ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Παραγωγή Σωματιδίων
σε
Καμπύλους Χωροχρόνους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Κωνσταντίνου Ντρέκη

Επιβλέπων: Γεώργιος Κουτσούμπας
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα
Φεβρουάριος 2012

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
και Φυσικων Επιστημων

Τομεας Φυσικης

Παραγωγή Σωματιδίων σε Καμπύλους Χωροχρόνους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Κωνσταντίνου Ντρέκη

Επιβλέπων: Γεώργιος Κουτσούμπας
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 1η Φεβρουαρίου 2012.

(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)
... ...	... ...	... ...
Γεώργιος Κουτσούμπας	Κωνσταντίνος Φαράκος	Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2012

Εισαγωγή

Η κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπύλους χωροχρόνους είναι η θεωρία στην οποία η ύλη αντιμετωπίζεται πλήρως σύμφωνα με τις αρχές της κβαντικής θεωρίας πεδίου ενώ η βαρύτητα αντιμετωπίζεται κλασικά σε συμφωνία με τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Δεν αναμένεται να είναι μια ακριβής θεωρία της φύσης αλλά θα πρέπει να παρέχει μια καλή προσέγγιση στην περιγραφή της όταν τα κβαντικά φαινόμενα της ίδιας της βαρύτητας δεν παίζουν κυρίαρχο ρόλο. Ανεξάρτητα από την κλασική αντιμετώπιση της βαρύτητας, η κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπύλους χωροχρόνους μας παρέχει μερικές από τις βαθύτερες γνώσεις που έχουμε μέχρι στιγμής σχετικά με τη φύση της κβαντικής βαρύτητας.

Η κβαντική θεωρία πεδίου όπως διατυπώνεται συνήθως εμπεριέχει πολλά στοιχεία τα οποία είναι πολύ ξεχωριστά στο χωρόχρονο Minkowski, όταν δηλαδή ο χωρόχρονος θεωρείται επίπεδος. Γνωρίζουμε όμως από την γενική θεωρία της σχετικότητας ότι ο χωρόχρονος δεν είναι επίπεδος και πράγματι υπάρχουν πολύ ενδιαφέροντα φαινόμενα κβαντικής θεωρίας πεδίου σε περιβάλλοντα όπως το αρχικό σύμπαν, οι περιοχές κοντά σε μαύρες τρύπες και ένα διαστελλόμενο σύμπαν, όπου ο χωρόχρονος δεν μπορεί να προσεγγιστεί ως επίπεδος.

Είναι σχετικά απλό να γενικεύσουμε την κβαντική θεωρία πεδίου από τον επίπεδο στον καμπύλο χωρόχρονο. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχει ένας ξεκάθαρος διαχωρισμός ανάμεσα στις εξισώσεις πεδίου και τις λύσεις τους. Όπως θα δούμε οι εξισώσεις πεδίου μπορούν να γενικευθούν ευθέως στον καμπύλο χωρόχρονο. Οι λύσεις των εξισώσεων πεδίου δεν χρειάζεται να γενικευτούν από τον επίπεδο στον καμπύλο χωρόχρονο και αυτό δεν επηρεάζει τη διατύπωση της θεωρίας.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία τελικός σκοπός μας θα είναι η μελέτη της παραγωγής σωματιδίων σε ένα δισδιάστατο σύμπαν Robertson-Walker με "μέσα" και "έξω" περιοχές που θα έχουν τη μορφή χωρόχρονου Minkowski. Για να καταλήξουμε εκεί, για να καταλήξουμε δηλαδή στην κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπύλους χωροχρόνους ξεκινάμε από τα βασικά στοιχεία της κλασικής θεωρίας πεδίου τα οποία παρουσιάζουμε στο πρώτο κεφάλαιο. Στο δεύτερο κεφάλαιο προχωράμε στην κβάντωση της θεωρίας σε χωρόχρονο Minkowski για ένα βαθμωτό πεδίο. Μια σύντομη αναφορά στη γενική θεωρία της σχετικότητας πραγματοποιείται στο τρίτο κεφάλαιο η οποία εμπεριέχει τα απαραίτητα στοιχεία για να καταλήξουμε στον τανυστή καμπυλότητας Riemann τον οποίο θα εισαγάγουμε στη μελέτη μας. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο θα έχουμε τα απαραίτητα εφόδια για να κατασκευάσουμε μια κβαντική θεωρία πεδίου για καμπύλους χωροχρόνους και συγκεκριμένα για ένα διαστελλόμενο σύμπαν Robertson-Walker με "μέσα" και "έξω" περιοχές Minkowski. Τα θεωρητικά συμπεράσματα στα οποία θα καταλήγουμε κάθε φορά θα συνοδεύονται από αριθμητική μελέτη χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα mathematica.

Ολοκληρώνοντας την εισαγωγή αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Κουτσούμπα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

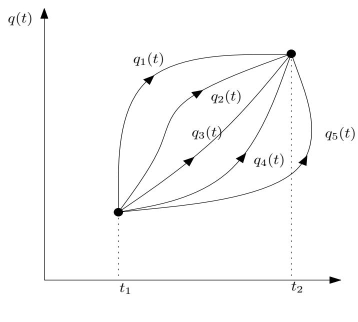
Κλασική Θεωρία Πεδίου

1.1 Άποψη της ελάχιστης δράσης

Οι κβαντικές θεωρίες χτίζονται εφαρμόζοντας μια διαδικασία κβάντωσης στις κλασικές θεωρίες. Το σημείο έναρξης μιας κλασικής θεωρίας είναι η αρχή της ελάχιστης δράσης. Η τροχία που θα ακολουθήσει ένα σωματίδιο προσδιορίζεται από το αξίωμα (αρχή) ότι από την ποικιλία των δυνατοτήτων θα επιλέξει εκείνη για την οποία μια ποσότητα που καλείται δράση θα γίνει ελάχιστη. Η δράση S ορίζεται

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))dt \tag{1.1}$$

όπου $q(t)$ η θέση του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου και $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ η ταχύτητά του, ενώ η L ονομάζεται Λαγκρανζιανή συνάρτηση. Η συνάρτηση S δεν είναι απλά μια συνάρτηση του t - είναι καλύτερα μια συνάρτηση ολόκληρου του συνόλου των σημείων $q(t)$. Είναι μια συνάρτηση της συνάρτησης $q(t)$, ή αλλιώς ένα συναρτησιακό του $q(t)$. Αυτό που θέλουμε να ξέρουμε είναι ποιό συγκεκριμένο $q_c(t)$ ελαχιστοποεί την S.



Σχήμα 1.1: Πιθανές χωροχρονικές τροχίες από το σημείο $q(t_1)$ στο $q(t_2)$

Θεωρούμε μια μικρή αλλαγή $\delta q(t)$ στη διαδρομή από το $q(t_1)$ στο $q(t_2)$. Στο ελάχιστο η αλλαγή δS στη δράση που αντιστοιχεί στην αλλαγή $\delta q(t)$ θα πρέπει να μηδενίζεται. Η αλλαγή στη δράση δίνεται από τη σχέση

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \Big) dt \tag{1.2}$$

αφού γενικά για μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ισχύει

$$df(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_n} dx_n$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\delta \dot{q}(t) = \frac{d(\delta q(t))}{dt}$ έχουμε

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d(\delta q(t))}{dt} \Big) dt$$

και ολοκληρώνοντας στην (1.2) τον δεύτερο όρο κατά παράγοντες

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \Big) dt + \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \Big]_{t_1}^{t_2}$$

Εφόσον θεωρούμε αλλαγές στη διαδρομή κατά την οποίς όλες οι τροχιές ξεκινούν τη χρονική στιγμή t_1 και σταματούν τη χρονική στιγμή t_2 θα έχουμε ότι $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Έτσι η συνθήκη $\delta S = 0$ γίνεται

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \Big(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \Big) dt = 0$$

Η παραπάνω όμως πρέπει να ισχύει για κάθε $\delta q(t)$ αφού η επιλογή του $\delta q(t)$ ήταν εξ αρχής αυθαίρετη. Έτσι καταλήγουμε στην

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \tag{1.3}$$

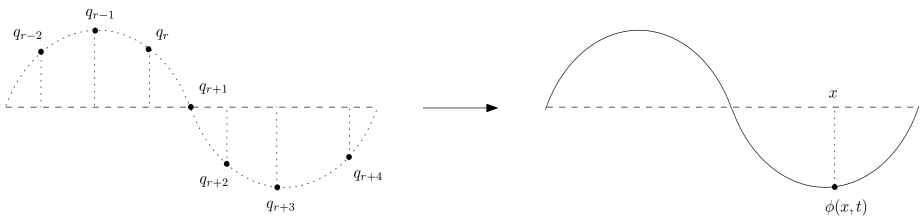
που είναι η περίφημη εξίσωση κίνησης Euler - Lagrange. Η λύση της δίνει την τροχία $q_o(t)$ που πραγματικά ακολουθεί το σωματίδιο.

Θα δούμε τώρα πως θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Lagrange - Hamilton για το *πεδίο*, ξεκινώντας από την κλασική περίπτωση και περιοριζόμενοι στη μία διάσταση για αρχή. Θα έχουμε στο μυαλό μας το όριο $N \to \infty$ της περίπτωσης των N βαθμών ελευθερίας.

$$\{q_r(t); r = 1, 2, ..., N\} \xrightarrow[N \to \infty]{} \phi(x, t)$$

όπου το x τώρα είναι μία συνεχής μεταβλητή που επισημαίνει την μετατόπιση της "χορδής" (Σχήμα 1.2). Η εγκάρσια ταλάντωση της χορδής περιγράφεται από το πεδίο $\phi(x, t)$. Σε κάθε σημείο x της χορδής το $\phi(x, t)$ μετράει τη μετατόπιση απο τη θέση ισορροπίας, τη χρονική στιγμή t, ενός μικρού στοιχείου χορδής γύρω από το σημείο x. Σε κάθε σημείο x έχουμε έναν ανεξάρτητο βαθμό ελευθερίας $\phi(x, t)$ - έτσι το σύστημα *πεδίο* έχει ένα "συνεχές άπειρο" βαθμών ελευθερίας.

Ένα καινούργιο δεδομένο εμφανίζεται επειδή η ϕ είναι συνεχής συνάρτηση του x. Υποθέτουμε ότι η ίδια η L θα πρέπει να είναι χωρικό ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης η οποία θα εξαρτάται και απο το $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ εκτός των ϕ και $\dot{\phi}$. Τη συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L} = \mathcal{L}\Big(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi}\Big)$



Σχήμα 1.2: το πέρασμα από ένα μεγάλο αριθμό διακριτών βαθμών ελευθερίας (σωματίδια με μάζα που συνδέονται με ελατήρια) στον συνεχή βαθμό ελευθερίας (*πεδίο*).

(σε μια διάσταση). Θα εκφράσουμε τώρα τα πάντα συναρτήσει της Λαγκρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}$. Η δράση $S[\phi]$ είναι ένα συναρτησιακό

$$S[\phi] = \int L\ dt = \int dt \int \mathcal{L}\Big(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi}\Big)\ dx$$

Όπως και πριν χρησιμοποιούμε την ίδια θεμελιώδη αρχή

$$\delta S = 0$$

με την αλλαγή στη δράση να δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt \int \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big)}\delta\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi}\Big]dx \\ &= \int dt \int \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big)}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\frac{d}{dt}(\delta\phi)\Big]dx\end{aligned}$$

αφού $\delta\big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta\phi)$ και $\delta\dot{\phi} = \frac{d}{dt}(\delta\phi)$. Εφαρμόζοντας ξανά ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο x και στο t στον δεύτερο και τρίτο όρο αντίστοιχα έχουμε

$$\delta S = \int dt \int \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big)}\Big)\delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\Big)\delta\phi\Big]dx + \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big)}\delta\phi\Big]_{x_2}^{x_2} + \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi\Big]_{x_2}^{x_2}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι μηδενίζονται από τις αρχικές συνθήκες $\delta\phi(x_1) = \delta\phi(x_2) = 0$ αφήνοντας

$$\delta S = \int dt \int \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big)}\Big)\delta\phi - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\Big)\delta\phi\Big]dx$$

Εφόσον η $\delta\phi$ είναι μια τυχαία συνάρτηση η απαίτηση $\delta S = 0$ μας δίνει την εξίσωση πεδίου Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\big)}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\Big) = 0$$

Η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις είναι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\Big) = 0$$

Για τα σχετικιστικά πεδία η εξίσωση Euler - Lagrange γράφεται άμεσα σε αναλλοίωτη μορφή

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Big) = 0$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή την Λαγκρανζιανή $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \phi}\big(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2\big) - \partial_\mu \Big(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \big(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2\big)\Big) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi}\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2\Big) - \nabla\Big(\frac{\partial}{\partial(\nabla \phi)} \big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2\big)\Big) \\
&-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2\big)\Big) = 0 \\
&\Rightarrow \; -m^2 + \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}$$

Καταλήξαμε έτσι στην εξίσωση Klein - Gordon για το πεδίο $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$(\Box + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.4}$$

Το πεδίο $\phi(\mathbf{x}, t)$ είναι ένα βαθμωτό πεδίο. Βαθμωτό σημαίνει ότι το πεδίο έχει μόνο μία ανεξάρτητη συνιστώσα σε κάθε σημείο $(\mathbf{x}, t)$ - σε αντίθεση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, για παράδειγμα, στο οποίο η ανάλογη ποσότητα έχει τέσσερις συνιστώσες φτιάχνοντας ένα τετραδιάστατο διανυσματικό πεδίο $A^\mu(\mathbf{x}, t) = (A_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))$. Στην κβαντική περίπτωση τα βαθμωτά πεδία είναι κατάλληλα για να περιγράψουν σωματίδια με σπιν 0.

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε τον Λαγκραζιανό φορμαλισμό είναι ότι καθιστά εύκολο να ικανοποιηθεί το αναλλοίωτο κατά Lorentz καθώς και άλλες συμμετρίες. Μια κλασική θεωρία με Lorentz αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή πυκνότητα όταν κβαντιστεί με κανονικό τρόπο κβάντωσης οδηγεί σε μια Lorentz αναλλοίωτη κβαντική θεωρία.

1.2 Το θεώρημα Noether

Η σχέση ανάμεσα σε συμμετρίες και νόμους διατήρησης στη θεωρία πεδίου δίνεται από το θεώρημα Noether. Το θεώρημα αυτό αφορά συνεχείς μετασχηματισμούς στα πεδία ϕ οι οποίοι σε απειροστή μορφή μπορούν να γραφτούν

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + a\delta\phi(x)$$

όπου a είναι μια απειροστή παράμετρος και $\delta\phi$ είναι μια παραμόρφωση του πεδίου. Θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι μια συμμετρία αν αφήνει τις εξισώσεις κίνησης αναλλοίωτες. Αυτό εξασφαλίζεται αν η δράση S είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό $\phi \to \phi'$.

Το θεώρημα Noether συνοψίζεται ως εξής. Θεωρούμε σύστημα που περιγράφεται από μια Λαγκρανζιανή $L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ και έχει εξίσωση κίνησης $\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Big) = 0$. Κάθε συνεχής μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτη τη δράση $S = \int L dt$ συνεπάγεται ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος $j^\mu(x)$. Πιο γενικά μπορούμε να επιτρέψουμε στη δράση να αλλάζει κατά έναν επιφανειακό όρο αφού το ολοκλήρωμά του εν τέλει θα μηδενιστεί και δεν θα επηρεάσει την παραγωγή της εξίσωσης Euler-Lagrange. Η Λαγκρανζιανή λοιπόν αρκεί να είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό $\phi \to \phi'$ μέχρι και την τετρα-παραγώγιση

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + a\partial_\mu J^\mu(x) \qquad \text{για κάποιο } J^\mu \tag{1.5}$$

Στην πράξη, αν εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής

$$\phi \to \phi' = \phi + a\delta\phi$$

η αλλαγή στη Λαγκρανζιανή θα είναι ένας επιπλέον όρος

$$a\delta\mathcal{L} = a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$

Όμως η διαφορά των παραγώγων ισούται με την παράγωγο της διαφοράς

$$\delta(\partial_\mu\phi) \equiv \partial_\mu\phi' - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\phi' - \phi) = \partial_\mu\delta\phi$$

έτσι η παραπάνω γράφεται

$$a\delta\mathcal{L} = a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)$$

Επιπλέον ισχύει

$$\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\Big) = \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Big)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi$$

Έτσι η αλλαγή στη Λαγκρανζιανή τελικά είναι

$$\begin{aligned} a\delta\mathcal{L} &= a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\Big) - a\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Big)\delta\phi \\ &= a\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Big)\Big)\delta\phi + a\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\Big) = a\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\Big) \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος μηδενίστηκε λόγω της εξίσωσης Euler - Lagrange. Εξισώνοντας την αλλαγή αυτή με τον όρο $a\partial_\mu J^\mu(x)$ της σχέσης (1.5) βρίσκουμε

$$a\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\Big) = a\partial_\mu J^\mu \quad \Rightarrow \quad a\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - J^\mu\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{1.6}$$

με $j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - J^\mu(x)$. Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι το ρεύμα j^μ διατηρείται. Ο παραπάνω νόμος διατήρησης εκφράζεται επίσης λέγοντας ότι το φορτίο, που ορίζουμε $Q = \int_{\text{χώρο}} j^0 d^3x$, είναι σταθερό στο χρόνο.

1.3 Τανυστής ενέργειας - ορμής και ορμή πεδίου

Το θεώρημα Noether μπορεί να εφαρμοστεί και σε χωροχρονικούς μετασχηματισμούς όπως οι μετατοπίσεις και οι περιστροφές. Μπορούμε να περιγράψουμε μια απειροστή χωροχρονική μετατόπιση

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + a^\mu$$

σαν ένα μετασχηματισμό του πεδίου με τη βοήθεια του θεωρήματος Taylor

$$\phi(x) \to \phi(x+a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x) \tag{1.7}$$

Η Λαγκρανζιανή είναι επίσης μια βαθμωτή συνάρτηση έτσι θα πρέπει να μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L}) \tag{1.8}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με την (1.5) συμπεραίνουμε ότι $J^\mu = \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$. Έτσι εφαρμόζοντας το θεώρημα Noether θα έχουμε από τη σχέση (1.6)

$$\partial_\mu \Big(a^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi - a^\nu \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \Big) = 0 \quad \overset{(1.7)}{\Rightarrow} \quad \partial_\mu \Big(a^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - a^\nu \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \Big) = 0$$

τέσσερα ξεχωριστά ρεύματα

$$T^\mu_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{1.9}$$

Αυτός ακριβώς είναι ο τανυστής τάσης - ενέργειας ή αλλιώς ο τανυστής ενέργειας - ορμής του πεδίου ϕ. Το διατηρούμενο φορτίο που σχετίζεται με χρονικές μετατοπίσεις είναι η χαμιλτονιανή

$$H = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} \; d^3x$$

όπου με $\mathcal{H}$ έχουμε συμβολίσει την χαμιλτονιανή πυκνότητα.

Για τη Λαγκρανζιανή Klein - Gordon $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\kappa \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ η σχέση (1.9) θα δώσει

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \big(\frac{1}{2}(\partial_\kappa \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \big) \partial_\nu \phi - \big(\frac{1}{2}(\partial_\kappa \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \big) \delta^\mu_\nu$$

πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με τον μετρικό τανυστή $\eta^{a\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \eta^{a\nu} T^\mu_\nu &= T^{\mu a} \\ &= \eta^{a\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \big(\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \big) \partial_\nu \phi - \eta^{a\nu} \big(\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \big) \delta^\mu_\nu \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} T^{00} &= \eta^{0\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \big(\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \big) \partial_\nu \phi - \eta^{0\nu} \big(\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \big) \delta^0_\nu \\ &= \partial_0 \phi \partial^0 \phi - \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Βρήκαμε έτσι τη μορφή της χαμιλτονιανής πυκνότητας. Το διατηρούμενο ρεύμα που σχετίζεται με χωρικές μεταβολές είναι η ορμή

$$P^i = \int T^{0i}\, d^3x$$

Υπολογίζουμε

$$T^{0i} = \eta^{i\nu}\frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)}\big(\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\big)\partial_\nu\phi - \eta^{i\nu}\big(\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\big)\delta^0_\nu$$
$$\stackrel{(i\neq 0)}{=} \partial_0\phi\partial^i\phi = -\partial_0\phi\partial_i\phi$$

Όπως θα δείξουμε και στη συνέχεια η $\pi = \partial_0\phi$ είναι η λεγόμενη συζυγής ορμή του πεδίου Klein-Gordon. Θα είναι τότε

$$P^i = -\int \pi\partial_i\phi\, d^3x \tag{1.11}$$

και αντιμετωπίζουμε την ποσότητα αυτή ως την (φυσική) ορμή που φέρει το πεδίο, την οποία δεν πρέπει να τη συγχέουμε με τη συζυγή ορμή που θα χρησιμοποιούμε κατά την κβάντωση της θεωρίας αργότερα.

Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός της θεωρίας πεδίου είναι κατάλληλος για τη σχετικιστική δυναμική επειδή όλες οι εκφράσεις είναι Lorentz αναλλοίωτες. Παρ' όλα αυτά είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε και τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό καθώς διευκολύνει τη μετάβαση στην κβαντική μηχανική. Αρχικά ορίζουμε τη συζυγή ορμή ενός πεδίου ως την παράγωγο της Λαγκρανζιανής πυκνότητας ως προς τη χρονική παράγωγο του πεδίου.

$$\pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \tag{1.12}$$

Όπως έχουμε ήδη δηλώσει στην περίπτωση της Λαγκρανζιανής Klein - Gordon η συζυγής ορμή είναι

$$\pi = \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)}\big(\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\big) = \partial_0\phi$$

Φυσικά αφού αναφερόμαστε στη χρονική παράγωγο σημαίνει ότι έχουμε επιλέξει ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Επομένως η χαμιλτονιανή διατύπωση απαραίτητα παραβιάζει το αναλλοίωτο κατά Lorentz. Παρ' όλα αυτά, αν είμαστε προσεκτικοί, οι παρατηρήσιμες ποσότητες θα είναι Lorentz αναλλοίωτες. Η χαμιλτονιανή είναι το χωρικό ολοκλήρωμα της χαμιλτονιανής πυκνότητας

$$H = \int \mathcal{H}\, d^{n-1}x$$

Η χαμιλτονιανή πυκνότητα με τη σειρά της σχετίζεται με τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα με τον μετασχηματισμό Legendre

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$$

Έτσι από τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα Klein - Gordon μπορούμε να κατασκευάσουμε την χαμιλτονιανή πυκνότητα

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \int d^3x\big(\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\big) = \int d^3x\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\Big) \\
&= \int d^3x\Big(\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\big(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\big)\dot{\phi} - \big(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\big)\Big) \\
&= \int d^3x\big(\dot{\phi}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\big) \\
&= \int d^3x\big(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\big) \\
&= \int d^3x\big(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\big)
\end{aligned}
$$

που είναι ακριβώς αυτή που βρήκαμε στη σχέση (1.10).

1.4 Λύση της κλασικής θεωρίας

Εμείς θα δουλέψουμε στην εικόνα του Heisenberg στην οποία είναι πιο εύκολη η μελέτη χρονοεξαρτώμενων ποσοτήτων. Πριν προχωρήσουμε στην κβάντωση του πεδίου θα ολοκληρώσουμε την κλασική ανάλυση λύνοντας τη θεωρία. Ένα σύνολο λύσεων της εξίσωσης Klein - Gordon

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

είναι το επίπεδο κύμα

$$u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) \sim e^{ik^\mu x_\mu} = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

όπου το κυματάνυσμα k^μ έχει συνιστώσες $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ και η συχνότητα ω πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$$

Μπορούμε να γράψουμε την πιο γενική λύση κατασκευάζοντας ένα πλήρες, ορθοκανονικό σύνολο λύσεων (modes) ως προς της οποίες μπορεί να εκφραστεί οποιαδήποτε λύση. Για να έχει έννοια ο όρος "ορθοκανονικό" χρειάζεται να ορίσουμε ένα βαθμωτό γινόμενο στο χώρο των λύσεων της εξίσωσης Klein - Gordon. Αν και οι λύσεις είναι συναρτήσεις του χωροχρόνου το κατάλληλο βαθμωτό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα πάνω σε μια χρονικά σταθερή υπερεπιφάνεια[1] Σ_t.

[1] Για να εξηγήσουμε τον όρο υπερεπιφάνεια θα πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ορισμό μιας πολλαπλότητας. Η έννοια της πολλαπλότητας αντιστοιχεί σε έναν χώρο ο οποίος μπορεί να είναι καμπύλος και να έχει μια πολύπλοκη τοπολογία αλλά σε τοπικές περιοχές μοιάζει με τον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$. Λέγοντας "μοιάζει σαν" δεν εννοούμε ότι η μετρική είναι ίδια αλλά ότι πιο αρχικές έννοιες όπως συναρτήσεις και συντεταγμένες λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο. Ολόκληρη η πολλαπλότητα κατασκευάζεται ενώνοντας ομαλά αυτές τις περιοχές μεταξύ τους. Ένα κρίσιμο σημείο είναι ότι η διάσταση n των Ευκλείδιων χώρων που χρησιμοποιούνται πρέπει να είναι ίδια σε κάθε κομμάτι της πολλαπλότητας. Τότε λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι διάστασης n. Με αυτή τη προσέγγιση μπορούμε να αναλύσουμε συναρτήσεις σε έναν τέτοιο χώρο μετατρέποντάς τες (τοπικά) σε συναρτήσεις του Ευκλείδιου χώρου. Μια υπερεπιφάνεια είναι μια (n-1)-διάστατη υποπολλαπλότητα Σ μιας n-διάστατης πολλαπλότητας M. (Φυσικά αν $n = 3$ η Σ είναι απλά μια επιφάνεια). Η πιο συχνή χρήση της υπερεπιφάνειας είναι ως το σύνορο μιας κλειστής περιοχής N μιας πολλαπλότητας M που κατά σύμβαση δηλώνεται ∂_N. Αν για παράδειγμα η N αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που βρίσκονται σε μια απόσταση από την αρχή $r \leqslant 1$ τότε το όριο ∂_N είναι η (n-1) σφαίρα που καθορίζεται από το $r = 1$.

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^{n-1}x \equiv -i \int_{\Sigma_t} \phi_1 \overleftrightarrow{\partial_t} \phi_2^* d^{n-1}x \tag{1.13}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο είναι ανεξάρτητο από την υπερεπιφάνεια στην οποία ολοκληρώνουμε. Έστω δύο υπερεπιφάνειες Σ_1 και Σ_2. Υποθέτουμε ότι ϕ_1 και ϕ_2 ικανοποιούν την εξίσωση Klein - Gordon $(\partial_\mu^2 + m^2)\phi = 0$. Επιπλέον αν οι υπερεπιφάνειες δεν είναι συμπαγείς θεωρούμε ότι οι εξισώσεις αυτές μηδενίζονται στο χωρικό άπειρο. Έστω N ο χώρος που περικλύεται από τις Σ_1 και Σ_2 και , αν είναι απαραίτητο , χρονοειδή όρια στα οποία ισχύει $u_{\mathbf{k}}^1 = u_{\mathbf{k}}^2 = 0$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2} - (\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = -i \oint_{\partial_N = \Sigma_1 - \Sigma_2} (\phi_1 \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi_2^*) d^{n-1}x = -i \int_N \partial^\mu (\phi_1 \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi_2^*) d^n x$$

όπου στο τελευταίο βήμα έχουμε χρησιμοποιήσει την n-διάστατη εκδοχή του νόμου του Gauss. Η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned}
\partial^\mu (\phi_1 \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi_2^*) &= \partial^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1) \\
&= \partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_2^* + \phi_1 \partial^\mu \partial_\mu \phi_2^* - \partial^\mu \phi_2^* \partial_\mu \phi_1 - \phi_2^* \partial^\mu \partial_\mu \phi_1 \\
&= \phi_1 \partial^\mu \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial^\mu \partial_\mu \phi_1 = -\phi_1 m^2 \phi_2^* + \phi_2^* m^2 \phi_1 = 0
\end{aligned}$$

λόγω της εξίσωσης Klein - Gordon. Επομένως πράγματι

$$(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = (\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2}$$

Εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο σε δύο επίπεδα κύματα με διαφορετικά κυματανύσματα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
(e^{ik_1^\mu x_\mu}, e^{ik_2^\mu x_\mu}) &= -i \int (e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}} \partial_t e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} - e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} \partial_t e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}}) d^{n-1}x \\
&= -i \int \left(e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}} i\omega_2 e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} + i\omega_1 e^{i\omega_2 t - i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}} (e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}} \right) d^{n-1}x \\
&= \int \left(\omega_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{x}} + \omega_1 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{x}} \right) d^{n-1}x \\
&= (\omega_1 + \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \int e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{x}} d^{n-1}x \\
&= (\omega_1 + \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} (2\pi)^{n-1} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα της δ συνάρτησης

$$\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^{n-1}x = (2\pi)^{n-1} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}) \tag{1.14}$$

Το εσωτερικό γινόμενο μηδενίζεται εκτός κι αν τα χωρικά κυματανύσματα, και επομένως και οι συχνότητες ω, είναι ίδια και για τις δύο λύσεις. Έτσι ένα ορθοκανονικό σύνολο από λύσεις θα δίνεται από τη σχέση

$$u_{\mathbf{k}}(x^\mu) = \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\left((2\pi)^{n-1} 2\omega\right)^{1/2}}$$

με

$$(u_{\mathbf{k}_1}, u_{\mathbf{k}_2}) = \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

Η στρατηγική μας είναι να επιμείνουμε ότι το ω θα είναι πάντα θετικός αριθμός και θα συμπληρώσουμε το σύνολο των λύσεων με τις μιγαδικές συζυγείς $u^*_{\mathbf{k}}(x^\mu)$. Θα λέμε ότι οι $u_{\mathbf{k}}$ λύσεις είναι θετικής συχνότητας εννοώντας ότι ικανοποιούν τη σχέση

$$\partial_t u_{\mathbf{k}} = -i\omega u_{\mathbf{k}} \qquad , \qquad \omega > 0$$

ενώ τα $u^*_{\mathbf{k}}$ είναι αρνητικής συχνότητας ικανοποιώντας την

$$\partial_t u^*_{\mathbf{k}} = i\omega u^*_{\mathbf{k}} \qquad , \qquad \omega > 0$$

Οι συζυγείς μιγαδικές λύσεις είναι ορθογώνιες στις αρχικές λύσεις καθώς

$$\begin{aligned}
(u_{\mathbf{k}_1}, u^*_{\mathbf{k}_2}) &= -i \int \big(u_{\mathbf{k}_1}\partial_t (u^*_{\mathbf{k}_2})^* - (u^*_{\mathbf{k}_2})^* \partial_t u_{\mathbf{k}_1}\big) d^{n-1}x \\
&= -i \int \big(u_{\mathbf{k}_1}\partial_t u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2}\partial_t u_{\mathbf{k}_1}\big) d^{n-1}x \\
&= -i \int \big(u_{\mathbf{k}_1}(-i\omega) u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2}(-i\omega) u_{\mathbf{k}_1}\big) d^{n-1}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

και ορθοκανονικά μεταξύ τους

$$\begin{aligned}
(u^*_{\mathbf{k}_1}, u^*_{\mathbf{k}_2}) &= -i \int \big(u^*_{\mathbf{k}_1}\partial_t (u^*_{\mathbf{k}_2})^* - (u^*_{\mathbf{k}_2})^* \partial_t u^*_{\mathbf{k}_1}\big) d^{n-1}x \\
&= -i \int \big(u^*_{\mathbf{k}_1}\partial_t u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2}\partial_t u^*_{\mathbf{k}_1}\big) d^{n-1}x \\
&= -i \int \big(u^*_{\mathbf{k}_1}(-i\omega) u_{\mathbf{k}_2} - u_{\mathbf{k}_2}(i\omega) u^*_{\mathbf{k}_1}\big) d^{n-1}x \\
&= -i \int \Big(\frac{e^{i\omega t - i\mathbf{k}_1\mathbf{x}}(-i\omega)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_2\mathbf{x}}}{(2\pi)^{n-1}2\omega} - \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_2\mathbf{x}}(i\omega)e^{i\omega t - i\mathbf{k}_1\mathbf{x}}}{(2\pi)^{n-1}2\omega}\Big) d^{n-1}x \\
&= \frac{-i(-i\omega)}{(2\pi)^{n-1}2\omega} \int \big(e^{i(\omega-\omega)t}e^{i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}} + e^{i(\omega-\omega)t}e^{i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}}\big) d^{n-1}x \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^{n-1}} \int e^{i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}} d^{n-1}x \\
&= -\delta^{n-1}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) = -\delta^{n-1}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

όπου και πάλι έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα (1.14) καθώς και το γεγονός ότι η δ είναι άρτια συνάρτηση.

Μαζί οι λύσεις $u_{\mathbf{k}}$ και $u^*_{\mathbf{k}}$ σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο με τα στοιχεία του οποίου μπορούμε να αναπαράγουμε οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης Klein - Gordon. Έτσι θα έχουμε τη γενική λύση

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k}[a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + a^*_{\mathbf{k}} u^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)] \tag{1.15}$$

Κεφάλαιο 2

Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Χωρόχρονο Minkowski

2.1 Κβάντωση του βαθμωτού πεδίου

Έχουμε εισαγάγει το πεδίο $\phi(t, \mathbf{x})$ που έχει ρόλο ανάλογο της συνιστώσας $q(t)$ και το πεδίο $\pi(t, \mathbf{x})$ που έχει ρόλο ανάλογο της ορμής $p(t)$. Για να περάσουμε στην κβάντωση της θεωρίας πεδίου μιμούμαστε την διαδικασία που ακολουθούμε στη διακριτή περίπτωση και προάγουμε τις ποσότητες ϕ και π στους τελεστές $\hat{\phi}$ και $\hat{\pi}$ στην εικόνα του Heisenberg. Το ξεχωριστό χαρακτηριστικό την κβαντικής θεωρίας είναι η μη-μεταθετικότητα των βασικών ποσοτήτων της θεωρίας - για παράδειγμα ο θεμελιώδης μεταθέτης ($\hbar = 1$)

$$[\hat{q}_r(t), \hat{p}_s(t)] = i\delta_{rs} \tag{2.1}$$

της διακριτής περίπτωσης. Περιμένουμε λοιπόν ότι οι τελεστές $\hat{\phi}$ και $\hat{\pi}$ θα υπακοούν κάποια σχέση μετάθεσης η οποία είναι μια συνεχής γενίκευση της (2.1). Ο μεταθέτης θα είναι της μορφής $[\hat{\phi}(x,t), \hat{\pi}(x',t)]$ αφού οι διακριτοί δείκτες r και s έχουν μετατραπεί στις συνεχείς μεταβλητές x και x'. Σημειώνουμε επίσης ότι η (2.1) αναφέρεται σε τελεστές την ίδια χρονική στιγμή. Η συνεχής γενίκευση του συμβόλου δ_{rs} είναι η συνάρτηση δ του Dirac, $\delta(x - x')$. Έτσι λοιπόν ο θεμελιώδης μεταθέτης της κβαντικής θεωρίας πεδίου θα είναι

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

σε υπερεπιφάνειες ίδιου χρόνου. Επιπλέον ο μεταθέτης των δύο $\hat{\phi}$ ή δύο $\hat{\pi}$ είναι

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] = 0$$
$$[\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = 0$$

Θυμίζουμε ότι για τη συζυγή ορμή ισχύει

$$\hat{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \hat{\phi})} = \partial_t \hat{\phi}$$

για την Λαγκρανζιανή Klein - Gordon. Η συνάρτηση δ στην πρώτη σχέση υποδηλώνει ότι οι τελεστές σε ίδιες χρονικές στιγμές μετατίθενται παντού εκτός από τα χωρικά σημεία στα οποία συμπίπτουν. Το δεδομένο αυτό προκύπτει από τις απαιτήσεις της αιτιότητας. Τελεστές που είναι χωροειδώς διαχωρισμένοι δεν μ-πορούν να επηρεάσουν ο ένας τον άλλο.

Στην εικόνα του Heisenberg οι τελεστές $\hat{\phi}$ και $\hat{\pi}$ μπορούν να γίνουν χρονικά εξαρτώμενοι (Παράρτημα Α΄) και τότε

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\hat{\phi}(\mathbf{x})e^{-iHt}$$

όμοια

$$\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\hat{\pi}(\mathbf{x})e^{-iHt}$$

Η εξίσωση κίνησης του Heisenberg (Α΄.4) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη χρονική εξάρτηση των $\hat{\phi}$ και $\hat{\pi}$.

$$i\frac{\partial\hat{\phi}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \big[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \big(\frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathbf{x}',t) + \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x}',t))^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2(\mathbf{x}',t)\big)\big]$$

$$\begin{aligned}
&= \big[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathbf{x}',t)\big] + \big[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x}',t))^2\big] + \big[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2(\mathbf{x}',t))\big] \\
&= \big[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathbf{x}',t)\big] \\
&= \big[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)\big]\int d^3x'\hat{\pi}(\mathbf{x}',t) + \int d^3x'\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)\big[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)\big] \\
&= \int d^3x' \big(\frac{1}{2}i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)\big) + \int d^3x' \big(\frac{1}{2}i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)\big) \\
&= \int d^3x' \big(i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)\big) \\
&= i\hat{\pi}(\mathbf{x},t)
\end{aligned}$$

όμοια

$$i\frac{\partial\hat{\pi}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \big[\hat{\pi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \Big(\frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathbf{x}',t) + \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x}',t))^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2(\mathbf{x}',t)\Big)\big] \quad (2.2)$$

Ισχύει η σχέση

$$\nabla(\hat{\phi}(\nabla\hat{\phi})) = \nabla\hat{\phi}\nabla\hat{\phi} + \hat{\phi}\nabla^2\hat{\phi}$$

έτσι το δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.2) γράφεται

$$\begin{aligned}
\int d^3x' \big(\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\big)^2 &= \int d^3x' \nabla\big(\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)(\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x}',t))\big) - \int d^3x'\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\nabla^2\hat{\phi}(\mathbf{x}',t) \\
&= -\int d^3x'\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\nabla^2\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)
\end{aligned}$$

αφού το πρώτο ολοκλήρωμα μπορούμε να το μετατρέψουμε σε επιφανειακό το οποίο εν τέλει θα μηδενιστεί. Η (2.2) τότε θα γίνει

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial\hat{\pi}(\mathbf{x},t)}{\partial t} &= \big[\hat{\pi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \big(\frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathbf{x}',t) + \frac{1}{2}\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)(-\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\big)\big] \\
&= \big[\hat{\pi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathbf{x}',t)\big] + \big[\hat{\pi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)(-\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\big] \\
&= \big[\hat{\pi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\big] \int d^3x'(-\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t) \\
&+ \int d^3x'\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\big[\hat{\pi}(\mathbf{x},t), \int d^3x' \frac{1}{2}(-\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\big] \\
&= \int d^3x' \big(-i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')(-\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)\big) \\
&= -i(-\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)
\end{aligned}
$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την $[\hat{\pi}(\mathbf{x},t), \hat{\phi}(\mathbf{x}',t)] = -i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. Από τα δύο αποτελέσματα έχουμε

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)}{\partial t^2} = \frac{\partial\hat{\pi}(\mathbf{x}',t)}{\partial t} = \frac{-i(\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)}{i} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial^2\hat{\phi}(\mathbf{x}',t)}{\partial t^2} = (\nabla^2+m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t) \\
\Rightarrow \quad & \Big(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 + m^2\Big)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t) = 0 \\
\Rightarrow \quad & (\Box + m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}',t) = 0 \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

που δεν είναι άλλη από την εξίσωση Klein - Gordon.

Ακριβώς όπως οι κλασικές λύσεις της Klein - Gordon μπορούν να αναπτυχθούν ως προς τις λύσεις $u_{\mathbf{k}}(x^\mu)$ έτσι μπορεί και ο κβαντικός τελεστής πεδίου $\hat{\phi}(\mathbf{x},t)$. Δηλώνουμε τους τελεστές της ανάπτυξής του $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ και $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ και έχουμε

$$\hat{\phi}(t,\mathbf{x}) = \int d^{n-1}k[\hat{a}_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})] \qquad (2.4)$$

και παρόμοια έκφραση για την συζυγή ορμή

$$\hat{\pi}(t,\mathbf{x}) = \dot{\hat{\phi}}(t,\mathbf{x}) = \int d^{n-1}k(-i\omega)[\hat{a}_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})] \qquad (2.5)$$

Για να δούμε τις σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν οι τελεστές $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ και $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ θα εισάγουμε τις (2.4) και (2.5) στη θεμελιώδη μεταθετική σχέση

$$[\hat{\phi}(t,\mathbf{x}), \hat{\pi}(t,\mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$
\begin{aligned}
&[\hat{\phi}(t,\mathbf{x}),\hat{\pi}(t,\mathbf{x}')] = &&(2.6)\\
&= \Big[\int d^{n-1}k(\hat{a}_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}u^{*}_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})),\int d^{n-1}k'(-i\omega_{\mathbf{k}'})(\hat{a}_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}')-\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}u^{*}_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}'))\Big]\\
&= \Big[\int d^{n-1}k\hat{a}_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}),\int d^{n-1}k'(-i\omega_{\mathbf{k}'})\hat{a}_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}')\Big]\\
&- \Big[\int d^{n-1}\hat{a}_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}),\int d^{n-1}k'(-i\omega)\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}u^{*}_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}')\Big]\\
&+ \Big[\int d^{n-1}k\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}u^{*}_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}),\int d^{n-1}k'(-i\omega_{\mathbf{k}'})\hat{a}_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}')\Big]\\
&- \Big[\int d^{n-1}k\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}u^{*}_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}),\int d^{n-1}k'(-i\omega_{\mathbf{k}'})\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}u^{*}_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}')\Big]\\
&= \int d^{n-1}k\int d^{n-1}k'\big[\hat{a}_{\mathbf{k}},\hat{a}_{\mathbf{k}'}\big](-i\omega_{\mathbf{k}'})u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})u_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}') &&(\mathrm{A})\\
&+ \int d^{n-1}k\int d^{n-1}k'\big[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\big](i\omega_{\mathbf{k}'})u^{*}_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})u^{*}_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}')\big] &&(\mathrm{B})\\
&+ \int d^{n-1}k\int d^{n-1}k'\big[\hat{a}_{\mathbf{k}},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\big](i\omega_{\mathbf{k}'})u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})u^{*}_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}') &&(\Gamma)\\
&+ \int d^{n-1}k\int d^{n-1}k'\big[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}},\hat{a}_{\mathbf{k}'}\big](-i\omega_{\mathbf{k}'})u^{*}_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})u_{\mathbf{k}'}(t,\mathbf{x}') &&(\Delta)\\
&= i\delta^{(n-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')
\end{aligned}
$$

Αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτή η ισότητα, δηλαδή η

$$(\mathrm{A})+(\mathrm{B})+(\Gamma)+(\Delta)=i\delta^{(n-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{2.7}$$

είναι να μηδενίζονται οι δύο πρώτοι όροι της όπου η χρονική εξάρτηση έχει τη μορφή

$$e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\quad \text{και}\quad e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}$$

η οποία είναι αδύνατον να απαλειφθεί όπως απαιτείται ώστε το αποτέλεσμα να είναι ανεξάρτητο του t. Αυτή η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται αυτόματα αν ισχύουν οι

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}},\hat{a}_{\mathbf{k}'}]=[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}]=0 \tag{2.8}$$

Στους όρους (Γ) και (Δ) τώρα, τα χρονικά εκθετικά έχουν αντίθετο πρόσημο οπότε η χρονική τους εξάρτηση θα είναι της μορφής

$$e^{i(\omega_{\mathbf{k}'}-\omega_{\mathbf{k}})t}\quad \text{και}\quad e^{-i(\omega_{\mathbf{k}'}-\omega_{\mathbf{k}})t}$$

και μπορεί να απαλειφθεί αρκεί να είναι $\mathbf{k}'=\mathbf{k}$, το οποίο διασφαλίζεται αυτόματα με μια μεταθετική σχέση του τύπου

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}]\sim\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Όπως θα δείξουμε αμέσως η ισχύς της (2.7) απαιτεί να είναι ακριβώς

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}]=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Πράγματι για $\mathbf{k}' = \mathbf{k} \Rightarrow \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_{\mathbf{k}}$ θα είναι (χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (1.14))

$$(\Gamma) = \int d^{n-1}k \frac{(i\omega_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^{n-1}2\omega_{\mathbf{k}}} e^{ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = i\frac{(2\pi)^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}2}\delta^{n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{i}{2}\delta^{n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

και όμοια

$$(\Delta) = \int d^{n-1}k \frac{(-1)(-i\omega_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^{n-1}2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = \frac{i}{2}\delta^{n-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

αφήνοντας το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$(\Gamma) + (\Delta) = i\delta^{(n-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

Δείξαμε λοιπόν ότι οι τελεστές $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ και $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] &= 0 \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Στην εικόνα του Heisenberg οι κβαντικές καταστάσεις καλύπτουν ένα χώρο Hilbert. Μια βολική βάση σε αυτό το χώρο Hilbert είναι η λεγόμενη αναπαράσταση Fock. Τα κανονικοποιημένα διανύσματα ket της βάσης , τα οποία συμβολίζουμε $|\rangle$, μπορούν να κατασκευαστούν από το διάνυσμα $|0\rangle$, που ονομάζουμε κενό ή κατάσταση χωρίς σωματίδια. Η κατάσταση $|0\rangle$ έχει την ιδιότητα ότι εκμηδενίζεται από όλους τους τελεστές (καταστροφής) $\hat{a}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \qquad \forall\ \mathbf{k} \tag{2.10}$$

Η κατάσταση που παίρνουμε δρώντας στην κατάσταση $|0\rangle$ με τον τελεστή (δημιουργίας) $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ ονομάζεται κατάσταση ενός σωματιδίου και συμβολίζεται $|1_{\mathbf{k}}\rangle$

$$|1_{\mathbf{k}}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle$$

Η κατάσταση με $n_{\mathbf{k}}$ σωματίδια με ίδια ορμή $\mathbf{k}$ δημιουργείται με επαναλαμβανόμενη δράση του τελεστή $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}}(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}})^{n_{\mathbf{k}}}|0\rangle$$

ενώ η κατάσταση με ${}^j n$ διεγέρσεις (σωματίδια) διαφόρων ορμών $\mathbf{k}_i$ θα είναι

$$|{}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, ..., {}^jn_{\mathbf{k}_j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}^1n_{\mathbf{k}}!{}^2n_{\mathbf{k}}!\cdots{}^jn_{\mathbf{k}}!}}(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1})^{{}^1n}(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2})^{{}^2n}\cdots(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_j})^{{}^jn}|0\rangle$$

Δρώντας σε μια τέτοια κατάσταση οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αλλάζουν τον αριθμό των σωματιδίων ως

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_i}|n_1, n_2, ...n_j\rangle &= \sqrt{n_i+1}|n_1, n_2, ..., n_i+1, ..., n_j\rangle \\ \hat{a}_{\mathbf{k}_i}|n_1, n_2, ...n_j\rangle &= \sqrt{n_i}|n_1, n_2, ..., n_i-1, ..., n_j\rangle \end{aligned}$$

Ορίζουμε τον τελεστή αρίθμησης για κάθε κυματάνυσμα

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} \tag{2.11}$$

ο οποίος υπακούει στη σχέση

$$\hat{n}_{\mathbf{k}_i}|n_1, n_2, ..., n_j\rangle = n_i|n_1, n_2, ..., n_j\rangle$$

Οι καταστάσεις που είναι ιδιοκαταστάσεις των τελεστών αρίθμησης σχηματίζουν τη βάση Fock όπως έχουμε ήδη αναφέρει.

Όταν πρωτοαναφερθήκαμε στη χαμιλτονιανή διατύπωση δηλώσαμε ότι αν και παραβιάζει το αναλλοίωτο κατά Lorentz θα μπορούσαμε εν τέλει να έχουμε παρατηρήσιμες ποσότητες που να είναι Lorentz αναλλοίωτες. Ας ερευνήσουμε λοιπόν τη συμπεριφορά της βάσης Fock κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Μεχρι τώρα είχαμε το πλεονέκτημα των συμμετριών του χώρου Minkowski, για παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε το επίπεδο κύμα ως βάση για τις λύσεις της εξίσωσης Klein - Gordon. Το σημαντικό χαρακτηριστικό αυτών των λύσεων είναι η ιδιότητα να διαχωρίσουμε τις αρνητικές και τις θετικές συχνότητες επιτρέποντας έτσι την ερμηνεία των συντελεστών στην ανάπτυξη του $\hat{\phi}$, ως προς τις λύσεις, ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας. Ας θεωρήσουμε τώρα μια ώθηση με ταχύτητα $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ η οποία μας οδηγεί σε νέες συντεταγμένες $x^{\mu\prime}$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$t' = \gamma t - \gamma \mathbf{v}\mathbf{x} \qquad , \qquad \mathbf{x}' = \gamma \mathbf{x} - \gamma \mathbf{v} t$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται απο τις

$$t = \gamma t' + \gamma \mathbf{v}\mathbf{x} \qquad , \qquad \mathbf{x} = \gamma \mathbf{x}' + \gamma \mathbf{v} t'$$

Η χρονική παράγωγος των λύσεων στο νέο σύστημα θα είναι

$$\begin{aligned}
\partial_{t'} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) &= \partial_{t'}\Big(\frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{[(2\pi)^{n-1}2\omega]^{1/2}}\Big) = \partial_{t'}\Big(\frac{e^{-i\omega(\gamma t' + \gamma\mathbf{v}\mathbf{x}) + i\mathbf{k}(\gamma\mathbf{x}' + \gamma\mathbf{v}t')}}{[(2\pi)^{n-1}2\omega]^{1/2}}\Big) \\
&= (-i\omega\gamma + i\mathbf{k}\gamma\mathbf{v})\frac{e^{-i\omega(\gamma t' + \gamma\mathbf{v}\mathbf{x}) + i\mathbf{k}(\gamma\mathbf{x}' + \gamma\mathbf{v}t')}}{[(2\pi)^{n-1}2\omega]^{1/2}} = (-i\omega\gamma + i\mathbf{k}\gamma\mathbf{v})u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \\
&= -i(\omega\gamma - \mathbf{k}\gamma\mathbf{v})u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = -i\omega' u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})
\end{aligned}$$

όπου

$$\omega' = \gamma\omega - \gamma\mathbf{v}\mathbf{k}$$

είναι απλά η συχνότητα του νέου συστήματος. Είναι ξεκάθαρο λοιπόν ότι η κατάσταση που περιγράφει ένα σύνολο σωματιδίων με συγκεκριμένη ορμή "ωθείται" σε μια κατάσταση που περιγράφει τα ίδια σωματίδια με "ενισχυμένη" ορμή. Έτσι ο τελεστής αρίθμησης στα δύο συστήματα θα συμπίπτει και συγκεκριμένα η κατάσταση του κένου θα συμπίπτει. Με αυτή την έννοια η επιλογή του αρχικού συστήματος αναφοράς ήταν άνευ σημασίας.

2.2 Ενέργεια του κενού

Θυμίζουμε τη μορφή της χαμιλτονιανής

$$H = \int d^{n-1}x\big(\frac{1}{2}\dot{\hat{\phi}}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2\big)$$

καθώς και την ανάπτυξη

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int d^{n-1}k(\hat{a}_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}))$$

Έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε τη χαμιλτονιανή αυτή ως προς τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Ξεκινάμε με τον όρο $\hat{\phi}^2$ για απλότητα.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m^2 \int d^{n-1}x\hat{\phi}^2 = \\
&= \frac{1}{2}m^2 \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k'(\hat{a}_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}})(\hat{a}_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}u^*_{\mathbf{k}'}) \\
&= \frac{1}{2}m^2 \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k \int d^{n-1}k'(\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}u^*_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}u^*_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}'})
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Επικεντρώνοντας στον πρώτο όρο της παρένθεσης και αμελώντας προς το παρόν το ολοκλήρωμα στο $\mathbf{k}$ μπορούμε να εισάγουμε τις μορφές των λύσεων $u_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{kx}}}{[(2\pi)^{n-1}2\omega]^{1/2}}$ με αποτέλεσμα

$$
\begin{aligned}
\int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega+\omega')t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\
&\overset{(1.16)}{=} \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{n-1}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\
&\overset{\mathbf{k}'\to-\mathbf{k}}{=} \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}\frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega}
\end{aligned}
$$

Θυμίζουμε ότι λόγω της σχέσης διασποράς $\omega^2_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2 + m^2$ θα ισχύει $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{-\mathbf{k}}$. Όμοια για τους υπόλοιπους όρους

$$
\begin{aligned}
\int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}u^*_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega-\omega')t}e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\
&= \int d^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^i(\omega-\omega')t}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \\
&\overset{\mathbf{k}'\to\mathbf{k}}{=} \frac{\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}}{2\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}u_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega'-\omega)t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\
&= \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&\overset{\mathbf{k}'\to\mathbf{k}}{=} \frac{\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}}{2\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}u^*_{\mathbf{k}}u^*_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}x \int d^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega+\omega')}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\
&= \int d^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{n-1}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\
&\overset{\mathbf{k}'\to-\mathbf{k}}{=} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\frac{e^{2i\omega t}}{2\omega}
\end{aligned}
$$

Βρίσκουμε έτσι ότι η συνεισφορά του όρου με το $\hat{\phi}^2$ στη χαμιλτονιανή θα είναι

$$\frac{1}{2}m^2\int d^{n-1}\hat{\phi}^2 = \frac{1}{2}m^2\int d^{n-1}k\frac{1}{2\omega}\big[\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big] \tag{2.13}$$

Με βάση τα παραπάνω είναι εύκολο να υπολογίσουμε και τις συνεισφορές των υπολοίπων όρων καθώς η χρονική παράγωγος θα "κατεβάζει" κάθε φορά έναν όρο $(\pm i\omega)$ ενώ τα υπόλοιπα αποτελέσματα μένουν ίδια. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int d^{n-1}x\dot{\hat{\phi}}^2 &= \frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{1}{2\omega}\big[-\omega^2\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \omega^2\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \omega^2\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} - \omega^2\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big]\\ &= \frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{\omega}{2}\big[-\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} - \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big]\end{aligned} \tag{2.14}$$

Όμοια η χωρική παραγώγιση θα "κατεβάζει" κάθε φορά έναν όρο $(\pm i\mathbf{k})$ με αποτέλεσμα

$$\frac{1}{2}\int d^{n-1}kx(\nabla\hat{\phi})^2 = \frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{\mathbf{k}^2}{2\omega}\big[\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big] \tag{2.15}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2.13) και (2.15) έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{m^2}{2\omega}\big[\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big]\\ +&\frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{\mathbf{k}^2}{2\omega}\big[\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big]\\ =&\frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{\omega^2}{2\omega}\big[\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big]\\ =&\frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{\omega}{2}\big[\hat{a}_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\big]\end{aligned} \tag{2.16}$$

Όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση $\mathbf{k}^2 + m^2 = \omega^2$. Τέλος προσθέτοντας την (2.14) στην (2.16) βρίσκουμε ότι η χαμιλτονιανή για το βαθμώτο πεδίο παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}\int d^{n-1}k\big[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\big]\omega\\ &= \int d^{n-1}k\big[\hat{n}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\delta^{(n-1)}(0)\big]\omega\end{aligned} \tag{2.17}$$

Στο τελευταίο βήμα έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση μετάθεσης

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'} - \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\hat{a}_{\mathbf{k}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

που δίνει

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}] = \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} - \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} = \delta(0) \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} = \delta(0) + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}$$

καθώς και τον τελεστή αρίθμησης $\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}$.

Ο παράγοντας $\delta^{(n-1)}(0)$ υποδηλώνει ότι η χαμιλτονιανή είναι άπειρη όταν μετριέται στο κενό $|0\rangle$. Δηλαδή το κενό περιέχει μια άπειρη πυκνότητα ενέργειας.

Στον επίπεδο χωρόχρονο το πρόβλημα αυτό λύνεται εύκολα. Μια τέτοια ενέργεια δεν είναι μετρήσιμη στη μη-βαρυτική φυσική έτσι μπορούμε να ανακανονικοποιήσουμε την ενέργεια του κενού ακόμα και κατά ένα άπειρο ποσό χωρίς να επηρεάσουμε τις παρατηρήσιμες ποσότητες. Αυτό μπορούμε να το κατορθώσουμε απλά πετώντας τον όρο $\frac{1}{2}\delta^{(n-1)}(0)\omega$ ή , πιο κομψά, ορίζοντας τη διαδικασία της φυσικής διάταξης, την οποία συμβολίζουμε :: , και απαιτεί κάθε φορά που εμφανίζεται ένα γινόμενο τελεστών καταστροφής και δημιουργίας να βρίσκονται όλοι οι τελεστές καταστροφής στα δεξιά των τελεστών δημιουργίας. Έτσι επιστρέφοντας στη σχέση (2.17) η φυσική διάταξη απαιτεί

$$:\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}:=\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}$$

οπότε

$$:H:=\int d^{n-1}k\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\omega$$

και ο προβληματικός όρος $\frac{1}{2}\delta^{(n-1)}(0)\omega$ έχει εξαφανιστεί. Μετά από αυτή την αναθεώρηση η κατάσταση του κενού μετατρέπεται σε μια ιδιοκατάσταση μηδενικής ενέργειας

$$\langle 0|H|0\rangle=0$$

Κεφάλαιο 3

Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

3.1 Η αρχή της ισοδυναμίας

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, η θεωρία του Einstein για τη βαρύτητα, είναι η πιο όμορφη και κομψή φυσική θεωρία. Είναι η ίδρυση της κοσμολογίας - το αντικείμενο που ανιχνεύει την εξέλιξη του σύμπαντος από την έντονα θερμή και πυκνή αρχική του κατάσταση μέχρι την πιθανή μελλοντική[1]. Ο Einstein επιδίωξε να βρει την απάντηση στην ερώτηση η οποία φαινόταν στους σύγχρονους του, αλλά και στους προηγούμενους, άνευ σημασίας. *Ποιά έννοια συνδέεται με την απόλυτη ισοδυναμία της αδρανειακής και της βαρυτικής μάζας* ; Αν όλα τα σώματα κινούνται σε βαρυτικά πεδία με ακριβώς τον ίδιο τρόπο, ανεξαρτήτως της σύστασής τους ή των δέσμιων δυνάμεων, τότε αυτό σημαίνει ότι η κίνησή τους δεν έχει τίποτα να κάνει με τη φύση τους, αλλά μάλλον με τη φύση του χωροχρόνου. Και αν ο χωρόχρονος καθορίζει την κίνηση των σωματιδίων , τότε σύμφωνα με το νόμο της δράσης - αντίδρασης, αυτό υποδηλώνει ότι ο χωρόχρονος με τη σειρά του διαμορφώνεται από τα σώματα και την κίνησή τους.

Η ισοδυναμία της αδρανειακής και της βαρυτικής μάζας έχει εξακριβωθεί με μεγάλη ακρίβεια για τις δέσμιες ενέργειες των ατόμων και των πυρήνων. Επιπλέον, ως αποτέλεσμα πολύ προσεκτικών πειραμάτων με χρήση λέιζερ, η γη και το φεγγάρι βρέθηκαν να "πέφτουν" προς τον ήλιο με ίδια επιτάχυνση με ακρίβεια 1 προς 10^{13}, καλύτερη και από τα πιο ακριβή πειράματα τύπου Eötvös που πραγματοποιούνται στο εργαστήριο. Τα ουσιώδη αυτά αποτελέσματα έχουν καθιερώσει τη λεγόμενη ισχυρή εκδοχή της ισοδυναμίας αδρανειακής και βαρυτικής μάζας. Όλα τα ελεύθερα σωματίδια, ανεξαρτήτως της σύστασης τους ή του πόσο δεμένα είναι τα συστατικά τους, κινούνται στο χωρόχρονο μέσα σε ένα τυχαίο βαρυτικό πεδίο σαν να ήταν ταυτοτικά σωματίδια. *Επειδή η κίνησή τους στον χωρόχρονο δεν έχει να κάνει με τη φύση τους, έχει τελικά να κάνει με τη φύση του χωροχρόνου.*

Ο Einstein ένιωθε σίγουρος ότι υπήρχε ένα βαθύτερο νόημα στην ισοδυναμία αυτή. "Η πειραματικά εξακριβωμένη ανεξαρτησία της μάζας από την επιτάχυνση

[1] Ο ίδιος ο Einstein δεν εφάρμοσε ποτέ τη θεωρία του στην εξέλιξη του κόσμου. Πράγματι όταν ανακάλυψε τη θεωρία (1915), ήταν κανόνας της δυτικής σκέψης ότι ο κόσμος διαρκούσε από το "αιώνιο" στο "αιώνιο". Η ανακάλυψη του Edwin Hubble (1927) της διαστολής του σύμπαντος κλόνισε αυτή τη πίστη.

της πτώσης είναι ... ένα ισχυρό επιχείρημα ώστε το αξίωμα της σχετικότητας να επεκταθεί σε συστήματα αναφοράς τα οποία, ως προς άλλα συστήματα, δεν είναι σε ομοιόμορφη κίνηση". Η πεποίθηση αυτή τον οδήγησε στην διατύπωση της *Αρχής της ισοδυναμίας*. Η αρχή της ισοδυναμίας παρέχει τη σύνδεση ανάμεσα στους φυσικούς νόμους όπως τους παρατηρούμε στο εργαστήριο και στη μορφή τους κάτω από οποιαδήποτε κατάσταση στο σύμπαν - πιο συγκεκριμένα, σε ισχυρά και ποικίλα βαρυτικά πεδία. Παρέχει επίσης ένα εργαλείο στην ανάπτυξη της θεωρίας της βαρύτητας όπως θα δούμε αργότερα.

Το σύμπαν είναι γεμάτο με αντικείμενα μεγάλης μάζας τα οποία κινούνται σχετικά μεταξύ τους. Το βαρυτικό πεδίο μπορεί να αλλάζει τυχαία με το χώρο και το χρόνο. Παρ' όλα αυτά, η παρουσία της βαρύτητας δεν μπορεί να ανιχνευτεί σε αρκετά μικρά συστήματα αναφοράς με ένα σωματίδιο τα οποία είναι σε ελεύθερη πτώση χωρίς καμία άλλη επίδραση πέραν της βαρύτητας. Το σωματίδιο θα παραμείνει σε ηρεμία σε ένα τέτοιο σύστημα. Είναι ένα *τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς*. Ο όρος τοπικό αδρανειακό σύστημα και τοπικό Lorentz σύστημα είναι όροι συνώνυμοι. Οι νόμοι της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας ισχύουν σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς και γι' αυτό ισχύουν και στη γειτονιά ένος συστήματος σε ελεύθερη πτώση. Με αυτό το τρόπο η σχετικότητα επεκτείνεται σε τυχαία βαρυτικά πεδία.

Σε ένα δεδομένο χωροχρονικό γεγονός αντιστοιχούν άπειρα τοπικά αδρανειακά συστήματα τα οποία σχετίζονται με μετασχηματισμούς Lorentz. Όλα είναι ισοδύναμα για την περιγραφή φυσικών φαινομένων σε μια αρκετά μικρή περιοχή του χωροχρόνου. Έτσι φτάνουμε στη διατύπωση της αρχής της ισοδυναμίας

Σε κάθε σημείο του χωροχρόνου σε ένα τυχαίο βαρυτικό πεδίο (εννοώντας οποτεδήποτε και οπουδήποτε στο σύμπαν) , μπορούμε να διαλέξουμε ένα τοπικό αδρανειακό (Lorentz) σύστημα αναφοράς ώστε οι νόμοι της φύσης να παίρνουν τη μορφή που έχουν σε ένα μη επιταχυνόμενο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων απουσία βαρύτητας.

Αυτό είναι το νόημα της ισοδυναμίας της αδρανειακής και βαρυτικής μάζας που είδε ο Einstein.

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση μόνο βαρυτικών δυνάμεων. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση ξ^a στο οποίο η εξίσωση κίνησής του θα είναι αυτή της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης στο χωρόχρονο, δηλαδή

$$\frac{d^2\xi^a}{d\tau^2} = 0 \tag{3.1}$$

όπου $d\tau$ είναι ο ιδιόχρονος

$$d\tau^2 = -\eta_{a\beta} d\xi^a d\xi^\beta \tag{3.2}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων χ^μ, το οποίο μπορεί να είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε ηρεμία αλλά μπορεί επίσης να είναι καμπυλόγραμμο, επιταχυνόμενο, περιστρεφόμενο ή όπως θέλουμε. Οι συντεταγμένες ξ^a είναι συναρτήσεις του χ^μ και η (3.1) γίνεται

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{d\xi^a}{d\tau}\Big) = \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\mu}\Big) = \frac{d^2\chi^\mu}{d\tau^2}\frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\mu} + \frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\mu}\Big) \\ &= \frac{d^2\chi^\mu}{d\tau^2}\frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\mu} + \frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{d\chi^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial\chi^\nu}\Big(\frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\mu}\Big) = \frac{\partial\xi^a}{\partial\chi^\mu}\frac{d^2\chi^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^a}{\partial\chi^\mu\partial\chi^\nu}\frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{d\chi^\nu}{d\tau} \end{aligned} \tag{3.3}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη διαφόριση του $\xi^a(\chi^\mu)$

$$d\xi^a(\chi^\mu) = \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu} d\chi^\mu$$

ενώ γενικά ισχύει

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\chi^\lambda}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \chi^\lambda}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.3) με $\frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a}$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu}\frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a} = \delta^\lambda_\mu$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a}\frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu}\frac{d^2\chi^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a}\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^\mu \partial \chi^\nu}\frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{\partial \chi^\nu}{d\tau} = 0 \\
\Rightarrow \qquad &\delta^\lambda_\mu \frac{d^2\chi^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a}\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^\mu \partial \chi^\nu}\frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{\partial \chi^\nu}{d\tau} = 0 \\
\Rightarrow \qquad &\frac{d^2\chi^\lambda}{d\tau^2} + + \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a}\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^\mu \partial \chi^\nu}\frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{\partial \chi^\nu}{d\tau} = 0
\end{aligned}$$

καταλήγοντας έτσι στην εξίσωση κίνησης

$$\frac{d^2\chi^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{d\chi^\mu}{d\tau}\frac{\partial \chi^\nu}{d\tau} = 0 \tag{3.4}$$

όπου έχουμε ορίσει την αφινική σύνδεση

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a}\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^\mu \partial \chi^\nu} \tag{3.5}$$

Η τροχιά που καθορίζεται από τη σχέση (3.4) ονομάζεται γεωδαιτική. Ο ιδιόχρονος (3.2) μπορεί επίσης να εκφραστεί σε ένα τυχαίο σύστημα αναφοράς

$$d\tau^2 = -\eta_{a\beta} d\xi^a d\xi^\beta = -\eta_{a\beta}\frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu} d\chi^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu} d\chi^\nu = -g_{\mu\nu} d\chi^\mu d\chi^\nu \tag{3.6}$$

όπου $g_{\mu\nu}$ είναι ο μετρικός τανυστής και ορίζεται ως

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{a\beta}\frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu} \tag{3.7}$$

3.2 Η σχέση ανάμεσα στα $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ και $g_{\mu\nu}$

Η μελέτη των σωματιδίων σε ελεύθερη πτώση μας δείχνει ότι το πεδίο που καθορίζει τη βαρυτική δύναμη είναι η αφινική σύνδεση $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ενώ το αναλλοίωτο χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο γεγονότα με δεδομένες απειροστές διαφορές συντεταγμένων καθορίζεται από τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$. Θα δείξουμε τώρα ότι το $g_{\mu\nu}$ είναι επίσης το βαρυτικό δυναμικό, ότι δηλαδή οι παράγωγοί του καθορίζουν το πεδίο $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.7) ως προς χ^λ δίνει

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda} = \frac{\partial}{\partial \chi^\lambda}\Big(\frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu}\eta_{a\beta}\Big) = \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^\lambda \partial \chi^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu}\eta_{a\beta} + \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial \chi^\lambda \partial \chi^\nu}\eta_{a\beta}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial^2 \xi^{a}}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^{a}}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}}$$

έχουμε

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} = \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \chi^{\nu}} \eta_{a\beta} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\mu}} \eta_{a\beta}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την (3.7) έχουμε

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} = \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} = \Gamma^{k}_{\lambda\mu} g_{k\nu} + \Gamma^{k}_{\lambda\nu} g_{k\mu} \tag{3.8}$$

Γράφουμε την ίδια εξίσωση εναλλάσσοντας τα μ και λ

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^{\mu}} = \Gamma^{k}_{\mu\lambda} g_{k\nu} + \Gamma^{k}_{\mu\nu} g_{k\lambda}$$

και εναλλάσσοντας τα ν και λ (στην (3.8))

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} = \Gamma^{k}_{\nu\mu} g_{k\lambda} + \Gamma^{k}_{\nu\lambda} g_{k\mu}$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες και αφαιρώντας την τρίτη θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} &= \Gamma^{k}_{\lambda\mu} g_{k\nu} + \Gamma^{k}_{\lambda\nu} g_{k\mu} + \Gamma^{k}_{\mu\lambda} g_{k\nu} + \Gamma^{k}_{\mu\nu} g_{k\lambda} - \Gamma^{k}_{\nu\mu} g_{k\lambda} - \Gamma^{k}_{\nu\lambda} g_{k\mu} \\ &= 2 g_{k\nu} \Gamma^{k}_{\lambda\mu} \end{aligned} \tag{3.9}$$

(Τα $\Gamma^{k}_{\mu\nu}$ και $g_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικά κάτω από την αλλαγή $\mu \leftrightarrow \nu$)
Ορίζουμε έναν πίνακα $g^{\nu\sigma}$ ως τον αντίστροφο του $g_{\nu\sigma}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} &= \eta^{a\beta} \frac{\partial \chi^{\nu}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \xi^{\delta}}{\partial \chi^{\nu}} = \eta^{a\beta} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial \chi^{\kappa}} \frac{\partial \chi^{\nu}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial \xi^{\delta}}{\partial \chi^{\nu}} \\ &= \eta^{a\beta} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial \chi^{\kappa}} \delta^{\delta}_{a} = \eta^{a\beta} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \eta_{\gamma a} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial \chi^{\kappa}} = \delta^{\beta}_{\gamma} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial \chi^{\kappa}} \\ &= \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \chi^{\kappa}} = \delta^{\sigma}_{k} \end{aligned}$$

και πολλαπλασιάζουμε την (3.9) με το $g^{\nu\sigma}$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} & g^{\nu\sigma} \Big(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} \Big) = 2 g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} \Gamma^{k}_{\lambda\mu} \\ \Rightarrow \quad & g^{\nu\sigma} \Big(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} \Big) = 2 \delta^{\sigma}_{k} \Gamma^{k}_{\lambda\mu} \\ \Rightarrow \quad & \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \Big(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} \Big) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Το δεξί μέλος της (3.10) ονομάζεται και σύμβολο Christoffel και συμβολίζεται

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \Big(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \chi^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} \Big)$$

3.3 Διανύσματα και τανυστές

Ας θεωρήσουμε μια καμπύλη που διέρχεται από κάποιο σημείο A σε ένα χώρο n-διαστάσεων. Η καμπύλη αυτή θα καθορίζεται από n συναρτήσεις μιας βαθμωτής ποσότητας λ της μορφής

$$x^\mu = z^\mu(\lambda) \qquad \mu = 0, 1, ..., n-1$$

Αν στο σημείο A αντιστοιχεί η τιμή της παραμέτρου λ τότε σε ένα διπλανό σημείο A' η τιμή της παραμέτρου θα είναι $\lambda + d\lambda$. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ως εφαπτόμενο διάνυσμα V^μ στο σημείο A το

$$V^\mu = \frac{d\chi^\mu}{d\lambda}$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα V^μ που ορίζεται από την παραπάνω σχέση θα λέμε ότι είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Ένας μετασχηματισμός από το σύστημα χ^μ σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων χ'^μ ορίζεται από τις n εξισώσεις

$$\chi'^\mu = f^\mu(\chi^\nu) \qquad \mu, \nu = 0, 1, ..., n-1$$

ενώ ο αντίστροφός του θα είναι

$$x^\mu = g^\mu(\chi'^\nu) \qquad \mu, \nu = 0, 1, ..., n-1$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι δυνατοί αν και μόνο αν οι Ιακωβιανές τους είναι διάφορες του μηδενός, δηλαδή αν

$$\det\left(\frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu}\right) \neq 0 \quad \text{και} \quad \det\left(\frac{\partial\chi^\mu}{\partial\chi'^\nu}\right) \neq 0$$

Ένα απειροστό διάνυσμα $d\chi^\nu$ που ορίζεται σ' ένα σύστημα χ^μ θα μετασχηματίζεται σ' ένα άλλο σύστημα $\chi^{\mu\prime}$ ως

$$d\chi'^\mu = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu} d\chi^\nu$$

Έστω ότι το ανταλλοίωτο διάνυσμα V^μ έχει ορισθεί σε ένα σύστημα συντεταγμένων χ^μ. Τότε οι συνιστώσες του σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, έστω το χ'^μ, θα δίνονται από μετασχηματισμούς της μορφής

$$V'^\mu = \frac{d\chi'^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu}\frac{d\chi^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu} V^\nu$$

Φυσικά μπορούμε να γυρίσουμε πίσω στις αρχικές συντεταγμένες καθώς ισχύει

$$\frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu}\frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^a} = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi'^a} = \delta^\mu_a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu}\frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\mu} = 1$$

και έτσι έχουμε

$$V'^\mu = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu} V^\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\mu} V'^\mu = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu}\frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\mu} V^\nu \quad \Rightarrow \quad V^\nu = \frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\mu} V'^\mu$$

Ένας στενά σχετιζόμενος κανόνας μετασχηματισμού είναι αυτός του συναλλοίωτου διανύσματος U_μ το οποίο κάτω από το μετασχηματισμό συντεταγμένων $\chi^\mu \to \chi'^\mu$ μετασχηματίζεται ως

$$U'_\mu = \frac{\partial\chi^\nu}{\partial\chi'^\mu} U_\nu$$

και αντίστροφα

$$U_\nu = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} U'_\mu$$

Ο πιο απλός κανόνας μετασχηματισμού είναι αυτός του βαθμωτού, το οποίο απλά δεν αλλάζει κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(\chi^\mu)$ σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων θα είναι

$$\phi = \phi(\chi'^\mu) = \phi(\chi^\mu)$$

Η μερική παράγωγος όμως ενός βαθμωτού πεδίου $\partial\phi/\partial\chi^\mu$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα καθώς σε ένα μετασχηματισμένο σύστημα αναφοράς είναι

$$\frac{\partial \phi}{\partial \chi'^\mu} = \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial \chi^\nu}$$

μετασχηματίζεται δηλαδή όπως τα συναλλοίωτα διανύσματα.

Τα βαθμωτά μεγέθη και τα διανύσματα (συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα) είναι ειδικές περιπτώσεις μιας ευρύτερης κατηγορίας γεωμετρικών ποσοτήτων που μετασχηματίζονται με βάση τους προηγούμενους κανόνες. Οι ποσότητες αυτές καλούνται τανυστές. Τα βαθμώτα μεγέθη είναι τανυστές μηδενικής τάξης ενώ τα διανύσματα είναι τανυστές πρώτης τάξης. Θα ονομάζουμε ανταλλοίωτο τανυστή 2ης τάξης, σε ένα n-διάστατο χώρο, την ποσότητα $T^{\mu\nu}$ η οποία έχει n^2 συνιστώσες και μετασχηματίζεται ως

$$T'^{a\beta} = \frac{\partial \chi'^a}{\partial \chi^\mu} \frac{\partial \chi'^\beta}{\partial \chi^\nu} T^{\mu\nu}$$

Κατ' ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και τους τανυστές 2ης τάξης $T_{\mu\nu}$ (συναλλοίωτος) και $T_{\mu\nu}$ (μεικτός) που μετασχηματίζονται ως

$$T'_{a\beta} = \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \chi'^a} \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\beta} T_{\mu\nu} \quad \text{και} \quad T'^a_\beta = \frac{\partial \chi'^a}{\partial \chi^\mu} \frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\beta} T^\mu_\nu$$

Ένας τανυστής με πάνω δείκτες $\mu, \nu, ...$ και κάτω δείκτες $k, \lambda, ...$ μετασχηματίζεται ως γινόμενο ανταλλοίωτων διανυσμάτων $V^\mu W^\nu \cdots$ και συναλλοίωτων διανυσμάτων $U_k Y_\lambda \cdots$. Για παράδειγμα κάτω από το μετασχηματισμό $\chi^\mu \to \chi'^\mu$ ένας τανυστής $T^{\mu\ \lambda}_{\ \nu}$ θα μετασχηματιστεί στο

$$T'^{\mu\ \lambda}_{\ \nu} = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\kappa} \frac{\partial \chi^\rho}{\partial \chi'^\nu} \frac{\partial \chi'^\lambda}{\partial \chi^\sigma} T^{\kappa\ \sigma}_{\ \rho}$$

Το πιο σημαντικό παράδειγμα είναι ο μετρικός τανυστής που όπως έχουμε δηλώσει για ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων είναι

$$g_{\mu\nu} = \eta_{a\beta} \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\nu}$$

όπου ξ^a είναι ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σε ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς χ'^μ ο μετρικός τανυστής είναι

$$g_{\mu\nu}{}' = \eta_{a\beta} \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi'^\nu} = \eta_{a\beta} \frac{\partial \xi^a}{\partial \chi^\rho} \frac{\partial \chi^\rho}{\partial \chi'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \chi^\sigma} \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \chi'^\nu} = \frac{\partial \chi^\rho}{\partial \chi'^\mu} \frac{\partial \chi^\sigma}{\partial \chi'^\nu} g_{\rho\sigma}$$

Βλέπουμε ότι ο $g_{\mu\nu}$ είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής. Ο αντίστροφός του είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής καθώς αν ορίσουμε το $g^{\lambda\mu}$ έτσι ώστε

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi'^{\mu}}{\partial \chi^{\sigma}} g^{\rho\sigma} g_{\mu\nu}{}' &= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi'^{\mu}}{\partial \chi^{\sigma}} g^{\rho\sigma} \frac{\partial \chi^{\kappa}}{\partial \chi'^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial \chi'^{\nu}} g_{\kappa\eta} = \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} g^{\rho\sigma} \delta^{k}_{\sigma} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial \chi'^{\nu}} g_{\kappa\eta} \\
&= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} g^{\rho k} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial \chi'^{\nu}} g_{\kappa\eta} = \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial \chi'^{\nu}} \delta^{\rho}_{\eta} = \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\rho}}{\partial \chi'^{\nu}} = \delta^{\lambda}_{\nu}
\end{aligned}$$

είναι λοιπόν

$$g^{\lambda\mu}{}' = \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi'^{\mu}}{\partial \chi^{\sigma}} g^{\rho\sigma}$$

όπως απαιτείται για έναν ανταλλοίωτο τανυστή.

Κάθε εξίσωση θα είναι αναλλοίωτη κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων αν δηλώνει την ισότητα δύο τανυστών με ίδιους πάνω και κάτω δείκτες. Για παράδειγμα αν $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ και $B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ είναι δύο τανυστές που υπακούν στον κανόνα μετασχηματισμού των τανυστών και στο σύστημα συντεταγμένων χ^{μ} ισχύει $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$ τότε και στο σύστημα χ'^{μ} θα ισχύει $A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda'} = B^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda'}$.

3.4 Καμπυλότητα του χωροχρόνου - τανυστής Riemann

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα σκέψης. Δύο γειτονικά σώματα που αφήνονται από την ηρεμία πάνω από τη γη ακολουθούν παράλληλες διαδρομές σε μια μικρή περιοχή των τροχιών τους, όπως ξέρουμε από την αρχή της ισοδυναμίας. Αλλά αν μπορούσαμε να ανοίξουμε τρύπες στην γη μέσα από τις οποίες θα περνούσαν τα σωματίδια, τότε αυτά θα διασταυρώνονταν στο κέντρο της. Οπότε δεν υπάρχει ένας χωρόχρονος Minkowski ο οποίος να καλύπτει μια μεγάλη περιοχή ή ολόκληρη τη περιοχή που εμπεριέχει ένα σώμα με μεγάλη μάζα.

Η άποψη του Einstein ήταν ότι η καμπυλότητα του χωροχρόνου προκαλούσε τη διασταύρωση αυτή των σωμάτων. Σώματα τα οποία σε αυτό τον καμπύλο χωρόχρονο ακολουθούσαν ευθείες διαδρομές σε κάθε μικρή περιοχή, ακριβώς όπως θα κάνανε στο χωρόχρονο Minkowski (επίπεδος) απουσία βαρύτητας. Η παρουσία των βαρυτικών σωμάτων εμποδίζει την ύπαρξη ενός τέτοιου καθολικού αδρανειακού συστήματος αναφορας. Ο χωρόχρονος θα ήταν επίπεδος παντού μόνο αν υπήρχε ένα τέτοιο σύστημα. Συνεπώς, ο χωρόχρονος καμπυλώνεται από τα σώματα με μάζα. Υπο την παρουσία τους ένα σωματίδιο ακολουθεί μια γεωδαιτική τροχία, που είναι πάντα τοπικά ευθεία. Η έννοια της βαρυτικής δύναμης έχει πλέον αντικατασταθεί από την καμπυλότητα του χωροχρόνου, και οι κινήσεις των ελεύθερων σωματιδίων μέσα σ' αυτόν καθορίζονται από τις γεωδαιτικές (3.4).

Θέλουμε τώρα να κατασκευάσουμε έναν τανυστή από τον μετρικό τανυστή και τις παραγώγους του. Αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τον $g_{\mu\nu}$ και τις πρώτες παραγώγους του τότε κανένας νέος τανυστής δεν μπορεί να κατασκευαστεί καθώς σε κάθε σημείο μπορούμε να βρούμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο οι πρώτες παράγωγοι του μετρικού τανυστή μηδενίζονται. Τότε ο επιθυμητός τανυστής θα είναι ίσος με κάποιον που μπορεί να κατασκευαστεί μόνο από τον μετρικό τανυστή, και αφού αυτή θα είναι μια ισοδυναμία ανάμεσα σε τανυστές θα ισχύει σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Η επόμενη απλούστερη περίπτωση είναι να κατασκευάσουμε έναν τανυστή από τον μετρικό τανυστή, τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους του. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε τον μετασχηματισμό της αφινικής σύνδεσης. Θυμίζουμε τον ορισμό της

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \xi^a}\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \chi^\mu \partial \chi^\nu}$$

όπου ξ^a είναι το τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Στο παράρτημα Β΄ βρίσκουμε ότι περνώντας από το χ^μ σε ένα διαφορετικό σύστημα χ'^μ μπορούμε να καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{\partial \chi'^\tau}{\partial \chi^\lambda}\Big(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial \chi^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial \chi^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}\Big) \\ &- \frac{\partial \chi'^\rho}{\partial \chi^\mu}\frac{\partial \chi'^\sigma}{\partial \chi^\nu}\frac{\partial \chi'^\eta}{\partial \chi^\kappa}\Big(\frac{\partial \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}{}'}{\partial \chi'^\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\tau}_{\rho\eta}{}'}{\partial \chi'^\sigma} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}{}'\Gamma^{\lambda}_{\eta\rho}{}' + \Gamma^{\tau}_{\lambda\eta}{}'\Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}{}'\Big) \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί σαν ένας κανόνας μετασχηματισμού

$$R^{\tau}_{\rho\sigma\eta}{}' = \frac{\partial \chi'^\tau}{\partial \chi^\lambda}\frac{\partial \chi^\mu}{\partial \chi'^\rho}\frac{\partial \chi^\nu}{\partial \chi'^\sigma}\frac{\partial \chi^\kappa}{\partial \chi'^\eta}R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \tag{3.11}$$

όπου έχουμε ορίσει

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial \chi^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial \chi^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta} \tag{3.12}$$

Η εξίσωση (3.11) υποδηλώνει ότι ο $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ είναι ένας τανυστής. Ο τανυστής αυτός ονομάζεται τανυστής καμπυλότητας Riemann - Christoffel και εκφράζει την καμπυλότητα του χώρου. Ο μηδενισμός του τανυστή Riemann σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος.

Η συστολή του τανυστή Riemann οδηγεί σε ένα τανυστή δεύτερης τάξης, τον τανυστή Ricci

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\kappa}$$

Μηδενισμός του τανιστή Ricci $R_{\mu\nu} = 0$ σημαίνει ότι ο χώρος είναι κενός ύλης - ενέργειας. Αξίζει λοιπόν να σημειώσουμε ότι η εξίσωση $R_{\mu\nu} = 0$ από μόνη της δεν σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος. Η παραπέρα συτολή του τανυστή Ricci οδηγεί στη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$$R \equiv R^\mu_\mu = g^{\mu\kappa}R_{\mu\kappa}$$

Κεφάλαιο 4

Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπύλο Χωρόχρονο

4.1 Κβάντωση του βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο πεδίων $\hat{\phi}(x)$ που διαδίδονται σε ένα καμπύλο χωρόχρονο με αναλλοίωτο στοιχείο διαστήματος

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

Αν το n δηλώνει τη διάσταση του χωροχρόνου τότε x^0 θα είναι η χρονική συντεταγμένη και $x^1, x^2, ..., x^{n-1}$ θα είναι οι χωρικές. Η δράση S κατασκευάζεται από το πεδίο $\hat{\phi}$ έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτη κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων

$$S[\hat{\phi}'(x), \partial'\hat{\phi}(x'), g'_{\mu\nu}(x')] = S[\hat{\phi}(x), \partial\hat{\phi}(x), g_{\mu\nu}(x)]$$

Ο πιο απλός τρόπος να κατασκευάσουμε μια τέτοια δράση είναι να ξεκινήσουμε με τη δράση στο χωρόχρονο Minkowski και να αντικαταστήσουμε τους τανυστές $\eta^{\mu\nu}$ με τους τανυστές $g^{\mu\nu}$ και τους στοιχειώδεις όγκους $d^n x$ με τους αναλλοίωτους στοιχειώδεις όγκους $(-g)^{1/2} d^n x$ όπου $g = \det(g_{\mu\nu})$. Η απαίτηση η δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από αλλαγές στα πεδία, οι οποίες μηδενίζονται στα όρια της ολοκλήρωσης, δίνει τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Big)$$

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα ενός βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο είναι

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\frac{1}{2}\big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\big) \tag{4.1}$$

Παρατηρούμε την εμφάνιση των όρων $\sqrt{-g}$ και $g^{\mu\nu}$. Συμπεριλαμβάνουμε επίσης τη βαθμώτη καμπυλότητα R και μια αδιάστατη σταθερά ξ. Σημειώνουμε ότι η (4.1) δεν είναι η μόνη Λαγκρανζιανή η οποία μετατρέπεται στη Λαγκρανζιανή Klein- Gordon όταν ο χωρόχρονος είναι επίπεδος. Αφού συμπεριλάβαμε έναν όρο ανάλογο του $R\phi$ τότε γιατί όχι και έναν όρο ανάλογο του $R^2\phi$ ή ανάλογο του $R^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi$; Γενικά μιλώντας θέλουμε την απλούστερη γενίκευση της κβαντικής θεωρίας πεδίου Minkowski στον καμπύλο χωρόχρονο, συνεπώς από τον ατελείωτο αριθμό των πιθανών επιπρόσθετων όρων συμπεριλαμβάνουμε μόνο αυτούς για τους οποίους έχουμε σοβαρό λόγο να το κάνουμε. Η σωστή ερώτηση λοιπόν είναι γιατί να συμπεριλάβουμε τον όρο ξR. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο λόγοι. Πρώτον όταν $m = 0$ και το ξ έχει μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή ($\xi_{conf} = \frac{1}{6}$ όταν $N = 4$, $\xi_{conf} = 0$ όταν $N = 2$) η δράση και η εξίσωση κίνησης είναι σύμμορφα αναλλοίωτες. Μια λύση, δηλαδή, του χωροχρόνου με μετρική $g_{\mu\nu}(x)$ είναι επίσης λύση του χωροχρόνου με μετρική $\Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$ όπου $\Omega(x)$ είναι μια θετική συνάρτηση. Έτσι το ξ_{conf} είναι μια απλούστερη ή καλύτερη επιλογή του ξ από το $\xi = 0$. Δεύτερον η ανακανονικοποίηση της θεωρίας ενός πεδίου (συγκεκριμένα ενός πεδίου με έναν όρο $\lambda\phi^4$ στη Λαγκρανζιανή) στον καμπύλο χωρόχρονο έχει αποδειχθεί πως πρέπει απαραίτητα να εμπεριέχει έναν όρο ανάλογο του $R\phi^2$.

Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= \frac{\partial\big[\sqrt{-g}\frac{1}{2}\big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\big)\big]}{\partial\phi} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}(-m^2 2\phi - \xi R 2\hat{\phi}) = -\sqrt{-g}(m^2\phi + \xi R\phi)\end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{\partial\big[\sqrt{-g}\frac{1}{2}\big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\big)\big]}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

Η Euler - Lagrange τότε γίνεται

$$\begin{aligned}&-\sqrt{-g}(m^2\phi + \xi R\phi) - \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0 \\ \Rightarrow\quad &\Box\phi + m^2\phi + \xi R\phi = 0\end{aligned} \tag{4.2}$$

όπου

$$\Box\phi = (-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] \tag{4.3}$$

Ένα βαθμωτό πεδίο που ικανοποιεί την (4.2) στον n-διάστατο χώρο λέγεται ότι είναι ελάχιστα συζευγμένο αν $\xi = 0$ και σύμμορφα συζευγμένο αν

$$\xi = \xi_{conf} \equiv \frac{n-2}{4(n-1)} \tag{4.4}$$

Για μια χωροειδή υπερεπιφάνεια με μετρική γ_{ij} ($\gamma = \det(\gamma_{ij})$)και μελλοντικά - κατευθυνόμενο, μοναδιαίο, κάθετο διάνυσμα n^μ, το εσωτερικό γινόμενο των λύσεων τής παραπάνω εξίσωσης ορίζεται

$$(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) = -i\int_\Sigma (\hat{\phi}_1\partial_\mu\hat{\phi}_2^* - \hat{\phi}_2^*\partial_\mu\hat{\phi}_1)n^\mu\sqrt{-\gamma}d^{n-1}x \tag{4.5}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο της υπερεπιφάνειας Σ. Η υπερεπιφάνεια Σ επιλέγεται να είναι μια επιφάνεια Cauchy[1] στον υπερβολικό χωρόχρονο.

[1]Υπονοείται από την αιτιότητα σε αυτή τη κατασκευή ότι η εξίσωση (4.2) έχει λύσεις οι οποίες ορίζονται καθολικά στον χωρόχρονο. Για το λόγο αυτό αρκεί ο χωρόχρονος να είναι καθολικά υπερβολικός - αυτό σημαίνει να έχει μια επιφάνεια Cauchy. Τί είναι όμως μια επιφάνεια Cauchy; Είναι πρώτα απ'

Μπορούμε τώρα να ξεκινήσουμε την κβάντωση της θεωρίας όπως και στο κεφάλαιο 2. Η συζυγής ορμή θα είναι

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$$

η οποία για τη Λαγκρανζιανή μας είναι

$$\hat{\pi} = \sqrt{-g}\partial_0 \hat{\phi}$$

Μπορούμε να επιβάλλουμε τις σχέσεις μετάθεσης

$$\begin{aligned}
&[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] = 0 \\
&[\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = 0 \\
&[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Εδώ όλοι οι μεταθέτες υπολογίζονται για δύο πεδία στην επιφάνεια Σ. (Στο κεφάλαιο 2 η συζυγής ορμή ήταν $\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}$ ενώ τώρα $\hat{\pi} = \sqrt{-g}\dot{\hat{\phi}}$, αυτός είναι και ο λόγος που εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{-g}$ στον παρονομαστή). Στην κβαντική θεωρία πεδίου στον χωρόχρονο Minkowski βρήκαμε λύσεις της εξίσωσης κίνησης οι οποίες χωρίζονταν σε χρονοεξαρτώμενους και χωροεξαρτώμενους παράγοντες. Μπορέσαμε έτσι στη συνέχεια να διακρίνουμε τις λύσεις θετικής και αρνητικής συχνότητας. Στην κβαντική θεωρία καμπύλου χωροχρόνου μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο τέτοιων λύσεων, το πρόβλημα όμως είναι ότι γενικά θα υπάρχουν πολλά τέτοια σύνολα και δεν θα έχουμε κάποιο λόγο να προτιμήσουμε το ένα σύνολο από τα υπόλοιπα. Η έννοια του κενού ή του τελεστή αρίθμησης θα εξαρτάται από το σύνολο που θα επιλέξουμε.

Ας δούμε τι μπορούμε να κάνουμε. Θα μπορούμε πάντα να βρούμε ένα σύνολο λύσεων $u_i(x^\mu)$ οι οποίες θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \qquad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij} \qquad (u_i, u_j^*) = 0 \tag{4.7}$$

Οι λύσεις αυτές μπορούν να επιλεγούν ώστε να είναι ένα πλήρες σύνολο και έτσι τα πεδία αναπτύσσονται ως

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i u_i(x) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(x)) \tag{4.8}$$

Οι τελεστές $\hat{a}_i$ και $\hat{a}_i^\dagger$ ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \qquad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \qquad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

Θα υπάρχει μια κατάσταση κενού η οποία καταστρέφεται από τους τελεστές καταστροφής

$$\hat{a}_i |0_u\rangle = 0 \qquad \text{για όλα τα } i$$

όλα μια κλειστή "φέτα" στον χωρόχρονο - μια τρισδιάστατη επιφάνεια Σ στην οποία δεν υπάρχουν δύο σημεία τα οποία να ενώνονται με μια χρονοειδής ή φωτοειδής καμπύλη. Για να χαρακτηρίζεται ως Cauchy η Σ θα πρέπει να έχει επιπλέον την ακόλουθη ιδιότητα. Για κάθε σημείο p του χωροχρόνου κάθε χρονοειδής ή φωτοειδής καμπύλη που περνά από το p τέμνει την Σ. Η ιδέα αυτού του ορισμού είναι ότι η φυσική στην Σ καθορίζει πλήρως τη φυσική στο μέλλον και το παρελθόν της Σ. Έτσι, πιο συγκεκριμένα, τα αρχικά δεδομένα στην Σ είναι αρκετά για να καθορίσουν τη λύση της (4.2) σε όλο τον χωρόχρονο.

Από αυτή την κατάσταση κενού μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ολόκληρη βάση Fock για τον χώρο Hilbert. Όπως πριν μια κατάσταση με n_i διεγέρσεις δημιουργείται με την επαναλαμβανόμενη δράση του τελεστή δημιουργίας $\hat{a}_i^\dagger$

$$|n_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}|0_u\rangle$$

και παρόμοια για καταστάσεις με διαφορετικό είδος διεγέρσεων. Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε έναν τελεστή αρίθμησης για κάθε συνάρτηση u_i

$$\hat{n}_{u_i} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$$

Ο κάτω δείκτης u στην κατάσταση κενού και στον τελεστή αρίθμησης μας θυμίζουν ότι ορίζονται ως προς το σύνολο των λύσεων u_i.

Η μεθοδολογία αυτή φαίνεται αρκετά όμοια με αυτή που είχαμε στον επίπεδο χωρόχρονο. Γιατί δεν μπορούμε λοιπόν να δηλώσουμε ότι οι διεγέρσεις που δημιουργούνται από τα $\hat{a}_i^\dagger$ είναι σωματίδια και να τελειώνουμε; Θα μπορούσαμε αλλά πρέπει να αντιμετωπίσουμε το γεγονός ότι υπάρχουν άλλες επιλογές που θα μπορούσαμε να κάνουμε. Ας θεωρήσουμε ένα εναλλακτικό σύνολο από λύσεις $\overline{u}_j$ με όλες τις ιδιότητες που είχαν οι προηγούμενες συμπεριλαμβανομένης και της δημιουργίας (μαζί με τις συζυγείς $\overline{u}_j^*$) μιας πλήρους βάσης ως προς την οποία μπορούμε να αναπτύξουμε τον τελεστή πεδίου

$$\hat{\phi} = \sum_j (\hat{\overline{a}}_j \overline{u}_j + \hat{\overline{a}}_j^\dagger \overline{u}_j^*)$$

Οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας, $\hat{\overline{a}}_j$ και $\hat{\overline{a}}_j^\dagger$, ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{\overline{a}}_j, \hat{\overline{a}}_i] = 0 \qquad [\hat{\overline{a}}_j^\dagger, \hat{\overline{a}}_i^\dagger] = 0 \qquad [\hat{\overline{a}}_j, \hat{\overline{a}}_i^\dagger] = \delta_{ji}$$

και θα υπάρχει μια κατάσταση κενού $|0_{\overline{u}}\rangle$ η οποία καταστρέφεται από τους τελεστές καταστροφής

$$\hat{\overline{a}}_j|0_{\overline{u}}\rangle = 0 \qquad \text{για όλα τα } j$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια βάση Fock επαναλαμβάνοντας τη δράση τελεστών δημιουργίας σε αυτό το κενό και να ορίσουμε τον τελεστή αρίθμησης

$$\hat{n}_{\overline{u}_j} = \hat{\overline{a}}_j^\dagger \hat{\overline{a}}_j$$

Αυτό που χάσαμε κατά τη μετάβαση από τον επίπεδο στον καμπύλο χωρόχρονο είναι ο οποιοσδήποτε λόγος να προτιμήσουμε το ένα σύνολο λύσεων (u_i) από το άλλο ($\overline{u}_j$). Στον επίπεδο χωρόχρονο μπορούσαμε να διαλέξουμε ένα σύνολο λύσεων απαιτώντας να έχουν θετική συχνότητα ως προς τη συντεταγμένη που ορίζεται από τη σχέση $\partial_t u_{\mathbf{k}} = -i\omega u_{\mathbf{k}}$. Η χρονική συντεταγμένη δεν ήταν μοναδική, αφού ήμαστε ελεύθεροι να πραγματοποιήσουμε μετασχηματισμούς Lorentz, όμως είδαμε ότι η κατάσταση κενού και ο τελεστής αρίθμησης είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Έτσι κάθε αδρανειακός παρατηρητής συμφωνούσε στο ποια είναι η κατάσταση του κενού ή στο πόσα σωματίδια βρίσκονται σε μια κατάσταση $|n_i\rangle$

4.2 Συντελεστές Bogolyubov

Θα θεωρήσουμε τώρα το πιο γενικό πλαίσιο όπου αν ένας παρατηρητής ορίζει τα σωματίδια ως προς ένα σύνολο λύσεων u_i και ένας άλλος ως προς ένα σύνολο $\overline{u}_j$ θα διαφωνούν στο πόσα σωματίδια παρατηρούνται (ή αν παρατηρούνται καθόλου σωματίδια). Για να το δούμε αυτό είναι βολικό να αναπτύξουμε κάθε σύνολο λύσεων ως προς τις άλλες (κάτι που είναι εφικτό αφού και τα δύο σύνολα είναι πλήρη).

$$\overline{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) \tag{4.9}$$

και αντίστροφα

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \overline{u}_j - \beta_{ji} \overline{u}_j^*) \tag{4.10}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός από το ένα σύνολο λύσεων στο άλλο είναι γνωστός ως μετασχηματισμός Bogolyubov και οι πίνακες α_{ji} και β_{ji} που υλοποιούν τον μετασχηματισμό είναι οι συντελεστές Bogolyubov. Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των συναρτήσεων μπορούμε να δείξουμε ότι (για ευκολία αγνοούμε τον παράγοντα $\sqrt{\gamma} n^\mu$)

$$\begin{aligned}
(\overline{u}_i, u_j) &= \Big(\sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*), u_j \Big) \\
&= \int \Big[\sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*) \partial_\mu u_j^* - u_j^* \partial_\mu \sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*) \Big] d^{n-1}x \\
&= \int \Big[\sum_k \alpha_{ik} u_k \partial_\mu u_j^* + \sum_k \beta_{ik} u_k^* \partial_\mu u_j^* - \sum_k \alpha_{ik} u_j^* \partial_\mu u_k - \sum_k \beta_{ik} u_j^* \partial_\mu u_k^* \Big] d^{n-1}x \\
&= \sum_k \alpha_{ik} \int \Big(u_k \partial_\mu u_j^* - u_j^* \partial_\mu u_k \Big) d^{n-1}x + \sum_k \beta_{ik} \int \Big(u_k^* \partial_\mu u_j^* - u_j^* \partial_\mu u_k^* \Big) d^{n-1}x \\
&= \sum_k \alpha_{ik} (u_k, u_j) + \sum_k \beta_{ik} (u_k^*, u_j) = \sum_k \alpha_{ik} \delta_{kj} \sum_k \beta_{ik} 0 \\
&= \alpha_{ij}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

και όμοια

$$\begin{aligned}
(\overline{u}_i, u_j^*) &= \int \Big[\sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*) \partial_\mu u_j - u_j \partial_\mu \sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*) \Big] d^{n-1}x \\
&= \sum_k \alpha_{ik} \int (u_k \partial_\mu u_j - u_j \partial_\mu u_k) d^{n-1}x + \sum_k \beta_{ik} \int (u_k^* \partial_\mu u_j - u_j \partial_\mu u_k^*) d^{n-1}x \\
&= \sum_k \alpha_{ik} (u_k, u_j^*) + \sum_k \beta_{ik} (u_k^*, u_j^*) = \sum_k \alpha_{ik} 0 + \sum_k \beta_{ik} (-\delta_{kj}) \\
&= -\beta_{ij}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Αν εισάγουμε τη σχέση (4.9) στην $(\overline{u}_i, \overline{u}_j) = \delta_{ij}$ βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
(\overline{u}_i, \overline{u}_j) &= \Big(\sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*), \sum_{k'} (\alpha_{jk'} u_{k'} + \beta_{jk'} u_{k'}^*) \Big) \\
&= \sum_{k,k'} (\alpha_{ik} u_k, \alpha_{jk} u_k) + \sum_{k,k'} (\alpha_{ik} u_k, \beta_{jk'} u_{k'}^*) + \sum_{k,k'} (\beta_{ik} u_k^*, \alpha_{jk'} u_{k'}) + \sum_{k,k'} (\beta_{ik} u_k^*, \beta_{jk'} u_{k'}^*) \\
&= \sum_{k,k'} \alpha_{ik} \alpha_{jk'}^* (u_k, u_{k'}) + \sum_{k,k'} \alpha_{ik} \beta_{jk'} (u_k, u_{k'}^*) + \sum_{k,k'} \beta_{ik} \alpha_{jk'}^* (u_k^*, u_{k'}) + \sum_{k,k'} \beta_{ik} \beta_{jk'}^* (u_k^*, u_{k'}^*) \\
&= \sum_{k,k'} \alpha_{ik} \alpha_{jk'}^* \delta_{kk'} + \sum_{k,k'} \alpha_{ik} \beta_{jk'} \; 0 + \sum_{k,k'} \beta_{ik} \alpha_{jk'}^* \; 0 + \sum_{k,k'} \beta_{ik} \beta_{jk'}^* (-\delta_{kk'}) \\
&= \sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*)
\end{aligned}
$$

Θα είναι δηλαδή

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} \tag{4.13}$$

Όμοια από τη σχέση $(\overline{u}_i, \overline{u}_j^*) = 0$ δείχνουμε ότι

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0 \tag{4.14}$$

Οι συντελεστές Bogolyubov μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τον μετασχηματισμό ανάμεσα στους τελεστές

$$\hat{a}_i = \sum_j (\alpha_{ji} \hat{\overline{a}}_j + \beta_{ji}^* \hat{\overline{a}}_j^\dagger) \tag{4.15}$$

και

$$\hat{\overline{a}}_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* \hat{a}_i - \beta_{ji}^* \hat{a}_i^\dagger) \tag{4.16}$$

Για να το δείξουμε αυτό ξεκινάμε από το γεγονός ότι

$$(\hat{\phi}, u_i) = \Big(\sum_j (\hat{a}_j u_j + \hat{a}_j^\dagger u_j^*), u_i \Big) = \sum_j \hat{a}_j (u_j, u_i) + \sum_j \hat{a}_j^\dagger (u_j^*, u_i) = \hat{a}_i$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_i = (\hat{\phi}, u_i) &= \Big(\sum_j (\hat{\overline{a}}_j \overline{u}_j + \hat{\overline{a}}_j^\dagger \overline{u}_j^*), u_i \Big) = \sum_j \hat{\overline{a}}_j (\overline{u}_j, u_i) + \sum_j \hat{\overline{a}}_j^\dagger (\overline{u}_j^*, u_i) \\
&= \sum_j \hat{\overline{a}}_j \Big(\sum_k (\alpha_{jk} u_k + \beta_{jk} u_k^*), u_i \Big) + \sum_j \hat{\overline{a}}_j^\dagger \Big(\sum_k (\alpha_{jk}^* u_k^* + \beta_{jk}^* u_k), u_i \Big) \\
&= \sum_j \hat{\overline{a}}_j \Big(\sum_k \alpha_{jk} (u_k, u_i) + \sum_k \beta_{jk} (u_k^*, u_i) \Big) + \sum_j \hat{\overline{a}}_j^\dagger \Big(\sum_k \alpha_{jk}^* (u_k^*, u_i) + \sum_k \beta_{jk}^* (u_k, u_i) \Big) \\
&= \sum_j \hat{\overline{a}}_j \alpha_{ji} + \sum_j \hat{\overline{a}}_j^\dagger \beta_{ji}^* = \sum_j (\alpha_{ji} \hat{\overline{a}}_j + \beta_{ji}^* \hat{\overline{a}}_j^\dagger)
\end{aligned}
$$

Όμοια θα ισχύει

$$(\hat{\phi}, \overline{u}_i) = \Big(\sum_j (\hat{\overline{a}}_j \overline{u}_j + \hat{\overline{a}}_j^\dagger \overline{u}_j^*), \overline{u}_i \Big) = \sum_j \hat{\overline{a}}_j (\overline{u}_j, \overline{u}_i) + \sum_j \hat{\overline{a}}_j^\dagger (\overline{u}_j^*, \overline{u}_i) = \hat{\overline{a}}_i$$

Απ' όπου βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{\overline{a}}_i = (\hat{\phi}, \overline{u}_i) &= \Big(\sum_j (\hat{a}_j u_j + \hat{a}_j^\dagger u_j^*), \overline{u}_i\Big) = \sum_j \hat{a}_j (u_j, \overline{u}_i) + \sum_j \hat{a}_j^\dagger (u_j^*, \overline{u}_i) \\ &= \sum_j \hat{a}_j \Big(u_j, \sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*)\Big) + \sum_j \hat{a}_j^\dagger \Big(u_j^*, \sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*)\Big) \\ &= \sum_j \hat{a}_j \Big(\sum_k \alpha_{ik}^* (u_j, u_k) + \sum_k \beta_{ik}^* (u_j, u_k^*)\Big) + \sum_j \hat{a}_j^\dagger \Big(\sum_k \alpha_{ik}^* (u_j^*, u_k) + \sum_k \beta_{ik}^* (u_j^*, u_k^*)\Big) \\ &= \sum_j \hat{a}_j \alpha_{ij}^* - \sum_j \hat{a}_j^\dagger \beta_{ij}^* = \sum_j (\alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger)\end{aligned}$$

4.3 Η έννοια των σωματιδίων - ανιχνευτές σωματιδίων

Ας φανταστούμε τώρα ότι το σύστημα είναι στο u-κενό $|0_u\rangle$, στο οποίο δεν παρατηρούνται u-σωματίδια. Θα θέλαμε να μάθουμε πόσα σωματίδια παρατηρούνται από έναν παρατηρητή που χρησιμοποιεί τις λύσεις $\overline{u}$. Υπολογίζουμε λοιπόν την αναμενόμενη τιμή του τελεστή αρίθμησης $\hat{n}_{\overline{u}_i}$ στο u-κενό.

$$\begin{aligned}\langle 0_u | n_{\overline{u}_i} | 0_u\rangle = \langle 0_u | \hat{\overline{a}}_i^\dagger \hat{\overline{a}}_i | 0_u\rangle &= \langle 0_u | \sum_{jk} (\alpha_{ij} \hat{a}_j^\dagger - \beta_{ij} \hat{a}_j)(\alpha_{ik}^* \hat{a}_k - \beta_{ik}^* \hat{a}_k^\dagger) | 0_u\rangle \\ &= \sum_{jk} \alpha_{ij} \alpha_{ik}^* \langle 0_u | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k | 0_u\rangle - \sum_{jk} \alpha_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_u | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k^\dagger | 0_u\rangle \\ &+ \sum_{jk} (-\beta_{ij}) \alpha_{ik}^* \langle 0_u | \hat{a}_j \hat{a}_k | 0_u\rangle + \sum_{jk} (-\beta_{ij})(-\beta_{ik}^*) \langle 0_u | \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_u\rangle \\ &= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_u | \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_u\rangle\end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\hat{a}|0_u\rangle = 0$, $\langle 0_u|\hat{a}^\dagger = 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk} \Rightarrow \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger - a_k^\dagger \hat{a}_j = \delta_{jk}$ θα έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}\langle 0_u | n_{\overline{u}_i} | 0_u\rangle &= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_f | (a_k^\dagger \hat{a}_j + \delta_{jk}) | 0_u\rangle \\ &= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \delta_{jk} \langle 0_u | 0_u\rangle = \sum_j \beta_{ij} \beta_{ij}^*\end{aligned}$$

Έτσι ο αριθμός των $\overline{u}$-σωματιδίων στο u-κενό μπορεί να εκφραστεί ως προς τους συντελεστές Bogolyubov

$$\langle 0_u | \hat{n}_{\overline{u}_i} | 0_u\rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2 \tag{4.17}$$

Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να μηδενιστεί αυτή η ποσότητα. Αυτό που φαίνεται σαν κενό για έναν παρατηρητή θα είναι μια κατάσταση γεμάτη σωματίδια σύμφωνα με έναν άλλον. Αν κάποιο από τα β_{ij} δεν μηδενίζεται τότε οι καταστάσεις κενού δεν συμπίπτουν.

Το ερώτημα που εμφανίζεται είναι το ποιο σύνολο λύσεων μας προμηθεύει με την "καλύτερη" περιγραφή του φυσικού κενού και αντιστοιχεί πλησιέστερα στην πραγματική μας εμπειρία της "μη ύπαρξης σωματιδίων". Όπως φαίνεται τελικά το ερώτημα αυτό δεν μπορεί να απαντηθεί όπως διατυπώθηκε καθώς είναι απαραίτητο να συγκεκριμενοποιήσουμε τις λεπτομέρειες της διαδικασίας της κβαντικής μέτρησης η οποία χρησιμοποιείται για να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη κβάντων. Συγκεκριμένα η κατάσταση κίνησης της συσκευής μέτρησης μπορεί να επηρεάσει το αν θα παρατηρηθούν σωματίδια ή όχι. Για παράδειγμα ένας ανιχνευτής σε ελεύθερη πτώση δεν θα καταγράφει πάντα την ίδια πυκνότητα σωματιδίων όπως ένας μη αδρανειακός, επιταχυνόμενος ανιχνευτής. Στην πραγματικότητα αυτό είναι αλήθεια ακόμα και στον χωρόχρονο Minkowski. Ένας επιταχυνόμενος ανιχνευτής θα καταγράφει κβάντα ακόμα και στη κατάσταση κενού που ορίζεται από τη σχέση $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle$. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του χωροχρόνου Minkowski δεν είναι ότι υπάρχει ένα μοναδικό κενό (δεν υπάρχει), αλλά ότι η συμβατική κατάσταση κενού όπως ορίζεται ως προς τις λύσεις $u_{\mathbf{k}}(x^{\mu}) = [(2\pi)^{n-1}2\omega]^{-1/2}e^{ik_{\mu}x^{\mu}}$ είναι το ίδιο κενό για όλες τις αδρανειακές συσκευές μέτρησης σε όλο το χωρόχρονο. Αυτό συμβαίνει γιατί το κενό όπως ορίζεται από την $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle$ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Από την ανάπτυξη αυτού του θέματος μάθαμε ότι η έννοια των σωματιδίων δεν έχει καθολική σημασία. Τα σωματίδια μπορούν να καταγράψουν την παρουσία τους σε κάποιους ανιχνευτές ενώ σε άλλους όχι. Κάποιος είναι ελεύθερος να υποστηρίξει την ύπαρξη σωματιδίων αλλά χωρίς να προσδιορίσει την κατάσταση κίνησης του ανιχνευτή η έννοια των σωματιδίων δεν είναι πολύ χρήσιμη ακόμα και στο χωρόχρονο Minkowski.

Σε πολλά προβλήματα που μας ενδιαφέρουν ο χωρόχρονος μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ασυμπτωτικά Minkowski στο μακρυνό παρελθόν και/ή μέλλον. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η επιλογή του "φυσικού" κενού Monkowski όπως ορίζεται από την σχέση (2.10) έχει ένα πολύ κατανοητό φυσικό νόημα, την απουσία δηλαδή σωματιδίων σύμφωνα με όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές στην ασυμπτωτική περιοχή. Αναφερόμαστε στο μακρινό παρελθόν και μέλλον ως τις "μέσα" και "έξω" περιοχές αντίστοιχα. Αυτή η ορολογία μεταφερθηκε από την κβαντική θεωρία πεδίου Minkowski όπου θεωρούμε ότι καθώς το $t \to \pm\infty$ όλες οι αλληλεπιδράσεις των πεδίων τείνουν στο μηδέν. Εφόσον δουλεύουμε στην εικόνα του Heisenberg αν διαλέξουμε την κατάσταση του κβαντικού πεδίου στην "μέσα" περιοχή να είναι η κατάσταση του κενού τότε θα παραμείνει σε αυτή την κατάσταση κατά τη διάρκεια της εξέλιξης στην οποία υπόκειται. Παρ' όλα αυτά όπως θα δείξουμε σύντομα, σε μετέπειτα στιγμές έξω από την "μέσα" περιοχή οι ανιχνευτές σε ελεύθερη πτώση μπορεί να καταγράφουν σωματίδια σε αυτή την κατάσταση κενού. Συγκεκριμένα αν υπάρχει και μια "έξω" περιοχή τότε το "μέσα" κενό μπορεί να μη συμπίπτει με το "έξω" κενό. Σε αυτή τη περίπτωση μια φυσική (αδρανειακή) ομάδα παρατηρητών στην "έξω" περιοχή θα ανιχνεύει την παρουσία σωματιδίων. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι σωματίδια έχουν δημιουργηθεί από το χρονοεξαρτώμενο εξωτερικό βαρυτικό πεδίο.

4.4 Κοσμολογική δημιουργία σωματιδίων - ένα απλό παράδειγμα

Σε αυτό το κομμάτι Θα μελετήσουμε το πως μπορεί να προκληθεί δημιουργία σωματιδίων σε ένα χωρόχρονο με "μέσα" και "έξω" περιοχές Minkowski. Ένας κατάλληλος χωρόχρονος είναι ένα δισδιάστατο σύμπαν Robertson - Walker με στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 \tag{4.18}$$

όπου τα χωρικά μέρη επεκτείνονται ομοιόμορφα όπως περιγράφεται απο τη βαθμωτή συνάρτηση $a(t)$. Εισάγωντας μια νέα παράμετρο του χρόνου η (το λεγόμενο σύμμορφο χρόνο) που ορίζεται ως $d\eta = dt/a$ θα έχουμε

$$t = \int^t dt' = \int^\eta a(\eta')d\eta'$$

και η (4.18) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2) = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2) \tag{4.19}$$

όπου έχουμε ορίσει τον σύμμορφο βαθμωτό παράγοντα $C(\eta) = a^2(\eta)$. Αυτή η μορφή του στοιχειώδους μήκους είναι προφανώς σύμμορφη (Παράρτημα Γ') στον χωρόχρονο Minkowski. Θυμίζουμε πως ένας σύμμορφος μετασχηματισμός μιας μετρικής $g_{\mu\nu}$ περιγράφεται από

$$g_{\mu\nu}(x) \to \widetilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$$

Αφού λοιπόν ο χωρόχρονος Minkowski περιγράφεται από το στοιχειώδες μήκος $ds^2 = d\eta^2 - dx^2$ και μετρική $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ο χωρόχρονος με $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2)$ και μετρική $\widetilde{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = a^2(\eta)g_{\mu\nu}$ είναι σύμμορφος μ' αυτόν. Σημειώνουμε ότι ο ανταλλοίωτος τανυστής θα μετασχηματιστεί ως

$$g^{\mu\nu} \to \widetilde{g}^{\mu\nu} = a^{-2}(\eta)g^{\mu\nu} \tag{4.20}$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$C(\eta) = A + B\tanh(\rho\eta) \qquad \text{με} \qquad A, B, \rho \quad \text{σταθερά}$$

τότε στο μακρυνό παρελθόν και μέλλον ο χωρόχρονος γίνεται Minkowski αφού

$$C(n) \to A \pm B, \qquad \eta \to \pm\infty$$

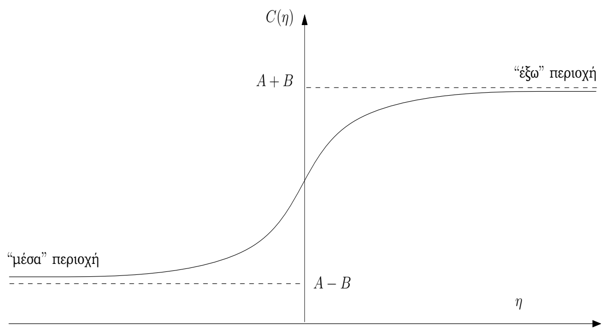
Θεωρούμε την παραγωγή ελάχιστα συζευγμένων βαθμωτών σωματιδίων με μάζα. Θυμίζουμε πως η εξίσωση για ένα βαθμώτο πεδίο με μάζα σε καμπύλο χωρόχρονο είναι

$$[\Box + m^2 + \xi(n)R(x)]\hat{\phi}(x) = 0 \tag{4.21}$$

Για την ελάχιστα συζευγμένη περίπτωση έχουμε $\xi = 0$ ενώ για τη σύμμορφα συζευγμένη περίπτωση έχουμε $\xi(n) \equiv \frac{1}{4}[(n-2)/(n-1)]$. Παρατηρούμε ότι στις 2 διαστάσεις που μελετάμε το πρόβλημά μας η ελάχιστη και η σύμμορφη σύζευξη είναι ισοδύναμες ($\xi = 0$).

Εφόσον το $C(\eta)$ δεν είναι συνάρτηση του x (της χωρικής συνιστώσας) μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές στις βαθμωτές συναρτήσεις που εμφανίζονται στη λύση

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i [\hat{a}_i u_i(x) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(x)]$$



Σχήμα 4.1: Ο σύμμορφος παράγοντας $C(\eta) = A + B\tanh(\rho\eta)$ αντιπροσωπεύει ένα ασυμπτωτικά στατικό σύμπαν το οποίο υπόκειται σε μια περίοδο ομαλής επέκτασης.

γράφοντας

$$u_k(\eta, x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx}\chi_k(\eta) \tag{4.22}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.22) στην θέση του $\hat{\phi}$ στην (4.21) με $\xi = 0$, την d'Alembertian (4.3) και τη μετρική που δίνεται από τη σχέση (4.19) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\Box u_k(\eta, x) + m^2 u_k(\eta, x) = 0 \\
\Rightarrow\quad & (-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}\partial_\nu(e^{ikx}\chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx}\chi_k(\eta) = 0 \\
\Rightarrow\quad & C(\eta)^{-1}\partial_\mu[C(\eta) g^{\mu\nu}\partial_\nu(e^{ikx}\chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx}\chi_k(\eta) = 0 \\
\Rightarrow\quad & C(\eta)^{-1}\partial_\mu[C(\eta)C(\eta)^{-1} n^{\mu\nu}\partial_\nu(e^{ikx}\chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx}\chi_k(\eta) = 0 \\
\Rightarrow\quad & C(\eta)^{-1}\partial_\mu[\partial^\mu(e^{ikx}\chi_k(\eta))] + m^2 e^{ikx}\chi_k(\eta) = 0 \\
\Rightarrow\quad & C(\eta)^{-1}\Big(e^{ikx}\frac{\partial^2\chi_k(\eta)}{\partial\eta^2} + k^2 e^{ikx}\chi_k(\eta)\Big) + m^2 e^{ikx}\chi_k(\eta) = 0
\end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι μια διαφορική εξίσωση για το $\chi_k(\eta)$

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\chi_k(\eta) + (k^2 + C(\eta)m^2)\chi_k(\eta) = 0 \tag{4.23}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά με τη βοήθεια υπεργεωμετρικών συναρτήσεων. Οι κανονικοποιημένες λύσεις που συμπεριφέρονται σαν τις λύσεις θετικής συχνότητας στον χώρο Minkowski στο μακρινό παρελθόν είναι

$$\begin{aligned}
u_k^{in}(\eta, x) &= (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\quad \times {}_2F_1[1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 - (i\omega_{in}/\rho); \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\
&\xrightarrow{\eta\to-\infty} (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_{in}\eta}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\omega_{in} &= [k^2 + m^2(A - B)]^{\frac{1}{2}} \\
\omega_{out} &= [k^2 + m^2(A + B)]^{\frac{1}{2}} \\
\omega_\pm &= \frac{1}{2}(\omega_{out} \pm \omega_{in})
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Από την άλλη μεριά οι λύσεις που συμπεριφέρονται σαν λύσεις Minkowski θετικής συχνότητας στην "έξω" περιοχή καθώς το $\eta \to +\infty$ είναι

$$
\begin{aligned}
u_k^{out}(\eta, x) &= (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\quad \times {}_2F_1[1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 + (i\omega_{out}/\rho); \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&\xrightarrow{\eta\to+\infty} (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_{out}\eta}
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

Προφανώς τα u_k^{in} και u_k^{out} δεν είναι ίσα, πράγμα που σημαίνει ότι ο συντελεστής Bogolyubov β στη σχέση

$$
\overline{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*)
$$

που περιγράφει τη συσχέτιση δυο διαφορετικών συνόλων λύσεων, δεν πρέπει να μηδενίζεται. Για να το δείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες γραμμικού μετασχηματισμού των υπεργεωμετρικών συναρτήσεων (Παράρτημα Δ') ώστε να γράψουμε το u_k^{in} ως προς το u_k^{out} στη μορφή

$$
u_k^{in}(\eta, x) = \alpha_k u_k^{out}(\eta, x) + \beta_k u_{-k}^{out*}(\eta, x) \tag{4.27}
$$

με

$$
\alpha_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \quad \beta_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)}
$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (4.27) με την $\overline{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*)$ βρίσκουμε ότι οι συντελεστές Bogolyubov δίνονται από τις

$$
\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta_{kk'} \qquad \beta_{kk'} = \beta_k \delta_{-kk'} \tag{4.28}
$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέτρο των συντελεστών Bogolyubov στο τετράγωνο. Άλλωστε η μέση τιμή του τελεστή αρίθμησης N είναι $|\beta_k|^2$. Κάνουμε χρήση των σχέσεων

$$
\begin{aligned}
\Gamma(iy)\Gamma(-iy) = |\Gamma(iy)|^2 &= \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)} \\
\Gamma(1 + iy)\Gamma(1 - iy) = |\Gamma(1 + iy)|^2 &= \frac{\pi y}{\sinh(\pi y)}
\end{aligned}
$$

και έχουμε

$$
\begin{aligned}
|\alpha_k|^2 = \alpha_k {\alpha_k}^* &= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \frac{\Gamma(1 + i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_+/\rho)\Gamma(1 + i\omega_+/\rho)} \\
&= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(1 + i\omega_{in}/\rho)\frac{\pi}{\omega_{out}/\rho\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}}{\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)\Gamma(1 + i\omega_+/\rho)\frac{\pi}{\omega_+/\rho\sinh(\pi\omega_+/\rho)}} \\
&= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\frac{\pi\omega_{in}/\rho}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)} \frac{\pi}{\omega_{out}/\rho\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}}{\frac{\pi\omega_+/\rho}{\sinh(\pi\omega_+/\rho)} \frac{\pi}{\omega_+/\rho\sinh(\pi\omega_+/\rho)}} \\
&= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right) \frac{\omega_{in}/\rho\sinh(\pi\omega_+/\rho)\omega_+/\rho\sinh(\pi\omega_+/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)\omega_{out}/\rho\omega_+/\rho} \\
&= \frac{\sinh^2(\pi\omega_+/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}
\end{aligned}
$$

Όμοια δείχνουμε

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_-/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \tag{4.29}$$

Τέλος, ως μια μικρή επαλήθευση των υπολογισμών μας, έχουμε αποδείξει ότι για τους συντελεστές Bogolyubov ισχύει $\sum_k(\alpha_{ik}\alpha_{jk}{}^* - \beta_{ik}\beta_{jk}{}^*) = \delta_{ij}$. Πράγματι στην περίπτωσή μας χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\sinh\frac{z}{2} = \Big(\frac{\cosh z - 1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 &= \frac{\sinh^2(\pi\omega_+/\rho) - \sinh^2(\pi\omega_-/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi}{\rho}\frac{1}{2}(\omega_{out}+\omega_{in})\right) - \sinh^2\left(\frac{\pi}{\rho}\frac{1}{2}(\omega_{out}-\omega_{in})\right)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}(\omega_{out}+\omega_{in})\right)-1}{2} - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}(\omega_{out}-\omega_{in})\right)-1}{2}}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out}+\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right)}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out}-\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}\right)}{2} + \frac{1}{2}}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{\cosh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out})\cosh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}) + \sinh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out})\sinh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in})}{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&\quad - \frac{\Big[\cosh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out})\cosh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in}) + \sinh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{out})\Big(-\sinh(\frac{\pi}{\rho}\omega_{in})\Big)\Big]}{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= \frac{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)}{2\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ακριβώς αυτό που περιμέναμε.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που ένα κβαντικό πεδίο βρίσκεται στην κατάσταση $|0_{in}\rangle$, όπως ορίζεται από την $\overline{a}_j|0\rangle = 0$ συναρτήσει των λύσεων της "μέσα" περιοχής u_k^{in} (τις οποίες έχουμε συσχετίσει με τις λύσεις $\overline{u}_j$). Στο μακρινό παρελθόν, όπου ο χωρόχρονος είναι Minkowski, όλοι οι αδρανειακοί ανιχνευτές σωματιδίων θα καταγράφουν απουσία σωματιδίων, έτσι ώστε μη επιταχυνόμενοι παρατηρητές θα αναγνωρίσουν την κβαντική κατάσταση εκεί ως το φυσικό κενό.

Στην "έξω" περιοχή ($\eta \to +\infty$) ο χωρόχρονος είναι επίσης Minkowski και το κβαντικό πεδίο είναι επίσης στην κατάσταση $|0_{in}\rangle$ (αφού δουλεύουμε στην εικόνα του Heisenberg), αλλά σε αντίθεση με την κατάσταση στην "μέσα" περιοχή, η $|0_{in}\rangle$ δεν θεωρείται από τους αδρανειακούς παρατηρητές στην "έξω" ως το φυσικό κενό. Το ρόλο αυτό παίζει η κατάσταση $|0_{out}\rangle$ όπως ορίζεται συναρτήσει των λύσεων u_k^{out}. Πράγματι οι μη επιταχυνόμενοι ανιχνευτές σωματιδίων εκεί θα καταγράφουν την παρουσία κβάντων. Ο αναμενόμενος αριθμός των κβάντων που θα καταγράφονται δίνεται από τη σχέση (4.29). Μπορούμε λοιπόν να περιγράψουμε αυτή την κβαντική εξέλιξη ως τη δημιουργία σωματιδίων λόγω της διαστολής του σύμπαντος.

4.5 Το πρόβλημα της αριθμητικής λύσης

Μέχρι εδώ όλα καλά, μελετήσαμε το δισδιάστατο σύμπαν Robertson - Walker με "μέσα" και "έξω" περιοχές Minkowski, δείξαμε ότι οι μη επιταχυνόμενοι ανιχνευτές στην "έξω" περιοχή θα καταγράφουν εν τέλει σωματίδια με βάση τη σχέση (4.29) και καταλήξαμε στο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα ότι οι συντελεστές Bogolyubov $\alpha_{kk'}$ και $\beta_{kk'}$ είναι ανεξάρτητοι του χρόνου η.

Τι θα γινόταν όμως αν χρησιμοποιούσαμε τη σχέση (4.11)

$$\alpha_{kk'} \sim (u_k^{in}, {u_{k'}}^{out})$$

στην προσπάθειά μας να λύσουμε το ίδιο πρόβλημα αριθμητικά; Η διαφορική εξίσωση (4.23)

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\chi_k(\eta) + (k^2 + C(\eta)m^2)\chi_k(\eta) = 0 \tag{4.30}$$

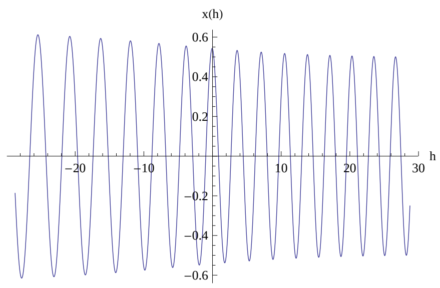
μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Χρησιμοποιούμε αρχική συνθήκη την τιμή του

$$\chi_k(\eta) = (2\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega_{in}\eta}$$

στο $\eta = -\eta_0$, όπου η_0 αρκετά μεγάλος αριθμός. Θυμίζουμε πως όταν ο χωρόχρονος είναι Minkowski οι λύσεις είναι

$$u_k(\eta, x) = \frac{e^{-i\omega\eta + ikx}}{[(2\pi)2\omega]^{\frac{1}{2}}} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx}\chi_k(\eta)$$

Η γραφική παράσταση που προκύπτει παίρνοντας το πραγματικό κομμάτι της λύσης είναι



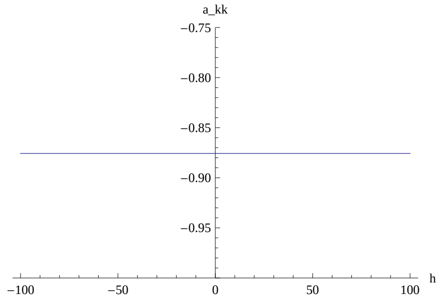
Σχήμα 4.2: Μορφή της λύσης στην "μέσα" περιοχή όπως προκύπτει με χρήση του mathematica

Το γράφημα αυτό υποδηλώνει ότι η λύση της διαφορικής εξαρτάται από το η. Υποψιαζόμαστε έτσι ότι το εσωτερικό γινόμενο των λύσεων (και επομένως οι συντελεστές Bogolyubov θα εξαρτάται εν τέλει από τον χρόνο η. Προφανώς κάτι δεν πάει καλά εφόσον το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό από την αναλυτική λύση και είναι ανεξάρτητο του η. Στο παράρτημα Ε' καταφεύγουμε ξανά στις πράξεις για να καταλάβουμε τι ακριβώς συμβαίνει μέσα στο εσωτερικό γινόμενο. Όπως φαίνεται από το αποτέλεσμα πράγματι οι συντελεστές Bogolyubov δεν εξαρτώνται από τον σύμμορφο χρόνο η. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτή η εξάρτηση που εμφανίζεται στο mathematica είναι πραγματικά αμελητέα. Οι κώδικες του mathematica για τα παρακάτω διαγράμματα βρίσκονται στο παράρτημα F'.

Σκοπός μας θα είναι να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα που προκύπτει για τον συντελεστή Bogolyubov από τη σχέση (4.28) σύμφωνα με την οποία θα είναι

$$\alpha_{kk'} = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_{+}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{+}/\rho)}\delta_{kk'} \tag{4.31}$$

Δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους που εμφανίζονται έχουμε το αποτέλεσμα



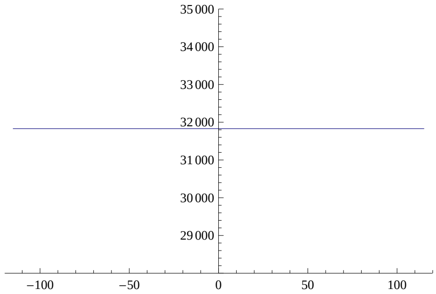
Σχήμα 4.3: Ο συντελεστής Bogolyubov α_{kk} συναρτήσει του σύμμορφου χρόνου η.

Εμείς αυτό που θέλουμε είναι να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα μέσω του εσωτερικού γινομένου καθώς ισχύει

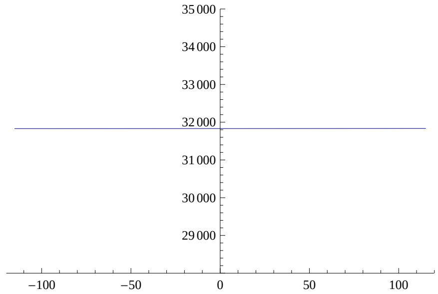
$$\alpha_{kk} \sim (u_k^{in}, u_k^{out}) \tag{4.32}$$

Δεν χρησιμοποιούμε ισότητα γιατί όπως θα δούμε και παρακάτω οι λύσεις u_k^{in}, u_k^{out} δεν είναι απαραίτητα κανονικοποιημένα. Στα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν θα παρουσιάζουμε στα αριστερά τα αποτελέσματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις λύσεις όπως δίνονται από τις σχέσεις (4.24) και (4.26) ενώ στα δεξιά χρησιμοποιώντας τις λύσεις που προκύπτουν από τη λύση της διαφορικής (4.30). Αν τα διαγράμματα συμπίπτουν θα έχουμε μια παραπάνω πληροφορία. Δεν θα έχουμε πλέον ανάγκη την αναλυτική μορφή των u_k^{in}, u_k^{out} , κάτι που θα φανεί πολύ χρήσιμο αργότερα που θα εισάγουμε στο πρόβλημά μας τον όρο ξR. Ξεκινάμε με το εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{in}) = \delta_{kk'}$. Για $k = k'$ θα έχουμε τα σχήματα (4.4) και (4.5). Όπως φαίνεται δεν δίνουν αποτέλεσμα μονάδα συνεπώς θα τα κανονικοποιήσουμε διαιρώντας με το εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{in}). Με αυτή τη ποσότητα θα διαιρούμε όλα τα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν. Έτσι μετά την κανονικοποίηση θα έχουμε τα σχήματα (4.6) και (4.7). Για $k \neq k'$ προκύπτουν τα (4.8) και (4.9) τα οποία είναι τόσο μικρά που ουσιαστικά είναι μηδέν όπως και θα έπρεπε. Συνεχίζουμε με το εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{in*}) = 0$ για το οποίο έχουμε τα σχήματα (4.10) και (4.11) είναι δηλαδή και αυτό μηδέν. Για τους συντελεστές Bogolyubov $\alpha_{kk'}$ για $k = k'$ έχουμε αποτέλεσμα τα σχήματα (4.12) και (4.13) σε απόλυτη συμφωνία με το σχήμα (4.3). Τέλος για $k \neq k'$ ο συντελεστής $\alpha_{kk'}$ θα πρέπει να μηδενίζεται. Πράγματι θα έχουμε τα (4.14) και (4.15).

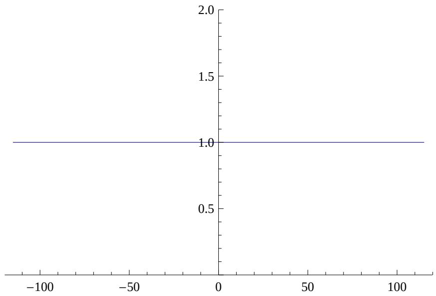
Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η εξάρτηση των εσωτερικών γινομένων από τον σύμμορφο χρόνο η είτε δεν υφίσταται καθόλου ή είναι τόσο μικρή που θεωρείται αμελητέα. Παρ'όλα αυτά έχουμε αναφέρει ότι στο παράρτημα Ε' γίνεται



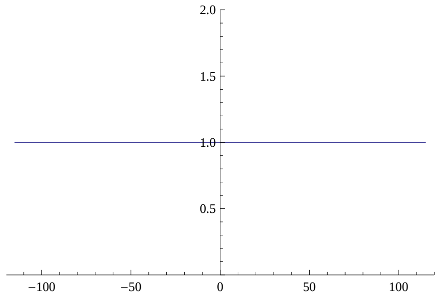
Σχήμα 4.4: Αναλυτική λύση: Εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{in}) συναρτήσει του η



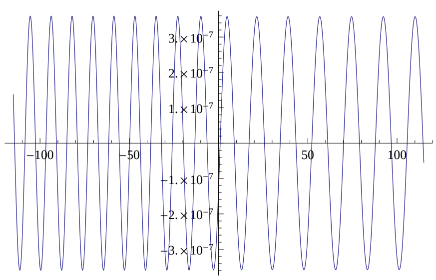
Σχήμα 4.5: Αριθμητική λύση: Εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{in}) συναρτήσει του η



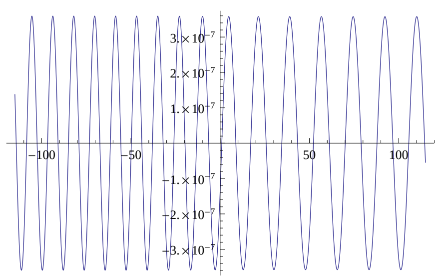
Σχήμα 4.6: Αναλυτική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{in}) συναρτήσει του η



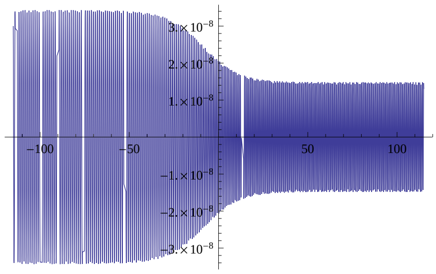
Σχήμα 4.7: Αριθμητική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{in}) συναρτήσει του η



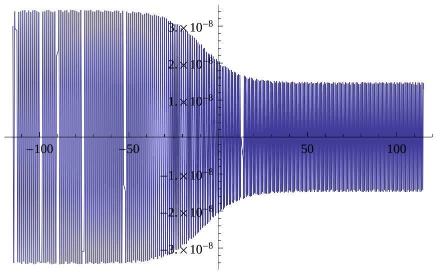
Σχήμα 4.8: Αναλυτική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{in})$ συναρτήσει του η



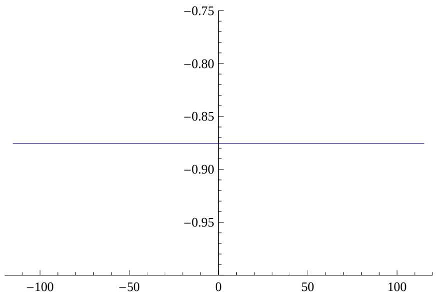
Σχήμα 4.9: Αριθμητική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{in})$ συναρτήσει του η



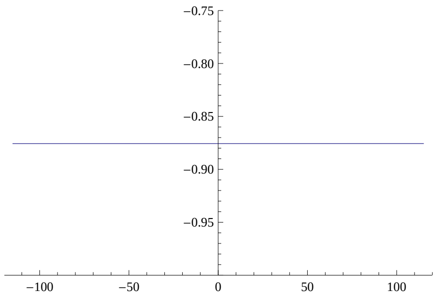
Σχήμα 4.10: Αναλυτική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{in*})$ συναρτήσει του η



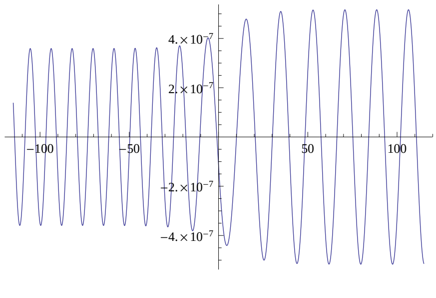
Σχήμα 4.11: Αριθμητική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{in*})$ συναρτήσει του η



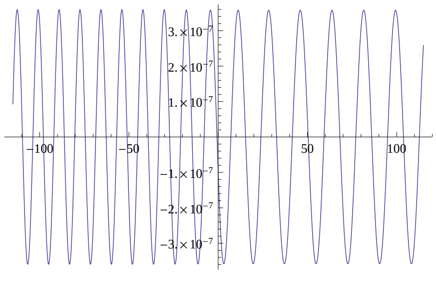
Σχήμα 4.12: Αναλυτική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{out}) συναρτήσει του η



Σχήμα 4.13: Αριθμητική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{out}) συναρτήσει του η



Σχήμα 4.14: Αναλυτική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{out})$ συναρτήσει του η



Σχήμα 4.15: Αναλυτική λύση: Κανονικοποιημένο εσωτερικό γινόμενο $(u_k^{in}, {u_{k'}}^{out})$ συναρτήσει του η

ξεκάθαρο ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει καμία τέτοια εξάρτηση. Δείξαμε όμως παράλληλα και κάτι εξίσου σημαντικό. Η αριθμητική λύση δίνει τα ίδια αποτελέσματα με την αναλυτική. Στην επόμενη ενότητα θα συνεχίσουμε τη μελέτη μερικών ακόμα συμπερασμάτων με χρήση της αναλυτικής λύσης καθώς είναι πιο άμεση. Όταν όμως εισαγάγουμε στο πρόβλημά μας τον όρο ξR η αναλυτική λύση δεν θα μας είναι πλέον χρήσιμη. Τότε θα μας βοηθήσει η αριθμητική λύση και δεν έχουμε πλέον κανένα λόγο να μην την εμπιστευτούμε.

4.6 Αριθμητική μελέτη των συμπερασμάτων

Τα αποτελέσματα της ενότητας 4.4 κάνουν εύκολα φανερή μια φυσική περιγραφή. Στο όριο που η μάζα m τείνει στο μηδέν θα έχουμε $\omega_{in} = \sqrt{k^2}$, $\omega_{out} = \sqrt{k^2}$ και $\omega_- = \frac{1}{2}(\omega_{out} - \omega_{in}) = 0$. Τότε το τετράγωνο του μέτρου του συντελεστή Bogolyubov β_k θα είναι

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(0)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} = 0$$

δεν έχουμε δηλαδή παραγωγή σωματιδίων. Αυτό είναι ένα παράδειγμα μιας σύμμορφα τετριμένης κατάστασης, δηλαδή ένα σύμμορφα αναλλοίωτο πεδίο διαδίδεται σε έναν χωρόχρονο ο οποίος είναι σύμμορφος με τον χωρόχρονο Minkowski. Η παραγωγή σωματιδίων συμβαίνει μόνο όταν η σύμμορφη συμμετρία "σπάει" από την παρουσία μάζας. Η διαδικασία παραγωγής μπορεί να θεωρηθεί ότι προκλήθηκε από τη σύζευξη της διαστολής του χωροχρόνου στο κβαντικό πεδίο μέσω της μάζας. Το μεταβαλλόμενο "βαρυτικό πεδίο" τροφοδοτεί ενέργεια στις διαταραγμένες λύσεις του βαθμωτού πεδίου.

Όταν αποδίδουμε τη παραγωγή των κβάντων πεδίου στο μεταβαλλόμενο βαρυτικό πεδίο φαίνεται φυσικό να περιγράψουμε τα ίδια τα σωματίδια σαν να παράγονται κατά τη διάρκεια της περιόδου διαστολής. Σίγουρα δεν παράγονται σωματίδια στις ασυμπτωτικά στατικές περιοχές. Επιπλέον αν η (4.29) αντιπροσωπεύει μια τελική πυκνότητα των σωματιδίων τα οποία δεν ήταν παρόντα στη "μέσα" περιοχή κάποιος θα μπορούσε να περιμένει ότι μια μέτρηση που συμβαίνει σε μια ενδιάμεση χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της επέκτασης, θα αναδείκνυε μια πυκνότητα σωματιδίων με τιμή κάπου μεταξύ του μηδέν και της τιμής που προκύπτει απο την (4.29). Δυστυχώς αυτές οι ιδέες δεν "αντέχουν" σε λεπτομερή έλεγχο. Όπως έχουμε εξηγήσει όταν ο χωρόχρονος είναι καμπύλος δεν είναι διαθέσιμος κανένας φυσικός προσδιορισμός των σωματιδίων. Παρ' όλα αυτά εξ αιτίας της ειδικής συμμετρίας του χωροχρόνου Robertson - Walker μπορεί κάποιος να αναγνωρίσει μια πλεονεκτική κλάση παρατηρητών, τους "συν-κινούμενους" παρατηρητές, που βλέπουν το σύμπαν σαν να διαστέλεται ακριβώς ισοτροπικά. Τότε θα προσπαθήσει να αναγνωρίσει τα σωματίδια στην επεκτεινόμενη περιοχή με την διέγερση "συν-κινούμενων" ανιχνευτών.

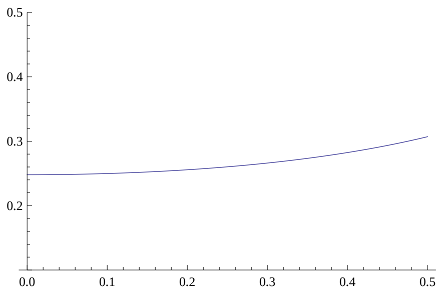
Ακόμα κι αν, για λόγους συμμετρίας, κατορθωθεί ένας συγκεκριμένος καθορισμός των σωματιδίων όπως προτάθηκε παραπάνω ο αριθμός των σωματιδίων δεν θα είναι σταθερός, ένα γεγονός που κάνει τη μέτρηση του εγγενώς αβέβαιη. Αν ο μέσος ρυθμός παραγωγής σωματιδίων σε ένα διάστημα Δt είναι A τότε για να καταφέρουμε μια ακριβή μέτρηση πρέπει να διαλέξουμε ένα Δt τέτοιο ώστε $|A|\Delta t \ll 1$ ($A = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ θέλουμε $\Delta N \ll 1 \;\Rightarrow\; A\Delta t \ll 1$). Επιπλέον υπάρχει η αβεβαιότητα $(m\Delta t)^{-1}$ στον αριθμό σωματιδίων λόγω της αβεβαιότητας ενέργειας - χρόνου του Heisenberg ($(\Delta E)(\Delta t) \simeq \hbar \;\Rightarrow (m\Delta N)(\Delta t) \simeq 1 \;\Rightarrow \Delta N =$

$(m\Delta t)^{-1}$). Έτσι η συνολική αβεβαιότητα του αριθμού σωματιδίων σε ένα χρονικό διάστημα Δt είναι

$$\Delta N \geq (m\Delta t)^{-1} + |A|\Delta t$$

με ελάχιστη τιμή[2] την $2(|A|/m)^{1/2}$. Έτσι λοιπόν όσο το $|A| \neq 0$ και $m \neq \infty$ αυτή η εγγενής αβεβαιότητα στο N δεν εξαφανίζεται. Παρ' όλα αυτά ξέρουμε από την επιτυχία της κβαντικής θεωρίας πεδίου σε χωρόχρονο Minkowski ότι θα πρέπει να υπάρχει κάποιας μορφής προσέγγιση στη θεωρία του καμπύλου χώρου για την οποία ο αριθμός σωματιδίων έχει "σχεδόν" κάποιο νόημα. Άλλωστε κατοικούμε σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Η παραπάνω φυσική υπόθεση προτείνει ότι αν ο ρυθμός παραγωγής σωματιδίων είναι μικρός, ή η μάζα των σωματιδίων μεγάλη, τότε η έννοια ενός καλά ορισμένου αριθμού σωματιδίων γίνεται μια χρήσιμη ιδέα (μικραίνει η αβεβαιότητα του αριθμού σωματιδίων).

Πώς μπορούν αυτές οι ιδέες να γίνουν πιο συγκεκριμένες; Η πυκνότητα και ο ρυθμός παραγωγής σωματιδίων θα εξαρτάται προφανώς από το σθένος της διαστελλόμενης κίνησης. Στο όριο της πολύ ασθενούς επέκτασης θα περιμέναμε ο ρυθμός παραγωγής να πέφτει ομαλά στο μηδέν και ως εκ τούτου να ανακτάται η θεωρία του χωρόχρονου Minkowski. Ένας έλεγχος της (4.29) αναδεικνύει ότι[3] $|\beta_k|^2 \sim B^2 \to 0$ καθώς το συνολικό μέγεθος της επέκτασης τείνει προς το μηδέν - γιατί τότε $A - B \simeq A + B$ ($B \to 0$) φτάνοντας έτσι στο όριο του χωροχρόνου Minkowski. Για να το δούμε αυτό φτιάχνουμε στο mathematica το γράφημα του $|\beta_k|^2/B^2$ συναρτήσει του B και βλέπουμε ότι όταν το $B \to 0$ το αποτέλεσμα είναι ευθεία. Παρ' όλα αυτά η παραγωγή σωματιδίων πέφτει ακόμα πιο από-



Σχήμα 4.16: Η ποσότητα $|\beta_k|^2/B^2$ συναρτήσει του B για μικρά B

τομα στο μηδέν όταν ο ρυθμός επέκτασης πλησιάζει το μηδέν. Ο ρυθμός αυτός

[2]Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(t) = (mt)^{-1} + |A|t$ τότε $g(t)' = -\frac{t^{-2}}{m} + |A|$ και $g(t)'' = \frac{2t^{-3}}{m} \geq 0$. Βρίσκουμε έτσι ότι η συνάρτηση αυτή και συνεπώς η αβεβαιότητα του αριθμού σωματιδίων παρουσιάζει ελάχιστη τιμή όταν $g(t)' = 0 \Rightarrow \frac{-\Delta t^{-2}}{m} + |A| = 0 \Rightarrow \Delta t^{-2} = m|A| \Rightarrow \Delta t = (|A|m)^{-1/2}$. Η ελάχιστη αυτή τιμή είναι $\Delta N = \frac{(|A|m)^{1/2}}{m} + |A|(|A|m)^{-1/2} = 2(|A|/m)^{1/2}$.

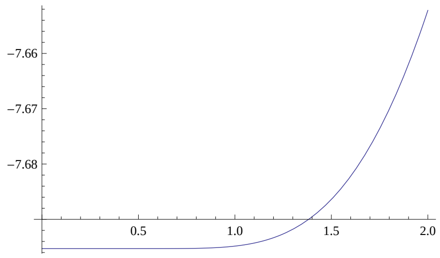
[3]Όταν το B τείνει στο μηδέν (και $k \to 0$)

$$\begin{aligned}\sinh^2(\pi\omega_-/\rho) &= \sinh^2\big(\frac{\pi}{2\rho}([k^2 + m^2(A+B)]^{1/2} - [k^2 + m^2(A-B)]^{1/2})\big) \\ &\simeq \sinh^2\big(\frac{\pi m}{2\rho}((A+B)^{1/2} - (A-B)^{1/2})\big) \simeq \sinh^2\big(\frac{\pi m}{2\rho}\sqrt{A}((1+\frac{B}{2A}) - (1-\frac{B}{2A})\big) \\ &\simeq \sinh^2(\frac{\pi m}{2\rho\sqrt{A}}B) \simeq \frac{\pi^2 m^2}{2\rho A}B^2 \sim B^2\end{aligned}$$

παραμετροποιείται εδώ από το ρ και για $\rho \to 0$ έχουμε μια εκθετική μείωση[4]

$$|\beta_k|^2 \xrightarrow{\rho \to 0} e^{-2\pi\omega_{in}/\rho} \to 0 \tag{4.33}$$

Για να το δούμε αυτό θα λογαριθμίσουμε το $|\beta_k|^2$ και θα το πολλαπλασιάσουμε με ρ. Το γράφημα τότε θα πρέπει να είναι ευθεία καθώς το $\rho \to 0$. Πράγματι



Σχήμα 4.17: Η ποσότητα $\rho \ln(|\beta_k|^2)$ συναρτήσει του ρ για μικρά ρ

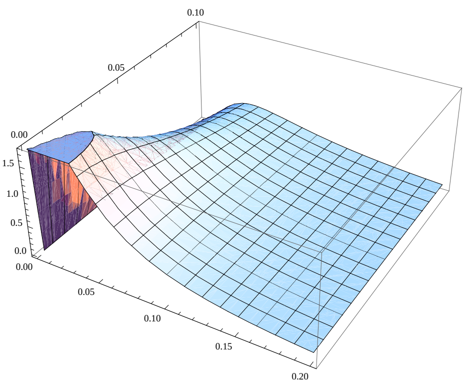
Η σχετιζόμενη παράμετρος "βραδύτητας" είναι το ρ/ω_{in} το οποίο γίνεται μικρό αν $\rho \ll k$ ή $\rho \ll m$. Το φυσικό νόημα της συνθήκης αυτής είναι εύκολα κατανοητό. Αναμένουμε η κίνηση της διαστολής να διεγείρει τις λύσεις του πεδίου για τα οποία $\omega \lesssim$ του ρυθμού διαστολής. Τότε σύμφωνα και με την (4.29) θα έχουμε $\rho/\omega_{in} \uparrow \Rightarrow \omega_{in}/\rho \downarrow \Rightarrow |\beta_k|^2 \uparrow$. Για ω πολύ μεγαλύτερα από τον ρυθμό διαστολής η παραγωγή σωματιδίων μειώνεται εκθετικά $\rho/\omega_{in} \downarrow \Rightarrow \omega_{in}/\rho \uparrow \Rightarrow |\beta_k|^2 \downarrow$. Για το λόγο αυτό οι λύσεις υψηλού k δεν διεγείρονται τόσο αποτελεσματικά. Όμοια η παραγωγή σωματιδίων υψηλής μάζας είναι εκθετικά μικρή εξ αιτίας της μεγάλης ποσότητας ενέργειας που πρέπει να εκλυθεί από το μεταβαλλόμενο βαρυτικό πεδίο για να τροφοδοτήσει τη μάζα ηρεμίας των σωματιδίων. Αν σχεδιάσουμε το $|\beta_k|^2$ συναρτήσει και της ορμής k και της μάζας m θα έχουμε το σχήμα (4.18). Πράγματι λοιπόν παρατηρούμε ότι η παραγωγή σωματιδίων είναι σημαντική μόνο για μικρά k και m, σε συμφωνία με τη θεωρία, ενώ για μεγάλα k και m η παραγωγή είναι μηδαμινή.

4.7 Εισαγωγή της βαθμωτής καμπυλότητας R

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε αριθμητικά τον αριθμό των παραγομένων σωματιδίων συναρτήσει διαφόρων παραμέτρων σε ένα διαστελλόμενο δισδιάστατο σύμπαν Robertson-Walker με "μέσα" και "έξω" περιοχές Minkowski. Σ' αυτό το τελευταίο κομμάτι θα ενσωματώσουμε στη μελέτη μας και τη βαθμωτή καμπυλότητα R την οποία εισαγάγαμε στη Λαγκρανζιανή για ένα βαθμωτό πεδίο σε

[4]Όταν το ρ τείνει στο μηδέν

$$\begin{aligned}
|\beta_k|^2 &= \frac{\sinh^2(\pi\omega_-/\rho)}{\sinh(\pi\omega_{in}/\rho)\sinh(\pi\omega_{out}/\rho)} \quad , \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{e^{\pi\omega_-/\rho} - e^{-\pi\omega_-/\rho}}{2}\right)^2}{\frac{e^{\pi\omega_{in}/\rho} - e^{-\pi\omega_{in}/\rho}}{2}\,\frac{e^{\pi\omega_{out}/\rho} - e^{-\pi\omega_{out}/\rho}}{2}} \quad \xrightarrow{\rho \to 0} \quad \frac{\left(e^{\pi\omega_-/\rho}\right)^2}{e^{\pi\omega_{in}/\rho} e^{\pi\omega_{out}/\rho}} \\
&= \frac{e^{2\pi\frac{1}{2}(\omega_{out}/\rho - \omega_{in}/\rho)}}{e^{\pi\omega_{in}/\rho + \pi\omega_{out}/\rho}} = e^{\pi\omega_{out}/\rho - \pi\omega_{in}/\rho - \pi\omega_{in}/\rho - \pi\omega_{out}/\rho} = e^{-2\pi\omega_{in}/\rho}
\end{aligned}$$



Σχήμα 4.18: Η ποσότητα $|\beta_k|^2$ συναρτήσει των k και m

καμπύλο χωρόχρονο στην αρχή του κεφαλαίου. Στο παράρτημα Β′ υπολογίζουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα R για το δισδιάστατο σύμπαν Robertson-Walker με μετρική

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2)$$

καταλήγοντας στην σχέση (Β′.5)

$$R = C^{-1}(\eta)\Big[-C^{-2}(\eta)\Big(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big)^2 + C^{-1}(\eta)\frac{\partial^2 C(\eta)}{\partial \eta^2}\Big] = C^{-1}(\eta)(\ln C(\eta))'' \quad (4.34)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.34) στην εξίσωση κίνησης (4.21)

$$\Box u_k + m^2 u_k + \xi R u_k = 0$$

$$\Rightarrow C^{-1}(\eta)\big(e^{ikx}\frac{\partial^2 \chi_k(\eta)}{\partial \eta^2} + k^2 e^{ikx}\chi_k(\eta)\big) + m^2 e^{ikx}\chi_k(\eta) + \xi C^{-1}(\eta)(\ln C(\eta))'' e^{ikx}\chi_k(\eta) = 0$$

προκύπτει η διαφορική

$$\frac{\partial^2 \chi_k(\eta)}{\partial \eta^2} + \big(k^2 + m^2 C(\eta) + \xi(\ln C(\eta))''\big)\chi_k(\eta) = 0 \quad (4.35)$$

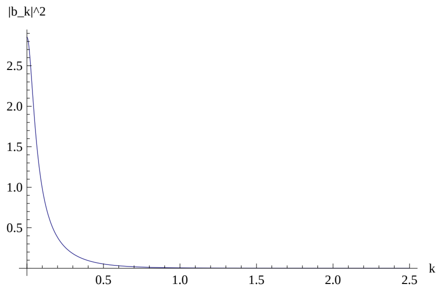
Από το σημείο αυτό και στο εξής όταν αναφερόμαστε στην καμπυλότητα θα εννοούμε τον όρο $R(\eta) = (\ln C(\eta))''$ ο οποίος πιο συγκεκριμένα έχει τη μορφή

$$R(\eta) = \frac{B\rho^2(2A\tanh^3(\rho\eta) - 2A\tanh(\rho\eta) + B\tanh^4(\rho\eta) - B)}{(A + B\tanh(\rho\eta))^2}$$

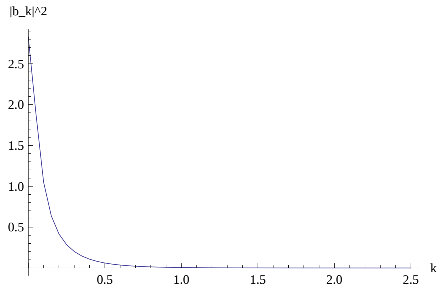
και προφανώς για $\eta = \pm\eta_0$ μηδενίζεται.

Δεν έχουμε στη διάθεσή μας αναλυτικές λύσεις για να συνεχίσουμε, αυτό που έχουμε όμως πλέον είναι η βεβαιότητα ότι η αριθμητική μελέτη θα μας παρέχει τα σωστά αποτελέσματα. Κατασκευάζουμε έτσι έναν κώδικα στο mathematica με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε ον αριθμό σωματιδίων που παράγονται, στο διαστελλόμενο σύμπαν που μελετάμε, συναρτήσει της ορμής - ενέργειας k. Για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού σωματιδίων $|\beta_k|^2$ χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο

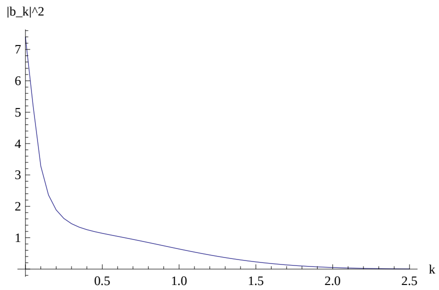
$$\beta_k = \beta_{k,-k} = -(u_k^{in}, u_{-k}^{out*}) \quad (4.36)$$



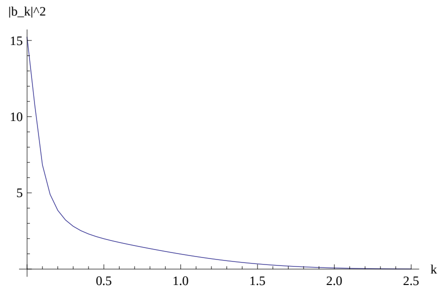
Σχήμα 4.19: Αναλυτική λύση: $|\beta_k|^2$ συναρτήσει του k για $\xi = 0$



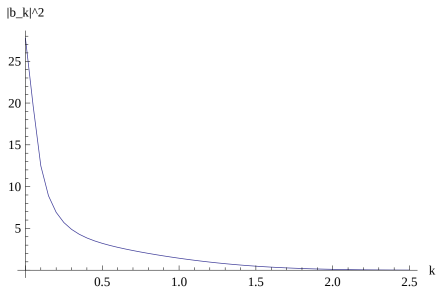
Σχήμα 4.20: Αριθμητική λύση: $|\beta_k|^2$ συναρτήσει του k για $\xi = 0$



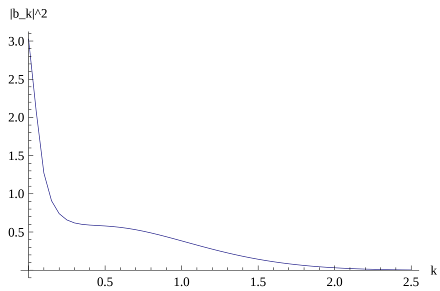
Σχήμα 4.21: $\xi = 0.25$



Σχήμα 4.22: $\xi = 0.3$

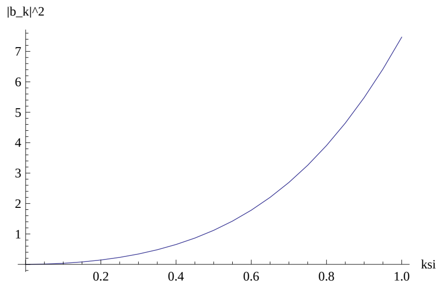


Σχήμα 4.23: $\xi = 0.35$



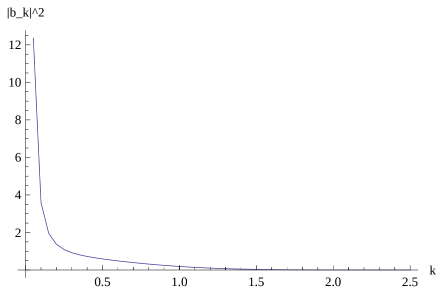
Σχήμα 4.24: $\xi = 0.2$

όπως προκύπτει από τις σχέσεις (4.12) και (4.28). Στο όριο που δεν έχουμε εισαγάγει ακόμα το R (δηλαδη για $\xi = 0$) το αποτέλεσμα θα πρέπει να συμπίπτει με αυτό της αναλυτικής λύσης από τη σχέση (4.29). Στα σχήματα (4.19) και (4.20) βλέπουμε ότι κάτι τέτοιο πράγματι ισχύει. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα ίδια διαγράμματα, την τιμή του $|\beta_k|^2$ συναρτήσει του k, για τιμές του ξ διάφορες του μηδενός, έχουμε συμπεριλάβει δηλαδή και την καμπυλότητα $R(\eta)$ στους υπολογισμούς μας. Η συμπεριφορά των γραφημάτων φαίνεται να είναι η ίδια με πριν. Μια επιπλέον παρατήρηση είναι η αύξηση του αριθμού σωματιδίων για τα ίδια k με την αύξηση του ξ. Αν διαλέξουμε ένα τυχαίο k έστω $k = 1.5$ και σχεδιάσουμε των αριθμό σωματιδίων συναρτήσει του ξ παρατηρούμε την αύξησή του με την αύξηση του ξ.



Σχήμα 4.25: Η ποσότητα $|\beta_k|^2$ συναρτήσει του ξ για $k = 1.5$

Αξίζει τέλος να δούμε τι συμβαίνει για την περίπτωση που η μάζα είναι μηδενική αλλά υπάρχει η καμπυλότητα R στο πρόβλημά μας, δηλαδή το $\xi \neq 0$.



Σχήμα 4.26: Η ποσότητα $|\beta_k|^2$ συναρτήσει του k για $m = 0, \xi = 0.16$

Γενικά παρατηρούμε ότι η εισαγωγή της καμπυλότητας R δεν επηρεάζει τη μορφή των αποτελεσμάτων, ο αριθμός των σωματιδίων συνεχίζει να μειώνεται με την αύξηση του k. Άλλωστε η ίδια η καμπυλότητα R εμπεριέχει τον παράγοντα της διαστολής $C(\eta)$, λόγω της διαστολής έκανε την εμφάνισή της.

Ολοκληρώνοντας έχουμε καταλήξει στα εξής συμπεράσματα όσον αφορά την παραγωγή σωματιδίων στη μελέτη μας: Δεν έχουμε παραγωγή σωματιδίων όταν η μάζα είναι μηδενική. Όταν το συνολικό μέγεθος της επέκτασης τείνει προς το μηδέν ο αριθμός των σωματιδίων που παράγονται είναι ανάλογος του B^2 και τείνει στο μηδέν. Η παραγωγή σωματιδίων μειώνεται εκθετικά όταν ο ρυθμός επέκτασης ρ τείνει στο μηδέν. Για ω μεγαλύτερα από τον ρυθμό διαστολής, δηλαδή για μεγάλα m ή/και k έχουμε μείωση της παραγωγής σωματιδίων. Με την εισαγωγή της βαθμωτής καμπυλότητας R παρατηρούμε ποιοτικά την ίδια εξάρτηση των παραγόμενων σωματιδίων από το k, αυξάνοντας όμως τον παράγοντα ξ έχουμε αύξηση της τάξης μεγέθους των παραγόμενων σωματιδίων. Για σταθερή τιμή της ορμής k ο αριθμός των σωματιδίων που παράγονται αυξάνεται με την αύξηση του ξ. Τέλος, μηδενισμός της μάζας με $\xi \neq 0$ εμφανίζει ανάλογα αποτελέσματα με τον μηδενισμό του ξ με $m \neq 0$.

Παράρτημα Α΄

Χώροι Hilbert και σημειογραφία Dirac

Οι κβαντικοί τελεστές όπως οι $q(t), p(t)$ μπορούν να αναπαρασταθούν από γραμμικούς μετασχηματισμούς σε κατάλληλους απειροδιάστατους χώρους Hilbert. Σε αυτό το παράρτημα συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες των χώρων Hilbert και εισαγάγουμε την σημειογραφία Dirac. Θα θεωρούμε πάντα μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους.

Α΄.1 Απειροδιάστατοι διανυσματικοί χώροι

Ένα διάνυσμα σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης μπορεί να επεικονιστεί σαν μια συλλογή συνιστωσών, π.χ $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, a_3, a_4)$, όπου κάθε a_k είναι ένας (μιγαδικός) αριθμός. Για να περιγράψουμε διανύσματα σε απειροδιάστατους χώρους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε απείρως πολλές συνιστώσες. Ένα σημαντικό παράδειγμα ενός απειροδιάστατου μιγαδικού διανυσματικού χώρου είναι ο χώρος L^2 των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλαδή το σύνολο όλων των συναρτήσεων μιγαδικών τιμών $\psi(q)$ τέτοιων ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(q)|^2 \, dq$$

να συγκλίνει. Ένας γραμμικός συνδυασμός δύο τέτοιων συναρτήσεων $\lambda_1\psi_1(q) + \lambda_2\psi_2(q)$ με σταθερούς συντελεστές $\lambda_{1,2}$ είναι και πάλι ένα στοιχείο του ίδιου διανυσματικού χώρου. Μια συνάρτηση $\psi \in L^2$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο απείρως πολλών συνιστωσών $\psi_q = \psi(q)$ με έναν συνεχή "δείκτη" q. Αποδεικνύεται ότι ο χώρος των κβαντικών καταστάσεων μιας σημειακής μάζας στην κβαντική μηχανική είναι ακριβώς ο χώρος των L^2 τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\psi(q)$ όπου το q είναι η χωρική συνιστώσα του σωματιδίου. Σε αυτή τη περίπτωση η συνάρτηση $\psi(q)$ ονομάζεται κυματοσυνάρτηση. Οι κβαντικές καταστάσεις ενός συστήματος δύο σωματιδίων ανήκουν στο χώρο των συναρτήσεων $\psi(q_1, q_2)$ όπου $q_{1,2}$ είναι οι συντεταγμένες κάθε σωματιδίου. Στην κβαντική θεωρία πεδίου οι "συντεταγμένες" είναι διαμορφώσεις $\hat{\phi}(x)$ του πεδίου και η κυματοσυνάρτηση είναι ένα συναρτησιακό $\Psi[\hat{\phi}(x)]$.

Α′.2 Σημειογραφία Dirac

Η γραμμική άλγεβρα χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς της φυσικής και η σημειογραφία Dirac είναι ένα βολικό εργαλείο για υπολογισμούς με διανύσματα και γραμμικούς τελεστές. Η σημειογραφία αυτή χρησιμοποιείται και για πεπερασμένους και για απειροδιάστατους διανυσματικούς χώρους.

Για να δηλώσει ένα διάνυσμα ο Dirac πρότεινε να γράφουμε ένα σύμβολο όπως τα $|a\rangle, |x\rangle, |\lambda\rangle$, δηλαδή ένα γράμμα μέσα στις ειδικές αγκύλες (ket) $|\rangle$. Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων γράφονται σαν $2|v\rangle - 3i|\omega\rangle$.

Ένας γραμμικός τελεστής $\hat{A} : V \to V$ που δρα στον χώρο V μετασχηματίζει ένα διάνυσμα $|v\rangle$ στο διάνυσμα $\hat{A}|v\rangle$. Ένας τελεστής $\hat{A}$ είναι γραμμικός αν

$$\hat{A}(|v\rangle + \lambda|\omega\rangle) = \hat{A}|v\rangle + \lambda\hat{A}|\omega\rangle$$

για κάθε $|v\rangle, |\omega\rangle \in V$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Γραμμικές μορφές που δρούν πάνω σε διανύσματα , $f : V \to \mathbb{C}$ είναι covectors (διανύσματα από τον δυϊκό χώρο) και δηλώνονται με $\langle f|$ (η αγκύλη $\langle|$ ονομάζεται bra). Μια γραμμική μορφή $\langle f|$ δρα πάνω στο διάνυσμα $|v\rangle$ και δίνει ως αποτέλεσμα τον αριθμό $\langle f|v\rangle$.

Συνήθως ορίζουμε ένα βαθμωτό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο V. Το βαθμωτό γινόμενο των διανυσμάτων $|v\rangle$ και $|\omega\rangle$ μπορεί να γραφτεί ως $(|v\rangle, |\omega\rangle)$ και είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Το βαθμωτό γινόμενο καθιερώνει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα διανύσματα και τα covectors. Κάθε διάνυσμα $|v\rangle$ ορίζει ένα covector $\langle v|$ το οποίο είναι η γραμμική απεικόνιση $|\omega\rangle \to (|v\rangle, |\omega\rangle)$. Έτσι η σημειογραφία Dirac μας επιτρέπει να γράψουμε το εσωτερικό γινόμενο πιο συνοπτικά ως $(|v\rangle, |\omega\rangle) = \langle v|\omega\rangle$.

Αν $\hat{A}$ είναι ένας γραμμικός τελεστής ο συμβολισμός $\langle v|\hat{A}|\omega\rangle$ δηλώνει το βαθμωτό γινόμενο των διανυσμάτων $|v\rangle$ και $\hat{A}|\omega\rangle$. Η ποσότητα $\langle v|\hat{A}|\omega\rangle$ καλείται επίσης στοιχείο πίνακα του τελεστή $\hat{A}$ ως προς τις καταστάσεις $|v\rangle$ και $|\omega\rangle$.

Αν $|v\rangle$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα ενός τελεστή $\hat{A}$ με ιδιοτιμή v τότε γράφουμε

$$\hat{A}|v\rangle = v|v\rangle$$

Δεν θα πρέπει να υπάρχει σύγχυση ανάμεσα στην ιδιοτιμή v (η οποία είναι αριθμός) και του διανύσματος $|v\rangle$.

Α′.3 Ερμιτιανότητα

Το βαθμωτό γινόμενο σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο είναι ερμιτιανό αν $(\langle v|\omega\rangle)^* = \langle\omega|v\rangle$ για όλα τα διανύσματα $|v\rangle$ και $|\omega\rangle$ (ο αστερίσκος $*$ δηλώνει μιγαδική συζυγία). Σε αυτή τη περίπτωση η νόρμα $\langle v|v\rangle$ ενός διανύσματος $|v\rangle$ είναι πραγματικός αριθμός.

Ένα ερμιτινό βαθμωτό γινόμενο μας επιτρέπει να ορίσουμε έναν ερμιτιανό συζυγή $\hat{A}^\dagger$ του τελεστή $\hat{A}$ μέσω της σχέσης

$$\langle v|\hat{A}^\dagger|\omega\rangle = (\langle\omega|\hat{A}|v\rangle)^*$$

η οποία θα πρέπει να ισχύει για κάθε $|v\rangle$ και $|\omega\rangle$. Σημειώνουμε ότι ένας τελεστής $\hat{A}^\dagger$ προσδιορίζεται μοναδικά αν είναι γνωστά τα στοιχεία πίνακα $\langle v|\hat{A}^\dagger|\omega\rangle$ ως προς όλα τα $|v\rangle$ και $|\omega\rangle$.

Η διαδικασία της ερμιτανής συζυγίας έχει τις ιδιότητες

$$(\hat{A}+\hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger \qquad (\lambda\hat{A})^\dagger = \lambda^*\hat{A}^\dagger \qquad (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$$

Ένας τελεστής $\hat{A}$ ονομάζεται ερμιτιανός αν $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, αντιερμιτιανός αν $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$ και μοναδιακός αν $\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^\dagger = 1$.

Σύμφωνα με ένα αξίωμα της κβαντικής μηχανικής το αποτέλεσμα της μέτρησης κάποιας ποσότητας είναι πάντα μια ιδιοτιμή του τελεστη $\hat{A}$ που αντιστοιχεί σε αυτή την ποσότητα. Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού τελεστή είναι πάντα πραγματικές. Αυτό παρακινεί μια σημαντική υπόθεση που διατυπώνεται στην κβαντική μηχανική: *Οι τελεστές που αντιστοιχούν σε όλες τις παρατηρήσιμες ποσότητες είναι ερμιτιανοί.*

Τα ιδιοδιανύσματα ενός ερμιτιανού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντα ορθογώνια. Αυτό είναι εύκολο να αποδειχθεί: Αν $|\upsilon_1\rangle$ και $|\upsilon_2\rangle$ είναι ιδιοδιανύσματα ενός ερμιτιανού τελεστή $\hat{A}$ με ιδιοτιμές υ_1 και υ_2 τότε τα $\upsilon_{1,2}$ είναι πραγματικά. Έτσι $\langle\upsilon_1|\hat{A} = \upsilon_1\langle\upsilon_1|$, $\hat{A}|\upsilon_2\rangle = \upsilon_2|\upsilon_2\rangle \rightarrow \langle\upsilon_1|\hat{A}\upsilon_2\rangle = \upsilon_1\langle\upsilon_1|\upsilon_2\rangle = \upsilon_2\langle\upsilon_1|\upsilon_2\rangle$ πράγμα που σημαίνει ότι $\langle\upsilon_1|\upsilon_2\rangle = 0$ για $\upsilon_1 \neq \upsilon_2$.

Α′.4 Χώροι Hilbert

Σε ένα N-διάστατο διανυσματικό χώρο μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο από διανύσματα βάσης $|e_1\rangle, ..., |e_N\rangle$ τέτοια ώστε οποιοδήποτε διάνυσμα $|\upsilon\rangle$ να εκφράζεται μοναδικά σαν ένας γραμμικός συνδυασμός

$$|\upsilon\rangle = \sum_{n=1}^{N} \upsilon_n |e_n\rangle$$

Οι συντελεστές υ_n ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος $|\upsilon\rangle$ στη βάση $|e_n\rangle$. Σε μια ορθοκανονική βάση που ικανοποιεί την σχέση $\langle e_m|e_n\rangle = \delta_{mn}$ το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων $|\upsilon\rangle$, $|\omega\rangle$ εκφράζεται μέσω των συνιστωσών τους υ_n , ω_n ως

$$\langle\upsilon|\omega\rangle = \sum_{n=1}^{N} \upsilon_n^* \omega_n$$

Εξ ορισμού ένας διανυσματικός χώρος είναι άπειρης διάστασης αν κανένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση. Σε αυτή τη περίπτωση κάποιος θα περίμενε να έχουμε μια άπειρη βάση $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$, ... , τέτοια ώστε οποιοδήποτε διάνυσμα $|\upsilon\rangle$ εκφράζεται μοναδικά από τον άπειρο γραμμικό συνδυασμό

$$|\upsilon\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n |e_n\rangle \tag{Α′.1}$$

Παρ' όλα αυτά η σύγκλιση αυτής της άπειρης σειράς δεν είναι τετριμένο θέμα. Για παράδειγμα αν τα διανύσματα βάσης $|e_n\rangle$ είναι ορθοκανονικά τότε η νόρμα του διανύσματος $|\upsilon\rangle$ είναι

$$\langle\upsilon|\upsilon\rangle = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \upsilon_m^* \langle e_m|\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n |e_n\rangle\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} |\upsilon_n|^2 \tag{Α′.2}$$

Αυτή η σειρά πρέπει να συγκλίνει αν το διάνυσμα $|\upsilon\rangle$ έχει πεπερασμένη νόρμα, συνεπώς οι αριθμοί υ_n δεν μπορεί να είναι τυχαίοι. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να περιμένουμε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|e_n\rangle$ αναπαριστά ένα καλά ορισμένο διάνυσμα. Τώρα, αν οι συντελεστές υ_n πράγματι ελαττώνονται αρκετά γρήγορα έτσι ώστε η σειρά (Α'.2) να συγκλίνει φαινεταί πιθανό ο άπειρος γραμμικός συνδυασμός (Α'.1) να συγκλίνει και να καθορίζει μοναδικά το διάνυσμα $|\upsilon\rangle$. Παρ' όλα αυτά κάτι τέτοιο δεν ισχύει για όλους τους απειροδιάστατους χώρους. Οι απαιτούμενες ιδιότητες από τον διανυσματικό χώρο είναι γνωστές στην συναρτησιακή ανάλυση ως πληρότητα και διαχωρισιμότητα.

Ένας χώρος Hilbert είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος με ερμιτιανό βαθμωτό γινόμενο. Όταν ορίζουμε μια κβαντική θεωρία διαλέγουμε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert ως το χώρο των κβαντικών καταστάσεων. Σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει μια αριθμήσιμη βάση $|e_n\rangle$ και όλα τα διανύσματα μπορούν να αναπτυχθούν όπως στην (Α'.1). Από τη στιγμή που μια ορθοκανονική βάση επιλέγεται όλα τα διανύσματα $|\upsilon\rangle$ αναπαριστώνται από συλλογές $(\upsilon_1, \upsilon_2, ...)$ των συνιστωσών τους. Για το λόγο αυτό ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert μπορεί να ειδωθεί ως ο χώρος των άπειρων μιγαδικών αριθμών $|\upsilon\rangle \equiv (\upsilon_1, \upsilon_2, ...)$ τέτοιων ώστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} |\upsilon_n|^2$ να συγκλίνει. Η απαίτηση της σύγκλισης εγγυάται ότι κάθε βαθμωτό γινόμενο $\langle\upsilon|\omega\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n^* \omega_n$ είναι πεπερασμένο.

Α'.5 Εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος

Η εξέλιξη ενός συστήματος μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν από τους δύο παρακάτω τρόπους. Ως μια χρονοεξαρτώμενη εξέλιξη της κατάστασης στον χώρο Hilbert (εικόνα Schrödinger) ή κρατώντας την κατάσταση "φιξαρισμένη" και επιτρέποντας στις παρατηρήσιμες ποσότητες να εξελιχθούν σύμφωνα με τις εξισώσεις κίνησης (εικόνα Heisenberg). Στην εικόνα του Heisenberg οποιαδήποτε κατάσταση μπορεί να γραφτεί ως μια "φιξαρισμένη" κατάσταση στην οποία δρα ένας μοναδιακός χρονικά εξελισόμενος τελεστής. (με τον όρο μοναδιακός εννοούμε ότι ισχύει $U^\dagger U = U^{-1}U = 1$)

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle$$

όπου

$$U(t) = e^{i\int H dt}$$

Αν η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου έχουμε απλά $U(t) = e^{-iHt}$. Η έκφραση που προκύπτει από την εικόνα του Schrödinger για έναν χρονοανεξάρτο τελεστή A ανάμεσα σε χρονοεξαρτώμενες καταστάσεις $\Psi_1(t)\rangle$ και $|\Psi_2(t)\rangle$ μπορεί να γραφτεί στην εικόνα του Heisenberg με χρονοεξαρτώμενο τελεστή $A(t)$ και χρονοανεξάρτητες καταστάσεις ως

$$\begin{aligned}\langle\Psi_2(t)|A|\Psi_1(t)\rangle &= \langle\Psi_2(0)|U^\dagger(t)AU(t)|\Psi_1(0)\rangle \\ &= \langle\Psi_2(0)|A(t)|\Psi_1(0)\rangle\end{aligned}$$

όπου προφανώς ο τελεστής της εικόνας Heisenberg δίνεται από τη σχέση

$$A(t) = U^\dagger(t)AU(t) = e^{iHt}Ae^{-iHt} \tag{Α'.3}$$

Εφόσον ο $A(t)$ είναι χρονοεξαρτώμενος αναρωτιόμαστε ποιά θα είναι η εξίσωση κίνησής του. Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{dA(t)}{dt} &= iHe^{iHt}Ae^{-iHt} + e^{iHt}A(-iH)e^{-iHt} = iHA(t) - iA(t)H \\ &= -i[A(t)H - HA(t)] = -i[A(t), H]\end{aligned}$$

Η σχέση

$$\frac{dA(t)}{dt} = -i[A(t), H] \tag{Α'.4}$$

ονομάζεται εξίσωση κίνησης του Heisenberg για τον $A(t)$. Στο δεξί μέλος το H είναι ο τελεστής του Schrödinger. Παρ' όλα αυτά αν αντικαταστήσουμε τον H στη θέση του $A(t)$ στη σχέση (Α'.3) βρίσκουμε

$$H(t) = e^{iHt}He^{-iHt} = H^*e^{iHt}e^{-iHt} = He^{iHt}e^{-iHt} = H$$

έτσι ο H μπορεί ισοδύναμα να ερμηνευτεί ως τελεστής του Heisenberg.

Παράρτημα Β′

Τανυστής καμπυλότητας Riemann

Β′.1 Κατασκευή του τανυστή Riemann

Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν τανυστή από τον μετρικό τανυστή, τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους του. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε τον μετασχηματισμό της αφινικής σύνδεσης. Θυμίζουμε τον ορισμό της

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial^2 \xi^{a}}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}}$$

όπου ξ^a είναι το τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Περνώντας από το χ^μ σε ένα διαφορετικό σύστημα χ'^{μ} βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}{}' &= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \xi^{k}} \frac{\partial^2 \xi^{a}}{\partial \chi'^{\mu} \partial \chi'^{\nu}} = \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\rho}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial}{\partial \chi'^{\mu}} \Big(\frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\sigma}} \Big) \\
&= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\rho}}{\partial \xi^{a}} \Big[\frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial \chi'^{\mu}} \Big(\frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\sigma}} \Big) + \frac{\partial^2 \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\mu} \partial \chi'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\sigma}} \Big] \\
&= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\rho}}{\partial \xi^{a}} \Big[\frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\nu}} \frac{\partial \chi^{\tau}}{\partial \chi'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{a}}{\partial \chi^{\tau} \partial \chi^{\sigma}} + \frac{\partial^2 \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\mu} \partial \chi'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\sigma}} \Big]
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αφινικής σύνδεσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}{}' &= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\tau}}{\partial \chi'^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\rho}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial \xi^{a}}{\partial \chi^{\sigma}} \frac{\partial^2 \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\mu} \partial \chi'^{\nu}} \\
&= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\tau}}{\partial \chi'^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \delta^{\rho}_{\sigma} \frac{\partial^2 \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\mu} \partial \chi'^{\nu}} \\
&= \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial \chi^{\tau}}{\partial \chi'^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma}}{\partial \chi'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial \chi'^{\lambda}}{\partial \chi^{\rho}} \frac{\partial^2 \chi^{\rho}}{\partial \chi'^{\mu} \partial \chi'^{\nu}} \qquad (\text{Β}'.1)
\end{aligned}$$

Εναλλάσσοντας τις πρωτεύουσες με τις δευτερεύουσες συντεταγμένες η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\tau\prime}} \frac{\partial \chi^{\rho\prime}}{\partial \chi^{\mu}} \frac{\partial \chi^{\sigma\prime}}{\partial \chi^{\nu}} \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}{}' + \frac{\partial \chi^{\lambda}}{\partial \chi^{\tau\prime}} \frac{\partial^2 \chi^{\tau\prime}}{\partial \chi^{\mu} \partial \chi^{\nu}}$$

Ο όρος στα δεξιά είναι αυτός που κάνει το $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ να μην είναι τανυστής οπότε ας τον απομονώσουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\chi^{\tau\prime}}\frac{\partial\chi^{\rho\prime}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi^{\sigma\prime}}{\partial\chi^{\nu}}{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}' + \frac{\partial\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\chi^{\tau\prime}}\frac{\partial^2\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\nu}} \\
\Rightarrow \quad &\frac{\partial^2\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\nu}} = \frac{\partial\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial\chi^{\rho\prime}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi^{\sigma\prime}}{\partial\chi^{\nu}}{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'
\end{aligned}$$

Για να διώξουμε το αριστερό μέλος θα χρησιμοποιήσουμε την μεταθετικότητα της μερικής παραγώγισης καθώς

$$\frac{\partial^3\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\kappa}\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\nu}} = \frac{\partial^3\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\nu}\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\kappa}}$$

Έτσι λοιπόν παραγώγιση ως προς το χ^{κ} θα δώσει

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\kappa}\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\nu}} = \\
&= \frac{\partial}{\partial\chi^{\kappa}}\Big(\frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial\chi^{\rho\prime}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi^{\sigma\prime}}{\partial\chi^{\nu}}{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\Big) \\
&= \frac{\partial^2\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\kappa}\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial^2\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\kappa}\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}' - \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial^2\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\kappa}\partial\chi^{\nu}}{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}' + \frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\kappa}} - \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'}{\partial\chi^{\kappa}} \\
&= \Big(\frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\eta}}\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} - \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\kappa}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\Big)\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - {\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\Big(\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\eta}}\Gamma^{\eta}_{\kappa\mu} - \frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\kappa}}\frac{\partial\chi^{\xi\prime}}{\partial\chi^{\mu}}{\Gamma^{\rho}_{\nu\xi}}'\Big) \\
&= \frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\eta}}\frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\chi^{\eta}}\frac{\partial\chi^{\eta}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\chi^{\eta}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - {\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\kappa}} - {\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\eta}}\frac{\partial\chi^{\eta}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} \\
&+ \frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\kappa}}\frac{\partial\chi^{\xi\prime}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi'^{\lambda}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi'^{\xi}}{\Gamma^{\lambda}_{\eta\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi'^{\sigma}}{\Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}}' - {\Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\chi^{\lambda}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\eta}}\frac{\partial\chi^{\eta}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu} \\
&+ \frac{\partial\chi'^{\lambda}}{\partial\chi'^{\rho}}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi'^{\lambda}}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi'^{\xi}}\frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\kappa}}\frac{\partial\chi'^{\xi}}{\partial\chi^{\nu}}{\Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}}'{\Gamma^{\lambda}_{\eta\rho}}' + \frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\kappa}} - \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\kappa}}\frac{\partial{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'}{\partial\chi^{\eta}} \\
&= \frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - {\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\kappa}} - \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\nu}} + \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\kappa}}{\Gamma^{\lambda}_{\eta\sigma}}'{\Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}}' \\
&- {\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}} + \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\kappa}}{\Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}}'{\Gamma^{\lambda}_{\eta\rho}}' + \frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\lambda}}\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\kappa}} - \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'}{\partial\chi^{\kappa}} \\
&= \frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big(\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\kappa}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta}\Big) - \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\nu}}\frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\kappa}}\Big(\frac{\partial{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'}{\partial\chi'^{\eta}} - {\Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}}'{\Gamma^{\lambda}_{\eta\sigma}}' - {\Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}}'{\Gamma^{\lambda}_{\eta\rho}}'\Big) \\
&- {\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\kappa}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\nu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\nu}}\Big)
\end{aligned}$$

Η ίδια σχέση με αλλαγμένα τα ν και κ θα δώσει

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\chi^{\tau\prime}}{\partial\chi^{\nu}\partial\chi^{\mu}\partial\chi^{\kappa}} = \\
&= \frac{\partial\chi'^{\tau}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big(\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\chi^{\kappa}}}{\partial\chi^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Big) - \frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}}\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\kappa}}\frac{\partial\chi'^{\eta}}{\partial\chi^{\nu}}\Big(\frac{\partial{\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'}{\partial\chi'^{\eta}} - {\Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}}'{\Gamma^{\lambda}_{\eta\sigma}}' - {\Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}}'{\Gamma^{\lambda}_{\eta\rho}}'\Big) \\
&- {\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}}'\frac{\partial\chi'^{\sigma}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big(\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\frac{\partial\chi'^{\rho}}{\partial\chi^{\kappa}}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \chi'^{\tau}}{\partial \chi^{\lambda}}\Big(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\chi^{\kappa}}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Big) - \frac{\partial \chi'^{\rho}}{\partial \chi^{\mu}}\frac{\partial \chi'^{\sigma}}{\partial \chi^{\nu}}\frac{\partial \chi'^{\eta}}{\partial \chi^{\kappa}}\Big(\frac{\partial \Gamma^{\tau}_{\rho\eta}{}'}{\partial \chi'^{\sigma}} - \Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}{}'\Gamma^{\lambda}_{\eta\sigma}{}' - \Gamma^{\tau}_{\lambda\eta}{}'\Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}{}'\Big)$$
$$- \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}{}'\frac{\partial \chi'^{\sigma}}{\partial \chi^{\lambda}}\Big(\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}\frac{\partial \chi'^{\rho}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\frac{\partial \chi'^{\rho}}{\partial \chi^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\frac{\partial \chi'^{\rho}}{\partial \chi^{\kappa}}\Big)$$

Παρατηρούμε ότι αν αφαιρέσουμε τις δύο αυτές σχέσεις οι όροι που περιλαμβάνουν γινόμενα των Γ με τα Γ' απαλείφονται δίνοντας

$$0 = \frac{\partial \chi'^{\tau}}{\partial \chi^{\lambda}}\Big(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Big)$$
$$- \frac{\partial \chi'^{\rho}}{\partial \chi^{\mu}}\frac{\partial \chi'^{\sigma}}{\partial \chi^{\nu}}\frac{\partial \chi'^{\eta}}{\partial \chi^{\kappa}}\Big(\frac{\partial \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}{}'}{\partial \chi'^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\tau}_{\rho\eta}{}'}{\partial \chi'^{\sigma}} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\sigma}{}'\Gamma^{\lambda}_{\eta\rho}{}' + \Gamma^{\tau}_{\lambda\eta}{}'\Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}{}'\Big)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί σαν ένας κανόνας μετασχηματισμού

$$R^{\tau}_{\rho\sigma\eta}{}' = \frac{\partial \chi'^{\tau}}{\partial \chi^{\lambda}}\frac{\partial \chi^{\mu}}{\partial \chi'^{\rho}}\frac{\partial \chi^{\nu}}{\partial \chi'^{\sigma}}\frac{\partial \chi^{\kappa}}{\partial \chi'^{\eta}}R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \tag{B'.2}$$

όπου έχουμε ορίσει

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \tag{B'.3}$$

Η εξίσωση (Β'.2) υποδηλώνει ότι ο $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$ είναι ένας τανυστής. Ο τανυστής αυτός ονομάζεται τανυστής καμπυλότητας Riemann - Christoffel και εκφράζει την καμπυλότητα του χώρου.

Β'.2 Υπολογισμός της βαθμωτής καμπυλότητας R για το δισδιάστατο σύμπαν Robertson-Walker

Θυμίζουμε κάποιες βασικές σχέσεις όπως ο τανυστής Riemann

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial \chi^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}$$

ο τανυστής Ricci

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu}\kappa}{\partial \chi^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}$$

η αφινική σύνδεση

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\Big(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial \chi^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^{\lambda}}\Big)$$

και η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$$R \equiv g^{\mu\kappa}R_{\mu\kappa} \tag{B'.4}$$

Για το δισδιάστατο σύμπαν Robertson - Walker με μετρική $ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2)$ ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής έχει τη μορφή $g^{\mu\kappa} = \begin{pmatrix} C^{-1}(\eta) & 0 \\ 0 & -C^{-1}(\eta) \end{pmatrix}$ από τον οποίο υπολογίζουμε

$$g^{00} = C^{-1}(\eta) \quad , \quad g^{01} = 0 \quad , \quad g^{10} = 0 \quad , \quad g^{11} = -C^{-1}(\eta)$$

Επιπλέον υπολογίζουμε

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{\lambda 0}\Big(\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial \chi^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial \chi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \chi^\lambda}\Big) = \frac{1}{2}g^{00}\Big(\frac{\partial g_{00}}{\partial \chi^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial \chi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \chi^0}\Big) + \frac{1}{2}g^{10}\Big(\frac{\partial g_{01}}{\partial \chi^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial \chi^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \chi^1}\Big)$$
$$= \frac{1}{2}C^{-1}\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}$$

Όμοια

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{01} = \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}C^{-1}\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}$$

και

$$\Gamma^1_{00} = \Gamma^1_{11} = \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = 0$$

Έτσι υπολογίζουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$$\begin{aligned}
R &= g^{00}\Big(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{0\lambda}}{\partial \chi^0} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial \chi^\lambda} + \Gamma^\eta_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{0\eta} - \Gamma^\eta_{00}\Gamma^\lambda_{\lambda\eta}\Big) + g^{11}\Big(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{1\lambda}}{\partial \chi^1} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{11}}{\partial \chi^\lambda} + \Gamma^\eta_{1\lambda}\Gamma^\lambda_{1\eta} - \Gamma^\eta_{11}\Gamma^\lambda_{\lambda\eta}\Big)\\
&= g^{00}\Big(\frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial \chi^0} - \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial \chi^0} + \Gamma^\eta_{00}\Gamma^0_{0\eta} - \Gamma^\eta_{00}\Gamma^0_{0\eta}\Big) + g^{00}\Big(\frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial \chi^0} - \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial \chi^1} + \Gamma^\eta_{01}\Gamma^1_{0\eta} - \Gamma^\eta_{00}\Gamma^1_{1\eta}\Big)\\
&+ g^{11}\Big(\frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial \chi^1} - \frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial \chi^0} + \Gamma^\eta_{10}\Gamma^0_{1\eta} - \Gamma^\eta_{11}\Gamma^0_{0\eta}\Big) + g^{11}\Big(\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial \chi^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial \chi^1} + \Gamma^\eta_{11}\Gamma^1_{1\eta} - \Gamma^\eta_{11}\Gamma^1_{1\eta}\Big)\\
&= g^{00}\Big(\frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial \chi^0} - \Gamma^0_{00}\Gamma^1_{10}\Big) + g^{00}\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{01} + g^{11}\Big(-\frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial \chi^0} - \Gamma^0_{11}\Gamma^0_{00}\Big) + g^{11}\Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11}\\
&= C^{-1}(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{1}{2}C^{-1}(\eta)\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big) - \frac{1}{4}C^{-2}(\eta)\Big(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big)^2\Big] + \frac{1}{4}C^{-3}(\eta)\Big(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big)^2\\
&- C^{-1}(\eta)\Big[\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(-\frac{1}{2}C^{-1}(\eta)\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big) - \frac{1}{4}C^{-2}(\eta)\Big(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big)^2\Big] - \frac{1}{4}C^{-3}(\eta)\Big(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big)^2\\
&= 2C^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{1}{2}C^{-1}(\eta)\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big)\Big]\\
&= 2C^{-1}(\eta)\Big[-\frac{1}{2}C^{-2}(\eta)\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta} + \frac{1}{2}C^{-1}(\eta)\frac{\partial^2 C(\eta)}{\partial \eta^2}\Big]\\
&= C^{-1}(\eta)\underbrace{\Big[-C^{-2}(\eta)\Big(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}\Big)^2 + C^{-1}(\eta)\frac{\partial^2 C(\eta)}{\partial \eta^2}\Big]}_{(\ln C(\eta))''}
\end{aligned}$$

Βρίσκουμε τελικά

$$R = C^{-1}(\eta)(\ln C(\eta))'' \qquad \text{(B΄.5)}$$

Παράρτημα Γ΄

Σύμμορφοι μετασχηματισμοί

Συχνά χρησιμοποιούμε τα σύμμορφα διαγράμματα Penrose για να απεικονίσουμε την αιτιακή[1] κατασκευή του χωροχρόνου. Αυτή είναι μια μέθοδος που μας επιτρέπει να αναπαραστήσουμε τον άπειρο χωρόχρονο με ένα πεπερασμένο διάγραμμα (συμπαγής πολλαπλότητα) εφαρμόζοντας ένα σύμμορφο μετασχηματισμό στη δομή της μετρικής. Ένας σύμμορφος μετασχηματισμός της μετρικής περιγράφεται από τη σχέση

$$g_{\mu\nu}(x) \to \widetilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2 g_{\mu\nu}(x) \tag{Γ΄.1}$$

για κάποια συνεχής, μη μηδενική, πεπερασμένη, πραγματική συνάρτηση $\Omega(x)$.Όμοια για τον αντίστροφο τανυστή θα ισχύει

$$\widetilde{g}^{\mu\nu}(x) = \Omega^{-2}(x) g^{\mu\nu}$$

Από έναν τέτοιο μετασχηματισμό της μετρικής μπορούμε να καταλήξουμε στους σύμμορφους μετασχηματισμούς διαφόρων ποσοτήτων. Για παράδειγμα τα σύμβολα Christoffel

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\Big(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial\chi^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial\chi^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big)$$

μετά από ένα σύμμορφο μετασχηματισμό θα είναι

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \\
&= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\lambda\rho}\Big(\frac{\partial\widetilde{g}_{\nu\lambda}}{\partial\chi^{\mu}} + \frac{\partial\widetilde{g}_{\mu\lambda}}{\partial\chi^{\nu}} - \frac{\partial\widetilde{g}_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Omega^{-2} g^{\lambda\rho}\Big(\frac{\partial(\Omega^2 g_{\nu\lambda})}{\partial\chi^{\mu}} + \frac{\partial(\Omega^2 g_{\mu\lambda})}{\partial\chi^{\nu}} - \frac{\partial(\Omega^2 g_{\mu\nu})}{\partial\chi^{\lambda}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Omega^{-2} g^{\lambda\rho}\Big(g_{\nu\lambda}\frac{\partial\Omega^2}{\partial\chi^{\mu}} + \Omega^2\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial\chi^{\mu}} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial\Omega^2}{\partial\chi^{\nu}} + \Omega^2\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial\chi^{\mu}} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^2}{\partial\chi^{\lambda}} - \Omega^2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Omega^{-2} g^{\lambda\rho}\Big(2g_{\nu\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi^{\mu}} + \Omega^2\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial\chi^{\mu}} + 2g_{\mu\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi^{\nu}} + \Omega^2\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial\chi^{\mu}} - 2g_{\mu\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi^{\lambda}} - \Omega^2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Omega^{-2}\Omega^2 g^{\lambda\rho}\Big(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial\chi^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial\chi^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\chi^{\lambda}}\Big) + \frac{1}{2}\Omega^{-2} 2\Omega g^{\lambda\rho}\Big(g_{\nu\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi^{\mu}} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi^{\nu}} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial\chi^{\lambda}}\Big)
\end{aligned}$$

[1]Με τον όρο αιτιακή κατασκευή εννοούμε τη σχέση ανάμεσα στο παρελθόν και το μέλλον όπως αυτή καθορίζεται από τους κώνους φωτός.

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\Big(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial \chi^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \chi^\lambda}\Big) + \Omega^{-1}\Big(\delta^\rho_\nu \frac{\partial \Omega}{\partial \chi^\mu} + \delta^\rho_\mu \frac{\partial \Omega}{\partial \chi^\nu} - g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial \chi^\lambda}\Big)$$
$$= \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Omega^{-1}\Big(\delta^\rho_\nu \frac{\partial \Omega}{\partial \chi^\mu} + \delta^\rho_\mu \frac{\partial \Omega}{\partial \chi^\nu} - g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial \chi^\lambda}\Big)$$

Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί συρρικνώνουν ή επεκτείνουν μια πολλαπλότητα και πρέπει να διαχωριστούν από τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων $\chi^\mu \to \chi'^\mu$ που απλώς αλλάζουν τις συντεταγμένες σε κάποιο κομμάτι της πολλαπλότητας αφήνοντας τη γεωμετρία αμετάβλητη.

Σαν μια απλή επίδειξη των διαγραμμάτων Penrose θεωρούμε τον δισδιάστατο χωρόχρονο Minkowski που έχει στοιχείο διαστήματος

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \tag{Γ.2}$$

Θα δουλέψουμε χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες u, υ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$u = t - x$$
$$\upsilon = t + x$$

και η (Γ.2) γίνεται

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = (dt - dx)(dt + dx) = du d\upsilon \tag{Γ.3}$$

με[2]

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{Γ.4}$$

Ας κάνουμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$u' = 2\tan^{-1} u \Rightarrow u' = 2\arctan u \Rightarrow u = \tan\frac{u'}{2}$$
$$\upsilon' = 2\tan^{-1} \upsilon \Rightarrow \upsilon' = 2\arctan \upsilon \Rightarrow \upsilon = \tan\frac{\upsilon'}{2}$$

όπου

$$-\pi \le u', \upsilon' \le \pi \tag{Γ.5}$$

[2]Θυμίζουμε από τη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας ότι η τετραγωνική μορφη δύο μεταβλητών x και y ορίζεται ως το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού της μορφής

$$ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

Το πολυώνυμο αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε ως

$$ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z^T A z$$

όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός και $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε τη νέα μορφή της μετρικής καθώς

$$ds^2 = du d\upsilon = 2\frac{1}{2} du d\upsilon = \begin{pmatrix} du & d\upsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ d\upsilon \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε

$$du = \Big(\tan\frac{u'}{2}\Big)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{u'}{2}}{\cos\frac{u'}{2}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{u'}{2}\sin\frac{u'}{2} - \cos\frac{u'}{2}\cos\frac{u'}{2}}{(\cos\frac{u'}{2})^2}du'$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(\cos\frac{u'}{2})^2}du' = -\frac{1}{2}\sec\frac{u'}{2}du'$$

όμοια

$$d\upsilon = -\frac{1}{2}\sec\frac{\upsilon'}{2}d\upsilon'$$

και η (Γ.3) γράφεται

$$ds^2 = \frac{1}{4}\sec^2\frac{u'}{2}\sec^2\frac{\upsilon'}{2}du'd\upsilon'$$

με

$$g_{\mu\nu}(u',\upsilon') = \frac{1}{8}\sec^2\frac{u'}{2}\sec^2\frac{\upsilon'}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Αν τώρα πραγματοποιήσουμε ένα σύμμορφο μετασχηματισμό με

$$\Omega^2 = (\frac{1}{4}\sec^2\frac{u'}{2}\sec^2\frac{\upsilon'}{2})^{-1}$$

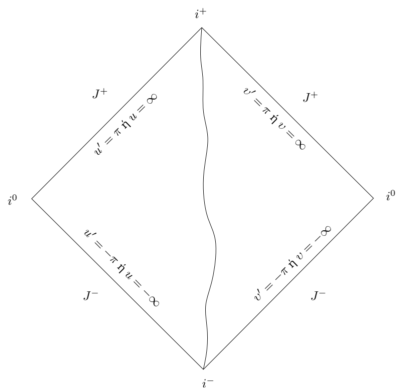
τότε

$$g_{\mu\nu}(u',\upsilon') \to \widetilde{g}_{\mu\nu}(u',\upsilon') = \Omega^2 g_{\mu\nu}(u',\upsilon') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{Γ.6}$$

και το σύμμορφα σχετιζόμενο διάστημα δίνεται από την

$$d\widetilde{s}^2 = du'd\upsilon' \tag{Γ.7}$$

Η (Γ.7) έχει την ίδια μορφή με την (Γ.3) αλλά καλύπτει μόνο τη συμπαγή περιοχή (Γ.5) η οποία απεικονίζεται στο σχήμα (Γ.1)



Σχήμα Γ.1: Σύμμορφο διάγραμμα Penrose του χωρόχρονου Minkowski. Η συμπαγής περιοχή $-\pi \leq u',\upsilon' \leq \pi$ είναι σύμμορφη σε ολόκληρο το χώρο Minkowski ($-\infty \leq u,\upsilon \leq \infty$). Οι φωτοειδής γραμμές u,υ =σταθερά παραμένουν σε γωνία 45^o. Στο διάγραμμα φαίνεται ένας ασυμπτωτικά χρονοειδώς κινούμενος παρατηρητής.

Η επίδραση του σύμμορφου μετασχηματισμού (Γ.6) είναι να συρρικνώσει το άπειρο στις συνοριακές γραμμές του διαγράμματος. Το σύνορο του σχήματος εμπεριέχει διάφορα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Αρχικά σημειώνουμε ότι όλες οι φωτοειδείς γραμμές παραμένουν σε γωνία 45^o στο διάγραμμα Penrose. Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί αφήνουν τους κώνους φωτός αναλλοίωτους. Έτσι οποιαδήποτε αιτιατή ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί σχεδιάζοντας τις φωτοειδείς γραμμές όπως και στον χωρόχρονο Minkowski. Ξεκάθαρα όλες οι φωτοειδείς γραμμές θα τερματίζουν στις διαγώνιες συνοριακές γραμμές που σημειώνονται με J^+ και J^- και ονομάζονται μελλοντικό και παρελθοντικό φωτοειδές άπειρο αντίστοιχα. Ασυμπτωτικά χρονοειδείς γραμμές συγκλίνουν στα σημεία i^+ (μελλοντικό χρονοειδές άπειρο) και i^- (παρελθοντικό χρονοειδές άπειρο). Όμοια ασυμπτωτικά χωροειδείς γραμμές συγκλίνουν στο i^0 (χωροειδές άπειρο). Η ανάλυση αυτή εφαρμόζεται και στον τετραδιάστατο χωρόχρονο Minkowski εαν κάθε σημείο του διαγράμματος θεωρηθεί σαν δισδιάστατη σφαίρα εκτός από τα σημεία στον κάθετο άξονα και το i^0 που αναπαριστούν σημεία. Τα J^+ και J^- είναι τότε τρισδιάστατες επιφάνειες.

Παράρτημα Δ΄

Υπολογισμός των συντελεστών Bogolyubov για το δισδιάστατο σύμπαν Robertson - Walker

Ξεκινάμε με την υπεργεωμετρική

$$ {}_2F_1[1+(i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1-(i\omega_{in}/\rho); \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] $$

και θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (Abramowitz & Stegun 1965)

$$ \begin{aligned} F[a,b;c;z] &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F[a,b;a+b-c+1;1-z] \\ &\quad + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F[c-a,c-b;c-a-b-1;1-z] \end{aligned} \tag{Δ΄.1} $$

Θα έχουμε λοιπόν

$$ \begin{aligned} & F[1+(i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1-(i\omega_{in}/\rho); \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\ & = \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho-1-i\omega_-/\rho-i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_{in}\rho-1-i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho)} \\ & \times F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_-/\rho+i\omega_-/\rho-1+i\omega_{in}/\rho+1; 1-\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)] \\ & + \big(1-\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{(1-\omega_{in}/\rho-1-i\omega_-/\rho-i\omega_-/\rho)} \\ & \times \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(1+i\omega_-/\rho+i\omega_-/\rho-1+i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\ & \times F[1-i\omega_{in}/\rho-1-i\omega_-/\rho, 1-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho; \\ & \quad 1-i\omega_{in}/\rho-1-i\omega_-/\rho-i\omega_-/\rho+1; 1-\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)] \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{in}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+2i\omega_-/\rho+i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&+ \big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{(-i\omega_{in}/\rho-2i\omega_-/\rho)} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho+i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho, 1-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho; -i\omega_{in}/\rho-2i\omega_-/\rho+1; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&= \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{in}/\rho-\frac{2i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in}))}{\Gamma(-i\omega_{in}/\rho-\frac{i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in}))\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho-\frac{i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in}))} \\
&\times F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+\frac{2i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in})+i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&+ [\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]^{(-i\omega_{in}/\rho-\frac{2i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in}))} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(\frac{2i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in})+i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[-i\omega_{in}/\rho-\frac{i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in}), 1-i\omega_{in}/\rho-\frac{i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in}); \\
&\quad -i\omega_{in}/\rho-\frac{2i}{2\rho}(\omega_{out}-\omega_{in})+1; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&+ [\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[-i\omega_+/\rho, 1-i\omega_+/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}
\tag{Δ'.2}
$$

Στην υπεργεωμετρική της ποσότητας (Δ'.2) κάνουμε χρήση της σχέσης

$$
F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) \tag{Δ'.3}
$$

και έχουμε

$$
\begin{aligned}
&F[-i\omega_+/\rho, 1-i\omega_+/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&= F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_+/\rho, 1-i\omega_{out}/\rho-1+i\omega_+/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&\times (1-\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta)))^{(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_+/\rho-1+i\omega_+/\rho)} \\
&= F[1-i\omega_{out}/\rho+\frac{i}{2\rho}(\omega_{out}+\omega_{in}), -i\omega_{out}/\rho+\frac{i}{2\rho}(\omega_{out}+\omega_{in}); 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&\times (1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh(\rho\eta))^{(-i\omega_{out}/\rho+\frac{2i}{2\rho}(\omega_{out}+\omega_{in}))} \\
&= F[1-i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&\times [\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho}
\end{aligned}
\tag{Δ'.4}
$$

Αντικαθιστώντας τη μορφή (Δ'.4) στην υπεργεωμετρική (Δ'.2) θα έχουμε για την αρχική υπεργεωμετρική

$$
\begin{aligned}
&F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
&= \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&+ \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} F[1-i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&\times [\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho}[\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho}
\end{aligned} \tag{Δ'.5}
$$

Ας δούμε τι μπορούμε να κάνουμε με τον παράγοντα

$$
[\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho}[\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho}
$$

Ισχύει ότι $z^w = e^{w\ln z}$ για κάθε μιγαδικό z και w. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
[\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho} &= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]} \\
[\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho} &= e^{i\omega_{in}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}
\end{aligned}
$$

Τώρα όμως εμφανίζεται ένα πρόβλημα καθώς το $\tanh(\rho\eta)$ για μεγάλα $\pm\eta$ παίρνει τιμές ± 1 άρα ο λογάριθμος μηδενίζεται. Λογικά μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο αν θεωρήσουμε ότι για μεγάλα η η παράσταση μέσα στο λογάριθμο τείνει στο μηδέν, άρα ο λογάριθμος τείνει στο $-\infty$ και επειδή πολλαπλασιάζεται με $\pm i$ κάθε φορά όλο αυτό το πράγμα απλά κάνει κύκλους στο μιγαδικό επίπεδο. Αν δεχτούμε αυτή τη λογική μπορούμε να συνεχίσουμε γράφοντας

$$
\begin{aligned}
&[\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]^{-i\omega_{out}/\rho}[\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]^{i\omega_{in}/\rho} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]} e^{i\omega_{in}/\rho \ln[\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln\left[\frac{1}{2}\frac{\cosh(\rho\eta)-\sinh(\rho\eta)}{\cosh(\rho\eta)}\right]} e^{i\omega_{in}/\rho \ln\left[\frac{1}{2}\frac{\cosh(\rho\eta)+\sinh(\rho\eta)}{\cosh(\rho\eta)}\right]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho \ln\left[\frac{1}{2}\frac{e^{-\rho\eta}}{\frac{1}{2}(e^{\rho\eta}+e^{-\rho\eta})}\right]} e^{i\omega_{in}/\rho \ln\left[\frac{1}{2}\frac{e^{\rho\eta}}{\frac{1}{2}(e^{\rho\eta}+e^{-\rho\eta})}\right]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho\left[\ln[e^{-\rho\eta}]-\ln[e^{\rho\eta}+e^{-\rho\eta}]\right]} e^{i\omega_{in}/\rho\left[\ln[e^{\rho\eta}]-\ln[e^{\rho\eta}+e^{-\rho\eta}]\right]} \\
&= e^{-i\omega_{out}/\rho\left[-\rho\eta-\ln(2\cosh(\rho\eta))\right]} e^{i\omega_{in}/\rho\left[\rho\eta-\ln(2\cosh(\rho\eta))\right]} \\
&= e^{\left[i\omega_{out}\eta+i\omega_{out}/\rho\ln(2\cosh(\rho\eta))\right]} e^{\left[i\omega_{in}\eta-i\omega_{in}/\rho\ln(2\cosh(\rho\eta))\right]} \\
&= e^{\left[i\omega_{out}\eta+i\omega_{out}/\rho\ln(2\cosh(\rho\eta))+i\omega_{in}\eta-i\omega_{in}/\rho\ln(2\cosh(\rho\eta))\right]} \\
&= e^{2i\omega_+\eta+\ln(2\cosh(\rho\eta))\frac{i}{\rho}(\omega_{out}-\omega_{in})} \\
&= e^{2i\omega_+\eta+(2i\omega_-/\rho)\ln(2\cosh(\rho\eta))}
\end{aligned}
$$

Έχουμε έτοιμη τη νέα μορφή της αρχικής υπεργεωμετρικής

$$
\begin{aligned}
&F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] = \\
&= \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&+ e^{2i\omega_+\eta+(2i\omega_-/\rho)\ln(2\cosh(\rho\eta))} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[1-i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \qquad (\Delta'.6)
\end{aligned}
$$

την οποία θα αντικαταστήσουμε στη σχέση (4.24) για το $u_k^{in}(\eta, x)$

$$
\begin{aligned}
&u_k^{in}(\eta, x) = (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx-i\omega_+\eta-(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
&= (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx-i\omega_+\eta-(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times \Bigg[\frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
&+ e^{2i\omega_+\eta+(2i\omega_-/\rho)\ln(2\cosh(\rho\eta))} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[1-i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \Bigg] \\
&= (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx-i\omega_+\eta-(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} \\
&+ (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx-i\omega_+\eta-(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} e^{2i\omega_+\eta+(2i\omega_-/\rho)\ln(2\cosh(\rho\eta))} \\
&\times F[1-i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&= (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx-i\omega_+\eta-(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} \\
&+ (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx+i\omega_+\eta+(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times F[1-i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1+i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \\
&\qquad (\Delta'.7)
\end{aligned}
$$

Όμως ισχύει

$$
\begin{aligned}
u_k^{out}(\eta, x) &= (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx-i\omega_+\eta-(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1+i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))] \\
u_{-k}^{out*}(\eta, x) &= (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx+i\omega_+\eta+(i\omega_-/\rho)\ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times F[1-i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}
$$

και τελικά έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
u_k^{in}(\eta, x) = & \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} u_k^{out} \\
& + \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} u_{-k}^{out*} \\
& = \alpha_k u_k^{out}(\eta, x) + \beta_k u_{-k}^{out*}
\end{aligned}
\tag{Δ'.8}
$$

με

$$
\alpha_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \tag{Δ'.9}
$$

$$
\beta_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \tag{Δ'.10}
$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (Δ'.8) με την $\overline{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*)$ βρίσκουμε ότι οι συντελεστές Bogolyubov δίνονται από τις

$$
\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta_{kk'} \qquad \beta_{kk'} = \beta_k \delta_{-kk'} \tag{Δ'.11}
$$

Παράρτημα Ε΄

Υπολογισμός του συντελεστή Bogolyubov $\alpha_{kk'}$ μέσω του εσωτερικού γινομένου

Θυμίζουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

$$(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) = -i \int_{\Sigma} \hat{\phi}_1(x) \overleftrightarrow{\partial_\mu} \hat{\phi}_2^*(x) [-g_\Sigma(x)]^{1/2} d\Sigma^\mu \qquad \text{με} \qquad d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$$

καθώς και τις λύσεις

$$\begin{aligned} u_k^{in}(\eta, x) = & (4\pi\omega_{in})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+ \eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\ & \times {}_2F_1[1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 - (i\omega_{in}/\rho); \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_k^{out}(\eta, x) = & (4\pi\omega_{out})^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega_+ \eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\ & \times {}_2F_1[1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 + (i\omega_{out}/\rho); \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \end{aligned}$$

Αν το $t^\mu = (0, x)$ είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στην επιφάνεια $n = 0$ τότε το $n^\mu = (n^0, 0)$ θα είναι κάθετο σε αυτό άρα και στην επιφάνεια. Το διάνυσμα αυτό κανονικοποιείται με

$$-1 = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = C(\eta)(n^0)^2 \quad \Rightarrow \quad n^0 = \Big(\frac{1}{C(n)}\Big)^{1/2}$$

Επιπλέον η ορίζουσα της χωρικής μετρικής ικανοποιεί την

$$[-g_\Sigma(x)]^{1/2} = [-(-C(\eta))]^{1/2} = [C(\eta)]^{1/2}$$

Έτσι έχουμε $n^0 [g_\Sigma]^{1/2} = \big(\frac{1}{C(n)}\big)^{1/2} [C(\eta)]^{1/2} = 1$ και το εσωτερικό γινόμενο γίνεται

$$\alpha_{kk'} = \frac{(u_k^{in}, u_{k'}{}^{out})}{(u_k^{in}, u_k^{in})} = \frac{-i}{(u_k^{in}, u_k^{in})} \int_\Sigma (u_k^{in}\partial_\mu u_{k'}{}^{out*} - u_{k'}{}^{out*}\partial_\mu u_k^{in}) n^\mu [-g_\Sigma]^{1/2} dx$$
$$= \frac{-i}{(u_k^{in}, u_k^{in})} \int (u_k^{in}\partial_0 u_{k'}{}^{out*} - u_{k'}{}^{out*}\partial_0 u_k^{in}) n^0 [-g_\Sigma]^{1/2} dx$$
$$= \frac{-i}{(u_k^{in}, u_k^{in})} \int (u_k^{in}\partial_\eta u_{k'}{}^{out*} - u_{k'}{}^{out*}\partial_\eta u_k^{in}) dx$$

Πριν αρχίσουμε τις πράξεις καλό θα ήταν να δούμε με ποια λογική θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε. Μιας και έχουμε να κάνουμε με εσωτερικά γινόμενα μια χρήσιμη ιδιότητα που έχουμε στη διάθεσή μας είναι ότι $\frac{(u_k^{in}, u_{k'}{}^{in})}{(u_k^{in}, u_k^{in})} = \delta_{kk'}$ [1]. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να φτιάξουμε τον όρο

$$\frac{-i}{(u_k^{in}, u_k^{in})} \int (u_k^{in}\partial_\eta u_{k'}{}^{in*} - u_{k'}{}^{in*}\partial_\eta u_k^{in}) dx$$

Για να το πετύχουμε αυτό γράφουμε

$$\begin{aligned}
\partial_\eta u_{k'}{}^{out*} &= \partial_\eta \Big[(4\pi\omega_{out})^{-1/2} e^{-ik'x + i\omega_+\eta + i\omega_-/\rho \ln[2\cosh(\rho\eta)]} \\
&\times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \Big] \\
&= (4\pi\omega_{out})^{-1/2} e^{-ik'x + i\omega_+\eta + i\omega_-/\rho \ln[2\cosh(\rho\eta)]} (i\omega_+) \\
&\times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&+ (4\pi\omega_{out})^{-1/2} e^{-ik'x + i\omega_+\eta + i\omega_-/\rho \ln[2\cosh(\rho\eta)]} (i\omega_- \tanh(\rho\eta)) \\
&\times F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))] \\
&+ (4\pi\omega_{out})^{-1/2} e^{-ik'x + i\omega_+\eta + i\omega_-/\rho \ln[2\cosh(\rho\eta)]} \frac{(1 - i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{(1 - i\omega_{out}/\rho)} \\
&\times \big(-\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sech}^2(\rho\eta) \big) F[2 - i\omega_-/\rho, 1 - i\omega_-/\rho; 2 - i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (Δ'.1) σε όλες τις παραπάνω υπεργεωμετρικές θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\partial_\eta u_{k'}{}^{out*} = \\
&= (4\pi\omega_{out})^{-1/2} e^{-ik'x + i\omega_+\eta + i\omega_-/\rho \ln[2\cosh(\rho\eta)]} \Bigg[\frac{\Gamma(1 - i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1 - i\omega_{out}/\rho + i\omega_-/\rho)} \\
&\times (i\omega_+) F[1 - i\omega_-/\rho, -i\omega_-/\rho; 1 - 2i\omega_-/\rho + i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \\
&+ \Big(\frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta)) \Big)^{-i\omega_{in}/\rho} (i\omega_+) \frac{\Gamma(1 - i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho - 2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1 - i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)} \\
&\times F[i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho, 1 - i\omega_{out}/\rho + i\omega_-/\rho; 1 - i\omega_{out}/\rho + 2i\omega_-/\rho; \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))] \Bigg]
\end{aligned}$$

[1]Τα u_k^{in}, u_k^{out} δεν είναι απαραίτητα κανονικοποιημένα και αυτός είναι ο λόγος που διαιρούμε με το εσωτερικό γινόμενο (u_k^{in}, u_k^{in})

$$+(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\Bigg[\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}$$
$$\times(i\omega_-\tanh(\rho\eta))F[1-i\omega_-/\rho,-i\omega_-/\rho;1+i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+\Big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\Big)^{-i\omega_{in}/\rho}(i\omega_-\tanh(\rho\eta))\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\Bigg]$$

$$+(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\Bigg[\frac{\Gamma(2-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho-1)}{\Gamma(-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\frac{(1-i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\big(-\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sech}^2(\rho\eta)\big)F[2-i\omega_-/\rho,1-i\omega_-/\rho;2+i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+\Big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\Big)^{-i\omega_{in}/\rho-1}\frac{(1-i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\frac{\Gamma(2-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(2-i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\big(-\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sech}^2(\rho\eta)\big)F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\Bigg]$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των συναρτήσεων Γάμμα

$$\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1) \tag{Ε΄.1}$$
$$z\Gamma(z)=\Gamma(1+z) \tag{Ε΄.2}$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$-\frac{(1-i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\frac{\Gamma(2-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho-1)}{\Gamma(-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}=$$
$$=-\frac{(1-i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)(1-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-1)}$$
$$=\frac{(1-i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1+i\omega_{in}/\rho}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}$$

Με μια προσεκτική ματιά παρατηρούμε ότι μέσα στο $\partial_\eta u_{k'}{}^{out*}$ έχει εμφανιστεί το

$$\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}\frac{\partial_\eta u_{k'}{}^{in*}}{(4\pi\omega_{in})^{1/2}}=$$
$$=\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}\Bigg[e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}(i\omega_+)$$
$$\times F[1-i\omega_-/\rho,-i\omega_-/\rho;1+i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

$$+e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}(i\omega_-\tanh(\rho\eta))$$
$$\times F[1-i\omega_-/\rho,-i\omega_-/\rho;1+i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{(1-i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1+i\omega_{in}/\rho}\big(-\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sech}^2(\rho\eta)\big)$$
$$\times F[2-i\omega_-/\rho,1-i\omega_-/\rho;2+i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\Bigg]$$

Συμμαζεύοντας τους όρους που σχηματίζουν την παραπάνω ποσότητα και αφήνοντας τους υπόλοιπους όρους ως έχουν το $\partial_\eta {u_{k'}}^{out*}$ έχει πλέον πάρει τη μορφή

$$\partial_\eta {u_{k'}}^{out*}=$$
$$=\frac{(4\pi\omega_{out})^{-1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{-1/2}}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}\partial_\eta {u_{k'}}^{in*}$$
$$+(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}(i\omega_+)$$
$$\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}(i\omega_-\tanh(\rho\eta)$$
$$\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(2-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(2-i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho-1}\frac{(1-i\omega_{out}/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\big(-\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sech}^2(\rho\eta)\big)$$
$$\times F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

Με όμοιο τρόπο χρησιμοποιούμε τη σχέση (Δ΄.1) στο ${u_{k'}}^{out*}$

$${u_{k'}}^{out*}=$$
$$=(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}F[1-i\omega_-/\rho,-i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))]$$
$$=(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}$$
$$\times F[1-i\omega_-/\rho,-i\omega_-/\rho;1+i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}$$

$$\times\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\big)^{-i\omega_{in}/\rho}$$
$$\times F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$=\frac{(4\pi\omega_{out})^{-1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{-1/2}}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}u_{k'}{}^{in*}$$
$$+(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}$$
$$\times\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\big)^{-i\omega_{in}/\rho}$$
$$\times F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

Ας δούμε τη μορφή που έχει πάρει πλέον το εσωτερικό γινόμενο

$$\alpha_{kk'}=\frac{-i}{(u_k^{in},u_k^{in})}\int(u_k^{in}\partial_\eta u_{k'}{}^{out*}-u_{k'}{}^{out*}\partial_\eta u_k^{in})dx$$
$$=\frac{-i}{(u_k^{in},u_k^{in})}\int\Bigg[u_k^{in}\frac{(4\pi\omega_{out})^{-1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{-1/2}}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}\partial_\eta u_{k'}{}^{in*}$$
$$+u_k^{in}(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\big)^{-i\omega_{in}/\rho}(i\omega_+)$$
$$\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+u_k^{in}(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\big)^{-i\omega_{in}/\rho}(i\omega_-\tanh(\rho\eta))$$
$$\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$+u_k^{in}(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(2-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(2-i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_-/\rho)}$$
$$\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\big)^{-i\omega_{in}/\rho-1}\frac{(1-i\omega_{out}/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\big(-\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sech}^2(\rho\eta)\big)$$

$$\times F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$-\frac{(4\pi\omega_{out})^{-1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{-1/2}}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho)}u_{k'}{}^{in*}\partial_\eta u_k^{in}$$
$$-(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}$$
$$\times\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta)\big)^{-i\omega_{in}/\rho}$$
$$\times F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\partial_\eta u_k^{in}\Bigg]dx$$

Τί έχουμε καταφέρει με το νέο εσωτερικό γινόμενο που έχει εμφανιστεί ; Αφήνοντας στην άκρη προς το παρόν τους υπόλοιπους όρους έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_{kk'} = & \frac{(4\pi\omega_{out})^{-1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{-1/2}} \frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho + i\omega_-/\rho)} \\ & \times \Big(\frac{-i}{(u_k^{in}, u_k^{in})} \int (u_k^{in} \partial_\eta u_{k'}{}^{in^*} - u_{k'}{}^{in^*} \partial_\eta u_k^{in}) d^{n-1}x \Big) \\ = & \frac{(4\pi\omega_{in})^{1/2}}{(4\pi\omega_{out})^{1/2}} \frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho + i\omega_-/\rho)} \delta_{kk'} \end{aligned} \tag{Ε΄.3}$$

Σε αυτόν τον όρο ακριβώς θα βρούμε ένα σκαλοπάτι να πατήσουμε, κάτι που θα υποδεικνύει πως βρισκόμαστε σε καλό δρόμο. Αυτό θα γίνει χρησιμοποιώντας στην παραπάνω την ιδιότητα (Ε΄.1). Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{(4\pi\omega_{in})^{1/2}}{(4\pi\omega_{out})^{1/2}} \frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(2i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho + i\omega_-/\rho)} = \\ = & \frac{(4\pi\omega_{out})^{1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{1/2}} \frac{i\omega_{in}/\rho}{i\omega_{out}/\rho} \frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(-i\omega_{in}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho - i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho + i\omega_-/\rho)} \\ = & \frac{(4\pi\omega_{out})^{1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{1/2}} \frac{\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(-i\omega_{in}/\rho)(-i\omega_{out}/\rho)(i\omega_{in}/\rho)}{(i\omega_{out}/\rho)\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} \\ = & \frac{(4\pi\omega_{out})^{1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{1/2}} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} \end{aligned}$$

Η (Ε΄.3) γίνεται λοιπόν

$$a_{kk'} = \frac{(4\pi\omega_{out})^{-1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{-1/2}} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)} \delta_{kk'} \tag{Ε΄.4}$$

Αυτή όμως είναι ακριβώς η μορφή του συντελεστή Bogolyubov $\alpha_{kk'}$ όπως τον βρήκαμε στη σχέση (4.28) της αναλυτικής λύσης με

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)}$$

Έτσι λοιπόν το αρχικό μας πρόβλημα λύνεται αρκεί "απλά" η περισσευούμενη ποσότητα

$$
\begin{aligned}
&-i\int\Bigg[u_k^{in}(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}\\
&\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}(i\omega_+)\\
&\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\\
&+u_k^{in}(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}\\
&\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}(i\omega_-\tanh(\rho\eta)\\
&\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\\
&+u_k^{in}(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\frac{\Gamma(2-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(2-i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_-/\rho)}\\
&\times\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho-1}\frac{(1-i\omega_{out}/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\big(-\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sech}^2(\rho\eta)\big)\\
&\times F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\\
&-(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{-ik'x+i\omega_+\eta+i\omega_-/\rho\ln[2\cosh(\rho\eta)]}\\
&\times\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}\\
&\times F[-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\partial_\eta u_k^{in}\Bigg]dx
\end{aligned}
$$

να είναι μηδέν... Όπως θα φανεί και στη συνέχεια η διαδικασία μόνο απλή δεν είναι (και ίσως καταντήσει κουραστική) αλλά είναι μικρό το τίμημα μπροστά στην απόδειξη ότι οι συντελεστές Bogolyubov που μελετάμε είναι πράγματι ανεξάρτητοι του χρόνου η, ακόμα κι αν η αριθμητική λύση υπονοεί το αντίθετο.

Ως πρώτο βήμα θα αντικαταστήσουμε τα u_k^{in} και $\partial u_k^{in^*}$ και η παραπάνω ποσότητα παίρνει αυτόματα τη μορφή

$$
\begin{aligned}
&-i\int(4\pi\omega_{in})^{-1/2}(4\pi\omega_{out})^{-1/2}e^{ikx-ik'x}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}\\
&\times\Bigg[\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\\
&\times(i\omega_+)F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\\
&+\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))](i\omega_-\tanh(\rho\eta))\\
&\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\\
&+\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho-1}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}
$$

$$
\times\frac{(1-i\omega_-/\rho)(-i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{out}/\rho}\frac{(1-i\omega_{out}/\rho)(-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}{(-i\omega_-/\rho)(1-i\omega_-/\rho)}\big(-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)
$$

$$
\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \tag{Ε΄.5}
$$

$$
-\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]
$$

$$
\times(-i\omega_+)F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]
$$

$$
-\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))](-i\omega_-\tanh(\rho\eta))
$$

$$
\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]
$$

$$
-\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}F[2+i\omega_-/\rho,1+i\omega_-/\rho;2-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \tag{Ε΄.6}
$$

$$
\times\frac{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)}{1-i\omega_{in}/\rho}\big(\frac{1}{2}\rho\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)
$$

$$
\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]\Bigg]dx \tag{Ε΄.7}
$$

Ίσως αναρωτιέστε που “πήγε” η ποσότητα

$$
\frac{\Gamma(2-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(1-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(2-i\omega_-/\rho)\Gamma(1-i\omega_-/\rho)}
$$

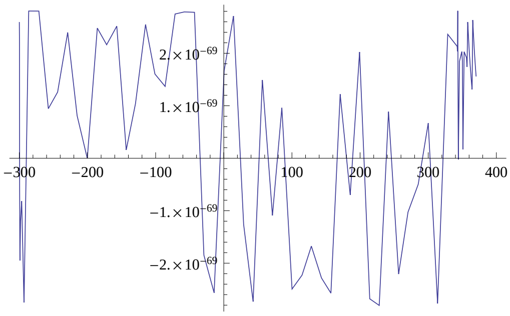
αλλά χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (Ε΄.2) απλά τη φέραμε στη μορφή

$$
\frac{(1-i\omega_{out}/\rho)(-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}{(-i\omega_-/\rho)(1-i\omega_-/\rho)}\frac{\Gamma(1-i\omega_{out}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho-2i\omega_-/\rho)}{\Gamma(1-i\omega_-/\rho)\Gamma(-i\omega_-/\rho)}
$$

με σκοπό να βγάλουμε τις γάμμα συναρτήσεις κοινό παράγοντα.

Με μια πρώτη ματιά κάποιος θα ισχυριζόταν , και σωστά μάλιστα, ότι όλη αυτή η ποσότητα είναι ανεξάρτητη του x εκτός από τον παράγοντα $e^{ikx-ik'x}$. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας την σχέση (1.14) θα εμφανιστεί η δέλτα συνάρτηση $\delta(k-k')$ η οποία θα μηδενίσει ολόκληρη την ποσότητα για $k\neq k'$. Βολικό μέχρι εδώ και σύμφωνο με τα αποτελέσματα μας. Όμως για $k=k'$ δέλτα συνάρτηση απειρίζεται κάτι που σίγουρα δεν μας βοηθάει στην απόδειξή μας. Συνεπώς η ίδια η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα θα πρέπει με κάποιο τρόπο να μηδενιστεί πριν γίνει η ολοκλήρωση. Αν προς στιγμήν εμπιστευτούμε το mathematica θα δούμε ότι η ποσότητα μέσα στις μεγάλες παρενθέσεις έχει τη μορφή του σχήματος Ε΄.1. Ένα ενθαρρυντικό αποτέλεσμα όμως όχι αρκετά ικανοποιητικό για το πρόβλημά μας. Όποτε συνεχίζουμε για να δούμε πως θα καταφέρουμε να μηδενίσουμε ακριβώς την παραπάνω ποσότητα.

Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να αναζητήσουμε περισσότερους κοινούς παράγοντες ελπίζοντας η ποσότητα που εν τέλει θα απομείνει να μηδενιστεί με απλές πράξεις.



Σχήμα Ε΄.1: Η μορφή της προς μηδενισμό ποσότητας όπως προκύπτει από το mathamtica

Συγκεκριμένα θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε σε κάθε όρο το γινόμενο[2]

$$\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))^{-i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$\times F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

Για να το πετύχουμε αυτό θα κάνουμε κάποιες αλλαγές σε τρεις υπεργεωμετρικές. Ξεκινάμε με την υπεργεωμετρική (Ε΄.5) και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$c[a-(c-b)z]F(a,b;c;z)-ac(1-z)F(a+1,b;c;z) + (c-a)(c-b)zF(a,b;c+1;z)=0 \tag{Ε΄.8}$$

$$F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho, 1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho; 2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] =$$
$$\frac{(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))}{(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}$$
$$\times F[1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho, 1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho; 2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$-\frac{(i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}{(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}$$
$$\times F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho, 1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho; 1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \tag{Ε΄.9}$$

Συνεχίζουμε με την υπεργεωμετρική (Ε΄.6) στην οποία αρχικά χρησιμοποιούμε τη σχέση (Δ΄.3)

$$F[2+i\omega_-/\rho, 1+i\omega_-/\rho; 2-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] = \left(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\right)^{-i\omega_{out}/\rho-1}$$
$$\times F[\underbrace{-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho}_{i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho}, \underbrace{1-i\omega_{in}/\rho-i\omega_-/\rho}_{1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho}; 2-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

[2]Οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα $F[a,b;c;z]=F[b,a;c;z]$

στη συνέχεια τη σχέση

$$c(c-1)(z-1)F(a,b;c-1;z)+c[c-1-(2c-1-b-1)z]F(a,b;c;z) \\ +(c-a)(c-b)zF(a,b;c+1;z)=0 \qquad (\text{Ε}'.10)$$

$$F[2+i\omega_-/\rho,1+i\omega_-/\rho;2-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]=$$
$$=\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho}\frac{(1-i\omega_{in}/\rho)(-i\omega_{in}/\rho)}{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}$$
$$\times F[1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$
$$-\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho-1}\frac{(1-i\omega_{in}/\rho)[-i\omega_{in}/\rho-(2i\omega_-/\rho)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}$$
$$\times F[1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

και τέλος τη σχέση

$$c[b-(c-a)z]F(a,b;c;z)-bc(1-z)F(a,b+1;c;z) \\ +(c-a)(c-b)zF(a,b;c+1;z)=0 \qquad (\text{Ε}'.11)$$

$$F[2+i\omega_-/\rho,1+i\omega_-/\rho;2-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]=$$
$$=\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho}\frac{(1-i\omega_{in}/\rho)(-i\omega_{in}/\rho)(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta)))}{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}$$
$$\times\frac{F[1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}{[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}$$
$$-\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho}\frac{(1-i\omega_{in}/\rho)(-i\omega_{in}/\rho)(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}$$
$$\times\frac{F[1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}{[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}$$

$$-\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho-1}\frac{(1-i\omega_{in}/\rho)[-i\omega_{in}/\rho-(2i\omega_-/\rho)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}$$
$$\times F[1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \qquad (\text{Ε}'.12)$$

Η τελευταία υπεργεωμετρική που θα αλλάξουμε είναι η (Ε΄.7) στην οποία θα χρησιμοποιήσουμε την (Δ΄.3) και έχουμε

$$F[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho,1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho;1+2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]=$$
$$=\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{out}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \qquad (\text{Ε}'.13)$$

Αντικαθιστώντας τις (Ε΄.5) , (Ε΄.6) και (Ε΄.7) με τις (Ε΄.9) , (Ε΄.12) και (Ε΄.13) αντίστοιχα μπορούμε να δούμε με μια προσεκτική ματιά ότι πράγματι έχουμε καταφέρει να δημιουργήσουμε το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
&F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
\times &F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}
$$

εκτός από δύο όρους που έχουν το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
&F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
\times &F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho, 1+i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; -i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]
\end{aligned}
$$

Ας δούμε πρώτα τι μας δίνουν αυτοί οι δύο

$$
\begin{aligned}
&\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
\times &F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
\times &\Bigg[\frac{\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-1}\overbrace{(-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)}^{i\omega_{in}/\rho}\big(-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)}{[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]} \\
-&\frac{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\big(\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{out}/\rho}}{(1-i\omega_{in}/\rho)(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)} \\
\times &\frac{\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho}(1-i\omega_{in}/\rho)(-i\omega_{in}/\rho)(i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)}{[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}\Bigg] \\
= &0
\end{aligned}
$$

Απαλλαχτήκαμε λοιπόν από τους όρους αυτούς. Φτάνοντας στο τέλος η μόνη ποσότητα που έχει μείνει όρθια είναι η

$$
\begin{aligned}
&\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho; 1-i\omega_{in}/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
\times &F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho, i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho; 1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho; \frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))] \\
\times &\Bigg[2\omega_+ + 2\omega_-\tanh(\rho\eta) \\
-&\frac{\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-1}(-2i\omega_-/\rho+i\omega_{out}/\rho)\big(-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)(i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho-1)\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)}{(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]} \\
+&\frac{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\big(\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho}\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{out}/\rho}}{(1-i\omega_{in}/\rho)(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}
\end{aligned}
$$

$$\times\frac{(1-i\omega_{in}/\rho)(-i\omega_{in}/\rho)(i\omega_-/\rho-1)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}{\underbrace{(2i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho)}_{-i\omega_{in}/\rho}[i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho-(i\omega_-/\rho-1)(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}$$

$$+\frac{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\big(\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{out}/\rho}\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-i\omega_{out}/\rho}}{1-i\omega_{in}/\rho}$$

$$\left.\times\frac{\big(\frac{1}{2}(1-\tanh(\rho\eta))\big)^{-1}(1-i\omega_{in}/\rho)[-i\omega_{in}/\rho-2i\omega_-/\rho(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}{(1+i\omega_-/\rho)(i\omega_-/\rho)\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}\right]$$

$$=\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

$$\times F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

$$\times\left[2i\omega_++i\omega_-\tanh(\rho\eta)\frac{\big(\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)\big)[-i\omega_{in}/\rho-2i\omega_-/\rho(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}{\frac{1}{2}\underbrace{(1-\tanh(\rho\eta))\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))}_{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\rho\eta)}}\right]$$

$$=\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

$$\times F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

$$\times\left[2i\omega_++2i\omega_-\tanh(\rho\eta)+\frac{\rho[-i\omega_{in}/\rho-2i\omega_-/\rho(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\big(\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))\big)^{i\omega_{in}/\rho}F[1+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho;1-i\omega_{in}/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

$$\times F[1-i\omega_{out}/\rho+i\omega_-/\rho,i\omega_-/\rho-i\omega_{out}/\rho;1-i\omega_{out}/\rho+2i\omega_-/\rho;\frac{1}{2}(1+\tanh(\rho\eta))]$$

$$\times\left[2i\omega_++2i\omega_-\tanh(\rho\eta)-\underbrace{(2i\omega_{in}+2i\omega_-)}_{i\omega_+}-2i\omega_-\tanh(\rho\eta)\right]$$

$$=0$$

Πράγματι λοιπόν μετά από αρκετό κόπο αλλά χωρίς κανέναν πλέον ενδοιασμό φτάσαμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Οι συντελεστές Bogolyubov δεν εξαρτώνται σε καμία περίπτωση από το η το οποίο καταφέραμε να το εξαφανίσουμε από το εσωτερικό γινόμενο αφήνοντας ως αποτέλεσμα τη σχέση (Ε′.4)

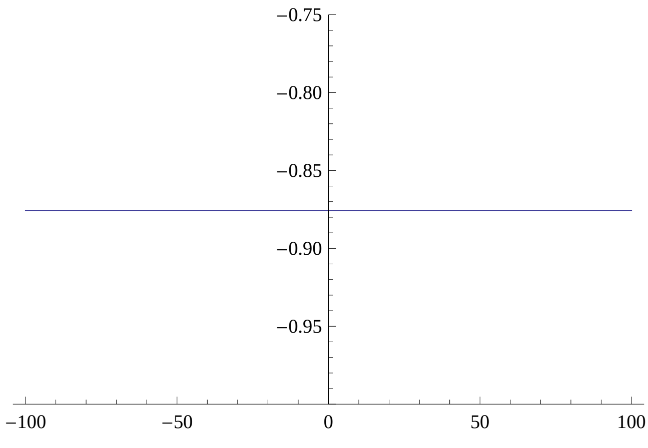
$$a_{kk'}=\frac{(4\pi\omega_{out})^{-1/2}}{(4\pi\omega_{in})^{-1/2}}\frac{\Gamma(1-i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1-i\omega_+/\rho)}\delta_{kk'}$$

στην οποία είχαμε καταλήξει και στην πρώτη μας λύση.

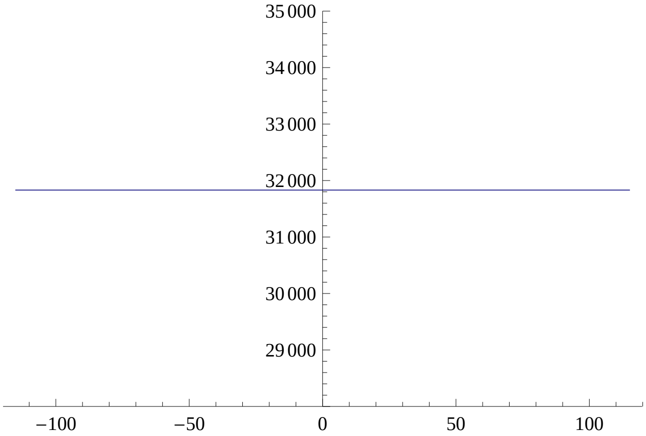
Παράρτημα F′

Κώδικες Mathematica

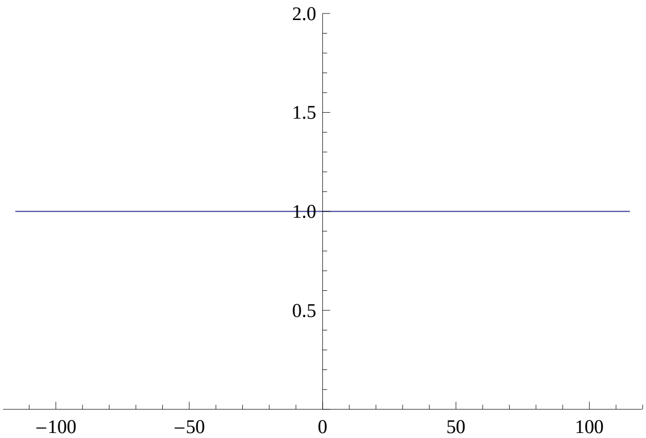
```
(* Ypologismos esoterikwn ginomenwn xrhsimopoiontas
 tis analutikes morfes twn u_k^{in} kai u_k^{out} *)

(* statheres: *) A = 10.5; B = 5.1; rho = 0.05; h0 = 115; nd = 10;
k = 1; m = 1; kt = 2;  omin = Sqrt[k^2 + m^2 * (A - B)]; omout = Sqrt[k^2 + m^2 * (A + B)];
omegaplin  = 1 / 2 * (omout - omin); omegasin  = 1 / 2 * (omout + omin);
(*sunarthsh C(n): *) F[h_] = A + B * Tanh[rho * h];
(* eksiswsh: *) eq = chi''[h] + (k^2 + m^2 * F[h]) * chi[h];

omin2 = Sqrt[kt^2 + m^2 * (A - B)]; omout2 = Sqrt[kt^2 + m^2 * (A + B)];
omegaplin2  = 1 / 2 * (omout2 - omin2);
omegasin2  = 1 / 2 * (omout2 + omin2);

Ukin[ h_, x_]  = (1 / Sqrt[4 * Pi * omin]) *
   E^(I k x - I * omegasin * h  - (I * omegaplin / rho ) * Log[2 * Cosh[rho * h]] ) *
   Hypergeometric2F1[1 + (I * omegaplin / rho) , I * omegaplin / rho ,
     1 - (I * omin / rho) , 1 / 2 * (1 + Tanh[rho * h])];
Ukinstar[h_, x_]  = Conjugate[Ukin[h, x]];
UkinD[h_, x_]  = D[Ukin[h, x], h];
UkinstarD[h_, x_] = Conjugate[UkinD[h, x]];

Uktin[ h_, x_]  = 1 / Sqrt[4 * Pi * omin2] *
    E^(I kt x - I * omegasin2 * h  - (I * omegaplin2 / rho ) * Log[2 * Cosh[rho * h]] ) *
   Hypergeometric2F1[1 + (I * omegaplin2 / rho) , I * omegaplin2 / rho ,
    1 - (I * omin2 / rho) , 1 / 2 * (1 + Tanh[rho * h])];
Uktinstar[h_, x_]  = Conjugate[Uktin[h, x]];
UktinD[h_, x_]  = D[Uktin[h, x], h];
UktinstarD[h_, x_] = Conjugate[UktinD[h, x]];

(* suntelesths bogolubov a_{kk}, sxesh (4.31) *)
ak  =  ( omout / omin)^(1 / 2) (Gamma[(1 - (I omin / rho))] Gamma[-I omout / rho]) /
    (Gamma[-I omegasin / rho] Gamma[1 - (I omegasin / rho)]) ;

Plot[Re[ak], {h, -100, 100}, PlotRange → {-1, -0.75}]
```



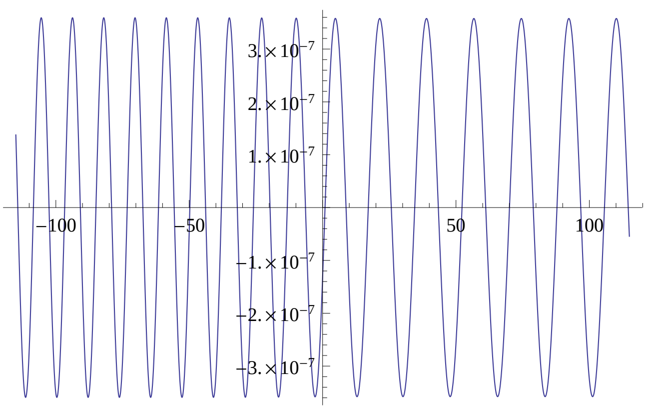
```
(* eswteriko ginomeno (u_k^{in} , u_k^{in}) *)
es[h_] = -I Integrate[Ukin[h, x] * UkinstarD[h, x] - Ukinstar[h, x] * UkinD[h, x],
    {x , -100 000, 100 000}];

Plot[Re[es[h]] , {h, -h0, h0}, PlotRange → {28 000, 35 000}]
```



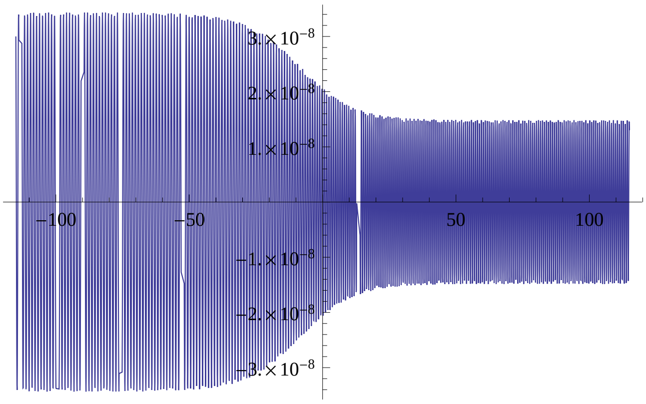

```
(* kanonikopoihmeno eswteriko ginomeno (u_k^{in} , u_k^{in}) *)
Plot[Re[es[h] / es[h]], {h, -h0, h0}, PlotRange → {0, 2}]
```



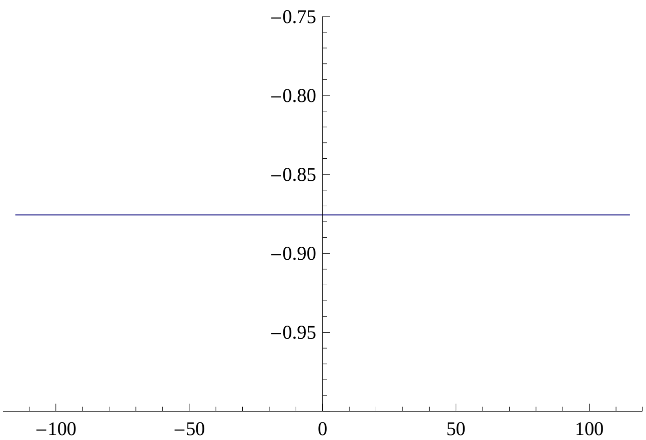

```
(* kanonikopoihmeno eswteriko ginomeno (u_k^{in} , u_k'^{in}) *)
es2[h_] = -I Integrate[Ukin[h, x] * UktinstarD[h, x] - Uktinstar[h, x] * UkinD[h, x],
    {x , -100 000 , 100 000}];

Plot[Re[es2[h] / es[h]] , {h, -h0, h0}]
```



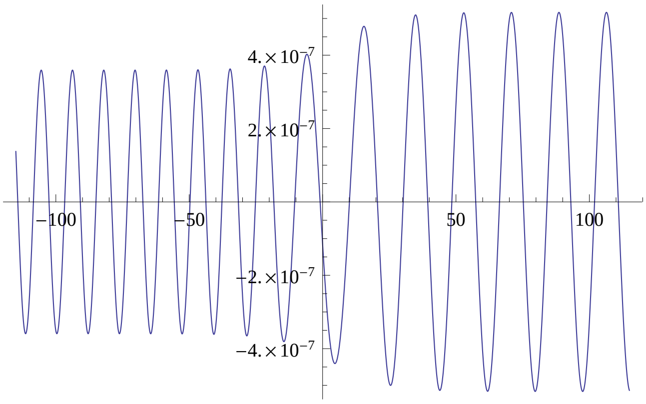
```
(* kanonikopoihmeno eswteriko ginomeno (u_k^{in} , {u_k'^{in})}^* *)
es3[h_] = -I Integrate[Ukin[h, x] * UktinD[h, x] - Uktin[h, x] * UkinD[h, x],
    {x , -100 000 , 100 000}];

Plot[Re[es3[h] / es[h]], {h, -h0, h0}]
```




```
Ukout[h_, x_] = (1 / Sqrt[4 * Pi * omout]) *
    E^(I * k * x - I * omegasin * h - (I * omegaplin / rho) * Log[2 * Cosh[rho * h]]) *
   Hypergeometric2F1[1 + (I * omegaplin / rho), I * omegaplin / rho,
    1 + (I * omout / rho), 1 / 2 * (1 - Tanh[rho * h])];
Ukoutstar[h_, x_] = Conjugate[Ukout[h, x]];
UkoutD[h_, x_] = D[Ukout[h, x], h];
UkoutstarD[h_, x_] = Conjugate[UkoutD[h, x]];

Uktout[ h_, x_] = 1 / Sqrt[4 * Pi * omin2] *
    E^(I kt x - I * omegasin2 * h - (I * omegaplin2 / rho) * Log[2 * Cosh[rho * h]]) *
   Hypergeometric2F1[1 + (I * omegaplin2 / rho), I * omegaplin2 / rho,
    1 + (I * omout2 / rho), 1 / 2 * (1 + Tanh[rho * h])];
Uktoutstar[h_, x_] = Conjugate[Uktout[h, x]];
UktoutD[h_, x_] = D[Uktout[h, x], h];
UktoutstarD[h_, x_] = Conjugate[UktoutD[h, x]];

(* suntelesths bogolubov a_{kk}, sxesh (4.32) *)
alphakk[h_] =
  -I (Integrate[Ukin[h, x] * UkoutstarD[h, x] - Ukoutstar[h, x] * UkinD[h, x],
     {x , -100 000, 100 000}]);

Plot[Re[alphakk[h] / es[h]] , {h, -h0, h0}, PlotRange → {-1, -0.75}]
```

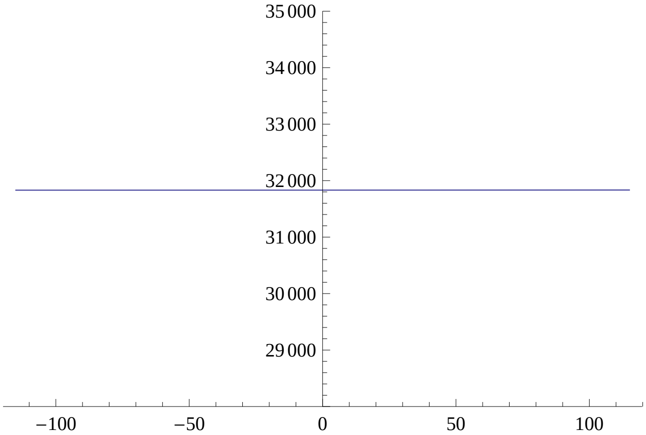


```
(* suntelesths bogolubov a_{kk'}, k diaforo k' *)
alphakkt[h_] =
  -I Integrate[Ukin[h, x] * UktoutstarD[h, x] - Uktoutstar[h, x] * UkinD[h, x],
    {x , -100 000 , 100 000}];

Plot[Re[alphakkt[h] / es[h]], {h, -h0, h0}]
```

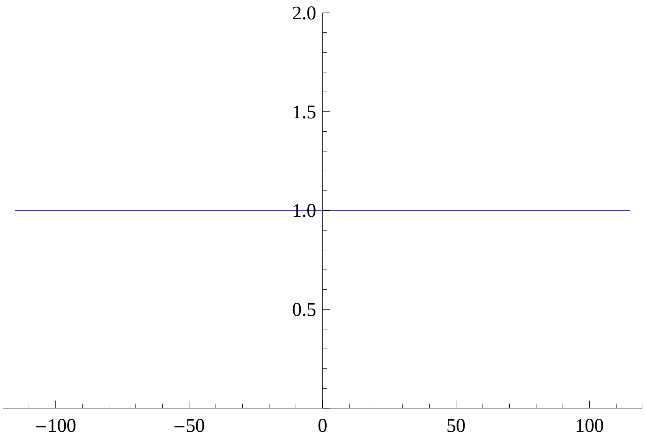


```
(* Ypologismos esoterikwn ginomenwn xrhsimopoiontas
 tis arithmhtikes luseis u_k^{in} kai u_k^{out} *)

(* statheres *) A = 10.5; B = 5.1; rho = 0.05; h0 = 115; nd = 10; k = 1; m = 1; kt = 2;
omin = Sqrt[(k)^2 + m^2 * (A - B)]; omout = Sqrt[(k)^2 + m^2 * (A + B)];
omegaplin = 1 / 2 * (omout - omin); omegasin = 1 / 2 * (omout + omin);
(*Synarthsh:*)F[h_] = A + B * Tanh[rho * h];
 (* eksiswsh:*) eq = chi''[h] + ((-k)^2 + m^2 * F[h]) * chi[h];
omin2 = Sqrt[kt^2 + m^2 * (A - B)]; omout2 = Sqrt[kt^2 + m^2 * (A + B)];
omegaplin2 = 1 / 2 * (omout2 - omin2);
omegasin2 = 1 / 2 * (omout2 + omin2);

(* Lysh me arxikh synthiki sto -h_0: *)
solm = NDSolve[{eq == 0, chi[-h0] == Exp[-I * omin * (-h0)] / Sqrt[2 omin],
    chi'[-h0] == -I * omin * Exp[-I * omin * (-h0)] / Sqrt[2 omin]}, chi, {h, -h0, +h0}];
(* Lysh me arxikh synthiki sto +h_0: *)
solp = NDSolve[{eq == 0, chi[h0] == Exp[-I * omout * (+h0)] / Sqrt[2 omout],
    chi'[h0] == -I * omout * Exp[-I * omout * (
          +h0)] / Sqrt[2 omout]}, chi, {h, +h0, -h0}];
eq2 = chi''[h] + (kt^2 + m^2 * F[h]) * chi[h];
solm2 = NDSolve[{eq2 == 0, chi[-h0] == Exp[-I * omin2 * (-h0)] / Sqrt[2 omin2],
    chi'[-h0] == -I * omin2 * Exp[-I * omin2 * (-h0)] / Sqrt[2 omin2]}, chi, {h, -h0, +h0}];
solp2 = NDSolve[{eq2 == 0, chi[h0] == Exp[-I * omout2 * (+h0)] / Sqrt[2 omout2],
    chi'[h0] == -I * omout2 * Exp[-I * omout2 * (
          +h0)] / Sqrt[2 omout2]}, chi, {h, +h0, -h0}];

Uin[h_, x_] =  (2 Pi)^(-1 / 2) E^{I * k * x} (chi[h] /. solm);
UinD[h_, x_] = D[Uin[h, x], h];
Uinstar[h_, x_] = Conjugate [Uin[h, x]];
UinstarD[h_, x_] = Conjugate[UinD[h, x]];

Utin[h_, x_] = (2 Pi)^(-1 / 2) E^{I * kt * x} (chi[h] /. solm2);
UtinD[h_, x_] = D[Utin[h, x], h];
Utinstar[h_, x_] = Conjugate[Utin[h, x]];
UtinstarD[h_, x_] = Conjugate [UtinD[h, x]];

(* eswteriko ginomeno (u_k^{in} , u_k^{in}) *)
Es[h_] = -I Integrate[Uin[h, x] * UinstarD[h, x] - Uinstar[h, x] * UinD[h, x],
    {x , -100 000, 100 000}];
```

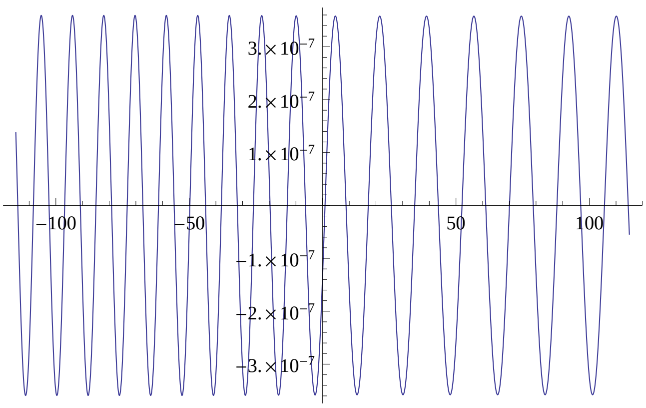
```
Plot[Re[Es[h]] , {h, -h0, h0}, PlotRange → {28 000, 35 000}]
```



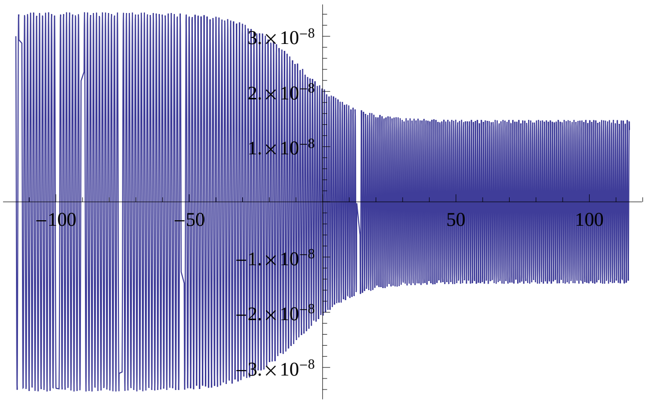

```
(* kanonikopoihmeno eswteriko ginomeno (u_k^{in} , u_k^{in}) *)
Plot[Re[Es[h] / Es[h]] , {h, -h0, h0}, PlotRange → {0, 2}]
```



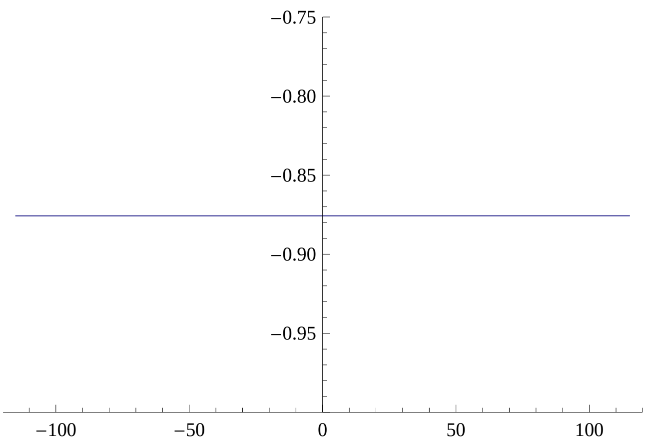

```
(* kanonikopoihmeno eswteriko ginomeno (u_k^{in} , u_k'^{in}) *)
Es2[h_] = -I Integrate[Uin[h, x] * UinstarD[h, x] - Utinstar[h, x] * UinD[h, x],
    {x , -100 000 , 100 000}];

Plot[Re[Es2[h] / Es[h]] , {h, -h0, h0}]
```



```
(* kanonikopoihmeno eswteriko ginomeno (u_k^{in} , {u_k'^{in})}^* *)
Es3[h_] = -I Integrate[Uin[h, x] * UtinD[h, x] - Utin[h, x] * UinD[h, x],
    {x , -100 000 , 100 000}];

Plot[Re[Es3[h] / Es[h]], {h, -h0, h0}]
```

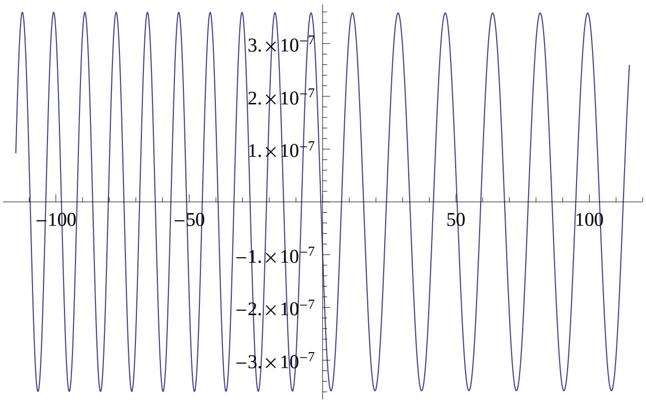



```
Uout[h_, x_] = (2 Pi)^(-1 / 2) E^{I * k * x} (chi[h] /. solp);
Uoutstar[h_, x_] = Conjugate[Uout[h, x]];
UoutstarD[h_, x_] = Conjugate[UoutD[h, x]];
UoutD[h_, x_] = D[Uout[h, x], h];

Utout[h_, x_] = (2 Pi)^(-1 / 2) E^{I * kt * x} (chi[h] /. solp2);
UtoutD[h_, x_] = D[Utout[h, x], h];
Utoutstar[h_, x_] = Conjugate[Utout[h, x]];
UtoutstarD[h_, x_] = Conjugate[UtoutD[h, x]];

(* suntelesths bogolubov a_{kk}, sxesh (4.32) *)
Alphakk[h_] = -I Integrate[Uin[h, x] * UoutstarD[h, x] - Uoutstar[h, x] * UinD[h, x],
    {x , -100 000 , 100 000}];

Plot[Re[Alphakk[h] / Es[h]] , {h, -h0, h0}, PlotRange → {-1, -0.75}]
```

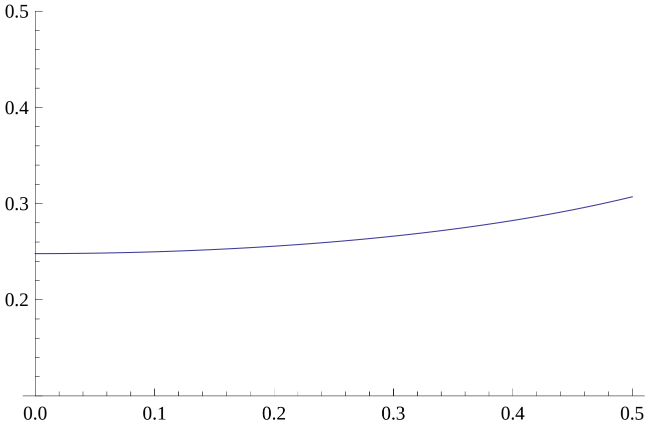


```
(* suntelesths bogolubov a_{kk'}, k diaforo k' *)
Alphakkt[h_] = -I Integrate[Uin[h, x] * UtoutstarD[h, x] - Utoutstar[h, x] * UinD[h, x],
    {x , -100 000 , 100 000}];
```

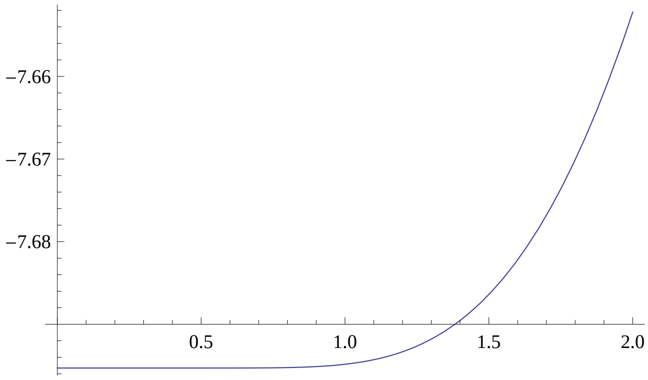
```
Plot[Re[Alphakkt[h] / Es[h]], {h, -h0, h0}]
```



```
(* Arithmhtika sumperasmata ths enothtas 4.6 *)

(* Otan to synoliko megethos ths epektashs teinei sto mhden
  to |\beta_k|^2 einai analogo tou B^2 kai teinei sto mhden*)
A = 1;  rho = 10; m = 0.5;  k = 0;
omin[B_] = Sqrt[k^2 + m^2 * (A - B)]; omout[B_] = Sqrt[k^2 + m^2 * (A + B)];
omegaplin[B_] = 1 / 2 * (omout[B] - omin[B]);


beta1[B_] = (Sinh[Pi * omegaplin[B] / rho]^2) /
   (Sinh[Pi * omin[B] / rho] Sinh[Pi * omout[B] / rho]) ;


Plot[beta1[B] / B^2, {B, 0, 0.5}, PlotRange → {0.1, 0.5}]
```

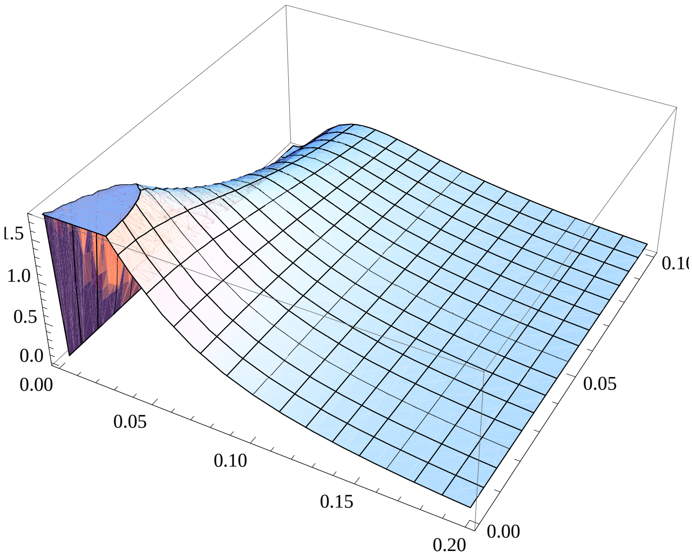



```
(* To |\beta_k|^2 meionetai ekthetika
  me th meiosh tou sydelesth epektashs rho *)
A = 150;  B = 148;  m = 0.5;  k = 1;
omin = Sqrt[k^2 + m^2 * (A - B)]; omout = Sqrt[k^2 + m^2 * (A + B)];
omegaplin = 1 / 2 * (omout - omin);

beta1[rho_] = (Sinh[Pi * omegaplin / rho]^2) /
   (Sinh[Pi * omin / rho] Sinh[Pi * omout / rho]);

Plot[rho * Log[Re[beta1[rho]]], {rho, 0, 2}]
```



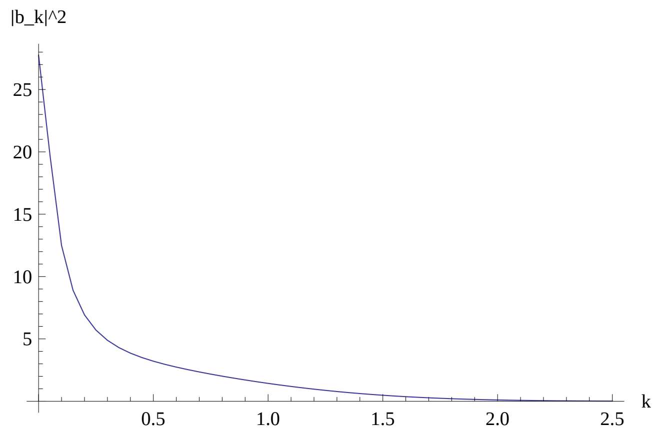
```
(* To |\beta_k|^2 auksanetai me th meiosh twn k kai m *)
A = 150;  B = 148;  rho = 0.8; ;
omin[m_, k_] = Sqrt[k^2 + m^2 * (A - B)]; omout[m_, k_] = Sqrt[k^2 + m^2 * (A + B)];
omegaplin[m_, k_] = 1 / 2 * (omout[m, k] - omin[m, k]);

beta1[m_, k_] = (Sinh[Pi * omegaplin[m, k] / rho]^2) /
   (Sinh[Pi * omin[m, k] / rho] Sinh[Pi * omout[m, k] / rho]);

Plot3D[Re[beta1[m, k]], {m, 0, 0.2}, {k, 0, 0.1}]
```

Out[5]=



```
(* Eisagwgh ths vathmwths kampylothtas R *)

A = 10; B = 9.9; rho = 2.5; h0 = 15; m = 0.16; ksi = 0.35;
Do[
 (*Clear["h"];*)
 k = 0.05 * i;
 F[h_] = A + B * Tanh[rho * h];
 omin = Sqrt[k^2 + m^2 * (A - B)]; omout = Sqrt[k^2 + m^2 * (A + B)];

 R[h_] = (B * rho^2 * (2 * A Tanh[rho h]^3 - 2 * A * Tanh[rho h] + B * Tanh[rho h]^4 - B)) /
   ((F[h])^2);
 eq = chi''[h] + (k^2  + m^2 * F[h] + ksi R[h]) * chi[h];
 (* Lysh me arxikh synthiki sto -h_0: *)
 solm = NDSolve[{eq == 0, chi[-h0] == Exp[-I * omin * (-h0)] / Sqrt[2 omin],
    chi'[-h0] == -I * omin * Exp[-I * omin * (-h0)] / Sqrt[2 omin]}, chi, {h, -h0, +h0}];
 (* Lysh me arxikh synthiki sto +h_0: *)
 solp = NDSolve[{eq == 0, chi[h0] == Exp[-I * omout * (+h0)] / Sqrt[2 omout],
    chi'[h0] == -I * omout * Exp[-I * omout * (
          +h0)] / Sqrt[2 omout]}, chi, {h, +h0, -h0}];

 Uin[h_, x_] =  (2 Pi)^(-1 / 2) E^{I * k * x} (chi[h] /. solm);
 UinD[h_, x_] = D[Uin[h, x], h];
 Uinstar[h_, x_] = Conjugate [Uin[h, x]];
 UinstarD[h_, x_] = Conjugate[UinD[h, x]];

 Uout[h_, x_] = (2 Pi)^(-1 / 2) E^{I * (-k) * x} (chi[h] /. solp);
 UoutD[h_, x_] = D[Uout[h, x], h];
 beta[h_] = Abs[(I Integrate[ Uin[h, x] * UoutD[h, x] -  Uout[h, x] *  UinD[h, x],
        {x , -100 000, 100 000}]) /
     -(I Integrate[Uin[h, x] * UinstarD [h, x] - Uinstar[h, x] * UinD[h, x],
         {x , -100 000, 100 000}])]^2;

 (*h=0.1 * i;*)
 betastore[i] = Re[beta[0]][[1]], {i, 0, 50}]

In[23]:= data = Table[{0.05 * j, betastore[j]}
   , {j, 0, 50}];

In[24]:=
ListLinePlot[data, PlotRange → All, AxesLabel → {"k", "|b_k|^2"}]
```

Out[24]=



Βιβλιογραφία

[1] Aitchison I., Hey A.
Gauge Theories in Particle Physics, Institute of Physics Publishing (2003).

[2] Birrell N., Davies P.
Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press (1982).

[3] Carroll S.
Spacetime and Geometry, Addison Wesley (2004).

[4] Fulling S.
Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time , Cambridge University Press (1989).

[5] Ford L.
Quantum Field Theory in Curved Spacetime, arXiv:gr-qc/9707062 v1. (1997)

[6] Glendenning N.
Special and General Relativity, Springer (2007)

[7] Hooft G.
Introduction to General Relativity

[8] Mukhanov V., Winitzki S.
Introduction to Quantum Fieds in Classical Backgrounds,
Cambridge University Press(2007).

[9] Parker L. , Toms D.
Quantum Field Theory in Curved Spacetime, Cambridge University Press (2009).

[10] Peskin M. , Schroeder D.
An Introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books (1995).

[11] Weinberg S.
Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons (1972).

[12] Ζουπάνος Γ.
Σημειώσεις Σχετικιστικής Κβαντομηχανικής

[13] Κόκκοτας Κ
Σημειώσεις Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

[14] Τραχανάς Σ.
Σχετικιστική Κβαντομηχανική, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (1999).