Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Άλγεβρες Frobenius

Νίκος Τσόλκας

Διπλωματική εργασία
Δεκέμβριος 2023

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Χριστίνα Βασιλακοπούλου

Υπόλοιπα Μέλη Τριμελούς Επιτροπής
Βασίλης Γρηγοριάδης
Σοφία Λαμπροπούλου

Ευχαριστίες

Πριν ξεκινήσουμε με την διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά μέσα απο την καρδιά μου την κ. Χριστίνα Βασιλακοπούλου η οποία ως επιβλέπουσα με ενθάρρυνε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα και να το προσεγγίσω μέσω της θεωρίας κατηγοριών. Με αυτόν τον τρόπο ήρθα σε επαφή με έναν κλάδο των μαθηματικών που δεν είχα ξανά ακούσει ως προπτυχιακός φοιτητής και μέσω της μελέτης του, για τις ανάγκες της εργασίας, έμαθα να προσεγγίζω μαθηματικές δομές που ήδη γνώριζα με έναν διαφορετικό τρόπο. Ακόμη θα ήθελα να την ευχαριστήσω για την πολύτιμη καθοδήγησή της και την αφοσίωσή της στην επίβλεψη μου, αφού μέχρι και τον τελευταίο μήνα της εγκυμοσύνης της δεν έλειψε ποτέ δίπλα απο το πλευρό μου για να μου απαντήσει σε όποια απορία είχα. Τις ευχαριστίες μου θα ήθελα να εκφράσω και στην κ. Σοφία Λαμπροπούλου για την βοήθειά της στο κεφάλαιο των συνσυνορισμών (cobordisms), στην ίδια και τον κ. Βασίλη Γρηγοριάδη που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς μου επιτροπής, αλλά και στον διδακτορικό φοιτητή Θεόφιλο Τσαντίλα για τις πολύτιμες συμβουλές του και το υλικό που μου πρότεινε στις άλγεβρες και συνάλγεβρες. Κλείνοντας, δεν παραλείπω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, τους φίλους μου και την κοπέλα μου οι οποίοι ήταν δίπλα μου σε όλο αυτό το εγχείρημα και έμαθαν, χωρίς την θέληση τους, τι είναι οι άλγεβρες Frobenius.

Περίληψη

Οι άλγεβρες Frobenius αποτελούν ένα σύγχρονο πεδίο έρευνας και μελέτης των μαθηματικών. Η εφαρμογή τους συναντάται στην άλγεβρα και την τοπολογία αλλά και στην φυσική με τις κβαντικές θεωρίες πεδίου. Οι άλγεβρες Frobenius αποτελούν άλγεβρες οι οποίες είναι συγχρόνως και συνάλγεβρες και ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες .Στην παρούσα διπλωματική εργασία, αφού μελετήσουμε τις έννοιες των αλγεβρών και συναλγεβρών σε μια γενική μονοειδή κατηγορία, θα προχωρήσουμε στις άλγεβρες Frobenius σε μονοειδείς κατηγορίες. Στην συνέχεια θα εστιάσουμε στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων όπου εκεί θα ορίσουμε τις Frobenius k-άλγεβρες και θα μελετήσουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα. Στο τέλος αναφερόμαστε συνοπτικά στη σύνδεσή τους με την σημαντικότατη τοπολογική κβαντική θεωρία πεδίου, αναφέροντας κάποιες πολύ βασικές έννοιες σχετικά με πολλαπλότητες (manifolds) και συνσυνορισμούς (cobordisms).

Abstract

Frobenius algebras constitute a modern field of study and research in mathematics. Their applications can be found in algebra and topology and moreover in physics with quantum field theories. Frobenius algebras are at the same time algebras and coalgebras that satisfy specific properties. At this diploma thesis, we examine algebras and coalgebras in a general monoidal category and then we give the definition of Frobenius algebras in monoidal categories. Afterwards, we will focus on the category of vector spaces where we give the definition of Frobenius k-algebras and examine some important results. Finally, we refer to the connection between Frobenius algebras and topological quantum field theories, including some vary basic notions about manifolds and cobordisms.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Οι άλγεβρες Frobenius ξεκίνησαν να μελετώνται εκτενώς την δεκαετία του 1930 απο τον αμερικανογερμανό μαθηματικό Richard Brauer (1901-1977) και τον καναδό διδακτορικό μαθητή του Cecil Nesbitt (1912-2001). Πήραν το όνομα του γερμανού μαθηματικού Georg Frobenius (1849-1917) διότι εκείνος ήταν ο πρώτος που έθεσε το ερώτημα το οποίο οδήγησε στην δημιουργία τους. Ο Frobenius στο δεύτερο μισό της καριέρας του ασχολήθηκε έντονα με την θεωρία ομάδων και τις αναπαραστάσεις ομάδων. Γνώριζε πως για κάθε πεπερασμένη ομάδα η αριστερή και δεξιά κανονική αναπαράστασή της είναι ισοδύναμες, κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση των πεπερασμένων αλγεβρών. Έτσι, κατά την διάρκεια του 19ου αιώνα έθεσε το ερώτημα 'ποιες άλγεβρες διατηρούν την συγκεκριμένη ιδιότητα;'. Τα τελευταία χρόνια, οι άλγεβρες Frobenius έχουν αποκτήσει ενδιαφέρον λόγω της χρησιμότητας τους στην τοπολογία, την φυσική, την άλγεβρα αλλά και την επιστήμη των υπολογιστών.

Η κλασσική αλγεβρική προσέγγιση έχει ως εξής: μια άλγεβρα Frobenius είναι μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα A εφοδιασμένη με μια προσεταιριστική μη εκφυλισμένη αντιστοίχιση $\sigma\colon A \times A \to k$, ή εφοδιασμένη με ένα γραμμικό συναρτησοειδές όπου ο πυρήνας του δεν περιέχει μη τετριμμένα ιδεώδη, ή εφοδιασμένη με έναν $A-$γραμμικό ισομορφισμό προς τον δυϊκό χώρο A^*. Ένας ακόμη χαρακτηρισμός είναι πως μια άλγεβρα Frobenius είναι μια άλγεβρα που είναι συγχρόνως και συνάλγεβρα με συμβιβαστότητα ανάμεσα στο γινόμενο και το συνγινόμενο, και η συγκεκριμένη ιδιότητα μάλιστα έχει και τοπολογικό ενδιαφέρον. Η δική μας προσέγγιση στις άλγεβρες Frobenius βασίζεται κυρίως στον δεύτερο χαρακτηρισμό, που γενικεύεται μέσω της θεωρίας κατηγοριών.

Με την θεωρία κατηγοριών μπορούμε να 'κοιτάξουμε' τα μαθηματικά απο μια διαφορετική σκοπιά όπου οι λεπτομέρειες των εκάστοτε αντικειμένων που μελετώνται δεν παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο, όσο τα μοτίβα που παρουσιάζονται ανάμεσα σε μαθηματικές δομές. Για παράδειγμα, την ομοιότητα που παρουσιάζουν ο πολλαπλασιασμός δύο φυσικών αριθμών και το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών χώρων, ή τα κοινά στοιχεία που χαρακτηρίζουν τοπολογικούς χώρους, ελεύθερες ομάδες και χώρους συναρτήσεων. Αφού λοιπόν αρχικά δώσουμε κάποιες προαπαιτούμενες έννοιες και παραδείγματα για άλγεβρες και συνάλγεβρες, στην συνέχεια της εργασίας θα μελετήσουμε τον τρόπο που ορίζεται μια κατηγορία, ιδιότητες που την χαρακτηρίζουν, παραδείγματα κατηγοριών και θα δούμε με ποιον τρόπο συνδέονται διαφορετικές κατηγορίες μεταξύ τους. Στόχος μας είναι να μπορέσουμε να ορίσουμε τις άλγεβρες Frobenius εντός κάποιων συγκεκριμένων κατηγοριών, οι οποίες θα δούμε πως λέγονται μονοειδείς, και μέσω αυτής της γενίκευσης απο το αρχικό περιβάλλον των διανυσματικών χώρων να τις μελετήσουμε ευκολότερα και πιο διεξοδικά.

Στο τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής γίνεται αναφορά στην τοπολογική σημασία των Frobenius αλγεβρών και την σύνδεσή τους με τις τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίου (TQFT's). Συγκεκριμένα, η κβαντική φυσική είναι το πεδίο εκείνο της φυσικής που προσπαθεί να περιγράψει φαινόμενα σε πολύ μικρή κλίμακα τα οποία όμως εμφανίζουν πολλές φορές ομοιότητες και με φαινόμενα μεγάλης κλίμακας. Κάτι ανάλογο συναντάμε και στην διαφορική γεωμετρία όπου οι καθολικές ιδιότητες μιας πολλαπλότητας M μπορούν να γίνουν αντιληπτές ως αναλλοίωτες του υποκείμενου τοπολογικού χώρου της M. Οι τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίου αποτελούν μια απλούστευση των δυναμικών κβαντικών θεωριών πεδίου στις οποίες διατηρούνται μόνο τα τοπολογικά στοιχεία. Με αυτόν τον τρόπο λειτουργούν ως αρχικά μοντέλα μέσω των οποίων μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα σημαντικά για το τελικό μοντέλο. Στην πραγματικότητα, η μελέτη των Frobenius αλγεβρών είναι το ίδιο πράγμα με την μελέτη τοπολογικών κβαντικών θεωρίων πεδίου στις δύο διαστάσεις αφού όπως θα δούμε αυτές οι δύο κατηγορίες είναι ισόμορφες μεταξύ τους.

2 Προαπαιτούμενα

2.1 Διανυσματικοί χώροι

Στην συγκεκριμένη ενότητα τα περισσότερα είναι γνωστά απο ένα μάθημα γραμμικής άλγεβρας, π.χ. [18]. Παρ΄όλα αυτά, για λόγους πληρότητας, θα αναφέρουμε κάποια στοιχεία που θα μας φανούν χρήσιμα στην συνέχεια της εργασίας.

Ορισμός 2.1. Έστω το μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μια εσωτερική πράξη, την πρόσθεση

$$+ \colon V \times V \to V, (x, y) \to x + y$$

και μια εξωτερική πράξη απο ένα σώμα K, το βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot \colon K \times V \to V, (\lambda, x) \to \lambda x$$

έτσι ώστε για κάθε $x, y, z \in V, \lambda, \mu \in K$ να ισχύουν

1. $x + y = y + x$ (αντιμεταθετική ιδιότητα),
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (προσεταιριστική ιδιότητα),
3. υπάρχει $0 \in V$ τέτοιο ώστε: $x + 0 = x$ (ουδέτερο στοιχείο),
4. για κάθε $x \in V$ υπάρχει $-x \in V \colon x + (-x) = 0$ (αντίθετο στοιχείο),
5. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του K),
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του V),
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$,
8. $1x = x$

Τότε το σύνολο V ονομάζεται **διανυσματικός χώρος** ή **γραμμικός χώρος** πάνω στο σώμα K.

Ορισμός 2.2. Τα στοιχεία $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, του διανυσματικού χώρου V πάνω απο το σώμα k είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in k$ όχι όλοι μηδέν, έτσι ώστε να ισχύει

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$$

Τα στοιχείο $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, του διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα k είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα**, αν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή ισοδύναμα αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Ορισμός 2.3. Το υποσύνολο $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ του διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K, είναι μια **βάση** του διανυσματικού χώρου V, αν ισχύουν:

- Τα $u_1, u_2, ..., u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- $[u_1, u_2, ..., u_n] = V$, δηλαδή τα $u_1, u_2, ..., u_n$ παράγουν τον χώρο V.

Όπως είναι ευρέως γνωστό, ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα βάσης διανυσματικού χώρου είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτή είναι το σύνολο των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, όπου:

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$$

Ορισμός 2.4. Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω απο το σώμα k. Αν ο V έχει μια πεπερασμένη βάση, τότε ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των στοιχείων της βάσης του λέγεται **διάσταση** του V και συμβολίζεται $dimV$. Αν ο V δεν έχει πεπερασμένη βάση, τότε λέμε οτι είναι άπειρης διάστασης.

Ορισμός 2.5. Έστω οι διανυσματικοί χώροι X και Y πάνω στο σώμα $k = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Η απεικόνιση

$$f \colon X \to Y$$

λέγεται **γραμμική** αν ισχύουν:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in X$ (προσθετική)
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, για κάθε $\lambda \in k, x \in X$ (ομογενής)

ή ισοδύναμα αν ισχύει

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in k$.

2.2 Τανυστικό γινόμενο

Ορισμός 2.6. Έστω οι διανυσματικοί χώροι V, W και X πάνω απο το ίδιο σώμα k. Ορίζουμε **διγραμμική απεικόνιση** (π.χ. [13]) να είναι μια συνάρτηση

$$f\colon V \times W \to X$$

τέτοια ώστε για κάθε $w \in W$, η συνάρτηση f_w

$$v \mapsto f(v, w)$$

να είναι γραμμική απο το V στο X, και για κάθε $v \in V$ η συνάρτηση f_v

$$w \mapsto f(v, w)$$

να είναι γραμμική απο το W στο X.

Δηλαδή, όταν η πρώτη μεταβλητή είναι σταθερή ενώ η δεύτερη μεταβάλλεται προκύπτει ένας γραμμικός τελεστής. Το ίδιο προκύπτει και όταν σταθερή είναι η δεύτερη μεταβλητή και μεταβάλλεται η πρώτη.

Για κάθε διγραμμική συνάρτηση f ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Για κάθε $\lambda \in k$ έχουμε $f(\lambda v, w) = f(v, \lambda w) = \lambda f(v, w)$
2. Έστω $v_1, v_2 \in V$ και $w_1, w_2 \in W$ τότε ισχύει:

$$f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$$

$$f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$$

Αν $V = W$ και ισχύει πως $f(v, w) = f(w, v)$ για κάθε $v, w \in V$ τότε λέμε πως η f είναι **συμμετρική**.

Το τανυστικό γινόμενο διανυσματικών χώρων είναι ένα πολύ σημαντικό μαθηματικό εργαλείο που βρίσκει εφαρμογές όχι μόνο στην άλγεβρα αλλά και στην φυσική και μηχανική.

Ορισμός 2.7. Έστω οι διανυσματικοί χώροι V,W. **Τανυστικό γινόμενο** των V και W είναι ένας διανυσματικός χώρος $V \otimes W$ μαζί με μια διγραμμική συνάρτηση $f\colon V \times W \to V \otimes W$ τέτοια ώστε να ισχύει η εξής καθολική ιδιότητα: για κάθε διανυσματικό χώρο U και για κάθε διγραμμική συνάρτηση $\phi\colon V \times W \to U$, υπάρχει μοναδική γραμμική συνάρτηση $\overline{\phi}\colon V \otimes W \to U$ τέτοια ώστε $\phi = \overline{\phi} \circ f$

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & & V \otimes W \arrow[dl, dashed, "\overline{\phi}"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Ο χώρος τανυστικού γινομένου είναι ένας χώρος που μας επιτρέπει να 'χαρακτηρίσουμε' διγραμμικές συναρτήσεις μέσω γραμμικών συναρτήσεων και είναι επί της ουσίας μοναδικός όπως φαίνεται από το παρακάτω.

Πρόταση 2.8. *Το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσματικών χώρων είναι μοναδικό έως ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Έστω $(V \otimes W)'$ ένας άλλος χώρος τανυστικού γινομένου των χώρων V και W, διαφορετικός του $V \otimes W$ και έστω $f' \colon V \times W \to (V \otimes W)'$ διγραμμική συνάρτηση.

$$\begin{tikzcd}
& V \otimes W \arrow[dr, shift left, "\overline{f'}"] & \\
V \times W \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "\phi"'] & & (V \otimes W)' \arrow[ul, shift left, "\overline{f}"] \arrow[dl, dashed, "\overline{\phi}"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Αφού ο $(V \otimes W)'$ είναι χώρος τανυστικού γινομένου τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\overline{f'} \colon V \otimes W \to (V \otimes W)'$ τέτοια ώστε $f' = \overline{f'} \circ f$. Όμοια και για τον χώρο $(V \otimes W)'$ υπάρχει μοναδική $\overline{f} \colon (V \otimes W)' \to V \otimes W$ τέτοια ώστε $f = \overline{f} \circ f'$. Έχουμε λοιπόν:

$$1_{V \otimes W} \circ f = f = \overline{f} \circ f' = \overline{f} \circ \overline{f'} \circ f$$

$$\Rightarrow 1_{V \otimes W} = \overline{f} \circ \overline{f'}$$

Όμοια μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα $1_{(V \otimes W)'} = \overline{f'} \circ \overline{f}$. Παρατηρούμε λοιπόν πως οι $\overline{f}$ και $\overline{f'}$ είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου, άρα και οι $V \otimes W, (V \otimes W)'$ είναι ισομορφικοί χώροι. $\square$

Ειδικότερα, αποδεικνύεται οτι το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσματικών χώρων κατασκευάζεται αλγεβρικά ως εξής:

$$V \otimes W = F(V \times W)/H$$

όπου V, W διανυσματικοί χώροι. Συγκεκριμένα, $F(V \times W)$ η αβελιανή ομάδα που είναι ελεύθερη επί του συνόλου $V \times W$, δηλαδή

$$F(V \times W) = \{\sum_{i=1}^{n} k_i(v_i, w_i)/v \in V, w \in W, k_i \in \mathbb{Z}\}$$

και $H \leq F(V \times W)$ η υποομάδα της που παράγεται απο τα στοιχεία:

$$(v_i + v_j, w_k) - (v_i, w_k) - (v_j, w_k)$$

$$(v_i, w_j + w_k) - (v_i, w_i) - (v_i, w_k)$$

$$(v_i\lambda, w_j) - (v_i, \lambda w_j)$$

Αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι παίρνοντας το πηλίκο, 'μηδενίζουμε' αυτά τα τρία στοιχεία, σκεπτόμενοι οτι τα εξισώνουμε με το ουδέτερο στοιχείο της H. Γράφουμε $x \otimes y$ για την κλάση $(x, y) + H$ ενός $(x, y) \in F(V \times W)$. Για το γενικό στοιχείο γράφουμε $\sum_i x_i \otimes y_i$.

Πρόταση 2.9. *Έστω M, M' και N, N' διανυσματικοί χώροι και $f \colon M \to M'$, $g \colon N \to N'$ γραμμικές συναρτήσεις. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική συνάρτηση*

$$f \otimes g \colon M \otimes N \to M' \otimes N'$$

τέτοια ώστε

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$$

Διαγραμματικά έχουμε:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f \times g"'] \arrow[dr, "\phi"] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists!\, \overline{\phi}"] \\
M' \times N' \arrow[r] & M' \otimes N'
\end{tikzcd}$$

Αποδεικνύεται πως η συνάρτηση ϕ είναι διγραμμική.

2.3 Άλγεβρες

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα ορίσουμε τις άλγεβρες ως διανυσματικούς χώρους με συγκεκριμένη δομή. Στην συνέχεια, μόλις λάβουμε τα κατάλληλα εργαλεία απο την θεωρία κατηγοριών, θα είμαστε στην θέση να δούμε τις άλγεβρες ως παράδειγμα μονοειδών (monoids) σε πιο γενικές μονοειδείς κατηγορίες. Μερικές αναφορές για αυτό το αντικείμενο είναι οι [4, 8].

Ορισμός 2.10. Ένας k-διανυσματικός χώρος A λέγεται **άλγεβρα** αν είναι εφοδιασμένος με μια γραμμική συνάρτηση

$$\mu\colon A \otimes A \to A$$

που ονομάζεται γινόμενο και μια γραμμική συνάρτηση

$$\eta\colon k \to A$$

που ονομάζεται μονάδα για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

1. Προσεταιριστικότητα

$$\mu \circ (\mu \otimes 1_A) = \mu \circ (1_A \otimes \mu)$$

όπου 1_A η ταυτοτική συνάρτηση στον A.

2. Ταυτοτικό στοιχείο

$$\mu \circ (\eta \otimes 1_A) = \mu \circ (1_A \otimes \eta) = 1_A$$

Ένας εναλλακτικός ορισμός της άλγεβρας είναι και ο παρακάτω.

Ορισμός 2.11. Μια τριπλέτα $(A, *, 1_A)$, όπου A k-διανυσματικός χώρος και $*\colon A \times A \to A$ διγραμμική συνάρτηση, λέγεται **άλγεβρα** αν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

1. Προσεταιριστικότητα:

$$a_1 * (a_2 * a_3) = (a_1 * a_2) * a_3, \forall a_1, a_2, a_3 \in A$$

2. Ταυτοτικό στοιχείο:

$$1_A * a = a * 1_A = a, \forall a \in A$$

Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι λόγω καθολικής ιδιότητας του τανυστικού γινομένου, Ορισμός 2.7.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αξιώματα του ορισμού της άλγεβρας με τη βοήθεια μεταθετικών διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\eta\otimes 1_A"'] & A & A \otimes k \arrow[l, "\cong"'] \arrow[dl, "1_A\otimes\eta"] \\
& A \otimes A \arrow[u, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε οτι μια άλγεβρα διαθέτει προσεταιριστικότητα, κλειστότητα ως προς την πράξη $''*''$ και ταυτοτικό στοιχείο. Δεν αποτελεί όμως ομάδα ως προς αυτή την πράξη γιατί της λείπει το αξίωμα του αντιστρόφου στοιχείου. Παρ΄όλα αυτά, τα στοιχεία μιας άλγεβρας μπορεί να έχουν αριστερό ή δεξιό αντίστροφο και μάλιστα μπορούμε να αποδείξουμε πως αν ένα στοιχείο έχει και δεξιό και αριστερό αντίστροφο τότε αυτό είναι μοναδικό.

Για την καλύτερη κατανόηση των αλγεβρών παραθέτουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδεέγματα 2.12.

- Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-άλγεβρα, με γινόμενο το σύνηθες γινόμενο των μιγαδικών αριθμών $(a + ib) \cdot (c + id)$ και ταυτοτικό στοιχείο την μονάδα $(1 + i0)$.

- Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ με γινόμενο το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\vec{a} \times \vec{b}$ και ταυτοτικό στοιχείο το μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-άλγεβρα.

- Τα τετραδόνια (quaternions) είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^4$ που γράφονται στην μορφή $a+bi+cj+dk$ όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.Τα τετραδόνια στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ με γινόμενο το Χαμιλτονιανό γινόμενο $(a+\vec{v})(b+\vec{w})$ και ταυτοτικό στοιχείο το μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^4$ είναι $\mathbb{R}$-άλγεβρα.

- Το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές $\mathbb{R}[X]$ αποτελεί διανυσματικό χώρο. Συγκεκριμένα, θυμίζουμε πως τα στοιχεία του συνόλου είναι της μορφής

  $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

  Το άθροισμα πολυωνύμων και το γινόμενο πραγματικού αριθμού με πολυώνυμο ορίζονται με τον συνήθη τρόπο, ενώ ουδέτερο στοιχείο αποτελεί το μηδενικό πολυώνυμο.Ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές $\mathbb{R}[X]$, με γινόμενο τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων και ταυτοτικό στοιχείο το σταθερό πολυώνυμο 1 είναι $\mathbb{R}$-άλγεβρα.

- Το σύνολο $\mathbb{R}^{n\times n}$ των τετραγωνικών πινάκων με την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα είναι διανυσματικός χώρος. Εύκολα αποδεικνύεται πως το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις δύο πράξεις και πως ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού. Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^{n\times n}$ των τετραγωνικών πινάκων είναι $\mathbb{R}$-άλγεβρα με γινόμενο τον πολλαπλασιασμό πινάκων και ταυτοτικό στοιχείο τον $n \times n$ μοναδιαίο πίνακα.

- Έστω k μεταθετικός δακτύλιος και G ομάδα, τότε ορίζουμε τον ομαδοδακτύλιο (group algebra) kG ώς εξής. Η προσθετική της αβελιανή ομάδα είναι ένα k-πρότυπο με βάση που ορίζεται απο τα στοιχεία της G. Με αυτόν τον τρόπο κάθε στοιχείο της μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\sum_{g\in G} a_g g$$

όπου $a_g \in k$ για κάθε $g \in G$ και πεπερασμένο πλήθος a_g να είναι μη μηδενικά. Αν τα g και h είναι στοιχεία της βάσης ($g, h \in G$), τότε ορίζουμε το γινόμενο τους στην kG να είναι το γινόμενο gh στην G όπου $ag = ga$ για κάθε $a \in k$ και $g \in G$. Το γινόμενο δύο στοιχείων της kG ορίζεται ως εξής:

$$(\sum_{g\in G} a_g g)(\sum_{h\in G} b_h h) = \sum_{z\in G}(\sum_{gh=z} a_g b_h) z$$

Ένας ομαδοδακτύλιος kG είναι μεταθετικός αν και μόνο αν η ομάδα G είναι αβελιανή.

- Έστω F το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων $f(x)$ που ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο F με τις πράξεις της συνήθους πρόσθεσης συναρτήσεων και βαθμωτού γινομένου συναρτήσεων με πραγματικό αριθμό

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

αποτελούν διανυσματικό χώρο με ουδέτερο στοιχείο την συνάρτηση $f(x) = 0$. Το F είναι $\mathbb{R}$-άλγεβρα με γινόμενο τον κατα σημείο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

και ταυτοτικό στοιχείο την συνάρτηση

$$f(x) = 1.$$

- Έστω οι άλγεβρες A_1, A_2 πάνω απο σώμα k. Το τανυστικό τους γινόμενο $A_1 \otimes A_2$ είναι επίσης k-άλγεβρα με γινόμενο:

$$(a_1 \otimes a_2) * (a_1' \otimes a_2') = (a_1 *_1 a_1') \otimes (a_2 *_2 a_2')$$

και ταυτοτικό στοιχείο:

$$1_{A_1 \otimes A_2} = 1_{A_1} \otimes 1_{A_2}$$

Ορισμός 2.13. Μια άλγεβρα (A, μ, η) λέγεται **μεταθετική**, αν

$$(A^{op}, \mu^{op}, \eta) = (A, \mu, \eta)$$

όπου $A^{op} = A$ και $\mu^{op}(a \otimes b) = b * a, a, b \in A$.

Ορισμός 2.14. Έστω οι άλγεβρες (A_1, μ_1, η_1) και (A_2, μ_2, η_2). Μια γραμμική συνάρτηση $f\colon A_1 \to A_2$ λέγεται **ομομορφισμός αλγεβρών** αν ισχύουν:

$$f \circ \eta_1 = \eta_2$$

$$\mu_2 \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_1$$

Οι παραπάνω σχέσεις απεικονίζονται στα μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} A_1 \otimes A_1 \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_1"'] & A_2 \otimes A_2 \arrow[d, "\mu_2"] \\ A_1 \arrow[r, "f"'] & A_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\eta_2"'] & A_1 \arrow[dl, "f"] \\ A_2 & \end{tikzcd}$$

Παραδείγματα 2.15.

- Έστω k-άλγεβρα A και $k[X]$ το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές απο το σώμα k, το οποίο οπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα είναι άλγεβρα. Υπάρχει ομομορφισμός

$$ev_a\colon k[X] \to A$$

τέτοιος ώστε

$$c_n X^n + ... + c_0 \mapsto c_n a^n + ... + c_0 1_A$$

.

- Κάθε δακτύλιος R είναι μια $\mathbb{Z}-$άλγεβρα αφού υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z} \to R$.

Ορισμός 2.16. Έστω μια k-άλγεβρα A και ένας k-υπόχωρος $B \subset A$. Ο B ονομάζεται **υποάλγεβρα** της A αν είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Παράδειγμα 2.17. Οι 2×2 πίνακες με συντελεστές απο τους πραγματικούς αριθμούς αποτελούν άλγεβρα όπως είδαμε και στα παραδείγματα αλγεβρών. Οι 2×2 πίνακες με όλα τους τα στοιχεία να είναι μηδενικά εκτός απο το πρώτο της διαγωνίου είναι υποάλγεβρα της πρώτης.

2.4 Συνάλγεβρες

Στην παραπάνω ενότητα παρουσιάσαμε τα αξιώματα του ορισμού της άλγεβρας με δύο μεταθετικά διαγράμματα (1). Αν τα βέλη σε αυτά τα διαγράμματα αντιστραφούν, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαφορετική δομή με αξιώματα που προκύπτουν απο τα ανεστραμμένα διαγράμματα. Η δομή αυτή ονομάζεται συνάλγεβρα, [7, 12, 16].

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dl, "\Delta \otimes 1_A"'] & \\
A \otimes A \otimes A & & A \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[dl, "\Delta"] \\
 & A \otimes A \arrow[ul, "1_A \otimes \Delta"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A & A \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes k \\
 & A \otimes A \arrow[ul, "\epsilon \otimes 1_A"] \arrow[ur, "1_A \otimes \epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 2.18. Συνάλγεβρα ονομάζεται μια τριπλέτα (A, Δ, ϵ) όπου A διανυσματικός χώρος, $\Delta\colon A \to A \otimes A$ γραμμική συνάρτηση που ονομάζεται *συνπολλαπλασιασμός* (comultiplication) και $\epsilon\colon A \to k$ γραμμική συνάρτηση που ονομάζεται *συνμονάδα* (co-unit) και ισχύουν τα αξιώματα:

1. Συμπροσεταιριστικότητα:

$$(\Delta \otimes 1_A) \circ \Delta = (1_A \otimes \Delta) \circ \Delta$$

2. <u>Συνταυτοτικό Στοιχείο:</u>

$$(\epsilon \otimes 1_A) \circ \Delta = (1_A \otimes \epsilon) \circ \Delta = 1_A \tag{2}$$

Συμβολισμός σίγμα του Sweedler

Στις συνάλγεβρες συναντάμε πολύ συχνά τον συγκεκριμένο συμβολισμό για το συνγινόμενο λόγω της ευκολίας που δημιουργεί. Έστω c τυχαίο αντικείμενο της συνάλγεβρας (C, Δ, ϵ), τότε υπάρχουν αντικείμενα $c_{(1)}^{(i)}, c_{(2)}^{(i)} \in C$ τέτοια ώστε:

$$\Delta(c) = \sum_i c_{(1)}^{(i)} \otimes c_{(2)}^{(i)}$$

λόγω του ορισμού του τανυστικού γινομένου. Παρατηρούμε πως το άθροισμα είναι πεπερασμένο οπότε σύμφωνα με τον συμβολισμό του Sweedler γράφουμε:

$$\Delta(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

Το δεύτερο αξίωμα της συνμονάδας σύμφωνα με τον συμβολισμό του Sweedler γράφεται:

$$c = \sum_c \epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum_c c_{(1)}\epsilon(c_{(2)})$$

Τα παραπάνω αθροίσματα έχουν ίδιο πλήθος στοιχείων και ίδιες τιμές των $c_{(1)}$ και $c_{(2)}$, όπως στο προηγούμενο άθροισμα για το $\Delta(c)$. Για την συμπροσεταιριστικότητα του Δ έχουμε:

$$\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes (\sum_{c_{(2)}} (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)}) = \sum_{(c)} (\sum_{c_{(1)}} (c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)}) \otimes c_{(2)}$$

Κατά τον συμβολισμό του Sweedler οι εκφράσεις αυτές μπορούν να γραφτούν

$$\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$$

Παραδείγματα 2.19.

- Έστω σύνολο S και ο $k-$διανυσματικός χώρος $C = k^{(S)}$ με βάση το S, τέτοιος ώστε τα στοιχεία του C να είναι συναρτήσεις απο το S στο k οι οποίες στέλνουν όλα τα στοιχεία του S, πεπερασμένου πλήθους, στο 0.

Θεωρούμε ένα στοιχείο $s \in S$ και συνάρτηση στο C που να στέλνει το s στην μονάδα, ενώ όλα τα άλλα στοιχεία του S στο 0. Ορίζουμε

$$\Delta(s) = s \otimes s$$

$$\epsilon(s) = 1$$

για κάθε $s \in S$. Απο γραμμικότητα τα Δ και ϵ επεκτείνονται σε όλο το C και ο διανυσματικός χώρος C γίνεται συνάλγεβρα με συνπολλαπλασιασμό το Δ και συνμονάδα το ϵ.

- Έστω ο πολυωνυμικός δακτύλιος $k[X]$ σε ένα τυχαίο X. Μπορεί να γίνει k-συνάλγεβρα αν για κάθε $n \geq 0$ ορίσουμε:

$$\Delta(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \otimes X^{n-k}$$

$$\epsilon(X^n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$$

Το $k[X]$ αποτελεί συνάλγεβρα με συνπολλαπλασιασμό το Δ και συνμονάδα το ϵ.

- Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $Func(G,k)$ ο $k-$διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων στην G. Μια βάση του $Func(G,k)$ είναι η $\{\delta_g | g \in G\}$, όπου $\delta_g(h) = 1$ αν $g = h$ και $\delta_g(h) = 0$ αν $g \neq h, g, h \in G$. Έτσι έχουμε:

$$\mu(\delta_g) = \sum_{hh'=g} \delta_h \otimes \delta'_h, \quad \epsilon(f) = f(e), \quad f \in Func(G,k)$$

και με αυτή τη δομή γίνεται k-συνάλγεβρα.

- Έστω δύο k-συνάλγεβρες $(A_1, \Delta_1, \epsilon_1), (A_2, \Delta_2, \epsilon_2)$. Το τανυστικό τους γινόμενο $A_1 \otimes A_2$ είναι k-συνάλγεβρα $(A_1 \otimes A_2, \Delta, \epsilon)$. Όντως, αν $\Delta_1(c_1) = \sum_{(c1)} c_{1(1)} \otimes c_{1(2)}$ και $\Delta_2(c_2) = \sum_{(c2)} c_{2(1)} \otimes c_{2(2)}$ τότε:

$$\Delta(c_1 \otimes c_2) = \sum_{(c_1) \otimes (c_2)} (c_{1(1)} \otimes c_{2(1)}) \otimes (c_{1(2)} \otimes c_{2(2)})$$

και

$$\epsilon(c_1 \otimes c_2) = \epsilon_1(c_1)\epsilon_2(c_2)$$

Ορισμός 2.20. Μια συνάλγεβρα ονομάζεται **συνμεταθετική** (co-commutative) αν ισχύει:

$$(A, \Delta, \epsilon) = (A^{cop}, \Delta^{cop}, \epsilon)$$

όπου $A = A^{cop}$ και $\Delta^{cop}(x) = \sum^{x} x'' \otimes x'$.

Ορισμός 2.21. Έστω δύο συνάλγεβρες $(A_1, \Delta_1, \epsilon_1)$ και $(A_2, \Delta_2, \epsilon_2)$. Μια γραμμική συνάρτηση $f \colon A_1 \to A_2$ είναι **ομομορφισμός συναλγεβρών** αν ισχύει:

$$\Delta_2 \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_1$$

$$\epsilon_2 \circ f = \epsilon_1$$

Όπως και στις άλγεβρες μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα τις ισότητες μέσω των μεταθετικών διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\Delta_2"] \\ A_1 \otimes A_1 \arrow[r, "f\otimes f"'] & A_2 \otimes A_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_1"'] & A_2 \arrow[dl, "\epsilon_2"] \\ k & \end{tikzcd}$$

Η πρώτη σχέση είναι ισοδύναμη με την παρακάτω ισότητα:

$$\sum_{f(c)} f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} = \sum_{(c)} f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)})$$

ενώ η δεύτερη με αυτή την ισότητα:

$$\epsilon_2(f(c)) = \epsilon_1(c).$$

Παράδειγμα 2.22. Έστω ένας k-διανυσματικός χώρος A που έχει τη δομή άλγεβρας (A, μ, η) και συνάλγεβρας (A, Δ, ϵ). Ο A ονομάζεται *k-διάλγεβρα* (bialgebra) όταν ο πολλαπλασιασμός $\mu \colon A \times A \to A$ και η μονάδα $\eta \colon k \to A$ είναι ομομορφισμοί k-συναλγεβρών. Ισοδύναμα, είναι διάλγεβρα όταν ο συνπολλαπλασιασμός και η συνμονάδα είναι ομομορφισμοί k-αλγεβρών. Αυτό εκφράζεται μέσω της μεταθετικότητας των παρακάτω διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} M \otimes M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & M \arrow[dd, "\Delta"] \\ M \otimes M \otimes M \otimes M \arrow[d, "1\otimes\sigma\otimes 1"'] & \\ M \otimes M \otimes M \otimes M \arrow[r, "\mu\otimes\mu"'] & M \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta\otimes\eta"'] & M \arrow[d, "\Delta"] \\ & M \otimes M \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\epsilon\otimes\epsilon"'] & M \arrow[dl, "\epsilon"] \\
I \otimes I &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "1"'] & M \arrow[d, "\epsilon"] \\
& I
\end{tikzcd}
$$

Οι διάλγεβρες αποτελούν το πρώτο κομμάτι της δομής των πολύ σημαντικών αλγεβρών Hopf [16].

2.5 Θεωρία κατηγοριών

Η Θεωρία Κατηγοριών βασίζεται στην παρατήρηση πως πολλές ιδιότητες μαθηματικών μοντέλων μπορούν να ενοποιηθούν και να απλουστευτούν σε ένα πιο γενικό πλαίσιο από αυτό που αρχικά μελετούνται. Έτσι, μπορούμε να καταλάβουμε για παράδειγμα ποια κομμάτια κάποιας συγκεκριμένης κατασκευής ή απόδειξης είναι απολύτως απαραίτητα και ποια όχι, και επίσης να 'μεταφέρουμε' ένα αποτέλεσμα μεταξύ δύο αρχικά ξέχωρων πεδίων, π.χ. θεωρία ομάδων και τοπολογία. Μερικές κλασικές αναφορές για το αντικείμενο είναι οι [11, 3, 2, 10].

Σε αυτή την αφαιρετική διαδικασία, εξαιρετικά βοηθητικό ρόλο παίζουν τα διαγράμματα με βέλη. Για παράδειγμα, αν σκεφτόμαστε συνολοθεωρητικά, κάθε βέλος $f\colon X \to Y$ λειτουργεί ως μια συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί κάθε $x \in X$ σε ένα $fx \in Y$ μέσω ενός κανόνα $x \mapsto fx$. Ένα τυπικό διάγραμμα είναι το παρακάτω:

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z
\end{tikzcd}
$$

Το συγκεκριμένο διάγραμμα θα λέγεται μεταθετικό ή αντιμεταθετικό αν $h = g \circ f$ όπου $g \circ f$ η γνωστή σύνθεση συναρτήσεων $g \circ f\colon X \to Z$ ορισμένη ως $x \mapsto g(fx)$. Στην συνέχεια, θα δούμε πως παρόμοια διαγράμματα μπορούν να περιγράψουν την δομή πολλών σημαντικών μαθηματικών μοντέλων και εκτός των συνήθων συναρτήσεων μεταξύ συνόλων.

2.5.1 Ορισμός Κατηγορίας

Μια **κατηγορία** $\mathcal{C}$ περιέχει τα παρακάτω:

1. Μια κλάση $|C|$, τα στοιχεία της οποίας καλούνται αντικείμενα της κατηγορίας.

2. Ένα σύνολο $C(A,B) = Hom(A,B)$ όπου A, B αντικείμενα της κατηγορίας, του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται μορφισμοί ή βέλη απο το A στο B.

3. Για κάθε τριάδα αντικειμένων A, B, C, έναν νόμο σύνθεσης

$$C(A,B) \times C(B,C) \to C(A,C)$$

   Η σύνθεση των (f,g) θα γράφεται $g \circ f$ ή gf.

4. Για κάθε αντικείμενο A, ένας μορφισμός $1_A \in C(A,A)$ που καλείται ταυτοτικός.

Τα παραπάνω υπόκεινται στα ακόλουθα αξιώματα:

- Προσεταιριστικότητα: Έστω οι μορφισμοί $f \in C(A,B), g \in C(B,C)$ και $h \in C(C,D)$, τότε ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- Ταυτοτικό: Έστω οι μορφισμοί $f \in C(A,B)$ και $g \in C(B,C)$ τότε ισχύουν οι ισότητες:

$$1_B \circ f = f, \quad g \circ 1_B = g$$

Ένας μορφισμός ή βέλος $f \in C(A,B)$ θα συμβολίζεται $f\colon A \to B$ ή και $A \xrightarrow{f} B$, όπου το A λέγεται πεδίο ορισμού (domain) και το B πεδίο τιμών (codomain) του μορφισμού. Όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου, τα διαγράμματα αποτελούν το βασικό εργαλείο απεικόνισης στην θεωρία κατηγοριών γι΄ αυτό και θα γίνεται συχνά χρήση τους. Στην συνέχεια παραθέτουμε ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα τέτοιο ώστε να ισχύει η ισότητα $g \circ f = k \circ h$ εντός της κατηγορίας.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

Στην συνέχεια παρουσιάζονται κάποια βασικά παραδείγματα κατηγοριών με τα αντικείμενα και τους μορφισμούς τους.

Παραδείγματα 2.23.

- $\underline{\mathbf{0}}$: η 'κενή' (empty) κατηγορία όπου δεν έχει κανένα αντικείμενο. Δηλαδή, η κλάση των αντικειμένων είναι το κενό σύνολο.

- $\underline{\mathbf{1}}$: η τετριμμένη κατηγορία που έχει ένα μόνο αντικείμενο και έναν μορφισμό, τον ταυτοτικό.

- **Set**: κατηγορία με αντικείμενα σύνολα και μορφισμούς όλες τις συναρτήσεις ανάμεσα σε δύο σύνολα.

- **Top**: κατηγορία με αντικείμενα τοπολογικούς χώρους και μορφισμούς συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ τους.

- **Gr**: η κατηγορία με αντικείμενα ομάδες και μορφισμούς ομομορφισμούς ομάδων.

- **Ab**: κατηγορία με αντικείμενα αβελιανές ομάδες και μορφισμούς ομομορφισμούς ομάδων ανάμεσά τους.

- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$: διανυσματικοί χώροι πάνω απο το σώμα των πραγματικών αριθμών ως αντικείμενα και μορφισμούς γραμμικές απεικονίσεις.

- $\mathbf{Alg}_k$: κατηγορία με αντικείμενα k-άλγεβρες και μορφισμούς ομομορφισμούς αλγεβρών.

- $\mathbf{Coalg}_k$: κατηγορία με αντικείμενα k-συνάλγεβρες και μορφισμούς ομομορφισμούς συναλγεβρών.

- **nCob**: κατηγορία με αντικείμενα κλειστές προσανατολισμένες $(n-1)-$πολλαπλότητες και μορφισμούς απο το Σ στο Σ' να είναι προσανατολισμένες $n-$πολλαπλότητες M με εσωτερικό σύνορο το Σ και εξωτερικό σύνορο το Σ'. Η συγκεκριμένη κατηγορία θα παίξει σημαντικό ρόλο στο τελευταίο κεφάλαιο όπου θα μιλήσουμε για τα TQFT's και την σύνδεσή τους με τις άλγεβρες Frobenius.

Παρατηρούμε οτι στις κατηγορίες **Set**,**Top**,**Gr**,**Ab** και $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ τα αντικείμενα είναι σύνολα (με επιπλέον δομή) ενώ στις κατηγορίες $\underline{\mathbf{0}}$, $\underline{\mathbf{1}}$ κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Στην πρώτη περίπτωση λέμε οτι οι κατηγορίες είναι **σαφείς** (concrete) ενώ στην δεύτερη περίπτωση οι κατηγορίες είναι **ασαφείς** (non-concrete).

Ορισμός 2.24. Δεδομένης μια κατηγορίας $\mathcal{A}$ ορίζουμε την **δυϊκή** (opposite) κατηγορία $\mathcal{A}^{op}$ για την οποία ισχύει:

1. $|\mathcal{A}^{op}| = |\mathcal{A}|$

2. Για κάθε $A, B \in \mathcal{A}^{op}$ ισχύει $\mathcal{A}^{op}(A, B) = \mathcal{A}(B, A)$, όπου $f^{op} \colon A \to B$ είναι μορφισμός της $\mathcal{A}^{op}$ και είναι ο ίδιος με τον μορφισμό $f \colon B \to A$ της κατηγορίας $\mathcal{A}$.

3. $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

Η ύπαρξη της συγκεκριμένης κατηγορίας μας επιτρέπει να αντιστοιχίζουμε κάθε θεώρημα που αποδεικνύουμε για μια κατηγορία σε ένα δεύτερο θεώρημα όπου οι μορφισμοί είναι αντεστραμμένοι, το λεγόμενο δυϊκό θεώρημα.

Επιπλέον, μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες κατηγορίες με την βοήθεια από ήδη υπάρχουσες κατηγορίες.

Παραδείγματα 2.25.

1. **Κατηγορία Γινομένου**. Έστω κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$, μπορούμε να κατασκεύασουμε την κατηγορία γινομένου $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ της οποίας τα αντικείμενα είναι ζευγάρια αντικειμένων (C, D) όπου $C \in \mathcal{C}$ και $D \in \mathcal{D}$ και οι μορφισμοί $(f, g) \colon (C, D) \to (C', D')$ είναι ζευγάρια μορφισμών $f \colon C \to C'$ στην $\mathcal{C}$ και $g \colon D \to D'$ στην $\mathcal{D}$.

2. **Βέλη πάνω** απο το I. Έστω κατηγορία $\mathcal{C}$ και έστω αντικείμενο $I \in \mathcal{C}$. Η κατηγορία $\mathcal{C}/I$ απο βέλη πάνω απο το I αποτελείται απο:

   - αντικείμενα τους μορφισμούς της $\mathcal{C}$ με πεδίο τιμών το I $(f \colon X \to I)$
   - ένας μορφισμός απο τον $f \colon X \to I$ στον $g \colon Y \to I$ είναι ένας μορφισμός $h \colon X \to Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $g \circ h = f$. Διαγραμματικά:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

3. **Βέλη κάτω** απο το I. Το συγκεκριμένο αποτελεί το δυϊκό του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και έστω αντικείμενο $I \in \mathcal{C}$. Αν κατασκευάσουμε την κατηγορία $\mathcal{C}^{op}/I^{op}$ τότε θα έχουμε την κατηγορία $I/\mathcal{C}$ που αποτελεί την βέλη κάτω απο το I. Η συγκεκριμένη αποτελείται απο:

- αντικείμενα τους μορφισμούς της $\mathcal{C}$ με πεδίο ορισμού το I ($f\colon I \to X$)
- ένας μορφισμός απο τον $f\colon I \to X$ στον $g\colon I \to Y$ είναι ένας μορφισμός $h\colon X \to Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $g = h \circ f$. Διαγραμματικά:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

4. **Κατηγορία βελών**. Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να κατασκευάσουμε την κατηγορία βελών της $\mathcal{C}$. Η συγκεκριμένη κατηγορία αποτελείται απο:

   - αντικείμενα τους μορφισμούς της $\mathcal{C}$ ($f\colon X \to Y$)
   - ένας μορφισμός απο τον $f\colon X \to Y$ στον $g\colon Z \to U$ είναι ένα ζευγάρι μορφισμών $h\colon X \to Z$ και $k\colon Y \to U$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "k"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & U \end{tikzcd}$$

2.5.2 Συναρτητές

Ένας συναρτητής στην θεωρία κατηγοριών συμπεριφέρεται ως 'ομομορφισμός' ανάμεσα σε κατηγορίες, όπως διακρίνουμε και απο το ορισμό του.

Ορισμός 2.26. Ένας **συναρτητής** F απο την κατηγορία A στην κατηγορία B αποτελείται απο τα ακόλουθα:

1. Μια συνάρτηση $|\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ ανάμεσα στα αντικείμενα των κλάσεων των κατηγοριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Η εικόνα της συνάρτησης γράφεται $F(A)$ ή και FA.

2. Για κάθε ζεύγος αντικειμένων $A, A' \in \mathcal{A}$, μια συνάρτηση

$$\mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$$

   όπου η εικόνα της $f \in \mathcal{A}(A, A')$ γράφεται $F(f)$ ή Ff.

Στην συνέχεια έχουμε τα παρακάτω αξιώματα:

- $\forall f \in \mathcal{A}(A, A'), g \in \mathcal{A}(A', A'')$ έχουμε
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

- $\forall A \in \mathcal{A}$ έχουμε
$$F(1_A) = 1_{F_A}$$

Παραδείγματα 2.27.

- **Ταυτοτικός** συναρτητής $1_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ όπου $1_{\mathcal{A}}(A) = A$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $1_{\mathcal{A}}(f) = f$ για κάθε μορφισμό $f \colon A \to A'$ στην κατηγορία $\mathcal{A}$.

- **Επιλήσμων** συναρτητής (*forgetful functor*) $U \colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ αποτελεί συναρτητή απο την κατηγορία των αβελιανών ομάδων, με βέλη ομομορφισμούς, στην κατηγορία των συνόλων με βέλη συναρτήσεις. Στέλνει μια αβελιανή ομάδα $(G, +)$ στο αντίστοιχο σύνολο G και στέλνει τον ομομορφισμό ομάδων f στην αντίστοιχη συνάρτηση f. Ο U είναι καλά ορισμένος διότι επαληθεύει τα παραπάνω αξιώματα. Σημειώνουμε επίσης ότι μπορούμε να ορίσουμε τέτοιους αντίστοιχους συναρτητές από σαφείς κατηγορίες στην κατηγορία συνόλων $\mathbf{Set}$, 'ξεχνώντας' την επιπλέον δομή επί των συνόλων και των συναρτήσεων που τις αποτελούν.

- $\mathcal{P} \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ αποτελεί συναρτητή που στέλνει κάθε σύνολο X στο δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}X$, το οποίο έχει ως στοιχεία όλα τα υποσύνολα του X. Επίσης στέλνει κάθε βέλος $f \colon X \to Y$ στο βέλος $\mathcal{P}f \colon \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$. Ο συναρτητής $\mathcal{P}$ είναι καλά ορισμένος αφού $\mathcal{P}_{1_X} = 1_{\mathcal{P}X}$ και $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}g \circ \mathcal{P}f$.

- **Αντιπροσωπευτικός συναρτητής** (*representable functor*). Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $C \in \mathcal{C}$. Ορίζουμε τον συναρτητή
$$Hom(C, -) \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$
ο οποίος καλείται αντιπροσωπευτικός συναρτητής του C. Ο παραπάνω συναρτητής στέλνει κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$ στο σύνολο $Hom(C, -)(X) = Hom(C, X)$ και κάθε μορφισμό $f \colon X \to Y$ στην απεικόνιση
$$Hom(C, -)(f) = Hom(C, f) \colon Hom(C, X) \to Hom(C, Y)$$
με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει $Hom(C, f)(g) = f \circ g$ για κάθε $g \in Hom(C, X)$.

- **Ενθετικός συναρτητής** (*inclusion functor*). Αποτελεί συναρτητή απο την κατηγορία των αβελιανών ομάδων στην κατηγορία των ομάδων, $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Gr}$. Ορίζεται ως εξής $U(A) = A$ για κάθε αβελιανή ομάδα A και $U(f) = f$ για κάθε ομομορφισμό f μεταξύ των αβελιανών ομάδων.

- **Ελεύθερος συναρτητής** (*free functor*). Ο ελεύθερος συναρτητής $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_k$ ορίζεται στέλνοντας ένα σύνολο S στον διανυσματικό χώρο $F(S)$ με βάση το S. Θα αποδείξουμε πως πράγματι υπάρχει ένας τέτοιος διανυσματικός χώρος. Έστω $F(S)$ το σύνολο όλων των $k-$γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S, δηλαδή

$$\sum_{s\in S} \lambda_s s$$

όπου λ_s βαθμωτό και υπάρχει πεπερασμένος αριθμός s τέτοιων ώστε $\lambda_s \neq 0$. Τότε για τα στοιχεία του $F(S)$ ισχύει:

$$\sum_{s\in S} \lambda_s s + \sum_{s\in S} \mu_s s = \sum_{s\in S} (\lambda_s + \mu_s) s$$

$$c \cdot \sum_{s\in S} \lambda_s s = \sum_{s\in S} (c\lambda_s) s$$

$(c \in k)$. Παρατηρούμε λοιπόν πως όντως ο $F(S)$ είναι διανυσματικός χώρος. Αντιστοίχως ορίζουμε και την εικόνα του F στις συναρτήσεις, και αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες του συναρτητή.

- **Τανυστικός** συναρτητής $-\otimes-\colon \mathbf{Vect_k} \times \mathbf{Vect_k} \to \mathbf{Vect_k}$ συσχετίζει δύο k-διανυσματικούς χώρους X και Y με το τανυστικό γινόμενό τους.

Ορισμός 2.28. Ένας συναρτητής ονομάζεται **ανταλλοίωτος** (contravariant) όταν είναι της μορφής $F\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$, δηλαδή αν για κάθε $f \in \mathcal{A}(A, A'), g \in \mathcal{A}(A', A'')$ ισχύει $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $F(1_A) = 1_{F_A}$.

Παρατηρούμε οτι στον γενικό ορισμό του συναρτητή ισχύει οτι $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ ενώ στην περίπτωση ενός ανταλλοίωτου συναρτητή η σύνθεση αντιστρέφεται. Ένας συναρτητής που είναι ανταλλοίωτος έχει δηλαδή την εξής ιδιότητα: μεταφέρει κάθε βέλος

$$f\colon c \to d$$

σε ένα βέλος

$$F(f)\colon F(d) \to F(c)$$

Παράδειγμα 2.29. **Ανταλλοίωτος αντιπροσωπευτικός** (contravariant representable functor). Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $C \in \mathcal{C}$ αντικείμενο. Τότε υπάρχει ανταλλοίωτος συναρτητής:

$$Hom(-, C)\colon \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$$

Μπορούμε, επίσης, να ορίσουμε την σύνθεση μεταξύ συναρτητών ως εξής. Έστω οι συναρτητές $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ τότε ο $G \circ F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι ένας συναρτητής ο οποίος δρά ως

$$(F \circ G)(X) = F(G(X))$$

στα αντικείμενα X της $\mathcal{C}$ και

$$(F \circ G)(f) = F(G(f))$$

στους μορφισμούς $f\colon X \to Y$ της $\mathcal{C}$. Παρατηρούμε οτι αν F, G είναι ανταλλοίωτοι τότε και η σύνθεση τους $F \circ G$ είναι ανταλλοίωτος συναρτητής.

Όλοι οι συναρτητές ανάμεσα σε δύο κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ συμβολίζονται $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ή $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Μέσω αυτής της σύνθεσης που είναι προσεταιριστική, και με τον μοναδιαίο συναρτητή, οι ίδιες κατηγορίες σχηματίζουν μια νέα κατηγορία που συμβολίζεται **Cat**.

2.5.3 Πιστοί και Πλήρεις Συναρτητές (Full and Faithful Functors)

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε κάποια συγκεκριμένα είδη συναρτητών που συναντώνται συχνά στα παραδείγματα. Στην συνέχεια θα ορίσουμε την υποκατηγορία μιας κατηγορίας και θα δούμε μερικά παραδείγματα υποκατηγοριών.

Ορισμός 2.30. Έστω συναρτητής $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και για κάθε ζευγάρι αντικειμένων $A, A' \in \mathcal{A}$ οι απεικονίσεις $\mathcal{A}(A, A) \to \mathcal{B}(FA, FA'),\ f \to Ff$.

1. Ο F καλείται **πιστός** (faithful) αν όλες οι παραπάνω απεικονίσεις είναι 1-1 για κάθε $A, A' \in \mathcal{A}$.

2. Ο F καλείται **πλήρης** (full) αν όλες οι παραπάνω απεικονίσεις είναι επί για κάθε $A, A' \in \mathcal{A}$.

3. Ο F καλείται **πιστός και πλήρης** (full and faithful) αν όλες οι παραπάνω απεικονίσεις είναι 1-1 και επί.

4. Ο F καλείται **ισομορφισμός κατηγοριών** όταν είναι πιστός και πλήρης και περιέχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία $|\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ μεταξύ των κλάσεων των αντικειμένων. Ισοδύναμα, ο ισομορφισμός κατηγοριών δίνεται απο δύο συναρτητές των οποίων η σύνθεση είναι ίση με τον ταυτοτικό.

Όπως γνωρίζουμε γενικότερα από τα μαθηματικά, οι ισομορφισμοί αποτελούν σημαντική ιδιότητα που καθιστούν την μελέτη μαθηματικών δομών ευκολότερη. Το ίδιο ισχύει και για τους ισομορφισμούς μεταξύ κατηγοριών. Στην συνέχεια δίνουμε μερικά παραδείγματα ισομορφικών κατηγοριών.

Παραδείγματα 2.31.

- Η κατηγορία των αβελιανών ομάδων είναι ισομορφική με την κατηγορία των $\mathbb{Z}-$προτύπων.

- Η κατηγορία $\mathbf{Alg}_{\mathbb{Z}}$ των $\mathbb{Z}-$αλγεβρών είναι ισομορφική με την κατηγορία **Rng** των δακτυλίων.

- Έστω k σώμα και G ομάδα. Η κατηγορία των, πεπερασμένης διάστασης, k-γραμμικών απεικονίσεων της G είναι ισομορφική με την κατηγορία, πεπερασμένης k-διάστασης, kG-προτύπων.

Είμαστε σε θέση πλέον να δώσουμε τον ορισμό της υποκατηγορίας.

Ορισμός 2.32. Μια **υποκατηγορία** $\mathcal{B}$ μιας κατηγορίας $\mathcal{A}$ αποτελείται απο τα παρακάτω:

1. Μια υποκλάση $|\mathcal{B}| \to |\mathcal{A}|$ των κλάσεων των αντικειμένων.

2. Για κάθε ζευγάρι $A, A' \in \mathcal{A}$, ένα υποσύνολο $\mathcal{B}(A, A') \subseteq \mathcal{A}(A, A')$ για το οποίο ισχύει:

    - $f \in \mathcal{B}(A, A'), g \in \mathcal{B}(A', A'') \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{B}(A, A'')$.
    - $\forall A \in \mathcal{B}, 1_A \in \mathcal{B}(A, A)$.

Προφανώς μια υποκατηγορία $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ αποτελεί απο μόνη της κατηγορία. Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε φυσικά έναν πιστό συναρτητή απο την $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{A}$. Αν ο συγκεκριμένος συναρτητής είναι πιστός και πλήρης τότε η υποκατηγορία ονομάζεται πλήρης.

Παραδείγματα 2.33.

- Η κατηγορία των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι υποκατηγορία των διανυσματικών χώρων, και μάλιστα πλήρης.
- Το ίδιο ισχύει και για την κατηγορία των συνόλων πεπερασμένης διάστασης με την κατηγορία των συνόλων.
- Η κατηγορία με αντικείμενα σύνολα και μορφισμούς 1-1 συναρτήσεις είναι υποκατηγορία της κατηγορίας των συνόλων, οχι όμως πλήρης.

2.5.4 Φυσικοί Μετασχηματισμοί

Ορισμός 2.34. Έστω οι συναρτητές $F, G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ορίζουμε **φυσικό μετασχηματισμό** $a\colon F \Rightarrow G$ ως μια αντιστοιχία όπου δεδομένου ενός αντικειμένου A της κατηγορίας $\mathcal{A}$ έχουμε έναν μορφισμό $a_A\colon FA \to GA$ που ονομάζεται συνιστώσα (component) τέτοια ώστε για κάθε βέλος $f\colon A \to A'$ στην $\mathcal{A}$ να ικανοποιείται $a_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ a_A$

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "a_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FA' \arrow[r, "a_{A'}"'] & GA' \end{tikzcd} \tag{3}$$

Στην περίπτωση που κάθε a_A είναι ισομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{B}$ τότε λέμε οτι ο $a\colon F \Rightarrow G$ είναι **φυσικός ισομορφισμός**.

Παραδείγματα 2.35.

- Αν $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ συναρτητής, τότε ο $1_F\colon F \Rightarrow F$ με $(1_F)_X = 1_{F(X)}\colon F(X) \to F(X)$ ονομάζεται ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός του F.
- Έστω οι συναρτητές $\mathcal{P}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ και $id\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ που περιγράφονται στα παραδείγματα συναρτητών. Τότε ορίζεται φυσικός μετασχηματισμός που δίνεται από συνιστώσες $\sigma_E\colon E \to \mathcal{P}(E)$ που αντιστοιχίζουν ένα στοιχείο $x \in E$ στο μονοσύνολο $\{x\}$.
- Έστω κατηγορία $\mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $f\colon C \to D$ στην $\mathcal{C}$. Ορίζουμε φυσικό μετασχηματισμό ανάμεσα στους σχετικούς αντιπροσωπευτικούς συναρτητές

$$Hom(f, -)\colon Hom(D, -) \Rightarrow Hom(C, -)$$

ως εξής: για κάθε $X \in \mathcal{C}$ έχουμε

$$Hom(f,-)_X\colon Hom(D,X) \to Hom(C,X), \quad g \mapsto g \circ f$$

και συμβολίζουμε $Hom(f,-)_X = Hom(f,X)$.

- Η ανταλλοίωτη εκδοχή των παραπάνω έχει ως εξής:

$$Hom(-,f)\colon Hom(-,C) \Rightarrow Hom(-,D)$$

τέτοιος ώστε

$$Hom(-,f)_X = Hom(X,f) = f \circ -.$$

Παρατηρούμε οτι στην περίπτωση που ορίσουμε φυσικό μετασχηματισμό ανάμεσα σε δύο ανταλλοίωτους συναρτητές F, G η κατέυθυνση των βελών Ff και Gf αλλάζει και το διάγραμμα θα έχει ως εξής:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "a_A"] & GA \\ FA' \arrow[u, "Ff"] \arrow[r, "a'_A"'] & GA' \arrow[u, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

Ο ισομορφισμός κατηγοριών που ορίσαμε νωρίτερα είναι σημαντικός αλλά όχι τόσο συχνός. Αυτό που συναντάται πιο συχνά είναι η ασθενέστερη έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ κατηγοριών.

Ορισμός 2.36. Έστω δύο κατηγορίες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Λέμε οτι αυτές οι κατηγορίες είναι **ισοδύναμες** αν υπάρχουν δύο συναρτητές $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ και δύο φυσικοί ισομορφισμοί $a\colon FG \Rightarrow 1_B$, $\beta\colon 1_A \Rightarrow GF$ όπου $1_A, 1_B$ οι ταυτοτικοί συναρτητές των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αντίστοιχα. Αν επιπλέον οι συναρτητές F, G είναι ανταλλοίωτοι τότε μιλάμε για **δυϊκότητα** κατηγοριών.

Αντίστοιχα με την περίπτωση των συναρτητών μπορούμε να συνθέσουμε φυσικούς μετασχηματισμούς, μόνο που τώρα έχουμε αρκετές επιλογές. Αρχικά, παραθέτουμε την 'κάθετη' σύνθεση. Έστω $F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ συναρτητές και $\alpha\colon F \Rightarrow G, \beta\colon G \Rightarrow H$ φυσικοί μετασχηματισμοί.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\beta"] \end{tikzcd}$$

Έτσι, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν καινούργιο φυσικό μετασχηματισμό

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow_{\beta\circ\alpha}"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

τέτοιον ώστε

$$(\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X$$

για κάθε αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως ο παραπάνω αποτελεί όντως φυσικό μετασχηματισμό.

Στην συνέχεια θα δείξουμε την 'οριζόντια' σύνθεση. Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ κατηγορίες, F, G, H, K συναρτητές και α, β φυσικοί μετασχηματισμοί όπως στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow_{\alpha}"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "H"] \arrow[r, bend right=50, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow_{\beta}"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Κατασκευάζουμε τον φυσικό μετασχηματισμό

$$\beta * \alpha \colon H \circ F \to K \circ G$$

τέτοιον ώστε

$$(\beta * \alpha)_X = \beta_{GX} \circ H(\alpha_X) = K(\alpha_X) \circ \beta_{FX}$$

για κάθε $X \in \mathcal{C}$.

Για τις δύο αυτές συνθέσεις, ισχύει ο 'νόμος εναλλαγής' (interchange law). Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ κατηγορίες, F, G, H, K, L, M συναρτητές και $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ φυσικοί μετασχηματισμοί όπως στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" near start] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5, "\Downarrow\alpha" near end] \arrow[r, phantom, shift right=2.5, "\Downarrow\beta" near end] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "K"] \arrow[r, "L" near start] \arrow[r, bend right=50, "M"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5, "\Downarrow\gamma" near end] \arrow[r, phantom, shift right=2.5, "\Downarrow\delta" near end] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Τότε ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$(\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha) = (\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha).$$

2.5.5 Προσαρτημένοι Συναρτητές

Θεωρούμε ένα ζεύγος συναρτητών σε αντίθετες κατευθύνσεις, $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Σε ένα γενικό πλαίσιο μπορούμε να πούμε οτι ο F είναι αριστερά προσαρτημένος στον G, αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$, υπάρχει 1-1 και επί αντιστοίχιση μεταξύ των απεικονίσεων $F(A) \to B$ και $A \to G(B)$.

Ορισμός 2.37. Έστω $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ κατηγορίες και συναρτητές. Ορίζουμε οτι ο F είναι **αριστερά προσαρτημένος** στον G και ο G είναι **δεξιά προσαρτημένος** στον F, και γράφουμε $F \dashv G$ αν:

$$\mathcal{B}(F(A), B) \cong \mathcal{A}(A, G(B))$$

με φυσικό τρόπο για $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.

Συγκεκριμένα, 'με φυσικό τρόπο για $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$' σημαίνει πως οι παραπάνω ισομορφισμοί είναι συνιστώσες ενός φυσικού ισομορφισμού, όπως τον ορίσαμε στην παραπάνω ενότητα.

Παραδείγματα 2.38. Οι επιλήσμονες συναρτητές ανάμεσα σε κατηγορίες αλγεβρικών δομών συνήθως έχουν αριστερά προσαρτημένους συναρτητές.

- Έστω σώμα k, τότε υπάρχει η προσάρτηση

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vect}_k \arrow[d, shift left, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

  όπου U ο επιλήσμων συναρτητής και F ο ελεύθερος συναρτητής. Η προσάρτηση μας δείχνει πως για τυχαίο σύνολο S και για διανυσματικό χώρο V, μια γραμμική απεικόνιση $F(S) \to V$ είναι ισομορφική με μια συνάρτηση $S \to U(V)$.

  Πιο συγκεκριμένα, για σύνολο S και διανυσματικό χώρο V έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $g\colon F(S) \to V$, μέσω της οποίας μπορούμε να ορίσουμε αντιστοιχία συνόλων $\overline{g}\colon S \to U(V)$ τέτοια ώστε $\overline{g}(s) = g(s)$ για κάθε $s \in S$. Αυτό μας δίνει μια συνάρτηση

$$Vect_k(F(S), V) \to \mathbf{Set}(S, U(V))$$

$$g \mapsto \overline{g}$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, δοσμένης μιας αντιστοιχίας συνόλων $f\colon S \to U(V)$, μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $\overline{f}\colon F(S) \to V$ τέτοια ώστε
$$\bar{f}(\sum \lambda_s s) = \sum \lambda_s f(s)$$
για οποιοδήποτε στοιχείο $\sum \lambda_s s \in F(S)$. Έτσι, έχουμε μια συνάρτηση

$$\mathbf{Set}(S, U(V)) \to \mathbf{Vect}_k(F(S), V)$$

$$f \mapsto \overline{f}$$

Οι συναρτήσεις $g \mapsto \bar{g}$ και $f \mapsto \bar{f}$ είναι αντιστρέψιμες, αφού για κάθε γραμμική απεικόνιση $g\colon F(S) \to V$, έχουμε:

$$\overline{\overline{g}}(\sum_{s\in S} \lambda_s s) = \sum_{s\in S} \lambda_s \overline{g}(s) = \sum_{s\in S} \lambda_s g(s) = g(\sum_{s\in S} \lambda_s s)$$

για κάθε $\sum \lambda_s s \in F(S)$, και αρα $\overline{\overline{g}} = g$. Ακόμη, για κάθε αντιστοιχία συνόλων $f\colon S \to U(V)$ έχουμε

$$\overline{\overline{f}}(s) = \overline{f}(s) = f(s)$$

για κάθε $s \in S$, και αρα $\overline{\overline{f}} = f$. Πράγματι λοιπόν, έχουμε ισομορφισμό ανάμεσα στα $\mathbf{Vect}_k(F(S), V)$ και $\mathbf{Set}(S, U(V))$ για κάθε $S \in \mathbf{Set}$ και $V \in \mathbf{Vect}_k$.

- Με παρόμοιο τρόπο υπάρχει η προσάρτηση

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gr} \arrow[d, shift left, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

όπου F και U ο ελεύθερος συναρτητής και ο επιλήσμων συναρτητής αντίστοιχα.

- Υπάρχει η προσάρτηση

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ab} \arrow[d, shift left, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Gr} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

όπου U ο ενθετικός συναρτητής. Πιο συγκεκριμένα, έστω G μια ομάδα, τότε το $F(G)$ λέγεται αβελιανοποίηση (abelianization) της G και συμβολίζεται G_{ab}. Η συγκεκριμένη αποτελεί το πηλίκο της G με την τη σχέση $xy = yx$. Έχει την καθολική ιδιότητα πως κάθε απεικόνιση απο την G σε μια αβελιανή ομάδα παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο μέσω της G_{ab}:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & G_{ab} \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{\phi}"] \\
& \forall A
\end{tikzcd}
$$

όπου η αποτελεί την φυσική απεικόνιση απο την G στην ομάδα πηλίκο G_{ab} και A μια αβελιανή ομάδα. Ο ισομορφισμός

$$\mathbf{Ab}(G_{ab}, A) \cong \mathbf{Gr}(G, U(A))$$

απο αριστερά προς τα δεξιά δίνεται απο την σχέση $\psi \mapsto \psi \circ \eta$, και απο τα δεξιά προς τα αριστερά απο την σχέση $\phi \mapsto \overline{\phi}$.

Παράδειγμα 2.39. Υπάρχουν οι προσαρτήσεις

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Top} \arrow[d, "U"] \\
\mathbf{Set} \arrow[u, bend left=60, "D"] \arrow[u, bend right=60, "I"']
\end{tikzcd}
\qquad D \dashv U \dashv I
$$

όπου ο U στέλνει έναν τοπολογικό χώρο στο σύνολο των σημείων του, ο D εφοδιάζει το σύνολο με την διακριτή (discrete) τοπολογία ενώ ο I εφοδιάζει το σύνολο με την μη διακριτή (indiscrete) τοπολογία.

2.6 Μονοειδείς κατηγορίες

Μια συγκεκριμένη οικογένεια κατηγοριών, αυτή των μονοειδών (monoidal) κατηγοριών, θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα καθώς μας επιτρέπουν την γενίκευση εννοιών όπως οι άλγεβρες και οι συνάλγεβρες σε περιβάλλοντα διαφορετικά από αυτό των διανυσματικών χώρων που είδαμε νωρίτερα. Ενδεικτικά, χρησιμοποιήσαμε στοιχεία από [11, 6, 17].

Ορισμός 2.40. Μια **μονοειδής κατηγορία** είναι μια τριάδα $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ όπου:

- $\mathcal{C}$ κατηγορία
- I αντικείμενο της $\mathcal{C}$
- $-\otimes -\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ ένας συναρτητής που ονομάζεται τανυστικός

Μαζί με τους φυσικούς μετασχηματισμούς (a,ℓ,r) όπου:

- $a\colon \otimes\circ(\otimes\times id)\Rightarrow\otimes\circ(id\times\otimes)$
- $\ell\colon \otimes\circ(I\times id)\Rightarrow id$
- $r\colon \otimes\circ(id\times I)\Rightarrow id$

Οι φυσικοί μετασχηματισμοί έχουν ως συνιστώσες τους ισομορφισμούς

$$a_{M,N,P}\colon (M\otimes N)\otimes P\xrightarrow{\sim} M\otimes(N\otimes P)$$

$$\ell_M\colon I\otimes M\xrightarrow{\sim} M$$
$$r_M\colon M\otimes I\xrightarrow{\sim} I.$$

Για κάθε $M,N,P,Q\in\mathcal{C}$ επίσης απαιτούμε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι μεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
((M\otimes N)\otimes P)\otimes Q \arrow[r, "a_{M\otimes N,P,Q}"] \arrow[d, "a_{M,N,P}\otimes 1"'] & (M\otimes N)\otimes(P\otimes Q) \arrow[r, "a_{M,N,P\otimes Q}"] & M\otimes(N\otimes(P\otimes Q)) \\
(M\otimes(N\otimes P))\otimes Q \arrow[rr, "a_{M,N\otimes P,Q}"] & & M\otimes((N\otimes P)\otimes Q) \arrow[u, "1\otimes a_{N,P,Q}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(M\otimes I)\otimes N \arrow[rr, "a_{M,I,N}"] \arrow[dr, "r_M\otimes N"'] & & M\otimes(I\otimes N) \arrow[dl, "M\otimes\ell_N"] \\
& M\otimes N &
\end{tikzcd}$$

Ο φυσικός μετασχηματισμός a καλείται προσεταιριστικός περιορισμός και οι ℓ,r καλούνται αριστερός και δεξιός ταυτοτικός περιορισμός της $\mathcal{C}$. Μια μονοειδής κατηγορία ονομάζεται 'αυστηρά' μονοειδής (strict monoidal) αν οι a,ℓ,r είναι ταυτοτικοί.

Παραδείγματα 2.41.

- $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$ Η κατηγορία **Set**, όπως ορίστηκε στα παραδείγματα κατηγοριών με $\times$ το σύνηθες καρτεσιανό γινόμενο συνόλων και $\{*\}$ το μονοσύνολο αποτελούν μονοειδή κατηγορία.

- $(\mathbf{Set}, \coprod, \varnothing)$ Η κατηγορία **Set** με την ξένη ένωση συνόλων (disjoint union) και το κενό σύνολο αποτελούν μονοειδή κατηγορία. Σε αυτό το σημείο θυμίζουμε πως η ξένη ένωση $A \coprod B$ δύο συνόλων A και B είναι ένα σύνολο το οποίο αποτελείται απο όλα τα στοιχεία των A και B, με κάθε στοιχείο να επισημαίνεται απο ποιο σύνολο προέρχεται.

- $(\mathbf{Top}, \times, \{*\})$ Η κατηγορία **Top** όπως ορίστηκε στα παραδείγματα κατηγοριών, με το σύνηθες καρτεσιανό γινόμενο συνόλων $\times$, και το μονοσύνολο αποτελούν μονοειδή κατηγορία.

- $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$. Η κατηγορία $\mathbf{Vect}_k$ με τον τανυστικό συναρτητή $\otimes$ και το σώμα k αποτελούν μονοειδή κατηγορία. Εδώ σημειώνεται πως το k αφού είναι σώμα έχει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό άρα μπορούμε να το δούμε ως διανυσματικό χώρο και συνεπώς ως αντικείμενο της $\mathbf{Vect}_k$.

Στα παραπάνω παραδείγματα οι προσεταιριστικοί και ταυτοτικοί περιορισμοί ορίζονται με φυσικό τρόπο. Για παράδειγμα, αν έχουμε 3 σύνολα M, N και P, έχουμε τους φυσικούς ισομορφισμούς:

$$a_{M,N,P} \colon (M \times N) \times P \to M \times (N \times P), a_{M,N,P}((m,n),p) = (m,(n,p))$$

$$\ell_M \colon \{*\} \times M \to M, \ell_M(*,m) = m$$

$$r_M \colon M \times \{*\} \to M, r_M(m,*) = m$$

Παρατηρώντας τα δύο πρώτα παραδείγματα διακρίνουμε πως μια κατηγορία μπορεί να είναι μονοειδής με παραπάνω απο έναν τρόπο. Συνεπώς μιλάμε για έννοια δομής και όχι ιδιότητας.

Ορισμός 2.42. Μια μονοειδής κατηγορία $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, \ell, r)$ καλείται **πεπλεγμένη** (braided) αν υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί $\gamma_{X,Y} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$

για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} (X\otimes Y)\otimes Z & \xrightarrow{\alpha_{X,Y,Z}} & X\otimes(Y\otimes Z) \\ {\scriptstyle \gamma_{X,Y}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{X,Y\otimes Z}} \\ (Y\otimes X)\otimes Z & & (Y\otimes Z)\otimes X \\ {\scriptstyle \alpha_{Y,X,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{Y,Z,X}} \\ Y\otimes(X\otimes Z) & \xrightarrow{1\otimes\gamma_{X,Z}} & Y\otimes(Z\otimes X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X\otimes(Y\otimes Z) & \xrightarrow{\alpha^{-1}_{x,Y,Z}} & (X\otimes Y)\otimes Z \\ {\scriptstyle 1\otimes\gamma_{Y,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{X\otimes Y,Z}} \\ X\otimes(Z\otimes Y) & & Z\otimes(X\otimes Y) \\ {\scriptstyle \alpha^{-1}_{X,Y,Z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{-1}_{Z,X,Y}} \\ (X\otimes Z)\otimes Y & \xrightarrow{\gamma_{X,Y}\otimes 1} & (Z\otimes X)\otimes Y \end{array}$$

Επιπλέον αν $\gamma^{-1}_{X,Y} = \gamma_{X,Y}$ για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$ τότε η $\mathcal{C}$ λέγεται **συμμετρική (symmetric) μονοειδής κατηγορία**.

Ορισμός 2.43. Έστω $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, r, \ell)$ και $(\mathcal{D}, \odot, J, a', r', \ell')$ δύο μονοειδείς κατηγορίες. Ένας **μονοειδής συναρτητής** απο την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$ είναι μια τριάδα (F, ϕ_0, ϕ) όπου:

- $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ συναρτητής
- $\phi_0\colon J \to F(I)$ είναι ένας μορφισμός της κατηγορίας D.
- $\phi\colon \odot\circ(F, F) \Rightarrow F\circ\otimes$ φυσικός μετασχηματισμός ανάμεσα στους αντίστοιχους συναρτητές $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, έτσι έχουμε μια οικογένεια μορφισμών

  $$\phi_{M,N}\colon F(M) \odot F(N) \to F(M \otimes N)$$

  τέτοια ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά για κάθε $M, N, P \in \mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} (F(M)\odot F(N))\odot F(P) & \xrightarrow{a'_{F(M),F(N),F(P)}} & F(M)\odot(F(N)\odot F(P)) \\ {\scriptstyle \phi_{M,N}\odot 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\odot\phi_{P,Q}} \\ F(M\otimes N)\odot F(P) & & F(M)\odot F(N\otimes P) \\ {\scriptstyle \phi_{M\otimes N,P}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{M,N\otimes P}} \\ F((M\otimes N)\otimes P) & \xrightarrow{F(a_{M,N,P})} & F(M\otimes(N\otimes P)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} J\odot F(M) & \xrightarrow{\ell'_{F(M)}} & F(M) \\ {\scriptstyle \phi_0\odot 1}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F(\ell_M)} \\ F(I)\odot F(M) & \xrightarrow[\phi_{I,M}]{} & F(I\otimes M) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(M)\odot J & \xrightarrow{r'_{F(M)}} & F(M) \\ {\scriptstyle 1\odot\phi_0}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F(r_M)} \\ F(M)\odot F(I) & \xrightarrow{\phi_{M,I}} & F(M\otimes I) \end{array}$$

Αν ϕ_0 είναι ισομορφισμός και ϕ φυσικός ισομορφισμός τότε λέμε οτι ο F είναι 'ισχυρός' μονοειδής (strong monoidal) συναρτητής. Αν ϕ και ϕ_0 είναι ταυτοτικοί τότε ο F λέγεται 'αυστηρός' μονοειδής (strict monoidal) συναρτητής.

Ορισμός 2.44. Έστω $(\mathcal{C}, \otimes, I, \gamma)$ και $(\mathcal{D}, \odot, J, \delta)$ (αυστηρές) πεπλεγμένες μονοειδείς κατηγορίες. Ένας μονοειδής συναρτητής $(F, \phi_0, \phi)\colon (\mathcal{C}, \otimes, I) \to (\mathcal{D}, \odot, J)$ καλείται **πεπλεγμένος** αν το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε $X, Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \odot F(Y) \arrow[r, "\delta_{F(X),F(Y)}"] \arrow[d, "\phi_{X,Y}"'] & F(Y) \odot F(X) \arrow[d, "\phi_{Y,X}"] \\ F(X \otimes Y) \arrow[r, "F(\gamma_{X,Y})"'] & F(Y \otimes X) \end{tikzcd}$$

Αν οι παραπάνω κατηγορίες είναι συμμετρικές και το διάγραμμα συνεχίζει να είναι μεταθετικό τότε ο μονοειδής συναρτητής λέγεται **συμμετρικός**.

Παραδείγματα 2.45.

- Έστω συναρτητής $k-\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_k$ ο οποίος στέλνει ένα σύνολο X στον διανυσματικό χώρο kX. Δηλαδή, για μια συνάρτηση $f\colon X \to Y$ η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση θα δίνεται απο τον τύπο:

  $$kf(\sum_{x \in X} \alpha_x x) = \sum_{x \in X} \alpha_x f(x)$$

  Ο ισομορφισμός $\phi_0\colon k \to k*$ δίνεται απο τον τύπο $\phi_0(\alpha) = \alpha*$ και ο φυσικός μετασχηματισμός

  $$\phi_{X,Y}\colon kX \otimes kY \to k(X \times Y)$$

  δίνεται απο τον τύπο $\phi_{X,Y}(x \otimes y) = (x, y)$ για $x \in X$ και $y \in Y$. Ο συναρτητής $k-$ είναι μονοειδής και συγκεκριμένα ισχυρός μονοειδής συναρτητής.

- Έστω συναρτητής $Hom(-, k)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_k$ ο οποίος στέλνει κάθε σύνολο στον διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων που ορίζονται μέσα στο σύνολο. Ο συγκεκριμένος είναι μονοειδής συναρτητής με τους παρακάτω φυσικούς μετασχηματισμούς για κάθε X και Y:

  $$Hom(X, k) \otimes Hom(Y, k) \to Hom(X \times Y, k)$$

$$(\sum_i f_i \otimes g_i)(x,y) = \sum_i f_i(x) g_i(y)$$

Ακόμη ο συναρτητής είναι ισχυρός μονοειδής αν τα σύνολα είναι πεπερασμένα και οι διανυσματικοί χώροι είναι πεπερασμένης διάστασης.

2.7 Μονοειδή και συνμονοειδή σε μονοειδείς κατηγορίες

Στην συνέχεια δίνεται ο κατηγορικός ορισμός ενός μονοειδούς εντός μιας μονοειδούς κατηγορίας. Οι συγκεκριμένες οντότητες θα παίξουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην συνέχεια της εργασίας όταν πλέον θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε για άλγεβρες Frobenius. Ενδεικτική βιβλιογραφία για τα παρακάτω είναι [15].

Ορισμός 2.46. Ένα **μονοειδές** (monoid) σε μια μονοειδή κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο A εφοδιασμένο με μορφισμούς

$$m\colon A \otimes A \to A, \quad \eta\colon I \to A$$

οι οποίοι λέγονται πολλαπλασιασμός (multiplication) και μονάδα (unit) αντίστοιχα, και ικανοποιούν την προσεταιριστικότητα και το ταυτοτικό στοιχείο, δηλαδή τα παρακάτω διαγράμματα είναι μεταθετικά (ας θυμηθούμε και τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις άλγεβρες στους διανυσματικούς χώρους (1)):

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes 1"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes 1"] \arrow[dr, "l_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes I \arrow[l, "1\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Ένας **μορφισμός** ανάμεσα σε δύο μονοειδή (A, m, η) και (A', m', η') είναι ένα βέλος $f\colon A \to A'$ τέτοιο ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A' \otimes A' \arrow[r, "m'"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως δεν είναι όλες οι απεικονίσεις μεταξύ μονοειδών μορφισμοί. Για παράδειγμα, στην κατηγορία **Set** κάθε ομάδα είναι ένα μονοειδές με πολλαπλασιασμό την πράξη της ομάδας και μονάδα το ταυτοτικό στοιχείο της, και κάθε ομομορφισμός ομάδων είναι μορφισμός μονοειδών. Ενας μορφισμός ανάμεσα σε δύο ομάδες θα ήταν ομομορφισμός ομάδων αλλά παρατηρούμε πως μπορούμε να βρούμε πολλές συναρτήσεις ανάμεσα σε δύο ομάδες οι οποίες δεν είναι ομομορφισμοί ομάδων.

Τα μονοειδή που προκύπτουν απο μια μονοειδή κατηγορία $\mathcal{C}$ μαζί με τους μορφισμούς τους σχηματίζουν κατηγορία. Η κατηγορία αυτή συμβολίζεται $\mathbf{Mon}(\mathcal{C})$ και έχει αντικείμενα μονοειδή και βέλη μορφισμούς ανάμεσά τους.

Ορισμός 2.47. Ένα **συνμονοειδές** (comonoid) στην $\mathcal{C}$ είναι ένα μονοειδές στην δυϊκή μονοειδή κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$. Συγκεκριμένα, ένα συνμονοειδές στην μονοειδή κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι μια τριάδα (C, Δ, ϵ) όπου C αντικείμενο, $\Delta\colon C \to C \otimes C$ και $\epsilon\colon C \to I$ μορφισμοί που καλούνται συνπολλαπλασιασμός και συνμονάδα αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes 1"] \\
C \otimes C \arrow[r, "1 \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \otimes I \arrow[dr, "\cong"'] & C \otimes C \arrow[l, "1 \otimes \epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon \otimes 1"] & I \otimes C \arrow[dl, "\cong"] \\
& C \arrow[u, "\Delta"] &
\end{tikzcd}$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε και την κατηγορία των **συνμονοειδών** $\mathbf{Comon}(\mathcal{C})$. Εδώ τα αντικείμενα είναι οι τριάδες (C, Δ, ϵ) που περιγράψαμε παραπάνω.

Παραδείγματα 2.48.

- Οι **φυσικοί αριθμοί** $\mathbb{N}$ με πολλαπλασιασμό την πράξη της πρόσθεσης και μονάδα το 0, στην κατηγορία **Set**, είναι ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα μονοειδούς.

- Οι **ακέραιοι** $\mathbb{Z}$, όπως και οι φυσικοί, με πολλαπλασιασμό την πράξη της πρόσθεσης και μονάδα το 0 είναι μονοειδές.

- Οι **ομάδες**, όπως είδαμε και παραπάνω, αποτελούν ένα ειδικό είδος μονοειδούς με πολλαπλασιασμό την πράξη της ομάδας και μονάδα το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας, πάλι στην κατηγορία **Set**. Επιπλέον, τα συγκεκριμένα μονοειδή έχουν την ιδιότητα πως κάθε στοιχείο τους έχει αντίστροφο.

- **Ενδομορφισμός μονοειδών**. Έστω $X \in \mathbf{Top}$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω το σύνολο $End_{Top}(X)$ των συνεχών απεικονίσεων απο το X στο X. Με τις παρακάτω απεικονίσεις

$$End(X) \times End(X) \to End(X)$$

$$(f, g) \mapsto gf$$

επιτυγχάνεται η προσεταιριστικότητα και επιπλέον με την ταυτοτική $id\colon X \to X$ μπορούμε να δούμε οτι το $End(X)$ είναι μονοειδές.

- Έστω C μια κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο X. Οι μορφισμοί $C(X, X)$ αποτελούν μονοειδές M, το οποίο μάλιστα περιέχει και όλη την πληροφορία της κατηγορίας. Συγκεκριμένα, ένα αντικείμενο $m \in M$ είναι ένα βέλος $m\colon X \to X$, ο πολλαπλασιασμός του μονοειδούς δίνεται απο την σύνθεση της κατηγορίας C και προφανώς η μονάδα είναι η ταυτοτική συνάρτηση $id\colon X \to X$.

- Μια $k-$άλγεβρα (A, μ, η) είναι ένα μονοειδές στην συμμετρική μονοειδή κατηγορία $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

- Μια $k-$συνάλγεβρα (A, Δ, ϵ) είναι ένα συνμονοειδές στην συμμετρική μονοειδή κατηγορία $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

Όπως βλέπουμε στα τελευταία παραδείγματα μπορούμε να ορίσουμε μια άλγεβρα και μια συνάλγεβρα ως μονοειδή και συνμονοειδή αντίστοιχα εντός μιας μονοειδούς κατηγορίας. Μέσω του συγκεκριμένου ορισμού θα τις μελετήσουμε και στην συνέχεια της εργασίας.

Αν η $(\mathcal{C}, \otimes, I, \sigma)$ είναι μια συμμετρική μονοειδής κατηγορία τοτε λέμε οτι η άλγεβρα (A, μ, u) είναι <u>μεταθετική</u> αν και μόνο αν

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] \arrow[dd, "\sigma_{A,A}"'] & \\
& A \\
A \otimes A \arrow[ur, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

Αντίστοιχα η συνάλγεβρα $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ είναι συνμεταθετική αν και μόνο αν

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dd, "\sigma_{C,C}"] \\
C \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\
 & C \otimes C
\end{tikzcd}$$

Παραδείγματα 2.49.

- Μια άλγεβρα στην κατηγορία $\mathbf{Vect}_k$ είναι μια κλασσική άλγεβρα όπως και μια συνάλγεβρα στην κατηγορία $\mathbf{Vect}_k$ είναι μια κλασσική συνάλγεβρα.
- Μια άλγεβρα στην κατηγορία **Set** είναι ένα κλασσικό μονοειδές.
- Μια συνάλγεβρα στην κατηγορία **Set** είναι ένα σύνολο X εφοδιασμένο με την απεικόνιση προβολής (projection map) $\pi\colon X \to \{*\}$ και την διαγώνια απεικόνιση (diagonal map) $d\colon X \to X \times X, d(x) = (x, x)$. Το σημαντικό σημείο εδώ είναι ότι κάθε σύνολο έχει τη δομή συνάλγεβρας/συνμονοειδούς στην κατηγορία των συνόλων.

3 Άλγεβρες Frobenius

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τις άλγεβρες Frobenius ως συγκεκριμένου τύπου μονοειδή και συνμονοειδή σε μια γενική μονοειδή κατηγορία. Επιπλέον θα δούμε συγκεκριμένα στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων $\mathbf{Vect}_k$ κάποια θεωρήματα ισοδυναμίας μεταξύ γνωστών ορισμών.

Στην αρχή της εργασίας ορίσαμε τις έννοιες της άλγεβρας και της συνάλγεβρας στους διανυσματικούς χώρους. Έπειτα, στο προηγούμενο κεφάλαιο αφού αποκτήσαμε τα κατάλληλα εργαλεία γενικεύσαμε και ορίσαμε τις άλγεβρες και συνάλγεβρες ως μονοειδή και συνμονοειδή σε γενικές μονοειδείς κατηγορίες. Για τις άλγεβρες Frobenius (ή Frobenius μονοειδή) επιλέγουμε να δώσουμε τον ορισμό γενικά στις μονοειδείς κατηγορίες και μετά να εστιάσουμε στους διανυσματικούς χώρους, παρ'όλο που ιστορικά έγινε το ανάποδο. Αυτό το κάνουμε γιατί σε αυτή την μορφή ο ορισμός γενικεύεται και σε άλλα περιβάλλοντα πέραν των διανυσματικών χώρων, ενώ οι άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί εμπλέκουν στοιχεία όπως συγκεκριμένες γραμμικές συναρτήσεις που δεν γενικεύονται εύκολα ή καθόλου.

Ξεκινάμε δίνοντας τον κατηγορικό ορισμό των Frobenius αλγεβρών. Στη συνέχεια θα εστιάσουμε στην μονοειδή κατηγορία των διανυσματικών χώρων και θα δούμε κάποια αποτελέσματα για Frobenius k-άλγεβρες. Σχετική με το θέμα βιβλιογραφία που χρησιμοποιήσαμε συμπεριλαμβάνει [14, 5, 17].

Ορισμός 3.1. Έστω $\mathcal{C}$ μονοειδής κατηγορία. Ένα **Frobenius μονοειδές** στην $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο A μαζί με τους μορφισμούς $\mu\colon A\otimes A \to A, \eta\colon I \to A, \Delta\colon A \to A\otimes A$ και $\epsilon\colon A \to I$ που του δίνουν τη δομή μονοειδούς και συνμονοειδούς, τέτοιους ώστε επιπλέον τα παρακάτω να ικανοποιούνται:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\Delta"] \arrow[d, "\Delta\otimes 1"'] \arrow[dr, "\Delta\circ\mu"] & A\otimes A\otimes A \arrow[d, "\mu\otimes 1"] \\ A\otimes A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\mu"'] & A\otimes A \end{tikzcd}$$

Στην μονοειδή κατηγορία $\mathbf{Vect}_k$ τα Frobenius μονοειδή είναι οι κλασσικές Frobenius k-άλγεβρες που ορίζουμε στην συνέχεια.

Ορισμός 3.2. Μια $k-$άλγεβρα και $k-$συνάλγεβρα $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ είναι **Fro-**

benius k-άλγεβρα αν

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\Delta\otimes 1"] \arrow[dd, "1\otimes\Delta"'] \arrow[dr, "\mu"] & & A \otimes A \otimes A \arrow[dd, "1\otimes\mu"] \\
& A \arrow[dr, "\Delta"] & \\
A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "\mu\otimes 1"'] & & A \otimes A
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Γραμμένες με συμβολισμό Sweedler, οι συνθήκες γίνονται

$$\sum_{gh}(gh)_1 \otimes (gh)_{(2)} = \sum_{g} g_{(1)} \otimes g_{(2)}h = \sum_{(h)} gh_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

Παρατηρήσεις

- Κάθε Frobenius k-άλγεβρα είναι πεπερασμένης διάστασης. Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω Θεώρημα 3.11 που δίνει κάποιους ισοδύναμους (και πιο κλασσικούς) ορισμούς Frobenius αλγεβρών, καθώς ειδικότερα πρέπει να υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $A \cong A^*$.

Παραδείγματα 3.3.

1. Κάθε ομαδοδακτύλιος (group algebra) $k[G]$ πάνω απο πεπερασμένη ομάδα με τη δομή άλγεβρας όπως δόθηκε παραπάνω, συμπολλαπλασιασμό $\Delta(x) = \sum_h xh^{-1} \otimes h$ και συνμονάδα $\epsilon(\sum_h x_h h) = x_e$ είναι Frobenius. Πιο συγκεκριμένα, κάθε πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Hopf είναι Frobenius. Το παραπάνω είναι γνωστό και ως Sweedler-Larson θεώρημα.

2. Ο δυϊκός (dual) ομαδοδακτύλιος $k[G]^* = Hom_k(k[G], k)$ είναι επίσης Frobenius.

3. Κάθε άλγεβρα πινάκων πάνω απο σώμα είναι Frobenius, παίρνοντας ως μη εκφυλισμένο συναρτησοειδές (θα δώσουμε αυτόν τον ισοδύναμο ορισμό ακολούθως) $\epsilon\colon A \to k$ την απεικόνιση ίχνους (trace map). Γενικότερα, αν A είναι Frobenius τότε και $\mathbf{Mat}_n(A)$ είναι Frobenius με την σύνθεση $\mathbf{Mat}_n(A) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} A \xrightarrow{\epsilon} k$.

4. Κάθε διαχωρίσιμη (separable) k-άλγεβρα πάνω απο ένα σώμα είναι Frobenius.

5. Οι άλγεβρες Frobenius αντιστοιχούν σε διδιάστατες TQFT. Το συγκεκριμένο πόρισμα θα μελετησούμε εκτενέστερα στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.

Στην συνέχεια δίνουμε κάποιους ορισμούς οι οποίοι είναι απαραίτητοι για τις αποδείξεις των παρακάτω θεωρημάτων.

Ορισμός 3.4. Έστω (A, m, η) μονοειδές στην μονοειδή κατηγορία $\mathcal{C}$. Ορίζουμε **αριστερό A-πρότυπο** (*left A-module*) να είναι ένα αντικείμενο M της $\mathcal{C}$ με τον μορφισμό $\mu\colon A \otimes M \to M$, ο οποίος καλείται *δράση*, τέτοια ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes 1"] \arrow[d, "l_m"'] & A \otimes M \arrow[dl, "\mu"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Όμοια ορίζουμε και το **δεξί A-πρότυπο** (right A-module).

Ορισμός 3.5. Ένας **μορφισμός** μεταξύ αριστερών A-προτύπων $(M, \mu) \to (M', \mu')$ είναι μια γραμμική συνάρτηση $f\colon M \to M'$ στην $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d, "\mu"'] & A \otimes M' \arrow[d, "\mu'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

Όμοια ορίζονται και οι μορφισμοί δεξιών A-προτύπων. Τα αριστερά A-πρότυπα μαζί με τους μορφισμούς αριστερών A-προτύπων σχηματίζουν κατηγορία την οποία συμβολίζουμε ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}$. Το ίδιο ισχύει και για τα δεξιά A-πρότυπα τα οποία σχηματίζουν την κατηγορία $\mathbf{Mod_A}$.

Ορισμός 3.6. Έστω μια k-άλγεβρα A. Το *κανονικό* αριστερό A-πρότυπο είναι το A-πρότυπο του οποίου ο διανυσματικός χώρος M είναι το A και για το οποίο ορίζουμε την *αριστερή A-δράση*

$$a \cdot a' = aa'$$

Όμοια, ορίζουμε και το *κανονικό* δεξί πρότυπο μέσω της *δεξιάς A-δράσης*.

Λήμμα 3.7. *Έστω δεξιό A-πρότυπο M. Ο δυϊκός χώρος $M^* = Hom_k(M,k)$ έχει μια φυσική δομή αριστερού A-προτύπου με δράση*

$$(a \cdot f)(m) = f(ma)$$

για κάθε $a \in A, f \in M^*$ και $m \in M$.

Μάλιστα, λόγω του παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τον συναρτητή

$$(-)^* \colon \mathbf{Mod_A} \to {}_\mathbf{A}\mathbf{Mod}.$$

Σε ό,τι ακολουθεί παρακάτω, ασχολούμαστε με τις Frobenius k-αλγεβρες και χτίζουμε προς το Θεώρημα 3.11 που δίνει κάποιες ισοδύναμες συνθήκες για το πότε μια k-άλγεβρα είναι Frobenius.

Πρόταση 3.8. *Έστω μια k-άλγεβρα A. Τότε τα επόμενα σύνολα συνδέονται μεταξύ τους με αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίσεις:*

1. $V_1 = A^* = Hom_k(A,k)$
2. $V_2 = Hom_A(A, A^*)$
3. $V_2' = {}_AHom(A, A^*)$
4. $V_3 = \{\theta \in Hom(A \otimes A, k) \mid \theta(ab \otimes c) = \theta(a \otimes bc)\}$

Απόδειξη. $\underline{(1) \Leftrightarrow (2)}$ Το V_1 αποτελείται απο μορφισμούς απο την άλγεβρα A προς το σώμα k. Έστω λοιπόν ένας τέτοιος μορφισμός $\epsilon \in A^*$ και μέσω αυτού ορίζουμε $\phi \colon A \to A^*$ με τύπο $\phi(\alpha) = \epsilon \cdot \alpha$, δηλαδή $\phi(\alpha)(\alpha') = (\epsilon \cdot \alpha)(\alpha') = \epsilon(\alpha\alpha')$ μέσω της δεξιάς A-δράσης στο A^*. Παρατηρούμε πως η ϕ αντιμετατίθεται με τις αντίστοιχες A-δράσεις.
Για την αντίστροφη φορά, το V_2 αποτελείται απο A-μορφισμούς απο την άλγεβρα A προς τον δυϊκό χώρο A^*. Άρα μέσω ενός $\phi \in Hom_A(A, A^*)$ ορίζουμε $\phi(1_A) \in A^*$. Αυτές οι δύο κατευθύνσεις είναι αντίστροφες η μία της άλλης.

$\underline{(1) \Leftrightarrow (3)}$ Η απόδειξη είναι όμοια με την προηγούμενη.

$\underline{(3) \Leftrightarrow (4)}$ Έστω μορφισμός αριστερών A-προτύπων $\phi \in {}_AHom(A, A^*)$ ανάμεσα στους διανυσματικούς χώρους A και A^*. Αυτό σημαίνει, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, ότι το παρακάτω διάγραμμα αντιμετατίθεται

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\phi"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ A \otimes A^* \arrow[r] & A^* \end{tikzcd}$$

όπου τα οριζόντια βέλη είναι οι αντίστοιχες αριστερές A-δράσεις. Σε μορφή συνθήκης, αυτό γράφεται ως $\phi(cd)(e) = (c \cdot \phi(d))(e)$ για οποιαδήποτε στοιχεία $c, d, e \in A$.

Ορίζουμε $\theta(a \otimes b) = \phi(b)(a)$ και παρατηρούμε οτι όντως

$$\begin{aligned} \theta(ab \otimes c) &= \phi(c)(ab) = (b \cdot \phi(c))(a) \\ &= \phi(bc)(a) = \theta(a \otimes bc) \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι ο ορισμός της A-δράσης επί του A^* και η δεύτερη είναι ακριβώς η παραπάνω συνθήκη.

Για την αντίστροφη φορά αρκεί να πάρουμε $\theta \in V_3$ και με την βοήθειά του ορίζουμε $\phi \in V_2'$ τέτοιο ώστε $\phi(a) = \theta(- \otimes a)$.

Αυτές οι δύο κατευθύνσεις είναι αντίστροφες η μια της άλλης, όπως δείχνει ο παρακάτω υπολογισμός.

$$\begin{aligned} \phi\colon A \to A^* &\rightsquigarrow \theta_\phi\colon A \otimes A \to k, (a \otimes b) \mapsto \phi(b)(a) \\ &\rightsquigarrow \phi_{\theta_\phi}\colon A \to A^*, a \mapsto \theta_\phi(- \otimes a) = \phi(a)(-). \\ &\text{Άρα } \phi_{\theta_\phi} = \phi. \\ \theta\colon A \otimes A \to k &\rightsquigarrow \phi_\theta\colon A \to A^*, a \mapsto \theta(- \otimes a) \\ &\rightsquigarrow \theta_{\phi_\theta}\colon A \otimes A \to k, (a \otimes b) \mapsto \phi_\theta(b)(a) = \theta(a \otimes b). \\ &\text{Άρα } \theta_{\phi_\theta} = \theta. \end{aligned}$$

□

Για την παρακάτω πρόταση, η A είναι A-πρότυπο (αριστερά και δεξιά) μέσω του πολλαπλασιασμού, ενώ το τανυστικό $A \otimes A$ είναι αριστερό και δεξί πρότυπο μέσω των δράσεων $b(a \otimes a') = ba \otimes a'$ και $(a \otimes a')c = a \otimes a'c$.

Πρόταση 3.9. *Έστω k-άλγεβρα A. Θεωρούμε τα επόμενα σύνολα*

1. $W_1 = {}_AHom_A(A, A \otimes A)$ *το σύνολο των αριστερών και δεξιών $A-$μορφισμών.*
2. $W_2 = \{e^1 \otimes e^2 \in A \otimes A \mid ae^1 \otimes e^2 = e^1 \otimes e^2 a\}$ *που ονομάζεται και σύνολο στοιχείων Casimir.*
3. $W_2' = \{e \in Hom(k, A \otimes A) \mid e(1)a = ae(1)\}$
4. $W_3 = {}_AHom(A^*, A)$
5. $W_3' = Hom_A(A^*, A)$

Ισχύει οτι $W_1 \cong W_2 \cong W_2'$ και υπάρχουν απεικονίσεις $W_2 \to W_3$ και $W_2 \to W_3'$.

Απόδειξη. $\underline{(1) \Leftrightarrow (2)}$ Το σύνολο W_1 αποτελείται απο δεξιά και αριστερά A-μορφισμούς απο την άλγεβρα A προς το τανυστικό γινόμενο $A \otimes A$ όπου οι δράσεις δίνονται από τον πολλαπλασιασμό της A όπως περιγράφηκε από πάνω. Το σύνολο W_2 αποτελείται απο στοιχεία του $A \otimes A$ για τα οποία ισχύει μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Θα αποδείξουμε λοιπόν οτι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα W_1 και W_2.

Έστω μορφισμός $\Delta \in W_1$, ορίζουμε $e^1 \otimes e^2 = \Delta(1) \in A \otimes A$. Αφού ο $\Delta \in W_1$ εξ ορισμού ισχύει οτι είναι $A-$γραμμικός δεξιά και αριστερά, έτσι λοιπόν μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι ισχύει $\Delta(a) = a\Delta(1) = \Delta(1)a$, άρα $\Delta(1) \in W_2$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο, θεωρούμε $e^1 \otimes e^2 \in W_2$. Ορίζουμε $\Delta \in W_1$ με τύπο $\Delta(a) = ae^1 \otimes e^2 = e^1 \otimes e^2 a$. Η Δ είναι Α-μορφισμός αριστερά και δεξιά αφού

$$\Delta(ab) = abe^1 \otimes e^2 = e^1 \otimes e^2 ab$$

$$\Rightarrow \Delta(ab) = a\Delta(b) = \Delta(a)b$$

Παρατηρούμε ότι αυτές οι δύο κατευθύνσεις είναι αντίστροφες η μία της άλλης, καθώς οι αντιστοιχίσεις ανάμεσα στα δύο σύνολα είναι αντίστροφες μεταξύ τους.

$\underline{(1) \Leftrightarrow (3)}$ Η απόδειξη προκύπτει με παρόμοιο τρόπο όπως και η προηγούμενη.

$\underline{(2) \Leftrightarrow (4)}$ Θα αποδείξουμε οτι υπάρχει '1-1' και επί αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο των Casimir στοιχείων και το σύνολο των αριστερά A-μορφισμών απο τον δυϊκό A^* στην άλγεβρα A. Θυμόμαστε ότι η αριστερή δράση της A στην A^* είναι η $(a \cdot f)(x) = f(xa)$.

Έστω ένα στοιχείο Casimir $e^1 \otimes e^2 \in W_2$. Ορίζουμε μορφισμό $\psi\colon A^* \to A$ τέτοιον ώστε $\psi(f) = e^1 f(e^2)$. Παρατηρούμε πως ισχύει:

$$\psi(af) = e^1(af)(e^2) = e^1 f(e^2 a) = ae^1 f(e^2) = a\psi(f)$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι ο ορισμός, η δεύτερη είναι η A-δράση στην A^* και η τρίτη είναι από τη συνθήκη Casimir. Συνεπώς, η ψ είναι αριστερά $A-$γραμμική.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε $\psi \in W_3$ και μια πεπερασμένη δυϊκή βάση $\{(e_i, f_i) | i = 1, ..., n\} \in A \times A^*$. Παρατηρούμε οτι ένα στοιχείο Casimir ορίζεται ως εξής

$$e^1 \otimes e^2 = \sum_{i=1}^{n} \psi(f_i) \otimes e_i$$

Αποδεικνύεται ότι αυτές οι δύο κατευθύνσεις είναι αντίστροφες η μία της άλλης. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα μας δείχνει πώς από την δομή μιας άλγεβρας και μια γραμμική συνάρτηση συγκεκριμένης μορφής, οδηγούμαστε σε ένα συνπροσεταιριστικό συνπολλαπλασιασμό, 'χτίζοντας' προς την δομή μιας συνάλγεβρας και ακολούθως μιας άλγεβρας Frobenius.

Πρόταση 3.10. *Έστω A μια $k-$άλγεβρα και $\Delta \in {}_AHom_A(A, A \otimes A)$. Τότε ισχύει η παρακάτω ισότητα:*

$$(1_A \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes 1_A) \circ \Delta \colon A \to A \otimes A \otimes A$$

Απόδειξη. Απο την προηγούμενη πρόταση γνωρίζουμε οτι το $\Delta(1) = e^1 \otimes e^2$ είναι ένα στοιχείο Casimir. Συμβολίζουμε $e^1 \otimes e^2 = E^1 \otimes E^2$, τότε απο την ιδιότητα Casimir βρίσκουμε οτι

$$E^1 e \otimes e^2 \otimes E^2 = e^1 \otimes e^2 E^1 \otimes E^2 = e^1 \otimes E^1 \otimes E^2 e^2$$

Έτσι, μπορούμε να δείξουμε τις ισότητες

$$\begin{aligned}
(1_A \otimes \Delta) \circ \Delta(\alpha) &= (1_A \otimes \Delta)(\alpha\Delta(1)) = (1_A \otimes \Delta)(\alpha e^1 \otimes e^2) = \\
&= \alpha e^1 \otimes \Delta(e^2) = \alpha e^1 \otimes e^2 E^1 \otimes E^2 \\
(\Delta \otimes 1_A) \circ \Delta(\alpha) &= (\Delta \otimes 1_A)(\alpha\Delta(1)) = (\Delta \otimes 1_A)(\alpha E^1 \otimes E^2) = \\
&= \Delta(\alpha E^1) \otimes E^2 = \alpha E^1 e^1 \otimes e^2 \otimes E^2 = \\
&= \alpha e^1 \otimes e^2 E^1 \otimes E^2
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην αρχική ισότητα

$$(1_A \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes 1_A) \circ \Delta \colon A \to A \otimes A \otimes A.$$

□

Είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα που χαρακτηρίζει κάποιες από τις βασικές ιδιότητες των Frobenius αλγεβρών στους διανυσματικούς χώρους. Ο συμβολισμός παρακάτω ακολουθεί αυτόν των Προτάσεων 3.8, 3.9.

Θεώρημα 3.11. *Έστω k-άλγεβρα (A, μ, η). Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Υπάρχει ισομορφισμός αριστερών A-προτύπων $A \cong A^*$ (σημειώνουμε πως αυτός είναι ο συνήθης κλασσικός ορισμός των Frobenius k-αλγεβρών).*

2. *Υπάρχει ισομορφισμός δεξιών A-προτύπων $A \cong A^*$.*

3. *Η A είναι πεπερασμένης διάστασης και υπάρχει μια αριστερά μη εκφυλισμένη διγραμμική απεικόνιση $\theta \in V_3$ (αριστερά μη εκφυλισμένη σημαίνει πως αν $\theta(a \otimes b) = 0$ για κάθε a συνεπάγεται πως $b = 0$).*

4. *Η A είναι πεπερασμένης διάστασης και υπάρχει μια δεξιά μη εκφυλισμένη διγραμμική απεικόνιση $\theta \in V_3$ (δεξιά μη εκφυλισμένη σημαίνει πως αν $\theta(a \otimes b) = 0$ για κάθε b συνεπάγεται πως $a = 0$).*

5. *Η A είναι πεπερασμένης διάστασης και υπάρχει ένα αριστερά μη εκφυλισμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\epsilon \in A^*$ (αριστερά μη εκφυλισμένο σημαίνει οτι αν $\epsilon(ab) = 0$ για κάθε a συνεπάγεται πως $b = 0$).*

6. *Η A είναι πεπερασμένης διάστασης και υπάρχει ένα δεξιά μη εκφυλισμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\epsilon \in A^*$ (δεξιά μη εκφυλισμένο σημαίνει οτι αν $\epsilon(ab) = 0$ για κάθε b συνεπάγεται πως $a = 0$).*

7. *Υπάρχει συναρτησοειδές $\epsilon \in A^*$ και στοιχείο Casimir $e^1 \otimes e^2 \in A \otimes A$ τέτοια ώστε $\epsilon(e^1)e^2 = 1_A = e^1\epsilon(e^2)$.*

8. *Υπάρχει συναρτησοειδές $\epsilon \in A^*$ και μια απεικόνιση $\Delta \in W_1$ τέτοια ώστε*
$$(A \otimes \epsilon) \circ \Delta = 1_A = (\epsilon \otimes A) \circ \Delta$$

9. *Υπάρχει μορφισμός $\theta \in V_3$ και στοιχείο Casimir $e^1 \otimes e^2$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$*
$$\theta(a \otimes e^1)e^2 = a = e^1\theta(e^2 \otimes a)$$

Απόδειξη (σχέδιο).
(1) $\Leftrightarrow$ (3) Απο την Πρόταση 3.8 γνωρίζουμε οτι μια αριστερά $A-$γραμμική απεικόνιση ϕ: $A \to A^*$ (δηλαδή ένα στοιχείο του V_2') αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε έναν μορφισμό $\theta \in V_3$.

Παρατηρούμε οτι για τον μορφισμό $\theta \in V_3$ ισχύει
$$\theta(a \otimes b) = \phi(b)(a) = 0, \forall a \Rightarrow \phi(b) = \mathcal{O} = \phi(0) \Rightarrow b = 0$$

όπου $\mathcal{O}$ είναι η μηδενική συνάρτηση, γιατί ο ϕ δεν είναι απλή απεικόνιση αλλά ισομορφισμός και ειδικότερα είναι 1-1. Άρα, όντως ο θ είναι μη εκφυλισμένος και αντίστροφα αν ο θ είναι μη εκφυλισμένος τότε η ϕ είναι 1-1.

Στην συνέχεια, αν η άλγεβρα A είναι πεπερασμένης διάστασης τότε ισχύει $dimA = dimA^*$. Συνεπώς, κάθε '1-1'απεικόνιση $\phi\colon A \to A^*$ θα είναι αυτόματα και επί αρα αποτελεί ισομορφισμό.

$\underline{(1) \Leftrightarrow (5)}$ Πάλι απο την Πρόταση 3.8 γνωρίζουμε οτι τα σύνολα V_1 και V_2' είναι ισομορφικά. Άρα μια αριστερά $A-$γραμμική απεικόνιση $\phi\colon A \to A^*$ αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση $\epsilon \in A^*$. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη, το ότι η ϕ είναι '1-1' αντιστοιχεί στο ότι η ϵ θα είναι μη εκφυλισμένη, και το ότι A είναι πεπερασμένης διάστασης αντιστοιχεί στο ότι τελικά ο ϕ είναι ισομορφισμός.

Για την απόδειξη των ισοδυναμιών με τις (7),(8) και (9) δουλεύουμε συνδυάζοντας τους ισομορφισμούς των συνόλων V_i της Πρότασης 3.8 με τους ισομορφισμούς των συνόλων W_i της Πρότασης 3.9 και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα πως οι απεικονίσεις $A \to A^*$ και $A^* \to A$ είναι απο κοινού αντίστροφες.

$\square$

Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο χωρίς απόδειξη ότι στις παραπάνω ισοδυναμίες μπορεί να συμπεριληφθεί και το ότι ο επιλήσμων συναρτητής $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Vect}_k$ έχει δεξιά προσαρτημένο τον συναρτητή $- \otimes A\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Mod}_A$.

Παρατήρηση 3.12. Όλα τα μέρη του παραπάνω θεωρήματος είναι ισοδύναμοι ορισμοί μιας άλγεβρας Frobenius (Ορισμός 3.2) στην κατηγορία των διανυσματικών χώρων. Στην πραγματικότητα, αυτός ο ορισμός που δόθηκε αρχικά συμπίπτει με την πρόταση (8) των παραπάνω ισοδυναμιών, και αυτό το βλέπουμε ως εξής. Η A είναι k-άλγεβρα από υπόθεση, και είναι επιπλέον εφοδιασμένη με μια γραμμική απεικόνιση $\epsilon\colon A \to k$ και μια γραμμική απεικόνιση $\Delta\colon A \to A \otimes A$ οι οποίες εξ' ορισμού ικανοποιούν τη συνθήκη συνταυτοτικού στοιχείου (2). Τώρα, το ότι η Δ δεν είναι απλά γραμμική απεικόνιση αλλά είναι μορφισμός μεταξύ αριστερών και δεξιών προτύπων σημαίνει ακριβώς ότι τα παρακάτω διαγράμματα αντιμετατίθενται

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta \otimes 1_A"'] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1 \otimes \mu"'] & A \otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1_A \otimes \Delta"'] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes 1"'] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

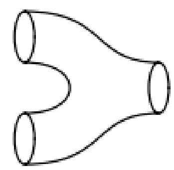
βασιζόμενοι στο πώς ορίστηκαν οι δράσεις στο τανυστικό γινόμενο $A \otimes A$ πάνω από την Πρόταση 3.9. Βλέπουμε πως αυτές συμπίπτουν με τις δύο ιδιότητες (4). Τέλος, από Πρόταση 3.10 έχουμε ότι με αυτά τα δεδομένα, η συν-προσεταιριστικότητα ισχύει αυτόματα ως ιδιότητα.

4 Τοπολογικές Κβαντικές Θεωρίες Πεδίου (TQFT's)

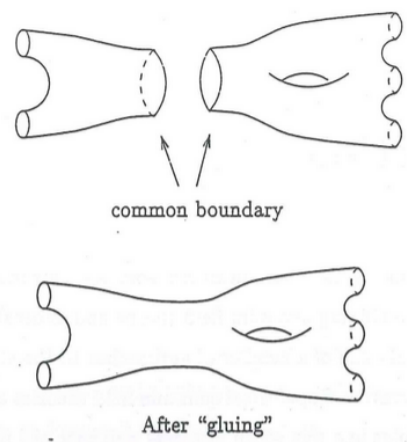
Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το τί είναι οι τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίου (Topological Quantum Field Theories) και το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν στους τομείς της φυσικής και των μαθηματικών [1, 9]. Θα προσπαθήσουμε να τις ορίσουμε και να τις κατανοήσουμε με την βοήθεια της θεωρίας κατηγοριών και πιο συγκεκριμένα των μονοειδών κατηγοριών. Τέλος θα δούμε με ποιο τρόπο συνδέονται με τις άλγεβρες Frobenius καταλήγοντας σε ένα θεώρημα ανάμεσα τους. Μια πρώτη αξιωματική προσέγγιση στις τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίου έγινε απο τον άγγλο μαθηματικό Michael Atiyah. Ο ορισμός που έδωσε βασίστηκε σε προηγούμενες τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίου, κυρίως του μαθηματικού και θεωρητικού φυσικού Edward Witten (ο οποίος όμως δεν είχε δώσει αξιωματικό ορισμό στην ορολογία) και του μαθηματικού Irving Segal ο οποίος είχε προτείνει ένα παρόμοιο σύνολο αξιωμάτων για την θεωρία σύμμορφου πεδίου (Conformal Field Theory). Στην συνέχεια δίνουμε τον αξιωματικό ορισμό των τοπολογικών κβαντικών θεωρίων πεδίου σύμφωνα με τον Atiyah και απο δω και στο εξής, για λόγους συντομίας θα γίνεται χρήση της ορολογίας TQFT's.

Ορισμός 4.1. Μια $n-$διάστατη TQFT είναι ένας κανόνας $\mathcal{A}$ ο οποίος συσχετίζει κάθε κλειστή προσανατολισμένη πολλαπλότητα Σ (διάστασης $n-1$) με έναν διανυσματικό χώρο $\Sigma\mathcal{A}$, και κάθε προσανατολισμένη $n-$πολλαπλότητα με σύνορο το Σ με ένα διάνυσμα στον $\Sigma\mathcal{A}$. Ο συγκεκριμένος κανόνας υπόκειται σε μια σειρά αξιωμάτων κατά τα οποία τοπολογικά ισοδύναμες πολλαπλότητες είναι ισομορφικές με διανυσματικούς χώρους και η ξένη ένωση (disjoint union) πολλαπλοτήτων με το τανυστικό γινόμενο διανυσματικών χώρων.

Όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου σκοπός μας είναι να ορίσουμε και να μελετήσουμε τις TQFT's μέσω την θεωρίας κατηγοριών. Σε αυτή την προσπάθεια θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη η κατηγορία των συνσυνορισμών (cobordisms) **nCob**, στην οποία αναφερθήκαμε και στα Παραδείγματα 2.23 γενικών κατηγοριών. Θυμίζουμε πως η κατηγορία **nCob** έχει ως αντικείμενα κλειστές προσανατολισμένες $(n-1)-$πολλαπλότητες και μορφισμούς προσανατολισμένες $n-$πολλαπλότητες. Το απλούστερο παράδειγμα συνσυνορισμού αποτελεί ο κύλινδρος $\Sigma \times I$ πάνω σε μια κλειστή πολλαπλότητα Σ όπως για παράδειγμα ένας κύκλος. Η έννοια μπορεί να γίνει καλύτερα αντιληπτή με την παρακάτω εικόνα, στην οποία βλέπουμε την ένωση δύο κύκλων σε έναν μέσω του συνσυνορισμού.



Η σύνθεση συνσυνορισμών ορίζεται ενώνοντας τις υπάρχουσες πολλαπλότητες με τα στοιχεία που αποτελούν το κοινό σύνορο και έχει μεγάλη ομοιότητα με το αξίωμα της σύνθεσης στην θεωρία κατηγοριών. Ο κύλινδρος $\Sigma \times I$ αποτελεί τον ταυτοτικό μορφισμό στο Σ. Το παρακάτω σχήμα μπορεί να μας βοηθήσει έτσι ώστε να γίνει καλύτερα αντιληπτή η έννοια της σύνθεσης.



Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 2.6 της εργασίας, μια κατηγορία με τα αντικείμενα της και έναν τανυστικό συναρτητή μπορεί να γίνει μονοειδής κατηγορία αν ικανοποιεί κάποια αξιώματα. Αποδεικνύεται λοιπόν πως η κατηγορία των συνσυνορισμών **nCob** με την ξένη ένωση πολλαπλοτήτων αποτελούν μονοειδή κατηγορία. Απο την άλλη, γνωρίζουμε ήδη πως η κατηγορία των διανυσματικών χώρων $\mathbf{Vect}_k$ πάνω απο σώμα k αποτελεί μονοειδή κατηγορία με το τανυστικό γινόμενο. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, μπορούμε να ορίσουμε μια TQFT κατηγορικά – όπου θυμόμαστε τον ορισμό ενός μονοειδούς συναρτητή από τον Ορισμό 2.43.

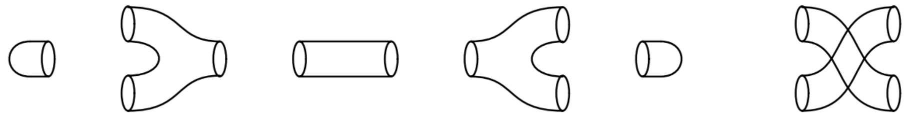
Ορισμός 4.2. Μια τοπολογική κβαντική θεωρία πεδίου είναι ένας (συμμετρικός) μονοειδής συναρτητής απο την κατηγορία **nCob** στην κατηγορία $\mathbf{Vect}_k$.

Πλέον, έχοντας ορίσει κατηγορικά τις TQFT's, μπορούμε να δούμε το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν σε τομείς της φυσικής και των μαθηματικών αλλά και να καταλήξουμε στον τρόπο που συνδέονται με τις άλγεβρες Frobenius.

Το ενδιαφέρον στην φυσική προκύπτει αν παρατηρήσουμε πως οι TQFT's παρουσιάζουν χαρακτηριστικά τα οποία συναντάμε στην θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Λειτουργούν σαν ένα αρχικό μοντέλο στο οποίο μπορούν να γίνουν υπολογισμοί και να αποκτηθεί εμπειρία πρωτού κάποιος θελήσει να ασχοληθεί με την αρκετά δυσκολότερη και πιο πολύπλοκη πλήρη θεωρία. Μια συνοπτική επεξήγηση είναι πως οι κλειστές πολλαπλότητες αντιπροσωπεύουν τον χώρο ενώ οι συνσυνορισμοί αντιπροσωπεύουν τον χωροχρόνο. Οι συσχετιζόμενοι διανυσματικοί χώροι αποτελούν χώρους κατάστασης (state spaces) και ένας τελεστής που σχετίζεται με τον χωροχρόνο είναι ένας χρονικά εξελισσόμενος τελεστής (Feynman path integral). Η τοπολογική φύση της θεωρίας σημαίνει πως η μετρική μετάβαση δεν απαιτεί κάποια επιπρόσθετη δομή στον χωροχρόνο (όπως για παράδειγμα η μετρική του Riemann), αλλά μόνο στην τοπολογία. Συγκεκριμένα, δεν υπάρχει χρονική εξέλιξη κατά μήκος κυλινδρικού χωροχρόνου. Τέλος, η αντιστοιχία της ξένης ένωσης συνσυνορισμών με το τανυστικό γινόμενο διανυσματικών χώρων μεταφράζεται ως μια βασική αρχή της κβαντομηχανικής όπου ο χώρος κατάστασης δύο ανεξάρτητων συστημάτων είναι το τανυστικό γινόμενο των δύο χώρων κατάστασης.

Απο την άλλη πλευρά, το μαθηματικό ενδιαφέρον των TQFT's προκύπτει απο το γεγονός πως παράγουν σταθερές απο κλειστές πολλαπλότητες. Μια $n-$πολλαπλότητα χωρίς σύνορο είναι ένας συνσυνορισμός απο την κενή $(n-1)-$πολλαπλότητα στον εαυτό της και η εικόνα της κάτω απο τον κανόνα $\mathcal{A}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $k \to k$. Συγκεκριμένα, παρουσιάζει ενδιαφέρον να μελετήσουμε την περίπτωση των δύο διαστάσεων όπου υπάρχει ήδη μια πλήρης κατηγοριοποίηση των επιφανειών. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την υπάρχουσα κατηγοριοποίηση για να περιγράψουμε τις TQFT's.

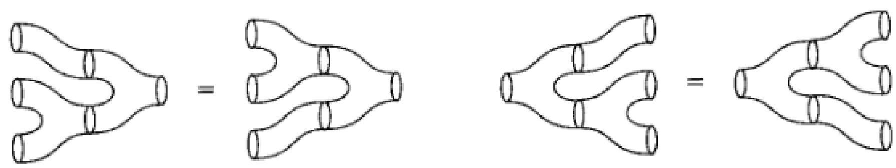
Συνσυνορισμοί στις δύο διαστάσεις. Η περίπτωση των δύο διαστάσεων είναι καλά μελετημένη καθώς όλες οι επιφάνειες έχουν χαρακτηριστεί. Έτσι, μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως την κατηγορία των συνσυνορισμών αυτών. Κάθε συνσυνορισμός δύο διαστάσεων κατασκευάζεται συνθέτοντας τα παρακάτω δομικά στοιχεία:



Σχήμα 1: Δομικά στοιχεία 2-συνσυνορισμών

Δύο συνδεδεμένοι συνσυνορισμοί είναι ισοδύναμοι αν έχουν το ίδιο γένος και τον ίδιο αριθμό εσωτερικών και εξωτερικών συνόρων. Στο συγκεκριμένο σημείο υπενθυμίζουμε πως ως γένος μιας συμπαγούς προσαναλισμένης επιφάνειας ορίζουμε το πλήθος των 'τρυπών'. Για παράδειγμα, η σφαίρα έχει γένος 0, ενώ ο τόρος έχει γένος 1.

Αυτό μας δίνει μια άμεση σχέση αλλα και μια πλήρη περιγραφή της μονοειδούς κατηγορίας **2Cob** μέσω γεννητόρων και ισοδυναμιών. Στις παρακάτω εικόνες μπορούμε να δούμε κάποιες απο τις βασικές ισοδυναμίες της κατηγορίας **2Cob**. Πιο συγκεκριμένα, εδώ διακρίνουμε την προσεταιριστικότητα και την συνπροσεταιριστικότητα:



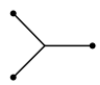
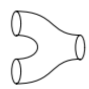
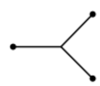
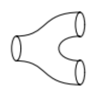
Σχήμα 2: Αξιώματα (συν)προσεταιριστικότητας

Ενώ εδώ διακρίνουμε τις ιδιότητες της μεταθετικότητας και της συνμεταθετικότητας:

Σχήμα 3: Αξιώματα (συν)μεταθετικότητας

Οι παραπάνω ισότητες μας δείχνουν πως οι συγκεκριμένες επιφάνειες είναι τοπολογικά ισοδύναμες. Αυτό συμβαίνει διότι σε όλες τις περιπτώσεις οι συνσυνορισμοί έχουν γένος 0 και επιπλέον έχουν ίδιο πλήθος εσωτερικών και εξωτερικών συνόρων.

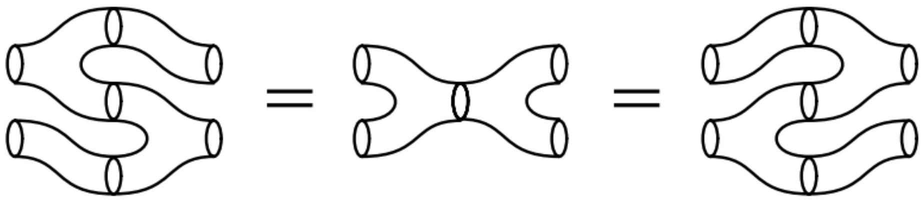
Στην συνέχεια παρουσιάζουμε την τοπολογία κάποιων βασικών αλγεβρικών πράξεων. Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε την σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στις βασικές αρχές της 'συγχώνευσης', 'δημιουργίας', 'διαχωρισμου', 'μηδενισμού', στους διδιάστατους συνσυνορισμούς και τις αλγεβρικές πράξεις.

Principle	Feynman diagram	2D cobordism	Algebraic operation (in a $\Bbbk$-algebra A)	
merging			multiplication	$A \otimes A \to A$
creation			unit	$\Bbbk \to A$
splitting			comultiplication	$A \to A \otimes A$
annihilation			counit	$A \to \Bbbk$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως στην περίπτωση της συγχώνευσης και του διαχωρισμού έχουμε μια έννοια της αρχής και του τέλους, δηλαδή μια κατεύθυνση. Αντίστοιχα, και στην θεωρία κατηγοριών οι μορφισμοί περιέχουν την έννοια της κατεύθυνσης αφού αποτελούν βέλη απο ένα αντικείμενο σε ένα άλλο.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν πριν, οι ισότητες του Σχήματος 2 αποτελούν την τοπολογική έκφραση της προσεταιριστικότητας και οι ισότητες του Σχήματος 3, την τοπολογική έκφραση της μεταθετικότητας. Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε πως η προσεταιριστικότητα και η μεταθετικότητα έχουν και τοπολογικό περιεχόμενο αφού εκφράζουν την τοπολογική ισοδυναμία ανάμεσα σε δύο επιφάνειες.

Ήρθε η ώρα να συνδέσουμε όλα τα παραπάνω με τις άλγεβρες Frobenius. Παρατηρούμε αρχικά πως μια άλγεβρα Frobenius (Ορισμός 3.2) μπορεί να περιγραφεί σαν μια άλγεβρα (με γινόμενο το 2ο στοιχείο του Σχήματος 1) η οποία είναι συγχρόνως και συνάλγεβρα (με συνγινόμενο το 4ο στοιχείο του Σχήματος 1) και ικανοποιεί μια συγκεκριμένη συνθήκη συμβιβαστότητας ανάμεσα σε αυτά τα δύο. Η απεικόνιση αυτής της συνθήκης μέσω συνσυνορισμών έχει ως εξής :



Στην πραγματικότητα, όλες οι ισοδυναμίες της κατηγορίας **2Cob** αντιστοιχούν σε αξιώματα μιας μεταθετικής άλγεβρας Frobenius. Μπορούμε λοιπόν πλέον να καταλήξουμε στο παρακάτω θεώρημα, που εκφράζεται μέσω μιας ισοδυναμίας κατηγοριών (Ορισμός 2.36). Θυμίζουμε (Ορισμός 4.2) πως μια διδιάστατη TQFT είναι ένας μονοειδής συναρτητής $\mathbf{2Cob} \to \mathbf{Vect}_k$.

Θεώρημα 4.3. *Οι παρακάτω κατηγορίες είναι ισοδύναμες*

$$\boldsymbol{2TQFT} \simeq \boldsymbol{cFrobAlg}$$

στέλνοντας μια TQFT στην τιμή της πάνω στον κύκλο (την μοναδική κλειστή συνδεδεμένη 1-πολλαπλότητα).

Η γενική ιδέα για την απόδειξη του θεωρήματος έχει ως εξής. Έστω A η εικόνα του κύκλου κάτω απο μια TQFT $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ στέλνει κάθε γεννήτορα της κατηγορίας **2Cob** σε μια γραμμική απεικόνιση ανάμεσα στις τανυστικές δυνάμεις του A. Οι ισοδυναμίες που προκύπτουν απο την κατηγορία **2Cob** διατηρούνται απο την $\mathcal{A}$ (αφού εξ ορισμού η $\mathcal{A}$ είναι ένας μονοειδής συναρτητής) και μεταφράζονται στην κατηγορία $\mathbf{Vect_k}$, η οποία αποτελεί το πεδίο τιμών του συναρτητή, ως αξιώματα για μια μεταθετική άλγεβρα Frobenius.

Όπως βλέπουμε για να περιγράψουμε την κατηγορία **TQFT** χρειαζόμαστε, σε μεγάλο βαθμό, τις μονοειδείς κατηγορίες. Υπάρχει μια μονοειδής κατηγορία η οποία εμφανίζει μεγάλη ομοιότητα με την κατηγορία **2Cob**. Η λεγόμενη (simplex category) Δ είναι η κατηγορία με αντικείμενα πεπερασμένα διατεταγμένα σύνολα και μορφισμούς απεικονίσεις οι οποίες διατηρούν την διάταξη. Συγκεκριμένα, τα αντικείμενα της Δ είναι $\mathbf{n} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, ένα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και οι μορφισμοί $f : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ τέτοιοι ώστε $i \leqslant j \Rightarrow if \leqslant jf$. Αποτελεί μονοειδή κατηγορία με γινόμενο την ξένη ένωση συνόλων. Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι να περιγράψουμε την Δ, ένας εκ των οποίων είναι με γραφικούς όρους, που μάλιστα υποδεικνύει πως η Δ είναι υποκατηγορία της **2Cob**.

Σκεφτόμενοι σε πιο γενικά πλαίσια από την κατηγορία των διανυσματικών χώρων $\mathbf{Vect}_k$, μπορούμε να διατυπώσουμε την γενίκευση του Θεωρήματος 4.3 και το συμπέρασμα πως *κάθε μεταθετικό Frobenius αντικείμενο σε μια συμμετρική μονοειδή κατηγορία* ***V*** *είναι η εικόνα ενός κύκλου κάτω απο έναν μοναδικό συμμετρικό μονοειδή συναρτητή με πεδίο ορισμού την κατηγορία* ***2Cob***. [9]

Αναφορές

[1] Michael Francis Atiyah. Topological quantum field theories. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 68:175–186, 1988.

[2] Steve Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, Inc., USA, 2010.

[3] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994.

[4] Tomasz Brzezinski. *Corings and Comodules*. Cambridge University Press, 2003.

[5] Caenepeel, Militaru and Zhu. *Frobenius and Separable Functors for Generalized Module Categories and Nonlinear Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2002.

[6] Caenepeel S. and Vercruysse J. Hopf algebras. *Vrije Universiteit Brussel*, 2014.

[7] Dăscălescu, Năstăsescu and Raianu. *Hopf Algebras: An introduction*. Marcel Dekker Inc., 2001.

[8] Hazewinkel, Gubareni and Kirichenko. *Algebras, rings and modules. Vol. 1*. Springer, 2004.

[9] Joachim Kock. *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*. Cambridge University Press, 2003.

[10] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2014.

[11] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1998.

[12] Serban Raianu. *Coalgebras from Formulas*. California State University Dominguez Hills Department of Mathematics, 2010.

[13] Schaefer, H. H. and Wolff Manfred P. *Topological Vector Spaces*. Springer New York Imprint Springer, 1999.

[14] Ross Street. Frobenius algebras and monoidal categories. *Annual Meeting Aust. Math. Soc.* , 2004.

[15] Ross Street. *Quantum groups, A path to current algebra.* Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, 2007.

[16] Moss E. Sweedler. *Hopf algebras.* W.A Benjamin Inc., 1969.

[17] Joost Vercruysse. Course for Master in Mathematics at l'Université Libre de Bruxelles. 2016.

[18] Φελλούρης Ανάργυρος. *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία.* Εκδόσεις Τσότρας, 2017.