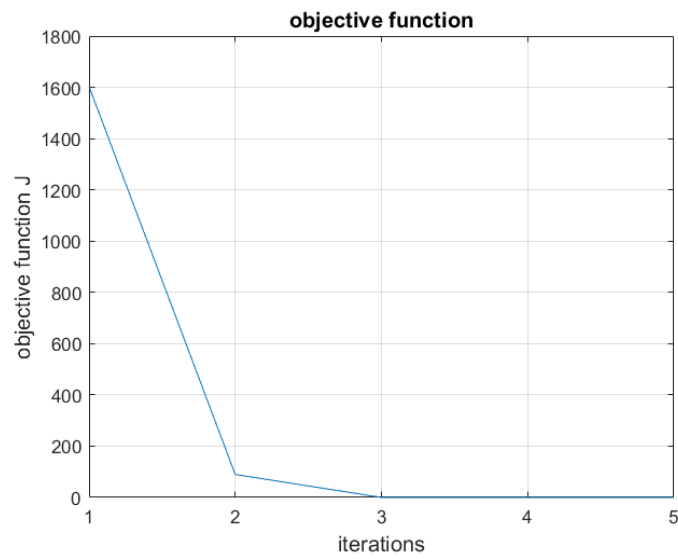
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\theta = 0.5\%$



Εικόνα 86: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



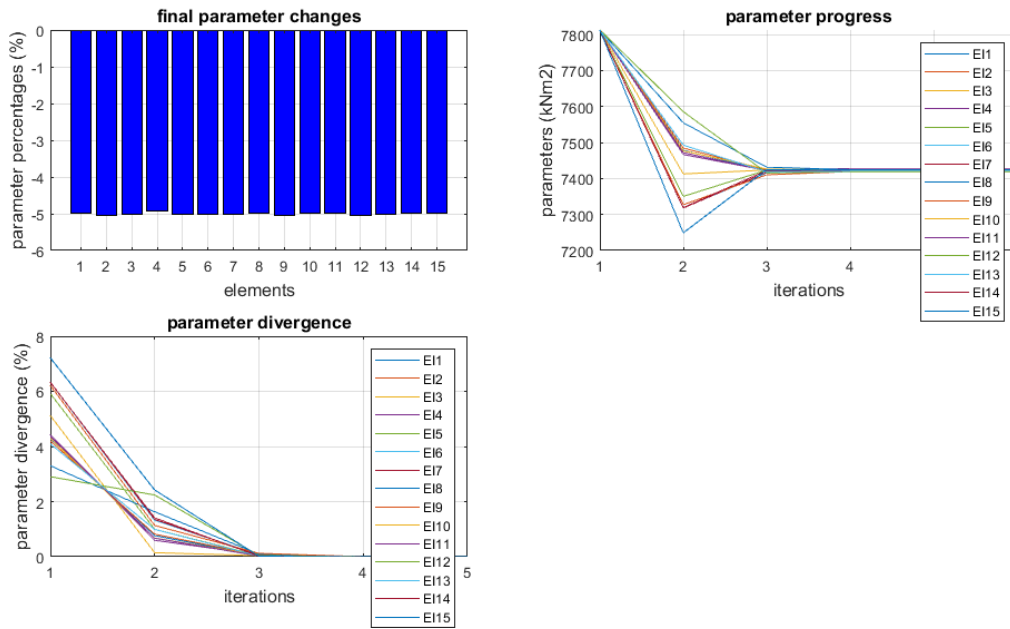
Εικόνα 87: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



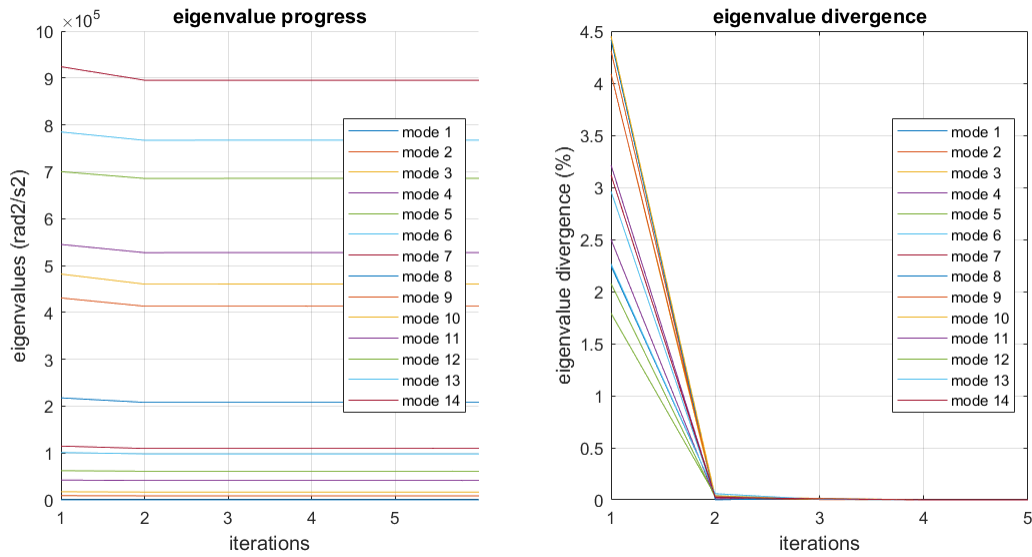
Εικόνα 88: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Εδώ, η συμπεριφορά παραμένει αμετάβλητη σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση

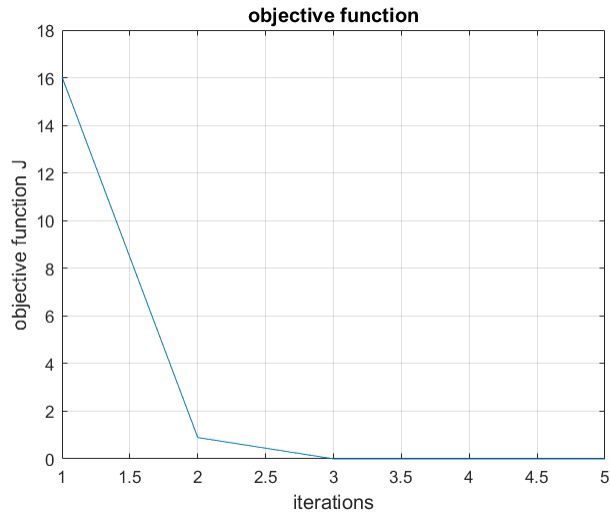
Υποερίπτωση 1:  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 89: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 90: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 91: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

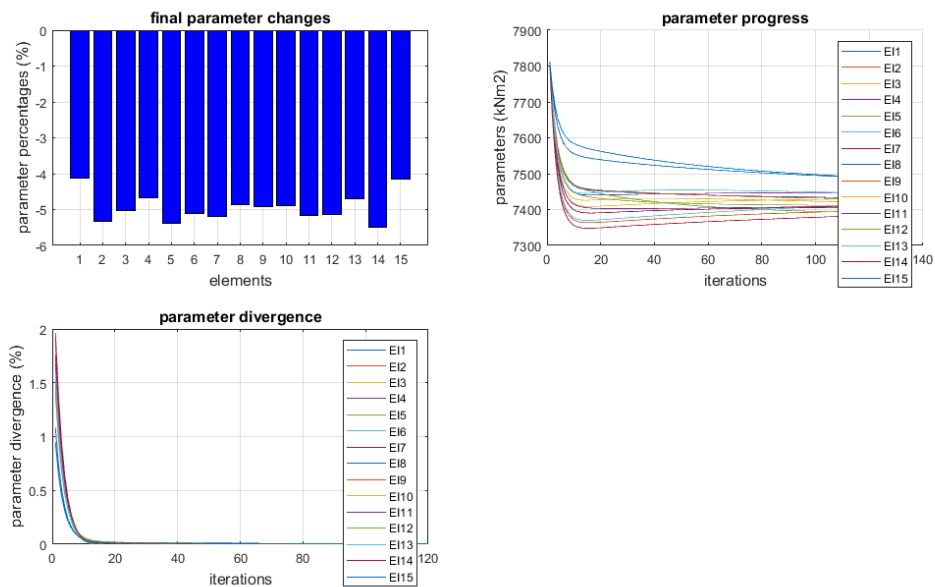
Εδώ, ο δεκαπλασιασμός της τυπικής απόκλισης υποδεκαπλασιάζει μόνο τη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, με μηδενικό βαθμό επηρεασμού της όλης συμπεριφοράς των μεγεθών

Περίπτωση 3

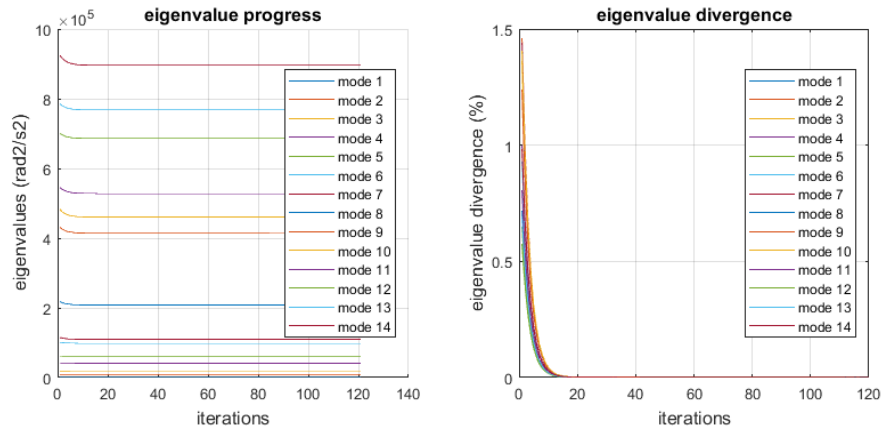
$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\epsilon\epsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} S_j^T W_{\epsilon\epsilon} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta + \epsilon^T W_{\epsilon\epsilon} \epsilon$$

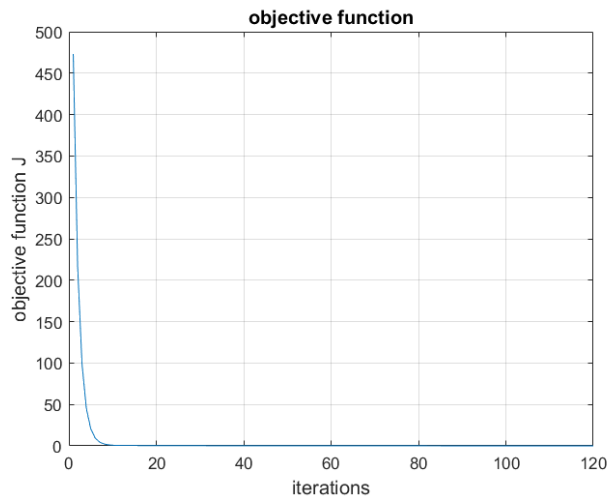
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\epsilon = 0.5\%$ ,  $\alpha_\theta = 0.5\%$



Εικόνα 92: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 93: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

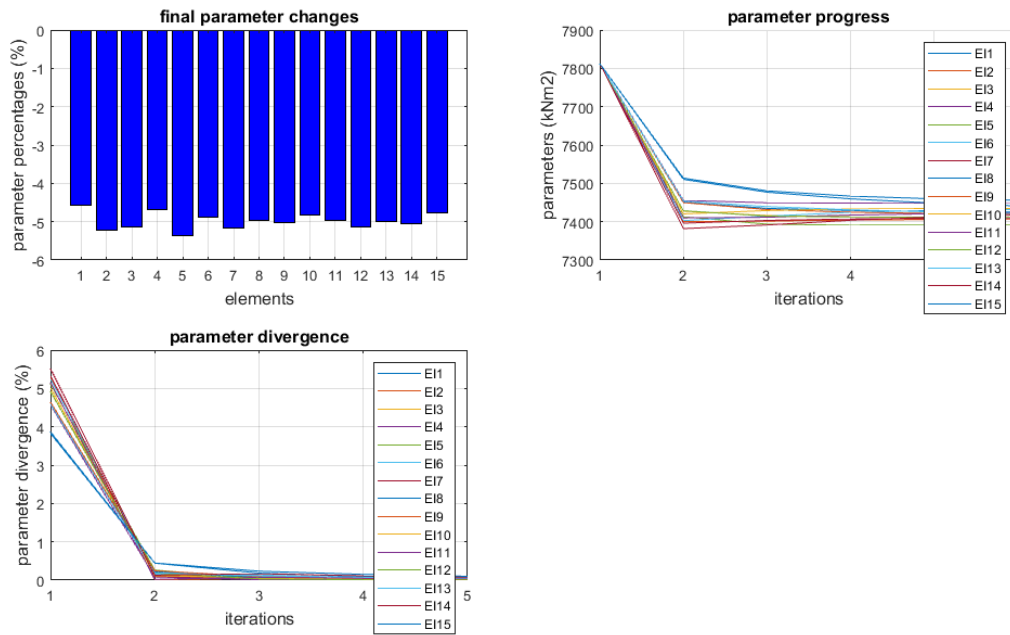


Εικόνα 94: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

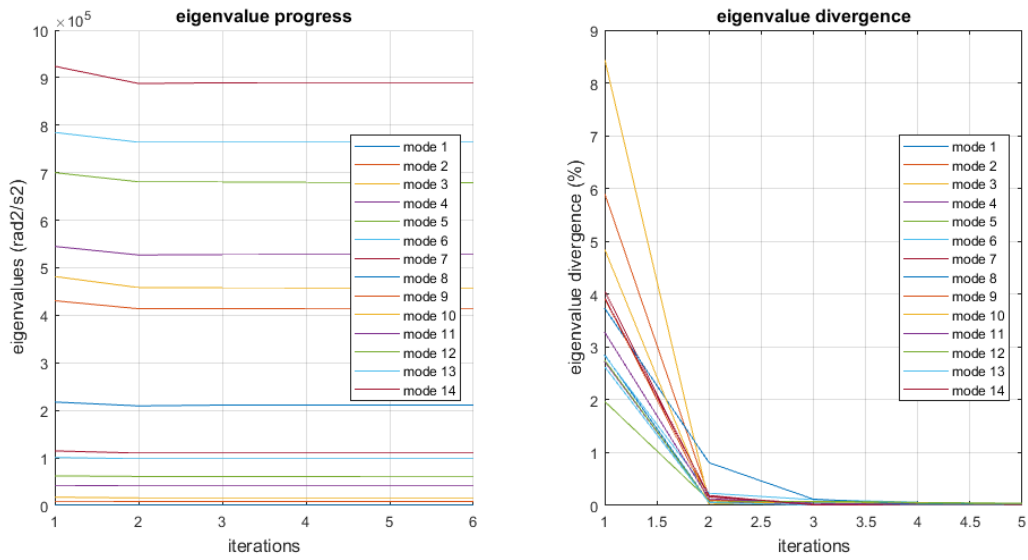
Με χαμηλές τυπικές αποκλίσεις, η διαδικασία σύγκλισης ξεκινάει από τη 12<sup>η</sup> επανάληψη περίπου (όπως υποδηλώνει άλλωστε και το διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης), ωστόσο, για την επαλήθευση του αρχικού σεναρίου χρειάζονται παραπάνω από 120 επαναλήψεις.



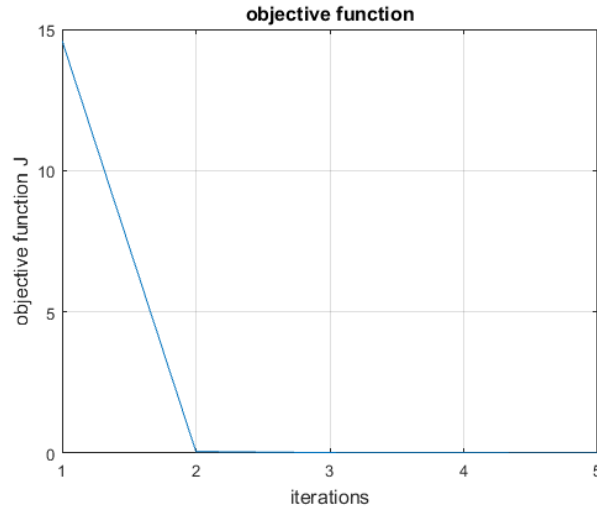
Υποπερίπτωση 2:  $\alpha_\epsilon=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 95: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



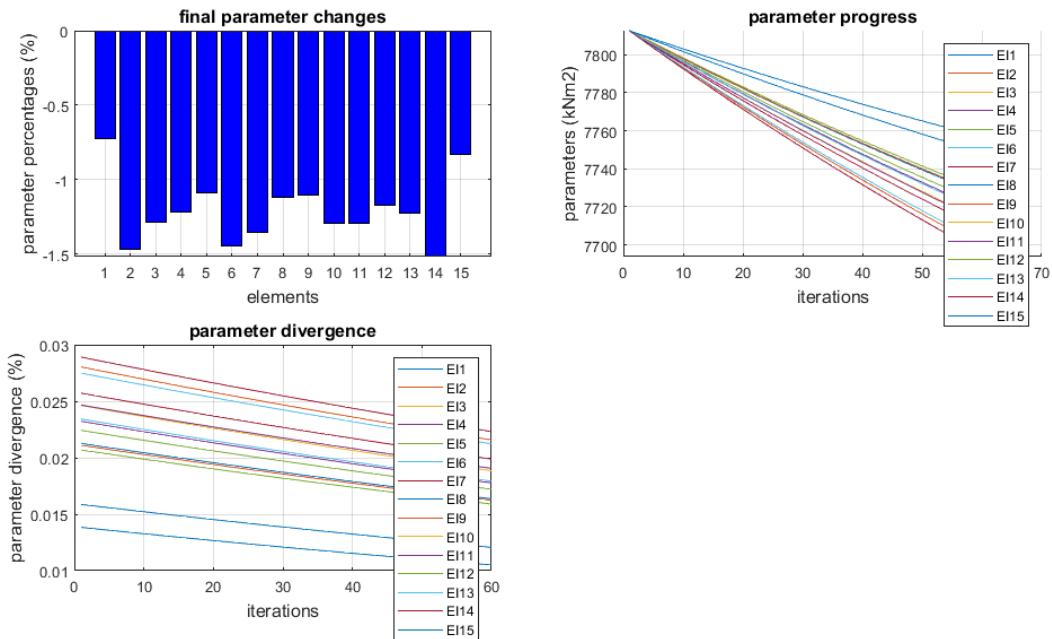
Εικόνα 96: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



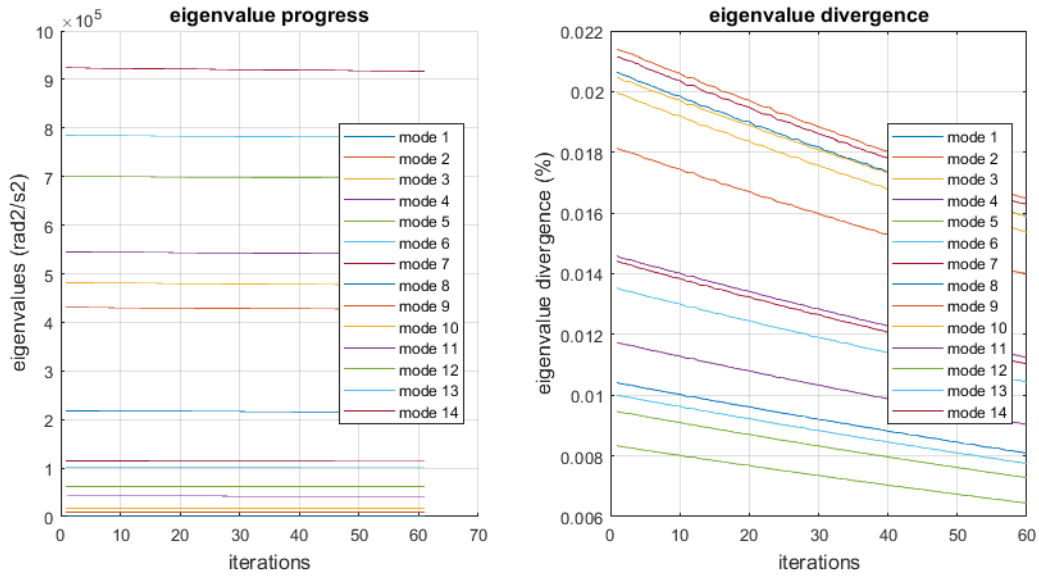
Εικόνα 97: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Η αύξηση της τυπικής απόκλισης επιτάχυνε πολύ σημαντικά την σύγκλιση των μεγεθών, φέρνοντας παράλληλα πιο κοντά τις καμπύλες που αντιστοιχούν στα πεπερασμένα στοιχεία του καταστρώματος

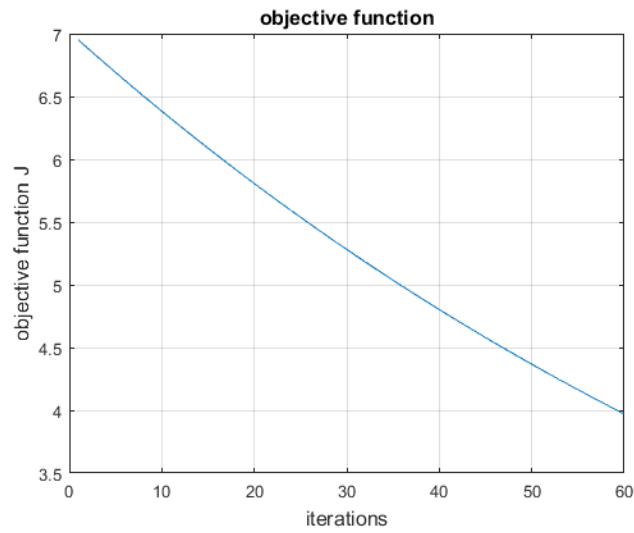
Υποπερίπτωση 3:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$



Εικόνα 98: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



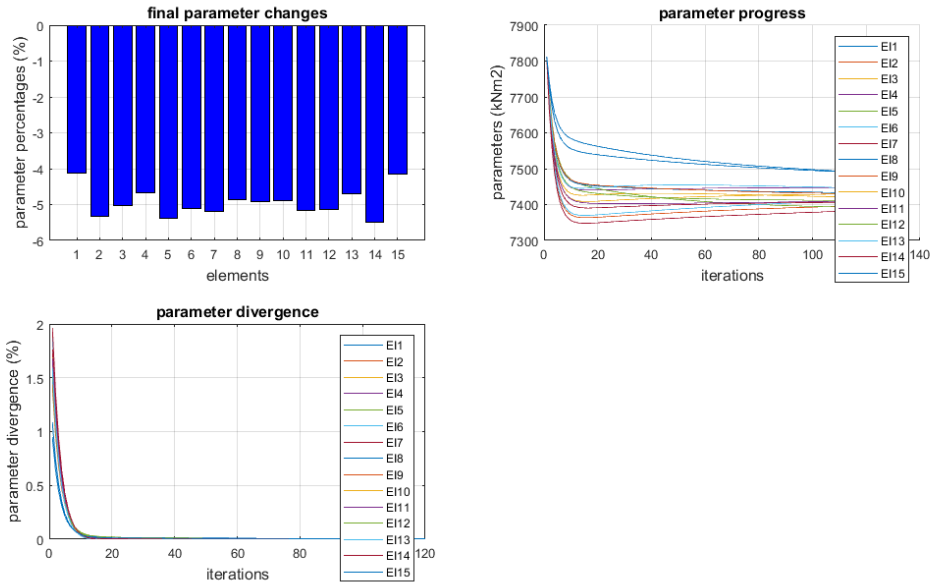
Εικόνα 99: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



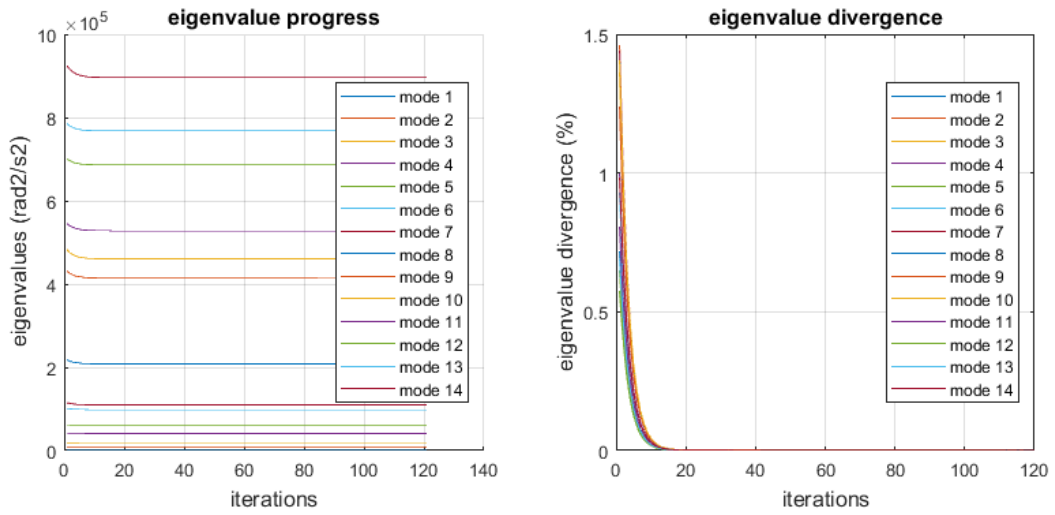
Εικόνα 100: Διάγραμμα κατάστασης ιδιοτιμών

Όπως και στον πρόβολο, η συμπεριφορά είναι συγκλίνουσα ως προς τη πορεία των μεγεθών με τη πάροδο των επαναλήψεων, αποκλίνουσα δε από το αρχικό σενάριο.

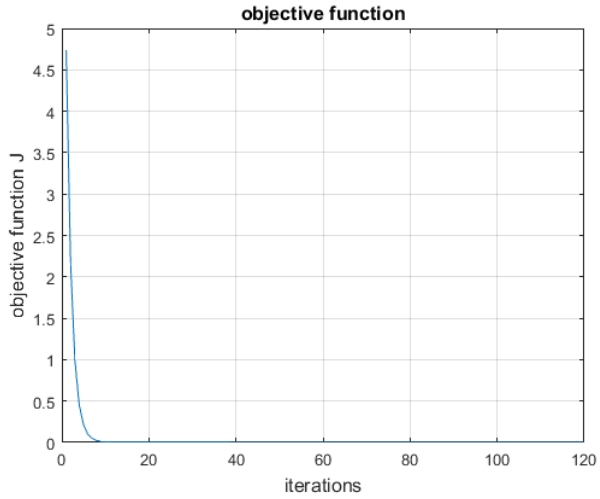
Υποπερίπτωση 4:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 101: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 102: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 103: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

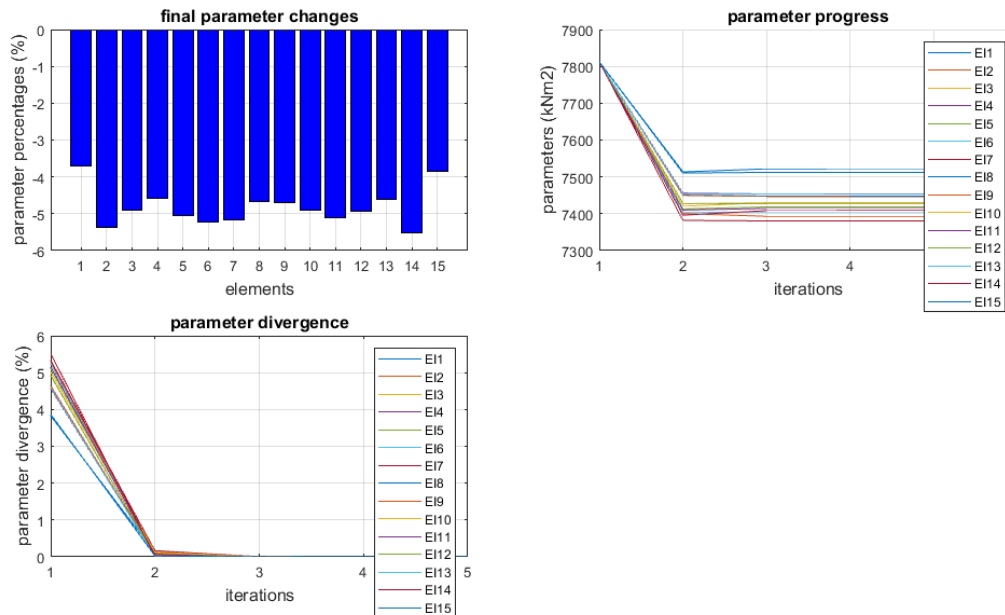
Ίδια συμπεριφορά με τη περίπτωση τυπικών αποκλίσεων στο 0.5% και για τα 2 μεγέθη

#### Περίπτωση 4

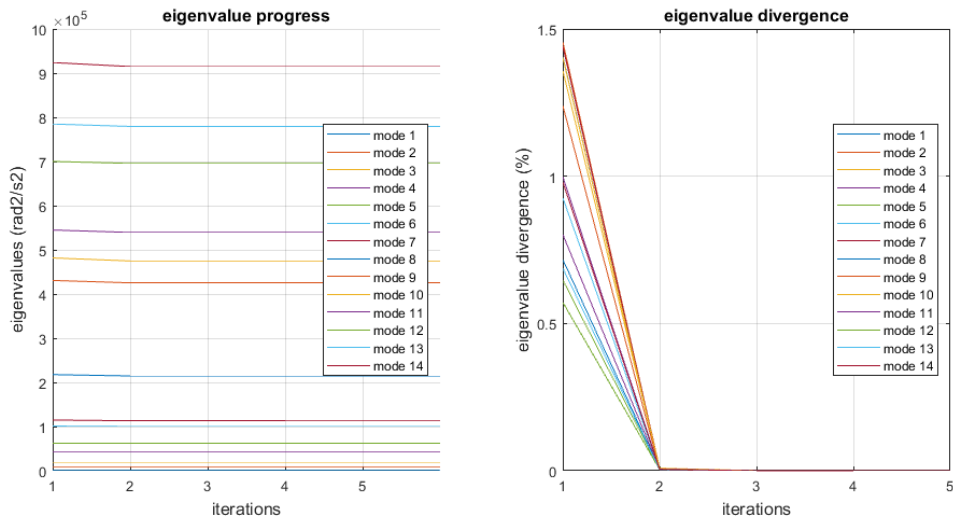
$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\epsilon\epsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} \{S_j^T W_{\epsilon\epsilon} (z_m - z_j) - W_{\theta\theta} (\theta_j - \theta_0)\}$$

$$J = (\theta - \theta_0)^T W_{\theta\theta} (\theta - \theta_0) + \epsilon^T W_{\epsilon\epsilon} \epsilon$$

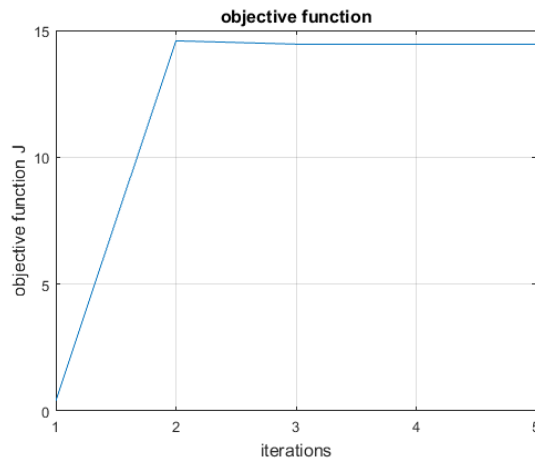
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\epsilon = 0.5\%$ ,  $\alpha_\theta = 0.5\%$



Εικόνα 104: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



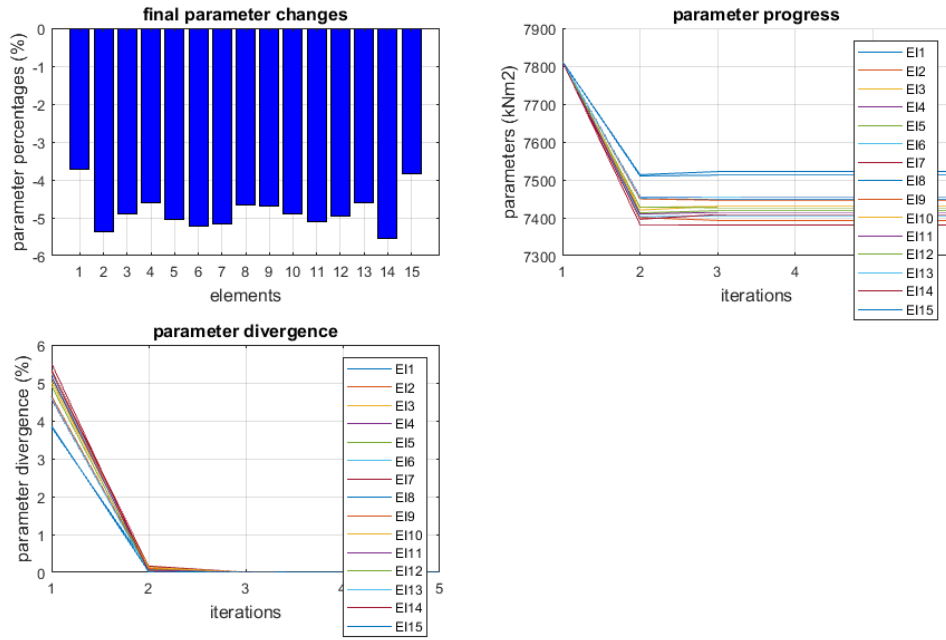
Εικόνα 105: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



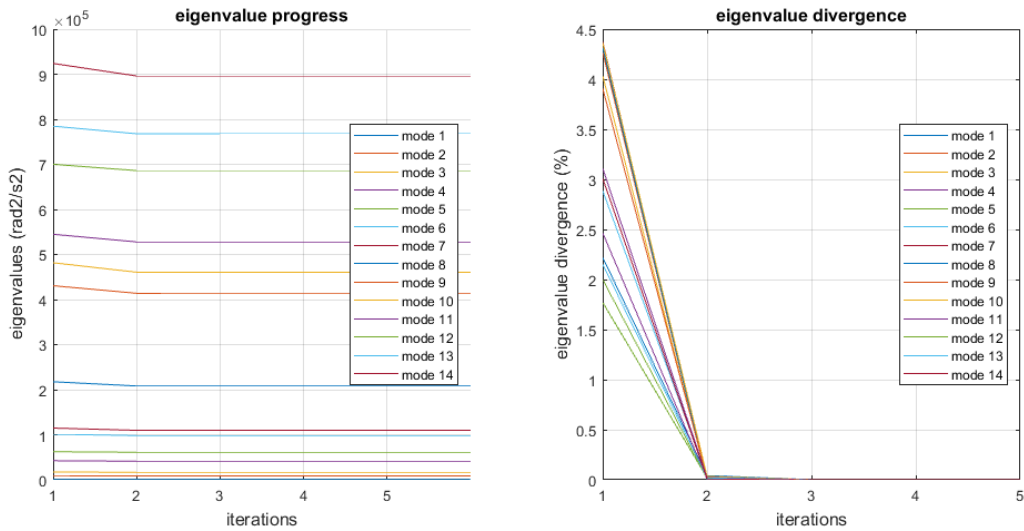
Εικόνα 106: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Εδώ, η σχεδόν απόλυση σύγκλιση των μεγεθών επέρχεται από τη 2<sup>η</sup> επανάληψη, στον αντίποδα του οποίου είναι η απόκλιση από το σενάριο της ομοιόμορφης βλάβης (μικρότερη βλάβη στις κυλίσεις). Επίσης, καταγράφεται ανοδική πορεία στο διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης σε τιμή μη μηδενική, γεγονός που επιβεβαιώνει την παρατήρηση αυτή.

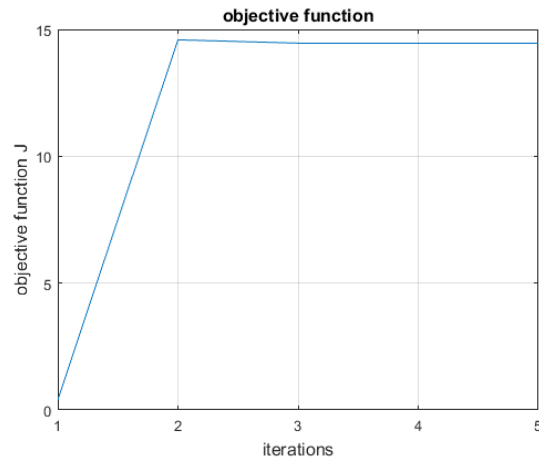
Υποπερίπτωση 2:  $\alpha_\epsilon=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 107: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



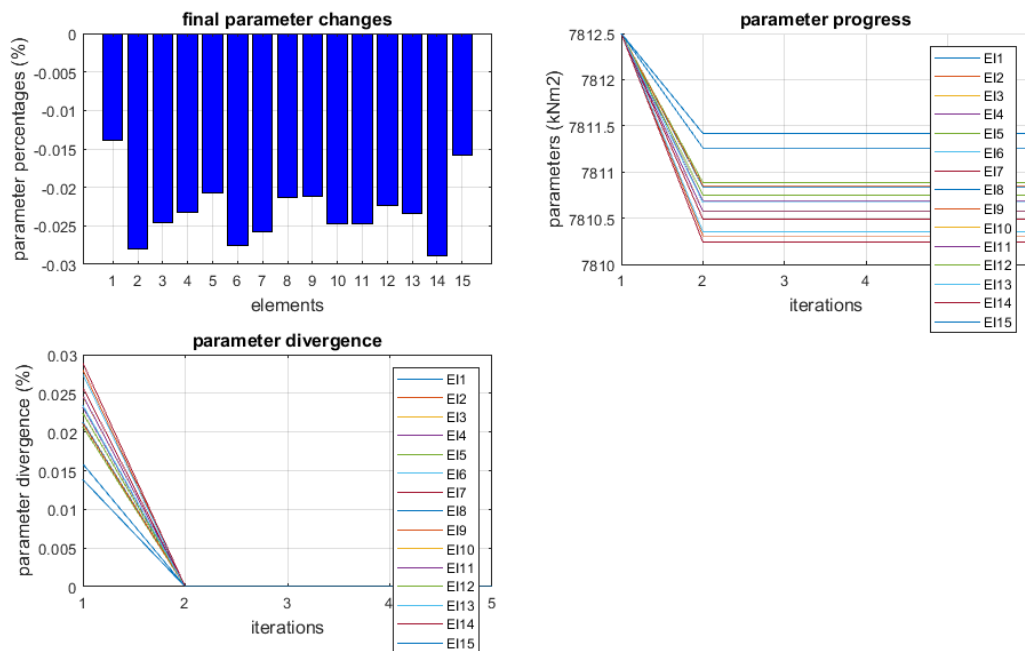
Εικόνα 108: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 109: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

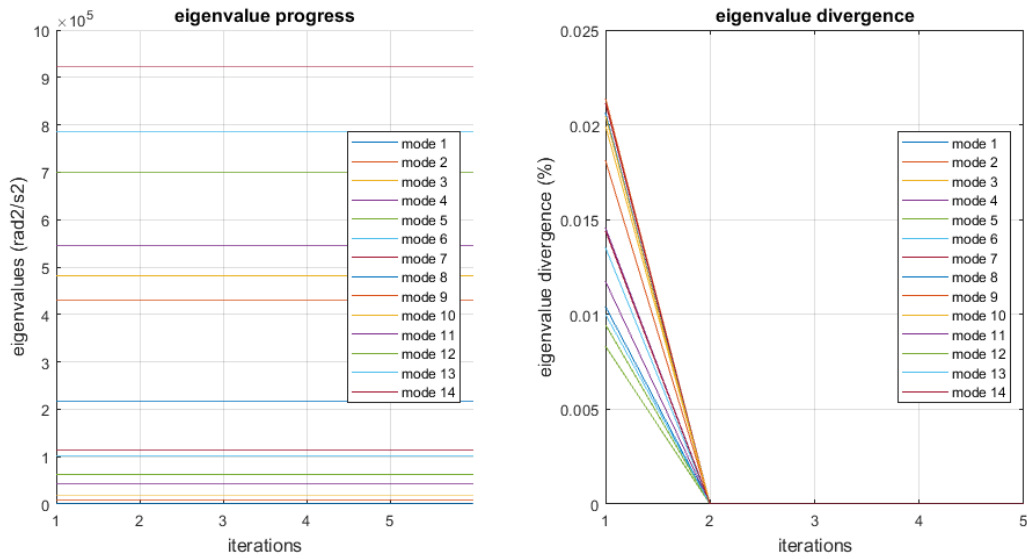
Στο σημείο αυτό, παρατηρείται εντελώς αμετάβλητη συμπεριφορά στα μεγέθη, σε σύγκριση με την προηγούμενη υποεπίπτωση.

Υποεπίπτωση 3:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$

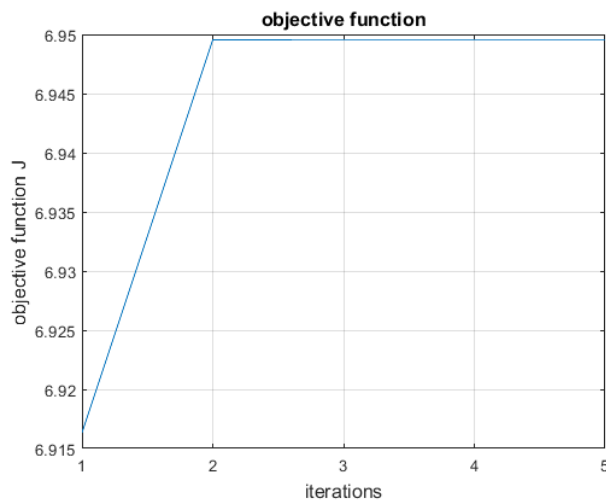


Εικόνα 110: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων





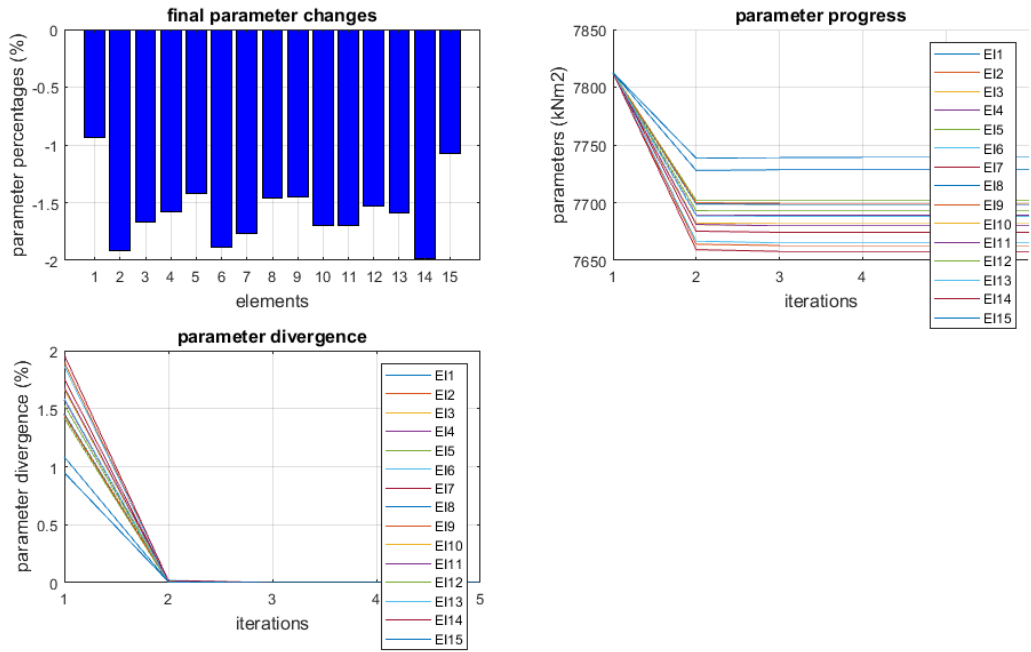
Εικόνα 111: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



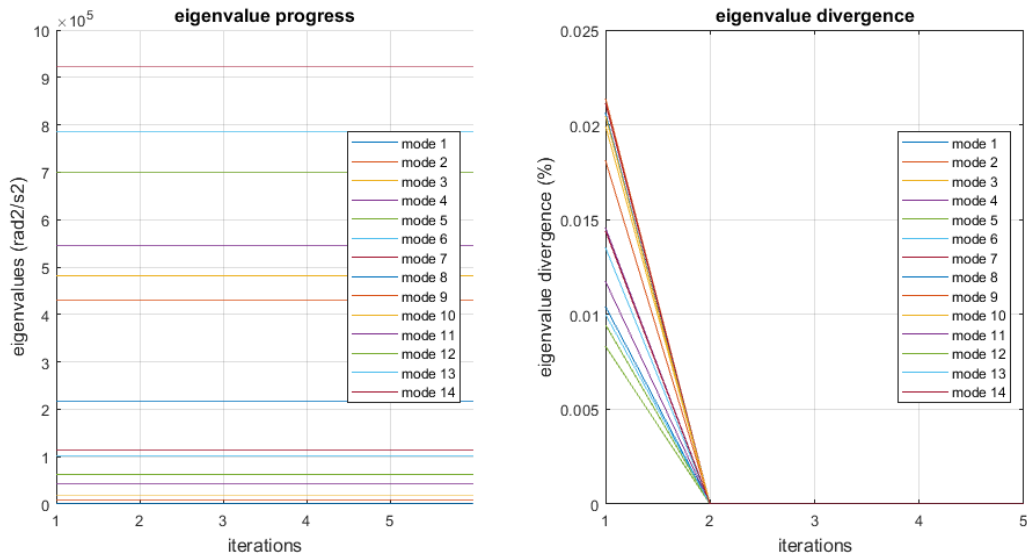
Εικόνα 112: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Εδώ, εντοπίζεται ξανά απόλυτα συγκλίνουσα συμπεριφορά από τη 2<sup>η</sup> επανάληψη, αλλά με εύρος μικρότερων τιμών αντικειμενικής συνάρτησης και μικρότερα ποσοστά τελικών μεταβολών των παραμέτρων στο ραβδόγραμμα.

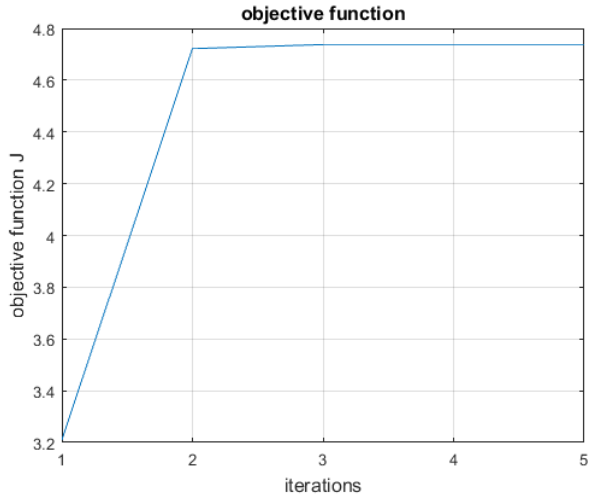
Υποπερίπτωση 4:  $\alpha_\epsilon=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 113: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 114: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



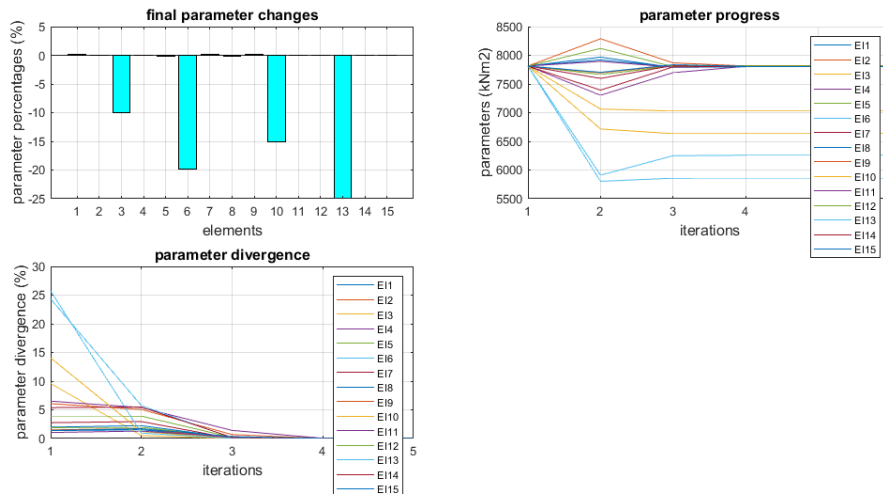
Εικόνα 115: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

### 6.1.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 2: ΤΟΠΙΚΕΣ ΒΛΑΒΕΣ

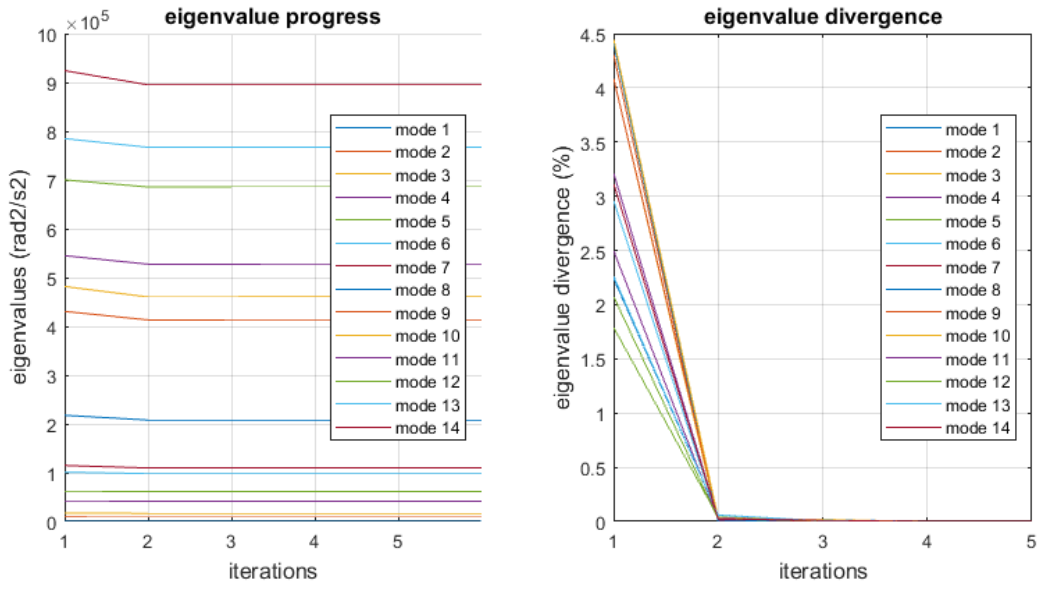
Περίπτωση 1

$$\theta_{j+1} = \theta_j + S_j^T [S_j S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

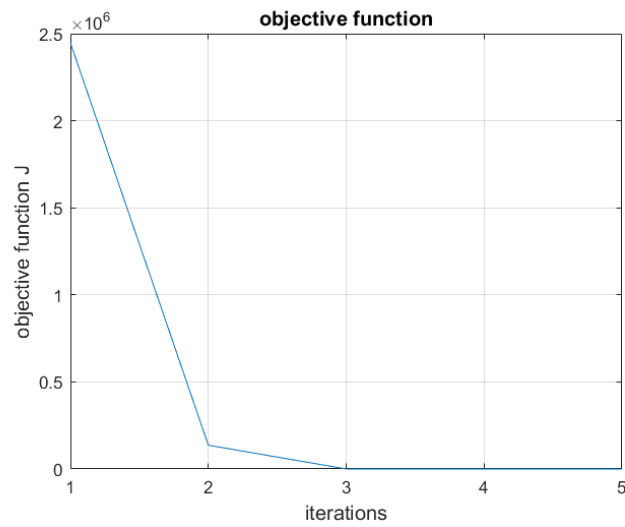
$$J = d\theta^T d\theta$$



Εικόνα 116: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 117: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



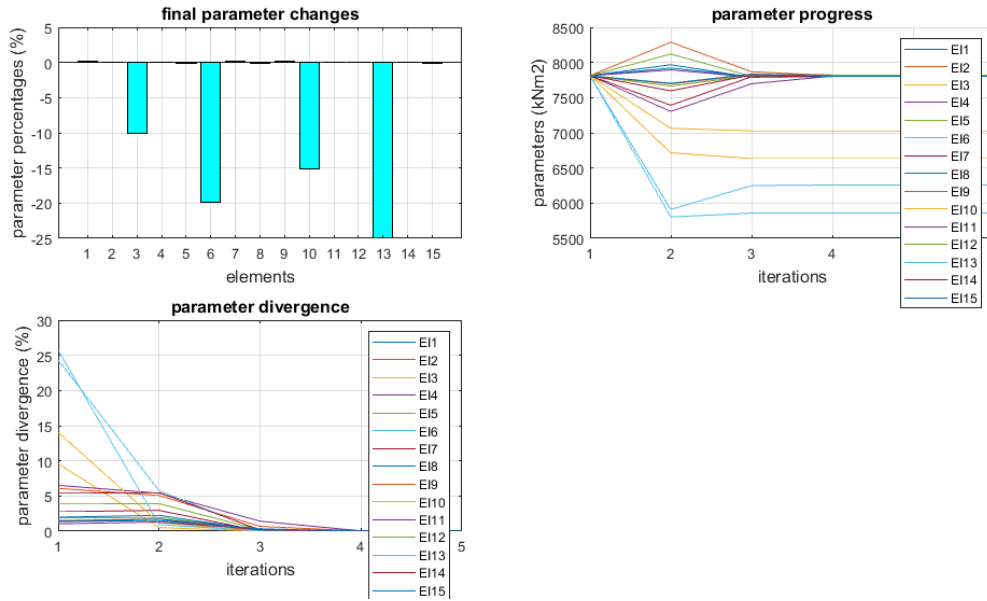
Εικόνα 118: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Περίπτωση 2

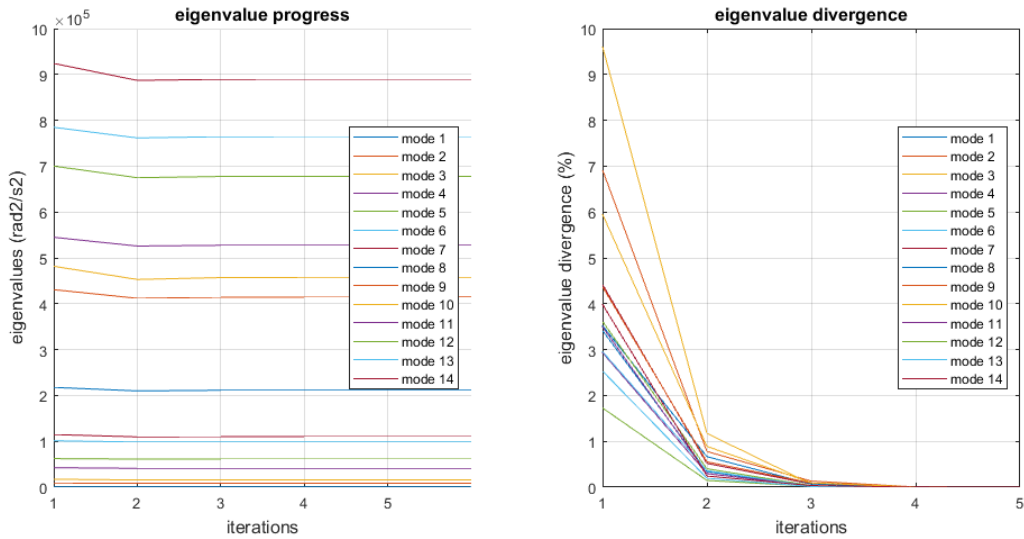
$$\theta_{j+1} = \theta_j + W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T [S_j W_{\theta\theta}^{-1} S_j^T]^{-1} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta$$

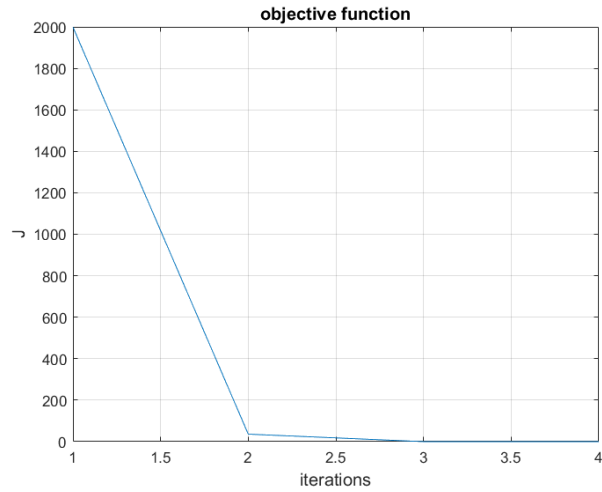
Υποερίπτωση 1:  $\alpha_\theta=0.5\%$



Εικόνα 119: Διαγράμματα κατάστασης παραμετρων

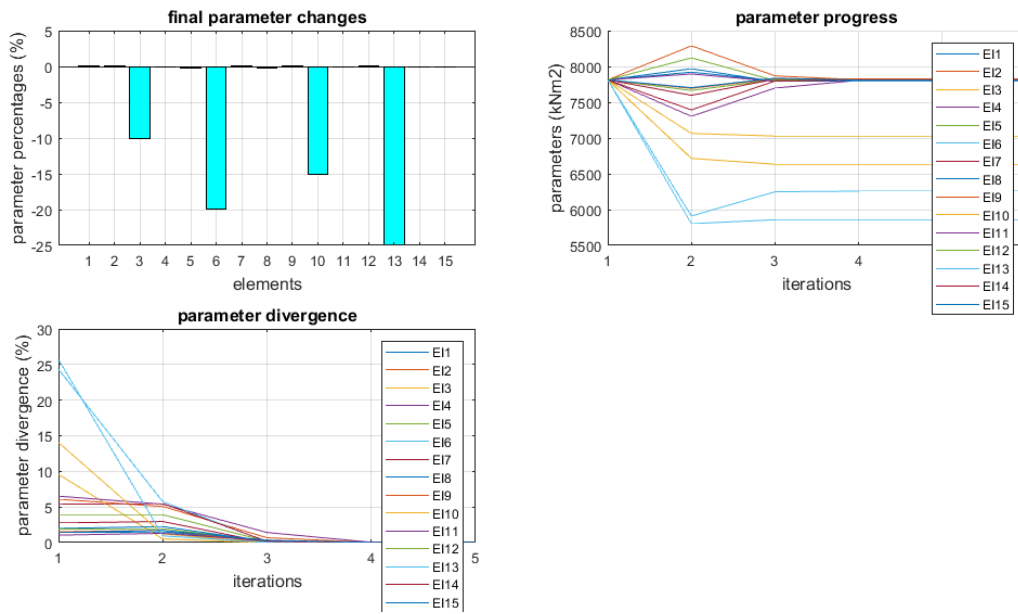


Εικόνα 120: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

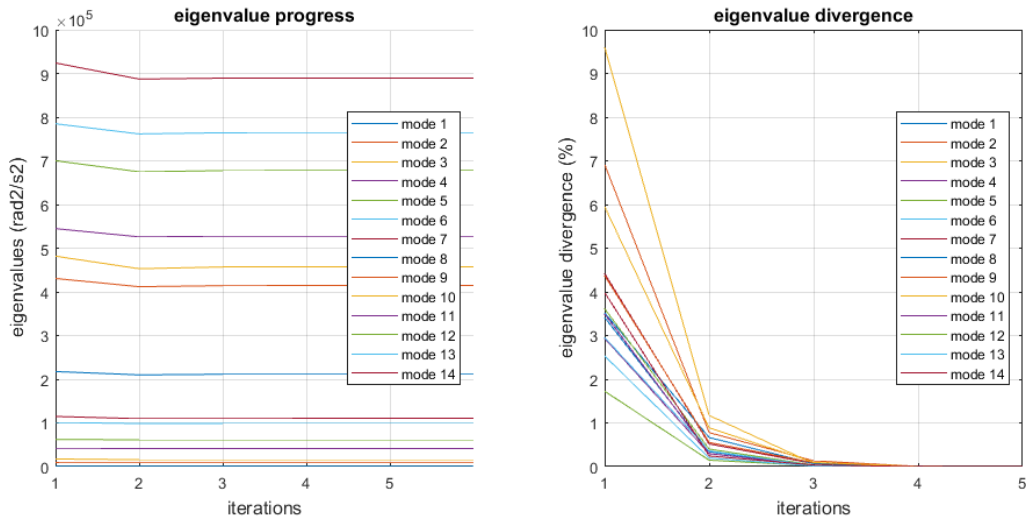


Εικόνα 121: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

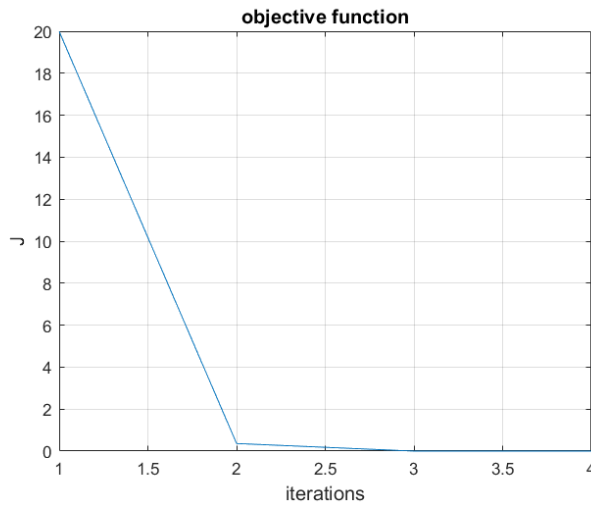
Υποπερίπτωση 2:  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 122: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 123: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



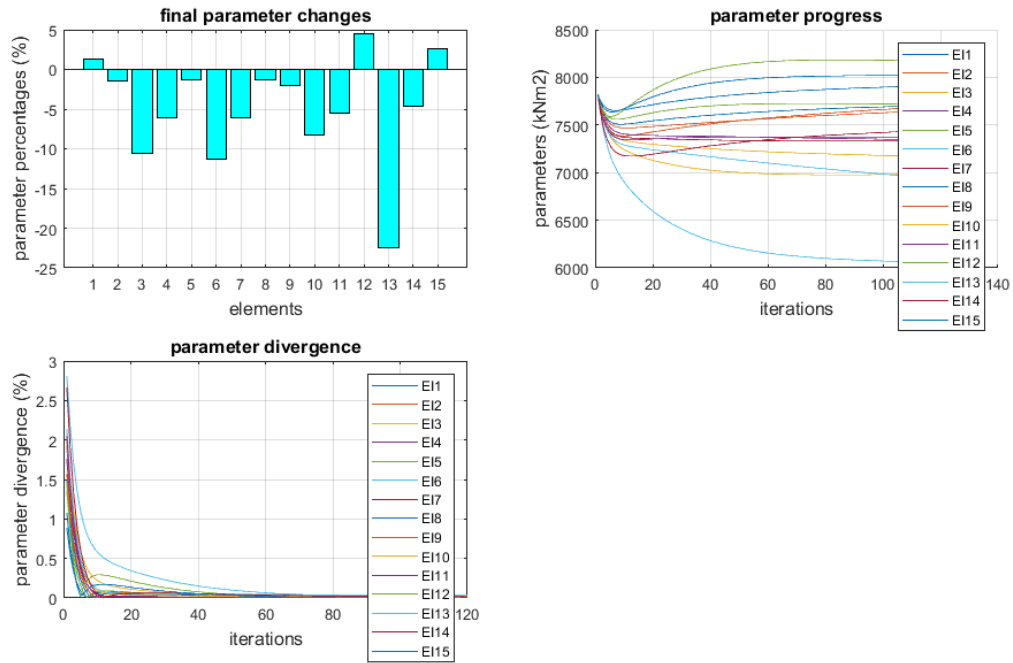
Εικόνα 124: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

### Περίπτωση 3

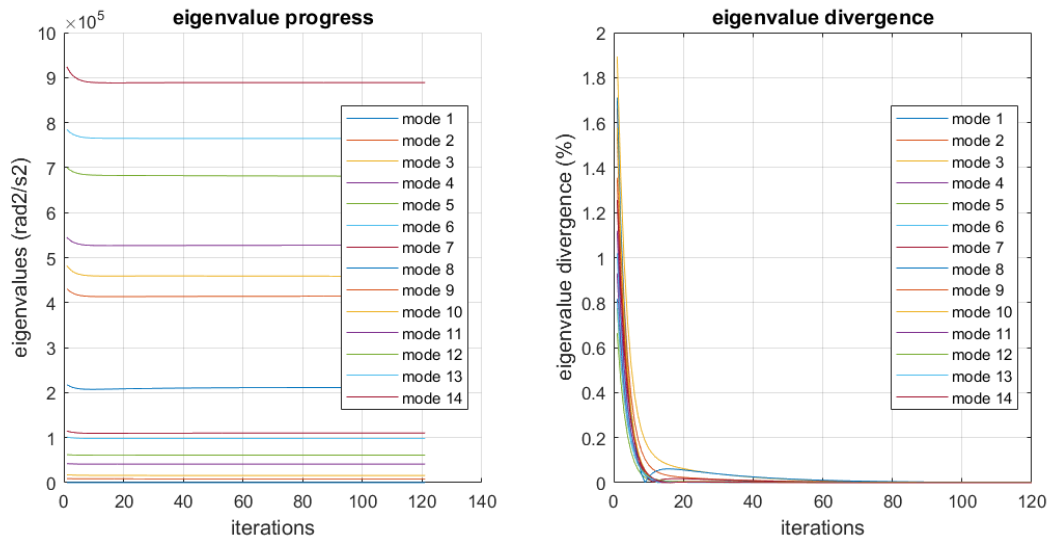
$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\epsilon\epsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} S_j^T W_{\epsilon\epsilon} (z_m - z_j)$$

$$J = d\theta^T W_{\theta\theta} d\theta + \epsilon^T W_{\epsilon\epsilon} \epsilon$$

Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\theta=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$

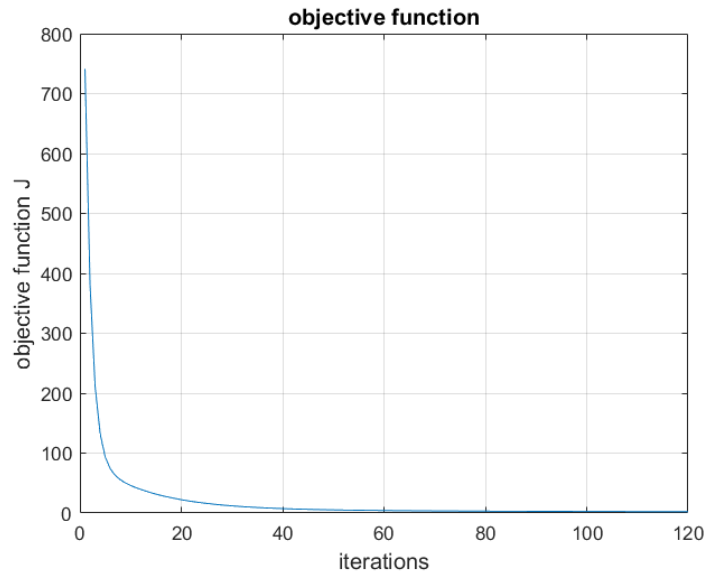


Εικόνα 125: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



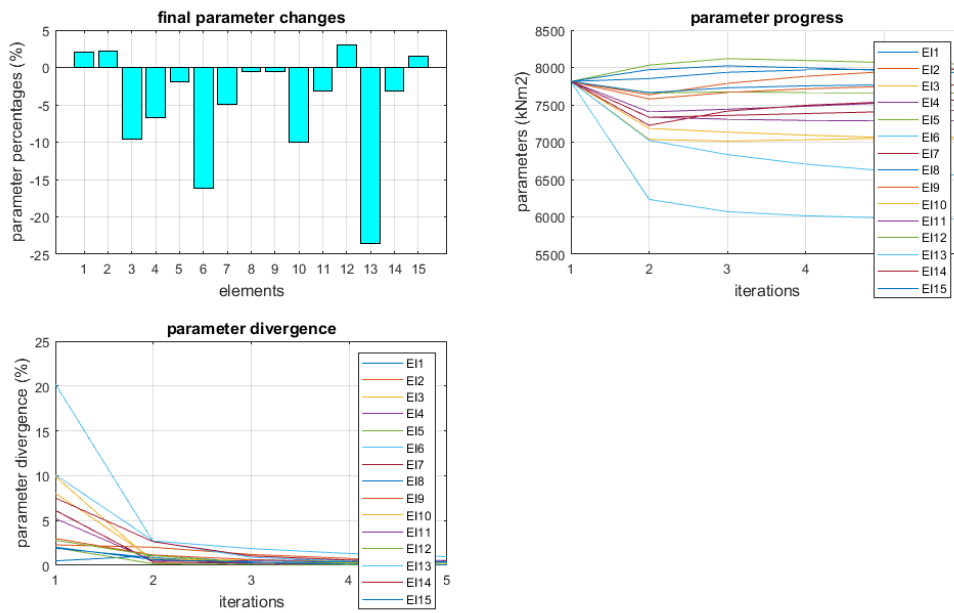
Εικόνα 126: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



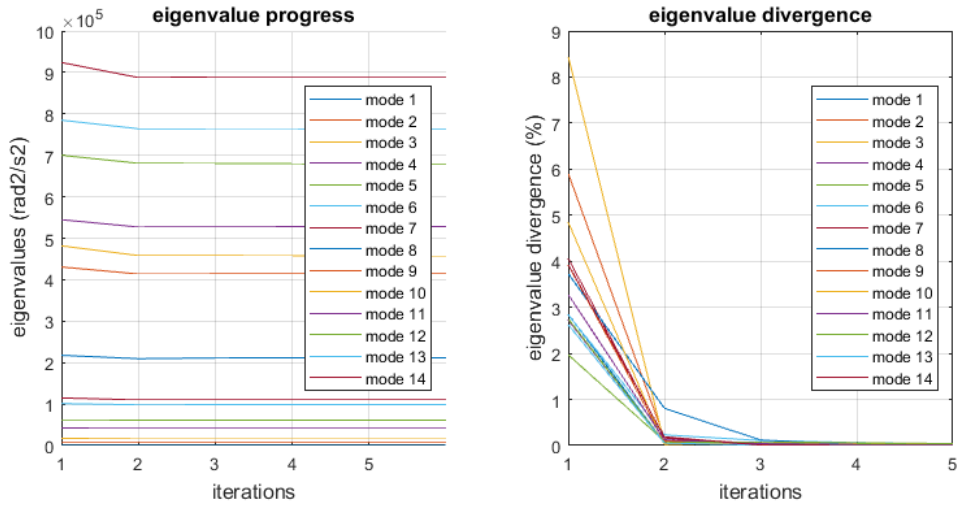


Εικόνα 127: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

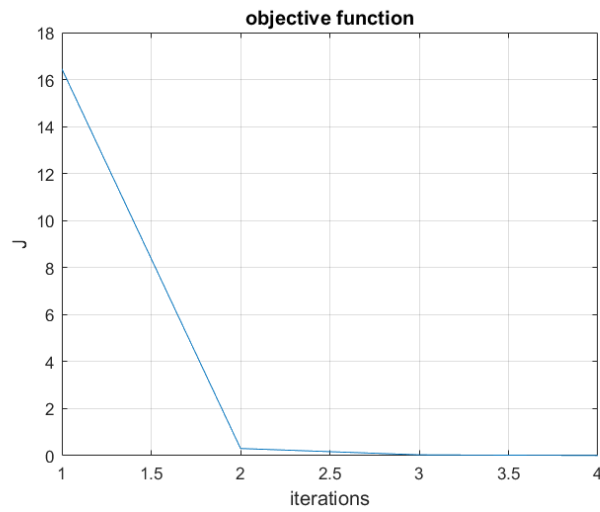
Υποπερίπτωση 2:  $\alpha_\theta=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 128: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

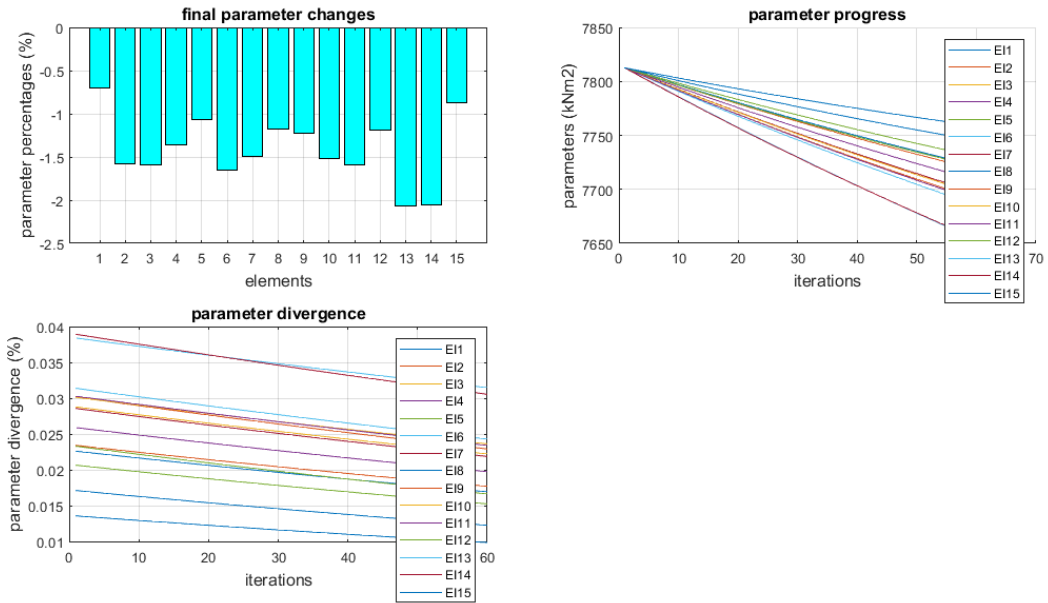


Εικόνα 129: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

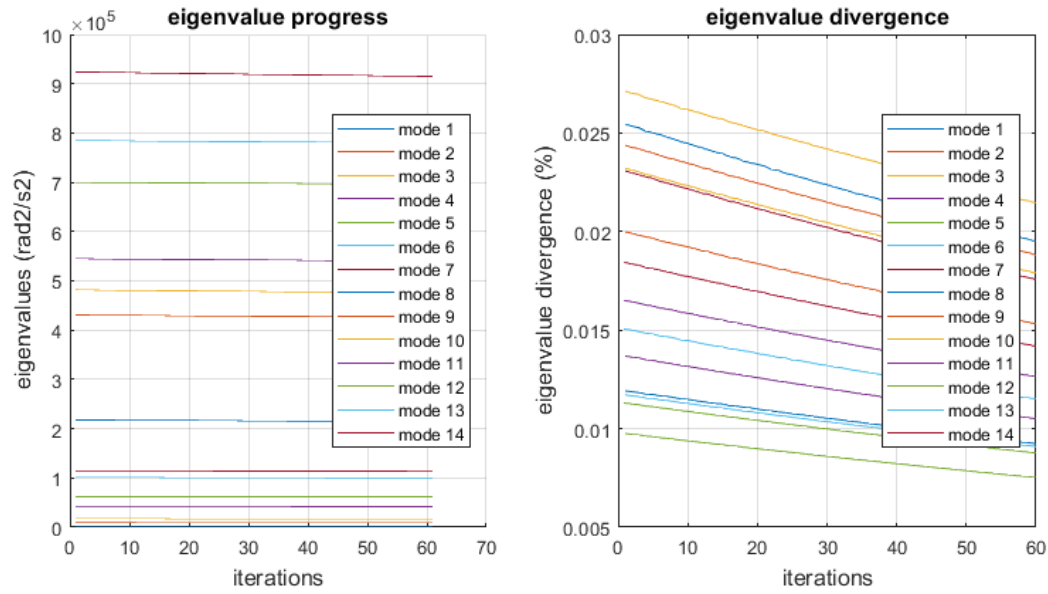


Εικόνα 130: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

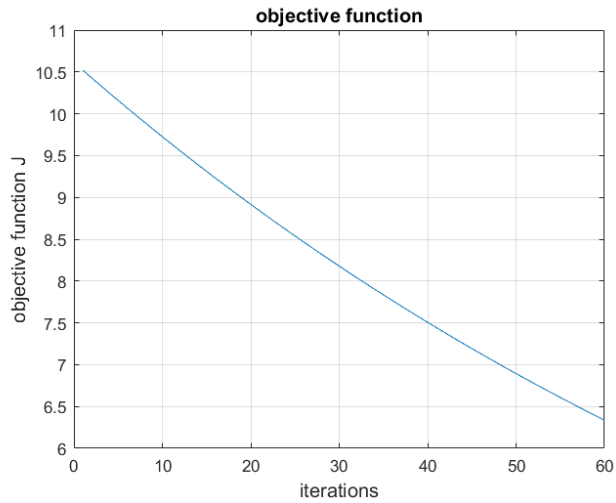
Υποπερίπτωση 3:  $\alpha_\theta=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$



Εικόνα 131: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

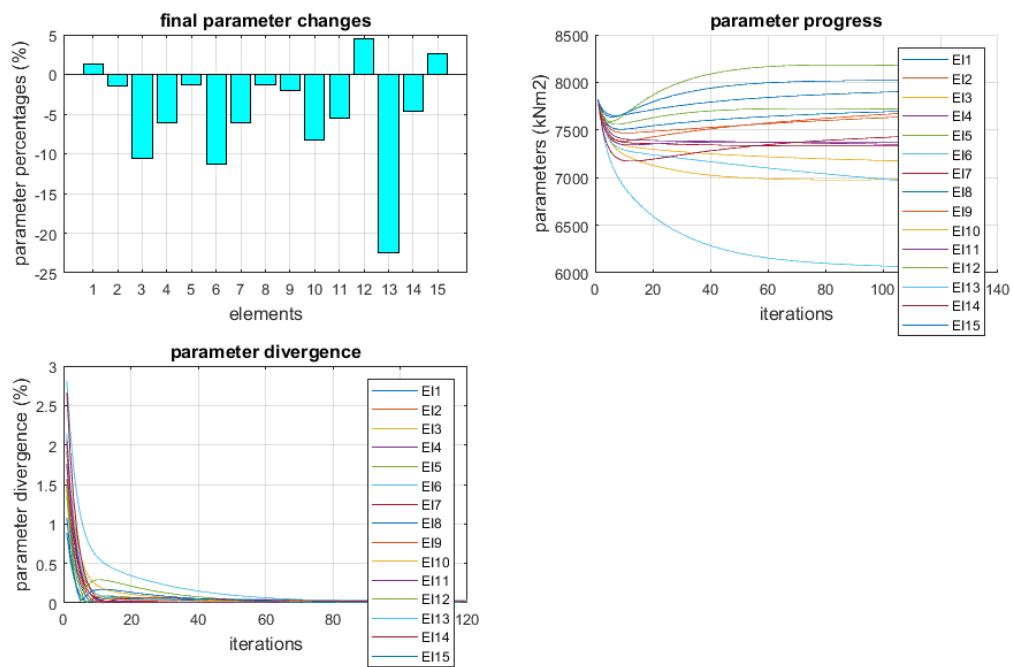


Εικόνα 132: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

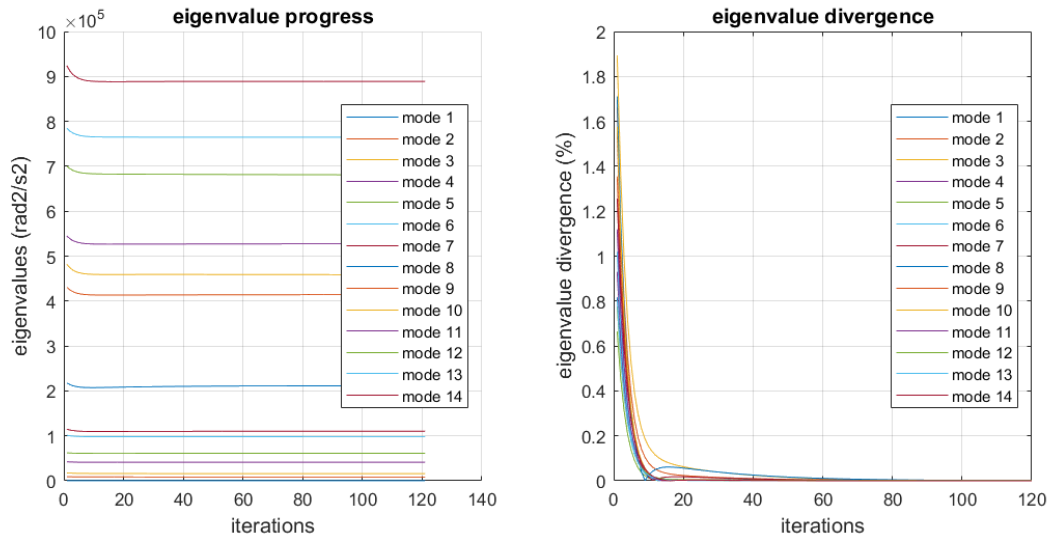


Εικόνα 133: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

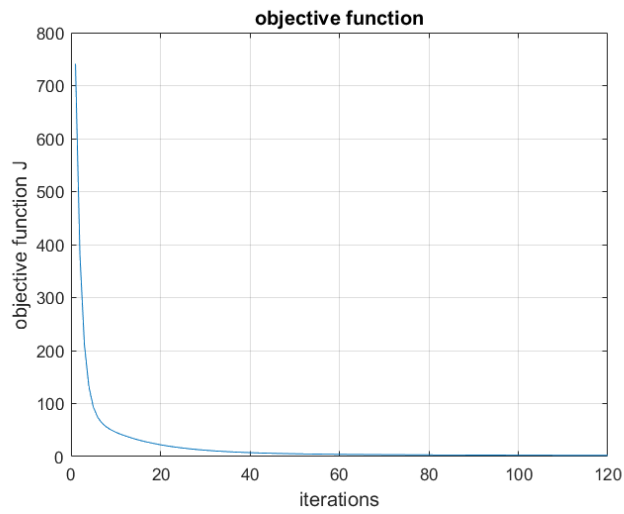
Υποπερίπτωση 4:  $\alpha_\theta=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 134: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 135: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



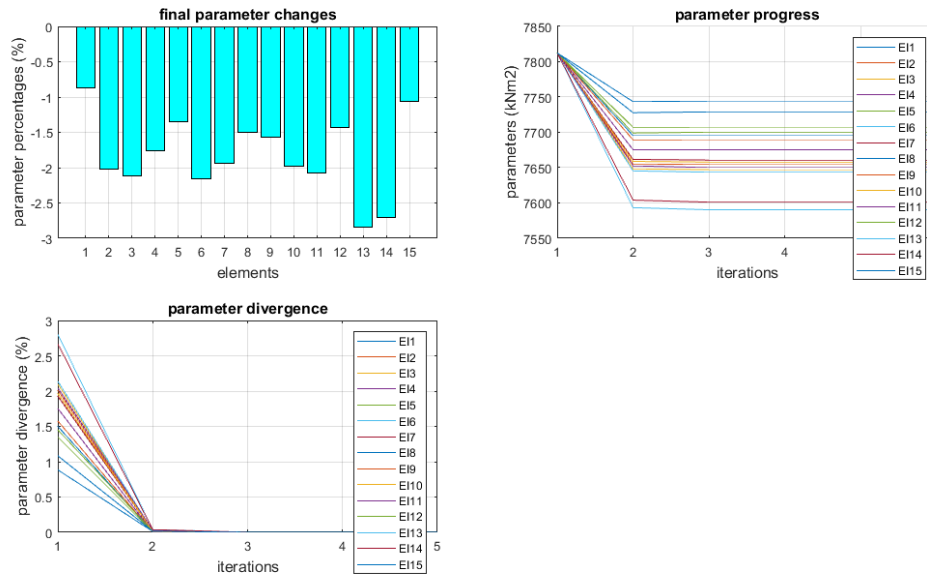
Εικόνα 136: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

#### Περίπτωση 4

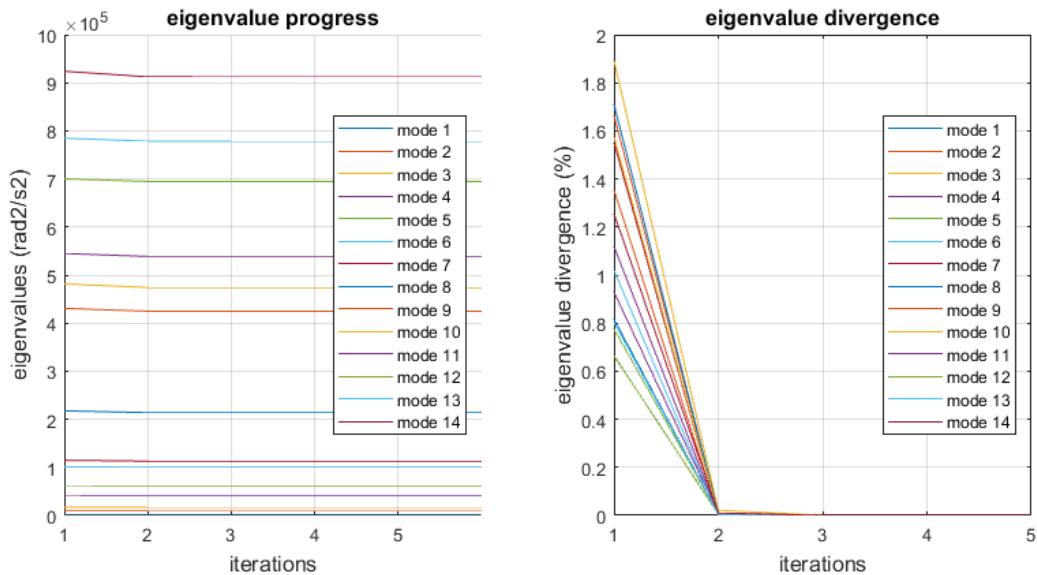
$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} S_j + W_{\theta\theta}]^{-1} \{S_j^T W_{\varepsilon\varepsilon} (z_m - z_j) - W_{\theta\theta} (\theta_j - \theta_0)\}$$

$$J = (\theta - \theta_0)^T W_{\theta\theta} (\theta - \theta_0) + \varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon$$

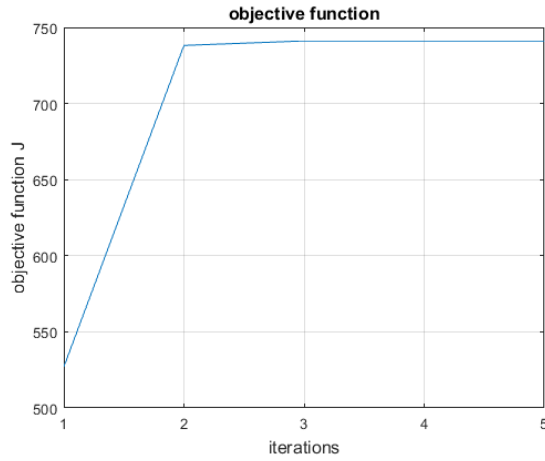
Υποπερίπτωση 1:  $\alpha_\theta = 0.5\%$ ,  $\alpha_\varepsilon = 0.5\%$



Εικόνα 137: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

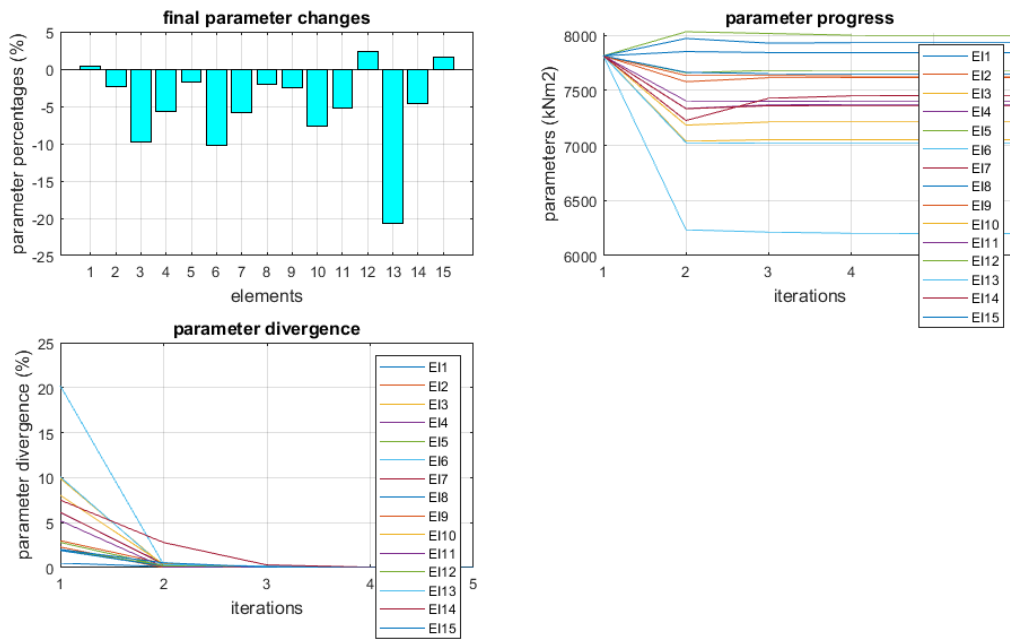


Εικόνα 138: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

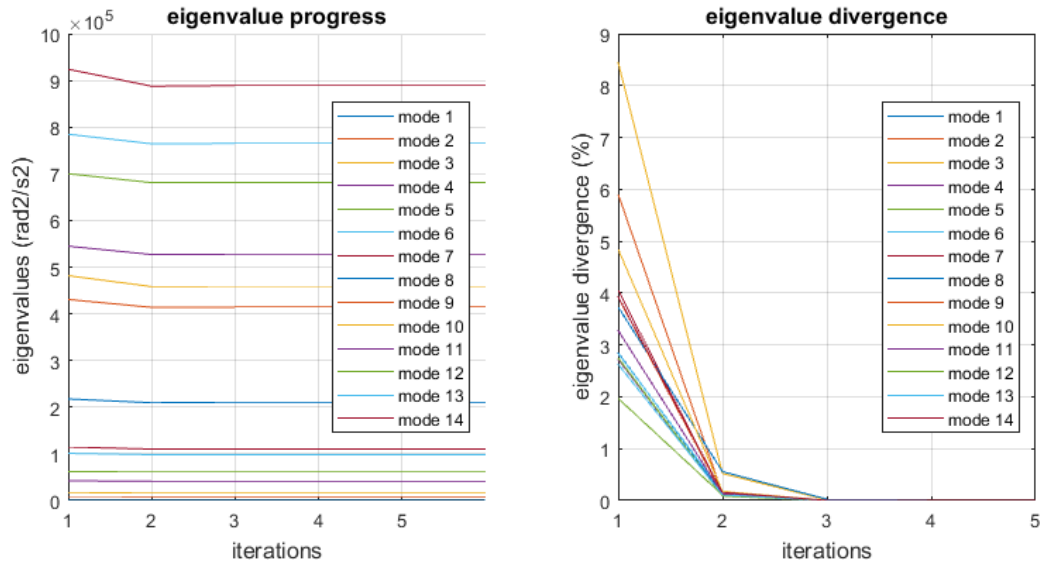


Εικόνα 139: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

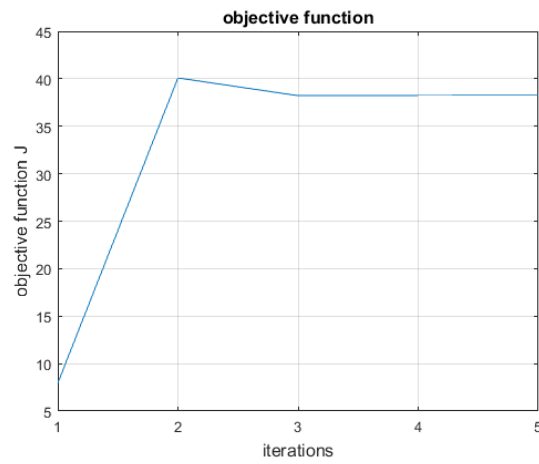
Υποπερίπτωση 2:  $\alpha_\theta=0.5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 140: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



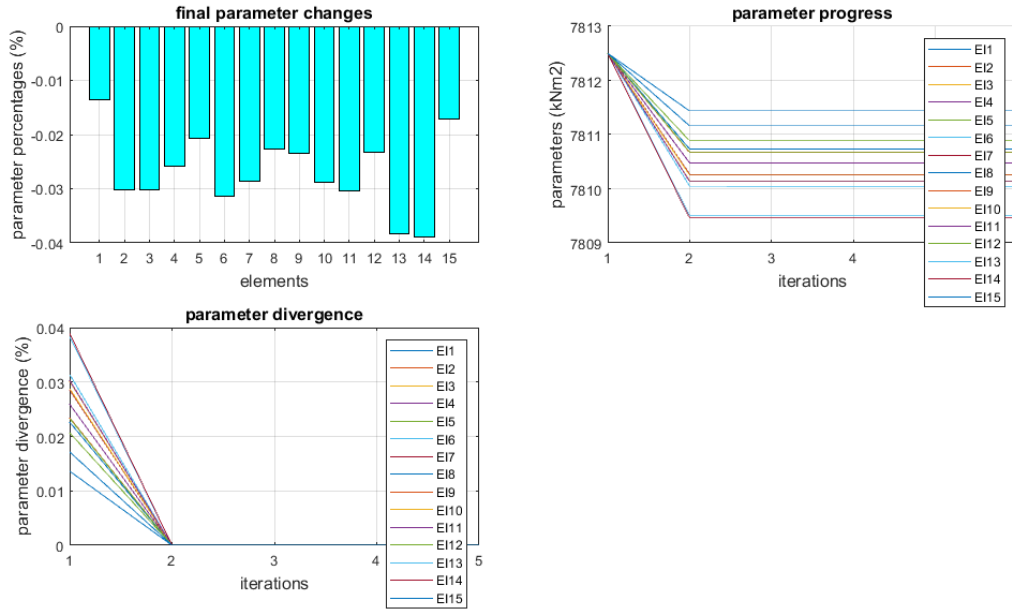
Εικόνα 141: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



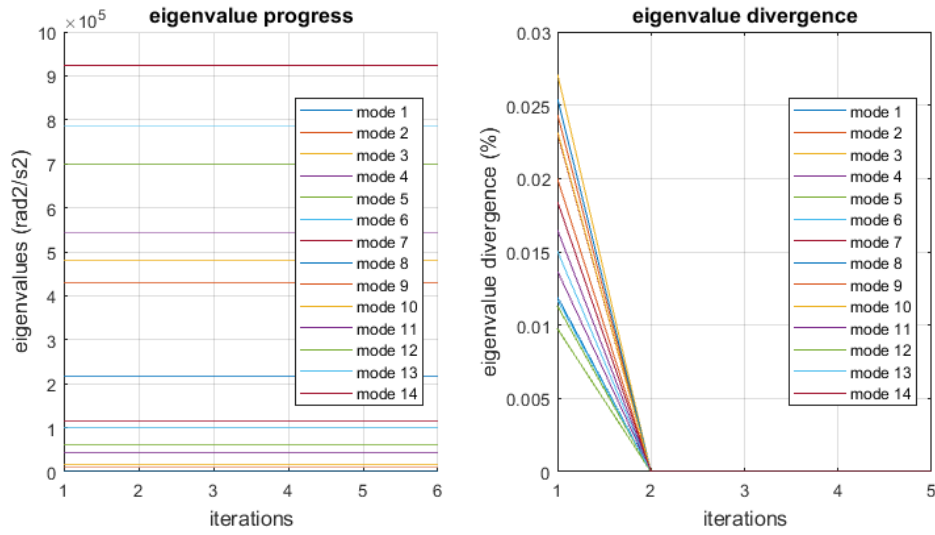
Εικόνα 142: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης



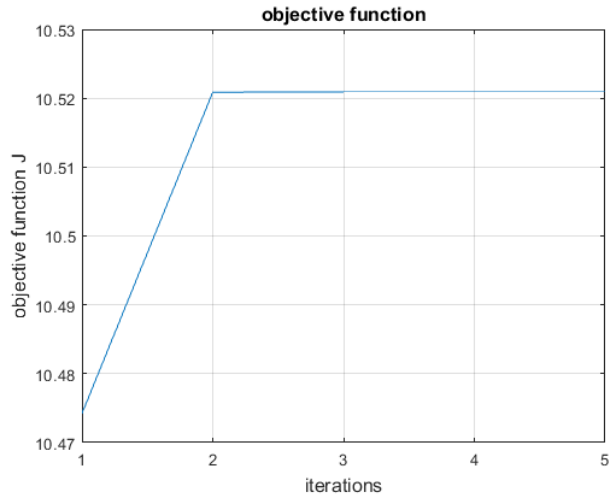
Υποερίπτωση 3:  $\alpha_\theta=5\%$ ,  $\alpha_\theta=0.5\%$



Εικόνα 143: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

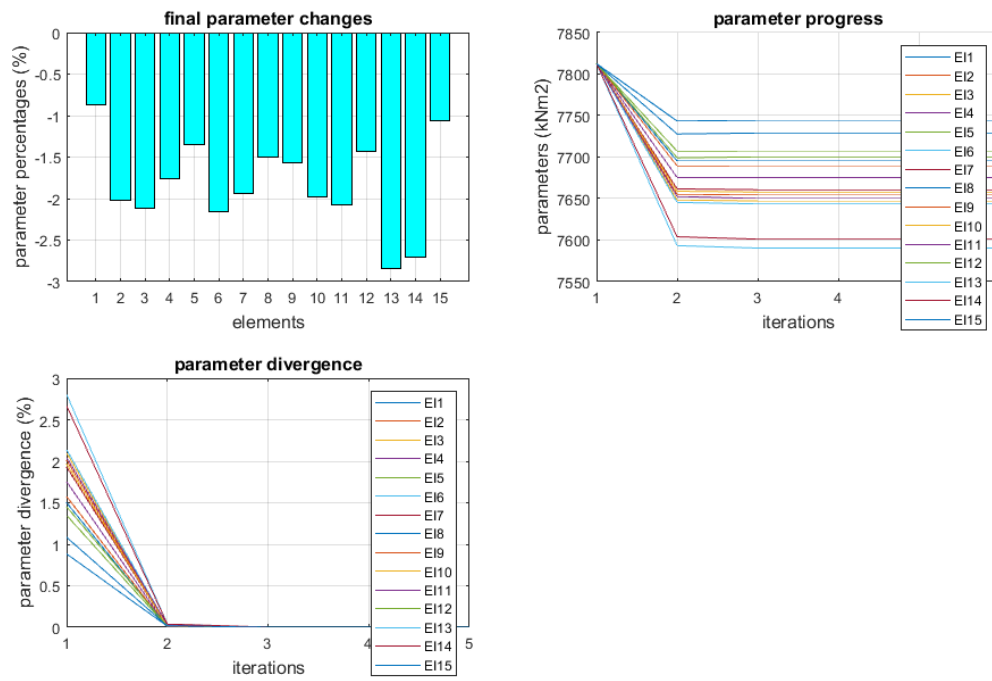


Εικόνα 144: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

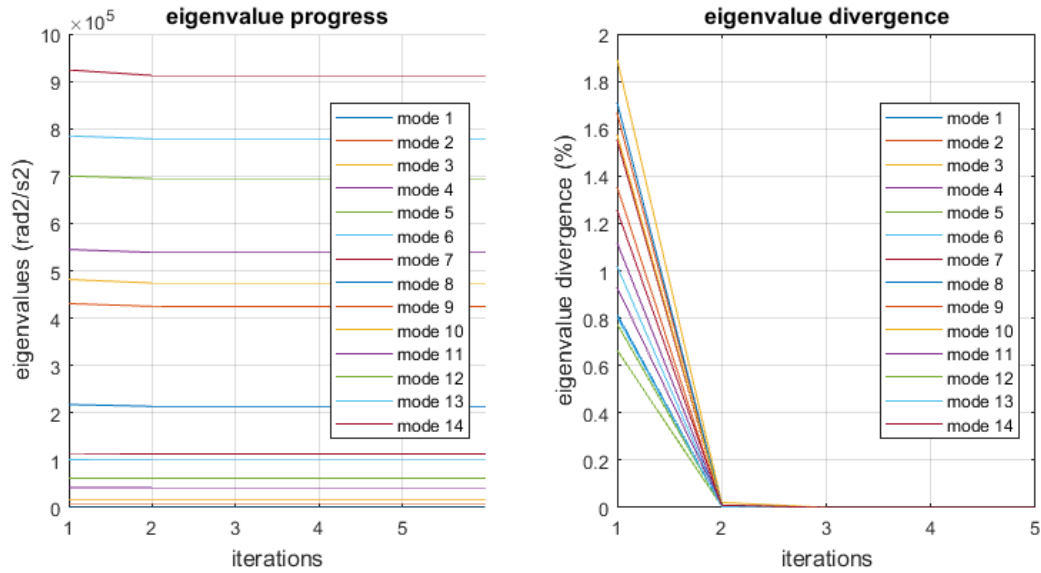


Εικόνα 145: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

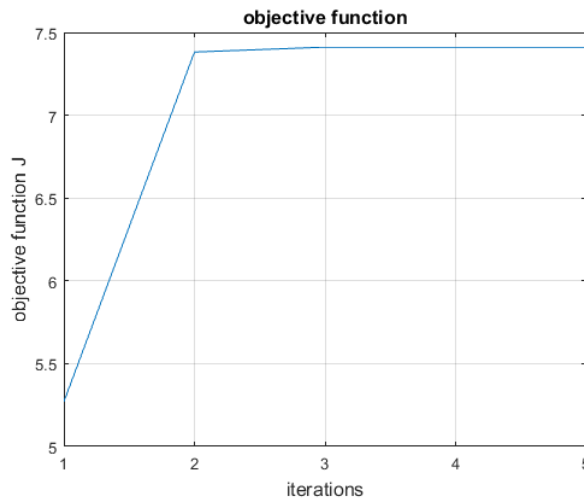
Υποπερίπτωση 4:  $\alpha_\theta=5\%$ ,  $\alpha_\theta=5\%$



Εικόνα 146: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 147: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών



Εικόνα 148: Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης

Με την επίλυση και αυτού του παραδείγματος, πλέον διαμορφώνεται ένα πιο ξεκάθαρο συμπέρασμα που αφορά την συμπεριφορά των μεγεθών υπό όλες τις συνθήκες ελαχιστοποίησης διαφορών ειδών σφάλματος, είτε σφαλμάτων, είτε και ο συνδυασμός σφαλμάτων-παραμέτρων.

Η μόνη διαφορά που εντοπίζεται είναι η διαφοροποίηση της συμπεριφοράς των μεγεθών στην περίπτωση ελαχιστοποίησης σφαλμάτων και παραμέτρων ως προς το αρχικό διάνυσμα  $\theta_0$  στο σενάριο τοπικές βλάβης στο 4<sup>ο</sup> στοιχείο του προβόλου.

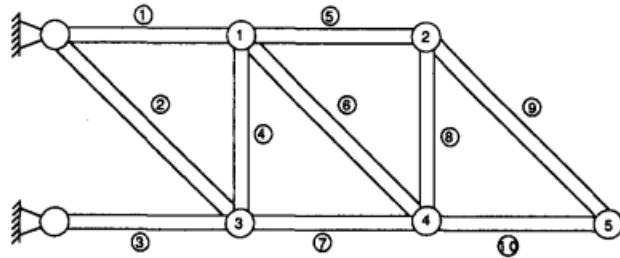
Επισήμανση:

Συνήθως, μια γέφυρα προτιμάται να κατασκευάζεται με συμμετρικό εν δυνάμει τρόπο. Έτσι, το αρχικό προσομοίωμα γέφυρας προέβλεπε ίσα ανοίγματα, μήκους 5m. Για την επίλυση

προβλήματος βλάβης, εφαρμόστηκε αρχικά σαν τοπική βλάβη η μείωση του μέτρου ελαστικότητας κατά 20% στο 2<sup>ο</sup> πεπερασμένο στοιχείο. Ωστόσο, στο τέλος της εκτέλεσης του αλγορίθμου, διαπιστώθηκε ότι η βλάβη επαληθεύτηκε μεν στο 2<sup>ο</sup> στοιχείο, αλλά προέκυψε βλάβη και στο συμμετρικό ως προς το κέντρο της γέφυρας στοιχείο (14<sup>ο</sup>). Το γεγονός αυτό αντιβαίνει το αρχικό σενάριο βλάβης, και έτσι, η τελική προσομοίωση έγινε όσο το δυνατό αντισυμμετρική.

## 6.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ

Δίνεται το δικτύωμα του παρακάτω σχήματος:



Εικόνα 149: Δικτύωμα

Το δικτύωμα αποτελείται από 10 ράβδους, και αρθρώνεται άνω και κάτω. Οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες ράβδοι έχουν μήκος 1m και η γραμμική μάζα όλων των ράβδων είναι ίση με  $\bar{m}=1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

Στόχος του προβλήματος είναι η επικαιροποίηση της δυστένειας των ράβδων, η οποία δίνεται ότι είναι ίση με το γινόμενο  $E \cdot A$ , όπου:

E: το μέτρο ελαστικότητας της ράβδου και

A: το εμβαδόν διατομής των ράβδων

Η αρχική δυστένεια είναι ομοιόμορφη για όλες τις ράβδους και ίση με  $EA=3 \cdot 10^7 \text{ N}$ .

Ως σενάριο βλάβης τίθεται η ανομοιόμορφη μεταβολή της δυσκαμψίας, έτσι ώστε να προκύψει το τελικό διάνυσμα παραμέτρων βλάβης ίσο με:

$$\theta_{\text{damaged}} = 10^7 \begin{Bmatrix} 3.168 \\ 3.25 \\ 3.18 \\ 3.142 \\ 3.249 \\ 3.157 \\ 3.119 \\ 3.135 \\ 3.194 \\ 3.108 \end{Bmatrix}$$

Θα ληφθούν υπ' όψιν 2 βαθμοί ελευθερίας (2 ιδιοτιμές) κατά την ιδιομορφική ανάλυση, οι οποίες μετά την τοποθέτηση της βλάβης παραπάνω, θα μετρηθούν στις τιμές:

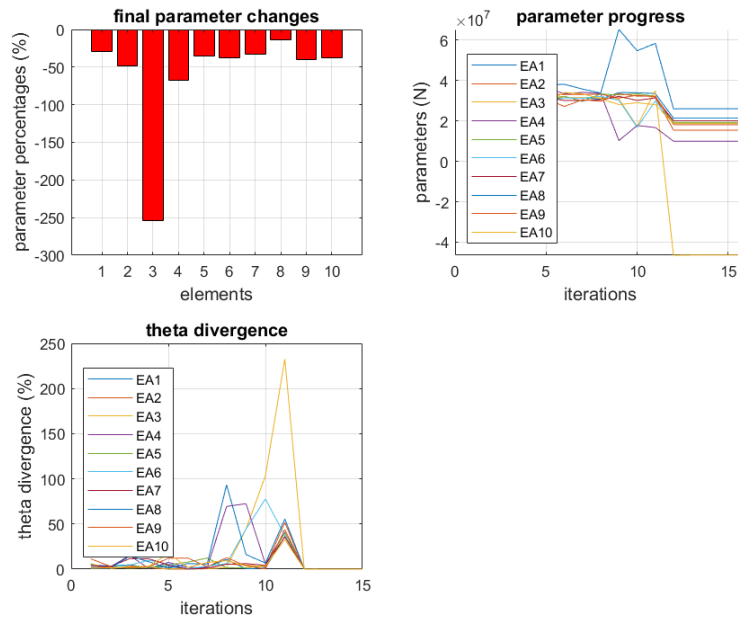
$$z_m = \begin{Bmatrix} 183,4043 \\ 528,5367 \end{Bmatrix}$$

Αρχικές στατιστικές συνθήκες τίθενται οι τυπικές αποκλίσεις των παραμέτρων και των φυσικών συχνοτήτων να λάβουν τιμή ίση με  $10^6$  και 2 αντίστοιχα.

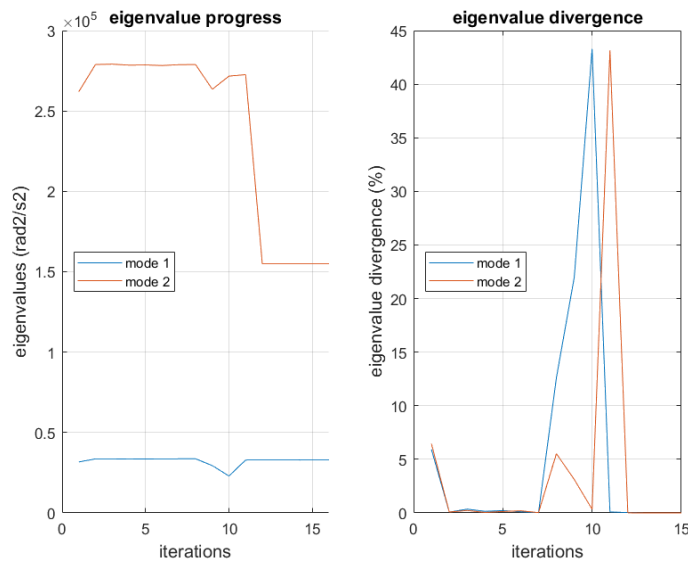
Επομένως, οι διασπορές των παραμέτρων θα είναι ίσες με  $10^{12}$  και των ιδιοτιμών να είναι ίσες με  $(2\pi \cdot 2)^2 = 16\pi^2 = 160$  περίπου.

## Περίπτωση 1: Υπαρξη θορύβου

Τα διαγράμματα των μεγεθών θα είναι:



Εικόνα 150: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων

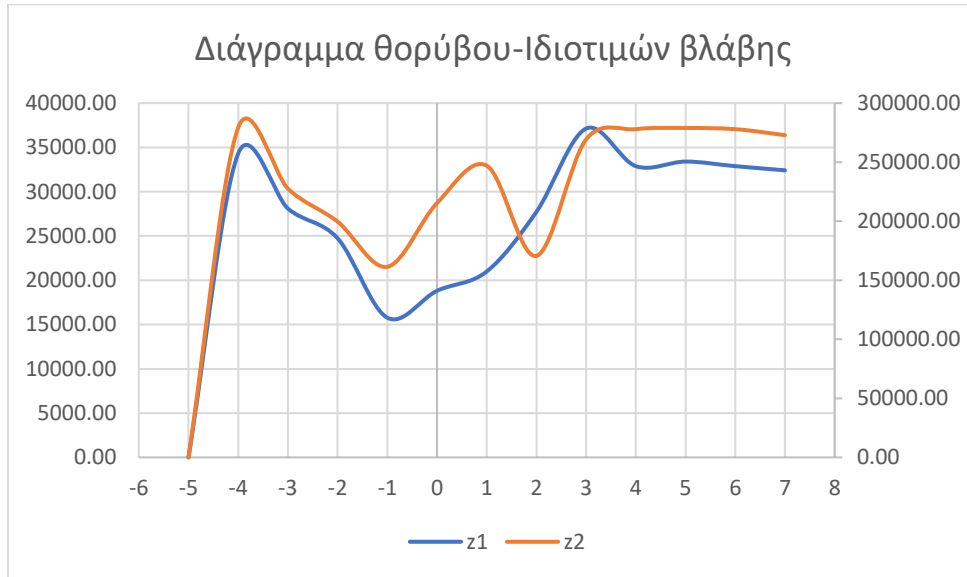


Εικόνα 151: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

Εδώ παρατηρείται μια σύγκλιση ως προς τη πορεία των επαναλήψεων από τη 12<sup>η</sup> επανάληψη, αλλά εντελώς αποκλίνουσα από τις αρχικές συνθήκες βλάβης. Αυτό μπορεί να αποδοθεί σε ένα μεγάλο βαθμό στην εσφαλμένη αρχική εκτίμηση των στατιστικών ιδιοτήτων των μεγεθών. Επομένως, για αρχή, θα μελετηθεί η συμπεριφορά των μεγεθών για διάφορες τιμές θορύβου,

θεωρώντας λογαριθμικές τιμές μεταξύ -5 και 5, όπως και στο παράδειγμα των 3 ελατηρίων και τις 2 μάζες που αναλύθηκε προηγουμένως.

Επομένως, το διάγραμμα ιδιοτιμών βλάβης θα διαμορφωθεί ως εξής:

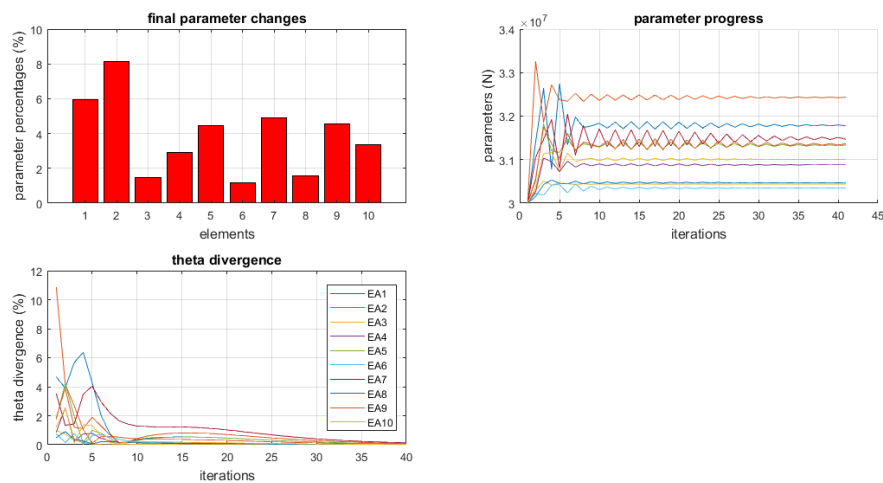


Εικόνα 152: Διάγραμμα μετρούμενων ιδιοτιμών-θορύβου

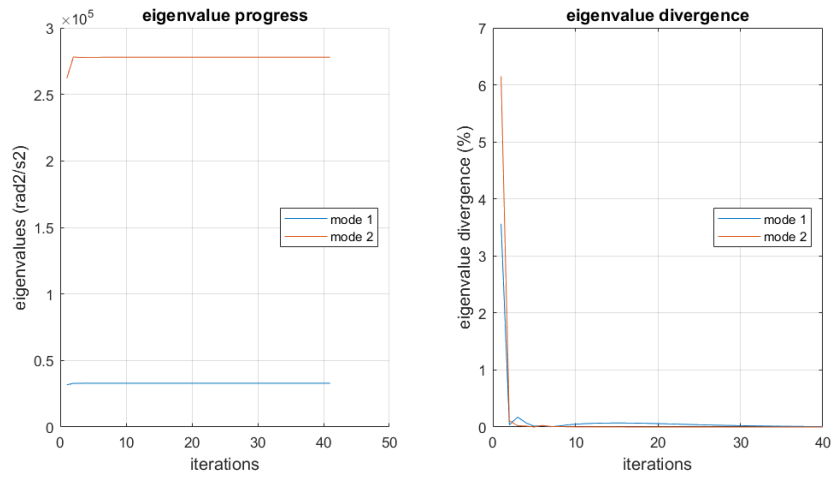
Παρατηρείται ότι για το εύρος μελέτης, υπάρχει μια συνεχής μεταβολή των ιδιοτιμών, γεγονός που καθιστά ασταθή την μέθοδο αυτή. Ωστόσο, για θόρυβο  $V_e > 10^5$ , υπάρχει σύγκλιση προς τις ιδιοτιμές βλάβης.

Επομένως, διαλέγεται μια τιμή διασποράς  $V_e = 10^6$

Μετά από εφαρμογή της μεθόδου, παραλαμβάνεται η ακόλουθη κατάσταση των μεγεθών:



Εικόνα 153: Διαγράμματα κατάστασης παραμέτρων



Εικόνα 154: Διαγράμματα κατάστασης ιδιοτιμών

Όπως και στο παράδειγμα των ελατηρίων με τις μάζες, για πολύ μεγάλες τιμές θορύβου, η μέθοδος συγκλίνει στο αρχικό σενάριο βλάβης, αλλά με μερικό σφάλμα.



## 7 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέσα από την εξέταση των μεθόδων και την επίλυση εφαρμογών, καταγράφονται συνοπτικά οι παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα παρακάτω:

### 7.1 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η περίπτωση 1 είναι πολύ ταχεία καθώς απαιτήθηκαν 2 επαναλήψεις (θεωρώντας  $j=1$  την υγιή κατάσταση του φορέα) για να επιτευχθεί απόλυτη σύγκλιση των παραμέτρων. Επιπρόσθετα, οι τελικές μεταβολές παραμέτρων επαληθεύονται με τα αρχικά σενάρια που τέθηκαν.

Η περίπτωση 2 έχει την ίδια ακριβώς συμπεριφορά με τη περίπτωση 1, γεγονός που σημαίνει ότι η ύπαρξη του μητρώου  $W_{\theta\theta}$  ήταν εντελώς αμελητέα. Μοναδική μεταβολή υπήρξε στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την 1<sup>η</sup> επανάληψη, η οποία οφείλεται στην μεταβολή της τυπικής απόκλισης.

Στη περίπτωση 3

- Οι υποπεριπτώσεις 1 και 4 ( $\alpha_\varepsilon = \alpha_\theta$ ), διαθέτουν την ίδια ακριβώς συμπεριφορά, αλλά τη πιο αργή διότι απαιτήθηκαν 60 φορές παραπάνω επαναλήψεις για σύγκλιση (ίσως και λίγο παραπάνω) σε σύγκριση με τις περιπτώσεις 1,2.
- Στην υποπερίπτωση 2, ο δεκαπλασιασμός του ποσοστού τυπικής απόκλισης επιτάχυνε κατά πολύ την σύγκλιση των μεγεθών από τις 120 στις 3, φέρνοντας τις τελικές παραμέτρους αρκετά κοντά στα αρχικά σενάρια βλάβης.
- Η υποπερίπτωση 3 είναι η πιο αναξιόπιστη λόγω γραμμικής και μη συγκλίνουσας συμπεριφοράς των παραμέτρων, αποκλίνοντας σημαντικά από τα αρχικά σενάρια βλάβης.

Η περίπτωση 4 θεωρείται εξίσου η πιο αναξιόπιστη για τον εντοπισμό μιας βλάβης, σε σύγκριση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης εμφάνιζαν ανάποδη συμπεριφορά από ότι στις προηγούμενες περιπτώσεις και επίσης, η συμπεριφορά των μεγεθών ήταν αφενός μεν συγκλίνουσα, αφετέρου δε αποκλίνουσα από τα αρχικά σενάρια βλάβης.

Συνοψίζοντας:

Κανονική συμπεριφορά παρουσιάζουν:

- Περίπτωση 1
- Περίπτωση 2
- Περίπτωση 3 (1<sup>η</sup> 2<sup>η</sup> και 4<sup>η</sup> περίπτωση)

Στην πραγματικότητα, η μη φυσική συμπεριφορά των παραμέτρων στην περίπτωση 4 μπορεί να αποδοθεί στο εξής: Ότι για να μηδενιστεί η αντικειμενική συνάρτηση και συνεπώς για να επιτευχθεί η ανίχνευση μιας βλάβης ή η επαλήθευση ενός αρχικού σεναρίου της, πρέπει ταυτόχρονα να ισχύουν:

- $\varepsilon^T W_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon \approx 0 \Rightarrow \varepsilon \approx 0 \Rightarrow z_{\text{end}} \approx z_m$ , σε μια επανάληψη  $j+1$  και
- $(\theta_{\text{end}} - \theta_0)^T W_{\theta\theta} (\theta_{\text{end}} - \theta_0) \approx 0 \Rightarrow \theta_{\text{end}} - \theta_0 \approx 0 \Rightarrow \theta_{\text{end}} \approx \theta_0$

Το 2<sup>ο</sup> κριτήριο είναι άτοπο, διότι δεν γίνεται μια επαναληπτική διαδικασία να ξεκινάει από το αρχικό διάνυσμα παραμέτρων  $\theta_0$  και να καταλήγει στο ίδιο από επικαιροποίηση. Επομένως,  $J_j \neq 0$  για κάθε  $j$  επανάληψη

Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό, η τεχνική του SVD είναι μια τεχνική η οποία δεν διαφέρει στο επίπεδο της επικαιροποίησης των μεγεθών, καθώς παράγουν τα ίδια αποτελέσματα σε σύγκριση με την περίπτωση απουσίας των βαρυτικών μητρώων.

Υπάρχουν ωστόσο και ορισμένες σημαντικές διαφορές μεταξύ των 2 τεχνικών αυτών, τα οποία προσδίδουν ταυτόχρονα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της τεχνικής του SVD έναντι αυτής των ελαχίστων τετραγώνων.

Το πλεονέκτημα που διαθέτει η SVD είναι η εξοικονόμηση κώδικα στο MATLAB. Αυτό συμβαίνει διότι αφότου υπολογιστεί το μητρώο ευαισθησίας  $S$  του φορέα, ύστερα με μια έτοιμη συνάρτηση του MATLAB:

$$[U, D, V]=svd(S),$$

πραγματοποιείται η αποσύνθεσή του σε 3 επιμέρους μητρώα  $U$ ,  $D$ ,  $V$ , του οποίου τα χαρακτηριστικά έχουν περιγραφεί στο κεφάλαιο της ανάλυσης των μεθόδων. Ύστερα, οι επικαιροποιούμενες παράμετροι υπολογίζονται από μια μητρική σύνθεση των 3 επιμέρους μητρώων.

Τα μειονεκτήματα της τεχνικής αυτής είναι ότι περιορίζεται μόνο σε προβλήματα ασθενούς κατάστασης, δηλαδή το πλήθος των παραμέτρων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των μετρούμενων μεγεθών. Επομένως, αν υπήρχε ένα πρόβλημα με 3 παραμέτρους των οποίων η βλάβη πρέπει να επαληθευτεί και 6 οι ιδιοτιμές που πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν, θα εφαρμοστεί μόνο η τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων. Επιπρόσθετα, η SVD είναι περιορισμένη μόνο στην περίπτωση απουσίας βαρυτικών μητρώων, καθώς δεν έχουν διατυπωθεί εξισώσεις που να επικαιροποιούν τις παραμέτρους με πιο ποιοτική προσέγγιση. Αυτό, επίσης συμβάλλει στην ελαχιστοποίηση των γραμμών του κώδικα που επιλύει το πρόβλημα βλάβης. Επομένως, η SVD τεχνική είναι μια πιο οικονομική τεχνική για εφαρμογή προβλημάτων βλάβης.

## 7.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ

Στην περίπτωση ύπαρξης θορύβου, παρατηρήθηκε ότι με αύξηση του θορύβου, οι ιδιοτιμές που υπολογίζονται από τις επικαιροποιημένες παραμέτρους, με εκτέλεση της ιδιομορφικής ανάλυσης, προσεγγίζουν τις ιδιοτιμές βλάβης. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αξιοπιστία της μεθόδου, επιτυγχάνεται όταν τίθεται διασπορές των παραμέτρων πολύ μεγάλης τάξης, αναλόγως τη πορεία των ιδιοτιμών βλάβης, όπως απεικονίζουν τα λογαριθμικά διαγράμματα θορύβου ιδιοτιμών βλάβης.

Επίσης, διαπιστώθηκε ότι στη περίπτωση αυτή, η πορεία των διασπορών των παραμέτρων αποδεικνύει τον στόχο της μεθόδου αυτής, ωστόσο, αναλόγως με τη τιμή της διασποράς του

θορύβου, εντοπίζεται αύξηση των στοιχείων του μητρώου συσχέτισης. Σε συνδυασμό με την μεταβολή των εκτός διαγωνίου στοιχείων του μητρώου διασποράς παραμέτρων, αυτό συνεπάγεται μείωση του βαθμού στατιστικής ανεξαρτησίας μεταξύ των μεγεθών.

Ακόμη, από την εφαρμογή του μονοδιάστατου συστήματος ελατηρίων-μαζών, η αύξηση του θορύβου επιφέρει σύγκλιση των διασπορών των παραμέτρων στις αρχικές του συνθήκες.

Επίσης, για χαμηλές τιμές διαπορών θορύβου, οι μετρούμενες ιδιοτιμές λάμβαναν τιμές υγιούς κατάστασης ενώ για υψηλές τιμές, οι ιδιοτιμές λάμβαναν τιμές βλάβης.

Επιπρόσθετα, αποδείχτηκε ότι αν και επιλέχτηκε μεγάλη αρχική διασπορά παραμέτρων για επικαιροποίησή της, οι παράμετροι συνέκλιναν κατά τη πορεία των επαναλήψεων προς ένα τελικό διάνυσμα, αλλά με μια σχετική απόκλιση από το αρχικό σενάριο βλάβης.

Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό, η μέθοδος ελαχίστων διασπορών ενέχει μια ποιοτική προσέγγιση των παραμέτρων σε σύγκριση με τις απλή αντίστροφη μέθοδο, λόγω της πλέον μεταβολής των διασπορών προς μικρότερες τιμές των κυρίων διαγωνίων, και συνεπώς, την πλέον επικαιροποίηση των βαρυτικών μητρώων  $W_{\varepsilon\varepsilon}$  και  $W_{\theta\theta}$ , των μεγεθών, ενώ στην απλή αντίστροφη μέθοδο, παρέμεναν σταθερά καθ' όλη τη πορεία των επαναλήψεων. Ωστόσο, ενέχει κίνδυνο την μη επαλήθευση του σεναρίου βλάβης, παρά μόνο μια μερική προσέγγισή του.

#### ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΙΣ 2 ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Μια γενική επισήμανση που είναι κοινή και για τις 2 μεθόδους αυτές και αξίζει να τονιστεί είναι η επιρροή της ποσότητας της πληροφορίας στην αξιοπιστία ανίχνευσης ή επαλήθευσης της βλάβης. Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθεί η έννοια «ενεργές ιδιοτιμές».

Οι ιδιομορφές που υπολογίζονται από μια ιδιομορφική ανάλυση είναι ανάλογες του συνολικού βαθμού ελευθερίας του διαθέτει ο φορέας. Συνεπώς, στον πρόβολο, οι βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο είναι ίσες με 1 (κατακόρυφη μετακίνηση), επομένως συνολικά 7 βαθμοί ελευθερίας. Ωστόσο, βάσει των M.I. Friswell και J.E. Mottershead, αναλύονται 2 περιπτώσεις ως προς το πλήθος παραμέτρων και ιδιοτιμών. Επομένως οι ενεργές ιδιομορφές που θα συμπεριληφθούν στην αντίστροφη διαδικασία πρέπει να είναι μικρότερες ή μεγαλύτερες από τις παραμέτρους. Για αυτό το λόγο, λήφθηκαν 6.

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν πρέπει να ληφθούν οριακά λιγότερες ιδιομορφές από τις παραμέτρους ή ακόμα λιγότερες. Μια αύξηση στο πλήθος δειγμάτων επηρεάζει αρκετά την επίδοση του αλγορίθμου και την ακρίβεια στην επαλήθευση μιας βλάβης, είτε τοπικής είτε ολικής, λόγω ακρίβειας στις μητρικές πράξεις κατά την επικαιροποίηση. Συνεπώς, όσο πιο πολλές ιδιομορφές λαμβάνονται, τόσο πιο ακριβής η επαλήθευση.

## 8 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΙΣΤΟΓΡΑΦΙΑ

Friswell, M. I. (1989). *Mechanical Systems and Signal Processing*.

Friswell, M. I., & Mottershead, J. E. (1990). *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*.

*MATLAB*. (χ.χ.). Ανάκτηση από <https://en.wikipedia.org/wiki/MATLAB>

*OpenSees*. (χ.χ.). Ανάκτηση από [https://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php/Main\\_Page](https://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php/Main_Page)

Χριστοδούλου, Κ. Φ. (2006, Απρίλιος). Ανάπτυξη Μεθόδου Αναγνώρισης και Διάγνωσης Βλαβών σε Κατασκευές. Βόλος.

# 9 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

## 9.1 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

### 9.1.1 ΠΡΟΒΟΛΟΣ

```
1 #MODEL GENERATION#
2 #Create ModelBuilder (with two-dimensions and 3DOF/node)
3 model BasicBuilder -ndm 2 -ndf 3
4
5 # Units: kN, m, sec
6 source parameters2.tcl
7
8 set L1 0.7;
9
10 set p 2.640; #Mg/m3
11
12 set d1 $d1;
13 set d2 $d2;
14 set d3 $d3;
15 set d4 $d4;
16 set d5 $d5;
17 set d6 $d6;
18 set d7 $d7;
19
20 node 1 0.0 0.0
21 node 2 [expr $L1/7.0] 0.0
22 node 3 [expr 2.0*$L1/7.0] 0.0
23 node 4 [expr 3.0*$L1/7.0] 0.0
24 node 5 [expr 4.0*$L1/7.0] 0.0
25 node 6 [expr 5.0*$L1/7.0] 0.0
26 node 7 [expr 6.0*$L1/7.0] 0.0
27 node 8 [expr $L1] 0.0
28
29 fix 1 1 1 1
30
31 set b 0.05;
32 set h 0.025;
33 set A [expr $b*$h];
34 set I [expr $h*pow($b,3.0)/12.0];
35 set E [expr 4.5/$I]; #Young's modulus
36
37 uniaxialMaterial Elastic 1 $E
38
39 geomTransf Linear 1
40
41 element elasticBeamColumn 1 1 2 $A [expr $d1*$E] $I 1
42 element elasticBeamColumn 2 2 3 $A [expr $d2*$E] $I 1
43 element elasticBeamColumn 3 3 4 $A [expr $d3*$E] $I 1
44 element elasticBeamColumn 4 4 5 $A [expr $d4*$E] $I 1
45 element elasticBeamColumn 5 5 6 $A [expr $d5*$E] $I 1
46 element elasticBeamColumn 6 6 7 $A [expr $d6*$E] $I 1
47 element elasticBeamColumn 7 7 8 $A [expr $d7*$E] $I 1
48
49
50 mass 1 [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] 0.0
51 mass 2 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
52 mass 3 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
53 mass 4 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
54 mass 5 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
55 mass 6 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
56 mass 7 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
57 mass 8 [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] 0.0
58
59 set AnalysisType Modal
60
61 set a [eigen 6]; #kuklikes idiosyxnnotites omega, sto tetragwno
62 set lamda1 [lindex $a 0]
63 set lamda2 [lindex $a 1]
64 set lamda3 [lindex $a 2]
65 set lamda4 [lindex $a 3]
66 set lamda5 [lindex $a 4]
67 set lamda6 [lindex $a 5]
68
69 set omegal [expr sqrt($lamda1)]
```

```
70 set omega2 [expr sqrt($lamda2)]
71 set omega3 [expr sqrt($lamda3)]
72 set omega4 [expr sqrt($lamda4)]
73 set omega5 [expr sqrt($lamda5)]
74 set omega6 [expr sqrt($lamda6)]
75
76 set pi [expr 2.0*asin(1.0)]
77 set f1 [expr $omega1/(2.0*$pi)]
78 set f2 [expr $omega2/(2.0*$pi)]
79 set f3 [expr $omega3/(2.0*$pi)]
80 set f4 [expr $omega4/(2.0*$pi)]
81 set f5 [expr $omega5/(2.0*$pi)]
82 set f6 [expr $omega6/(2.0*$pi)]
83
84
85 file delete 'frequencies_provolos2.out'
86 set Ffile [open "frequencies_provolos2.out" "w"]
87
88 puts $Ffile $f1
89 puts $Ffile $f2
90 puts $Ffile $f3
91 puts $Ffile $f4
92 puts $Ffile $f5
93 puts $Ffile $f6
94
95 close $Ffile
```

```

function f=provolos2_function(d)
fout=fopen('parameters2.tcl','w');
fprintf(fout,'set d1 %f \n',d(1));
fprintf(fout,'set d2 %f \n',d(2));
fprintf(fout,'set d3 %f \n',d(3));
fprintf(fout,'set d4 %f \n',d(4));
fprintf(fout,'set d5 %f \n',d(5));
fprintf(fout,'set d6 %f \n',d(6));
fprintf(fout,'set d7 %f \n',d(7));
fclose(fout);
infile='provolos2.tcl';
system([' OpenSees ' infile '>screendump']);
tmp1=load('frequencies_provolos2.out');
f=zeros(6,1);
for h=1:6
    f(h,1)=tmp1(h,1);
end
end

clear;clc;close all
I=0.025*0.05^3/12;
E=4.5/I;

parameters=7;
measurements=6;
iterations=5;

d_undamaged=ones(parameters,1);

d_damaged=0.9*d_undamaged; %case1
%d_damaged=[1 1 1 0.8 1 1 1]'; %case2

f_initial=provolos2_function(d_undamaged);
f_measured=provolos2_function(d_damaged);

w_initial=2*pi.*f_initial;
w_measured=2*pi.*f_measured;

f_iterations(:,1)=f_initial;
w_iterations(:,1)=w_initial;

pososto_Wee=0.5;
pososto_Wtt=0.5;

theta=zeros(parameters,iterations+1);
d=zeros(parameters,iterations+1);
theta_percentage=zeros(parameters,iterations);

theta(:,1)=E*I*ones(parameters,1);
d(:,1)=ones(parameters,1);

Wee=diag(1./((pososto_Wee/100*w_measured.^2).^2));
Wtt=diag(1./((pososto_Wtt/100*theta(:,1)).^2));

```

```

theta_divergence=zeros(parameters,iterations);
z_divergence=zeros(measurements,iterations);

fplus=zeros(measurements,parameters);
fminus=zeros(measurements,parameters);

Sj=cell(iterations,1);
S=zeros(measurements,parameters);

J=zeros(iterations,1);

for a=1:iterations
    for i=1:parameters
        A=diag(ones(parameters,1));
        A(i,i)=1.1;

        B=diag(ones(parameters,1));
        B(i,i)=0.9;
        fplus(:,i)=provolos2_function(A*d(:,a));
        fminus(:,i)=provolos2_function(B*d(:,a));
        S(:,i)=4*pi.^2*(fplus(:,i).^2-fminus(:,i).^2)/(2*0.1*theta(i,a));
    end
    Sj{a}=S;

    %case 1
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+Sj{a}'/(Sj{a}*Sj{a}')*(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2);
    J(a,:)=(theta(:,a+1)-theta(:,a))'*(theta(:,a+1)-theta(:,a));

    %case 2
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Wtt\Sj{a}')/(Sj{a}'*(Wtt\Sj{a}'))*(w_measured.^2-w_iterations
(:,a).^2);
    J(a,:)=(theta(:,a+1)-theta(:,a))'*Wtt*(theta(:,a+1)-theta(:,a)); %8.18

    %case 3
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Sj{a}'*Wee*Sj{a}+Wtt)\Sj{a}'*Wee*(w_measured.^2-w_iterations
(:,a).^2);
    J(a,:)=(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj{a}'*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))*Wee*
(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj{a}'*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))+(theta(:,a+1)-theta
(:,a))'*Wtt*(theta(:,a+1)-theta(:,a));

    %case 4
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Sj{a}'*Wee*Sj{a}+Wtt)\(Sj{a}'*Wee*(w_measured.^2-
w_iterations(:,a).^2)-Wtt*(theta(:,a)-theta(:,1))); %8.24
    J(a,:)=(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj{a}'*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))*Wee*
(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj{a}'*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))+(theta(:,a+1)-theta
(:,1))'*Wtt*(theta(:,a+1)-theta(:,1));

    d(:,a+1)=theta(:,a+1)./theta(:,1);
    f_iterations(:,a+1)=provolos2_function(d(:,a+1));
    w_iterations(:,a+1)=2*pi.*f_iterations(:,a+1);

```

Eve  
Met  
Win



```

theta_percentage(:,a)=(theta(:,a+1)./theta(:,1)-1)*100;
theta_divergence(:,a)=abs((theta(:,a+1)./theta(:,a)-1))*100;
z_divergence(:,a)=abs((w_iterations(:,a+1).^2./w_iterations(:,a).^2-1)*100);
end

figure(1)
plot(1:iterations,J);
title('objective function','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('J','FontSize',12)
grid on

figure(2)
subplot(2,2,1);
bar(theta_percentage(:,end),'cyan')
title('final parameter changes (%)','FontSize',12)
xlabel('elements','FontSize',12)
ylabel('parameter percentages (%)','FontSize',12)

subplot(2,2,2);
for k=1:parameters
    hold on
    plot(1:iterations+1,theta(k,:));
end
title('parameter progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('parameters (kNm2)','FontSize',12)
legend('EI1','EI2','EI3','EI4','EI5','EI6','EI7','location','east')
grid on;
toc

subplot(2,2,3);
plot(1:iterations,theta_divergence);
title('theta divergence','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('theta divergence (%)','FontSize',12)
grid on;

figure(3)
subplot(1,2,1);
for m=1:measurements
    hold on
    plot(1:iterations+1,w_iterations(m,:).^2)
end
title('eigenvalue progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('eigenvalues (rad2/s2)','FontSize',12)
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','location','east')
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(1:iterations,z_divergence);
title('eigenvalue divergence','FontSize',12);
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('eigenvalue divergence (%)','FontSize',12)
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','location','east')
grid on;

```

## 9.1.2 ΓΕΦΥΡΑ

```
1 #MODEL GENERATION#
2 #Create ModelBuilder (with two-dimensions and 3DOF/node)
3 model BasicBuilder -ndm 2 -ndf 3
4
5 # Units: kN, m, sec
6 source parameters bridge.tcl
7
8 set L1 6;
9 set L2 4;
10 set L3 5;
11 set Li 1;
12
13 set H 4.0;
14 set n elements H 5;
15 set Hi [expr $H/$n elements H];
16
17 set p 2.5; #Mg/m3
18
19 #beams
20 set d1 $d1;
21 set d2 $d2;
22 set d3 $d3;
23 set d4 $d4;
24 set d5 $d5;
25 set d6 $d6;
26 set d7 $d7;
27 set d8 $d8;
28 set d9 $d9;
29 set d10 $d10;
30 set d11 $d11;
31 set d12 $d12;
32 set d13 $d13;
33 set d14 $d14;
34 set d15 $d15;
35
36 #beams
37 node 1 0.0 $H
38 node 2 [expr 1.0*$Li] $H
39 node 3 [expr 2.0*$Li] $H
40 node 4 [expr 3.0*$Li] $H
41 node 5 [expr 4.0*$Li] $H
42 node 6 [expr 5.0*$Li] $H
43 node 7 [expr 6.0*$Li] $H
44 node 8 [expr 7.0*$Li] $H
45 node 9 [expr 8.0*$Li] $H
46 node 10 [expr 9.0*$Li] $H
47 node 11 [expr 10.0*$Li] $H
48 node 12 [expr 11.0*$Li] $H
49 node 13 [expr 12.0*$Li] $H
50 node 14 [expr 13.0*$Li] $H
51 node 15 [expr 14.0*$Li] $H
52 node 16 [expr 15.0*$Li] $H
53
54 #column 1
55 node 21 $L1 0.0
56 node 22 $L1 [expr $Hi]
57 node 23 $L1 [expr 2.0*$Hi]
58 node 24 $L1 [expr 3.0*$Hi]
59 node 25 $L1 [expr 4.0*$Hi]
60
61 #column 2
62 node 28 [expr $L1+$L2] 0.0
63 node 29 [expr $L1+$L2] [expr $Hi]
64 node 30 [expr $L1+$L2] [expr 2.0*$Hi]
65 node 31 [expr $L1+$L2] [expr 3.0*$Hi]
66 node 32 [expr $L1+$L2] [expr 4.0*$Hi]
67
68 fix 21 1 1 0
69 fix 28 1 1 0
```

```

70 fix 1 0 1 0
71 fix 16 0 1 0
72
73 set E 30000000;
74
75 set b1 0.2;
76 set h1 0.25;
77 set A1 [expr $b1*$h1];
78 set I1 [expr $b1*pow($h1,3.0)/12.0];
79
80 set b2 0.25;
81 set h2 0.3;
82 set A2 [expr $b2*$h2];
83 set I2 [expr $b2*pow($h2,3.0)/12.0];
84
85 uniaxialMaterial Elastic 1 $E
86
87 geomTransf Linear 1
88
89 #beams
90 element elasticBeamColumn 1 1 2 $A1 [expr $d1*$E] $I1 1
91 element elasticBeamColumn 2 2 3 $A1 [expr $d2*$E] $I1 1
92 element elasticBeamColumn 3 3 4 $A1 [expr $d3*$E] $I1 1
93 element elasticBeamColumn 4 4 5 $A1 [expr $d4*$E] $I1 1
94 element elasticBeamColumn 5 5 6 $A1 [expr $d5*$E] $I1 1
95 element elasticBeamColumn 6 6 7 $A1 [expr $d6*$E] $I1 1
96 element elasticBeamColumn 7 7 8 $A1 [expr $d7*$E] $I1 1
97 element elasticBeamColumn 8 8 9 $A1 [expr $d8*$E] $I1 1
98 element elasticBeamColumn 9 9 10 $A1 [expr $d9*$E] $I1 1
99 element elasticBeamColumn 10 10 11 $A1 [expr $d10*$E] $I1 1
100 element elasticBeamColumn 11 11 12 $A1 [expr $d11*$E] $I1 1
101 element elasticBeamColumn 12 12 13 $A1 [expr $d12*$E] $I1 1
102 element elasticBeamColumn 13 13 14 $A1 [expr $d13*$E] $I1 1
103 element elasticBeamColumn 14 14 15 $A1 [expr $d14*$E] $I1 1
104 element elasticBeamColumn 15 15 16 $A1 [expr $d15*$E] $I1 1
105
106 #column 1
107 element elasticBeamColumn 20 21 22 $A2 $E $I2 1
108 element elasticBeamColumn 21 22 23 $A2 $E $I2 1
109 element elasticBeamColumn 22 23 24 $A2 $E $I2 1
110 element elasticBeamColumn 23 24 25 $A2 $E $I2 1
111 element elasticBeamColumn 24 25 7 $A2 $E $I2 1
112
113 #column 2
114 element elasticBeamColumn 28 28 29 $A2 $E $I2 1
115 element elasticBeamColumn 29 29 30 $A2 $E $I2 1
116 element elasticBeamColumn 30 30 31 $A2 $E $I2 1
117 element elasticBeamColumn 31 31 32 $A2 $E $I2 1
118 element elasticBeamColumn 32 32 11 $A2 $E $I2 1
119
120 #beams
121 mass 1 [expr $p*$A1/2.0] [expr $p*$A1/2.0] 0.0
122 mass 2 [expr $p*$A1] [expr $p*$A1] 0.0
123 mass 3 [expr $p*$A1] [expr $p*$A1] 0.0
124 mass 4 [expr $p*$A1] [expr $p*$A1] 0.0
125 mass 5 [expr $p*$A1] [expr $p*$A1] 0.0
126 mass 6 [expr $p*$A1] [expr $p*$A1] 0.0
127 mass 7 [expr $p*(A1+$A2*$Hi/2.0)] [expr $p*(A1+$A2*$Hi/2.0)] 0.0
128 mass 8 [expr $p*$A1*$Li] [expr $p*$A1*$Li] 0.0
129 mass 9 [expr $p*$A1*$Li] [expr $p*$A1*$Li] 0.0
130 mass 10 [expr $p*$A1*$Li] [expr $p*$A1*$Li] 0.0
131 mass 11 [expr $p*(A1+$A2*$Hi/2.0)] [expr $p*(A1+$A2*$Hi/2.0)] 0.0
132 mass 12 [expr $p*$A1*$Li] [expr $p*$A1*$Li] 0.0
133 mass 13 [expr $p*$A1*$Li] [expr $p*$A1*$Li] 0.0
134 mass 14 [expr $p*$A1*$Li] [expr $p*$A1*$Li] 0.0
135 mass 15 [expr $p*$A1*$Li] [expr $p*$A1*$Li] 0.0
136 mass 16 [expr $p*$A1*$Li/2.0] [expr $p*$A1*$Li/2.0] 0.0
137
138 #column 1

```

```

139 mass 21 [expr $p*$A2*$Hi/2.0] [expr $p*$A2*$Hi/2.0] 0.0
140 mass 22 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
141 mass 23 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
142 mass 24 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
143 mass 25 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
144
145 #column 2
146 mass 28 [expr $p*$A2*$Hi/2.0] [expr $p*$A2*$Hi/2.0] 0.0
147 mass 29 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
148 mass 30 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
149 mass 31 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
150 mass 32 [expr $p*$A2*$Hi] [expr $p*$A2*$Hi] 0.0
151
152 set AnalysisType Modal
153
154 set a [eigen 14]; #kuklikes idiosyxnotites omega, sto tetragwno
155 set lamda1 [lindex $a 0]
156 set lamda2 [lindex $a 1]
157 set lamda3 [lindex $a 2]
158 set lamda4 [lindex $a 3]
159 set lamda5 [lindex $a 4]
160 set lamda6 [lindex $a 5]
161 set lamda7 [lindex $a 6]
162 set lamda8 [lindex $a 7]
163 set lamda9 [lindex $a 8]
164 set lamda10 [lindex $a 9]
165 set lamda11 [lindex $a 10]
166 set lamda12 [lindex $a 11]
167 set lamda13 [lindex $a 12]
168 set lamda14 [lindex $a 13]
169
170 set omega1 [expr sqrt($lamda1)]
171 set omega2 [expr sqrt($lamda2)]
172 set omega3 [expr sqrt($lamda3)]
173 set omega4 [expr sqrt($lamda4)]
174 set omega5 [expr sqrt($lamda5)]
175 set omega6 [expr sqrt($lamda6)]
176 set omega7 [expr sqrt($lamda7)]
177 set omega8 [expr sqrt($lamda8)]
178 set omega9 [expr sqrt($lamda9)]
179 set omega10 [expr sqrt($lamda10)]
180 set omega11 [expr sqrt($lamda11)]
181 set omega12 [expr sqrt($lamda12)]
182 set omega13 [expr sqrt($lamda13)]
183 set omega14 [expr sqrt($lamda14)]
184
185 set pi [expr 2.0*asin(1.0)]
186 set f1 [expr $omega1/(2.0*$pi)]
187 set f2 [expr $omega2/(2.0*$pi)]
188 set f3 [expr $omega3/(2.0*$pi)]
189 set f4 [expr $omega4/(2.0*$pi)]
190 set f5 [expr $omega5/(2.0*$pi)]
191 set f6 [expr $omega6/(2.0*$pi)]
192 set f7 [expr $omega7/(2.0*$pi)]
193 set f8 [expr $omega8/(2.0*$pi)]
194 set f9 [expr $omega9/(2.0*$pi)]
195 set f10 [expr $omega10/(2.0*$pi)]
196 set f11 [expr $omega11/(2.0*$pi)]
197 set f12 [expr $omega12/(2.0*$pi)]
198 set f13 [expr $omega13/(2.0*$pi)]
199 set f14 [expr $omega14/(2.0*$pi)]
200
201 file delete 'frequencies_bridge.out'
202 set Ffile [open "frequencies_bridge.out" "w"]
203
204 puts $Ffile $f1
205 puts $Ffile $f2
206 puts $Ffile $f3
207 puts $Ffile $f4
208
209 puts $Ffile $f5
210 puts $Ffile $f6
211 puts $Ffile $f7
212 puts $Ffile $f8
213 puts $Ffile $f9
214 puts $Ffile $f10
215 puts $Ffile $f11
216 puts $Ffile $f12
217 puts $Ffile $f13
218 close $Ffile

```

```

function f=bridge_function(d)
fout_bridge=fopen('parameters_bridge.tcl','w');
fprintf(fout_bridge,'set d1 %f \n',d(1));
fprintf(fout_bridge,'set d2 %f \n',d(2));
fprintf(fout_bridge,'set d3 %f \n',d(3));
fprintf(fout_bridge,'set d4 %f \n',d(4));
fprintf(fout_bridge,'set d5 %f \n',d(5));
fprintf(fout_bridge,'set d6 %f \n',d(6));
fprintf(fout_bridge,'set d7 %f \n',d(7));
fprintf(fout_bridge,'set d8 %f \n',d(8));
fprintf(fout_bridge,'set d9 %f \n',d(9));
fprintf(fout_bridge,'set d10 %f \n',d(10));
fprintf(fout_bridge,'set d11 %f \n',d(11));
fprintf(fout_bridge,'set d12 %f \n',d(12));
fprintf(fout_bridge,'set d13 %f \n',d(13));
fprintf(fout_bridge,'set d14 %f \n',d(14));
fprintf(fout_bridge,'set d15 %f \n',d(15));
fclose(fout_bridge);
infile='bridge_modified.tcl';
system([' OpenSees ' infile '>screendump']);
tmp1=load('frequencies_bridge.out');
f=zeros(14,1);
for h=1:14
    f(h,1)=tmp1(h,1);
end
end

I=0.2*0.25^3/12;
E=30000000;

parameters=15;
measurements=14;
iterations=5;

d_undamaged=ones(parameters,1);

%d_damaged=0.95*d_undamaged; %scenario 1
d_damaged=[1 1 0.9 1 1 0.8 1 1 1 0.85 1 1 0.75 1 1]; %scenario 2

f_initial=bridge_function(d_undamaged);
f_measured=bridge_function(d_damaged);

w_initial=2*pi.*f_initial;
w_measured=2*pi.*f_measured;

f_iterations(:,1)=f_initial;
w_iterations(:,1)=w_initial;

pososto_Wee=0.5;
pososto_Wtt=5;

theta=zeros(parameters,iterations+1);
d=zeros(parameters,iterations+1);
theta_percentage=zeros(parameters,iterations);

theta(:,1)=E*I*ones(parameters,1);
d(:,1)=ones(parameters,1);

```

```

Wee=diag(1./((pososto_Wee/100*w_measured.^2).^2));
Wtt=diag(1./((pososto_Wtt/100*theta(:,1)).^2));

theta_divergence=zeros(parameters,iterations);
w_divergence=zeros(measurements,iterations);

fplus=zeros(measurements,parameters);
fminus=zeros(measurements,parameters);

Sj=cell(iterations,1);
S=zeros(measurements,parameters);

J=zeros(iterations,1);

for a=1:iterations
    for i=1:parameters
        A=diag(ones(parameters,1));

        A(i,i)=1.1;
        B=diag(ones(parameters,1));
        B(i,i)=0.9;
        fplus(:,i)=bridge_function(A*d(:,a));
        fminus(:,i)=bridge_function(B*d(:,a));
        S(:,i)=4*pi.^2*(fplus(:,i).^2-fminus(:,i).^2)/(2*0.1*theta(i,a));
    end
    Sj[a]=S;

    %case 1
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+Sj[a]'/ (Sj[a]*Sj[a]')*(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2);
%8.13
    J(a,:)=(theta(:,a+1)-theta(:,a))* (theta(:,a+1)-theta(:,a));

    %case 2
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Wtt\Sj[a]')/(Sj[a]*(Wtt\Sj[a]'))*(w_measured.^2-w_iterations
(:,a).^2); %8.16
    J(a,:)=(theta(:,a+1)-theta(:,a))*Wtt*(theta(:,a+1)-theta(:,a)); %8.18

    %case 3
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Sj[a]'*Wee*Sj[a]+Wtt)\Sj[a]'*Wee*(w_measured.^2-w_iterations
(:,a).^2); %8.20
    J(a,:)=(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj[a]*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))*Wee*
(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj[a]*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))+(theta(:,a+1)-theta
(:,a))*Wtt*(theta(:,a+1)-theta(:,a)); %8.22

    %case 4
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Sj[a]'*Wee*Sj[a]+Wtt)\(Sj[a]'*Wee*(w_measured.^2-
w_iterations(:,a).^2)-Wtt*(theta(:,a)-theta(:,1))); %8.24
    J(a,:)=(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj[a]*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))*Wee*
(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2-Sj[a]*(theta(:,a+1)-theta(:,a)))+(theta(:,a)-theta(
,1))*Wtt*(theta(:,a)-theta(:,1));

    d(:,a+1)=theta(:,a+1)./theta(:,1);
    f_iterations(:,a+1)=bridge_function(d(:,a+1));
    w_iterations(:,a+1)=2*pi.*f_iterations(:,a+1);

    theta_percentage(:,a)=(theta(:,a+1)./theta(:,1)-1)*100;
    theta_divergence(:,a)=abs((theta(:,a+1)./theta(:,a)-1))*100;
    w_divergence(:,a)=abs((w_iterations(:,a+1).^2./w_iterations(:,a).^2-1)*100);
end

```

```

subplot(2,2,2);
for k=1:parameters
    hold on
    plot(1:iterations+1,theta(k,:));
end
title('parameter progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('parameters (kNm2)','FontSize',12)
legend
('EI1','EI2','EI3','EI4','EI5','EI6','EI7','EI8','EI9','EI10','EI11','EI12','EI13','EI14'
,'EI15','location','east');
xticks(1:1:iterations);
grid on;

subplot(2,2,3);
plot(1:iterations,theta_divergence);
title('parameter divergence','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('parameter divergence (%)','FontSize',12)
legend
('EI1','EI2','EI3','EI4','EI5','EI6','EI7','EI8','EI9','EI10','EI11','EI12','EI13','EI14'
,'EI15','location','east');
xticks(1:1:iterations);
grid on;

figure(2)
subplot(1,2,1);
for m=1:measurements
    hold on
    plot(1:iterations+1,w_ iterations(m,:).^2)
end
title('eigenvalue progress','FontSize',12);
xlabel('iterations','FontSize',12);
ylabel('eigenvalues (rad2/s2)','FontSize',12);
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','mode 7','mode 8','mode
9','mode 10','mode 11','mode 12','mode 13','mode 14','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(1:iterations,w_divergence);
title('eigenvalue divergence','FontSize',12);
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('eigenvalue divergence (%)','FontSize',12)
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','mode 7','mode 8','mode
9','mode 10','mode 11','mode 12','mode 13','mode 14','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

figure(3)
plot(1:iterations,J);

title('objective function','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('objective function J','FontSize',12)
xticks(1:1:iterations);
grid on;

```

## 9.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ

### 9.2.1 ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ-ΜΑΖΩΝ

```
1 #MODEL GENERATION#
2 #Create ModelBuilder (with two-dimensions and 3DOF/node)
3 model BasicBuilder -ndm 1 -ndf 1
4 # Units: N, m, sec
5 source parameters_springs.tcl
6
7 set d1 $d1;
8 set d2 $d2;
9 set d3 $d3;
10
11 set k1 130.0;
12 set k2 50.0;
13 set k3 220.0;
14
15 node 11 -1.0
16 node 1 0.0
17 node 2 0.0
18 node 3 0.0
19 node 4 0.0
20 node 5 1.0
21
22 fix 11 1
23 fix 5 1
24
25 uniaxialMaterial Elastic 11 10000000000000
26 uniaxialMaterial Elastic 1 [expr $d1*$k1]
27 uniaxialMaterial Elastic 2 [expr $d2*$k2]
28 uniaxialMaterial Elastic 3 [expr $d3*$k3]
29 uniaxialMaterial Elastic 4 10000000000000
30
31 #geomTransf Linear 1
32
33 #element zeroLength $eleTag $iNode $jNode -mat $matTag1 $matTag2 ... -dir $dir1 $dir2
...-<doRayleigh $rFlag> <-orient $x1 $x2 $x3 $yp1 $yp2 $yp3>
34
35 element truss 11 11 1 1 11
36 element zeroLength 1 1 2 -mat 1 -dir 1
37 element zeroLength 2 2 3 -mat 2 -dir 1
38 element zeroLength 3 3 4 -mat 3 -dir 1
39 element truss 4 4 5 1 4
40
41 mass 1 0.00001
42 mass 2 4.0
43 mass 3 9.0
44 mass 4 0.00001
45
46 recorder Node -file nodesD1.out -time -node 11 1 2 3 4 -dof 1 disp
47
48 # set AnalysisType Modal
49
50 set a [eigen 2]; #kuklikes idiosyxnotites omega, sto tetragwno
51 set lamda1 [lindex $a 0]
52 set lamda2 [lindex $a 1]
53
54 set omega1 [expr pow($lamda1,0.5)]
55 set omega2 [expr pow($lamda2,0.5)]
56
57 set pi [expr 2.0*asin(1.0)]
58 set f1 [expr $omega1/(2.0*$pi)]
59 set f2 [expr $omega2/(2.0*$pi)]
60
61 puts "lamda1=$lamda1"
62 puts "lamda2=$lamda2"
63
64 file delete 'frequencies_elathria.out'
65 set Ffile [open "frequencies_elathria.out" "w"]
66
67 puts $Ffile $f1
68 puts $Ffile $f2
```



```

69
70   close $Ffile
71   puts "all ok"

function f=spring_function(d)
fout=fopen('parameters_springs.tcl','w');
fprintf(fout,'set d1 %f \n',d(1));
fprintf(fout,'set d2 %f \n',d(2));
fprintf(fout,'set d3 %f \n',d(3));
fclose(fout);
infile='elathria.tcl';
system([' OpenSees ' infile '> screendump']);
tmpl=load('frequencies_elathria.out');
f=zeros(2,1);
for h=1:2
    f(h,1)=tmpl(h,1);
end
end

parameters=3;
measurements=2;
iterations=5;

theta=zeros(parameters,iterations+1);
theta(:,1)=[130 50 220]';

d_undamaged=ones(parameters,1);
d_damaged=[120 60 210]'./theta(:,1);

f_initial=spring_function(d_undamaged);
f_measured=spring_function(d_damaged);

w_initial=2*pi.*f_initial;
w_measured=2*pi.*f_measured;

f_iterations(:,1)=f_initial;
w_iterations(:,1)=w_initial;

d=zeros(parameters,iterations+1);
theta_percentage=zeros(parameters,iterations);

d(:,1)=d_undamaged;

fplus=zeros(measurements,parameters);
fminus=zeros(measurements,parameters);

theta_divergence=zeros(parameters,iterations);
z_divergence=zeros(measurements,iterations);

Sj=cell(iterations,1);
S=zeros(measurements,parameters);

syntelestis_Ve=10^(-1);
syntelestis_Vj=10;

Vj=cell(iterations+1,1);
Vj{1}=diag(syntelestis_Vj*ones(parameters,1));

Ve=diag(syntelestis_Ve*ones(measurements,1));

Dj=cell(iterations+1,1);
Dj{1}=zeros(parameters,measurements);

Vz=cell(iterations,1);
for a=1:iterations
    for i=1:parameters
        A=diag(ones(parameters,1));

```

```

    A(i,i)=1.1;
    B=diag(ones(parameters,1));
    B(i,i)=0.9;
    fplus(:,i)=spring_function(A*d(:,a));
    fminus(:,i)=spring_function(B*d(:,a));
    S(:,i)=4*pi.^2*(fplus(:,i).^2-fminus(:,i).^2)./(2*0.1*theta(i,a));
end
Sj{a}=S;

%case 1: present noise
Vz{a}=Sj{a}*Vj{a}*Sj{a}'-Sj{a}*Dj{a}-Dj{a}'*Sj{a}'+Ve;
theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})/Vz{a}*(w_measured.^2-w_iterations(:,a).
^2);
Vj{a+1}=Vj{a}-(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})/Vz{a}*(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})';
Dj{a+1}=Dj{a}-(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})/Vz{a}*(Sj{a}*Dj{a}-Ve);

%case 2: absent noise
theta(:,a+1)=theta(:,a)+Vj{a}*Sj{a}'/(Sj{a}*Vj{a}*Sj{a}'+Ve)*(w_measured.^2-
w_iterations(:,a).^2);
Vj{a+1}=Vj{a}-Vj{a}*Sj{a}'/(Sj{a}*Vj{a}*Sj{a}'+Ve)*Sj{a}*Vj{a};

d(:,a+1)=theta(:,a+1)./theta(:,1);
f_ iterations(:,a+1)=spring_function(d(:,a+1));
w_ iterations(:,a+1)=2*pi.*f_ iterations(:,a+1);

theta_percentage(:,a)=(theta(:,a+1)./theta(:,1)-1)*100;
theta_divergence(:,a)=abs((theta(:,a+1)./theta(:,a)-1))*100;
z_divergence(:,a)=abs((w_ iterations(:,a+1).^2./w_ iterations(:,a).^2-1)*100);
end

figure(1)
subplot(2,2,1);
bar(theta_percentage(:,end),'red')
title('final parameter changes','FontSize',12)
xlabel('elements','FontSize',12)
ylabel('parameter percentages (%)','FontSize',12)
grid on;

subplot(2,2,2);
for k=1:parameters
    hold on
    plot(1:iterations+1,theta(k,:));
end
title('parameter progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('parameters (N/m)','FontSize',12)
legend('k1','k2','k3','location','east')
grid on;

subplot(2,2,3);
plot(1:iterations,theta_divergence);

```

```

title('theta divergence','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('theta divergence (%)','FontSize',12)
grid on;

figure(2)
subplot(1,2,1);
for m=1:measurements
    hold on
    plot(1:iterations+1,w_iterations(m,:).^2)
end
title('eigenvalue progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('eigenvalues (rad2/s2)','FontSize',12)
legend('mode 1','mode 2','location','east')
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(1:iterations,z_divergence);
title('eigenvalue divergence','FontSize',12);
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('eigenvalue divergence (%)','FontSize',12)
legend('mode 1','mode 2','location','east')
grid on;
toc

```

## 9.2.2 ΔΙΚΤΥΩΜΑ

```
1 #MODEL GENERATION#
2 #Create ModelBuilder (with two-dimensions and 3DOF/node)
3 model BasicBuilder -ndm 2 -ndf 3
4
5 # Units: N, m, sec
6 source parameters2.tcl
7
8 set L1 0.7;
9
10 set p 2.640; #Mg/m3
11
12 set d1 $d1;
13 set d2 $d2;
14 set d3 $d3;
15 set d4 $d4;
16 set d5 $d5;
17 set d6 $d6;
18 set d7 $d7;
19
20 node 1      0.0      0.0
21 node 2      [expr $L1/7.0] 0.0
22 node 3      [expr 2.0*$L1/7.0] 0.0
23 node 4      [expr 3.0*$L1/7.0] 0.0
24 node 5      [expr 4.0*$L1/7.0] 0.0
25 node 6      [expr 5.0*$L1/7.0] 0.0
26 node 7      [expr 6.0*$L1/7.0] 0.0
27 node 8      [expr $L1] 0.0
28
29 fix 1 1 1 1
30
31 set b 0.05;
32 set h 0.025;
33 set A [expr $b*$h];
34 set I [expr $h*pow($b,3.0)/12.0];
35 set E [expr 4.5/$I]; #Young's modulus
36
37 uniaxialMaterial Elastic 1 $E
38
39 geomTransf Linear 1
40
41 element elasticBeamColumn 1 1 2 $A [expr $d1*$E] $I 1
42 element elasticBeamColumn 2 2 3 $A [expr $d2*$E] $I 1
43 element elasticBeamColumn 3 3 4 $A [expr $d3*$E] $I 1
44 element elasticBeamColumn 4 4 5 $A [expr $d4*$E] $I 1
45 element elasticBeamColumn 5 5 6 $A [expr $d5*$E] $I 1
46 element elasticBeamColumn 6 6 7 $A [expr $d6*$E] $I 1
47 element elasticBeamColumn 7 7 8 $A [expr $d7*$E] $I 1
48
49
50 mass 1 [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] 0.0
51 mass 2 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
52 mass 3 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
53 mass 4 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
54 mass 5 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
55 mass 6 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
56 mass 7 [expr $p*$A*($L1/7.0)] [expr $p*$A*($L1/7.0)] 0.0
57 mass 8 [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] [expr $p*$A*($L1/7.0)/2.0] 0.0
58
59 set AnalysisType Modal
60
61 set a [eigen 6]; #kuklikes idiosyxnotites omega, sto tetragwno
62 set lamda1 [lindex $a 0]
63 set lamda2 [lindex $a 1]
64 set lamda3 [lindex $a 2]
65 set lamda4 [lindex $a 3]
66 set lamda5 [lindex $a 4]
67 set lamda6 [lindex $a 5]
68
69 set omegal [expr sqrt($lamda1)]
```

```

70 set omega2 [expr sqrt($lamda2)]
71 set omega3 [expr sqrt($lamda3)]
72 set omega4 [expr sqrt($lamda4)]
73 set omega5 [expr sqrt($lamda5)]
74 set omega6 [expr sqrt($lamda6)]
75
76 set pi [expr 2.0*asin(1.0)]
77 set f1 [expr $omega1/(2.0*$pi)]
78 set f2 [expr $omega2/(2.0*$pi)]
79 set f3 [expr $omega3/(2.0*$pi)]
80 set f4 [expr $omega4/(2.0*$pi)]
81 set f5 [expr $omega5/(2.0*$pi)]
82 set f6 [expr $omega6/(2.0*$pi)]
83
84
85 file delete 'frequencies_provolos2.out'
86 set Ffile [open "frequencies_provolos2.out" "w"]
87
88 puts $Ffile $f1
89 puts $Ffile $f2
90 puts $Ffile $f3
91 puts $Ffile $f4
92 puts $Ffile $f5
93 puts $Ffile $f6
94
95 close $Ffile

function f=truss_function(d)
fout_truss=fopen('parameters_truss.tcl','w');
fprintf(fout_truss,'set d1 %f \n',d(1));
fprintf(fout_truss,'set d2 %f \n',d(2));
fprintf(fout_truss,'set d3 %f \n',d(3));
fprintf(fout_truss,'set d4 %f \n',d(4));
fprintf(fout_truss,'set d5 %f \n',d(5));
fprintf(fout_truss,'set d6 %f \n',d(6));
fprintf(fout_truss,'set d7 %f \n',d(7));
fprintf(fout_truss,'set d8 %f \n',d(8));
fprintf(fout_truss,'set d9 %f \n',d(9));
fprintf(fout_truss,'set d10 %f \n',d(10));
fclose(fout_truss);
infile='truss.tcl';
system([' OpenSees ' infile '>screendump']);
tmpl=load('frequencies_truss.out');
f=zeros(2,1);
for h=1:2
    f(h,1)=tmpl(h,1);
end
end

measurements=2;
parameters=10;
iterations=40; %arbitrary

theta=zeros(parameters,iterations+1);
theta(:,1)=3*10^7*ones(parameters,1);
theta_damaged=10^7*[3.168 3.25 3.18 3.142 3.249 3.157 3.119 3.135 3.194 3.108]';

d_undamaged=ones(parameters,1);
d_damaged=theta_damaged./theta(:,1);

f_initial=truss_function(d_undamaged);
f_measured=truss_function(d_damaged);

w_initial=2*pi.*f_initial;
w_measured=2*pi.*f_measured;

f_iterations(:,1)=f_initial;
w_iterations(:,1)=w_initial;

d=zeros(parameters,iterations+1);
theta_percentage=zeros(parameters,iterations);

d(:,1)=d_undamaged;

fplus=zeros(measurements,parameters);
fminus=zeros(measurements,parameters);

```

```

Vj=cell(iterations+1,1);

syntelestis_Vj=10^12;
Vj{1}=diag(syntelestis_Vj*ones(parameters,1));
syntelestis_Ve=10^(6);
Ve=diag(syntelestis_Ve*ones(measurements,1));

Dj=cell(iterations+1,1);
Dj{1}=zeros(parameters,measurements);

Vz=cell(iterations,1);

Wee=cell(iterations,1);
Wtt=cell(iterations,1);

for a=1:iterations
    for i=1:parameters
        A=diag(ones(parameters,1));
        A(i,i)=1.1;
        B=diag(ones(parameters,1));
        B(i,i)=0.9;
        fplus(:,i)=truss_function(A*d(:,a));
        fminus(:,i)=truss_function(B*d(:,a));
        S(:,i)=4*pi.^2*(fplus(:,i).^2-fminus(:,i).^2)/(2*0.1*theta(i,a));
    end
    Sj{a}=S;

    %model 1
    Vz{a}=Sj{a}*Vj{a}*Sj{a}'-Sj{a}*Dj{a}-Dj{a}'*Sj{a}'+Ve;
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})/Vz{a}*(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2);
    Vj{a+1}=Vj{a}-(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})/Vz{a}*(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})';
    Dj{a+1}=Dj{a}-(Vj{a}*Sj{a}'-Dj{a})/Vz{a}*(Sj{a}*Dj{a}-Ve);
    Wee{a}=inv(Ve-Dj{a}'*Sj{a}');
    Wtt{a}=inv(Vj{a}-Dj{a}*Sj{a}/(Sj{a}'*Sj{a}));

    %model 2
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+Vj{a}*Sj{a}'/(Sj{a}*Vj{a}*Sj{a}'+Ve)*(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2);
    Vj{a+1}=Vj{a}-Vj{a}*Sj{a}'/(Sj{a}*Vj{a}*Sj{a}'+Ve)*Sj{a}*Vj{a};

    d(:,a+1)=theta(:,a+1)./theta(:,1);
    f_iterations(:,a+1)=truss_function(d(:,a+1));
    w_iterations(:,a+1)=2*pi.*f_iterations(:,a+1);

    theta_percentage(:,a)=(theta(:,a+1)./theta(:,1)-1)*100;
    theta_divergence(:,a)=abs((theta(:,a+1)./theta(:,a)-1))*100;
    z_divergence(:,a)=abs((w_iterations(:,a+1).^2./w_iterations(:,a).^2-1)*100);
end

figure(1)
subplot(2,2,1);
bar(theta_percentage(:,end),'red')
title('final parameter changes','FontSize',12)
xlabel('elements','FontSize',12)
ylabel('parameter percentages (%)','FontSize',12)
grid on

subplot(2,2,2);
for k=1:parameters
    hold on
    plot(1:iterations+1,theta(k,:));
end
title('parameter progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)

```

```

ylabel('parameters (N)', 'FontSize', 12)
legend('EA1', 'EA2', 'EA3', 'EA4', 'EA5', 'EA6', 'EA7', 'EA8', 'EA9', 'EA10', 'location', 'east');
grid on;

subplot(2,2,3);
plot(1:iterations, theta_divergence);
title('theta divergence', 'FontSize', 12)
xlabel('iterations', 'FontSize', 12)
ylabel('parameter divergence (%)', 'FontSize', 12)
legend('EA1', 'EA2', 'EA3', 'EA4', 'EA5', 'EA6', 'EA7', 'EA8', 'EA9', 'EA10', 'location', 'east');
grid on;

figure(2)
subplot(1,2,1);
for m=1:measurements
    hold on
    plot(1:iterations+1, w_ iterations(m, :).^2)
end
title('eigenvalue progress', 'FontSize', 12)
xlabel('iterations', 'FontSize', 12)
ylabel('eigenvalues (rad2/s2)', 'FontSize', 12)
legend('mode 1', 'mode 2', 'location', 'east')
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(1:iterations, z_divergence);
title('eigenvalue divergence', 'FontSize', 12);
xlabel('iterations', 'FontSize', 12)
ylabel('eigenvalue divergence (%)', 'FontSize', 12)
legend('mode 1', 'mode 2', 'location', 'east')
grid on;

```

## 9.3 ΤΕΧΝΙΚΗ SVD

Αλλάζει μόνο ο κώδικας εφαρμογής της τεχνικής αυτής μέσω MATLAB

### 9.3.1 ΠΡΟΒΟΛΟΣ

```
I=0.025*0.05^3/12;
E=4.5/I;

parameters=7;
measurements=6;
iterations=5;

d_undamaged=ones(parameters,1);

%d_damaged=0.9*d_undamaged; %scenario 1
d_damaged=[1 1 1 0.8 1 1 1]'; %scenario 2

f_initial=provolos2_function(d_undamaged);
f_measured=provolos2_function(d_damaged);

w_initial=2*pi.*f_initial;
w_measured=2*pi.*f_measured;

f_iterations(:,1)=f_initial;
w_iterations(:,1)=w_initial;

eigenvalues_initial=w_initial.^2;
eigenvalues_measured=w_measured.^2;

theta=zeros(parameters,iterations+1);
d=zeros(parameters,iterations+1);
theta_percentage=zeros(parameters,iterations);

theta_divergence=zeros(parameters,iterations);
z_divergence=zeros(measurements,iterations);

theta(:,1)=E*I*ones(parameters,1);
d(:,1)=ones(parameters,1);

fplus=zeros(measurements,parameters);
fminus=zeros(measurements,parameters);

Sj=cell(iterations,1);
S=zeros(measurements,parameters);

U=cell(iterations,1);
D=cell(iterations,1);
V=cell(iterations,1);

for a=1:iterations
    for i=1:parameters
        A=diag(ones(parameters,1));
        A(i,i)=1.1;
        B=diag(ones(parameters,1));

        B(i,i)=0.9;
        fplus(:,i)=provolos2_function(A*d(:,a));
        fminus(:,i)=provolos2_function(B*d(:,a));
        S(:,i)=4*pi.^2*(fplus(:,i).^2-fminus(:,i).^2)/(2*0.1*theta(i,a));
    end
    Sj{a}=S;
    [U{a},D{a},V{a}]=svd(Sj{a});
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+V{a}/D{a}*U{a}.*(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2);
end
```



```

d(:,a+1)=theta(:,a+1)./theta(:,1);
f_iterations(:,a+1)=provolos2_function(d(:,a+1));
w_iterations(:,a+1)=2*pi.*f_iterations(:,a+1);

theta_percentage(:,a)=(theta(:,a+1)./theta(:,1)-1)*100;
theta_divergence(:,a)=abs((theta(:,a+1)./theta(:,a)-1))*100;
z_divergence(:,a)=abs((w_iterations(:,a+1).^2./w_iterations(:,a).^2-1)*100);
end

figure(1)
subplot(2,2,1);
bar(theta_percentage(:,end),'green')
title('final parameter changes','FontSize',12)
xlabel('elements','FontSize',12)
ylabel('parameter percentages (%)','FontSize',12)
grid on;

subplot(2,2,2);
for k=1:parameters
    hold on
    plot(1:iterations+1,theta(k,:));
end
title('parameter progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('parameters (kNm2)','FontSize',12)
legend('EI1','EI2','EI3','EI4','EI5','EI6','EI7','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

subplot(2,2,3);
plot(1:iterations,theta_divergence);
title('theta divergence','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('theta divergence (%)','FontSize',12)
legend('EI1','EI2','EI3','EI4','EI5','EI6','EI7','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

figure(2)
subplot(1,2,1);
for m=1:measurements
    hold on

    plot(1:iterations+1,w_iterations(m,:).^2)
end
title('eigenvalue progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('eigenvalues (rad2/s2)','FontSize',12)
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(1:iterations,z_divergence);
title('eigenvalue divergence','FontSize',12);
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('eigenvalue divergence (%)','FontSize',12)
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

```

### 9.3.2 ΓΕΦΥΡΑ

```
I=0.2*0.25^3/12;
E=30000000;

parameters=15;
measurements=14;
iterations=7;

d_undamaged=ones(parameters,1);
d_damaged=0.95*d_undamaged; %scenario 1
%d_damaged=[1 1 0.9 1 1 0.8 1 1 1 0.85 1 1 0.75 1 1]'; %scenario 2

f_initial=bridge_function(d_undamaged);
f_measured=bridge_function(d_damaged);

w_initial=2*pi.*f_initial;
w_measured=2*pi.*f_measured;

f_iterations=zeros(measurements,iterations+2);
f_iterations(:,1)=f_initial;
w_iterations(:,1)=w_initial;

eigenvalues_initial=w_initial.^2;
eigenvalues_measured=w_measured.^2;

theta=zeros(parameters,iterations+1);
d=zeros(parameters,iterations+1);
theta_percentage=zeros(parameters,iterations);

theta_divergence=zeros(parameters,iterations);
z_divergence=zeros(measurements,iterations);

theta(:,1)=E*I*ones(parameters,1);
d(:,1)=d_undamaged;

fplus=zeros(measurements,parameters);
fminus=zeros(measurements,parameters);

Sj=cell(iterations,1);
S=zeros(measurements,parameters);

U=cell(iterations,1);
D=cell(iterations,1);
V=cell(iterations,1);

for a=1:iterations
    for i=1:parameters
        A=diag(ones(parameters,1));
        A(i,i)=1.1;
        B=diag(ones(parameters,1));

        B(i,i)=0.9;
        fplus(:,i)=bridge_function(A*d(:,a));
        fminus(:,i)=bridge_function(B*d(:,a));
        S(:,i)=4*pi.^2*(fplus(:,i).^2-fminus(:,i).^2)/(2*0.1*theta(i,a));
    end
    Sj{a}=S;
    [U{a},D{a},V{a}]=svd(Sj{a});
    theta(:,a+1)=theta(:,a)+V{a}/D{a}*U{a}.*(w_measured.^2-w_iterations(:,a).^2);
end
```

```

d(:,a+1)=theta(:,a+1)./theta(:,1);
theta_percentage(:,a+1)=(theta(:,a+1)./theta(:,1)-1)*100;

f_iterations(:,a+1)=bridge_function(d(:,a+1));
w_iterations(:,a+1)=2*pi.*f_iterations(:,a+1);

theta_percentage(:,a)=(theta(:,a+1)./theta(:,1)-1)*100;
theta_divergence(:,a)=abs((theta(:,a+1)./theta(:,a)-1))*100;
z_divergence(:,a)=abs((w_iterations(:,a+1).^2./w_iterations(:,a).^2-1)*100);
end

figure(1)
subplot(2,2,1);
bar(theta_percentage(:,end),'green')
title('final parameter changes','FontSize',12)
xlabel('elements','FontSize',12)
ylabel('parameter percentages (%)','FontSize',12)
grid on;

subplot(2,2,2);
for k=1:parameters
    hold on
    plot(1:iterations+1,theta(k,:));
end
title('parameter progress','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('parameters (kNm2)','FontSize',12)
legend('EI1','EI2','EI3','EI4','EI5','EI6','EI7','EI8','EI9','EI10','EI11','EI12','EI13','EI14',
'EI15','location','east');
xticks(1:1:iterations);
grid on;

subplot(2,2,3);
plot(1:iterations,theta_divergence);
title('parameter divergence','FontSize',12)
xlabel('iterations','FontSize',12)
ylabel('parameter divergence (%)','FontSize',12)
legend('EI1','EI2','EI3','EI4','EI5','EI6','EI7','EI8','EI9','EI10','EI11','EI12','EI13','EI14',
'EI15','location','east');
xticks(1:1:iterations);
grid on;

figure(2)
subplot(1,2,1);
for m=1:measurements
    hold on
    plot(1:iterations+1,w_iterations(m,:).^2)
end
title('eigenvalue progress','FontSize',12);
xlabel('iterations','FontSize',12);
ylabel('eigenvalues (rad2/s2)','FontSize',12);
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','mode 7','mode 8','mode 9',
'mode 10','mode 11','mode 12','mode 13','mode 14','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(1:iterations,z_divergence);
title('eigenvalue divergence','FontSize',12);
xlabel('iterations','FontSize',12);
ylabel('eigenvalue divergence (%)','FontSize',12);
legend('mode 1','mode 2','mode 3','mode 4','mode 5','mode 6','mode 7','mode 8','mode 9',
'mode 10','mode 11','mode 12','mode 13','mode 14','location','east')
xticks(1:1:iterations);
grid on;

```