



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Παπαδόπουλος

Εφαρμογή Μεθόδου Εναλλασσουσών Προβολών σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών και Ελαχιστοποίησης

ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Νικόλαος Γιαννακάκης, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Νικόλαος Γιαννακάκης, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

Γεώργιος Σμυρλής, Αναπληρωτής Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

Δημοσθένης Δριβαλιάρης, Αναπληρωτής Καθηγητής,
Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΑΘΗΝΑ, Φεβρουάριος, 2024

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρώτα απ' όλα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Γιαννακακή, αφενός για όλη τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της δημιουργίας αυτής της εργασίας και για τον χρόνο που αφιέρωσε και αφετέρου γιατί μέσα από το μάθημα του απέκτησα το ενδιαφέρον μου για τον συγκεκριμένο τομέα των μαθηματικών.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Σμυρλή και τον κύριο Δριβαλιάρη για την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου που με στήριζαν ο καθένας με τον δικό του τρόπο όλον αυτόν τον καιρό.

.....

Όνομα

Επώνυμο

©(2024) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία, βρίσκεται στην επιστημονική περιοχή της Συναρτησιακής Ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα ασχολείται με τις εφαρμογές της Μεθόδου Εναλλασσουσών Προβολών πάνω σε προβλήματα συνοριακών τιμών και προβλήματα ελαχιστοποίησης. Η μέθοδος αυτή, βασίζεται σε μια επαναληπτική μέθοδο του Schwarz, η οποία επιλύει προβλήματα όμοια με το αρχικό σε μικρότερα χωρία και η σύγκλιση της μεθόδου αποδεικνύεται με την Αρχή Μεγίστου. Η μέθοδος των Εναλλασσουσών Προβολών, αποτελεί μια παραλλαγή της μεθόδου του Schwarz στην οποία αφενός, διασπάμε το αρχικό χωρίο σε μικρότερα χωρία και λύνουμε παρόμοια προβλήματα ξεχωριστά. Αφετέρου εναλλασσόμαστε από το ένα χωρίο στο άλλο με μία ακολουθία ορθογωνίων προβολών.

Στο πρώτο και εισαγωγικό κεφάλαιο, ορίζονται κάποιες βασικές έννοιες που χρησιμοποιούμε και επικαλούμαστε σε όλη την εργασία όπως, οι συναρτησιακοί χώροι στους οποίους εργαζόμαστε και η έννοια των προβολών σε χώρους Banach.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, βλέπουμε πως εφαρμόζεται η μέθοδος των εναλλασσουσών προβολών σε προβλήματα συνοριακών τιμών, όπως η εξίσωση Laplace και η εξίσωση του Stokes. Επίσης στο κεφάλαιο αυτό, αναλύουμε την μέθοδο αυτή για το πρόβλημα Dirichlet της εξίσωσης Laplace, αλλά αυτή τη φορά δείχνουμε ποικίλους τρόπους όπου μπορούμε να διαχωρίσουμε το αρχικό χωρίο που ορίζεται το πρόβλημα.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε δύο σύντομες εφαρμογές πάνω σε κάποια προβλήματα ελαχιστοποίησης συναρτησιακών.

Λέξεις κλειδιά:

Προβολές

Χώροι Hilbert

Διαχωρισμός χωρίων

Μέθοδος Εναλλασσουσών Προβολών

Σύγκλιση

Προβλήματα συνοριακών τιμών

Προβλήματα ελαχιστοποίησης

Abstract

This thesis is in the scientific field of Functional Analysis and more specifically, it is about the applications of the Alternating Projection Method on boundary value problems and minimization problems. This method is based on an iterative method by Schwarz, which solves problems to the initial one, in subdomains and its convergence is proved by the use of Maximum Principle. The Alternating Projection Method, is a variation of Schwarz method in which, on the one hand we decompose the initial domain into subdomains and we solve similar problems separately. On the other hand, we alternate from one subdomain to the other via a sequence of orthogonal projections. In the first and introductory chapter, we define some term we use throughout all this thesis such as, functional spaces and projections onto Banach spaces. In the second chapter, we see the applications of this method on boundary value problems such as Laplace equation and Stokes equation. Moreover in this chapter, we analyse the method for the Dirichlet boundary problem of the Laplace equation but in this case we introduce other ways to decompose our initial domain. Lastly, in the third chapter, we show two short applications of this method on minimization problems.

Keywords :

Projections

Hilbert Spaces

Domain decomposition

Alternating Projection Method

Convergence

Boundary Value Problems

Minimization Problems

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
1.1	Συναρτησιακοί Χώροι	2
1.2	Προβολές	9
1.3	Προβλήματα συνοριακών τιμών	15
2	Εφαρμογή σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών	19
2.1	Εξίσωση Laplace	19
2.2	Εξίσωση Stokes	29
2.3	Επέκταση σε περισσότερα υποχώρια	31
2.3.1	Ακολουθιακός διαχωρισμός	31
2.3.2	Διαχωρισμός σε βήματα	33
2.3.3	Παράλληλος διαχωρισμός	34
3	Εφαρμογή σε προβλήματα ελαχιστοποίησης	42
3.1	Εφαρμογή 1	42
3.2	Εφαρμογή 2	46

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Συναρτησιακοί Χώροι

Ορισμός 1.1.1. Ένας πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή ένας χώρος με νόρμα στον οποίο κάθε Cauchy ακολουθία συγκλίνει, ονομάζεται χώρος *Banach*.

Ορισμός 1.1.2. Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο ο οποίος είναι χώρος *Banach* με τη νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο αυτό, καλείται χώρος *Hilbert*.

Θεώρημα (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Έστω $x, y \in H$ *Hilbert* τότε ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Απόδειξη. Αρχικά αν $y = 0$ η ανισότητα ισχύει. Έστω $y \neq 0$. Αν λy είναι η ορθογώνια προβολή του x στο y τότε

$$\|x\|^2 = \|x - \lambda y + \lambda y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2 + \|\lambda y\|^2 \geq \|\lambda y\|^2$$

$$\|x\|^2 \geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

Άρα

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

□

Θεώρημα. Έστω H χώρος Hilbert, V κλειστός υπόχωρος του H και $x \in H$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in V$ τέτοιο ώστε

$$d(x, V) = \|x - y\|$$

Δηλαδή, σε έναν χώρο Hilbert η απόσταση ενός σημείου από έναν υπόχωρο V , η οποία ορίζεται ως

$$d(x, V) := \inf\{\|x - y\| \quad : \quad y \in V\}$$

επιτυγχάνεται.

Απόδειξη. Έστω $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία του V με

$$d(x, V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$$

Θα δείξουμε ότι η (y_n) είναι Cauchy. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|y_n - x + x - y_m\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|y_n - x - x + y_m\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2(x - \frac{y_n + y_m}{2})\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \end{aligned}$$

Αφού ο V είναι υπόχωρος, έχουμε ότι $\frac{y_n + y_m}{2} \in V$, άρα:

$$\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\| \geq d(x, V)$$

Επομένως

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2 - 4d(x, V)^2$$

Τελικά $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ για $n, m \rightarrow \infty$.

Τώρα, αφού ο H είναι Hilbert, υπάρχει $y \in H$ με $\lim y_n = y$ και αφού ο V είναι

κλειστός, $y \in V$.

Τότε όμως

$$\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d(x, y)$$

Το y είναι μοναδικό καθώς, αν $y_1, y_2 \in V$ και $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, V)$, τότε:

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \|y_1 - x + x - y_2\|^2 \\ &= 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 - \|y_1 - x - x + y_2\|^2 \\ &= 4d(x, V)^2 - 4\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\|^2 \leq 4d(x, V)^2 - 4d(x, V)^2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα, $y_1 = y_2$.

□

Χώροι L^p

Ορισμός 1.1.3. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$.

Ορίζουμε τον χώρο

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{μετρήσιμη στο } \Omega, \text{ τ.ω. } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$$

Οι χώροι αυτοί είναι *Banach* με νόρμα:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

για $p = \infty$, έχουμε τον χώρο $L^\infty(\Omega)$ που είναι το σύνολο των ομοιόμορφως φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή, οι μετρήσιμες συναρτήσεις που είναι φραγμένες σε όλο το Ω εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν και έχει νόρμα:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{esssup}_\Omega |u| = \inf \{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ σπ}\}$$

Ασθενείς παράγωγοι

Αρχικά, με $C_c^\infty(\Omega)$ συμβολίζουμε τον χώρο των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα στο Ω και καλούμε τις $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ συναρτήσεις δοκιμής.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $u \in C^1(\Omega)$. Τότε εάν $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε:

$$\int_{\Omega} u \phi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \phi dx \quad i = 1, \dots, n$$

και γενικότερα για κάθε θετικό ακέραιο k , $u \in C^k(\Omega)$ και $a = (a_1, \dots, a_n)$ πολυδείκτη τάξης $|a| = a_1 + \dots + a_n = k$, έχουμε

$$\int_{\Omega} u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} D^a u \phi dx$$

και όπου $D^a \phi$ να είναι:

$$D^a \phi = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}$$

Τώρα, έστω $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ και α πολυδείκτης. Λέμε ότι v είναι η α -οστή ασθενής μερική παράγωγος του u και γράφουμε:

$$D^a u = v$$

εάν

$$\int_{\Omega} u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} v \phi dx$$

για κάθε συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Πρόταση 1.1.1. Η ασθενής α -οστή μερική παράγωγος είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω $v, \hat{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε

$$\int_{\Omega} u D^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} v \phi dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} \hat{v} \phi dx$$

για κάθε συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε έχουμε

$$\int_{\Omega} (v - \hat{v}) \phi dx = 0$$

για κάθε συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, άρα $v - \hat{v} = 0$ σ.π. □

Χώροι Sobolev:

Ορισμός 1.1.4. Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και k μη αρνητικός ακέραιος.

Για $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες μέχρι και η k -ασθενής παράγωγος ανήκει στον L^p . Δηλαδή για παράδειγμα για $k = 1$ έχουμε

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p : \partial_i u \in L^p(\Omega) \quad i = 1, \dots, n\}$$

Επίσης, αν $p = 2$, συνήθως γράφουμε

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

καθώς οι χώροι αυτοί είναι χώροι Hilbert. Τέλος, έχουμε τον επιπλέον συμβολισμό με ένα μηδενικό για δείκτη, για παράδειγμα ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις στον $H^1(\Omega)$ οι οποίες μηδενίζονται στο σύνορο του Ω . Η νόρμα σε έναν χώρο Sobolev ορίζεται ως εξής:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\sum_{|a| \leq k} \int_{\Omega} |D^a u|^p dx)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|a| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^a u| & p = \infty \end{cases}$$

Όπως είπαμε για $p = 2$ οι χώροι είναι Hilbert για $k \geq 0$ και έτσι έχουν το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο:

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{i=0}^k (D^i u, D^i v)_{L^2}$$

Για παράδειγμα, έχουμε στον H^1 :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Ορισμός 1.1.5. Δυϊκός χώρος ενός χώρου X ονομάζεται ο χώρος $B(X, \mathbb{R})$, δηλαδή ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ο χώρος αυτός είναι Banach καθώς ο \mathbb{R} είναι Banach και συμβολίζεται με X^* .

Έτσι, συμβολίζουμε με $W^{-1,p'}(\Omega)$ τον δυϊκό του $W_0^{1,p}(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ και πιο συγκεκριμένα συμβολίζουμε H^{-1} τον δυϊκό του H_0^1 .

Σημείωση. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, έχουμε ότι ένας H χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον δυϊκό του H^* , έτσι πολλές φορές ταυτίζουμε τον H με τον H^* .

Έτσι, ταυτίζουμε τον L^2 με τον διϊκό του όμως δεν ταυτίζουμε τον H_0^1 με τον διϊκό του και έχουμε τον παρακάτω εγκλισμό:

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$$

Επίσης έχουμε ότι τα στοιχεία του $W_0^{1,p}(\Omega)$ μπορούν να αναπαρασταθούν από στοιχεία του $L^{p'}$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Πιο συγκεκριμένα, έστω $F \in W^{-1,p'}$. Τότε υπάρχουν $f_0, f_1 \in L^{p'}$ μη μοναδικά έτσι ώστε

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v + \int f_1 v' \quad v, v' \in W_0^{1,p}$$

και

$$\|F\| = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}}, \|f_1\|_{L^{p'}}\}$$

Οι συναρτήσεις f_0, f_1 δεν είναι μοναδικές και όταν το Ω είναι φραγμένο, τότε μπορούμε να πάρουμε $f_0 = 0$.

Είδη σύγκλισης

- Ισχυρή σύγκλιση σε χώρο Hilbert:

Μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέμε ότι συγκλίνει ισχυρώς στο x σε ένα χώρο Hilbert $(H, \|\cdot\|)$ εάν

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad n_o \in \mathbb{N}: \quad \|x_n - x\| \leq \epsilon \quad \forall n > n_o$$

και συμβολίζουμε με $x_n \rightarrow x$.

- Ασθενής σύγκλιση σε χώρο Hilbert:

Μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο x σε ένα χώρο Hilbert H εάν

$$\lim \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο του χώρου H και συμβολίζουμε με $x_n \xrightarrow{w} x$.

- Γεωμετρική σύγκλιση:

Μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέμε ότι συγκλίνει γεωμετρικά, ή αλλιώς με γεωμετρικό ρυθμό εάν συγκλίνει ισχυρώς και επίσης ισχύει

$$\|x_{n+1}\| \leq k \|x_n\| \quad \forall n \geq 0$$

Πρόταση 1.1.2. Αν μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο x σε ένα χώρο H και επίσης $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, τότε $x_n \rightarrow x$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2$$

Άρα όταν $n \rightarrow \infty$, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. □

1.2 Προβολές

Ορισμός 1.2.1. Έστω X διανυσματικός χώρος.

Ένας γραμμικός τελεστής:

$$P : X \rightarrow X$$

καλείται προβολή εάν:

$$P^2 = P$$

Δηλαδή:

$$P(Px) = Px \quad \forall x \in X$$

Θα συμβολίζουμε με $P(X)$ την εικόνα της P και με $\ker P$ τον πυρήνα της.

Επίσης, αν P προβολή τότε έχουμε την συμπληρωματική προβολή $I - P$.

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I - P - P + P^2 = I - P$$

Άρα πράγματι, η $I - P$ είναι προβολή και $P + (I - P) = I$

Επίσης:

$$P(I - P) = P - P^2 = 0$$

$$(I - P)P = P - P^2 = 0$$

δηλαδή:

$$P(I - P) = (I - P)P = 0$$

Πρόταση 1.2.1. Έστω X διανυσματικός χώρος. Αν P προβολή, τότε:

$$P(X) = \ker(I - P)$$

Απόδειξη.

$$(I - P)Px = 0 \quad \Rightarrow \quad Px \in \ker(I - P) \quad \forall x \in X$$

Άρα:

$$P(X) \subseteq \ker(I - P)$$

Για τον αντίστροφο εγκλισμό, έστω $x \in \ker(I - P)$ τότε:

$$(I - P)x = 0$$

$$x - Px = 0 \Rightarrow x = Px \in P(X)$$

$$\ker(I - P) \subseteq P(X)$$

Άρα:

$$P(X) = \ker(I - P)$$

□

Μπορούμε εύκολα να δούμε τα εξής:

Παρατήρηση 1. Αφού:

$$\ker(I - P) = \{x \in X : (I - P)x = 0\} = \{x \in X : Px = x\}$$

και

$$P(X) = \ker(I - P)$$

θα έχουμε ότι:

$$P(X) = \{x \in X : Px = x\}$$

Παρατήρηση 2. Εναλλάσσοντας το P με το $I - P$ έχουμε $(I - P)(x) = \ker P$.

Η σημαντικότερη ιδιότητα των προβολών είναι ότι μας δίνουν μια διάσπαση του X σε ευθύ άθροισμα.

Σημείωση. Ευθύ άθροισμα $X = M \oplus N$ σημαίνει ότι $M \cap N = \{0\}$ και κάθε $x \in X$ γράφεται ως $x = y + z$ με $y \in M$ και $z \in N$.

Πρόταση 1.2.2. Αν P προβολή, τότε:

$$X = P(X) \oplus \ker P$$

Απόδειξη. Αν $x \in P(X) \cap \ker P$ τότε από την παρατήρηση **1**

$$x = Px = 0$$

$$P(X) \cap \ker P = \{0\}$$

Επίσης αν $x \in X$ τότε:

$$x = Px + (I - P)x$$

και από την παρατήρηση 2:

$$(I - P)x \in \ker P$$

Άρα:

$$X = P(X) \oplus \ker P$$

□

Πρόταση 1.2.3. Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν $X = M \oplus N$ τότε υπάρχει προβολή στον X με $P(X) = M$ και $\ker P = N$.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, αφού:

$$X = M \oplus N$$

το x γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y + z$ με $y \in M$ και $z \in N$.
Θέτουμε $Px = y$ και έχουμε:

- η P είναι γραμμική καθώς: Έστω $x_1, x_2 \in X$.
Τότε:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + z_1, & x_2 &= y_2 + z_2 \\ \Rightarrow P(x_1 + x_2) &= Px_1 + P(x_2) \end{aligned}$$

Επίσης, αν $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\begin{aligned} \lambda x &= \lambda y + \lambda z \\ \Rightarrow P(\lambda x) &= \lambda y = \lambda Px \end{aligned}$$

- η P είναι προβολή καθώς: Αν $x \in X$, τότε από τον ορισμό έχουμε ότι $Px \in M \Rightarrow P(Px) = Px$ άρα $P^2 = P$.

Μένει να δείξουμε ότι $P(X) = M$ και $\ker P = N$.

Το ότι $P(X) = M$ προκύπτει άμεσα αφού:

$$\begin{aligned} \forall y \in M, & \quad Py = y \\ \Rightarrow P(X) &= M \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\ker P = N$ έχουμε ότι αν $x \in \ker P$ τότε $Px = 0$ άρα $x = 0 + z$ με $z \in N \Rightarrow x = z \in N$ και άρα $\ker P \subseteq N$. Από την άλλη, αν $x \in N$, τότε $Px = 0 \Rightarrow N \subseteq \ker P$

Άρα τελικά $N = \ker P$. □

Θεώρημα 1.2.1. Έστω X χώρος Banach. Ο X γράφεται:

$$X = M \oplus N$$

με M, N κλειστούς υποχώρους αν και μόνο αν υπάρχει φραγμένη γραμμική προβολή P με $P(X) = M$ και $\ker P = N$.

Απόδειξη. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, αν η P είναι φραγμένη τότε $P(X) = \ker(I - P)$ και συνεπώς $P(X)$ κλειστό. Αν $M = P(X)$ και $N = \ker P$ τότε $X = M \oplus N$.

Για την ευθεία συνεπαγωγή,

Έστω $X = M \oplus N$ με M, N κλειστούς υποχώρους και P η προβολή που υπάρχει από την πρόταση **1.2.2** με $P(X) = M$ και $\ker P = N$

Θα δείξουμε ότι η P είναι φραγμένη, έχουμε:

$$(x_n, Px_n) \rightarrow (x, y)$$

Τότε $x_n \rightarrow x$ και $Px_n \rightarrow y$.

Αφού $Px_n \in M \forall n \in \mathbb{N}$ και M κλειστός υπόχωρος, έχουμε:

$$y \in M \quad , \quad y = Py$$

Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι:

$$N = \ker P = (I - P)(X)$$

$$\Rightarrow (I - P)x_n \in N \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Και αφού N κλειστός:

$$\lim (I - P)x_n \in N$$

$$\Rightarrow x - y \in N$$

Και αφού $N = \ker P$, παίρνουμε:

$$P(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Px = Py$$

Άρα $Px = y$, επομένως το γράφημα της P είναι κλειστό και από θεώρημα κλειστού γραφήματος παίρνουμε ότι η P είναι φραγμένη.

□

Τώρα, αν ο χώρος X είναι ένας χώρος Hilbert μπορούμε να μιλήσουμε για ορθογωνιότητα.

Ορισμός 1.2.2. Έστω H χώρος Hilbert και $A \subseteq H$ τότε ορίζουμε ως κάθετο του A το σύνολο:

$$A^\perp := \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0, \quad a \in A\}$$

και ο A^\perp είναι κλειστός υπόχωρος του H .

Πρόταση 1.2.4. Αν Y κλειστός υπόχωρος του H , τότε $H = Y \oplus Y^\perp$.

Απόδειξη. Αρχικά έχουμε ότι:

$$Y \cap Y^\perp = \{0\}$$

καθώς, αν $z \in Y \cap Y^\perp$ τότε:

$$\langle z, z \rangle = 0$$

Άρα $z = 0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $H = Y \oplus Y^\perp$.

Έστω $x \in H$. Αν y είναι το στοιχείο του Y για το οποίο πιάνεται η απόσταση του x από τον Y , τότε έχουμε ότι $x - y \in Y^\perp$. Όμως:

$$x = y + (x - y)$$

Με $y \in Y$ και $(x - y) \in Y^\perp$, άρα τελικά $H = Y \oplus Y^\perp$.

□

Ορισμός 1.2.3. Αν ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του H τότε ο Y^\perp καλείται ορθογώνιο συμπλήρωμα του Y .

Ορισμός 1.2.4. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του H και $x \in H$, $y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. εάν $x - \lambda y \perp y$, δηλαδή:

$$\langle x - \lambda y, y \rangle = 0$$

Τότε έχουμε ότι για $y \neq 0$:

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$$

και η ορθογώνια προβολή του x πάνω στον Y είναι:

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$$

Ορισμός 1.2.5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Ένας τελεστής $A : X \rightarrow Y$ λέγεται "συστολή" εάν ισχύει:

$$\|A\| \leq 1$$

Πρόταση 1.2.5. Έστω $P : H \rightarrow H$ προβολή, τότε P είναι συστολικός τελεστής.

Απόδειξη. για κάθε $x \in H$, έχουμε:

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle x, Px \rangle \leq \|x\| \cdot \|Px\|$$

άρα,

$$\frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|P\| \leq 1$$

□

1.3 Προβλήματα συνοριακών τιμών

Εξίσωση Laplace

Αρχικά, έχουμε την εξίσωση Laplace:

$$\Delta u = 0 \quad \text{στο } \Omega$$

Όπου το χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό. Οι επιμέρους συνοριακές συνθήκες μας διαφοροποιούν το πρόβλημα, έτσι έχουμε τα εξής προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace:

- Πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου g γνωστή συνάρτηση στο $\partial\Omega$.

- Πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου n συμβολίζει το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$ και όπου g γνωστή συνάρτηση στο $\partial\Omega$.

- Πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Robin:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \\ au + b \frac{\partial}{\partial n} u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, n συμβολίζει το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$ και όπου g γνωστή συνάρτηση στο $\partial\Omega$.

Σημείωση. Αν η εξίσωση Laplace δεν είναι ομογενής, πολλές φορές ονομάζεται και εξίσωση Poisson.

Ενέργεια "Dirichlet"/Αρχή του "Dirichlet"

Έστω το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Ορίζουμε ο εξής συνάρτησιακό:

$$J(w) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \, dx$$

και το ονομάζουμε ενεργειακό συναρτησιακό του προβλήματος.

Θεώρημα 1.3.1 (Αρχή του Dirichlet). *Αν u είναι λύση του προβλήματος, τότε ελαχιστοποιεί και το ενεργειακό συναρτησιακό, δηλαδή ισχύει:*

$$J(u) \leq J(w)$$

για κάθε $w \in C^2(\Omega)$ τέτοιο ώστε $w = g$ στο $\partial\Omega$.

Απόδειξη. Έστω $w \in A$, τότε έχουμε:

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta u - f)(u - w) \, dx$$

και από τον τύπο του Green:

$$0 = \int_{\Omega} Du \cdot D(u - w) - f(u - w) \, dx$$

άρα,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du|^2 - uf \, dx &= \int_{\Omega} DuDw - wf \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |Du|^2 \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \, dx \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$J(u) \leq J(w)$$

□

Ασθενείς λύσεις

Λέμε ότι μια συνάρτηση u είναι ασθενής λύση της εξίσωσης Laplace, αν $u \in H^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = g$ και ισχύει:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

για όλες τις συναρτήσεις $v \in H_0^1(\Omega)$.

Εξίσωση Stokes

Έπειτα, έχουμε την εξίσωση του Stokes:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{στο } \Omega \\ u = u_0 & \text{στο } \partial\Omega \\ \operatorname{div} u & \text{στο } \Omega \end{cases}$$

όπου $u_0 \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, p συμβολίζει την πίεση και ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\int_{\partial\Omega} u_0 \cdot n \, dS = 0$$

Θεώρημα. *Ανισότητα Poincaré* Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά C που εξαρτάται από το Ω και το p τέτοια ώστε:

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

για κάθε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με $1 \leq p \leq \infty$.

Θεώρημα (Τύπος του Green). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ με σύνορο Γ . Θεωρούμε συνάρτηση $u \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$ και $v \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$. Τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \int_{\Omega} Du Dv \, dx$$

όπου n το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα προς τα έξω του Γ .

Θεώρημα (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz). Αν (X, Σ, μ) είναι ένας χώρος μέτρου και $1 < p < \infty$ τότε ο χώρος $L^p(X)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $L^{p'}(X)$, με $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Θεώρημα (Θεώρημα κλειστού γραφήματος). Αν X, Y είναι χώροι Banach και $A : X \rightarrow Y$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, τότε $A \in B(X, Y)$ αν και μόνο αν το γράφημα του A , $GrA = \{(x, y) \in X \times Y : A(x) = y\} \subseteq X \times Y$ είναι κλειστό.

Θεώρημα (Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης). Αν X, Y είναι χώροι Banach και ο τελεστής $A \in L(X, Y)$ είναι "επί", τότε ο A είναι μία ανοιχτή απεικόνιση.

Ορισμός 1.3.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι κάτω ημισυνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν:

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

Ορισμός 1.3.2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι κυρτή εάν:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)u) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(u)$$

για όλα τα $x, u \in \Omega$ και $\lambda \in [0, 1]$.

Ορισμός 1.3.3. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι πιεστική εάν:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Θεώρημα (Θεώρημα Weierstrass Tonelli). Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και $C \subseteq X$ μη κενό, κλειστό και κυρτό. Έστω $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$ κάτω ημισυνεχής κυρτή και πιεστική. Τότε $\exists x_0 \in C$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0) = \inf_C \phi$.

Κεφάλαιο 2

Εφαρμογή σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

2.1 Εξίσωση Laplace

Έστω φραγμένο ανοιχτό σύνολο Ω στον \mathbb{R}^n και έστω Ω λείο και συνεκτικό. Χωρίζουμε το Ω σε δύο υποσύνολα Ω_1 και Ω_2 τέτοια ώστε:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

Θα έχουμε τους εξής συμβολισμούς:

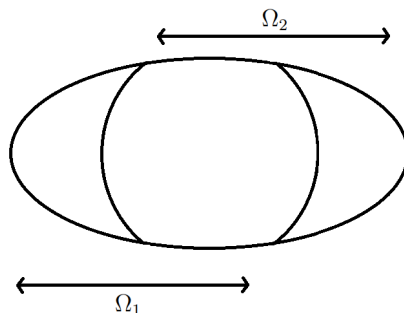
$$\Gamma = \partial\Omega \quad \Gamma_1 = \partial\Omega_1 \quad \Gamma_2 = \partial\Omega_2$$

$$\gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \quad \gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$$

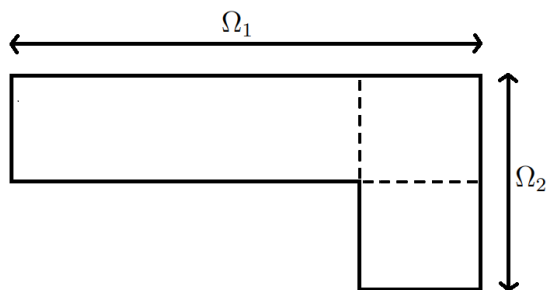
$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2 \quad \Omega_{11} = \Omega_1 \cap \Omega_2^c \quad \Omega_{22} = \Omega_2 \cap \Omega_1^c$$

και έστω γ_1, γ_2 λεία.

Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα διαχωρισμού του Ω είναι τα εξής:



Σχήμα 2.1: Ομοιόμορφη επικάλυψη Ω_1 και Ω_2



Σχήμα 2.2: Μη ομοιόμορφη επικάλυψη Ω_1 και Ω_2

Αρχικά θα μελετήσουμε το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

με $f \in L^2(\Omega)$.

Σύμφωνα με την μέθοδο εναλλασσουσών προβολών, θα λύσουμε διαδοχικά τα παρακάτω προβλήματα:

Έστω u_0 κάποια αρχικοποίηση στον $H_0^1(\Omega)$ και $u_{2n+1} \in H^1(\Omega_1)$, $u_{2n} \in H^1(\Omega_2)$ να είναι οι λύσεις των προβλημάτων:

$$-\Delta u_{2n+1} = f \quad \text{στο } \Omega_1 \quad , \quad u_{2n+1} = u_{2n} \quad \text{στο } \partial\Omega_1 \quad (2)$$

$$-\Delta u_{2n} = f \quad \text{στο } \Omega_2 \quad , \quad u_{2n} = u_{2n-1} \quad \text{στο } \partial\Omega_2 \quad (3)$$

Παρατηρούμε πως μπορούμε να επεκτείνουμε την u_{2n+1} κατά u_{2n} στο $\overline{\Omega_{22}}$ και αντίστοιχα την u_{2n} κατά u_{2n-1} στο $\overline{\Omega_{11}}$ έτσι ώστε:

$$u_n \in H_0^1(\Omega) \quad , \quad u_{2n+1} - u_{2n} \in H_0^1(\Omega_1) \quad , \quad u_{2n+2} - u_{2n+1} \in H_0^1(\Omega_2)$$

Έχουμε, $-\Delta u_{2n+1} = f$ και πολλαπλασιάζουμε κάθε πλευρά με $v_1 \in H_0^1(\Omega_1)$, έτσι:

$$\begin{aligned} -\Delta u_{2n+1} v_1 &= f v_1 \\ \int_{\Omega_1} -\Delta u_{2n+1} v_1 &= \int_{\Omega_1} f v_1 = \int_{\Omega_1} \Delta u v_1 \end{aligned}$$

και από τύπο του Green:

$$\begin{aligned} (\nabla u_{2n+1} v_1) \Big|_{\partial\Omega_1} + \int_{\Omega_1} \nabla u_{2n+1} \nabla v_1 &= (\nabla u - v_1) \Big|_{\partial\Omega_1} + \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v_1 \\ \int_{\Omega_1} \nabla u_{2n+1} \nabla v_1 - \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v_1 &= 0 \\ \int_{\Omega_1} \nabla u_{2n+1} \nabla v_1 - \nabla u \nabla v_1 &= 0 \\ \int_{\Omega_1} \nabla (u_{2n+1} - u) \nabla v_1 &= 0 \end{aligned}$$

Άρα παρατηρούμε πως:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_1} \nabla (u_{2n+1} - u) \nabla v_1 = 0 \\ \int_{\Omega_2} \nabla (u_{2n} - u) \nabla v_2 = 0 \end{cases}$$

Επομένως το αρχικό πρόβλημα είναι είναι ισοδύναμο με:

$$(u_{2n+1} - u, v_1) = 0 \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1) \quad , \quad u_{2n+1} - u_{2n} \in H_0^1(\Omega_1)$$

για κάθε $n \geq 0$.

Και ομοίως:

$$(u_{2n} - u, v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2) \quad , \quad u_{2n} - u_{2n-1} \in H_0^1(\Omega_2)$$

για κάθε $n \geq 1$.

Θα συμβολίσουμε με $V_1 = H_0^1(\Omega_1)$ και $V_2 = H_0^1(\Omega_2)$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις ως:

$$(u_{2n+1} - u_{2n}, v_1) = (u - u_{2n}, v_1) \quad \forall v_1 \in V_1 \quad u_{2n+1} - u_{2n} \in V_1$$

για κάθε $n \geq 0$, και ομοίως:

$$(u_{2n} - u_{2n-1}, v_2) = (u - u_{2n-1}, v_2) \quad \forall v_2 \in V_2 \quad u_{2n} - u_{2n-1} \in V_2$$

για κάθε $n \geq 1$.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$u - u_{2n} = (u - u_{2n+1}) + (u_{2n+1} - u_{2n})$$

με $(u_{2n+1} - u_{2n}) \in V_1$ και $(u - u_{2n+1}) \in V_1^\perp$, αφού για κάθε $v \in V_1^\perp$ έχουμε

$$(u - u_{2n+1}, v) = \int_{\Omega_1} \nabla(u - u_{2n+1}) \nabla v = \int_{\Omega_1} \Delta(u - u_{2n+1}) v = \int_{\Omega_1} (f - f) v = 0$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τα προβλήματα (2) και (3) με την μορφή προβολών ως εξής:

$$u_{2n+1} - u_{2n} = P_{V_1}(u - u_{2n}) \quad n \geq 0$$

ή ισοδύναμα:

$$u - u_{2n+1} = P_{V_1^\perp}(u - u_{2n}) \quad n \geq 0$$

και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο:

$$u_{2n} - u_{2n-1} = P_{V_2}(u - u_{2n-1}) \quad n \geq 1$$

ή ισοδύναμα:

$$u - u_{2n} = P_{V_2^\perp}(u - u_{2n-1}) \quad n \geq 1$$

με P να συμβολίζει την ορθογώνιο προβολή στον εκάστοτε υπόχωρο.

Όπως είδαμε, μπορούμε να ανάγουμε το αρχικό πρόβλημα σε μία ακολουθία προβολών σε ένα χώρο Hilbert V . Πιο συγκεκριμένα, έχουμε V_1, V_2 δύο κλειστούς υποχώρους ενός χώρου Hilbert V και πρέπει να ερευνήσουμε την συμπεριφορά της ακολουθίας $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$v_0 \in V \quad v_{2n+1} = P_{V_1^\perp} v_{2n} \quad v_{2n+2} = P_{V_2^\perp} v_{2n+1}$$

για $n \geq 0$. Θα δείξουμε ότι η v_n συγκλίνει στον V στο $P_{V_1^\perp \cap V_2^\perp} v_0$. Επίσης συμβολίζοντας $\hat{v} = v_0 - P_{V_1^\perp \cap V_2^\perp} v_0$ βλέπουμε ότι η ακολουθία \hat{v}_n δίνεται από τον τύπο

$$\hat{v}_n = v_n - P_{V_1^\perp \cap V_2^\perp} v_0$$

και υποθέτουμε ότι $V_1^\perp \cap V_2^\perp = \{0\}$.

Θεώρημα 2.1.1. Έστω $V_1^\perp \cap V_2^\perp = \{0\}$ ή ισοδύναμα $V = \overline{V_1 + V_2}$, τότε η v_n συγκλίνει στο θ . Αν επίσης $V = V_1 + V_2$ τότε $\exists k \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε:

$$|P_{V_2^\perp} P_{V_1^\perp}| \leq k \tag{4}$$

και έτσι,

$$|v_{n+1}| \leq k^n |v_0|$$

Απόδειξη. Αρχικά έχουμε:

$$|v_{n+1}| + |v_{n+1} - v_n|^2 = |v_n|^2 \quad \forall n \geq 0$$

Έτσι, $|v_n| \downarrow l$ για κάποιο $l \geq 0$ και $(v_{n+1} - v_n) \rightarrow 0$. Τώρα, αν για κάποια υπακολουθία n_k , η (v_{n_k}) συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο v τότε βλέπουμε πως και η v_{n_k+1} συγκλίνει ασθενώς στο v άρα $v \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$, δηλαδή $v = 0$ και η v_n συγκλίνει ασθενώς στο 0 . Τέλος, βλέπουμε πως:

$$|v_n|^2 = (v_{2n-1}, v_0) \rightarrow 0$$

Τώρα, αν $V_1 + V_2 = V$, με την βοήθεια του παρακάτω λήμματος θα οδηγηθούμε στη σχέση (4).

Λήμμα 1. Υπάρχει σταθερά $C_0 > 0$ τέτοια ώστε $\forall v \in V$ ισχύει:

$$|v| \leq (|P_{V_1} v|^2 + |P_{V_2} v|^2)^{1/2}$$

Έτσι έχουμε:

$$|P_{V_1^\perp} v| \leq C_0 |P_{V_2} P_{V_1^\perp} v|$$

Άρα:

$$\begin{aligned} |P_{V_1^\perp} v|^2 &= |P_{V_2^\perp} P_{V_1^\perp} v|^2 + |P_{V_2} P_{V_1^\perp} v|^2 \\ &\geq |P_{V_2^\perp} P_{V_1^\perp} v| + \frac{1}{C_0} |P_{V_2^\perp} v|^2 \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$|P_{V_2^\perp} P_{V_1^\perp} v| \leq \left(1 - \frac{1}{C_0}\right) |P_{V_1^\perp} v|$$

Και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Τώρα θα δείξουμε την απόδειξη του λήμματος.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης στην απεικόνιση $(v_1, v_2) \rightarrow v_1 + v_2$ από τον $V_1 \times V_2$ στον V . Έτσι, υπάρχει $C_0 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\forall v \in V, \exists (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$$

Με:

$$\|(v_1, v_2)\| \leq C_0 \|v_1 + v_2\|$$

δηλαδή:

$$(|v_1|^2 + |v_2|^2)^{1/2} \leq C_0 |v|$$

τελος, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} |v|^2 &= (v, v_1) + (v, v_2) = (P_{V_1} v, v_1) + (P_{V_2} v, v_2) \\ &\leq (|P_{V_1} v|^2 + |P_{V_2} v|^2)^{1/2} (|v_1|^2 + |v_2|^2)^{1/2} \\ &\leq C_0 |v| (|P_{V_1} v|^2 + |P_{V_2} v|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

□

Θα εξετάσουμε αν ο $V_1 + V_2$ είναι πυκνός ή ακόμα και ίσος με τον V . Για να ελέγξουμε αν είναι πυκνός, θα εφαρμόσουμε το εξής κριτήριο:

$$\forall \phi \in D(\Omega), \exists \phi_1 \in D(\Omega_1), \exists \phi_2 \in D(\Omega_2), \phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (5)$$

όπου $D(\Omega)$ είναι χώρος συναρτήσεων δοκιμής.

Πράγματι, η συνθήκη δηλώνει $D(\Omega) \subset \overline{V_1 + V_2}$, δηλαδή $V = \overline{V_1 + V_2}$. Στη

συνέχεια, ισχυριζόμαστε ότι το παραπάνω ισχύει πάντα αν $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Παρατηρούμε πως αν K ένα συμπαγές σύνολο στον Ω τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $K \subset (\Omega_1)_\epsilon \cup (\Omega_2)_\epsilon$ (όπου με $(\Omega_2)_\epsilon$ συμβολίζουμε μία γειτονιά του Ω). Τότε, αν $\phi \in D(\Omega)$ και $K = \text{supp}(\phi) = \{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}$, υπάρχει $\psi_1 \in D(\Omega_1)$, $\psi_2 \in D(\Omega_2)$ τέτοια ώστε $0 \leq \psi_{1,2} \leq 1$ και $\psi_{1,2} = 1$ σε μια γειτονιά του $K \cap (\Omega_{1,2})_\epsilon$ αντίστοιχα. Τέλος, βλέπουμε πως μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi = \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2} \phi + \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \phi$$

και έτσι η συνθήκη ικανοποιείται.

Τώρα, εάν θέλουμε να εξετάσουμε αν $V = V_1 + V_2$ διακρύνουμε περιπτώσεις. Αρχικά, αρκεί να δείξουμε πως υπάρχουν χ_1, χ_2 στον $W^{1,\infty}(\Omega)$ οι οποίες μηδενίζονται αντίστοιχα στα Ω_1, Ω_2 , τέτοιες ώστε:

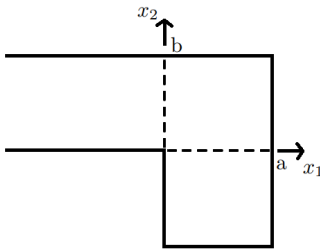
$$\chi_1 + \chi_2 = 1 \quad \text{στο } \Omega$$

Πράγματι, αν $u \in H_0^1(\Omega)$ τότε $\chi_1 u \in H_0^1(\Omega_1)$, $\chi_2 u \in H_0^1(\Omega_2)$ και γράφοντας $u = \chi_1 u + \chi_2 u$ έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Όμως, το παραπάνω αρκεί μόνο όταν υπάρχει ομοιόμορφη επικάλυψη των Ω_1 και Ω_2 . Σε άλλη περίπτωση θα πρέπει να πληρείται η εξής συνθήκη:

$$\begin{cases} \exists \chi_i \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega) , \chi_i = 0 , \chi_i \geq 0 \\ \chi_1 + \chi_2 = 1 \text{ στο } \Omega , |\nabla \chi_i| \leq C \text{dist}(x, \partial\Omega)^{-1} \text{ στο } \Omega \end{cases} \quad (6)$$

για $i = 1, 2$ και για κάποιο $C \geq 0$. Για παραδείγμα στην περίπτωση όπως στο [2.2](#):



Θέτουμε:

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x_1 \leq 0 \\ (1 - \frac{bx_1}{ax_2})^+ & \text{αν } 0 \leq x_1 \leq a \text{ και } 0 \leq x_2 \leq b \\ 0 & \text{αν } x_2 \leq 0 \end{cases}$$

και $\chi_2 := 1 - \chi_1$ στο $\bar{\Omega}$. για $i = 1, 2$ και για κάποιο $C \geq 0$. Παρατηρούμε πως οι χ_1 και χ_2 είναι Lipschitz συνεχείς στο $\bar{\Omega} - \{0\}$ και αν $0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b$ έχουμε:

$$\nabla \chi_1(x) = \left(-\frac{b}{ax_2}, \frac{bx_1}{ax_2}\right) \quad , \quad (ax_2 > bx_1)$$

άρα,

$$\begin{aligned} |\nabla| &\leq \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)^{1/2} \frac{1}{x_2} \quad , \quad (ax_2 > bx_1) \\ &\leq \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)^{1/2} \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

και αφού $\frac{1}{|x|} \leq \text{dist}(x, \partial\Omega)^{-1}$, η συνθήκη ισχύει.

Στη συνέχεια, ισχυριζόμαστε ότι η σχέση (6) δηλώνει ότι $V = V_1 + V_2$. Χρειάζεται να ελέγξουμε εάν $u \in H_0^1(\Omega)$ και $\chi_1 u \in H_0^1(\Omega)$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\nabla(\chi_1 u) \in L^2$.

$$\begin{aligned} \int |\nabla(\chi_1 u)|^2 dx &\leq \int |\chi_1 \nabla u + \nabla \chi_1 u|^2 dx \\ &\leq 2 \int |\nabla u|^2 + |\nabla \chi_1|^2 u^2 dx \\ &\leq 2 \int |\nabla u|^2 dx + 2C \int \frac{u^2}{d^2} \end{aligned}$$

όπου $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ και από ανισότητα Poincaré:

$$\int |\nabla(\chi_1 u)|^2 dx \leq C \int |\nabla u|^2 dx$$

και έτσι έχουμε:

Πόρισμα. Αν (5) ισχύει, τότε η μέθοδος για το πρόβλημα (1) συγκλίνει και αν ισχύει (6) τότε η μέθοδος συγκλίνει γεωμετρικά.

Με βάση την παραπάνω εφαρμογή, η μέθοδος των εναλλασσουσών προβολών μπορεί να μας δώσει απευθείας όμοια αποτελέσματα σύγκλισης και για άλλα συμμετρικά προβλήματα συνοριακών τιμών. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον γενικό ελλειπτικό πρόβλημα δεύτερης τάξης:

$$A = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}) + c$$

όπου $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$, $c \in L^\infty(\Omega)$ και έστω

$$\exists v > 0 \quad x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq v |\xi|^2$$

$$c \geq 0 \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega$$

Πράγματι, για έναν τέτοιο τελεστή πρέπει να εφοδιάσουμε τον χώρο $H_0^1(\Omega)$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle Au, v \rangle$ έτσι ώστε:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv \, dx$$

και τώρα μπορούμε να προσαρμόσουμε ακριβώς ότι κάναμε στην προηγούμενη εφαρμογή.

Ομοίως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet με άλλες συνοριακές συνθήκες. Αξίζει να σημειώσουμε την τροποποίηση της μεθόδου στην περίπτωση το πρόβλημα έχει συνοριακές συνθήκες Neumann. Για παράδειγμα, έστω το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{στο } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου n συμβολίζει κάθετο διάνυσμα προς τα έξω στο $\partial\Omega$. Θέτουμε $V = H^1(\Omega)$, $V_1 = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ στο } \overline{\Omega_{22}}\}$, $V_2 = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ στο } \Omega_{11}\}$. Έτσι, η μέθοδος των προβολών ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο

τρόπο και τώρα κάθε υποπρόβλημα στους χώρους $\Omega_{1,2}$ έχει συνοριακές συνθήκες Neumann στο $\partial\Omega_{1,2} \cap \partial\Omega$ και Dirichlet $v_n = v_{n-1}$ στο $\gamma_{1,2}$. Η διαδικασία είναι η ίδια, εξασφαλίζουμε την σύγκλιση εάν $\overline{V_1 + V_2} = V$ και την σύγκλιση με γεωμετρικό ρυθμό αν $V_1 + V_2 = V$. Στην περίπτωση που Ω_1, Ω_2 επικαλύπτονται μπορούμε να δείξουμε πως $V_1 + V_2 = V$ ενώ στην περίπτωση που $\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}$ αγγίζουν το $\partial\Omega$ μπορούμε να δείξουμε μόνο ότι $\overline{V_1 + V_2} = V$. Τέλος, αξίζει να πούμε πως μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις ομογενείς συνθήκες με μη-ομογενείς και να έχουμε ίδια αποτελέσματα.

2.2 Εξίσωση Stokes

Σε αυτό το σημείο, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο στην εξίσωση του Stokes Έστω $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{στο } \Omega \\ u = u_0 & \text{στο } \Gamma \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (7)$$

με $u_0 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ και $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ να ικανοποιούν την συνθήκη:

$$\int_{\Gamma} u_0 \cdot n ds = 0$$

και το p να συμβολίζει την πίεση.

Αυτή τη φορά θέτουμε τον χώρο V ως $V = \{u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} u = 0\}$ και παρατηρούμε πως μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα (7) ως εξής:

$$(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V \quad \forall u \in u_0 + V$$

και για απλότητα αντικαταστήσουμε το u_0 με \hat{u}_0 έτσι ώστε $\hat{u}_0 = u_0$ στο Γ και $\operatorname{div} \hat{u}_0 = 0$ στο Ω .

Έστω $u_0 \in u_0 + V$. Αρχικά έχουμε u_{2n+1} και u_{2n+2} για $n \geq 0$ να είναι λύσεις των παρακάτω προβλημάτων αντίστοιχα:

$$\begin{cases} -\Delta u_{2n+1} + \nabla p_{2n+1} = f & \text{στο } \Omega_1 \\ u_{2n+1} = u_{2n+2} & \text{στο } \partial\Omega_1 \\ \operatorname{div} u_{2n+1} = 0 & \text{στο } \Omega_1 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} -\Delta u_{2n+2} + \nabla p_{2n+2} = f & \text{στο } \Omega_2 \\ u_{2n+2} = u_{2n+1} & \text{στο } \partial\Omega_2 \\ \operatorname{div} u_{2n+2} = 0 & \text{στο } \Omega_2 \end{cases}$$

Τέλος, επεκτείνουμε τις u_{2n+1} και u_{2n+2} στο Ω κατά u_{2n} και u_{2n+1} αντίστοιχα. Αυτή η ακολουθία είναι καλά ορισμένη καθώς επαγωγικά $\forall n \geq 0$ έχουμε:

$$\operatorname{div} u_n = 0 \quad \text{στο } \Omega$$

καθώς: $\operatorname{div} u_{2n_1} = 0$ στο Ω_1 , $\operatorname{div} u_{2n+1} = \operatorname{div} u_{2n} = 0$ στο Ω_{22} και $u_{2n} = u_{2n+1}$ στο γ_2 .

Τώρα, τα αποτελέσματα του προηγούμενου προβλήματος μπορούν να εφαρμοστούν και σε αυτήν την περίπτωση. Έτσι για να πάρουμε την σύγκλιση της ακολουθίας στο u αρκεί να δείξουμε $V = \overline{V_1 + V_2}$ όπου όπως ορίσαμε πριν:

$$V_i = \{u \in H_0^1(\Omega_i; \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} u = 0 \text{ στο } \Omega_i\} \quad i = 1, 2$$

και επεκτείνουμε την $u \in V$ στο Ω κατά 0. Επίσης, η ακολουθία συγκλίνει γεωμετρικά εάν $V = V_1 + V_2$. Πράγματι, με ίδια επιχειρήματα με πριν μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω προβλήματα με την εξής μορφή:

$$u - u_{2n+1} = P_{V_1^\perp}(u - u_{2n})$$

και

$$u - u_{2n+2} = P_{V_2^\perp}(u - u_{2n+1})$$

Έτσι, το μόνο που απομένει να δείξουμε είναι αν $V = \overline{V_1 + V_2}$ ή $V = V_1 + V_2$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι αν $H_0^1(\Omega) = \overline{H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)}$ τότε $V = \overline{V_1 + V_2}$ και εάν $H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)$ τότε $V = V_1 + V_2$.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας, θα ξεκινήσουμε από μία συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε $u = u_1 + u_2$ με $u_1 \in H_0^1(\Omega_1; \mathbb{R}^n)$ και $u_2 \in H_0^1(\Omega_2; \mathbb{R}^n)$ η οποία ξέρουμε ότι υπάρχει από την προηγούμενη εφαρμογή. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $\hat{u}_1 \in V_1$, $\hat{u}_2 \in V_2$ τέτοια ώστε $u = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$. Πράγματι, θέτουμε $g = \operatorname{div} u_1 \in L^2(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\operatorname{div} u_2 = -g$ στο Ω και $g = 0$ στο $\Omega - \Omega_{12}$. Στη συνέχεια παρατηρούμε πως

$$\int_{\Omega_{12}} g dx = \int_{\partial\Omega_{12}} u_1 \cdot \bar{n} dS = \int_{\partial\Omega_{12}} u \cdot \bar{n} dS$$

όπου \bar{n} συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα προς τα έξω στο γ_2 και \bar{n}_1 συμβολίζει τον μοναδιαίο διάνυσμα προς τα έξω στο Ω_{11} .

$$\int_{\gamma_2} u \cdot \bar{n} dS = - \int_{\partial\Omega_{11}} u \cdot n_1 dS = - \int_{\Omega_{11}} \operatorname{div} u dx = 0$$

Κάνοντας το ίδιο και για το χωρίο Ω_{22} συμπεραίνουμε πως υπάρχει $\bar{u} \in H_0^1(\Omega_{12})$ τέτοιο ώστε:

$$\operatorname{div} \hat{u} = g \text{ στο } \Omega_{12}$$

και επεκτείνοντας το \hat{u} κατά 0 στο Ω παίρνουμε ότι

$$\hat{u}_1 = u_1 - \bar{u} \quad , \quad \hat{u}_2 = u_2 + \bar{u}$$

Άρα τελικά βλέπουμε πως υπάρχουν $\hat{u}_1 \in V_1$, $\hat{u}_2 \in V_2$ τέτοια ώστε $u = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$.

2.3 Επέκταση σε περισσότερα υποχωρία

Υπάρχουν ποικίλοι τρόποι να επεκτείνουμε την μέθοδο των εναλλασσουσών προβολών σε γεωμετρικές περιπτώσεις όπου το Ω είναι χωρισμένο σε περισσότερα από δύο τμήματα.

2.3.1 Ακολουθιακός διαχωρισμός

Έχουμε:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j \quad 1 \leq j \leq m \quad (8)$$

και Ω_j ανοιχτό στον \mathbb{R}^n . Συμβολίζουμε με $V_j = H_0^1(\Omega_j)$ και βλέπουμε αυτούς τους χώρους, σαν κλειστούς υποχώρους του $V = H_0^1(\Omega)$ επεκτείνοντας τα στοιχεία τους στο Ω κατά 0. Η ακολουθία της μεθόδου ορίζεται ως εξής: Έστω $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, για $k \geq 0$ έχουμε τις λύσεις των προβλημάτων

$$\begin{cases} -\Delta u_{km+j} = f & \text{στο } \Omega_j \\ u_{km+j} = u_{km+j-1} & \text{στο } \partial\Omega_j \end{cases} \quad (9)$$

Και επεκτείνουμε την u_{km+j} στο Ω κατά u_{km+j-1} , για $1 \leq j \leq m$.

Έτσι, παίρνουμε:

$$u - u_{km+j} = P_{V_j^\perp}(u - u_{km+j-1}) \quad \forall k \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m \quad (10)$$

και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, θα δείξουμε ότι η (8) μας δίνει $\overline{\sum_{j=1}^m V_j} = V$, ενώ $\sum_{j=1}^m V_j = V$ ισχύει εάν

$$\begin{cases} \exists \chi_i \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega), \chi_i = 0, \text{ στο } \partial\Omega_i, \chi_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m \chi_i = 1 \text{ στο } \Omega, |\nabla \chi_i| \leq C \text{dist}(x, \partial\Omega)^{-1} \text{ στο } \Omega \end{cases} \quad (11)$$

για $1 \leq i \leq m$.

Θεώρημα 2.3.1. Η ακολουθία $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο u στον V . Επίσης αν $\sum_{j=1}^m V_j = V$ τότε υπάρχει $k \in [0, 1]$ έτσι ώστε:

$$\|u_n - u\|_V \leq k^n \|u_0 - u\|_V$$

Απόδειξη. Ακριβώς όπως στην προηγούμενη απόδειξη έχουμε ότι $v_n = u_n - u$ συγκλίνει ασθενώς στον V στο 0 , $v_{n+1} - v_n$ συγκλίνει ισχυρώς στον V στο 0 και $|v_n|^2 \downarrow l$ για κάποιο $l \geq 0$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν S συμβολίζει $(P_{V_m^\perp} \dots P_{V_1^\perp})^p$ για $p \geq 1$ τότε για κάθε $w, z \in V$ έχουμε

$$\begin{aligned} |(w, z) - (Sw, Sz)| &= |(w - Sw, z - Sz)| \leq \|w - Sw\| \cdot \|z - Sz\| \\ &\leq \frac{1}{2}|w - Sw|^2 + \frac{1}{2}|z - Sz|^2 \\ &= \frac{1}{2}|w|^2 - (w, Sw) + \frac{1}{2}|z|^2 - (z, Sz) \end{aligned}$$

και τώρα για τους όρους με το εσωτερικό γινόμενο θα δείξουμε ότι $(w, Sw) \geq \frac{1}{2}|Sw|^2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (w, Sw) &\geq \frac{1}{2}|Sw|^2 \\ 2(w, Sw) &\geq |Sw|^2 \\ |w|^2 + 2(w, Sw) &\geq |Sw|^2 + |w|^2 \\ |w|^2 &\geq |w - Sw|^2 \end{aligned}$$

Το οποίο ισχύει καθώς ο τελεστής S είναι συστολικός τελεστής. Επομένως $-(w, Sw) \leq \frac{1}{2}|Sw|^2$ και έτσι παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$|(w, z) - (Sw, Sz)| \leq \frac{1}{2}|w|^2 + \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1}{2}|Sw|^2 + \frac{1}{2}|Sz|^2$$

Αυτό μας δίνει για κάθε $n \geq 0$, $p \geq 1$ $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} |(v_{nm}, v_{(n+k)m}) - (v_{(n+p)m}, v_{(n+p+k)m})| &\leq \\ \frac{1}{2}(|v_{nm}|^2) + |v_{(n+k)m}|^2 - |v_{(n+p)m}|^2 - |v_{(n+p+k)m}|^2 \end{aligned}$$

και αφού $|v_n|^2 \downarrow l$, τότε και $(v_{nm}, v_{(n+k)m})$ συγκλίνει σε κάποιο l_k ομοιόμορφα καθώς $n \rightarrow +\infty$. Στη συνέχεια, αφού $v_{n+1} - v_n \rightarrow 0$ παίρνουμε ότι $l_k = l$ για κάθε $k \geq 0$ και έτσι αφήνοντας το k να πάει στο άπειρο έχουμε $\lim_k l_k = 0$. Έτσι, $l = 0$ και $v_n \rightarrow 0$.

Τώρα, για να εξασφαλίσουμε την γεωμετρική σύγκλιση, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $k \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$|P_{V_m^\perp} \dots P_{V_1^\perp}| \leq k \tag{12}$$

Για να το αποδείξουμε αυτό πηγαίνουμε πίσω στο λήμμα [1](#) και βλέπουμε πως μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί σε

$$|v| \leq c_0 \left(\sum_{j=1}^m |P_{V_j} v|^2 \right)^{1/2} \quad (13)$$

για κάποιο $C_0 > 0$. Στη συνέχεια για να δείξουμε το [\(12\)](#) υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(v_n)_n$ τέτοια ώστε:

$$1 = |v| = \lim_n |P_{V_m^\perp} \dots P_{V_1^\perp} v_n|$$

έτσι, παίρνουμε επίσης ότι για όλα τα $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$|P_{V_m^\perp} \dots P_{V_1^\perp}| \rightarrow 1$$

επομένως, για κάθε $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$P_{V_{j+1}} P_{V_m^\perp} \dots P_{V_1^\perp} \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad P_{V_1} v_n \rightarrow 0$$

ενώ αν $P_{V_m^\perp} \dots P_{V_1^\perp} v_n \rightarrow 0$ για κάποιο $j \in \{1, \dots, m\}$, παίρνουμε ότι:

$$P_{V_{j+1}} v_n - P_{V_m^\perp} \dots P_{V_1^\perp} v_n \rightarrow 0$$

επομένως

$$P_{V_{j+1}} v_n \rightarrow 0$$

και αυτό σημαίνει

$$P_{V_j} v_n \rightarrow 0 \quad 1 \leq j \leq m$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την σχέση [\(13\)](#) που μας δίνει το λήμμα. \square

2.3.2 Διαχωρισμός σε βήματα

Στον δεύτερο τρόπο, ουσιαστικά σε κάθε βήμα κάνουμε έναν διαφορετικό διαχωρισμό του αρχικού χωρίου Ω , δηλαδή:

$$\Omega = \Omega_1^n \cup \Omega_2^n \quad \Omega_i^n \text{ ανοιχτό στον } \mathbb{R}^n \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

Τότε, έχουμε $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ και για $n \geq 0$ τις λύσεις u_{2n+1}, u_{2n+2} του:

$$\begin{cases} -\Delta u_{2n+i} = f & \text{στο } \Omega_i^n \\ u_{2n+i} = u_{2n+i-1} & \text{στο } \partial\Omega_j^n \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (15)$$

και επεκτείνουμε την u_{2n+i} στο Ω κατά u_{2n+i-1} , για $i = 1, 2$.

2.3.3 Παράλληλος διαχωρισμός

Ο τρίτος τρόπος που θα δούμε, περιλαμβάνει "παράλληλες" εκδοχές της μεθόδου. Έχουμε την σχέση (8) και επίσης:

$$\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k} = \emptyset \quad \text{για διαφορετικά } i, j, k \in \{1, \dots, m\}$$

Πρώτα, έχουμε m αριθμό αρχικοποιήσεων: $u_0^j \in H_0^1(\Omega)$ ($1 \leq j \leq m$) και φτιάχνουμε m ακολουθίες ως εξής: για $n \geq 0$ και $i \in \{1, \dots, m\}$, $u_{n+1}^i \in H_0^1(\Omega_i)$ να είναι η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1}^i = f & \text{στο } \Omega_i & u_{n+1}^i = 0 & \text{στο } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ u_{n+1}^i = u_n^j & \text{στο } \partial\Omega_i \cap \Omega_j & 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

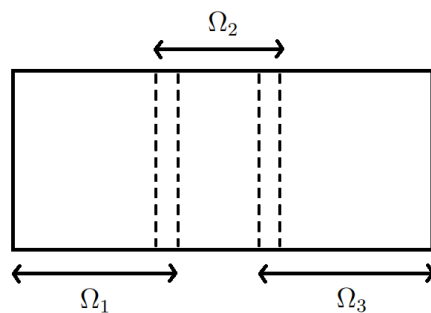
Παρατηρούμε πως για $m = 2$ παίρνουμε τις ακολουθίες $(u_0^2, u_1^1, u_2^2, u_3^1, u_4^2 \dots)$ και $(u_0^1, u_1^2, u_2^1, u_3^2, u_4^1 \dots)$, δηλαδή τις ακολουθίες που είχαμε στην πρώτη εφαρμογή, ενώ από $m \geq 3$ ανεβαίνει η πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, μία δυσκολία που συναντάμε σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι οι ακολουθίες που προκύπτουν δεν είναι πάντα δυνατό να ορίζουν μία συνάρτηση σε ολόκληρο το χωρίο Ω με συνεχή τρόπο. Έτσι για να ξεπεράσουμε τις δυσκολίες, απαιτούμε τα χωρία μας να ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα:

$$\begin{cases} \text{για διαφορετικά } i, j, k \in \{1, \dots, m\} & \text{αν } \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset, \Omega_i \cap \Omega_k \neq \emptyset \\ \text{τότε } \Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset \end{cases} \quad (16)$$

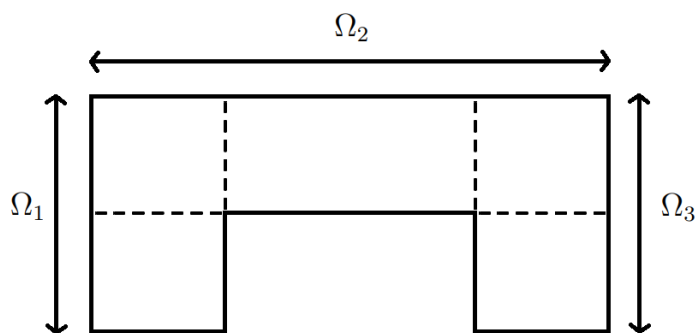
Τώρα, με αυτήν την πρόσθετη ιδιότητα, θα δούμε πως προσαρμόζεται η μέθοδος στην περίπτωση που $m = 3$ και $m = 4$. Για ευκολία στον συμβολισμό θα γράφουμε $\Omega_i \leftrightarrow \Omega_j$ αν $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$.

Για $m = 3$ έχουμε δύο περιπτώσεις:

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3$

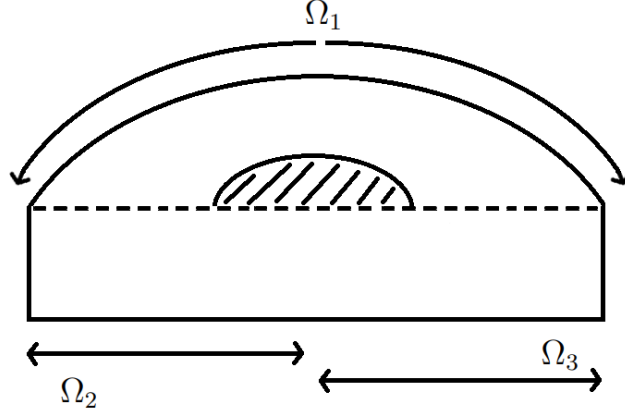


Σχήμα 2.3: Περίπτωση 1 για $m = 3$



Σχήμα 2.4: Περίπτωση 1 για $m = 3$

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_1$



Σχήμα 2.5: Περίπτωση 2 για $m = 3$

Παρατηρούμε πως (16) ικανοποιείται στην πρώτη περίπτωση αλλά όχι στην δεύτερη. Πρώτα, η ερμηνία της (15) για την πρώτη περίπτωση γίνεται ως εξής:

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1}^1 = f & , & u_{n+1}^1 = 0 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega & u_{n+1}^1 = u_n^2 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \\ -\Delta u_{n+1}^2 = f & , & u_{n+1}^2 = u_n^1 & \text{στο } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1 & u_{n+1}^2 = u_n^3 & \text{στο } \partial\Omega_2 \cap \Omega_3 \\ -\Delta u_{n+1}^3 = f & , & u_{n+1}^3 = 0 & \text{στο } \partial\Omega_3 \cap \partial\Omega & u_{n+1}^3 = u_n^2 & \text{στο } \partial\Omega_3 \cap \Omega_2 \end{cases}$$

Έπειτα, ορίζουμε την ακολουθία $(\hat{u}_k)_k$ για $k \geq 1$, η οποία θα είναι η ακολουθία της μεθόδου:

$$\begin{cases} \hat{u}_{2k+1} = u_k^1 & \text{στο } \overline{\Omega_1}, & \hat{u}_{2k+1} = u_{k-1}^2 & \text{στο } \Omega_2 - (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}), & \hat{u}_{2k+1} = u_k^3 & \text{στο } \Omega_3 \\ \hat{u}_{2k+2} = u_k^1 & \text{στο } \Omega_1 - \overline{\Omega_2}, & \hat{u}_{2k+2} = u_{k+1}^2 & \text{στο } \overline{\Omega_2}, & \hat{u}_{2k+2} = u_k^3 & \text{στο } \Omega_3 - \overline{\Omega_2} \end{cases} \quad (17)$$

και σημειώνουμε πως από την (17) μπορούμε να γράψουμε:

$$u - \hat{u}_{2k+2} = P_{V_1^\perp \cap V_2^\perp}(u - \hat{u}_{2k+1}) \quad , \quad u - \hat{u}_{2k+1} = P_{V_2^\perp}(u - \hat{u}_{2k}) \quad (18)$$

Βλέπουμε πως $V_1 \perp V_3$ και επίσης αυτή η περίπτωση είναι σχεδόν ισοδύναμη με την κλασική περίπτωση. Έτσι παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα όσον

αφορά τη σύγκλιση, δηλαδή έχουμε ισχυρή σύγκλιση εάν $\overline{V_1 + V_2 + V_3} = V$ και γεωμετρική σύγκλιση αν $V_1 + V_2 + V_3 = V$.

Στην άλλη περίπτωση δεν είναι τόσο απλό να αποδείξουμε την σύγκλιση με τα ίδια επιχειρήματα και έτσι πρέπει να τροποποιήσουμε την (15) με τον εξής τρόπο (να σημειωθεί πως αυτή η τροποποίηση δεν είναι παράλληλη).

$$\begin{cases} -\Delta u_n^1 = f & \text{στο } \Omega_1, \quad u_n^1 = 0 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_n^1 = u_{n-1}^2 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \Omega_2, \quad u_n^1 = u_{n-1}^3 & \text{στο } \partial\Omega_1 \cap \Omega_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_n^2 = f & \text{στο } \Omega_2, \quad u_n^2 = 0 & \text{στο } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_n^2 = u_{n-1}^1 & \text{στο } \partial\Omega_2 \cap \Omega_1, \quad u_n^2 = u_{n-1}^3 & \text{στο } \partial\Omega_2 \cap \Omega_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_n^3 = f & \text{στο } \Omega_3, \quad u_n^3 = 0 & \text{στο } \partial\Omega_3 \cap \partial\Omega \\ u_n^3 = u_{n-1}^1 & \text{στο } \partial\Omega_3 \cap \Omega_1, \quad u_n^3 = u_{n-1}^2 & \text{στο } \partial\Omega_3 \cap \Omega_2 \end{cases}$$

Μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $(\hat{u}_k)_k$ ως εξής:

$$\begin{cases} \hat{u}_{3k} = u_{k-1}^1 & \text{στο } \overline{\Omega_1} - \overline{\Omega_2}, \quad \hat{u}_{3k} = u_k^2 & \text{στο } \overline{\Omega_2}, \quad \hat{u}_{3k} = u_{k-2}^3 & \text{στο } \overline{\Omega_3} - (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}) \\ \hat{u}_{3k+1} = u_{k-1}^1 & \text{στο } \overline{\Omega_1} - (\overline{\Omega_2} \cup \overline{\Omega_3}), \quad \hat{u}_{3k+1} = u_k^2 & \text{στο } \overline{\Omega_2} - \overline{\Omega_3}, \quad \hat{u}_{3k+1} = u_k^3 & \text{στο } \overline{\Omega_3} \\ \hat{u}_{3k+2} = u_{k+1}^1 & \text{στο } \overline{\Omega_1}, \quad \hat{u}_{3k+2} = u_k^2 & \text{στο } \overline{\Omega_2} - \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_3}, \quad \hat{u}_{3k+2} = u_k^3 & \text{στο } \overline{\Omega_3} - \overline{\Omega_1} \end{cases}$$

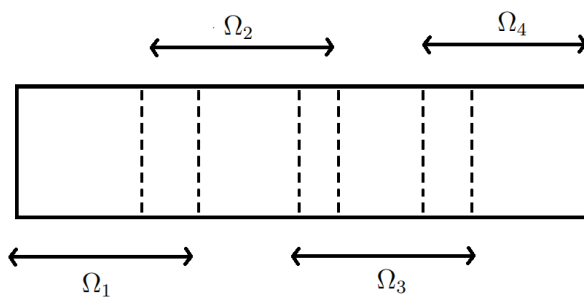
και παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} u - \hat{u}_{3k+2} = P_{V_1^\perp}(u - \hat{u}_{3k+1}) \\ u - \hat{u}_{3k+1} = P_{V_2^\perp}(u - \hat{u}_{3k}) \\ u - \hat{u}_{3k} = P_{V_3^\perp}(u - \hat{u}_{3k-1}) \end{cases}$$

και τώρα παρατηρούμε ότι αυτή η μορφή κατά μία έννοια ισοδυναμεί με την κλασική περίπτωση και τώρα μπορούμε να πάρουμε τα αποτελέσματα σύγκλισης που θέλουμε.

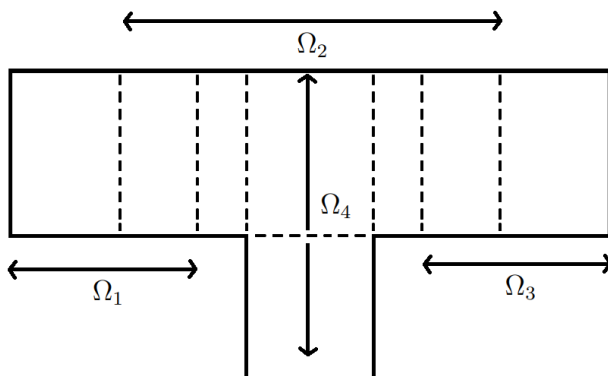
Όταν $m = 4$, έχουμε έξι περιπτώσεις:

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_4$



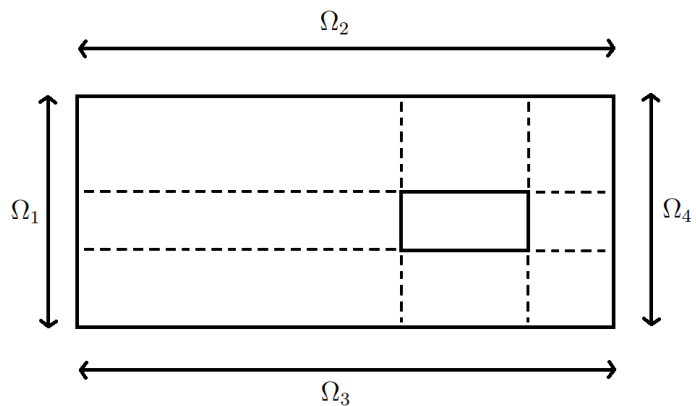
Σχήμα 2.6: Περίπτωση 1 για $m = 4$

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_4$ και $\Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3$



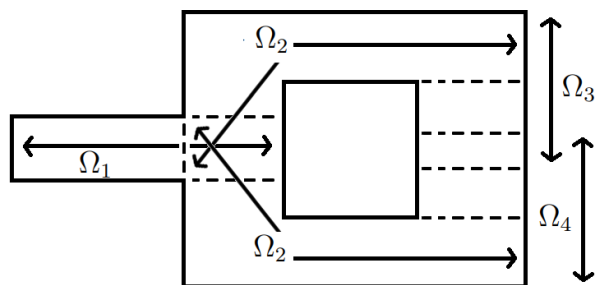
Σχήμα 2.7: Περίπτωση 2 για $m = 4$

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_4 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_1$



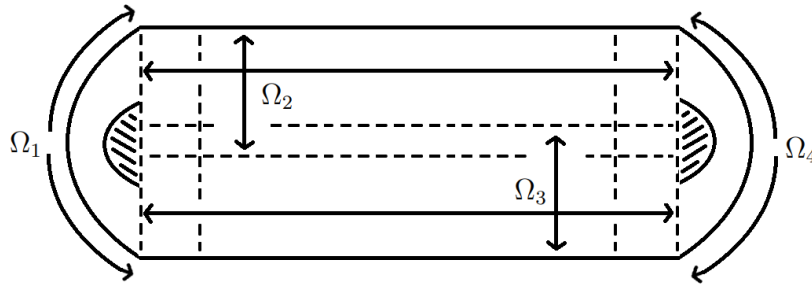
Σχήμα 2.8: Περίπτωση 3 για $m = 4$

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_4 \leftrightarrow \Omega_2$



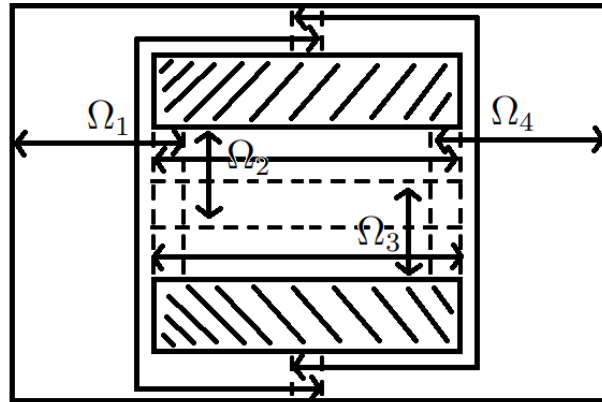
Σχήμα 2.9: Περίπτωση 4 για $m = 4$

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_4 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_1$ και $\Omega_3 \leftrightarrow \Omega_2$



Σχήμα 2.10: Περίπτωση 5 για $m = 4$

- $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_4 \leftrightarrow \Omega_1$



Σχήμα 2.11: Περίπτωση 6 για $m = 4$

Η (16) ισχύει για τις πρώτες τρεις περιπτώσεις. Έτσι, θα κάνουμε τροποποιήσεις όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με σκοπό να πάρουμε έναν αλγόριθμο που να μπορεί να μας δώσει λύσεις σε όλο το Ω .

Για $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_4$ έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_{2k} = u_{k-1}^1 \text{ στο } \overline{\Omega_1} - \overline{\Omega_2}, \quad \hat{u}_{2k} = u_k^2 \text{ στο } \overline{\Omega_2}, \quad \hat{u}_{2k} = u_{k-1}^3 \\ \text{στο } \overline{\Omega_3} - (\overline{\Omega_2} \cup \overline{\Omega_4}) \quad \hat{u}_{2k} = u_k^4 \text{ στο } \overline{\Omega_4} \\ \hat{u}_{2k+1} = u_{k+1}^1 \text{ στο } \overline{\Omega_1}, \quad \hat{u}_{2k+1} = u_k^2 \text{ στο } \overline{\Omega_2} - (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_3}), \quad \hat{u}_{2k+1} = u_{k+1}^3 \\ \text{στο } \overline{\Omega_3} \quad \hat{u}_{2k+1} = u_k^4 \text{ στο } \overline{\Omega_4} - \overline{\Omega_3} \end{array} \right. \quad (19)$$

έτσι ώστε:

$$\hat{u}_{2k+1} - u = P_{V_1^\perp \cap V_3^\perp}(\hat{u}_{2k} - u) \quad , \quad \hat{u}_{2k} - u = P_{V_2^\perp \cap V_4^\perp}(\hat{u}_{2k-1} - u)$$

Για $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_4$ και $\Omega_2 \leftrightarrow \Omega_3$ έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_{2k} = u_{k-1}^1 \text{ στο } \overline{\Omega_1} - \overline{\Omega_2}, \quad \hat{u}_{2k} = u_k^2 \text{ στο } \overline{\Omega_2}, \quad \hat{u}_{2k} = u_{k-1}^3 \\ \text{στο } \overline{\Omega_3} - \overline{\Omega_2} \quad \hat{u}_{2k} = u_{k-1}^4 \text{ στο } \overline{\Omega_4} - \overline{\Omega_2} \\ \hat{u}_{2k+1} = u_{k+1}^1 \text{ στο } \overline{\Omega_1}, \quad \hat{u}_{2k+1} = u_k^2 \text{ στο } \overline{\Omega_2} - (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_3} \cup \overline{\Omega_4}), \quad \hat{u}_{2k+1} = u_{k+1}^3 \\ \text{στο } \overline{\Omega_3} \quad \hat{u}_{2k+1} = u_{k+1}^4 \text{ στο } \overline{\Omega_4} \end{array} \right. \quad (20)$$

έτσι ώστε:

$$\hat{u}_{2k+1} - u = P_{V_1^\perp \cap V_3^\perp \cap V_4^\perp}(\hat{u}_{2k} - u) \quad , \quad \hat{u}_{2k} - u = P_{V_2^\perp}(\hat{u}_{2k-1} - u)$$

Για $\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2 \leftrightarrow \Omega_4 \leftrightarrow \Omega_3 \leftrightarrow \Omega_1$ έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_{2k} = u_{k-1}^1 \text{ στο } \overline{\Omega_1} - (\overline{\Omega_2} \cup \overline{\Omega_3}), \quad \hat{u}_{2k} = u_k^2 \text{ στο } \overline{\Omega_2}, \quad \hat{u}_{2k} = u_k^3 \\ \text{στο } \overline{\Omega_3} - (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_4}) \quad \hat{u}_{2k} = u_{k-1}^4 \text{ στο } \overline{\Omega_4} - (\overline{\Omega_2} \cup \overline{\Omega_3}) \\ \hat{u}_{2k+1} = u_{k+1}^1 \text{ στο } \overline{\Omega_1}, \quad \hat{u}_{2k+1} = u_k^2 \text{ στο } \overline{\Omega_2} - (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_4}), \quad \hat{u}_{2k+1} = u_k^3 \\ \text{στο } \overline{\Omega_3} - (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_4}) \quad \hat{u}_{2k+1} = u_{k+1}^4 \text{ στο } \overline{\Omega_4} \end{array} \right. \quad (21)$$

έτσι ώστε:

$$\hat{u}_{2k+1} - u = P_{V_1^\perp \cap V_4^\perp}(\hat{u}_{2k} - u) \quad , \quad \hat{u}_{2k} - u = P_{V_2^\perp \cap V_3^\perp}(\hat{u}_{2k-1} - u)$$

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή σε προβλήματα ελαχιστοποίησης

3.1 Εφαρμογή 1

Έστω V χώρος Hilbert και V_1, V_2 να είναι δύο κλειστοί υπόχωροι τέτοιοι ώστε $V = V_1 + V_2$. Θα ελαχιστοποιήσουμε στον $V = H_0^1(\Omega)$ το συναρτησιακό:

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx \quad (22)$$

Το $J : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ είναι κάτω ημισυνεχές, πιεστικό, κυρτό, ισχύει ότι $J(\cdot) > -\infty$ και υπάρχει $x_0 \in V$ τέτοιο ώστε $J(x_0) < +\infty$.

Παρατηρούμε πως το J είναι το ενεργειακό συναρτησιακό του προβλήματος (1) επομένως ξέρουμε ότι αν u λύση του (1) τότε η u ελαχιστοποιεί και το (22). Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των εναλλασσουσών προβολών σε αυτό το πρόβλημα και έτσι το (22) ισοδυναμεί με:

Έστω $u_0 \in V$, $J(u_0) < \infty$ και:

$$\begin{cases} u_{2n+1} - u_{2n} & \text{ελαχιστοποιεί το } J(u_{2n} + \cdot) \text{ στο } V_1 \\ u_{2n+2} - u_{2n+1} & \text{ελαχιστοποιεί το } J(u_{2n+1} + \cdot) \text{ στο } V_2 \end{cases} \quad (23)$$

για όλα τα $n \geq 0$. Με τον συμβολισμό $J(u_n + \cdot)$ εννοούμε $J(u_n + v)$ για κάθε v στον $H_0^1(\Omega)$, επομένως η σχέση (23) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\begin{cases} J(u_{2n+1}) \leq J(u_{2n} + v) & \text{στον } V_1 \\ J(u_{2n+2}) \leq J(u_{2n+1} + v) & \text{στον } V_2 \end{cases} \quad (23')$$

Θέτουμε $\forall r < \infty$ το σύνολο $K_r = \{u \in V : J(u) < r\}$ και υποθέτουμε ότι $J \in C^1(K_r)$ και

$$\begin{cases} \exists a_r > 0 \quad \forall v, u \in K_r \quad J(v) - J(u) - (J'(u), v - u) \geq a_r |v - u|^2 \\ J' \text{ είναι ομοιόμορφα συνεχής πάνω στο } K_r \end{cases} \quad (24)$$

όπου J' η παράγωγος του J .

Θεώρημα 3.1.1. *Με τις παραπάνω προϋποθέσεις η ακολουθία $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπως ορίστηκε στη σχέση (23) συγκλίνει στο $u \in V$ το οποίο είναι ελάχιστο του J . Επίσης, εάν J' είναι Lipschitz σε μία γειτονιά του u τότε η ακολουθία (u_n) συγκλίνει γεωμετρικά στο u .*

Απόδειξη. Αρχικά έχουμε ότι $J(u_n) \downarrow l$ για κάποιο $l \in \mathbb{R}$ καθώς η (u_n) είναι φθίνουσα ακολουθία, άρα η (u_n) είναι κάτω φραγμένη στον V . Επίσης η σχέση (23) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{cases} (J'(u_{2n+1}), v_1) = 0 \quad \forall v_1 \in V_1 \quad u_{2n+1} - u_{2n} \in V_1 \\ (J'(u_{2n+2}), v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in V_2 \quad u_{2n+2} - u_{2n+1} \in V_2 \end{cases} \quad (25)$$

για $n \geq 0$. Επιλέγουμε $r > J(u_0)$ και συμβολίζουμε $a = a_r$ και ω ο συντελεστής συνέχειας του J' στο K_r .

Εφαρμόζουμε την (24) με $v = u_{2n}$, $u = u_{2n+1}$ και $v = u_{2n+1}$, $u = u_{2n+2}$ και παίρνουμε:

$$J(u_{2n}) - J(u_{2n+1}) - (J'(u_{2n+1}), u_{2n} - u_{2n+1}) \geq a |u_{2n} - u_{2n+1}|$$

$$J(u_{2n+1}) - J(u_{2n+2}) - (J'(u_{2n+2}), u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geq a |u_{2n+1} - u_{2n+2}|$$

Από την σχέση (25) μηδενίζονται οι όροι με τα εσωτερικά γινόμενα και έτσι:

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq a_r |u_n - u_{n+1}|^2, \quad n \geq 0 \quad (26)$$

Άρα, έχουμε ότι $u_n - u_{n+1} \rightarrow 0$ στον V .

Τώρα, από την απόδειξη του λήμματος [1](#) έχουμε ότι για κάθε $v \in V$ υπάρχουν $v_1 \in V_1$ και $v_2 \in V_2$ τέτοια ώστε:

$$v = v_1 + v_2 \quad : \quad \max(|v_1|, |v_2|) \leq C_0|v|$$

για κάποιο $C_0 > 0$ ανεξάρτητο του v . Έτσι, έχουμε

$$\max(|v_1|, |v_2|)|J'(u_{2n+1}) - J'(u_{2n+2})| \leq C_0|J'(u_{2n+1}) - J'(u_{2n+2})|$$

Από την σχέση [\(25\)](#), παίρνουμε:

$$|(v_1, J'(u_{2n+2}))| \leq C_0|J'(u_{2n+1}) - J'(u_{2n+2})|$$

και

$$|(v_2, J'(u_{2n+1}))| \leq C_0|J'(u_{2n+1}) - J'(u_{2n+2})|$$

προσθέτοντας τις σχέσεις:

$$|(v_1, J'(u_{2n+2}))| + |(v_2, J'(u_{2n+1}))| \leq 2C_0|J'(u_{2n+1}) - J'(u_{2n+2})|$$

δηλαδή,

$$|(J'(u_{2n+1}) + J'(u_{2n+2}), v)| \leq \hat{C}_0|J'(u_{2n+1}) - J'(u_n)||v| \quad \forall v \in V$$

Άρα,

$$|(J'(u_n), v)| \leq \hat{C}_0|J'(u_{2n+1}) - J'(u_n)||v| \quad \forall v \in V$$

και από [\(24\)](#) έχουμε:

$$|J'(u_n)| \leq \hat{C}_0\omega(|u_{n+1} - u_n|) \quad , \quad n \geq 0 \quad (27)$$

Επίσης από [\(24\)](#) για $v = u$ και $u = u_n$ όπου u είναι το ελάχιστο του J , παίρνουμε:

$$J(u) - J(u_n) - (J'(u_n) - J'(u), u - u_n) \geq a_r|u_n - u|^2$$

Άρα:

$$|u_n - u|^2 \leq \frac{1}{a} (J'(u_n) - J'(u), u_n - u) = \frac{1}{a_r} (J'(u_n), u_n - u)$$

άρα με χρήση της [\(24\)](#):

$$|u_n - u| \leq \frac{C_0}{a} \omega(|u_{n+1} - u_n|) \quad (28)$$

Και η σύγκλιση έχει αποδειχτεί.

Αν τώρα J' είναι Lipschitz σε μία γειτονιά του u , έχουμε αρχικά ότι για αρκετά μεγάλο n παίρνουμε από σχέση (28) ότι:

$$|u_n - u|^2 \leq C_1 |u_{n+1} - u_n|^2$$

για κάποιο $C_1 > 0$ ανεξάρτητο του n . Πηγαίνοντας πίσω στην σχέση (26) παίρνουμε:

$$(J(u_n) - J(u)) - (J(u_{n+1}) - J(u)) \geq a |u_n - u_{n+1}|^2$$

άρα:

$$(J(u_n) - J(u)) - (J(u_{n+1}) - J(u)) \geq \frac{a_r}{C_1} |u_n - u| \quad (29)$$

και από την Lipschitz συνέχεια της J' έχουμε ότι κοντά στο u :

$$J(u_n) - J(u) \leq C_2 |u_n - u|$$

ενώ από την άλλη έχουμε από σχέση (24):

$$J(u_n) - J(u) \geq a_r |u_n - u|^2$$

Επομένως συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις με την (28) έχουμε:

$$C_2 |u_n - u|^2 - a_r |u_{n+1} - u|^2 \geq \frac{a_r}{C_1} |u_n - u|^2$$

$$\sqrt{C_2 - \frac{a_r}{C_1}} |u_n - u| \geq \sqrt{a_r} |u_{n+1} - u|$$

$$|u_{n+1} - u| \leq \sqrt{\frac{C_2}{a_r} - \frac{1}{C_1}} |u_n - u|$$

και έχουμε ότι η $(u_n)_n$ συγκλίνει γεωμετρικά. □

3.2 Εφαρμογή 2

Έστω $V = H_0^1(\Omega)$. Τώρα θα δείξουμε πως η μέθοδος συγκλίνει για συναρτησιακά του τύπου:

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_V^2 - L(u) + \text{III}(u) \quad \forall u \in V \quad (30)$$

όπου $\text{III}(u) = 0$ αν $u \in K$ και $\text{III}(u) = \infty$ αν $u \notin K$, $L \in V^*$ και K κλειστό, κυρτό και μη κενό. Και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $V = H_0^1(\Omega)$. Για ένα τέτοιο συναρτησιακό, η συνάρτηση u που το ελαχιστοποιεί στον V , λύνει την μεταβολική ανισότητα:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v, u \in K \quad (31)$$

όπου $f \in L^2(\Omega)$ (ή γενικότερα στον $H^{-1}(\Omega)$). Κάποια παραδείγματα κυρτών συνόλων K είναι:

$$K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq h \text{ σ.π στο } \Omega\} \quad (32)$$

$$K_2 = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid h_1 \leq v \leq h_2 \text{ σ.π στο } \Omega\} \quad (33)$$

όπου $h, h_1, h_2 \in H^{-1}(\Omega)$ και $h, h_1 \leq 0$ στο $\partial\Omega$ ενώ $h_2 \geq 0$ στο $\partial\Omega$.

Σε μία τέτοια ανισότητα όπως η (31) η μέθοδος των εναλλασσουσών προβολών μας δίνει την ακολουθία: $u_0 \in K$, u_{2n+1} και u_{2n+2} για κάθε $n \geq 0$ να είναι λύσεις των παρακάτω ανισοτήτων:

$$\begin{cases} (u_{2n+1}, v - u_{2n+1}) \geq L(v - u_{2n+1}) & \forall v, u_{2n+1} \in K \cap (u_{2n} + V_1) \\ (u_{2n+2}, v - u_{2n+2}) \geq L(v - u_{2n+2}) & \forall v, u_{2n+2} \in K \cap (u_{2n+1} + V_2) \end{cases} \quad (34)$$

Στην περίπτωση που $V = H_0^1(\Omega)$ και $V_1 = H_0^1(\Omega_1)$, $V_2 = H_0^1(\Omega_2)$ η (34) γίνεται:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_1} \nabla u_{2n+1} \cdot \nabla (v - u_{2n+1}) - f(v - u_{2n+1}) dx \geq 0 & \forall v \in K \\ v := u_{2n} \text{ στο } \Omega_1^C & u_{2n+1} \in K \quad u_{2n+1} := u_{2n} \text{ στο } \Omega_1^C \\ \int_{\Omega_2} \nabla u_{2n+2} \cdot \nabla (v - u_{2n+2}) - f(v - u_{2n+2}) dx \geq 0 & \forall v \in K \\ v := u_{2n+1} \text{ στο } \Omega_2^C & u_{2n+2} \in K \quad u_{2n+2} := u_{2n+1} \text{ στο } \Omega_2^C \end{cases} \quad (35)$$

Θεώρημα 3.2.1. Έστω $V_1 + V_2 = V$ και ισχύει η (39). Τότε η ακολουθία $(u_n)_n$ από την (34) συγκλίνει στο u της (36)

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $J(u_n) \downarrow l$ αφού η u_n είναι φθίνουσα ακολουθία, άρα u_n φραγμένη και με αντικατάσταση στην (34) με $v = u_{2n}$ ή $v = u_{2n+1}$ παίρνουμε:

$$J(u_{n+1}) + \frac{1}{2}|u_n - u_{n+1}|^2 \leq J(u_n) \quad \forall n \geq 0$$

και άρα $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ στον V .

Στη συνέχεια, στη σχέση (34) παίρνουμε $v = T(u, u_{2n})$ και $v = T(u_{2n+1}, u)$ και από την (39) έχουμε:

$$(u_{2n+1}, T(u, u_{2n}) - u_{2n+1}) \geq L(T(u, u_{2n}) - u_{2n+1})$$

$$(u_{2n+2}, T(u_{2n+1}, u) - u_{2n+2}) \geq L(T(u_{2n+1}, u) - u_{2n+2})$$

προσθέτουμε αυτές τις δύο σχέσεις και με χρήση της (39) έχουμε:

$$(u_{2n+1}, u + u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geq L(u + u_{2n+1})$$

$$+(u_{2n+1}, T(u_{2n+1}, u) - T(u, u)) + (u_{2n+2} - u_{2n+1}, T(u_{2n+1}, u) - u_{2n+2})$$

Τώρα από την ομοιόμορφη συνέχεια της $T(\cdot, u)$ σε φραγμένο σύνολο παίρνουμε

$$(u_{2n+1}, u - u_{2n+1}) - L(u - u_{2n+1}) \geq \epsilon_{2n+1} \rightarrow 0$$

με ίδια επιχειρήματα για u_{2n} παίρνουμε ότι για κάθε $n \geq 0$

$$(u_n, u - u_n) - L(u - u_n) \geq \epsilon_n \rightarrow 0$$

ενώ από την άλλη πλευρά, η (36) μας δείνει για κάθε $n \geq 0$

$$(u, u_n - u) - L(u_n - u) \geq 0$$

Επομένως $|u_n - u|^2 \leq \epsilon_n$.

□

Βιβλιογραφία

- [1] Evans, L.C. (2010) Partial Differential Equations. 2nd Edition, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, American Mathematical Society.
- [2] Rudin, W. (1991) Functional Analysis. Second Edition, International Editions, Mc-Graw-Hill, New York.
- [3] Haïm Brezis (1997), Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία κι εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
- [4] P. L. Lions (1988), “On the Schwarz Alternating Method. I,” 1st International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia.
- [5] Νικόλαος Γιαννακάκης, Σημειώσεις προπτυχιακού μαθήματος ”Συναρτησιακή Ανάλυση Ι”.
- [6] Νικόλαος Παπαγεωργίου, Σημειώσεις προπτυχιακού μαθήματος ” Θεωρία Τελεστών”.