ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ

Σχεδιασμός αντιστοίχισης ηλεκτρικών λεωφορείων σε δρομολόγια, για δίκτυο με σταθερούς σταθμούς φόρτισης και πολλαπλές υποδοχές ανά φορτιστή

Διπλωματική εργασία

Κουτσομπίνα Διαμάντω

Επιβλέπων: Γκιοτσαλίτης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2024

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Γκιοτσαλίτη Κωνσταντίνο, Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π, για την ανάθεση της εργασίας, την υποστήριξη, την καθοδήγηση και την άριστη συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τη Matina L.Y. Chau, διδακτορική σπουδάστρια στο Ε.Μ.Π., για τις συμβουλές και τις υποδείξεις της στην πορεία της Διπλωματικής Εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τα αγαπημένα μου πρόσωπα για την στήριξη που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Αθήνα, Μάρτιος 2024,

Κουτσομπίνα Διαμάντω.

Σχεδιασμός αντιστοίχισης ηλεκτρικών λεωφορείων σε δρομολόγια, για δίκτυο με σταθερούς σταθμούς φόρτισης και πολλαπλές υποδοχές ανά φορτιστή

Κουτσομπίνα Διαμάντω

Επιβλέπων: Γκιοτσαλίτης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Σύνοψη

Καθώς όλο και περισσότερες πόλεις προσπαθούν να μειώσουν τις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα (CO2), ο στόλος των δημόσιων μεταφορών βρίσκεται σε μια μετάβαση από τα συμβατικά στα ηλεκτρικά οχήματα. Για να ολοκληρωθεί αυτή η μετάβαση, υπάρχει η ανάγκη κατασκευής των απαιτούμενων υποδομών φόρτισης. Όταν υιοθετήθηκαν τα πρώτα ηλεκτρικά λεωφορεία, οι σταθμοί φόρτισης κατασκευάστηκαν ως επί το πλείστον στις τοποθεσίες των μεγάλων αμαξοστασίων λεωφορείων. Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια, υπάρχει πρόβλημα συνωστισμού στους σταθμούς φόρτισης με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ουρές και περιττές καθυστερήσεις.

Στην παρούσα μελέτη, διερευνούμε τις δυνατότητες αντικατάστασης των σταθμών φόρτισης με μία θύρα ανά φορτιστή, με σταθμούς φόρτισης με πολλαπλές θύρες/ υποδοχές ανά φορτιστή, ώστε να μπορούν να εξυπηρετούν πολλά οχήματα ταυτόχρονα, αλλά με μειωμένο ρυθμό φόρτισης. Επειδή ο ρυθμός φόρτισης μειώνεται όταν φορτίζονται στον ίδιο φορτιστή περισσότερα από ένα οχήματα, αναπτύσσουμε ένα γραμμικό πρόγραμμα μικτού ακέραιου (MILP:Mixed Integer Linear Program) για τον προσδιορισμό των χρονοδιαγραμμάτων φόρτισης των στόλων λεωφορείων, προκειμένου να μειωθούν οι συνολικές καθυστερήσεις σε δίκτυα λεωφορείων. Η νέα διατύπωση δοκιμάζεται σε περιπτώσεις αναφοράς διαφόρων μεγεθών αποδεικνύοντας την δυνατότητα βελτίωσης.

Λέξεις-κλειδιά: προγραμματισμός ηλεκτρικών λεωφορείων, μικτός ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός, προγραμματισμός δημόσιων μεταφορών, brand and bound, υποδομή φόρτισης, εξηλεκτρισμός μεταφορών, πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών λεωφορείων με πολλαπλά αμαξοστάσια, σταθερούς σταθμούς φόρτισης και χρονικά παράθυρα (EB-MDVSPTW: Electric Bus Multi-Depot-Vehicle Scheduling Problem-Time Windows).

The Electric Vehicle Scheduling Problem for Buses in networks with multi-port charging stations

Koutsompina Diamanto

Supervisor: Gkiotsalitis Konstantinos, Professor NTUA

Abstract

As more and more cities try to reduce their CO2 emissions, public transport fleet is undergoing a shift transition from conventional to electric vehicles. To complete this shift, there is a need to build the required charging infrastructure. When the first electric buses were adopted, the charging stations were mostly built in the locations of large bus depots. However, over the last years, there is a crowding problem in the charging stations resulting in queueing and unnecessary delays.

In this study, we explore the potential of replacing single-port charging stations with multi-port charging stations that can serve multiple vehicles at once with a reduced charging rate. Because the charging rate reduces with the number of ports, we develop a mixed-integer linear program to determine the charging schedules of bus fleets in order to reduce the overall delays in the bus network. The novel formulation is tested in benchmark instances of various sizes demonstrating the improvement potential.

Keywords: electric bus scheduling, mixed-integer linear programming, public transport planning, branch and bound, charging infrastructure, transport electrification, EB-MDVSPTW: Electric Bus Multi-Depot-Vehicle Scheduling Problem-Time Windows.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

1.1. Γενική ανασκόπηση

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται ρεκόρ ακραίων καιρικών φαινομένων, γεγονός που καθιστά επιτακτική την ανάγκη περιορισμού της υπερθέρμανσης του πλανήτη με μείωση της χρήσης ορυκτών καυσίμων και στον τομέα των μεταφορών. Πέρα από την περιβαλλοντική κρίση, η διαχείριση της ενέργειας και των καυσίμων έχει γίνει ακόμη πιο κρίσιμη λόγω της αστάθειας της αλυσίδας εφοδιασμού, η οποία διαιωνίζεται από τον Covid-19 και τις αυξανόμενες πολιτικές συγκρούσεις (π.χ πόλεμοι μεταξύ Ρωσίας-Ουκρανίας, Ισραήλ-Παλαιστίνη). Έτσι, πολλές χώρες έχουν ξεκινήσει να διερευνούν τρόπους για την επίτευξη σταθερότητας και ανεξαρτησίας όσον αφορά τη διαχείριση των ενεργειακών πόρων, και εστιάζουν σε ένα ενεργειακό σύστημα με χρήση και ανάπτυξη των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Για παράδειγμα, το πρόγραμμα "REPowerEU" της Ευρωπαϊκής Επιτροπής περιέγραψε βραχυπρόθεσμα μέτρα για την αποτελεσματική εξοικονόμηση ενέργειας, τη διαφοροποίηση του ενεργειακού εφοδιασμού και την επιτάχυνση της ανάπτυξης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας για την άμεση αντικατάσταση των ορυκτών καυσίμων στα κτίρια, τη βιομηχανία και τον ενεργειακό τομέα (Mathiesen, Ilieva, Skov, Maya-Drysdale, Korberg, 2022).

Όσον αφορά το κομμάτι των μεταφορών, η μείωση των εκπομπών CO2 μπορεί να επιτευχθούν με την προβλεπόμενη αύξηση των ηλεκτρικών οχημάτων, δεδομένου ότι οι χώρες παγκοσμίως επενδύουν σε μεγάλο βαθμό σε ανανεώσιμες πηγές ενέργειας. Ωστόσο, με δεδομένη την τρέχουσα κατάσταση του μίγματος της χρησιμοποιούμενης ενέργειας, οι εκπομπές CO2 αναμένεται να αυξάνονται συνεχώς σε παγκόσμιο επίπεδο μέχρι το 2035, παρά το εκτιμώμενο μερίδιο της υιοθέτησης των ηλεκτρικών οχημάτων κατά 50% μέχρι τότε (Rietmann, Hügler, Lieven, 2020).

Γενικά, οι αστικές δημόσιες συγκοινωνίες θεωρούνται αναπόσπαστο στοιχείο για την ανάπτυξη βιώσιμων μεταφορών, καθώς όχι μόνο διασφαλίζουν το δικαίωμα στην κινητικότητα για όλους τους κατοίκους, αλλά συμβάλλουν επίσης στην εξοικονόμηση ενέργειας και στην αποσυμφόρηση της κυκλοφορίας, με αποτέλεσμα τη μείωση του χρόνου μετακίνησης. Οι δημόσιες μεταφορές χαμηλού κόστους υποστηρίζουν τη μετατόπιση της ζήτησης επιβατών από τα ιδιωτικά αυτοκίνητα προς τις αστικές συγκοινωνίες, οδηγώντας τελικά σε μείωση της χρήσης των ιδιωτικών οχημάτων και κατά συνέπεια, μετριασμό των επιπτώσεών τους στο φυσικό και κοινωνικοοικονομικό αστικό περιβάλλον (Λυμπέρης και Καρλαύτη, 2019).

Στο πλαίσιο των δημόσιων μεταφορών, τα λεωφορεία θεωρούνται "πράσινες" εναλλακτικές λύσεις έναντι των ιδιωτικών οχημάτων λόγω της δυνατότητάς τους να μειώνουν τις εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου ανά επιβάτη (Eudy et al., 2014, Mahmoud et al., 2016). Τα πετρελαιοκίνητα λεωφορεία, ωστόσο, αποτελούν πηγή ανησυχίας για την ατμοσφαιρική ρύπανση, ιδίως σε αστικές περιοχές. Αντ' αυτού, τα ηλεκτρικά λεωφορεία θεωρούνται ως η ιδανική τεχνολογία, λόγω των χαμηλών ή μηδενικών εκπομπών τους, της ενεργειακής αποδοτικότητας και της σχεδόν αθόρυβης λειτουργίας τους (Lajunen, Lipman, 2016). Παρά τα παραπάνω, τα πετρελαιοκίνητα λεωφορεία εξακολουθούν να υπερτερούν των λεωφορείων με ηλεκτρικά ή εναλλακτικά καύσιμα όσον αφορά τη χρήση (Eudy et al., 2014, Mahmoud et al., 2016). Ως εκ τούτου, η Ευρωπαϊκή Επιτροπή έχει προτείνει ότι μέχρι το 2030 όλα τα νέα αστικά λεωφορεία θα πρέπει να είναι ηλεκτρικά, με στόχο τη μείωση των εκπομπών βαρέων οχημάτων, σε σύγκριση με αυτές του 2019, κατά 65% το 2035 και 90% το 2040 (Mathiesen, Ilieva, Skov, Maya-Drysdale, Korberg, 2022) (Σχέδιο REPowerEU).

Ένας ακόμη λόγος που καθιστά το θέμα της διπλωματικής επίκαιρο, είναι ο συνεχώς αυξανόμενος όγκος των ηλεκτρικών λεωφορείων στις αστικές συγκοινωνίες παγκοσμίως, πράγμα που υπογραμμίζει περαιτέρω την επικράτηση των ηλεκτροκίνητων οχημάτων. Για παράδειγμα, στις Ηνωμένες Πολιτείες παρατηρήθηκε ραγδαία αύξηση του μεριδίου των ηλεκτρικών λεωφορείων στην αγορά των λεωφορείων διέλευσης από το δραστικό 2% το 2007, σε σχεδόν 20% το 2015 (Neff and Dickens, 2016). Το αυξανόμενο ενδιαφέρον για τα ηλεκτρικά λεωφορεία αντικατοπτρίζεται περαιτέρω στην παγκόσμια αγορά ηλεκτρικών λεωφορείων, η οποία αναμένεται να φτάσει την αξία των 215 δισεκατομμυρίων δολαρίων μέχρι το 2026, έχοντας παρουσιάσει ετήσιο ρυθμό ανάπτυξης 26,1% κατά τη διάρκεια της περιόδου 2020-2026 (Globe Newswire, 2020). Συνολικά, η έρευνα δείχνει ότι το 30% του παγκόσμιου στόλου οχημάτων για επιβάτες θα είναι ηλεκτρικά μέχρι το 2032. Η Κίνα ηγείται επί του παρόντος της υιοθέτησης των ηλεκτροκίνητων οχημάτων, με πόλεις όπως η Σεντζέν να αντικαθιστούν όλα τα βαρέα πετρελαιοκίνητα λεωφορεία με ηλεκτρικά. Επιπλέον, το Ηνωμένο Βασίλειο έχει αναπτύξει στόλους ηλεκτροκίνητων λεωφορείων σε διάφορες πόλεις, όπως το Λονδίνο και το Λίβερπουλ (Wu, Lin, Liu, Jin, 2022).

Όσον αφορά τόσο το σχεδιασμό όσο και τις λειτουργίες, η αποδοχή και η αύξηση της χρήσης ηλεκτρικών λεωφορείων αντιμετωπίζει πολλαπλές προκλήσεις. Ο σχεδιασμός συστημάτων ηλεκτρικών λεωφορείων είναι μια πολύπλοκη διαδικασία για διάφορους λόγους, συμπεριλαμβανομένων των απαιτήσεων σε ενέργεια και φόρτιση, του σχεδιασμού του δικτύου, καθώς και λόγω του απαραίτητου προγραμματισμού και σχεδιασμού, αμφότερων με βάση τους σταθερούς σταθμούς φόρτισης (Iliopoulou, Tassopoulos, Kepaptsoglou, Beligiannis, 2019). Η κύρια πρόκληση έγκειται στη χαμηλή ενεργειακή χωρητικότητα των μπαταριών των οχημάτων, για την οποία έχουν προταθεί νέες τεχνολογίες επαναφόρτισης, όπως η δυναμική ασύρματη μεταφορά ισχύος, η οποία επεκτείνει τη λειτουργική διαθεσιμότητα των ηλεκτρικών λεωφορείων φορτίζοντας τα οχήματα εν κινήσει. Η μέθοδος αυτή έρχεται επιπλέον με χαμηλότερο κόστος σε σχέση με αυτό της αύξησης του μεγέθους της μπαταρίας (Fuller, 2016).

Η ανεπαρκής υποδομή φόρτισης αποτελεί τον κυριότερο παράγοντα παρεμπόδισης της χρήσης των ηλεκτρικών λεωφορείων και των ηλεκτρικών οχημάτων γενικότερα. Το γεγονός αυτό εδραιώνει περαιτέρω την ανάγκη για την ανάπτυξη νέων μοντέλων που εξαλείφουν τα μειονεκτήματα της ηλεκτροκίνησης και με τη σειρά τους ενισχύουν τα οφέλη της.

Στον τομέα του χρονικού προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων [Electric Vehicle Scheduling Problem, E-VSP)], σύμφωνα με τους Shyam S.G. Perumal, Richard M. Lusby, Jesper Larsen (2022), η ανάπτυξη μεθόδων ανάκτησης που υποστηρίζουν την πρακτική εφαρμογή των ηλεκτρικών οχημάτων θεωρείται μελλοντικός τομέας έρευνας. Οι ολοκληρωμένες προσεγγίσεις προγραμματισμού ηλεκτρικών λεωφορείων έχουν επίσης λάβει πολύ λίγη προσοχή σε προηγούμενες μελέτες.

Επιπλέον, η λειτουργία ηλεκτρικών λεωφορείων απαιτεί συχνές στάσεις φόρτισης λόγω της περιορισμένης αυτονομίας τους. Δεδομένου ότι το δίκτυο σημείων φόρτισης είναι συνήθως περιορισμένο, αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές καθυστερήσεις κατά τη φόρτιση, ιδίως αν οι φορτιστές είναι ήδη κατειλημμένοι. Με την υποδομή φόρτισης να έχει ήδη δημιουργηθεί σε πολλές πόλεις, και σε συνδυασμό με τη συνεχή αύξηση της συνολικής υιοθέτησης των ηλεκτρικών οχημάτων, η υψηλή πληρότητα θέτει τα ηλεκτρικά λεωφορεία σε αυξημένο κίνδυνο να αντιμετωπίσουν δυσκολίες για την εύρεση διαθέσιμων σταθμών φόρτισης (Zhu, Gao, Zheng, Du, 2016).

Μια οικονομικά αποδοτική λύση σε αυτό θα ήταν η χρήση πολλαπλών υποδοχών φόρτισης σε κάθε φορτιστή, ώστε να είναι δυνατή η ταυτόχρονη φόρτιση λεωφορείων στην ίδια θέση/ στον ίδιο σταθμό. Οι σταθμοί με πολλαπλές πρίζες διευκολύνουν την κοινή φόρτιση μεταξύ των οχημάτων, προσφέροντας αυξημένη ευελιξία στον προγραμματισμό για την περαιτέρω διαχείριση των καθυστερήσεων στα σημεία φόρτισης. Ο σχεδιασμός των θυρών φόρτισης είναι ένα τεράστιο θέμα αυξημένου ενδιαφέροντος. Οι Mukherjee και Sossan (2021), για παράδειγμα, ανέπτυξαν μια μεθοδολογία για τον βέλτιστο, από πλευράς κόστους τοποθεσίας και διαστασιολόγησης , σχεδιασμό μιας υποδομής φόρτισης για ηλεκτρικά οχήματα εντός ενός δικτύου διανομής ηλεκτρικής ενέργειας. Η έννοια των μονών και πολλαπλών θυρών λήφθηκε υπόψη και διατυπώθηκε, και διαπιστώθηκε ότι σε σύγκριση με εναλλακτικά μέσα, η εφαρμογή πολλαπλών θυρών βρέθηκε ότι οδηγεί στο χαμηλότερο κόστος υποδομής, αυξάνοντας την ευελιξία των οδηγών και βελτιώνοντας την επίτευξη της φόρτισης. Τα εν λόγω ευρήματα υπογραμμίζουν την ανάγκη ενδελεχούς ανάλυσης όλων των πτυχών του σχεδιασμού της υποδομής φόρτισης και, στην προκειμένη περίπτωση, ειδικά των εφαρμογών πολλαπλών θυρών. Κατά την εξέταση της πρακτικής εφαρμογής των σταθμών φόρτισης πολλαπλών θυρών, οι σχετικοί τομείς απαιτούν συνεπώς συνεχή διερεύνηση και θα πρέπει να εξεταστούν λεπτομερέστερα για την επίτευξη της βέλτιστης αποδοτικής λειτουργίας των ηλεκτροκίνητων συστημάτων.

1.2. Θέμα και Δομή Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα εργασία θα επικεντρωθεί στο πρόβλημα σχεδιασμού δρομολόγησης ηλεκτρικών λεωφορείων σε δίκτυα με σταθερούς σταθμούς φόρτισης, εξοπλισμένους με πολλαπλές θύρες που διατίθενται σε κάθε φορτιστή, λαμβάνοντας υπόψη την μείωση του ρυθμού φόρτισης κατά την ταυτόχρονη φόρτιση λεωφορείων.

Στην ενότητα 2, παρουσιάζονται η διαθέσιμη βιβλιογραφία με παρεμφερές αντικείμενο και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την βιβλιογραφική ανασκόπηση, εντοπίζοντας τα υπάρχοντα κενά στην προηγούμενη βιβλιογραφία.

Στην ενότητα 3, παρουσιάζεται μια νέα μεθοδολογία για το πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών λεωφορείων με πολλαπλούς σταθμούς και πολλαπλές θύρες με χρονικά παράθυρα (EB-MDMPVSPTW). Περιγράφεται αναλυτικά το μαθηματικό μοντέλο που έχει χρησιμοποιηθεί, καταλήγοντας στην γραμμικοποίησή του.

Στις ενότητες 4 και 5, η δυνατότητα εφαρμογής της προσέγγισης πολλαπλών θυρών και της νέας διατύπωσης δοκιμάζεται σε ένα ιδεατό δίκτυο, καθώς και σε ένα πρόσθετο σύνολο 10 διαφορετικών περιπτώσεων, που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της υπολογιστικής απόδοσης της μεθόδου.

Η ενότητα 6 αναφέρεται στα συνολικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την ερμηνεία των τελικών αποτελεσμάτων. Καταγράφονται προτάσεις για την αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της εργασίας και προτείνονται τομείς περαιτέρω διερεύνησης.

Στην ενότητα 7 παρατίθεται ο κατάλογος των βιβλιογραφικών αναφορών που χρησιμοποιήθηκαν για την εκπόνηση της Διπλωματικής Εργασίας.

2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

2.1.Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου, είναι η ανασκόπηση και αξιολόγηση ερευνών και μεθοδολογιών σχετικών με το αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας. Συγκεκριμένα, αναζητήθηκαν στην διεθνή βιβλιογραφία δημοσιευμένες μελέτες με αντικείμενο τα ηλεκτρικά λεωφορεία, κυρίως στοχεύοντας σε μικρό κόστος και στην αντιμετώπιση του προβλήματος της φόρτισης τους. Παρακάτω, αναφέρονται αρχικά γενικές πληροφορίες για το πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων (2.2) και στη συνέχεια, για κάθε επιστημονική εργασία, παρουσιάζεται μία σύντομη περιγραφή της καθώς και τα βασικότερα αποτελέσματα που προέκυψαν (2.3)

2.2. Πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων (E-VSP: Electric-Vehicle Scheduling Problem)

Τα ηλεκτροκίνητα οχήματα θεωρούνται ως φορείς πρωτοβουλιών για καθαρό αέρα, κατάλληλοι για το σχεδιασμό βιώσιμων λύσεων για τη μείωση του άνθρακα και την αντιμετώπιση της κλιματικής αλλαγής (Wang, Yang, Vo, Nguyen, 2023). Κατά συνέπεια, η διαχείριση, η δοκιμή και ο σχεδιασμός των μπαταριών και των συναφών χαρακτηριστικών τους, όπως η κατάσταση φόρτισης, αποτελούν κυρίαρχα θέματα της έρευνας τον τελευταίο καιρό (Bai, Fan, Wang, Vo, Nguyen, 2022).

Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς των ηλεκτρικών οχημάτων, όπως είναι η περιορισμένη χωρητικότητα μπαταρίας, η οποία συνήθως κυμαίνεται μεταξύ 150-300 kWh (Gao, Lin, LaClair, Liu, Li, Birky, Ward, 2017), οι μεγάλοι χρόνοι φόρτισης, οι περιορισμένες αποστάσεις οδήγησης και οι σταθεροί σταθμοί φόρτισης, η ηλεκτροκίνηση των οχημάτων θα μπορούσε να θεωρηθεί κατάλληλη για αστικά λεωφορεία. Αυτό είναι εμφανές στη συνεχή υιοθέτηση ηλεκτρικών λεωφορείων σε παγκόσμιο επίπεδο, ωθώντας την επιστημονική κοινότητα να διερευνήσει λύσεις για το πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων (E-VSP), με στόχο τη βελτιωμένη και αποτελεσματική διαχείριση των δημόσιων μεταφορών.

Στο πλαίσιο του ορισμού του προβλήματος του E-VSP, ένα σύνολο προγραμματισμένων ταξιδιών θα πρέπει να ανατεθεί σε ένα σύνολο ηλεκτρικών οχημάτων με περιορισμένη εμβέλεια οδήγησης, που βασίζεται σε διαφορετικά αμαξοστάσια και αποτελεί μια επέκταση του Προβλήματος Προγραμματισμού Οχημάτων (VSP:Vehicle Scheduling Problem) (Wen, Linde, Ropke, Mirchandani, Larsen, 2016).

Το VSP είναι ένα καθιερωμένο πρόβλημα στο πλαίσιο του τομέα της βελτιστοποίησης των μεταφορών, με διάφορες παραλλαγές του να έχουν εμφανιστεί. Παραδείγματα περιλαμβάνουν το VSP πολλαπλών τύπων οχημάτων και το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού οχημάτων εναλλακτικών καυσίμων (AF-VSP: Alternative Fuel Vehicle Scheduling Problem). Για το AF-VSP, μια ευρετική προσέγγιση κατασκευής προτάθηκε από τον Adler (Adler, 2014), μαζί με μια μέθοδο δημιουργίας στηλών (column generation method). Αυτοί οι αλγόριθμοι δοκιμάστηκαν στο μητροπολιτικό σύστημα λεωφορείων του Φοίνιξ της Αριζόνα.

Οι περισσότερες μελέτες έχουν επιλύσει το E-VSP υπό σχεδόν ιδανικές συνθήκες, υποθέτοντας για παράδειγμα απεριόριστη παροχή ηλεκτρικής ενέργειας και αγνοώντας το κίνδυνο αιχμής του φορτίου ηλεκτρικής ενέργειας, αν και είναι αρκετά σημαντικοί παράμετροι για την ηλεκτροκίνηση. Ο χρόνος έναρξης και λήξης, και η θέση έναρξης και λήξης των διαδρομών είναι όλα γνωστά εκ των προτέρων (Wen, Linde, Ropke, Mirchandani, Larsen, 2016).

Στο πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων, λαμβάνονται υπόψη τα χαρακτηριστικά-περιορισμοί των ηλεκτρικών λεωφορείων που αναφέρθηκαν παραπάνω, κάθε ταξίδι ξεκινά και τελειώνει σε συγκεκριμένες τοποθεσίες, σε προκαθορισμένες ώρες και κάθε όχημα μπορεί να επαναφορτιστεί πλήρως ή μερικώς σε οποιονδήποτε δεδομένο σταθμό επαναφόρτισης. Κύριος στόχος είναι να χρησιμοποιηθεί ένας μικρός αριθμός οχημάτων και η ελαχιστοποίηση της απόστασης που διανύεται μεταξύ των σταθμών φόρτισης. Πώς αυτό πρόβλημα επεκτείνεται ειδικά προς τα ηλεκτρικά λεωφορεία θα προσδιοριστεί περαιτέρω στην επόμενη ενότητα.

2.3. Πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών λεωφορείων (EB-VSP: Electric Bus-Vehicle Scheduling Problem)

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να εξετάσει και να αξιολογήσει τις υπάρχουσες μεθοδολογίες για τον προγραμματισμό των ηλεκτρικών λεωφορείων, οι οποίες επικεντρώνονται κυρίως στη μείωση του κόστους και των καθυστερήσεων στους σταθμούς φόρτισης.

Σε έρευνα που έγινε το 2016, οι Wen et al. (2016), ασχολήθηκαν με το πρόβλημα προγραμματισμού δρομολογίων ηλεκτρικών οχημάτων (E-VSP) για ένα σύνολο δρομολογίων λεωφορείων, καθένα από τα οποία ξεκινά και τελειώνει σε συγκεκριμένες τοποθεσίες και σε συγκεκριμένες ώρες. Οι διαδρομές πρέπει να εκτελούνται από ένα σύνολο ηλεκτρικών λεωφορείων ή οχημάτων με περιορισμένη εμβέλεια οδήγησης, καθένα από τα οποία βρίσκεται σε έναν περιορισμένο αριθμό αμαξοστάσιων. Τα ηλεκτρικά λεωφορεία επιτρέπεται να επαναφορτίζονται πλήρως ή μερικώς σε οποιονδήποτε από τους καθορισμένους σταθμούς επαναφόρτισης. Οι στόχοι είναι πρώτον να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των οχημάτων που απαιτούνται για την κάλυψη όλων των προγραμματισμένων δρομολογίων, και δεύτερον η ελαχιστοποίηση της συνολικής απόστασης ταξιδιού. Παρουσιάστηκε μια διατύπωση μεικτού ακέραιου προγραμματισμού (mixed integer programming formulation), καθώς και μια ευρετική μέθοδος προσαρμοστικής αναζήτησης μεγάλης γειτονιάς [Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS)] για το πρόβλημα προγραμματισμού δρομολογίων ηλεκτρικών λεωφορείων (EB-VSP). Η ALNS δοκιμάστηκε σε ένα πρόσφατα δημιουργημένο σύνολο παραδειγμάτων αναφοράς (benchmark instances) EB-VSP. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προτεινόμενη ευρετική μέθοδος μπορεί να παρέχει καλές λύσεις κατά την επίλυση του EB-VSP σε μεγάλα δίκτυα και βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις σε κατά την επίλυση του EB-VSP σε μικρά δίκτυα.

Μια επιπλέον μελέτη έγινε από τους M. Rogge, E. Hurk, A. Larsen, D.U.Sauer (2017) , οι οποίοι έλαβαν υπόψη και αντιμετώπισαν τους περιορισμούς της εμβέλειας και του χρόνου φόρτισης των λεωφορείων με μπαταρία. Παρέχουν μια μεθοδολογία για τον βελτιστοποιημένο ως προς το κόστος σχεδιασμό στόλων ηλεκτρικών λεωφορείων, με μπαταρίες που φορτίζονται σε σταθμούς φόρτισης και την αντίστοιχη υποδομή φόρτισης. Η μελέτη βασίζεται σε έναν γενετικό αλγόριθμο ομαδοποίησης, η οποία περιλαμβάνει μια διατύπωση "μικτού ακέραιου μη γραμμικού προγραμματισμού" (mixed-integer nonlinear programming). Ο στόχος ήταν η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους ιδιοκτησίας ολόκληρου του συστήματος λεωφορείων. Το καθορισμένο πρόβλημα καλύπτει τον προγραμματισμό των λεωφορείων μπαταρίας, τη σύνθεση του στόλου και τη βελτιστοποίηση της υποδομής φόρτισης σε μια κοινή διαδικασία. Το κόστος των προσαρμογών του χρονοδιαγράμματος των οχημάτων υπολογίζεται και αξιολογείται μαζί με το κόστος επένδυσης και λειτουργίας του συστήματος λεωφορείων. Το συνολικό κόστος ιδιοκτησίας επέτρεψε τη σύγκριση τεχνικών εναλλακτικών λύσεων σε επίπεδο συστήματος, γεγονός που καθιστά την προσέγγιση αυτή ιδιαίτερα υποσχόμενη για μελέτες σκοπιμότητας που περιλαμβάνουν ένα ευρύ φάσμα τεχνικών προσεγγίσεων. Δύο ευρωπαϊκές πόλεις αναλύθηκαν στη συγκεκριμένη μελέτη, καταλήγοντας στο ότι η διάρθρωση του κόστους επηρεάζεται σημαντικά από τους εξεταζόμενους τύπους λεωφορείων και τις τεχνικές προδιαγραφές του. Για παράδειγμα, η συνολική ενεργειακή κατανάλωση του εξεταζόμενου ελαφρού λεωφορείου είναι έως και 32% χαμηλότερη από τη συνολική κατανάλωση του λεωφορείου μεγάλης εμβέλειας, παρόλο που αυξάνεται η νεκρή χιλιομετρική απόσταση. Ωστόσο, το συνολικό κόστος ιδιοκτησίας για τη λειτουργία και των δύο τύπων λεωφορείων ήταν σχετικά κοντά, λόγω του αυξημένου στόλου και των δαπανών για οδηγούς που απαιτούνται για το σύστημα ελαφρών λεωφορείων. Η μελέτη αποκαλύπτει επιπλέον ότι ένας μικτός στόλος διαφορετικών τύπων λεωφορείων θα μπορούσε να είναι επωφελής ανάλογα με τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της διαδρομής του λεωφορείου.

Η ερευνητική εργασία των Y.Wang, Y.Huang, J.Xu, N.Barclay (2017), ασχολήθηκε με την ανάπτυξη ενός μοντέλου μεικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (mixed-integer linear programming) για την βελτιστοποίηση των χρονοδιαγραμμάτων επαναφόρτισης ηλεκτρικών λεωφορείων, όπου καθορίστηκαν τόσο ο προγραμματισμός όσο και οι λειτουργικές αποφάσεις, ελαχιστοποιώντας παράλληλα το συνολικό ετήσιο κόστος, με την έρευνα να γίνεται στο Ντέιβις της Καλιφόρνιας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το πρόβλημα της περιορισμένης αυτονομίας των λεωφορείων, μπορεί να εξαλειφθεί με την υιοθέτηση ορισμένων στρατηγικών επαναφόρτισης. Οι αναλύσεις έδειξαν ότι το μοντέλο μπορεί να παρέχει υπηρεσίες μεταφορών με ολοκληρωμένη καθοδήγηση σχετικά με τη χρήση ηλεκτρικών λεωφορείων και την ανάπτυξη ενός συστήματος ταχείας φόρτισης. Τα συγκριτικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η χρήση ηλεκτρικών λεωφορείων ήταν πιο οικονομική και φιλική προς το περιβάλλον από τα πετρελαιοκίνητα λεωφορεία.

Το 2018, οι M. Jiang, Y. Zhang, Y. Zhang et al., μελέτησαν τον προγραμματισμό των ηλεκτρικών λεωφορείων, υπό κανονική λειτουργία φόρτισης, η οποία είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος φόρτισης που εφαρμόζεται στη Σεντζέν, μια μεγάλη πόλη της νότιας Κίνας. Σκοπός ήταν να δημιουργηθούν προγράμματα δρομολόγησης και σχέδια φόρτισης για ηλεκτρικά λεωφορεία με βάση το χρονοδιάγραμμα, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος λειτουργίας. Το πρόβλημα περιγράφεται ως πρόβλημα προγραμματισμού οχημάτων με πολλαπλά αμαξοστάσια, λαμβάνοντας υπόψη τη ζήτηση φόρτισης του ηλεκτρικού λεωφορείου. Για την επίλυση του προβλήματος προτάθηκε μια ευρετική μέθοδος που βασίζεται στην αναζήτηση γειτονιάς (neighborhood search heuristic) με μια πολιτική φόρτισης και κατανομής των λεωφορείων. Σύμφωνα με το σενάριο της παρούσας μελέτης, ο αλγόριθμος αναπτύχθηκε για τη λειτουργία λεωφορείων κορμού (trunk bus operation) που χαρακτηρίζεται από μικρές χρονοαποστάσεις και μεγάλη απόσταση διαδρομής. Ωστόσο, είναι επίσης εφαρμόσιμος και σε άλλα είδη λεωφορειακών διαδρομών για τη βελτιστοποίηση των δρομολογίων.

Μια άλλη μελέτη από τους E. Yao, T. Liu, T. Lu, Y. Yang (2019), προτείνει μια νέα μεθοδολογία για το πρόβλημα προγραμματισμού δρομολογίων ηλεκτρικών οχημάτων με πολλαπλούς τύπους οχημάτων στις δημόσιες συγκοινωνίες με βάση ένα δεδομένο χρονοδιάγραμμα πολλαπλών τύπων οχημάτων. Κατ' αρχάς, με συνεκτίμηση των διαφορών στην εμβέλεια οδήγησης, τη διάρκεια επαναφόρτισης και την κατανάλωση ενέργειας των ηλεκτρικών λεωφορείων για πολλαπλούς τύπους οχημάτων, δημιουργείται ένα μοντέλο βελτιστοποίησης για την ελαχιστοποίηση του ετήσιου συνολικού κόστους προγραμματισμού, συμπεριλαμβανομένου του κόστους αγοράς των ηλεκτρικών λεωφορείων και των φορτιστών και του λειτουργικού κόστους των δρομολογίων με χρονοδιάγραμμα. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται μια ευρετική διαδικασία για την εύρεση της βέλτιστης λύσης λαμβάνοντας υπόψη τις διαδρομές επαναφόρτισης. Η έρευνα επικυρώθηκε με τη χρήση ενός πραγματικού δικτύου μεταφορών στην περιοχή Daxing του Πεκίνου. Το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης παρέχει στις υπηρεσίες μεταφοράς καθοδήγηση σχετικά με την αγορά και το χρονοδιάγραμμα των ηλεκτρικών λεωφορείων για πολλαπλούς τύπους οχημάτων, καθώς και την ανάπτυξη των φορτιστών. Η συγκριτική ανάλυση έδειξε ότι η προτεινόμενη μέθοδος, που λαμβάνει υπόψη την αντικατάσταση μεταξύ τύπων ηλεκτρικών οχημάτων, μειώνει το ετήσιο συνολικό κόστος προγραμματισμού κατά 15,93% σε σύγκριση με τη συμβατική μέθοδο.

Οι Wang, Li, Feng, Wang, Cheng (2020), ανάπτυξαν ένα κοινό μοντέλο για τη βελτιστοποίηση του προγραμματισμού ενός δικτύου διέλευσης ηλεκτρικών λεωφορείων κανονικής φόρτισης και της ανάπτυξης σταθερών φορτιστών, λαμβάνοντας υπόψη την πολιτική μερικής φόρτισης και τις τιμές ηλεκτρικής ενέργειας κατά χρόνο χρήσης. Ο στόχος του μοντέλου ήταν η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους επένδυσης του συστήματος διαμετακόμισης, συμπεριλαμβανομένου του κόστους κεφαλαίου και συντήρησης των ηλεκτρικών λεωφορείων και των φορτιστών, του κόστους κατανάλωσης ενέργειας και του κόστους που σχετίζεται με το χρόνο λειτουργίας. Ακολουθήθηκε μια διαδικασία επίλυσης με βάση τον βελτιωμένο προσαρμοστικό γενετικό αλγόριθμο, και το μοντέλο επικυρώθηκε με τη χρήση ενός δικτύου διαμετακόμισης στην πόλη Anting της Σαγκάης, με 8 μεμονωμένες λεωφορειακές γραμμές και 867 ημερήσιες διαδρομές. Τα αποτελέσματα της επικύρωσης έδειξαν ότι η μεθοδολογία που λαμβάνει υπόψη την πολιτική μερικής χρέωσης μπορεί να οργανώσει το χρονοδιάγραμμα φόρτισης προσαρμοσμένο στις τιμές ηλεκτρικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της χρήσης. Σε σύγκριση με το σημείο αναφοράς του ξεχωριστού προγραμματισμού μίας γραμμής, το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να αποφέρει εξοικονόμηση επενδύσεων με την υψηλή αξιοποίηση των ηλεκτρικών λεωφορείων και των φορτιστών μπαταρίας.

Σε άλλη μελέτη, οι Liu και Ceder (2020), εξέτασαν το πρόβλημα προγραμματισμού των ηλεκτρικών οχημάτων διαμετακόμισης με μπαταρία με σταθερούς φορτιστές μπαταρίας εγκατεστημένους σε τερματικούς σταθμούς διαμετακόμισης. Παρέχονται δύο ισοδύναμες εκδοχές μαθηματικών διατυπώσεων του προβλήματος. Η πρώτη διατύπωση βασίζεται στη θεωρία των ελλειμματικών συναρτήσεων και η δεύτερη διατύπωση είναι ένα ισοδύναμο μοντέλο δι-αντικειμενικού ακέραιου προγραμματισμού (bi-level optimization). Ο πρώτος στόχος της βελτιστοποίησης του μαθηματικού προγραμματισμού ήταν η ελαχιστοποίηση του συνολικού αριθμού των απαιτούμενων ηλεκτρικών λεωφορείων, ενώ ο δεύτερος στόχος ήταν η ελαχιστοποίηση του συνολικού αριθμού των απαιτούμενων φορτιστών. Για την επίλυση αυτού του μοντέλου δι-αντικειμενικού ακέραιου προγραμματισμού, αναπτύχθηκαν δύο μέθοδοι επίλυσης. Πρώτον, προτάθηκε μια διαδικασία επίλυσης με βάση τη λεξικογραφική μέθοδο σε δύο στάδια κατασκευής και βελτιστοποίησης. Δεύτερον, αναπτύχθηκε μια προσαρμοσμένη μέθοδος επίλυσης μέγιστης ροής. Τρία αριθμητικά παραδείγματα χρησιμοποιήθηκαν ως επεξηγηματικό μέσο για την παρουσίαση των μεθόδων επίλυσης, μαζί με μια πραγματική μελέτη περίπτωσης στη Σιγκαπούρη. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι τα προτεινόμενα μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού και οι μέθοδοι επίλυσης είναι αποτελεσματικά και έχουν τη δυνατότητα να εφαρμοστούν στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων χρονοπρογραμματισμού ηλεκτρικών οχημάτων διαμετακόμισης με σταθερούς φορτιστές μπαταρίας εγκατεστημένους σε τερματικούς σταθμούς διαμετακόμισης μεγάλης κλίμακας.

Οι Zhang, Liu, Wang, Yu (2022), μελέτησαν τη μακροπρόθεσμη ηλεκτροκίνηση των λεωφορείων, βελτιστοποιώντας ταυτόχρονα την ανάπτυξη της υποδομής φόρτισης και τη μετακίνηση του στόλου των λεωφορείων. Στην μελέτη, λαμβάνονται υπόψη οι εποχιακές διαφορές που σχετίζονται με τις χωρητικότητες των μπαταριών, τις γραμμές λεωφορείων και τα δρομολόγια των λεωφορείων. Το πρόβλημα μοντελοποιήθηκε ως διατύπωση γραμμικού προγραμματισμού μεικτών ακεραίων (mixed-integer linear model), στην οποία προσδιορίστηκαν τα λεπτομερή χρονοδιαγράμματα φόρτισης για να δώσουν τη θέση φόρτισης και το χρόνο φόρτισης. Στόχος ήταν η ελαχιστοποίηση τόσο του κόστους όσο και των εκπομπών. Η προτεινόμενη διατύπωση δοκιμάστηκε σε μια πραγματική μελέτη περίπτωσης. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η αντικατάσταση των βενζινοκίνητων λεωφορείων με ηλεκτροκίνητα, μπορεί να εξοικονομήσει 17,8% του συνολικού κόστους και να μειώσει 39,3% τις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα. Σε σύγκριση με το σχεδιασμό ενός σχεδίου για κάθε περίοδο ξεχωριστά, η εφαρμογή της μακροπρόθεσμης ηλεκτροκίνησης των λεωφορείων μπορεί να εξοικονομήσει 13,5% του συνολικού κόστους και 21,7% του λειτουργικού κόστους. Επιπλέον, τα οφέλη από τη μακροπρόθεσμη εφαρμογή της ηλεκτροκίνησης αυξήθηκαν για μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα σχεδιασμού.

Στην εργασία τους το 2017, οι Montoya, Guéret, Mendoza, Villegas επέκτειναν τα υπάρχοντα μοντέλα προβλήματος δρομολόγησης ηλεκτρικών οχημάτων (E-VRP: Electric Vehicle Routing Problems), ώστε να εξετάζουν μη γραμμικές συναρτήσεις φόρτισης. Τα περισσότερα υπάρχοντα μοντέλα E-VRP, υποθέτουν ότι το επίπεδο φόρτισης της μπαταρίας είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου φόρτισης, αλλά στην πραγματικότητα η συνάρτηση είναι μη γραμμική. Πρότειναν μια υβριδική μετα-ευρετική μέθοδο, που συνδυάζει απλά στοιχεία από τη βιβλιογραφία και στοιχεία που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για αυτό το πρόβλημα και αξιολόγησαν τη σημασία των μη γραμμικών συναρτήσεων φόρτισης, παρουσιάζοντας μια υπολογιστική μελέτη που συγκρίνει τις υποθέσεις με αυτές που συνήθως γίνονται στη βιβλιογραφία. Τα αποτελέσματά έδειξαν ότι η παραμέληση της μη γραμμικής φόρτισης μπορεί να οδηγήσει σε ανέφικτες ή υπερβολικά δαπανηρές λύσεις. Η υβριδική μετα-ευρετική μέθοδος δοκιμάστηκε επίσης σε ένα νέο περιβάλλον δοκιμών, 120 περιπτώσεων. Με τα αποτελέσματα διαπιστώθηκε ότι η μέθοδός αποδίδει καλά σε αυτές τις περιπτώσεις.

Μία άλλη μελέτη των Felipe, Ortuño, Righini, Tirado (2014), προσεγγίζει μια εκδοχή του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων στην οποία ο στόλος μεταφορών αποτελείται από ηλεκτρικά οχήματα με περιορισμένη αυτονομία. Το πρόβλημα αυτό εξέτασε τη δυνατότητα εκτέλεσης μερικής επαναφόρτισης και τη χρήση διαφορετικών τεχνολογιών επαναφόρτισης, οι οποίες έχουν μεγάλες δυνατότητες να παράγουν πρόσθετη εξοικονόμηση κόστους και ενέργειας. Παρουσιάστηκε ένα μοντέλο μαθηματικού προγραμματισμού, αλλά δεδομένου ότι το μοντέλο αυτό μπορεί να επιλυθεί βέλτιστα μόνο για πολύ μικρές περιπτώσεις, προτάθηκαν επίσης διάφοροι ευρετικοί αλγόριθμοι με στόχο την επίλυση πραγματικού μεγέθους περιπτώσεων. Αναφέρθηκαν εκτενή υπολογιστικά αποτελέσματα σε ποικίλες περιπτώσεις, αξιολογώντας την απόδοση των προτεινόμενων αλγορίθμων και αναλύοντας τα διακριτικά στοιχεία του προβλήματος (όπως το μέγεθος, η γεωγραφική διαμόρφωση, οι σταθμοί επαναφόρτισης, η αυτονομία, οι τεχνολογίες κ.λπ.).

Πρόσφατα, σε μελέτη που έγινε το 2023, οι Gkiotsalitis, Iliopoulou, Kepaptsoglou, επέκτειναν το πρόβλημα προγραμματισμού οχημάτων πολλαπλών αμαξοστασίων με χρονικά παράθυρα [Multi-Depot Vehicle Scheduling Problem with Time Windows (MDVSPTW)] στην περίπτωση των ηλεκτρικών οχημάτων τα οποία μπορούν να φορτίζουν σε σταθμούς φόρτισης που βρίσκονται σε οποιοδήποτε σημείο εντός της περιοχής εξυπηρέτησης. Αναπτύχθηκε ένα μικτό ακέραιο μη γραμμικό μοντέλο [(mixed-integer nonlinear model (MINLP)] για το πρόβλημα προγραμματισμού οχημάτων πολλαπλών αμαξοστασίων ηλεκτρικών λεωφορείων με χρονικά παράθυρα [electric bus multi-depot vehicle scheduling problem with time windows (EB-MDVSPTW)]. Το μοντέλο δεν έλαβε υπόψη μόνο το λειτουργικό κόστος των λεωφορείων, αλλά και τον χρόνο αναμονής των οχημάτων, τη χωρητικότητα των σταθμών φόρτισης, και απαγόρευε την ταυτόχρονη φόρτιση διαφορετικών οχημάτων στον ίδιο φορτιστή. Οι φορτιστές μοντελοποιήθηκαν ως κόμβοι εργασιών ενός εκτεταμένου δικτύου και μπορούσαν να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε θέση χρησιμοποιώντας την υποδομή φόρτισης μιας πόλης αντί να χρησιμοποιούνται μόνο φορτιστές που προορίζονται για λεωφορεία. Περαιτέρω, γραμμικοποίησαν τη διατύπωση MINLP του EB-MDVSPTW αναδιατυπώνοντάς το σε ένα μικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα [mixed-integer linear model (MILP)] που μπορεί να επιλυθεί με στόχο τη συνολική βελτιστοποίηση. Τέλος, για να περιορίσουν τον χώρο λύσεων εισήγαγαν ένα σύνολο έγκυρων ανισοτήτων, τις οποίες αξιολόγησαν μέσω υπολογιστικών πειραμάτων (computational experiments).

Για να ολοκληρωθεί η παρούσα βιβλιογραφική ανασκόπηση, οι εργασίες που σχετίζονται με το πεδίο εφαρμογής του EB-VSP και οι σχετικές συνεισφορές τους συνοψίζονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1: Σύνοψη σχετικών παλιότερων μελετών.

Ερευνητική εργασία	Στόχοι	Πρόβλημα	Μαθηματικό μοντέλο	Μέθοδος επίλυσης
Wen, Linde, Ropke, Mirchandani, Larsen (2016)	• ελαχιστοποίηση του αριθμού των λεωφορείων που απαιτούνται για την κάλυψη όλων των δρομολογίων • ελαχιστοποίηση της συνολικής απόστασης ταξιδιού	Προσδιορισμός των δρομολογίων και της φόρτισης των ηλεκτρικών λεωφορείων	Μικτό ακέραιο πρόγραμμα	• Μεταευρετική • Μέθοδος προσαρμοστικής αναζήτησης μεγάλης γειτονιάς [Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS)]

M. Rogge, E. Hurk, A. Larsen, D.U. Sauer (2017)	Μείωση συνολικού κόστους ιδιοκτησίας των στόλων ηλεκτρικών λεωφορείων	Προγραμματισμός δρομολόγησης και φόρτισης των ηλεκτρικών λεωφορείων του συνολικού στόλου.	Μικτό γραμμικό ακέραιο πρόγραμμα	• Μεταευρετική • Γενετικός αλγόριθμος
Y.Wang, Y.Hua ng, J.Xu, N.Barc lay (2017)	Μείωση του συνολικού ετήσιου κόστους του συστήματος επαναφόρτισης ηλεκτρικών λεωφορείων και του λειτουργικού κόστους.	Επαναπρογραμμ ατισμός των χρονοδιαγραμμάτ ων φόρτισης των ηλεκτρικών λεωφορείων	Μικτό γραμμικό ακέραιο πρόγραμμα	CPLEX
M. Jiang, Y. Zhang, Y. Zhang et al. (2018)	Μείωση του συνολικού λειτουργικού κόστους.	Προσδιορισμός σχεδίου φόρτισης και προγραμματισμός δρομολογίων των ηλεκτρικών λεωφορείων.	-	Ευρετική μέθοδος που βασίζεται στην αναζήτηση γειτονιάς (neighborhood search heuristic)
E. Yao, T. Liu, T. Lu, Y.Yang (2019)	Μείωση του συνολικού ετήσιου κόστους προγραμματισμού, συμπεριλαμβανομένων του κόστους αγοράς και λειτουργίας.	Προγραμματισμός δρομολογίων πολλαπλών τύπων οχημάτων, λαμβάνοντας υπόψη τους φορτιστές που χρησιμοποιούνται	Ακέραιο πρόγραμμα	• Μεταευρετική • Γενετικός αλγόριθμος
Wang, Li, Feng, Wang, Cheng (2020)	Μείωση του συνολικού κόστους επένδυσης, συμπεριλαμβανομένων του κόστους κεφαλαίου και του κόστους συντήρησης των ηλεκτρικών λεωφορείων	Προγραμματισμός δρομολογίων ηλεκτρικών λεωφορείων και εγκατάσταση σταθερών φορτιστών, λαμβάνοντας υπόψη την πολιτική μερικής φόρτισης και την τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος ανά χρήση.	Μικτό ακέραιο πρόγραμμα	• Μεταευρετική • Γενετικός αλγόριθμος
Liu, Ceder (2020)	Μείωση του απαιτούμενου αριθμού ηλεκτρικών λεωφορείων και σταθμών φόρτισης	Προσδιορισμός δρομολογίων τον ηλεκτρικών λεωφορείων, λαμβάνοντας υπόψη περιορισμένο εύρος και απαιτήσεις φόρτισης	Δι-αντικεμενεικό ακέραιο πρόγραμμα	Λεξικογραφική μέθοδος
Zhang, Liu, Wang, Yu (2022)	Μείωση του συνολικού κόστους λειτουργίας και των εκπομπών	Προσδιορισμός προγράμματος φόρτισης	Μικτό γραμμικό ακέραιο πρόγραμμα	CPLEX
Montoya, Guéret, Mendoza, Villegas (2017)	Μείωση του συνολικού χρόνου (ταξιδιού, επιστροφής και χρόνοι φόρτισης)	Προγραμματισμός δρομολογίων ηλεκτρικών λεωφορείων,	Μικτό γραμμικό ακέραιο πρόγραμμα	Μεταευρετική: Επαναληπτική τοπική Αναζήτηση

		λαμβάνοντας υπόψη μια μη γραμμική συνάρτηση για τους χρόνους φόρτισης		και Ευρετική Κατασκευή
Felipe, Ortuño, Righini, Tirado (2014)	Μείωση του συνολικού κόστους επαναφόρτισης	Προγραμματισμός δρομολογίων ηλεκτρικών λεωφορείων, λαμβάνοντας υπόψη την πιθανότητα μερικής φόρτισης	Ακέραιο πρόγραμμα	Heuristics: greedy generation method (k-PseudoGreedy) and Simulated Annealing
K. Gkiotsalitis, C . Iliopoulou, K. K epaptsoglou (2023)	Μείωση του συνολικού λειτουργικού κόστους	Προσδιορισμός δρομολογίων των ηλεκτρικών λεωφορείων και προγραμματισμός των γεγονότων φόρτισης	Μικτό γραμμικό ακέραιο πρόγραμμα	Gurobi

2.4. Κενά μεταξύ των ερευνών

Ερευνητική εργασία	Ολοκληρωτικά ηλεκτρικός στόλος	Ελαχιστοποίηση αριθμού λεωφορείων	Ελαχιστοποίηση χρόνου αναμονής	Ελαχιστοποίηση κόστους
M. Rogge, E. Hurk, A. Larsen, D.U.Sauer (2017)	√		√	√
Y.Wang, Y.Huang, J.Xu, N .Barclay (2017)	√			√
M. Jiang, Y. Zhang, Y. Zhang et al. (2018)	√	√	√	√
E. Yao, T. Liu, T. Lu, Y.Yang (2019)	√			√
Wang, Li, Feng, Wang, Cheng (2020)	√		√	√
Liu και Ceder (2020)	√	√		√
Wen, Linde,Ropke, Mirchandani,Larsen (2016)	√	√		
Montoya, Guéret, Mendoza, Villegas (2017)	√		√	√
Felipe, Ortuño, Righini, Tirado (2014)	√			√
K. Gkiotsalitis, C. Iliopoulou, K. Kepaptsoglou (2023)	√		√	√
Zhang, Liu, Wang, Yu (2022)	√			√
Παρούσα εργασία	√		√	√

Εικόνα 1: Κενά μεταξύ των ερευνών

Αν και έχουν πραγματοποιηθεί πολλές μελέτες, υπάρχουν αρκετές πιθανές επεκτάσεις αυτών. Αρχικά, τα χρησιμοποιούμενα μοντέλα και οι προσεγγίσεις λύσεων είναι περιορισμένα ως προς το πεδίο εφαρμογής τους, για παράδειγμα όσον αφορά την εξέταση ετερογενών στόλων, το συνολικό κόστος ιδιοκτησίας και τις απαιτήσεις υποδομής. Η υποδομή φόρτισης θεωρείται συνήθως ως δεδομένο στο πρόβλημα και, ως εκ τούτου, δεν εξετάζεται η βελτιστοποίηση των φορτιστών (M. Rogge, E. Hurk, A. Larsen, D.U.Sauer, 2017).

Δεύτερον η διάρκεια επαναφόρτισης στις περισσότερες μελέτες είναι σταθερή, όπως για παράδειγμα στο πλαίσιο της έρευνας των Y.Wang, Y.Huang, J.Xu, N.Barclay (2017). Ωστόσο, οι διάρκειες επαναφόρτισης θα μπορούσαν να επηρεαστούν από πολλούς παράγοντες (π.χ. εναπομένουσα ενέργεια, χωρητικότητα λεωφορείου, μήκος του επόμενου ταξιδιού). Επιπλέον, η σχέση μεταξύ της επαναφορτιζόμενης ενέργειας και της διάρκειας επαναφόρτισης στις μελέτες προσεγγίζεται συνήθως με μια γραμμική συνάρτηση, ενώ θα μπορούσε εξεταστεί η μη γραμμικότητα της συμπεριφοράς φόρτισης. Η εναλλαγή μπαταριών και ασύρματη φόρτιση αποτελούν επίσης εναλλακτικές που δεν έχουν μελετηθεί εκτενώς.

Σε πολλά προτεινόμενα μοντέλα δεν λήφθηκαν υπόψη οι συνθήκες κυκλοφορίας. Σε ένα πραγματικό δίκτυο διαμετακόμισης οι κυκλοφοριακές συνθήκες είναι συχνά πολύ σύνθετες και μπορούν να επηρεάσουν τις ταχύτητες των λεωφορείων και την κατανάλωση ενέργειας, συνεπώς είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη αυτοί οι παράγοντες σε μελλοντικές έρευνες (M. Jiang, Y. Zhang, Y. Zhang et al., 2018). Μπορεί να συμβούν απροσδόκητα γεγονότα, ακόμη και αν η πιθανότητα είναι μικρή. Έτσι, η μελλοντική έρευνα σχετικά με το πρόβλημα αντιστοίχισης ηλεκτρικών λεωφορείων σε δρομολόγια, μπορεί να εξετάσει τα απροσδόκητα γεγονότα. Όμως, λόγω της έλλειψης πληροφοριών για την κυκλοφορία σε πραγματικό χρόνο, εκτιμούμε μόνο τα μέσα ποσοστά κατανάλωσης ενέργειας αφού λάβουμε υπόψη τις αβεβαιότητες συνολικά. Η μελλοντική μελέτη μπορεί να εξετάσει τα αβέβαια ποσοστά κατανάλωσης ενέργειας αντί για τα μέσα ποσοστά κατανάλωσης ενέργειας.

Τέλος, παρατηρήθηκε ότι ο προγραμματισμός του στόλου λεωφορείων θα γίνει πιο περίπλοκος λόγω της εισαγωγής ηλεκτρικών λεωφορείων για πολλαπλούς τύπους οχημάτων, οπότε είναι απαραίτητο να μελετηθούν οι επιπτώσεις των πολλαπλών τύπων ηλεκτρικών λεωφορείων στον προγραμματισμό του στόλου (E.Yao, T.Liu, T.Lu, Y.Yang, 2019).

Προτείνεται ένα μικτό ακέραιο γραμμικό μοντέλο [Mixed-Integer Linear Model (MILP)] το οποίο λαμβάνει υπόψιν το λειτουργικό κόστος των λεωφορείων, το χρόνο αναμονής οχήματος και την χωρητικότητα των σταθμών φόρτισης (αριθμό φορτιστών, υποδοχών). Το μοντέλο έχει δημιουργηθεί έτσι ώστε να μην υπάρχει ταυτόχρονη φόρτιση διαφορετικών λεωφορείων στην ίδια υποδοχή. Ακόμη έχουν προστεθεί ισχυρές ανισότητες, με σκοπό να περιοριστεί ο «χώρος» επίλυσης του προβλήματος, πετυχαίνοντας έτσι την αντιστάθμιση στην αύξηση του μεγέθους του προβλήματος με μείωση της πολυπλοκότητας των υπολογισμών.

Η επισκόπηση των σχετικών μελετών του παρελθόντος στον Πίνακα 1 υπογραμμίζει την εκτεταμένη βιβλιογραφία του προβλήματος EB-VSP σε σχέση με τον προγραμματισμό της ανάθεσης ηλεκτρικών λεωφορείων σε διαδρομές και τον προγραμματισμό των χρόνων φόρτισης τους. Οι μελέτες που εξετάστηκαν, ωστόσο, δεν εξετάζουν τη χρήση πολλαπλών θυρών στον ίδιο σταθμό φόρτισης και τις πιθανές μειώσεις του ρυθμού φόρτισης όταν χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα πολλές θύρες.

Συνεπώς, η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στην άμεση επέκταση του προβλήματος EB-VSP, της μελέτης των Gkiotsalitis, Iliopoulou, Kepaptsoglou (2023), με θέμα το πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών λεωφορείων με πολλαπλούς σταθμούς φόρτισης και χρονικά παράθυρα (EB-MDVSPTW= Electric Buses- Multi-Depot Vehicle Scheduling Problem with Time Windows), με την προσθήκη πολλαπλών υποδοχών φόρτισης ανά φορτιστή (EB-MDVSPTW-MP). Ξεφεύγοντας από το παραδοσιακό πρόβλημα EB-VSP με χρονικά παράθυρα που παρουσιάστηκε στην προαναφερθείσα εργασία, η συμβολή της μελέτης μας έγκειται στην αναδιαμόρφωση του EB-VSP ώστε να ληφθεί υπόψη η περίπτωση πολλαπλών θυρών γεγονότα φόρτισης με διαφορετικούς ρυθμούς φόρτισης. Στη συνέχεια, το μοντέλο μας δοκιμάζεται σε ένα ιδεατό δίκτυο και σε ένα σύνολο περιπτώσεων αναφοράς, αναδιαμορφωμένο ώστε να λαμβάνει υπόψη υποδομές φόρτισης πολλαπλών θυρών.

3. Δημιουργία Μοντέλου αντιστοίχισης ηλεκτρικών λεωφορείων σε δρομολόγια, για δίκτυο με σταθερούς σταθμούς φόρτισης

3.1.Μεθοδολογία-Μαθηματικό μοντέλο

Επεκτείναμε το πρόβλημα προγραμματισμού ηλεκτρικών λεωφορείων με πολλαπλά αμαξοστάσια, χρονικά παράθυρα και σταθερούς σταθμούς φόρτισης με μία θύρα-ή όπως θα αναφέρεται παρακάτω EB-MDVSPTW (Electric Bus Multiple-depot Vehicle Scheduling Problem in Time Windows)- στο EB-MDVSPTW πολλαπλών θυρών, όπου δύο ή περισσότερες θύρες μπορούν να τοποθετηθούν στον ίδιο σταθμό φόρτισης παρέχοντας τη δυνατότητα φόρτισης πολλαπλών λεωφορείων, ταυτόχρονα, στο ίδιο σημείο. Το προφανές πλεονέκτημα είναι ότι εάν η θέση ενός σταθμού φόρτισης είναι επωφελής για ορισμένες γραμμές λεωφορείων (δηλαδή βρίσκεται σε κοντινή απόσταση από τον τερματικό σταθμό της γραμμής), πολλά λεωφορεία από αυτές τις γραμμές μπορούν να φορτίζουν εκεί χρησιμοποιώντας τις πολλαπλές υποδοχές ενός φορτιστή, αντί για να ταξιδεύουν σε έναν απομακρυσμένο σταθμό φόρτισης. Ανεξάρτητα από αυτό, εάν πολλαπλές υποδοχές ενός σταθμού φόρτισης χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα, ο ρυθμός φόρτισης μειώνεται επειδή η ισχύς ενός σταθμού φόρτισης κατανέμεται σε αυτές. Συγκριτικά, η κατανάλωση ενέργειας σε μία θύρα είναι σταθερή και με την αύξηση της χρήσης των οχημάτων, λόγω της σταθερής κατανάλωσης ενέργειας των μονών θυρών, ο ρυθμός χρήσης ενέργειας αυξάνεται σημαντικά περισσότερο από αυτόν της υποδομής πολλαπλών θυρών, γεγονός που μπορεί να μην είναι βιώσιμο για το δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας. Για να υποστηριχθεί η βιώσιμη χρήση της παραλλαγής πολλαπλών θυρών, η οποία προσφέρει βραδύτερη φόρτιση, προκύπτει ένας προβληματισμός για τους οδηγούς λεωφορείων: να επισκέπτονται σταθμούς φόρτισης σε κοντινή απόσταση, οι οποίοι έχουν κάποιες από τις θύρες τους κατειλημμένες, με αποτέλεσμα βραδύτερη φόρτιση ή να επισκέπτονται μη κατειλημμένους σταθμούς φόρτισης που βρίσκονται μακριά και απαιτούν μεγαλύτερους χρόνους νεκρής διαδρομής;

Στην παρούσα μελέτη διατυπώνουμε το πολλαπλών θυρών EB-MDVSPTW (Multi-Port), βασιζόμενοι στη διατύπωση του μίας θύρας EB-MDVSPTW που αναπτύχθηκε από τους Gkiotsalitis, Iliopoulou, Kepaptsoglou (2023). Ας θεωρήσουμε ότι κάθε λεωφορείο k ξεκινά από το αμαξοστάσιο του και επιστρέφει στο ίδιο αμαξοστάσιο στο τέλος του ημερήσιου προγράμματός του. Οι θέσεις των σταθμών φόρτισης προκαθορίζονται κατά τη φάση του στρατηγικού σχεδιασμού του προβλήματος σχεδιασμού του δικτύου ηλεκτρικών λεωφορείων (Barraza, Estrada, 2021) και θα μπορούσαν να έχουν τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε σημείο του δικτύου, ακόμη και στις θέσεις των αμαξοστασίων. Θεωρούμε ένα σύνολο σταθμών φόρτισης $Z = \{1, ..., z, ...\}$ στο δίκτυο λεωφορείων. Το δίκτυο λεωφορείων, ορίζεται ως ένας αριθμός προκαθορισμένων διαδρομών, οι οποίες, μαζί με τα γεγονότα φόρτισης, μπορούν να μοντελοποιηθούν ως «εργασίες» που πρέπει να εκτελεστούν από τα λεωφορεία. Σημειώνουμε ότι, σε αντίθεση με τις εργασίες που αναφέρονται σε προσχεδιασμένα ταξίδια, ο αριθμός των αιτήσεων φόρτισης ανά σταθμό φόρτισης δεν είναι σταθερός, διότι εξαρτάται από την ανάθεση των ηλεκτρικών λεωφορείων στους σταθμούς φόρτισης.

Θεωρούμε ότι (1) όλα τα ηλεκτρικά λεωφορεία είναι πλήρως φορτισμένα στην αρχή της ημέρας- (2) οι υποδομές φόρτισης μπορούν να είναι κοινές για τα διάφορα λεωφορεία και μπορούν δύο ή περισσότερα οχήματα να χρησιμοποιούν τον ίδιο φορτιστή, αλλά δύο ηλεκτρικά λεωφορεία δεν μπορούν να χρησιμοποιούν την ίδια υποδοχή φόρτισης ταυτόχρονα- (3) όλοι οι εγκατεστημένοι φορτιστές έχουν τον ίδιο ρυθμό παροχής φόρτισης, όμως ο ρυθμός απόδοσης μειώνεται όταν συνδέονται στον ίδιο φορτιστή, αλλά σε διαφορετικές υποδοχές, δύο ή περισσότερα ηλεκτρικά λεωφορεία- και (4) τα ηλεκτρικά λεωφορεία φορτίζονται πλήρως όταν συνδέονται σε έναν σταθμό φόρτισης.

Έστω F το σύνολο όλων των πιθανών γεγονότων φόρτισης. Κάθε πιθανό γεγονός φόρτισης $i \in F$ μπορεί να ξεκινήσει εντός του χρονικού παραθύρου [li, ui]. Τα γεγονότα φόρτισης $i \in F$, που σχετίζονται με φορτιστή $z \in Z$, σχηματίζουν ένα υποσύνολο $F^z \subseteq F$. Κάθε πιθανό γεγονός φόρτισης $i \in F$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας πρόσθετος κόμβος στο δίκτυο ενός λεωφορείου $k \in K$ που περιλαμβάνει τους ακόλουθους κόμβους:

$$N^k=\{V^k \cup F \cup \{o_k,d_k\}\}$$

Όπου $V^k \subseteq V$, είναι τα ταξίδια που μπορούν ενδεχομένως να πραγματοποιηθούν από το λεωφορείο k, και αποτελούν υποσύνολο του συνόλου V που δηλώνει όλα τα ταξίδια, τα αμαξοστάσια προέλευσης και προορισμού του ταξιδιού k, $\{o_k,d_k\}$, και το σύνολο όλων των γεγονότων φόρτισης F. Το σύνολο των κόμβων που είναι διαθέσιμοι σε όλα τα οχήματα είναι:

$N= \{V \cup F \cup O \cup D\}$

όπου O και D είναι τα σύνολα των αμαξοστασίων προέλευσης και προορισμού αντίστοιχα για όλα τα λεωφορεία. Το δίκτυο G^k, εκφράζεται ως $G^k=(V^k, A^k)$. Ως A^k συμβολίζονται τα τόξα, όπου κάθε τόξο υποδεικνύει την μεταφορά ενός λεωφορείου από μια διαδρομή σε άλλη. Έχουμε ένα σύνολο κενών τόξων (o_k, d_k), τόξων αρχής (o_k, i) , τόξων τέλους (i, d_k) και ενδιάμεσων τόξων (i,j). Ο χρόνος που πέρασε κατά τη διάρκεια ενός τόξου (i,j) αναφέρεται ως t_{ij} και ισούται με το χρόνο διάρκειας της διαδρομής i συν το χρόνο ταξιδιού μεταξύ της τελικής θέσης της διαδρομής i και της αρχικής θέσης της διαδρομής j. Το σύνολο A^k αποτελείται από την ένωση των παρακάτω τόξων:

$$A^k = \begin{cases} A_1^k = (o_k, j) & \forall j \in N^k - \{o_k\} \\ A_2^k = (j, d_k) & \forall j \in N^k - \{o_k, d_k\} \\ A_3^k = (i, j) & \forall i \in V^k \quad \forall j \in V^k - \{i\} \\ A_4^k = (i, j) & \forall i \in V^k \quad \forall j \in F \\ A_5^k = (i, j) & \forall i \in F \quad \forall j \in V^k \end{cases}$$

Για το λεωφορείο $k \in K$, τα τόξα A_1^k είναι όλα τα εφικτά τόξα που ξεκινούν από το αμαξοστάσιο προέλευσης, A_2^k είναι όλα τα εφικτά τόξα που συνδέουν έναν κόμβο με το αμαξοστάσιο προορισμού, A_3^k είναι όλα τα εφικτά τόξα που αναπαριστούν τη διαδρομή από την τελική θέση μιας διαδρομής $i \in V^k$ προς την αρχική θέση της διαδρομής $j \in V^k - \{i\}$, A_4^k είναι όλα τα εφικτά τόξα που αναπαριστούν τη διαδρομή από την τελική θέση μιας διαδρομής $i \in V^k$ προς την θέση του γεγονότος φόρτισης $j \in F$, και τα τόξα A_5^k είναι όλα τα εφικτά τόξα που αναπαριστούν τη διαδρομή από την θέση ενός γεγονότος φόρτισης $j \in F$ προς την αρχική θέση της διαδρομής $j \in V^k$.

Κάθε κόμβος $i \in N$ είναι συνδεδεμένος με ένα χρονικό παράθυρο $[l_i,u_i]$, όπου l_i είναι το κατώτερο όριο έναρξης της εργασίας που συνδέεται με αυτόν και u_i το ανώτερο.

Επιπλέον, για την ολοκλήρωση κάθε ταξιδιού i ∈ V υπάρχει ένα σχετικό χρονικό κόστος $\tilde{t}_i$. Για τη μετακίνηση από τη θέση τέλους της εργασίας στον κόμβο i ∈ N στη θέση έναρξης της εργασίας στον κόμβο j ∈ N υπάρχει ένα σχετικό κόστος ταξιδιού t_{ij}.

Το νομογράφημα του προβλήματος προγραμματισμού ηλεκτρικών λεωφορείων με πολλαπλά αμαξοστάσια, χρονικά παράθυρα, σε δίκτυο με σταθερούς σταθμούς φόρτισης και πολλαπλές θύρες ανά φορτιστή (Multi-port EB-MDVSPTW) παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Νομογράφημα EB-MDVSPTW πολλαπλών υποδοχών.

Σύνολα:	
K	Σύνολο των διαθέσιμων λεωφορείων
Z	Σύνολο των σταθμών φόρτισης
O,D	Σύνολα των αμαξοστασίων προέλευσης και προορισμού αντίστοιχα
V	Σύνολο των ταξιδιών
V^k	Υποσύνολο των προγραμματισμένων διαδρομών που μπορούν να πραγματοποιηθούν από ένα λεωφορείο k
F	Σύνολο όλων των πιθανών γεγονότων φόρτισης
F_o	$F_O \subseteq F$ είναι το σύνολο όλων των πιθανών γεγονότων φόρτισης, αφού τελειώσει το τελευταίο πιθανό γεγονός φόρτισης σε κάθε φορτιστή
F^z	Υποσύνολο των πιθανών γεγονότων φόρτισης στο φορτιστή z ∈ Z, από το πρώτο έως το τελευταίο
N^k	Υποσύνολο των κόμβων που σχετίζονται με το λεωφορείο k, $V^k \cup F \cup \{o_k,d_k\}$
N	Σύνολο όλων των πιθανών κόμβων εργασιών, N= {V ∪ F ∪ O ∪ D}
A^k	Σύνολο των εφικτών τόξων για το λεωφορείο κ ∈ Κ
G^k	G^k=(N^k, A^k) είναι το δίκτυο που σχετίζεται με το λεωφορείο k
Παράμετροι:	
r_j	Ρυθμός φόρτισης που σχετίζεται με ένα γεγονός φόρτισης j ∈ F
ψ_j	Αριθμός θυρών που χρησιμοποιούνται σε ένα γεγονός φόρτισης j ∈ F
o_k,d_k	Ο αρχικός και ο τελικός κόμβος που σχετίζεται με τα αμαξοστάσιο προέλευσης και προορισμού του λεωφορείου k
$[l_i,u_i]$	Χρονικό παράθυρο που σχετίζεται με κάθε κόμβο i ∈ N
$t_{i,j}$	Παρερχόμενος χρόνος στο τόξο (i,j), που ισούται με τον χρόνο ταξιδιού μεταξύ της τελικής θέσης του κόμβου i ∈ N και της αρχικής θέσης του κόμβου j ∈ N
$\tilde{t}_i$	Σχετικό χρονικό τόξο για την ολοκλήρωση κάθε ταξιδιού i ∈ V
λ	μοναδιαίο κόστος αναμονής ενός λεωφορείου
b_{ij}^k	συνιστώσα της σταθεράς κόστους για την εκτέλεση της διαδρομής j μετά τη διαδρομή i, χωρίς να ληφθεί υπόψη κάποια πιθανή καθυστέρηση
φ^k_{max}	κατάσταση πλήρους φόρτισης
φ^k_{min}	Ελάχιστη επιτρεπόμενη κατάσταση φόρτισης για το λεωφορείο k
η_i	Ενέργεια που καταναλώθηκε μετά την εκτέλεση της διαδρομής i ∈ V
θ_{ij}	Ενέργεια που καταναλώθηκε κατά την μετακίνηση από την τελική θέση του κόμβου i ∈ N προς την αρχική θέση του κόμβου j ∈ N
M	Ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός
q_j	
ω_i	το επόμενο γεγονός φόρτισης στον ίδιο φορτιστή, που θα ξεκινήσει μετά το τέλος του προηγούμενου γεγονότος φόρτισης i

Μεταβλητές:	
e_i^k	κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k, όταν αυτό φτάνει στον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$
$\bar{e}_i^k$	κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k, όταν αυτό ολοκληρώνει τη διαδρομή στον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{o_k\}$
τ_i^k	Απαιτούμενη χρονική περίοδος για να επαναφορτιστεί πλήρως ένα λεωφορείο μέσω ενός γεγονότος φόρτισης $i \in F$
g_i^k	κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k, όταν εκτελεί μια διαδρομή $i \in V^k \cup F$
x_{ij}^k	δυαδική μεταβλητή ροής, όπου $x_{ij}^k = 1$, αν το λεωφορείο k χρησιμοποιεί το τόξο (i,j), διαφορετικά $x_{ij}^k = 0$
y_i^k	Δυαδικές δείκτριες μεταβλητές, όπου $y_i^k = 1$ αν το γεγονός φόρτισης εκτελείται από λεωφορείο k, διαφορετικά $y_i^k = 0$
T_i^k	Ο χρόνος που ξεκινάει η διαδικασία σε έναν κόμβο $i \in V^k$. Το $T_{o_k}^k$ υποδηλώνει τον χρόνο αναχώρησης από το αμαξοστάσιο προέλευσης, το $T_{d_k}^k$ τον χρόνο άφιξης στο αμαξοστάσιο προορισμού και το T_i^k το χρόνο που ξεκινάει το λεωφορείο από τον κόμβο i.

Κάθε γεγονός φόρτισης $i \in F$, χαρακτηρίζεται από έναν ρυθμό φόρτισης r_i. Κάθε λεωφορείο k, ξεκινάει τα καθημερινά του δρομολόγια πλήρως φορτισμένο. Συμβολίζουμε την κατάσταση πλήρους φόρτισης φ^k_{max}. Δεδομένου του αριθμού υποδοχών ψ_i που χρησιμοποιούνται σε ένα γεγονός φόρτισης $i \in F$, ένα λεωφορείο φτάνει σε έναν κόμβο φόρτισης την χρονική στιγμή T_i^k, με τρέχον επίπεδο ενέργειας e_i^k και χρειάζεται να φορτιστεί πλήρως, θα απαιτεί μια χρονική περίοδο:

$$\tau_i^k = (\phi_{max}^k - e_i^k)/r_i \quad (1)$$

Συνεπώς το όχημα k μπορεί να μετακινηθεί προς τον επόμενο κόμβο μετά από χρόνο $T_i^k + \tau_i^k$, βασιζόμενοι στην υπόθεση ότι η επαναφορτιζόμενη ενέργεια κατά τη διάρκεια ενός γεγονότος φόρτισης είναι ανάλογη με την διάρκεια του, δηλαδή η διαδικασία της φόρτισης είναι γραμμική, αφού η κατάσταση φόρτισης της μπαταρίας αλλάζει γραμμικά μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης κατάστασης φόρτισης (Ko & Jang, 2013).

Η κατάσταση φόρτισης ενός λεωφορείου όταν αναχωρεί από το αμαξοστάσιο προέλευσης συμβολίζεται $\bar{e}_{o_k}^k$ και ταυτίζεται με την κατάσταση πλήρους φόρτισης φ^k_{max}. Δεδομένης της κατάστασης φόρτισης όταν το λεωφορείο k φτάνει στον κόμβο $i \in V^k \cup F$ (e_i^k) και όταν ολοκληρώνει την παραμονή του σε αυτόν ($\bar{e}_i^k$), έχουμε ότι:

$$\bar{e}_i^k = e_i^k - g_i^k \quad (2)$$

όπου g_i^k είναι η κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k όταν εκτελεί τη διαδρομή i. Αν η διαδρομή $i \in V^k$, τότε το λεωφορείο k εκτελεί τη διαδρομή i και καταναλώνει ενέργεια $\eta_i \geq 0$. Η παράμετρος η_i είναι προκαθορισμένη και εξαρτάται από την γεωγραφική διαδρομή, τον αριθμό των στάσεων και το προφίλ εδάφους που χαρακτηρίζει την διαδρομή i (υποθέσεις για σχεδιασμό ηλεκτρικών λεωφορείων: (Kunith, Mendelevitch, & Goehlich (2017), Rogge et al. (2018), Rogge, Wollny, & Sauer (2015)).

Αν παρόλα αυτά $i \in F$, τότε $g_i^k = e_i^k - \varphi^k_{max}$, καθώς το λεωφορείο θα φορτίσει μέχρι να φτάσει στην μέγιστη επιτρεπόμενη κατάσταση φόρτισης.

Επεκτείνοντας το EB-MDVSPTW για την περίπτωση των πολλαπλών υποδοχών, οι περιορισμοί του προβλήματος σχεδιασμού και αντιστοίχισης ηλεκτρικών λεωφορείων σε δρομολόγια, για δίκτυο με σταθερούς σταθμούς φόρτισης και πολλαπλές υποδοχές ανά φορτιστή διαμορφώνονται στους εξής παρακάτω:

$$\sum_{k\in K}\sum_{i:(i,j)\in A_k} x_{ij}^k = 1 \qquad \forall j \in V \qquad (3)$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i:(i,j)\in A_k} x_{ij}^k \le \psi_j \qquad \forall j \in F \qquad (4)$$

$$\sum_{j:(o_k,j)\in A^k} x_{o_k,j}^k = \sum_{i:(i,d_k)\in A^k} x_{i,d_k}^k = 1 \qquad \forall k \in K \qquad (5)$$

$$\sum_{i:(i,j)\in A^k} x_{ij}^k - \sum_{i:(j,i)\in A^k} x_{ji}^k = 0 \qquad \forall k \in K\ \forall j \in V^k \cup F \qquad (6)$$

$$x_{ij}^k(T_i^k + \bar{t}_i + t_{ij}) \le x_{ij}^k T_j^k \qquad \forall k \in K\ \forall (i,j) \in A^k \mid i \in V^k \qquad (7)$$

$$x_{o_k j}^k(T_{o_k}^k + t_{o_k j}) \le x_{o_k j}^k T_j^k \qquad \forall k \in K\ \forall (o_k,j) \in A^k \qquad (8)$$

$$x_{ij}^k(T_i^k + \tau_i^k + t_{ij}) \le x_{ij}^k T_j^k \qquad \forall k \in K\ \forall (i,j) \in A^k \mid i \in F \qquad (9)$$

$$\tau_i^k = (\phi_{max}^k - e_i^k)/r_i \qquad \forall i \in F\ \forall k \in K \qquad (10)$$

$$l_i \le T_i^k \le u_i \qquad \forall k \in K\ \forall i \in N^k \qquad (11)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \qquad \forall k \in K\ \forall (i,j) \in A^k \qquad (12)$$

Όσον αφορά τους παραπάνω περιορισμούς, ο περιορισμός (3) εξασφαλίζει ότι κάθε δρομολόγιο j ∈ V θα εκτελείται από ένα μόνο λεωφορείο και ο περιορισμός (4) ότι ένα γεγονός φόρτισης j ∈ F μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το πολύ ένα λεωφορείο. Ο περιορισμός (5) εγγυάται ότι κάθε λεωφορείο k ∈ K θα ξεκινάει από το αμαξοστάσιο προέλευσης του και θα επιστρέφει στο αμαξοστάσιο προορισμού του. Εισάγεται ο περιορισμός (6) που λαμβάνει υπόψιν τα γεγονότα φόρτισης στους περιορισμούς του δικτύου που σχετίζονται με τη διατήρηση της ροής. Ακόμη είναι σημαντικό ότι ο περιορισμός (7) δεν θεωρεί τόξα που έχουν κόμβους από το σύνολο όλων των γεγονότων φόρτισης (F) ως κόμβους προέλευσης. Ο περιορισμός (8) εγγυάται ότι αν ένα λεωφορείο k αναχωρήσει από το αμαξοστάσιο προέλευσης του, o_k, και κατευθύνεται προς το j κόμβο, τότε η ώρα αναχώρησης από το αμαξοστάσιο προέλευσης, T_{o_k}, συν τον απαιτούμενο χρόνο ταξιδιού από το o_k στον κόμβο j είναι μικρότερη ή ίση με το χρόνο που η «εργασία» ξεκινά στον κόμβο j. Στον περιορισμό (9), το i είναι ένα γεγονός φόρτισης i ∈ F, ο χρόνος του τόξου (i,j) είναι ίσος με τη διάρκεια της διαδρομής i, τ_i^k συν τον χρόνο ταξιδιού μεταξύ της τελικής θέσης της διαδρομής i και της αρχικής θέσης της διαδρομής j, t_{ij}. Η εξίσωση (10) δίνει τις τιμές του τ_i^k, λαμβάνοντας υπόψη τις αλλαγές του ρυθμού φόρτισης όταν χρησιμοποιούνται πολλαπλές θύρες. Η (11) εγγυάται ότι η δραστηριότητα σε κάθε κόμβο ξεκινάει εντός του χρονικού παραθύρου $[l_i,u_i]$. Τέλος, ο περιορισμός (12) επιβεβαιώνει αν κάθε τόξο (i,j) μπορεί να διασχισθεί ή όχι από ένα λεωφορείο k ή όχι.

Επιπλέον, προστέθηκαν περιορισμοί που αφορούν την ηλεκτρική φόρτιση και σχετίζονται με τον προγραμματισμό της φόρτισης και την κατάσταση φόρτισης των ηλεκτρικών λεωφορείων. Η εκτέλεση της διαδρομής που αναπαριστά το τόξο (i,j) επιτρέπεται μόνο αν:

$$e_j^k \geq \phi_{min}^k \quad (13)$$

,ένας περιορισμός που εξασφαλίζει ότι η κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k επαρκεί όταν φτάνει στον κόμβο j. Οι περιορισμοί για την ηλεκτρική φόρτιση παρουσιάζονται παρακάτω στις σχέσεις 14 έως 22.

$$\bar{e}_{o_k}^k = \phi_{max}^k \qquad \forall k \in K \qquad (14)$$

$$\bar{e}_j^k = e_j^k - g_j^k \qquad \forall j \in V^k \cup F,\ \forall k \in K \qquad (15)$$

$$e_j^k \geq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij})x_{ij}^k \qquad \forall (i,j) \in A^k,\ \forall k \in K \qquad (16)$$

$$e_j^k \leq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}) + (1 - x_{ij}^k)M \qquad \forall (i,j) \in A^k,\ \forall k \in K \qquad (17)$$

$$g_i^k = \eta_i \qquad \forall i \in V^k\ \forall k \in K \qquad (18)$$

$$g_i^k = e_i^k - \phi_{max}^k \qquad \forall i \in F\ \forall k \in K \qquad (19)$$

$$\phi_{min}^k \leq e_j^k \qquad \forall k \in K\ \forall i \in V^k \cup F \cup \{d_k\} \qquad (20)$$

$$y_i^k = \sum_{j:(i,j) \in A_k} x_{ij}^k \qquad \forall i \in F\ \forall k \in K \qquad (21)$$

$$\sum_{k \in K} y_i^k (T_i^k + \tau_i^k) \leq T_{\omega_i}^k + M(1 - \sum_{\rho:(\omega_i,\rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k) \qquad \forall i \in F_0,\ \forall k \in K \qquad (22)$$

Οι εξισώσεις 14 έως 19 δίνουν τις τιμές της κατάστασης φόρτισης των λεωφορείων όταν ταξιδεύουν μεταξύ των κόμβων. Στους περιορισμούς (16) και (17), όταν το $x_{ij}^k = 1$ αναγκάζει το e_j^k να είναι ίσο με την τιμή της κατάστασης φόρτισης μετά την αναχώρηση από τον κόμβο i, $\bar{e}_j^k$, αφαιρώντας την ενέργεια που έχει καταναλωθεί για τη διαδρομή από τον κόμβο i στον j (θ_{ij}) (η απόδειξη παρέχεται από την πηγή [30]. Τότε η εξίσωση (16) παίρνει τη μορφή $e_j^k \geq \bar{e}_i^k - \theta_{ij}$ και η (17) $e_j^k \leq \bar{e}_i^k - \theta_{ij}$, εξαναγκάζοντας να προκύψει $e_j^k = \bar{e}_i^k - \theta_{ij}$. Αντιθέτως, όταν το $x_{ij}^k = 0$, δηλαδή η διαδρομή του τόξου (i,j) δεν εκτελείται από το λεωφορείο k, το μέγεθος e_j^k μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο εύρος $[0, (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}) + M]$, όπου M ένας πολύ μεγάλος αριθμός που τείνει στο συν άπειρο.

Ο περιορισμός (20) εξασφαλίζει ότι η κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k, όταν φτάνει στον κόμβο $j \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$, είναι υψηλότερη ή ίση με το μικρότερο επιτρεπόμενο όριο της. Τέλος, οι εξισώσεις (21) και (22) εγγυόνται ότι αν ένας φορτιστής $z \in Z$ χρησιμοποιείται από ένα λεωφορείο κατά τη διάρκεια του γεγονότος φόρτισης $i \in F$, το επόμενο γεγονός φόρτισης στον ίδιο φορτιστή, αναφερόμενο ως ω_i, θα ξεκινήσει μετά το τέλος του προηγούμενου γεγονότος φόρτισης. Αυτό συμβαίνει ώστε να μην επιτρέπεται δύο λεωφορεία να χρησιμοποιούν την ίδια υποδοχή-φορτιστή ταυτόχρονα.

Το EB-MDVSPTW είναι ένα πρόγραμμα μη γραμμικού μικτού ακεραίου με μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση (MINLP: Mixed-Integer Non-Linear Program) και με τους μη γραμμικούς περιορισμούς (7)-(9), (16) και (22), από το οποίο πρέπει να προκύψει μια παγκοσμίως βέλτιστη λύση. Ακόμη και αν χαλαρώσουμε τις ολοκληρώσεις των δυαδικών μεταβλητών, θα πρέπει να λύσουμε ένα μη γραμμικό πρόγραμμα με πολλούς μη γραμμικούς περιορισμούς. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την υιοθέτηση της αναδιατύπωσης του [30], η οποία γραμμικοποιεί τους μη γραμμικούς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, οι περιορισμοί (7),(8),(9) μπορούν να γραμμικοποιηθούν αντικαθιστώντας τους με τους ισοδύναμους γραμμικούς περιορισμούς (23)-(27) :

$$T_i^k + \tilde{t}_i + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0 \qquad \forall k \in K\, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in V^k \qquad (23)$$
$$T_{o_k}^k + t_{o_k j} - T_j^k + \sigma_{o_k j}^k \leq 0 \qquad \forall k \in K\, \forall (o_k, j) \in A^k \qquad (24)$$
$$T_i^k + \tau_i^k + t_{ij} - T_j^k + \sigma_{ij}^k \leq 0 \qquad \forall k \in K\, \forall (i,j) \in A^k \mid i \in F \qquad (25)$$
$$\sigma_{ij}^k \leq M(1 - x_{ij}^k) \qquad \forall k \in K\, \forall (i,j) \in A^k \qquad (26)$$
$$\sigma_{ij}^k \geq -M(1 - x_{ij}^k) \qquad \forall k \in K\, \forall (i,j) \in A^k \qquad (27)$$

όπου $\sigma_{ij}^k \in R$ για (i, j) ∈ A k , k ∈ K είναι συνεχείς μεταβλητές.

Επιπλέον, ο μη γραμμικός περιορισμός (16) μπορεί να αντικατασταθεί από το ακόλουθο ισοδύναμο σύνολο γραμμικών περιορισμών ανισότητας (28)-(30) , όπου $\bar{\sigma}_{ij}^k$ είναι οι νεοεισαχθείσες συνεχείς μεταβλητές:

$$e_j^k \geq (\bar{e}_i^k - \theta_{ij}) + \bar{\sigma}_{ij}^k \qquad \forall (i,j) \in A^k,\ \forall k \in K \qquad (28)$$
$$\bar{\sigma}_{ij}^k \leq M(1 - x_{ij}^k) \qquad \forall (i,j) \in A^k,\ \forall k \in K \qquad (29)$$
$$\bar{\sigma}_{ij}^k \geq -M(1 - x_{ij}^k) \qquad \forall (i,j) \in A^k,\ \forall k \in K \qquad (30)$$

Τέλος, ο μη γραμμικός περιορισμός (22) μπορεί να γραμμικοποιηθεί στις (31)-(33) με την προσθήκη συνεχών μεταβλητών $\tilde{\sigma}_i^{k0}$, για όλα τα i ∈ F και k_0 ∈ K (βλέπε απόδειξη στο [30]):

$$T_i^{k_0} + \tau_i^{k_0} + \tilde{\sigma}_i^{k_0} \leq T_{\omega_i}^k + M\Big(1 - \sum_{\rho:(\omega_i,\rho) \in A^k} x_{\omega_i \rho}^k\Big) \qquad \forall i \in F_0\, \forall k \in K\, \forall k_0 \in K \qquad (31)$$
$$\tilde{\sigma}_i^{k_0} \leq M(1 - y_i^{k_0}) \qquad \forall i \in F_0\, \forall k_0 \in K \qquad (32)$$
$$\tilde{\sigma}_i^{k_0} \geq -M(1 - y_i^{k_0}) \qquad \forall i \in F_0\, \forall k_0 \in K \qquad (33)$$

Τέλος, θεωρούμε τη μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k \mid i \in V^k} \Big(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij})\Big) x_{ij}^k + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k \mid i \in F} \Big(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij})\Big) x_{ij}^k$$

Για να τη γραμμικοποιήσουμε, μπορούμε να εισάγουμε συνεχείς μεταβλητές z_{ij}^k που παίρνουν την τιμή:

- $\Big(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij})\Big) x_{ij}^k$ for $(i,j) \in A_k \mid i \in V^k$
- and $\Big(b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij})\Big) x_{ij}^k$ for $(i,j) \in A_k \mid i \in F$

Αυτό εφαρμόζεται με το ακόλουθο σύνολο γραμμικών περιορισμών-ανισοτήτων (34)-(39), και η αντικειμενική συνάρτηση αντικαθίσταται από την (40).

$$z_{ij}^k \leq x_{ij}^k M \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \mid i \in V^k \cup F \qquad (34)$$

$$z_{ij}^k \geq -x_{ij}^k M \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \mid i \in V^k \cup F \qquad (35)$$

$$z_{ij}^k \leq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij}) + M(1 - x_{i,j}^k) \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \mid i \in V^k \qquad (36)$$

$$z_{ij}^k \leq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) + M(1 - x_{i,j}^k) \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \mid i \in F \qquad (37)$$

$$z_{ij}^k \geq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tilde{t}_i - t_{ij}) - (1 - x_{ij}^k)M \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \mid i \in V^k \qquad (38)$$

$$z_{ij}^k \geq b_{ij}^k + \lambda(T_j^k - T_i^k - \tau_i^k - t_{ij}) - (1 - x_{ij}^k)M \qquad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \mid i \in F \qquad (39)$$

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k \mid i \in V^k \cup F} z_{ij}^k \qquad (40)$$

Χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες γραμμικοποιήσεις, το πρόβλημα πολλαπλών θυρών EB-MDVSPTW μετατρέπεται σε ένα μικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα που μπορεί να επιλυθεί με συνολική βελτιστοποίηση με τη μέθοδο branch and bound, που λόγω της επεκτεινόμενης μελέτης, μπορούμε να το λύσουμε σε συνολική βελτιστοποίηση για μεσαίου μεγέθους περιπτώσεις προβλημάτων.

4. Εφαρμογή σε ιδεατό δίκτυο

Η εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου, επιδείχθηκε σε ένα ιδεατό δίκτυο, που σχεδιάστηκε σε μικρή κλίμακα για να παρουσιάσει με σαφήνεια και λεπτομέρεια τα δεδομένα του μοντέλου και τα αποτελέσματα που δίνει, υποστηρίζοντας την αναπαραγωγιμότητα. Θεωρήθηκαν για το δίκτυο δύο γραμμές ηλεκτρικών λεωφορείων (αποτελούμενες από δύο οχήματα K = {1, 2}), με κάθε όχημα να εκτελεί συνολικά τρία ταξίδια/δρομολόγια. Το σύνολο των διαδρομών της πρώτης γραμμής ξεκινά από το αμαξοστάσιο προέλευσης o_1 με γεωγραφικό πλάτος (latitude) και μήκος (longitude) (677908, 6150220) αντίστοιχα. Στη συνέχεια, το ηλεκτρικό λεωφορείο επιστρέφει στις συντεταγμένες (585053, 6140355) του αμαξοστασίου προορισμού d_1. Το δεύτερο ηλεκτρικό λεωφορείο ξεκινά από τις συντεταγμένες (677908, 6150220) του αμαξοστασίου προέλευσης o_2 και ολοκληρώνει το ταξίδι του στο αμαξοστάσιο προορισμού d_2, με συντεταγμένες (720134, 6210199). Πρέπει να σημειωθεί ότι τα αμαξοστάσια προέλευσης o_1 και o_2 μοιράζονται την ίδια φυσική τοποθεσία, ενώ τα αμαξοστάσια προορισμού, d_1 και d_2, βρίσκονται σε διαφορετική τοποθεσία. Το ιδεατό δίκτυο αποτελείται από δύο σταθμούς φόρτισης Z={1, 2}, που εκτελούν ένα σύνολο 16 γεγονότων φόρτισης : F= {1001, 1011, 1021, 1031, 1002, 1012, 1022, 1032, 2001, 2011, 2021, 2031, 2002, 2012, 2022, 2032}. Η ερμηνεία των αριθμών των γεγονότων φόρτισης παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3: Ερμηνεία αριθμού γεγονότος φόρτισης.

Περιγραφή	Αριθμός θυρών που χρησιμοποιούνται	-	Χρονική σειρά γεγονότος φόρτισης 0→1→2→3	Σταθμός φόρτισης
Γεγονός φόρτισης 1012	1	0	1	2
εξήγηση	1 θύρα χρησιμοποιείται		Χρονική σειρά 1, η οποία είναι μετά την 0	Σταθμός φόρτισης 2
Γεγονός φόρτισης 2021	2	0	2	1
εξήγηση	2 θύρες χρησιμοποιούνται		Χρονική σειρά 2, η οποία είναι μετά την 1	Σταθμός φόρτισης 1

Τα γεγονότα φόρτισης 1001 και 2011 πραγματοποιούνται, για παράδειγμα, και τα δύο στο σταθμό φόρτισης Z = 1, και τα συμβάντα φόρτισης 1022 και 2002 στο σταθμό φόρτισης Z = 2. Τα γεγονότα φόρτισης 1031, 2031, 1032 και 2032, αντιπροσωπεύουν τα τελευταία γεγονότα φόρτισης του σταθμού φόρτισης. Σε περίπτωση που υπάρξει αλλαγή στον αριθμό των χρησιμοποιούμενων θυρών, τότε το γεγονός φόρτισης αναπαρίσταται ως το επόμενο στο διάστημα της ακολουθίας. Για παράδειγμα, εάν ένα όχημα εγκαταλείψει τη φόρτιση στον σταθμό Z = 1, όταν δύο υποδοχές είναι επί του παρόντος κατειλημμένες, τότε το γεγονός φόρτισης αλλάζει από 2011 σε 1021, υποδεικνύοντας έτσι την κατάληψη μόνο μιας υποδοχής. Εάν ένα όχημα ενταχθεί στον σταθμό φόρτισης Z = 2, όταν μία υποδοχή είναι ήδη κατειλημμένη και μία άλλη είναι διαθέσιμη, τότε το γεγονός φόρτισης αλλάζει από 1002 σε 2012, αντιπροσωπεύοντας φόρτιση δύο υποδοχών/θυρών. Το σύνολο των κόμβων εργασίας N αποτελείται από: N = {o_1, o_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, d_1, d_2, 1001, 1011, 1021, 1031, 1002, 1012, 1022, 1032, 2001, 2011, 2021, 2031, 2002, 2012, 2022, 2032} και το σύνολο των ταξιδιών V αποτελείται από: V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Κάθε όχημα, μπορεί θεωρητικά να εκτελέσει οποιοδήποτε ταξίδι, επομένως $V^k = 1 = V^k = 2$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} και οι κόμβοι εργασίας $N^k = 1$ του οχήματος 1, και $N^k = 2$ του οχήματος 2 έχουν ως εξής:

N^1 = {o_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, d_1, 1001, 1011, 1021, 1031, 1002, 1012, 1022,1032, 2001, 2011, 2021, 2031, 2002, 2012, 2022, 2032}

και

N^2 = { o_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, d_2, 1001, 1011, 1021, 1031, 1002, 1012, 1022, 1032, 2001, 2011, 2021, 2031, 2002, 2012, 2022, 2032}.

Οι γεωγραφικές συντεταγμένες όλων των κόμβων εργασίας N παρουσιάζονται στον Πίνακα 4. Σημειώνεται ότι οι κόμβοι ταξιδιού V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} έχουν διαφορετικές τοποθεσίες προέλευσης και προορισμού (origin location, destination location), που αντιπροσωπεύουν την πρώτη και την τελευταία στάση του ταξιδιού, ενώ τα αμαξοστάσια προέλευσης-προορισμού (o_1, o_2, d_1,d_2), και οι κόμβοι των γεγονότων φόρτισης F έχουν τις ίδιες συντεταγμένες προέλευσης και προορισμού, καθώς όταν εκτελούνται οι εργασίες, το όχημα παραμένει αδρανές (δηλαδή το ηλεκτρικό λεωφορείο δεν αλλάζει τη φυσική του θέση κατά τη διάρκεια της φόρτισης ή της αναμονής στο αμαξοστάσιο).

Πίνακας 4: Συντεταγμένες των κόμβων εργασίας.

Task Node	**Origin Location**		**Destination Location**	
	Latitude	Longitude	Latitude	Longitude
o_1	677908	6150220	677908	6150220
o_2	677908	6150220	677908	6150220
d_1	585053	6140355	585053	6140355
d_2	720134	6210199	720134	6210199
1	538181	6086484	720415	6176264
2	538181	6086484	720415	6176264
3	528913	6152557	710831	6168718
4	528913	6152557	710831	6168718
5	538181	6086484	720415	6176264
6	528913	6152557	710831	6168718
1001	557926	6181752	557926	6181752
1002	609023	6077163	609023	6077163
1011	557926	6181752	557926	6181752
1012	609023	6077163	609023	6077163
1021	557926	6181752	557926	6181752
1022	609023	6077163	609023	6077163
1031	557926	6181752	557926	6181752
1032	609023	6077163	609023	6077163
2001	557926	6181752	557926	6181752
2002	609023	6077163	609023	6077163
2011	557926	6181752	557926	6181752
2012	609023	6077163	609023	6077163
2021	557926	6181752	557926	6181752
2022	609023	6077163	609023	6077163
2031	557926	6181752	557926	6181752
2032	609023	6077163	609023	6077163

Οι ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ των κόμβων, υπολογίστηκαν από τις αναφερόμενες συντεταγμένες, επιτρέποντας τον υπολογισμό του χρόνου διαδρομής $\tilde{t}_i$ και της ενέργειας που καταναλώθηκε μετά την εκτέλεση της διαδρομής i ∈ V, η_i, που παρουσιάζονται παρακάτω στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5: Χρόνοι διαδρομής και ενέργεια που καταναλώθηκε μετά την εκτέλεση κάθε διαδρομής i ∈ V.

$i \in V$	$\tilde{t}_i$	η_i
1	203.1494011	335.1965118
2	203.1494011	335.1965118
3	182.6344344	301.3468168
4	182.6344344	301.3468168
5	203.1494011	335.1965118
6	182.6344344	301.3468168

Στον Πίνακα 6, παρουσιάζονται οι χρόνοι ταξιδιού που προκύπτουν από τον τελικό κόμβο του συμβάντος i ∈ N, προς τον αρχικό κόμβο ενός άλλου συμβάντος j ∈ N.

Πίνακας 6: Χρόνος ταξιδιού t_{ij} από τον τελικό κόμβο του συμβάντος i ∈ N, προς τον αρχικό κόμβο ενός άλλου συμβάντος j ∈ N.

	o_1	o_2	d_1	d_2	1	2	3	4	5	6	1001-1031 /2001-2031	1002-1032 / 2002-2032
o_1	0.00	0.00	93.38	73.35	153.58	153.58	149.01	149.01	153.58	149.01	124.06	100.41
o_2	0.00	0.00	93.38	73.35	153.58	153.58	149.01	149.01	153.58	149.01	124.06	100.41
d_1 21	93.38	93.38	0.00	152.07	71.41	71.41	57.45	57.45	71.41	57.45	49.49	67.59
d_2	73.35	73.35	152.07	0.00	220.03	220.03	199.72	199.72	220.03	199.72	164.68	173.33
1	49.85	49.85	140.04	33.94	0.00	203.15	192.96	192.96	203.15	192.96	162.58	149.09
2	49.85	49.85	140.04	33.94	203.15	0.00	192.96	192.96	203.15	192.96	162.58	149.09
3	37.76	37.76	128.94	42.51	191.23	191.23	0.00	182.63	191.23	182.63	153.46	136.92
4	37.76	37.76	128.94	42.51	191.23	191.23	182.63	0.00	191.23	182.63	153.46	136.92
5	49.85	49.85	140.04	33.94	203.15	203.15	192.96	192.96	0.00	192.96	162.58	149.09
6	37.76	37.76	128.94	42.51	191.23	191.23	182.63	182.63	191.23	0.00	153.46	136.92
1001-1031 / 2001-2031	124.06	124.06	49.49	164.68	97.29	97.29	41.16	41.16	97.29	41.16	0.00	116.40
1002-1032 / 2002-2032	100.41	100.41	67.59	173.33	71.45	71.45	110.01	110.01	71.45	110.01	116.40	0.00

Ο Πίνακας 7 περιλαμβάνει της κατανάλωση ενέργειας, θ_{ij}, κατά την μετακίνηση από τον τελικό κόμβο του γεγονότος i ∈ N προς τον αρχικό κόμβο ενός άλλου γεγονότος j ∈ N.

Πίνακας 7: Ενέργεια που καταναλώθηκε, θij, κατά την μετακίνηση από τον τελικό κόμβο του γεγονότος i ∈ N προς τον αρχικό κόμβο ενός άλλου γεγονότος j ∈ N.

	o_1	o_2	d_1	d_2	1	2	3	4	5	6	1001-1031 /2001-2031	1002-1032 / 2002-2032
o_1	0.00	0.00	154.07	121.03	253.40	253.40	245.87	245.87	253.40	245.87	204.69	165.68
o_2	0.00	0.00	154.07	121.03	253.40	253.40	245.87	245.87	253.40	245.87	204.69	165.68
d_1	154.07	154.07	0.00	250.91	117.82	117.82	94.79	94.79	117.82	94.79	81.66	111.52
d_2	121.03	121.03	250.91	0.00	363.05	363.05	329.54	329.54	363.05	329.54	271.73	286.00
1.00	82.25	82.25	231.07	55.99	0.00	335.20	318.39	318.39	335.20	318.39	268.26	246.01
2.00	82.25	82.25	231.07	55.99	335.20	0.00	318.39	318.39	335.20	318.39	268.26	246.01
3.00	62.31	62.31	212.74	70.14	315.54	315.54	0.00	301.35	315.54	301.35	253.21	225.92
4.00	62.31	62.31	212.74	70.14	315.54	315.54	301.35	0.00	315.54	301.35	253.21	225.92
5.00	82.25	82.25	231.07	55.99	335.20	335.20	318.39	318.39	0.00	318.39	268.26	246.01
6.00	62.31	62.31	212.74	70.14	315.54	315.54	301.35	301.35	315.54	0.00	253.21	225.92
1001-1031 / 2001-2031	204.69	204.69	81.66	271.73	160.53	160.53	67.91	67.91	160.53	67.91	0.00	192.07
1002-1032 / 2002-2032	165.68	165.68	111.52	286.00	117.90	117.90	181.51	181.51	117.90	181.51	192.07	0.00

Σε κάθε κόμβο εργασίας, συμπεριλαμβανομένων των κόμβων των γεγονότων φόρτισης, δόθηκε από ένα χρονικό παράθυρο, όπως απεικονίζονται στον Πίνακα 8.

Πίνακας 8: Χρονικό παράθυρο [li,ui] για κάθε κόμβο i ∈ N.

Task node	l_i	u_i
o_1	0	20
o_2	0	20
d_1	800	6000
d_2	800	6000
1	20	240
2	420	640
3	40	260
4	440	1060
5	820	2820
6	840	4840
1001 / 2001	20	270
1011 / 2011	270	520
1021 / 2021	520	890
1031 / 2031	890	1450
1002 / 2002	800	1000
1012 / 2012	1000	1250
1022 / 2022	1250	1500
1032 / 2032	1500	1800

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα χρονικά παράθυρα των γεγονότων φόρτισης με πολλαπλές υποδοχές, είναι τα ίδια με εκείνα που αντιστοιχούν στην παραλλαγή τους, με μία υποδοχή. Αυτό οφείλεται στο ότι για να συμβεί ένα γεγονός φόρτισης πολλαπλών θυρών, θα πρέπει να βρεθούν εντός του ίδιου χρονικού πλαισίου δύο οχήματα στο σταθμό φόρτισης, έτσι ώστε η αλλαγή στο γεγονός φόρτισης να μπορεί στη συνέχεια να καταγραφεί, σε περίπτωση που ένα ηλεκτρικό λεωφορείο είτε καταφθάσει, είτε αποχωρήσει από το σταθμό φόρτισης.

Οι πρόσθετες παράμετροι του σχεδιασμένου ιδεατού δικτύου είναι οι εξής:

- Μοναδιαίο κόστος αναμονής ενός λεωφορείου: $\lambda = 1$.

- Μέγιστη κατάσταση φόρτισης (SOC: State of Charge) του λεωφορείου k, όταν είναι πλήρως φορτισμένο: $\varphi^k_{max} = 1000$.

- Ελάχιστο επιτρεπόμενο SOC στο όχημα k: $\varphi^k_{min} = 10$.

- Κόστος ταξιδιού ανά χιλιόμετρο = 10.

- Καταναλισκόμενη ενέργεια ανά λεπτό του ρυθμού φόρτισης όταν είναι κατειλημμένη 1 θύρα: $r_1 = 20$.

- Καταναλισκόμενη ενέργεια ανά λεπτό του ρυθμού φόρτισης όταν καταλαμβάνονται 2 θύρες: r2 = 12.

- Κατανάλωση ενέργειας ανά χιλιόμετρο: e = 1,65.

Το γραμμικό πρόβλημα μεικτού ακεραίου (MILP: Mixed Integer Linear Problem), προγραμματίστηκε σε Python 3.7 και επιλύθηκε με Gurobi, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους branch-and-cut και dual simplex. Η συνολικά βέλτιστη λύση, είχε αντικειμενική συνάρτηση (OF: Objective Function) με τιμή 13340,6, με αποτέλεσμα:

- Το όχημα k = 1 να εξυπηρετεί την ακολουθία κόμβων εργασίας: $o_1 \rightarrow 1 \rightarrow 2011 \rightarrow 4 \rightarrow d_1$.
- Το όχημα k = 2 να εξυπηρετεί την ακολουθία κόμβων εργασίας: $o_2 \rightarrow 3 \rightarrow 1011 \rightarrow 2 \rightarrow 1031 \rightarrow 6 \rightarrow 1022 \rightarrow 5 \rightarrow d_2$.

Η σειρά των διαδρομών και ο σχετικός χρόνος T_i^k που ξεκινάει η διαδικασία σε έναν κόμβο $i \in N$ από το όχημα $k \in K$ παρουσιάζεται παρακάτω. Ο Πίνακας 9 παρουσιάζει το σενάριο για το όχημα 1 και ο Πίνακας 10 το σενάριο για το όχημα 2. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι απεικονιζόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης των δρομολογίων βρίσκονται εντός των άνω και κάτω ορίων των προβλεπόμενων χρονικών παραθύρων. Η κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k, όταν αυτό φτάνει στον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{d_k\}$, e_i^k, και η κατάσταση φόρτισης του λεωφορείου k, όταν αυτό ολοκληρώνει τη διαδρομή στον κόμβο $i \in V^k \cup F \cup \{o_k\}$, $\bar{e}_i^k$, παρουσιάζονται επίσης στην δεύτερη και στην τρίτη σειρά των πινάκων. Οι τιμές της κατάστασης φόρτισης, βρίσκονται όλες εντός του προαναφερθέντος εύρους $[\varphi^k_{min}, \varphi^k_{max}] = [10, 1000]$.

Πίνακας 9: Χρόνος Ti[1] που ξεκινάει η διαδικασία σε κάθε επισκεπτόμενο κόμβο i της διαδρομής του οχήματος k=1.

	o_1	1	2011	4	d_1
T_i^1	0	153.6	519.3	631.9	943.4
e_i^1	-	746.6	143.1	932.1	418.0
$\bar{e}_i^1$	1000	411.4	1000	630.7	-

Πίνακας 10: Χρόνος Ti[2] που ξεκινάει η διαδικασία σε κάθε επισκεπτόμενο κόμβο i της διαδρομής του οχήματος k=2.

	o_2	3	1011	2	1031	6	1022	5	d_2
T_i^2	17.6	166.6	502.7	640.0	1005.7	1085.1	1404.6	1525.7	1762.8
e_i^2	-	754.1	1000	893.5	236.0	932.1	404.8	882.1	490.9
$\bar{e}_i^2$	1000	452.8	1000	504.3	1000	630.7	1000	546.9	-

Από τις διαδρομές των δύο οχημάτων, η δυνατότητα φόρτισης με πολλαπλές υποδοχές, μπορεί να παρατηρηθεί στα γεγονότα φόρτισης i = 2011, του οχήματος k = 1, και i = 1011, του οχήματος k = 2, και τα δύο με δείκτη στον ίδιο σταθμό φόρτισης Z = 1 και στο ίδιο διάστημα φόρτισης [270-520]. Το όχημα 1 φθάνει μετά το όχημα 2,εντός του ίδιου χρονικού διαστήματος φόρτισης, και χρησιμοποιεί τη δεύτερη θύρα του σταθμού φόρτισης. Αυτά τα δύο γεγονότα φόρτισης στις δύο θύρες του σταθμού φόρτισης εμπίπτουν στο ίδιο χρονικό παράθυρο [li , ui] = [270, 520], με χρονική διαφορά άφιξης ίση με 519.3 - 502.7 = 16.6.

Το όχημα 1 φορτίζει μόνο στον πρώτο σταθμό φόρτισης χρησιμοποιώντας τη 2η θύρα φόρτισης (i =2011). Το όχημα 2 φορτίζει συνολικά τρεις φορές. Δύο φορές στον πρώτο σταθμό φόρτισης (i=1011 και i=1031) και μία φορά στον δεύτερο σταθμό φόρτισης (i=1022). Κατά την πρώτη φόρτιση στον πρώτο σταθμό φόρτισης, το όχημα 2 μοιράζεται τον σταθμό φόρτισης με το όχημα 1. Κατά τη διάρκεια της δεύτερης και της τρίτης φόρτισης, το όχημα 2 φορτίζει μόνο του στον αντίστοιχο σταθμό φόρτισης.

Αξίζει ακόμη να σημειωθεί ότι για τις παραγόμενες διαδρομές, το πρώτο ηλεκτρικό λεωφορείο πραγματοποιεί δύο διαδρομές (1 και 4) και το δεύτερο ηλεκτρικό λεωφορείο πραγματοποιεί τέσσερις διαδρομές (3, 2, 6 και 5). Για να τονιστεί η σημασία της σχεδίασης δικτύου με σταθμούς φόρτισης πολλαπλών υποδοχών, το ίδιο παράδειγμα δεν μπορεί να επιλυθεί αν θεωρήσουμε ότι κάθε ένας από τους δύο σταθμούς φόρτισης διαθέτει μία μόνο θύρα, καθώς διαπιστώνεται ότι ένα τέτοιο πρόβλημα δεν διαθέτει εφικτή λύση. Αυτό σημαίνει ότι ο φορέας εκμετάλλευσης λεωφορείων, θα χρειαζόταν ένα τρίτο λεωφορείο για να εκτελέσει εγκαίρως τα έξι προγραμματισμένα δρομολόγια, πράγμα που αποδεικνύει το πλεονέκτημα της χρήσης πολλαπλών θυρών, δηλαδή ότι αν και ο ρυθμός φόρτισης σε έναν σταθμό φόρτισης μειώνεται όταν φορτίζουν ταυτόχρονα πολλά λεωφορεία, αυτή η αύξηση του χρόνου φόρτισης μπορεί να είναι αρκετή για την εκτέλεση των προγραμματισμένων διαδρομών, χωρίς να απαιτείται η χρήση πρόσθετων λεωφορείων.

5. Υπολογιστικά αποτελέσματα

5.1. Πειράματα 10 διαδρομών

Υπολογιστικά πειράματα μεγαλύτερων περιπτώσεων πραγματοποιήθηκαν για να αναλυθεί η πολυπλοκότητα του παρουσιαζόμενου πλαισίου. Ένα σύνολο περιπτώσεων αναφοράς EB-MDVSPTW από την εργασία των Gkiotsalitis et al (2023), προσαρμόστηκαν σε παραλλαγές 2 θυρών και χρησιμοποιήθηκαν για να δοκιμάσουν το πολλαπλών θυρών μας EB-MDVSPTW. Όλα τα αμαξοστάσια, οι σταθμοί φόρτισης, τα σημεία εκκίνησης και τερματισμού των κόμβων του ταξιδιού ακολούθησαν μια ομοιόμορφη κατανομή μέσα σε ένα Ευκλείδειο, επίπεδο, τετράγωνο, 60 km επί 60 km. Για κάθε σενάριο, ένα λεωφορείο διανύει 60 km σε 1 ώρα, καθώς οι χρόνοι διαδρομής μεταξύ των κόμβων (μετρούμενοι σε λεπτά) είναι άμεσα ισοδύναμοι με την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των κόμβων. Δεν εφαρμόστηκαν περιορισμοί στους συνδυασμούς ταξιδιού/αμαξοστασίου. Πραγματοποιήθηκε δοκιμή 10 διαδρομών για κάθε σημείο αναφοράς που βασίστηκε το δοκιμαστικό σύνολο δεδομένων. Αυτό περιλαμβάνει τον αριθμό των οχημάτων (2), τον αριθμό των ταξιδιών (10), κόστος χρόνου αναμονής (2), μέγιστη κατάσταση φόρτισης (300), ελάχιστη κατάσταση φόρτισης (10), κόστος χρόνου διαδρομής (10) και κατανάλωση ενέργειας ανά χιλιόμετρο (1,3). Ο ρυθμός φόρτισης τροποποιήθηκε σε ένα διάνυσμα δύο μεταβλητών, έτσι ώστε ο ρυθμός φόρτισης μίας θύρας να οριστεί σε 20 και ο ρυθμός φόρτισης διπλής θύρας να οριστεί σε 12. Διατηρήθηκαν τα ίδια χρονικά παράθυρα και το ίδιο σύστημα συντεταγμένων κάθε αντίστοιχου κόμβου εργασίας και σταθμού φόρτισης.

Στον Πίνακα 11, εμφανίζονται δύο κατηγορίες περιπτώσεων. Για κάθε κατηγορία αναφέρονται, ο συνολικός αριθμός των διαδρομών, των αμαξοστασίων, των σταθμών φόρτισης και των παραγόμενων περιπτώσεων. Τα παραδείγματα 10 διαδρομών με ποικίλους σταθμούς φόρτισης επιλύθηκαν με Gurobi 10.0.0, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους branch-and-cut και dual simplex. Τα αριθμητικά πειράματα εκτελέστηκαν σε ένα συμβατικό μοντέλο επεξεργαστή Intel(R) Core (TM) i3-1005G1 CPU @ 1.20GHz. Το κριτήριο για τον τερματισμό της επίλυσης, ήταν η σύγκλιση σε μια παγκόσμια βέλτιστη λύση.

Πίνακας 11: Πολλαπλών υποδοχών EB-MDVSPTW παραδείγματα.

Όνομα	Λεωφορεία	Αμαξοστάσια	Φορτιστές	Γεγονότα φόρτισης	Ταξίδια	Παραδείγματα
Z2_S2_C10	2	2	2	16	10	5
Z2_S4_C10	2	2	4	16	10	5

Τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις 10 διαδρομών, Z2_S2_C10 και Z2_S4_C10, παρουσιάζονται στον Πίνακα 12. Για κάθε περίπτωση στον πίνακα παρουσιάζονται: ο αριθμός των κόμβων που διερευνήθηκαν στη διαδρομή (NE: Nodes Explored), ο αριθμός των επαναλήψεων simplex (SI: Simplex iterations), ο υπολογιστικός χρόνος (CT:Computational Time) σε δευτερόλεπτα, η απόδοση της λύσης (SP: Solution Performance) και το κενό βελτιστοποίησης (OG: Optimality Gap).

Πίνακας 12: Αποτελέσματα της επίλυσης περιπτώσεων 10 διαδρομών με πολλαπλές θύρες.

Instance	NE	SI	CT	SP	OG
Z2_S2_C10_a_TW	62,330	3,356,341	466.32	1909.32	0.00%
Z2_S2_C10_b_TW	65,155	2,793,402	378.10	1478.27	0.00%
Z2_S2_C10_c_TW	619,050	22,154,420	2616.78	2285.58	0.00%
Z2_S2_C10_d_TW	27,036	1,472,061	381.74	1338.73	0.00%
Z2_S2_C10_e_TW	47,105	2,346,572	315.92	1774.88	0.00%
Z2_S4_C10_a_TW	890,447	43,358,868	4322.69	2355.38	0.00%
Z2_S4_C10_b_TW	247,506	11,662,307	1121.65	1661.05	0.00%
Z2_S4_C10_c_TW	48,495	2,782,933	547.73	2008.26	0.00%
Z2_S4_C10_d_TW	309,489	16,498,932	1620.39	1722.26	0.00%
Z2_S4_C10_e_TW	132,464	5,553,343	670.89	2116.74	0.00%
Averages	244,908	11,197,918	1244.22		

Σε αυτά τα υπολογιστικά αποτελέσματα, δίνεται έμφαση στην υπολογιστική απόδοση. Όπως παρατηρείται, στα δίκτυα με 4 σταθμούς φόρτισης, 2 θύρες ανά σταθμό και 10 διαδρομές, μπορεί να απαιτηθεί περισσότερο από 1 ώρα για την επίλυση μέχρι τη συνολική βελτιστοποίηση με τη χρήση μιας συμβατικού υπολογιστικής μηχανής. Παρόλο που τα παραπάνω πειράματα δεν μπορούν να εκτελεστούν για περιπτώσεις μίας θύρας, επειδή έχουμε δομήσει τα δεδομένα σε μορφή πολλαπλών θυρών, εκτελέσαμε πειράματα σε περιπτώσεις αναφοράς με παρόμοιο μέγεθος για να συγκρίνουμε τον αριθμό των αξιολογημένων κόμβων branch and bound, τις επαναλήψεις simplex και τους χρόνους υπολογισμού. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα της επίλυσης περιπτώσεων μίας θύρας παρουσιάζονται στον Πίνακα 13.

Πίνακας 13: Αποτελέσματα της επίλυσης περιπτώσεων 10 διαδρομών με μια θύρα και διαφορά μέσων.

Instance	NE	SI	CT	OG
D2_S2_C10_a	21,859	1,063,498	147.33	0.00%
D2_S2_C10_b	15,139	824,897	117.33	0.00%
D2_S2_C10_c	43,498	1,726,351	166.09	0.00%
D2_S2_C10_d	20,172	977,038	133.52	0.00%
D2_S2_C10_e	23,312	1,087,117	152.66	0.00%
D2_S4_C10_a	22,681	1,061,138	152.91	0.00%
D2_S4_C10_b	34,904	1,358,652	137	0.00%
D2_S4_C10_c	20,909	1,137,567	153.18	0.00%
D2_S4_C10_d	14,731	755,716	83.71	0.00%
D2_S4_C10_e	18,582	863,815	141.73	0.00%
Averages	23,578.7	1,085,579	51.56	
Difference in averages between single- and multi-port problems	938.68%	931.52%	2313.06%	

Στην τελευταία σειρά του Πίνακα 13 μπορεί κανείς να παρατηρήσει τις διαφορές του μέσου χρόνου υπολογισμού μεταξύ των προβλημάτων μιας θύρας και των προβλημάτων πολλαπλών θυρών, όταν χρησιμοποιείται η ίδια υπολογιστική μηχανή σε περιπτώσεις με παρόμοια μεγέθη. Όσον αφορά τον μέσο όρο των κόμβων που διερευνήθηκαν, υπήρξε αύξηση 938,683% όταν το πρόβλημα αφορούσε πολλαπλές θύρες. Η προσέγγιση πολλαπλών θυρών επίσης αύξησε τον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων simplex κατά 931,52%. Η αυξημένη πολυπλοκότητα επιβεβαιώνεται περαιτέρω από την αύξηση του μέσου χρόνου υπολογισμού κατά 2313,06%. Αυτό υποδηλώνει ότι το πρόβλημα πολλαπλών θυρών EB-VSP, είναι σημαντικά πιο δαπανηρό από πλευράς υπολογισμών σε σύγκριση με το πρόβλημα EB-VSP μίας θύρας, γεγονός που είναι σύμφωνο με τις προσδοκίες, λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντική εξάρτηση της υπολογιστικής απόδοσης από τα δεδομένα. Η εξεταζόμενη προσέγγιση με το σύστημα δύο θυρών, που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία διαθέτει διπλάσιο αριθμό κόμβων εργασίας συμβάντων φόρτισης που απαιτούν επεξεργασία, παρέχοντας φυσικά περισσότερα δεδομένα προς υπολογισμό. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι οι αλλαγές στις υπολογιστικές επιδόσεις των δέκα περιπτώσεων αναφοράς, αυξήθηκαν σταθερά μεταξύ όλων των δεικτών επιδόσεων.

5.2. Περιορισμοί

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται οι περιορισμοί της μελέτης σε σχέση με την εφαρμογή των σταθμών φόρτισης πολλαπλών θυρών. Πρώτον, οι σταθμοί φόρτισης πολλαπλών θυρών μπορεί να υπερθερμανθούν εάν φορτίζουν πολλά οχήματα ταυτόχρονα, γεγονός που μπορεί να προκαλέσει βλάβη στο σταθμό φόρτισης καθώς και στα οχήματα. Η υπερθέρμανση μπορεί επίσης να αποτελέσει κίνδυνο πυρκαγιάς, συνεπώς θα πρέπει να διασφαλίζεται ότι ο σταθμός φόρτισης πολλαπλών θυρών θα τοποθετηθεί σε καλά αεριζόμενο χώρο. Δεύτερον, όπως αναφέρεται λεπτομερώς στην διατύπωση της μελέτης μας, οι σταθμοί φόρτισης πολλαπλών θυρών μπορεί να οδηγήσουν σε χαμηλότερες ταχύτητες φόρτισης σε σύγκριση με τους εναλλακτικούς σταθμούς μίας θύρας. Τρίτον, παρόλο που οι σταθμοί φόρτισης πολλαπλών υποδοχών μπορούν να οδηγήσουν σε χαμηλότερο κόστος μακροπρόθεσμα, μπορεί να είναι πιο ακριβοί στην αγορά σε σύγκριση με τους σταθμούς μίας υποδοχής.

Όσον αφορά την εφαρμογή του μοντέλου μας, είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οι περιορισμοί κατά τη δοκιμή του μοντέλου μας σε ένα ιδεατό δίκτυο. Οι ευκλείδειοι υπολογισμοί που απεικονίζουν τις αποστάσεις μεταξύ των προσομοιωμένων κόμβων των περιπτώσεων του προβλήματος, χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς της απόδειξης και θα πρέπει να αντικατασταθούν από συντομότερες αποστάσεις διαδρομής σε πραγματικές συνθήκες. Επιπλέον, οι επιδείξεις πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο του προβλήματος δύο θυρών. Η μελλοντική έρευνα μπορεί να εξετάσει τη δοκιμή σεναρίων με σταθμούς φόρτισης που διαθέτουν τρεις ή περισσότερες θύρες. Τέλος, τα υπολογιστικά πειράματα χρησιμοποίησαν περιπτώσεις έως και 10 διαδρομών. Μελλοντικά, μπορούν να εξεταστούν περισσότερες διαδρομές οχημάτων.

6. Συμπεράσματα

Ο σχεδιασμός των σταθμών φόρτισης για τη λειτουργία λεωφορείων έχει γίνει ένας τομέας σημαντικού ενδιαφέροντος. Η προσθήκη πολλαπλών θυρών σε έναν σταθερό σταθμό φόρτισης, θεωρείται μια βιώσιμη προσέγγιση χρήσης της υπάρχουσας υποδομής, για την υποστήριξη βελτιωμένων λειτουργιών ηλεκτροκίνησης.

Η παρούσα μελέτη είχε ως στόχο την προσαρμογή του υφιστάμενου EB-MDVSPTW ώστε να λαμβάνει υπόψη πολλαπλές θύρες στους σταθερούς σταθμούς φόρτισης. Η νέα διατύπωση παρουσιάστηκε και εξετάστηκε χρησιμοποιώντας δίκτυα δύο οχημάτων, διαφόρων μεγεθών και σεναρίων. Για τη διερεύνηση της απόδοσης της πρότασης πολλαπλών θυρών, χρησιμοποιήθηκαν δοκιμαστικά παραδείγματα (συμπεριλαμβανομένου ενός ιδεατού δικτύου και παραδείγματα αναφοράς του αρχικού EB-MDVSPTW). Στο ιδεατό δίκτυο, ο σχεδιασμός με πολλαπλές υποδοχές ήταν σε θέση να δώσει λύση με τη χρήση δύο ηλεκτρικών λεωφορείων, ενώ η διατύπωση μίας θύρας απαιτούσε ένα επιπλέον λεωφορείο για να εκτελέσει τις απαιτούμενες διαδρομές.

Στο πλαίσιο της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, οι Desrosiers, Dumas, Solomon, Soumis (1995), έδειξαν ότι η πολυπλοκότητα του προβλήματος αυξάνεται μαζί με το πλάτος των χρονικών παραθύρων που έχουν εκχωρηθεί, υποστηρίζοντας περαιτέρω την ανάγκη για ειδική διερεύνηση σημαντικά μειωμένων παραλλαγών των χρονικών παραθύρων. Η δοκιμή των δέκα περιπτώσεων αναφοράς έριξε φως στην υπολογιστική απόδοση του πλαισίου λύσεων. Εξαρτώμενος σημαντικά από τα δεδομένα εισόδου, ο διπλασιασμός των κόμβων των εργασιών κατά την εξέταση πολλαπλών θυρών, διαπιστώθηκε ότι επηρεάζει σημαντικά την υπολογιστική επεξεργασία και απόδοση. Συγκεκριμένα, ο χρόνος της CPU αυξήθηκε σημαντικά σε σύγκριση με την περίπτωση της επίλυσης του προβλήματος EB-MDVSPTW μίας θύρας.

Δεδομένων των παραπάνω, κατά την επίλυση του προβλήματος EB-MDVSPTW πολλαπλών θυρών, ένας βαρύς υπολογιστικός φόρτος εργασίας πρέπει να ληφθεί υπόψη, είτε με τη χρήση παράλληλων υπολογιστών είτε με τη χρήση (μετα)ευρετικών προσεγγίσεων που μπορούν να παρέχουν υποβέλτιστες λύσεις για μεγαλύτερες περιπτώσεις. Ενώ οι ακριβείς μέθοδοι εγγυώνται τη βελτιστοποίηση, τείνουν να έχουν ως κόστος τον παρατεταμένο χρόνο επεξεργασίας.

Για τη δοκιμή του μοντέλου πολλαπλών υποδοχών στον πραγματικό κόσμο, η συντομότερη διαδρομή ή αποστάσεις προκαθορισμένης διαδρομής μπορούν να εξεταστούν, αντί των ευκλείδειων αποστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν για το ιδεατό δίκτυο. Επιπλέον, οι εκτιμήσεις πραγματικού χρόνου (π.χ. για ένα πλαίσιο ικανό να εξορθολογίζει την εισαγωγή δεδομένων σε πραγματικό χρόνο και μια προσαρμοσμένη μεθοδολογία ικανή για τον δυναμικό υπολογισμό), που είναι κατάλληλες για τη λειτουργική υλοποίηση της προσέγγισης μοντελοποίησης που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία, μπορούν να διερευνηθούν σε μελλοντική έρευνα. Στο πλαίσιο της βιωσιμότητας, η επέκταση του παρουσιαζόμενου μοντέλου με την χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας μπορεί να τεθεί υπό διερεύνηση. Προς αυτή την κατεύθυνση, ενδέχεται να χρειαστεί να ληφθούν υπόψη στη μαθηματική διατύπωση μοναδικές παράμετροι (π.χ. στόχοι μείωσης των εκπομπών ή γεωγραφικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη διαθεσιμότητα ηλιακής ή αιολικής ενέργειας), ως περιορισμοί της μοντελοποίησης. Όσον αφορά τις πιθανές εφαρμογές, η προσέγγισή μας μπορεί να εφαρμοστεί σε δίκτυα φόρτισης με περιορισμούς χώρου και χωρητικότητας δικτύου, όπου η χρήση πολλαπλών θυρών μπορεί να επιτρέψει τη φόρτιση πολλών οχημάτων ταυτόχρονα.

7. Βιβλιογραφία / Πηγές

1. Mathiesen, B.V.; Ilieva, L.S.; Skov, I.R.; Maya-Drysdale, D.W.; Korberg, A.D. REPowerEU and Fitfor55 science-based policy recommendations for achieving the Energy Efficiency First Principle. Report, 2022. Publication Title: 521

2. Rietmann, N.; Hügler, B.; Lieven, T. Forecasting the trajectory of electric vehicle sales and the consequences for worldwide CO2 emissions. Journal of Cleaner Production 2020, 261, 121038. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.121038

3. Eudy, L.; Caton, M.; Post, M.; National Renewable Energy Laboratory (NREL) (U.S.). Transit Investments for Greenhouse Gas and Energy Reduction Program: Second Assessment Report. Technical Report FTA Report No. 0064, 2014. https://doi.org/10.21949/1503597

4. Mahmoud, M.; Garnett, R.; Ferguson, M.; Kanaroglou, P. Electric buses: A review of alternative powertrains. Renewable and Sustainable Energy Reviews 2016, 62, 673–684. https://doi.org/10.1016/j.rser.2016.05.019

5. Lajunen, A.; Lipman, T. Lifecycle cost assessment and carbon dioxide emissions of diesel, natural gas, hybrid electric, fuel cell hybrid and electric transit buses. Energy 2016, 106, 329–342. https://doi.org/10.1016/j.energy.2016.03.075

6. Neff, J.; Dickens, M. 2016 Public Transportation Fact Book. 2008.

7. Consulting, A.R.a. Electric Bus Market to Grow Significantly at 26.1% of CAGR by 2026, 2020.

8. Wu, W.; Lin, Y.; Liu, R.; Jin, W. The multi-depot electric vehicle scheduling problem with power grid characteristics. Transportation Research Part B: Methodological 2022, 155, 322–347. https://doi.org/10.1016/j.trb.2021.11.007

9. Iliopoulou, C.; Tassopoulos, I.; Kepaptsoglou, K.; Beligiannis, G. Electric Transit Route Network Design Problem: Model and Application. Transportation Research Record 2019, 2673, 264–274. Publisher: SAGE Publications Inc, https://doi.org/10.1177/0361198119838513

10. Fuller, M. Wireless charging in California: Range, recharge, and vehicle electrification. Transportation Research Part C: Emerging Technologies 2016, 67, 343–356. https://doi.org/10.1016/j.trc.2016.02.013

11. Perumal, S.S.G.; Lusby, R.M.; Larsen, J. Electric bus planning & scheduling: A review of related problems and methodologies. European Journal of Operational Research 2022, 301, 395–413. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.10.058

12. Zhu, Z.H.; Gao, Z.Y.; Zheng, J.F.; Du, H.M. Charging station location problem of plug-in electric vehicles. Journal of Transport Geography 2016, 52, 11–22.

13. Mukherjee, B.; Sossan, F. Optimal Planning of Single-Port and Multi-Port Charging Stations for Electric Vehicles in Medium Voltage Distribution Networks, 2021. arXiv:2111.07100 [cs, eess].

14. Wang, C.N.; Yang, F.C.; Vo, N.T.M.; Nguyen, V.T.T. Enhancing Lithium-Ion Battery Manufacturing Efficiency: A Comparative Analysis Using DEA Malmquist and Epsilon-Based Measures. Batteries 2023, 9. https://doi.org/10.3390/batteries9060317

15. Bai, H.; Fan, Y.; Wang, L.; Vo, N.; Nguyen, T. Research on Battery Characteristics and Management System of New Energy Vehicle Based on BMS System Design and Test. Computer-Aided Design and Applications 2022, pp. 200–212. https://doi.org/10.14733/cadaps.2023.S3.200-212

16. Gao, Z.; Lin, Z.; LaClair, T.J.; Liu, C.; Li, J.M.; Birky, A.K.; Ward, J. Battery capacity and recharging needs for electric buses in city transit service. Energy 2017, 122, 588–600. https://doi.org/10.1016/j.energy.2017.01.101

17. Wen, M.; Linde, E.; Ropke, S.; Mirchandani, P.; Larsen, A. An adaptive large neighborhood search heuristic for the Electric Vehicle Scheduling Problem. Computers & Operations Research 2016, 76, 73–83. https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.06.013

18. Sassi, O.; Oulamara, A. Electric vehicle scheduling and optimal charging problem: complexity, exact and heuristic approaches. International Journal of Production Research 2017, 55, 519–535.

19. Gkiotsalitis, K. Public Transport Optimization; Springer Nature, 2023.

20. Adler, J.D. Routing and scheduling of electric and alternative-fuel vehicles. Technical report, Arizona State University, 2014.

21. Rogge, M.; van der Hurk, E.; Larsen, A.; Sauer, D.U. Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure. Applied Energy 2018, 211, 282–295. https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.11.051

22. Wang, Y.; Huang, Y.; Xu, J.; Barclay, N. Optimal recharging scheduling for urban electric buses: A case study in Davis. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review 2017, 100, 115–132. https://doi.org/10.1016/j.tre.2017.01.001

23. Jiang, M.; Zhang, Y.; Zhang, Y.; Zhang, C.; Zhang, K.; Zhang, G.; Zhao, Z. Operation and Scheduling of Pure Electric Buses under Regular Charging Mode. In Proceedings of the 2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2018, pp. 1894–1899. ISSN: 2153-0017, https://doi.org/10.1109/ITSC.2018.8569667

24. Yao, E.; Liu, T.; Lu, T.; Yang, Y. Optimization of electric vehicle scheduling with multiple vehicle types in public transport. Sustainable Cities and Society 2020, 52, 101862. https://doi.org/10.1016/j.scs.2019.101862

25. Li, X.; Wang, T.; Li, L.; Feng, F.; Wang, W.; Cheng, C. Joint Optimization of Regular Charging Electric Bus Transit Network Schedule and Stationary Charger Deployment considering Partial Charging Policy and Time-of-Use Electricity Prices. Journal of Advanced Transportation 2020, 2020, 8863905. Publisher: Hindawi, https://doi.org/10.1155/2020/8863905

26. Liu, T.; (Avi) Ceder, A. Battery-electric transit vehicle scheduling with optimal number of stationary chargers. Transportation Research Part C: Emerging Technologies 2020, 114, 118–139. https://doi.org/10.1016/j.trc.2020.02.009

27. Zhang, L.; Liu, Z.; Wang, W.; Yu, B. Long-term charging infrastructure deployment and bus fleet transition considering seasonal differences. Transportation Research Part D: Transport and Environment 2022, 111, 103429. https://doi.org/10.1016/j.trd.2022.103429

28. Montoya, A.; Guéret, C.; Mendoza, J.E.; Villegas, J.G. The electric vehicle routing problem with nonlinear charging function. Transportation Research Part B: Methodological 2017, 103, 87–110. https://doi.org/10.1016/j.trb.2017.02.004

29. Felipe, ; Ortuño, M.T.; Righini, G.; Tirado, G. A heuristic approach for the green vehicle routing problem with multiple 668 technologies and partial recharges. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review 2014, 71, 111–128. https://doi.org/10.1016/j.tre.2014.09.003

30. Gkiotsalitis, K.; Iliopoulou, C.; Kepaptsoglou, K. An exact approach for the multi-depot electric bus scheduling problem with time windows. European Journal of Operational Research 2023, 306, 189–206. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.07.017

31. Barraza, O.; Estrada, M. Battery electric bus network: Efficient design and cost comparison of different powertrains. Sustainability 2021, 13, 4745.

32. Desrosiers, J.; Dumas, Y.; Solomon, M.; Soumis, F. Time Constrained Routing and Scheduling. Handbooks in Operations Research and Management Science 1995, 8, 35–139. https://doi.org/10.1016/S0927-0507(05)80106-9

Παράρτημα: Κώδικας Python

- 2_port_2_stations_toy_loc.txt
- edited_code.py
- Z2_S2_C10_a_TW.txt
- Z2_S2_C10_b_TW.txt
- Z2_S2_C10_c_TW.txt
- Z2_S2_C10_CES.txt
- Z2_S2_C10_d_TW.txt
- Z2_S2_C10_e_TW.txt
- Z2_S4_C10_a_TW.txt
- Z2_S4_C10_b_TW.txt
- Z2_S4_C10_c_TW.txt
- Z2_S4_C10_CES.txt
- Z2_S4_C10_d_TW.txt
- Z2_S4_C10_e_TW.txt
- Z2_toy_CES_S2.txt
- Z2_toy_S2.txt

```python
import gurobipy as gp #import gurobipy library in Python as gp
from gurobipy import GRB
import pandas as pd #import pandas library as pd. It offers data structures and operations for manipulating numerical tables and time series
import numpy as np #import numpy library. It adds support for large, multi-dimensional arrays and matrices
import os #provides functions for interacting with the operating system
import ast #library that processes trees of the Python abstract syntax grammar

print(gp.gurobi.version())

#Initialize the Gurobi model
model = gp.Model()
#model.Params.OutputFlag = 0
#model.Params.LogToConsole = 0
#model.setParam("OutputFlag", 0)

################
# INPUT
################

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE -------------------

data_header_charg_event=np.loadtxt('Z2_toy_CES_S2.txt',max_rows=1,dtype=int)
data_main_body_charg_event=np.loadtxt('Z2_toy_CES_S2.txt',skiprows=1,dtype=int)

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------- EDITED CODE -------------------

F_end = data_header_charg_event #last charging events at each charger
```

```python
omega={} #time order of charging events


for i in range(0,len(data_main_body_charg_event)):
    omega[data_main_body_charg_event[i,0]] = data_main_body_charg_event[i,1]
print('omega',omega)



#COMPUTE TRAVEL TIMES BY USING THE DISTANCES BETWEEN DIFFERENT LOCATIONS
#O_N = {i:[0,0] for i in N} #origin location of every node initialized as 0
#D_N = {i:[0,0] for i in N} #destination location of every node [for charging nodes and depots the origin and destination location is the same]

#------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ---------------------------

data_header=np.loadtxt('Z2_toy_S2.txt',max_rows=1,dtype=int)
data_header_decimal=np.loadtxt('Z2_toy_S2.txt',max_rows=1,dtype=float)
data_main_body=np.loadtxt('Z2_toy_S2.txt',skiprows=1,dtype=int)

#------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ---------------------------
print('data_header',data_header)
print('data_header_decimal',data_header_decimal)

Vehicles=data_header[0]; Trips=data_header[1]; Charging_Events=data_header[2]; greek_l=data_header[3]; p_max=data_header[4]; p_min=data_header[5]; travel_cost=data_header[6]
```

```python

r_1=data_header_decimal[7]; r_2=data_header_decimal[8]; e_consumption = data_header_decimal[9]

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ----------------------------


#greek_l = 1 #unit waiting cost of a vehicle
#phi_max={k:1000 for k in K}# F max- kWh
#phi_min={k:10 for k in K}# F min-- kWh

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ----------------------------
r_1=float(r_1)  #charging rate in kWh of energy per minute
r_2=float(r_2)  #charging rate in kWh of energy per minute

inverse_r_1=float(1/r_1)
inverse_r_2=float(1/r_2)
print('greek_l,r1,r2,inverse_r1, inverse_r2',greek_l,r_1,r_2,inverse_r_1,inverse_r_2)


no_of_CS = 2 #<----------------------------------------------------- INPUT NUMBER OF CHARGING STATIONS OF CES either no_of_CS ==2 or no_of_CS == 4

toy_var = 1  #<----------------------------------------------------------------------------- IF TOY NETWORK toy_var == 1 IF NOT toy_car == 0


```

```python

K=tuple(np.arange(1,Vehicles+1))
phi_max={k:p_max for k in K}# F max- kWh
phi_min={k:p_min for k in K}# F min-- kWh
print('phi_min,phi_max',phi_min,phi_max)
print('Vehicles,Trips,Events,K',Vehicles,Trips,Charging_Events,K)
O={};D={};l={};u={};O_N={};D_N={};N=[]
print(data_main_body)
print(data_main_body[0,0])
for k in K:
    j=k
    k=k-1
    O[j]=data_main_body[k,0]
    D[j]=data_main_body[k+Vehicles,0]
    l[O[j]]=data_main_body[k,5]; u[O[j]]=data_main_body[k,6]
    l[D[j]] = data_main_body[k+Vehicles,5]; u[D[j]] = data_main_body[k+Vehicles,6]
    O_N[O[j]]=[data_main_body[k,1],data_main_body[k,2]]
    D_N[O[j]] = [data_main_body[k,3], data_main_body[k,4]]
    O_N[D[j]]=[data_main_body[k+Vehicles,1],data_main_body[k+Vehicles,2]]
    D_N[D[j]] = [data_main_body[k+Vehicles,3], data_main_body[k+Vehicles,4]]
    N.append(O[j]);N.append(D[j])
print('O_N,D_N',O_N,D_N)
print('l,u',l,u)
V_dict={};V=[];j=0
for i in range(2*len(K),2*len(K)+Trips):
    j=j+1
    V_dict[j]=data_main_body[i,0]
    l[V_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[V_dict[j]]=data_main_body[i,6]
```

```
        O_N[V_dict[j]]=[data_main_body[i,1], data_main_body[i,2]]
        D_N[V_dict[j]]=[data_main_body[i,3], data_main_body[i,4]]
        l[V_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[V_dict[j]]=data_main_body[i,6]
        N.append(V_dict[j]); V.append(V_dict[j])
print('O_N,D_N', O_N, D_N)
print('l,u', l, u)
F_dict={};F=[];j=0
for i in range(2*len(K)+Trips,2*len(K)+Trips+Charging_Events):
    j=j+1
    F_dict[j]=data_main_body[i,0]
    l[F_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[F_dict[j]]=data_main_body[i,6]
    O_N[F_dict[j]]=[data_main_body[i,1], data_main_body[i,2]]
    D_N[F_dict[j]]=[data_main_body[i,3], data_main_body[i,4]]
    l[F_dict[j]]=data_main_body[i,5]; u[F_dict[j]]=data_main_body[i,6]
    N.append(F_dict[j]);F.append(F_dict[j])
print('O_N,D_N', O_N, D_N)
print('l,u', l, u)

print('N',N)
print('V',V)
print('F',F)

F_no_end = [] #charging events that are not the last ones in their charger
for i in F:
    if i not in F_end:
        F_no_end.append(i)
print('F_no_end',F_no_end)
```

```

print('K,V,F,O,D',K,V,F,O,D)
print('O_N,D_N',O_N,D_N)
print('l,u',l,u)
Nk={};Vk={}
for k in K:
    print('k',k,[O[k],D[k]])
    Nk[k]=V+F+[O[k],D[k]]
    Vk[k]=V

print('Nk',Nk,'Vk',Vk)

print('O_N',O_N)
print('D_N',D_N)
#########################################################
t_tilde={} #travel time to complete trip i
eta={} #consumed energy when performing task i
```

```
if no_of_CS == 2:

    Z = (1,2)    #tuple

    # new parameters
    #F is a collection of charging events which includes {1001, 1002, 1011, 1012, ..., 2031, 2032}

    r_j = {1001: 20, 1002: 20, 1011: 20, 1012: 20, 1021: 20, 1022: 20, 1031: 20, 1032: 20,
           2001: 12, 2002: 12, 2011: 12, 2012: 12, 2021: 12, 2022: 12, 2031: 12, 2032: 12}  #this is the charging rate associated (indexed) with charging event j in F

    psi_j = {1001: 1, 1002: 1, 1011: 1, 1012: 1, 1021: 1, 1022: 1, 1031: 1, 1032: 1,
             2001: 2, 2002: 2, 2011: 2, 2012: 2, 2021: 2, 2022: 2, 2031: 2, 2032: 2} # this is the number of ports used (indexed) at charging event j of F

    ksi_z ={1: 2, 2: 2} # this is the TOTAL number of ports available at each charging station z of Z

    #this is inversed to use for constraint (15) later where we divide by r
    inverse_r_j= {1001: inverse_r_1, 1002: inverse_r_1, 1011: inverse_r_1, 1012: inverse_r_1, 1021: inverse_r_1, 1022: inverse_r_1, 1031: inverse_r_1, 1032: inverse_r_1,
                  2001: inverse_r_2, 2002: inverse_r_2, 2011: inverse_r_2, 2012: inverse_r_2, 2021: inverse_r_2, 2022: inverse_r_2, 2031: inverse_r_2, 2032: inverse_r_2}

elif no_of_CS == 4:
    Z = (1, 2, 3, 4)

```

```
    if toy_var == 1:

        r_j = {1001: 20, 1002: 20, 1003: 20, 1004: 20, 1011: 20, 1012: 20, 1013: 20, 1014: 20,
               2001: 12, 2002: 12, 2003: 12, 2004: 12, 2011: 12, 2012: 12, 2013: 12, 2014: 12}

        psi_j = {1001: 1, 1002: 1, 1003: 1, 1004: 1, 1011: 1, 1012: 1, 1013: 1, 1014: 1, 2001: 2, 2002: 2, 2003: 2, 2004: 2, 2011: 2, 2012: 2, 2013: 2, 2014: 2}

        ksi_z = {1: 2, 2: 2, 3: 2, 4: 2}

        inverse_r_j = {1001: inverse_r_1, 1002: inverse_r_1, 1003: inverse_r_1, 1004: inverse_r_1, 1011: inverse_r_1, 1012: inverse_r_1, 1013: inverse_r_1, 1014: inverse_r_1,
                       2001: inverse_r_2, 2002: inverse_r_2, 2003: inverse_r_2, 2004: inverse_r_2, 2011: inverse_r_2, 2012: inverse_r_2, 2013: inverse_r_2, 2014: inverse_r_2}


    elif toy_var == 0:

        r_j = {1001: 20, 1002: 20, 1003: 20, 1004: 20, 1021: 20, 1022: 20, 1023: 20, 1024: 20,
             2001: 12, 2002: 12, 2003: 12, 2004: 12, 2021: 12, 2022: 12, 2023: 12, 2024: 12}

        psi_j = {1001: 1, 1002: 1, 1003: 1, 1004: 1, 1021: 1, 1022: 1, 1023: 1, 1024: 1,
                 2001: 2, 2002: 2, 2003: 2, 2004: 2, 2021: 2, 2022: 2, 2023: 2, 2024: 2}

        ksi_z = {1: 2, 2: 2, 3: 2, 4: 2} # this is the TOTAL number of ports available at each charging station z of Z

        inverse_r_j = {1001: inverse_r_1, 1002: inverse_r_1, 1003: inverse_r_1, 1004: inverse_r_1, 1021: inverse_r_1, 1022: inverse_r_1, 1023: inverse_r_1, 1024: inverse_r_1,
                       2001: inverse_r_2, 2002: inverse_r_2, 2003: inverse_r_2, 2004: inverse_r_2, 2021: inverse_r_2, 2022: inverse_r_2, 2023: inverse_r_2, 2024: inverse_r_2}
```

```
----------------------------------------------------------------------------------------------------------- EDITED CODE ----------------------------



m scipy.spatial import distance
 i in V:
 latitude_of_node_i_start=O_N[i][0]
 longitude_of_node_i_start=O_N[i][1]
 latitude_of_node_i_end=D_N[i][0]
 longitude_of_node_i_end=D_N[i][1]

 # --------------------------------------------------------------------------------------------------------- EDITED CODE ----------------------------

 if toy_var == 1:
     t_tilde[i] = (1/1000)*distance.euclidean([latitude_of_node_i_start,longitude_of_node_i_start],[latitude_of_node_i_end,longitude_of_node_i_end])
     print('lat_start,lon_start,lat_end,lon_end',i,latitude_of_node_i_start,t_tilde[i])
     eta[i] = (1/1000)*e_consumption*distance.euclidean([latitude_of_node_i_start,longitude_of_node_i_start],[latitude_of_node_i_end,longitude_of_node_i_end])

 elif toy_var == 0:
     t_tilde[i] = distance.euclidean([latitude_of_node_i_start, longitude_of_node_i_start], [latitude_of_node_i_end, longitude_of_node_i_end])
     print('lat_start,lon_start,lat_end,lon_end', i, latitude_of_node_i_start, t_tilde[i])
     eta[i] = e_consumption * distance.euclidean([latitude_of_node_i_start, longitude_of_node_i_start], [latitude_of_node_i_end, longitude_of_node_i_end])

 #--------------------------------------------------------------------------------------------------------- EDITED CODE ----------------------------

```

```
print('t_tilde',t_tilde)
#for i in V:
    #print(t_tilde[i])
print('eta',eta)
#for i in V:
    #print(eta[i])
t={} #travel time between the end location of task i and the start location of task j
bijk={} #travel cost from i to j
theta={} #consumed energy when deadheading from task i to task j

for i in N:
    for j in N:
        latitude_of_node_i_end=D_N[i][0]
        longitude_of_node_i_end=D_N[i][1]
        latitude_of_node_j_start=O_N[j][0]
        longitude_of_node_j_start = O_N[j][1]

        # ------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ----------------------------

        if toy_var == 1:
            t[i,j]= (1/1000)*distance.euclidean([latitude_of_node_i_end,longitude_of_node_i_end],[latitude_of_node_j_start,longitude_of_node_j_start])#*(1/1000)
            bijk[i,j]=travel_cost*t[i,j]
            theta[i,j] = (1/1000)* e_consumption * distance.euclidean([latitude_of_node_i_end, longitude_of_node_i_end],[latitude_of_node_j_start,longitude_of_node_j_start

        elif toy_var == 0:
            t[i, j] = distance.euclidean([latitude_of_node_i_end, longitude_of_node_i_end], [latitude_of_node_j_start, longitude_of_node_j_start])  # *(1/1000)
            bijk[i, j] = travel_cost * t[i, j]
            theta[i, j] = e_consumption * distance.euclidean([latitude_of_node_i_end, longitude_of_node_i_end],[latitude_of_node_j_start, longitude_of_node_j_start])
```

```

        if i==j:
            t[i,j]=0; theta[i,j]=0

print('theta', theta)
print('t',t)

A={}
for k in K:
    A_a=[(O[k],j) for j in Nk[k] if j!=O[k] if u[j]>=l[O[k]]+t[O[k],j]] #arcs_from_origin_depot
    A_b=[(i,D[k]) for i in Nk[k] if i not in [O[k],D[k]]] #arcs_to_destination_depot
    A_c=[(i,j) for i in Vk[k] for j in Vk[k] if i!=j if l[i]+t_tilde[i]+t[i,j]<=u[j]] #arcs_from_trip_to_trip
    A_d=[(i,j) for i in Vk[k] for j in F if l[i]+t_tilde[i]+t[i,j]<=u[j]] #arcs_from_trip_to_charging_event
    A_f=[(i,j) for i in F for j in Vk[k] if l[i]+t[i,j]<=u[j]] #arcs_from_chargingevent_to_trip
    A[k]=A_a+A_b+A_c+A_d+A_f
    A_a.clear();A_b.clear();A_c.clear();A_d.clear();A_f.clear()

print('arcs',A)
#A={1:A1_a+A1_b+A1_c+A1_d+A1_f,2:A2_a+A2_b+A2_c+A2_d+A2_f} #possible arcs per vehicle

q={i:0 for i in V} #closest charging node from the end of trip i
for i in V:
    distance=+np.infty
    for j in F:
        if t[i,j]<=distance:
            distance=t[i,j]
            q[i]=j
    print('theta',theta[i,q[i]])
print('q(i)',q)
```

```python
M=10000000 #very large positive number

#VARIABLES

x={}; sigma={}; sigma_tilde={}; z={}
for k in K:
    for i,j in A[k]:
        x[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.BINARY, name='x%s' % str([i,j,k])) #binary flow variable where xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        sigma[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M, ub=+2 * M,
                                    name='sigma%s' % str([i,j,k]))  # binary flow variable where xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        sigma_tilde[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-2 * M, ub=+2 * M,
                                          name='sigma_tilde%s' % str([i,j,k]))  # binary flow variable where xijk=1 if vehicle k uses arc ij
        if i in Vk[k]+F+[O[k]]:
            z[i,j,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000,name='z%s' % str([i,j,k]))  # objective function

T={}; e={}; e_bar={}; g={}
for k in K:
    for i in Nk[k]:
        T[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, name='T%s' % str([i,k]))
    for i in Vk[k]+F+[D[k]]:
        e[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000, name='e%s' % str([i,k])) #SOC of vehicle k when it arrives at node task i
    for i in Vk[k]+F+[O[k]]:
        e_bar[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000, name='e_bar%s' % str([i,k])) #SOC of vehicle k when it completes task i
    for i in Vk[k]+F:
        g[i,k] = model.addVar(vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000, name='g%s' % str([i,k]))  # SOC change of vehicle k when performing node task i
```

```python

tau = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000, name='tau') #required time period to recharge vehicle k at charging event i
s_tilde = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.CONTINUOUS, lb=-10000000000, name='s_tilde')
y = model.addVars(F,K,vtype=gp.GRB.BINARY, name='y')


#CONSTRAINTS
model.addConstrs( sum( sum ( x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) for k in K ) == 1 for jj in V) # eq.(8)

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ----------------------------
model.addConstrs( sum( sum ( x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) for k in K ) <= psi_j[jj] for jj in F)     # eq.(9)
#------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ----------------------------

model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for i, j in A[k] if i == O[k]) == 1 for k in K)  # eq.(10)
model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for i, j in A[k] if j == D[k]) == 1 for k in K)  # eq.(10)

model.addConstrs( sum(x[i,j,k] for i,j in A[k] if j==jj) == sum(x[j,i,k] for j,i in A[k] if j==jj) for k in K for jj in Vk[k]+F) #eq.(11)

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE ----------------------------
model.addConstrs(tau[i,k]==(phi_max[k] - e[i,k])*inverse_r_j[i] for i in F for k in K)            #eq.(15)

for k in K:
    for i in Vk[k]:
        sumvalue1 = 0
        for j in Vk[k]:
            if (i,j) in A[k]:
                sumvalue1 = sumvalue1 + x[i,j,k]
        model.addConstr(sumvalue1 <= 1)
```

```python
for k in K:
    for j in Vk[k]:
        sumvalue2 = 0
        for i in Vk[k]:
            if (i,j) in A[k]:
                sumvalue2 = sumvalue2 + x[i,j,k]
        model.addConstr(sumvalue2 <= 1)

#model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for (i,j) in A[k] ) <= 1 for i in Vk[k] for k in K)                #ADDED CONSTRAINTS
#model.addConstrs(sum(x[i, j, k] for i in Vk[k] ) <= 1 for j in Vk[k] for k in K)                #ADDED CONSTRAINTS

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------ EDITED


model.addConstrs(T[i,k]>=l[i] for k in K for i in Nk[k]) #eq.(16)
model.addConstrs(T[i,k]<=u[i] for k in K for i in Nk[k]) #eq.(16)

model.addConstrs(e_bar[O[k],k]==phi_max[k] for k in K) #eq.(18)
model.addConstrs(e_bar[j,k]==e[j,k]-g[j,k] for k in K for j in Vk[k]+F) #eq.(19)

model.addConstrs(e[j,k]<=(e_bar[i,k]-theta[i,j])+(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k]) #eq.(21)
model.addConstrs(g[i,k]==eta[i] for k in K for i in Vk[k]) #eq.(22)
model.addConstrs(g[i,k]==e[i,k]-phi_max[k] for i in F for k in K) #eq.(23)
model.addConstrs(e[i,k]>=phi_min[k] for k in K for i in Vk[k]+F+[D[k]]) #eq.(24)
model.addConstrs(e_bar[i,k]>=phi_min[k] + float(theta[i,q[i]]) for k in K for i in Vk[k]) #eq.(25)
model.addConstrs( y[ii,k] == sum (x[i,j,k] for i,j in A[k] if i==ii) for ii in F for k in K) #eq.(26)
```

```python

model.addConstrs(T[i,k]+t_tilde[i]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]) #eq (31)
model.addConstrs(T[i,k]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A[k] if i==O[k]) #eq (32)
model.addConstrs(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]-T[j,k]+sigma[i,j,k]<=0 for k in K for i,j in A[k] if i in F) #eq.(33)
model.addConstrs(sigma[i,j,k]<=M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k]) #eq.(34)
model.addConstrs(sigma[i,j,k]>=-M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k]) #eq.(35)

model.addConstrs(e[j,k]>=e_bar[i,k]-theta[i,j]+sigma_tilde[i,j,k] for k in K for i,j in A[k]) #eq.(36)
model.addConstrs(sigma_tilde[i,j,k]<=M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k]) #eq.(37)
model.addConstrs(sigma_tilde[i,j,k]>=-M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k]) #eq.(38)
model.addConstrs(T[i,k0] + tau[i,k0] + s_tilde[i,k0] <= T[omega[i],k] + M*(1- sum( x[l,r,k] for l,r in A[k] if l==omega[i] ) ) for i in F_no_end for k in K for k0 in K)
model.addConstrs(s_tilde[i,k0]<=M*(1-y[i,k0]) for i in F for k0 in K) #eq.(40)
model.addConstrs(s_tilde[i,k0]>=-M*(1-y[i,k0]) for i in F for k0 in K) #eq.(41)

model.addConstrs(z[i,j,k]<=M*x[i,j,k] for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[O[k]]) #eq.(42)
model.addConstrs(z[i,j,k]>=-M*x[i,j,k] for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[O[k]]) #eq.(43)
model.addConstrs(z[i,j,k]<=bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t_tilde[i]+t[i,j]))+M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]) #eq.(44)
model.addConstrs(z[i,j,k]<=bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t[i,j]))+M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i==O[k]) #eq.(44b)
model.addConstrs(z[i,j,k]<=bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]))+M*(1-x[i,j,k]) for k in K for i,j in A[k] if i in F) #eq.(45)
model.addConstrs(z[i,j,k]>=bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t_tilde[i]+t[i,j]))-(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k] if i in Vk[k]) #eq.(46)
model.addConstrs(z[i,j,k]>=bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+t[i,j]))-(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k] if i==O[k]) #eq.(46b)
model.addConstrs(z[i,j,k]>=bijk[i,j]+greek_l*(T[j,k]-(T[i,k]+tau[i,k]+t[i,j]))-(1-x[i,j,k])*M for k in K for i,j in A[k] if i in F) #eq.(47)

#VALID INEQUALITIES
model.addConstrs(e[j,k]<=phi_max[k] for k in K for j in Vk[k]+F+[D[k]]) #eq.(45)
model.addConstrs(sum(y[i,k]*l[i] for k in K) <= T[omega[i],k] + M*(1- sum( x[l,r,k] for l,r in A[k] if l==omega[i] ) ) for i in F_no_end for k in K) #eq.(47)
```

```python
#OBJECTIVE FUNCTION
obj = sum( sum(z[i,j,k] for i,j in A[k] if i in Vk[k]+F+[O[k]]) for k in K)

#Add objective function to model and declare that we solve a minimization problem
model.setObjective(obj,GRB.MINIMIZE)

# Solve the model and return results.
#model.params.NonConvex = 2  # allow to handle quadratic equality constraints - which are always non-convex
"""
model.optimize()
if model.status == GRB.OPTIMAL:  # check if the solver is capable of finding an optimal solution
    model.printAttr('X')
    print(model.status, 'optimal')
    print('Obj: %g' % model.objVal)
else:
    print(model.status, 'not optimal')

#model.computeIIS()
#model.write("model.ilp")
# print results
model.setParam("IntFeasTol", 1e-09)
model.setParam("IntegralityFocus",1)
model.Params.IntegralityFocus = 1
model.printQuality()
#model.Params.IntFeasTol = 1e-09

for v in model.getVars():
    #if v.x>0.01:
        print('%s %s %g' % (v.varName, '=', v.x))
```

```
model.optimize()
if model.status == GRB.OPTIMAL:  # check if the solver is capable of finding an optimal solution
    model.printAttr('X')
    print(model.status, 'optimal')
    print('Obj: %g' % model.objVal)
else:
    print(model.status, 'not optimal')

# print results
for v in model.getVars():
    if v.x > 0:
        print('%s %g' % (v.varName, v.x))




#------------------------------------------------------------------------------------ EDITED CODE

collected_keys_k1 = []
collected_keys_k2 = []

for v in model.getVars():

    if v.x > 0:
        # print('%s %g' % (v.varName, v.x))

        if v.varName[0] == 'x':
```

```
            if '[' in v.varName and ']' in v.varName:
                # Remove brackets and split the string to extract indices

                # print("this is key ==", v.varName)
                indices = [int(index.strip()) for index in v.varName.split('[')[1].rstrip(']').split(',')]


                if indices[-1] == 1:
                    collected_keys_k1.append(indices)
                elif indices[-1] == 2:
                    collected_keys_k2.append(indices)

        # Print the collected keys
        # print("Collected keys:", collected_keys)

print("Collected keys for k=1:", collected_keys_k1)
print("Collected keys for k=2:", collected_keys_k2)
```

```python
def sort_keys(collected_keys):
    relationships = {}
    visited = set()
    resulting_path = []

    for key_list in collected_keys:
        i, j, k = key_list
        relationships[i] = j

    for i in relationships:
        if i not in visited:
            current = i
            while current in relationships and current not in visited:
                visited.add(current)
                resulting_path.append(current)
                current = relationships[current]

    # Add the last element if it hasn't been visited
    if current not in visited:
        resulting_path.append(current)

    return resulting_path

# Sort collected_keys_k1
resulting_path_k1 = sort_keys(collected_keys_k1)
print("Resulting path for k=1:", resulting_path_k1)

# Sort collected_keys_k2
resulting_path_k2 = sort_keys(collected_keys_k2)
print("Resulting path for k=2:", resulting_path_k2)
```