Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΜΠΑΓΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΣΕ SCALAR-TENSOR ΘΕΩΡΙΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΥ ΒΛΑΧΟΥ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Νοέμβριος 2023

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΜΠΑΓΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΣΕ SCALAR-TENSOR ΘΕΩΡΙΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΥ ΒΛΑΧΟΥ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1.................... Κ. Αναγνωστόπουλος, Αν. Καθ. ΕΜΠ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)

2.................... Γ. Κουτσούμπας, Καθ. ΕΜΠ

3.................... Γ. Κοφινάς, Επ. Καθ. ΠΑ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1.................... Κ. Αναγνωστόπουλος, Αν. Καθ. ΕΜΠ

2.................... Γ. Κουτσούμπας, Καθ. ΕΜΠ

3.................... Γ. Κοφινάς, Επ. Καθ. ΠΑ

4.................... Ν. Ήργες, Αν. Καθ. ΕΜΠ

5.................... Κ. Φαράκος, Καθ. ΕΜΠ

6.................... Ν. Μαυρόματος, Καθ. ΕΜΠ

7.................... Ε. Σαριδάκης, Κυρ. Ερευνητής ΙΑΑΔΕΤ

Νοέμβριος 2023

“*Failures are the pillars of success* ”

Dave Barry

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσας εργασίας κ. *Κ.Αναγνωστόπουλο* για την ευκαιρία που μου έδωσε στο να ασχοληθώ ερευνητικά με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, για την εμπιστοσύνη του και για την διάθεση να με βοηθήσει όπου χρειαζόταν.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή *Ε.Παπαντωνόπουλο* για τις καλές συμβουλές, τις ευκαιρίες και την στήριξή του, τόσο σε επιστημονικό/πρακτικό όσο και σε ψυχολογικό επίπεδο όταν τα πράγματα έδειχναν να φτάνουν σε ένα τέλμα. Παρομοίως, ευχαριστώ τον καθηγητή *Γ.Κοφινά* για τις χρήσιμες συμβουλές του και την καθοδήγησή του κατά τα αρχικά στάδια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Είμαι ευγνώμων στους Νίκο Χατζιφώτη, Θανάση Καρακάση, Κυριάκο Ντεστούνη για τις ωραίες συζητήσεις, τα brainstorming sessions και τις όμορφες συνεργασίες μας που εν τέλει σχημάτισαν την καρδιά αυτής της διατριβής.

Επιπλέον, ευχαριστώ πραγματικά όλους τους κοντινούς μου ανθρώπους και φίλους, για τις περιπέτειες και εμπειρίες που έχουμε μοιραστεί. Σωτήρη($x2$), Ιάσονα($x2$), Παύλο, Γέρου, Παλικάρη, Φώτη, Πάρη ... είτε το καταλαβαίνετε είτε όχι, είστε η θετικές μου επιρροές.

Φτάνοντας προς το τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ξεχωριστά την κοπέλα μου, Γενοβέφα. Σε ευχαριστώ που είσαι εκεί, με αποδέχεσαι και υπομένεις τις βλακείες μου και, που με στηρίζεις και προσπαθείς το καλύτερο για μένα ανεξαρτήτως κατάστασης και αποτελέσματος. Ήσουν και είσαι το στήριγμά μου.

Και εννοείται φυσικά ότι δεν θα βρισκόμουν εδώ που βρίσκομαι, εάν δεν είχα την υποστήριξη και την αμέριστη αγάπη του αδερφού μου και των γονιών μου. Αδερφέ, σε ευχαριστώ για τα καυστικά/χιουμοριστικά σχόλια τα οποία με έκαναν να μήν παίρνω τις καταστάσεις τόσο βαριά και να συνεχίσω να προχωράω πιο 'ανάλαφρος'. Πατέρα, η καλή σου πίεση ήταν καταλυτική για την προσύλωσή μου στους στόχους μου και για την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής. Μητέρα, σε ευχαριστώ που ήσουν και είσαι πάντα εκεί για να με στηρίζεις με κάθε δυνατό τρόπο. Τα λόγια απλώς δεν είναι αρκετά για να σας εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου.

...και όσους δεν είναι σήμερα εδώ...

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή γίνεται μία γενικότερη μελέτη συμπαγών αντικειμένων συζευγμένων με βαθμωτά πεδία. Μετά από μία σύντομη εισαγωγή, γίνεται παρουσίαση ενός νέου βαρυτικού μοντέλου το οποίο γενικεύει την Brans-Dicke θεωρία με την εισαγωγή μίας καινούργιας παραμέτρου η οποία τροποποιεί τον κινητικό όρο του βαθμωτού. Λύνοντας τις εξισώσεις Einstein-Klein-Gordon βρίσκουμε καινούργιες σφαιρικά συμμετρικές λύσεις οι οποίες είτε ανάγονται στη λύση Schwarzschild της Γενικής Σχετικότητας είτε παράγουν νέες λύσεις σκουλικοτρύπων των οποίων τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από τη νέα παράμετρο.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την απόκριση συμπαγών αντικείμενων κάτω από πρώτης τάξης βαθμωτές διαταραχές, σε ένα scalar-tensor βαρυτικό μοντέλο το οποίο περιέχει μία non-minimal αλληλεπίδραση μετάξυ του βαρυτικού βαθμωτού και του τανυστή Einstein. Τα υπό εξέταση συμπαγή αντικείμενα είναι hairy μελανές οπές και σκουλικότρυπες ντυμένα με ένα canonical και phantom scalar αντίστοιχα. Θεωρούμε τη διάδοση εξωτερικών, δοκιμαστικών, minimally-coupled βαθμωτών πεδίων σε αυτούς του χωροχρόνους, οι οποίοι διαθέτουν effective AdS asymptotics και δείχνουμε ότι είναι δυνατός ο σχηματισμός echoes λόγω παγίδευσης των πεδίων μεταξύ της σφαίρας φωτονίων και του συνόρου AdS. Η λύση της μελανής οπής, διαθέτοντας ορίζοντα, παράγει echoes των οποίων το πλάτος φθήνει με το χρόνο, υποδεικνύοντας την ευστάθεια του αντικειμένου. Αντιθέτως, ο χωροχρόνος της σκουλικότρυπας αποκρίνεται με echoes με πλάτος σταθερό και ίσο με αυτό του αρχικού ringdown, δηλώνοντας την ύπαρξη κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Τέλος, κόντα σε μία κρίσιμη τιμή για τη μάζα της σκουλικότρυπας, βρίσκουμε ότι οι διαταραχές παρουσιάζουν μία συνένωση από δύο διαφορετικά είδη από echoes. Το πρώτο είδος σχετίζεται με την περιοχή παγίδευσης του ενεργού δυναμικού μεταξύ της σφαίρας φωτονίων και του AdS συνόρου ενώ το δεύτερο παράγεται από ένα νέο πηγάδι δυναμικού που σχηματίζεται πάνω στο λαίμο της σκουλικότρυπας.

Επιπλέον, συνεχίζουμε την παραπάνω έρευνα θεωρώντας την hairy μελανή οπή Rinaldi και εξετάζοντας την αντίδρασή της κάτω από axial βαρυτικές διαταραχές. Βρίσκουμε ότι σε πρώτη τάξη το αντικείμενο είναι βαρυτικά ευσταθές παρόλο που σε συγκεκριμένες περιοχές του παραμετρικού χώρου παράγονται αρνητικά πηγάδια δυναμικού. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της κυματομορφής του ringdown εξαρτόνται αποκλειστικά από το λόγο των δύο παραμέτρων που καθορίζουν την λύση, συγκεκριμένα τη μάζα m της μελανής οπής και τη σταθερά σύζευξης μεταξύ του βαρυτικού βαθμωτού και του τανυστή Einstein ℓ_η. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι καθώς ο λόγος m/ℓ_η αυξάνεται, το παραγόμενο ringdown μεταβαίνει από ένα το οποίο περιέχει echoes σε ένα τυπικό quasinormal ringdown ακολουθούμενο από μία late-time εκθετική ουρά.

Τέλος, θεωρούμε disformal μετασχηματισμούς μιας υποκλάσης της θεωρίας Horndeski στην οποία έχουμε σύζευξη μεταξύ του βαθμωτού πεδίου και του τανυστή Einstein. Μετασχηματίζοντας μία seed hairy μετρική μελανής οπής, παράγουμε ένα νέο συμπαγές αντικείμενο το οποίο παρεμβάλλεται μεταξύ μελανής οπής και σκουλικότρυπας με συνεχή τρόπο, μεταβάλλοντας την τιμή μίας κρίσιμης παραμέτρου της λύσης. Επιπροσθέτως, δείχνουμε πως η null ενεργειακή συνθήκη παραβιάζεται για την περίπτωση της σκουλικότρυπας και μελετούμε την ευστάθεια του αντικειμένου υπολογίζοντας αριθμητικά την χρονική εξέλιξη γραμμικών βαθμωτών διαταραχών που διαδίδονται σε αυτή τη γεωμετρία.

Λίστα επιστημονικών δημοσιεύσεων

Η έρευνα που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε στον Τομέα Φυσικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Το κεφάλαιο 3 είναι το αποτέλεσμα συνεργασίας με τους καθηγητές Λευτέρη Παπαντωνόπουλο και Γιώργο Κοφινά. Τα κεφάλαια 4, 5 και 6 έγιναν σε συνεργασία με τον καθηγητή Λευτέρη Παπαντωνόπουλο, τον υποψήφιο διδάκτορα Νίκο Χατζιφώτη και τον μεταδιδακτορικό ερευνητή Κυριάκο Ντεστούνη.

Μία λίστα με τις δημοσιεύσεις που περιέχονται στην παρούσα διατριβή δίνεται παρακάτω:

- Wormhole solutions in modified Brans-Dicke theory,

  E. Papantonopoulos and C. Vlachos, *"Wormhole solutions in modified Brans-Dicke theory,"* Phys. Rev. D **101** (2020) no.6, 064025 doi:10.1103/PhysRevD.101.064025 [arXiv:1912.04005 [gr-qc]]. (Κεφάλαιο 3)

- Echoes of Compact Objects in Scalar-Tensor Theories of Gravity,

  C. Vlachos, E. Papantonopoulos and K. Destounis, *"Echoes of Compact Objects in Scalar-Tensor Theories of Gravity,"* Phys. Rev. D **103** (2021) no.4, 044042 doi:10.1103/PhysRevD.103.044042 [arXiv:2101.12196 [gr-qc]]. (Κεφάλαιο 4)

- Stability of black holes with non-minimally coupled scalar hair,

  N. Chatzifotis, C. Vlachos, K. Destounis and E. Papantonopoulos, *"Stability of black holes with non-minimally coupled scalar hair to the Einstein tensor,"* [arXiv:2109.02678 [gr-qc]]. (Κεφάλαιο 5)

- Disformal Transition of a Black Hole to a Wormhole in Scalar-Tensor Horndeski Theory,

  N. Chatzifotis, E. Papantonopoulos and C. Vlachos, *"Disformal transition of a black hole to a wormhole in scalar-tensor Horndeski theory,"* Phys. Rev. D **105** (2022) no.6, 064025 doi:10.1103/PhysRevD.105.064025 [arXiv:2111.08773 [gr-qc]]. (Κεφάλαιο 6)

Επιπλέον δημοσιεύσεις στις οποίες συμμετείχε ο συγγραφέας κατά την πραγματοποίηση της συγκεκριμένης διατριβής, αλλά οι οποίες δεν παρουσιάζονται στην παρόν κείμενο δίνονται παρακάτω:

- f(R) gravity wormholes sourced by a phantom scalar field,

  T. Karakasis, E. Papantonopoulos and C. Vlachos, *"f(R) gravity wormholes sourced by a phantom scalar field,"* Phys. Rev. D **105** (2022) no.2, 024006 doi:10.1103/PhysRevD.105.024006 [arXiv:2107.09713 [gr-qc]].

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πρόλογος

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) είναι η πιο επιτυχημένη θεωρία βαρύτητας που έχουμε μέχρι σήμερα. Γενικεύοντας τη θεωρία του Νεύτωνα, εισάγει έννοιες όπως οι μελανές οπές, οι σκουλικότρυπες, τα βαρυτικά κύματα, ο χωροχρόνος κ.α. Αν και πολλές από αυτές τις έννοιες, για πολλά χρόνια, υπήρχαν μόνο "στο χαρτί" ως μαθηματικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων της θεωρίας πλέον αναγνωρίζουμε την ισχύ αυτού του μοντέλου καθώς με τις ακριβείς προβλέψεις του έχει βοηθήσει άκομη στην ανάπτυξη νέων τεχνολογιών, όπως το GPS.

Οι εξισώσεις κίνησης της ΓΘΣ προκύπτουν από μεταβολές στη δράση Einstein - Hilbert και εφαρμόζοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Ως θεωρία έχει αποδειχθεί οτι αποτελεί ένα αρκετά πλούσιο πεδίο έρευνας, τόσο από την άποψη της εξερεύνησης τοπικών λύσεων, όσο και για την μελέτη της κοσμολογικής συμπεριφοράς του σύμπαντος. Αν και είναι σύμφωνη με αρκετές πειραματικές μετρήσεις, πρόσφατα αστροφυσικά δεδομένα και κοσμολογικές παρατηρήσεις, υποδεικνύουν ότι η ΓΘΣ θα πρέπει να τροποποιηθεί στο όριο των μεγάλων αποστάσεων καθώς δεν είναι σε θέση να εξηγήσει την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. Επιπρόσθετα γνωρίζουμε ότι σε υψηλές ενέργειες η θεωρία καταρρέει. Το γεγονός ότι προβλέπει άπειρη ενέργεια για την αρχική στιγμή της δημιουργιάς του σύμπαντος ή για τα κεντρικό σημείο στο εσωτερικό μίας μελανής οπής, είναι ενδείξεις που υποδεικνύουν πως το συγκεκριμένο μοντέλο δεν είναι σε θέση να εξηγήσει τους φυσικούς μηχανισμούς που οδηγούν σε αυτές τις συμπεριφορές . Επομένως είναι ανάγκη να τροποποιηθεί και στο όριο των μικρών αποστάσεων, ώστε να συμπεριλαμβάνει και τα κβαντικά φαινόμενα οδηγώντας στη θεμελίωση μίας κβαντικής θεωρίας βαρύτητας.

Μία από τις απλούστερες τροποποιήσεις της ΓΘΣ επιτυγχάνεται με την εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου στη δράση, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός μοντέλου που περιγράφει τη συμπεριφορά του χωροχρόνου μέσω ενός μετρικού τανυστή και ενός βαθμωτού πεδίου. Τέτοια μοντέλα λέμε ότι ανήκουν στην κατηγορία των Θεωριών Βαθμωτού - Τανυστή (ΘΒΤ) (scalar–tensor theories). Τα βαθμωτά πεδία έχουν κεντρικό ρόλο στις τροποποιήσεις της Γενικής Σχετικότητας (ΓΘΣ) τόσο σε μικρές όσο και σε μεγάλες αποστάσεις. Σε μικρές αποστάσεις μπορούν να οδηγήσουν στη δημιουργία ''τριχωτών'' μελανών οπών (hairy black holes) καθώς και λύσεων που περιγράφουν σκουλικότρυπες (wormholes). Σε μεγαλές αποστάσεις παράγουν λύσεις ικάνες να περιγράψουν την πληθωριστική φάση (inflation) του σύμπαντος αλλά και την ''πρόσφατη'' επιταχυνόμενη διαστολή του. Δεν είναι λοιπόν περίεργο που οι (scalar-tensor theories) εμφανίστηκαν μέσα από την προσπάθεια εύρεσης μιας βιώσιμης θεωρίας βαρύτητας η οποία θα έλυνε τις ασυνέπειες της ΓΘΣ με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

Η αλληλεπίδραση του βαθμωτού γίνεται σε πρώτο βαθμό εφικτή, μέσω μιας αλληλεπίδρασης ελάχιστης σύζευξης (minimal coupling), ενώ στην πλήρη της μορφή, μέσω μιας αλληλεπίδρασης μή – ελάχιστης αλληλεπίδρασης (non–minimal coupling) με τη βαρύτητα. Μία κρίσιμη προϋπόθεση η οποία πρέπει να ικανοποιηθεί κατα την κατασκευή ενός μοντέλου ΘΒΤ, είναι ότι οι εξισώσεις κίνησης θα πρέπει να παραμένουν δεύτερης τάξης ως προς τις παραγώγους, έτσι ώστε να αποφευχθούν οι λεγόμενες αστάθειες Ostrogradski. Η πιο γενική Λανγκρανζιανή στις τέσσερις διαστάσεις, η οποία πληροί αυτή την προϋπόθεση ανακαλύφθηκε σχεδόν σαράντα χρόνια πριν από τον G.W.Horndeski και έχει τη μορφή [222]

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \sum_{i=2}^{i=5} \mathcal{L}_i \ , \\
&\mathcal{L}_2 = K(\Phi, X) \ , \\
&\mathcal{L}_3 = -G_3(\Phi, X)\Box\Phi \ , \\
&\mathcal{L}_4 = G_4(\Phi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\Phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2\right] \ . \\
&\mathcal{L}_5 = G_5(\Phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi - \frac{1}{6}G_{5,X}\left[(\Box\Phi)^3 - 3\Box\Phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^3\right] \ ,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

όπου έχουμε θέσει $\kappa = 8\pi G = 1$. Οι συναρτήσεις K και G_i , $i = 1, 2, 3$ εξαρτώνται από το βαθμωτό πεδίο και την κινητική του ενέργεια $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi$. R είναι το βαθμωτό Ricci και $G_{\mu\nu}$ ο τανυστής Einstein ενώ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $G_{i,X} \equiv \frac{\partial G_i}{\partial X}$.

Η γενική φύση της συγκεκριμένης Λαγκρανζιανής προδιαθέτει κάποιον να αναρωτηθεί εάν υπάρχουν συγκεκριμένες υποθεωρίες της Horndeski οι οποίες έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Στο κεφάλαιο 3 της παρούσας διατριβής θα ασχοληθούμε με μία εξέχουσα υποκατηγορία της (1.1) - την θεωρία Brans-Dicke (BD) - η οποία περιγράφεται από τη δράση

$$
S_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left(\Phi R - \frac{\omega_{BD}}{\Phi}g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}\right) + \int d^4x\,\sqrt{-g}\,L_m(g_{\kappa\lambda}, \Psi)\,, \tag{1.2}
$$

όπου Ψ είναι τα πεδία ύλης. Η Brans-Dicke είναι μία από τις πρώτες scalar-tensor theories που κατάφεραν να τροποποιήσουν την ΓΘΣ με τέτοιο τρόπο ώστε το νέο μοντέλο να ικανοποιεί την Αρχή του Mach και την Ασθενή Αρχή της Ισοδυναμίας (weak equivalence principle). Περιλαμβάνει μία effective βαρυτική σταθερά, που παίζει το ρόλο της σταθεράς του Νεύτωνα, G_{eff} η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη του βαθμωτού πεδίου $G_{eff} \sim \frac{1}{\phi}$. Επιπλέον χαρακτηρίζεται από μία αδιάστατη σταθερά σύζευξης ω_{BD} της οποίας οι υψηλές τιμές υποδηλώνουν μεγαλύτερη συνεισφορά από το τανυστικό κομμάτι της θεωρίας ενώ οι πιο χαμηλές τιμές σημαίνουν μεγαλύτερη συνεισφορά από το βαθμωτό πεδίο συνεπώς, η ΓΘΣ ανακτάται στο όριο $\omega \to \infty$. Η BD είναι μία από τις πιο καλά θεμελιωμένες και μελετημένες τροποποιήσεις της βαρύτητας που υπάρχουν στη βιβλιογραφία καθώς, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι προκύπτει με φυσικό τρόπο σε μοντέλα supergravity, στο όριο χαμηλών ενεργειών στις θεωρίες χορδών όπως και σε higher-dimensional θεωρίες Kaluza-Klein μετά από διαστατική ελάττωση [19].

Συγκεκριμένα, θα στηριχθούμε σε ένα τροποποιημένο μοντέλο της Brans-Dicke [46, 47] το οποίο την γενικεύει δίνοντάς της πιο πλούσια δυναμική με την εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου η οποία επιτρέπει τη σύζευξη μεταξύ βαθμωτού και ύλης πέρα από την minimal σύζευξη βαθμωτού-μετρικής. Αυτή η νέα αλληλεπίδραση εισαγάγει ένα νέο scale στη θεωρία το οποίο τροποποιεί τις εξισώσεις κίνησης άκομα και στο κενό, χωρίς την παρουσία ύλης. Το νέο αυτό μοντέλο παρουσιάζει ενδιαφέρουσα κοσμολογία [48] όντας ικανό να περιγράψει και την περίοδο πληθωρισμού αλλά και την πρόσφατη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. Το καινούργιο scale της θεωρίας τροποποιεί τις εξισώσεις Friedmann με επιπλέον κινητικούς ορούς στους οποίους συνεισφέρει και το βαθμωτό πεδίο. Στις γενικές λύσεις ενός radiation universe βρέθηκαν κλάδοι στους οποίους δεν παράγεται η αρχική ιδιομορφία του σύμπαντος ενώ ταυτόχρονα, δημιουργείται μία βραχυπρόθεσμη περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής μέσα στο πλαίσιο της γενικότερης επιβράδυνσης. Επίσης κατά την dust era, βρέθηκε αριθμητικά περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής, σε συμφωνία με τη συμπεριφορά των παραμέτρων πυκνότητας (density parameters) και της καταστατικής εξίσωσης (equation of state) της σκοτεινής ενέργειας ενώ, η βαρυτική σταθερά παρουσιάζει μια μικρή απόκλιση για ένα μεγάλο διάστημα του redshift και βρίσκεται σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

Η ενδιαφέρουσα συμπεριφορά του μοντέλου σε κοσμολογικές κλίμακες μας παρότρυνε να εξετάσουμε τις συνέπειες που ενδεχομένως να έχει αυτή η νέα σύζευξη στις μικρές κλίμακες δηλαδή, στις τοπικές λύσεις. Οι λύσεις της κλασσικής BD είναι είτε σκουλικότρυπες, είτε ακάλυπτες ιδιομορφίες, είτε η λύση Schwarzschild. Για να αποφύγει κανείς αυτό το πρόβλημα και να πάρει νέες λύσεις, πρέπει να εισάγει στην δράση έναν όρο δυναμικού [40, 50]. Επομένως, έχει ενδιαφέρον να ελέγξουμε εάν αυτή η τροποποίηση στην αρχική θεωρία - η οποία διαφέρει από την εισαγωγή δυναμικού και επιπλέον δεν είναι δυνατόν να απορροφηθεί σε έναν επαναορισμό του ω - μπορεί να δώσει καινούργιες λύσεις μελανών οπών ή και σκουλικότρυπων. Θα λύσουμε τις εξισωσείς κίνησης χρησιμοποιώντας conformal μετασχηματισμούς και θα μελετήσουμε του κατά πόσο αυτό το νέο πρότυπο μπορεί να περιγράψει καινούργιες λύσεις hairy μελανών οπών ή και λύσεις wormhole.

Στα κεφάλαια 4, 5 μελετάται η ευστάθεια συμπαγών αντικείμενων σε μια πιο γενικευμένη θεωρία ή οποία παραμένει υπο κλάση της Horndeski [161] και χρησιμοποιεί πεδία Galileon, των οποίων οι εξισώσεις κίνησης είναι αναλλοίωτες κάτω από συμμετρία μετατόπισης (shift symmetry) $\phi \to \phi + b_\mu x^\mu + c$. Η Λαγκρανζιανή σε αυτή την περίπτωση έχει την μορφή

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{8\pi} - (\varepsilon g_{\mu\nu} + \eta G_{\mu\nu})\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi\right], \tag{1.3}$$

όπου Φ ένα πραγματικό άμαζο βαθμωτό πεδίο, η η σταθερά σύζευξης κινητικού όρου-καμπυλότητας με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο και ε μία παράμετρος που παίρνει τιμές ± 1 και κατά συνέπεια καθορίζει εάν το βαθμωτό πεδίο θα διαδίδεται με θετική ενέργεια ή θα είναι phantom.

Τα συμπαγή αντικείμενα γενικότερα, έχουν κεντρικό ρόλο στη σύγχρονη αστροφυσική, καθώς οι σχετικιστικές συγκρούσεις μεταξύ τους είναι μπορούν να μας δώσουν καινούργιες πληροφορίες όσον αφορά τις αστροφυσικές διαδικασίες σε συνθήκες εξαιρετικά υψηλής βαρύτητας. Οι τελευταίες ανιχνεύσεις βαρυτικών κυμάτων [147, 148, 149, 150, 151] από ανιχνευτές στη Γη έχουν δώσει σημαντικές πληροφορίες στο πεδίο της ισχυρής βαρύτητας. Η αρχική φάση του βαρυτικού ringdown από συγχωνεύσεις μελανών οπών, που περιγράφεται από τα λεγόμενα quasinormal modes (QNMs) [152, 153, 154, 155], συμβάλλει επιπλέον στην κατανόηση των διαδικασιών χαλάρωσής τους καθώς και στην ταυτοποίηση της ισχύουσας θεωρίας βαρύτητας. Παρόλα αυτά, μία καταληκτική ερμηνεία αυτών των φαινομένων δεν έχει βρεθεί ακόμη. Περιμένουμε πως η μελλοντική κατασκευή ανιχνευτών που θα λειτουργούν στο διάστημα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις και, θα ρίξει φως στο ερώτημα της ύπαρξης εξωτικών συμπαγών αντικειμένων (exotic compact objects)(ECOs) [156, 157, 158, 159] τα οποία μπορεί να έχουν δομή και συμπεριφορά κοντά στον ορίζοντα η οποία να είναι πλήρως διαφορετική από αυτήν ενός ορίζοντα γεγονότων μίας μελανής οπής.

Στο κεφάλαιο 4 θεωρώντας τη διάδοση ενός εξωτερικού, ελάχιστα συζευγμένου με τη μετρική βαθμωτού πεδίου, θα εξετάσουμε τα παραγόμενα ringdown σήματα από τη μελανή οπή Rinaldi [180] και τη σκουλικότρυπα [96], οι οποίες προβλέπονται από τη δράση (1.3) με ένα κανονικό ή phantom βαθμωτό πεδίο αντίστοιχα. Οι λύσεις αυτές έχουν κωδικοποιημένο το βαθμωτό, και μέτρο της σύζευξής του, μέσα στις μετρικές συναρτήσεις ως primary charge [180, 96], το οποίο ασυμπτωτικά παίζει το ρόλο μίας effective κοσμολογικής σταθεράς. Η πάροτρυνση για να θεωρήσουμε τις εν λόγω λύσεις έρχεται από το γεγονός ότι διαθέτουν με φυσικό τρόπο ένα asymptotic reflective boundary εξωτερικά της PS, το οποίο θα μπορούσε να δώσει μία διαφορετική συμπεριφορά σε σχέση με τους ασυμπτωτικά επίπεδους χωροχρόνους. Επιπροσθέτως, σκοπός μας είναι να εξετάσουμε το ringdown των συγκεκριμένων αντικειμένων και να καταλάβουμε εάν δίνουν διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ τους. Κάτι τέτοιο θα είχε ενδιαφέρον γιατί και τα δύο χαρακτηρίζονται από μία σφαίρα φωτονίων και ένα ασυμπτωτικό AdS σύνορο.

Η παραπάνω ανάλυση συνεχίζεται στο κεφάλαιο 5 εφαρμόζοντας της πιο ‘‘ρεαλιστικές’’ axial βαρυτικές διαταραχές στην μελανή οπή Rinaldi. Οι βαρυτικές διαταραχές γενικότερα στις τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας μπορούν δώσουν πληροφορίες για τη ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων σε αυτά τα μοντέλα. Οι πρόσφατες παρατηρήσεις των GW170817 και GRB170817A υποδηλώνουν πως τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν με ταχύτητα φωτός, με απόκλιση μικρότερη από 10^{-15}. Παρόλο που οι Horndeski θεωρίες προβλέπουν μια διαφορετική ταχύτητα δίαδοσης για τα βαρυτικά κύματα, πρόσφατα δημοσιεύτηκαν μελέτες [219, 220, 221] οι οποίες δείχνουν ότι δουλεύοντας σε κάποιες εκδοχές της Horndeski, βασισμένες στην Telleparallel gravity, μπορεί κανείς να κατασκευάσει μία πιο γενική θεωρία Horndeski στην οποία τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν με ταχύτητα φωτός, χωρίς να χρειαστεί να απαλειφθούν οι όροι $G_5(\varphi, X)$ και $G_4(\varphi, X)$ οι οποίοι είναι πολύ περιορισμένοι στην κλασσική Horndeski. Συνεπώς, μέσω της Teleparallel προσέγγισης μπορεί κανείς να ξαναχρησιμοποιήσει αυτούς τους όρους, το οποίο είναι ένας ενδιαφέρον τρόπος να ‘‘αναγεννήσει’’ κανείς την θεωρία Horndeski. Παρόλο που η ανάλυσή μας είναι βασισμένη στην curvature-based διαμόρφωση της Horndeski, είναι πολύ ενδιαφέρον το γεγονός ότι υπάρχουν τρόποι να ξεφύγει κανείς από τους αυστηρούς περιορισμούς που έχουν θέσει οι πειραματικές μετρήσεις στη θεωρία.

Ο σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας είναι διττός. Πρώτα βλέπουμε πώς και εάν επηρεάζει η αλληλεπίδραση του βαθμωτού με τον τανυστή Einstein την ευστάθεια της μελανής οπής. Λόγω της σταθεράς σύζευξης η οποία εμφανίζεται σαν φορτίο στη μετρική, περιμένουμε να πάρουμε επιπλέον πληροφορίες οι οποίες θα μας δώσουν μία καλύτερη κατάνοηση για την ευστάθεια του αντικειμένου, παρόλο που για να αποκτήσουμε μία πλήρη εικόνα της βαρυτικής ευστάθειας θα έπρεπε να θεωρήσουμε επιπλέον και polar διαταραχές οι οποίες γενικά αλληλεπιδρούν με το scalar hair που υπάρχει στις λύσεις των scalar-tensor θεωριών. Ένας δεύτερος στόχος είναι να εξετάσουμε το πως αυτή η σύζευξη επηρεάζει το ringdown και να καταλάβουμε εάν μπορούν να δημιουργηθούν βαρυτικά echoes.

Τέλος, στο κεφάλαιο 6 θεωρούμε disformal μετασχηματισμούς στην ίδια υποκλάση της Horndeski 1.3 στην οποία έχουμε σύζευξη μεταξύ του βαθμωτού πεδίου και του τανυστή Einstein. Οι disformal μετασχηματισμοί χρησιμοποιήθηκαν από τον Bekenstein [224] σε μία προσπάθεια να περιγράψει την βαρύτητα με τη χρήση δύο γεωμετριών. Η ανάγκη για δύο γεωμετρίες ήρθε από την απαίτηση πως η πρώτη θα περιγράφει την βαρύτητα ενώ, η δεύτερη θα καθορίζει τη γεωμετρία στην οποία διαδίδεται η ύλη. Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ βολική εάν κανείς θέλει να περιγράψει εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας, όπως είναι οι θεωρίες βαθμωτού-τανυστή (scalar-tensor). Για να υπάρχει συνέπεια με τις πειραματικές μετρήσεις στο πλαίσιο της ΓΘΣ, χρησιμοποιείται μία Riemannian μετρική $g_{\mu\nu}$ για την περιγραφή της γεωμετρίας και, για την περιγραφή της βαρυτικής δυναμικής πρέπει να εισαχθεί μία εξίσωση που συσχετίζει την $g_{\mu\nu}$ με την ‘‘φυσική’’ γεωμετρία $\hat{g}_{\mu\nu}$ πάνω στην οποία κινείται η ύλη [224]

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv \Big(g_{\mu\nu}A(\phi) + L^2 B(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\Big)dx^\mu dx^\nu \ , \tag{1.4}$$

όπου L μία κλίμακα μήκους(length scale). Η μετρική $g_{\mu\nu}$ και η ‘‘φυσική’’ μετρική της ύλης $\hat{g}_{\mu\nu}$

συνδέονται μέσω ενός conformal και ενός disformal μετασχηματισμού.

Στο [224] ο Bekenstein επιχείρησε να προσδώσει ένα φυσικό νόημα στη συσχέτιση των δύο μετρικών (1.4). Οταν $B = 0$ συνδέονται μέσω ενός conformal μετασχηματισμού, ο οποίος δεν αλλάζει τις γωνίες τοπικά και ‘‘τεντώνει’’ ή ‘‘συρρικνώνει’’ ισόποσα τον χωροχρόνο προς όλες τις κατευθύνσεις. Όταν $B \neq 0$ οι μετρικές σχετίζονται μέσω ενός disformal μετασχηματισμού ο οποίος αφενός αλλάζει τις γωνίες τοπικά και αφετέρου προκαλεί μία διαφορετική παραμόρφωση στην κατεύθυνση που είναι παράλληλη στο $\partial_\mu \phi$ σε σχέση με τις παραμορφώσεις στις υπόλοιπες κάθετες διευθύνσεις . Η μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$ πρέπει να χρησιμοποιηθεί εξ αρχής για να δει κανείς το φυσικό πλαίσιο που εισάγεται από τον disformal μετασχηματισμό.

Γενικότερα, αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί έχουν χρησιμοποιηθεί επανηλημένα στη βιβλιογραφία σε μελέτες πολλών θεωριών βαθμωτού-τανυστή όπως και στη θεωρία Horndeski [161]. Στο [225] οι συγγραφείς έδειξαν ότι οι disformal μετασχηματισμοί όταν εφαρμοστούν σε ένα υποσύνολο της Horndeski Λαγκρανζιανής, παίζουν παρόμοιο ρόλο με την εφαρμογή των conformal μετασχηματισμών στις θεωρίες βαθμωτού-τανυστή. Η σύζευξη του disformal όρου με την ύλη μελετήθηκε στο [230] όπου και βρέθηκαν καινούργιες λύσεις συμπαγών αντικειμένων. Στο [233] μελετήθηκε η πιθανότητα να χρησιμοποιηθούν disformal μετασχηματισμοί στα βαθμωτά πεδία των DHOST θεωριών δευτέρας τάξης [231, 232], προκειμένου να βρεθούν νέες αναλυτικές σφαιρικά συμμετρικές hairy λύσεις σε αυτά τα μοντέλα. Η δουλειά αυτή επεκτάθηκε περαιτέρω στο [234] εφαρμόζοντας disformal μετασχηματισμούς σε γνωστές στατικές και stealth λύσεις της ΓΘΣ όπου και μελετήθηκαν οι απεικονίσεις αυτών των λύσεων, οι οποίες μπορούν να περιγράψουν μελανές οπές, σκουλικότρυπες αλλά και ακάλυπτες ιδιομορφίες. Τέλος, η συσχέτιση (1.4) μεταξύ δύο μετρικών χρησιμοποιήθηκε στο [236] όπου βρέθηκαν νέες hairy λύσεις μελανών οπών, σε ένα bi-metric scalar-tensor μοντέλο, οι οποίες παραβίαζαν το no-hair θεώρημα.

Χρησιμοποιώντας ως κίνητρο την παρατήρηση του Bekenstein [224] όσον αφορά τις παραμορφώσεις που προκαλούν οι disformal μετασχηματισμοί αλλά και τα αποτελέσματα των [231, 232, 234], εξετάζουμε την δυνατότητα αξιοποίησής τους για να εφαρμόσουμε ένα disformation σε μία μελανή οπή και να την μετατρέψουμε σε σκουλικότρυπα. Για αρχικό αντικείμενο χρησιμοποιούμε την hairy μελανή οπή Rinaldi [180]. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$g_{\mu\nu} \to \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\Phi, X) g_{\mu\nu} + W(\Phi, X)\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \ , \tag{1.5}$$

όπου Φ το βαρυτικό βαθμωτό της Horndeski και $X = \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi$, το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι ένα νέο συμπαγές αντικείμενο το οποίο παρεμβάλλεται μεταξύ μελανής οπής και σκουλικότρυπας με συνεχή τρόπο, μεταβάλλοντας την τιμή μίας κρίσιμης παραμέτρου της λύσης. Επιπροσθέτως, εξετάζουμε την πιθανή παραβίαση της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης (null energy condition)(NEC) και μελετούμε την ευστάθεια του αντικειμένου υπολογίζοντας αριθμητικά την χρονική εξέλιξη γραμμικών βαθμωτών διαταραχών που διαδίδονται σε αυτή τη γεωμετρία.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή

2.1 Βαθμωτές διαταραχές μελανών οπών

Η διαταρακτική ανάλυση συμπαγών αντικειμένων αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο σε διάφορα πλαίσια, από την αστροφυσική μέχρι τη φυσική υψηλών ενεργειών [223]. Στην ΓΘΣ οταν μία μελανή οπή ή ένα συμπαγές αντικείμενο διαταραχθεί, ανταποκρίνεται με την εκπομπή βαρυτικών κυμάτων των οποίων η συμπεριφορά μπορεί να χωριστεί σε τρία διαφορετικά στάδια [105]. Μια αρχική εκρηκτική εκτόνωση ακτινοβολίας (initial outburst), ακολουθούμενη από μία μακρά περίοδο αποσβενύμενων ταλαντώσεων οι οποίες καθορίζονται από ημι-κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (quasi-normal modes) (QNM) με συγκεκριμένες συχνότητες και τέλος, από το σχηματισμό μιας ''ουράς'' η οποία καταστέλλει την ταλαντωτική συμπεριφορά στο σήμα. Η απορροφητική φύση του ορίζοντα γεγονότων στις μελανές οπές, κάνει αδύνατη την συνήθη ανάλυση του σήματος σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, αφού το σύστημα δεν έχει συμμέτρια χρονικής μετατόπισης. Τα QNMs είναι λύσεις ενός προβλήματος ιδιοτιμών του, υπό διαταραχή, αντικειμένου και περιγράφουν τις ''φυσικές'' συχνότητες ταλάντωσής του καθώς αυτό μεταβαίνει προς την ισορροπία. Στη γενική περίπτωση οι συχνότητες αυτές είναι μιγαδικές, το πραγματικό μέρος των οποίων συνδέεται με τη συχνότητα ταλάντωσης των διαταραχών και το φανταστικό με τον ρυθμό με τον οποίο φθήνει το σήμα (damping). Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι συνήθως μή-κανονικοποιήσιμες και δεν αποτελούν πλήρη βάση.

Όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια, η ανάλυση σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης είναι εφικτή μόνο με την εισαγωγή μηχανισμών οι οποίοι θα διατηρούν την ενέργεια στο σύστημα. Τέτοιοι μηχανισμοί μπορεί να δημιουργηθούν στα λεγόμενα Εξωτικά Συμπαγή Αντικείμενα (Exotic Compact Objects (ECOs)) όπου ο ορίζοντας γεγονότων μπορεί να έχει αντικασταθεί από την επιφάνεια του αντικείμενου ή από το λαιμό μιας wormhole.

Για να αποκτήσουμε μία πιο πλήρη εικόνα, σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε την διαδικασία με την οποία μελετούμε τη διάδοση ενός δοκιμαστικού πεδίου στο εξωτερικό μίας μελανής οπής. Η κατάνοηση της διάδοσης κυμάτων σε γεωμετρίες μελανών οπών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για μία μεγάλη γκάμα προβλημάτων όπως, η σκεδάση και απορρόφηση πεδίων από μελανές οπές, η ανάλυση ευστάθειάς τους, η δημιουργία βαρυτικών κυμάτων από δυαδικά συστήματα κ.α.

Η πιο απλή περίπτωση ενός τέτοιου διαταρακτικού προβλήματος είναι να θεωρήσει κανείς τη διάδοση βαθμωτών πεδίων/διαταραχών μέσα στο χωροχρόνο μιας μελανής οπής Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.1}$$

όπου M η μάζα του αντικειμένου. Ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο Φ διαδίδεται σύμφωνα με την εξίσωση Klein-Gordon

$$\Box\Phi = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\partial_\nu \Phi\right] = 0 \ . \tag{2.2}$$

όπου g ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$. Η σφαιρική συμμετρία της μετρικής μπορεί να αξιοποιηθεί αναλύοντας το πεδίο

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \frac{\psi(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \ , \tag{2.3}$$

όπου Y_{lm} οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Μετά από μία δόση άλγεβρας, μπορεί να κανείς να δείξει ότι η συνάρτηση ψ είναι λύση μιας effetive Schrodinger εξίσωσης με ενεργό δυναμικό

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + V(r)\right] \psi(r, t) = 0 \ , \tag{2.4}$$

όπου r_* η tortoise coordinate $dr_* = \sqrt{\frac{g(r)}{f(r)}}\, dr$ και

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right] \ , \tag{2.5}$$

όπου ℓ ο κβαντικός αριθμός τροχιακής στροφορμής που προήλθε από το χωρισμό των γωνιακών μεταβλητών χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\ell(\ell + 1) Y_{lm}(\theta, \phi) \ .$$

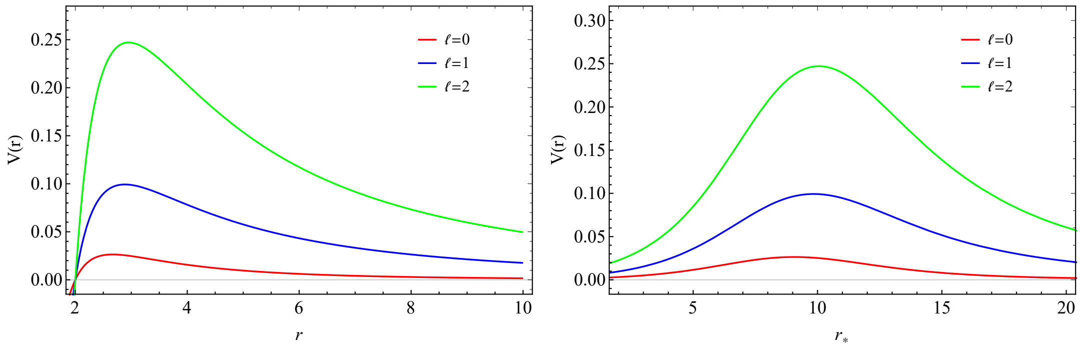
Συνεπώς, το πρόβλημα διάδοσης των βαθμωτών (και όχι μόνο) διαταραχών γύρο από μία μελανή οπή, ανάγεται σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα σκέδασης. Η χρήση της tortoise συντεταγμένης είναι μία συνηθισμένη επιλογή σε προβλήματα διαταραχών μελανών οπών γιατί οι καμπύλες $dr_* = \pm dt$ ανταποκρίνονται στις φωτοειδείς ακτινικές γραμμές (radial null curves) της γεωμετρίας. Λύνοντας την διαφορική της εξίσωση, βλέπει κανείς πως η r_* καθορίζεται από τον λογάριθμο της r ο οποίος προκαλεί τη συμπεριφορά

$$\begin{aligned} r \to r_h \ &\Rightarrow \ r_* \to -\infty \ , \\ r \to +\infty \ &\Rightarrow \ r_* \to +\infty \ , \end{aligned}$$

όπου $r_h = 2M$ ο ορίζοντας γεγονότων της μελανής οπής. Δηλαδή, το ημι-άπειρο διάστημα εξωτερικά της μελανής οπής $(2M, +\infty)$ απεικονίζεται στο άπειρο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Η λύση της (2.4) δίνει τη χρονική εξέλιξη των διαταραχών σε αυτό τον χωροχρόνο.

2.2 Συνοριακές συνθήκες και Quasinormal modes

Το φάσμα των QNM είναι ένα άπειρο σύνολο μιγαδικών συχνοτήτων που περιγράφει τις αποσβενύμενες ταλαντώσεις του αντικειμένου καθώς αυτό οδεύει προς την ισορροπία. Η περιγραφή της



Σχήμα 2.1: Ενεργό δυναμικό βαθμωτών διαταραχών για $\ell = 0, 1, 2$ ως συνάρτηση του r(αριστερά) και του r_*(δεξιά)

διαδικασίας του quasinormal ringing έγινε πρώτη φορά από τον Vishveshwara όταν θεώρησε τη σκέδαση βαρυτικών κυμάτων από μία μελανή οπή Schwarzschild [152].

Για να βρούμε τα QNMs, χρησιμοποιούμε την (2.4) και θεωρούμε επιπλέον αρμονική εξάρτηση $\psi(r,t) = \hat{\psi}(r)e^{-i\omega t}$, το οποίο οδηγεί στη μορφή

$$\frac{d^2\hat{\psi}(r)}{dr_*^2} + \left(\omega^2 - V\right)\hat{\psi}(r) = 0 \ , \tag{2.6}$$

η οποία είναι πανομοιότυπη με την εξίσωση που βρήκαν οι Regge-Wheeler το 1957 κατά την ανάλυση των βαρυτικών διαταραχών. Το ενεργό δυναμικό στη συγκεκριμένη περίπτωση ανταποκρίνεται σε ένα single barrier του οποίου η κορυφή είναι κοντά στην τελευταία ασταθή κυκλική τροχιά των φωτονίων (unstable circular photon orbit) ($r = 3M$). Κοντά στον ορίζοντα γεγονότων και το χωροειδές άπειρο έχουμε

$$r \to r_h \ , \ r \to +\infty \ \Rightarrow \ V \to 0$$

το οποίο συνεπάγεται ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2.6) ασυμπτωτικά θα είναι της μορφής $\Phi \sim e^{-i\omega(t \pm r_*)}$. Οτιδήποτε βρίσκεται πέρα από τον ορίζοντα γεγονότων δεν συνδέεται αιτιακά με τον υπόλοιπο χωροχρόνο επομένως η μοναδική λύση που είναι αποδεκτή είναι αυτή που ταξιδεύει ελεύθερα προς το ορίζοντα χωρίς να ανακλάται

$$\Phi \sim e^{-i\omega(t+r_*)} \ , \quad r_* \to -\infty \ (r \to r_h) \ .$$

Κατά αναλογία η συνοριακή συνθήκη που επιβάλλουμε στο χωροειδές άπειρο είναι

$$\Phi \sim e^{-i\omega(t-r_*)} \ , \quad r_* \to +\infty \ (r \to +\infty)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες στην (2.6) βρίσκουμε το διακριτό σύνολο των ιδιοτιμών ω τα λεγόμενα QNMs. Μία βασική διαφορά μεταξύ των QNMs και άλλων προβλημάτων φυσικής που εμπλέκουν μικρές διαταραχές/διακυμάνσεις, όπως π.χ. η ταλαντευόμενη χορδή, είναι πως τις περισσοτέρες φορές το σύστημα χάνει ενέργεια. Εδώ αυτή η απώλεια ωφείλεται στα κύματα που χάνονται πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων ή ταξιδεύοντας εσαεί προς το ασυμπτωτικό άπειρο. Αυτό οδηγεί σε αποσβενύμενες ταλαντώσεις που ανταποκρίνονται σε μιγαδικές συχνότητες $\omega = \omega_R + i\omega_i$.

Το ω_i δείχνει το βαθμό της απόσβεσης και το ω_R τη συχνότητα ταλάντωσης. Οι συχνότητες με το μικρότερο βαθμό απόσβεσης είναι αυτές που συνεισφέρουν περισσότερο στο τελικό σήμα σε μεγάλους χρόνους. Αντίθετα, η συνεισφορά των modes με το μεγαλύτερο ω_i μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Όταν βρεθούν modes με θετικό μιγαδικό μέρος ω_i τότε λέγεται ότι ο εν λόγω χωροχρόνος είναι *ασταθής* κάτω από γραμμικές διαταραχές.

Τα συμπαγή αντικείμενα με τα οποία θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια έχουν AdS ασυμπτωτική συμπεριφορά. Στους AdS χωροχρόνους οι επιβαλλόμενες συνοριακές συνθήκες πρέπει να μοντελοποιούν το γεγονός ότι οι διαταραχές *δεν* μπορούν να ξεφύγουν προς το χωροειδές άπειρο. Το AdS σύνορο τις περιορίζει δημιουργώντας ουσιαστικά ένα ''κουτί'' μέσα στο οποίο αυτές μπορούν να διαδωθούν, κάτι που αντιστοιχεί σε ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες

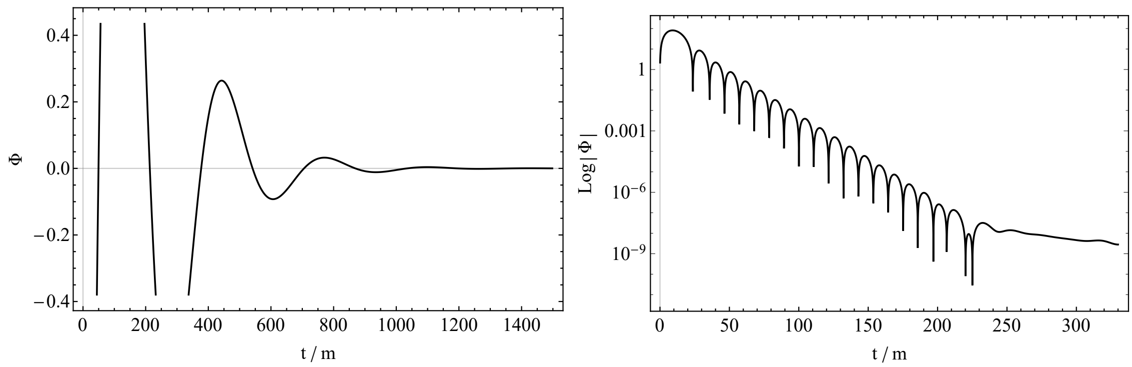
$$\Phi \to 0 \ , \ r \to AdS \ \ Boundary \ .$$

Κατά συνέπεια, το quasinormal ringing στάδιο επικρατεί καθ'όλη τη διαρκεία της χρονικής εξέλιξής [99] τους δηλαδή, δεν παρατηρείται ο σχηματισμός κάποιας ''ουράς'' (late-time tail)[99, 109, 108] όπως στις περιπτώσεις των ασυμπτωτικά επίπεδων ή de-Sitter χωροχρόνων. Οι διαταραχές οι οποίες ανακλόνται από το AdS σύνορο είναι αυτές που παράγουν την επιπλέον ταλαντωτική συμπεριφορά καταστρέφοντας το σχηματισμό μιας ''ουράς''[110, 108].

2.3 Ασυμπτωτική συμπεριφορά σε μεγάλους χρόνους

Μετά από χρόνια μελέτης από την επιστημονική κοινότητα, η γενική συμπεριφορά διαταραχών γύρο από συμπαγή αντικείμενα, έχει κατανοηθεί σε έναν μεγάλο βαθμό. Τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της συμπεριφοράς είναι κοινά τόσο για βαθμωτές, ηλεκτρομαγνητικές και βαρυτικές διαταραχές όσο και για περιστρεφόμενα ή μή, συμπαγή αντικείμενα. Γενικά παρουσιάζονται τρία ξεχωριστά στάδια. Μία αρχική εκτόνωση ακτινοβολίας η όποια μεταφέρει ενέργεια μέσω βαρυτικών κύματων ακολουθούμενη από μία περίοδο αποσβενύμενων ταλαντώσεων των οποίων οι συχνότητες χαρακτηρίζουν το υπό μελέτη αντικείμενο. Αυτό το στάδιο έχει μελετηθεί σε βάθος και στη βιβλιογραφία υπάρχει με τον όρο ''quasinormal ringing''. Έχει αποδειχθεί ότι η συμπεριφορά των διαταραχών σε αυτό το στάδιο δεν επηρεάζεται από τις αρχικές συνθήκες που θα διαλέξει κανείς για τις διαταραχές, αλλά καθορίζεται μόνο από το συμπαγές αντικείμενο και το χωροχρονικό background το οποίο δημιουργεί.

Για ασυμπτωτικά επίπεδους χωροχρόνους το τρίτο στάδιο που ακολουθεί το quasinormal ringing, είναι η εμφάνιση μίας ''ουράς'' της οποίας το πλατός φθήνει με μία συγκεκριμένη δύναμη



Σχήμα 2.2: Συμπεριφορά ενός Γκαουσιανού κυματοπακέτου διαδιδόμενου στο χωροχρόνου μίας μελανής οπής Schwarzschild.

(inverse power-law) κάτι που παρουσιάστηκε πρώτη φορά στα [111, 112, 113]. Οι μέλετες αυτές επεκτάθηκαν και σε άλλες λύσεις μελανών οπών μέχρι τον σχηματισμό μιάς πλήρους εικόνας η οποία παρουσιάστηκε σε μία σειρά από δημοσιεύσεις [105, 106, 107, 114]. Η συμπεριφορά της ακτινοβολίας όπως παρατηρείται από συγκεκριμένες αποστάσεις (φωτοειδές άπειρο και όριζοντας γεγονότων) από το συμπαγές αντικείμενο ανακαλύφθηκε στα [105, 114]. Επιπλέον, αριθμητικές προσομοιώσεις της κατάρευσης ένος self-gravitating βαθμωτού πεδίου έδειξαν πως ο σχηματισμός των inverse power-law ''ουρών'' είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, ακόμη και αν δεν σχηματιστεί μία μελανή οπή. Μία ακόμη απόδειξη των παραπάνω αποτελεσμάτων για την κυματική εξίσωση στον χωροχρόνο Kerr, χωρίς την υπόθεση συμμετριών και για την subextremal περίπτωση δώθηκε στα [106, 107]. Συνεπώς, εάν το εκπεμπόμενο πεδίο Φ παρατηρηθεί από συγκεκριμένη ακτινική απόσταση r και επίσης είναι στατικό πριν την κατάρευση τότε για $t \to \infty$

$$\Phi \sim t^{-(2\ell+2)} \, .$$

Στο σχήμα 2.2 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη μίας βαθμωτής διαταραχής μέσα στο χωροχρόνο Schwarzschild. Στο αριστερό πάνελ φαίνονται ξεκάθαρα οι αποσβενύμενες ταλαντώσεις του πεδίου μέχρι να φτάσει στην ισορροπία. Στο λογαριθμικό διάγραμμα (δεξί πάνελ) γίνονται διακριτά τα τρία στάδια που περιγράφουμε παραπάνω. Μετά την αρχική εκτόνωση ακτινοβολίας, η διαταραχή μπαίνει στο στάδιο του quasinormal ringing το οποίο χαρακτηρίζεται από της QNM συχνότητες ω. Μετά από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, η ταλαντωτική συμπεριφορά δίνει τη θέση της στην inverse power-law ''ουρά''. Υποστηρίζεται πως η φύση της ουράς σχετίζεται με την επίσης inverse power-law συμπεριφορά του ενεργού δυναμικού στους ασυμπτωτικά επίπεδους χωροχρόνους για $r_* \to \infty$ [105, 114] και επιπλέον, λόγω της οπισθοσκέδασης (backscattering) από την καμπυλότητα του background[111, 112]. Αυτή είναι η πλήρης εικόνα της εξέλιξης των διαταραχών σε ασυμπτωτικά επίπεδους χωροχρόνους.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του χωροχρόνου καθορίζει τη συμπεριφορά των πεδίων για μεγάλους χρόνους, ενώ η φύση του συμπαγούς αντικειμένου διέπει το στάδιο του quasinormal ringing. Η παρατήρηση αυτή δημιουργεί άμεσα το ερώτημα του πόσο θα αλλάξει η χρονική εξέλιξη των διαταραχών εάν πχ αντί για έναν ορίζοντα γεγονότων έχουμε κάτι άλλο, όπως πχ το λαιμό μίας σκουλικότρυπας, ή αντί για ασυμπτωτικά επίπεδη συμπεριφορά έχουμε AdS ;

Σε ασυμπτωτικά AdS χωροχρόνους δεν υπάρχουν εξερχόμενα κύματα προς το χωροειδές άπειρο. Το AdS σύνορο δημιουργεί ένα ''κουτί'' έξω από το οποίο οι διαταραχές δεν μπορούν να διαδωθούν, κάτι που επιβάλλει ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες. Κατ΄ επέκταση το στάδιο του ringing διέπει τη χρονική εξέλιξη σε όλους τους χρόνους δηλ. δεν σχηματίζεται κάποια ''ουρά'' οπώς στους ασυμπτωτικά επίπεδους ή dS χωροχρόνους [99, 109, 108].

2.4 Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του Anti de Sitter χωροχρόνου

Στην περίπτωση όπου το background είναι ένας pure AdS χωροχρόνος (χωρίς μελανή οπή), το ενεργό δυναμικό αντιστοιχεί σε ένα απειρόβαθο πηγάδι, μέσα στο οποίο δημιουργούνται bound states. Χωρίς την ύπαρξη κάποιας μελανής οπής, άρα και ενός ορίζοντα γεγονότων, δεν υπάρχει κάποιος μηχανισμός ο οποίος να δημιουργεί διαρροή ενέργειας από το σύστημα. Αυτός είναι ο λόγος που το φάσμα ω των QNM αποτελείται μόνο από κανονικούς τρόπους ταλάντωσης δηλ. το φανταστικό μέρος ω_i είναι μηδενικό. Το φάσμα για ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο βρέθηκε πρώτη φορά στο [118]. Για βαρυτικές διαταραχές του τετραδιάστατου AdS χώρου, το φάσμα υπολογίστηκε αρχικά στο [119] και γενικεύτηκε για αυθαίρετο αριθμό διάστασεων στο [120]

$$\omega R_{AdS} = 2n + D + \ell - j \ , \ n \in \mathbb{N} \, ,$$

όπου R_{AdS} η ακτίνα το AdS χώρου, D ο αριθμός των διάστασεων του χωροχρόνου, ℓ ο κβαντικός αριθμός τροχιακής στροφορμή και $j = 1$ για βαθμωτά πεδία και το τανυστικό κομμάτι των βαρυτικών διαταραχών, $j = 2$ και $j = 3$ για το διανυσματικό και το βαθμωτό κομμάτι των βαρυτικών διαταραχών.

2.5 Αριθμητική ολοκλήρωση κυματικής εξίσωσης

Όπως πιθανότατα είναι γνωστό στον αναγνώστη, οι περισσότερες διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν σε ένα επιστημονικό πρόβλημα, είναι αρκετά πολύπλοκες κάνοντας την ακριβή επίλυσή τους πρακτικά αδύνατη. Επομένως, η χρήση αριθμητικών μεθόδων και προσεγγίσεων είναι καίριας σημασίας τόσο για την εξαγωγή ποσοτικής πληροφορίας, όσο και ως μέσο βοήθειας για την κατανόηση της ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων. Μία βασική κατηγορία αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι οι γνωστές *μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών* στις οποίες οι παράγωγοι της διαφορικής αντικαθιστόνται από κατάλληλες εκφράσεις που περιέχουν διαφορές. Στην παρούσα ενότητα θα δούμε πως εφαρμόζεται η συγκεκριμένη μέθοδος στην κυματική εξίσωση

2.5.1 Πεπερασμένες διαφορές

Υπενθυμίζουμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ ορίζεται από το όριο

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ . \tag{2.7}$$

Υποθέτοντας ότι η $f(x)$ είναι απείρως παραγωγίσιμη τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor έχουμε

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f^{(3)}(x) + \ldots \tag{2.8}$$

όπου αναδιατάσσοντας τους όρους παίρνουμε

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{\Delta x}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^2}{3!} f^{(3)}(x) + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \mathcal{O}(\Delta x) \tag{2.9}$$

το οποίο μας δίνει τη διαφορά που εμφανίζεται στον ορισμό της παραγώγου. Θεωρώντας επιπλέον το expansion του $f(x - \Delta x)$:

$$f(x+\Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) - \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f^{(3)}(x) + \ldots \ , \tag{2.10}$$

και αφαιρώντας την (2.10) από την (2.8) καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = f'(x) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{2.11}$$

η οποία προσεγγίζει ακόμη περισσότερο την τιμή της παραγώγου αφού το σφάλμα είναι της τάξης $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. Για την προσέγγιση των παραγώγων δέυτερης τάξης προσθέτουμε τις (2.8) και (2.10) και βρίσκουμε

$$\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = f''(x) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \ . \tag{2.12}$$

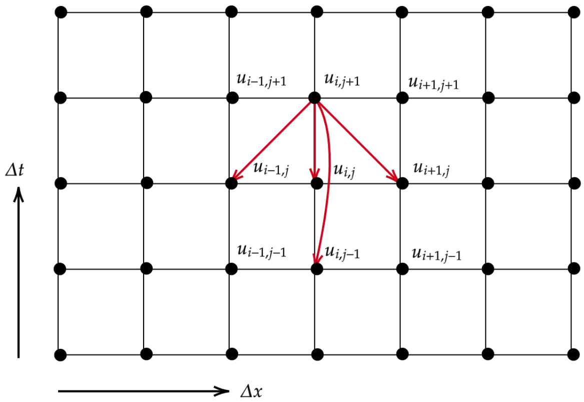
Λόγω της συμμετρίας των σημείων x που επιλέγονται για την προσέγγιση των παραγώγων, οι σχέσεις (2.11) και (2.12) λέμε ότι είναι *κεντρικές προσεγγίσεις διαφορών* (central difference approximations). Η σχέση (2.9) είναι γνωστή ως forward difference approximation. Σημειώνουμε πως οι central προσεγγίσεις παρέχουν μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς καθώς είναι δευτέρας τάξης $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ ενώ οι forward προσεγγίσεις πρώτης $\mathcal{O}(\Delta x)$.

2.5.2 Εφαρμογή - Μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

Ξεκινάμε από το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών για τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < L \ , \tag{2.13}$$

όπου $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0$ και $u(x,0) = f(x)$. Διακριτοποιούμε το χώρο (x,t) εισάγοντας ένα πλέγμα του οποίου τα σημεία καθορίζονται από τις τιμές $x_i = i\Delta x \ , \ t_j = j\Delta t$ και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης u από $u_{i,j} \simeq u(x_i, t_j)$.



Χρησιμοποιόντας κεντρικές προσεγγίσεις για τις παραγώγους της διαφορικής καταλήγουμε στην εξίσωση διαφορών

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} = c^2 \ \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2) \ , \tag{2.14}$$

η οποία καθορίζει την τιμή της u την επόμενη χρονική στιγμή $t_{j+1} = (j+1)\Delta t$

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \ . \tag{2.15}$$

Παρατηρούμε πως η παραπάνω εξίσωση διαφορών είναι τριών επιπέδων. Για να καθορίσουμε την τιμή στην χρονική στιγμή t_{j+1} πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης για t_j και t_{j-1} που συνεπάγεται ότι για να ξεκινήσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση, την χρονική στιγμή t_1, πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές $u_{i,j}$ για $j = 0$ και $j = -1$. Οι τιμές για $j = 0$ καθορίζονται από την αρχική συνθήκη $u(x,0) = f(x)$ και επιπλέον υποθέτουμε πως $u(x, t < 0) = 0$ το οποίο συνεπάγεται ότι $u_{i,j<0} = 0$.

Ευστάθεια Von Neumann

Θεωρούμε την προσέγγιση με πεπερασμένες διαφορές στη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \ . \tag{2.16}$$

Οπως γνωρίζουμε η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί σαν ένα άθροισμα Fourier πάνω στις εκάστοτε συχνότητες. Συνεπώς, συγκεντρωνόμαστε στο να καταλάβουμε πως το παραπάνω αριθμητικό σχήμα επηρεάζει το δομικό στοιχείο πάνω στο οποίο είναι χτισμένη η γενική λύση δηλαδή, μία μιγαδική εκθετική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = t_j$ η λύση δίνεται από το εκθετικό $u_{i,j} = e^{i\omega x_i}$. Αντικαθιστούμε παραπάνω και βρίσκουμε πως η λύση την επόμενη χρονική στιγμή t_{j+1} είναι επίσης μία εκθετική συνάρτηση

$$u_{i,j+1} = \left[1 - 2\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta x}{2}\right] e^{i\omega x_i} \Rightarrow u_{i,j+1} = \lambda\, u_{i,j} \ , \tag{2.17}$$

όπου

$$\lambda = 1 - 2\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta x}{2} \ . \tag{2.18}$$

Επομένως, σε κάθε χρονικό βήμα Δt, η επίδραση του αριθμητικού σχήματος (2.16) είναι ο πολλαπλασιασμός της εκθετικής συνάρτησης με τον λεγόμενο *παράγοντα μεγέθυνσης* λ. Συνεχίζοντας στο ίδιο μοτίβο, βρίσκουμε ότι μετά από n βήματα θα έχουμε

$$u_{i,j+n} = \lambda^n\, u_{i,j} \ , \tag{2.19}$$

άρα καταλαβαίνουμε πως η ευστάθεια του σχήματος καθορίζεται από την τιμή του λ. Εάν $|\lambda| > 1$ τότε οι αριθμητικές λύσεις (2.19) θα απειρίζονται για $t \to \infty$ $(n \to \infty)$. Επομένως απαιτούμε ότι

$$|\lambda| \leq 1 \tag{2.20}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$-1 \leq 1 - 2\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta x}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta x}{2} \leq 0 \ . \tag{2.21}$$

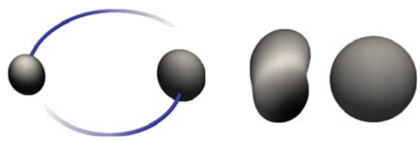
Το δεύτερο κομμάτι της ανισότητας ικάνοποιείται πάντα ενώ το πρώτο οδηγεί στη συνθήκη

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta x}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \tag{2.22}$$

η οποία θέτει ένα άνω φράγμα στα χρονικά βήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Η (2.22) είναι γνωστή ως *συνθήκη Courant-Friedrichs-Lewis (CFL)* .

2.6 Παραγωγή echoes από συμπαγή αντικείμενα

Το 2015 έγινε η πρώτη απευθείας ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων παραγόμενων από την σύγκρουση δύο συμπαγών αντικειμένων [64]. Το συγκεκριμένο γεγονός σηματοδοτεί την αρχή μίας νέας εποχής για την επιστημονική κοινότητα στην οποία ο πειραματικός έλεγχος φυσικών φαινομένων σε συνθήκες εξαιρετικά ισχυρής βαρύτητας είναι πλέον εφικτός [65]. Το ανιχνευόμενο βαρυτικό σήμα μπορεί να χωριστεί σε 3 στάδια [66, 67, 69]: το inspiral στάδιο, που ανταποκρίνεται σε μεγάλες αποστάσεις των δύο αντικειμένων και προσεγγίζεται καλά από post-Newtonian approximations, το merger στάδιο όπου τα δύο αντικείμενα συνενώνονται και το οποίο μπορεί να αναλυθεί μόνο μέ αριθμητικές προσομοιώσεις, και το ringdown στάδιο όπου το τελικό αντικείμενο που δημιουργείται από τη συνένωση εκτονώνεται μεταβαίνοντας προς τη ισορροπία δηλαδή προς μία στάσιμη λύση των εξισώσεων κίνησης.

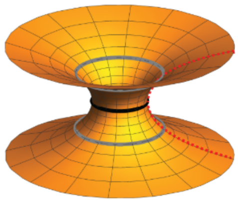


Για μεγάλο διάστημα υπήρχε η πεποίθηση στην επιστημονική κοινότητα ότι το στάδιο του ringdown διέπεται από τα quasinormal modes (QNMs) του τελικού προιόντος της συνένωσης. Στην περίπτωση που το τελικό αντικείμενο είναι μία Kerr μελανή οπή τότε το φάσμα των QNM εξαρτάται μόνο από τη μάζα και την γωνιακή στροφορμή του αντικειμένου όπως υποδεικνύει και το no-hair conjecture. Συνεπώς, η ανίχνευση μερικών modes του ringdown θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση της μάζας και της γωνιακής στροφορμής του αντικειμένου καθώς και της ισχύος του θεωρήματος no-hair. Η παραπάνω ροή σκέψης υποδηλώνει πως το ringdown του αντικειμένου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου ορίζοντα γεγονότων σε ένα συμπαγές αντικείμενο.

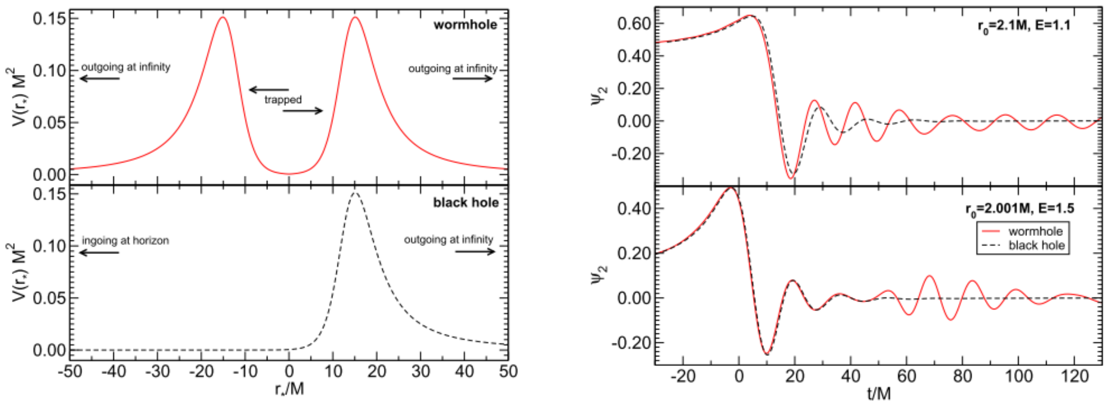
Στην πρωτοποριάκη δημοσίευση [192] οι συγγραφείς ξεκαθάρισαν το τοπίο, όσον αφορά τη σχέση μεταξύ του ringdown, των QNMs και του light ring (photon sphere) (PS), δείχνοντας πως ο μόνος τρόπος γία να αποφανθούμε για τη φύση του αντικειμένου - του οποίου τα βαρυτικά κύματα ανιχνέυσαμε - είναι να εστιάσουμε τις μετρήσεις στην late-time συμπεριφορά του ringdown. Ουσιαστικά απέδειξαν πως η ανίχνευση και η μέτρηση των modes του initial ringdown δεν είναι αρκετή για να ξεχωρίσουμε εάν το αντικείμενο εν τέλει διαθέτει ορίζοντα γεγονότων ή όχι. Συνεπώς, οι μέχρι τώρα μετρήσεις των LIGO, VIRGO θα μπορούσαν να έχουν προέλθει και από άλλα, τα λεγόμενα και ''εξωτικά'' (Exotic Compact Objects) (ECOs) , αντικείμενα πέραν των μελανών οπών.

Η υπόθεση ότι το στάδιο του ringdown διέπεται από τις quasinormal frequencies - οι οποίες ορίζονται ως πόλοι της κατάλληλης συνάρτησης Green [154] - δεν ισχύει κατά κανόνα. Τα QNMs μίας μελανής οπής σχέτιζονται άμεσα με τις ιδιαίτερες συνοριακές συνθήκες του ορίζοντα δηλαδή την απαίτηση ότι τίποτα δεν μπορεί να εξέλθει από αυτόν. Εάν το τελικό αντικείμενο δεν διαθέτει ορίζοντα οι συνοριακές συνθήκες αλλάζουν πλήρως, συνεπώς αλλάζοντας εντελώς το φάσμα των QNM. Από την άλλη, η κυματομορφή του ringdown του υπό διαταραχή αντικειμένου σχετίζεται με τις κυκλικές, φωτοειδείς, ασταθείς γεωδαισιακές του χωροχρόνου [154, 74]. Η συχνότητα του ringdown συνδέεται με την τροχιακή συχνότητα των γεωδαισιακών ενώ ο ρυθμός απόσβεσης (του ringdown) με τα instability time scales των γεωδαισιακών τροχιών δηλαδή με το μέσο χρόνο που αναμένουμε να ξεφύγουν τα σωματίδια από την τελευταία ασταθή κυκλική τροχιά. Άρα, θεωρητικά το στάδιο του ringdown δεν θα έπρεπε να εξαρτάται από την ύπαρξη ή μή ενός ορίζοντα γεγονότων, εάν το τελικό αντικείμενο διαθέτει μία photon sphere.

Εάν το τελικό αντικείμενο είναι μία μελανή οπή, η συνοριακή συνθήκη που επιβάλλεται στο ορίζο-



Σχήμα 2.3: Απεικόνιση της ακτινικής πτώσης ενός σημειακού σωματιδίου (κόκκινη διακεκομμένη) σε μία horizonless σκουλικότρυπα. Η μαύρη γραμμή υποδεικνύει το λαιμό και οι δύο γκρίζες γραμμές τις σφαίρες φωτονίων. Όταν το σωματίδιο κόβει οποιαδήποτε από τις γκρι γραμμές, διεγείρει τα modes της PS τα οποία παγιδεύονται στο πηγάδι δυναμικού μεταξύ των δύο PS (σχ. 2.4 αριστερά). Η εικόνα έχει παρθεί από το [192].



Σχήμα 2.4: (αριστερά) Ενεργό δυναμικό ($\ell = 2$) δυναμικό σε tortoise συντεταγμένες για μία static traversable σκουλικότρυπα (πάνω πάνελ) με $r_{throat} = 2.001M$ και μία μελανή οπή Schwarzschild (κάτω πάνελ). (Δεξιά) Σύγκριση βαρυτικών κυματομορφών παραγόμενων από την πτώση σημειακού σωματιδίου στους δύο χωροχρόνους. Η εικόνα έχει παρθεί από το [192].

ντα παίρνει τις κυματομορφές του ringdown και τις ‘‘κλειδώνει’’ πίσω από τον ορίζοντα επομένως, σε αυτή την περίπτωση τα QNMs της μελανής οπής *συμπτωματικά* περιγράφουν και την μορφή του ringdown. Εάν όμως αντί για μελανή οπή έχουμε ένα ‘‘εξωτικό’’ αντικείμενο χωρίς ορίζοντα (ECO) (π.χ. gravastar [68], σκουλικότρυπα [58, 157], κ.α.) τότε η εκτόνωση του αντικειμένου αποτελείται από τα ringdown modes λόγω του light-ring ακολουθούμενα από τα πραγματικά QNMs του αντικειμένου. Τα πρώτα δεν εξαρτόνται από της συνοριακές συνθήκες και είναι παρόμοια με την περίπτωση των μελανών οπών, ενώ τα δεύτερα (τα πραγματικά QNMs του αντικειμένου) θα διαφέρουν δραματικά από τα αντίστοιχα QNMs μίας μελανής οπής αφού ορίζονται μέσω διαφορετικών συνοριακών συνθηκών. Επομένως, είναι δυνατόν, τα αρχικά ringdown δύο αντικειμένων να φαίνονται σχεδόν πανομοιότυπα στο time-domain αλλά το QNM φάσμα τους να διαφέρει δραματικά, όπως αυτό εξάγεται λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση ιδιοτιμών (frequency-domain).

Για να επιβεβαιωθεί η παραπάνω εικόνα, τουλάχιστον στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας, οι συγγραφείς στο [192] μελέτησαν το ringdown και τα αντίστοιχα QNMs ενός εξωτικού αντικειμένου που διαθέτει photon sphere αλλά όχι ορίζοντα. Συγκεκριμένα μελέτησαν τη βαρυτική ακτινοβολία που προκαλείται από ένα σημειακό σωματίδιο το οποίο πέφτει ακτινικά σε μία traversable thin-shell Schwarzschild σκουλικότρυπα και σύγκριναν τα αποτελέσματα με αυτά μίας μελανής οπής Schwarzschild. Βρήκαν ότι το αρχικό σήμα του ringdown το οποίο οφείλεται στα modes της PS είναι πανομοιότυπο με αυτό της μελανής οπής παρόλο που τα QNM φάσματα των δύο αντικειμένων διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό και, οποιαδήποτε διαφοροποίηση στα σήματα γίνεται φανερή στην late-time συμπεριφορά του ringdown με την ύπαρξη των echoes (σχ.2.4 δεξιά) τα οποία προέρχονται από τα trapped modes της εσωτερικής ευσταθούς PS της σκουλικότρυπας (σχ.2.4 αριστερά).

Στο [70] μέσω της σκέδασης Γκαουσιανών κυματόπακέτων σε χωροχρόνους εξωτικών αντικειμένων όπως, thin-shell gravastars [68], thin-shell wormholes κ.α., βρέθηκε πως οποιαδήποτε διαφοροποίηση στον ορίζοντα, λόγω της ύπαρξης μίας άλλης επιφάνειας στην θέση του [68] ή λόγω κβαντικών διορθώσεων [52, 53, 57, 54], εμπλουτίζει το βαρυτικό σήμα με echoes. Επίσης μελετήθηκε η head-on σύγκρουση μεταξύ δύο solitonic Boson Stars (BS).

Στο [127] βρέθηκε η ύπαρξη echoes σε χωροχρόνους που παρεμβάλλονται μεταξύ μελανής οπής και σκουλικότρυπας για τον toy-model χωροχρόνο [246]. Μία παρόμοια ανάλυση πραγματοπιήθηκε επίσης στο [126] για ακριβείς λύσεις των εξισώσεων Shiromizu-Maeda-Sasaki [55] η οποίες περιγράφουν το on-brane βαρυτικό πεδίο στο δεύτερο Randall-Sundrum brane-world scenario (RS2) [56]. Στο [202] οι συγγραφείς μοντελοποίησαν την ύπαρξη ύλης στο αστροφυσικό περιβάλλον ενός συμπαγούς αντικείμενου με την προσθήκη ενός massive non-thin shell ύλης στο χωροχρόνο μίας thin-shell σκουλικότρυπας και εξέτασαν εάν η ύπαρξη ύλης στο περιβάλλον το αντικειμένου είναι ικανή να παράξει echoes. Τα αποτελέσματά τους υποδεικνύουν πως εάν εν τέλει παρατηρηθούν πειραματικά τα echoes τότε πιθανότατα θα οφείλονται σε νέους φυσικούς μηχανισμούς κοντά στον ορίζοντα πάρα στο αστροφυσικό περιβάλλον του αντικειμένου.

Κεφάλαιο 3

Σκουλικότρυπες στην Τροποποιημένη **Brans-Dicke** θεωρία

3.1 Εισαγωγή

Τα βαθμωτά πεδία έχουν κεντρικό ρόλο στις τροποποιήσεις της Γενικής Σχετικότητας (ΓΘΣ) τόσο σε μικρές όσο και σε μεγάλες αποστάσεις. Σε μικρές αποστάσεις μπορούν να οδηγήσουν στη δημιουργία ‘‘τριχωτών’’ μελανών οπών (hairy black holes) καθώς και λύσεων που περιγράφουν σκουλικότρυπες (wormholes). Σε μεγαλές αποστάσεις παράγουν λύσεις ικάνες να περιγράψουν την πληθωριστική φάση (inflation) του σύμπαντος αλλά και την ‘‘πρόσφατη’’ επιταχυνόμενη διαστολή του. Δεν είναι λοιπόν περίεργο που οι θεωρίες βαθμωτού-τανυστή (ΘΒΤ) (scalar-tensor theories) εμφανίστηκαν μέσα από την προσπάθεια εύρεσης μιας βιώσιμης θεωρίας βαρύτητας η οποία θα έλυνε τις ασυνέπειες της ΓΘΣ με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Όπως είναι γνωστό, η Brans-Dicke θεωρία (BD) [18] είναι μία από τις πρώτες ΘΒΤ που κατάφεραν να τροποποιήσουν την ΓΘΣ με τέτοιο τρόπο ώστε το νέο μοντέλο να ικανοποιεί την Αρχή του Mach και την Ασθενή Αρχή της Ισοδυναμίας (ΑΑΙ)(weak equivalence principle). Σε αυτό το μοντέλο υπάρχει μία effective βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα G_{eff} η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη του βαθμωτού πεδίου $G_{eff} \sim \frac{1}{\phi}$. Επιπλέον χαρακτηρίζεται από μία αδιάστατη σταθερά σύζευξης ω_{BD} της οποίας οι υψηλές τιμές υποδηλώνουν μεγαλύτερη συνεισφορά από το τανυστικό κομμάτι της θεωρίας ενώ οι πιο χαμηλές τιμές σημαίνουν μεγαλύτερη συνεισφορά από το βαθμωτό πεδίο. Η ΓΘΣ ανακτάται στο όριο $\omega \to \infty$.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πως η BD εμφανίζεται σε μοντέλα της supergravity, στις χαμηλές ενέργειες θεωριών χορδών και σε θεωρίες Kaluza-Klein μετά από διαστατική ελάττωση [19]. Τα παραπάνω μοντέλα δίνουν σωστά όρια στην Νευτώνεια θεωρία, αλλά πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή όταν κανείς μελετάει αυτές τις θεωρίες και συγκρίνει τις προβλέψεις τους με αυτές της ΓΘΣ. Εν γένει τα βαθμωτά πεδία, αναλόγως και με τη σύζευξη που έχουν με τη βαρύτητα, λειτουργούν ως φορείς επιπλέον δυνάμεων, πέραν των τεσσάρων γνώστων. Όσον αφορά την BD, τοπικές μετρήσεις στον ηλιακό σύστημα υποδεικνύουν ότι το ω πρέπει να είναι της τάξης των μερικών χιλιάδων [20]. Επομένως, τα βαθμωτά πεδία που χρησιμοποιούνται σε θεωρητικό επίπεδο πρέπει να περιλαμβάνουν και ένα μηχανισμό ο οποίος θα ελαχιστοποιεί την συνεισφορά τους στις μικρές αποστάσεις. Ένας τέτοιος μηχανισμός αναπτύχθηκε από τον Vainshtein [21, 22] για μοντέλα massive gravity.

Σε μεγάλες αποστάσεις οι κοσμολογικές παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι το ω πρέπει να λαμβάνει σχετικά μικρές τιμές, ανάλογα πάντα και με το εκάστο τε μοντέλο. Από την άλλη, είναι πιθανό η σύζευξη με την βαρύτητα ω να εξαρτάται από την κλίμακα [24] και να παίρνει διαφορετικές τιμές σε μικρές και μεγάλες αποστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση το ω θα μπορούσε να λαμβάνει μικρές τιμές σε μεγάλες αποστάσεις (υποδεικνύοντας απόκλιση από την ΓΘΣ) και μεγάλες τιμές σε μικρές αποστάσεις (έτσι ώστε να επαληθεύει τις τοπικές παρατηρήσεις βλ. ηλιακό σύστημα).

Όσον αφορά τις μικρές αποστάσεις, λίγο μετά την θεμελίωση της θεωρίας ο Brans βρήκε 4 οικογένειες τοπικών, στατικών και σφαιρικά συμμετρικών λύσεων [36]. Στη βιβλιογραφία αρκετοί υποστήριξαν πως αυτές οι λύσεις θα μπορούσαν να περιγράψουν νέες μη-τετριμμένες λύσεις μελανών οπών, διαφορετικών από αυτές της ΓΘΣ. Αυτοί οι ισχυρισμοί αποδείχθηκαν λανθασμένοι σε μία σειρά δημοσιεύσεων. Στο [37] ο Hawking έδειξε ότι οι λύσεις μελανών οπών της BD είναι ίδιες με αυτές της ΓΘΣ. Το αποτέλεσμα αυτό γενικέυτηκε ύστερα στις ΘΒΤ [38] αλλά και σε λύσεις με παρουσία κοσμολογικής σταθεράς [39]. Τέλος, στο [44] μέσα από αναλυτική μελέτη, αποδείχθηκε ότι όλες οι στατικές, σφαιρικά συμμετρικές λύσεις της BD είναι ικανές να περιγράψουν σκουλικότρυπες, ακάλυπτες ιδιομορφίες (naked singularities) ή την λύση Schwarzschild αλλά, όχι καινούργιες λύσεις μελανών οπών.

Με την εισαγωγή ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη θεωρία, οι λύσεις στις 4 διαστάσεις ανάγονται στη λύση Reissner-Nordstrom με ένα σταθερό βαθμωτό πεδίο [37]. Ωστόσο σε μεγαλύτερο αριθμό διαστάσεων νεες μη-τετριμμένες λύσεις μελανών οπών έχουν βρεθεί [45] το οποίο είναι συνέπεια της παρουσίας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στην εξίσωση κίνησης του βαθμωτού, δρώντας ως πηγή για την δημιουργία μίας μη-τετριμμένης συμπεριφοράς από το βαθμωτό πεδίο.

Πρόσφατα μία νέα τροποποιήση της BD [46] εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία στην οποία το βαθμωτό πεδίο παρουσιάζει σύζευξη και με την ύλη, πέρα από την μετρική [47]. Αυτή η νέα σύζευξη εισαγάγει ένα νέο scale στη θεωρία το οποίο τροποποιεί τις εξισώσεις κίνησης άκομα και στο κενό, χωρίς παρουσία ύλης. Το νέο αυτό μοντέλο παρουσιάζει ενδιαφέρουσα κοσμολογία [48] όντας ικανό να περιγράψει και την περίοδο πληθωρισμού αλλά και την πρόσφατη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. Το νέο scale της θεωρίας τροποποιεί τις εξισώσεις Friedmann με επιπλέον κινητικούς ορούς στους οποίους συνεισφέρει και το βαθμωτό πεδίο. Στις γενικές λύσεις ενός radiation universe βρέθηκαν κλάδοι στους οποίους δεν παράγεται η αρχική ιδιομορφία του σύμπαντος ενώ ταυτόχρονα, δημιουργείται μία βραχυπρόθεσμη περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής μέσα στο πλαίσιο της γενικότερης επιβράδυνσης. Η παραγωγή εντροπίας είναι επίσης εφικτή στο πρώιμο σύμπαν. Κατά την dust era, βρέθηκε αριθμητικά περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής, σε συμφωνία με τη συμπεριφορά των παραμέτρων πυκνότητας (density parameters) και της καταστατικής εξίσωσης (equation of state) της σκοτεινής ενέργειας ενώ, η βαρυτική σταθερά παρουσιάζει μια μικρή απόκλιση για ένα μεγάλο δίαστημα του redshift σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

Η ενδιαφέρουσα συμπεριφορά του μοντέλου σε κοσμολογικές κλίμακες μας παροτρύνει να εξετάσουμε τις συνέπειες που ενδεχομένως να έχει αυτή η νέα σύζευξη και στις μικρές κλίμακες δηλαδή, στις τοπικές λύσεις. Όπως προείπαμε οι λύσεις τις BD είναι είτε σκουλικότρυπες, είτε ακάλυπτες ιδιομορφίες, είτε η λύση Schwarzschild. Για να αποφύγει κανείς αυτό το πρόβλημα και να πάρει νέες λύσεις, πρέπει να εισάγει στην δράση έναν όρο δυναμικού [40, 50]. Επομένως, έχει ενδιαφέρον να ελέγξουμε εάν αυτή η τροποποίηση στην αρχική θεωρία - η οποία διαφέρει από την εισαγωγή δυναμικού και επιπλέον δεν είναι δυνατόν να απορροφηθεί σε έναν επαναορισμό του ω - μπορεί να δώσει καινούργιες λύσεις μελανών οπών ή και σκουλικότρυπων.

Γι αυτό το λόγο, θα δούμε περιληπτικά τη συμπεριφορά των λύσεων στο κενό της BD στην ενότητα 3.2 και στη συνέχεια θα λύσουμε τις εξισώσεις του νέου μοντέλου στην ενότητα 3.3 όπου και θα καθορίσουμε τα συμπαγή αντικείμενα που αυτές μπορούν να περιγράψουν. Τέλος, στην ενότητα 3.5 έχουμε τα συμπεράσματά μας.

3.2 Λύσεις της Brans-Dicke στο κενό

Η δράση της θεωρίας στο κενό, με αυθαίρετο αριθμό διαστάσεων $D(\geq 4)$ και στο σύστημα Jordan δίνεται από

$$I = \frac{1}{16\pi}\int d^D x\sqrt{-g}(\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\ .)\ . \tag{3.1}$$

Έπειτα από μεταβολές στην μετρική και το βαθμωτό πεδίο λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \phi G_{\mu\nu} &\equiv \phi(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \\ &= \frac{\omega}{\phi}\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2\right] \\ &+ \nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\nabla^2\phi\ , \qquad (3.2) \\ \nabla^2\phi &= 0\ , \qquad (3.3) \end{aligned}$$

όπου $d = D - 3$. Ξεκινάμε την επίλυση των εξισώσεων (3.2)-(3.3) εφαρμόζοντας τον ακόλουθο σύμμορφο μετασχηματισμό (conformal transformation)

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \bar{g}_{\mu\nu}\ , \tag{3.4}$$

με

$$\Omega^{-(d+1)} = \phi\ , \tag{3.5}$$

και

$$\bar{\phi} = \sqrt{2a}\int^\phi \frac{d\phi}{\phi} = \sqrt{2a}\ln\phi, \quad a = \frac{d+2}{d+1} + \omega\ . \tag{3.6}$$

Η δράση (3.1) στο σύστημα Einstein παίρνει τη μορφή της ΓΘΣ με ένα ελάχιστα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο ($\bar{\phi}$)

$$\bar{I} = \frac{1}{16\pi}\int d^D x\sqrt{-\bar{g}}[\bar{R} - \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\bar{\phi})^2]\ , \tag{3.7}$$

όπου $\bar{R}$ και $\bar{\nabla}$ η βαθμωτή καμπυλότητα και η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς τη νέα μετρική $\bar{g}_{\mu\nu}$ αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι:

- Η σχέση (3.6) συνεπάγεται $a > 0$ ($\omega > -\frac{d+2}{d+1}$), και λαμβάνουμε $\bar{\phi} = 0$ στο χωροειδές άπειρο.
- Η δράση παίρνει την απλούστερη μορφή μίας ΓΘΣ με ένα ελάχιστα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο, κάτω από την εφαρμογή του σύμμορφου μετασχηματισμού.
- Η δράση (3.1) είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την (3.7). Ωστόσο, σημειώνουμε πως στο Einstein σύστημα, τα δοκιμαστικά σωματίδια αποκτούν μεταβλητή αδρανειακή μάζα με το χωροχρόνο και δεν κινούνται πλέον πάνω στις γεωδαισιακές. Αυτή η φυσική μη-ισοδυναμία μπορεί να κατανοηθεί από τον σύμμορφο μετασχηματισμό στη μετρική (3.4), (3.5). Ο μετασχηματισμός εξαρτάται από το βαθμωτό πεδίο το οποίο παραμετροποιεί τα πεδία ύλης του μοντέλου. Επομένως, η φυσική συμπεριφορά της θεωρίας μπορεί να κατανοηθεί μόνο εάν η σύζευξη με την ύλη καθοριστεί με συγκεκριμένο τρόπο.

  Επομένως, θα μπορούσαμε να πούμε πως οι δύο θεωρίες είναι ισοδύναμες από καθαρά μαθηματική σκοπιά αλλά όχι και από φυσική.

Μεταβάλλοντας τη δράση (3.7) παίρνουμε τις εξισώσης κίνησης οι οποίες με αυτέ τις αρχικές (3.2)-(3.3) μέσα από τις σχέσεις

$$(g_{\mu\nu}, \phi) = (e^{-\frac{2}{(d+1)\sqrt{2a}}\bar{\phi}}\bar{g}_{\mu\nu}, e^{\frac{1}{\sqrt{2a}}\bar{\phi}}) \ . \tag{3.8}$$

Χρησιμοποιώντας ισοτροπικές συντεταγμένες [51]

$$d\bar{s}^2 \ = \ -e^f dt^2 + e^{-h}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2_{d+1}) \ , \tag{3.9}$$

στην D-διάστατη BD στο κενό και αξιοποιώντας την (3.8), βρίσκουμε τη λύση,

$$ds^2 \ = \ \Omega^2 d\bar{s}^2 = \left(\frac{\rho^d + \rho_o^d}{\rho^d - \rho_o^d}\right)^{\frac{2}{d+1}\left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad}\right]^{1/2}} d\bar{s}^2 \ , \tag{3.10}$$

$$\phi \ = \ \left(\frac{\rho^d - \rho_o^d}{\rho^d + \rho_o^d}\right)^{\left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad}\right]^{1/2}} \ , \tag{3.11}$$

όπου γ σταθερά ολοκλήρωσης και η $d\bar{s}^2$ δίνεται από τη σχέση (3.9). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η λύση (3.10) είναι ασυμπτωτικά επίπεδη και το σημείο $\rho = \rho_o$ αντιστοιχεί σε μία ακάλυπτη ιδιομορφία. Αυτό μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας τη βαθμωτή καμπυλότητα της (3.10) μέσα από τη σχέση

$$\begin{aligned} R \ &= \ \Omega^{-2}\bar{R} - 2(d+2)\Omega^{-3}\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\Omega \\ &- \ (d+2)(d-1)\Omega^{-4}\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\Omega\bar{\nabla}_\nu\Omega \ , \end{aligned} \tag{3.12}$$

και δείχνοντας πως απειρίζεται για μηδενική ακτίνα. Ξανά, παρατηρούμε ότι:

- Για $\gamma = 1$, η λύση (3.10) ανάγεται στη D-διάστατη λύση Schwarzschild με ένα σταθερό βαθμωτό πεδίο ($\phi = 1$) και BD θεωρία ανάγεται στη ΓΘΣ.

- Το βαθμωτό πεδίο παίρνει τιμές στο διάστημα $\phi \in (0, 1]$. Από τη δράση (3.7) παρατηρούμε πως οι εξισώσεις κίνησης είναι αναλλοίωττες κάτω από το μετασχηματισμό $\bar{\phi} \to -\bar{\phi}$. Επομένως, μπορούμε να πάρουμε ακόμη μία λύση της BD στο κενό

$$ds^2 \ = \ \left(\frac{\rho^d - \rho_o^d}{\rho^d + \rho_o^d}\right)^{\frac{2}{d+1}\left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad}\right]^{1/2}} d\bar{s}^2 \ , \tag{3.13}$$

$$\phi \ = \ \left(\frac{\rho^d + \rho_o^d}{\rho^d - \rho_o^d}\right)^{\left[\frac{(d+1)(1-\gamma^2)}{ad}\right]^{1/2}} \ , \tag{3.14}$$

  όπου $d\bar{s}^2$ δίνεται από τη σχέση (3.9). Σε αυτή την περίπτωση το βαθμωτό ϕ παίρνει τιμές στην περιοχή $[1, \infty)$. Ωστόσο ο χωροχρόνος παραμένει ασυμπτωτικά επίπεδος και το σημείο $\rho = \rho_o$ αντιστοιχεί σε ακάλυπτη ιδιομορφία, εκτός αν $\gamma = 1$. Όταν $\gamma = 1$,το βαθμωτό γίνεται σταθερό και η λύση (3.13) γίνεται η D-διάστατη λύση Schwarzschild. Σημειώνουμε ότι το $\phi = 0$ αντιστοιχεί σε μία άπειρη τιμή της βαρυτικής σταθεράς ενώ, $\phi = \infty$ αντιστοιχεί σε μηδενική βαρυτικής σταθεράς συνεπώς, θα θέλαμε ιδανικά το ϕ να απειρίζεται ή να μηδενίζεται μόνο στις ιδιομορφίες.

Η μετρική (3.10) είναι στην ουσία η πρώτη κλάση λύσεων του Brans ''μεταμφιεσμένη'' αφού εάν αντικαταστήσουμε $D = 4$, τότε $d = 1$ και $\alpha = \frac{3+2\omega}{2}$, το οποίο συνδέεται με τη σταθερά λ μέσω της σχέσης $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega+3/2} = \lambda$ (βλ. 3.4). Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στο στοιχείο μήκους, μαζί με τη μορφή του $d\bar{s}^2$ παίρνουμε

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\rho_o/\rho}{1+\rho_o/\rho}\right)^{\alpha(\lambda,\gamma)+2\gamma} dt^2 + \left(1-\frac{\rho_o^2}{\rho^2}\right)^2 \left(\frac{1+\rho_o/\rho}{1-\rho_o/\rho}\right)^{\alpha(\lambda,\gamma)+2\gamma} \left[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right] \quad (3.15)$$

που είναι ακριβώς αυτό που βρίσκουμε στη (3.59). Η απαίτηση να είναι πραγματικό το βαθμωτό πεδίο στο Einstein σύστημα $\bar{\phi}$, συνεπάγεται $\alpha > 0\,(\omega > -\frac{3}{2}$ ιν Δ=4) άρα, μόνο η πρώτη κλάση λύσεων του Brans μπορρεί να ανακτηθεί στο σύστημα Jordan. Υπάρχουν ακόμη τρεις κλάσεις λύσεων που έχει βρει ο Brans οι οποίες αντιστοιχούν σε $\omega < -\frac{3}{2}$ (για μία λεπτομερή ανάλυση των λύσεων του Brans βλ. [44].

Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως η μοναδική λύση μελανής οπής στο κένο, στην BD θεωρία, είναι η λύση Schwarzschild.

3.3 Τροποποιημένη Brans-Dicke θεωρία

Η ''τροποιημένη Brans-Dicke'' θεωρία [46] περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \frac{8\pi}{\phi}(T^{\mu}{}_{\nu} + \mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}) \; , \quad (3.16)$$

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\phi}{2\lambda(\nu+8\pi\phi^2)^2}\Big\{2\big[(1+\lambda)\nu+4\pi(2-3\lambda)\phi^2\big]\phi^{;\mu}\phi_{;\nu} - \big[(1+2\lambda)\nu+4\pi(2-3\lambda)\phi^2\big]\delta^{\mu}{}_{\nu}\phi^{;\rho}\phi_{;\rho}\Big\} + \frac{\phi^2}{\nu+8\pi\phi^2}\big(\phi^{;\mu}{}_{;\nu} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\Box\phi\big) \; , \quad (3.17)$$

$$\Box\phi = 4\pi\lambda\mathcal{T} \; , \quad (3.18)$$

$$\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu;\mu} = \frac{\nu}{\phi(\nu+8\pi\phi^2)}\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}\phi_{;\mu} \, , \quad (3.19)$$

όπου ν είναι η σταθερά της νέας σύζευξης. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται έπειτα από μεταβολές στη δράση [47]

$$S = \frac{\eta}{2(8\pi)^{3/2}} \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\Big[\sqrt{|\nu+8\pi\phi^2|}\,R - \frac{8\pi}{\lambda}\,\frac{\nu+4\pi(2-3\lambda)\phi^2}{|\nu+8\pi\phi^2|^{3/2}}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + 16\pi\frac{\sqrt{|\nu+8\pi\phi^2|}}{\phi}L_m(g_{\kappa\lambda},\Psi)\Big] \, , \quad (3.20)$$

όπου $\eta = \mathrm{sgn}(\phi)$. Υπάρχει μία μή-ελάχιστη ζεύξη μεταξύ ύλης και βαθμωτού η ένταση της οποίας καθορίζεται στην τιμή της νέας σταθεράς ν. Από την (3.19) φαίνεται ότι η ν λειτουργεί ως ένα μέτρο της απόκλισης από τη αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ύλη. Θέτοντας $\nu = 0$ η θεωρία καταλήγει στην αρχική BD (;;). Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το γεγονός ότι αν θεωρήσουμε λύσεις στο κενό $\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} = 0$, και η διατήρηση της ενέργειας ικανοποιείται και η τροποποίηση της θεωρίας παραμένει λόγω της παρουσίας του ν και αυτή και η ουσιώδης διαφορά με τις λύσεις στο κενό της κλασσικής BD. Επομένως, θα συνεχίσουμε στη εξέταση της συμπεριφοράς των λύσεων της (3.20) στο κενό δηλαδή με $L_m(g_{\kappa\lambda},\Psi) = 0$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλους σύμμορφους μετασχηματισμούς και επαναορίζοντας το πεδίο ϕ σε σ [47]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\phi) g_{\mu\nu} \,, \tag{3.21}$$

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \sqrt{\frac{|\lambda|}{16\pi}} \sqrt{|\nu + 8\pi\phi^2|} \,, \tag{3.22}$$

$$\Omega = \left(\frac{|\nu + 8\pi\phi^2|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{4}} , \tag{3.23}$$

μπορούμε να φέρουμε την δράση (3.20) στο Einstein σύστημα

$$S = \frac{\eta}{16\pi} \int d^4x \, \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} - \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu}\right) , \tag{3.24}$$

όπου $\epsilon = \mathrm{sgn}(\nu + 8\pi\phi^2)$, $\epsilon_\lambda = \mathrm{sgn}(\lambda)$. Για να αποφύγουμε τα ghosts και να επιβάλουμε θετικές κινητικές ενέργειες στο πεδίο σ απαιτούμε από εδώ και πέρα να ισχύει $\epsilon\epsilon_\lambda > 0$. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται στις δύο περιπτώσεις όπου τα ϵ και ϵ_λ είναι ομόσημα και θα μας δημιουργήσει δύο ξεχωριστούς κλάδους λύσεων όταν εφαρμόσουμε τον αντίστροφο σύμμορφο μετασχηματισμό για να περάσουμε στο Jordan σύστημα. Για $\epsilon > 0$ οι σχέσεις (3.22),(3.23) γίνονται

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{|\lambda|}} \ln\left|4\pi\phi + \sqrt{2\pi}\sqrt{\nu + 8\pi\phi^2}\right| , \tag{3.25}$$

$$\phi = \frac{s}{8\pi}\left(e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\sigma} - 2\pi\nu e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\sigma}\right) , \tag{3.26}$$

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left|e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\sigma} + 2\pi\nu e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\sigma}\right|^{\frac{1}{2}} \tag{3.27}$$

όπου $s = \mathrm{sgn}(4\pi\phi + \sqrt{2\pi}\sqrt{\nu + 8\pi\phi^2}) = \mathrm{sgn}\left(e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\sigma} + 2\pi\nu e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\sigma}\right)$, ενώ για $\epsilon < 0$ παίρνουμε

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{|\lambda|}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{8\pi}{|\nu|}}\,\phi\right) , \tag{3.28}$$

$$\phi = \sqrt{\frac{|\nu|}{8\pi}} \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\,\sigma\right) . \tag{3.29}$$

$$\Omega = \left(\frac{|\nu|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\,\sigma\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.30}$$

όπου $-\frac{\pi}{2} < \sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\,\sigma < \frac{\pi}{2}$. Με τις παραπάνω σχέσεις (3.25)-(3.30) μπορούμε να μετασχηματίζουμε τις λύσεις μεταξύ των Einstein και Jordan συστημάτων.

Στο Einstein σύστημα (3.24) όπου έχουμε ένα βαθμωτό πεδίο ελάχιστα συζευγμένο με τηκ καμπυλότητα, οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu} - \frac{1}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\kappa\lambda}\sigma_{,\kappa}\sigma_{,\lambda} \,, \tag{3.31}$$

$$\tilde{\Box}\sigma = 0 \,. \tag{3.32}$$

Η στατική και σφαιρικά συμμετρική τους λύση τους είναι ήδη γνωστή [51]

$$d\tilde{s}^2 = -e^f dt^2 + e^{-h}\big[d\rho^2 + \rho^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big)\big]\,, \tag{3.33}$$

$$\sigma = 2\sqrt{1-\gamma^2}\ \ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\,, \tag{3.34}$$

$$e^f = \Big(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\Big)^{2\gamma}\,, \tag{3.35}$$

$$e^{-h} = \Big(1-\frac{\rho_o^2}{\rho^2}\Big)^2\Big(\frac{\rho+\rho_o}{\rho-\rho_o}\Big)^{2\gamma}\,, \tag{3.36}$$

όπου $\rho_o > 0, \gamma$ σταθερές ολοκλήρωσης. Η παραπάνω λύση έχει αποδειχθεί ότι περιγράφει ακάλυπτες από ορίζοντα ιδιομορφίες ή την λύση Schwarzschild όταν $\gamma = \pm 1$ [51]. Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να μετασχηματίσουμε την παραπάνω μετρική στο σύστημα Jordan χρησιμοποιώντας τις αντίστροφες σχέσεις των (3.22),(3.23). Στις ισοτροπικές συντεταγμένες έχουμε

$$ds^2 = -\Omega^{-2}e^f dt^2 + \Omega^{-2}e^{-h}\big[d\rho^2 + \rho^2\big(d\theta^2 + \sin^2\ \theta\, d\varphi^2\big)\big] \tag{3.37}$$

ενώ σε σφαιρικές συντεταγμένες λαμβάνουμε

$$r = \rho\Omega^{-1}e^{-\frac{h}{2}}\,, \tag{3.38}$$

$$ds^2 = -\Omega^{-2}e^f dt^2 + \frac{r^2}{\rho^2}\frac{dr^2}{(\frac{dr}{d\rho})^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\,. \tag{3.39}$$

Συνεχίζουμε με την εξέταση της συμπεριφοράς των λύσεων για τους δύο κλάδους $\epsilon > 0$ και $\epsilon < 0$. Σκοπός μας είναι να καταλάβουμε έαν είναι ικανές να δώσουν και καινούργιες λύσεις μελανών οπών ή σκουλικότρυπων διαφορετικών από την ΓΘΣ.

3.4 Τοπικές λύσεις

3.4.1 Κλάδος $\epsilon < 0$

Σε αυτό τον κλάδο λύσεων απαιτούμε $\epsilon < 0$ και $\epsilon_\lambda < 0$. Η πρώτη ανισότητα ικανοποιείται για

$$\epsilon = \mathrm{sgn}(\nu + 8\pi\phi^2) < 0 \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\sigma < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$\nu < 0 \quad \& \quad \rho > \rho_o\frac{e^K+1}{e^K-1} \quad \text{όπου, } K = \frac{\pi}{2\sqrt{2|\lambda|(1-\gamma^2)}} \tag{3.40}$$

ενώ η δεύτερη συνεπάγεται

$$\epsilon_\lambda < 0 \Longrightarrow \omega < -3/2\,. \tag{3.41}$$

Το βαθμωτό πεδίο και η μετρική του χωροχρόνου σε αυτή την περίπτωση δίνονται από

$$\phi = \sqrt{\frac{|\nu|}{8\pi}} \sin\left(\sqrt{2|\lambda|(1-\gamma^2)} \ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right), \tag{3.42}$$

$$g_{tt} = -\Big(\frac{8\pi}{|\nu|}\Big)^{\frac{1}{2}} \sec\Big(\sqrt{2|\lambda|(1-\gamma^2)} \ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\Big)\Big(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\Big)^{2\gamma}, \tag{3.43}$$

$$g_{\rho\rho} = \Big(\frac{8\pi}{|\nu|}\Big)^{\frac{1}{2}} \sec\Big(\sqrt{2|\lambda|(1-\gamma^2)} \ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\Big)\left(1-\frac{\rho_o^2}{\rho^2}\right)^2\left(\frac{1+\rho_o/\rho}{1-\rho_o/\rho}\right)^{2\gamma}. \tag{3.44}$$

Μερικά πράγματα που παρατηρούμε είναι:

1. Η σταθερά ν εισάγει ένα νέο scale στην μετρική.
2. Για $\nu = 0$ το στοιχείο μήκους ds^2 απειρίζεται και δεν καταλήγουμε σε κάποια γνωστή λύση της BD θεωρίας. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι η ανισότητα $\epsilon = \mathrm{sgn}(\nu + 8\pi\phi^2) < 0$ δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για $\nu = 0$ και ολόκληρος ο κλάδος ακυρώνεται.
3. Ο χωροχρόνος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος αφού

$$\lim_{\rho\to\infty} g_{tt} = -\sqrt{\frac{8\pi}{|\nu|}} \quad , \quad \lim_{p\to\infty} g_{\rho\rho} = \sqrt{\frac{8\pi}{|\nu|}}$$

.

4. Για $\gamma = \pm 1$ το βαθμωτό πεδίο είναι σταθερό, η μετρική καταλήγει στην Schwarzschild, με μάζα $M = \pm 2\rho_o$ αντίστοιχα, και όλη η θεωρία καταλήγει στην ΓΘΣ.
5. Για $\gamma \neq \pm 1$ τα g_{tt}, $g_{\rho\rho}$ απειρίζονται στο σημείο $\rho = \rho_o\frac{e^K+1}{e^K-1}$.
6. Το βαθμωτό ϕ μηδενίζεται σε μεγάλες αποστάσεις $\rho \to \infty$ ή όταν $\lambda \to 0 (\omega \to \infty)$.

Για να καταλάβουμε τι αντικείμενο περιγράφει η εν λόγω μετρική βοηθάει να κοιτάξουμε δύο ακόμα ποσότητες, το areal radius και το βαθμωτό Ricci. Οι ποσότητες αυτές σα συνάρτησεις της ακτινικής συντεταγμένης δίνονται αντίστοιχα από

$$\begin{aligned} r &= \rho\Omega^{-1}e^{\frac{h}{2}} = \Omega^{-1}\frac{1}{\rho}\frac{(\rho+\rho_o)^{\gamma+1}}{(\rho-\rho_o)^{\gamma-1}} \\ &= \Big(\frac{|\nu|}{8\pi}\Big)^{-1/4} \sec^{\frac{1}{2}}\left(\alpha(\lambda,\gamma)\ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\frac{1}{\rho}(\rho+\rho_o)^{1+\gamma}(\rho-\rho_o)^{1-\gamma}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} =& \sqrt{\frac{|\nu|}{2\pi}}(1-\gamma^2)\rho^4\rho_o^2\frac{(\rho-\rho_o)^{2(\gamma-2)}}{(\rho+\rho_o)^{2(\gamma+2)}}\sec\left(\alpha(\lambda,\gamma)\ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\cdot \\ &\cdot\left\{4\cos^2\left(\alpha(\lambda,\gamma)\ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)+3|\lambda|\Big[\cos\left(\alpha(\lambda,\gamma)\ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)-5\Big]\right\}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Παρατηρούμε ότι και αυτές απειρίζονται στο σημείο $\rho = \rho_o\frac{e^K+1}{e^K-1}$ λόγω του της τέμνουσας (sec).

Για $\gamma \neq \pm 1$ το areal radius απειρίζεται στα σημεία $\rho \to \infty$ και $\rho \to \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$, όπου $K = \frac{\pi \alpha(\lambda,\gamma)}{2}$ και επίσης παρουσιάζει ακρότατο-ελάχιστο στο σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dr}{d\rho} = 0 \to -\frac{1}{\alpha(\lambda,\gamma)}\left(\frac{\rho_o}{\rho} + \frac{\rho}{\rho_o} - 2\gamma\right) = \tan\left(\alpha(\lambda,\gamma)\ln\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right). \tag{3.47}$$

Σημειώνουμε πως το διάστημα $0 \leq \rho \leq \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$ είναι μη-φυσικό. Εξετάζοντας τη συμπεριφορά της (3.45) φαίνεται ότι το $r(\rho)$ παραμένει θετικό στο διάστημα $\rho > \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$. Ο απειρισμός του areal radius σε δύο σημεία και η ύπαρξη ελαχίστου (του οποίου η τιμή είναι θετική) υποδεικνύουν πως το στοιχείο μήκους περιγράφει έναν χωροχρόνο σκουλικότρυπας. Για να αιτιολογήσουμε την τελευταία πρόταση θα εκφράσουμε το στοιχείο μήκοους (3.37) σε σφαιρικές συντεταγμένες και στην μορφή της μετρικής Morris-Thorne [58].

$$ds^2 = -e^{-2\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1-b(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{3.48}$$

Εξισώνοντας τις μετρικές (3.37),(3.48) βρίσκουμε τη μορφή των redshift-$\Phi(r)$ και shape-$b(r)$ συναρτήσεων

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\left(\ln e^f + \ln\Omega^{-2}\right), \tag{3.49}$$

$$b(r) = r\left[1 - \frac{1}{\Omega^{-2}e^{-h}}\left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2\right]. \tag{3.50}$$

Ως προς τις συντεταγμένες οι παραπάνω παίρνουν τη μορφή

$$\Phi(r) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{8\pi}{|\nu|}\right) + \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{\rho(r)-\rho_o}{\rho(r)+\rho_o}\right)^{2\gamma} - \ln\left[\cos\left(\alpha(\lambda,\gamma)\ln\frac{\rho(r)-\rho_o}{\rho(r)+\rho_o}\right)\right]\right\}, \tag{3.51}$$

$$\frac{b(r)}{r} = 1 - \left\{\frac{\rho(r)^2 + \rho_o^2 - 2\gamma\rho(r)\rho_o + \rho(r)\rho_o\alpha(\lambda,\gamma)\tan\left(\alpha(\lambda,\gamma)\ln\frac{\rho(r)-\rho_o}{\rho(r)+\rho_o}\right)}{\sqrt{2}\,(\rho(r)^2-\rho_o^2)}\right\}^2. \tag{3.52}$$

Για να περιγράφει ο χωροχρόνος μας μία σκουλικότρυπα πρέπει παραπάνω συναρτήσεις να ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες [58, 59]. Πιο συγκεκριμένα πρέπει:

- Η redshift συνάρτηση $\Phi(r)$ θέλουμε να είναι πεπερασμένη για να αποφύγουμε την ύπαρξη οριζόντων γεγονότων.
- $\frac{b(r)}{r} \leq 1$ στο διάστημα $[r_{th}, +\infty)$, όπου r_{th} είναι η ακτίνα του λαιμού-η ελάχιστη τιμή του areal radius. Η συνθήκη αυτή επιβάλλεται έτσι ώστε το ακτινικό κομμάτι του ιδιομήκους(proper radial distance) $l(r) = \pm\int_{r_{th}}^{r}\frac{dr}{1-\frac{b(r)}{r}}$ να παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές.
- $\frac{b(r_{th})}{r_{th}} = 1$ πάνω στον λαιμό. Η σχέση αυτή χρειάζεται έτσι ώστε η ακτίνα του λαιμού να είναι ακρότατο του areal radius.
- $b'(r) < \frac{b(r)}{r}$ που καταλήγει στην $b'(r_{th}) < 1$ για $r = r_{th}$. Η σχέση αυτή έρχεται στη βιβλιογραφία με το όνομα flare-out condition και επιβάλλει στην τιμή της ακτίνας του λαιμού r_{th} να είναι ελάχιστο - και όχι οποιοδήποτε ακρότατο - του areal radius.

Αν και δεν είναι εμφανές από την αλγεβρική της μορφή η (3.52) ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες στο διάστημα $[r_{th}, +\infty)$. Επιπλέον, λύνοντας την εξίσωση που δίνει την ακτίνα του λαιμού $\frac{b(r_{th})}{r_{th}} = 1$ καταλήγουμε στη πίσω στη σχέση (3.47) το οποίο μας δείχνει ότι όντως ο λαιμός προκύπτει στο ελάχιστο του areal radius όπως αναμέναμε. Η ακτίνα είναι ανάλογη με $r \propto |\nu|^{-1/4}$ συνεπώς το ιδιο-εμβαδόν του λαιμού $A(\rho) = 4\pi r(\rho)^2$ ακολουθεί συνδέεται με τη νέα σταθερά από τη σχέση

$$A(\rho) \propto |\nu|^{-1/2} \,. \tag{3.53}$$

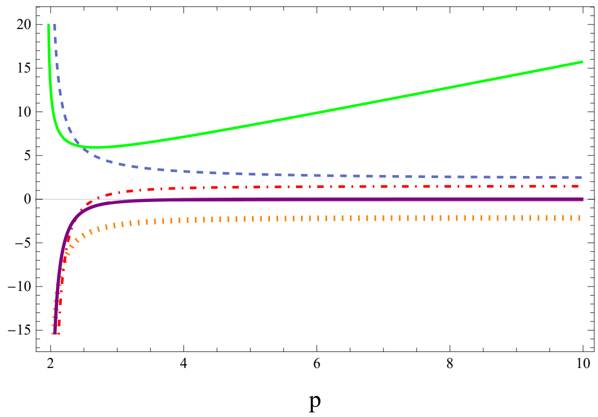
Το βαθμωτό Ricci είναι πεπερασμένο πάνω στο λαιμό επομένως η λύση περιγράφει μια προσπελάσιμη σκουλικότρυπα τουλάχιστον in principle. Απειρίζεται όμως στο $\rho = \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$ που αντιστοιχεί στη ‘‘δεύτερη’’ ασυμπτωτική περιοχή $r \to \infty$ της σκουλικότρυπας. Ο απειρισμός του βαθμωτού Ricci υποδεικνύει την ύπαρξη μιας χωροχρονικής ιδιομορφίας . Όμως η ιδιομορφία αυτή δεν είναι ‘‘πραγματική’’ καθώς αντιστοιχεί σε άπειρη απόσταση δηλαδή, μία γεωδαισιακή δε θα έφτανε την ιδιομορφία για πεπερασμένες τιμές της αφινικής παραμέτρου της. Επομένως, η περιοχή κοντά στο $\rho = \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$ ανταποκρίνεται σε μακρίνα από το λαιμό σημεία αλλά δεν είναι ασυμπτωτικά επίπεδη. Άρα έχουμε μια σκουλικότρυπα που είναι ασυμπτωτικά επίπεδη στη μία μερία $\rho \to \infty$ αλλά όχι και στην άλλη. Δηλαδή οι δύο πλευρές της δεν είναι συμμετρικές. Μία αντίστοιχη συμπεριφορά παρουσιάζει και η 1η κλάση λύσεων του Brans (βλ. [43, 44] για λεπτομέρειες).

Κάθε σκουλικότρυπα εξόρισμού πρέπει να παραβιάζει την φωτοειδή ενεργειακή συνθήκη (ΦΕΣ) (Null Energy Condition) [58]. Χρησιμοποιώντας το σύστημα ενός στατικού παρατηρητή ως προς τις συντεταγμένες (r, θ, ϕ) μπορούμε να εκφράσουμε την πυκνότητα ενέργειας και την ακτινική πίεση συναρτήσει της ισοτροπικής ακτίνας χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

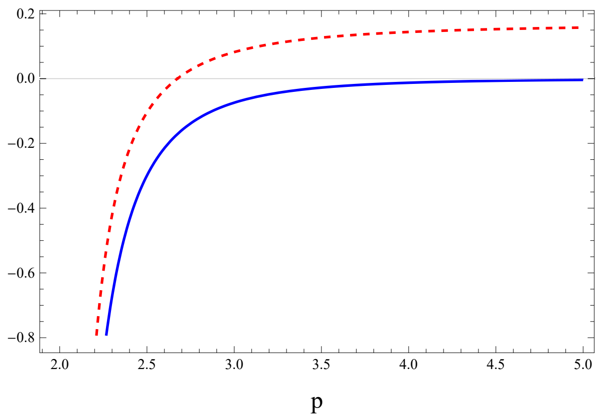
$$\varrho = \frac{1}{r^2}\frac{db}{d\rho}\left(\frac{dr}{d\rho}\right)^{-1} \,, \tag{3.54}$$

$$p_r = \frac{2}{r}\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{d\Phi}{d\rho}\left(\frac{dr}{d\rho}\right)^{-1} - \frac{b^3}{r} \,. \tag{3.55}$$

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 3.2, κοντά στο λαιμό έχουμε αρνητική πυκνότητα ενέργειας συνεπώς παραβιάζεται και η ασθενής ενεργειακή συνθήκη (ΑΕΣ) (Weak Energy Condition).



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα των g_{tt} (πορτοκαλί), $g_{\rho\rho}$ (μπλε), areal radius r (πράσινη), $\frac{dr}{d\rho}$ (κόκκινη) και βαθμωτού Ricci (μωβ) συναρτήσει της ισοτροπικής ακτίνας με $\rho_o = 1\,, \gamma = 0.2\,, \lambda = -1\,, \nu = 3$. Όλες οι ποσότητες απειρίζονται στο $\rho = \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$ που αντιστοίχεί στο ασυμπτωτικό άπειρο $r \to \infty$. Το areal radius έχει ελάχιστο (σημείο μηδενισμού της κόκκινης καμπύλης) στο οποίο όλες οι ποσότητες είναι πεπερασμένες. Το σημείο αυτό συνδέει τις δύο ασυμπτωτικές περιοχές $\rho \to \infty$ και $\rho \to \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$ και είναι εξόρισμού ο λαιμός της σκουλικότρυπας. Το βαθμωτό πεδίο είναι πεπερασμένο για $\rho > \rho_o \frac{e^K+1}{e^K-1}$ ενώ μηδενίζεται όταν $\rho \to \infty$.



Σχήμα 3.2: Διάγραμα της ενεργειακής πυκνότητας ϱ(μπλε) και της παραγώγου του $r(\rho)$ ως προς το ρ για $\rho_o = 1\,, \gamma = -0.2\,, \lambda = -2\,, \nu = 3$. Η ενεργειακή πυκνότητα γίνεται αρνητική κοντά στο λαιμό (μηδενισμός του $\frac{dr}{d\rho}$) κάτι που υποδεικνύει την ύπαρξη ‘‘εξωτικής’’ ύλης (exotic matter και την παραβίαση της ΑΕΣ.

3.4.2 Κλάδος $\epsilon > 0$

Σε αυτό τον κλάδο λύσεων απαιτούμε $\epsilon > 0$ και $\epsilon_\lambda > 0$. Η πρώτη ανισότητα ισχύει για κάθε $\rho > \rho_o$ και η δεύτερη θέτει ένα όριο στις τιμές της BD παραμέτρου $\omega > -3/2$. Το βαθμωτό πεδίο και η μετρική του χωροχρόνου σε δίνονται από

$$\phi = \frac{s}{8\pi}\left| \left(\frac{1-\rho_o/\rho}{1+\rho_o/\rho}\right)^{\alpha(\lambda,\gamma)} - 2\pi\nu \left(\frac{1+\rho_o/\rho}{1-\rho_o/\rho}\right)^{\alpha(\lambda,\gamma)} \right|, \tag{3.56}$$

$$g_{tt} = -8\pi\left|\frac{(\rho^2-\rho_o^2)^{\alpha(\lambda,\gamma)}}{(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} + 2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}}\right| \left(\frac{1-\rho_o/\rho}{1+\rho_o/\rho}\right)^{2\gamma}, \tag{3.57}$$

$$g_{\rho\rho} = 8\pi\left|\frac{(\rho^2-\rho_o^2)^{\alpha(\lambda,\gamma)}}{(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} + 2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}}\right| \left(1-\frac{\rho_o^2}{\rho^2}\right)^2 \left(\frac{1+\rho_o/\rho}{1-\rho_o/\rho}\right)^{2\gamma}, \tag{3.58}$$

όπου $s = \mathrm{sgn}(4\pi\phi + \sqrt{2\pi(\nu + 8\pi\phi^2)})$, $\alpha(\lambda,\gamma) = \sqrt{2\,|\lambda|\,(1-\gamma^2)}$. Μερικά πράγματα που παρατηρούμε είναι:

1. Πάλι η σταθερά ν εισάγει ένα νέο scale στην μετρική.
2. Για $\nu = 0$ η μετρική παίρνει τη μορφή

$$g_{tt} = -8\pi\left(\frac{1-\rho_o/\rho}{1+\rho_o/\rho}\right)^{2\gamma-\alpha(\lambda,\gamma)} \quad , \quad g_{\rho\rho} = 8\pi\left(1-\frac{\rho_o^2}{\rho^2}\right)^2\left(\frac{1+\rho_o/\rho}{1-\rho_o/\rho}\right)^{\alpha(\lambda,\gamma)+2\gamma} \tag{3.59}$$

   η οποία είναι η 1η κλάση λύσεων του Brans [36] της αρχικής BD θεωρίας. Άρα η λύση αυτού του κλάδου έχει σωστό όριο στις λύσεις της BD.

3. Ο χωροχρόνος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, όπως προηγουμένως, αφού

$$\lim_{\rho\to\infty} g_{tt} = -\frac{8\pi}{|2\pi\nu+1|} \quad , \quad \lim_{\rho\to\infty} g_{\rho\rho} = \frac{8\pi}{|2\pi\nu+1|}\ . \tag{3.60}$$

4. Για $\gamma = \pm 1$ το βαθμωτό πεδίο γίνεται σταθερό, η μετρική καταλήγει στην Schwarzschild, με μάζα $M = \pm 2\rho_o$ αντίστοιχα, και όλη η θεωρία καταλήγει στην ΓΘΣ.
5. Στο όριο $\lambda \to 0\,(\omega \to \infty)$ η μετρική παίρνει τη μορφή

$$g_{tt} = -\frac{8\pi}{|1+2\pi\nu|}\left(\frac{1-\rho_o/\rho}{1+\rho_o/\rho}\right)^{2\gamma} \quad , \quad g_{\rho\rho} = \frac{8\pi}{|1+2\pi\nu|}\left(1-\frac{\rho_o^2}{\rho^2}\right)^2\left(\frac{1+\rho_o/\rho}{1-\rho_o/\rho}\right)^{2\gamma}, \tag{3.61}$$

   η οποία είναι ίδια με την λύση (3.34)-(3.36) μαζί με το scale που εισάγει η παράμετρος ν αλλά μία σημαντική διαφορά μεταξύ τους είναι πως σε αυτή την περίπτωση το βαθμωτό πεδίο είναι σταθερό. Η φύση αυτού το ορίου δεν είναι ξακάθαρη, όπως στην κλασσική BD γιατί προκαλεί απειρισμούς και στον κινητικό όρο του βαθμωτού πεδίου στη δράση και στον τανυστή ορμής-ενέργειας στις εξισώσεις κίνησης.

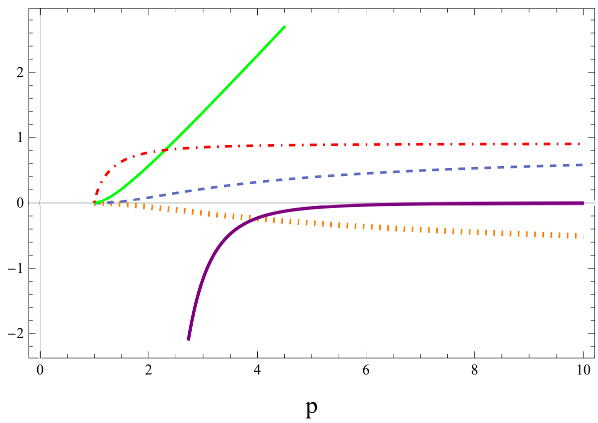
Το areal radius και το βαθμωτό Ricci δίνονται από

$$r = \frac{\sqrt{8\pi}}{\rho} \left| \frac{(\rho-\rho_o)^{\alpha(\lambda,\gamma)-2(\gamma-1)} \cdot (\rho+\rho_o)^{\alpha(\lambda,\gamma)+2(\gamma+1)}}{(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} + 2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}} \right|^{1/2}, \tag{3.62}$$

$$\mathcal{R} = (\gamma^2-1)\rho^4\rho_o^2 \frac{(\rho-\rho_o)^{2(\gamma-2)}}{(\rho+\rho_o)^{2(\gamma+2)}} \cdot \frac{(3|\lambda|-2)\left[\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} + 4\pi^2\nu^2\left(\frac{\rho+\rho_o}{\rho-\rho_o}\right)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}\right] - 4\pi\nu(15|\lambda|+2)}{2\pi\left|\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)^{\alpha(\lambda,\gamma)} + 2\pi\nu\left(\frac{\rho+\rho_o}{\rho-\rho_o}\right)^{\alpha(\lambda,\gamma)}\right|}, \tag{3.63}$$

για τα οποία παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1. Το r μηδενίζεται στο $\rho = \rho_o$ λόγω του παράγοντα $(\rho-\rho_o)^{\alpha(\lambda,\gamma)-2(\gamma-1)}$ αφού $\alpha(\lambda,\gamma)-2(\gamma-1) > 0$ για κάθε $\gamma^2 < 1$.
2. Το βαθμωτό Ricci απειρίζεται στο $\rho = \rho_o$ και παράλληλα το g_{tt} δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα $\rho > \rho_o$. Επομένως στο $\rho = \rho_o$ δηλαδή στο κέντρο της σφαιρικής συμμετρίας $r = 0$, έχουμε μία ιδιομορφία η οποία δεν καλύπτεται από ορίζοντα.
3. Η περιοχή $\rho \to \infty$ ανταποκρίνεται στο ασυμπτωτικό άπειρο $r \to \infty$.



Σχήμα 3.3: Συμπεριφορά των g_{tt}(πορτοκαλί), $g_{\rho\rho}$(μπλε), αρεαλ ραδιυς r(πράσινο), $\frac{dr}{d\rho}$(κόκκινο) και Ricci scalar(μωβ) ως προς την ισοτροπική ακτίνα για $\rho_o = 1\,, \gamma = 0.2\,, \lambda = 2\,, \nu = -5$. Στο $\rho = \rho_o$ οι συντελεστές της μετρικής και το areal radius μηδενίζονται. Εκτός της περίπτωσης $\gamma = \pm 1$ (όπου παίρνουμε τη μελανή οπή Schwarzschild), η λύση περιγράφει μια ιδιομορφία στο $\rho = \rho_o$ που δεν καλύπτεται από ορίζοντα.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως η μετρική μας περιγράφει μόνο ακάλυπτες ιδιομορφίες. Όμως, όπως είδαμε από τις σχέσεις (3.59) η λύση μας εμπεριέχει την 1η κλάση λύσεων του Brans σαν υποπερίπτωση. Στη βιβλιογραφία έχει βρεθεί ότι αυτή η κλάση λύσεων μπορεί να περιγράψει και σκουλικότρυπες για συγκεκριμένες περιοχές του παραμετρικού της χώρου [44]. Επομένως, θα περίμενε κανείς αυτή η συμπεριφορά να έχει κληροδοτηθεί και στην δική μας λύση.

Ένας χωροχρόνος για να κατηγοριοποιηθεί σαν σκουλικότρυπα πρέπει να έχει δύο ασυμπτωτικές περιοχές και μία περιοχή ελάχιστης επιφάνειας που να τις συνδέει. Επομένως, απαιτούμε από το areal radius r να απειρίζεται και σε κάποιο άλλο σημείο, πέρα από το $\rho \to \infty$ και επιπλέον να έχει και ένα ελάχιστο με τιμή μεγαλύτερη του μηδενός. Η μόνη περίπτωση για την οποία η (;;) παράγει μία δεύτερη ασυμπτωτική περιοχή είναι εάν απαιτήσουμε το μηδενισμό του παρονομαστή, $(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} + 2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} = 0$. Λύνοντας την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε το δεύτερο σημείο όπου $r \to \infty$,

$$\rho = \rho_o \frac{1+N}{1-N} \quad , \quad N = (-2\pi\nu)^{1/2\alpha} \, , \tag{3.64}$$

όπου απαιτούμε

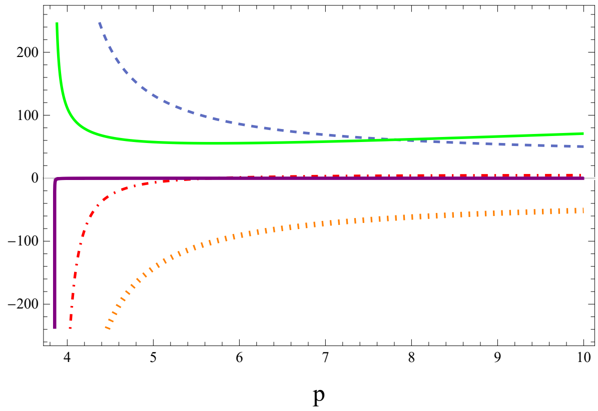
$$-\frac{1}{2\pi} < \nu < 0 \, , \tag{3.65}$$

έτσι ώστε $\rho > \rho_o$. Οπως και στην προηγούμενη ενότητα, καθορίζουμε τις redshift και shape συναρτήσεις χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.49), (3.50) και με ανάλογα βήματα βρίσκουμε την ακτινική πίεση και την ενεργειακή πυκνότητα. Τα μακροσκελή αποτελέσματα του υπολογισμού τους δίνονται στο παρακάτω παράρτημα.

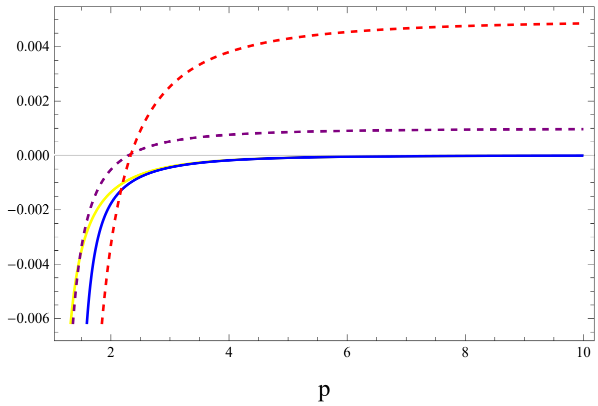
Στο σχήμα 3.4 παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ιδιομορφία στη μία ασυμπτωτική περιοχή όπου το βαθμωτό Ricci απειρίζεται. Δηλαδή, κατά αναλογία με τη λύση του κλάδου $\epsilon < 0$ αλλά και την 1η κλάση του Brans, η σκουλικότρυπα που βρήκαμε είναι ασύμμετρη.

Κλείνοντας αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα για την λύση $\epsilon > 0$:

1. Οταν $\gamma = \pm 1$ παίρνουμε τη λύση Schwarzschild και όλη η θεωρία καταλήγει στην ΓΘΣ.
2. Για $\gamma \neq \pm 1$ έχουμε δύο υποπεριπτώσεις. Εάν η παράμετρος ν ικανοποιεί τη συνθήκη (3.65) τότε λαμβάνουμε μία λύση ασύμμετρης σκουλικότρυπας διαφορετικά, παίρνουμε μόνο ακάλυπτες ιδιομορφίες.



Σχήμα 3.4: Συμπεριφορά των g_{tt}(πορτοκαλί), $g_{\rho\rho}$(μπλε), areal radius r(πράσινο), $\frac{dr}{d\rho}$(κόκκινο) και Ricci scalar(μωβ) ως προς την ισοτροπική ακτίνα για $\rho_o = 1, \gamma = 0, \lambda = 2, \nu = -0.019$. Οι τιμή του ν έχει επιλεχθεί έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (3.5). Το areal radius απειρίζεται κοντά στα σημεία $\rho \to \infty$ και $\rho = \rho_o \frac{1+N}{1-N}$ υποδεικνύοντας τις ασυμπτωτικές περιοχές. Ανάμεσα σε αυτές τις περιοχές το r παρουσιάζει ένα ελάχιστο όπου βρίσκεται ο λαιμός της σκουλικότρυπας.



Σχήμα 3.5: Σύγκριση των ενεργειακών πυκνοτήτων της λύσης $\epsilon > 0$ υπό τον περιορισμό ϱ(μπλε) και της 1η κλάσης λύσεων του Brans ϱ_{BD}(κίτρινο). Τα σημεία μηδενισμού των $\frac{dr}{d\rho}$(κόκκινο) και $\frac{dr_{BD}}{d\rho}$(μωβ) υποδεικνύουν τους λαιμούς για την κάθε σκουλικότρυπα. Έχουμε θέσει $\rho_o = 1, \gamma = 0.5, \lambda = 2, \nu \simeq -5.8 \cdot 10^{-4}$. Η πυκνότητα γίνεται αρνητική και για τα δύο αντικείμενα κάθως πλησιάζουμε το λαιμό επομένως πέρα από την ΦΕΣ παραβιάζεται και ΑΕΣ.

3.5 Συμπεράσματα

Οι τέσσερις λύσεις του Brans I-IV της BD θεωρίας περιγράφουν μόνο ακάλυπτες ιδιομορφίες ή σκουλικότρυπες, σύμφωνα με το θεώρημα του Hawking, αλλά ποτέ μελανές οπές. Οι ακάλυπτες ιδιομορφίες θεωρούνται μή-φυσικές λύσεις γιατί το πρόβλημα αρχικών τιμών δεν είναι καλά ορισμένο σε αυτούς τους χωροχρόνους, κατατρέφοντας την ντετερμινιστική φύση της θεωρίας. Οι λύσεις αυτές είναι στο κενό με το βαθμωτό πεδίο της θεωρίας να παίρνει το ρόλο μίας effective ύλης. Η δυναμική του βαθμωτού πεδίου του επιτρέπει να παραβιάζει τις ενεργειακές συνθήκες, επομένως είναι κατά κάποιο τρόπο αναμενόμενο να μπορούν οι εν λόγω λύσεις να περιγράψουν και σκουλικότρυπες.

Αυτά τα αντικείμενα θεωρούνται ‘‘εξωτικά’’ γιατί η δημιουργία τους απαιτεί την παρουσία κάποιας μορφής ύλης η οποία να παραβιάζει της ενεργειακές συνθήκες. Η αυτή παραβίαση είναι προαπαιτούμενο για μία σκουλικότρυπα διότι στα εν λόγω αντικείμενα πρέπει οι ακτίνες φωτός να συγκλίνουν καθώς πλησιάζουν το λαιμό και να αποκλίνουν κατά την απομάκρυνσή τους από αυτόν. Η μεταβολή από τη σύγκλιση στην απόκλιση πραγματοποιείται μέσω βαρυτικής απώθησης που ασκείται στις διερχόμενες ακτίνες φωτός, συμπεριφορά η οποία επιτυγχάνεται εάν στην περιοχή κοντά στο λαιμό υπάρχει αρνητική πυκνότητα ενέργειας. Στη ΓΘΣ η αρνητική πυκνότητα δημουργείται από μία ‘‘εξωτική ύλη’’ ενώ στην BD από το ίδιο το βαθμωτό πεδίο.

Σκοπός της παρούσας δουλειάς ήταν αρχικά να εξετάσουμε εάν η νέα τροποποιημένη Brans-Dicke θεωρία μπορεί να δώσει καινούργιες λύσεις μελανών οπών ή σκουλικότρυπων διαφορετικών της ΓΘΣ και στη συνέχεια να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά τους. Η θεωρία αυτή τροποποιεί την αρχική BD με την εισαγωγή μίας νέας σταθεράς ν [46, 47] στον όρο σύζευξης της κινητικής ενέργειας του βαθμωτού πεδίου με την βαρύτητα. Η νέα αυτή σύζευξη δημιουργεί μια επιπλέον συνεισφορά στην effective ύλη της BD ακόμα και στην περίπτωση του κενού. Λύνοντας τις εξισώσεις Einstein-Klein-Gordon βρήκαμε καινούργιες λύσεις οι οποίες επηρεάζονται από την σταθερά ν. Απαιτώντας την απουσία ghosts οι λύσεις χωρίζονται σε δύο ξεχωριστούς κλάδους ($\epsilon > 0$ και $\epsilon < 0$). Οι λύσεις του κλάδου $\epsilon < 0$ περιγράφουν είτε ακάλυπτες ιδιομορφίες, είτε τη λύση Schwarzschild είτε, καινούργιες σκουλικότρυπες των οποίων ο λαιμός εξαρτάται από την τιμή του

ν. Οι λύσεις του κλάδου $\epsilon > 0$ δίνουν και αυτές ακάλυπτες ιδιομορφίες, την λύση Schwarzschild και νέες σκουλικότρυπες με τη μόνη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση δεν επιτεύχθηκε η εξαγωγή μίας αναλυτικής σχέσης που να συνδέει το μέγεθος του λαιμού με τη σταθερά ν. Παρόλα αυτά, με βάση την αριθμήτικη ανάλυση που έγινε είναι προφανές ότι και σε αυτή την περίπτωση ο λαιμός εξαρτάται από το ν. Επιπλέον οι λύσεις αυτού του κλάδου έχουν συνεχές όριο στην 1η κλάση λύσεων του Brans της αρχικής Brans-Dicke θεωρίας και τις εμπεριέχουν σαν ειδική περίπτωση. Τέλος εξετάστηκε η παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών κοντά στο λαίμο και βρέθηκε ότι και στις δύο περιπτώσεις πέρα από την ΦΕΣ (NEC) παραβιάζεται και η ΑΕΣ (WEC).

Κεφάλαιο 4

Echoes συμπαγών αντικειμένων σε θεωρίες βαθμωτού-τανυστή

4.1 Εισαγωγή

Η ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων από την σύγκρουση συμπαγών αντικειμένων προσφέρει νέες ευκαιρίες για μελέτη και περαιτέρω κατανόηση των αντικειμένων αυτών. Οι μελλοντικές παρατηρήσεις, που θα ακολουθήσουν αυτές του LIGO [147]-[151], θα προσφέρουν καινούργια στοιχεία για τη φύση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης και της αστροφυσικής συμπεριφοράς, σε συνθήκες εξαιρετικά ισχυρής βαρύτητας. Οι πρόσφατες παρατηρήσεις δεν είναι ακόμα ικανές για να φανερώσουν με ακρίβεια τη δομή του χωροχρόνου πέρα από την σφαίρα φωτονίων (photon sphere)(PS) ωστόσο αναμένεται ότι στα επόμενα χρόνια θα είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε το strong gravity regime μέσα από τις μελλοντικές ανιχνεύσεις. Συγκεκριμένα, στις προσδοκίες της επιστημονικής κοινότητας είναι η ακριβής ανίχνευση της φάσης του ringdown η οποία, σε μικρούς χρόνους χαρακτηρίζεται από μία σειρά από αποσβενύμενους τρόπους ταλάντωσης γνωστούς ως quasinormal modes (QNMs) [152]-[155] ενώ σε μεγάλους χρόνους μπορεί να παρουσιάσει ιδιόμορφη συμπεριφορά λόγω μη γνωστής φυσικής [192].

Η προοπτική είναι ότι οι μελλοντικοί ανιχνευτές θα μας δώσουν πληροφορίες για τους φυσικούς μηχανισμούς που λαμβάνουν χώρα κοντά στους ορίζοντες γεγονότων των μελανών οπών και θα μας απαντήσουν για το αν αυτές οι περιοχές περιγράφονται από νέα φυσική. Αντικείμενα πέρα των μελανών οπών, χωρίς ορίζοντες γεγονότων, κατασκευάστηκαν πρόσφατα και είναι γνωστά στη βιβλιογραφία ως Exotic Compact Objects (ECOs) [156]-[159]. Οποιαδήποτε διαφοροποίηση της δομής του χωροχρόνου σε κλίμακες κοντά στον ορίζοντα, θα μπορούσε να παράξει μία σειρά από echoes τα οποία θα ακολουθούν το αρχικό ringdown [192, 70]. Τα δεδομένα από το LIGO έχουν ήδη αναλυθεί για το αν περιέχουν echoes [71, 72, 73].

Η γενική θεώρηση με βάση την σημερινή γνώση είναι ότι η κυματομορφή του ringdown καθορίζεται από τα QNMs τα τελικού προιόντος. Συνεπώς, η ανίχνευση των overtones από το ringdown θα επιτρέψει την ακριβή μέτρηση χαρακτηριστικών παραμέτρων του συμπαγούς αντικειμένου όπως η μάζα, το φορτίο και η γωνιακή στροφορμή. Αρκετές μελέτες υποδεικνύουν ότι το ringdown χαρακτηρίζεται από τα modes που δημιουργούνται λόγω της διέγερσης των φωτονίων που κινούνται στις ασταθείς κυκλικές τροχίες πάνω στην PS, γνωστά και ως photon sphere modes [74]-[81]. Αυτά τα QNMs σχετίζονται άμεσα με την ύπαρξη μίας PS και, εάν το αντικείμενο είναι μία ασυμπτωτικά επίπεδη μελανή οπή τότε κανένα άλλο είδος από modes δεν διεγείρεται. Από την άλλη, για τα ECOs παρόλο που τα photon sphere modes συνεχίζουν να υπάρχουν και να καθορίζουν την αρχική φάση του ringdown - όπως και στις μελανές οπές - δεν ανήκουν πλέον στο QNM φάσμα [192, 70].

Οι σκουλικότρυπες είναι ECO λύσεις των εξισώσεων Einstein οι οποίες συνδέουν μεταξύ τους διαφορετικά σημεία του σύμπαντος ή ακόμη και δύο διαφορετικά σύμπαντα [82, 83]. Παρολό που η αιτιακή δομή τους (casual structure) είναι διαφορετική των μελανών οπών, διαθέτουν και αυτές PSs και συνεπώς μπορούν μιμηθούν τις μελανές οπές στα δεδομένα βαρυτικών κυμάτων εάν κανείς επικεντρωθεί μόνο στην αρχική φάση του ringdown. Οι Lorentzian σκουλικότρυπες στην ΓΘΣ συζητήκαν στα [84, 85, 86], χρησιμοποιώντας μία στατική, σφαιρικά συμμετρική μετρική για την οποία και βρέθηκαν οι συνθήκες για την ύπαρξη μίας traversable σκουλικότρυπας. Δυστυχώς, οι λύσεις αυτές στο πλαίσιο της ΓΘΣ συνεπάγονται την παραβίαση της null energy condition (NEC). Για να σχηματιστούν, χρειάζεται να υπάρχει μία κατανομή εξωτικής ύλης, τουλάχιστον στο πλαίσιο της ΓΘΣ. Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για να κατασκευαστούν σκουλικότρυπες οι οποίες να μήν παραβιάζουν την NEC [86, 87, 88] σε modified gravity θεωρίες όπως οι Brans-Dicke , $f(\mathcal{R})$ [90], Einstein-Gauss-Bonnet [91], Einstein-Cartan και γενικές scalar-tensor θεωρίες [92].

Μία σειρά από πρόσφατες μελέτες [192, 70] υποδηλώνει πως η ανίχνευση του ringdown θα μπορούσε οριστικά να αποδείξει την ύπαρξη ή μη, ενός ορίζοντα γεγονότων γύρο από το συμπαγές αντικείμενο. Το συμπέρασμά τους βασίζεται στο γεγονός ότι ένα ECO θα είχε μία επιφάνεια ανακλαστικής φύσης μετά από την PS, αντί για έναν ορίζοντα γεγονότων. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε στη δημιουργία μία περιοχής παγίδευσης μεταξύ της επιφάνειας και της PS, λόγω της οποίας οι διαταραχές θα εκδηλώνονταν στους μεγάλους χρόνους σαν echoes. Τέλος, με τον θεωρητικό υπολογισμό των ringdown για ECO αντικείμενα, όπως οι σκουλικότρυπες, υποστηρίχθηκε ότι η ακριβής παρατήρησή του σε μεγάλους χρόνους θα είναι ικανή θα διαχωρίσει εάν το εν λόγω αντικείμενο είναι ECO ή μελανή οπή [192, 70].

Στην παρούσα μελέτη θα εξετάσουμε τα παραγόμενα ringdown σήματα από συμπαγή αντικείμενα scalar-tensor θεωριών, οι οποίες ανήκουν στην κλάση Horndeski [93] και δίνουν δευτέρας τάξης εξισώσεις κίνησης στις τέσσερις διαστάσεις [162, 163, 94] (για μία επισκόπηση των θεωριών Horndeski βλ. [175]) Η μελανή οπή [179]-[182] και η σκουλικότρυπα [96] τις οποίες θα μελέτησουμε σχηματίζονται από μία δράση με ένα κανονικό ή phantom βαθμωτό πεδίο αντίστοιχα, το οποίο είναι συζευγμένο με τον τανυστή Einstein. Οι λύσεις αυτές έχουν κωδικοποιημένο το βαθμωτό, και μέτρο της σύζευξής του, μέσα στις μετρικές συναρτήσεις ως primary charge [180, 96], το οποίο ασυμπτωτικά παίζει το ρόλο μίας effective κοσμολογικής σταθεράς. Η πάροτρυνση για να θεωρήσουμε τις εν λόγω λύσεις έρχεται από το γεγονός ότι διαθέτουν με φυσικό τρόπο ένα asymptotic reflective boundary εξωτερικά της PS, το οποίο θα μπορούσε να δώσει μία διαφορετική συμπεριφορά σε σχέση με τους ασυμπτωτικά επίπεδους χωροχρόνους. Ο anti-de Sitter (AdS) χωροχρόνος είναι αναγκαίος για τις ολογραφικές θεωρίες οι οποίες χτίζονται μέσα από την εφαρμογή της gauge/gravity duality (δυικότητα). Σκοπός της ολογραφίας είναι η μελέτη strongly coupled φαινομένων χρησιμοποιώντας dual βαρυτικά συστήματα όπου το coupling είναι ασθενές [97]. Αυτή η δυικότητα, η οποία είναι καλά θεμελιωμένη στις θεωρίες χορδών, έχει πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές μία εκ των οποίων είναι και η φυσική συμπηκνωμένης ύλης (condensed matter physics). Σε αυτά τα μοντέλα, οι AdS μαύρες τρύπες στο βαρυτικό κλάδο έχουν ουσιαστικό ρόλο έτσι ώστε να επιτευχθεί ένα πλούσιο phase structure στο σύστημα της συμπηκνωμένης ύλης που βρίσκεται στο conformal boundary (για μία επισκόπηση βλ. [98]). Οι ολογραφικές θεωρίες πυροδότησαν την επιστημόνική κοινότητα για εκτενή μελέτη των AdS μελανών οπών, του σχηματισμού και της ευστάθειάς τους, των οποίων τα QNMs δίνουν πληροφορία για την προσέγγιση προς τη θερμική ισορροπία της dual θεωρίας στο conformal bourdary [99].

Οι σκουλικότρυπες σε AdS χώρους μελετήθηκαν στο [100] σε μία προσπάθεια μελέτης των φυσικών μηχανισμών που λαμβάνουν χώρα σε κλειστά σύμπαντα (closed universes). Αυτή η συζήτηση συνδέεται με τον πληθωρισμό και την αστάθεια του κενού (vacuum decay). Μία ιδιαίτερη υλοποίηση των παραπάνω ιδεών βρίσκεται στο σχηματισμό των baby-Universes μέσω quantum tunneling τα οποία εν τέλει αποσυνδέονται από το θυγατρικό σύμπαν [101]. Πρόσφατα, η σύνδεση της φυσικής των σκουλικοτρύπων με αυτή των κλειστών συμπάντων επανεξετάστηκε στο [102], χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικά που σχετίζονται με μία αρνητική κοσμολογική σταθερά και ασυμπτωτικά AdS χωροχρόνους.

Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε το ringdown των προαναφερθέντων συμπαγών αντικειμένων των scalar-tensor θεωρίων, θεωρώντας τη διάδοση ενός εξωτερικού, ελάχιστα συζευγμένου με τη μετρική βαθμωτού πεδίου, με την ελπίδα οτι αυτά τα δύο αντικείμενα θα δίνουν διαφορετική μεταξύ τους συμπεριφορά, παρόλο που και τα δύο χαρακτηρίζονται από μία σφαίρα φωτονίων και ένα ασυμπτωτικό AdS σύνορο. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία των [103, 104] θεωρώντας ένα εξωτερικό δοκιμαστικό βαθμωτό πεδίο στη δράση. Υπογραμμίζουμε ότι το βαθμωτό αυτό δεν ισοδυναμεί με το βαρυτικό βαθμωτό πεδίο της θεωρίας το οποίο κάνει backreaction στη μετρική για να δώσει τις scalarized λύσεις που έχουμε θεωρήσει. Μέσα από την παραπάνω ανάλυση μελετούμε τη αντίδραση των δύο λύσεων κάτω από μικρές διακυμάνσεις, η οποία κωδικοποιεί την πληροφορία του βαρυτικού βαθμωτού το οποίο παράγει με φυσικό τρόπο ένα effective σύνορο παρόλο που δεν υπάρχει κάποια κοσμολογική σταθερά στη δράση. Πιο περίπλοκα non-minimal couplings έχουν αναλυθεί σε αυτά τα μοντέλα, αν και η αλληλεπίδραση μεταξύ του δοκιμαστικού και του βαρυτικού βαθμωτού δημιουργεί μία κρίσιμη τιμή της σταθεράς σύζευξης κάτω από την οποία δεν ικανοποιούνται οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες για τα QNMs [104].

Η δουλειά είναι οργανωμένη ως εξής. Στην ενότητα 4.2 γίνεται μία ανασκόπηση της μελανής οπής και της σκουλικότρυπας που θα μελετηθούν. Στην 4.3 υπολογίζονται τα ενεργά δυναμικά για ένα βαθμωτό πεδίο που σκεδάζεται σε αυτούς τους δύο χωροχρόνους. Στην ενότητα 4.4 συζητάμε το πλαίσιο της αριθμητικής ολοκλήρωσης και της χρονική εξέλιξης των διαταραχών ενώ, στις δύο επόμενες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την μελανή οπή και τη σκουλικότρυπα αντίστοιχα. Τέλος στην 4.6 είναι τα συμπεράσματά μας.

4.2 Αναλυτικές λύσεις συμπαγών αντικειμένων

Παρακάτω παρουσιάζουμε συνοπτικά δύο αναλυτικές λύσεις [180, 96] της Λαγκρανζιανής Horndenski με μη-ελάχιστη ζεύξη στον κινητικό όρο (non-minimal kinetic coupling)

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \frac{\mathcal{R}}{8\pi} - \left[\varepsilon\, g_{\mu\nu} + \eta\, G_{\mu\nu}\right] \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \right\} \,, \tag{4.1}$$

όπου $\mathcal{R}$ είναι το βαθμωτό Ricci, $G_{\mu\nu}$ ο τανυστής Einstein, $g_{\mu\nu}$ ο μετρικός τανυστής με $g = \det g_{\mu\nu}$, ϕ ένα πραγματικό άμαζο βαθμωτό πεδίο και η η σταθερά σύζευξης του κινητικού όρου με τη βαρύτητα με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. Όταν $\varepsilon = 1$ η θεωρία περιέχει ένα κανονικό (canonical) βαθμωτό πεδίο με θετική κινητική ενέργεια ενώ, για $\varepsilon = -1$ ένα phantom πεδίο με αρνητική κινητική ενέργεια.

Η λύση μελανής οπής [180] είναι στατική, σφαιρικά συμμετρική και ασυμπτωτικά Anti-de Sitter (AdS). Η μετρική της δίνεται από

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \,, \tag{4.2}$$

όπου

$$f(r)=\frac{1}{4}\left(3-\frac{8\mu}{r}+\frac{r^2}{3l_\eta^2}+\frac{l_\eta}{r}\arctan\frac{r}{l_\eta}\right)\,, \tag{4.3}$$

$$g(r)=\frac{(r^2+2l_\eta^2)^2}{(r^2+l_\eta^2)^2\,4f(r)}\,, \tag{4.4}$$

$$\Psi^2(r)\equiv\left(\phi'(r)\right)^2=-\frac{\varepsilon}{8\pi l_\eta^2}\,\frac{r^2(r^2+2l_\eta^2)^2}{(r^2+l_\eta^2)^3\,4f(r)}\,. \tag{4.5}$$

Εδώ να τονίσουμε πως η παραπάνω μετρική περιγράφει μία μελανή οπή μόνο όταν $\varepsilon=1$ και $\varepsilon\eta<0$ (βλ. [180, 96] για λεπτομέρειες). Το μ είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης που έχει το ρόλο της μάζας και το $l_\eta=\sqrt{|\varepsilon\eta|}$ μία παράμετρος που χαρακτηρίζει το μέτρο της σύζευξης του κινητικού όρου. Λόγω του arctan, η ακτινική συντεταγμένη παίρνει τιμές στο διάστημα $r\in(0,\infty)$. Στο όριο $r\to 0$ η συνάρηση $f(r)$ δίνει ασυμπτωτικά Schwarzschild συμπεριφορά δηλαδή, $f(r)\approx 1-\frac{2\mu}{r}$, ενώ για $r\to\infty$ παίρνουμε $f(r)\approx\frac{3}{4}+\frac{r^2}{12l_\eta^2}$ δηλαδή ασυμπτωτικά AdS συμπεριφορά. Να σημειωθεί ότι μέσα στις συναρτήσεις της μετρικής (4.3) και (4.4), εμφανίζεται το η σταθερά σύζευξης l_η μεταξύ βαθμωτού πεδίου και καμπυλότητας. Επομένως, η συγκεκριμένη μελανή οπή είναι hairy και χαρακτηρίζεται επιπλέον και από το βαθμωτό πεδίο (4.5).

Η σκουλικότρυπα που βρέθηκε στο [96], ακολουθώντας τη λογική του [180], δίνεται από[1]

$$ds^2=-f(\xi)dt^2+g(\xi)d\xi^2+(\xi^2+a^2)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\,. \tag{4.6}$$

όπου $\varepsilon\eta<0$, $\varepsilon=-1$ και

$$g(\xi) = \frac{\xi^2(\xi^2+a^2+2l_\eta^2)^2}{(\xi^2+a^2)(\xi^2+a^2+l_\eta^2)^2F(\xi)}\,, \tag{4.7}$$

$$f(\xi) = \frac{a}{\sqrt{\xi^2+a^2}}\exp\left[\int_0^\xi\frac{\xi(\xi^2+a^2+2l_\eta^2)^2}{l_\eta^2(\xi^2+a^2)(\xi^2+a^2+l_\eta^2)F(\xi)}d\xi\right]\,, \tag{4.8}$$

$$\Psi^2(\xi) \equiv \left(\phi'(r)\right)^2=-\frac{\varepsilon}{8\pi l_\eta^2}\frac{\xi^2(\xi^2+a^2+2l_\eta^2)^2}{(\xi^2+a^2)(\xi^2+a^2+l_\eta^2)^3F(\xi)}\,, \tag{4.9}$$

με

$$F(\xi)=3-\frac{8\mu}{\sqrt{\xi^2+a^2}}+\frac{\xi^2+a^2}{3l_\eta^2}+\frac{l_\eta}{\sqrt{\xi^2+a^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\xi^2+a^2}}{l_\eta}\right). \tag{4.10}$$

Παρατηρούμε ότι πάλι η σταθερά σύζευξης εμφανίζεται μέσα στη μετρική και το phantom βαθμωτό πεδίο που δημιουργεί τη σκουλικόρυπα δίνεται από την (4.9). Η συνάρηση $F(\xi)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\xi=0$, όποτε για να είναι παντού θετική απαιτούμε $F(0)>0$. Από την τελευταία εξάγουμε ένα όριο για τις τιμές που μπορεί να λάβει η σταθερά της μάζας μ

$$2\mu<a\left(\frac{3}{4}+\frac{\alpha^2}{12}+\frac{1}{4\alpha}\arctan\alpha\right)\,, \tag{4.11}$$

όπου $\alpha\equiv a/l_\eta$ μία αδιάστατη παράμετρος που ορίζει το λόγο της ακτίνας του λαιμού a σε σχέση με τη σταθερά σύζευξης l_η. Μακριά από το λαιμό στο όριο $|\xi|\to\infty$, οι συναρτήσεις $g(\xi)$ και $f(\xi)$ λαμβάνουν την ασυμππτωτική μορφή

$$g(\xi)=3\frac{l_\eta^2}{\xi^2}+O\left(\frac{1}{\xi^4}\right)\,,\qquad f(\xi)=A\frac{\xi^2}{l_\eta^2}+O(\xi^0)\,, \tag{4.12}$$

[1]Σημειώνεται ότι οι συντεταγμένες (t,ξ,θ,ϕ) σε αυτή την περίπτωση δεν είναι οι συνήθεις Schwarzschild συντεταγμένες αφού το ξ δεν είναι η ακτίνα καμπυλότητας των σφαιρών συμμετρίας $\xi=$σονστ>0.

όπου το A εξαρτάται από τα a, l_η, μ και μπορεί να υπολογιστεί μόνο αριθμητικά. Αυτή η συμπεριφορά υποδηλώνει ότι ασυμπτωτικά έχουμε ένα χώρο AdS με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Κοντά στο λαιμό $\xi = 0$ βρίσκουμε

$$g(\xi) = B\frac{\xi^2}{l_\eta^2} + O(\xi^4) \ , \qquad f(\xi) = 1 + O(\xi^2) \ , \tag{4.13}$$

όπου το B εξαρτάται από τα α και μ. Επιπλέον το σύστημα συντεταγμένων καταρέει στο $\xi = 0$ όπου $g(0) = 0$.

4.3 Διάδοση βαθμωτού πεδίου σε χωροχρόνους συμπαγών αντικειμένων

Στην παρούσα μελέτη ενδιαφερόμαστε να αναλύσουμε την αντίδραση των συμπαγών αντικειμένων που παρουσιάστηκαν παραπάνω, στην περίπτωση όπου διαταράσονται από τη διάδοση ενός εξωτερικού βαθμωτού πεδίου που έχει ελάχιστη σύζευξη με τη βαρύτητα. Να σημειωθεί ότι με τη λέξη ''εξωτερικό'' δεν εννοούμε το (βαρυτικό) βαθμωτό πεδίο της θεωρίας (;;) αλλά ένα καινούργιο, ξένο βαθμωτό πεδίο ως προς τα υπό μελέτη αντικείμενα. Η διάδοση μίας άμαζης βαθμωτής διαταραχής Φ στο χωροχρόνο ενός συμπαγούς αντικειμένου (ο οποίος θα δίνεται από μία μετρική $g_{\mu\nu}$) διέπεται από την εξίσωση Klein-Gordon

$$\Box\Phi = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right] = 0 \ . \tag{4.14}$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας του χωροχρόνου μπορούμε να αναλύσουμε το βαθμωτό $\Phi(t,\rho,\theta,\phi)$ στο ακτινικό και το γωνιακό κομμάτι του υποθέτωντας ότι έχει τη μορφή

$$\Phi(t,\rho,\theta,\phi) = \frac{\psi(\rho,t)}{R(\rho)}Y_{lm}(\theta,\phi) \ , \tag{4.15}$$

όπου Y_{lm} είναι οι σφαιρικές αρμονικές, ρ μία γενική ακτινική συντεταγμένη και $R(\rho)^2$ μία συνάρτηση του ρ. Η (4.14) μετά από λίγη άλγεβρα μπορεί να έρθει σε μορφή που παρομοιάζει τη εξίσωση Schrodinger

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial\rho_*^2} + V(\rho)\right]\psi(\rho,t) = 0 \ , \tag{4.16}$$

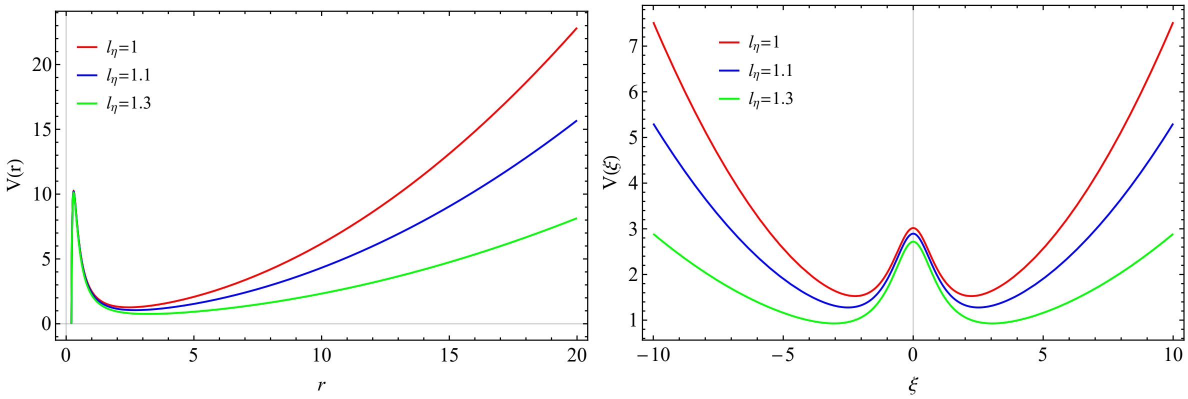
με ένα ενεργό δυναμικό (effective potential) της μορφής

$$V(\rho) = f(\rho)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{R(\rho)^2} + \frac{R''(\rho)}{g(\rho)R(\rho)} + \frac{f'(\rho)R'(\rho)}{2g(\rho)f(\rho)R(\rho)} - \frac{g'(\rho)R'(\rho)}{2g^2(\rho)R(\rho)}\right) \ , \tag{4.17}$$

όπου ℓ ο κβαντικός αριθμός της γωνιακής στροφορμής και ρ_* η συνήθης tortoise συντεταγμένη οριζόμενη από τη σχέση

$$d\rho_* = \sqrt{\frac{g(\rho)}{f(\rho)}}\,d\rho \, .$$

Η εξίσωση (4.16) δείχνει πως το πρόβλημα το βαθμωτών διαταραχών σε συμπαγή αντικείμενα μπορεί να αναχθεί σε ένα απλό μονοδιάστατο πρόβλημα σκέδασης με ένα effective δυναμικό. Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία στη μελανή οπή (4.3)-(4.5) και στη σκουλικότρυπα (4.7)-(4.9) βρίσκουμε τα



Σχήμα 4.1: Ενεργό δυναμικό βαθμωτών διαταραχών με $\ell = 1$ για τη μελανή οπή (4.3)-(4.5)(αριστερά) και τη σκουλικότρυπα (4.7)-(4.9) (δεξιά) με ακτίνα λαιμού $a = 1$, για τρεις διαφορετικές τιμές του l_η και με $\mu = 0.1$.

αντίστοιχα ενεργά δυναμικά που ένα εξωτερικό βαθμωτό πεδίο "αισθάνεται" όταν διαδίδεται σε αυτούς τους χωροχρόνους.

Η εικόνα 4.1 παρουσιάζει τα ενεργά δυναμικά για διάφορες τιμές της σταθεράς σύζευξης. Παρατηρούμε ότι η μελανή οπή παρουσιάζει μία κορυφή ακριβώς έξω από τον ορίζοντα γεγονότων ενώ ασυμπτωτικά το δυναμικό απειρίζεται. Αυτός ο απειρισμός κωδικοποιεί την ασυμπτωτική AdS συμπεριφορά του χωροχρόνου. Η αύξηση του l_η οδηγεί στην απομάκρυνση του συνόρου γεγονός το οποίο εξηγείται από το ότι η σταθερά σύζευξης έχει διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. Υπό μία έννοια το l_η δρα σαν αντίστροφη κοσμολογική σταθερά συνεπώς, στο όριο $l_\eta \to \infty$ ο χωροχρόνος γίνεται ασυμπτωτικά επίπεδος, κάτι που θα αντιστοιχούσε σε μηδενική κοσμολογική σταθερά. Το δυναμικό της σκουλικότρυπας έχει αρκετά διαφορετική μορφή σε σχέση με την μελανής οπής, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Υπάρχει μία κορυφή στο λαιμό $\xi = 0$, που αντιστοιχεί στην σφαίρα φωτονίων (photon sphere) (PS) ενώ ασυμπτωτικά το δυναμικό απειρίζεται. Η επίδραση του l_η είναι και σε αυτή την περίπτωση εμφανής. Αν και δεν αποδείχθηκε αναλυτικά, η αριθμητική μας μελέτη υποδεικνύει πως και οι δύο κορυφές του V εμφανίζονται κοντά στην PS, αφού το ύψος τους επηρεάζεται κυρίως από την τιμή του ℓ που σχετίζεται άμεσα με την ενέργεια των παγιδευμένων φωτονιών στις ασταθείς κυκλικές τροχιές της PS.

4.4 Αριθμητική ολοκλήρωση - Χρονική εξέλιξη

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε συνοπτικά το πλαίσιο της αριθμητικής διαδικάσιας ολοκλήρωσης, βασισμένοι στο [105], το οποίο θα μας δώσει την αντίδραση του συμπαγούς αντικειμένου ως προς το χρόνο, όταν διαταράσσεται από ένα βαθμωτό πεδίο. Ορίζοντας $\psi(\rho_*, t) = \psi(i\Delta\rho_*, j\Delta t) = \psi_{i,j}$, $V(\rho(\rho_*)) = V(\rho_*, t) = V(i\Delta\rho_*, j\Delta t) = V_{i,j}$, η εξίσωση (4.16) γράφεται

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta\rho_*^2} - \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta t^2} - V_i\psi_{i,j} = 0\,. \tag{4.18}$$

Χρησιμοποιώντας σαν αρχική συνθήκη ένα Γκαουσιανό κυματοπακέτο (Gaussian wave-packet) της μορφής $\psi(\rho_*, t) = \exp\left[-\frac{(\rho_*-c)^2}{2\sigma^2}\right]$ και $\psi(\rho_*, t < 0) = 0$, όπου c και σ αντιστοιχούν στο κέντρο και

[2] $R(\rho) \equiv R(r) = r$ για την λύση της μελανής οπής και $R(\rho) \equiv R(\xi) = \sqrt{\xi^2 + a^2}$ για την σκουλικότρυπα.

το πλάτος του κυματοπακέτου, μπορούμε να βρούμε την χρονική εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου ψ από τη σχέση

$$\psi_{i,j+1} = -\psi_{i,j-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta\rho_*}\right)^2 (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + \left(2 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta\rho_*}\right)^2 - V_i \Delta t^2\right)\psi_{i,j}\,, \qquad (4.19)$$

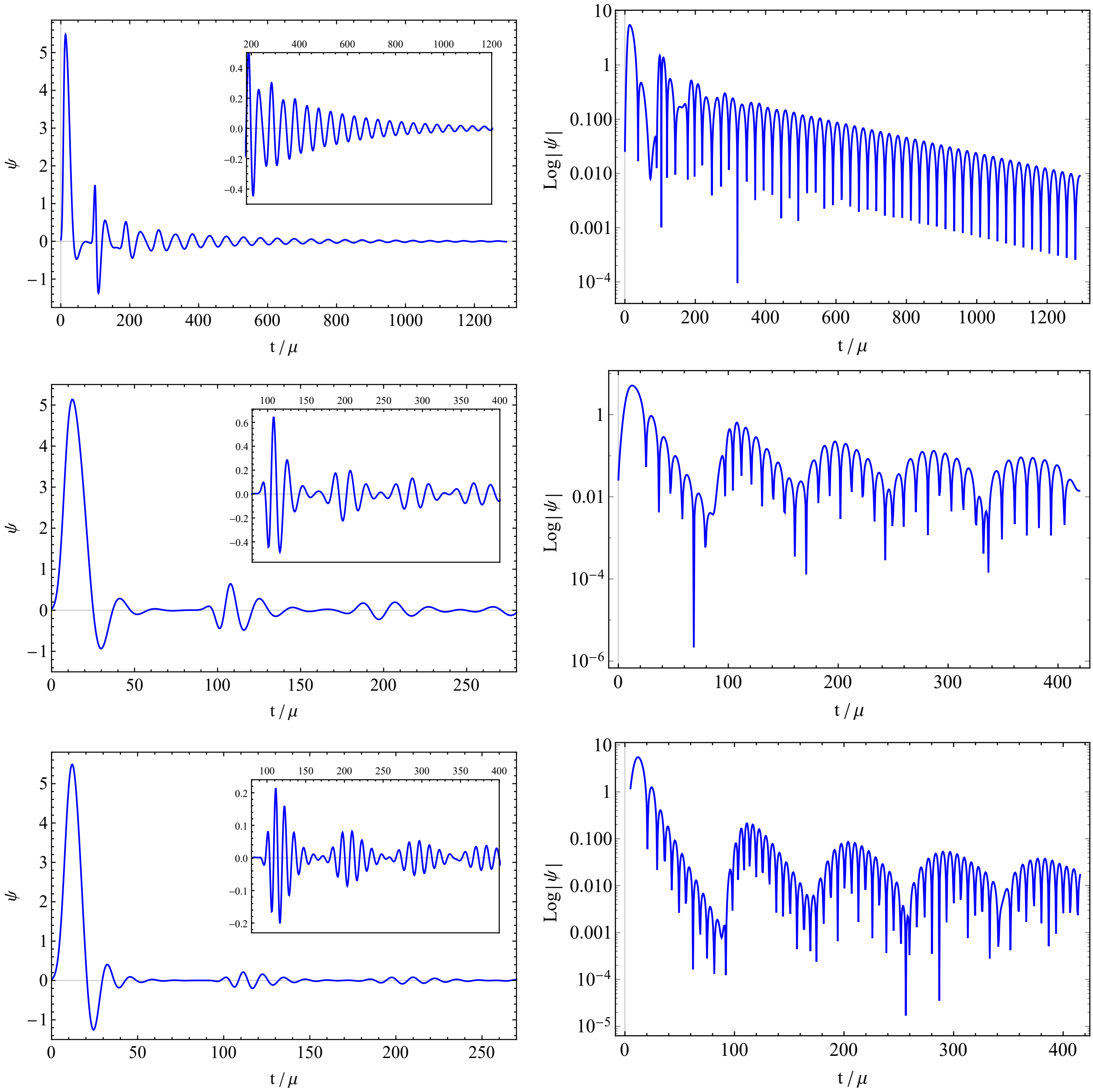
όπου η συνθήκη ευστάθειας Von Neumann της μεθόδου, απαιτεί $\frac{\Delta t}{\Delta\rho_*} < 1$. Επιπλέον, το ενεργό δυναμικό είναι θετικό και μηδενίζεται πάνω στον ορίζοντα της μελανής οπής (αλλά όχι πάνω στο λαιμό της σκουλικότρυπας), αλλά απειρίζεται όταν $r \to \infty$ (ή $|\xi| \to \infty$). Αυτό επιβάλλει στο ψ να μηδενίζεται στο άπειρο και για τα δύο αντικείμενα που αντιστοιχεί σε ανακλαστικές (reflective) συνοριακές συνθήκες. Για να υπολογίσουμε τις ακριβείς τιμές του δυναμικού V_i, ολοκληρώνουμε αριθμητικά την διαφορική εξίσωση για την tortoise συντεταγμένη και μετά την λύνουμε ως προς την αντίστοιχη ακτινική συντεταγμένη. Κατά τη διάρκεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης, πραγματοποιήθηκαν διάφορα τεστ σύγκλισης των αποτελεσμάτων χρησιμοποιώντας διαφορετικά βήματα ολοκλήρωσης και αριθμητικής ακρίβειας των εσωτερικών υπολογισμών, με σκοπό να επιβεβαιωθεί η τελική μορφή των παρακάτω αποτελεσμάτων.

Στις ενότητες που ακολουθούν θέτουμε την μάζα και των δύο αντικειμένων $\mu = 0.1$ και υπολογίζουμε την χρονική εξέλιξη των διαταραχών πολύ κοντά στον ορίζοντα γεγονότων για τη μελανή οπή, και στο $\xi = 0.01$ για τη σκουλικότρυπα.

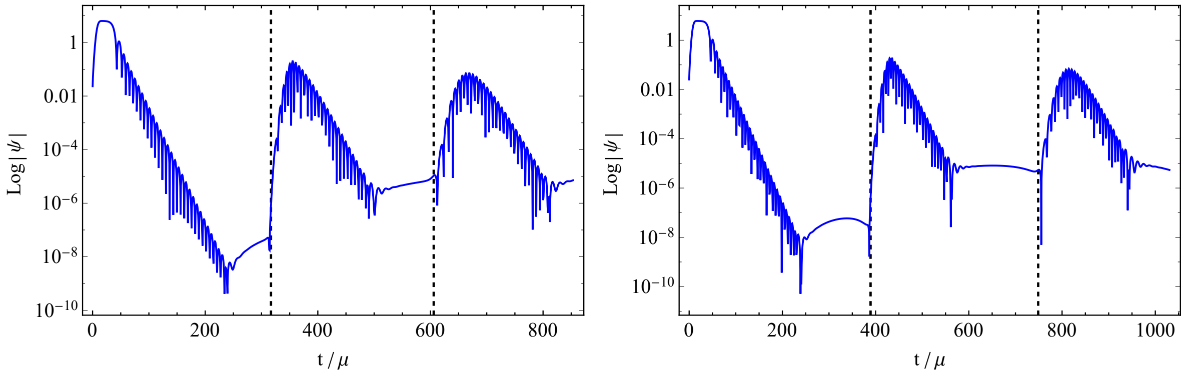
4.5 Μελανή οπή

Το σχήμα 4.2 παρουσιάζει τη χρονική εξέλιξη των βαθμωτών διαταραχών στο χωροχρόνο (;;)-(;;). Το κύριο χαρακτηριστικό που παρατηρούμε είναι η παραγωγή echoes που ακολουθεί το αρχικό quasinormal ringdown. Το μοτίβο τους γίνεται πιο εμφανές για πιο μεγάλες τιμές του ℓ λόγω του ότι μεταφέρεται περισσότερη ενέργεια από την PS όταν διαταράσσεται. Από την άλλη, για σφαιρικά συμμετρικές διαταραχές $\ell = 0$, τα echoes δεν είναι εμφανή γιατί η PS δεν διεγείρεται επαρκώς. Η ανάλυσή μας επιβεβαιώνει ότι ο ρυθμός πτώσης των βαθμωτών διαταραχών είναι εκθετικός όπως και στο [99, 108], κάτι που φαίνεται πιο καθαρά για $\ell = 0$. Αυτή η συμπεριφορά δεν παρατηρείται στην περίπτωση των ασυμπτωτικά επίπεδων μελανών οπών, όπου μετά το quasinormal ringing παρατηρείται μία power-law πτώση [105, 113, 114], και της οποίας η εμφάνιση συνδέεται με την ασυμπτωτική συμπεριφορά του χρονοειδούς άπειρου στους AdS χώρους το οποίο δρα σαν ανακλαστική επιφάνεια. Τα echoes έχουν αρκετά μικρότερο πλάτος σε σχέση με το αρχικό ringdown που είναι σε συμφωνία με τις μελέτες [103, 104, 115] και την απορροφητική φύση του ορίζοντα, υποδεικνύοντας την ευστάθεια του αντικειμένου.

Στο σχήμα 4.3 παρουσιάζεται η επίδραση της σταθεράς σύζευξης. Όταν το l_η αυξάνεται το σύνορο του AdS χώρου απομακρύνεται από τον ορίζοντα (βλ.σχήμα 4.1). Ως εκ τούτου, το ανακλόμενο κύμα από την PS έχει να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση μέχρι να συναντήσει το AdS σύνορο, να ανακλαστεί, και να επιστρέψει για να ξανα-διαταράξει την PS. Άρα η αύξηση του l_η οδηγεί στην καθυστέρηση της άφιξης των echoes. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι τα echoes δεν δημιουργούνται λόγω παγίδευσης των διαταραχών ανάμεσα στην PS και την επιφάνεια του αντικειμένου αλλά, λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του χώρου στο άπειρο. Αυτή η διαφορά μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στο πλαίσιο της αντιστοιχίας AdS/CFT εάν εισαχθεί μία αρνητική κοσμολογική σταθερά. Σε αυτό το πλαίσιο ένα ringdown στο bulk αντιστοιχεί στην προσέγγιση σε θερμική ισορροπία στο σύνορο, όπου ισχύει η CFT. Παρόλα αυτά, δεν έχει βρεθεί ακόμη μία ακριβής ερμηνεία στο σύνορο, για μια ακολουθία από ringdowns, όπως τα echoes (βλ. [123, 124] για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το ρόλο των echoes στη AdS/CFT).



Σχήμα 4.2: Χρονική εξέλιξη βαθμωτών διαταραχών με $\ell = 0$ (πάνω πάνελ) $\ell = 1$ (κεντρικό πάνελ) και $\ell = 2$ (κάτω πάνελ) διαδιδόμενων στο χωροχρόνο της μελανής οπής (;;)-(;;) με $\mu = 0.1$ και $l_\eta = 1$.



Σχήμα 4.3: Χρονική εξέλιξη των διαταραχών για $\ell = 2$ στο χωροχρόνο της μαύρης τρύπας (;;)-(;;) με $\mu = 0.1$ και $l_\eta = 4$ (αριστερά), $l_\eta = 5$ (δεξιά). Ο μαύρες διακεκομένες γραμμές υποδηλώνουν τις χρονικές στιγμές που αναμένεται η άφιξη του επόμενου echo όπως αυτές υπολογίστηκαν από την (4.20).

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την επίδραση του l_η στο χρόνο άφιξης των echoes, υπολογίσαμε αριθμητικά το χρόνο που χρειάζεται μία ακτίνα φωτός για να διανύσει μία διαδρομή από την PS μέχρι το AdS σύνορο και πάλι πίσω. Για μία μετρική της μορφής (4.2) αύτη χρονική διαφορά δίνεται από [192, 125]

$$\Delta t = 2 \int_{PS}^{Boundary} \sqrt{\frac{g(r)}{f(r)}}\, dr \,. \tag{4.20}$$

Όπως φαίνεται από τα διαγραμμάτα 4.3, η χρονική θέση των echoes όπως προέκυψε από την αριθμητική ολοκλήρωση, είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τις τιμές των Δt που υπολογίστηκαν από την (4.20) (βλ. μαύρες διακεκομμένες γράμμες στο σχήμα). Αυτή η συμφωνία ενισχύει περαιτέρω την ερμηνεία, ότι ο σχηματισμός των echoes δημιουργείται λόγω δευτερογενών διαταραχών της PS από τα ανακλόμενα στο AdS σύνορο κύματα.

4.6 Σκουλικότρυπα

Στην εικόνα 4.4 απεικονίζεται η συμπεριφορά του εξωτερικού βαθμωτού πεδίου καθώς διαδίδεται μέσα στο χωροχρόνο της σκουλικότρυπας (4.8)-(4.9). Η απόκριση του αντικειμένου παρουσιάζει και σε αυτή την περίπτωση echoes ύστερα από το αρχικό ringdown, το οποίο δημιουργείται λόγω της πρωταρχικής σκέδασης του βαθμωτού πεδίου με την PS. Όπως και στην περίπτωση της μελανής οπής, οι $\ell = 0$ διαταραχές δεν διεγείρουν επαρκώς την PS δημιουργώντας echoes λιγότερο ταλαντευόμενα σε σχέση με αυτά που λαμβάνουμε για $\ell > 0$. Ωστόσο, παρατηρούμε πως το πλάτος τους δεν φθίνει με το χρόνο, σε αντίθεση με τη μελανή οπή.

Αυτή η διαφορετική συμπεριφορά δημιουργεί ένα εύκολο κριτήριο για να διαχωρίσει κανείς εάν το αντικείμενο υπό μελέτη είναι μελανή οπή ή σκουλικότρυπα. Ο υποκείμενος μηχανισμός που οδηγεί σε αυτό το σήμα μπορεί να κατανοηθεί εύκολα από το γεγονός ότι τώρα, αντί για έναν ορίζοντα γεγονότων έχουμε έναν λαιμό σκουλικότρυπας, συνεπώς, η συνολική ενέργεια διατηρείται και δεν χάνεται πίσω από κάποιον ορίζοντα. Το πεδίο μας ταξιδεύει μέσα από το λαιμό προς τη δεύτερη περιοχή της σκουλικότρυπας και στη συνέχεια ανακλάται από το δεύτερο AdS σύνορο (βλ.σχήμα 4.1).

Η επίδραση της σταθεράς σύζευξης l_η δίνεται στο σχήμα 4.5. Πέρα από το γεγονός ότι έχουμε echoes μετά το αρχικό ringdown, βλέπουμε ότι το l_η δρα σαν ένα μέτρο του διαθέσιμου χώρου στο σύμπαν, αφού για πιο υψηλές τιμές του το πεδίο έχει να ταξιδέψει μεγαλύτερη απόσταση ανάμεσα στο λαιμό και το AdS σύνορο. Ως επακόλουθο, δημιουργείται μία αναλογία μεταξύ του l_η και του χρόνου διαστήματος που περιμένουμε να εμφανιστούν τα echoes. Για να το επαληθεύσουμε, υπολογίζουμε αυτό το χρονικό διάστημα, όπως και στην περίπτωση της μελανής οπής, από τη σχέση

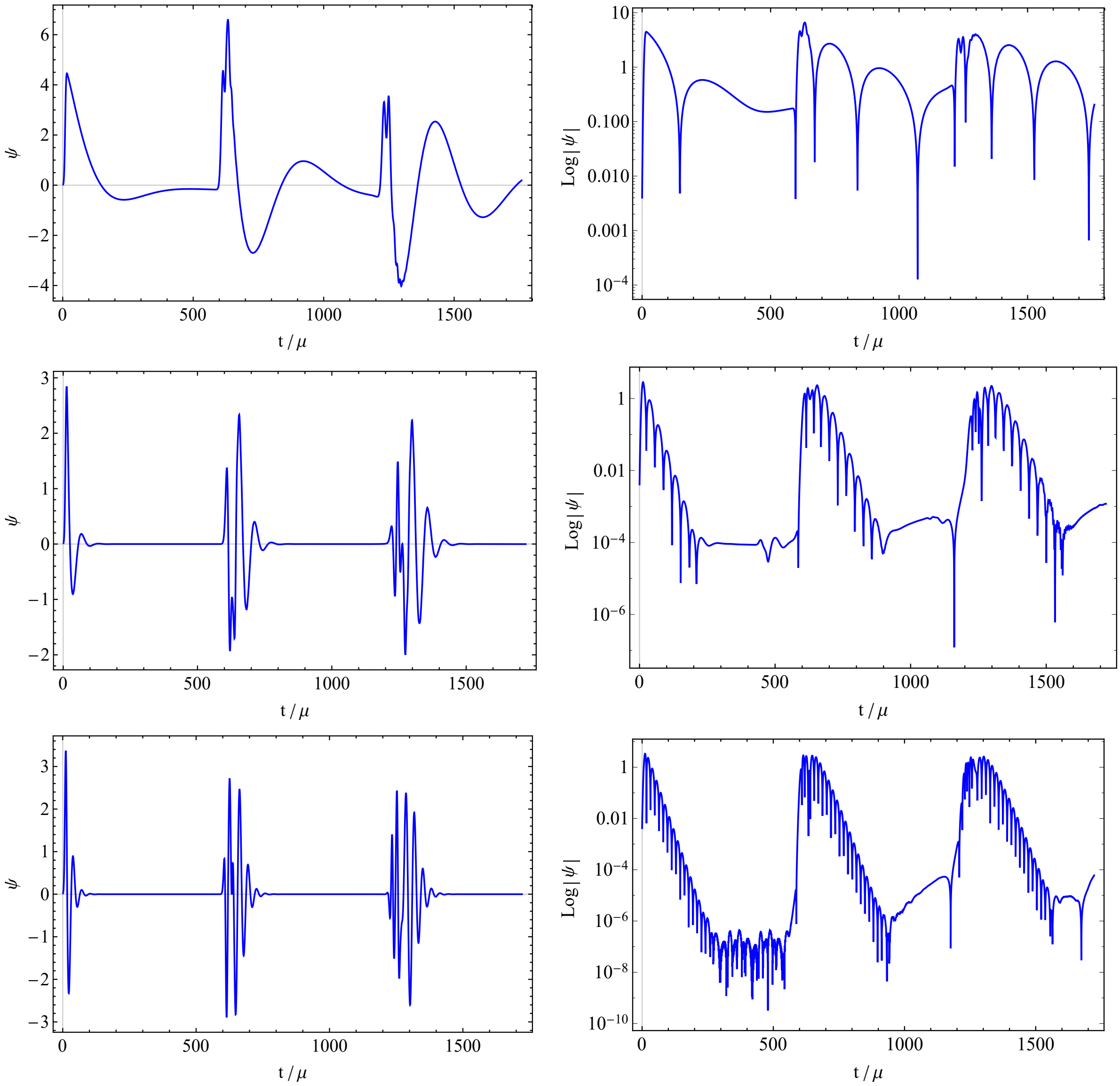
$$\Delta t = 2\int_{Throat}^{Boundary} \sqrt{\frac{g(r)}{f(r)}}\, dr \ . \tag{4.21}$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.5, η χρονική θέση των echoes από την αριθμητική ολοκλήρωση, είναι σε συμφωνία με τις τιμές των Δt που υπολογίστηκαν από την (4.21) (βλ. μαύρες διακεκομμένες γράμμες στο σχήμα). Αυτή η συμφωνία επιβεβαιώνει ότι τα echoes παράγονται λόγω της ανακλαστικής φύσης του AdS συνόρου και όχι λόγω κάποιας διπλής κορυφής (double barrier) στο ενεργό δυναμικό κοντά στο λαιμό, όπως συμβαίνει συνήθως στις λύσεις που περιγράφουν σκουλικότρυπες (βλ. [192], [126]-[206]).

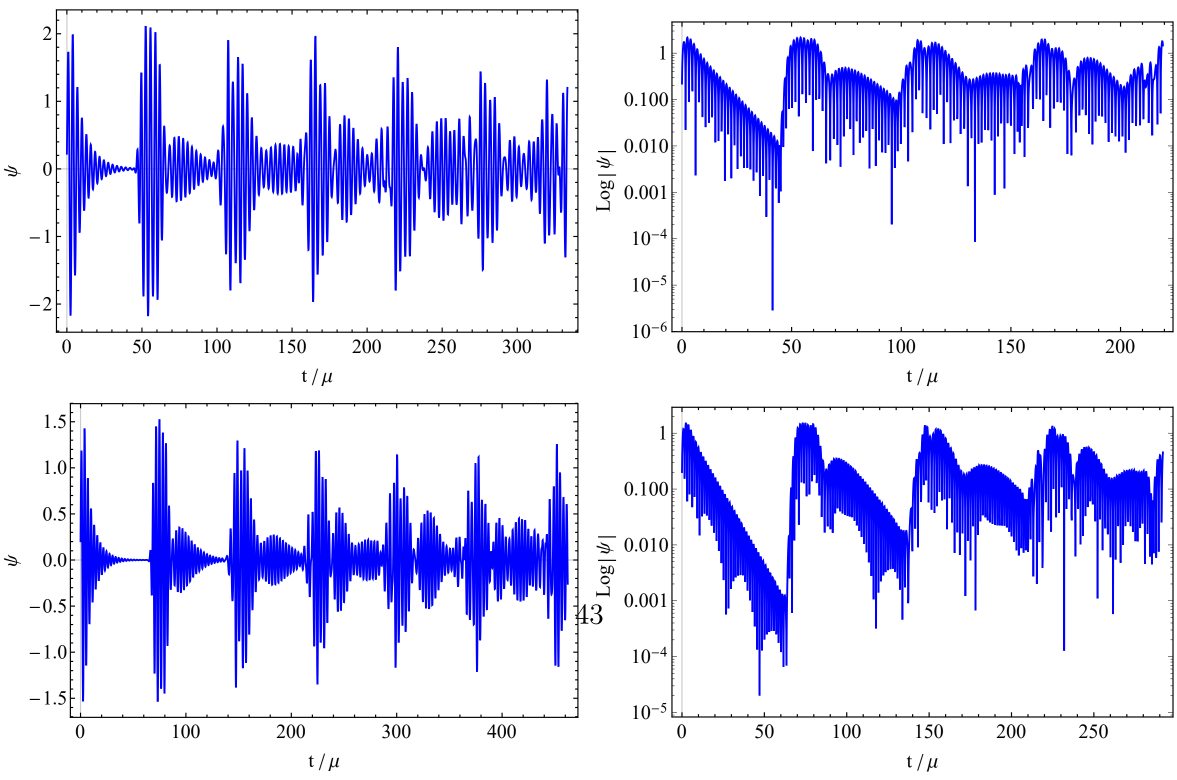
Η ύπαρξη echoes με πλάτος όμοιο με του αρχικού ringdown υποδεικνύει πως τέτοια αντικείμενα μπορεί να χαρακτηρίζονται από κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (normal modes) παρόμοιους με αυτούς που βρέθηκαν στα [129, 130, 131]. Για την ακρίβεια, θα μπορούσε κανείς να κάνει μία ανάλυση του βαθμωτού πεδίου (mode decomposition) έτσι ώστε να υπολογίσει αυτές τις συχνότητες. Στην περίπτωσή μας η περίπλοκη μορφή της μετρικής κάνει μια τέτοια ανάλυση δύσκολη σε τεχνικό επίπεδο. Από τη στιγμή που τα echoes εμφανίζονται σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα (timescales) κάποιος μπορεί να δελεαστεί να προσεγγίσει αυτές τις συχνότητες με μία σχέση της μορφής $\omega \sim 2\pi/\Delta t$. Η αριθμητική μας ανάλυση υποδεικνύει ότι $\omega \sim \mu/l_\eta$, ενώ το ℓ δεν εμφανίζεται να έχει κάποια σημαντική συνεισφορά σε αυτή την προσέγγιση, πέρα από το γεγονός ότι επηρεάζει την συχνότητα ταλάντωσης του κάθε ringdown.

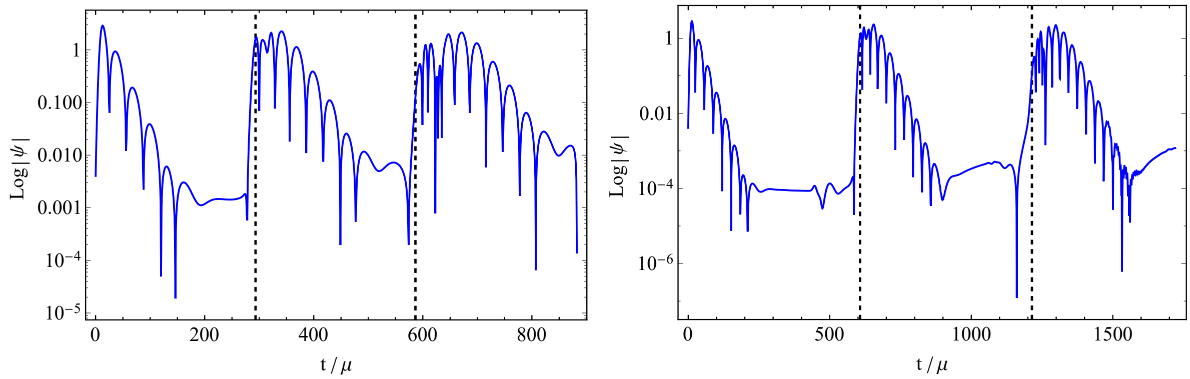
Extremal σκουλικότρυπα

Μέχρι στιγμής, οι τιμές των παραμέτρων που έχουμε θεωρήσει για την σκουλικότρυπα, ανταποκρίνονται σε ένα ενεργό δυναμικό με μία μοναδική κορυφή στο λαιμό και δύο περιοχές πιθανής παγίδευσης του πεδίου (πηγάδια δυναμικού). Εάν διαλέξουμε παραμέτρους τέτοιες ώστε η μάζα να προσεγγίζει (ή να είναι ίση) με την οριακή της τιμή $\mu \simeq \mu_{extreme}$ (βλ. σχέση (4.11)), τότε το ενεργό δυναμικό παρουσιάζει δύο κορυφές κοντά στο λαιμό, ειδικά για υψηλές τιμές του ℓ. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζονται τρεις περιοχές πιθανής παγίδευσης του πεδίου οι οποίες επηρεάζονται από την ακτίνα του λαιμού, την μάζα, και τη γωνιακή στροφορμή με τρόπο ο οποίος φαίνεται στο σχήμα 4.6. Τα τρία πηγάδια δυναμικού θα οδηγήσουν σε echoes που παράγονται από δύο είδη περιοχών διαφορετικής φύσεως: τις αρχικές περιοχές μεταξύ της PS και του συνόρου AdS, και μία καινούργια περιοχή στο λαιμό της σκουλικότρυπας.

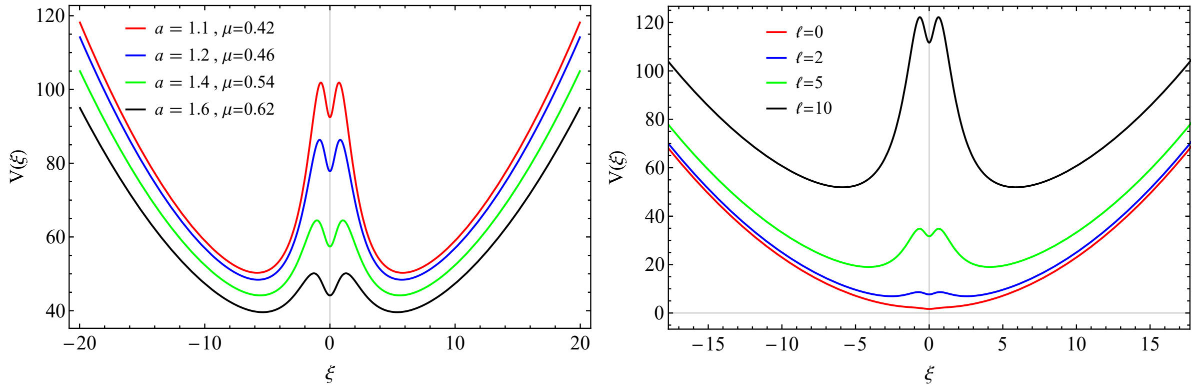


Σχήμα 4.4: Χρονική εξέλιξη των διαταραχών με $\ell = 0$ (πάνω πάνελ) $\ell = 1$ (μεσσαίο πάνελ), $\ell = 2$ (κάτω πάνελ) στο χωροχρόνο της σκουλικότρυπας (4.8)-(4.9) με $l_\eta = 10$, $\mu = 0.1$ και $a = 1$.





Σχήμα 4.5: Χρονική εξέλιξη των διαταραχών με $\ell = 1$ στο χωροχρόνο της σκουλικότρυπας (4.8)-(4.9) με $\mu = 0.1$, $a = 1$ και $l_\eta = 5$ (αριστερά), $l_\eta = 10$ (δεξιά).



Σχήμα 4.6: Αριστερό πάνελ: Ενεργό δυναμικό με $l_\eta = 1$, $\ell = 10$ και $\mu = \mu_{extreme}$ για διάφορες τιμές της ακτίνας του λαιμού a. Δεξί πάνελ: Ενεργό δυναμικό με $l_\eta = 1$, $a = 1$, $\mu = \mu_{extreme}$ για διάφορες τιμές της γωνιακής στροφορμής ℓ.

Στο σχήμα 4.7 παρατηρούμε μία νέα συμπεριφορά η οποία δεν εμφανιζόταν στις προγούμενες περιπτώσεις. Εκτός από τα αρχικά echoes που παράγονται από το AdS σύνορο, έχουμε και την εμφάνιση δευτερογενών echoes, με μικρότερο πλάτος, που προέρχονται από την νέα περιοχή παγίδευσης που σχηματίζεται στο λαιμό της σκουλικότρυπας. Παρατηρούμε επίσης πως λόγω της συμβολής μεταξύ των echoes, το σήμα καταλήγει να δείχνει θορυβώδες για μεγάλους χρόνους. Παρόλα αυτά η ύπαρξη echoes από δύο διαφορετικές περιοχές παγίδευσης που προκύπτουν φυσικά σε χωροχρόνο σκουλικότρυπας, αναφέρεται εδώ για πρώτη φορά.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η συμπεριφορά βαθμωτών διαταραχών διαδιδόμενους σε χωροχρόνους μελανών οπών και σκουλικότρυπων με effective AdS συμπεριφορές στο ασυμπτωτικό άπειρο, λόγω της αλληλεπίδρασης ενός νέου βαθμωτού πεδίου Φ με την βαρύτητα. Η συμπεριφορά των διαταραχών είναι παρόμοια για τα δύο είδη αντικειμένων. Μετά το αρχικό ringdown παρατηρείται η εμφάνιση echoes των οποίων ο χρόνος εμφάνισης (timescale) είναι ανάλογος της σταθεράς σύζευξης μεταξύ του βαθμωτού Φ και της βαρύτητας. Η ύπαρξη του AdS συνόρου στην λύση της μελανής οπής, οδηγεί σε σήματα με παρόμοια συμπεριφορά με αυτή που λαμβάνουμε από μία μαύρη τρύπα με κβαντικές διορθώσεις στον ορίζοντα γεγονότων [207]. Επιπλέον, μία τέτοια συμπεριφορά μπορεί να έχει ενδιαφέρουσες εφαρμοφές στο πλαίσιο της AdS/CFT αντιστοιχίας (βλ. [123, 124] για μία ολογραφική περιγραφή των echoes στην dual CFT).

Παρόλο που η σκουλικότρυπα στην παρούσα εργασία παρουσιάζει ένα ενεργό δυναμικό με μία κορυφή κοντά στο λαιμό, παρόμοιο με αυτά των Bronnikov-Ellis και Morris-Thorne σκουλικότρυπων [137, 138, 136, 84], έχουμε παραγωγή echoes από την ανακλαστική συμπεριφορά του AdS συνόρου. Για την περίπτωση της extremal σκουλικότρυπας παρατηρούνται δύο είδη από echoes λόγω του συνορού AdS και του πηγαδιού που σχηματίζεται πάνω στο λαιμό. Το μοτίβο αυτό είναι παρομοίο με αυτο που βρέθηκε στο [139] αν και στην δική μας περίπτωση οι περιοχές παγίδευσης εμφανίζονται φυσικά στο δυναμικό για συγκεκριμένες επιλογές των παραμέτρων της θεωρίας και της λύσης και δεν εισαγάγονται με το ''χέρι''.

Τέλος, σε αντίθεση με την περίπτωση της μελανής οπής, τα echoes στη σκουλικότρυπα δεν φθήνουν με το χρόνο και διατηρούν πλάτος ίδιο με του αρχικού ringdown. Η συμπεριφορά αυτή υποδεικνύει την ύπαρξη κανονικών τρόπων ταλάντωσης και πιθανών ασταθειών, παρόμοιων με αυτά που βρέθηκαν στο [140]. Η θεώρηση βαρυτικών διαταραχών, αντί για βαθμωτών (βλ. [141, 142, 143, 144]) είναι πιθανό να οδηγήσει στην αστάθεια της σκουλικότρυπας και να προκαλέσει εν δυνάμει την διαστολή της ή την κατάρευσή της σε μελανή οπή [145, 146].

Κεφάλαιο 5

Ευστάθεια μελανών οπών ισχυρά συζευγμένων με βαθμωτά πεδία

5.1 Εισαγωγή

Τα συμπαγή αντικείμενα έχουν κεντρικό ρόλο στη σύγχρονη αστροφυσική, καθώς οι σχετικιστικές συγκρούσεις μεταξύ τους είναι πιθανό να μας δώσουν καινούργιες πληροφορίες όσον αφορά τις αστροφυσικές διαδικασίες σε συνθήκες εξαιρετικά υψηλής βαρύτητας. Οι τελευταίες ανιχνεύσεις βαρυτικών κυμάτων [147, 148, 149, 150, 151] από ανιχνευτές στη Γη έχουν δώσει σημαντικές πληροφορίες στο πεδίο της ισχυρής βαρύτητας. Η αρχική φάση του βαρυτικού ringdown από συγχωνεύσεις μελανών οπών, που περιγράφεται από τα quasinormal modes (QNMs) [152, 153, 154, 155], συμβάλλει επιπλέον στην κατανόηση των διαδικασιών χαλάρωσής τους καθώς και στην ταυτοποίηση της ισχύουσας θεωρίας βαρύτητας. Παρόλα αυτά, μία καταληκτική ερμηνεία αυτών των φαινομένων δεν έχει βρεθεί ακόμη. Συνεπώς, περιμένουμε πως η μελλοντική κατασκευή ανιχνευτών που θα λειτουργούν στο διάστημα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις και, θα ρίξει φως στο ερώτημα της ύπαρξης εξωτικών συμπαγών αντικειμένων (exotic compact objects)(ECOs) [156, 157, 158, 159] τα οποία μπορεί να έχουν δομή και συμπεριφορά κοντά στον ορίζοντα η οποία να είναι πλήρως διαφορετική από αυτήν ενός ορίζοντα γεγονότων μίας μελανής οπής.

Τα ECOs είναι λύσεις της ΓΘΣ και των modified gravity θεωριών οι οποίες περιγράφουν συμπαγή αντικείμενα με εξωτικές ιδιότητες όπως, μελανές οπές που "αποφεύγουν" το no-hair θεώρημα και διαθέτουν ενδιαφέρουσα multipolar δομή [193], σκουλικότρυπες χωρίς ιδιομορφίες οι οποίες ενώνουν διαφορετικά σύμπαντα [157] καθώς και αντικείμενα δίχως ορίζοντα με ιδιαίτερη χωροχρονική συμπεριφορά σε κοντινές αποστάσεις (near-horizon structures) [203]. Η πλειοψηφία των ECOs που διαθέτουν σφαίρα φωτονίων, μπορεί να μιμηθεί τη συμπεριφορά των μελανών οπών με φυσικό τρόπο όταν αυτά διαταρράσονται, και παράγουν ringdown κυματομορφές στο time domain οι οποίες είναι πανομοιότυπες με αυτές μίας μαύρης τρύπας [192, 70]. Αυτό συμβαίνει λόγω της μή-διαφοράς των διεγέρσεων της σφαίρας φωτονίων κάτω από εξωτερικες διαταραχές. Η επίδραση των ECOs στο σήμα γίνεται εμφανής μόνο σε μεγάλους χρόνους με τη μορφή αποσβενύμενων επαναλήψεων των διεγέρσεων της σφαίρας φωτονίων, γνωστών σαν echoes, οι οποίες σχηματίζονται λόγω της παγίδευσης των διαταραχών σε πηγάδια δυναμικού και του σχηματισμού πιθανών quasibound states [194, 195, 196, 197]. Αυτά τα modes είναι που αντιπροσωπεύουν το πραγματικό QNM φάσμα του ECO τα οποία στο frequency domain διαφέρουν δραματικά από τα QNMs των μελανών οπών [198]. Σε ότι ακολουθεί θα αναφερόμαστε στο φασματικό περιεχόμενο του αρχικού ringdown ως ''QNM φάσμα'' κάθε φορά που τα echoe timescales είναι επαρκώς μεγάλα, παρόλο που το εν λόγω φάσμα δεν αντιπροσωπεύει απαραίτητα το πραγματικό QNM φάσμα που προκύπτει από το πλήρες πρόβλημα ιδιοτιμών.

Παρόλο που η ΓΘΣ έχει εξηγήσει πολλές πειραματικές μετρήσεις, οι τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας προσπαθούν να περιγράψουν φαινόμενα στα οποία η ΓΘΣ αποτυγχάνει όπως, η κατασκευή ενός βιώσιμου κοσμολογικού πληθωριστικού μοντέλου και η εξήγηση της σκοτεινής ενέργειας [160]. Η πιο γενική θεωρία βαθμωτού-τανυστή στις τέσσερις διαστάσεις της οποίας η δράσης κατασκευάζεται από μία μετρική και ένα βαθμωτό πεδίο, είναι η θεωρία Horndenski [161]. Το συγκεκριμένο μοντέλο περιέχει υπο-θεωρίες οι οποίες διατηρούν τη συμμετρία κάτω από μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου [162, 163], οδηγούν σε εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης και δεν παράγουν ghost αστάθειες [164, 165, 166, 167]. Η πιο ευρέως μελετημένη υπο-κλάση της Horndenski περιγράφεται από μια Λαγκρανζιανή με ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με τον τανύστή καμπυλότητας Einstein.

Στις κοσμολογικές κλίμακες, ο όρος σύζευξης της παραπάνω θεώρίας παράγει πολύ ενδιαφέρουσες συμπεριφορές στην δυναμική του πληθωρισμού. Πιο συγκεκριμένα, επιτρέπει την υλοποίηση μίας slow-roll φάσης, διότι ενεργεί σαν όρος τριβής [168, 169], επιτρέποντας δυναμικά όπως αυτό του Higgs [170], κάνοντάς τον έναν πολύ ελκυστικό όρο στο γενικότερο πλαίσιο των θεωριών Horndenski. Μία γενίκευση του συγκεκριμένου όρου και η εφαρμογή του στον πληθωρισμό αναλύθηκε πρόσφατα στα [171, 172, 173]. Κατά την πληθωριστική φάση του σύμπαντος η ΓΘΣ προβλέπει ότι οι βαθμωτές και οι τανυστικές διαταραχές καταλήγουν σε ένα φάσμα το οποίο έχει υποστεί μετατόπιση προς το ερυθρό (red-shifted)[174]. Συνεπώς, θα περίμενε κανείς ότι η παρουσία του non-minimal kinetic όρου θα μεγιστοποιούσε περαιτέρω τη μετατόπιση προς το ερυθρό του φάσματος των διαταραχών λόγω της δράσης του σαν όρος τριβής, το οποίο κατά συνέπεια σχετίζεται με τη μείωση της παραμέτρου Hubble κατά τον πληθωρισμό (για μία ανασκόπηση της επίδρασης του non-minimal kinetic όρου στον πληθωρισμό βλ.[175]). Αντιθέτως, εαν τα βαθμωτά πεδία που είναι συζευγμένα με τον τανυστή Einstein είναι phantom και διαδίδονται με αρνητική ενέργεια, τότε το φάσμα των βαθμωτών και τανυστικών διαταραχών κατά τον πληθωρισμό παρουσίαζει μετατόπιση προς το κυανό (blue-shifted)[176]. Η δυναμική τους στην κοσμολογία και οι αστάθειες στις οποίες ταχυόνια και ghosts εμφανίζονται στην υπέρυθρη περιοχή (infrared region) για σημερινές τιμές της παραμέτρου Hubble συζητήθηκαν στο [177]. Ο συγκεκριμένος όρος έχει χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κοσμολογικών μοντέλων, πέρα από το πλαίσιο του πληθωρισμού [178].

Πέρα από τις εφαρμογές στην κοσμολογία, η συγκεκριμένη υπο-κλάση της Horndenski επιτρέπει την κατασκευή λύσεων μελανών οπών με βαθμωτά ίχνη (scalar hair) [179, 180, 181, 183, 182]. Κατά συνέπεια, μία σημαντική πτυχή αυτών των αντικειμένων είναι η ευστάθειά τους κάτω από διαταραχές. Όσον αφορά το σχηματισμό ευσταθών hairy μελανών οπών, πρέπει να γίνεται ''αποφυγή'' του θεωρήματος εξάλιψης ιχνών (no-hair theorem) [184, 185], το οποίο μεταφράζεται στην ύπαρξη ενός μηχανισμού εξισορρόπισης έξω από τον ορίζοντα γεγονότων ο οποίος να υπερτερεί της βαρυτικής έλξης. Ένα τυπικό παράδειγμα υπάρχει στο πλαίσιο της ολογραφίας. Ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο εμβαπτισμένο σε μία anti-de Sitter Λαγκρανζιανή οδηγεί στο σχηματισμό hair στον ορίζοντα ως αποτέλεσμα της εξισορρόπισης μεταξύ της ελκτυκής φύσης της βαρύτητας και της απωστικής φύσης του ηλεκτρομαγνητισμού [186, 187]. Τότε, σύμφωνα με την gauge/gravity duality, ένας τέτοιος μηχανισμός επιτρέπει μία ολογραφική αλλαγή φάσης η οποία οδηγεί σε μία σύμμορφη θεωρία πεδίου (conformal field theory) που περιγράφει ένας ολογραφικό υπεραγωγό στο AdS σύνορο [188, 189, 190].

Η ευστάθεια στατικών και σφαιρικά συμμετρικών μελανών οπών στις θεωρίες βαθμωτού-τανυστή με εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης είναι ένα πεδίο έντονης ερευνητικής δραστηριότητας. Στο [213] πραγματοποιήθηκε ανάλυση των odd-type γραμμικών διαταραχών στη Horndenski θεωρία και παρουσιάστηκαν εξισώσεις που περιγράφουν τις συνθήκες ευστάθειας και την αποφυγή σχηματισμού κάποιας ghost ή gradient αστάθειας. Η συγκεκριμένη μελέτη επεκτάθηκε στο [214] οπού έγινε η εξαγωγή ανάλογων συνθηκών για τις odd-parity διαταραχές και επιπλέον, βρέθηκε και η ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων. Σε αυτές τις μελέτες δεν χρησιμοποιήθηκε κάποια συγκεκριμένη μετρική και έτσι δεν έγινε ανάλυση ευστάθειας κάποιας στατικής και σφαιρικά συμμετρικής μελανής οπής της θεωρίας. Μία τέτοια ανάλυση έγινε στο [215] όπου μελετήθηκε η ευστάθεια μίας hairy μελανής οπής της Horndenski με ένα βαθμωτό πεδίο που έχει χρονική εξάρτηση και βρέθηκε ότι οι odd-parity διαταραχές οδηγούν σε αστάθειες. Επίσης, στο [216] εξετάστηκαν οι βαθμωτές διαταραχές σε μελανές οπές με χρονοεξαρτώμενα βαθμωτά πεδία και βρέθηκε ότι παρουσιάζουν gradient αστάθειες.

Στην υποπερίπτωση της Horndenski όπου το βαθμωτό πεδίο αλληλεπιδρά κινητικά με τον τανυστή Einstein υπάρχει απευθείας σύζευξη της ύλης με την καμπυλότητα και έχουν βρεθεί τοπικές λύσεις στις οποίες αυτή η σταθερά σύζευξης εμφανίζεται ως φορτίο στη μετρική της μελάνης οπής, το οποίο μπορεί να παίξει το ρόλο μιας effective αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς, παρόλο που η αρχική δράση δεν περιέχει κάποιον τέτοιο όρο. Θα είχε μεγάλο ενδιαφέρον να μελετηθούν οι ιδιότητες αυτών των λύσεων και να εξεταστεί εαν αυτή η αλληλεπίδραση μεταξύ ύλης και καμπυλότητας μπορεί να μας δώσει μία βιώσιμη λύση ενός συμπαγούς αντικειμένου. Πιθαντότατα, η πιο σημαντική απαίτηση που έχουμε για την βιωσιμότητα αυτών των λύσεων, είναι η ευστάθειά τους κάτω από διαταραχές. Με αυτό το σκοπό, πρόσφατα μελετήθηκε ευστάθεια της μελανής οπής [180] κάτω από βαθμωτές διαταραχές στο [191]. Σε πρώτης τάξης διαταραχές, η σταθερά σύζευξης δημιουργεί ένα effective AdS σύνορο στο ενεργό δυναμικό της κυματικής εξίσωσης, το οποίο διέπει τη διάδοση των διαταραχών. Το σύνορο αυτό λειτουργεί σαν καθρέφτης και δημιουργεί μία περιοχής πιθανής παγίδευσης έξω από την σφαίρα φωτονίων (photon sphere) χωρίς να χρειαστεί να γίνει η εισαγωγή μιας αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς στη δράση. Ως αποτέλεσμα, το ringdown της μελανής οπής παρουσιάζει αποσβενύμενα echoes στο σήμα. Επομένως, αυτά τα scalarized αντικείμενα της Horndenski θεωρίας διαθέτουν εναλλακτικούς μηχανισμούς παραγωγής echoes πέρα από τους συνηθισμένους οι οποίοι δημιουργούν περιοχές παγίδευσης εσωτερικά της σφαίρας φωτονίων λόγω δομικών αλλαγών κοντά στον ορίζοντα [192, 70, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206].

Οι βαρυτικές διαταραχές στις τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας μπορούν δώσουν πληροφορίες για τη ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων σε αυτά τα μοντέλα. Οι πρόσφατες παρατηρήσεις των GW170817 και GRB170817A υποδηλώνουν πως τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν με ταχύτητα φωτός, με απόκλιση μικρότερη από 10^{-15}. Οι συνέπειες αυτών των πειραματικών αποτελεσμάτων για μοντέλα σκοτεινής ενέργειας και εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας συζητήθηκαν στα [217, 218]. Συγκεκριμένα, αυτοί οι περιορισμοί στην ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων χρησιμοποιήθηκαν για να εξεταστεί η βιωσιμότητα κάποιων υπο-κλάσεων της Horndenski. Στο [209] γίνεται εκτενής ανάλυση για το πώς ο όρος αλληλεπίδρασης μεταξή του κινήτικού όρου του βαθμωτού και του τανυστή Einstein επηρεάζει την ταχύτητα των βαρυτικών κυμάτων. Συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι η κινητική ενέργεια ενός ελάχιστα συζευγμένου βαθμωτού δεν αλλάζει κατά την κοσμολογική εξέλιξη όμως παρόλα αυτά, η ενέργεια ενός βαθμωτού το οποίο αλληλεπιδρά με τον τανυστή Einstein αλλάζει, καθώς το σύμπαν διαστέλλεται. Κατά την περίοδο του πληθωρισμού λειτουργεί σαν όρος τριβής ενώ, όσο το σύμπαν διαστέλλεται η συνεισφορά του στην κοσμολογική εξέλιξη ελαχιστοποιείται με αποτέλεσμα τα βαρυτικά κύματα να ταξιδεύουν με ταχύτητα φωτός στην σημερινή εποχή.

Παρόλο που οι Horndenski θεωρίες προβλέπουν μια διαφορετική ταχύτητα δίαδοσης για τα βαρυτικά κύματα, πρόσφατα δημοσιεύτηκαν μελέτες [219, 220, 221] οι οποίες δείχνουν ότι δουλεύοντας σε κάποιες εκδοχές της Horndenski, βασισμένες στην Telleparallel gravity, μπορεί κανείς να κατασκευάσει μία πιο γενική θεωρία Horndenski στην οποία τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν με ταχύτητα φωτός, χωρίς να χρειαστεί να απαλειφθούν οι όροι $G_5(\varphi, X)$ και $G_4(\varphi, X)$ οι οποίοι είναι πολύ περιορισμένοι στην κλασσική Horndenski. Συνεπώς, μέσω της Teleparallel προσέγγισης μπορεί κανείς να ξαναχρησιμοποιήσει αυτούς τους όρους, το οποίο είναι ένας ενδιαφέρον τρόπος να "αναγεννήσει" κανείς την θεωρία Horndenski. Παρόλο που η ανάλυσή μας είναι βασισμένη στην curvature-based διαμόρφωση της Horndenski, είναι πολύ ενδιαφέρον το γεγονός ότι υπάρχουν τρόποι να ξεφύγει κανείς από τους αυστηρούς περιορισμούς που έχουν θέσει οι πειραματικές μετρήσεις στη θεωρία.

Ο σκοπός της παρούσιας ανάλυσης είναι διττός. Πρώτα θέλουμε να δούμε την επίδραση της σύζευξης του βαθμωτού με τον τανυστή Einstein στην ευστάθεια των τοπικών λύσεων της Horndenski. Θα δουλέψουμε με την λύση [180] για την οποία οι βαθμωτές διαταραχές έχουν αναλυθεί [191, 207] για ένα μεγάλο εύρος της σταθεράς σύζευξης. Σε αυτές τις μελέτες η συγκεκριμένη hairy μελανή οπή βρέθηκε ότι είναι ευσταθής σε γραμμικό επίπεδο. Στην παρούσα δουλειά, επεκτείνουμε τις παραπάνω αναλύσεις χρησιμοποιώντας axial βαρυτικές διαταραχές. Λόγω της σταθεράς σύζευξης η οποία εμφανίζεται σαν φορτίο στη μετρική, περιμένουμε να πάρουμε επιπλέον πληροφορίες οι οποίες θα μας δώσουν μία καλύτερη κατάνοηση για την ευστάθεια αυτών των αντικειμένων, παρόλο που για να αποκτήσουμε μία πλήρη εικόνα της βαρυτικής ευστάθειας θα έπρεπε να θεωρήσουμε επιπλέον και polar διαταραχές οι οποίες γενικά αλληλεπιδρούν με το scalar hair που υπάρχει στις λύσεις των scalar-tensor θεωριών. Ένας δεύτερος στόχος είναι να εξετάσουμε το πως αυτή η σύζευξη επηρεάζει το ringdown και να καταλάβουμε εάν μπορούν να δημιουργηθούν βαρυτικά echoes.

5.2 Αναλυτικές λύσεις συμπαγών αντικειμένων

Θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τις τοπικές λύσεις της Horndeski θεωρίας στις οποίες το βαθμωτό πεδίο αλληλεπιδρά με την καμπυλότητα μέσα από τον κινητικό του όρο. Η Λαγκρανζιανή της δίνεται από

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{i=2}^{i=5} \mathcal{L}_i \ , \qquad (5.1)\\
\mathcal{L}_2 &= K(\Phi, X) \ ,\\
\mathcal{L}_3 &= -G_3(\Phi, X)\Box\Phi \ ,\\
\mathcal{L}_4 &= G_4(\Phi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\Phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2\right] \ .\\
\mathcal{L}_5 &= G_5(\Phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi - \frac{1}{6}G_{5,X}\left[(\Box\Phi)^3 - 3\Box\Phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^3\right] \ ,
\end{aligned}
$$

όπου $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi$. Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο αυτής, με μή-τετριμμένο $\mathcal{L}_2 = K(\Phi, X) = 2\varepsilon X$ και $G_4(\Phi, X) = (8\pi)^{-1} - \eta X$. Σε αυτή την περίπτωση η δράση παίρνει την μορφή

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{8\pi} - (\varepsilon g_{\mu\nu} + \eta G_{\mu\nu})\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi\right], \qquad (5.2)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ η μετρική, $g = det(g_{\mu\nu})$, R η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci, $G_{\mu\nu}$ ο τανυστής Einstein, Φ ένα πραγματικό άμαζο βαθμωτό πεδίο και η η σταθερά σύζευξης κινητικού όρου-καμπυλότητας με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. Η παράμετρος ε παίρνει τιμές ± 1. Όταν $\varepsilon = +1$, έχουμε ένα canonical βαθμωτό με θετική κινητική ενέργεια ,ενώ για $\varepsilon = -1$ ένα phantom πεδίο με αρνητική ενέργειας διάδοσης.

Οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\big[\varepsilon T_{\mu\nu} + \eta\Theta_{\mu\nu}\big] \ , \tag{5.3α′}$$

$$[\varepsilon g^{\mu\nu} + \eta G^{\mu\nu}]\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = 0 \ , \tag{5.3β′}$$

όπου

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2 \ , \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = &-\frac{1}{2}\nabla_\mu\Phi\,\nabla_\nu\Phi\,R + 2\nabla_\alpha\Phi\,\nabla_{(\mu}\phi R^\alpha_{\nu)} \\ &+ \nabla^\alpha\Phi\,\nabla^\beta\Phi\,R_{\mu\alpha\nu\beta} + \nabla_\mu\nabla^\alpha\Phi\,\nabla_\nu\nabla_\alpha\Phi \\ &- \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi\,\Box\Phi - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 G_{\mu\nu} \\ &+ g_{\mu\nu}\big[-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi\,\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi + \frac{1}{2}(\Box\Phi)^2 - \nabla_\alpha\Phi\,\nabla_\beta\Phi\,R^{\alpha\beta}\big] \ .\end{aligned} \tag{5.5}$$

Μία στατική και σφαιρικά συμμετρική λύση έχει βρεθεί στο [180] όπου το βαθμωτό πεδίο εξαρτάται μόνο από την ακτινική συντεταγμένη. Η λύση υφίσταται κάτω από τον περιορισμό $\varepsilon\eta < 0$ ο οποίος οδηγεί στον ορισμό της ακόλουθης σταθεράς σύζευξης

$$\ell_\eta = |\varepsilon\eta|^{1/2} \ . \tag{5.6}$$

Ως προς το γενικό στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + g_{\theta\theta}(r)d\Omega^2 \ , \tag{5.7}$$

η λύση αντιστοιχεί σε $g_{\theta\theta}(r) = r^2$ όπου $r \in (0, +\infty)$ και δίνεται από τις συναρτήσεις

$$g_{tt}(r) = -\frac{1}{4}F(r) \ , \tag{5.8α′}$$

$$g_{rr}(r) = \frac{(r^2 + 2\ell_\eta^2)^2}{(r^2 + \ell_\eta^2)^2 F(r)} \ , \tag{5.8β′}$$

$$F(r) = \left[3 + \frac{r^2}{3\ell_\eta^2} - \frac{8m}{r} + \frac{\ell_\eta}{r}\arctan\left(\frac{r}{\ell_\eta}\right)\right], \tag{5.8γ′}$$

ενώ το βαθμωτό hair της θεωρίας δίνεται από

$$(\partial_r\Phi)^2 = \Psi^2 = -\frac{\varepsilon}{8\pi\ell_\eta^2}\frac{r^2 g_{rr}}{r^2 + \ell_\eta^2} \ , \tag{5.9}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$4\pi\eta\Psi^2 = \frac{1}{2}\frac{r^2}{r^2 + \ell_\eta^2}g_{rr} > 0 \ , \qquad \forall r > r_h \tag{5.10}$$

όπου $r = r_h$ η ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων. Σημειώνουμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης (5.8α′) για $r \to +\infty$, γίνεται $F(r) \sim r^2/\ell_\eta^2$, όπου ο όρος ℓ_η^2 παίζει το ρόλο μίας effective κοσμολογικής σταθεράς με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο (δουλεύοντας σε γεωμετρικές μονάδες). Παρόλα αυτά υπογραμμίζουμε ότι η δράση δεν περιέχει κάποια κοσμολογική σταθερά και αυτή η effective δημιουργία της στην λύση ωφείλεται αμιγώς στη αλληλεπίδραση μεταξύ του βαθμωτού και του τανυστή Einstein.

Ακόμη μία σημαντική σημείωση είναι ότι οι εξισώσεις κίνησης του βαθμωτού πεδίου (5.3β′) μπορούν να εκφραστούν σαν νόμοι διατήρησης του Noether current που αντιστοιχεί στη συμμετρία μετατόπισης του Galileon δηλαδή, $\Phi \to \Phi + \delta\Phi$, όπου $\delta\Phi$ σταθερά. Μπορεί απευθείας να βρεθεί πως το current δίνεται από

$$J^\mu = (\varepsilon g^{\mu\nu} + \eta G^{\mu\nu})\nabla_\nu \Phi \ . \tag{5.11}$$

Η μελανή οπή ικανοποιεί την φυσική απαίτηση του να μην απειρίζεται η νόρμα του Noether current στον ορίζοντα μέσω της (5.6). Ωστόσο, το βαθμωτό πεδίο απειρίζεται στον ορίζοντα όπως φαίνεται απευθείας από την (5.9). Η (5.9) συνεπάγεται επιπλέον ότι οι συναρτήσεις της μετρικής μπορούν να εκφραστούν ως προς το βαθμωτό πεδίο. Αυτό είναι ακόμη ένα στοιχείο που υποδεικνύει πως το βαθμωτό αποτελεί ένα ενδογενές κομμάτι της γεωμετρίας. Τέλος, σημειώνουμε πως μέσω της ταυτότητας Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, η σχέση (5.3α′) οδηγεί στην εξίσωση

$$\nabla^\mu \big[\varepsilon T_{\mu\nu} + \eta \Theta_{\mu\nu}\big] = 0 \ . \tag{5.12}$$

Αντικαθιστώντας τις (5.4) και (5.5) στην ταυτότητα Bianchi καταλήγει κανείς στην σχέση (5.3β′). Δηλαδή, η εξίσωση κίνησης του βαθμωτού (5.3β′) είναι μία διαφορική συνέπεια του συστήματος (5.3α′) λόγω του general covariance και της απουσίας επιπλέον βαθμών ελευθερίας. Σημειώνουμε επίσης, πως η λύση ανάγεται στη μελανή οπή Schwarzschild στο όριο $\ell_\eta \to +\infty$, συνεπώς η εν λόγω μετρική αποτελεί μία hairy γενίκευση της Schwarzschild με effective AdS-asymptotics, που προκύπτει όταν ο spin-0 βαθμός ελευθερίας εμπλουτίζεται δυναμικά από την αλληλεπίδραση με το γκραβιτόνιο, δηλαδή λόγω του όρου $G^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$.

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις (5.8) της μαύρης τρύπας [180] εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο ℓ_η, και την μάζα m. Δηλαδή, δεν περιέχουν κάποια πληροφορία που να υποδεικνύει για το αν το συμπαγές αντικείμενο παράγεται από κανονική ή phantom ύλη εφόσον $\epsilon\eta < 0$. Παρόλο που στο [180] το βαθμωτό θεωρήθηκε ότι είναι canonical ($\epsilon > 0$) και το coupling αρνητικό ($\eta < 0$), επιβεβαιώσαμε ότι η ίδια λύση παράγεται ακόμη και στην περίπτωση που το βαθμωτό είναι phantom ($\epsilon < 0$) και το coupling θετικό ($\eta > 0$).

Τέλος αναφέρουμε ότι στο [169] ακολουθώντας τη λογική του [180], παρουσιάστηκε μία λύση σκουλικότρυπας η οποία υποστηρίζεται από phantom βαθμωτό. Παρόλα αυτά, μπορεί να αποδειχθεί ότι η λύση της σκουλικότρυπας [169] είναι στην πραγματικότητα η λύση της μελανής οπής [180] έπειτα από την εφαρμογή ενός μετασχηματισμού συντεταγμένων. Ξεκινώντας από τη λύση της μελανής οπής

$$ds^2 = -\frac{1}{4}F(r)dt^2 + \frac{(r^2+2l_\eta^2)^2}{(r^2+l_\eta^2)^2F(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{5.13}$$

εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$u^2 = r^2 - a^2, \qquad u \in (-\infty, +\infty) \tag{5.14}$$

μαζί με τον επαναορισμό

$$dt^2 = \frac{4}{\left(3 - \frac{8m}{a} + \frac{a^2}{3l_\eta^2} + \frac{l_\eta}{a}\arctan\left(\frac{a}{l_\eta}\right)\right)} dT^2 = C dT^2 \, . \tag{5.15}$$

Σημειώνουμε ότι ο εν λόγω μετασχηματισμός καλύπτει δύο φορές την περιοχή $r > a$ της μελανής οπής. Θέτωντας στη σταθερά a μία τιμή τέτοια ώστε $a > r_h$, παίρνουμε μία γεωμετρία που καλύπτει δύο φορές την περιοχή $r > r_h$. Εφαρμόζωντας τον μετασχηματισμό (5.14), βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-CF(\sqrt{u^2+a^2})dT^2 \\ &+ \frac{u^2(u^2+a^2+2l_\eta^2)^2}{(u^2+a^2)(u^2+a^2+l_\eta^2)^2F(\sqrt{u^2+a^2})}du^2 \\ &+ (u^2+a^2)d\Omega^2, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$F(\sqrt{u^2+a^2}) = \left(3 - \frac{8m}{\sqrt{u^2+a^2}} + \frac{u^2+a^2}{3l_\eta^2} + \frac{l_\eta}{\sqrt{u^2+a^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{l_\eta}\right)\right). \tag{5.17}$$

Η παραπάνω μετρική είναι η λύση που βρέθηκε στο [96] εκτός από την μορφή του g_{tt} η οποία αφαίθηκε στη μορφή αόριστου ολοκληρώματος. Συγκεκριμένα, το ολοκλήρωμα της συνάρτησης g_{tt} που βρέθηκε στο [96] μπορεί να λυθεί επακριβώς για να δώσει

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\exp\left[\int_0^u \frac{u(u^2+a^2+2\ell_\eta^2)^2}{\ell_\eta^2(u^2+a^2)(u^2+a^2+\ell_\eta^2)F(\sqrt{u^2+a^2})}dr\right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\exp\left[\int_0^u \left(\frac{d(\ln[\sqrt{u^2+a^2}F(\sqrt{u^2+a^2})])}{du}\right)du\right] \\ &= \frac{F(\sqrt{u^2+a^2})}{F(a)} \overset{(5.15)}{=} \frac{C}{4}F(\sqrt{u^2+a^2}) \end{aligned} \tag{5.18}$$

Προφανώς ένα αντικείμενο δεν μπορεί να αλλάγει φυσικές ιδιότητες εαν το εξετάζουμε από διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων επομένως, η μετρική (5.16) είναι απλώς η μελανή οπή (5.8) γραμμένη σε ένα περίεργο σύστημα συντεταγμένων και εσφαλμένα αναγωρίστηκε ως σκουλικότρυπα. Το αποτέλεσμα είναι σε συμφωνία με το [61] στο οποίο υποστηρίχθηκε η απουσία στατικών και σφαιρικά συμμετρικών σκουλικοτρύπων στη Horndeski θεωρία.

5.3 Axial βαρυτικές διαταραχές

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε την ανάλυση βαρυτικών διαταραχών στην μελανή οπή [180] χρησιμοποιώντας το φορμαλισμό του Chandrasekhar [208]. Η πιο γενική μετρική για έναν αξισυμμετρικό μη-στατικό χωροχρόνο (axisymmetric non-stationary) χωροχρόνο.

$$ds^2 = -e^{2f_0}dt^2 + e^{2f_3}(d\phi - q_0dt - q_1dr - q_2d\theta)^2 + e^{2f_1}dr^2 + e^{2f_2}d\theta^2\ . \tag{5.19}$$

Η παραπάνω μορφή μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cotton-Darboux το οποίο δηλώνει ότι οποιαδήποτε τρισδιάστατη μετρική $g = g^{ij}\partial_i\partial_j$, μπορεί να εκφραστεί σε διαγώνια μορφή εφαρμόζοντας ένα τοπικό μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Η background μετρική περιγράφεται για $q_i = 0$. Σε αυτό το σύστημα (gauge) οι axial διαταραχές περιγράφονται από τις μη-μηδενικές τιμές των q_i ενώ οι polar διαταραχές από της μεταβολές $f_i \to f_i + \delta f_i$ και $q_i = 0$. Έπειτα από εφαρμογή των διαταραχών στις εξισώσεις κίνησης και κρατώντας όρους πρώτης τάξης βρίσκουμε ότι οι μη-τετριμμένοι όροι είναι οι G_{03}, G_{13}, G_{23}. Για την ακρίβεια, η εξίσωση $\delta G_{03} = \delta \hat{T}_{03}$[1] ικανοποιείται αυτόματα από τις άλλες δύο. Συγκεκριμένα βρίσκουμε,

$$\delta G_{13} = \frac{1}{2r^3 \sin^2\theta} \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \frac{d}{d\theta} Q + \frac{r\sin\theta}{2g_{tt}\sqrt{grr}} \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dr}q_a - \frac{d}{dt}q_b\right] , \tag{5.20α′}$$

$$\delta \hat{T}_{13} = \frac{4\pi\eta\Psi^2}{g_{rr}} \delta G_{13} , \tag{5.20β′}$$

$$\delta G_{23} = -\frac{1}{2r^2\sin^2\theta} \frac{1}{\sqrt{g_{tt}g_{rr}}} \frac{d}{dr} Q + \frac{\sin\theta}{2g_{tt}} \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\theta}q_a - \frac{d}{dt}q_c\right] , \tag{5.20γ′}$$

$$\delta \hat{T}_{23} = \frac{4\pi\eta\Psi^2}{g_{rr}} \left(\frac{1}{2r^2\sin^2\theta} \frac{-1}{\sqrt{g_{tt}g_{rr}}} \frac{d}{dr} Q - \frac{\sin\theta}{2g_{tt}} \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\theta}q_a - \frac{d}{dt}q_c\right]\right) \tag{5.20δ′}$$

$$- 4\pi\eta \frac{d}{dr}\left(\frac{\Psi^2}{2g_{rr}}\right) \frac{1}{r^2\sin^2\theta\sqrt{g_{tt}}\sqrt{g_{rr}}} Q ,$$

όπου $Q = \left[r^2\sin^3\theta \frac{\sqrt{g_{tt}}}{\sqrt{g_{rr}}} \frac{d}{d\theta} q_b - r^2\sin^3\theta \frac{\sqrt{g_{tt}}}{\sqrt{g_{rr}}} \frac{d}{dr} q_c\right]$. Ορίζοντας,

$$F = \left(1 - \frac{4\pi\eta\Psi^2}{grr}\right) Q , \tag{5.21}$$

οι διαφορικές εξισώσεις $\delta G_{ab} = \delta \hat{T}_{ab}$, χρησιμοποιώντας (5.20α′-5.20δ′), γίνονται

$$\frac{1}{r^4\sin^3\theta} \sqrt{g_{tt}}\sqrt{g_{rr}} \left(\frac{g_{rr}}{grr - 4\pi\eta\Psi^2}\right) \frac{d}{d\theta} F = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}q_b - \frac{d}{dr}q_a\right] , \tag{5.22α′}$$

$$\frac{1}{r^2\sin^3\theta} \frac{\sqrt{g_{tt}}}{\sqrt{g_{rr}}} \left(\frac{g_{rr}}{grr + 4\pi\eta\Psi^2}\right) \frac{d}{dr} F = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\theta}q_a - \frac{d}{dt}q_c\right] . \tag{5.22β′}$$

Παραγωγίζοντας τις (5.22α′) και (5.22β′) ως προς θ και r αντίστοιχα, και στη συνέχεια προσθέτοντάς τες, λαμβάνουμε την εξίσωση που διέπει τη συμπεριφορά των διαταραχών

$$\frac{r^4}{\sqrt{g_{tt}}\sqrt{g_{rr}}} \left(\frac{g_{rr} - 4\pi\eta\Psi^2}{g_{rr}}\right) \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\sqrt{g_{tt}}}{\sqrt{g_{rr}}} \left(\frac{g_{rr}}{grr + 4\pi\eta\Psi^2}\right) \frac{d}{dr}F\right] - \frac{r^2}{g_{tt}}\frac{d^2F}{dt^2} + \sin^3\theta \frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{d}{d\theta}F\right] = 0 . \tag{5.23}$$

Μετά από χωρισμό των μεταβλητών, παρατηρούμε πως το γωνιακό κομμάτι της διαφορικής είναι ίδιο με αυτό της περίπτωσης Schwarzschild και έχει λύσεις τα πολυώνυμα Gegenbauer, κάτι που οφείλεται στη σφαιρική συμμετρία των δύο χωροχρόνων. Επομένως, θέτοντας $F = R(r,t)S(\theta)$, όπου στο παράρτημα Γ′ δείχνουμε αναλυτικά ότι $S(\theta) = C_{\ell+2}^{-3/2}(\theta)$, η (5.23) γράφεται ως

$$\frac{r^4}{\sqrt{g_{tt}}\sqrt{g_{rr}}} \left(\frac{g_{rr} - 4\pi\eta\Psi^2}{g_{rr}}\right) \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\sqrt{g_{tt}}}{\sqrt{g_{rr}}} \left(\frac{g_{rr}}{g_{rr} + 4\pi\eta\Psi^2}\right) \frac{d}{dr}R\right] - \frac{r^2}{g_{tt}}\frac{d^2R}{dt^2} - (\ell+2)(\ell-1)R = 0 . \tag{5.24}$$

[1] όπου $\hat{T}_{ab} = 8\pi\big[\varepsilon T_{ab} + \eta\Theta_{ab}\big]$ (σημειώστε ότι οι δείκτες a, b είναι Lorentz και όχι χωροχρονικοί δείκτες).

όπου ℓ ο κβαντικός αριθμός γωνιακής στροφορμής των διαταραχών. Για αισθητικούς λόγους θέτουμε τα παρακάτω μεγέθη

$$h = \frac{\sqrt{g_{tt}}}{\sqrt{g_{rr}}}\,, \qquad A = \left(\frac{g_{rr}}{g_{rr} + 4\pi\eta\Psi^2}\right)\,, \qquad B = \left(\frac{g_{rr} - 4\pi\eta\Psi^2}{g_{rr}}\right)\,, \tag{5.25}$$

τα οποία μας βοηθούν να γράψουμε την εξίσωση (5.24) στην φαινομενικά πιο απλή μορφή

$$Br^2 h\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}Ah\frac{d}{dr}R\right] - \frac{d^2R}{dt^2} - \frac{(\ell+2)(\ell-1)}{r^2}g_{tt}R = 0\,. \tag{5.26}$$

Τέλος, ορίζοντας ένα βαθμωτό πεδίο

$$u = \frac{R}{r}\sqrt{A}\,, \tag{5.27}$$

και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της τορτοισε συντεταγμένης $h = dr/dr_*$, εκφράζουμε την εξίσωση των διαταραχών σε μια μορφή που θυμίζει αυτή της εξίσωσης Schrodinger

$$h\frac{d}{dr}\left[h\frac{d}{dr}u\right] - \frac{1}{AB}\frac{d^2u}{dt^2} - \left[\frac{(\ell+2)(\ell-1)}{r^2}\frac{g_{tt}}{AB} + \frac{r}{\sqrt{A}}h\frac{d}{dr}\left(h\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{A}}{r}\right)\right)\right]u = 0 \tag{5.28}$$

με ενεργό ,Regge-Wheeler, δυναμικό που δίνεται από

$$V(r) = \frac{(\ell+2)(\ell-1)}{r^2}\frac{g_{tt}}{AB} + \frac{r}{\sqrt{A}}h\frac{d}{dr}\left(h\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{A}}{r}\right)\right)\,. \tag{5.29}$$

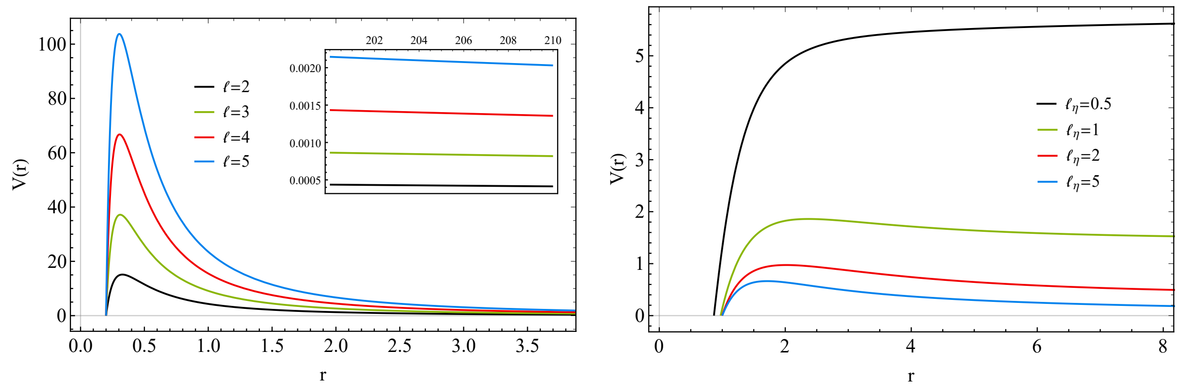
Αντικαθιστώντας στην (5.29) τη μετρική της Rinaldi μελανής οπής και παίρνοντας το όριο $\ell_\eta \to +\infty$, ξαναγυρνάμε πίσω στο δυναμικό της Schwarzschild. Επίσης, σημαντικό χαρακτηριστικό της (5.28) είναι η ύπαρξη του πολλαπλασιαστικού παράγοντα $1/AB$ η οποία κωδικοποιεί την τροποποίηση της ταχύτητας διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων [209].

Η (5.28) μας δείχνει ότι μπορεί κανείς να κάνει αναγωγή του προβλήματος των axial διαταραχών γύρω από συμπαγή αντικείμενα σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα σκέδασης με ενεργό δυναμικό.

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω στη μελανή οπή (5.8)-(5.9) βρίσκουμε το ενεργό δυναμικό των βαρυτικών διαταραχών καθώς διαδίδονται σε αυτόν τον χωροχρόνο. Η συμπεριφορά του για διάφορες τιμές της γωνιακής στροφορμής ℓ δίνεται στην εικόνα 5.1. Παρατηρούμε το σχηματισμό μίας κορυφής δυναμικού για υψηλά ℓ_η, που αντιστοιχεί στη θέση της σφαίρας φωτονιών (photon sphere - PS) $r = 3m$. Για ένα μεγάλος πληθος μελανών οπών, η αναφορά [74] ανέδειξε ότι η γωνιακή συχνότητα και τα instability timescales των null γεωδαισιακών που κινούνται στις ασταθείς κυκλικές τροχιές στη σφαίρα φωτονίων, συνδέονται αντίστοιχα με τη συχνότητα ταλάντωσης και το ρυθμό απόσβεσης (dampring rate) των eikonal QNMs. Η ύπαρξη τέτοιων φυγοκεντρικών (centrifugal) δυναμικών είναι υπεύθυνη για το prompt ringdown και τα ‘‘photon sphere QNMs’’ που έχουν βρεθεί σε μία πληθώρα μελανών οπών [75, 76, 77, 78, 79, 80, 81]. Σε ότι ακολουθεί, θα δείξουμε πως η παραπάνω αντιστοίχιση ισχύει μόνο στο όριο της ΓΘΣ και μακριά από αυτήν καταρρέει.

Ασυμπτωτικά το δυναμικό τείνει σε μία σταθερή τιμή, κάτι που διαφοροποιεί τις βαρυτικές από τις βαθμωτές διαταραχές [191], και επιπλέον, κωδικοποιεί την μή ασυμπτωτικά επίπεδη συμπεριφορά του χωροχρόνου. Συγκεκριμένα, στο χωροειδές άπειρο, σε μηδενική τάξη το δυναμικό πηγαίνει ως $V(r \to \infty) \sim A + \mathcal{O}(1/r)$ όπου η σταθερά A εξαρτάται από τις παραμέτρους ℓ και ℓ_η και μπορεί να υπολογιστεί μόνο αριθμήτικα. Μία παρόμοια συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί και στο [144] για την περίπτωση των vector διαταραχών στη συγκεκριμένη μελανή οπή.

Σε αυτό το σημείο, σημειώνουμε τις διαστάσεις διάφορων μεγεθών που εμφανίζονται στις ακόλουθες εικόνες. Σύμφωνα με τη σύμβαση των γεωμετρικών μονάδων, η μάζα της μελανής οπής m και του coupling ℓ_η έχουν διαστάσεις τετραγωνικού μήκους ενώ, οι διαταραχές u και ο λόγος m/ℓ_η είναι αδιάστατα μεγέθη άρα και κατάλληλα για την ανάλυση που ακολουθεί. Τέλος, το ενεργό δυναμικό $V(r)$ έχει διαστάσεις μήκους εις την -2, όπως αναμένουμε, ενώ η συχνότητα ω έχει διαστάσεις μήκους.



Σχήμα 5.1: Αριστερά: Ενεργό δυναμικό με $\ell_\eta = 100\,,\, m = 0.1$ για διάφορες τιμές της ℓ. Δεξιά: Ενεργό δυναμικό με $m = 0.5\,,\, \ell = 2$ ως προς τη σταθερά σύζευξης ℓ_η.

5.4 Αριθμητική ολοκλήρωση - Χρονική εξέλιξη

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης που παρουσιάστηκε πρώτη φορά στο [105], η οποία δίνει τη συμπεριφορά των διαταραχών της μετρικής καθώς διαδίδονται σε ένα σταθερό χωροχρονικό υπόβαθρο. Ορίζουμε $u(r_*, t) = u(i\Delta r_*, j\Delta t) = u_{i,j}$, $V(r(r_*)) = V(r_*) = V(i\Delta r_*) = V_i$, $A(r_*) = A(i\Delta r_*) = A_i$ και $B(r_*) = B(i\Delta r_*) = B_i$ και η (5.28) παίρνει τη μορφή

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r_*^2} - \frac{1}{A_i B_i}\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} - V_i\, u_{i,j} = 0\,. \tag{5.30}$$

Σαν αρχική συνθήκη, χρησιμοποιούμε ένα Γκαουσιανό κυματοπακέτο της μορφής $\psi(r_*, t) = \exp\left[-(r_* - c)^2/(2\sigma^2)\right]$ και $\psi(\rho_*, t < 0) = 0$, όπου c και σ είναι ο μέσος και το πλάτος του πακέτου και υπολογίζουμε τη χρονική εξέλιξη του u από τη σχέση

$$u_{i,j+1} = A_i B_i\, \Delta t^2 \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r_*^2} - V_i u_{i,j}\right) + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}\ , \tag{5.31}$$

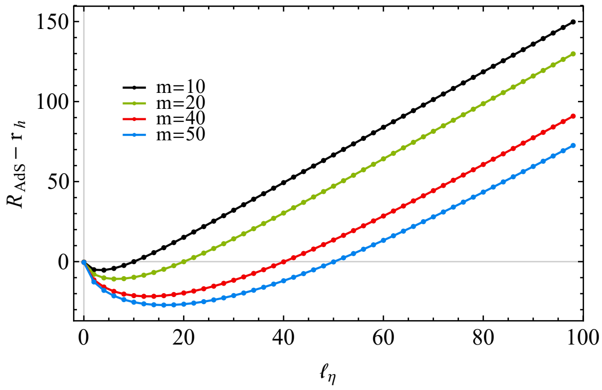
όπου η συνθήκη Courant-Friedrichs-Lewy απαιτεί $\Delta t/\Delta r_* < 1/(A_i B_i)$. Για τον υπολογισμό των τιμών του δυναμικού V_i, ολοκληρώνουμε την εξίσωση για την tortoise συντεταγμένη και στη συνέχεια λύνουμε ως προς το r. Επιπλέον, απαιτούμε το μηδενισμό των διαταραχών στο άπειρο χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες $u_{i_{max},j} = 0$, λόγω της ασυμπτωτικής AdS συμπεριφοράς της λύσης μας (για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με συνοριακές συνθήκες σε AdS χώρους βλ. [210, 154]). Για επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης και της σύγκλισης αυτής βλ. παράρτημα Δ′

5.5 Εξέλιξη βαρυτικων διαταραχών

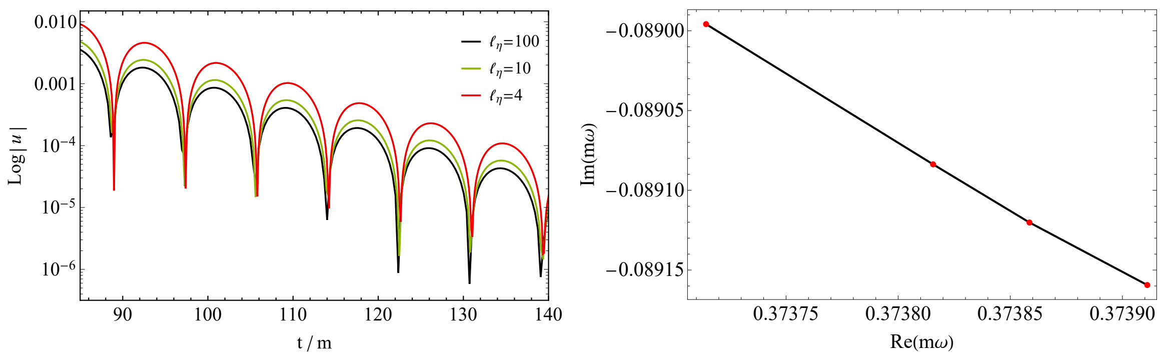
Παρόλο που ο χωροχρόνος που με τον οποίο δουλεύουμε δεν περιγράφει μία μελανή οπή εμβαπτισμένη μέσα σε ένα σύμπαν με αρνητική κοσμολογική σταθερά, έχει νόημα να τον συγκρίνουμε την λύση Schwarzschild-AdS αφού, η σταθερά ℓ_η εισάγει μία effective κοσμολογική σταθερά στη γεωμετρία. Σε ότι ακολουθεί θα υιοθετήσουμε την κατηγοριοποίηση του [99] που αφορά τις ασυμπτωτικά AdS μελανές οπές με τη χρήση δύο παραμέτρων, του AdS radius $r = R_{AdS}$ και του ορίζοντα $r = r_h$. Η μελανή οπή που εξετάζουμε εδώ εξαρτάται επίσης από δύο παραμέτρους, τη μάζα m και τη σταθερά σύζευξης ℓ_η. Η μάζα ελέγχει τη συμπεριφορά του ορίζοντα r_h (συνεπως και της σφαίρας φωτονίων) και η ℓ_η καθορίζει την τιμή του AdS radius $r = R_{\rm eff}$. Ωστόσο, μία σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δύο λύσεις είναι πως η μία περιγράφει μία μαύρη τρύπα εμβαπτισμένη μέσα σε ένα AdS χωροχρόνο ενώ, η scalarized λύση είναι ''ντυμένη'' με το βαθμωτό πεδίο του οποίου η ύπαρξη δημιουργεί την effective AdS συμπεριφορά στο ασυμπτωτικό άπειρο. Υπό αυτή την έννοια η πάραμετρος ℓ_η καθορίζει τη δύναμη του βαθμωτού hair και κατά συνέπεια την τιμή $R_{\rm eff}$. Στην περίπτωσή μας, ο effective κοσμολογικός ορίζοντας δίνεται από $R_{\rm eff} = \sqrt{3}\,\ell_\eta$. Μπορεί κανείς να κατηγοριοποιήσει τις μελανές οπές μέσα AdS χωροχρόνούς [99] ως (1) μικρές μελανές οπές με $r_h << R_{AdS}$, (2) μεσαίου μεγέθους μελανές οπές όπου $r_h \sim R_{AdS}$ και (3) μεγάλες μελανές οπές με $r_h >> R_{AdS}$. Στην παρούσα δημιοσίευση χρησιμοποιούμε μία αντίστοιχη κατηγοριοποίηση για να διαχωρίζουμε μεταξύ μικρών ($r_h << R_{\rm eff}$), μεσαίων ($r_h \sim R_{\rm eff}$) και μεγάλων hairy μελανών οπών ($r_h >> R_{\rm eff}$) (βλ. εικόνα 5.2).

Σε ότι ακολουθεί, εφαρμόζουμε την αριθμητική ολοκλήρωση που περιγράψαμε παραπάνω για να υπολογίσουμε την χρονική απόκριση των axial βαρυτικών διαταραχών σε μελανές οπές των παραπάνω κατηγοριών. Στις παρακάτω εικόνες υπολογίζουμε την απόκριση σε κοντινή απόσταση από τον ορίζοντα $r - r_h = 10^{-5}$, αν και έχουμε επιβεβαιώσει ότι παίρνουμε ποιοτικά τα ίδια αποτελέσματα ακόμη και διαλέξουμε σημεία αρκετά έξω από τον ορίζοντα. Επιπλέον, πραγματοποιήσαμε τεστς σύγκλισης για να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα της αριθμητικής μεθόδου. Συγκεκριμένα, υπολογίσαμε την απόκριση της μελανής οπής στο όριο όπου η επίδραση του βαθμωτού πεδίου ελαχιστοποιείται $\ell_\eta \to \infty$ (επιλέξαμε $\ell_\eta = 1000$ παρόλο που ακόμη και για $\ell_\eta = 10$ το δυναμικό $V(r)$ συγκλίνει στο δυναμικό Regge-Wheeler). Χρησιμοποιώντας την Prony method [211] εξάγουμε το φάσμα από το σήμα της απόκρισης του αντικειμένου, για μεγάλα couplings και συγκρίνουμε εάν τα modes του αρχικού ringdown συμφωνούν με τα ήδη γνωστά axial gravitational QNMs των Schwarzschild μελανών οπών [208]. Στην εικόνα 5.3 δείχνουμε το prompt ringing μικρών μελανών οπών για $\ell = 2$ βαρυτικές διαταραχές. Θεωρούμε μόνο την περίπτωση όπου η μάζα είναι $m = 0.1$ έτσι ώστε να έχουμε ένα clear ringing phase, αφού για τα couplings επιλέξαμε τιμές από 4 εώς 100 οι οποίες ανταποκρίνονται σε μεγάλα echo timescales και κάνουν δυνατή την εξαγωγή των QNMs από το αρχικό ringdown. Η εικόνα 5.3 δείχνει ότι η μείωση του ℓ_η έχει μηδαμινή επίδραση στο φάσμα ενώ για $\ell_\eta \to \infty$ τα modes προσεγγίζουν την fundamental Schwarzschild QNM με ακρίβεια $\sim 0.1\%$

Για λόγους πληρότητας, υπολογίστηκαν επιπλέον τα instability timescales των null γεωδαισιακών (Lyapunov exponents) πάνω στην PS [74] και βρέθηκε ότι στο όριο της ΓΘΣ ισχύει η αντιστοιχία μεταξύ null γεωδαισιακών και eikonal (large ℓ) QNMs. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στο εν λόγω όριο η μελανή οπή προσεγγίζει τη Schwarzschild και τα βαρυτικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα φωτός. Αυτό το στοιχείο επιβεβαιώνει περαιτέρω την ορθότητα της αριθμητικής διαδικασίας που ακολουθήσαμε και συνεπάγεται την διαφοροποίηση στην ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων. Συγκεκριμένα, στη περίπτωση όπου $m = 0.1$, $\ell_\eta = 100$ ($m/\ell_\eta = 10^{-3}$), το instability timescale των null γεωδαισιακών και ο ρυθμός απόσβεσης (decay rate) της θεμελιώδους QNM για $\ell = 10$ (όριο των eikonal) axial διαταραχές, εμφανίζουν διαφορά μικρότερη από 0.5%. Από την άλλη, όταν το ℓ_η δεν είναι επαρκώς μεγάλο, η ταχύτητα διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων τροποποιείται, σύμφωνα με την (5.28), κάτι το οποίο οδηγεί σε εμφανή ασυμφωνία μεταξύ των null γεωδαισιακών και των eikonal fundamental QNMs. Για παράδειγμα, διαλέγοντας $m = 5$, $\ell_\eta = 1$ $(m/\ell_\eta = 5)$ το instability timescale και ο ρυθμός απόσβεσηςγια $\ell = 10$ διαταραχές παρουσιάζουν διαφορά $\sim 50\%$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι τα eikonal fundamental QNMs δεν σχετίζονται πάντα με τις null γεωδαισιακές στον συγκεκριμένο χωροχρόνο.



Σχήμα 5.2: Διαφορά μεταξύ της ακτίνας του AdS και του ορίζοντα συναρτήσει των m και ℓ_η, όπου $R_{\text{eff}} = \sqrt{3}\,\ell_\eta$. Για $m << \ell_\eta$ έχουμε $r_h << R_{\text{eff}}$, για $m \simeq \ell_\eta$ έχουμε $r_h \simeq R_{\text{eff}}$, ενώ για $m >> \ell_\eta$ έχουμε $r_h >> R_{\text{eff}}$. Το ελάχιστο των καμπυλών παρουσιάζει κοντά στο $m/\ell_\eta \simeq 3.1$ και υποδεικνύει τα σημεία του παραμετρικού χώρου (m, ℓ_η) για τα οποία $r_h >> R_{\text{eff}}$.

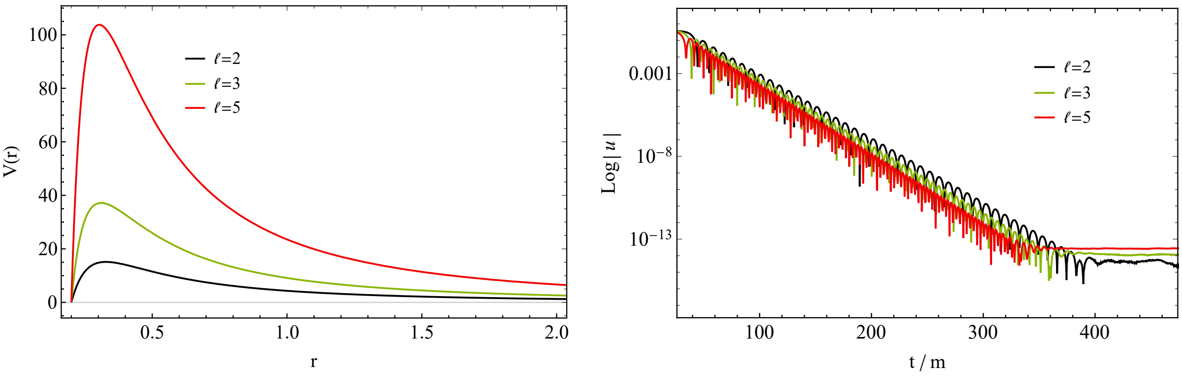


Σχήμα 5.3: Αριστερά: Απόκριση της μελανής οπής κάτω από βαρυτικές διαταραχές με $\ell = 2$, $m = 0.1$ για διάφορες τιμές του ℓ_η. Δεξιά: Θεμελιώδη $\ell = 2$ modes των οποίων η εξαγωγή έγινε από το prompt ringing της μελανής οπής με $m = 0.1$ και $\ell_\eta = 4$, 10, 50, 100 από αριστερά προς τα δεξιά.

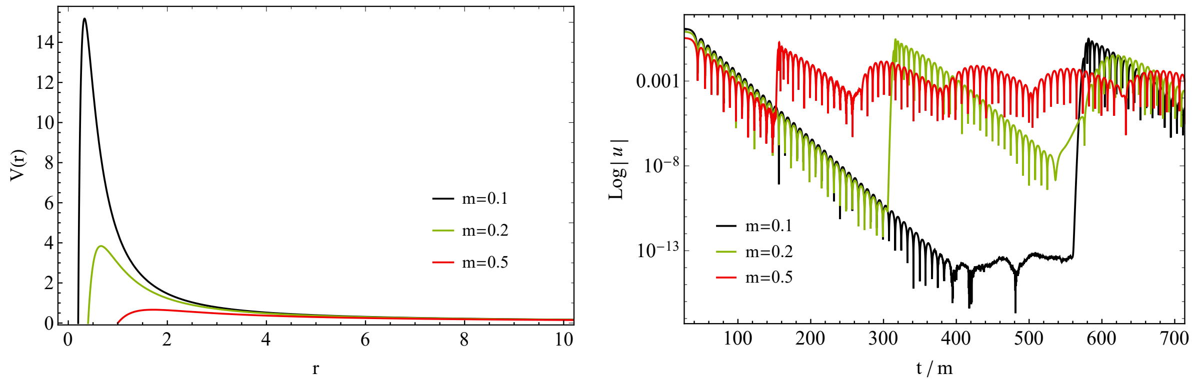
Στην εικόνα 5.4 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη των βαρυτικών διαταραχών για μάζες στην περιοχή $m << \ell_\eta$ $(m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^{-3}))$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το αρχικό ringdown είναι πολύ κοντά σε αυτό που λαμβάνουμε από μια μελανή οπή Schwarzschild, μία αναμενόμενη συμπεριφορά καθώς η τιμή του ℓ_η είναι πολύ υψηλή σε σχέση με την μάζα προσεγγίζοντας έτσι το όριο $\ell_\eta \to \infty$ στο οποίο επιστρέφουμε στις λύσεις της Γενικής Σχετικότητας. Καθώς αυξάνεται το ℓ οι διαταραχες φθήνουν πιο γρήγορα και αποκτούν μεγαλύτερη συχνότητα ταλάντωσης καθώς περισσότερη ενέργεια μεταβιβάζεται από τη σφαίρα φωτονίων. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά είναι αναμενόμενη αφού κάτι παρόμοιο συμβαίνει και για τη διάδοση βαρυτικών διαταραχών σε μελανές οπές Schwarzschild

[154]. Ωστόσο, η late time συμπεριφορά φανερώνει ότι, αντί για ένα power-law cutoff, τα πεδία τείνουν σε μία σταθερή τιμή η οποία σχετίζεται με την ασυμπτωτική τιμή του effective δυναμικού (βλ. σχήμα 5.1) καθώς και με την αναμονή των echoes που φτάνουν αργότερα. Η τελική late time ουρά θα πρέπει να γίνεται εμφανής για μεγάλες μελανές οπές στις οποίες τα echoes θα απορροφηθούν σχετικά γρήγορα από τον ορίζοντα.

Η 5.5 απεικονίζει την εξέλιξη των διαταραχών για $m < \ell_\eta$ $(m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^{-1}))$. Παρατηρούμε το σχηματισμό των echoes τα οποία ακολουθούν το αρχικό ringdown. Σε αυτή την παραμετρική περιοχή, η σχέση μάζας και σταθεράς σύζευξης γίνεται πιο ξεκάθαρη. Κρατώντας σταθερό το ℓ_η και αυξάνοντας τη μάζα, οι διαταραχές θα ταξιδέψουν μικρότερη απόσταση μεταξύ της σφαίρας φωτονιών και του συνόρου AdS κάτι το οποίο οδηγεί στον πιο σύντομο, χρονικά, σχηματισμό των echoes. Ακριβώς ίδια συμπεριφορά παρατηρείται εαν κανείς κρατήσει τη μάζα σταθερή και μειώσει το ℓ_η. Το ίδιο μοτίβο παρατηρήθηκε και στο [191] για την περίπτωση των βαθμωτών διαταραχών οι οποίες ταξιδεύουν με ταχύτητα φωτός, σε αντίθεση με τις βαρυτικές διαταραχές της παρούσας ανάλυσης. Αυτό συνεπάγεται ότι μία αντίστοιχη ανάλυση μέσω null γεωδαισιακών παρόμοια με αυτή των [192, 70, 203], στην οποία τα echoe timescales υπολογίζονται προσεγγιστικά μέσω του χρόνου που χρειάζεται το φως για να ταξιδέψει από την PS στο AdS σύνορο και πίσω, χάνει το νόημά της. Η περίπτωσή μας είναι πιο πολυσύνθετη αφού δεν μπορούμε πλέον να θεωρήσουμε null γεωδαισιακές αλλά αντιθέτως, πρέπει να θεωρήσουμε κύματα τα οποία ταξιδεύουν σε ένα μεταβαλλόμενο μέσο με μεταβλητή ταχύτητα διάδοσης η οποία εξαρτάται από το εκάστοτε χωρικό σημείο. Παρόλα αυτά, πραγματοποιήσαμε μία τυπική ανάλυση με null γεωδαισιακές και βρήκαμε ότι για μεγάλα ℓ_η, όπου η ταχύτητα διάδοσης είναι πολύ κοντά σε αυτή του φωτός, τα echoe timescales υπολογίζονται με ικανοποιητική ακρίβεια ενώ, όσο μειώνεται το coupling μειώνεται και η συμφωνία μεταξύ των echoe timescales που βρίσκουμε μέσω null γεωδαιτικών και του χρόνου εμφάνισης των echoes που προκύπτει από την αριθμητική ολοκλήρωση και την εξαγωγή των time domain profiles. Σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ανάλυσης ενισχύουν τη άποψη της τροποποιημένης ταχύτητας διάδοσης όσων αφορά τις βαρυτικές διαταραχές.



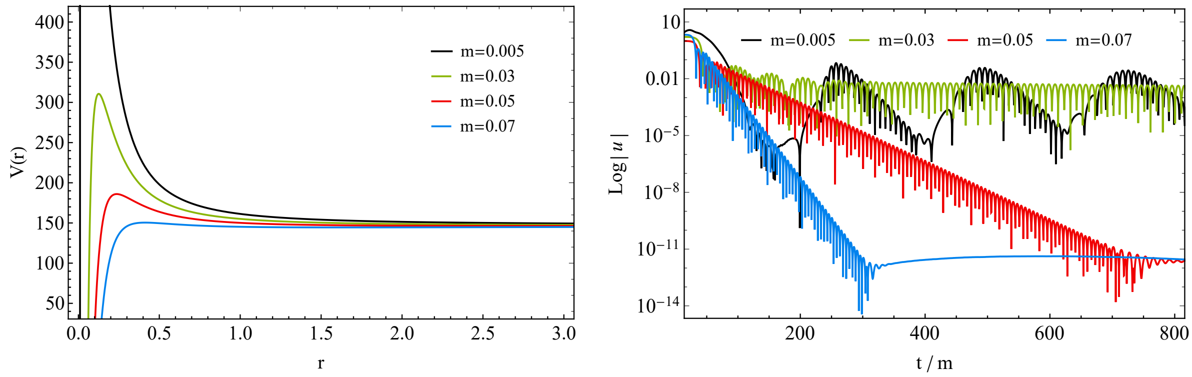
Σχήμα 5.4: Δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαρυτικών διαταραχών για διάφορα ℓ, με $\ell_\eta = 100$, $m = 0.1$. Οι παραπάνω τιμές αντιστοιχούν σε μικρές μελανές οπές υπό την έννοια ότι $r_h << R_{\text{eff}}$ $(m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^{-3}))$.



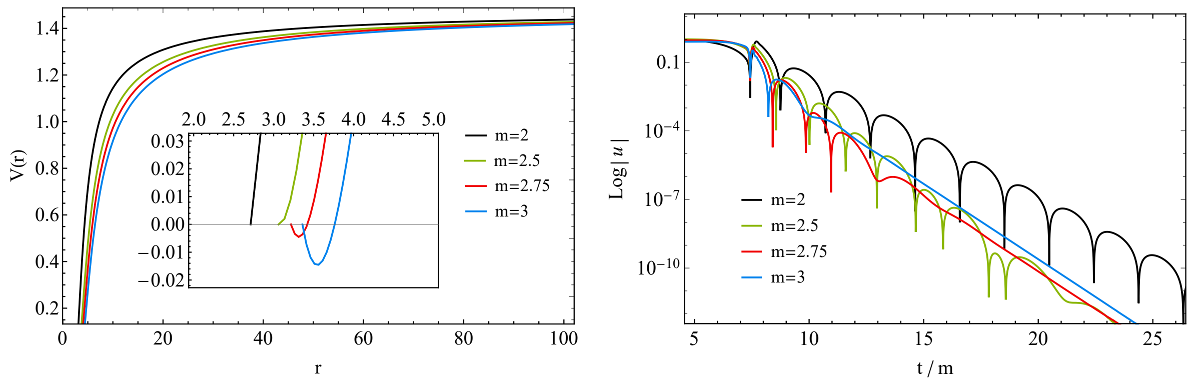
Σχήμα 5.5: Δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαρυτικών διαταραχών για $\ell = 2$ διαταραχές με $\ell_\eta = 5$ και διάφορες τιμές της μάζας m. Οι παραπάνω τιμές αντιστοιχούν σε μεσαίου μεγέθους μελανές οπές υπό την έννοια ότι $r_h \sim R_{\text{eff}}$ $(m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^{-1}))$.

Για να αποκτήσουμε μια πιο σφαιρική εικόνα για την επίδραση του λόγου m/ℓ_η στην απόκριση της μελανής οπής, όταν αυτή διαταράσσεται βαρυτικά, στο σχήμα 5.6 κατασκευάζουμε τη χρονική εξέλιξή της για ένα πιο μεγάλο εύρος τιμών της μάζας κρατώντας την παράμετρο ℓ_η σταθερή. Καθώς αυξάνεται το m τα echoes δίνουν τη θέση τους σε μία quasinormal ringing συμπεριφορά ενώ, οποιαδήποτε περαιτέρω αύξηση της μάζας οδηγεί σε ένα μοναδικό ringdown το οποίο ακολουθείται από μία σταθερή "ουρά" (late-time tail). Συμπεραίνουμε πως αυτή η συμπεριφορά πηγάζει από τη μορφή του δυναμικού το οποίου η κορυφή μειώνεται καθώς αυξάνεται το m. Έτσι, η ενεργειακή περιοχή στην οποία μπορούν να παγιδευτούν κάποια modes, τα οποία οδηγούν σε echoes, συνεχώς μειώνεται και, κατά συνέπεια η quasinormal συμπεριφορά από τη σφαίρα φωτονίων επικρατεί έναντι των echoes.

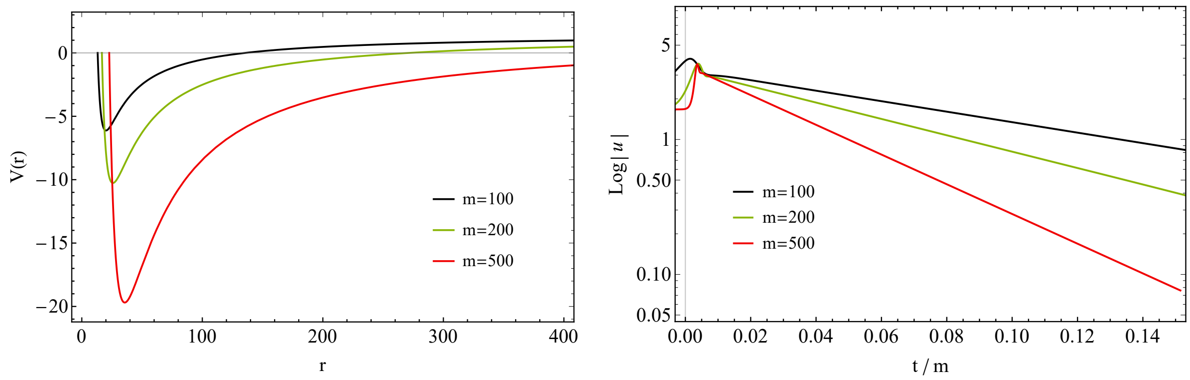
Όταν η μάζα γίνει ανάλογη του $(m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^0))$ ή αρκετά μεγαλύτερη του ℓ_η $(m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^2))$, το δυναμικό σχηματίζει αρνητικά πηγάδια στην περιοχή κοντά στον ορίζοντα (βλ. 5.7, 5.8 αντίστοιχα). Ένω κάτι τέτοιο θα μπορούσε να οδηγήσει σε αστάθεια του αντικειμένου, παρατηρούμε πως οι διαταραχές παρουσιάζουν μία εκθετική μείωση. Αντιθέτως, όσο αυξάνεται η μάζα η περίοδος του quasinormal ringing μείωνεται (αφού πλέον δεν υπάρχει σφαίρα φωτονίων στο δυναμικό) και τα πεδία σβήνουν ακόμη πιο γρήγορα παρόλο που τα πηγάδια στο δυναμικό αποκτούν μεγαλύτερο βάθος. Η εκθετική φύση της τελικής ουράς των διαταραχών σχετίζεται με τα effective AdS asymptotics της λύσης τα οποία επιβάλλουν ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες στο χωροειδές άπειρο και είναι σε συμφωνία με τη γενικότερη συμπεριφορά που παρουσιάζουν οι διαταραχές σε AdS μαύρες τρύπες [116]. Η ουρά εμφανίζεται σε αυτές τις περιπτώσεις γιατί τα echoes χάνονται ταχύτατα πίσω από τον ορίζοντα και η ασυμπτωτική σύμπεριφορα εμφανίζεται σε πιο σύντομους χρόνους. Περιμένουμε ακόμη και οι διαταραχές σε μικρές μελανές οπές εν τέλει να παρουσιάζουν εκθετικές ουρές απλά σε πολύ μεγαλύτερους χρόνους.



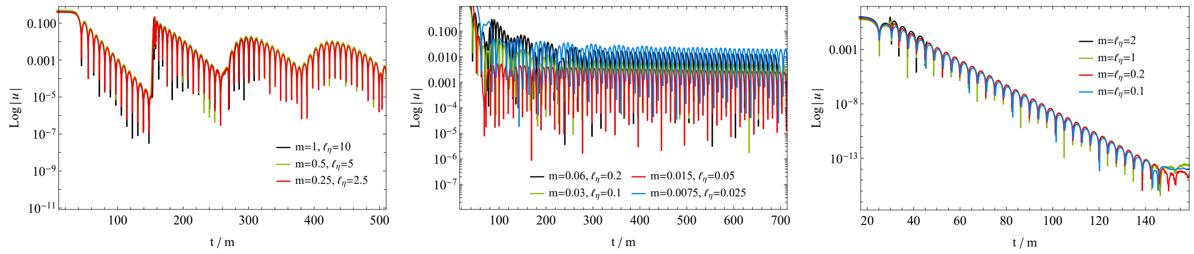
Σχήμα 5.6: Δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) για $\ell = 2$ διαταραχές της μελανής οπής με $\ell_\eta = 0.1$ και διάφορες μάζες m.



Σχήμα 5.7: Δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) για $\ell = 2$ διαταραχές της μελανής οπής με $\ell_\eta = 1$ και διάφορες μάζες m. Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν σε μεσαίου μεγέθους αντικείμενα με $r_h \sim R_{\text{eff}}$ ($m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^0)$).



Σχήμα 5.8: Δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) για $\ell = 2$ διαταραχές της μελανής οπής με $\ell_\eta = 5$ και διάφορες μάζες m. Η επιλογή τιμών μάζας και σταθεράς σύζευξης αντιστοιχεί σε μεγάλου μεγέθους αντικείμενα με $r_h >> R_{\text{eff}}$ ($m/\ell_\eta \sim \mathcal{O}(10^2)$).



Σχήμα 5.9: Χρονική εξέλιξη $\ell = 2$ διαταραχών της μελανής οπής με σταθερό λόγο $m/\ell_\eta \simeq 0.1$ (αριστερά), $m/\ell_\eta \simeq 0.3$ (κέντρο) και $m/\ell_\eta = 1$ (δεξιά).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως η υπο εξέταση μελανή οπή είναι ευσταθής κάτω από βαρυτικές διαταραχές ενώ, τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της απόκρισής της εξαρτώνται κυριώς από την τιμή του λόγου m/ℓ_η. Στο σχήμα 5.9 παρουσιάζεται αυτή η συμπεριφορά για αντικείμενα μεσαίου μεγέθους. Η ανάλυσή μας υποδεικνύει ότι το μοτίβο αυτό συνεχίζέται ανεξαρτήτως του μεγέθους του αντικειμένου. Αν και η πηγή των echoes στην περίπτωσή μας σχετίζεται με την ασυμπτωτική συμπεριφορά του χωροχρόνου, και όχι λόγω κάποιας τροποποίησης γύρο από τον ορίζοντα, τα αποτελέσματά μας είναι σε συμφωνία με διαταραχές από σκουλικότρυπες στις οποίες μειώνεται ο λαιμός [206] και με μοντέλα black-bounce που περιγράφουν την μεταβάση μίας regular μαύρης τρύπας σε σκουλικότρυπα [127].

5.6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, μελετήθηκε η ευστάθεια ενός στατικού, σφαιρικά συμμετρικού συμπαγούς αντικειμένου της Horndeski θεωρίας στο οποίο το βαθμωτό πεδίο της θεωρίας αλληλεπιδρά με τον τανυστή Einstein. Το συγκεκριμένο μοντέλο παράγει μία ακριβή λύση μελανής οπής ''ντυμένης'' με το βαθμωτό πεδίο το οποίο και παράγει μία effective AdS συμπεριφορά στο άπειρο. Η ευστάθεια εξετάστηκε σε γραμμικό επίπεδο χρησιμοποιώντας axial βαρυτικές διαταραχές, με τεχνικές χρονικής εξέλιξης και συμπληρωματικές εξαγωγές των QNM συχνοτήτων. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η εν λόγω μελανή οπή είναι ευσταθής με αποκρίσεις η οποίες σβήνουν με το χρονό. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της απόκρισής της εξαρτώνται από την τιμή του λόγου m/ℓ_η. Καθώς ο λόγος αυξάνεται, το βαρυτικό ringdown μεταβαίνει μεταξύ τριών διαφορετικών μοτίβων. Συγκεκριμένα παρουσιάζει ένα τυπικό quasinormal ringdown ($m/\ell_\eta \lesssim 10^{-2}$), ένα long-lived state όπου κυριαρχούν echoes ($10^{-2} \lesssim m/\ell_\eta \lesssim 10^{-1}$) και τέλος, ένα state στο οποίο τα echoes σβήνουν ταχύτατα και έχουμε την εμφάνιση εκθετικών αποσβενύμενων ουρών ($m/\ell_\eta \gtrsim 10^{-1}$).

Παρόλα τα ευρήματα της συγκεκριμένης μελέτης τα οποία υποδεικνύουν ευστάθεια, σημειώνουμε ότι θεωρήσαμε μόνο το axial κομμάτι των διαταραχών. Γενικά, θα πρέπει να εξεταστεί και το polar κομμάτι των βαρυτικών διακυμάνσεων για να μπορεί να εξαχθεί ένα τελικό συμπέρασμα για την ευστάθεια του αντικειμένου. Το συγκεκριμένο εγχείρημα μπορεί να αποβεί εξαιρετικό δύσκολο από τεχνικής άποψης, όσον αφορά την αναγωγή των διαταρακτικών εξισώσεων σε μία μονοδιάστατη Zerilli-like αφού οι polar βαθμοί ελευθερίας εν γένει αλληλεπιδρούν με το βαθμωτό πεδίο στις scalar-tensor θεωρίες. Ένα πρώτο βήμα σε αυτή την κατεύθυνση είναι να θεωρήσέι κανείς radial διαταραχές οι οποίες συνήθως προσομοιάζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις polar [249, 250, 251, 252] και μπορούν να δώσουν μία πιο πλήρη εικόνα για την γενική ευστάθεια του αντικειμένου.

Πέρα από την αξιοποίηση των τεχνικών χρονικής εξέλιξης, μία ακόμη ενδιαφέρουσα ανάλυση θα ήταν μία πλήρης εξέταση στο frequency domain των axial και των polar QNMs με παρόμοιο τρόπο όπως στις αναφορές [103, 104]. Επιπλέον, η διαφοροποίηση της ταχύτητας διάδοσης των βαρυτικών κυμάτων στη συγκεκριμένη γεωμετρία καθιστά ύψιστής σημασίας την ανάλυση πιθανών παρατηρησιακών αποτυπωμάτων αυτής της συμπεριφοράς έτσι ώστε να μπορεί κανείς να ξεχωρίσει εαν το παρατηρούμενο σήμα παράγεται από κάποια modified gravity ή από strongly-lensed βαρυτικά κύματα της Γενικής Σχετικότητας [253, 254].

Σε μία πρόσφατη δημοσίευση [212], μία κλάση μηχανικών μοντέλων αναλύθηκε όπου ένας κανονικός(canonical) βαθμός ελευθερίας αλληλεπιδρά με έναν άλλο ο οποίος έχει αρνητική κινητική ενέργεια (ghost). Εκεί οι συγγραφείς απέδειξαν πως το σύστημα είναι απολύτως σταθερό για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, παρόλο που κανείς θα περίμενε να παρουσιάζει αστάθεια λόγω της ύπαρξης του ghost. Στην περίπτωσή μας, αντιμετωπίσαμε ένα νοητικά παρόμοιο σύστημα, αποτελούμενο από μία μελανή οπή για την οποία η κινητική ενέργεια του βαθμωτού ίχνους (scalar hair) μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική (ο ένας βαθμός ελευθερίας) αρκεί η αλληλεπίδραση του με τον τανυστή Einstein να έχει το αντίθετο πρόσημο (ο δεύτερος βαθμός ελευθερίας) δηλαδή, να είναι ελκτική ή απωστική αντίστοιχα. Και για τις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε πως η μελανή οπή είναι σταθερή κάτω από βαρυτικές διαταραχές, κάτι το οποίο αποτελεί παράδειγμα πως οι κλασσική ανάλυση στο [212] παρουσιάζει αναλογίες - και ίσως να μπορούσε να εφαρμοστεί - στη φυσική των μελανών οπών. Επομένως, η σχέση της κινητικής ενέργειας του βαθμωτού ίχνους με την αλληλεπίδρασή του ίχνους αυτού με τον τανυστή Einstein αξίζει περαιτέρω εξέταση, κάτι το οποίο αφήνουμε για μελλοντική μελέτη.

Κεφάλαιο 6

Μετάβαση μελανής οπής σε σκουλικότρυπα μέσω **disformal** μετασχηματισμών στην **Horndenski** θεωρία

6.1 Εισαγωγή

Οι disformal μετασχηματισμοί χρησιμοποιήθηκαν από τον Bekenstein [224] σε μία προσπάθεια να περιγράψει την βαρύτητα με τη χρήση δύο γεωμετριών. Η ανάγκη για δύο γεωμετρίες ήρθε από την απαίτηση πως η πρώτη θα περιγράφει την βαρύτητα ενώ, η δεύτερη θα καθορίζει τη γεωμετρία στην οποία διαδίδεται η ύλη. Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ βολική εάν κανείς θέλει να περιγράψει εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας, όπως είναι οι θεωρίες βαθμωτού-τανυστή (scalar-tensor). Για να υπάρχει συνέπεια με τις πειραματικές μετρήσεις στο πλαίσιο της ΓΘΣ, χρησιμοποιείται μία Riemannian μετρική $g_{\mu\nu}$ για την περιγραφή της γεωμετρίας και, για την περιγραφή της βαρυτικής δυναμικής πρέπει να εισαχθεί μία εξίσωση που συσχετίζει την $g_{\mu\nu}$ με την ''φυσική'' γεωμετρία $\hat{g}_{\mu\nu}$ πάνω στην οποία κινείται η ύλη

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv \Big(g_{\mu\nu}A(\phi) + L^2 B(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\Big)dx^\mu dx^\nu \ , \tag{6.1}$$

όπου L μία κλίμακα μήκους(length scale). Η μετρική $g_{\mu\nu}$ και η ''φυσική'' μετρική της ύλης $\hat{g}_{\mu\nu}$ συνδέονται μέσω ενός conformal και ενός disformal μετασχηματισμού.

Στο [224] ο Bekenstein επιχείρησε να προσδώσει ένα φυσικό νόημα στη συσχέτιση των δύο μετρικών (6.1). Οταν $B = 0$ συνδέονται μέσω ενός conformal μετασχηματισμού, ο οποίος δεν αλλάζει τις γωνίες τοπικά και ''τεντώνει'' ή ''συρρικνώνει'' ισόποσα τον χωροχρόνο προς όλες τις κατευθύνσεις. Όταν $B \neq 0$ οι μετρικές σχετίζονται μέσω ενός disformal μετασχηματισμού ο οποίος αφενός αλλάζει τις γωνίες τοπικά και αφετέρου προκαλεί μία διαφορετική παραμόρφωση στην κατεύθυνση που είναι παράλληλη στο $\partial_\mu\phi$ σε σχέση με τις παραμορφώσεις στις υπόλοιπες κάθετες διευθύνσεις . Η μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$ πρέπει να χρησιμοποιηθεί εξ αρχής για να δει κανείς το φυσικό πλαίσιο που εισάγεται από τον disformal μετασχηματισμό.

Αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί έχουν χρησιμοποιηθεί σε μελέτες πολλών θεωριών βαθμωτού-τανυστή όπως η θεωρία Horndeski [161]. Στο [225] οι συγγραφείς έδειξαν ότι οι disformal μετασχηματισμοί όταν εφαρμοστούν σε ένα υποσύνολο της Horndeski Λαγκρανζιανής, παίζουν παρόμοιο ρόλο με την εφαρμογή των conformal μετασχηματισμών στις θεωρίες βαθμωτού-τανυστή. Επίσης, έχουν χρησιμοποιηθεί σε θεωρίες Horndeski υψηλότερης τάξης για να μελετηθεί η ευστάθειά τους και η πιθανή ύπαρξη ghost ασταθειών [226, 227]. Οι κοσμολογικές διαταραχές σε αυτά τα μοντέλα μελετήθηκαν στο [228] όπου τα αποτελέσματα έδειξαν πως τόσο οι βαθμωτές όσο και οι τανυστικές διαταραχές σε ένα ισοτροπικό και επίπεδο χωροχρόνο είναι αναλλοίωτες κάτω από disformal μετασχηματισμούς. Η αναλλοιώτητα παρατηρήσιμων μεγεθών κάτω από conformal μετασχηματισμούς συζητήθηκε στο [229].

Η σύζευξη του disformal όρου με την ύλη μελετήθηκε στο [230] όπου και βρέθηκαν λύσεις συμπαγών αντικειμένων. Παρουσιάστηκε ένα μοντέλο θεωρίας βαθμωτού-τανύστη, με άμαζο βαθμωτό πεδίο, και μελετήθηκε το φαινόμενο του spontaneous scalarization ενός αργά περιστρεφόμενου συμπαγούς αντικειμένου λόγω της σύζευξης του disformal όρου με την ύλη. Στο [233] μελετήθηκε η πιθανότητα να χρησιμοποιηθούν disformal μετασχηματισμοί στα βαθμωτά πεδία των DHOST θεωριών δευτέρας τάξης [231, 232], προκειμένου να βρεθούν νέες αναλυτικές σφαιρικά συμμετρικές hairy λύσεις σε αυτά τα μοντέλα. Η δουλειά αυτή επεκτάθηκε περαιτέρω στο [234] εφαρμόζοντας disformal μετασχηματισμούς σε γνωστές στατικές και stealth λύσεις της ΓΘΣ όπου και μελετήθηκαν οι απεικονίσεις αυτών των λύσεων οι οποίες μπορούν να περιγράψουν μελανές οπές, σκουλικότρυπες αλλά και ακάλυπτες ιδιομορφίες. Στο [235] μελετήθηκε η disformal απεικόνιση μίας stealth Kerr μελανής οπής, στις DHOST θεωρίες.

Η συσχέτιση (6.1) μεταξύ δύο μετρικών χρησιμοποιήθηκε στο [236] όπου βρέθηκαν νέες hairy λύσεις μελανών οπών, σε ένα bi-metric scalar-tensor μοντέλο, οι οποίες παραβίαζαν το no-hair θεώρημα. Σε αυτή τη μελέτη οι συγγραφείς έθεσαν την παράμετρο $A = L^2 = 1$ και την B ίση με μία σταθερή τιμή ανεξάρτητη του βαθμωτού πεδίου ϕ. Χρησιμοποιήθηκε ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο με την φυσική μετρική $g_{\mu\nu}$ και επιπλέον, ένα ηλεκτρομαγνητικό πέδιο που αλληλεπιδρά με την μετρική της ύλης $\hat{g}_{\mu\nu}$. Λύνοντας τις εξισώσεις κίνησης αποδείχθηκε ότι η θεωρία περιγράφει μία hairy μαύρη τρύπα με ένα βαθμωτό πεδίο έξω από τον ορίζοντα. Η παράμετρος B όντας σταθερά, λειτουργεί σαν μία effective κοσμολογική σταθερά δίνοντας τη δυνατότητα στον χωροχρόνο να είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, dS ή AdS. Επίσης, έγινε θερμοδυναμική ανάλυση της εν λόγω μελανής οπής.

Χρησιμοποιώντας ως κίνητρο την παρατήρηση του Bekenstein [224] όσον αφορά τις παραμορφώσεις που προκαλούν οι disformal μετασχηματισμοί σε έναν χωροχρόνο, θα εξετάσουμε την πιθανότητα να αξιοποίησής τους για να εφαρμόσουμε ένα disformation σε μία μελανή οπή και να την μετατρέψουμε σε σκουλικότρυπα. Για αρχικό συμπαγές αντικείμενο θα χρησιμοποιήσουμε την hairy μελανή οπή του Rinaldi [180], η οποία είναι λύση μία υπο-κλάσης της Horndeski και στην οποία, το βαθμωτό πεδίο (hair) εμφανίζεται μέσα στις συναρτήσεις της μετρικής (primary hair).

Ακολουθώντας το [234] εφαρμόζουμε τον disformal μετασχηματισμό

$$g_{\mu\nu} \to \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\Phi, X) g_{\mu\nu} + W(\Phi, X)\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \; , \tag{6.2}$$

όπου Φ το βαθμωτό πεδίο της υπο-κλάσης της Horndeski και $X = \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι υπάρχει μία κρίσιμη παράμετρος η οποία ελέγχει την μετάβαση της μελανής οπής σε σκουλικότρυπα. Τέλος, θα εξετάσουμε την πιθανή παραβίαση της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης (null energy condition)(NEC) και θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός εξωτερικού βαθμωτού πεδίου, μέσω της χρονικής του εξέλιξης, το οποίο διαδίδεται σε αυτόν τον υπο μετάβαση χωροχρόνο.

6.2 Μελανή οπή με βαθμωτό πεδίο συζευγμένο κινητικά με τον τανυστή Einstein

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε τα βασικά στοιχεία της hairy μελανής οπής Rinaldi [180], η οποία είναι λύση μίας υποκατηγορίας της Horndeski στην οποία ο κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου αλληλεπιδρά με τον τανυστή Einstein. Για λόγους πληρότητας υπενθυμίζουμε πως η πλήρης Λαγκρανζιανή Horndeski δίνεται από

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{i=2}^{i=5} \mathcal{L}_i \ , \qquad (6.3)\\
\mathcal{L}_2 &= K(\Phi, X) \ ,\\
\mathcal{L}_3 &= -G_3(\Phi, X)\Box\Phi \ ,\\
\mathcal{L}_4 &= G_4(\Phi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\Phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2\right] \ .\\
\mathcal{L}_5 &= G_5(\Phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi - \frac{1}{6}G_{5,X}\left[(\Box\Phi)^3 - 3\Box\Phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^3\right] \ ,
\end{aligned}
$$

όπου $X = \nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi$. Η υποκατηγορία με την οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια περιλαμβάνει μή-τετριμμένους όρους $\mathcal{L}_2 = K(\Phi, X) = -\varepsilon X$ και $G_4(\Phi, X) = (8\pi)^{-1} + \frac{\eta}{2}X$. Συνεπώς η δράση αυτής της υπο-κλάσης δίνεται από

$$
S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{8\pi} - (\varepsilon g_{\mu\nu} + \eta G_{\mu\nu})\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi\right], \qquad (6.4)
$$

όπου $g_{\mu\nu}$ η μετρική, $g = det(g_{\mu\nu})$, R η βαθμωτή καμπυλότητα, $G_{\mu\nu}$ ο τανυστής Einstein, Φ ένα πραγματικό άμαζο βαθμωτό πεδίο και η μία σταθερά σύζευξης με διαστάσεις τετραγωνικού μήκους. Η παράμετρος ε ισούται με ± 1. Όταν $\varepsilon = +1$, έχουμε ένα canonical βαθμωτό πεδίο που διαδίδεται με θετική ενέργεια, ενώ η περίπτωση $\varepsilon = -1$ ανταποκρίνεται σε ένα phantom βαθμωτό πεδίο το οποίο διαδίδεται με αρνητική κινητική ενέργεια.

Μεταβολές στη δράση (6.4) ως προς τη μετρική $g_{\mu\nu}$ και το βαθμωτό Φ δίνουν τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= 8\pi\left[\varepsilon T_{\mu\nu} + \eta\Theta_{\mu\nu}\right] \ , \qquad (6.5α')\\
[\varepsilon g^{\mu\nu} &+ \eta G^{\mu\nu}]\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = 0 \ , \qquad (6.5β')
\end{aligned}
$$

όπου

$$
T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2 \ , \qquad (6.6)
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\mu\nu} = &-\frac{1}{2}\nabla_\mu\Phi\,\nabla_\nu\Phi\,R + 2\nabla_\alpha\Phi\,\nabla_{(\mu}\phi R^\alpha_{\nu)}\\
&+ \nabla^\alpha\Phi\,\nabla^\beta\Phi\,R_{\mu\alpha\nu\beta} + \nabla_\mu\nabla^\alpha\Phi\,\nabla_\nu\nabla_\alpha\Phi\\
&- \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi\,\Box\Phi - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 G_{\mu\nu} \qquad (6.7)\\
&+ g_{\mu\nu}\big[-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi\,\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi + \frac{1}{2}(\Box\Phi)^2 - \nabla_\alpha\Phi\,\nabla_\beta\Phi\,R^{\alpha\beta}\big] \ .
\end{aligned}
$$

Μία στατική σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή σε αυτό το μοντέλο βρέθηκε στο [180], υπό την υπόθεση ότι το βαθμωτό πεδίο έχει εξάρτηση μόνο από την ακτινική συντεταγμένη. Μέσα από τη διαδικασία επίλυσης προκύπτει ο περιορισμός $\varepsilon\eta < 0$, οποίος οδηγεί στο ορισμό της παραμέτρου

$$
\ell_\eta = |\varepsilon\eta|^{1/2} \ . \qquad (6.8)
$$

Ως προς μία μετρική της μορφής

$$ds^2 = -g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + g_{\theta\theta}(r)d\Omega^2 \ , \tag{6.9}$$

η λύση αντιστοιχεί σε $g_{\theta\theta}(r) = r^2$ με $r \in (0, +\infty)$ και με τις ακόλουθες μετρικές συναρτήσεις

$$g_{tt}(r) = -\left[\frac{3}{4} + \frac{r^2}{12\ell_\eta^2} - \frac{2m}{r} + \frac{\ell_\eta}{4r}\arctan\left(\frac{r}{\ell_\eta}\right)\right] = -\frac{1}{4}F(r) \ , \tag{6.10α'}$$

$$g_{rr}(r) = \frac{(r^2+2\ell_\eta^2)^2}{(r^2+\ell_\eta^2)^2F(r)} \ , \tag{6.10β'}$$

όπου $F(r) = \left[3 + \frac{r^2}{3\ell_\eta^2} - \frac{8m}{r} + \frac{\ell_\eta}{r}\arctan\left(\frac{r}{\ell_\eta}\right)\right]$, ενώ το βαθμωτό hair της λύσης δίνεται από

$$X = -\frac{\varepsilon}{8\pi\ell_\eta^2}\frac{r^2}{r^2+\ell_\eta^2} \ . \tag{6.11}$$

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της λύσης είναι ότι δεν απαιτεί κάποια συγκεκριμένη τιμή για την παράμετρο ε, όπως φαίνεται και από την (6.11). Ο μοναδικός περιορισμός της λύσης είναι ότι $\varepsilon\eta < 0$, απορροφάται από στον ορισμού της κινητικής παραμέτρου σύζευξης (kinetic coupling) (6.8). Στο [180] ο συγγραφέας θεώρησε ένα canonical βαθμωτό πεδίο και οι εξισώσεις κίνησης όντως ικανοποιούνταν για $\varepsilon = -1$, εφόσον $\varepsilon\eta < 0$. Ωστόσο, το γεγονός ότι το Φ εξαρτάται μόνο από την ακτινική συντεταγμένη, σημαίνει ότι το διάνυσμα $\partial^\mu\Phi$ είναι χωροειδές (spacelike), το οποίο δίνει $\varepsilon = -1$ δηλαδή, η εν λόγω μελανή οπή μπορεί να δημιουργείται και από ένα phantom βαθμωτό πεδίο. Για να κρατήσουμε την ανάλυσή μας όσο πιο γενική γίνεται αποφασίσαμε να μην δηλώσουμε κάποια σταθερή τιμή για το ε. Η σταθερά σύζευξης λειτουργεί ως πηγή για την δημιουργία μίας ασυμπτωτικά AdS συμπεριφοράς στο χωροχρόνο επομένως, η μελανή οπή αναπαράγει την λύση Schwarzschild στο όριο $l_\eta \to +\infty$. Συνεπώς , αυτή η γεωμετρία μπορεί να κατανοηθεί ως μία hairy γενίκευση της λύσης Schwarzschild με effective AdS συμπεριφορά, όταν η δυναμική του spin-0 βαθμού ελευθερίας εμπλουτίζεται επιπλέον από την κινητική αλληλεπίδρασή του με το γκραβιτόνιο δηλαδή, από τον όρο $G^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$.

Σε πρώτης τάξης προσέγγιση αποδείχθηκε στο [191] ότι λόγω της ασυμπτωτικής AdS συμπεριφοράς - η οποία λειτουργεί ως καθρέφτης για τα κύματα που παράγονται από τις διαταραχές ενός εξωτερικού βαθμωτού πεδίου - σχηματίζεται ένα effective δυναμικό έξω από τον ορίζοντα το οποίο περιέχει περιοχές πιθανής παγίδευσης των εισερχόμενων κυμάτων. Έτσι, στην εν λόγω έρευνα βρέθηκε ότι το ringdown της μελανής οπής παρουσιάζει αποσβενύμενα echoes, υποδεικνύοντας την ευστάθεια του αντικείμενου κάτω από αυτού του είδους τις διαταραχές. Επιπλέον, ο υπολογισμός των axial βαρυτικών διαταραχών στο [237] απέδειξε την περαιτέρω ευστάθεια αυτού του hairy συμπαγούς αντικειμένου.

6.3 Παραγωγή σκουλικότρυπας μέσω disformal μετασχηματισμών

Με αφορμή την δουλειά που πραγματοποιήθηκε στο [234], θα προτείνουμε μία μέθοδο για την παραγωγή μίας γεωμετρίας που παρεμβάλλεται μεταξύ τεσσάρων διαφορετικών αντικειμένων. Μίας μελανής οπής, μίας regular μελανής οπής, μίας one-way σκουλικότρυπας - δηλαδή μίας σκουλικότρυπας η οποία περιέχει έναν ορίζοντα γεγονότων πάνω στο λαιμό - και μίας two-way σκουλικότρυπας η οποία, θεωρητικά τουλάχιστον, είναι traversable. Εφαρμόζοντας τον disformal μετασχηματισμό (6.2) στη μετρική (6.9) παίρνουμε

$$d\hat{s}^2 = -\Omega^2(\Phi, X)\frac{1}{4}F(r)dt^2 + \frac{\Omega^2(\Phi, X) + W(\Phi, X)X}{\frac{(r^2+l_\eta^2)^2}{(r^2+2l_\eta^2)^2}F(r)}dr^2 + \Omega^2(\Phi, X)r^2 d\Omega^2 \ . \tag{6.12}$$

Σημειώνουομε ότι οι απαιτούμενες συνθήκες που καθιστούν τον μετασχηματισμό μία αντιστρέψιμή απεικόνιση είναι [234]

$$\Omega \neq 0 \ , \tag{6.13}$$

$$\Omega^2 - X(\Omega^2)_X - X^2 W_X \neq 0 \ . \tag{6.14}$$

Η ύπαρξη κάποιου ορίζοντα γεγονότων μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας την νόρμα του Kodama vector $\nabla_\mu R \nabla^\mu R$, όπου R η $g_{\theta\theta}$ συνιστώσα της μετρικής. Με βάση το [234] ένας ορίζοντας γεγονότων αντιστοιχεί σε μονές θετικές ρίζες του Kodama vector, οι διπλές ρίζες υποδεικνύουν την υπάρξη κάποιου λαιμού σκουλικότρυπας. Η νόρμα του χρησιμοποιώντας τη μετρική (6.12) παίρνει τη μορφή

$$\nabla_\mu R \nabla^\mu R = 4\frac{\frac{(r^2+l_\eta^2)^2}{(r^2+2l_\eta^2)^2}F(r)}{\Omega^2(\Phi, X) + W(\Phi, X)X}\left(\Omega_\Phi(\Phi)' r^2 + \Omega_X(X)' r^2 + \Omega^2 r\right)^2 \ , \tag{6.15}$$

όπου οι τόνοι συμβολίζουν παραγώγιση ως προς την ακτινική συντεταγμένη r. Εάν ο δεύτερος παράγοντας της παραπάνω σχέσης έχει ρίζες τότε αυτές θα αντιστοιχούν σε λαιμό σκουλικότρυπας, λόγω του εκθέτη. Ωστόσο επειδή θέλουμε η γεωμετρία μας να παρεμβάλλεται μεταξύ διαφορετικών αντικειμένων, θα πρέπει να ακολουθήσουμε μία διαφορετική οδό. Αντιθέτως, θέλουμε να εστιάσουμε στον παρονομαστή της (6.15) και να διαλέξουμε μία κατάλληλη μορφή για τη συνάρτηση W. Επίσης, προκειμένου να μπορεί η γεωμετρία μας να περιγράψει και μελανές οπές είναι χρήσιμο να θέσουμε τον conformal factor $\Omega = 1$. Από τη στιγμή που αυτή η επιλογή δεν αποκλείει την ύπαρξη κάποιας φωτοειδούς, η ύπαρξη ενός ορίζοντα θα πρέπει να εξαρτάται από κάποια νέα παράμετρο, την οποία και θα εισάγουμε. Υπενθυμίζουμε ότι για τη λύση (6.10α′), (6.10β′) το X έχει τη μορφή

$$X = \frac{-\varepsilon}{8\pi l_\eta^2}\frac{r^2}{r^2 + l_\eta^2} \ , \tag{6.16}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$r^2 = \frac{-8\pi l_\eta^4 X}{8\pi l_\eta^2 X + \varepsilon} \ . \tag{6.17}$$

Διατηρώντας τη συμμετρία μετατόπισης (shift symmetry) της θεωρίας υποθέτουμε ότι η συνάρτηση W έχει εξάρτηση $W = W(X)$. Στόχος μας είναι να τροποποιήσουμε την g_{rr} συνιστώσα της μετρικής έτσι ώστε να περιλαμβάνει τον όρο $\frac{r^2}{r^2-a^2}$, όπου a μία καινούργια παράμετρος με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. Σύμφωνα με τη σχέση (6.17), η κατάλληλη W μπορεί εύκολα να βρεθεί ίση με

$$W = -\frac{1}{X} + \frac{8\pi l_\eta^4 X}{8\pi l_\eta^4 X + a^2(8\pi l_\eta^2 X + \varepsilon)} \ , \tag{6.18}$$

η οποία μόλις αντικατασταθεί στη μετρική δίνει

$$d\tilde{s}^2 = -\frac{1}{4}F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{(r^2-a^2)}{r^2}\frac{(r^2+l_\eta^2)^2}{(r^2+2l_\eta^2)^2}F(r)} + r^2 d\Omega^2 \ . \tag{6.19}$$

Η μετρική (6.19) περιγράφει τον χωροχρόνο σκουλικότρυπας εφόσον η νέα παράμετρος a είναι μεγαλύτερη από τη ακτίνα του ορίζοντα της υποβόσκουσας μαύρης τρύπας. Για να γίνει πιο ξεκάθαρο αυτό το χαρακτηριστικό της λύσης, πραγματοποιούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων ωστέ να καλύψουμε την περιοχή $r > a$ δύο φορές. Αυτό γίνεται εύκολα επιλέγοντας τη συντεταγμένη $x^2 = r^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία συνεπάγεται $\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 = \frac{r^2 - a^2}{r^2}$ και έτσι οδηγεί στη μετρική

$$d\tilde{s}^2 = -\frac{1}{4}F(\sqrt{x^2+a^2})dt^2 + \frac{dx^2}{\frac{(x^2+a^2+l_\eta^2)^2}{(x^2+a^2+2l_\eta^2)^2}F(\sqrt{x^2+a^2})} + (x^2+a^2)d\Omega^2 \ . \tag{6.20}$$

Η μετρική αυτή όντως μπορούμε να δούμε οτί παρεμβάλλεται μεταξύ μελανής οπής, regular μελανής οπής, one-way σκουλικότρυπας και two-way σκουλικότρυπας καθώς η παράμετρος a αυξάνεται παίρνοντας τιμές στο διάστημα $[0, r_h]$,όπου r_h ο ορίζοντας γεγονότων της υποκείμενης μελανής οπής. Σημειώνουμε πως αυτό είναι εφικτό επειδή στη συνιστώσα g_{tt}, η $F(r)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση παρέχοντας τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τον disformal μετασχηματισμό για να επιβάλλουμε στις συναρτήσεις της μετρικής να παίρνουν μόνο θετικές τιμές. Όταν $a > r_h$, η $x = 0$ υπερεπιφάνεια περιγράφει το λαιμό της σκουλικότρυπας. Υπό ένα πιο αυστηρά μαθηματικό πρίσμα μπορούμε να κατανοήσουμε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής. Σύμφωνα με το [238], ο λαιμός μίας traversable σκουλικότρυπας Σ, είναι μια δισδιάστατη υπερεπιφάνεια ελάχιστου εμβαδού που βρίσκουμε όταν πάρουμε χωροειδείς φέτες σταθερού χρόνου (constant-time spatial slices). Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας A_Σ, χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$A_\Sigma = \int \sqrt{g^{(2)}}d^2x \ , \tag{6.21}$$

με normal Gaussian συντεταγμένες $g_{ij}dx^idx^j = dn^2 + g_{ab}dx^adx^b$. Για να αντιστοιχεί η Σ σε λαιμό, πρέπει να ικανοποιείται η minimal area condition δηλαδή

$$\delta A_\Sigma = \int \partial_n\sqrt{g^{(2)}}d^2x = -\int \sqrt{g^{(2)}}Tr(K)\delta n d^2x = 0 \ , \tag{6.22}$$

$$\delta^2 A_\Sigma = -\int \sqrt{g^{(2)}}(\partial_n Tr(K) - Tr(K)^2)\delta n\delta n d^2x \geq 0 \ , \tag{6.23}$$

όπου $K_{ab} = -\frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$ η εξωτερική καμπυλότητα της Σ. Χρησιμοποιώντας το στοιχείο μήκους (6.20), βρίσκουμε μετά από λίγη άλγεβρα ότι και η extremality condition,

$$Tr(K) = -\frac{1}{2}g^{ab}\partial_n g_{ab} = -\frac{1(1+\sin^2\theta)}{2(x^2+a^2)}\partial_x(x^2+a^2)\frac{1}{\sqrt{g_{xx}}} \overset{x=0}{=} 0 \ , \tag{6.24}$$

αλλά και η minimal area condition,

$$-\partial_n Tr(K) = -\partial_x Tr(x)\frac{1}{\sqrt{g_{xx}}} \overset{x=0}{=} \frac{4(a^2+\ell_\eta^2)^2(1+\sin^2\theta)}{(a^3+2a\ell_\eta^2)^2}g_{tt}(0) > 0 \ , \tag{6.25}$$

ικανοποιούνται αρκεί η παράμετρος a να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του ορίζοντα.

Επιπλέον υπογραμμίζουμε ότι, κατά αναλογία με τη μελανή οπή (6.10α′), (6.10β′), η οποία καταλήγει στη Schwarzschild γεωμετρία στο όριο όπου το kinetic coupling ℓ_η προσεγγίζει το άπειρο, η μετρική (6.20) καταλήγει στην bouncing μετρική του [246]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)} + (x^2+a^2)d\Omega^2 \ , \tag{6.26}$$

στο όριο $l_\eta \to \infty$, η οποία πρόσφατα έχει γίνει αντικείμενο έντονης ερευνητικής δραστηριότητας [239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 127]. Έχοντας καταλήξει στην τελική μορφή της λύσης μας, μία ερώτηση που εγείρεται φυσικά είναι να βρούμε ποιά δράση θα μπορούσε να παράξει τέτοιου είδους λύσεις. Σε μία τέτοια υποθετική δράση η seed μετρική $g_{\mu\nu}$ θα πρέπει να μπορεί να εκφραστεί ως προς την μετασχηματισμένη μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$. Όμως, η μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$ περιέχει όρους που γίνονται contracted με την seed μετρική $g_{\mu\nu}$, συγκεκριμένα ο όρος (6.18), και έτσι η τελική δράση θα περιείχε όρους αλληλεπίδρασης των δύο μετρικών. Ένας τρόπος να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα θα ήταν να εκφράσουμε αναλύτικά την $g_{\mu\nu}$ ως προς την $\hat{g}_{\mu\nu}$ δηλαδή να βρούμε τον αντίστροφο disformal μετασχηματισμό, κάτι το οποίο είναι δύσκολο από τεχνικής άποψης.

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας την γενικότερη λογική πίσω από την προσέγγιση που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα. Η bouncing λύση πρέπει να παράγεται από μία γενική δράση, στο Einstein σύστημα, της μορφής

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \frac{\hat{R}}{8\pi} + \hat{L}_m \ , \tag{6.27}$$

όπου $\hat{L}_m$ μία γενική Λαγκρανζιανή της ύλης. Συνεπώς, οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης θα είναι της μορφής (6.27)

$$\hat{G}_{\mu\nu} = 8\pi \hat{T}_{\mu\nu} \ , \tag{6.28}$$

που σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε το αριστερό μέρος της (6.28) ως προς την αρχική- seed- μετρική και να βρούμε τη μορφή του τανυστή ορμής-ενέργειας $\hat{T}_{\mu\nu}$, ο οποίος παράγει την bouncing λύση. Συγκεκριμένα βρίσκουμε ότι η σύνδεση περιέχει ένα όρο που δημιουργείται από την εφαρμογή του disformal μετασχηματισμού,

$$D^{\mu}{}_{\sigma\nu} = \frac{1}{2(1+WX)} \Big[\nabla^\mu \Phi (\nabla_\nu W \nabla_\sigma \Phi + \nabla_\sigma W \nabla_\nu \Phi + 2W \nabla_\nu \nabla_\sigma \Phi) + \tag{6.29}$$

$$\nabla_\sigma \Phi \nabla_\nu \Phi (W \nabla^\mu \Phi \nabla^\beta \Phi \nabla_\beta W - \nabla^\mu W (1+WX)) \Big] \ , \tag{6.30}$$

ενώ το αριστερός μέλος της (6.28) διαβάζει

$$\hat{G}_{\mu\nu}(\hat{g}) = G_{\mu\nu}(g) + S_{\mu\nu}(g, \partial_\mu \Phi) \ . \tag{6.31}$$

Υπογραμμίζουμε πως το δεξί μέλος της (6.31) περιέχει όρους της seed μετρικής και του Galileon βαθμωτού πεδίου της θεωρίας. Έτσι, εάν υπήρχε μία αναλυτική έκφραση για τον αντίστροφο disformal, θα μπορούσε κανείς να βρει τον νέο τανυστή ορμής-ενέργειας $\hat{T}_{\mu\nu}$

$$\hat{T}_{\mu\nu}(g(\hat{g}), \partial_\mu \Phi) = \frac{G_{\mu\nu}(g(\hat{g}))}{8\pi} + \frac{S_{\mu\nu}(g(\hat{g}), \partial_\mu \Phi)}{8\pi} \overset{(6.5a)}{=} \tag{6.32}$$

$$[\varepsilon T_{\mu\nu}(g(\hat{g}), \partial_\mu \Phi) + \eta \Theta_{\mu\nu}(g(\hat{g}), \partial_\mu \Phi)] + \frac{S_{\mu\nu}(g(\hat{g}), \partial_\mu \Phi)}{8\pi} \ . \tag{6.33}$$

Η παραπάνω σχέση φανερώνει ότι είναι δυνατόν να πάρουμε την bouncing λύση (6.20) ξεκινώντας από την μελανή οπή του Rinaldi και αναβαθμίζοντας τον αρχικό τανυστή ορμής-ενέργειας με την εισαγωγή του νέου όρου $S_{\mu\nu}$.

Ένα επιπλέον στοιχείο που αναδεικνύεται από την (6.32), είναι ότι η παραγόμενη λύση σκουλικότρυπας που λαμβάνουμε είναι απλά ένα deformation της αρχικής γεωμετρίας, η οποία περιγράφει μία μαύρη τρύπα.

Με βάση τη δουλειά του Bekenstein [224], η βαρύτητα περιγράφεται από την μετασχηματισμένη μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$, ενώ ο τανυστής ορμής-ενέργειας από την αρχική seed μετρική η οποία αλληλεπιδρά με τα πεδία ύλης της θεωρίας. Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε ποιοτικά τη δράση με τη μορφή

$$S = \int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{\hat{R}(\hat{g})}{8\pi} + \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\hat{g}}}\left(L_{NMDC}(g,\partial_\mu\Phi) + L_D(g,\partial_\mu\Phi) + L_C(g,\partial_\mu\Phi)\right)\right] , \qquad (6.34)$$

όπου L_{NMDC} η Λαγκρανζιανή της ύλης της αρχικής θεωρίας, L_D μία ακόμη Λαγκρανζιανή για τα πεδία ύλης, της οποίας οι μεταβολές δίνουν τον τελευταίο όρο της (6.32) και η L_C παράγει τον περιορισμό των πεδίων ύλης της αρχικής λύσης μέσω ενός κατάλληλου πολλαπλασιαστή Lagrange. Τέλος, χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει τις δύο μετρικές, μπορούμε να εκφράσουμε το μετασχηματισμένο (λόγω του disformal) στοιχείο όγκου

$$\sqrt{-\hat{g}}d^4x = \Omega^3(\Omega^2 + WX)^{1/2}\sqrt{-g}d^4x , \qquad (6.35)$$

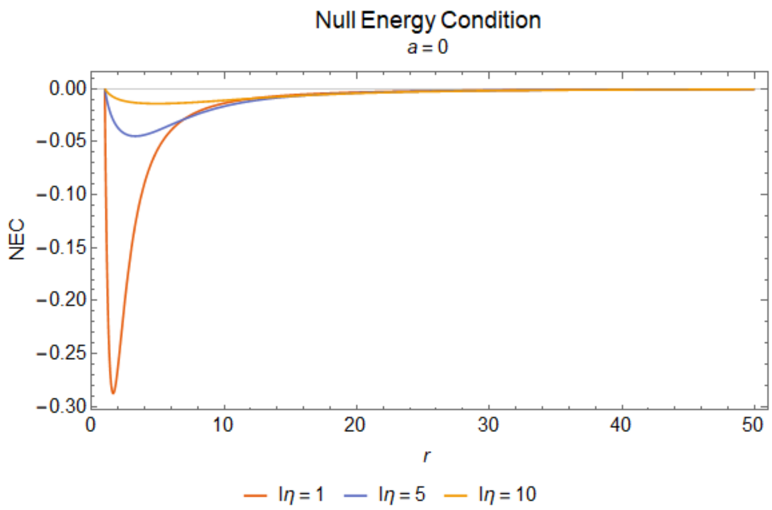
ως προς την seed μετρική μέσω του θεωρήματος Sylvester για τις ορίζουσες.

6.4 Έλεγχος ενεργειακών συνθηκών

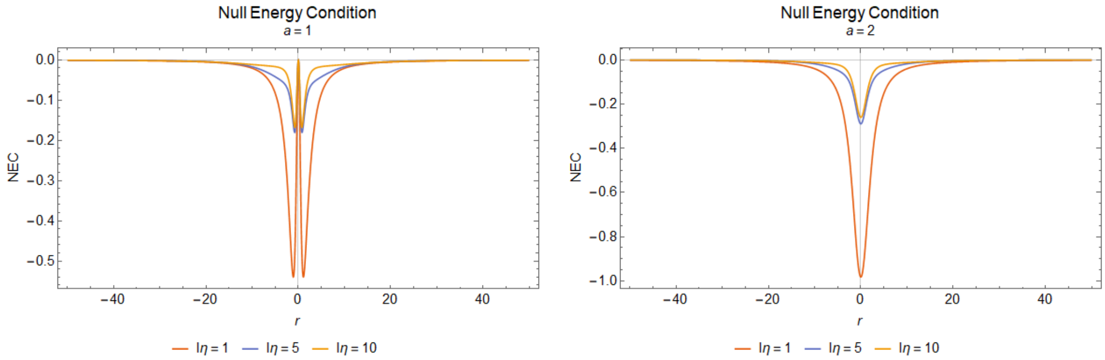
Χρησιμοποιώντας την έκφραση (6.28), μπορούμε να ελέγξουμε πιθάνες παραβιάσεις της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης καθώς η παράμετρος a αυξάνεται και η λύση μας μεταβαίνει από την αρχική μελανή οπή στην two-way σκουλικότρυπα. Για την απλοποίηση των υπολογισμών θέτουμε τον όριζοντα γεγονότων στην υπερεπιφάνεια $r = 1$. Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε τη μάζα της μελανής οπής m ως προς το kinetic coupling l_η μέσω της σχέσης

$$m = \frac{1}{24}\left(9 + \frac{1}{l_\eta^2} + 3l_\eta \arctan\left[\frac{1}{l_\eta}\right]\right) , \qquad (6.36)$$

και κατά συνέπεια να μειώσουμε τον παραμετρικό χώρο της γεωμετρίας μας. Σημειώνουμε πως η μάζα παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$ στο όριο $l_\eta \to \infty$, η οποία είναι η οριακή τιμή μάζας της μελανής οπής Schwarzschild. Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζουμε τις παραβιάσεις της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης για διάφορες τιμές της παραμέτρου a.



Σχήμα 6.1: Παραβίαση της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης για την περίπτωση της μελανής οπής ως προς το kinetic coupling.



Σχήμα 6.2: Αριστερά: Παραβίαση της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης για την one-way σκουλικότρυπα ως προς το kinetic coupling. Δεξιά: Παραβίαση της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης για την two-way σκουλικότρυπα ως προς το kinetic coupling.

Ξεκινάμε την ανάλυση της παραβίασης της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης για την περίπτωση της μελανής οπής δηλαδή για $a = 0$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1, η συνθήκη παραβιάζεται και το μέτρο της παραβίασης αυξάνεται κάθως μειώνεται η σταθερά σύζευξης l_η ενώ, μακριά από τον ορίζοντα της μελανής οπής παρατηρούμε την αποκατάσταση της εν λόγω συνθήκης. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι για μικρές τιμές της σταθεράς l_η η βαρυτική έλξη γίνεται ισχυρότερη και η κινητική ενέργεια του βαθμωτού πεδίου πρέπει να εξισορροπίσει αυτή την έλξη προκειμένου να έχουμε τον σχηματισμό μίας hairy μελανής οπής. Μακριά από τον ορίζοντα η συνθήκη αποκαθιστάται και όπως φάνηκε και στο [237] το συμπαγές αντικείμενο είναι ευσταθές κάτω από axial βαρυτικές διαταραχές. Επίσης σημειώνουμε πως, η απαίτηση να έχουμε τοπικά θετικές τιμές της ενεργειακής πυκνότητας (energy density) όπως αυτή μετράται από έναν στατικό παρατηρητή, ικανοποιείται.

Όταν το a παίρνει μή-μηδενικές τιμές, βλέπουμε από το σχήμα 6.2 ότι το μέτρο της παραβίασης αυξάνεται για μεγαλύτερες τιμές του throat radius, κάτι το οποίο αναμέναμε. Αυτό σημαίνει πως ο τανυστής $S_{\mu\nu}$ (βλέπε (B′.12)) είναι υπεύθυνος για αυτή την παραβίαση αλλά, η εξωτική ύλη είναι περιορισμένη κοντά στο λαιμό της σκουλικότρυπας. Στην επόμενη ενότητα θα ελέγξουμε την απόκριση της two-way σκουλικότρυπας κάτω από βαθμωτές διαταραχές και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά της αρχικής μελανής οπής. Θα περίμενε κανείς να βρεί αστάθειες της σκουλικότρυπας για μικρές τιμές του l_η αφού η ύλη σε αυτή την παραμετρική περιοχή γίνεται εξαιρετικά εξωτική.

6.5 Χρονική εξέλιξη βαθμωτών διαταραχών

Σε αυτή την ενότητα μελετάται η χρονική εξέλιξη βαθμωτών διαταραχών στη γεωμετρία (6.20). Χρησιμοποιούμε ένα εξωτερικό δοκιμαστικό βαθμωτό πεδίο και θεωρούμε την διάδοσή του στην περιοχή των συμπαγών αντικειμένων που περιγράφονται από την εν λόγω μετρική. Συγκεκριμένα ο στόχος μας είναι να εξάγουμε την εξίσωση Regge-Wheeler με το αντίστοιχο ενεργό δυναμικό και στην συνέχεια να την λύσουμε αριθμητικά χρησιμοποιώντας την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών ακολουθώντας την λογική του [114]. Για να κρατήσουμε την ανάλυση όσο πιο γενική γίνεται ξεκινάμε θεωρώντας μία μετρική της μορφής

$$ds^2 = -f(x)dt^2 + g(x)dx^2 + \rho^2(x)d\Omega^2 \ , \tag{6.37}$$

όπου στην περίπτωση της μελανής οπής, η ακτινική συντεταγμένη ίσουται με $x = r$ και είναι θετική ενώ, παράλληλα έχουμε $g_{\theta\theta} = r^2$. Για την περίπτωση σκουλικότρυπας, η συντεταγμένη x παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και η συνιστώσα $g_{\theta\theta}$ είναι ίση με $x^2 + a^2$. Η εξίσωση Klein-Gordon για ένα δοκιμαστικό βαθμωτό πεδίο Ψ που διαδίδεται σφαιρικά συμμετρικούς χωροχρόνους διαβάζει

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi\right] = 0\ . \tag{6.38}$$

Εκμεταλλευόμενοι τη σφαιρική συμμετρία του προβλήματος θεωρούμε την εξάρτηση $\Psi(t, x, \theta, \phi) = R(x)\,Y_m^l(\theta, \phi)e^{-iwt}$ και η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$h(x)\partial_x\left[\rho^2(x)h(x)\partial_x R(x)\right] + [w^2 - \ell(\ell+1)f(x)]R(x) = 0\ , \tag{6.39}$$

όπου $h(r) = \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$ και ℓ ο κβαντικός αριθμός τροχιακής στροφορμής κατά αναλογία με το πρόβλημα στο άτομο του υδρογόνου. Χρησιμοποιώντας tortoise συντεταγμένες x^*, $dx^* = \dfrac{dx}{h(x)}$, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\partial_{x^*}\left[\rho^2(x)\partial_{x^*}R(x)\right] + [w^2 - \ell(\ell+1)f(x)]R(x) = 0\ . \tag{6.40}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας $R(x) = \frac{\psi(x)}{\rho(x)}$, βλέπουμε ότι το ακτινικό κόμματι της διαφορικής καταλήγει στη μορφή

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^{*2}} + \left[w^2 - V_{RW}(x)\right]\psi(x) = 0\ , \tag{6.41}$$

με το ενεργό Regge-Wheeler δυναμικό να διαβάζει

$$V_{RW} = l(l+1)\frac{f(x)}{\rho^2(x)} + \frac{2f(x)g(x)\frac{\partial^2\rho(x)}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial\rho(x)}{\partial x} - f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}\frac{\partial\rho(x)}{\partial x}}{2g(x)\rho^2(x)}\ . \tag{6.42}$$

Γνωρίζοντας πλέον το ενεργό δυναμικό, είμαστε σε θέση να ολοκληρώσουμε αριθμητικά τη διαφορική (6.41) ακολουθώντας τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά στο [114]. Ορίζοντας $\psi(x_*, t) = \psi(i\Delta x_*, j\Delta t) = \psi_{i,j}$, $V(x(x_*)) = V(x_*, t) = V(i\Delta x_*, j\Delta t) = V_{i,j}$, η εξίσωση (6.41) γράφεται

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x_*^2} - \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta t^2} - V_i\psi_{i,j} = 0\,. \tag{6.43}$$

Χρησιμοποιώντας σαν αρχική συνθήκη ένα Γκαουσιανό κυματοπακέτο (Gaussian wave-packet) της μορφής $\psi(x_*, t) = \exp\left[-\frac{(x_*-c)^2}{2\sigma^2}\right]$ ανδ $\psi(x_*, t < 0) = 0$, όπου c και σ αντιστοιχούν στο κέντρο και το πλάτος του κυματοπακέτου, μπορούμε να βρούμε την χρονική εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου ψ από τη σχέση

$$\psi_{i,j+1} = -\psi_{i,j-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_*}\right)^2(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + \left(2 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_*}\right)^2 - V_i\Delta t^2\right)\psi_{i,j}\ , \tag{6.44}$$

όπου η συνθήκη ευστάθειας Von Neumann της μεθόδου, απαιτεί $\frac{\Delta t}{\Delta x_*} < 1$. Επιπλέον, το ενεργό δυναμικό είναι θετικό και μηδενίζεται πάνω στον ορίζοντα της one-way σκουλικότρυπας (αλλά όχι πάνω στο λαιμό της two-way σκουλικότρυπας), αλλά απειρίζεται στο ασυμπτωτικό χωροειδές άπειρο και για τα δύο συμπαγή αντικείμενα. Αυτό επιβάλλει στο ψ να μηδενίζεται στο άπειρο και για τα δύο αντικείμενα που αντιστοιχεί σε ανακλαστικές (reflective) συνοριακές συνθήκες. Για να υπολογίσουμε τις ακριβείς τιμές του δυναμικού V_i, ολοκληρώνουμε αριθμητικά την διαφορική εξίσωση για την tortoise συντεταγμένη και μετά λύνουμε ως προς την αντίστοιχη ακτινική συντεταγμένη. Κατά τη διάρκεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης, πραγματοποιήθηκαν διάφορα τεστ σύγκλισης χρησιμοποιώντας διαφορετικά βήματα ολοκλήρωσης και αριθμητικής ακρίβειας των εσωτερικών υπολογισμών, με σκοπό να επιβεβαιωθεί η τελική μορφή των παρακάτω αποτελεσμάτων.

Εφαρμόζοντας τη διαδικάσια που περιγράψαμε παραπάνω, υπολογίζουμε την χρονική απόκριση των δύο συμπαγών αντικειμένων όταν αυτά διαταράσσονται σε γραμμικό επίπεδο από ένα εξωτερικό βαθμωτό πεδίο. Στις ενότητες που ακολουθούν η χρονική εξέλιξη των διαταραχών υπολογίζεται πολύ κοντά στον ορίζοντα γεγονότων και στο λαίμο, της one-way και της two-way σκουλικότρυπας αντίστοιχα.

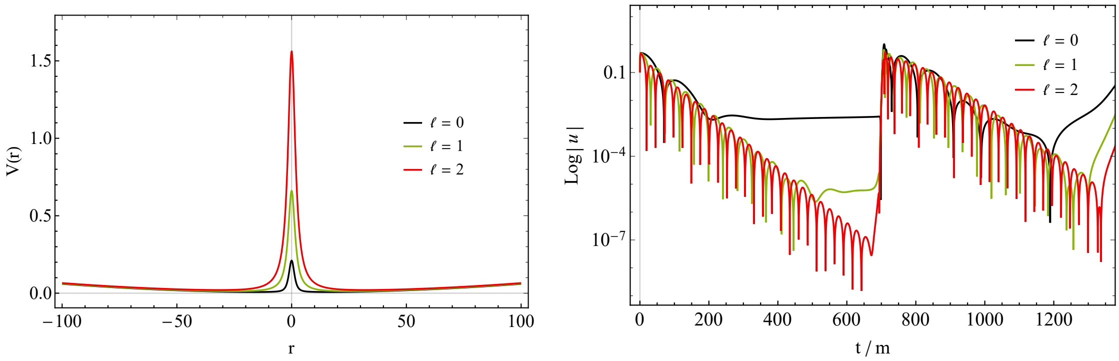
6.5.1 Two-Way Σκουλικότρυπα

Στο σχήμα. 6.3 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη ενός εξωτερικού βαθμωτού πεδίου καθώς αυτό διαδίδεται στον χωροχρόνο της two-way σκουλικότρυπας (6.20). Οι παράμετροι έχουν λάβει τιμές τέτοιες ώστε $\alpha > r_h$. Το κύριο χαρακτηριστικό που παρατηρούμε είναι η παραγωγή echoes που ακολουθεί το αρχικό quasinormal ringdown. Το μοτίβο τους γίνεται πιο εμφανές για πιο μεγάλες τιμές του ℓ λόγω του ότι μεταφέρεται περισσότερη ενέργεια από την PS όταν διαταράσσεται. Από την άλλη, για σφαιρικά συμμετρικές διαταραχές $\ell = 0$, τα echoes δεν είναι εμφανή γιατί η PS δεν διεγείρεται επαρκώς.

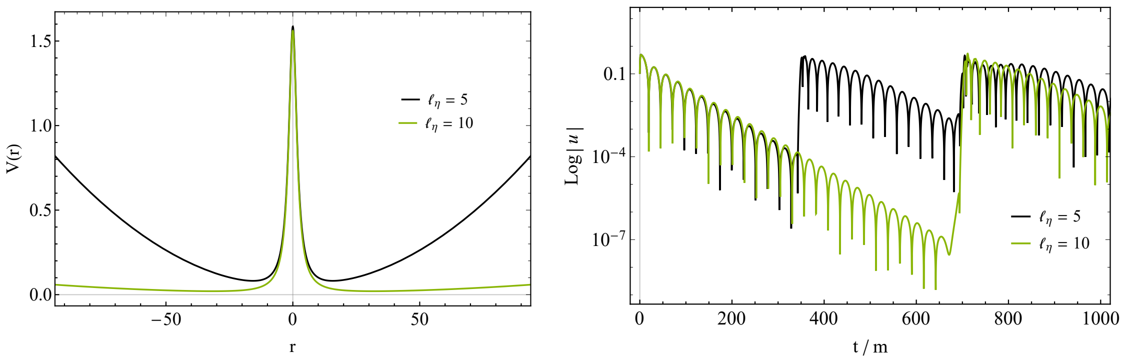
Στην εικόνα. 6.4 κρατάμε σταθερή την τιμή της τροχιακής στροφορμής ℓ και εξετάζουμε την επίδραση της σταθεράς σύζευξης ℓ_η. Η αύξηση του ℓ_η - το οποίο έχει το ρόλο μίας effective κοσμολογικής σταθεράς η οποία με τη σειρά της δημιουργεί ένα AdS σύνορο - οδηγεί στην απομάκρυνση του AdS συνόρου από τον λαιμό. Ως αποτέλεσμα, το ανακλόμενο κύμα από την PS έχει να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση μέχρι να συναντήσει το AdS σύνορο, να ανακλαστέι, και να επιστρέψει για να ξανα-διαταράξει την PS. Συνεπώς, οποιαδήποτε αύξηση του l_η οδηγεί στην καθυστέρηση της άφιξης των echoes. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι τα echoes δεν δημιουργούνται λόγω παγίδευσης των διαταραχών ανάμεσα στην PS και την επιφάνεια του αντικειμένου αλλά, λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του χώρου στο άπειρο.

Στο σχήμα. 6.5 παρουσιάζεται η επίδραση του μεγέθους του λαιμού α. Παρατηρούμε πως και η συχνότητα ταλάντωσης ($\tau_r = 1/\omega_r$) αλλά και ο ρυθμός απόσβεσης ($\tau_i = 1/\omega_i$) επηρεάζονται από το μέγεθος του λαιμού. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να κατανοηθεί παρατηρώντας το σχήμα που παίρνει το ενεργό δυναμικό. Καθώς το α αυξάνεται αντλείται λιγότερη ενέργεια από τη σφαίρα φωτονίων δημιουργώντας σήματα με μικρότερη συχνότητα ταλάντωσης. Επιπλέον βλέπουμε πως μειώνεται η κλισή του δυναμικού με τη αύξηση του α, συμπεριφορά η οποία προκαλεί μείωση της απόσβεσης στο σήμα.

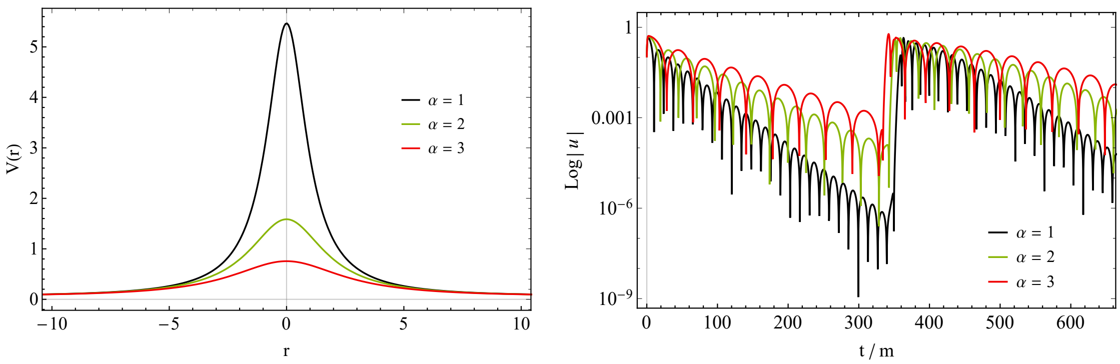
Τέλος, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το πλάτος των echoes δεν μειώνεται με το χρόνο το οποίο υποδεικνύει πως δεν υπάρχει της συνολικής ενέργειας στο σύστημα. Το πεδίο περνάει μέσα από τον λαιμό προς τη δεύτερη περιοχή της σκουλικότρυπας και στη συνέχεια ανακλάται από το δεύτερο AdS σύνορο από το οποίο και ανακλάται. Η συνολική διατήρηση της ενέργειας υποδεικνύει πως ο χωροχρόνος χαρακτηρίζεται από κανονικούς τρόπους ταλάντωσης παρόμοιους με αυτούς που βρέθηκαν στα [105, 113, 129, 247, 130, 131, 248]. Θα μπορούσε κανείς να κάνει μία ανάλυση του βαθμωτού πεδίου (mode decomposition) έτσι ώστε να υπολογίσει αυτές τις συχνότητες αλλά στην περίπτωσή μας η περίπλοκη μορφή της μετρικής κάνει μια τέτοια ανάλυση δύσκολη σε τεχνικό επίπεδο.



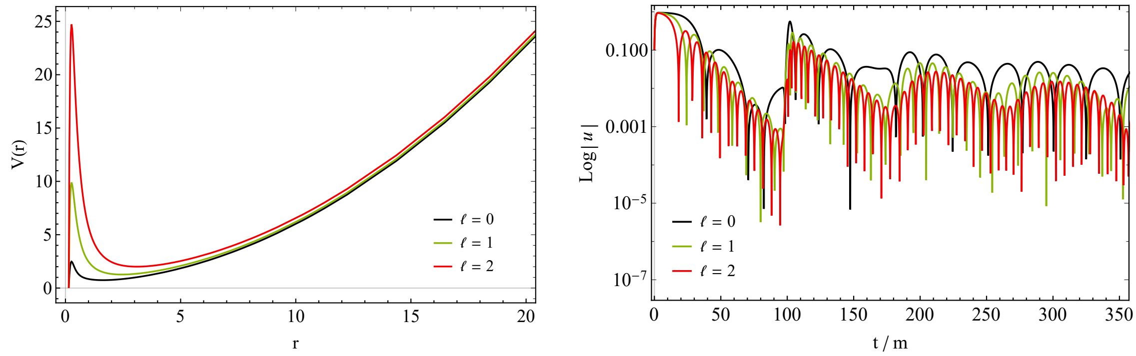
Σχήμα 6.3: Ενεργό δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαθμωτών διαταραχών, ως προς το ℓ, στο χωροχρόνο της two-way σκουλικότρυπας με $\ell_\eta = 10$, $\alpha = 2$ και $m = 0.1$.



Σχήμα 6.4: Ενεργό δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαθμωτών διαταραχών, ως προς το ℓ_η, στο χωροχρόνο της two-way σκουλικότρυπας με $\ell = 2$, $\alpha = 2$ και $m = 0.1$.



Σχήμα 6.5: Ενεργό δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαθμωτών διαταραχών, ως προς το α,στο χωροχρόνο της two-way σκουλικότρυπας με $\ell = 2$, $\ell_\eta = 5$ και $m = 0.1$.

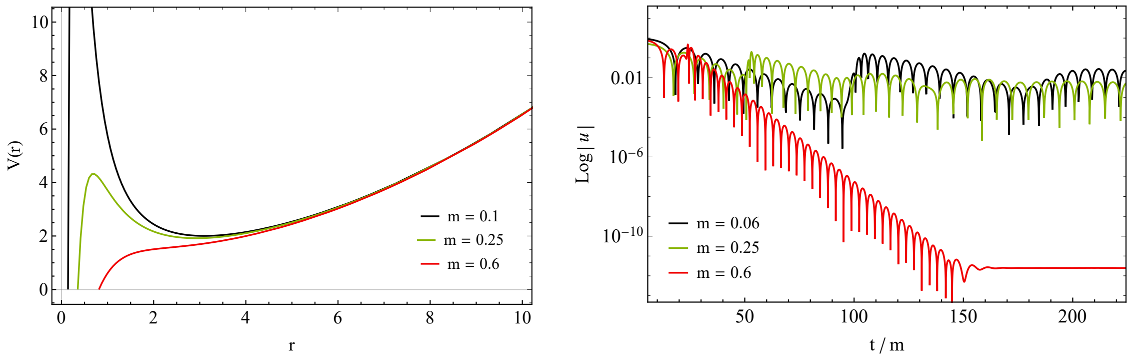


Σχήμα 6.6: Ενεργό δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαθμωτών διαταραχών, ως προς το ℓ, στο χωροχρόνο της one-way σκουλικότρυπας με $m = 0.1$ και $\ell_\eta = 1$.

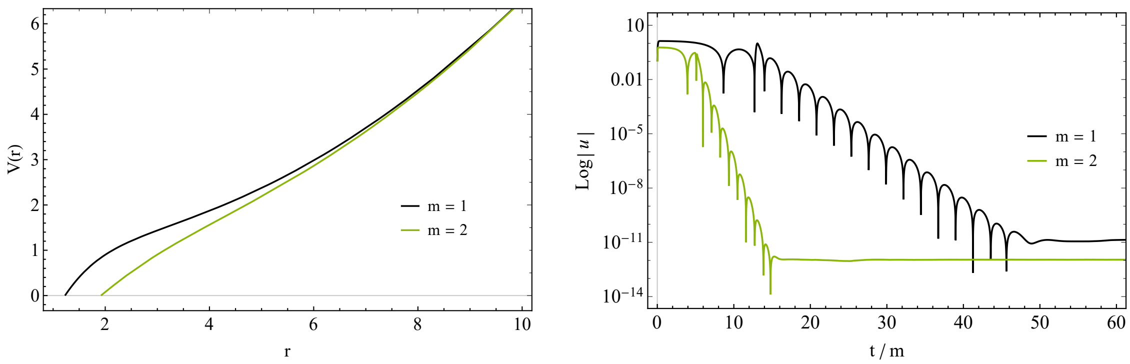
6.5.2 One-way Σκουλικότρυπα

Στην παρούσα ενότητα, θέτουμε την τιμή του λαίμου ίση με τον ορίζοντα της υποκείμενης μελανής οπής $\alpha = r_h$ έτσι ώστε το συμπαγές μας αντικείμενο (6.20) να περιγράφει μία one-way σκουλικότρυπα η οποία διαθέτει μία φωτοειδή υπερεπιφάνεια πάνω στο λαιμό. Στο σχήμα 6.6 έχουμε τη χρονική εξέλιξη γραμμικών βαθμωτών διαταραχών σε αυτό τον χωροχρόνο. Η απόκριση του αντικειμένου παρουσιάζει echoes παρόμοια με την περίπτωση της two-way σκουλικότρυπας τα οποία ακολουθούν το αρχικό ringdown.Οι $\ell = 0$ διαταραχές δεν διεγείρουν επαρκώς τη σφαίρα φωτονίων έξω από το λαιμό και συνεπώς οδηγούν σε σήματα με μικρότερη συχνότητα ταλάντωσης συγκριτικά με τις περιπτώσεις για $\ell > 0$.

Στο σχήμα 6.7 παρατηρούμε την επίδραση της μάζα στη χρονική εξέλιξη των σημάτων. Καθώς το m αυξάνει, τα echoes δίνουν τη θέση τους σε ένα τυπικό quasinormal ringdown το οποίο ακολουθείται από μία σταθερή late-time ουρά. Συμπεραίνουμε πως η εν λόγω συμπεριφορά προκύπτει λόγω του ενεργού δυναμικού του οποίου η κορυφή στη σφαίρα φωτονίων μειώνεται με την αύξηση της μάζας. Αυτό οδηγεί στη μείωση του όγκου της περιοχής πιθανής παγίδευσης των κυμάτων. Έτσι η συνεισφορά των echoes στο τελικό σήμα μειώνεται με αποτέλεσμα η απόκριση που λαμβάνουμε να χαρακτηρίζεται από το τυπικό quasinormal ringing λόγω της διαταραχής της σφαίρας φωτονίων. Οποιαδήποτε περαιτέρω αύξηση του m ισχυροποιεί την απόσβεση του quasinormal ringing (βλέπε σχήμα 6.8) υποδεικνύοντας πως το συμπαγές αντικείμενο μεταβαίνει ταχύτερα προς την ισορροπία. Σημειώνουμε πως το πεδίο σε μεγάλους χρόνους σταθεροποιείται σε μία μή-μηδενική τιμή έπειτα από το αρχικό ringdown. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρήθηκε και στο [237] όπου axial βαρυτικές διαταραχές διαδίδονταν στο χωροχρόνο της μελανής οπής Rinaldi [180]. Επίσης, σε αντίθεση με την two-way wormhole, είναι εμφανές το γεγονός ότι το πλάτος των echoes σε αυτή την περίπτωση φθήνει με το πέρασμα του χρόνου. Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη αφού ο λαίμος σε αυτή την περίπτωση συμπίπτει με μία φωτοειδή υπερεπιφάνεια (ορίζοντα) γεγονός το οποίο αλλάζει ολοκληρωτικά τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και οδηγεί στη μή-διατήρηση της συνολικής ενέργειας. Δηλαδή, τα εν λόγω συμπαγή αντικείμενα ανταποκρίνονται στις διαταραχές με παρόμοιο τρόπο με τις μελανές οπές αφού, οποιαδήποτε επιπλέον πληροφορία που πιθανόν να φανέρωνε την ύπαρξη ενός λαιμού είναι παγιδευμένη πίσω από τον ορίζοντα.



Σχήμα 6.7: Ενεργό δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαθμωτών διαταραχών, ως προς το m, στην one-way σκουλικότρυπα $\ell = 2$ και $\ell_\eta = 1$.



Σχήμα 6.8: Ενεργό δυναμικό (αριστερά) και χρονική εξέλιξη (δεξιά) βαθμωτών διαταραχών, ως προς τ m, στην one-way σκουλικότρυπα $\ell = 2$ και $\ell_\eta = 1$.

6.6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα μελέτη εξετάσαμε την επίδραση των disformal μετασχηματισμών σε μία μελανή οπή με σκοπό να την απεικονίσουμε σε σκουλικότρυπα. Ξεκινήσαμε από την hairy λύση Rinaldi η οποία είναι λύση μιας υποκλάσης της Horndeski στην οποία ο κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου αλληλεπιδρά με τον τανυστή Einstein. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας ένα disformal μετασχηματισμό, απεικονίσαμε αυτό το αντικείμενο σε ένα χωροχρόνο ο οποίος παρεμβάλλεται μεταξύ μελανής οπής, regular μαύρης τρύπας, one-way και two-way σκουλικότρυπας ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου a. Υπολογίζοντας τον τανυστή ορμής-ενέργειας της νέας γεωμετρίας βρήκαμε ότι η εν λόγω διαδικασία ισοδυναμεί με ένα deformation του τανυστή ορμής-ενέργειας της αρχικής seed μετρικής.

Ελέγχθηκαν οι παραβιάσεις της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης καθώς η παράμετρος a αυξάνει και το αντικείμενο μεταβαίνει από μελανή οπή σε σκουλικότρυπα. Κρατώντας σταθερή την τιμή του ορίζοντα $r = 1$, βρήκαμε ότι για μή-μηδενικές τιμές του a η παραβίαση γίνεται ισχυρότερη με την αύξηση του μεγέθους του λαιμού. Η παραβίαση αυτή συμβαίνει λόγω του επιπλέον όρου που δημιουργείται στον τανυστή ορμής-ενέργειας του αρχικού αντικειμένου από την εφαρμογή του disformal μετασχηματισμού.

Ολοκληρώνοντας αριθμητικά την εξίσωση Regge-Wheeler, μελετήσαμε την απόκριση αυτών των αντικειμένων κάτω από γραμμικές βαθμωτές διαταραχές. Η ανάλυσή μας υποδεικνύει τον σχηματισμό echoes μετά το στάδιο του quasinormal ringing και για τα δύο αντικείμενα, των οποίων η περίοδος εμφάνισης είναι ανάλογη της κινητικής σταθερά σύζευξης ℓ_η. Το μοτίβο των σημάτων είναι παρόμοιο αυτών που λάμβανει κανείς από μελανές οπές με κβαντικές διορθώσεις κοντά στον ορίζοντα [207] παρόλο που τα συμπαγή αντικείμενα στη δική μας περίπτωση δεν περιέχουν κάποιου τέτοιου είδους διόρθωση. Η effective AdS ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων λειτουργεί ως κάτοπτρο το οποίο ανακλά τα κύματα που προέρχονται από τη σφαίρα φωτονίων, αναγκάζοντάς τα να επιστρέψουν και να την ξανα-διαταράξουν, δημιουργώντας τα παρατηρούμενα echoes.

Μία βασική διαφορά μεταξύ των υπό μελέτη αντικειμένων είναι η ύπαρξη του ορίζοντα στην one-way σκουλικότρυπα ο οποίος προκαλεί απορρόφηση ενέργειας οδηγόντας σε σήματα των οποίων το πλάτος φθήνει με το χρόνο, σε αντίθεση με την two-way σκουλικότρυπα. Μαθηματικά, η διαφορά αυτή κωδικοποιείται στην δραστική αλλαγή των συνοριακών συνθηκών που επιβάλλονται στην αριθμητική ολοκλήρωση του προβλήματος σκέδασης. Για την two-way σκουλικότρυπα, η σταθερότητα του πλάτους των echoes υποδεικνύει την ύπαρξη κανονικών τρόπων ταλάντωσης, καθώς και πιθανών ασταθειών, παρόμοιες με αυτές που βρέθηκαν στο [140].

Θεωρούμε ότι οι βαρυτικές διαταραχές θα μας παρέχουν επιπλέον πληροφορία και θα βοηθήσουν να καθορίσουμε το εάν τα εν λόγω αντικείμενα είναι ευσταθή, κάτι το οποίο αφήνουμε για μελλόντική δουλειά. Ενδιαφέρουσα θα ήταν επίσης η επέκταση της παρούσας μελέτης, χρησιμοποιώντας ως αρχικό seed αντικείμενο τη μελανή οπή [183] η οποία είναι επίσης μία hairy λύση της ίδιας υποκατηγορίας της Horndeski. Το επιπλέον χαρακτηριστικό αυτής της λύσης είναι πως το βαθμωτό πεδίο εξαρτάται και από τον χρόνο επομένως, θα είχε ενδιαφέρον να μελετήσουμε τις συνέπειες που θα είχε η εφαρμογή ενός disformal μετασχηματισμού σε αυτή την πιο πλούσια μετρική.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής οδήγησε στην παραγωγή τεσσάρων επιστημονικών δημοσιεύσεων οι οποίες παρουσιάζονται στα κεφάλαια 3, 4, 5 και 6.

Στο κεφάλαιο 3 ασχοληθήκαμε με μία υποκατηγορία της Λανγκρανζιανής Horndeski (1.1) - την θεωρία Brans-Dicke (BD) - η οποία περιγράφεται από τη δράση

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left(\Phi R - \frac{\omega_{BD}}{\Phi}g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}\right) + \int d^4x\,\sqrt{-g}\,L_m(g_{\kappa\lambda},\Psi)\,, \tag{7.1}$$

όπου Ψ είναι τα πεδία ύλης. Συγκεκριμένα, στηριχθήκαμε σε ένα τροποποιημένο μοντέλο της Brans-Dicke [46, 47] το οποίο την γενικεύει δίνοντάς της πιο πλούσια δυναμική με την εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου η οποία επιτρέπει τη σύζευξη μεταξύ βαθμωτού και ύλης πέρα από την minimal σύζευξη βαθμωτού-μετρικής. Αυτή η νέα αλληλεπίδραση εισαγάγει ένα νέο scale στη θεωρία το οποίο τροποποιεί τις εξισώσεις κίνησης άκομα και στο κενό, χωρίς την παρουσία ύλης.

Σκοπός της συγκεκριμένης έρευνας ήταν αρχικά να εξετάσουμε εάν η νέα τροποποιημένη Brans-Dicke θεωρία μπορεί να δώσει καινούργιες λύσεις μελανών οπών ή σκουλικότρυπων διαφορετικών της ΓΘΣ και στη συνέχεια να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά τους. Η θεωρία αυτή τροποποιεί την αρχική BD με την εισαγωγή μίας νέας σταθεράς ν [46, 47] στον όρο σύζευξης της κινητικής ενέργειας του βαθμωτού πεδίου με την βαρύτητα. Η νέα αυτή σύζευξη δημιουργεί μια επιπλέον συνεισφορά στην effective ύλη της BD ακόμα και στην περίπτωση του κενού. Λύνοντας τις εξισώσεις Einstein-Klein-Gordon βρήκαμε καινούργιες λύσεις οι οποίες επηρεάζονται από την σταθερά ν. Απαιτώντας την απουσία ghosts οι λύσεις χωρίζονται σε δύο ξεχωριστούς κλάδους ($\epsilon > 0$ και $\epsilon < 0$). Οι λύσεις του κλάδου $\epsilon < 0$ περιγράφουν είτε ακάλυπτες ιδιομορφίες, είτε τη λύση Schwarzschild είτε, καινούργιες σκουλικότρυπες των οποίων ο λαιμός εξαρτάται από την τιμή του ν. Οι λύσεις του κλάδου $\epsilon > 0$ δίνουν και αυτές ακάλυπτες ιδιομορφίες, την λύση Schwarzschild και νέες σκουλικότρυπες με τη μόνη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση δεν επιτεύχθηκε η εξαγωγή μίας αναλυτικής σχέσης που να συνδέει το μέγεθος του λαιμού με τη σταθερά ν. Παρόλα αυτά, με βάση την αριθμήτικη ανάλυση που έγινε είναι προφανές ότι και σε αυτή την περίπτωση ο λαιμός εξαρτάται από το ν. Επιπλέον οι λύσεις αυτού του κλάδου έχουν συνεχές όριο στην 1η κλάση λύσεων του Brans της αρχικής Brans-Dicke θεωρίας και τις εμπεριέχουν σαν ειδική περίπτωση. Τέλος εξετάστηκε η παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών κοντά στο λαίμο και βρέθηκε ότι και στις δύο περιπτώσεις πέρα από την ΦΕΣ (NEC) παραβιάζεται και η ΑΕΣ (WEC).

Στο κεφάλαιο 4 μελετήθηκε η ευστάθεια συμπαγών αντικείμενων σε μια πιο γενικευμένη θεωρία ή οποία παραμένει υπο κλάση της Horndeski [161] και χρησιμοποιεί πεδία Galileon, των οποίων οι εξισώσεις κίνησης είναι αναλλοίωτες κάτω από συμμετρία μετατόπισης (shift symmetry) $\phi \to \phi + b_\mu x^\mu + c$. Η Λαγκρανζιανή σε αυτή την περίπτωση έχει την μορφή

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{8\pi} - (\varepsilon g_{\mu\nu} + \eta G_{\mu\nu})\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi\right], \tag{7.2}$$

όπου Φ ένα πραγματικό άμαζο βαθμωτό πεδίο, η η σταθερά σύζευξης κινητικού όρου-καμπυλότητας με διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο και ε μία παράμετρος που παίρνει τιμές ± 1 και κατά συνέπεια καθορίζει εάν το βαθμωτό πεδίο θα διαδίδεται με θετική ενέργεια ή θα είναι phantom. Θεωρώντας τη διάδοση ενός εξωτερικού, ελάχιστα συζευγμένου με τη μετρική βαθμωτού πεδίου, μελετήσαμε τα παραγόμενα ringdown σήματα από τη μελανή οπή Rinaldi [180] και τη σκουλικότρυπα [96], οι οποίες προβλέπονται από τη δράση (7.2) με ένα κανονικό ή phantom βαθμωτό πεδίο αντίστοιχα. Βρέθηκε ότι η συμπεριφορά των διαταραχών είναι παρόμοια για τα δύο είδη αντικειμένων. Μετά το αρχικό ringdown παρατηρείται η εμφάνιση echoes των οποίων ο χρόνος εμφάνισης (timescale) είναι ανάλογος της σταθεράς σύζευξης μεταξύ του βαθμωτού Φ και της βαρύτητας. Η ύπαρξη του AdS συνόρου στην λύση της μελανής οπής, οδηγεί σε σήματα με παρόμοια συμπεριφορά με αυτή που λαμβάνουμε από μία μαύρη τρύπα με κβαντικές διορθώσεις στον ορίζοντα γεγονότων [207]. Η σκουλικότρυπα παρόλο που παρουσιάζει ένα ενεργό δυναμικό με μία κορυφή κοντά στο λαιμό, παρόμοιο με αυτά των Bronnikov-Ellis και Morris-Thorne σκουλικότρυπων [137, 138, 136, 84], δημιουργεί echoes από την ανακλαστική συμπεριφορά του AdS συνόρου. Για την περίπτωση της extremal σκουλικότρυπας παρατηρούνται δύο είδη από echoes λόγω του συνορού AdS και του πηγαδιού που σχηματίζεται πάνω στο λαιμό. Το μοτίβο αυτό είναι παρομοίο με αυτο που βρέθηκε στο [139] αν και στην δική μας περίπτωση οι περιοχές παγίδευσης εμφανίζονται φυσικά στο δυναμικό για συγκεκριμένες επιλογές των παραμέτρων της θεωρίας και της λύσης και δεν εισαγάγονται με το ''χέρι''. Τέλος, σε αντίθεση με την περίπτωση της μελανής οπής, τα echoes στη σκουλικότρυπα δεν φθήνουν με το χρόνο αλλά διατηρούν πλάτος ίδιο με του αρχικού ringdown. Η συμπεριφορά αυτή υποδεικνύει την ύπαρξη κανονικών τρόπων ταλάντωσης και πιθανών ασταθειών, παρόμοιων με αυτά που βρέθηκαν στο [140].

Η παραπάνω έρευνα συνεχίστηκε στο κεφάλαιο 5 στο οποίο εφαρμόσαμε axial βαρυτικές διαταραχές στην μελανή οπή Rinaldi. Μελετήθηκε η ευστάθεια του αντικειμένου σε γραμμικό επίπεδο χρησιμοποιώντας τεχνικές χρονικής εξέλιξης και συμπληρωματικές εξαγωγές των QNM συχνοτήτων. Τα αποτελέσματά μας, υποδεικνύουν ότι η εν λόγω μελανή οπή είναι ευσταθής με αποκρίσεις η οποίες σβήνουν με το χρονό. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της απόκρισής της εξαρτώνται από την τιμή του λόγου m/ℓ_η. Καθώς ο λόγος αυξάνεται, το βαρυτικό ringdown μεταβαίνει μεταξύ τριών διαφορετικών μοτίβων. Συγκεκριμένα παρουσιάζει ένα τυπικό quasinormal ringdown ($m/\ell_\eta \lesssim 10^{-2}$), ένα long-lived state όπου κυριαρχούν echoes ($10^{-2} \lesssim m/\ell_\eta \lesssim 10^{-1}$) και τέλος, ένα state στο οποίο τα echoes σβήνουν ταχύτατα και έχουμε την εμφάνιση εκθετικών αποσβενύμενων ουρών ($m/\ell_\eta \gtrsim 10^{-1}$).

Παρόλα τα ευρήματα της συγκεκριμένης μελέτης τα οποία υποδεικνύουν ευστάθεια, σημειώνουμε ότι θεωρήσαμε μόνο το axial κομμάτι των διαταραχών. Γενικά, θα πρέπει να εξεταστεί και το polar κομμάτι των βαρυτικών διακυμάνσεων για να μπορεί να εξαχθεί ένα τελικό συμπέρασμα για την ευστάθεια του αντικειμένου. Το συγκεκριμένο εγχείρημα μπορεί να αποβεί εξαιρετικό δύσκολο από τεχνικής άποψης, όσον αφορά την αναγωγή των διαταρακτικών εξισώσεων σε μία μονοδιάστατη Zerilli-like αφού οι polar βαθμοί ελευθερίας εν γένει αλληλεπιδρούν με το βαθμωτό πεδίο στις scalar-tensor θεωρίες. Ένα πρώτο βήμα σε αυτή την κατεύθυνση είναι να θεωρήσέι κανείς radial διαταραχές οι οποίες συνήθως προσομοιάζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις polar [249, 250, 251, 252] και μπορούν να δώσουν μία πιο πλήρη εικόνα για την γενική ευστάθεια του αντικειμένου.

Τέλος, στο κεφάλαιο 6 θεωρήσαμε disformal μετασχηματισμούς στην ίδια υποκλάση της Horndeski 1.3 στην οποία έχουμε σύζευξη μεταξύ του βαθμωτού πεδίου και του τανυστή Einstein. Χρησιμοποιώντας ως κίνητρο την παρατήρηση του Bekenstein [224] όσον αφορά τις παραμορφώσεις που προκαλούν οι disformal μετασχηματισμοί αλλά και τα αποτελέσματα των [231, 232, 234], εξετάσαμε την δυνατότητα να εφαρμόσουμε ένα disformation σε μία μελανή οπή και να την μετατρέψουμε σε σκουλικότρυπα. Για αρχικό αντικείμενο χρησιμοποιήσαμε την hairy μελανή οπή Rinaldi [180]. Το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι ένα νέο συμπαγές αντικείμενο το οποίο παρεμβάλλεται μεταξύ μελανής οπής και σκουλικότρυπας με συνεχή τρόπο, μεταβάλλοντας την τιμή μίας κρίσιμης παραμέτρου της λύσης. Υπολογίζοντας τον τανυστή ορμής-ενέργειας της νέας γεωμετρίας βρήκαμε ότι η εν λόγω διαδικασία ισοδυναμεί με ένα deformation του τανυστή ορμής-ενέργειας της αρχικής seed μετρικής.Ελέγχθηκαν οι παραβιάσεις της φωτοειδούς ενεργειακής συνθήκης καθώς η παράμετρος a αυξάνει και το αντικείμενο μεταβαίνει από μελανή οπή σε σκουλικότρυπα. Κρατώντας σταθερή την τιμή του ορίζοντα $r = 1$, βρήκαμε ότι για μή-μηδενικές τιμές του a η παραβίαση γίνεται ισχυρότερη με την αύξηση του μεγέθους του λαιμού. Η παραβίαση αυτή συμβαίνει λόγω του επιπλέον όρου που δημιουργείται στον τανυστή ορμής-ενέργειας του αρχικού αντικειμένου από την εφαρμογή του disformal μετασχηματισμού.

Επιπλέον, ολοκληρώσαμε αριθμητικά την εξίσωση Regge-Wheeler και μελετήσαμε την απόκριση αυτών των αντικειμένων κάτω από γραμμικές βαθμωτές διαταραχές. Η ανάλυσή μας υποδεικνύει τον σχηματισμό echoes μετά το στάδιο του quasinormal ringing και για τα δύο αντικείμενα, των οποίων η περίοδος εμφάνισης είναι ανάλογη της κινητικής σταθερά σύζευξης ℓ_η. Το μοτίβο των σημάτων είναι παρόμοιο αυτών που λάμβανει κανείς από μελανές οπές με κβαντικές διορθώσεις κοντά στον ορίζοντα [207] παρόλο που τα συμπαγή αντικείμενα στη δική μας περίπτωση δεν περιέχουν κάποιου τέτοιου είδους διόρθωση. Η effective AdS ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων λειτουργεί ως κάτοπτρο το οποίο ανακλά τα κύματα που προέρχονται από τη σφαίρα φωτονίων, αναγκάζοντάς τα να επιστρέψουν και να την ξανα-διαταράξουν, δημιουργώντας τα παρατηρούμενα echoes. Μία βασική διαφορά μεταξύ των υπό μελέτη αντικειμένων είναι η ύπαρξη του ορίζοντα στην one-way σκουλικότρυπα ο οποίος προκαλεί απορρόφηση ενέργειας οδηγόντας σε σήματα των οποίων το πλάτος φθήνει με το χρόνο, σε αντίθεση με την two-way σκουλικότρυπα. Μαθηματικά, η διαφορά αυτή κωδικοποιείται στην δραστική αλλαγή των συνοριακών συνθηκών που επιβάλλονται στην αριθμητική ολοκλήρωση του προβλήματος σκέδασης. Για την two-way σκουλικότρυπα, η σταθερότητα του πλάτους των echoes υποδεικνύει την ύπαρξη κανονικών τρόπων ταλάντωσης, καθώς και πιθανών ασταθειών, παρόμοιες με αυτές που βρέθηκαν στο [140].

Παράρτημα Α΄

Πυκνότητα και ακτινική Πίεση τοπικών λύσεων στην Τροποποιημένη **Brans-Dicke** θεωρία

Σε αυτό το παράτημα παρουσιάζεται συνοπτικά η ακριβής μορφή της ακτινικής πίεσης και της ενεργειακής πυκνότητας, συναρτήσει της ισοτροπικής ακτινικής συντεταγμένης, για τους δύο κλάδους λύσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω

$\epsilon < 0$:

$$\begin{aligned}
\varrho = &-\frac{\rho^4 \rho_o^2 \sqrt{|\nu|}\left(\frac{\rho+\rho_o}{\rho-\rho_o}\right)^{-2\gamma}}{2\sqrt{2\pi}(\rho-\rho_o)^4(\rho+\rho_o)^4} \sec\left(\alpha(\lambda,\gamma)\log\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\right) \cdot \\
&\Bigg\{-2\gamma\alpha(\lambda,\gamma)\sin\left(2\alpha(\lambda,\gamma)\log\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\right) + 4\left(\gamma^2-1\right)\cos^2\left(\alpha(\lambda,\gamma)\log\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\right) + \\
&\left(\gamma^2-1\right)|\lambda|\left(\cos\left(2\alpha(\lambda,\gamma)\log\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\right) - 9\right)\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_r = &\frac{\rho^3 \rho_o \sqrt{|\nu|}\left(\frac{\rho+\rho_o}{\rho-\rho_o}\right)^{-2\gamma}}{2\sqrt{\pi}(\rho-\rho_o)^4(\rho+\rho_o)^4}\Bigg\{-4\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{|\lambda|}\left(-\rho^2+\gamma\rho\rho_o-\rho_o^2\right)\tan\left(\alpha(\lambda,\gamma)\log\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\right) \\
&-3\sqrt{2}\left(\gamma^2-1\right)\rho\rho_o|\lambda|\tan^2\left(\alpha(\lambda,\gamma)\log\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\right) - 2\sqrt{2}\left(\gamma^2-1\right)\rho\rho_o\Bigg\} \cdot \\
&\cos\left(\alpha(\lambda,\gamma)\log\left(\frac{\rho-\rho_o}{\rho+\rho_o}\right)\right) .
\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$:

$$\varrho = \frac{\rho^4 \rho_o^2 \left(\frac{\rho+\rho_o}{\rho-\rho_o}\right)^{-2\gamma} \left(\rho^2-\rho_o^2\right)^{-2\alpha(\lambda,\gamma)}}{4\pi(\rho-\rho_o)^4(\rho+\rho_o)^4\sqrt{(\rho^2-\rho_o^2)^{-2\alpha(\lambda,\gamma)}\left(2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}+(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}\right)^2}} \cdot$$
$$\Bigg\{ \left(\gamma^2-1\right)|\lambda| \Bigg(4\pi^2\nu^2(\rho+\rho_o)^{4\alpha(\lambda,\gamma)} - 36\pi\nu(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} +$$
$$(\rho-\rho_o)^{4\alpha(\lambda,\gamma)}\Bigg) - 2\gamma\alpha(\lambda,\gamma)\left((\rho-\rho_o)^{4\alpha(\lambda,\gamma)} - 4\pi^2\nu^2(\rho+\rho_o)^{4\alpha(\lambda,\gamma)}\right) -$$
$$2\left(\gamma^2-1\right)\left(2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}+(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}\right)^2\Bigg\},$$

$$p_r = \Bigg\{4\pi(\rho-\rho_o)^4(\rho+\rho_o)^4\left(\rho^2-\rho_o^2\right)^{-\alpha(\lambda,\gamma)}\left(2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}+(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}\right)\Bigg\}^{-1} \cdot$$
$$\rho^3\rho_o\left(\frac{\rho+\rho_o}{\rho-\rho_o}\right)^{-2\gamma}\left(\rho^2-\rho_o^2\right)^{-2\alpha(\lambda,\gamma)}\Bigg[-2\alpha(\lambda,\gamma)\left(-\rho^2+\gamma\rho\rho_o-\rho_o^2\right)\cdot$$
$$\left((\rho-\rho_o)^{4\alpha(\lambda,\gamma)} - 4\pi^2\nu^2(\rho+\rho_o)^{4\alpha(\lambda,\gamma)}\right) +$$
$$2\left(\gamma^2-1\right)\rho\rho_o\left(2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\sqrt{2}\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{|\lambda|}}+(\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}\right)^2 +$$
$$3\left(\gamma^2-1\right)\rho\rho_o|\lambda|\left((\rho-\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)} - 2\pi\nu(\rho+\rho_o)^{2\alpha(\lambda,\gamma)}\right)^2\Bigg].$$

όπου $\alpha(\lambda,\gamma) = \sqrt{2|\lambda|(1-\gamma^2)}$.

Παράρτημα Β′

Disformal μετασχηματισμοί βαρυτικών τανυστών στη Horndeski θεωρία

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί διάφορων όρων των βαρυτικών τανυστών κάτω από τη δράση του disformal μετασχηματισμού

Η αντίστροφη μετασχηματισμένη μετρική μπορεί να βρεθεί εύκολα από την σχέση Sherman-Morrison

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{W}{\Omega^2 + WX}\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi\right) \ , \tag{B′.1}$$

όπου οι δείκτες του όρου $\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi$ ανέβηκαν χρησιμοποιώντας την αρχική μετρική $g^{\mu\nu}$. Η (B′.1) υποδεικνύει τους περιορισμούς

$$\Omega \neq 0 \ , \tag{B′.2}$$

$$\Omega^2 + WX \neq 0 \ . \tag{B′.3}$$

Επιπλέον, για να διατηρηθεί η Lorentzian υπογραφή πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις [225]

$$\Omega^2 > 0 \ , \tag{B′.4}$$

$$\Omega^2 + WX > 0 \ . \tag{B′.5}$$

Η χρήση της (B′.1) δίνει την μετασχηματισμένη Levi Civita συνοχή

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \quad & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Omega^2}\left(g^{\alpha\beta} - \frac{W}{\Omega^2+WX}\partial^\alpha\Phi\partial^\beta\Phi\right)\right] \times \\
& \left[(\partial_\nu\Omega^2)g_{\beta\mu} + (\partial_\mu\Omega^2)g_{\nu\beta} - (\partial_\beta\Omega^2)g_{\mu\nu}\right. \\
& +\Omega^2\left(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \\
& +\partial_\nu W\partial_\beta\Phi\partial_\mu\Phi + \partial_\mu W\partial_\nu\Phi\partial_\beta\Phi - \partial_\beta W\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi \\
& +W\left(\partial_\nu(\partial_\beta\Phi)\partial_\mu\Phi + \partial_\beta\Phi\partial_\nu(\partial_\mu\Phi)\right) \\
& +W\left(\partial_\mu(\partial_\nu\Phi)\partial_\beta\Phi + \partial_\nu\Phi\partial_\mu(\partial_\beta\Phi)\right) \\
& \left.-W\left(\partial_\beta(\partial_\mu\Phi)\partial_\nu\Phi - \partial_\mu\Phi\partial_\beta(\partial_\nu\Phi)\right)\right] \ .
\end{aligned}$$

Για λόγους απλοποίησης θέτουμε των υπολογισμών θέτουμε $\Omega = 1$ και βρίσκουμε ότι η συνοχή παίρνει τη μορφή

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + D^{\alpha}{}_{\mu\nu} \ , \tag{B'.6}$$

όπου ο $D^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ δίνεται από

$$D^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\beta}(\partial_\nu W \partial_\beta \Phi \partial_\mu \Phi + \partial_\mu W \partial_\nu \Phi \partial_\beta \Phi - \partial_\beta W \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi) + \nabla_\nu(\partial_\mu \Phi)\partial^\alpha \Phi \frac{W}{1+WX} \ . \tag{B'.7}$$

Σημειώνουμε ότι η μετρική στην (B'.7) είναι η μετασχηματισμένη μετρική, η οποία κάτω από τον περιορισμό $\Omega = 1$, συνεπάγεται ότι $\hat{g}^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{W}{1+WX}\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi\right)$. Επίσης, ο όρος $D^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ διατηρεί τη συμμετρία της συνοχής Levi Civita στους κάτω δείκτες και είναι ένας πραγματικός τανυστής όπως αναμέται από την διαφορά δύο συνοχών. Η απλή μορφή της (B'.6) υποδεικνύει πως μπορούμε να τους υπόλοιπους τανυστές καμπυλότητας ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\kappa\mu}\hat{\Gamma}^{\kappa}{}_{\sigma\nu} - \hat{\Gamma}^{\rho}{}_{\kappa\nu}\hat{\Gamma}^{\kappa}{}_{\sigma\mu} \\
&= \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu} + \partial_\mu D^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \partial_\nu D^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \left(\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\mu} + D^{\rho}{}_{\kappa\mu}\right)\left(\Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\nu} + D^{\kappa}{}_{\sigma\nu}\right) - \left(\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\nu} + D^{\rho}{}_{\kappa\nu}\right)\left(\Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\mu} + D^{\kappa}{}_{\sigma\mu}\right) \\
&= \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\kappa\mu}\Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\kappa\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\mu} \\
&+ \partial_\mu D^{\rho}{}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\kappa\mu}D^{\kappa}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\mu}D^{\rho}{}_{\kappa\nu} - \partial_\nu D^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\kappa\nu}D^{\kappa}{}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\nu}D^{\rho}{}_{\kappa\mu} + D^{\rho}{}_{\kappa\mu}D^{\kappa}{}_{\sigma\nu} - D^{\rho}{}_{\kappa\nu}D^{\kappa}{}_{\sigma\mu} \ ,
\end{aligned}$$

από το οποίο βρίσκουμε

$$\rightarrow \hat{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu D^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \nabla_\nu D^{\rho}{}_{\sigma\mu} + D^{\rho}{}_{\kappa\mu}D^{\kappa}{}_{\sigma\nu} - D^{\rho}{}_{\kappa\nu}D^{\kappa}{}_{\sigma\mu} \ . \tag{B'.8}$$

Χρησιμοποιώντας ότι το $\delta^\alpha_\beta = g^{\alpha\rho}g_{\beta\rho}$ είναι αναλλοίωτο κάτω από disformal μετασχηματισμούς, βρίσκουμε την απεικόνιση του τανυστή Ricci

$$\rightarrow \hat{R}_{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu} + \nabla_\mu D^{\mu}{}_{\sigma\nu} - \nabla_\nu D^{\mu}{}_{\sigma\mu} + D^{\mu}{}_{\kappa\mu}D^{\kappa}{}_{\sigma\nu} - D^{\mu}{}_{\kappa\nu}D^{\kappa}{}_{\sigma\mu} \ . \tag{B'.9}$$

Τέλος, κλείνοντας τους δείκτες της (B'.9) με την μετασχηματισμένη μετρική βρίσκουμε το βαθμωτό Ricci

$$\hat{R} = R + \nabla_\mu D^{\mu\nu}{}_{\nu} - \nabla_\nu D^{\mu\nu}{}_{\mu} + D^{\mu}{}_{\kappa\mu}D^{\kappa\nu}{}_{\nu} - D^{\mu}{}_{\kappa\nu}D^{\kappa\nu}{}_{\mu} - \tag{B'.10}$$

$$\frac{W\partial^\sigma\Phi\partial^\nu\Phi}{1+WX}(R_{\sigma\nu} + \nabla_\mu D^{\mu}{}_{\sigma\nu} - \nabla_\nu D^{\mu}{}_{\sigma\mu} + D^{\mu}{}_{\kappa\mu}D^{\kappa}{}_{\sigma\nu} - D^{\mu}{}_{\kappa\nu}D^{\kappa}{}_{\sigma\mu}). \tag{B'.11}$$

Συνεπώς, ο τανυστής Einstein διαβάζει

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{R} \\
&= R_{\mu\nu} + \nabla_\kappa D^{\kappa}{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu D^{\kappa}{}_{\mu\kappa} + D^{\kappa}{}_{\lambda\kappa}D^{\lambda}{}_{\mu\nu} - D^{\kappa}{}_{\lambda\nu}D^{\lambda}{}_{\mu\kappa} \\
&- \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + W\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi)\Big[R + \nabla_\kappa D^{\kappa\lambda}{}_{\lambda} - \nabla_\lambda D^{\kappa\lambda}{}_{\kappa} + D^{\kappa}{}_{\sigma\kappa}D^{\sigma\lambda}{}_{\lambda} - D^{\kappa}{}_{\sigma\lambda}D^{\sigma\lambda}{}_{\kappa} \\
&\qquad - \frac{W\partial^\sigma\Phi\partial^\lambda\Phi}{1+WX}(R_{\sigma\lambda} + \nabla_\kappa D^{\kappa}{}_{\sigma\lambda} - \nabla_\lambda D^{\kappa}{}_{\sigma\kappa} + D^{\kappa}{}_{\rho\kappa}D^{\rho}{}_{\sigma\lambda} - D^{\kappa}{}_{\rho\lambda}D^{\rho}{}_{\sigma\kappa})\Big] \ ,
\end{aligned}$$

το οποίο δίνει τη σχέση

$$\hat{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \ , \tag{B'.12}$$

όπου

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu} =& \nabla_\kappa D^{\kappa}{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu D^{\kappa}{}_{\mu\kappa} + D^{\kappa}{}_{\lambda\kappa}D^{\lambda}{}_{\mu\nu} - D^{\kappa}{}_{\lambda\nu}D^{\lambda}{}_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}W\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi R \\
&- \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\Big[\nabla_\kappa D^{\kappa\lambda}{}_{\lambda} - \nabla_\lambda D^{\kappa\lambda}{}_{\kappa} + D^{\kappa}{}_{\sigma\kappa}D^{\sigma\lambda}{}_{\lambda} - D^{\kappa}{}_{\sigma\lambda}D^{\sigma\lambda}{}_{\kappa} \\
&\qquad - \frac{W\partial^\sigma\Phi\partial^\lambda\Phi}{1+WX}(R_{\sigma\lambda} + \nabla_\kappa D^{\kappa}{}_{\sigma\lambda} - \nabla_\lambda D^{\kappa}{}_{\sigma\kappa} + D^{\kappa}{}_{\rho\kappa}D^{\rho}{}_{\sigma\lambda} - D^{\kappa}{}_{\rho\lambda}D^{\rho}{}_{\sigma\kappa})\Big] \ .
\end{aligned} \tag{B'.13}$$

Παράρτημα Γ΄

Επίλυση γωνιάκης διαφορικής εξίσωσης

Παρακάτω παρουσιάζεται τη λύση του γωνιακού μέρους της διαφορικής (5.23). Η εξίσωση προς επίλυση έχει τη μορφή:

$$\sin^3\theta \frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{d\mathcal{S}(\theta)}{d\theta}\right] + \mathcal{A}\,\mathcal{S}(\theta) = 0\ , \tag{Γ΄.1}$$

όπου $\mathcal{A}$ η σταθερά που προκύπτει από το χωρισμό των μεταβλητών. Μετά από την αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta$ η διαφορική παίρνει τη μορφή:

$$(1-x^2)\mathcal{S}'' + 2x\mathcal{S}' + \mathcal{A}\mathcal{S} = 0\ . \tag{Γ΄.2}$$

Σημειώνουμε πως η παραπάνω είναι παρόμοια με τη διαφορική εξίσωση Legendre με τη διαφορά ενός προσήμου. Η συγκεκριμένη εξίσωση ονομάζεται ultraspherical ή Gegenbauer διαφορική εξίσωση και έχει τρεις εναλλάκτικές αλλά ισοδύναμες μορφές οι οποίες δίνουν τα ίδια αποτελέσματα Θα ασχοληθούμε τις δύο από αυτές οι οποίες είναι σχετικές με τη μελέτη μας

Μορφή πρώτη:

$$(1-x^2)\mathcal{S}'' - 2(m+1)x\mathcal{S}' + (\ell - m)(\ell - m + 1)\mathcal{S} = 0\ . \tag{Γ΄.3}$$

Οι λύση της παραπάνω δίνεται από

$$\mathcal{S} = (x^2-1)^{-m/2}\left[C_1 P_\ell^m(x) + C_2 \mathcal{Q}_\ell^m(x)\right]\ , \tag{Γ΄.4}$$

όπου $P_\ell^m(x)$ και $\mathcal{Q}_\ell^m(x)$ οι συναρτήσεις Legendre πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι $m = -2$.

Μορφή δεύτερη:

$$(1-x^2)\mathcal{S}'' - (2n+1)x\mathcal{S}' + k(k+2n)\mathcal{S} = 0\ . \tag{Γ΄.5}$$

Η δεύτερη μορφή έχει λύσεις της μορφής

$$\mathcal{S} = (x^2-1)^{(1-2n)/4}\left[C_1 P^{n-1/2}_{-1/2+k+n}(x) + C_2 \mathcal{Q}^{n-1/2}_{-1/2+k+n}(x)\right]\ , \tag{Γ΄.6}$$

όπου $n = -3/2$. Εάν η σχέση $-1/2 + k + n$ δίνει ακέραιο, τότε η παραπάνω λύση δίνει τα Gegenbauer πολυώνυμα, C_k^n. Εξισώνοντας τις (Γ′.3) και (Γ′.4), παίρνουμε $-1/2 + k + n = l \to k = \ell + 2$, συνεπώς η λύση παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{S} = C_{\ell+2}^{-3/2}(\theta) \ . \tag{Γ′.7}$$

Επομένως, η εξίσωση (Γ′.2) δίνει την τελική μορφή της σταθεράς διαχωρισμού $\mathcal{A} = (\ell+2)(\ell-1)$.

Παράρτημα Δ΄

Ανάλυση & σύγκλιση αριθμητικού κώδικα

Στο παρόν παράρτημα συζητάμε αναλυτικά τη διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης η οποία χρησιμοποιείται και περιγράφεται συνοπτικά στις ενότητες 4.4 και 5.4. Οι σχετικές εξισώσεις που μας ενδιαφέρουν είναι οι (4.18),(4.19), (5.30) και (5.31), μαζί με τη συνθήκη CFL και τις ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες στο ακτινικό χωροειδές άπειρο. Ως προς την tortoise συντεταγμένη r_*, παρατηρούμε ότι όταν το r τείνει στο άπειρο, το r_* τείνει σε μία σταθερή τιμή την οποία θα συμβολίζουμε με r_*^{max}.

Αυτή η συμπεριφορά του r_* έχει δύο επιπτώσεις: πρώτον, οι συνοριακές συνθήκες ως προς το r_* παίρνουν τη μορφή $u(r_*^{max}, t) = u_{i_{max},j} = 0$ και δεύτερον, η περιοχή ενδιαφέροντος στο διάγραμμα $(r_* - t)$ βρίσκεται αριστερά της κάθετης γραμμής $r = r_*^{max}$ όπως φαίνεται στο σχήμα Δ΄.1.

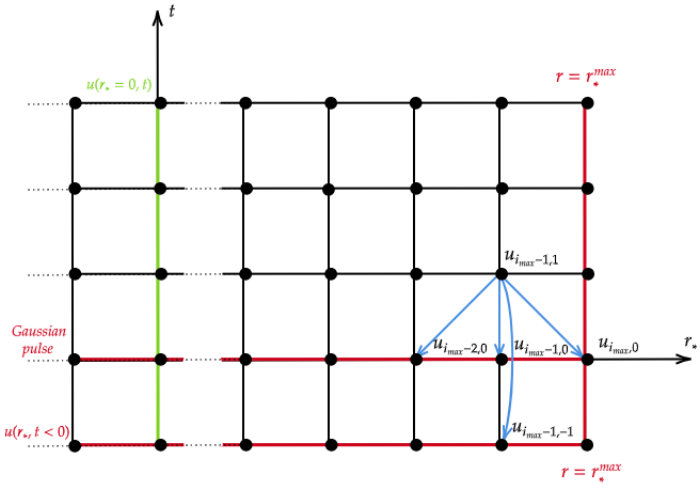
Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πως η τιμή που παίρνει η σταθερά r_*^{max} είναι ανάλογη αυτής της σταθεράς σύζευξης ℓ_η δηλαδή, $r_*^{max} \sim \ell_\eta$ (βλ. πίνακα Δ΄.1). Συνεπώς, η τιμή του ℓ_η καθορίζει το εύρος του r_* αφού $r_* \in (-\infty\,,\, r_*^{max}]$. Μία σημαντική συνέπεια της παραπάνω αναλογίας είναι πως, καθώς το ℓ_η αυξάνεται πρέπει και ο αριθμός των σημείων του αριθμητικού πλέγματος N να αυξάνεται αναλόγως έτσι ώστε η τιμή του βήματος της αριθμητικής ολοκλήρωσης Δr_* να παραμένει επαρκώς μικρή. Για να καταλάβουμε καλύτερα γιατί συμβαίνει αυτό πρέπει να κατανοήσουμε κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες της διαδικασίας που εκτελείται από τον υπολογιστικό μας κώδικα.

Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε τη συνάρτηση $r(r_*)$ λύνοντας αριθμητικά τη διαφορική εξίσωση της tortoise συντεταγμένης

$$\frac{dr(r_*)}{dr_*} = \sqrt{\frac{f(r(r_*))}{g(r(r_*))}}, \tag{Δ΄.1}$$

μαζί με τη συνθήκη $r(r_* = 0) = 1.00001\, r_h$ η οποία θα μας φιξάρει τη σταθερά ολοκλήρωσης. Επομένως, μετά την ολοκλήρωση έχουμε $r(r_* \to -\infty) \to r_h$, $r(r_* = 0) = 1.00001\, r_h$ και $r(r_* \to r_*^{max}) \to \infty$, το οποίο συνεπάγεται $r_* \in (-\infty\,,\, r_*^{max}]$. Ωστόσο, για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε την χρονική εξέλιξη του u, πρέπει να δουλέψουμε σε ένα πεπερασμένο εύρος του r_*. Για να το πετύχουμε, διαλέγουμε μία επαρκώς αρνητική τιμή [1] για το r_* (την οποία συμβολίζουμε με r_*^{min}) η οποία θα είναι το δεύτερο άκρο του εύρους του r_*. Επομένως, στο πλαίσιο της αριθμητι-

[1] Σημειώνουμε ότι κρατάμε αυτή την τιμή σταθερή για όλες τις χρονικές εξελίξεις που πραγματοποιήθηκαν.



Σχήμα Δ′.1: Διάγραμμα του αριθμήτικού πλέγματος στο $(r_* - t)$ επίπεδο. Οι τιμές των σημείων πάνω στις κόκκινες γραμμές καθορίζονται μέσω των αρχικών και συνοριακών συνθηκών του προβλήματος. Τα σημεία της πράσινης γραμμής $u(r_* = 0, t)$ αντιστοιχούν στα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε στις δημοσιεύσεις και τα οποία αντιστοιχούν στο σημείο $r = 1.00001\, r_h$. Τα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος καθορίζονται μέσω της επαναληπτικής σχέσης (5.31) ξεκινώντας από το σημείο $u_{i_{max}-1,1}$. Τα μπλε βέλη αποτελούν μία γραφική απεικόνιση της σχέσης που δίνει τη χρονική εξέλιξη (5.31) για το σημείο $u_{i_{max}-1,1}$.

κής ολοκλήρωσης θα δουλέψουμε στο διάστημα $r_*^{numerical} \in [r_*^{min}\,,\, r_*^{max}]$ παρόλο που θεωρητικά $r_* \in (-\infty\,,\, r_*^{max}]$.

Το τελικό κομμάτι του κώδικα το οποίο υπολογίζει τα time domain profiles δέχεται σαν ορίσματα τις τιμές των $r_*^{min}\,,\, r_*^{max}$ και N στη διεύθυνση r_*. Με βάση αυτά, υπολογίζει το χωρικό βήμα της ολοκλήρωσης Δr_* από τη σχέση

$$\Delta r_* = \frac{r_*^{max} + |r_*^{min}|}{N} \tag{Δ′.2}$$

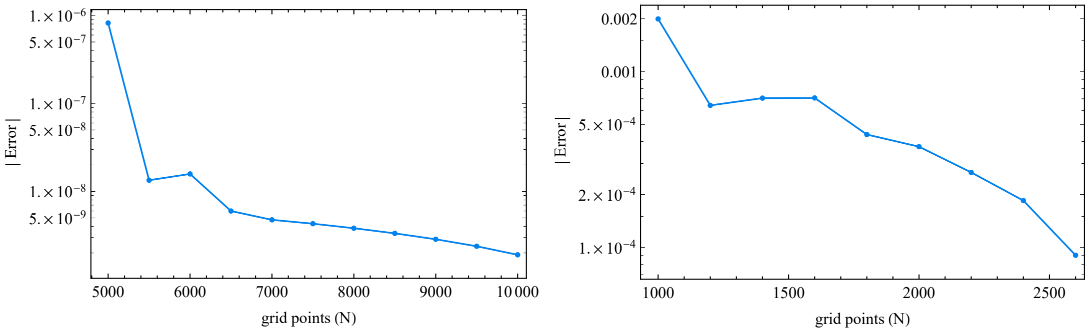
και το χρονικό βήμα από την $\Delta t = c\,\Delta r_*$ όπου c μία θετική σταθερά που ικανοποιεί τη συνθήκη CFL και η οποία δεν πρέπει να παρερμηνεύεται με την ταχύτητα του φωτός. Το γεγονός ότι το r_*^{min} είναι σταθερό για όλα τα evolutions σε συνδυασμό με την αναλογία $r_*^{max} \propto \ell_\eta$ συνεπάγεται, μέσω της σχέσης (Δ′.2), ότι καθώς το ℓ_η αυξάνεται θα πρέπει επίσης να αυξήσουμε το N έτσι ώστε να κρατήσουμε την τιμή του βήματος Δr_* επαρκώς μικρή.

ℓ_η	r_*^{max}
0.1	1.017
5	29.501
100	351.929

Πίνακας Δ′.1: Τιμές αναφοράς που υποδεικνύουν ότι $r_*^{max} \propto \ell_\eta$.

Τέλος, με βάση όλα τα παραπάνω μπορούμε να φτιάξουμε διαγράμματα σύγκλισης για να δείξουμε και ποσοτικά την ακρίβεια του αριθμητικού μας κώδικα. Τα γραφήματα σύγκλισης που παρουσιάζουμε παρακάτω αναφέρονται στα αποτελέσματα του κεφαλαίου 5 ωστόσο η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται Για να παράξουμε τα διαγράμματα υπολογίζουμε πρώτα τις τιμές του $u(r_*, t)$ για ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στο πλέγμα για όλο και μικρότερα βήματα ολοκλήρωσης Δr_* αυξάνοντας την τιμή του N. Θα συμβολίζουμε αυτές τις τιμές με $u(r_*, t)|_N$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την τιμή $u(r_*, t)$ για τον μέγιστο επιλεγμένο αριθμό των σημείων του πλέγματος (δηλ. για το μικρότερο βήμα Δr_*) ως τιμή αναφοράς η οποία υποδεικνύει την καλύτερη προσέγγιση στην πραγματική τιμή του u στο συγκεκριμένο σημείο. Θα συμβολίζουμε αυτή την τιμή ως $u(r_*, t)|_{best}$. Για να υπολογίσουμε το error αφαιρούμε τις τιμές $u(r_*, t)|_N$ για κάθε N από την τιμή της καλύτερης προσέγγισης και παίρνουμε την απόλυτη τιμή δηλαδή,

$$|\text{Error}|_N = \Big| u(r_*, t)|_{best} - u(r_*, t)|_N \Big| \,. \tag{Δ'.3}$$



Σχήμα Δ'.2: Αριστερά: Καμπύλη σύγκλισης για $m = 0.1$, $\ell_\eta = 100$, τιμές οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα clear prompt ringdown. Ως $u(r_*, t)|_{best}$ διαλέγουμε την τιμή του u για $N = 12000$ πλεγματικά σημεία, δηλαδή $u(r_*, t)|_{12000}$. Όλα τα σημεία έχουν εξαχθεί για $r_* = 0$ και $t/m = 225.228$. Δεξιά: Καμπύλη σύγκλισης για $m = 0.5$, $\ell_\eta = 5$ τιμές οι οποίες αντιστοιχούν σε echoes μετά το initial ringdown. Ως $u(r_*, t)|_{best}$ διαλέγουμε την τιμή του u για $N = 2800$ πλεγματικά σημεία δηλαδή, $u(r_*, t)|_{2800}$. Όλα τα σημεία έχουν εξαχθεί για $r_* = 0$ και $t/m = 234.637$.

Τα διαγράμματα στο σχήμα Δ'.2 φανερώνουν πως ο κώδικάς μας συγκλίνει ανεξάρτητα από το αν το αντικείμενο ''αντιδρά'' με καθαρό ringdown ή με σήμα που περιέχει echoes δηλ. σε πολύ διαφορετικές περιοχές του παραμετρικού χώρου (m, ℓ_η). Παρόλο που για την πρώτη περίπτωση, της εικόνας Δ'.2 (αριστερά), έχουμε πιο ταχεία σύγκλιση του κώδικα, περιμένουμε πως το ίδιο θα συμβεί και στη δεύτερη περίπτωση (σχήμα Δ'.2 δεξιά) εάν αυξήσουμε περαιτέρω τον αριθμό των σημείων του πλέγματος. Τέλος, σημειώνουμε πως παρόλο που οι επιλεγμένες τιμές για τον αριθμό των πλεγματικών σημείων N είναι πολύ διαφορετικές για τις δύο καμπύλες του σχήματος Δ'.2, τα αντίστοιχα βήματα Δr_* είναι της ίδιας τάξης μεγέθους και για τις δύο περιπτώσεις, όπως φαίνεται και στον πίνακα Δ'.2.

$\ell_\eta = 100\,,\, m = 0.1$		$\ell_\eta = 5\,,\, m = 0.5$	
Σημεία Πλέγματος (N)	Δr_*	Σημεία Πλέγματος (N)	Δr_*
5000	0.07	1000	0.0695
6000	0.058	1200	0.0579
7000	0.05	1600	0.0434
8000	0.043	2000	0.0347
9000	0.039	2200	0.0316
10000	0.035	2600	0.0267
12000	0.029	2800	0.0248

Πίνακας Δ΄.2: Τιμές του χωρικού βήματος Δr_* για διάφορες επιλογές του αριθμού των σημείων του πλέγματος N. Διαφορετικές τιμές των σημείων του πλέγματος αντιστοιχούν σε παρόμοιες τιμές των Δr_* λόγω των διαφορετικών επιλογών του ℓ_η.

Βιβλιογραφία

[1] L. Barack, V. Cardoso, S. Nissanke, T. P. Sotiriou, A. Askar, C. Belczynski, G. Bertone, E. Bon, D. Blas and R. Brito, *et al.* Class. Quant. Grav. **36** (2019) no.14, 143001 doi:10.1088/1361-6382/ab0587 [arXiv:1806.05195 [gr-qc]].

[2] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper.* (German) [*On the electrodynamics of moving bodies*]. Annalen der Physik, 322(10):891–921, 1905.

[3] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2012.

[4] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1997.

[5] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* IOP Publishing, Bristol-Philadelphia, 2 edition, 2003.

[6] R. W. Sharpe. *Differential Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1997.

[7] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics.* Cambridge University Press, 1 edition, 2004.

[8] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* San Francisco, USA: Addison-Wesley, 1 edition, 2004

[9] C. Brans and R. H. Dicke. *Mach's principle and a Relativistic Theory of Gravitation.* Phys. Rev. 124 (1961) 925. doi:10.1103/PhysRev.124.925

[10] T.Kolyvaris. *Μελέτη μελανών οπών συζευγμένων με βαθμωτά πεδία* (Greek) [*Study of Black Hole Solutions coupled with Scalar fields*]. Ph.D Thesis, NTU Athens, September 2013.

[11] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis *Modifed Gravity and Cosmology.* Phys. Rept. 513 (2012) 1 doi:10.1016/j.physrep.2012.01.001 [arXiv:1106.2476 [astro-ph]].

[12] R. G. Cai and Y. S. Myung. *Black holes in the Brans-Dicke-Maxwell Theory.* Phys. Rev. D 56 (1997) 3466 doi:10.1103/PhysRevD.56.3466 [gr-qc/9702037].

[13] B. C. Xanthopoulos and T. Zannias. *Einstein Gravity Coupled to a Massless Scalar Field in Arbitrary Space-time Dimensions.* Phys. Rev. D 40 (1989) 2564. doi:10.1103/PhysRevD.40.2564

[14] G. Kofinas.*The Complete Brans-Dicke Theory.* [arXiv:1510.06845 [gr-qc]]

[15] G. Kofinas and M. Tsoukalas.*The action Complete Brans-Dicke Theory.* [arXiv:1512.04786 [gr-qc]]

[16] C. H. Brans. *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. II.* Phys. Rev. 125, 2194 (1962)

[17] V. Faraoni, F. Hammad and S. D. Belknap-Keet. *Revisiting the Brans solutions of scalar-tensor gravity.* Phys. Rev. D 94 (2016) 104019 doi:10.1103/PhysRevD.94.104019 [arXiv:1609.02783 [gr-qc]]

[18] C. Brans and R. H. Dicke, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

[19] P. G. O. Freund, "Kaluza-Klein Cosmologies," Nucl. Phys. B **209**, 146 (1982); T. Appelquist, A. Chodos and P.G.O. Freund, Modern Kaluza-Klein theories, Addison-Wesley (1987); E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, "Effective Field Theory from Quantized Strings," Phys. Lett. B **158**, 316 (1985); E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, "Quantum String Theory Effective Action," Nucl. Phys. B **261**, 1 (1985); C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry and D. Friedan, "Strings in Background Fields," Nucl. Phys. B **262**, 593 (1985); C. G. Callan, Jr., I. R. Klebanov and M. J. Perry, "String Theory Effective Actions," Nucl. Phys. B **278**, 78 (1986).

[20] B. Bertotti, L. Iess and P. Tortora, "A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft," Nature **425**, 374 (2003); C. M. Will, "The Confrontation between general relativity and experiment," Living Rev. Rel. **9**, 3 (2006) [gr-qc/0510072]; A. De Felice, G. Mangano, P. D. Serpico and M. Trodden, "Relaxing nucleosynthesis constraints on brans-dicke theories," Phys. Rev. D **74**, 103005 (2006) [astro-ph/0510359].

[21] A. I. Vainshtein, "To the problem of nonvanishing gravitation mass," Phys. Lett. **B39**, 393-394 (1972).

[22] E. Babichev and C. Deffayet, "An introduction to the Vainshtein mechanism," arXiv:1304.7240 [gr-qc].

[23] V. Acquaviva, C. Baccigalupi, S. M. Leach, A. R. Liddle and F. Perrotta, "Structure formation constraints on the Jordan-Brans-Dicke theory," Phys. Rev. D **71**, 104025 (2005) [astro-ph/0412052]; J. C. Fabris, S. V. B. Goncalves and R. de Sa Ribeiro, "Late time accelerated brans-dicke pressureless solutions and the supernovae type ia data," Grav. Cosmol. **12**, 49 (2006) [astro-ph/0510779]; A. Avilez and C. Skordis, "Cosmological constraints on Brans-Dicke theory," Phys. Rev. Lett. **113**, no. 1, 011101 (2014) [arXiv:1303.4330 [astro-ph.CO]]; Y. C. Li, F. Q. Wu and X. Chen, "Constraints on the Brans-Dicke gravity theory with the Planck data," Phys. Rev. D **88**, 084053 (2013) [arXiv:1305.0055 [astro-ph.CO]]; O. Hrycyna, M. Szydlowski and M. Kamionka, "Dynamics and cosmological constraints on Brans-Dicke cosmology," Phys. Rev. D **90**, no. 12, 124040 (2014) [arXiv:1404.7112 [astro-ph.CO]].

[24] P. D. Mannheim, "Attractive and repulsive gravity," Found. Phys. **30**, 709 (2000) [gr-qc/0001011]; A. Barnaveli and M. Gogberashvili, Gen. Rel. Grav. 26, 1117(1994).

[25] H. Nariai, Prog. Theor. Phys. 40, 49 (1968); H. Nariai, Prog. Theor. Phys. 42, 544 (1968).

[26] R. E. Morganstern, "Exact Solutions to Radiation-Filled Brans-Dicke Cosmologies," Phys. Rev. D **4**, 282 (1971); O. Obregon and P. Chauvet, "Exact Solutions to Radiation-Filled Brans-Dicke Closed Space Cosmology," Astrophys. Space Sci. **56**, 335 (1978).

[27] J. O' Hanlon and B. O. J. Tupper, "Vacuum-field solutions in the Brans-Dicke theory," Nuovo Cim. B **7**, 305 (1972); C. Romero and A. Barros, General Relativity and Gravitation 25, 491 (1993); C. Romero, A. Barros, Astrophysics and Space Science 192, 263 (1992); J. M. Cervero, P. G. Estevez, Astrophysics and Space Science 15, (1984).

[28] L.E. Gurevich, A.M. Finkelstein and V.A. Ruban, Astrophys. Spac. Sci. 22, 231 (1973); R. E. Morganstern, "Exact solutions to brans-dicke cosmologies in flat friedmann universes," Phys. Rev. D **4**, 946 (1971).

[29] D. Lorenz−Petzold, Astrophys. Space Sci. 98, 101 (1984); ibid 98, 249 (1984); ibid 106, 419 (1984); J.D. Barrow, Phys. Rev. D 47, 5329 (1993); J. J. Levin and K. Freese, "Curvature and flatness in a Brans-Dicke universe," Nucl. Phys. B **421**, 635 (1994) [gr-qc/9312025]; J. P. Mimoso and D. Wands, "Massless fields in scalar - tensor cosmologies," Phys. Rev. D **51**, 477 (1995) [gr-qc/9405025].

[30] V.A. Ruban and A.M. Finkelstein, Astrofizika 12, 371 (1976); N. Van den Bergh, Gen. Rel. Gray. 15, 441 (1983).

[31] K. Uehara and C. W. Kim, "Brans-dicke Cosmology With the Cosmological Constant," Phys. Rev. D **26**, 2575 (1982); N. Riazi and E. Ahmadi-Azar, "A Class of Exact Cosmological Solutions of Brans-Dicke Theory With Cosmological Constant," Astrophys. Space Sci. **226**, 1 (1995); L. O. Pimentel, Astrophysics and Space Science 112, 175 (1985); S. Ram and C. P. Singh, "Early cosmological models with bulk viscosity in Brans-Dicke theory," Astrophys. Space Sci. **254**, 143 (1997); S. N. Pandey, Astrophysics and Space Science Supplement 277, 403 (2001).

[32] S.W. Weinberg, Gravitation and Cosmology (J. Wiley, New York, 1972); O. Bertolami, Fortschr. Phys. 34 (1986) 12, 829; J. D. Barrow, "Scalar - tensor cosmologies," Phys. Rev. D **47**, 5329 (1993); V.B. Johri and K. Desikan, Gen. Rel. and Grav. 26, 12 (1994) 1217; Phys. Rev. D47, 10 (1993) 4282; S. Capozziello, R. De Ritis, C. Rubano and P. Scudellaro, Int. J. Mod. Phys. 5, 1 (1996) 85.

[33] C. Park and S. J. Sin, "P-brane cosmology and phases of Brans-Dicke theory with matter," Phys. Rev. D **57**, 4620 (1998) [hep-th/9707003]; S. Kalyana Rama, "Can string theory avoid cosmological singularities?," Phys. Lett. B **408**, 91 (1997) [hep-th/9701154].

[34] C. Mathiazhagan and V. B. Johri, "An Inflationary Universe In Brans-dicke Theory: A Hopeful Sign Of Theoretical Class. Quant. Grav. **1**, L29 (1984).

[35] D. La and P. J. Steinhardt, "Extended Inflationary Cosmology," Phys. Rev. Lett. **62**, 376 (1989); Phys. Rev. Lett. **62**, 1066 (1989).

[36] C. H. Brans, "Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. II," Phys. Rev. **125**, 2194 (1962).

[37] S. W. Hawking, "Black holes in the Brans-Dicke theory of gravitation," Commun. Math. Phys. **25**, 167 (1972).

[38] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, "Black holes in scalar-tensor gravity," Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 081103 [arXiv:1109.6324 [gr-qc]].

[39] S. Bhattacharya, K. F. Dialektopoulos, A. E. Romano and T. N. Tomaras, "Brans-Dicke Theory with $\Lambda > 0$: Black Holes and Large Scale Structures," Phys. Rev. Lett. **115** (2015) no.18, 181104 [arXiv:1505.02375 [gr-qc]].

[40] M. Campanelli and C. O. Lousto, "Are black holes in Brans-Dicke theory precisely the same as a general relativity?," Int. J. Mod. Phys. D **2**, 451 (1993) [gr-qc/9301013].

[41] L. Vanzo, S. Zerbini and V. Faraoni, "The Campanelli-Lousto and veiled spacetimes," Phys. Rev. D **86** (2012) 084031 [arXiv:1208.2513 [gr-qc]].

[42] A. G. Agnese and M. La Camera, "Wormholes in the Brans-Dicke theory of gravitation," Phys. Rev. D **51** (1995) 2011.

[43] M. Visser and D. Hochberg, "Generic wormhole throats," Annals Israel Phys. Soc. **13** (1997) 249 [gr-qc/9710001].

[44] V. Faraoni, F. Hammad and S. D. Belknap-Keet, "Revisiting the Brans solutions of scalar-tensor gravity," Phys. Rev. D **94** (2016) no.10, 104019 [arXiv:1609.02783 [gr-qc]].

[45] R. G. Cai and Y. S. Myung, "Black holes in the Brans-Dicke-Maxwell theory," Phys. Rev. D **56**, 3466 (1997) [gr-qc/9702037].

[46] G. Kofinas, "The complete Brans-Dicke theories," Annals Phys. **376**, 425 (2017) [arXiv:1510.06845 [gr-qc]].

[47] G. Kofinas and M. Tsoukalas, "On the action of the complete Brans–Dicke theory," Eur. Phys. J. C **76**, no. 12, 686 (2016) [arXiv:1512.04786 [gr-qc]].

[48] G. Kofinas, E. Papantonopoulos and E. N. Saridakis, "Modified Brans –Dicke cosmology with matter-scalar field interaction," Class. Quant. Grav. **33**, no. 15, 155004 (2016) [arXiv:1602.02687 [gr-qc]].

[49] F. S. N. Lobo and M. A. Oliveira, "General class of vacuum Brans-Dicke wormholes," Phys. Rev. D **81**, 067501 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.81.067501 [arXiv:1001.0995 [gr-qc]].

[50] C. J. Gao and S. N. Zhang, "Black holes in Brans-Dicke theory with a cosmological constant," gr-qc/0604083.

[51] B. C. Xanthopoulos and T. Zannias, "Einstein Gravity Coupled to a Massless Scalar Field in Arbitrary Space-time Dimensions," Phys. Rev. D **40**, 2564 (1989).

[52] O. Lunin and S. D. Mathur, Nucl. Phys. B **623** (2002), 342-394 doi:10.1016/S0550-3213(01)00620-4 [arXiv:hep-th/0109154 [hep-th]].

[53] K. Skenderis and M. Taylor, Phys. Rept. **467** (2008), 117-171 doi:10.1016/j.physrep.2008.08.001 [arXiv:0804.0552 [hep-th]].

[54] M. Saravani, N. Afshordi and R. B. Mann, Int. J. Mod. Phys. D **23** (2015) no.13, 1443007 doi:10.1142/S021827181443007X [arXiv:1212.4176 [hep-th]].

[55] T. Shiromizu, K. i. Maeda and M. Sasaki, Phys. Rev. D **62** (2000), 024012 doi:10.1103/PhysRevD.62.024012 [arXiv:gr-qc/9910076 [gr-qc]].

[56] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 4690-4693 doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690 [arXiv:hep-th/9906064 [hep-th]].

[57] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski and J. Sully, JHEP **02** (2013), 062 doi:10.1007/JHEP02(2013)062 [arXiv:1207.3123 [hep-th]].

[58] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity,” Am. J. Phys. **56**, 5 (1988).

[59] M. Visser, “Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking,” Woodbury, USA: AIP (1995) 412 p.

[60] V. A. Rubakov, “The Null Energy Condition and its violation,” Phys. Usp. **57**, 128 (2014) [Usp. Fiz. Nauk **184**, no. 2, 137 (2014)] [arXiv:1401.4024 [hep-th]].

[61] O. A. Evseev and O. I. Melichev, “No static spherically symmetric wormholes in Horndeski theory,” Phys. Rev. D **97** (2018) no.12, 124040 [arXiv:1711.04152 [gr-qc]].

[62] G. Franciolini, L. Hui, R. Penco, L. Santoni and E. Trincherini, “Stable wormholes in scalar-tensor theories,” JHEP **1901** (2019) 221 [arXiv:1811.05481 [hep-th]].

[63] S. Mironov, V. Rubakov and V. Volkova, “More about stable wormholes in beyond Horndeski theory,” Class. Quant. Grav. **36** (2019) no.13, 135008 [arXiv:1812.07022 [hep-th]].

[64] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.6, 061102 doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]].

[65] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.22, 221101 [erratum: Phys. Rev. Lett. **121** (2018) no.12, 129902] doi:10.1103/PhysRevLett.116.221101 [arXiv:1602.03841 [gr-qc]].

[66] A. Buonanno, G. B. Cook and F. Pretorius, Phys. Rev. D **75** (2007), 124018 doi:10.1103/PhysRevD.75.124018 [arXiv:gr-qc/0610122 [gr-qc]].

[67] E. Berti, V. Cardoso, J. A. Gonzalez, U. Sperhake, M. Hannam, S. Husa and B. Bruegmann, Phys. Rev. D **76** (2007), 064034 doi:10.1103/PhysRevD.76.064034 [arXiv:gr-qc/0703053 [gr-qc]].

[68] P. O. Mazur and E. Mottola, Proc. Nat. Acad. Sci. **101** (2004), 9545-9550 doi:10.1073/pnas.0402717101 [arXiv:gr-qc/0407075 [gr-qc]].

[69] U. Sperhake, E. Berti and V. Cardoso, Comptes Rendus Physique **14** (2013), 306-317 doi:10.1016/j.crhy.2013.01.004 [arXiv:1107.2819 [gr-qc]].

[70] V. Cardoso, S. Hopper, C. F. B. Macedo, C. Palenzuela and P. Pani, “Gravitational-wave signatures of exotic compact objects and of quantum corrections at the horizon scale,” Phys. Rev. D **94** (2016) no.8, 084031 [arXiv:1608.08637 [gr-qc]].

[71] J. Abedi, H. Dykaar and N. Afshordi, “Echoes from the Abyss: Tentative evidence for Planck-scale structure at black hole horizons,” Phys. Rev. D **96**, no.8, 082004 (2017) [arXiv:1612.00266 [gr-qc]].

[72] G. Ashton, O. Birnholtz, M. Cabero, C. Capano, T. Dent, B. Krishnan, G. D. Meadors, A. B. Nielsen, A. Nitz and J. Westerweck, “Comments on: ”Echoes from the abyss: Evidence for Planck-scale structure at black hole horizons”,” [arXiv:1612.05625 [gr-qc]].

[73] J. Abedi, H. Dykaar and N. Afshordi, “Echoes from the Abyss: The Holiday Edition!,” [arXiv:1701.03485 [gr-qc]].

[74] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek and V. T. Zanchin, “Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes,” Phys. Rev. D **79**, 064016 (2009) [arXiv:0812.1806 [hep-th]].

[75] V. Cardoso, J. L. Costa, K. Destounis, P. Hintz and A. Jansen, "Quasinormal modes and Strong Cosmic Censorship," [arXiv:1711.10502 [gr-qc]].

[76] V. Cardoso, J. L. Costa, K. Destounis, P. Hintz and A. Jansen, "Strong cosmic censorship in charged black-hole spacetimes: still subtle," Phys. Rev. D **98**, no.10, 104007 (2018) [arXiv:1808.03631 [gr-qc]].

[77] K. Destounis, "Charged Fermions and Strong Cosmic Censorship," Phys. Lett. B **795**, 211-219 (2019) [arXiv:1811.10629 [gr-qc]].

[78] H. Liu, Z. Tang, K. Destounis, B. Wang, E. Papantonopoulos and H. Zhang, "Strong Cosmic Censorship in higher-dimensional Reissner-Nordström-de Sitter spacetime," JHEP **03**, 187 (2019) [arXiv:1902.01865 [gr-qc]].

[79] K. Destounis, R. D. B. Fontana, F. C. Mena and E. Papantonopoulos, "Strong Cosmic Censorship in Horndeski Theory," JHEP **10**, 280 (2019) [arXiv:1908.09842 [gr-qc]].

[80] K. Destounis, R. D. B. Fontana and F. C. Mena, "Accelerating black holes: quasinormal modes and late-time tails," Phys. Rev. D **102**, no.4, 044005 (2020) [arXiv:2005.03028 [gr-qc]].

[81] K. Destounis, R. D. B. Fontana and F. C. Mena, "Stability of the Cauchy horizon in accelerating black-hole spacetimes," Phys. Rev. D **102**, no.10, 104037 (2020) [arXiv:2006.01152 [gr-qc]].

[82] C. W. Misner and J. A. Wheeler, Ann. Phys.2, 525 (1957); C. W. Misner, Phys. Rev.118, 1110 (1960).

[83] J. A. Wheeler, Ann. Phys.2, 604 (1957);J. A. Wheeler, Geometrodynamics (Academic, New York, 1962).

[84] M.S. Morris and K.S. Thorne, Am. J. Phys.56, 395 (1988); M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett.61, 1446 (1988).

[85] V. Sahni and A. A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D09, 373 (2000); S. M. Carroll, Living Rev. Rel.4, 1 (2001); P. J. E. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys.75, 559 (2003); P. F. Gonzales-Diaz, Phys. Rev. D65, 104035 (2002).

[86] E. Poisson and M. Visser, "Thin shell wormholes: Linearization stability," Phys. Rev. D **52**, 7318-7321 (1995) [arXiv:gr-qc/9506083 [gr-qc]].

[87] G. Antoniou, A. Bakopoulos, P. Kanti, B. Kleihaus and J. Kunz, "Novel Einstein–scalar-Gauss-Bonnet wormholes without exotic matter," Phys. Rev. D **101**, no.2, 024033 (2020) [arXiv:1904.13091 [hep-th]].

[88] M. R. Mehdizadeh, M. Kord Zangeneh and F. S. N. Lobo, "Higher-dimensional thin-shell wormholes in third-order Lovelock gravity," Phys. Rev. D **92**, no.4, 044022 (2015) [arXiv:1506.03427 [gr-qc]].

[89] K. K. Nandi, A. Islam and J. Evans, "Brans wormholes," Phys. Rev. D **55**, 2497-2500 (1997) [arXiv:0906.0436 [gr-qc]]; E. F. Eiroa, M. G. Richarte and C. Simeone, "Thin-shell wormholes in Brans-Dicke gravity," Phys. Lett. A **373**, 1-4 (2008) [erratum: Phys. Lett. **373**, 2399-2400 (2009)] [arXiv:0809.1623 [gr-qc]]; F. S. N. Lobo and M. A. Oliveira, "General class of vacuum Brans-Dicke wormholes," Phys. Rev. D **81**, 067501 (2010)

[arXiv:1001.0995 [gr-qc]]. S. V. Sushkov and S. M. Kozyrev, "Composite vacuum Brans-Dicke wormholes," Phys. Rev. D **84**, 124026 (2011) [arXiv:1109.2273 [gr-qc]]; E. Papantonopoulos and C. Vlachos, "Wormhole solutions in modified Brans-Dicke theory," Phys. Rev. D **101**, no.6, 064025 (2020) [arXiv:1912.04005 [gr-qc]].

[90] M. G. Richarte and C. Simeone, "Wormholes in Einstein-Born-Infeld theory," Phys. Rev. D **80**, 104033 (2009) [erratum: Phys. Rev. D **81**, 109903 (2010)] [arXiv:2006.12272 [gr-qc]]; N. M. Garcia and F. S. N. Lobo, "Wormhole geometries supported by a nonminimal curvature-matter coupling," Phys. Rev. D **82**, 104018 (2010) [arXiv:1007.3040 [gr-qc]]; N. Montelongo Garcia and F. S. N. Lobo, "Nonminimal curvature-matter coupled wormholes with matter satisfying the null energy condition," Class. Quant. Grav. **28**, 085018 (2011) [arXiv:1012.2443 [gr-qc]].

[91] M. G. Richarte and C. Simeone, "Thin-shell wormholes supported by ordinary matter in Einstein-Gauss-Bonnet gravity," Phys. Rev. D **76**, 087502 (2007) [erratum: Phys. Rev. D **77**, 089903 (2008)] [arXiv:0710.2041 [gr-qc]]; P. Kanti, B. Kleihaus and J. Kunz, "Wormholes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory," Phys. Rev. Lett. **107**, 271101 (2011) [arXiv:1108.3003 [gr-qc]]; M. R. Mehdizadeh, M. Kord Zangeneh and F. S. N. Lobo, "Einstein-Gauss-Bonnet traversable wormholes satisfying the weak energy condition," Phys. Rev. D **91**, no.8, 084004 (2015) [arXiv:1501.04773 [gr-qc]]; M. Kord Zangeneh, F. S. N. Lobo and M. H. Dehghani, "Traversable wormholes satisfying the weak energy condition in third-order Lovelock gravity," Phys. Rev. D **92**, no.12, 124049 (2015) [arXiv:1510.07089 [gr-qc]]; G. Antoniou, A. Bakopoulos, P. Kanti, B. Kleihaus and J. Kunz, "Novel Einstein–scalar-Gauss-Bonnet wormholes without exotic matter," Phys. Rev. D **101**, no.2, 024033 (2020) [arXiv:1904.13091 [hep-th]].

[92] K. A. Bronnikov and A. M. Galiakhmetov, "Wormholes without exotic matter in Einstein–Cartan theory," Grav. Cosmol. **21**, no.4, 283-288 (2015) [arXiv:1508.01114 [gr-qc]]; K. A. Bronnikov and A. M. Galiakhmetov, "Wormholes and black universes without phantom fields in Einstein-Cartan theory," Phys. Rev. D **94**, no.12, 124006 (2016) [arXiv:1607.07791 [gr-qc]]; M. R. Mehdizadeh and A. H. Ziaie, "Dynamic wormhole solutions in Einstein-Cartan gravity," Phys. Rev. D **96**, no.12, 124017 (2017) [arXiv:1709.09028 [gr-qc]]; G. Kofinas, E. Papantonopoulos and E. N. Saridakis, "Self-Gravitating Spherically Symmetric Solutions in Scalar-Torsion Theories," Phys. Rev. D **91**, no.10, 104034 (2015) [arXiv:1501.00365 [gr-qc]]; I. P. Lobo, M. G. Richarte, J. P. Morais Graça and H. Moradpour, "Thin-shell wormholes in Rastall gravity," Eur. Phys. J. Plus **135**, no.7, 550 (2020) [arXiv:2007.05641 [gr-qc]].

[93] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10** (1974) 363-384.

[94] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, "Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors," Phys. Rev. D **80**, 064015 (2009) [arXiv:0906.1967].

[95] A. Cisterna and C. Erices, "Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario," Phys. Rev. D **89**, 084038 (2014) [arXiv:1401.4479 [gr-qc]].

[96] R. V. Korolev and S. V. Sushkov, "Exact wormhole solutions with nonminimal kinetic coupling," Phys. Rev. D **90**, 124025 (2014) [arXiv:1408.1235 [gr-qc]].

[97] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113-1133 (1999) [arXiv:hep-th/9711200 [hep-th]].

[98] S. A. Hartnoll, "Lectures on holographic methods for condensed matter physics," Class. Quant. Grav. **26**, 224002 (2009) [arXiv:0903.3246 [hep-th]].

[99] G. T. Horowitz and V. E. Hubeny, "Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium," Phys. Rev. D **62** (2000), 024027 [arXiv:hep-th/9909056 [hep-th]].

[100] J. M. Maldacena and L. Maoz, "Wormholes in AdS," JHEP **02**, 053 (2004) [arXiv:hep-th/0401024 [hep-th]].

[101] S. B. Giddings and A. Strominger, "Baby Universes, Third Quantization and the Cosmological Constant," Nucl. Phys. B **321**, 481-508 (1989).

[102] D. Marolf and H. Maxfield, "Transcending the ensemble: baby universes, spacetime wormholes, and the order and disorder of black hole information," JHEP **08**, 044 (2020) [arXiv:2002.08950 [hep-th]].

[103] M. Minamitsuji, "Black hole quasinormal modes in a scalar-tensor theory with field derivative coupling to the Einstein tensor," Gen. Rel. Grav. **46**, 1785 (2014) [arXiv:1407.4901 [gr-qc]].

[104] R. Dong, J. Sakstein and D. Stojkovic, "Quasinormal modes of black holes in scalar-tensor theories with nonminimal derivative couplings," Phys. Rev. D **96**, no.6, 064048 (2017) [arXiv:1709.01641 [gr-qc]].

[105] C. Gundlach, R. H. Price and J. Pullin, "Late time behavior of stellar collapse and explosions: 1. Linearized perturbations," Phys. Rev. D **49** (1994), 883-889 [arXiv:gr-qc/9307009 [gr-qc]].

[106] M. Dafermos and I. Rodnianski, [arXiv:1010.5132 [gr-qc]].

[107] F. Mellor and I. Moss, Phys. Rev. D **41** (1990), 403 doi:10.1103/PhysRevD.41.403

[108] B. Wang, C. Molina and E. Abdalla, "Evolving of a massless scalar field in Reissner-Nordstrom Anti-de Sitter space-times," Phys. Rev. D **63** (2001), 084001 [arXiv:hep-th/0005143 [hep-th]].

[109] B. Wang, C. Y. Lin and E. Abdalla, Phys. Lett. B **481** (2000), 79-88 doi:10.1016/S0370-2693(00)00409-3 [arXiv:hep-th/0003295 [hep-th]].

[110] E. S. C. Ching, P. T. Leung, W. M. Suen and K. Young, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 2414-2417 doi:10.1103/PhysRevLett.74.2414 [arXiv:gr-qc/9410044 [gr-qc]].

[111] R. H. Price, Phys. Rev. D **5** (1972), 2439-2454 doi:10.1103/PhysRevD.5.2439

[112] R. H. Price, Phys. Rev. D **5** (1972), 2419-2438 doi:10.1103/PhysRevD.5.2419

[113] E. W. Leaver, "Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry," Phys. Rev. D **34**, 384-408 (1986).

[114] C. Gundlach, R. H. Price and J. Pullin, "Late time behavior of stellar collapse and explosions: 2. Nonlinear evolution," Phys. Rev. D **49**, 890-899 (1994) [arXiv:gr-qc/9307010 [gr-qc]].

[115] E. Abdalla, B. Cuadros-Melgar, J. de Oliveira, A. B. Pavan and C. E. Pellicer, "Vectorial and spinorial perturbations in Galileon Black Holes: Quasinormal modes, quasiresonant modes and stability," Phys. Rev. D **99**, no.4, 044023 (2019) [arXiv:1810.01198 [gr-qc]].

[116] G. Holzegel and J. Smulevici, "Decay properties of Klein-Gordon fields on Kerr-AdS spacetimes," Commun. Pure Appl. Math. **66**, 1751-1802 (2013) [arXiv:1110.6794 [gr-qc]].

[117] G. Holzegel and J. Smulevici, "Quasimodes and a Lower Bound on the Uniform Energy Decay Rate for Kerr-AdS Spacetimes," [arXiv:1303.5944 [gr-qc]].

[118] C. P. Burgess and C. A. Lutken, Phys. Lett. B **153** (1985), 137-141 doi:10.1016/0370-2693(85)91415-7

[119] V. Cardoso, R. Konoplya and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. D **68** (2003), 044024 doi:10.1103/PhysRevD.68.044024 [arXiv:gr-qc/0305037 [gr-qc]].

[120] J. Natario and R. Schiappa, Adv. Theor. Math. Phys. **8** (2004) no.6, 1001-1131 doi:10.4310/ATMP.2004.v8.n6.a4 [arXiv:hep-th/0411267 [hep-th]].

[121] C. Kehle, "Uniform Boundedness and Continuity at the Cauchy Horizon for Linear Waves on Reissner–Nordström–AdS Black Holes," Commun. Math. Phys. **376**, no.1, 145-200 (2019) [arXiv:1812.06142 [gr-qc]].

[122] C. Kehle, "Diophantine approximation as Cosmic Censor for Kerr-AdS black holes," [arXiv:2007.12614 [gr-qc]].

[123] R. Dey, S. Chakraborty and N. Afshordi, "Echoes from braneworld black holes," Phys. Rev. D **101**, no.10, 104014 (2020) [arXiv:2001.01301 [gr-qc]].

[124] R. Dey and N. Afshordi, "Echoes in Kerr/CFT," [arXiv:2009.09027 [hep-th]].

[125] K. Saraswat and N. Afshordi, "Quantum Nature of Black Holes: Fast Scrambling versus Echoes," JHEP **04**, 136 (2020) [arXiv:1906.02653 [hep-th]].

[126] K. A. Bronnikov and R. A. Konoplya, "Echoes in brane worlds: ringing at a black hole–wormhole transition," Phys. Rev. D **101** (2020) no.6, 064004 [arXiv:1912.05315 [gr-qc]].

[127] M. S. Churilova and Z. Stuchlik, "Ringing of the regular black-hole/wormhole transition," Class. Quant. Grav. **37** (2020) no.7, 075014 [arXiv:1911.11823 [gr-qc]].

[128] P. Bueno, P. A. Cano, F. Goelen, T. Hertog and B. Vercnocke, "Echoes of Kerr-like wormholes," Phys. Rev. D **97** (2018) no.2, 024040 [arXiv:1711.00391 [gr-qc]].

[129] O. Evnin and C. Krishnan, "A Hidden Symmetry of AdS Resonances," Phys. Rev. D **91**, no.12, 126010 (2015) [arXiv:1502.03749 [hep-th]].

[130] O. Fierro, D. Narbona, J. Oliva, C. Quijada and G. Rubilar, "Scalars on asymptotically locally AdS wormholes with $\mathcal{R}^2$ terms," [arXiv:1812.02089 [hep-th]].

[131] A. Anabalon, J. Oliva and C. Quijada, "Fully resonant scalars on asymptotically AdS wormholes," Phys. Rev. D **99**, no.10, 104022 (2019) [arXiv:1903.08239 [hep-th]].

[132] V. F. Foit and M. Kleban, "Testing Quantum Black Holes with Gravitational Waves," Class. Quant. Grav. **36**, no.3, 035006 (2019) [arXiv:1611.07009 [hep-th]].

[133] V. Cardoso, V. F. Foit and M. Kleban, “Gravitational wave echoes from black hole area quantization,” JCAP **08**, 006 (2019) [arXiv:1902.10164 [hep-th]].

[134] I. Agullo, V. Cardoso, A. del Rio, M. Maggiore and J. Pullin, “Gravitational-wave signatures of quantum gravity,” [arXiv:2007.13761 [gr-qc]].

[135] A. Coates, S. H. Völkel and K. D. Kokkotas, “Spectral Lines of Quantized, Spinning Black Holes and their Astrophysical Relevance,” Phys. Rev. Lett. **123**, no.17, 171104 (2019) [arXiv:1909.01254 [gr-qc]].

[136] R. A. Konoplya, “How to tell the shape of a wormhole by its quasinormal modes,” Phys. Lett. B **784**, 43-49 (2018) [arXiv:1805.04718 [gr-qc]].

[137] K. A. Bronnikov, “Scalar-tensor theory and scalar charge,” Acta Phys. Polon. B **4**, 251-266 (1973).

[138] H. G. Ellis, “Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity,” J. Math. Phys. **14**, 104-118 (1973).

[139] Z. P. Li and Y. S. Piao, “Mixing of gravitational wave echoes,” Phys. Rev. D **100**, no.4, 044023 (2019) [arXiv:1904.05652 [gr-qc]].

[140] K. Destounis, “Superradiant instability of charged scalar fields in higher-dimensional Reissner-Nordström-de Sitter black holes,” Phys. Rev. D **100**, no.4, 044054 (2019) [arXiv:1908.06117 [gr-qc]].

[141] K. A. Bronnikov and S. V. Grinyok, “Conformal continuations and wormhole instability in scalar-tensor gravity,” Grav. Cosmol. **10**, 237 (2004) [arXiv:gr-qc/0411063 [gr-qc]].

[142] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman and O. Sarbach, “Instability of wormholes supported by a ghost scalar field. I. Linear stability analysis,” Class. Quant. Grav. **26**, 015010 (2009) [arXiv:0806.0608 [gr-qc]].

[143] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman and O. Sarbach, “On the instability of charged wormholes supported by a ghost scalar field,” Phys. Rev. D **80**, 024023 (2009) [arXiv:0906.0420 [gr-qc]].

[144] K. A. Bronnikov, R. A. Konoplya and A. Zhidenko, “Instabilities of wormholes and regular black holes supported by a phantom scalar field,” Phys. Rev. D **86**, 024028 (2012) [arXiv:1205.2224 [gr-qc]].

[145] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman and O. Sarbach, “Instability of wormholes supported by a ghost scalar field. II. Nonlinear evolution,” Class. Quant. Grav. **26**, 015011 (2009) [arXiv:0806.1370 [gr-qc]].

[146] A. Doroshkevich, J. Hansen, I. Novikov and A. Shatskiy, “Passage of radiation through wormholes,” Int. J. Mod. Phys. D **18**, 1665-1691 (2009) [arXiv:0812.0702 [gr-qc]].

[147] LIGO Scientific and Virgo Collaborations collaboration, B. P. Abbott et al., Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 061102.

[148] VGW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence, Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 241103.

[149] VIRGO, LIGO SCIENTIFIC collaboration, B. P. Abbott et al., GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2, Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 221101.

[150] Virgo, LIGO Scientific collaboration, B. P. Abbott et al., GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence, Phys. Rev. Lett. 119 (2017) 141101.

[151] Virgo, LIGO Scientific collaboration, B. P. Abbott et al., GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, Phys. Rev. Lett. 119 (2017) 161101.

[152] C. V. Vishveshwara, Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-hole, Nature **227**, 936 (1970).

[153] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, Quasinormal modes of stars and black holes, Living Rev. Rel. **2**, 2 (1999) [gr-qc/9909058].

[154] E. Berti, V. Cardoso and A. O. Starinets, Quasinormal modes of black holes and black branes, Class. Quant. Grav. **26**, 163001 (2009) [arXiv:0905.2975 [gr-qc]].

[155] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory, Rev. Mod. Phys. **83**, 793 (2011) [arXiv:1102.4014 [gr-qc]].

[156] P. O. Mazur and E. Mottola, Gravitational condensate stars: An alternative to black holes, [arXiv:gr-qc/0109035 [gr-qc]].

[157] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446-1449 (1988).

[158] T. Damour and S. N. Solodukhin, Wormholes as black hole foils, Phys. Rev. D **76**, 024016 (2007) [arXiv:0704.2667 [gr-qc]].

[159] B. Holdom and J. Ren, Not quite a black hole, Phys. Rev. D **95**, no.8, 084034 (2017) [arXiv:1612.04889 [gr-qc]].

[160] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, Modified Gravity and Cosmology, Phys. Rept. **513**, 1-189 (2012) [arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO]].

[161] G.W. Horndeski, Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).

[162] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, The Galileon as a local modification of gravity. Phys. Rev. D **79**, 064036 (2009).

[163] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, A. Vikman, Covariant Galileon. Phys. Rev. D **79**, 084003 (2009).

[164] M. Ostrogradsky, Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. Mem. Acad. St. Petersbourg **6**(4), 385 (1850).

[165] R. P. Woodard, Avoiding dark energy with 1/r modifications of gravity, Lect. Notes Phys. **720**, 403-433 (2007) [arXiv:astro-ph/0601672 [astro-ph]].

[166] R. P. Woodard, Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability, Scholarpedia **10**, no.8, 32243 (2015) [arXiv:1506.02210 [hep-th]].

[167] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade, From k-essence to generalised Galileons, Phys. Rev. D **84**, 064039 (2011) [arXiv:1103.3260 [hep-th]].

[168] L. Amendola, Cosmology with nonminimal derivative couplings, Phys. Lett. B **301**, 175 (1993) [arXiv:gr-qc/9302010].

[169] S. V. Sushkov, Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling, Phys. Rev. D **80**, 103505 (2009) [arXiv:0910.0980 [gr-qc]].

[170] C. Germani, A. Kehagias, UV-Protected Inflation. Phys. Rev. Lett. **106**, 161302 (2011)

[171] G. Koutsoumbas, K. Ntrekis, E. Papantonopoulos and E. N. Saridakis, "Unification of Dark Matter - Dark Energy in Generalized Galileon Theories," JCAP **02**, 003 (2018) [arXiv:1704.08640 [gr-qc]].

[172] I. Dalianis, S. Karydas and E. Papantonopoulos, Generalized Non-Minimal Derivative Coupling: Application to Inflation and Primordial Black Hole Production, JCAP **06**, 040 (2020) [arXiv:1910.00622 [astro-ph.CO]].

[173] S. Karydas, E. Papantonopoulos and E. N. Saridakis, "Successful Higgs inflation from combined nonminimal and derivative couplings," Phys. Rev. D **104**, no.2, 023530 (2021) [arXiv:2102.08450 [gr-qc]].

[174] A. De Felice and S. Tsujikawa, "Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models," JCAP **02**, 007 (2012) [arXiv:1110.3878 [gr-qc]].

[175] E. Papantonopoulos, "Effects of the kinetic coupling of matter to curvature," Int. J. Mod. Phys. D **28**, no.05, 1942007 (2019)

[176] M. Baldi, F. Finelli and S. Matarrese, Inflation with violation of the null energy condition, Phys. Rev. D **72**, 083504 (2005) [arXiv:astro-ph/0505552 [astro-ph]].

[177] M. Libanov, V. Rubakov, E. Papantonopoulos, M. Sami and S. Tsujikawa, UV stable, Lorentz-violating dark energy with transient phantom era, JCAP **08**, 010 (2007) [arXiv:0704.1848 [hep-th]].

[178] E. N. Saridakis and S. V. Sushkov, Quintessence and phantom cosmology with nonminimal derivative coupling, Phys. Rev. D **81**, 083510 (2010) [arXiv:1002.3478 [gr-qc]].

[179] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos, G. Siopsis, Scalar Hair from a Derivative Coupling of a Scalar Field to the Einstein Tensor. Class. Quant. Grav. **29**, 205011 (2012)

[180] M. Rinaldi, Black holes with non-minimal derivative coupling, Phys. Rev. D **86**, 084048 (2012) [arXiv:1208.0103 [gr-qc]].

[181] T. Kolyvaris, G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos, G. Siopsis, Phase Transition to a Hairy Black Hole in Asymptotically Flat Spacetime. JHEP **11**, 133 (2013)

[182] C. Charmousis, T. Kolyvaris, E. Papantonopoulos, M. Tsoukalas, Black Holes in Bi-scalar Extensions of Horndeski Theories. JHEP **07**, 085 (2014).

[183] E. Babichev and C. Charmousis, Dressing a black hole with a time-dependent Galileon, JHEP **08** (2014), 106 [arXiv:1312.3204 [gr-qc]].

[184] J. D. Bekenstein, Novel "no-scalar-hair" theorem for black holes, Phys. Rev. D **51**, no.12, R6608 (1995)

[185] L. Hui and A. Nicolis, No-Hair Theorem for the Galileon, Phys. Rev. Lett. **110**, 241104 (2013) [arXiv:1202.1296 [hep-th]].

[186] S. S. Gubser, Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon, Phys. Rev. D **78**, 065034 (2008) [arXiv:0801.2977 [hep-th]].

[187] S. S. Gubser, Phase transitions near black hole horizons, Class. Quant. Grav. **22**, 5121-5144 (2005) [arXiv:hep-th/0505189 [hep-th]].

[188] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, Building a Holographic Superconductor, Phys. Rev. Lett. **101**, 031601 (2008) [arXiv:0803.3295 [hep-th]].

[189] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, Holographic Superconductors, JHEP **12**, 015 (2008) [arXiv:0810.1563 [hep-th]].

[190] X. M. Kuang and E. Papantonopoulos, "Building a Holographic Superconductor with a Scalar Field Coupled Kinematically to Einstein Tensor," JHEP **08**, 161 (2016) [arXiv:1607.04928 [hep-th]].

[191] C. Vlachos, E. Papantonopoulos and K. Destounis, Echoes of Compact Objects in Scalar-Tensor Theories of Gravity, Phys. Rev. D **103**, no.4, 044042 (2021) [arXiv:2101.12196 [gr-qc]].

[192] V. Cardoso, E. Franzin and P. Pani, Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon?, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.17, 171101 [arXiv:1602.07309 [gr-qc]].

[193] E. Barausse, "Black holes in General Relativity and beyond," MDPI Proc. **17**, no.1, 1 (2019).

[194] A. Lasenby, C. Doran, J. Pritchard, A. Caceres and S. Dolan, "Bound states and decay times of fermions in a Schwarzschild black hole background," Phys. Rev. D **72**, 105014 (2005).

[195] S. R. Dolan, "Instability of the massive Klein-Gordon field on the Kerr spacetime," Phys. Rev. D **76**, 084001 (2007).

[196] H. S. Vieira and K. D. Kokkotas, "Quasibound states of Schwarzschild acoustic black holes," Phys. Rev. D **104**, no.2, 024035 (2021).

[197] H. S. Vieira, K. Destounis and K. D. Kokkotas, "Slowly-rotating curved acoustic black holes: Quasinormal modes, Hawking-Unruh radiation, and quasibound states," Phys. Rev. D **105**, no.4, 045015 (2022).

[198] M. H. Y. Cheung, K. Destounis, R. P. Macedo, E. Berti and V. Cardoso, "Destabilizing the Fundamental Mode of Black Holes: The Elephant and the Flea," Phys. Rev. Lett. **128**, no.11, 111103 (2022).

[199] Z. Mark, A. Zimmerman, S. M. Du and Y. Chen, A recipe for echoes from exotic compact objects, Phys. Rev. D **96**, no.8, 084002 (2017) [arXiv:1706.06155 [gr-qc]].

[200] A. Maselli, S. H. Völkel and K. D. Kokkotas, Parameter estimation of gravitational wave echoes from exotic compact objects, Phys. Rev. D **96**, no.6, 064045 (2017) [arXiv:1708.02217 [gr-qc]].

[201] S. H. Völkel and K. D. Kokkotas, Wormhole Potentials and Throats from Quasi-Normal Modes, Class. Quant. Grav. **35**, no.10, 105018 (2018) [arXiv:1802.08525 [gr-qc]].

[202] R. A. Konoplya, Z. Stuchlík and A. Zhidenko, Echoes of compact objects: new physics near the surface and matter at a distance, Phys. Rev. D **99**, no.2, 024007 (2019) [arXiv:1810.01295 [gr-qc]].

[203] V. Cardoso and P. Pani, Testing the nature of dark compact objects: a status report, Living Rev. Rel. **22**, no.1, 4 (2019) [arXiv:1904.05363 [gr-qc]].

[204] E. Maggio, A. Testa, S. Bhagwat and P. Pani, Analytical model for gravitational-wave echoes from spinning remnants, Phys. Rev. D **100**, no.6, 064056 (2019) [arXiv:1907.03091 [gr-qc]].

[205] J. Abedi, N. Afshordi, N. Oshita and Q. Wang, Quantum Black Holes in the Sky, Universe **6**, no.3, 43 (2020) [arXiv:2001.09553 [gr-qc]].

[206] H. Liu, P. Liu, Y. Liu, B. Wang and J. P. Wu, Echoes from phantom wormholes, Phys. Rev. D **103**, no.2, 024006 (2021) [arXiv:2007.09078 [gr-qc]].

[207] N. Chatzifotis, G. Koutsoumbas and E. Papantonopoulos, "Formation of bound states of scalar fields in AdS-asymptotic wormholes," Phys. Rev. D **104**, no.2, 024039 (2021) [arXiv:2011.08770 [gr-qc]].

[208] S. Chandrasekhar, Mathematical theory of black holes (Clarendon Press, Oxford, 2006).

[209] Y. Gong, E. Papantonopoulos and Z. Yi, Constraints on scalar–tensor theory of gravity by the recent observational results on gravitational waves, Eur. Phys. J. C **78**, no.9, 738 (2018) [arXiv:1711.04102 [gr-qc]].

[210] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, Quasinormal modes of Schwarzschild anti-de Sitter black holes: Electromagnetic and gravitational perturbations, Phys. Rev. D **64**, 084017 (2001) [arXiv:gr-qc/0105103 [gr-qc]].

[211] E. Berti, V. Cardoso, J. A. Gonzalez and U. Sperhake, "Mining information from binary black hole mergers: A Comparison of estimation methods for complex exponentials in noise," Phys. Rev. D **75**, 124017 (2007) [arXiv:gr-qc/0701086 [gr-qc]].

[212] C. Deffayet, S. Mukohyama and A. Vikman, "Ghosts without runaway," [arXiv:2108.06294 [gr-qc]].

[213] T. Kobayashi, H. Motohashi and T. Suyama, "Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations I: the odd-parity sector," Phys. Rev. D **85**, 084025 (2012) [erratum: Phys. Rev. D **96**, no.10, 109903 (2017)] [arXiv:1202.4893 [gr-qc]].

[214] T. Kobayashi, H. Motohashi and T. Suyama, "Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations II: the even-parity sector," Phys. Rev. D **89**, no.8, 084042 (2014) [arXiv:1402.6740 [gr-qc]].

[215] H. Ogawa, T. Kobayashi and T. Suyama, "Instability of hairy black holes in shift-symmetric Horndeski theories," Phys. Rev. D **93**, no.6, 064078 (2016) [arXiv:1510.07400 [gr-qc]].

[216] J. Khoury, M. Trodden and S. S. C. Wong, "Existence and instability of hairy black holes in shift-symmetric Horndeski theories," JCAP **11**, 044 (2020) [arXiv:2007.01320 [astro-ph.CO]].

[217] T. Baker, E. Bellini, P. G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller and I. Sawicki, "Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A," Phys. Rev. Lett. **119**, no.25, 251301 (2017) [arXiv:1710.06394 [astro-ph.CO]].

[218] P. Creminelli and F. Vernizzi, "Dark Energy after GW170817 and GRB170817A," Phys. Rev. Lett. **119**, no.25, 251302 (2017) [arXiv:1710.05877 [astro-ph.CO]].

[219] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos and J. Levi Said, "Can Horndeski Theory be recast using Teleparallel Gravity?," Phys. Rev. D **100**, no.6, 064018 (2019) [arXiv:1904.10791 [gr-qc]].

[220] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, V. Gakis and J. Levi Said, "Reviving Horndeski theory using teleparallel gravity after GW170817," Phys. Rev. D **101**, no.8, 084060 (2020) [arXiv:1907.10057 [gr-qc]].

[221] S. Bahamonde, M. Caruana, K. F. Dialektopoulos, V. Gakis, M. Hohmann, J. Levi Said, E. N. Saridakis and J. Sultana, "Gravitational-wave propagation and polarizations in the teleparallel analog of Horndeski gravity," Phys. Rev. D **104**, no.8, 084082 (2021) [arXiv:2105.13243 [gr-qc]].

[222] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126**, 511-529 (2011) doi:10.1143/PTP.126.511 [arXiv:1105.5723 [hep-th]].

[223] P. Pani, Int. J. Mod. Phys. A **28** (2013), 1340018 doi:10.1142/S0217751X13400186 [arXiv:1305.6759 [gr-qc]].

[224] J. D. Bekenstein, "The Relation between physical and gravitational geometry," Phys. Rev. D **48**, 3641-3647 (1993) [arXiv:gr-qc/9211017 [gr-qc]].

[225] D. Bettoni and S. Liberati, 'Disformal invariance of second order scalar-tensor theories: Framing the Horndeski action," Phys. Rev. D **88**, 084020 (2013) [arXiv:1306.6724 [gr-qc]].

[226] J. Ben Achour, D. Langlois and K. Noui, "Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations," Phys. Rev. D **93**, no.12, 124005 (2016) [arXiv:1602.08398 [gr-qc]].

[227] C. Deffayet and S. Garcia-Saenz, "Degeneracy, matter coupling, and disformal transformations in scalar-tensor theories," Phys. Rev. D **102**, no.6, 064037 (2020) [arXiv:2004.11619 [hep-th]].

[228] S. Tsujikawa, "Disformal invariance of cosmological perturbations in a generalized class of Horndeski theories," JCAP **04**, 043 (2015) [arXiv:1412.6210 [hep-th]].

[229] G. Domènech, A. Naruko and M. Sasaki, "Cosmological disformal invariance," JCAP **10**, 067 (2015) [arXiv:1505.00174 [gr-qc]].

[230] M. Minamitsuji and H. O. Silva, "Relativistic stars in scalar-tensor theories with disformal coupling," Phys. Rev. D **93**, no.12, 124041 (2016) [arXiv:1604.07742 [gr-qc]].

[231] D. Langlois, "Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor (DHOST) theories," [arXiv:1707.03625 [gr-qc]].

[232] D. Langlois, "Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (DHOST) theories: A review," Int. J. Mod. Phys. D **28** (2019) no.05, 1942006 [arXiv:1811.06271 [gr-qc]].

[233] J. Ben Achour, H. Liu and S. Mukohyama, "Hairy black holes in DHOST theories: Exploring disformal transformation as a solution-generating method," JCAP **02** (2020), 023 [arXiv:1910.11017 [gr-qc]].

[234] V. Faraoni and A. Leblanc, "Disformal mappings of spherical DHOST geometries," [arXiv:2107.03456 [gr-qc]].

[235] J. Ben Achour, H. Liu, H. Motohashi, S. Mukohyama and K. Noui, "On rotating black holes in DHOST theories," JCAP **11**, 001 (2020) [arXiv:2006.07245 [gr-qc]].

[236] C. Erices, P. Filis and E. Papantonopoulos, "Hairy black holes in disformal scalar-tensor gravity theories," Phys. Rev. D **104** (2021) no.2, 024031 [arXiv:2104.05644 [gr-qc]].

[237] N. Chatzifotis, C. Vlachos, K. Destounis and E. Papantonopoulos, "Stability of black holes with non-minimally coupled scalar hair," [arXiv:2109.02678 [gr-qc]].

[238] D. Hochberg and M. Visser, "Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat," Phys. Rev. D **56**, 4745-4755 (1997) [arXiv:gr-qc/9704082 [gr-qc]].

[239] Z. Stuchlík and J. Vrba, "Epicyclic Oscillations around Simpson–Visser Regular Black Holes and Wormholes," Universe **7**, no.8, 279 (2021) [arXiv:2108.09562 [gr-qc]].

[240] S. Chakrabarti and S. Kar, "Wormhole geometry from gravitational collapse," Phys. Rev. D **104**, no.2, 024071 (2021) [arXiv:2106.14761 [gr-qc]].

[241] G. Domènech, A. Naruko, M. Sasaki and C. Wetterich, "Could the black hole singularity be a field singularity?," Int. J. Mod. Phys. D **29**, no.03, 2050026 (2020) [arXiv:1912.02845 [gr-qc]].

[242] E. Franzin, S. Liberati, J. Mazza, A. Simpson and M. Visser, "Charged black-bounce spacetimes," JCAP **07**, 036 (2021) [arXiv:2104.11376 [gr-qc]].

[243] S. U. Islam, J. Kumar and S. G. Ghosh, "Strong gravitational lensing by rotating Simpson–Visser black holes," [arXiv:2104.00696 [gr-qc]].

[244] N. Tsukamoto, "Gravitational lensing in the Simpson-Visser black-bounce spacetime in a strong deflection limit," Phys. Rev. D **103**, no.2, 024033 (2021) [arXiv:2011.03932 [gr-qc]].

[245] F. S. N. Lobo, M. E. Rodrigues, M. V. d. S. Silva, A. Simpson and M. Visser, "Novel black-bounce spacetimes: wormholes, regularity, energy conditions, and causal structure," Phys. Rev. D **103**, no.8, 084052 (2021) [arXiv:2009.12057 [gr-qc]].

[246] A. Simpson and M. Visser, "Black-bounce to traversable wormhole," JCAP **02**, 042 (2019) [arXiv:1812.07114 [gr-qc]].

[247] O. Evnin, H. Demirchian and A. Nersessian, "Mapping superintegrable quantum mechanics to resonant spacetimes," Phys. Rev. D **97**, no.2, 025014 (2018) [arXiv:1711.03297 [hep-th]].

[248] R. Shaikh, K. Pal, K. Pal and T. Sarkar, "Constraining alternatives to the Kerr black hole," Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **506**, no.1, 1229-1236 (2021) [arXiv:2102.04299 [gr-qc]].

[249] T. Torii, H. Yajima and K. i. Maeda, "Dilatonic black holes with Gauss-Bonnet term," Phys. Rev. D **55** (1997), 739-753 doi:10.1103/PhysRevD.55.739 [arXiv:gr-qc/9606034 [gr-qc]].

[250] D. C. Zou and Y. S. Myung, "Radial perturbations of the scalarized black holes in Einstein-Maxwell-conformally coupled scalar theory," Phys. Rev. D **102** (2020) no.6, 064011 doi:10.1103/PhysRevD.102.064011 [arXiv:2005.06677 [gr-qc]].

[251] J. L. Blázquez-Salcedo, D. D. Doneva, J. Kunz and S. S. Yazadjiev, "Radial perturbations of the scalarized Einstein-Gauss-Bonnet black holes," Phys. Rev. D **98** (2018) no.8, 084011 doi:10.1103/PhysRevD.98.084011 [arXiv:1805.05755 [gr-qc]].

[252] J. L. Blázquez-Salcedo, D. D. Doneva, J. Kunz and S. S. Yazadjiev, "Radial perturbations of scalar-Gauss-Bonnet black holes beyond spontaneous scalarization," [arXiv:2203.00709 [gr-qc]].

[253] V. Cardoso, K. Destounis, F. Duque, R. P. Macedo and A. Maselli, "Black holes in galaxies: Environmental impact on gravitational-wave generation and propagation," Phys. Rev. D **105** (2022) no.6, L061501 doi:10.1103/PhysRevD.105.L061501 [arXiv:2109.00005 [gr-qc]].

[254] J. M. Ezquiaga, W. Hu, M. Lagos, M. X. Lin and F. Xu, "Modified gravitational wave propagation with higher modes and its degeneracies with lensing," [arXiv:2203.13252 [gr-qc]].