Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

National Technical University of Athens

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία

Μ-Πίνακες και Αντίστροφοι Μ-Πίνακες

Νικόλαος Δημητρίου

Επιβλέπων : Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2023

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

National Technical University of Athens

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

<u>Διπλωματική εργασία</u>

Μ-Πίνακες και Αντίστροφοι Μ-Πίνακες

Νικόλαος Δημητρίου

Τριμελής Επιτροπή : Β. Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Β. Κανελλόπουλος, Καθηγητής ΕΜΠ

Π. Ψαρράκος, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2023

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία μελετούνται σε βάθος οι ιδιότητες και οι εφαρμογές μιας ειδικής κατηγορίας πινάκων, των αντίστροφων Μ-Πινάκων. Πρόκειται για ειδικούς πίνακες που έχουν τραβήξει το ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες, λόγω των εφαρμογών τους στις επαναληπτικές μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης, την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, τα μοντέλα ανάπτυξης στα οικονομικά, τις αλυσίδες Markov στη στατιστική και τις πιθανότητες, μεταξύ άλλων. Αφού διατυπωθούν οι ιδιότητες που δημιουργούν ένα πίνακα ΙΜ, αναπτύσσονται πρώτα οι συνθήκες που είναι απαραίτητες για τη διατήρηση της ιδιότητας ΙΜ όταν εκτελούνται πράξεις σε αυτούς τους πίνακες.

Στις ενότητες 2-8 και στην ενότητα 14 εξετάζεται η κλειστότητα της ιδιότητας ΙΜ κάτω από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, τη διαγώνια κυριαρχία και την διαγώνια πρόσθεση. Επιπλέον αναλύεται, αν είναι δυνατόν για έναν πίνακα ΙΜ να διατηρήσει το μοτίβο των μηδενικών (μηδενικά σε συγκεκριμένα μη διαγώνια στοιχεία) αφού υψωθεί σε κάποια δύναμη, ακέραια ή μη ακέραια (ρίζες πινάκων). Αναφορά γίνεται επίσης και στις λύσεις Lyapunov των πινάκων ΙΜ. Τέλος, διατυπώνονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι ένας πίνακας ΙΜ.

Στις ενότητες 9-11 περιγράφεται το συμπλήρωμα Schur των πινάκων και η δυνατότητα διατήρησης της ιδιότητας ΙΜ. Εξετάζονται επίσης τα μπλοκ πινάκων καθώς και οι ορίζουσες και υπο-ορίζουσες τους. Σημαντικό σημείο μελέτης αποτελεί αν οι υποπίνακες και οι υπο-ορίζουσες διατηρούν το μοτίβο των μηδενικών ή των ανισοτήτων κάτω από τη δράση του συμπληρώματος Schur. Στην ενότητα 12 περιγράφονται τα γινόμενα διαδρομής για πίνακες, ενώ στην ενότητα 13 πραγματοποιείται ανάλυση της LU των πινάκων ΙΜ.

Στις ενότητες 15-16 αναλύεται η φασματική δομή των πινάκων ΙΜ και των γινομένων Hadamard. Συγκεκριμένα, η δυνατότητα κλεισίματος των γινομένων Hadamard. Στην ενότητα 17 διερευνώνται μικρές διαταραχές των στοιχείων πίνακα και πώς επηρεάζουν την ιδιότητα ΙΜ και στην ενότητα 18 διατυπώνονται ορισμένες ανισότητες οριζουσών για τους πίνακες ΙΜ.

Τέλος, στις ενότητες 19 έως 28 αναλύονται ειδικά θέματα σχετικά με συγκεκριμένα είδη πινάκων όπως οι υπερμετρικοί πίνακες, το συμπλήρωμα Perron και η τοπολογική κλείστότητα και πώς διατηρούν την ιδιότητα τους να είναι ΙΜ.

Summary

In this project we study in depth the properties and applications of a special category of matrices, namely Inverse M-Matrices. These are special matrices that have seen a lot of interest, in the last decades, due to their applications in iterative numerical analysis, finite element analysis, development models in economics, Markov chains in statistics and probability among others. After we define the properties that makes a matrix IM, we first explore the conditions that are necessary to maintain the IM property when actions are performed on these matrices.

In sections 2-8 and again in section 14 we look at closure of the IM property under addition and multiplication, diagonal dominance, and diagonal addition. We discuss whether it is possible for an IM matrix to keep the pattern of zeros (zeros in specific non diagonal elements) after raising it to some power, integer, or non-integer (roots of matrices). We also discuss Lyapunov solutions of IM matrices. Finally, we state necessary and sufficient conditions for a matrix to be in IM.

In sections 9-11 we discuss Schur complement of matrices and the possibility to maintain the IM property. We also look at submatices as well as determinants and sub determinants. We are particularly interested in whether submatrices of sub determinants keep their pattern of zeroes or inequalities under the action of Schur complement. In section 12 we look at path products for matrices while in section 13 we discuss LU decomposition of IM matrices.

In sections 15-16 we discuss spectral structure of IM matrices and Hadamard products. Specifically, the possibility of closure under Hadamard powers. In section 17 we explore small perturbations of matrix elements and how they affect the IM property and in section 18 we establish some determinant inequalities for IM matrices.

Finally in sections 19 through 28 we discuss special topics on special kinds of matrices like ultra metric, Perron complement, and topological closure and how they maintain their IM property.

Οι συμβολισμοί των πινάκων που αναφέρονται στο κείμενο

- $\boldsymbol{D_n}$**:** $n \times n$, αντιστρέψιμοι διαγώνιοι πίνακες
- $\boldsymbol{D_n^+}$: $n \times n$, θετικοί διαγώνιοι πίνακες που ανήκουν στο D_n
- **M**: M-πίνακες
- **IM**: αντίστροφοι M-πίνακες
- **N**: μη αρνητικοί πίνακες (στοιχείο προς στοιχείο)
- N^+: μη αρνητικοί πίνακες με θετική κύρια διαγώνιο (στοιχείο προς στοιχείο)
- **P**: P-πίνακες
- **Z**: Z-πίνακες
- $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{F})$: οι $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$
- **Null(A)**: ο (δεξιός) μηδενοχώρος του A
- $\mathrm{nullity}(A)$: η διάσταση του Null(A)
- $\sigma(A)$: το φάσμα του πίνακα A (το σύνολο των ιδιοτιμών του)
- $\rho(A)$: η φασματική ακτίνα του πίνακα ($\max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(A)\}$)
- $\alpha^c = \langle n \rangle \backslash \alpha$ το συμπληρωματικό σύνολο του α
- $A[\alpha, \beta]$ ο υποπίνακας του A με γραμμές $\alpha \subseteq \langle m \rangle$ και στήλες $\beta \subseteq \langle n \rangle$
- $A[\alpha] = A[\alpha, \alpha]$ ο κύριος υποπίνακας του A με γραμμές $\alpha \subseteq \langle n \rangle$

1 Εισαγωγή

Z-πίνακας Ένας πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **Z-πίνακας** ($A \in \mathbf{Z}$) αν $a_{ij} \leq 0$ για κάθε $i \neq j$. Επομένως ένας Z-πίνακας μπορεί να γραφεί ως $A = \alpha I - P$, όπου P είναι ένας μη αρνητικός πίνακας. Αν $\alpha > \rho(P)$ τότε ο πίνακας A ονομάζεται (ομαλός) M-πίνακας.

Παράδειγμα 1.1. Z-πίνακας είναι ο ακόλουθος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος

P-πίνακας Ένας πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **P-πίνακας** ($A \in \mathbf{P}$) αν όλες οι κύριες υπορίζουσες του είναι θετικές.

M-πίνακας

Ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **M-πίνακας** ($A \in \mathbf{M}$) αν

(1) είναι της μορφής $A = \alpha I - B$, όπου ο B έχει μη αρνητικά στοιχεία και

(2) $\alpha > \rho(B)$ όπου $\rho(B)$ είναι η φασματική ακτίνα του B με τον ορισμό **Perron-Frobenius**.

Παράδειγμα 1.2. Ο πίνακας A από το Παράδειγμα 1.1. μπορεί να γραφεί ως

$$A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

όπου ο πίνακας $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ έχει φασματική ακτίνα $\rho(P) \approx 3.8557$, άρα $\alpha = 4 > \rho(P)$

και ο πίνακας P είναι μη αρνητικός πίνακας. Άρα είναι και M-πίνακας

Έτσι ένας M-πίνακας A έχει δύο κύρια χαρακτηριστικά: το πρόσημο των διαγώνιων στοιχείων $a_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$ και $a_{ij} \leq 0, i \neq j$ (αυτοί οι πίνακες ονομάζονται **Z-πίνακες**, $A \in \mathbf{Z}$) και την ιδιότητα ότι όλες οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος (αυτοί οι πίνακες ονομάζονται **θετικοί σταθεροί**).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ένας M-πίνακας A έχει μία ιδιοτιμή με το ελάχιστο μέτρο, που συμβολίζεται με $q(A)$. Ισοδύναμα, μπορεί να αποδειχθεί ότι ένας Z-πίνακας είναι M-πίνακας αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} \geq 0$. Αυτοί οι πίνακες C που είναι αντίστροφοι των M-πινάκων ονομάζονται αντίστροφοι πίνακες **M** ($B \in \mathbf{IM}$) και περιλαμβάνουν μια μεγάλη κατηγορία σταθερών μη αρνητικών πινάκων. Σημειώστε ότι ένας αντίστροφος M-πίνακας είναι ένας μη αρνητικός πίνακας του οποίου ο αντίστροφος είναι ένας Z-πίνακας.

Κατά τη διάρκεια του τελευταίου μισού αιώνα, οι M-πίνακες έτυχαν μεγάλης προσοχής, σε μεγάλο βαθμό λόγω της συχνότητας με την οποία εμφανίζονται σε εφαρμογές [BP94] και πολλά είναι γνωστά για αυτούς και αρκετές γενικεύσεις, π.χ., [FP62, NP79, NP80, Ple77, PB74]. Οι M-πίνακες προκύπτουν σε επαναληπτικές μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης δυναμικών συστημάτων, σε μεθόδους πεπερασμένων διαφορών για μερικές διαφορικές εξισώσεις, παραγωγή εισροών-εκροών και μοντέλα ανάπτυξης στα οικονομικά, προβλήματα γραμμικής συμπληρωματικότητας στην επιχειρησιακή έρευνα και στις διαδικασίες Markov στις πιθανότητες και στα στατιστικά [BP94]. Οι αντίστροφοι M-πίνακες είναι αντικείμενο σημαντικής προσοχής τα τελευταία χρόνια λόγω της πληθώρας εφαρμογών όπως το μοντέλο Ising του σιδηρομαγνητισμού [Ple77], ταξινόμηση [BP94], και τυχαία ενεργειακά μοντέλα στη στατιστική φυσική [Fan60].

2 Πρώιμα αποτελέσματα

Διατυπώνουμε μερικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τον ορισμό των M-πινάκων χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.1. Έστω $A \in Z \cap M_n(\mathbb{R})$. Τα ακόλουθα συμπεράσματα είναι ισοδύναμα:

(i) ο A είναι ένας **M**-πίνακας.
(ii) $A = \alpha I - B$ όπου $B \geq 0$ και $\alpha > \rho(B)$.
(iii) ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A^{-1} \geq 0$.
(iv) ο A έχει θετικές ελάσσονες υπορίζουσες.
(v) υπάρχει ένας πίνακας $D \in D_n^+$ τέτοιος ώστε $DA + A^T D$ είναι θετικά ορισμένος

Σημειώνουμε ότι από το συμπέρασμα (iv) προκύπτει ότι αν $A \in IM$, τότε $\det A > 0$ και ο πίνακας A έχει θετικά στοιχεία.

Παράδειγμα 2.1. Ο πίνακας A από το *Παράδειγμα 1.1.* έχει αντίστροφο πίνακα τον

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $A^{-1} > 0$ ικανοποιώντας την συνθήκη (iii) του θεωρήματος.

2.1 Πολλαπλασιαστική διαγώνια κλειστότητα

Είναι γνωστό ότι το σύνολο των M-πινάκων είναι κλειστό κάτω από τον πολλαπλασιασμό των θετικών διαγώνιων στοιχείων, δηλαδή αν ο D είναι διαγώνιος πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία και $A \in \mathbf{M}$, τότε $DA \in \mathbf{M}$ καθώς και $AD \in \mathbf{M}$. Το ίδιο ισχύει και για τους αντίστροφους M-πίνακες για τους ίδιους λόγους.

Πόρισμα 2.2 Αν ο πίνακας $D \in \boldsymbol{D}^+$ και ο $B \in \mathbf{IM}$ τότε $DB \in \mathbf{IM}$ και $BD \in \mathbf{IM}$.

Απόδειξη: Αφού ο πίνακας $DB \in \boldsymbol{N}$ και είναι αντιστρέψιμος, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $(DB)^{-1} = B^{-1}D^{-1} \in \boldsymbol{Z}$ έτσι ώστε $(DB)^{-1} \in \boldsymbol{M}$ και άρα $DB \in \boldsymbol{IM}$. Με το ίδιο τρόπο και για τον BD. ■

2.2 Πολλαπλασιαστική κλειστότητα

Ούτε το σύνολο των **M** ούτε των **IM** είναι κλειστό στον πολλαπλασιασμό.

Πόρισμα 2.3 Αν ο $A \in \mathbf{N}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $A \in \mathbf{IM}$ αν και μόνο αν $A^{-1} \in \mathbf{Z}$.

Απόδειξη Προκύπτει κατευθείαν από τον ορισμό του IM πίνακα.

Πόρισμα 2.4 Αν $A, B \in \mathbf{IM}$, τότε ο $AB \in \mathbf{IM}$ αν και μόνο αν $(AB)^{-1} \in \mathbf{Z}$.

Απόδειξη Αν $AB \in \mathbf{IM}$ τότε $(AB)^{-1} \in \mathbf{M}$ άρα και $(AB)^{-1} \in \mathbf{Z}$. Αντίστροφα, αν $(AB)^{-1} \in \mathbf{Z}$ τότε από το Θεώρημα 2.1. $(AB)^{-1} \in \mathbf{M}$ άρα και $AB \in \mathbf{IM}$.

Παράδειγμα 2.2 Ας θεωρήσουμε τους M-πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 14 & 13 \\ 13 & 24 & 20 \\ 14 & 13 & 24 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 24 & 20 & 13 \\ 13 & 24 & 14 \\ 14 & 13 & 24 \end{bmatrix}$$

Τότε ο AB δεν είναι **IM** αφού το στοιχείο (1,3) του $(AB)^{-1}$ είναι θετικό. Πράγματι έχουμε:

$$AB = \begin{pmatrix} 868 & 925 & 781 \\ 904 & 1096 & 985 \\ 841 & 904 & 940 \end{pmatrix}$$

με αντίστροφο πίνακα

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{6648135} \begin{pmatrix} 46600 & -54492 & 18383 \\ -7125 & 53033 & -49652 \\ -34840 & -2249 & 38376 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 2.6 Η κλειστότητα στον πολλαπλασιασμό ισχύει για $n = 2$ (αφού οι A, B και ο AB έχουν θετική ορίζουσα.

2.3 Κλειστότητα στην πρόσθεση

Μία άλλη αντιστοιχία μεταξύ των **IM** και **M** πινάκων είναι ότι κανένα σύνολο δεν είναι κώνος, γιατί κανένα σύνολο δεν είναι κλειστό στην πρόσθεση. Ωστόσο οι **M** είναι κλειστοί στην πρόσθεση στην περίπτωση που $n = 2$.

Θεώρημα 2.7. Αν $A, B \in \mathbf{IM}$, τότε και $A + B \in \mathbf{IM}$ αν και μόνο αν ο $A + B$ είναι αντιστρέψιμος $(A + B)^{-1} \in Z$.

Η κλειστότητα στην πρόσθεση δεν ισχύει ούτε για την περίπτωση $n = 2$.

Παράδειγμα 2.3. Ας θεωρήσουμε τον **IM** πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Αν $B = A^T$, τότε ο $A + B$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Ωστόσο, αν $\det(A + B) > 0$ τότε ο $A + B$ είναι IM πίνακας στην περίπτωση που $n = 2$.

Παρατήρηση 2.9. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση $n = 2$ για πίνακες $A, B \in$ **M**, τότε ο $A + B \in$ **M** αν και μόνο αν $A^{-1} + B^{-1} \in$ **IM**. Αυτό δεν ισχύει στις περιπτώσεις $n > 2$ όπως φαίνεται από τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

για τους οποίους $A + B \in$ **M** αλλά $A^{-1} + B^{-1} \notin$ **IM**. Υπάρχουν ωστόσο ενδιαφέρουσες σχέσεις μεταξύ των $A + B$ και $A^{-1} + B^{-1}$. Για παράδειγμα, αν οι $A, B \in$ **P** τότε $\det(AB) \cdot \det(A^{-1} + B^{-1}) = \det(A + B)$. Επιπρόσθετα, αν ο A είναι κάτω τριγωνικός και ο B είναι άνω τριγωνικός τότε τα πρόσημα των κυρίων υποοριζουσών του $A^{-1} + B^{-1}$ και του $A + B$ είναι τα ίδια, έτσι ώστε $A + B \in$ **M** αν $A^{-1} + B^{-1} \in$ **P**.

Από το *Θεώρημα 2.1* και την σχέση που ορίζει τους cofactor για τον αντίστροφο πίνακα έχουμε το

Θεώρημα 2.10. Αν ο $A \in$ **N**, τότε ο $A \in$ **IM** αν και μόνο αν η $\det A > 0$ και είτε $\det A(i,j) > 0$ είτε $\operatorname{sgn} \det A(i,j) = (-1)^{i+j+1}$ για $-1 \leq i,j \leq n$ και $i \neq j$.

Οι IM πίνακες είναι κλειστό σύνολο ως προς την ομοιότητα μετάθεσης και τη μετατόπιση.

Θεώρημα 2.11. Αν ο P είναι πίνακας μετάθεσης, τότε $A \in$ **IM** αν και μόνο αν $PAP^T \in$ **IM**.

Θεώρημα 2.12. Ο $A \in$ **IM** αν και μόνο αν $A^T \in$ **IM**.

Θεώρημα 2.13. Κάθε πίνακας $A \in$ **IM** είναι θετικά σταθερός

3 Διαγώνια κλειστότητα

Ένας πίνακας $C = [c_{ij}]$ λέγεται διαγώνια κυρίαρχος στις γραμμές του αν ισχύει:

$$|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}|, \;\; i = 1, \ldots . n.$$

Αν ο C^T είναι διαγώνια κυρίαρχος στις γραμμές του τότε ο C είναι διαγώνια κυρίαρχος στις στήλες του. Οι Μ-πίνακες έχουν μία σημαντική ιδιότητα διαγώνιας κυριαρχίας: αν ο $A \in$ **Z**, τότε ο $A \in$ **M** αν και μόνο αν υπάρχει ένα διαγώνιος πίνακας D, με μη αρνητικά διαγώνια στοιχεία, τέτοιος ώστε ο AD να είναι διαγώνια κυρίαρχος στις γραμμές του. Εναλλακτικά, ο πίνακας DA μπορεί να είναι διαγώνια κυρίαρχος στις στήλες του και επιπρόσθετα ο DAE μπορεί να είναι διαγώνια κυρίαρχος στις στήλες του και στις γραμμές του. Από την άλλη πλευρά, οι αντίστροφοι Μ-πίνακες δεν διαγώνια κυρίαρχοι στις γραμμές(στήλες) του γενικά. Έχουν, όμως, ανάλογες, δυαδικές ιδιότητες με των Μ-πινάκων.

Ένας πίνακας $C = [c_{ij}]$ λέγεται διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των γραμμών του αν ισχύει:

$$|c_{ii}| > |c_{ij}|, \;\; j \neq i, \;\; i = 1, \dots . n.$$

Όμοια ο C είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των στηλών του αν ο C^T είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των γραμμών του.

Θεώρημα 3.1. Αν $A \in \mathbf{IM} \cap M_n(\mathbb{R})$ τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Υπάρχει ένας πίνακας $D \in D_n^+$ τέτοιος ώστε ο DA είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των στηλών του

(ii) Υπάρχει ένας πίνακας $E \in D_n^+$ τέτοιος ώστε ο AE είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των γραμμών του

(iii) Υπάρχουν πίνακες $G, H \in D_n^+$ τέτοιος ώστε ο GAH είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των γραμμών του και στα στοιχεία των στηλών του

Απόδειξη Έστω $A \in \mathbf{IM}$ τέτοιος ώστε ο $B = A^{-1} \in \mathbf{M}$. Από το θεώρημα Perron-Frobenius προκύπτει ότι υπάρχει ένας πίνακας $D \in D_n^+$ τέτοιος ώστε ο $R = DB$ είναι διαγώνια κυρίαρχος στις γραμμές του. Ορίζουμε $S = R^{-1} = D^{-1}A = [s_{ij}]$ και ας υποθέσουμε ότι τα $i, j \in \langle n \rangle$ με $i \neq j$. Τότε, αναπτύσσοντας τις ελάσσονες ορίζουσες του R^{-1} και επειδή $R \in \mathbf{Z}$ ισχύει:

$$|s_{ii}| - |s_{ji}| = \frac{\det R[\langle n \rangle \backslash \{i\}] + \det R[\langle n \rangle \backslash \{i\}, \langle n \rangle \backslash \{j\}]}{\det R} = \frac{\det T}{\det R}$$

όπου ο πίνακας T προκύπτει από το $R[\langle n \rangle \backslash \{i\}]$ προσθέτοντας τη στήλη $\pm R[\langle n \rangle \backslash \{i\}, \iota]$ στη j στήλη. Αφού ο R είναι διαγώνια κυρίαρχος στις γραμμές του και έχει θετικά διαγώνια στοιχεία τότε, $\det T > 0$ επομένως $|s_{ii}| - |s_{ji}| > 0$. Άρα ο $S = D^{-1}A$ είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των στηλών του. ■

Όμοια αποδεικνύονται και οι προτάσεις (ii) και (iii).

Παράδειγμα Έστω ο πίνακας $A \in \mathbf{IM}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

και οι πίνακες $D, P \in D_n^+$:

$$D = \begin{bmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & 2. & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{bmatrix}.$$

Τότε ο πίνακας DA

$$DA = \begin{bmatrix} 4. & 2. & 1. \\ 2. & 8. & 4. \\ 3. & 1.5 & 6. \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των στηλών του, ο πίνακας AP είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των γραμμών του

$$AP = \begin{bmatrix} 4.0 & 3.0 & 1.0 \\ 1.0 & 6.0 & 2.0 \\ 2.0 & 1.5 & 4.0 \end{bmatrix},$$

ενώ ο πίνακας DAP είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία των γραμμών του και των στηλών του

$$DAP = \begin{bmatrix} 4.00 & 3.00 & 1.00 \\ 2.00 & 12.00 & 4.00 \\ 3.00 & 2.25 & 6.00 \end{bmatrix}.$$

4 Διαγώνιες λύσεις Lyapunov

Είναι γνωστό ότι οι Μ-πίνακες έχουν διαγώνιες λύσεις Lyapunov, δηλαδή, για κάθε $B \in \mathbf{M}$ υπάρχει ένας πίνακας $D \in D_n^+$ τέτοιος ώστε ο $DB + B^T D$ είναι θετικά ορισμένος. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το ανάλογο θεώρημα για τους ΙΜ-πίνακες:

Θεώρημα 4.1. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbf{IM} \cap M_n(\mathbb{R})$ υπάρχει ένας πίνακας $D \in D_n^+$ τέτοιος ώστε ο $DA + A^T D$ είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη $A = B^{-1}$ για κάποιον $B \in \mathbf{M}$. Έστω $D \in D_n^+$ τέτοιος ώστε ο $DB + B^T D$ είναι θετικά ορισμένος. Ισοδύναμα, ο $DA^{-1} + (A^{-1})^T D$ είναι θετικά ορισμένος. Επομένως, ο $A^T(DA^{-1} + (A^{-1})^T D)A = DA + A^T D$ είναι επίσης θετικά ορισμένος. ■

Παράδειγμα Έστω ο $A \in \mathbf{IM}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακα; $D \in D_n^+$:

$$D = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Τότε ο πίνακας $DA + A^T D$ είναι ο

$$\begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 & 4.0 \\ 4.0 & 16.0 & 5.5 \\ 4.0 & 5.5 & 12.0 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\{22.0692, 8.4512, 5.47955\}$ άρα είναι θετικά ορισμένος.

Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε επίσης, ότι το σύνολο όλων των διαγώνιων λύσεων Lyapunov του A (που είναι κώνος) είναι το ίδιο με αυτό του $B = A^{-1}$. Αφού οι κύριοι υποπίνακες θετικά ορισμένων πινάκων είναι με τη σειρά τους θετικά ορισμένοι, προκύπτει ότι η ιδιότητα ύπαρξης διαγώνιων λύσεων Lyapunov κληρονομείται και στους κύριους υποπίνακες. Επίσης, αφού η ιδιότητα υπονοεί θετική σταθερότητα, άρα και θετική ορίζουσα, προκύπτει ότι ένας M-πίνακας είναι ένας P-πίνακας.

Πόρισμα 4.2. Η τάξη $\mathbf{IM} \subseteq \mathbf{P}$.

Σημειώνουμε ότι $\mathbf{Z} \cap \mathbf{P} = \mathbf{M} \quad \mathbf{N} \cap \mathbf{P} \neq \mathbf{IM}$. Μέσα στην τάξη $\mathbf{Z}$ η ύπαρξη μίας διαγώνιας λύσης Lyapunov χαρακτηρίζει τον πίνακα M (*Θεώρημα 2.1*). Το *Θεώρημα 4.1.* μπορεί να διατυπωθεί και ως: η ύπαρξη διαγώνιων λύσεων Lyapunov είναι αναγκαία ώστε ο $A \in \mathbf{N}$ να είναι IM-πίνακας. Δεν είναι όμως ικανή συνθήκη.

Παράδειγμα 4.1.

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 1 & 6 \\ 1 & 18 & 6 \\ 6 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

έχει ως τον μοναδιαίο πίνακα ως διαγώνια λύση Lyapunov, αλλά ο αντίστροφος πίνακας δεν ανήκει στο $\mathbf{Z}$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι για $n = 2$, ένας πίνακας $A \in \mathbf{N}$ είναι IM-πίνακας αν και μόνο αν $\det A > 0$.

5 Αθροιστική διαγώνια κλειστότητα

Ενώ ήταν σχετικά απλό να επεκτείνουμε την πολλαπλασιαστική κλειστότητα στο σύνολο IM από το σύνολο των M-πινάκων, η αθροιστική κλειστότητα είναι λίγο πιο λεπτή.

Είναι γνωστό ότι για ένα πίνακα $A \in \mathbf{IM} \cap M_n(\mathbb{R})$ με $D \in D_n^+$, ισχύει $A + D \in \mathbf{M}$. Αυτό προκύπτει από το ανάπτυγμα von Neumann

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$$

αν $\rho(A) < 1$. Εδώ θα δώσουμε μία απόδειξη βασισμένη στη διαγώνια κυριαρχία.

Θεώρημα 5.1. Αν ο $A \in \mathbf{IM}$ και ορίσω τον E_{ii} ως τον $n \times n$ πίνακα με 1 στην (i, i) θέση και 0 αλλού, τότε ο $A + tE_{ii} \in \mathbf{IM}$ για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη Έστω $A \in \mathbf{IM}$ και $A^{-1} = [a_{ij}]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i = 1$. Έστω $B = A + te_1e_1^T$ όπου e_1 είναι το πρώτο διάνυσμα της στάνταρ βάσης. Τότε έχουμε:

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + e_1^T A^{-1} e_1} A^{-1} e_1 e_1^T A^{-1}$$

$$= A^{-1} - \frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} [a_{11}\ a_{12}\ \cdots a_{1n}]$$

$$= A^{-1} + \begin{bmatrix} - & + & + & . & . & + \\ + & - & - & . & . & - \\ + & - & - & . & . & - \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ + & - & - & . & . & - \end{bmatrix} = A^{-1} + C.$$

Για $j \neq 1$, ισχύει $\left[a_{1j}\right] = \frac{a_{11}}{1+a_{11}}\left|a_{1j}\right| = c_{1j}$ και $\left|a_{j1}\right| \geq \frac{a_{11}}{1+a_{11}}\left|a_{j1}\right| = c_{j1}$. Επομένως, $B^{-1} \in$ **Z**, από όπου προκύπτει ότι $B \in$ **Z.** ■

Παράδειγμα Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{IM} \quad \text{και} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και έστω $t = 2$. Τότε

$$A + tE_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

και

$$(A + tE_{22})^{-1} = \frac{1}{77}\begin{bmatrix} 22 & -7 & -2 \\ 0 & 14 & -7 \\ -11 & 0 & 22 \end{bmatrix} \in \mathbf{Z}.$$

Θεώρημα 5.2. Αν ο πίνακας $A \in$ **IM** $\cap\, M_n(\mathbb{R})$ με $D \in D_n^+$, ισχύει $A + D \in$ **IM**.

Παρατήρηση 5.3. Σημειώνουμε ότι μόνο οι πίνακες που ανήκουν στο D_n^+ έχουν την παραπάνω ιδιότητα, δηλ. ότι αν υπάρχει E τέτοιος ώστε $A + E \in$ **IM**, για κάθε $A \in$ **IM,** τότε ο E πρέπει να είναι διαγώνιος, μη αρνητικός πίνακας.

Παράδειγμα Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{IM} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in D^+$$

Τότε

$$A + D = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

και

$$(A + D)^{-1} = \frac{1}{183}\begin{bmatrix} 33 & -13 & -1 \\ -3 & 40 & -11 \\ -9 & -2 & 28 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}.$$

Όπως προτείνεται και στο *Θεώρημα 5.2.* μπορούμε να αυξήσουμε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα και να παραμείνει στο **IM**. Το *Θεώρημα 3.1.* μας λέει ότι κατά μια έννοια, τα μη διαγώνια στοιχεία πρέπει να είναι μικρότερα από τα διαγώνια στοιχεία. Μία ερώτηση που μπορούμε να θέσουμε λοιπόν είναι: μπορούμε να μειώσουμε τα μη διαγώνια στοιχεία και να παραμείνει ο πίνακας στο **IM**; Γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει για το σύνολο **M** . Δυστυχώς, δεν ισχύει γενικά για το **IM**, όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 5.1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{IM}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \notin \mathbf{IM}$$

Πράγματι:

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$$

αλλά

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & 4 \\ 0 & 16 & -8 \\ -7 & 0 & 14 \end{bmatrix} \notin \mathbf{M}.$$

Ωστόσο, αν όλα τα μη διαγώνια στοιχεία στην ίδια γραμμή (ή στήλη) μειωθούν κατά ένα κοινό παράγοντα μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.5. Έστω ένας πίνακας $A = [a_{ij}] \in \mathbf{IM}$ και ο $A_k(\theta) = [a_{ij}(\theta)]$ όπου

$$a_{ij}(\theta) = \begin{cases} \theta a_{ij} & \text{για } i = k \text{ και } j \neq k, \\ a_{ij} & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τότε $A_k(\theta) \in \mathbf{IM}$ για $0 \leq \theta \leq 1$ και $1 \leq k \leq n$.

Απόδειξη Αν γράψουμε $A_k(\theta) = DA + E$, όπου D είναι είναι σχεδόν ο μοναδιαίος πίνακας εκτός από ένα θ στο k διαγώνιο στοιχείο και E είναι σχεδόν ο μηδενικός πίνακας εκτός από τον όρο $(1-\theta)a_{kk}$ στο k διαγώνιο στοιχείο, τότε από το *Πόρισμα 2.2.* και το *Θεώρημα 5.2.* τότε ο $A_k(\theta) \in \mathbf{IM}$ για κάθε $k > 0$. ■

Πόρισμα 5.6. Αν ο $A \in \mathbf{IM}$ και ο B είναι ένας πρωτεύον υποπίνακας του A, τότε ο $B \in \mathbf{IM}$.

Απόδειξη Πολλαπλή εφαρμογή του θεωρήματος 5.5. στους πίνακες A και A^T, με $\theta = 0$, δημιουργεί ένα πίνακα στο **IM** που είναι όμοιος μεταθετικά στο ευθύ άθροισμα των B και E όπου $E \in D$. Ο αντίστροφος πίνακας είναι στο **IM** και είναι όμοιος μεταθετικά στο ευθύ άθροισμα των B^{-1} και E^{-1}. Αφού ο $B^{-1} \in \mathbf{Z}$ τότε και $B \in \mathbf{IM}$. ■

6 Μοτίβο μηδενικών αναλλοίωτων στις δυνάμεις πινάκων

Μία άλλη ιδιότητα των IM-πινάκων, που έχει παρατηρηθεί από πολλούς συγγραφείς είναι η περίπτωση που μερικά από τα μη διαγώνια στοιχεία είναι 0. Δηλαδή, το μοτίβο των 0 διατηρείται όταν υψώνουμε σε δύναμη. Διατυπώνουμε το επόμενο θεώρημα που έχει αποδειχθεί αλλού:

Θεώρημα 6.1. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbf{IM}$ και k ένας θετικός ακέραιος. Τότε το στοιχείο (i, j) του A^k είναι μηδέν αν και μόνο αν το στοιχείο (i, j) του A είναι μηδέν.

Γνωρίζουμε από το *Θεώρημα 2.1.* ότι το $\mathbf{IM} \subseteq \mathbf{N}^+$. Στο σύνολο $\mathbf{N}^+$ η ιδιότητα να έχει αναλλοίωτο στη δύναμη είναι συνδυαστική και για την ακρίβεια είναι ισοδύναμη στο να έχουν οι πίνακες A και A^2 το ίδιο μοτίβο μηδενικών. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι (1) οι τιμές των διαγώνιων στοιχείων δεν σχετίζεται με το αναλλοίωτο και (2) αν υπάρχουν μηδενικά, ένα αναλλοίωτο μοτίβο πρέπει να αναλύεται και κάθε υποπίνακας που δεν αναλύεται πρέπει να είναι αυστηρά θετικός. Εν όψη των θεωρημάτων 5.2. και 3.1. μία ερώτηση που προκύπτει είναι: για ποιους πίνακες $A \in \mathbf{N}^+$ (η ισοδύναμα στο $\mathbf{N}$) υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας D, με μη αρνητικά στοιχεία, τέτοιος ώστε $A + D \in \mathbf{IM}$; Το *Θεώρημα 6.1.* δίνει την αναγκαία συνθήκη και δείχνει ότι όλοι οι πίνακες $A \in \mathbf{N}^+$ δεν μπορούν να ανήκουν στο **IM** αν αυξήσουμε τα διαγώνια στοιχεία. Το επόμενο Θεώρημα απαντάει στη ερώτηση

Θεώρημα 6.2. Έστω ο πίνακας $A \in \mathbf{N}^+ \cap M_n(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει ένας πίνακας $D \in D_n^+$, ώστε να ισχύει $A + D \in \mathbf{IM}$ αν και μόνο αν οι πίνακες A και A^2 το ίδιο μοτίβο μηδενικών.

Απόδειξη Αν $A + D \in \mathbf{IM}$ για κάποιον πίνακα $D \in D_n^+$, τότε το μοτίβο μηδενικών για τον A και τον A^2 προκύπτει από το θεώρημα 6.1. Από την άλλη, αν ο A και ο A^2 έχουν το ίδιο μοτίβο μηδενικών, τότε η αναλλοιώτητα δύναμης ισχύει για τον A και αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε $\alpha \geq 0$ έτσι ώστε ο πίνακας $(\alpha I + A)^{-1}$ υπάρχει και ανήκει στο $\mathbf{Z}$. Πρώτα, ας υποθέσουμε ότι ο $(\alpha I + A)^{-1}$ υπάρχει και ανήκει στο $\mathbf{Z}$. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι $\alpha > \rho(A)$. Τότε,

$$(\alpha I + A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\left(I - \frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\alpha^2}A^2 - \frac{1}{\alpha^3}A^3 + \cdots\right). \tag{i}$$

Τότε αρκεί να δείξουμε μπορούμε να διαλέξουμε α τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha}A - \frac{1}{\alpha^2}A^2 + \frac{1}{\alpha^3}A^3 - \cdots\right) < I \tag{ii}$$

και

$$\left(A - \frac{1}{\alpha}A^2 + \frac{1}{\alpha^2}A^3 - \cdots\right) \geq 0$$

Τότε θα έχουμε $(\alpha I + A)^{-1} \in \mathbf{Z}$. Παρατηρούμε ότι η (i) είναι ισοδύναμη με την

$$\operatorname{diag}\left[A(\alpha I + A)^{-1}\right] < I \tag{i'}$$

και η (ii) ισοδύναμη με την

$$A^2(\alpha I + A)^{-1} \leq A. \qquad \text{(ii')}$$

Αφού ο $(\alpha I + A)^{-1} \to 0$ καθώς $\alpha \to \pm\infty$ είναι φανερό ότι η (i') ικανοποιείται για αρκετά μεγάλη τιμή του α. Επιπρόσθετα, αφού ο A έχει αναλλοίωτο μοτίβο μηδενικών, ο A και ο $A^2(\alpha I + A)^{-1}$ έχουν το ίδιο μοτίβο έτσι ώστε επειδή το αριστερό μέλος της (ii') μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό για $\alpha > 0$ σημαίνει ότι η (ii') ικανοποιείται. Αφού η σύγκλιση του $(\alpha I + A)^{-1}$ και οι (i) , (ii) μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα, αποδεικνύεται η πρόταση. ■

Ερώτηση 6.3. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $(\alpha I + A)$ να έχει αναλλοίωτο μοτίβο μηδενικών για $\alpha > 0$. Σύμφωνα με τα *Θεωρήματα 5.2.* και *6.2.* υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α_0 τέτοιος ώστε ο $\alpha I + A \in$ **IM** για $\alpha > \alpha_0$ και ο $\alpha I + A \notin$ **IM** για $\alpha \leq \alpha_0$. Πως μπορεί να χαρακτηριστεί το α_0 ως συνάρτηση του A; Στην περίπτωση των M-πινάκων η απάντηση είναι απλή (αν και μόνο αν $\alpha > \rho(A)$). Στην περίπτωση των IM-πινάκων η απάντηση από τη μεριά της συνδυαστικής είναι απλή. Η αναλυτική απάντηση (ο προσδιορισμός της $\alpha_0(A)$) δεν είναι τόσο απλή. Αν μία απάντηση υπήρχε, ο χαρακτηρισμός των $A \in \mathbf{N}^+$ που ανήκουν στο **IM** θα γινόταν ως ακουλούθως: θα μπορούσαμε να διαλέξουμε ένα πίνακα $D \in$ **IM** τέτοιος ώστε $diag(DA) = I$ και $P = DA - I$. Τότε η $\alpha_0(P)$ θα μπορούσε να συγκριθεί με τη μονάδα και να απαντηθεί η ερώτηση.

Ερώτηση 6.4. Αφού οι $A, B \in \mathbf{Z}$, $A - B \in \mathbf{N}$ και $A \in \mathbf{M}$ υποδεικνύουν ότι $B \in \mathbf{M}$, μπορεί κάποιος να ρωτήσει: κάτω από ποιες προυποθέσεις, αν έχουμε $A, B \in \mathbf{N}$, $A - B \in \mathbf{N}$ και $A \in$ **IM** έχουμε και $A \in$ **IM**; Πιο γενικά μπορούμε να ρωτήσουμε: με δοσμένους $A \in \mathbf{N}$ οι οποίοι ικανοποιούν κάποιες από τις προϋποθέσεις για να ισχύει $A \in$ **IM**, πως μπορούμε να αλλάξουμε τα στοιχεία του A έτσι ώστε ο τροποποιημένος πίνακας να ανήκει στο **IM**;

7 Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένας πίνακας IM

Μέχρι τώρα, οι συνθήκες για να ανήκει ένας πίνακας στο **IM**, ήταν αναγκαίες συνθήκες κυρίως. Έστω ένας θετικός πίνακας $A = [a_{ij}]$, ο οποίος έχει κανονικοποιηθεί έτσι ώστε $a_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$ και $a_{ij} < 1, i \neq j$. Γνωρίζουμε ότι ένας αντίστροφος M-πίνακας μπορεί να κανονικοποιηθεί με αυτόν τον τρόπο και ο αρχικός πίνακας είναι **IM** αν και μόνο αν είναι και ο A **IM**. Επιπρόσθετα, έστω

$$a_{max} = \max_{i \neq j} a_{ij}, \quad a_{min} = \min_{i \neq j} a_{ij}$$

και ορίζουμε ένα t τέτοιο ώστε $a_{max}^2 = t a_{min} + (1 - t) a_{min}^2$. Τότε θα έχουμε $0 < a_{min} < a_{max} < 1$. Διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη το θεώρημα

Θεώρημα 7.1. Έστω ένας πίνακας $A = [a_{ij}] > 0$, τέτοιος ώστε $a_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$ και $a_{ij} < 1, i \neq j$. Τότε $A \in$ **IM** αν $t^{-1} \geq n - 2$. Επιπρόσθετα, η συνθήκη αυτή είναι ισχυρή: αν $a_{ij} = a_{min}$, $i \neq j$ εκτός από τα στοιχεία $a_{ij} = a_{ji} = a_{max}$ όταν $i = n - 1, n$ και $1 \leq j \leq n - 2$, τότε ο $A \in$ **IM** αν και μόνο αν $t^{-1} \geq n - 2$.

Παράδειγμα Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.18 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.18 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$. Με $a_{min} = 0.18$ και $a_{max} = 0.3$ έχουμε $t^{-1} = \frac{a_{min} - a_{min}^2}{a_{max}^2 - a_{min}^2} = 2.5625 > 3 - 2 = 1$. Πράγματι ο A είναι **IM**:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.07922 & -0.3031 & -0.10333 \\ -0.167623 & 1.11091 & -0.3031 \\ -0.160735 & -0.167623 & 1.07922 \end{bmatrix}.$$

Αντίθετα ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.18 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.18 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$ έχει $a_{min} = 0.18$ και $a_{max} = 0.8$ με

$$t^{-1} = \frac{a_{min} - a_{min}^2}{a_{max}^2 - a_{min}^2} = 0.242923 < 1$$

και δεν είναι **IM** αφού

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.09091 & -0.992208 & 0.597403 \\ -0.072727 & 1.25662 & -0.992208 \\ -0.181818 & -0.072727 & 1.09091 \end{bmatrix}.$$

Από την άλλη μεριά, μπορούμε να ρωτήσουμε: ποιοι τριγωνικοί πίνακες $A \in \mathbf{N}^{+}$ είναι αντίστροφοι M-πίνακες; Φυσικά ένας τριγωνικός πίνακας που ανήκει στο **Z** πρέπει να είναι M-πίνακας, αλλά προκύπτει μία άλλη διαφορά μεταξύ **M** και **IM**. Αν ο $A \in \mathbf{N}^{+}$ είναι τριγωνικός τότε, γενικά ο A δεν ανήκει στο **IM**. Εξαρτάται από τις υπορίζουσες, οι οποίες μπορεί να έχουνε διαφορετικά πρόσημα.

Μία άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα των τριγωνικών πινάκων , είτε ανήκουν στο **M** είτε στο **IM** σημειώνεται στη [4]. Αν κάποια δύναμη του $A \in$ **IM** ($B \in$ **M**) είναι μετάθεση όμοια με ένα τριγωνικό πίνακα τότε το ίδιο πρέπει να ισχύει για τον A (αντίστοιχα B). Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα τριγωνικό, κανονικοποιημένο πίνακα **SPP** να είναι **IM** δίνονται στο *Θεώρημα 12.6*. Οι LDU αναλύσεις αντίστροφων M-πινάκων έχει μελετηθεί στη βιβλιογραφία. Το κεντρικό ερώτημα είναι: ποιοι πίνακες $A \in \mathbf{N}^{+}$ είναι πεπερασμένα γινόμενα αντίστροφων M-πινάκων; Προφανώς, κάθε γινόμενο αντίστροφων M-πινάκων ανήκει στο $\mathbf{N}^{+}$, αλλά αυτοί δεν καλύπτουν όλο το $\mathbf{N}^{+}$.

8 Οι αντίστροφοι M-πίνακες έχουν ρίζες στο IM

Γενικά, οι πίνακες που ανήκουν στο $\mathbf{N}^{+}$, δεν έχουν τετραγωνικές ρίζες (η άλλες ρίζες) που να ανήκουν στο $\mathbf{N}^{+}$, αν και κάθε δύναμη ενός πίνακα στο $\mathbf{N}^{+}$ ανήκει στο $\mathbf{N}^{+}$. Ωστόσο, οι πίνακς που ανήκουν στο **IM** έχουν ρίζες που ανήκουν όχι μόνο στο $\mathbf{N}^{+}$ αλλά και στο **IM**. Αυτό είναι ανάλογο με την ιδιότητα των M-πινάκων.

Θεώρημα 8.1. Έστω $B \in \mathbf{M}$, τότε για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, υπάρχει ένας πίνακας $B^{1/k}$ τέτοιος ώστε $\left(B^{1/k}\right)^k = B$ και $\left(B^{1/k}\right)^q \in \mathbf{M}, q = 0,1, \dots, k$.

Απόδειξη Μπορούμε να γράψουμε $B = \alpha I - P$ όπου $P \geq 0$ και $\alpha > \rho(P)$. Επομένως, $(1/\alpha)B = I - (1/\alpha)P$ και αφού αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για τον $(1/\alpha)P$, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\alpha = 1$. Για ένα βαθμωτό t. έχουμε

$$(1-x)' = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{t}{i} x^i$$

για κάθε $|x| < 1$. Αφού $\rho(P) < 1$, συνεπάγεται ότι

$$(I-P)' = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{t}{i} P^i.$$

Αφού ισχύει

$$\binom{t}{i} = t(t-1)\dots(t-i+1)/i!$$

υπάρχει $0 < t < 1$ τέτοιο ώστε

$$(-1)^i \binom{t}{i} < 0, \quad i = 1,2, \dots$$

και το άθροισμα $-\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{t}{i} P^i$ συγκλίνει σε ένα μη αρνητικό πίνακα $f(P)$ του οποίου η φασματική ακτίνα $1 - [1-\rho(P)]^T$ είναι μικρότερη του 1. Έτσι για $0 \leq t \leq 1$, $(I-P)^T = 1 - f(P) \in \mathbf{M}$. Θέτοντας $t = 1/k$ παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Πόρισμα 8.2. Αν ο $A \in \mathbf{IM}$ τότε για κάποιον ακέραιο $k \geq 1$, υπάρχει ένας πίνακας υπάρχει ένας πίνακας $A^{1/k}$ τέτοιος ώστε $\left(A^{1/k}\right)^k = A$ και $\left(A^{1/k}\right)^q \in \mathbf{IM}, q = 0,1, \dots, k$.

Απόδειξη Έστω $A = B^{-1}, B \in \mathbf{M}$ και $A^{1/k} = \left(B^{1/k}\right)^{-1}$ όπου $B^{1/k}$ είναι ο πίνακας που δίνεται στο Θεώρημα 8.1. Έτσι οι πίνακες που ανήκουν στο **M** (**IM**) έχουν ν-οστή ρίζα στο **IM** (**M**) ■

Παράδειγμα Έστω ο **IM** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.001 & 0.064 & 0.027 \\ 0.064 & 1 & 0.064 & 0.274625 \\ 0.001 & 0.008 & 1 & 0.216 \\ 0.003375 & 0.027 & 0.216 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε για $k = 3$ και $q = 1$ έχω

$$\left(A^{1/3}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.05128 & -0.0128332 & -0.00910258 & -0.301581 \\ -0.394996 & 1.24754 & -0.0159974 & -0.682804 \\ -0.00408264 & -0.0387851 & 1.56314 & -0.91145 \\ -0.0367438 & -0.349066 & -0.931721 & 1.796695 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}.$$

Άρα ο $A^{1/3} \in \mathbf{IM}$.

Σημειώνουμε ότι επειδή υπάρχουν οι ανώτερες δυνάμεις των πινάκων στο $\mathbf{N}^+$, αυτός είναι ένας επιπλέον λόγος που τα στοιχεία στο **IM** έχουν αναλλοίωτο μοτίβο μηδενικών.

Ερώτηση 8.3. Εκτός τις δυνάμεις των στοιχείων του **IM**, υπάρχουν άλλα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbf{N}^{+}$, τα οποία για $k = 1,2, \dots$ έχουν k ρίζες στο $\mathbf{N}^{+}$; (Σημειώνουμε ότι, αν και το **IM** είναι κλειστό στη εξαγωγή ριζών, οι δυνάμεις πινάκων στο **IM** δεν ανήκουν απαραίτητα στο **IM**) Ωστόσο, η δύναμη ενός στοιχείου του IM ανήκει στο $\mathbf{N}^{+}$ και έχει ρίζες στο $\mathbf{N}^{+}$ λόγω του πορίσματος 8.2.) Αν δεν ίσχυε, τότε το σύνολο **IM** θα χαρακτηριζόταν από το γεγονός ότι οι δυνάμεις των στοιχείων του έχουν ρίζες στο $\mathbf{N}^{+}$. Μία ισοδύναμη ερώτηση είναι η ακόλουθη: πρέπει κάθε στοιχείο του $\mathbf{N}^{+}$, το οποίο έχει ρίζες στο $\mathbf{N}^{+}$, να έχει ρίζες στο **IM**;

Ερώτηση 8.4. Οι αντιστρέψιμοι πίνακες του $\mathbf{N}^{+}$, που ικανοποιούν την ανισότητα Hadamard σχηματίζουν ημι-ομάδα. Ποια είναι η δομή αυτής της ημι-ομάδας και πως συγκρίνεται με την ανάλογη ημι-ομάδα των γινομένων στοιχείων του **IM**;

9 Κατατμημένοι IM πίνακες

Περίληψη Σε όλο την υπόλοιπη ενότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν όλοι οι αντίστροφοι πίνακες. Μπορούμε να μάθουμε πολλά θεωρώντας ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να ανήκει ο πίνακας A στο **IM** όταν ο πίνακας A είναι σε κατατμημένη μορφή. Για παράδειγμα, ο *πίνακας Sylvester περιθώριων υποριζουσών* (ΠΣΠΥ) , μπορεί να οριστεί με όρους συμπληρωματικών Schur και η σύμμορφη μορφή του A^{-1} μπορεί να οριστεί υπό όρους αντίστροφων πινάκων στο $\mathbf{N}^{+}$. Η κατατμημένη μορφή του A^{-1} μαζί με το γεγονός ότι οι M-πίνακες είναι κλειστοί στην εξαγωγή των κυρίως υποπινάκων και στο συμπλήρωμα Schur μας επιτρέπουν να χαρακτηρίσουμε τους πίνακες **IM** και να προσδιορίσουμε τον αριθμό των ανισοτήτων όσον αφορά στη κατάτμηση των πινάκων **IM**. Αποδεικνύουμε τον τύπο Schur καθώς και μία ειδική περίπτωση της ταυτότητας Schur για ορίζουσες. Αυτά, με τη σειρά τους, μας παρέχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να ανήκει ένας μη αρνητικός πίνακας στο **IM**.

9.1. Ο πίνακας Sylvester περιθώριων υποριζουσών

Αν ο A είναι τετράγωνος πίνακας και ο $A[\alpha]$ είναι αντιστρέψιμος, θυμίζουμε ότι το συμπλήρωμα Schur, που συμβολίζεται $A/A[\alpha]$, ορίζεται ως:

$$A/A[\alpha] = A[\alpha^c] - A[\alpha^c, \alpha]A[\alpha]^{-1}A[\alpha, \alpha^c].$$

Παράδειγμα 9.1 Το συμπλήρωμα Schur γράφεται σε μορφή μπλοκ πινάκων ως εξής: αν

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

τότε $M/A = D - CA^{-1}B$. Για παράδειγμα αν

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

τότε το συμπλήρωμα Schur είναι

$M/A=\begin{bmatrix}1&2/3\\0&0\end{bmatrix}.$

Έστω $\alpha=\langle k\rangle$. Έχει αποδειχθεί ότι αν $A/A[\alpha]=B=[b_{ij}]$, τότε για $k+1\le i,j\le n$,

$$b_{ij}=\frac{\det A[\alpha+i,\alpha+j]}{\det A[\alpha]}=\frac{s_{ij}}{\det A[\alpha]},$$

όπου $S=[s_{ij}]$ είναι ο ΠΣΠΥ, δηλαδή

$$s_{ij}=\det\begin{bmatrix}A[\alpha]&A[\alpha,j]\\A[i,\alpha]&a_{ij}\end{bmatrix}.$$

Επομένως $S=(\det A[\alpha])/(A/A[\alpha])$.

9.2 Το συμπλήρωμα Schur ενός αντίστροφου πίνακα

Έστω ένας τετράγωνος πίνακας, κατατμημένος ως

$$A=\begin{bmatrix}A[\alpha]&A[\alpha,\alpha^c]\\A[\alpha^c,\alpha]&A[\alpha^c]\end{bmatrix},$$

όπου οι $A, A[\alpha], A[\alpha^c]$ είναι όλοι αντιστρέψιμοι. Τότε

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}(A/A[\alpha^c])^{-1}&-A[\alpha]^{-1}A[\alpha,\alpha^c](A/A[\alpha])^{-1}\\-(A/A[\alpha])^{-1}A[\alpha^c,\alpha]A[\alpha]^{-1}&(A/A[\alpha])^{-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(A/A[\alpha^c])^{-1}&-(A/A[\alpha^c])^{-1}A[\alpha,\alpha^c]A[\alpha^c]^{-1}\\-A[\alpha^c]^{-1}A[\alpha^c,\alpha](A/A[\alpha^c])^{-1}&(A/A[\alpha])^{-1}\end{bmatrix}.$$

Τώρα κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι οι M-πίνακες είναι κλειστοί στην εξαγωγή των κυρίως υποπινάκων και στο συμπλήρωμα Schur.

Θεώρημα 9.1. Έστω $A\ge 0$ ένας κατατμημένος πίνακας $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$ όπου A_{11} και A_{22} είναι μη κενοί κύριοι υποπίνακες του A. Τότε ο $A\in\mathbf{IM}$ αν και μόνο αν

(i) $A/A_{11}\in\mathbf{IM}$,
(ii) $A/A_{22}\in\mathbf{IM}$,
(iii) $(A_{11})^{-1}A_{12}(A/A_{11})^{-1}\ge 0$,
(iv) $(A/A_{11})^{-1}A_{21}(A_{11})^{-1}\ge 0$,
(v) $(A_{22})^{-1}A_{21}(A/A_{22})^{-1}\ge 0$,
(vi) $(A/A_{22})^{-1}A_{12}(A_{22})^{-1}\ge 0$.

Απόδειξη Έστω $A\in\mathbf{IM}$ και ας θεωρήσουμε το συμπλήρωμα Schur του αντίστροφου του. Αφού $A^{-1}\in\mathbf{M}$ και οι M-πίνακες είναι κλειστοί στην εξαγωγή των κυρίως υποπινάκων, οι

$(A/A_{11})^{-1}$ και $(A/A_{22})^{-1}$ ανήκουν στο **M** και οι προτάσεις (i) και (ii) ισχύουν. Οι προτάσεις (iii) έως (vi) ισχύουν επίσης αφού $A^{-1} \in \mathbf{Z}$. Για το αναγκαίο της υπόθεσης, παρατηρούμε ότι είτε η (i) και η (ii), είτε η (iii) και η (iv) ή η (v) και (vi) δείχνουν ότι $A^{-1} \in \mathbf{Z}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Παράδειγμα Έστω ο **IM** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.001 & 0.064 & 0.027 \\ 0.064 & 1 & 0.064 & 0.274625 \\ 0.001 & 0.008 & 1 & 0.216 \\ 0.003375 & 0.027 & 0.216 & 1 \end{bmatrix}$$

και οι υποπίνακες

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0.064 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0.064 & 0.027 \\ 0.064 & 0.274625 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.008 \\ 0.003375 & 0.027 \end{bmatrix}, \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.216 \\ 0.216 & 1 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε ο A γράφεται στη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}.$$

Τότε το συμπλήρωμα Schur $A/M_1 \in$ **IM** αφού

$$A/M_1 = M_4 - M_3\, M_1^{-1}\, M_2 = \begin{bmatrix} 0.999457 & 0.21379 \\ 0.214167 & 0.992541 \end{bmatrix}$$

και

$$(A/M_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.04896 & -0.225942 \\ -0.22634 & 1.05627 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}.$$

Επίσης, το συμπλήρωμα Schur $A/M_4 \in$ **IM** αφού

$$A/M_4 = M_1 - M_2\, M_4^{-1}\, M_3 = \begin{bmatrix} 0.999892 & 0.00013872 \\ 0.00630718 & 0.992574 \end{bmatrix}$$

και

$$(A/M_4)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.00012 & -0.000139774 \\ -0.063551 & 1.00749 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$$

άρα ικανοποιούνται τα κριτήρια (i), (ii) του Θεωρήματος 9.1. Για τα κριτήρια (iii),(iv) έχουμε

$$M_1^{-1} M_2 (A/M_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0610211 & 0.0137842 \\ 0.001062932 & 0.274735 \end{bmatrix} > 0$$

και

$$(A/M_1)^{-1} M_3 M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000139774 & 0.00229109 \\ 0.00162932 & 0.0267069 \end{bmatrix} > 0$$

όπως αναμένεται.

Πόρισμα 9.2. Οι **IM** πίνακες είναι κλειστοί στην εξαγωγή των συμπληρωμάτων Schur.

Πόρισμα 9.3. Οι **IM** πίνακες είναι κλειστοί στην εξαγωγή των κυρίως υποπινάκων.

Τα πορίσματα είναι συμπέρασμα του *Θεωρήματος 9.1.* και του συμπληρώματος Schur του πίνακα $(A^{-1})^{-1}$ αντίστοιχα. Με τη σειρά του το Θεώρημα 9.5. δείχνει ότι

Πόρισμα 9.4. Οι IM πίνακες έχουν θετικές υπορίζουσες.

Σημειώνουμε επίσης ότι το *Θεώρημα 9.1.* μας επιτρέπει να μηδενίσουμε οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη εκτός της διαγωνίου ενός **IM** πίνακα και να παραμείνει ο πίνακας στο σύνολο **IM.** Δηλαδή, αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ tA_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{IM}$$

και $B = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ τότε

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & -(a_{11})^{-1}A_{12}(A_{22})^{-1} \\ 0 & (A_{22})^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{Z},$$

αφού $a_{11}, A_{12}(A_{22})^{-1} \geq 0$. Το ίδιο μπορούμε να το δείξουμε εφαρμόζοντας το *Πόρισμα 2.2.* και το *Θεώρημα 5.1.*, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας την πρώτη στήλη του A με κάποιο $t, 0 < t < 1$, μετά προσθέτουμε $a_{11} - ta_{11} > 0$ στο στοιχείο (1,1) για να πάρουμε τον **IM** πίνακα $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ tA_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. Από συνέχεια έχουμε

$$\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & -(a_{11})^{-1}A_{12}(A_{22})^{-1} \\ 0 & (A_{22})^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{IM}.$$

Ο πίνακας $B \in \mathbf{M}$ αν και μόνο αν $B/B_{11}, B/B_{22} \in \mathbf{M}$, αλλά αυτό δεν ισχύει για IM πίνακες. Ένα αντιπαράδειγμα είναι ο πίνακας $\mathbf{N}^{+}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

όπου $A_{11} = a_{11}$ και $A_{11}, A_{22}, A/A_{11}, A/A_{22} \in \mathbf{IM}$ αλλά ο $A \notin \mathbf{IM}$.

Θεώρημα 9.5. Έστω $A \geq 0$ ένας κατατμημένος πίνακας $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ όπου A_{11} και A_{22} είναι μη κενοί κύριοι υποπίνακες του A. Τότε ο $A \in \mathbf{IM}$ αν και μόνο αν

(i) $A_{11} \in \mathbf{IM}$
(ii) $A/A_{11} \in \mathbf{IM}$
(iii) $A_{22} \in \mathbf{IM}$
(iv) $A/A_{22} \in \mathbf{IM}$
(v) $(A_{11})^{-1}A_{12} \geq 0$
(vi) $A_{21}\,(A_{11})^{-1} \geq 0$
(vii) $(A_{22})^{-1}A_{21} \geq 0,$
(viii) $A_{12}\,(A_{22})^{-1} \geq 0,$
(ix) $A_{12}(A/A_{11})^{-1} \geq 0,$
(x) $(A/A_{11})^{-1}A_{21} \geq 0$
(xi) $A_{21}(A/A_{22})^{-1} \geq 0$

(xii) $(A/A_{11})^{-1}A_{12} \geq 0.$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι τα συμπεράσματα (i)-(iv) προκύπτουν κατευθείαν από τη προηγούμενη συζήτηση. Στη συνέχεια τα συμπεράσματα (v)-(xii) προκύπτουν από τα (iii)-(vi) του *Θεωρήματος 9.1.* αφού πολλαπλασιάσουμε με A/A_{11} ή A/A_{22} ή A_{11} ή A_{22}. ■

Για πίνακες **IM** μεγέθους 2 ή 3 είναι προφανές από τα σχόλια πριν το *Θεώρημα 9.5.* ότι μπορούμε να μηδενίσουμε οποιοδήποτε μπλοκ (αν ο πίνακας είναι της μορφής $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ τα μπλοκ C, D μπορούν να μηδενιστούν). Ωστόσο η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα 9.6. Έστω ο πίνακας **IM**

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 11 & 5 \\ 19 & 20 & 19 & 12 \\ 17 & 8 & 20 & 5 \\ 14 & 9 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

Ούτε ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 0 & 0 \\ 19 & 20 & 0 & 0 \\ 17 & 8 & 20 & 5 \\ 14 & 9 & 14 & 20 \end{bmatrix}$ ούτε ο πίνακας $C = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 20 & 0 & 0 \\ 17 & 8 & 20 & 0 \\ 14 & 9 & 14 & 20 \end{bmatrix}$

ανήκει στο **IM** αφού το στοιχείο (4,1) του αντίστροφου και των δύο πινάκων είναι θετικό.

Για άλλους χαρακτηρισμούς των πινάκων **IM**, θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα Schur

που λέει ότι

$$\det A = (\det A[\alpha])(\det A/A[\alpha])$$

αν ο $A[\alpha]$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Έστω ένας $n \times n$ πίνακας A, $\alpha \in N$ και έστω $|\alpha| = k$. Ορίζουμε τον $(n-k) \times (n-k)$ πίνακα $B = [b_{ij}]$, θέτοντας $b_{ij} = \det A[\alpha + i, \alpha + j]$ για κάθε $i, j \in \alpha^c$. Τότε η ταυτότητα Sylvester για τις ορίζουσες λέει ότι για κάθε $\delta, \gamma \subseteq \alpha^c$ με $|\delta| = |\gamma| = m$,

$$\det B[\delta, \gamma] = (\det A[\alpha])^{m-1} \det A[\alpha \cup \delta, \alpha \cup \gamma].$$

Επίσης, έστω ένας $n \times n$ πίνακας A χωρισμένος ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}^T & a_{13} \\ a_{21} & A_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}^T & a_{33} \end{bmatrix},$$

όπου ο A_{22} είναι ένας πίνακας $(n-2) \times (n-2)$ και τα a_{11}, a_{33} είναι αριθμοί. Ορίζουμε τους πίνακες

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}^T \\ a_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a_{12}^T & a_{13} \\ A_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{21} & A_{22} \\ a_{31} & a_{32}^T \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} A_{22} & a_{23} \\ a_{32}^T & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Αν ορίσουμε $b = \det B$, $c = \det C$, $d = \det D$ και $e = \det E$, τότε ισχύει ότι

$$\det \begin{bmatrix} b & c \\ d & e \end{bmatrix} = \det A_{22} \det A.$$

Επομένως, αν ισχύει ότι $\det A_{22} \neq 0$ έχουμε

$$\det A = \frac{\det B \det E - \det C \det D}{\det A_{22}}$$

Θεώρημα 9.7. Έστω $A = [a_{ij}] \geq 0$. Τότε $A \in$ **IM** αν και μόνο αν

(i) ο A έχει τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο στη διαγώνιο,
(ii) όλα τα συμπληρώματα Schur τάξης 2 είναι μη αρνητικά,
(iii) όλα τα συμπληρώματα Schur τάξης 1 είναι θετικά.

Απόδειξη Υποθέστε ότι $A \in$ **IM**. Τότε ο A έχει θετικά διαγώνια στοιχεία και αφού οι πίνακες IM είναι αναλλοίωτοι στην εξαγωγή συμπληρωμάτων Schur, κάθε συμπλήρωμα είναι μη αρνητικό. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι τα συμπληρώματα Schur τάξης 1 είναι θετικά. Αλλά και αυτό προκύπτει από τον τύπο Schur αφού ο A έχει θετικές υπορίζουσες.

Έστω ότι οι συνθήκες (i),(ii),(iii) ισχύουν και $a_{ii} > 0$. Παρατηρούμε ότι η (iii) δείχνει ότι ο A έχει θετικά διαγώνια στοιχεία.

Ισχυρισμός Όλες οι κύριες υπορίζουσες του A είναι θετικές

Απόδειξη Ισχυρισμού Αν ο πίνακας A είναι 1×1, τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. Επομένως, επαγωγικά, ας υποθέσουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός για όλους τους πίνακες μεγέθους $< n$, που ικανοποιούν τις συνθήκες (i),(ii) και (iii) και ας ορίσουμε $A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. Τότε όλοι οι κύριοι υποπίνακες μεγέθους $< n$ έχουν θετική ορίζουσα και αρκεί να δείξουμε ότι $\det A > 0$. Από το τύπο Schur ισχύει $\det A = (\det A_{22})(a_{11} - A_{12}(A_{22})^{-1}A_{21})$. Η επαγωγική υπόθεση υπονοεί ότι $\det A_{22} > 0$ και άρα η θετικότητα της $\det A$ προκύπτει αμέσως από την (iii).

Τώρα, έστω $A^{-1} = B = [b_{ij}]$ και ας θεωρήσουμε τα στοιχεία $i \neq j$ και ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $i < j$. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$\alpha =< 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n >$$

$$\alpha_1 =< 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n, i >$$

$$\alpha_2 =< 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n, j >$$

Τότε

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{\det A(j,i)}{\det A} \\ &= (-1)^{i+j}(-1)^{n-i-1}(-1)^{n-j} \frac{\det A[\alpha_1, \alpha_2]}{\det A} \\ &= -\big(a_{ij} - A[i,\alpha](A[\alpha])^{-1}A[\alpha,j]\big) \frac{\det A[\alpha]}{\det A} \leq 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει αφού ο $A/A[\alpha]$ είναι συμπλήρωμα Schur τάξης 2 και άρα είναι μη αρνητικός. Επομένως $A^{-1} \in$ **Z** και άρα $A \in$ **IM**, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Θεώρημα 9.9. Έστω $A = [a_{ij}] \geq 0$. Τότε $A \in$ **IM** αν και μόνο αν

(i) $\det A > 0$,

(ii) για κάθε κύριο υποπίνακα του B, μεγέθους $n-2$, $\det B > 0$ και $A/B \geq 0$.

Όπως αναφέρθηκε και στα *Πορίσματα 9.2.* και *9.3.* οι πίνακες **IM** είναι κλειστοί στην εξαγωγή συμπληρωμάτων Schur και στην εξαγωγή κυρίων υποπινάκων. Αντίστροφα, αν $A \geq 0$ με κύριο υποπίνακα τον B και $B, A/B \in$ **IM**, ο πίνακας A δεν ανήκει απαραίτητα στο **IM**.

10 Υποπίνακες

Περίληψη. Σε αυτή την ενότητα, ορίζουμε τους Σχεδόν Κύριους Υπορίζουσες (ΣΚΥ) των συνόλων M και IM. Θα δείξουμε ότι η πράξη της αντιστροφής και εξαγωγής κύριων υποπινάκων οδηγεί σε ανισότητες μεταξύ των στοιχείων όταν εφαρμόζονται σε M και IM πίνακες. Για κανονικοποιημένους IM πίνακες, θα δείξουμε ότι αν ένας κύριος υποπίνακας περιέχεται σε έναν άλλο, του ιδίου τύπου, τότε το μέγεθος της μεγαλύτερης υπορίζουσας είναι μικρότερο από αυτό της μικρότερης. Επιπρόσθετα, αν ο κύριος υποπίνακας ενός IM πίνακα περίεχει ένα 0, τότε το περιέχει και κάποιος κύριος υποπίνακας ίδιου μεγέθους.

10.1. Κύριοι και σχεδόν κύριοι υποπίνακες

Οι τετράγωνοι υποπίνακες που ορίζονται με κάποιο σύνολο δεικτών που διαφέρουν μόνο σε ένα δείκτη ή οι υπορίζουσες που προκύπτουν από αυτούς ονομάζονται **Σχεδόν Κύριους Υπορίζουσες** (ΣΚΥ). Οι ΣΚΥ έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για διάφορους λόγους, ανάμεσα στους οποίους ο προσαρτημένος πίνακας του αντίστροφου περιέχει τις ΣΚΥ ως αριθμητές στα μη διαγώνια στοιχεία των αντίστροφων κυρίων υποπινάκων. Άρα, αν $A \in$ **M** ή $A \in$ **IM** μία ΣΚΥ είναι 0 αν και μόνο αν ένα μη διαγώνιο στοιχείο του αντίστροφου ενός κύριου υποπίνακα είναι 0. Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\alpha + i$ για να παραστήσουμε την προσθήκη του στοιχείου i στο σύνολο α, με $i \notin \alpha$, οι ΣΚΥ είναι της μορφής $A[\alpha + i, \alpha + j]$, $i, j \notin \alpha$. Όλες οι ΣΚΥ που ανήκουν στο σύνολο M ή IM είναι θετικές. Επειδή κληρονομούν την ιδιότητα του IM να είναι αναλλοίωτες στην εξαγωγή κύριων υποπινάκων, το πρόσημο κάθε μη μηδενικής ΣΚΥ προσδιορίζεται αποκλειστικά από τη θέση του. Για την ακρίβεια, αν $\alpha \subseteq N$ και $i, j \in \alpha$, $sgn(\det A[\alpha - i, \alpha - j])$ ισούται με $(-1)^{r+s}$ αν $A \in$ **M** και $(-1)^{r+s+1}$ αν $A \in$ **IM** όπου r (αντίστοιχα s) ο αριθμός των δεικτών του συνόλου α που είναι μικρότερος από i (αντίστοιχα j). Μία ανάλογη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και για τον $A[\alpha + i, \alpha + j]$.

Ο σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες τις ιδιότητες των ΣΚΥ που ανήκουν στο IM. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 10.1. Ας θεωρήσουμε τον IM πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 & 1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι οι μοναδικές ΣΚΥ είναι ορίζουσες των $A[\{1,2\},\{2,3\}]$, $A[\{1,2\},\{2,4\}]$, $A[\{1,2,3\},\{2,3,4\}]$, $A[\{1,2,4\},\{2,3,4\}]$. Έτσι, το στοιχείο (1,3) των $A[\{1,2,3\}]^{-1}$ και $A[\{1,2,4\}]^{-1}$ είναι 0 ενώ τα στοιχεία (1,3) και (1,4) του A^{-1} είναι 0 και αυτά είναι τα μοναδικά στοιχεία που μηδενίζονται στον αντίστροφο ενός κύριου υποπίνακα.

Το προηγούμενο παράδειγμα οδηγεί σε τρεις ερωτήσεις.

Ερώτηση 10.2 Αν ο αντίστροφος ενός κύριου υποπίνακα που ανήκει στο IM περιέχει ένα μπλοκ με 0, ισχύει ότι ο αντίστροφος του πίνακα περιέχει ένα μεγαλύτερο σε μέγεθος μπλοκ με 0;

Ερώτηση 10.3. Αν ο αντίστροφος ενός πίνακα IM περιέχει ένα μπλοκ με 0, ισχύει ότι περιέχει ένα μπλοκ με 0 σε κάποιο μπλοκ υποπίνακα;

Ερώτηση 10.4. Αν ο αντίστροφος ενός κύριου υποπίνακα που ανήκει στο IM περιέχει ένα 0, ισχύει ότι ένα άλλο μπλοκ κύριου υποπίνακα περιέχει ένα 0;

Οι απαντήσεις στις *Ερωτήσεις 10.2* κα *10.4.* δεν είναι καταφατικές γενικά.

Παράδειγμα 10.5. Ας θεωρήσουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Η (3,1) υπορίζουσα του $A[\{1,2,3\}]$ είναι 0 αλλά καμία άλλη υπορίζουσα του A δεν είναι 0. Για την ακρίβεια, καμία άλλη υπορίζουσα κύριου υποπίνακα δεν είναι 0.

10.2. Αντίστροφοι πίνακες και κύριοι υποπίνακες

Οι δύο πράξεις, της αντιστροφής και της εξαγωγής κύριου υποπίνακα, δεν μετατίθενται γενικά. Υπάρχουν όμως μερικές ενδιαφέρουσες ανισότητες μεταξύ των στοιχείων του πίνακα, που ικανοποιούνται αν $A \in \mathbf{M}$ ή $A \in \mathbf{IM}$.

Θεώρημα 10.6. Αν $A \in \mathbf{M}$ ή $A \in \mathbf{IM}$ και $\emptyset \neq \alpha \subseteq \langle n \rangle$, τότε

(i) $(A^{-1}[\alpha])^{-1} \leq A[\alpha]$
(ii) $A[\alpha]^{-1} \leq A^{-1}[\alpha]$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι η (i) ισχύει για $A \in \mathbf{M}$ αφού

$$(A^{-1}[\alpha])^{-1} = A/A[\alpha^c] = A[\alpha] - A[\alpha,\alpha^c]A[\alpha^c]^{-1}A[\alpha^c,\alpha] \leq A[\alpha]$$

(η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί $A[\alpha^c]^{-1} \geq 0$). Η (i) ισχύει και για $A \in \mathbf{IM}$ με το ίδιο επιχείρημα αφού $A[\alpha^c]^{-1}A[\alpha^c,\alpha] \geq 0$. Τελος, αφού το (ii) για $A \in \mathbf{M}$ ($A \in \mathbf{IM}$) είναι επαναδιατύπωση του (i) για $A \in \mathbf{IM}$ ($A \in \mathbf{M}$) το θεώρημα ισχύει. ■

Από το *Θεώρημα 10.6* (ii) προκύπτει ότι αν υπάρχουν κάποια 0 σε μη διαγώνια στοιχεία του $A[\alpha]^{-1}$τότε θα υπάρχουν κάποια 0 στις ίδιες θέσεις του του A^{-1}. Συγκεκριμένα, αν κάποια ΣΚΥ είναι μηδέν στον $A[\alpha]$ τότε μία μεγαλύτερη ΣΚΥ του A θα είναι επίσης 0.

Παράδειγμα Έστω ο **IM** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 59 & 44 & 71 \\ 56 & 96 & 48 & 88 \\ 64 & 60 & 88 & 84 \\ 42 & 43 & 36 & 95 \end{bmatrix}$$

και $\alpha = \{1,2\}$. Τότε

$$A[\alpha] = \begin{bmatrix} 90 & 59 \\ 56 & 96 \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad A[\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.017991 & -0.011057 \\ -0.0104948 & 0.0168666 \end{bmatrix},$$

ενώ

$$A^{-1}[\alpha] = \begin{bmatrix} 0.0215517 & -0.00862069 \\ -0.00431034 & 0.0215517 \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad (A^{-1}[\alpha])^{-1} = \begin{bmatrix} 50.4348 & 20.1739 \\ 10.087 & 50.4348 \end{bmatrix}.$$

Συγκρίνοντας, πράγματι ισχύει ότι $(A^{-1}[\alpha])^{-1} \leq A[\alpha]$ και $A[\alpha]^{-1} \leq A^{-1}[\alpha]$.

10.3. Ανισότητες σε κύριες και ΣΚΥ

Από τη συζήτηση της τελευταίας ενότητας προκύπτει ότι αν $A \in$ **IM**, $\alpha \subseteq \beta \subseteq \langle n \rangle$ και η ΣΚΥ $A[\alpha + i, \alpha + j] = 0$, τότε και $A[\beta + i, \beta + j] = 0$ όταν $i, j \notin \beta$. Επομένως μία «μικρότερη» ΣΚΥ που είναι 0 υπονοεί μία «μεγαλύτερη» ΣΚΥ είναι επίσης 0.

Πρώτα δείχνουμε ανισότητες για την περίπτωση κανονικοποιημένου πίνακα.

Θεωρημα 10.7. Αν $A \in$ **IM** είναι κανονικοποιημένος και $\emptyset \neq \alpha \subseteq \beta \subseteq \langle n \rangle - \{i, j\}$ τότε

(i) $\det A[\beta] \leq \det A[\alpha]$,
(ii) $|\det A[\beta + i, \beta + j]| \leq |\det A[\alpha + i, \alpha + j]|$.

Απόδειξη Από τις ανισότητες Fischer και Hadamard για αντίστροφους M-πίνακες έχουμε $\det A[\beta] \leq \det A[\beta - \alpha] \det A[\alpha] \leq \det A[\alpha]$ που αποδεικνύει την (i).

Τώρα έστω ότι $i \neq j$, $B = A[\beta + i + j]$ και $\gamma = \alpha + i + j$. Τότε $B \in$ **IM** και από το *Θεώρημα 4.10.6.* έχουμε $\left|(B^{-1})_{ij}\right| \leq \left|(B[\gamma]^{-1})_{ij}\right|$ ή ισοδύναμα

$$\left|\frac{\det B[\beta + i, \beta + j]}{\det B}\right| \leq \left|\frac{\det B[\alpha + i, \alpha + j]}{\det B[\gamma]}\right|$$

Επομένως

$$|\det B[\beta + i, \beta + j]| \leq \left|\frac{\det B}{\det B[\gamma]}\right| |\det B[\alpha + i, \alpha + j]|$$

$$\leq (\det B[\beta + i + j - \gamma]) |\det B[\alpha + i, \alpha + j]|$$

$$\leq |\det B[\alpha + i, \alpha + j]|$$

Αφού ο B είναι κύριος υποπίνακας του A προκύπτει η πρόταση (ii). ∎

Αφού ο $A = [a_{ij}] \in$ **IM** μπορεί να κανονικοποιηθεί με πολλαπλασιασμό με τον $D = \text{diag}\,(a_{11}, \dots, a_{nn})^{-1}$ μπορούμε να βρούμε ανισότητες από το *Θεώρημα 10.4.*

Θεώρημα 10.8. Αν $A = [a_{ij}] \in$ **IM** και $\emptyset \neq \alpha \subseteq \beta \subseteq \langle n \rangle - \{i, j\}$, τότε

(i) $\det A[\beta] \leq \det A[\alpha] \prod_{i \in \beta - \alpha} a_{ii}$
(ii) $|\det A[\beta + i, \beta + j]| \leq |\det A[\alpha + i, \alpha + j]| \prod_{i \in \beta - \alpha} a_{ii}$

11 Μηδενικές σχεδόν κύριες υπορίζουσες

Από την προηγούμενη συζήτηση ξέρουμε ότι για $A \in$ **IM** αν ένα στοιχείο του $A[\alpha]^{-1}$ είναι 0, τότε ένα αντίστοιχο στοιχείο του A^{-1} είναι 0. Όμως, αν $\alpha \subseteq \langle n \rangle$ τότε, σε αντίθεση με γενικούς πίνακες είναι δύσκολο να κατασκευαστεί ένα παράδειγμα στο οποίο ένα στοιχείο του $A[\alpha]^{-1}$ είναι 0 και μόνο ένα στοιχείο του A^{-1} είναι 0. Παρουσιάζουμε δύο αποτελέσματα που δείχνουν τους λόγους για τους οποίους συμβαίνει αυτό. Στο πρώτο, δείχνουμε ότι ένα μπλοκ μηδενικών του $A[\alpha]^{-1}$ συνεπάγεται ότι ένα «μεγαλύτερο» μπλοκ του A^{-1} είναι 0. Το δεύτερο δείχνει ότι οποιοδήποτε στοιχείο 0 του $A[\alpha]^{-1}$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν 0 σε κάποιο υποπίνακα $A[\beta]^{-1}$ όταν $|\beta| = |\alpha| < n$.

Θεώρημα 11.1. Έστω $A \in$ **IM** και $\gamma = \langle n \rangle - i$ για κάποιο $i \in \langle n \rangle$. Τότε αν ο $A[\gamma]^{-1}$ έχει ένα $p \times q$ υποπίνακα με 0, ο A^{-1} έχει έναν $p \times (q+1)$ ή $(p+1) \times q$ υποπίνακα με 0. Πιο συγκεκριμένα, αν $A[\gamma]^{-1}[\alpha, \beta] = 0$, όπου $|\alpha| = p$ και $|\beta| = q$, τότε είτε $A^{-1}[\alpha, \beta + i] = 0$ ή $A^{-1}[\alpha + i, \beta] = 0$.

Απόδειξη Έστω $A \in$ **IM** και $\gamma = \langle n \rangle - i$ για κάποιο $i \in \langle n \rangle$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο A έχει τη μπλοκ δομή

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

όπου $A_{11} = a_{ii}$ για $1 \leq i \leq n$ και $A_{22} = A[\gamma]$. Αν ο πίνακας A_{22} είναι αντιστρέψιμος τότε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} s^{-1} & -s^{-1}u^T \\ -s^{-1}v & A_{22}^{-1} + s^{-1}vu^T \end{bmatrix},$$

όπου $s = A/A_{22}$, $u^T = A_{12}A_{22}^{-1}$ και $v = A_{22}^{-1}A_{21}$. Επομένως αν $A_{22} \in$ **IM** , τότε $A \in$ **IM** αν και μόνο αν (i) $s > 0$ (ii) $u^T \geq 0$ (iii) $v \geq 0$ και (iv) $A_{22}^{-1} \leq -s^{-1}vu^T$ με την εξαίρεση των διαγώνιων στοιχείων. Ο $A_{22}^{-1} \in$ **M** άρα ανήκει στο Z. Έστω ότι ο A_{22}^{-1} έχει $p \times q$ υποπίνακα με 0, π.χ. $A_{22}^{-1}[\alpha, \beta]$ όπου $|\alpha| = p$ και $|\beta| = q$. Αν $v_r = 0$ για κάποιο $r \in \alpha$, τότε ο $A^{-1}[\alpha, \beta + i]$ είναι ένας $p \times (q+1)$ υποπίνακας του A^{-1} με 0. Από την άλλη αν $v_r \neq 0$ για κάποιο $r \in \alpha$ τότε συνεπάγεται από το (iv) ότι $v_s = 0$ για κάποιο $s \in \beta$ και άρα ο $A^{-1}[\alpha + i, \beta] = 0$. ■

Στο *Παράδειγμα 10.1.* βλέπουμε ότι για $\gamma = \{1,2,3\}$ ή $\{1,2,4\}$ το 1×1 μπλοκ 0 του $A[\gamma]^{-1}$ οδηγεί σε ένα 1×2 μπλοκ 0 στον A^{-1}.

Ορίζουμε το μέτρο της irreducibility $m(A)$ ενός αντιστρέψιμου πίνακα $n \times n$ ως

$$m(A) = \max_{(p,q) \in S} (p + q),$$

όπου το σύνολο $S = \{(p,q) | A$ περιέχει ένα μη διαγώνιο μηδενικό υποπίνακα $p \times q\}$. Έτσι ένας πίνακα $n \times n$ είναι reducible αν και μόνο αν $m(A) = n$. Επιπρόσθετα, από το *Θεώρημα 11.1.* έχουμε δείξει ότι αν ο B είναι ένας κύριος υποπίνακας $(n-1) \times (n-1)$ του $A \in \mathbf{IM}$ τότε $m(A^{-1}) \geq m(B^{-1}) + n - k$. Το ερώτημα είναι: κάτω από ποιες συνθήκες η ανισότητα γίνεται ισότητα;

Για να απαντήσουμε την ερώτηση χρειαζόμαστε την έννοια της συμπληρωματικής μηδενικότητας. Έστω $\mathrm{Null}(A)$ ο δεξιός μηδενοχώρος του πίνακα A, $\mathrm{nullity}(A)$, η διάσταση του μηδενοχώρου και $\mathrm{rank}(A)$ η τάξη του πίνακα.

Θεώρημα 11.2. (Συμπληρωματική μηδενικότητα) Έστω A ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\emptyset \neq \alpha, \beta \subseteq \langle n \rangle$ με $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Τότε, $\mathrm{Null}(A^{-1}[\alpha,\beta]) = \mathrm{Null}(A[\beta^c, \alpha^c])$.

Θεώρημα 11.3. Έστω $\emptyset \neq \alpha, \beta \subseteq \langle n \rangle$ με $\alpha \cap \beta = \emptyset$ και $A \in M_n(\mathbb{F})$ όπου $\mathbb{F}$ ένα αυθαίρετο πεδίο. Αν $A^{-1}[\alpha,\beta]$ τότε για κάποιο $\gamma \subseteq \langle n \rangle$ τέτοιο ώστε $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset, \beta \cap \gamma \neq \emptyset, (\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$ και για αντιστρέψιμο $A[\gamma]$ έχουμε $A[\gamma]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma]$.

Απόδειξη Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $A^{-1}[\alpha,\beta] = 0$ όπου $\emptyset \neq \alpha, \beta \subseteq \langle n \rangle$ με $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Τότε $\mathrm{nullity}(A^{-1}[\alpha,\beta]) = |\beta|$. Επομένως από τη συμπληρωματική μηδενικότητα, $\mathrm{nullity}(A[\beta^c,\alpha^c]) = |\beta|$. Επομένως

$$\mathrm{rank}\ (A[\beta^c,\alpha^c]) = |\alpha^c| - |\beta| = n - |a| - |\beta| = |(\alpha \cup \beta)^c|.$$

Ακόμα, υποθέτουμε ότι $\gamma \subseteq \langle n \rangle$ που ικανοποιεί $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset, \beta \cap \gamma \neq \emptyset, (\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$ και για αντιστρέψιμο $A[\gamma]$. Αφού $\gamma - \alpha \cap \gamma = \gamma \cap \alpha^c$ και

$$\gamma - \beta \cap \gamma = \gamma \cap \beta^c, \mathrm{rank}(A[\gamma][\gamma - \beta \cap \gamma, \gamma - \alpha \cap \gamma]) \leq \mathrm{rank}(A[\beta^c,\alpha^c]) = |(\alpha \cup \beta)^c|$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathrm{nullity}(A[\gamma][\gamma - \beta \cap \gamma, \gamma - \alpha \cap \gamma]) &\geq |\gamma - \beta \cap \gamma| - |(\alpha \cup \beta)^c| \\ &= |\beta \cap \gamma| + |(\alpha \cup \beta)^c| - |(\alpha \cup \beta)^c| = |\beta \cap \gamma|\end{aligned}$$

και από συμπληρωματική μηδενικότητα $\mathrm{nullity}(A[\gamma]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma]) \geq |\beta \cap \gamma|$. Η τελευταία ανισότητα γίνεται ισότητα αν $A[\gamma]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma] = 0$. ■

Μπορούμε να διατυπώσουμε παρόμοιες προτάσεις σχετικά με τις υπορίζουσες του A, του $A[\gamma]$ ακόμα και αν ο A δεν είναι ομαλός πίνακας.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η συνθήκη $(\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$ είναι αναγκαία. Για παράδειγμα, στο *Παράδειγμα 10.1.* $A^{-1}[\alpha,\beta] = 0$ όπου $\alpha = \{1\}$ και $\beta = \{3,4\}$. Αλλά αν ισχύει $\gamma = \alpha \cup \beta$ αλλά όχι $(\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$ τότε ο $A[\gamma]^{-1}$ δεν έχει στοιχεία 0.

Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στην *Ερώτηση 10.3.*

Πόρισμα 4.11.4. Έστω $A \in \mathbf{IM}$ με $m(A^{-1}) = p + q$, $A^{-1}[\alpha,\beta] = 0$ όπου $\emptyset \neq \alpha, \beta \subseteq \langle n \rangle$ με $|\alpha| = p$ και $|\beta| = q$. Επιπρόσθετα, έστω $\gamma = N - i$ για κάποιο $i \in N$ και υποθέτουμε ότι $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset, \beta \cap \gamma \neq \emptyset$. Τότε $A[\gamma]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma] = 0$ αν και μόνο αν $(\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι $\alpha \cap \beta = \emptyset$ αφού ο $A \in \mathbf{IM}$. Πρώτα, ας υποθέσουμε ότι $A[\gamma]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma] = 0$. Τότε θα ισχύει $m(A^{-1}) \geq |a \cap \gamma| + |\beta \cap \gamma|$. Από το Θεώρημα 11.1. ισχύει

$$m(A^{-1}) \geq m(A[\gamma]^{-1}) + n - |\gamma|$$

επομένως

$$|\alpha| + |\beta| \geq |a \cap \gamma| + |\beta \cap \gamma| + n - |\gamma|.$$

Με αναδιάταξη των όρων παίρνουμε:

$$(|\alpha| - |a \cap \gamma|) + (|\beta| - |\beta \cap \gamma|) + |\gamma| \geq n$$

και ισοδύναμα

$$|a - \gamma| + |\beta - \gamma| + |\gamma| \geq n.$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει αν και μόνο αν $(\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$. Το αντίστροφο είναι συνέπεια του *Θεωρήματος 11.3*. αφού όλοι οι κύριοι υποπίνακες του A είναι αντιστρέψιμοι. ■

Σε σχέση με το Παράδειγμα 10.1, $A^{-1}[\alpha, \beta] = 0$ όπου $\alpha = \{1\}$ και $\beta = \{3,4\}$. Για $\gamma = \{1,2,3\}$ ή $\{1,2,4\}$ έχουμε $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset, \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ και $(\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$. Για κάθε περίπτωση $A[\gamma]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma] = 0$. Από την άλλη, για $\gamma = \{1,3,4\}$ έχουμε $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset, \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ αλλά δεν ισχύει ότι $(\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$ όπως και $A[\gamma]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma] \neq 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ανισότητα $m(A^{-1}) \geq m(B^{-1}) + 1$ όπου B είναι ένας κύριος υποπίνακας του A μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$, γίνεται ισότητα όταν $B = A[\gamma]$, όπου $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset, \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ και $(\alpha \cup \beta)^c \subseteq \gamma$.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε για **ΣΚΥ** που είναι 0 και τη συνέπεια για άλλες **ΣΚΥ**, ίδιου μεγέθους, που επίσης είναι 0.

Λήμμα 11.5. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας **ΙΜ** πίνακας $n \times n$ $(n \geq 3)$ και $j \in \langle n \rangle$. Αν $a_{i_1 j}, a_{i_2 j}, \dots, a_{i_t j} = 0$ τότε για όλα τα $k \in \{j, i_1, i_2, \dots, i_t\}$, είτε $a_{kj} = 0$, είτε $a_{i_1 k}, a_{i_2 k}, \dots, a_{i_t k} = 0$.

Απόδειξη Προκύπτει κατευθείαν από το γεγονός ότι αν ο A είναι ένας **ΙΜ** πίνακας, $n \times n$ $(n \geq 3)$ τότε για κάθε $i, j, k \in \langle n \rangle$, ισχύει $a_{ik} a_{kj} \leq a_{ij} a_{kk}$. ■

Θεώρημα 11.6. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας **ΙΜ** πίνακας $n \times n$ $(n \geq 3)$, i, j, k διακριτοί δείκτες που ανήκουν στο $\langle n \rangle$ και έστω δ ένα υποσύνολο του $\langle n \rangle - \{i, j, k\}$. Τότε αν $A[\delta + i, \delta + j] = 0$,

(i) $\det A[\delta + i, \delta + k] = 0$ ή
(ii) $\det A[\delta + k, \delta + j] = 0$

Απόδειξη Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας **ΙΜ** πίνακας $n \times n$ $(n \geq 3)$, i, j, k διακριτοί δείκτες που ανήκουν στο $\langle n \rangle$ και έστω δ ένα υποσύνολο του $\langle n \rangle - \{i, j, k\}$. Υποθέτουμε ότι $\det A[\delta + i, \delta + j] = 0$. Αν $\delta = \emptyset$ η ισότητα προκύπτει αμέσως αφού ο $A[\{i, j, k\}]$ είναι reducible. Επομένως, υποθέτουμε ότι $\delta \neq \emptyset$. Με ομοιότητα μετάθεσης υποθέτουμε ότι $i = i_1$, $\delta = \{i_2, \dots, i_{p-1}\}$ και $j = i_p$. Έστω $A_1 = A[\{i_1, \dots, i_p\}]$. Αφού $0 = \det A[\delta + i, \delta + j] = \det B$ όπου $B = A[\{i_2, \dots, i_{p-1}\}, \{i_2, \dots, i_p\}]$, βλέπουμε ότι η (i_p, i_1) υπορίζουσα του A_1 είναι 0. Επιπρόσθετα, αφού $A[\delta]$ είναι ένας κύριος υποπίνακας $(p-2) \times (p-2)$, στην κάτω αριστερή γωνία του $B = [b_1, \dots, b_{p-1}]$, τα $\{b_1, \dots, b_{p-2}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επομένως $b_{p-1} = \sum_{i=1}^{p-2} \beta_i b_i$. Αν $b_{p-1} = 0$, τότε από το Λήμμα 4.11.5. είτε $a_{k i_p} = a_{kj} = 0$

είτε $a_{i_1 k}, a_{i_2 k}, \dots, a_{i_{p-1} k} = 0$. Η πρώτη περίπτωση δείχνει ότι $\det A[\delta + k, \delta + j] = 0$ και η δεύτερη περίπτωση $\det A[\delta + i, \delta + k] = 0$. Τώρα ας υποθέσουμε ότι $b_{p-1} > 0$. Τότε $\beta_i \neq 0$ για κάποιο $i, 1 \leq i \leq p-2$.

Έστω $k = i_{p+1}$ και ας θεωρήσουμε τον υποπίνακα $A_2 = A[\{i_1, \dots, i_{p+1}\}]$ του A. Αφού ο A_1 είναι κύριος υποπίνακας του A_2, η (i_p, i_1) υπορίζουσα του A_2 είναι επίσης 0, δηλαδή

$$0 = A\big[\{i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p+1}\}, \{i_2, \dots, i_{p+1}\}\big] = \det A_3$$

Τώρα, ο $(p-1) \times (p-1)$ υποπίνακας στην πάνω αριστερή γωνία του A_3 είναι ο B με $\det B = 0$. Επομένως, εφαρμόζοντας την ταυτότητα Sylvester για την ορίζουσα του $\det A_3$ θα έχουμε:

(i) $\det A\big[\{i_1, \dots, i_{p-1}\}, \{i_3, \dots, i_{p+1}\}\big] = 0$ ή
(ii) $\det A\big[\{i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p+1}\}, \{i_2, \dots, i_p\}\big] = 0$

<u>Περίπτωση Ι.</u> Έστω ότι ισχύει η (i). Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= \det A\big[\{i_1, \dots, i_{p-1}\}, \{i_3, \dots, i_{p+1}\}\big] \\ &= \det\big[b_2, \dots, b_{p-2}, b_{p-1}, b_p\big] \\ &= \det\Big[b_2, \dots, b_{p-2}, \sum_{i=1}^{p-2} \beta_i b_i, b_p\Big] \\ &= \det\big[b_2, \dots, b_{p-2}, \beta_1 b_1, b_p\big] \\ &= (-1)^{p-3} \beta_1 \det\big[b_1, b_2, \dots, b_{p-2}, b_p\big] \end{aligned}$$

Αφού $\beta_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \det\big[b_1, b_2, \dots, b_{p-2}, b_p\big] \\ &= \det A\big[\{i_1, \dots, i_{p-1}\}, \{i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p+1}\}\big] \\ &= \det A[\delta + i, \delta + k] \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (i).

<u>Περίπτωση ΙΙ.</u> Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (ii). Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= \det A\big[\{i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p+1}\}, \{i_3, \dots, i_{p+1}\}\big] \\ &= \det A[\delta + k, \delta + j]. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει και το (ii). ■

Μπορούμε ακόμη να αποδείξουμε το *Θεώρημα 11.6* χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 11.1 και 11.3 ως εξής. Έστω $\rho = \delta + i + j$ και $\tau = \rho + k$. Αφού $\det A[\delta + i, \delta + j] = 0$, $A[\rho]^{-1}[i, j] = 0$. Έστω ότι $A[\tau]^{-1}[i, j + k] = A[\tau]^{-1}[\alpha, \beta] = 0$. Έστω $\gamma = \delta + i + k = \tau - j$. Τότε στον $A[\delta + i + j + k]$ έχουμε $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset, \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ και $(\alpha \cup \beta)^c = \delta \subseteq \gamma$. Οπότε από το Θεώρημα 4.11.3 $A[\tau]^{-1}[\alpha \cap \gamma, \beta \cap \gamma] = A[\gamma]^{-1}[i, j] = 0$, που σημαίνει ότι $\det A[\delta +$

$i, \delta + k] = 0$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν $A[\gamma]^{-1}[i + k, j] = 0$. τότε $\det A[\delta + k, \delta + j] = 0$.

Οι πίνακες **M** και οι **IM** είναι γνωστοί για τις ομοιότητές τους με τους θετικά ορισμένους πίνακες και αυτά τα αποτελέσματα δεν αποτελούν εξαίρεση. Στους θετικά ορισμένους πίνακες, το *Θεώρημα 11.6* έχει ένα προφανές ανάλογο (δηλαδή ότι η δ+i,δ+j ελάσσονα ορίζουσα είναι 0 αν και μόνο αν το δ+j, δ+ i ελάσσονα είναι ορίζουσα 0) ενώ το συμπέρασμα 11.4 που προκύπτει από το *Θεώρημα 11.3* έχει πανομοιότυπο ανάλογο. Λιγότερο προφανές είναι το ανάλογο του *Θεωρήματος 11.1*, ωστόσο υπάρχει ένα.

Ας θυμηθούμε ότι οι θετικά ημιορισμένοι πίνακες έχουν μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα που μπορεί να ονομαστεί «συμπερίληψη γραμμής και στήλης» [Joh98]. Εάν ο A είναι $n \times n$ θετικά ημιορισμένος πίνακας, τότε, για οποιονδήποτε δείκτη ορίστε $\alpha \in \langle n \rangle$ και οποιονδήποτε δείκτη $i \notin \langle n \rangle - \alpha$, η γραμμή $A[i, \alpha]$ (και επομένως η στήλη $A[\alpha, i]$ ανήκει στο χώρο των γραμμών του $A[\alpha]$ (χώρο των στηλών του $A[\alpha]$). Φυσικά, αυτό έχει ενδιαφέρον μόνο στην περίπτωση που ο $A[\alpha]$ είναι μη αντιστρέψιμος, και, επομένως, δεν υπάρχει πλήρες ανάλογο για **IM** πίνακες στους οποίους κάθε κύριος υποπίνακας είναι αναγκαστικά αναστρέψιμος. Ωστόσο, όπως ακριβώς υπάρχουν ελαφρώς εξασθενημένα ανάλογα στην περίπτωση των μη αρνητικών πινάκων με την ιδιότητα «συμπερίληψη γραμμής και στήλης», το Θεώρημα 11.1 υπονοεί ορισμένα ανάλογα για τους **IM** πίνακες. Τώρα ο ρόλος των κύριων υποπινάκων αντικαθίσταται από σχεδόν κύριους υποπίνακες. Εμείς θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα. Εδώ, η Row(A) (Col(A)) υποδηλώνει το χώρο των γραμμών (στηλών) ενός πίνακα A.

Πόρισμα 11.7. Έστω B πίνακας $n \times n$ στην ακόλουθη μορφή μπλοκ

$$B = \begin{bmatrix} C & d \\ e^T & f \end{bmatrix}$$

όπου f βαθμωτό και $\operatorname{rank}(C) = n - 2$. Τότε αν $d \notin \operatorname{Col}(C)$ και $e^T \notin \operatorname{Row}(C)$, ο B είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη Αφού $d \notin \operatorname{Col}(C)$, θα ισχύει $rank\ ([C\ \ d]) = n - 1$ και αφού $e^T \notin \operatorname{Row}(C)$, θα ισχύει $[e^T\ \ f] \notin \operatorname{Row}([C\ \ d])$. Άρα $rank\ (B) = n$ δηλαδή ο B είναι αντιστρέψιμος.

Πόρισμα 11.8. Έστω A ένας **IM** πίνακας $n \times n$, $\alpha \in \langle n \rangle$ και $i, j \in \langle n \rangle - \alpha$. Τότε για κάθε $k \notin \alpha + i + j$, είτε ο $A[k, \alpha + j]$ ανήκει στο χώρο των γραμμών του $A[\alpha + i, \alpha + j]$ είτε ο $A[\alpha + i, k]$ ανήκει στο χώρο των στηλών του $A[\alpha + i, \alpha + j]$.

Απόδειξη Το πόρισμα ισχύει αν ο $A[\alpha + i, \alpha + j]$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι δεν είναι. Τότε η ορίζουσα $\det A[\alpha + i, \alpha + j] = 0$ και επίσης $rank\ (A[\alpha + i, \alpha + j]) = |\alpha|$. Επομένως ο $A[\alpha + i + j]^{-1}$ έχει ένα 0 στην (i, j) θέση και αν $k \notin \alpha + i + j$, τότε προκύπτει από το Θεώρημα 11.1 ότι ο $A[\alpha + i + j + k]^{-1}$ επίσης έχει ένα 0 στην (i, j) θέση. Επομένως $\det A[\alpha + i + k, \alpha + j + k] = 0$. Ορίζοντας τον $B = A[\alpha + i + k, \alpha + j + k]$ και $C = A[\alpha + i, \alpha + j]$ βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα προκύπτει μετά την εφαρμογή του Πορίσματος 11.7 ■

Σημειώνουμε ότι στη διατύπωση του πορίσματος 11.8, ο σχεδόν κύριος υποπίνακας $A[\alpha + i, \alpha + j]$ μπορεί να αντικατασταθεί με τον $A[\alpha, \alpha + j]$ στην περίπτωση των γραμμών και με τον $A[\alpha + i, \alpha]$ στην περίπτωση των στηλών για να προκύψει ένα ισχυρότερο αν και λιγότερο συμμετρικό επιχείρημα.

Παράδειγμα 11.9 Ας θεωρήσουμε τον **IM** πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 16 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 14 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 14 \end{bmatrix}$$

Η υπόθεση του πορίσματος ικανοποιείται με $\alpha = \{2\}, i = 1$ και $j = 3$ και το συμπέρασμα ικανοποιείται για $k = 4$ για τις στήλες αλλά όχι τις γραμμές και για $k = 5$ για τις γραμμές αλλά όχι τις στήλες.

12 Η ιδιότητα του γινομένου διαδρομής

Περίληψη. Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε την ιδιότητα του **γινομένου διαδρομής** (**path product, PP**) για μη αρνητικούς πίνακες καθώς και το **αυστηρό γινόμενο διαδρομής** (**strict path product, SPP**). Θα δείξουμε ότι κάθε **IM** πίνακας είναι **SSP** και για $n \leq 3$, κάθε **SSP** πίνακας είναι **IM**. Όμως, το τελευταίο αποτέλεσμα δεν ισχύει για $n > 3$. Σημειώνουμε ότι κάθε κανονικό **PP** (κανονικός **SPP**) πίνακα A

12.1 (Κανονικοί) πίνακες PP και SPP

Έστω πίνακας $A = [a_{ij}]$ μη αρνητικός και $n \times n$ με θετικά διαγώνια στοιχεία. Ονομάζουμε τον A πίνακα **PP** αν για τρεις δείκτες $i, j, k \in N$ ισχύει

$$\frac{a_{ij} a_{jk}}{a_{jj}} \leq a_{ik}$$

και **SPP** αν ισχύει η ανισότητα χωρίς ισότητα όταν $i \neq j$ και $k \neq i$ [JS01a]. Στο [JS01a] σημειώνεται ότι κάθε πίνακας **IM** είναι **SPP** και ότι για $n \leq 3$ οι δύο κλάσεις είναι ίδιες.

Για έναν **PP** πίνακα A και για οποιοδήποτε δρόμο $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{k-1} \to i_k$ στο πλήρες γράφημα K_n n κόμβων, έχουμε ότι

$$\frac{a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{k-1} i_k}}{a_{i_2 i_2} a_{i_3 i_3} \ldots a_{i_{k-1} i_{k-1}}} \leq a_{i_1 i_k} \tag{12.8}$$

και αν επιπρόσθετα, ο A είναι **SPP** τότε η ανισότητα είναι αυστηρή. Ονομάζουμε την (12.8) ανισότητα του γινομένου διαδρομής και αν $i_1 = i_k$ στην (12.8), ανισότητα κυκλικού γινομένου. Ονομάζουμε το γινόμενο $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{k-1} i_k}$ το (i_1, i_k) γινόμενο διαδρομής (μήκους $k - 1$) και αν $i_1 = i_k$ το (i_1, i_k) κυκλικό γινόμενο διαδρομής (μήκους $k - 1$). Αν $i_1 = i_k$ στην (12.8), βλέπουμε ότι το γινόμενο των στοιχείων σε οποιοδήποτε κύκλο είναι μικρότερο από το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων:

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{k-1} i_1} \leq a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \ldots a_{i_{k-1} i_{k-1}} \tag{12.9}$$

Συμπεραίνουμε ότι σε ένα κανονικό **PP** πίνακα, κανένα κυκλικό γινόμενο δεν είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα και σε ένα αυστηρά κανονικό **PP** πίνακα, όλοι οι κύκλοι με μήκος μεγαλύτερο από δύο έχουν γινόμενο που είναι μικρότερο από ένα.

Θεώρημα 12.1 Αν A είναι ένας κανονικός **PP** πίνακας (αντίστοιχα **SPP**) τότε υπάρχει ένας κανονικός πίνακας $\hat{A}$ διαγωνίως όμοιος στον A όπου όλα τα μη διαγώνια στοιχεία είναι ≤ 1 (αντίστοιχα < 1).

Οι πίνακες **PP** είναι κλειστοί σε: εξαγωγή κυρίων υποπινάκων, ομοιότητα μετάθεσης, πολλαπλασιασμό Hadamard, αριστερό (δεξιό) πολλαπλασιασμό με ένα θετικό διαγώνιο πίνακα, και θετική διαγώνια ομοιότητα (αλλά όχι σε συμπληρωματικό Schur), πρόσθεση και συνήθη πολλαπλασιασμό. Επιπλέον, ένας **PP** πίνακας παραμένει **PP** στη πρόσθεση με ένα μη αρνητικό διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 12.2 Κάθε πίνακας **IM** είναι και **SPP**

Θεώρημα 12.3 Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι **SPP** και $n \leq 3$ τότε ο A είναι **IM**

Για $n \geq 4$ η αναγκαιότητα της συνθήκης δεν ισχύει

Παράδειγμα 12.4 Ο **SPP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.10 & 0.40 & 0.30 \\ 0.40 & 1 & 0.40 & 0.65 \\ 0.10 & 0.20 & 1 & 0.60 \\ 0.15 & 0.30 & 0.60 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι **IM** καθώς το (2,3) στοιχείο του A^{-1} είναι θετικό.

Δοσμένου ενός $n \times n$ πίνακα A, ορίζουμε ως $G(A)$ το **προσανατολισμένο γράφημα** με κορυφές $\langle n \rangle$ που ικανοποιεί την ιδιότητα: (i, j) είναι κορυφή του $G(A)$ αν και μόνο αν $a_{ij} \neq 0$. Ένα προσανατολισμένο γράφημα, με σύνολο κορυφών $V(G)$ και σύνολο άκρων $E(G)$ είναι ένα transitive directed graph αν το γεγονός ότι $(i, j), (j, k) \in E(G)$ συνεπάγεται ότι $(i, k) \in E(G)$. Για ένα πίνακα A μεγέθους $n \times n$, λέμε ότι ο A είναι ένας transitive matrix αν ο $G(A)$ είναι transitive. Οι πίνακες **PP** μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συμπεράνουμε τις ακόλουθες ιδιότητες των **IM** πινάκων:

Θεώρημα 12.5

(i). Αν ένας IM πίνακας έχει ένα μηδενικό στοιχείο τότε είναι αναγώγιμος.
(ii). Ένας **IM** πίνακας έχει transitive graph.

(iii) Ένας **IM** πίνακας μπορεί να κλιμακωθεί με θετικούς διαγώνιους πίνακες D, E έτσι ώστε ο DAE να έχει διαγώνια στοιχεία ίσα με 1 και μη διαγώνια στοιχεία μικρότερα του 1.

(iv) Κάθε **IM** πίνακας ικανοποιεί την ανισότητα αυστηρού κυκλικού γινομένου

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_1} \leq a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_{k-1}}.$$

Για την ακρίβεια, προκύπτει από το θεώρημα 4.12.5(i) ότι κάθε μηδενικό στοιχείο ενός **IM** πίνακα βρίσκεται σε μη διαγώνια θέση του μπλοκ. Το γνωστό γεγονός ότι το μοτίβο μηδενικών ενός **IM** πίνακα είναι αναλλοίωτο στην ύψωση σε δύναμη προκύπτει επίσης από την προηγούμενη συζήτηση.

Στο [JS01a] αποδεικνύεται ότι οι **SPP** πίνακες δεν είναι απαραίτητα P πίνακες σε αντίθεση με τους **M** και **IM** πίνακες.

Θεώρημα 12.6. Έστω ο $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας A, ο οποίος είναι άνω τριγωνικός και κανονικός **SPP**. Τότε ο $A \in IM$ αν και μόνο αν το άθροισμα των γινομένων διαδρομής άρτιου μήκους είναι το πολύ ίσο με το άθροισμα των γινομένων διαδρομής περιττού μήκους για κάθε i, j με $i \neq j$.

Απόδειξη Έστω $A = I + T$ ένας αντιστρέψιμος, άνω τριγωνικός και κανονικός **SPP** $n \times n$ πίνακας. Τότε

$$A^{-1} = (I + T)^{-1}$$

$$= I - T + T^2 - \cdots \pm T^{n-1}$$

$$= I - \sum_{k\ \text{περιττό}} T^k + \sum_{k\ \text{άρτιο}} T^k$$

Επομένως, βλέπουμε ότι για κάθε i, j με $i \neq j$, το στοιχείο (i, j) του A^{-1} είναι το άθροισμα των γινομένων διαδρομής άρτιου μήκους μείον το άθροισμα των γινομένων διαδρομής περιττού μήκους. Άρα ο $A^{-1} \in M$ αν και μόνο αν το άθροισμα των γινομένων διαδρομής άρτιου μήκους είναι το πολύ ίσο με το άθροισμα των γινομένων διαδρομής περιττού μήκους για κάθε i, j με $i \neq j$.

12.2 TSPP και PSPP πίνακες

Ξεχωρίζουμε την περίπτωση όπου δεν υπάρχουν ισότητες γινομένου διαδρομής, δηλαδή όπου όλες οι ανισότητες (4.12.8) είναι αυστηρά μικρότερες, και ονομάζουμε τέτοιους **SPP** πίνακες **εξ ολοκλήρου αυστηρό γινόμενο διαδρομής** (**totally strict path product matrices, TSPP**). Παρατηρούμε ότι οι **TSPP** πίνακες είναι αναγκαία θετικοί, αλλά μπορεί να μην είναι **IM** όπως και ότι οι **IM** πίνακες δεν είναι απαραίτητα **TSPP.**

Παράδειγμα 12.7. Ο T**SPP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.50 & 0.35 & 0.40 \\ 0.50 & 1 & 0.50 & 0.26 \\ 0.35 & 0.50 & 1 & 0.50 \\ 0.40 & 0.25 & 0.50 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι **IM** αφού το στοιχείο (2,4) του αντίστροφου είναι θετικό ενώ ο **IM** πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0.50 & 0.25 \\ 0.50 & 1 & 0.50 \\ 0.25 & 0.50 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι **TSPP**.

Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη συνθήκη στη συλλογή ανισοτήτων γινομένου διαδρομής: για όλους τους διακριτούς δείκτες $i, j, k \in \langle n \rangle$ και για κάθε $m \in \langle n \rangle - \{i, j, k\}$ έχουμε

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk} \text{ υποννοεί ότι είτε } a_{im} = a_{ij}a_{jm} \text{ είτε } a_{mk} = a_{mj}a_{jk} \qquad (12.11)$$

Αν η (12.11) ικανοποιείται από ένα **SPP** πίνακα, τότε λέμε ότι ο A είναι **PSPP** (**purely strict path product matrix**). Σημειώνουμε ότι οι **PSPP** και **SPP** πίνακες ταυτίζονται για $n \leq 3$ και ότι γενικά οι **TSPP** είναι υποσύνολο των **PSPP.** Τέλος σημειώνουμε ότι ένας **IM** πίνακας είναι απαραίτητα **PSPP** ενώ ένας **TSPP** πίνακας δεν είναι απαραίτητα IM.

13 Τριγωνική παραγοντοποίηση

Πριν ξεκινήσουμε για την τριγωνική παραγοντοποίηση, ας σημειώσουμε ότι οι **PP** πίνακες δεν έχουν απαραίτητα ανάλυση LU, όπου οι παράγοντες είναι **PP** πίνακες

Παράδειγμα 13.1. Ο **PP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει την εξής ανάλυση LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αλλά ο $U = [u_{ij}]$ δεν είναι **PP** αφού $u_{23}u_{34} \nleq u_{24}$.

Όμως οι M και **IM** πίνακες έχουν LU ανάλυση με πίνακες L και U που ανήκουν στην κλάση τους. Για να δούμε αυτό ας θεωρήσουμε ότι $A \in$ **M**. Υποθέτουμε ότι $n > 1$. Αφού οι M πίνακες είναι αναλλοίωτοι στην εξαγωγή κυρίων υποπινάκων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ όπου $A_{11} = L_{11}U_{11}$ με τους L_{11}, U_{11} τριγωνικούς κάτω (άνω) πίνακες μεγέθους $(n-1) \times (n-1)$. Επομένως, αφού ο A έχει θετικές κύριες υπορίζουσες ισχύει

$$A = LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + u_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου $u_{nn} = A/A_{11} > 0$ (από τον τύπο Schur). Τέλος $L_{11}U_{12}, L_{21}U_{11} \leq 0$. Αφού $L_{11}^{-1}, U_{11}^{-1} \geq 0$ προκύπτει ότι $L_{21}, U_{12} \leq 0$. Άρα $L, U \in Z$ και αφού

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{21}L_{11}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11}^{-1} & -\frac{1}{u_{nn}} U_{11}^{-1} U_{12} \\ 0 & \frac{1}{u_{nn}} \end{bmatrix}$$

είναι μη αρνητικοί, τότε οι $L, U \in M$. Όμοια, μπορεί να δειχθεί ότι ο πίνακας A έχει ανάλυση UL που ανήκει στην κλάση των Μ πινάκων. Παρατηρήστε ότι αν $A = LU$ (UL) όπου $L, U \in M$ τότε ο $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ όπου οι $L^{-1}, U^{-1} \in IM$. Επομένως οι **IM** πίνακες έχουν ανάλυση LU ή UL που ανήκει στην κλάση τους. Όμως δεν ισχύει γενικά ότι αν οι L, U είναι **IM** πίνακες τότε λαι το γινόμενο τους είναι **IM** πίνακας

Παράδειγμα 13.2. Έστω οι **IM** πίνακες

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ούτε ο LU ούτε ο UL είναι **IM** αφού ο αντίστροφος του πρώτου έχει ένα θετικό στοιχείο στη θέση (2,3) και ο δεύτερος στην θέση (3,2).

14 Αθροίσματα, Γινόμενα και Κλειστότητα

Περίληψη. Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι το άθροισμα, γινόμενο και οι θετικές δυνάμεις **IM** πινάκων δεν είναι απαραίτητα **IM** πίνακες. Για την ακρίβεια θα είναι **IM** πίνακες αν τα μη διαγώνια στοιχεία του αντιστρόφου τους είναι μη θετικά. Σημειώνουμε επίσης ότι αν $A \in IM$ τότε και $A^T \in IM$ για όλα τα $0 \leq t < 1$. Για όλη την ενότητα, οι $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι $n \times n$ **IM** πίνακες και k είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε για την κλειστότητα τέτοιων πράξεων. Ούτε το γινόμενο AB ούτε το άθροισμα $A + B$ είναι γενικά **IM**.

Παράδειγμα 14.1 Έστω ο **IM** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 59 & 44 & 71 \\ 56 & 96 & 48 & 88 \\ 64 & 60 & 88 & 84 \\ 42 & 43 & 36 & 95 \end{bmatrix}.$$

Αφού ο αντίστροφος του A^3 έχει θετική τιμή στο στοιχείο (1,4), ο A^3 δεν είναι **IM** πίνακας.

Όμως, σε κάθε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις υπάρχει μία αισθητική συνθήκη για να είναι **IM**

Θεώρημα 14.2. Έστω $A_1, A_2, \dots, A_k$ $n \times n$ **IM** πίνακες και k είναι θετικός ακέραιος. Τότε $A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ (αντίστοιχα $A_1 A_2 \cdots A_k$) αν είναι αντιστρέψιμοι τότε είναι **IM** αν και μόνο αν τα μη διαγώνια στοιχεία του αντίστροφου είναι μη θετικά.

Θεώρημα 14.3. Αν $t \geq 1$ είναι ένας ακέραιος, τότε ο A^T είναι **IM** αν και μόνο αν τα μη διαγώνια στοιχεία του αντίστροφου είναι μη θετικά. Το τελευταίο θέμα που απομένει, των δυνάμεων του πίνακα A^T, $0 < t < 1$, έχει το εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Με βάση το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων ο M πίνακας $B = A^{-1}$ έχει πάντα μία k ρίζα $B^{1/k} \in IM$ που είναι M πίνακας.

Θεώρημα 14.4. Αν ο A είναι **IM**, τότε για κάθε t, $0 \leq t < 1$υπάρχει ένας φυσικός A^T που είναι **IM** πίνακας. Αν $t = p/q$ όπου p, q είναι θετικοί ακέραιοι και $0 \leq p \leq q$ τότε

$$(A^T)^q = A^p.$$

15 Φασματική δομή των IM Πινάκων

Έστω $A \in$ **IM** και $\sigma(A)$ το φάσμα του πίνακα A. Από το θεώρημα των Frobenius-Perron προκύπτει ότι $|\lambda| \leq \rho(A)$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ με την ισότητα να ισχύει αν $\lambda = \rho(A)$ και ότι ο M πίνακας $B = A^{-1} = \alpha I - P$ όπου $P \geq 0$ και $\alpha > \rho(P)$. Επομένως

$$q(B) \equiv \frac{1}{\rho(A)} = a - \rho(P)$$

είναι η ιδιοτιμή του B με το μικρότερο μέτρο, το φάσμα $\sigma(B)$ περιλαμβάνεται στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C}: |z - \alpha| \leq \rho(P)\}$ και $Re(\lambda) \geq q(B)$ για όλα τα $\lambda \in \sigma(B)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\lambda = q(B)$. Επιπρόσθετα, το $\sigma(B)$ περικλείεται στο ανοιχτό χωρίο

$$W_n \equiv \left\{z = e^{i\theta}: r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right\}$$

στο δεξιό ημι-επίπεδο αν $n > 2$ και στο $(0, \infty)$ αν $n = 2$. Επομένως το $\sigma(A)$ περιλαμβάνεται στο χωρίο W_n αν $n > 2$ και στο $(0, \infty)$ αν $n = 2$. Με τον μετασχηματισμό $f(z) = 1/z$, οι κύκλοι απεικονίζονται σε κύκλους και οι ευθείες σε ευθείες. Αυτό υπονοεί ότι το $\sigma(A)$ περιέχεται στο δίσκο $\{z \in \mathbb{C}: |z - \beta| \leq R\}$ όπου $\beta = \frac{\alpha}{\alpha^2 - (\rho(P))^2}$ και $R = \frac{\rho(P)}{\alpha^2 - (\rho(P))^2}$.

16 Γινόμενα Hadamard και δυνάμεις IM πινάκων

Για $m \times n$ πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ ορίζουμε το **γινόμενο Hadamard** $A \circ B$ ως $A \circ B = [a_{ij} b_{ij}]$.

16.1 Γινόμενα Hadamard και δυνάμεις

Αφού οι πίνακες **IM** A και B, μεγέθους $n \times n$ έχουν στοιχεία μη αρνητικά, είναι φυσικό να ρωτήσουμε αν το γινόμενο $A \circ B$ είναι και αυτό **IM**. Για $n \leq 3$ αυτό ισχύει, καθώς οι πίνακες **IM** είναι ισοδύναμοι με πίνακες SPP (για $n = 3$) και για $n = 1{,}2$ το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως. Είναι γνωστό ότι γενικά τα γινόμενα Hadamard δεν είναι **IM**. Ως παράδειγμα ας δούμε τους ακόλουθους 2 πίνακες 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Κάθε ένας είναι **IM** αλλά το γινόμενο $A \circ B$ δεν είναι.

Θεώρημα 16.1. Οι $n \times n$ πίνακες **IM** είναι κλειστοί στο γινόμενο Hadamard αν και μόνο αν $n \leq 3$

Μένει μόνο το ερώτημα κατά πόσο υπάρχουν ζεύγη πινάκων **IM** που το γινόμενο Hadamard είναι και αυτό **IM**. Ο δυικός πίνακας **IM** ορίζεται ως

$$\mathbf{IM}^{\mathrm{D}} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \circ B \in \mathbf{IM}\ \forall B \in \mathbf{IM}\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι $\mathbf{IM}^{\mathrm{D}} \subseteq \overline{\boldsymbol{IM}}$.

Ισχύει ότι αν οι A,B είναι **M** πίνακες τότε το γινόμενο Hadamard $A \circ B^{-1}$ είναι επίσης **M** πίνακας. Ένας πραγματικός πίνακας $n \times n$ είναι διαγωνίως συμμετρικός αν υπάρχει διαγώνιος πίνακας D με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιος ώστε ο DA να είναι συμμετρικός. Έχει αποδειχθεί ότι αν ένας M πίνακας είναι διαγωνίως συμμετρικός, τότε $q(A \circ A^{-1}) = 1$.

Θεώρημα 16.2 Όλες οι θετικές δυνάμεις Hadamard πινάκων **IM** είναι **IM**.

Θεώρημα 16.3. Αν ο A είναι πίνακας **IM** και $t \geq 1$, τότε ο $A^{(t)} = A \circ A \circ \cdots \circ A$ είναι **IM**

Για $n \geq 4$ και $0 < t < 1$ οι δυνάμεις Hadamard $A^{(t)}$ δεν είναι απαραίτητα **IM**.

Παράδειγμα 16.4 Έστω ο **IM** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.001 & 0.064 & 0.027 \\ 0.064 & 1 & 0.064 & 0.274625 \\ 0.001 & 0.008 & 1 & 0.216 \\ 0.003375 & 0.027 & 0.216 & 1 \end{bmatrix}$$

Η κυβική ρίζα κατά Hadamard είναι

$$A^{(1/3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.65 \\ 0.1 & 0.2 & 1 & 0.6 \\ 0.15 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

και δεν είναι **IM** αφού το στοιχείο (2,3) του αντίστροφου είναι θετικό:

$$\left(A^{(1/3)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0522 & -0.004 & -0.3616 & -0.096 \\ -0.3953 & 1.2442 & 0.1164 & -0.760 \\ -0.004 & -0.0388 & 1.5645 & -0.9122 \\ -0.0367 & -0.3493 & -0.9193 & 1.7897 \end{bmatrix}$$

16.2 Τελικά πίνακες IM

Όπως σημειώσαμε στην ενότητα 4.12, αν ο A είναι **SPP** και $t > 0$, τότε ο $A^{(t)}$ είναι **SPP**. Για την ακρίβεια, το γινόμενο Hadamard δύο πινάκων **SPP** είναι και αυτό **SPP**. Μένει το ερώτημα, αν τελικά ο $A^{(t)}$ γίνεται **IM** όταν το t αυξάνει απεριόριστα. Δηλαδή, υπάρχει ένα $T > 0$ τέτοιο ώστε ο $A^{(t)}$ είναι **IM** για $t \geq T$; Τότε λέμε ότι ο $A^{(t)}$ είναι **Τελικά IM** (eventually inverse M-matrix, **EIM**).

Παράδειγμα 16.5 Έστω ο κανονικός **SPP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.7 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αφού ο (2,4) παράγοντας του $A^{(t)}$ είναι $c_{24}^{(t)} = [(0.5)^t - (0.35)^t][(0.4)^t - (0.35)^t]$ ο οποίος είναι θετικός για κάθε $t > 0$, βλέπουμε ότι ο A δεν είναι **EIM**.

Επίσης θα απαντήσουμε στο ερώτημα αν ισχύει το αντίστροφο αποτέλεσμα ότι η ιδιότητα **IM** υπονοεί τη ιδιότητα **SPP**.

Για το λόγο αυτό θα εκλεπτύνουμε επιπλέον τις συνθήκες γινομένου διαδρομής για πίνακες **IM** και θα ταυτοποιήσουμε τις αναγκαίες συνθήκες. Ονομάζουμε την τριάδα (i, j, k) τριάδα ισότητας γινομένου διαδρομής (ΤΙΓΔ) αν η ισχύει η ισότητα στην (12.11). Για παράδειγμα, η (2,3,4) είναι ΤΙΓΔ στο παράδειγμα 16.6.

Παράδειγμα 16.6. Έστω ο **IM** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A δεν έχει ισότητες γινομένου διαδρομής. Όμως ο A^{-1} έχει ένα 0 στη θέση (1,4).

Σημειώνεται στο [JS01a] ότι αν ο A είναι $n \times n$, **SPP** πίνακας, τότε υπάρχουν θετικοί, διαγώνιοι πίνακες D και E τέτοιοι ώστε $B = DAE$ όπου ο B είναι κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας. Επομένως $B^{(t)} = D^t A^{(t)} E^t$ για $t \geq 0$ και ο $A^{(t)}$ είναι **SPP** αν και μόνο αν είναι και ο $B^{(t)}$.

Θεώρημα 16.7. Κάθε πίνακας **IM** είναι καθαρός **SPP**.

Απόδειξη Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικός πίνακας **IM**. Αν $n \leq 3$ τότε ο A είναι καθαρός **SPP**. Έτσι υποθέτουμε ότι $n \geq 4$. Υποθέτουμε επίσης ότι $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ για διακριτούς δείκτες i, j, k του N και έστω $m \in N - \{i, j, k\}$. Θεωρήστε τον κύριο υποπίνακα

$$A[\{m, j, k, i\}] = \begin{bmatrix} 1 & a_{mj} & a_{mk} & a_{mi} \\ a_{jm} & 1 & a_{jk} & a_{ji} \\ a_{km} & a_{kj} & 1 & a_{ki} \\ a_{im} & a_{ij} & a_{ik} & 1 \end{bmatrix}$$

του A. Αυτός ο υποπίνακας είναι **IM**. Έτσι ο (k,i) παράγοντας $c_{ki} = (a_{mk} - a_{mj}a_{jk})(a_{im} - a_{ij}a_{jm}) \leq 0$. Επομένως από την συνθήκη (4.12.11) είτε $a_{mk} = a_{mj}a_{jk}$ είτε $a_{im} = a_{ik}a_{km}$. Άρα ο A είναι καθαρός **SPP**. ■

Λήμμα 16.8. Αν η τριάδα (i,j,k) είναι ισότητα γινομένου διαδρομής για τον **SPP**, $n \times n$, πίνακα A με $n \geq 4$, τότε $\det A(\{k\},\{i\}) = 0$. Επιπλέον για κάθε t, $\det A^{(t)}(\{k\},\{i\}) = 0$

Απόδειξη Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ο A είναι ένας πίνακας $n \times n$, κανονικός **SPP** με $n \geq 4$ και ότι η τριάδα (i,j,k) είναι ισότητα γινομένου διαδρομής για τον A. Από ομοιότητα μετάθεσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(i,j,k) = (1,2,3)$ έτσι ώστε $a_{13} = a_{12}a_{23}$. Τότε αφού ο A είναι καθαρός **SPP** για κάθε $c \in \langle n \rangle - \{1,2,3\}$ είτε $a_{1c} = a_{12}a_{2c}$ είτε $a_{c3} = a_{c2}a_{23}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\{c | c \in \langle n \rangle - \{1,2,3\}\ \kappa\alpha\iota\ a_{1c} = a_{12}a_{2c}\} \neq \emptyset$. Από ομοιότητα μετάθεσης και για κάποιο $q \in \langle n \rangle - \{1,2,3\}$

(i). $a_{1c} = a_{12}a_{2c}, c = 3, \dots, q$
(ii). $a_{1c} \neq a_{12}a_{2c}, c = q+1, \dots, n$

Σημειώνουμε ότι για κάθε $c \in \{3, \dots, q\}$ και $r \in \{q+1, \dots, n\} \subseteq \langle n \rangle - \{1,2,c\}$ το (i) συνεπάγεται ότι είτε $a_{1r} = a_{12}a_{2r}$ είτε $a_{rc} = a_{r2}a_{2c}$. Οπότε από τη (ii) έχουμε

(iii) $a_{rc} = a_{r2}a_{2c}, r = q+1, \dots., n, c = 3, \dots, q$

Αν $q = n$ και $B = A[\{1,2\},\{2,\dots,q\}]$ τότε η (i) συνεπάγεται ότι η πρώτη γραμμή του B, $\{a_{12}a_{13} \dots a_{1q}\}$ είναι a_{12} επί $[1 a_{23}a_{24} \dots a_{2q}]$, τη δεύτερη γραμμή του B. Επομένως ο B είναι 2 επί $(n-1)$, τάξης 1 υποπίνακας του $A[\{3\},\{1\}]$. Αφού $2 + (n-1) = n+1 \geq n+1 = (n-1)+1+1$, η ορίζουσα του $A[\{3\},\{1\}]$ είναι μηδέν.

Από την άλλη, αν $3 \leq q < n$, έστω $C = A[\{1,2,q+1,\dots,n\},\{2,\dots,q\}]$. Τότε η (i) συνεπάγεται ότι η πρώτη γραμμή του C, $\{a_{12}a_{13} \dots a_{1q}\}$ είναι a_{12} επί $[1 a_{23}a_{24} \dots a_{2q}]$, τη δεύτερη γραμμή του B. Τώρα, έστω $[a_{r2}a_{r3} \dots a_{rq}]$ η r γραμμή του C, $r = q+1, \dots, n$. Η (iii) συνεπάγεται ότι η r γραμμή του C είναι a_{r2} επί τη δεύτερη γραμμή του C. Άρα ο C είναι $(n-q+2)$ επί $(q-1)$, τάξης 1 υποπίνακας του $A[\{3\},\{1\}]$. Αφού $(n+q-2)+(q-1) = n+1 \geq n+1 = (n-1)+1+1$, η ορίζουσα του $A[\{3\},\{1\}]$ είναι μηδέν.

Το δεύτερο μέρος της απόδειξης είναι παρόμοιο αφού η 4.12.11 ισχύει για τον A αν και μόνο αν ισχύει για τον $A^{(t)}$, για κάθε πραγματικό αριθμό t. ■

Πόρισμα 16.9 Αν η τριάδα (i,j,k) είναι ισότητα γινομένου διαδρομής για τον **IM**, $n \times n$, πίνακα A με $n \geq 4$, τότε $(A^{-1})_{ki} = 0$.

Θεώρημα 16.10 Έστω A ένας **SPP** πίνακας $n \times n$. Τότε υπάρχει ένα $T > 0$ τέτοιο ώστε $\det A^{(t)} > 0$ για κάθε $t > T$.

Απόδειξη Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω A ένας **SPP** πίνακας $n \times n$ και $\max_{i \neq j} a_{ij} = M < 1$. Έστω S_n το σύνολο των μεταθέσεων του $\langle n \rangle$ και id η ταυτοτική μετάθεση. Τότε

$$\det A^{(t)} = \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau) a^t_{1,\tau(1)} a^t_{2,\tau(2)} \dots a^t_{n,\tau(n)}$$

$$= 1 + \sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau \neq id}} sgn(\tau) a^t_{1,\tau(1)} a^t_{2,\tau(2)} \dots a^t_{n,\tau(n)}$$

$$> 1 - \sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau \neq id}} sgn(\tau) a^t_{1,\tau(1)} a^t_{2,\tau(2)} \dots a^t_{n,\tau(n)}$$

$$> 1 - (n! - 1) M^t.$$

Είναι προφανές ότι όταν υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t > T$, $1 - (n! - 1)M^t > 0$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Θεώρημα 16.11 Έστω A ένας **SPP** πίνακας $n \times n$. Τότε υπάρχει ένα $T > 0$ τέτοιο ώστε $A^{(t)} \in IM$ για κάθε $t > T$.

Απόδειξη Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω A ένας **SPP** πίνακας $n \times n$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.10, έστω $\max_{i \neq j} a_{ij} = M < 1$ και S_n το σύνολο των μεταθέσεων του $\langle n \rangle$ και id η ταυτοτική μετάθεση. Τότε συνεπάγεται από το Θεώρημα 16.10 ότι υπάρχει ένα $T_1 > 0$ για κάθε $t > T_1$ και $\det A^{(t)} > 0$.

Έστω $i, j \in \langle n \rangle$ με $i \neq j$ και έστω $N_1 = \langle n \rangle - \{i, j\}$. Θεωρούμε τον $c^{(t)}_{ij}$ συμπαράγοντα του $A^{(t)}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $i < j$. Τότε αν $B = \begin{bmatrix} A^{(t)}[N_1] & A^{(t)}[N_1, i] \\ A^{(t)}[j, N_1] & a^t_{ji} \end{bmatrix}$

$$c^{(t)}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{(t)}(\{i, j\})$$

$$= (-1)^{i+j} (-1)^{n-i-1} (-1)^{n-j} \det B$$

$$= - \sum_{\tau \in S_{n-1}} sgn(\tau) b_{1,\tau(1)} b_{2,\tau(2)} \dots b_{n-1,\tau(n-1)}$$

$$= -a^t_{ji} - \sum_{\substack{\tau \in S_{n-1} \\ \tau \neq id}} b_{1,\tau(1)} b_{2,\tau(2)} \dots b_{n-1,\tau(n-1)}$$

$$\leq -a^t_{ji} + \sum_{\substack{\tau \in S_{n-1} \\ \tau \neq id}} b_{1,\tau(1)} b_{2,\tau(2)} \dots b_{n-1,\tau(n-1)}.$$

Τώρα έστω

$$\Lambda_1 = \{\tau \in S_{n-1} | \tau \neq id \text{ και } \tau(n-1) = n-1\} = \{\tau \in S_{n-1} | b_{n-1,\tau(n-1)} = a^t_{ji}\}$$

και

$$\Lambda_2 = \{\tau \in S_{n-1} | \ \tau(n-1) \neq n-1\} = \{\tau \in S_{n-1} | b_{n-1,\tau(n-1)} \neq a^t_{ji}\}$$

έτσι ώστε $\{id\}$, Λ_1και Λ_2 σχηματίζουν μία κατάτμηση του S_{n-1}. Τότε,

$$\sum_{\substack{\tau \in S_{n-1} \\ \tau \neq id}} b_{1,\tau(1)} b_{2,\tau(2)} \dots b_{n-1,\tau(n-1)} = \sum_{\tau \in \Lambda_1} b_{1,\tau(1)} b_{2,\tau(2)} \dots b_{n-1,\tau(n-1)}$$

$$+\sum_{\tau\in\Lambda_2} b_{1,\tau(1)}b_{2,\tau(2)} \dots b_{n-1,\tau(n-1)}.$$

Κάθε όρος στο πρώτο άθροισμα είναι το γινόμενο του $b_{n-1,\tau(n-1)} = a_{ji}^t$ και ενός μη ταυτοτικού όρου στο ανάπτυγμα της $\det A[N_1]$ (αφού $\tau \neq id$). Επομένως κάθε όρος σε αυτό το άθροισμα έχει ένα παράγοντα της μορφής

$$a_{ji}^t a_{si_1}^t a_{i_1 i_2}^t \dots a_{i_{k-1} i_k}^t a_{i_k s}^t,$$

όπου $s, i_1, \dots, i_k$ είναι διακριτοί δείκτες του N_1 με $k \geq 1$. Επομένως το γινόμενο διαδρομής $a_{ji}^t a_{si_1}^t a_{i_1 i_2}^t \dots a_{i_{k-1} i_k}^t a_{i_k s}^t$ έχει τουλάχιστον 3 όρους. Αφού οι παράγοντες αυτού του όρου είναι < 1 κάθε όρος στο πρώτο άθροισμα είναι $< a_{ji}^t M^{2p}$ και υπάρχουν $|S_{n-2}| - 1 = (n-2)! - 1$ τέτοιοι όροι.

Από την άλλη, κάθε όρος στο δεύτερο άθροισμα έχει ένα παράγοντα της μορφής

$$a_{ji_1}^t a_{i_1 i_2}^t a_{i_2 i_3}^t \dots a_{i_{k-1} i_k}^t a_{i_k i}^t,$$

όπου οι $i_1, \dots, i_k$ είναι διακριτοί δείκτες του N_1 με $k \geq 1$. Επομένως το γινόμενο διαδρομής $a_{ji}^t a_{si_1}^t a_{i_1 i_2}^t \dots a_{i_{k-1} i_k}^t a_{i_k s}^t$ έχει τουλάχιστον 2 όρους. Έστω m_{ji} το μέγιστο (j,i) γινόμενο διαδρομής. Άρα κάθε όρος στο δεύτερο άθροισμα είναι $\leq m_{ji}$ άρα υπάρχουν $(n-1)! - (n-2)! = (n-2)\ (n-2)!$ όροι. Επομένως:

$$c_{ij}^{(t)} \leq -a_{ji}^t + \big((n-2)! - 1\big) a_{ji}^t M^{2p} + (n-2)(n-2)!\, m_{ji}^t$$

$$= -a_{ji}^t \left(1 - \big((n-2)! - 1\big) M^{2p} - (n-2)(n-2)! \left(\frac{m_{ji}}{a_{ji}}\right)^t\right).$$

Αφού $M < 1$ και $m_{ji} < a_{ji}$, υπάρχει ένα $T_{ij} > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t > T_{ij}$, $c_{ij}^t \leq 0$. Θέτουμε $T_2 = \max_{i\neq j} T_{ij}$. Τότε για κάθε $t > \max(T_1, T_2) = T$, ο αντίστροφος του $A^{(t)}$ έχει ένα μη θετικό μη διαγώνιο στοιχείο και άρα $A^{(t)} \in \mathbf{IM}$. ∎

Το κύριο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει τους Τελικά **IM** πίνακες και υπό κάποια έννοια διατυπώνει το αντίστροφο αποτέλεσμα ότι η ιδιότητα M συνεπάγεται την **SPP**.

Θεώρημα 16.12. Έστω A ένας πίνακας $n \times n$ με μη αρνητικά στοιχεία. Τότε ο A είναι **SPP** αν και μόνο αν $A \in EIM$.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι και για τις δύο ιδιότητες, καθαρά **SPP** ή **EIM** μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A είναι ένας κανονικοποιημένος $n \times n$ πίνακας. Για το ευθύ της απόδειξης, έστω ότι ο A είναι ένας κανονικοποιημένος $n \times n$ SPP πίνακας. Από το Θεώρημα (6.10) προκύπτει ότι υπάρχει $T_1 > 0$ τέτοιο ώστε $A^{(t)}$ για κάθε $t > T_1$. Άρα μένει να δείξουμε ότι για κάποιο $T > 0$ τα μη διαγώνια στοιχεία του ${A^{(t)}}^{-1}$ είναι μη θετικά για όλα τα $t > T$. Έστω λοιπόν $i, j \in \langle n \rangle$ με $i \neq j$ και $N_1 = \langle n \rangle - \{i, j\}$. Αν $a_{ji} = a_{jk} a_{ki}$ για κάποιο $k \in N_1$ τότε προκύπτει από το Λήμμα 16.8 ότι το $c_{ij}^{(t)}$ ο i, j συμπαράγοντας του $A^{(t)}$ είναι μηδέν για κάθε θετικό p. Έστω $T_{ij} = 1$ σε αυτή την περίπτωση.

Από την άλλη, ας υποθέσουμε ότι

$$a_{ji} > a_{jk}a_{ki}$$

για όλα τα $k \in N_1$. Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 16.10, έστω $\max_{i \neq j} a_{ij} = M < 1$ και m_{ji} ο μέγιστος (j, i) δρόμος που δίνεται στην (3). Προκύπτει ότι $m_{ji} < a_{ji}$ από την (2). Επομένως η (1) μας λέει ότι υπάρχει θετική σταθερά T_{ij} τέτοια ώστε για όλα τα $t > T_{ij}$ ο $c_{ij}^{(t)} \leq 0$. Θέτοντας $T_2 = \max_{i \neq j} T_{ij}$ και $T = \max(T_1, T_2)$ βλέπουμε ότι για κάθε $t > T$ ο $A^{(t)}$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος πίνακας έχει μη θετικά μη διαγώνια στοιχεία, δηλαδή ο $A^{(t)}$ είναι IM. Άρα ο A είναι **EIM**. ■

Παρατήρηση 16.13 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα καθαρό SPP πίνακα που δεν είναι IM. Αφού οι καθαροί SPP είναι κλειστοί στο γινόμενο Hadamard, η εξαγωγή ρίζας κατά Hadamard θα δημιουργήσει ένα καθαρό SPP πίνακα όπου ο P μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλος.

Από το Θεώρημα 16.10 προκύπτει το Πόρισμα

Πόρισμα 16.14 Αν ο A είναι IM πίνακας, τότε υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε ο $A^{(t)} \in IM$ για όλα τα $t > T$.

Θυμόμαστε ότι οι TSSP πίνακες είναι απαραίτητα θετικοί. Ενώ η συνθήκη TSSP είναι αναγκαία για EIM, οι θετικοί EIM πίνακες δεν είναι αναγκαία TSPP.

Θεώρημα 16.15 Έστω A ένα μη αρνητικός πίνακας $n \times n$. Ο A είναι EIM αν και μόνο αν είναι PSSP.

Θεώρημα 16.16 Για ένα μη αρνητικό πίνακα A $n \times n$ ισχύουν είτε

(i) δεν υπάρχει $t > 0$ τέτοιο ώστε ο $A^{(t)} \in IM$, είτε
(ii) υπάρχει μία κρίσιμη τιμή $T > 0$ τέτοια ώστε ο $A^{(t)} \in IM$ για όλα τα $t > T$ και ο $A^{(t)} \notin IM$ για όλα τα $0 < t < T$.

17 Διαταραχή των πινάκων IM

17.1 Θετική διαταραχή τάξης ένα

Θεώρημα 17.1. Έστω A ένας **IM** πίνακας και p, q αυθαίρετα μη αρνητικά διανύσματα. Για $t \geq 0$ ορίζουμε

$$x = Ap,$$

$$y^T = q^T A$$

και

$$s = 1 + tq^T Ap$$

Τότε έχουμε

(i) $(A+txy^T)^{-1} = a^{-1} - \frac{t}{s}pq^T$ είναι M πίνακας,

(ii) $(A+txy^T)^{-1}x = \frac{1}{s}p \geq 0$ και $y^T(A+txy^T)^{-1} = \frac{1}{s}q^T \geq 0$,

(iii) $y^T(A+txy^T)^{-1}x = \frac{1}{s}q^TAp < \frac{1}{t},\ t > 0$.

Αν θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη στήλη ενός πίνακα **IM**, τότε το σύνολο των αντικαταστάσεων μπορεί να θεωρηθεί ως η τομή $n^2 - n + 2$ ημι-χώρων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι πρόκειται για την τελευταία στήλη, έτσι ώστε έχουμε

$$A(x) = [a_1\ a_2 \dots a_{n-1}\ x]$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \geq 0$. Τότε οι ημιχώροι ορίζονται από τις γραμμικές συνθήκες

$$x \geq 0$$

$$(-1)^{i+j+1}\det A(x)(i,j) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j < n, \ \ i \neq j$$

και

$$\det A(x) > 0.$$

Μία παρόμοια ανάλυση μπορεί να δοθεί για ένα μη διαγώνιο στοιχείο. Αν το πάρουμε να είναι το στοιχείο $(1,n)$ τότε

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & x \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

όπου x είναι βαθμωτό μέγεθος. Το διάστημα του x δίνεται από τις ανισότητες

$$(-1)^{i+j+1}\det A(x)(i,j) \geq 0, \quad 1 < i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \ \ i \neq j$$

και

$$\det A(x) > 0.$$

Στο [JS11] οι συνθήκες που δίνονται στον

$$A = [a_1\ a_2 \dots a_{n-1}]$$

έτσι ώστε να υπάρχει $x \geq 0$, για να είναι ο

$$A(x) = [a_1\ a_2 \dots a_{n-1}\ x]$$

πίνακας **IM**. Αν ο A χωριστεί ως

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

όπου ο A_{11} είναι τετράγωνος πίνακας τότε οι συνθήκες είναι:

(i) A_{11} είναι **IM,**

(ii) $a_{21} \geq 0$,

(iii) $a_{21}A_{11}^{-1} \geq 0$.

17.2 Θετικές διαγώνιες διαταραχές

Τι συμβαίνει με τη διαγώνια διαταραχή; Από το Θεώρημα 5.2 αν $D \in \overline{D}$ τότε ο πίνακας $A + D$ είναι **IM** όταν είναι και ο A. Και αν ο A δεν είναι **IM**; Αν ο A δεν είναι αναγώγιμος πρέπει να υποθέσουμε ότι $A > 0$. Χρειάζεται κάτι άλλο έτσι ώστε ο $A + D$ να είναι **IM** για κάποιο $D \in \overline{D}$; Αν $A > 0$ μπορεί να γίνει πάντοτε **PP** και SP προσθέτοντας με μεγάλα διαγώνια στοιχεία.

Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι ένας μη αρνητικός πίνακας **IM** δίνονται παρακάτω.

Λήμμα 17.2. Αν ο A είναι ένας $n \times n$, μη αρνητικός πίνακας, τότε ο A είναι **IM** αν και μόνο αν

(i) η ορίζουσα του και οι κύριες υπορίζουσες είναι θετικές,
(ii) οι μεγαλύτερες σχεδόν κύριες υπορίζουσες έχουν το πρόσημο ενός αντίστροφου M πίνακα.

17.3 Θετικοί πίνακες, πίνακες γινομένου διαδρομής και αντίστροφοι M πίνακες

Οι δύο πρώτες προτάσεις ξεκαθαρίζουν την σχέση μεταξύ θετικών πινάκων και θετικών **PP** πινάκων.

Πρόταση 17.3. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας $n \times n$, θετικός πίνακας και υποθέτουμε ότι η (1.1) ισχύει για όλα τα διακριτά i, j, k. Τότε

$$a_{ij}a_{ji} \le a_{ii}a_{jj}.$$

Απόδειξη Έστω ότι $i, j \in \langle n \rangle$ με $i \ne j$. Τότε για όλα τα $k \ne i, j$ έχουμε

$$a_{ij}a_{ji} \le \left(\frac{a_{ii}a_{kj}}{a_{ki}}\right)\left(\frac{a_{jj}a_{ki}}{a_{kj}}\right) = a_{ii}a_{jj}$$

αφού $a_{ki}a_{ij} \le a_{kj}a_{ii}$ και $a_{kj}a_{ji} \le a_{jj}a_{ki}$. ■

Σημειώνουμε ότι η πρόταση 17.3 δείχνει ότι η διακριτότητα των δεικτών δεν είναι απαραίτητη για τον ορισμό του **PP**.

Πρόταση 17.4. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας $n \times n$ τέτοιος ώστε $a_{ij} > 0, i \ne j$ και $a_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός, ελάχιστος, διαγώνιος πίνακας D τέτοιος ώστε ο $A + D$ να είναι **PP**.

Απόδειξη Έστω $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ ένας $n \times n$ πίνακας, όπου τα d_k δίνονται από την σχέση

$$d_k = \max_{i \ne j} \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{ij}}$$

Αυτό εξασφαλίζει ότι $a_{ij} \ge \frac{a_{ik}a_{kj}}{d_k}$ για τις τριάδες $\{i, j, k\}$ που είναι διακριτές και σύμφωνα με το [JS07a] και για τους δείκτες $i \ne j$ και $i = k$. ■

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 17.4 είναι ότι η προσθήκη ενός (ελάχιστου) μη αρνητικού διαγώνιου πίνακα ή ενός ελάχιστου θετικού βαθμωτού πίνακα μετατρέπει έναν τετράγωνο θετικό πίνακα σε **PP** πίνακα. Εκ των προτέρων αυτός ο διαγώνιος πίνακας δεν είναι φραγμένος, ακόμη και ως προς το n, αλλά φράσσεται από τα μεγέθη και τις αναλογίες μεταξύ των στοιχείων. Σημειώνουμε επίσης ότι, ανάλογα με το μηδενικό μοτίβο των στοιχείων, εμείς ενδέχεται να μην μπορούμε να μετατρέψουμε έναν μη αρνητικό πίνακα με μηδενική διαγώνιο σε έναν πίνακα **PP**, με πρόσθεση θετικού διαγώνιου πίνακα. Για παράδειγμα, αν $A = [a_{ij}]$ είναι ένας τέτοιος πίνακας και για διακριτούς δείκτες i, j, k, $a_{ij}a_{jk} > 0$ ενώ $a_{ik} = 0$, τότε $A + D \notin PP$ για οποιονδήποτε θετικό διαγώνιο πίνακα D.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε μια καθοριστική ανισότητα για ορισμένους κανονικοποιημένους πίνακες **SPP**. Για κανονικοποιημένους **IM** πίνακες, η ανισότητα δείχνει ότι η σχέση κυριαρχίας μεταξύ διαγώνιων και μη διαγώνιων στοιχείων επεκτείνεται σε όλες τις κύριες υπο ορίζουσες και ορισμένα σχετιζόμενα APM. Παρατηρούμε ότι μια ειδική περίπτωση αυτής της ανισότητας είναι το γνωστό γεγονός ότι μια γραμμή (στήλη) διαγώνια κυρίαρχη M πίνακα έχει ένα αντίστροφο που είναι διαγώνια κυρίαρχος στα στοιχεία της στήλης (σειράς). Το θεώρημα θεμελιώνει το ακόλουθο χρήσιμο γεγονός: ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας είναι **IM** με την προϋπόθεση ότι τα κατάλληλα κύρια ανήλικα και τα APM είναι κατάλληλα υπογεγραμμένα. (Σε αυτή την περίπτωση, η ορίζουσα είναι θετική.) Τα ακόλουθα το θεώρημα και το συμπέρασμα ήταν κρίσιμα για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος του [5a]

Θεώρημα 17.5. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, με $n \geq 2$, του οποίου οι κύριες υπο ορίζουσες είναι θετικές και τα πρόσημα των APM είναι ίδια με αυτά ενός **IM** πίνακα. Τότε

(i) για ένα μη κενό σύνολο $\langle n \rangle = \{1,2, \dots, n\}$ και για δείκτες $i \in \alpha$ και $j \notin \alpha$

$$\det A[\alpha] > \max\{|\det A[\alpha - i + j, \alpha]|, |\det A[\alpha, \alpha - i + j]|\}, \qquad (4.17.12)$$

(ii) $\det A > 0$,
(iii) ο A είναι **IM**.

Απόδειξη Το θεώρημα ισχύει για $n = 2$, έτσι υποθέτουμε $n \geq 3$. Για την απόδειξη χρειάζεται να δείξουμε ότι

$$\det A[\langle n-1 \rangle] > |\det A\,[\langle n-1 \rangle, \langle n \rangle - 1]|.$$

Πρώτα, υποθέτουμε ότι $a_{1n} = 0$ και έστω $S = \{i | a_{1i} = 0\}$, k η cardinality του S και $T = \{i | a_{1i} \neq 0, i \in \langle n \rangle - 1\}$. Αν $k = n - 1$ τότε .... Οπότε υποθέτουμε ότι τα σύνολα S και T είναι μη κενά και αποτελούν μία διαμέριση του $\langle n \rangle - 1$. Έστω $i \in T$ και $j \in S$. Τότε από τις συνθήκες **PP**, $a_{1i}a_{ij} \leq a_{1i} = 0$. Αφού $a_{1i} \neq 0$, τότε $a_{ij} = 0$ για $i \in T$ και $j \in S$ και επιπρόσθετα, $a_{1j} = 0$ για $j \in S$, άρα ο $A[\langle n-1 \rangle, \langle n \rangle - 1]$ έχει ένα μηδενικό $(n-k) \times k$ υποπίνακα. Επομένως από το Θεώρημα Frobenius-Konig $\det A\,[\langle n-1 \rangle, \langle n \rangle - 1] = 0$ που ολοκληρώνει την απόδειξη αυτής της περίπτωσης.

Τώρα υποθέτουμε ότι $a_{1n} > 0$ και το n είναι περιττό (η περίπτωση του άρτιου είναι παρόμοια). Αφού οι κύριες υπορίζουσες του A έχουν το ίδιο πρόσημο με κάποιο **IM** πίνακα προκύπτει ότι ο $(1, n)$ συμπαράγοντας του A $(-1)^{n+1} \det A\,[\langle n-1 \rangle, \langle n \rangle - 1] \leq 0$ και επομένως $\det A\,[\langle n-1 \rangle, \langle n \rangle - 1] \leq 0$ (αφού το n είναι περιττό). Αν $\det A\,[\langle n-1 \rangle, \langle n \rangle - 1] = 0$ τότε το αποτέλεσμα ισχύει. Έτσι υποθέτουμε ότι $\det A\,[\langle n-1 \rangle, \langle n \rangle - 1] < 0$. Άρα

$$|\det A\,[\langle n-1\rangle,\langle n\rangle-1]| = -\det A\,[\langle n-1\rangle,\langle n\rangle-1]$$
$$= -\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n-1}a_{in}\det A\,[\langle n-1\rangle - i,\langle n-1\rangle-1]$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}a_{in}\det A\,[\langle n-1\rangle - i,\langle n-1\rangle-1]$$
$$= a_{1n}\{\det A[\langle n-1\rangle-1] + \sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{a_{in}}{a_{1n}}\det A\,[\langle n-1\rangle - i,\langle n-1\rangle-1]\}$$
$$< \det A[\langle n-1\rangle-1] + \sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{a_{in}}{a_{1n}}\det A\,[\langle n-1\rangle - i,\langle n-1\rangle-1]$$
$$\leq |\det A[\langle n-1\rangle-1]| + \sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i+1}a_{i1}\det A\,[\langle n-1\rangle - i,\langle n-1\rangle-1]$$
$$= \det A[\langle n-1\rangle]$$

που αποδεικνύει το θεώρημα. Εφαρμόζοντας το 9.5 κα 12.7 βλέπουμε ότι ισχύει το (ii) και (iii). ■

Πόρισμα 17.6 Έστω A ένας μη αρνητικός $n\times n$, με $n\geq 2$, του οποίου κάθε κύριος υποπίνακας είναι **IM**. Τότε ο A είναι **IM** αν και μόνο αν κάθε μία από τις μέγιστες APM έχει το ίδιο πρόσημο με ένα **IM** πίνακα.

Πόρισμα 17.7. Έστω $A=[a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **IM** πίνακας $n\times n$, με $n\geq 2$. Τότε για κάποιο α ένα μη κενό υποσύνολο του $\langle n\rangle=\{1,2,\dots,n\}$ και για δείκτες $i\in\alpha$ και $j\notin\alpha$ ισχύει η (16.5)

Πρόταση 17.8. Έστω A ένας μη αρνητικός $n\times n$, με $n\geq 3$. Τότε ο A είναι **IM** αν και μόνο αν ο A είναι **SPP** και όλες οι υπορίζουσες και APM, με τάξη $n-1$ και $n-2$ αντίστοιχα, έχουν το ίδιο πρόσημο με ένα **IM** πίνακα.

Θεώρημα 17.9. Έστω A ένας 4×4 κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας. Τότε ο $A+I$ είναι **IM**. Επιπλέον, ο $A+sI,\ s<1$ δεν είναι απαραίτητα **IM**.

Απόδειξη Από το Θεώρημα 17.5 και μετάθεση ομοιότητας, χρειάζεται να δείξουμε ότι μία συγκεκριμένη APM μεγέθους 3×3 έχει το σωστό πρόσημο. Θα δείξουμε ότι η (4,1) APM είναι μη αρνητική:

$$\det(A+I)\,(4,1) = \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 1+1 & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & 1+1 & a_{34}\end{bmatrix}$$
$$= 4a_{14} + a_{12}a_{23}a_{34} + a_{13}a_{32}a_{24} - 2a_{12}a_{24} - 2a_{13}a_{34} - a_{14}a_{23}a_{32}$$
$$= 2(a_{14} - a_{12}a_{24} + a_{14} - a_{13}a_{34}) + a_{12}a_{23}a_{34} + a_{13}a_{32}a_{24} - a_{14}a_{23}a_{32}$$
$$\geq 2(a_{14} - a_{12}a_{24} + a_{14} - a_{13}a_{34}) + a_{12}a_{23}a_{32}a_{34} + a_{13}a_{32}a_{23}a_{24} - a_{14}a_{23}a_{32}$$

$$= 2(a_{14} - a_{12}a_{24} + a_{14} - a_{13}a_{34}) + (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{34} - a_{14})a_{23}a_{32}$$
$$\geq 2(a_{14} - a_{12}a_{24} + a_{14} - a_{13}a_{34}) + (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{34} - a_{14})$$
$$= 2(a_{14} - a_{12}a_{24}) + (a_{14} - a_{13}a_{34}) + a_{12}a_{34} \geq 0$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, έστω $0 < \varepsilon, s < 1$ και

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε ο $A + sI$ είναι **SPP**. Επιπλέον για μικρό ε $\det(A + sI)\,(4,1) \approx (s+1)(s-1) < 0$, επομένως ο $A + sI$ δεν είναι **IM**. ■

Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, με $n \geq 3$ και για $i \neq j$ έστω

$$u_{ij}^{(A)} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{ij}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{ik}a_{kj}, & a_{ij} \neq 0 \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

(Σημειώνουμε ότι $a_{ij} = 0$ υπονοεί $a_{ik}a_{kj} = 0$ για κάθε k). Έστω $U(A) = \max_{i \neq j} u_{ij}^{(A)}$. Ονομάζουμε το $U(A)$ το άνω φράγμα γινομένου διαδρομής του A.

Λήμμα 17.10. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, με $n \geq 3$. Τότε

(i) για κάθε $i, j \in N$ με $i \neq j$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{ik}a_{kj} \leq U(A)a_{ij}$$

(ii) $U(A) \leq n - 2$. Επιπρόσθετα, $U(A) = n - 2$ αν και μόνο αν για κάποια $i, j \in N$ με $i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$ και $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$ για όλα τα $k \neq i, j$.

Απόδειξη Η απόδειξη είναι άμεση από τον ορισμό του $U(A)$.

Θεώρημα 17.11 Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, με $n \geq 3$ και $L = \max\{U(A), 1\}$. Τότε ο $A + sI$ είναι **IM** για όλα τα $s \geq L - 1$. Επιπρόσθετα, το $L - 1$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί από μία μικρότερη τιμή.

Απόδειξη Θα το δείξουμε με επαγωγή. Για $n = 3$ ισχύει $U(A) \leq 1$ επομένως $L = 1$. Αφού ο A είναι **SPP** , $A = A + 0I = A + (L-1)I$ είναι **IM** για κάθε $L \geq L_1$, άρα ισχύει για $n = 3$. Με επαγωγή προκύπτει ότι οι $(n-1) \times (n-1)$ κύριες υπορίζουσες του $B = A + (L-1)I$ είναι θετικές αφού κάθε κύριος υποπίνακας A_1 του A και $A_1 + (L_1 - 1)I$ είναι **IM** έτσι ώστε ο $A_1 + (L-1)I$ είναι **IM** όσο το $L \geq L_1$ όπου $L_1 = \max\{U(A_1), 1\}$. Από το Θεώρημα 17.5 προκύπτει ότι τα στοιχεία του $adj\ B$ έχουν το σωστό πρόσημο, και $\det B > 0$ άρα ο B είναι **IM**. Έτσι για να αποδείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι η $(n-1) \times (n-1)$ **APM** έχει το σωστό πρόσημο. Από ομοιότητα μετάθεσης αρκεί να δείξουμε ότι ένα συγκεκριμένο στοιχείο, π.χ. το συμπληρωματικό του (1,2) είναι μη αρνητικό. Η τιμή του είναι:

$$b_{21} \det B(\{1,2\}) - [b_{23} \cdots b_{2n}]\ adj\ B(\{1,2\}) \begin{bmatrix} b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}.$$

Διαίρεση με το $B(\{1,2\})$ δίνει

$$b_{21} \geq [b_{23} \cdots b_{2n}]\ B(\{1,2\})^{-1} \begin{bmatrix} b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}. \tag{4.17.13}$$

Έστω ότι ο $B(\{1,2\})^{-1}$ έχει στοιχεία $c_{ij},\ i,j = 3, \dots, n$. Με επαγωγή ο $C = [c_{ij}]$ είναι **IM**. Το δεξιό μέλος της (16.13) είναι

$$\textstyle\sum_{i,j=3}^{n} b_{2i}c_{ij}b_{j1} = \sum_{i\neq j} b_{2i}c_{ij}b_{j1} + \sum_{i=3}^{n} b_{2i}c_{ii}b_{i1}. \tag{4.17.14}$$

Αφού $c_{ij} \leq 0, i \neq j$ ο πρώτος όρος της (4.16.14) είναι μεγαλύτερος από $\sum_{i\neq j} b_{2i}c_{ij}b_{ji}b_{i1}$ από το γινόμενο διαδρομής. Λόγω της ανισότητας Fischer [HJ91] για τον **IM** πίνακα $B(\{1,2\})$ έχουμε $\det B(\{1,2\}) \leq b_{ii} \det B(\{1,2,i\}) = L \det B(\{1,2,i\})$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{L} \leq \frac{\det B(\{1,2,i\})}{\det B(\{1,2\})} = c_{ii}$$

Συνδυάζοντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{2i}c_{ij}b_{j1} &= \sum_{i=3}^{n}\sum_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n} b_{2i}c_{ij}b_{j1} + \sum_{i=3}^{n}(b_{2i}c_{ii}b_{i1} + b_{2i}c_{ii}b_{ii}b_{i1} - b_{2i}c_{ii}b_{ii}b_{i1}) \\
&\leq \sum_{i=3}^{n}\sum_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n} b_{2i}c_{ij}b_{ji}b_{i1} + \sum_{i=3}^{n}(1-b_{ii})b_{2i}c_{ii}b_{i1} \\
&= \sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1}\sum_{j=3}^{n} c_{ij}b_{ji} + \sum_{i=3}^{n}(1-L)b_{2i}c_{ii}b_{i1} \\
&= \sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1}(1+(1-L)c_{ii}) \\
&\leq \sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1}\left(1+(1-L)\frac{1}{L}\right) \\
&= \frac{1}{L}\sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1} = \frac{1}{L}\sum_{i=3}^{n} a_{2i}a_{i1} \leq \frac{1}{L}(U(A)a_{21}) \leq a_{21}
\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Αν ο κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon & \cdots & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \varepsilon & 1-\varepsilon \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \cdots & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $0 < \varepsilon < 1$ και $C = [c_{ij}]$ είναι ο συμπαράγοντας του $B = A + sI$ τότε για μικρό ε

$$\begin{aligned} c_{n1} &\approx (-1)^{n+1}(-1)^n((1+s)^{n-2} - (n-2)(1+s)^{n-3}) \\ &= -(1+s)^{n-3}(s-(n-3)). \end{aligned}$$

Επομένως αν $0 \le s \le L-1 \le n-3$, $\det B > 0$ και $c_{n1} > 0$. Οπότε το $(1,n)$ στοιχείο του B^{-1} είναι θετικό. Άρα ο B δεν είναι **IM**. ■

Θεώρημα 17.12. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, με $n \ge 3$. Τότε ο $A + sI$ είναι **IM** για κάθε $s \ge n-3$.

Παράδειγμα 17.13. Έστω ο A ένας 4×4 κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.10 & 0.40 & 0.30 \\ 0.40 & 1 & 0.40 & 0.65 \\ 0.10 & 0.20 & 1 & 0.60 \\ 0.15 & 0.30 & 0.60 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο A δεν είναι **IM** (το (2,3) στοιχείο του A^{-1} είναι θετικό). Ο ακριβής υπολογισμός δίνει $U(A) = \frac{1}{a_{31}}(a_{32}a_{21} + a_{34}a_{41}) = 1.7 > 1$. Επομένως ο $A + sI$ είναι **IM** για $s \ge 0.7$.

Μία συνέπεια του Θεωρήματος 17.5 είναι η ακόλουθη:

Πόρισμα 17.14. Έστω A ένας μη αρνητικός $n \times n$ πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία και έστω D και E θετικοί, διαγώνιοι πίνακες, τέτοιοι ώστε $DE = (n-2)[\operatorname{diag}(A)]^{-1}$. Τότε αν $DAE - (n-3)I$ είναι **SPP**, ο A είναι **IM**.

Εάν το $\mathbb{C}$ είναι μια κατηγορία πινάκων, οι δυικοί Hadamard του $\mathbb{C}$, που συμβολίζεται ως $\mathbf{IM^D}$, είναι το σύνολο των πινάκων $A \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $A \in SC$ εάν και μόνο εάν $A \circ B \in \mathbb{C}$ για όλα τα $B \in \mathbb{C}$. Στο [HJ91] δόθηκε ένα παράδειγμα για να δείξει ότι το γινόμενο Hadamard δύο ανεξάρτητων αντίστροφων πινάκων M δεν χρειάζεται να είναι **IM**. Αργότερα δόθηκε ένα συμμετρικό παράδειγμα 4×4 [WZZ00]. Δεδομένου ότι το γινόμενο Hadamard δύο αντίστροφων πινάκων M είναι αντίστροφος M πίνακας όταν $n \le 3$, (Ενότητα 16), αυτό διευκρινίζει πλήρως πότε η κλάση των **IM** πινάκων περιέχεται στο δυικό Hadamard. Προφανώς, οι θετικοί διαγώνιοι πίνακες και ο J, ο πίνακας με στοιχεία μονάδες, ανήκουν στη δυική Hadamard κλάση των πινάκων $n \times n$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Αφού οι **IM** πίνακες είναι κλειστοί κάτω από θετικό διαγώνιο πολλαπλασιασμό, το τελευταίο υποδηλώνει ότι οι θετικοί πίνακες τάξης 1 επίσης ανήκουν στη δυική κλάση. Πέρα από αυτό, το ερώτημα είναι: οι $n \times n$ **IM** πίνακες, $n \ge 4$, έχουν κάτι άλλο στο δυικό Hadamard; Σημειώνεται στην Ενότητα 2 ότι, εάν ο $A = [a_{ij}]$ είναι $n \times n$ **IM** πίνακας, τότε υπάρχουν θετικοί διαγώνιοι πίνακες D και E τέτοιοι ώστε $A = DA_1E$ όπου ο $A_1 = [\alpha_{ij}]$ είναι ένα κανονικοποιημένος αντίστροφος πίνακας M. Αφού $D(A \circ B)E = A \circ (DBE)$ για θετικούς διαγώνιους πίνακες D και E, χρειάζεται μόνο να δοκιμάσουμε τον A με κανονικοποιημένους IM πίνακες B για να δούμε αν ο A είναι στο δυικό Hadamard.

Θεώρημα 17.15. Έστω πίνακας $A > 0$ και D και E θετικοί διαγώνιοι πίνακες τέτοιοι ώστε ώστε $DE = (n-2)[\mathrm{diag}(A)]^{-1}$. Τότε αν $DAE - (n-3)I$ είναι **PP**, ο A είναι **IM**.

Θεώρημα 17.16. Έστω A ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, με $n \geq 3$. Τότε υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός $s_0(A)$ τέτοιος ώστε για όλα τα $s \geq s_0(A)$, ο $A + sI$ είναι **IM**.

Απόδειξη Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, s ένας πραγματικός αριθμός και $c_{ij}(s)$ ο (i,j) συμπαράγοντας του $A + sI$ με $i \neq j$. Τότε

$$\begin{aligned} c_{ij}(s) &= (-1)^{i+j} \det(A + sI)(i,j) \\ &= -\det \begin{bmatrix} a_{ij} & A[i,\sigma] \\ A[\sigma,j] & (A+sI)[\sigma] \end{bmatrix} \\ &= -a_{ij}(1+s)^{n-2} + \text{όροι μικρότερης τάξης στο } (1+s), \end{aligned}$$

όπου $\sigma = \langle n \rangle - \{i,j\}$. Αφού $c_{ij}(s) \to -\infty$ καθώς το $s \to \infty$ υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός $s_{ij}(A)$ τέτοιος ώστε $c_{ij}(s) \leq 0$ για όλα τα $s \geq s_{ij}(A)$. Έστω $s_0(A) = \max\limits_{i \neq j} s_{ij}(A)$. Τότε απο το Θεώρημα 4.17.12 ο $A + sI$ είναι **IM** για όλα τα $s \geq s_0(A)$. ■

Λόγω της ανισότητας Fischer [HJ91] για τον **IM** πίνακα $B(\{1,2\})$ έχουμε $\det B(\{1,2\}) \leq b_{ii} \det B(\{1,2,i\}) = L \det B(\{1,2,i\})$ έτσι ώστε $\frac{1}{L} \leq \frac{\det B(\{1,2,i\})}{\det B(\{1,2\})} = c_{ii}$.

Συνδυάζοντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} b_{2i}c_{ij}b_{j1} &= \sum_{i=3}^{n}\sum_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n} b_{2i}c_{ij}b_{j1} + \sum_{i=3}^{n}(b_{2i}c_{ii}b_{i1} + b_{2i}c_{ii}b_{ii}b_{i1} - b_{2i}c_{ii}b_{ii}b_{i1}) \\ &\leq \sum_{i=3}^{n}\sum_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n} b_{2i}c_{ij}b_{ji}b_{i1} + \sum_{i=3}^{n}(1-b_{ii})b_{2i}c_{ii}b_{i1} \\ &= \sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1}\sum_{j=3}^{n} c_{ij}b_{ji} + \sum_{i=3}^{n}(1-L)b_{2i}c_{ii}b_{i1} \\ &= \sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1}(1 + (1-L)c_{ii}) \\ &\leq \sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1}\left(1 + (1-L)\frac{1}{L}\right) \\ &= \frac{1}{L}\sum_{i=3}^{n} b_{2i}b_{i1} = \frac{1}{L}\sum_{i=3}^{n} a_{2i}a_{i1} \leq \frac{1}{L}(U(A)a_{21}) \leq a_{21} \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού. Αν ο κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon & \cdots & 1-\varepsilon & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \varepsilon & 1-\varepsilon \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \cdots & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $0 < \varepsilon < 1$ και $C = [c_{ij}]$ είναι ο συμπαράγοντας του $B = A + sI$ τότε για μικρό ε

$$\begin{aligned} c_{n1} &\approx (-1)^{n+1}(-1)^n((1+s)^{n-2} - (n-2)(1+s)^{n-3}) \\ &= -(1+s)^{n-3}(s-(n-3)). \end{aligned}$$

Επομένως αν $0 \le s \le L-1 \le n-3$, $\det B > 0$ και $c_{n1} > 0$. Οπότε το $(1,n)$ στοιχείο του B^{-1} είναι θετικό. Άρα ο B δεν είναι **IM**. ■

Θεώρημα 17.17. Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας $n \times n$, με $n \ge 3$. Τότε ο $A + sI$ είναι **IM** για κάθε $s \ge n-3$.

Παράδειγμα 17.18. Έστω ο A ένας 4×4 κανονικοποιημένος **SPP** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.10 & 0.40 & 0.30 \\ 0.40 & 1 & 0.40 & 0.65 \\ 0.10 & 0.20 & 1 & 0.60 \\ 0.15 & 0.30 & 0.60 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο A δεν είναι **IM** (το (2,3) στοιχείο του A^{-1} είναι θετικό). Ο ακριβής υπολογισμός δίνει $U(A) = \frac{1}{a_{31}}(a_{32}a_{21} + a_{34}a_{41}) = 1.7 > 1$. Επομένως ο $A + sI$ είναι **IM** για $s \ge 0.7$.

Μία συνέπεια του Θεωρήματος 17.17 είναι η ακόλουθη:

Πόρισμα 17.14. Έστω A ένας μη αρνητικός $n \times n$ πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία και έστω D και E θετικοί, διαγώνιοι πίνακες, τέτοιοι ώστε $DE = (n-2)[\mathrm{diag}(A)]^{-1}$. Τότε αν $DAE - (n-3)I$ είναι **SPP**, ο A είναι **IM**.

Ας παρατηρήσουμε ότι $(DAE) \circ (FBG) = DF(A \circ B)GE$ για θετικούς διαγώνιους πίνακες D, E, G, H και ότι ο $A \circ B$ είναι κανονικοποιημένος SPP αν είναι οι A, B.

Λήμμα 17.20 Έστω A ένας $n \times n$ κανονικοποιημένος IM πίνακας. Τότε ισχύει $(A + (n-3)I_n) \in \mathbf{IM^D}$).

Απόδειξη Έστω A ένας $n \times n$ κανονικοποιημένος IM πίνακας και B ένας $n \times n$ IM πίνακας.

Τότε υπάρχουν θετικοί, διαγώνιοι πίνακες D και E τέτοιοι ώστε $B = DB_1E$ όπου B_1 ένας $n \times n$ κανονικοποιημένος IM πίνακας $A + (n-3)I_n) \circ B = D[A \circ B_1 + (n-3)I_n]E$ (ολοκληρωση αποδειξης)

Θεώρημα 17.21. Αν ο A ένας $n \times n$ IM πίνακας και έστω D και E θετικοί, διαγώνιοι πίνακες, τέτοιοι ώστε ο $A_1 = DAE$ είναι κανονικοποιημένος, τότε ο $(A + (n-3)I_n)D^{-1}E^{-1} \in \mathbf{IM^D}$.

Απόδειξη Προκύπτει από το Λήμμα 4.17.23 ότι $(A_1 + (n-3)I_n) \in \mathbf{IM^D}$. Επομένως $(A + (n-3)I_n)D^{-1}E^{-1} = D^{-1}(A_1 + (n-3)I_n)E^{-1} \in \mathbf{IM^D}$. (ολοκληρωση αποδειξης)

Όπως σημειώσαμε νωρίτερα, το γινόμενο Hadamard μεταξύ δύο IM πινάκων δεν είναι απαραίτητα IM για $n > 3$. Όμως, λόγω του Λήμματος 17.23 το γινόμενο Hadamard μεταξύ περισσοτέρων IM πινάκων, είναι IM. ■

17.4 Διαστήματα των IM πινάκων

Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τότε ορίζουμε το **διάστημα από τον $\boldsymbol{A}$ στον $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{I(A,B)}$,** το σύνολο των πινάκων $C = [c_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ για τους οποίους ισχύει ότι $\min\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq c_{ij} \leq \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ενώ οι **κορυφές από τον $\boldsymbol{A}$ στον $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{V(A,B)}$,** το σύνολο των πινάκων $C = [c_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ για τους οποίους ισχύει $c_{ij} = a_{ij}$ ή b_{ij}.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι: δοσμένου κάποιου διαστήματος που ορίζεται από δύο πίνακες IM, πότε είναι IM όλοι οι πίνακες στο ίδιο διάστημα; Θα δείξουμε ότι ισχύει αν και μόνο αν $V(A,B) \subseteq \mathbf{IM}$.

Παράδειγμα 17.22. Έστω οι IM πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & .4 & .3 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix} \leq B = \begin{bmatrix} 1 & .9 & .6 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $C = \begin{bmatrix} 1 & .6 & .3 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix}$ ικανοποιεί την ανισότητα $A \leq C \leq B$ αλλά ο C δεν είναι IM αφού $(C^{-1})_{13} > 0$.

Το συμπέρασμα του Παραδείγματος 17.22 είναι αληθές ακόμα και αν περιορίσουμε το σύνολο των πινάκων σε αυτούς που ο αντίστροφος του είναι τριγωνικός M πίνακας.

Μία **ευθεία πίνακα** είναι μία γραμμή ή μία στήλη του πίνακα.

Λήμμα 17.23. Έστω ότι $A[a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}] \in \mathbf{IM}$ και ότι $a_{ij} = b_{ij}$ εκτός ίσως από τα στοιχεία μίας ευθείας. Τότε για $0 \leq t \leq 1$, $tA + (1-t)B \in \mathbf{IM}$.

Απόδειξη Αφού οι A και B είναι IM, όλες οι κύριες και σχεδόν κύριες υπορίζουσες έχουν το ίδιο πρόσημο. Αφού όλα τα διαφορετικά στοιχεία βρίσκονται σε μία ευθεία, κάθε υπορίζουσα του $tA + (1-t)B$ είναι γραμμική συνάρτηση του t. Έτσι όλες οι κύριες και σχεδόν κύριες υπορίζουσες έχουν το ίδιο πρόσημο με τις αντίστοιχες των A και B. Αυτό σημαίνει ότι ο $tA + (1-t)B$ είναι IM. ■

Πόρισμα 17.24. Έστω ότι $A[a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}] \in \mathbf{IM}$ και ότι $a_{ij} = b_{ij}$ εκτός ίσως από ένα στοιχείο (r,s). Τότε $0 \leq t \leq 1$, $tA + (1-t)B \in \mathbf{IM}$.

Παράδειγμα 17.25. Έστω οι IM πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix} \leq B = \begin{bmatrix} 1 & .6 & 0 \\ .6 & 1 & 0 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για $0 < t < 1$, ο

$$tA + (1-t)B = \begin{bmatrix} 1 & .6(1-t) & 0 \\ .6 & 1 & .6t \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν μπορεί να είναι IM αφού είναι αναγώγιμος και περιέχει ένα μηδέν στοιχείο.

Θεώρημα 17.26. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε $V(A,B) \subseteq$ **IM** αν και μόνο αν $I(A,B) \subseteq$ **IM**

Απόδειξη Πρώτα υποθέτουμε ότι $V(A,B) \subseteq$ **IM**. Τότε οι A, B είναι IM. Έστω $C = [c_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$

Σημειώνουμε ότι σχετικά με το Θεώρημα 4.17.21, το $V(A,B)$ αποτελείται από τον A, B και $\begin{bmatrix} 1 & .4 & .6 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix} \in IM$ και $\begin{bmatrix} 1 & .9 & .3 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix} \notin IM$. Έτσι βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να ισχύει η αλήθεια του θεωρήματος αν όλοι οι κόμβοι αντικατασταθούν από όλους τους κόμβους εκτός από έναν. Επίσης δεν ισχύει πάντα η ακόλουθη διάταξη

$$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow (-1)^{i+k} a_{ik} \leq (-1)^{i+k} b_{ik}, \;\; i, k = 1, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 17.27. Έστω οι IM πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & .9 & .6 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .6 & 1 \end{bmatrix} \preccurlyeq B = \begin{bmatrix} 1 & .4 & .6 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $C = \begin{bmatrix} 1 & .9 & .6 \\ .6 & 1 & .6 \\ .4 & .3 & 1 \end{bmatrix}$ ικανοποιεί την $A \preccurlyeq C \preccurlyeq B$ αλλά δεν είναι IM πίνακας αφού $(C^{-1})_{32} > 0$.

Τέλος, ας θεωρήσουμε την μερική διάταξη $A \preccurlyeq B$ που αντιστοιχεί στο μοτίβο των προσήμων του αντίστροφου ενός IM πίνακα,

$$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow = a_{ik} \leq -b_{ki}, \;\; i \neq k; \;\; a_{ik} \leq b_{ik}, \;\; i, k = 1, \ldots, n$$

Τότε το θεώρημα 17.26 μας λέει ότι δεν μπορεί η σχέση πάντα ακόμη και όταν οι ακριανοί πίνακες είναι IM.

18 Ανισότητες Οριζουσών

Κλασσικές ανισότητες οριζουσών, σχετισμένες με τα ονόματα των Hadamard, Fischer, Koteljansii και Szasz, όσον αφορά **M** πίνακες είναι γνωστές από καιρό. Λόγω της ανισότητας

Jacobi μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ισχύουν και για **IM** πίνακες. Το πιο γενικό αποτέλεσμα είναι αυτό του Koteljanskii:

Θεώρημα 18.1. Αν J, K είναι δείκτες από το σύνολο $\langle n \rangle$ και $A \in$ **IM** τότε

$$\det A[J \cup K] \det A[J \cap K] \leq \det A[J] \det A[K].$$

Απόδειξη

Οι ανισότητες των Hadamard, Fischer και Szasz δίνονται παρακάτω:

Πόρισμα 18.2. (Hadamard) Αν $A \in$ **IM** τότε $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Πόρισμα 18.3. (Fischer) Αν $A \in$ **IM** και $J \subseteq \langle n \rangle$ τότε $\det A \leq \det A[J] \det A[J^c]$.

Πόρισμα 18.4. (Szasz) Αν $A \in$ **IM** και Π_k είναι το γινόμενο όλων των $\binom{n}{k}$ κύριων υποριζουσών του A με μέγεθος $k \times k$ τότε

$$\Pi_1 \geq (\Pi_2)^{\frac{1}{\binom{n-1}{1}}} \geq (\Pi_2)^{\frac{1}{\binom{n-1}{2}}} \geq \cdots \geq \Pi_n.$$

Υπάρχουν ανισότητες μεταξύ των γινομένων των κύριων υποριζουσών για οποιοδήποτε $A \in IM$ πέρα αυτών στο Θεώρημα 18.1. Ας θεωρήσουμε δύο συλλογές δεικτών $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ και $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$, $\alpha_i, \beta_j \subseteq \langle n \rangle$, $i.j \in \{1, \ldots, p\}$. Για οποιονδήποτε δείκτη $J \subseteq \langle n \rangle$ ορίζουμε δύο συναρτήσεις

$$f_\alpha(J) \equiv \text{ο αριθμός των συνόλων } \alpha_i \text{ τέτοια ώστε } J \subseteq \alpha_i$$

και

$$F_\alpha(J) \equiv \text{ο αριθμός των συνόλων } \alpha_i \text{ τέτοια ώστε } \alpha_i \subseteq J$$

Για τις δύο συλλογές α, β έχουμε τα εξής δύο αξιώματα:

$$f_\alpha(\{i\}) = f_\beta(\{i\}), \quad i = 1, \ldots, n$$

και

$$F_\alpha(J) \geq F_\beta(J) \quad \text{για κάθε } J \subseteq N\,.$$

Θεώρημα 18.5. Για οποιεσδήποτε συλλογές συνόλων δεικτών α, β οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) $\dfrac{\prod_{i=1}^{t} \det A[\alpha_i]}{\prod_{i=1}^{t} \det A[\beta_i]}$ είναι φραγμένο για κάθε $A \in$ **IM**,

(ii) $\prod_{i=1}^{t} \det A[\alpha_i] \leq \prod_{i=1}^{t} \det A[\beta_i]$ για κάθε $A \in$ **IM**,

(iii) οι συλλογές δεικτών α, β ικανοποιούν τα ανωτέρω αξιώματα.

Το παραπάνω Θεώρημα αφήνει μόνο την ερώτηση: υπάρχουν ανισότητες που ικανοποιούνται από τις μη κύριες υποορίζουσες ενός πίνακα $A \in$ **IM**; Επειδή οι **IM** πίνακες είναι **P** πίνακες υπάρχουν μερικές προφανείς ανισότητες, όπως

$$\det A[\alpha + i, \alpha + j] \det A[\alpha + j, \alpha + i] \leq \det A[\alpha + i] \det A[\alpha + j]$$

όπου $i, j \notin \alpha$. Υπάρχει επίσης μία οικογένεια ανισοτήτων μεταξύ σχεδόν κύριων υποριζουσών που επεκτείνουν το Θεώρημα 4.11.1. Θυμίζουμε ότι για $\alpha \subseteq \beta \subseteq \langle n \rangle$

$$\det A[\beta] \leq \det A[\beta] \left(\prod_{k \in \beta - \alpha} a_{kk} \right)$$

Αυτή προκύπτει από την σχέση $\det A[\beta] \leq \det A[\alpha] \det A[\beta - \alpha]$ και την ανισότητα Hadamard.

Θεώρημα 18.6. Έστω $\alpha \subseteq \beta \subseteq \langle n \rangle$ και υποθέτουμε ότι $A = [a_{ij}] \in$ **IM** και μεγέθους $n \times n$. Τότε αν $\det A[\alpha + i, \alpha + j] \neq 0$, τότε

$$\frac{|\det A[\beta + i, \beta + j]|}{|\det A[\alpha + i, \alpha + j]|} \leq \frac{\det A[\beta \cup \{i, j\}]}{\det A[\alpha \cup \{i, j\}]} \leq \det A[\beta - \alpha] \leq \prod_{i \in \beta - \alpha} a_{ii}$$

όπου $i \neq j,\ \ i, j \notin \beta$. Αν $\det A[\alpha + i, \alpha + j] = 0$ τότε $\det A[\beta + i, \beta + j] = 0$ για κάθε $i \neq j,\ \ i, j \notin \beta$.

Άλλες ανισότητες για **IM** πίνακες δίνονται στη [5b].

19 Θεωρία συμπλήρωσης

Ένας **μερικός πίνακας** είναι ένας πίνακας με μερικά στοιχεία γνωστά και άλλα μη προσδιορισμένα, ελεύθερα να τα διαλέξουμε εμείς. Συμπλήρωση ενός μερικού πίνακα είναι ο συμβατικός πίνακας που προκύπτει διαλέγοντας τιμές για τα απροσδιόριστα στοιχεία.

Εμάς μας ενδιαφέρει η συμπλήρωση ενός μερικού **PP** πίνακα (**SPP** πίνακα). Κάνουμε την παραδοχή ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι 1 αφού οι **PP** πίνακες είναι αναλλοίωτοι στην θετική διαγώνια κλιμάκωση.

Θεώρημα 19.1. Κάθε μερικός **PP** (**SPP**) πίνακας έχει ένα **PP** (**SPP**) συμπλήρωμα.

Παράδειγμα 19.2. Έστω ο μερικός **IM** πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & ? & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & ? \\ ? & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} & ? & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ο A δεν είναι μερικός **PP** αφού $a_{12} a_{23} a_{34} = \frac{1}{8} > \frac{1}{9} = a_{14}$. Άρα ο A δεν μπορεί να συμπληρωθεί σε **PP** πίνακα και αφού κάθε IM πίνακας είναι **PP**, δεν υπάρχει συμπλήρωμα **IM** πίνακα.

Για την ακρίβεια, ακόμα και αν ένας μερικός **IM** πίνακας είναι μερικός **SPP** μπορεί να μην έχει συμπλήρωμα **IM**

Ένα διάγραμμα χορδής λέγεται k-χορδή αν δύο μέγιστα cliques δεν τέμνονται σε παραπάνω από k κορυφές.

Θεώρημα 19.3 Έστω G ένα διάγραμμα 1-χορδής σε n κορυφές. Τότε κάθε $n \times n$ συμμετρικός IM πίνακας (SIM) πίνακας A του οποίου το διάγραμμα έχει στοιχεία στο G έχει ένα συμπλήρωμα SIM. Επιπλέον, υπάρχει ένα απλό συμπλήρωμα SIM, έστω A_1 του A του οποίου ο αντίστροφος έχει στοιχεία μηδέν σε κάθε μη προσδιορισμένη θέση του A και ο A_1 είναι η μοναδική ορίζουσα που μεγιστοποιεί το συμπλήρωμα SIM του A.

Αυτό όμως δεν είναι αληθές γενικά για διαγράμματα χορδών. Θεωρείστε τον μερικό SIM πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{9}{40} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & x \\ \frac{9}{40} & 1 & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{4} \\ x & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας την (9.11) ότι δεν υπάρχει τιμή του x για την συμπλήρωση SIM.

Θεώρημα 19.4. Έστω ο μερικός πίνακας SIM

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & & & & & a_n \\ a_1 & 1 & a_2 & & & ? & \\ & a_2 & . & & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & ? & & & . & . & a_{n-1} \\ a_n & & & & & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

με $n \geq 4$. Τότε ο A έχει μερική συμπλήρωση SIM αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι κυκλικές συνθήκες

$$\prod_{j \neq i} a_j \leq a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Θεώρημα 19.5. Έστω A ένας $n \times n$ μερικός SIM πίνακας, τα διαγράμματα του οποίου είναι μπλοκ γραφήματα. Τότε ο A έχει μερική συμπλήρωση SIM αν και μόνο αν όλοι οι ελάχιστοι κύκλοι στο G ικανοποιούν τις κυκλικές συνθήκες.

20 Σύνδεση με άλλες κλάσεις πινάκων

Έστω $A \geq 0$. Ο A είναι **ολικά μη αρνητικός** (**ολικά θετικός**) αν όλες οι υπορίζουσες, όλων των τάξεων είναι μη αρνητικές (θετικές). Επιπλέον, ο A ονομάζεται ταλαντωτικός, αν είναι ολικά μη αρνητικός και μία δύναμη του A είναι ολικά θετική.

Θεώρημα 20.1. Έστω A ένας αντιστρέψιμος, ολικά μη αρνητικός πίνακας. Τότε ο A^{-1} είναι M πίνακας αν και μόνο αν $\det A(i,j) = 0$ για $i + j = 2k$, όπου k είναι θετικός ακέραιος και $i \neq j$.

Ένας πίνακας Jacobi είναι ένας τετράγωνος πίνακας $A = [a_{ij}]$ του οποίου τα πραγματικά στοιχεία ικανοποιούν την εξίσωση $a_{ij} = 0$ για $|i - j| > 1$. Επιπρόσθετα, ο A είναι κανονικός πίνακας Jacobi αν $a_{i,i+1}, a_{i+1,i} < 0$ για $i = 1,2, \ldots, n-1$.

Θεώρημα 20.2. Έστω A ένας τετράγωνος πίνακας. Θεωρούμε τις παρακάτω συνθήκες

(i) Ο A^{-1} είναι ολικά μη αρνητικός,
(ii) Ο A είναι M πίνακας,
(iii) Ο A είναι πίνακας Jacobi.

Οποιεσδήποτε δύο συνθήκες υπονοούν την τρίτη.

Θεώρημα 20.3. Έστω A ένας τετράγωνος πίνακας. Θεωρούμε τις παρακάτω συνθήκες

(i) Ο A^{-1} είναι ταλαντωτικός,
(ii) Ο A είναι M πίνακας,
(iii) Ο A είναι κανονικός πίνακας Jacobi.

Οποιεσδήποτε δύο συνθήκες υπονοούν την τρίτη.

Θεώρημα 20.4. Έστω A ένας τετράγωνος M-πίνακας. Τότε ο A^{-1} είναι ολικά μη αρνητικός αν και μόνο αν ο A είναι πίνακας Jacobi και ο A^{-1} είναι ταλαντωτικός αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός πίνακας Jacobi.

Θεώρημα 20.5. Έστω A ένας αντιστρέψιμος, τετράγωνος, ολικά μη αρνητικός πίνακας. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο A^{-1} είναι M πίνακας,
(ii) $\det A(i,j) = 0$ αν $|i - j| = 2$,
(iii) Ο A^{-1} είναι τριδιαγώνιος πίνακας,
(iv) Για κάθε $k \in \{1,2, \ldots, n-1\}$, $\det A([i_1, \ldots, i_k], [j_1, \ldots, j_k]) = 0$ αν $|i_1 - j_l| > 1$ για κάποιο $l \in \{1, \ldots, k\}$.

Θεώρημα 20.6 Έστω ένας αντιστρέψιμος, τετράγωνος, M-πίνακας A. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο A^{-1} είναι ολικά θετικός πίνακας,
(ii) Ο A είναι τριδιαγώνιος πίνακας.

21 Χαρακτηρισμοί Γράφων των IM πινάκων

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ονομάζεται **ουσιαστικά τριγωνικός** αν για κάποιο πίνακα μετάθεσης P ο $P^{-1}AP$ είναι τριγωνικός πίνακας. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $G(A) = (V(A) = N, E(A))$ το αντίστοιχο γράφημα του, δηλαδή $(i,j) \in E(A)$ αν και μόνο αν $a_{ij} \neq 0$ όπου $V(A)$ είναι το σύνολο των κορυφών του και $E(A)$ το σύνολο των ακμών του. Ένας δρόμος από την κορυφή i στην κορυφή j ονομάζεται ο **δρόμος** $\boldsymbol{(i,j)}$. Ο δρόμος μήκους k, όπου k ο αριθμός των προσανατολισμένων ακμών της διαδρομής, ονομάζεται $\boldsymbol{k -}$ **δρόμος**. Ο δρόμος, μήκους k από το i στο j συμβολίζεται $(i,j|k)$. Αν συμβολίσουμε με H την ένωση δύο γράφων G_1 και G_2, το G_1 αποτελείται από μία κορυφή και το G_2 αποτελείται από 2-διαδρομήςς. Τότε,

Θεώρημα 21.1 Ένας ουσιαστικά τριγωνικός πίνακας (0,1) είναι IM αν και μόνο αν ο σχετικός γράφος είναι σε μερική τάξη και για κάθε i,j,k αν το $(i,j|k)$ είναι μέγιστο $(i,j) -$ δρόμος, τότε είναι ο μοναδικός $k -$ δρόμος.

Θεώρημα 21.2 Ένας πίνακας (0,1) είναι IM αν και μόνο αν το $G(A)$ επιβάλει μερική τάξη στις κορυφές του και δεν περιέχει γράφο H.

Θεώρημα 21.3 Έστω ο πίνακας $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ και αντιστρέψιμος (0,1) πίνακας με $B = [b_{ij}] = A^{-1}$. Τότε αν $i \neq j$ και $a_{ij} = 0$ και $b_{ij} = 0$.

Για ένα πίνακα B, ορίζουμε τον πίνακα B_{IM} ως το σύνολο

$$B_{IM} = \{\alpha \in \mathbb{R}: \alpha I + B \in IM\}.$$

Τότε

Θεώρημα 21.4 Έστω B ένας $n \times n$ μη μηδενικός πίνακας. Τότε η ακτίνα B_{IM} είναι κλειστή, δηλαδή $B_{IM} = [a_0, \infty)$ για κάποιο $a_0 \geq 0$, αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο $\beta_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

(i) $B + \beta_0 I \notin IM$
(ii) $B + \beta_0 I$ είναι θετικός και σταθερός πίνακας και το ίδιο και οι κύριοι υποπίνακες του τάξης $n - 1$

Θεώρημα 21.5. Έστω A ένας ουσιαστικά τριγωνικός πίνακας, μη αρνητικός και αντιστρέψιμος και ο A_1 ο κανονικοποιημένος πίνακας. Τότε ο $A_1 \in IM$ αν και μόνο αν $G(A_1)$ είναι σε μερική τάξη και το βάρος των συλλογών των άρτιων διαδρομών ανάμεσα σε δύο κορυφές δεν ξεπερνά το βάρος των περιττών διαδρομών.

Θεώρημα 21.6 Ένας μη αρνητικός, τετράγωνος, πίνακας A είναι IM αν και μόνο αν

(i) για κάθε δύο διαφορετικούς δείκτες i και j στο $G(A)$, το άθροισμα των άρτιων δρόμων (i,j) δεν ξεπερνάει αυτό των περιττών δρόμων (i,j)
(ii) όλες οι κύριες υπορίζουσες του A είναι θετικές

22 Προβλήματα γραμμικής παρεμβολής

Το **πρόβλημα γραμμικής παρεμβολής** για μία κλάση πινάκων $\complement$ ζητάει τα διανύσματα x και y για τα οποία υπάρχει πίνακας $A \in \complement$ τέτοιος ώστε $Ax = y$. Στο [JS01c] το γραμμικό πρόβλημα παρεμβολής λύνεται για αρκετές σημαντικές κλάσεις πινάκων, μία από τις οποίες είναι οι Μ πίνακες.

23 Πίνακες Newton

Για κάθε $n \times n$, πραγματικό πίνακα A με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ έστω

$$S_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$$

και $c_k = \frac{1}{\binom{n}{k}} S_k$ με $c_0 = 1$. Ο πίνακας A είναι ένας **πίνακας Newton** αν $c_k^2 \geq c_{k-1} c_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$. Αν κάθε ένα $c_k > 0$, ο A ονομάζεται **p-Newton**. Έχει αποδειχθεί ότι οι Μ πίνακες είναι p-Newton. Αφού οι p-Newton πίνακες είναι κλειστοί στην αντιστροφή, συνεπάγεται ότι και οι **IM** πίνακες είναι p-Newton.

24 Συμπλήρωμα Perron IM πινάκων

Για ένα $n \times n$, μη αρνητικό, μη αναγώγιμο πίνακα A, $\beta \subset \langle n \rangle$ και $\alpha \subset \langle n \rangle - \beta$, το συμπλήρωμα Perron του $A[\beta]$ ορίζεται ως

$$\wp(A/A[\beta]) = A[\alpha] + A[\alpha, \beta](\rho(A)I - A[\beta])^{-1} A[\beta, \alpha]).$$

Μπορεί να δειχθεί ότι $\rho(A/A[\beta]) = \rho(A)$ και ότι αν ο A είναι στοχαστικός στις γραμμές, τότε είναι και ο $\wp(A/A[\beta])$.

Έχει σημασία η ακόλουθη ερώτηση: πότε είναι ένα συμπλήρωμα Perron μη αναγώγιμο; Στο [Nab00] έχει δειχθεί ότι αν ο A είναι IM, μη αναγώγιμος πίνακας, τότε το συμπλήρωμα Perron είναι επίσης.

Θεώρημα 24.1. Έστω A ένας IM, μη αναγώγιμος πίνακας, $\beta \subset \langle n \rangle$ και $\alpha \subset \langle n \rangle - \beta$. Τότε για κάθε $t \in [\rho(A), +\infty)$ ο πίνακας

$$\wp_t(A/A[\beta]) = A[\alpha] + A[\alpha, \beta](tI - A[\beta])^{-1} A[\beta, \alpha])$$

είναι αντιστρέψιμος και είναι IM πίνακας.

Επίσης, για μη αναγώγιμους, IM πίνακες έχει αποδειχθεί το ακόλουθο:

Θεώρημα 24.2. Έστω $A \in IM$ με τον A^{-1} μη αναγώγιμο πίνακα και τριδιαγώνιο. Τότε για κάθε υποσύνολο $\beta \subset \langle n \rangle$ και $\alpha \subset \langle n \rangle - \beta$ το συμπλήρωμα Perron

$$\wp(A/A[\beta]) = A[\alpha] + A[\alpha,\beta](I - A[\beta])^{-1}A[\beta,\alpha])$$

είναι IM πίνακας του οποίου ο αντίστροφος είναι μη αναγώγιμος.

Επιπρόσθετα, έχει δειχθεί ότι για όλους τους $n \times n$, IM πίνακες, οι αντίστροφοι των κύριων υποπινάκων του A βρίσκονται μεταξύ των αντίστροφων των συμπληρωμάτων Perron και των αντίστροφων των συμπληρωμάτων Schur του A.

25 Γινόμενα IM πινάκων

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Εξετάζουμε την ακόλουθη ερώτηση: πότε ένας πίνακας A είναι γινόμενο M ή IM πινάκων;. Έστω Π το σύνολο των IM πινάκων που είναι πεπερασμένα γινόμενα IM πινάκων. Τότε $A \in \Pi$ αν και μόνο αν $A = (L_1U_1)(L_2U_2)\cdots(L_kU_k)$ όπου L και U είναι αντίστοιχα τριγωνικός κάτω και επάνω.

Έστω $R(A) = \frac{\det A}{\prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$ και έστω Π_R το σύνολο των πινάκων $A \in IM$ για τους οποίους $R(A) = 1$. Υπάρχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να ανήκει ένας πίνακας στο Π_R.

26 Τοπολογική κλειστότητα των IM πινάκων

Λέμε ότι ο πίνακας A ανήκει στη τοπολογική κλειστότητα των IM πινάκων, αν ο A είναι το όριο μίας συγκλίνουσας ακολουθίας πινάκων IM. Τότε γράφουμε $A \in \overline{IM}$.

Θεώρημα 26.1. Έστω A ένας $p \times p$ I πίνακας και έστω Q ένας $p \times n$ μη αρνητικός πίνακας με ακριβώς ένα μηδέν σε κάθε στήλη. Τότε ο

$$Q^T AQ + D$$

είναι IM πίνακας για κάθε $n \times n$ θετικό, διαγώνιο πίνακα D.

Θεώρημα 26.2. Έστω A ένας μη αρνητικός $n \times n$ πίνακας. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) $A \in \overline{\mathbf{IM}}$
(ii) $(A + D)^{-1} \leq D^{-1}$ για κάθε θετικό, διαγώνιο πίνακα D,
(iii) ο $(A + D)^{-1}$ ανήκει στο M για κάθε θετικό, διαγώνιο πίνακα D,
(iv) ο $(A + \alpha I)^{-1}$ ανήκει στο M για κάθε $\alpha > 0$,
(v) $(A + D)^{-1}A \geq 0$ για κάθε θετικό, διαγώνιο πίνακα D,

(vi) $(I + cA)^{-1} \leq I$ για κάθε $c > 0$,
(vii) $cA^2(I + cA)^{-1} \leq A$ για κάθε $c > 0$.

Το θεώρημα επιτρέπει να χαρακτηριστούν οι μηδενοδύναμοι πίνακες στο σύνορο του $\overline{\mathbf{IM}}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{rn}$ το σύνολο των μη αρνητικών πινάκων $r \times n$, με $r \leq n$ που περιέχουν ακριβώς ένα στοιχείο μηδέν σε κάθε στήλη. Αν οι διαστάσεις δεν προσδιορίζονται γράφουμε απλώς $\mathcal{L}$.

Θεώρημα 26.3. Ένας πίνακας A, $n \times n$ ανήκει στο $\overline{IM}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P, ένας διαγώνιος πίνακας D, ένας πίνακας $B \in IM$ και ένας πίνακας $Q \in \mathcal{L}$ χωρίς μηδενική γραμμή έτσι ώστε

$$D^{-1}PAP^TD = \begin{bmatrix} 0 & UBQ & UBV + W \\ 0 & Q^TBQ & Q^TBV \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για αυθαίρετους μη αρνητικούς πίνακες U, V και W.

Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, ο μικρότερος ακέραιος k με τάξη $(A^k) = \text{rank}\ (A^{k+1})$ ονομάζεται ο δείκτης (index) του A και συμβολίζεται $\text{index}(A) = k$. Ο αντίστροφος Drazin του A είναι ο μοναδικός πίνακας A^D τέτοιος ώστε

(i) $A^{k+1}A^D = A^k$,
(ii) $A^DAA^D = A^D$,
(iii) $AA^D = A^DA$.

27 Τριδιαγώνιοι, Τριγωνικοί και Αναγώγιμοι IM πίνακες

Στο [Ima83] μελετόνται οι IM πίνακες των οποίων τα στοιχεία έχουν συγκεκριμένο μοτίβο. Πρώτα, χαρακτηρίζουμε τους τριδιαγώνιους IM πίνακες ως:

Θεώρημα 27.1. Έστω A ένας μη αρνητικός, αντιστρέψιμος, τριδιαγώνιος πίνακας $n \times n$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) ο A είναι **IM** πίνακας
(ii) όλες οι κύριες υπορίζουσες του A είναι θετικές και ο A είναι το ευθύ άθροισμα πινάκων της μορφής
   a. διαγώνιοι πίνακες,
   b. 2×2 πίνακες,
   c. πίνακες της μορφής

$$A=\begin{bmatrix}
d_1 & a_1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\
0 & d_2 & 0 & 0 & & & & & & & . \\
0 & b_1 & d_3 & a_2 & 0 & & & & & & . \\
. & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & & & & & . \\
. & & 0 & b_2 & d_5 & a_3 & 0 & & & & . \\
. & & & 0 & 0 & d_6 & 0 & & & & . \\
. & & & & . & . & . & . & . & & . \\
. & & & & & . & . & . & . & . & . \\
. & & & & & & . & . & . & . & 0 \\
. & & & & & & & . & . & . & a_t \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & b_u & d_s
\end{bmatrix}$$

όπου $a_t = 0$ και $u = \frac{s-1}{s}$ όταν το s είναι περιττό και $b_u = 0$ και $t = \frac{s}{2}$ όταν το s είναι άρτιο.

Ένα μη κενό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ που είναι κλειστό στην πρόσθεση και πολλαπλασιασμό μη αρνητικών αριθμών ονομάζεται ο (κυρτός) κώνος του $\mathbb{R}^n$. Αν ο κώνος K είναι κλειστός τοπολογικά και έχει μη κενό εσωτερικό και ικανοποιεί την $K \cap (-K) = \emptyset$, τότε το K ονομάζεται ο κανονικός κώνος. Αν ο A είναι πραγματικός πίνακας τότε το σύνολο $K(A) = \{Ax: x \geq 0\}$ είναι πολυεδρικός κώνος δηλαδή το σύνολο των μη αρνητικών γραμμικών συνδυασμών ενός πεπερασμένου συνόλου διανυσμάτων S του $\mathbb{R}^n$. Με αυτές τις έννοιες μπορούμε να ορίσουμε τον άνω τριγωνικό IM πίνακα ως

Θεώρημα 27.2. Έστω A ένας μη αρνητικός, άνω τριγωνικός πίνακας $n \times n$, με 1 στη διαγώνιο. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) ο A είναι IM πίνακας,
(ii) $\mathrm{A}e_k - e_k \in K(Ae_1, Ae_2, \dots, e_{k-1})$ για $k = 2, \dots, n$.

28 Υπερμετρικοί πίνακες

Ένας πίνακας $A = [a_{ij}]$ είναι αυστηρά υπερμετρικός αν ο A είναι πραγματικός, συμμετρικός και μη αρνητικός πίνακας και ικανοποιεί τις συνθήκες

(i) $a_{ik} \geq \min(a_{ij}, a_{jk})$ για όλα τα i, j, k,
(ii) $a_{ii} > \max_{k \neq i} a_{ik}$ για όλα τα i.

Στο [MMS94] αποδεικνύεται ότι αν ο $A = [a_{ij}]$ είναι αυστηρά υπερμετρικός τότε ο $A^{-1} = [\alpha_{ij}]$ είναι ένας διαγώνια κυρίαρχος πίνακας Stieltjes που ικανοποιεί τη συνθήκη $\alpha_{ij} = 0$ αν και μόνο αν $a_{ij} = 0$.

Βιβλιογραφία

[1] C.R. Johnson, R.L. Smith, M.J. Tsatsomeros, Matrix Positivity

[2] C.R. Johnson, *Inverse M-Matrices*, Linear Algebra and its applications **47**:195-216 (1982) Elsevier Publishing

[3] R.A. Willougby, *The Inverse M-Matrix Problem*, Linear Algebra and its applications **18**:75-94 (1977) Elsevier Publishing

[4] T.L. Markham, *Two properties of M-matrices*, Linear Algebra Appl. **28** (1979), 131-134

[5] S. Chen, *Proof of a conjecture concerning the Hadamard powers of inverse M-matrices*, Linear Algebra Appl. 422 (2007), 477-481

[6] C.R. Johnson, R.L. Smith, *Linear interpolation problems for matrix classes*, Linear Algebra Appl. 330 (2001), 43-48

[7] *The Schur complement and its applications*, Numerical Methods and Algorithms, Fuzhen Zhang Ed., (2005) Springer Science