

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OFATHENS

ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ FACULTY OF CIVIL ENGINEERING DEPARTMENT OF WATER RESOURCES AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING

ΔΙΑΧΥΣΗ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΑΝΩΣΤΙΚΗΣ ΦΛΕΒΑΣ ΣΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ Β. ΔΕΣΚΟΥ

Επιβλέπων: Παναγιώτης Ν. Παπανικολάου Επίκουρος Καθηγητής

Τα σχήματα της εργασίας έχουν σχεδιαστεί με την χρήση λογισμικού CAD και αποτελούν απλώς μια εικονική αναπαράσταση των φαινομένων.

Τη διπλωματική αυτή εργασία την αφιερώνω στην οικογένεια μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα διπλωματική εργασία μελετούμε το φαινόμενο της ανάμιξης εντός περιορισμένου αποδέκτη. Από κατακόρυφη οπή, τοποθετημένη στο πυθμένα περιορισμένου αποδέκτη εκρέει ρευστό η ροή του οποίου, μπορεί να περιγραφεί ως μια τυρβώδης ανωστική φλέβα. Το περιβάλλον ρευστό είναι αρχικά ομογενές και ακίνητο ενώ η πυκνότητα του διαφέρει ελάχιστα από αυτήν της φλέβας. Το ρευστό της φλέβας είναι ελαφρύτερο. Συνεπώς, λόγω της αρχικής του ορμής και της επίδρασης των ανωστικών δυνάμεων θα κινηθεί προς τα πάνω. Μόλις η τυρβώδης φλέβα φτάσει στην οροφή του περιορισμένου αποδέκτη θα κινηθεί οριζόντια, δημιουργώντας έτσι μια λεπτή στρώση ελαφρύτερου ρευστού. Η ίδια διαδικασία συνεχίζεται με αποτέλεσμα το σχηματισμό δύο οριζόντιων περιοχών εντός του αποδέκτη. Η ανώτερη περιοχή η οποία έχει αναμιχθεί με το ρευστό της φλέβας εμφανίζει πυκνομετρική στρωμάτωση. Από την άλλη μεριά, η κατώτερη περιοχή δεν έχει αναμιχθεί και εμφανίζει ομογενή κατανομή πυκνότητας ίση με την αρχική πυκνότητα του αποδέκτη. Η διεπιφάνεια μεταξύ των δύο περιοχών κατέρχεται λόγω της ανάμιξης στην ανώτερη περιοχή. Έτσι, το παρόν φαινόμενο μετουσιώνεται αυτομάτως σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα.

Για τον προσδιορισμό του ρυθμού ανάμιξης καθώς επίσης και της χρονικά μεταβαλλόμενης πυκνομετρικής κατανομής αναπτύχθηκε ένα αριθμητικό προσομοίωμα που βασίζεται στον αλγόριθμο που πρώτος εισήγαγε ο Germeles (1975). Σε κάθε χρονικό βήμα επιλύεται ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την ροή της φλέβας στην ανώτερη περιοχή, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξεως. Στην κατώτερη περιοχή τα χαρακτηριστικά της φλέβας υπολογίζονται μέσω της γενικευμένη θεωρίας των List & Imberger (1973).

Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου συγκρίνονται με πειράματα τα οποία διεξήχθησαν στο εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Για την επαλήθευση του υπολογιστικού μοντέλου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της οπτικοποίησης της ροής με την χρήση Laser (Laser Induced Fluorescence). Κατά την πειραματική διαδικασία υπολογίστηκε ο ρυθμός καθόδου της διεπιφάνειας καθώς επίσης και τα πυκνομετρικά προφίλ για κάθε χρονική στιγμή. Ο δείκτης που χρησιμοποιήθηκε είναι η Ροδαμίνη 6G. Τα αποτελέσματα δείχνουν να βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με το υπολογιστικό προσομοίωμα.

Ο παρών αλγόριθμος επιλύει το πρόβλημα της ανάμιξης εντός περιορισμένου αποδέκτη τόσο με απλές φλέβες και πλούμια όσο και με τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.

ABSTRACT

In the present thesis the effect of mixing into a confined environment has been considered. Fluid injected from a vertical nozzle placed at the bottom of the bounded region can be described as a turbulent buoyant jet .The environment is initially calm, homogeneous, and the tank fluid has slightly different density if compared to that of the jet. Jet fluid is lighter than ambient surroundings, thus when it starts flowing it moves upwards due to its initial momentum and the buoyant force effect. Once the turbulent jet reaches the top of the bounded region, it spreads out horizontally creating a thin layer of a lighter fluid. The process continues, resulting in the establishment of two horizontal regions within the confined space. The upper region has been mixed with jet fluid and has developed density stratification. The lower region is unmixed and has a homogeneous density distribution equal the initial ambient density. The first front of the upper region is descending because of the mixing process. Thus, the present phenomenon is transformed into a time-depended problem.

To estimate the ratio of mixing as well as the instantaneous density profiles of the environment we have developed a numerical code based on the scheme first introduced by Germeles (1975). At each time step, the system of differential equations of motion is solved across the upper region using a fourth order Runge-Kutta solver. In the lower region the characteristics of the jet are computed using the global theory of List & Imberger (1973).

The numerical solutions are compared with experiments conducted in the Laboratory of Hydromechanics and Environmental Engineering of the University of Thessaly. A Laser Induced Fluorescence (LIF) method is used to measure the time-dependent density profiles as well as the position of the descending first front (interface between mixed upper and unmixed lower layer of ambient fluid) as a function of time. The tracer used is Rhodamine 6G. The numerical simulation showed excellent agreement with experiments.

The numerical model developed is capable of solving the problem of mixing in confined spaces by simple jets, plumes and turbulent buoyant jets.

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας, καθηγητή Παναγιώτη Ν. Παπανικολάου. Η παρότρυνση του για την επιλογή του θέματος της διπλωματικής εργασίας καθώς και η συνεχής υποστήριξη του κατά την διάρκεια της εκπόνησης αποτέλεσαν βασικό παράγοντα για την επιτυχή ολοκλήρωση του πενταετούς κύκλου σπουδών μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Η συνεργασία αυτή επηρέασε σημαντικά τον τρόπο σκέψης μου καθώς επίσης και τον τρόπο προσέγγισης των θεμελιωδών εννοιών της μηχανικής των ρευστών.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνονται προς τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Δημητριάδη Παναγιώτη, για την συμβολή του στην διεξαγωγή των πειραμάτων και εν συνεχεία στην επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων. Η πειραματική επαλήθευση δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την επιμονή και υπομονή του κατά την διάρκεια εκτέλεσης των πειραμάτων.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνονται επίσης προς τον κ. Ηλία Παππά για την ευγενή παραχώρηση μέρους των πειραματικών δεδομένων τα οποία προέκυψαν κατά την εκπόνηση μεταπτυχιακής εργασίας του ιδίου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον καλό μου φίλο και συμφοιτητή κ. Νίκο Παπανδρέου για τις πολύτιμες συμβουλές του στο προγραμματιστικό σκέλος του αλγορίθμου. Οι γνώσεις του επάνω στον προγραμματισμό με βοήθησαν σημαντικά στην σωστή σύνταξη του αλγορίθμου.

Αρωγός σε αυτήν την εργασία ήταν η οικογένεια μου η οποία με βοήθησε τόσο υλικά όσο και ηθικά όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Πίνακας Συμβόλων

(α) Ελληνικά σύμβολα

(β)

α	συντελεστής συμπαράσυρσης			
$\alpha_{ m TH}$	συντελεστής συμπαράσυρσης Top-Hat			
$\alpha_{\rm j}$	συντελεστής συμπαράσυρσης απλής φλέβας			
α _p	συντελεστής συμπαράσυρσης πλουμίου			
$\beta(z)$	ειδική άνωση φλέβας σε απόσταση z			
$\Delta ho_{ m o}$	αρχική διαφορά πυκνότητας μεταξύ αποδέκτη και φλέβας			
$\varepsilon(z)$	συνάρτηση κατανομής της πυκνομετρικής στρωμάτωσης			
$\theta(r,z,t)$	μέση-χρονικά πυκνομετρική διακύμανση			
λ	λόγος 1/e πλάτους συγκέντρωσης προς 1/e πλάτους της ταχύτητας			
$\mu(z)$	η ειδική ογκομετρική παροχή			
v	κινηματικό ιξώδες ρευστού φλέβας			
$ ho_{ m c}$	πυκνότητα ρευστού φλέβας στον άξονα			
$ ho_{ m o}$	αρχική πυκνότητα ρευστού φλέβας			
$\rho(z)$	πυκνότητα ρευστού στη δεξαμενή διάχυσης			
Λατινικά	Δατινικά σύμβολα			
A	εμβαδόν οπής εκροής της φλέβας			
В	αρχική ειδική άνωση φλέβας			
b	χαρακτηριστικό 1/e πλάτος κατανομής ταχύτητας της φλέβας			
$b_{\rm c}$	χαρακτηριστικό 1/e πλάτος κατανομής συγκέντρωσης της φλέβας			
С	αρχική συγκέντρωση φλέβας			
$c_{\rm c}(z)$	συγκέντρωση φλέβας στον άξονα σε απόσταση z από την πηγή			
C_{p}	= 0,27 παράμετρος πλάτους φλέβας			
D	διάμετρος της φλέβας			
Fo	πυκνομετρικός αριθμός Froude της φλέβας			
8	επιτάχυνση βαρύτητας			
g_{0}	=(Δρ/ρ)₀g φαινομενική ανωστική επιτάχυνση			
Η	ενεργό ύψος δεξαμενής			

- h απόσταση της διεπιφάνειας από το ακροφύσιο
- Η_{ολ} ολικό ύψος δεξαμενής

μέση τιμή (time-averaged) παραμέτρου
 μεταβαλλόμενο μέγεθος (Διακύμανση)

(δ) Εκθέτες

c	παράμετρος στον άξονα της φλέβας
j	παράμετρος που αφορά απλή ανωστική φλέβα
0	παράμετρος που αφορά σε αρχική τιμή
p	παράμετρος που αφορά πλούμιο

(γ) Δείκτες

α

L	πλάτος ή μήκος της δεξαμενής
$l_{\rm Q},l_{\rm M}$	κλίμακες μήκους
М	αρχική ορμή ρέοντος ρευστού
m(z)	ειδική ορμή φλέβας σε απόσταση z
Q	αρχική ογκομετρική παροχή φλέβας
$Q_{ m e}$	ογκομετρική παροχή συμπαράσυρσης
Re	αριθμός Reynolds της φλέβας
Ro	αρχικός αριθμός Richarson της φλέβας
$R_{\rm p}$	οριακός αριθμός Richarson πλουμίου
R,Ri	αριθμός Richarson
U(h)	ταχύτητα καθόδου της διεπιφάνειας
<i>u</i> _e	ταχύτητα συμπαράσυρσης
W	μέση αρχική ταχύτητα εξόδου φλέβας
$w_{\rm c}(z)$	ταχύτητα στο κέντρο της φλέβας σε απόσταση z από την πηγή
Zo	απόσταση νοητού κέντρου φλέβας από ακροφύσιο

μέγεθος του περιβάλλοντος ρευστού (αποδέκτης)

Σχήματα

Σχήμα 2-1	Κατακόρυφη φλέβα με αρχική ταχύτητα W και αρχική συγκέντρωση C6
Σχήμα 2-2	Αδιαστατοποιημένη κατανομή μέσης ταχύτητας (αριστερά) και μέσης θερμοκρασιακής διαφοράς (δεξιά) σε απλή φλέβα (Papanicolaou 1984, Papanicolaou &List 1988)
Σχήμα 2-3	Τοπικός αριθμός Richardson ανωστικών φλεβών R(z) σαν συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης z/l _M (Papanicolaou &List 1988)12
Σχήμα 2-4	Σύγκριση των προγνώσεων της γενικής θεωρίας των List & Imberger (1973) με τα πειραματικά αποτελέσματα των Papanicolaou & List (1988). (α) Αδιάστατη ποσότητα κίνησης και (β) αδιάστατη ογκομετρική παροχή σαν συνάρτηση της απόσταση z/l _M από την πηγή14
Σχήμα 2-5	Μηχανισμός του "Filling Box" (Bolster 2007)15
Σχήμα 2-6	Γραφική αναπαράσταση του μηχανισμού 'filling box'. Η μπλε έντονη (bold) γραμμή αναπαριστά την θεωρητική ροή της φλέβας ενώ η διακεκομμένη πράσινη γραμμή την θέση της διεπιφάνειας για δεδομένες χρονικές στιγμές t ₁ και t ₂ (Αναπαραγωγή σχήματος από Baines & Turner, 1968)
Σχήμα 2-7	Πυκνομετρική κατανομή στον άξονα της φλέβας και του περιβάλλοντος ρευστού στις χρονικές στιγμές t ₁ και t ₂ . (Αναπαραγωγή σχήματος από Baines & Turner, 1968)
Σχήμα 3-1	Ορθογώνια δεξαμενή διαστάσεων L × L × H23
Σχήμα 3-2	Τομή της ορθογώνιας δεξαμενής η οποία περνά από τον άξονα της κυκλικής οπής
Σχήμα 3-3	Πυκνομετρικό προφίλ για το πρώτο χρονικό βήμα. Η μπλε γραμμή προσδιορίζει την πυκνομετρική κατανομή24
Σχήμα 3-4	Μεταβολή του πάχους ενδιάμεσης στρώσης λόγω μεταβολής της παροχής 27
Σχήμα 3-5	Πυκνομετρικό προφίλ για το δεύτερο χρονικό βήμα
Σχήμα 3-6	Πυκνομετρικό προφίλ για χρονικό βήμα k < m
Σχήμα 3-7	Πίνακας καταχώρησης των αποτελεσμάτων
Σγήμα 3-8	Σγηματική περιγραφή των υπολογισμών στην υπορουτίνα Stratified33

- Σχήμα 4-1 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για μηδενικό αρχικό αριθμό Richardson. Σύγκριση της θεωρητικής καμπύλης με αυτήν του μοντέλου.
- Σχήμα 4-2 Επανακυκλοφορία ρευστού στην φλέβα για την περίπτωση της απλής φλέβας με αρχικό αριθμό Richardson $R_0=0$41
- Σχήμα 4-3 Σύγκριση του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για δυο τυρβώδεις ανωστικές φλέβες με αρχικούς αριθμούς Richardson $R_0=0.078$ και $R_0=0.192$41
- **Σχήμα 4-4** Διάγραμμα των αδιαστατοποιημένων πυκνομετρικών κατανομών για δεδομένες χρονικές στιγμές. Υπολογισμός για τυρβώδη ανωστική φλέβα με αρχικό αριθμό Richardson R_o=0.0781......42
- Σχήμα 4-5 Διάγραμμα των αδιαστατοποιημένων πυκνομετρικών κατανομών για δεδομένες χρονικές στιγμές. Υπολογισμός για τυρβώδη ανωστική φλέβα με αρχικό αριθμό Richardson R₀=0.192......43
- Σχήμα 4-6 Διάγραμμα μεταβολής της πυκνότητας σε δεδομένο ύψος (z=H) πάνω από την διεπιφάνεια σε συνάρτηση με τον χρόνο.(Τυρβώδης ανωστική φλέβα)
- Σχήμα 4-7 Σύγκριση του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για δυο πλούμια με αρχικούς αριθμούς Richardson R_0 =0.633και R_0 =0.426 αντιστοίχως......45
- Σχήμα 4-8 Διάγραμμα των αδιαστατοποιημένων πυκνομετρικών κατανομών για δεδομένες χρονικές στιγμές. Υπολογισμός για πλούμιο με αρχικό αριθμό Richardson R_0 =0.426.....46
- **Σχήμα 4-9** Διάγραμμα μεταβολής της πυκνότητας σε δεδομένο ύψος (z=H) πάνω από την διεπιφάνεια σε συνάρτηση με τον χρόνο.(Πλούμιο)......46
- **Σχήμα 4-10** Διάγραμμα σύγκρισης του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για διαφορετικούς αρχικούς αριθμούς Richardson......47
- Σχήμα 4-11 Διάγραμμα μεταβολής της ειδικής παροχής καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα $R_0=0.078$).......48
- Σχήμα 4-12 Διάγραμμα μεταβολής της ειδικής ορμής καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R_0 =0.078)......49
- Σχήμα 4-13 Διάγραμμα μεταβολής της ειδικής άνωσης καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα $R_0=0.078$).......49

- Σχήμα 4-14 Διάγραμμα μεταβολής του τοπικού αριθμού Richardson καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22 ,1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R_0 =0.078)......50
- Σχήμα 4-15 Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή συμπαράσυρσης καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22 ,1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R₀=0.078)......50
- Σχήμα 4-16 Διάγραμμα μεταβολής του τοπικού αριθμού Richardson καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.35, 1.38, 2.43 ,3.47. (Πλούμιο R_0 =0.426)......51
- Σχήμα 4-17 Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή συμπαράσυρσης καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.35, 1.38, 2.43 ,3.47. (Πλούμιο R_0 =0.426)......51

- Σχήμα 4-20 Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με το υπολογιστικό μοντέλο
- Σχήμα 4-21 Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με το υπολογιστικό μοντέλο
- Σχήμα 4-22 Γραφική αναπαράσταση χρόνου υπολογισμού-χρονικό βήμα για φλέβες.59
- **Σχήμα 4-23** Σύγκλιση του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για διάφορα χρονικά βήματα Δt =0.1 s, Δt =0.5 s, Δt =1 s, Δt =2 s και Δt =5 s.....60
- **Σχήμα 4-24** Σύγκλιση του πυκνομετρικών προφίλ για διάφορα χρονικά βήματα $\Delta t=0.1$, $\Delta t=0.5$ s, $\Delta t=1$ s, $\Delta t=2$ s και $\Delta t=5$ s για h/H=0.333, 0.5 και 0.666.....60
- Σχήμα 4-25 Μεταβολή του σχετικού σφάλματος κατά το υπολογισμό της καμπύλης καθόδου της διεπιφάνειας για Ro=0......61
- Σχήμα 4-26 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για φλέβα διαμέτρου 5 cm. (Ro=0.00396).....64
- Σχήμα 4-27 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για φλέβα διαμέτρου 15 cm. (Ro=0.0617).....64
- Σχήμα 4-28 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για φλέβα διαμέτρου 30 cm (Ro=0.3492).....65

Σχήμα 4-29	Πυκνομετρική κατανομή για D= 5cm ενώ η αρχική συγκέντρωση της φλέβας είναι C=200 μgr/L. (R_0 =0.00396)66
Σχήμα 4-30	Πυκνομετρική κατανομή για D= 15cm ενώ η αρχική συγκέντρωση της φλέβας είναι C=200 μgr/L. (R ₀ =0.0617)66
Σχήμα 4-31	Πυκνομετρική κατανομή για D= 15cm ενώ η αρχική συγκέντρωση της φλέβας είναι C=200 μgr/L. (R ₀ =0.3492)67
Σχήμα 4-32	Σύγκριση των πυκνομετρικών κατανομών για τις τρείς περιπτώσεις D=5,15 και 30 cm για ίσους χρόνους t=7.73 min67
Σχήμα 4-33	Σύγκριση των πυκνομετρικών κατανομών για τις τρεις περιπτώσεις D=5,15 και 30 cm όταν η διεπιφάνεια βρίσκεται σε απόσταση 1 m από τον πυθμένα
Σχήμα 8-1	Διάγραμμα συσχέτισης της πυκνότητα του νερού με την αλατότητα και την θερμοκρασία

<u>Πίνακες</u>

Πίνακας 1	Χαρακτηριστικά της ροής απλών φλεβών και πλουμίων συναρτήσει των αρχικών παραμέτρων και των l_Q , l_M 9
Πίνακας 2	Βασικές υπορουτίνες του αλγορίθμου31
Πίνακας 3	Χαρακτηριστικά παραδείγματα ροών φλέβας (απλές φλέβες, τυρβώδεις ανωστικές φλέβες και πλούμια)40
Πίνακας 4	Στοιχεία της ροής και της γεωμετρία του αποδέκτη. Τα στοιχεία αυτά χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό του υπολογιστικού χρόνου59
Πίνακας 5	Αρχικές συνθήκες φλεβών για την αριθμητική επίλυση της εφαρμογής63
Πίνακας 6	Φωτογραφίες από την πειραματική διαδικασία για απλή φλέβα88

<u>Φωτογραφίες</u>

Εικόνα 1	Δεξαμενή διαστάσεων 40 cm × 40 cm × 60cm (Διπλωματική εργασία Ε. Λύτρα)
Εικόνα 2	Δοχείο σταθερής στάθμης με υπερχείλιση53
Εικόνα 3	Συσκευή δημιουργίας φύλλου Laser54

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	EĽ	ΣΑΓ	ΩΓΗ	1
	1.1	Εισ	σαγωγικό σημείωμα	1
	1.2	Av	τικείμενο της εργασίας	2
	1.3	Διό	ιρθρωση της εργασίας	2
2	ΣΤ	OIX	ΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ	4
	2.1	Εισ	σαγωγή	4
	2.1	.1	Απλή κυκλική φλέβα (jet)	5
	2.1	.2	Απλή ανωστική φλέβα ή πλούμιο (plume)	8
	2.1	.3	Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες (Buoyant jets ή Forced plumes)	8
	2.1	.4	Η υπόθεση της συμπαράσυρσης (Entrainment Hypothesis)	11
	2.1	.5	Γενικευμένη Θεωρία των List & Imberger	11
	2.2	Περ	ριορισμένος Αποδέκτης	14
	2.2	2.1	Ανωστικές φλέβες σε πυκνομετρικά-στρωματωμένο αποδέκτη	15
	2.2	2.2	Ο μηχανισμός του 'filling box'	16
	2.3	Bιβ	βλιογραφική Ανασκόπηση	21
3	AF	ΙΘΝ	ΙΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ	23
	3.1	Περ	ριγραφή του προβλήματος	23
	3.2	Περ	ριγραφή του Αλγορίθμου	29
	3.2	2.1	Υπορουτίνες Firstfront	31
	3.2	2.2	Υπορουτίνες Stratified	32
	3.3	Διό	ιγραμμα ροής Αλγορίθμου	35
4	AI	IOTI	ΕΛΕΣΜΑΤΑ	39
	4.1	Пα	ρουσίαση των αποτελεσμάτων	39
	4.2	Σύγ	γκριση με τις πειραματικές μετρήσεις	52
	4.2	2.1	Η πειραματική διαδικασία	52
	4.2	2.2	Σύγκριση Πειράματος – Υπολογιστικού Μοντέλου	55
	4.3	Av	άλυση Ευαισθησίας	58
	4.4	Eφ	αρμογές	62
5	ΣΥ	ΜП	ΕΡΑΣΜΑΤΑ	69

6	BIE	3ΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	72
7	ПАРАРТНМА А		
	7.1	Η μέθοδος Runge-Kutta 4 ^{ης} τάξης για συστήματα	75
	7.2	Πηγαίος Κώδικας ΜΑΤLAB	76
8	ПА	PAPTHMA B	86
	8.1	Σύνδεση μεταξύ Αλατότητας και Πυκνότητας	86
	8.2	Φωτογραφίες από την πειραματική διαδικασία	88

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εισαγωγικό σημείωμα

Σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων που καλούνται να επιλύσουν οι μηχανικοί σήμερα, είναι απαραίτητη η κατανόηση της συμπεριφοράς των τυρβωδών ανωστικών φλεβών εντός περιορισμένου αποδέκτη. Πληθώρα βιομηγανικών διαδικασιών απαιτούν την εισαγωγή ρευστού διαφορετικής πυκνότητας εντός περιορισμένου αποδέκτη. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η εισαγωγή καταλύτη (agent) σε δεξαμενές όπου περιέχεται υγρό φυσικό αέριο (LNG). Οι δεξαμενές υγρού φυσικού αερίου (LNG) είναι συνήθως κυκλικές και η διάμετρος τους φτάνει τα 75 μέτρα. Το LNG πρέπει να διατηρείται σε χαμηλές θερμοκρασίες (περίπου -162 °C) και γι αυτό προστίθεται καταλύτης (agent) ο οποίος βοηθά στην επιτάχυνση της διαδικασίας εντός της δεξαμενής. Οι περισσότερες δεξαμενές (LNG) διαθέτουν στην βάση τους μια οπή από την οποία ο καταλύτης (agent) εισάγεται με σταθερή παροχή. Το δεδομένο πρόβλημα μετουσιώνεται απ' ευθείας σε ένα πρόβλημα εύρεσης του ρυθμού ανάμιξης του καταλύτη με τον χρόνο καθώς και του μηχανισμού με τον οποίο θα διαχυθεί εντός της δεξαμενής. Ανάλογο πρόβλημα προκύπτει σε κλειστούς κλιματιζόμενους χώρους καθώς και σε κάθε πρόβλημα όπου δύο ρευστά με ελαφρώς διαφορετικές πυκνότητες αναμιγνύονται εντός κλειστού ομογενούς γώρου. Λύση στα παραπάνω προβλήματα δίδονται μέσω της θεωρίας του «filling box».

Η θεωρία ή μηχανισμός του «Filling Box» περιγράφει το φαινόμενο όπου μια φλέβα, τοποθετημένη στο κέντρο της βάσης μιας δεξαμενής, αρχίζει να ρέει εντός αρχικά ομογενούς και ακίνητου περιβάλλοντος ρευστού. Η ανερχόμενη φλέβα συναντά το άνω όριο του αποδέκτη και διαχέεται οριζοντίως δημιουργώντας μια στρώση ελαφρύτερου ρευστού. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται ορίζοντας έτσι δυο περιοχές που χωρίζονται με διεπιφάνεια. Την υπερκείμενη ανώτερη περιοχή ανάμιξης στην οποία υπάρχει πυκνομετρική στρωμάτωση και την υποκείμενη κατώτερη περιοχή με ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας. Οι δύο αυτές περιοχές όπως είναι λογικό δεν αλληλεπιδρούν ενώ το πάχος της άνω στρώσης μεταβάλλεται με τον χρόνο καθώς η διεπιφάνεια μετακινείται προς τα κάτω.

Ο μηχανισμός του «filling box» αποτελεί μια εξιδανικευμένη κατάσταση ανάμιξης δύο ρευστών. Παρόλα αυτά αποτελεί την μαθηματική βάση για τη μεθοδολογία με βάση την οποία προσομοιώνεται η ανάμιξη εντός περιορισμένου αποδέκτη. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί πεδίο έρευνας τόσο για τους μηχανικούς όσο και για τους ερευνητές των θετικών επιστημών (φυσικούς, μαθηματικούς κλπ.).

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η αριθμητική προσομοίωση του μηχανισμού "filling box" με απλές κατακόρυφες φλέβες (jets), πλούμια (plumes) και τυρβώδεις ανωστικές φλέβες (buoyant jets). Επιπρόσθετα, η αριθμητική προσομοίωση συγκρίνεται με τα αποτελέσματα πειραμάτων τα οποία οργανώθηκαν στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας στο Εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Τα πειραματικά αυτά αποτελέσματα συμπληρώθηκαν από εργαστηριακές μετρήσεις οι οποίες έγιναν στο πλαίσιο της μεταπτυχιακής εργασίας του κ. Ηλία Παππά.

Για τον μηχανισμό του "filling box" δεν έχει έως σήμερα δοθεί λύση κλειστής μορφής η οποία να περιγράφει την χρονική εξέλιξη της ανάμιξης. Αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί τόσο με την αριθμητική προσομοίωση του μηχανισμού (Germeles 1975, Worster and Huppert (1983)) όπως επίσης και με την πειραματική του επαλήθευση (Baines and Turner 1968, Wong and Griffiths 1999) δίδοντας λύσεις μόνο για την συμπεριφορά των απλών ανωστικών φλεβών (πλουμίων).

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας επιχειρείται η δημιουργία ενός αλγορίθμου ο οποίος θα επιλύει την ροή των φλεβών σε περιορισμένο αποδέκτη στην γενική τους μορφή. Με άλλα λόγια, η προσομοίωση αυτή θα είναι εφαρμόσιμη τόσο σε φλέβες και πλούμια όσο και σε ενδιάμεσες, μεταβατικές καταστάσεις (τυρβώδεις ανωστικές φλέβες).

1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από πέντε (5) κεφάλαια και τρία (3) παραρτήματα. Στο παρόν κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή στο αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας.

Ακολούθως, στο δεύτερο κεφάλαιο δίδεται μια συνοπτική παρουσίαση στην θεωρία των φλεβών η οποία περιλαμβάνει και την γενικευμένη θεωρία των List & Imberger, η οποία λόγω της γενικότητας της, χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο στους υπολογισμούς. Στην συνέχεια γίνεται αναφορά στον περιορισμένο αποδέκτη καθώς και στην επιρροή αυτού στην ροή των φλεβών. Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ροή μιας οποιασδήποτε φλέβας θα επεκταθούν ώστε να λάβουν υπόψη την προκαλούμενη πυκνομετρική στρωμάτωση στον αποδέκτη.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η αριθμητική προσομοίωση (numerical simulation) της θεωρίας του filling box. Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται κάνοντας τόσο αναφορά στο υπολογιστικό σχήμα όσο και στις βασικές παραδοχές κατά την επίλυση. Ο πηγαίος κώδικας έχει γραφεί με την βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου MatLab και δίδεται αναλυτικά στο Παράρτημα Α στο τέλος της εργασίας.

Τα αποτελέσματα του αριθμητικού μοντέλου παρουσιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο μέσα από επιλεγμένα παραδείγματα. Παράλληλα συγκρίνονται και ερμηνεύονται τα αποτελέσματα με την θεωρία. Όπως αναφέραμε και παραπάνω στα πλαίσια αυτής της εργασίας οργανώθηκε μια σειρά πειραμάτων τα αποτελέσματα των οποίων συγκρίνονται με το υπολογιστικό μοντέλο. Επιπλέον, έχει γίνει ανάλυση ευαισθησίας του αλγόριθμου ώστε να ελεγχθεί η ευστάθεια του υπολογιστικού σχήματος ως προς το χρονικό βήμα υπολογισμού. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται εφαρμογές της θεωρίας του «filling box» σε διάφορα προβλήματα μηχανικού και τα αποτελέσματα έχουν προκύψει από την εφαρμογή του δεδομένου υπολογιστικού μοντέλου.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας και τίθενται προβληματισμοί για πιθανή βελτίωση του υπολογιστικού μοντέλου. Στο παράρτημα Α δίδεται αναλυτικά η αριθμητική μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξεως για συστήματα και ο πηγαίος κώδικας ο οποίος χρησιμοποιήθηκε. Τέλος στο παράρτημα Β δίδονται τεχνικές λεπτομέρειες απαραίτητες για την υλοποίηση των πειραμάτων όπως είναι η συσχέτιση της πυκνότητας με την αλατότητα και η αναφορά στην ψηφιακή επεξεργασία της εικόνας για την εξαγωγή των πειραματικών αποτελεσμάτων.

2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά στις βασικές έννοιες της ροής των φλεβών. Ξεκινώντας από την περίπτωση της απλής φλέβας (jet) καταλήγουμε στην μαθηματική περιγραφή της ροής των τυρβωδών ανωστικών φλεβών (buoyant jets). Στη συνέχεια αναλύεται η επίδραση του περιορισμένου αποδέκτη στις φλέβες εισάγοντας της θεωρία του "filling box" .Τέλος παρουσιάζεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση των εργασιών σχετικά με την θεωρία του "filling box".

2.1 Εισαγωγή

Τυρβώδεις εκτοξευόμενες φλέβες είναι οι φλέβες ή δέσμες ρευστού από ένα ακροφύσιο, σωλήνα, ή οπή οποιασδήποτε γεωμετρίας, που διαχέονται σε ομοειδές ή μη ρευστό και ανήκουν στην κατηγορία των ελεύθερων διατμητικών ροών (free shear flows). Με τον όρο <u>εκτοξευόμενη φλέβα</u> ορίζουμε την φλέβα η οποία διαχέεται σε ομοειδές ρευστό με την ίδια ή διαφορετική πυκνότητα. <u>Τυρβώδης</u> σημαίνει ότι στο πεδίο ροής της φλέβας υπάρχει χρονική διακύμανση της ταχύτητας και συγκέντρωσης κάποιας ουσίας ή δείκτη που μεταφέρει η εκτοξευόμενη φλέβα.

Οι βασικές μορφές (τύποι) φλεβών που υπάρχουν είναι οι παρακάτω

- i. απλή εκτοξευόμενη φλέβα μόνο με αρχική ορμή (jet)
- πλούμιο ή απλή ανωστική με 'μηδενική' αρχική ορμή αλλά με πυκνομετρική διαφορά σε σχέση με το περιβάλλον διάχυσης (plume)
- ανωστική φλέβα με αρχική ορμή και πυκνομετρική διαφορά σε σχέση με το περιβάλλον ρευστό (buoyant jets)

Ως απλή φλέβα ορίζουμε την εκροή ρευστού από οπή οποιασδήποτε γεωμετρίας σε ένα αποδέκτη που περιέχει παρόμοιο ρευστό. Η ροή στην περίπτωση αυτή εξαρτάται κυρίως από την αρχική ορμή της φλέβας, δηλαδή την αρχική ταχύτητα. Από την άλλη μεριά, το πλούμιο είναι η ροή η οποία έχει αρκετές ομοιότητες με αυτήν της απλής φλέβας, αλλά προκαλείται από την άνωση την οποία δημιουργεί η αρχική διαφορά πυκνότητας μεταξύ του ρευστού του πλουμίου και του αποδέκτη. Η ανωστική φλέβα που αρχικά έχει ορμή και άνωση, είναι η ροή που συναντάται συχνότερα στην φύση και αποτελεί μια μεταβατική (ενδιάμεση) κατάσταση μεταξύ της απλής φλέβας και του πλουμίου.

Η ροή μιας απλής φλέβας ή ενός πλουμίου εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες οι οποίες περιλαμβάνουν την γεωμετρία της φλέβας, τη μέση ταχύτητα εξόδου, την αρχική διαφορά πυκνότητας μεταξύ ρευστού φλέβας και αποδέκτη καθώς και τον αρχικό

αριθμό Reynolds. Στη συνέχεια δίνεται μια γενική περιγραφή των βασικών παραμέτρων μιας ανωστικής φλέβας.

 Η παροχή της φλέβας *ρμ*, είναι η μάζα στην μονάδα του χρόνου που διέρχεται από ένα επίπεδο, κάθετο στη ροή της φλέβας και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho\mu = \int_{A} \rho U(z,r) dA \tag{2-1}$$

όπου Α είναι το εμβαδόν της διατομής της φλέβας κάθετα στην ροή, U είναι η μέση ταχύτητα της φλέβας (ως προς το χρόνο), ρ είναι η πυκνότητα της φλέβας και μ η ειδική παροχής της φλέβας

 Η ροή ορμής της φλέβας, *pm* ορίζεται ως η ορμή στην μονάδα του χρόνου που διέρχεται από ένα επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση της ροής της φλέβας και δίνεται από την σχέση:

$$\rho m = \int_{A} \rho U^{2}(z,r) dA \qquad (2-2)$$

 iii. Η ροή άνωσης ρβ που διέρχεται στη μονάδα του χρόνου από ένα επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση ροής της φλέβας δίνεται από τη σχέση:

$$\rho\beta = \int_{A} g \,\Delta\rho \, U(z,r) dA \tag{2-3}$$

όπου $\Delta \rho$ είναι η διαφορά της πυκνότητας ανάμεσα στο περιβάλλον ρευστό και αυτό της φλέβας και β είναι η ροή ειδικής άνωσης.

Θα ήταν δόκιμο να αναλύσουμε παρακάτω κάθε μια από τις περιπτώσεις (μορφές) των φλεβών ξεκινώντας από την απλή φλέβα και το πλούμιο και τέλος να περιγράψουμε τις ανωστικές φλέβες μέσω της γενικευμένης θεωρία των List and Imberger (1973). Θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα Q, M, B για τις αρχικές τιμές της ειδικής παροχής, ειδικής ορμής, και ειδικής άνωσης αντίστοιχα, στο στόμιο (ακροφύσιο) απ' όπου εξέρχεται η φλέβα.

2.1.1 Απλή κυκλική φλέβα (jet)

Θεωρούμε μια βυθισμένη φλέβα ρευστού με πυκνότητα ρ η οποία διαχέεται σε ομοειδές ακίνητο ρευστό (αποδέκτη). Η φλέβα με αρχική ογκομετρική παροχή Q έχει μόνον ορμή M, η δε πυκνότητα της είναι ίδια με αυτή του περιβάλλοντος ρευστού.

Η αρχική ορμή της φλέβας κατά την έξοδο είναι

$$\rho M = \rho Q W \tag{2-4}$$

ενώ ορίζουμε σαν κινηματική ή ειδική ορμή (specific momentum flux) την ορμή ανά μονάδα μάζας κινουμένου ρευστού.

$$M = QW \tag{2-5}$$

Η αρχική ογκομετρική παροχή (specific mass flux) στην έξοδο από τη "πηγή" είναι

$$Q = AW \tag{2-6}$$

όπου Α είναι η επιφάνεια του ανοίγματος της ''πηγής'' και W η μέση ταχύτητα εξόδου. Στην περίπτωση όπου έχουμε κυκλική φλέβα διαμέτρου D η αρχική ογκομετρική παροχή κατά την έξοδο είναι



Σχήμα 2-1 Κατακόρυφη φλέβα με αρχική ταχύτητα W και αρχική συγκέντρωση C.

Καθώς η ροή αναπτύσσεται κατά τον άξονα της φλέβας εμφανίζει αρχικά στρωτή ροή ενώ στην συνέχεια εμφανίζονται δακτυλιοειδείς στρόβιλοι (vortex rings) που ζευγαρώνουν. Μετά από δύο ζευγαρώματα η ροή γίνεται ακανόνιστη (μετάβαση στην

τυρβώδη ροή). Η περιοχή ανάμεσα στο ακροφύσιο και το σημείο μετάβασης σε τύρβη ονομάζεται περιοχή εγκατάστασης της ροής (zone of flow establishment,ZFE), ενώ η περιοχή στα κατάντη του σημείου μετάβασης σε τύρβη ονομάζεται περιοχή εγκατεστημένης ροής (zone of established flow, ZEF).

Σε απόσταση z από την «πηγή» (nozzle) στην περιοχή της εγκατεστημένης (τυρβώδους) ροής (ZEF) η μέση ταχύτητα w μπορεί να περιγραφεί με μια εξίσωση της μορφής

$$w = w(z,r) \,\dot{\eta} \,w = w_{\rm c} f(z,r) \tag{2-8}$$

όπου $w_c = w_c(z)$ είναι η μέγιστη μέση ταχύτητα που παρατηρείται στον άξονα και είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης από την πηγή z και f(z, r) είναι κάποια κατανομή της μέσης ταχύτητας όπου f(z, 0) = 1. Από μετρήσεις προέκυψε ότι η κατανομή μέσης ταχύτητας w (καθώς και της μέσης συγκέντρωσης c ουσίας που μεταφέρει η φλέβα) είναι κανονική. Οι κατανομές της μέσης ταχύτητας και συγκέντρωσης (ή διαφοράς πυκνότητας) μπορούν να περιγραφούν με τις εξής εκθετικές (Gaussian) συναρτήσεις που έχουν προκύψει από πειραματικά δεδομένα.

$$w(z,r) = w_{\rm c}(z) \exp\left[-(r/b)^2\right] \kappa \alpha_{\rm c} c(r,z) = c_{\rm c}(z) \exp\left[-(r/b_{\rm c})^2\right]$$
(2-9)

Ως b και b_c ορίζουμε την απόσταση από τον άξονα στην οποία η μέση ταχύτητα και ή μέση συγκέντρωση αντίστοιχα έχουν τιμή 1/e (e=2.718...είναι η βάση των Νεπέριων λογαρίθμων) αυτής στον άξονα.



Σχήμα 2-2 Αδιαστατοποιημένη κατανομή μέσης ταχύτητας (αριστερά) και μέσης θερμοκρασιακής διαφοράς (δεξιά) σε απλή φλέβα (Papanicolaou 1984, Papanicolaou &List 1988)

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις μπορούν να υπολογιστούν η ειδική παροχή καθώς και η ειδική ορμή της φλέβας κατά μήκος του άξονα της. Έχουμε δηλαδή σύμφωνα με την εξίσωση (2-1) ότι

$$\rho\mu = \int_{A} \rho U(z,r) dA = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} w(z,r) 2\pi r dr \Rightarrow$$
$$\mu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_c(z) \exp\left[-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] 2\pi r dr = \pi w_c b^2 \qquad (2-10)$$

Ομοίως από την εξίσωση (2-2) έχουμε

$$m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_c(z)^2 \exp\left[-2\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] 2\pi r dr = \frac{\pi w_c^2 b^2}{2}$$
(2-11)

2.1.2 Απλή ανωστική φλέβα ή πλούμιο (plume)

Η απλή ανωστική φλέβα ή πλούμιο παράγεται από μια πηγή άνωσης χωρίς αρχική ορμή (ποσότητα κίνησης). Ορίζουμε σαν κινηματική ή ειδική άνωση (specific buoyancy flux) στην «πηγή» την ανά μονάδα μάζας ρέοντος ρευστού άνωση

$$B = \frac{(\rho_{\alpha} - \rho_{o})}{\rho_{\alpha}} gQ = g'_{o} Q$$
(2-12)

που έχει διαστάσεις $[B]=L^4/T^3$, όπου

 ρ_{α} ... η πυκνότητα του ακίνητου αποδέκτη

 $\rho_{o} \dots$ η πυκνότητα της φλέβας ($\rho_{o} < \rho_{\alpha}$)

Στα πλούμια όπως και στις απλές φλέβες, οι αδιάστατες κατανομές της μέσης ταχύτητας και συγκέντρωσης έχουν εκθετική μορφή

$$w(z,r) = w_{\rm c}(z) \exp\left[-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right] \kappa \alpha \iota c(r,z) = c_{\rm c}(z) \exp\left[-\left(\frac{r}{b_{\rm c}}\right)^2\right]$$

όπου τα b και b_c είναι τα 1/
ε πλάτη που ορίζονται από τις εκθετικές αυτές κατανομές αντίστοιχα.

2.1.3 Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες (Buoyant jets ή Forced plumes)

Όπως αναφέρεται και παραπάνω οι περισσότερες φλέβες οι οποίες παρατηρούνται στην φύση έχουν τόσο αρχική ορμή όσο και άνωση. Έτσι αν η αρχική ορμή είναι επικρατέστερη η φλέβα αρχικά συμπεριφέρεται σαν απλή φλέβα (jet), ενώ στη συνέχεια μετά κάποια απόσταση από την πηγή σαν πλούμιο. Από τις αρχικές παραμέτρους Q, M, B μπορούμε να ορίσουμε τις παρακάτω κλίμακες μήκους (Fischer et al.,1979) ως εξής

$$l_Q = \frac{Q}{\sqrt{M}} \tag{2-13}$$

και

$$l_M = \frac{M^{3/4}}{B^{1/2}} \tag{2-14}$$

Με βάση αυτές τις κλίμακες μήκους όλες οι παράμετροι της ροής μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των αδιάστατων όρων z/l_Q και z/l_M όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί. Οι σταθερές των παρακάτω εξισώσεων προσδιορίστηκαν με ακρίβεια στη Διδακτορική Διατριβή του Papanicolaou (1984) και είναι οι ακόλουθες:

Απλές Φλέβες	Πλούμια
$\frac{\sqrt{M}}{wz} = 0.132$	$\frac{\sqrt{M}}{wz} = 0.132 \left(\frac{z}{l_M}\right)$
$\mathbf{b}(z) = 0.109z$	b(z) = 0.105z
$b_c(z) = 0.126z$	$b_c(z) = 0.112z$
$\frac{C}{c}\frac{l_Q}{z} = S\frac{l_Q}{z} = 0.165$	$\frac{C}{c}\frac{l_Q}{z} = S\frac{l_Q}{z} = 0.09\left(\frac{z}{l_M}\right)^{2/3}$
$\frac{\mu}{Q} = 0.252 \; \frac{z}{l_Q}$	$\frac{\mu B^{1/2}}{M^{5/4}} = 0.140 \left(\frac{z}{l_M}\right)^{5/3}$
$\frac{m}{M} = 0.90$	$\frac{m}{M} = 0.290 \left(\frac{z}{l_M}\right)^{4/3}$

Πίνακας 1 Χαρακτηριστικά της ροής απλών φλεβών και πλουμίων συναρτήσει των αρχικών παραμέτρων και των $l_{\rm Q}, l_{\rm M}$

Στον Πίνακα 1 ορίζουμε ως S=C/c τη μέση αραίωση (η διάλυση) στον άξονα της φλέβας.

Στην περίπτωση των ανωστικών φλεβών οι αναλυτικές σχέσεις των διαφορετικών παραμέτρων προκύπτουν από τις εξισώσεις διατήρησης μάζας (συνέχειας), ποσότητας της κίνησης (ορμής) και άνωσης σαν συνάρτηση της απόστασης z από την πηγή (ακροφύσιο). Σημαντική παράμετρος για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών της ανωστικής φλέβας κατέχει ο ρυθμός συμπαράσυρσης του περιβάλλοντος ρευστού μέσα στην ροή της φλέβας. Θεωρούμε λοιπόν μια κάθετη αξονοσυμμετρική ανωστική φλέβα μέσα σε ομογενές περιβάλλον ρευστό όπου η μέση ταχύτητα και η συγκέντρωση σε απόσταση z από την «πηγή» ακολουθούν «γκαουσιανές» κατανομές.

Σε ένα αξονοσυμμετρικό σύστημα συντεταγμένων (z,r) οι βασικές εξισώσεις για τυρβώδη ασυμπίεστη ροή είναι οι εξής:

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} = 0$$
(2-15)

εξίσωση ποσότητας κίνησης (ορμής)

$$\rho\left(w\frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{1}{r} \frac{\partial (rw'u')}{\partial r}$$
(2-16)

και εξίσωση διατήρησης της μάζας (μεταφορά συγκέντρωσης)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rcu+r\overline{c'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(wc+\overline{w'u'}\right) = 0$$
(2-17)

Όπου w, u και c είναι οι μέσες (time-averaged) ταχύτητες κατά την αξονοσυμμετρική (z) και εγκάρσια (r) διεύθυνση αντίστοιχα, ενώ c είναι η συγκέντρωση δείκτη ή ουσίας που μεταφέρει η φλέβα σε απόσταση z. Ακολούθως οι w', u', c' είναι οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων και της συγκέντρωσης.

Για την απλούστευση των παραπάνω εξισώσεων θα γίνουν δυο βασικές παραδοχές

i. Η πίεση εντός του ρευστού είναι υδροστατική (γραμμική μεταβολή με το βάθος)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\alpha}g \tag{2-18}$$

ii. Ισχύει η προσέγγιση-παραδοχή του Boussinesq (Boussinesq approximation) δηλαδή, ότι για μικρές διαφορές πυκνότητας $\Delta \rho / \rho_{\alpha} \ll 1$ κατά την μίξη δυο ρευστών μπορούμε να θεωρήσουμε ότι γενικά ισχύει $\rho \approx \rho_{\alpha}$ εκτός από την περίπτωση που η πυκνότητα πολλαπλασιάζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Με αυτόν τον τρόπο η εξίσωση διατήρησης της ποσότητας κίνησης (ορμής) γράφεται

$$\rho\left(w\frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -\rho g + \rho_{\alpha}g - \rho\frac{1}{r}\frac{\partial(rw'u')}{\partial r} \Rightarrow$$

$$w\frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial w}{\partial r} = \left(\frac{\rho_{\alpha} - \rho}{\rho}\right)g - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\overline{w'u'})}{\partial r} \qquad (2-19)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας (2-15) κατά μήκος της φλέβας (πρακτικά από r=0 έως r=b) έχουμε:

$$\frac{d}{dz} \int_{0}^{b} w2\pi r dr = -2\pi r u \int_{0}^{b} w2\pi r dr; \ \mu(z) = \int_{0}^{b} w2\pi r dr \qquad (2-20)$$

Παρόμοια, η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης ποσότητας κίνησης έχει ως εξής

$$\frac{d}{dz} \int_{0}^{b} w^{2} 2\pi r dr = \int_{0}^{b} \left(\frac{\rho_{\alpha} - \rho}{\rho}\right) g 2\pi r dr \; ; \; m(z) = \int_{0}^{b} w^{2} 2\pi r dr \qquad (2-21)$$

το δεξί μέλος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει την ανωστική δύναμη ανά μονάδα μήκους z. Η ανωστική δύναμη κατά την ροή ενός ρευστού προέρχεται από την επίδραση της βαρύτητας λόγω πυκνομετρικής διαφοράς. Έτσι σε μια ανωστική φλέβα η μεταβολή της ορμής (momentum) συμβαίνει λόγω της μεταβολής της πυκνότητας κατά μήκος της φλέβας. Κάνοντας την παραδοχή ότι $\Delta \rho \propto \Delta c$, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση διατήρησης μάζας του δείκτη (2-17), προκύπτει ότι η ροή ειδικής άνωσης είναι

$$B = \int_{0}^{b} w \frac{\Delta \rho}{\rho_{\alpha}} g 2\pi r dr = \pi \frac{\lambda^{2}}{1+\lambda^{2}} w_{c} \frac{\Delta \rho_{c}}{\rho_{\alpha}} g b^{2} = Q \frac{\Delta \rho_{0}}{\rho_{\alpha}} g = \sigma \tau \alpha \theta \varepsilon \rho \dot{\alpha}$$
(2-22)

Συνεπώς από τις εξισώσεις (2-20), (2-21) και (2-22) έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} = 2\pi b u_e \tag{2-23}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}z} = \pi \frac{\Delta \rho_{\rm c}}{\Delta \rho_{\rm a}} g \lambda^2 b^2 \tag{2-24}$$

Ενώ η άνωση παραμένει σταθερή συνεπώς

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{2-25}$$

όπου λ ορίζεται ως το πηλίκο b_c/b .

2.1.4 Η υπόθεση της συμπαράσυρσης (Entrainment Hypothesis)

Στην πραγματεία τους οι Morton et al (1956) ανέπτυξαν για πρώτη φορά μια ολοκληρωμένη θεωρία για την περιγραφή των ανωστικών φλεβών. Η ανάπτυξη της θεωρίας αυτής έγινε με βάση την υπόθεση της συμπαράσυρσης (entrainment hypothesis). Ο Taylor (1958) υπέθεσε, ότι η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας (διείσδυσης) του περιβάλλοντος ρευστού στα όρια της φλέβας είναι ανάλογη με την ταχύτητα στον άξονα της φλέβας πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά α που ονομάζεται συντελεστής συμπαράσυρσης. Σε μια κυκλική φλέβα παραδείγματος χάριν έχουμε ότι

$$Q_{\rm e} = 2\pi b \, \alpha w_c \tag{2-26}$$

όπου b είναι το πλάτος της φλέβας και aw_c είναι η ταχύτητα εισροής (συμπαράσυρσης) στο όριο της φλέβας. Από την εξίσωση (2-10) έχουμε ότι $\mu(z) = \pi w_c b^2$, ενώ η ροή ειδικής άνωσης είναι

$$\beta(z) = \pi \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} w_c \frac{\Delta \rho_c}{\rho_\alpha} g b^2$$
(2-27)

Έχουμε λοιπόν ότι $w_c = 2m/\beta$ και $b = \mu/\sqrt{2\pi m}$ άρα οι εξισώσεις, (2-23), (2-24)και (2-25)μπορούν να γραφτούν ως

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} = 2\sqrt{2\pi}\alpha m^{1/2} \tag{2-28}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}z} = \frac{1+\lambda^2}{2} \frac{\mu\beta}{m} \tag{2-29}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{2-30}$$

2.1.5 Γενικευμένη Θεωρία των List & Imberger

Πριν εισάγουμε την θεωρία των List & Imberger θα ήταν δόκιμο να ορισθεί ο αριθμός **Richardson** μιας ανωστικής φλέβας. Ο αριθμός Richardson R_0 μιας ανωστικής φλέβας ορίζεται ως ο λόγος των δυο χαρακτηριστικών μηκών l_Q και l_M (Fischer et al.,1979)

$$Ri_o = \frac{l_Q}{l_M} = \frac{QB^{1/2}}{M^{5/4}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4} \frac{1}{F_o} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4} \frac{\sqrt{(\Delta\rho_o/\rho_o)gD}}{W}$$
(2-31)

όπου F_o είναι ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude της φλέβας και είναι ο λόγος των ανωστικών προς τις αδρανειακές δυνάμεις που συμβάλλουν στην κίνηση και διασπορά της. Σε απόσταση z από το ακροφύσιο ο αριθμός Richardson R(z) της φλέβας ορίζεται αντίστοιχα εάν χρησιμοποιήσουμε τις τοπικές τιμές των παραμέτρων εκεί, δηλαδή

$$R(z) = \frac{\mu \beta^{1/2}}{m^{5/4}} \tag{2-32}$$

Οι Papanicolaou & List (1988) από μετρήσεις σε ανωστικές φλέβες κατάφεραν να προσδιορίσουν τον τοπικό αριθμό Richardson R(z) από μετρήσεις ταχυτήτων και συγκεντρώσεων (Σχήμα 2-3)



Σχήμα 2-3 Τοπικός αριθμός Richardson ανωστικών φλεβών R(z) σαν συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης z/l_M (Papanicolaou &List 1988)

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι:

- i. Όταν η ροή αρχικά έχει τη συμπεριφορά φλέβας (jet-like, $z/l_M < 1$) τότε $R(z) \sim z$.
- ii. Όταν η ροή συμπεριφέρεται σαν πλούμιο (plume-like, z/ $l_{\rm M}$ >5) τότε $R(z)=R_{\rm p}=$ σταθερό

Η σταθερά προέκυψε (μετά από διόρθωση) ίση με R_p =0.63. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του τοπικού αριθμού Richardson R(z) προκύπτει (πλην των πειραματικών μετρήσεων) και από διαστατική ανάλυση. Τέλος, από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι μια ανωστική φλέβα με την μικρότερη δυνατή αρχική άνωση B θα γίνει πλούμιο σε απόσταση z μεγαλύτερη από $5l_M$ από την «πηγή» πράγμα που σημαίνει ευστάθεια στην αλληλεπίδραση άνωσης και αδρανειακών δυνάμεων.

Οι List & Imberger (1973) ανέπτυξαν μια γενικευμένη θεωρία για τις ανωστικές φλέβες, με βάση την οποία ο μηχανικός μπορεί να υπολογίσει την ογκομετρική παροχή

και ορμή σε οποιαδήποτε απόσταση από την πηγή, εάν γνωρίζει τις αρχικές παραμέτρους. Χρησιμοποιώντας τις αρχές διαστατικής ανάλυσης και την ασυμπτωτική θεωρία μπόρεσαν να εκφράσουν τον τοπικό αριθμό Richardson σαν συνάρτηση της απόστασης z, του αρχικού αριθμού Richardson R_0 , του αριθμού Richardson του πλουμίου R_p =0.63 καθώς και μιας σταθεράς C_p η οποία είναι μια έκφραση του πλάτους της φλέβας.

Η σταθερά παράμετρος πλάτους φλέβας C_p =0.27 εκτιμήθηκε από τα πειραματικά δεδομένα των Papanicolaou & List (1988) από την σχέση

$$C_p = \frac{\mu}{z\sqrt{m}} = \sqrt{2\pi}\frac{b}{z}$$
(2-33)

Με βάση την ασυμπτωτική θεωρία ο τοπικός αριθμός Richardson R(z) της φλέβας μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\frac{R(z)}{R_p} = \left(\frac{z}{z_0}\right) \left(\frac{R_o}{R_p}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{R_o}{R_p}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{-1/2}; \frac{z}{z_0} \frac{R_o}{R_p} = \frac{z}{l_M} \frac{C_p}{R_p}$$
(2-34)

όπου

$$z_{o} = \frac{Q}{C_{p}\sqrt{M}} = \frac{l_{Q}}{C_{p}} = 3.7l_{Q} = 3.28D$$
(2-35)

Από την εξίσωση (2-34) για απλές φλέβες ($R_0 \rightarrow 0$) προκύπτει ότι $R(z) \sim z$, ενώ για πλούμια ($R_0 \rightarrow R_p$) προκύπτει ότι $R(z) = R_p$ που δείχνει ότι εκτός από την μεταβατική περιοχή ($1 < z/l_M < 5$), η παραπάνω εξίσωση ισχύει τόσο για φλέβες όσο και για πλούμια. Συνεπώς οι παράμετροι της ροής μιας ανωστικής φλέβας $\mu(z)$ και m(z) μπορούν να εκφραστούν σε αδιάστατη μορφή σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις.

$$\frac{m}{M} = \left\{ 1 + \left(\frac{R_o}{R_p}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{2/3}$$
(2-36)

$$\frac{\mu}{Q} = \frac{z}{z_0} \left\{ 1 + \left(\frac{R_0}{R_p}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/3}$$
(2-37)

με Q, M την αρχική ειδική παροχή (flux) και ορμή (momentum) στην «πηγή».

Η παραπάνω θεωρία παρουσιάζει εξαιρετική συμβατότητα με τις μετρήσεις οι οποίες έγιναν από τους Papanicolaou & List (1988) όπως και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2-4 Σύγκριση των προγνώσεων της γενικής θεωρίας των List & Imberger (1973) με τα πειραματικά αποτελέσματα των Papanicolaou & List (1988). (α) Αδιάστατη ποσότητα κίνησης και (β) αδιάστατη ογκομετρική παροχή σαν συνάρτηση της απόσταση z/l_M από την πηγή.

2.2 Περιορισμένος Αποδέκτης

Η ροή των ανωστικών φλεβών στις περισσότερες περιπτώσεις επηρεάζεται από τα φυσικά ή τεχνητά όρια του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο ρέουν. Όταν μια κατακόρυφη φλέβα, της οποίας η «πηγή» βρίσκεται στο βυθό ενός θαλάσσιου αποδέκτη, φτάνει στην επιφάνεια της θάλασσας τότε η ροή εξαναγκάζεται να αλλάξει κατεύθυνση και να ακολουθήσει οριζόντια πορεία λόγω της επιρροής των ορίων. Παρομοίως, σε έναν κλειστό κλιματιζόμενο χώρο όταν θερμός αέρας αρχίσει να ρέει από «πηγή» η οποία βρίσκεται στο ύψος του δαπέδου αρχικά η ροή του μπορεί να προσομοιωθεί ως μια τυρβώδης ανωστική φλέβα. Στην συνέχεια καθώς η φλέβα ανέρχεται (λόγω θερμοκρασιακής διαφοράς επιδρούν ανωστικές δυνάμεις), μετά από λίγα δευτερόλεπτα η φλέβα θα φτάσει στην οροφή του κλειστού χώρου με αποτέλεσμα να επιδράσουν τα στερεά όρια και να κινηθεί οριζόντια (Σχήμα 2-5). Η οριζόντια κίνηση με την σειρά της δημιουργεί μια στρώση ρευστού η οποία λόγω διαφοράς πυκνότητας θα παραμένει στην οροφή του δωματίου. Η στρώση του ελαφρύτερου ρευστού η οποία έχει σχηματιστεί θα αντικατασταθεί από μια δεύτερη ελαφρύτερη στρώση ρευστού με αποτέλεσμα η πρώτη να κατέλθει. Η εξέλιξη αυτής της διαδικασίας έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία δυο περιοχών εντός του κλειστού χώρου. Η άνω περιοχή, η οποία έχει σχηματιστεί λόγω της ανάμιξης του ρέοντος ρευστού της φλέβας με το περιβάλλον ρευστό, θα εμφανίζει μια πυκνομετρική στρωμάτωση ενώ η κάτω περιοχή θα έχει ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας. Ο παραπάνω μηχανισμός γνωστός και ως μηγανισμός του «Filling Box», αποτελεί φαινόμενο συνυφασμένο με την ροή φλεβών εντός περιορισμένων αποδεκτών και εμφανίζει πολλές εφαρμογές σε προβλήματα μηγανικού.



Σχήμα 2-5 Μηχανισμός του "Filling Box" (Bolster 2007)

Για την επίλυση προβλημάτων της παραπάνω μορφής, απαιτείται η προσαρμογή των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την ροή μιας ανωστικής φλέβας, έτσι ώστε να λαμβάνεται υπ' όψην η στρωμάτωση του περιβάλλοντος ρευστού.

2.2.1 Ανωστικές φλέβες σε πυκνομετρικά-στρωματωμένο αποδέκτη

Σε περίπτωση όπου ο αποδέκτης είναι στρωματωμένος τότε η μέση (χρονικά) πυκνότητα του αποδέκτη γράφεται ως εξής:

$$\bar{\rho} = \rho_{\alpha} - \rho_{o}\theta(r, z, t) \tag{2-38}$$

όπου

$$\rho_{\alpha} = \rho_0 (1 - \varepsilon(z)) \tag{2-39}$$

είναι η πυκνομετρική-στρωμάτωση του περιβάλλοντος ρευστού, $\theta(r, z, t)$ η μέσηχρονικά πυκνομετρική διακύμανση η οποία προκαλείται από την ροή της φλέβας και $\varepsilon(z)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της πυκνομετρικής στρωμάτωσης. Έτσι μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση της διατήρησης της μάζας (συγκέντρωσης) ως εξής

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_{0}^{b(z)} 2\pi rg \, w \, \theta(r, z, t) \mathrm{d}r = -g \frac{\mathrm{d}\varepsilon(z)}{\mathrm{d}z} \mu(z) \tag{2-40}$$

και κατά συνέπεια η εξίσωση (2-30) στην περίπτωση της πυκνομετρικής στρωμάτωσης ξαναγράφεται ως

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}z} = -g \frac{\mathrm{d}\varepsilon(z)}{\mathrm{d}z} \mu(z) \tag{2-41}$$

Η παραπάνω εξίσωση μαζί με τις εξισώσεις (2-28) και (2-29) δημιουργούν το κάτωθι σύστημα διαφορικών εξισώσεων οι οποίες μπορούν να επιλυθουν αριθμητικά έχοντας τις αρχικές συνθηκές $\mu(0)=Q$, m(0)=M και $\beta(0)=B$

$$\frac{d\mu}{dz} = 2\sqrt{2\pi}\alpha m^{1/2}$$

$$\frac{dm}{dz} = \frac{1+\lambda^2}{2}\frac{\mu\beta}{m}$$

$$\frac{d\beta}{dz} = -g\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\mu(z)$$
(2-42)

Οι Papanicolaou & List (1988) επιλύοντας το παραπάνω σύστημα για την περίπτωση της απλής φλέβας (jet) και του πλουμίου (plume) προσδιόρισαν τους συντελεστές συμπαράσυρσης για απλή φλέβα και πλούμιο.

$$\alpha_{\rm j} = 0.0545 \pm 0.0025 \tag{2-43}$$

$$\alpha_{\rm p} = 0.0875 \pm 0.0042 \tag{2-44}$$

Όπως παρατηρούμε ο συντελεστής συμπαράσυρσης διαφέρει για φλέβες και πλούμια. Ο List (1979,1982) θεώρησε ότι ο α είναι ανάλογος του τετραγώνου του τοπικού αριθμού Richardson της φλέβας, και πρότεινε την παρακάτω σχέση

$$\alpha = \alpha_{\rm j} - (\alpha_{\rm j} - \alpha_{\rm p}) \left(\frac{R(z)}{R_{\rm p}}\right)^2 \tag{2-45}$$

όπου $R_{\rm p}$ είναι ο αριθμός Richardson του πλουμίου.

2.2.2 Ο μηχανισμός του 'filling box'

Ας θεωρήσουμε μια ορθογώνια δεξαμενή ή οποιαδήποτε δεξαμενή της οποίας το εμβαδόν της οριζόντιας τομής δεν μεταβάλλεται με το ύψος. Στο κέντρο του πυθμένα (ή της οροφής) της δεξαμενής υπάρχει οπή από την οποία εκρέει κατακόρυφη φλέβα. Όταν η φλέβα φτάνει στην οροφή (ή τον πυθμένα) της δεξαμενής τότε διαχέεται αμέσως οριζόντια δημιουργώντας ένα λεπτό στρώμα ομογενούς ρευστού. Στο σημείο αυτό θα θεωρήσουμε ότι τα κατακόρυφα τοιχώματα δεν επηρεάζουν την δημιουργία του λεπτού στρώματος. Η θεώρηση αυτή θα αιτιολογηθεί και παρακάτω. Η ίδια διαδικασία θα συνεχισθεί με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια σταθερή στρωμάτωση του περιβάλλοντος ρευστού η οποία κατέρχεται με τον χρόνο. Η «σταθερότητα» της

¹ Για χάρη ευκολίας θεωρούμε η φλέβα ρέει προς τα πάνω και το φυσικό όριο είναι η οροφή της δεξαμενής.

στρωμάτωσης θα υπερνικήσει τα φαινόμενα τύρβης και ανάμιξης στον αποδέκτη με αποτέλεσμα η ροή της φλέβας να μην μπορεί να φέρει αστάθεια (over-turning) της στρωμάτωσης.



Σχήμα 2-6 Γραφική αναπαράσταση του μηχανισμού 'filling box'. Η μπλε έντονη (bold) γραμμή αναπαριστά την θεωρητική ροή της φλέβας ενώ η διακεκομμένη πράσινη γραμμή την θέση της διεπιφάνειας για δεδομένες χρονικές στιγμές t₁ και t₂ (Αναπαραγωγή σχήματος από Baines & Turner, 1968).

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η διεπιφάνεια μεταξύ της στρωματωμένης και της ομογενούς περιοχής κατέρχεται με τον χρόνο. Η κατακόρυφη ταχύτητα της U(h) είναι συνάρτηση του ρυθμού ανάμιξης της φλέβας με το περιβάλλον ρευστό στην περιοχή h < z < H, όπου h είναι το ύψος της διεπιφάνειας. Κατά συνέπεια είναι και συνάρτηση της τοπικής ειδικής παροχής της φλέβας $\mu(h)$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$-AU(h) = \mu(h) \Leftrightarrow -A\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big|_{z=h} = \mu(h)$$
(2-46)

Ως Α θεωρούμε το εμβαδόν της οριζόντιας τομής της δεξαμενής.

Η ροή της φλέβας διαφέρει στην περιοχή εντός του στρωματωμένου περιβάλλοντος από αυτή του ομογενούς. Στην άνω περιοχή η ροή της μπορεί να περιγραφεί μέσω των εξισώσεων.

$$\frac{d\mu}{dz} = 2\sqrt{2\pi}\alpha m^{1/2}$$
$$\frac{dm}{dz} = \frac{1+\lambda^2}{2}\frac{\mu\beta}{m}$$
$$\frac{d\beta}{dz} = -g\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\mu(z)$$

για κάθε χρονική στιγμή.

Από την άλλη, για την περιοχή 0<z<h τα χαρακτηριστικά της φλέβας μπορούν να υπολογιστούν μέσω της γενικευμένης θεωρίας των List και Imberger (1973) καθ' όσον η ροή της φλέβας γίνεται εντός ομογενούς ρευστού.



Σχήμα 2-7 Πυκνομετρική κατανομή στον άξονα της φλέβας και του περιβάλλοντος ρευστού στις χρονικές στιγμές t₁ και t₂. (Αναπαραγωγή σχήματος από Baines & Turner, 1968).

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι η πυκνομετρική κατανομή είναι μια συνάρτηση του χρόνου. Καθώς η διεπιφάνεια κατεβαίνει η κατανομή μεταβάλλεται με αποτέλεσμα να μεταβάλει και την πυκνότητα κάθε σημείου που βρίσκεται πάνω από την διεπιφάνεια. Γι αυτό τον λόγο, απαιτείται η εισαγωγή κάποιων χρονικών κλιμάκων οι οποίες θα αποτελούν ένα μέτρο σύγκρισης του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας και του ρυθμού μεταβολής της πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού.

Χρονικές Κλίμακες

Οι χρονικές κλίμακες που μπορούμε να συσχετίσουμε με τις παραμέτρους της ροής είναι τέσσερις. Η πρώτη χρονική κλίμακα T_1 ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται έτσι ώστε το ρευστό της φλέβας που εισρέει με σταθερή παροχή Q να αντικαταστήσει όλο τον όγκο της δεξαμενής V = AH, όπου A το εμβαδόν της οριζόντιας τομής της δεξαμενής και Η το ύψος αυτής. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$T_1 = \frac{AH}{Q} \tag{2-47}$$

Σε ανωστικές φλέβες, όταν ο αρχικός αριθμός Richardson R_o είναι μικρότερος από αυτόν του πλουμίου $R_p = 0.63$ η αρχική ειδική ορμή M και άνωση B παίζουν εξίσου σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της ροής της φλέβας. Γι αυτό τον λόγο μια δεύτερη χρονική κλίμακα T_2 μπορεί να προσδιοριστεί ως

$$T_2 = \frac{M}{B} \tag{2-48}$$

Ο χρόνος ο οποίος απαιτείται ώστε η διεπιφάνεια να κατέβει μέχρι την απόσταση h από την πηγή (βλέπε Σχήμα 2.7) όταν η ροή της φλέβας προσεγγίζει αυτή του πλουμίου ή της απλής φλέβας μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας της εξίσωση (2-46). Επιπλέον ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\frac{d\mu}{dz} = 2\sqrt{2\pi}\alpha_j M^{1/2} \Rightarrow \mu(z) \approx 2\sqrt{2\pi}\alpha_j M^{1/2} z \qquad (2-49)$$

για την περίπτωση της απλής φλέβας και

$$\mu(z) = \frac{6}{5}\pi\alpha_p \left[\frac{9(1+\lambda^2)}{5\pi}\alpha_p B\right]^{1/3} z^{5/3}$$
(2-50)

για την περίπτωση του πλουμίου (Morton et al. 1956).

Έτσι, όταν ο μηχανισμός ανάμειξης είναι μια απλή φλέβα

$$t = \int_{0}^{t} dt = -A \int_{H}^{h} \frac{dz}{\mu(z)} \approx -\frac{A}{2\sqrt{2\pi}\alpha_{j}M^{1/2}} \ln(z)|_{H}^{h} = \frac{A}{2\sqrt{2\pi}\alpha_{j}M^{1/2}} \ln\left(\frac{H}{h}\right)$$
(2-51)

ενώ στην περίπτωση του πλουμίου ο αντίστοιχος χρόνος είναι

$$t = \int_{0}^{t} dt = A \frac{5}{4\pi\alpha_{\rm p}} \left(\frac{5\pi}{9(1+\lambda^2)\alpha_{\rm p}}\right)^{1/3} B^{-1/3} H^{-2/3} \left[\left(\frac{H}{h}\right)^{2/3} - 1 \right]$$
(2-52)

Από τις εξισώσεις (2-51) και (2-52) είναι προφανές ότι η διεπιφάνεια θεωρητικά δεν θα φτάσει ποτέ στο ύψος h=0. Από τις σχέσεις ορίζουμε δύο χρονικές κλίμακες, T_j για την περίπτωση των απλών φλεβών (Caulfield & Woods 2002) και T_p για την περίπτωση των πλουμίων (Baines and Turner 1968).

$$T_{\rm j} = \frac{\rm A}{2\sqrt{2\pi}\alpha_{\rm j}M^{1/2}} \tag{2-53}$$

$$T_{\rm p} = A \frac{5}{4\pi\alpha_{\rm p}} \left(\frac{5\pi}{9(1+\lambda^2)\alpha_{\rm p}}\right)^{1/3} B^{-1/3} H^{-2/3}$$
(2-54)

 T_j είναι ο χρόνος που απαιτείται έτσι ώστε να γεμίσει ο όγκος AH όταν η παροχή μιας απλής φλέβας είναι ίση με $\mu(H)$, ενώ T_p είναι ο αντίστοιχος χρόνος που απαιτείται για ένα πλούμιο να γεμίσει τον όγκο AH όταν η παροχή του είναι ίση με $\mu(H)$. Έτσι οι εξισώσεις (2-51) και (2-52) γράφονται σε αδιαστατοποιημένη μορφή ως

$$\tau_{\rm j} = \frac{t}{T_{\rm j}} = \ln\left(\frac{H}{h}\right) \tag{2-55}$$

και

$$\tau_{\rm p} = \frac{t}{T_{\rm p}} = \left[\left(\frac{H}{h} \right)^{2/3} - 1 \right]$$
 (2-56)

Τέλος χρησιμοποιώντας την θεωρία των List & Imberger (1973) μπορούμε να καταλήξουμε σε αντίστοιχες χρονικές κλίμακες T_i και T_p που είναι οι

$$T_{\rm j} = \frac{A}{C_p M^{1/2}}$$
(2-57)

και

$$T_p = \frac{3}{2} A \frac{R_p^{2/3}}{C_p^{5/3}} B^{-1/3} H^{-2/3}$$
(2-58)

Ευστάθεια της στρωμάτωσης

Στο σημείο αυτό είναι δυνατόν να συζητηθεί κάτω από ποιες συνθήκες η θεωρία του περιορισμένου αποδέκτη «Filling Box» έχει ισχύ καθώς επίσης πότε η γενική αστάθεια στο σύστημα (over-turning) μπορεί να λάβει χώρα. Θα θεωρήσουμε ότι το ρευστό διαχέεται οριζοντίως στην οροφή του αποδέκτη σε χρόνο Δt ο οποίος τείνει στο μηδέν. Κατά τον χρόνο αυτό σχηματίζει μια στρώση πάχους Δz και δημιουργεί μια διαφορά πυκνότητας $Δ_{\alpha}$. Η ανωστική δύναμη ισορροπίας ανά μονάδα μάζας στην στρώση αυτή θα ισούται με $B = A \Delta z \Delta_{\alpha}$. Για ορθογώνιες δεξαμενές με διαστάσεις $L \times L \times H$ η σχέση μπορεί να γραφεί και ως $B = L^2 \Delta z \Delta_{\alpha}$. Από την άλλη μεριά η αδρανειακή δύναμη λόγω της ροής του ρευστού της φλέβας στην άνω στρώση είναι $I = \frac{1}{2} πw^2 L^2$. Αν θεωρήσουμε λοιπόν ότι η ποσότητα κίνησης του ρευστού της φλέβας αντιπροσωπευτική της αδράνειας μπορεί να υποστεί ανάκλαση στην οροφή του αποδέκτη τότε δημιουργείται μια καθοδική ροή η οποία τείνει να διαταράξει την ευστάθεια της στρωμάτωσης. Η τάση αυτή (over-turning tendency) ποσοτικοποιείται με τον λόγο I/B και είναι (Baines & Turner 1968)

$$\frac{I}{B} = \frac{2 A \Delta z \Delta_{\alpha}}{\pi w^2 L^2}$$
(2-59)

Για μεγάλες τιμές του λόγου *Ι/Β* παρατηρείται αστάθεια. Η αστάθεια συνήθως συμβαίνει σε σχετικά μακρόστενες δεξαμενές-αποδέκτες, όπου ο λόγος βάθους προς την οριζόντια διάσταση είναι πολύ μεγαλύτερος από την μονάδα.

2.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Οι τυρβώδεις ανωστικές φλέβες μελετήθηκαν αργικά από τους Morton et al (1956) οι οποίοι περιέγραψαν την συμπεριφορά τους βασιζόμενοι στην υπόθεση της συμπαράσυρσης (entrainment hypothesis), την οποία πρώτος εισήγαγε ο G.I.Taylor (1952). Στην εργασία τους οι Morton et al. (1956) προσδιόρισαν τις παραμέτρους της ροής ενός πλουμίου σαν συνάρτηση της απόστασης από την «πηγή». Επιπλέον, εξήγησαν τον ρόλο τον οποίο κατέχει η πυκνότητα του περιβάλλοντος στην ροή των πλουμίων τα οποία παρατηρούνται στην φύση όπως π.χ. η ροή ηφαιστειακής τέφρας λόγω ηφαιστειακών εκρήξεων. Σε αυτή τη περίπτωση η έκταση της ατμόσφαιρας συγκρινόμενη με αυτήν ενός πλουμίου μπορεί να θεωρηθεί αρκετά μεγάλη, έτσι ώστε τα όρια της να μην επηρεάζουν την ροή του πλουμίου. Συνεπώς η πυκνομετρική στρωμάτωση του περιβάλλοντος μπορεί να προσδιοριστεί από πριν και τελικά οι παράμετροι της ροής της φλέβας καθώς και τα όρια του αποδέκτη δεν προκαλούν γρονική μεταβολή της πυκνομετρικής στρωμάτωσης του περιβάλλοντος ρευστού. Από την άλλη μεριά, σε περιορισμένους αποδέκτες όπως είναι μια πειραματική δεξαμενή, η επιρροή των ορίων του αποδέκτη είναι εμφανής. Η φλέβα επηρεάζεται από τα όρια του αποδέκτη με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η πυκνομετρική του στρωμάτωση με τον χρόνο. Οι Baines και Turner (1969) ανέλυσαν την θεωρία του περιορισμένου αποδέκτη (Filling Box) για την περίπτωση των απλών πλουμίων προσδιορίζοντας τον μηγανισμό με τον οποίο δημιουργείται η πυκνομετρική στρωμάτωση και έδωσαν αναλυτικές λύσεις στην περίπτωση που η ροή είναι ευσταθής, πράγμα το οποίο ισχύει για μεγάλους γρόνους και όταν η ροή εντός του αποδέκτη έχει αποκατασταθεί. Ουσιαστικά, για μεγάλους γρόνους η ροή του πλουμίου δεν μεταβάλλεται με τον γρόνο όμως τα γαρακτηριστικά του περιβάλλοντος ρευστού για δεδομένο ύψος πάνω από τη στάθμη εκροής της φλέβας αυξάνονται με τον χρόνο και μάλιστα γραμμικά. Οι ίδιοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η πυκνομετρική στρωμάτωση εξαρτάται μόνο από την αρχική άνωση. Σε πείραμα το οποίο οι ίδιοι εκτέλεσαν, τοποθέτησαν δύο «πηγές» με διαφορετική άνωση και παρατήρησαν ότι το ασθενέστερο πλούμιο διαχέεται σε ένα μέσο ύψος ενώ η μεταβολή πυκνότητας που δημιουργείται είναι αμελητέα σε σχέση με μια και μόνο «πηγή».

Ο μηχανισμός του 'Filling Box' έχει μελετηθεί περεταίρω και σε πιο πρόσφατες μελέτες. Για την χρονική εξέλιξη της πυκνομετρικής στρωμάτωσης ο Germeles (1975) δημιούργησε ένα υπολογιστικό σχήμα το οποίο βασίζεται στην διακριτοποίηση του αποδέκτη. Χωρίζοντας τον αποδέκτη σε στρώσεις πεπερασμένου πάχους επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις της ροής της φλέβας τοπικά μέσω της αριθμητικής μεθόδου του Runge-Kutta τέταρτης τάξεως. Τα αποτελέσματα του αριθμητικού μοντέλου του Germeles (1975) συνάδουν με τις πειραματικές μετρήσεις και δίδουν σημαντικές πληροφορίες για την συμπεριφορά των φλεβών πριν την αποκατάσταση της ροής εντός του περιορισμένου αποδέκτη. Οι τιμές των παραμέτρων α και λ οι οποίες χρησιμοποιούνται στην περίπτωση των φλεβών ή πλουμιών σε μη περιορισμένους αποδέκτες, μπορούν με αρκετά μεγάλη ακρίβεια να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση των αποδεκτών. Αργότερα οι Worster and Huppert (1982)
πρότειναν μια προσεγγιστική αναλυτική λύση για την περίπτωση του πλουμίου αδιαστατοποιώντας τις παραμέτρους της ροής. Οι προσεγγιστικές εξισώσεις παρόλα αυτά προσεγγίζουν με ικανοποιητική ακρίβεια τον μηχανισμό του 'filling box' για μεγάλους χρόνους και πριν την αποκατάσταση της ροής. Οι Caulfield and Woods (2002) έδωσαν και αυτοί αναλυτικές λύσεις για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες οι οποίες εν συνεχεία συγκρίθηκαν με αριθμητικά σχήματα. Από την άλλη μεριά οι Wong & Griffiths (1999) ανάλυσαν περεταίρω τον μηχανισμό του 'filling box'' εισάγοντας περισσότερες από μια «πηγές». Οι Wong & Griffiths (1999) κατέληξαν ότι η πυκνομετρική στρωμάτωση που δημιουργείται λόγω δυο «πηγών» είναι παρόμοια με αυτή της μιας. Η θεωρία του 'filling box'' έχει μελετηθεί ακόμη και στο επίπεδο των εφαρμογών της. Οι Cooper & Linden (1996), Hunt, Cooper & Linden (2001) καθώς και Βolster & Linden (2007) μελέτησαν την συμπεριφορά της στρωμάτωσης λόγω της επίδρασης πηγής θερμού αέρα σε περιορισμένο αποδέκτη. Παράλληλα εισήγαν μέσα στον περισρισμένο αποδέκτη οπές διεξόδου (vents) από τις οποίες μπορεί να διαφεύγει ή να εισάγεται περιβάλλον ρευστό.

3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται εκτενής παρουσίαση της αριθμητικής επίλυσης του "filling box". Ο παρών αλγόριθμος βασίζεται στην διακριτοποίηση που πρώτος εισήγαγε ο Germeles (1975).

3.1 Περιγραφή του προβλήματος



Ας θωρήσουμε μια ορθογώνια δεξαμενή με διαστάσεις $L \times L \times H$.

Σχήμα 3-1 Ορθογώνια δεξαμενή διαστάσεων $L \times L \times H$

Ας θωρήσουμε μια ορθογώνια δεξαμενή με διαστάσεις $L \times L \times H$. Στο κέντρο του πυθμένα σε ύψος z=0 υπάρχει κυκλική οπή διαμέτρου D από την οποία εκρέει μια κατακόρυφη φλέβα ρευστού. Στο Σχήμα 3-2 φαίνεται κατακόρυφη τομή της δεξαμενής η οποία διέρχεται από το κέντρο της οπής.



Σχήμα 3-2 Τομή της ορθογώνιας δεξαμενής η οποία περνά από τον άξονα της κυκλικής οπής

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ αρχίζει να εκρέει ρευστό από την οπή με αρχική παροχή Q και διαφορά πυκνότητας Δρ, μικρότερης σε σχέση με το ρευστό του αποδέκτη. Μετά από χρόνο t η φλέβα φτάνει στην οροφή της δεξαμενής και αναγκάζεται από την επίδραση του ορίου να εκτραπεί οριζόντια σχηματίζοντας μετά πάροδο χρόνου Δt μια στρώση ελαφρύτερου ρευστού πάχους Δz.



Σχήμα 3-3 Πυκνομετρικό προφίλ για το πρώτο χρονικό βήμα. Η μπλε γραμμή προσδιορίζει την πυκνομετρική κατανομή.

Τη στρώση αυτή που είναι η πρώτη στρώση ρευστού η οποία δημιουργήθηκε την συμβολίζουμε ως Δz(1,1). Η λογική βάσει της οποίας δίδεται αυτός ο συμβολισμός καθώς και το πώς αποθηκεύονται τα αποτελέσματα στον αλγόριθμο θα περιγραφεί παρακάτω στην παράγραφο 3.2.

Το πάχος της στρώσης $\Delta z(1,1)$ προκύπτει ως το πηλίκο του όγκου ρευστού της φλέβας που φτάνει στην οροφή σε χρόνο Δt διά του εμβαδού της οριζόντιας διατομής της δεξαμενής A.

$$\Delta z(1,1) = \frac{\mu(H) * \Delta t}{A} \tag{3-1}$$

όπου μ(Η) είναι η παροχή της φλέβας σε απόσταση Η και υπολογίζεται από την σχέση (2-37).Ο χρόνος Δt είναι αρκετά μικρός έτσι ώστε η παροχή μ(Η) να θεωρείται σταθερή.

Η διαφορά πυκνότητας $\Delta \rho(1,1)$ του περιβάλλοντος ρευστού μεταξύ της μη αναμειγμένης περιοχής και της πρώτης στρώσης προκύπτει από τη σχέση διατήρησης της συνολικής ανωστικής δύναμης της φλέβας σε χρόνο Δt

$$\Delta \rho(1,1) = \frac{Q \,\Delta \rho_0}{\mu(H)} \tag{3-2}$$

όπου $\Delta \rho_0$ είναι η αρχική διαφορά πυκνότητας και Q η αρχική παροχή της φλέβας. Στην αριστερή πλευρά του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 3-3) φαίνεται η πυκνομετρική κατανομή καθ' ύψος της δεξαμενής μετά την προσθήκη της πρώτης στρώσης.

Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται και για χρόνο t=2Δt, στην περίπτωση όμως αυτή η ροή της φλέβας γίνεται σε ομογενές περιβάλλον μέχρι το ύψος H-Δz(1,1) ενώ για την περιοχή H-Δz(1,1)<z<H η ροή έχει πυκνομετρική στρωμάτωση η οποία όπως είναι γνωστό δεν μπορεί να περιγραφεί από την γενικευμένη θεωρία των List & Imberger (1973). Γι αυτό το λόγο απαιτείται να επιλυθεί αριθμητικά το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d\mu}{dz} = 2\sqrt{2\pi}\alpha m^{1/2}$$
$$\frac{dm}{dz} = \frac{1+\lambda^2}{2}\frac{\mu\beta}{m}$$
$$\frac{d\beta}{dz} = -g\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\mu(z)$$

Όπου ορίζουμε d $\varepsilon(z)/dz = -\Delta \rho(z)/(\rho_0 \Delta z)$.

Έχουμε λοιπόν για το χρονικό βήμα από $\Delta t \pm \omega \zeta 2\Delta t$:

Για το χρονικό βήμα από $\Delta t \, \acute{e}\omega \varsigma \, 2\Delta t$ Παρατηρούμε ότι καθώς ανέρχεται η φλέβα σε απόσταση H- $\Delta z(1,1)$ (βλέπε Σχήμα 3-3) συναντά την διεπιφάνεια. Η παροχή της φλέβας που θα εισέλθει στην στρώση πάχους $\Delta z(1,1)$ θα είναι $\mu[H$ - $\Delta z(1,1)]$ και υπολογίζεται μέσω της γενικευμένης θεωρίας των List & Imberger (1973). Η παροχή αυτή καθώς επίσης η ειδική ορμή και η ειδική άνωση της φλέβας θα αποτελέσουν τις αρχικές συνθήκες για την επίλυση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Οι εξισώσεις θα επιλυθούν στο διάστημα H- $\Delta z(1,1) < z < H$ με την χρήση της αριθμητικής μεθόδου των **Runge-Kutta τέταρτης τάξεως** με αρχικές συνθήκες τις εξής:



Εδώ θεωρούμε ότι $d\varepsilon(z)/dz = -\Delta\rho(1,1)/[\rho_0\Delta z(1,1)]$ και ότι ο συντελεστής συμπαράσυρσης

$$\alpha = \alpha_{\rm j} - (\alpha_{\rm j} - \alpha_{\rm p}) \left(\frac{R(z)}{R_{\rm p}}\right)^2$$

είναι συνάρτηση του τοπικού αριθμού Richardson $R(H-\Delta z(1,1))$.

Έχοντας λοιπόν τόσο τις αρχικές συνθήκες των μεταβλητών των διαφορικών εξισώσεων και το συντελεστή συμπαράσυρσης μπορούμε να επιλύσουμε αριθμητικά το σύστημα. Μετά την επίλυση θα προκύψουν οι νέες τιμές $\mu(H)_{\text{new}}$, $m(H)_{\text{new}}$, $\beta(H)_{\text{new}}$. Η παροχή $\mu(H)_{\text{new}}$ θα φτάσει στην οροφή δημιουργώντας μια νέα στρώση ελαφρύτερου ρευστού. Όπως φαίνεται και στο (Σχήμα 3-3) οι δύο νέες στρώσεις θα έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

Ο όγκος ρευστού στη στρώση πάχους $\Delta z(2,1)$ είναι ο όγκος της στρώσης πάχους $\Delta z(1,1)$ προσαυξημένος την παροχή που μπήκε μείον την παροχή που βγήκε.

$$\Delta z(2,1) = \frac{Q \operatorname{in} - Q \operatorname{out}}{A} \Delta t + \Delta z(1,1) \Rightarrow$$
$$\Delta z(2,1) = \frac{\mu(H - \Delta z) - \mu(H)_{\operatorname{new}}}{A} \Delta t + \Delta z(1,1) \tag{3-3}$$



Σχήμα 3-4 Μεταβολή του πάχους ενδιάμεσης στρώσης λόγω μεταβολής της παροχής

Όμως καθώς η φλέβα ανέρχεται η παροχή αυξάνεται με το ύψος δηλαδή Qin<Qout. Συνεπώς το πάχος της στρώσης $\Delta z(2,1)$ η οποία θα «αντικαταστήσει» την $\Delta z(1,1)$ θα μειωθεί. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται άμεσα λόγω του ότι η συμπαράσυρση (entrainment) που συντελείται μέσα στην στρώση συμπαρασύρει περιβάλλον ρευστό με αποτέλεσμα να μειώνεται ο όγκος της στρώσης και κατ' επέκταση να μειώνεται το πάχος της.

Στην συνέχεια καθώς η φλέβα συναντά τώρα την οροφή της δεξαμενής (φυσικό όριο) θα αναγκαστεί και πάλι να κινηθεί οριζόντια δημιουργώντας μια νέα στρώση ελαφρύτερου ρευστού με πάχος

$$\Delta z(2,2) = \frac{\mu(H)_{\text{new}} \,\Delta t}{A} \tag{3-4}$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το νέο προφίλ των πυκνοτήτων μέσα στην δεξαμενή καθώς και τις στρώσεις του περιβάλλοντος ρευστού όπως αυτές έχουν διαμορφωθεί.



Σχήμα 3-5 Πυκνομετρικό προφίλ για το δεύτερο χρονικό βήμα.

Για την νέα πυκνομετρική κατανομή παρατηρούμε τα εξής:

Η μεταβολή του πάχους της στρώσης $\Delta z(1,1)$ δεν θα προκαλέσει πυκνομετρική μεταβολή καθώς θεωρούμε ότι σε κάθε στρώση το ρευστό είναι ομογενές. Άρα $\Delta \rho(2,1) = \Delta \rho(1,1)$ πράγμα το οποίο θα συμβαίνει για κάθε νέα στρώση που θα προστίθεται στην 'οροφή' του δοχείου.

Από την άλλη μεριά, η στρώση Δz(2,2) η οποία θα δημιουργηθεί θα έχει διαφορετική πυκνότητα η οποία μάλιστα θα δημιουργείται λόγω της μεταβολής της άνωσης (αραίωση της συγκέντρωσης της φλέβας).

Έτσι

$$\Delta \rho(2,2) = \frac{\rho_{\rm o} \,\beta(H)_{\rm new}}{g \,\,\mu(H)_{\rm new}} \tag{3-5}$$

Όπου ρ_0 είναι η αρχική πυκνότητα του περιβάλλοντος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Όπως γίνεται αντιληπτό, κατά την διάρκεια του δεύτερου χρονικού βήματος η φλέβα «αντιλαμβάνεται» ως περιβάλλον ρευστό τον αποδέκτη με το πυκνομετρικό προφίλ του πρώτου βήματος. Η ίδια διαδικασία συνεχίζεται και για τα επόμενα χρονικά βήματα προσθέτοντας νέες στρώσεις ρευστού διαφορετικής πυκνότητας. Η ν-οστή στρώση η οποία θα δημιουργηθεί θα προκύψει επαναλαμβάνοντας την διαδικασία και έχοντας ως πυκνομετρικό προφίλ αυτό του χρονικού βήματος ν-1. Λόγω της επιρροής της οροφής η

νέα στρώση(ν-οστή) θα καταλάβει το χώρο στον οποίο βρισκόταν η προηγούμενη (ν-1) με αποτέλεσμα όλη η άνω περιοχή να μετακινηθεί προς τα κάτω, μετακινώντας κατ' επέκταση και την διεπιφάνεια.

3.2 Περιγραφή του Αλγορίθμου

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω οι συμβολισμοί $\Delta z(2,1)$ και $\Delta z(1,1)$ προκύπτουν μέσα από τον τρόπο με τον οποίο αποθηκεύονται τα αποτελέσματα στον αλγόριθμο. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ένα πίνακα διαστάσεων $m \times m$. Ο πίνακας αυτός του οποίου η διάσταση m εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος καθώς και το είδος της ροής της φλέβας αναπαριστάται στο Σχήμα 3-7. Οι γραμμές *i*=1, 2, ..., m αναπαριστούν τον αριθμό του χρονικού βήματος και κατ' επέκταση την χρονική στιγμή. Οι στήλες *j*=1, 2,..., m αναπαριστούν τις αντίστοιχες στρώσεις οι οποίες έχουν δημιουργηθεί σε κάθε χρονικό βήμα. Όπως είναι εμφανές ο πίνακας είναι τριγωνικός καθώς για χρονικό βήμα *i*=1 έχουμε μια στρώση για το δεύτερο χρονικό βήμα *i*=2 δύο στρώσεις και ούτω καθ' εξής. Κάθε στοιχείο του πίνακα (κελί) φέρει πληροφορίες για την στρώση η οποία έχει δημιουργηθεί η ακόμη μεταβληθεί σε δεδομένο χρονικό βήμα.

Έτσι κάθε κελί του πίνακα φέρει την πληροφορία για τις ιδιότητες του όπως είναι το πάχος της στρώσης $\Delta z(i,j)$ και η μεταβολή της πυκνότητας $\Delta \rho(i,j)$ ή ακόμη και την πυκνότητα της κάθε στρώσης $\rho(i,j)$. Το ίδιο κελί φέρει πληροφορίες όμως και για την ροή της φλέβας. Η ειδική παροχή, η ειδική ορμή η ειδική άνωση ο συντελεστής συμπαράσυρσης καθώς και ο τοπικός αριθμός Richardson είναι ιδιότητες της φλέβας οι οποίες προκαλούν την μεταβολή της στρωμάτωσης και γι αυτό αποθηκεύονται στο κελί το οποίο προκάλεσαν την μεταβολή. Έτσι τα xQ(i,j), xM(i,j), xB(i,j), Ri(i,j) και a(i,j) που αποτελούν τα σύμβολα της ειδικής παροχής , ορμής, άνωσης, αριθμού Richardson και συντελεστή συμπαράσυρσης είναι και αυτές άμεσα τιμές του πίνακα.



Σχήμα 3-6 Πυκνομετρικό προφίλ για χρονικό βήμα k < m



Σχήμα 3-7 Πίνακας καταχώρησης των αποτελεσμάτων

Τα κόκκινα κελιά είναι τα κελιά τα οποία έχουν αριθμό στρώσης j=1. Δηλαδή αντιπροσωπεύουν την πρώτη στρώση του ρευστού πάνω από την διεπιφάνεια. Η πρώτη στρώση αρχικά δημιουργήθηκε και στην συνέχεια το πάχος της μεταβάλλεται με τον χρόνο λόγω της εισροής ρευστού από την μη αναμεμιγμένη ζώνη. Συνεπώς τα χαρακτηριστικά xQ, xM, xB, της φλέβας υπολογίζονται μέσω της γενικευμένης θεωρίας των List και Imberger (1973). Από την άλλη μεριά στα κελιά τα οποία έχουν χρωματιστεί πράσινα υπολογίζονται οι τιμές xQ, xM, xB κλπ από την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Όπως αναφέρεται και στην προηγούμενη ενότητα οι διαφορικές εξισώσεις επιλύονται αριθμητικά με εφαρμογή της μεθόδου Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Θεωρούμε ότι σε κάθε χρονικό βήμα η ροή της φλέβας «αντιλαμβάνεται» ως περιβάλλον ρευστό την πυκνομετρική κατανομή του προηγούμενου χρονικού βήματος.

Για τον υπολογισμό των xQ, xM και xB έχουν κατασκευασθεί 5 διαφορετικές συναρτήσεις – υπορουτίνες. Για κάθε χρονικό βήμα οι υπορουτίνες αυτές υπολογίζουν την ροή της φλέβας σε όλο τον αποδέκτη θεωρώντας ότι το χρονικό βήμα Δt είναι αρκετά μικρό ώστε τα xQ, xM, xB να παραμένουν σταθερά.

Qfirstfront	Υπολογίζει την ειδική παροχή στον άξονα της φλέβας σε απόσταση z από την πηγή για ομογενές περιβάλλον
Mfirstfront	Υπολογίζει την ειδική ορμή στον άξονα της φλέβας σε απόσταση z από την πηγή για ομογενές περιβάλλον
Qstratified	Υπολογίζει την ειδική παροχή στον άξονα της φλέβας σε απόσταση z από την αρχή του στρωματωμένου περιβάλλοντος
Mstratified	Υπολογίζει την ειδική ορμή στον άξονα της φλέβας σε απόσταση z από την αρχή του στρωματωμένου περιβάλλοντος
Bstratified	Υπολογίζει την ειδική άνωση στον άξονα της φλέβας σε απόσταση z από την αρχή του στρωματωμένου περιβάλλοντος

Πίνακας 2 Βασικές υπορουτίνες του αλγορίθμου

Οι παραπάνω υπορουτίνες μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο βασικές ομάδες, τις firstfront και τις stratified.

3.2.1 Υπορουτίνες Firstfront

Στις υπορουτίνες Qfirstfront και Mfirstfront ο υπολογισμός των τιμών xQ και xM γίνεται από τις σχέσεις που έχουν προκύψει από τη θεωρία των List & Imberger (1973)

$$\frac{xM}{M} = \left\{ 1 + \left(\frac{R_o}{R_p}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{2/3}$$
$$\frac{xQ}{Q} = \frac{z}{z_0} \left\{ 1 + \left(\frac{R_o}{R_p}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/3}$$

Ως R_0 ορίζουμε τον αρχικό αριθμό Richardson και R_p τον αριθμό Richardson του πλουμίου ίσο με 0.63. Η τιμή του xB ισούται με την αρχική τιμή της ειδικής άνωσης καθώς δεν έχουμε μεταβολή της ανωστικής δύναμης.

Ενώ το z_0 υπολογίζεται ως $z_0 = 3.28D$. Συνεπώς οι μεταβλητές εισόδου είναι οι M, Q, B, R_0 (προκύπτει μέσα από τα M, Q και B), R_p , η διάμετρος D καθώς και η απόσταση z από την πηγή. Για να υπολογιστεί η απόσταση z σε κάθε βήμα απαιτείται, όπως είναι αντιληπτό, και το ύψος όπου βρίσκεται η διεπιφάνεια στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Έτσι έχουμε ότι

$$h(i) = H - z(i) = H - \sum_{k=1}^{i-1} \Delta z(k, i-1)$$
(3-6)

Με άλλα λόγια η απόσταση της διεπιφάνειας από την πηγή ισούται το ύψος H μείον το άθροισμα όλων των στρώσεων στο προηγούμενο χρονικό βήμα.

Παρακάτω δίδεται το διάγραμμα ροής της υπορουτίνας firstfront.



3.2.2 Υπορουτίνες Stratified

Οι υπορουτίνες Stratified από την άλλη μεριά υπολογίζουν τις τιμές των xQ, xM και xB στην περιοχή του στρωματωμένου αποδέκτη. Ο υπολογισμός γίνεται όπως προαναφέρθηκε με αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες για λόγους απλοποίησης έχουν τροποποιηθεί για TOP-HAT (ομοιόμορφες στο πλάτος της φλέβας) κατανομές ταχύτητας και συγκέντρωσης χωρίς όμως να επηρεάζεται η γενίκευση

$$\frac{d\mu}{dz} = 2\sqrt{\pi}\alpha_{TH}m^{1/2}$$
$$\frac{dm}{dz} = \frac{\mu\beta}{m}$$
$$\frac{d\beta}{dz} = g\frac{d\rho(z)}{dz}\frac{1}{\rho_0}\mu(z)$$

Έτσι ο συντελεστής συμπαράσυρσης γράφεται ώς $\alpha_{\rm TH} = \alpha \sqrt{2}$ ενώ η σταθερά $\lambda = 1$

Στην τυχαία στρώση k για χρονικό βήμα nΔt<mΔt αναζητούμε τις τιμές xQ(n,k), xM(n,k) και xB(n,k). Προφανώς το k < n καθώς ο πίνακας είναι τριγωνικός. Το προφίλ του χρονικού βήματος $(n-1)\Delta t$ είναι γνωστό και ως εκ τούτου και η τιμής της συνάρτησης $\rho(z)$ καθ' ύψος της δεξαμενής. Οι τιμές xQ(n,k-1), xM(n,k-1) και xB(n,k-1) θεωρούμε ότι έχουν ήδη υπολογιστεί. Για να υπολογιστούν οι «νέες» τιμές xQ(n,k), xM(n,k) και xB(n,k) πρέπει να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών που προκύπτει επιλύοντας τις διαφορικές εξισώσεις. Οι αρχικές τιμές θα είναι

$$\mu(0) = xQ(n,k-1)$$
$$m(0) = xM(n,k-1)$$
$$\beta(0) = xB(n,k-1)$$

η κλίση πυκνότητας

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = \frac{\left[\rho(n-1,k-1) - \rho(n-1,k-2)\right]}{\Delta z(n-1,k-2)}$$

ο συντελεστής συμπαράσυρσης

$$\alpha = \alpha_j - (\alpha_j - \alpha_p) \left(\frac{Rt(k-1, n-1)}{R_p}\right)^2$$

Ενώ το σύστημα θα επιλυθεί στο διάστημα $0 < z < \Delta z(n-1,k-1)$



Σχήμα 3-8 Σχηματική περιγραφή των υπολογισμών στην υπορουτίνα Stratified

Στο παραπάνω Σχήμα 3-8 απεικονίζεται γραφικά η διαδικασία υπολογισμού των νέων τιμών xQ, xM και xB μέσω της υπορουτίνας Stratified. Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι η επίλυση των εξισώσεων γίνεται με την εφαρμογή της μεθόδου Runge-Kutta τέταρτης τάξεως η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο τέλος της εργασίας στο Παράρτημα A.



3.3 Διάγραμμα ροής Αλγορίθμου

Ο δεδομένος αλγόριθμος εστιάζει στον υπολογισμό της ανάμιξης από την έναρξη της εκροής της φλέβας μέχρι να αποκατασταθεί η ροή. Γι αυτό τον λόγο θεωρούμε ότι σταματά πρακτικά όταν η διεπιφάνεια φτάσει σε απόσταση 0.1Η από την «πηγή» όπου Η είναι το ενεργό ύψος δεξαμενής. Αυτό κατά συνέπεια σημαίνει ότι οι αρχικές διαστάσεις του πίνακα καταχώρησης των δεδομένων παραμένει άγνωστη πριν την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Με άλλα λόγια δεν γνωρίζουμε επακριβώς σε πόσο χρόνο η διεπιφάνεια θα φτάσει σε απόσταση 0.1Η. Έτσι κατά την έναρξη των υπολογισμών θα θεωρήσουμε ότι ο πίνακας έχει διαστάσεις ίσες με m_{temp} x m_{temp}. Η διάσταση αυτή προκύπτει εμπειρικά και κυρίως από παρατηρήσεις γραφημάτων και ισούται με

- a) $m_{\text{temp}} = \left[3T_{\text{j}}/\Delta t\right]$ sthe periptises two aplies of two aplies of the periptises of th
- b) $m_{\text{temp}} = \left[4T_{\text{p}}/\Delta t\right]$ στην περίπτωση των τυρβωδών ανωστικών φλεβών και των πλουμίων.

Όπου Δt είναι το χρονικό βήμα με το οποίο γίνονται οι υπολογισμοί.

Οι τιμές αυτές προσδιορίζουν αρχικά τις διαστάσεις του πίνακα. Στην συνέχεια και καθώς η επίλυση βρίσκεται σε εξέλιξη υπολογίζεται ανά χρονικό βήμα η θέση της διεπιφάνειας. Έτσι οι υπολογισμοί τερματίζονται όταν $h(i)=H-\sum_{j=1}^{i}\Delta z(i,j)<0.1H$ και η νέα διάσταση του πίνακα ισούται με $m_{\rm new} = i - 1$ όπου i το χρονικό βήμα στο οποίο έγινε ο τερματισμός των υπολογισμών.

Εν συνεχεία επαναπροσδιορίζεται ο πίνακας και τυπώνονται τα πυκνομετρικά προφίλ και η θέση της διεπιφάνειας για κάθε χρονικό βήμα. Παρακάτω δίδεται το διάγραμμα ροής ενώ ο πηγαίος κώδικας ο οποίος δημιουργήθηκε με την χρήση του υπολογιστικού πακέτου MatLab δίδεται στο Παράρτημα A.





4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό δίδονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις αριθμητικές επιλύσεις τόσο για απλές φλέβες και πλούμια όσο και για τυρβώδεις ανωστικές φλέβας. Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίνονται με πειραματικές μετρήσεις οι οποίες έγιναν με την τεχνική LIF (Laser Induced Fluorescence). Για τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε έγινε ανάλυση ευαισθησίας ως προς το χρονικό βήμα Δt, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται με επιλεγμένες δοκιμές. Τέλος, παρουσιάζονται μια εφαρμογή του αλγορίθμου σε προβλήματα μηχανικού.

4.1 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Ένας μεγάλος αριθμός υπολογισμών υλοποιήθηκε με την βοήθεια του αλγορίθμου τόσο για φλέβες και πλούμια όσο και για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε αδιάστατη μορφή. Οι αδιαστατοποιήσεις που έχουν γίνει είναι

$$\zeta_{\rm o} = \frac{h}{H} \tag{4-1}$$

όπου h η απόσταση της διεπιφάνειας από την πηγή της φλέβας και Η το ενεργό ύψος του αποδέκτη και

$$\zeta = \frac{z}{H} \tag{4-2}$$

όπου z η κατακόρυφη απόσταση οποιουδήποτε σημείου από την πηγή. Τέλος

$$\tau = \frac{t}{T} \tag{4-3}$$

όπου $T = T_J$ στην περίπτωση της απλής φλέβας, $T = T_p$ στην περίπτωση του πλουμίου και $T = T_2 = M/B$ για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες. Η συγκέντρωση ενός δείκτη που μεταφέρεται και αναμειγνύεται στον αποδέκτη προκύπτει από το λόγο

$$\delta = \frac{\rho_{\alpha} - \rho(\zeta, \tau)}{\rho_{\alpha} - \rho_{o}} \tag{4-4}$$

όπου ρ_{α} , ρ_{c} είναι η πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού και η πυκνότητα της φλέβας στην πηγή της, αντίστοιχα.

Ταχύτητα καθόδου της διεπιφάνειας και Πυκνομετρική Κατανομή

Ο ρυθμός με τον οποίο κατέρχεται (ή ανέρχεται) η διεπιφάνεια εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες της ροής καθώς και από την γεωμετρία του αποδέκτη. Παρακάτω παρουσιάζεται μια σειρά από περιπτώσεις ροών οι οποίες υπολογίστηκαν με την χρήση του αλγορίθμου.

				М			
Examples	D(cm)	Q (cc/s)	go'	(cm^{4}/s^{2})	$B(cm^4/s^3)$	Re	Ro
Jet	0.30	15.67	0.00	3473.81	0.00	7670	0.000
Buoyant jet	0.50	6.42	14.70	209.91	94.37	1890	0.078
Buoyant jet	1.00	14.78	14.70	278.14	217.27	2170	0.192
Plume	1.00	8.19	22.28	85.40	182.47	1200	0.426
Plume	1.00	5.54	22.53	39.08	124.82	830	0.633

Πίνακας 3	Χαρακτηριστικά	παραδείγματα	ροών	φλέβας	(απλές	φλέβες,	τυρβώδεις
	ανωστικές φλέβες	; και πλούμια)					



Σχήμα 4-1 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για μηδενικό αρχικό αριθμό Richardson. Σύγκριση της θεωρητικής καμπύλης με αυτήν του μοντέλου.

Παρατηρούμε ότι η θεωρητική καμπύλη για την περίπτωση της απλής φλέβας με R_o =0.00 ταυτίζεται πρακτικά με αυτή του υπολογιστικού μοντέλου. Παρόλα αυτά η καμπύλη αυτή δεν έχει κάποια φυσική σημασία. Στην περίπτωση όπου δεν εμφανίζεται αρχική άνωση ο σχηματισμός της διεπιφάνειας δεν είναι εφικτός. Αντιθέτως, το ρευστό που αρχικά θα κινηθεί οριζόντια καθώς θα συναντήσει την οροφή δεν θα είναι ελαφρύτερο ώστε να παραμείνει εκεί. Η αρχική ορμή θα του «επιβάλει» να κινηθεί αντίθετα προς τα κάτω και να επανασυμπαρασυρθεί από την ροή της φλέβας (Σχήμα

4-2). Για αυτό το λόγο η παραπάνω καμπύλη αποτελεί κυρίως μια θεωρητική επαλήθευση του μοντέλου.



Σχήμα 4-2 Επανακυκλοφορία ρευστού στην φλέβα για την περίπτωση της απλής φλέβας με αρχικό αριθμό Richardson $R_0=0$

Στην περίπτωση τώρα των τυρβωδών ανωστικών φλεβών η αρχική άνωση κατέχει σημαντικό ρόλο στον ρυθμό καθόδου της διεπιφάνειας καθώς και στον προσδιορισμό των στιγμιαίων πυκνομετρικών προφίλ.



Σχήμα 4-3 Σύγκριση του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για δυο τυρβώδεις ανωστικές φλέβες με αρχικούς αριθμούς Richardson R_0 =0.078 και R_0 =0.192.

Στο Σχήμα 4-3 συγκρίνονται δύο τυρβώδεις ανωστικές φλέβες με την θεωρητική καμπύλη των απλών φλεβών. Είναι εμφανές ότι η επιρροή της αρχικής άνωσης επιταχύνει την κάθοδο της διεπιφάνειας καθώς και την ανάμιξη πάνω από την διεπιφάνεια. Η ανάμιξη αποτυπώνεται από τις κατανομές της πυκνομετρικής στρωμάτωσης. Καθώς η διεπιφάνεια κατέρχεται η άνω περιοχή δεν αποτελεί περιοχή πλήρους ανάμιξης. Αντιθέτως η πυκνότητες κατανέμονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-4



Σχήμα 4-4 Διάγραμμα των αδιαστατοποιημένων πυκνομετρικών κατανομών για δεδομένες χρονικές στιγμές. Υπολογισμός για τυρβώδη ανωστική φλέβα με αρχικό αριθμό Richardson R_0 =0.0781.

Η μορφολογία των κατανομών είναι ίδια ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες. Παρουσιάζονται ωστόσο διαφορές ως προς τον βαθμό της ανάμιξης. Μια γρήγορη σύγκριση των διαγραμμάτων των σχημάτων Σχήμα 4-4 και Σχήμα 4-5 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αρχική άνωση και κατ' επέκταση ο αρχικός αριθμός Richardson κατέχει σημαντικό ρόλο στην μόρφωση των πυκνομετρικών καμπυλών.



Σχήμα 4-5 Διάγραμμα των αδιαστατοποιημένων πυκνομετρικών κατανομών για δεδομένες χρονικές στιγμές. Υπολογισμός για τυρβώδη ανωστική φλέβα με αρχικό αριθμό Richardson R_0 =0.192.

Κοινό γνώρισμα και των δύο διαγραμμάτων αποτελεί η μορφολογία των καμπυλών. Η διεπιφάνεια η οποία σχηματίζεται δημιουργεί ένα πυκνομετρικό «σκαλί» μεταξύ της κατώτερης μη αναμεμιγμένης στρώσης και της ανώτερης. Η απότομη αυτή πυκνομετρική μεταβολή έχει φυσική σημασία καθώς η ανάμιξη μεταξύ των δυο περιοχών επιτυγχάνεται λόγω τύρβης. Αντιθέτως στην περιοχή της διεπιφάνειας η σταθερότητα της στρωμάτωσης καθώς και η έλλειψη τύρβης στην ροή καθόδου της διεπιφάνειας καθιστά την μοριακή διάχυση ως το μοναδικό παράγοντα διάχυσης μεταξύ της αναμεμιγμένης και ομογενούς στρώσης. Ωστόσο η μοριακή διάχυση είναι μια διαδικασία η οποία εξελίσσεται με βραδύ ρυθμό συγκρινόμενη με την τυρβώδη διάχυση. Στο χρονικό διάστημα που μελετάται η ανάμιξη, η συμβολή της τελευταίας μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, με συνέπεια την απότομη μεταβολή της πυκνότητας στην διεπιφάνεια. Ωστόσο οι Kaye, Flynn & Cook (2010) έδειξαν ότι η διεπιφάνεια μεταξύ των δύο περιοχών έχει συγκεκριμένο πάχος στο οποίο μπορεί να αποτυπωθεί μια πιο ομαλή πυκνομετρική μετάβαση από την άνω στην κάτω περιοχή. Άλλο ένα χαρακτηριστικό των καμπυλών αποτελεί η σύγκλιση τους προς την οριζόντια εφαπτομένη στην περιοχή της διεπιφάνειας καθώς και προς την κατακόρυφη εφαπτομένη στην περιοχή της οροφής ($\nabla \delta = 0$). Η σύγκλιση αυτή δικαιολογείται άμεσα λόγω της μηδενικής ανάμιξης (ρυθμού μεταβολής της πυκνότητας στις δύο αυτές περιοχές). Τέλος στην περίπτωση όπου τμήσουμε τις καμπύλες αυτές σε δεδομένο σημείο πάνω από την διεπιφάνεια με μια οριζόντια ευθεία θα παρατηρήσουμε ότι για δεδομένο ύψος ζ η τιμή της 'συγκέντρωσης' δ μεταβάλλεται σχεδόν γραμμικά με τον χρόνο.



Σχήμα 4-6 Διάγραμμα μεταβολής της πυκνότητας σε δεδομένο ύψος (z=H) πάνω από την διεπιφάνεια σε συνάρτηση με τον χρόνο.(Τυρβώδης ανωστική φλέβα)

Τέλος, εξετάστηκε η ανάμιξη σε περιορισμένο αποδέκτη όταν αυτή επιτυγχάνεται με πλούμια. Και σε αυτή την περίπτωση η μορφή της καμπύλης καθόδου της διεπιφάνειας καθώς επίσης και οι πυκνομετρικές χρονικές καμπύλες μοιάζουν με αυτές των τυρβωδών ανωστικών φλεβών. Παρόλα αυτά η ροή του πλουμίου η οποία επηρεάζεται κυρίως από την επίδραση της άνωσης διαθέτει κάποιες ιδιαιτερότητες. Ο ρυθμός καθόδου της διεπιφάνειας δεν συναντά μεγάλες μεταβολές καθώς μεταβάλλεται ο αρχικός αριθμός Richardson. Οι πυκνομετρικές κατανομές με την σειρά τους λόγω μικρής αρχικής ορμής της φλέβας δεν εξελίσσονται με ταχύ ρυθμό. Αντιθέτως, η ανάμιξη που επιτελείται μέσω της ροής ενός πλουμίου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μια αργή διαδικασία. Ο χρόνος που απαιτείται για την πλήρη ανάμιξη του αποδέκτη είναι αρκετά μεγαλύτερος από αυτόν μιας τυρβώδους ανωστικής φλέβας.



Σχήμα 4-7 Σύγκριση του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για δυο πλούμια με αρχικούς αριθμούς Richardson R_0 =0.633και R_0 =0.426 αντιστοίχως.

Στην περίπτωση αυτή οι υπολογισμοί υπό-εκτιμούν την ταχύτητα καθόδου κατά την χρονική περίοδο 0.4<τ<2.5 και το σφάλμα είναι της τάξης του 4%. Το γεγονός αυτό συμβαίνει λόγω του ότι κατά τους υπολογισμούς θεωρούμε ότι ο συντελεστής συμπαράσυρσης μεταβάλλεται λόγω της μεταβολής του τοπικού αριθμού Richardson. Από την άλλη μεριά, η θεωρητική καμπύλη όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2.2.2 προκύπτει βάση της παραδοχής ότι $a=a_p$ καθ' ύψος της φλέβας για κάθε χρονική στιγμή. Ωστόσο παρατηρούμε ότι το υπολογιστικό μοντέλο είναι συνεπές ως προς την φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Η καμπύλη καθόδου με αρχικό αριθμό Richardson R_o =0.426 βρίσκεται κάτω από την καμπύλη του απλού πλουμίου για αρχικό αριθμό Richardson R_o =0.633. Το γεγονός αυτό επαληθεύει την αρχική μας θεώρηση καθώς όσο η ροή μιας φλέβας τείνει προς την ροή του απλού πλουμίου ($R_0 \rightarrow R_p$) τόσο πιο αργή είναι η διαδικασία της ανάμιξης εντός του περιορισμένου αποδέκτη. Τέλος, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4-8 οι κατανομές της συγκέντρωσης στο χρόνο σε σύγκριση με αυτές που δημιουργούν οι τυρβώδεις ανωστικές φλέβες φανερώνουν ανάμιξη σε μικρότερο βαθμό.



Σχήμα 4-8 Διάγραμμα των αδιαστατοποιημένων πυκνομετρικών κατανομών για δεδομένες χρονικές στιγμές. Υπολογισμός για πλούμιο με αρχικό αριθμό Richardson R_0 =0.426.



Σχήμα 4-9 Διάγραμμα μεταβολής της πυκνότητας σε δεδομένο ύψος (z=H) πάνω από την διεπιφάνεια σε συνάρτηση με τον χρόνο.(Πλούμιο)

Οι καμπύλες καθόδου της διεπιφάνειας συνοψίζονται στο παρακάτω διάγραμμα. Η χρονική κλίμακα η οποία χρησιμοποιήθηκε είναι η $T_2=M/B$. Ορίζουμε δηλαδή ως $\tau=t/T_2$. Όπως είναι φυσικό η χρονική κλίμακα T_2 δεν μπορεί να ορισθεί για την περίπτωση των απλών φλεβών με $R_0=0$.

Επίσης, από το διάγραμμα του Σχήματος 4-10 γίνεται αντιληπτό ότι η ταχύτητα καθόδου της διεπιφάνειας επιβραδύνεται όσο ο αρχικός αριθμός Richardson αυξάνεται.



Σχήμα 4-10 Διάγραμμα σύγκρισης του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για διαφορετικούς αρχικούς αριθμούς Richardson.

Χρονική μεταβολή της ροής της φλέβας

Η ανάμιξη του αποδέκτη με τον χρόνο επηρεάζει σημαντικά και τα χαρακτηριστικά της φλέβας. Οι παράμετροι της φλέβας όπως η ειδική παροχή μ, η ειδική ποσότητα κίνησης m και η ειδική άνωση μεταβάλλονται με τον χρόνο. Παρακάτω δίδονται τα χαρακτηριστικά αυτά μεγέθη σε αδιάστατη μορφή για την περίπτωση μιας τυρβώδους ανωστικής φλέβας με R_0 =0.078.



Σχήμα 4-11 Διάγραμμα μεταβολής της ειδικής παροχής καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R_0 =0.078)

Από τα Σχήματα 4-11, 4-12 και 4-13 παρατηρούμε ότι η ειδική παροχή (όγκου), η ειδική ορμή και η ειδική άνωση μεταβάλλονται με τον χρόνο. Ειδικότερα, η τιμή της ειδικής παροχής μ δείχνει να υποχωρεί καθώς σχηματίζεται ο στρωματωμένος αποδέκτης. Οι καμπύλες πάνω από την διεπιφάνεια «υποχωρούν» με την πάροδο του χρόνου ενώ μόλις η διεπιφάνεια φτάσει σε απόσταση *h*=0.1*H* δεν παρατηρείται σημαντική μεταβολή στην τιμή της ειδικής παροχής. Παρόμοια είναι και η συμπεριφορά της ειδική ορμής. Σε αυτήν την περίπτωση όμως οι σχηματιζόμενες καμπύλες εμφανίζουν σημείο καμπής ακριβώς εκεί όπου βρίσκεται η διεπιφάνεια. Τέλος σημαντική είναι η μεταβολή της ειδικής άνωσης. Η τιμή της μεταβάλλεται γραμμικά καθώς τείνει προς το μηδέν ενώ εμφανίζεται ένα μεγάλο άλμα στην περιοχή της διεπιφάνειας. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει πλήρως την θεωρία του "filling box". Αρχικά διότι θεωρούμε ότι δημιουργείται μια απότομη μεταβολή της πυκνότητας στην περιοχή της διεπιφάνειας και κατόπιν διότι υποθέτουμε ότι η πυκνότητα στην οροφή είναι ίση με την πυκνότητα της φλέβας εκεί καθώς η φλέβα διαχέεται οριζόντια.



Σχήμα 4-12 Διάγραμμα μεταβολής της ειδικής ορμής καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R_0 =0.078)



Σχήμα 4-13 Διάγραμμα μεταβολής της ειδικής άνωσης καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R_0 =0.078)



Σχήμα 4-14 Διάγραμμα μεταβολής του τοπικού αριθμού Richardson καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R_0 =0.078)



Σχήμα 4-15 Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή συμπαράσυρσης καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.18, 0.70, 1.22, 1.75. (Τυρβώδης ανωστική φλέβα R_0 =0.078)

Παρόμοια είναι τα αποτελέσματα και για τις απλές φλέβες ενώ σημαντικές διαφορές παρουσιάζονται στα πλούμια όπως φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα.







Σχήμα 4-17 Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή συμπαράσυρσης καθ' ύψος του αποδέκτη για τ=0, 0.35, 1.38, 2.43, 3.47. (Πλούμιο R_0 =0.426)

4.2 Σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις

Τα παραπάνω αποτελέσματα δεν θα μπορούσαν να αποτελέσουν αξιόπιστη πηγή από μόνα τους. Γι αυτό το λόγο πραγματοποιήθηκε μια σειρά πειραμάτων τόσο στο εργαστήριο Υδραυλικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου όσο και στο εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Οι πειραματικές συσκευές στα δύο αυτά εργαστήρια απαιτούν την χρήση της ίδιας τεχνικής. Ωστόσο στο παρόν κείμενο δίδεται μια συνοπτική περιγραφή της πειραματικής συσκευής που χρησιμοποιήθηκε στο εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής. Γέλος πρέπει να σημειωθεί ότι τόσο τα αποτελέσματα όσο και ο αριθμός των πειραμάτων δεν ήταν επαρκή για την επαλήθευση του υπολογιστικού μοντέλου. Γι αυτό τον λόγο χρησιμοποιήθηκε ένας μεγάλος αριθμός αποτελεσμάτων από παλαιότερα πειράματα που έγιναν στην ίδια συσκευή έχοντας πλήρη γνώση των αρχικών συνθηκών με τις οποίες τα πείραμα αυτά εκτελέσθηκαν.

4.2.1 Η πειραματική διαδικασία

Η πειραματική συσκευή αποτελείται από δεξαμενή διάχυσης διαστάσεων 40 cm × 40 cm × 60 cm που είναι κατασκευασμένη από Plexiglas. Στο κέντρο της οροφής της υπάρχει οπή στην οποία προσαρμόζεται το ακροφύσιο. Το ακροφύσιο δεν αποτελεί τμήμα της δεξαμενής αλλά ξεχωριστή διάταξη ώστε να μπορούμε να μεταβάλουμε κατά βούληση τη γεωμετρία της οπής. Το ακροφύσιο τοποθετημένο στην δεξαμενή βρίσκεται στην στάθμη +52 cm μετρώντας την απόσταση από τον πυθμένα. Σε απόσταση +57.5cm από τον πυθμένα υπάρχει περιμετρική υπερχείλιση, από όπου το πλεονάζον νερό οδηγείται στην αποχέτευση. Στις δύο απέναντι κατακόρυφες πλευρές (πρόσοψη και πίσω όψη) έχει χαραχθεί τετραγωνικός κάναβος με διαστάσεις 5cm × 5cm. Η δεξαμενή είναι τοποθετημένη σε υπερυψωμένη βάση.

Το ακροφύσιο τροφοδοτείται με το ρευστό της φλέβας από άλλη δεξαμενή η οποία βρίσκεται πλησίον της πρώτης. Σε αυτή τη γίνεται ανάμιξη του νερού με το αλάτι ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη πυκνομετρική διαφορά και με το δείκτη (ροδαμίνη 6G) για τη μέτρηση της συγκέντρωσης. Από αυτή το νερό της φλέβας οδηγείται σε δοχείο σταθερής στάθμης με υπερχείλιση, με τη χρήση βυθιζόμενης αντλίας και στη συνέχεια στο ακροφύσιο αφού διέλθει από παροχόμετρο για τη ρύθμιση και μέτρηση της απαιτούμενης παροχής.

Επειδή το ρευστό της φλέβας είναι βαρύτερο απ' αυτό της δεξαμενής διάχυσης, η οροφή της πειραματικής συσκευής είναι ο πυθμένας, δεδομένου ότι η άνωση λειτουργεί κατά την αντίθετη φορά από αυτήν που περιγράψαμε παραπάνω. Επομένως για λόγους συνέπειας με την προηγούμενη παρουσίαση του αλγόριθμου και για την σύγκριση των

αποτελεσμάτων, θα θεωρήσουμε ότι οροφή της δεξαμενής είναι ο πυθμένας της και αντίστροφα.



Εικόνα 1 Δεξαμενή διαστάσεων 40 cm \times 40 cm \times 60cm (Διπλωματική εργασία Ε. Λύτρα)



Εικόνα 2 Δοχείο σταθερής στάθμης με υπερχείλιση.

Οι μετρήσεις έγιναν με την τεχνική τομογραφίας Laser ενώ μετρήθηκε η συγκέντρωση της ροδαμίνης με LIF. (Laser Induced Fluorescence). Η μεθοδολογία μετρήσεων συνοψίζεται ως εξής:

- Υδατικό διάλυμα ροδαμίνης 6G που διεγείρεται από μονοχρωματική ακτινοβολία (laser) μήκους κύματος 532nm (πράσινο), εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία (dye -laser, fluorescence) στη συχνότητα των 570nm (κίτρινο), η ένταση της οποίας είναι 'ανάλογη' της ισχύος της ακτίνας laser, καθώς επίσης και της συγκέντρωσης της διαλυμένης ροδαμίνης στο νερό. Συγκεντρώσεις της τάξης των 20-50ppb μπορούν να μπλοκάρουν τη διέλευση της ακτίνας laser μέσα από το διάλυμα της ροδαμίνης.
- 2. Η ισχύς της ακτίνας laser είναι 1W.
- 3. Δημιουργούμε ένα φύλο laser πάχους περίπου 1mm (όσο και το πάχος της ακτίνας) με τη χρήση ενός πολυγωνικού 24-εδρου καθρέπτη που περιστρέφεται με συχνότητα περίπου 20000 rpm. Επομένως, εάν ο πολυγωνικός καθρέπτης έχει n-έδρες, η ακτίνα του laser περνά από κάθε σημείο του φύλου laser περί τις 20000 x n φορές το λεπτό (στην προκειμένη περίπτωση 480000 φορές το λεπτό).
- 4. Εάν «χρωματιστεί» το νερό της φλέβας με ροδαμίνη, το φύλο laser τη διεγείρει με αποτέλεσμα να εκπέμπεται ακτινοβολία στη συχνότητα των 570nm (κίτρινο) από κάθε σημείο του πεδίου ροής όπου υπάρχει ροδαμίνη, η ένταση της οποίας είναι ανάλογη της συγκέντρωσης όταν αυτή δεν υπερβαίνει τα 50 ppb (Ferrier et al. 1993).



Εικόνα 3 Συσκευή δημιουργίας φύλλου Laser.

Για την εκτέλεση των πειραμάτων γεμίζουμε την δεξαμενή διάχυσης με γλυκό νερό μέχρι το σημείο της υπερχείλισης. Παράλληλα γεμίζουμε την δεύτερη δεξαμενή με γλυκό νερό και προσθέτουμε τις απαραίτητες ποσότητες άλατος (NaCl) και ροδαμίνης 6G. Στην συνέχεια με την βοήθεια της βυθιζόμενης αντλίας το μίγμα της δεύτερης δεξαμενής μεταφέρεται στο δοχείο σταθερής στάθμης από το οποίο με βαρύτητα οδηγείται στο ακροφύσιο. Η παροχή ρυθμίζεται με παροχόμετρο συνδεδεμένο στο σωλήνα τροφοδοσίας της φλέβας. Απέναντι από την δεξαμενή τοποθετείται ψηφιακή κάμερα υψηλής ακρίβειας (4Mp) η οποία καταγράφει το πεδίο ροής μέσα στην δεξαμενή. Από τις επί μέρους φωτογραφίες (frames) προσδιορίζεται η συγκέντρωση της ροδαμίνης σαν συνάρτηση της φωτεινότητας, δεδομένου ότι συνδέονται γραμμικά για συγκεντρώσεις ροδαμίνης μικρότερες από 50ppb.

4.2.2 Σύγκριση Πειράματος - Υπολογιστικού Μοντέλου

Στις επόμενες παραγράφους θα συγκρίνουμε πειραματικά και αριθμητικά αποτελέσματα και στις τρεις κατηγορίες, τις απλές φλέβες, τις τυρβώδεις ανωστικές και τα πλούμια.

Έλεγχος Καθόδου της Διεπιφάνειας

Απλές φλέβες: Σαν απλές φλέβες θεωρούνται πρακτικά οι φλέβες με αρχικό αριθμό Richardson μικρότερο του 0.05. Παρόλα αυτά όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα η μεταβολή του αριθμού Richardson έστω και κατά 0.01 μεταβάλει την ταγύτητα καθόδου της διεπιφάνειας. Αυτό συμβαίνει διότι η αρχική άνωση επιταχύνει αρχικά τον ρυθμό ανάμιξης. Όπως φαίνεται και στο (Σχήμα 4-18) οι καμπύλες για $R_0=0.013$, R₀=0.038 και R₀=0.05 αποκλίνουν από την θεωρητική για μικρούς χρόνους. Ακόμη, κατά την πειραματική διαδικασία διαπιστώθηκε ότι όταν η ροή της φλέβας φτάνει για πρώτη φορά στην οροφή δημιουργούνται στρόβιλοι λόγω της έντονης τοπικά τύρβης. Οι στρόβιλοι αυτοί δημιουργούν αρχικά μια στρώση ανάμιξης της οποίας το πάχος αποκλίνει από αυτό που υπολογίζεται για την πρώτη στρώση $\Delta z(1,1)$. Συνεπώς, η διεπιφάνεια αρχικά κατέρχεται ταχύτερα και παρατηρείται ασυμφωνία μεταξύ των πειραματικών και των υπολογιστικών αποτελεσμάτων. Παρόμοια φαινόμενα παρατηρούνται και στις τυρβώδεις ανωστικές φλέβες. Στη συνέχεια η στρώση ανάμειξης ισορροπεί και τα πειραματικά δεδομένα είναι πολύ κοντά στις υπολογισμένες στάθμες της διεπιφάνειας. Όταν η ροή γίνεται περισσότερο ανωστική η απόκλιση αυτή μειώνεται. Για τον περιορισμό των μεγάλων δινών κατά την πρώτη επαφή της φλέβας με την οροφή, προστέθηκε σε απόσταση 5 cm από την οροφή σίτα με λεπτό διάκενο που είχε σαν αποτέλεσμα την ηπιότερη ανάμειξη στην αρχική στρώση.



Σχήμα 4-18 Αδιάστατη στάθμη της διεπιφάνειας σαν συνάρτηση του χρόνου για απλές φλέβες: Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων και υπολογισμών για διαφορετικούς αρχικούς αριθμούς Richardson.



Σχήμα 4-19 Αδιάστατη στάθμη της διεπιφάνειας σαν συνάρτηση του χρόνου για τυρβώδεις. ανωστικές φλέβες: Σύγκριση των πειραματικών δεδομένων και υπολογισμών για διαφορετικούς αρχικούς αριθμούς Richardson.

Τυρβώδεις ανωστικές φλέβες: Παρόμοια συμπεριφέρονται και οι τυρβώδεις ανωστικές φλέβες. Η απόκλιση είναι μεγαλύτερη για μικρούς χρόνους ενώ εν συνεχεία τα πειραματικά αποτελέσματα εναρμονίζονται με τις υπολογιστικές εκτιμήσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-19.

Απλές ανωστικές φλέβες (πλούμια): Στην περίπτωση των πλουμίων οι αποκλίσεις των πειραμάτων και του υπολογιστικού μοντέλου είναι μικρότερες. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι εκτιμήσεις του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας δείχνουν να προσεγγίζουν καλύτερα τη θεωρητική καμπύλη ενώ οι διαφορές κυμαίνονται στην περιοχή 2-4%.



Σχήμα 4-20 Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με το υπολογιστικό μοντέλο για διαφορετικούς αρχικούς αριθμούς Richardson.(Πλούμια)

Έλεγχος των πυκνομετρικών προφίλ

Τα πυκνομετρικά προφίλ μετρήθηκαν για φλέβες και πλούμια. Τα αποτελέσματα δείχνουν εξαιρετική συμβατότητα με τους υπολογισμούς όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4-21. Πρέπει να αναφέρουμε ωστόσο ότι κατά τις πειραματικές μετρήσεις που διεξήχθησαν για τον σκοπό της διπλωματικής αυτής εργασίας παρουσιάστηκαν αποκλίσεις. Πρόκειται κυρίως για τις μετρήσεις στην περιοχή της διεπιφάνειας. Σε πολλά από τα πειράματα δεν παρουσιάζεται η εκτιμούμενη απότομη μεταβολή της πυκνότητας.


Σχήμα 4-21 Σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με το υπολογιστικό μοντέλο για τα πυκνομετρικά προφίλ σε δυο χρονικές στιγμές τ=1 και τ=0.5

4.3 Ανάλυση Ευαισθησίας

Έχοντας παρουσιάσει τα αποτελέσματα του υπολογιστικού μοντέλου τίθεται το βασικό ερώτημα: ποια είναι η ταχύτητα με την οποία έγιναν οι υπολογισμοί. Ο υπολογιστικός χρόνος παίζει καθοριστικό ρόλο στην αξιολόγηση ενός αλγορίθμου και γι αυτό απαιτείται η ανάλυση ευαισθησίας ως προς μια αρχική παράμετρο του προβλήματος. Η παράμετρος αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη από το χρονικό βήμα υπολογισμού Δt που καθορίζει το πόσο πυκνή θα είναι η διακριτοποίηση του αποδέκτη. Γι αυτόν το λόγο, το χρονικό βήμα επηρεάζει και την σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι η σύγκλιση των αποτελεσμάτων βρίσκεται σε αντιπαράθεση με τον χρόνο υπολογισμού. Με άλλα λόγια για την μείωση σφάλματος (υπολογισμών-θεωρίας) της τάξεως του 5% σε σφάλμα της τάξεως 2% ο υπολογιστικό χρόνος ο οποίος απαιτείται είναι εκθετικά μεγαλύτερος. Συνεπώς, αρκετές φορές επιλέγεται να επιλυθεί ένα πρόβλημα με βάση τον βέλτιστο συνδυασμό «χρόνου υπολογισμού – σύγκλιση αποτελεσμάτων».

Στο Σχήμα 4-22 γίνεται γραφική απεικόνιση του υπολογιστικού χρόνου σαν συνάρτηση του χρονικού βήματος για την περίπτωση των απλών φλεβών. Το διάγραμμα αυτό είναι ενδεικτικό της μεταβολής του υπολογιστικού χρόνου με το Δt. Ο προσδιορισμός του υπολογιστικού χρόνου δεν έγινε με κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογία αλλά εκτιμήθηκε από τον χρόνο που απαιτείται ώστε ένας συμβατικός υπολογιστής να επιλύσει το πρόβλημα με τις αρχικές συνθήκες του (Πίνακα 4). Έτσι το παρακάτω

διάγραμμα του Σχήματος 4-22 δίδει μια τάξη μεγέθους του υπολογιστικού χρόνου για δεδομένα χρονικά βήματα Δt.



Σχήμα 4-22 Γραφική αναπαράσταση χρόνου υπολογισμού-χρονικό βήμα για φλέβες

Πίνακας 4	Στοιχεία	της	ροής	και	της	γεωμετρία	του	αποδέκτη.	Τα	στοιχεία	αυτά
	χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό του υπολογιστικού χρόνου.								όνου.		

Στοιχεία ροής της φλέβας	<i>D</i> =0.5 cm	$Q=20 \text{ cm}^{3}/\text{s}$	$g' = 15 \text{ cm/s}^2$
Γεωμετρία Δεξαμενής	<i>H</i> =52 cm	<i>b</i> =40 cm	$A=1600 \text{ cm}^2$

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4-22 η μετάβαση από το βήμα Δt =0.5 σε Δt =0.1 απαιτεί υπολογιστικό χρόνο της τάξης των 70000 s (19.4 ώρες). Από την άλλη μεριά το μέγιστο σχετικό σφάλμα μεταξύ των αποτελεσμάτων της καμπύλης για Δt =0.5s και Δt =0.1s είναι της τάξης του 6-7% (Σχήμα 4-23).



Σχήμα 4-23 Σύγκλιση του ρυθμού καθόδου της διεπιφάνειας για διάφορα χρονικά βήματα Δt =0.1 s, Δt =0.5 s, Δt =1 s, Δt =2 s και Δt =5 s.



Σχήμα 4-24 Σύγκλιση του πυκνομετρικών προφίλ για διάφορα χρονικά βήματα Δt =0.1, Δt =0.5 s, Δt =1 s, Δt =2 s και Δt =5 s για h/H=0.333, 0.5 και 0.666.

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι οι καμπύλες παρουσιάζουν την μέγιστη απόκλιση για μεγάλους χρόνους τ=t/T_j. Αυτό συμβαίνει λόγω της μετάδοσης του σφάλματος κατά την διαδικασία της ολοκληρώσεως. Το σχετικό σφάλμα για κάθε χρονικό βήμα προστίθεται στο επόμενο και ούτω καθ' εξής. Το διάγραμμα του Σχήματος 4-25 προέκυψε από την επίλυση μιας απλής φλέβας με R_0 =0. Η σύγκριση της με την θεωρητική καμπύλη υποδεικνύει ότι η μεταβολή του σφάλματος αυξάνεται με τον χρόνο.

Ανάλογο είναι το φαινόμενο και στην περίπτωση των τυρβωδών ανωστικών φλεβών ενώ στην περίπτωση των πλουμίων η σύγκλιση επιτυγχάνεται με μεγαλύτερα χρονικά βήματα (Δt=2 ή και Δt=3).



Σχήμα 4-25 Μεταβολή του σχετικού σφάλματος κατά το υπολογισμό της καμπύλης καθόδου της διεπιφάνειας για Ro=0.

4.4 Εφαρμογές

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η θεωρία του «filling box» βρίσκει εφαρμογή σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων μηχανικού. Χαρακτηριστικά παραδείγματα των εφαρμογών αυτών αποτελούν τα εξής:

- i. Κλιματισμός κλειστού χώρου μέσα από μεμονωμένη πηγή «θερμού» ή «ψυχρού» αέρα.
- ii. Χλωρίωση δεξαμενής ύδατος από μεμονωμένη πηγή στο πυθμένα της δεξαμενής
- Εισαγωγή καταλύτη (agent) παρόμοιας πυκνότητας σε δεξαμενή υγρού φυσικού αερίου (LNG)

Για την παρουσίαση των εφαρμογών του υπολογιστικού μοντέλου θα αναπτύξουμε την περίπτωση (ii) καθώς αποτελεί συχνή πρακτική στο επάγγελμα του πολιτικού μηχανικού.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια ορθογώνια δεξαμενή μήκους 4 m πλάτους 4 m και ύψους 6 m. Η δεξαμενή είναι γεμάτη με γλυκό νερό θερμοκρασίας 15 °C. Για την χλωρίωση του ύδατος της δεξαμενής υπάρχει οπή στο κέντρο του πυθμένα η οποία τροφοδοτεί την δεξαμενή με την οξειδωτική ουσία. Από την κυκλική οπή εκτοξεύεται κατακόρυφα χλωριωμένο νερό το οποίο αντλείται από τη δεξαμενή (βλέπε), ενώ η ποσότητα της οξειδωτικής ουσίας που προστίθεται είναι 200 μονάδες ανά λίτρο νερού (μgr/L), χωρίς να επηρεάζει ουσιαστικά τον όγκο νερού της δεξαμενής. Η θερμοκρασία του νερού της φλέβας είναι 20 °C με αποτέλεσμα να δημιουργείται σταθερή στρωματοποίηση ανάμεσα στο αναμειγμένο νερό και το νερό της δεξαμενής. Για παροχή αντλίας 10 l/s και διαμέτρους οπής 5 cm, 15 cm και 30 cm ζητείται να υπολογίσετε:

- 1. Το χρόνο που απαιτείται ώστε η διεπιφάνεια να φτάσει σε απόσταση 1 m πάνω από την οπή
- Η πυκνομετρικές κατανομές του περιβάλλοντος ρευστού ανά 5 λεπτά και μέχρι η διεπιφάνεια να φτάσει σε απόσταση 1 m από την οπή.

Οι αρχικές παράμετροι (συνθήκες) για τους υπολογισμούς φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Με βάση τον αρχικό αριθμό Richardson, η φλέβα διαμέτρου 5 cm πρακτικά θα έχει συμπεριφορά απλής φλέβας, αυτή διαμέτρου 15 cm συμπεριφορά ανωστικής φλέβας, ενώ αυτή διαμέτρου 30 cm θα συμπεριφέρεται σαν πλούμιο.

Q	D	To	Та	ρ ₀	ρ_a	W	М	go'	В	Ro	Ζ
m ³ /s	m	°C	°C	kg/m3	kg/m3	m/s	m^4/s^2	m/s^2	m^4/s^3		m
0.01	0.05	20	15	998.2	999.1	5.09	0.0509	0.0092	9.18E-05	0.0040	0.164
0.01	0.15	20	15	998.2	999.1	0.57	0.0057	0.0092	9.18E-05	0.0617	0.492
0.01	0.3	20	15	998.2	999.1	0.14	0.0014	0.0092	9.18E-05	0.349	0.984

Πίνακας 5 Αρχικές συνθήκες φλεβών για την αριθμητική επίλυση της εφαρμογής



Εικόνα 4 Κατακόρυφη τομή της δεξαμενής η οποία περνά από το κέντρο της κατακόρυφης οπής. Η κατακόρυφη οπή βρίσκεται στον πυθμένα ενώ ένας δεύτερος σωλήνας χρησιμοποιείται για να επανακυκλοφορεί το μη αναμεμιγμένο νερό.

<u>Απάντηση:</u>

Για την επίλυση της παραπάνω εφαρμογής υποθέτουμε ότι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του περιβάλλοντος ρευστού και του ρευστού της φλέβας είναι αρκετά μικρή ώστε να δημιουργούνται μικρές πυκνομετρικές διαφορές. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη διατήρηση της αρχικής ειδικής άνωσης, δεδομένου ότι ο συντελεστής θερμικής διαστολής του νερού μένει πρακτικά αμετάβλητος (Papanicolaou & Kokkalis, 2008). Η πυκνότητα του νερού σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας δίδεται από τη σχέση

 $\rho(T) = -0.0041 T^2 - 0.0435 T + 1000.7$

για 10 °C < T <40 °C, όπου T σε °C και ρ σε kg/m³.έχοντας υπολογίσει τις πυκνότητες μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες του αλγορίθμου οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω στην μορφή πίνακα.



Σχήμα 4-26 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για φλέβα διαμέτρου 5 cm. (Ro=0.00396)



Σχήμα 4-27 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για φλέβα διαμέτρου 15 cm. (Ro=0.0617)



Σχήμα 4-28 Καμπύλη καθόδου της διεπιφάνειας για φλέβα διαμέτρου 30 cm (Ro=0.3492)

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτει ότι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να φτάσει η διεπιφάνεια σε απόσταση 1 m από την πηγή αυξάνεται όσο αυξάνεται η διάμετρος της οπής. Συγκεκριμένα για φλέβες διαμέτρων 5, 15 και 30 cm οι αντίστοιχοι χρόνοι που απαιτούνται για να φτάσει η διεπιφάνεια σε απόσταση 1 m από τον πυθμένα είναι 7.72, 21.9 και 36 min αντίστοιχα.

Δεδομένου ότι η αρχική ροή άνωσης είναι σταθερή για τις τρεις περιπτώσεις, η ανάμιξη εντός της δεξαμενής θα καθοριστεί από την αρχική ποσότητα κίνησης M της φλέβας. Παρακάτω δίδονται τα διαγράμματα κατανομής της συγκέντρωσης καθ' ύψος της δεξαμενής σε διάφορες χρονικές στιγμές.



Σχήμα 4-29 Πυκνομετρική κατανομή για D=5cm με αρχική συγκέντρωση φλέβας C=200μgr/L. (R_0 =0.00396)



Σχήμα 4-30 Πυκνομετρική κατανομή για D=15cm με αρχική συγκέντρωση φλέβας C=200μgr/L. (R_0 =0.0617)



Σχήμα 4-31 Πυκνομετρική κατανομή για D=30cm με αρχική συγκέντρωση φλέβας C=200μgr/L. (R₀=0.3492)



Σχήμα 4-32 Σύγκριση των πυκνομετρικών κατανομών για τις τρείς περιπτώσεις D=5,15 και 30 cm για ίσους χρόνους t=7.73 min

Από τα πυκνομετρικά προφίλ των παραπάνω διαγραμμάτων προκύπτει ότι η ταχύτητα καθόδου της διεπιφάνειας είναι συνάρτηση του αρχικού αριθμού Richardson. Επίσης

είναι προφανές ότι (1) η περιοχή ανάμιξης για τον ίδιο χρόνο μιας απλής φλέβας έχει μεγαλύτερο βάθος από αυτή ενός πλουμίου όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-32, (2) όταν η διεπιφάνεια βρίσκεται σε συγκεκριμένη απόσταση από τον πυθμένα, η συγκέντρωση του οξειδωτικού είναι πολύ μεγαλύτερη στην περίπτωση του πλουμίου σε σχέση με την απλή φλέβα (βλ. διαγράμματα Σχήματος 4-33).



Σχήμα 4-33 Σύγκριση των πυκνομετρικών κατανομών για τις τρεις περιπτώσεις D=5,15 και 30 cm όταν η διεπιφάνεια βρίσκεται σε απόσταση 1 m από τον πυθμένα.

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας δημιουργήθηκε ένα υπολογιστικό προσομοίωμα για την περιγραφή της ανάμιξης σε περιορισμένο αποδέκτη με κατακόρυφη ανωστική φλέβα (filling box problem). Μελετήθηκαν κυκλικές κατακόρυφες ανωστικές φλέβες σε πυκνομετρικά ομογενή αποδέκτη . Το μοντέλο υπολογίζει (1) την ταχύτητα καθόδου της διεπιφάνειας ανάμεσα στην ανώτερη πυκνομετρικά στρωματωμένη περιοχή ανάμειξης και την κατώτερη ομογενή πυκνομετρικά περιοχή σαν συνάρτηση του χρόνου και (2) την μεταβολή της πυκνομετρικής στρωμάτωσης στην ανώτερη στρώση του αποδέκτη, μέχρι η διεπιφάνεια να φτάσει σε μικρή απόσταση από την «πηγή». Ο αλγόριθμος μπορεί να περιγράψει την ροή κάθε τύπου κυκλικής κατακόρυφης φλέβας ανεξάρτητα από τον αρχικό αριθμό Richardson R_o , καθώς στηρίζεται στην γενικευμένη θεωρία των List & Imberger (1973).

Ο αλγόριθμος βασίστηκε στην διακριτοποίηση που προτείνει ο Germeles (1975), ενώ επιλύει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν την ροή μιας τυρβώδους ανωστικής φλέβας με την παραδοχή του συντελεστή συμπαράσυρσης. Το σύστημα επιλύεται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξεως.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από μια σειρά επιλύσεων με διαφορετικές αρχικές συνθήκες για αρχικό αριθμό Richardson από πολύ μικρό $R_o \rightarrow 0$ (απλή φλέβα) μέχρι τον οριακό $R_p \approx 0.63$ (πλούμιο), συγκρίνονται τόσο με την θεωρία όσο και με πειραματικές μετρήσεις. Η ταχύτητα καθόδου της διεπιφάνειας συνάδει με τα πειραματικά δεδομένα τόσο για απλές και για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες όσο και για πλούμια. Στην περίπτωση των πλουμίων παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις από τις αντίστοιχες θεωρητικές καμπύλες ενώ στα πειραματικά δεδομένα παρατηρούνται αποκλίσεις της τάξεως του 5 %, που οφείλονται κυρίως στο ότι ο αρχικός αριθμός Richardson είναι μικρότερος του $R_p \approx 0.63$. Από την άλλη μεριά τα πυκνομετρικά προφίλ δείχνουν να είναι συμβατά με τα περιορισμένα πειραματικά αποτελέσματα. Ωστόσο ο αριθμός των πειραμάτων που υλοποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας είναι περιορισμένος και δεν είναι δυνατόν να έχει αποδεικτική ισχύ για όλες τις περιπτώσεις των φλεβών.

Σύμφωνα λοιπόν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω επιλύσεις καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα για τον μηχανισμό του «filling box»

 Η διεπιφάνεια που σχηματίζεται μεταξύ της ανώτερης και της κατώτερης περιοχής κατέρχεται με τον χρόνο. Η ταχύτητα καθόδου είναι μεγαλύτερη σε μια απλή φλέβα και γενικότερα αυξάνεται για φλέβες με μικρότερους αρχικούς αριθμούς Richardson. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών είναι συγκρίσιμα με αυτά των μετρήσεων (Παππάς, 2012) με LIF.

- 2. Η θέση της διεπιφάνειας καθώς κατέρχεται συγκλίνει ασυμπτωτικά προς την θέση της «πηγής» της φλέβας. Πρακτικά θεωρούμε ότι σε απόσταση 5D (D είναι ή διάμετρος της οπής) από την «πηγή» η διεπιφάνεια βρίσκεται αρκετά κοντά στην «πηγή».
- 3. Στην ανώτερη περιοχή του αποδέκτη λόγω ανάμιξης δημιουργείται πυκνομετρική στρωμάτωση η οποία μεταβάλλεται με τον χρόνο. Οι πυκνομετρικές κατανομές εμφανίζουν ένα πυκνομετρικό «σκαλί» Δρ στην θέση της διεπιφάνειας. Το πυκνομετρικό αυτό «σκαλί» δεν μεταβάλλεται καθώς η διεπιφάνεια κατέρχεται. Η τιμή του είναι σταθερή και ισούται με την διαφορά πυκνότητας μεταξύ της πρώτης στρώσης η οποία σχηματίστηκε στην θέση της οροφής του αποδέκτη και του περιβάλλοντος ρευστού. Επίσης, η πυκνότητα σε μια τυχαία θέση του περιβάλλοντος ρευστού της ανώτερης περιοχής, εκεί δηλαδή όπου υφίσταται η πυκνομετρική στρωμάτωση, αυξάνεται σχεδόν γραμμικά με τον χρόνο..
- 4. Τα χαρακτηριστικά της ροής της φλέβας, δηλαδή η τοπική ειδική παροχή $\mu(z)$, η ειδική ορμή m(z) και η ειδική άνωση $\beta(z)$ μεταβάλλονται με τον χρόνο μέχρι η διεπιφάνεια να φτάσει πρακτικά στην θέση της «πηγής». Η ειδική παροχή, η ειδική ορμή και η ειδική άνωση μεταβάλλονται με τον χρόνο μονάχα στην ανώτερη περιοχή ανάμιζης, ενώ αντίθετα στην κατώτερη ομογενή πυκνομετρικά περιοχή δεν παρουσιάζουν κάποια μεταβολή. Για παράδειγμα, η τοπική ειδική άνωση β(z) η οποία αρχικά έχει σταθερή τιμή ίση με την αρχική άνωση Β, θα εμφανίσει σε χρόνο $t_1 \neq 0$ μια απότομη μεταβολή στην θέση της διεπιφάνειας. Στη συνέχεια μειώνεται γραμμικά με το ύψος και τέλος στη θέση της οροφής μηδενίζεται. Η κατανομή της ειδικής άνωσης καθ' ύψος εμφανίζει παρόμοια μορφολογία για χρονική στιγμή $t_2 > t_1$ ωστόσο σε τυχαία θέση z θα ισχύει ότι $\beta(z, t_2) < \beta(z, t_1)$. Όταν η διεπιφάνεια σταματήσει πρακτικά να κατέρχεται η ροή της φλέβας στην περιοχή της.
- 5. Ο τοπικός αριθμός Richardson εξαρτάται απόλυτα από τις τοπικές παραμέτρους της ροής της φλέβας και συνεπώς μεταβάλλεται και αυτός με τον χρόνο μέσα στην ανώτερη περιοχή ανάμιξης. Συγκεκριμένα, καθώς η διεπιφάνεια κατέρχεται ο αριθμός Richardson μειώνεται με το ύψος ενώ εμφανίζει απότομη μεταβολή της τιμής του στην περιοχή της διεπιφάνειας.
- 6. Τέλος, ο συντελεστής συμπαράσυρσης ο οποίος εξαρτάται άμεσα από τον τοπικό αριθμό Richardson της φλέβας μεταβάλλεται και αυτός με τον χρόνο. Καθώς ο αριθμός Richardson μειώνεται καθ' ύψος, μειώνεται και ο συντελεστής συμπαράσυρσης. Ακόμη και στην περίπτωση των πλουμίων, ο συντελεστής συμπαράσυρσης δεν παραμένει σταθερός καθ' ύψος του αποδέκτη. Αντίθετα,

μειώνεται σημαντικά όταν η φλέβα εισέρχεται στην ανώτερη περιοχή ανάμιξης και στο ύψος της οροφής η τιμή του προσεγγίζει αυτή της απλής φλέβας.

Σε μελλοντική εργασία θα ήταν σκόπιμο να τροποποιηθεί ο αλγόριθμος κατάλληλα ώστε να μπορεί να περιγράφει την ροή μη κατακόρυφων (υπό γωνία ως προς την κατακόρυφο) φλεβών.

Επίσης, το γεγονός ότι ο αποδέκτης έχει αρχικά ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας αποτελεί μια εξιδανικευμένη περίπτωση η οποία σπάνια συμβαίνει στην φύση. Μια αρχική πυκνομετρική κατανομή (πριν την έναρξη ροής της φλέβας) πρέπει να προστεθεί ώστε να μπορέσει να προσομοιωθεί ο μηχανισμός του «filling box» σε φυσικούς αποδέκτες όπως οι λίμνες και οι περιορισμένοι θαλάσσιοι αποδέκτες.

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι ο χρόνος υπολογισμού κατά την επίλυση αποτελεί ένα σημείο το οποίο επιδέχεται βελτίωση. Λύση στο πρόβλημα αυτό μπορεί να δοθεί μέσα από την βελτίωση του αριθμητικού σχήματος. Η διακριτοποίηση του αποδέκτη θα πρέπει να είναι πιο πυκνή στην οροφή της δεξαμενής καθώς η ταχύτητα καθόδου των διεπιφανειών ανάμεσα στις υπολογιστικές στρώσεις είναι αρχικά μεγάλη, ενώ αντιθέτως όταν η διεπιφάνεια φτάσει σε μικρή απόσταση από την πηγή η μεταβολή των χαρακτηριστικών του αποδέκτη γίνεται πολύ αργά. Η πυκνότητα των στρώσεων μπορεί να ελεγχθεί μέσα από την προσαρμογή του χρονικού βήματος (time step adjustment) κατά την διάρκεια της επίλυσης.

Τέλος για την σύγκριση των υπολογισμών με μετρήσεις είναι απαραίτητη η υλοποίηση μεγαλύτερου αριθμού πειραμάτων για όλο το εύρος αρχικών αριθμών Richardson της φλέβας. Εφαρμόζοντας την μέθοδο LIF τα πυκνομετρικά προφίλ του περιβάλλοντος ρευστού σε ολόκληρο το βάθος του αποδέκτη μπορούν να προσδιοριστούν με μεγάλη ακρίβεια, δεδομένου ότι έχει γίνει κατάλληλη ρύθμιση του μετρητικού συστήματος.

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1. Baines W.D., & Turner J.S., 1968., Turbulent buoyant convection from a source in a confined region. J. Fluid Mech., **37**, 51-80.
- Bolster, D.T. and Linden, P.F. 2007. Contaminants in ventilated filling boxes J. Fluid Mech., 591, 97-116
- 3. Caulfield, C. P. & Woods, A.W., 2002. The mixing in a room by localized finite-mass-flux source of buoyancy. J. Fluid Mech., **471**, 33-50.
- Ferrier, A.J., Funk, D.R., and Roberts, P.J.W. 1993. Application of optical techniques to the study of plumes in stratified fluids. Dyn. Atmos. Oceans 20, 155-183.
- 5. Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N H., 1979. Mixing in inland and coastal waters. Academic Press, New York.
- Germeles, A.E., 1975. Forced plumes and mixing of liquids in tanks. J. Fluid Mech., 71, 601-623
- 7. Hunt, G. R., Cooper, P. & Linden, P. F., 2001. Thermal stratification produced by the plumes and jets in enclosed spaces. Building Environment. **36**, 871-882.
- 8. Kaye, N.B. and Hunt, G.R. 2004. Time-dependent flows in an emptying filling box. J. Fluid Mech., **520**, 135-156
- 9. Kaye, N.B., Flynn, M.R., Cook, M.J. and Ji, Y., 2010. The role of diffusion on the interface thickness in a ventilated filling box. J. Fluid Mech., **652**, 195-205.
- 10. List, EJ & Imberger, J, 1973. Turbulent entrainment in buoyant jets and plumes. ASCE J. Hyd. Div. **99**, HY9, 1461-1474.
- 11. Morton B.R., 1959. Forced Plumes. J. Fluid Mech., 5, 151-163.

- 12. Papanicolaou, P.N., 1984. Mass and momentum transport in a turbulent buoyant vertical axisymmetric jet. Rep. KH-R-46, W.M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Inst. Of Technology, Pasadena, California.
- 13. Papanicolaou, P.N., and Kokkalis, T.J., 2008. Vertical buoyancy preserving and non-preserving fountains in a homogenous calm ambient. Int. J. of Heat and Mass transfer, **51**, 4109-4120
- Papanicolaou P.N. and List E.J.,1987. Statistical and spectral properties of tracer concentration in round buoyant jets. Int. J. Heat Mass Transfer, 30(10), 2057-2071
- 15. Papanicolaou, P.N., and List, E.J., 1988. Investigations of round vertical turbulent buoyant jets. J. Fluid Mech., **195**, 341-391.
- 16. Wong, A.B.D., Griffiths, R.W. 1999. Stratification and convection produced by multiple turbulent plumes. Dynamics of Atmospheres and Oceans, **30**, 101-123.
- 17. Worster, M.G. & Huppert, H.E., 1983. Time-dependent density profiles in a filling box. J. Fluid Mech., **132**, 457-466.
- 18. Maidment DR. Handbook of Hydrology. New York: McGraw-Hill; 1993

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κωτσοβίνος, Ν. Αγγελίδης, Π., 2008. Υδραυλική Περιβάλλοντος ΤΟΜΟΣ 1, Εκδόσεις Σπανίδη.
- Νουτσόπουλος, Γ. Χριστοδούλου, Γ.,1996. Μαθήματα Μηχανικής Των Ρευστών, Πανεπιστημικές Εκδόσεις ΕΜΠ.
- Παπανικολάου, Π., 2006. Σημειώσεις Πειραματικής Υδραυλικής, Πανεπιστημιακές εκδόσεις, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών.
- Παπανικολάου, Π., 2009. Σημειώσεις Τυρβώδεις Ανωστικές φλέβες, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών.
- 5. Παππάς Η., 2012. Πειραματική διερεύνηση ανάμειξης σε ομογενή περιορισμένο ακίνητο με τεχνικές laser. Μεταπτυχιακή Εργασία, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Μηχανική και Προσομοίωση Συστημάτων», Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

6. Σοφιανός, Γ. – Τυχόπουλος, Ε., 2005. Αριθμητική Ανάλυση, Εκδόσεις Σταμούλης

7 ПАРАРТНМА А

-

7.1 Η μέθοδος Runge-Kutta 4^{ης} τάξης για συστήματα

Ένα σύστημα m εξισώσεων πρώτης τάξης με αρχικές τιμές, έχει την εξής μορφή

$$\frac{dU_{1}}{dx} = f_{1}(x, U_{1}, U_{2}, ..., U_{m})$$

$$\frac{dU_{2}}{dx} = f_{2}(x, U_{1}, U_{2}, ..., U_{m})$$

$$\vdots$$

$$\frac{dU_{m}}{dx} = f_{m}(x, U_{1}, U_{2}, ..., U_{m})$$
(7-1)

Για $a \le x \le b$ και με αρχικές συνθήκες

$$U_1(a) = a_1, U_2(a) = a_2, \dots, U_m(a) = a_m$$
 (7-2)

Η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης για συστήματα αποτελεί μια γενίκευσης την επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Η μέθοδος Runge-Kutta για προβλήματα αρχικών τιμών, που δίνεται από τις σχέσεις

$$y(a) = y_0$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

yia *i*=0, 1, 2,...,*n*-1

μπορεί να γενικευτεί με τον τρόπο που ακολουθεί.

Έστω ο ακέραιος n > 0 και h = (b - a)/n. Διαμερίζουμε το διάστημα [a, b] σε n υποδιαστήματα με τα σημεία

$$x_j = a + jh$$

Έστω $w_{i,j}$ η προσέγγιση της $U_i(x_j)$ για j = 1, 2, ..., n και i = 1, 2, ..., m. Δηλαδή, η $w_{i,j}$ θα προσεγγίζει την λύση $U_i(x)$ του (7-1) στον j –στο σημείο x_j . Για τις αρχικές συνθήκες θέτουμε

$$w_{1,0} = a_1, w_{2,0} = a_2, \dots w_{m,0} = a_m$$

Αν υποθέσουμε ότι, οι τιμές των $w_{1,j}$, $w_{2,j}$, ..., $w_{m,j}$, έχουν υπολογιστεί, τότε υπολογίζουμε και τις τιμές $w_{1,j+1}$, $w_{2,j+1}$, ..., $w_{m,j+1}$

$$\begin{split} k_{1,i} &= hf_i \left(x_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m,j} \right), i=1, 2, \dots, m \\ k_{2,i} &= hf_i \left(x_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m} \right), i=1, 2, \dots, m \\ k_{3,i} &= hf_i \left(x_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m} \right), i=1, 2, \dots, m \\ k_{4,i} &= hf_i \left(x_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \dots, w_{m,j} + k_{3,m} \right), i=1, 2, \dots, m \\ Omóre$$

$$w_{1,j+1} = w_{1,j} + \frac{1}{6} \left[k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i} \right]$$

7.2 Πηγαίος Κώδικας ΜΑΤLAB

Με την χρήση του λογισμικού MATLAB κατασκευάστηκε ο πηγαίος κώδικας ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική προσομοίωση. Οι υπορουτίνες κατασκευάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν με την μορφή συναρτήσεων (functions).

Ο Βασικός Αλγόριθμος (Κύριος)

```
% Filling Box Simulation (main.m)
% Program for the Analysis of the behaviour of a fluid entrained
% into a filling box
8 _____
% v1.00, December 2011
% (c) Copyright 2011 Georgios V. Deskos. All rights reserved
% email: gdeskosv@yahoo.gr
% School of Civil Engineering, National Technical University of
% Athens
∞ _____
% Files that belong to the program:
% 1. main.m (this file)
% 2. Qfirstfront.m
% 3. Mfirstfront.m
% 4. Ostratified.m
% 5. Mstratified.m
% 6. Bstratifier.m
% 7. Runge.m
% Start main program
clear %Clear memory (workspace)
clc %Clear command window
format long; %Show results with many decimals
% Get the initial Flow values
D=input('Give the nozzle diameter in cm : ');
Q=input('Give the initial flux in cm3/s : ');
g_=input('Give the buoyant accelaration : ');
dt=input('Give the time step in sec : ');
% Get the Filling box caracteristics
H=input('Give the height of the tank in cm : ');
b=input('Give the depth of the tank in cm : ');
tic %Initialize timer for analysis
% Symbols and Values | Units | Description
                     _____ | _____
                                            _|__
8
U=4*Q/(pi()*D^2); % cm/s | Initial velocity

M=U*Q; % cm4/s2 |

g=981; % cm/s2 | Gravity
accelaration
rhoamb=1; % gr/cm3
rhotr=(g-g_)/g*rhoamb; % gr/cm3
drho0=-rhoamb+rhotr; % gr/cm3
B=g_*Q; % cm4/s3
                                       | Ambient Density
| Tracer Density

      B=g_*Q;
      % cm

      1Q=Q/M^0.5;
      % cm

      1M=M^(3/4)/B^0.5;
      % cm

                                         Buoyancy
                                          | lQ meter scale
                                     | 1M meter scale
| Richardson Number
                       %_____
```

§_____

% Constant Numbers

§	-		
% Symbols and Values %	Units		Description
Ro=Ri;	00	_	Initial Richardson Number
Rp=0.63;	00	-	Plume Richardson Number
RoRp=Ro/Rp;	00	-	
Cp=0.27;	010	-	
lamda=1.02;	00	-	
<pre>ajet=0.0545*sqrt(2);</pre>	olo	-	jet entr.coefficient
aplume=0.0875*sqrt(2); %	-	plume entr. coefficient
Q			

```
% Calculating the T ( Time Scale )
<u>%_____</u>
T1 = A + H/Q;
Tj = A/(Cp*M^{(1/2)});
Tp=9.57*A*B^(-1/3)*H^(-2/3);
T2=M/B;
if Ro > 0.4
   T=Tp
   v=4.0
else
   Ro<0.4
   T=Tj
   v=3.0
end
temp = round(v*T/dt)
% Defining the Matrices
%_____
xQ = zeros(temp,temp); % Entrained unknown Flux hence xQ
xM= zeros(temp,temp); % Entrained unknown Flux hence xM
xB=zeros(temp,temp); % Entrained unknown Flux hence xB
dz = zeros(temp,temp); % Stair steps at each time step
rho= zeros(temp,temp); % Density at each layer and time step
drho=zeros(temp,temp);% Density difference at each layer and time step
Ri=zeros(temp,temp); % Richardson Number
a=zeros(temp,temp); % Entrainment Coefficient
z=zeros(temp,temp);
% Calculating the entrainment characteristics xQ, xM, xB, rho
٩_____
  for i=1:temp;
     for j=1:i;
     if j == 1;
           xQ(i,j)=Qfirstfront(i,H,dz,zo,Ro,Rp,Q);
           xM(i,j)=Mfirstfront(i,H,dz,zo,Ro,Rp,M);
```

```
78
```

xB(i,j)=B;

```
else
             xQ(i,j)=Qstratified(i,j,dz,xQ,xM,xB,rho,a,rhotr,rhoamb);
             xM(i,j)=Mstratified(i,j,dz,xQ,xM,xB,rho,a,rhotr,rhoamb);
             xB(i,j)=Bstratified(i,j,dz,xQ,xM,xB,rho,a,rhotr,rhoamb);
      end
8_____
%Calculating dz
 if i==j;
         dz(i,j) = dt * xQ(i,j) / A;
 elseif i,j==1; %#ok<EQEFF>
    dz(i,j) = dt * xQ(i,j) / A;
 else
     dz(i, j-1) = (xQ(i, j) - xQ(i, j-1)) * dt/A + dz(i-1, j-1);
 end
2___
% Calculating drho , rho
     drho(1,1) = drho0 * Q/xQ(1,1);
       if j==i;
        drho(1,1) = drho0 \times Q \times Q(1,1);
            if j>1;
                 drho(i,j) = -rhoamb/g*xB(i,j)/xQ(i,j);
            end
       else
       drho(i, j) = 0;
       end
       if j == i;
             rho(1,1) = drho(1,1) + rhoamb;
           if j>1;
              rho(i, j) = drho(i, j) + rho(i-1, j-1);
           end
       else
         rho(i,j) = rho(i-1,j);
       end
≗_
% Richardson Number in every step
  Ri(i,j)=xQ(i,j)*xB(i,j)^{(1/2)}/xM(i,j)^{(5/4)};
 if Ri(i,j)> 0.63;
     Ri(i,j)=0.63;
 else
Ri(i,j)=xQ(i,j)*xB(i,j)^{(1/2)}xM(i,j)^{(5/4)};
end
8----
% Entrainment coefficient
if i==1;
    a(i,j)=0;
else
a(i,j)=ajet-(ajet-aplume)*(Ri(i-1,j)/Rp)^(2);
end
8____
% Calculating the z
sum=0;
    for n=1:i+1;
        if n==1;
             sum=0;
        else
    sum=sum+dz(i, n-1);
        end
        z(i,j) = sum;
    end
```

```
end
    for k=1:i;
    sum=0;
    for l=1:k;
         sum=sum+dz(k,l);
    end
    h(i)=H-sum;
   end
  if h(i) < 0.1*H;
  break
  end
   m=i-1
  end
%Resizing the matrices
xQ = xQ(1:m, 1:m);
xM= xM(1:m,1:m); % Entrained unknown Flux hence xM
xB=xB(1:m,1:m); % Entrained unknown Flux hence xB
dz = dz(1:m, 1:m); % Stair steps at each time step
rho= rho(1:m,1:m); % Density at each layer and time step
drho=drho(1:m,1:m); % Density difference at each layer and time step
Ri=Ri(1:m,1:m); % Richardson Number
a=a(1:m,1:m); % Entrainment Coefficient
% Plot the Results
8_____
% Defining the h
for i=1:m;
    sum=0;
    for j=1:i;
         sum=sum+dz(i,j);
    end
        h(i)=H-sum;
end
 for i=1:m+1;
 if i==1
      y(i)=1;
  else
y(i)=h(i)/H;
  end
 end
x = (0:dt:m*dt)'/T;
subplot(1,3,1)
p=plot(x,y)
set(p, 'Color', 'blue', 'LineWidth', 2);
 plottitle=' Normalized interface elevation ';
 if T==Tj
     labelx='t/Tj';
 elseif T==Tp
     labelx='t/Tp';
 else
```

```
labelx='t*B/M';
 end
 labely='h/H' ;
 xlabel(labelx)
 ylabel(labely)
 title(plottitle)
 grid on
 hold off
% Non Dimensionalized Instantaneous Density Profiles
§_____
zeta=zeros(m,m+2);
  for i=1:m;
     for j=1:i;
if j==1
zeta(i,j)=0;
elseif j == 2
zeta(i,2)=h(i)/H;
else
zeta(i,j)=(z(i,j)+h(i))/H;
end
     end
 end
delta=zeros(m,m+2);
  for i=1:m;
     for j=1:i;
if j==1
delta(i, j) = 0;
elseif j==2
delta(i, 2) = 0;
else
delta(i,j)=(rhoamb-rho(i,j))/(rhoamb-rhotr);
end
     end
 end
2___
                     _____
% Plot ambient densities
x1=delta(round(0.1*m),1:round(0.1*m))';
y1=zeta(round(0.1*m),1:round(0.1*m))';
x2=delta(round(0.2*m),1:round(0.2*m))';
y2=zeta(round(0.2*m),1:round(0.2*m))';
x3=delta(round(0.3*m),1:round(0.3*m))';
y3=zeta(round(0.3*m),1:round(0.3*m))';
x4=delta(round(0.4*m),1:round(0.4*m))';
y4=zeta(round(0.4*m),1:round(0.4*m))';
x5=delta(round(0.5*m),1:round(0.5*m))';
y5=zeta(round(0.5*m),1:round(0.5*m))';
x6=delta(round(0.6*m),1:round(0.6*m))';
y6=zeta(round(0.6*m),1:round(0.6*m))';
x7=delta(round(0.7*m),1:round(0.7*m))';
y7=zeta(round(0.7*m),1:round(0.7*m))';
x8=delta(round(0.8*m),1:round(0.8*m))';
y8=zeta(round(0.8*m),1:round(0.8*m))';
```

```
81
```

x9=delta(round(0.9*m),1:round(0.9*m))';

```
y9=zeta(round(0.9*m),1:round(0.9*m))';
x10=delta(m, 1:m)';
y10=zeta(m,1:m)';
subplot(1,3,2)
pl=stairs(x1,y1);
set(p1,'Color','red','LineWidth',2);
hold on
p2=stairs(x2,y2);
set(p2,'Color','green','LineWidth',2);
hold on
p3=stairs(x3,y3);
set(p3,'Color','magenta','LineWidth',2);
hold on
p4=stairs(x4,y4);
set(p4, 'Color', 'blue', 'LineWidth', 2);
hold on
p5=stairs(x5,y5);
set(p5,'Color','Cyan','LineWidth',2);
hold on
p6=stairs(x6,y6);
set(p6, 'Color', 'Yellow', 'LineWidth', 2);
hold on
p7=stairs(x7,y7);
set(p7,'Color','Green','LineWidth',2);
hold on
p8=stairs(x8,y8);
set(p8, 'Color', 'Black', 'LineWidth', 2);
hold on
p9=stairs(x9, y9);
set(p9,'Color','red','LineWidth',2);
hold on
 p10=stairs(x10, v10);
set(p10, 'Color', 'blue', 'LineWidth', 2);
hold on
```

```
plottitle=' Non-dimensional Instantaneous density profiles ';
labelx='\delta';
labely='\zeta' ;
xlabel(labelx)
ylabel(labely)
title(plottitle)
grid on
```

```
toc %terminate timer and report elapsed time
```

Υπορουτίνες FirstFront

• **<u>Qfirstfront</u>**

```
function xQ=Qfirstfront(I, H, dz, zo, Ro, Rp,Q)
sum = 0;
if I>1;
    for k=1:I-1;
        sum = sum + dz(I-1,k);
    end
end
z=H - sum;
xQ=Q*z/zo*(1+(Ro/Rp)^2*((z/zo)^2-1))^(1/3);
```

• <u>Mfirstfront</u>

```
function xM=Mfirstfront(I, H, dz, zo, Ro, Rp,M)
sum = 0;
if I>1;
    for k=1:I-1
        sum = sum + dz(I-1,k);
    end
end
z=H - sum;
xM=M*(1+(Ro/Rp)^2*((z/zo)^2-1))^(2/3);
```

Υπορουτίνες Stratified

• **Ostratified**

```
function y=Qstratified(i,j,dz,xQ,xM,xB,rho,a,rhotr,rhoamb)
% Boundary values for the Runge-Kutta
Qo=xQ(i,j-1);
Mo=xM(i,j-1);
Bo=xB(i,j-1);
% Auxiliary Function
if j==2
    h=dz(1,1);
    dD_dz=(rho(1,1)-rhoamb)/(h*rhoamb);
    else
        h=dz(i-1,j-1);
dD_dz= (rho(i-1,j-1)-rho(i-1,j-2))/(h* rho(i-1,j-2));
end
%Entrainment coefficient
a=a(i-1,j-1);
```

```
f=runge(Qo,Mo,Bo,dD_dz,h,a);
y=f(1);
```

• <u>Mstratified</u>

```
function y=Mstratified(i,j,dz,xQ,xM,xB,rho,a,rhotr,rhoamb)
% Boundary values for the Runge-Kutta
Qo=xQ(i,j-1);
Mo=xM(i,j-1);
Bo=xB(i,j-1);
```

```
% Auxiliary Function
if j==2
    h=dz(1,1);
    dD_dz=(rho(1,1)-rhoamb)/(h*rhoamb);
    else
     h=dz(i-1,j-1);
dD_dz= (rho(i-1,j-1)-rho(i-1,j-2))/(h* rho(i-1,j-2));
end
%Entrainment coefficient
a=a(i-1,j-1);
```

f=runge(Qo,Mo,Bo,dD_dz,h,a);
y=f(2);

<u>Bstratified</u>

```
function y=Bstratified(i,j,dz,xQ,xM,xB,rho,a,rhotr,rhoamb)
% Boundary values for the Runge-Kutta
Qo=xQ(i,j-1);
Mo=xM(i,j-1);
Bo=xB(i,j-1);
% Auxiliary Function
if j==2
    h=dz(1,1);
    dD_dz=(rho(1,1)-rhoamb)/(h*rhoamb);
    else
        h=dz(i-1,j-1);
dD_dz= (rho(i-1,j-1)-rho(i-1,j-2))/(h* rho(i-1,j-2));
end
%Entrainment coefficient
a=a(i-1,j-1);
```

```
f=runge(Qo,Mo,Bo,dD_dz,h,a);
y=f(3);
```

<u>Υπορουτίνα Runge</u>

```
function y=runge(Qo,Mo,Bo,dD_dz,h,a)
g = 981;
f1=@(m) 2*sqrt(pi())*a*abs(m)^0.5;
f2=@(q,m,b) q*b/m;
f3=@(q) -g*abs(dD_dz)*q;
k11 = h*f1(Mo);
k12 = h*f2(Qo,Mo,Bo);
k13 = h*f3(Qo);
k21=h*f1(Mo+0.5*k12);
k22=h*f2(Qo+0.5*k11,Mo+0.5*k12,Bo+0.5*k13);
k23=h*f3(Qo+0.5*k11);
k31=h*f1(Mo+0.5*k22);
k32=h*f2(Qo+0.5*k21,Mo+0.5*k22,Bo+0.5*k23);
```

```
k33=h*f3(Qo+0.5*k21);
k41 = h*f1(Mo+k32);
k42 = h*f2(Qo+k31,Mo+k32,Bo+k33);
k43 = h*f3(Qo+k31);
w1=Qo + (1/6)*(k11+2*k21+2*k31+k41);
w2=Mo + (1/6)*(k12+2*k22+2*k32+k42);
w3=Bo + (1/6)*(k13+2*k23+2*k33+k43);
y=[ w1 w2 w3 ];
```

8 ПАРАРТНМА В

8.1 Σύνδεση μεταξύ Αλατότητας και Πυκνότητας

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η σχέση μέσω της οποίας υπολογίστηκε η πυκνότητα του νερού της φλέβας. Τόσο η θερμοκρασία όσο και η ποσότητα του άλατος που προστέθηκε επηρεάζουν την πυκνότητα. Επιπλέον δίδεται μια προσεγγιστική σχέση που συνδέει την αλατότητα (g/kg) και την θερμοκρασία (°C) με την πυκνότητα του αλατισμένου νερού της φλέβας (kg/m³).



Σχήμα 8-1 Διάγραμμα συσχέτισης της πυκνότητα του νερού με την αλατότητα και την θερμοκρασία.

Οι προσεγγιστικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή του παραπάνω διαγράμματος είναι οι εξής:

Για την πυκνότητα του νερού που δεν περιέχει αλάτι έχουμε.

$$\rho(T) = -0.0041T^2 - 0.0435T + 1000.7 \tag{8-1}$$

Ενώ για την πυκνότητα του νερού που περιέχει αλάτι έχουμε

$$\rho_s = \rho + AS + BS^{3/2} + CS^2 \tag{8-2}$$

όπου S είναι η αλατότητα σε g άλατος/kg νερού και οι σταθερές A, B και C

 $\mathbf{B} = -5.724 \text{ x } 10^{-3} + 1.0227 \text{ x } 10^{-4} \text{ T} - 1.6546 \text{ x } 10^{-6} \text{ T}^2$

 $C = 4.8314 \times 10^{-4}$

8.2 Φωτογραφίες από την πειραματική διαδικασία

Κατά την πειραματική διαδικασία όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.2.1 η ροή της φλέβας γίνεται κατακόρυφα με φορά προς τα κάτω. Το ρευστό της φλέβας αποτελεί ένα μίγμα νερού, άλατος και ροδαμίνης 6G. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ίδια με αυτά της κατακόρυφης φλέβας με φορά προς τα πάνω.Οι παρακάτω φωτογραφίες αποτελούν μέρος της οπτικοποίησης της ροής για την περίπτωση απλής φλέβας. Η κάμερα υψηλής ακρίβειας η οποία βρίσκεται έναντι της δεξαμενής λαμβάνει 12 φωτογραφίες ανά sec (12 frames/sec). Ο υπολογισμός του χρόνου για το υπολογιστικό μοντέλο ξεκινά την στιγμή όπου η φλέβα θα φτάσει στο κάτω όριο της δεξαμενής. Παρακάτω δίδονται οι εξής φωτογραφίες:

Πίνακας 6 Φωτογραφίες από την πειραματική διαδικασία για απλή φλέβα



t=0 s



t=29 s



t=58 s







t=167 s

t=202 s

Από τις παραπάνω φωτογραφίες παρατηρούμε ότι η θέση της διεπιφάνειας για κάθε χρονική στιγμή γίνεται εύκολα αντιληπτή ακόμη και με γυμνό μάτι. Για να σχεδιάσουμε την καμπύλη ανόδου της διεπιφάνειας υπολογίζουμε το μέσο πάχος h της κάτω (αναμεμιγμένης) περιοχής για κάθε χρονική στιγμή. Εν συνεχεία τοποθετούμε τα διάφορα h σε ένα σύστημα συντεταγμένων με τετμημένη τον χρόνο t. Το διάγραμμα που θα προκύψει αποτελεί την καμπύλη ανόδου. Από την άλλη μεριά τα πυκνομετρικά προφίλ δεν μπορούν να προκύψουν αλλιώς παρά μόνο ύστερα από την ανάλυση των φωτογραφιών με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.