



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΜΠΙΑΓΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΣΕ
ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Σ. ΧΑΤΖΗΦΩΤΗ

Διπλωματούχου Σχολών Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών
Υπολογιστών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
ΕΜΠ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ
Ομότιμος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

22 Απριλίου 2024



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΜΠΑΓΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΣΕ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Σ. ΧΑΤΖΗΦΩΤΗ

Διπλωματούχου Σχολών Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών
Υπολογιστών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
ΕΜΠ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Γ. Κουτσούμπας, Ομ. Καθ.
ΕΜΠ

2. Ν. Μαυρόματος, Καθ. ΕΜΠ

3. Μ. Σαριδάκης, Κύριος
Ερευνητής ΙΑΑΔΕΤ

4. Ε. Παπαντωνόπουλος, Ομ.
Καθ. ΕΜΠ

5. Α. Κεχαγιάς, Καθ. ΕΜΠ

6. Κ. Αναγνωστόπουλος, Καθ.
ΕΜΠ

7. Χ. Χαρμούσης, Διευθυντής
Ερευνών Université Paris-Saclay

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Γ. Κουτσούμπας, Ομ. Καθ.
ΕΜΠ

2. Ν. Μαυρόματος, Καθ. ΕΜΠ

3. Μ. Σαριδάκης, Κύριος
Ερευνητής ΙΑΑΔΕΤ

22 Απριλίου 2024

“Do not be sorry for your shortcomings, be better ”

Ευχαριστίες

... Με το πέρας της διδακτορικής μου διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ.Γιώργο Κουτσούμπα για την στήριξη του όλα αυτά τα χρόνια, από την εποχή της διπλωματικής μου εργασίας στο μεταπτυχιακό μέχρι και τώρα. Θέλω επίσης να εκφράσω τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη στους καθηγητές κ.Νίκο Μαυρόματο και κ.Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο αλλά και στους συνεργάτες Παναγιώτη Δορλή, Αθανάσιο Μπακόπουλο και Θοδωρή Νάκα για την υπέροχη συνεργασία μας. Τους ευχαριστώ για τη στήριξη τους, για το πάθος τους για το αντικείμενο και για τις έντονες συζητήσεις μας. Δε θα βρισκόμουν σε αυτό το σημείο χωρίς αυτούς.

Ευχαριστώ επίσης την οικογένεια μου, που είναι κοντά μου όλα αυτά τα χρόνια, τόσο σε επίπεδο σπουδών, όσο και στη καθημερινότητα μου, με ιδιαίτερη αναφορά στο θείο μου, Δημήτρη Χατζηφώτη, που ήταν ο πρώτος άνθρωπος που στήριξε την απόφαση μου να ασχοληθώ με τη Φυσική.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ καρδίας προσωπικούς φίλους και κοντινούς μου ανθρώπους που είτε απλά με τη παρουσία τους είτε με την βοήθεια και τη στήριξη τους, μου έδωσαν κουράγιο να αντιμετωπίσω τις όποιες δυσκολίες προέκυψαν. Τους ανακοινώνω εδώ σε αλφαβητική σειρά, με ιδιαίτερη χαρά για το πλήθος των ατόμων που προκύπτουν, και αφιερώνω τη διατριβή αυτή σε αυτούς ως αποτέλεσμα της πίστης τους σε εμένα.

Μάνος Αγουρίδης, Βαγγέλης Αλεξόπουλος, Κωνσταντίνος Διακάκης, Πάνος Δορλής, Άννα Δρόσου, Έντουαρντ Ζίνγκερ, Δημοσθένης Θεοφιλόπουλος, Θοδωρής Κιζέλης, Ηλίας Κόκκοτος, Νίκος Κοσκινάς, Μαρία Κυθρεώτου, Γιώργος Μανωλάκος, Φώτης Μαραγκός, Νίκος Μαυρόματος, Αθανάσιος Μπακόπουλος, Θοδωρής Νάκας, Γρηγόρης Πατέλλης, Πηνελόπη Ποταμιάνου, Μυρτώ Ραμμοπούλου, Σωτήρης Χασάπογλου, Όλγα Χατζηφώτη

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή είχε επίκεντρο την εξαγωγή και ανάλυση τοπικών λύσεων σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας. Η αρχική ερευνητική εργασία στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής επικεντρώθηκε στη μελέτη ενός βαθμωτού πεδίου το οποίο διαδίδεται στη γεωμετρία σκουληκότρυπας Korolev-Sushkon με μη-τετριμμένη ασυμπτωτική συμπεριφορά Anti-deSitter. Ασχοληθήκαμε με την εξαγωγή των ιδιοκαταστάσεων του βαθμωτού πεδίου και υπολογίσαμε τα πιθανά πλάτη μετάβασης μέσω φαινομένων σήραγγος [1]. Έπειτα, η έρευνα μας οδηγήθηκε στην μελέτη της βαρυτικής ευστάθειας της γνωστής μελανής οπής Rinaldi στο πλαίσιο της θεωρίας Horndeski. Χρησιμοποιήσαμε αξονικές διαταραχές γεωμετρίας και εξάγαμε την ενεργή εξίσωση Schroedinger που διέπει τις διαταραχές, η οποία χρησιμοποιήθηκε προς την απόδειξη ευστάθειας της γεωμετρίας Rinaldi κάτω από αξονικές διαταραχές. Δείξαμε ότι η ύπαρξη των ασυμπτωτικών AdS παράγουν φαινόμενα ηχούς τα οποία επαναδιαταράσσουν τη φωτόσφαιρα της γεωμετρίας, κάτι το οποίο επιμήκυνε τη διαδικασία σταθεροποίησης της μελανής οπής κάτω από διαταραχές. Επιπροσθέτως, στο εν λόγω άρθρο [2], αποδείξαμε ότι η γεωμετρία σκουληκότρυπας, που αποτέλεσε τη βάση της προηγούμενης ερευνητικής εργασίας, ήταν απλά μία γέφυρα Einstein-Rosen, κάτι το οποίο ακύρωνε πρακτικά την ορθότητα της λύσης Korolev-Sushkon ως προσπελάσιμη σκουληκότρυπα. Εκπορεύομενοι από το εν λόγω αποτέλεσμα, προτείναμε μία μεθοδολογία εξαγωγής λύσεων σκουληκότρυπας στη θεωρία μέσω δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας [3] και παρουσιάσαμε τη δυνατότητα εξαγωγής μεταβαλλόμενων λύσεων μεταξύ γεωμετρίας μελανής οπής, κανονικοποιημένης μελανής οπής και προσπελάσιμης σκουληκότρυπας. Δείξαμε ότι η μετάβαση στη γεωμετρία εξαρτάται από έναν ενεργό λόγο της μάζας του αντικειμένου προς μία κλίμακα μήκους της θεωρίας στο δύσμορφο πλαίσιο, ενώ παρουσιάσαμε και την απόκριση βαθμωτών διαταραχών για την εκάστοτε κατάσταση της γεωμετρίας.

Στο τρίτο έτος της διατριβής, από το οποίο ξεκινάει και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μας στο κείμενο (κεφάλαιο 2), ασχοληθήκαμε με τη βαρυτική θεωρία Chern Simons και εξάγαμε επιτυχώς τη γεωμετρία μίας αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής με μη τετριμμένο αξιονικό νέφος, ενώ υπολογίσαμε επίσης όλους τους όρους της παραμόρφωσης της γεωμετρίας [4]. Η εργασία επεκτείνε προϋπάρχοντα αποτελέσματα στις τοπικές λύσεις Chern-Simons, όπου η προσέγγιση της παραμόρφωσης της μελανής οπής είχε γίνει με διαταρακτικό τρόπο στη σταθερά σύζευξης. Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα μας, ασχοληθήκαμε με τις ιδιότητες της γεωμετρίας σε συνθήκες ισχυρής ενεργής σύζευξης όπου η διαταρακτική προσέγγιση παύει να ισχύει. Επιβεβαιώσαμε ότι το αξιονικό νέφος είναι ικανό να αντιστρέψει τη στροφορμή του ορίζοντα της μελανής οπής κάτω από κρίσιμες τιμές της σταθεράς σύζευξης προς το μέγεθος της μελανής οπής, υποδεικνύοντας έτσι ότι η πιθανή τροποποίηση της βαρυτικής δράσης πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ως προς τη φυσική κλίμακα της λύσης κενού της θεωρίας [5]. Η ανάλυση μας επίσης εξακρίβωσε την ύπαρξη καινούριων ευσταθών τροχιών στην παραμορφωμένη μελανή οπή.

Στο τέταρτο έτος της διατριβής, ασχοληθήκαμε με γεωμετρικές βαρυτικών μονοπόλων σε ένα ενεργό τετραδιάστατο μοντέλο βαρύτητας που προκύπτει από την θεωρία Lovelock [6] με μη-τετριμμένη συνεισφορά του όρου Gauss-Bonnet. Η έρευνα μας απέδειξε ότι η κλίμακα μήκους του όρου Gauss-Bonnet είναι ικανή να κανονικοποιήσει το βαρυτικό μονόπολο σε κέντρο deSitter και θετική μάζα

ADM , κάτι το οποίο δεν ισχύει στο σενάριο της Γενικής Σχετικότητας. Επιβεβαιώσαμε τα αποτελέσματα μας με ημιαναλυτικό και αριθμητικό τρόπο, που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3.

Στη συνέχεια, μελετήσαμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες μελανών οπών με κόμη (hairy μελανές οπές) προς την κατεύθυνση της θερμοδυναμικής ευστάθειας [7], η οποία ανάλυση παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4. Εργαστήκαμε σε ένα πλήρως γενικό πλαίσιο θεωριών βαθμωτού τανυστή, όπου η τροποποίηση της θεωρίας εξαρτάται από μία σταθερά σύζευξης με διαστάσεις μήκους. Αποδείξαμε ότι αν το δευτερεύον βαθμωτό φορτίο της hairy μελανής οπής που υποστηρίζεται από την εκάστοτε θεωρία παραμορφώνει την εσωτερική δομή της γεωμετρίας, δημιουργώντας εσωτερικό ορίζοντα, τότε η μελανή οπή της εκάστοτε τροποποιημένης θεωρίας βαρύτητας μπορεί να οδηγηθεί σε θερμοδυναμική ευστάθεια. Κάτι τέτοιο είναι προφανώς εφικτό μόνο σε μία μη-διαταραχτική προσέγγιση. Έτσι, σε αντίθεση με τη μελανή οπή Schwarzschild , οι μελανές οπές με μέγεθος συγκρίσιμο ως προς την σταθερά σύζευξης της τροποποιημένης θεωρίας μπορούν να εκτελέσουν μετάβαση φάσης πρώτης τάξης στο θερμοδυναμικό παραμετρικό χώρο. Η ανάλυση μας χρησιμοποίησε αναλυτικά αλλά και τοπολογικά επιχειρήματα, όπου η εν λόγω μετάβαση φάσης ταυτοποιήθηκε με μία διακριτή αλλαγή θερμοδυναμικού τοπολογικού τομέα που χαρακτηρίζεται από ένα αντίστοιχο τοπολογικό φορτίο.

Ακολούθως, ασχοληθήκαμε με την γενική περίπτωση μίας ενεργής τετραδιάστατης θεωρίας Lovelock , χωρίς κάποια συμμετρία στο χώρο πεδίου, που καταλήγει σε ένα ευρύτερο πλαίσιο θεωριών Horndeski . Επιβεβαιώσαμε τη λύση της σκουληκότρυπας Ellis κάτω από κατάλληλη επιλογή των ενεργών δυναμικών του πεδίου της συμπαγοποίησης [8]. Η θεωρία που καταλήξαμε περιγράφεται από μη-τετριμμένη σύζευξη στον όρο Gauss-Bonnet αλλά και από παραγωγίσεις πεδίου υψηλότερης τάξης. Στο πλαίσιο αυτό, εργαστήκαμε επίσης με επιτυχία προς την εξαγωγή έμμορφης προσπελάσιμης σκουληκότρυπας στη θεωρία, όπου παρουσιάσαμε δύο διαφορετικές μεθοδολογίες προς την κατεύθυνση αυτή. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 5

Τέλος, η τελευταία ερευνητική μας δραστηριότητα πριν τη παρουσίαση της διατριβής, που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 6, επικεντρώθηκε σε θεωρίες Beyond Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης του πεδίου. Παρουσιάσαμε έναν αυτοσυνεπή αλγόριθμο εύρεσης στατικών και σφαιρικά συμμετρικών λύσεων με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο, ο οποίος είναι λειτουργικός σε όλους τους υποκλάδους της θεωρίας. Λόγω των φαινομενικά άπειρων υποκλάδων, επικεντρωθήκαμε σε μοντέλα δράσης Beyond Horndeski με γραμμική συσχέτιση μεταξύ των συναρτησιακών G_2 και G_4 . Καταφέραμε να εξάγουμε λύσεις hairy μελανών οπών, κανονικοποιημένων μελανών οπών αλλά και σολιτονικές γεωμετρίες [9]. Όλες οι λύσεις που εξάγαμε είχαν μη-τετριμμένη συνεισφορά πρωτεύοντος βαθμωτού φορτίου στη γεωμετρία, η ύπαρξη του οποίου επιβεβαιώθηκε από αυστηρά μαθηματικά επιχειρήματα. Επιβεβαιώσαμε ότι οι λύσεις αυτές ικανοποιούν τις ενεργειακές συνθήκες κάτι το οποίο τις καθιστά πιο υγιή συμπαγή αντικείμενα από τις περισσότερες τοπικές λύσεις τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας. Επιπροσθέτως, ασχοληθήκαμε με την ακύρωση πιθανών παθολογιών σε κάποιες προβληματικές γεωμετρίες μέσω δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας και με την πιθανή ύπαρξη γεωμετριών σκουληκότρυπας στις εν λόγω θεωρίες.

Λίστα επιστημονικών δημοσιεύσεων

Μία λίστα με τις δημοσιεύσεις που περιέχονται στην παρούσα διατριβή δίνεται παρακάτω σε χρονολογική σειρά:

- [Scalarization of Chern-Simons-Kerr black hole solutions and wormholes](#),
N. Chatzifotis, P. Dorlis, N. E. Mavromatos and E. Papantonopoulos, Phys. Rev. D **105** (2022) no.8, 084051 doi:10.1103/PhysRevD.105.084051 [arXiv:2202.03496 [gr-qc]][4]. (Κεφάλαιο 2)
- [Axion induced angular momentum reversal in Kerr-like black holes](#),
N. Chatzifotis, P. Dorlis, N. E. Mavromatos and E. Papantonopoulos, Phys. Rev. D **106** (2022) no.8, 084002 doi:10.1103/PhysRevD.106.084002 [arXiv:2206.11734 [gr-qc]][5]. (Κεφάλαιο 2)
- [Global monopoles in the extended Gauss-Bonnet gravity](#),
N. Chatzifotis, N. E. Mavromatos and D. P. Theodosopoulos, Phys. Rev. D **107** (2023) no.8, 085014 doi:10.1103/PhysRevD.107.085014 [arXiv:2212.09467 [gr-qc]][6]. (Κεφάλαιο 3)
- [Thermal stability of hairy black holes](#),
N. Chatzifotis, P. Dorlis, N. E. Mavromatos and E. Papantonopoulos, Phys. Rev. D **107** (2023) no.8, 084053 doi:10.1103/PhysRevD.107.084053 [arXiv:2302.03980 [gr-qc]][7]. (Κεφάλαιο 4)
- [Stealth Ellis Wormholes In Horndeski theories](#),
A. Bakopoulos, N. Chatzifotis, C. Erices and E. Papantonopoulos, JCAP 11 (2023) 055, doi: 10.1088/1475-7516/2023/11/055 [arXiv:2306.16768 [hep-th]][8]. (Κεφάλαιο 5)
- [Compact objects with primary hair in shift and parity symmetric beyond Horndeski gravities](#),
A. Bakopoulos, N. Chatzifotis and T. Nakas [arXiv:2312.17198 [gr-qc]][9]. (Κεφάλαιο 6)

Επιπλέον δημοσιεύσεις στις οποίες συμμετείχε ο συγγραφέας κατά την πραγματοποίηση της συγκεκριμένης διατριβής, αλλά οι οποίες δεν παρουσιάζονται στην παρόν κείμενο δίνονται παρακάτω:

- [Formation of bound states of scalar fields in AdS-asymptotic wormholes](#),

N. Chatzifotis, G. Koutsoumbas and E. Papantonopoulos, Phys. Rev. D **104** (2021) no.2, 024039 doi:10.1103/PhysRevD.104.024039 [arXiv:2011.08770 [gr-qc]][1].

- [Stability of black holes with non-minimally coupled scalar hair](#),

N. Chatzifotis, C. Vlachos, K. Destounis and E. Papantonopoulos, Gen. Rel. Grav. **54** (2022) no.6, 49 doi:10.1007/s10714-022-02929-0 [arXiv:2109.02678 [gr-qc]][2].

- [Disformal Transition of a Black Hole to a Wormhole in Scalar-Tensor Horndeski Theory](#),

N. Chatzifotis, E. Papantonopoulos and C. Vlachos, Phys. Rev. D **105** (2022) no.6, 064025 doi:10.1103/PhysRevD.105.064025 [arXiv:2111.08773 [gr-qc]][3].

Κατά τη διάρκεια του διδακτορικού κατασκευάστηκαν επίσης οι ακόλουθες σημειώσεις Γενικής Σχετικότητας προς χρήση στο μάθημα 'Γενική Σχετικότητα και Κοσμολογία' του μεταπτυχιακού προγράμματος 'Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές' της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών:

[Σημειώσεις Γενικής Σχετικότητας 2022](#)

Χρηματοδότηση

Η παρούσα εργασία υποστηρίχθηκε μερικώς από το ερευνητικό πρόγραμμα ΠΕΒΕ2021, ΕΜΠ ΕΛ-ΚΕ, με τίτλο 'Μείωση Κοσμολογικών Τάσεων μέσω Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας' με κωδικό 65232600.

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	1
1.1	Το ζήτημα της Κβαντικής Βαρύτητας	1
1.2	Περιορισμοί της Γενικής Σχετικότητας και ανάγκες τροποποίησης της βαρύτητας	4
1.3	Τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας	8
2	Η τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας Chern-Simons	12
2.1	Εισαγωγή	12
2.2	Το μοντέλο της θεωρίας Chern-Simons	14
2.3	Τοπικές λύσεις στη θεωρία Chern-Simons	16
2.4	Η παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών στη τοπική λύση Chern-Simons	20
2.5	Συμπεριφορά γεωδαισιακών υπό συνθήκες ισχυρής σύζευξης στη γεωμετρία	22
2.6	Η κατανομή της στροφορμής στην τοπική λύση Chern-Simons	27
2.7	Σκουληκότρυπες από ταίριασμα γεωμετριών στη θεωρία Chern-Simons	30
2.8	Το πρόβλημα των ισχυρά περιστρεφόμενων λύσεων	38
2.9	Συμπεράσματα	39
3	Καθολικά μονόπολα στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet	42
3.1	Εισαγωγή στα καθολικά μονόπολα	42
3.2	Η τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet	45
3.3	Καθολικά μονόπολα θετικής μάζας στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet	47
3.4	Αριθμητικά αποτελέσματα για το καθολικό μονόπολο στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet	51

3.5	Συμπεράσματα	54
4	Θερμοδυναμική ευστάθεια μελανών οπών με κόμη	57
4.1	Εισαγωγή	57
4.2	Μελανές οπές σε λουτρό θερμότητας και κριτήρια θερμοδυναμικής ευστάθειας	58
4.3	Μελανές οπές ως τοπολογικές ατέλειες στον θερμοδυναμικό παραμετρικό χώρο	63
4.4	Hairy μελανές οπές με δευτερεύον βαθμωτό φορτίο και κριτήρια θερμοδυναμικής ευστάθειας	65
4.5	Το ζήτημα του ελάχιστου μήκους σε hairy μελανές οπές και συμπεράσματα	69
5	Προσπελάσιμες σκουληκότρυπες τύπου Ellis σε θεωρίες Horndeski	74
5.1	Εισαγωγή στις σκουληκότρυπες	74
5.2	Η λύση σκουληκότρυπας Ellis στη θεωρία Horndeski από γενίκευση των δυναμικών Lovelock	80
5.3	Έμμαζες σκουληκότρυπες σε θεωρίες Horndeski από δύσμορφους μετασχηματισμούς της Ellis	85
5.4	Επαναβαθμωτοποίηση της σκουληκότρυπας Ellis : Έμμαζες σκουληκότρυπες από διαταρακτική προσέγγιση	88
5.5	Συμπεράσματα	91
6	Μελανές οπές με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο σε θεωρίες Beyond Horndeski	93
6.1	Επισκόπηση παραβιάσεων του θεωρήματος no-hair σε θεωρίες βαθμωτού ταχυστή	93
6.2	Η θεωρία Beyond Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης στο πεδίο	95
6.3	Ομοιογενείς τοπικές λύσεις της Beyond Horndeski	100
6.4	Δύσμορφοι μετασχηματισμοί γεωμετρίας στην Beyond-Horndeski	104
6.4.1	Αχύρωση της υπολειπόμενης στερεάς γωνίας σε γεωμετρίες μελανής οπής με ασυμπτωτική συμπεριφορά βαρυτικού μονοπόλου	106
6.4.2	Το ζήτημα ύπαρξης σκουληκότρυπας στη θεωρία Beyond-Horndeski με πρωτεύον φορτίο από τη συμμετρία ολίσθησης	107
6.5	Οι γενικές περιπτώσεις χωρίς γραμμική εξάρτηση των G_2 και G_4	108
6.6	Συμπεράσματα	110

7 Επίλογος	113
8 Παραρτήματα	117
Α' Ιδιότητες του όρου Chern-Simons και του τανυστή Cotton	118
Β' Λύση του αξιονίου στην αργά περιστρεφόμενη γεωμετρία Kerr	124
Γ' Σύγκλιση της διόρθωσης στη γεωμετρία της τοπικής λύσης στη θεωρία Chern-Simons	126
Δ' Κανόνες μετασχηματισμού βαρυτικών τανυστών κάτω από δύσμορφους μετασχηματισμούς γεωμετρίας	130
Ε' Αλγόριθμος εξαγωγής λύσεων με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο για θεωρίες Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης πεδίου	132

Κεφάλαιο 1

Πρόλογος

1.1 Το ζήτημα της Κβαντικής Βαρύτητας

Παρά το γεγονός ότι η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι πιθανώς η πιο θεμελιώδης φυσική διεργασία, παραμένει ως η πιο ανιγματική θεωρία φυσικής του σήμερα. Πράγματι, το μεγαλύτερο ποσοστό της ερευνητικής κοινότητας συμφωνεί ότι η μοντέρνα φυσική του 20ου και 21ου αιώνα βασίζεται σε πρακτικά δύο πυλώνες, την Γενική Σχετικότητα και τη Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Και οι δύο θεωρίες μετράνε πολλές επιτυχίες στην εξήγηση των φαινομένων που τις αφορούν. Η Γενική Σχετικότητα παρέχει το μαθηματικό πλαίσιο εξήγησης βαρυτικών συστημάτων από τη σκοπιά της κλασικής φυσικής σε ένα μεγάλο εύρος ενεργειακής κλίμακας, ενώ η Κβαντική Θεωρία Πεδίου λειτουργεί σε υψηλές ενεργειακές κλίμακες όπου η κλασική προσέγγιση της φυσικής αποτυγχάνει να παρέχει σωστά αποτελέσματα. Ωστόσο, η Κβαντική Θεωρία Πεδίου υποθέτει ότι ο χωρόχρονος είναι επίπεδος, ενώ ακόμα και οι επεκτάσεις της, όπως η Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο, θεωρούν το χωρόχρονο ως μία ‘στερεά’ βάση (υπόβαθρο) πάνω στην οποία διαδίδονται τα κβαντικά πεδία, όπου η δυναμική συμπεριφορά του χωρόχρονου θεωρείται πρακτικά αμελητέα. Η Γενική Σχετικότητα, από την άλλη πλευρά, δεν λαμβάνει υπόψη την κβαντική φύση της ύλης. Συνεπώς, είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς τι συμβαίνει εάν υπάρχει ένα ισχυρό βαρυτικό πεδίο στις κβαντικές κλίμακες. Πώς συμπεριφέρονται τα κβαντικά πεδία υπό την παρουσία της βαρύτητας; Υπάρχει κάποια συμβατότητα μεταξύ αυτών των εκπληκτικών θεωριών;

Βέβαια, οφείλουμε να διευκρινίσουμε ότι δεν υπάρχει κάποια ξεκάθαρη απόδειξη ότι η βαρύτητα θα πρέπει να έχει κάποια κβαντική αναπαράσταση σε υψηλές ενέργειες (ή μικρές κλίμακες). Η βαρυτική αλληλεπίδραση είναι ιδιαίτερα ασθενής σε σύγκριση με άλλες αλληλεπιδράσεις. Η χαρακτηριστική κλίμακα κάτω από την οποία θα περιμέναμε να επιβεβαιώσουμε φαινόμενα κβαντικής βαρύτητας είναι η κλίμακα Planck $\ell_P \sim 10^{-35} m$. Μια τέτοια κλίμακα δεν είναι φυσικά προσβάσιμη από κανένα τρέχον πείραμα και είναι επίσης αμφίβολο εάν θα είναι ποτέ προσβάσιμη από μελλοντικά πειράματα. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετοί λόγοι για τους οποίους κάποιος θα προτιμούσε κανείς να συνδυάσει τη Γενική Σχετικότητα και τη Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Η περιέργεια είναι πιθανώς η κινητήρια δύναμη πίσω από την επιστημονική έρευνα. Υπό αυτή την οπτική γωνία, θα ήταν τουλάχιστον ασυνήθιστο εάν η επιστημονική κοινότητα της βαρύτητας ήταν τόσο εύκολα διατεθειμένη να εγκαταλείψει κάθε προσπάθεια μίας ενιαίας θεωρίας Κβαντικής Βαρύτητας που θα συμφιλίωνε τους δύο πυλώνες της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής. Επίπροσθέτως, το γεγονός ότι η κλίμακα Planck φαίνεται προς το παρόν πειραματικά απρόσβατη δεν σημαίνει, με κανέναν τρόπο, ότι είναι φυσικά ασήμαντη. Αντίθετα, μπορούμε εύκολα να αναφέρουμε μερικά πολύ σημαντικά ανοιχτά ζητήματα της σύγχρονης φυσικής

που σχετίζονται με την κλίμακα Planck, όπως το σενάριο του Big Bang και η φύση των μελανών οπών κοντά στη μοναδικότητα, δηλαδή το ιδιάζον σημείο καμπυλότητας του χωρόχρονου (curvature singularity).

Η ανάγκη μίας ενιαίας κβαντικής θεωρίας των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων αποτυπώνεται τα τελευταία χρόνια σε μία πληθώρα θεωρητικών μοντέλων που επιχειρήσαν τα να περιγράψουν τη βαρύτητα στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις. Οι προσπάθειες αυτές βασίστηκαν κατά κύριο λόγο στο θεμελιώδη φορμαλισμό της κβαντομηχανικής, όπου οι καταστάσεις ενός φυσικού συστήματος περιγράφονται από στοιχεία ενός χώρου Hilbert, ενώ τα φυσικά πεδία εκπροσωπούνται από τελεστές του εν λόγω χώρου. Μέχρι στιγμής, όμως, κάθε προσπάθεια να ενσωματωθεί η βαρύτητα σε αυτό το σχήμα είτε απέτυχε είτε δεν ήταν ικανοποιητική. Δύο πιθανές εξαιρέσεις των παραπάνω συναντώνται στα μοντέλα θεωρίας (υπέρ)χορδών και θεωρίας βρόχων. Ακόμα και τα μοντέλα αυτά, όμως, αντιμετωπίζουν άλλα εννοιολογικά ζητήματα, όπως η έλλειψη μοναδικής κατάστασης κενού για τη θεωρία (υπέρ)χορδών και αδυναμίας κατασκευής κατάλληλου χώρου Hilbert για τη θεωρία βρόχων. Το κύριο πρόβλημα ήταν ότι το βαρυτικό πεδίο περιγράφει ταυτόχρονα τους βαρυτικούς βαθμούς ελευθερίας και τον χωρόχρονο στον οποίο οι βαθμοί αυτοί ελευθερίας διαδίδονται. Αυτό αποτελεί μία πιο μαθηματική εξήγηση μίας βασικής αρχής της βαρυτικής αλληλεπίδρασης. Όλα τα πεδία, ανεξαιρέτως, αλληλεπιδρούν με τη βαρύτητα. Δεν υπάρχει κάποιος τρόπος να αποπλέξουμε τους βαθμούς ελευθερίας της ζητούμενης κβαντικής θεωρίας, κατάληγοντας έτσι σε μη-αντιμετωπίσιμα και μη-γραμμικά συστήματα προς κβάντωση.

Οι πρώτες προσπάθειες κβάντωσης της βαρύτητας ξεκίνησαν ήδη από τη δεκαετία του 50, ακολουθώντας το παράδειγμα των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Οι προσπάθειες αυτές κατέληξαν σε θεωρητικά αδιέξοδα λόγω του ότι η Γενική Σχετικότητα εκφυλίζεται αν τη θέσουμε σε καθορισμένο χωρόχρονο Minkowski, όπως έγινε στον ηλεκτρομαγνητισμό. Στη Γενική Σχετικότητα, ο χωρόχρονος πάνω στον οποίο διαδίδονται οι βαθμοί ελευθερίας, δε μπορεί να είναι γνωστός εκ των προτέρων, λόγω της αναλλοιωτότητας της θεωρίας κάτω από διαφορομορφισμούς. Πράγματι, ο χωρόχρονος είναι το δυναμικό πεδίο που προσπαθούμε να κβαντώσουμε. Προκειμένου να υπάρξουν καλώς ορισμένες έννοιες αιτιατότητας και χρονικής εξέλιξης του φυσικού συστήματος, οι εξισώσεις κίνησης πρέπει πρώτα να λυθούν και να εξελιχθούν, κατασκευάζοντας έτσι τον χωρόχρονο. Όπως γνωρίζουμε, κάθε φυσικό σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις οφείλει να έχει και κατάλληλες αρχικές συνθήκες ώστε να έχουμε μία αυτοσυνεπή λύση. Το πρόβλημα στην κβαντική βαρύτητα προέκυψε από το γεγονός ότι μία αρχική κατάσταση του συστήματος δεν οδηγεί σε ένα καθορισμένο χωρόχρονο, σε άμεση συσχέτιση με τη κβαντομηχανική Αρχή της Αβεβαιότητας. Επομένως, αν οι αρχικές συνθήκες δε μας παρέχουν έναν καθορισμένο χωρόχρονο, πως θα μπορούσαμε να εισάγουμε στη θεωρία θεμελιώδεις αρχές όπως η αιτιατότητα; Στις προσπάθειες αυτές, εφαρμόστηκαν η κανονική και η συναλλοιώτη προσέγγιση κβάντωσης της φυσικής θεωρίας, κάθε μία εκ των οποίων έδινε αρκετά διαφορετικές απαντήσεις αναφορικά με τη κβαντική φύση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης.

Συγκεκριμένα, η κανονική προσέγγιση χρησιμοποίησε το Χαμιλτονιανό φορμαλισμό της Γενικής Σχετικότητας. Η βάση της προσέγγισης ήταν η εφαρμογή της ανάλυσης Arnowitt-Deser-Misner (ADM) στη μετρική. Έπειτα, χρησιμοποιώντας επιφάνειες σταθερού χρόνου, κατασκευάστηκαν οι κατάλληλες τρισδιάστατες χωρικές πολλαπλότητες (ως υποπολλαπλότητες του συνολικού χωρόχρονου), πάνω στις οποίες εφαρμόστηκαν συγκεκριμένες σχέσεις μετάθεσης τελεστών, ώστε να διατηρείται η έννοια της αιτιατότητας. Στον εν λόγω φορμαλισμό, οι κανονικές μεταβλητές ήταν οι τρισδιάστατες μετρικές των υποπολλαπλοτήτων, ενώ οι εξισώσεις κίνησης του Einstein λειτουργούσαν ως περιορισμοί Langrange των εν λόγω μετρικών και των συζυγών τους ορμών, στη γνωστή πλέον (αλλά ακόμα άλυτη) εξίσωση Wheeler-De Witt. Στο όριο του ασυμπτωτικά επίπεδου χωρόχρονου, οι αντίστοιχες εξισώσεις Χαμιλτον αναγνωρίστηκαν ως η χρονική εξέλιξη

του συστήματος, κάτι το οποίο σήμαινε ότι ο Χαμιλτονιανός τελεστής κατέληγε στον τελεστή χρονικής εξέλιξης μόνο στα όρια του χωρόχρονου Minkowski. Ενώ, σε αντίθεση με τη συναλλοίωτη προσέγγιση, η κανονική προσέγγιση δε χρησιμοποιούσε την εφαρμογή κάποιου χωρόχρονου Minkowski, υπήρξαν έντονα προβλήματα στη προσέγγιση, λόγω της απουσίας κάποιου καλώς ορισμένου χώρου Hilbert για τις καταστάσεις.

Από την άλλη, η συναλλοίωτη προσέγγιση χρησιμοποίησε κατά βάση διαταρακτικές μεθόδους πάνω σε ένα χωρόχρονο Minkowski θεωρώντας ότι η μετρική εκφράζεται ως $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, όπου $h_{\mu\nu}$ υποδήλωνε το δυναμικό κομμάτι της γεωμετρίας. Πρακτικά, η κβάντωση του βαρυτικού ταυυστή $h_{\mu\nu}$ προσεγγίστηκε με τις συνήθεις μεθόδους της κβαντικής θεωρίας πεδίου, όπου θεωρήθηκε μία βάση χωρόχρονου Minkowski πάνω στην οποία διαδίδεται το σπιν 2 βαρυτόνιο $h_{\mu\nu}$. Παρόλαυτά, η μη-γραμμική φύση της δράσης Einstein-Hilbert επέβαλλε τη θεώρηση ότι το βαρυτόνιο αποτελεί παρά μόνο μία μικρή διαταραχή πάνω στο χωρόχρονο Minkowski, αν θέλουμε να μπορούμε να εξάγουμε οποιοδήποτε αποτέλεσμα, και οι αλληλεπιδράσεις του με τα πεδία ύλης εκφράστηκαν συνεπώς με διαταρακτικό τρόπο. Ενώ κάτι τέτοιο αποτέλεσε ένα πολύ σημαντικό βήμα, η προσπάθεια αποτυγχάνει στην αντιμετώπιση της ουσίας του προβλήματος, που ήταν η θεώρηση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο με τα κβαντικά πεδία.

Στη συνέχεια, ακολούθησε η ερμηνευση της βαρυτικής θεωρίας ως μία θεωρία βαθμίδας Yang-Mills της τοπικής ομάδας Lorentz, σε άμεση συσχέτιση με την κβάντωση των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων. Όμως, όπως είναι πασίγνωστο πλέον, η θεωρία Γενικής Σχετικότητας υπό το πρίσμα θεωριών βαθμίδας δεν ήταν επανακανονικοποιήσιμη. Συγκεκριμένα, σε ενεργειακές κλίμακες πέρα των δύο βρόχων στις σχεδιάσεις βαρυτονίου-βαρυτονίου, αποδείχθηκε ότι χρειάζονται άπειροι όροι για την ακύρωση των απειριών. Συνεπώς, λόγω της μη-επανακανονικοποιησιμότητας της Γενικής Σχετικότητας, επιβεβαιώθηκε ότι η ερμηνεία του κβαντικής βαρύτητας μέσω του βαρυτονίου είναι εφαρμόσιμη μόνο σε χαμηλές ενεργειακές κλίμακες, κάτι το οποίο είναι αυτοσυνεπές με τα παραπάνω σχόλια, αναφορικά με τη συναλλοίωτη προσέγγιση.

Μία μεγάλη θεωρητική επιτυχία στο κλάδο αυτό ήρθε με τη κατασκευή της θεωρίας χορδών. Στο μοντέλο χορδών, τα αποτελέσματα της κβάντωσης και των φυσικών διεργασιών, αλλά και η ερμηνεία τους, διέφεραν έντονα, καθώς η έννοια του σωματιδίου αντικαταστάθηκε με τη στοιχειώδη χορδή πεπερασμένης τάσης, όπου δείχθηκε ότι διαφορετικές συχνότητες ταλάντωσης της χορδής γεννούν τα σωματίδια του καθιερωμένου προτύπου αλλά και το βαρυτόνιο. Ακόμα και σήμερα, μεγάλο μέρος της ερευνητικής κοινότητας πιστεύει ότι η θεωρία χορδών είναι πράγματι η Θεωρία των Πάντων που ψάχνουμε προς την ενοποίηση των φυσικών αλληλεπιδράσεων. Το ζήτημα της μη-επανακανονικοποιησιμότητας είχε λυθεί στην εν λόγω θεωρία λόγω του ότι οι χορδές, ως εκτεταμένα δομικά στοιχεία της θεωρίας, εισήγαγαν μία φυσική κλίμακα μήκους, το μήκος Planck, που προστάτευε τις διάφορες φυσικές διεργασίες από ανεπιθύμητους απειρισμούς. Παραδόξως, όμως, το πρόβλημα βρέθηκε αλλού. Επειδή η κλίμακα χορδών (Regge slope) αποτελεί ελεύθερη παράμετρο της θεωρίας, η φαινομενολογία (αλλά και η πιθανότητα πειραματικής επιβεβαίωσης) εξαρτάται από το μέγεθος της αντίστοιχης κλίμακας μάζας, την οποία η σύγχρονη θεώρηση με βάση τα τρέχοντα πειραματικά αποτελέσματα τοποθετεί στην ελάχιστη τάξη των 10 TeV. Επιπλέον, η έλλειψη μοναδικής κατάστασης κενού δημιουργεί πρόσθετες αβεβαιότητες αναφορικά με τη μικροσκοπική εξήγηση της φύσης του χωρόχρονου. Αναφέρουμε ότι η ενεργή τετραδιάστατη θεωρία χορδών βρέθηκε σχετικά νωρίς [10], όπου επιβεβαιώθηκαν μή-τετριμμένες διορθώσεις στη δράση Einstein-Hilbert υπό παρουσία συζεύξεων του βαθμωτού πεδίου dilaton και του αξιονίου στους βαρυτικούς ταυυστές.

Λόγω λοιπόν των εν λόγω δυσκολιών και αποτελεσμάτων, η κοινότητα της θεωρητικής φυσικής αντιλήφθηκε αρκετά γρήγορα ότι, τουλάχιστον όσον αφορά τις υψηλές ενεργειακές κλίμακες, η

θεωρία της Γενικής Σχετικότητας είναι μία ενεργή θεωρία πεδίου και αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου θεωρητικού μοντέλου. Η έννοια της τροποποίησης της βαρυτικής αλληλεπίδρασης δεν είναι καθόλου καινούρια στην ιστορία της φυσικής. Πράγματι, αναφέρουμε ότι μετά τη θεμελίωση της Νευτώνιας μηχανικής, ο Mach προκάλεσε την ορθότητα των συνθηκών του Νεύτωνα, στη βάση του ότι ο χώρος δεν μπορεί να είναι μία απόλυτη έννοια. Η ιδέα του Mach ήταν ότι η αδράνεια αποτελεί και αυτή μία αλληλεπίδραση μεταξύ σωμάτων. Η εν λόγω ιδέα, που αργότερα καθιερώθηκε ως η Αρχή του Mach, χρησιμοποιήθηκε στο πεδίοθεωρητικό μοντέλο βαρύτητας του Einstein από τους Dicke et al στο πασίγνωστο πλέον μοντέλο βαρύτητας Brans-Dicke [11], όπου θεώρησαν ότι η βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα θα έπρεπε να είναι μία συνάρτηση της πυκνότητας μάζας του σύμπαντος. Η εν λόγω ιδέα αποτυπώθηκε μέσω μίας μη-τετριμμένης σύζευξης ενός βαθμωτού πεδίου στο βαθμωτό Ricci της δράσης Einstein-Hilbert. Ενώ πλέον η θεωρία Brans-Dicke έχει πρακτικά καταρριφθεί από ισχυρούς περιορισμούς, είναι άξια αναφοράς αφού έθεσε τις βάσεις προς την κατασκευή θεωριών βαθμωτού-τανυστή.

1.2 Περιορισμοί της Γενικής Σχετικότητας και ανάγκες τροποποίησης της βαρύτητας

Η βάση της προηγούμενης συζήτησης ξεκίνησε από την καθαρή επιστημονική περιέργεια της πιθανής ύπαρξης μίας ενιαίας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας. Αναφέρθηκαν επιγραμματικά κάποιοι λόγοι που υποδεικνύουν ότι η βαρυτική αλληλεπίδραση οφείλει να έχει και αυτή μία κβαντική αναπαράσταση. Θα θέλαμε να παρουσιάσουμε εδώ λίγο πιο αναλυτικά κάποια ξεκάθαρα επιχειρήματα που υποστηρίζουν αφενός αυτή τη κατεύθυνση, αλλά κυρίως οδηγούν στην ανάγκη τροποποίησης της βαρυτικής θεωρίας. Πράγματι, όπως θα δούμε, τόσο από το υπεριώδες πλαίσιο ενεργειών όσο όμως και από το υπέρυθρο, είναι σαφές ότι η Γενική Σχετικότητα αντιμετωπίζει ισχυρούς περιορισμούς στην καθολική της εφαρμογή κάτι το οποίο επιβάλλει την ανάγκη θεώρησης βαρυτικών μοντέλων με πιο πλούσια δυναμική.

Τως το πιο γνωστό ζήτημα της Γενικής Σχετικότητας είναι ο ορισμός της ενέργειας κενού και, κατά συνέπεια, της κβαντικής κατάστασης κενού. Γνωρίζουμε ότι σε μη-βαρυτικά μοντέλα φυσικής μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τις διαφορές των ενεργειών μεταξύ των καταστάσεων, που σημαίνει ότι η κανονικοποίηση της ενέργειας του φυσικού συστήματος είναι εντελώς αυθαίρετη. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στη Γενική Σχετικότητα. Πράγματι, επειδή όλα τα φυσικά δομικά στοιχεία αλληλεπιδρούν με τη βαρύτητα, η εισαγωγή οποιουδήποτε μη-τοπολογικού όρου στη δράση Einstein-Hilbert οδηγεί σε διαφορετικές εξισώσεις κίνησης και διαφορετική έννοια ενέργειας κενού. Προς την προσπάθεια να οριστεί μία ενέργεια κενού, είναι σύνθητες να περιοριστούμε σε ενέργειες κενού αναλλοίωτες κάτω από διαφορομορφισμούς. Επομένως, η πρώτη ιδέα κατασκευής μίας ενέργειας κενού που ικανοποιεί τις ταυτότητες Bianchi της συναλλοίωτης διατήρησης ήταν η θεώρηση ενός τέλει (κοσμολογικού) υγρού $T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho g_{\mu\nu}$, όπου ρ η πυκνότητα ενέργειας ενώ η αντίστοιχη ακτινική πίεση ικανοποιεί τη σχέση $P = -\rho$. Αυτό ήταν και η βάση της εισαγωγής της κοσμολογικής σταθεράς Λ στη δράση Einstein-Hilbert. Συγκεκριμένα, η πυκνότητα ενέργειας της κοσμολογικής σταθεράς δίνεται άμεσα από τη σχέση $\rho = M_p^2 \Lambda$, όπου M_p^2 είναι η μάζα Planck.

Όπως φαίνεται, είναι αρκετά εύκολο να εισάγουμε μία ενέργεια κενού στη δράση. Βέβαια, σε θεωρητικό πλαίσιο, δεν έχουμε καμία ένδειξη για την αναμενόμενη τιμή της, αφού εισάχθηκε με το χέρι στη δράση. Η τιμή της κοσμολογικής σταθεράς είναι πρακτικά μία σταθερά της φύσης. Το πρόβλημα της εν λόγω θεώρησης είναι ότι, όπως γνωρίζουμε από την κβαντική θεωρία πεδίου, οι δια-

κυμάνσεις των χβαντικών πεδίων συνεισφέρουν στη συνολική τιμή της ενέργειας κενού. Εισάγοντας ένα υπεριώδες άνω φράγμα, η συνεισφορά αυτή είναι της τάξης $\rho_{vac}^{QFT} \sim \hbar k_{max}^4 = O(10^{72}) \text{ GeV}$, ενώ από τις κοσμολογικές παρατηρήσεις έχουμε ότι $\rho_{vac}^{cosmo} = O(10^{-48}) \text{ GeV}$, κάτι το οποίο παράγει ένα σφάλμα του λόγου αναμενόμενης τιμής προς τη μετρούμενη 120 τάξεων μεγέθους. Κανείς στην ιστορία της φυσικής δεν ήταν ποτέ τόσο λάθος σε τέτοιο ποσοστό. Αυτό είναι το πασίγνωστο πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς [12]. Η ανάγκη όμως μίας ενέργειας κενού με αρνητική πίεση και θετική ενεργειακή πυκνότητα έχει επιβεβαιωθεί από κοσμολογικές παρατηρήσεις προκειμένου να εξηγηθεί η διαστολή του σύμπαντος. Πράγματι, σύμφωνα με το μοντέλο Λ CDM, γνωρίζουμε πλέον ότι το 70% του συνολικού παρατηρήσιμου σύμπαντος αποτελείται από μία 'μυστηριώδης' ενέργεια κενού, τη σκοτεινή ενέργεια, η οποία έχει κυρίαρχο ρόλο στην κοσμολογική εξέλιξη. Από το υπόλοιπο 30%, το 25% αντιστοιχεί στη σκοτεινή ύλη, που έχει κυρίαρχο ρόλο σε γαλαξιακό επίπεδο, για την οποία επίσης δεν έχουμε κάποια ξεκάθαρη απάντηση, ενώ είμαστε σίγουροι μόνο για το περιεχόμενο του υπολειπόμενου 5%.

Εκτός των παραπάνω, η Γενική Σχετικότητα δεν παρέχει ένα αυτοσυνεπές μοντέλο πληθωρισμού. Η ανάγκη του εν λόγω μοντέλου προκύπτει από το γνωστό ζήτημα της ομοιογένειας της κοσμικής μικροκομματικής ακτινοβολίας. Η σύγχρονη θεώρηση για το πρώιμο σύμπαν, η οποία έχει βασιστεί σε φαινομενολογικές αλλά και θεωρητικές ενδείξεις, είναι ότι το σύμπαν προήλθε από μία αρχική κοσμολογική μοναδικότητα (Big Bang). Έπειτα, μέσω διαταραχών χβαντικής βαρύτητας, πέρασε στη μετάβαση φάσης του πληθωρισμού, το τέλος του οποίου ξεκίνησε τη γνωστή αναθέρμανση του σύμπαντος, που οδήγησε στη δημιουργία ύλης, δηλαδή των σωματιδίων του Καθιερωμένου Προτύπου, μέσω λεπτογένεσης/βαρυογένεσης. Ο μηχανισμός του πληθωρισμού έχει καθιερωθεί πλέον να εξηγείται μέσω ενός αυθαίρετου βαθμωτού πεδίου που ονομάζεται inflaton, το οποίο όμως αποτελεί ένα πρόχειρο μοντέλο εξήγησης και όχι μέρος μίας ολοκληρωμένης θεωρίας. Επιπροσθέτως, η εξήγηση της κυριαρχίας ύλης ως προς την αντιύλη, υπεύθυνη για τη λεπτογένεση/βαρυογένεση, δεν παρέχεται από τη Γενική Σχετικότητα αλλά αποτελεί αντικείμενο έρευνας της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων.

Τα ανοιχτά ζητήματα όμως δεν σταματούν εδώ. Μία από τις πιο ενδιαφέροντες προβλέψεις της Γενικής Σχετικότητας ήταν, και κατά την αποψή μας θα είναι πάντα, η ύπαρξη μελανών οπών στο σύμπαν. Ακόμα και όταν πρωτοαναφέρθηκαν ως πιθανές γεωμετρίες του σύμπαντος, οι φυσικοί του 20ου αιώνα αντιμετώπισαν με ιδιαίτερη δυσπιστία την ύπαρξή τους. Ακόμα και η θεωρητική κοινότητα θεωρούσε τα πρώτα χρόνια ότι οι μελανές οπές αποτελούν απλά μαθηματικά αντικείμενα της θεωρίας. Η θεώρηση αυτή άλλαξε όταν παρατηρήθηκε έμμεσα η μελανή οπή Cygnus X-1 το 1964. Ενώ οι λύσεις μελανών οπών είχαν ένα ξεκάθαρο μαθηματικό ενδιαφέρον λόγω της ιδιαιτερότητας της γεωμετρίας, η έρευνα των εν λόγω αντικειμένων, τόσο σε φυσικόμαθηματικό όσο και σε αστροφυσικό επίπεδο, άνοιξε από τότε.

Παρόλαυτά, οι γεωμετρίες των μελανών οπών της Γενικής Σχετικότητας αντιμετωπίζουν ένα σοβαρό θεωρητικό ζήτημα. Οι μελανές οπές της Γενικής Σχετικότητας χαρακτηρίζονται πλήρως από τα φορτία της μάζας, της στροφορμής και του ηλεκτρομαγνητικού φορτίου, (αν και οι αστροφυσικές μελανές οπές θεωρούνται πρακτικά ηλεκτρομαγνητικά ουδέτερες). Εκτός εάν μελετήσουμε μελανές οπές με μη-τετριμμένες τοπολογίες, όπως οι γεωμετρίες της κατηγοριοποίησης Plebanski-Demianski, δεν υπάρχουν άλλα φορτία που μπορούν να χαρακτηρίζουν τις μελανές οπές της Γενικής Σχετικότητας. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα θεωρήματα απουσίας κόμης μελανών οπών, στα οποία θα αναφερόμαστε ως θεωρήματα no-hair στο υπόλοιπο κείμενο, όλες οι στάσιμες, ασυμπτωτικά επίπεδες γεωμετρίες μελανών οπών της Γενικής Σχετικότητας, που είναι συζευγμένες με την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση και δεν έχουν μοναδικότητες εκτός του οριζοντα χαρακτηρίζονται πλήρως από τη μάζα, τη στροφορμή και το ηλεκτρομαγνητικό φορτίο.

Εν γένει, αναφερόμαστε στα θεωρήματα no-hair και όχι στο θεώρημα no-hair, καθώς, προκειμένου η μελανή οπή να περιγράφεται από παραπάνω φορτία, απαιτείται η ύπαρξη κάποιου ενεργού ταχυστή ενέργειας ορμής που θα μπορούσε δυνητικά να επηρεάσει το αποτέλεσμα της γεωμετρίας. Επιπροσθέτως, δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά το κατάλογο σωματιδίων του Καθιερωμένου Προτύπου, αφού ξέρουμε ότι και αυτό είναι μία ενεργή θεωρία. Επομένως, τα θεωρήματα no-hair δεν έχουν αποδειχθεί. Οι πρώτες μελέτες προς αυτή την κατεύθυνση έγιναν από τον Bekenstein [13, 14, 15, 16, 17, 18] σε γεωμετρικές σφαιρικής συμμετρίας, ο οποίος έδειξε ότι αν ο ενεργός ταχυστής ενέργειας ορμής κάποιου βαθμωτού πεδίου ικανοποιεί τις ασθενείς ενεργειακές συνθήκες, η μελανή οπή της θεωρίας υπόκειται σε ένα αντίστοιχο θεώρημα no-hair. Μία σημαντική παρατήρηση όμως στα θεωρήματα του Bekenstein όμως είναι το γεγονός ότι ο ενεργός ταχυστής ενέργειας ορμής, $T_{\mu\nu}$, ικανοποιούσε τη σχέση $-T_t^t + T_\theta^\theta = 0$, κάτι το οποίο δεν ισχύει απαραίτητα σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας. Από τα πρώτα ερευνητικά αποτελέσματα του Bekenstein, το ενδιαφέρον της θεωρητικής κοινότητας σε λύσεις μελανών οπών με περαιτέρω φορτία αναπτύχθηκε με ραγδαίο ρυθμό.

Ο λόγος για αυτό έγκειται στο ακόλουθο θεωρητικό πείραμα. Σε κάθε φυσική θεωρία, θέλουμε να έχουμε ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα αρχικών συνθηκών ώστε, δωσμένης οποιαδήποτε κατάστασης του φυσικού συστήματος, να μπορούμε να προβλέψουμε τη μελλοντική αλλά και την παρελθοντική εξέλιξη του. Γνωρίζουμε όμως ότι οι μελανές οπές γεννιούνται στο σύμπαν από την κατάρρευση αστεριών που παραβιάζουν την ανισότητα Buchdahl. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα του που βρίσκεται η πληροφορία αναφορικά με τη καταστατική εξίσωση του αστεριού. Ξεκινήσαμε από ένα συμπίκνωμα αστρικής ύλης με μη-τετριμμένα χαρακτηριστικά, δηλαδή ένα αστέρι, το οποίο κατέρρευσε και καταλήξαμε σε μία γεωμετρία που περιγράφεται το πολύ από τρεις παραμέτρους. Υπάρχει βέβαια η μάλλον πρόχειρη απάντηση ότι όλη η πληροφορία είναι κρυμμένη πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων, αλλά αυτή η εξήγηση είναι ιδιαίτερα πρόχειρη και δεν έχει κάποια μαθηματική υποστήριξη. Επιπροσθέτως, γνωρίζουμε από τον Hawking ότι οι μελανές οπές ακτινοβολούν, κάτι το οποίο σημαίνει ότι κάποια στιγμή θα εξαχνωθούν πλήρως και η πληροφορία του αστεριού θα έχει πραγματικά χαθεί. Το εν λόγω ζήτημα αναγνωρίζεται σήμερα ως το παράδοξο πληροφορίας των μελανών οπών [19] και η συσχέτιση του με το θεώρημα no-hair είναι προφανής: Αν η γεωμετρία της μελανής οπής δύναται να περιγράφεται από περαιτέρω φορτία, τα φορτία αυτά μπορούν να κωδικοποιήσουν την μη-τετριμμένη καταστατική εξίσωση του αστέρα, ενώ επίσης, σε συνέπεια με τα προηγούμενα, μπορούν να παρέχουν και τις κατάλληλες γεωμετρικές παραμορφώσεις που υποδεικνύουν την κατεύθυνση της τροποποίησης της βαρυτικής θεωρίας.

Ένα δεύτερο ζήτημα αναφορικά με τη γεωμετρία των μελανών οπών στη Γενική Σχετικότητα αφορά την ύπαρξη μοναδικότητας σύμφωνα με το θεώρημα μοναδικότητας του Penrose [20]. Θυμίζουμε ότι το θεώρημα του Penrose μας λέει ότι, αν ικανοποιούνται οι ισχυρές ενεργειακές συνθήκες στη γεωμετρία της μελανής οπής, θα υπάρχει πάντα μία γεωδαισιακή ατέλεια, δηλαδή γεωδαισιακές που δε μπορούν να παραμετροποιηθούν από όλο τον πραγματικό χώρο \mathbb{R} , στο εσωτερικό της μελανής οπής που αντιστοιχεί στη μοναδικότητα καμπυλότητας. Εκ πρώτης όψεως, το εν λόγω ζήτημα δε φαίνεται ιδιαίτερα προβληματικό. Παρόλαυτά, από μαθηματικής απόψεως, είναι ίσως από τα πιο σοβαρά ζητήματα που υποδεικνύουν ξεκάθαρα την ανάγκη τροποποίησης της βαρύτητας. Ας εξηγήσουμε: Η Γενική Σχετικότητα είναι μία θεωρία κατασκευασμένη σε μία πολλαπλότητα Lorentz M , η οποία είναι εφοδιασμένη με μία καλώς ορισμένη μετρική g . Οι εξισώσεις Einstein μας παρέχουν τα φαινομενολογικά αποτελέσματα της θεωρίας, ώστε να μπορούμε να έχουμε προβλέψεις για τον χωρόχρονο. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι ξεκινάμε από μία θεωρία σε μία καλώς ορισμένη πολλαπλότητα και καταλήγουμε σε λύσεις της θεωρίας που περιέχουν μία μοναδικότητα, δηλαδή ένα σημείο που δεν ανήκει στην πολλαπλότητα. Η ύπαρξη των μοναδικοτήτων υποδηλώνει ξεκάθαρα ότι η Γενική Σχετικότητα είναι μία ατελής θεωρία βαρύτητας. Όχι επειδή οι μοναδικότητες αυτές είναι αναγκαστικά αφύσικες. Το πρόβλημα είναι ότι η ίδια η πολλαπλότητα πάνω στην οποία κα-

τασκευάζουμε τη φυσική θεωρία δε τις περιέχει εξ αρχής. Η σύγχρονη θεώρηση είναι ότι κοντά στις μοναδικότητες καμπυλότητας των μελανών οπών, η θεωρία Γενικής Σχετικότητας δεν είναι πλέον εμπιστεύσιμη και πρέπει να προβούμε σε μοντέλα χβαντικής βαρύτητας προς την εξακρίβωση της πραγματικής φύσης των μελανών οπών. Ευτυχώς, τουλάχιστον, η εικασία της κοσμικής λογοκρισίας μας προστατεύει από την ύπαρξη γυμνών μοναδικοτήτων στο σύμπαν, μοναδικοτήτων καμπυλότητας δηλαδή που δεν κρύβονται πίσω από ορίζοντες γεγονότων.

Πρωτού κλείσουμε το εν λόγω υποκεφάλαιο, οφείλουμε να αναφέρουμε και το ζήτημα της θερμοδυναμικής αστάθειας των μελανών οπών. Η ερμηνεία των μελανών οπών ως θερμοδυναμικά συστήματα προέκυψε από τον Wheeler τη δεκαετία του 70. Η αφορμή της θερμοδυναμικής θεώρησης των μελανών οπών ήταν το γεγονός ότι η εντροπία του σύμπαντος δε μπορεί προφανώς να μειωθεί ποτέ. Τι γίνεται όμως όταν ένα σώμα απορροφάται από μία μελανή οπή; Αυτό το προφανές αλλά ευφυέστατο θεωρητικό πείραμα οδήγησε προς την ερμηνεία των μελανών οπών ως θερμοδυναμικά συστήματα και έπειτα, μέσω της έρευνας του Hawking για την ακτινοβολία των μελανών οπών, είχαμε και την εξαγωγή των αντίστοιχων θερμοδυναμικών νόμων. Το ιδιαίτερα περίεργο αποτέλεσμα της θεώρησης αυτής ήταν ότι οι μελανές οπές Schwarzschild έχουν αρνητική θερμοχωρητικότητα, κάτι το οποίο τις καθιστά θερμοδυναμικά ασταθείς. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μελανή οπή Schwarzschild στο σύμπαν βρίσκεται σε μία διαρκή προσπάθεια να επέλθει σε θερμοδυναμική ισορροπία με το σύμπαν η οποία όμως είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Συγκεκριμένα, μέσω της ακτινοβολίας Hawking , η μελανή οπή συρρικνώνεται και συνεχίζει να θερμαίνεται μέσω της γνωστής αντίστροφης σχέσης της θερμοκρασίας ως προς τον ορίζοντα γεγονότων. Αφού οι μελανές οπές αυτές θα συνεχίσουν στη διαδικασία εξάχνωσης, κάποια στιγμή θα περάσουν και από τα υποατομικά μεγέθη, όπου δε μπορούν πλέον να περιγραφούν με κλασικό τρόπο.

Θα μπορούσε βέβαια κάποιος να αντικρούσει το εν λόγω αποτέλεσμα, θεωρώντας ότι οι σφαιρικά συμμετρικές μελανές οπές είναι αστροφυσικά αδιάφορες και πρέπει να μελετάμε μόνο τις περιστρεφόμενες μελανές οπές Kerr. Εκτός των ιδιαίτερων προβλημάτων που έχουν οι μελανές οπές Kerr αναφορικά με την αβεβαιότητα της εσωτερικής τους δομής μέσω του διαγράμματος Penrose, γνωρίζουμε από το [21], ότι οι περιστρεφόμενες μελανές οπές στα τελευταία στάδια της ζωής τους χάνουν την στροφορμή τους και καταλήγουν σε ενεργές γεωμετρίες Schwarzschild . Επομένως, παρά το γεγονός ότι ο χρόνος ζωής των αστροφυσικών μελανών οπών δεν επιτρέπει την πειραματική απόδειξη των παραπάνω, χρειαζόμαστε από τη θεωρία βαρύτητας έναν συνεπή τρόπο περιγραφής των χβαντικών μελανών οπών, που μπορεί να υποστηρίζεται μόνο από μία χβαντική θεωρία βαρύτητας, ή, τουλάχιστον, έναν μηχανισμό προστασίας της πλήρους εξάχνωσης της μελανής οπής που δεν εμφανίζεται στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας.

Με βάση τα παραπάνω, λοιπόν, θεωρούμε πως είναι πλέον ξεκάθαρη η ανάγκη για τροποποίηση της βαρυτικής θεωρίας του Einstein . Πράγματι, παρουσιάσαμε επιχειρήματα θεωρητικής φυσικής, επιχειρήματα κοσμολογίας αλλά και επιχειρήματα μαθηματικής θεμελίωσης που οδηγούν όλα με σαφή τρόπο στην ίδια κατεύθυνση. Να αναφέρουμε, βέβαια, ότι παρά τις όποιες αδυναμίες της θεωρίας, η Γενική Σχετικότητα παραμένει ακόμα το καλύτερο εργαλείο που έχουμε για να εξηγήσουμε φαινόμενα βαρυτικής αλληλεπίδρασης σε συγκεκριμένες όμως κλίμακες. Από ότι παρατηρούμε όμως, η πραγματική φύση της βαρύτητας, ως ένα ενιαίο πλαίσιο, μας είναι ακόμα άγνωστη. Θυμόμαστε στο σημείο αυτό το σχόλιο του συγγραφέα Zach Weinersmith ,

Aristotle said a bunch of stuff that was wrong. Galileo and Newton fixed things up. Then Einstein broke everything again. Now, we've basically got it all worked out, except for small stuff, big stuff, hot stuff, cold stuff, fast stuff, heavy stuff, dark stuff, turbulence, and the concept of time.

1.3 Τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας

Έχοντας πλέον καθιερώσει την ανάγκη τροποποίησης της βαρύτητας, το φυσικό ερώτημα που αντιμετώπισε η κοινότητα είναι η μαθηματική κατεύθυνση προς την οποία έπρεπε να κινηθεί. Λόγω των επιτυχιών της Γενικής Σχετικότητας, οι τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας οφείλουν να αναπαράγουν τη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας κάτω από συγκεκριμένα όρια και να είναι ταυτόχρονα ικανές να εξάγουν πιο πλούσια δυναμική στο υπεριώδες/υπέρυθρο ενεργειακό εύρος προκειμένου να διορθώσουν τους παραπάνω περιορισμούς. Ενώ εκ πρώτης όψης, η Γενική Σχετικότητα φαίνεται ιδιαίτερα καλά θεμελιωμένη, χωρίς να αφήνει μαθηματικό χώρο για τροποποιήσεις, η ιστορία των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας έδειξε ότι υπήρξαν πολλά αξιώματα που χρησιμοποίησε ο Einstein στην κατασκευή της θεωρίας τα οποία μπορούν να τεθούν υπό ένα θεωρητικό μικροσκόπιο προς τον έλεγχο της εγκυρότητας τους.

Πράγματι, κατά τη διάρκεια του 20ου και 21ου αιώνα κατασκευάστηκαν μία πληθώρα τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας, οι οποίες πρακτικά προκαλούσαν την ορθότητα των αξιωμάτων Einstein. Προκειμένου να εξηγήσουμε την ιστορική πορεία των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας, αναφέρουμε ότι η θεωρία Γενικής Σχετικότητας χρησιμοποιεί μία **τετραδιάστατη** πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μία Lorentz **μετρική ως βαθμό ελευθερίας**, που αποτελεί το **άμαξο** βαρυτικό πεδίο, και μία συνοχή **χωρίς στρέψη**. Η δράση της θεωρίας διατηρεί την έννοια της **τοπικότητας** και κατασκευάζεται από το **απλούστερο βαθμωτό καμπυλότητας Ricci**, ώστε να αποφεύγονται οι αστάθειες Ostrogradsky ¹ και είναι επίσης **αναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς**. Τα παραπάνω στοιχεία της θεωρίας Γενικής Σχετικότητας, που εμφανίζονται με bold γράμματα, αποτέλεσαν τις βασικές κατευθύνσεις τροποποίησης της βαρύτητας [22]. Παρουσιάζουμε στο υποκεφάλαιο αυτό τις πιο σημαντικές και καλά μελετημένες εξ'αυτών.

Το 1939 οι Fierz και Pauli [23] έθεσαν τις βάσεις για τη θεωρία έμμαζης βαρύτητας, όπου το βαρυτόνιο είχε μία μάζα m_g . Η θεωρία απέτυχε όμως να αναπαράγει τα αποτελέσματα της Γενικής Σχετικότητας στο όριο του $m_g \rightarrow 0$ [24, 25, 26], ένα πρόβλημα που έμεινε γνωστό ως η ασυνέχεια vDVZ στις θεωρίες έμμαζης βαρύτητας. Το ενδιαφέρον στις θεωρίες έμμαζης βαρύτητας αναζωπυρώθηκε από την πιο πετυχημένη θεωρία έμμαζης βαρύτητας που ήρθε στο προσκήνιο το 2011 από του de Rham, Gabadadze και Tolley, οι οποίοι κατασκεύασαν την θεωρία dRGT [27, 28, 29, 30, 31]. Παρόλαυτά, οι πρόσφατες παρατηρήσεις των βαρυτικών κυμάτων [32, 33, 34, 35, 36] απέκλεισαν όλες αυτές τις θεωρίες ως πιθανούς υποψήφιους.

Μία άλλη κατεύθυνση τροποποίησης της βαρύτητας, η οποία ήταν προφανής ήδη από τον Einstein κατά τη κατασκευή της θεωρίας, αφορά την ύπαρξη μη-τετράμιμνης στρέψης στη θεωρία. Συγκεκριμένα, όπως μπορεί να επιβεβαιώσει κανείς από τα [37, 38, 39, 40], υπάρχει μία ξεκάθαρη αντιστοίχιση της θεωρίας Γενικής Σχετικότητας με καμπυλότητα χωρίς στρέψη με την θεωρία Τηλεπαράλληλης Βαρύτητας με στρέψη χωρίς καμπυλότητα. Επομένως, φαίνεται αρκετά εύκολα ότι τα μαθηματικά εργαλεία που έχουμε στη διάθεση μας προς την εξήγηση των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων μπορούν να έχουν και μία εντελώς διαφορετική γεωμετρική δομή. Σήμερα, οι θεωρίες με βαθμωτά στρέψης υψηλών τάξεων απολαμβάνουν το έντονο ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47], κυρίως προς την επίλυση κοσμολογικών ζητημάτων. Βέβαια, η ύπαρξη μη-μηδενικής στρέψης δεν είναι απαραίτητο να ακυρώνει τη καμπυλότητα του χωρόχρονου [48, 49, 50, 51, 52, 53], όπως γίνεται στο μοντέλο Τηλεπαράλληλης βαρύτητας. Ενώ γνωρίζουμε από τον Palatini, ότι η δράση Einstein-Hilbert με μη-μηδενική στρέψη καταλήγει αναγκαστικά

¹Υπενθυμίζουμε εδώ το θεώρημα Ostrogradsky του 1850: *Αν μία μη-εκφυλισμένη Λαγκρανζιανή, $\mathcal{L}(q, \dots, q^{(n)})$, εξαρτάται από την n -ισστή παράγωγο κάποιας μεταβλητής q , με $n > 1$, τότε η ενεργειακή συνάρτηση στον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό δεν είναι κάτω-φραγμένη.* Αυτό είναι η βάση της αστάθειας Ostrogradsky.

στη συνοχή Levi-Civita εκ των εξισώσεων κίνησης, βαρυτικές θεωρίες μετρικής-συνοχής, υπό Λαγκρανζιανές μορφής $f(R(g, \Gamma))$, όπου οι βαθμοί ελευθερίας της δράσης είναι η μετρική και η συνοχή του χωρόχρονου, έχουν μελετηθεί εντόνως τα τελευταία χρόνια [54, 55, 56, 57, 58], επηρεασμένες από τις γνωστές θεωρίες $f(R)$ [59].

Τως η πιο προφανής επέκταση της Γενικής Σχετικότητας αποτυπώνεται στην ύπαρξη παραπάνω διαστάσεων, κάτι το οποίο είχε μελετηθεί στο πλαίσιο θεωριών Kaluza-Klein [60, 61, 62, 63, 64] από το 1920. Η κατεύθυνση θεωριών με υψηλότερες διαστάσεις άνοιξε περαιτέρω από τα θεωρήματα Lovelock [65, 66], που καθιέρωσαν έναν αυτοσυνεπή τρόπο κατασκευής βαρυτικών θεωριών σε μεγαλύτερες διαστάσεις χωρίς την ύπαρξη ασταθειών Ostrogradsky, ενώ, προφανώς, ίσως η μεγαλύτερη θεωρητική επιτυχία μοντέλων υψηλότερων διαστάσεων ήταν η θεωρία χορδών [10, 67, 68, 69, 70, 71, 72], της οποίας η ενεργή τετραδιάστατη θεωρία παρουσίαζε μη-τετριμμένες συζεύξεις του πεδίου dilaton και αξιονίου στα βαθμωτά καμπυλότητας Gauss-Bonnet και Chern-Simons [10, 73, 74, 75, 76, 51]. Η έρευνα στην κατεύθυνση θεωριών υψηλότερων διαστάσεων επεκτείνεται επίσης και στα γνωστά, πιο σύγχρονα, μοντέλα DGP [77, 78, 79, 80] των Gia Dvali, Gregory Gabadadze, και Massimo Porrati, και Randall-Sundrum [81, 82]. Τα τελευταία χρόνια έχει υπάρξει μία πληθώρα μελετών σε θεωρίες υψηλότερων διαστάσεων με εντυπωσιακά αποτελέσματα [83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107] αναφορικά με τη φύση μελανών οπών αλλά και του ίδιου του χωρόχρονου, ως άμεση συνέπεια της θεώρησης του σύμπαντος εμβαπτυσμένο σε μία πολυδιάστατη πολλαπλότητα.

Βέβαια, όπως προαναφέραμε, κάθε πιθανή τροποποίηση της βαρύτητας οφείλει να αναπαράγει τα αποτελέσματα της Γενικής Σχετικότητας υπό συγκεκριμένα καλώς ορισμένα όρια. Προς τον σκοπό αυτό, διάφορα σχήματα συμπαγοποίησης των θεωριών υψηλότερων διαστάσεων έχουν προταθεί κατά καιρούς τα οποία βασίστηκαν στην ιδέα των Kaluza-Klein. Το αποτέλεσμα από τα εν λόγω σχήματα συμπαγοποίησης ήταν η εξαγωγή ενεργών τετραδιάστατων θεωριών βαρύτητας όπου, εκτός της μετρικής, οι βαθμοί ελευθερίας της θεωρίας περιλάμβαναν βαθμωτά πεδία, πεδία βαθμίδας ή ακόμα και επιπλέον ταυυστικά, που οδηγούν στο κλάδο θεωριών TeVeS (Tensor-Vector-Scalar)[108, 109, 110]. Αναφερόμαστε σε κλάδο θεωριών, αφού το σενάριο μίας θεωρίας βαρύτητας με επιπλέον βαθμωτούς, διανυσματικούς ή και ταυυστικούς βαθμούς ελευθερίας παρέχει δυνητικά άπειρα μοντέλα τροποποίησης. Θεωρίες βαρύτητας με επιπλέον ταυυστικούς βαθμούς ελευθερίας λειτουργούν υπό τη θεώρηση περισσοτέρων μετρικών ταυυστών στη θεωρία, κάτι το οποίο παράγει προφανώς παραπάνω από ένα βαρυτόνια [111, 112]. Από την άλλη, οι θεωρίες διανύσματος-ταυυστή περιέχουν ένα (ή παραπάνω) διανυσματικά πεδία συζευγμένα με τους βαρυτικούς ταυυστές. Η πιο απλή τέτοια θεωρία είναι η γνωστή θεωρία Proca[113, 114], ενώ έχουν αναπτυχθεί και γενικεύσεις της [115, 116]. Οι πιο μελετημένες θεωρίες όμως ανήκουν στις γνωστές θεωρίες βαθμωτού-ταυυστή, εμπνευσμένες από τους Brans-Dicke [11], οι οποίες έχουν διατηρήσει το ενδιαφέρον της κοινότητας από το 60 μέχρι και σήμερα, λόγω της σχετικής τους απλότητας και ευκολίας στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων, οι οποίες αποτέλεσαν και τη θεωρητική βάση της παρούσας διατριβής.

Οι θεωρίες βαθμωτού-ταυυστή χαρακτηρίζονται από τη διπλέτα βαθμών ελευθερίας $(g_{\mu\nu}, \Phi)$, και επεκτείνουν με μη-τετριμμένο τρόπο τη Γενική Σχετικότητα μέσω σύζευξης ενός βαθμωτού πεδίου στους βαρυτικούς ταυυστές. Η πιο γενική και έντονα μελετημένη θεωρία βαθμωτού ταυυστή έχει τις βάσεις της στη σπουδαία ερευνητική συνεισφορά του Horndeski, ο οποίος κατασκεύασε το ευρύτερο θεωρητικό πλαίσιο που καθιέρωσε τις επιτρεπόμενες συζεύξεις του βαθμωτού πεδίου ώστε να ικανοποιείται η βασική συνθήκη εξισώσεων κίνησης δεύτερης τάξης [117]. Η συνθήκη αυτή, όπως είναι σαφές, είναι αναγκαία και ικανή για την αποφυγή ασταθειών Ostrogradsky στη θεωρία και ανήκει στο ευρύτερο πλαίσιο της ιδέας του Lovelock. Το ενδιαφέρον στη θεωρία Horndeski, αλλά και των επεκτάσεων της Beyond Horndeski και DHOST [118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125], παρά την φαινομενική απουσία κάποιας μικροσκο-

πικής προέλευσης, ήταν ότι ενοποίησε τις θεωρίες βαθμωτού-τανυστή σε ένα ενιαίο θεωρητικό πλαίσιο, που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή μη-τετριμμένων τοπικών λύσεων με βαθμωτό φορτίο, παραβιάζοντας έτσι το θεώρημα no-hair (με ή χωρίς τον όρο Gauss-Bonnet) και παρέιχε επίσης μία δυναμική αντιμετώπιση κοσμολογικών προβλημάτων της Γενικής Σχετικότητας [126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 31, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161]. Πρακτικά, οι θεωρίες Horndeski βασίζονται στην απλή ιδέα εύρεσης επιστημονικών απαντήσεων μέσω 'αντίστροφης μηχανικής' (reverse engineering). Πιο συγκεκριμένα, μας δίνουν το γενικό θεωρητικό μοντέλο της επέκτασης της θεωρίας βαρύτητας με ένα βαθμωτό φορτίο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε προς την μοντελοποίηση φαινομενολογικών αποτελεσμάτων είτε προς την κατανόηση θεωρητικών προβλημάτων μελανών οπών. Και πράγματι, το γεγονός ότι οι περισσότερες θεωρίες βαρύτητας υψηλότερων διαστάσεων καταλήγουν σε μία ενεργή θεωρία Horndeski μέσω συμπαγοποίησης υποστηρίζει τη μελέτη αυτού του μαθηματικού πλαισίου. Αναφέρουμε εδώ για χάρη πληρότητας ότι η Horndeski δεν περιέχει τον όρο Chern-Simons που προκύπτει από τη θεωρία χορδών αλλά περιέχει τον όρο Gauss-Bonnet[146]. Ο λόγος για αυτό είναι ότι ο όρος Chern-Simons, σε θεωρίες χωρίς στρέψη [51], δεν ικανοποιεί εν γένει τη συνθήκη εξισώσεων κίνησης δεύτερης τάξης. Η απουσία των προβλεπόμενων ασταθειών Ostrogradsky, όμως, επιβεβαιώνεται όταν το βαθμωτό πεδίο συζευγμένο στον όρο Chern-Simons είναι γραμμικό στο συντεταγμένο χρόνο, κάτι το οποίο παραβιάζει την αναλλοιώτητα κάτω από διαφορομορφισμούς [162, 163].

Από τη παραπάνω συζήτηση καταλήγει κανείς αβίαστα στο συμπέρασμα ότι οι τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της έρευνας της βαρυτικής αλληλεπίδρασης, τόσο σε επίπεδο τοπικών λύσεων όσο και στο επίπεδο κοσμολογικής δυναμικής. Η παρούσα διδακτορική διατριβή είχε ως επίκεντρο τη μελέτη συμπαγών και εξωτικών σωμάτων που υποστηρίζονται από θεωρίες βαθμωτού τανυστή. Επικεντρωθήκαμε σε μεθοδολογίες εξαγωγής νέων μη-τετριμμένων λύσεων στις θεωρίες αυτές, αλλά και στη μελέτη ενδιαφέροντων ιδιοτήτων που τις χαρακτηρίζουν, οι οποίες είναι αδύνατες να επιβεβαιωθούν υπό το πρίσμα της Γενικής Σχετικότητας. Αντιμετωπίσαμε μία πληθώρα θεωριών βαθμωτού τανυστή, που περιλάμβαναν το μοντέλο θεωρίας Chern-Simons, την ενεργή τετραδιάστατη θεωρία Lovelock, αλλά και γενικεύσεις του κλάδου Horndeski. Λόγω της γενικότητας του προβλήματος, παρέχουμε στην αρχή των ακόλουθων κεφαλαίων μία κατάλληλη εισαγωγή προς το εκάστοτε αντικείμενο, τόσο σε επίπεδο θεωρίας όσο και σε επίπεδο των ιδιοτήτων των τοπικών λύσεων που θα αντιμετωπίσουμε.

Κεφάλαιο 2

Η τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας Chern-Simons

2.1 Εισαγωγή

Οι θεωρίες Chern-Simons είναι τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, οι οποίες προτάθηκαν αρχικά από τους Jackiw et al [164] σε τρισδιάστατα μοντέλα βαρύτητας και είναι επίσης συνεπείς με την κατηγοριοποίηση θεωριών Lovelock όταν εισάγουμε μη-μηδενική στρέψη στη γεωμετρία [51]. Αρκετά αργότερα, οι Jackiw και Pi [162] όρισαν το μοντέλο της θεωρίας με μηδενική στρέψη στις τέσσερις διαστάσεις χρησιμοποιώντας ένα ψευδοβαθμωτό πεδίο συζευγμένο με τον όρο Chern-Simons. Συγκεκριμένα, στην ανάλυση των Jackiw και Pi, το εν λόγω πεδίο είχε τεθεί να είναι γραμμικό στον χρόνο κάτι το οποίο καθιστά τη θεωρία Chern-Simons μη αναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς. Αρκετά αργότερα, οι συγγραφείς του [163] έδειξαν ότι η εν λόγω επιλογή ακυρώνει τις αστάθειες Ostrogradsky της θεωρίας, που σχετίζεται με την ύπαρξη υψηλότερων τάξεων του τανυστή Riemann στη δράση. Επομένως, η θεωρία Chern-Simons με μηδενική στρέψη δεν αντιμετωπίζει προβλήματα από αστάθειες Ostrogradsky όταν το συζευγμένο πεδίο με τον όρο Chern-Simons είναι γραμμικό στο χρόνο, όταν δηλαδή η θεωρία παύει να είναι αναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα από τη μελέτη των Jackiw και Pi ήταν ότι, ενώ οι εξισώσεις κίνησης της θεωρίας διέφεραν από τη Γενική Σχετικότητα, η τετραδιάστατη θεωρία Chern-Simons υποστήριζε τη λύση μελανής οπής Schwarzschild. Ο λόγος για αυτό είναι ότι στα πλαίσια σφαιρικής συμμετρίας, ο όρος Chern-Simons, αλλά και ο τανυστής ενέργειας-ορμής του μηδενίζεται ταυτοτικά, ενώ το (ψευδο)βαθμωτό πεδίο του αξιονίου πρέπει να μηδενιστεί υπό την απουσία κάποιου ενεργού δυναμικού λόγω του γνωστού "no-hair" theorem [13, 14, 15, 17]. Αντίστοιχα, η λύση Kerr δεν υποστηρίζεται από τη θεωρία, κάτι το οποίο σημαίνει ότι ο όρος Chern-Simons τροποποιεί τη γεωμετρία περιστρεφόμενων μελανών οπών.

Πράγματι, στα πλαίσια της θεωρίας χορδών [73, 75, 74, 165], περιστρεφόμενες μελανές οπές τύπου Kerr μπορούν να αποκτήσουν "hair" λόγω της ύπαρξης του αξιονικού πεδίου [166] και να βαθμωτοποιηθούν (scalarized). Το εν λόγω πεδίο στην ενεργή τετραδιάστατη θεωρία μετά τη συμπαγοποίηση των παραπάνω διαστάσεων αποτελεί τη δυϊκή μορφή του τανυστή $H = dB$, όπου B είναι ο αντισυμμετρικός spin-1 τανυστής της βαρυτικής πολλαπλέτας και είναι συζευγμένο με το βαρυτικό

τοπολογικό όρο Chern-Simons , ο οποίος είναι επίσης γνωστός ως πυκνότητα Pontryagin [167]. Το ενδιαφέρον στη θεωρία αναζωπυρώθηκε όταν βρέθηκε ότι εν γένει η θεωρία χορδών αναγκαστικά απαιτεί διορθώσεις τύπου Chern-Simons για να παραμένει μαθηματικά αυτοσυνεπής. Στον διαταρακτικό τομέα της θεωρίας χορδών, ο μηχανισμός Green-Schwarz για την ακύρωση ανωμαλιών απαιτεί τέτοιου είδους διορθώσεις κατά τη συμπαγοποίηση στις τέσσερις διαστάσεις λόγω της παραβίασης της διατήρησης αξονικού ρεύματος [165].

Τόσο στη περίπτωση του αξιονίου, όσο και στη περίπτωση θεωριών που συμπεριλαμβάνουν το πεδίο dilaton , το οποίο είναι συζευγμένο με το βαθμωτό καμπυλότητας Gauss-Bonnet [168], η ύπαρξη του δευτερεύοντος βαθμωτού φορτίου είναι εφικτή λόγω της παραβίασης των ασθενών ενεργειακών συνθηκών [169]. Τα αποτελέσματα αυτά τόνιζαν επίσης ότι μη-τετριμμένες συζεύξεις πεδίων σε βαρυτικά βαθμωτά μπορούν να εξάγουν καινούρια αποτελέσματα σε γνωστές γεωμετρίες της Γενικής Σχετικότητας. Ο λόγος για αυτό είναι ότι τόσο το αξίνιο όσο και το dilaton είναι βαρυτικοί βαθμοί ελευθερίας και όχι 'σωματίδια' υπό την γνωστή έννοια του Καθιερωμένου Προτύπου. Πράγματι, τα βαρυτικά βαθμωτά που λειτουργούν ως ενεργά δυναμικά για τα δύο αυτά πεδία είναι υπεύθυνα για την παραβίαση των ασθενών ενεργειακών συνθηκών, κάτι το οποίο στα πλαίσια της θεωρίας Chern-Simons είχε επίσης παρατηρηθεί σε κοσμολογικές αναλύσεις [170, 171] σε μοντέλα τύπου Running-Vacuum.

Μετά τις πρώτες ερευνητικές προσπάθειες για τον υπολογισμό του αξονικού νέφους σε περιστευόμενες γεωμετρίες, άρχισαν και οι πρώτες προσπάθειες για τον υπολογισμό της τροποποίησης της γεωμετρίας [172, 173] σε συνθήκες αργής περιστροφής και ασθενής σύζευξης, ενώ στα [174, 175, 176, 177] μελετήθηκαν περαιτέρω συνθήκες υψηλής περιστροφής με αριθμητικές μεθόδους. Σήμερα, οι τοπικές λύσεις υπό παρουσία αξιονίων, με ή χωρίς τον όρο Chern-Simons έχουν μελετηθεί περαιτέρω [178, 179, 180, 181, 182, 183], ενώ συμπεριλαμβάνονται πλέον λύσεις μελανών μεμβράνων [184], μελανών χορδών [185] μέχρι και λύσεις τύπου Taub-NUT[186].

Παρολαυτά, οι περισσότερες ερευνητικές προσπάθειες επικεντρώθηκαν σε συνθήκες ασθενούς σύζευξης. Συγκεκριμένα, λόγω της ασθενούς σύζευξης, οι εξισώσεις κίνησης μπορούσαν να λυθούν με διαταρακτικό τρόπο. Ενώ κάτι τέτοιο είναι πλήρως ασφαλές, δε δίνει καμία πληροφορία για τη συμπεριφορά του αξιονίου κοντά στη μελανή οπή, όπου έχουμε έντονες συνθήκες ισχυρής βαρύτητας. Στα πλαίσια αυτά, επιλέξαμε να ασχοληθούμε με αργά περιστρεφόμενες, αλλά μικροσκοπικές μελανές οπές όπου οι συνθήκες ασθενής σύζευξης, όπως θα δούμε, παύουν να ισχύουν κοντά στη μελανή οπή και παρουσιάζονται ενδιαφέροντα καινούρια φαινόμενα.

Συγκεκριμένα, αφού εξάγαμε τη πλήρη λύση της γεωμετρίας μέσω μίας μη-κλειστής συναρτησιακής μορφής, παρουσιάσαμε ότι η παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών εξαρτώνται από το λόγο της σταθεράς σύζευξης προς το μέγεθος της μελανής οπής. Επομένως, μικρότερες μελανές οπές σε αξιονικό νέφος υπόκεινται σε μεγαλύτερη παραβίαση των ασθενών ενεργειακών συνθηκών και παραμορφώνονται πιο ισχυρά. Επιπροσθέτως, δείξαμε ότι η κατανομή της στροφορμής της μελανής οπής αποκτά μη-τετριμμένα χαρακτηριστικά κοντά στη μελανή οπή, τα οποία είναι εφικτά να δημιουργήσουν νέες ευσταθείς γεωδαισιακές. Τέλος, προσπαθήσαμε να ελέγξουμε κατά πόσο ο όρος Chern-Simons , μπορεί να οδηγήσει σε λύσεις σκουληχότρυπας, όπου είχαμε αρνητικό αποτέλεσμα λόγω της χαμηλής περιστροφής.

2.2 Το μοντέλο της θεωρίας Chern-Simons

Με βάση τα παραπάνω θεωρούμε αναγκαίο να έχουμε πρώτα μία αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας Chern-Simons. Θεωρούμε ένα αξιονικό πεδίο συζευγμένο με το βαρυτικό τοπολογικό όρο Chern-Simons. Ο όρος αυτός, που θα καλούμε πλέον ως R_{CS} για συντομία, κατασκευάζεται από τη συναίρεση του τανυστή Riemann με τον δυικό του και δίνεται μέσω της σχέσης

$$R_{CS} = \frac{1}{2} R^\mu_{\nu\rho\sigma} \widetilde{R}^\nu_{\mu}{}^{\rho\sigma}, \quad (2.1)$$

όπου το σύμβολο $\widetilde{(\dots)}$ περιγράφει τον δυικό του Riemann, μέσω της σχέσης

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\gamma\delta}, \quad (2.2)$$

με το $\varepsilon_{\rho\sigma\kappa\lambda} = \sqrt{-g(x)} \hat{\varepsilon}_{\rho\sigma\kappa\lambda}$ να είναι ο συναλλοίωτος τανυστής Levi-Civita υπό τη σύμβαση ότι το σύμβολο $\hat{\varepsilon}_{0123} = 1$, *etc.* Η δράση της θεωρίας που περιγράφει τη σύζευξη του αξιονίου στον όρο R_{CS} δίνεται ακολούθως:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} (\partial_\mu b)(\partial^\mu b) - A b R_{CS} \right] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} (\partial_\mu b)(\partial^\mu b) \right] - \int d^4x A b \hat{R}_{CS}, \quad (2.3)$$

όπου \hat{R}_{CS} είναι ο όρος Chern-Simons με τον επίπεδο τανυστή Levi-Civita $\hat{\varepsilon}$, $\kappa = M_{\text{Pl}}^{-1}$ είναι ο αντίστροφος της (ελαττωμένης) μάζας Planck, b είναι ένα ψευδοβαθμωτό πεδίο που περιγράφει το αξιόνιο και A είναι η παράμετρος σύζευξης του αξιονίου στον όρο Chern-Simons όπου έχει διαστάσεις μήκος. Τονίζουμε ότι η δράση (2.3) είναι συμμετρική στη πεδιακή ολίσθηση κάτω από το μετασχηματισμό $b \rightarrow b+c$, καθώς δεν έχουμε εισάγει κάποιο δυναμικό για το b ή όρο μάζας. Τέτοιου είδους δράσεις προέρχονται από μοντέλα θεωρίας χορδών. Στη δική μας περίπτωση, η δράση προκύπτει από την τετραδιάστατη ενεργή θεωρία, όπου κρατήθηκαν οι διορθώσεις τετραγωνικής τάξης στις παραγώγους των βαθμών ελευθερίας[73]. Η παράμετρος A δίνεται μέσω του Regge slope της χορδής, $\alpha' = M_s^{-2}$, όπου M_s περιγράφει τη κλίμακα της χορδής ακολούθως[165]

$$A = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha'}{48\kappa}, \quad (2.4)$$

και είναι τάξης $\mathcal{O}\left(\frac{M_p}{M_s^2}\right)$.

Μεταβολή της δράσης ως προς τη μετρική και το αξιόνιο μας δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^b + 4\kappa^2 A C_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

$$\square b = A R_{CS}, \quad (2.6)$$

όπου $T_{\mu\nu}^b$ είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής που προκύπτει από το κινητικό όρο του αξιονίου,

$$T_{\mu\nu}^b = \nabla_\mu b \nabla_\nu b - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla b)^2. \quad (2.7)$$

Η ποσότητα $C_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Cotton [162], που προκύπτει από τη μεταβολή του όρου bR_{CS} ως προς τη μετρική και δίνεται ως

$$C_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla^\alpha \left[(\nabla^\beta b)\tilde{R}_{\alpha\mu\beta\nu} + (\nabla^\beta b)\tilde{R}_{\alpha\nu\beta\mu} \right]. \quad (2.8)$$

Τονίζουμε ότι, αντίθετα με τον όρο της ανωμαλίας βαθμίδας $F \wedge F$, ο βαρυτικός όρος bR_{CS} δεν είναι τοπολογικός, υπό την έννοια ότι συνεισφέρει στις πεδιακές εξισώσεις Einstein. Ο τανυστής Cotton ικανοποιεί τον συναλλοίωτο κανόνα μη-διατήρησης,

$$\nabla_\mu C^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\nabla^\nu b)R_{CS}. \quad (2.9)$$

Το εν λόγω αποτέλεσμα μπορεί να επιβεβαιωθεί άμεσα μέσω των εξισώσεων κίνησης. Είναι γνωστό μέσω της συμμετρίας κάτω από διαφορομορφισμούς, ότι η εξίσωση κίνησης του βαθμωτού πεδίου είναι απλά η ταυτότητα Bianchi των βαρυτικών εξισώσεων. Κάτω από τη συνθήκη $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, όπου $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ είναι ο τανυστής Einstein, και προσέχοντας ότι $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \square b \nabla^\nu b$, βρίσκει κανείς απευθείας ότι

$$0 = \nabla^\mu G_{\mu\nu} = \kappa^2 \nabla^\mu T_{\mu\nu}^b + 4\kappa^2 A \nabla^\mu C_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

από την οποία έχουμε ότι,

$$0 = \kappa^2 \square b \nabla^\nu b + 4\kappa^2 A \nabla^\mu C_{\mu\nu} \stackrel{2.6}{\implies} A R_{CS} \nabla^\nu b = -4A \nabla^\mu C_{\mu\nu} \implies \nabla^\mu C_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\nabla^\nu b)R_{CS}. \quad (2.11)$$

Τονίζουμε ότι η διατήρηση του κανονικού τανυστή ενέργειας ορμής $T_{\mu\nu}^b$ παραβιάζεται, καθώς η ποσότητα $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^b$ δεν μηδενίζεται αλλά είναι ανάλογη της πυκνότητας Pontryagin (cf. 2.11)

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^b = -4A \nabla^\mu C_{\mu\nu} = A \frac{1}{4}(\nabla^\nu b)R_{CS}. \quad (2.12)$$

Το εν λόγω αποτέλεσμα οδηγεί στην ύπαρξη ανταλλαγής ενέργειας του αξιονίου με τη βαρυτική ανωμαλία R_{CS} για χωρόχρονους όπου ο εν λόγω όρος δεν είναι τετριμμένος, όπως είναι οι περιπτώσεις ύπαρξης βαρυτικών κυμάτων [162, 171] ή οι περιπτώσεις περιστρεφόμενων μελανών οπών [73, 74], που θα μας απασχολήσουν στη δική μας περίπτωση. Επιπροσθέτως, στο πλαίσιο της θεωρίας χορδών, το αξίνιο αποτελεί μέρος της βαρυτικής πολλαπλέτας της χορδής, (όπου ανήκει και το βαρυτόνιο). Επομένως, η αντάλλαξη ενέργειας που περιγράφουμε είναι απλά η αλληλεπίδραση των στοιχείων της πολλαπλέτας μεταξύ τους, κάτι το οποίο αποτελεί μία καλή ένδειξη ότι το αξίνιο της θεωρίας πράγματι είναι ένας βαρυτικός βαθμός ελευθερίας. Μία σημαντική σημείωση εδώ είναι ότι στο κοσμολογικό μοντέλο που αναλύθηκε στα [171, 187], ο όρος Chern-Simons παρουσιάστηκε να έχει κυρίαρχο ρόλο στη φαινομενολογία του πρώιμου σύμπαντος, όπου έγινε η λογική υπόθεση ότι μόνο τα πεδία από τη βαρυτική πολλαπλέτα υπάρχουν στη φύση. Τα πεδία ύλης, δηλαδή ακτινοβολία και φερμιόνια, γεννήθηκαν στο τέλος του πληθωρισμού. Έδειξαν ότι η περίοδος του πληθωρισμού μπορεί να συμβεί μέσω συμπυκνωμάτων βαρυτικών κυμάτων που ισχυροποιούν τον όρο Chern-Simons και οδηγεί σε έναν ενεργό όρο de-Sitter στη δράση. Ο εν λόγω όρος έχει κυρίαρχο ρόλο στο πρώιμο σύμπαν και οδηγεί σε πληθωρισμό χωρίς την ανάγκη πεδίων inflaton, λόγω καθαρών βαρυτικών αλληλεπιδράσεων. Η γέννηση χειραλικών φερμιονικών πεδίων στο τέλος του πληθωρισμού ακυρώνει αυτή τη συμπεριφορά μέσω του μηχανισμού ακύρωσης ανωμαλιών και, επομένως, η εποχή μετά το πληθωρισμό καθιστά την αξιονική ύλη (και την αντάλλαξη ενέργειας με τον όρο Chern-Simons) υποκυρίαρχη.

Πρωτού προχωρήσουμε στο κύριο κομμάτι, που είναι οι τοπικές λύσεις στη θεωρία, αναφέρουμε ότι ο αναγνώστης μπορεί να βρει τις αναλυτικές πράξεις για τον τανυστή Cotton στο πρώτο παράρτημα.

2.3 Τοπικές λύσεις στη θεωρία Chern-Simons

Εφόσον το αξιονικό πεδίο είναι ψευδοβαθμωτό, επιβάλλει μια αξονική συμμετρία στο χωρόχρονο που μπορεί να διαδωθεί. Προφανώς, αν θεωρήσουμε στατικούς και σφαιρικά συμμετρικούς χωρόχρονους, ο όρος R_{CS} μηδενίζεται ταυτοτικά και το αξιόνιο δεν έχει δυναμική. Επομένως, σε ένα σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο, η θεωρία είναι ουσιαστικά ίδια με τη Γενική Σχετικότητα. Όμως, η ύπαρξη του αξιονικού πεδίου b επιβάλλει μια αξονική συμμετρία και μπορούμε συνεπώς να ελέγξουμε την ύπαρξη γεωμετριών με περιστροφή. Η ανάλυση μας θα επικεντρωθεί σε αναλυτικές λύσεις περιστρεφόμενων μελανών οπών. Για τον λόγο αυτό, περιοριζόμαστε σε αργά περιστρεφόμενους χωρόχρονους, καθώς οι συνθήκες υψηλής περιστροφής καθιστούν αναλυτικά αποτελέσματα αδύνατα. Θα επιτρέψουμε μόνο πρώτες τάξεις της παραμέτρου στροφορμής a της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής τύπου Kerr, και θα αχυρώσουμε ότι περαιτέρω συνεισφορά τάξης $\mathcal{O}(a^2)$.

Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη γενική μορφή μετρικής

$$ds^2 = -H(r)dt^2 + F(r)dr^2 - 2r^2 a \sin^2 \theta W(r) dt d\phi + r^2 d\Omega^2 . \quad (2.13)$$

Από την εξίσωση κίνησης του αξιονίου (2.7), έχουμε ότι ο όρος R_{CS} μέχρι πρώτη τάξη στην παράμετρο a δίνεται από τη σχέση

$$A R_{CS} = -a A \cos \theta W' \frac{4F^2 H^2 + r H F' (r H' - 2H) + F(-4H^2 + r^2 (H')^2 + 2r H (H' - r H''))}{F^2 H^2 r^2 \sqrt{FH}} , \quad (2.14)$$

όπου το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.7) δίνεται ως

$$\square b = \frac{1}{F} \left[\partial_r^2 + \left(\frac{2}{r} - \frac{F'}{F} + \frac{H'}{2H} \right) \right] b + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta b] , \quad (2.15)$$

όπου ο τόνος περιγράφει παραγωγή ως προς την ακτινική συντεταγμένη r . Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διαχωρισμού μεταβλητών και προσέχοντας ότι το δεξιά μέλος της εξίσωσης (2.15) είναι απλά ο τελεστής L^2 της στροφορμής του b , εξάγουμε μέσω των παραπάνω σχέσεων ότι το αξιονικό πεδίο θα δίνεται μέσω της συναρτησιακής μορφής

$$b = a A u(r) P_1(\cos \theta) , \quad (2.16)$$

όπου η συνάρτηση P_1 περιγράφει το πολυώνυμο Legendre πρώτης τάξης, το οποίο απευθείας επιβεβαιώνει τη σωστή γωνιακή εξάρτηση των εξισώσεων. Τονίζουμε, όμως, ότι το φορτίο του αξιονίου δίνεται από την ελάχιστη τάξη του $\mathcal{O}(a)$. Επιστρέφοντας στις πεδιακές εξισώσεις (2.6), βρίσκουμε ότι τα στοιχεία tt και rr των βαρυτικών εξισώσεων κίνησης ικανοποιούνται στο κενό, καθώς οι αντίστοιχοι ταυστές ενέργειας ορμής για τα στοιχεία αυτά είναι τάξης $\mathcal{O}(a^2)$, τους οποίους αγνοούμε στην προσέγγισή μας. Αυτό σημαίνει προφανώς ότι

$$H(r) = \frac{1}{F(r)} = 1 - \frac{2M}{r} , \quad M \equiv G M , \quad (2.17)$$

όπου $G = 8\pi \kappa^{-2}$ είναι η Νευτώνια βαρυτική σταθερά στις (3+1)-διαστάσεις.

Επομένως, οι όποιες διορθώσεις στη μορφή της γεωμετρίας θα βρίσκονται στο μη-διαγώνιο όρο της μετρικής $g_{t\phi}$. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε τον επαναορισμό

$$W(r) = \frac{2M}{r^3} + w(r) , \quad (2.18)$$

με σκοπό να εξάγουμε τις διορθώσεις, $w(r)$, στην αργά περιστρεφόμενη γεωμετρία Hartle-Thorne 2.13, που επιβάλλονται από τη συνεισφορά του αξιονίου. Χρησιμοποιώντας τώρα τα αποτελέσματα από τις εξισώσεις (2.16), (2.17) και (2.18), επικεντρωνόμαστε στο στοιχείο $t\phi$ των βαρυτικών εξισώσεων κίνησης. Συγκεκριμένα, βρίσκουμε ότι το στοιχείο $t\phi$ του ταυστή Einstein

$$G_{t\phi} = \frac{1}{2}a(r-2M)\sin^2\theta(4w' + rw'') + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.19)$$

δίνεται μέσω του αντίστοιχου στοιχείου του ταυστή Cotton ,

$$C_{t\phi} = -\frac{3AM(r-2M)(ru' - u)}{r^5}a\sin^2\theta + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.20)$$

καθώς το στοιχείο $T_{t\phi}$ μηδενίζεται στο προσεγγιστικό μας σχήμα, καθώς το αξίνιο είναι τάξης $b \sim \mathcal{O}(aA)$, όπως δείξαμε στην (2.16). Τα παραπάνω οδηγούν στην απλή διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{u}{r}\right)' = -\frac{1}{24A^2\kappa^2M}(r^4w')'. \quad (2.21)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση και μηδενίζοντας την σταθερά ολοκλήρωσης που θα μας έδινε αποκλίνουσα συναρτησιακή συμπεριφορά στον ορίζοντα, έχουμε το αποτέλεσμα

$$u(r) = -\frac{r^5w'}{24A^2\kappa^2M}. \quad (2.22)$$

Επομένως, έχουμε πλέον εξάγει την πληροφορία από τους βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας, εκτός των διορθώσεων w στο μη-διαγώνιο στοιχείο της μετρικής, που μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση κίνησης του αξιονίου, μέσω της σχέσης (2.22). Συγκεκριμένα, εισάγοντας τα αποτελέσματα μας στην εξίσωση κίνησης του αξιονίου, (2.7), εξάγουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$r^{11}(r-2M)w''' + 2r^{10}(6r-11M)w'' + (28r^{10} - 50Mr^9 - 576A^2\kappa^2M^2r^4)w' + 3456A^2\kappa^2M^3 = 0. \quad (2.23)$$

Για να εξάγουμε τη λύση στη παραπάνω διαφορική, θεωρούμε ένα ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης διορθώσεων w . Συγκεκριμένα, για να μηδενίζεται το αξίνιο στη χωρική ασύμπτωτη, $r \rightarrow \infty$, το $w'(r)$ πρέπει να είναι τουλάχιστον τάξης $\mathcal{O}(r^{-5})$ και συνεπώς το $w(r)$ είναι τάξης $\mathcal{O}(r^{-4})$, το οποίο, μέσω της σχέσης (2.18) επιβάλλει ότι ασυμπτωτικά η κυρίαρχη τάξη του $g_{t\phi}$ είναι η ίδια με αυτή της γεωμετρίας Hartle-Thorne, δηλαδή η γεωμετρία ταυτίζεται ασυμπτωτικά με αυτή της αργά περιστρεφόμενης μετρικής Kerr. Ορίζουμε λοιπόν τη διόρθωση w σε μία μη-κλειστή μορφή ακολούθως

$$w(r) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{d_n M^{n-2}}{r^n}, \quad (2.24)$$

όπου εισάγαμε τους όρους M^{n-2} για να κρατήσουμε τους συντελεστές d_n αδιάστατους. Πλέον, το πρόβλημα εύρεσης της γεωμετρικής διόρθωσης $w(r)$ μπορεί να αντιμετωπιστεί με το να βρούμε απλά τους συντελεστές d_n . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.24), βρίσκουμε μετά από λίγη άλγεβρα ότι η εξίσωση (2.23) μπορεί να δωθεί μέσω της σχέσης

$$\begin{aligned} & 3456A^2\kappa^2M^3 - 162M^7d_9 + 256M^7d_8 + 8M^2d_4r^5 \\ & + \sum_{n=4}^{-1} \frac{M^{n+7} [-(n+3)(n+6)(n+9)d_{n+9} + 2(n+4)^2(n+8)d_{n+8}]}{r^n} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^{n+7} [-(n+3)(n+6)(n+9)d_{n+9} + 2(n+4)^2(n+8)d_{n+8}] + 576A^2\kappa^2M^{n+3}(n+3)d_{n+3}}{r^n} = 0. \end{aligned}$$

Για να μηδενίζεται το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης για κάθε r , όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων r^n πρέπει να μηδενίζονται. Αυτό οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{aligned}
d_4 &= 0 , \\
256d_8 - 162d_9 &= -3456 \frac{A^2 \kappa^2}{M^4} \\
-(n+3)(n+6)(n+9)d_{n+9} + 2(n+4)^2(n+8)d_{n+8} &= 0 , \quad \text{για } n = -1, -2, -3, -4 \\
-(n+3)(n+6)(n+9)d_{n+9} + 2(n+4)^2(n+8)d_{n+8} + 576 \frac{A^2 \kappa^2}{M^4} (n+3)d_{n+3} &= 0 \quad \text{όπου } n \geq 1 .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Χρησιμοποιώντας την ολίσθηση $n \rightarrow n - 9$, η τελευταία σχέση δίνει το αποτέλεσμα

$$d_n = \frac{2(n-5)^2(n-1)}{n(n-6)(n-3)} d_{n-1} + \frac{576A^2\kappa^2}{n(n-3)M^4} d_{n-6}, \quad \text{όπου } n \geq 10 . \tag{2.26}$$

Η παραπάνω αναδρομική σχέση απαιτεί να είναι γνωστά τα στοιχεία $d_{4,5,6,7,8,9}$ όλους τους όρους υψηλότερης τάξης. Από την (2.26), βρίσκουμε το ακόλουθο σύνολο αρχικών συνθηκών της αναδρομικής σχέσης

$$\begin{aligned}
d_4 &= d_5 = 0 , \\
-28d_7 + 48d_6 &= 0 , \\
-80d_8 + 126d_7 &= 0 , \\
256d_8 - 162d_9 &= -3456 \frac{A^2 \kappa^2}{M^4} .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Οπότε, έχουμε τέσσερις άγνωστους συντελεστές, αλλά τρεις σχέσεις στη διάθεση μας. Αυτό σημαίνει ότι δε μπορούμε να εξάγουμε πλήρως όλους τους συντελεστές από τη σχέση (2.25).

Ο τρόπος να απόφυγουμε το εν λόγω πρόβλημα είναι να θεωρήσουμε το όριο ασθενούς πεδίου, δηλαδή τη περίπτωση όπου το αξιόνιο δεν επηρεάζει τη γεωμετρία. Το όριο αυτό, στη περίπτωση μας, ισχύει μόνο στην ασυμπτωτική περιοχή του χωρόχρονου, όπου η εξίσωση κίνησης του αξιονίου μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Πράγματι, οι όροι διόρθωσης που σχετίζονται με την παραμόρφωση της γεωμετρίας είναι υποκυρίαρχοι στην ασυμπτωτική περιοχή. Συνεπώς, από τη στιγμή που η ασυμπτωτική περιοχή ορίζει τους κυρίαρχους όρους του αξιονίου ως προς την ακτινική του συμπεριφορά, μπορούμε απλά να επιβάλλουμε την αντίστοιχη ισότητα και να εξάγουμε τις τιμές των συντελεστών d_6, d_7, d_8, d_9 από την ασυμπτωτική περιοχή αντί από την εξίσωση που μας δίνει τη πλήρη λύση. Συγκεκριμένα, εισάγωντας τη γεωμετρία της αργά περιστρεφόμενης Kerr μετρικής, η εξίσωση του αξιονίου στο άπειρο δίνει μέσω της απλής διαφορικής

$$-2u(r) + 2(r - M)u'(r) + (r^2 - 2Mr)u''(r) = \frac{144M^2}{r^5} , \tag{2.28}$$

της οποίας η λύση παρουσιάζεται στο παράρτημα Β' και είναι

$$u(r) = -\frac{5}{4Mr^2} - \frac{5}{2r^3} - \frac{9M}{2r^4} . \tag{2.29}$$

Το αποτέλεσμα αυτό πρέπει να είναι συνεπές με τη σχέση (2.22), η οποία υπο το ανάπτυγμα (2.24) δίνεται

$$u(r) = \frac{1}{24A^2\kappa^2 M} \left[4d_4M^2 + \frac{5d_5M^3}{r} + \frac{6d_6M^4}{r^2} + \frac{7d_7M^5}{r^3} + \frac{8d_8M^6}{r^4} \right] + \mathcal{O}(1/r^5) . \tag{2.30}$$

Εκτελώντας τώρα τη σχέση ισότητας μεταξύ των σχέσεων (2.29) και (2.30), βρίσκουμε ότι οι πρώτοι συντελεστές του αναπτύγματος (2.24) είναι οι

$$d_4 = d_5 = 0, \quad d_6 = -5\gamma^2, \quad d_7 = -\frac{60\gamma^2}{7}, \quad d_8 = -\frac{27\gamma^2}{2}, \quad d_9 = 0, \quad \text{όπου } \gamma^2 = \frac{A^2\kappa^2}{M^4}. \quad (2.31)$$

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι μία σημαντική συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι ότι η σχέση (2.24) παράγει συντελεστές υψηλότερων άρτιων τάξεων του γ μέσω της (2.26),

$$d_{10} = d_{11} = 0, \quad d_{12}, d_{13}, d_{14} \sim -\gamma^4, \quad \dots, \quad d_{21} \sim -\gamma^4 - \gamma^6 \dots, \quad (2.32)$$

όπου \sim περιγράφει θετική ανάλογια των συντελεστών υψηλότερης τάξης. Στο παράρτημα Γ', αποδεικνύουμε την σύγκλιση της σειράς (2.24) για κάθε πραγματική τιμή της σταθεράς $\gamma \in \mathbb{R}$. Από τις παραπάνω σχέσεις, παρατηρούμε ότι όλοι οι συντελεστές είναι αρνητικοί (ή μηδέν), κάτι το οποίο θα μας απασχολήσει στα επόμενα. Ένα δεύτερο σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι, όπως φαίνεται, οι διορθώσεις δεν εξαρτώνται μόνο από την τιμή της σταθεράς σύζευξης στον όρο Chern-Simons, αλλά από το λόγω της σταθεράς ως προς το μέγεθος της μελανής οπής. Αυτό σημαίνει ότι σε επίπεδο τοπικών λύσεων, η σταθερά σύζευξης της θεωρίας μπορεί να παρουσιάζει μη τετριμμένα χαρακτηριστικά στη λύση της μελανής οπής όταν το μέγεθος της μελανής οπής είναι συγκρίσιμο με την ενεργή κλίμακα μήκους της τροποποίησης.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα μας, έχουμε ότι η παραμορφωμένη γεωμετρία της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής δίνεται μέσω της σχέσης

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 - 2r^2 a \sin^2\theta W(r) dt d\phi, \quad (2.33)$$

όπου ο μη-διαγώνιος όρος είναι ο

$$W(r) = \frac{2M}{r^3} - \frac{A^2\kappa^2(189M^2 + 120Mr + 70r^2)}{14r^8} + \mathcal{O}(A^{2n}), \quad \text{όπου } n = \text{positive integer} \geq 2, \quad (2.34)$$

όπου οι υψηλότερες τάξεις διορθωσης $\mathcal{O}(A^{2n})$ μπορούν να βρεθούν απευθείας μέσω της αναδρομικής σχέσης (2.26). Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι λύσεις μελανών οπών με αρκετά μεγάλη μάζα M καθιστούν τέτοιου είδους διορθώσεις αρκετά μικρές για να συνοπολογιστούν και καταλήγει κανείς με αυτοσυνεπές τρόπο στις πρώτες λύσεις των [172, 167]. Αντιθέτως, αν θεωρήσουμε αρκετά μικρές μελανές οπές, τέτοιου είδους διορθώσεις γίνονται αυξανόμενα πιο σημαντικές, ειδικά στη περιοχή κοντά στον ορίζοντα. Στα πλαίσια αυτά, τα αποτελέσματά μας επεκτείνουν τη προϋπάρχουσα βιβλιογραφία και επιτρέπουν τη μελέτη του αξιονικού νέφους και των αντίστοιχων διορθώσεων αυθαίρετα κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής.

Αντίστοιχα, η κατανομή του αξιονίου μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.16) ανδ (2.22) στην ίδια τάξη του A ως

$$b = aA \cos\theta \left(-\frac{5}{4Mr^2} - \frac{5}{2r^3} - \frac{9M}{2r^4} \right) + \mathcal{O}(A^m), \quad \text{για } m = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.35)$$

όπου \mathbb{Z}^+ είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων. Τέλος, έχουμε το μη-μηδενικό στοιχείο του ταυστή Cotton μέσω της (2.20) να δίνεται από τη σχέση

$$4\kappa^2 A C_{t\phi} = a \frac{r - 2M}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-3)d_n M^{n-2}}{r^{n+1}} \sin^2(\theta), \quad (2.36)$$

που είναι αρνητικός για κάθε $r > 2M$, δηλαδή εκτός του ορίζοντα, λόγω του ότι οι συντελεστές $d_n \leq 0$ για κάθε n όπως προκύπτει από τις (2.31) και (2.32). Πρωτού προχωρήσουμε, ελέγχουμε και το αποτέλεσμα από το ολοκλήρωμα Komar αναφορικά με την ισομετρία του χώρου στην αζιμούθια συντεταγμένη ϕ , που περιγράφεται από το διάνυσμα Killing $\xi = \partial_\phi$. Από τη σχέση

$$J = \int \star d\xi = aM, \quad (2.37)$$

όπου ο τελεστής \star περιγράφει τον δυικό τελεστή Hodge, έχουμε ότι το φορτίο του αξιονίου, που είναι ανάλογο των Aa , είναι προφανώς ένα δευτερεύον φορτίο της γεωμετρίας, εφόσον δεν είναι ανεξάρτητο των κυρίων φορτίων της λύσης της μελανής οπής, δηλαδή της μάζας και της στροφορμής, όπως είναι σύνηθες σε βαθμωτοποιημένες λύσεις.

2.4 Η παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών στη τοπική λύση Chern-Simons

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα συζητήσουμε τη παραβίαση των ασθενών ενεργειακών συνθηκών στη θεωρία και πως αυτή συνδέεται με τα γνωστά θεωρήματα no-hair. Ο Bekenstein [13, 14, 15, 17] είχε δείξει τη δεκαετία του 70 ότι βαθμωτά πεδία που δεν είναι συζευγμένα σε βαθμωτά καμπυλότητας δε μπορούν να 'ντύσουν' μία μελανή οπή με βαθμωτό φορτίο, στήνοντας έτσι τις βάσεις για τα θεωρήματα no-hair. Βασική προϋπόθεση αυτού ήταν τα πεδία να μην παραβιάζουν τις ασθενείς ενεργειακές συνθήκες, κάτι το οποίο θα σήμαινε ότι τα ενεργά δυναμικά τους είναι αρνητικά. Γνωρίζουμε όμως ότι η διάδοση του αξιονίου που το καθιστά δυναμικό βαθμό ελευθερίας προκύπτει από τον όρο Chern-Simons, κάτι το οποίο ήδη διαφεύγει εκτός των αρχικών προβλέψεων αναφορικά με τη φύση του βαθμωτού πεδίου. Στα παρακάτω, παρουσιάζουμε την παραβίαση των φωτεινών ενεργειακών συνθηκών (Null Energy Conditions/NEC) στη λύση, η οποία οδηγεί στη παραβίαση όλων των ενεργειακών συνθηκών της Γενικής Σχετικότητας [188]. Συνεχίζουμε με το τι μπορεί να εξάγει κανείς από την παραβίαση αυτή αναφορικά με τη φύση του αξιονικού φορτίου στις περιστρεφόμενες μελανές οπές Chern-Simons.

Όπως προαναφέρθηκε, το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στο ταχυστή ενέργειας ορμής δίνεται από το στοιχείο $t\phi$ του ταχυστή Cotton. Συγκεκριμένα, η λύση μας στο κέλυφος (on-shell) περιγράφεται από την ενεργειακή συνεισφορά

$$T_{t\phi}^{eff} = 4\kappa^2 A C_{t\phi} = a \frac{r-2M}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-3)d_n M^{n-2}}{r^{n+1}} \sin^2(\theta). \quad (2.38)$$

Λόγω του αρνητικού προσήμου των συντελεστών d_n , η συνεισφορά του στοιχείου $C_{t\phi}$ στον ενεργό ταχυστή ενέργειας ορμής είναι αρνητική έξω από τον ορίζοντα, $r > 2M$. Επι προσθέτως, για ένα στάσιμο παρατηρητή, η ενεργειακή πυκνότητα είναι πρακτικά μηδενική καθώς το T_t^t είναι τάξης $\mathcal{O}(a^2)$.

Για να παρουσιάσουμε την παραβίαση των NEC, ορίζουμε πρώτα τα ακόλουθα φωτεινὰ διανύσματα του χωρόχρονου

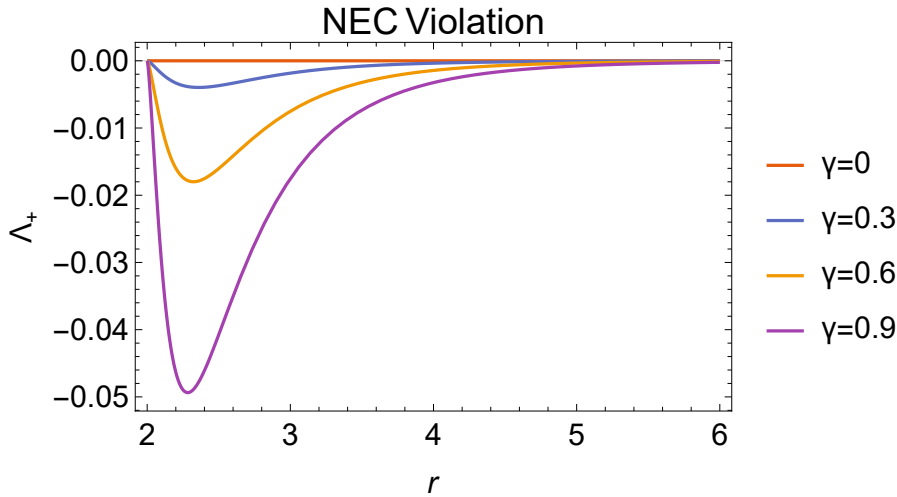
$$l_{\pm}^{\mu} = \left(1, 0, 0, -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \right). \quad (2.39)$$

Η συναίρεση με τον $T_{\mu\nu}^{eff}$ μας δίνει

$$T_{\mu\nu}^{eff} l_{\pm}^{\mu} l_{\pm}^{\nu} = \pm \frac{a(r-2M)^{3/2}}{2} \sin(\theta) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n-3)d_n M^{n-2}}{r^{n+5/2}} + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.40)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα υποδεικνύει ότι: $T_{\mu\nu}^{eff} l_{+}^{\mu} l_{+}^{\nu} \leq 0$ ενώ $T_{\mu\nu}^{eff} l_{-}^{\mu} l_{-}^{\nu} \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει και στις δύο περιπτώσεις πάνω στον ορίζοντα $r = 2M$. Επόμενως, οι ενεργειακές συνθήκες στο εξωτερικό της μελανής οπής (εκτός από τα σημεία των πόλων $\theta = 0, \pi$).

Η εν λόγω παραβίαση οφείλεται καθαρά στη σύζευξη του αξιονίου με την πυκνότητα Pontryagin. Όπως παρατηρεί εύκολα κανείς, όσο ο λόγος της σταθεράς σύζευξης προς τη μάζα της μελανής οπής αυξάνεται, η παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών ισχυροποιείται και η παραμόρφωση της γεωμετρίας γίνεται πιο έντονη. Στο διάγραμμα 2.1, παρουσιάζουμε τη μορφή της παραβίασης: Κοντά στον ορίζοντα, η παραβίαση παίρνει τη μέγιστη της τιμή, ενώ μακριά από τη μελανή οπή είναι αμελητέα, κάτι το οποίο είναι αυτοσυνεπές με το γεγονός ότι οι διορθώσεις λόγω του αξιονίου είναι σημαντικές κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής. Επίσης, παρατηρούμε μία έντονη αύξηση της παραβίασης καθώς αυξάνουμε την αδιάστατη σταθερά γ , που σημαίνει ότι μικρότερες μελανές οπές μπορούν να 'ντυθούν' πιο εύκολα με βαθμωτό φορτίο.



Σχήμα 2.1: Συμπεριφορά του $\Lambda_+ = T_{\mu\nu}^{eff} l_{+}^{\mu} l_{+}^{\nu} / a$ στον ισημερινό $\theta = \pi/2$ σε τάξη $\mathcal{O}(A^2)$ με εξάρτηση την ακτινική συντεταγμένη.

Από τα παραπάνω, φαίνεται να υπάρχει μία ισχυρή σχέση μεταξύ των ενεργειακών συνθηκών και του βαθμωτού φορτίου των μελανών οπών. Από τις βαρυτικές εξισώσεις κίνησης, γνωρίζουμε ότι τα πεδία ύλης και η γεωμετρία είναι συζευγμένα, όλοι οι βαθμοί ελευθερίας σε μία βαρυτική θεωρία αλληλεπιδρούν με την βαρύτητα. Οι ενεργειακές συνθήκες μας δίνουν περαιτέρω πληροφορίες για τη φύση της αλληλεπίδρασης. Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες των πεδίων ύλης στην εκάστοτε τροποποιημένη βαρυτική θεωρία σχετίζονται με το τρόπο που παραμορφώνεται η γεωμετρία γύρω από τη μελανή οπή που η θεωρία υποστηρίζει. Επομένως, αν η ύπαρξη βαθμωτού φορτίου σχετίζεται πράγματι με την παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών, συνέπεια αυτού είναι και η παραμόρφωση της γεωμετρίας. Hairy μελανές οπές είναι παραδείγματα τέτοιων παραμορφώσεων. Τονίζουμε στο σημείο αυτό όμως, ότι το φορτίο λόγω του αξιονίου είναι απλά δευτερεύον, υπό την έννοια ότι η μελανή οπή περιγράφεται ακόμα μέσω της μάζας και της στροφορμής ως ελεύθερα φορτία της γεωμετρίας. Επόμενως, το πρόβλημα της πληροφορίας αναφορικά με την βαρυτική κατάρρευση του αστεριού παραμένει άλυτο.

2.5 Συμπεριφορά γεωδαισιακών υπό συνθήκες ισχυρής σύζευξης στη γεωμετρία

Στο εν λόγω υποκεφάλαιο θα συνεχίσουμε την ανάλυση μας και θα επικεντρωθούμε σε συνθήκες ισχυρούς σύζευξης. Συγκεκριμένα, επιθυμούμε να ελέγξουμε κατά πόσο οι διορθώσεις που εξάγαμε στα προηγούμενα μπορούν να δημιουργήσουν νέα φαινομενολογία κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής. Για το σκοπό αυτό, επικεντρωθήκαμε στις γεωδαισιακές σωματιδίων κοντά στη μελανή οπή και ελέγξαμε τη συμπεριφορά του ενεργού δυναμικού για διάφορες τιμές της αδιάστατης παραμέτρου γ . Θα ξεκινήσουμε με μία γρήγορη παρουσίαση γεωδαισιακών σε περιστρεφόμενες γεωμετρίες και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα κύρια αποτελέσματα μας.

Όπως είναι γνωστό, στάσιμες και αξισυμμετρικές γεωμετρίες έχουν δύο κύριες συμμετρίες Killing , που περιγράφονται από τα διανύσματα Killing ,

$$k = \partial_t, \quad \text{και} \quad \xi = \partial_\phi \quad (2.41)$$

όπου το k είναι το χρονοειδές διάνυσμα που περιγράφει τις ισομετρίες στην μετατόπιση χρόνου και το ξ είναι το χωροειδές διάνυσμα που περιγράφει τις ισομετρίες ισομορφικές με την ομάδα $U(1)$. Από τα εν λόγω διανύσματα, έχουμε 3 σταθερές κίνησης,

$$\begin{aligned} E &= -k^\mu u_\mu \rightarrow g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} = -E, \\ L_z &= \xi^\mu u_\mu \rightarrow g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} = L_z, \\ g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= \epsilon, \end{aligned} \quad (2.42)$$

όπου E είναι η ενέργεια του σωματιδίου, L_z είναι η στροφορμή του (κατά τη διεύθυνση της καρτεσιανής συντεταγμένης z) και u^μ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά της γεωδαισιακής με $\epsilon = -1, 0$ για έμμαζα και άμαζα σωματίδια αντιστοίχως. Θεωρούμε επίσης κατάλληλα παραμετροποιημένες (affinely parametrized) γεωδαισιακές, που μας παρέχουν τη τρίτη σταθερά της κίνησης. Από τις πρώτες δύο, χρησιμοποιώντας μια γενική μορφή αξισυμμετρικής μετρικής, βρίσκει κανείς άμεσα ότι

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{g_{t\phi}L_z + g_{\phi\phi}E}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \\ \dot{\phi} &= -\frac{g_{t\phi}E + g_{tt}L_z}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

ενώ από τη τρίτη εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + V_{eff}^E(r, \theta) &= 0, \\ \text{όπου } V^E(r, \theta) &= \frac{L_z^2 g_{tt} + E^2 g_{\phi\phi} + 2EL_z g_{t\phi}}{g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2} - \epsilon. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Η συνάρτηση $V^E(r, \theta)$ εξαρτάται από τη μάζα του σωματιδίου E , κάτι το οποίο τη καθιστά κακώς ορισμένη για το ρόλο του ενεργού δυναμικού. Για να ορίσουμε το ενεργό δυναμικό, γνωρίζουμε ότι η κινητική ενέργεια μηδενίζεται όταν η συνολική ενέργεια ισούται με τη δυναμική. Επομένως, θέτοντας $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ και λύνοντας την εξίσωση $V^E(r, \theta) = 0$ ως προς το E , το αποτέλεσμα μπορεί να αναγνωριστεί ως το ενεργό δυναμικό της γεωδαισιακής. Ξαναγράφουμε το $V^E(r, \theta)$ ως

$$V^E(r, \theta) = -\frac{g_{\phi\phi}E^2 + 2L_z g_{t\phi}E + L_z^2 g_{tt} + \epsilon\tilde{\Delta}}{\tilde{\Delta}}, \quad (2.45)$$

όπου $\tilde{\Delta} = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$ είναι η ορίζουσα της μετρικής. Λόγω της υπογραφής Lorentz στη μετρική, $(-+++)$, η ορίζουσα της είναι αρνητική που σημαίνει ότι $\tilde{\Delta} > 0$. Θέτοντας τώρα $V^E = 0$, που μηδενίζει τον αριθμητή, εξάγουμε μία τετραγωνική εξίσωση ως προς το E , από την οποία έχουμε τη λύση

$$V^{(\pm)}(r, \theta) = -\frac{L_z g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \frac{\sqrt{\tilde{\Delta}}}{g_{\phi\phi}} \sqrt{L_z^2 - \epsilon g_{\phi\phi}}. \quad (2.46)$$

Με βάση τα παραπάνω, η σχέση (2.44) δίνεται ως

$$g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = \frac{(E - V^{(+)}) (E - V^{(-)})}{\tilde{\Delta}}. \quad (2.47)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι μη-αρνητικό και μηδενίζεται στα σημεία καμπής του φασηκού χώρου, όπου $E = V^{(+)}$ ή $E = V^{(-)}$. Επομένως, η ενέργεια θα δίνεται είτε από τη σχέση $E = V^{(+)}$ είτε από τη σχέση $E = V^{(-)}$, κάτι το οποίο εξαρτάται από το πρόσημο των $V^{(\pm)}$.

Για την περίπτωση αργά περιστρεφόμενων γεωμετριών που θα μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε για τη λύση Chern-Simons, η απουσία εργόσφαιρας στην εξωτερική περιοχή σημαίνει ότι η ενέργεια του σωματιδίου, $E = -k^\mu u_\mu$, είναι θετικά ορισμένη. Μέσω της σχέσης (2.46), μπορούμε να διαχωρίσουμε δύο περιπτώσεις:

1. $L_z g_{t\phi} < 0$: Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε σωματίδια που περιστρέφονται με τη φορά της γεωμετρίας της μελανής οπής. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε ότι $V^{(+)} > 0$ για όλο τον εξωτερικό χώρο της μελανής οπής. Υποθέτοντας ότι $V^{(-)} < 0$, βρίσκουμε ότι $-g_{tt}L_z^2 > \epsilon\tilde{\Delta}$, κάτι το οποίο είναι σαφές ότι ισχύει στον εξωτερικό χώρο, που σημαίνει ότι $(E - V^{(-)}) > 0$, $\forall E$. Επομένως το ενεργό δυναμικό δίνεται από το $V^{(+)}$.
2. $L_z g_{t\phi} > 0$: Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε σωματίδια που περιστρέφονται με τη φορά της γεωμετρίας της μελανής οπής. Τότε, $V^{(-)} < 0$ και συνεπώς $(E - V^{(-)}) > 0$, $\forall E$. Επιπροσθέτως, υποθέτοντας $V^{(+)} < 0$, έχουμε ότι: $-g_{tt}L_z^2 < \tilde{\Delta}\epsilon$. Εφόσον η ορίζουσα, $\tilde{\Delta} > 0$ στον εξωτερικό χώρο και η σταθερά $\epsilon = 0, -1$, είναι σαφές ότι το $V^{(+)}$ θα είναι αρνητικό, στην περιοχή όπου $g_{tt} > 0$, δηλαδή στο εσωτερικό της μελανής οπής. Άρα, το $V^{(+)}$ μπορεί και πάλι να αντιμετωπιστεί ως το ενεργό δυναμικό υπό την έννοια ότι οι επιτρεπόμενες περιοχές κίνησης ορίζονται μέσω της σχέσης $V^{(+)} \leq E$, αφού το δεξιά μέλος της εξίσωσης (2.47) είναι μη-αρνητικό και μηδέν στα σημεία καμπής.

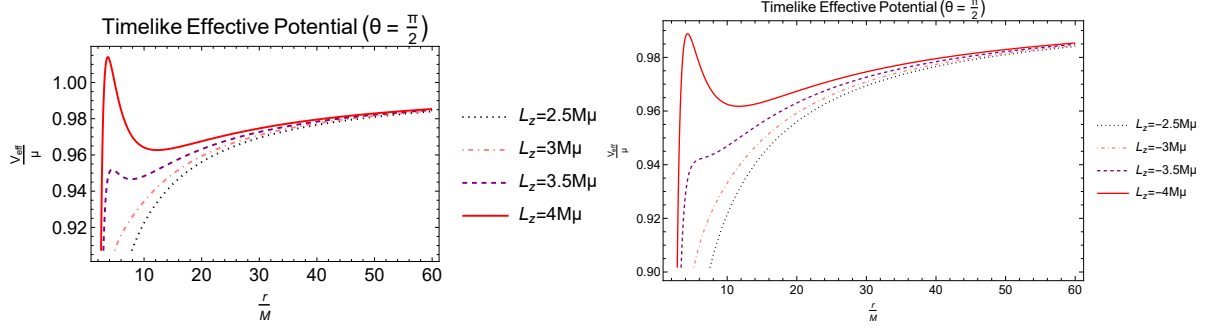
Συμπαίρνουμε λοιπόν ότι το ενεργό δυναμικό της τροχιάς δίνεται από τη σχέση

$$V_{eff}(r, \theta) = -\frac{L_z g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} + \frac{\sqrt{\tilde{\Delta}}}{g_{\phi\phi}} \sqrt{L_z^2 - \epsilon g_{\phi\phi}}. \quad (2.48)$$

Σε πρώτη τάξη στη παράμετρο στροφορμής $\mathcal{O}(a)$, η παραπάνω εξίσωση δίνει για την περίπτωση της Kerr ότι το δυναμικό είναι το

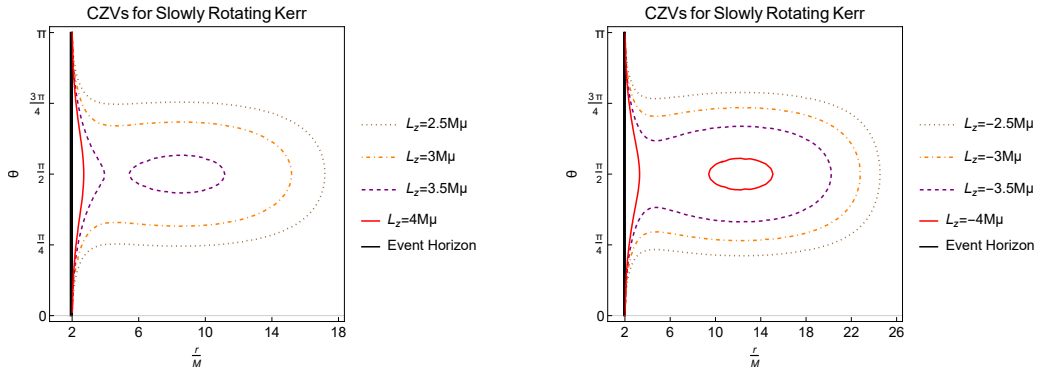
$$V_{eff}(r, \theta) = \frac{\sqrt{r(r-2M)(L_z^2 + r^2 \sin^2(\theta))}}{r^2 \sin(\theta)} + \frac{2L_z M a}{r^3} + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.49)$$

το οποίο παρουσιάζουμε διαγραμματικά στην εικόνα (2.2).



Σχήμα 2.2: Το ενεργό δυναμικό στον ισημερινό για χρονοειδείς γεωδαισιακές στη περίπτωση της αργά περιστρεφόμενης Kerr. Η παράμετρος a έχει πάρει την τιμή $a = 0.1$.

Αυξάνοντας τη στροφορμή του σωματιδίου, εμφανίζονται τοπικά μέγιστα και ελάχιστα που υποδηλώνουν δεσμευμένες τροχιές (bound orbits). Όμως, καθώς δεν έχουμε σφαιρική συμμετρία, το δυναμικό θα είναι εξαρτώμενο από τη γωνία θ . Συνεπώς η κίνηση του σωματιδίου δε μπορεί να περιοριστεί σε ένα επίπεδο χωρίς εξωτερικές δυνάμεις. Μπορούμε όμως να επικεντρωθούμε στα σημεία καμπής στο επίπεδο $\theta - r$ θέτοντας το ενεργό δυναμικό να ισούται με κάποια καθορισμένη ενέργεια, $V_{eff} = E$ και να σχεδιάσουμε το αντίστοιχο διάγραμμα που παρουσιάζουμε στην εικόνα 2.3. Λόγω της σχέσης (2.47), τα φασικά σημεία του χώρου $V_{eff} = E$ ορίζουν τις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας (CZV), αφού το αριστερά μέλος της εξίσωσης επιβάλλει ότι $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$.



Σχήμα 2.3: Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για χρονοειδείς γεωδαισιακές. Τα διαγράμματα έχουν υπολογιστεί για $M = 1$, $a = 0.1$ και $E = 0.95$ (στην αριστερή πλευρά) και $E = 0.9633$ (στη δεξιά). Η κάθετη γραμμή ορίζει τον ορίζοντα γεγονότων.

Είναι σαφές ότι σωματίδια που ξεκινούν την κίνησή τους στο εσωτερικό των παραπάνω CZV δε μπορούν να δραυτευθούν στο άπειρο. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι όλες αυτές οι τροχιές θα μείνουν εκτός του ορίζοντα γεγονότων. Οι αρχικές συνθήκες θα ορίσουν το κατά πόσο το σωματίδιο πέφτει στην μελανή οπή ή παραμένει σε τροχιά γύρω από αυτή. Το μέλλον των σωματιδίων μπορεί να οριστεί μόνο εάν αποσυζεύξουμε πλήρως τους βαθμούς ελευθερίας και ολοκληρώσουμε τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν. Τονίζουμε όμως ότι για την περίπτωση της στροφορμής $L_z = 3.5M$, εξάγουμε μία περιοχή φραγμένη από μία έλλειψη μηδενικής ταχύτητας. Έμμαζα σωματίδια που ξεκινούν την κίνησή του μέσα στην έλλειψη θα μείνουν σε τροχιά για πάντα. Δε μπορούν να διαφύγουν στο άπειρο ούτε να πέσουν στη μελανή οπή. Για την περίπτωση των σωματιδίων που περιστρέφονται αντίστροφα με τη μελανή οπή, η δομή των CZV είναι ποιοτικά ίδια.

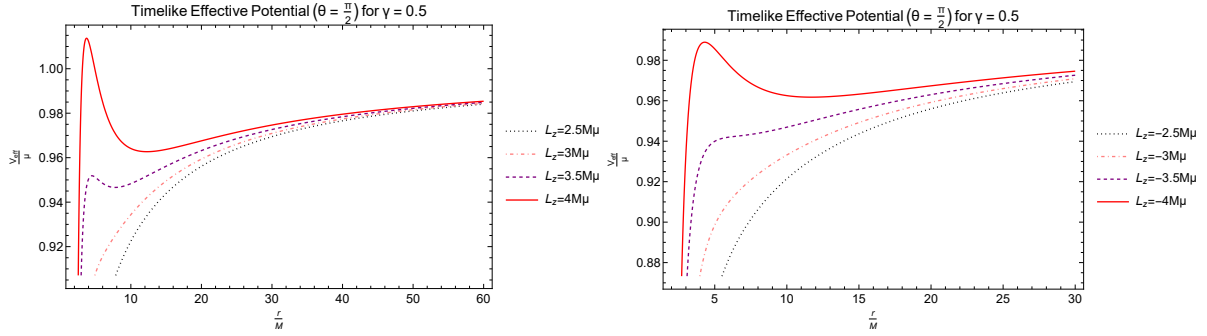
Μπορούμε να προχωρήσουμε τώρα στη περίπτωση της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής Chern-Simons που εξάγαμε στα προηγούμενα. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση, μπορεί κανείς

άμεσα να βρει ότι το ενεργό δυναμικό τροποποιείται και δίνεται μέσω της σχέσης

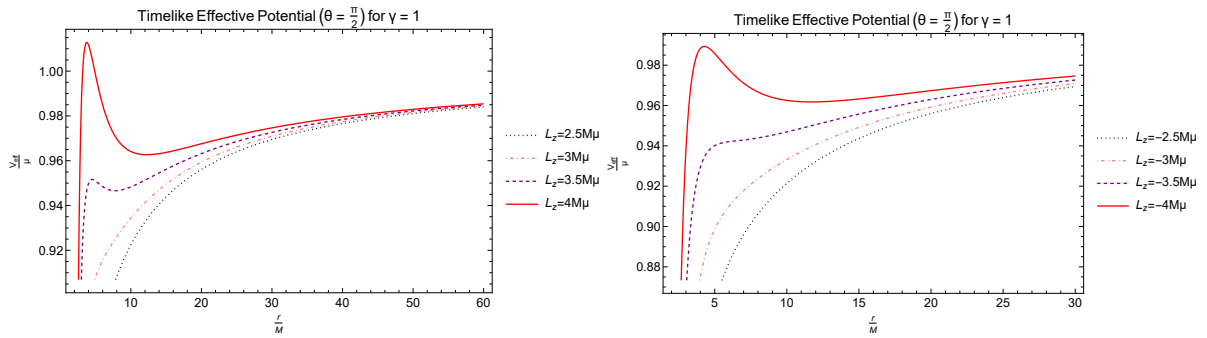
$$V_{eff}(r, \theta) = V_{eff}^K(r, \theta) + \frac{L_z a w(r)}{r^2} . \quad (2.50)$$

όπου το $V_{eff}^K(r, \theta)$ είναι το ενεργό δυναμικό της αργά περιστρεφόμενης Kerr.

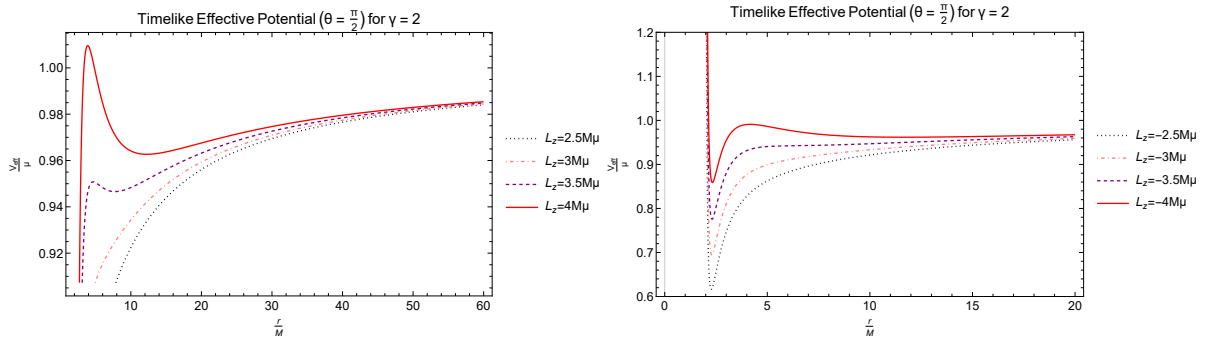
Εφόσον οι διορθώσεις της γεωμετρίας $w(r)$ εμφανίζονται στο ενεργό δυναμικό (2.50) αναμένουμε να δούμε μία ποιοτικά διαφορετική συμπεριφορά στις γεωδαισιακές των σωματιδίων καθώς η παράμετρος γ αυξάνει. Προς αυτό το σκοπό, θα σχεδιάσουμε τα διαγράμματα του ενεργού δυναμικού και τις αντίστοιχες καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για αυξανόμενα γ . Στις εικόνες 2.4 - 2.6 παρουσιάζονται τα εν λόγω αποτελέσματα για θετικές και αρνητικές τιμές της στροφορμής του σωματιδίου. Παρατηρούμε μία εντελώς καινούρια συμπεριφορά στην περίπτωση του $\gamma = 2$. Το ενεργό δυναμικό αποκτά μία απωστική συμπεριφορά για αντίθετα περιστρεφόμενες γεωδαισιακές κοντά στον ορίζοντα και εμφανίζει ένα καινούριο τοπικό ελάχιστο, που συνεπάγεται μία καινούρια οικογένεια ευσταθών τροχιών. Η εν λόγω απωστική φύση του ενεργού δυναμικού δημιουργεί φαινόμενα σκέδασης σωματιδίων που πλησιάζουν πολύ κοντά τον ορίζοντα. Συνεπώς, αντίθετα περιστρεφόμενες τροχιές δεν μπορούν να πέσουν στη μελανή οπή. Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι η εξαγωγή των παρακάτω διαγραμμάτων (όπου η παράμετρος $\gamma \geq 1$) είναι εφικτή μόνο αν κανείς συνυπολογίσει κατά βάση όλες τις διορθώσεις που εξάγαμε στα προηγούμενα. Για να κατασκευάσουμε τα εν λόγω διαγράμματα, υπογίσαμε τη συνεισφορά αρκετών διορθώσεων ώστε το πιθανό σφάλμα από τις υψηλότερες διορθώσεις να είναι ελάχιστο. Τονίζουμε επίσης ότι ο εν λόγω υπολογισμός είναι εφικτός διότι το ανάπτυγμα (2.24) που δίνει τις διορθώσεις της γεωμετρίας συγκλίνει, όπως αποδείξαμε στο παράρτημα Γ'



Σχήμα 2.4: Το ενεργό δυναμικό στον ισημερινό για χρονοειδείς γεωδαισιακές στην περίπτωση της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής Chern-Simons. ($\gamma = 0.5$, $a = 0.1$)



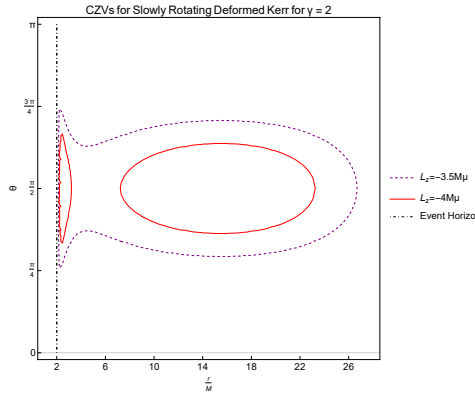
Σχήμα 2.5: Το ενεργό δυναμικό στον ισημερινό για χρονοειδείς γεωδαισιακές στην περίπτωση της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής Chern-Simons. ($\gamma = 1$, $a = 0.1$)



Σχήμα 2.6: Το ενεργό δυναμικό στον ισημερινό για χρονοειδείς γεωδαισιακές στην περίπτωση της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής Chern-Simons. ($\gamma = 2$, $a = 0.1$)

Η εν λόγω καινούρια συμπεριφορά μπορεί να επιβεβαιωθεί και από το ακόλουθο διάγραμμα CZV, όπου έχουμε την εμφάνιση καινούριων σημείων καμπής κοντά στον ορίζοντα. Στην εικόνα 2.7, παρατηρούμε παρεμφερές συμπεριφορά με την αργά περιστρεφόμενη Kerr μακριά από τον ορίζοντα, αλλά κοντά στον ορίζοντα έχουμε μία νέα περιοχή που αποτρέπει τα σωματίδια να πέσουν στη μελανή οπή. Στο [189], οι συγγραφείς μελέτησαν διεξοδικά το ενεργό δυναμικό της μετρικής Kerr για τη περίπτωση της μελανής οπής, της κρίσιμης μελανής οπής (extremal black hole) και για τη περίπτωση της γυμνής μοναδικότητας (naked singularity). Η περίπτωση της κρίσιμης Kerr περιγράφει μία ισχυρά περιστρεφόμενη μελανή οπή. Εφόσον η Kerr αποτελεί λύση κενού και δεν υπάρχουν πεδία ύλης συζευγμένα με τη βαρύτητα, μία ισχυρά περιστρεφόμενη γεωμετρία μελανής οπής θα αντιστοιχεί πάντα σε ένα ισχυρά περιστρεφόμενο ορίζοντα γεγονότων. Στην κρίσιμη

περίπτωση, το ενεργό δυναμικό που βρήκαν είχε μία παρεμφερή συμπεριφορά με τη περίπτωση του $\gamma = 2$ που μελετάμε. Συγκεκριμένα, η απωστική φύση του δυναμικού που παρουσιάσαμε παραπάνω εμφανίζεται και στην περίπτωση της κρίσιμης Kerr, όπου τα αντίθετα περιστρεφόμενα σωματίδια με τη μελανή οπή σχεδιάζονται κοντά στον ορίζοντα. Επομένως, το εν λόγω φαινόμενο φαίνεται να σχετίζεται με μία ισχυρά περιστρεφόμενη περιοχή. Όπως θα δείξουμε παρακάτω, αυτό ισχύει και στη δική μας περίπτωση όπου ο χωρόχρονος παραμένει αργά περιστρεφόμενος όπως προκύπτει από την στροφορμή Komar, αλλά η δομή της γεωμετρίας περιγράφεται από ισχυρά περιστρεφόμενα αυτοτελή στοιχεία, ήτοι το αξιόνιο και το βαρυτικό πεδίο που είναι συζευγμένα μεταξύ τους μέσω του Chern-Simons. Προς απόδειξη αυτών, θα προβούμε στη μελέτη της κατανομής της στροφορμής του χωρόχρονου και των συνεισφορών που προκύπτουν από το αξιόνιο κοντά στον ορίζοντα γεγονότων για συνθήκες ισχυρής σύζευξης, ώστε να εξηγήσουμε περαιτέρω την εν λόγω συμπεριφορά.



Σχήμα 2.7: Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για χρονοειδείς γεωδαισιακές στην περίπτωση της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής Chern-Simons. ($\gamma = 2$, $a = 0.1$)

2.6 Η κατανομή της στροφορμής στην τοπική λύση Chern-Simons

Ακολουθώντας τον γνωστό φορμαλισμό των [190], συνεχίζουμε με τον αναλυτικό υπολογισμό της στροφορμής του ορίζοντα γεγονότων της λύσης μας. Υπενθυμίζουμε ότι, όπως όλα τα διανύσματα Killing, το διάνυσμα Killing που περιγράφει τις ισομετρίες ισομορφικές στη $U(1)$, ήτοι το $\xi = \partial_\phi$, ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\nabla_\beta \nabla^\beta \xi^\alpha = -R^\alpha{}_\beta \xi^\beta, \quad (2.51)$$

όπου $R^\alpha{}_\beta$ είναι ο τανυστής Ricci. Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση πάνω σε μία υπερεπιφάνεια S , που μας δίνει ότι

$$\int_S d\Sigma_\alpha \nabla_\beta \nabla^\beta \xi^\alpha = - \int_S d\Sigma_\alpha R^\alpha{}_\beta \xi^\beta. \quad (2.52)$$

Ο τανυστής $\nabla^\alpha \xi^\beta$, μέσω της εξίσωσης Killing, είναι αντισυμμετρικός, που σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της εξίσωσης μπορεί να γίνει πάνω σε μία διδιάστατη επιφάνεια, ήτοι πάνω στο ∂S του S

$$\int_{\partial S} d\Sigma_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\beta = - \int_S d\Sigma_\alpha R^\alpha{}_\beta \xi^\beta. \quad (2.53)$$

Επιλέγουμε την υπερεπιφάνεια S ως το εξωτερικό της μελανής οπής. Επομένως, η επιφάνεια ∂S δίνεται μέσω μίας διδιάστατης επιφάνειας στο άπειρο, ∂S_∞ , και της διδιάστατης επιφάνειας στον

ορίζοντα γεγονότων \mathcal{H} . Συνεπώς, το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης ξαναγράφεται ως

$$\int_{\partial S} d\Sigma_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\beta = \int_{\partial S_\infty} d\Sigma_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\beta + \int_{\mathcal{H}} d\Sigma_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\beta . \quad (2.54)$$

Προφανώς το ολοκλήρωμα στο άπειρο αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα Komar, που μας δίνει τη συνολική στροφορμή J από μετρίεται στο άπειρο. Λύνοντας την (2.53) ως προς το J , βρίσκουμε

$$J = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}} d\Sigma_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\beta - \frac{1}{8\pi} \int_S d\Sigma_\alpha R^\alpha{}_\beta \xi^\beta . \quad (2.55)$$

Μέσω τώρα των βαρυτικών εξισώσεων κίνησης (2.6), ο ταυυστής Ricci μπορεί να ξαναγραφεί μέσω του ταυυστή ενέργειας ορμής που μας δίνει ότι

$$J = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}} d\Sigma_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\alpha - \int_S d\Sigma_\alpha \left(T^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha{}_\beta T \right) \xi^\beta . \quad (2.56)$$

όπου ο $T_{\mu\nu}$ περιγράφει τον συνολικό ταυυστή ενέργειας ορμής (μαζί με τον ταυυστή Cotton). Οι παραπάνω όροι μπορούν να αναγνωριστούν ως δύο συνεισφορές της στροφορμής όπως μετριοούνται στο άπειρο. Η πρώτη συνεισφορά είναι απλά η στροφορμή του ορίζοντα της μελανής οπής,

$$J_H = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}} d\Sigma_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\alpha , \quad (2.57)$$

ενώ η δεύτερη συνεισφορά είναι η στροφορμή της ύλης έξω από τον ορίζοντα:

$$J_M = - \int_S d\Sigma_\alpha \left(T^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha{}_\beta T \right) \xi^\beta . \quad (2.58)$$

Προφανώς, αν δεν υπήρχε κάποια τροποποίηση της βαρυτικής θεωρίας, ($T_{\mu\nu} = 0$), η μοναδική συνεισφορά έρχεται από τον ορίζοντα της μελανής οπής και η συνολική στροφορμή είναι ίδια με την στροφορμή του ορίζοντα, δηλαδή $J = J_H$. Αυτή είναι η περίπτωση της λύσης Kerr, όντας λύση κενού.

Για να υπολογίσουμε τις δύο συνεισφορές, (2.57) και (2.58), πρέπει πρώτα να ορίσουμε το επιφανειακό στοιχείο ολοκλήρωσης $d\Sigma_{\alpha\beta}$. Οι επιφάνειες που κατασκευάζουν το ∂S ορίζονται μέσω των $t = c_1$ και $r = c_2$ όπου c_1 και c_2 σταθερές. Αποφύγαμε να χρησιμοποιήσουμε φωτεινές (null) διανύσματα προς διευκόλυνση πράξεων αφού το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Εξάγουμε τα δύο κάθετα one-forms $n_\mu = n_0 \partial_\mu t$ και $\sigma_\mu = \sigma_0 \partial_\mu r$, όπου n_0 και σ_0 σταθερές κανονικοποίησης. Η n_0 επιλέγεται έτσι ώστε $n_\mu n^\mu = -\sigma_\mu \sigma^\mu = -1$. Σε τάξη $\mathcal{O}(a)$, οι σχέσεις αυτές δίνουν $n_0 = 1/\sigma_0 = \pm \sqrt{1 - 2M/r}$. Για να έχουμε μελλοντικές και εξερχόμενες κατευθύνσεις στα διανύσματα, πρέπει να επιλέξουμε $n_0 < 0$ και $\sigma_0 > 0$, δηλαδή

$$\begin{aligned} n_\mu &= -\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \partial_t , \\ \sigma_\mu &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \partial_r . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Μέσω των εν λόγω διανυσμάτων το στοιχείο ολοκλήρωσης δίνει από τη σχέση $d\Sigma_{\alpha\beta} = \sqrt{g^{(2)}} n_\alpha \sigma_\beta d^2x$, όπου $g^{(2)}$ το στοιχείο όγκου της διδιάστατης επαγόμενης (induced) μετρικής, $\sqrt{g^{(2)}} = r^2 \sin \theta$. Ο υπολογισμός $\nabla^\alpha \xi^\beta = g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\phi}^\beta$ μας δίνει το αποτέλεσμα ότι

$$J_H = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta n_\mu \sigma_\nu g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\phi}^\nu . \quad (2.60)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη λύση για τη μετρική της θεωρίας μας, βρίσκουμε ότι

$$n_{\mu}\sigma_{\nu}g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\phi}^{\nu} = \frac{\sin^2(\theta)(-6M - 2rw(r) + r^2w'(r))a}{2r^2} .$$

Εκτελώντας την ολοκλήρωση της (2.60), έχουμε το αποτέλεσμα

$$J = \left[1 + \frac{2rw(r) - r^2w'(r)}{6M} \right] Ma . \quad (2.61)$$

Παίρνοντας τώρα το όριο $r \rightarrow +\infty$, εξάγουμε τη σωστή μορφή της στροφορμής όπως δίνεται από το ολοκλήρωμα Komar, που είναι προφανές ότι μας δίνει $J = Ma$, αφού το w και το w' μειώνονται πιο γρήγορα από r^2 , κάτι το οποίο είναι αυτοσυνεπές με τον αρχικό υπολογισμό της μετρικής στα πρώτα υποκεφάλαια. Από την άλλη, επιλέγοντας τον ορίζοντα γεγονότων, $r = 2M$, βρίσκουμε τη στροφορμή του ορίζοντα να δίνεται από τη σχέση

$$J_H = \left[1 + \frac{2rw(r) - r^2w'(r)}{6M} \right]_{r=2M} Ma . \quad (2.62)$$

Για τη στροφορμή του αξιονίου βρίσκει κανείς απευθείας τη σχέση:

$$J_M = - \int d^3x n_0 \sqrt{g^{(3)}} T_{\phi}^t , \quad (2.63)$$

όπου $g^{(3)}$ είναι η ορίζουσα της τριδιάστατης επαγόμενης μετρικής της υπερεπιφάνειας $t = const$ που δίνεται από $\sqrt{g^{(3)}} = r^2 \sin \theta / \sqrt{1 - 2M/r}$. Επομένως,

$$J_M = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_{2M}^{+\infty} r^2 T_{\phi}^t . \quad (2.64)$$

Αντικαθιστώντας το T_{ϕ}^t σε τάξη $\mathcal{O}(a)$ και εκτελώντας τις αντίστοιχες ολοκληρώσεις έχουμε

$$J_M = \frac{a}{6} \int_{2M}^{+\infty} [2w(r) - r^2w''(r)] dr . \quad (2.65)$$

Το εσωτερικό του ολοκληρώματος μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$2w(r) - r^2w''(r) = - \frac{d}{dr} (r^2w'(r) - 2rw(r))$$

, και εφόσον $r^2w', rw(r) \rightarrow 0$, όταν το $r \rightarrow +\infty$, έχουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$J_M = - \left[\frac{2rw(r) - r^2w'(r)}{6M} \right]_{r=2M} Ma . \quad (2.66)$$

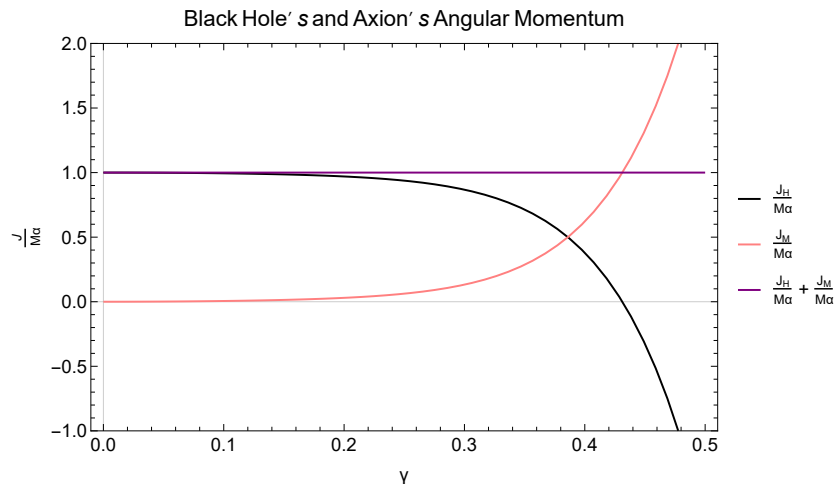
Συνεπώς, όπως αναμενόταν, οι σχέσεις (2.62) και (2.66) μας δίνουν τη συνολική στροφορμή

$$J = J_H + J_M = Ma . \quad (2.67)$$

Το βασικό αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι η συνολική στροφορμή Komar είναι πάλι ίση με Ma , όπως είναι στη περίπτωση της Kerr, αλλά στη δική μας περίπτωση υπάρχει μία μη-τετριμμένη εσωτερική δομή που ορίζεται από τη στροφορμή του ορίζοντα και του αξιονίου. Το αξιόνιο επιδρά στη μετρική της μελανής οπής επιβάλλοντας περιστροφή, που συμφωνεί με το γεγονός ότι ο χωρόχρονος πρέπει να περιστρέφεται για να έχει το αξιόνιο δυναμική. Θυμίζουμε ότι για σφαιρικά

συμμετρικές γεωμετρίες, $R_{CS} = 0$ και το αξιόνιο δεν έχει δυναμική. Επιπροσθέτως, όπως προαναφέρθηκε, η παράμετρος γ , που εμφανίζεται στις διορθώσεις $w(r)$ αποτελεί μέτρο του πόσο ισχυρή είναι η παραμόρφωση της γεωμετρίας. Όσο αυξάνεται η παραμόρφωση, δηλαδή όσο αυξάνεται το γ (που σημαίνει μελανές οπές μικρότερης μάζας), η στροφορμή της μελανής οπής αλλάζει. Το αξιόνιο αποκτά στροφορμή με τέτοιο τρόπο ώστε η συνολική στροφορμή να στο άπειρο να παραμένει σταθερή και ίση με την περίπτωση της Kerr. Όμως, όσο αυξάνεται το γ μέχρι μία κρίσιμη τιμή γ_c , η στροφορμή του ορίζοντα μικραίνει, όπου στη κρίσιμη περίπτωση ο ορίζοντας δεν περιστρέφεται! Μετά την τιμή αυτή, ο ορίζοντας αρχίζει να περιστρέφεται στην αντίθετη κατεύθυνση με αυξανόμενο μέτρο (καθώς το γ αυξάνει). Επομένως, το μέτρο του κάθε στοιχείου της στροφορμής, μπορεί εν γένει να πάρει μεγάλες τιμές, αλλά η συνολική στροφορμή του χωρόχρονου, όπως τη μετράει ένας παρατηρητής στο άπειρο, παραμένει μικρή και αυτοσυνεπής με την προσέγγιση πρώτης τάξης στην παράμετρο στροφορμής a .

Μπορεί κανείς να καταλάβει την εν λόγω συμπεριφορά έχοντας υπόψιν δύο αντικρουόμενα συστήματα: το χωρόχρονο κενού (λύση αργά περιστρεφόμενης Kerr) και το αξιόνιο που είναι συζευγμένο στον όρο Chern-Simons. "Σβήνοντας" τη σύζευξη, το σύστημα επιστρέφει πίσω στη μετρική Kerr. Όσο η σύζευξη είναι ενεργή, το αξιόνιο αποκτάει δυναμική και το βαθμωτό φορτίο του είναι απλά η στροφορμή του συστήματος. Λόγω της μορφής της λύσης, το αξιόνιο τείνει να περιστρέφει την μελανή οπή αντίστροφα. Όταν η σύζευξη γίνει αρκετά ισχυρή, ο ορίζοντας γεγονότων περιστρέφεται αντίστροφα ως προς την μετρούμενη στροφορμή Komar, όπως δείχνουμε στην εικόνα 2.8. Αυτό είναι ουσιαστικά η άμεση συνέπεια της ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ βαρυτικού πεδίου και αξιονίου.



Σχήμα 2.8: Η συνολική στροφορμή του συστήματος με τα αντίστοιχα στοιχεία της γεωμετρίας. Η φθίνουσα γραμμή αντιστοιχεί στην στροφορμή του ορίζοντα γεγονότων, η άυξουσα γραμμή αντιστοιχεί στη στροφορμή του αξιονίου ενώ η σταθερή γραμμή αντιστοιχεί στη συνολική στροφορμή της μελανής οπής.

2.7 Σκουληκότρυπες από ταίριασμα γεωμετριών στη θεωρία Chern-Simons

Συνεχίζουμε με το πρόβλημα των τοπικών λύσεων στη θεωρία Chern-Simons προς την κατασκευή λύσεων σκουληκότρυπας [191, 192]. Θα ακολουθήσουμε το μηχανισμό ταιριάσματος γεωμετριών (junctioning procedure) [188, 193, 194, 195, 196] μέσω του φορμαλισμού λεπτού κελύφους.

Επιθυμούμε να εξάγουμε την επίδραση του τανυστή Cotton , υπεύθυνο για την παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών, πάνω στο λεπτό κέλυφος και να ελέγξουμε κατά πόσο τέτοιου είδους γεωμετρίες στη θεωρία είναι εφικτές. Για το λόγο αυτό, θα ξεκινήσουμε με μία παρουσίαση του μηχανισμού και θα παρουσιάσουμε στο τέλος τα αποτελέσματα μας.

Ο μηχανισμός ταιριάσματος γεωμετριών υποθέτει ότι ο χωρόχρονος της θεωρίας, \mathcal{V} , μπορεί να διαχωριστεί από μία εμβαπτισμένη επιφάνεια Σ σε δύο περιοχές, \mathcal{V}^+ και \mathcal{V}^- . Ονομάζουμε την μετρική της περιοχής \mathcal{V}^\pm ως $g_{\mu\nu}^\pm$ και εισάγουμε συντεταγμένες x_\pm^α . Κατά αντιστοιχία, εισάγουμε στις δύο πλευρές του Σ συντεταγμένες y^i , όπου $i = (0, 1, 2)$. Επιθυμούμε να βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν στις δύο περιοχές του χωρόχρονου, \mathcal{V}^\pm , για να επιβεβαιώσουμε ότι η ένωση των δύο γεωμετριών g^+ και g^- οδηγεί σε μία καλώς ορισμένη λύση των βαρυτικών εξισώσεων κίνησης. Θεωρούμε ότι οι συντεταγμένες y^i μπορούν να εισαχθούν και στις δύο πλευρές της υπερεπιφάνειας και διαλέγουμε n^μ να περιγράφει το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο Σ με κατεύθυνση από το \mathcal{V}^- στο \mathcal{V}^+ . Θα υποθέσουμε επίσης την ύπαρξη ενός συνεχούς συστήματος συντεταγμένων x^μ , ξεχωριστο των x_\pm^μ , το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί τοπικά στις δύο πλευρές της υπερεπιφάνειας. Προφανώς, οι συντεταγμένες αυτές επικαλύπτονται από τις x_\pm^μ σε μία ανοιχτή περιοχή των \mathcal{V}^\pm που περιέχει το Σ .

Στην παρακάτω ανάλυση, το σύστημα συντεταγμένων x^μ θα χρησιμοποιηθεί μόνο ποιοτικά για την εξαγωγή των συνθηκών ταιριάσματος. Θεωρούμε ότι ένα σύνολο γεωδαισιακών (geodesic congruence) μπορεί να τέμνει την υπερεπιφάνεια Σ κάθετα. Για το λόγο αυτό, ορίζουμε ως λ τον ιδιόχρονο (ή ιδιοαπόσταση) των γεωδαισιακών και χωρίς βλάβη της γενικότητας, παραμετροποιούμε έτσι ώστε οι γεωδαισιακές να τέμνουν την υπερεπιφάνεια στο $\lambda = 0$, έτσι ώστε το λ είναι αρνητικό στο \mathcal{V}^- και θετικό στο \mathcal{V}^+ . Συνεπώς, υπάρχει σημείο $p \in \mathcal{V}^\pm$ που περιγράφεται από τις συντεταγμένες x^μ που συνδέεται με την Σ μέσω κάποιας γεωδαισιακής, ενώ το $\lambda(x^\mu)$ περιγράφει τον ιδιόχρονο (ή ιδιοαπόσταση) από το Σ στο p πάνω στην εν λόγω τροχιά. Επομένως, μία οποιαδήποτε μετατόπιση από την υπερεπιφάνεια μέσω κάποιας από τις γεωδαισιακές περιγράφεται φορμαλιστικά από τη σχέση

$$n^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \implies n_\mu = \epsilon \partial_\mu \lambda \implies \partial_\mu = \epsilon n_\mu \partial_\lambda, \quad (2.68)$$

όπου το n_μ είναι κανονικοποιημένο στο $n_\mu n^\mu = \epsilon = \pm 1$. Για να εκτελέσουμε το ταίριασμα των \mathcal{V}^+ και \mathcal{V}^- μέσω της Σ , θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τον φορμαλισμό των κατανομών. Συγκεκριμένα, τη συνάρτηση κατανομής Heaviside μέσω του $\Theta(\lambda)$, για την οποία ισχύει ότι $\partial_\lambda \Theta(\lambda) = \delta(\lambda)$, όπου $\delta(\lambda)$ είναι η συνάρτηση κατανομής Dirac. Μέσω του εν λόγω φορμαλισμού θα εκφράζουμε μία οποιαδήποτε ποσότητα A ως

$$A(x) = A^+(x^+) \Theta(\lambda) + A^-(x^-) \Theta(-\lambda), \quad (2.69)$$

όπου οι δείκτες \pm υποδεικνύουν την τιμή του A στις περιοχές \mathcal{V}^\pm αντιστοίχως. Η ασυνέχεια του A πάνω στο Σ περιγράφεται από τη σχέση

$$[A] = A(\mathcal{V}^+) |_\Sigma - A(\mathcal{V}^-) |_\Sigma. \quad (2.70)$$

Τέλος, εφαρμόζουμε τις συνθήκες

$$[n^\mu] = [e_i^\mu] = 0, \quad (2.71)$$

όπου $e_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}$ είναι ο τελεστής pullback που εκτελεί την απεικόνιση $\mathcal{V}^\pm \rightarrow \Sigma$. Η σχέση $[n^\mu] = 0$ προκύπτει απευθείας από την (2.68), καθώς το σύστημα συντεταγμένων x^μ είναι συνεχές στην Σ , ενώ η σχέση $[e_i^\mu] = 0$ προκύπτει από το γεγονός ότι η Σ περιγράφεται από το ίδιο σύστημα συντεταγμένων y^i και στις δύο πλευρές. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, μπορούμε να αρχίσουμε

να εξάγουμε τις συνθήκες ταιριάσματος γεωμετριών. Ξεκινάμε με τη μετρική του χωρόχρονου \mathcal{V} που εκφράζεται ως

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^+ \Theta(\lambda) + g_{\mu\nu}^- \Theta(-\lambda) , \quad (2.72)$$

ενώ η παράγωγος δίνεται από

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho^+ g_{\mu\nu}^+ \Theta(\lambda) + \partial_\rho^- g_{\mu\nu}^- \Theta(-\lambda) + \epsilon n_\rho \delta(\lambda) [g_{\mu\nu}] . \quad (2.73)$$

Κατά την εξαγωγή των βαρυτικών τανυστών, γνωρίζουμε ότι θα έχουμε όρους της μορφής $(\partial g)^2$, που θα παράγουν όρους $\delta^2(\lambda)$, οι οποίοι γνωρίζουμε από βασική θεωρία κατανομών ότι δεν είναι καλώς ορισμένοι. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επιβάλλουμε τη συνθήκη

$$[g_{\mu\nu}] = 0 , \quad (2.74)$$

που είναι η πρώτη συνθήκη ταιριάσματος. Θυμίζουμε ότι η μετρική μπορεί να γραφεί μέσω της σχέσης $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \epsilon n_\mu n_\nu$, όπου $h_{\mu\nu}$ είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή της υπερεπιφάνειας εκφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων x^μ . Μπορούμε λοιπόν να εξάγουμε ότι η πρώτη συνθήκη ταιριάσματος (2.74), οδηγεί μέσω της (2.71) στη σχέση $[g_{\mu\nu}] = [h_{\mu\nu}]$. Χρησιμοποιώντας του τελεστής pullback, μέσω των οποίων έχουμε ότι $h_{ij} = h_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu$, εξάγουμε το αποτέλεσμα

$$[h_{ij}] = 0 . \quad (2.75)$$

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι, ως γενικό κανόνα, οποιαδήποτε ποσότητα A που περιγράφεται από τη σχέση (2.69), θα παράγει ένα μη-τετριμμένο όρο $[A]$ όταν παραγωγίζεται, του οποίου η συνέπεια με τις βαρυτικές εξισώσεις κίνησης πρέπει να ελέγχεται καθώς συνεχίζουμε. Μέσω των σχέσεων (2.73) και (2.74), εξάγουμε ότι τα σύμβολα Christoffel, δίνονται από την εξίσωση

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Theta(\lambda) \Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-\lambda) \Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha} , \quad (2.76)$$

ενώ οι παράγωγοι τους δίνονται από

$$\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Theta(\lambda) \partial_\delta \Gamma_{+\beta\gamma}^\alpha + \Theta(-\lambda) \partial_\delta \Gamma_{-\beta\gamma}^\alpha + \epsilon \delta(\lambda) [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] n_\delta . \quad (2.77)$$

Άρα, ο τανυστής Riemann δίνεται από τη σχέση

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Theta(\lambda) R_{+\beta\gamma\delta}^\alpha + \Theta(-\lambda) R_{-\beta\gamma\delta}^\alpha + \delta(\lambda) \mathfrak{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha , \quad (2.78)$$

όπου

$$\mathfrak{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \epsilon ([\Gamma_{\beta\delta}^\alpha] n_\gamma - [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] n_\delta) . \quad (2.79)$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής Riemann είναι καλώς ορισμένος ως κατανομή, αλλά η συνάρτηση δ οδηγεί σε μοναδικότητα καμπυλότητας (curvature singularity) πάνω στην Σ . Στη Γενική Σχετικότητα, η δεύτερη συνθήκη ταιριάσματος είναι το να ακυρωθεί ο εν λόγω όρος. Στη δική μας περίπτωση έχουμε ακόμα να υπολογίσουμε τη συνεισφορά του τανυστή Cotton. Αναφέρουμε όμως ότι μπορεί να δοθεί μία καθαρά φυσική εξήγηση στη καινούρια μοναδικότητα που εξάγαμε. Περιγράφει την καμπυλότητα που προκαλείται από το λεπτό κέλυφος για να επιτευχθεί το ταίρισμα γεωμετριών και να κατασκευάσουμε τη σκουληχότρυπα, πλήρως ανάλογα με το γεγονός ότι η συνάρτηση δ χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον τανυστή ενέργειας ορμής σημειακού σωματιδίου. Μία δεύτερη σημαντική σημείωση είναι ότι εφόσον ο όρος \mathfrak{R} περιγράφεται από τη διαφορά συνοχών, έχει κάποια τανυστική μορφή. Για να την εξάγουμε, τονίζουμε ότι το γεγονός ότι η μετρική είναι συνεχής στη Σ μέσω των συντεταγμένων x^μ σημαίνει ότι οι παράγωγοι της μετρικής που οδηγούν σε τανυστές επαπτόμενους στην υπερεπιφάνεια είναι επίσης συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχει κάποια οποιαδήποτε ασυνέχεια στη ποσότητα $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$, η ασυνέχεια αυτή έχει την κατεύθυνση

των κάθετων διανυσμάτων n^α . Άρα, υπάρχει κάποιος τανυστής $q_{\alpha\beta}$ που περιγράφει την εν λόγω ασυνέχεια μέσω της σχέσης

$$[\partial_\gamma g_{\alpha\beta}] = n_\gamma q_{\alpha\beta} \implies q_{\alpha\beta} = \epsilon [\partial_\gamma g_{\alpha\beta}] n^\gamma . \quad (2.80)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση, μέσω της πρώτης συνθήκης $[g^{\alpha\beta}] = 0$, βρίσκουμε ότι η ασυνέχεια των σύμβολων Christoffel δίνεται ακολούθως

$$[\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}] = \frac{1}{2} (q^\alpha_\beta n_\gamma + q^\alpha_\gamma n_\beta - q_{\beta\gamma} n^\alpha) , \quad (2.81)$$

και άρα η ασυνέχεια του Riemann εκφράζεται ως

$$\mathfrak{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\epsilon}{2} (q^\alpha_\delta n_\beta n_\gamma - q^\alpha_\gamma n_\beta n_\delta - q_{\beta\delta} n^\alpha n_\gamma + q_{\beta\gamma} n^\alpha n_\delta) . \quad (2.82)$$

Τώρα που έχουμε την τανυστική μορφή του \mathfrak{R} , μπορούμε να βρούμε και την ασυνέχεια του τανυστή Einstein,

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^+ \Theta(\lambda) + G_{\mu\nu}^- \Theta(-\lambda) + \delta(\lambda) \mathfrak{G}_{\mu\nu} , \quad (2.83)$$

όπου

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon}{2} (q_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + q_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - q n_\alpha n_\beta - \epsilon q_{\alpha\beta} - (q_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \epsilon q) g_{\alpha\beta}) . \quad (2.84)$$

Από τη μορφή του $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$, παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικός, όπως αναμενόταν, και είναι επίσης εφαπτόμενος στην Σ , καθώς $\mathfrak{G}_{\alpha\beta} n^\alpha = 0$. Μπορούμε λοιπόν να τον ξαναγράψουμε ως

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = \mathfrak{G}^{ij} e_i^\alpha e_j^\beta . \quad (2.85)$$

Υπολογίζοντας τη παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{ij} &= \mathfrak{G}_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta \\ &= \frac{\epsilon}{2} (-\epsilon q_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta + \epsilon q_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - \epsilon n^\mu n^\nu) h_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} (-q_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta + q_{\mu\nu} h^{\mu\nu} h_{ij}) . \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η ποσότητα $q_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta$ είναι απλά η ασυνέχεια της εξωτερικής καμπυλότητας στην υπερεπιφάνεια. Πράγματι, μέσω του ορισμού της εξωτερικής καμπυλότητας

$$\begin{aligned} [K_{ij}] &= [(\nabla_\alpha n_\beta) e_i^\alpha e_j^\beta] \\ &\stackrel{(2.71)}{=} [(\nabla_\alpha n_\beta)] e_i^\alpha e_j^\beta \\ &= - \left([\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}] n_\gamma \right) e_i^\alpha e_j^\beta \\ &\stackrel{(2.81)}{=} - \left(\frac{1}{2} (q^\gamma_\beta n_\alpha + q^\gamma_\alpha n_\beta - q_{\alpha\beta} n^\gamma) \right) n_\gamma e_i^\alpha e_j^\beta \\ &= \frac{\epsilon}{2} q_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta , \end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι

$$[K_{ij}] = \frac{\epsilon}{2} q_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta , \quad [K] = \frac{\epsilon}{2} h^{mn} (q_{\alpha\beta} e_m^\alpha e_n^\beta) . \quad (2.86)$$

Τώρα, αφού $K_{\mu\nu} n^\mu = 0$, δηλαδή η εξωτερική καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας είναι εφαπτόμενη στην υπερεπιφάνεια κατά τα γνωστά, χρησιμοποιούμε πάλι το γεγονός $K_{ij} = K_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu$ για τους

εφαπτόμενους τανυστές και έχουμε ότι ο τανυστής ασυνέχειας των παραγώγων της μετρικής g είναι απλά

$$g_{\alpha\beta} = \frac{2}{\epsilon} [K_{\alpha\beta}] , \quad (2.87)$$

που οδηγεί στο αποτέλεσμα που ψάχναμε, ήτοι

$$\mathfrak{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = (n_{\beta}n_{\gamma}[K_{\delta}^{\alpha}] - n_{\beta}n_{\delta}[K_{\gamma}^{\alpha}] - [K_{\beta\delta}]n^{\alpha}n_{\gamma} + [K_{\beta\gamma}]n^{\alpha}n_{\delta}) , \quad (2.88)$$

και κατά συνέπεια

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta} = -\epsilon([K_{\alpha\beta}] - [K]g_{\alpha\beta}) - [K]n_{\alpha}n_{\beta} . \quad (2.89)$$

Έχοντας τώρα εξάγει τους απαραίτητους βαρυτικούς τανυστές, μπορούμε να προχωρήσουμε στα στοιχεία του τανυστή ενέργειας ορμής για τη θεωρία Chern-Simons. Θα ξεκινήσουμε με την τετριμμένη περίπτωση του $T_{\mu\nu}^b$, όπως δίνεται από την εξίσωση (2.8). Ακολουθώντας την οδηγία της σχέσης (2.69), το αξιόνιο γράφεται υπό τη μορφή

$$b = b^+\Theta(\lambda) + b^-\Theta(-\lambda) . \quad (2.90)$$

Προφανώς, προκειμένου ο $T_{\mu\nu}^b = \nabla_{\mu}b\nabla_{\nu}b - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla b)^2$ να μην εμπεριέχει όρους της μορφής $\delta(\lambda)^2$, πρέπει να επιβάλλουμε ότι

$$\partial_{\mu}b = \partial_{\mu}^+b^+\Theta(\lambda) + \partial_{\mu}^-b^-\Theta(-\lambda) + \epsilon\delta(\lambda)[b] \implies [b] = 0 , \quad (2.91)$$

που σημαίνει ότι το αξιόνιο είναι συνεχές πάνω στην υπερεπιφάνεια. Εύκολα εξάγει λοιπόν κανείς ότι

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^+\Theta(\lambda) + T_{\mu\nu}^-\Theta(-\lambda) , \quad (2.92)$$

που σημαίνει ότι ο κανονικός τανυστής ενέργειας ορμής του αξιονίου δε συνεισφέρει στη δυναμική του λεπτού κελύφους, υπό την έννοια ότι δεν εμφανίζει όρους της μορφής $\delta(\lambda)$. Κατά αντιστοιχία, στη Γενική Σχετικότητα απαιτείται η εισαγωγή (με το χέρι) μίας κατανομής ενέργειας ενός λεπτού κελύφους για να μπορέσει κανείς να παραβιάσει τη συνθήκη $\mathfrak{G}_{\alpha\beta} = 0$ και να κατασκευάσει τη γεωμετρία σκουληχότρυπας.

Συνεχίζουμε με την ανάλυση των στοιχείων που προκύπτουν από τον τανυστή Cotton. Παρατηρούμε πρωτίστως ότι, μέσω της γνωστής σχέσης $|g| = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}$ και της πρώτης συνθήκης (2.74), έχουμε ότι

$$|g| = |g^+|\Theta(\lambda) + |g^-|\Theta(-\lambda) , \quad (2.93)$$

που σημαίνει

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^+\Theta(\lambda) + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}^-\Theta(-\lambda) . \quad (2.94)$$

Για να απλοποιήσουμε τις ακόλουθες πράξεις, ξαναγράφουμε τον τανυστή Cotton ως

$$C_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}D^{\alpha}_{\mu\nu} , \quad (2.95)$$

μέσω του ορισμού

$$D^{\alpha}_{\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^{\xi}b}{2}(\tilde{R}^{\alpha}_{\mu\xi\nu} + \tilde{R}^{\alpha}_{\nu\xi\mu}) \right) , \quad (2.96)$$

όπου μέσω των παραπάνω σχέσεων βρισκόμαστε απευθείας ότι ο δυϊκός Riemann είναι απλά ο

$$\tilde{R}^{\alpha}_{\mu\xi\nu} = \Theta(\lambda)\tilde{R}^{\alpha}_{+\mu\xi\nu} + \Theta(-\lambda)\tilde{R}^{\alpha}_{-\mu\xi\nu} + \delta(\lambda)\mathfrak{R}^{\alpha}_{\mu\gamma\delta}\epsilon^{\gamma\delta}_{\xi\nu} . \quad (2.97)$$

Η ποσότητα της σχέσης (2.96) που ορίσαμε μπορεί να ξαναγραφεί τώρα υπό τη μορφή:

$$D^\alpha_{\mu\nu} = D^\alpha_{+\mu\nu}\Theta(\lambda) + D^\alpha_{-\mu\nu}\Theta(-\lambda) + \delta(\lambda) \left(-\frac{\partial^\xi b}{2} \mathfrak{X}^\alpha_{\mu\gamma\delta} \varepsilon^{\gamma\delta}_{\xi\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right). \quad (2.98)$$

Από τη στιγμή που ο Cotton είναι απλά η απόκλιση του $D^\alpha_{\mu\nu}$, οι υπολογισμοί θα επιφέρουν προβληματικά στοιχεία της μορφής $\partial\lambda\delta(\lambda)$. Για τον λόγο αυτό, πρέπει να επιβάλλουμε ότι

$$\left(-\frac{\partial^\xi b}{2} \mathfrak{X}^\alpha_{\mu\gamma\delta} \varepsilon^{\gamma\delta}_{\xi\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right) = 0. \quad (2.99)$$

Υπολογίζοντας τώρα την απόκλιση του $D^\alpha_{\mu\nu}$ για να εξάγουμε τον Cotton στη χωρισμένη γεωμετρία, έχουμε το αποτέλεσμα

$$C_{\mu\nu} = C^\pm_{\mu\nu}\Theta(\lambda) + C^\mp_{\mu\nu}\Theta(-\lambda) + \varepsilon\delta(\lambda)n_\alpha[D^\alpha_{\mu\nu}] = C^\pm_{\mu\nu}\Theta(\lambda) + C^\mp_{\mu\nu}\Theta(-\lambda) + \delta(\lambda)\mathfrak{C}_{\mu\nu}, \quad (2.100)$$

Τέλος, υπολογίζουμε τον όρο $\mathfrak{C}_{\mu\nu}$, μέσω της ασυνέχειας του D ,

$$\begin{aligned} [D^{\alpha\mu\nu}] &= \mathcal{D}^{\alpha\mu\nu}_+|_\Sigma - \mathcal{D}^{\alpha\mu\nu}_-|_\Sigma \\ &= \left(\frac{-\partial_\beta^+ b^+}{2} \tilde{R}^{\alpha\mu\beta\nu}_+ + \frac{-\partial_\beta^+ b^+}{2} \tilde{R}^{\alpha\nu\beta\mu}_+ - \frac{-\partial_\beta^- b^-}{2} \tilde{R}^{\alpha\mu\beta\nu}_- - \frac{-\partial_\beta^- b^-}{2} \tilde{R}^{\alpha\nu\beta\mu}_- \right) |_\Sigma \\ &= -\frac{1}{2} \left[\partial_\beta b \tilde{R}^{\alpha\mu\beta\nu} \right] - \frac{1}{2} \left[\partial_\beta b \tilde{R}^{\alpha\nu\beta\mu} \right], \end{aligned}$$

όπου μέσω της εξίσωσης $[n_\alpha] = 0$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathfrak{C}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\partial^\beta b \tilde{R}^\alpha_{\mu\beta\nu} n_\alpha \right] - \frac{1}{2} \left[\partial^\beta b \tilde{R}^\alpha_{\nu\beta\mu} n_\alpha \right]. \quad (2.101)$$

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τον $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$, ο $\mathfrak{C}_{\mu\nu}$ δεν είναι εφαπτόμενος στην υπερεπιφάνεια. Συγκεκριμένα,

$$\mathfrak{C}_{\mu\nu} n^\mu = -\frac{1}{2} \left[\partial^\beta b \tilde{R}^\alpha_{\nu\beta\mu} n^\mu n_\alpha \right], \quad \mathfrak{C}_{\mu\nu} n^\nu = -\frac{1}{2} \left[\partial^\beta b \tilde{R}^\alpha_{\mu\beta\nu} n^\nu n_\alpha \right].$$

Χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες του δισικού Riemann, ο μοναδικός τρόπος ο $\mathfrak{C}_{\mu\nu}$ να είναι εφαπτόμενος στην υπερεπιφάνεια είναι να ισχύει ότι $\partial_\beta b = f(x)n_\beta$, δηλαδή η παράγωγος του αξιονίου είναι παράλληλη με το κάθετο διάνυσμα, κάτι το οποίο είναι αδύνατο αφού το αξίνιο έχει επίσης γωνιακή εξάρτηση. Επομένως, πρέπει να εισάγει κανείς ένα λεπτό κέλυφος με μη τετριμμένο τανυστή ενέργειας ορμής για να ικανοποιηθούν οι βαρυτικές εξισώσεις κίνησης, αφού δεν υπάρχει κάποιος τρόπος να ακυρώσουμε τα κάθετα στοιχεία του $\mathfrak{C}_{\mu\nu}$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι οι βαρυτικές εξισώσεις στο κέλυφος δίνονται από τη σχέση

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} - 4A\kappa^2\mathfrak{C}_{\mu\nu} = \kappa^2 S_{\mu\nu}, \quad (2.102)$$

όπου $S_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής του κελύφους.

Μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην κατασκευή της γεωμετρίας σκουληχότρυπας μέσω του φορμαλισμού λεπτού κελύφους στη περίπτωση των αξιονικών μελανών οπών που εξάγαμε. Οι μετρικές σε κάθε πολλαπλότητα \mathcal{V}^\pm δίνονται για την περίπτωση της αγά περιστρεφόμενης μελανής οπής Chern-Simons ως,

$$ds_\pm^2 = -f_\pm dt_\pm^2 + \frac{dr_\pm^2}{f_\pm} - 2r_\pm^2 \sin^2 \theta_\pm a_\pm W_\pm dt_\pm d\phi_\pm + r_\pm^2 d\Omega_\pm^2 = -f_\pm dt_\pm^2 + \frac{dr_\pm^2}{f_\pm} + r_\pm^2 d\theta_\pm^2 + r_\pm^2 \sin^2 \theta_\pm (d\phi_\pm - a_\pm W_\pm dt_\pm)$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε από το γεγονός ότι οι διορθώσεις $\mathcal{O}(a^2)$ αγνοούνται στην προσέγγιση μας. Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις, θα χρησιμοποιήσουμε τη μετρική σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς μέσω του μετασχηματισμού

$$d\psi = d\phi - aW(R)dt, \quad (2.103)$$

που δίνει ότι

$$ds_{\pm}^2 = -f_{\pm}dt_{\pm}^2 + \frac{dr_{\pm}^2}{f_{\pm}} + r_{\pm}^2 d\theta_{\pm}^2 + r_{\pm}^2 \sin^2 \theta_{\pm} (d\psi_{\pm} - a_{\pm} \Delta W_{\pm} dt_{\pm})^2, \quad (2.104)$$

όπου $\Delta W = W(r) - W(R)$. Επομένως, οι συντεταγμένες x_{\pm}^{μ} είναι οι $(t, r, \theta, \psi)_{\pm}$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση εμβάπτισης στην υπερεπιφάνεια Σ , $t_{\pm} = T_{\pm}(\tau)$, $r_{\pm} = R_{\pm}(\tau)$, όπου τ είναι ο ιδιόχρονος ενός παρατηρητή που κινείται μαζί με την υπερεπιφάνεια. Τότε, οι αντίστοιχες **induced** μετρικές δίνονται από

$$ds_{-}^2|_{\Sigma} = - \left[F(R_{-}) \dot{T}_{-}^2 - \frac{\dot{R}_{-}^2}{F(R_{-})} \right] d\tau^2 + R_{-}^2(\tau) d\Omega^2, \quad (2.105)$$

$$ds_{+}^2|_{\Sigma} = - \left[F(R_{+}) \dot{T}_{+}^2 - \frac{\dot{R}_{+}^2}{F(R_{+})} \right] d\tau^2 + R_{+}^2(\tau) d\Omega^2, \quad (2.106)$$

όπου $F_{\pm} = 1 - 2M/R_{\pm}(\tau)$ και η τελεία υποδεικνύει παραγωγή ως προς τον ιδιόχρονο τ . Για να εκτελέσουμε το ταιριασμα των δύο μετρικών, θέτουμε τη μετρική h_{ij} της υπερεπιφάνειας στη μορφή

$$ds_{\Sigma}^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau) d\theta^2 + R^2(\tau) \sin^2 \theta d\psi^2, \quad (2.107)$$

που σημαίνει προφανώς ότι οι συντεταγμένες y^i της υπερεπιφάνειας είναι οι (τ, θ, ψ) όπου $\theta = \theta_{+} = \pi - \theta_{-}$. Για να ταιριάξουμε τις δύο μετρικές πάνω στην Σ , έχουμε τώρα ότι $R_{+} = R_{-} = R$ για την ακτίνα του λαϊμού, ενώ το \dot{T}_{\pm} ικανοποιεί τη σχέση

$$F_{\pm} \dot{T}_{\pm} = \beta_{\pm} = \sqrt{\dot{R}_{\pm}^2 + F_{\pm}}. \quad (2.108)$$

Θεωρούμε επίσης ότι οι δύο μελανές οπές είναι ίδιας μάζας, που μας δίνει απευθείας ότι $F_{+} = F_{-} \implies T_{+} = T_{-} \implies \beta_{+} = \beta_{-}$. Τονίζουμε ότι επειδή το σύστημα αναφορά της κάθε γεωμετρίας είναι περιστρεφόμενο, δεν μπορούμε (ακόμα) να ορίσουμε τη στροφορμή της κάθε μελανής οπής στη περιοχή της υπερεπιφάνειας.

Χρειαζόμαστε ακόμα να υπολογίσουμε τους τελεστές pullback, e_i^{μ} και τα μοναδιαία one-forms, n_{μ} . Για το λόγο αυτό, αναφέρουμε ότι η τετραταχύτητα ενός παρατηρητή που κινείται μαζί με το λαϊμό της σκουληκότρυπας δίνεται από τη σχέση

$$e_{\tau}^{\mu} = \left(\frac{\beta}{F}, \dot{R}, 0, 0 \right). \quad (2.109)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής που κινείται μαζί με την υπερεπιφάνεια έχει μηδενική ταχύτητα κατά τη διεύθυνση ψ , όπως αναμενόταν. Αντίστοιχα, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$n_{\mu}^{\pm} = \pm \left(-\dot{R}, \frac{\beta}{F}, 0, 0 \right). \quad (2.110)$$

Τονίζουμε για τη συνέπεια των πράξεων ότι και οι δύο συνθήκες $n_\mu e_\tau^\mu = 0$, $n_\mu n^\mu = 1$ ικανοποιούνται. Μέσω των δύο τελευταίων σχέσεων έχουμε ότι η εξωτερική καμπυλότητα της υπερεπιφάνειας, που υπολογίζεται από τη σχέση $K_{ij}^\pm = -n_\alpha^\pm \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^j} \right)$ είναι η

$$K_{ij}^\pm = \pm \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\beta}}{R} & 0 & -\frac{a_\pm R^2 \sin^2 \theta W'}{2} \\ 0 & R\beta & 0 \\ -\frac{a_\pm R^2 \sin^2 \theta W'}{2} & 0 & R \sin^2 \theta \beta \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

όπου ο τόνος υποδεικνύει παραγωγή ως προς το R .

Για να υπολογίσουμε τώρα τη συνεισφορά του ταυυστή Cotton στην υπερεπιφάνεια, πρέπει πρώτα να εξάγουμε τη ποσότητα, $-\frac{1}{2} \partial^\beta b \tilde{R}^\alpha_{\mu\nu} n_\alpha + (\mu \leftrightarrow \nu)$, σε κάθε χωρόχρονο και μετά να υπολογίσουμε τη διαφορά πάνω στην Σ . Υπενθυμίζουμε όμως ότι η λύση του αξιόνιου είναι της μορφής

$$b_\pm = a_\pm A u_\pm \cos \theta_\pm, \quad (2.112)$$

όπου u περιγράφει την ακτινική εξάρτηση. Για να ισχύει όμως ότι $[b] = 0$, δηλαδή το αξιόνιο είναι συνεχές στο λαιμό, βρίσκουμε απευθείας ότι

$$a_+ = -a_-, \quad (2.113)$$

εφόσον ισχύει ότι $\theta_+ = \pi - \theta_-$, που σημαίνει ότι οι δύο μελανές οπές περιστρέφονται αντίθετα. Η συγκεκριμένη συνθήκη έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενες δουλειές ταιριάσματος περιστρεφόμενων γεωμετριών, [197, 198]. Ο λόγος στη δική μας περίπτωση όμως είναι διαφορετικής προέλευσης. Η συνθήκη της αντίθετης περιστροφής για τη κάθε μελανή οπή πρέπει να επιβληθεί εκ των προτέρων προκειμένου το αξιόνιο να μην έχει ασυνέχειες στο λαιμό. Τονίζουμε ότι σε ένα υψηλότερα περιστρεφόμενο σύστημα, όπου θα είχαμε όρους $\mathcal{O}(a^n)$, $n > 1$, το αξιόνιο θα είχε εξάρτηση από πολυώνυμα Legendre υψηλότερης τάξης. Αυτό θα σήμαινε ότι το αποτέλεσμα του $[b] \implies a_+ = -a_-$ μπορεί να παύει να ισχύει. Κάτω από την εν λόγω συνθήκη λοιπόν, επιβεβαιώνουμε ότι η συνεισφορά του ταυυστή Cotton στην υπερεπιφάνεια μηδενίζεται ταυτοτικά,

$$\mathfrak{C}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.114)$$

Οπότε, θεωρώντας την εισαγωγή ενός λεπτού κελύφους για την κατασκευή σκουληκότρυπας, βρίσκουμε μέσω των εξισώσεων της (2.102) ότι το λεπτό κέλυφος περιγράφεται από τον ταυυστή ενέργειας ορμής

$$S_{ij} = -\frac{\epsilon}{\kappa^2} ([K_{ij}] - [K] h_{ij}), \quad (2.115)$$

που είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με την περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας. Υπολογίζοντας τα στοιχεία του, βρίσκουμε ότι

$$S_{ij} = \frac{-\epsilon}{\kappa^2} \begin{pmatrix} 4\frac{\dot{\beta}}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -R^2 \left(\frac{2\dot{\beta}}{R} + \frac{2\dot{\beta}}{R} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2\dot{\beta}}{R} + \frac{2\dot{\beta}}{R} \right) \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

λόγω του ότι οι δύο μελανές οπές περιστρέφονται αντίστροφα. Καταλήγουμε ότι δεν υπάρχει συνεισφορά του ταυυστή Cotton στην υπερεπιφάνεια του ταιριάσματος για την περίπτωση αργά περιστρεφόμενων μελανών οπών. Για να ελεγχθεί η κατασκευή σκουληκότρυπας στη θεωρία Chern-Simons, πρέπει να ξεκινήσουμε αναγκαστικά με υψηλότερες τάξεις στροφορμής στη λύση κενού και να εξάγουμε την ισχυρά περιστρεφόμενη γεωμετρία.

2.8 Το πρόβλημα των ισχυρά περιστρεφόμενων λύσεων

Κατά τη διάρκεια του διδακτορικού έγιναν πολλές προσπάθειες να γενικεύσουμε τα προηγούμενα σε συνθήκες ισχυρής περιστροφής χωρίς επιτυχία. Προφανώς, πάντα μπορεί κάποιος να αντιμετωπίσει το ζήτημα των τοπικών λύσεων με αριθμητικό τρόπο, αλλά θέλαμε να επικεντρωθούμε σε αναλυτικά αποτελέσματα. Θα προσπαθήσουμε σε αυτό το σύντομο υποκεφάλαιο να παρουσιάσουμε εν συντομία τη δυσκολία της ισχυρά περιστρεφόμενης λύσης χωρίς να προβούμε σε εξαντλητικές λεπτομέρειες.

Το πρόβλημα της εξαγωγής αναλυτικού αποτελέσματος στη θεωρία ξεκινάει απευθείας από τη μορφή της εξίσωσης κίνησης του αξιονίου,

$$\square b = AR_{CS} \quad (2.117)$$

Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα Pontryagin, όντας τοπολογική, δίνεται από την απόκλιση του τοπολογικού ρεύματος

$$K^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[\Gamma^\kappa_{\beta\lambda} \partial_\gamma \Gamma^\lambda_{\delta\kappa} + \frac{2}{3} \Gamma^\kappa_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\delta\kappa} \right] = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{K}_{\beta\gamma\delta}, \quad (2.118)$$

όπου έχουμε την πλήρη απόδειξη στο πρώτο παράρτημα. Επομένως, είναι αρκετά εύκολο να ξαναγράψει κανείς την εξίσωση κίνησης του αξιονίου ως

$$\nabla_\mu (\nabla^\mu b - AK^\mu) = 0 \quad (2.119)$$

που αποτελεί άμεση συνέπεια της συμμετρίας ολίσθησης στο αξίνιο κάτω από $b \rightarrow b + c$. Η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να μας δώσει μία καθαρά γεωμετρική λύση μέσω της συνθήκης

$$\nabla_\mu b = AK_\mu \quad (2.120)$$

Δυστυχώς, κάτι τέτοιο δεν μπορεί ποτέ να ισχύει όταν η μετρική έχει μη-τετριμμένη εξάρτηση από παραπάνω από μία συντεταγμένη, π.χ. r, θ όπως είναι στη περίπτωση μας. Ο λόγος για αυτό είναι ότι το αξίνιο, όντας βαθμωτό πεδίο, είναι ένα zero-form σε γλώσσα διαφορικών μορφών. Άρα, το αντίστοιχο one-form από τη δράση της εξωτερικής παραγωγού, $\mathbf{d}b$ είναι πάντα κλειστό, όπως προκύπτει από την ιδιότητα του $\mathbf{d}^2 = 0$. Όμως, το τοπολογικό ρεύμα δεν είναι κλειστό εν γένει. Μπορεί να είναι κλειστό μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου η μετρική έχει εξάρτηση από μόνο μία συντεταγμένη. Πράγματι, αναφέρουμε εδώ για πληρότητα ότι η λύση του αξιονίου που βρήκαμε για την αργά περιστρεφόμενη μελανή οπή δεν ικανοποιεί τη σχέση (2.120). Συγκεκριμένα, ολοκληρώνοντας την (2.117), το σωστό αποτέλεσμα είναι

$$\nabla_\mu b = AK_\mu + J_\mu \quad (2.121)$$

όπου J^μ ένα ρεύμα ολοκλήρωσης για το οποίο ισχύει $\nabla_\mu J^\mu = 0$. Δεν καταφέραμε να εξάγουμε κάποιο τρόπο να ορίσουμε το ρεύμα J από καθαρά γεωμετρικές συνθήκες. Το βασικό αποτέλεσμα που υποδεικνύει αυτή η σύντομη ανάλυση είναι ότι για να εξάγουμε μία αναλυτική λύση πρέπει να βρεθεί κάποιο διατηρούμενο one-form \mathbf{J} , τέτοιο ώστε να ισχύει ότι το one-form $\mathbf{K} + \mathbf{J}$ να είναι κλειστό, δηλαδή

$$\star \mathbf{d} \star \mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\mathbf{K} + \mathbf{J}) = \mathbf{0} \quad (2.122)$$

Η περίπτωση της αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής ήταν επιτυχής σε επίπεδο αναλυτικών λύσεων καθώς οι εξισώσεις μπορούσαν να γραμμικοποιηθούν μέσω της πρώτης τάξης προσέγγισης στο

$O(a)$. Ακόμα και σε επίπεδο δεύτερης τάξης, τα αποτελέσματα ήταν ιδιαίτερος αποθαρρυντικά. Για το λόγο αυτό, προσπαθήσαμε αρκετές φορές, χωρίς επιτυχία, να λύσουμε τις εξισώσεις με φορμαλιστικό τρόπο. Τέλος, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι το εν λόγω ζήτημα μπορεί ίσως να αντιμετωπιστεί σε πιο περίπλοκες θεωρίες Chern-Simons, με υψηλότερες τάξεις παραγώγων του αξιονίου στην τροποποίηση της δράσης, έτσι ώστε να διατηρείται η συμμετρία ολίσθησης. Κάτι τέτοιο θα ήταν αρκετά ενδιαφέρον να μελετηθεί καθώς το αξιόνιο θα είχε πάλι ως ενεργό δυναμικό τον όρο Chern-Simons, αλλά η πολυπλοκότητα της δυναμικής μέσω των κινητικών όρων υψηλότερης τάξης θα μπορούσε δυνητικά να μας δώσει το διατηρούμενο ρεύμα J που χρειαζόμαστε για την αναλυτική λύση.

2.9 Συμπεράσματα

Κλείνουμε λοιπόν το πρώτο κεφάλαιο της διατριβής που είχε επίκεντρο τις θεωρίες Chern-Simons. Στο πρώτο κεφάλαιο, μελετήθηκε εκτενώς το φαινόμενο της παραμόρφωσης μίας αργά περιστρεφόμενης μελανής οπής τύπου Kerr υπό τη παρουσία αξιονίου συζευγμένου με τον όρο Chern-Simons. Επικεντρωθήκαμε στην εξαγωγή της τοπικής λύση σε αναλυτική μορφή και βρήκαμε μία γεωμετρία βαθμωτοποιημένης μελανής οπής με αξιονικό νέφος. Η λύση μας συμπεριλάμβανε τις διορθώσεις δυνητικά όλων των τάξεων στη παράμετρο σύζευξης, κάτι το οποίο γενίκευσε προυπάρχοντα αποτελέσματα στις θεωρίες αυτές. Οι διορθώσεις στη μετρική βρέθηκαν αντιστρόφως ανάλογες της ακτινικής συντεταγμένης, όπως αναμενόταν, που σημαίνει ότι η λύση μας επιστρέφει στην αργά περιστρεφόμενη λύση κενού Kerr στο άπειρο. Από την άλλη, το γεγονός ότι εξάγαμε τις διορθώσεις κάθε τάξης, μας επέτρεψε να μελετήσουμε τη λύση αυθαίρετα κοντά στον ορίζοντα.

Συζητήσαμε επίσης το ζήτημα της παραβίασης των ενεργειακών συνθηκών κοντά στη μελανή οπή, που όπως σχολιάσαμε επέτρεψε την ύπαρξη δευτερεύοντος βαθμωτού φορτίου στη λύση μας. Η ανάλυση μας έδειξε ότι οι φωτεινοί ενεργειακές συνθήκες παραβιάζονται κοντά στον ορίζοντα όπου η ισχύς της παραβίασης ήταν ανάλογη με την ενεργή σταθερά σύζευξης γ . Τονίσαμε ότι άμεσο αποτέλεσμα αυτού ήταν ότι μικρές μελανές οπές, για τις οποίες η σταθερά σύζευξης γ έχει κυρίαρχο ρόλο, επιτρέπουν μεγαλύτερη συνεισφορά του αξιονικού νέφους στη γεωμετρία. Επιπροσθέτως, δείξαμε ότι η επίδραση του αξιονίου στη γεωμετρία εξαρτάται ενεργά από το λόγω της σταθεράς σύζευξης προς τη μάζα της μελανής οπής κάτι το οποίο είναι ικανό να δημιουργήσει καινούρια φαινόμενα κοντά στη μελανή οπή.

Συγκεκριμένα, η ανάλυση μας μας οδήγησε στη γεωδαισιακή συμπεριφορά έμμαζων σωματιδίων, όπου παρατηρήθηκαν καινούριες ευσταθείς τροχιές καθώς αύξανε η τιμή της ενεργής σταθεράς σύζευξης. Προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο αυτό, μελετώντας την κατανομή της στροφορμής γύρω από τη μελανή οπή, όπου βρέθηκε μία μη-τετριμμένη συμπεριφορά. Παρατηρήθηκε ότι καθώς το γ αυξάνει, η στροφορμή της μελανής οπής κοντά στον ορίζοντα μειώνεται μέχρι μία κρίσιμη τιμή που ορίζεται από κάποιο γ_c . Πέρα από την τιμή αυτή, ο ορίζοντας αρχίζει να περιστρέφεται στην αντίθεση κατεύθυνση σε σχέση με την υπόλοιπη γεωμετρία και η στροφορμή του μπορεί να πάρει δυνητικά μεγάλες τιμές. Το εν λόγω φαινόμενο αποτελεί ένδειξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ της αργά περιστρεφόμενης Kerr της λύσης κενού και του αξιονίου που οδηγούν σε μία νέα λύση γεωμετρίας.

Στη συνέχεια, μελετήθηκε η δυνατότητα κατασκευής γεωμετρίας σκουληκότρυπας μέσω του μηχανισμού ταιριάσματος γεωμετριών. Δείξαμε ότι στη προσέγγιση πρώτης τάξης της στροφορμής που μας απασχόλησε στην εργασία αυτή, η κατασκευή της σκουληκότρυπας εξάγει τα ίδια αποτελέσματα με την περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας, καθώς η επίδραση του τανυστή Cotton πάνω

στην υπερεπιφάνεια του λαιμού είναι ταυτοτικά μηδενική. Το αποτέλεσμα αυτό προέκυψε από τη συνθήκη το αξιονίου να μην παρουσιάζει ασυνέχειες πάνω στη γεωμετρία. Αυτό είχε άμεση συνέπεια ότι, για να ταιριάζουμε δύο μελανές οπές με αξιονικό νέφος, οι δύο μελανές οπές που προσπαθήσαμε να ταιριάζουμε για να κατασκευάσουμε τη σκουληκότρυπα πρέπει να περιστρέφονται αντίθετα. Σχολιάσαμε ότι για να ελεγχθεί η πιθανότητα κατασκευής σκουληκότρυπας, πρέπει να προβούμε σε ανάλυση ισχυρότερα περιστρεφόμενων γεωμετριών.

Τέλος, αναφέραμε το πρόβλημα της εύρεσης αναλυτικής λύσης σε ισχυρά περιστρεφόμενες γεωμετρίες και εξηγήσαμε με φορμαλιστικό τρόπο τη δυσκολία εξαγωγής αναλυτικών λύσεων μέσω της εξίσωσης του αξιονίου. Όπως σχολιάσαμε, η απουσία υψηλότερων τάξεων παραγωγών του αξιονίου καθιστά το πρόβλημα αδύνατο από αναλυτική σκοπιά και χρειάζεται μία περαιτέρω τροποποίηση στη θεωρία αν επιθυμεί κανείς να εξάγει αναλυτικές λύσεις με καθαρά γεωμετρικό τρόπο. Διαφορετικά, πρέπει κανείς να λύσει τις διαφορικές που προκύπτουν για μία γεωμετρία τύπου Kerr, όπου πρέπει επίσης να βρεθεί μία κατάλληλη γενική μορφή τέτοιου είδους μετρικών για τη θεωρία. Στα πλαίσια αυτά, σκοπεύουμε να συνεχίσουμε την εξερεύνηση τοπικών λύσεων στη θεωρία Chern-Simons όσο αυξάνεται η κατανόηση μας για τις περιστρεφόμενες γεωμετρίες hairy μελανών οπών. Είναι μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα πρόκληση να μελετηθεί το φαινόμενο της παραμόρφωσης της Kerr υπό τον όρο Chern-Simons, ο οποίος έχει ισχυρά θεμέλια από θεωρίες υψηλότερων ενεργειών, όπως είναι η θεωρία χορδών.

Κεφάλαιο 3

Καθολικά μονόπολα στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet

3.1 Εισαγωγή στα καθολικά μονόπολα

Τα καθολικά μονόπολα προτάθηκαν πρώτη φορά από τους Barriola και Vilenkin (BV) [199] ως αυτοβαρυτικά (self-gravitating) αντικείμενα που αποτελούν στατικές λύσεις των βαρυτικών και βαθμωτών εξισώσεων κίνησης της Γενικής Σχετικότητας με την ελάχιστη επέκταση μίας τριπλέτας βαθμωτών πεδίων χ^a , $a = 1, 2, 3$, που ανήκουν στη θεμελιώδη αναπαράσταση της καθολικής ομάδας $O(3)$. Η δράση συμπεριλαμβάνει ένα δυναμικό τύπου Higgs, το οποίο είναι ικανό να σπάσει την εν λόγω συμμετρία της τριπλέτας σε συμμετρία $O(2)$ μέσω κατάλληλης τιμής αναμενόμενου κενού (v.e.v). Η δράση του μοντέλου BV είναι η ακόλουθη

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{R}{16\pi G_N} - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi^a \partial^\mu \chi^a - \frac{\lambda}{4} (\chi^a \chi^a - \eta^2)^2 \right\} \quad (3.1)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ είναι η μετρική, g είναι η ορίζουσα της μετρικής και R είναι το βαθμωτό Ricci της γεωμετρίας με $(16\pi G_N)^{-1} = \frac{M_P^2}{2}$ όπου M_P είναι η μάζα Planck.

Μέσω του θεωρήματος Goldstone, τα καθολικά μονόπολα έχουν άμαζα πεδία Goldstone που σχετίζονται με αυτά. Οι ενεργειακές πυκνότητες των εν λόγω πεδίων αποσβένουν μακριά από το κέντρο του μονοπόλου ως $1/r^2$, κάτι το οποίο οδηγεί στη προφανή απόκλιση της συνολικής ενέργειας του μονοπόλου. Στο [199] έγιναν μερικοί προσεγγιστικοί υπολογισμοί της συνολικής μάζας του μονοπόλου μελετώντας τη λύση εξωτερικά από το κέντρο. Το κέντρο του μονοπόλου βρέθηκε να είναι τάξης $\delta \sim \lambda^{-1/2} \eta^{-1}$, κάτι το οποίο έδωσε την ευρετική προσέγγιση μάζας του μονοπόλου της τάξης $M_{\text{core}} \sim \delta^3 \lambda \eta^4 = \lambda^{-1} \eta$. Η ύπαρξη καμπυλότητας στο εξωτερικό κομμάτι του χωρόχρονου σημαίνει όμως ότι οι παραπάνω προσεγγίσεις δεν είναι απολύτως σωστές, καθώς έπρεπε να ξαναμελετηθούν υπό το πρίσμα της δράσης (3.1). Η επιχειρηματολογία των [199] ήταν ότι ο τομέας της βαρύτητας θα έπρεπε να ήταν αμελητέος στον υπολογισμό των παραμέτρων του μονοπόλου, καθώς φαινομενολογικά, για να μπορούν να παρατηρηθούν τέτοιου είδους αντικείμενα, θα έπρεπε να έχουν επιζήσει του πληθωρισμού. Επομένως, το δυναμικό σπάσιμο συμμετρίας που

δημιουργεί τις εν λόγω λύσεις θα έπρεπε να συμβαίνει σε ενεργειακές κλίμακες πολύ χαμηλότερες του πληθωρισμού, που σημαίνει ότι $\eta \ll M_{\text{P}}$. Οι BV υποστήριξαν λοιπόν ότι είναι ασφαλές να ακολουθήσουν προσεγγίσεις επίπεδου χωρόχρονου για την εξαγωγή της μάζας του μονοπόλου κατά τάξη μεγέθους. Παρόλαυτά, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, η ανάλυση αυτή δεν μπορεί να ισχύει καθώς τα μονόπολα δημιουργούν νέες ισχυρές παραμορφώσεις στη γεωμετρία που μεταφράζονται σε μία υπολειπόμενη στερεά γωνία (solid deficit angle) στη φύλλωση (foliation) του σφαιρικά συμμετρικού χωρόχρονου.

Προς απόδειξη των παραπάνω, παρουσιάζουμε εδώ τη διαδικασία των BV για την εξαγωγή του καθολικού μονοπόλου. Στο εξωτερικό μέρος του χωρόχρονου, έξω δηλαδή από το κέντρο του μονοπόλου, οι BV χρησιμοποίησαν μία ασυμπτωτική ανάλυση των εξισώσεων κίνησης για τα βαθμωτά πεδία χ^a , $a = 1, 2, 3$ και για τις εξισώσεις Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_{\text{N}} T_{\mu\nu}^{\chi}, \quad (3.2)$$

όπου $G_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Einstein και $T_{\mu\nu}^{\chi}$ είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής της τριπλέτας, όπως δίνεται από τη μεταβολή της (3.1). Για τη τριπλέτα θεωρήθηκε η ακόλουθη μορφή

$$\chi^a = \eta h(r) \frac{x^a}{r}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

όπου x^a είναι χωρικές καρτεσιανές συντεταγμένες και $r = \sqrt{x^a x^a}$ είναι η ακτινική απόσταση, ενώ η συνάρτηση $h(r) \rightarrow 1$ για $r \gg \delta$. Συνεπώς, για μεγάλες αποστάσεις το μέτρο της βαθμωτής τριπλέτας προσεγγίζει την αναμενόμενη τιμή κενού η , αφού $\chi^a \chi^a \rightarrow \eta^2$, όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί κανείς με τετριμμένο τρόπο. Τονίζουμε ότι σε αντίθεση με το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, όπου θέτει κανείς $\chi^a \chi^a = \eta^2$ με τα χ^a να είναι σταθερά, εδώ η προσπάθεια επικεντρώνεται στη λύση των αντίστοιχων διαφορικών, που σημαίνει την εξαγωγή της δυναμικής της τριπλέτας. Είναι υπό αυτή την έννοια που θα χρησιμοποιείται στα παρακάτω το δυναμικό σπάσιμο συμμετρίας ως μηχανισμός εύρεσης λύσης.

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν εύκολα να λυθούν στην ασυμπτωτική περιοχή $r \gg \delta$ και δίνουν μία μετρική που διαφοροποιείται από τη γνωστή λύση Schwarzschild. Συγκεκριμένα, σε πρώτη τάξη στο r^{-1} , έχουμε το αποτέλεσμα

$$ds^2 = -\left(1 - 8\pi G_{\text{N}}\eta^2 - \frac{2G_{\text{N}} M_{\text{core}}}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 8\pi G_{\text{N}}\eta^2 - \frac{2G_{\text{N}} M_{\text{core}}}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad r \gg \delta. \quad (3.4)$$

Όπως παρατηρεί κανείς, το δυναμικό σπάσιμο συμμετρίας της θεωρίας είχε ως συνέπεια ο χωρόχρονος να μην είναι ασυμπτωτικά επίπεδος αλλά να εμπεριέχει μία υπολειπόμενη στερεά γωνία $\Delta\Omega = 8\pi G_{\text{N}}\eta^2$. Πράγματι, ο χωρόχρονος επιστρέφει στην μετρική Schwarzschild μόνο στην άσπαστη φάση του $\eta \rightarrow 0$. Από την άλλη, αμελώντας τον όρο μάζας του μονοπόλου στο ακτινικό άπειρο, η μετρική μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + (1 - 8\pi G_{\text{N}}\eta^2) r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad r \gg \delta, \quad (3.5)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον επαναορισμό του συντεταγμένου χρόνου $t \rightarrow (1 - 8\pi G_{\text{N}}\eta^2)^{-1/2} t'$ και εκτελέσαμε μία αλλαγή μεταβλήτης στο r της μορφής $r \rightarrow (1 - 8\pi G_{\text{N}}\eta^2)^{1/2} r'$. Τονίζουμε ότι η εν λόγω γεωμετρία δεν είναι επίπεδη καθώς ήδη από το βαθμωτό Ricci, έχουμε ότι

$$R \propto \frac{16\pi G_{\text{N}}\eta^2}{r^2}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

που σημαίνει ότι το βαθμωτό Ricci μηδενίζεται μόνο σε τάξη μεγαλύτερη του r^{-2} και όχι ταυτοτικά.

Η ύπαρξη τέτοιων υπολειπόμενων γωνιών στη γεωμετρία μπορεί να έχει σημαντικά φυσικά ακόλουθα αναφορικά με φαινόμενα σκέδασης. Το πλάτος σκέδασης άμαζων σωματιδίων, π.χ. φωτονίων από το κοσμικό υπόβαθρο, σε γεωμετρίες με υπολειπόμενη γωνία οδηγεί σε ισχυρά φαινόμενα **lensing** όπου σχηματίζονται δακτύλιοι Einstein [200, 201, 202, 203, 204]. Υπάρχει λοιπόν η δυνατότητα εύρεσης τέτοιου είδους σωμάτων στο σύμπαν μέσω των χαρακτηριστικών αυτών συνεπειών στη σκέδαση φωτονίων του κοσμικού υποβάθρου.

Μετά την πρόταση των BV αναφορικά με την ύπαρξη καθολικών μονοπόλων, εκτός του ότι αναπτύχθηκε ερευνητικό ενδιαφέρον προς την εύρεση περαιτέρω λύσεων με τέτοιου είδους τοπολογικές ατέλειες [205, 206, 207, 208], έχει υπάρξει επίσης στην κοινότητα μία ενδιαφέρουσα συζήτηση αναφορικά με την ευστάθεια τέτοιων σωμάτων [209, 210, 211, 212, 213, 214]. Μία βασική συνεισφορά στην εν λόγω συζήτηση είναι η διεξοδική ανάλυση που έγινε στο [215], όπου παρουσιάστηκαν ισχυρά επιχειρήματα υπέρ της βαρυτικής αστάθειας καθολικών μονοπόλων. Συγκεκριμένα, στην εν λόγω ερευνητική δουλειά μελετήθηκε το φαινόμενο της παραμόρφωσης της γεωμετρίας απαιτώντας η γεωμετρική λύση στο εξωτερικό μέρος του μονοπόλου να μπορεί να συνεχιστεί μέσω του μηχανισμού ταιριάσματος γεωμετριών με τη λύση στο εσωτερικό, όπου η συνέχεια της γεωμετρίας έγινε πάνω στην ακτίνα του μονοπόλου. Συγκεκριμένα, προκειμένου να διευθετηθεί το ζήτημα της μοναδικότητας στο εσωτερικό του μονοπόλου, η γεωμετρία του εσωτερικού αντικαταστάθηκε με μία γεωμετρία τύπου de-Sitter. Έτσι, η μοναδικότητα στο $r \rightarrow 0$ μπόρεσε να κανονικοποιηθεί και το μέγεθος του μονοπόλου να βρεθεί με δυναμικό αντί για ευρετικό τρόπο, όπως είχαν κάνει οι [199]. Τα βασικά αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής ήταν ότι η ακτίνα του μονοπόλου δίνεται από τη σχέση

$$r_c = 2 \lambda^{-1/2} \eta^{-1}, \quad (3.7)$$

πάνω στην οποία εκτελείται η συνέχεια της τύπου Schwarzschild μετρικής του εξωτερικού,

$$ds^2 = -\left(1 - 8\pi G_N \eta^2 - \frac{2G_N M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - 8\pi G_N \eta^2 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

με μία μετρική de-Sitter που δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -\left(1 - \mathcal{H}^2 r^2\right) dt^2 + \left(1 - \mathcal{H}^2 r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

όπου M είναι η μάζα του μονοπόλου ενώ $\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G_N \lambda \eta^4}{12}$ είναι η παράμετρος deSitter. Ο λόγος για ένα τέτοιο ταίριασμα γεωμετριών ήρθε από την παρατήρηση ότι στο σημείο $r \rightarrow 0$, το δυναμικό Higgs της τριπλέτας καταλήγει σε μία ενεργή κοσμολογική σταθερά της μορφής $\propto \eta^4$, καθώς όλα τα πεδία ύλης μηδενίζονται. Επομένως, το εσωτερικό του μονοπόλου περιγράφεται απλά από μία ενεργή δράση Einstein-Hilbert με κοσμολογική σταθερά. Δυστυχώς, όμως, το ταίριασμα των εν λόγω γεωμετριών επιβάλλει μία αρνητική μάζα για το μονόπολο,

$$M \sim -6\pi \lambda^{-1/2} \eta < 0, \quad (3.8)$$

που αποτελεί τη βασική ένδειξη αστάθειας του μονοπόλου BV.

Οι συγγραφείς του [215] ερμήνευσαν αυτό το αποτέλεσμα ως άμεση συνέπεια της απωστικής βαρυτικής φύσης που προκύπτει από την ενέργεια κενού \mathcal{H}^2 στο κέντρο του μονοπόλου. Σε συνέχεια των παραπάνω αποτελεσμάτων, οι συγγραφείς του [216] κατηγοριοποίησαν τους πιθανούς χωρόχρονους που μπορούν να προκύπτουν από αυτοβαρυτικά καθολικά μονόπολα μέσω της δράσης (3.1) και

έδειξαν ότι, όταν απαιτηθεί κανονικότητα του κέντρου του μονοπόλου, η μετρική της λύσης μπορεί να έχει το πολύ έναν ορίζοντα και η δομή του χωρόχρονου θα είναι τύπου de-Sitter. Στη συγκεκριμένη ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν μόνο ποιοτικά χαρακτηριστικά του δυναμικού της τριπλέτας, κάτι το οποίο γενικεύει τα παραπάνω αποτελέσματα σε δυναμικά τύπου Higgs με πιο πλούσια δυναμική.

Από την άλλη, αν επιτραπεί κάποιου είδους μοναδικότητα στο κέντρο του $r \rightarrow 0$, όπως στο μοντέλο που μελετήθηκε στα [217, 218], τότε η δομή του χωρόχρονου θα είναι αρκετά διαφορετική. Όπως αποδείχθηκε στα [217, 218], όπου το μοντέλο BV ήταν εμβαπτυσμένο σε μία ενεργή δράση που προκύπτει από τη μπόζονική θεωρία χορδών, ο χωρόχρονος για μικρά r είναι διαφορετικός και το αποτέλεσμα της αρνητικής μάζας του μονοπόλου ακυρώνεται.

Συγκεκριμένα, η ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε τέτοιου είδους μοντέλα από τη θεωρία χορδών μετατρέπει τις λύσεις των καθολικών μονοπόλων σε μαγνητικά μονόπολα, καθώς επιτρέπει λύσεις μαγνητικού πεδίου της μορφής $\mathcal{B} \sim 1/r^2$, όπως μελετήθηκαν στο [219]. Η ύπαρξη τέτοιου είδους μαγνητικών μονοπόλων προκύπτει από τη σύζευξη του πεδίου dilaton στους όρους Maxwell και Kalb-Ramond της δράσης, όπου η ιδιάζουσα συμπεριφορά του μαγνητικού πεδίου κληρονομείται από την ιδιάζουσα συμπεριφορά του αξιονίου, το οποίο είναι δυικό στον όρο Kalb-Ramond. Στη προκειμένη περίπτωση, έχουμε ότι το μαγνητικό φορτίο της λύσης είναι ανάλογο του φορτίου του αξιονίου. Τονίζουμε για πληρότητα και προς αποφυγή σύγχυσης με τα αποτελέσματα της θεωρίας Chern-Simons ότι στη περίπτωση αυτή η γεωμετρία της λύσης ήταν σφαιρικά συμμετρική και το ‘φορτίο’ του αξιονίου ήταν απλά μία σταθερά ολοκλήρωσης.

Από τα παραπάνω προκύπτει το λογικό ερώτημα του κατά πόσο μπορεί κανείς να εξάγει λύσεις καθολικών μονοπόλων τύπου BV σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας όπου η συνθήκη του κέντρου de-Sitter θα οδηγεί πλέον σε θετική μάζα μόνο μέσω του βαρυτικού τομέα της δράσης χωρίς την εισαγωγή άλλων μη-συζευγμένων πεδίων. Θα δείξουμε στα ακόλουθα ότι η απάντηση στο εν λόγω ερώτημα είναι θετική. Υπάρχουν λύσεις καθολικών μονοπόλων με θετική μάζα και κανονικοποιημένο κέντρο στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet [153], όπου η κανονικοποίηση του αντικειμένου στο κέντρο προκύπτει από την σταθερά σύζευξης της θεωρίας στον όρο Gauss-Bonnet.

3.2 Η τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet

Στο εν λόγω υποκεφάλαιο θα προβούμε σε μία σύντομη περιγραφή της τετραδιάστατης θεωρίας Gauss-Bonnet, όπως παρουσιάστηκε από το [153], η οποία θα αποτελέσει τη βάση για την ύπαρξη καθολικών μονοπόλων με θετική μάζα. Η θεωρία έχει το σημαντικό πλεονέκτημα ότι εμπεριέχει ένα βαθμωτό πεδίο ως επιπλέον βαθμό ελευθερίας το οποίο είναι σύμμορφα συζευγμένο. Η συγκεκριμένη συμμετρία, όπως θα δούμε παρακάτω, μας δίνει μία καθαρά γεωμετρική συνθήκη από τις εξισώσεις κίνησης που αποτελεί κλειδί στην εξαγωγή τοπικών λύσεων. Εν γένει, η πολυπλοκότητα θεωριών βαθμωτού-τανυστή σπανίως επιτρέπει αναλυτικές λύσεις. Όμως, επιβάλλοντας συγκεκριμένες συμμετρίες στη δράση, οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να απλοποιηθούν αρκετά έτσι ώστε να υπάρχει το ενδεχόμενο αναλυτικών τοπικών λύσεων στη θεωρία. Όπως θα δείξουμε, η θεωρία επιτρέπει μία μεγάλη απλοποίηση στις εξισώσεις κίνησης από το ίχνος των βαρυτικών εξισώσεων όταν πάρει κανείς υπόψιν τη λύση του βαθμωτού πεδίου. Η δράση της θεωρίας περιγράφεται από το ακόλουθο συναρτησοειδές

$$S_{\text{eGB}} = \int \frac{d^4x \sqrt{|g|}}{16\pi G_{\text{N}}} \left[R - \beta e^{2\Phi} (R + 6(\nabla\Phi)^2) - 2\lambda e^{4\Phi} - \alpha(\Phi \mathcal{G} - 4G_{\mu\nu} \nabla^\mu \Phi \nabla^\nu \Phi - 4\Box\Phi(\nabla\Phi)^2 - 2(\nabla\Phi)^4) \right], \quad (3.9)$$

όπου $\mathcal{G} = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ είναι ο όρος Gauss-Bonnet, ο οποίος είναι τοπολογικός στις τέσσερις διαστάσεις, που σημαίνει ότι, αντίστοιχα με τον όρο Chern-Simons, εκφράζεται από την απόκλιση ενός τοπολογικού ρεύματος. Οφείλουμε να τονίσουμε ότι στο όριο των μηδενικών παραμέτρων σύζευξης α και λ , εξάγουμε απευθείας τη γνωστή θεωρία Einstein-Hilbert με σύμμορφα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο [16]. Προφανώς, η έννοια των σύμμορφα συζευγμένων βαθμωτών πεδίων σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας δεν είναι καινούρια. Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης δράσης αντί του [16] είναι ότι επιτρέπει την εξαγωγή hairy μελανών οπών όπου το βαθμωτό πεδίο είναι καλώς ορισμένο παντού εκτός του κέντρου $r = 0$, σε αντίθεση με τη λύση του [16] όπου το βαθμωτό πεδίο αποκλίνει στον ορίζοντα. Τονίζουμε επίσης ότι η εν λόγω θεωρία είχε εξαχθεί ήδη από τους Lu και Pang στο [150], όπου θεώρησαν ένα ιδιαίζον διαστατικό όριο μίας D -διάστατης θεωρίας Lovelock [65, 163, 220] στις τέσσερις διαστάσεις μέσω σύμμορφης συμπαγοποίησης. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα ορίζει μία ιδιαίτερα όμορφη σχέση μεταξύ της συμπαγοποιημένης θεωρίας Lovelock με θεωρίες βαθμωτού τανυστή με σύμμορφα συζευγμένο βαθμωτό πεδίο.

Μεταβολή της δράσης (3.9) ως προς τη μετρική μας δίνει την βαρυτικές εξισώσεις κίνησης

$$(\mathcal{E}_{\mu\nu}) : \quad G_{\mu\nu} = -\alpha\mathcal{H}_{\mu\nu} + \beta e^{2\Phi}\mathcal{A}_{\mu\nu} - \lambda e^{4\Phi}g_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu\nu} = & 2G_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2 + 4P_{\mu\alpha\nu\beta}(\nabla^\alpha\Phi\nabla^\beta\Phi - \nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi) + 4(\nabla_\alpha\Phi\nabla_\mu\Phi - \nabla_\alpha\nabla_\mu\Phi)(\nabla^\alpha\Phi\nabla_\nu\Phi - \nabla^\alpha\nabla_\nu\Phi) \\ & + 4(\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)\square\Phi + g_{\mu\nu}\left(2(\square\Phi)^2 - (\nabla\Phi)^4 + 2\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi(2\nabla^\alpha\Phi\nabla^\beta\Phi - \nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi)\right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

και

$$\mathcal{A}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + g_{\mu\nu}(2\square\Phi + (\nabla\Phi)^2) \quad (3.12)$$

ενώ η πόσότητα $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda\gamma\delta}$ είναι ο διπλά δυϊκός τανυστής Riemann και το $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι ο τανυστής Levi-Civita με τη συνήθη σύμβαση $\epsilon_{0123} = \sqrt{|g|}$. Από την άλλη, μεταβολή της δράσης ως προς το βαθμωτό πεδίο Φ μας δίνει την εξίσωση

$$\beta\tilde{R} + \frac{\alpha}{2}\tilde{\mathcal{G}} + 4\lambda = 0 \quad (3.13)$$

όπου \tilde{R} και $\tilde{\mathcal{G}}$ είναι τα βαθμωτά Ricci και Gauss-Bonnet υπολογισμένα πάνω στη σύμμορφη μετρική $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\Phi}g_{\mu\nu}$. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι το βαθμωτό πεδίο είναι σύμμορφα συζευγμένο στη θεωρία, εύκολα επιβεβαιώνει κανείς ότι ο συνδυασμός των εξισώσεων κίνησης $-2g_{\mu\nu}\frac{\delta S_{\text{eGB}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{\text{eGB}}}{\delta\Phi} = 0$ εξάγει τη συνθήκη

$$R + \frac{\alpha}{2}\mathcal{G} = 0, \quad (3.14)$$

που αποτελεί μία σημαντική γεωμετρική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις της θεωρίας. Συγκεκριμένα, λόγω του (3.14), μπορεί κανείς να θεωρήσει μία σφαιρικά συμμετρική και ομογενή μετρική της μορφής

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\Omega^2 \quad (3.15)$$

και να επιβεβαιώσει τη λύση μελανής οπής του [153] μέσω του στοιχείου μετρικής

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2G_{\text{NM}}}{r^3} + \frac{C}{r^4} \right)} \right] \quad (3.16)$$

όπου C είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης που καθορίζεται από τις βαρυτικές εξισώσεις κίνησης ενώ το M είναι η μάζα ADM της μελανής οπής. Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, το βαθμωτό πεδίο υπό την εν λόγω μετρική της σχέσης (3.16) μπορεί να εξαχθεί από το συνδυασμό των σχέσεων $\mathcal{E}_t^t - \mathcal{E}_r^r = 0$ μέσω της (3.10), ο οποίος επιτρέπει τα ακόλουθα προφίλ για το βαθμωτό πεδίο της λύσης:

$$\Phi(r) = \ln\left(\frac{c_1}{r + c_2}\right) \quad (3.17)$$

$$\Phi(r) = \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}}{r} \operatorname{sech}\left(c_3 \pm \int^r \frac{dr'}{r' \sqrt{f(r')}}\right)\right) \quad (3.18)$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης της λύσης μπορούν να προσδιοριστούν από τις υπολειπόμενες εξισώσεις κίνησης της θεωρίας. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι κάθε μία από τις λύσεις για το βαθμωτό πεδίο καθορίζει διαφορετικές τιμές της σταθεράς ολοκλήρωσης της μετρικής, αλλά και διαφορετική τιμή για τη σταθερά σύζευξης λ . Συγκεκριμένα, επιβάλλοντας την πρώτη περίπτωση μέσω της σχέσης (3.17), έχουμε ότι $C = 2\alpha$, $c_1 = \sqrt{-2\alpha/\beta}$ και $c_2 = 0$, ενώ $\lambda = \frac{\beta^2}{4\alpha}$. Αντίστοιχα, η δεύτερη περίπτωση που έχουμε στην (3.18), οδηγεί στη σταθερά $C = 0$ με $\lambda = \frac{3\beta^2}{4\alpha}$, ενώ η σταθερά c_3 παραμένει ελεύθερη. Επιπροσθέτως, και οι δύο λύσεις οδηγούν στο ότι οι σταθερές α και β πρέπει να είναι ετερόσημες, ήτοι $\alpha\beta < 0$. Παρατηρώντας τη δράση της θεωρίας (3.9) επιβεβαιώνει κανείς ότι αν $\beta < 0$, τότε ο κανονικός κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου έχει το λάθος πρόσημο που σημαίνει ότι το βαθμωτό πεδίο είναι **phantom** με βάση τη συνήθη ερμηνεία ότι οι ανώτερες τάξεις παραγωγίσις που εμφανίζονται, ήτοι $\Phi \mathcal{G} - 4G_{\mu\nu} \nabla^\mu \Phi \nabla^\nu \Phi - 4\Box\Phi(\nabla\Phi)^2 - 2(\nabla\Phi)^4$, είναι απλά αλληλεπιδράσεις. Για το λόγο αυτό, θα επιβάλλουμε στα παρακάτω τις συνθήκες $\beta > 0$ και $\alpha < 0$, όπως ήταν και η περίπτωση που επιλέχθηκε στην ανάλυση της μελανής οπής στο [141].

3.3 Καθολικά μονόπολα θετικής μάζας στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet

Ολοκληρώνοντας λοιπόν τη σύντομη περιγραφή της θεωρίας στην οποία θα εργαστούμε και τις αντίστοιχες τοπικές λύσεις που ικανοποιεί, συνεχίζουμε στο κύριο κομμάτι του κεφαλαίου που είναι η εξαγωγή καθολικών μονοπόλων θετικής μάζας. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι η επιλογή της αρνητικής σταθεράς σύζευξης α είναι ικανή να ακυρώσει την ανάγκη αρνητικής μάζας για το καθολικό μονόπολο με de-Sitter κέντρο [199, 215]. Για να εξάγουμε τη γεωμετρία του καθολικού μονοπόλου, εισάγουμε στην εν λόγω δράση μία τριπλέτα βαθμωτού πεδίου χ^a , $a = 1, 2, 3$, και το αντίστοιχο δυναμικό Higgs $V(\chi) = \frac{\xi}{4}(\chi^a \chi^a - \eta^2)^2$, έτσι ώστε η δράση να είναι η

$$S = S_{\text{eGB}} + \int d^4x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi^a)(\partial^\mu \chi^a) - \frac{\xi}{4}(\chi^a \chi^a - \eta^2)^2 \right], \quad (3.19)$$

όπου ο άσπαστος τομέας ικανοποιεί μία εσωτερική συμμετρία $O(3)$ κατά τα γνωστά. Πρακτικά, περάσαμε απλώς τη τριπλέτα βαθμωτού πεδίου που δημιουργεί τις γεωμετρίες μονοπόλου μέσω της δυναμικής θραύσης συμμετρίας στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet. Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης της δράσης είναι τροποποιημένες με τετριμμένο τρόπο μέσω της εισαγωγής του ταυυστή ενέργειας ορμής του τομέα Higgs, $T_{\mu\nu}^\chi = \nabla_\mu \chi^a \nabla_\nu \chi^a - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\chi)^2 - g_{\mu\nu}V(\chi)$, στις βαρυτικές

εξισώσεις

$$G_{\mu\nu} = -\alpha\mathcal{H}_{\mu\nu} + \beta e^{2\Phi} \mathcal{A}_{\mu\nu} - \lambda e^{4\Phi} g_{\mu\nu} + 8\pi G_N T_{\mu\nu}^X \quad (3.20)$$

ενώ οι εξισώσεις του της τριπλέτας δίνονται από τη σχέση

$$\square\chi^a = \xi\chi^a(\chi^b\chi^b - \eta^2) \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

κατά τα γνωστά, ενώ λόγω της συνεισφοράς της βαθμωτής τριπλέτας, η γεωμετρική συνθήκη της σχέσης (3.14) γράφεται πλέον ως

$$R + \frac{\alpha}{2}\mathcal{G} + 8\pi G_N T^X = 0, \quad (3.22)$$

όπου $T^X = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^X$. Για να εξάγουμε τώρα τη λύση του καθολικού μονοπόλου, χρησιμοποιούμε πάλι τη σχέση (3.3) η οποία σπάει την εσωτερική συμμετρία της τριπλέτας με δυναμικό τρόπο:

$$\chi^a = \eta h(r) \frac{x^a}{r}, \quad x^a x^a = r^2 \quad (3.23)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι $h(r) \rightarrow 1$ όταν $r \rightarrow \infty$. Τονίζουμε ότι η εν λόγω συνθήκη για την ακτινική συμπεριφορά της τριπλέτας οδηγεί επίσης στη συνθήκη $\partial_\mu h(r) \rightarrow 0$ όταν $r \rightarrow \infty$. Τα αντίστοιχα στοιχεία της τριπλέτας ορίζονται μέσω των συνήθων σχέσεων

$$x^1 = r \cos \phi \sin \theta, \quad x^2 = r \sin \phi \sin \theta, \quad x^3 = r \cos \theta. \quad (3.24)$$

Κάτω από αυτές τις σχέσεις, όλες οι τανυστικές και βαθμωτές εξισώσεις που συμπεριλαμβάνουν τη συνεισφορά της τριπλέτας μεταφράζονται άμεσα ως συνεισφορές της συνάρτησης $h(r)$. Συγκεκριμένα, κρατώντας την ομογενή φύση της σφαιρικά συμμετρικής μετρικής, όπως δίνεται από την εξίσωση (3.15), βρίσκουμε ότι

$$\left(h'' + \frac{2h'}{r}\right) f + h'f' - \xi\eta^2 h^3 + \left(\xi\eta^2 - \frac{2}{r^2}\right) h = 0, \quad (3.25)$$

όπου ο τόνος υποδεικνύει παραγώγιση ως προς την ακτινική συντεταγμένη r .

Σε άμεση συσχέτιση με την αρχική δουλειά των BV, η συνεισφορά του τομέα της τριπλέτας μας οδηγεί στο να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης στην ασυμπτωτική περιοχή $r \rightarrow \infty$ και στο κέντρο $r \rightarrow 0$. Ας επικεντρωθούμε πρώτα στην ασυμπτωτική περιοχή, όπου θα θέσουμε $h(r) \rightarrow 1$, κάτι το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση της τριπλέτας μέχρι τάξη $\mathcal{O}(r^{-1})$. Αναφέρουμε επίσης για πληρότητα ότι θέτοντας $h(r) = 1 + \mathcal{O}(r^{-1})$ στην 3.25 για μεγάλες αποστάσεις υπό το πρίσμα του $r \rightarrow \infty$, η εν λόγω εξίσωση δε δίνει καμία καινούρια πληροφορία για το μετρικό στοιχείο $f(r)$ στην τάξη $1/r$. Για να αποκτήσουμε την ασυμπτωτική μορφή του $f(r)$, εισάγουμε τη προσέγγιση του $h(r) \approx 1$ στην εξίσωση ίχνους (3.22), και βρίσκουμε ότι

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2G_N M}{r^3} + \frac{C}{r^4} + \frac{\eta^2 8\pi G_N}{r^2} \right)} \right] \quad (3.26)$$

το οποίο σημαίνει ότι το δυναμικό της τριπλέτας μας εισάγει μία υπολειπόμενη στερεά γωνία στη γεωμετρία της ασυμπτωτικής λύσης, κάτι το οποίο αναμενόταν από το καθολικό μονόπολο με βάση τα αρχικά αποτελέσματα των [199]. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, έχουμε ότι ασυμπτωτικά

$$f(r) \sim 1 - \eta^2 8\pi G_N - \frac{2G_N M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Τονίζουμε επίσης ότι στην άθραυστη φάση όπου $\eta = 0$, αποκτάμε απευθείας την τοπική λύση της θεωρίας. Η επιλογή τώρα του προφίλ του βαθμωτού πεδίου θα παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή του καθολικού μονοπόλου. Θυμίζουμε ότι το βαθμωτό πεδίο δίνεται μέσω της σχέσης $E_t^t - E_r^r$ των βαρυτικών εξισώσεων κίνησης ενώ ο τομέας της τριπλέτας για τον εν λόγω συνδυασμό μηδενίζεται στην ασυμπτωτική τιμή του $h(r) \rightarrow 1$. Συνεπώς, οι λύσεις του βαθμωτού πεδίου είναι οι ίδιες που παρουσιάσαμε στις εξισώσεις (3.17) και (3.18). Θα διαλέξουμε το προφίλ (3.17), εφόσον αυτό θα είναι υπεύθυνο για την σταθεροποίηση του μονοπόλου, δηλαδή τη κατασκευή του μονοπόλου με θετική μάζα, όπως θα δείξουμε παρακάτω. Ο λόγος για αυτό είναι ότι το συγκεκριμένο προφίλ του πεδίου μας εξάγει τις ακόλουθες τιμές των σταθερών ολοκλήρωσης

$$C = 2\alpha, \quad c_1 = \sqrt{-2\alpha/\beta}, \quad c_2 = 0 \quad (3.28)$$

ενώ καθορίζουμε την παράμετρο λ να είναι

$$\lambda = \frac{\beta^2}{4\alpha}, \quad (3.29)$$

για να έχουμε ένα συνεχές όριο στη λύση της μελανής οπής όταν το $\eta \rightarrow 0$. Η μη μηδενική τιμή της ολοκληρωτικής σταθεράς C θα μας δώσει τη δυνατότητα να ταιριάξουμε τον εξωτερικό χωρόχρονο του μονοπόλου με ένα κέντρο deSitter χωρίς επιβάλλουμε αρνητική μάζα στο καθολικό μονόπολο.

Προχωράμε λοιπόν στην αντιμετώπιση των εξισώσεων κοντά στο κέντρο όπου $r \rightarrow 0$, δηλαδή στο εσωτερικό του μονοπόλου. Στην περιοχή αυτή είναι ασφαλές να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $h(r)$ που καθορίζει τη δυναμική της τριπλέτας μηδενίζεται, ενώ το βαθμωτό πεδίο προσεγγίζει κάποια σταθερή τιμή. Επομένως, θέτουμε

$$h(r) \rightarrow 0, \quad \Phi(r) \rightarrow \Phi_0, \quad \text{για } r \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

ενώ κρατάμε προφανώς τη τιμή της σταθεράς λ που βρήκαμε, καθώς είναι σταθερά σύζευξης της θεωρίας. Για την εν λόγω περίπτωση, η μετρική αποκτά μία δομή τύπου deSitter

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\alpha \xi \eta^4 8\pi G_N}{3}} \right) \quad (3.31)$$

όπως επιβεβαιώνεται από τη σχέση (3.22).

Παρατηρούμε ότι η εν λόγω σχέση περιορίζει τις τιμές της παραμέτρου α στα όρια

$$\alpha \geq \frac{-3}{\xi \eta^4 8\pi G_N} \quad (3.32)$$

Το εν λόγω διάστημα της παραμέτρου α για την εσωτερική μετρική (3.31) πράγματι περιγράφει ένα κέντρο deSitter, αφού ο όρος στην παρένθεση είναι θετικά ορισμένος μέσω της συνθήκης $\alpha < 0$, ενώ ο όρος στη ρίζα είναι θετικός υπό τη συνθήκη (3.32). Αυτό αποτελεί και τη πρώτη βεβαίωση ότι επιλέξαμε ορθά τη σχέση $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ για τη δράση μας. Τέλος, πρώτου προχωρήσουμε, πρέπει ακόμα να ελέγξουμε την τιμή του βαθμωτού πεδίου Φ στο εσωτερικό. Οι βαρυτικές εξισώσεις κίνησης μας δίνουν ότι

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{3}{\beta} - \frac{\sqrt{9 - 3\eta^4 \kappa^2 \xi |\alpha|}}{\beta} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 \eta^4 \kappa^2 \xi |\alpha| + \beta^2 (9 - 3\eta^4 \kappa^2 \xi |\alpha|) - 4\beta^2 \sqrt{9 - 3\eta^4 \kappa^2 \xi |\alpha|} + 3\beta^2}}{\beta^2} \right], \quad (3.33)$$

το οποίο έχει καλώς ορισμένη τιμή, δηλαδή. $\Phi_0 \in \mathbb{R}$, όσο ισχύει η σχέση (3.32). Σημειώνουμε εδώ ότι η β είναι ελευθερή ως παράμετρος και δεν μπορεί να οριστεί από τις εξισώσεις κίνησης του εσωτερικού. Για να αποκτήσουμε μία πλήρη εικόνα, πρέπει να προβούμε σε αριθμητική επίλυση των εξισώσεων, η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο υποκεφάλαιο. Παρόλαυτα, εφόσον καταφέρουμε να ταιριάξουμε τις δύο γεωμετρίες σε μία ενδιάμεση υπερεπιφάνεια που θα αποτελεί και την ακτίνα του καθολικού μονοπόλου, είναι προφανές ότι η αριθμητική ανάλυση των αποτελεσμάτων δεν πρόκειται να βγάλει κάποια έντονα διαφοροποιούμενα αποτελέσματα από την ημι-αναλυτική προσέγγιση που ακολουθούμε.

Από τη στιγμή που τα στοιχεία της μετρικής του εξωτερικού χώρου (3.26) και του κέντρου (3.31) περιγράφουν τον ίδιο χωρόχρονο σε διαφορετικά ανοιχτά σύνολα της πολλαπλότητας, οφείλουν να ταιριάξουν σε μία ενδιάμεση ακτίνα για να αποκτήσουμε μία πλήρη εικόνα. Το συγκεκριμένο ταίριασμα γεωμετριών θα μας δώσει και τις πιθανές τιμές της μάζας ADM του μονοπόλου.

Για τη διαδικασία του ταιριάσματος των γεωμετριών, θα ακολουθήσουμε τις συνθήκες Israel, όπου εξισώνουμε την εσωτερική μετρική (3.31) με την εξωτερική μετρική (3.26) σε κάποια υπερεπιφάνεια, ενώ εξισώνουμε επίσης και τις πρώτες παραγώγους της μετρικής προς αποφυγή ασυνεχειών. Συγκεκριμένα, θεωρούμε μία καθολική μορφή μετρικής

$$ds_G^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2d\Omega^2, \quad (3.34)$$

όπου το στοιχείο $F(r)$ ορίζεται μέσω συναρτήσεων κατανομών ως

$$F(r) = F_1(r)\Theta(\delta - r) + F_2(r)\Theta(r - \delta) \quad (3.35)$$

$$\text{όπου } F_1(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\alpha\xi\eta^4 8\pi G_N}{3}} \right), F_2(r) = 1 + \frac{r^2}{2\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + 4\alpha \left(\frac{2G_N M}{r^3} + \frac{2\alpha}{r^4} + \frac{\eta^2 8\pi G_N}{r^2} \right)} \right],$$

και $\Theta(r)$ είναι η κατανομή Heaviside, ενώ η δ υποδεικνύει την ενδιάμεση ακτίνα πάνω στην οποία θα γίνει το ταίριασμα των γεωμετριών. Επομένως, οι συνθήκες Israel δίνουν απλά

$$F_1(r)|_{r=\delta} = F_2(r)|_{r=\delta}, \quad \frac{d}{dr}F_1(r)|_{r=\delta} = \frac{d}{dr}F_2(r)|_{r=\delta}. \quad (3.36)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα ως προς το δ και τη μάζα ADM, βρέθηκαν τέσσερις λύσεις, εκ των οποίων μία δίνει θετικές τιμές και για τις δύο ποσότητες, ήτοι,

$$\delta = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 2\alpha\xi}}{\xi\eta^2\kappa}},$$

$$M = \frac{\sqrt{2}\eta}{3G_N} (-2\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 2\alpha\xi}) \sqrt{\kappa \frac{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 2\alpha\xi}}{\xi}} \quad (3.37)$$

όπου $\kappa^2 = 8\pi G_N$. Παρατηρούμε ότι για να διατηρηθεί η θετική τιμή της μάζας M , η παράμετρος α περιορίζεται από το άνω φράγμα $\alpha < -\frac{3\kappa^2}{2\xi}$, που μας δίνει το ενεργό επιτρεπόμενο διάστημα του

$$\frac{-3}{\xi\eta^4\kappa^2} \leq \alpha < -\frac{3\kappa^2}{2\xi}. \quad (3.38)$$

Η ύπαρξη του άνω φράγματος για το αρνητικό α ήταν αναμενόμενη από τα αποτελέσματα του καθολικού μονοπόλου στη Γενική Σχετικότητα. Πράγματι, αν το α μπορούσε να μηδενιστεί, $\alpha \rightarrow 0$, τότε η μάζα ADM του μονοπόλου υπολογίζεται με τετριμμένο τρόπο

$$M_{\alpha \rightarrow 0} = -\frac{16\pi\eta}{3\sqrt{\xi}}, \quad (3.39)$$

η οποία είναι η γνωστή αρνητική τιμή της μάζας του μονοπόλου που αναφέραμε στο πρώτο υποκεφάλαιο από τα αποτελέσματα του [215]. Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι, αν είχαμε διαλέξει το δεύτερο προφίλ του βαθμωτού πεδίου, το αποτέλεσμα του ταιριάσματος είναι απλά το ίδιο με τη Γενική Σχετικότητα και στην προκειμένη περίπτωση η παράμετρος α δεν παίζει ρόλο στην εξαγωγή της μάζας του μονοπόλου. Ο λόγος που ισχύει κάτι τέτοιο είναι επειδή ταιριάζουμε πρακτικά τις υπόριζες ποσότητες των δύο μετρικών και είναι ο όρος $2\alpha/r^4$ στην εξωτερική μετρική που σταθεροποιεί το μονόπολο. Αν είχαμε επιλέξει το δεύτερο προφίλ για το βαθμωτό πεδίο, (3.18), ο συγκεκριμένος όρος απουσιάζει από τη μορφή της μετρικής. Το κύριο αποτέλεσμα μας είναι λοιπόν ότι μέσω της τετραδιάστατης θεωρίας Gauss-Bonnet που τροποποιεί το ίχνος των εξισώσεων από $R + 8\pi G_N T^X = 0$ σε $R + \frac{\alpha}{2}G + 8\pi G_N T^X = 0$, μέσω της γεωμετρικής συνθήκης του σύμμορφα συζευγμένου πεδίου, η απώστική βαρυτική φύση του μονοπόλου που σχετίζεται με το πρόβλημα της αρνητικής μάζας διορθώνεται.

3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για το καθολικό μονόπολο στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet

Η εξαγωγή της λύσης για το μονόπολο BV με κανονικοποιημένο κέντρο deSitter είχε γίνει στο [215] μέσω της αριθμητικής μεθόδου Runge-Kutta. Στη δική μας περίπτωση, η ύπαρξη του βαθμωτού πεδίου, το οποίο αλλάζει γρήγορα μορφή στην περιοχή του κέντρου του μονοπόλου περιπλέκει το πρόβλημα και απαιτεί ισχυρότερες μεθοδολογίες.

Στα παρακάτω, παρουσιάζουμε εν συντομία τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κίνησης και παρέχουμε σχολιασμούς για τις δυσκολίες που προέκυψαν. Αρχικά, χρησιμοποιήσαμε μία πιο γενική μορφή μετρικής,

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (3.40)$$

καθώς δεν υπάρχει κάποιος λόγος η μετρική να είναι ομοιογενής σε όλο το χωρόχρονο ($|g_{tt}| = g_{rr}^{-1}$). Για να αποκτήσουμε την αριθμητική λύση, αντικαταστήσαμε το στοιχείο $G(r)$ από τις αντίστοιχες εξισώσεις ίχνους και την εξίσωση της τριπλέτας. Έτσι, μπορούσαμε να λύσουμε τις βαρυτικές εξισώσεις ως προς τους βαθμούς ελευθερίας h, f, Φ . Καταλήξαμε έτσι σε τρεις διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να λυθούν ταυτόχρονα με αριθμητικό τρόπο.

Το πρόβλημα στον κώδικα ήταν ότι το διαφορικό σύστημα ήταν stiff, που σημαίνει ότι αρκετές προσπάθειες εύρεσης λύσης απέκλιναν εκτός εάν πάρει κανείς ένα ικανοποιητικά μικρό βήμα στην στην διακριτοποίηση των εξισώσεων. Χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία "StiffnessSwitching" του Mathematica, η οποία χρησιμοποιεί μεθοδολογίες παρεμβολής για να ενώσει τις τιμές που εξάγονται. Θεωρήσαμε αρχικές τιμές για $r = \epsilon \approx \mathcal{O}(10^{-5})$

$$f(\epsilon) \approx 1, h(\epsilon) \approx 0.5 \cdot \epsilon, h'(\epsilon) \approx 0.5, \Phi(\epsilon) \approx 4.47, \text{ and } \Phi'(\epsilon) \approx 0.001, \quad (3.41)$$

ενώ θέσαμε τις τιμές των παραμέτρων της θεωρίας στα

$$\eta = 0.01, \xi = 10^4, \alpha = -1.6 \cdot 10^{-4} \text{ and } \beta = 8 \cdot 10^{-9}. \quad (3.42)$$

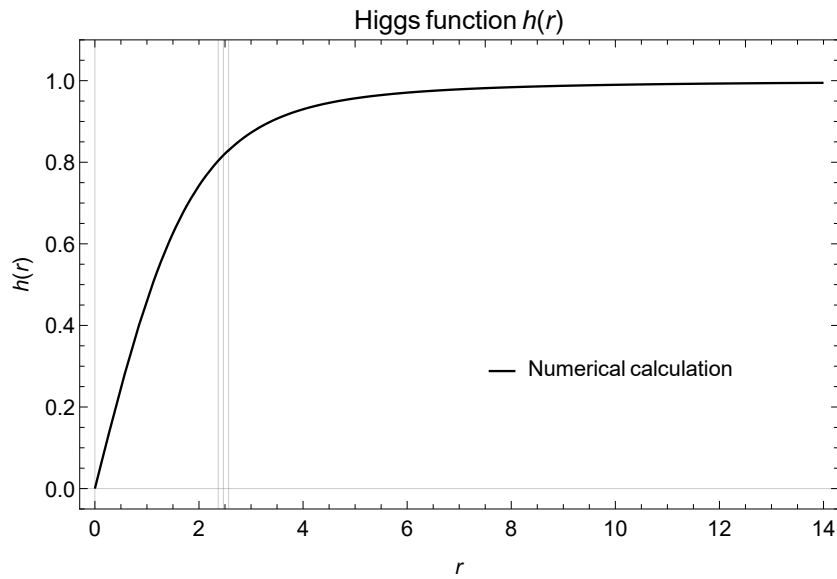
Ένα σημαντικό ζήτημα εδώ είναι ότι, παίρνοντας τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων, και θέτοντας $\lambda = \frac{\beta^2}{4\alpha}$ από την εξίσωση (3.29), η αρχική τιμή του βαθμωτού πεδίου προκύπτει να είναι μηδενική, κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τις αρχικές συνθήκες (3.41). Ο λόγος για αυτό είναι ότι το βαθμωτό πεδίο πολύ κοντά στο μηδέν πρακτικά συμπεριφέρεται ως σύναρτηση βήματος, όπως θα δείξουμε παρακάτω. Επίσης, αναφέρουμε για πληρότητα ότι η εν λόγω επιλογή για τις τιμές των παραμέτρων ικανοποιεί τις συνθήκες θετικής μάζας για το μονόπολο.

Είναι αρκετά σημαντικό για την εξήγηση των αποτελεσμάτων να δώσουμε περαιτέρω πληροφορίες για τις αρχικές συνθήκες. Επιλέξαμε $\sqrt{\xi\eta} = 1$ και μία τιμή για το α κοντά στο άνω φράγμα $\alpha_{max} = -1.5 \cdot 10^{-4}$ προκειμένου να μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά του [215]. Για παράδειγμα, για τις εν λόγω τιμές παραμέτρων, η ακτίνα του μονοπόλου στο μοντέλο μας ήταν $\delta \approx 2.47$, ενώ στο μοντέλο (BV) έχουμε $\delta_{BV} = 2$. Επίσης, διαλέξαμε αρχικές συνθήκες για τη συνάρτηση της τριπλέτας παρεμφερείς με αυτές του [215], έτσι ώστε $h(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$. Η μεγαλύτερη πρόκληση που αντιμετωπίσαμε στην ανάλυση ήταν η επιλογή της αρχικής τιμής του βαθμωτού πεδίου $\Phi(\epsilon)$. Για να έχουμε τη σωστή ασυμπτωτική τιμή του στοιχείου της μετρικής, $f(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1 - \eta^2 = 0.9999$, έχουμε από τις εξισώσεις κίνησης ότι $\Phi(\epsilon) \approx 4.47$. Όμως, αν διαλέξουμε $\Phi(\epsilon) \approx \Phi_0 = 0$, τότε το στοιχείο της μετρικής συγκλίνει στη τιμή 0.99994, που δεν είναι η σωστή ασυμπτωτική τιμή για τις σταθερές που διαλέξαμε. Επομένως, συμπαιρεύουμε ότι κοντά στο κέντρο το βαθμωτό πεδίο αυξάνεται πάρα πολύ απότομα από την τιμή 0 στην 4.47, που σημαίνει ότι έχει μία συμπεριφορά συνάρτησης βήματος κοντά στο $r = 0$. Επίσης, μέσω της θεωρητικής ανάλυσης για την ημιαναλυτική προσέγγιση, αναμένουμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι πρακτικά σταθερό στο εσωτερικό του μονοπόλου μέχρι την ακτίνα $\delta = 2.47$. Αυτός ήταν ο λόγος που θέσαμε $\Phi'(\epsilon) = 0.001$ έτσι ώστε να εξάγουμε τα αναμενόμενα αποτελέσματα.

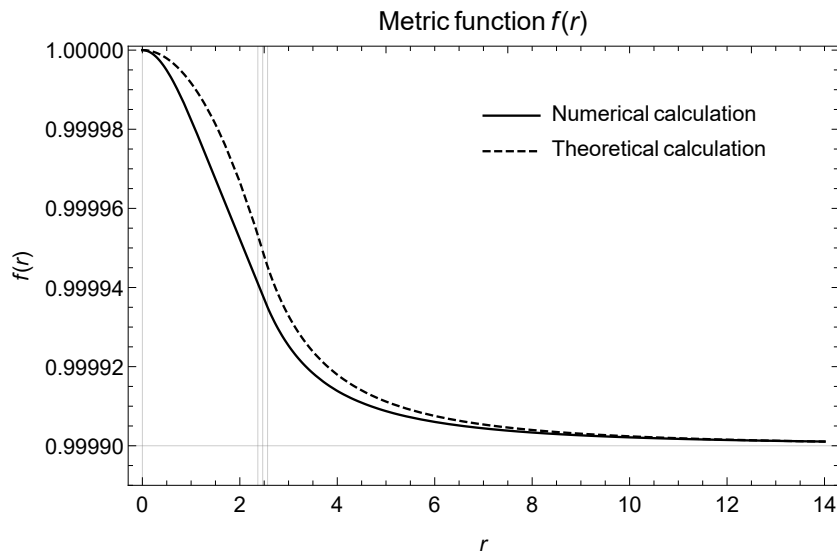
Κοντά στην ακτίνα του μονοπόλου, ο αριθμητικός κώδικας παρουσίασε περαιτέρω δυσκολίες, καθώς η παράγωγος του βαθμωτού πεδίου γύρω από το κέντρο, $\Phi'(r \simeq \delta)$, άλλαζε ραγδαία. Αυτό σημαίνει ότι είτε πρέπει να χρησιμοποιηθούν ισχυρότερες αριθμητικές μέθοδοι ή πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδος παρεμβολής για να ταιριάξουμε την εσωτερική με την εξωτερική μορφή του πεδίου. Θυμίζουμε ότι και στην ημιαναλυτική προσέγγιση δεν ασχολήθήκαμε με το ταίριασμα του πεδίου, καθώς μας ενδιέφερε η ποιοτική βεβαίωση του ότι οι γεωμετρίες μπορούν να ενωθούν. Διαλέξαμε τη δεύτερη μέθοδο όπου χρησιμοποιήθηκε μία συνάρτηση παρεμβολής. Συγκεκριμένα, η αριθμητική ανάλυση εφαρμόστηκε στις περιοχές $r \in (\epsilon, \delta - 0.1)$ και $r \in (\delta + 0.1, \infty)$, ενώ στην ενδιάμεση περιοχή του $(\delta - 0.1, \delta + 0.1)$ περάσαμε τη βοηθητική συνάρτηση για να ενώσει τις λύσεις. Από τις αναμενόμενες συμπεριφορές των βαθμών ελευθερίας στο εξωτερικό, ($r > \delta + 0.1$), θέσαμε τις αρχικές συνθήκες $f(\delta + 0.1) \approx 0.83$, $f'(\delta + 0.1) \approx 0.12$, $\Phi(\delta + 0.1) \approx 4.35$, $\Phi'(\delta + 0.1) = -0.39$ και $F(\delta + 0.1) \approx 0.999935$.

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από τον αριθμητικό κώδικα για τους τρεις βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας. Έχουμε μία ιδιαίτερα καλή ταύτιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα ημιαναλυτική. Συγκεκριμένα, στην ασυμπτωτική περιοχή η ημιαναλυτική με την αριθμητική προσέγγιση δίνουν πρακτικά την ίδια ακριβώς συμπεριφορά, ενώ τα πιθανά σφάλματα κοντά στην ακτίνα του μονοπόλου είναι της τάξης του 10^{-5} . Τέλος, όπως φαίνεται από τη τελευταία εικόνα, η συνάρτηση του βαθμωτού πεδίο στο εξωτερικό ταυτίζεται με την ημιαναλυτική προσέγγιση. Και στα τρία διαγράμματα, χρησιμοποιούμε τρεις κάθετες γραμμές που υποδεικνύουν το πάχος της ακτίνας του μονοπόλου και αντιστοιχούν στις τιμές $r = \delta - 0.1$, $r = \delta$ και $r = \delta + 0.1$ αντιστοίχως. Ολοκληρώνουμε με αυτό το τρόπο την ανάλυση μας για τα καθολικά μονόπολα στο

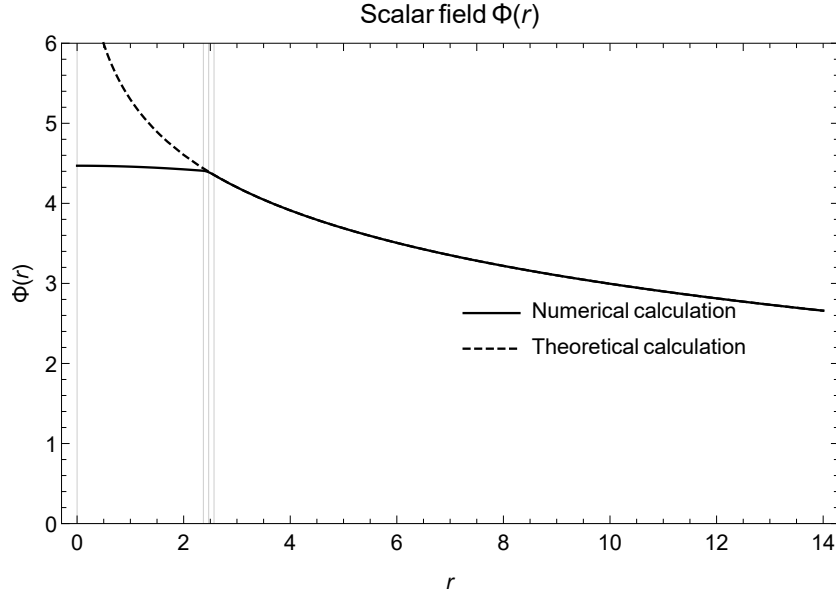
εν λόγω μοντέλο.



Σχήμα 3.1: Αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης της τριπλέτας για $\eta = 0.01$, $\xi = 10^4$, $\alpha = -1.6 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-9}$, $\lambda = -10^{-13}$ και $\kappa = 1$. Οι τρεις κάθετες γραμμές υποδεικνύουν το πάχος της ακτίνας του μονοπόλου.



Σχήμα 3.2: Αριθμητικός και ημιαναλυτικός (διακεκομμένη γραμμή) υπολογισμός του στοιχείου μετρικής για $\eta = 0.01$, $\xi = 10^4$, $\alpha = -1.6 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-9}$, $\lambda = -10^{-13}$ και $\kappa = 1$. Οι τρεις κάθετες γραμμές υποδεικνύουν το πάχος της ακτίνας του μονοπόλου.



Σχήμα 3.3: Αριθμητικός και ημιαναλυτικός (διακεκομμένη γραμμή) υπολογισμός του βαθμωτού πεδίου για $\eta = 0.01$, $\xi = 10^4$, $\alpha = -1.6 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-9}$, $\lambda = -10^{-13}$ και $\kappa = 1$. Το βαθμωτό πεδίο συμπεριφέρεται ως βηματική συνάρτηση κοντά στο $r = 0$. Οι τρεις κάθετες γραμμές υποδεικνύουν το πάχος της ακτίνας του μονοπόλου.

3.5 Συμπεράσματα

Στο δεύτερο κεφάλαιο της διατριβής ασχοληθήκαμε με την ύπαρξη αυτοβαρυτικών καθολικών μονοπόλων τύπου BV [199], στο μοντέλο της τετραδιάστατης θεωρίας Gauss-Bonnet που παρουσιάσαμε στο υποκεφάλαιο 3.2. Η εν λόγω θεωρία περιλαμβάνει ένα βαθμωτό πεδίο Φ το οποίο είναι σύμμορφα συζευγμένο σε βαρυτικούς τανυστές και περιλαμβάνει μη-τετριμμένη σύζευξη στον όρο Gauss-Bonnet μέσω μίας σταθεράς σύζευξης α . Εμβραπτύσαμε στη θεωρία μία τριπλέτα βαθμωτού πεδίου τύπου Higgs και δείξαμε ότι το καθολικό μονόπολο που προκύπτει από τη δυναμική θραύση συμμετρίας μπορεί να κανονικοποιηθεί στο $r = 0$ μέσω της σταθεράς σύζευξης α σε ένα κέντρο deSitter. Εκτελέσαμε το ταίριασμα των γεωμετριών του εσωτερικού με τον εξωτερικό χωρόχρονο πάνω στην ακτίνα του μονοπόλου δ και δείξαμε ότι η σταθερά α επιτρέπει μονόπολα θετικής μάζας, κάτι το οποίο διορθώνει τα προβληματικά αποτελέσματα της Γενικής Σχετικότητας. Επίσης, επιβεβαιώσαμε την ύπαρξη της υπολειπόμενης στερεάς γωνίας στον εξωτερικό χωρόχρονο κάτι το οποίο αποτελεί κύριο χαρακτηριστικό των γεωμετριών καθολικών μονοπόλων. Τέλος, επιβεβαιώσαμε τα αποτελέσματα μας μέσω μίας αριθμητικής προσέγγισης όπου είχαμε μία πολύ καλή συμφωνία των ημιαναλυτικών αποτελεσμάτων.

Η ύπαρξη της υπολειπόμενης γωνίας επιβάλλει παρεμφερή φαινομενολογικά αποτελέσματα με αυτά του (ασταθούς) μονοπόλου [199] τα οποία συζητήθηκαν εν συντομία στο πρώτο υποκεφάλαιο. Όμως, καθώς στην περίπτωση μας το μονόπολο μπορεί να έχει θετική μάζα, είναι πιθανό τέτοιου είδους γεωμετρίες να είναι ευσταθείς, υποθέτωντας προφανώς τη φυσική ορθότητα της θεωρίας πάνω στην οποία εργαστήκαμε. Η θετική τιμή της μάζας ADM του μονοπόλου μπορεί να προκύψει από περιορισμούς στη σταθερά σύζευξης α , οι οποίοι, αν ικανοποιηθούν, επιβεβαιώνουν την ύπαρξη καθολικών μονοπόλων με θετική μάζα στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet. Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε επίσης ότι στο όριο του $\alpha \rightarrow 0$, εξάγουμε το καθολικό μονόπολο των

BV , με τα αντίστοιχα προβληματικά χαρακτηριστικά του.

Θα θέλαμε επίσης να παρέχουμε μερικά σχόλια αναφορικά με τη κοσμολογία και τη φαινομενολογία τέτοιου είδους αντικειμένων. Καταρχάς, όπως ήδη αναφέραμε στο υποκεφάλαιο 3.1, γεωμετρίες καθολικών μονοπόλων χαρακτηρίζονται από μία υπολειπόμενη στερεά γωνία, που σχετίζεται άμεσα με την αναμενόμενη τιμή κενού της τριπλέτας. Η λύση του καθολικού μονοπόλου που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο αυτό, στα πλαίσια της τετραδιάστατης θεωρίας Gauss-Bonnet, είναι μία τοπική αυτοβαρυτική λύση που περιλαμβάνει βαθμωτό δευτερεύον φορτίο λόγω της μη τετριμμένης φύσης του βαθμωτού πεδίου. Η περαιτέρω ανάλυση του μοντέλου αποτελεί ένα ξεχωριστό αντίκειμενο έρευνας, που δε θα ασχοληθούμε εδώ. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [153, 155]) για περαιτέρω πληροφορίες. Παρόλαυτά, αν η θεωρία έχει πράγματι φυσική σημασία, τέτοιου είδους καθολικά μονόπολα μπορούν να έχουν καθοριστικό ρόλο ως υποψήφιοι σκοτεινής ύλης, εφόσον χαρακτηρίζονται από θετική μάζα ADM και υπάρχουν σε αρκετά μεγάλη πυκνότητα στο πρώιμο σύμπαν με μάζες κάτω της πληθωριστικής κλίμακας για να μην "εξαφανιστούν" (dilute) λόγω πληθωρισμού. Από την άλλη, ανεξάρτητα των κοσμολογικών συνεπειών τέτοιου είδους λύσεων, η ύπαρξη καθολικών μονοπόλων σε περιοχές του σύμπαντος θα οδηγήσει, όπως προαναφέραμε, σε δακτύλιους Einstein [203] από τη σκέδαση φωτονίων CMB. Αυτό συμβαίνει επειδή η σκέδαση άμαζων σωματιδίων σε τέτοιου είδους γεωμετρίες περιγράφεται από ένα πλάτος σκέδασης με ισχυρά μέγιστα που εξαρτώνται από τη γωνία της σκέδασης αναφορικά με την υπολειπόμενη στερεά γωνία κάτι το οποίο οδηγεί σε δομές δακτυλίων όπου το πλάτος σκέδασης δυνητικά απειρίζεται, ένα φαινόμενο το οποίο ονομάστηκε 'ιδιάζον βαρυτικός φακός' ("**Singular Lensing**") [204].

Από την άλλη, τα συνήθη φαινόμενα lensing από σκέδαση φωτονίων σε τέτοιου είδους γεωμετρίες, όπου η γωνία σκέδασης βρίσκεται εκτός του πλαισίου singular lensing , εξαρτώνται εν γένει από τη μάζα του μονοπόλου αλλά και από την ακτίνα του. Η μέτρηση της παραμέτρου προσκρούσης (impact parameter) μπορεί να οδηγήσει σε επιπλέον περιορισμούς των παραμέτρων η, α και ξ του μοντέλου. Επίσης, το γεγονός ότι η τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet έχει μη τετριμμένες λύσεις μελανών οπών [153] και παρουσιάζει πλούσια φαινομενολογία [155], μπορεί δυνητικά να περιορίσει ισχυρότερα την παράμετρο α , κάτι το οποίο θα οδηγήσει στην εξαγωγή περαιτέρω πληροφορίας αναφορικά με τις σταθερές σύζευξης της θεωρίας. Μέσω των παραπάνω, είναι δυνητικά πιθανό να έχουμε περιορισμούς όχι μόνο στη μάζα και στην ακτίνα του καθολικού μονοπόλου, αλλά και στην πυκνότητα ύπαρξης τέτοιων αντικειμένων στο σύμπαν.

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο τονίζοντας ότι η θετικότητα της μάζας του μονοπόλου που βρήκαμε αποτελεί μία αισιόδοξη ένδειξη για την ευστάθεια του. Δε θα θέλαμε όμως να προβούμε σε έντονους ισχυρισμούς ευστάθειας, καθώς πρέπει πρώτα να γίνει μία διεξοδική ανάλυση στη γεωμετρία, αντίστοιχη με αυτή των γεωμετριών μελανών οπών [221, 222, 223, 224, 225, 226, 154, 227]. Συγκεκριμένα, πρέπει πρώτα να υπολογιστούν οι ακτινικές διαταραχές στη γεωμετρία του μονοπόλου και να επιβεβαιώσουμε ότι δεν έχουμε φαινόμενα απόκλισης κοντά στο κέντρο του. Τονίζουμε ότι το ζήτημα βαρυτικών διαταραχών σε τέτοιου είδους γεωμετρίες δεν είναι καθόλου τετριμμένο λόγω της υπολειπόμενης στερεάς γωνίας και αποτελεί μία ξεχωριστή ερευνητική εργασία. Το ζήτημα της ευστάθειας τέτοιων σωμάτων μέσω ακτινικών διαταραχών δεν έχει επιλυθεί καν στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας, από όσο γνωρίζουμε, καθώς έχουμε μόνο προβλέψεις αστάθειας λόγω αρνητικής μάζας. Παρολαυτά, το αποτέλεσμα της θετικής μάζας των κανονικοποιημένων μονοπόλων είναι σίγουρα ένα πρώτο βήμα προς αυτή τη κατεύθυνση.

Κεφάλαιο 4

Θερμοδυναμική ευστάθεια μελανών οπών με κόμη

4.1 Εισαγωγή

Στο πρόσφατο άρθρο [228], η θερμοδυναμική ευστάθεια των μελανών οπών της Γενικής Σχετικότητας μελετήθηκε ερμηνεύοντας τις μελανές οπές ως ατέλειες στον παραμετρικό χώρο των αντίστοιχων θερμοδυναμικών ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, θεωρώντας την γενικευμένη ελεύθερη ενέργεια της μελανής οπής \mathcal{F} που προκύπτει από τη περιστροφή Wick της δράσης κατά τα γνωστά [229], οι συγγραφείς του [228] κατασκεύασαν κατάλληλα διανυσματικά πεδία στο θερμοδυναμικό παραμετρικό χώρο τα οποία μηδενίζονται για τις τοπικές λύσεις της βαρυτικής θεωρίας. Έτσι, οι μελανές οπές μπόρεσαν να ερμηνευθούν ως ατέλειες στον εν λόγω παραμετρικό χώρο, κάτι το οποίο είναι ανάλογο με τις ατέλειες στη φυσική συμπυκνωμένης ύλης, όπου οι ατέλειες ερμηνεύονται ως η απουσία διεγερμένων πεδίων. Αποτέλεσμα της ανάλυσης ήταν ότι οι μελανές οπές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε θερμοδυναμικά ευσταθείς (ασταθείς) μέσω ένα κατάλληλου αριθμού περιέλιξης (winding number) που μπορεί να έχει θετικές (αρνητικές τιμές), εγκαθιστώντας έτσι μία άμεση σχέση της θερμοδυναμικής ευστάθειας μίας μελανής οπής με κάποιο τοπολογικό φορτίο.

Συγκεκριμένα, το άθροισμα των αριθμών περιέλιξης για τους διάφορους θερμοδυναμικούς κλάδους της μελανής οπής σε συγκεκριμένη θερμοκρασία βρέθηκε να είναι ένας καθολικός αριθμός, δηλαδή ένα τοπολογικό φορτίο, ανεξάρτητος από τις παραμέτρους της μελανής οπής που εξαρτάται μόνο από τη θερμοδυναμική ασυμπτωτική συμπεριφορά της θερμοκρασίας της μελανής οπής για μικρές και μεγάλες μελανές οπές. Βρέθηκε ότι διαφορετικά συστήματα μελανών οπών χαρακτηρίζονται από αυτό το τοπολογικό φορτίο, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καλύτερη κατανόηση της θερμοδυναμικής των μελανών οπών. Το εν λόγω τοπολογικό φορτίο, λόγω της καθολικής του φύσης για το σύστημα της μελανής οπής, μπορεί να παρέχει επίσης πιθανές πληροφορίες αναφορικά με μικροσκοπικές μελανές οπές που είχε προβλεφθεί από τον Wheeler να έχουν κυρίαρχο ρόλο σε θεμελιώδη ζητήματα κβαντικής βαρύτητας [230].

Η εν λόγω προσέγγιση των [228] χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία και στην περίπτωση περιστρεφόμενων μελανών οπών (με ή και χωρίς ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) στο [231] ενώ στο [232] μελετήθηκαν και οι περιστρεφόμενες μελανές οπές με ασυμπτωτικές anti de-Sitter. Η έρευνα συνεχίστηκε στην περίπτωση μελανών οπών από θεωρίες υψηλότερης καμπυλότητας Lovelock [233] και σε γενικές θεωρίες με όρο Gauss-Bonnet [234]. Από τότε, μόλις σε ένα χρόνο έχει υπάρξει ένα αυξανόμενο

ενδιαφέρον στην τοπολογική κατηγοριοποίηση των μελανών οπών με βάση τις θερμοδυναμικές τους ιδιότητες [235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257].

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη συγκεκριμένη θεώρηση των [228] στη γενικότητα της. Θα μελετήσουμε παραδείγματα μελανών οπών με δευτερεύον βαθμωτό hair , το οποίο παραμορφώνει τη γεωμετρία κενού ως αποτέλεσμα κάποιου βαθμωτού πεδίου συζευγμένο με μη-τετριμμένο τρόπο σε βαρυτικούς τανυστές. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε, θα αντιμετωπίσουμε την εξαγωγή των συνθηκών που μπορούν να σταθεροποιήσουν θερμοδυναμικά μία hairy μελανή οπή. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του ποιες είναι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε μία hairy μελανή οπή να αποκτήσει θετικό αριθμό περιέλιξης. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι οι μελανές οπές που ικανοποιούν τις εν λόγω συνθήκες είναι ικανές να αφήσουν απομεινάρια μελανών οπών (black hole remnant) τα οποία καθίστανται θερμοδυναμικά ευσταθή. Όπως προαναφέραμε όμως στα προηγούμενα, δεν είναι πάντα εφικτό να γνωρίζουμε την τοπική λύση κάποιας τροποποιημένης θεωρίας βαρύτητας, ακόμα και σε περιπτώσεις σφαιρικής συμμετρίας, ειδικά όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε μη-τετριμμένες συζεύξεις του βαθμωτού πεδίου χωρίς να ικανοποιείται κάποια συμμετρία που απλοποιεί τις πράξεις. Για τον λόγο αυτό, θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε μία γενική μορφή hairy μελανών οπών που μπορεί να μοντελοποιήσει ικανοποιητικά τις μορφές τέτοιων λύσεων κάτω από κάποιες λογικές συνθήκες. Θα αποφύγουμε να επικεντρωθούμε σε συγκεκριμένες θεωρίες για να διατηρήσουμε τη γενικότητα των αποτελεσμάτων.

Η ανάλυση μας θα οδηγήσει στο αποτέλεσμα ότι η ισχύς της παραμόρφωσης των μελανών οπών κάτω από συζεύξεις βαθμωτών πεδίων σε βαρυτικούς τανυστές ελέγχεται από μία αδιάστατη παράμετρο που δίνεται μέσω του λόγου της σταθεράς σύζευξης της θεωρίας ως προς το μέγεθος της μελανής οπής, ένα αποτέλεσμα που εξάγαμε ήδη ανεξάρτητα στο πρώτο κεφάλαιο στα πλαίσια της θεωρίας Chern-Simons . Δείχνουμε ότι η παραμόρφωση μίας Schwarzschild μελανής οπής σε τροποποιημένες θεωρίες θα δίνεται πρακτικά πάντα μέσω αυτής της αδιάστατης παραμέτρου και επομένως, όσο μικραίνει η μελανή οπή και το μέγεθος της γίνεται συγκρίσιμο με την αντίστοιχη κλίμακα μήκους της σταθεράς σύζευξης, η παραμόρφωση παύει να είναι υποκυρίαρχη και μπορεί να σταθεροποιήσει τη μελανή οπή στα τελευταία στάδια.

4.2 Μελανές οπές σε λουτρό θερμότητας και κριτήρια θερμοδυναμικής ευστάθειας

Θα ξεκινήσουμε με μία σύντομη ανασκόπηση στη θερμοδυναμική των μελανών οπών κατά την οποία θα μείνουμε κυρίως σε ποιοτικά αποτελέσματα αποφεύγοντας αναλυτικούς υπολογισμούς προκειμένου να δώσουμε τη βάση της ανάλυσης που θα ακολουθήσει. Κάθε μελανή οπή μπορεί να μελετηθεί σε συνθήκες υψηλής ή χαμηλής θερμοκρασίας. Γνωρίζουμε από βασική στατιστική φυσική ότι οι υψηλές θερμοκρασίες σε ένα θερμοδυναμικό σύστημα μπορούν να αντιμετωπιστούν με κλασικό τρόπο, υπό την έννοια ότι οι κβαντικές διορθώσεις στο εν λόγω σύστημα είναι αμελητέες. Συστήματα υψηλών θερμοκρασιών μεταφράζονται σε μελανές οπές μεγάλου μεγέθους, ενώ για τη μελέτη μικρών μελανών οπών μπορεί να απαιτηθεί μία ημικλασική προσέγγιση.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το ρόλο της θερμοκρασίας στην ευστάθεια των μελανών οπών, θεωρούμε μία μελανή οπή σε λουτρό θερμότητας σε κανονική κατανομή, που σημαίνει ότι το σύστημα της μελανής οπής βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με κάποια θερμοκρασία T . Αυτό οδηγεί στο

προφανές αποτέλεσμα ότι

$$T_{BH} = T , \quad (4.1)$$

Από την άλλη, γνωρίζουμε από βασική θεωρία μελανών οπών ότι η θερμοκρασία της μελανής οπής δίνεται μέσω της επιφανειακής βαρύτητας κ_g ,

$$T_{BH} = \frac{\kappa_g}{2\pi} . \quad (4.2)$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις μας δίνουν το γνωστό αποτέλεσμα

$$\kappa_g = 2\pi T , \quad (4.3)$$

που συνδέει τη γεωμετρική ποσότητα της επιφανειακής βαρύτητας με τη θερμοκρασία του λουτρού T , η οποία είναι μία ανεξάρτητη παράμετρος.

Η ανάλυση στα πλαίσια της κανονικής κατανομής σημαίνει ότι τα φορτία της μελανής οπής εκτός της μάζας θεωρούνται καθορισμένα. Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε την επιφανειακή βαρύτητα ως συνάρτηση της ακτίνας του ορίζοντα r_h με $r_h = r_h(M)$. Αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα του ορίζοντα r_h είναι μία ανεξάρτητη παράμετρος που χαρακτηρίζει τη μελανή οπή μέσω του μεγέθους της. Υπό αυτή την έννοια, η σχέση (4.3) μας δίνει τα διαφορετικά μεγέθη μελανών οπών που μπορούν να βρισκονται σε ισορροπία με το λουτρό θερμότητας. Για παράδειγμα, η περίπτωση της Schwarzschild μας δίνει ότι

$$\kappa_g^{Schw} = \frac{1}{2r_h} . \quad (4.4)$$

Μέσω της 4.3 έχουμε ότι το μέγεθος μίας μελανής οπής Schwarzschild σχετίζεται με την αντίστοιχη θερμοκρασία του λουτρού μέσω της σχέσης

$$\tau = 4\pi r_h^{Schw} , \quad (4.5)$$

, όπου $\tau = T^{-1}$ και έχει διαστάσεις χρόνου. Επομένως, θεωρώντας μία μελανή οπή τύπου Schwarzschild βυθισμένη σε λουτρό θερμότητας για κάποια θερμοκρασία T , φαίνεται να μπορεί να υπάρχει μόνο ένα μέγεθος για τη μελανή οπή. Αντίστοιχα για την περίπτωση της μελανής οπής Kerr-Newman έχουμε ότι

$$\kappa_g^{KN} = \frac{r_{KN,h} - r_-}{2(r_{KN,h}^2 + \alpha^2)} , \quad r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - \alpha^2} , \quad (4.6)$$

όπου α είναι η παράμετρος στροφορμής (στροφορμή ανά μονάδα μάζας). Μέσω πάλι της (4.3) έχουμε ότι

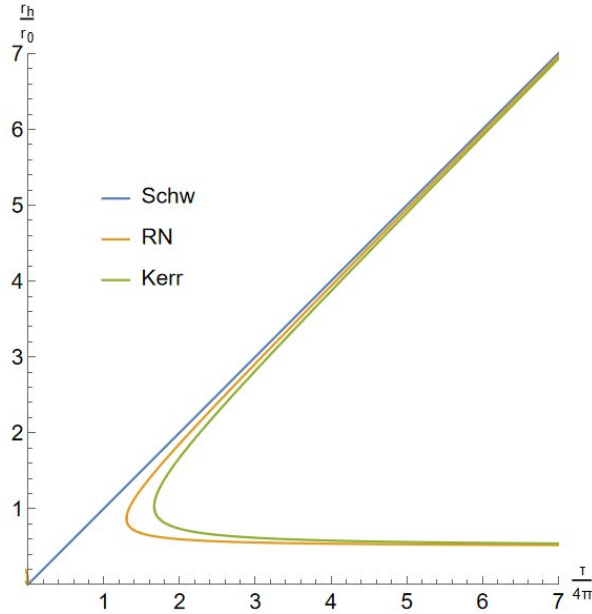
$$\tau = 4\pi \frac{r_{KN,h}^3 + \alpha^2 r_{KN,h}}{r_{KN,h}^2 - Q^2 - \alpha^2} , \quad (4.7)$$

που είναι ένα κυβικό πολυώνυμο. Αυτό σημαίνει ότι για κάποια θερμοκρασία λουτρού, μπορούν να υπάρχουν παραπάνω από μία μελανές οπές με διαφορετικά μεγέθη. Για την περίπτωση της Reissner-Nordstrom ($\alpha = 0$) και της Kerr ($Q = 0$) έχουμε ομοίως ότι

$$\tau = \frac{4\pi r_{RN,h}^3}{r_{RN,h}^2 - Q^2} : \text{ Reissner-Nordstrom} \quad (4.8)$$

$$\tau = 4\pi \frac{r_{K,h}^3 + \alpha^2 r_{K,h}}{r_{K,h}^2 - \alpha^2} : \text{ Kerr} \quad (4.9)$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη φυσική σημασία του μεγέθους της μελανής οπής με τη θερμοκρασία του λουτρού, παρουσιάζουμε στο παρακάτω διάγραμμα τις συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ του τ και της ακτίνας r_h για διαφορετικές με βάση τις εξισώσεις (4.5), (4.8), (4.9), εκ των οποίων μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξη διαφορετικών κλάδων για την κάθε μελανή οπή. Όπως προαναφέραμε, η περίπτωση της Schwarzschild μπορεί να δώσει μόνο ένα πιθανό μέγεθος για τη κάθε θερμοκρασία. Εισάγοντας παραπάνω φορτία στη μελανή οπή, παρατηρούμε ότι τόσο στη περίπτωση της Reissner-Nordstrom αλλά και στην περίπτωση της Kerr έχουμε δύο πιθανούς κλάδους που αντιστοιχούν σε μεγάλες και μικρές μελανές οπές. Από αυτούς τους κλάδους παρατηρούμε ότι



Σχήμα 4.1: Κλάδοι στατικών, στάσιμων και φορτισμένων μελανών οπών στη Γενική Σχετικότητα.

υπάρχει ένα άνω όριο της θερμοκρασίας πάνω από το οποίο δε μπορούμε να φτάσουμε σε κατάσταση θερμικής ισοροπίας. Αυτή μεταφράζεται επίσης στο γεγονός ότι υπάρχει ένα κάτω όριο για το μέγεθος της μελανής οπής, κάτω από το οποίο δεν μπορούμε να φτάσουμε σε κατάσταση θερμικής ισοροπίας. Προφανώς, οι αντίστοιχες κρίσιμες τιμές για τη θερμοκρασία και για το μέγεθος της μελανής οπής εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά της μελανής οπής που θεωρεί κανείς στην ανάλυση του. Παρόλαυτά, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να μελετήσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες εμφανίζονται τέτοιου είδους ποιοτικές συμπεριφορές.

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια των πιθανών μελανών οπών που προκύπτουν για τις διάφορες θερμοκρασίες του λουτρού, παρατηρούμε από την εικόνα 4.1 ότι η συνάρτηση $r_h(T)$ για τον κλάδο των μεγάλων μελανών οπών έχει αρνητική κλίση, $\partial r_h / \partial T < 0$, ενώ ο κλάδος των μικρών μελανών οπών έχει θετική, $\partial r_h / \partial T > 0$. Η κύρια ποσότητα που καθορίζει την τοπική ευστάθεια για την κάθε περίπτωση είναι η θερμοχωρητικότητα της μελανής οπής που δίνεται από τη σχέση

$$C_Q = T \frac{dS}{dT}, \quad (4.10)$$

όπου μέσω κανόνα αλυσίδας ξαναγράφεται ως

$$C_Q = T \frac{\partial r_h}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial r_h}. \quad (4.11)$$

Εφόσον, όπως είναι γνωστό από τον κανόνα του Wald [258, 259, 260, 261], η εντροπία αυξάνεται με αυξανόμενη επιφάνεια, η παράγωγος της ως προς την ακτίνα r_h οφείλει να είναι θετικά ορισμένη που

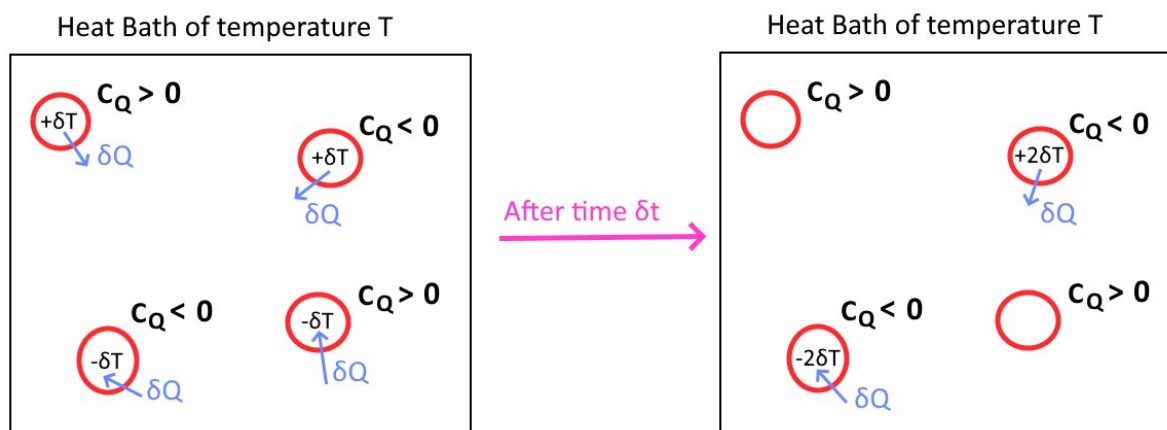
σημαίνει ότι το πρόσημο της θερμοχωρητικότητας καθορίζεται από τις αντίστοιχες κλίσεις $\partial r_h/\partial T$. Καταλήγουμε ότι για το σύστημα των δύο κλάδων έχουμε:

- Κλάδος μεγάλων μελανών οπών: $C_Q < 0 \rightarrow$ Ασταθής κλάδος
- Κλάδος μικρών μελανών οπών: $C_Q > 0 \rightarrow$ Ευσταθής κλάδος

αφού $\partial r_h/\partial T < 0$ για μεγάλες μελανές οπές $\partial r_h/\partial T > 0$ για τις μικρές μελανές οπές.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα θερμοκρασίας T με όλα του τα στοιχεία σε θερμική ισορροπία. Έστω τώρα ότι το σύστημα εμπεριέχει μικρές αποκλίσεις της μορφής $\pm\delta T$ από τη θερμοκρασία του λουτρού T σε κάποια επιμέρους στοιχεία του. Τέτοιου είδους αποκλίσεις εμφανίζονται υπό μορφή θερμικών διαταραχών, όπως δείχνουμε στην εικόνα 4.2. Σε αυτή τη περίπτωση, θα έχουμε φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας από υψηλές σε χαμηλές θερμοκρασίες. Κατά τα γνωστά, ένα υποσύστημα με θετική θερμοχωρητικότητα μειώνει/αυξάνει τη θερμοκρασία του, όταν εκπέμπει/απορροφά θερμική ενέργεια, ενώ ένα υποσύστημα με αρνητική θερμοχωρητικότητα συμπεριφέρεται αντίστροφα. Επομένως, μικρές αποκλίσεις θερμοκρασίας που εμφανίζονται σε υποσυστήματα θετικής θερμοχωρητικότητας θα μηδενιστούν και θα ξαναέρθουν σε θερμική ισορροπία. Από την άλλη, όταν έχουμε τέτοιου είδους αποκλίσεις σε συστήματα αρνητικής θερμοχωρητικότητας, αυτές οι αποκλίσεις συνεχίζουν να αυξάνονται και η θερμική ισορροπία χάνεται. Αυτό σημαίνει ότι τα υποσυστήματα θετικής/αρνητικής θερμοχωρητικότητας βρίσκονται σε ευσταθή/ασταθή θερμική κατάσταση με το λουτρό, λόγω της αντίστοιχης εξέλιξης των θερμικών διαταραχών.

○ : Thermal Fluctuations in a Heat Bath
 $\pm\delta T$ denotes the deviation from the temperature T of each fluctuation



Σχήμα 4.2: Αρχικά, όλα τα μέρη του συστήματος είναι σε θερμική ισορροπία με το λουτρό θερμοκρασίας T . Όταν εμφανίζονται θερμικές διακυμάνσεις, έχουμε μικρές αποκλίσεις στα υπομέρη του συστήματος από τη θερμική ισορροπία. Τα υποσυστήματα θετικής θερμοχωρητικότητας επιστρέφουν άμεσα σε ισορροπία, ενώ τα υποσυστήματα αρνητικής θερμοχωρητικότητας είναι θερμικά ασταθή.

Το ζήτημα της ευσταθούς και ασταθούς θερμικής ισορροπίας μπορεί επίσης να μελετηθεί υπό το πρίσμα της ελεύθερης ενέργειας της κανονικής κατανομής, που δίνεται από τη σχέση

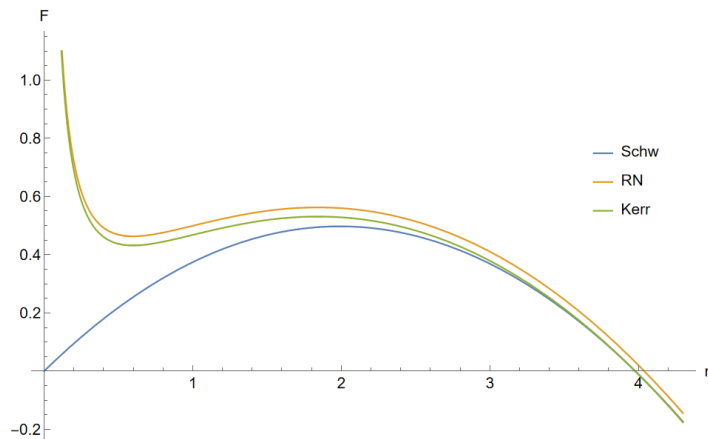
$$\mathcal{F} = E - \frac{S}{\tau}, \quad (4.12)$$

όπου E είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος, S είναι η εντροπία και τ είναι η ελεύθερη παράμετρος που ορίσαμε μέσω της σχέσης $\tau = T^{-1}$. Εφόσον εργαζόμαστε στην κανονική κατανομή, κάθε άλλο φορτίο της μελανής οπής εκτός της μάζας (ενέργειας) θεωρείται καθορισμένο. Οπότε, μπορούμε να θεωρήσουμε την ενέργεια E και την εντροπία S (και συνεπώς την ελεύθερη ενέργεια \mathcal{F}) ως συναρτήσεις της μάζας ADM M , με το ηλεκτρομαγνητικό φορτίο και τη στροφορμή της μελανής οπής να είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει προφανώς ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις εν λόγω ποσότητες ως προς το μέγεθος της μελανής οπής r_h , όπως προαναφέραμε.

Εκ κατασκευής, η ελεύθερη ενέργεια είναι ορισμένη με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε κατά την οποιαδήποτε μετάβαση του συστήματος από μία κατάσταση στην επόμενη, η ελεύθερη ενέργεια δε μπορεί να αυξηθεί. Αυτό σημαίνει ότι τα τοπικά ελάχιστα της ελεύθερης ενέργειας αντιστοιχούν σε ευσταθείς καταστάσεις ενώ τα τοπικά μέγιστα σε ασταθείς. Αυτό μεταφράζεται με τον προφανή μαθηματικό τρόπο ως

1. $\left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r_h^2} \right|_{r_h=R} > 0 \rightarrow$ Ευσταθής ισορροπία
2. $\left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r_h^2} \right|_{r_h=R} < 0 \rightarrow$ Ασταθής ισορροπία

Οι εν λόγω συνθήκες ευστάθειας μέσω της ελεύθερης ενέργειας αφορούν απλά διαταραχές της \mathcal{F} ως προς το μέγεθος της μελανής οπής r_h . Όμως, όπως είδαμε στην εικόνα 4.2, διαταραχές του r_h αντικατοπτρίζονται σε διαταραχές της θερμοκρασίας. Αυτό σημαίνει ότι τα κριτήρια ευστάθειας που προαναφέραμε χρησιμοποιώντας τη θερμοχωρητικότητα μπορούν να μεταφραστούν σε κριτήρια ευστάθειας μέσω της ελεύθερης ενέργειας. Αυτό επιβεβαιώνεται άμεσα από την εικόνα 4.3, όπου έχουμε σχεδιάσει την ελεύθερη ενέργεια των μελανών οπών Schwarzschild, Reissner-Nordstrom και Kerr για συγκεκριμένη θερμοκρασία T , για την οποία εμφανίζονται οι δύο κλάδοι που σχολιάσαμε πριν. Όπως βλέπουμε, ο κλάδος της μικρής μελανής οπής αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο της ελεύθερης ενέργειας ενώ ο κλάδος της μεγάλης μελανής οπής σε τοπικό μέγιστο, όπως αναμενόταν.



Σχήμα 4.3: Η ελεύθερη ενέργεια για στατικές, στάσιμες και φορτισμένες μελανές οπές της Γενικής Σχετικότητας.

4.3 Μελανές οπές ως τοπολογικές ατέλειες στον θερμοδυναμικό παραμετρικό χώρο

Μετά από τη σύντομη ανασκόπηση για τη θερμοδυναμική των μελανών οπών, είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε την τοπολογική προσέγγιση των [228] για την κατηγοριοποίηση των διαφόρων κλάδων των μελανών οπών σε θερμική ισορροπία με το λουτρό θερμότητας. Η βάση της κατηγοριοποίησης είναι ότι οι ιδιότητες των μελανών οπών μελετώνται υπό το πρίσμα τοπολογικών ατελειών, δηλαδή στοιχείων μηδενισμού κάποιου διανυσματικού πεδίου $\Phi^a(\vec{x})$. Οι εν λόγω ατέλειες είναι θερμοδυναμικής φύσεως, καθώς το διανυσματικό πεδίο $\Phi^a(\vec{x})$ ορίζεται μέσω των θερμοδυναμικών παραμέτρων της μελανής οπής. Συγκεκριμένα,

$$\Phi^a = (\Phi^{r_h}, \Phi^\Theta) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r_h}, -\cot \Theta \csc \Theta \right), \quad (4.13)$$

όπου r_h είναι η ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων και Θ είναι μία βοηθητική παράμετρος ορισμένη στο διάστημα $0 \leq \Theta \leq \pi$. Με την παραπάνω επιλογή του Φ^Θ , οι μηδενισμοί του Φ^a θα βρίσκονται πάντα πάνω στον άξονα $\Theta = \pi/2$ του επιπέδου $r_h - \Theta$. Επομένως, οι ατέλειες ορίζονται από το γεωμετρικό τόπο $\Theta = \pi/2$ και $\partial \mathcal{F}/\partial r_h = 0$. Οι εν λόγω ατέλειες ανατιστοιχούν στη λύση της μελανής οπής, καθώς η συνθήκη $\tau = T_{BH}^{-1}$, όπου T_{BH} η θερμοκρασία της μελανής οπής, ταυτίζεται με τη συνθήκη $\partial \mathcal{F}/\partial r_h = 0$, όπως δείξαμε παραπάνω. Συγκεκριμένα, για $\tau \neq T_{BH}^{-1}$ η ελεύθερη ενέργεια είναι off-shell, δηλαδή δεν αντιστοιχεί σε λύση των εξισώσεων Einstein. Επομένως, επιλέγοντας $\tau = T_{BH}^{-1}$, θέτουμε πρακτικά την ελεύθερη ενέργεια on-shell και, συνεπώς, τα σημεία για τα οποία ισχύει $\Phi^a = 0$ αντιστοιχούν σε μηδενισμούς του ταυσττικού πεδίου $\mathcal{E}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} = 0$. Υπό αυτή την έννοια, απεικονίζουμε τους μηδενισμούς του διανυσματικού πεδίου Φ^a σε λύσεις μελανών οπών των βαρυτικών εξισώσεων $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$.

Για να συνεχίσουμε, ακολουθούμε τη δομή των τοπολογικών ρευμάτων κατά Duan et al, [262, 263], και ορίζουμε το τοπολογικό ρεύμα

$$j^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{ab} \partial_\nu n^a \partial_\rho n^b \quad \text{όπου } \mu, \nu, \rho = 0, 1, 2 \text{ και } a, b = 1, 2, \quad (4.14)$$

όπου $\partial_\nu = \partial/\partial x^\nu$ για το σύστημα 'συντεταγμένων' $x^\nu = (\tau, r_h, \Theta)$, ενώ τα ϵ αντιστοιχούν στα σύμβολα Levi-Civita των αντίστοιχων χώρων. Επίσης, το μοναδιαίο διάνυσμα n ορίζεται από τη σχέση $n^a = \Phi^a/|\Phi|$, όπου $\Phi^{1,2} = \Phi^{r_h, \Theta}$. Η ύπαρξη του συμβόλου Levi-Civita στο τοπολογικό ρεύμα επιβάλλει μηδενική απόκλιση ρεύματος, δηλαδή, $\partial_\mu j^\mu = 0$, και συνεπώς το τοπολογικό ρεύμα διατηρείται. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε το αντίστοιχο τοπολογικό φορτίο κατά τα γνωστά

$$Q = \int_\Sigma d^2 x j^0, \quad (4.15)$$

όπου Σ είναι μία περιοχή του παραμετρικού χώρου (r_h, Θ) , ενώ το $\partial \Sigma$ αντιστοιχεί σε καμπύλη στο επίπεδο $r_h - \Theta$. Ακολουθώντας τις απλές πράξεις του [262], μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι το τοπολογικό ρεύμα της (4.14) γράφεται ως

$$j^\mu = \delta(\vec{\Phi}) J^\mu \left(\frac{\Phi}{x} \right), \quad J^\mu \left(\frac{\Phi}{x} \right) \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Phi^a \partial_\rho \Phi^b, \quad (4.16)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η διδιάστατη Λαπλασιανή $\Delta_{\Phi^a} \ln ||\vec{\Phi}|| = 2\pi \delta(\vec{\Phi})$. Η ύπαρξη της κατανομής δ στη σχέση (4.16) υποδηλώνει ότι το τοπολογικό ρεύμα είναι μη μηδενικό μόνο στους μηδενισμούς του Φ^a . Επομένως, το τοπολογικό φορτίο είναι μη μηδενικό μόνο στις περιοχές Σ εκείνες που

περικλείουν ατέλειες. Επομένως, αφού η κάθε ατέλεια αντιστοιχεί σε μία λύση μελανής οπής μέσω του παραπάνω ορισμού, κάθε λύση μελανής οπής έχει το αντίστοιχο δικό της τοπολογικό φορτίο. Η τιμή του τοπολογικού φορτίου, Q , δίνεται από τη σχέση [228, 264]

$$Q = \sum_{i=1}^N w_i, \quad (4.17)$$

όπου $i = 1, 2, \dots, N$ είναι ο αριθμός των ατελειών που περικλείει το $\partial\Sigma$ ενώ w_i είναι οι αντίστοιχοι αριθμοί περιέλιξης του $\partial\Sigma$ για την ατέλεια i . Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε πλέον να ορίσουμε ένα τοπικό και ένα καθολικό τοπολογικό φορτίο ανάλογα με τη καμπύλη $\partial\Sigma$ του Σ που θα επιλέξουμε.

Έστω ότι υπάρχουν N μηδενισμοί του Φ^a . Αν το $\partial\Sigma$ περικλείει μόνο τον μηδενισμό i του Φ^a , τότε το τοπολογικό φορτίο αντιστοιχεί προφανώς μόνο στην ατέλεια i και ίσο με w_i . Αυτός είναι ο ορισμός του *τοπικού τοπολογικού φορτίου*. Αν το $\partial\Sigma$ περικλείει όλο το παραμετρικό χώρο, τότε συμπεριλαμβάνει προφανώς όλους τους μηδενισμούς του Φ^a . Αυτός είναι ο ορισμός του *καθολικού τοπολογικού φορτίου*. Άρα, για να εξάγουμε το καθολικό τοπολογικό φορτίο χρειάζεται απλά να υπολογίσουμε τον αριθμό περιέλιξης για κάθε ατέλεια και μετά να πάρουμε το αντίστοιχο άθροισμα.

Στο [228], προκειμένου να παρουσιαστεί μία σχέση μεταξύ των τοπολογικών φορτίων και της θερμοδυναμικής ευστάθειας του κάθε κλάδου, είχαμε την ακόλουθη εικασία: Αριθμοί περιέλιξης w_i με τιμή $+1$ (-1) αντιστοιχούν σε ευσταθείς (ασταθείς) κλάδους της θερμοδυναμικής κατάστασης της μελανής οπής. Θα προσπαθήσουμε εδώ να επιβεβαιώσουμε αυτή την υπόθεση. Όπως προαναφέραμε, η τοπική ευστάθεια του κάθε κλάδου καθορίζεται από το πρόσημο της $\partial^2\mathcal{F}/\partial r_h^2$. Οπότε, η εικασία των [228] μεταφράζεται πρακτικά στο ότι ο αριθμός περιέλιξης κάθε κλάδου θα έχει μία άμεση συσχέτιση με το πρόσημο της συνθήκης ευστάθειας $\partial^2\mathcal{F}/\partial r_h^2$. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι

$$w_i = \text{sgn} \left(\left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r_h^2} \right|_i \right). \quad (4.18)$$

Πράγματι, αντικαθιστώντας τη (4.16) στην (4.15), βρίσκουμε ότι

$$Q = \int_{\Sigma} dr_h d\Theta \delta(\Phi_{r_h}) \delta(\Theta) J^0 \left(\frac{\Phi}{x} \right) \Rightarrow Q = \int_{\Sigma} dr_h d\Theta \delta(\Phi_{r_h}) \delta(\Theta) \frac{\partial \Phi_{r_h}}{\partial r_h} \frac{\partial \Phi_{\Theta}}{\partial \Theta}. \quad (4.19)$$

Υπενθυμίζουμε την ιδιότητα της κατανομής δ ,

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - z_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{z_i}}, \quad (4.20)$$

όπου z_i αντιστοιχούν στις ρίζες της f , $f(z_i) = 0$. Τότε, ξαναγράφουμε τα παραπάνω ακολούθως

$$\begin{aligned} Q &= \left(\left. \frac{\partial \Phi_{\Theta}}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=\pi/2} \right)^{-1} \int d\Theta \delta(\Theta - \pi/2) \frac{\partial \Phi_{\Theta}}{\partial \Theta} \sum_i \left(\left. \frac{\partial \Phi_{r_h}}{\partial r_h} \right|_{r_h=z_i} \right)^{-1} \int dr_h \delta(r_h - z_i) \frac{\partial \Phi_{r_h}}{\partial r_h} \\ &\Rightarrow Q = \sum_i \text{sgn} \left(\left. \frac{\partial \Phi_{r_h}}{\partial r_h} \right|_i \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

αφού ο μοναδικός μηδενισμός του Φ_Θ βρίσκεται στο $\Theta = \pi/2$ και $\partial\Phi_\Theta/\partial\Theta|_{\pi/2} = 1 > 0$. Τονίζουμε ότι, εφόσον η περιοχή Σ περιλαμβάνει μόνο την ατέλεια i , τότε το παραπάνω άθροισμα καταλήγει απλά το τοπικό τοπολογικό φορτίο, w_i . Επιπροσθέτως, αφού $\Phi_{r_h} = \partial\mathcal{F}/\partial r_h$, έχουμε ότι $\partial\Phi_{r_h}/\partial r_h = \partial^2\mathcal{F}/\partial r_h^2$, κάτι το οποίο επιβεβαιώνει τη ζητούμενη σχέση (4.18). Έχοντας επιβεβαιώσει την υπόθεση για τη συσχέτιση των τοπολογικών φορτίων με την ευστάθεια/αστάθεια των μελανών οπών, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην ανάλυση hairy μελανών οπών με δευτερεύον βαθμωτό φορτίο και να ελέγξουμε κατά πόσο η συνεισφορά του βαθμωτού πεδίου στη γεωμετρία μπορεί να οδηγήσει σε νέους θερμοδυναμικά ευσταθείς κλάδους, δηλαδή κλάδους με θετικό αριθμό περιέλιξης, με βάση την παραπάνω ανάλυση.

4.4 Hairy μελανές οπές με δευτερεύον βαθμωτό φορτίο και κριτήρια θερμοδυναμικής ευστάθειας

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα εξετάσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μία μελανή οπή μπορεί να γίνει θερμοδυναμικά ευσταθής ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης κάποιου βαθμωτού πεδίου με το βαρυτικό πεδίο. Θα θεωρήσουμε προφανώς ότι η εν λόγω αλληλεπίδραση είναι ικανή να παραμορφώσει τη γεωμετρία της μελανής οπής 'ντύνοντάς' τη με δευτερεύον βαθμωτό φορτίο. Θα μελετήσουμε στατικές και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις τύπου Schwarzschild με ασυμπτωτική συμπεριφορά Minkowski και θα θεωρήσουμε επίσης ότι η ισχύς της αλληλεπίδρασης από τις μη-τετριμμένες συζεύξεις του βαθμωτού πεδίου στους βαρυτικούς τανυστές ελέγχεται από μία σταθερά σύζευξης A . Για το λόγο αυτό, γράφουμε μία γενικευμένη Λαγρανζιανή της μορφής

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{matter} + A \mathcal{L}_{int} , \quad (4.22)$$

όπου \mathcal{L}_{EH} είναι η Λαγρανζιανή της Γενικής Σχετικότητας, \mathcal{L}_{matter} αντιστοιχεί στη Λαγρανζιανή για τους όρους του βαθμωτού πεδίου με τετριμμένη βαρυτική σύζευξη, ενώ \mathcal{L}_{int} όλες τις πιθανές συζεύξεις του βαθμωτού πεδίου με τους βαρυτικούς τανυστές. Θα εργαστούμε κατά τα γνωστά σε μονάδες $\hbar = c = 1$, όπου όλες οι φυσικές ποσότητες εκφράζονται σε μονάδες μήκους ή ενέργειας. Μέσω της σταθεράς σύζευξης A , έχουμε την εισαγωγή μίας καινούριας κλίμακας μήκους η οποία χαρακτηρίζει την ισχύ της αλληλεπίδρασης του βαθμωτού πεδίου με την βαρύτητα. Τονίζουμε ότι, ακόμα και αν το A δεν έχει διαστάσεις μήκους, μπορούμε πάντα να δουλέψουμε σε διαστάσεις μήκους χρησιμοποιώντας κατάλληλα το μήκος Planck. Για ευκολία και αποφυγή πιθανής σύγχυσης, θα κρατήσουμε τη σταθερά A σε διαστάσεις μήκους.

Είναι γνωστό ότι όταν υπάρχουν μη τετριμμένες αλληλεπιδράσεις μέσω του όρου \mathcal{L}_{int} , είναι πιθανό να έχουμε τοπικές λύσεις από hairy μελανές οπές, που παραβιάζουν προφανώς τα αντίστοιχα θεωρήματα no-hair. Όμως, η σταθερά σύζευξης A που φαίνεται να ελέγχει την ισχύ της αλληλεπίδρασης δεν είναι η μόνη παράμετρος που παίζει ρόλο στην παραμόρφωση της μελανής οπής. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε μελανή οπή περιλαμβάνει μία χαρακτηριστική κλίμακα μήκους που ορίζεται από τον ορίζοντα γεγονότων της r_h . Κάνουμε την υπόθεση ότι η πραγματική παράμετρος της παραμόρφωσης της γεωμετρίας ορίζεται μέσω μίας αδιάστατης παραμέτρου γ από τη σχέση

$$\gamma = \frac{A\kappa}{r_h^2} . \quad (4.23)$$

Η εν λόγω παράμετρος ορίζεται μέσω της σταθεράς αλληλεπίδρασης A , του μήκους Planck μέσω του $\kappa \sim l_{Planck}$ και του μεγέθους της μελανής οπής μέσω του r_h . Είναι σαφές ότι για καθορισμένη σταθερά σύζευξης A , η ενεργή σταθερά της παραμόρφωσης γ μπορεί να πάρει μεγάλες

τιμές για μικρές μελανές οπές. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς η μελανή οπή συρρικνώνεται, μέσω π.χ. ακτινοβολίας Hawking, η ενεργή της αλληλεπίδραση με το βαθμωτό πεδίο της δράσης γίνεται όλο και πιο σημαντική. Επομένως, για την περίπτωση των μεγάλων μελανών οπών, οι αλληλεπιδράσεις αυτές οφείλουν να προσεγγίζονται με διαταρακτικό τρόπο, κρατώντας π.χ. τις πρώτες τάξεις του A (η αντίστοιχα του γ) στον υπολογισμό της παραμόρφωσης της γεωμετρίας. Αυτό όμως παύει να ισχύει όταν θεωρήσει κανείς μικρές μελανές οπές, καθώς η παραμόρφωση της γεωμετρίας από την αλληλεπίδραση παύει να είναι υποκυριαρχη και η διαταρακτική προσέγγιση της λύσης σταματάει να ισχύει.

Προς υποστήριξη του παραπάνω επιχειρήματος αναφορικά με τη μορφή της ενεργής σταθεράς σύζευξης γ , παραθέτουμε τα ακόλουθα επιχειρήματα:

- Γνωρίζουμε ότι, ανεξάρτητα από το αν η μελανή οπή έχει υποστεί παραμόρφωση ή όχι από τις συζεύξεις του βαθμωτού πεδίου, υπάρχει πάντα μία κλίμακα μήκους της μελανής οπής που καθορίζεται από την ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων r_h . Μπορούμε λοιπόν, χωρίς βλάβη της γενικότητας να χρησιμοποιήσουμε την αδιάστατη ακτινική συντεταγμένη $x = r_h/r$ για να μελετήσουμε τη μελανή οπή μέσω της ακόλουθης μορφής της γεωμετρίας $\mathbb{R}^2 \times S^2$:

$$ds^2 = -F(x)dt^2 + \frac{r_h^2}{x^4} \frac{dx^2}{H(x)} + \frac{r_h^2}{x^2} d\Omega^2 \quad (4.24)$$

όπου το στοιχείο $\frac{r_h^2}{x^2}$ είναι η συνάρτηση εμβαδού της σφαιρικής φύλλωσης και έχει διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. Προφανώς, η βάση $d\Omega^2$ και τα στοιχεία $F(x)$ και $H(x)$ είναι αδιάστατα, ενώ οι βάσεις dt^2 και $r_h^2 dx^2$ έχουν διαστάσεις μήκους τετράγωνο για να έχουμε σωστές διαστάσεις στο στοιχείο μήκους ds^2 .

- Εφόσον μελετάμε αποκλειστικά σφαιρικά συμμετρικές μελανές οπές με ασυμπτωτική συμπεριφορά Minkowski, όλοι οι όροι των στοιχείων g_{tt} και g_{xx} της παραπάνω μετρικής οφείλουν να αποσβένουν μέσω r^{-n} στο άπειρο, όπου n είναι θετικοί ακέραιοι. Αυτό σημαίνει ότι και οι δύο συναρτήσεις μετρικής $F(x)$ και $H(x)$ μπορούν να αντιμετωπιστούν ως άπειρα αναπτύγματα ως προς τη συντεταγμένη x . Η δυνατότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι τα στοιχεία της μετρικής οφείλουν να είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο χώρο που ορίζονται για να μην έχουμε ασυνέχειες στη γεωμετρία.
- Κάθε μορφή σφαιρικά συμμετρικής μετρικής πρέπει να μπορεί να επιστρέψει στη λύση Schwarzschild στο όριο της μηδενικής σταθεράς σύζευξης.

Από τα παραπάνω, έχουμε ότι το χρονικό στοιχείο της μετρικής $F(x)$ μπορεί να εκφράσει πάντα ως ανάπτυγμα της μορφής

$$g_{tt}(r) = -(1-x) \left(1 + \sum_n \gamma^n f_n(x) \right), \quad (4.25)$$

όπου $x = r_h/r$ όπως προαναφέραμε και $f_n(x)$ είναι πολυώνυμο του x . Ο εξωτερικός χώρος της μελανής οπής, $r > r_h$, αντιστοιχεί στο διάστημα $0 < x < 1$, όπου $x \rightarrow 0$ αντιστοιχεί προφανώς στην ασυμπτωτική περιοχή $r \rightarrow \infty$ ενώ η υπερεπιφάνεια $x = 1$ υποδηλώνει τον ορίζοντα γεγονότων $r = r_h$. Επομένως, η ασυμπτωτική συμπεριφορά Minkowski σημαίνει ότι $f_n(0) = 0$, που σημαίνει ότι τα πολυώνυμα $f_n(x)$ δεν έχουν σταθερό όρο. Προφανώς, το $H(x)$ υπόκειται σε ανάλογη έκφραση η οποία θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω.

Όπως μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε, στο όριο των μεγάλων μελανών οπών, οι όροι της παραμόρφωσης που κωδικοποιούνται στο άπειρο άθροισμα μηδενίζονται μέσω του $\gamma \rightarrow 0$ και η μετρική επιστρέφει στην κατάλληλη μορφή Schwarzschild. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι το χρονικό στοιχείο της μετρικής είναι αρνητικό στον εξωτερικό χώρο της μελανής οπής, έχουμε ότι

$$1 + \sum_n \gamma^n f_n(x) > 0, \quad \text{για } 0 < x < 1. \quad (4.26)$$

Από την άλλη, στο εσωτερικό της μελανής οπής, $x > 1$, ο παραπάνω όρος μπορεί και να μηδενίζεται κάτι το οποίο υποδεικνύει την ύπαρξη εσωτερικού ορίζοντα. Η συνθήκη για την ύπαρξη εσωτερικού ορίζοντα στη μετρική μας δίνεται συνεπώς από τη σχέση

$$1 + \sum_n \gamma^n f_n(x_0) = 0, \quad \text{για κάποιο } x_0 > 1. \quad (4.27)$$

Θέλουμε τώρα να ελέγξουμε κατά πόσο οι αλληλεπιδράσεις του βαθμωτού πεδίου με το βαρυτικό μπορούν να οδηγήσουν σε θερμοδυναμική ευστάθεια της μελανής οπής. Προς τον σκοπό αυτό, θα εργαστούμε αντίστροφα θεωρώντας ένα θερμοδυναμικά ευσταθή κλάδο και θα εξάγουμε την απαραίτητη συνθήκη. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $\tau(r_h)$ για την hairy μελανή οπή που έχουμε δεν είναι γραμμική ως αποτέλεσμα της παραμόρφωσης της γεωμετρίας και δημιουργούνται δύο ασυμπτωτικά όρια στο επίπεδο $\tau - r_h$ της θερμοδυναμικής κατάστασης, ενώ είναι συνεχής σε όλο το ενδιάμεσο παραμετρικό χώρο. Τα όρια αυτά αντιστοιχούν προφανώς στα r_h εκείνα για τα οποία ισχύει $\tau \rightarrow \infty$, δηλαδή σε μηδενική θερμοκρασία της μελανής οπής. Με βάση τη συνθήκη του ορίου Schwarzschild για τη μελανή οπή, αναμένουμε ότι το ένα ασυμπτωτικό όριο αντιστοιχεί στην περίπτωση της μεγάλης μελανής οπής, που είναι πρακτικά η λύση Schwarzschild με διαταρακτικές διορθώσεις και είναι θερμοδυναμικά ασταθής. Από την άλλη, ο δεύτερος κλάδος μελανής οπής μπορεί να είναι θερμοδυναμικά ευσταθής αν όντως υπάρχει ένα πεπερασμένο (μη-μηδενικό) r_h για το οποίο $\tau \rightarrow \infty$. Τονίζουμε ότι το εν λόγω r_h σηματοδοτεί το κάτω όριο για το μέγεθος της μελανής οπής που μπορεί να βρεθεί σε θερμοδυναμική ισορροπία. Σε αυτή τη περίπτωση, θα έχουμε ένα κλάδο ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\partial\tau/\partial r_h < 0$, δηλαδή $\partial r_h/\partial T > 0$ στο επίπεδο $r_h - \tau$, που σημαίνει ότι υπάρχει μελανή οπή με θετική θερμοχωρητικότητα και άρα θετικό τοπικό τοπολογικό φορτίο, όπως δείξαμε από τη σχέση (4.21) στο υποκεφάλαιο 4.3. Επομένως, φαίνεται ότι η ύπαρξη ευσταθούς θερμοδυναμικού κλάδου μπορεί να μελετηθεί μέσω των ορίων όπου $\tau \rightarrow \infty$, δηλαδή των ορίων όπου μηδενίζεται η επιφανειακή βαρύτητα, όπως έχουμε από τη σχέση (4.3). Η επιφανειακή βαρύτητα για μία σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή δίνεται από τη σχέση

$$\kappa_g = \frac{|g'_{tt}|}{2\sqrt{-g_{tt} g_{rr}}} \Big|_{r \rightarrow r_h}, \quad (4.28)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παραγώγιση ως προς τη συντεταγμένη r . Προφανώς, πρέπει να επιβάλλει κανείς ότι η ορίζουσα της μετρικής είναι πεπερασμένη για όλο το διάστημα $0 < x < -\infty$ που οδηγεί στη συνθήκη ότι το γινόμενο $g_{tt} g_{rr}$ είναι πεπερασμένο. Άρα, η επιφανειακή βαρύτητα τείνει στο μηδέν για τα r_h εκείνα που ικανοποιούν τη σχέση $g'_{tt}(r_h) \rightarrow 0$. Χρησιμοποιώντας τη μορφή της μετρικής που μελετάμε, έχουμε το αποτέλεσμα:

$$g'_{tt}(r_h) = -\frac{1}{r_h} \left(1 + \sum_n \gamma^n f_n(1) \right). \quad (4.29)$$

Άρα, $g'_{tt}(r_h) \rightarrow 0$ για $r_h \rightarrow \infty$, που μας οδηγεί στο όριο Schwarzschild και για εκείνα τα (πεπερασμένα) r_h που ικανοποιούν

$$1 + \sum_n \gamma^n f_n(1) = 0, \quad (4.30)$$

όπου θυμίζουμε ότι οι αδιάστατες παράμετροι γ εξαρτώνται από το r_h μέσω της (4.23).

Τονίζουμε εδώ ότι η συνθήκη (4.30) είναι εφικτή μόνο κάτω από μη διαταραχτικές διορθώσεις της μελανής οπής του κενού κάτω από τις αλληλεπιδράσεις του βαθμωτού πεδίου με τους βαρυτικούς ταυσιτές. Είναι σαφές επίσης από τις εξισώσεις (4.25) και (4.30) ότι οι μελανές οπές που τις ικανοποιούν είναι κρίσιμες. Παρατηρούμε ότι αυτό σημαίνει ότι πρέπει αναγκαστικά να υπάρχει ένας εσωτερικός ορίζοντας, δηλαδή να ικανοποιείται και η σχέση (4.27) για κάποιο x_0 . Πράγματι, η συνθήκη (4.30) σηματοδοτεί το όριο όπου ο ορίζοντας γεγονότων και ο εσωτερικός ορίζοντας ταυτοποιούνται σε κάποιο $r = x_0 r_h$. Το αποτέλεσμα μας είναι ότι αν οι αλληλεπιδράσεις του βαθμωτού πεδίου με τη βαρύτητα είναι μη διαταραχτικές ως προς την ενεργή σταθερά σύζευξης γ , κάτι το οποίο συμφωνεί με τα όρια των μικρών μελανών οπών, η μελανή οπή μπορεί να φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία μέσω δημιουργίας εσωτερικού ορίζοντα από την παραμόρφωση στο εσωτερικό της. Αυτό οδηγεί επίσης σε μία δυναμική αλλαγή τοπολογικού τομέα, καθώς η μελανή οπή Schwarzschild έχει αρνητικό τοπολογικό φορτίο, ενώ η αντίστοιχη hairy μελανή οπή που μελετήσαμε μπορεί να αποκτήσει θετικό τοπολογικό φορτίο στα κάτω όρια του μεγέθους της.

Για να ολοκληρώσουμε την ανάλυση μας, θα προβούμε τώρα στην εξαγωγή του τοπολογικού φορτίου της μελανής οπής μέσω των ορίων της κρίσιμότητας (extremality). Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν ικανοποιείται η (4.30), υπάρχει πάντα ένα τοπικό τοπολογικό φορτίο που είναι θετικό. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη μετρική της μελανής οπής (4.24), όπου μέσω της σχέσης (4.25) θέτουμε

$$F(x) = (1-x) \left(1 + \sum_n \gamma^n f_n(x) \right), \quad H(x) = (1-x) \left(1 + \sum_n \gamma^n h_n(x) \right) \quad (4.31)$$

όπου, όπως πριν, για να έχουμε ασυμπτωτική συμπεριφορά Minkowski απαιτούμε ότι

$$\sum_n \gamma^n f_n(0) = \sum_n \gamma^n h_n(0) = 0. \quad (4.32)$$

Επιβάλλοντας την (4.30), η επιφανειακή βαρύτητα μηδενίζεται που σημαίνει ότι $\tau \rightarrow \infty$ για κάποιο πεπερασμένο (μη-μηδενικό) r_h . Αυτό είναι η ελάχιστη ακτίνα ορίζοντα για την οποία η ελεύθερη ενέργεια μπορεί να βρεθεί on-shell. Τότε, ο όρος $\frac{S}{\tau}$ της ελεύθερης ενέργειας (4.12) είναι υποκυρίαρχος, θεωρώντας προφανώς ότι η εντροπία είναι πεπερασμένη για πεπερασμένη ακτίνα μελανής οπής. Αυθαίρετα κοντά στην κρίσιμη περίπτωση λοιπόν, η ελεύθερη ενέργεια του συστήματος ταυτοποιείται ενεργά με τη μάζα ADM της μελανής οπής, η οποία λόγω ασυμπτωτικής επιπεδότητας είναι η ίδια με τη μάζα Komar,

$$M = -\frac{1}{8\pi G} \lim_{x \rightarrow 0} \oint_{S^2} \nabla^\mu K^\nu dS_{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

όπου K^ν είναι το διάνυσμα Killing από την ισομετρία στην μετατόπιση χρόνου, ενώ $dS_{\mu\nu}$ είναι το διδιάστατο στοιχείο ολοκλήρωσης της σφαίρας S^2 στο άπειρο. Εισάγοντας τη μορφή της μετρικής μας, εξάγουμε απευθείας ότι

$$M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_h}{2G} \frac{g'_{tt}(x)}{\sqrt{-g_{tt}(x)g_{rr}(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_h \left((x-1) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n f'_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n f_n(x) + 1 \right)}{2G \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n f_n(x) + 1}{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n h_n(x) + 1}}}$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παραγώγιση ως προς το x . Επιβάλλοντας τώρα τη (4.32), έχουμε το αποτέλεσμα

$$M(r_h) = \frac{r_h}{2G} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n f'_n(0) \right). \quad (4.34)$$

Τονίζουμε ότι για μία φυσικά αποδεκτή λύση, η μάζα ADM πρέπει να είναι θετικά ορισμένη, κάτι το οποίο οδηγεί στην επιπλέον συνθήκη

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(0)\gamma^n < 1, \quad \forall r_h. \quad (4.35)$$

Κάτω από τη προσέγγιση της κρισιμότητας $\mathcal{F} \cong M$, η συνθήκη για μία θερμικά ευσταθής μελανή οπή είναι απλά

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r_h} \right|_{r_h=r_h^*} \cong \left. \frac{\partial M}{\partial r_h} \right|_{r_h=r_h^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r_h^2} \right|_{r_h=r_h^*} \cong \left. \frac{\partial^2 M}{\partial r_h^2} \right|_{r_h=r_h^*} > 0 \quad (4.36)$$

όπου το r_h^* αντιστοιχεί στον ορίζοντα της μελανής οπής on-shell. Ουσιαστικά, το πρόβλημα της εξαγωγής του θετικού τοπολογικού φορτίου είναι πλέον η αντιμετώπιση της εν λόγω πρότασης: Δωσμένης της θετικής μάζας ADM (4.34), το ελάχιστο on-shell r_h , για το οποίο ικανοποιείται η συνθήκη κρισιμότητας αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο της $M(r_h)$.

Η εν λόγω πρόταση αποδεικνύεται αρκετά εύκολα από τον ορισμό της συνάρτησης $M(r_h)$. Πράγματι, ανοίγοντας το ανάπτυγμα της (4.34),

$$M(r_h) = \frac{r_h}{2G} - \frac{r_h}{2G} \mathcal{O}\left(\frac{A\kappa}{r_h^2}\right) - \frac{r_h}{2G} \mathcal{O}\left(\frac{A\kappa}{r_h^2}\right)^2 - \dots, \quad (4.37)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό $\gamma = \frac{A\kappa}{r_h^2}$, έχουμε ότι

$$M(r_h) \rightarrow \infty, \quad (\forall r_h \rightarrow 0) \text{ και } (\forall r_h \rightarrow \infty) \quad (4.38)$$

Από βασικά επιχειρήματα συνέχειας και διαφορισιμότητας της $M(r_h)$, έχουμε ότι αν υπάρχει τοπικό ακρότατο της $M(r_h)$, τότε το ελάχιστο τοπικό ακρότατο r_h^* που μπορούμε να έχουμε ικανοποιεί $\left. \frac{\partial^2 M}{\partial r_h^2} \right|_{r_h=r_h^*} > 0$. Η εν λόγω θερμική κατάσταση, κάτω από τη συνθήκη της μηδενικής θερμοκρασίας επιβάλλει ότι

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r_h^2} \right|_{r_h=r_h^*} > 0, \quad (4.39)$$

που σημαίνει ότι έχουμε μία θερμοδυναμική κατάσταση με θετικό τοπολογικό φορτίο με βάση την εξίσωση (4.18). Τα παραπάνω ενισχύουν και αποδεικνύουν το αποτέλεσμα ότι αν μία μελανή οπή μπορεί να γίνει κρίσιμη κάτω από μη-διαταρακτικές συνεισφορές δευτερεύοντος βαθμωτού φορτίου, το τελικό θερμικό στάδιο της μελανής οπής θα βρίσκεται σε τοπολογικό τομέα θετικού αριθμού περιέλιξης. Τονίζουμε εδώ χάρην πληρότητας ότι η απόδειξη που παρουσιάσαμε δε λειτουργεί όταν $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(0)\gamma^n = 0$. Πράγματι, για την περίπτωση αυτή, η μάζα ADM της hairy μελανής οπής είναι ίδια με τη μάζα ADM της Schwarzschild και δε μπορούμε να έχουμε θερμοδυναμική ευστάθεια από τη παραμόρφωση. Το εν λόγω αποτέλεσμα δεν ήταν προφανές στην προηγούμενη ανάλυση, κάτι το οποίο επιβεβαιώνει την ανάγκη της δεύτερης απόδειξης. Προφανώς, για να αποφευχθεί κάτι τέτοιο, τα πολυώνυμα $f_n(x)$ οφείλουν να έχουν τουλάχιστον έναν όρο γραμμικό στο x .

4.5 Το ζήτημα του ελάχιστου μήκους σε hairy μελανές οπές και συμπεράσματα

Η εξίσωση (4.30) που εξάγαμε μας παρέχει ένα κάτω όριο του μεγέθους της μελανής οπής που μπορεί να βρεθεί σε θερμοδυναμική ισορροπία με το λουτρό θερμότητας. Το κάτω όριο αυτό

υπολογίζεται από τον ενεργό λόγο της σταθεράς σύζευξης της τροποποίησης προς το μέγεθος της μελανής οπής και ορίζει τη συνθήκη θερμοδυναμικής ευστάθειας σε μηδενική θερμοκρασία. Είναι σαφές ότι, αν ικανοποιείται η εν λόγω σχέση, θα ικανοποιείται για κάποια κρίσιμη τιμή της παραμέτρου γ όταν είναι τάξης $\mathcal{O}(1)$. Κατά τάξη μεγέθους, η ελάχιστη δυνατή ακτίνα της μελανής οπής θα δίνεται από τη σχέση

$$r_{h,min} \sim |\tilde{A}| l_P, \quad (4.40)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αδιάστατη παράμετρο \tilde{A} μέσω της κανονικοποιημένης $A = \tilde{A}^2 l_P$, ενώ $l_P = \kappa/\sqrt{8\pi}$ υποδηλώνει το μήκος Planck .

Η ακτινοβολία Hawking είναι ο κύριος τρόπος που μία μελανή οπή μπορεί να εξελιχτεί σε μικρότερα μεγέθη. Αν η παραμόρφωση της γεωμετρίας λόγω της συνεισφοράς του βαθμωτού πεδίου είναι ικανές να δημιουργήσουν εσωτερικό ορίζοντα, η εξαγωγή θερμικής ενέργειας μέσω ακτινοβολίας Hawking σταματάει. Επομένως, αν υπάρχει εσωτερικός ορίζοντας, η θερμική εξέλιξη της μελανής οπής φτάνει σε μία μέγιστη θερμοκρασία T_{\max} (που συμβαίνει στο $\partial r_h/\partial \tau = \infty$, $\tau = T^{-1}$). Σε αυτή την θερμοκρασία η θερμοχωρητικότητα της μελανής οπής απειρίζεται και αλλάζει πρόσημο, σηματοδοτώντας μία μετάβαση φάσης πρώτης τάξης στο θερμοδυναμικό χώρο. Η εν λόγω μετάβαση είναι συνεπής με την ασυνεχή αλλαγή του τοπολογικού φορτίου από -1 σε $+1$. Με βάση τη σχέση ($;$), ο ελάχιστος ορίζοντας που μπορεί να έχει η μελανή οπή μετά τη μετάβαση φάσης πρέπει να ικανοποιεί

$$A/l_P \geq 1, \quad (4.41)$$

αν θέλουμε να αποφύγουμε ακτίνες οριζόντων με subplanckian μεγέθη. Ως αποτέλεσμα, οι πλήρεις μη-διαταρακτικές λύσεις τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες μπορεί να είναι θερμικά ευσταθή απομεινάρια μελανών οπών.

Οι παραπάνω έννοιες για τη δημιουργία ελάχιστου μήκους της μελανής οπής μέσω κλίμακας μήκους της τροποποιημένης θεωρίας βαρύτητας δεν προκύπτουν από τη δυναμική αντιμετώπιση της παραμορφωμένης τοπικής λύσης υπό το πρίσμα της θερμοδυναμικής. Στο [265], οι συγγραφείς θεώρησαν μία θεμελιώδη κλίμακα μήκους θ μέσω της Γενικευμένης Αρχής Αβεβαιότητας (Generalized Uncertainty Principle (GUP)), η οποία μπορούσε να κανονικοποιήσει τη μοναδικότητα της μελανής οπής. Ομοίως με τα δικά μας αποτελέσματα, βρήκαν παρεμφερή θερμοδυναμική συμπεριφορά. Τη δημιουργία δηλαδή εσωτερικού ορίζοντα που σηματοδοτεί το τέλος της θερμοδυναμικής εξάχνωσης της μελανής οπής. Επομένως, ο συνυπολογισμός κβαντικών διορθώσεων, είτε μέσω τροποποίησης της βαρύτητας από ενεργές θεωρίες είτε μέσω βασικών αρχών κβαντομηχανικής όπως το GUP φαίνεται να μπορούν να σταθεροποιήσουν τη μελανή οπή στα τελικά της θερμοδυναμικά στάδια μέσω αλλαγής της δομής του εσωτερικού της.

Είναι σαφές βέβαια ότι οι ημικλασικές μας προσεγγίσεις της μελανής οπής παύουν να ισχύουν όταν το μέγεθος του ελάχιστου ορίζοντα πλησιάζει τη κλίμακα μήκους της κβαντικής βαρύτητας l_P . Παρόλαυτά, η ανάλυση καθιστά εφικτό να εικάσει κανείς μία πιθανή συσχέτιση του τοπολογικού φορτίου του [228] με μία θεωρία κβαντικής βαρύτητας, υπό την έννοια ότι η ύπαρξη θερμικά ευσταθών μικροσκοπικών μελανών οπών με ελάχιστο μέγεθος της τάξης Planck μπορούν να αποτελέσουν τα βασικά στοιχεία της δομής του χωροχρονικού αφρού [230].

Πρωτού κλείσουμε το υποκεφάλαιο, θεωρούμε σημαντικό να παρέχουμε μερικές πληροφορίες αναφορικά με τη θερμοδυναμική φύση της ενεργής ετεροτικής θεωρίας χορδών μέσω της δράσης

[10]

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{4} \exp(2\sqrt{2}\kappa\Phi)(\partial b)^2 - \frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{\alpha'}{16\kappa^2} \exp(-\sqrt{2}\kappa\Phi)(\mathcal{G} - F^2) - b \frac{\alpha'}{2\kappa} (R_{CS} + F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) \right] \quad (4.42)$$

όπου α' είναι το Regge slope της χορδής, κ το ελαττωμένο μήκος Planck, b είναι το αξιόνιο, Φ είναι το dilaton, F και \tilde{F} είναι ο ταυυστής ισχύς και ο δυικός ταυυστής ισχύς του πεδίου βαθμίδας, ενώ R_{CS} είναι η πυκνότητα Pontryagin και \mathcal{G} ο όρος Gauss-Bonnet. Ενώ η ενεργή αυτή θεωρία είναι γνωστή από το 1987, μέχρι και τώρα δεν έχουν βρεθεί αναλυτικές λύσεις και μάλλον δε θα βρεθούν ποτέ λόγω της ιδιαίτερης πολυπλοκότητας της. Οι περισσότερες μελέτες αναφορικά με τη τοπική λύση της θεωρίας επικεντρώθηκαν σε απουσία πεδίου βαθμίδας θεωρώντας επιπροσθέτως είτε απουσία του αξιονίου (ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [169, 266, 221, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275] και στις αντίστοιχες αναφορές στα εν λόγω άρθρα) είτε απουσία του dilaton που είναι η περίπτωση της θεωρίας Chern-Simons που μελετήσαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Οι περισσότερες προσεγγίσεις λύσεων έχουν γίνει με αριθμητικό ή διαταραχτικό τρόπο. Κάτι τέτοιο καθιστά την εξαγωγή μίας σωστής θερμοδυναμικής μελέτης στις λύσεις πρακτικά αδύνατη, καθώς, όπως δείξαμε, στο όριο των μικρών μελανών οπών η διαταραχτική προσέγγιση παύει να ισχύει και μπορεί να δημιουργείται μία νέα, μη-τετριμμένη δομή της μελανής οπής. Πράγματι, ενώ για τη περίπτωση της Gauss-Bonnet έχει υπάρξει πληθώρα μελετών, τα αποτελέσματα αναφορικά με τη θερμοδυναμική εξέλιξη ήταν ιδιαίτερος ασυνήθης. Συγκεκριμένα, στο [266] οι συγγραφείς προσπάθησαν να μελετήσουν τη θερμοδυναμική της μελανής οπής μέσω προσεγγιστικής επίλυσης κοντά στον ορίζοντα. Όπως δείξαμε όμως, οι συντελεστές της προσεγγιστικής επίλυσης μπορούν να είναι και οι ίδιοι συναρτήσεις του r_h κάτι το οποίο καθιστά τη θερμοδυναμική μελέτη μέσω ημιαναλυτικών σχέσεων κοντά στον ορίζοντα πρακτικά αδύνατη. Συγκεκριμένα, αναπτύσσοντας κατά Taylor το χρονικό στοιχείο της μετρικής έχουμε ότι

$$g_{tt}(r \approx r_h) = -\frac{1 + \sum_n \gamma^n f_n(1)}{r_h} (r - r_h) + \mathcal{O}((r - r_h)^2) \quad (4.43)$$

όπου, όπως είναι σαφές, ο αριθμητής είναι μία μη-τετριμμένη σχέση του r_h , κάτι το οποίο δεν συνοπλογίστηκε στη μελέτη των [266]. Επιπροσθέτως, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο αριθμητής είναι απλά η συνθήκη χρισιμότητας και μπορεί να μηδενίζεται αν υπάρχει εσωτερικός ορίζοντας. Αυτό σημαίνει ότι η προσέγγιση της θερμοδυναμικής συμπεριφοράς από ημιαναλυτικές σχέσεις κοντά στον ορίζοντα μπορεί και να είναι εντελώς λάθος, καθώς η προσέγγιση δε λαμβάνει υπόψη την πιθανή μη-τετριμμένη δομή της hairy μελανής οπής. Επίσης, γνωρίζουμε ότι κρίσιμες μελανές οπές έχουν τοπολογία της μορφής $AdS^2 \times S^2$ κοντά στον ορίζοντα, κάτι το οποίο περιπλέκει την όποια πιθανή προσέγγιση παραπάνω.

Αντίστοιχα, στο [275] υιοθετήθηκε μία αριθμητική προσέγγιση για τη θεωρία Gauss-Bonnet, αγνοώντας πάλι όμως τη πιθανή μη τετριμμένη σχέση του αριθμητή της (4.43) ως προς το r_h . Η ανάλυση τους έδειξε ότι η διαδικασία εξάχνωσης της μελανής οπής σταματάει, αλλά ο τελικός της θερμοδυναμικός κλάδος δεν αντιστοιχεί σε κρίσιμη μελανή οπή με μηδενική θερμοκρασία. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι θα παραβιάζεται ο πρώτος νόμος θερμοδυναμικής, κάτι το οποίο φαίνεται ιδιαίτερα περίεργο. Θεωρούμε ότι τέτοιου είδους αποτελέσματα είναι συνέπεια της λανθασμένης προσέγγισης της μετρικής κοντά στον ορίζοντα και, επομένως, πρέπει κανείς να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός στη μελέτη της θερμοδυναμικής συμπεριφοράς. Το γεγονός ότι μπορούμε να εξάγουμε με συνεπή τρόπο τη γεωμετρία κοντά στον ορίζοντα δε σημαίνει απαραίτητα ότι γνωρίζουμε και τη μορφή της λύσης ως προς τα θερμοδυναμικά φορτία.

Πρέπει επίσης να τονίσουμε ότι η τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet με σύμμορφα συζευγμένο πεδίο μπορεί να έχει αναλυτική λύση όπως παρουσιάσαμε εν συντομία στο 3.2. Χρησιμοποιώντας τη λογαριθμική μορφή της λύσης του βαθμωτού πεδίου με αρνητική σταθερά σύζευξης στον όρο Gauss-Bonnet, μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι η λύση της θεωρίας έχει όντως δύο ορίζοντες λόγω της σταθεράς σύζευξης α στην εξίσωση (3.9). Παρόλαυτά, η λύση έχει τρεις μοναδικότητες, όπως προκύπτει από υπολογισμό του βαθμωτού Kretsmann. Ο εσωτερικός ορίζοντας είναι αποκομμένος από τον εξωτερικό μέσω δύο μοναδικοτήτων καμπυλότητας στο εσωτερικό της μελανής οπής, ενώ υπάρχει κατά τα γνωστά και η μοναδικότητα καμπυλότητας στο $r = 0$. Το συγκεκριμένο σημαίνει ότι όσο συρρικνώνεται η μελανή οπή της εν λόγω θεωρίας, οι δύο εσωτερικές μοναδικότητες πλησιάζουν η μία την άλλη, επειδή πλησιάζουν οι αντίστοιχοι ορίζοντες, αλλά η μελανή οπή δε γίνεται ποτέ κρίσιμη! Το τελικό θερμοδυναμικό στάδιο της λύσης είναι άγνωστο: Είτε δεχόμαστε ότι τελειώνει η εξάχνωση και μένει μία γυμνή μοναδικότητα όταν ο εξωτερικός ορίζοντας περνάει το εξωτερικό singularity, που σημαίνει ξεκάθαρη παραβίαση της κοσμικής λογοκρισίας, είτε η ομοιογενής λύση που υποστηρίζει η θεωρία αλλάζει μορφή όσο μικραίνει η μελανή οπή και η δράση πέφτει σε ένα άλλο τοπικό ελάχιστο, που θα αντιστοιχεί σε κάποια ανομοιογενή μετρική, που μπορεί να έχει σωστή θερμοδυναμική συμπεριφορά. Λόγω της απουσίας αναλυτικής λύσης στη θεωρία Gauss-Bonnet που προκύπτει από την ενεργή δράση χορδών, (4.42), είναι ακόμα άγνωστο αν τέτοιου είδους ζητήματα επιζούν και στη θεωρία Gauss-Bonnet με εκθετική σύζευξη του dilaton. Αν κάτι τέτοιο ισχύει, μπορεί όντως τα αποτελέσματα των [275] να έχουν μία δόση ορθότητας αναφορικά με το μέλλον της μελανής οπής. Παρόλαυτά, το φυσικό αποτέλεσμα του τέλους της εξάχνωσης της μελανής οπής χωρίς να υπάρχει μηδενική θερμοκρασία παραμένει προβληματικό και θα πρέπει να δωθεί μία κατάλληλη ερμηνεία για την πραγματική θερμοδυναμική εξέλιξη της μελανής οπής Gauss-Bonnet. Κατά τη φυσική μας διαίσθηση, η πιο λογική ερμηνεία θα ήταν ότι υπάρχουν παραπάνω από μία λύσεις στη θεωρία, λόγω προφανούς έλλειψης αντίστοιχου θεωρήματος Birkhoff, και η μελανή οπή Gauss-Bonnet μεταβαίνει σε διαφορετική γεωμετρία στα τελικά της στάδια. Αναφέρουμε για εδώ για χάρη πληρότητας ότι οι εν λόγω επιπλέον μοναδικότητες στη τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet με σύμμορφα συζευγμένο πεδίο συμβαίνουν όταν το υπόριζο του μετρικού στοιχείου (3.16) μηδενίζεται. Συνεπώς, η λύση μονοπόλου που βρήκαμε στο 3 είναι ασφαλής από τέτοιου είδους προβλήματα.

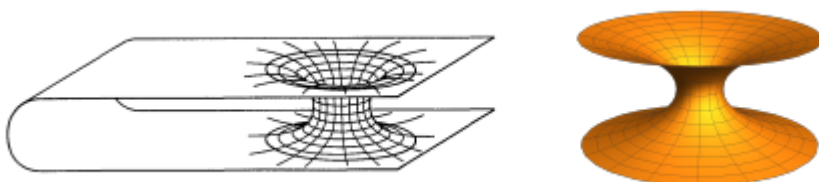
Κλείνοντας λοιπόν την ανάλυση μας, μπορούμε να καταλήξουμε ότι η παραμόρφωση μελανών οπών από μη-τετριμμένες συζεύξεις μπορεί να διαφοροποιήσει ισχυρά όχι μόνο τη γεωμετρία του εξωτερικού χώρου αλλά και τη μορφή της εσωτερικής δομής της μελανής οπής. Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να είναι προφανές από τον εξωτερικό χώρο της μελανής οπής, πόσο μάλλον όταν το σύστημα μελετάται από απόσταση. Τέτοιου είδους αλλαγές στη δομή μπορούν αν συμβούν μόνο υπό το πρίσμα της μη-διαταρακτικής ανάλυσης της λύσης. Επίσης, όπως παρουσιάσαμε, αλλαγές στη δομή μέσω δημιουργίας εσωτερικού ορίζοντα καθιστούν την παραμορφωμένη μελανή οπή θερμικά ευσταθής. Το εν λόγω αποδείχτηκε στην εργασία αυτή και με τους δύο πιθανούς τρόπους, ώστε να εξάγουμε μία ξεκάθαρη σχέση συνεπαγωγής. Κυρίαρχο εργαλείο αποτέλεσε η εικασία των [228] για τον ορισμό τοπολογικού φορτίου με βάση τη θερμοδυναμική συμπεριφορά των μελανών οπών της Γενικής Σχετικότητας. Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την ανάγκη ενδελεχούς μελέτης των παραμορφωμένων μελανών οπών, καθώς, όπως φάνηκε, οι διορθώσεις στις γεωμετρίες της Γενικής Σχετικότητας μπορούν κάλλιστα να παύουν να είναι υποκυρίαρχες σε συνθήκες ισχυρής βαρύτητας. Τέλος, αν η θεωρητική μας ανάλυση συμφωνεί με τις πραγματικές φυσικές διεργασίες του σύμπαντος, η εν λόγω μελέτη δίνει μία βάση για την ύπαρξη αρχέγονων μελανών οπών από το πρώιμο σύμπαν μέσω τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας.

Κεφάλαιο 5

Προσπελάσιμες σκουληκότρυπες τύπου Ellis σε θεωρίες Horndeski

5.1 Εισαγωγή στις σκουληκότρυπες

Οι σκουληκότρυπες αποτελούν μία από τις ενδιαφέρουσες και εξωτικές λύσεις των εξισώσεων Einstein . Η βασική ιδιότητα μίας σκουληκότρυπας είναι ότι μπορεί να συνδέσει δύο απομακρυσμένους χωρόχρονους μέσω μίας γεωμετρίας ‘γέφυρας’ που ονομάζεται λαιμός της σκουληκότρυπας. Υπάρχουν διάφορες κατηγοριοποιήσεις με βάση τις ιδιότητες της γεωμετρίας αλλά και της τοπολογίας πάνω στην οποία κατασκευάζονται τα εν λόγω αντικείμενα. Από τοπολογικής άποψης, οι σκουληκότρυπες χωρίζονται σε εσωσυμπαντικές (intrauniverse), που ενώνουν δύο απομακρυσμένες περιοχές του ίδιου σύμπαντος και διασυμπαντικές (interuniverse) που ενώνουν δύο διαφορετικά σύμπαντα. Η διαφοροποίηση αυτή, όντας καθαρά τοπολογική, δε μπορεί να καθοριστεί από τη γεωμετρία της σκουληκότρυπας, αλλά από την πολλαπλότητα πάνω στην οποία ορίζει κανείς τη βαρυτική θεωρία. Συνεπώς, ένας παρατηρητής κοντά στο λαιμό μίας σκουληκότρυπας δε μπορεί να επιβεβαιώσει το τοπολογικό της είδος. Προς αποφυγή σύγχυσης, θα μελετήσουμε μόνο διασυμπαντικές σκουληκότρυπες, καθώς οι εσωσυμπαντικές κρύβουν κινδύνους κατασκευής χρονομηχανών μέσω κλειστών αιτιατών καμπυλών [188, 276, 277]. Η συγκεκριμένη διαφοροποίηση παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα, όπου έχουμε εμβαπτύσει τη μορφή μίας σκουληκότρυπας σε κυλινδρικό χώρο.



Σχήμα 5.1: Εσωσυμπαντική (αριστερά) και διασυμπαντική (δεξιά) μορφή σκουληκότρυπας

Οι σκουληκότρυπες ως έννοια είχαν θεωρηθεί αρχικώς από τον Flamm [278], ενώ η δεύτερη ιστορική αναφορά που σχετίζεται με αυτές οφείλεται στη θεωρητική αναλυτική συνέχεια της γεωμετρίας της μελανής οπής Schwarzschild από τους Einstein και Rosen που κατασκεύασαν ένα θεωρητικό αντικείμενο το οποίο ονομάστηκε γέφυρα Einstein-Rosen [279]. Βέβαια, πλέον γνωρίζουμε ότι

οι γέφυρες Einstein-Rosen δεν είναι πραγματικές σκουληκότρυπες. Η γεωμετρία τους δίνεται απλά μέσα από ένα κακό σύστημα συντεταγμένων της μελανής οπής Schwarzschild και αποτελεί ένα μαθηματικό 'ατύχημα' που οφείλεται στην συμμετρία της ομοτιμίας του χρόνου, με ακριβώς ανάλογο τρόπο όπως βρίσκει κανείς γεωμετρίες λευκών οπών. Πράγματι, θεωρώντας τη γεωμετρία Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.1)$$

και εκτελώντας την αλλαγή συντεταγμένων $u^2 = r - 2M$, η γεωμετρία Schwarzschild παίρνει τη μορφή της γέφυρας Einstein-Rosen

$$ds^2 = - \frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 d\Omega^2, \quad (5.2)$$

όπου η συντεταγμένη u ανήκει στο $(-\infty, +\infty)$. Είναι σαφές ότι η συντεταγμένη u , εκ του ορισμού της, καλύπτει δύο φορές την περιοχή έξω από τον ορίζοντα ενώ αγνοεί πλήρως την εσωτερική περιοχή της μελανής οπής, παρότι το πεδίο τιμών της είναι θεωρητικά όλος ο χώρος \mathbb{R} . Αυτό σημαίνει ότι η ακτινική αυτή συντεταγμένη δεν είναι καλώς ορισμένη για να περιγράψει τη γεωμετρία και η γέφυρα Einstein-Rosen είναι απλά μία μελανή οπή σε κακό σύστημα συντεταγμένων. Εκτός αυτού, κατά τον ορισμό του λαιμού, ο λαιμός της σκουληκότρυπας που θα μπορούσε να συνδέσει τις δύο απομακρυσμένες περιοχές βρίσκεται πάνω στον ορίζοντα γεγονότων $r = 2M$. Επομένως, η εν λόγω γεωμετρία δεν είναι προσπελάσιμη και από τις δύο πλευρές. Πράγματι, οποιαδήποτε αιτιατή καμπύλη που εισέρχεται στο $r = 2M$ μένει παγιδευμένη μέσα κατά τα γνωστά αφού οι συνθήκες παγίδευσης είναι (ευτυχώς) αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς και θα έρθει λοιπόν αναγκαστικά σε επαφή με την μοναδικότητα του κέντρου. Τέλος, μελετώντας κανείς τη πλήρη αναλυτική συνέχεια μίας γεωμετρίας Schwarzschild μέσα από τα διαγράμματα Penrose, επιβεβαιώνεται ότι ο μοναδικός τρόπος να χρησιμοποιηθεί η γέφυρα Einstein-Rosen ως προσπελάσιμη σκουληκότρυπα είναι να ακολουθήσουμε χωροειδείς τροχιές που είναι προφανώς φυσικά αδύνατο. Να αναφέρουμε εδώ για πληρότητα ότι υπάρχει μία ιδιαίτερα όμορφη κομψότητα στο εν λόγω αποτέλεσμα. Το μέλλον όλων των (φυσικά αποδεκτών) αιτιατών τροχιών που περνάνε από τον ορίζοντα είναι καταδικασμένο να τις οδηγήσει στη μοναδικότητα, κάτι το οποίο αποτελεί αντένδειξη της ύπαρξης Einstein-Rosen ως εκμεταλλεύσιμη γεωμετρία πρόσβασης σε άλλο σύμπαν. Από την άλλη, οι φυσικά μη-αποδεκτές χωροειδείς τροχιές δεν έχουν κανένα πρόβλημα να έρθουν σε επαφή με το άλλο σύμπαν μέσω της σφαίρας διακλάδωσης (bifurcation sphere) του διαγράμματος Penrose. Πρακτικά λοιπόν, κάθε μελανή οπή θα έχει πράγματι τις γνωστές καταστροφικές συνέπειες για έναν παρατηρητή που την προσπελαύνει μόνο εάν η τροχιά του παρατηρητή στη πολλαπλότητα ακολουθεί τη βασική αρχή της αιτιατότητας. Το εν λόγω αποτέλεσμα δεν αποτελεί κάποια φοβερή ανακάλυψη, αλλά το αναφέρουμε ως δείγμα μίας βασικής αρχής της θεωρητικής φυσικής: Όσο χαλαρώνουμε τις συνθήκες πάνω στις οποίες κατασκευάζουμε μία φυσική θεωρία, τόσο πιο πιθανό είναι να εξάγουμε διαφοροποιημένα αποτελέσματα. Αυτή τη βασική αρχή την είδαμε ήδη στα πλαίσια των hairy μελανών οπών, όπου παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών οδήγησε σε παραβίαση του θεωρήματος no-hair της Γενικής Σχετικότητας. Τέλος, αναφέρουμε ότι, ακόμα και τώρα, χρησιμοποιείται δυστυχώς συχνά σε διάφορα συγγράμματα και σημειώσεις Γενικής Σχετικότητας (που δε θα αναφέρουμε εδώ!) η έννοια της σκουληκότρυπας για να περιγράψει γέφυρες Einstein-Rosen κάτι το οποίο προκαλεί έντονη σύγχυση σε διάφορους νέους ερευνητές που ξεκινάνε να μελετήσουν τα εν λόγω αντικείμενα.

Η δεύτερη βασική συνεισφορά στον τομέα αυτόν έγινε από τον Wheeler, όταν ανέφερε πρώτος τη γεωμετρία σκουληκότρυπας ως έννοια στο [280] χρησιμοποιώντας όμως κβαντικές διορθώσεις, οι οποίες ήταν ικανές να επιφέρουν αλλαγή τοπολογίας στο εσωτερικό της μελανής οπής, κάτι το οποίο έθεσε τις βάσεις για την έννοια του χωροχρονικού αφρού (spacetime foam). Περίπου 20

χρόνια μετά ο Ellis πρότεινε μία γεωδαισιακά πλήρης γεωμετρία σκουληκότρυπας χρησιμοποιώντας ένα βαθμωτό πεδίο συζευγμένο στη βαρύτητα με τετριμμένο τρόπο [281]. Όπως φαίνεται, οι σκουληκότρυπες ως έννοια παρέμειναν κατά μεγάλο βαθμό εκτός ιδιαίτερου ερευνητικού ενδιαφέροντος. Παρόλαυτά, το ενδιαφέρον της θεωρητικής κοινότητας σε λύσεις σκουληκότρυπας αναζωπυρώθηκε, και επιζεί μέχρι και σήμερα, όταν οι Morris και Thorne, στο διάθεσιμο πλέον άρθρο τους [282], όρισαν τις συνθήκες για την κατασκευή προσπελάσιμης σκουληκότρυπας. Στην εν λόγω ανάλυση, οι συγγραφείς κατασκεύασαν μία στατική και σφαιρικά συμμετρική μορφή γεωμετρίας που είναι ικανή να ενώσει δύο διαφορετικά σύμπαντα με δύο αντίστοιχες ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές και να είναι δυναμικά προσπελάσιμη. Η ανάλυση επεκτάθηκε και σε ανθρώπινα προσπελάσιμες σκουληκότρυπες μέσω της μελέτης των παλιρροιακών δυνάμεων στη σκουληκότρυπα, με τις οποίες όμως δε θα ασχοληθούμε.

Ας μελετήσουμε σε αυτό το σημείο τα βασικά στοιχεία γεωμετρίας μίας προσπελάσιμης σκουληκότρυπας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να θεωρήσει κανείς την ακόλουθη μορφή μετρικής για τη σκουληκότρυπα

$$ds^2 = -e^{2F(\ell)} dt^2 + d\ell^2 + r^2(\ell) d\Omega^2, \quad (5.3)$$

όπου ℓ είναι η ακτινική συντεταγμένη που αντιστοιχεί στην ιδιοαπόσταση, ενώ οι συναρτήσεις $F(\ell)$ και $r(\ell)$ είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς το ℓ για να μην υπάρχουν ασυνέχειες στις εξισώσεις κίνησης. Θεωρούμε επίσης ότι η συντεταγμένη ℓ παίρνει τιμές στο $(-\infty, +\infty)$, έτσι ώστε να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα θετικά και αρνητικά ℓ στο εκάστοτε σύμπαν με τις αντίστοιχες ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές να ισχύουν στο $\ell \rightarrow \pm\infty$. Τονίζουμε ότι αυτό σημαίνει ότι ο λαιμός της σκουληκότρυπας βρίσκεται στο $\ell_0 = 0$, κάτι το οποίο μπορούμε πάντα να επιβάλλουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, εφόσον η συνάρτηση εμβαδού $r(\ell)$ είναι αυθαίρετη. Για να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξη της χωρικής επιπεδότητας όμως, πρέπει να ισχύει ότι $\lim_{\ell \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{r(\ell)}{|\ell|} \right) = 1$.

Προκειμένου να διατηρείται η προσπελασιμότητα της γεωμετρίας, πρέπει κανείς να επιβάλλει την απουσία κάποιου ορίζοντα γεγονότων ως φωτεινής υπερεπιφάνεια. Αυτό σημαίνει προφανώς ότι η συνάρτηση $F(\ell)$ είναι παντού πεπερασμένη. Ομοίως με τη χωρική επιπεδότητα, η συνθήκη χωροχρονική επιπεδότητας επιβάλλει ότι $\lim_{\ell \rightarrow \pm\infty} F(\ell) = F_{\pm}$, όπου F_{\pm} πεπερασμένες σταθερές, οι οποίες μπορούν να απορροφηθούν σε απλό επαναορισμό του χρόνου.

Τέλος, και σημαντικότερο, η συνάρτηση εμβαδού $r(\ell)$ οφείλει να έχει (τουλάχιστον) ένα τοπικό ελάχιστο που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$r_0 = \min(r(\ell)) \quad (5.4)$$

Η εν λόγω τιμή του τοπικού ελαχίστου αντιστοιχεί στην ακτίνα του λαιμού της σκουληκότρυπας, ενώ το αντίστοιχο ℓ_0 για το οποίο ικανοποιείται η σχέση (5.4) υποδεικνύει την τοποθεσία του λαιμού. Η περίπτωση παραπάνω από ενός ελαχίστου θα οδηγήσει σε σκουληκότρυπες με παραπάνω από ένα λαιμό [283]. Για την εν λόγω περίπτωση, τονίζουμε ότι η ελευθερία του $\ell_0 = 0$ για την περιοχή του λαιμού περιορίζεται υπό την έννοια ότι πρέπει να επιβεβαιώσει κανείς σε ποιον από τους δυναμικά πολλαπλούς λαιμούς της σκουληκότρυπας αντιστοιχεί.

Αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι το σημείο ελαχίστου ℓ_0 μπορεί να επιβεβαιωθεί με έναν ιδιαίτερα κομψό φορμαλισμό μέσα από την εξωτερική καμπυλότητα του χώρου. Ακολουθώντας την ανάλυση των [284], ο λαιμός μίας προσπελάσιμης σκουληκότρυπας, είναι μια διδιάστατη υπερεπιφάνεια Σ

ελάχιστου εμβαδού που μπορούμε να εξάγουμε άμεσα από την εξίσωση υπερεπιφάνειας σταθερού χρόνου. Πράγματι, κάτω από τη μορφή της μετρικής που εργαζόμαστε, η προκύπτουσα τρισδιάστατη μετρική $h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\ell^2 + \gamma_{AB}dx^A dx^B = d\ell^2 + r^2(\ell)d\Omega^2$ βρίσκεται σε κανονικές συντεταγμένες Gauss, (όπου $A, B = 1, 2$). Ο υπολογισμός του εν λόγω εμβαδού A_Σ της υπερεπιφάνειας Σ δίνεται συνεπώς κατά τα γνωστά από

$$A_\Sigma = \int \sqrt{\gamma^{(2)}} d^2x, \quad (5.5)$$

δηλαδή από το ελαττωμένο στοιχείο χώρου της διδιάστατης επιφάνειας. Για να επιβεβαιώσουμε ότι η Σ αντιστοιχεί πράγματι σε λαιμό σκουληκότρυπας, πρέπει να ισχύει ότι η ακτίνα εμβαδού $r(\ell)$ γίνεται ελάχιστη, δηλαδή, υπό γενικότερο κανόνα, ικανοποιούνται οι συνθήκες ελάχιστου εμβαδού της Σ που είναι πρακτικά η φυλλωμένη σφαίρα S^2 . Έχουμε λοιπόν

$$\delta A_\Sigma = \int \partial_\ell \sqrt{\gamma^{(2)}} d^2x = - \int \sqrt{\gamma^{(2)}} \text{Tr}(K) \delta \ell d^2x = 0, \quad (5.6)$$

$$\delta^2 A_\Sigma = - \int \sqrt{\gamma^{(2)}} (\partial_\ell \text{Tr}(K) - \text{Tr}(K)^2) \delta \ell d^2x \geq 0, \quad (5.7)$$

όπου $K_{AB} = -\frac{1}{2} \partial_\ell \gamma_{AB}$ είναι η εξωτερική καμπυλότητα της Σ και $\text{Tr}(K)$ το ίχνος της. Επομένως, οι δύο συνθήκες για την ύπαρξη λαιμού σκουληκότρυπας δίνονται απλά από τις σχέσεις

$$\text{Tr}(K) = -\frac{1}{2} \gamma^{AB} \partial_\ell g_{AB} = 0, \quad \partial_\ell \text{Tr}(K) < 0 \quad (5.8)$$

Επιβεβαιώνει κανείς μετά από τετριμμένη άλγεβρα ότι, χρησιμοποιώντας τη μορφή της σφαιρικά συμμετρικής μετρικής (5.3), οι εν λόγω συνθήκες επιστρέφουν την εξίσωση (5.4). Παρόλαυτά, είναι ισχυρότερες καθώς μπορούν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν για επιβεβαίωση λαιμού σκουληκότρυπας με διαφορετικές τοπολογίες φύλλωσης αντί της συνήθους S^2 ή ακόμα και για την περίπτωση περιστρεφόμενων γεωμετριών σκουληκότρυπας [285]. Αναφέρουμε για πληρότητα ότι η περίπτωση χρονοεξαρθώμενων γεωμετριών σκουληκότρυπας είχε μελετηθεί στο [286].

Επιθυμούμε επίσης να σχολιάσουμε ότι μπορεί κανείς για ευκολία να επιβάλλει την επιπλέον συμμετρία της ομοτιμίας της ιδιοαπόστασης, $\ell \rightarrow -\ell$ που σημαίνει ότι τα δύο σύμπαντα που συνδέει η σκουληκότρυπα είναι τα ίδια, αφού $F(\ell) = F(-\ell)$ και $r(\ell) = r(-\ell)$. Η απουσία της εν λόγω συμμετρίας δυσκολεύει συνήθως τους υπολογισμούς για την περίπτωση των διασυμπαντικών σκουληκότρυπων. Για την περίπτωση των εσωσυμπαντικών σκουληκότρυπων, όμως, μπορεί να έχει καταστροφικές συνέπειες καθώς θα οδηγήσει σε γέννηση χρονομηχανών. Επιπροσθέτως, αν δεχτούμε την ύπαρξη εσωσυμπαντικών σκουληκότρυπων, η παραβίαση της εν λόγω συμμετρίας είναι πρακτικά ντετερμινιστική, καθώς είναι ιδιαίτερα απίθανο η συνάρτηση ερυθρομετατόπισης να είναι συμμετρική κάτω από την ομοτιμία της ιδιοαπόστασης. Ο λόγος είναι ότι, για να διατηρήσουμε τη συμμετρία, η πυκνότητα μάζας στα δύο στόματα της σκουληκότρυπας, δηλαδή στις δύο εισόδους του λαιμού από τη κάθε πλευρά, πρέπει ανά πάσα στιγμή να είναι ίδια, κάτι το οποίο αποτελεί ξεκάθαρο παράδειγμα λεπτού συντονισμού. Ο μηχανισμός γέννησης χρονομηχανής βασίζεται σε αυτή τη διαφορά της ερυθρομετατόπισης μεταξύ των δύο στομάτων. Συγκεκριμένα, όταν η φυσική απόσταση μεταξύ των δύο στομάτων είναι μικρότερη από την ολίσθηση του συντεταγμένου χρόνου (σε φυσικές μονάδες $c = 1$) λόγω διαφοράς ερυθρομετατόπισης, η εσωσυμπαντική σκουληκότρυπα λειτουργεί ως χρονομηχανή. Οι πρώτες αναλύσεις της περίπτωσης αυτής είχαν γίνει στα [276, 277]. Συγκεκριμένα, στο [277], οι συγγραφείς απέδειξαν ότι δύο παρατηρητές σε μία εσωσυμπαντική σκουληκότρυπα δε μπορούν να συγχρονίσουν τα ρολόγια τους κάτι το οποίο αποτελεί παραβίαση της τοπικής συμμετρίας Lorentz της Γενικής Σχετικότητας λόγω τοπολογικών ιδιοτήτων της πολλαπλότητας. Σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση των μαγνητικών μονοπόλων, αυτό θα σήμαινε (πιθανώς) παραβίαση της ταυτότητας Bianchi της βαρυτικής θεωρίας κάτω από τη γνωστή

ερμηνεία της Γενικής Σχετικότητας ως θεωρία βαθμίδας της (τοπικής) ομάδας Lorentz. Επομένως, είτε αντιμετωπίσουμε το ζήτημα των χρονομηχανών από φυσική άποψη είτε από μαθηματική, θα λέγαμε ότι οι συνέπειες δημιουργίας τέτοιων αντικειμένων θα ήταν μάλλον καταστροφικές, καθώς η ύπαρξη τους οδηγεί σε παραβίαση της αιτιατότητας της φυσικής μας θεωρίας μέσω παραβίασης της ταυτότητας Bianchi του βαρυτικού ταυστή Riemann. Αναφέρουμε επίσης ότι στο [188] παρουσιάζεται μία πλήρης ανάλυση των παραπάνω με παιδαγωγικό τρόπο, όπου παραπέμπουμε τον αναγνώστη για περαιτέρω πληροφορίες.

Τα παραπάνω που παρουσιάσαμε αποτελούν τη βασική περιγραφή γεωμετρίας σκουληχότρυπας. Παραδόξως, σε πρώτη ανάγνωση, οι γεωμετρικές ιδιότητες φαίνονται ιδιαίτερα απλές. Το πρόβλημα στην κατασκευή της γεωμετρίας σκουληχότρυπας έγκειται στο γεγονός ότι η γεωμετρία λαϊμού απαιτεί τη παραβίαση των φωτοειδών ενεργειακών συνθηκών (NEC) προκειμένου να παραμένει ο λαϊμός προσπελάσιμος. Το εν λόγω συμπέρασμα μπορεί να επιβεβαιωθεί άμεσα από τις εξισώσεις Einstein όπου θα χρησιμοποιήσουμε για ευκολία μία αλλαγή συντεταγμένων για να φέρουμε τη μορφή της μετρικής στην πρωταρχική μορφή που είχαν θεωρήσει οι Morris και Thorne. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την αλλαγή συντεταγμένων σε συντεταγμένες Schwarzschild μέσω της

$$\ell(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(r')}{r'}}} \quad (5.9)$$

η μετρική έρχεται στη μορφή

$$ds^2 = -e^{2F_{\pm}(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (5.10)$$

όπου λόγω του ότι η συντεταγμένη ιδιοαπόστασης ℓ μπορεί να έχει αρνητικές τιμές που αντιστοιχούν στο δεύτερο σύμπαν της σκουληχότρυπας, χρειαζόμαστε πλέον δύο σύνολα (patches) στη πολλαπλότητα για να ορίσουμε τη πλήρη γεωμετρία. Από τη συνθήκη συνέχειας και διαφορισμότητας των στοιχείων μετρικής, είναι σαφές ότι τα δύο συστήματα συντεταγμένων ταιριάζουν με συνεχή τρόπο πάνω στο λαϊμό. Από την άλλη, αν η γεωμετρία της σκουληχότρυπας είναι συμμετρική κάτω από την ομοτιμία $\ell \rightarrow -\ell$, τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι πρακτικά τα ίδια και η ακτινική συντεταγμένη r καλύπτει το χώρο $(r_0, +\infty)$ δύο φορές. Στο εν λόγω σύστημα, έχει καθιερωθεί η F_{\pm} να ονομάζεται συνάρτηση ερυθρομετατόπισης, αφού καθορίζει την ερυθρομετατόπιση κάποιου εκπεμπόμενου σήματος, ενώ η συνάρτηση b_{\pm} ονομάζεται συνάρτηση σχήματος της σκουληχότρυπας λόγω της προφανούς της συσχέτισης με τη συνάρτηση εμβαδού στις αρχικές συντεταγμένες της ιδιοαπόστασης.

Στο εν λόγω σύστημα, η συνθήκη ύπαρξης λαϊμού μπορεί να αναπαραχθεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.9). Συγκεκριμένα, αφού $\frac{dr}{d\ell} = 0$ πάνω στο λαϊμό της σκουληχότρυπας, προκύπτει άμεσα ότι

$$b_{\pm}(r_0) = r_0, \quad (5.11)$$

ενώ από τη συνθήκη χωρικής επιπεδότητα έχουμε $b_{\pm}(r) < r$, $\forall r \in (r_0, +\infty)$. Η σχέση (5.11) είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή για να έχουμε προσπελάσιμο λαϊμό σκουληχότρυπας. Πρέπει επίσης να ικανοποιείται η συνθήκη ελαχίστου εμβαδού, η οποία στις συντεταγμένες μας δίνεται άμεσα από

$$\frac{d^2 r}{d\ell^2} = \frac{dr}{d\ell} \frac{d}{dr} \left(\frac{dr}{d\ell} \right) \stackrel{(5.9)}{=} \frac{1}{2r} \left(\frac{b}{r} - b' \right) > 0 \quad (5.12)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παραγωγή ως προς το r . Μέσω της σχέσης (5.11) για τον λαϊμό, έχουμε άμεσα ότι

$$b'_{\pm}(r_0) < 1 \quad (5.13)$$

προκειμένου ο λαϊμός της σκουληκότρυπας να παραμένει προσπελάσιμος. Έχοντας τώρα τις απαραίτητες ιδιότητες της γεωμετρίας, μπορούμε να προχωρήσουμε στις εξισώσεις Einstein, $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, όπου θεωρήσαμε ένα κατάλληλο ταυυστή ενέργειας ορμής που μπορεί να υποστηρίξει την εν λόγω γεωμετρία. Λόγω σφαιρικής συμμετρίας μπορούμε επικεντρωθούμε στα στοιχεία tt και rr των εξισώσεων,

$$G_t^t = -\frac{b'(r)}{r^2} = T_t^t, \quad (5.14)$$

$$G_r^r = -\frac{2rb(r)F'(r) + b(r) - 2r^2F'(r)}{r^3} = T_r^r, \quad (5.15)$$

όπου ο συνδυασμός $G_t^t - G_r^r$ μας δίνει

$$\frac{1}{r} \left(\frac{b(r)}{r^2} - \frac{b'(r)}{r} \right) - 2 \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \frac{F'(r)}{r} = T_t^t - T_r^r \quad (5.16)$$

που σε πιο συμπαγή μορφή γράφεται

$$-\frac{e^{2F(r)}}{r} \left[e^{-2F(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \right]' = T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} \quad (5.17)$$

όπου n είναι ένα φωτεινός διάνυσμα. Παρατηρούμε ότι το δεξιά μέλος της εξίσωσης είναι απλά οι φωτεινός ενεργειακές συνθήκες. Επικεντρωνόμαστε στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, όπου από τη συνθήκη απουσίας οριζόντων γεγονότων στη γεωμετρία, ο όρος $-\frac{e^{2F(r)}}{r}$ μπροστά από τη παρένθεση είναι αρνητικά ορισμένος. Από την άλλη, ο όρος που παραγωγίζεται, $\left[e^{-2F(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \right]'$, δίνει μία θετική συνεισφορά λόγω της ύπαρξης λαϊμού, αφού ξέρουμε ότι

$$e^{-2F(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad e^{-2F(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) > 0, \quad \forall r > r_0. \quad (5.18)$$

Άρα,

$$T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} \Big|_{r=r_0} < 0 \quad (5.19)$$

και οι φωτεινός ενεργειακές συνθήκες πάνω στο λαϊμό αναγκαστικά παραβιάζονται ως αποτέλεσμα της απουσίας οριζόντων γεγονότων και της ύπαρξης λαϊμού. Τίθεται λοιπόν το ζήτημα του τί είδους εξωτικά πεδία ύλης μπορούν δυνητικά να υποστηρίξουν τέτοιου είδους γεωμετρίας. Η πρώτη απάντηση στο ερώτημα αυτό, αν και ετεροχρονισμένα με βάση την ανάλυση των Morris και Thorne, ήρθε από τον Ellis [281], όπου έδειξε ότι ένα πεδίο με τετριμμένη σύζευξη στη βαρύτητα αλλά λάθος πρόσημο στο κινητικό του όρου (**phantom**) ήταν αρκετά εξωτικό για να υποστηρίξει λύση σκουληκότρυπας.

Μετά από αυτές τις πρωταρχικές ερευνητικές συνεισφορές στον κλάδο, υπήρξε μία πληθώρα λύσεων σκουληκότρυπας σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας. Συγκεκριμένα, μόνο μέσα στη τελευταία δεκαετία, λύσεις προσπελάσιμων σκουληκότρυπων έχουν ήδη βρεθεί σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας $f(R)$ [287, 288, 289, 290, 291, 292, 293], $f(R, T)$ [294, 295, 296, 297], σε τροποποιημένη τηλεπαράλληλη βαρύτητα [298], σε θεωρίες με μη-τετριμμένες συζεύξεις [299, 300], θεωρίες με επιπλέον θεμελιώδη πεδία [301, 302, 303, 304, 305, 306], θεωρίες με όρο Gauss-Bonnet [307, 308, 309, 283, 274], θεωρίες Brans-Dicke [310, 311, 312], θεωρίες Randal-Sundrum [313], σε

μοντέλα **braneworld** [314], θεωρίες Palatini [315, 316], με ταιριάσματα γεωμετριών μέσω λεπτού κελύφους [317, 318, 319, 320], θεωρίες Einstein τρίτης δύναμης (cubic gravity) [321], θεωρίες Einstein-Dirac-Maxwell [322], θεωρίες έμμοζης βαρύτητας [323] και μέσω δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας [3, 130, 132, 141, 131]. Για περαιτέρω πληροφορίες σε λύσεις σκουληκότρυπας από τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη πρόσφατη ανασκόπηση του βιβλίου [324].

5.2 Η λύση σκουληκότρυπας Ellis στη θεωρία Horndeski από γενίκευση των δυναμικών Lovelock

Τη δεκαετία του 70, ο Horndeski έθεσε και απάντησε το ερώτημα του ποια είναι η πιο γενική θεωρία βαθμωτού τανυστή που μπορεί κανείς να κατασκευάσει επιβάλλοντας τη βασική συνθήκη ότι οι εξισώσεις κίνησης για τη μετρική και για το βαθμωτό πεδίο προκύπτουν ως διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης [117], έτσι ώστε να μην έχουμε αστάθειες Ostrogradsky στη θεωρία. Η πλήρης μορφή της θεωρίας δώθηκε από 4 Λαγρανζιανές πυκνότητες με άγνωστα ενεργά δυναμικά λόγω της γενικότητας της προσέγγισης. Συγκεκριμένα, η δράση της θεωρίας βαρύτητας Horndeski δίνεται από

$$S = \int \frac{d^4x \sqrt{|g|}}{16\pi G} \left[\sum_{i=2}^{i=5} \mathcal{L}_i \right] \quad (5.20)$$

μέσω των πυκνοτήτων

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\Phi, X) , \quad (5.21)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(\Phi, X) \square \Phi , \quad (5.22)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\Phi, X) R + G_{4,X} [(\square \Phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi)^2] . \quad (5.23)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\Phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \Phi - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square \Phi)^3 - 3 \square \Phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi)^2 + 2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi)^3] , \quad (5.24)$$

όπου $X = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi$.

Ενώ η θεωρία Horndeski είχε πρακτικά ξεχαστεί για δεκαετίες, το ενδιαφέρον της κοινότητας αναζωπυρώθηκε όταν αποδείχθηκε ότι το όριο αποσύζευξης του μοντέλου DGP [325] καταλήγει στη θεωρία Galileon [326]. Η εν λόγω θεωρία είναι συμμετρική κάτω από το μαθηματικό πρότυπο των μετασχηματισμών Γαλιλαίου στο χώρο του πεδίου, δηλαδή παρουσιάζει συμμετρία κάτω από την ολίσθηση του βαθμωτού πεδίου $\Phi \rightarrow \Phi + c + b_\mu x^\mu$, όπου c και b_μ σταθερές. Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιδιότητα της θεωρίας είναι ο μηχανισμός Vainshtein με άμεση εφαρμογή στη κοσμολογία αφού επιτρέπει οι επιδράσεις του βαθμωτού πεδίου να είναι κυρίαρχες μόνο σε κοσμολογικές κλίμακες και όχι σε μικρότερες, όπως οι κλίμακες του ηλιακού μας συστήματος [327]. Έπειτα, οι συγγραφείς των [328, 329] κατασκεύασαν την γενικευμένη θεωρία Galileon που αποδείχθηκε ότι ήταν απλά μία υποκατηγορία της θεωρίας Horndeski [330]. Επιπροσθέτως, η θεωρία Horndeski μπορεί να αντιμετωπιστεί ως η ενεργή θεωρία Lovelock στις 4 διαστάσεις μέσω συμπαγοποίησης των υψηλότερων διαστάσεων [331]. Η γενικότητα της θεωρίας έχει παίξει κυρίαρχο ρόλο στην επιβίωση της μέχρι και σήμερα καθώς όλες οι θεωρίες βαθμωτού τανυστή χωρίς στρέψη (ή άλλες μη-τετριμμένες γεωμετρικές ιδιότητες) φαίνεται να αποτελούν υποκατηγορία της Horndeski [332].

Όπως αναμενόταν από την πολυπλοκότητα, αλλά και τη γενικότητα της θεωρίας η πλειοψηφία των αναλυτικών λύσεων συμπαγών σωμάτων σε θεωρίες Horndeski έχουν εξαχθεί σε υποκατηγορίες

της θεωρίας που χαρακτηρίζονται από συμμετρία ομοτιμίας του πεδίου, $\phi \rightarrow -\phi$, και/ή συμμετρία ολίσθησης του πεδίου $\phi \rightarrow \phi + cst$ [333, 334, 132, 138, 135, 137, 127, 335, 336]. Όμως, δεν υπάρχει κάποιος ξεκάθαρος φυσικός λόγος που θα έπρεπε να μελετώνται οι λύσεις μόνο τέτοιου είδους θεωριών πέρα από την απλοποίηση των πράξεων που προσφέρουν λόγω των επιπλέον συμμετριών στο χώρο του πεδίου. Πράγματι, όπως έχουμε προαναφέρει, η ύπαρξη μη-τετριμμένων συμμετριών στη θεωρία μπορεί να επιτρέψει την εξαγωγή καινούριων hairy μελανών οπών και άλλων συμπαγών σωμάτων που διαφοροποιούνται αρκετά από τις προβλέψεις της Γενικής Σχετικότητας [126, 337, 272, 273, 338, 339, 6, 5, 184, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348]. Από την άλλη, η μελέτη τοπικών λύσεων σε θεωρίες χωρίς κάποια ξεκάθαρη συμμετρία συχνά καταλήγουν σε αδιέξοδο, καθώς οι εξισώσεις κίνησης είναι αδύνατο να λυθούν αναλυτικά. Μία εξαίρεση σε αυτό ήταν η μελέτη που έγινε στο [142], όπου οι συγγραφείς θεώρησαν μία γενική θεωρία Horndeski μέσω της γενίκευσης των ενεργών δυναμικών που προκύπτουν κατά τη συμπαγοποίηση Kaluza-Klein από τη θεωρία Lovelock [331].

Βασιζόμενοι στην εν λόγω μελέτη, [142], θα επικεντρωθούμε σε αυτό το κεφάλαιο σε εξαγωγή λύσεων σκουληκότρυπας σε συμπαγοποιημένες τετραδιάστατες θεωρίες Lovelock, που ανήκουν στην Horndeski, όπου τα αντίστοιχα ενεργά δυναμικά θεωρούνται άγνωστα. Βέβαια, η ύπαρξη αγνώστων ενεργών δυναμικών του πεδίου καθιστά την εξαγωγή λύσης αδύνατη, καθώς υπάρχουν παραπάνω βαθμοί ελευθερίας από εξισώσεις. Για το λόγο αυτό, θα εργαστούμε ανάποδα. Συγκεκριμένα, θα εξάγουμε λύσεις άμαζης σκουληκότρυπας και θα αποδείξουμε ότι η λύση αυτή είναι η γνωστή σκουληκότρυπα Ellis. Συνεπώς, ενώ η σκουληκότρυπα Ellis είχε βρεθεί ως λύση μίας πολύ πιο απλής θεωρίας, η απουσία κάποιας μάζας ADM επιτρέπει την εξαγωγή της λύσης σε πολύ πιο περίπλοκες θεωρίες βαρύτητας.

Είναι γνωστό ότι η λύση Ellis περιγράφεται από το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + (x^2 + x_0^2)d\Omega^2, \quad (5.25)$$

όπου το x_0 περιγράφει την ακτίνα λαιμού της σκουληκότρυπας και αποτελεί λύση της απλής επέκτασης της δράσης Einstein-Hilbert μέσω της εισαγωγής ενός phantom βαθμωτού πεδίου που περιγράφεται από τη σχέση $\Phi(x) = \arctan(x/x_0)$. Η πρώτη μας προσέγγιση προς την πλήρη θεωρία θα είναι να θεωρήσουμε απλώς την εισαγωγή του όρου Gauss-Bonnet στη δράση με ένα μη-τετριμμένο όρο σύζευξης,

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi G} [R - 2\delta(\partial\Phi)^2 + V[\Phi]\mathcal{G}], \quad (5.26)$$

όπου $\mathcal{G} = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ είναι ο όρος Gauss-Bonnet. Θεωρούμε ότι το στοιχείο δ της βαρυτικής θεωρίας μπορεί να πάρει τιμές ± 1 έτσι ώστε να μπορούμε να διαφοροποιήσουμε την περίπτωση του κανονικού και phantom πεδίου ύλης, ενώ το $V[\Phi]$ είναι μία συνάρτηση σύζευξης του πεδίου στον όρο Gauss-Bonnet το οποίο θα καθοριστεί από τη συνθήκη ύπαρξης λύσης άμαζης σκουληκότρυπας. Οι εξισώσεις κίνησης της θεωρίας από τη μεταβολή της δράσης ως προς τη μετρική και το βαθμωτο πεδίο δίνονται ακολούθως,

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} \quad (5.27)$$

$$\square\Phi = -\frac{\delta}{4}\dot{V}(\Phi)\mathcal{G}, \quad (5.28)$$

όπου

$$T_{\mu\nu} = 2\delta \left(\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial\Phi)^2 \right), \quad (5.29)$$

είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής του κινητικού όρου του πεδίου ενώ ο τανυστής

$$\Theta_{\mu\nu} = -2\nabla_\alpha \left[P_{\mu}^{\alpha}{}_{\nu} \nabla_\beta V(\Phi) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right], \quad (5.30)$$

είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής που προκύπτει από τη μεταβολή της επέκτασης Gauss-Bonnet ως προς τη μετρική, όπου $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda\gamma\delta}$ είναι ο διπλά δεικτός τανυστής Riemann. Ο όρος $\dot{V}(\Phi)$ υποδηλώνει την παραγωγή του $V(\Phi)$ ως προς το Φ .

Η αρχική προσθήκη του όρου Gauss-Bonnet προς τον τελικό μας στόχο δεν ήταν τυχαία. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι στις τέσσερις διαστάσεις ο όρος the Gauss-Bonnet είναι τοπολογικός και μπορεί συνεπώς να δωθεί από την απόκλιση του τοπολογικού ρεύματος

$$K^\xi = -\epsilon^{\xi\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\mu}{}^{\nu} \left[\Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma}\partial_\beta\Gamma_{\gamma\nu}^{\mu} + \frac{2}{3}\Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma}\Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}\Gamma_{\gamma\nu}^{\lambda} \right]. \quad (5.31)$$

Θεωρώντας τη γενική μορφή σφαιρικά συμμετρικής μετρικής

$$ds^2 = -F(x)dt^2 + \frac{dx^2}{F(x)} + r^2(x)d\Omega^2, \quad (5.32)$$

βρίσκουμε ότι το τοπολογικό ρεύμα της σχέσης (5.31) δίνεται ακολούθως,

$$K^\xi = - \left\{ 0, \frac{2F'(x)(1-2F(x)r'(x)^2)}{r(x)^2}, -\frac{2\cot(\theta)F''(x)}{r(x)^2}, 0 \right\}, \quad (5.33)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παραγωγή ως προς τη μεταβλητή x . Αφού $\nabla_\xi K^\xi = \mathcal{G}$, μπορούμε να απλοποιήσουμε τις πράξεις θεωρώντας μηδενική συνάρτηση ερυθρομετατόπισης, δηλαδή $F(x) = 1$, αφού τότε ο όρος Gauss-Bonnet θα μηδενίζεται ταυτοτικά. Επομένως, καθορίζοντας το μετρικό στοιχείο $F(x)$ στο χώρο τοπικών λύσεων,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + r^2(x)d\Omega^2, \quad (5.34)$$

μας μένουν τρεις βαθμοί ελευθερίας ($r(x), \Phi(x), V(\Phi)$) οι οποίοι μπορούν πλέον να αντιμετωπιστούν από τις εξισώσεις. Συγκεκριμένα, οι εξισώσεις κίνησης (5.27,5.28) απλοποιούνται στο σύστημα

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \quad (5.35)$$

$$\square\Phi = 0. \quad (5.36)$$

Η μορφή του πεδίου μπορεί πλέον να καθοριστεί άμεσα κάτω από τη μορφή μετρικής (5.34). Πράγματι, από το στοιχείο $\theta\theta$ των βαρυτικών εξισώσεων εξάγουμε την απλή διαφορική

$$r''(x) + \delta r(x)\Phi'(x)^2 = 0. \quad (5.37)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να παρέχει δύο λύσεις με βάση την τιμή του δ , δηλαδή από το αν το πεδίο είναι κανονικό ή phantom. Για την περίπτωση του $\delta = +1$, η παραπάνω σχέση έχει μόνο θετικά ορισμένα στοιχεία και η μοναδική αποδεκτή λύση είναι ο τετριμμένος χωρόχρονος Minkowski με μηδενικό βαθμωτό πεδίο. Από την άλλη, θέτοντας $\delta = -1$, που θα αποτελέσει και τη βάση μας για το υπόλοιπο κεφάλαιο, βρίσκουμε άμεσα ότι

$$\Phi(x) = \Phi_0 \pm \int \sqrt{\frac{r''(x)}{r(x)}} dx. \quad (5.38)$$

Ο σταθερός όρος Φ_0 μπορεί πάντα να απορροφηθεί μέσω ενός απλού επαναορισμού του πεδίου. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε τη λύση του βαθμωτού πεδίου

$$\Phi(x) = \int \sqrt{\frac{r''(x)}{r(x)}} dx . \quad (5.39)$$

Έχοντας πλέον το βαθμωτό πεδίο, η αντίστοιχη εξίσωση από το στοιχείο xx των βαρυτικών εξισώσεων είναι μία απλή διαφορική του $r(x)$,

$$r(x)r''(x) + r'(x)^2 - 1 = 0 \rightarrow r(x) = \sqrt{(x - c_1)^2 + x_0^2} , \quad (5.40)$$

όπου c_1 και x_0 είναι ελεύθερες σταθερές ολοκλήρωσης. Τονίζουμε ότι το 'φορτίο' c_1 είναι απλά συνέπεια της δυνατότητας της τετριμμένης μετατόπισης της συντεταγμένης x και μπορεί πάντα να απορροφηθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, θέτοντας $\ell^2 = (x - c_1)^2$, βρίσκουμε ότι $d\ell^2 = dx^2$. Επομένως, η συνάρτηση εμβαδού της σκουληχότρυπας δίνεται από τη σχέση

$$r(x) = \sqrt{x^2 + x_0^2} , \quad (5.41)$$

που οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι το βαθμωτό πεδίο έχει πράγματι την ίδια μορφή με το πεδίο που υποστηρίζει τη σκουληχότρυπα Ellis

$$\Phi(x) = \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) . \quad (5.42)$$

Τέλος, αντιμετωπίζουμε το στοιχείο tt των εξισώσεων κίνησης που μπορεί να αντιστραφεί σε διαφορική εξίσωση του δυναμικού σύζευξης $V(\Phi)$ ως προς το Φ και δίνεται από

$$\ddot{V}(\Phi) - 4 \tan(\Phi) \dot{V}(\Phi) = 0 \rightarrow V(\Phi) = \alpha \left(\frac{2 \tan(\Phi)}{3} + \frac{1}{3} \tan(\Phi) \sec^2(\Phi) \right) . \quad (5.43)$$

Επομένως, η σκουληχότρυπα Ellis που δίνεται από τη διπλέτα

$$\left\{ g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, (x^2 + x_0^2), (x^2 + x_0^2) \sin^2 \theta), \Phi(x) = \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) \right\} , \quad (5.44)$$

υποστηρίζεται και από την εκτεταμένη βαρυτική θεωρία

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi G} \left[R + 2(\partial\Phi)^2 + \alpha \left(\frac{2 \tan(\Phi)}{3} + \frac{1}{3} \tan(\Phi) \sec^2(\Phi) \right) \mathcal{G} \right] , \quad (5.45)$$

που περιλαμβάνει μη-τετριμμένη σύζευξη στον όρο Gauss-Bonnet.

Συνεχίζουμε τώρα με τη γενίκευση του αποτελέσματος εισάγοντας υψηλότερες τάξεις παραγωγίσις του πεδίου στη θεωρία, κάτι το οποίο αποτελεί σύνηθες χαρακτηριστικό των συμπαγοποιημένων θεωριών Lovelock [150, 142, 331]. Υπάρχει όμως και ένας δεύτερος σημαντικός λόγος πίσω από αυτή τη θεώρηση. Είναι γνωστό ότι η ύπαρξη ενός phantom πεδίου σε μία βαρυτική θεωρία θα παράγει βαρυτικές αστάθειες στη τοπική λύση [349]. Όμως, όταν η δράση της θεωρίας μας εμπεριέχει υψηλότερες τάξεις παραγωγίσις του πεδίου, δε μπορούμε να επιβεβαιώσουμε απευθείας ότι ο όρος $\delta = -1$ θα αναπαράγει αναγκαστικά ασταθείς τοπικές λύσεις, καθώς είναι πιθανό οι κινητικοί όροι υψηλότερης τάξης να μπορούν να διορθώσουν τέτοιου είδους παθολογίες [2]. Το εν λόγω αποτέλεσμα το είδαμε ήδη στη περίπτωση της τετραδιάστατης θεωρίας Gauss-Bonnet όπου το πρόσημο του κανονικού κινητικού όρου με το πρόσημο της σταθεράς των υψηλότερων

συζεύξεων έπρεπε απλώς να είναι αντίθετα. Πιο συγκεκριμένα, όπως έχουμε προαναφέρει, το πεδίο αυτών των θεωριών πρέπει να αντιμετωπίζεται ως βαρυτικός βαθμός ελευθερίας και όχι ως κανονικό πεδίο ύλης. Τέλος, αναφέρουμε ότι λόγω υψηλότερων όρων παραγωγίσισης, δεν είναι σαφές από τον ορισμό της συζυγούς ορμής αν το πεδίο είναι πράγματι phantom ή όχι. Για τους παραπάνω λόγους θεωρήσαμε την ακόλουθη επέκταση της δράσης

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{|g|}}{16\pi G} \left[R + 2(\partial\Phi^2) + \alpha \left(\frac{2 \tan(\Phi)}{3} + \frac{1}{3} \tan(\Phi) \sec^2(\Phi) \right) \mathcal{G} \right. \\ \left. + V_2(\Phi) G^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + V_3(\Phi) (\nabla\Phi)^4 + V_4(\Phi) (\nabla\Phi)^2 (\square\Phi) \right], \quad (5.46)$$

η οποία μελετήθηκε σε ακόμα μεγαλύτερη γενικότητα στο [142]. Η περιπλοκότητα της παραπάνω θεωρίας οδηγεί σε υψηλά μη-τετριμμένες εξισώσεις που δεν παρέχουν περαιτέρω πληροφορίες από το να γραφτούν σε τανυστική μορφή. Ο στόχος μας είναι να ελέγξουμε κατά πόσο η διπλέτα της λύσης Ellis ,(5.44), μπορεί να υποστηριχθεί και από την εν λόγω επέκταση.

Λόγω της απλότητας της λύσης Ellis , όλο το διαφορικό σύστημα των βαρυτικών εξισώσεων μπορεί να αντιστραφεί και να καταλήξουμε σε ένα καινούριο σύστημα διαφορικών των τριών δυναμικών ως προς το βαθμωτό πεδίο. Πράγματι, οι εξισώσεις κίνησης σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς δίνονται ακολούθως,

$$tt : 2 \tan(\Phi) \dot{V}_2(\Phi) - V_2(\Phi) (6 \tan^2(\Phi) - 3) - V_3(\Phi) + \dot{V}_4(\Phi) - 4V_4(\Phi) \tan(\Phi) = 0, \quad (5.47)$$

$$xx : V_2(\Phi) (2 \tan^2(\Phi) - 1) + 3V_3(\Phi) - \dot{V}_4(\Phi) + 4V_4(\Phi) \tan(\Phi) = 0, \quad (5.48)$$

$$\theta\theta : \tan(\Phi) \dot{V}_2(\Phi) + V_2(\Phi) - 4V_2(\Phi) \tan^2(\Phi) - V_3(\Phi) + \dot{V}_4(\Phi) - 4V_4(\Phi) \tan(\Phi) = 0. \quad (5.49)$$

Τονίζουμε ότι το x_0 δεν εμφανίζεται στις βαρυτικές εξισώσεις κίνησης, που σημαίνει ότι η ακτίνα λαιμού της σκουληκότρυπας επιβιώνει ως ελεύθερο φορτίο στην εκτεταμένη θεωρία. Παρατηρούμε τώρα εύκολα ότι ο συνδυασμός των εξισώσεων $tt - \theta\theta$ δίνει μία απλή διαφορική του V_2 . Πράγματι, εξάγουμε ότι

$$tt - \theta\theta : \sin(2\Phi) \dot{V}_2(\Phi) + 4V_2(\Phi) \cos(2\Phi) = 0 \implies V_2(\Phi) = \beta \csc^2(2\Phi), \quad (5.50)$$

όπου η β είναι σταθερά ολοκλήρωσης της θεωρίας και αποτελεί σταθερά σύζευξης. Συνεχίζουμε παρατηρώντας ότι οι εξισώσεις tt και xx είναι γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις του V_3 . Από τη σχέση xx βρίσκουμε ότι

$$V_3(\Phi) = \frac{1}{3} \left(\beta \csc^2(2\Phi) - \frac{1}{2} \beta \sec^4(\Phi) + \dot{V}_4(\Phi) - 4V_4(\Phi) \tan(\Phi) \right). \quad (5.51)$$

Εισάγοντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην εξίσωση tt εξάγουμε μία απλή διαφορική του V_4

$$\beta - 2 \sin^2(\Phi) \cos^4(\Phi) \dot{V}_4(\Phi) + V_4(\Phi) \sin^3(2\Phi) = 0, \quad (5.52)$$

του οποίου η λύση δίνει

$$V_4(\Phi) = -\frac{1}{2} \beta \csc(\Phi) \sec^3(\Phi) + \gamma \sec^4(\Phi), \quad (5.53)$$

ενώ το V_3 δίνεται πλέον αντίστοιχα

$$V_3(\Phi) = \beta \csc^2(2\Phi). \quad (5.54)$$

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι η εν λόγω επιλογή των δυναμικών μηδενίζει on-shell όλη την επέκταση της δράσης που θεωρήσαμε και είναι υπό αυτή την έννοια που η λύση Ellis μπορεί να υποστηρίζεται από τη γενικευμένη θεωρία. Όμως, οποιαδήποτε απόκλιση από τη λύση της σκουληκότρυπας Ellis στη θεωρία, είτε θεωρώντας έμμαζες σκουληκότρυπες, είτε θεωρώντας βαρυτικές διαταραχές στη γεωμετρία, θα "ενεργοποιήσει" τη συνεισφορά του όρου Gauss-Bonnet και των υψηλότερων παραγωγίσεων, κάτι το οποίο επιτρέπει πολύ πιο πλούσιο κατάλογο λύσεων και φυσικών φαινομένων από την αρχική θεωρία του Ellis.

Ένα δεύτερο σημαντικό σχόλιο αφορά τη γνωστή αστάθεια των λύσεων σκουληκότρυπας στις θεωρίες Horndeski [350, 351]. Η εισαγωγή των λόγω επεκτάσεων στη θεωρία μπορούν δυναμικά να επιρρεάσουν ισχυρά το χρόνο ζωής τέτοιων αντικειμένων σε αντίθεση με τη θεωρία του Ellis. Για την επιβεβαίωση αυτού, απαιτείτε μία προσεκτική και μη-τετριμμένη ανάλυση πολικών και αξονικών διαταραχών στη γεωμετρία για να ελέγξει κανείς κατά πόσο η ύπαρξη της γεωμετρίας Ellis στην εκτεταμένη θεωρία είναι πιο ευσταθής σε σχέση με την τετριμμένη. Λόγω των σταθερών σύζευξης που η εκτεταμένη θεωρία περιλαμβάνει, αναμένουμε ο χρόνος ζωής να είναι πράγματι αρκετά διαφορετικός σε σχέση με την αρχική λύση Ellis, καθώς θα συνεισφέρουν στις εξισώσεις διάδοσης των διαταραχών. Η εν λόγω μελέτη αποτελεί μία ενδιαφέρουσα συνέχεια της ερευνητικής αυτής εργασίας.

5.3 Έμμαζες σκουληκότρυπες σε θεωρίες Horndeski από δύσμορφους μετασχηματισμούς της Ellis

Μέχρι στιγμής, επικεντρωθήκαμε σε άμαζες σκουληκότρυπες, αφού η γενικότητα της προσέγγισής μας καθιστά την εξαγωγή μίας πλήρους βαρυτικής λύσης αδύνατη. Τονίζουμε, όμως, ότι έμμαζες σκουληκότρυπες μπορούν πάντα να βρεθούν στο γενικό πλαίσιο της Horndeski μέσω απλών σύμμορφων ή γενικευμένων δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας. Οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί γεωμετρίας είχαν προταθεί πρώτη φορά από τον Bekenstein [18],

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega(\Phi)^2 g_{\mu\nu} - W(\Phi) \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \quad (5.55)$$

ως γενίκευση της πιθανής γεωμετρίας πάνω στην οποία η ύλη μίας βαρυτικής θεωρίας διαδίδεται. Αρκετά αργότερα, στο [352] αποδείχθηκε ότι οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί γεωμετρίας από μία θεωρία Horndeski καταλήγουν σε κάποια άλλη θεωρία Horndeski ή σε επεκτάσεις της, ήτοι στις θεωρίες Beyond Horndeski [353, 121] και στις θεωρίες Degenerate Higher Order Scalar Tensor (DHOST) [354, 123, 125]. Η απεικόνιση μίας θεωρίας Horndeski σε επεκτάσεις της είναι εφικτή αν επιλέξουμε τη σύμμορφη συνάρτηση Ω ή/και τη δύσμορφη συναρτήση W να εξαρτώνται και από τον κινητικό όρο του βαθμωτού πεδίου $X = -\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2$. Οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί γεωμετρίας έχουν μελετηθεί έκτοτε ως αλγόριθμος εύρεσης λύσεων με πληθώρα μη-τετριμμένων παραδειγμάτων [355, 356, 3, 130, 141, 357], όπου η συνήθης προσέγγιση ήταν η εξαγωγή λύσεων σκουληκότρυπας από προυπάρχουσες hairy μελανές οπές ή απλά η εύρεση νέων τοπικών λύσεων. Προς αποφυγή σύγχυσης, θα ακολουθήσουμε τη συνήθη ονοματολογία όπου η $g_{\mu\nu}$ ονομάζεται μετρική τροφοδότησης (seed metric). Παρουσιάζουμε επίσης κάποιους βασικούς κανόνες μετασχηματισμού κάτω από δύσμορφους μετασχηματισμούς γεωμετρίας στο τέταρτο παράρτημα.

Κάτω από το μετασχηματισμό (5.55), η δύσμορφη μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$ θα αποτελεί λύση του αντίστοιχου δύσμορφου πλαισίου της θεωρίας Horndeski σε άμεση αναλογία με τη γνωστή συσχέτιση των πλαισίων Einstein και Jordan [358, 359]. Πρωτού συνεχίσουμε στην ανάλυση της δύσμορφης

γεωμετρίας, οφείλουμε να αναφέρουμε ότι ο μετασχηματισμός του αντίστοιχου στοιχείου όγκου της μετρικής τροφοδότησης στη δράση δίνεται από τη σχέση

$$\sqrt{-\hat{g}}d^4x = (\Omega^6(\Omega^2 + 2WX))^{1/2}\sqrt{-g}d^4x, \quad (5.56)$$

μέσω του θεωρήματος ορίζουσας του Sylvester. Αντίστοιχα, η αντίστροφη δύσμορφη μετρική δίνεται από την σχέση Sherman-Morrison

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2} \left(g^{\mu\nu} + \frac{W}{\Omega^2 + 2WX} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi \right), \quad (5.57)$$

όπου οι ανταλλοίωτοι παράγωγοι του πεδίου, $\partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi$, ορίζονται μέσω της αντίστροφης μετρικής τροφοδότησης $g^{\mu\nu}$. Επομένως, όπως είναι σαφές από τις εξισώσεις (5.55), (5.56) και (5.57), οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί γεωμετρίας περιορίζονται κάτω από τη συνθήκη αντιστρεψιμότητας του μετασχηματισμού και τη συνθήκη υπογραφής Lorentz της δύσμορφης μετρικής από τις ανισότητες:

$$\Omega^2 > 0, \quad \Omega^2 + 2WX > 0 \quad (5.58)$$

Θεωρώντας τώρα μία οποιαδήποτε ασυμπτωτικά επίπεδη στατική και σφαιρικά συμμετρική μετρική της μορφής (5.32), που υποστηρίζεται από ένα στατικό και σφαιρικά συμμετρικό βαθμωτό πεδίο, μπορούμε να εξάγουμε το δύσμορφο στοιχείο μήκους της γεωμετρίας που δίνεται από

$$d\hat{s}^2 = -F(x)\Omega^2(\Phi)dt^2 + \frac{\Omega^2(\Phi) + 2W(\Phi)X}{F(x)}dx^2 + \Omega^2(\Phi)r^2(x)d\Omega^2 \quad (5.59)$$

όπου τονίζουμε ότι το $d\Omega^2$ είναι το στοιχείο στερεάς γωνίας της σφαιρικής φύλλωσης ενώ το $\Omega^2(\Phi)$ είναι ο παράγοντας του σύμμορφου μέρους του μετασχηματισμού.

Όπως γνωρίζουμε, η ύπαρξη ορίζοντα γεγονότων δίνεται από τη συνθήκη της φωτοειδούς υπερεπιφάνειας μέσω της λύσης του $g_{tt} = 0$, δηλαδή της υπερεπιφάνειας Killing της ισομετρίας στις μετατοπίσεις χρόνου. Εν γένει, όμως, η ύπαρξη οριζόντων μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας την νόρμα του διανύσματος Kodama $\nabla_\mu R \nabla^\mu R$, όπου R η συνάρτηση εμβαδού της φυλλωμένης σφαίρας S^2 . Ακολουθώντας τη μελέτη του [356] μονές θετικές ρίζες της νόρμας του διανύσματος Kodama αντιστοιχούν σε οριζόντες γεγονότων, ενώ οι διπλές ρίζες υποδεικνύουν την πιθανή ύπαρξη κάποιου λαϊμού σκουληκότρυπας. Εισάγωντας τη γενική δύσμορφη μετρική της (5.59) εξάγουμε το αποτέλεσμα

$$\nabla_\mu R \nabla^\mu R = \frac{F(x)}{\Omega^2(\Phi) + 2W(\Phi)X} [\Omega_\Phi r(x) \partial_x \Phi + \Omega(\Phi) \partial_x r(x)]^2, \quad (5.60)$$

όπου οι τόνοι συμβολίζουν παραγωγή ως προς την ακτινική συντεταγμένη x , ενώ το Ω_Φ είναι η παραγωγή του σύμμορφου παράγοντα Ω ως προς το βαθμωτό πεδίο. Οι ρίζες της παραπάνω σχέσης μας παρέχουν όλους τους πιθανούς οριζόντες της δύσμορφης γεωμετρίας. Τονίζουμε ότι αν υπάρχουν διπλές ρίζες στην (5.60), πρέπει να ελέγξουμε το λαϊμό σκουληκότρυπας ως προς την προσπελασιμότητα μέσω των συνθηκών που προαναφέραμε, δηλαδή τη συνθήκη ελαχίστου εμβαδού και τη συνθήκη απουσίας οριζόντα γεγονότων, προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ότι η δύσμορφη μετρική περιγράφει πράγματι μία προσπελάσιμη σκουληκότρυπα. Εκτός της πιθανής ύπαρξης διπλής ρίζας από το παράγοντα στη παρένθεση, διπλή ρίζα μπορεί να βρεθεί επίσης μέσω της σχέσης $(\Omega^2(\Phi) + 2W(\Phi)X)^{-1} = 0$, κάτι το οποίο είχε χρησιμοποιηθεί στα [3, 130] ως μεθοδολογία εξαγωγής λύσεων προσπελάσιμης σκουληκότρυπας από μελανές οπές.

Επιστρέφοντας τώρα στη περίπτωση της σκουληχότρυπας Ellis , όπου $F(x) = 1$, μπορούμε εύκολα να εξάγουμε καινούριες έμμαζες σκουληχότρυπες μέσα στο γενικότερο πλαίσιο της Horndeski , ακολουθώντας τέτοιου είδους μετασχηματισμούς. Πράγματι, ένας γενικός δύσμορφος μετασχηματός στην σκουληχότρυπα Ellis μας δίνει το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -\Omega^2(\Phi)dt^2 + (\Omega^2(\Phi) + 2W(\Phi)X)dx^2 + \Omega^2(\Phi)r^2(x)d\Omega^2. \quad (5.61)$$

Κάτω από την εν λόγω μορφή μετρικής, η ύπαρξη έμμαζης σκουληχότρυπας με ασυμπτωτική επιπεδότητα μεταφράζεται στις παρακάτω συνθήκες:

- Ο σύμμορφος παράγοντας $\Omega(\Phi)^2$ είναι θετικά ορισμένος και αποσβένει στο άπειρο ως $\Omega(\Phi(x))^2 \rightarrow 1 - \frac{2M}{x}$ σε πρώτη τάξη του x^{-1} . Η ενεργή μάζα ADM που εμφανίσαμε θα σχετίζεται αναγκαστικά με την ακτίνα λαιμού της μετρικής τροφοδότησης x_0 , αφού δεν υπάρχουν άλλα ελεύθερα φορτία.
- Ο συνδυασμός $(\Omega^2(\Phi) + 2W(\Phi)X)$ αποσβένει στο άπειρο και είναι θετικά ορισμένος.
- Ο όρος $\Omega(\Phi)r(x)$ έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης εμβαδού σε συντεταγμένες Schwarzschild , δηλαδή $\Omega^2(\Phi)r(x)^2 \rightarrow x$ στη χωρική ασύμπτωτη, ενώ υπάρχει ακόμα μία μη-μηδενική ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει, η οποία αντιστοιχεί στην ακτίνα λαιμού. Αναφέρουμε για πληρότητα ότι αν μπορεί να ικανοποιηθεί και η σχέση $(\Omega^2(\Phi) + 2W(\Phi)X)^{-1} = 0$ μέσω διπλής ρίζας, τότε είναι πιθανό η δύσμορφη γεωμετρία να περιγράφεται από παραπάνω από ένα λαιμούς.

Οι παραπάνω τρεις συνθήκες μεταφράζονται στο παρακάτω συμπέρασμα: Έχοντας εξάγει τη σκουληχότρυπα Ellis στο πλαίσιο της εκτεταμένης θεωρίας Horndeski , μπορούμε μέσω δύσμορφων μετασχηματισμών να εξάγουμε έμμαζες σκουληχότρυπες σε άλλες θεωρίες Horndeski . Το εν λόγω συμπέρασμα αποτελεί αλγόριθμο/μεθοδολογία εύρεσης λύσεων σκουληχότρυπας σε θεωρίες Horndeski . Η εν λόγω μεθοδολογία μπορεί κάλλιστα να επεκταθεί χρησιμοποιώντας την περαιτέρω εξάρτηση $\Omega(\Phi, X)$, $W(\Phi, X)$, που απεικονίζουν τη θεωρία τροφοδότησης σε κάποιο κλάδο της Beyond Horndeski ή DHOST ανάλογα την επιλογή μας[125]. Επιπροσθέτως, η ύπαρξη της λύσης Ellis στην εκτεταμένη θεωρία εμπλουτίζει μέσω της διαδικασίας αυτής τα διάφορα πλαίσια Horndeski που υποστηρίζουν λύσεις σκουληχότρυπας.

Ας δούμε τώρα ένα σχετικά απλό παράδειγμα των παραπάνω. Επιλέγουμε έναν τετριμμένο δύσμορφο μετασχηματισμό με $W = 0$, που καταλήγει απλά σε σύμμορφες απεικονίσεις. Η επιλογή

$$g_{\mu\nu} \rightarrow (1 - 2\zeta \cos \Phi)g_{\mu\nu} \quad (5.62)$$

όπου ζ μία καινούρια παράμετρος που επιλέγουμε για να έχουμε καλώς ορισμένο σύμμορφο παράγοντα, μας δίνει το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\zeta x_0}{\sqrt{x^2 + x_0^2}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\zeta x_0}{\sqrt{x^2 + x_0^2}}\right) [dx^2 + (x^2 + x_0^2)d\Omega^2]. \quad (5.63)$$

Είναι τώρα εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η συνάρτηση εμβαδού

$$R(x) = \sqrt{\left(1 - \frac{2\zeta x_0}{\sqrt{x^2 + x_0^2}}\right) (x^2 + x_0^2)} = \sqrt{x_0 \left(x_0 - 2\zeta \sqrt{x^2 + x_0^2}\right) + x^2} \quad (5.64)$$

δίνει πράγματι τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά $R(x) \sim x$ στο $x \rightarrow \infty$. Από την άλλη, η απουσία οριζοντα γεγονότων περιορίζει τη παράμετρο ζ μέσω του άνω φράγματος

$$\zeta < \frac{1}{2}, \quad (5.65)$$

το οποίο καθιστά και τον μετασχηματισμό που χρησιμοποιήσαμε καλώς ορισμένο. Επιβεβαιώνουμε ότι η γεωμετρία έχει πράγματι ένα ελάχιστο εμβαδό της φυλλωμένης σφαίρας στο $x = 0$ με μία καινούρια ακτίνα λαιμού

$$x_t = \sqrt{1 - 2\zeta} x_0. \quad (5.66)$$

Τέλος, επιβεβαιώνουμε ότι η αντίστοιχη μάζα ADM της παραπάνω σκουληκότρυπας δίνεται απλά από τη σχέση

$$M_{effective} = \zeta x_0 \quad (5.67)$$

που σημαίνει, όπως προαναφέραμε, ότι η ακτίνα λαιμού της μετρικής τροφοδότησης μπορεί να έχει το ρόλο της μάζας ADM στο σύμμορφο/δύσμορφο πλαίσιο της θεωρίας. Αναφέρουμε για πληρότητα ότι εφόσον ο σύμμορφος μετασχηματισμός δεν έχει ιδιάζοντα σημεία, η γεωμετρία σκουληκότρυπας που εξάγαμε είναι ασφαλής από μοναδικότητες καμπυλότητας.

5.4 Επαναβαθμωτοποίηση της σκουληκότρυπας Ellis : Έμ-μαζες σκουληκότρυπες από διαταρακτική προσέγγιση

Δείξαμε ότι η σκουληκότρυπα Ellis υποστηρίζεται από την εκτεταμένη θεωρία Horndeski . Υπάρχει όμως το εξής σημαντικό ζήτημα: Η σκουληκότρυπα Ellis της εκτεταμένης θεωρίας δεν παρέχει καμία πληροφορία αναφορικά με τις σταθερές σύζευξης που υπάρχουν στην επέκταση. Η περίπτωση αυτή θυμίζει το σενάριο όπου μία τοπική λύση της Γενικής Σχετικότητας υποστηρίζεται από μία θεωρία βαθμωτού τανυστή όταν το πεδίο της θεωρίας δεν είναι δυναμικό. Υπό αυτή την έννοια, φαίνεται να εμφανίζεται μία ενδιαφέρουσα συσχέτιση με το ζήτημα της βαθμωτοποίησης.

Το φαινόμενο της βαθμωτοποίησης περιγράφει την διέγερση του βαθμωτού πεδίου της θεωρίας κάτω από μία τετριμμένη λύση κενού, κάτι το οποίο μπορεί να αλλάξει έντονα τις ιδιότητες της γεωμετρίας. Πράγματι, το φαινόμενο της φυσικής βαθμωτοποίησης των μελανών οπών βασίζεται στη δυναμική συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου πάνω σε μία λύση κενού το οποίο μπορεί να παραμορφώσει τη γεωμετρία με διαταρακτικό τρόπο. Θυμίζουμε εδώ ότι η διαταρακτική προσέγγιση της βαθμωτοποίησης παύει να ισχύει σε μελανές οπές μικρού μεγέθους, όπως έχουμε ήδη εξηγήσει. Τονίζουμε ότι θα ασχοληθούμε με την έννοια της φυσικής βαθμωτοποίησης, αντί της αυθόρμητης βαθμωτοποίησης [360, 361, 362], όπου η διέγερση του βαθμωτού πεδίου βασίζεται σε κάποια ταχυονική αστάθεια. Σε άμεση αναλογία με την περίπτωση των μελανών οπών της δράσης Einstein-Hilbert, η σκουληκότρυπα Ellis αποτελεί μία λύση της δράσης Ellis , δηλαδή της δράσης Einstein-Hilbert με την ελάχιστη επέκταση ενός phantom βαθμωτού πεδίου. Δείξαμε όμως ότι η εν λόγω λύση υποστηρίζεται και από την εκτεταμένη θεωρία μέσω των on-shell μηδενισμών τανυστών ενέργειας ορμής που περιέχει. Μπορούμε λοιπόν να περάσουμε χρονοανεξάρτητες διαταραχές στη γεωμετρία και να επιβεβαιώσουμε ότι και η γεωμετρία της σκουληκότρυπας Ellis μπορεί να τροποποιηθεί από την επέκταση της θεωρίας Horndeski, σε άμεση αναλογία με τη γεωμετρία Schwarzschild που μπορεί να τροποποιηθεί σε θεωρίες Horndeski.

Συγκεκριμένα, για την περίπτωση της σκουληχότρυπας Ellis που υποστηρίζεται ήδη από ένα μη-τετριμμένο βαθμωτό πεδίο, εισάγουμε τον όρο 'επαναβαθμωτοποίηση' για να διαχωρίσουμε το εν λόγω σενάριο από τη συνήθη διαδικασία. Η επαναβαθμωτοποίηση βασίζεται στην ιδέα ότι το προ-πάρχον βαθμωτό πεδίο της σκουληχότρυπας μπορεί να αποκτήσει πιο πλούσια δυναμική λόγω της ύπαρξης των μη-τετριμμένων συζεύξεων στη δράση, κάτι το οποίο θα παρέχει και πληροφορίες αναφορικά με τις σταθερές σύζευξης της θεωρίας. Ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον φαινόμενο που προκύπτει είναι ότι η τροποποιημένη λύση Ellis αποκτάει μάζα λόγω του όρου Gauss-Bonnet, όπως θα αποδείξουμε ακολούθως.

Επιθυμούμε λοιπόν να εξάγουμε νέες λύσεις στην επέκταση της θεωρίας Horndeski που δίνεται στην (5.46), με τα δυναμικά της θεωρίας να δίνονται από τις σχέσεις (5.50), (5.53) και (5.54). Επιλέγουμε την ακόλουθη γενική μορφή σφαιρικά συμμετρικής μετρικής

$$ds^2 = -F(x)dt^2 + \frac{dx^2}{S(x)} + (x^2 + x_0^2)d\Omega^2 . \quad (5.68)$$

Λόγω της ξεκάθαρης πολυπλοκότητας των εξισώσεων κίνησης, είναι σαφές ότι αναλυτικές λύσεις είναι αδύνατες. Για τον λόγο αυτό, επικεντρωθήκαμε στη διαταρακτική προσέγγιση της επαναβαθμωτοποιημένης λύσης, μέσω των σταθερών σύζευξης. Εφόσον η σκουληχότρυπα Ellis αποτελεί λύση της επέκτασης της θεωρίας, μπορούμε να την επιλέξουμε ως την αντίστοιχη λύση (ψευδούς) 'κενού' της θεωρίας. Επιλέγουμε επίσης τη παράμετρο της διαταραχής να είναι η σταθερά σύζευξης α του όρου Gauss-Bonnet. Για να διατηρήσουμε μία σχετική απλότητα στους υπολογισμούς, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι υπόλοιπες σταθερές σύζευξης, β και γ , περιγράφονται από μία σταθερά αναλογίας ως προς το α . Συγκεκριμένα, θέτουμε $\beta = \alpha\lambda_1$ και $\gamma = \alpha\lambda_2$, όπου $\lambda_{1,2}$ υποδηλώνουν αδιάστατες σταθερές. Συνεχίζουμε λοιπόν χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διαταρακτική προσέγγιση:

$$F(x) = 1 + \alpha f(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) , \quad (5.69)$$

$$S(x) = 1 + \alpha s(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) , \quad (5.70)$$

$$\Phi(x) = \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) + \alpha h(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) . \quad (5.71)$$

Οι εν λόγω προσεγγίσεις θα μας επιτρέψουν να αποτυπώσουμε τις πληροφορίες της εκτεταμένης θεωρίας στη τοπική λύση της γεωμετρίας, παραμορφώνοντας την άμαζη σκουληχότρυπα Ellis σε έμμαζη. Πράγματι, εισάγοντας τα παραπάνω στις εξισώσεις κίνησης και κρατώντας μόνο την πρώτη τάξη διαταραχής $\mathcal{O}(\alpha)$, εξάγουμε το ακόλουθο ιδιαίτερα απλό διαφορικό σύστημα

$$(-2x_0h + xs)' = 0 , \quad (5.72)$$

$$xf' + 2x_0h' + s = 0 , \quad (5.73)$$

$$(x^2 + x_0^2)f'' + x(f' - s') - 2s = 0 . \quad (5.74)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχούν στις βαρυτικές εξισώσεις (t, t) , (r, r) και το συνδυασμό $(t, t) - (\theta, \theta)$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι σταθερές σύζευξης λ_1 και λ_2 δεν εμφανίζονται στις εξισώσεις. Επομένως, σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς το α , η λύση τροποποιείται

καθαρά λόγω του όρου Gauss-Bonnet. Ολοκληρώνοντας το παραπάνω σύστημα, εξάγουμε ότι

$$h(x) = \frac{h_1 x_0}{x} \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) - h_1 + \frac{h_0}{x} - \frac{s_0}{2x_0}, \quad (5.75)$$

$$f(x) = f_0 + 2h_1 \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad (5.76)$$

$$s(x) = \frac{2x_0}{x^2} \left(-h_1 x + h_1 x_0 \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) + h_0 \right), \quad (5.77)$$

όπου h_0 , h_1 , f_0 , και s_0 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Για να αποφύγουμε πιθανές αποκλίσεις του βαθμωτού πεδίου στο $x = 0$, πρέπει να θέσουμε $h_0 = 0$. Αντίστοιχα, για να έχουμε την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου στο άπειρο, θέτουμε $s_0 = -2h_1 x_0$. Τέλος, η συνθήκη ασυμπτωτικής επιπεδότητας επιβάλλει ότι $f_0 = -\pi h_1$. Έχουμε επομένως μόνο την ανεξάρτητη σταθερά ολοκλήρωσης h_1 , που δεν μπορεί να καθοριστεί από γεωμετρικές συνθήκες. Η πλήρης λύση δίνεται από τα στοιχεία

$$F(x) = 1 + \alpha \left[2h_1 \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) + \pi h_1 \right], \quad (5.78)$$

$$S(x) = 1 - \frac{2\alpha h_1 x_0}{x^2} \left[x - x_0 \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) \right], \quad (5.79)$$

$$\Phi(x) = \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{\alpha h_1 x_0}{x} \arctan\left(\frac{x}{x_0}\right). \quad (5.80)$$

Η εν λόγω λύση παρουσιάζει ελάχιστο στη συνάρτηση εμβαδού στο $x = 0$, δεν έχει οριζόντες (λόγω διαταρακτικής προσέγγισης) και περιγράφει μία παραμορφωμένη σκουληκότρυπα Ellis. Έχουμε λοιπόν το αποτέλεσμα ότι η εισαγωγή του όρου Gauss-Bonnet στη δράση Ellis επιτρέπει τη σκουληκότρυπα Ellis, αλλά και μία καινούργια επαναβαθμωτοποιημένη γεωμετρία. Αναπτύσσοντας τη λύση στο άπειρο όμως, έχουμε ότι

$$F(x) = 1 - \frac{2\alpha h_1 x_0}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \text{και} \quad S(x) = 1 - \frac{2\alpha h_1 x_0}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (5.81)$$

Επομένως, μέσω της διαδικασίας επαναβαθμωτοποίησης, η σκουληκότρυπα Ellis, που αποτελεί μία μη-βαρυτική γεωμετρία λόγω έλλειψης μάζας, μπορεί να αποκτήσει μία μάζα ADM που δίνεται από τη σχέση $M = \alpha h_1 x_0$. Παρατηρούμε ότι η μάζα αυτή εξαρτάται από τη σταθερά σύζευξης α , κάτι το οποίο σημαίνει ότι ο όρος Gauss-Bonnet εισάγει όρους μάζας στην σκουληκότρυπα. Ένα ενδιαφέρον σχόλιο είναι ότι ο φορτίο του βαθμωτού πεδίου στην επαναβαθμωτοποιημένη λύση είναι $q = -x_0(1 - \frac{1}{2}\alpha h_1 \pi) = -x_0 + \frac{1}{2}M\pi$. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος Gauss-Bonnet έχει εισάγει συνεισφορά και στο φορτίο του βαθμωτού πεδίου, κάτι το οποίο αναμενόταν. Από τη παραπάνω σχέση, η ακτίνα λαιμού x_0 της σκουληκότρυπας δίνεται ως προς τις παραμέτρους της λύσης q , h_1 και α από τη σχέση $|x_0| = q(1 + \frac{1}{2}\alpha h_1 \pi)$. Επομένως, η επαναβαθμωτοποιημένη σκουληκότρυπα είναι μεγαλύτερη από την Ellis για το ίδιο βαθμωτό φορτίο q των δύο λύσεων.

Τέλος, αναφέρουμε για πληρότητα ότι η εν λόγω διαταρακτική προσέγγιση της έμμορφης σκουληκότρυπας παραβιάζει τη συμμετρία ομοτιμίας στην ακτινική συντεταγμένη. Ενώ κάτι τέτοιο δεν εμφανίζει ευτυχώς προβλήματα αρνητικής μάζας σε κάποιο από τα δύο σύμπαντα, η ερυθρομετατόπιση στο κάθε στόμα της σκουληκότρυπας είναι διαφορετική. Θυμίζουμε ότι, αν εργαζόμασταν σε τοπολογία εσωσυμπαντικής σκουληκότρυπας, αυτό θα σήμαινε άμεσα ότι η εν λόγω γεωμετρία θα μετατρέπεται σε χρονομηχανή.

5.5 Συμπεράσματα

Στο εν λόγω κεφάλαιο ασχοληθήκαμε διεξοδικά με τη μελέτη γεωμετριών σκουληκότρυπας σε θεωρίες Horndeski χωρίς να επιβάλλουμε συγκεκριμένες συμμετρίες στο βαθμωτό πεδίο της θεωρίας. Η έρευνα μας βασίστηκε στη γενίκευση των ενεργών δυναμικών βαθμωτού πεδίου από τη θεμελιώδη θεωρία Lovelock, που περιέχει τον όρο Gauss-Bonnet και επιπλέον όρους παραγωγίσιμης πεδίου υψηλότερης τάξης. Ο στόχος μας ήταν η εξαγωγή της σκουληκότρυπας Ellis στο γενικευμένο πλαίσιο αλλά και η παρουσίαση μεθοδολογιών εξαγωγής έμμαζων σκουληκότρυπων χρησιμοποιώντας την άμαξη σκουληκότρυπα Ellis. Παρουσιάσαμε δύο διαφορετικές μεθοδολογίες. Η πρώτη βασίστηκε στο πλαίσιο θεωριών Horndeski, όπου δείξαμε την δυνατότητα εξαγωγής λύσεων σκουληκότρυπας σε (δυναμικά άπειρες) θεωρίες Horndeski μέσω δυσμορφων μετασχηματισμών, ενώ στη δεύτερη εκμεταλλευτήκαμε το φαινόμενο της επαναβαθμωτοποίησης για να εξάγουμε νέες λύσεις στο καθορισμένο μοντέλο. Η επαναβαθμωτοποίηση μας οδήγησε στο ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα ότι η σκουληκότρυπα Ellis μπορεί να αποκτήσει μάζα μέσα από τον όρο Gauss-Bonnet.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα της μελέτης μας είναι ότι παρέχουμε έναν αυτοσυνεπή τρόπο να εξάγουμε λύσεις σκουληκότρυπας σε θεωρίες Horndeski χωρίς να επιβάλλουμε συμμετρίες στη θεωρία. Γνωρίζουμε για την περίπτωση των hairy μελανών οπών ότι η προσέγγιση των παραμορφωμένων γεωμετριών βασίζεται στις λύσεις κενού της δράσης Einstein-Hilbert. Σε άμεση αναλογία, οι πιθανές λύσεις σκουληκότρυπας που μπορούν να υποστηρίξουν οι θεωρίες Horndeski μπορούν πλέον να μελετηθούν υπό το πρίσμα της γεωμετρίας Ellis ως λύση (ψευδούς) 'κενού' της θεωρίας, είτε μέσω δυσμορφων μετασχηματισμων γεωμετρίας είτε μέσω της επαναβαθμωτοποίησης. Τονίζουμε ότι η άμαξη φύση της γεωμετρίας Ellis, αλλά και η απλότητα της γεωμετρίας λαιμού αποτέλεσε μία σημαντική διευκόλυνση στους υπολογισμούς. Στα πλαίσια αυτά, υποθέτουμε ότι πιθανές λύσεις άλλων εξωτικών άμαζων αντικειμένων στις θεωρίες Horndeski μπορούν να υποστηριχθούν αντίστοιχα από παραπάνω από μία θεωρίες, κάτι το οποίο εμπλουτίζει με άμεσο τρόπο τον κατάλογο τοπικών λύσεων των εν λόγω θεωριών.

Το βασικό συμπέρασμα των παραπάνω είναι ότι η συσχέτιση άμαζων (εξωτικών) συμπαγών σωμάτων, όπως η σκουληκότρυπα Ellis, με τη θεωρία που τις ικανοποιεί είναι εκφυλισμένη, καθώς η ίδια λύση μπορεί να υποστηριχθεί από παραπάνω από ένα πλαίσιο θεωρίας Horndeski. Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι η αστάθεια από την απόκριση των εν λόγω αντικειμένων κάτω από βαρυτικές διαταραχές μπορεί να βελτιωθεί επιλέγοντας κατάλληλες τιμές στις σταθερές σύζευξης, επεκτείνοντας έτσι το χρόνο ζωής της. Βέβαια, αναμένουμε και πάλι η σκουληκότρυπα Ellis στην εκτεταμένη θεωρία να είναι βαρυτικά ασταθής λόγω των [350, 351]. Παρόλαυτά, η πιθανή βελτίωση της βαρυτικής αστάθειας της σκουληκότρυπας Ellis αποτελεί μία ενδιαφέρουσα και συναρπαστική προοπτική συνέχειας της εν λόγω μελέτης.

Κεφάλαιο 6

Μελανές οπές με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο σε θεωρίες Beyond Horndeski

6.1 Επισκόπηση παραβιάσεων του θεωρήματος no-hair σε θεωρίες βαθμωτού τανυστή

Το θεώρημα no-hair, γνωστό επίσης ως ‘θεώρημα μοναδικότητας’ στα πλαίσια των μελανών οπών [14, 15, 363, 364, 365, 366, 367], αποτελεί μία θεμελιώδη έννοια στη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας. Το εν λόγω θεώρημα επιβάλλει ουσιαστικά το ότι όλες οι μελανές οπές μπορούν να περιγραφούν πλήρως από μόλις τρεις παρατηρήσιμες ποσότητες, ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες της κατάρρευσης ή την καταστατική εξίσωση του αστεριού που τις δημιουργήσε. Οι ποσότητες αυτές είναι η μάζα ADM της μελανής οπής, η στροφορμή της και το πιθανό ηλεκτρομαγνητικό φορτίο που τις χαρακτηρίζει, αν και οι μελανές οπές σε αστροφυσικά πλαίσια θεωρούνται εν γένει ηλεκτρομαγνητικά ουδέτερες. Το θεώρημα no-hair μας λέει επομένως ότι αυτές οι τρεις παράμετροι μπορούν να καθορίσουν με μοναδικό τρόπο τη γεωμετρία μίας μελανής οπής. Μία βασική συνέπεια αυτού είναι ότι οποιαδήποτε δύο μελανές οπές με την ίδια μάζα, στροφορμή και ηλεκτρομαγνητικό φορτίο θα παρουσιάζουν τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες στη γεωμετρία, δηλαδή τις ίδιες βαρυτικές αλληλεπιδράσεις ανεξάρτητα από τις ιδιότητες του αστεριού προ κατάρρευσης. Το προβληματικό στοιχείο που παρουσιάζεται στο εν λόγω αποτέλεσμα είναι ότι αντιτίθεται στη βάση ότι κάθε φυσική θεωρία, δωσμένων κατάλληλων αρχικών συνθηκών, πρέπει να είναι ικανή να εξάγει την μελλοντική αλλά και την παρελθοντική εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος. Η περίπτωση των μελανών οπών είναι συνεπώς μοναδική στο εν λόγω ζήτημα, καθώς δεν μπορούμε να εξάγουμε καμία ουσιαστική πληροφορία αναφορικά με την καταστατική εξίσωση του πρώιμου αστεριού, παρατηρώντας την αντίστοιχη μελανή οπή στο σύμπαν, παραβιάζοντας έτσι την αρχή της πληροφορίας. Ο εν λόγω εκφυλισμός αναφορικά με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος υπό κατάρρευση αποτελεί τη βάση του θεωρήματος no-hair.

Γνωρίζουμε όμως ότι η Γενική Σχετικότητα είναι μία ενεργή θεωρία πεδίου που αποσκοπεί στη μελέτη του σύμπαντος σε ένα καθορισμένο εύρος ενεργειακής κλίμακας. Πράγματι, πληθώρα από κοσμολογικές παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι η Γενική Σχετικότητα παρουσιάζει ισχυρούς περιο-

ρισμούς στην εφαρμογή της. Οι κυριότεροι εξ αυτών προκύπτουν από την έλλειψη δυνατότητας να εξηγήσουμε τη σκοτεινή ενέργεια, τη σκοτεινή ύλη αλλά και να παρέχουμε ένα αυτοσυνεπές σενάριο πληθωρισμού στα πρώιμα στάδια του σύμπαντος. Επιπροσθέτως, γνωρίζουμε ότι η Γενική Σχετικότητα δεν είναι μία επανακανονικοποιήσιμη θεωρία πεδίου που σημαίνει ότι η κβαντική φύση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης δεν μπορεί να αποτυπωθεί στη θεωρία αυτή. Λόγω των εν λόγω παρατηρήσεων, η έρευνα της βαρυτικής αλληλεπίδρασης έχει κινηθεί προς την κατεύθυνση της μελέτης τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας, που αποτέλεσε και το κύριο αντικείμενο της διατριβής. Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γίνει πολυάριθμες προσπάθειες κατασκευής καινούριων θεωριών βαρύτητας προς την αντιμετώπιση των παραπάνω ζητημάτων. Οι πιο έντονα μελετημένες θεωρίες ανήκουν στο ευρύτερο πλαίσιο των θεωριών βαθμωτού ταυστή, λόγω της απλότητας τους και τη (σχετική) ευκολία που παρουσιάζουν σε υπολογισμούς. Οι εν λόγω θεωρίες εισάγουν έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας μέσω της ύπαρξης ενός βαθμωτού πεδίου το οποίο μπορεί να είναι συζευγμένο σε βαρυτικούς ταυστές με τετριμμένο ή μη-τετριμμένο τρόπο. Επιπροσθέτως, γνωρίζουμε πλέον ότι ένα μεγάλο ποσοστό των τροποποιημένων βαρυτικών θεωριών που προτάθηκαν κατά τα χρόνια μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ενεργές θεωρίες βαθμωτού ταυστή. Λόγω αυτού, οι θεωρίες βαθμωτού ταυστή έχουν χρησιμοποιηθεί εντόνως τα τελευταία χρόνια ως εργαλείο εξήγησης φυσικών φαινομένων όπου η Γενική Σχετικότητα έχει αποτύχει. Όπως αναφέραμε στο προηγούμε κεφάλαιο, η πιο διαδεδομένη θεωρία βαθμωτού ταυστή με ένα βαθμωτό πεδίο που παράγει εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης είναι η θεωρία Horndeski [368]. Η θεωρία Horndeski έχει αποτελέσει τη βάση μελέτης θεωριών βαθμωτού ταυστή λόγω της γενικότητας της. Πρόσφατα, όμως, η θεωρία Horndeski επεκτάθηκε με επιπλέον όρους στη δράση, οι οποίοι μπορούν να οδηγήσουν σε εξισώσεις κίνησης υψηλότερης τάξης χωρίς να εισάγουν αθέμιτους ασταθείς βαθμούς ελευθερίας. Ένα παράδειγμα της εν λόγω επέκτασης είναι η θεωρία Beyond Horndeski [353, 332], που θα αποτελέσει το κύριο μοντέλο μελέτης σε αυτό το κεφάλαιο.

Σε άμεση αναλογία με τη Γενική Σχετικότητα, θεωρήματα no-hair έχουν επίσης κατασκευαστεί για θεωρίες βαθμωτού ταυστή [15, 363, 364]. Τα εν λόγω θεωρήματα επιβάλλουν αντίστοιχους περιορισμούς στις μελανές οπές που υποστηρίζονται από θεωρίες βαθμωτού ταυστή και οδηγούν σε τετριμμένες λύσεις του βαθμωτού πεδίου κάτω από τη ικανοποίηση των ενεργειακών συνθηκών. Όμως, σχεδόν άμεσα μετά τα πρώτα θεωρήματα no-hair, έγινε αντιληπτό από την κοινότητα ότι οι θεωρίες βαθμωτού ταυστή μπορούν να εύκολα να παραβιάσουν τα αντίστοιχα θεωρήματα. Πράγματι, κάθε φυσικό θεώρημα είναι τόσο ισχυρό όσο είναι οι συνθήκες υπό τις οποίες ορίζεται. Είδαμε ήδη στην παρούσα διατριβή ότι η παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών μπορεί κάλλιστα να 'ντύσει' μία μελανή οπή με βαθμωτό φορτίο. Μία από τις πρώτες και πιο γνωστές παραβιάσεις των θεωρημάτων no-hair σε θεωρίες βαθμωτού ταυστή έγινε στα πλαίσια της ενεργής τετραδιάστατης θεωρίας χορδών [169], ενώ αργότερα ακολούθησε μία πληθώρα νέων λύσεων σε διάφορες τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, όπως π.χ. σε θεωρίες βαθμωτού ταυστή [369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 133, 376, 347, 377, 148, 378, 379, 380, 149, 127, 381, 382, 140, 344, 338, 131, 339], σε θεωρίες Gauss-Bonnet και Chern-Simons [360, 361, 362, 337, 269, 271, 383, 384, 270, 173, 176, 4, 5, 385], σε θεωρίες με αβελιανά και μη-αβελιανά πεδία βαθμίδας [386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 151, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 134, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 222, 405, 406], και σε θεωρίες υψηλότερων ή χαμηλότερων από τέσσερις διαστάσεων [407, 153, 142, 408, 409, 410, 411, 412, 343].

Είναι σημαντικό όμως να θυμίσουμε ότι, το βαθμωτό φορτίο που μπορεί να παραμορφώσει μία μελανή οπή Γενικής Σχετικότητας κατηγοριοποιείται σε πρωτεύον και δευτερεύον. Στα πλαίσια των θεωριών βαθμωτού ταυστή, το πρωτεύον βαθμωτό φορτίο ορίζεται ως μία φυσική, ελεύθερη ποσότητα που χαρακτηρίζει τη μελανή οπή της θεωρίας και δεν συσχετίζεται με τις τρεις γνωστές παραμέτρους της μάζας, στροφορμής και ηλεκτρομαγνητικού φορτίου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το βαθμωτό φορτίο είναι άμεσα συσχετισμένο με κάποια εσωτερική συμμετρία της θεωρίας, που οδηγεί στην ύπαρξη ενός ρεύματος Noether [413]. Το διατηρούμενο φορτίο του ρεύματος

είναι ακριβώς το πρωτεύον φορτίο της μελανής οπής. Από την άλλη, το δευτερεύον φορτίο, όπως είδαμε στα κεφάλαια 2 και 4, οδηγεί μόνο σε τροποποιήσεις της μετρικής της μελανής οπής, χωρίς να εισάγει ανεξάρτητες παραμέτρους στη γεωμετρία. Οι εν λόγω τροποποιήσεις οφείλονται στις σταθερές σύζευξης της θεωρίας, ενώ το δευτερεύον βαθμωτό φορτίο ορίζεται μέσω συνάρτησης κάποιου προυπάρχοντος φορτίου της μελανής οπής. Επομένως, η γεωμετρία παραμένει πρακτικά πλήρως ορισμένη μέσω των φορτίων μάζας, στροφορμής και ηλεκτρομαγνητικού φορτίου, ενώ θα υπάρχουν επιπλέον τροποποιήσεις λόγω των σταθερών σύζευξης.

Μέχρι πρόσφατα, δεν υπήρχε καμία αναλυτική λύση με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο σε θεωρίες βαθμωτού ταυυστή. Ενώ έχουν υπάρξει μερικές αριθμητικές/ημι-αναλυτικές προσεγγίσεις [414, 126, 415], οι περισσότερες μελανές οπές σε θεωρίες βαθμωτού ταυυστή που βρέθηκαν χαρακτηρίζονται από δευτερεύον βαθμωτό φορτίο. Όπως προαναφέραμε, προκειμένου να υπάρξουν λύσεις με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο, η θεωρία πρέπει να ικανοποιεί κάποια επιπλέον συμμετρία του βαθμωτού φορτίου για να μας εξάγει τουλάχιστον κάποιο ρεύμα Noether. Ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις όμως, δεν είναι σίγουρο ότι θα υπάρχει αναλυτική λύση, πόσο μάλλον σε κλειστή μορφή. Ένα ενδιαφέρον πλαίσιο που μπορεί κανείς να ελέγξει τα παραπάνω είναι οι θεωρίες Beyond Horndeski με συμμετρία πεδίου κάτω από ομοτιμία ($\Phi \rightarrow -\Phi$) και ολίσθηση ($\Phi \rightarrow \Phi + c$). Σε αυτές τις θεωρίες, η δράση εξαρτάται μόνο από παραγώγους του πεδίου, κάτι το οποίο επιτρέπει το πεδίο να είναι γραμμικό στο χρόνο ενώ διατηρείται η συμβατότητα της μορφής του με στατικές και σφαιρικά συμμετρικές μετρικές. Χρησιμοποιώντας την εν λόγω παρατήρηση, αποδείχθηκε πρόσφατα η ύπαρξη αναλυτικών μελανών οπών με πρωτεύον φορτίο σε τέτοιου είδους θεωρίες [413]. Με βάση την έρευνα αυτή, μελανές οπές με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο μελετήθηκαν επίσης στο [416] σε πλαίσια αυθαίρετων διαστάσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα προβούμε σε μία διεξοδική μελέτη των εν λόγω θεωριών σε όλη τους τη γενικότητα, αποδεικνύοντας την ύπαρξη πρωτεύοντος βαθμωτού φορτίου με μαθηματικά αυτοσυνεπή τρόπο. Θα παρουσιάσουμε πως μπορεί να εξάγει κανείς (δυναμικά) άπειρες λύσεις στατικών και σφαιρικά συμμετρικών μελανών οπών στις εν λόγω θεωρίες Beyond-Horndeski και θα ασχοληθούμε με την ανάλυση της γεωμετρίας των λύσεων που υποστηρίζονται. Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα που εξάγαμε είναι ότι οι μελανές οπές αυτές μπορούν να κανονικοποιηθούν λόγω του πρωτεύοντος βαθμωτού φορτίου. Επιπροσθέτως, οι ενεργειακές συνθήκες για τις εν λόγω λύσεις μπορούν να ικανοποιούνται για λόγους που θα εξηγήσουμε παρακάτω, κάτι το οποίο τις καθιστά πιο υγιείς γεωμετρίες από τις περισσότερες άλλες λύσεις σε θεωρίες βαθμωτού ταυυστή.

6.2 Η θεωρία Beyond Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης στο πεδίο

Όπως παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η θεωρία Horndeski αποτελεί ένα γενικευμένο πλαίσιο θεωριών βαθμωτού ταυυστή και δίνεται από τη δράση

$$S = \int \frac{d^4x \sqrt{|g|}}{16\pi G} \left[\sum_{i=2}^{i=5} \mathcal{L}_i \right] \quad (6.1)$$

με τις Λαγκρανζιανές πυκνότητες \mathcal{L}_i να ορίζονται ακολούθως

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\Phi, X) , \quad (6.2)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(\Phi, X)\square\Phi , \quad (6.3)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\Phi, X)R + G_{4,X} [(\square\Phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2] . \quad (6.4)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\Phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi - \frac{1}{6}G_{5,X} [(\square\Phi)^3 - 3\square\Phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi)^3] , \quad (6.5)$$

όπου $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi$. Η επέκταση της θεωρίας σύμφωνα με τα [353, 332] εισάγει στις Λαγκρανζιανές πυκνότητες δύο ακόμα όρους,

$$\mathcal{L}_4^{BH} = F_4(\Phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(\nabla_\mu\Phi)(\nabla_\alpha\Phi)(\nabla_{\nu\beta}\Phi)(\nabla_{\rho\gamma}\Phi) \quad (6.6)$$

$$\mathcal{L}_5^{BH} = F_5(\Phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(\nabla_\mu\Phi)(\nabla_\alpha\Phi)(\nabla_{\nu\beta}\Phi)(\nabla_{\rho\gamma}\Phi)(\nabla_{\delta\sigma}\Phi), \quad (6.7)$$

οι οποίοι όμως δεν είναι ανεξάρτητοι. Συγκεκριμένα, η συνθήκη αποφυγής ασταθειών Ostrogradsky επιβάλλει ότι οι συναρτήσεις F_4 και F_5 είναι συσχετισμένες μέσω των συναρτήσεων Horndeski από την εξίσωση

$$XG_{5,X}F_4 = 3F_5(G_4 - 2XG_{4,X}). \quad (6.8)$$

Όπως είναι σαφές από τη μορφή των Λαγκρανζιανών πυκνοτήτων που παρουσιάζονται, οι όροι $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5$ και \mathcal{L}_5^{BH} δεν είναι αναλλοίωτοι κάτω από την ομοτιμία πεδίου λόγω του περιττού αριθμού των συζευξέων του βαθμωτού πεδίου. Αντίστοιχα, αν όλα τα G_i και F_i είναι ανεξάρτητα του βαθμωτού πεδίου Φ και εξαρτώνται μόνο από τον κινητικό όρο X , τότε η θεωρία εμφανίζει συμμετρία ολίσθησης του πεδίου, αφού εξαρτάται μόνο από τις παραγώγους του. Η συγκεκριμένη περίπτωση αναγνωρίζεται ως ένα άμαζο πεδίο με υψηλότερες τάξεις παραγωγίσις και μη-τετριμμένες συζεύξεις σε βαρυτικούς ταυστές. Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την περίπτωση της θεωρίας Beyond-Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης στο πεδίο. Η δράση μας, σε γεωμετρικές μονάδες ($c = G = 1$) δίνεται σύμφωνα με τα παραπάνω ως εξής:

$$S = \int \frac{d^4x\sqrt{|g|}}{16\pi} \left[G_4(X)R + G_{4X}[(\square\Phi)^2 - \Phi_{;\mu\nu}\Phi^{;\mu\nu}] + G_2(X) + F_4(X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\alpha}\Phi_{;\nu\beta}\Phi_{;\rho\gamma} \right], \quad (6.9)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό $\Phi_{;\mu} \equiv \partial_\mu\Phi$, $\Phi_{;\mu\nu} \equiv \nabla_\mu\partial_\nu\Phi$ για ευκολία. Η δράση της (6.9) είναι η πιο γενική θεωρία Beyond-Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας σε άμαζο πεδίο που μπορούμε να κατασκευάσουμε. Η προκύπτουσα συμμετρία ολίσθησης της θεωρίας οδηγεί στην ύπαρξη ενός ρεύματος Noether, δωσμένο από τη σχέση

$$\mathbf{J} = J_\mu dx^\mu, \quad J^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu\Phi)}, \quad (6.10)$$

ενώ η εξίσωση κίνησης του βαθμωτού πεδίου είναι απλά η εξίσωση $\nabla_\mu J^\mu = 0$. Η μορφή της εξίσωσης κίνησης του βαθμωτού πεδίου μέσω του διατηρούμενο ρεύματος μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Stokes και να ορίσουμε ένα πιθανό διατηρούμενο φορτίο της θεωρίας Q_s που δίνεται άμεσα από την γνωστή εξίσωση

$$Q_s = \frac{1}{N} \int \star\mathbf{J}, \quad (6.11)$$

όπου ο τελεστής \star είναι ο δυϊκός Hodge, ενώ το N είναι απλά μία σταθερά κανονικοποίησης. Προφανώς, η ύπαρξη μιας μαθηματικής σχέσης για το φορτίο δεν σημαίνει και αναγκαστικά ότι το

φορτίο αυτό υπάρχει, καθώς μπορεί να μηδενίζεται πάντα ταυτοτικά. Θα δούμε για την περίπτωση των στατικών και σφαιρικά συμμετρικών μελανών οπών πως εμφανίζεται το φορτίο Noether στη γεωμετρία της μελανής οπής, 'ντύνοντας' έτσι τη λύση μας με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο. Προς τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε στην παρακάτω ανάλυση τη γενική μορφή μετρικής

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (6.12)$$

όπου $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Αντιστοίχως, εκφράζουμε το βαθμωτό πεδίο μέσω χωριζομένων μεταβλητών ως

$$\Phi(t, r) = qt + \Psi(r), \quad (6.13)$$

με τη παράμετρο q να έχει διαστάσεις $[L]^{-1}$ στη σύμβαση μας, όπου $[L] \equiv$ (μονάδες μήκους), αφού το βαθμωτό πεδίο είναι αδιάστατο. Η γραμμική εξάρτηση του βαθμωτού πεδίου Φ ως προς το συντεταγμένο χρόνο είναι εφικτή κάτω από τη συμμετρία ολίσθησης. Πράγματι, εφόσον το πεδίο είναι άμαζο και η θεωρία περιέχει μόνο παραγώγους του, η χρονική εξάρτηση του πεδίου δεν εμφανίζεται ούτε στη δράση ούτε στις εξισώσεις κίνησης, αλλά παρέχει ένα μη-τετριμμένο στοιχείο ρεύματος J^t , προκειμένου το πρωτεύον φορτίο να είναι μη-μηδενικό. Από τη μορφή του πεδίου όμως, είναι σαφές ότι θα έχουμε μία μη-μηδενική συνεισφορά στο στοιχείο tr του ενεργού ταυυστή ενέργειας ορμής $T_{\mu\nu}$. Κάτι τέτοιο, αντιτίθεται στη μορφή της στατικής και σφαιρικά συμμετρικής μετρικής που θεωρήσαμε, καθώς το αντίστοιχο στοιχείο του ταυυστή Einstein G_{tr} είναι ταυτοτικά μηδενικό για τη μετρική του (6.12). Επομένως, πιθανές λύσεις της θεωρίας οφείλουν να ικανοποιούν $T_{tr} = 0$. Η απάντηση στο εν λόγω ζήτημα είναι το ότι οι εξισώσεις κίνησης ικανοποιούνται για μη-τετριμμένο βαθμωτό πεδίο όταν το ακτινικό στοιχείο του ρεύματος Noether, J^r μηδενίζεται. Πράγματι, από τη μεταβολή της δράσης ως προς τη μετρική και το βαθμωτό πεδίο, θα έχουμε τις εξισώσεις $\mathcal{E}_{\mu\nu} \left(\equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \right) = 0$ και $\mathcal{E}_\Phi \left(\equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right) = 0$. Από τη συνθήκη αναλλοιωότητας κάτω από διαφορομορφισμούς της δράσης, έχουμε κατά τα γνωστά [332] ότι

$$\nabla_\nu \mathcal{E}_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \Phi \mathcal{E}_\Phi \quad (6.14)$$

Χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή μορφή της εξίσωσης κίνησης του βαθμωτού πεδίου $\nabla_\mu J^\mu = 0$, τη ταυτότητα Bianchi του ταυυστή Einstein, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ και τη μορφή του βαθμωτού πεδίου μέσω της (6.13) στη γεωμετρία της (6.12), είναι σαφές ότι η παραπάνω ταυτότητα οδηγεί στις ακόλουθες τέσσερις εξισώσεις

$$\nabla^\nu (T_{t\nu} - qJ_\nu) = 0, \quad \nabla^\nu (T_{r\nu}) = \Psi'(r)\nabla_\nu J^\nu, \quad \nabla^\nu T_{\theta\nu} = 0, \quad \nabla^\nu T_{\phi\nu} = 0 \quad (6.15)$$

που πρέπει να ικανοποιούνται ως γεωμετρικές συνθήκες υπό τις (6.12) και (6.13). Από την πρώτη και τη δεύτερη σχέση έχουμε τη λύση

$$T_{t\nu} = qJ_\nu, \quad J_r = 0 \quad (6.16)$$

οι οποίες οδηγούν στο στοιχείο T_{tr} να μηδενίζεται on-shell. Οι υπόλοιπες σχέσεις μας λένε ότι τα γωνιακά στοιχεία του ταυυστή ενέργειας ορμής πρέπει να διατηρούνται. Τα παραπάνω βρίσκονται σε συμφωνία με την ανάλυση των [133] αναφορικά με την παραβίαση του θεωρήματος no-hair σε θεωρίες Horndeski με συμμετρία στην ολίσθηση και ομοτιμία πεδίου. Επιβεβαιώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας τις εν λόγω συνθήκες, η εξίσωση κίνησης του πεδίου ικανοποιείται όταν $J_r = 0$ μέσω της

$$\nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu J^\nu = \Gamma_{\mu t}^\mu J^t = 0 \quad (6.17)$$

αφού $\Gamma_{\mu t}^{\mu} = 0$ για στατικές και σφαιρικά συμμετρικές μετρικές, ενώ το φορτίο Q_s δίνεται αντίστοιχα $Q_s \sim \int d^3x \sqrt{|g|} J^t$, όπου η ολοκλήρωση εκτελείται στις χωρικές συντεταγμένες. Τονίζουμε ότι το φορτίο της συμμετρίας ολίσθησης είναι μη-μηδενικό λόγω του μη-τετριμμένου στοιχείου ρεύματος J^t , που προκύπτει από τη γραμμική εξάρτηση του πεδίου από τον συντεταγμένο χρόνο.

Αρκεί λοιπόν να εργαστούμε πάνω στις εξισώσεις $\mathcal{E}_{tt} = 0$, $\mathcal{E}_{rr} = 0$ και $\mathcal{E}_J (= J^r) = 0$. Ακολουθώντας τα αποτελέσματα των [413], έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης της θεωρίας κάτω από τις (6.12) και (6.13):

$$\mathcal{E}_J = -\frac{fh'}{h} 2rZ_X + r^2 G_{2X} + 2G_{4X} - 2fZ_X + 2q^2 \frac{f}{h} \frac{Z_X - G_{4X}}{2X} + \frac{2q^2 fr}{h} \frac{G_4 + Z - 2XG_{4X}}{4X^2} \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right) \quad (6.18)$$

$$\mathcal{E}_{rr} = -\frac{fh'}{h} 2rZ - r^2 G_2 - 2G_4 - 2fZ + 2q^2 \frac{f}{h} \frac{Z + G_4}{2X} - \frac{4q^2 fr}{h} X' \frac{G_4 + Z - 2XG_{4X}}{4X^2} - f(\Psi')^2 \mathcal{E}_J \quad (6.19)$$

$$\mathcal{E}_{tt} = X' 4rZ_X + 2 \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right) rZ - \frac{\mathcal{E}_{rr}}{f} - \left((\Psi')^2 + \frac{q^2}{fh} \right) \mathcal{E}_J \quad (6.20)$$

ο τόνος υποδηλώνει παραγωγή ως προς την ακτινική συντεταγμένη r , ο δείκτης X υποδεικνύει παραγωγή της εκάστοτε συνάρτησης Horndeski ως προς τον κινητικό όρο, ο $Z(X)$ είναι μια βοηθητική συνάρτηση που θα μας επιτρέψει να εκφράσουμε τις παραπάνω περίπλοκες εξισώσεις κίνησης σε μία πιο συμπαγή μορφή και ορίζεται μέσω της σχέσης

$$Z(X) \equiv 2XG_{4X} - G_4(X) + 4X^2 F_4(X), \quad (6.21)$$

ενώ, για την εξαγωγή των παραπάνω, χρησιμοποιήσαμε επίσης την εξίσωση που μας δίνει τον κινητικό όρο του πεδίου

$$X = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{h} - f\Psi'^2 \right). \quad (6.22)$$

Σε πρώτη ανάγνωση, οι εξισώσεις κίνησης φαίνονται ιδιαίτερα περίπλοκες για να εξαχθεί οποιαδήποτε αναλυτική λύση. Υπάρχει όμως μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα απλοποίηση μέσω της (6.20). Πράγματι, η \mathcal{E}_{tt} περιλαμβάνει αυτούσια τα \mathcal{E}_{rr} και \mathcal{E}_J που μηδενίζονται on-shell. Επομένως, προκειμένου να ικανοποιείται η \mathcal{E}_{tt} έχουμε απλά τη συνθήκη $\left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right) = -2 \frac{Z_X X'}{Z}$, η οποία ολοκληρώνεται άμεσα και μας δίνει το αποτέλεσμα

$$\frac{f}{h} = \frac{\gamma^2}{Z^2}, \quad (6.23)$$

όπου γ είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης που αποτελεί σταθερά σύζευξης της θεωρίας. Το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι η ομοιογένεια (ή ανομοιογένεια) των στατικών και σφαιρικά συμμετρικών τοπικών λύσεων στη θεωρία εξαρτάται από τη συσχέτιση που έχουν τα συναρτησιακά G_4 και F_4 της θεωρίας. Ενώ στην απλή θεωρία Horndeski, όπου $F_4 = 0$, υπάρχει μόνο μία μορφή του G_4 που μας δίνει ομοιογενείς λύσεις (την οποία αναφέρουμε στο τελευταίο παράρτημα), η ύπαρξη του F_4 εμπλουτίζει με πρακτικά άπειρους τρόπους τις πιθανές ομοιογενείς λύσεις που υπάρχουν στο πλαίσιο της Beyond-Horndeski με συμμετρία ολίσθησης και ομοτιμίας πεδίου. Το δεύτερο σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι μπορούμε πλέον να αντικαταστήσουμε άμεσα τους λόγους $\frac{f}{h}$ που εμφανίζονται στις (6.18) και (6.19). Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας την (6.18) με Z και την

(6.19) με τον όρο Z_X και αφαιρώντας κατά μέλη, $\mathcal{E}_J Z - \mathcal{E}_{rr} Z_X$, έχουμε το ακόλουθο ιδιαίτερα απλό αποτέλεσμα,

$$r^2(G_2 Z)_X + 2(G_4 Z)_X \left(1 - \frac{q^2 \gamma^2}{2Z^2 X}\right) = 0, \quad (6.24)$$

ενώ, ομοίως, η \mathcal{E}_{rr} υπό την (6.23) γράφεται ως μία ιδιαίτερα απλή διαφορική

$$2\gamma^2 \left(hr - \frac{q^2 r}{2X}\right)' = -r^2 G_2 Z - 2G_4 Z \left(1 - \frac{q^2 \gamma^2}{2Z^2 X}\right) + \frac{q^2 \gamma^2 X' r}{Z X^2} (2X G_{4X} - G_4). \quad (6.25)$$

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις κίνησης της θεωρίας γράφονται σε μία αρκετά πιο συμπαγή μορφή ως

$$\frac{f}{h} = \frac{\gamma^2}{Z^2}, \quad (6.26)$$

$$r^2(G_2 Z)_X + 2(G_4 Z)_X \left(1 - \frac{q^2 \gamma^2}{2Z^2 X}\right) = 0, \quad (6.27)$$

$$2\gamma^2 \left(hr - \frac{q^2 r}{2X}\right)' = -r^2 G_2 Z - 2G_4 Z \left(1 - \frac{q^2 \gamma^2}{2Z^2 X}\right) + \frac{q^2 \gamma^2 X' r}{Z X^2} (2X G_{4X} - G_4), \quad (6.28)$$

όπου αξίζει να σχολιαστεί στο σημείο αυτό ότι, επιλέγοντας μία οποιαδήποτε δράση Beyond-Horndeski με τις συμμετρίες που μας ενδιαφέρουν, οι πρώτες δύο εξισώσεις είναι απλές αλγεβρικές σχέσεις ενώ μόνο η τρίτη είναι διαφορική εξίσωση. Επομένως, δωσμένων των συναρτησιακών μορφών των $G_2(X)$, $G_4(X)$, και $F_4(X)$, οι παραπάνω εξισώσεις είναι εύκολα αντιμετωπίσιμες και μπορούν να λυθούν ως προς τους βαθμούς ελευθερίας $h(r)$, $f(r)$, και $\Psi(r)$. Αυτό σημαίνει ότι, επιλέγοντας αυθαίρετες συναρτήσεις για τα συναρτησιακά Beyond-Horndeski, μπορούμε πάντα να εξάγουμε την αντίστοιχη στατική και σφαιρικά συμμετρική λύση. Η δυνατότητα αυτή όμως δε σημαίνει ότι και οι λύσεις θα έχουν φυσικώς αποδεκτά χαρακτηριστικά. Παρόλαυτά, η απλότητα των εξισώσεων μας οδηγεί στην κατασκευή ενός αλγορίθμου εύρεσης λύσεων μέσω επιλογής των πιθανών συναρτησιακών που θα παρουσιάσουμε στα επόμενα. Πρωτού συνεχίσουμε όμως, παρατηρούμε ότι η γενική επιλογή

$$(G_2 Z)_X = \Xi (G_4 Z)_X, \quad (6.29)$$

όπου $\Xi = \Xi(X)$ είναι μία καινούρια βοηθητική συνάρτηση, απλοποιεί περαιτέρω την (6.27), φέρνοντας τη στη μορφή επίλυσης του X :

$$X Z^2 (2 + r^2 \Xi) - q^2 \gamma^2 = 0 \implies X = \frac{q^2 \gamma^2}{Z^2 (2 + r^2 \Xi)}. \quad (6.30)$$

Ο αλγόριθμος εύρεσης λύσεων στη θεωρία αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα. Αρχικά, διαλέγουμε αν επιθυμούμε ομοιογενείς ή ανομοιογενείς τοπικές λύσεις στη θεωρία. Από την εξίσωση (6.26), έχουμε ότι αν η Z είναι σταθερά, η θεωρία υποστηρίζει ομοιογενείς λύσεις, ενώ για μη-τετριμμένες συναρτήσεις Z έχουμε αποκλειστικά ανομοιογενείς λύσεις στη δράση. Έπειτα, επιλέγουμε τη βοηθητική συνάρτηση Ξ , που καθορίζει μία συσχέτιση μεταξύ των G_2 και G_4 , προκειμένου να έχουμε την αλγεβρική μορφή του X μέσω της (6.30). Τονίζουμε ότι η επιλογή κατάλληλου Ξ θα μας παρέχει και τα ζητούμενα εκάστοτε χαρακτηριστικά για τον κινητικό όρο X . Τέλος, έχοντας επιλέξει τα Z και Ξ , επιλέγεται η επιθυμητή μορφή του G_2 (ή του G_4 ομοίως) και λύνουμε τη διαφορική (6.28) που θα μας παρέχει τη μορφή της γεωμετρίας.

Στην ανάλυση μας, θα επικεντρωθούμε κυρίως σε θεωρίες που υποστηρίζονται από την ακόλουθη συναρτησιακή μορφή του κινητικού όρου [413]

$$X = \frac{\beta q^2}{2\beta + \alpha r^2}, \quad (6.31)$$

που ικανοποιείται για σταθερό Ξ ενώ οι σταθερές β και α της παραπάνω εξίσωσης είναι απλά σταθερές σύζευξης της εκάστοτε θεωρίας. Θα συζητήσουμε για τις πιο γενικές περιπτώσεις στο τελευταίο υποκεφάλαιο.

Η εν λόγω μορφή του X επιλέχθηκε ως η πιο απλή περίπτωση του κινητικού όρου του βαθμωτού πεδίου που δίνει κατάλληλη ασυμπτωτική συμπεριφορά στο χωρικό άπειρο και στο κέντρο $r = 0$ της γεωμετρίας, κάτι το οποίο και επιθυμούμε για καλώς ορισμένες τοπικές λύσεις στη θεωρία. Επιπροσθέτως, η μορφή αυτή επιτρέπει ένα συνεχές όριο στο μηδενισμό της δυναμικής του βαθμωτού πεδίου χωρίς να επιβάλλουμε κάποια λεπτό συντονισμό στη θεωρία. Τέλος, αναφέρουμε ότι, έχοντας ήδη παρουσιάσει τον μηχανισμό των δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε σε ομοιογενείς γεωμετρίες, αφού οι αντίστοιχες θεωρίες που υποστηρίζουν τις ανομοιογενείς λύσεις μπορούν να βρεθούν πάντα μέσω κατάλληλων δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας.

6.3 Ομοιογενείς τοπικές λύσεις της Beyond Horndeski

Όπως προαναφέραμε, θα ασχοληθούμε πρώτα με την απλή περίπτωση του Ξ να είναι μία σταθερά και θα επικεντρωθούμε σε ομοιογενείς λύσεις, δηλαδή $h(r) = f(r)$, κάτι το οποίο επιβάλλει ότι $Z = \gamma$ από την εξίσωση (6.26). Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι κάτω από αυτές τις επιλογές, η συναρτησιακή μορφή του X δίνεται άμεσα μέσω της (6.31). Επίσης, όπως είναι σαφές από την (6.29), η επιλογή σταθερού Z και Ξ μας παρέχει μία γραμμική συσχέτιση μεταξύ των συναρτησιακών G_2 και G_4 . Συνεπώς, η μορφή του X για ομοιογενείς λύσεις εξαρτάται από τη συσχέτιση των G_2 και G_4 και όχι από τις μορφές που μπορούμε να επιλέξουμε για το καθένα. Πράγματι, η γενική επιλογή γραμμικής συσχέτισης $G_2 = \alpha S(X)$ και $G_4(X) = \zeta + \beta S(X)$, μας δίνει πάντα ότι $X = \frac{\beta q^2}{2\beta + \alpha r^2}$, όπως επιβεβαιώνεται από τις (6.29) και (6.30). Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε ότι ο κινητικός όρος X είναι καλώς ορισμένος σε όλο τον ακτινικό συντεταγμένο χώρο, θέτουμε $\alpha = 2\beta/\lambda^2$, λαμβάνοντας

$$X = \frac{q^2}{2} \frac{1}{1 + (r/\lambda)^2}. \quad (6.32)$$

Δωσμένης της δράσης (6.9) σε γεωμετρικές μονάδες, μπορούμε να εξάγουμε ότι η συνάρτηση G_2 έχει διαστάσεις $[L]^{-2}$, η G_4 είναι αδιάστατη, $[G_4] = [Z] = 1$ ενώ η έχει διαστάσεις $[F_4] = [L]^4$. Συνεπώς, υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η $S(X)$ είναι αδιάστατη, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι οι διαστάσεις των σταθερών σύζευξης είναι οι $[\alpha] = [L]^{-2}$, $[\zeta] = [\beta] = [\gamma] = 1$, και $[\lambda] = [L]$. Έχοντας πλέον τη συναρτησιακή μορφή του X , η εξίσωση (6.28) μπορεί να ολοκληρωθεί εύκολα ως διαφορική πρώτης τάξης και να εξάγουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τη γεωμετρία της λύσης:

$$h(r) = 1 + \frac{C}{r} + \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma}\right) \frac{r^2}{\lambda^2} + \frac{2\beta}{\gamma\lambda^2} \frac{1}{r} \int r^2 (S - 2XS_X) dr. \quad (6.33)$$

Προκειμένου να έχουμε μία καλώς ορισμένη θεωρία, είναι λογικό να περιοριστούμε στις περιπτώσεις όπου η αυθαίρετη συνάρτηση $S(X)$ είναι αναλυτική στο X . Για να γενικεύσουμε όμως το πλαίσιο

της μελέτης μας, θα επεκτείνουμε την έννοια των αναλυτικών συναρτήσεων για το $S(X)$ και θα συμπεριλάβουμε και τις περιπτώσεις όπου η $S(X)$ είναι συνεχής στο $X \rightarrow 0$ (όταν $q \rightarrow 0$), αλλά όχι απαραίτητως και διαφορίσιμη στο σημείο εκείνο. Προς τον σκοπό αυτό, εκφράζουμε την $S(X)$ μέσω αναπτύγματος σε δυναμοσειρά ακολούθως:

$$S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n, \quad s \in \mathbb{Z}^+, \quad (6.34)$$

όπου με βάση την προηγούμενη συζήτηση αναφορικά με τη διαστατική ανάλυση, έχουμε ότι $[c_n] = [L]^{\frac{2n}{s}}$. Η εισαγωγή της θετικής ακέραιας παραμέτρου s θα μας επιτρέψει την μελέτη της θεωρίας όταν τα συναρτησιακά G_2 και G_4 μπορούν να έχουν και εξάρτηση από ημιακέραιες δυνάμεις του X , κάτι το οποίο θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμο παρακάτω. Η εν λόγω μορφή του $S(X)$ είναι αρκετά γενική για να περιγράψει πρακτικά οποιαδήποτε πιθανή συναρτησιακή μορφή των G_2, G_4 , ενώ η περίπτωση των απλών πολυωνυμικών μορφών μπορούν να βρεθούν μηδενίζοντας τους ανεπιθύμητους παράγοντες από τα άπειρα $c_{n/s}$ του αναπτύγματος. Χρησιμοποιώντας τώρα την (6.34) στη λύση του μετρικού στοιχείου (6.33), έχουμε μέσω της μετάθεσης του άθροισματος και της ολοκλήρωσης το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$h(r) = 1 + \frac{C}{r} + \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma} + \frac{2\beta}{3\gamma} c_0\right) \frac{r^2}{\lambda^2} + \frac{2\beta}{3\gamma} \frac{r^2}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{2n}{s}\right) \left(\frac{q^2}{2}\right)^{n/s} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{n}{s}; \frac{5}{2}; -\frac{r^2}{\lambda^2}\right). \quad (6.35)$$

Στην ασυμπτωτική περιοχή του $r \rightarrow +\infty$, το μετρικό στοιχείο έχει τη μορφή

$$h(r) = 1 + \frac{1}{r} \left[C + \frac{\lambda\beta\sqrt{\pi}}{2\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{2n}{s}\right) \left(\frac{q^2}{2}\right)^{n/s} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{s} - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{s}\right)} \right] + \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma} + \frac{2\beta}{3\gamma} c_0\right) \frac{r^2}{\lambda^2} + \frac{2\beta}{3\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{q^2}{2}\right)^{n/s} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2n/s} \left[\left(\frac{1 - \frac{2n}{s}}{1 - \frac{2n}{3s}}\right) \frac{r^2}{\lambda^2} - \frac{3n}{s} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right]. \quad (6.36)$$

Είναι σαφές από την παραπάνω έκφραση ότι ο δεύτερος όρος στην παρένθεση της πρώτης γραμμής εισάγει μία μη τετριμμένη συνεισφορά στον όρο της μάζας ADM της γεωμετρίας. Από τη δεύτερη γραμμή, μπορούμε να έχουμε μία επιπλέον συνεισφορά στη μάζα για τη περίπτωση του $2n/s = 1$ μέσω του όρου $\sim (3n/s)(\lambda/r)^{2n/s}$. Ο τρίτος όρος της πρώτης γραμμής καθορίζει αν ο χωρόχρονος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος ή όχι. Στην εν λόγω μελέτη, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με ασυμπτωτικά επίπεδα συμπαγή αντικείμενα. Θέτουμε επομένως $c_0 = 0$ και $\zeta = -\gamma$ για να έχουμε την κατάλληλη συμπεριφορά Minkowski στο άπειρο. Επιπροσθέτως, πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι το άπειρο άθροισμα της δεύτερης γραμμής δε δημιουργεί ασυμπτωτική συμπεριφορά βαρυτικών μονοπόλων [199, 6] και ότι η μάζα ADM είναι παντού πεπερασμένη. Προς τον σκοπό αυτό, πρέπει να θέσουμε $c_1 = 0$ για να ακυρώσουμε τη πιθανή συνεισφορά μονοπόλων, ενώ από την πρώτη γραμμή πρέπει να μηδενίσουμε τους κατάλληλους $c_{n/s}$ που επιτρέπουν απειρισμούς των συναρτήσεων Γ .

Στη περιοχή κοντά στο κέντρο του αντικειμένου, $r \rightarrow 0$, το μετρικό στοιχείο αναπτύσσεται αντίστοιχα ως

$$h(r) = 1 + \frac{C}{r} + \frac{2\beta}{3\gamma} \frac{r^2}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{2n}{s}\right) \left(\frac{q^2}{2}\right)^{n/s} \left[1 - \frac{3n}{5s} \frac{r^2}{\lambda^2} + \mathcal{O}(r^4) \right]. \quad (6.37)$$

Παρατηρούμε ότι μηδενίζοντας την σταθερά ολοκλήρωσης C , η οποία όπως προαναφέραμε δεν ακυρώνει τον όρο της μάζας ADM, μπορούμε να έχουμε επίσης κανονικοποιημένες μελανές οπές ή και σολιτονικές λύσεις μέσω της επίδρασης του πρωτεύοντος φορτίου q .

Ας εξάγουμε τώρα το αντίστοιχο βαθμωτό φορτίο για τις λύσεις μας. Υπολογίζουμε αρχικά τα στοιχεία του ρεύματος Noether, J^μ , της συμμετρίας ολίσθησης και χρησιμοποιούμε την εξίσωση (6.11) προς την εξαγωγή του βαθμωτού φορτίου:

$$J^\mu = \left(-\frac{4\beta q}{r^2 + \lambda^2} S_X, 0, 0, 0 \right), \quad (6.38)$$

$$Q_s = \frac{1}{N} \int \star \mathbf{J} = \frac{4\pi}{N} \int r^2 J^t dr = \frac{8\pi^{3/2}\beta \lambda}{N} \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} c_{\frac{n}{s}} \frac{n}{s} \left(\frac{q^2}{2} \right)^{n/s} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{s} - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{s}\right)}, \quad \forall \frac{n}{s} > \frac{3}{2}. \quad (6.39)$$

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της μετρικής και η έκφραση για το βαθμωτό φορτίο δίνουν ακριβώς τους ίδιους περιορισμούς για τις επιτρεπόμενες τιμές των παραμέτρων n/s . Πράγματι, μελετώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά του μετρικού στοιχείου (6.36) και τη μορφή του βαθμωτού φορτίου (6.39), είναι σαφές ότι η μάζα ADM και το βαθμωτό φορτίο Q_s δεν ορίζονται για εκείνα τα n/s όπου οι συναρτήσεις Γ απειρίζονται. Συνεπώς, ανεξάρτητα της τιμής του s , οι παράγοντες $c_{n/s}$ με $n/s \leq 3/2$ πρέπει να μηδενιστούν.

Έχοντας πλέον εξάγει τις επιτρεπόμενες μη-μηδενικές τιμές των σταθερών $c_{n/s}$, μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη συγκεκριμένων αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων γεωμετριών. Κατ'αρχάς, όταν $s = 1$, η συνάρτηση $S(X)$, όπως δίνεται από τη σχέση (6.34), υποδηλώνει το ανάπτυγμα μίας αναλυτικής συνάρτησης του X και, επομένως, για οποιαδήποτε αναλυτική συνάρτηση, η λύση θα δίνεται πάντα από την (6.35), ενώ, όπως προαναφέραμε, ο όρος c_1 πρέπει να μηδενίζεται στο ανάπτυγμα προς αποφυγή συνεισφορών βαρυτικών μονοπόλων στο άπειρο μέσω υπολειπόμενης στερεάς γωνίας. Προς παράδειγμα του παραπάνω, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μία δράση που χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση $S(X) = aX - e^{aX}$, ή, προφανώς, οποιαδήποτε άλλο συνδυασμό ενός κανονικού κινητικού όρου και κάποιας αναλυτικής συνάρτησης, τέτοιες ώστε το πλήρες ανάπτυγμα Taylor ακυρώνει την πιθανή ύπαρξη του παράγοντα c_1 . Επιπροσθέτως, θεωρώντας τις περιπτώσεις του $s \neq 1$, το πλαίσιο της θεωρίας υπό την οποία ο αλγόριθμος μας εξάγει λύσεις μπορεί να επεκταθεί. Συγκεκριμένα, η περίπτωση $s = 2$ είναι ικανή να δώσει όρους της $S(X)$ με εξάρτηση ως προς το X της μορφής $X^{\frac{2k+1}{2}}$ για $k \in \mathbb{Z}^{\geq}$. Η εν λόγω περίπτωση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, καθώς η υπεργεωμετρική συνάρτηση της (6.35) παίρνει τότε τη μορφή ${}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{2k+1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{r^2}{\lambda^2}\right)$, η οποία γράφεται πάντα σε κλειστή μορφή για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο k (αλλά και για $k = 1/2$).

Πρωτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση των ιδιοτήτων των γεωμετριών για $s = 2$, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι λύσεις συμπαγών σωμάτων που περιγράφονται από το μετρικό στοιχείο της (6.35) μπορούν κάλλιστα να ικανοποιούν τις ασθενείς ενεργειακές συνθήκες, σε αντίθεση με τις περισσότερες hairy μελανές οπές άλλων τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας. Πράγματι, θεωρώντας ένα κανονικοποιημένο χρονοειδές διάνυσμα l , οι ασθενείς ενεργειακές συνθήκες περιγράφονται από την ακόλουθη εξίσωση,

$$T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = -\frac{2\beta e_0 + 3(\gamma + \zeta)}{\gamma \lambda^2} + \frac{2\beta}{\gamma \lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{\frac{n}{s}} \left(\frac{q^2}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2n}{s} - 1 \right) \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2} \right)^{-\frac{n}{s}}. \quad (6.40)$$

Όπως επιβεβαιώνεται άμεσα, οι ενεργειακές συνθήκες ικανοποιούνται κάτω από κατάλληλες επιλογές των σταθερών σύζευξης. Πράγματι, ακυρώνοντας την κοσμολογική σταθερά e_0 στη δράση και

θέτοντας $\zeta = -\gamma = 1$ για να έχουμε κατάλληλες ασυμπτωτικές Minkowski και μοναδιαία σύζευξη στο βαθμωτό Ricci, οι ενεργειακές συνθήκες ικανοποιούνται επιλέγοντας απλά $\beta \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < 0$ όταν $s \leq 2$. Αναφέρουμε ότι το αποτέλεσμα μπορεί να επιβεβαιωθεί και για άλλες τιμές του s με αυτοσυνεπή τρόπο. Ο λόγος του θετικά ορισμένου $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu$ έγκειται στο γεγονός ότι η γωνιακή πίεση T_θ^θ του ενεργού τανυστή ενέργειας ορμής είναι κυρίαρχη στη γεωμετρία, $T_\theta^\theta > T_r^r$ σε όλο τον εξωτερικό χώρο. Το εν λόγω αποτέλεσμα βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με το πρόσφατο άρθρο των [417], όπου απέδειξαν ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να κατασκευάσει κανείς ασυμπτωτικά επίπεδες, στατικές και σφαιρικά συμμετρικές hairy μελανές οπές χωρίς παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών, με βάση την ομοιογένεια της γεωμετρίας. Το αποτέλεσμα μας ανήκει στην πρώτη περίπτωση, όπου έδειξαν ότι αν ο τανυστής ενέργειας ορμής ικανοποιεί την ανισότητα $T_\theta^\theta > T_r^r$ στον εξωτερικό χώρο, hairy μελανές οπές χωρίς παραβίαση των ασθενών ενεργειακών συνθηκών είναι εφικτές γεωμετρίες υπό οποιαδήποτε τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας που ικανοποιεί τις γενικές εξισώσεις Einstein, $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{effective}$ (χωρίς στρέψη ή άλλες μη-τετριμμένες ιδιότητες καμπυλότητας).

Ας συνεχίσουμε τώρα στη μελέτη της περίπτωσης του $s = 2$. Από την προαναφερθέντα, γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη μίας ασυμπτωτικά επίπεδης λύσης με καλώς ορισμένη μάζα ADM και βαθμωτό φορτίο επιβάλει ότι $\zeta = -\gamma$ και $c_0 = c_{1/2} = c_1 = c_{3/2} = 0$. Ο πρώτος μη-μηδενικός όρος του αναπτύγματος (6.34) αντιστοιχεί στο $n/s = 2$, για το οποίο έχουμε τη λύση του μετρικού στοιχείου

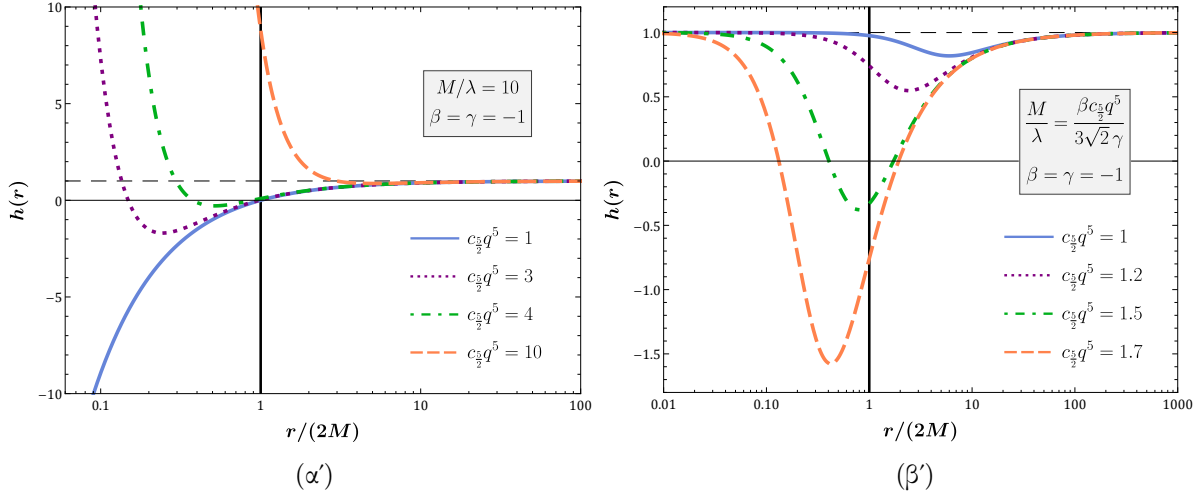
$$h(r) = 1 + \frac{C}{r} - \frac{3\beta c_2 q^4}{4\gamma} \left[\frac{\arctan(r/\lambda)}{r/\lambda} - \frac{1}{1 + (r/\lambda)^2} \right]. \quad (6.41)$$

Η εν λόγω λύση μελανής οπής ήταν αυτή που μελετήθηκε στο [413], και αποτέλεσε το πρώτο παράδειγμα ύπαρξης μελανών οπών με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο στη θεωρία Beyond-Horndeski. Η αμέσως επόμενη λύση που μπορούμε να έχουμε αντιστοιχεί στο $n/s = 5/2$, όπου εξάγουμε το μετρικό στοιχείο

$$h(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\sqrt{2}\beta c_{5/2} q^5 \lambda}{3\gamma} \frac{1}{r} - \frac{\sqrt{2}\beta c_{5/2} q^5}{3\gamma} \frac{r^2/\lambda^2}{(1 + r^2/\lambda^2)^{3/2}}. \quad (6.42)$$

Τονίζουμε ότι στη παραπάνω σχέση, επιλέξαμε την σταθερά ολοκλήρωσης $C = -2M + \sqrt{2}\beta c_{5/2} \lambda q^5 / (3\gamma)$ έτσι ώστε να καταλήξουμε ότι η παράμετρος M αντιστοιχεί πράγματι στη μάζα ADM. Παρατηρούμε τώρα ότι για την τιμή της μάζας $M/\lambda = \beta c_{5/2} q^5 / (3\sqrt{2}\gamma)$, η συνεισφορά του όρου $1/r$ στο μετρικό στοιχείο μηδενίζεται. Για την εν λόγω περίπτωση, οι λύσεις που περιγράφονται από το μετρικό στοιχείο $h(r)$ μπορούν να περιγράφουν κανονικοποιημένες μελανές οπές ή και σολιτονικές λύσεις, όπως δείχνουμε στην εικόνα 6.1β'. Αποτελεί επίσης ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η γεωμετρία μιμείται σε μεγάλο βαθμό τη γνωστή λύση Bardeen [190] του μη-γραμμικού ηλεκτρομαγνητισμού. Από την άλλη, κάτω από την ύπαρξη των όρων τάξης $1/r$, η λύση μας μπορεί να περιγράφει μελανές οπές, αλλά και γυμνές μοναδικότητες, όπως φαίνεται από την εικόνα 6.1α'.

Όλες οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στην εξαγωγή των διαγραμμάτων 6.1 είναι αδιάστατες. Παρατηρούμε ότι για τις εν λόγω τιμές των παραμέτρων, οι ακτίνες του ορίζοντα γεγονότων των μελανών οπών (εικόνα 6.1α') βρίσκονται στο $r_h \approx 2M$, ενώ οι κανονικοποιημένες μελανές οπές (εικόνα 6.1β') χαρακτηρίζονται από $r_h > 2M$. Αυτό σημαίνει ότι οι κανονικοποιημένες μελανές οπές έχουν μεγαλύτερο ορίζοντα γεγονότων από τις αντίστοιχες μελανές οπές Schwarzschild ίδιας μάζας. Δωσμένων των τιμών των σταθερών σύζευξης, μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει αν η μελανή



Σχήμα 6.1: (a) Μελανή οπή με ένα ορίζοντα, δύο μελανές οπές με δύο ορίζοντες, και μία γυμνή μοναδικότητα. (b) Δύο κανονικοποιημένες μελανές οπές και δύο σολιτονικές λύσεις. Ο οριζόντιος άξονας των διαγραμμάτων είναι λογαριθμικός.

οπή της θεωρίας έχει μεγαλύτερο ή μικρότερο ορίζοντα γεγονότων συγκριτικά με της μελανής οπής Schwarzschild εισάγοντας απλά την τιμή $r = 2M$ στην έκφραση του μετρικού στοιχείου (6.42) και ελέγχοντας το πρόσημο του $h(2M)$. Πράγματι, βρίσκουμε ότι

$$h(2M) = \frac{\beta c_{5/2} q^5}{3\sqrt{2}\gamma} \frac{\lambda}{M} \left[1 - \frac{8M^3}{\lambda^3} \left(1 + \frac{4M^2}{\lambda^2} \right)^{-3/2} \right]. \quad (6.43)$$

Μία μελανή οπή με $h(2M) > 0$ θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη Schwarzschild ίδιας μάζας, ενώ για $h(2M) < 0$ η hairy μελανή οπή είναι πιο συμπαγής. Αναφέρουμε για πληρότητα ότι μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξη μίας κρίσιμης τιμής αδιάστατης μάζας, $m_c \approx 0.393076$, τέτοιας ώστε $h(2M) = 0$ για $M/\lambda = m_c$, ενώ $h(2M) > 0$ για $M/\lambda < m_c$ και $h(2M) < 0$ για $M/\lambda > m_c$.

Συνεπώς, η ύπαρξη του πρωτεύοντος βαθμωτού φορτίου q στη λύση μπορεί να αλλάξει όχι μόνο τη γεωμετρία του εξωτερικού χωρόχρονου, αλλά και την εσωτερική δομή της μελανής οπής, δίνοντας έτσι μία μεγάλη ελευθερία στα συμπαγή αντικείμενα που υποστηρίζονται από τις θεωρίες Beyond-Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης στο πεδίο. Επιπροσθέτως, η ανάλυση μας παρέχει μία ισχυρή μεθοδολογία εύρεσης λύσεων σε αυτές τις θεωρίες, των οποίων, όπως δείξαμε, οι περίπλοκες εξισώσεις κίνησης μπορούν να λάβουν μία ιδιαίτερα απλή μορφή (6.26-6.30) και να μελετηθούν εις βάθος.

6.4 Δύσμορφοι μετασχηματισμοί γεωμετρίας στην Beyond-Horndeski

Αναφέραμε ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο τον μηχανισμό των δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας ως μηχανισμό εύρεσης λύσεων στην ευρύτερη θεωρία Horndeski. Θυμίζουμε ότι οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί του μετρικού τανυστή αποτελούν μία καλώς ορισμένη διαδικασία που απεικονίζουν μία αρχική λύση θεωρίας Horndeski (ή επεκτάσεων αυτής) σε μία άλλη λύση Horndeski (ή επεκτάσεων αυτής) με βάση την εξάρτηση ως προς τα Φ, X των σύμμορφων και δύσμορφων

παραγόντων που χρησιμοποιούνται στην εκάστοτε απεικόνιση. Όταν οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί εκτελούνται σε γεωμετρίες υποστηριζόμενες από τους κλάδους της Beyond-Horndeski, τότε η θεωρία δύσμορφου πλαισίου θα ανήκει πάλι σε κάποιον (άλλο) κλάδο της Beyond Horndeski (ή DHOST [354, 123, 125]). Στην παρακάτω ανάλυση, θα επικεντρωθούμε πάλι στον μηχανισμό αυτό, όπου αναφέρουμε ότι οι ποσότητες με το ‘καπέλο’ αντιστοιχούν στις δύσμορφες ποσότητες, ενώ αυτές χωρίς το ‘καπέλο’ υποδεικνύουν τα στοιχεία τροφοδότησης του μετασχηματισμού. Τα στοιχεία τροφοδότησης περιγράφονται από τα Φ , h , f , και, κυρίως, τον κινητικό όρο X , μέσα σε κάποιο καθορισμένο πλαίσιο θεωρίας Beyond Horndeski που χαρακτηρίζεται από τη τριπλέτα $\{G_2(X), G_4(X), F_4(X)\}$. Θα ασχοληθούμε με τους καθαρούς δύσμορφους μετασχηματισμούς που διατηρούν την συμμετρία ολίσθησης του πεδίου χωρίς σύμμορφους παράγοντες, οι οποίοι δίνονται από τη γενική σχέση:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - W(X)\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi. \quad (6.44)$$

Αναφέρουμε για λόγους πληρότητας ότι το βαθμωτό πεδίο παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους γενικούς δύσμορφους μετασχηματισμούς, $\hat{\Phi} = \Phi$, και το γεγονός ότι ο δύσμορφος παράγοντας W δεν περιέχει εξάρτηση από το πεδίο Φ , αλλά μόνο από το X καθιστά τη δύσμορφη θεωρία συμμετρική κάτω από την ολίσθηση πεδίου. Εφαρμόζοντας λοιπόν τον μετασχηματισμό αυτό στη γενική μορφή της μετρικής τροφοδότησης (6.12), κάτω από τη μορφή του βαθμωτού πεδίου (6.13), εξάγουμε τη δύσμορφη γεωμετρία

$$d\hat{s}^2 = -(h + q^2W) dt^2 - 2q\Psi'W dt dr + \left(\frac{1 - Wf\Psi'^2}{f}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (6.45)$$

Εκτελώντας τώρα την απλά αλλαγή συντεταγμένων $dt = dT - \frac{q\Psi'W}{h+q^2W} dr$, (που τονίζουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη), μπορούμε να ακυρώσουμε τους μη-διαγώνιους όρους της παραπάνω μετρικής. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις καινούριες συντεταγμένες η μετρική παίρνει τη μορφή

$$d\hat{s}^2 = -(h + q^2W)dT^2 + \frac{Z^2}{\gamma^2} \frac{1 + 2WX}{(h + q^2W)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (6.46)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (6.22) και (6.23). Επιβεβαιώνουμε ότι ενώ το βαθμωτό πεδίο παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους δύσμορφους μετασχηματισμούς γεωμετρίας, η συναρτησιακή του μορφή στις καινούριες συντεταγμένες υπολογίζεται άμεσα και δίνεται ως

$$\Phi = q\tau + \Psi - q^2 \int \frac{\Psi'W}{h + q^2W} dr. \quad (6.47)$$

Συνεπώς, το βαθμωτό πεδίο είναι ακόμα γραμμικό στον καινούριο συντεταγμένο χρόνο, κάτι το οποίο και αναμέναμε από τη διατήρηση της συμμετρίας ολίσθησης.

Από την εξίσωση (6.46), είναι προφανές ότι οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί απεικονίζουν μία ομοιογενής λύση κάποιας Beyond-Horndeski σε μία ανομοιογενή λύση κάποιου άλλου κλάδου Beyond-Horndeski και μπορούν πράγματι να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο εύρεσης λύσεων σε θεωρίες των οποίων η πολυπλοκότητα θα μας απέτρεπε από την εξαγωγή αναλυτικής λύσης. Η εν λόγω ελευθερία αποτελεί ένα σημαντικό πλεονέκτημα προσέγγισης ανομοιογενών λύσεων και ήταν και ο λόγος που δεν ασχοληθήκαμε με τη μελέτη τέτοιων γεωμετριών στην προηγούμενη ανάλυση. Αντιστρόφως, έχοντας μία ανομοιογενή λύση, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο δύσμορφο παράγοντα W έτσι ώστε $1 + 2WX = \gamma^2/Z^2$, προκειμένου να εξάγουμε μία ομοιογενή λύση σε κάποια θεωρία Beyond Horndeski της επιλογής μας. Οι δυνατότητες αυτές υποστηρίζουν την ισχύ των δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας ως εργαλείο εύρεσης νέων τοπικών λύσεων σε θεωρίες Beyond Horndeski. Επιπροσθέτως, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η προκύπτουσα δύσμορφη μετρική θα έχει εν γένει μία ρητή εξάρτηση από το βαθμωτό φορτίο q , ενώ το δύσμορφο πλαίσιο της θεωρίας προστατεύεται από την εμφάνιση του q στη δράση, διατηρώντας έτσι τη φύση του πρωτεύοντος βαθμωτού φορτίου.

6.4.1 Ακύρωση της υπολειπόμενης στερεάς γωνίας σε γεωμετρίες μελανής οπής με ασυμπτωτική συμπεριφορά βαρυτικού μονοπόλου

Πέρα των μετασχηματισμών της ομοιογένειας, οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί γεωμετρίας παρέχουν επίσης πιθανούς τρόπους αντιμετώπισης παθολογιών στις γεωμετρίες μελανών οπών, όπως για παράδειγμα η ύπαρξη υπολειπόμενης στερεάς γωνίας που εξαρτάται από το ελεύθερο φορτίο q . Το πρόβλημα που έγκειται σε αυτές τις γεωμετρίες προκύπτει από την ελεύθερη φύση του βαθμωτού φορτίου, κάτι το οποίο σημαίνει ότι η υπολειπόμενη στερεά γωνία είναι δυναμικά ελεύθερη να λάβει οσοδήποτε μεγάλη τιμή σε αντίθεση με τη μελέτη των βαρυτικών μονοπόλων στο κεφάλαιο 3. Πράγματι, από την δύσμορφη γεωμετρία της σχέσης (6.46), είναι σαφές ότι, λόγω της γραμμικής συσχέτισης του βαθμωτού πεδίου ως προς τον συντεταγμένο χρόνο, η δύσμορφη γεωμετρία περιέχει όρους της μορφής $q^2 W$. Συνεπώς, μέσω κατάλληλων δύσμορφων μετασχηματισμών, είναι ιδιαίτερα εύκολο να ακυρώσει κανείς τις παθολογίες αυτές εξαγοντας μία ανομοιογενή λύση χωρίς υπολειπόμενη στερεά γωνία.

Προς απόδειξη των παραπάνω, χωρίς να προβούμε σε εξαντλητικές λεπτομέρειες που θα εκτροχιάσουν τα αποτελέσματα του κεφαλαίου που θέλουμε να παρουσιάσουμε, επιλέγουμε τη γεωμετρία βαρυτικού μονοπόλου της Beyond Horndeski, που μελετήθηκε στο [413]. Η εν λόγω τοπική λύση ανήκει στη γενική μορφή μετρικών που εξάγαμε στην εξίσωση (6.35). Συγκεκριμένα, χαρακτηρίζεται από τον παράγοντα $c_1 \neq 0$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι παράγοντες του αναπτύγματος c_i είναι μηδενικοί. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες συμβάσεις με το [413], η μετρική τροφοδότησης δίνεται από την σχέση

$$h(r) = 1 + \eta q^2 - \frac{2M}{r} + \eta q^2 \frac{\pi/2 - \arctan(r/\lambda)}{r/\lambda}, \quad f(r) = h(r), \quad X(r) = \frac{\lambda^2 q^2}{2(\lambda^2 + r^2)}, \quad (6.48)$$

η οποία υποστηρίζεται από τη δράση τροφοδότησης με τη τριπλέτα $G_2 = 2\frac{\eta}{\lambda^2}X$, $G_4 = 1 + \eta X$, και $F_4 = -\frac{\eta}{4X}$.

Πράγματι, είναι σαφές ότι ο δύσμορφος μετασχηματισμός $W(X) = -\eta$ ακυρώνει την υπολειπόμενη στερεά γωνία και, χρησιμοποιώντας τη γενική μορφή (6.46), έχουμε τη δύσμορφη μετρική

$$d\hat{s}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \eta q^2 \frac{\pi/2 - \arctan(r/\lambda)}{r/\lambda} \right) d\tau^2 + \frac{r^2 + \lambda^2 - q^2 \eta \lambda^2}{(r^2 + \lambda^2) \left(1 - \frac{2M}{r} + \eta q^2 \frac{\pi/2 - \arctan(r/\lambda)}{r/\lambda} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (6.49)$$

Αναπτύσσοντας το μετρικό στοιχείο στο άπειρο, έχουμε μία καλώς ορισμένη ασυμπτωτικά επίπεδη λύση με τη μάζα ADM να δίνεται απλά εκ της παραμέτρου M , ενώ η λύση περιγράφει ακόμα μία μελανή οπή λόγω της προφανούς ύπαρξης οριζοντα γεγονότων. Συνεχίζουμε υπολογίζοντας το ανάπτυγμα στο $r = 0$, που βρίσκουμε ότι

$$|g_{\tau\tau}| = 1 - \eta q^2 + \frac{\frac{1}{2}\pi\eta\lambda q^2 - 2M}{r} + \mathcal{O}(r^2). \quad (6.50)$$

Επομένως, ακόμα και όταν $M = \frac{1}{4}\pi\eta\lambda q^2$, δε μπορούμε να κανονικοποιήσουμε την προκύπτουσα μελανή οπή αφού η μοναδικότητα της καμπυλότητας επιζει λόγω του όρου ηq^2 . Ο αριθμητής του $g_{\tau\tau}$ εμφανίζει επίσης τη πιθανή προβληματική ρίζα του $r^2 = \lambda^2(\eta q^2 - 1)$. Στο σημείο εκείνο, ο δύσμορφος μετασχηματισμός παύει να είναι αντιστρέψιμος. Η ύπαρξη της ρίζας αυτής μπορεί να ακυρωθεί είτε θεωρώντας $\eta q^2 < 1$ είτε θέτοντας απευθείας $\eta < 0$ στη δράση τροφοδότησης. Στη δεύτερη περίπτωση, η δράση τροφοδότησης χαρακτηρίζεται από ένα phantom κινητικό όρο στο πεδίο.

6.4.2 Το ζήτημα ύπαρξης σκουληκότρυπας στη θεωρία Beyond-Horndeski με πρωτεύον φορτίο από τη συμμετρία ολίσθησης

Θυμίζουμε ότι μία προσπελάσιμη σκουληκότρυπα, εκφρασμένη σε συντεταγμένες Schwarzschild, περιγράφεται από το ακόλουθο στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = -e^{2A(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{B(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (6.51)$$

όπου $A(r)$ και $B(r)$ περιγράφουν αντιστοίχως τις συναρτήσεις ερυθρομετατόπισης και σχήματος της σκουληκότρυπας [191]. Στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, ο λαιμός της σκουληκότρυπας δίνεται από τη σχέση $B(r_0) = r_0$, ενώ η προσπελασιμότητα της σκουληκότρυπας επιβάλλει την απουσία ορίζοντα γεγονότων, δηλαδή η συνάρτηση ερυθρομετατόπισης A είναι παντού πεπερασμένη. Από τη μορφή της μετρικής (6.12), χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.23), είναι σαφές ότι, κάτω από τις συνθήκες της συμμετρίας στην ομοτιμία και ολίσθηση του πεδίου, η ύπαρξη ενός λαιμού σκουληκότρυπας επιβάλλει ότι $(1/Z^2)|_{r=r_0} = 0$, όπου θυμίζουμε ότι η βοηθητική συνάρτηση Z είναι συνάρτηση του κινητικού όρου, ενώ ο κινητικός όρος δίνεται μέσω της (6.22). Όπως προκύπτει από την (6.22), το $X(r)$, και κατά συνέπεια και το $Z(r)$, εξαρτώνται αποκλειστικά από το βαθμωτό φορτίο q και τις σταθερές σύζευξης της θεωρίας. Αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα λαιμού r_0 , αν υπάρχει, θα εξαρτάται επίσης από τις εν λόγω παραμέτρους.

Στην περίπτωση όπου $q = 0$, μπορούμε εύκολα να εξάγουμε ένα θεώρημα απαγόρευσης (**No-Go**) αναφορικά με την ύπαρξη σκουληκότρυπας με το λαιμό να εξαρτάται από τη μάζα του αντικειμένου. Ο λόγος για αυτό είναι ότι ο κινητικός όρος X του βαθμωτού πεδίου είναι πάντα ανεξάρτητος από τη μάζα, όπως είναι προφανές από την (6.22). Επομένως, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο λαιμός της σκουληκότρυπας θα εξαρτάται αποκλειστικά από τις σταθερές σύζευξης της θεωρίας. Με δεδομένο ότι, για κάποια συγκεκριμένη θεωρία, οι σταθερές αυτές είναι προκαθορισμένες, έχουμε το αποτέλεσμα ότι σε θεωρίες Beyond-Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης του πεδίου ο λαιμός της σκουληκότρυπας παραμένει αναγκαστικά σταθερός [3] και δε θα έχει καμία μεταβλητότητα, όπως π.χ. ο ορίζοντας των μελανών οπών στις εν λόγω θεωρίες. Στην εν λόγω περίπτωση, θα έχουμε ότι η θεωρία περιέχει μία ελάχιστη κλίμακα μήκους πέρα της οποίας όλες οι μελανές οπές γίνονται σκουληκότρυπες [3]. Από την άλλη, σκουληκότρυπες με τον λαιμό να εξαρτάται από τη μάζα της γεωμετρίας είχαν βρεθεί στο [130] στα πλαίσια θεωριών Beyond Horndeski με συμμετρία στην ολίσθηση αλλά όχι στην ομοτιμία του πεδίου.

Όταν $q \neq 0$, ο λαιμός της σκουληκότρυπας, εκτός της εξάρτησης των υπολοίπων σταθερών σύζευξης, θα εξαρτάται και από το βαθμωτό φορτίο q . Εφόσον το q είναι μία ελεύθερη παράμετρος, ο λαιμός της σκουληκότρυπας θα μπορεί να μεταβάλλεται με βάση την ισχύ του βαθμωτού φορτίου. Αντί να ψάξει κανείς θεωρίες με κατάλληλες συναρτήσεις Z που μπορούν να υποστηρίξουν σκουληκότρυπες και κανονικούς χωρόχρονους χωρίς μοναδικότητες, μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα αποτελέσματα από τους δύσμορφους μετασχηματισμούς γεωμετρίας. Πράγματι, γνωρίζοντας ότι οι σκουληκότρυπες χαρακτηρίζονται από ανομοιογενείς γεωμετρίες, οι δύσμορφοι μετασχηματισμοί παρέχουν ένα γενικό πλαίσιο μελέτης αυτών των γεωμετριών, όπως προαναφέραμε. Χρησιμοποιώντας τη μορφή της δύσμορφης μετρικής (6.46), βρίσκουμε ότι η κατασκευή γεωμετρίας σκουληκότρυπας με μη-μηδενικό q φαίνεται ανέφικτη. Ο λόγος είναι η πεπερασμένη φύση που απαιτείται για τη συνάρτηση ερυθρομετατόπισης, δηλαδή ένα θετικό ορισμένο και πεπερασμένο g_{TT} , με μία ελάχιστη επιφάνεια στο $r = r_0$. Για να ικανοποιηθεί η συνθήκη ελάχιστης επιφάνειας, έχουμε ότι

$$\left(\frac{1}{1 + 2XW} \right) \Big|_{r=r_0} = 0 \implies (1 + 2XW) \Big|_{r=r_0} \rightarrow \infty \implies W \Big|_{r=r_0} \rightarrow \infty \quad (6.52)$$

για πεπερασμένο X . Συνεπώς, το στοιχείο g_{TT} απειρίζεται πάνω στο λαϊμό της σκουληκότρυπας καθιστώντας έτσι την κατασκευή της γεωμετρίας παθολογική.

Πιθανοί τρόποι να παρακάμψουμε το εν λόγω ζήτημα είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν κινητικό όρο τροφοδότησης X που απειρίζεται σε κάποιο (διπλό) σημείο ενώ ο δύσμορφος παράγοντας $W(X)$ παραμένει πεπερασμένος, έτσι ώστε ο δύσμορφος κινητικός όρος

$$X = \frac{X_{seed}}{1 + 2WX_{seed}} \quad (6.53)$$

παραμένει παντού καλώς ορισμένος στη δύσμορφη γεωμετρία. Ένας δεύτερος τρόπος είναι το να θεωρήσει κάποιος την ύπαρξη κάποιας μετρικής τροφοδότησης με μία μοναδικότητα που εξαρτάται από το βαθμωτό φορτίο q , έτσι ώστε $h(r) = h_{finite} - W(X)q^2$. Στην εν λόγω περίπτωση, η γεωμετρία γίνεται καλώς ορισμένη ενώ το $W(X)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί προς την κατασκευή του λαϊμού σκουληκότρυπας. Είναι ιδιαίτερα απίθανο να μπορέσουμε όμως να χρησιμοποιήσουμε κάποια εκ των δύο μεθοδολογιών λόγω της έντονης παθολογίας που θα έχει η μετρική τροφοδότησης, κάτι το οποίο μας υποδεικνύει ότι μπορεί να μην υπάρχουν σκουληκότρυπες με βαθμωτό φορτίο ολίσθησης. Κατά τη διάρκεια της εν λόγω έρευνας, έγιναν πολλές προσπάθειες εύρεσης τέτοιων παθολογιών μέσω trial-and-error χωρίς επιτυχή αποτελέσματα.

Αναφέρουμε εδώ για πληρότητα ότι ένα αντιπαράδειγμα αυτού είναι η τετριμμένη λύση Ellis που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ως λύση της δράσης Einstein-Hilbert με την ελάχιστη επέκταση ενός phantom βαθμωτού πεδίου. Θυμίζουμε ότι και στην εν λόγω περίπτωση υπήρχε ένα ρεύμα Noether $J^\mu = \partial^\mu \Phi$ το οποίο αντιστοιχεί στη συμμετρία ολίσθησης του phantom πεδίου. Σε αντίθεση με τη μελέτη του εν λόγω κεφαλαίου όμως, το βαθμωτό φορτίο της Ellis δεν προκύπτει από τη γραμμική εξάρτηση του πεδίου ως προς το συντεταγμένο χρόνο, ούτε θέσαμε ποτέ $J^\mu = 0$ που απαιτήθηκε στη Beyond Horndeski. Αυτό θα σήμαινε ότι αν υπάρχουν προσπελάσιμες σκουληκότρυπες στην Beyond Horndeski, ο τρόπος προσέγγισης της λύσης είναι αρκετά διαφορετικός από τη μεθοδολογία που χρησιμοποιούμε εδώ και πρέπει να μελετηθεί υπό διαφορετικό πρίσμα.

6.5 Οι γενικές περιπτώσεις χωρίς γραμμική εξάρτηση των G_2 και G_4

Έχοντας πλέον εξάγει τις πιθανές πληροφορίες που μπορούμε να έχουμε από τη γραμμική εξάρτηση των G_2 και G_4 , μπορούμε να επικεντρωθούμε στο γενικότερο πρόβλημα εύρεσης περαιτέρω λύσεων. Στο εν λόγω υποκεφάλαιο, λόγω της πολυπλοκότητας των αποτελεσμάτων, θα αποφύγουμε από το να παρουσιάσουμε κάποια λύση, αλλά θα επικεντρωθούμε στην ισχύ του αλγορίθμου παρουσιάζοντας πως μπορεί κανείς να εξάγει ακόμα πιο γενικές γεωμετρίες σε δυνητικά αναλυτική μορφή. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6.30) που δίνει τη συναρτησιακή μορφή του X είναι ένα γένει μία αλγεβρική εξίσωση. Για να κρατήσουμε την ανάλυση αντιμετωπίσιμη, έχοντας ως στόχο την πιθανή ύπαρξη αναλυτικών λύσεων, θα ασχοληθούμε με τις συναρτησιακές μορφές του X που προκύπτουν όταν η (6.30) καταλήγει σε πολυώνυμο τάξης m ως προς το X . Για το λόγο αυτό, ξαναγράφουμε τη βοηθητική συνάρτηση Ξ ως τον λόγο δύο πολυωνύμων, $\frac{P}{Q}$. Τότε, η (6.30) ξαναγράφεται ως

$$\frac{r^2 X P(X) - q^2 Q(X) + 2X Q(X)}{Q(X)} = 0. \quad (6.54)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση, για να δίνεται το X από μία πολυωνυμική εξίσωση τάξης m , υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Είτε τα P και Q είναι πολυώνυμα τάξης $m - 1$ είτε τα P και Q είναι πολυώνυμα τάξης m με το Q να μηδενίζεται στο $X \rightarrow 0$, που σημαίνει ότι το Q δεν έχει σταθερό όρο. Η δεύτερη περίπτωση είναι προβληματική καθώς δε δίνει πλέον συνεχές όριο στη Γενική Σχετικότητα όταν $q \rightarrow 0$. Αυτό συμβαίνει επειδή το X δε θα μηδενίζεται όταν $q = 0$ και συνεπώς οι λύσεις της Γενικής Σχετικότητας απαιτούν λεπτό συντονισμό της εκάστοτε θεωρίας Beyond Horndeski. Για το λόγο αυτό, θα ασχοληθούμε μόνο με τη πρώτη περίπτωση. Προφανώς, όταν η (6.54) είναι πολυώνυμο πρώτης τάξης, τότε καταλήγουμε στη προηγούμενη ανάλυση. Η λογική επέκταση λοιπόν είναι να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το X δίνεται από πολυώνυμο δεύτερης τάξης κάτω από τη συνθήκη του $X \rightarrow 0$ όταν $q \rightarrow 0$. Προς τον σκοπό αυτό, θέτουμε

$$\Xi = \frac{cX - a}{bX - d} \quad (6.55)$$

που οδηγεί στη λύση

$$X = \frac{ar^2 + bq^2 + 2d \pm \sqrt{(ar^2 + bq^2 + 2d)^2 - 4dq^2(2b + cr^2)}}{4b + 2cr^2}. \quad (6.56)$$

Τώρα, θεωρώντας ότι το συναρτησιακό G_4 είναι καλώς ορισμένο για $X \rightarrow 0$, μπορούμε να θέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας

$$G_4 = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} g_s^n X^{\frac{n}{s}}, \quad s \in \mathbb{Z}^+, \quad (6.57)$$

κάτι το οποίο είναι αυτοσυνεπές με την προηγούμενη ανάλυση. Από τον ορισμό της βοηθητικής συνάρτησης Ξ , (6.29), βρίσκουμε τη συναρτησιακή μορφή του G_2 ,

$$G_2 = -2\Lambda + \frac{a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} g_s^n X^{\frac{n}{s}} + \frac{ab - cd}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n}{s}}{\frac{n}{s} + 1} g_s^n X^{\frac{n}{s} + 1} {}_2F_1 \left(1, \frac{n}{s} + 1; \frac{n}{s} + 2; \frac{bX}{d} \right). \quad (6.58)$$

Λόγω της ύπαρξης της υπεργεωμετρικής συνάρτησης στο G_2 , πρέπει να θέσουμε συγκεκριμένα $\frac{n}{s}$ για να καταλήξουμε σε αναλυτικές εκφράσεις ή να περιορίσουμε τις παραμέτρους. Παρατηρούμε ότι, από τη λύση του X , (6.56), αν μηδενίζεται η σταθερά σύζευξης c , τότε το X απειρίζεται στο άπειρο, ενώ αν μηδενίζεται η d , το X δε μηδενίζεται για $q \rightarrow 0$. Από την άλλη, αν η σταθερά b είναι μηδέν και η a είναι μη-μηδενική, μπορούμε να έχουμε δράσεις με κανονικό κινητικό όρο, αλλά το X πάλι δε μηδενίζεται για $q \rightarrow 0$. Επομένως, καταλήγουμε στην επιλογή των $b = 0$, $a = 0$ και $d = -\lambda^2$, τα οποία μας δίνουν ένα καλώς ορισμένο X με μία αντιμετωπίσιμη μορφή για το G_2 που δίνεται από τη σχέση

$$G_2 = -2\Lambda + \frac{c}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} g_s^n \frac{\frac{n}{s}}{\frac{n}{s} + 1} X^{\frac{n}{s} + 1}, \quad (6.59)$$

ενώ η μορφή του X καταλήγει στο

$$X = \frac{\sqrt{4c\lambda^2 q^2 r^2 + 4\lambda^4} - 2\lambda^2}{2cr^2}, \quad (6.60)$$

όπου η σταθερά c θεωρείται θετική και κρατήσαμε το θετικό πρόσημο της λύσης (6.56). Ολοκληρώνοντας τώρα την (6.28), εξάγαμε ένα ιδιαίτερα περίπλοκο μετρικό στοιχείο δωσμένο μέσω άπειρων αθροισμάτων υπεργεωμετρικών συναρτήσεων, το οποίο δεν παρέχει κάποιο επιπλέον ενδιαφέρον να παρουσιάσουμε.

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι από την προοπτική των αναλυτικών ομοιογενών λύσεων, η θεώρηση μη σταθερών βοηθητικών συναρτήσεων Ξ που καθορίζουν τη συσχέτιση των συναρτησιακών G_2 και G_4 οδηγεί σε ιδιαίτερος περίπλοκα στοιχεία μετρικής, των οποίων η περαιτέρω ανάλυση βρίσκεται εκτός του στόχου της εν λόγω έρευνας. Συγκεκριμένα, η ύπαρξη των υπόριζων ποσοτήτων στη λύση του X οδηγεί σε αυξανόμενη πολυπλοκότητα των ακόλουθων υπολογισμών, λόγω της γενικότητας της προσέγγισης μας. Θα θέλαμε όμως στο σημείο αυτό να τονίσουμε ότι η ίδια γενικότητα της ανάλυσης είναι και αυτή που μας επιτρέπει να εξάγουμε δυνητικά οποιαδήποτε στατική και σφαιρικά συμμετρική λύση στο γενικό μοντέλο της θεωρίας Beyond Horndeski που μελετάμε. Πράγματι, εργαστήκαμε σε άγνωστα πλαίσια της θεωρίας, χρησιμοποιώντας μόνο τις συμμετρίες του βαθμωτού πεδίου και καταφέραμε να παρουσιάσουμε έναν αυτοσυνεπές τρόπο να εξάγει κανείς όλες τις πιθανές στατικές και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο. Το εν λόγω αποτέλεσμα αποτελεί μία ισχυρή ένδειξη ότι, παρά την όποια πολυπλοκότητα της θεωρίας βαθμωτού-τανυστή, η ύπαρξη μη-τετριμμένων συμμετριών στο χώρο πεδίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποδοτικά προς την εξαγωγή φαινομενικά αδύνατων αναλυτικών λύσεων με μη-τετριμμένα χαρακτηριστικά, όπως η ύπαρξη πρωτεύοντος βαθμωτού φορτίου κάτω από την ικανοποίηση των ενεργειακών συνθηκών.

6.6 Συμπεράσματα

Η έρευνα του εν λόγω κεφαλαίου επικεντρώθηκε στη μέλετη των τοπικών λύσεων σε θεωρίες Beyond Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης πεδίου. Παρουσιάσαμε έναν ισχυρό αλγόριθμο εξαγωγής στατικών και σφαιρικά συμμετρικών λύσεων. Η ισχύς του αλγορίθμου επιβεβαιώθηκε από το γεγονός ότι, θεωρώντας απλά μία γραμμική συσχέτιση των συναρτησιακών G_2 και G_4 της θεωρίας, μπορούσαμε να εξάγουμε φαινομενικά άπειρες λύσεις στο ευρύτερο πλαίσιο της Beyond Horndeski με συνεχές όριο στη Γενική Σχετικότητα χωρίς να χρησιμοποιηθεί κάποιος λεπτός συντονισμός στη θεωρία. Επιπροσθέτως, οι λύσεις αυτές χαρακτηρίζονται από καλώς ορισμένη μάζα ADM και καλώς ορισμένο κινητικό όρο πεδίου, ενώ περιλαμβάνουν και τη συνεισφορά ενός πρωτεύοντος βαθμωτού φορτίου λόγω της συμμετρίας του πεδίου. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα ήταν ότι οι εν λόγω λύσεις μελανών οπών μπορούν να κανονικοποιηθούν για κάποια κρίσιμη τιμή της μάζας ADM λόγω της ύπαρξης του πρωτεύοντος βαθμωτού φόρτιου, ενώ επιβεβαιώσαμε επίσης και την ύπαρξη σολιτονικών αντικειμένων. Η μελέτη μας έδειξε επίσης ότι οι εν λόγω γεωμετρικές μπορούν να ικανοποιούν τις ασθενείς ενεργειακές συνθήκες, κάτι το οποίο τις ανυψώνει σε πιο υγιή αντικείμενα από τις περισσότερες hairy μελανές οπές στις θεωρίες βαθμωτού-τανυστή.

Ένα βασικό αποτέλεσμα της ανάλυσης μας ήταν το γεγονός ότι στον κλάδο της θεωρίας με γραμμική συσχέτιση των G_2 και G_4 , η ύπαρξη κανονικού κινητικού όρου στη δράση οδηγεί σε γεωμετρικές με υπολειπόμενη στερεά γωνία. Προκειμένου να διορθώσουμε τέτοιου είδους παθολογίες, χρησιμοποιήσαμε το μηχανισμό των δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας και μελετήσαμε τις προκύπτουσες δύσμορφες μετρικές. Η παρατήρηση αυτή οδήγησε σε μία περαιτέρω συζήτηση αναφορικά με την ύπαρξη σκουληχότρυπας στο γενικότερο πλαίσιο της θεωρίας, όπου ο λαϊμός εξαρτάται από το πρωτεύον βαθμωτό φορτίο q . Παρουσιάσαμε κάποια ενδεικτικά επιχειρήματα αναφορικά με την αδυναμία εξαγωγής τέτοιων λύσεων, ενώ σχολιάσαμε και την πιθανότητα εύρεσης τέτοιων γεωμετριών μέσω μίας πλήρους διαφορετικής προσέγγισης εκπορευόμενοι από τη γνωστή λύση σκουληχότρυπας Ellis.

Τέλος, η έρευνα μας κατέληξε στη μελέτη γενικών συναρτησιακών G_2 και G_4 , όπου επικεντρωθήκαμε σε ομοιογενείς λύσεις. Συγκεκριμένα, περιορίσαμε τον κινητικό όρο του πεδίου $X =$

$-\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$, έτσι ώστε να διατηρήσουμε τη δυνατότητα συνεχούς μετάβασης σε λύσεις Γενικής Σχετικότητας χωρίς λεπτό συντονισμό. Έπειτα, παρουσιάσαμε μερικά ενδεικτικά βήματα του αλγορίθμου εξαγωγής λύσεων για τις πιο γενικές περιπτώσεις, επιδεικνύοντας έτσι και την ισχύ του. Παρά το γεγονός ότι οι τοπικές λύσεις που προκύπτουν για τη γενική περίπτωση ήταν αυξανόμενο πιο περίπλοκες, καταστήσαμε σαφές ότι η μεθοδολογία μας είναι ικανή να εξάγει στατικές και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις σε όλο το πλαίσιο της Beyond Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης πεδίου.

Μία ενδιαφέρουσα επέκταση της εν λόγω έρευνας θα ήταν η μελέτη των λύσεων που υποστηρίζονται από θεωρίες Beyond Horndeski με συμμετρία ολίσθησης αλλά όχι και ομοτιμίας. Ένα σημαντικό ζήτημα που θέλουμε να ελέγξουμε στη μελλοντική αυτή μελέτη αφορά την παραβίαση των ενεργειακών συνθηκών σε μελανές οπές με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο όταν η θεωρία περιλαμβάνει και τον όρο Gauss-Bonnet, που προκύπτει από το συναρτησιακό $G_5(X) \sim \log(X)$. Επιπροσθέτως, λόγω της τετραγωνικής φύσης των τανυστών καμπυλότητας στον όρο Gauss-Bonnet, αναμένουμε ότι ο κινητικός όρος του πεδίου θα έχει εν γένει και ρητή εξάρτηση από τα στοιχεία μετρικής. Κάτι τέτοιο εισάγει μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα επέκταση της φύσης του βαθμωτού φορτίου, όπου πλέον θα περιλαμβάνεται και η μάζα ADM της μελανής οπής.

Αν η παραπάνω θεώρηση αποδειχθεί ορθή, θα είναι επίσης αρκετά πιθανό να μπορούμε να εξάγουμε λύσεις προσπελάσιμης σκουληκότρυπας όπου ο λαιμός εξαρτάται από τη μάζα και το φορτίο ολίσθησης q . Ο λόγος για αυτό είναι ότι η μορφή των λύσεων του X που θα μπορούμε να έχουμε, εφόσον εξαρτάται και από τα μετρικά στοιχεία, είναι πιθανό να περιέχει και τις κατάλληλες παθολογίες που σχολιάσαμε στο υποκεφάλαιο 6.4.2 που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως στοιχεία τροφοδότησης προς την κατασκευή σκουληκότρυπας μέσω δύσμορφων μετασχηματισμών γεωμετρίας. Συνεπώς, ενώ οι λύσεις σκουληκότρυπας με μεταβλητό λαιμό φαίνονται ανέφικτες στη μεθοδολογία μας, είναι πιθανόν στα πλαίσια της θραύσης της συμμετρίας ομοτιμίας να μπορούμε να έχουμε ακόμα πιο πλούσιο κατάλογο τοπικών λύσεων. Μια διεξοδική μελέτη των παραπάνω αποτελεί ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον ζήτημα προς μελλοντική εξερεύνηση, βασιζόμενοι στην έρευνα που παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

Η θεωρία Γενικής Σχετικότητας του Einstein αποτελεί πλέον μία κοινώς αποδεκτή θεμελιώδη θεωρία βαρύτητας που μετράει πληθώρα επιτυχιών από τη πρόβλεψη και εξήγηση φυσικών φαινομένων σε ένα μεγάλο εύρος ενεργειακής κλίμακας. Υποστηρίζεται από πολυάριθμα πειράματα αστροφυσικής, όπως η παρατήρηση μελανών οπών και αστέρων νετρονίων στο σύμπαν αλλά και από την πρόσφατη παρατήρηση των βαρυτικών κυμάτων [32] και των σκιών των μελανών οπών [418]. Παρά τις επιτυχίες της, η Γενική Σχετικότητα ακόμα αντιμετωπίζει περιορισμούς στις υπεριώδεις και υπέρυθρες ενεργειακές κλίμακας. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο της κοσμολογίας, υπάρχουν ακόμα έντονα αναπάντητα ερωτήματα αναφορικά με τη φύση της σκοτεινής ύλης, της σκοτεινής ενέργειας, το μοντέλο πληθωρισμού και την αντιμετώπιση του προβλήματος της πρώιμης μοναδικότητας. Επιπροσθέτως, θεωρητικά προβλήματα, όπως η μη-επανακανονικοποιήσιμότητα της Γενικής Σχετικότητας αλλά και η φύση της μοναδικότητας πίσω από τον ορίζοντα των μελανών οπών, υποδεικνύουν με ξεκάθαρο τρόπο ότι η Γενική Σχετικότητα αποτελεί μία ενεργή θεωρία πεδίου η οποία, ενώ είναι ικανή να εξηγήσει πληθώρα φυσικών φαινομένων στο σύμπαν, αποτελεί απλά ένα κομμάτι ενός ευρύτερου θεωρητικού μοντέλου το οποίο μας είναι ακόμα και τώρα άγνωστο. Τα εν λόγω ανοιχτά ζητήματα αναφορικά με τη φύση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης παρέχουν ισχυρά κίνητρα προς τη κατασκευή και τη μελέτη τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας, είτε φαινομενολογικής είτε μικροσκοπικής προέλευσης.

Στη παρούσα διατριβή ασχοληθήκαμε με τις θεωρίες βαθμωτού τανυστή, όπου οι βαθμοί ελευθερίας της βαρυτικής θεωρίας επεκτείνονται μέσω της εισαγωγής κάποιου βαθμωτού πεδίου συζευγμένο με τετριμμένο ή μη-τετριμμένο τρόπο στους βαρυτικούς τανυστές. Από τις διάφορες θεωρίες βαθμωτού τανυστή υπό τη συνθήκη της απουσίας ασταθειών Ostrogradsky μπορεί κανείς να διακρίνει ως κυρίαρχες τη θεωρία Chern-Simons [73, 74, 75], που ακυρώνει τέτοιου είδους προβληματικές αστάθειες μέσω της θραύσης της αναλλοιωτότητας κάτω από διαφορομορφισμούς [163], τις ενεργές τετραδιάστατες θεωρίες Lovelock [65], συμπαγοποιημένες από υψηλότερες διαστάσεις που αποτελούν μέρος της θεωρίας Horndeski [331, 150] αλλά και το ευρύτερο πλαίσιο των θεωριών Horndeski [368, 353, 123, 125, 332].

Μετά τον εντοπισμό του συμβάντος του βαρυτικού κύματος GW170817 [33], εμφανίστηκε μια πληθώρα περιορισμών στην επιστημονική κοινότητα σχετικά με τις θεωρίες βαθμωτού τανυστή [122]. Ωστόσο, το εύρος της συχνότητας των βαρυτικών κυμάτων που παρατηρήθηκαν από το LIGO/Virgo ($f \sim 100\text{Hz}$) σε σχέση με τη συνηθισμένη κλίμακα ισχυρής συζεύξης που εμφανίζεται σε αυτά τα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας ($\Lambda \sim 260\text{Hz}$) οδηγεί σε αβεβαιότητα αναφορικά με το κατά πόσο αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να εφαρμοστούν σε διαφορετικές κλίμακας ενέργειας [419].

Πλέον, αναγνωρίζεται ευρέως ότι οι περιορισμοί που προέρχονται από κοσμολογικές παρατηρήσεις δεν επεκτείνονται αυτομάτως και σε τοπικές, ασυμπτωτικά επίπεδες, λύσεις συμπαγών αντικειμένων [420]. Το εν λόγω συμπέρασμα μας οδηγεί στη μελέτη τοπικών λύσεων μέσω μη-διαταρακτικής προσέγγισης.

Οι γεωμετρίες και οι σχετικές ιδιότητες των τοπικών λύσεων στις τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της εκάστοτε θεωρίας. Πράγματι, κάθε βαρυτική θεωρία εκτός της κοσμολογικής της εφαρμογής, οφείλει να παρέχει φυσικά αποδεκτές λύσεις μελανών οπών. Εκτός αυτού όμως, βασικός στόχος των εν λόγω θεωριών είναι και η παραβίαση των θεωρημάτων no-hair της Γενικής Σχετικότητας. Ο λόγος για την ανάγκη παραβίασης του εν λόγω περιορισμού της Γενικής Σχετικότητας είναι ότι η τροποποίηση της γεωμετρίας των διαφόρων συμπαγών αντικειμένων δύναται να παρέχει αποδεικτικά στοιχεία για την ορθότητα της εκάστοτε θεωρίας, όπως π.χ. η μη-τετριμμένη κατανομή της στροφορμής στη μελανή οπή της θεωρίας Chern-Simons που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 2. Εκτός αυτού, η ύπαρξη επιπλέον δευτερεύοντος ή πρωτεύοντος φορτίου που διακρίνει τις μελανές οπές τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας μπορεί να οδηγήσει σε θερμοδυναμική ευστάθεια των μελανών οπών, όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 4 ή σε αλλαγή στην εσωτερική δομή της μελανής οπής, όπως είχαμε στο κεφάλαιο 6, που ακυρώνει με δυναμικό τρόπο την εσωτερική μοναδικότητα.

Βέβαια, γνωρίζοντας την ορθότητα της Γενικής Σχετικότητας στις κατάλληλες ενεργειακές κλίμακες, κάθε τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας πρέπει να χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένα όρια ανάκτησης των αποτελεσμάτων της Γενικής Σχετικότητας. Πράγματι, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των (περισσοτέρων) θεωριών βαθμωτού τανυστή είναι ότι καταλήγουν με συνεχή τρόπο στη δράση Einstein-Hilbert όταν το πεδίο παύει να είναι δυναμικό. Όμως, η εξήγηση της συνεχούς αυτής μετάβασης στο χώρο των δράσεων θα λέγαμε ότι είναι μάλλον πρόχειρη. Όπως δείξαμε, είναι ο λόγος των σταθερών σύζευξης της θεωρίας ως προς τη φυσική κλίμακα της δράσης Einstein-Hilbert που έχει κυρίαρχο ρόλο στην ανάκτηση των τοπικών λύσεων της Γενικής Σχετικότητας και είναι αυτός ο λόγος που καθορίζει την ορθότητα της όποιας (μη-)διαταρακτικής προσέγγισης νέων λύσεων.

Εκτός των λύσεων μελανών οπών όμως, η Γενική Σχετικότητα επίσης δεν υποστηρίζει άλλα συμπαγή αντικείμενα όπως σκουληκότρυπες, κανονικοποιημένες μελανές οπές ή βαρυτικά μονόπολα. Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση των βαρυτικών μονοπόλων, η Γενική Σχετικότητα τα καθιστά ασταθή λόγω αρνητικής μάζας [215], ενώ η ύπαρξη σκουληκότρυπας ή κανονικοποιημένης μελανής οπής απαιτεί την εισαγωγή phantom πεδίου [421], κάτι το οποίο, εκτός του ότι παραβιάζει ισχυρά τις ενεργειακές συνθήκες, είναι γνωστό ότι δημιουργεί βαρυτικά ασταθείς γεωμετρίες [349]. Παρόλα αυτά, πρόσφατες παρατηρήσεις [422, 36] επιβεβαιώνουν την ύπαρξη συμπαγών αντικειμένων στο σύμπαν μεταξύ των ορίων μάζας μελανής οπής και αστέρα νετρονίων, των οποίων δεν γνωρίζουμε τη γεωμετρική τους δομή. Στα πλαίσια αυτά, κληθήκαμε να μελετήσουμε πιο εξωτικά συμπαγή αντικείμενα, όπως τα καθολικά μονόπολα στο κεφάλαιο 3, οι προσπελάσιμες σκουληκότρυπες του κεφαλαίου 5 και οι κανονικοποιημένες μελανές οπές και οι σολιτονικές λύσεις στο κεφάλαιο 6.

Τα αποτελέσματα της διατριβής υποδεικνύουν όλα με αυτοσυνεπή τρόπο ότι η μη-διαταρακτική προσέγγιση των τοπικών λύσεων στις τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας που μελετάμε οδηγεί σε νέα μη-τετριμμένα χαρακτηριστικά και πλούσια φυσικά φαινόμενα που διαφοροποιούνται ισχυρά από τα αποτελέσματα της Γενικής Σχετικότητας υπό συνθήκες ισχυρής βαρύτητας. Για το λόγο αυτό, καταλήγουμε ότι μία τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας οφείλει να αντιμετωπίζεται ως ολότητα και όχι απλά ως διορθώσεις πάνω στη Γενική Σχετικότητα προκειμένου να εξάγουμε νέες προβλέψεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι κάτι το οποίο έχουμε προαναφέρει αρκετές φορές μέσα στο κείμενο. Οι θεωρίες βαθμωτού τανυστή δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται ως θεωρίες βαρύτητας με επέκταση

κάποιου πεδίου ύλης, αλλά να αναγνωρίζονται ως μία θεωρία της οποίας οι βαθμοί ελευθερίας αποτελούν μία ενιαία διπλέτα, $(g_{\mu\nu}, \Phi)$, που περιγράφει τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

Παρόλαυτά, είναι σαφές ότι η μελέτη των αντικειμένων αυτών οφείλει να συνεχιστεί προκειμένου να έχουμε μία ξεκάθαρη εικόνα των τοπικών λύσεων της εκάστοτε θεωρίας. Υπάρχει αναλυτική ισχυρά περιστρεφόμενη λύση στη θεωρία Chern-Simons; Διατηρεί τα χαρακτηριστικά που εξάγαμε; Εμφανίζει η λύση την ιδιότητα κυκλικότητας ή προβλέπει χαοτικά φαινόμενα στις τροχιές γύρω από τη μελανή οπή; Ποια είναι η απόκριση των βαρυτικών μονοπόλων κάτω από διαταραχές στην τετραδιάστατη θεωρία Gauss-Bonnet; Είναι ευσταθής; Ποιες είναι οι θερμοδυναμικές ιδιότητες μελανών οπών με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο; Μπορούμε να σταθεροποιήσουμε λύσεις προσπελάσιμης σκουληκότρυπας στη θεωρία Beyond Horndeski; Υπάρχουν άλλες αναλυτικές λύσεις με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο στη περίπτωση της θραύσης της συμμετρίας ομοτιμίας; Μπορούμε να συνδέσουμε τη θεωρία Lovelock με τις επεκτάσεις των θεωριών Horndeski; Υπάρχει ξεκάθαρο πλαίσιο θεωριών που ικανοποιεί τις ενεργειακές συνθήκες;

Είναι μάλλον παράδοξο ότι τελειώνοντας τη διατριβή παραμένουν ακόμα τόσα ερωτήματα. Θα λέγαμε όμως ότι είναι ένα ευτυχές γεγονός. Πράγματι, το ενδιαφέρον της επιστημονικής περιέργειας ήταν πάντα το πόσα λίγα ξέρουμε για το αντικείμενο που μελετάμε, αναγνωρίζοντας πάντα όμως αυτά τα οποία καταλαβαίνουμε. Οι επιτυχίες, αλλά και οι αποτυχίες και οι ερευνητικές προσπάθειες αποτελούν τα στοιχεία δομής του μέλλοντος της κάθε επιστήμης. Ολοκληρώνουμε τη διατριβή αυτή ευχαριστώντας τον αναγνώστη που έφτασε στο σημείο αυτό και αναμένουμε με ενθουσιασμό την αντιμετώπιση των παραπάνω ζητημάτων μετά το πέρας του διδακτορικού.

Κεφάλαιο 8

Παραρτήματα

Παράρτημα Α'

Ιδιότητες του όρου Chern-Simons και του ταυυστή Cotton

Στην ανάλυση μας θα ακολουθήσουμε την υπογραφή Lorentz , όπου η μετρική έχει μία αρνητική ιδιοτιμή, $(-, +, +, +)$, και ο ταυυστής Riemann δίνεται μέσω της σχέσης

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\rho}_{\xi\mu}\Gamma^{\xi}_{\sigma\nu} - \dots \quad (A'.1)$$

Ο ταυυστής Cotton προκύπτει από τη μεταβολή της δράσης Chern-Simons (2.3). Συγκεκριμένα, είναι ο ταυυστής ενέργειας ορμής από τη μεταβολή του όρου bR_{CS} ως προς το μετρικό ταυυστή $g_{\mu\nu}$. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς που δώθηκαν στο κεφάλαιο 2,

$$\tilde{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma}_{\gamma\delta},$$

όπου $\varepsilon_{\rho\sigma\kappa\lambda}$ είναι ο συναλλοίωτος ταυυστής Levi-Civita υπό τη σύμβαση ότι $\varepsilon_{0123} = \sqrt{-g}$, που σημαίνει ότι $\varepsilon^{0123} = \frac{-1}{\sqrt{-g}}$, έχουμε ότι

$$\delta \left(A \int d^4x \sqrt{-g} b(x) R^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \right) \equiv 4 A \int d^4x \sqrt{-g} C^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -4 A \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (A'.2)$$

Η ποσότητα $C_{\mu\nu}$ είναι ο ταυυστής Cotton που δίνεται από τη σχέση

$$C_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla^{\alpha} \left[(\nabla^{\beta}b)\tilde{R}_{\alpha\mu\beta\nu} + (\nabla^{\beta}b)\tilde{R}_{\alpha\nu\beta\mu} \right]. \quad (A'.3)$$

Κατά της εξαγωγή του παραπάνω αποτελέσματος, χρησιμοποιήθηκε η μεταβολή του ταυυστή Riemann και η ταυτότητα Bianchi , $\varepsilon^{\beta\alpha\rho\sigma}\nabla_{\alpha}R_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} = 0$, όπου αγνοήθηκαν οι επιφανειακοί όροι στο άπειρο που προέκυψαν από τις αντίστοιχες ολοκληρώσεις κατά μέλη της μεταβολής της δράσης.

Από τη μορφή του ταυυστή Cotton , (A'.3), μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει άμεσα ότι το ίχνος του μηδενίζεται, $g^{\mu\nu}C_{\mu\nu} = 0$

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\nabla_{\alpha} \left[(\nabla^{\beta}b)(R^{\alpha}_{\mu\gamma\delta}\varepsilon^{\gamma\delta}_{\beta\nu} + R^{\alpha}_{\nu\gamma\delta}\varepsilon^{\gamma\delta}_{\beta\mu}) \right] \\ \implies g^{\mu\nu}C_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\nabla_{\alpha} \left[(\nabla_{\beta}b)(R^{\alpha}_{\mu\gamma\delta})\varepsilon^{\mu\gamma\delta\beta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (A'.4)$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει μέσω των συμμετριών του τανυστή Riemann. Συγκεκριμένα, θυμίζουμε ότι $R^\alpha_{[\mu\nu\rho]} = 0$, όπου [...] περιγράφει την πλήρη αντισυμμετρικοποίηση των δεικτών, που σημαίνει ότι

$$R^\alpha_{\kappa\lambda\xi} \varepsilon^{\kappa\lambda\xi\sigma} = 0. \quad (A'.5)$$

Μία δεύτερη σημαντική ιδιότητα είναι ο συναλλοίωτος κανόνας μη-διατήρησης του τανυστή Cotton, που αποδεικνύουμε παρακάτω για πληρότητα

$$\begin{aligned} \nabla_\mu C^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\rho \left[(\nabla_\sigma b) (\tilde{R}^{\rho\mu\sigma\nu} + \tilde{R}^{\rho\nu\sigma\mu}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\rho \left[(\nabla_\sigma b) \tilde{R}^{\rho\mu\sigma\nu} \right] - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\rho \left[(\nabla_\sigma b) \tilde{R}^{\rho\nu\sigma\mu} \right] \\ &= -\frac{1}{2} (\nabla_{[\mu} \nabla_{\rho]}) \left[(\nabla_\sigma b) \tilde{R}^{\rho\mu\sigma\nu} \right] - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\mu) \left[(\nabla_\sigma b) \tilde{R}^{\rho\nu\sigma\mu} \right] - \frac{1}{2} \nabla_\rho \nabla_\mu \left[(\nabla_\sigma b) \tilde{R}^{\rho\nu\sigma\mu} \right] \\ &= -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\mu) \left[(\nabla_\sigma b) (\tilde{R}^{\rho\nu\sigma\mu} + \frac{1}{2} \tilde{R}^{\rho\mu\sigma\nu}) \right] \\ &= -\frac{\nabla_\sigma b}{2} \left[-R_{\xi\mu} \left(\tilde{R}^{\xi\nu\sigma\mu} + \frac{\tilde{R}^{\xi\mu\sigma\nu}}{2} \right) + R^\nu_{\xi\mu\rho} \left(\tilde{R}^{\rho\xi\sigma\mu} + \frac{\tilde{R}^{\rho\mu\sigma\xi}}{2} \right) + R_{\xi\rho} \left(\tilde{R}^{\rho\nu\sigma\xi} + \frac{\tilde{R}^{\rho\xi\sigma\nu}}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial_\sigma b}{2} \left[R^\nu_{\xi\mu\rho} \left(\tilde{R}^{\rho\xi\sigma\mu} + \frac{\tilde{R}^{\rho\mu\sigma\xi}}{2} \right) \right] = -\frac{\partial_\sigma b}{4} \left[\tilde{R}^{\rho\xi\sigma\mu} (R^\nu_{\xi\mu\rho} - R^\nu_{\rho\mu\xi}) + R^\nu_{\xi\mu\rho} \tilde{R}^{\rho\mu\sigma\xi} \right] \\ &= -\frac{\partial_\sigma b}{4} \left[\tilde{R}^{\rho\xi\sigma\mu} R^\nu_{\mu\xi\rho} + R^\nu_{\xi\mu\rho} \tilde{R}^{\rho\mu\sigma\xi} \right] = -\frac{\partial_\sigma b}{2} \tilde{R}^{\rho\xi\sigma\mu} R^\nu_{\mu\xi\rho} = -\frac{\partial_\sigma b}{2} \tilde{R}^\rho_{\xi}{}^{\sigma\mu} R^\xi{}^\nu{}_\rho{}_\mu = -\frac{1}{4} (\partial^\nu b) R_{CS}. \end{aligned}$$

όπου στη τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε τη ταυτότητα

$$\tilde{R}^\rho{}_\xi{}^{\sigma\mu} R^\xi{}^\nu{}_\rho{}_\mu = \frac{1}{4} g^{\sigma\nu} \tilde{R}^\rho{}_\xi{}^{\lambda\mu} R^\xi{}_{\rho\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} R_{CS}. \quad (A'.6)$$

Το μηδενικό ίχνος του τανυστή Cotton μπορεί να επιβεβαιωθεί και μέσω του γεγονότος ότι ο όρος $\sqrt{|g|} b R_{CS}$ παραμένει αναλλοίωτος κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς. Οι πράξεις είναι ιδιαίτερα χρονοβόρες αλλά τις παρουσιάζουμε εδώ για πληρότητα.

Έστω ο σύμμορφος μετασχηματισμός

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

που δίνει ότι

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + C^\alpha_{\mu\nu}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \Omega^{-4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad C^\alpha_{\mu\nu} = (\nabla_\mu \log \Omega) \delta^\alpha_\nu + (\nabla_\nu \log \Omega) \delta^\alpha_\mu - (\nabla_\beta \log \Omega) g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}$$

Επαναορίζουμε για λόγους ευκολίας:

$$\chi = \log \Omega, \quad \chi_\mu \equiv \nabla_\mu \chi \quad (A'.7)$$

Τότε ο τανυστής Riemann μετασχηματίζεται ως

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \rightarrow R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu C^\rho{}_{\sigma\nu} - \nabla_\nu C^\rho{}_{\sigma\mu} + C^\rho{}_{\kappa\mu} C^\kappa{}_{\sigma\nu} - C^\rho{}_{\kappa\nu} C^\kappa{}_{\sigma\mu} \quad (A'.8)$$

Αντίμετωπίζοντας τον υπολογισμό ανά εκάστοτε όρο έχουμε

- $\nabla_\mu C^\rho{}_{\sigma\nu} = \chi_{\mu\sigma} \delta^\rho_\nu + \chi_{\mu\nu} \delta^\rho_\sigma - \chi_{\beta\mu} g^{\rho\beta} g_{\sigma\nu}$

- $\nabla_\nu C^\rho_{\sigma\mu} = \chi_{\nu\sigma}\delta_\mu^\rho + \chi_{\nu\mu}\delta_\sigma^\rho - \chi_{\beta\nu}g^{\rho\beta}g_{\sigma\mu}$
- $C^\rho_{\kappa\mu}C^\kappa_{\sigma\nu} = 2\chi_\nu\chi_\sigma\delta_\mu^\rho - \chi_\kappa\chi^\kappa\delta_\mu^\rho g_{\sigma\nu} + \chi_\mu\chi_\sigma\delta_\nu^\rho + \chi_\mu\chi_\nu\delta_\sigma^\rho - \chi_\sigma\chi_\beta g^{\rho\beta}g_{\mu\nu} - \chi_\beta\chi_\nu g^{\rho\beta}g_{\sigma\mu}$
- $C^\rho_{\kappa\nu}C^\kappa_{\sigma\mu} = 2\chi_\mu\chi_\sigma\delta_\nu^\rho - \chi_\kappa\chi^\kappa\delta_\nu^\rho g_{\sigma\mu} + \chi_\nu\chi_\sigma\delta_\mu^\rho + \chi_\nu\chi_\mu\delta_\sigma^\rho - \chi_\sigma\chi_\beta g^{\rho\beta}g_{\nu\mu} - \chi_\beta\chi_\mu g^{\rho\beta}g_{\sigma\nu}$

Άρα,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} \rightarrow R^\rho_{\sigma\mu\nu} + \chi_{\mu\sigma}\delta_\nu^\rho - \chi_{\beta\mu}g^{\rho\beta}g_{\sigma\nu} - \chi_{\nu\sigma}\delta_\mu^\rho + \chi_{\beta\nu}g^{\rho\beta}g_{\sigma\mu} \\ + \chi_\nu\chi_\sigma\delta_\mu^\rho - \chi_\kappa\chi^\kappa\delta_\mu^\rho g_{\sigma\nu} - \chi_{\beta\chi\nu}g^{\rho\beta}g_{\sigma\mu} - \chi_\mu\chi_\sigma\delta_\nu^\rho + \chi_\kappa\chi^\kappa\delta_\nu^\rho g_{\sigma\mu} + \chi_{\beta\chi\mu}g^{\rho\beta}g_{\sigma\nu} \quad (\text{A'.9})$$

ή σε μία πιο συμπαγή μορφή

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} \rightarrow R^\rho_{\sigma\mu\nu} + \delta_\mu^\rho(\chi_\nu\chi_\sigma - \chi_{\nu\sigma} - \chi^\alpha\chi_\alpha g_{\sigma\nu}) \\ - \delta_\nu^\rho(\chi_\mu\chi_\sigma - \chi_{\mu\sigma} - \chi^\alpha\chi_\alpha g_{\sigma\mu}) \\ - g_{\sigma\mu}(\chi^\rho\chi_\nu - \chi_\nu^\rho) \\ + g_{\sigma\nu}(\chi^\rho\chi_\mu - \chi_\mu^\rho) \quad (\text{A'.10})$$

Αντίστοιχα, έχουμε

$$R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} \rightarrow R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + \delta_\kappa^\sigma(\chi_\lambda\chi_\rho - \chi_{\lambda\rho} - \chi^\beta\chi_\beta g_{\rho\lambda}) \\ - \delta_\lambda^\sigma(\chi_\kappa\chi_\rho - \chi_{\kappa\rho} - \chi^\beta\chi_\beta g_{\rho\kappa}) \\ - g_{\rho\kappa}(\chi^\sigma\chi_\lambda - \chi_\lambda^\sigma) \\ + g_{\rho\lambda}(\chi^\sigma\chi_\kappa - \chi_\kappa^\sigma) \quad (\text{A'.11})$$

Επαναορίζουμε για ευκολία

$$K^\rho_{\sigma\mu\nu} = \delta_\mu^\rho(\chi_\nu\chi_\sigma - \chi_{\nu\sigma} - \chi^\alpha\chi_\alpha g_{\sigma\nu}), \quad L^\rho_{\sigma\mu\nu} = g_{\sigma\nu}(\chi^\rho\chi_\mu - \chi_\mu^\rho) \quad (\text{A'.12})$$

Τότε, ο όρος R_{CS} μετασχηματίζεται ως

$$R_{CS} \rightarrow \frac{1}{4}\Omega^{-4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(R^\rho_{\sigma\mu\nu} + K^\rho_{\sigma\mu\nu} - K^\rho_{\sigma\nu\mu} + L^\rho_{\sigma\mu\nu} - L^\rho_{\sigma\nu\mu})(R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + K^\sigma_{\rho\kappa\lambda} - K^\sigma_{\rho\lambda\kappa} + L^\sigma_{\rho\kappa\lambda} - L^\sigma_{\rho\lambda\kappa}) \quad (\text{A'.13})$$

Χρησιμοποιώντας την αντισυμμετρία του ταυστή Levi-Civita, βρίσκουμε την πιο απλή σχέση:

$$R_{CS} \rightarrow \frac{1}{4}\Omega^{-4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(R^\rho_{\sigma\mu\nu} + 2K^\rho_{\sigma\mu\nu} + 2L^\rho_{\sigma\mu\nu})(R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 2K^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 2L^\sigma_{\rho\kappa\lambda}) \quad (\text{A'.14})$$

Λόγω ξανά της αντισυμμετρίας, παρατηρούμε ότι

- $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}K^\rho_{\sigma\mu\nu}K^\sigma_{\rho\kappa\lambda} = 0$
- $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}L^\rho_{\sigma\mu\nu}L^\sigma_{\rho\kappa\lambda} = 0$
- $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}K^\rho_{\sigma\mu\nu}L^\sigma_{\rho\kappa\lambda} = 0$

Άρα,

$$R_{CS} \rightarrow \frac{1}{4}\Omega^{-4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(R^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 2R^\rho_{\sigma\mu\nu}K^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 2R^\rho_{\sigma\mu\nu}L^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 2K^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 2L^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda}) \quad (A'.15)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}R^\rho_{\sigma\mu\nu}K^\sigma_{\rho\kappa\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}R^\sigma_{\rho\mu\nu}K^\rho_{\sigma\kappa\lambda} = \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda}K^\rho_{\sigma\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda}K^\rho_{\sigma\mu\nu} \quad (A'.16)$$

και επομένως έχουμε

$$R_{CS} \rightarrow \frac{1}{4}\Omega^{-4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(R^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 4K^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} + 4L^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda}) \quad (A'.17)$$

Ξανά, ο κάθε όρος ξεχωριστά δίνει

- $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}K^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda}\delta^\rho_\mu(\chi_\nu\chi_\sigma - \chi_{\nu\sigma} - \chi^\alpha\chi_\alpha g_{\sigma\nu}) = 0$ λόγω ταυτότητας Bianchi.
- $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}L^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda}g_{\sigma\nu}(\chi^\rho\chi_\mu - \chi^\rho_\mu) = 0$ λόγω ταυτότητας Bianchi.

Οπότε έχουμε ότι

$$R_{CS} \rightarrow \frac{1}{4}\Omega^{-4}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(R^\rho_{\sigma\mu\nu}R^\sigma_{\rho\kappa\lambda}) = \Omega^{-4}R_{CS}, \quad (A'.18)$$

όπως αναμενόταν, και συνεπώς

$$\sqrt{|g|}R_{CS} \rightarrow \sqrt{|g|}\Omega^4\Omega^{-4}R_{CS} = \sqrt{|g|}R_{CS}. \quad (A'.19)$$

Τέλος, αποδεικνύουμε την τοπολογική προέλευση του R_{CS} .

Το τοπολογικό ρεύμα της πυκνότητας Pontryagin δίνεται από τη σχέση

$$K^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[\Gamma^\kappa_{\beta\lambda}\partial_\gamma\Gamma^\lambda_{\delta\kappa} + \frac{2}{3}\Gamma^\kappa_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\delta\kappa} \right] = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{K}_{\beta\gamma\delta} \quad (A'.20)$$

όπου $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι ο τανυστής Levi-Civita υπό $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{|g|}}$, με $\varepsilon^{0123} = -1$.

Η απόκλιση του τοπολογικού ρεύματος μας δίνει την πυκνότητα Pontryagin :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha K^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}K^\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{K}_{\beta\gamma\delta}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{K}_{\beta\gamma\delta}) \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha\tilde{K}_{\beta\gamma\delta} \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[(\partial_\alpha\Gamma^\kappa_{\beta\lambda})(\partial_\gamma\Gamma^\lambda_{\delta\kappa}) + \Gamma^\kappa_{\beta\lambda}(\partial_\alpha\partial_\gamma\Gamma^\lambda_{\delta\kappa}) + \frac{2}{3}\partial_\alpha(\Gamma^\kappa_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\delta\kappa}) \right] \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος στην αγκύλη μηδενίζεται αφού ο τελεστής $\partial_\alpha \partial_\gamma$ είναι συμμετρικός στην εναλλαγή δεικτών και είναι συναιρεμένος με τον τανυστή Levi-Civita . Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha K^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[(\partial_\alpha \Gamma^\kappa_{\beta\lambda})(\partial_\gamma \Gamma^\lambda_{\delta\kappa}) + \frac{2}{3} \partial_\alpha (\Gamma^\kappa_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\delta\kappa}) \right] \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[(\partial_\alpha \Gamma^\kappa_{\beta\lambda})(\partial_\gamma \Gamma^\lambda_{\delta\kappa}) + \frac{2}{3} \partial_\alpha (\Gamma^\kappa_{\beta\lambda}) \Gamma^\lambda_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\delta\kappa} + \frac{2}{3} \Gamma^\kappa_{\beta\lambda} \partial_\alpha (\Gamma^\lambda_{\gamma\mu}) \Gamma^\mu_{\delta\kappa} + \frac{2}{3} \Gamma^\kappa_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\gamma\mu} \partial_\alpha (\Gamma^\mu_{\delta\kappa}) \right]\end{aligned}$$

Για να συνεχίσουμε, επιλέγουμε τον ακόλουθο επαναορισμό που θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος. Ορίζουμε τους 4×4 πίνακες $\mathfrak{G}_\mu = (\Gamma^\alpha_\beta)_\mu$ και $\mathfrak{D}_{\mu\nu} = \partial_\mu (\Gamma^\alpha_\beta)_\nu$. Τότε, οι όροι στις αγκύλες ξαναγράφονται ως

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha K^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\gamma\delta} + \frac{2}{3} \mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta + \frac{2}{3} \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{D}_{\alpha\gamma} \mathfrak{G}_\delta + \frac{2}{3} \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{D}_{\alpha\delta}] \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\gamma\delta}] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{G}_\beta \mathfrak{D}_{\alpha\gamma} \mathfrak{G}_\delta] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{D}_{\alpha\delta}] \right\} \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\gamma\delta}] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\gamma} \mathfrak{G}_\delta \mathfrak{G}_\beta] + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\delta} \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma] \right\}\end{aligned}$$

όπου στη τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία ολίσθησης του τελεστή ίχνους. Οι τελευταίοι τρεις όροι ξαναγράφονται ως

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\gamma} \mathfrak{G}_\delta \mathfrak{G}_\beta] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\delta} \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\delta\beta\gamma} + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\gamma\delta\beta} \\ &= \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= 2 \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση μας είναι απλά η

$$\nabla_\alpha K^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\gamma\delta} + 2\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta]$$

όπου εισάγαμε τον τελευταίο όρο με το χέρι καθώς μηδενίζεται ταυτοτικά. Μπορούμε τώρα να ξεκινήσουμε τον υπολογισμό. Στα παρακάτω, περνάμε το σύμβολο ϵ , όταν χρησιμοποιούμε τις συμμετρίες του Levi-Civita και το σύμβολο T όταν χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του τελεστή ίχνους.

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha K^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\gamma\delta} + 2\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \\ &\stackrel{\epsilon}{=} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\gamma\delta} + \mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta + \mathfrak{D}_{\gamma\delta} \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \\ &\stackrel{T}{=} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr}[\mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\gamma\delta} + \mathfrak{D}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{D}_{\gamma\delta} + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta] \\ &\stackrel{\epsilon}{=} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr} \frac{1}{4} [(\mathfrak{D}_{\alpha\beta} - \mathfrak{D}_{\beta\alpha})(\mathfrak{D}_{\gamma\delta} - \mathfrak{D}_{\delta\gamma}) + (\mathfrak{D}_{\alpha\beta} - \mathfrak{D}_{\beta\alpha})(\mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta - \mathfrak{G}_\delta \mathfrak{G}_\gamma) \\ &\quad + (\mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta - \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\alpha)(\mathfrak{D}_{\gamma\delta} - \mathfrak{D}_{\delta\gamma}) + (\mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta - \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\alpha)(\mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta - \mathfrak{G}_\delta \mathfrak{G}_\gamma)] \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{1}{4} \text{Tr}[(\mathfrak{D}_{\alpha\beta} - \mathfrak{D}_{\beta\alpha} + \mathfrak{G}_\alpha \mathfrak{G}_\beta - \mathfrak{G}_\beta \mathfrak{G}_\alpha)(\mathfrak{D}_{\gamma\delta} - \mathfrak{D}_{\delta\gamma} + \mathfrak{G}_\gamma \mathfrak{G}_\delta - \mathfrak{G}_\delta \mathfrak{G}_\gamma)]\end{aligned}$$

Εισάγουμε τώρα τους ορισμούς για τους πίνακες $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}$ και \mathfrak{G}_α , και καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha K^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{1}{4} (\partial_\alpha \Gamma^\kappa_{\lambda\beta} + \Gamma^\kappa_{\xi\alpha} \Gamma^\xi_{\lambda\beta} - (\alpha \leftrightarrow \beta)) (\partial_\gamma \Gamma^\lambda_{\kappa\delta} + \Gamma^\lambda_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\kappa\delta} - (\gamma \leftrightarrow \delta)) \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{1}{4} R^\kappa_{\lambda\alpha\beta} R^\lambda_{\kappa\gamma\delta}\end{aligned}$$

που μας δίνει το αναμενόμενο αποτέλεσμα

$$\nabla_\alpha K^\alpha = \frac{1}{2} R^\kappa_{\lambda\alpha\beta} \tilde{R}^{\lambda\alpha\beta}_\kappa = R_{CS} \quad (A'.21)$$

όπου

$$\tilde{R}^{\lambda\alpha\beta}_\kappa = \frac{1}{2} R^\lambda_{\kappa\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (A'.22)$$

Παράρτημα Β΄

Λύση του αξιονίου στην αργά περιστρεφόμενη γεωμετρία Kerr

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε αναλυτικά τη λύση της διαφορικής (2.28). Προφανώς, το πρώτο βήμα είναι να λυθεί η ομογενής διαφορική,

$$-2u(r) + 2(r - M)u'(r) + (r^2 - 2Mr)u''(r) = 0 . \quad (\text{B'.1})$$

Τονίζουμε ότι μία ειδική λύση είναι η $u_1 = c_1 \left(\frac{r - M}{M} \right)$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη λύση για να απλοποιήσουμε τη διαφορική μέσω της σχέσης $u = u_1(r)z(r)$. Τότε, η διαφορική γράφεται ως

$$\frac{1}{M} [2(M^2 - 4Mr + 2r^2)z' + r(2M^2 - 3Mr + r^2)z''] = 0 , \quad (\text{B'.2})$$

που σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} (\ln z') &= \int \frac{8Mr - 2M^2 - 4r^2}{(r - 2M)(r - M)r} dr = -\ln[r(r - 2M)(r - M)^2] + c_2 \\ \implies z' &= \frac{c_2}{r(r - 2M)(r - M)^2} \\ z &= \frac{c_2}{(r - M)M^2} + \frac{c_2}{2M^3} \ln \left[1 - \frac{2M}{r} \right] + c_3 , \end{aligned}$$

και άρα η ομογενής λύση είναι η

$$u_h = c_1 u_1(r) + c_2 u_2(r) , \quad (\text{B'.3})$$

όπου

$$u_1(r) = \left(\frac{r - M}{M} \right) , \quad u_2(r) = 1 + \frac{1}{2M}(r - M) \ln \left[1 - \frac{2M}{r} \right] . \quad (\text{B'.4})$$

Για να εξάγουμε τη πλήρη λύση, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων. Θεωρούμε ότι η γενική λύση της διαφορικής δίνεται μέσω της σχέσης

$$u(r) = C_1(r)u_1(r) + C_2(r)u_2(r) . \quad (\text{B'.5})$$

Τότε, τα $C_1(r), C_2(r)$ λύνονται από το σύστημα

$$C_1'(r)u_1(r) + C_2'(r)u_2(r) = 0, \quad (\text{B'.6})$$

$$C_1'(r)u_1'(r) + C_2'(r)u_2'(r) = \frac{144M^2}{r^5(r^2 - 2Mr)}. \quad (\text{B'.7})$$

Συνεπώς,

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{W}} \begin{bmatrix} u_2' & -u_2 \\ -u_1' & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{144M^2}{r^5(r^2 - 2Mr)} \end{bmatrix}, \quad (\text{B'.8})$$

όπου \mathcal{W} είναι η Wronskian των λύσεων μας. Το σύστημα λύνεται πλέον εύκολα και δίνει το αποτέλεσμα

$$C_1(r) = \frac{81M}{2r^4} - \frac{5}{r^3} - \frac{15}{4Mr^2} - \frac{15}{4M^2r} + \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{6(4r - 3M)}{r^4} - \frac{15}{8M^3} \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + c_1, \quad (\text{B'.9})$$

$$C_2(r) = \frac{36M}{r^4} - \frac{48}{r^3} + c_2. \quad (\text{B'.10})$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (B'.5), βρίσκουμε ότι η πλήρης λύση είναι η

$$u(r) = -c_1 + c_2 - \frac{15}{4M^3} - \frac{9M}{2r^4} - \frac{5}{2r^3} - \frac{5}{4Mr^2} + c_1 \frac{r}{M} + \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{15}{8M^3} - \frac{c_2}{2} \right] + \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{c_2 r}{2M} - \frac{15r}{8M^4} \right]. \quad (\text{B'.11})$$

Για να ακυρώσουμε τους όρους με την αποκλίνουσα συμπεριφορά, θέτουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{15}{4M^3}$ καταλήγοντας στην ασυμπτωτική λύση του αξιονίου

$$u(r) = -\frac{9M}{2r^4} - \frac{5}{2r^3} - \frac{5}{4Mr^2}. \quad (\text{B'.12})$$

Παράρτημα Γ'

Σύγκλιση της διόρθωσης στη γεωμετρία της τοπικής λύσης στη θεωρία Chern-Simons

Η διόρθωση που εμφανίζεται στο στοιχείο $g_{t\phi}$ της μετρικής της λύσης της θεωρίας Chern-Simons είναι δίνεται από τη σχέση:

$$g_{t\phi} = r^2 \left(-\frac{2M}{r^3} - w(r) \right) a \sin^2(\theta) \equiv \left(-\frac{2M}{r} - \tilde{w}(r) \right) a \sin^2(\theta), \quad \tilde{w}(r) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{d_n M^{n-2}}{r^{n-2}}, \quad (\Gamma'.1)$$

όπου οι συντελεστές d_n ορίζονται μέσω της αναδρομικής σχέσης:

$$d_n = \frac{2(n-5)^2(n-1)}{n(n-6)(n-3)} d_{n-1} + \frac{576\gamma^2}{n(n-3)} d_{n-6}, \quad \text{όπου } n \geq 10, \quad (\Gamma'.2)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$d_4 = d_5 = 0, \quad d_6 = -5\gamma^2, \quad d_7 = -\frac{60\gamma^2}{7}, \quad d_8 = -\frac{27\gamma^2}{2}, \quad d_9 = 0 \quad (\Gamma'.3)$$

όπου η παράμετρος $\gamma \in \mathbb{R}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε για ευκολία την αδιάστατη συντεταγμένη $r \rightarrow r/M$, που σημαίνει ότι

$$\tilde{w}(r) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n-2}}. \quad (\Gamma'.4)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τη σύγκλιση της εν λόγω σειράς για κάθε $r \geq 2$ για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$.

Τονίζουμε αρχικά ότι $d_n \leq 0$, $\forall n$. Οπότε, μέσω του επαναορισμού $c_n = -d_n$, για τον οποίο $c_n \geq 0$, $\forall n$, έχουμε ως προς τους συντελεστές c_n ότι η διόρθωση είναι

$$\tilde{w}(r) = - \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{r^{n-2}} \quad (\Gamma'.5)$$

όπου

$$c_n = a_n c_{n-1} + b_n c_{n-6}, \quad \text{για } n \geq 10, \quad (\Gamma'.6)$$

με

$$a_n = \frac{2(n-5)^2(n-1)}{n(n-6)(n-3)} \quad b_n = \frac{576\gamma^2}{n(n-3)}, \quad (\Gamma'.7)$$

και αρχικές συνθήκες:

$$c_4 = c_5 = 0, \quad c_6 = 5\gamma^2, \quad c_7 = \frac{60\gamma^2}{7}, \quad c_8 = \frac{27\gamma^2}{2}, \quad c_9 = 0 \quad (\Gamma'.8)$$

Ας ορίσουμε τώρα την παρακάτω ακολουθία:

$$\tilde{\Sigma}_N = \sum_{n=4}^N \frac{c_n}{r^{n-2}}$$

Εφόσον οι όροι c_n/r^{n-2} είναι μη αρνητικοί, η ακολουθία $\tilde{\Sigma}_N$ είναι αύξουσα, που σημαίνει ότι $\tilde{\Sigma}_{N+1} \geq \tilde{\Sigma}_N, \forall N \in \mathbb{N}$.

Για αύξουσες ακολουθίες έχουμε το θεώρημα:

Θεώρημα: Μία αύξουσα ακολουθία τείνει είτε σε πεπερασμένο όριο είτε στο $+\infty$.

Άρα, απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για τη σύγκλιση της $\tilde{\Sigma}$ είναι να δείξουμε ότι είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει ένας πεπερασμένος θετικός αριθμός \mathcal{N} , τέτοιος ώστε:

$$\tilde{\Sigma} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{r^{n-2}} \leq \mathcal{N}$$

Πρόταση 1: Αν η $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n-2}}$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{r^{n-2}}$ συγκλίνει $\forall r \geq 2$.

Απόδειξη. Έστω $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n-2}} \leq \mathcal{K}$, όπου \mathcal{K} πεπερασμένο. Για $r > 2 \rightarrow 1/r^{n-2} < 1/2^{n-2} \rightarrow c_n/r^{n-2} \leq c_n/2^{n-2} \forall n \geq 4$, όπου η ισότητα ισχύει στη περίπτωση του $c_n = 0$. Επομένως,

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{r^{n-2}} \leq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n-2}} \Rightarrow \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{r^{n-2}} \leq \mathcal{K}$$

που σημαίνει ότι $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{r^{n-2}}$ συγκλίνει $\forall r > 2$. □

Με βάση τη παραπάνω πρόταση μπορούμε τώρα να εξάγουμε τη σύγκλιση της σειράς

$$\Sigma = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n-2}}$$

Για την a_n και b_n , έχουμε ότι:

- 1) $a_n \rightarrow 2$, όταν $n \rightarrow +\infty$
- 2) $b_n \rightarrow 0$, όταν $n \rightarrow +\infty$

άρα, και η a_n και η b_n συγκλίνουν.

Χρησιμοποιούμε τώρα το αποτέλεσμα ότι αν μία ακολουθία s_n συγκλίνει, δηλαδή έχει πεπερασμένο όριο s όταν το $n \rightarrow \infty$, τότε η s_n είναι φραγμένη.

Αυτό σημαίνει ότι, αφού a_n, b_n συγκλίνουν, είναι επίσης φραγμένα, που σημαίνει ότι υπάρχουν k_1, k_2 , τέτοια ώστε

$$|a_n| \leq k_1 \text{ and } |b_n| \leq k_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\Gamma'.9)$$

Πρόταση 2: Η ακολουθία c_n είναι φραγμένη μέσω επαγωγής.

Απόδειξη. Έστω μία υποακολουθία c_{N-6}, \dots, c_{N-1} , για κάποιο N , που είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει N' , τέτοιο ώστε

$$|c_{N-6}|, |c_{N-5}|, \dots, |c_{N-1}| \leq N'$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα

$$|c_N| \leq |a_N| |c_{N-1}| + |b_N| |c_{N-6}| \Rightarrow |c_N| \leq (k_1 + k_2) N' \Rightarrow |c_N| \leq \widetilde{\mathcal{M}},$$

όπου $\widetilde{\mathcal{M}} = (k_1 + k_2) N'$ είναι πεπερασμένο.

Επομένως, εφόσον η υποακολουθία υπάρχει για $N = 10$, αφού c_4, \dots, c_9 είναι πεπερασμένα, έχουμε μέσω επαγωγής ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο \mathcal{D} , τέτοιο ώστε

$$|c_n| \leq \mathcal{D}, \quad \forall n \geq 10$$

που σημαίνει ότι η c_n είναι φραγμένη $\forall n \geq 4$. □

Άρα, αφού η c_n είναι φραγμένη και μη-αρνητική, υπάρχει $\mathcal{D} > 0$, τέτοιο ώστε:

$$0 \leq c_n \leq \mathcal{D}, \quad \forall n \geq 4$$

Συεμπως,

$$\Sigma = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n-2}} \leq \mathcal{D} \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

δηλαδή

$$\Sigma \leq \mathcal{D} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Γνωρίζουμε για τη γεωμετρική σειρά ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{για } -1 < x < 1$$

Άρα, για $x = 1/2$, επιβεβαιώνουμε ότι:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$$

που σημαίνει

$$\Sigma = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n-2}} \leq \frac{\mathcal{D}}{2},$$

και άρα η σειρά Σ είναι φραγμένη.

Αυτό επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα ότι η σειρά $\tilde{w}(r)$, και άρα και η $w(r)$ (2.24), συγκλίνει $\forall r \geq 2$ και $\forall \gamma \in \mathbb{R}$.

Παράρτημα Δ'

Κανόνες μετασχηματισμού βαρυτικών τανυστών κάτω από δύσμορφους μετασχηματισμούς γεωμετρίας

Θα χρησιμοποιήσουμε για ευκολία την περίπτωση των παθητικών δύσμορφων μετασχηματισμών. Ο πιο γενικός δύσμορφος μετασχηματισμός γεωμετρίας που μπορούμε να μελετήσουμε δίνεται από την απεικόνιση

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + d_{\mu\nu}. \quad (\Delta'.1)$$

Παρατηρούμε ότι η εν λόγω μορφή είναι αρκετά γενική για να μας αναπαράγει το δύσμορφο μετασχηματισμό του Bekenstein, $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} - W \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$ όταν $d_{\mu\nu} = (\Omega^2 - 1)g_{\mu\nu} - W \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$. Προφανώς, ο μετασχηματισμός πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να ορίζεται με τανυστικό τρόπο η αντίστροφη δύσμορφη γεωμετρία $\hat{g}^{\mu\nu}$. Θα θεωρήσουμε μόνο τέτοιου είδους περιπτώσεις.

Χρησιμοποιώντας την (Δ'.1), υπολογίζουμε τα μετασχηματισμένα σύμβολα Christoffel

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} (\partial_\mu \hat{g}_{\beta\nu} + \partial_\nu \hat{g}_{\beta\mu} - \partial_\beta \hat{g}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} \left(\nabla_\mu \hat{g}_{\beta\nu} + \Gamma^\rho_{\beta\mu} \hat{g}_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \hat{g}_{\beta\rho} \right. \\ &\quad \left. + \nabla_\nu \hat{g}_{\beta\mu} + \Gamma^\rho_{\beta\nu} \hat{g}_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \hat{g}_{\beta\rho} \right. \\ &\quad \left. - \nabla_\beta \hat{g}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu} \hat{g}_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\nu} \hat{g}_{\rho\mu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \hat{g}_{\beta\nu} + \nabla_\nu \hat{g}_{\beta\mu} - \nabla_\beta \hat{g}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \Gamma^\rho_{\mu\nu} (\hat{g}^{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\rho} + \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\rho}) \\ &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \hat{g}_{\beta\nu} + \nabla_\nu \hat{g}_{\beta\mu} - \nabla_\beta \hat{g}_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + D^\alpha_{\mu\nu}, \quad D^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \hat{g}_{\beta\nu} + \nabla_\nu \hat{g}_{\beta\mu} - \nabla_\beta \hat{g}_{\mu\nu}). \quad (\Delta'.2)$$

Δωσμένης της εξίσωσης (Δ'.2), ο Riemann είναι εύκολο να υπολογιστεί ακολούθως

$$\begin{aligned}
\hat{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{\Gamma}^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \hat{\Gamma}^\rho_{\sigma\mu} + \hat{\Gamma}^\rho_{\kappa\mu} \hat{\Gamma}^\kappa_{\sigma\nu} - \hat{\Gamma}^\rho_{\kappa\nu} \hat{\Gamma}^\kappa_{\sigma\mu} \\
&= \partial_\mu \Gamma^\rho_{\sigma\nu} + \partial_\mu D^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} - \partial_\nu D^\rho_{\sigma\mu} + (\Gamma^\rho_{\kappa\mu} + D^\rho_{\kappa\mu}) (\Gamma^\kappa_{\sigma\nu} + D^\kappa_{\sigma\nu}) - (\Gamma^\rho_{\kappa\nu} + D^\rho_{\kappa\nu}) (\Gamma^\kappa_{\sigma\mu} + D^\kappa_{\sigma\mu}) \\
&= \partial_\mu \Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho_{\kappa\mu} \Gamma^\kappa_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa_{\sigma\mu} \\
&\quad + \partial_\mu D^\rho_{\sigma\nu} + \Gamma^\rho_{\kappa\mu} D^\kappa_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu} - \partial_\nu D^\rho_{\sigma\mu} - \Gamma^\rho_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho_{\sigma\nu} D^\rho_{\kappa\mu} + D^\rho_{\kappa\mu} D^\kappa_{\sigma\nu} - D^\rho_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu} ,
\end{aligned}$$

όπου έχουμε συνεπώς

$$\rightarrow \hat{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = R^\rho_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu D^\rho_{\sigma\nu} - \nabla_\nu D^\rho_{\sigma\mu} + D^\rho_{\kappa\mu} D^\kappa_{\sigma\nu} - D^\rho_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu}. \quad (\Delta'.3)$$

Τονίζουμε ότι υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να εκφράσουμε τον δύσμορφο μετασχηματισμό του ταυστή Riemann που είναι ιδιαίτερα βοηθητικός στην εξαγωγή των δύσμορφων πλασιών Horndeski. Παρατηρούμε πρώτα ότι από την (Δ'.2), έχουμε ότι

$$\nabla_\mu D^\rho_{\sigma\nu} = \hat{\nabla}_\mu D^\rho_{\sigma\nu} - D^\rho_{\kappa\mu} D^\kappa_{\sigma\nu} + 2D^\kappa_{\mu(\sigma} D^\rho_{\nu)\kappa} \quad (\Delta'.4)$$

που σημαίνει απλώς ότι

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu D^\rho_{\sigma\nu} - \nabla_\nu D^\rho_{\sigma\mu} &= \hat{\nabla}_\mu D^\rho_{\sigma\nu} - D^\rho_{\kappa\mu} D^\kappa_{\sigma\nu} + D^\kappa_{\mu\sigma} D^\rho_{\nu\kappa} + D^\kappa_{\mu\nu} D^\rho_{\sigma\kappa} \\
&\quad - \hat{\nabla}_\nu D^\rho_{\sigma\mu} + D^\rho_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu} - D^\kappa_{\nu\sigma} D^\rho_{\mu\kappa} - D^\kappa_{\mu\nu} D^\rho_{\sigma\kappa} \\
&= \hat{\nabla}_\mu D^\rho_{\sigma\nu} - \hat{\nabla}_\nu D^\rho_{\sigma\mu} - 2D^\kappa_{\nu\sigma} D^\rho_{\mu\kappa} + 2D^\rho_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu}.
\end{aligned}$$

Επομένως, ο ταυστής Riemann μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\rightarrow \hat{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = R^\rho_{\sigma\mu\nu} + \hat{\nabla}_\mu D^\rho_{\sigma\nu} - \hat{\nabla}_\nu D^\rho_{\sigma\mu} - D^\rho_{\kappa\mu} D^\kappa_{\sigma\nu} + D^\rho_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu}. \quad (\Delta'.5)$$

ενω αντίστοιχα ο ταυστής Ricci δίνεται από:

$$\rightarrow \hat{R}_{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu} + \hat{\nabla}_\mu D^\mu_{\sigma\nu} - \hat{\nabla}_\nu D^\mu_{\sigma\mu} - D^\mu_{\kappa\mu} D^\kappa_{\sigma\nu} + D^\mu_{\kappa\nu} D^\kappa_{\sigma\mu}. \quad (\Delta'.6)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\hat{\nabla}_\mu \hat{g}^{\sigma\nu} = 0$, το βαθμωτό Ricci δίνεται από

$$\hat{R} = \hat{g}^{\sigma\nu} \hat{R}_{\sigma\nu} = \hat{g}^{\sigma\nu} \left(R_{\sigma\nu} + 2D^\kappa_{\sigma[\mu} D^\mu_{\nu]\kappa} \right) + \hat{\nabla}_\mu D^{\mu\nu}_{\nu} - \hat{\nabla}_\nu D^{\mu\nu}_{\mu} \quad (\Delta'.7)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι αποτελούν ολικές παράγωγοι ως προς το δύσμορφο στοιχείο όγκου $\sqrt{|\hat{g}|} d^4x$ και μπορούν συνεπώς να παραλειφθούν αν η δράση τροφοδότησης βρίσκεται στο πλαίσιο Einstein. Όλοι οι υπόλοιποι μετασχηματισμοί των πιθανών στοιχείων της δράσης Horndeski προκύπτουν με άμεσο τρόπο από τους παραπάνω κανόνες.

Παράρτημα Ε΄

Αλγόριθμος εξαγωγής λύσεων με πρωτεύον βαθμωτό φορτίο για θεωρίες Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης πεδίου

Στο παράρτημα αυτό, παρουσιάζουμε εν συντομία την περίπτωση των ανομοιογενών στατικών και σφαιρικά συμμετρικών λύσεων στο πλαίσιο της θεωρίας Horndeski με συμμετρία ομοτιμίας και ολίσθησης πεδίου. Η δράση της θεωρίας που θα μελετήσουμε περιγράφεται από την εξίσωση (6.9) με $F_4(X) = 0$. Επίσης, θα περιοριστούμε στις θεωρίες εκείνες με $\Xi = \text{const.}$, οι οποίες, μέσω της (6.29), οδηγούν στις συναρτησιακές μορφές

$$G_4 Z = \alpha + \lambda^2 G_2 Z, \quad (\text{E'.1})$$

όπου η σταθερά α είναι αδιάστατη ενώ $[\lambda] = [L]$. Θυμίζουμε ότι για το στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{E'.2})$$

οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από τις (6.26-6.28) με $Z = 2XG_{4X} - G_4$. Για την εν λόγω συσχέτιση μεταξύ των G_4 και G_2 , έχουμε από την εξίσωση (6.27) ότι

$$Z^2 X = \frac{q^2 \gamma^2}{2 + (r/\lambda)^2}. \quad (\text{E'.3})$$

Τονίζουμε ότι η παραπάνω εξίσωση οδηγεί στον περιορισμό $Z \neq cX^{-1/2}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (E'.3), βρίσκουμε από την (6.28) την απλή διαφορική

$$2\gamma^2 \frac{d}{dr} [rh(r)] - \frac{\gamma^2 q^2}{X} - \alpha \frac{r^2}{\lambda^2} = 0. \quad (\text{E'.4})$$

Όπως επιβεβαιώνουμε άμεσα, οι ομοιογενείς λύσεις στην Horndeski οδηγούν στο X να είναι γραμμικό ως προς το q^2 και, επομένως, δεν υπάρχουν ομοιογενείς μελανές οπές στη θεωρία όταν το Ξ είναι σταθερό. Συγκεκριμένα, από τον ορισμό της βοηθητικής συνάρτησης Z , βρίσκουμε ότι η επιλογή του σταθερού Z οδηγεί στο $G_4 \sim \sqrt{X}$. Τότε, μέσω της (E'.1), $G_2 \sim \sqrt{X}$. Η εν λόγω περίπτωση αντιστοιχεί στη λύση Schwarzschild με μη-τετριμμένο βαθμωτό πεδίο που δε παραμορφώνει τη γεωμετρία, μία λύση που είχε βρεθεί ήδη στο [413].

Bibliography

- [1] N. Chatzifotis, G. Koutsoumbas, and E. Papantonopoulos, “Formation of bound states of scalar fields in AdS-asymptotic wormholes,” *Phys. Rev. D* **104** no. 2, (2021) 024039, [arXiv:2011.08770 \[gr-qc\]](#).
- [2] N. Chatzifotis, C. Vlachos, K. Destounis, and E. Papantonopoulos, “Stability of black holes with non-minimally coupled scalar hair to the Einstein tensor,” *Gen. Rel. Grav.* **54** no. 6, (2022) 49, [arXiv:2109.02678 \[gr-qc\]](#).
- [3] N. Chatzifotis, E. Papantonopoulos, and C. Vlachos, “Disformal transition of a black hole to a wormhole in scalar-tensor Horndeski theory,” *Phys. Rev. D* **105** no. 6, (2022) 064025, [arXiv:2111.08773 \[gr-qc\]](#).
- [4] N. Chatzifotis, P. Dorlis, N. E. Mavromatos, and E. Papantonopoulos, “Scalarization of Chern-Simons-Kerr black hole solutions and wormholes,” *Phys. Rev. D* **105** no. 8, (2022) 084051, [arXiv:2202.03496 \[gr-qc\]](#).
- [5] N. Chatzifotis, P. Dorlis, N. E. Mavromatos, and E. Papantonopoulos, “Axion induced angular momentum reversal in Kerr-like black holes,” *Phys. Rev. D* **106** no. 8, (2022) 084002, [arXiv:2206.11734 \[gr-qc\]](#).
- [6] N. Chatzifotis, N. E. Mavromatos, and D. P. Theodosopoulos, “Global monopoles in the extended Gauss-Bonnet gravity,” *Phys. Rev. D* **107** no. 8, (2023) 085014, [arXiv:2212.09467 \[gr-qc\]](#).
- [7] N. Chatzifotis, P. Dorlis, N. E. Mavromatos, and E. Papantonopoulos, “Thermal stability of hairy black holes,” *Phys. Rev. D* **107** no. 8, (2023) 084053, [arXiv:2302.03980 \[gr-qc\]](#).
- [8] A. Bakopoulos, N. Chatzifotis, C. Erices, and E. Papantonopoulos, “Stealth Ellis wormholes in Horndeski theories,” *JCAP* **11** (2023) 055, [arXiv:2306.16768 \[hep-th\]](#).
- [9] A. Bakopoulos, N. Chatzifotis, and T. Nakas, “Compact objects with primary hair in shift and parity symmetric beyond Horndeski gravities,” [arXiv:2312.17198 \[gr-qc\]](#).
- [10] D. J. Gross and J. H. Sloan, “The Quartic Effective Action for the Heterotic String,” *Nucl. Phys. B* **291** (1987) 41–89.
- [11] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.
- [12] S. Weinberg, “The Cosmological Constant Problem,” *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1–23.

- [13] J. D. Bekenstein, “Novel “no-scalar-hair” theorem for black holes,” *Phys. Rev.* **D51** no. 12, (1995) R6608.
- [14] J. D. Bekenstein, “Nonexistence of baryon number for static black holes,” *Phys. Rev. D* **5** (1972) 1239–1246.
- [15] J. D. Bekenstein, “Transcendence of the law of baryon-number conservation in black hole physics,” *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 452–455.
- [16] J. D. Bekenstein, “Exact solutions of Einstein conformal scalar equations,” *Annals Phys.* **82** (1974) 535–547.
- [17] J. D. Bekenstein, “Black Holes with Scalar Charge,” *Annals Phys.* **91** (1975) 75–82.
- [18] J. D. Bekenstein, “The Relation between physical and gravitational geometry,” *Phys. Rev. D* **48** (1993) 3641–3647, [arXiv:gr-qc/9211017](#).
- [19] S. W. Hawking, “Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse,” *Phys. Rev. D* **14** (1976) 2460–2473.
- [20] R. Penrose, “Gravitational collapse: The role of general relativity,” *Riv. Nuovo Cim.* **1** (1969) 252–276.
- [21] S. B. Giddings and S. D. Thomas, “High-energy colliders as black hole factories: The End of short distance physics,” *Phys. Rev. D* **65** (2002) 056010, [arXiv:hep-ph/0106219](#).
- [22] S. Capozziello and M. De Laurentis, “Extended Theories of Gravity,” *Phys. Rept.* **509** (2011) 167–321, [arXiv:1108.6266](#) [gr-qc].
- [23] M. Fierz and W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **173** (1939) 211–232.
- [24] V. I. Zakharov, “Linearized gravitation theory and the graviton mass,” *JETP Lett.* **12** (1970) 312.
- [25] A. I. Vainshtein, “To the problem of nonvanishing gravitation mass,” *Phys. Lett. B* **39** (1972) 393–394.
- [26] D. G. Boulware and S. Deser, “Can gravitation have a finite range?,” *Phys. Rev. D* **6** (1972) 3368–3382.
- [27] C. de Rham, G. Gabadadze, and A. J. Tolley, “Resummation of Massive Gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 231101, [arXiv:1011.1232](#) [hep-th].
- [28] K. Hinterbichler, “Theoretical Aspects of Massive Gravity,” *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 671–710, [arXiv:1105.3735](#) [hep-th].
- [29] S. F. Hassan and R. A. Rosen, “Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity,” *JHEP* **04** (2012) 123, [arXiv:1111.2070](#) [hep-th].
- [30] S. F. Hassan and R. A. Rosen, “Resolving the Ghost Problem in non-Linear Massive Gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 041101, [arXiv:1106.3344](#) [hep-th].

- [31] E. Babichev and R. Brito, “Black holes in massive gravity,” *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 154001, [arXiv:1503.07529 \[gr-qc\]](#).
- [32] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.* **116** no. 6, (2016) 061102, [arXiv:1602.03837 \[gr-qc\]](#).
- [33] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral,” *Phys. Rev. Lett.* **119** no. 16, (2017) 161101, [arXiv:1710.05832 \[gr-qc\]](#).
- [34] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs,” *Phys. Rev. X* **9** no. 3, (2019) 031040, [arXiv:1811.12907 \[astro-ph.HE\]](#).
- [35] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, R. Abbott *et al.*, “GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run,” *Phys. Rev. X* **11** (2021) 021053, [arXiv:2010.14527 \[gr-qc\]](#).
- [36] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, R. Abbott *et al.*, “GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object,” *Astrophys. J. Lett.* **896** no. 2, (2020) L44, [arXiv:2006.12611 \[astro-ph.HE\]](#).
- [37] J. M. Nester and H.-J. Yo, “Symmetric teleparallel general relativity,” *Chin. J. Phys.* **37** (1999) 113, [arXiv:gr-qc/9809049](#).
- [38] J. W. Maluf, “The teleparallel equivalent of general relativity,” *Annalen Phys.* **525** (2013) 339–357, [arXiv:1303.3897 \[gr-qc\]](#).
- [39] J. G. Pereira and Y. N. Obukhov, “Gauge Structure of Teleparallel Gravity,” *Universe* **5** no. 6, (2019) 139, [arXiv:1906.06287 \[gr-qc\]](#).
- [40] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction*. Springer, 2013.
- [41] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis, and E. N. Saridakis, “ $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology,” *Rept. Prog. Phys.* **79** no. 10, (2016) 106901, [arXiv:1511.07586 \[gr-qc\]](#).
- [42] M. Krššák, “Holographic Renormalization in Teleparallel Gravity,” *Eur. Phys. J. C* **77** no. 1, (2017) 44, [arXiv:1510.06676 \[gr-qc\]](#).
- [43] M. Krššák and E. N. Saridakis, “The covariant formulation of $f(T)$ gravity,” *Class. Quant. Grav.* **33** no. 11, (2016) 115009, [arXiv:1510.08432 \[gr-qc\]](#).
- [44] S. Nesseris, S. Basilakos, E. N. Saridakis, and L. Perivolaropoulos, “Viable $f(T)$ models are practically indistinguishable from Λ CDM,” *Phys. Rev. D* **88** (2013) 103010, [arXiv:1308.6142 \[astro-ph.CO\]](#).
- [45] K. Bamba, C.-Q. Geng, C.-C. Lee, and L.-W. Luo, “Equation of state for dark energy in $f(T)$ gravity,” *JCAP* **01** (2011) 021, [arXiv:1011.0508 \[astro-ph.CO\]](#).
- [46] M. Krssak, R. J. van den Hoogen, J. G. Pereira, C. G. Böhrer, and A. A. Coley, “Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach,” *Class. Quant. Grav.* **36** no. 18, (2019) 183001, [arXiv:1810.12932 \[gr-qc\]](#).

- [47] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, and T. S. Koivisto, “Teleparallel Palatini theories,” *JCAP* **08** (2018) 039, [arXiv:1803.10185 \[gr-qc\]](#).
- [48] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie),” *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* **40** (1923) 325–412.
- [49] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie) (Suite).,” *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* **41** (1924) 1–25.
- [50] R. T. Hammond, “Torsion gravity,” *Rept. Prog. Phys.* **65** (2002) 599–649.
- [51] J. Zanelli, “Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008),” in *7th Mexican Workshop on Particles and Fields. 2*, 2005. [arXiv:hep-th/0502193](#).
- [52] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester, “General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects,” *Rev. Mod. Phys.* **48** (1976) 393–416.
- [53] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne’eman, “Metric affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance,” *Phys. Rept.* **258** (1995) 1–171, [arXiv:gr-qc/9402012](#).
- [54] A. Trautman, “Einstein-Cartan theory,” [arXiv:gr-qc/0606062](#).
- [55] Y. N. Obukhov and J. G. Pereira, “Metric affine approach to teleparallel gravity,” *Phys. Rev. D* **67** (2003) 044016, [arXiv:gr-qc/0212080](#).
- [56] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, and T. Koivisto, “Coincident General Relativity,” *Phys. Rev. D* **98** no. 4, (2018) 044048, [arXiv:1710.03116 \[gr-qc\]](#).
- [57] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “f(R) Theories Of Gravity,” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497, [arXiv:0805.1726 \[gr-qc\]](#).
- [58] I. L. Shapiro, “Physical aspects of the space-time torsion,” *Phys. Rept.* **357** (2002) 113, [arXiv:hep-th/0103093](#).
- [59] A. De Felice and S. Tsujikawa, “f(R) theories,” *Living Rev. Rel.* **13** (2010) 3, [arXiv:1002.4928 \[gr-qc\]](#).
- [60] T. Kaluza, “Zum Unitätsproblem der Physik,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1921** (1921) 966–972, [arXiv:1803.08616 \[physics.hist-ph\]](#).
- [61] O. Klein, “The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law,” *Nature* **118** (1926) 516.
- [62] Y. Thiry, “The equations of Kaluza’s unified theory,” *Compt. Rend. Hebd. Seances Acad. Sci.* **226** no. 3, (1948) 216–218.
- [63] E. Witten, “Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory,” *Nucl. Phys. B* **186** (1981) 412.
- [64] J. M. Overduin and P. S. Wesson, “Kaluza-Klein gravity,” *Phys. Rept.* **283** (1997) 303–380, [arXiv:gr-qc/9805018](#).
- [65] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498–501.

- [66] D. Lovelock, “The four-dimensionality of space and the einstein tensor,” *J. Math. Phys.* **13** (1972) 874–876.
- [67] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **59** (1999) 086004, [arXiv:hep-ph/9807344](#).
- [68] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys. Lett. B* **436** (1998) 257–263, [arXiv:hep-ph/9804398](#).
- [69] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, “The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys. Lett. B* **429** (1998) 263–272, [arXiv:hep-ph/9803315](#).
- [70] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105–114, [arXiv:hep-th/9802109](#).
- [71] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [arXiv:hep-th/9711200](#).
- [72] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291, [arXiv:hep-th/9802150](#).
- [73] B. A. Campbell, M. J. Duncan, N. Kaloper, and K. A. Olive, “Axion hair for Kerr black holes,” *Phys. Lett. B* **251** (1990) 34–38.
- [74] B. A. Campbell, N. Kaloper, and K. A. Olive, “Classical hair for Kerr-Newman black holes in string gravity,” *Phys. Lett. B* **285** (1992) 199–205.
- [75] B. A. Campbell, M. J. Duncan, N. Kaloper, and K. A. Olive, “Gravitational dynamics with Lorentz Chern-Simons terms,” *Nucl. Phys. B* **351** (1991) 778–792.
- [76] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, “Order alpha-prime (Two Loop) Equivalence of the String Equations of Motion and the Sigma Model Weyl Invariance Conditions: Dependence on the Dilaton and the Antisymmetric Tensor,” *Nucl. Phys. B* **293** (1987) 385–419.
- [77] G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, “4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space,” *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208–214, [arXiv:hep-th/0005016](#).
- [78] D. Gorbunov, K. Koyama, and S. Sibiryakov, “More on ghosts in DGP model,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 044016, [arXiv:hep-th/0512097](#).
- [79] W. Fang, S. Wang, W. Hu, Z. Haiman, L. Hui, and M. May, “Challenges to the DGP Model from Horizon-Scale Growth and Geometry,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 103509, [arXiv:0808.2208 \[astro-ph\]](#).
- [80] L. Lombriser, W. Hu, W. Fang, and U. Seljak, “Cosmological Constraints on DGP Braneworld Gravity with Brane Tension,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 063536, [arXiv:0905.1112 \[astro-ph.CO\]](#).
- [81] L. Randall and R. Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370–3373, [arXiv:hep-ph/9905221](#).

- [82] L. Randall and R. Sundrum, “An Alternative to compactification,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690–4693, [arXiv:hep-th/9906064](#).
- [83] P. Kanti, “Black holes in theories with large extra dimensions: A Review,” *Int. J. Mod. Phys. A* **19** (2004) 4899–4951, [arXiv:hep-ph/0402168](#).
- [84] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Holography and hydrodynamics: Diffusion on stretched horizons,” *JHEP* **10** (2003) 064, [arXiv:hep-th/0309213](#).
- [85] T. Wiseman, “Static axisymmetric vacuum solutions and nonuniform black strings,” *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 1137–1176, [arXiv:hep-th/0209051](#).
- [86] R. Emparan, A. Fabbri, and N. Kaloper, “Quantum black holes as holograms in AdS brane worlds,” *JHEP* **08** (2002) 043, [arXiv:hep-th/0206155](#).
- [87] T. Tanaka, “Classical black hole evaporation in Randall-Sundrum infinite brane world,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148** (2003) 307–316, [arXiv:gr-qc/0203082](#).
- [88] R. Casadio, A. Fabbri, and L. Mazzacurati, “New black holes in the brane world?,” *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084040, [arXiv:gr-qc/0111072](#).
- [89] S. S. Gubser, “On nonuniform black branes,” *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 4825–4844, [arXiv:hep-th/0110193](#).
- [90] R. Emparan and H. S. Reall, “A Rotating black ring solution in five-dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 101101, [arXiv:hep-th/0110260](#).
- [91] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezanian, “Black holes on the brane,” *Phys. Lett. B* **487** (2000) 1–6, [arXiv:hep-th/0003061](#).
- [92] S. B. Giddings, E. Katz, and L. Randall, “Linearized gravity in brane backgrounds,” *JHEP* **03** (2000) 023, [arXiv:hep-th/0002091](#).
- [93] R. Emparan, G. T. Horowitz, and R. C. Myers, “Exact description of black holes on branes. 2. Comparison with BTZ black holes and black strings,” *JHEP* **01** (2000) 021, [arXiv:hep-th/9912135](#).
- [94] R. Emparan, G. T. Horowitz, and R. C. Myers, “Exact description of black holes on branes,” *JHEP* **01** (2000) 007, [arXiv:hep-th/9911043](#).
- [95] J. Garriga and T. Tanaka, “Gravity in the brane world,” *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2778–2781, [arXiv:hep-th/9911055](#).
- [96] T. Shiromizu, K.-i. Maeda, and M. Sasaki, “The Einstein equation on the 3-brane world,” *Phys. Rev. D* **62** (2000) 024012, [arXiv:gr-qc/9910076](#).
- [97] A. Chamblin, S. W. Hawking, and H. S. Reall, “Brane world black holes,” *Phys. Rev. D* **61** (2000) 065007, [arXiv:hep-th/9909205](#).
- [98] W. D. Goldberger and M. B. Wise, “Modulus stabilization with bulk fields,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4922–4925, [arXiv:hep-ph/9907447](#).
- [99] P. Binetruy, C. Deffayet, and D. Langlois, “Nonconventional cosmology from a brane universe,” *Nucl. Phys. B* **565** (2000) 269–287, [arXiv:hep-th/9905012](#).

- [100] P. C. Argyres, S. Dimopoulos, and J. March-Russell, “Black holes and submillimeter dimensions,” *Phys. Lett. B* **441** (1998) 96–104, [arXiv:hep-th/9808138](#).
- [101] R. C. Myers and M. J. Perry, “Black Holes in Higher Dimensional Space-Times,” *Annals Phys.* **172** (1986) 304.
- [102] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, “Do We Live Inside a Domain Wall?,” *Phys. Lett. B* **125** (1983) 136–138.
- [103] K. Akama, “An Early Proposal of ‘Brane World’,” *Lect. Notes Phys.* **176** (1982) 267–271, [arXiv:hep-th/0001113](#).
- [104] F. R. Tangherlini, “Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem,” *Nuovo Cim.* **27** (1963) 636–651.
- [105] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, “Quasinormal modes of black holes and black branes,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 163001, [arXiv:0905.2975 \[gr-qc\]](#).
- [106] R. Emparan and H. S. Reall, “Black Holes in Higher Dimensions,” *Living Rev. Rel.* **11** (2008) 6, [arXiv:0801.3471 \[hep-th\]](#).
- [107] L. Da Rold and A. Pomarol, “Chiral symmetry breaking from five dimensional spaces,” *Nucl. Phys. B* **721** (2005) 79–97, [arXiv:hep-ph/0501218](#).
- [108] J. D. Bekenstein, “Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 083509, [arXiv:astro-ph/0403694](#). [Erratum: *Phys.Rev.D* 71, 069901 (2005)].
- [109] L. Heisenberg, “A systematic approach to generalisations of General Relativity and their cosmological implications,” *Phys. Rept.* **796** (2019) 1–113, [arXiv:1807.01725 \[gr-qc\]](#).
- [110] R. Kimura, A. Naruko, and D. Yoshida, “Extended vector-tensor theories,” *JCAP* **01** (2017) 002, [arXiv:1608.07066 \[gr-qc\]](#).
- [111] S. F. Hassan and R. A. Rosen, “Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity,” *JHEP* **02** (2012) 126, [arXiv:1109.3515 \[hep-th\]](#).
- [112] K. Hinterbichler and R. A. Rosen, “Interacting Spin-2 Fields,” *JHEP* **07** (2012) 047, [arXiv:1203.5783 \[hep-th\]](#).
- [113] A. Proca, “Sur la theorie ondulatoire des electrons positifs et negatifs,” *J. Phys. Radium* **7** (1936) 347–353.
- [114] G. Tasinato, “Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking,” *JHEP* **04** (2014) 067, [arXiv:1402.6450 \[hep-th\]](#).
- [115] L. Heisenberg, “Generalization of the Proca Action,” *JCAP* **05** (2014) 015, [arXiv:1402.7026 \[hep-th\]](#).
- [116] E. Allys, P. Peter, and Y. Rodriguez, “Generalized SU(2) Proca Theory,” *Phys. Rev. D* **94** no. 8, (2016) 084041, [arXiv:1609.05870 \[hep-th\]](#).
- [117] G. W. Horndeski, “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space,” *Int. J. Theor. Phys.* **10** (1974) 363–384.

- [118] M. Zumalacárregui and J. García-Bellido, “Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) 064046, [arXiv:1308.4685 \[gr-qc\]](#).
- [119] D. Langlois and K. Noui, “Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability,” *JCAP* **02** (2016) 034, [arXiv:1510.06930 \[gr-qc\]](#).
- [120] J. Ben Achour, M. Crisostomi, K. Koyama, D. Langlois, K. Noui, and G. Tasinato, “Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski up to cubic order,” *JHEP* **12** (2016) 100, [arXiv:1608.08135 \[hep-th\]](#).
- [121] M. Crisostomi, M. Hull, K. Koyama, and G. Tasinato, “Horndeski: beyond, or not beyond?,” *JCAP* **03** (2016) 038, [arXiv:1601.04658 \[hep-th\]](#).
- [122] D. Langlois, R. Saito, D. Yamauchi, and K. Noui, “Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817,” *Phys. Rev. D* **97** no. 6, (2018) 061501, [arXiv:1711.07403 \[gr-qc\]](#).
- [123] D. Langlois, “Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor (DHOST) theories,” in *52nd Rencontres de Moriond on Gravitation*, pp. 221–228. 2017. [arXiv:1707.03625 \[gr-qc\]](#).
- [124] D. Langlois, M. Mancarella, K. Noui, and F. Vernizzi, “Effective Description of Higher-Order Scalar-Tensor Theories,” *JCAP* **05** (2017) 033, [arXiv:1703.03797 \[hep-th\]](#).
- [125] D. Langlois, “Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (DHOST) theories: A review,” *Int. J. Mod. Phys. D* **28** no. 05, (2019) 1942006, [arXiv:1811.06271 \[gr-qc\]](#).
- [126] C. Charmousis, T. Kolyvaris, E. Papantonopoulos, and M. Tsoukalas, “Black Holes in Bi-scalar Extensions of Horndeski Theories,” *JHEP* **07** (2014) 085, [arXiv:1404.1024 \[gr-qc\]](#).
- [127] C. Charmousis and D. Iosifidis, “Self tuning scalar tensor black holes,” *J. Phys. Conf. Ser.* **600** (2015) 012003, [arXiv:1501.05167 \[gr-qc\]](#).
- [128] C. Charmousis, M. Crisostomi, R. Gregory, and N. Stergioulas, “Rotating Black Holes in Higher Order Gravity,” *Phys. Rev. D* **100** no. 8, (2019) 084020, [arXiv:1903.05519 \[hep-th\]](#).
- [129] C. Charmousis, A. Lehébel, E. Smyrniotis, and N. Stergioulas, “Astrophysical constraints on compact objects in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity,” *JCAP* **02** no. 02, (2022) 033, [arXiv:2109.01149 \[gr-qc\]](#).
- [130] A. Bakopoulos, C. Charmousis, and P. Kanti, “Traversable wormholes in beyond Horndeski theories,” *JCAP* **05** no. 05, (2022) 022, [arXiv:2111.09857 \[gr-qc\]](#).
- [131] A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, and N. Lecoeur, “Compact objects of spherical symmetry in beyond Horndeski theories,” *JHEP* **08** (2022) 055, [arXiv:2203.14595 \[gr-qc\]](#).

- [132] A. Bakopoulos, C. Charmousis, and N. Lecoer, “Compact objects in gravity theories,” in *33rd Rencontres de Blois: Exploring the Dark Universe*. 9, 2022. [arXiv:2209.09499 \[gr-qc\]](#).
- [133] E. Babichev and C. Charmousis, “Dressing a black hole with a time-dependent Galileon,” *JHEP* **08** (2014) 106, [arXiv:1312.3204 \[gr-qc\]](#).
- [134] E. Babichev, C. Charmousis, and M. Hassaine, “Charged Galileon black holes,” *JCAP* **05** (2015) 031, [arXiv:1503.02545 \[gr-qc\]](#).
- [135] E. Babichev, C. Charmousis, A. Lehébel, and T. Moskalets, “Black holes in a cubic Galileon universe,” *JCAP* **09** (2016) 011, [arXiv:1605.07438 \[gr-qc\]](#).
- [136] E. Babichev and G. Esposito-Farese, “Cosmological self-tuning and local solutions in generalized Horndeski theories,” *Phys. Rev. D* **95** no. 2, (2017) 024020, [arXiv:1609.09798 \[gr-qc\]](#).
- [137] E. Babichev, C. Charmousis, and A. Lehébel, “Black holes and stars in Horndeski theory,” *Class. Quant. Grav.* **33** no. 15, (2016) 154002, [arXiv:1604.06402 \[gr-qc\]](#).
- [138] E. Babichev, C. Charmousis, and A. Lehébel, “Asymptotically flat black holes in Horndeski theory and beyond,” *JCAP* **04** (2017) 027, [arXiv:1702.01938 \[gr-qc\]](#).
- [139] E. Babichev, C. Charmousis, G. Esposito-Farèse, and A. Lehébel, “Hamiltonian unboundedness vs stability with an application to Horndeski theory,” *Phys. Rev. D* **98** no. 10, (2018) 104050, [arXiv:1803.11444 \[gr-qc\]](#).
- [140] E. Babichev, C. Charmousis, A. Cisterna, and M. Hassaine, “Regular black holes via the Kerr-Schild construction in DHOST theories,” *JCAP* **06** (2020) 049, [arXiv:2004.00597 \[hep-th\]](#).
- [141] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoer, “Conformally coupled theories and their deformed compact objects: From black holes, radiating spacetimes to eternal wormholes,” *Phys. Rev. D* **106** no. 6, (2022) 064039, [arXiv:2206.11013 \[gr-qc\]](#).
- [142] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoer, “Selecting Horndeski theories without apparent symmetries and their black hole solutions,” [arXiv:2303.04126 \[gr-qc\]](#).
- [143] E. Babichev, C. Charmousis, and N. Lecoer, “Exact black hole solutions in higher-order scalar-tensor theories,” 9, 2023. [arXiv:2309.12229 \[gr-qc\]](#).
- [144] M. Rinaldi, “Black holes with non-minimal derivative coupling,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 084048, [arXiv:1208.0103 \[gr-qc\]](#).
- [145] C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, “General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four,” *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 051101, [arXiv:1106.2000 \[hep-th\]](#).
- [146] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, “Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations,” *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011) 511–529, [arXiv:1105.5723 \[hep-th\]](#).

- [147] E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, “The cosmology of the Fab-Four,” *JCAP* **12** (2012) 026, [arXiv:1208.3373 \[hep-th\]](#).
- [148] T. P. Sotiriou and S.-Y. Zhou, “Black hole hair in generalized scalar-tensor gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 251102, [arXiv:1312.3622 \[gr-qc\]](#).
- [149] T. P. Sotiriou, “Black Holes and Scalar Fields,” *Class. Quant. Grav.* **32** no. 21, (2015) 214002, [arXiv:1505.00248 \[gr-qc\]](#).
- [150] H. Lu and Y. Pang, “Horndeski gravity as $D \rightarrow 4$ limit of Gauss-Bonnet,” *Phys. Lett. B* **809** (2020) 135717, [arXiv:2003.11552 \[gr-qc\]](#).
- [151] P. G. S. Fernandes, “Einstein–Maxwell-scalar black holes with massive and self-interacting scalar hair,” *Phys. Dark Univ.* **30** (2020) 100716, [arXiv:2003.01045 \[gr-qc\]](#).
- [152] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton, and D. J. Mulryne, “Derivation of Regularized Field Equations for the Einstein–Gauss–Bonnet Theory in Four Dimensions,” *Phys. Rev. D* **102** no. 2, (2020) 024025, [arXiv:2004.08362 \[gr-qc\]](#).
- [153] P. G. S. Fernandes, “Gravity with a generalized conformal scalar field: theory and solutions,” *Phys. Rev. D* **103** no. 10, (2021) 104065, [arXiv:2105.04687 \[gr-qc\]](#).
- [154] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton, and D. J. Mulryne, “Black holes in the scalar-tensor formulation of 4D Einstein–Gauss–Bonnet gravity: Uniqueness of solutions, and a new candidate for dark matter,” *Phys. Rev. D* **104** no. 4, (2021) 044029, [arXiv:2107.00046 \[gr-qc\]](#).
- [155] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton, and D. J. Mulryne, “The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review,” *Class. Quant. Grav.* **39** no. 6, (2022) 063001, [arXiv:2202.13908 \[gr-qc\]](#).
- [156] M. Libanov, S. Mironov, and V. Rubakov, “Generalized Galileons: instabilities of bouncing and Genesis cosmologies and modified Genesis,” *JCAP* **08** (2016) 037, [arXiv:1605.05992 \[hep-th\]](#).
- [157] Y.-F. Cai, D. A. Easson, and R. Brandenberger, “Towards a Nonsingular Bouncing Cosmology,” *JCAP* **08** (2012) 020, [arXiv:1206.2382 \[hep-th\]](#).
- [158] D. A. Easson, I. Sawicki, and A. Vikman, “G-Bounce,” *JCAP* **11** (2011) 021, [arXiv:1109.1047 \[hep-th\]](#).
- [159] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, “G-inflation: Inflation driven by the Galileon field,” *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 231302, [arXiv:1008.0603 \[hep-th\]](#).
- [160] P. Creminelli, A. Nicolis, and E. Trincherini, “Galilean Genesis: An Alternative to inflation,” *JCAP* **11** (2010) 021, [arXiv:1007.0027 \[hep-th\]](#).
- [161] A. De Felice and S. Tsujikawa, “Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models,” *JCAP* **02** (2012) 007, [arXiv:1110.3878 \[gr-qc\]](#).
- [162] R. Jackiw and S. Y. Pi, “Chern-Simons modification of general relativity,” *Phys. Rev. D* **68** (2003) 104012, [arXiv:gr-qc/0308071](#).

- [163] M. Crisostomi, K. Noui, C. Charmousis, and D. Langlois, “Beyond Lovelock gravity: Higher derivative metric theories,” *Phys. Rev. D* **97** no. 4, (2018) 044034, [arXiv:1710.04531 \[hep-th\]](#).
- [164] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Three-Dimensional Massive Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975–978.
- [165] M. J. Duncan, N. Kaloper, and K. A. Olive, “Axion hair and dynamical torsion from anomalies,” *Nucl. Phys. B* **387** (1992) 215–235.
- [166] P. Svrcek and E. Witten, “Axions In String Theory,” *JHEP* **06** (2006) 051, [arXiv:hep-th/0605206](#).
- [167] S. Alexander and N. Yunes, “Chern-Simons Modified General Relativity,” *Phys. Rept.* **480** (2009) 1–55, [arXiv:0907.2562 \[hep-th\]](#).
- [168] D. G. Boulware and S. Deser, “String Generated Gravity Models,” *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2656.
- [169] P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley, “Dilatonic black holes in higher curvature string gravity,” *Phys. Rev. D* **54** (1996) 5049–5058, [arXiv:hep-th/9511071](#).
- [170] S. Basilakos, N. E. Mavromatos, and J. Solà Peracaula, “Gravitational and Chiral Anomalies in the Running Vacuum Universe and Matter-Antimatter Asymmetry,” *Phys. Rev. D* **101** no. 4, (2020) 045001, [arXiv:1907.04890 \[hep-ph\]](#).
- [171] N. E. Mavromatos and J. Solà Peracaula, “Stringy-running-vacuum-model inflation: from primordial gravitational waves and stiff axion matter to dynamical dark energy,” *Eur. Phys. J. ST* **230** no. 9, (2021) 2077–2110, [arXiv:2012.07971 \[hep-ph\]](#).
- [172] N. Yunes and F. Pretorius, “Dynamical Chern-Simons Modified Gravity. I. Spinning Black Holes in the Slow-Rotation Approximation,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084043, [arXiv:0902.4669 \[gr-qc\]](#).
- [173] K. Yagi, N. Yunes, and T. Tanaka, “Slowly Rotating Black Holes in Dynamical Chern-Simons Gravity: Deformation Quadratic in the Spin,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 044037, [arXiv:1206.6130 \[gr-qc\]](#). [Erratum: Phys.Rev.D 89, 049902 (2014)].
- [174] L. C. Stein, “Rapidly rotating black holes in dynamical Chern-Simons gravity: Decoupling limit solutions and breakdown,” *Phys. Rev. D* **90** no. 4, (2014) 044061, [arXiv:1407.2350 \[gr-qc\]](#).
- [175] T. Delsate, C. Herdeiro, and E. Radu, “Non-perturbative spinning black holes in dynamical Chern–Simons gravity,” *Phys. Lett. B* **787** (2018) 8–15, [arXiv:1806.06700 \[gr-qc\]](#).
- [176] P. A. Cano and A. Ruipérez, “Leading higher-derivative corrections to Kerr geometry,” *JHEP* **05** (2019) 189, [arXiv:1901.01315 \[gr-qc\]](#). [Erratum: JHEP 03, 187 (2020)].
- [177] P. A. Cano and A. Ruipérez, “String gravity in D=4,” *Phys. Rev. D* **105** no. 4, (2022) 044022, [arXiv:2111.04750 \[hep-th\]](#).
- [178] G. G. L. Nashed and S. Nojiri, “Slow-rotating black holes with potential in dynamical Chern-Simons modified gravitational theory,” *JCAP* **02** (2023) 033, [arXiv:2208.11498 \[gr-qc\]](#).

- [179] G. G. L. Nashed and S. Nojiri, “Slow-rotating charged black hole solution in dynamical Chern-Simons modified gravity,” *Phys. Rev. D* **107** no. 6, (2023) 064069, [arXiv:2303.07349 \[gr-qc\]](#).
- [180] C. Richards, A. Dima, and H. Witek, “Black holes in massive dynamical Chern-Simons gravity: Scalar hair and quasibound states at decoupling,” *Phys. Rev. D* **108** no. 4, (2023) 044078, [arXiv:2305.07704 \[gr-qc\]](#).
- [181] N. Parbin, D. J. Gogoi, and U. D. Goswami, “Weak gravitational lensing and shadow cast by rotating black holes in axionic Chern–Simons theory,” *Phys. Dark Univ.* **41** (2023) 101265, [arXiv:2305.09157 \[gr-qc\]](#).
- [182] D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, “Spontaneously scalarized black holes in dynamical Chern-Simons gravity: dynamics and equilibrium solutions,” *Phys. Rev. D* **103** no. 8, (2021) 083007, [arXiv:2102.03940 \[gr-qc\]](#).
- [183] S. Alexander, G. Gabadadze, L. Jenks, and N. Yunes, “Black hole superradiance in dynamical chern-simons gravity,” *Phys. Rev. D* **107** (Apr, 2023) 084016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.084016>.
- [184] A. Cisterna, C. Erices, X.-M. Kuang, and M. Rinaldi, “Axionic black branes with conformal coupling,” *Phys. Rev. D* **97** no. 12, (2018) 124052, [arXiv:1803.07600 \[hep-th\]](#).
- [185] A. Cisterna, C. Corral, and S. del Pino, “Static and rotating black strings in dynamical Chern–Simons modified gravity,” *Eur. Phys. J. C* **79** no. 5, (2019) 400, [arXiv:1809.02903 \[gr-qc\]](#).
- [186] Y. Brihaye and E. Radu, “Remarks on the Taub-NUT solution in Chern-Simons modified gravity,” *Phys. Lett. B* **764** (2017) 300–305, [arXiv:1610.09952 \[gr-qc\]](#).
- [187] N. E. Mavromatos, “Geometrical origins of the universe dark sector: string-inspired torsion and anomalies as seeds for inflation and dark matter,” *Phil. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci.* **380** no. 2222, (2022) 20210188, [arXiv:2108.02152 \[gr-qc\]](#).
- [188] M. Visser, *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking*. 1995.
- [189] D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini, “Equatorial circular motion in Kerr spacetime,” *Phys. Rev. D* **84** (2011) 044030, [arXiv:1105.2959 \[gr-qc\]](#).
- [190] J. Bardeen, “Non-singular general relativistic gravitational collapse,” in *Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity*, p. 87. Sept., 1968.
- [191] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity,” *Am. J. Phys.* **56** (1988) 395–412.
- [192] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, “Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition,” *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1446–1449.
- [193] W. Israel, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity,” *Nuovo Cim. B* **44S10** (1966) 1. [Erratum: *Nuovo Cim. B* 48, 463 (1967)].
- [194] M. Visser, “Traversable wormholes from surgically modified Schwarzschild space-times,” *Nucl. Phys. B* **328** (1989) 203–212, [arXiv:0809.0927 \[gr-qc\]](#).

- [195] M. Visser, “Traversable wormholes: Some simple examples,” *Phys. Rev. D* **39** (1989) 3182–3184, [arXiv:0809.0907 \[gr-qc\]](#).
- [196] E. Poisson and M. Visser, “Thin shell wormholes: Linearization stability,” *Phys. Rev. D* **52** (1995) 7318–7321, [arXiv:gr-qc/9506083](#).
- [197] S. H. Mazharimousavi and M. Halilsoy, “Counter-rotational effects on stability of 2 + 1-dimensional thin-shell wormholes,” *Eur. Phys. J. C* **74** no. 9, (2014) 3073, [arXiv:1407.4673 \[gr-qc\]](#).
- [198] J. P. Krisch and E. N. Glass, “Counter-rotating Kerr manifolds separated by a fluid shell,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 175010, [arXiv:0908.1835 \[gr-qc\]](#).
- [199] M. Barriola and A. Vilenkin, “Gravitational Field of a Global Monopole,” *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 341.
- [200] P. O. Mazur and J. Papavassiliou, “Gravitational scattering on a global monopole,” *Phys. Rev. D* **44** (1991) 1317–1320.
- [201] H. Ren, “Fermions in a global monopole background,” *Phys. Lett. B* **325** (1994) 149–156, [arXiv:hep-th/9312074](#).
- [202] A. A. Roderigues Sobreira and E. R. Bezerra de Mello, “The Classical and quantum analysis of a charged particle on the space-time produced by a global monopole,” *Grav. Cosmol.* **5** (1999) 177–184, [arXiv:hep-th/9809212](#).
- [203] N. E. Mavromatos and J. Papavassiliou, “Singular lensing from the scattering on special space–time defects,” *Eur. Phys. J. C* **78** no. 1, (2018) 68, [arXiv:1712.03395 \[hep-ph\]](#).
- [204] E. R. Bezerra de Mello and C. Furtado, “The Nonrelativistic scattering problem by a global monopole,” *Phys. Rev. D* **56** (1997) 1345–1348.
- [205] G. W. Gibbons, M. E. Ortiz, F. Ruiz Ruiz, and T. M. Samols, “Semilocal strings and monopoles,” *Nucl. Phys. B* **385** (1992) 127–144, [arXiv:hep-th/9203023](#).
- [206] M. Hindmarsh, “Semilocal topological defects,” *Nucl. Phys. B* **392** (1993) 461–492, [arXiv:hep-ph/9206229](#).
- [207] R. Gregory and C. Santos, “Space-time structure of the global vortex,” *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 21–36, [arXiv:hep-th/0208037](#).
- [208] S. B. Gudnason and J. Evslin, “Global monopoles of charge 2,” *Phys. Rev. D* **92** no. 4, (2015) 045044, [arXiv:1507.03400 \[hep-th\]](#).
- [209] A. S. Goldhaber, “Collapse of a ‘Global Monopole.’,” *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2158.
- [210] S. H. Rhie and D. P. Bennett, “Global monopoles do not ‘collapse’,” *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1173.
- [211] L. Perivolaropoulos, “Instabilities and interactions of global topological defects,” *Nucl. Phys. B* **375** (1992) 665–693.
- [212] G. Arreaga, I. Cho, and J. Guven, “Stability of selfgravitating magnetic monopoles,” *Phys. Rev. D* **62** (2000) 043520, [arXiv:gr-qc/0001078](#).

- [213] A. Achúcarro and J. Urrestilla, “The (In)stability of global monopoles revisited,” *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3091–3094, [arXiv:hep-ph/0003145](#).
- [214] E. R. Bezerra de Mello, “Reply on comment on ‘Gravitating magnetic monopole in the global monopole space-time’,” *Phys. Rev. D* **68** (2003) 088702, [arXiv:hep-th/0304029](#).
- [215] D. Harari and C. Lousto, “Repulsive gravitational effects of global monopoles,” *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2626–2631.
- [216] K. A. Bronnikov, B. E. Meierovich, and E. R. Podolyak, “Global monopole in general relativity,” *J. Exp. Theor. Phys.* **95** (2002) 392–403, [arXiv:gr-qc/0212091](#).
- [217] N. E. Mavromatos and S. Sarkar, “Magnetic monopoles from global monopoles in the presence of a Kalb-Ramond Field,” *Phys. Rev. D* **95** no. 10, (2017) 104025, [arXiv:1607.01315 \[hep-th\]](#).
- [218] N. E. Mavromatos and S. Sarkar, “Regularized Kalb-Ramond magnetic monopole with finite energy,” *Phys. Rev. D* **97** no. 12, (2018) 125010, [arXiv:1804.01702 \[hep-th\]](#).
- [219] N. E. Mavromatos and V. A. Mitsou, “Magnetic monopoles revisited: Models and searches at colliders and in the Cosmos,” *Int. J. Mod. Phys. A* **35** no. 23, (2020) 2030012, [arXiv:2005.05100 \[hep-ph\]](#).
- [220] C. Charmousis, “Higher order gravity theories and their black hole solutions,” *Lect. Notes Phys.* **769** (2009) 299–346, [arXiv:0805.0568 \[gr-qc\]](#).
- [221] P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley, “Dilatonic black holes in higher curvature string gravity. 2: Linear stability,” *Phys. Rev. D* **57** (1998) 6255–6264, [arXiv:hep-th/9703192](#).
- [222] N. E. Mavromatos and E. Winstanley, “Aspects of hairy black holes in spontaneously broken Einstein Yang-Mills systems: Stability analysis and entropy considerations,” *Phys. Rev. D* **53** (1996) 3190–3214, [arXiv:hep-th/9510007](#).
- [223] E. Winstanley and N. E. Mavromatos, “Instability of hairy black holes in spontaneously broken Einstein Yang-Mills Higgs systems,” *Phys. Lett. B* **352** (1995) 242–246, [arXiv:hep-th/9503034](#).
- [224] T. Hertog and K. Maeda, “Stability and thermodynamics of AdS black holes with scalar hair,” *Phys. Rev. D* **71** (2005) 024001, [arXiv:hep-th/0409314](#).
- [225] T. Tamaki, T. Torii, and K.-i. Maeda, “Stability analysis of black holes via a catastrophe theory and black hole thermodynamics in generalized theories of gravity,” *Phys. Rev. D* **68** (2003) 024028.
- [226] T. Torii and K.-i. Maeda, “Stability of a dilatonic black hole with a Gauss-Bonnet term,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 084004.
- [227] S. Tsujikawa, “Instability of hairy black holes in regularized 4-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet gravity,” *Phys. Lett. B* **833** (2022) 137329, [arXiv:2205.09932 \[gr-qc\]](#).
- [228] S.-W. Wei, Y.-X. Liu, and R. B. Mann, “Black Hole Solutions as Topological Thermodynamic Defects,” *Phys. Rev. Lett.* **129** no. 19, (2022) 191101, [arXiv:2208.01932 \[gr-qc\]](#).

- [229] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action integrals and partition functions in quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **15** (May, 1977) 2752–2756.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2752>.
- [230] J. A. Wheeler, “Geons,” *Phys. Rev.* **97** (1955) 511–536.
- [231] D. Wu, “Topological classes of rotating black holes,” *Phys. Rev. D* **107** no. 2, (2023) 024024, [arXiv:2211.15151](https://arxiv.org/abs/2211.15151) [gr-qc].
- [232] D. Wu and S.-Q. Wu, “Topological classes of thermodynamics of rotating AdS black holes,” *Phys. Rev. D* **107** no. 8, (2023) 084002, [arXiv:2301.03002](https://arxiv.org/abs/2301.03002) [hep-th].
- [233] N.-C. Bai, L. Li, and J. Tao, “Topology of black hole thermodynamics in Lovelock gravity,” *Phys. Rev. D* **107** no. 6, (2023) 064015, [arXiv:2208.10177](https://arxiv.org/abs/2208.10177) [gr-qc].
- [234] C. Liu and J. Wang, “Topological natures of the Gauss-Bonnet black hole in AdS space,” *Phys. Rev. D* **107** no. 6, (2023) 064023, [arXiv:2211.05524](https://arxiv.org/abs/2211.05524) [gr-qc].
- [235] P. K. Yerra, C. Bhamidipati, and S. Mukherji, “Topology of critical points and Hawking-Page transition,” *Phys. Rev. D* **106** no. 6, (2022) 064059, [arXiv:2208.06388](https://arxiv.org/abs/2208.06388) [hep-th].
- [236] Z.-Y. Fan, “Topological interpretation for phase transitions of black holes,” *Phys. Rev. D* **107** no. 4, (2023) 044026, [arXiv:2211.12957](https://arxiv.org/abs/2211.12957) [gr-qc].
- [237] C. Fang, J. Jiang, and M. Zhang, “Revisiting thermodynamic topologies of black holes,” *JHEP* **01** (2023) 102, [arXiv:2211.15534](https://arxiv.org/abs/2211.15534) [gr-qc].
- [238] D. Wu, “Classifying topology of consistent thermodynamics of the four-dimensional neutral Lorentzian NUT-charged spacetimes,” *Eur. Phys. J. C* **83** no. 5, (2023) 365, [arXiv:2302.01100](https://arxiv.org/abs/2302.01100) [gr-qc].
- [239] M. U. Shahzad, A. Mehmood, S. Sharif, and A. Övgün, “Criticality and topological classes of neutral Gauss–Bonnet AdS black holes in 5D,” *Annals Phys.* **458** no. 3, (2023) 169486.
- [240] C.-W. Tong, B.-H. Wang, and J.-R. Sun, “Topology of black hole thermodynamics via Rényi statistics,” [arXiv:2310.09602](https://arxiv.org/abs/2310.09602) [gr-qc].
- [241] A. Mehmood and M. U. Shahzad, “Thermodynamic Topological Classifications of Well-Known Black Holes,” [arXiv:2310.09907](https://arxiv.org/abs/2310.09907) [hep-th].
- [242] M. Rizwan and K. Jusufi, “Topological classes of thermodynamics of black holes in perfect fluid dark matter background,” *Eur. Phys. J. C* **83** no. 10, (2023) 944, [arXiv:2310.15182](https://arxiv.org/abs/2310.15182) [gr-qc].
- [243] C. Fairoos, “Topological Interpretation of Black Hole Phase Transition in Gauss-Bonnet Gravity,” [arXiv:2311.04050](https://arxiv.org/abs/2311.04050) [gr-qc].
- [244] D. Chen, Y. He, J. Tao, and W. Yang, “Topology of Hořava-Lifshitz black holes in different ensembles,” [arXiv:2311.11606](https://arxiv.org/abs/2311.11606) [hep-th].
- [245] B. Hazarika and P. Phukon, “Thermodynamic Topology of $D = 4, 5$ Horava Lifshitz Black Hole in Two Ensembles,” [arXiv:2312.06324](https://arxiv.org/abs/2312.06324) [hep-th].

- [246] J. Sadeghi, M. A. S. Afshar, S. Noori Gashti, and M. R. Alipour, “Thermodynamic topology of black holes from bulk-boundary, extended, and restricted phase space perspectives,” *Annals Phys.* **460** (2024) 169569, [arXiv:2312.04325 \[hep-th\]](#).
- [247] Y. Du and X. Zhang, “Topological classes of BTZ black holes,” [arXiv:2302.11189 \[gr-qc\]](#).
- [248] Y. Du and X. Zhang, “Topological classes of black holes in de-Sitter spacetime,” *Eur. Phys. J. C* **83** no. 10, (2023) 927, [arXiv:2303.13105 \[gr-qc\]](#).
- [249] M.-Y. Zhang, H. Chen, H. Hassanabadi, Z.-W. Long, and H. Yang, “Topology of nonlinearly charged black hole chemistry via massive gravity,” *Eur. Phys. J. C* **83** no. 8, (2023) 773, [arXiv:2305.15674 \[gr-qc\]](#).
- [250] C. Fairros and T. Sharqui, “Topological nature of black hole solutions in dRGT massive gravity,” *Int. J. Mod. Phys. A* **38** no. 25, (2023) 2350133, [arXiv:2304.02889 \[gr-qc\]](#).
- [251] M. R. Alipour, M. A. S. Afshar, S. Noori Gashti, and J. Sadeghi, “Topological classification and black hole thermodynamics,” *Phys. Dark Univ.* **42** (2023) 101361, [arXiv:2305.05595 \[gr-qc\]](#).
- [252] N. J. Gogoi and P. Phukon, “Topology of thermodynamics in R-charged black holes,” *Phys. Rev. D* **107** no. 10, (2023) 106009.
- [253] N. J. Gogoi and P. Phukon, “Thermodynamic topology of 4D dyonic AdS black holes in different ensembles,” *Phys. Rev. D* **108** no. 6, (2023) 066016, [arXiv:2304.05695 \[hep-th\]](#).
- [254] M. Zhang and J. Jiang, “Bulk-boundary thermodynamic equivalence: a topology viewpoint,” *JHEP* **06** (2023) 115, [arXiv:2303.17515 \[hep-th\]](#).
- [255] T. N. Hung and C. H. Nam, “Topology in thermodynamics of regular black strings with Kaluza–Klein reduction,” *Eur. Phys. J. C* **83** no. 7, (2023) 582, [arXiv:2305.15910 \[gr-qc\]](#).
- [256] D. Wu, “Consistent thermodynamics and topological classes for the four-dimensional Lorentzian charged Taub-NUT spacetimes,” *Eur. Phys. J. C* **83** no. 7, (2023) 589, [arXiv:2306.02324 \[gr-qc\]](#).
- [257] J. Sadeghi, S. Noori Gashti, M. R. Alipour, and M. A. S. Afshar, “Bardeen black hole thermodynamics from topological perspective,” *Annals Phys.* **455** (2023) 169391, [arXiv:2306.05692 \[hep-th\]](#).
- [258] R. M. Wald, “Black hole entropy is the Noether charge,” *Phys. Rev. D* **48** no. 8, (1993) R3427–R3431, [arXiv:gr-qc/9307038](#).
- [259] T. Jacobson, G. Kang, and R. C. Myers, “On black hole entropy,” *Phys. Rev. D* **49** (1994) 6587–6598, [arXiv:gr-qc/9312023](#).
- [260] V. Iyer and R. M. Wald, “Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy,” *Phys. Rev. D* **50** (1994) 846–864, [arXiv:gr-qc/9403028](#).
- [261] R. Brustein, D. Gorbonos, and M. Hadad, “Wald’s entropy is equal to a quarter of the horizon area in units of the effective gravitational coupling,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 044025, [arXiv:0712.3206 \[hep-th\]](#).

- [262] Y.-S. Duan and M.-L. Ge, “SU(2) Gauge Theory and Electrodynamics with N Magnetic Monopoles,” *Sci. Sin.* **9** no. 11, (1979) .
- [263] Y. Duan, “THE STRUCTURE OF THE TOPOLOGICAL CURRENT,”.
- [264] S.-W. Wei, “Topological Charge and Black Hole Photon Spheres,” *Phys. Rev. D* **102** no. 6, (2020) 064039, [arXiv:2006.02112 \[gr-qc\]](#).
- [265] P. Nicolini, “Noncommutative Black Holes, The Final Appeal To Quantum Gravity: A Review,” *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 1229–1308, [arXiv:0807.1939 \[hep-th\]](#).
- [266] P. Kanti and K. Tamvakis, “Colored black holes in higher curvature string gravity,” *Phys. Lett. B* **392** (1997) 30–38, [arXiv:hep-th/9609003](#).
- [267] P. Kanti, B. Kleihaus, and J. Kunz, “Wormholes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 271101, [arXiv:1108.3003 \[gr-qc\]](#).
- [268] P. Kanti, B. Kleihaus, and J. Kunz, “Stable Lorentzian Wormholes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory,” *Phys. Rev. D* **85** (2012) 044007, [arXiv:1111.4049 \[hep-th\]](#).
- [269] P. Kanti, A. Bakopoulos, and N. Pappas, “Scalar-Gauss-Bonnet Theories: Evasion of No-Hair Theorems and novel black-hole solutions,” *PoS CORFU2018* (2019) 091.
- [270] A. Bakopoulos, G. Antoniou, and P. Kanti, “Novel Black-Hole Solutions in Einstein-Scalar-Gauss-Bonnet Theories with a Cosmological Constant,” *Phys. Rev. D* **99** no. 6, (2019) 064003, [arXiv:1812.06941 \[hep-th\]](#).
- [271] A. Bakopoulos, G. Antoniou, and K. Panagiota, “Novel black hole solutions with scalar hair in Einstein-scalar-Gauss-Bonnet theories,” *AIP Conf. Proc.* **2075** no. 1, (2019) 040003.
- [272] A. Bakopoulos, P. Kanti, and N. Pappas, “Existence of solutions with a horizon in pure scalar-Gauss-Bonnet theories,” *Phys. Rev. D* **101** no. 4, (2020) 044026, [arXiv:1910.14637 \[hep-th\]](#).
- [273] A. Bakopoulos, P. Kanti, and N. Pappas, “Large and ultracompact Gauss-Bonnet black holes with a self-interacting scalar field,” *Phys. Rev. D* **101** no. 8, (2020) 084059, [arXiv:2003.02473 \[hep-th\]](#).
- [274] A. Bakopoulos, *Black holes and wormholes in the Einstein-scalar-Gauss-Bonnet generalized theories of gravity*. PhD thesis, Ioannina U., 2020. [arXiv:2010.13189 \[gr-qc\]](#).
- [275] F. Corelli, M. De Amicis, T. Ikeda, and P. Pani, “Nonperturbative gedanken experiments in Einstein-dilaton-Gauss-Bonnet gravity: Nonlinear transitions and tests of the cosmic censorship beyond general relativity,” *Phys. Rev. D* **107** no. 4, (2023) 044061, [arXiv:2205.13007 \[gr-qc\]](#).
- [276] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, “Wormholes, time machines, and the weak energy condition,” *Phys. Rev. Lett.* **61** (Sep, 1988) 1446–1449. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.1446>.
- [277] V. P. Frolov and I. D. Novikov, “Physical effects in wormholes and time machines,” *Phys. Rev. D* **42** (Aug, 1990) 1057–1065. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.1057>.

- [278] L. Flamm, “Beitrage zur einsteinschen gravitationstheorie,” *Phys. Z.* **17** no. 448, (1916)
- [279] A. Einstein and N. Rosen, “The Particle Problem in the General Theory of Relativity,” *Phys. Rev.* **48** (1935) 73–77.
- [280] C. W. Misner and J. A. Wheeler, “Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space,” *Annals Phys.* **2** (1957) 525–603.
- [281] H. G. Ellis, “Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity,” *J. Math. Phys.* **14** (1973) 104–118.
- [282] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity,” *Am. J. Phys.* **56** (1988) 395–412.
- [283] G. Antoniou, A. Bakopoulos, P. Kanti, B. Kleihaus, and J. Kunz, “Novel Einstein–scalar-Gauss-Bonnet wormholes without exotic matter,” *Phys. Rev. D* **101** no. 2, (2020) 024033, [arXiv:1904.13091 \[hep-th\]](#).
- [284] D. Hochberg and M. Visser, “Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat,” *Phys. Rev. D* **56** (1997) 4745–4755, [arXiv:gr-qc/9704082](#).
- [285] E. Teo, “Rotating traversable wormholes,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 024014, [arXiv:gr-qc/9803098](#).
- [286] D. Hochberg and M. Visser, “Dynamic wormholes, anti-trapped surfaces, and energy conditions,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 044021, [arXiv:gr-qc/9802046](#).
- [287] F. S. N. Lobo and M. A. Oliveira, “Wormhole geometries in $f(R)$ modified theories of gravity,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 104012, [arXiv:0909.5539 \[gr-qc\]](#).
- [288] B. Mishra, A. S. Agrawal, S. K. Tripathy, and S. Ray, “Traversable wormhole models in $f(R)$ gravity,” *Int. J. Mod. Phys. A* **37** no. 05, (2022) 2250010, [arXiv:2112.08365 \[gr-qc\]](#).
- [289] S. H. Mazharimousavi and M. Halilsoy, “Wormhole solutions in $f(R)$ gravity satisfying energy conditions,” *Mod. Phys. Lett. A* **31** no. 34, (2016) 1650192.
- [290] O. Sokoliuk, S. Mandal, P. K. Sahoo, and A. Baransky, “Generalised Ellis–Bronnikov wormholes in $f(R)$ gravity,” *Eur. Phys. J. C* **82** no. 4, (2022) 280, [arXiv:2204.00223 \[gr-qc\]](#).
- [291] R. Solanki, Z. Hassan, and P. K. Sahoo, “Wormhole solutions in $f(R, L_m)$ gravity,” [arXiv:2306.10969 \[gr-qc\]](#).
- [292] N. S. Kavya, G. Mustafa, V. Venkatesha, and P. K. Sahoo, “Exploring wormhole solutions in curvature-matter coupling gravity supported by noncommutative geometry and conformal symmetry,” [arXiv:2306.08856 \[gr-qc\]](#).
- [293] T. Karakasis, E. Papantonopoulos, and C. Vlachos, “ $f(R)$ gravity wormholes sourced by a phantom scalar field,” *Phys. Rev. D* **105** no. 2, (2022) 024006, [arXiv:2107.09713 \[gr-qc\]](#).

- [294] A. Banerjee, M. K. Jasim, and S. G. Ghosh, “Wormholes in $f(R,T)$ gravity satisfying the null energy condition with isotropic pressure,” *Annals Phys.* **433** (2021) 168575, [arXiv:2003.01545 \[gr-qc\]](#).
- [295] P. Sahoo, S. Mandal, and P. K. Sahoo, “Wormhole model with a hybrid shape function in $f(R,T)$ gravity,” *New Astron.* **80** (2020) 101421, [arXiv:1911.13247 \[gr-qc\]](#).
- [296] P. Sahoo, A. Kirschner, and P. K. Sahoo, “Phantom fluid wormhole in $f(R,T)$ gravity,” *Mod. Phys. Lett. A* **34** no. 37, (2019) 1950303, [arXiv:1906.04048 \[gr-qc\]](#).
- [297] P. Sahoo, P. H. R. S. Moraes, M. M. Lapola, and P. K. Sahoo, “Traversable wormholes in the traceless $f(R,T)$ gravity,” *Int. J. Mod. Phys. D* **30** no. 13, (2021) 2150100, [arXiv:2012.00258 \[gr-qc\]](#).
- [298] C. G. Boehmer, T. Harko, and F. S. N. Lobo, “Wormhole geometries in modified teleparallel gravity and the energy conditions,” *Phys. Rev. D* **85** (2012) 044033, [arXiv:1110.5756 \[gr-qc\]](#).
- [299] N. Montelongo Garcia and F. S. N. Lobo, “Nonminimal curvature-matter coupled wormholes with matter satisfying the null energy condition,” *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 085018, [arXiv:1012.2443 \[gr-qc\]](#).
- [300] N. M. Garcia and F. S. N. Lobo, “Wormhole geometries supported by a nonminimal curvature-matter coupling,” *Phys. Rev. D* **82** (2010) 104018, [arXiv:1007.3040 \[gr-qc\]](#).
- [301] T. Harko, F. S. N. Lobo, M. K. Mak, and S. V. Sushkov, “Modified-gravity wormholes without exotic matter,” *Phys. Rev. D* **87** no. 6, (2013) 067504, [arXiv:1301.6878 \[gr-qc\]](#).
- [302] V. De Falco, E. Battista, S. Capozziello, and M. De Laurentis, “General relativistic Poynting-Robertson effect to diagnose wormholes existence: static and spherically symmetric case,” *Phys. Rev. D* **101** no. 10, (2020) 104037, [arXiv:2004.14849 \[gr-qc\]](#).
- [303] V. De Falco, M. De Laurentis, and S. Capozziello, “Epicyclic frequencies in static and spherically symmetric wormhole geometries,” *Phys. Rev. D* **104** no. 2, (2021) 024053, [arXiv:2106.12564 \[gr-qc\]](#).
- [304] V. De Falco, E. Battista, S. Capozziello, and M. De Laurentis, “Testing wormhole solutions in extended gravity through the Poynting-Robertson effect,” *Phys. Rev. D* **103** no. 4, (2021) 044007, [arXiv:2101.04960 \[gr-qc\]](#).
- [305] V. De Falco, E. Battista, S. Capozziello, and M. De Laurentis, “Reconstructing wormhole solutions in curvature based Extended Theories of Gravity,” *Eur. Phys. J. C* **81** no. 2, (2021) 157, [arXiv:2102.01123 \[gr-qc\]](#).
- [306] E. Di Grezia, E. Battista, M. Manfredonia, and G. Miele, “Spin, torsion and violation of null energy condition in traversable wormholes,” *Eur. Phys. J. Plus* **132** no. 12, (2017) 537, [arXiv:1707.01508 \[gr-qc\]](#).
- [307] B. Bhawal and S. Kar, “Lorentzian wormholes in Einstein-Gauss-Bonnet theory,” *Phys. Rev. D* **46** (1992) 2464–2468.

- [308] G. Dotti, J. Oliva, and R. Troncoso, “Exact solutions for the Einstein-Gauss-Bonnet theory in five dimensions: Black holes, wormholes and spacetime horns,” *Phys. Rev. D* **76** (2007) 064038, [arXiv:0706.1830 \[hep-th\]](#).
- [309] M. R. Mehdizadeh, M. Kord Zangeneh, and F. S. N. Lobo, “Einstein-Gauss-Bonnet traversable wormholes satisfying the weak energy condition,” *Phys. Rev. D* **91** no. 8, (2015) 084004, [arXiv:1501.04773 \[gr-qc\]](#).
- [310] A. G. Agnese and M. La Camera, “Wormholes in the Brans-Dicke theory of gravitation,” *Phys. Rev. D* **51** (1995) 2011–2013.
- [311] L. A. Anchordoqui, S. E. Perez Bergliaffa, and D. F. Torres, “Brans-Dicke wormholes in nonvacuum space-time,” *Phys. Rev. D* **55** (1997) 5226–5229, [arXiv:gr-qc/9610070](#).
- [312] E. Papantonopoulos and C. Vlachos, “Wormhole solutions in modified Brans-Dicke theory,” *Phys. Rev. D* **101** no. 6, (2020) 064025, [arXiv:1912.04005 \[gr-qc\]](#).
- [313] J. Maldacena and A. Milekhin, “Humanly traversable wormholes,” *Phys. Rev. D* **103** (Mar, 2021) 066007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.066007>.
- [314] F. S. N. Lobo, “A General class of braneworld wormholes,” *Phys. Rev. D* **75** (2007) 064027, [arXiv:gr-qc/0701133](#).
- [315] S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, “Wormholes supported by hybrid metric-Palatini gravity,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 127504, [arXiv:1209.5862 \[gr-qc\]](#).
- [316] J. a. L. Rosa, “Double gravitational layer traversable wormholes in hybrid metric-Palatini gravity,” *Phys. Rev. D* **104** no. 6, (2021) 064002, [arXiv:2107.14225 \[gr-qc\]](#).
- [317] F. S. N. Lobo, G. J. Olmo, E. Orazi, D. Rubiera-Garcia, and A. Rustam, “Structure and stability of traversable thin-shell wormholes in Palatini $f(\mathcal{R})$ gravity,” *Phys. Rev. D* **102** no. 10, (2020) 104012, [arXiv:2009.10997 \[gr-qc\]](#).
- [318] T. Berry, F. S. N. Lobo, A. Simpson, and M. Visser, “Thin-shell traversable wormhole crafted from a regular black hole with asymptotically Minkowski core,” *Phys. Rev. D* **102** no. 6, (2020) 064054, [arXiv:2008.07046 \[gr-qc\]](#).
- [319] M. R. Mehdizadeh, M. Kord Zangeneh, and F. S. N. Lobo, “Higher-dimensional thin-shell wormholes in third-order Lovelock gravity,” *Phys. Rev. D* **92** no. 4, (2015) 044022, [arXiv:1506.03427 \[gr-qc\]](#).
- [320] F. S. N. Lobo, A. Simpson, and M. Visser, “Dynamic thin-shell black-bounce traversable wormholes,” *Phys. Rev. D* **101** (Jun, 2020) 124035. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.124035>.
- [321] M. R. Mehdizadeh and A. H. Ziaie, “Traversable wormholes in Einsteinian cubic gravity,” *Mod. Phys. Lett. A* **35** no. 06, (2019) 2050017, [arXiv:1903.10907 \[gr-qc\]](#).
- [322] B. Kain, “Are Einstein-Dirac-Maxwell wormholes traversable?,” [arXiv:2305.11217 \[gr-qc\]](#).
- [323] A. Dutta, D. Roy, N. J. Pullisseri, and S. Chakraborty, “Wormhole formation in massive gravity: an analytic description,” *Eur. Phys. J. C* **83** no. 6, (2023) 500, [arXiv:2306.06911 \[gr-qc\]](#).

- [324] M. Alcubierre, *Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions*, vol. 189. Springer, 2017. [arXiv:2103.05610 \[gr-qc\]](#).
- [325] G. R. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, “4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space,” *Phys. Lett.* **B485** (2000) 208–214, [arXiv:hep-th/0005016 \[hep-th\]](#).
- [326] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, “The Galileon as a local modification of gravity,” *Phys. Rev.* **D79** (2009) 064036, [arXiv:0811.2197 \[hep-th\]](#).
- [327] E. Babichev and C. Deffayet, “An introduction to the Vainshtein mechanism,” *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 184001, [arXiv:1304.7240 \[gr-qc\]](#).
- [328] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, “Covariant galileon,” *Phys. Rev. D* **79** (Apr, 2009) 084003. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.084003>.
- [329] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, “Generalized galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress tensors,” *Phys. Rev. D* **80** (Sep, 2009) 064015. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.064015>.
- [330] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, “Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations,” *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011) 511–529, [arXiv:1105.5723 \[hep-th\]](#).
- [331] C. Charmousis, B. Gouteraux, and E. Kiritsis, “Higher-derivative scalar-vector-tensor theories: black holes, Galileons, singularity cloaking and holography,” *JHEP* **09** (2012) 011, [arXiv:1206.1499 \[hep-th\]](#).
- [332] T. Kobayashi, “Horndeski theory and beyond: a review,” *Rept. Prog. Phys.* **82** no. 8, (2019) 086901, [arXiv:1901.07183 \[gr-qc\]](#).
- [333] A. Cisterna and C. Erices, “Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) 084038, [arXiv:1401.4479 \[gr-qc\]](#).
- [334] C. Erices and C. Martínez, “Stationary cylindrically symmetric spacetimes with a massless scalar field and a nonpositive cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **92** no. 4, (2015) 044051, [arXiv:1504.06321 \[gr-qc\]](#).
- [335] Y. Brihaye, A. Cisterna, and C. Erices, “Boson stars in biscalar extensions of Horndeski gravity,” *Phys. Rev. D* **93** no. 12, (2016) 124057, [arXiv:1604.02121 \[hep-th\]](#).
- [336] C. Corral, C. Erices, D. Flores-Alfonso, and K. Lara, “Phase transitions of black strings in dynamical Chern-Simons modified gravity,” *Phys. Rev. D* **105** no. 2, (2022) 024050, [arXiv:2111.00912 \[hep-th\]](#).
- [337] G. Antoniou, A. Bakopoulos, and P. Kanti, “Black-Hole Solutions with Scalar Hair in Einstein-Scalar-Gauss-Bonnet Theories,” *Phys. Rev. D* **97** no. 8, (2018) 084037, [arXiv:1711.07431 \[hep-th\]](#).
- [338] A. Bakopoulos and T. Nakas, “Analytic and asymptotically flat hairy (ultra-compact) black-hole solutions and their axial perturbations,” *JHEP* **04** (2022) 096, [arXiv:2107.05656 \[gr-qc\]](#).

- [339] A. Bakopoulos and T. Nakas, “Novel exact ultracompact and ultrasparse hairy black holes emanating from regular and phantom scalar fields,” *Phys. Rev. D* **107** no. 12, (2023) 124035, [arXiv:2303.09116 \[gr-qc\]](#).
- [340] C. Erices, P. Filis, and E. Papantonopoulos, “Hairy black holes in disformal scalar-tensor gravity theories,” *Phys. Rev. D* **104** no. 2, (2021) 024031, [arXiv:2104.05644 \[gr-qc\]](#).
- [341] T. Karakasis, G. Koutsoumbas, and E. Papantonopoulos, “Black Holes with Scalar Hair in Three Dimensions,” [arXiv:2305.00686 \[gr-qc\]](#).
- [342] T. Karakasis, N. E. Mavromatos, and E. Papantonopoulos, “Regular Compact Objects with Scalar Hair,” [arXiv:2305.00058 \[gr-qc\]](#).
- [343] T. Karakasis, E. Papantonopoulos, Z.-Y. Tang, and B. Wang, “Rotating (2+1)-dimensional black holes in Einstein-Maxwell-dilaton theory,” *Phys. Rev. D* **107** no. 2, (2023) 024043, [arXiv:2210.15704 \[gr-qc\]](#).
- [344] T. Karakasis, E. Papantonopoulos, Z.-Y. Tang, and B. Wang, “Exact black hole solutions with a conformally coupled scalar field and dynamic Ricci curvature in $f(R)$ gravity theories,” *Eur. Phys. J. C* **81** no. 10, (2021) 897, [arXiv:2103.14141 \[gr-qc\]](#).
- [345] C. Erices, S. Riquelme, and N. Zalaquett, “EFT approach to black hole scalarization and its compatibility with cosmic evolution,” *Phys. Rev. D* **106** no. 4, (2022) 044046, [arXiv:2203.06030 \[gr-qc\]](#).
- [346] A. Anabalón and A. Cisterna, “Asymptotically (anti) de Sitter Black Holes and Wormholes with a Self Interacting Scalar Field in Four Dimensions,” *Phys. Rev. D* **85** (2012) 084035, [arXiv:1201.2008 \[hep-th\]](#).
- [347] J. Barrientos, A. Cisterna, N. Mora, and A. Viganò, “AdS-Taub-NUT spacetimes and exact black bounces with scalar hair,” *Phys. Rev. D* **106** no. 2, (2022) 024038, [arXiv:2202.06706 \[hep-th\]](#).
- [348] A. Cisterna, K. Müller, K. Pallikaris, and A. Viganò, “Exact rotating wormholes via Ehlers transformations,” [arXiv:2306.14541 \[gr-qc\]](#).
- [349] K. A. Bronnikov, R. A. Konoplya, and A. Zhidenko, “Instabilities of wormholes and regular black holes supported by a phantom scalar field,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 024028, [arXiv:1205.2224 \[gr-qc\]](#).
- [350] V. A. Rubakov, “More about wormholes in generalized Galileon theories,” *Theor. Math. Phys.* **188** no. 2, (2016) 1253–1258, [arXiv:1601.06566 \[hep-th\]](#).
- [351] O. A. Evseev and O. I. Melichev, “No static spherically symmetric wormholes in Horndeski theory,” *Phys. Rev. D* **97** no. 12, (2018) 124040, [arXiv:1711.04152 \[gr-qc\]](#).
- [352] D. Bettoni and S. Liberati, “Disformal invariance of second order scalar-tensor theories: Framing the Horndeski action,” *Phys. Rev. D* **88** (2013) 084020, [arXiv:1306.6724 \[gr-qc\]](#).
- [353] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, “Healthy theories beyond Horndeski,” *Phys. Rev. Lett.* **114** no. 21, (2015) 211101, [arXiv:1404.6495 \[hep-th\]](#).

- [354] J. Ben Achour, D. Langlois, and K. Noui, “Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations,” *Phys. Rev. D* **93** no. 12, (2016) 124005, [arXiv:1602.08398 \[gr-qc\]](#).
- [355] J. Ben Achour, H. Liu, and S. Mukohyama, “Hairy black holes in DHOST theories: Exploring disformal transformation as a solution-generating method,” *JCAP* **02** (2020) 023, [arXiv:1910.11017 \[gr-qc\]](#).
- [356] V. Faraoni and A. Leblanc, “Disformal mappings of spherical DHOST geometries,” *JCAP* **08** (2021) 037, [arXiv:2107.03456 \[gr-qc\]](#).
- [357] T. Anson, E. Babichev, C. Charmousis, and M. Hassaine, “Disforming the Kerr metric,” *JHEP* **01** (2021) 018, [arXiv:2006.06461 \[gr-qc\]](#).
- [358] V. Faraoni and E. Gunzig, “Einstein frame or Jordan frame?,” *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 217–225, [arXiv:astro-ph/9910176](#).
- [359] A. Bhadra, K. Sarkar, D. P. Datta, and K. K. Nandi, “Brans-Dicke theory: Jordan versus Einstein frame,” *Mod. Phys. Lett. A* **22** (2007) 367–376, [arXiv:gr-qc/0605109](#).
- [360] G. Antoniou, A. Bakopoulos, and P. Kanti, “Evasion of No-Hair Theorems and Novel Black-Hole Solutions in Gauss-Bonnet Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **120** no. 13, (2018) 131102, [arXiv:1711.03390 \[hep-th\]](#).
- [361] D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, “New Gauss-Bonnet Black Holes with Curvature-Induced Scalarization in Extended Scalar-Tensor Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **120** no. 13, (2018) 131103, [arXiv:1711.01187 \[gr-qc\]](#).
- [362] H. O. Silva, J. Sakstein, L. Gualtieri, T. P. Sotiriou, and E. Berti, “Spontaneous scalarization of black holes and compact stars from a Gauss-Bonnet coupling,” *Phys. Rev. Lett.* **120** no. 13, (2018) 131104, [arXiv:1711.02080 \[gr-qc\]](#).
- [363] C. Teitelboim, “Nonmeasurability of the lepton number of a black hole,” *Lett. Nuovo Cim.* **3S2** (1972) 397–400.
- [364] J. D. Bekenstein, “Novel “no-scalar-hair” theorem for black holes,” *Phys. Rev. D* **51** (Jun, 1995) R6608–R6611. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.R6608>.
- [365] A. E. Mayo and J. D. Bekenstein, “No hair for spherical black holes: Charged and nonminimally coupled scalar field with selfinteraction,” *Phys. Rev. D* **54** (1996) 5059–5069, [arXiv:gr-qc/9602057](#).
- [366] P. O. Mazur, “Black hole uniqueness theorems,” [arXiv:hep-th/0101012](#).
- [367] P. T. Chrusciel, J. Lopes Costa, and M. Heusler, “Stationary Black Holes: Uniqueness and Beyond,” *Living Rev. Rel.* **15** (2012) 7, [arXiv:1205.6112 \[gr-qc\]](#).
- [368] G. W. Horndeski, “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space,” *Int. J. Theor. Phys.* **10** (1974) 363–384.
- [369] O. Bechmann and O. Lechtenfeld, “Exact black hole solution with selfinteracting scalar field,” *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 1473–1482, [arXiv:gr-qc/9502011](#).
- [370] U. Nucamendi and M. Salgado, “Scalar hairy black holes and solitons in asymptotically flat space-times,” *Phys. Rev. D* **68** (2003) 044026, [arXiv:gr-qc/0301062](#).

- [371] H. Dennhardt and O. Lechtenfeld, “Scalar deformations of Schwarzschild holes and their stability,” *Int. J. Mod. Phys. A* **13** (1998) 741–764, [arXiv:gr-qc/9612062](#).
- [372] C. Martinez, R. Troncoso, and J. Zanelli, “Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 084035, [arXiv:hep-th/0406111](#).
- [373] K. Bronnikov and J. Fabris, “Regular phantom black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 251101, [arXiv:gr-qc/0511109](#).
- [374] V. V. Nikonov, J. V. Tchegarina, and A. N. Tsirulev, “A two-parameter family of exact asymptotically flat solutions to the einstein-scalar field equations,” *Classical and Quantum Gravity* **25** no. 13, (Jun, 2008) 138001.
- [375] A. Anabalón and J. Oliva, “Exact Hairy Black Holes and their Modification to the Universal Law of Gravitation,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 107501, [arXiv:1205.6012 \[gr-qc\]](#).
- [376] A. Anabalón, A. Cisterna, and J. Oliva, “Asymptotically locally AdS and flat black holes in Horndeski theory,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) 084050, [arXiv:1312.3597 \[gr-qc\]](#).
- [377] J. Barrientos and A. Cisterna, “Ehlers transformations as a tool for constructing accelerating NUT black holes,” *Phys. Rev. D* **108** no. 2, (2023) 024059, [arXiv:2305.03765 \[gr-qc\]](#).
- [378] T. P. Sotiriou and S.-Y. Zhou, “Black hole hair in generalized scalar-tensor gravity: An explicit example,” *Phys. Rev. D* **90** (2014) 124063, [arXiv:1408.1698 \[gr-qc\]](#).
- [379] M. Cadoni and E. Franzin, “Asymptotically flat black holes sourced by a massless scalar field,” *Phys. Rev. D* **91** no. 10, (2015) 104011, [arXiv:1503.04734 \[gr-qc\]](#).
- [380] B. Kleihaus, J. Kunz, and S. Yazadjiev, “Scalarized Hairy Black Holes,” *Phys. Lett. B* **744** (2015) 406–412, [arXiv:1503.01672 \[gr-qc\]](#).
- [381] R. Benkel, T. P. Sotiriou, and H. Witek, “Black hole hair formation in shift-symmetric generalised scalar-tensor gravity,” *Class. Quant. Grav.* **34** no. 6, (2017) 064001, [arXiv:1610.09168 \[gr-qc\]](#).
- [382] J. Ben Achour and H. Liu, “Hairy Schwarzschild-(A)dS black hole solutions in degenerate higher order scalar-tensor theories beyond shift symmetry,” *Phys. Rev. D* **99** no. 6, (2019) 064042, [arXiv:1811.05369 \[gr-qc\]](#).
- [383] S. Hod, “Spontaneous scalarization of Gauss-Bonnet black holes: Analytic treatment in the linearized regime,” *Phys. Rev. D* **100** no. 6, (2019) 064039, [arXiv:1912.07630 \[gr-qc\]](#).
- [384] Y. Brihaye and L. Ducobu, “Hairy black holes, boson stars and non-minimal coupling to curvature invariants,” *Phys. Lett. B* **795** (2019) 135–143, [arXiv:1812.07438 \[gr-qc\]](#).
- [385] F. Filippini and G. Tasinato, “On long range axion hairs for black holes,” *Class. Quant. Grav.* **36** no. 21, (2019) 215015, [arXiv:1903.02950 \[gr-qc\]](#).
- [386] T. Torii and K.-i. Maeda, “Black holes with nonAbelian hair and their thermodynamical properties,” *Phys. Rev. D* **48** (1993) 1643–1651.

- [387] S. S. Gubser, “Phase transitions near black hole horizons,” *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 5121–5144, [arXiv:hep-th/0505189](#).
- [388] A. Anabalón, D. Astefanesei, and R. Mann, “Exact asymptotically flat charged hairy black holes with a dilaton potential,” *JHEP* **10** (2013) 184, [arXiv:1308.1693 \[hep-th\]](#).
- [389] N. Sanchis-Gual, J. C. Degollado, C. Herdeiro, J. A. Font, and P. J. Montero, “Dynamical formation of a Reissner-Nordström black hole with scalar hair in a cavity,” *Phys. Rev. D* **94** no. 4, (2016) 044061, [arXiv:1607.06304 \[gr-qc\]](#).
- [390] S. Hod, “Extremal Kerr–Newman black holes with extremely short charged scalar hair,” *Phys. Lett. B* **751** (2015) 177–183, [arXiv:1707.06246 \[gr-qc\]](#).
- [391] C. Pacilio, “Scalar charge of black holes in Einstein-Maxwell-dilaton theory,” *Phys. Rev. D* **98** no. 6, (2018) 064055, [arXiv:1806.10238 \[gr-qc\]](#).
- [392] D.-C. Zou and Y. S. Myung, “Scalar hairy black holes in Einstein-Maxwell-conformally coupled scalar theory,” *Phys. Lett. B* **803** (2020) 135332, [arXiv:1911.08062 \[gr-qc\]](#).
- [393] Y. Brihaye and Y. Verbin, “Scalarized dyonic black holes in vector-tensor Horndeski gravity,” [arXiv:2105.11402 \[gr-qc\]](#).
- [394] J.-P. Hong, M. Suzuki, and M. Yamada, “Spherically Symmetric Scalar Hair for Charged Black Holes,” *Phys. Rev. Lett.* **125** no. 11, (2020) 111104, [arXiv:2004.03148 \[gr-qc\]](#).
- [395] D. Astefanesei, D. Choque, F. Gómez, and R. Rojas, “Thermodynamically stable asymptotically flat hairy black holes with a dilaton potential,” *JHEP* **03** (2019) 205, [arXiv:1901.01269 \[hep-th\]](#).
- [396] D. Astefanesei, J. Luis Blázquez-Salcedo, F. Gómez, and R. Rojas, “Thermodynamically stable asymptotically flat hairy black holes with a dilaton potential: the general case,” *JHEP* **02** (2021) 233, [arXiv:2009.01854 \[hep-th\]](#).
- [397] Y. S. Myung and D.-C. Zou, “Scalarized black holes in the Einstein-Maxwell-scalar theory with a quasitopological term,” *Phys. Rev. D* **103** no. 2, (2021) 024010, [arXiv:2011.09665 \[gr-qc\]](#).
- [398] C. Martínez and R. Troncoso, “Electrically charged black hole with scalar hair,” *Phys. Rev. D* **74** (2006) 064007, [arXiv:hep-th/0606130](#).
- [399] Z.-Y. Fan and H. Lu, “Charged Black Holes with Scalar Hair,” *JHEP* **09** (2015) 060, [arXiv:1507.04369 \[hep-th\]](#).
- [400] G. Guo, P. Wang, H. Wu, and H. Yang, “Scalarized Einstein-Maxwell-scalar Black Holes in Anti-de Sitter Spacetime,” [arXiv:2102.04015 \[gr-qc\]](#).
- [401] L. Heisenberg, R. Kase, M. Minamitsuji, and S. Tsujikawa, “Hairy black-hole solutions in generalized Proca theories,” *Phys. Rev. D* **96** no. 8, (2017) 084049, [arXiv:1705.09662 \[gr-qc\]](#).
- [402] Y. Brihaye, C. Herdeiro, and E. Radu, “Black Hole Spontaneous Scalarisation with a Positive Cosmological Constant,” *Phys. Lett. B* **802** (2020) 135269, [arXiv:1910.05286 \[gr-qc\]](#).

- [403] N. M. Santos, C. L. Benone, L. C. B. Crispino, C. A. R. Herdeiro, and E. Radu, “Black holes with synchronised Proca hair: linear clouds and fundamental non-linear solutions,” *JHEP* **07** (2020) 010, [arXiv:2004.09536 \[gr-qc\]](#).
- [404] T. Karakasis, G. Koutsoumbas, A. Machattou, and E. Papantonopoulos, “Magnetically charged Euler-Heisenberg black holes with scalar hair,” *Phys. Rev. D* **106** no. 10, (2022) 104006, [arXiv:2207.13146 \[gr-qc\]](#).
- [405] N. E. Mavromatos and E. Winstanley, “Existence theorems for hairy black holes in SU(N) Einstein Yang-Mills theories,” *J. Math. Phys.* **39** (1998) 4849–4873, [arXiv:gr-qc/9712049](#).
- [406] N. E. Mavromatos and E. Winstanley, “Infinitely colored black holes,” *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 1595–1611, [arXiv:hep-th/9909018](#).
- [407] E. Babichev, C. Charmousis, M. Hassaine, and N. Lecoer, “Conformally coupled scalar in Lovelock theory,” [arXiv:2302.02920 \[gr-qc\]](#).
- [408] Y. Brihaye, T. Delplace, C. Herdeiro, and E. Radu, “An analytic effective model for hairy black holes,” *Phys. Lett. B* **782** (2018) 124–130, [arXiv:1803.09089 \[gr-qc\]](#).
- [409] J. Ovalle, R. Casadio, E. Contreras, and A. Sotomayor, “Hairy black holes by gravitational decoupling,” *Phys. Dark Univ.* **31** (2021) 100744, [arXiv:2006.06735 \[gr-qc\]](#).
- [410] V. Faraoni, A. Giusti, and B. H. Fahim, “Spherical inhomogeneous solutions of Einstein and scalar-tensor gravity: a map of the land,” [arXiv:2101.00266 \[gr-qc\]](#).
- [411] T. Karakasis, E. Papantonopoulos, Z.-Y. Tang, and B. Wang, “Black holes of (2+1)-dimensional $f(R)$ gravity coupled to a scalar field,” *Phys. Rev. D* **103** no. 6, (2021) 064063, [arXiv:2101.06410 \[gr-qc\]](#).
- [412] T. Karakasis, E. Papantonopoulos, Z.-Y. Tang, and B. Wang, “(2+1)-dimensional black holes in $f(R, \phi)$ gravity,” *Phys. Rev. D* **105** no. 4, (2022) 044038, [arXiv:2201.00035 \[gr-qc\]](#).
- [413] A. Bakopoulos, C. Charmousis, P. Kanti, N. Lecoer, and T. Nakas, “Black holes with primary scalar hair,” [arXiv:2310.11919 \[gr-qc\]](#).
- [414] C. A. R. Herdeiro and E. Radu, “Kerr black holes with scalar hair,” *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 221101, [arXiv:1403.2757 \[gr-qc\]](#).
- [415] C. Herdeiro and E. Radu, “Construction and physical properties of Kerr black holes with scalar hair,” *Class. Quant. Grav.* **32** no. 14, (2015) 144001, [arXiv:1501.04319 \[gr-qc\]](#).
- [416] O. Baake, A. Cisterna, M. Hassaine, and U. Hernandez-Vera, “Endorsing black holes with beyond Horndeski primary hair: An exact solution framework for scalarizing in every dimension,” [arXiv:2312.05207 \[hep-th\]](#).
- [417] P. Dorlis, N. E. Mavromatos, and S.-N. Vlachos, “Bypassing Bekenstein’s no-scalar-hair theorem without violating the energy conditions,” *Phys. Rev. D* **108** no. 6, (2023) 064004, [arXiv:2305.18031 \[gr-qc\]](#).

- [418] **Event Horizon Telescope** Collaboration, K. Akiyama *et al.*, “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole,” *Astrophys. J. Lett.* **875** (2019) L1, [arXiv:1906.11238](#) [[astro-ph.GA](#)].
- [419] C. de Rham and S. Melville, “Gravitational Rainbows: LIGO and Dark Energy at its Cutoff,” *Phys. Rev. Lett.* **121** no. 22, (2018) 221101, [arXiv:1806.09417](#) [[hep-th](#)].
- [420] R. Nair, S. Perkins, H. O. Silva, and N. Yunes, “Fundamental Physics Implications for Higher-Curvature Theories from Binary Black Hole Signals in the LIGO-Virgo Catalog GWTC-1,” *Phys. Rev. Lett.* **123** no. 19, (2019) 191101, [arXiv:1905.00870](#) [[gr-qc](#)].
- [421] K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov, and H. Dehnen, “Regular black holes and black universes,” *Gen. Rel. Grav.* **39** (2007) 973–987, [arXiv:gr-qc/0611022](#).
- [422] L. Kreidberg, C. D. Bailyn, W. M. Farr, and V. Kalogera, “Mass Measurements of Black Holes in X-Ray Transients: Is There a Mass Gap?,” *Astrophys. J.* **757** (2012) 36, [arXiv:1205.1805](#) [[astro-ph.HE](#)].