ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μπαρμπουνάκης Σταύρος

Το Θεώρημα Kunen-Martin

ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:

ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Βασίλης Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Βασίλης Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Βασίλειος Κανελλόπουλος, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ, 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ευκαιρία της εκπόνησης της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την οικογένεια μου, τα ορατά και αόρατα μέλη αυτής, κυρίως όμως τον αδερφό μου Θωμά, δήχως την βοήθεια του οποίου δεν θα είχα τον χρόνο να ασχοληθώ με τα μαθηματικά, που αποτελούσαν πάντοτε πηγή έμπνευσης. Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω την ψυχολόγο μου Αθηνά. Τέλος, ευχαριστώ τον καθηγητή μου κύριο Βασίλη Γρηγοριάδη, ο οποίος αφιέρωσε χρόνο και διάθεση, ώστε να αντιλαμβάνομαι καλύτερα τα μαθηματικά και τις ιδέες που κρύβονται μέσα τους.

. . . .

Όνομα Επώνυμο

Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται τα περισσότερα από τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων, καθώς και βασικές έννοιες, όπως αυτές των καλά διατεταγμένων χώρων και διατακτικών αριθμών. Στο δεύτερο κεφάλαιο υπάρχει μία εισαγωγή στους μετρικούς και τοπολογικούς χώρους, καθώς και το πως αυτοί συνδέονται. Στο τρίτο κεφάλαιο υπάρχουν οι εισαγωγικές έννοιες των Πολωνικών χώρων και των δένδρων. Τέλος, το θεώρημα Kunen-Martin για αναλυτικά σύνολα, ένα γνωστό αδημοσίευτο αποτέλεσμα, οι απαραίτητοι ορισμοί για να ξεκαθαριστεί το πλαίσιο εφαρμογής του θεωρήματος, το οποίο μιλά για το μήκος και την πολυπλοκότητα μίας θεμελιώδους σχέσης, σε κάποιο υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου.

Λέξεις Κλειδιά.

Θεώρημα Kunen-Martin

Προδιάταξη

Αναλυτικό σύνολο

Δένδρο

Θεμελιωμένη σχέση

Ημικλίμακα

Abstract

The first chapter discusses most of the axioms of set theory, as well as basic concepts such as well-ordered spaces and ordinal numbers. In the second chapter there is an introduction to metric and topological spaces, and how they are related. In the third chapter there are the introductory concepts of Polish spaces and trees. Finally, the Kunen-Martin theorem for analytic sets, a known unpublished result, the necessary definitions to clarify the framework of application of the theorem, which speaks of the length and complexity of a well-founded relation, to some subset of a Polish space.

Keywords.

Kunen-Martin Theorem

Preorder

Analytic set

Tree

Well-founded relation

Semiscale

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Θεωρία συνόλων και βασικά αποτελέσματα

Θα ξεκινήσουμε με κάποιες θεμελιώδεις έννοιες από την θεωρία συνόλων,ώστε το παρακάτω κείμενο να μπορεί να διαβαστεί αυτοτελώς, χωρίς αναφορές σε άλλες σημειώσεις και βιβλία. Οι παρακάτω ορισμοί και τα σχόλια αυτών θα μας βοηθήσουν στο να έχουμε πιο ξεκάθαρη εικόνα των μετρικών και τοπολογικών χώρων στην συνέχεια και των βασικών τους χαρακτηριστικών. Πρακτικά, τα σύνολα βρίσκονται σε οποιαδήποτε μορφή των καθαρών μαθηματικών.

1.1. Βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων

- **Αξίωμα Έκτασης** ,για κάθε σύνολο Α,Β το γεγονός ότι Α=Β σημαίνει ότι
$$(\forall x)[x \in A \iff x \in B].$$
- **Αξίωμα του κενού συνόλου και του ζεύγους,** δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σύνολο $\emptyset$ το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο και δεχόμαστε επίσης ότι για κάθε x, y υπάρχει το σύνολο $\{x, y\}$ με μοναδικά μέλη τα x,y.
- **Αξίωμα Εξειδίκευσης ή διαχωρισμού** για κάθε σύνολο Α και κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη P, υπάρχει ένα σύνολο B που ικανοποιεί την ισοδυναμία
$$x \in B \iff x \in A \,\&\, P(x).$$
- **Αξίωμα Δυναμοσυνόλου** ,για κάθε σύνολο Α υπάρχει ένα σύνολο Β με μόνα μέλη τα υποσύνολα του Α, δηλαδή $\in B \iff Set(X)\ \&textX \subseteq A.$
- **Αξίωμα Ένωσης**, για κάθε σύνολο Ε, υπάρχει ένα σύνολο Β με μέλη τα μέλη των μελών του Ε, που ικανοποιεί δηλαδή την ισοδυναμία $t \in B \iff (\exists X \in E)[t \in X]$.
- **Αξίωμα Απείρου**. Υπάρχει ένα σύνολο I που περιέχει το κενό σύνολο $\emptyset$ και το μονοσύνολο κάθε μέλους του, δηλαδή
$$\emptyset \in I \,\&\, (\forall x)[x \in I \implies \{x\} \in I.$$
- **Αξίωμα Αντικατάστασης** . Για κάθε οριστικό τελεστή H και κάθε σύνολο Α, υπάρχει σύνολο B ώστε $y \in B \iff \exists x \in A$ με $y = H(x)$. Πρακτικά παίρνουμε ότι το σύνολο Α, μέσω της εικόνας του H είναι σύνολο, αφού $H[A] = \{y \in B : \exists x \in A, y = H(x)\}$ και το τελευταίο κομμάτι αποτελεί οριστική συνθήκη. Το αξίωμα αυτό επάγει στην πραγματικότητα άπειρα αξιώματα, ένα για τον κάθε τελεστή H.

Ορισμός 1.1.1. Δύο σύνολα Α, Β λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία f:$A \to B$,ένα προς ένα και επί και θα συμβολίζουμε με $A \sim B$. Σημειώνουμε πως στον ορισμό αυτό δεν χρησιμοποιούμε το πλήθος των στοιχείων στο κάθε σύνολο,αλλά μας ενδιαφέρει η πλήρης αντιστοίχισή τους.

Ορισμός 1.1.2. Ένα σύνολο Α λέγεται **πεπερασμένο** αν και μόνο αν είναι ισοπληθικό με κάποιο αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών, δηλαδή αν υπάρχει M τέτοιο ώστε $A \sim \{1, 2, ...\}$. Διαφορετικά θα λέμε ότι είναι άπειρο.

Ορισμός 1.1.3. Το Α θα λέγεται **αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο,αλλιώς θα λέγεται υπεραριθμήσιμο.

Ορισμός 1.1.4. Το Α θα λέγεται **άπειρο αριθμήσιμο** αν είναι ισοπληθικό με τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή $A \sim \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.1.5. Αν τα Α,Β είναι αριθμήσιμα σύνολα,τότε το καρτεσιανό τους γινόμενο Α×Β θα είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Ορισμός 1.1.6. Αν μία ακολουθία αριθμήσιμων συνόλων A_n αποτελείται από αριθμήσιμα σύνολα, τότε $\bigcup A_n$ θα είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Θεώρημα 1.1.7. *Θεώρημα Shroder-Bernstein*
Για κάθε δύο σύνολα A,B αν ισχύουν ότι $A \leq_c B$ *και* $B \leq_c A \implies A =_c B$.

1.2. Μερικά Διατεταγμένοι χώροι

Ορισμός 1.2.1. Το ζεύγος (P,$\leq_P$) ονομάζεται **μερικά διατεταγμένος** (partially ordered set) χώρος αν $P \neq \emptyset$ και το $\leq_P$ είναι σχέση μερικής διάταξης, δηλαδή διμελής σχέση που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $x \leq_P x$ (αυτοπαθής)
(2) $x \leq_P y$ και $y \leq_P z \implies x \leq_P z$ (μεταβατική)
(3) $x \leq_P y$ και $y \leq_P x \implies x = y$ (αντισυμμετρική)

Για παράδειγμα όταν σκεφτόμαστε το σύνολο των φυσικών αριθμών ,το σκεφτόμαστε ταυτόχρονα με την διάταξη την οποία έχει. Για εμάς δεν έχει τόσο νόημα το σύνολο $\mathbb{N}$, όσο το ζεύγος ($\mathbb{N}$,<), με < να συμβολίζουμε την συνήθης διάταξη των φυσικών.

Ορισμός 1.2.2. Έστω P ένας μερικά διατεταγμένος χώρος και $A \subseteq P$.

(1) Ένα στοιχείο x_0 λέγεται **άνω φράγμα** (upper bound) του A και το x_0 είναι άνω φράγμα του A, αν για κάθε
$$a \in A \implies a \leq x_0$$
επομένως το x_0, συγκρίνεται με όλα τα στοιχεία του συνόλου μου.
(2) Ένα στοιχείο x_0,λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα** (supremum) του A αν για κάθε $y_0 \in P$ που είναι άνω φράγμα του A, ισχύει ότι $x_0 \leq y_0$ επομένως το στοιχείο y_0 συγκρίνεται με όλα τα άνω φράγματα και αν υπάρχει είναι μοναδικό.
(3) Ένα στοιχείο x_0, λέγεται **μέγιστο** (maximum) του A αν είναι άνω φράγμα του A και $x_0 \in A$. Εδώ φαίνεται η διαφορά μεταξύ του ελάχιστου άνω φράγματος και του μέγιστου του συνόλου. Αν έχω maxA τότε αυτό είναι αυτόματα και supA, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει.
(4) Ένα στοιχείο x_0,λέγεται **μέγιστικό** στοιχείο (maximal) του A αν
$$x_0 \in A$$
και δεν υπάρχει στοιχείο που ''να το ξεπερνά'', δηλαδή $\forall a \in A,$ να μην ισχύει ότι $x_0 < a$. Η έκφραση αυτή χρησιμοποιείται επίτηδες,ώστε να γίνεται αντιληπτό πως $\forall a \in A$ δεν είναι απαραίτητο να συγκρίνονται με το x_0.
(5) Ένα στοιχείο x_0,λέγεται **κάτω φράγμα**(lower bound) του A αν για κάθε
$$a \in A \implies x_0 \leq a$$
, επόμένως το x_0,συγκρίνεται με όλα τα στοιχεία του συνόλου μου.
(6) Ένα στοιχείο x_0,λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα** (infemum) του A αν για κάθε $y_0 \in P$ που είναι κάτω φράγμα του A, ισχύει ότι $y_0 \leq x_0$,επομένως το στοιχείο y_0 συγκρίνεται με όλα τα άνω φράγματα και αν υπάρχει είναι μοναδικό.
(7) Ένα στοιχείο x_0,λέγεται **ελάχιστο**(minemum) του A αν είναι κάτω φράγμα του A και $x_0 \in A$.Εδώ φαίνεται η διαφορά μεταξύ του μέγιστου κάτω φράγματος και του ελάχιστου συνόλου. Αν έχω minA τότε αυτό είναι αυτόματα και infA,ενώ το αντίθετο δεν ισχύει.
(8) Ένα στοιχείο x_0,λέγεται **ελαχιστικό** στοιχείο(minimal) του A αν $x_0 \in A$ και δεν υπάρχει στοιχείο που ''να είναι πίσω''. Η έκφραση αυτή χρησιμοποιείται επίτηδες,ώστε να γίνεται αντιληπτό πως $\forall a \in A$ δεν είναι απαραίτητο να συγκρίνονται με το x_0.

Ορισμός 1.2.3. Το ζεύγος (P,$\leq_P$) λέγεται **ολικά διατεταγμένος**χώρος (ή γραμμικός χώρος) αν εκτός από τις ιδιότητες του ορισμού 1.2.1 ίσχύει επιπλέον ότι:
$$\forall x, y \in P \implies \text{ είτε } x \leq_P y \text{ είτε } y \leq_P x$$
Αυτό σημαίνει πως όλα τα στοιχεία ενός καλά διατεταγμένου χώρου συγκρίνονται και η σχέση $\leq_P$ ονομάζεται πλεόν σχέση ολικής διάταξης στο P.
Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο πως οι έννοιες μεγιστικό και ελαχιστικό που ορίστηκαν στον ορισμό 1.2.2 δεν έχουν νόημα στους ολικά διατεταγμένους χώρους,καθώς όλα τα στοιχεία συγκρίνονται.

Ορισμός 1.2.4. **Μερική συνάρτηση** από το σύνολο A στο σύνολο E ,καλείται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του A που παίρνει τιμές στο E. Συμβολικά:

$$f : A \rightharpoonup E.$$

Σημειώνουμε ότι το σύνολο όλων των μερικών συναρτήσεων:

$$G = \{f \subseteq A \times E : f : A \to E, \text{ όπου f είναι μερική συνάρτηση } \}$$

συνιστά έναν μερικά διατεταγμένο χώρο $(G, \subseteq)$ με την σχέση "$\subseteq$" να περιγράφεται ως εξής:

$$f \subseteq g \implies (\forall x \in A)[x \in domain(f) \implies x \in domain(g) \text{ και } f(x) = g(x)]$$

και έχει ελάχιστο στοιχείο την κενή συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.2.5.
- Η συνάρτηση $f(n) = n - 1, \forall n \neq 0$.
- Η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ με $g(x) = \sqrt{x}$.
- Μία πεπερασμένη ακολουθία $u : \{i \in \mathbb{N} : i < n\} \to X$

Ορισμός 1.2.6. Ένα $S \subseteq P$ με $(P, \leq_P)$ να είναι μερικά διατεταγμένος χώρος είναι **αλυσίδα** (chain) ,αν τα μέλη του S είναι συγκρίσιμα ανά δύο,δηλαδή:

$$(\forall x, y \in S)[x \leq_P y \text{ ή } y \leq_P x].$$

Εδώ ουσιαστικά λέμε πως το S είναι καλά διατεταγμένος χώρος με τον περιορισμό της $\leq_P$ για τα στοιχεία του S.

Ορισμός 1.2.7. Ο χώρος $(P, \leq_P)$ λέγεται **επαγωγικός** (chain complete) ,αν κάθε αλυσίδα στο P έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Ορισμός 1.2.8. Μία απεικόνιση k:$P \to Q$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq_P)$ σε έναν άλλο $(Q, \leq_Q)$ ονομάζεται **μονοτονική** (monotone) αν για όλα τα $x, y \in P$ ισχύει ότι:

$$x \leq_P y \implies k(x) \leq_Q k(y).$$

Ο ορισμός αυτος τροποποιείται σε αυστηρά μονοτονική αν βγάλουμε την ισότητα στην παραπάνω σχέση. Παρατηρούμε ότι οι μονοτονικές συναρτήσεις στέλνουν αλυσίδες σε αλυσίδες,δηλαδή αν S αλυσίδα στον $(P, \leq_P)$,τότε και k(S) αλυσίδα στον $(Q, \leq_Q)$.

Παράδειγμα 1.2.9. Επαγωγικοί χώροι.

- Κάθε δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$.
- Ο χώρος των μερικών συναρτήσεων που ορίστηκε προηγουμένως ως: $(G, \subseteq)$ με την σχέση "$\subseteq$" να περιγράφεται ως εξής:

  $$f \subseteq g \implies (\forall x \in A)[x \in domain(f) \implies x \in domain(g) \text{ και } f(x) = g(x)]$$

  .
- Το σύνολο όλων των αλυσίδων στο P,δηλαδή το

  $$Chains(P) = \{S \subseteq P : S \text{να είναι αλυσίδα}\}$$

  εφοδιασμένος με την σχέση $'' \subseteq''$.

Θεώρημα 1.2.10. *Σταθερού σημείου Bourbaki-Zermelo.*
Θεωρώ τον επαγωγικό χώρο $(P, \leq_P)$ και απεικόνιση $g : P \to P$ με την ιδιότητα:

$$\forall x \in P \; x \leq g(x).$$

*Τότε **η P έχει σταθερό σημείο** ,δηλαδή υπάρχει $x \in P$ με $g(x) = x$. Ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος είναι η παρακάτω:*
*Έστω $(P, \leq_P)$ μερικά διατεταγμένος χώρος, με κάθε **μη κενή** αλυσίδα να έχει ελάχιστο άνω φράγμα.Τότε $\forall a \in P$ και κάθε $g : P \to P$ με την ιδιότητα $x \leq g(x) \forall x \in P$,υπάρχει $x \in P$ τέτοιο ώστε:*

$$a \leq x \text{ και } g(x) = x.$$

Παράδειγμα 1.2.11. Μία απλή εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.
Αν θεωρήσουμε την $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $g(n) = n + 1$ έχουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}\ n < g(n)$, αλλά το $\mathbb{N}$ δεν είναι επαγωγικός χώρος, καθώς οι αριθμήσιμα άπειρες αλυσίδες της μορφής $\{n \in \mathbb{N} : n > k\}$ με το k σταθερό δεν έχουν άνω φράγμα. Όμως θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε από αυτό το εμπόδιο θεωρώντας το σύνολο $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Τότε ο χώρος που έφτιαξα είναι επαγωγικός και ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος. Το σταθερό σημείο εδώ είναι το $+\infty$,επομένως ισχύει ότι:

$$g(+\infty) = +\infty.$$

Ορισμός 1.2.12. Έστω $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ μερικά διατεταγμένοι χώροι. Μία συνάρτηση $t : P \to Q$ θα λέμε ότι **σέβεται τις διατάξεις** αν:

$$\forall x, y \in P(x \leq_P y \iff t(x) \leq_Q t(y)).$$

Σημειώνουμε ακόμα και σε μερικά διατεταγμένους χώρους, αν οι συναρτήσεις σέβονται τις διατάξεις είναι και 1-1. Αυτό το δείχνουμε ως εξής: Έστω $t(x) = t(y) \implies t(x) \leq_Q t(y) \implies x \leq_P y$. Αντίστοιχα παίρνω $y \leq_P x$. και έχω το συμπέρασμα που θέλω,δηλαδή $x = y$.

Ορισμός 1.2.13. Δίνονται δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$. Μία συνάρτηση $t : P \to Q$ λέγεται **ομοιότητα** αν είναι 1-1, επί και σέβεται τις διατάξεις. Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση συμβολίζουμε με

$$P =_0 Q.$$

και θα λέμε ότι οι P,Q είναι **όμοιοι**.

1.3. Καλά Διατεταγμένοι χώροι

Ορισμός 1.3.1. Ένας **καλά διατεταγμένος** χώρος (well ordered set) είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $U = (Field(U), \leq_U)$,όπου η $\leq_U$ είναι καλή διάταξη του Field(U),τέτοια ώστε κάθε μη κενό υποσύνολο του Field(U) να έχει ελάχιστο μέλος που συμβολίζεται με 0_u. Συνήθως θα ταυτίζουμε τον U με τον Field(U).

Ορισμός 1.3.2. **Μερική συνάρτηση του επομένου** ονομάζουμε μία $S_u : U \rightharpoonup U$ με τις εξής ιδιότητες:

(1) Η $S_u(x)$ ορίζεται στο x αν και μόνο αν $\exists y \in U$ με $x <_u y$. Αν ορίζεται τότε το
$$S_u(x) = min\{y \in U : x <_u y\} \neq \emptyset$$
λέγεται "επόμενος" του x και είναι το ελάχιστο στοιχείο του U που είναι μεγαλύτερο του x.
(2) Ένα $y \in U$ λέγεται "επόμενο" στοιχείο αν υπάρχει $x \in U$ με $y = S_u(x)$.
(3) Ένα $y \in U$ λέγεται "οριακό" στοιχείο αν $y \neq 0_u$ και το y δεν είναι επόμενος.Επομένως είναι όλα τα υπόλοιπα σημεία.

Παράδειγμα 1.3.3. Παραδείγματα καλά διατεταγμένων χώρων.

- Έστω $n \in \mathbb{N}$ και το $U = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$. Τότε με τον περιορισμό της $\leq_{\mathbb{N}}$ στο U, ο U είναι καλά διατεταγμένος χώρος.Βλέπουμε ότι ορίζεται η συνάρτηση του επομένου $S_u(x) = x +_{\mathbb{N}} 1 = S_{\mathbb{N}}(x)$.Για κάθε $x \in U$ ισχύει ότι $x = 0$ 'η $x = k + 1$,για κάποιο $k \in U$.Επομένως, κάθε μη μηδενικό στοιχείο του U είναι επόμενος, άρα ο U δεν έχει οριακά σημεία.
- Ο χώρος $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ με την συνηθισμένη διάταξη στους φυσικούς αριθμούς είναι καλά διατεταγμένος χώρος, χωρίς οριακά στοιχεία.
- Θεωρούμε ένα αντικείμενο $w \in \mathbb{N}$ και ορίζουμε $U = \mathbb{N} \cup \{w\}$. Η σχέση καλής διάταξης που ορίζουμε εδώ είναι $x \leq_u y \iff (x, y \in \mathbb{N}$ και $x \leq_{\mathbb{N}} y)$ ή $y = w$. Αν $A \subseteq U, A \neq \emptyset$ τότε είτε $A = \{w\}$. άρα minA=w είτε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 \in A$ και ισχύει ότι $minA = min\{n \in A : n \leq_{\mathbb{N}} n_0\}$.Τελικά ο $(U, \leq_U)$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

Το τελευταίο παράδειγμα μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα τον επόμενο ορισμό,ο οποίος αφορά την κατασκευή καινούργιων καλά διατεταγμένων χώρων με την προσθήκη ενός σημείου το οποίο δεν είναι απαραίτητο να είναι οριακό.

Ορισμός 1.3.4. Θεωρούμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq_U)$ και ένα στοιχείο $r \notin U$. Ορίζουμε τον $Succ(U) = U \cup \{r\}$ και $\leq$ ως εξής:
$$x \leq y \iff x, y \in U \text{ και } x \leq_U y \text{ ή } y = r.$$
Τότε ο $(Succ(U), \leq)$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος και ονομάζεται **ο επόμενος** του $(U, \leq_U)$.

Θεώρημα 1.3.5. *Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Επαγωγής Έστω $(U, \leq)$ καλά διατεταγμένος χώρος και $P \subseteq U$ το οποίο ικανοποιεί τα εξής:*
$$\forall y \in U(\text{ αν } \forall x < y \text{ ισχύει } x \in P \text{ τότε } y \in P).$$
Τότε $P = U$.

Ορισμός 1.3.6. Έστω $(U, \leq)$ καλά διατεταγμένος χώρος και $x \in U$. Θέτουμε:
$$seg_U(x) = \{y \in U : y < x\}$$
το οποίο ονομάζεται **γνήσιο αρχικό τμήμα** και συμβολίζεται με $seg_U(x) \sqsubseteq U$

Ορισμός 1.3.7. Έστω $(U, \leq)$ καλά διατεταγμένος χώρος και $I \subseteq U, I \neq \emptyset$.Θα λέμε ότι το I θα είναι **αρχικό τμήμα** του U αν είναι κλειστό προς τα κάτω,ως προς $\leq$,δηλαδή $\forall y \in I$ και κάθε $x \in U$ αν $x \leq y$ τότε $x \in I$.Από τον ορισμό αυτό καταλαβαίνουμε ότι το I δεν αφήνει κενά ,δηλαδή αν περιέχει κάποιο στοιχείο ,περιέχει και όλα τα μικρότερά του.Συμβολίζουμε με $I \sqsubseteq U$.

Πρόταση 1.3.8. *Έστω $(U, \leq)$ καλά διατεταγμένος χώρος και $I \subseteq U$.Τότε το I είναι αρχικό τμήμα του U αν και μόνο αν I=U ή $\exists x$ ώστε $I = seg(x)$.*

Απόδειξη. " $\Longrightarrow$ " Έστω $I \sqsubseteq U$ και υποθέτουμε $I \neq U$, πρέπει να βρω αυτό το x. Παίρνουμε $x = \min(U \setminus I)$ και δείχνουμε ότι $I = seg(x)$. Αν $y \in seg(x)$, τότε $y < x = \min(U \setminus I)$. Αν είχαμε $y \in U \setminus I \implies x = \min(U \setminus I) \leq y$. Που είναι άτοπο και άρα $y \in I$. Αντίστροφα, έστω $y \in I$, θα δείξουμε ότι $y < x$. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο, τότε αφού η διάταξη είναι ολική έχουμε $x \leq y$ και αφού το I είναι αρχικό τμήμα, έχουμε $x \in I$. Άτοπο, γιατί $x = \min(U \setminus I) \in U \setminus I$. Επομένως ισχύει ότι $y < x$ άρα $y \in seg(x)$.
" $\Longleftarrow$ " Αν $I = U$, προφανές. Αν έχουμε $I = seg(x)$, έστω $x_0 \leq y_0, x_0 \in U$ και $y_0 \in I$. Τότε $x_0 \leq y_0 < x$ άρα $x_0 \in seg(x) = I$, γιατί το $seg(x)$ είναι κλειστό προς τα κάτω. Άρα το I είναι αρχικό τμήμα. □

Ορισμός 1.3.9. Θεωρούμε δύο καλά διατεταγμένους χώρους $(U, \leq_U)$ και $(V, \leq_V)$. Ορίζουμε την σχέση $\leq_0$ ως εξής:

$$U \leq_0 V \iff \exists I \sqsubseteq V \text{ με } U =_0 I.$$

Ή αλλιώς ισοδύναμα:

$$U \leq_0 V \iff \exists t : U \to V \text{ μονομορφισμός που σέβεται τις διατάξεις με } t[U] \sqsubseteq V.$$

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο πως μία τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **αρχική ομοιότητα** (initial similarity)

Επίσης είναι γνωστά τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα 1.3.10. *Για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U,V ισχύει ότι:*

$$U =_0 V \iff U \leq_0 V \text{ και } V \leq_0 U.$$

Θεώρημα 1.3.11. *Για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U,V ισχύει ότι:*

$$U \leq_0 V \text{ ή } V \leq_0 U$$

Ορισμός 1.3.12. Μία συνάρτηση $k : (P, \leq) \to (P, \leq)$ και P ολικά διατεταγμένος χώρος. Η k λέγεται **επεκτατική** αν ισχύει ότι

$$x \leq k(x), \forall x \in P$$

Θεώρημα 1.3.13. *Έστω $(U, \leq)$ καλά διατεταγμένος χώρος και $k : U \to U$ είναι 1-1 που σέβεται την διάταξη. Τότε η k είναι επεκτατική.*

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, πως υπάρχει $x \in U$ με $k(x) < x$. Παίνρουμε

$$x^* = \min\{x \in U : k(x) < x\} = A.$$

Έχουμε $k(x^*) < x^*$. Αν είχαμε ότι δεν ισχύει:

$$k(k(x^*)) < k(x^*) \text{ τότε } k(x^*) \leq k(k(x^*))$$

και αφού η k σέβεται τις διατάξεις έχουμε $x^* \leq k(x^*)$. Άτοπο. Άρα $k(k(x^*)) < k(x^*)$,δηλαδή $k(x^*) \in A$, συνεπώς $k(x^*) \geq \min A = x^*$. Άτοπο, γιατί $k(x^*) < x^*$. □

Παρατήρηση 1.3.14. Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$, ο U δεν είναι όμοιος με κανένα γνήσιο αρχικό του τμήμα. Πρακτικά όσον αφορά την πληθικότητα μπορεί να είναι ο ίδιος, αλλά "χαλάει" στην διάταξη. Εμφανώς, υπάρχουν δύο συνιστώσες σε τέτοιους χώρους. Η μία είναι η πληθικότητα και η άλλη που έχει να κάνει με τις ιδιότητες της διάταξης.

Αναφέρουμε ακόμα ένα γνώστο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.3.15. *Δίνεται ένα σύνολο A, χωρίς απαραίτητα να έχει διάταξη, τότε υπάρχει ένας καλά διατεταγμένος χώρος $(h(A), \leq_A)$ ώστε να μην ισχύει $h(A) \leq_c A$, δηλαδή δεν υπάρχει*

$$k : h(A) \to A$$

*που να είναι 1-1. Ο χώρος αυτός ονομάζεται **χώρος Hartogs** . Ο χώρος Hartogs είναι ο ελάχιστος ως προς την συγκρισιμότητα $\leq_0$ που ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα. Δηλαδή για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο W για τον οποίο δεν ισχύει ότι $W \leq_c A$, ισχύει ότι $h(A) \leq_0 W$.*

Παρατήρηση 1.3.16. Για το παραπάνω θεώρημα:

- Ο χώρος Hartogs δεν είναι αριθμήσιμος, γιατί αν πάρω για $A = \mathbb{N}$ δεν θα βρω 1-1 συνάρτηση. Άρα υπάρχουν υπεραριθμήσιμοι καλά διατεταγμένοι χώροι.

- Ο $(h(\mathbb{N}), \leq_{\mathbb{N}})$ είναι ο $\leq_0$-ελάχιστος υπεραριθμήσιμος καλά διατεταγμένος χώρος.

Ορισμός 1.3.17. **Οριστικός τελεστής** είναι μία διμελής σχέση $P(x, y)$ για την οποία για κάθε x υπάρχει μοναδικό y για το οποίο να διατηρείται η σχέση $P(x, y)$ και θέτουμε

$$P(x, y) = \text{ το μοναδικό y με P(x,y).}$$

Παράδειγμα 1.3.18. Ένας από τους τελεστές που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω:

$$P(x) = \begin{cases} \bigcup x, & \text{αν το x είναι σύνολο} \\ \emptyset, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Παραθέτουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 1.3.19. *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ και κάθε οριστικό τελεστή H υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : U \to Y$ σε κάποιο σύνολο Y, με*

$$f(x) = H(f\ |_{\{}\ y \in U : y < x\}) = H(f \mid seg_U(x)), \forall x \in U.$$

Θεώρημα 1.3.20. *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση*

$$f_u : U \to Y \text{ } \textit{με} \text{ } f_u(x) = \{f_u(y) : y < x\}$$

Απόδειξη. Παίνρουμε τον τελεστή $H(k) = \begin{cases} k[A] & k : A \to B, \\ \emptyset & \text{αλλιώς} \end{cases}$ και εφαρμόζοντας γι' αυτόν το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει μοναδική συνάρτηση

$f_u : U \to Y$ με $f(x) = H(f \mid seg_U(x)) = f[seg_U(x)] = \{f(y) \mid y \in seg_U(x)\} = \{f(y) \mid y < x\}$.

□

1.4. Διατακτικοί Αριθμοί

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε τα σύνολα που λέγονται διατακτικοί αριθμοί. Στη θεώρηση αυτή τα πάντα για εμάς θα είναι σύνολα.

Ορισμός 1.4.1. Ένα σύνολο M λέγεται **μεταβατικό** αν για κάθε $x \in M$,που είναι και αυτό σύνολο ισχύει ότι $x \subseteq M$. Επομένως, για κάθε x,y αν $y \in x \in M \implies y \in M$

Ορισμός 1.4.2. Ένα σύνολο M λέγεται **αγνό** αν κάθε στοιχείο του είναι σύνολο ,δηλαδή δεν περιέχει άτομα.

Ορισμός 1.4.3. Αν έχουμε ένα σύνολο ορίζουμε την διμελή σχέση $\leq_a$ στο ,ως εξής:Για $x, y \in a$ $x \leq_a y \iff x = y \vee x \in y$. Παρατηρούμε ότι $(x, x) \in \leq_a$ για οποιοδήποτε σύνολο α.

Ορισμός 1.4.4. Ένα σύνολο λέγεται **διατακτικός αριθμός** αν είναι μεταβατικό,αγνό και καλά διατεταγμένο ως προς την $\leq_a$ που ορίσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 1.4.5. Παραδείγματα διατακτικών αριθμών.

(1) $a = \emptyset$.Έχουμε ότι $\emptyset \leq_a \emptyset$.Ο διατακτικός αυτός αριθμός,ονομάζεται 0.
(2) $a = \{\emptyset\}$.Εδώ η σχέση $\leq_a$ επαληθεύεται μόνο με την ισότητα, καθώς για $x, y \in a$ έχουμε ότι $x = y = \emptyset$,επομένως $x \leq_a y \iff x = y \vee x \in y \iff x = y$.Ο διατακτικός αριθμός αυτός ονομάζεται 1.
(3) $a = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.Ο διατακτικός αριθμός αυτός ονομάζεται 2.
(4) $a = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.Ο διατακτικός αριθμός αυτός ονομάζεται 3.
(5) Για να ορίσω τον διατακτικό αριθμό n παίρνω

$$n = \{k, \text{ διατακτικός αριθμός } : k < n\}$$

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο θεμελιώνονται οι φυσικοί αριθμοί. Όλα αυτά τα παραδείγματα θα μπορούσαν να είναι οι αριθμοί 0,1,2,... κ.ο.κ . Παρατηρούμε ότι τρίτο σύνολο φτιάχτηκε με τον εξής τρόπο: $3 = 2 \cup \{2\}$ κάτι που μας δίνει μία ένδειξη για το πως θα φτιάχνω κάθε φορά τον "επόμενο" διατακτικού αριθμού.

Ορισμός 1.4.6. Αν είναι διατακτικός αριθμός, τότε ορίζουμε $b = a \cup \{a\}$ και τον ονομάζουμε τον επόμενο του . Συμβολίζουμε $b = S(a)$.

Πρόταση 1.4.7. *Ο επόμενος ενός διατακτικού αριθμού είναι επίσης διατακτικός αριθμός.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι το σύνολο b είναι αγνό: Έστω $x \in b \implies x = a$ ή $x \in a \implies x$ σύνολο γιατί α είναι αγνό ως διατακτικός αριθμός. Δείχνουμε ότι το b είναι μεταβατικό: Έστω $x \in b$ και $y \in x$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $y \in b$.
Πρώτη περίπτωση: $x \in \{a\} \implies x = a, y \in a \subseteq b \implies y \in b$.
Δεύτερη περίπτωση: $x \in a \implies y \in x \in a \implies y \in a \subseteq b \implies y \in b$ □

Θεώρημα 1.4.8. *Κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ είναι όμοιος με μοναδικό διατακτικό αριθμό $\delta_u = ordinal(U)$. Δηλαδή για κάθε $(U, \leq)$ καλά διατεταγμένο χώρο, υπάρχει α διατακτικός αριθμός και $f : U \to a$ με $x < y \iff f(x) \in f(y)$. Μάλιστα ο $U \to \delta_u$ είναι οριστικός τελεστής που ικανοποιεί:*

$$\text{αν } U <_0 V \text{ τότε } \delta_u \subsetneq \delta_v.$$

Γενικά για τους διατακτικούς αριθμούς a,b ισχύουν τα εξής:

$$a \leq b \iff a = b \text{ ή } a \in b \text{ δηλαδή } a < b \iff a \in b.$$
$$a \leq_0 b \iff a \leq b \iff a \sqsubseteq b \iff a \subseteq b.$$

Θεώρημα 1.4.9. *Τα βασικότερα αποτελέσματα για διατακτικούς αριθμούς:*

- *Για κάθε διατακτικούς αριθμούς a,b,c, ισχύουν τα εξής:*

$$a \leq a, a \leq b \text{ και } b \leq c \text{ τότε } a = b$$

$$a \leq b \text{ και } b \leq c \text{ τότε } a \leq c$$

$$a \leq b \text{ ή } b \leq a$$

  Επομένως πληρούνται οι ιδιότητες διάταξης.
- *Για κάθε οριστική συνθήκη P μονομελή, δηλαδή P(x) για την οποία ισχύει P(a) για κάποιον διατακτικό αριθμό a, υπάρχει ο ελάχιστος διατακτικός που ικανοποιεί την P. Επομένως, η κλάση των διατακτικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένη από τη σχέση του $\in$.*
- *Ο $S(a)$ που ορίσαμε προηγουμένως είναι ο ελάχιστος διατακτικός που είναι μεγαλύτερος του a.*
- *Για κάθε σύνολο A από διατακτικούς υπάρχει το supA είναι διατακτικός αριθμός και*

$$supA = \cup A$$

  αν το A δεν είναι κενό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοιχεία μετρικών και τοπολογικών χώρων

2.1. Εισαγωγή στους μετρικούς χώρους

Ψάχνοντας τις "καλές" ιδιότητες που πρέπει να έχει μία συνάρτηση ,ώστε να ορίζει με φυσιολογικό τρόπο την έννοια της απόστασης,δεν μπορούμε παρά να κοιτάξουμε την απλή περίπτωση του $\mathbb{R}$ με την σύνηθη μετρική του $d(x,y) =\mid x-y\mid$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $|x-y| \geq 0$ για κάθε x,y $\in \mathbb{R}$, ενώ $|x-y| = 0$ αν και μόνο αν x=y
- $|x-y| = |y-x|$ για κάθε x,y $\in \mathbb{R}$
- $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ για κάθε x,y,z $\in \mathbb{R}$

Επομένως φυσιολογικά προκύπτει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 2.1.1. Ορισμός μετρικής και μετρικού χώρου Έστω X μη κενό σύνολο. Μία συνάρτηση d:XxX $\to \mathbb{R}$, θα λέγεται **μετρική** στον X αν:

(1) $d(x,y) \geq 0$ για κάθε x,y $\in X$,ενώ $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν x=y
(2) $d(x,y) = d(x,y)$ για κάθε x,y $\in$ X
(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Το ζευγάρι (X,d) ονομάζεται μετρικός χώρος **μετρικός χώρος**.

Παρατήρηση 2.1.2. Στον ίδιο χώρο X μπορούν να οριστούν πολλές και πολύ διαφορετικές μετρικές, οι οποίες να δίνουν διαφορετικό τρόπο μέτρησης της απόστσης μεταξύ των στοιχείων του. Στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων C([a,b]) ,μπορούμε να βρούμε ,μεταξύ άλλων, δύο μη συγκρίσιμες μετρικές:
$d_1(f,g) = max|f(x) - g(x)|$,x $\in$ [a,b] $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$
$d_2(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$, x $\in$ [a,b] $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$

Παράδειγμα 2.1.3. Διάφορες μετρικές

- X=$\mathbb{R}$ με d(x,y)=|x-y| ή όπως λέμε η συνήθης μετρική.
- X=$\mathbb{R}^m$ με d(x,y)=$\sqrt{(\sum_{i=1}^{m}(|x_i - y_i|)^2)}$ ή όπως λέμε η Ευκλείδεια μετρική .
- Έστω X τυχόν σύνολο μη κενό,τότε η διακριτή μετρική ορίζεται ως εξής:
  $d(x,y) = \{ \begin{array}{ll} 0, & \text{x} \neq \text{y} \\ 1, & \text{x=y} \end{array}$
- Έστω X τυχόν σύνολο, μη κενό και f:X $\to \mathbb{R}$ ένα προς ένα. Τότε η συνάρτηση $d_f : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$ ορίζει μετρική.
- Στον χώρο ℓ_∞, τον χώρο των φραγμένων ακολουθιών, ορίζουμε την μετρική $d(x,y) = \sup\{|x(k) - y(k)|, k \in \mathbb{N}\}$

Ορισμός 2.1.4. Ανοιχτή μπάλα-Εσωτερικό-Ανοιχτό σύνολο

Έστω (X,d) μετρικός χώρος:

(1) Αν έχω $x_0 \in$ X και r>0 τότε : Η ανοιχτή μπάλα με κέντρο x_0 και $r > 0$ είναι το $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$.
(2) Έστω $A \subset X$ και ένα σημείο x $\in$ A. Τότε το σημείο αυτό λέγεται εσωτερικό του A αν υπάρχει ε>0,τέτοιο ώστε B(x,ε) $\subset$ A.
(3) Έστω $A \subset X$,τότε αυτό λέγεται ανοιχτό ,αν και μόνο αν όλα του τα σημεία είναι εσωτερικά.

Ορισμός 2.1.5. Κλειστή μπάλα-Οριακά σημεία-Κλειστό σύνολο

Έστω (X,d) μετρικός χώρος:

(1) Αν έχω $x_0 \in X$ και r>0 τότε : Η κλειστή μπάλα με κέντρο x_0 και ακτίνα r είναι το $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$.
(2) Έστω $A \subset X$ και ένα σημείο $x \in A$. Τότε το σημείο αυτό λέγεται οριακό, αν και μόνο αν για κάθε ε>0: $B(x_0, r) \cap A \neq 0$.
(3) Έστω $A \subset X$, τότε αυτό θα λέγεται κλειστό αν αποτελείται από τα οριακά του σημεία.

Ορισμός 2.1.6. Σύγκλιση ακολουθίας-Βασικές ακολουθίες. Έστω (X,d) μετρικός χώρος.

(1) Μία ακολουθία $x_n n \in \mathbb{N}$ στον X συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν για κάθε

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \text{ ισχύει ότι } d(x_n, x) < \varepsilon$$

.

(2) Μία ακολουθία $x_n, n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται Cauchy αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, m \in \mathbb{N} d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Παράδειγμα 2.1.7. Μετρικοί χώροι που δεν είναι πλήρεις.

- Έστω το $\mathbb{Q}$ με την συνήθη μετρική. Παίρνω μία ακολουθία ρητών $q_n \to \sqrt{2}$ η οποία συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Η $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ,ως συγκλίνουσα. Αν είχαμε ότι κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει μέσα στο $\mathbb{Q}$ με την συνήθη μετρική θα είχαμε ότι το $q = \sqrt{2}$ είναι ρητός.
- Έστω $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ με $f(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$ η οποία είναι 1-1 και επί ,επομένως επάγει την μετρική $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.Παίρνω $x_n = n$ η οποία είναι βασική στον ($\mathbb{R}$,d),όμως δεν συγκλίνει, γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $d(x_n, x) \to 0$ μιας και $f(n) \to 1$ θα ισχύει ότι $f(x) = 1$. Το οποίο δίνει άτοπο, γιατί η f δεν παίρνει την τιμή 1.
  Στο παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε πως υπάρχουν χώροι στους οποίους είτε δεν συγκλίνουν οι βασικές ακολουθίες είτε δεν έχουν βασικές ακολουθίες. Πράγμα που σημαίνει ότι χρειάζεται ένας διαχωρισμός των χώρων που έχουν αυτή την ιδιότητα. Επομένως ο παρακάτω ορισμός είναι αναγκαίος για την συνέχεια.

Ορισμός 2.1.8. Ένας μετρικός χώρος (X,d) θα λέγεται πλήρης αν κάθε βασική ακολουθία $x_n \in X$ συγκλίνει ως προς την μετρική d.

Παράδειγμα 2.1.9. Μετρικοί χώροι που είναι πλήρεις.

- Ο (X,δ) με την διακριτή μετρική .
- Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ με την συνήθη μετρική.
- Ο $(\mathbb{R}^>, |\cdot|_2)$ με την Ευκλείδεια μετρική.
- Ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης.
- Ο $(\mathbb{R}, d)$ με την $d(x, y) = |arctanx - arctany|$ δεν είναι πλήρης.

Πρόταση 2.1.10. *Εστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και F μη κενό υποσύνολό του.Τότε ο (F,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος αν και μόνο αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. Η πρόταση αυτή δίνει μία ξεκάθαρη σχέση μεταξύ των μετρικών χώρων που είναι πλήρεις και των κλειστών συνόλων.*

Ως πορίσματα της παραπάνω πρότασης έχουμε τα εξής:

(1) Ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης ,γιατί το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
(2) Ο $((0, 1], |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης γιατί το (0,1] δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με την συνήθη μετρική.

(3) Ο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, γιατί το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Στο επόμενο κομμάτι της ενότητας αυτής θα μελετήσουμε την έννοια του πυκνού συνόλου ,η οποία μαζί με την πληρότητα θα μας δώσει την έννοια των Πολωνικών χώρων ,για το Κεφάλαιο 2.

Ορισμός 2.1.11. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, τότε ένα υποσύνολό A του X λέγεται πυκνό αν και μόνο αν $\overline{A} = X$ ή ισοδύναμα αν $\forall x \in X \exists (a_n) \in A$τέτοιο ώστε $a_n \to x$

Ορισμός 2.1.12. Ένας (X,d) μετρικός χώρος λέγεται διαχωρίσιμος αν έχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο, δηλαδή υπάρχει $A \sim \mathbb{N}$ ενώ ταυτόχρονα ισχύει $\overline{A} = X$.

Παράδειγμα 2.1.13. Παραδείγματα διαχωρίσμων χώρων.

- Στον χώρο $(\mathbb{R}^m, |\cdot|_p)$ το σύνολο $\mathbb{Q}^m = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times ... \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολό του.
- Στον $(\ell_p, ||\cdot||_p)$ το $D = \bigcup D_n$ με $D_n = \{(q_1, q_2, q_3, ..., q_n, 0, 0, 0, ...) : q_i \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό και αριθμήσιμο.

Για καλύτερη κατανόηση της έννοιας παραθέτουμε και ένα κριτήριο μη-διαχωρισιμότητας : Αν στον (X,d) μπορώ να βρω υπεραριθμήσιμες, ξένες ανά δύο ανοιχτές μπάλες στον X ,τότε ο X δεν είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός 2.1.14. Έστω δύο μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,s).Το καρτεσιανό γινόμενο $\times Y = (x, y) : x \in X y \in Y$ με την μετρική

$$d^*[(x, y), (x', y')] = d(x, y) + s(x', y')$$

. Σημειώνουμε πως έχουμε την κατά συντεταγμένη σύγκλιση , δηλαδή $(x_n, y_n) \to (x, y)$ως προς την μετρική γινόμενο d^*αν και μόνο αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Ορισμός 2.1.15. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A ⊂ X μη-κενό. Τότε ορίζεται η συνάρτηση απόστασης ενός σημείου x ∈ X από το σύνολο A ως εξής: f:X → $\mathbb{R}$ με:

$$f(x) = dist(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Πρόταση 2.1.16. *Ο (X,p) είναι μετρικός χώρος και $F, G \subset X$ κλειστά και ξένα, τότε υπάρχει $F : (X, p) \to [0, 1]$ συνεχής με F(x)=1 για κάθε $x \in F$ και F(x)=0 για κάθε $x \in G$. Βάση του ορισμού 2.1.15 μπορούμε να ορίσουμε αυτή την συνάρτηση με* $F(x) = \dfrac{dist(x, G)}{dist(x, F) + dist(x, G)}$.

Πρόταση 2.1.17. *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος,τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(1) *Τα X,∅ είναι ανοικτά σύνολα.*
(2) *Αν $G_i, i \in I$ είναι μία οικογένεια ανοικτών συνόλων του X ,τότε $\bigcup_{i \in I} G_i, i \in I$ είναι ανοικτό σύνολο.*
(3) *Αν $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ είναι ανοικτά σύνολα ,τότε $\bigcap_{i=1}^{n} G_i, 1 \leq i \leq n$ είναι ανοικτό σύνολο.*

Η παραπάνω πρόταση συνδέει τους μετρικούς χώρους με τους τοπολογικούς ,καθώς αυτές οι ιδιότητες είναι ταυτόχρονα και οι ελάχιστες που απαιτούνται για την δημιουργία τοπολογίας πάνω σε ένα μη κενό σύνολο X.

2.2. Εισαγωγή στους τοπολογικούς χώρους

Έστω ένα μη-κενό συνόλο X. Η έννοια της τοπολογίας πάνω στο σύνολο X εισάγει την μικρότερη δυνατή δομή πάνω στην οποία μπορούν να επεκταθούν με φυσιολογικό τρόπο οι έννοιες της σύγκλισης ακολουθίας και της συνέχειας συνάρτησης.

Ορισμός 2.2.1. Έστω X μη-κενό σύνολο. Μία οικογένεια συνόλων $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ονομάζεται τοπολογία πάνω στον X αν:

(1) $\emptyset$, X $\in \mathcal{T}$.
(2) Αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{T}$ τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$,με $1 \leq i \leq n$, δηλαδή η οικογένεια είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
(3) Αν $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}$ με το I να είναι αυθαίρετο σύνολο τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$,δηλαδή η οικογένεια είναι κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις.
Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται ανοικτά σύνολα,ενώ κάποιο F $\subset$ X θα λέγεται κλειστό αν το X $\setminus$ F είναι ανοικτό.Το ζευγάρι (X,$\mathcal{T}$) ονομάζεται τοπολογικός χώρος.

Παρατήρηση 2.2.2. Για την καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού:

- Τα στοιχεία της οικογένειας $\mathcal{T}$ ονομάζονται και $\mathcal{T}$-ανοικτά , που σημαίνει πως η έννοια του ανοικτού συνόλου είναι σχετική και εξαρτάται από την εκάστοτε τοπολογία που θα επιλεχθεί.
- Η παραπάνω παρατήρηση μας κάνει να καταλάβουμε πως και οι έννοιες σύγκλισης και συνέχειας συναρτήσεων θα προσαρμόζονται τρόπον τινά στις τοπολογίες που θα επιλέγονται στο σύνολο X.
- Το πλήθος των τοπολογιών πάνω σε ένα σύνολο M μεγαλώνει με γρήγορο ρυθμό ,όσο περισσότερα είναι τα στοιχεία του.Ενδεικτικά αναφέρουμε:

|M|	πλήθος τοπολογιών
1	1
2	4
3	29
4	355
5	6942
6	209.527
7	9.535.241

- Ένα τυχόν υποσύνολο κάποιο τοπολογικού χώρου μπορεί να χαρακτηριστεί με έναν από τους εξής τρόπους: ανοικτό,κλειστό, ανοικτό και κλειστό,ανοικτό και όχι κλειστό , όχι ανοικτό και κλειστό, όχι ανοικτό και όχι κλειστό.

Έστω X μη-κενό σύνολο, τότε μπορώ να εφαρμόσω πάνω του τις παρακάτω οικογένειες συνόλων που ορίζουν τοπολογία στο X.

Παράδειγμα 2.2.3.
- $\mathcal{T}$=$\emptyset, X$,ονομάζεται τετριμμένη τοπολογία και είναι η μικρότερη τοπολογία που μπορεί να εφαρμοστεί πάνω στο σύνολο X.
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, ονομάζεται διακριτή τοπολογία και είναι η μεγαλύτερη τοπολογία που μπορεί να εφαρμοστεί στο X. Σημειώνουμε πως όλα τα σύνολα με αυτή την τοπολογία είναι ανοικτά και κλειστά.
- $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$, ονομάζεται τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου x_0 .
- $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{X\}$,ονομάζεται τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου x_0.
- $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : A^c$πεπερασμένο$\} \cup \{\emptyset\}$, ονομάζεται συμπεπερασμένη τοπολογία.
- $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : A^c$αριθμήσιμο$\} \cup \{\emptyset\}$,ονομάζεται συναριθμήσιμη τοπολογία.

Ορισμός 2.2.4. Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος με x$\in$X και B μία οικογένεια υποσυνόλων της $\mathcal{T}$. Η οικογένεια B ονομάζεται βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$,αν για κάθε V $\in \mathcal{T}$ με $V \neq \emptyset$ υπάρχουν σύνολα $(W_i)_{i\in I} \in B$ ώστε $V = \bigcup_{i\in I} W_i$, δηλαδή η B παράγει όλα τα ανοικτά της τοπολογίας μέσω ενώσεων στοιχείων της.

Πρόταση 2.2.5. *Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και B μία οικογένεια υποσυνόλων της $\mathcal{T}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- B είναι μία βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$
-για κάθε $V \in \mathcal{T}$ και για κάθε $x \in V$ υπάρχει W σύνολο από την οικογένεια B ώστε $x \in W \subset V$

Πρόταση 2.2.6. *Έστω X μη-κενό σύνολο με $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ και $\mathcal{T}_B$ η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την B.Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) *B είναι βάση της $\mathcal{T}_B$.*
(2) *Τα στοιχεία της βάσης αποτελούν ανοιχτό κάλυμμα για τον χώρο.*
(3) *για κάθε $B_1, B_2 \in B$ και για κάθε $x \in B_1 \cap B_2 υπάρχει B_3 \in B$ ώστε $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$*

Παρατηρούμε από τον παραπάνω ορισμό και τις προτάσεις, πως η βάση μίας τοπολογίας αποτελεί εργαλείο οπτικοποίησης των ανοικτών συνόλων. Στην μεν 2.2.5 έχουμε έναν "εξωτερικό" χαρακτηρισμό,στην δε 2.2.6 σε "εσωτερικό". Όπως θα δούμε στα παρακάτω παραδείγματα οι βάσεις με αριθμήσιμο το πλήθος στοιχεία θα μας δώσουν μία καλύτερη εικόνα των διαχωρίσιμων χώρων.

Παράδειγμα 2.2.7. Παραδείγματα βάσεων τοπολογιών.

- Στον χώρο των πραγματικών αριθμών με την συνήθη τοπολογία παρατηρούμε μεταξύ άλλων τις εξής βάσεις:
  -Η οικογένεια $B = \{(a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ αποτελεί βάση
  -Ομοίως ,αλλά με αριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία η οικογένεια:
  $$B_1 = \{(p, q) : p < q, p, q \in \mathbb{Q}\}$$
  είναι βάση ,αφού για κάθε $x \in (a, b)$ υπάρχουν $p, q \in \mathbb{Q}$ με $x \in (p, q) \subset (a, b)$
- Έστω (X,$\mathcal{T}_p$) ένας μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος,τότε οι παρακάτω οικογένειες αποτελούν βάσεις για την τοπολογία $\mathcal{T}_p$.
  - Η οικογένεια $B = \{S(x, \varepsilon)), y : p(x, y) < \varepsilon, x \in X, 0 < \varepsilon < 1\}$
  -Ομοίως ,αλλά με αριθμήτιμα το πλήθος στοιχεία η οικογένεια
  $$B_p = \{S(x, 1/n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$$
  είναι επίσης βάση για την τοπολογία.

Σαν πόρισμα των δύο παραπάνω παραδειγμάτων παίρνουμε πώς ο $\mathbb{R}$,όπως και κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος είναι διαχωρίσμοι χώροι.

Ορισμός 2.2.8. Μία οικογένεια B από ανοικτά σύνολα λέγεται βάση περιοχών του x αν:
-για κάθε W σύνολο της οικογένειας x $\in$ W.
-για κάθε περιοχή U όχι απαραίτητα ανοιχτή του x υπάρχει W σύνολο της βάσης περιοχών του x ώστε W$\subset$ U.

Παράδειγμα 2.2.9. Βάσεις περιοχών.

- Στο $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία η οικογένεια συνόλων
  $$\{(x - 1/n, x + 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$
  είναι μία βάση περιοχών του x.
- Στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των ημιάνοικτων διαστημάτων η οικογένεια
  $$\{(x - 1/n, x] : n \in \mathbb{N}\}$$
  είναι βάση περιοχών του x.

Ορισμός 2.2.10. Έστω X ένα μη κενό υποσύνολο και $\mathcal{T}$ μία τοπολογία πάνω σε αυτό.Τότε μία οικογένεια συνόλων L θα λέγεται υποβάση αν πεπερασμένες τομές στοιχείων της αποτελούν βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$,δηλαδή $\{V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n : V_i \in L, 1 \leq i \leq n\}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$.Επομένως κάθε $\mathcal{T}$-ανοικτό προέρχεται από αυθαίρετες ενώσεις πεπερασμένων τομών στοιχείων της L.

Παράδειγμα 2.2.11. Υποβάσεις.

- Στον $(\mathbb{R},\mathcal{T}_p)$ η οικογένεια $C = \{(-\infty,b), b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,+\infty)\}, a\in\mathbb{R}\}$ είναι υποβάση για την $\mathcal{T}_p$.
- Στον $(\mathbb{R},\mathcal{T}_s)$ η οικογένεια $C = \{(-\infty,b], b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,+\infty), a\in\mathbb{R}\}$ είναι υποβάση για την $\mathcal{T}_s$. Εδώ με $\mathcal{T}_s$ ονομάζουμε την τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων.

Ορισμός 2.2.12. Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος.

(1) Ένα x_0 λέγεται **οριακό σημείο** του A αν για κάθε $V\in\mathcal{T}$ με $x_0\in V$ ισχύει $V\cap A=\emptyset$.
(2) Αν x_0 οριακό σημείο του A ,το x_0 λέγεται **σημείο συσσώρευσης** αν για κάθε $V\in\mathcal{T}$ με $x_0\in V$ ισχύει $A\cap(V\setminus\{x_0\})\neq\emptyset$.
(3) Αν x_0 είναι οριακό σημείο του A, το x_0 λέγεται **μεμονωμένο** αν υπάρχει V περιοχή του x_0, ώστε $V\cap A=\{x_0\}$.
(4) Το x λέγεται σημείο επαφής του A, αν για κάθε ανοιχτή περιοχή U του x υπάρχει $y\in U$ με $y\neq x$.

Ορισμός 2.2.13. Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και $A\subset X$,τότε το

$$\overline{A}=\bigcap\{F\subset X : A\subset F, F\text{κλειστό}\}$$

είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του A και ονομάζεται κλειστότητα του A.

Πρόταση 2.2.14. *Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος, $A\subset X$ μη κενό. Τότε για το*

$$B=\{x\in X : x\ \textit{οριακό του}\ A\}$$

έχουμε $B=\overline{A}$,δηλαδή η κλειστότητα ενός συνόλου είναι η ένωση όλων των οριακών του σημείων.

Παράδειγμα 2.2.15. Κλειστότητες συνόλων σε διαφορετικές τοπολογίες.

- Στον $(\mathbb{R},\mathcal{T}_s)$, όπου η $\mathcal{T}_s$ είναι η τοπολογία των ημιάνοικτων διαστημάτων ,ισχύει ότι $\overline{(a,b)}=(a.b]$.
- Στον $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία, ισχύει ότι $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}$

Ορισμός 2.2.16. Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος. Το εσωτερικό του A συμβολίζεται με $A^o = \bigcup[G\in\mathcal{T} : G\subset A]$, δηλαδή το εσωτερικό του A είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολό του. Ένα $x\in X$ είναι εσωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $U\subset A$.

Παράδειγμα 2.2.17. Εσωτερικά συνόλων σε διαφορετικές τοπολογίες.

- Στον $(\mathbb{R},\mathcal{T}_s)$, έχουμε ότι $[a,b]^o=(a,b]$.
- Στον $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία,έχουμε ότι $[a,b]^o=\emptyset$. Εδώ βλέπουμε ότι το εσωτερικό ενός μη κενού συνόλου μπορεί να είναι το ίδιο το κενό.

Ορισμός 2.2.18. Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος και $A\subseteq X$. Η οικογένεια $\mathcal{T}_A=[A\cap G : G\in\mathcal{T}]$ είναι τοπολογία στο A και καλείται σχετική τοπολογία του A ως προς $\mathcal{T}$,ενώ τα στοιχεία της σχετικώς ανοικτά.

Ορισμός 2.2.19. Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος ,$(x_n)_n\in\mathbb{N}$ και $x_0\in X$ θα λέμε ότι $(x_n)\xrightarrow{\mathcal{T}}x$ αν για κάθε V ανοικτό με $x_0\in V$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n\geq n_0$ να ισχύει $x_n\in V$. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να βάλουμε αντί για V ανοικτό ,το σύνολο να είναι βασικό ή ακόμα και υποβασικό της τοπολογίας $\mathcal{T}$.

Ορισμός 2.2.20. Έστω (X,$\mathcal{T}$), (Y,$\mathcal{S}$) τοπολογικοί χώροι και $f : X\to Y$ με $x_0\in X$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $W\in S$ με $f(x_0)\in W$ υπάρχει $V\in\mathcal{T}$ με $x_0\in V$ ώστε $f[V]\subset W$.

Πρόταση 2.2.21. *Έστω (X,$\mathcal{T}$), (Y,$\mathcal{S}$)τοπολογικοί χώροι και $f : X\to Y$ συνεχής και $(x_n)\xrightarrow{\mathcal{T}}x$ τότε $f(x_n)\xrightarrow{\mathcal{S}}f(x)$. Σημειώνουμε πως σε γενικούς τοπολογικούς χώρους δεν ισχύει το αντίστροφο, ενώ σε μετρικούς χώρους ισχύει ως ισοδυναμία.*

Ορισμός 2.2.22. Έστω τοπολογικοί χώροι $(X_i,\mathcal{T}_i)$ με $i\in I$ αυθαίρετο σύνολο δεικτών. Τότε η τοπολογία γινόμενο του χώρου $\prod_{i\in I}X_i=\{(x_i), i\in I : x_i\in X_i\}$ είναι η $\mathcal{T}$=$\prod_{i\in I}\mathcal{T}_i$ και έχει ως βάση την $B=\{\prod_{i\in F}V_i\times\prod_{i\in I\setminus F}X_i : F$ πεπερασμένο και $V_i\in B_i\}$ όπου οι $B_i, i\in I$είναι οι αντίστοιχες βάσεις για την κάθε τοπολογία $\mathcal{T}_i$

Θεώρημα 2.2.23. *Tychonoff.*
Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων ,τότε $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_I)$, όπου $\mathcal{T}_I$ είναι η τοπολογία γινόμενο είναι συμπαγής χώρος.

Ορισμός 2.2.24. Διαχωριστικά αξιώματα σε τοπολογικούς χώρους.

(1) Ο (X,$\mathcal{T}$) ονομάζεται T_0 αν για κάθε $x, y \in X, x \neq y \exists V \in \mathcal{T}$, ώστε είτε $x \in V$ και $y \notin V$ είτε $x \notin V$ και $y \in V$. Δεν γνωρίζουμε ποια από τις δύο περιπτώσεις συμβαίνει.
(2) Ο (X,$\mathcal{T}$) ονομάζεται T_1 αν για κάθε $x, y \in X, x \neq y$ $\exists V \in \mathcal{T}$, ώστε $x \in V$ και $y \notin V$.Εδώ μπορώ να βρω ανοικτό συγκεκριμένο ,ώστε να ανήκει το x ,αλλά να μην ανήκει το y. Αυτή είναι η διαφορά με τον T_0.
(3) Ο (X,$\mathcal{T}$)ονομάζεται T_2 (ή Hausdorff) αν για κάθε $x, y \in X, x \neq y,$ υπάρχουν $V, W \in \mathcal{T},$ με $V \cap W = \emptyset$ και $x \in V, y \in W$.
(4) Ο (X,$\mathcal{T}$)ονομάζεται T_3 (ή κανονικός) αν για κάθε $x \in X, F \subset X$ κλειστό με $x \notin F$ υπάρχουν $V, W \in \mathcal{T},$ ξένα $: x \in V, F \subset W$.
(5) Ο (X,$\mathcal{T}$)ονομάζεται T_4 (ή φυσιολογικός) ,αν είναι T_2 και για κάθε $F, G \subset X$ κλειστά και ξένα , υπάρχουν $V, W \in \mathcal{T}$ με $V \cap W = \emptyset : F \subset V$ και $G \subset W$.

2.3. Σύνδεση Μετρικών και Τοπολογικών χώρων

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε την έννοια της μετρικοποιησιμότητας τοπολογικών χώρων που θα μας φανεί χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 2.3.1. Έστω (X,$\mathcal{T}$) τοπολογικός χώρος. Η $\mathcal{T}$ λέγεται μετρικοποιήσιμη ,αν υπάρχει μετρική στον X ,ώστε $\mathcal{T}$=$\mathcal{T}_p$, δηλαδή τα ανοικτά που προκύπτουν από την μετρική θα είναι τα ίδια με αυτά της τοπολογίας $\mathcal{T}$. Ισοδύναμος ορισμός με βάση τις ακολουθίες θα ήταν πως κάθε ακολουθία που συγκλίνει ως προς την μετρική θα συγκλίνει και ως προς την τοπολογία,δηλαδή για κάθε x_n με $x_n \xrightarrow{p} x$,ισχύει ταυτόχρονα ότι $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Παρατήρηση 2.3.2. Ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τους μετρικούς χώρους.

- Σε κάθε μετρικό χώρο (X,d) το $\{x\}$ είναι κλειστό ,δηλαδή το $X\setminus\{x\}$ είναι μη-μετρικοποιήσιμο ανοικτό σύνολο. Αυτή την ιδιότητα μπορώ να την χρησιμοποιώ ως κριτήριο μετρικοποιησιμότητας κάποιας τοπολογίας.
- Σε κάθε μετρική τοπολογία τα σημεία διαχωρίζονται από ανοικτά, δηλαδή υπάρχουν V_1 και V_2 ανοικτά με $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,ώστε για κάθε a,b με $a \neq b$ να ισχύει $a \in V_1$ και $b \in V_2$.

Παράδειγμα 2.3.3. Μετρηκοποιήσιμες και μη τοπολογίες.

- Έστω X=$\{a\}$,$\mathcal{T}$=$\{\emptyset, X\}$,τότε η μετρική ρ:X×X $\to \mathbb{R}$, με ρ(a,a)=0 μετρικοποιεί την παραπάνω τοπολογία $\mathcal{T}$.
- Έστω X=$\{a, b\}$και $\mathcal{T}$=$\{\emptyset, X\}$, η τετριμμένη τοπολογία,δεν είναι μετρικοποιήσιμη, μιας και τα a,b δεν μπορούν να διαχωριστούν από ανοικτά.
- Έστω (X,$\mathcal{T}$) $= \mathcal{P}(X)$,όπου όλα τα $A \subset X$ είναι ανοικτά και κλειστά , μετρικοποιείται από την διακριτή μετρική.
- Η τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου $\mathcal{T}$=$\{A \subseteq X : x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη, αν |X|≥ 2.
- Η τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου $\mathcal{T}$=$\{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{X\}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη, αν |X|≥ 2.
- Ο τοπολογικός χώρος $(X = \{a, b\}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\})$,που λέγεται αλλιώς και χώρος Sierpinski, δεν είναι μετρικοποιήσιμος, ως χώρος ιδιαίτερου σημείου (ή ως χώρος εξαιρουμένου σημείου).
- Η τοπολογία $\mathcal{T}$=$\{A \subseteq X : A^c$αριθμήσιμο$\} \cup \{\emptyset\}$ είναι μετρικοποιήσιμη, αν και μόνο αν ο X είναι αριθμήσιμος, γιατί αλλιώς ολόκληρος ο χώρος δεν θα είναι στοιχείο της τοπολογίας.
- Η τοπολογία $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : A^c$πεπερασμένο$\} \cup \{\emptyset\}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη,αν το X είναι άπειρο.

Από τα παραπάνω παραδείγματα προκύπτει πως δεν γράφεται κάθε τοπολογικός χώρος σε μορφή μετρικού,επομένως η κλάση των τοπολογικών χώρων είναι ογκοδέστερη αυτής των μετρικών.Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν μόνο οι μετρικοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι.

Παράδειγμα 2.3.4. Μερικά ασυνήθιστα φαινόμενα σε γενικούς τοπολογικούς χώρους.

- Έστω $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία. Τότε η ακολουθία $x_n = n \forall n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε κάθε $x \in \mathbb{N}$.

  Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{N}$ και U βασική περιοχή του x, τότε $x \in U^0 \subset U$,επομένως $X \setminus U^0$ είναι πεπερασμένο. Άρα και $X \setminus U$ είναι πεπερασμένο. Συμπεραίνουμε ότι

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \forall n \geq n_0 \text{ ,έχουμε ότι } x_n \notin X \setminus U \implies \forall n \geq n_0 \; x_n \in U$$

  άρα $x_n \to x$ και το x ήταν τυχόν. □

  Από το παράδειγμα αυτό καταλαβαίνουμε ότι χάνεται η μοναδικότητα του ορίου όπως αυτή την γνωρίζαμε στους μετρικούς χώρους.

- Στον τοπολογικό χώρο (X,$\mathcal{T}$) με X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{T}$ την συναριθμήσιμη τοπολογία, οι συγκλίνουσες ακολουθίες είναι μόνο οι τελικά σταθερές.

  Απόδειξη. Έστω προς άτοπο,ότι η x_n δεν είναι τελικά σταθερή. Τότε το $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x\}$ είναι άπειρο. Άρα υπάρχει ολόκληρη υπακολουθία $x_k n \neq x \forall n \in \mathbb{N}$. Θέτω

$U = X \setminus A$ με το A να είναι αριθμήσιμο και $x \notin A$. Άρα το $x \in U$ με $U \in \mathcal{T}$, άρα το U είναι μία περιοχή του x.Ακόμα ισχύει ότι $x_kn \notin U \forall n \in \mathbb{N}$,άρα x_kn δεν συγκλίνει στο x το οποίο δίνει άτοπο ,από την αρχική υπόθεση. □

- Στον τοπολογικό χώρο (X,$\mathcal{T}$), με X υπεραριθμήσιμο και $\mathcal{T}$ την συναριθμήσιμη ,τότε κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσώρευσης.

  Απόδειξη. Έστω $x \in X$, τότε για κάθε U ανοικτό με $x \in U$ έχω $U \cap (X \setminus \{x\}) = U \setminus \{x\} \neq \emptyset$,αφού το U είναι υπεραριθμήσιμο. Επομένως το x είναι σημείο συσσώρευσης του X. □

- Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ με $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ και $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x \implies f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}'} f(x)$ τότε δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x \in X$. Αυτό σημαίνει πως η αρχή της μεταφοράς για ακολουθίες δεν ισχύει ως ισοδυναμία σε γενικούς τοπολογικούς χώρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πολωνικοί Χώροι

3.1. Ορισμοί και πρώτα παραδείγματα

Ορισμός 3.1.1. Έστω (X,$\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος και d μία κατάλληλα επιλεγμένη μετρική ,ώστε ο χώρος (X,d) να είναι πλήρης και διαχωρίσιμος. Τότε ο (X,$\mathcal{T}$) ονομάζεται Πολωνικός χώρος.

Παράδειγμα 3.1.2. Πολωνικοί χώροι.

- Αν ο X είναι αριθμήσιμο σύνολο ,εφοδιασμένο με την διακριτή μετρική.
- Το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική.
- Ο μοναδιαίος κύκλος $A = \{x \in \mathbb{C} : ||x|| = 1\}$.
- Ο τόρος άπειρης διάστασης και ο τόρος n-διαστάσεων.
- Κάθε ανοικτό σύνολο (a,b), $a \geq b$ και $a, b \in \mathbb{R}$.

3.2. Βασικές διότητες Πολωνικών χώρων και των υποχώρων του

Ορισμός 3.2.1. Έστω (X,$\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος, τότε:

- Το A λέγεται G_δ υπόσύνολο του X αν ισχύει ότι $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ και τα G_n ανοικτά $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Το F λέγεται F_σ υποσύνολο του X αν ισχύει ότι $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$και τα K_n κλειστά $\forall n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 3.2.2. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος ,τότε κάθε κλειστό υποσύνολό του είναι G_δ και F_σ.Επομένως σε κάθε κλειστό υποσύνολο Πολωνικού χώρου ισχύει το ίδιο.*

Απόδειξη. Έστω (X,$\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος που μετρικοποιείται κατάλληλα από την μετρική ρ.Θεωρούμε F κλειστό υποσύνολο του X,τότε:

- Το F είναι F_σ κατά τετριμμένο τρόπο,αφού μπορώ να επιλέξω για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $K_n = F$ με K_n προφανώς κλειστά, επομένως να ισχύει $F = \bigcap K_n$.Επομένως δείξαμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο Πολωνικού χώρου είναι F_σ.
- Θεωρούμε την συνάρτη απόστασης $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = d(x, F)$ που είναι συνεχής και τα σύνολα $G_n = \{x : d(x, F) < 2^{-n}\}$ είναι $\mathcal{T}$-ανοικτά για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η g είναι συνεχής αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά,οπότε τα $G_n = g^{-1}[(-1, 2^n)]$ είναι ανοικτά στον $\mathbb{R}$ με την συνήθη τοπολογία για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για το τυχόν $x \in F$ έχω ότι $d(x, F) = 0$ και αφού $2^{-n} \to 0 \implies x \in \bigcap G_n$,επομένως έχουμε πετύχει τον εγκλεισμό $F \subseteq \bigcap G_n$. Έστω τώρα ,για τον ανάποδο εγκλεισμό, τυχόν x με $x \in \bigcap G_n$.Τότε υπάρχει μία ακολουθία στοιχείων του F με $d(x, x_n) < 2^{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.Επομένως $x_n \to x$ και το F είναι κλειστό σε μετρικοποιήσιμο τοπολογικό χώρο ,επομένως $x \in F$.

□

Στην παραπάνω πρόταση φαίνεται η σημαντικότητα του να είναι ο χώρος X μετρικοποιήσιμος,καθώς χρειαζόμαστε και την συνέχεια της συνάρτησης απόστασης και των χαρακτηρισμό του κλειστού συνόλου μέσω ακολουθιών.

Ορισμός 3.2.3. Έστω (X,$\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος, (Y,d) μετρικός χώρος με $\subseteq X$ και $f : A \to Y$.Τότε για κάθε $B \subseteq Y$ έχουμε την διάμετρο του B να είναι $diam(B) = sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$ και την ταλάντωση της f γύρω από το σημείο $x \in X$ να είναι $osc_f(x) = inf\{diam f(U) : U$ μία ανοιχτή περιοχή του $x\}$.Προφανώς για κάποιο y σημείο συνέχειας της f ισχύει ότι $osc_f(x) = 0$.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω (X,$\mathcal{T}$) ένας τοπολογικός χώρος και (Y,d) μετρικός χώρος ,με $f : X \to Y$, τότε τα σημεία συνέχειας της f είναι G_d.*

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν ισχύει ότι $osc_f(x) = 0$,επομένως το σύνολο σημείων συνέχειας μπορεί να γραφτεί $\{x \in X : osc_f(x) = 0\} = \bigcap\{x \in X : osc_f(x) < 1/n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ με τα G_n d-ανοικτά σύνολα. $\square$

Θεώρημα 3.2.5. *Θεώρημα Kuratowski*
Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (Υ,ρ) πλήρης μετρικός χώρος με $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ συνεχής συνάρτηση.Τότε υπάρχει G_d σύνολο με $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ και συνεχής επέκταση $g : G \to Y$ της f.

Απόδειξη. Θεωρώ το σύνολο $G = \overline{A}\bigcap\{x \in A : osc_f(x) = 0\}$ το οποίο είναι G_d σύνολο,ως τομή κλειστού με G_δ και αφού η f είναι συνεχής στο A παίρνουμε ότι $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$.Για την επέκταση της f,παίρνω $x \in G \implies x \in \overline{A}$, οπότε μπορώ να βρω $x_n \in A$ με $x_n \to x$. Έχουμε ότι $lim(diamf(\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\})) = 0$ άρα η $f(x_n)$ είναι Cauchy ακολουθία, επομένως συγκλίνει στον Υ.Θεωρώ την $g(x) = limf(x_n)$ η οποία είναι καλώς ορισμένη. Η g είναι συνεχής στο G αν και μόνο αν $osc_g(x) = 0$ για κάθε $x \in G$.Έστω U ανοιχτό του X,τότε έχουμε $g(U) \subseteq \overline{f(U)}$,οπότε και $diamg(U) \leq diamf(U)$ άρα $osc_g(x) \leq osc_f(x) = 0$. $\square$

Θεώρημα 3.2.6. *Lavrentiev*
Έστω X,Υ πλήρεις,μετρικοί χώροι με $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$. Θεωρώ $f : A \to B$ ομοιομορφισμό. Τότε η f μπορεί να επεκταθεί σε ομοιομορφισμό μεταξύ δύο G_δ που περιέχουν τα A,B.

Απόδειξη. Θεωρώ την $g = f^{-1}$ και από το Θεώρημα 3.2.5,επιλέγω G_d σύνολο, έστω το $' \subseteq A$ και την συνεχή επέκταση $f' : A' \to Y$.Ομοίως για G_δ, έστω το $B' \subseteq B$ και συνεχής επέκταση της g την $g' : B' \to X$. Θέτουμε:

$$H = \{(x, y) \in A' \times Y : y = f'(x)\} = graf(f')$$

και

$$K = \{(x, y) \in B' \times X : x = g'(y)\} = graf(g').$$

Θέτουμε επίσης $A^* = c_1(H \cap K)$ και $B^* = c_2(H \cap K)$ με c_1, c_2 δύο συναρτήσεις προβολών. Σημειώνουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$A^* = \{x \in A' : (x, f'(x))\} \in K$$

και

$$B^* = \{y \in B' : (g'(y), y) \in H\}.$$

Αφού K είναι κλειστό στον $B' \times X$ και B' είναι G_δ,το οποίο σημαίνει ότι και το K είναι G_δ.Η συνάρτηση f' είναι συνεχής πάνω στο A' που είναι G_δ, αυτό σημαίνει ότι και το A^* είναι G_δ.Ομοίως δείχνουμε ότι B^* είναι G_δ σύνολο, επομένως έχουμε ότι $f^* = f'|A^*$ είναι ομοιομορφισμός από το A^* στο B^* που επεκτείνει την f. $\square$

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω X μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$ μη κενό.Τότε ο Υ είναι πλήρης μετρικοποιήσιμος ,με την σχετική τοπολογία ,αν και μόνο αν είναι G_δ σύνολο.*

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την πρώτη ισοδυναμία:
$'' \implies ''$ Έστω ότι ο Υ είναι πλήρης μετρικοποιήσιμος χώρος και θεωρώ την ταυτοτική συνάρτηση $id_Y : Y \to Y$ η οποία από το θεώρημα 3.2.5 ,υπάρχει σύνολο G που είναι G_δ και συνεχής συνάρτηση $g : G \to Y$ και ισχύει ότι $Y \subseteq G \subseteq \overline{Y}$.Αφού το Υ είναι πυκνό στο G, έχω $g = id_G$, επομένως Υ=G που είναι G_δ.
$'' \impliedby ''$Έστω ότι το Υ είναι G_δ σύνολο.Υπάρχει οικογένεια U_n ανοικτών συνόλων του X με $Y = \bigcap U_n$,Θεωρώ $F_n = X \setminus U_n$ και d κατάλληλη μετρική που κάνει τον X πλήρη μετρικό χώρο. Ορίζουμε μία καινούργια μετρική στον Υ με:

$$d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{i=1}^{+\infty} min\{2^{-n-1}, |\frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)}|\}$$

και θα δείξουμε ότι (Υ,d') είναι πλήρης.Παίρνουμε y_i ακολουθία Cauchy στον (Υ,d'), οπότε είναι Cauchy και στον (X,d).Επομένως $y_i \to y, y \in X$.Από τον καλό ορισμό της d',θα πρέπει

$\lim_{i,j\to 0}|\dfrac{1}{d(y_i,F_n)}-\dfrac{1}{d(y_j,F_n)}|=0,\forall n\in\mathbb{N}$.Επομένως ακολουθία $\dfrac{1}{d(y_i,F_n)}$ συγκλίνει ως προς n,μέσα στο $\mathbb{R}$.Επομένως η $d(y_i,F_n)$ είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν.Αφού ,λοιπόν

$$d(y_i,F_n)\to d(y,F_n) \text{ και } d(y,F_n)\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$$

, έχουμε ότι:

$$y\notin F_n\forall n\in\mathbb{N} \text{ και } \forall y\in Y$$

. Τελικά $y_i\to y$ στον (Y,d'). □

Από το θεώρημα 3.2.7 προκύπτει το συμπέρασμα πως κάθε υποσύνολο Πολωνικού χώρου είναι Πολωνικός χώρος αν και μόνο αν είναι G_δ σύνολο.

Πρόταση 3.2.8. *Οι άρρητοι αριθμοί είναι Πολωνικός χώρος με την σχετική τοπολογία,ενώ οι ρητοί αριθμοί δεν είναι,ακριβώς επειδή το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι G_d, ενώ το $\mathbb{Q}$ όχι.*

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρειαστούμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.9. *Baire για πλήρεις μετρικούς χώρους.*
Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και $G_n\subseteq X,\forall n\in\mathbb{N}$ ακολουθία ανοικτών και πυκνών συνόλων. Τότε το $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$ είναι πυκνό στον X.

Απόδειξη. Πρότασης 3.2.8 Έστω $V_q=\mathbb{R}\setminus\{q\}$ ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν πάρω την $\bigcap V_q$,πάνω σε όλους τους ρητούς αριθμούς έχω ότι $\bigcap V_q=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,επομένως οι άρρητοι είναι G_δ σύνολο. Έστω ότι οι $\mathbb{Q}$ είναι G_δ σύνολο, δηλαδή υπάρχουν G_n ανοικτά σύνολα ,ώστε $\mathbb{Q}=\bigcap G_n$,επομένως $\overline{G_n}=\mathbb{R}$. Θεωρώ το

$$A=\{V_q\cap G_n:q\in\mathbb{Q},n\in\mathbb{N}\}=\{A_i:i\in\mathbb{N}\}$$

τα οποία είναι ανοικτά και πυκνά $\implies\bigcap A_i,i\in\mathbb{N}$ είναι πυκνό από το θεώρημα 3.2.9
ως ακολουθία πυκνών και ανοικτών συνόλων σε πλήρη μετρικό χώρο. Τελικά έχουμε $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i=(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}}V_q)\cap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n)=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\mathbb{Q}=\emptyset$, που μας δίνει το άτοπο. □

3.3. Σύνδεση Πολωνικών χώρων με τον χώρο του Baire

Ορισμός 3.3.1. Ορισμός και βασικά χαρακτηριστικά πεπερασμένων ακολουθιών.
Έστω ένα σύνολο X, τότε μία πεπερασμένη ακολουθία είναι μία συνάρτηση $u : \{i \in \mathbb{N} : i < n\} \to X$ και την συμβολίζουμε με $u = (u(0), u(1), ...u(n-1))$.Επίσης το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών συμβολίζεται με $X^{<\mathbb{N}}$.

- Το μήκος μίας $u \in X^{<\mathbb{N}}$,συμβολίζεται με |u| είναι το μοναδικό n που έχουμε από τον ορισμό της u.
- Κενή ακολουθία ονομάζουμε την συνάρτηση $u : \{i \in \mathbb{N} : i < 0\} \to X$, δηλαδή με κενό σύνολο στο πεδίο ορισμού της.
- Όταν γράφουμε $u \leq a$ εννοούμε ότι η u είναι αρχικό τμήμα της ακολουθίας α, δηλαδή $a = (u(0), u(1), u(2), ..., u(|u| - 1), a(0), a(1), ...)$.
- Η παράθεση κάποιας $u \in X^{<\mathbb{N}}$ με μία $a \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι μία νέα ακολουθία όπου τοποθετεί τα στοιχεία της α ακριβώς μετά τα στοιχεία της u,δηλαδή:
$(u(0), u(1), u(2), ..., u(|u| - 1), a(0), a(1), ...a(|a| - 1))$.Η πράξη αυτή συμβολίζεται με $u * a$
- Η $a \in X^{<\mathbb{N}}$ λέγεται άμεση επέκταση της $u \in X^{<\mathbb{N}}$ αν ισχύει ότι $a = u * (x), x \in X$, δηλαδή η α προκύπτει ακριβώς από την παράθεση της u με ένα μόνο στοιχείο.
- Δύο πεπερασμένες ακολουθίες u,α λέγονται συμβατές αν ισχύει είτε ότι η u είναι αρχικό κομμάτι της α, είτε ότι η α είναι αρχικό κομμάτι της u.Συμβολίζουμε με u||α, όταν α, u είναι συμβατές.

Ορισμός 3.3.2. Τα απαραίτητα στοιχεία για τον ορισμό του χώρου του Baire.
Το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$,δηλαδή οι άπειρες ακολουθίες ,συμβολίζονται με $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, εφοδιασμένος με την μετρική $d_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ με $d_{\mathcal{N}}(a, b) = \left\{ \begin{array}{rl} 2^{-n(a,b)}, & a \neq b \\ 0, & a = b \end{array} \right\}$
όπου $n(a, b)$ είναι ο ελάχιστος n, με $a(n) \neq b(n)$ και a,b είναι δύο άπειρες ακολουθίες,ονομάζεται χώρος του Baire και θα τον συμβολίζουμε με $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$.

- Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,ορίζουμε βασική περιοχή του χώρου του Baire:

  $\mathcal{N}_u = \{a \in \mathcal{N} : u \sqsubseteq a\} = \{u(0)\} \times \{u(1)\} \times ... \times \{u(|u| - 1)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ...$

  Πρακτικά παίρνουμε όλες τις ακολουθίες που έχουν αρχικό κομμάτι τους την u,ενώ στα επόμενα στοιχεία οποιονδήποτε φυσικό αριθμό.
- Η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αυτό σημαίνει πως η σύγκλιση στον χώρο του Baire είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση κατά συντεταγμένη,δηλαδή αν έχω $a_i \overset{d_{\mathcal{N}}}{\to} a$ σημαίνει:

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} a_i(n) = a(n)$$

  .
- Ο χώρος $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος,δηλαδή ο χώρος του Baire είναι Πολωνικός.

Θεώρημα 3.3.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο X ,υπάρχει συνεχής επιμορφισμός π:*$\mathcal{N} \to X$.

Απόδειξη. Αφού ο X είναι Πολωνικός χώρος υπάρχει ένα D πυκνό και αριθμήσιμο σύνολο στον X με $D = \{r_0, r_1, r_2, ...\}$ και d κατάλληλη μετρική . Για κάθε α $\in \mathcal{N}$, θεωρώ την ακολουθία:
$x_{n+1} = \left\{ \begin{array}{rl} r_{a_{n+1}}, & d(x_n, r_{a_{n+1}}) < 2^{-n} \\ x_n, & d(x_n, r_{a_{n+1}}) \geq 2^{-n} \end{array} \right\}$ και $x_0 = r_{a(0)}$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$,επομένως για τυχόν ε>0 έχουμε:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ \exists n_0 : \forall n, m > n_0\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

άρα η $\{x^a_n\}$ είναι Cauchy ακολουθία, επομένως αφού βρίσκομαι σε πλήρη μετρικό χώρο, μπορώ να ορίσω π(α)=$lim_{n\to\infty} x^a_n$.
Δείχνουμε ότι η π είναι συνεχής παίρνοντας δύο ακολουθίες α,b με
$a(0) = b(0), ..., a(n) = b(n) \implies x^a_0 = x^b_0, ..., x^a_n = x^b_n \implies$ d(π(α),π(b)) $\leq 2^{-n+2}$.
Παίρνω τυχόν $x \in X$ και θέτω α(n)=ο μικρότερος κ για τον οποίον ισχύει $d(x, r_k) < 2^{-n-1}$.
Τελικά έχουμε π(α)=$lim_{n\to\infty} r_{a(n)} = x$. □

Θεώρημα 3.3.4. *Η συνάρτηση π:$\mathcal{N} \to X$ αντιστρέφεται ,επομένως υπάρχει μονομορφισμός $f : X \to \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.3.3 έχουμε ότι η συνάρτηση π που ορίσαμε ,επιδέχεται αντίστροφη συνάρτηση ,δηλαδή ότι υπάρχει μονομορφισμός $f : X \to \mathcal{N}$ με π(f(x))=x για κάθε $x \in X$ και f(π(x))=α για κάθε $a \in f[X]$. Η εν λόγω συνάρτηση είναι η f(x)(n)=ο ελάχιστος αριθμός $k \in \mathbb{N}$ με $d(r_k, x) < 2^{-(n+2)}, x \in X, n \in \mathbb{N}$.Θέτοντας α=f(x),τότε από την προηγούμενη απόδειξη έχουμε π(α)=x,άρα π(f(x))=x για κάθε $x \in X$. Επομένως αφού ισχύει η σχέση $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ έχουμε ότι η f είναι μονομορφισμός και για κάθε α=f(x)έχουμε f(π(α))=f(π(f(x)))=f(x)=α. □

Πρόταση 3.3.5. *Για κάθε Πολωνικό χώρο X έχουμε ότι $X \leq_c \mathbb{R}$,δηλαδή κάθε Πολωνικός χώρος έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του πληθαρίθμου του συνεχούς.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την πρόταση 3.3.4 έχουμε ότι $X \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. □

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν σημαίνει πως όλοι οι Πολωνικοί χώροι έχουν απαραίτητα τον πληθάριθμο του συνεχούς,καθώς υπάρχει και το σύνολο των φυσικών αριθμών το οποίο με την διακριτή μετρική είναι Πολωνικός χώρος όπως είδαμε στο 3.1.2.

3.4. Σύνδεση Πολωνικών χώρων με τον χώρο του Cantor

Ορισμός 3.4.1. Τα απαραίτητα στοιχεία για τον ορισμό του χώρου του Cantor.

- Το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$,που συμβολίζεται με $2^{\mathbb{N}}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{N}$, επομένως από τον περιορισμό της μετρικής, όπως αυτή ορίστηκε στον 3.3.2. Έχουμε δηλαδή:
$$d_{2^{\mathbb{N}}} = d_{\mathcal{N}|2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}}.$$
Ο χώρος του Cantor είναι ο τοπολογικός χώρος $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$.
- Με την χρήση του θεωρήματος 2.2.23 αποδεικνύουμε ότι ο $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος ,επομένως ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος είναι Πολωνικός.

Ορισμός 3.4.2. Ένας Πολωνικός χώρος X, ονομάζεται τέλειος, αν δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία.

Θεώρημα 3.4.3. *Για κάθε τέλειο Πολωνικό χώρο X υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός*
$$t : 2^{\mathbb{N}} \to X.$$

Πρόταση 3.4.4. *Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Αν X είναι Πολωνικός χώρος και P ένα τέλειο μη κενό υποσύνολό του, τότε ο P είναι Πολωνικός χώρος.Από το θεώρημα 3.4.3 ,έχουμε ότι υπάρχει μονομορφισμός $t : 2^{\mathbb{N}} \to P$,επομένως $2^{\mathbb{N}} \leq_c P$. Τελικά παίρνουμε:
$$\mathbb{R} =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}$$
στηριζόμενοι στην πρόταση 3.3.5 και το θεώρημα 1.1.7. □

3.5. Το Θεώρημα Cantor-Bendixon

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω X Πολωνικός χώρος και $C \subseteq X$ κλειστό, όχι απαραίτητα τέλειο.Τότε υπάρχουν $P, S \subseteq X$ με τις ιδιότητες:*

(1) $P \cap S = \emptyset$ *και* $P \cup S = C$.
(2) *P τέλειο, δηλαδή χωρίς μεμονωμένα σημεία και καλείται* ***τέλειος πυρήνας*** *του C.*
(3) *S αριθμήσιμο και καλείται το* ***διάσπαρτο μέρος*** *του C.*
(4) *Η διάσπαση (P,S) είναι μοναδική και καλείται* ***Cantor-Bendixon διάσπαση*** *του C.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το κλειστό σύνολο $C \subseteq X$ και μία αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για την τοπολογία του X και ορίζουμε

$$P = \{x \in C : \forall n, \text{ αν } x \in V_n \text{ τότε το σύνολο } V_n \cap C \text{ είναι υπεραριθμήσιμο}\}$$

και

$$S = C \setminus P$$

Δείχνουμε ότι το S είναι αριθμήσιμο:
Για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \notin P$ και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και το σύνολο $V_n \cap C$ να είναι αριθμήσιμο. Ορίζουμε n(x) να είναι ο ελάχιστος τέτοιος n και $I = \{n(x) \in \mathbb{N} : x \in S\}$. Τότε το I είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και ισχύει ότι:

$$S \subseteq \bigcup_{n\in I} V_n \cap C.$$

Αυτό ισχύει γιατί $x \in V_{n(x)}$ για κάθε $x \in S \subseteq C$. Επομένως το S περιέχεται σε μία αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Άρα είναι αριθμήσιμο.
Το P είναι κλειστό σύνολο: Έστω x_i μία ακολουθία μέσα στο P που συγκλίνει στο $x \in X$.Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $x_i \in V_n$. Αφού $x_i \in P$ έχουμε ότι το σύνολο $V_n \cap C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα $x \in P$ και το P είναι κλειστό.
Το P δεν έχει μεμονωμένα σημεία: Θεωρούμε $x \in P$ και $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$. Το σύνολο

$$V_n \cap C = (V_n \cap P) \cup (V_n \cap S)$$

είναι υπεραριθμήσιμο, ενώ το $V_n \cap S$ είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του S. Συνεπώς το $V_n \cap P$ είναι υπεραριθμήσιμο και ειδικότερα υπάρχει $y \in V_n \cap P$ που είναι διάφορο του x. Άρα το x δεν είναι μεμονωμένο σημείο.
Μοναδικότητα διάσπασης: Θεωρούμε P' και S', ώστε

$$P' \cup S' = P \cup S.$$

Αν $x \in P'$ και $x \in V_n$, μπορούμε να βρούμε από τον χαρακτηρισμό της ιδότητας του T_3 για κάθε μετρικοποιήσιμο χώρο, μία μικρή ανοικτή μπάλα του X και m ώστε $x \in V_m \subseteq \overline{V_m} \subseteq V_n$. Τότε το $\overline{V_m \cap P'}$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $V_m \cap P' \subseteq V_n \cap C$. Επίσης το $\overline{V_m \cap P'}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία, άρα είναι μη κενό τέλειο σύνολο. Επομένως είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό σημαίνει ότι $x \in P$ άρα $P' \subseteq P$. Αν τώρα $x \in S'$, τότε $x \notin P'$ και αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό υπάρχει n με $x \in V_n$ και $V_n \cap P' = \emptyset$. Άρα $V_n \cap C = V_n \cap S' \subseteq S'$ και το σύνολο $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο. Προκύπτει ότι $S \subseteq S'$, επομένως $P \subseteq P'$. Επομένως $P = P'$ και άρα $S = S'$. □

3.6. Δένδρα

Ορισμός 3.6.1. Έστω X μη κενό σύνολο. Ένα $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ είναι δένδρο στο X αν είναι μη κενό και κλειστό προς τα κάτω ως προς την διάταξη $\sqsubseteq$, δηλαδή αν $w \sqsubseteq u$ και $u \in T$ τότε $w \in T$.

Παράδειγμα 3.6.2. Τα σύνολα $X^{<\mathbb{N}}$ και Λ είναι δένδρα στο X. Όπως επίσης και ένα σύνολο $T = \{\ \Lambda\ , (a), (a, b), (a, c), (d)\}$ για κάποια $a, b, c, d \in X$.

Ορισμός 3.6.3. Βασικά χαρακτηριστικά δένδρων.

(1) Η **ρίζα** του T είναι η κενή ακολουθία Λ.
(2) Τα στοιχεία του T ονομάζονται **κόμβοι ή φύλλα** του T.
(3) Ένας κόμβος u του T ονομάζεται **τερματικός** αν δεν έχει γνήσια επέκταση w μέσα στο T, δηλαδή για κάθε $w \in T$ με $u \sqsubseteq w$ έχουμε $u = w$.
(4) Το T είναι **περικομμένο ή κλαδεμένο** αν δεν έχει τερματικούς κόμβους.
(5) Με τον όρο **άπειρο κλαδί** του T εννοούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με την ιδιότητα:
$$(f(0), ..., f(n)) \in T \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$
(6) Το **σώμα** [T] του T είναι το σύνολο όλων των άπειρων κλαδιών του T.
(7) Ένα δένδρο T ονομάζεται **θεμελιωμένο** αν $[T] = \emptyset$ και **μη-θεμελιωμένο** αν $[T] \neq \emptyset$.
(8) Ένα δένδρο S στο X θα λέγεται **υποδένδρο** του T αν $S \subseteq T$. Για κάθε $u \in X^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε το υποδέντρο T_u των ακολουθιών που είναι συμβατές με το u, ως:
$$T_u = \{w \in T | u || w\}.$$
Πρακτικά, $w \in T_u$ αν και μόνο αν $w \in T$ και είτε $w \sqsubseteq u$ είτε $u \sqsubseteq w$.
(9) Αν $[T] \neq \emptyset$ τότε ορίζουμε το $a_L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ως εξής:
- $a_L(0) =$ ο ελάχιστος κ για τον οποίο υπάρχει $a \in [T]$, με $(0) =$.
- $a_L(n + 1) =$ ο ελάχιστος κ για τον οποίο υπάρχει $a \in [T]$ με $a(i) = a_L(i), i = o, 1..., n$. Το a_L ονομάζεται το **αριστερότερο άπειρο κλαδί** .

3.7. Δένδρα και τοπολογία

Το σώμα ενός δένδρου T στο X είναι υποσύνολο $X^{\mathbb{N}}$. Αν θεωρήσουμε στο X την διακριτή τοπολογία τότε ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικός χώρος. Μία βάση για την τοπολογία αυτή είναι η εξής:

$$\{x_0\} \times ... \times \{x_{n-1}\} \times X \times X \times ...$$

όπου προφανώς $x_0, x_1, ..., x_{n-1} \in X$.

Πρόταση 3.7.1. *Έστω X μη-κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική και $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$.Τότε το F είναι κλειστό ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο X με $F = [T]$. Προφανώς παίρνουμε ως πόρισμα απευθείας και για τον χώρο του Baire.*

Λήμμα 3.7.2. *(Το βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων) Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο X ένα $P \subseteq X \times \mathcal{N}$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με την διακριτή μετρική. Τότε το P είναι κλειστό ακριβώς όταν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq X \times \mathcal{N}$ με τις ιδιότητες:*

$$\text{το } T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | (x, u) \in T\}$$

είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ για κάθε $x \in X$ και

$$P = \{(x, a) \in X \times \mathcal{N} | a \in [T(x)]\}.$$

Ορισμός 3.7.3. Έστω X μη κενό σύνολο και T ένα δένδρο στο X. Το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης αν για κάθε $u \in T$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα $w \in T$ που είναι άμεσες επεκτάσεις του u, δηλαδή για κάθε $u \in T$ υπάρχουν $x_0, ..., x_{n+1} \in X$ έτσι ώστε:

$$\forall x(u * (x) \in T \iff x \in \{x_0, ..., x_{n+1}\}).$$

Λήμμα 3.7.4. *(Το Λήμμα του Konig)*
Κάθε άπειρο δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει άπειρο κλαδί.

Πρόταση 3.7.5. *Έστω X μη κενό υποσύνολο με την διακριτή τοπολογία και $K \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το K είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο στο X πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$. Ξανά παίρνουμε το αντίστοιχο πόρισμα για τον χώρο του Baire.*

Ορισμός 3.7.6. Θεωρούμε το T_r που είναι το σύνολο όλων των δένδρων στο $\mathbb{N}$ ως εξής:

$$T_r = \{T \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | \text{ το T είναι δένδρο στο } \mathbb{N}\}.$$

Πρόταση 3.7.7. *Ο χώρος όλων των δένδρων T_r είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κλάσεις συνόλων Πολωνικών χώρων

4.1. Οι βασικότεροι τελεστές

Ορισμός 4.1.1. Οι **τελεστές συνόλων** ορίζουν πρακτικά τις πράξεις που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεταξύ συνόλων,ενώ εδώ θα μιλήσουμε μόνο για υποσύνολα Πολωνικών χώρων.

- Ο τελεστής της **διάζευξης** $\vee$: Αν έχουμε δύο σύνολα $F, G \subseteq X$,ορίζουμε το σύνολο της διάζευξης $F \vee G \subseteq X$ με

$$x \in F \vee G \iff x \in F \text{ ή } x \in G.$$

  Ο τελεστής αυτός προσομοιάζει την ένωση. Η διάζευξη όμως αφορά υποσύνολα του ίδιου χώρου.
- Ο τελεστής της **σύζευξης** &: Αν έχουμε δύο σύνολα $F, G \subseteq X$,ορίζουμε το σύνολο της σύζευξης $F \& G \subseteq X$ με

$$x \in F \& G \iff x \in F \text{ και } x \in G.$$

  Ομοίως ,ο τελεστής αυτός προσομοιάει της τομής,μόνο που διαφέρει ξανά για τον ίδιο λόγο.
- Ο τελεστής του συμπληρώματος **συμπληρώματος** c:Αν $P \subseteq X$ τότε ορίζουμε το συμπλήρωμα του P ως προς το X και το συμβολίζουμε με $c_X P$ ως το σύνολο $X \setminus P$.Εδώ ισχύει ότι: $x \in c_X P \iff \neg(x \in P)$.
- Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης διάζευξης** $\vee_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq X, n \in \mathbb{N}$,ορίζουμε την άπειρη ένωση $\vee_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με:

$$x \in \vee_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists n \in \mathbb{N} x \in P_n.$$

  Εν ολίγοις ο τελεστής αυτός εκφράζει την άπειρη ένωση υποσυνόλων που βρίσκονται στον ίδιο Πολωνικό χώρο.
- Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης σύζευξης** $\wedge_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq X, n \in \mathbb{N}$,ορίζουμε την άπειρη τομή $\wedge_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με:

$$x \in \wedge_{\mathbb{N}}(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists n \in \mathbb{N} x \in P_n.$$

  Εν ολίγοις ο τελεστής αυτός εκφράζει την άπειρη τομή υποσυνόλων που βρίσκονται στον ίδιο Πολωνικό χώρο.
- Ο τελεστής του **υπαρξιακό ποσοδείκτη** $\exists^{\mathcal{Y}}$ πάνω στον $\mathcal{Y}$. Παίρνουμε ένα $K \subseteq X \times \mathcal{Y}$ ορίζοντας το σύνολο

$$\exists^{\mathcal{Y}} K = \{x \in X : \exists y (x, y) \in K\}.$$

  Πρακτικά το σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}} K$ είναι η προβολή του K πάνω στον $\mathcal{Y}$,δηλαδή

$$\exists^{\mathcal{Y}} K = pr[K], \text{ όπου } pr : X \times \mathcal{Y} \to X : pr(x, y) = x.$$

- Ο τελεστής του **καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\mathcal{Y}}$ πάνω στον $\mathcal{Y}$. Παίρνουμε $K \subseteq X \times \mathcal{Y}$ ορίζοντας το σύνολο

$$\forall^{\mathcal{Y}} K = \{x \in X : \forall y (x, y) \in K\}.$$

- Ο τελεστής του **φραγμένου υπαρξιακού ποσοδείκτη** $\exists^{\leq}$. Παίρνουμε το σύνολο $K \subseteq X \times \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\exists^{\leq} K \subseteq X \times \mathbb{N}$ με:

$$(x, n) \in \exists^{\leq} K \iff \exists m \leq n (x, m) \in K.$$

- Ο τελεστής του **φραγμένου καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\leq}$. Παίρνουμε $K \subseteq X \times \mathbb{N}$ και ορίζουμε το σύνολο $\forall^{\leq} K \subseteq X \times \mathbb{N}$ με:
$$(x, n) \in \forall^{\leq} K \iff \forall m \leq n(x, m) \in P.$$
Κατά κάποιο τρόπο έχουμε μία πεπερασμένη τομή ,όπου το ''εύρος'' της είναι μεταβλητό.
- Ο τελεστής της **πεπερασμένης ένωσης** $\vee_{\leq}$. Αν πάρουμε πεπερασμένα το πλήθος P_1, P_2,..., $P_n \subseteq X$,ορίζουμε το σύνολο
$$\vee_{\leq}(P_1, P_2, ..., P_n) = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n.$$
- Ο τελεστής της **πεπερασμένης τομής** $\wedge_{\leq}$.Εδώ παίνρουμε ξανά πεπερασμένα το πλήθος $P_1, P_2, ..., P_n \subseteq X$, ενώ εντελώς αντίστοιχα ορίζουμε το σύνολο
$$\wedge_{\leq}(P_1, P_2, ..., P_n) = P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n.$$
- Ο τελεστής της **τομής ως προς** y. Για κάθε $K \subseteq X \times \mathcal{Y}$ και κάθε $y \in \mathcal{Y}$, ορίζουμε το σύνολο:
$$K_y = \{x \in X : (x, y)\}$$
και το P_y είναι η y-τομή του συνόλου P,η οποία προφανώς εξαρτάται κάθε φορά από το σταθεροποιημένο y.

Ορισμός 4.1.2. **Κλάση συνόλων** είναι μια οποιαδήποτε συλλογή από σύνολα σε διαφορετικούς χώρους.Εμείς όταν αναφερόμαστε σε κλάση θα περιορίζουμε στα υποσύνολα Πολωνικών χώρων. Επομένως για κάθε Πολωνικό χώρο X και κάθε κλάση συνόλων G, θέτουμε :
$$G \mid X = \{A \subseteq X : \text{ το A ανήκει στην κλάση G } \}.$$
Θα χρησιμοποιούμε τις παρακάτω εκφράσεις:
- $G_0 \subseteq G_1 \iff$ κάθε στοιχείο της G_0 είναι στοιχείο της G_1.
- $G_0 \cup G_1 \iff$ η κλάση όλων των συνόλων A που ανήκουν στην G_0 ή στην G_1.
- $G_0 \cap G_1 \iff$ η κλάση όλων των συνόλων A που ανήκουν στην G_0 και στην G_1.
- $G_0 \backslash G_1 \iff$ η κλάση όλων των συνόλων A που ανήκουν στην G_0 και δεν ανήκουν στην G_1.
- Η πεπερασμένη ένωση $\vee_{k \leq n} G_k$ των κλάσεων $G_0, G_1, ...G_n$ ορίζεται με προφανή τρόπο, όπως και η άπειρη ένωση.
- Η πεπερασμένη τομή $\wedge_{k \leq n} G_k$ των κλάσεων $G_0, G_1, ...G_n$ ορίζεται αντίστοιχα, όπως και η άπειρη τομή.

Ορισμός 4.1.3. Μπορούμε να συνδυάσουμε τις κλάσεις συνόλων που ορίσαμε στον 4.1.2 παραπάνω με οποιονδήποτε τελεστή, όπως αυτοί ορίστηκαν στον 4.1.1. Έστω Πολωνικός χώρος X και P που ανήκει στην κλάση G,ορίζουμε τα παρακάτω:
- $cG = \{$ όλα τα $c_X P = X \setminus P : P \in G \mid X\}$.
- $\vee G = \{$ όλα τα $A \vee B : A, B \in G \mid X\}$.
- $\exists^{\mathcal{Y}} G = \{$ όλα τα $\exists^{\mathbb{N}} P : P \in G \mid (X \times \mathcal{Y})\}$.
- $\vee_{\mathbb{N}} G = \{\vee_{\mathbb{N}}(P_i)_{i \in \mathbb{N}} : P_i \in G \mid X, i \in \mathbb{N}\}$.
- Θα λέμε ότι η κλάση G είναι κλειστή ως πρς τον τελεστή Φ ,αν το αποτέλεσμα του Φ στα σύνολα της G είναι σύνολο που ανήκει στην G. Δηλαδή ΦG $\subseteq G$.
- Θα λέμε ότι μία κλάση G είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathcal{Y}$ και κάθε $Q \in G \mid \mathcal{Y}$ έχουμε $f^{-1}[Q] \in G \mid \mathcal{Y}$,δηλαδή το σύνολο $P \subseteq X$ που ορίζεται με :
$$x \in P \iff f(x) \in Q$$
ανήκει στην G.

Ορισμός 4.1.4. Με τον όρο **κλάση συναρτήσεων** θα εννοούμε μία συλλογή συναρτήσεων ανάμεσα σε μετρκούς χώρους οι οποίες χαρακτηρίζονται από μία συγκεκριμένη ιδιότητα,όπως για παράδειγμα η συνέχεια ή η παραγωγισιμότητα.

Πρόταση 4.1.5. *Για κάθε κλάση G που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση,ισχύουν τα εξής:*

(1) *Αν το σύνολο $G \subseteq X \times \mathcal{Y}$ ανήκει στην G τότε για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ η y-τομή ανήκει στην G.*
(2) *Αν η G είναι κλειστή ως προς $\vee_{\mathbb{N}} \implies G$ κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$*

Πρόταση 4.1.6. *Έστω μία κλάση G με την ιδιότητα πως για κάθε Πολωνικό χώρο X και κάθε ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από σύνολα της G|X, το σύνολο $P \subseteq X \times \mathbb{N}$,που ορίζεται ως εξής:*

$$(x, n) \in P \iff x \in P_n$$

,ανήκει στην G. Αν η G είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$ τότε είναι κλειστή και ως προς τον τελεστή $\vee_{\mathbb{N}}$.

4.2. Borel κλάσεις

Ορισμός 4.2.1. Οι παρακάτω κλάσεις συνόλων ορίζονται σε Πολωνικούς χώρους με αναδρομή στο $n \geq 1$.

(1) $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$= η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων.
(2) $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 = c\, \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$=η κλάση όλων των κλειστών συνόλων.
(3) $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \vee_{\mathbb{N}}\, \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$=οι αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$
(4) $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} = c\, \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$= τα συμπληρώματα των συνόλων της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$.
(5) $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n \bigcap \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Πρόταση 4.2.2. *Η κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ είναι η κλάση των F_σ συνόλων και η $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ είναι η κλάση των G_δ συνόλων.*

Πρόταση 4.2.3. *Σε κάθε Πολωνικό χώρο X και για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|X \subseteq \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}$ και $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n|X \subseteq \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}$*

Λήμμα 4.2.4. *Οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$, $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n$ είναι κλειστές ως προς $\vee, \&$ και συνεχή αντικατάσταση.*

Παρατήρηση 4.2.5. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, κάθε Πολωνικό χώρο X και κάθε $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|(X \times X)$,τα σύνολα $A_i \subseteq X, i \in \mathbb{N}$ που ορίζονται ως εξής:

$$x \in A_i \iff (x, i) \in A$$

ανήκουν επίσης στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Λήμμα 4.2.6. *Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n \geq 1$, έναν Πολωνικό χώρο X και μία ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ που ανήκουν στην οικογένεια $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n|X$. Τότε το σύνολο $A \subseteq X \times \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής:*

$$(x, i) \in A \iff x \in A_i$$

ανήκει στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Πρόταση 4.2.7. *Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε τα εξής:*

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \exists^{\mathbb{N}}\, \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$$
$$\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} = \forall^{\mathbb{N}}\, \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n.$$

Θεώρημα 4.2.8. *(Θεμελιώσεις Ιδιότητες Κλειστότητας των Borel κλάσεων πεπερασμένης τάξης)*
Οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$, $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n$, όπου $n \geq 1$ είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τους τελεστές $\vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \vee_{\leq}, \wedge_{\leq}$.

4.3. Οι Προβολικές κλάσεις συνόλων

Ορισμός 4.3.1. Με αναδρομή στο $n \leq 1$ τις εξής κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους:

$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1,$ δηλαδή οι προβολές κλειστών $F \subseteq X \times \mathcal{N}$ υπεράνω του X .

$\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_1 = c\, \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1,$ δηλαδή τα συμπληρώματα των $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ συνόλων .

$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n,$ δηλαδή οι προβολές $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ συνόλων $F \subseteq X \times \mathcal{N}$ υπεράνω του X .

$\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1} = c\, \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1},$ δηλαδή τα συμπληρώματα των $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ συνόλων .

Παρατητούμε ότι ένα $P \subseteq X$ είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1$ σύνολο $Q \subseteq X \times \mathcal{N}$, έτσι ώστε για κάθε $x \in X$,

$$x \in P \iff \exists a (x, a) \in Q.$$

Επίσης, τα σύνολα της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ ονομάζονται **αναλυτικά** , εκείνα της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$ λέγονται **συναναλυτικά** , ενώ τα σύνολα της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Delta}}^1_1$ ονομάζονται **αμφι-αναλυτικά** .

Λήμμα 4.3.2. *Οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n,\ \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n,\ \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Πρόταση 4.3.3. *Σε κάθε Πολωνικό χώρο και για κάθε $n \geq 1$ έχουμε:*

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n | X \subseteq \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1} | X$$

$$\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n | X \subseteq \utilde{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1} | X.$$

4.4. Borel σύνολα

Ορισμός 4.4.1. Έστω $X \neq \emptyset$ και μία οικογένεια συνόλων $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ θα λέγεται **σ-άλγεβρα** στο X, αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(1) Τα σύνολα $\emptyset, X$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$.
(2) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\setminus A, A \in \mathcal{A}$.
(3) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε ένα σύνολο $\bigcap \mathcal{F} = \{A \subseteq X | \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{N}\}$ είναι επίσης σ-άλγεβρα.

Ορισμός 4.4.2. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των σ-αλγεβρών στο X που περιέχουν τα ανοικτά υποσύνολα του X, δηλαδή:

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{A} | \text{ με } \mathcal{A} \text{ να είναι σ-άλγεβρα στο X και κάθε ανοικτό } V \subseteq X \text{ έχουμε } V \in A\}.$$

Παρατηρούμε ότι $P(X) \in \mathcal{F}$, οπότε $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}|X$ των **Borel υποσυνόλων του X** είναι η οικογένεια:

$$\mathcal{B}|X = \bigcap \mathcal{F}.$$

Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο του X ονομάζεται **Borel** αν ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}|X$.

Πρόταση 4.4.3. *Σε κάθε Πολωνικό χώρο και για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:*

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}{}^0_n|X \subseteq \mathcal{B}|X,$$

δηλαδή κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}{}^0_n$ υποσύνολο του X είναι και Borel υποσύνολο του X.

Θεώρημα 4.4.4. *Οι θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων.*
Η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, ως προς τους τελεστές $\vee, \&, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \vee_{\leq}, \wedge_{\leq}, c_X, \vee_{\mathbb{N}}, \wedge_{\mathbb{N}}, \exists^{\mathbb{N}}, \exists^{Y}, \forall^{\mathbb{N}}, \forall^{Y}$, όπου Y είναι αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος και X μετρικός χώρος.

Πρόταση 4.4.5. *Έστω X μετρικός χώρος και $Y \neq \emptyset$ υποσύνολο του X. Τότε ένα $A \subseteq Y$ είναι Borel στον μετρικό χώρο Y αν και μόνο αν είναι της μορφής $B \cap Y$, όπου το B είναι Borel στο X. Πιο αναλυτικά:*

$$\mathcal{B}|Y = \{B \cap Y | B \in \mathcal{B}|X\}.$$

Ειδικότερα, αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το $A \subseteq Y$ είναι Borel στον Y, τότε το A είναι Borel στον X.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το Θεώρημα Kunen-Martin για αναλυτικά σύνολα

5.1. Θεμελιωμένες σχέσεις

Ορισμός 5.1.1. Μία **διμελής σχέση** στο X είναι ένα σύνολο $R \subseteq X \times X$. Συμβολίζουμε με:

$$x \leq_R y \iff (x,y) \in R.$$

Στην προκειμένη περίπτωση δεν είναι απαραίτητο η $\leq_R$ να έχει απαραίτητα τις ιδότητες της διάταξης. Μπορεί να είναι απλώς ένα υποσύνολο. Το **αυστηρό μέλος** της R είναι η διμελής σχέση

$$R_s \subseteq X \times X$$

με

$$(x,y) \in R \text{ και } (y,x) \notin R.$$

Επίσης, συμβολίζουμε με $x <_R y \iff (x,y) \in \mathbb{R}$. Μία διμελής σχέση R είναι θεμελιωμένη αν δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ στοιχείων του X με $x_{n+1} <_R x_n$, ισοδύναμα η R είναι καλά θεμελιωμένη αν και μόνο αν κάθε μη-κενό $A \subseteq X$ έχει ένα R-ελαχιστικό στοιχείο, δηλαδή $\exists x \in A$ έτσι ώστε για κάθε $y \in A$ να μην ισχύει ότι $y <_R x$. Δείτε την 5.1.4. Αν ο $(U, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος τότε η σχέση $\leq$ είναι θεμελιωμένη. Αντίστροφα αν ο $(P, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένος χώρος και η $\leq$ είναι θεμελιωμένη, τότε ο $(P, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος. Με άλλα λόγια οι θεμελιωμένες σχέσεις αποτελούν γενίκευση των καλών διατάξεων.

Παράδειγμα 5.1.2. Σχετικά με τον παραπάνω ορισμό:

- Παίρνουμε όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών και ορίζουμε $(u,v) \in R \iff v \sqsubseteq u$ και αυτή η σχέση αποδεικνύεται ότι είναι μερική διάταξη στο σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών, δεν είναι όμως ολική και η κενή ακολουθία Λ είναι το μέγιστο στοιχείο της. Επίστης η $\leq_R$ δεν είναι θεμελιωμένη, γιατί αν πάρουμε $x_n = (1, 1, ..., 1)$ με n στοιχεία, τότε ,

$$x_n \sqsubseteq x_{n+1} \text{ και } x_{n+1} \neq x_n \text{ άρα } x_{n+1} <_R x_n \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Έχουμε ότι $u <_T v \iff u \sqsubseteq v$ και $u \neq v$.
- Το σύνολο $R = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή $x \leq_R y \iff y = x + 1$, ενώ ταυτόχρονα ισχύει ότι $x \leq_R y \iff x <_R y$. Η $\leq_R$ δεν είναι σχέση διάταξης, γιατί δεν είναι όλα τα στοιχεία της συγκρίσιμα ανά δύο, όμως είναι θεμελιωμένη γιατί αλλιώς θα υπήρχε φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Πρόταση 5.1.3. *Το T είναι θεμελιωμένο, δηλαδή $[T] = \emptyset$ αν και μόνο αν η σχέση $\leq_T$ είναι θεμελιωμένη.*

Απόδειξη. Το T δεν είναι θεμελιωμένο, επομένως υπάρχει $a \in [T]$ και παίρνουμε:

$$x_n = (a(0), a(1), ..., a(n)), x_n \in T.$$

Επίσης ισχύει ότι $x_n \sqsubseteq x_{n+1}$ και $x_n \neq x_{n+1}$ άρα $x_{n+1} <_T x_n$. Άρα αν το T δεν είναι θεμελιωμένο η $\leq_T$ δεν είναι θεμελιωμένη.
Αν ισχύει ότι $x_{n+1} <_T x_n$, όπου $x_n \in T, n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει $x_n \sqsubseteq x_{n+1}$ και $x_n \neq x_{n+1}$ και αυτό δίνει ένα $a = \bigcup x_n \in [T]$. □

Παρατήρηση 5.1.4. Η $\leq_R$ είναι θεμελιωμένη $\iff \forall A \subset X$, με το A να είναι μη-κενό, τότε το A έχει $\leq_R$ −ελαχιστικό στοιχείο.

Απόδειξη. $'' \implies ''$ Θεωρούμε $x_1 \in A$ και $A \neq \emptyset$. Αν το A δεν έχει ελαχιστικό, τότε μπορώ να βρω $x_2 \in A$ για το οποίο να ισχύει ότι $x_2 <_R x_1$. Επομένως με τον ίδιο τρόπο φτιάχνω μία φθίνουσα ακολουθία, το οποίο οδηγεί σε άτοπο, γιατί η R είναι καλά θεμελιωμένη.
$'' \impliedby ''$ Έστω προς άτοπο ότι η $\leq_R$ δεν είναι θεμελιωμένη. Τότε υπάρχει $x_n, n \in \mathbb{N}$ με $x_{n+1} <_R x_n$ και αν πάρω $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, το A δεν έχει $\leq_R$-ελάχιστικο. □

Θεώρημα 5.1.5. *Έστω $X \neq \emptyset$ και $\leq_R$ μία θεμελιωμένη σχέση στο X. Θεωρούμε $P \subset X$ με τις ιδιότητες:*

- *$x \in P$ για κάθε x που είναι $\leq_R$-ελαχιστικό.*
- *για κάθε $x \in X$ αν $\forall y <_R x$, ισχύει ότι $y \in P$, τότε $x \in P$.*

Με το συμπέρασμα να είναι ότι $P = X$

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο πως $P \neq X$. Τότε $A = X \setminus P \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει $x \in A$ που είναι $\leq_R$-ελαχιστικό του A. Για κάθε $y <_R x$, αφού το x είναι $\leq_R$-ελαχιστικό του A έχουμε ότι $y \notin A$. Άρα $y \in P$. Δηλαδή για κάθε $y <_R x$ ισχύει ότι $y \in P$. Άρα το $x \in P$. Ταυτότχρονα όμως ίσχυει ότι $x \in A = X \setminus P$. Άτοπο. □

Θεώρημα 5.1.6. *Έστω $X \neq \emptyset, \leq_R$ μία θεμελιωμένη σχέση στο X και H ένας μονομελής οριστικός τελεστής. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $g : X \to Y$ με $g(x) = H(g|_{\{y \in X | y <_R x\}})$.*

Θεώρημα 5.1.7. *Έστω $X \neq \emptyset, \leq_R$ μία θεμελιωμένη σχέση στο X. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\rho : X \to \kappa$, όπου ο κ είναι ένας διατακτικός αριθμός, η οποία ικανοποιεί:*

$$\rho(x) = sup\{p(y) + 1 | y <_R x\}.$$

Ορισμός 5.1.8. Δίνεται μία θεμελιωμένη σχέση $\leq_R$ σε ένα $X \neq \emptyset$. Τότε η μοναδική συνάρτηση $\rho : X \to \kappa$ με $\rho(x) = sup\{\rho(y) + 1 | y <_R x\}$, ονομάζεται **συνάρτηση κατάταξης** του $\leq_R$ και είναι επί. Προφανώς, αν το σύνολο εκκίνησης X είναι και αυτό διατακτικός αριθμός έχουμε ότι $\rho(x) = x$. Το μήκος της $\leq_R$ είναι το

$$| \leq_R | = sup\{\rho(x) + 1 | x \in X\}.$$

Παρατήρηση 5.1.9. Για κάθε $x \in X$ το $\rho(x)$ που έχουμε ορίσει παραπάνω είναι διατακτικός αριθμός.

Παρατήρηση 5.1.10. Αν το X είναι αριθμήσιμο σύνολο και η $\leq_R$ είναι θεμελιωμένη σχέση, τότε το μήκος της $| \leq_R |$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, δηλαδή $| \leq_R | < \omega_1$.

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι για κάθε $x \in X$ το $\rho(x) < \omega_1$ και βλέπουμε εύκολα ότι αν το x είναι τερματικό έχουμε $\rho(x) = 0 < \omega_1$.Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in X$ισχύει ότι $\forall y <_R x \rho(y) < \omega_1, \rho(x) = sup\{\rho(y) + 1 | y <_R x\}$ το οποίο μαζί με την παραπάνω παρατήρηση μας δίνει μία αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων διατακτικών αριθμών. Επομένως $\rho(x) < \omega_1$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και αφού έχουμε ορίσει $| \leq_R | = sup\{\rho(x) + 1 | x \in X\}$ που είναι επίσης μία αριθμήσιμη ένωση διατακτικών αριθμών. Τελικά,

$$| \leq_R | < \omega_1.$$

□

Ορισμός 5.1.11. Θεωρούμε ένα σύνολο P, έναν διατακτικό αριθμό κ και μία ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $f_n : P \to \kappa, n \in \mathbb{N}$.

- Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται **κ-ημικλίμακα** στο P, αν ισχύουν τα εξής:
  Για κάθε ακολουθία $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του P και για κάθε $x \in X$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $(f_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και αν $x_i \to x$, τότε $x \in P$. Πρακτικά, μιλάμε για μία έννοια ασθενέστερη της κλειστότητας.
- Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται **καλή κ-ημικλίμακα** στο P αν ισχύουν τα εξής:
  Για κάθε ακολουθία $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο P, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $(f_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή, τότε υπάρχει $x \in P$ με $x_i \to x$. Πρακτικά, μιλάμε για μία έννοια αντίστοιχη της σύγκλισης κατά Cauchy.

Παρατήρηση 5.1.12. Μία καλή κ-ημικλίμακα είναι και κ-ημικλίμακα.

Απόδειξη. Αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο P με $x \in X, x_i \to x$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $(f_n(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή. Αφού η $f_n, n \in \mathbb{N}$ είναι καλή κ-ημικλίκαμα, υπάρχει ένα $x' \in P$ με $x_i \to x'$. Έχουμε $x = x'$, άρα $x \in P$. ☐

Πρόταση 5.1.13. *Έστω X Πολωνικός χώρος και $P \subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το P είναι αναλυτικό.*
(2) *Το P επιδέχεται μία καλή ω-ημικλίμακα.*
(3) *Το P επιδέχεται μία ω-ημικλίμακα.*

Απόδειξη. Έστω d κατάλληλη μετρική και $\{N(s)|s \in w\}$ μία βάση για την τοπολογία του X. Γενικότερα, θα λέμε ότι μία πεπερασμένη ακολουθία $(s_0, s_1, ..., s_{n-1})$ είναι **κατάλληλη** αν

$$\overline{N(S_0)} \supseteq \overline{N(s_1)} \supseteq \overline{N(s_2)} \supseteq ... \supseteq \overline{N(s_{n-1})}$$

και η διάμετρος $|N(s_i)| \leq 2^{-i}, \forall i < n$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει κατάλληλη $(s_0, ...s_{n-1})$ με $x \in N(s_{n-1})$. Συμβολίζουμε με $(s_0^x, s_1^x, ..., s_{n-1}^x)$ την πεπερασμένη ακολουθία $n \in \mathbb{N}$ που είναι κατάλληλη, $x \in N(s_{n-1})$ και ο αριθμός $< s_0^x, s_1^x, ..., s_{n-1}^x >$ είναι ο ελάχιστος.
(1) $\implies$ (2) Θεωρούμε ότι το P είναι αναλυτικό και ορίζουμε μία καλή κ-ημικλίμακα στο P. Αφού το $P \subseteq X$ είναι αναλυτικό υπάρχει $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ κλειστό με $x \in P \iff \exists a : (x, a) \in C$. Θέτουμε $C_x = \{a \in \mathcal{N}|(x, a) \in C\}$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $x \in P \iff C_x \neq \emptyset$. Επίσης, ισχύει ότι κάθε C_x είναι κλειστό $\subseteq \mathcal{N}$, γιατί το C είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times \mathcal{N}$. Επομένως, για κάθε $x \in X$ υπάρχει δένδρο T_x με $C_x = [T_x]$, μάλιστα το T_x κατασκευάζεται από το x, όπως στο 3.7.2. Ορίζουμε b_x να είναι το αριστερότερο κλαδί του T_x για $x \in P$, οπότε $[T_x] = C_x \neq \emptyset$. Άρα έχουμε μία συνάρτηση $x \in P \to b_x \in C_x \subseteq \mathcal{N}$.Ορίζουμε $f_n : P \to w$ ως εξής:

$$f_n(x) =< s_0^x, s_1^x, ..., s_{n-1}^x, b_x(0), ..., b_x(n-1) > .$$

Είναι σχετικά απλό να δείξουμε ότι αυτή η ακολουθία που κατασκευάσαμε είναι καλή ω-ημικλίμακα στο P.
(2) $\implies$ (3)
Άμεσο από την παρατήρηση 5.1.12.
(3) $\implies$ (1)
Θεωρούμε $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ω-ημικλίμακα στο P. Παίρνω μία 1-1 και επί συνάρτηση $[,] : \omega^2 \to \omega$. Για κάθε $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ έχουμε $u = ([s_0, k_0], ..., [s_{n-1}, k_{n-1}])$ για μοναδικές ακολουθίες $(s_0, ..., s_{n-1})$ και $(k_0, ..., k_{n-1})$. Θα λέμε ότι η $u = ([s_0, k_0], ..., [s_{n-1}, k_{n-1}])$ είναι ισχυρά κατάλληλη, αν:

$$(s_0, ..., s_{n-1}) \text{ είναι κατάλληλη}$$

και

$$\exists y \in N(s_{n-1}) \bigcap P \text{ και } f_0(y) = k_0, f_1(y) = k_1, ..., f_{n-1}(y) = k_{n-1}.$$

Αν f_n δεν ήταν ω-ημικλίμακα το επιχείρημα καταρρέει, γιατί οι k_i δεν θα ήταν φυσικοί αριθμοί. Ορίζουμε:

$$P_u = \begin{cases} \overline{N(s_{n-1})} & \text{αν u ισχυρά κατάλληλη} \\ \emptyset & \text{αλλιώς} \end{cases} .$$

Κάθε P_u είναι κλειστό σύνολο.
Ισχυρίζομαι ότι:

$$x \in P \iff \exists a, \forall n, x \in P_{a|n}.$$

$'' \implies ''$
Έστω ότι $x \in P$ παίρνουμε

$$a = ([s_0^x, f_0(x)], ..., [s_{n-1}^x, f_{n-1}(x)], ...) \in \mathcal{N}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $a|n$ είναι ισχυρά κατάλληλη. Παίρνουμε $y = x$. Έστω $n \in \mathcal{N}$. Αφού $a|n$ ισχυρά κατάλληλη, έχουμε $P_{a|n} = \overline{N(s_{n-1}^x)}, x \in N(s_{n-1}^x) \subseteq \overline{N(s_{n-1}^x)} = P_{a|n}$.
$'' \impliedby ''$
Παίρνουμε $a = ([s_0, k_0], ..., [s_n, k_n], ...) \in \mathcal{N}$ με $x \in P_{a|n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι η $(s_0, ..., s_{n-1})$ είναι κατάλληλη και υπάρχει $y_n \in N(s_{n-1}) \bigcap P$ με

$$f_0(y_n) = k_0, f_1(y_n) = k_1, ..., f_{n-1}(y_n) = k_{n-1}.$$

Έχουμε $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} = \overline{N(s_n)} = \{x\}$, επιπλέον

$$y_i \in N(S_{i-1}), \forall i \in \mathbb{N} \text{ άρα } y_i \to x.$$

Επιπλέον ισχύει $f_n(y_i) = k_n$ για κάθε $i/geqn$. Επομένως $\forall n \in \mathbb{N}$ η $(f_n(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και αφού η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ω-ημικλίμακα έχουμε $x \in P$.
Από τον ισχυρισμό έχουμε:

$$x \in P$$

$$\iff \exists a \forall n x \in P_{a|n}.$$

$$\iff \exists a \forall n \forall u (u = a|n \to x \in P_u).$$

$$\iff \exists a \forall n \forall u (u \neq a|n \vee x \in P_u).$$

Η τελευταία έκφραση ορίζει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}_1^1$ σύνολο. □

Λήμμα 5.1.14. *Δίνονται δύο μη-κενά σύνολα P,Q και διμελείς θεμελιωμένες σχέσεις* $\leq_P, \leq_Q$ *στα P,Q αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $s : (P, \leq_P) \to (Q, \leq_Q)$ *έτσι ώστε αν* $x <_P y$ *τότε* $s(x) <_Q s(y)$. *Τότε* $| \leq_P | \leq | \leq_Q |$.

Απόδειξη. Δείχνουμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι:

$$P^{\leq P}(x) \leq P^{\leq Q}(s(x)) \text{ για κάθε } x \in P,$$

όπου οι συναρτήσεις $P^{\leq P}(x)$ και $P^{\leq Q}(s(x))$ είναι οι συναρτήσεις κατάταξης. Από αυτό έχουμε:

$$| \leq_P | = sup\{P^{\leq P}(x) + 1 | x \in P\} \leq sup\{P^{\leq Q}(s(x)) + 1 | x \in P\} = | \leq_Q |.$$

Αν το x είναι $\leq_P$-ελαχιστικό:

$$P^{\leq P}(x) = 0 \leq P^{\leq Q}(s(x)).$$

Ως επαγωγική υπόθεση παίρνουμε ότι για κάποιο $x \in P$ ισχύει:

$$\forall y <_P x, P^{\leq P}(y) \leq P^{\leq Q}(s(y)).$$

Δείχνουμε ότι: $P^{\leq P}(x) \leq P^{\leq Q}(s(x))$.

$$P^{\leq P}(x) = sup\{P^{\leq P}(y)+1 | y <_P x\} \leq sup\{P^{\leq Q}(s(y))+1 | y <_P x\} \leq sup\{P^{\leq Q}(z)+1 | z <_Q s(x)\} = P^{\leq Q}(S(x))$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει, γιατί $\{P^{\leq Q}(s(y)) + 1 | y <_P x\} \subseteq \{P^{\leq Q}(z) + 1 \; z <_Q S(x)\}$ □

5.2. Το Θεώρημα Kunen-Martin

Το Θεώρημα Kunen-Martin για αναλυτικά σύνολα ήταν γνωστό αδημοσίευτο αποτέλεσμα, το οποίο γενικεύτηκε στη συνέχεια από τους Kunen και Martin ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον.

Θεώρημα 5.2.1. *Kunen-Martin (για αναλυτικά σύνολα)*
Έστω X Πολωνικός χώρος και $P \subseteq X, P \neq \emptyset$ και $\leq$ θεμελιωμένη διμελής σχέση στο P. Αν το αυστηρό μέρος <, είναι αναλυτικό υποσύνολο του $X \times X$ τότε $| \leq | < \omega_1$, δηλαδή ο $| \leq |$ είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός.

Απόδειξη. Ορίζουμε ένα δένδρο $T \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$T = \{ \ \Lambda \ \} \cup \{(x)|x \in P\} \cup \{(x_0, ..., x_{n+1})|x_0 > x_1 > ... > x_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του δένδρου αυτού είναι πεπερασμένες ακολουθίες με στοιχεία από το X και δεν έχουμε απαραίτητα ότι $x_0 > x_3$ ή $x_0 > x_2$. Το T είναι θεμελιωμένο:
Αλλιώς θα είχαμε ένα άπειρο κλαδί, δηλαδή μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με $(f(0), ..., f(n)) \in T, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε θα είχαμε φτιάξει $f(0) > f(1) > ... > f(n)$, για κάθε n, δηλαδή μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία που μας δίνει το άτοπο καθώς η σχέση $\leq$ είναι θεμελιωμένη. Θεωρούμε την προηγούμενη σχέση $\leq_T$ ως εξής:

$$u \leq_T v \iff v \sqsubseteq u, u, v \in T.$$

Αφού το T είναι θεμελιωμένο, τότε η $\leq_T$ είναι θεμελιωμένη και συμβολίζουμε με p και p^T τις συναρτήσεις κατάταξης των $\leq$ και $\leq_T$ αντίστοιχα. Θα δείξουμε τον εξής ισχυρισμό: Για κάθε $x \in P$ και κάθε $u = (x_0, ..., x_{n+1}) \in P^{\mathbb{N}}$ αν $(x_0, ..., x_{n+1}, x) \in T$ τότε $p(x) = p^T(x_0, ..., x_{n-1}, x)$.
Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο $x \in P$. Αν το x είναι $\leq$-ελαχιστικό και $(x_0, ..., x_{n+1}, x) \in T$ τότε το $p(x) = 0$ και το $(x_0, ..., x_{n+1}, x)$ είναι τερματικό στο T. Αλλιώς θα υπήρχε $v \in T$ με $(x_0, ..., x_{n+1}, x)$ να είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του v και άρα $x_0 > ... > x_{n-1} > x > v(0) > ... > v(n)$ το οποίο δίνει άτοπο, γιατί το x είναι $\leq$-ελαχιστικό. Έχουμε ότι

$$p^T(x_0, ..., x_{n-1}, x) = \sup\{p(v) + 1|v <_T (x_0, ..., x_{n+1}, x)\} = \sup \emptyset = 0 = p(x).$$

Για την επαγωγική υπόθεση θεωρούμε $x \in P$ και ότι για κάθε $y < x$, ισχύει το εξής: για κάθε $(x_0, ..., x_{n-1}) \in P^{\mathbb{N}}$ αν $(x_0, ..., x_{n+1}, y) \in T$ τότε $p(y) = p^T(x_0, ..., x_{n+1}, y)$. Σταθεροποιούμε το x. Θεωρούμε $(x_0, ..., x_{n-1} \in P^{\mathbb{N}}$ και ότι $(x_0, ..., x_{n-1}, x) \in T$. Δείχνουμε ότι $p(x) = p^T(x_0, ..., x_{n-1}, x)$.
Θέτουμε:

$$A = \{p(y) + 1|y < x\}$$

και

$$B = \{p^T(v) + 1|v <_T (x_0, ..., x_{n+1})\}.$$

Αν $y < x$ τότε $x_0 > ... > x_{n-1} > y$ άρα το $v = (x_0, ..., x_{n-1}, x, y) \in T$ και $v <_T (x_0, ..., x_{n-1}, x)$.
Αφού $v \in T$ και $y < x$ έχουμε $p(y) = p^T(x_0, ..., x_{n-1}, x, y) = p^T(v)$. Άρα $A \subseteq B$ και

$$supA \leq supB.$$

Αν $v <_T (x_0, ..., x_{n-1}, x)$ έχουμε $|v| \geq n + 2, v(i) = x_i, i < n$ και $v(n) = x$. Θέτουμε $y = v(n + 1)$. Αφού $v \in T$ ισχύει $x_0 > ... > x_{n-1} > x > y$ και $(x_0, ..., x_{n-1}, x, y) \in T$. Ισχύει επίσης ότι $p(y) = p^T(x_0, ..., x_{n-1}, x, y)$ από επαγωγική υπόθεση . Παίρνουμε $w = v(n + 2) = (x_0, ..., x_{n-1}, x, y)$, οπότε $p(y) = p^T(w)$. Επειδή

$$w \sqsubseteq v \text{ έχουμε } v \leq_T w \text{ και } p^T(v) \leq p(y).$$

Άρα $supA \geq p(y) + 1 \geq p^T(v) + 1$. Επομένως

$$supA \geq p^T(v) + 1 \text{ για κάθε } v <_T (x_0, ..., x_{n-1}, x) \implies supA \geq supB.$$

Επομένως

$$supA = supB$$

και τελειώνει εδώ η απόδειξη του ισχυρισμού.
Σαν αποτέλεσμα του παραπάνω ισχυρισμού για κάθε $x \in P, p(x) = p^T(x)$. Ισχύει επίσης:

$$p^T(\ \Lambda \ ) = sup\{p^T(v) + 1|v <_T \ \Lambda \ \} = sup\{p^T(v) + 1|v \in T, v \neq \ \Lambda \ \}$$

$$= sup\{p^T((x)) + 1|(x) \in T\} = sup\{p(x) + 1|x \in P\}.$$

Η προτελευταία ισότητα ισχύει γιατί

$$p^T((x)) \geq p^T(v) \text{ για κάθε } v \in T \text{ με } (x) \subseteq v.$$

Καταλήγουμε ότι

$$p^T(\Lambda) = sup\{p(x) + 1|x \in P\} = | \leq |.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι:

$$p^T(\Lambda) < \omega_1.$$

Επιπλέον $| \leq_T | = sup\{p^T(v) + 1|v \in T\} = p^T(\Lambda) + 1$ γιατί $p^T(\Lambda) \geq p^T(v) \forall v \in T$. Επομένως $p^T(\Lambda) < \omega_1$ αν και μόνο αν $| \leq_T | < \omega_1$.

Θα βρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο Q, μία θεμελιωμένη διμελή σχέση $\leq_Q$ στο Q και μία $s : T \to Q$ που να ικανοποιεί το εξής:

$$\text{Αν } u <_T v \text{ τότε } s(u) <_Q s(v) \forall u, v \in T.$$

και

$$| \leq_T | \leq | \leq_Q | < \omega_1.$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει επειδή το Q είναι αριθμήσιμο. Το σύνολο $\{(x, y)|x > y\}$ είναι αναλυτικό. Επομένως επιδέχεται μία καλή ω-ημικλίμακα, ας την πούμε $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Αν έχουμε δύο ακολουθίες $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με $x_i > y_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(f_n(x_i, y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή, τότε υπάρχουν $x, y \in X$ με $x > y$ και $(x_i, y_i) \to (x, y)$, δηλαδή έχω σύγκλιση κατά συντεταγμένη. Θέτουμε $\mathcal{T} = \{u \in T : |u| = 2\} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και ορίζουμε την συνάρτηση $s : T \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(1) $s(\Lambda) = \Lambda$.
(2) $s((x_0)) = (0)$.
(3) $s(x_0, x_1) = (0, f_0(x_0, x_1)$, για $(x_0.x_1) \in T$ οπότε $x_0 > x_1$ και ορίζεται το $f_0(x_0, x_1)$.
(4) $s((x_0, x_1, x_2)) = (0, f_0(x_0, x_1), f_0(x_1, x_2), f_1(x_0, x_1), f_1(x_1, x_2))$ για $(x_0, x_1, x_2) \in T$.
(5) Γενικά για $(x_0, ..., x_n) \in T$ και $n \geq 2$ ορίζουμε:

$$s(x_0, ..., x_n) = s(x_0, ..., x_{n-1}) * (f_0(x_{n-1}, x_n), f_1(x_{n-1}, x_n), ..., f_{n-1}(x_{n-1}, x_n), ..., f_{n-1}(x_0, x_1)).$$

Το $s(x_0, ..., x_n)$ περιέχει όλη την πληροφορία του $f_j(x_i, x_{i+1}), i, j < n$. Θέτουμε:

$$Q = s[T] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

και το Q είναι αριθμήσιμο. Ορίζουμε:

$$w \leq_Q z \iff z \sqsubseteq w, \text{ όπου } z, w \in Q.$$

Τότε $s : T \to Q$ και αν τα $u, v \in T$ ικανοποιούν $u <_T v$ τότε $s(u) <_Q s(v)$. Επιπλέον αν $|u| \leq |v|, u, v \in T$ τότε $|S(u)| \leq |S(v)|$.

Θα δείξουμε ότι η $\leq_Q$ είναι θεμελιωμένη: Έστω προς άτοπο πως δεν είναι θεμελιωμένη, επομένως υπάρχει ακολουθία στο T, έστω $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με $s(u_{k+1}) <_Q s(u_k)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|u_k| \geq 2 \forall k \in \mathbb{N}$. Η s ικανοποιεί τα εξής: $u, v \in T$ και $|u| \leq |v|$. Ισχυριζόμαστε ότι $|u_k| \geq k$ για κάθεk. Υποθέτουμε ότι $|u_k| \geq k$ και δείχνουμε ότι $|u_{k+1}| \geq k + 1$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$|u_{k+1}| \leq k \leq |u_k|, \text{ άρα } |s(u_{k+1})| \leq |s(u_k)|$$

άτοπο, γιατί $s(u_{k+1}) <_Q s(u_k)$. Θέτουμε $v_k = u_k|k$. Τότε $|v_k| = k, k \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι $s(v_{k+1}) <_Q s(v_k)$. Ισχύει $s(v_k) \sqsubseteq s(v_k) \sqsubseteq s(u_{k+1})$ και $s(v_{k+1}) \sqsubseteq s(u_k)$. Άρα $s(v_k), s(v_{k+1})$ συμβατά. Επιπλέον, $|v_k| = k < k + 1 < |v_{k+1}|$ άρα $|s(v_k)| < |s(v_{k+1})|$. Άρα $s(v_k)$ γνήσιο αρχικό τμήμα της $s(v_{k+1})$ Αντικαθιστώντας το v_k με το v_{k+2} έχουμε τελικά μία ακολουθία $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του T με $|v_k| = k + 2$ και $s(v_{k+1}) <_Q s(v_k)$. Θέτουμε

$$v_k = (x^i_0, x^i_1, ..., x^i_{k+1}), k \in \mathbb{N}.$$

Έχουμε ότι

$$... \geq_Q s(x^2_0, x^2_1, x^2_2, x^2_3) \geq_Q s(x^1_0, x^1_1, x^2_2) \geq_Q s(x^0_0, x^1_0).$$

Επίσης,

$$s(x_0^0, x_1^0) = (0, f_0(x_0^0, x_1^0))$$
$$s(x_0^1, x_1^1, x_2^1) = (0, f_0(x_0^1, x_1^1) \dots$$

Άρα $f_0(x_0^0, x_1^0) = f_0(x_0^1, x_1^1)$ και με επαγωγή στο i έχουμε ότι $f_0(x_0^0, x_1^0) = f_0(x_0^i, x_1^i)$. Με όμοια επιχειρήματα η ακολουθία $f_0(x_0^0, x_1^0), f_0(x_0^1, x_1^1), \dots, f_0(x_0^i, x_1^i)$ είναι τελικά σταθερή.
Αν εφαρμόσουμε τα ίδια για τα ζεύγη $(x_1^i, x_2^i), i \geq 1$ προκύπτει ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $f_n(x_1^i, x_2^i)$ είναι επίσης τελικά σταθερή. Από την ιδιότητα της καλής ω-ημικλίμακας υπάρχουν $x_0, x_1 \in X$ με $x_0^i \to x_0, x_1^i \to x_1$ και $x_0 > x_1$. Πάλι από την ιδιότητα της καλής ω-ημικλίμακας υπάρχουν $x_1', x_2 \in X$ με $x_1^i \to x_1', x_2^i \to x_2$ και $x_1' > x_2$. Άρα $x_1' = x_1$ από μοναδικότητα ορίου. Καταλήγουμε ότι $x_0 > x_1 > x_2$ και επαγωγικά έχουμε $x_0 > x_1 > x_2 > ... > x_j > ...$ μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία. Αυτό μας δίνει το άτοπο και άρα ότι η $\leq_Q$ είναι θεμελιωμένη. □

Το θεώρημα Kunen-Martin για αναλυτικά σύνολα γενικεύεται σε μια μεγαλύτερη κατηγορία συνόλων ουσιαστικά με την ίδια απόδειξη. Για τη διατύπωσή του θα χρειαστούμε έναν ακόμα ορισμό.

Ορισμός 5.2.2. Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος X και ένας πληθάριθμος κ, τον οποίο θεωρούμε με τη διακριτή τοπολογία. Ένα υποσύνολο P του X ονομάζεται κ-Suslin αν υπάρχει κλειστό $C \subseteq X \times \kappa^{\mathbb{N}}$ έτσι ώστε

$$x \in P \iff \exists f \in \kappa^{\mathbb{N}} \ (x, f) \in C, \quad x \in X.$$

Πιο πάνω θεωρούμε τον $\kappa^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Είναι σαφές ότι αν $\kappa = \aleph_0 \equiv \mathbb{N}$ τότε ο $\kappa^{\mathbb{N}}$ είναι ο χώρος του Baire, επομένως τα $\aleph_0$-Suslin σύνολα είναι ακριβώς τα αναλυτικά σύνολα.

Σύμφωνα με ένα γνωστό αποτέλεσμα του Shoenfield [**10**] κάθε $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ σύνολο είναι $\aleph_1$-Souslin.

Θεώρημα 5.2.3 (Kunen-Martin, [**6**]). *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος X, $P \subseteq X$, $P \neq \emptyset$, $\leq$ μια θεμελιωμένη διμελής σχέση στο P και κ ένας πληθάριθμός. Αν το αυστηρό μέρος $<$ είναι κ-Suslin υποσύνολο του $X \times X$ τότε $| \leq | < \kappa^+$, όπου κ^+ είναι ο επόμενος πληθάριθμος του κ ο οποίος είναι ίσος με τον πληθάριθμό του χώρου Hartogs του κ.*

Απόδειξη. (Σκιαγράφηση). Η απόδειξη είναι ουσιαστικά ίδια με αυτή για τα αναλυτικά σύνολα. Αναφέρουμε ότι ισχύει ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός των κ-Suslin συνόλων ως αυτών που επιδέχονται μια καλή κ-ημικλίμακα, πάλι με την ίδια απόδειξη. □

5.3. Μερικές συνέπειες του Θεωρήματος Kunen-Martin.

Όπως είναι γνωστό κάθε καλή διάταξη στο $\mathbb{R}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ [**7**]. Από την άλλη κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι Lebesgue μετρήσιμο [**9**], συνεπώς δεν υπάρχει καλή διάταξη του $\mathbb{R}$ που είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ή ανήκει στη σ-άλγεβρα που παράγουν τα αναλυτικά σύνολα. Μπορούμε να αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα για τις αναλυτικές και συναναλυτικές διατάξεις με χρήση του Θεωρήματος Kunen-Martin για τα αναλυτικά σύνολα.

Πόρισμα 5.3.1. *Αν η $\leq$ είναι καλή διάταξη στο $\mathbb{R}$ (αποδεικνύεται ότι μπορώ να βρω μία τέτοια μέσω του αξιώματος επιλογής), τότε η $\leq$ δεν είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ ή $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο, ότι υπάρχει μία καλή διάταξη στο $\mathbb{R}$ που είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ ή $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1$. Το αυστηρό μέρος $<$ είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$. Θεωρούμε p την rank function της $\leq$ και από το θεώρημα 5.2.1 για $P = X = \mathbb{R}$ το μήκος $|\leq|$ είναι αριθμήσιμο. Ορίζουμε

$$p : \mathbb{R} \to |\leq|, \text{ με } |\leq| = sup\{p(x) + 1 | x \in \mathbb{R}\}.$$

Άρα $p(x) < p(x) + 1 \leq |\leq|$, επομένως $p(x) \in |\leq|$. Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $y < x$. Τότε $p(y) < p(y) + 1,$ και $p(x) = sup\{p(y) + 1 | y < x\}$. Άρα $p(y) < p(x)$ και η p είναι ένα προς ένα. Από τον ορισμό $p : \mathbb{R} \to |\leq|$ παίρνω το άτοπο. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος Kunen-Martin σχετικά με τα $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_2$ σύνολα.

Πόρισμα 5.3.2. *Κάθε θεμελιωμένη σχέση στο $\mathbb{R}$, της οποίας το αυστηρό μέρος είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_2$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ έχει μήκος μικρότερο του $\aleph_2$. Επομένως αν δεν ισχύει η Υπόθεση του Συνεχούς τότε δεν υπάρχει $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_2$ καλή διάταξη του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Kunen-Martin για $\kappa = \aleph_1$. Από το αποτέλεσμα του Shoenfield το αυστηρό μέρος της σχέσης είναι $\aleph_1$-Suslin και συνεπώς το μήκος της είναι μικρότερο του $\aleph_1^+ = \aleph_2$.

Σχετικά με τον δεύτερο ισχυρισμό, αν έχουμε μια $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_2$ καλή διάταξη $\leq$ του $\mathbb{R}$ τότε όπως και στην απόδειξη του Πορίσματος 5.3.1 παίρνουμε μια 1-1 συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to |\leq|$. Άρα $2^{\aleph_0} =_c \mathbb{R} \leq_c |\leq| < \aleph_2$ και επειδή ο $\aleph_2$ είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος μεγαλύτερος του $\aleph_1$ προκύπτει ότι $2^{\aleph_0} \leq_c \aleph_1$. Συνεπώς $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ δηλαδή δεν ισχύει η Υπόθεση του Συνεχούς. □

Σχόλιο. Είναι συμβατό με τα Αξιώματα της Συνολοθεωρίας (ZFC) ότι υπάρχει $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_2$ καλή διάταξη του $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα το τελευταίο ισχύει στον κόσμο L των κατασκευάσιμων συνόλων (Gödel [**3**], [**8**, 8F.7]), στον οποίο όπως αναμένουμε από το Πόρισμα 5.3.2 ισχύει η Υπόθεση του Συνεχούς.

Μια άλλη γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος Kunen-Martin είναι η εξής: για κάθε υποσύνολο A του συνόλων όλων των θεμελιωμένων δένδρων WF, το οποίο είναι αναλυτικό υποσύνολο του χώρου όλων των δένδρων, υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός ξ με $|T| \leq \xi$ για κάθε $T \in A$, [**5**, 31.2]. Από αυτό είναι άμεσο ότι το σύνολο WF δεν είναι αναλυτικό σύνολο. Από την άλλη ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή: δεδομένου ότι το WF δεν είναι αναλυτικό σύνολο (κάτι που μπορεί να αποδειχθεί με στοιχειώδεις μεθόδους) προκύπτει (και μάλιστα χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Kunen-Martin) ότι για κάθε αναλυτικό σύνολο $A \subseteq WF$ έχουμε $sup\{|T| \mid T \in A\} < \omega_1$ [**4**].

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με μια εφαρμογή του Θεωρήματος Kunen-Martin για τα αναλυτικά σύνολα στην περιοχή των Borel σχέσων ισοδυναμίας.

Ορισμός 5.3.3. Δίνεται $X \neq \emptyset$ και $\preceq$ μία διμελής σχέση στο X. Η $\preceq$ ονομάζεται **προδιάταξη** στο X, αν ισχύουν:

- $x \preceq x, \forall x \in X$
- $x \preceq y$ και $y \preceq z \implies x \preceq z, \forall x, y, z \in X$

Παρατήρηση 5.3.4. Αν $\preceq$ είναι προδιάταξη στο X ορίζεται η διμελής σχέση $x \approx y \iff x \preceq y$ και $y \preceq x$

Η $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X. Μάλιστα, ο χώρος πηλίκο $X|_{\approx}$ επιδέχεται την σχέση:

$$[x] \le [y] \iff x \preceq y.$$

Ορισμός 5.3.5. Μία προδιάταξη $\preceq$ στο $X \neq \emptyset$ λέγεται **καλή**, αν είναι θεμελιωμένη σχέση. Δηλαδή αν υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $x_{n+1} \preceq x_n$.

Παράδειγμα 5.3.6. Παίρνουμε ένα δένδρο T και θεωρούμε τη γνωστή σχέση $\le_T$ σε αυτό, έτσι που το T είναι θεμελιωμένο αν και μόνο αν η $\le_T$ είναι θεμελιωμένη. Παίρνουμε τον Πολωνικό χώρο $X = T \times \mathbb{R}$ και ορίζουμε σε αυτόν τη σχέση $\preceq$,

$$(u, x) \preceq (v, y) \iff u \le_T v, \quad u, v \in T, x, y \in \mathbb{R}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\preceq$ είναι σχέση προδιάταξης στον X. Μάλιστα δεν είναι σχέση διάταξης γιατί έχουμε για παράδειγμα ότι $(u, 0) \preceq (u, 1) \preceq (u, 0)$ για κάθε $u \in T$.

Επιπλέον είναι σαφές ότι μια $\prec$-φθίνουσα ακολουθία στον X δίνει μια $<_T$-ακολουθία στο T. Επομένως αν το δένδρο T είναι θεμελιωμένο τότε η $\preceq$ είναι θεμελιωμένη σχέση.

Τέλος αν πάρουμε την αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας $\approx$ στον X,

$$(u, x) \approx (v, y) \iff (u, x) \preceq (v, y) \preceq (u, x)$$

τότε η κλάση ισοδυναμίας του (u, x) είναι το σύνολο $P_u = \{(u, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Ορισμός 5.3.7. Δύο Πολωνικοί χώροι X,Y και δύο διμελείς σχέσεις R και S στα X και Υ αντίστοιχα. Λέμε ότι η R **ανάγεται κατά Borel** στην S αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to Y$ με την ιδιότητα $(x, y) \in R \iff (f(x), f(y)) \in S, \forall x, y \in X$. Συμβολικά $R \le_{Borel} S$ όταν η R ανάγεται κατά Borel στην S. Επίσης, συμβολίζουμε $R\ {}_BS \iff R \le_B S$ και $S \le_B R$. Μεταξύ άλλων, η σχέση $\le_B$ έχει μελετηθεί εκτενώς στις σχέσεις ισοδυναμίας που είναι Borel ή αναλυτικά σύνολα [**2**].

Θεώρημα 5.3.8. *Silver* [**11**] *Έστω X Πολωνικός χώρος και E μία σχέση ισοδυναμίας στον X, έτσι ώστε το E να είναι συναναλυτικό υποσύνολο του $X \times X$. Τότε είτε η E έχει αριθμήσιμες κλάσεις ισοδυναμίας, δηλαδή ο $X \setminus E$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, είτε $=_{\mathbb{R}} \le_B E$.*

Παρατήρηση 5.3.9. Αν $\le$ είναι σχέση θεμελιωμένης διάταξης σε κάποιο σύνολο $X \neq \emptyset$ και ρ είναι συνάρτηση κατάταξης της $\le$, τότε για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $p(x) = p(y)$ τα x,y δεν συγκρίνονται . Αλλιώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας αν $x \le y$, αφού $x \neq y$ και η $x \le y$ είναι σχέση διάταξης, θα είχαμε $x < y$. Άρα $p(y) \ge p(x) + 1 > p(x)$ άτοπο .

Λήμμα 5.3.10 (Camerlo-Marcone-Motto Ros [**1**]). *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο X και μια θεμελιωμένη σχέση προδιάταξης $\preceq$ στον X, η οποία είναι αναλυτικό υποσύνολο του $X \times X$ και που ικανοποιεί ότι για κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ υπάρχουν $x \neq y$ στο A με $x \preceq y$.*

Τότε $=_{\mathbb{R}} \not\le_B \approx$, όπου $\approx$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει από την $\preceq$ όπως πιο πάνω. Επιπλέον αν η $\preceq$ είναι Borel τότε η $\approx$ έχει αριθμήσιμες το πλήθος κλάσεις ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από τον πρώτο με εφαρμογή του 5.3.8 για $=\preceq$. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $f, f : \mathbb{R} \to X$ Borel-μετρήσιμη με $a = b \iff f(a) \approx f(b), a, b \in \mathbb{R}$. Η f είναι 1-1.
Ορίζουμε την διμελή σχέση $\le'$ στον $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$a \le' b \iff f(a) \preceq f(b).$$

Δείχνουμε ότι η $\le'$ είναι σχέση διάταξης:

- $a \le' a$
- $a \le' b \le' g \implies f(a) \preceq f(b) \preceq f(g) \implies f(a) \preceq f(g) \implies a \le' g$

Έστω $a \le' b$ και $b \le' a$. Τότε $f(a) \preceq f(b) \preceq f(a)$, άρα $f(a) \approx f(b)$.
Παίρνω $a = b \iff f(a) \approx f(b)$.
Η $\le'$ είναι θεμελιωμένη, γιατί η $\preceq$ είναι θεμελιωμένη.
Θεωρούμε την συνάρτηση κατάταξης ρ της $\le'$. Η $\le'$ είναι επιπλέον αναλυτικό σύνολο, γιατί η $\preceq$

είναι αναλυτικό σύνολο και η f είναι Borel-μετρήσιμη.
Από το 5.2.1 έχουμε $| \leq' | < \omega_1$. Για κάθε $\xi < | \leq' |$ θέτουμε

$$A_\xi = \{a \in \mathbb{R} | \rho(a) = \xi\}.$$

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi < | \leq' |$, με $a \in A_\xi$. Άρα $\mathbb{R} = \bigcup_{\xi < | \leq' |} A_\xi$. Επειδή η ένωση είναι αριθμήσιμη, υπάρχει $\xi < | \leq' |$ με A_ξ υπεραριθμήσιμο. Από την υπόθεση υπάρχουν $x = f(a)$ και $y = f(b), a, b \in A_\xi$ με $x \preceq y$ και $x \neq y$. Άρα $f(a) \preceq f(b)$, από τον ορισμό της f, $a \leq' b$. Επιπλέον, η f είναι 1-1, αφού $f(a) \neq f(b)$ έχουμε $a \neq b$. Άρα $a \leq' b, a \neq b, \rho(a) = \rho(b) = \xi$. Άτοπο, από την προηγούμενη παρατήρηση. □

Πρόταση 5.3.11 (Camerlo-Marcone-Motto Ros [**1**])**.** *Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο X και μια θεμελιωμένη σχέση προδιάταξης $\preceq$ στον X, η οποία είναι αναλυτικό υποσύνολο του $X \times X$ και που ικανοποιεί ότι για κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ υπάρχουν $x \neq y$ στο A με $x \preceq y$.*

Τότε η $\preceq$ είναι Borel υποσύνολο του $X \times X$ αν και μόνο αν η $\approx$ έχει αριθμήσιμες το πλήθος κλάσεις ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Η ευθεία κατεύθυνση είναι άμεση από το Λήμμα 5.3.10. Για την αντίστροφη κατεύθυνση ας υποθέσουμε ότι έχουμε αριθμήσιμες το πλήθος κλάσεις ισοδυναμίας $C_n, n \in I$, όπου $I \subseteq \mathbb{N}$. Παίρνουμε $x_n \in C_n$ για κάθε $n \in I$.

Η κάθε κλάση C_n είναι αναλυτικό σύνολο καθώς είναι η x_n-τομή ενός αναλυτικού συνόλου που προκύπτει από την $\preceq$:

$$x \in C_n \iff x \approx x_n \iff x \preceq x_n \,\&\, x_n \preceq x, \quad x \in X.$$

Επιπλέον επειδή η οικογένεια $\{C_n \mid n \in I\}$ είναι διαμέριση του X ισχύει

$$C_n = X \setminus \bigcup_{m \in I, m \neq n} C_m$$

για κάθε $n \in I$. Άρα κάθε κλάση C_n είναι το συμπλήρωμα μιας αριθμήσιμης ένωσης αναλυτικών συνόλων, και είναι συνεπώς συναναλυτικό σύνολο.

Από το Θεώρημα του Souslin έχουμε ότι κάθε C_n είναι Borel σύνολο. Έπειτα παραρηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$\begin{aligned} x \preceq y &\iff \forall n, m \,((x \in C_n \,\&\, y \in C_m) \longrightarrow x_n \preceq x_m) \\ &\iff \forall n, m \,(x \notin C_n \vee y \notin C_m \vee x_n \preceq x_m). \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια η $\preceq$ είναι η αριθμήσιμη τομή

$$\bigcap_{(n,m) \in I^2 : x_n \npreceq x_m} [((X \setminus C_n) \times X) \cup (X \times (X \setminus C_m))].$$

Επειδή κάθε σύνολο C_n είναι Borel σύνολο προκύπτει ότι και η $\preceq$ είναι Borel σύνολο.

□

Παρατήρηση 5.3.12. Επανερχόμαστε στον χώρο $X = T \times \mathbb{R}$ και στη σχέση $\preceq$ που ορίσαμε στο Παράδειγμα 5.3.6. Θεωρούμε ότι το T είναι θεμελιωμένο δένδρο. Τότε η $\preceq$ είναι θεμελιωμένη σχέση, μάλιστα είναι κλειστό και ανοικτό υποσύνολο του $X \times X$. Επιπλέον αν έχουμε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq X$, εφόσον το T είναι αριθμήσιμο σύνολο θα υπάρχει $u \in T$ έτσι ώστε το σύνολο $B_u = \{(v, x) \mid v = u \,\&\, (v, x) \in A\}$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Ειδικότερα υπάρχουν $x, y \in B_u$ με $x \neq y$, άρα $(u, x) \in A$, $(u, y) \in A$, $(u, x) \neq (u, y)$ και από τον ορισμό της $\preceq$ ισχύει $(u, x) \preceq (u, y)$.

Καταλήγουμε ότι $\preceq$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της Πρότασης 5.3.11. Επειδή η $\preceq$ είναι Borel υποσύνολο του $X \times X$ προκύπτει από την Πρόταση 5.3.11 ότι η $\approx$ έχει αριθμήσιμες κλάσεις ισοδυναμίας. Αυτό όντως ισχύει γιατί όπως αναφέραμε στο Παράδειγμα 5.3.6 οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\approx$ είναι ακριβώς τα σύνολα $P_u = \{(u, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, όπου $u \in T$. Αυτά είναι αριθμήσιμα το πλήθος καθώς το T είναι αριθμήσιμο σύνολο.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Riccardo Camerlo, Alberto Marcone, and Luca Motto Ros. On isometry and isometric embeddability between ultrametric polish spaces. *Advances in Mathematics*, 329:1231–1284, 2018.

[2] Su Gao. *Invariant descriptive set theory*, volume 293 of *Pure and Applied Mathematics (Boca Raton)*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[3] K. Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 3(1(23)):96–149, 1948.

[4] Βασίλειος Γρηγοριάδης (Vassilios Gregoriades). Σημειώσεις στην Περγραφική Θεωρία Συνόλων, 2021. Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος διαθέσιμες στο διαδίκτυο.

[5] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.

[6] D. A. Martin. *Projective sets and cardinal numbers*. unpublished, widely circulated manuscript, 1971.

[7] Arnold W. Miller. Special subsets of the real line. In *Handbook of set-theoretic topology*, pages 201–233. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[8] Y.N. Moschovakis. *Descriptive set theory, Second edition*, volume 155 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, 2009.

[9] Lusin N. Sur la classification de M. Baire. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 164(2):91–94, 1917.

[10] J. R. Shoenfield. The problem of predicativity. In *Essays on the foundations of mathematics*, pages 132–139. Magnes Press, Hebrew Univ., Jerusalem, 1961.

[11] Jack H. Silver. Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations. *Ann. Math. Logic*, 18(1):1–28, 1980.