



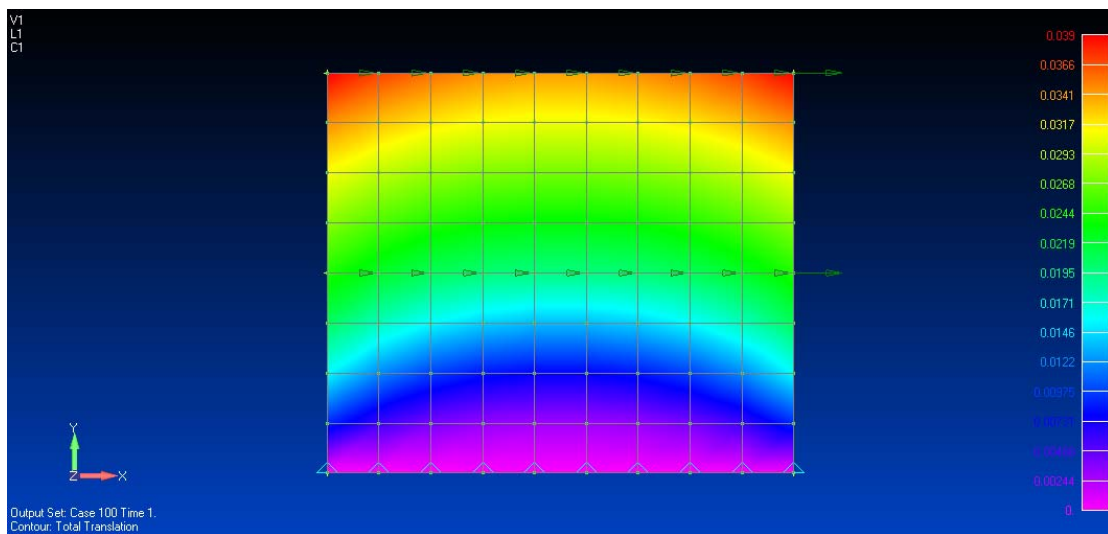
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ & ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ”

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕ ΤΕΤΡΑΚΟΜΒΙΚΑ
ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ**

ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ ΑΓΓΕΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Β. ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΣΥΝΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Σ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ, ΔΙΔΑΚΤΩΡ ΕΜΠ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2012

Ελαστοπλαστική Ανάλυση Τοιχείων

με

Τετρακομβικά Υστερητικά Πεπερασμένα Στοιχεία

Επίπεδης Έντασης

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον κ. Βλάση Κουμούση, καθηγητή του Εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών του τομέα Δομοστατικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου αρχικά για την υπομονή του, έπειτα για το επιστημονικό υλικό που μου παρέιχε, καθώς και για την πολύτιμη καθοδήγησή του. Τον ευχαριστώ επίσης για το ενδιαφέρον και την πλήρη διδακτική του υποστήριξη.

Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω τον διδάκτορα της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών, Σάββα Τριανταφύλλου για την βοήθειά του και τη διάθεση του λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία αυτή.

Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της επιτροπής εξέτασης, κ. Ευάγγελο Σαπουντζάκη, Καθηγητή ΕΜΠ και τον κ. Νικόλαο Λαγαρό, Λέκτορα ΕΜΠ για τη συμμετοχή τους και την αξιολόγηση της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την Αλεξάνδρα Βλάχου, Αρχιτέκτονα Μηχανικό ΕΜΠ για την αλληλεγγύη της.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της εργασίας είναι η εξέταση της ελαστοπλαστικής απόκρισης φορέων επίπεδης έντασης που υποβάλλονται σε στατική φόρτιση με τη χρήση τετρακομβικών υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων. Τα στοιχεία αυτά ενσωματώνουν μια νέα υστερητική καταστατική σχέση που βασίζεται στο προσομοίωμα Bouc - Wen. Χαρακτηριστικό του υστερητικού αυτού μοντέλου είναι ότι είναι ομαλό και ανεξάρτητο από την ταχύτητα επιβολής της παραμόρφωσης. Επιπλέον, παράγεται ευθέως από τις εξισώσεις της κλασικής πλαστικότητας, δηλαδή το νόμο ροής, τη συνδυασμένη πλαστικότητα, τη συνάρτηση διαρροής και το νόμο κράτυνσης στα οποία και γίνεται εκτεταμένη αναφορά. Ακολουθώντας, με βάση τις εξισώσεις αυτές, προκύπτει το γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc - Wen σε τανυστική μορφή, το οποίο ισχύει για κάθε κριτήριο διαρροής και για κάθε νόμο κράτυνσης. Παρατίθεται η διαδικασία εξαγωγής του τετρακομβικού ισοπαραμετρικού υστερητικού στοιχείου επίπεδης έντασης - παραμόρφωσης και τέλος συγκρίνεται η μη - γραμμική απόκριση ορισμένων μορφών τοίχων στο πρόγραμμα Nastran - Femap και στο πρόγραμμα Boucfem που βασίζεται στο τετραπλευρικό υστερητικό πεπερασμένο στοιχείο [7b]. Η σύγκλιση που προκύπτει από τα δύο λογισμικά είναι ικανοποιητική ενώ ο υπολογιστικός χρόνος προκύπτει αισθητά μικρότερος για τα υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία για την ίδια διακριτοποίηση και αριθμό βημάτων.

ABSTRACT

The purpose of this post graduate thesis is to determine the response of elastoplastic walls subjected to static loading using four–node hysteretic plane stress finite elements that incorporate an hysteretic constitutive relation based on the rate independent Bouc-Wen model. This model is directly derived from the equations of classical associated plasticity, i.e. the flow rule, the yield function and the hardening law and consistency relation on which extensive reference is made. Based on these equations, the generalized three dimensional stress state is expressed using Bouc - Wen model in tensorial form, valid for any yield criterion and different hardening laws [7a] From this general model the plane stress - plane strain stresses are used to derive an hysteretic finite element using the shape functions of the standard quadrilateral element [7b]. A Fortran code that incorporates the hysteretic Fem approach is used to perform a list of parametric studies. Different solid concrete walls and walls with openings are modeled and solved following the direct stiffness method and incremental elastoplastic analysis. The results are compared with the ones determined using Nastran - Femap code. The validity and the accuracy of the proposed model is verified and its computational efficiency is demonstrated.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή

1.1	Γενικά.....	3
-----	-------------	---

Κεφάλαιο 2 – Ελαστοπλαστική συμπεριφορά – θεωρία κλασικής πλαστικότητας και πλαστική ροή

2.1	Η μονοαξονική περίπτωση	7
2.1.1	Περιγραφή της απόκρισης του υλικού	7
2.1.2	Πλαστική ροή και σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης.....	13
2.2	Πλαστική διαρροή υπό πολυαξονικές συνθήκες	20
2.2.1	Εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση.....	20
2.2.2	Ελαστικότητα.....	25
2.3	Τελείως πλαστικό υλικό.....	28
2.3.1	Κριτήριο διαρροής και συνθήκη διαρροής.....	28
2.3.2	Πλαστική ροή	30
2.4	Νόμοι κράτυνσης	36
2.4.1	Ισότροπη κράτυνση	37
2.4.2	Κινηματική κράτυνση	41

2.4.3	Μεικτό μοντέλο κράτυνσης	46
2.5	Μια γενική οπτική της ελαστοπλαστικής καταστατικής περιγραφής	48

Κεφάλαιο 3 – Υστερητικό Προσομοίωμα Bouc - Wen

3.1	Εισαγωγή.....	54
3.2	Υστέρηση	56
3.3	Μονοαξονική διατύπωση	58
3.4	Πολυαξονική υστερητική διατύπωση	63

Κεφάλαιο 4 – Υστερητικό Τετραπλευρικό Στοιχείο

4.1	Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης 4 κόμβων	72
4.2	Συναρτήσεις σχήματος	76
4.3	Μητρώο δυσκαμψίας	80
4.4	Συμπεράσματα	82

Κεφάλαιο 5 – Εφαρμογές Ελαστοπλαστικής Ανάλυσης σε Μορφές Τοίχων

5.1	Διαμόρφωση δεδομένων στο πρόγραμμα Nastran.....	87
5.2	1ο Μοντέλο τοίχου.....	95
5.3	2ο Μοντέλο τοίχου.....	98
5.4	3ο Μοντέλο τοίχου.....	101
5.5	Σύγκριση αποτελεσμάτων.....	103

Κεφάλαιο 6 – Σύγκριση Αποτελεσμάτων Ελαστοπλαστικής Ανάλυσης σε Nastran και Boucfem

6.1	Σύγκριση 1ου Μοντέλου τοίχου.....	109
6.2	Σύγκριση 2ου Μοντέλου τοίχου.....	115
6.3	Σύγκριση 3ου Μοντέλου τοίχου.....	120
6.4	Σύγκριση διαγράμματος P-d με μεταβολή της τιμής n.....	124
6.5	Σύγκριση διαγράμματος P-d με μεταβολή της τιμής α	125

Κεφάλαιο 7 – Συμπεράσματα.....129

Βιβλιογραφία..... 133

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Αντικείμενο της εργασίας είναι ο έλεγχος της ανελαστικής απόκρισης τοιχείων επίπεδης έντασης με τη χρήση τετρακομβικών υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων. Η διατύπωση του τετραπλευρικού στοιχείου τεσσάρων κόμβων για την ελαστική περίπτωση επεκτείνεται με την εισαγωγή μιας νέας υστερητικής καταστατικής σχέσης που βασίζεται στο υστερητικό μοντέλο Bouc - Wen. Πρόκειται για ένα ομαλό υστερητικό προσομοίωμα το οποίο είναι ανεξάρτητο από την ταχύτητα επιβολής της παραμόρφωσης. Το προτεινόμενο υστερητικό μοντέλο παράγεται άμεσα από τις εξισώσεις της κλασικής πλαστικότητας, δηλαδή του νόμου ροής, της συνδυασμένης πλαστικότητας, τη συνάρτηση διαρροής και του νόμου κράτυνσης. Η χρησιμότητα του εν λόγω μοντέλου επιτρέπει την προσομοίωση ποιοτικά διαφορετικών υστερητικών αποκρίσεων τροποποιώντας τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου. Οι καταστατικές σχέσεις της Bouc-Wen υστέρησης έχουν οριστεί στον τρισδιάστατο χώρο και ως εκ τούτου αναπτύσσεται μια τρισδιάστατη σχέση έντασης - παραμόρφωσης σε ανάλογη μορφή κατάλληλη για κάθε τύπο κριτηρίων διαρροής και συμπεριφοράς κράτυνσης. Η διατύπωση που προτείνεται επεκτείνεται για την κάλυψη κυκλικών φαινομένων όπως η εξασθένιση της ακαμψίας και η μείωση της δύναμης.

Στο κεφάλαιο 2, αρχικά γίνεται μια εκτεταμένη αναφορά στη βάση της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς του υλικού και στις καταστατικές εξισώσεις της κλασικής θεωρίας της Πλαστικότητας και τη θεωρίας της Πλαστικής Ροής.

Στο κεφάλαιο 3, μετά την περιγραφή της υστέρησης ως έννοια, παρουσιάζεται το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen. Στη συνέχεια, με βάση τις εξισώσεις της

κλασικής πλαστικότητας, προκύπτει το γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc-Wen σε τανυστική μορφή, το οποίο ισχύει για κάθε κριτήριο διαρροής και για κάθε νόμο κράτυνσης.

Στο κεφάλαιο 4, παρατίθεται το τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης 4 κόμβων και η διαδικασία ενσωμάτωσης του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen.

Στο κεφάλαιο 5, αναλύονται τρία παραδείγματα τοίχων στο πρόγραμμα Nastran της Femap στα οποία καταγράφονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα της ελαστοπλαστικής απόκρισης

Το κεφάλαιο 6, περιλαμβάνει τη σύγκριση των ίδιων παραδειγμάτων στο πρόγραμμα Nastran και στο πρόγραμμα Boucfem.

Στο κεφάλαιο 7 τέλος, συνοψίζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ελαστοπλαστική συμπεριφορά -

θεωρία κλασικής πλαστικότητας

και πλαστική ροή

2.1 Η μονοαξονική περίπτωση

2.1.1 Περιγραφή της απόκρισης του υλικού

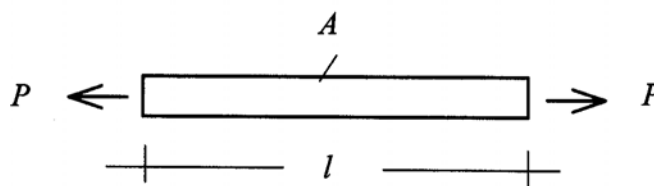
Για τη διερεύνηση της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς, θα εξεταστεί αρχικά η περίπτωση μιας ράβδου μεταλλικού υλικού υπό μονοαξονική ένταση. Μια απλή περίπτωση, που ωστόσο εμπεριέχει όλα τα απαραίτητα χαρακτηριστικά της ελαστοπλαστικής απόκρισης υλικού, που προκύπτουν ευθέως από μακροσκοπικές πειραματικές παρατηρήσεις. Η μαθηματική μεθοδολογία της ελαστοπλαστικής περιγραφής υλικού εισάγεται ως μια βάση για τη μεταγενέστερη επέκταση στην πολυαξονική ένταση και τις αντίστοιχες παραμορφωσιακές καταστάσεις. Για ένα ελαστικό δείγμα υπό εφελκυσμό με μήκος l και εμβαδόν διατομής A στο σχήμα 2.1, ορίζεται η μονοαξονική ένταση ως εξής:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.1)$$

όπου P εκφράζει την αξονικά εφαρμοζόμενη δύναμη, ενώ η επιμήκης παραμόρφωση ορίζεται:

$$\gamma = \frac{\delta}{l} \quad (2.2)$$

όπου δ εκφράζει την επιμήκυνση της ράβδου.

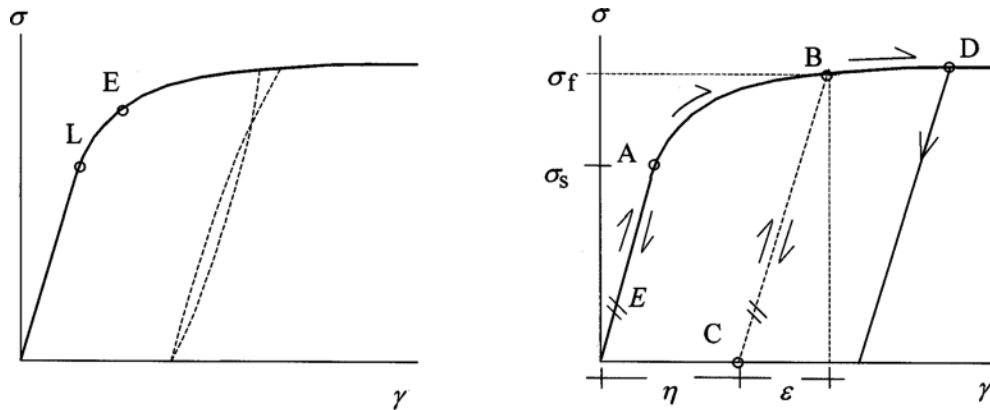


Σχ. 2.1 : Μεταλλική ράβδος υπό μονοαξονικό εφελκυσμό

Η ράβδος θεωρείται αρχικά απαραμόρφωτη. Με την επιβολή της ελαστικής δύναμης, προκαλείται ένταση και παραμόρφωση, η οποία κινείται πάνω στην ευθεία γραμμή του διαγράμματος στο σχήμα 2.2. Ο έλεγχος της γραφικής παράστασης των καταγεγραμμένων τιμών της έντασης και της παραμόρφωσης καταδεικνύει την απόκλιση από το αρχικό γραμμικό τμήμα – που αφορά στην ελαστική απόκριση – μετά το σημείο L, το όριο γραμμικότητας. Ύστερα από αυτό το σημείο, το διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης παίρνει μορφή καμπύλης με φθίνουσα κλίση.

Τα παραπάνω αναφέρονται σε μονοτονικές συνθήκες φόρτισης. Σε μια εναλλακτική δοκιμή φόρτισης, αν η ράβδος υποβάλλεται αρχικά σε μια εντατική κατάσταση πέραν του σημείου L και στη συνέχεια αποφορτίζεται, η παραμόρφωση ακολουθεί τη διακεκομμένη γραμμή του διαγράμματος. Επομένως, παρατηρείται ότι η μετακίνηση της έντασης αποκαθιστά την παραμόρφωση μερικώς, ενώ ένα ποσοστό της παραμένει μόνιμα στην ράβδο.

Με προσεκτική εξέταση των δεδομένων της δοκιμής, όπως αναλύεται και στο βιβλίο του κ. Δολτσίνη - *Elements of Plasticity Theory and Computation High Performance Structures and Materials* [4], διαπιστώνεται ότι η μόνιμη πλαστική παραμόρφωση εμφανίζεται μετά το σημείο E, δηλαδή το όριο ελαστικότητας. Η επαναφόρτιση πραγματοποιείται με έναν λίγο διαφορετικό τρόπο μέχρι να προκύψουν τα μονοτονικά ελαστικά χαρακτηριστικά. Αυτό συμβαίνει όταν η φόρτιση αυξάνεται περαιτέρω. Η περιγραφόμενη συμπεριφορά είναι χαρακτηριστική για οποιαδήποτε λειτουργία αποφόρτισης και επαναφόρτισης στην ελαστοπλαστική περιοχή της δοκιμής ανεξάρτητα από το επίπεδο έντασης. Η διαφορά της διαδρομής ανάμεσα σε αποφόρτιση και επαναφόρτιση είναι γνωστή ως υστερητικός βρόχος.



Σχ. 2.2 : Ελαστοπλαστικό διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης και εξιδανίκευση (δεξιά) [4]

Η πραγματική ελαστική συμπεριφορά όπως απεικονίζεται στο σχήμα 2.2 φαίνεται ότι είναι πολύπλοκη. Με λογικές απλοποιήσεις στα πλαίσια της κατάλληλης περιγραφής της πλαστικότητας των μετάλλων, εξετάζεται η εξιδανικευμένη συμπεριφορά στην ελαστοπλαστική περιοχή που απεικονίζεται στο διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης (σχήμα 2.2) και αποδίδεται στον Ludwig Prandtl. Αναλόγως, το όριο ελαστικότητας θεωρείται ότι συμπίπτει με το όριο γραμμικότητας στο σημείο A, που είναι το σημείο διαρροής του υλικού υπό μονοαξονική ένταση. Η αντίστοιχη ένταση ορίζεται ως σ_s . Η απόκριση του υλικού σε εντάσεις πριν το όριο διαρροής είναι ελαστική και κατά την αποφόρτιση, αποκαθίσταται πλήρως η παραμόρφωση της ράβδου.

Για συνεχόμενη φόρτιση πέραν του σημείου A ακολουθείται η καμπύλη περιοχή του διαγράμματος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2 (δεξιά), αλλά αποφορτίζοντας από το σημείο B για παράδειγμα, αυτό κινείται σε μια ευθεία γραμμή που είναι παράλληλη της αρχικής ελαστικής γραμμής. Κατά συνέπεια, το ελαστικό μέρος ϵ αποκαθίσταται, ενώ το πλαστικό μέρος η εξακολουθεί να παραμένει και μετά την απομάκρυνση της έντασης. Η επαναφόρτιση από το σημείο C πραγματοποιείται στην ίδια ελαστική διαδρομή όπως στην αποφόρτιση και η αύξηση της παραμόρφωσης είναι τελείως ελαστική μέχρι το σημείο B, δηλαδή την κατάσταση πριν την αποφόρτιση. Επομένως,

η πλαστική παραμόρφωση στο B και στο C είναι η ίδια. Για μια αύξηση της τάσης πριν το σ_f , δηλαδή την τάση στο σημείο B, το υλικό ακολουθεί το μονοτονικό διάγραμμα φόρτισης σαν να μην είχε συμβεί η αποφόρτιση. Όμως, η απομάκρυνση της έντασης από ένα προχωρημένο σημείο D στο διάγραμμα καταδεικνύει ότι η μετάβαση από το σημείο B συνοδεύτηκε από περαιτέρω πλαστική παραμόρφωση.

Η εμφάνιση μιας μόνιμης πλαστικής παραμόρφωσης η , επιπρόσθετης της ελαστικής παραμόρφωσης ε , είναι χαρακτηριστικό της ελαστοπλαστικής περιοχής. Η συνολική παραμόρφωση γ , η οποία έχει οριστεί ήδη στην εξίσωση (2.2), μπορεί επίσης να εκφραστεί ως:

$$\gamma = \eta + \varepsilon \quad (2.3)$$

Ο διαχωρισμός της συνολικής επιμήκυνσης δ της ράβδου σε ελαστικό και πλαστικό μέρος ορίζει τους αντίστοιχους όρους παραμόρφωσης ε και η για μήκος l σταθερό. Η μέγιστη ένταση που επιβάλλεται μια φορά και προκαλεί πλαστική παραμόρφωση, ουσιαστικά καταγράφεται από το υλικό και μετατρέπεται στο πραγματικό όριο διαρροής σ_f . Όταν η ράβδος αποφορτίζεται και στη συνέχεια επαναφορτίζεται, η τάση φτάνει την τιμή σ_f αντί του θεωρητικού ορίου διαρροής σ_s . Μια συναρτησιακή εξάρτηση της μορφής:

$$\sigma_f = \sigma_f(\eta) \quad \text{με} \quad \sigma_f(0) = \sigma_s \quad (2.4)$$

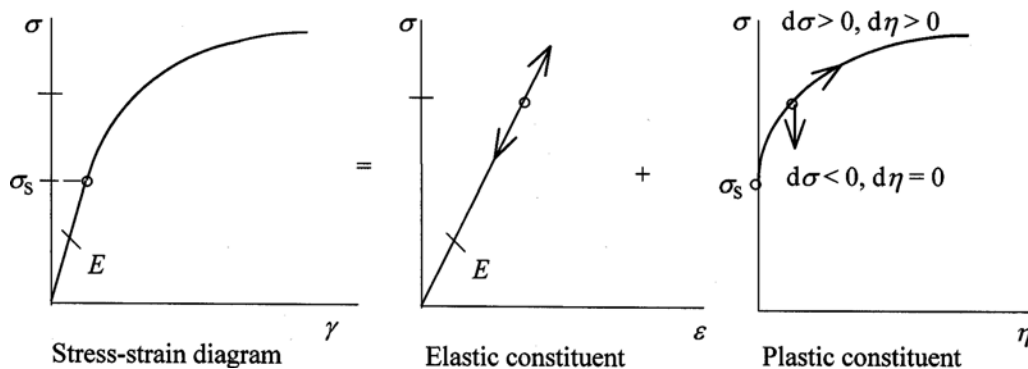
μπορεί να συναχθεί από τη δοκιμή έντασης μετά την αφαίρεση της ελαστικής παραμόρφωσης ε από τη καταμετρημένη παραμόρφωση γ . Αφού η τάση διαρροής αυξάνεται προκαλώντας πλαστική παραμόρφωση, το υλικό θεωρείται ότι έχει κράτυνση και η συνάρτηση $\sigma_f(\eta)$ ανταποκρίνεται στα χαρακτηριστικά της κράτυνσης.

- Φύση των σχέσεων τάσης – παραμόρφωσης

Ο επιμέρους διαχωρισμός της παραμόρφωσης όπως εκφράζεται στην εξίσωση (2.3) προτείνει μια περιγραφή της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς του υλικού διαμέσου ενός ελαστικού και ενός πλαστικού μέρους. Αυτό απεικονίζεται στο σχήμα (2.3) όπου τα χαρακτηριστικά της μονοαξονικής τάσης – παραμόρφωσης χωρίζονται σε δύο διαφορετικά διαγράμματα που αναφέρονται στα τμήματα ε και η της παραμόρφωσης γ . Μέχρι ένα δεδομένο επίπεδο έντασης σ , η ελαστική παραμόρφωση μπορεί να οριστεί από το νόμο του Hooke ως εξής:

$$\varepsilon = \sigma / E \quad (2.5)$$

όπου το E ορίζει το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Η εξίσωση (2.5) που συνδέει τάση και ελαστική παραμόρφωση μπορεί να θεωρηθεί σαν μια εξίσωση μιας κατάστασης η οποία συνδέει το ε με το σ μοναδικά, ανεξάρτητα από την ακολουθία φόρτισης που προκαλεί την πραγματική ένταση. Οποιαδήποτε διαφοροποίηση της έντασης συνοδεύεται από μεταβολή της ελαστικής παραμόρφωσης σύμφωνα με την σχέση που περιγράφεται από το νόμο ελαστικότητας.



Σχήμα 2.3 : Ελαστικοί και πλαστικοί όροι [4]

Αντίστροφα, η τάση μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της ελαστικής παραμόρφωσης. Κάνοντας χρήση της σχέσης (2.3), προκύπτει μέσω της εξίσωσης (2.5) :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot (\gamma - \eta) \quad (2.6)$$

Ο προσδιορισμός της τάσης σ απαιτεί γνώση της παραμόρφωσης η εκτός από την καταμετρημένη παραμόρφωση γ . Το διάγραμμα τάσης – πλαστικής παραμόρφωσης στο σχήμα (2.3 δεξιά) παριστάνει τα χαρακτηριστικά κράτυνσης $\sigma_f(\eta)$ του υλικού. Αυτό προκύπτει από την πραγματική ελαστική καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων μετά την αφαίρεση της παραμόρφωσης γ από την ελαστική παραμόρφωση ε που δίνεται από την εξίσωση (2.5). Απλή γνώση της στιγμιαίας τάσης αποδεικνύεται ανεπαρκής για έναν ξεχωριστό υπολογισμό της πλαστικής τάσης. Ενώ τα χαρακτηριστικά κράτυνσης παρέχουν μια τιμή για την παραμόρφωση η σε ένα δεδομένο επίπεδο τάσης, η ίδια ακριβώς τάση μπορεί να προκύψει μέσω αποφόρτισης από ένα υψηλότερο σημείο της καμπύλης κράτυνσης και μπορεί επίσης να συνδυαστεί με διαφορετικές τιμές πλαστικής παραμόρφωσης στην περίπτωση που δεν αναφέρεται η προηγούμενη ιστορία φόρτισης.

Γι' αυτόν το λόγο, πρέπει να δοθεί προσοχή στις σχέσεις μεταξύ των επαυξητικών μεταβολών τάσης και πλαστικής παραμόρφωσης αντί μιας καθορισμένης διαδρομής τάσεων. Για αλλαγές στην πλαστική παραμόρφωση (πλαστική ροή), η εφαρμοσμένη ελαστική τάση θα πρέπει να λάβει την τιμή $\sigma_f(\eta)$ που έχει φτάσει τελευταία στο παρελθόν το υλικό. Επομένως, μια επαύξηση της τάσης κατά $d\sigma > 0$ προκαλεί μια επαύξηση $d\eta$ στην πλαστική παραμόρφωση. Μείωση της τάσης κατά $d\sigma < 0$ αντιστοιχεί σε μια ελαστική αποφόρτιση και αφήνει την πλαστική παραμόρφωση ανεπηρέαστη, δηλαδή $d\eta = 0$.

Σε αντίθεση με την ελαστικότητα, μια βασική διαφορά μεταξύ φόρτισης και αποφόρτισης είναι εμφανής στην πλαστικότητα καθώς εισάγεται μια μη-γραμμική απόκριση ακόμα και για στοιχειώδεις μεταβολές της εντατικής κατάστασης.

2.1.2 Πλαστική ροή και σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης

Εκ της προαναφερθείσας διερεύνησης σχετικά με τις πειραματικές παρατηρήσεις, μια μαθηματική περιγραφή της μονοαξονικής πλαστικής ροής θα βασιστεί στα τρία ακόλουθα αξιώματα:

$$1. \text{ συνθήκη διαρροής} \quad \phi = \bar{\sigma} - \sigma_f \leq 0 \quad (\bar{\sigma} = |\sigma|) \quad (2.7)$$

$$2. \text{ νόμος κράτυνσης} \quad \sigma_f = \sigma_f(\bar{n}) \quad (\bar{n} = |n|) \quad (2.8)$$

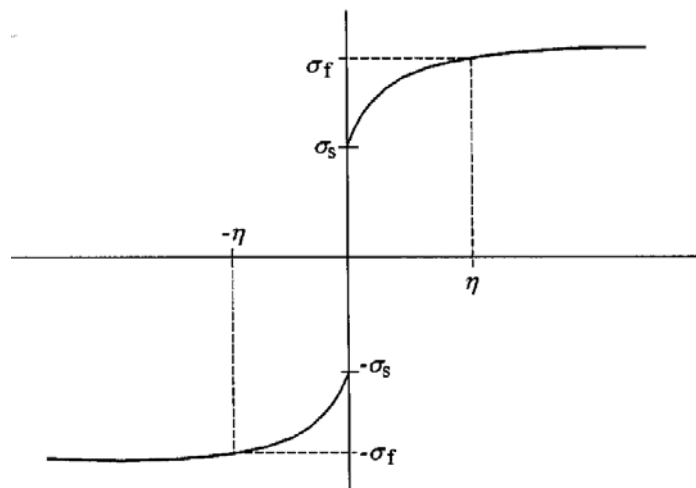
$$3. \text{ νόμος ροής} \quad d\eta = s \cdot d\bar{\eta} \quad \left(s = \frac{\sigma}{|\sigma|} = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right) \quad (2.9)$$

- Η συνθήκη διαρροής από την άποψη της συνάρτησης διαρροής $\phi(\sigma, \sigma_f)$ δηλώνει ότι η τάση διαρροής του υλικού σ_f δεν μπορεί να ξεπεραστεί από την εφαρμοζόμενη τάση σ . Η απόλυτη τιμή της τάσης σ σαν όρος της συνάρτησης διαρροής συμπεριλαμβάνει και την θλιπτική φόρτιση. Αυτό προϋποθέτει ότι η τιμή σ_f της τάσης διαρροής είναι η ίδια υπό εφελκυσμό και υπό θλίψη.
- Η κράτυνση προβλέπει ένα χαρακτηριστικό υλικού που προδιαγράφει την τάση

διαρροής ($\sigma_f > 0$) σαν μια συνάρτηση της πλαστικής παραμόρφωσης ανεξάρτητα από το πρόσημο ($\bar{\eta} \geq 0$). Πειραματικές αποδείξεις υποστηρίζουν την υπόθεση ότι το μέγεθος της τάσης διαρροής αποκτά την ίδια τιμή υπό εφελκυσμό και υπό θλίψη. Αυστηρά, αυτή η υπόθεση οδηγεί στο διαχωρισμό των δοκιμών υπό εφελκυστική ή θλιπτική δράση και όχι σε συνδυασμένες ακολουθίες φόρτισης. Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει: $\sigma(-\eta) = -\sigma(\eta)$ (βλέπε σχήμα 2.4) και η τάση διαρροής του υλικού μπορεί να οριστεί ως μια θετική ποσότητα $\sigma_f(\bar{\eta})$ που εξαρτάται από την απόλυτη τιμή της πλαστικής παραμόρφωσης, για εφελκυστική ή θλιπτική δράση. Ένας πιο γενικός ορισμός της ποσότητας η είναι ο εξής:

$$\bar{\eta} = \int d\bar{\eta} \ , \quad d\bar{\eta} = |d\eta| \quad (2.10)$$

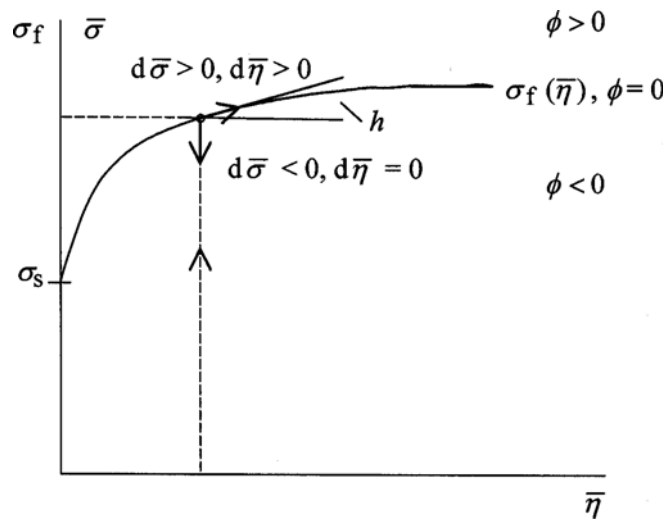
που προσφέρει μια μέτρηση της ενσωματωμένης πλαστικής παραμόρφωσης για εναλλασσόμενη φόρτιση.



Σχήμα 2.4 : Τάση διαρροής υπό μονοτονικό εφελκυσμό ή θλίψη [4]

- Σε αυτό το στάδιο, τυπικά θα πρέπει να χρησιμοποιούνται απόλυτες τιμές για τις μηχανικές μεταβλητές του συστήματος. Η διεύθυνση της πλαστικής ροής ορίζεται από το νόμο ροής. Επομένως, η εντατική κατάσταση κατά την πραγματοποίηση του νόμου ροής καθορίζει το πρόσημο των μεταβολών στην πλαστική παραμόρφωση. Αυτό εκφράζεται:

$$\frac{d\eta}{|d\eta|} = \frac{\sigma}{|\sigma|} = s \quad (2.11)$$



Σχ. 2.5 : Συνθήκη διαρροής και πλαστική φόρτιση [4]

Στο διάγραμμα $\bar{\sigma} - \bar{\eta}$ του σχήματος 2.5, το χαρακτηριστικό της κράτυνσης $\sigma_f(\bar{\eta})$ φαίνεται να διαχωρίζεται σε δύο περιοχές, η μία υπό της καμπύλης όπου $\phi < 0$ και η άλλη υπέρ της όπου $\phi > 0$, ενώ ισχύει ότι $\phi = 0$ πάνω στην καμπύλη κράτυνσης. Θεωρούμε μια ράβδο η οποία είναι αφόρτιστη, αλλά μπορεί να έχει παραμορφωθεί πλαστικά σε κάποιο προηγούμενο πρόγραμμα φόρτισης έτσι ώστε η πραγματική τάση διαρροής σ_f να υπερβαίνει τη θεωρητική σ_s . Μια αύξηση της τάσης $\bar{\sigma}$ από τη μηδενική τιμή δε θα προκαλέσει επιπρόσθετη πλαστική παραμόρφωση μέχρι να

φτάσει την τιμή σ_f . Συνεπώς, το $\phi < 0$ καθορίζει την περιοχή όπου το υλικό αποκρίνεται ελαστικά στην εφαρμοζόμενη τάση. Όταν ισχύει $\bar{\sigma} = \sigma_f$, το υλικό λέγεται ότι είναι σε πλαστική κατάσταση. Αυτή είναι μια απαραίτητη συνθήκη για την πραγματοποίηση της πλαστικής ροής, αλλά η μεταβολή της έντασης σε αυτήν την κατάσταση είναι αποφασιστική. Συγκεκριμένα, το $d\bar{\sigma} < 0$ αφορά την ελαστική περιοχή ($\phi < 0$) και συνδυάζεται με το $d\bar{\eta} = 0$, ενώ το $d\bar{\sigma} > 0$ συνοδεύεται από μια επαύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης $d\bar{\eta} > 0$ προωθώντας την κατάσταση του υλικού στο χαρακτηριστικό κράτυνσης $\phi = 0$. Σύμφωνα με αυτόν το μηχανισμό, η περιοχή $\phi > 0$ δεν είναι προσβάσιμη για το υλικό παρά μόνο μέσω μιας στοιχειώδους εντατικής επαύξησης.

Η πλαστική ροή απαιτεί ότι η συνάρτηση διαρροής στην εξίσωση (2.8) είναι μηδενική:

$$\phi = \bar{\sigma} - \sigma_f = 0 \quad (2.12)$$

Η παραγωγή οδηγεί στη συνθήκη συνοχής κατά την πλαστική ροή:

$$d\phi = d\bar{\sigma} - d\sigma_f = 0 \quad (2.13)$$

Η επαύξηση της τάσης διαρροής μπορεί να συσχετιστεί με αυτήν της πλαστικής παραμόρφωσης μέσω του νόμου κράτυνσης:

$$d\sigma_f = h \cdot d\bar{\eta} \quad \mu\epsilon \quad h = \frac{d\sigma_f}{d\bar{\eta}} \quad (2.12)$$

Η παράμετρος h είναι η τοπική κλίση της καμπύλης κράτυνσης. Από τις εξισώσεις (2.13) και (2.14) προκύπτει:

$$d\bar{\eta} = \frac{1}{h} \cdot d\bar{\sigma} \geq 0 \quad (2.13)$$

Η απαίτηση του $d\bar{\eta} \geq 0$ εξασφαλίζει ότι η ποσότητα $\bar{\eta}$ μπορεί μόνο να αυξηθεί και ικανοποιείται από την συνθήκη φόρτισης για πλαστική ροή.

$$d\bar{\sigma} = s \cdot d\sigma > 0 \quad (2.14)$$

Η έκφραση για το $d\bar{\sigma}$ στην εξίσωση (2.16) προκύπτει από την παραγωγή της ισότητας $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2$ και χρήση του ορισμού του s στην εξίσωση (2.8). Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.15) και εφαρμόζοντας το νόμο ροής, διατυπώνεται για την επαύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης:

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{1}{h} \cdot s \cdot s \cdot d\sigma = \frac{1}{h} \cdot d\sigma \quad \text{if } \phi = 0 \text{ και } d\bar{\sigma} = s \cdot d\sigma > 0 \\ d\eta &= 0 \quad \text{εναλλακτικά} \end{aligned} \quad (2.15)$$

▪ Επαυξημένες σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης

Όποτε πραγματοποιείται πλαστική ροή σύμφωνα με τις συνθήκες που καταγράφονται στην εξίσωση (2.17), το $d\eta$ συμπληρώνει την επαυξημένη ελαστική παραμόρφωση $d\varepsilon$ (όπως δίνεται από την εξίσωση (2.5)) και προκύπτει η παραμορφωσιακή επαύξηση :

$$d\gamma = d\varepsilon + d\eta = \frac{E+h}{E \cdot h} \cdot d\sigma \quad (2.16)$$

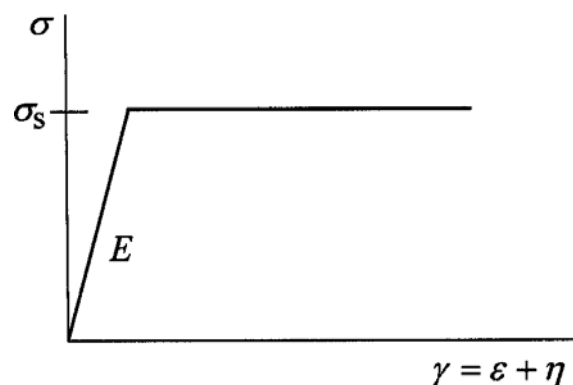
Η εξίσωση (2.18) προσδιορίζει τη μεταβολή στην παραμόρφωση $d\gamma$ για μία δεδομένη επαυξητική μεταβολή της τάσης $d\sigma$. Για $h = 0$ (υλικό χωρίς κράτυνση), η σχέση αυτή δεν έχει σημασία, αφού η εξίσωση (2.17) δεν είναι εφαρμόσιμη για πλαστική παραμόρφωση. Τα υλικά χωρίς κράτυνση λέγεται ότι κατέχουν ένα τελείως πλαστικό όρο. Σε αυτήν την περίπτωση μεγάλης θεωρητικής σημασίας, η τάση μπορεί να αυξηθεί ελαστικά από το 0 μέχρι το όριο διαρροής σ_s , αλλά η επακόλουθη παραμόρφωση συμβαίνει υπό σταθερή τάση. (σχήμα 2.6). Κατά συνέπεια:

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon = 0 \quad (2.17)$$

και επομένως:

$$d\gamma = d\varepsilon + d\eta = d\eta \quad (2.18)$$

Στην τελείως πλαστική περίπτωση, μόλις προσεγγιστεί το όριο διαρροής, το ελαστικό μέρος της επαυξημένης παραμόρφωσης μηδενίζεται και η παραμόρφωση είναι καθολικά πλαστική.



Σχ. 2.6 : Ελαστική – τελείως πλαστική συμπεριφορά

Για μία εναλλακτική περιγραφή της επαύξησης της πλαστικής παραμόρφωσης, το $d\sigma$ στην εξίσωση (2.17) εκφράζεται μέσω της ελαστικής σχέσης (εξίσωση (2.6)) ως προς τη διαφορά $(d\gamma - d\eta)$. Η λύση για το $d\eta$ στη συνέχεια δίνει τη σχέση :

$$d\eta = \frac{E}{E+h} \cdot d\gamma \quad (2.19)$$

για την επαυξημένη πλαστική παραμόρφωση, και τη συνθήκη φόρτισης :

$$s \cdot d\gamma > 0 \quad (2.20)$$

ως προς την παραμορφωσιακή επαύξηση $d\gamma$. Για την περίπτωση του τελείως πλαστικού υλικού ($h = 0$) η παραπάνω διατύπωση αφορά στην εξίσωση (2.20)

Αφαίρεση της επαύξησης της πλαστικής παραμόρφωσης στην εξίσωση (2.21) από $d\gamma$ δίνει το ελαστικό μέρος της παραμορφωσιακής επαύξησης και η τάση μεταβάλλεται :

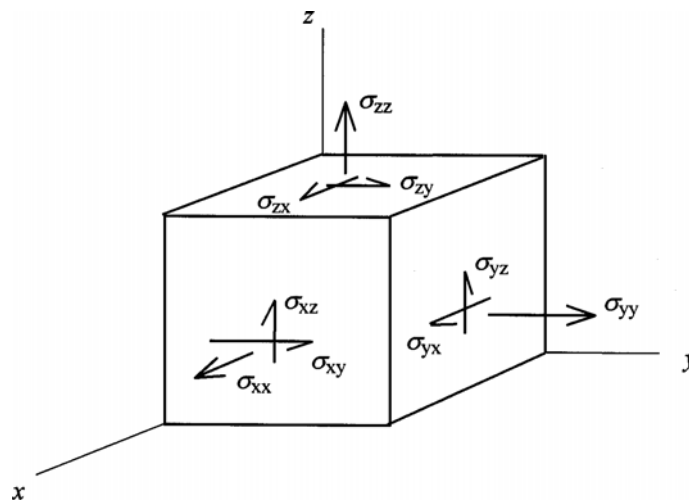
$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon = \frac{E \cdot h}{E+h} \cdot d\gamma \quad (2.21)$$

λόγω κράτυνσης ως εξής: $d\sigma = h \cdot d\eta$. Η εξίσωση (2.23) προσδιορίζει στη ελαστοπλαστική περιοχή του υλικού τη μεταβολή της τάσης $d\sigma$ για μία δεδομένη παραμορφωσιακή επαύξηση $d\gamma$. Αυτό μπορεί να παρουσιαστεί και ως η αντίστροφη σχέση της εξίσωσης (2.18).

2.2 Πλαστική διαρροή υπό πολυαξονικές συνθήκες

2.2.1 Εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση

Για τον ορισμό της τάσης και της παραμόρφωσης, αναφέρεται το κυβικό στοιχείο του υλικού στο σχήμα 2.7, το οποίο είναι προσανατολισμένο στους καρτεσιανούς άξονες. Οι τάσεις ορίζονται από τους καρτεσιανούς όρους της δύναμης ανά επιφάνεια που ασκούνται σε καθεμία έδρα του κυβικού στοιχείου. Εξετάζοντας την έδρα που είναι κάθετη στον άξονα x για παράδειγμα, αναπτύσσεται η κύρια τάση σ_{xx} κάθετη στην επιφάνεια και οι διατμητικές τάσεις σ_{xy} και σ_{yx} εφαπτομενικές σε αυτήν. Ο πρώτος δείκτης στο συμβολισμό της τάσης αναφέρεται στην κύρια επιφάνεια, ενώ ο δεύτερος προσδιορίζει τη διεύθυνση του όρου.



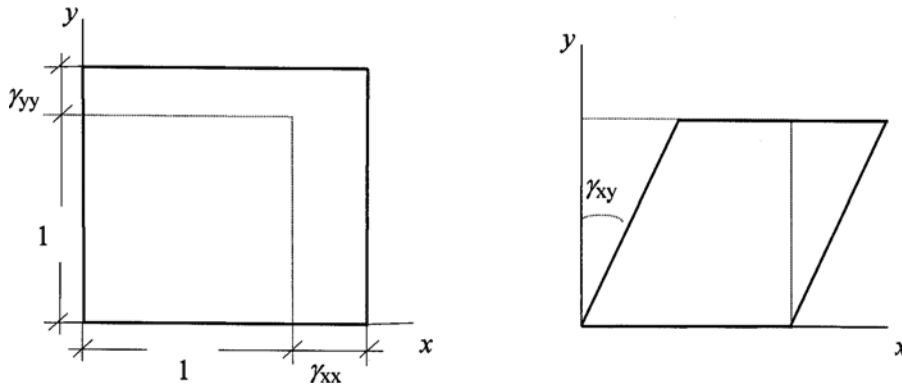
Σχ. 2.7 : Ορισμός των εντατικών όρων

Οι τάσεις λαμβάνονται ως θετικές κατά τις διευθύνσεις του σχήματος 2.7. Οι 9 εντατικοί όροι που φαίνονται στο σχήμα ορίζουν την εντατική κατάσταση σε ένα σημείο. Μπορούν να μειωθούν σε 6 αν ληφθεί υπόψη ότι οι διατμητικές τάσεις με αντίστροφους δείκτες πρέπει να είναι ίσοι για να εξασφαλίζεται η ισορροπία ροπών.

Για τη συνοπτική παρουσίαση της εντατικής κατάστασης εισάγεται το μητρώο 6×1 που αποτελεί το διάνυσμα της τάσης:

$$\sigma = \left\{ \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sqrt{2} \cdot \sigma_{xy} \sqrt{2} \cdot \sigma_{yz} \sqrt{2} \cdot \sigma_{xz} \right\} \quad (2.22)$$

Η παραμορφωσιακή κατάσταση χαρακτηρίζεται από τις κύριες τάσεις γ_{xx} , οι οποίες προκύπτουν ως οι προεκτάσεις μιας κυβικής μονάδας στους συντεταγμένους άξονες και τις διαμητικές παραμορφώσεις γ_{xy} που εκφράζουν τις μεταβολές των γωνιών του κύβου στα αντίστοιχα επίπεδα. (σχήμα 2.8)



Σχ. 2.8 : Ορισμός των κύριων και διαμητικών παραμορφώσεων

Συνοπτικά, η παραμορφωσιακή κατάσταση διατυπώνεται μέσω του 6×1 παραμορφωσιακού διανύσματος:

$$\gamma = \left\{ \gamma_{xx} \gamma_{yy} \gamma_{zz} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{xy} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{yz} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{xz} \right\} \quad (2.23)$$

Τα ισότροπα υλικά παρουσιάζουν μια αξιοσημείωτα διαφορετική απόκριση στις κύριες τάσεις που ασκούνται εξίσου σε όλες τις διευθύνσεις σε σχέση με τις

διαμητικές τάσεις. Η λεγόμενη υδροστατική τάση ορίζεται ως η μέση τιμή των κύριων εντατικών παραγόντων.

$$\sigma_H = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3} \cdot e^t \cdot \sigma \quad (2.24)$$

όπου ο απαιτούμενος τελεστής μητρώου κάνει χρήση του διανύσματος:

$$e = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (2.25)$$

Η μοναδική τιμή της υδροστατικής τάσης επεκτείνεται σε μια υδροστατική εντατική κατάσταση που αντιπροσωπεύεται από το 6×1 εντατικό διάνυσμα:

$$\sigma_H = \{\sigma_H \ \sigma_H \ \sigma_H \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (2.26)$$

Αποτελείται από τρεις κύριους όρους, ταυτόσημους με το σ_H και μηδενικούς διαμητικούς όρους που προσδιορίζουν το υδροστατικό μέρος της εντατικής κατάστασης σ . Η σημειογραφία του μητρώου για το σχηματισμό της σ_H είναι:

$$\sigma_H = \sigma_H \cdot e = \frac{1}{3} \cdot e \cdot e^t \cdot \sigma \quad (2.27)$$

και ορίζει τον υδροστατικό τελεστή που εφαρμόζεται στην τάση σ .

Η διαφορά της πραγματικής εντατικής κατάστασης σ από την σ_H ορίζει την αποκλίνουσα τάση.

$$\sigma_D = \sigma - \sigma_H = \left[I - \frac{1}{3} \cdot e \cdot e^t \right] \cdot \sigma \quad (2.28)$$

όπου το I αποτελεί το ταυτοτικό μητρώο. Οι αποκλίνοντες εντατικοί όροι $\sigma_{Dxx} \dots$ ορίζονται κατά σειρά ως εξής:

$$\sigma_D = \left\{ (\sigma_{xx} - \sigma_H) (\sigma_{yy} - \sigma_H) (\sigma_{zz} - \sigma_H) \sqrt{2} \cdot \sigma_{xy} \sqrt{2} \cdot \sigma_{yz} \sqrt{2} \cdot \sigma_{xz} \right\} \quad (2.29)$$

Ο αποκλίνων μητρωικός τελεστής που εφαρμόζεται στην σ στην εξίσωση (2.30) τροποποιεί τους κύριους εντατικούς όρους, ενώ οι διαμητικοί όροι παραμένουν ανεπηρέαστοι.

Εξ'ορισμού, η αποκλίνουσα τάση δεν κατέχει κανέναν υδροστατικό όρο. Συνεπώς, η συνθήκη της σχέσης (2.30) περιορίζει τους κύριους όρους της αποκλίνουσας έντασης που δεν μπορούν να διαφοροποιηθούν ανεξάρτητα.

$$e^t \cdot \sigma_D = \sigma_{Dxx} + \sigma_{Dyy} + \sigma_{Dzz} = 0 \quad (2.30)$$

Οι υδροστατικοί και οι αποκλίνοντες παράγοντες της εντατικής κατάστασης πρέπει να είναι ορθογωνικοί μεταξύ τους σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\sigma_D^t \cdot \sigma_H = \sigma_H^t \cdot \sigma_D = 0 \quad (2.31)$$

Η παραμορφωσιακή κατάσταση χωρίζεται ανάλογα με την ένταση. Η ογκομετρική παραμόρφωση γ_v ορίζεται ως:

$$\gamma_D = \gamma - \gamma_v = \left[I - \frac{1}{3} \cdot e \cdot e^t \right] \cdot \gamma \quad (2.32)$$

Η ογκομετρική παραμορφωσιακή κατάσταση προκύπτει από την πραγματική παραμορφωσιακή κατάσταση μέσω μιας εφαρμογής του υδροστατικού μητρικού τελεστή της εξίσωσης (2.29).

$$\gamma_v = \gamma_v \cdot e = \frac{1}{3} \cdot e \cdot e^t \cdot \gamma \quad (2.33)$$

Αναλόγως, η αποκλίνουσα παραμόρφωση ακολουθεί σαν αποτέλεσμα του μητρώου που ορίζεται από την εξίσωση (2.29).

$$\gamma_D = \gamma - \gamma_v = \left[I - \frac{1}{3} \cdot e \cdot e^t \right] \cdot \gamma \quad (2.34)$$

Η αποκλίνουσα παραμόρφωση διατηρεί τον όγκο αφού:

$$e^t \cdot \gamma_D = \gamma_{Dxx} + \gamma_{Dyy} + \gamma_{Dzz} = 0 \quad (2.35)$$

Στην ελαστοπλαστική θεώρηση, καθένας από τους παραμορφωσιακούς όρους της εξίσωσης (2.23) θεωρείται ότι αποτελείται από δύο επιπρόσθετα μέρη, την ελαστική και την πλαστική παραμόρφωση. Το ελαστικό μέρος της παραμόρφωσης εκφράζεται από το 6×1 διάνυσμα :

$$\varepsilon = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{xy} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{yz} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{xz} \right\} \quad (2.36)$$

και το πλαστικό μέρος της παραμόρφωσης από το 6×1 διάνυσμα :

$$\eta = \left\{ \eta_{xx} \quad \eta_{yy} \quad \eta_{zz} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{xy} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{yz} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{xz} \right\} \quad (2.37)$$

Η παραμόρφωση γ τότε εκφράζεται ως εξής :

$$\gamma = \varepsilon + \eta \quad (2.38)$$

Οι ογκομετρικές και οι αποκλίνουσες καταστάσεις του ε και του η ορίζονται ως προς το γ . Για παράδειγμα, από την εξίσωση (2.35)

$$\gamma_v = \frac{1}{3} \cdot e \cdot e^t \cdot [\varepsilon + \eta] = \varepsilon_v + \eta_v \quad (2.39)$$

όπου ε_v και η_v προκύπτουν από την εφαρμογή του υδροστατικού τελεστή σε καθέναν από τους παράγοντες. Επίσης, από την εξίσωση (2.36):

$$\gamma_D = \left[I - \frac{1}{3} \cdot e \cdot e^t \right] \cdot [\varepsilon + \eta] = \varepsilon_D + \eta_D \quad (2.40)$$

όπου ε_D και η_D δίνουν το αποτέλεσμα του αποκλίνοντα τελεστή, όπως εφαρμόζεται στο ε και στο η αντίστοιχα. Η συνθήκη της εξίσωσης (2.37) αφορά κάθε όρο ξεχωριστά :

$$e^t \cdot \varepsilon_D = 0 \quad , \quad e^t \cdot \eta_D = 0 \quad (2.41)$$

2.2.2 Ελαστικότητα

Ο διαχωρισμός της τάσης/παραμόρφωσης σε υδροστατικούς/ογκομετρικούς και αποκλίνοντες όρους χρησιμοποιείται στο να διαμορφωθεί το ελαστικό μητρώο για ένα

ισοτροπικό υλικό. Σε αυτήν την περίπτωση, οι υδροστατικές τάσεις είναι ανάλογες με τις ογκομετρικές παραμορφώσεις:

$$\sigma_H = 3 \cdot K \cdot \varepsilon_v \quad (2.42)$$

Το μέτρο της διόγκωσης K μπορεί να εκφραστεί σε όρους του μέτρου ελαστικότητας σε ελαστικότητα (μέτρο του Young E) και του συντελεστή of πλευρικής συστολής (lateral contraction) (λόγος Poisson ν):

$$3 \cdot K = \frac{E}{1 - 2 \cdot \nu} \quad (2.43)$$

Οι αποκλίνουσες τάσεις είναι ανάλογες με τις αποκλίνουσες παραμορφώσεις ως προς το μέτρο ελαστικότητας σε διάτμηση G . Η σχέση μεταξύ των αντίστοιχων στοιχείων του διανύσματος είναι οι εξής:

$$\sigma_D = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_D \quad (2.44)$$

όπου :

$$2 \cdot G = \frac{E}{1 + \nu} \quad (2.45)$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων (2.44) και (2.46) προκύπτει η πραγματική εντατική κατάσταση και η έκφραση των όρων ε_D και ε_v ως προς τη συνολική παραμόρφωση ε σε αναλογία με τις εξισώσεις (2.36) και (2.35) οδηγεί στην σχέση ελαστικής τάσης – παραμόρφωσης:

$$\sigma = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_D + 3 \cdot K \cdot \varepsilon_v = 2 \cdot G \cdot \left[I + \frac{\nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot e \cdot e^t \right] \cdot \varepsilon \quad (2.46)$$

Σε συμπυκνωμένη μορφή, η εξίσωση (2.48) γράφεται ως εξής:

$$\sigma = \kappa \cdot \varepsilon \quad (2.47)$$

με το συμμετρικό μητρώο ελαστικότητας (ελαστική ακαμψία υλικού),

$$\kappa = 2 \cdot G \cdot \left[I + \frac{\nu}{1-2 \cdot \nu} \cdot e \cdot e^t \right] \quad (2.48)$$

Η μητρωική σχέση στην εξίσωση (2.48) εύκολα αντιστρέφεται για να προσδιορίσει την ελαστική παραμόρφωση για μία δεδομένη τάση. Εναλλακτικά, η αντίστροφη μορφή μπορεί να προκύψει άμεσα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.44) και (2.46). Η πρόσθεση του αποκλίνοντος κα του ογκομετρικού μέρους της παραμόρφωσης από τις παραπάνω εξισώσεις δίνει την ελαστική παραμόρφωση:

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \sigma_D + \frac{1}{3 \cdot K} \cdot \sigma_H = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left[I - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot e \cdot e^t \right] \cdot \sigma \quad (2.49)$$

Εδώ, οι όροι σ_D και σ_H έχουν εκφραστεί ως προς την τάση σ μέσω των εξισώσεων (2.30) και (2.29) αντίστοιχα. Η αντίστροφη σχέση της εξίσωσης (2.49) γίνεται:

$$\varepsilon = \kappa^{-1} \cdot \sigma \quad (2.50)$$

όπου :

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left[I - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot e \cdot e^t \right] \quad (2.51)$$

2.3 Τελείως πλαστικό υλικό

2.3.1 Κριτήριο διαρροής και συνθήκη διαρροής

Προκειμένου να οριστούν οι κρίσιμοι συνδυασμοί τάσεων για πλαστική ροή, θεωρείται η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται σε μια μονάδα όγκου του στοιχείου του υλικού.

$$w_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma^t \cdot d\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \sigma^t \cdot \kappa^{-1} \cdot \sigma \quad (2.52)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.54) οδηγεί στον υπολογισμό της τάσης με χρήση του νόμου ελαστικότητας (εξίσωση 2.52). Ως προς τις αποκλίνουσες, υδροστατικές και ογκομετρικές τάσεις και παραμορφώσεις, η έκφραση της ενέργειας αναλύεται σε δύο μέρη :

$$\int_0^{\varepsilon} \sigma^t \cdot d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} \sigma^t \cdot d\varepsilon_D + 3 \cdot \int_0^{\varepsilon} \sigma_H \cdot d\varepsilon_v \quad (2.53)$$

Όσο οι αποκλίνουσες τάσεις είναι ορθογωνικές στις ογκομετρικές παραμορφώσεις, τα αντίστοιχα μεικτά εσωτερικά γινόμενα μηδενίζονται.

Το πρώτο ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (2.55) εκφράζει την αποκλίνουσα παραμορφωσιακή ενέργεια ή την ενέργειας της ελαστικής παραμόρφωσης. Ανάπτυξη της αποκλίνουσας τάσης σ_D με χρήση της ελαστικής σχέσης για το ε_D , εξίσωση (2.46) δίνει :

$$\int_0^{\varepsilon} \sigma^t \cdot d\varepsilon_D = \frac{1}{2G} \cdot \int_0^{\sigma_D} \sigma_D^t \cdot d\sigma_D = 4G \cdot \sigma_D^t \cdot \sigma_D \quad (2.54)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (2.55) εκφράζει την ενέργεια της μεταβολής του όγκου. Χρησιμοποιώντας την ελαστική σχέση ανάμεσα στην ογκομετρική παραμόρφωση ε_v και την υδροστατική τάση σ_H από την εξίσωση (2.44), προκύπτει :

$$3 \cdot \int_0^{\varepsilon_v} \sigma_H \cdot d\varepsilon_v = \frac{1}{K} \cdot \int_0^{\sigma_H} \sigma_H \cdot d\sigma_H = \frac{1}{2K} \cdot \sigma_H^2 \quad (2.55)$$

Τα μεταλλικά υλικά θεωρούνται ανθεκτικά στην πλαστική διαρροή όταν υποβάλλονται σε υδροστατική τάση. Το κριτήριο διαρροής τους επομένως βασίζεται στην υπόθεση ότι τα μέταλλα διαρρέουν όταν η ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης φτάσει μια κρίσιμη τιμή ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο συνδυασμό τάσεων. Όταν μια ενδεικτική ράβδος υπό μονοαξονικό εφελκυσμό φτάσει την τάση σ_s που είναι το όριο ελαστικότητας, η αποκλίνουσα εντατική κατάσταση προσδιορίζεται από τους όρους: $2\sigma_s/3, -\sigma_s/3, -\sigma_s/3$.

Από την εξίσωση (2.56) η κρίσιμη ενέργεια της παραμόρφωσης υπολογίζεται ως εξής :

$$w_e = \frac{\sigma_s^2}{6G} \quad (2.56)$$

Για πολυαξονικές εντατικές καταστάσεις, η συνθήκη που ορίζει την ελαστική περιοχή μπορεί να βρεθεί εξισώνοντας την έκφραση της ενέργειας της παραμόρφωσης της εξίσωσης (2.56) με την κρίσιμη τιμή της για τη μονοαξονική δοκιμή, εξίσωση (2.58). Δηλαδή :

$$\frac{3}{2} \sigma_D^t \cdot \sigma_D = \sigma_s^2 \quad (2.57)$$

Η εξίσωση (2.59) προκαλεί την εισαγωγή της ισοδύναμης αποκλίνουσας τάσης $\bar{\sigma}$ που ορίζεται από :

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \sigma'_D \cdot \sigma_D = \frac{3}{2} \sigma'_D \cdot \sigma \quad (2.58)$$

ως ένα κριτήριο διαρροής. Αυτό το κριτήριο προτάθηκε από το Huber και τελευταία ανεξάρτητα από τον Von Mises. Η μετάβαση της δεύτερης έκφρασης στην εξίσωση (2.60) είναι εφικτή γιατί οι υδροστατικές τάσεις στην σ δεν συνεισφέρουν στο εσωτερικό γινόμενο με τις αποκλίνουσες τάσεις.

Η εξίσωση (2.59) σε συνδυασμό με τον ορισμό της εξίσωσης (2.60) προτείνει την εισαγωγή της συνάρτησης διαρροής $\phi(\sigma)$ έτσι ώστε

$$\phi(\sigma) = \bar{\sigma} - \sigma_s \leq 0 \quad (2.59)$$

Η συνάρτηση διαρροής ϕ συγκρίνει την εντατική κατάσταση σ με τη μονοαξονική τάση διαρροής σ_s του υλικού μέσω της ισοδύναμης τάσης $\bar{\sigma}$ και προσδιορίζει τη συνθήκη διαρροής όπως στην εξίσωση (2.61). Κατά συνέπεια, η τιμή της συνάρτησης διαρροής περιορίζει τις ελαστικές εντατικές καταστάσεις στο $\phi(\sigma) < 0$ και ορίζει τις πλαστικές καταστάσεις στο σημείο διαρροής $\phi(\sigma) = 0$.

2.3.2 Πλαστική ροή

Τα τελείως πλαστικά υλικά χωρίς κράτυνση χαρακτηρίζονται από μια συνεχή τάση διαρροής κι επομένως η συνθήκη διαρροής της εξίσωσης (2.61) παραμένει η

ίδια με την αρχική διαρροή ανεξάρτητα από την ποσότητα της πλαστικής παραμόρφωσης. Η συνάρτηση διαρροής ϕ για ένα συγκεκριμένο υλικό συνεπώς εξαρτάται μόνο από την τάση και εφόσον η τάση σ οδηγεί σε μια πλαστική κατάσταση $\phi(\sigma) = 0$, οι μεταβολές της τάσης σε σχέση με τη συνθήκη διαρροής περιορίζονται από την απαίτηση :

$$d\phi = \frac{d\phi}{d\sigma} \cdot d\sigma \leq 0 \quad (2.60)$$

Η μητρική διατύπωση της παραγωγίσιμης οδηγεί στους παρακάτω ορισμούς :

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \left[\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{xx}} \quad \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{yy}} \quad \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{zz}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{xy}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{yz}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{xz}} \right] \quad (2.61)$$

και

$$d\sigma = \left\{ d\sigma_{xx} \quad d\sigma_{yy} \quad d\sigma_{zz} \quad \sqrt{2} \cdot d\sigma_{xy} \quad \sqrt{2} \cdot d\sigma_{yz} \quad \sqrt{2} \cdot d\sigma_{xz} \right\} \quad (2.62)$$

Στην εξίσωση (2.62), το αρνητικό πρόσημο οδηγεί σε ελαστικές καταστάσεις $\phi + d\phi < 0$, ενώ η μετάβαση σε μια άλλη πλαστική κατάσταση $\phi + d\phi = 0$ προκύπτει από το σύμβολο της ισότητας και μπορεί να συνοδεύεται από πλαστική ροή.

Από την εξίσωση (2.61), οι μεταβολές της συνάρτησης διαρροής δίνονται από :

$$d\phi = d\bar{\sigma} \quad (2.63)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.60) ως προς την ισοδύναμη αποκλίνουσα τάση $\bar{\sigma}$ προκύπτει :

$$2\bar{\sigma} \cdot d\bar{\sigma} = \frac{3}{2} \cdot \left[\sigma'_D \cdot d\sigma_D + d\sigma'_D \cdot \sigma_D \right] \quad (2.64)$$

και αφού στο εσωτερικό γινόμενο οι όροι μπορούν να αντιμετατίθενται, ισχύει :

$$d\bar{\sigma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_D^t \cdot d\sigma_D = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_D^t \cdot d\sigma \quad (2.65)$$

Άρα, η παράγωγος (πηλίκο διαφορικών) της εξίσωσης (2.62) δίνει :

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_D^t \quad (2.66)$$

Η συνάρτηση διαρροής δεν μπορεί να αυξηθεί και επομένως οι παραδεκτές εντατικές προσαυξήσεις $d\sigma$ που απορρέουν από την πλαστική κατάσταση παράγουν μη-θετικά γινόμενα με την αποκλίνουσα τάση σ_D .

Οι πλαστικές μεταβολές της εντατικής κατάστασης στο $\phi(\sigma) = 0$ υπακούουν τη συνθήκη συνέπειας $d\phi = d\bar{\sigma} = 0$, η οποία μέσω της εξίσωσης (2.67) δίνει :

$$\sigma_D^t \cdot d\sigma_D = 2G \cdot \sigma_D^t \cdot d\varepsilon_D = 2G \cdot \sigma_D^t \cdot d\varepsilon = 0 \quad (2.67)$$

Η μετάβαση στην τελευταία έκφραση μαρτυρά ότι οι ογκομετρικοί όροι δε συνεισφέρουν στο εσωτερικό γινόμενο με την αποκλίνουσα ένταση. Από την εξίσωση (2.69), η απαλοιφή του $d\bar{\sigma}$ είναι ισοδύναμη με μια απαλειφόμενη προσαύξηση του έργου της ελαστικής παραμόρφωσης.

Εκφράζοντας το ελαστικό $d\varepsilon$ στην εξίσωση (2.69) από τη διαφορά ανάμεσα στη συνολική παραμορφωσιακή προσαύξηση $d\gamma$ και το πλαστικό μέρος $d\eta$ προκύπτει :

$$\sigma_D^t \cdot d\eta = \sigma_D^t \cdot d\gamma \geq 0 \quad (2.68)$$

Κατά την τελείως πλαστική ροή, το προσαυξητικό έργο της παραμόρφωσης μετατρέπεται πλήρως σε πλαστικό έργο διότι το ελαστικό μέρος απαλείφεται ως μια συνέπεια του $d\bar{\sigma} = 0$. Το δεξί μέρος της εξίσωσης (2.70) μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδενικό. Παρατηρείται όμως ότι οι αρνητικές τιμές μειώνουν την $\bar{\sigma}$ και συνδυάζονται με την ελαστική αποφόρτιση. Κατά συνέπεια, το αριστερό μέρος, που αφορά στην πλαστική ροή, μπορεί να αποκτήσει θετικές τιμές ή να εξαφανιστεί. Η ανισότητα στην εξίσωση (2.70) εκφράζει τη συνθήκη για πλαστική φόρτιση ως προς την παραμορφωσιακή προσαύξηση $d\gamma$ [1].

Επιπλέον της συνθήκης διαρροής και της υπόθεσης ενός υλικού χωρίς κράτυνση, χρειάζονται επίσης πληροφορίες για τη διεύθυνση της πλαστικής παραμόρφωσης, οι οποίες παρέχονται από το νόμο ροής. Για μέταλλα, από πειραματικά δεδομένα, οι προσαυξητικές πλαστικές παραμορφώσεις θεωρούνται ανάλογες συναξονικές στην αποκλίνουσα τάση όπου συμβαίνει η ροή :

$$d\eta = \Lambda \cdot \sigma_D \quad (2.69)$$

Ο νόμος ροής που εκφράζεται από την εξίσωση (2.71) επιβεβαιώνει ότι η πλαστική παραμόρφωση είναι ισόχωρη, καθώς το ογκομετρικό μέρος της πλαστικής παραμόρφωσης εξαφανίζεται :

$$\eta \equiv \eta_D \quad \eta_v = \frac{1}{3} \cdot e' \cdot \eta = 0 \quad (2.70)$$

Ο βαθμωτός πολλαπλασιαστής Λ στην εξίσωση (2.71) προσδιορίζεται από την εξίσωση (2.70) ως μια μη αρνητική ποσότητα. Κατά αυτόν τον τρόπο, η συνθήκη διαρροής, η υπόθεση μη κράτυνσης και ο νόμος ροής διαμορφώνουν μια έκφραση

για την προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση σε τελείως πλαστικά υλικά εφόσον η εντατική κατάσταση στη διαρροή και η προσαυξημένη παραμορφωσιακή μεταβολή είναι δεδομένες.

Με μια λογική ερμηνεία της εξίσωσης (2.71), εισάγεται μια θετική βαθμωτή ποσότητα $d\bar{\eta}$, ισοδύναμη με την προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση ως προς την ισότητα έργων :

$$\bar{\sigma} \cdot d\bar{\eta} = \sigma_D^t \cdot d\eta \quad (2.71)$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης (2.71) ως προς το $d\eta$ προκύπτει ο αναλογικός παράγοντας Λ ως εξής :

$$\Lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\eta}}{\bar{\sigma}} \quad (2.72)$$

Με την αποκλίνουσα τάση σ_D από τη εξίσωση (2.71), η εξίσωση (2.73) ορίζει την ισοδύναμη προσαύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης ως ένα μέτρο του μεγέθους της προσαυξημένης παραμορφωσιακής παραμόρφωσης :

$$\begin{aligned} d\bar{\eta}^2 &= \frac{2}{3} \cdot d\eta' \cdot d\eta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(d\eta_{xx}^2 + d\eta_{yy}^2 + d\eta_{zz}^2 + \frac{1}{2} \cdot d\eta_{xy}^2 + \frac{1}{2} \cdot d\eta_{yz}^2 + \frac{1}{2} \cdot d\eta_{xz}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Εναλλακτικά στην εξίσωση (2.71), η προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση μπορεί να εκφραστεί ως προς το μέγεθος $d\bar{\eta}$ και τη διεύθυνση s της πλαστικής ροής :

$$d\eta = d\bar{\eta} \cdot s \quad (2.74)$$

Η εισαγωγή της εξίσωσης (2.76) ως προς το $d\eta$ στην πρώτη εξίσωση (2.75)

δίνει:

$$s^t \cdot s = \frac{3}{2} \quad (2.75)$$

και επιβεβαιώνει το s ως ένα διάνυσμα διεύθυνσης σταθερού μήκους. Με σύγκριση της εξίσωσης (2.76) με την εξίσωση (2.71) και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2.74), το διάνυσμα s γίνεται :

$$s = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_D = \left[\frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} \right]^t = \left[\frac{d\phi}{d\sigma} \right]^t \quad (2.76)$$

Η ισότητα με τα πηλίκα διαφορικών αναφέρεται στην εξίσωση (2.68). Ο νόμος ροής και η συνθήκη διαρροής συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε η διεύθυνση της πλαστικής ροής να προκύπτει από τη συνάρτηση διαρροής $\phi(\sigma)$ με παραγωγή ως προς την τάση σ .

Με το s από την εξίσωση (2.78), η προσαύξηση της ισοδύναμης τάσης, εξίσωση (2.67), γίνεται :

$$d\bar{\sigma} = s^t \cdot d\sigma_D = s^t \cdot d\sigma \quad (2.77)$$

και πρέπει να είναι μη θετική για ένα τελείως πλαστικό υλικό. Κατά την πλαστική ροή, η απαλοιφή του $d\bar{\sigma}$ εκφράζεται :

$$s^t \cdot d\eta = s^t \cdot d\gamma \geq 0 \quad (2.78)$$

σε αντιστοιχία με την εξίσωση (2.70). Με το $d\eta$ από την εξίσωση (2.76), προκύπτει από την εξίσωση (2.80) το μέγεθος της προσαύξεσης της πλαστικής παραμόρφωσης

$$d\bar{\eta} = \frac{2}{3} \cdot s^t \cdot d\gamma \geq 0 \quad (2.79)$$

καθώς η ανισότητα ανταποκρίνεται στην συνθήκη πλαστικής φόρτισης.

Αντίστοιχα, η προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση δίνεται :

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{2}{3} \cdot s \cdot s^t \cdot d\gamma && \text{αν } s^t \cdot d\gamma > 0 \\ d\eta &= 0 && \text{διαφορετικά} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Η εξίσωση (2.82) περιγράφει τη ροή σε ένα τελείως πλαστικό υλικό όταν έχει φτάσει η κατάσταση διαρροής $\phi(\sigma) = 0$.

Στη συνέχεια, θα γίνει μια εκτεταμένη αναφορά στους νόμους κράτυνσης ακολουθώντας το βιβλίο του κ. Δολτσίνη - Elements of Plasticity Theory and Computation High Performance Structures and Materials [4]

2.4 Νόμοι Κράτυνσης

Η κράτυνση περιγράφει την επιρροή της πλαστικής παραμόρφωσης στη συνθήκη διαρροής. Η ισότροπη κράτυνση είναι επαρκής για πλαστική παραμόρφωση υπό μονοτονικές συνθήκες φόρτισης, ενώ η κυκλική πλαστικότητα περιγράφεται καλύτερα από το κινηματικό μοντέλο.

2.4.1 Ισότροπη κράτυνση

Σε αντίθεση με το τελείως πλαστικό μοντέλο, το κριτήριο διαρροής επηρεάζεται από την πλαστική παραμόρφωση για την περίπτωση των υλικών υπό κράτυνση. Τα χαρακτηριστικά τάσης – παραμόρφωσης καλύπτουν την περιγραφή των μονοτονικά εφαρμοζόμενων μονοαξονικών τάσεων, αλλά αφήνουν χώρο για εναλλακτικές ερμηνείες σχετικά με τις γενικότερες συνθήκες φόρτισης.

Το ισότροπο μοντέλο κράτυνσης υποθέτει ότι η πλαστική παραμόρφωση τροποποιεί τη συνθήκη φόρτισης ανεξάρτητα από τη διεύθυνση της προκαλούμενης τάσης. Στον κύριο χώρο των τάσεων, ο κυκλικός κύλινδρος που αντιπροσωπεύει την επιφάνεια διαρροής $\phi = 0$ επεκτείνεται γύρω από τον υδροστατικό άξονα. Στο αποκλίνον επίπεδο, ο κύκλος ορίζεται από την ακτίνα $r = \sqrt{2/3} \cdot \sigma_f$ από την αρχή. Η ακτίνα r ακολουθεί την αύξηση της τάσης διαρροής σ_f με πλαστική παραμόρφωση (σχήμα 2.9). Αντίστοιχα, η ισότροπη κράτυνση τροποποιεί τη συνθήκη φόρτισης ως εξής :

$$\phi(\sigma, \sigma_f) = \bar{\sigma} - \sigma_f \leq 0 \quad (2.81)$$

Η τάση διαρροής σ_f ορίζεται ως μια συνάρτηση της ενσωματωμένης ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\bar{\eta} = \int d\bar{\eta}$ μια βαθμωτή μέτρηση της πλαστικής παραμόρφωσης που υφίσταται το υλικό στα πλαίσια ενός τυχαίου προγράμματος φόρτισης. Η συναρτησιακή εξάρτηση $\sigma_f(\bar{\eta})$ θεωρείται χαρακτηριστικό του υλικού.

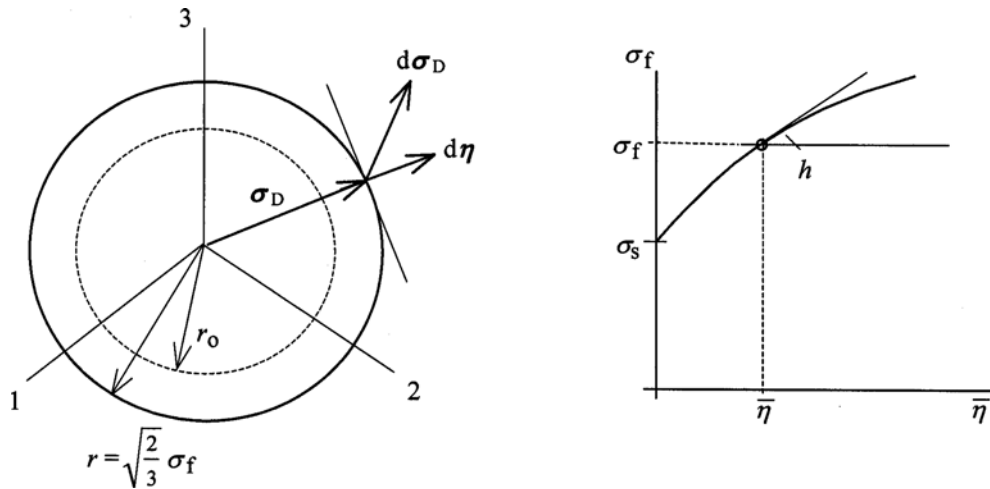
Μπορεί να συναχθεί από οποιοδήποτε πείραμα σε συνεχή πλαστική ροή στη μορφή:

$$\sigma_f(\bar{\eta}) = \bar{\sigma}(\bar{\eta}) \quad (2.82)$$

Για την εφελκυστική δοκιμή $\bar{\sigma} = \sigma$ και $\bar{\eta} = \eta$, επομένως η σχέση:

$$\sigma_f(\bar{\eta}) = \sigma(\eta) \quad (2.83)$$

μπορεί να παραχθεί από δεδομένα μονοαξονικών δοκιμών.



Σχ. 2.9 : Ισότροπη κράτυνση για την επιφάνεια διαρροής [4]

Οι πλαστικές καταστάσεις ορίζονται από $\phi = 0$ και κατά την πλαστική ροή $d\phi = 0$. Σε σύνδεση με την εξίσωση (2.83), η συνθήκη συνοχής δίνει:

$$\begin{aligned} d\phi = 0 \quad d\sigma_f = h \cdot d\bar{\eta} = d\bar{\sigma} \quad \text{και} \\ d\bar{\eta} = \frac{1}{h} \cdot d\bar{\sigma} = \frac{1}{h} \cdot s^t \cdot d\sigma \geq 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

όπου η εξίσωση (2.79) έχει χρησιμοποιηθεί για $d\bar{\sigma}$. Ο παράγοντας κράτυνσης προσδιορίζεται από την κλίση του χαρακτηριστικού μονοαξονικής ροής $\sigma(n)$.

$$h = \frac{d\sigma_f}{d\bar{\eta}} = \frac{d\sigma}{d\eta} \quad (2.85)$$

Η συνθήκη φόρτισης (εξίσωση 2.86) συνδέει την πλαστική ροή με την επέκταση της επιφάνειας διαρροής. Με το s όπως ορίζεται από την εξίσωση (2.78), η ισοδύναμη προσαύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης αποτελεί μια συνέπεια της προσαύξησης της τάσης $d\sigma$ που δείχνει εκτός της επιφάνειας διαρροής. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.86) για το $d\bar{\eta}$ στο νόμο ροής (εξίσωση 2.76), η προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση παίρνει τη μορφή :

$$d\eta = d\bar{\eta} \cdot s = \frac{1}{h} \cdot s \cdot s^t \cdot d\sigma \quad \text{για } d\bar{\sigma} = s^t \cdot d\sigma > 0 \quad (2.86)$$

Σε προέκταση της εξίσωσης (2.78), η διεύθυνση της πλαστικής ροής συνδυάζεται με την επιφάνεια διαρροής που αναφέρεται στην πραγματική κατάσταση κράτυνσης.

$$s = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_D = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right]_{\sigma_f = \text{const.}}^t \quad (2.87)$$

Υπέρθωση της προσαυξημένης πλαστικής παραμόρφωσης στην ελαστική προσδιορίζει την προσαύξηση της παραμόρφωσης για μια δεδομένη προσαύξηση της τάσης.

$$d\gamma = d\varepsilon + d\eta = k^{-1} \cdot \left[I + \frac{2 \cdot G}{h} \cdot s \cdot s^t \right] \cdot d\sigma \quad (2.88)$$

Αν μια προσαυξημένη τάση δεν ικανοποιεί τη συνθήκη για την πλαστική φόρτιση, η σχέση (2.89) θα πρέπει να μειωθεί στην ελαστική σχέση τάσης – παραμόρφωσης. Η παραπάνω διατύπωση αποτυγχάνει να περιγράψει τελείως πλαστικά υλικά με $h = 0$ γιατί η τάση δεν μπορεί να διαφοροποιείται αυθαίρετα σε αυτήν την περίπτωση, αλλά περιορίζεται από την συνθήκη $d\bar{\sigma} = s^t \cdot d\sigma = 0$. Μια εναλλακτική έκφραση προκύπτει σε όρους τάσης με $d\bar{\sigma} = 2 \cdot G \cdot s^t \cdot [d\gamma - d\eta]$ από την ελαστικότητα στην εξίσωση (2.86)

$$d\bar{\eta} = \frac{2 \cdot G}{h + 3 \cdot G} \cdot s^t \cdot d\gamma \geq 0 \quad (2.89)$$

και με το νόμο ροής (εξίσωση 2.78), η προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση γίνεται:

$$d\eta = d\bar{\eta} \cdot s = \frac{2 \cdot G}{h + 3 \cdot G} \cdot s \cdot s^t \cdot d\gamma \quad \text{για } s^t \cdot d\gamma > 0 \quad (2.90)$$

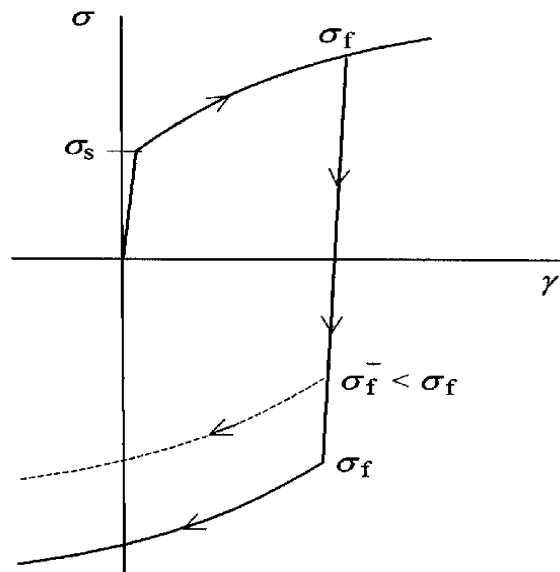
Η προσαυξημένη τάση αντιστοιχεί σε:

$$d\sigma = \kappa \cdot [d\gamma - d\eta] = \kappa \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot G}{h + 3 \cdot G} \cdot s \cdot s^t \right] \cdot d\gamma \quad (2.91)$$

Αυτή είναι η αντίστροφη σχέση της (2.89) και πρέπει να μειωθεί στην ελαστική εφόσον η προσαυξημένη παραμόρφωση $d\gamma$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη πλαστικής φόρτισης $s^t \cdot d\gamma > 0$. Η τελείως πλαστική περίπτωση αναπαράγεται για $h = 0$.

2.4.2 Κινηματική κράτυνση

Η ιστροπία του νόμου κράτυνσης υπονοεί ότι στη μονοαξονική περίπτωση, η τάση διαρροής σ_f που προκαλείται υπό εφελκυσμό εφαρμόζεται επίσης και στην επακόλουθη θλίψη και αντιστρόφως. Επομένως, η συνθήκη διαρροής που εκφράζεται από την εξίσωση (2.83) περιλαμβάνει ελαστικό εύρος τιμών της μονοαξονικής τάσης $-\sigma_f \leq \sigma \leq \sigma_f$. Η ελαστική περιοχή του δείγματος για εναλλασσόμενες ακολουθίες φόρτισης σε θλίψη και εφελκυσμό επεκτείνεται από την αρχική τάση $2\sigma_s$ στην πραγματική $2\sigma_f$ μέσω της πλαστικής παραμόρφωσης (σχ. 2.10).



Σχ. 2.10: Παρουσίαση φαινομένου Bauschinger [4]

Σύμφωνα με πειραματικές παρατηρήσεις, οι αναστροφές φόρτισης μειώνουν την τάση διαρροής έτσι ώστε $\sigma_f^- < \sigma_f^+$ το οποίο είναι γνωστό ως φαινόμενο Bauschinger. Σύμφωνα με αυτό, η αντοχή ενός υλικού κατά τη μία διεύθυνση μειώνεται όταν κατά την αντίθετη διεύθυνση έχει προηγηθεί πλαστική παραμόρφωση. Για να υπολογιστεί

αυτή η επιρροή, ο κινηματικός νόμος κράτυνσης που προτάθηκε από τον Prager υποθέτει ότι η αρχική επιφάνεια διαρροής παραμένει σταθερή, αλλά μετακινείται κατά την ανάπτυξη της πλαστικής παραμόρφωσης. Στον κύριο χώρο τάσεων, η επιφάνεια διαρροής στο αποκλίνον επίπεδο ορίζεται από την εξίσωση:

$$[\sigma_{DI} - \alpha_1]^t \cdot [\sigma_{DI} - \alpha_1] = r_o^2 \quad (2.92)$$

Αυτή η εξίσωση περιγράφει έναν κύκλο ακτίνας $r_o = \sqrt{2/3} \cdot \sigma_s$ με κέντρο μετακινημένο κατά α_1 από τον υδροστατικό άξονα. Το διάνυσμα α_1 είναι εξ ορισμού από τη φύση του αποκλίνον. Σε όρους τυχαίας τάσεως, το όριο διαρροής εκφράζεται:

$$[\sigma_D - \alpha]^t \cdot [\sigma_D - \alpha] = \frac{2}{3} \cdot \sigma_s^2 \quad (2.93)$$

Ορίζοντας την ισοδύναμη ποσότητα:

$$\bar{\sigma}_K^2 = \frac{3}{2} \cdot \sigma_{KD}^t \cdot \sigma_{KD} \quad (2.94)$$

με την κινηματική αποκλίνουσα τάση να δίνεται από τη διαφορά:

$$\sigma_{KD} = \sigma_D - \alpha \quad (2.95)$$

η συνθήκη φόρτισης μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη με την εξίσωση (2.83) ως εξής:

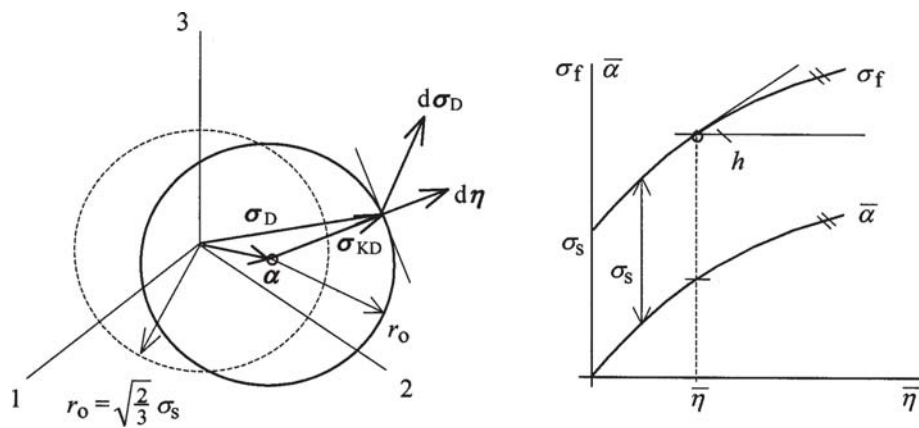
$$\phi_K(\sigma, \alpha) = \bar{\sigma}_K - \sigma_s \leq 0 \quad (2.96)$$

Η εξίσωση (2.98) υποδηλώνει την κινηματική κράτυση της επιφάνειας διαρροής από το αποκλίνον εντατικό διάνυσμα:

$$a = \left\{ a_{xx} \quad \alpha_{yy} \quad \alpha_{zz} \quad \sqrt{2}\alpha_{xy} \quad \sqrt{2}\alpha_{yz} \quad \sqrt{2}\alpha_{xz} \right\} \quad (2.97)$$

το οποίο μεταβάλλεται σε αναλογία με την προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση:

$$d\alpha = C \cdot d\eta = \frac{2}{3} \cdot h \cdot d\eta \quad (2.98)$$



Σχ. 2.11 : Κινηματικό Μοντέλο Κράτυσης [4]

Το διάνυσμα a λαμβάνει υπόψη την απομένουσα μικροένταση (residual microstresses) στο υλικό ως αποτέλεσμα της πλαστικής παραμόρφωσης. Η διαφορά $\sigma_{KD} = \sigma_D - a$ είναι προφανώς η ενεργός τάση στο παρόν μοντέλο πλαστικότητας.

Στην περίπτωση της μονοαξονικής τάσης σ όπου:

$$\sigma_D = \left\{ \frac{2}{3}\sigma \quad -\frac{\sigma}{3} \quad -\frac{\sigma}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}, \quad \alpha = \left\{ \alpha \quad -\frac{\alpha}{2} \quad -\frac{\alpha}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (2.99)$$

η ισοδύναμη ποσότητα τάσης στην εξίσωση (2.98) γίνεται:

$$\bar{\sigma}_k = \left| \sigma - \frac{3}{2} \alpha \right| \quad (2.100)$$

Η συνθήκη διαρροής τότε περιορίζει την ελαστική εντατική κατάσταση ως εξής:

$$-\sigma_s \leq \sigma - \frac{3}{2} \alpha \leq \sigma_s \quad (2.101)$$

η οποία μειώνει το άνοιγμα για ελαστικές ακολουθίες της τάσης από εφελκυσμό σε θλίψη και αντιστρόφως, σε $2\sigma_s$ (σχήμα 2.11). Αν η πλαστική παραμόρφωση αναπτύσσεται υπό εφελκυστική δράση, η τάση ακολουθεί τα μονοαξονικά χαρακτηριστικά κράτυνσης:

$$\sigma = \sigma_s + \frac{3}{2} a = \sigma_f(\eta) \quad \text{και} \quad \frac{3}{2} a = \sigma_f(\eta) - \sigma_s \quad (2.102)$$

Στην αντιστροφή των τάσεων, το ελαστικό πεδίο περιορίζεται ως εξής:

$$\sigma_f - 2\sigma_s \leq \sigma \leq \sigma_f \quad (2.103)$$

Από την εξίσωση (iv), για προσαυξητικές μεταβολές σε συνεχή φόρτιση:

$$\frac{3}{2} da = h \cdot d\eta = \frac{3}{2} C \cdot d\eta \quad \text{και} \quad C = \frac{2}{3} \cdot h \quad (2.104)$$

Στην εξίσωση (2.104), η αναλογία $d\alpha = C \cdot d\eta$ χρησιμοποιείται μεταξύ των αξονικών παραγόντων και καθορίζει τον αναλογικό παράγοντα C όπως διατυπώθηκε στην σχέση (2.100). Η προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση παρουσιάζεται στη μορφή:

$$d\eta = d\bar{\eta} \cdot s_K \quad (2.105)$$

Η διεύθυνση της πλαστικής ροής s_K ορίζεται από:

$$s_K = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}_K} \cdot \sigma_{KD} = \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_K}{\partial \sigma} \right]^t = \left[\frac{\partial \phi_K}{\partial \sigma} \right]^t \quad (2.106)$$

και συνδυάζεται με την συνθήκη διαρροής της εξίσωσης (2.98).

Η συνθήκη συνοχής κατά την πλαστική ροή είναι: $d\phi_K = d\bar{\sigma}_K = 0$. Με την εξίσωση (2.97) για το $\bar{\sigma}_K$:

$$d\bar{\sigma}_K = s'_K \cdot [d\sigma - da] = 0 \quad (2.107)$$

Μέσω της εξίσωσης (2.100) για το da και της (2.107) για το $d\eta$:

$$s'_K \cdot da = \frac{2}{3} \cdot h \cdot s'_K \cdot d\eta = h \cdot d\bar{\eta} \quad (2.108)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.109):

$$d\bar{\eta} = \frac{1}{h} \cdot s'_K \cdot d\sigma \geq 0 \quad (2.109)$$

Η προσαυξημένη πλαστική παραμόρφωση της εξίσωσης (2.107)

$$d\bar{\eta} = \frac{1}{h} \cdot s_K^t \cdot d\sigma \quad \text{για } s_K^t \cdot d\sigma > 0 \quad (2.110)$$

τότε προκύπτει τυπικά να είναι τελείως ανάλογη με το προηγούμενο ισότροπο μοντέλο κράτυνσης. Παρομοίως, η έκφραση ως προς την προσαύξηση της παραμόρφωσης $d\gamma$ αντί για $d\sigma$ και την ολοκληρωμένη προσαυξημένη σχέση τάσης – παραμόρφωσης είναι ανάλογες με εκείνες για ισότροπη κράτυνση.

Η εξίσωση (2.110) προτείνει εισαγωγή της ποσότητας:

$$d\bar{a} = s_K^t \cdot da = d\sigma_f \quad \text{και} \quad \bar{a} = \int d\bar{a} = \sigma_f - \sigma_s \quad (2.111)$$

ως μια βαθμωτή μέτρηση της κινηματικής κράτυνσης. Επιπλέον για λόγους πληρότητας, σημειώνονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$da = \frac{2}{3} d\bar{a} \cdot s_K \quad , \quad d\bar{a}^2 = \frac{3}{2} da^t \cdot da \quad (2.112)$$

2.4.3 Μεικτό Μοντέλο Κράτυνσης

Ένας συνδυασμός κινηματικής και ισότροπης κράτυνσης μπορεί να προκύψει με την έκφραση της συνθήκης διαρροής στη μορφή:

$$\phi_M = \bar{\sigma}_K - \sigma_{is} \leq 0 \quad (2.113)$$

Εν αντιθέσει με την σταθερή τάση σ_s στην εξίσωση (2.98), η παράμετρος του υλικού σ_{is} , θεωρείται ότι διαφοροποιείται ανάλογα με την πλαστική παραμόρφωση:

$$\sigma_{is} = \sigma_{is}(\bar{\eta}) \quad \text{και} \quad d\sigma_{is} = C_{is} \cdot d\bar{\eta} \quad (2.114)$$

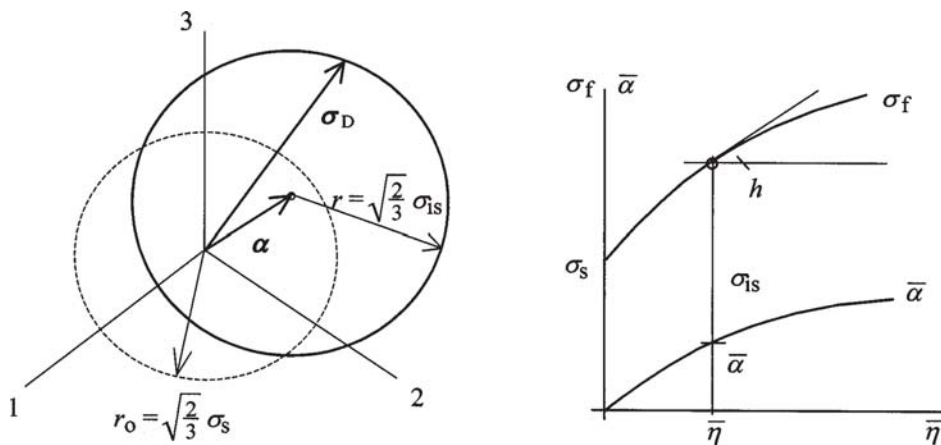
Για μονοαξονικό εφελκυσμό:

$$\sigma = \sigma_{is}(\eta) + \frac{3}{2} \alpha = \sigma_f(\eta) \quad (2.115)$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12. Με παραγωγή:

$$\frac{d\sigma_{is}}{d\eta} + \frac{3}{2} \cdot \frac{d\alpha}{d\eta} = C_{is} + \frac{3}{2} C_K = h \quad (2.116)$$

όπου το C_K αναφέρεται στον κινηματικό όρο της εξίσωσης (2.100). Για $C_K = 0$ η εξίσωση (2.113) περιγράφει την ισότροπη κράτυνση. Για $C_s = 0$ περιγράφει το κινηματικό μοντέλο κράτυνσης.



Σχ. 2.12 : Μεικτό μοντέλο κράτυνσης [4]

2.5 Μια γενική οπτική της ελαστοπλαστικής καταστατικής περιγραφής

Στον χώρο των απειροελάχιστων παραμορφώσεων, η παραμόρφωση γ θεωρείται να αποτελείται από ένα ελαστικό μέρος ε και ένα ανελαστικό η . Για προσαυξημένες ποσότητες:

$$d\gamma = d\varepsilon + d\eta = \kappa^{-1} \cdot d\sigma + d\eta \quad (2.119)$$

Η προσαύξηση της ελαστικής παραμόρφωσης $d\varepsilon$ συνδέεται με την εντατική προσαύξηση $d\sigma$ μέσω του νόμου ελαστικότητας. Η μεταβολή $d\eta$ της ανελαστικής παραμόρφωσης είναι το αποτέλεσμα της πλαστικής ροής. Η θεωρία πλαστικότητας βασίζεται στη συνθήκη διαρροής:

$$\phi(\sigma, q) \leq 0 \quad (2.120)$$

όπου η εντατική κατάσταση σ εισάγει τη συνάρτηση διαρροής ϕ και το q δηλώνει το παραμετρικό στοιχείο του διανύσματος που περιγράφει την στιγμιαία πλαστική κατάσταση του υλικού. Στη συνέχεια, με ευκολία προσδιορίζονται οι παράμετροι για το στοιχείο q για το μοντέλο κράτυνσης που παρουσιάστηκε.

Η εξίσωση $\phi(\sigma, q) = 0$ περιορίζει τον ελαστικό χώρο για την τάση σ στην στιγμιαία κατάσταση κράτυνσης. Περιγράφει μια κυρτή επιφάνεια στον εντατικό χώρο με παραμέτρους τις μεταβλητές κράτυνσης q . Για τάσεις μέσα στην επιφάνεια διαρροής ($\phi(\sigma, q) < 0$), το υλικό είναι σε ελαστική κατάσταση, ενώ οι τάσεις που βρίσκονται πάνω σε αυτήν ορίζονται ως πλαστικές.

Η πλαστική ροή επηρεάζει την επιφάνεια διαρροής των υλικών υπό κράτυνση. Θεωρείται η ακόλουθη σχέση μεταξύ της μεταβολής των παραμέτρων κράτυνσης και της πλαστικής παραμόρφωσης:

$$dq = H \cdot d\eta \quad (2.121)$$

Ο νόμος ροής ορίζει την διεύθυνση της πλαστικής ροής με την εντατική κατάσταση στο $\phi(\sigma, q) = 0$. Ο συνδυασμένος νόμος ροής προέρχεται από τη συνάρτηση διαρροής:

$$d\eta = \Lambda \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right]^t = \Lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^t} \quad (\Lambda \geq 0) \quad (2.117)$$

Ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικότητας σε σχέση με την επιφάνεια διαρροής. Η συνεχής πλαστική ροή καθορίζεται από την απαίτηση $d\phi = 0$, την συνθήκη συνοχής. Κάνοντας χρήση του νόμου κράτυνσης και του νόμου ροής:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot dq = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \Lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot H \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^t} \quad (2.118)$$

και

$$\Lambda = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot H \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^t} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot d\sigma \geq 0 \quad (2.124)$$

Από τη συνθήκη διαρροής, η πραγματοποίηση της πλαστικής ροής απαιτεί $\phi = 0$ και $(\partial \phi / \partial \sigma) \cdot d\sigma > 0$, το οποίο ορίζει την πλαστική συνθήκη φόρτισης. Διαφορετικά, η αλλαγή της κατάστασης είναι ελαστική. Παρατηρείται ότι η δημιουργία της συνθήκης διαρροής πρέπει να είναι τέτοια ώστε η σύμβαση $\Lambda > 0$ να συναντάται

στην πλαστική φόρτιση. Αυτό απαιτεί ότι ο βαθμιαίος παράγοντας κράτυνσης είναι μια θετική ποσότητα.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot H \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^t} > 0 \quad (2.119)$$

Ο προσδιορισμός της επαύξεσης της πλαστικής παραμόρφωσης $d\eta$ ως προς την στοιχειώδη επαύξεση της τάσης $d\sigma$ συμπληρώνεται ως εξής:

$$d\eta = \Lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^t} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot H \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^t} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma^t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot d\sigma \quad (2.126)$$

Αν δίνεται η επαύξεση της παραμόρφωσης αντί για αυτήν της τάσης, μπορεί να εισαχθεί στην εξίσωση της πλαστικής ροής μέσω της εξίσωσης της ελαστικότητας. Η συνθήκη συνοχής τότε λαμβάνει τη μορφή:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot dq = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot \kappa \cdot d\gamma - \left[\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot \kappa - \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot H \right] \cdot d\eta = 0 \quad (2.120)$$

Εφαρμόζοντας το νόμο ροής για το $d\eta$ και επιλύοντας για τον βαθμωτό πολλαπλασιαστή προκύπτει:

$$\Lambda = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_t} - \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot H \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_t} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot \kappa \cdot d\gamma \geq 0 \quad (2.121)$$

το οποίο ολοκληρώνει τον προσδιορισμό της προσαυξημένης πλαστικής παραμόρφωσης ως προς την προσαύξηση της παραμόρφωσης. Η συνθήκη για την πλαστική φόρτιση είναι $(d\phi/d\sigma) \cdot \kappa \cdot d\gamma > 0$.

Στην παραπάνω έκφραση του Λ , ο δεύτερος όρος στην παρένθεση είναι μια αρνητική βαθμωτή ποσότητα. Η πρώτη είναι θετική αφού μπορεί να ερμηνευθεί ως ελαστική ενέργεια. Συμπεραίνεται ότι η πλαστική συνθήκη φόρτισης είναι σύμφωνη με τη σύμβαση $\Lambda > 0$.

Μια εναλλακτική παρουσίαση του νόμου ροής δίνει:

$$d\eta = \Lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma'} = d\bar{\eta} \cdot s \quad (2.129)$$

Το μέγεθος $d\bar{\eta}$ της επαυξημένης πλαστικής παραμόρφωσης ορίζεται ως εξής:

$$d\bar{\eta}^2 = \frac{2}{3} \cdot d\eta' \cdot d\eta \quad (2.130)$$

Και επομένως, το διάνυσμα s κατέχει την ιδιότητα ενός σταθερού μήκους

$$s' \cdot s = \frac{3}{2} \quad (2.1221)$$

Με τον συνδυασμένο νόμο ροής για το $d\eta$, ο ορισμός του $d\bar{\eta}$ συμπληρώνει την σχέση:

$$d\bar{\eta} = \Lambda \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma'} \right)^{1/2} \geq 0 \quad (2.132)$$

Κ και αντικατάσταση στην εναλλακτική παρουσίαση δίνει τη διεύθυνση ροής:

$$s = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma'} \right)^{-1/2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma'} \quad (2.123)$$

Είναι προφανές ότι οι ταυτότητες $d\bar{\eta} \equiv \Lambda$ και $s \equiv \partial \phi / \partial \sigma'$ λαμβάνονται αν η συνθήκη διαρροής ορίζεται έτσι ώστε $(\partial \phi / \partial \sigma) \cdot \partial \phi / \partial \sigma' = 3/2$.

Υπενθυμίζεται ότι θεωρήθηκε η προσέγγιση ροής της πλαστικότητας στην πιο συχνά εφαρμοζόμενη μορφή της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Υστερητικό Προσομοίωμα

Bouc - Wen

3.1 Εισαγωγή

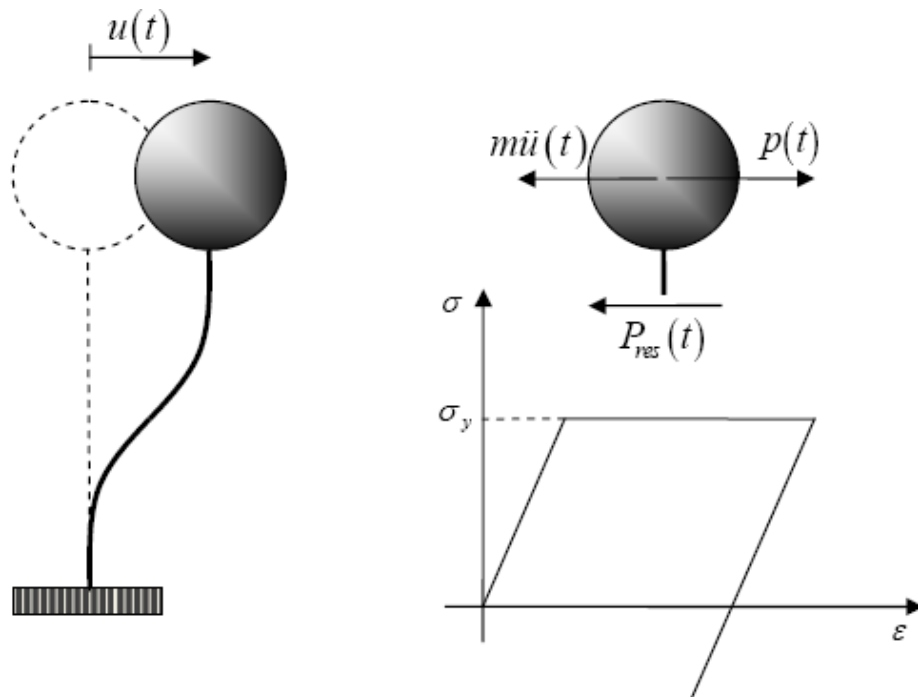
Η υστέρηση των κατασκευών στα πλαίσια της μη – γραμμικής ανάλυσης αποτελεί την βάση πάνω στην οποία κινήθηκαν οι διάφορες επιστημονικές προσπάθειες περιγραφής και προσομοίωσης της ανακλυκλιζόμενης συμπεριφοράς. Σε αυτήν την εργασία, εξετάζεται το υστερητικό προσομοίωμα Bouc – Wen (Wen 1976, 1980), ωστόσο έχουν καταγραφεί κι άλλες σημαντικές προσπάθειες προσομοίωσης (από τον Massing (1925), τον Preisac (1935), τον Bouc (1967) τον Valanis (1971),), το προσομοίωμα Baber-Noori (Baber και Wen 1980, Baber et al. 1986) και το προσομοίωμα Reinhorn (Sivaselvan και Reinhorn, 2000)). Η διαδικασία εμπεριέχει τη διαμόρφωση μιας ομαλής υστερητικής συνάρτησης που μεταβάλλεται από ένα σύνολο παραμέτρων που επιλέγονται εξωτερικά. Τα προσομοιώματα αυτά ονομάζονται ομαλά υστερητικά προσομοιώματα και αναπτύχθηκαν στη διδακτορική διατριβή του Σ.Τριανταφύλλου [7^α] και ειδικότερα στην εργασία [7β].

Η χρησιμότητα του Bouc-Wen μοντέλου επιτρέπει την προσομοίωση ποιοτικά διαφορετικών υστερητικών αποκρίσεων τροποποιώντας τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου. Το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου διατυπώνεται εφαρμόζοντας την αρχή των πραγματικών μετατοπίσεων, όπου η ελαστική σχέση τάσης-παραμόρφωσης αντικαθίσταται από την εισαγόμενη υστερητική σχέση. Επομένως, το παραγόμενο μητρώο δυσκαμψίας εύλογα αναλύεται σε ελαστικό και υστερητικό μέρος που εκφράζει την ανελαστική συμπεριφορά του στοιχείου. Τριαξονικά, αυτό που έχει επιτευχθεί είναι η ανάπτυξη μιας τρισδιάστατης σχέσης έντασης - παραμόρφωσης σε ανάλογη μορφή κατάλληλη για κάθε τύπο κριτηρίων διαρροής και συμπεριφοράς κράτυνσης.

Επιπλέον, στόχο της προτεινόμενης διατύπωσης αποτελεί η κάλυψη κυκλικών φαινομένων όπως η εξασθένηση της ακαμψίας (stiffness degradation) και η μείωση της δύναμης (strength deterioration)

3.2 Υστέρηση

Εξετάζεται ο μονοβάθμιος ταλαντωτής της εικόνας 3.1 ο οποίος έχει συμπεριφορά ελαστικού – απολύτως πλαστικού υλικού με τάση διαρροής σ_y .



Σχ. 3.1: Μονοβάθμιος ταλαντωτής υπό ανακυκλιζόμενη φόρτιση

$\varepsilon = \varepsilon(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε το προκύπτον διάνυσμα $(\sigma(t), \varepsilon(t))$ να συμπίπτει με την καμπύλη της Εικόνας 3.2.

Έτσι, το πρόβλημα της υστέρησης ισοδυναμεί με το μαθηματικό πρόβλημα της εύρεσης ενός συναρτησιακού $B[In](t)$ όπου $In : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια αυθαίρετη χρονοϊστορία «εισόδου» όπως μετατόπιση, ανηγμένη παραμόρφωση. Από φυσικής πλευράς, το συναρτησιακό πρέπει να είναι ανεξάρτητο του ρυθμού μεταβολής καθώς η υστερητική ενέργεια που συσσωρεύεται σε διαδοχικούς κύκλους φόρτισης και αποφόρτισης δεν εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων «εισόδου» ή «εξόδου». Επιπλέον, το συναρτησιακό της υστέρησης πρέπει να είναι τμηματικά μονότονο, όπως υποδηλώνει το σχήμα των βρόχων υστέρησης (σε σχέση με το Σχ. 3.2, μονοτονικά αυξανόμενο στη διαδρομή OAB και μονοτονικά φθίνον στη διαδρομή BCD) και επίσης πρέπει να έχει μνήμη.

3.3 Μονοαξονική διατύπωση

Σύμφωνα με το μοντέλο της πλαστικότητας που παρουσιάζεται στην Εικ.3.3, η σχέση γενικευμένης έντασης - γενικευμένης παραμόρφωσης Bouc – Wen διατυπώνεται στις ακόλουθες σχέσεις:

$$\ddot{u} + c \cdot \dot{u} + P = p(t) \quad (3.2)$$

$$P = a \cdot k \cdot u - (1 - a) \cdot k \cdot z$$

P είναι η δύναμη επαναφοράς Bouc - Wen

u το συνολικό μέρος της γενικευμένης ποσότητας παραμόρφωσης

a ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας με την ελαστική δυσκαμψία

c η σταθερά απόσβεσης ιξώδους χαρακτήρα

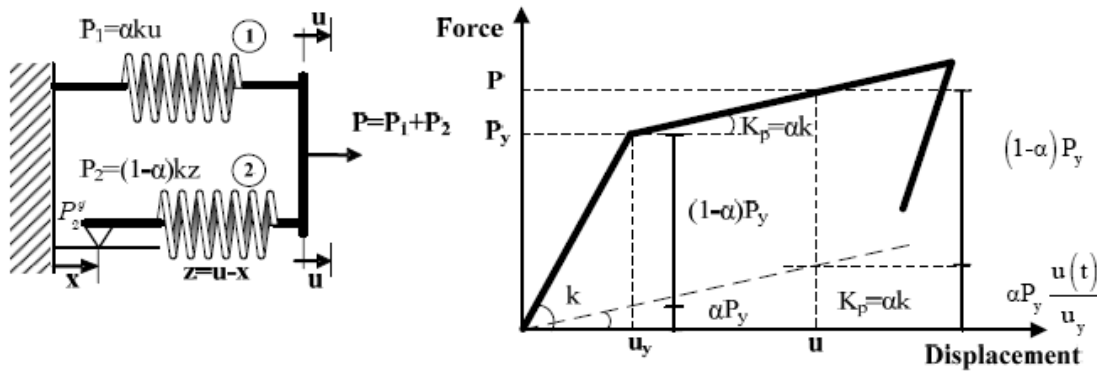
k η ελαστική δυσκαμψία

z μια υστερητική μετατόπιση του συστήματος

Ο Bouc [2] πρότεινε την ακόλουθη σχέση προκειμένου να εξομαλύνει τη μετάβαση από την ελαστική στην ανελαστική απόκριση του συστήματος.

$$\dot{z}(t) = f(\dot{u}(t), z(t)) = \dot{u} \cdot (1 - a) \cdot K \cdot \left[1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n \cdot (\beta + \gamma \cdot \text{sgn}(z \cdot \dot{u})) \right] \quad (3.3)$$

Στην παραπάνω σχέση, η παράμετρος n ελέγχει την ομαλότητα της μετάβασης από την ελαστική στην ανελαστική περιοχή, ενώ οι όροι β και γ είναι συναρτήσεις σχήματος που επηρεάζουν το σχήμα του υστερητικού βρόγχου. Το z_y αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου. Στα πλαίσια της προτεινόμενης διατύπωσης και θεωρώντας την σταθερά απόσβεσης ιξώδους χαρακτήρα $c = 0$, το προσομοίωμα ουσιαστικά απεικονίζεται ως ένας εν παραλλήλω συνδυασμός ενός γραμμικού ελατηρίου (ελατήριο 1) και ενός μη – γραμμικού στοιχείου που αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο (ελατήριο 2) και ένα ολισθητήρα συνδεδεμένα εν σειρά. Επομένως, εισάγεται ένα διβάθμιο σύστημα όπου ορίζεται ως u η συνολική μετατόπιση και η σχετική μετατόπιση του ελατηρίου 2. Για λόγους συμβιβαστού των μετακινήσεων, η μετατόπιση του ολισθητήρα ορίζεται από την διαφορά $x = u - z$, εφόσον αυτή υπάρχει. Το προσομοίωμα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, καθώς και η υστερητική συμπεριφορά στο διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων.



Σχ.3.3: Σειριακό μοντέλο Bouc-wen : (α) Διαχωρισμός συστατικών μερών προσομοιώματος Bouc – Wen και (β) Υστερητική απόκριση

Στο προσομοίωμα διακρίνονται οι εξής δύο περιπτώσεις:

α) Η επενεργούσα δύναμη στον ολισθητήρα να είναι μικρότερη από P_y , οπότε δεν υπάρχει ολίσθηση ($x=0$) και η σχετική μετατόπιση του ελατηρίου 2 ισούται με την επιβαλλόμενη μετακίνηση. Τότε, το σύστημα αναπτύσσει ελαστική συμπεριφορά με συνδυασμένη δυσκαμψία k όπως προκύπτει από την επαλληλία των ελαστικών δυσκαμψιών $a \cdot k$ του ελατηρίου 1 και $(1-a) \cdot k$ του ελατηρίου 2. Το a ισοδυναμεί με τον λόγο της ανελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία.

β) Η δύναμη να ξεπερνάει το όριο του ολισθητήρα, πραγματοποιείται ολίσθηση και η μετατόπιση στο ελατήριο 2 είναι η z_y και παραμένει σταθερή.

Τα παραπάνω στάδια συνοψίζονται στην ακόλουθη σχέση δύναμης – μετατόπισης.

$$P = P_1 + P_2 = a \cdot k \cdot u + (1-a) \cdot k \cdot z \quad (3.4)$$

όπου :

$$z = \begin{cases} u, & x < x_y \\ z_y, & x > x_y \end{cases} \quad (3.5)$$

Στις εφαρμογές του μηχανικού, η εσωτερική μεταβλητή x δεν μπορεί να μετρηθεί εύκολα, αλλά ούτε και να προκύψει θεωρητικά, οπότε αντί αυτής, χρησιμοποιείται η συνολική μετατόπιση στην οποία λαμβάνει χώρα η ολίσθηση. Αυτή προκύπτει από μια δοκιμή μονοαξονικού εφελκυσμού ή εφαρμόζοντας ένα κριτήριο διαρροής κι έτσι η σχέση (3.5) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως:

$$z = \begin{cases} u, & u < u_y \\ u_y, & u > u_y \end{cases} \quad (3.6)$$

Ο Bouc το 1976 πρότεινε την ακόλουθη σχέση με σκοπό την εξομαλύνση της μετάβασης από την ελαστική (χωρίς ολίσθηση) στην ανελαστική απόκριση (με ολίσθηση) του συστήματος:

$$\dot{z}(t) = f(\dot{u}(t), z(t)) = \dot{u} [1 - h_1 \cdot h_2] \quad (3.7)$$

όπου :

$$h_1 = \left| \frac{z}{z_y} \right|^n \quad (3.8)$$

$$h_2 = (\beta + \gamma \cdot \text{sgn}(z \cdot \dot{u}))$$

Το h_1 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μονοαξονικό κριτήριο διαρροής και το h_2 ως ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ανακυκλιζόμενης φόρτισης, ενώ στην παραπάνω σχέση, το σύμβολο (\cdot) δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο. Η παράμετρος n ελέγχει την ομαλότητα της μετάβασης από την ελαστική στην ανελαστική περιοχή,

ενώ οι όροι β και γ οι οποίοι εισάγονται στη σχέση (3.8) είναι συντελεστές σχήματος που επηρεάζουν το σχήμα του βρόχου υστέρησης.

Για μονοαξονικά μοντέλα, αναπτύσσεται μια παρόμοια υστερητική σχέση σε όρους τάσης – παραμόρφωσης (Cheng & Wen, 1991):

$$\sigma(t) = \sigma_y \cdot \left[\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_y} - (1-a) \cdot \frac{z(t)}{\varepsilon_y} \right] = E \cdot \varepsilon(t) - (1-a) \cdot E \cdot z(t) \quad (3.στ) \quad (3.9)$$

όπου :

σ_y είναι η τάση διαρροής,

ε_y η παραμόρφωση διαρροής,

E το αρχικό μέτρο ελαστικότητας,

a ο λόγος της μετελαστικής δυσκαμψίας με την ελαστική δυσκαμψία,

$z(t)$ το υστερητικό μέρος που ορίζεται στην σχέση (3.7).

Μια παρόμοια καταστατική εξίσωση μπορεί να παραχθεί για σχέση μονοαξονικής διατμητικής τάσης - διατμητικής παραμόρφωσης. Υπάρχουν διαφοροποιήσεις του μοντέλου που επιτρέπουν την προσομοίωση των κυκλικά

παραγόμενων φαινομένων όπως είναι η εξασθένιση της ακαμψίας (stiffness degradation), η μείωση της δύναμης (strength deterioration) ή το φαινόμενο του «pinching». Γενικεύοντας την ιδέα, ο Casciati απέδειξε ότι η σχέση Bouc-Wen μπορεί να διαμορφωθεί επίσης στον τρισδιάστατο χώρο τάσης – παραμόρφωσης, ξεκινώντας από ένα μη-γραμμικό σύστημα με γραμμική κινηματική κράτυνση,

ενσωματώνοντας ένα δεδομένο κριτήριο αστοχίας Tresca ή Von Mises και εισάγοντας τις κατάλληλες συναρτήσεις εξομάλυνσης.

3.4 Πολυαξονική υστερητική διατύπωση

Η κλασική πλαστικότητα βασίζεται σε ένα σύστημα κατευθυντήριων καταστατικών εξισώσεων, συγκεκριμένα το νόμο ροής, τη συνθήκη διαρροής, τη συνθήκη συνεκτικότητας, το νόμο κράτυνσης και στον επιπρόσθετο διαχωρισμό του ρυθμού μεταβολής της παραμόρφωσης [5]. Στην παρούσα εργασία λαμβάνεται υπόψη η περίπτωση της συσχετισμένης πλαστικότητας όπου το πλαστικό δυναμικό ταυτίζεται με το νόμο ροής. Ο νόμος ροής της κλασικής πλαστικότητας ορίζει το ρυθμό μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης ως εξής:

$$\{\dot{\varepsilon}^p\} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\}, \{\eta\})}{\partial \{\sigma\}} \quad (3.10)$$

όπου :

$\{\dot{\varepsilon}^p\}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του τανυστή πλαστικών τάσεων,

Φ είναι η συνάρτηση διαρροής,

$\dot{\lambda}$ είναι ο πλαστικός πολλαπλασιαστής,

$\{\sigma\}$ ο τανυστής τάσεων, ενώ το

(.) δηλώνει παραγωγή ως προς τον χρόνο.

Για τον πλαστικό πολλαπλασιαστή και την συνάρτηση διαρροής προϋποτίθεται ότι:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\lambda} \cdot \Phi = 0 \quad (3.11)$$

που ταυτίζεται με τις συνθήκες βελτιστοποίησης Kuhn-Tucker.

Μια άμεση συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι η συνθήκη συνεκτικότητας που δηλώνει ότι στη διαρροή ισχύει:

$$\dot{\lambda} \cdot \dot{\Phi} = 0 \quad (3.12)$$

Ένα κλασικό ισοτροπικό κριτήριο διαρροής (ή μοντέλο πλαστικότητας) είναι το κριτήριο διαρροής Von-Mises το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\Phi = \|\{\sigma\} - \{\eta\}\| - \sigma_M \leq 0 \quad (3.13)$$

όπου:

$\{\sigma\}$ είναι ο αποκλίνων τανυστής τάσεων,

$\{\eta\}$ ο αποκλίνων τανυστής εσωτερικής τάσης.

Η εξέλιξη της εσωτερικής τάσης καθορίζει τον εισαχθέντα τύπο της κράτυνσης στο προσομοίωμα του υλικού για διαχρονικούς κύκλους φόρτισης και αποφόρτισης. Ένας συνήθης χρησιμοποιούμενος τύπος κράτυνσης είναι το γραμμικό κινηματικό μοντέλο κράτυνσης το οποίο διαμορφώνει ένα σταθερό μέτρο πλαστικότητας κατά την πλαστική φόρτιση και εκφράζεται ως εξής:

$$\{\dot{\eta}\} = C \cdot \{\dot{\varepsilon}^p\} \quad (3.14)$$

όπου το C ορίζεται ως η σταθερά κράτυνσης του υλικού.

Η κλασική πλαστικότητα βασίζεται σε έναν επιπρόσθετο διαχωρισμό της τάσης σε ένα αναστρέψιμο ελαστικό και σε ένα μόνιμο πλαστικό μέρος, το οποίο προκύπτει ευθέως από την αρχή διατήρησης ενέργειας. Συνεπώς, ο επιπρόσθετος διαχωρισμός του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης καταγράφεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^{el}\} + \{\dot{\varepsilon}^p\} \Rightarrow \{\dot{\varepsilon}^{el}\} = \{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^p\} \quad (3.15)$$

όπου :

$\{\dot{\varepsilon}\}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του τανυστή συνολικής παραμόρφωσης

$\{\dot{\varepsilon}^{el}\}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του ελαστικού μέρους του διανύσματος ολικής παραμόρφωσης.

Βάσει μιας φαινομενολογικής προσέγγισης, η ακαμψία στην αποφόρτιση ενός υλικού υπό διαρροή θεωρείται ίση με την ελαστική ακαμψία και επομένως ο τανυστής συνολικής τάσης και το ελαστικό μέρος του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \cdot \{\dot{\varepsilon}^{el}\} \quad (3.16)$$

όπου το $[D]$ είναι το ελαστικό καταστατικό μητρώο.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.10) στην σχέση (3.15) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.16) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \cdot \left([\dot{\varepsilon}] - \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}} \right) \quad (3.17)$$

Μέσω της συνθήκης συνεκτικότητας, η τιμή του πλαστικού πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$ γίνεται:

$$\dot{\lambda} \cdot \dot{\Phi} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} \cdot \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot \{\dot{\sigma}\} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} \right)^T \cdot \{\dot{\eta}\} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Κατά τη διαρροή, ισχύει $\Phi = 0$ και $\dot{\lambda} > 0$ και επομένως η σχέση (3.17) γράφεται ως εξής:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot \{\dot{\sigma}\} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} \right)^T \cdot \{\dot{\eta}\} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot \{\dot{\sigma}\} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} \right)^T \cdot \{\dot{\eta}\} \quad (3.19)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (3.17) με $\partial \Phi / \partial \sigma$, παράγεται η παρακάτω εξίσωση :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot \{\dot{\sigma}\} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot [D] \cdot \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}} \right) \quad (3.20)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.19) στην εξίσωση (3.20), η ακόλουθη σχέση διαμορφώνεται:

$$- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} \right)^T \cdot \{\dot{\eta}\} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot [D] \cdot \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}} \right) \quad (3.21)$$

Ο νόμος κράτυνσης ορίζεται σαν μια σχέση ανάμεσα στον τανυστή εσωτερικών τάσεων και τον τανυστή των ανηγμένων παραμορφώσεων. Αυτή η σχέση μπορεί να είναι είτε εξαρτημένη είτε ανεξάρτητη του ρυθμού μεταβολής της παραμόρφωσης. Η εσωτερική τάση αποτελεί μια συνάρτηση του πλαστικού πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$ και εκφράζεται ως εξής :

$$\{\dot{\eta}\} = \dot{\lambda} \cdot G(\{\eta\}, \Phi) \quad (3.22)$$

όπου το G σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται ως μια συνάρτηση κράτυνσης.

Αντικαθιστώντας την σχέση στην εξίσωση, η ακόλουθη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}}\right)^T \cdot \dot{\lambda} \cdot G(\{\eta\}, \Phi) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right)^T \cdot [D] \cdot \left(\{\dot{\varepsilon}\} - \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}}\right) \quad (3.23)$$

Λύνοντας ως προς τον πλαστικό πολλαπλασιαστή, παράγεται η ακόλουθη σχέση:

$$\dot{\lambda} = \left(-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}}\right)^T \cdot G(\{\eta\}, \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right)^T \cdot [D] \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right)^T \cdot [D] \cdot \{\dot{\varepsilon}\} \quad (3.24)$$

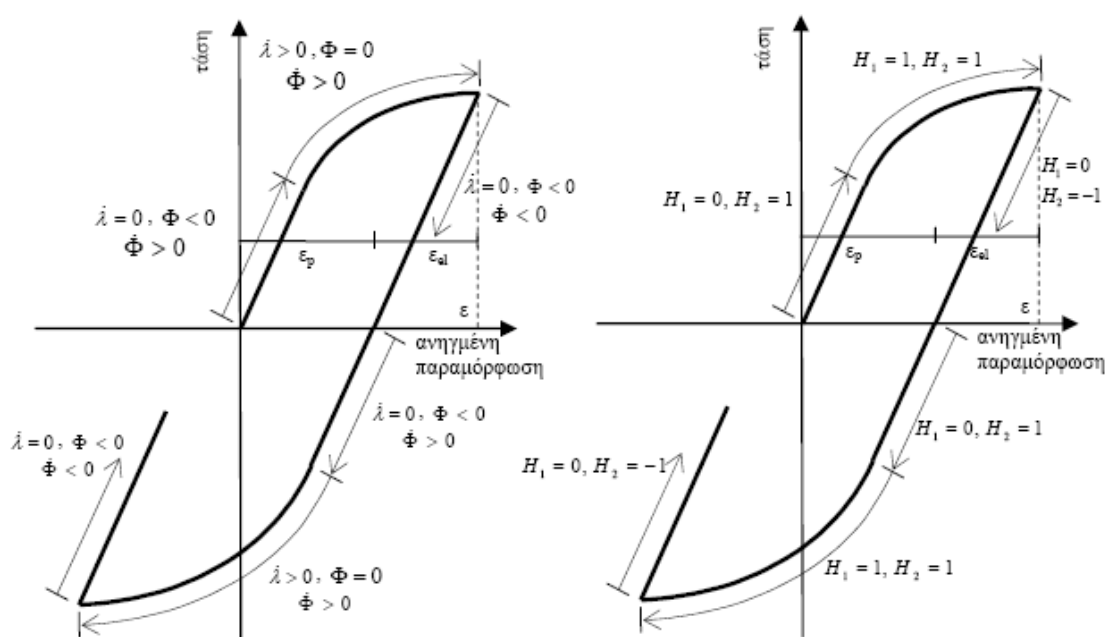
Στην περίπτωση ελαστικού - τελείως πλαστικού υλικού, όπου $G=0$, η σχέση (3.24) ταυτίζεται με αυτήν που προτάθηκε από τον Casciati [3]. Οι εξισώσεις (3.19) – (3.24) ισχύουν όταν έχει πραγματοποιηθεί η διαρροή είτε στο θετικό είτε στην αρνητικό ημιεπίπεδο κι έτσι εισάγονται οι ακόλουθες συναρτήσεις Heaviside:

$$H_1(\Phi) = \begin{cases} 1, & \Phi = 0 \\ 0, & \Phi < 0 \end{cases} \quad H_2(\dot{\Phi}) = \begin{cases} 1, & \dot{\Phi} = 0 \\ 0, & \dot{\Phi} < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Σε όλο το πεδίο του τανυστή τάσεων διαμορφώνεται μια σχέση ως προς τον πλαστικό πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = H_1 \cdot H_2 \cdot \left(- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} \right)^T \cdot G(\{\eta\}, \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot [D] \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot [D] \cdot \{\dot{\varepsilon}\} \quad (3.26)$$

Αντί να περιγραφεί η ανακυκλιζόμενη συμπεριφορά ενός υλικού σε μια κατά βήμα προσέγγιση λαμβάνοντας υπόψη τις περιοχές των συνθηκών Kuhn-Tucker ή των αντιστοιχών συναρτήσεων Heaviside, ο Casciati [3] πρότεινε την εξομάλυνση των τελευταίων, εισάγοντας επιπρόσθετες παραμέτρους για το υλικό.



Σχ.3.4: α) Ανελαστική ανακυκλιζόμενη απόκριση και β) Συναρτήσεις Heaviside

Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, οι δυο συναρτήσεις Heaviside ομαλοποιούνται χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$H_1 = \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|^N, \quad N \geq 2 \quad \text{και} \quad (3.27)$$

$$H_2 = H \cdot \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot \{\dot{\sigma}\} \right) = \frac{1 + \text{sgn} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot \{\dot{\sigma}\} \right)}{2} \approx \beta + \gamma \cdot \text{sgn} \left(\{\varepsilon\}^T \cdot \{\dot{\sigma}\} \right) \quad (3.28)$$

όπου :

N, β και γ είναι παράμετροι του μοντέλου

Φ_0 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης διαρροής ή το ίδιο το σημείο διαρροής.

Εφόσον $\beta = \gamma = 0,5$, η δυσκαμψία αποφόρτισης είναι ίση με την ελαστική δυσκαμψία. Μια άμεση συνέπεια της εξίσωσης (3.27) είναι ότι το υλικό διαρρέει πριν φτάσει στο θεωρητικό σημείο διαρροής Φ_0 . Τροποποιώντας την εξίσωση και αντικαθιστώντας τον ορισμό του πλαστικού πολλαπλασιαστή, προκύπτει το ακόλουθο προσομοίωμα Bouc-Wen:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \left[[I] - \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|^N \left(\beta + \gamma \text{sgn} \left(\{\varepsilon\}^T \cdot \{\dot{\sigma}\} \right) \right) [R] \right] \{\dot{\varepsilon}\} \quad (3.29)$$

όπου το μητρώο $[R]$ καταγράφεται ως εξής:

$$[R] = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right) \cdot \left(- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} \right)^T \cdot G(\{\eta\}, \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot [D] \cdot \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \sigma} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot [D] \quad (3.30)$$

και περιγράφει την σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχείων του ταυυστή τάσεων κατά τη διαρροή. Επομένως, οι «βήμα προς βήμα» εξισώσεις πλαστικότητας

της σχέσης (3.11) αντικαθίστανται από μια συνεχή σχέση τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης. Αυτές οι εξισώσεις ενισχύονται από το νόμο κράτυνσης που εισάγεται στην εξίσωση μαζί με τον ορισμό του πλαστικού πολλαπλασιαστή όπως δίνεται στην σχέση (3.26):

$$\{\dot{\eta}\} = \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|^N \cdot \left(\beta + \gamma \cdot \text{sgn} \left(\{\varepsilon\}^T \cdot \{\dot{\sigma}\} \right) \right) \cdot G(\{\eta\}, \Phi) \cdot [\tilde{R}] \cdot \{\dot{\varepsilon}\} \quad (3.31)$$

Η εσωτερική ένταση πλέον ορίζεται ως μια συνάρτηση εξομάλυνσης του υπάρχοντος τανυστή παραμόρφωσης, ενώ τα διάφορα μοντέλα της γραμμικής και μη-γραμμικής κινηματικής κράτυνσης μπορούν να θεωρηθούν μεταβάλλοντας τη συνάρτηση κράτυνσης G .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Υστερητικό Τετραπλευρικό

Στοιχείο

4.1 Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης 4 κόμβων

Η ισοπαραμετρική θεώρηση (Taig, Irons) βασίζεται στην χρήση ενός δεύτερου συστήματος συντεταγμένων, το οποίο ορίζεται στο Καρτεσιανό σύστημα μέσω μιας απεικόνισης και ονομάζεται φυσικό σύστημα. Με αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος από το οποίο προκύπτει το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου και με υπολογισμό ενός μητρώου μετασχηματισμού [J] που εκφράζει την Ιακωβιανή απεικόνιση, υπολογίζεται το μητρώο στιβαρότητας. Ο όρος ισοπαραμετρικός αποδίδεται στο ότι οι συνιστώσες της μετατόπισης u , v , w , αλλά και οι καρτεσιανές συντεταγμένες x , y , z εκφράζονται ως προς τις αντίστοιχες επικόμβιες ποσότητες, με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής ή συναρτήσεις σχήματος.

Για τη σωστή απεικόνιση του καρτεσιανού συστήματος στο φυσικό, ορίζονται οι συντεταγμένες x , y , z συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων ξ , η , ζ :

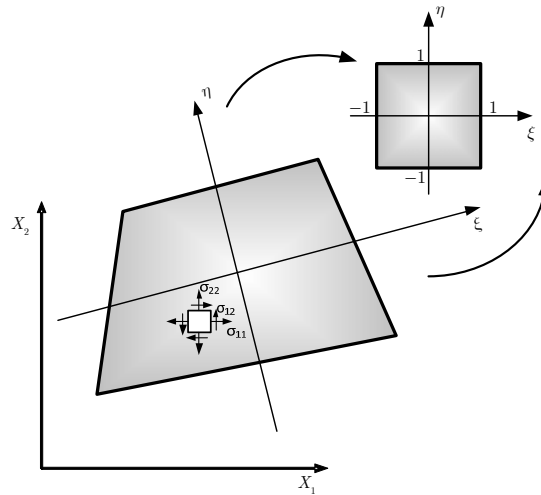
$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\z &= z(\xi, \eta, \zeta)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Αντίστροφα, οι συντεταγμένες ξ , η , ζ απεικονίζονται συναρτήσεις των x , y , z :

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Θεωρείται το ακόλουθο τετραπλευρικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων επίπεδης τάσης - παραμόρφωσης με δύο μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο στο

καθολικό σύστημα συντεταγμένων και η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Όπως φαίνεται στην Εικ.4.1, οι άξονες ξ, η στο καρτεσιανό σύστημα διέρχονται από τα μέσα των πλευρών και είναι ευθύγραμμοι. [6]



Εικ.4.1: Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης 4 κόμβων στο καρτεσιανό και στο καθολικό σύστημα

Στα πλαίσια της ενασχόλησης της εργασίας με τοιχώματα, δικαιολογείται η θεώρηση επίπεδης έντασης και παραμόρφωσης. Η διάσταση κατά z ενός τοιχώματος είναι πολύ μικρότερη εν συγκρίσει με τις άλλες δύο διαστάσεις και θεωρείται ότι τα φορτία κατανέμονται ομοιόμορφα κατά το πάχος του φορέα.

- Επίπεδη Ένταση

Κατά συνέπεια, οι τάσεις $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ μηδενίζονται και το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων και των τάσεων είναι τα εξής :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

όπου :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.4)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις ανηγμένης παραμόρφωσης – τάσης ισχύει :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ή εναλλακτικά :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

- Επίπεδη Παραμόρφωση

Θεωρείται ότι οι ακραίες επιφάνειες του φορέα στον άξονα z είναι απαραμόρφωτες με μηδενική μετατόπιση w. Επομένως, οι παραμορφώσεις ε_z , ε_{zx} , ε_{yz} μηδενίζονται και τα διανύσματα των ανηγμένων παραμορφώσεων και των τάσεων είναι τα εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Αν τεθούν οι όροι :

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{(1-\nu)} \quad (4.8)$$

η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E^*}{(1-\nu^{*2})} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^*}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Επομένως, το ελαστικό καταστατικό μητρώο για επίπεδη ένταση δίνεται ως εξής :

$$[D] = \frac{E^*}{(1-\nu^{*2})} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^*}{2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.2 Συναρτήσεις Σχήματος

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων ορίζεται από γραμμικά πολυώνυμα ως προς ξ και η , όσοι δηλαδή είναι και οι κόμβοι σε κάθε πλευρά του στοιχείου. Επομένως, η πολυωνυμική απεικόνιση των συντεταγμένων x, y είναι η ακόλουθη :

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \xi + \alpha_3 \cdot \eta + \alpha_4 \cdot \xi \cdot \eta \\ y &= \alpha_5 + \alpha_6 \cdot \xi + \alpha_7 \cdot \eta + \alpha_8 \cdot \xi \cdot \eta \end{aligned} \quad (4.11)$$

ή εναλλακτικά :

$$x = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi \cdot \eta] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad y = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi \cdot \eta] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Αναλόγως, στα πλαίσια της ισοπαραμετρικής θεώρησης, το πεδίο των μετατοπίσεων του στοιχείου στο καρτεσιανό σύστημα λαμβάνει τη μορφή :

$$u = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi \cdot \eta] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad v = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi \cdot \eta] \cdot \begin{bmatrix} \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Οι γενικευμένες συντεταγμένες υπολογίζονται από την πάγια διαδικασία :

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 \quad (\xi = -1, \eta = -1) \\
x_2 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \quad (\xi = 1, \eta = -1) \\
x_3 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (\xi = 1, \eta = 1) \\
x_4 &= a_1 - a_2 + a_3 + a_4 \quad (\xi = -1, \eta = 1)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Και το διάνυσμα τους προκύπτει :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση στην σχέση , προκύπτει η έκφραση της συντεταγμένης x ενός τυχαίου σημείου του στοιχείου ως προς τις συντεταγμένες x_i ($i=1=4$) των τεσσάρων κόμβων του στοιχείου. Με πανομοιότυπο τρόπο, υπολογίζονται και οι συντεταγμένες y . Συνεπώς :

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) & \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) & \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) & \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) & \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) & \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) & \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

ή διαφορετικά :

$$x = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad y = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

όπου N_i ($i = 1, \dots, 4$) είναι οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου και υπολογίζονται ως εξής :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Οι συνιστώσες μετατόπισης u , v στο καρτεσιανό σύστημα προκύπτουν :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

ή σε πιο συμπυκνωμένη μορφή :

$$\{u\} = [N] \cdot \{d\} \quad (4.20)$$

όπου :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Βάσει των συναρτήσεων σχήματος που ορίστηκαν στις εξισώσεις πιο πάνω, η εξίσωση παραμόρφωσης - μετατόπισης παραγωγίζεται ως εξής :

$$\{\varepsilon\} = [B(\xi, \eta)] \cdot \{d\} \quad (4.22)$$

όπου το μητρώο παραμόρφωσης – μετακίνησης $[B]$:

$$[B(\xi, \eta)] = [B_1] \cdot [B_2] \quad (4.2)$$

Το μητρώο $[B_1]$ ορίζεται ως εξής:

$$[B_1] = \frac{1}{\det[J]} \cdot \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

όπου:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} & \frac{\partial X_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \xi} & \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

είναι το Ιακωβιανό μητρώο μετασχηματισμού από το καρτεσιανό στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων. Το μητρώο $[B_2]$ ορίζεται ως εξής:

$$[B_2] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

4.3 Μητρώο Δυσκαμψίας

Για να παραχθούν οι κατάλληλες σχέσεις δυσκαμψίας, εφαρμόζεται η αρχή των δυνατών έργων.

$$\int_{V_n} \{\delta\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot \det[J] \cdot dV_n = \{\delta u\}^T \cdot \{P\} \quad (4.27)$$

όπου $dV_n = t \cdot d\xi \cdot d\eta$ είναι ο απειροελάχιστος φυσικός όγκος. Αφού το διάνυσμα των πραγματικών μετατοπίσεων κόμβου είναι σταθερό, ο ακόλουθος ρυθμός μεταβολής της εξίσωσης (4.27) παραγωγίζεται:

$$\int_{V_n} \{\delta\varepsilon\}^T \cdot \{\dot{\sigma}\} \cdot \det[J] \cdot dV_n = \{\delta u\}^T \cdot \{\dot{P}\} \quad (4.28)$$

Επιπλέον, η εξίσωση (3.29) μπορεί να διατυπωθεί σε συμπυκνωμένη μορφή :

$$\{\dot{\sigma}\} = G(a, \Phi, n, \varepsilon) \cdot \{\dot{\varepsilon}\}, \quad (4.29)$$

όπου:

$$G(a, \Phi, \eta, \varepsilon) = [D] \cdot ([I] - H_1 \cdot H_2 \cdot [R]) \quad (4.30)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.29) στο ρυθμό μεταβολής της αρχής των δυνατών έργων, παράγεται η ακόλουθη σχέση:

$$\Rightarrow \int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T [D_H(\alpha, \Phi, \eta, \varepsilon)] \{\dot{\varepsilon}\} \det[J] dV_n = \{\delta u\}^T \{\dot{P}\} \quad (4.31)$$

Επιπροσθέτως, εισάγοντας τις κινηματικές σχέσεις της εξίσωσης (3.24), το πρώτο και το δεύτερο ολοκλήρωμα του αριστερού μέρους της εξίσωσης (4.31) εκφράζονται :

$$\int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T [D_H] \{\dot{\varepsilon}\} \det[J] dV_n = \{\delta u\}^T \int_{V_n} [B]^T [D_H] [B] \det[J] dV_n \{\dot{u}\} = \{\delta u\}^T [k_h] \{\dot{u}\} \quad (4.32)$$

όπου k_h είναι το μητρώο που εδώ ορίζεται ως το υστερητικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου.

$$[k_h \cdot (\{\sigma\})] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [G] \cdot [B] \cdot t \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (4.33)$$

Η πραγματική μορφή του υστερητικού μητρώου εξαρτάται από το εφαρμοσμένο κριτήριο διαρροής, αφού το υστερητικό μητρώο είναι μια συνάρτηση του μητρώου αλληλεπίδρασης $[R]$. Το υστερητικό μητρώο προκύπτει σαν μια συνάρτηση του υστερητικού όρου της τάσης. Γενικά, το μητρώο $[G]$ είναι μια συνάρτηση του διανύσματος τάσης, αλλά στην περίπτωση μας είναι σταθερό καθ'όλο το στοιχείο σύμφωνα με την αναλυτική ολοκλήρωση της σχέσης (4.33). Εφόσον οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται είναι οι ίδιες με την ελαστική περίπτωση, τα ισοδύναμα κομβικά φορτία της επιφάνειας παραμένουν επίσης τα ίδια.

Η σημειογραφία που χρησιμοποιείται υπογραμμίζει την εξάρτηση του υστερητικού μέρους της δυσκαμψίας από την παρούσα εντατική κατάσταση του στοιχείου. Το μητρώο δυσκαμψίας εξαρτάται αποκλειστικά από τις ιδιότητες του υλικού και συγκεκριμένα από το λόγο του Poisson, το μέτρο ελαστικότητας του Young, την αναλογία μετελαστικής και ελαστικής δυσκαμψίας και το κριτήριο διαρροής το οποίο ενσωματώνεται στην εξελιγμένη εξίσωση του Bouc – Wen μέσα από το μητρώο αλληλεπίδρασης $[R]$. Η διατύπωση που περιγράφεται στις προηγούμενες παραγράφους δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο υστερητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση. Στην περίπτωση που το μοντέλο είναι ομαλό και ανεξάρτητο του ρυθμού μεταβολής, μπορεί να ενσωματωθεί στη δεδομένη μετατόπιση που βασίζεται στη διατύπωση των πεπερασμένων στοιχείων.

4.4. Συμπεράσματα

Παρότι η μονοαξονική διατύπωση Bouc-Wen που εκφράζει την διαρροή και τον συνδυασμένο νόμο ροής σε ρυθμό μεταβολής έχει εφαρμοστεί εκτεταμένα σε ραβδωτές κατασκευές, δεν έχει διερευνηθεί ακόμα η εφαρμογή της υπολογιστικής διάταξης σε πεπερασμένα στοιχεία για δισδιάστατα και τρισδιάστατα προβλήματα. Προκειμένου να εφαρμοστεί μια τέτοια ιδέα, θα πρέπει να διατυπωθεί ένα νέο στοιχείο επίπεδης τάσης / παραμόρφωσης, βασισμένο στο ελαστικό συνεχές τετραπλευρικό στοιχείο παραμόρφωσης και το υστερητικό μοντέλο Bouc-Wen. Οι καταστατικές εξισώσεις αναπτύσσονται μέσα από τη δομή της άμεσης μεθόδου ακαμψίας. Αυτή η προσέγγιση σε συνδυασμό με την εφαρμογή του ομαλού Bouc-Wen μοντέλου στις καταστατικές εξισώσεις αποδεικνύεται υπολογιστικά αποδοτική

αφού αποφεύγονται τα συσσωρευμένα λάθη εξαιτίας της γραμμικοποίησης των καταστατικών εξισώσεων που βασίζονται στην Newton διάταξη επίλυσης. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι γενική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή διαφόρων υστερητικών διατυπώσεων των κλασικών πεπερασμένων στοιχείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Εφαρμογές

ελαστοπλαστικής ανάλυσης

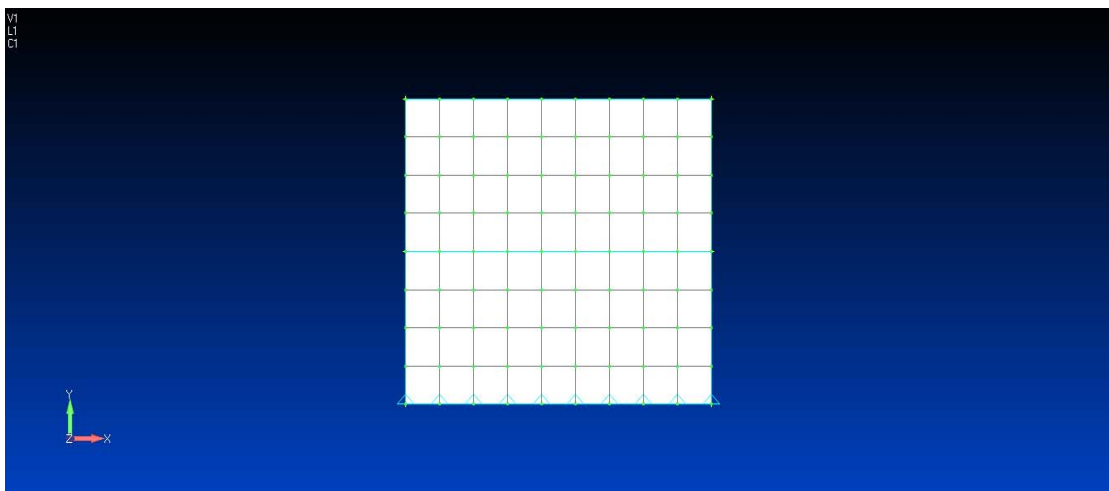
σε μορφές τοίχων

5.1 Διαμόρφωση δεδομένων στο πρόγραμμα Nastran

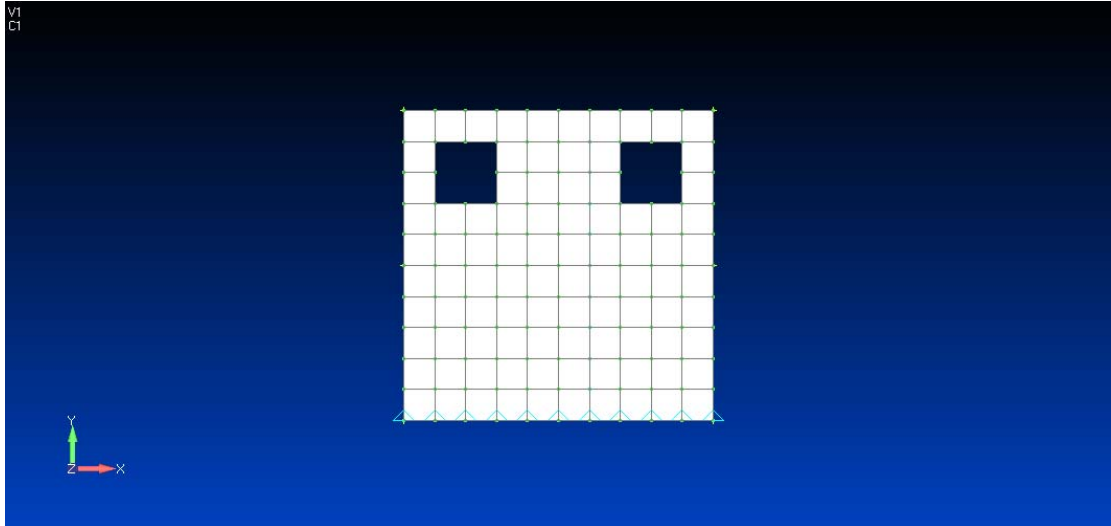
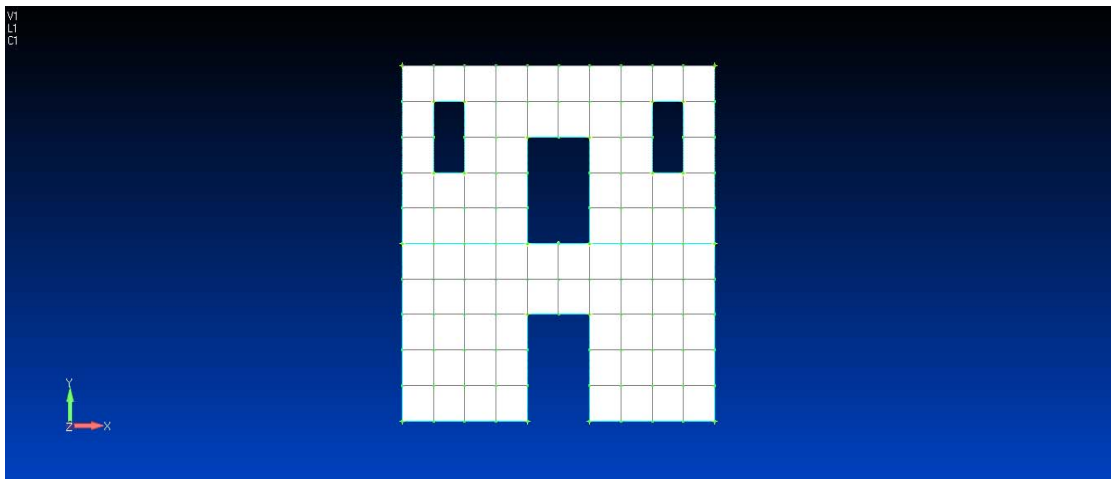
Για την εφαρμογή παραδειγμάτων ελαστοπλαστικών αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε αρχικά το πρόγραμμα Nastran της Femap v.10. Στη συνέχεια, τα ίδια παραδείγματα εξετάστηκαν και στο πρόγραμμα Boucfem το οποίο συμπεριλαμβάνει στην ανάλυση του την υστερητική απόκριση σύμφωνα με το προσομοίωμα του Bouc – Wen και ακολούθησε μια ποιοτική σύγκριση των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ένα απλό μοντέλο ενός τοίχου από σκυρόδεμα, ο οποίος υποβάλλεται σε πλευρικό κατανεμημένο φορτίο στην κορυφή και στη μεσαία στάθμη του. Εκτελείται η διαδικασία σε ορισμένα παραδείγματα τοίχων, ειδικότερα:

- 1) συνεχής τοίχος
- 2) τοίχος με 2 παράθυρα στην πάνω στάθμη
- 3) τοίχος με 2 πόρτες και 2 πάνω παράθυρα

όπως ακριβώς απεικονίζεται στις παρακάτω εικόνες.



Εικ. 5.1: 1^ο μοντέλο τοίχου

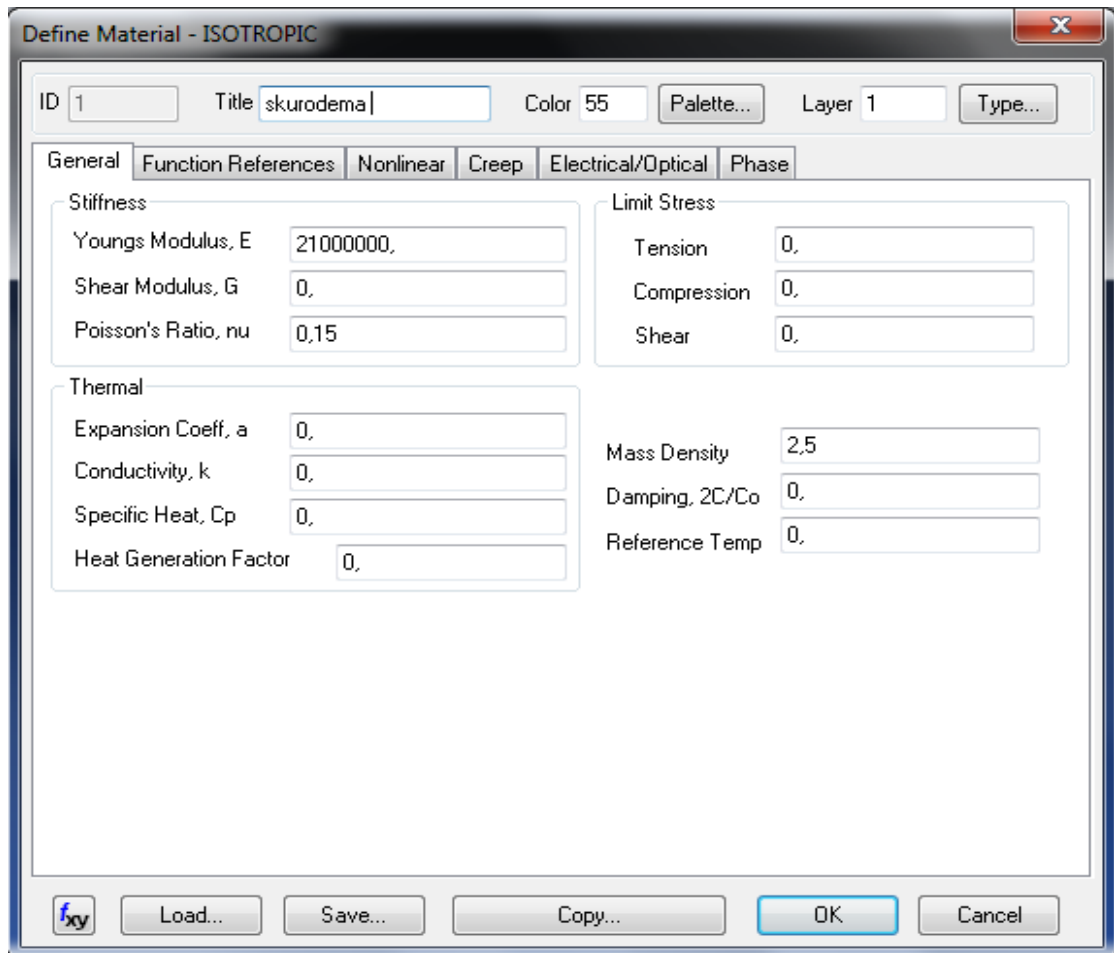
Εικ 5.2: 2^ο μοντέλο τοίχουΕικ. 5.3: 3^ο μοντέλο τοίχου

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα βήματα της διαμόρφωσης του πρώτου μοντέλου στο πρόγραμμα Nastran. Αρχικά, ορίζεται η γεωμετρία του τοίχου, ο οποίος έχει κι έπειτα συμπληρώνονται τα χαρακτηριστικά του.

Ως υλικό ορίζεται το σκυρόδεμα με τα εξής δεδομένα:

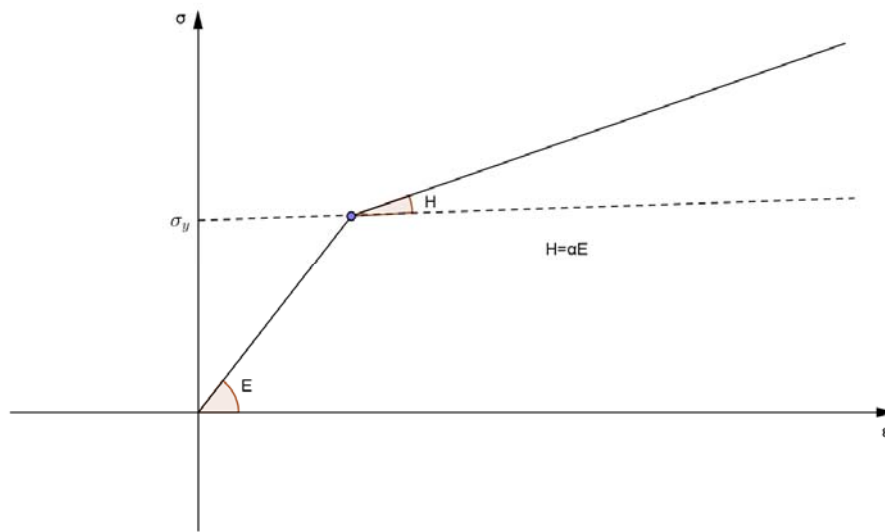
- πυκνότητα μάζας του σκυροδέματος = $2,5 \text{ Kg} / \text{m}^3$
- μέτρο ελαστικότητας $E = 21000000 \text{ kPa}$
- λόγος Poisson $\nu_u = 0,15$

- (υπολογίζεται το μέτρο διάτμησης: $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 9130434,78 \text{ kPa} .$)

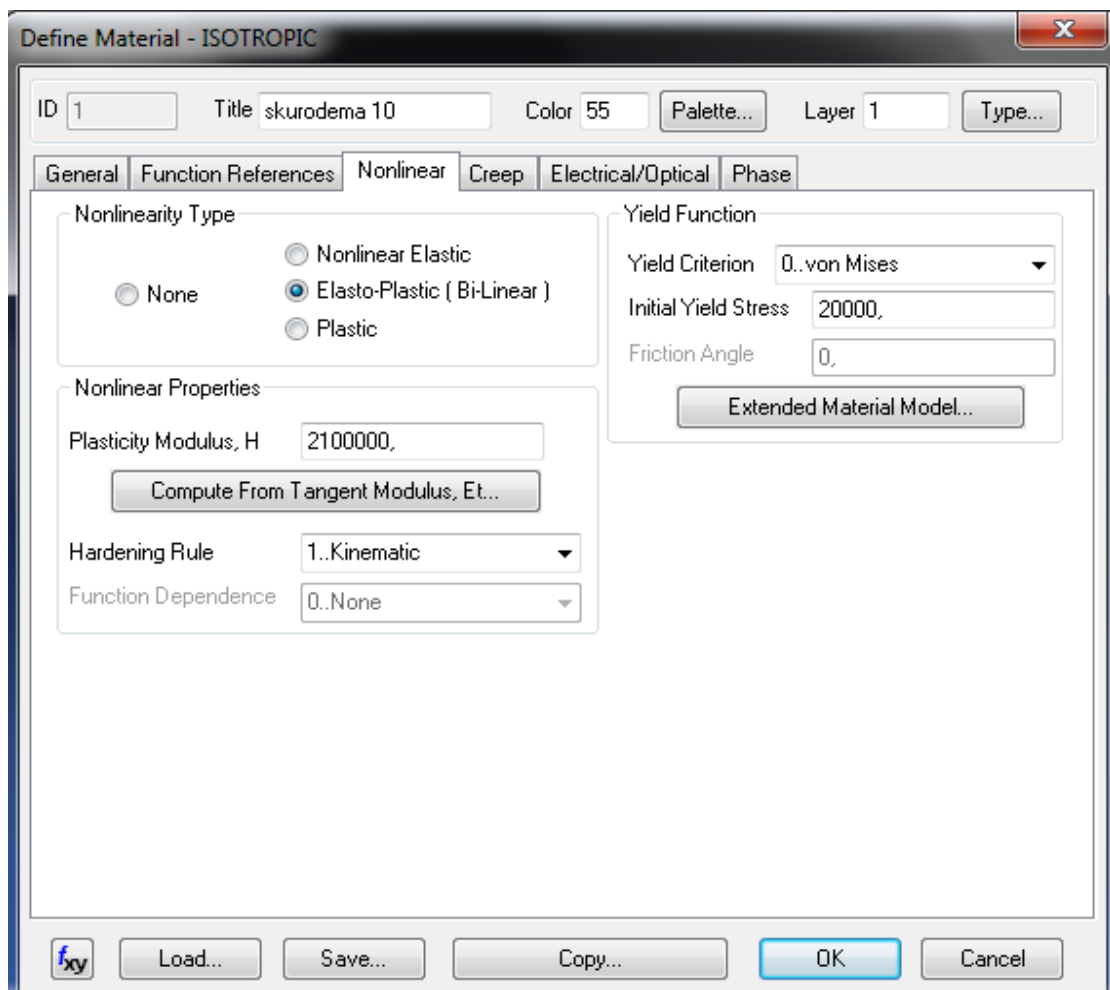


Εικ. 5.4: Καθορισμός χαρακτηριστικών υλικού

Εφαρμόζεται ελαστοπλαστική ανάλυση όποτε δηλώνονται οι ιδιότητες του σκυροδέματος έτσι ώστε να συμπεριφέρεται με μη-γραμμικό τρόπο. Συγκεκριμένα, επιλέγεται ως τύπος μη-γραμμικότητας, ο ελαστοπλαστικός (δι-γραμμικός) και ως κριτήριο διαρροής, το κριτήριο Von Mises. Η αρχική τάση διαρροής είναι ίση με 20000 kPa και λαμβάνεται αρχικά κράτυνση 10%, δηλαδή όπως απεικονίζεται και στο διάγραμμα (5.5) το μέτρο πλαστικότητας είναι: $H = 10\% \cdot E = 2100000 \text{ kPa}$. Το υλικό ανταποκρίνεται στον κινηματικό νόμο κράτυνσης (kinematic hardening rule).

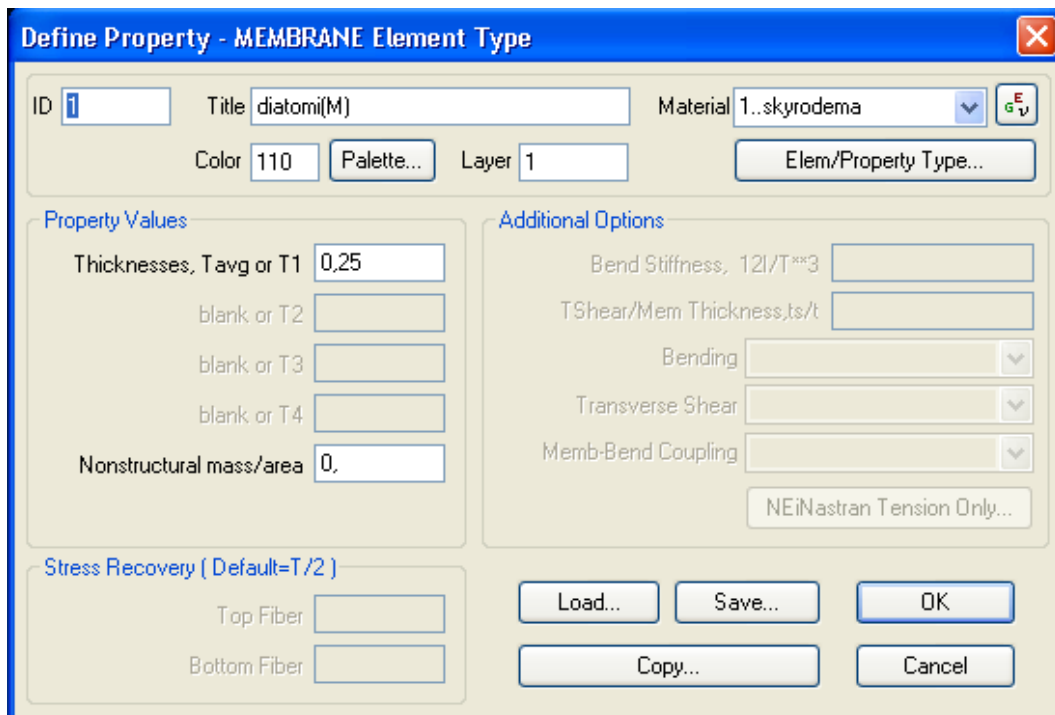


Εικ.5.5: Διγραμμικό διάγραμμα τάσεων παραμόρφωσης σκυροδέματος



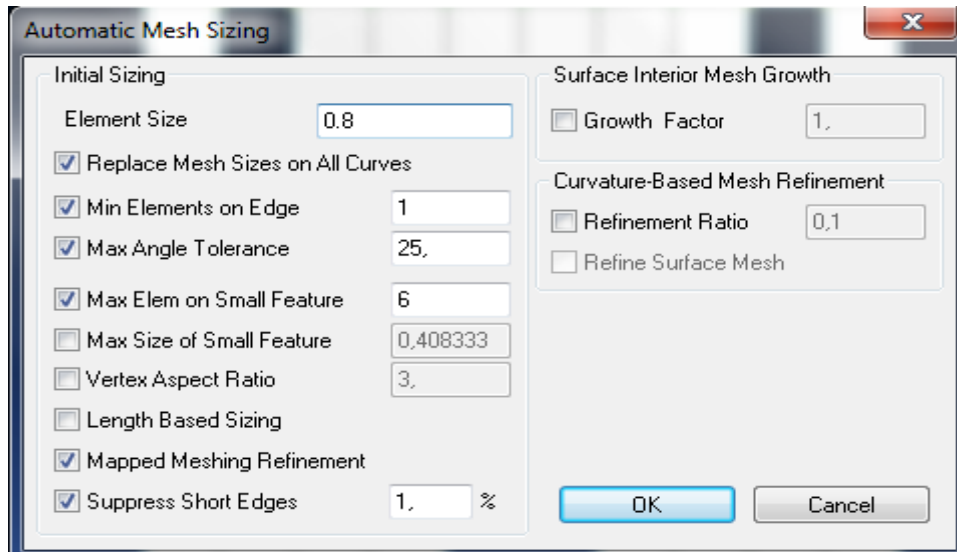
Εικ. 5.6: Καθορισμός μη-γραμμικών χαρακτηριστικών υλικού

Ορίζεται η διατομή του τοίχου από σκυρόδεμα με μεμβρανική συμπεριφορά, δηλαδή χωρίς κάμψη, με πάχος $T_1 = 0,25\text{ m}$. Η διατομή δοκιμαστικά ορίστηκε και ως plate plane element και η σύγκριση των αποτελεσμάτων δεν έδειξε κάποια διαφοροποίηση, συνεπώς διατηρείται η επιλογή στοιχείου με μεμβρανική συμπεριφορά.



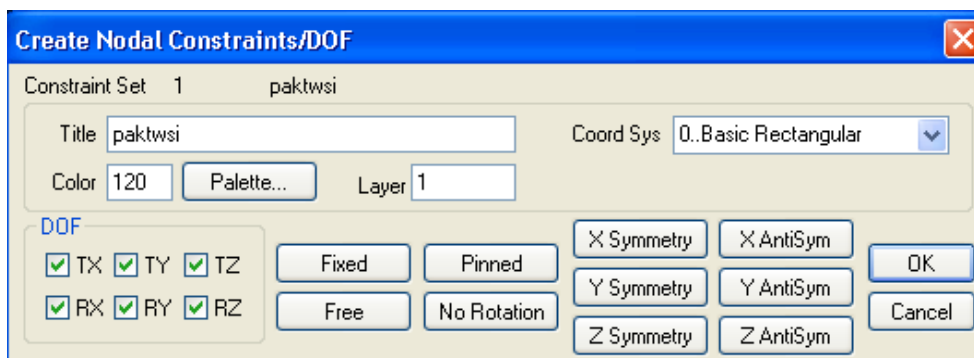
Εικ. 5.7: Καθορισμός χαρακτηριστικών διατομής

Ακολουθεί η διακριτοποίηση του τοίχου για να επιτευχθεί μια αρκετά καλή προσομοίωση του στοιχείου. Μέσω του mesh control, καθορίζεται η πυκνότητα της προσομοίωσης ανάλογα και με τη γεωμετρία του κάθε τοίχου. Επιλέγονται τετραπλευρικά στοιχεία διακριτοποίησης (quads) για να είναι συμβατά και με το πρόγραμμα Boucfem. Στην συνέχεια, επιχειρήθηκε και μια ακόμα πυκνότερη διακριτοποίηση για λόγους επαλήθευσης της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων.



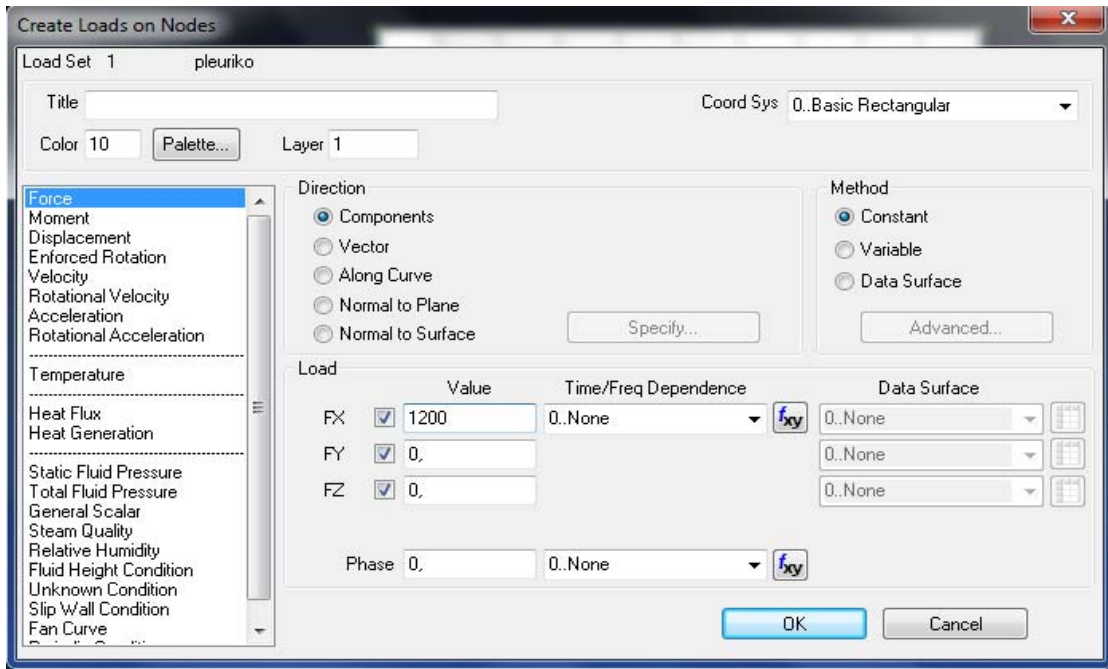
Εικ.5.8: Καθορισμός των παραμέτρων διακριτοποίησης

Έπειτα, ορίζεται η συνθήκη στήριξης της βάσης του τοίχου που θεωρείται κατά ικανοποιητική προσέγγιση πάκτωση.

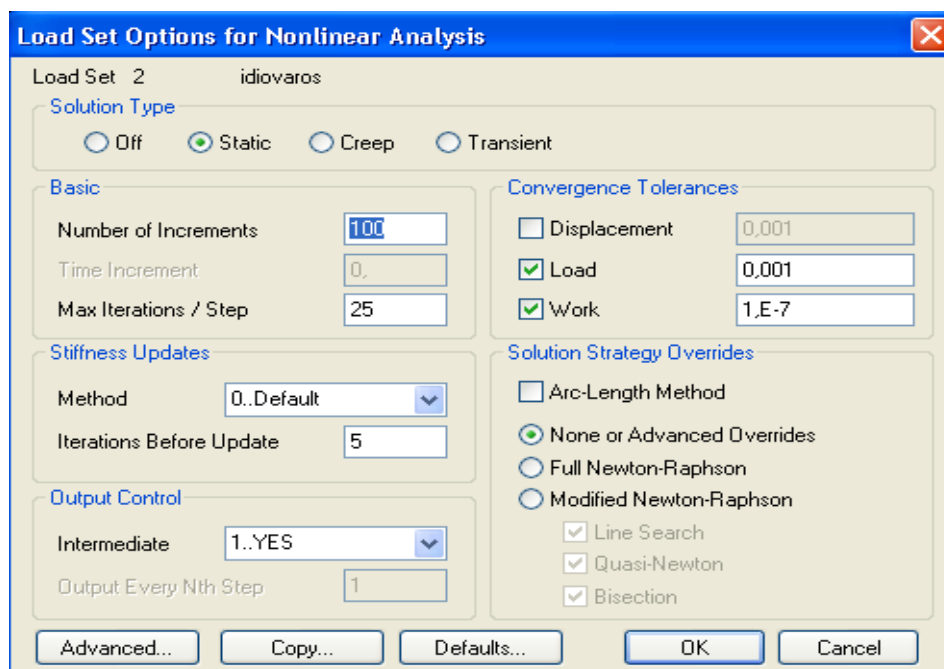


Εικ.5.9: Καθορισμός των συνθηκών στήριξης

Στη συνέχεια, καθορίζεται ο τρόπος φόρτισης του τοίχου που αποτελείται από ένα κατανομημένο πλευρικό φορτίο των 1200kN στην κορυφή και των 600kN στη μέση στάθμη. Το ίδιο βάρος αμελήθηκε για λόγους ομοιομορφίας στα πλαίσια της σύγκρισης των δύο προγραμμάτων.

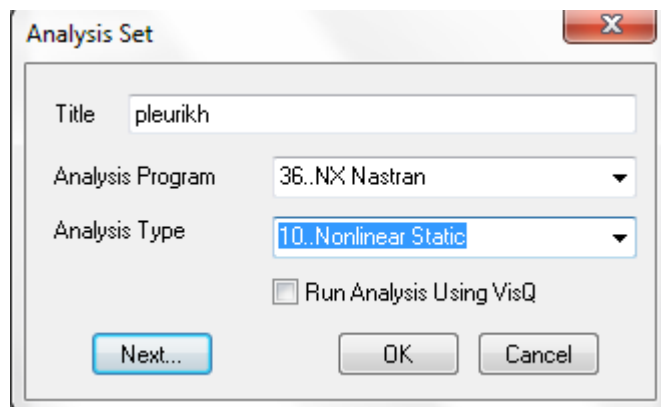


Εικ.5.10: Καθορισμός πλευρικής φόρτισης κορυφής



Εικ.5.11: Καθορισμός των χαρακτηριστικών της μη-γραμμικής ανάλυσης

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.10, ρυθμίζονται τα χαρακτηριστικά της μη – γραμμικής ανάλυσης, όπως τα βήματα της που είναι 100 και η διαδικασία σύγκλισης με βάση τη μέθοδο Newton Raphson.

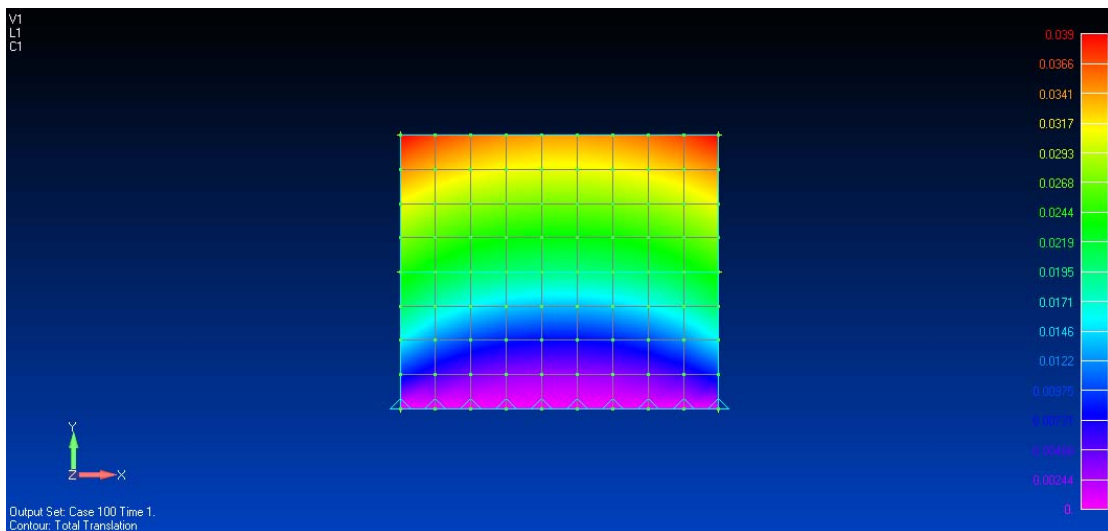


Εικ.5.12: Ορισμός μη-γραμμικής ανάλυσης

Η διαδικασία που προηγήθηκε ακολουθήθηκε και για άλλες περιπτώσεις τοίχων με μικρές διαφορές στη διακριτοποίηση, αλλά και στις τιμές των φορτίων με στόχο την επιβολή του ίδιου συνολικού φορτίου. Δηλαδή, όταν οι κόμβοι κορυφής και μέσης που φορτίζονται έγιναν 11 από 10 στα επόμενα παραδείγματα, η επικόμβια φόρτιση από 1200 και 600 έγινε 1100 και 550 αντίστοιχα. Η διαμόρφωση αυτών των μοντέλων οδήγησε στα παρακάτω αποτελέσματα:

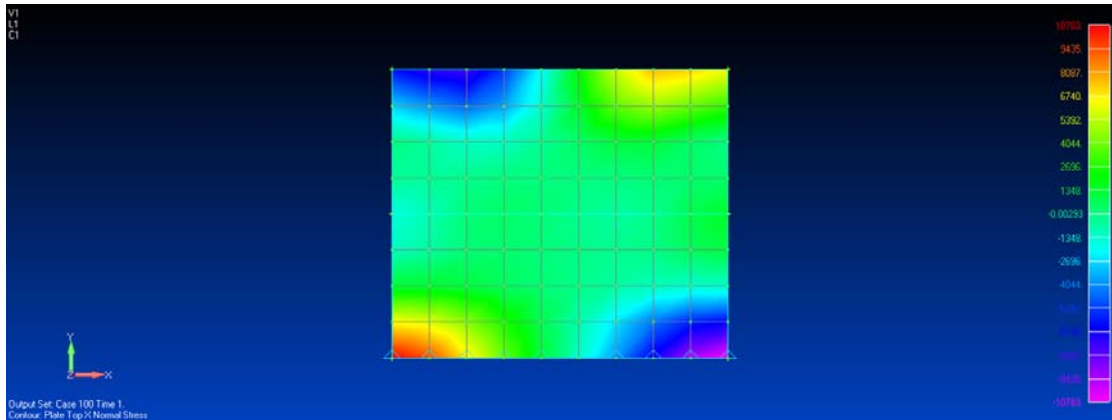
5.2 Αποτελέσματα 1^{ου} μοντέλου

Ο πρώτος τοίχος έχει διαστάσεις $7m \times 6m$ και αποτελείται συνολικά από 90 κόμβους και 72 στοιχεία. Απεικονίζεται το γράφημα των συνολικών μετατοπίσεων κατά το τελευταίο βήμα της μη-γραμμικής ανάλυσης στην επιφάνεια του τοίχου. Η μέγιστη μετατόπιση εμφανίζεται, όπως αναμενόταν άλλωστε, στις ακραίες περιοχές της κορυφής και φτάνει την τιμή $\delta_{tot}^{max} = 0,039m$.



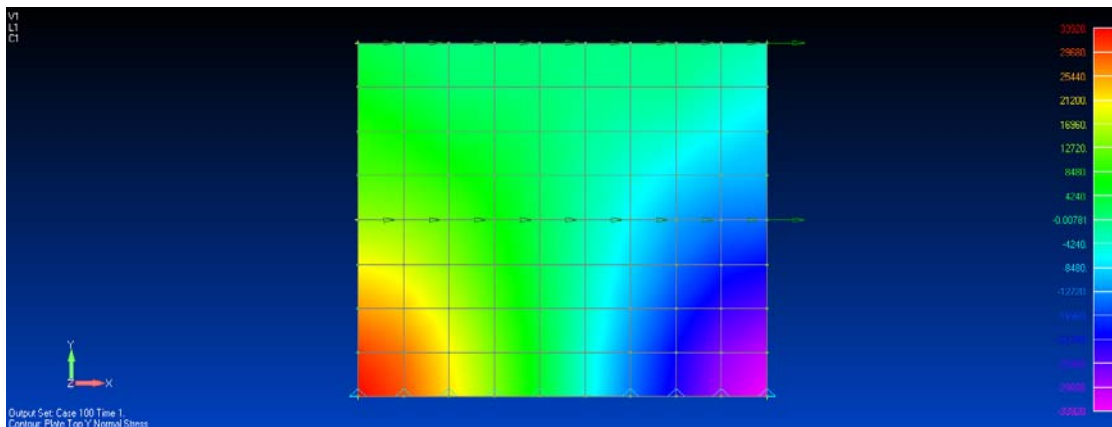
Εικ.5.13: Φάσμα συνολικών μετατοπίσεων του τοίχου

Ορθή τάση κατά x: Οι πιο έντονες τάσεις εμφανίζονται στα κάτω άκρα του τοίχου, ενώ σημειώνεται συμμετρία στις τιμές εφελκυσμού και θλίψης. Συγκεκριμένα, αναπτύσσεται μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τιμή τάσης $\sigma_{xx}^{max} = 10783kPa$.



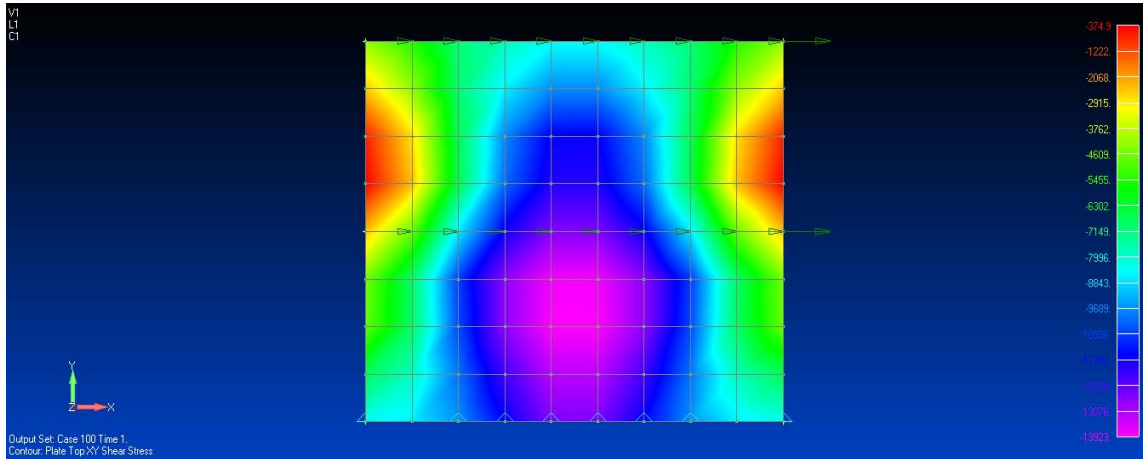
Εικ 5.14: Φάσμα ορθών τάσεων κατά x

Ορθή τάση κατά y: Ομοίως, παρατηρείται συμμετρία στη μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση ίση με $33920kPa$. Οι εντονότερες τάσεις εμφανίζονται στα δύο άκρα κοντά στις στηρίξεις και ξεπερνάνε κατά πολύ το $20000kPa$ που αντιστοιχεί στην αρχική τάση διαρροής του σκυροδέματος.



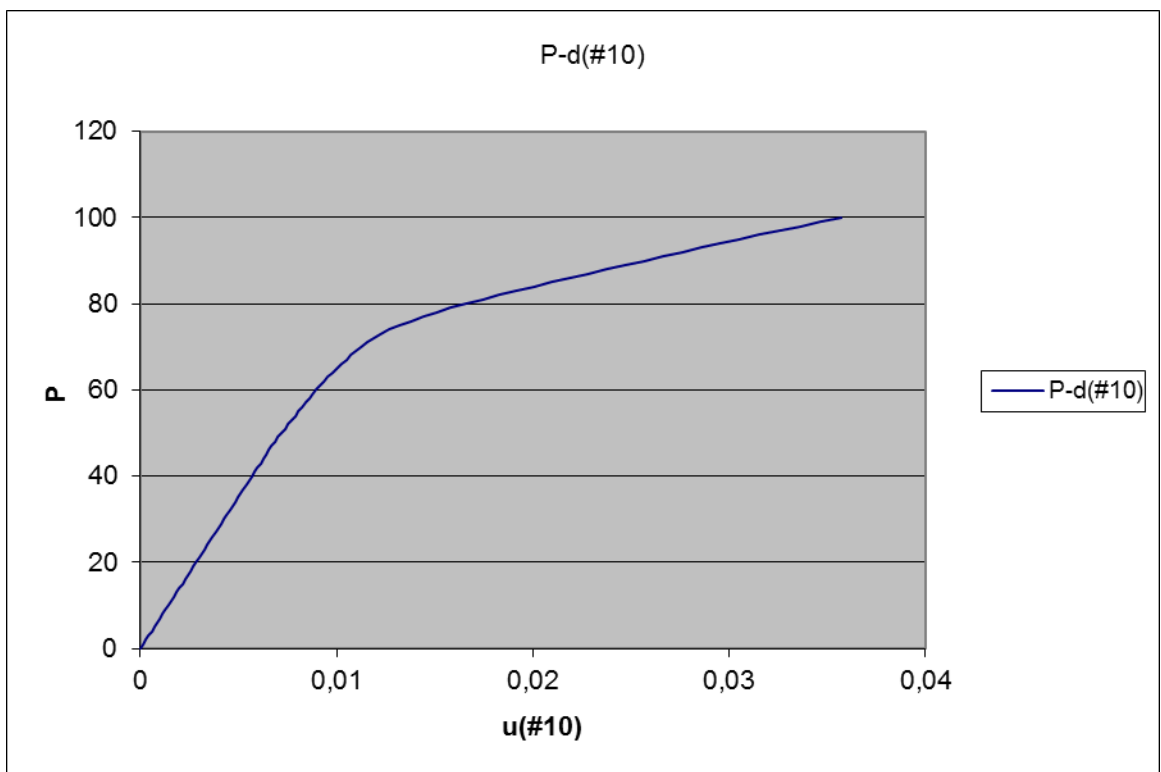
Εικ 5.15: Φάσμα ορθών τάσεων κατά y

Διατμητική τάση: Παρατηρείται ότι εμφανίζεται μόνο θλιπτική διατμητική τάση και η πιο έντονη αναπτύσσεται στο μέσο του ισογείου και φτάνει την τιμή $\tau_{xy}^{\max} = -13923kPa$. Όπως αναμένεται, το φάσμα είναι απολύτως συμμετρικό ως προς την κατακόρυφο που περνάει από το μέσο της επιφάνειας.



Εικ. 5.16: Φάσμα διατμητικών τάσεων

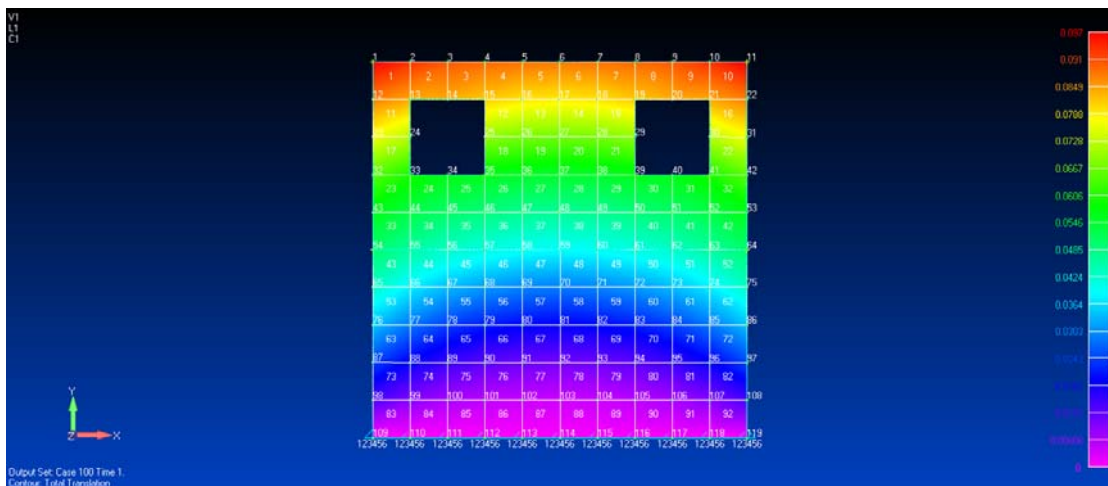
Στη συνέχεια, απεικονίζεται το διάγραμμα επιβάλλομενου φορτίου – προκαλούμενης μετακίνησης στον δεξιότερο κόμβο 10 της κορυφής όπου καταγράφεται ή ανελαστική απόκριση του τοίχου.



Εικ.5.17: Διάγραμμα P-u ακραίου κόμβου 10

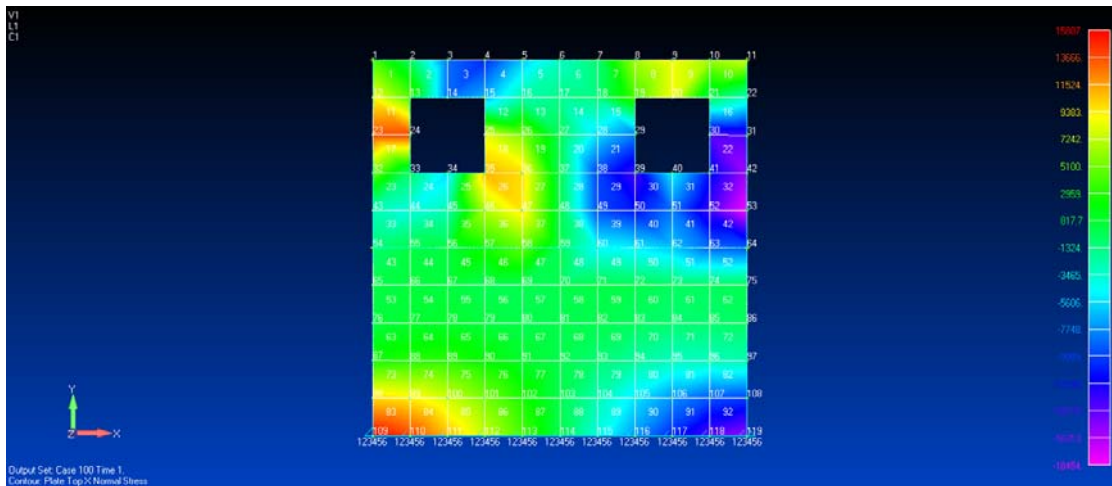
5.3 Αποτελέσματα 2^{ου} μοντέλου

Ο δεύτερος τοίχος έχει διαστάσεις $6m \times 6m$ και αποτελείται συνολικά από 119 κόμβους και 92 στοιχεία. Ακολουθεί το γράφημα των συνολικών μετατοπίσεων κατά το τελευταίο βήμα της ανάλυσης, το οποίο δείχνει ότι ο τοίχος μετατοπίζεται κατά 0,097m κατά μέγιστο στις ακραίες περιοχές της κορυφής.



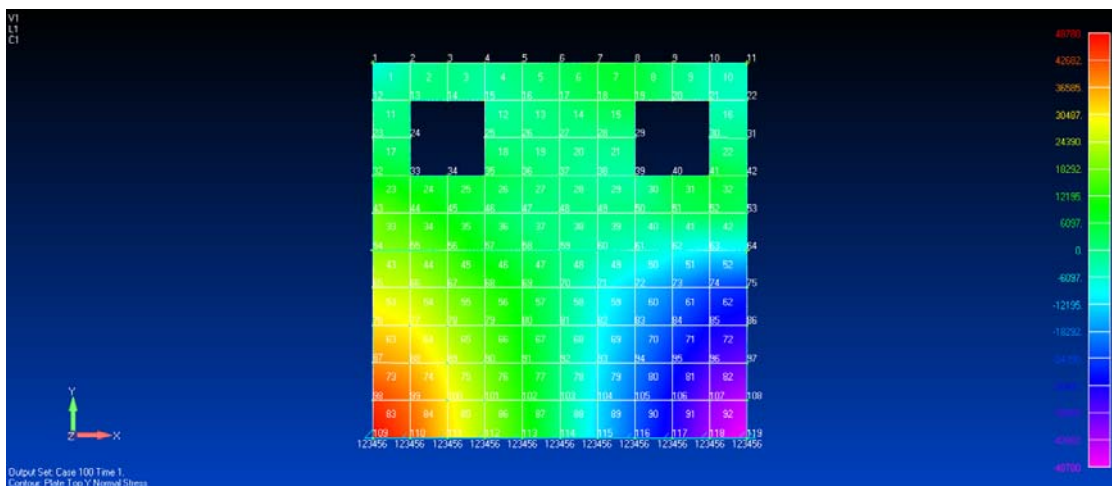
Εικ.5.18: Φάσμα συνολικών μετατοπίσεων του τοίχου

Ορθή τάση κατά x: Ο τοίχος αναπτύσσει σημαντικό εφελκυσμό που φτάνει ως και $15807kPa$ και πάλι αριστερά στην ακραία περιοχή της στήριξης, ενώ παρατηρείται έντονα συγκεντρωμένη θλίψη στην περιοχή κάτω και γύρω από το δεύτερο άνοιγμα με μέγιστη τιμή $-18454KPa$.



Εικ.5.19: Φάσμα ορθών τάσεων κατά x

Ορθή τάση κατά y: Έντονη θλιπτική τάση αναπτύσσεται στο δεξί άκρο κοντά στην στήριξη, ενώ συμμετρικά στο αριστερό άκρο σημειώνεται έντονος εφελκυσμός. Η μέγιστη τιμή της τάσης είναι $\sigma_{yy}^{\max} = 48780 \text{ kPa}$, δηλαδή πάνω από διπλάσια της αρχικής τιμής διαρροής του σκυροδέματος.

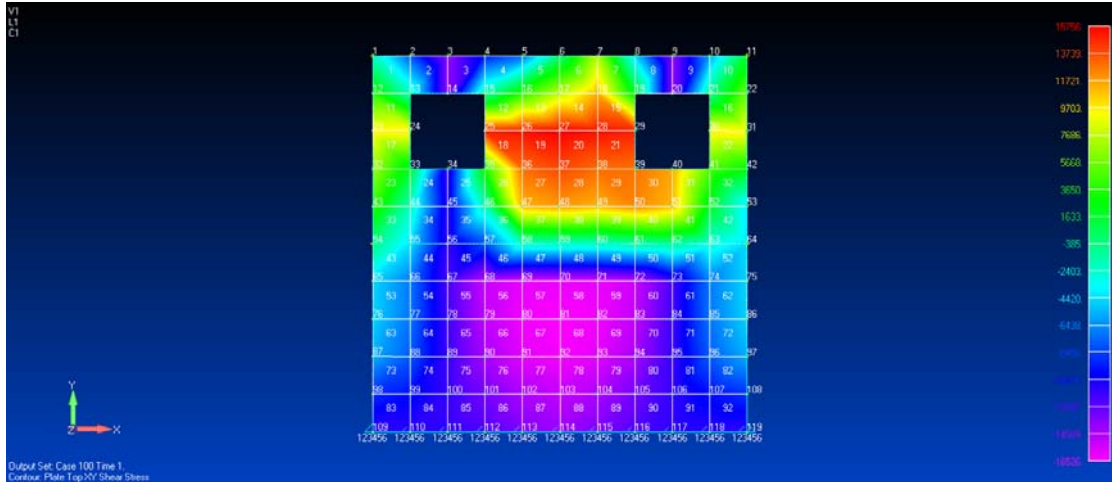


Εικ.5.20: Φάσμα ορθών τάσεων κατά y

Διατμητική τάση: Ο τοίχος καταπονείται έντονα εφελκυστικά στις περιοχές μεταξύ των ανοιγμάτων, ενώ εξίσου σημαντική θλίψη σημειώνεται κεντρικά στην περιοχή του

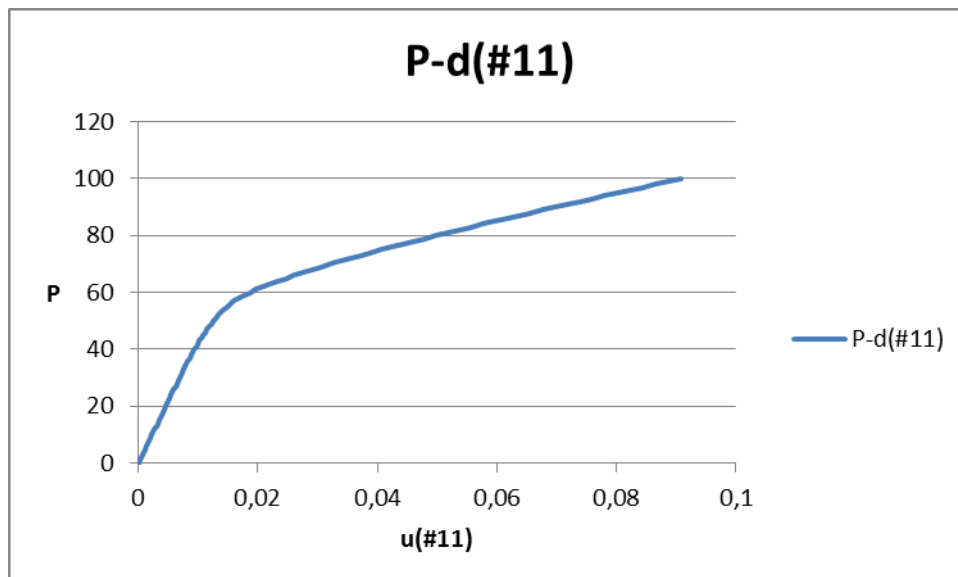
ισογείου. Ο μέγιστος εφελκυσμός είναι $\sigma_{xx}^{t,max} 15756kPa$ και η μέγιστη θλίψη

$$\sigma_{xx}^{c,max} -16526kPa$$



Εικ. 5.21: διάγραμμα διατμητικών τάσεων

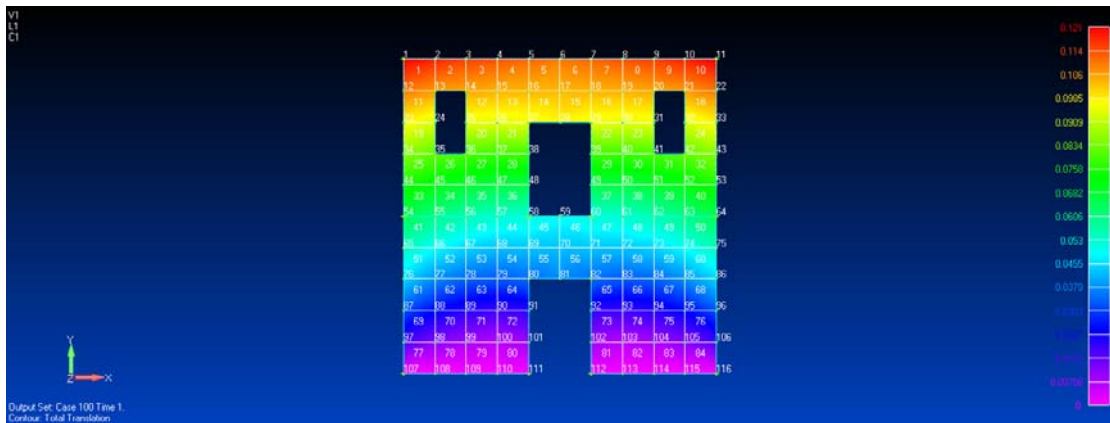
Ακολουθεί το διάγραμμα επιβαλλομένου φορτίου – προκαλούμενης μετακίνησης στον δεξιότερο κόμβο 11 της κορυφής με τη μετατόπιση να φτάνει μέχρι τα 9 cm.



Εικ.5.22: Διάγραμμα P-u ακραίου κόμβου 11

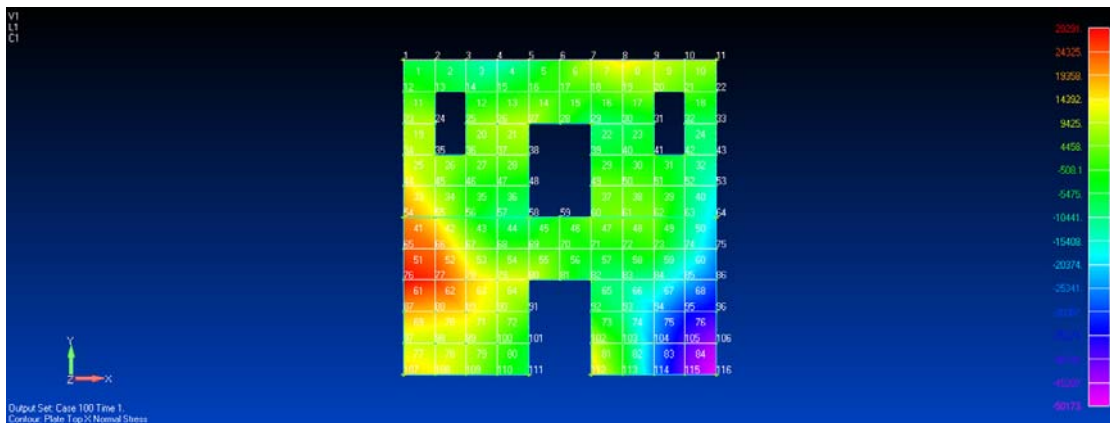
5.4 Αποτελέσματα 3^{ου} μοντέλου

Ο τρίτος τοίχος έχει διαστάσεις $7m \times 7m$ και περιλαμβάνει 116 κόμβους και 84 στοιχεία. Στο γράφημα των συνολικών μετατοπίσεων, φαίνονται οι εντονότερες μετατοπίσεις που οφείλονται στη δύσκολη γεωμετρία του τοίχου με τα πολλά ανοίγματα. Η κορυφή του φορέα μετακινείται μέχρι και κατά 12 cm.



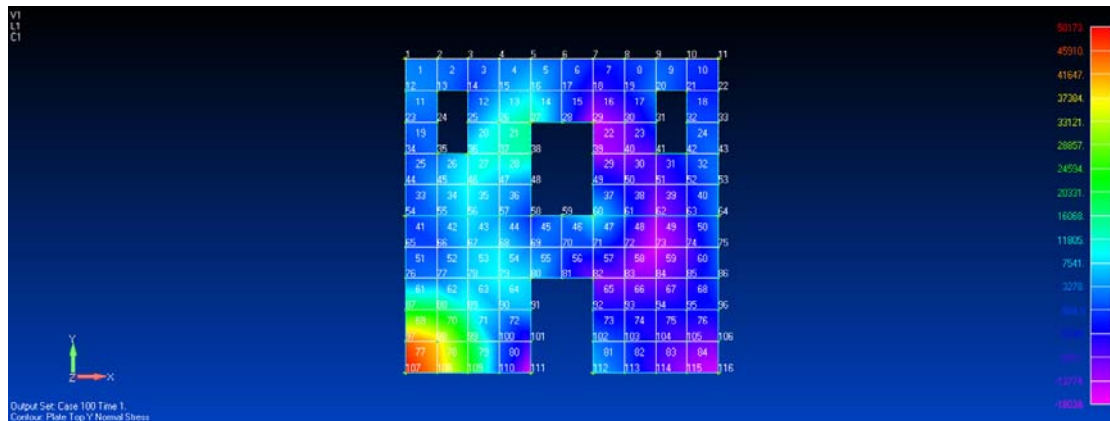
Εικ.5.23: Διάγραμμα συνολικών μετατοπίσεων του τοίχου

Ορθή τάση κατά x: Σημαντικός εφελκυσμός παρατηρείται αριστερά στην ακραία περιοχή κάτω της μέσης στάθμης που φτάνει μέχρι τα $29291kPa$. Στο δεξί άκρο του φορέα πάνω από την στήριξη, ο φορέας καταπονείται σε εντονότατη θλίψη με μέγιστη τιμή $-50173kPa$.



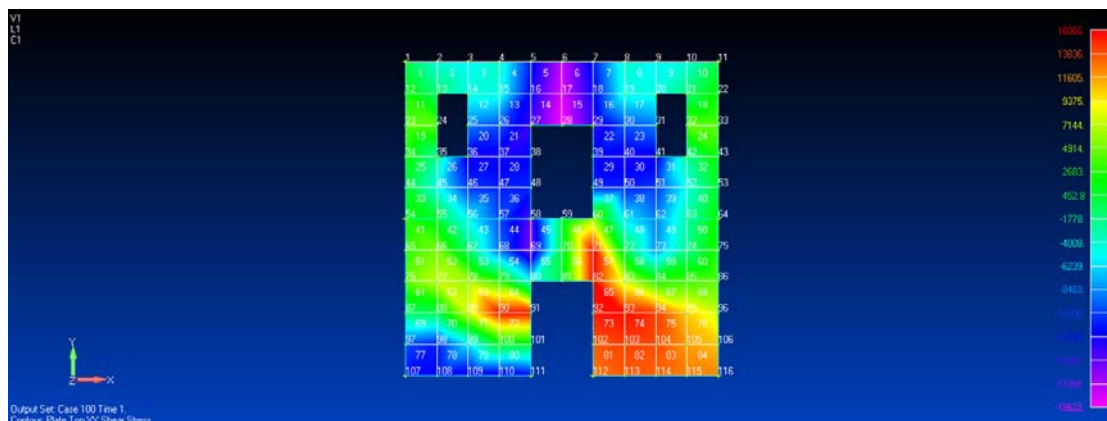
Εικ.5.24: Διάγραμμα ορθών τάσεων κατά x

Ορθή τάση κατά y: Επίσης, το αριστερό άκρο πάνω από την στήριξη αντιμετωπίζει μεγάλο πρόβλημα εφελκυσμού με τιμή κοντά στα $50000kPa$. Κατά βάση, τοίχος θλίβεται με εντονότερη τάση δεξιά και πάνω από τις δύο πόρτες με μέγιστη τιμή στα όρια της τάσης διαρροής του σκυροδέματος.



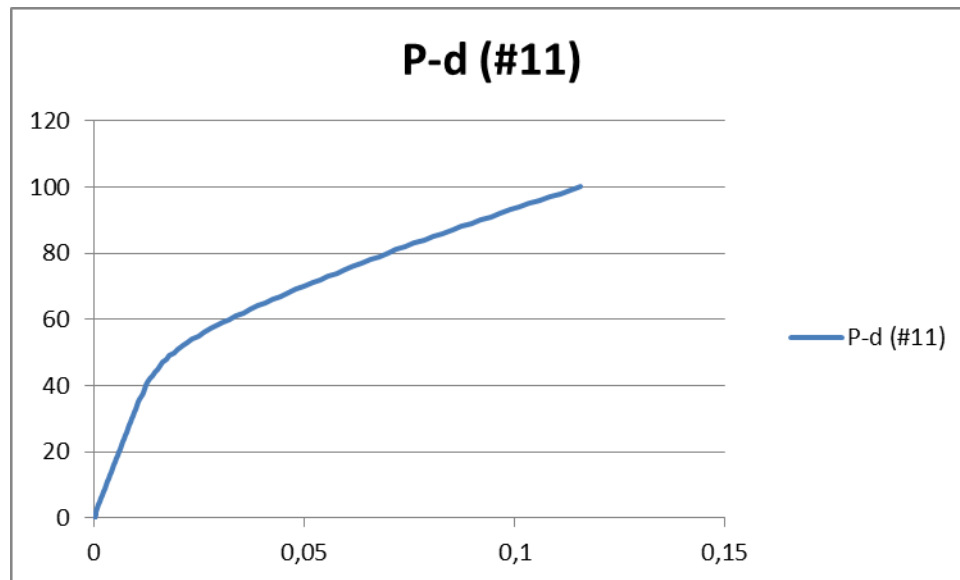
Εικ.5.25: Διάγραμμα ορθών τάσεων κατά y

Διατμητική τάση: Εδώ φαίνεται ότι ανάμεσα στα ανοίγματα ο τοίχος αναπτύσσει διαδοχικά εφελκυσμό και θλίψη. Εντονότερες τάσεις συγκεντρώνονται στην περιοχή πάνω από τις δύο πόρτες και ειδικότερα στο ισόγειο όπου φτάνει κατά μέγιστο την τιμή $23497kPa$.



Εικ. 5.26: Διάγραμμα διατμητικών τάσεων

Έπειτα, απεικονίζεται το διάγραμμα επιβαλλόμενου φορτίου – προκαλούμενης μετακίνησης στον δεξιότερο κόμβο 11 της κορυφής όπου καταγράφεται ή ανελαστική απόκριση του τοίχου με τη μετατόπιση να φτάνει την τιμή $u_{\max}^{\#11} = 0,11563m$

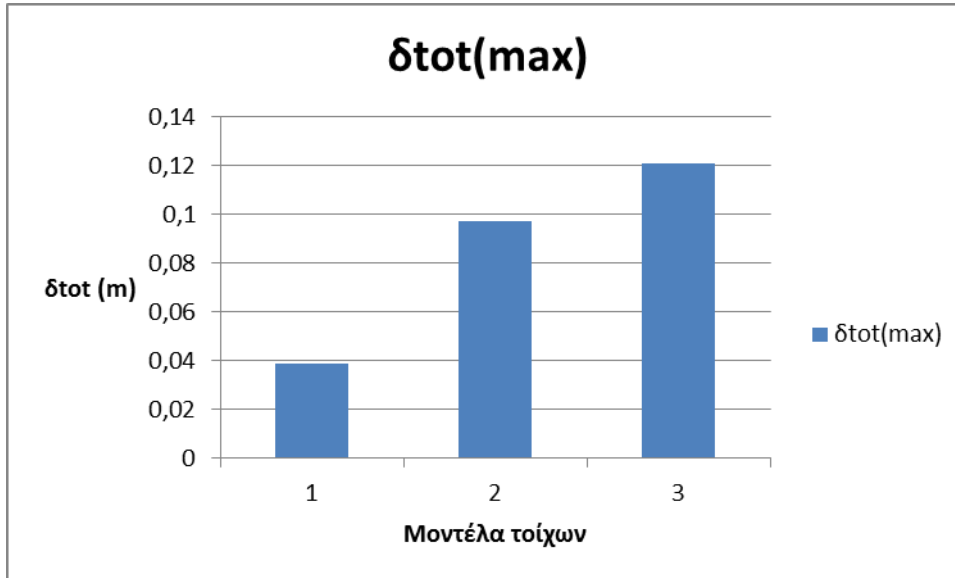


Εικ.5.27: Διάγραμμα P-u ακραίου κόμβου 11

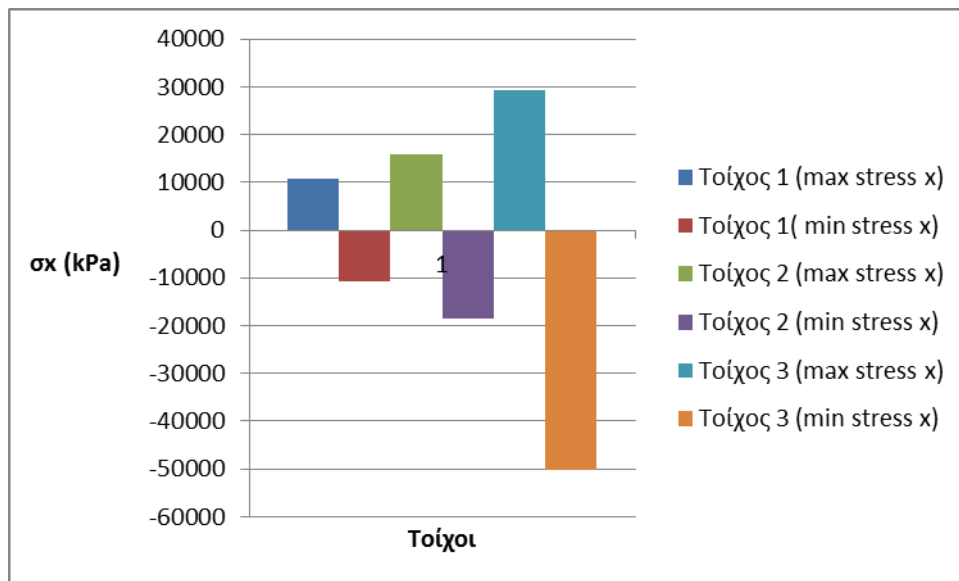
5.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Στη συνέχεια, επιχειρείται σύγκριση των τριών μοντέλων που αναλύθηκαν ως προς τις μέγιστες τιμές της συνολικής μετατόπισης και των ορθών και διατμητικών τάσεων. Υπενθυμίζεται ότι τα εν λόγω μοντέλα είναι τα εξής:

- 1) συνεχής τοίχος
- 2) τοίχος με 2 πάνω παράθυρα
- 3) τοίχος με 2 πόρτες και 2 παράθυρα

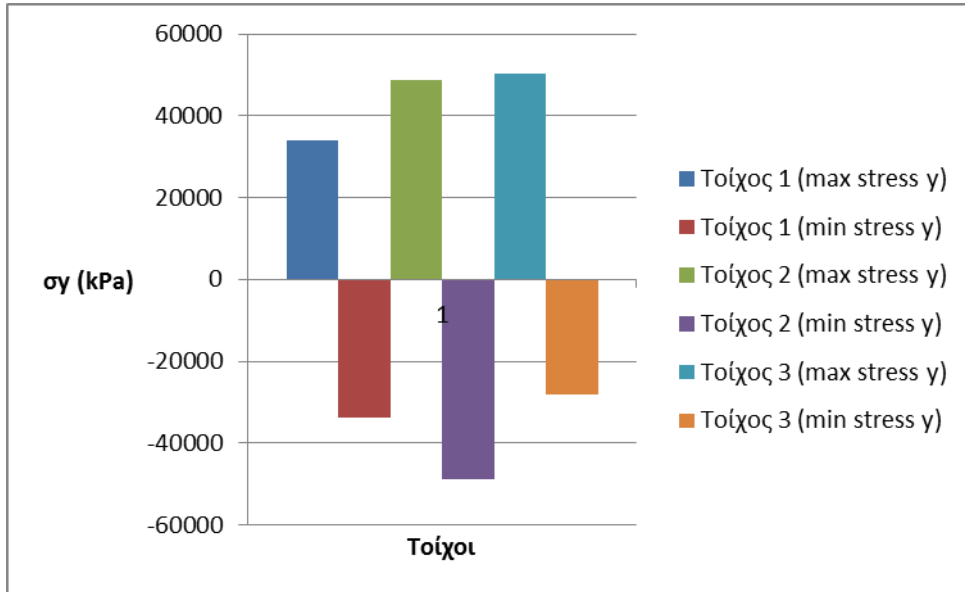


Εικ.5.28: Σύγκριση μέγιστης συνολικής μετατόπιση δ_{tot}^{max} ανά τοίχο



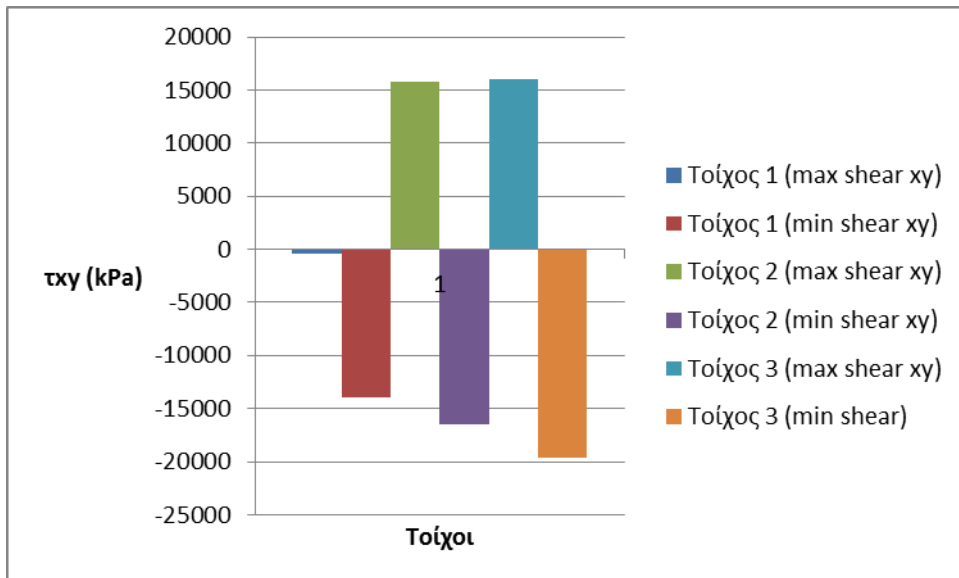
Εικ.5.29: Σύγκριση μέγιστης εφελκυστικής και θλιπτικής ορθής τάσης ως προς x ,

σ_{xx}^{max} ανά τοίχο



Εικ.5.30: Σύγκριση μέγιστης εφελκυστικής και θλιπτικής ορθής τάσης ως προς y ,

σ_{yy}^{\max} ανά τοίχο



Εικ.5.31: Σύγκριση μέγιστης διαμητικής τάσης ως προς y τ_{xy}^{\max} ανά τοίχο

Συμπερασματικά, παρατηρείται όπως ήταν αναμενόμενο, ότι οι τοίχοι με τα ανοίγματα εμφανίζουν κλιμακωτά μεγαλύτερες συνολικές μετακινήσεις, καθώς και εντονότερες εντατικές καταπονήσεις εξαιτίας των ασυνεχειών της γεωμετρίας.

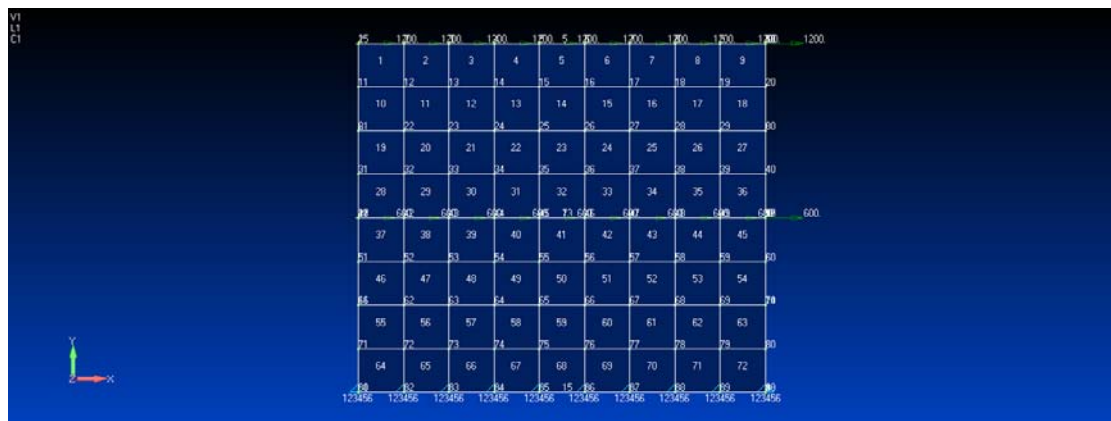
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Σύγκριση αποτελεσμάτων
ελαστοπλαστικής ανάλυσης
σε Nastran και Boucfem

Τα τρία παραδείγματα που εξετάστηκαν στο πρόγραμμα Nastran, εφαρμόστηκαν και στο πρόγραμμα Boucfem, το οποίο ενσωματώνει, στα πλαίσια της μη – γραμμικής ανάλυσης, το υστερητικό προσομοίωμα του Bouc – Wen. Στη συνέχεια, θα αναφερθεί συνοπτικά η διαδικασία μεταφοράς των δεδομένων στο πρόγραμμα και θα παρουσιαστεί μια σύγκριση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης των δύο προγραμμάτων.

6.1. Σύγκριση 1^{ου} μοντέλου τοίχου

Υπενθυμίζεται ότι πρόκειται για ένα συνεχή τοίχο διαστάσεων $7m \times 6m$ και διακριτοποίηση με 90 κόμβους και 72 στοιχεία όπως φαίνεται παρακάτω:

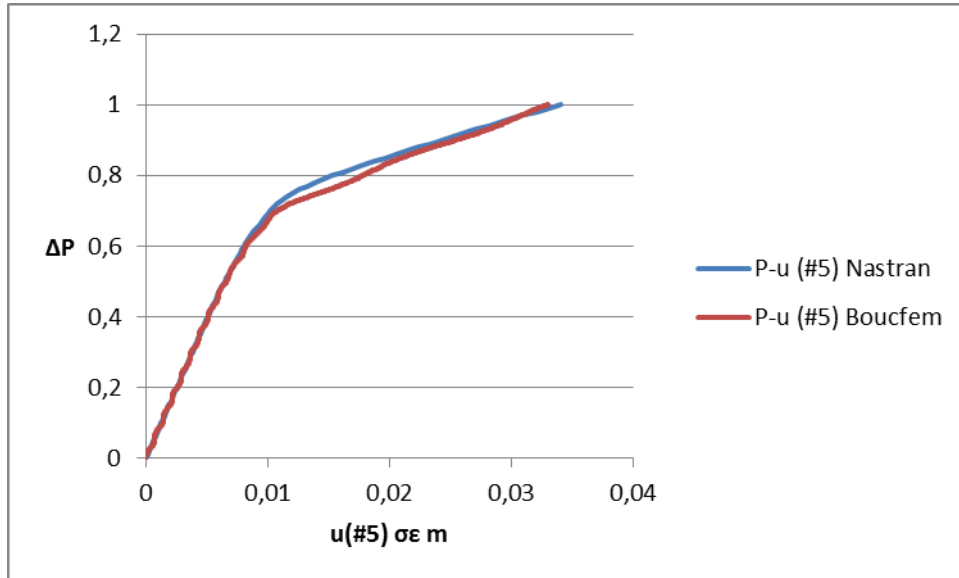


Εικ. 6.1: Εικόνα τοίχου 1

Στην φόρμα του προγράμματος Boucfem, συμπληρώνονται με τον κατάλληλο τρόπο τα δεδομένα του φορέα μας, όπως:

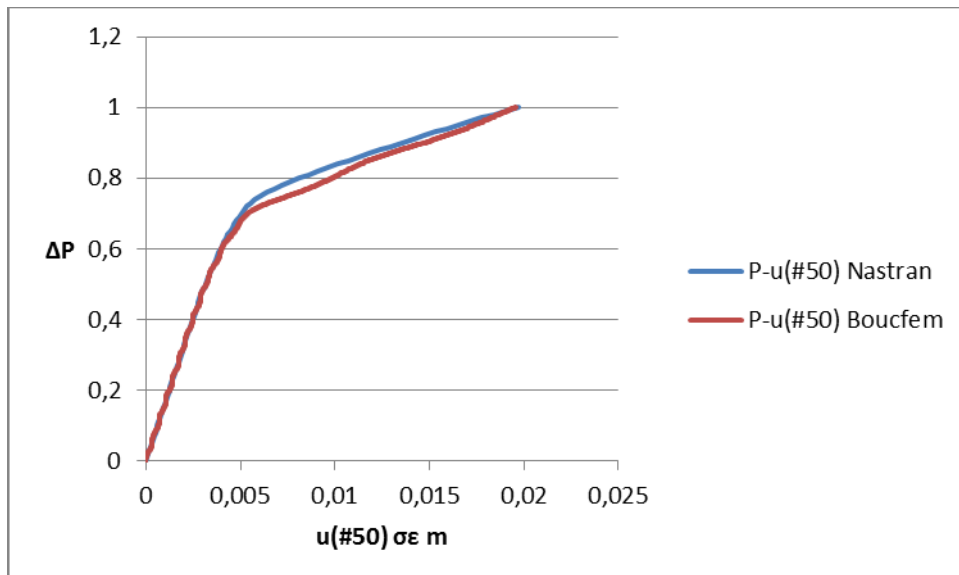
- Πλήθος κόμβων (90), στοιχείων (72), πακτωμένων κόμβων (10), φορτισμένων κόμβων (10)
- Συντεταγμένες κόμβων και συνδεσμολογία στοιχείων με ωρολογιακή φορά (π.χ για το 1^ο στοιχείο καταγράφεται: 1 2 13 12)
- Πάχος στοιχείου (0,25m), τιμές προσομοιώματος Bouc – Wen: $n=18$, $\beta=0,5$ και $\gamma=0,5$
- Μέτρο ελαστικότητας ($E = 2,1 \times 10^7 kPa$), λόγος Poisson ($\nu = 0,15$), αρχική τάση διαρροής σκυροδέματος ($\sigma_y = 20000 kPa$), συντελεστή α για την κράτυνση (0,1), ειδικό βάρος υλικού ($\gamma_c = 25 Kg / m^3$)
- Στηριγμένοι κόμβοι (πάκτωση)
- Φορτισμένοι κόμβοι ($P_x = 1200 kN$ για τους κόμβους κορυφής και $P_x = 600 kN$ για τους κόμβους μέσης στάθμης)
- Βήματα μη – γραμμικής ανάλυσης (20000)

Ακολουθεί το διάγραμμα επιβαλλόμενου φορτίου – προκαλούμενης οριζόντιας μετακίνησης για τον μεσαίο κόμβο κορυφής #5 όπως προέκυψε από το Nastran και το Boucfem. Παρατηρείται ότι η σύγκλιση των 2 καμπυλών είναι πολύ καλή. Η τελική μετακίνηση στον κόμβο στο Nastran φτάνει την τιμή 0,0341m και στο Boucfem 0,033m δηλαδή μια ελάχιστη ποσοστιαία μεταβολή 3,22%



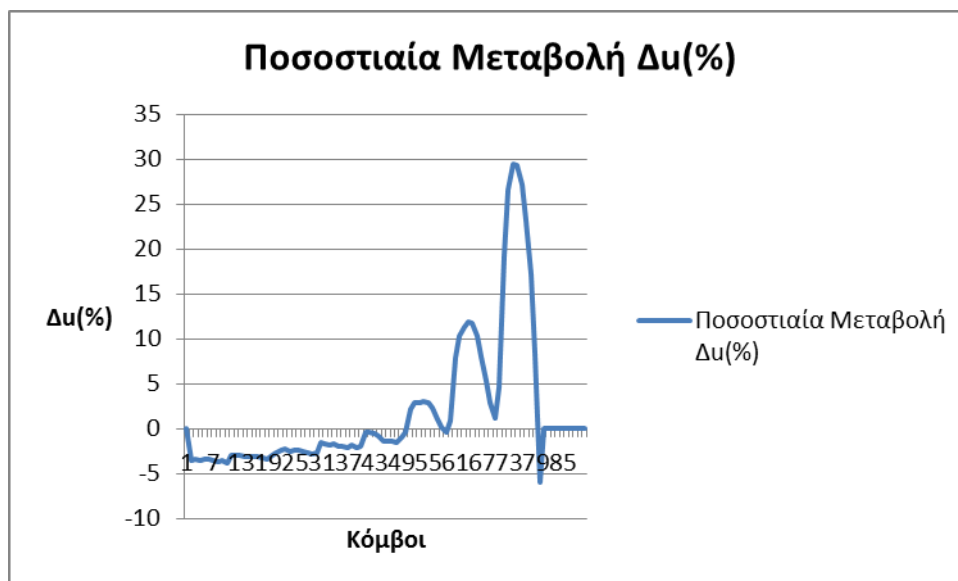
Εικ.6.2: Διάγραμμα P-d κόμβου 5

Ανάλογη σύγκλιση παρατηρείται και στο διάγραμμα P-u που αφορά στον δεξιό ακραίο κόμβο 50 στο καθ' ύψος μέσο του τοίχου. Η μετακίνηση στο τελευταίο βήμα της ανάλυσης προέκυψε 0,0019683m στο Nastran και 0,0196m στο Boucfem.



Εικ.6.3: Διάγραμμα P-d κόμβου 50

Στη συνέχεια, ελέγχονται οι οριζόντιες μετακινήσεις των κόμβων του τοίχου όπως προέκυψαν από την ανάλυση σε κάθε πρόγραμμα. Καταγράφεται μόνο η οριζόντια μετακίνηση u , γιατί αμελήθηκε το ίδιο βάρος το οποίο επηρεάζει την κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης. Οι τιμές είναι πολύ κοντά με εξαίρεση την περιοχή πάνω από την στήριξη, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο διάγραμμα που εκφράζει την ποσοστιαία διαφορά της οριζόντιας μετακίνησης u ανά κόμβο στα δύο προγράμματα. Η αυξημένη αυτή τοπική διαφοροποίηση δεν είναι ακατανόητη, καθώς οφείλεται στην αδυναμία των προγραμμάτων που κάνουν χρήση πεπερασμένων στοιχείων να αποδώσουν με αξιοπιστία την εντατική / παραμορφωσιακή εικόνα κοντά στις στηρίξεις σε συνδυασμό με την όχι πυκνή διακριτοποίηση που διαμορφώθηκε στην περιοχή αυτή.



Εικ.6.4 : Διάγραμμα ποσοστιαίας διαφοράς u ανά κόμβο

	Nastran	Boucfem	Σύγκριση		Nastran	Boucfem	Σύγκριση
Κόμβοι	u	u	Du(%)	Κόμβοι	u	u	Du(%)
1	0	0	0	46	0,019461	0,0192	-1,35932
2	0,035216	0,034	-3,57776	47	0,019469	0,0194	-1,40266
3	0,034728	0,0336	-3,35643	48	0,019499	0,0196	-1,55609
4	0,034351	0,0332	-3,46819	49	0,019582	0,0158	-0,9384
5	0,034137	0,033	-3,44642	50	0,019683	0,0154	-0,42515
6	0,034137	0,033	-3,44642	51	0,015452	0,0148	2,202215
7	0,034351	0,0332	-3,46819	52	0,014963	0,0143	2,839026
8	0,034728	0,0335	-3,66496	53	0,014363	0,014	2,950541
9	0,035216	0,034	-3,57776	54	0,013859	0,0139	3,085804
10	0,035705	0,0344	-3,79326	55	0,013585	0,014	2,9645
11	0,031002	0,0301	-2,99654	56	0,013585	0,0144	2,266403
12	0,030994	0,0298	-2,9685	57	0,013859	0,0149	1,009071
13	0,030872	0,0297	-2,90763	58	0,014363	0,0156	0,254722
14	0,030724	0,0297	-3,10077	59	0,014963	0,0118	-0,42141
15	0,030628	0,0298	-3,12313	60	0,015452	0,0107	0,948397
16	0,030628	0,0299	-3,12313	61	0,010873	0,00982	7,856949
17	0,030724	0,03	-3,10077	62	0,009598	0,00924	10,30361
18	0,030872	0,0301	-3,25184	63	0,008712	0,0089	11,28542
19	0,030994	0,0264	-3,31173	64	0,008135	0,00876	11,95815
20	0,031002	0,0264	-2,99654	65	0,00785	0,00885	11,79887
21	0,027086	0,0264	-2,59814	66	0,00785	0,0092	10,38926
22	0,02703	0,0263	-2,38807	67	0,008135	0,00989	8,078362
23	0,027001	0,0263	-2,27833	68	0,008712	0,011	5,306783
24	0,026954	0,0263	-2,48779	69	0,009598	0,00642	2,957371
25	0,026931	0,0263	-2,39985	70	0,010873	0,00548	1,155636
26	0,026931	0,0263	-2,39985	71	0,006125	0,00483	4,59824
27	0,026954	0,0263	-2,48779	72	0,004427	0,00437	19,21641
28	0,027001	0,0264	-2,66722	73	0,003544	0,00408	26,62263
29	0,02703	0,023	-2,77738	74	0,003083	0,00396	29,44195
30	0,027086	0,0229	-2,59814	75	0,002887	0,00401	29,23613
31	0,023356	0,0228	-1,54848	76	0,002887	0,00428	27,09177
32	0,023286	0,0228	-1,68725	77	0,003083	0,00483	23,10758
33	0,023212	0,0227	-1,80522	78	0,003544	0,00578	17,1932
34	0,023172	0,0227	-1,63184	79	0,004427	0	8,344845
35	0,023149	0,0227	-1,97938	80	0,006125	0	-5,96526
36	0,023149	0,0228	-1,97938	81	0	0	0
37	0,023172	0,0228	-2,07956	82	0	0	0
38	0,023212	0,0229	-1,80522	83	0	0	0
39	0,023286	0,0196	-2,13325	84	0	0	0
40	0,023356	0,0195	-1,99192	85	0	0	0
41	0,019683	0,0194	-0,42515	86	0	0	0
42	0,019582	0,0193	-0,42077	87	0	0	0
43	0,019499	0,0192	-0,50907	88	0	0	0
44	0,019469	0,0192	-0,87725	89	0	0	0
45	0,019461	0,0192	-1,35932	90	0	0	0

Πιν.6.1: Οριζόντιες μετακινήσεις κόμβων κατά Nastran & Boucfem και σύγκριση

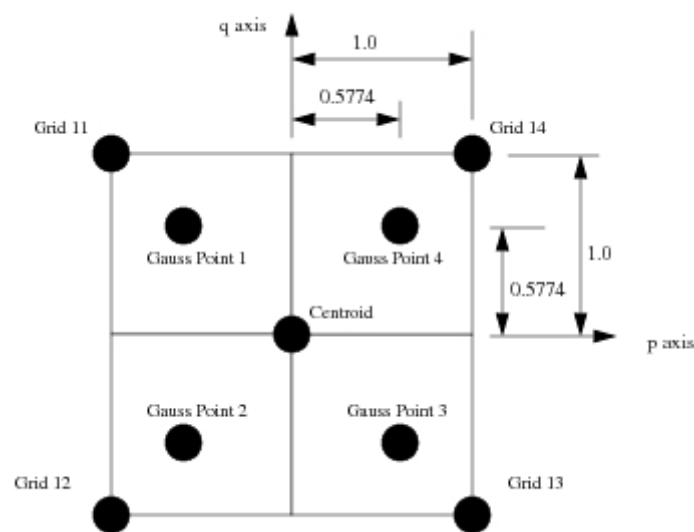
Η εντατική κατάσταση του τοίχου δεν είναι το ίδιο εύκολο να συγκριθεί στα δύο προγράμματα γιατί είναι διαφορετικός ο τρόπος που υπολογίζουν τις προκαλούμενες τάσεις στα στοιχεία.

Χαρακτηριστικά, το Nastran, για το εξεταζόμενο τετραπλευρικό στοιχείο, υπολογίζει τις τάσεις στο κέντρο βάρους του. Η εντατική κατάσταση του σημείου προκύπτει από τον εξής τύπο:

$$\sigma_g = \sum_{e=1}^{N_e} W_{ge} \cdot \sigma_{ge}$$

όπου σ_{ge} είναι ένας εντατικός όρος ενός σημείου του πλέγματος ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το W_{ge} , τον παράγοντα παρεμβολής και λαμβάνεται το άθροισμα για όλα τα στοιχεία N_e που συνδέονται με το σημείο αυτό.

Αντίθετα, το Boucferm υπολογίζει τις τάσεις στα τέσσερα εσωτερικά Gauss point κάθε στοιχείου. Σύμφωνα με τη θεωρία, τα Gauss point βρίσκονται σε ένα τετρακομβικό quad στα σημεία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικ. 6.5: Παράδειγμα 4κομβικού Quad με Gauss points

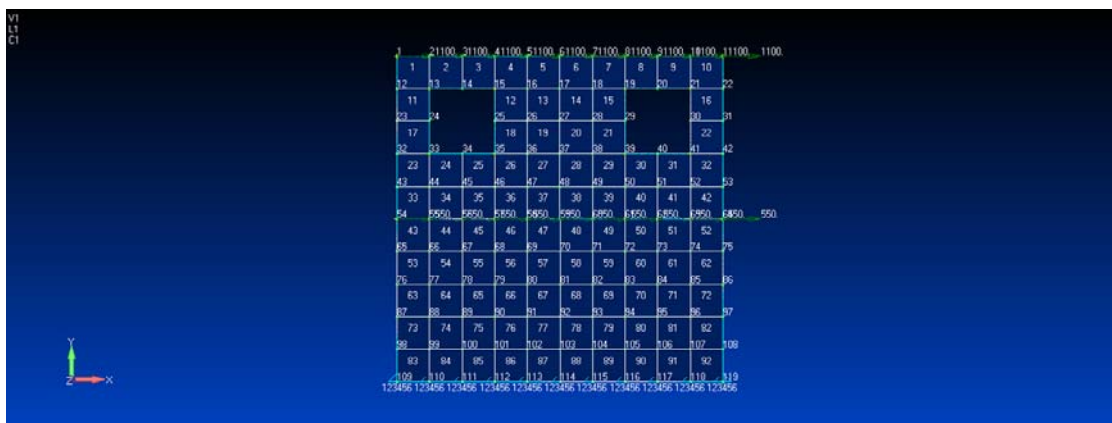
Συνεπώς, μια σύγκριση ανάμεσα στις τάσεις που υπολογίζονται από τα δύο προγράμματα δεν είναι δόκιμη. Ενδεικτικά, παρατίθενται τα αποτελέσματα για το στοιχείο 71, που είναι το προτελευταίο πάω από την στήριξη όπου προφανώς παρουσιάζονται έντονες τάσεις.

Στοιχείο 71	Τάσεις (kPa)		
BOUCFEM	stress x	stress y	shear xy
G.P 1	5,29E+03	2,50E+04	9,54E+03
G.P 2	1,07E+03	1,53E+04	1,29E+04
G.P 3	-2,56E+03	1,87E+04	7,29E+03
G.P 4	1,66E+03	2,84E+04	3,97E+03
NASTRAN	-8,20E+03	-2,57E+04	-8,99E+04

Πιν.6.2: Τιμές τάσεων για το στοιχείο 71

6.2 Σύγκριση 2^{ου} μοντέλου τοίχου

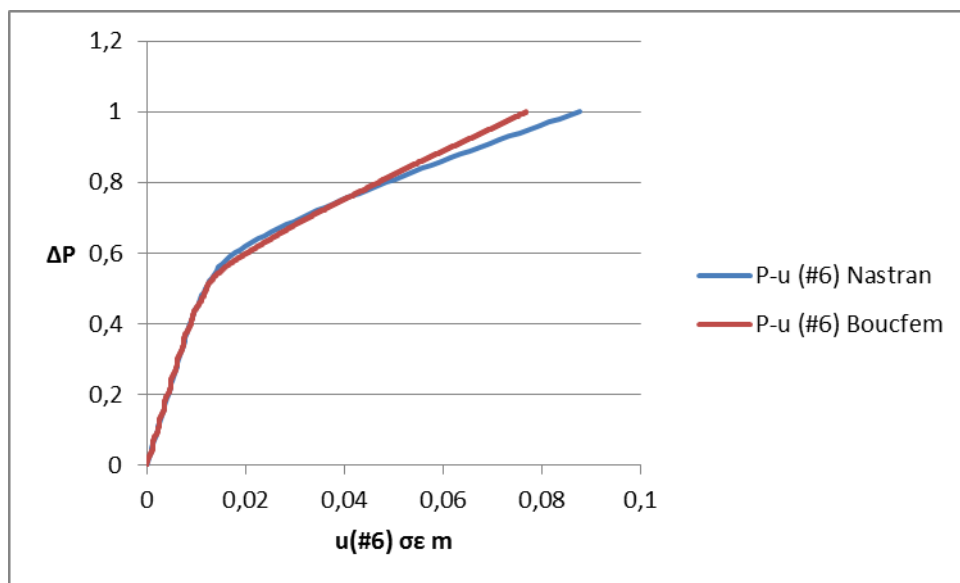
Πρόκειται για έναν τοίχο με δύο παράθυρα στον πάνω όροφο διαστάσεων $6m \times 6m$ και διακριτοποίηση με 119 κόμβους και 92 στοιχεία. Ο τοίχος φορτίζεται με συγκεντρωμένη δύναμη $1100kN$ στους 11 κόμβους της κορυφής και με $550kN$ αντίστοιχα στη μέση στάθμη όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



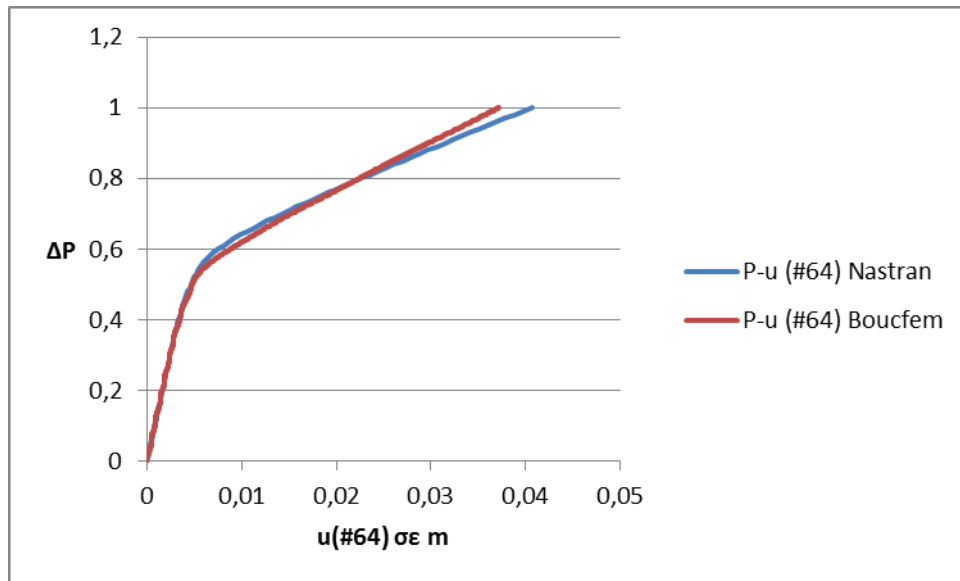
Εικ. 6.6: Εικόνα τοίχου 2

Τροποποιούνται κατάλληλα τα δεδομένα του τοίχου στη φόρμα του Boucfem, δηλαδή αλλάζει ο αριθμός των κόμβων, των στοιχείων, των πακτωμένων και των φορισμένων κόμβων, οι συντεταγμένες των κόμβων, η συνδεσμολογία και η φόρτιση. Ωστόσο, τα χαρακτηριστικά του υλικού και οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc – Wen παραμένουν τα ίδια.

Έπειτα, επιχειρείται μια ποσοτική και ποιοτική σύγκριση με την ανάλυση στο Nastran. Συγκρίνονται τα διαγράμματα επιβαλλόμενης δύναμης – μετατόπισης και πάλι στο μεσαίο κόμβο στην κορυφή (#6) και στον δεξί ακραίο κόμβο της μέσης στάθμης (#64).



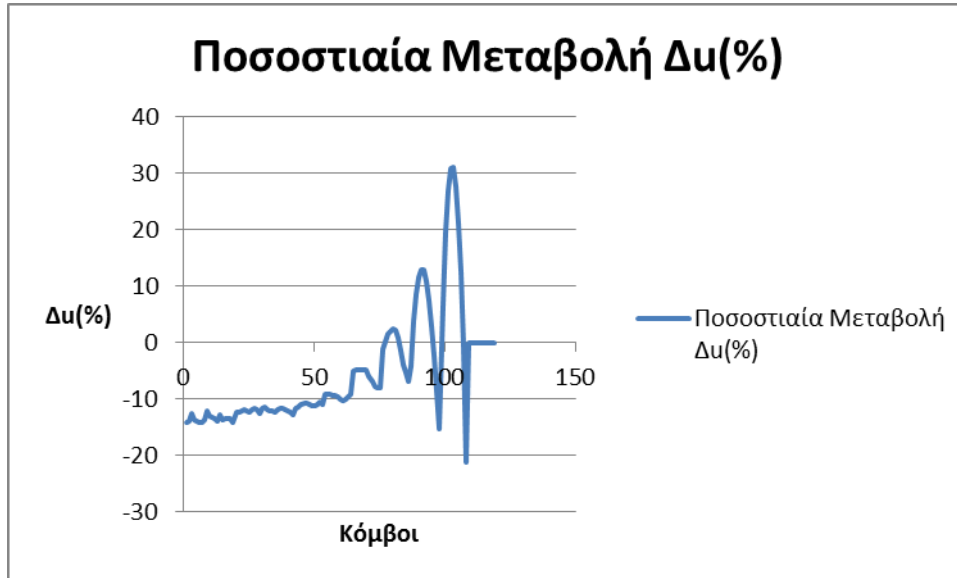
Εικ.6.7: Διάγραμμα P-d κόμβου 6



Εικ.6.8: Διάγραμμα P-d κόμβου 64

Διαπιστώνεται ότι η σύγκλιση είναι αρκετά καλή. Προς το τέλος της ανάλυσης, η μετατόπιση εμφανίζει μια μικρή απόκλιση της τάξεως του 10%, η οποία όμως μπορεί να αποδοθεί στο ότι η ανάλυση του Boucfem ολοκληρώνεται στα 20000 βήματα, ενώ του Nastran μόλις στα 100.

Έπειτα, ελέγχονται οι τιμές της οριζόντιας μετατόπισης σε όλους τους κόμβους για το τελικό στάδιο της ανάλυσης. Οι μετακινήσεις αποκλίνουν κατά 10-15 % στην πάνω περιοχή κάτι που αποδίδεται στην ύπαρξη των παραθύρων. Επίσης, λίγο μεγαλύτερες τιμές καταγράφει το Boucfem πάνω από την περιοχή των στηρίξεων. Το ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζει την ποσοστιαία διαφορά των τιμών της οριζόντιας μετακίνησης u στα δύο προγράμματα.

Εικ.6.9 : Διάγραμμα ποσοστιαίας διαφοράς u ανά κόμβο

	Nastran	Boucferm	Σύγκριση			Nastran	Boucferm	Σύγκριση
Κόμβοι	u	u	Du(%)		Κόμβοι	u	u	Du(%)
1	0,09086538	0,0796	-14,1525		61	0,039591	0,0359	-10,282
2	0,08987007	0,0788	-14,0483		62	0,040048	0,0364	-10,021
3	0,08807173	0,0782	-12,6237		63	0,040281	0,0367	-9,7574
4	0,08753023	0,077	-13,6756		64	0,04065	0,0372	-9,2752
5	0,08782373	0,077	-14,0568		65	0,032824	0,0312	-5,2064
6	0,08781641	0,0769	-14,1956		66	0,031668	0,0302	-4,8603
7	0,08782373	0,0769	-14,2051		67	0,030649	0,0292	-4,9624
8	0,08753023	0,0769	-13,8234		68	0,029756	0,0284	-4,7755
9	0,08807173	0,0785	-12,1933		69	0,029038	0,0277	-4,8296
10	0,08987007	0,0795	-13,0441		70	0,028765	0,0274	-4,9835
11	0,09086538	0,0802	-13,2985		71	0,029038	0,0274	-5,9773
12	0,08023171	0,0706	-13,6426		72	0,029756	0,0278	-7,0368
13	0,08074763	0,0709	-13,8895		73	0,030649	0,0284	-7,9191
14	0,08141605	0,0722	-12,7646		74	0,031668	0,0293	-8,0813
15	0,07987556	0,0702	-13,7828		75	0,032824	0,0304	-7,975
16	0,079087	0,0697	-13,4677		76	0,024687	0,0244	-1,1749
17	0,07886023	0,0695	-13,468		77	0,022775	0,0228	0,10912
18	0,079087	0,0696	-13,6307		78	0,0213	0,0216	1,38935
19	0,07987556	0,07	-14,1079		79	0,020199	0,0206	1,94864
20	0,08141605	0,0724	-12,4531		80	0,019445	0,0199	2,28824
21	0,08074763	0,0718	-12,4619		81	0,019169	0,0196	2,19679
22	0,08023171	0,0716	-12,0555		82	0,019445	0,0196	0,79265
23	0,06856018	0,0612	-12,0264		83	0,020199	0,0199	-1,5004
24	0,06822173	0,0608	-12,2068		84	0,0213	0,0205	-3,902
25	0,06717096	0,0598	-12,326		85	0,022775	0,0216	-5,4404
26	0,0667605	0,0597	-11,8266		86	0,024687	0,0231	-6,8687
27	0,06660098	0,0596	-11,7466		87	0,016873	0,0162	-4,1552
28	0,0667605	0,0596	-12,0143		88	0,014337	0,0149	3,78168
29	0,06717096	0,0597	-12,5142		89	0,012621	0,0138	8,54348
30	0,06822173	0,0611	-11,6559		90	0,011493	0,013	11,5945
31	0,06856018	0,0615	-11,48		91	0,0108	0,0124	12,9013
32	0,05621494	0,0502	-11,982		92	0,010557	0,0121	12,7554
33	0,05539524	0,0494	-12,1361		93	0,0108	0,0121	10,7418
34	0,05443665	0,0485	-12,2405		94	0,011493	0,0124	7,31685
35	0,05445179	0,0484	-12,5037		95	0,012621	0,013	2,91538
36	0,05455879	0,0487	-12,0304		96	0,014337	0,014	-2,4038
37	0,05463028	0,0489	-11,7184		97	0,016873	0,0155	-8,859
38	0,05455879	0,0488	-11,8008		98	0,009267	0,00804	-15,261
39	0,05445179	0,0486	-12,0407		99	0,0067	0,00717	6,55358
40	0,05443665	0,0485	-12,2405		100	0,005263	0,00654	19,5307
41	0,05539524	0,0493	-12,3636		101	0,004424	0,00605	26,8707
42	0,05621494	0,0498	-12,8814		102	0,00393	0,00568	30,8111
43	0,04758344	0,0426	-11,6982		103	0,003752	0,00545	31,1519
44	0,04745423	0,0426	-11,3949		104	0,00393	0,00543	27,6256
45	0,04765467	0,0429	-11,0831		105	0,004424	0,00561	21,1351
46	0,04718283	0,0426	-10,7578		106	0,005263	0,00601	12,4344
47	0,04674514	0,0422	-10,7705		107	0,0067	0,00665	-0,7535
48	0,04666524	0,042	-11,1077		108	0,009267	0,00764	-21,296
49	0,04674514	0,042	-11,298		109	0	0	0
50	0,04718283	0,0424	-11,2803		110	0	0	0
51	0,04765467	0,0429	-11,0831		111	0	0	0
52	0,04745423	0,0429	-10,6159		112	0	0	0
53	0,04758344	0,0429	-10,9171		113	0	0	0
54	0,04065038	0,0372	-9,27522		114	0	0	0
55	0,04028098	0,0369	-9,16255		115	0	0	0
56	0,04004754	0,0367	-9,12136		116	0	0	0
57	0,03959121	0,0362	-9,36798		117	0	0	0
58	0,0390862	0,0357	-9,48515		118	0	0	0
59	0,03892589	0,0355	-9,65039		119	0	0	0
60	0,0390862	0,0355	-10,102					

Πιν.6.3: Οριζόντιες μετακινήσεις κόμβων κατά Nastran & Boucferm και σύγκριση

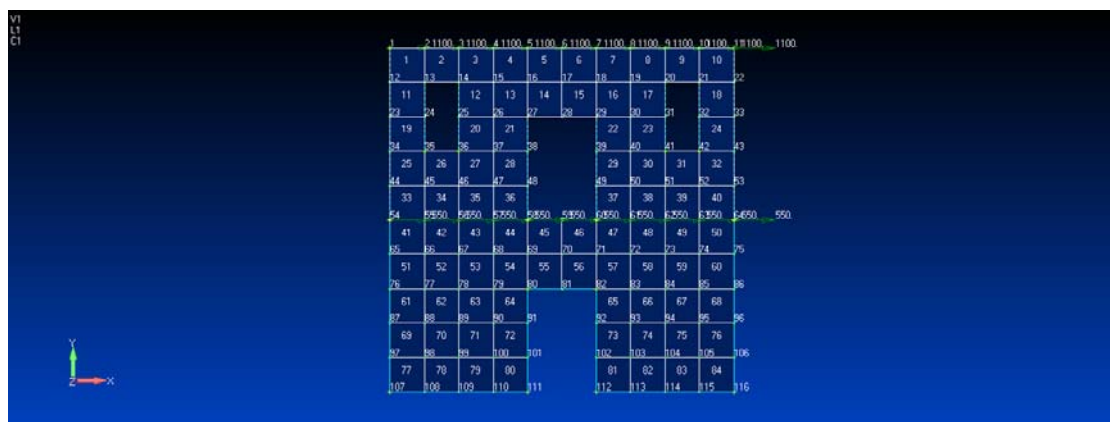
Σε σχέση με τις τιμές των τάσεων, όπως εξηγήθηκε δεν προσφέρεται η δυνατότητα για άμεση σύγκριση, οπότε ενδεικτικά παρατίθενται οι τάσεις στο στοιχείο 91 (προτελευταίο δεξιά πάνω από την στήριξη)

Στοιχείο 91	Τάσεις (kPa)		
BOUCFEM	stress x	stress y	shear xy
G.P 1	1,46E+04	-5,12E+03	-3,62E+04
G.P 2	9,19E+03	-2,52E+03	-4,12E+04
G.P 3	3,55E+03	3,49E+03	-2,42E+04
G.P 4	8,96E+03	1,07E+03	-2,70E+04
NASTRAN	-1,22E+04	-3,64E+04	-1,10E+04

Πιν.6.4: Τιμές τάσεων για το στοιχείο 91

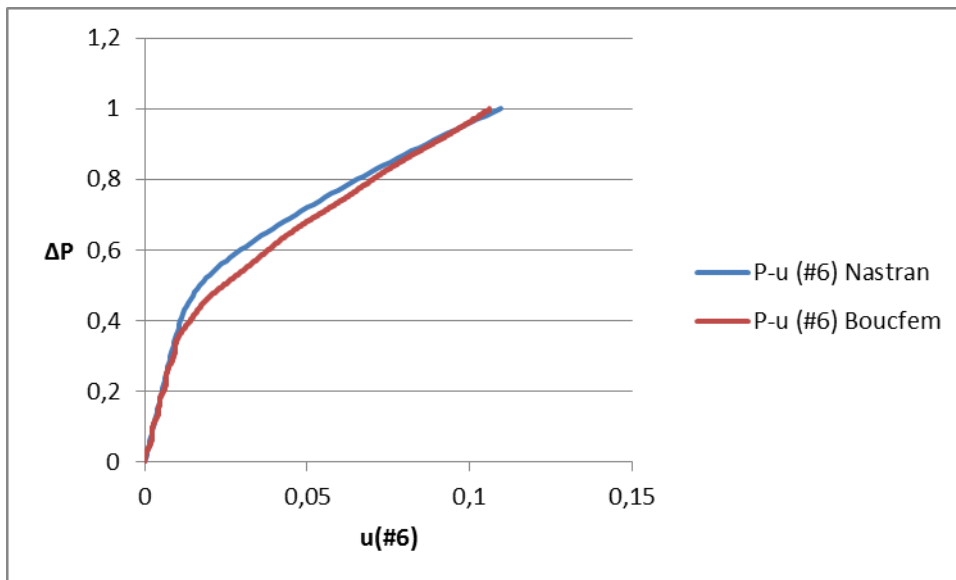
6.3 Σύγκριση 3^{ου} μοντέλου τοίχου

Πρόκειται για έναν τοίχο με δύο πόρτες ανά όροφο και δύο παράθυρα στον πάνω όροφο διαστάσεων $7m \times 7m$ και διακριτοποίηση με 116 κόμβους και 84 στοιχεία. Ο τοίχος φορτίζεται με συγκεντρωμένη δύναμη $1100kN$ στους 11 κόμβους της κορυφής και με $550kN$ αντίστοιχα στη μέση στάθμη όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

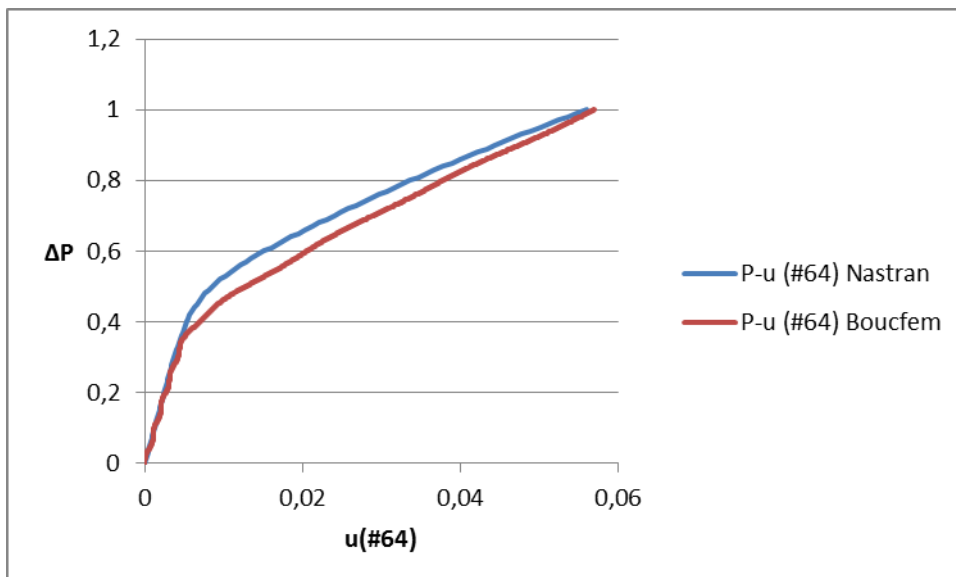


Εικ. 6.10: Εικόνα τοίχου 3

Αφού ολοκληρώθηκε η ανάλυση στο Boucfem, παρατίθεται το συγκριτικό διάγραμμα επιβαλλόμενου φορτίου – μετατόπισης στον μεσαίο κόμβο κορυφής (#6) και στον δεξί ακραίο κόμβο της μέσης (#64).



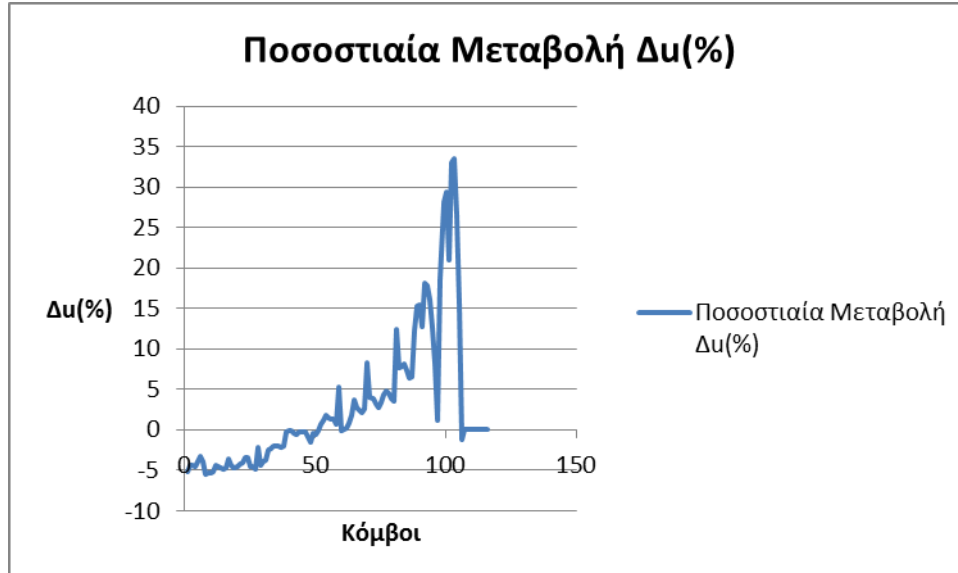
Εικ.6.11: Διάγραμμα P-d κόμβου 6



Εικ.6.12: Διάγραμμα P-d κόμβου 64

Οι συγκλίσεις είναι ικανοποιητικές για τα δύο διαγράμματα με μια εμφανή όμως απόκλιση μετά τη διαρροή. Προς το τέλος της ανάλυσης, η σύγκλιση γίνεται αρκετά καλύτερη. Για τον κόμβο κορυφής 6, η μέγιστη μετακίνηση είναι 0,106m στο Nastran και 0,1095m στο Boucfem. Ανάλογης ομοιότητας μετακίνηση καταγράφεται και για τον ακραίο κόμβο 64 στη μέση με 0,057m για το Nastran και 0,0559m για το Boucfem.

Ακολουθεί ο έλεγχος της οριζόντιας μετακίνησης των κόμβων του τοίχου όπως προέκυψαν από την ανάλυση σε κάθε πρόγραμμα και διαμορφώνεται το διάγραμμα των ποσοστιαίων διαφορών ανάμεσα στα δύο προγράμματα. Η σύγκλιση είναι ικανοποιητική πέραν της περιοχής πάνω από την στήριξη που όπως εξηγήσαμε αποτελεί ένα ευαίσθητο σημείο.



Εικ.6.13 : Διάγραμμα ποσοστιαίας διαφοράς u ανά κόμβο

	Nastran	Boucferm	Σύγκριση			Nastran	Boucferm	Σύγκριση
Κόμβοι	u	u	Du(%)		Κόμβοι	u	u	Du(%)
1	0,11563	0,11	-5,11809		59	0,049471	0,0522	5,227931
2	0,114846	0,11	-4,40518		60	0,052035	0,052	-0,06677
3	0,113749	0,109	-4,35725		61	0,053253	0,0533	0,087674
4	0,112878	0,108	-4,51639		62	0,054509	0,0546	0,167033
5	0,111182	0,107	-3,90822		63	0,05535	0,0558	0,805663
6	0,109543	0,106	-3,34208		64	0,055964	0,057	1,818228
7	0,111182	0,107	-3,90822		65	0,044763	0,0465	3,735763
8	0,112878	0,107	-5,49318		66	0,043729	0,045	2,825378
9	0,113749	0,108	-5,32352		67	0,043034	0,0441	2,416259
10	0,114846	0,109	-5,36303		68	0,042763	0,0437	2,144348
11	0,11563	0,11	-5,11809		69	0,042738	0,0439	2,647016
12	0,103294	0,099	-4,33737		70	0,042832	0,0467	8,282848
13	0,103579	0,0991	-4,51978		71	0,042738	0,0445	3,95964
14	0,104124	0,0994	-4,75282		72	0,042763	0,0445	3,903551
15	0,104066	0,0993	-4,7998		73	0,043034	0,0445	3,293416
16	0,103732	0,0991	-4,67366		74	0,043729	0,045	2,825378
17	0,10354	0,1	-3,5399		75	0,044763	0,0463	3,319935
18	0,103732	0,0993	-4,46284		76	0,034326	0,0359	4,384429
19	0,104066	0,0994	-4,69437		77	0,032726	0,0344	4,866744
20	0,104124	0,0996	-4,54247		78	0,03226	0,0338	4,556302
21	0,103579	0,0994	-4,20433		79	0,032892	0,0342	3,824181
22	0,103294	0,0993	-4,02216		80	0,034157	0,0354	3,509944
23	0,090725	0,0877	-3,44886		81	0,037046	0,0423	12,4205
24	0,090631	0,0876	-3,46017		82	0,034157	0,037	7,682486
25	0,093939	0,0899	-4,49263		83	0,032892	0,0357	7,865182
26	0,094348	0,0902	-4,59825		84	0,03226	0,0351	8,091254
27	0,095235	0,0908	-4,88436		85	0,032726	0,0353	7,292238
28	0,097405	0,0954	-2,10148		86	0,034326	0,0367	6,468692
29	0,095235	0,0913	-4,30997		87	0,02325	0,0249	6,624538
30	0,094348	0,0908	-3,90707		88	0,020447	0,0233	12,24365
31	0,093939	0,0905	-3,79986		89	0,018802	0,0222	15,30698
32	0,090631	0,0885	-2,40803		90	0,018168	0,0215	15,49781
33	0,090725	0,0886	-2,39802		91	0,018244	0,0209	12,7101
34	0,078099	0,0766	-1,95704		92	0,018244	0,0223	18,19018
35	0,077932	0,0764	-2,00539		93	0,018168	0,0221	17,79199
36	0,078124	0,0766	-1,98914		94	0,018802	0,0224	16,06317
37	0,078511	0,0769	-2,0944		95	0,020447	0,0234	12,61868
38	0,078356	0,0768	-2,02651		96	0,02325	0,0253	8,10083
39	0,078356	0,0782	-0,19995		97	0,012151	0,0123	1,212033
40	0,078511	0,0784	-0,14106		98	0,009039	0,0111	18,56694
41	0,078124	0,078	-0,15856		99	0,007329	0,0102	28,14288
42	0,077932	0,0776	-0,42799		100	0,006627	0,00938	29,35076
43	0,078099	0,0777	-0,51363		101	0,007292	0,00923	20,99506
44	0,066632	0,0665	-0,19883		102	0,007292	0,0109	33,09949
45	0,066648	0,0665	-0,2218		103	0,006627	0,00997	33,5316
46	0,066447	0,0663	-0,22186		104	0,007329	0,00998	26,55886
47	0,065979	0,0654	-0,88606		105	0,009039	0,0107	15,52271
48	0,065984	0,065	-1,51386		106	0,012151	0,012	-1,25767
49	0,065984	0,0657	-0,43228		107	0	0	0
50	0,065979	0,0656	-0,57848		108	0	0	0
51	0,066447	0,0664	-0,07092		109	0	0	0
52	0,066648	0,0671	0,674367		110	0	0	0
53	0,066632	0,0674	1,139139		111	0	0	0
54	0,055964	0,057	1,818228		112	0	0	0
55	0,05535	0,0562	1,511673		113	0	0	0
56	0,054509	0,0552	1,252174		114	0	0	0
57	0,053253	0,054	1,382833		115	0	0	0
58	0,052035	0,0524	0,697099		116	0	0	0

Πιν.6.5: Οριζόντιες μετακινήσεις κόμβων

Στη συνέχεια, καταγράφεται η εντατική κατάσταση στο στοιχείο 84 που αντιστοιχεί στο κάτω δεξί άκρο του τοίχου και συγκεντρώνει μεγάλες τιμές τάσεων.

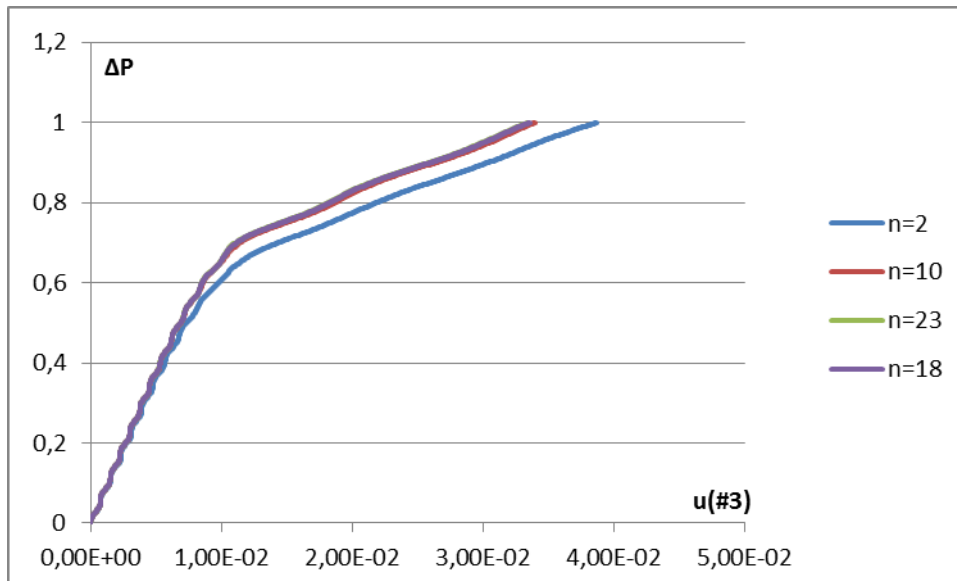
Στοιχείο 84	Τάσεις (kPa)		
BOUCFEM	stress x	stress y	shear xy
G.P 1	2,68E+04	3,67E+04	2,11E+04
G.P 2	2,05E+04	-1,14E+04	-1,91E+04
G.P 3	1,59E+04	-8,49E+03	2,34E+03
G.P 4	1,70E+04	-2,54E+04	5,97E+03
NASTRAN	-5,02E+04	-1,64E+04	1,23E+04

Πιν.6.6: Τιμές τάσεων για το στοιχείο 84

6.4 Σύγκριση διαγράμματος P-d με μεταβολή του n

Στη συνέχεια, λαμβάνονται διαφορετικές τιμές της παραμέτρου n του υστερητικού προσομοιώματος Bouc - Wen για το ίδιο μοντέλο στο Boucfem για να εξεταστεί ενδεχόμενη μεταβολή της συμπεριφοράς του φορέα. Υπενθυμίζεται ότι στο προσομοίωμα, το n επηρεάζει την ομαλότητα της μετάβασης από την ελαστική στην ανελαστική περιοχή.

Αναλύεται το 1^ο μοντέλο του συνεχούς τοίχου με τα ίδια δεδομένα και εκλέγονται οι τιμές n=2, 10, 23 και φυσικά n=18 της προηγούμενης ανάλυσης. Παρατίθεται το συγκριτικό διάγραμμα της επιβαλλόμενης δύναμης – μετατόπισης στον κόμβο κορυφής #3.

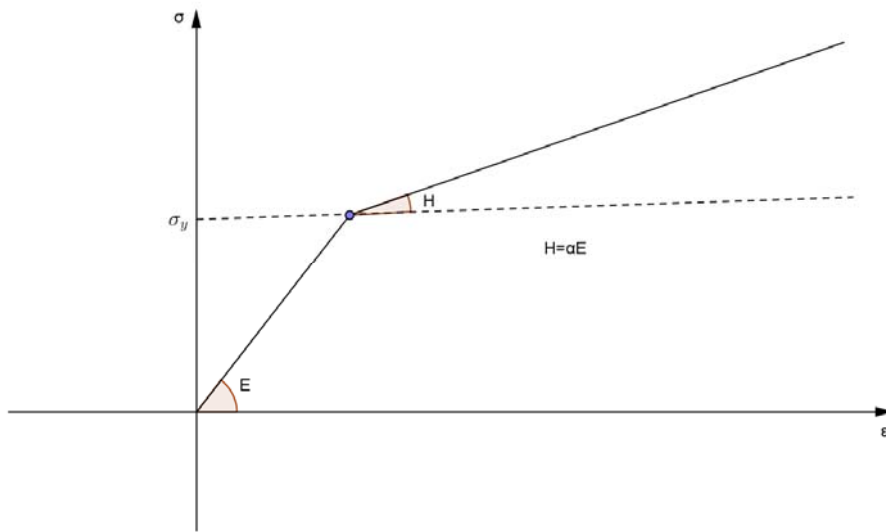


Εικ 6.14: Συγκριτικό διάγραμμα P-u για τον κόμβο 3 για διαφορετικές τιμές του n

Παρατηρείται ότι για τις τιμές $n=10$, 18 και 23 , η συμπεριφορά συγκλίνει σχεδόν απόλυτα (οι καμπύλες επικαλύπτονται). Για $n=2$, φαίνεται ότι ο κόμβος εισάγεται πιο ομαλά στην ανελαστική ζώνη.

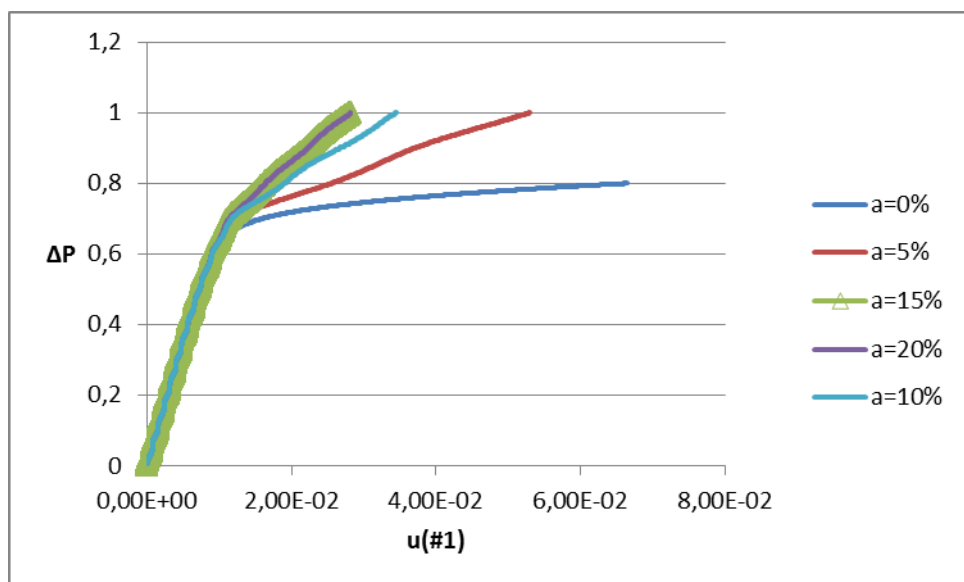
6.5 Σύγκριση διαγράμματος P-d με μεταβολή της τιμής α

Επιχειρείται ένας έλεγχος της ανελαστικής απόκρισης του φορέα για μεταβολή της τιμής του α που αφορά στην κράτυνση. Υπενθυμίζεται ότι το υλικό συμπεριφέρεται βάσει του παρακάτω διγραμμικού διαγράμματος τάσης – παραμόρφωσης. Το σκυρόδεμα έχει τάση διαρροής $\sigma_y^c = 20000kPa$ και το μέτρο πλαστικότητας ορίζεται ως το ποσοστό α του μέτρου ελαστικότητας ($H = \alpha \cdot E$)



Εικ.6.15: Διγραμμικό διάγραμμα σ - ϵ σκυροδέματος

Επιλέγονται οι τιμές 0%, 5%, 10%, 15%, 20% για το a και ακολουθούν τα συγκριτικά διαγράμματα επιβαλλόμενου φορτίου – μετατόπισης για τον αριστερό ακραίο κόμβο κορυφής #1 όπως προέκυψαν από την ανάλυση στο Boucfem.



Εικ 6.16: Συγκριτικό διάγραμμα P-u για τον κόμβο 1 για διαφορετικές τιμές του a

Παρατηρείται ότι πράγματι, όσο μειώνεται η τιμή του α , τόσο περισσότερο οδηγείται η καμπύλη στην πλαστική περιοχή. Διευκρινίζεται μάλιστα ότι για την τιμή $\alpha=0$, δηλαδή για υλικό με ελαστική – τελείως πλαστική συμπεριφορά, η μετακίνηση u φτάνει την τιμή 0,429m και για λόγους καλύτερης συγκριτικής παρουσίασης, στο διάγραμμα αντιστοιχούν τα $\frac{3}{4}$ των βημάτων της συγκεκριμένης ανάλυσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή είχε ως στόχο να μελετήσει την ελαστοπλαστική απόκριση ορισμένων τοίχων από σκυρόδεμα που υποβάλλονται σε στατική φόρτιση επίπεδης έντασης όπου χρησιμοποιείται το τετρακομβικό ισοπαραμετρικό υστερητικό στοιχείο επίπεδης έντασης.

Η ανάπτυξη των υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων αποσκοπεί στο να εισάγει στην γενική διατύπωση της παραγωγής πεπερασμένων στοιχείων τους καταστατικούς νόμους ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς ώστε να μειωθούν οι επαναλήψεις ισορροπίας και να αποτυπωθεί η πραγματική μη γραμμική ελαστοπλαστική συμπεριφορά της κατασκευής. Διαμορφώθηκε μια σύγκριση σε διαφορετικούς τοίχους χωρίς και με ανοίγματα ίδιας φόρτισης και διακριτοποίησης, στο πρόγραμμα Nastran της Femap και στο πρόγραμμα Boucfem το οποίο βασίζεται στο τετραπλευρικό υστερητικό πεπερασμένο στοιχείο [7b]. Η σύγκλιση που προέκυψε κρίνεται ικανοποιητική - ιδιαίτερα στο παράδειγμα του συνεχούς τοίχου και λιγότερο στους τοίχους με ανοίγματα - μετά τον έλεγχο των διαγραμμάτων επιβαλλόμενου φορτίου – προκαλούμενης μετατόπισης ενδεικτικών κόμβων, αλλά και την αναλυτική σύγκριση των οριζόντιων μετακινήσεων στα δύο προγράμματα.

Παράλληλα, έγινε επαλήθευση, μέσω του προγράμματος Boufem, της επιρροής της παραμέτρου n του προσομοιώματος Bouc – Wen, καθώς και της τιμής του α που καθορίζει την κράτυνση στην ανελαστική απόκριση των εξεταζόμενων τοίχων.

Επίσης, πραγματοποιήθηκε ανάλυση των μοντέλων με κοινό αριθμό βημάτων (20.000) στα δύο προγράμματα η οποία κατέδειξε πως ο υπολογιστικός χρόνος για τα υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία συγκριτικά με το Nastran είναι αισθητά μικρότερος. Συγκεκριμένα, παρατίθεται αναλυτικά οι απαιτούμενοι χρόνοι ανάλυσης :

Steps		Τοίχος 1	Τοίχος 2	Τοίχος 3
20000	Boucfem	5min : 8sec	10min : 25sec	9min : 0sec
20000	Nastran	16min : 2sec	21min : 17sec	19min : 47sec

Πιν. 7.1: Χρόνοι ανάλυσης Nastran & Boucfem ανά τοίχο

Επομένως, η λύση των υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων φαίνεται ότι έχει καλή αξιοπιστία στα αποτελέσματα παράλληλα με μια φυσικότερη και πιο σύντομη διαδικασία από το πρόγραμμα Nastran.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Akhtar S. Khan & Sujian Huang, Continuum Theory of Plasticity, 1995
- [2] Bouc, R. (1967). "Forced vibration of mechanical systems with hysteresis", Proceedings of the Fourth Conference on Non-linear oscillation, Prague, Czechoslovakia.
- [3] Casciati F. (2006). "Stochastic Dynamics of Hysteretic media", Probabilistic Methods in Applied Physics, Springer Berlin / Heidelberg, 270-283.
- [4] Doltsinis I. - Elements of Plasticity Theory and Computation High Performance Structures and Materials, Witpress, 2010
- [5] Lubliner J. (2008). "Plasticity Theory", Dover, New York.
- [6] Παπαδρακάκης Μ., Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχειών, Αθήνα, 2001
- [7a] Τριανταφύλλου Σ. Π., Υστερητικά Πεπερασμένα Στοιχεία και Μακροστοιχεία για τη Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών (διδακτορική διατριβή), Αθήνα, 2011
- [7b] Triantafyllou S., Koumouisis V. (2012) "A hysteretic quadrilateral plane stress element ", Archive of Applied Mechanics (in press).
- [8] Wen Y. K. (1980)., "Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation", Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 47(1), 150-154.