



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Αντίστροφο ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα
εντοπισμού κοιλοτήτων και εγκλεισμάτων

Διδακτορική διατριβή

ΤΟΥ

ΓΙΟΓΙΑΚΑ ΣΩΤΗΡΙΟΥ

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας – 2 ος Κύκλος» (MIS-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).



Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Αθήνα, Νοέμβριος 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Αντίστροφο ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα
εντοπισμού κοιλοτήτων και εγκλεισμάτων

Διδακτορική διατριβή

ΤΟΥ

ΓΙΟΓΙΑΚΑ ΣΩΤΗΡΙΟΥ

Συμβουλευτική Επιτροπή: Δ.Γκιντίδης (Επιβλέπων)

Α.Χαραλαμπίδης

Κ.Χρυσόπουλος

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 21^η Σεπτεμβρίου 2023.

Δ.Γκιντίδης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Επιβλέπων

Α.Χαραλαμπίδης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Μέλος Τριμελούς

Κ.Χρυσόπουλος

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Μέλος Τριμελούς

Ε.Γεωργιάδης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Ι.Καραφύλλης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Ν.Γιαννακάκης

Αν.Καθηγητής Ε.Μ.Π

Α.Μηδρινός

Επικ. Καθηγητής Γ.Π.Α.

Περίληψη

Στη παρούσα διατριβή εξετάζουμε το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης που προκύπτει από τη μη ομοιογένεια του σκεδαστή με πλάγια πρόσπτωση. Στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης εξετάζουμε την καλή τοποθέτηση του προβλήματος κατά Hadamard στον \mathbb{R}^2 λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του μη ομογενή ή τμηματικά σταθερού σκεδαστή. Επιπλέον, παρουσιάζεται μια θεωρητική ανάλυση του αντίστροφου προβλήματος, λαμβάνοντας υπόψη το πλάγιο προσπίπτον κύμα και τα μακρινά πεδία που προκύπτουν από τα σκεδασμένα πεδία. Προτείνεται μια αριθμητική μέθοδος επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος, βασιζόμενη σε ένα υποκαθορισμένο σύστημα εξισώσεων. Αναπτύσσεται επίσης ένας αλγόριθμος που χρησιμοποιεί κλασικές αριθμητικές μεθόδους για τη βελτίωση της σύγκλισης της λύσης, λαμβάνοντας υπόψη την επιλογή της αρχικής πρόβλεψης για τον δείκτη διάθλασης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με ανακατασκευές σε εικόνες για διάφορα παραδείγματα σκεδαστών. Η μελέτη επιβεβαιώνει την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου στην επίλυση του προβλήματος ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης με πλάγια πρόσπτωση.

Summary

In the present thesis, we examine the direct and inverse electromagnetic scattering problem which is caused due to the non-homogeneity of the scatterer with an oblique incidence. In the direct scattering problem, we examine the well-posedness of the problem in a Hadamard configuration in \mathbb{R}^2 due to the cylindrical symmetry of the non-homogeneous or piecewise constant scatterer. Additionally, we provide a theoretical analysis of the inverse problem, taking into account the obliquely incident wave and the far field patterns resulting from the scattered fields. We propose a numerical method to solve the inverse problem, based on an underdetermined system of equations. An algorithm is also developed that uses classical numerical techniques to improve the convergence of the solution, considering the choice of the initial guess for the refractive index. The results are presented with reconstructions in images for various scattering examples. The study confirms the effectiveness of the proposed method in solving the electromagnetic scattering problem with oblique incidence.

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και στην παρούσα εργασία. Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Δρόσο Γκιντίδη, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την καθοδήγηση και τις συμβουλές κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Η ολοκλήρωση της εργασίας οφείλεται στις συμβουλές και στην καθοδήγηση του.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστώ τον κ. Λεωνίδα Μηνδρινό (Επίκουρο Καθηγητή Γ.Π.Α) για την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών.

Θα πρέπει παράλληλα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής την καθηγήτρια κα. Κυριακή Κυριάκη, Ομότιμη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π., τον κ. Αντώνιο Χαραλαμπόπουλο, Καθηγητή Ε.Μ.Π. και τον κ. Κωνσταντίνο Χρυσάφινο, Καθηγητή Ε.Μ.Π. για τις υποδείξεις και παρατηρήσεις τους στην εκπόνηση της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο και συνάδελφο Κυριάκο Στρατουρά για τις συζητήσεις που είχαμε περί μαθηματικών. Στη συνέχεια ευχαριστώ όλους τους κοντινούς μου φίλους που με στήριξαν σε αυτό το δύσκολο έργο.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου, που όλα αυτά τα χρόνια μου συμπαραστέκονται ηθικά και οικονομικά και διαμορφώνουν το κατάλληλο περιβάλλον μέσα στο οποίο κατάφερα να ολοκληρώσω τη διδακτορική μου διατριβή.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	9
2	Ευθέα Προβλήματα Σκέδασης	19
2.1	Ελλειπτικά Συνοριακά Προβλήματα	20
2.1.1	Ελλειπτικά συστήματα	20
2.1.2	Συνθήκη Shapiro-Lopatinskij	23
2.2	Προβλήματα σκέδασης για πλάγια πρόσπτωση	27
2.2.1	Σκεδαστής με τμηματικά σταθερό δείκτη διάθλασης	30
2.2.2	Σκεδαστής με Hölder συνεχή δείκτη διάθλασης	46
2.3	Αριθμητική επίλυση ευθέων προβλημάτων	55
2.3.1	Τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης	57
2.3.2	Hölder συνεχής δείκτης διάθλασης	64
3	Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης	65
3.1	Μοναδικότητα δίσκου	66
3.2	Αριθμητικές μέθοδοι	73
3.2.1	Μέθοδος Tikhonov	75
3.2.2	Μέθοδος Jacobi	76
3.2.3	Μέθοδος Clenshaw - Curtis	77
3.3	Αριθμητική επίλυση αντίστροφων προβλημάτων	79

3.3.1	Τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης	79
3.3.2	Hölder συνεχής δείκτης διάθλασης	90
4	Συμπεράσματα	103

Λίστα Σχημάτων

2.1	Η γεωμετρία του προβλήματος και η θέση των σημειακών πηγών που εξετάστηκαν στην πρώτη (αριστερά) και στη δεύτερη (δεξιά) περίπτωση του πρώτου παραδείγματος.	58
2.2	Η L^2 -νόρμα (σε ημιλογαριθμική κλίμακα) της διαφοράς μεταξύ του υπολογισμένου και του ακριβούς εσωτερικού (μπλε γραμμή) και του μακρινού πεδίου (κόκκινη γραμμή) του ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου. Τα διαγράμματα είναι σε σχέση με n , για την πρώτη περίπτωση του πρώτου παραδείγματος.	62
2.3	Το L^2 -norm (σε ημιλογαριθμική κλίμακα) της διαφοράς μεταξύ του υπολογισμένου και του ακριβούς σχεδασμένου (μπλε γραμμή) και του εσωτερικού (κόκκινη γραμμή) ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου. Τα διαγράμματα είναι σε σχέση με n , για τη δεύτερη περίπτωση του πρώτου παραδείγματος.	62
2.4	Η νόρμα του ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου, για $\omega = 2$ και $\phi = \pi/6$	63
2.5	Η νόρμα του ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου, για $\omega = 2$ και $\phi = \pi/2$	63

3.1	Ο ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης και το απόλυτο σφάλμα του για ένα σκεδαστή.	90
3.2	Ο ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης και το απόλυτο σφάλμα του για σκεδαστή.	91
3.3	Γραφική απεικόνιση του εσωτερικού βρόχου τύπου Jacobi του Αλγόριθμος 1. Σε κάθε βήμα επανάληψης, μόνο ένας συντελεστής (κόκκινο) θεωρείται άγνωστος. Η ανακτημένη τιμή (μπλε) χρησιμοποιείται ως είσοδος για το επόμενο βήμα. . . .	94
3.4	Ο ακριβής δείκτης διάθλασης n του πρώτου παραδείγματος (αριστερά). Η ανακατασκευασμένη τιμή μετά από δέκα επαναλήψεις από θορυβώδη δεδομένα (δεξιά).	99
3.5	Ο δείκτης διάθλασης n του πρώτου παραδείγματος σε επίπεδο $x - y$. Επάνω αριστερά: αληθινή συνάρτηση. Επάνω δεξιά: αρχική εικασία. Κάτω αριστερά: ανακατασκευασμένη λειτουργία. Κάτω δεξιά: σχετικό σφάλμα.	99
3.6	Ο ακριβής δείκτης διάθλασης n του δεύτερου παραδείγματος (αριστερά). Η ανακατασκευασμένη τιμή μετά από δέκα επαναλήψεις από θορυβώδη δεδομένα (δεξιά).	101
3.7	Ο δείκτης διάθλασης n του δεύτερου παραδείγματος σε επίπεδο $x - y$. Επάνω αριστερά: θεωρητικός δείκτης διάθλασης. Επάνω δεξιά: αρχική εικασία. Κάτω αριστερά: ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης. Κάτω δεξιά: σχετικό σφάλμα.	101
3.8	Ο ακριβής δείκτης διάθλασης n του τρίτου παραδείγματος (αριστερά) και η ανακατασκευασμένη τιμή του μετά από δέκα επαναλήψεις από δεδομένα με θόρυβο 2% (δεξιά).	102

3.9	Ο δείκτης διάθλασης n του τρίτου παραδείγματος στο επίπεδο $x-y$. Επάνω αριστερά: θεωρητικός δείκτης διάθλασης. Επάνω δεξιά: αρχική εικασία. Κάτω αριστερά: ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης. Κάτω δεξιά: σχετικό σφάλμα.	102
-----	--	-----

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια βασικά προβλήματα σκέδασης που εμφανίζονται στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Αρχικά, μελετούμε τη καλή τοποθέτηση του ευθέως προβλήματος κατά Hadamard

- ύπαρξη λύσης,
- μοναδικότητα λύσης,
- ευστάθεια λύσης, αναλυτικότερα μικρές διαταραχές στις συνοριακές συνθήκες προκαλούν μικρές διαταραχές στη λύση του προβλήματος.

Εστιάζουμε σε προβλήματα σκέδασης με μη ομογενές εμπόδιο και γίνεται μελέτη σε απλή και σύνθετη περίπτωση. Στην απλή περίπτωση, θεωρούμε έναν τμηματικά σταθερό σχεδαστή όπου χρησιμοποιώντας βιβλιογραφικά αποτελέσματα αποδείχθηκε η ύπαρξη και η διακριτότητα των ιδιοτιμών.

Το πρόβλημα στον τρισδιάστατο χώρο περιγράφεται από τις εξισώσεις Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}^{ext} - i\omega\mu_0\mathbf{H}^{ext} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}^{ext} + i\omega\epsilon_0\mathbf{E}^{ext} &= 0, & \text{in } \Omega_{ext}, \\ \nabla \times \mathbf{E}^1 - i\omega\mu_1\mathbf{H}^1 &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}^1 + i\omega\epsilon_1\mathbf{E}^1 &= 0, & \text{in } \Omega_{int}^1, \\ \nabla \times \mathbf{E}^2 - i\omega\mu_2\mathbf{H}^2 &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}^2 + i\omega\epsilon_2\mathbf{E}^2 &= 0, & \text{in } \Omega_{int}^2,\end{aligned}\tag{1.0.1}$$

όπου $\omega > 0$ είναι η συχνότητα. Στα σύνορα $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1$ θεωρούμε τις συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{ext}, & \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{ext}, & \text{on } \partial\Omega_0, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^2, & \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^2, & \text{on } \partial\Omega_1,\end{aligned}\tag{1.0.2}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και τα εξωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία $\mathbf{E}^{ext}, \mathbf{H}^{ext} : \Omega_{ext} \rightarrow \mathbb{C}^3$, και τα εσωτερικά πεδία $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1 : \Omega_{int}^1 \rightarrow \mathbb{C}^3$, and $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2 : \Omega_{int}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell. Ο σκεδαστής $\Omega_{int} \subset \mathbb{R}^3$ είναι απείρως μακρύς και παράλληλος με τον άξονα z , τμηματικά σταθερός και δέχεται τη μορφή $\Omega_{int} := \Omega_{int}^1 \cup \Omega_{int}^2$, με $\Omega_{int}^1 \cap \Omega_{int}^2 = \emptyset$. Το εξωτερικό χωρίο $\Omega_{ext} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_{int}}$ είναι ένα άπειρο ομοιογενές μέσο που χαρακτηρίζεται από τη διηλεκτρική σταθερά ϵ_0 και η μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Κάθε στρώμα $\Omega_{int}^j, j = 1, 2$ είναι φραγμένο και ομοιογενές με σταθερές ιδιότητες υλικού ϵ_j και μ_j , αντίστοιχα. Το σύνορο $\partial\Omega$ είναι αρκετά ομαλό και αποτελείται από δύο ανεξάρτητες επιφάνειες $\partial\Omega_0$ και $\partial\Omega_1$, με το $\partial\Omega_1$ να βρίσκεται στο εσωτερικό του $\partial\Omega_0$. Ο σκεδαστής βρίσκεται στον τρισδιάστατο χώρο και λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το πρόβλημα που μελετάμε μετασχηματίζεται στον δυσδιάστατο χώρο στη μορφή

$$\begin{aligned}\Delta e^{ext} + \kappa_0^2 e^{ext} &= 0, & \Delta h^{ext} + \kappa_0^2 h^{ext} &= 0, & \text{στο } \Omega_0, \\ \Delta e^1 + \kappa_1^2 e^1 &= 0, & \Delta h^1 + \kappa_1^2 h^1 &= 0, & \text{στο } \Omega_1, \\ \Delta e^2 + \kappa_2^2 e^2 &= 0, & \Delta h^2 + \kappa_2^2 h^2 &= 0, & \text{στο } \Omega_2.\end{aligned}\tag{1.0.3}$$

Οι συνοριακές συνθήκες (1.0.2) έχουν γραφτεί στη δισδιάστατη μορφή [28, 64]. Θεωρούμε ότι $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ και $\boldsymbol{\tau} = (-n_2, n_1)$ είναι το κάθετο και το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σύνορο $\Gamma_j, j = 0, 1$, αντίστοιχα. Το διάνυσμα \mathbf{n} του συνόρου Γ_j κατευθύνεται προς $\Omega_j, j = 0, 1$. Ορίζουμε $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} =$

$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla$, όπου ∇ είναι το δισδιάστατο βαθμωτό και ορίζουμε

$$\tilde{\mu}_j = \frac{\mu_j}{\kappa_j^2}, \quad \tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\kappa_j^2}, \quad \beta_j = \frac{\beta}{\kappa_j^2}, \quad \text{για } j = 0, 1, 2.$$

Οι συνθήκες μετάδοσης (1.0.2) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} e^1 &= e^{ext}, & \text{στο } \Gamma_0, \\ \tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} &= \tilde{\mu}_0 \omega \frac{\partial h^{ext}}{\partial n} + \beta_0 \frac{\partial e^{ext}}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_0, \\ h^1 &= h^{ext}, & \text{στο } \Gamma_0, \\ \tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} &= \tilde{\epsilon}_0 \omega \frac{\partial e^{ext}}{\partial n} - \beta_0 \frac{\partial h^{ext}}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_0, \\ e^1 &= e^2, & \text{στο } \Gamma_1, \\ \tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} &= \tilde{\mu}_2 \omega \frac{\partial h^2}{\partial n} + \beta_2 \frac{\partial e^2}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_1, \\ h^1 &= h^2, & \text{στο } \Gamma_1, \\ \tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} &= \tilde{\epsilon}_2 \omega \frac{\partial e^2}{\partial n} - \beta_2 \frac{\partial h^2}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_1. \end{aligned} \tag{1.0.4}$$

Τα εξωτερικά πεδία αποτελούνται από τα προσπίπτοντα πεδία e^{inc} , h^{inc} και τα σκεδασμένα πεδία e^0 , h^0 , δηλαδή $e^{ext} = e^{inc} + e^0$ και $h^{ext} = h^{inc} + h^0$. Τα εισερχόμενα κύματα παίρνουν τη μορφή

$$e^{inc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin \theta e^{ik_0 \mathbf{x} \cdot (\cos \phi, \sin \phi)}, \quad h^{inc}(\mathbf{x}) = 0. \tag{1.0.5}$$

με $\theta \in (0, \pi)$ τη γωνία πρόσπτωσης ως προς τον αρνητικό άξονα z και $\phi \in [0, 2\pi]$ την πολική γωνία της διεύθυνσης πρόσπτωσης. Ορίζουμε $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ τον αριθμό κύματος $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ και συμβολίζουμε με ϵ_0 τη διηλεκτρική σταθερά και με μ_0 τη μαγνητική διαπερατότητα. Επίσης, οι κυματοδηγοί ορί-

ζονται από τους τύπους

$$\begin{aligned}\kappa_0^2 &= k_0^2 - \beta^2, \\ \kappa_j^2 &= k_j^2 - \beta^2, \quad j = 1, 2\end{aligned}\tag{1.0.6}$$

με $\beta = k_0 \cos \theta$, και $k_j = \omega \sqrt{\mu_j \epsilon_j}$, $j = 0, 1, 2$. Με e^{sc}, h^{sc} συμβολίζουμε τα σκεδασμένα πεδία που δημιουργούνται από τα προσπίπτον κύματα e^{inc}, h^{inc} . Το σκεδασμένο κύμα διαδίδεται παντού χώρο διότι ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας [16]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial e^{sc}}{\partial r} - i\kappa_0 e^0 \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial h^{sc}}{\partial r} - i\kappa_0 h^0 \right) = 0, \tag{1.0.7}$$

όπου $r = |\mathbf{x}|$, ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Οι συνθήκες ακτινοβολίας καταλήγουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά [16]

$$e^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\sqrt{r}} e^\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(r^{-3/2}), \quad h^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\sqrt{r}} h^\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(r^{-3/2}),$$

όπου $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/r \in S$, με S να είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Το ζεύγος (e^∞, h^∞) ονομάζεται the μακρινό πεδίο του σκεδασμένου κύματος. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Rellich [16] απόδεικνύουμε τη μοναδικότητα της λύσης. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον δεύτερο τύπο του Green και τη μέθοδο "single layer ansatz" ορίσαμε τα πεδία κάθε χωρίου σε ολοκληρωτική μορφή. Μέσω της θεωρίας Riesz-Fredholm αποδείχθηκε η ύπαρξη λύσης [21, 41, 42].

Επίσης, μελετήσαμε τη καλή τοποθέτηση του προβλήματος

$$\begin{aligned}\Delta e + \kappa_0^2 e &= k_0^2 m e - \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \left(\frac{\epsilon}{k^2} \right) \cdot \nabla e - \frac{k^2}{\omega \epsilon} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla h, \quad \text{στο } \mathbb{R}^2, \\ \Delta h + \kappa_0^2 h &= k_0^2 m h - \frac{k^2}{\mu_0} \nabla \left(\frac{\mu_0}{k^2} \right) \cdot \nabla h + \frac{k^2}{\omega \mu_0} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla e, \quad \text{στο } \mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{1.0.8}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε

$$\begin{aligned} \kappa_0^2 - k^2(x) &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \omega^2 \mu_0 \epsilon(x) \\ &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n(x) \\ &= k_0^2 m(x). \end{aligned}$$

Ορίζουμε ως δείκτη διάθλασης τη συνάρτηση $n(x) = \frac{\epsilon(x)}{\epsilon_0} \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, για $\alpha \in (0,1)$ και τη συνάρτηση $m := 1 - n$ με συμπαγή φορέα. Η μοναδικότητα αποδείχθηκε ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με επιπλέον χρήση του Θεωρήματος Επέκτασης για ελλειπτικούς τελεστές [54]. Στη συνέχεια, αποδείχθηκε η ύπαρξη λύσης για μια περιοχή του \mathbb{R}^2 και επιπλέον αποδείχθηκε παντού χρησιμοποιώντας θεώρημα ισοδυναμίας μεταξύ του δοθέντος προβλήματος και του προβλήματος Lippmann -Schwinger. Τα αντίστροφα προβλήματα που μελετάμε ορίζονται ως εξής:

- Τμηματικά σταθερός σκεδαστής,
- Hölder συνεχής σκεδαστής με μη ομοιογένεια στο χώρο \mathbb{R}^2 .

Στη πρώτη περίπτωση έχουμε ως δεδομένα: το σύνορο του σκεδαστή και τα πλάτη σκέδασης. Λαμβάνοντας τα δεδομένα αυτά υπόψιν, ανακατασκευάζουμε με χρήση κατάλληλων μεθόδων τον δείκτη διάθλασης εσωτερικά του σκεδαστή. Για να ανακατασκευάσουμε τον δείκτη διάθλασης στον χώρο \mathbb{R}^2 , θεωρούμε έναν δίσκο όπου υπάρχει εσωτερικά η μη ομοιογένεια. Λαμβάνοντας υπόψιν, τα μακρινά πεδία ανακατασκευάζουμε τον δείκτη διάθλασης εσωτερικά του δίσκου. Αρχικά προκύπτει ένα σύστημα τύπου Lippmann-Schwinger και μια εξίσωση μακρινού πεδίου όπου υπάρχουν μη γραμμικοί όροι ως προς τον δείκτη διάθλασης. Λόγω της μη γραμμικότητας των εξισώσεων ως προς τον δείκτη διάθλασης, έγινε μελέτη των τελεστών μακρινών πεδίων ως προς τη

συνεισφορά τους στο συνολικό πλάτος σκέδασης. Παρατηρήσαμε ότι για συγκεκριμένες γωνίες πρόσπτωσης η συνεισφορά των μη γραμμικών όρων είναι πάρα πολύ κοντά στο μηδέν, συνεπώς δε τους χρησιμοποιήσαμε για την ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης. Το σύστημα που προκύπτει για την εύρεση του δείκτη διάθλασης είναι μη καλά τοποθετημένο και συνεπώς χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος ομαλοποίησης Tikhonov ώστε η λύση του συστήματος να είναι ευσταθής.

Για την ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης σε συνδυασμό με τις μεθόδους Tikhonov και Jacobi, ακολουθήσαμε τον παρακάτω αλγοριθμό:

Βήμα 1 (Εισαγωγή δεδομένων): Αρχικά, λαμβάνουμε τα δεδομένα του προβλήματος. Αυτά περιλαμβάνουν το σύνоро του σχεδαστή και τα πλάτη σκέδασης. Τα δεδομένα αυτά χρησιμοποιούνται για να ανακατασκευάσουμε τον δείκτη διάθλασης εσωτερικά του σχεδαστή.

Βήμα 2 (Δημιουργία εξισώσεων Lippmann-Schwinger): Για να ανακατασκευάσουμε τον δείκτη διάθλασης, θεωρούμε έναν δίσκο στον οποίο υπάρχει εσωτερικά η μη ομοιογένεια. Μέσω ενός συστήματος τύπου Lippmann-Schwinger, ανακατασκευάζουμε το δείκτη διάθλασης εσωτερικά του δίσκου. Αυτό το σύστημα περιέχει μη γραμμικούς όρους ως προς τον δείκτη διάθλασης.

Βήμα 3 (Αντιμετώπιση της μη γραμμικότητας): Λόγω της μη γραμμικότητας των εξισώσεων Lippmann-Schwinger ως προς τον δείκτη διάθλασης, επιλύουμε το σύστημα με δύο τρόπους. Πρώτον, κάνουμε την υπόθεση ότι η άγνωστη συνάρτηση n είναι τοπικά ομοιογενής. Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να αγνοήσουμε τους τελεστές που περιλαμβάνουν παράγωγους του n . Δεύτερον, προτείνουμε ένα επαναληπτικό σχήμα όπου οι όροι που

περιλαμβάνουν τις παραγώγους της n θα χρησιμοποιηθούν ως γνωστές τιμές από το προηγούμενο βήμα της επανάληψης.

Βήμα 4 (Μέθοδος Tikhonov): Το σύστημα που προκύπτει για την εύρεση του δείκτη διάθλασης είναι μη καλά τοποθετημένο. Για να διορθώσουμε αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov.

Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα μέχρι η λύση να συγκλίνει και να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το σφάλμα μεταξύ δύο συνεχόμενων εκτιμήσεων του δείκτη διάθλασης αρχίζει να αυξάνεται.

Οι αριθμητικές μέθοδοι συνδυάζονται για την ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης, με τη μέθοδο Tikhonov να χρησιμοποιείται για την επίλυση του μη καλά τοποθετημένου συστήματος και τη μέθοδο Jacobi να εφαρμόζεται για την επαναληπτική εύρεση της σταθερής λύσης.

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι ένα παράδειγμα προσέγγισης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης σε αντίστροφα προβλήματα με μη ομοιογένεια στο χώρο \mathbb{R}^2 . Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι η περιγραφή αυτή αναφέρεται σε μια γενική προσέγγιση και οι λεπτομέρειες του αλγορίθμου μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα και τις υποθέσεις που γίνονται.

Σε περίπτωση που επιθυμείτε μια αναλυτική περιγραφή του αλγορίθμου ή περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης και τις μεθόδους Tikhonov και Jacobi, προτείνεται η αναφορά στα βιβλία [16, 32], καθώς εκεί θα βρείτε περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα που σχετίζονται με το συγκεκριμένο θέμα.

Η επιστημονική κοινότητα έχει δώσει έμφαση στα προβλήματα σκέδασης

με χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων διότι υπάρχουν φυσικές εφαρμογές στην ιατρική και στην βιομηχανία. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν πρακτικές εφαρμογές σε μηχανήματα MRI, εντοπισμός αλλοιώσεων, εγκλεισμάτων ή κοιλοτήτων σε υλικά. Ειδικότερα, στα προβλήματα με πλήρης μη ομοιογένεια παρουσιάζεται ενδιαφέρον διότι μοντελοποιούν πραγματικά προβλήματα στον φυσικό κόσμο. Η διατριβή έχει την ακόλουθη δομή:

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τη θεωρία των ελλειπτικών συστημάτων και διατυπώνουμε τη συνθήκη Shapiro - Lopatinskij καθώς και τις ισοδύναμες μορφές τους [1, 7, 46, 51, 56, 58, 59, 60, 62, 68]. Επιπλέον, διατυπώνουμε τα προβλήματα σκέδασης για τμηματικά σταθερό σκεδαστή και για Hölder συνεχή σκεδαστή και αποδεικνύουμε τη καλή τοποθέτηση κατά Hadamard και στις δύο περιπτώσεις. Τέλος, παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις σκεδαστών.

Στο κεφάλαιο 3, αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα του δίσκου με ένα πλάγιο προσπίπτον κύμα. Στη συνέχεια, επιλύουμε αριθμητικά το αντίστροφο πρόβλημα βρίσκοντας το δείκτη διάθλασης. Για να λύσουμε αριθμητικά το αντίστροφο πρόβλημα της ανακατασκευής του δείκτη διάθλασης (ή ισοδύναμα, της ηλεκτρικής διαπερατότητας) του σκεδαστή χρησιμοποιώντας μόνο ένα προσπίπτον πεδίο, χρησιμοποιούμε ένα επαναληπτικό σχήμα. Αυτή η επαναληπτική προσέγγιση μας επιτρέπει να ανακτήσουμε την άγνωστη συνάρτηση σημείο προς σημείο, λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις εξισώσεις στο \mathbb{R}^2 όσο και τη γνώση των μακρινών πεδίων των σκεδασμένων κυμάτων.

Στο κεφάλαιο 4, περιγράφουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη παραπάνω έρευνα. Επιπλέον, αξιολογούμε τις ανακατασκευές που έχουν προκύψει συνδυάζοντας τις αριθμητικές μεθόδους.

Τα αποτελέσματα της παρούσας διδακτορικής διατριβής έχουν δημοσιευτεί

σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά [30, 31] και έχουν παρουσιαστεί σε διακεκριμένα επιστημονικά συνέδρια: "10th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE 22): May 2022, Chieti, Italy" και "11th Applied Inverse Problems Conference (AIP 2023): September 2023, Göttingen, Germany".

Κεφάλαιο 2

Ευθέα Προβλήματα Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε το ευθύ πρόβλημα σε διαπερατό σκεδαστή με χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Η μελέτη γίνεται σε δύο περιπτώσεις σκεδαστή όπου είναι τμηματικά σταθερός ή μη ομογενής σκεδαστής. Το αρχικό πρόβλημα διατυπώνεται σε τρεις διαστάσεις για έναν μη ομογενή σκεδαστή, παράλληλο σε έναν άξονα. Η μη ομοιογένεια του σκεδαστή περιγράφεται από τμηματικά σταθερές ηλεκτρικές και μαγνητικές παραμέτρους υλικού. Ασχολούμαστε με ένα μέσο δύο επιπέδων, αλλά η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να γενικευτεί σε περισσότερα επίπεδα. Αρχικά, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου μέσα στον κύλινδρο περιγράφονται από ένα σύστημα εξισώσεων Maxwell σε κάθε ομοιογενή χωρίο. Στη συνέχεια, η συμμετρία και οι ιδιότητες του κυλίνδρου μετατρέπουν το σύνολο των εξισώσεων σε ένα σύστημα δισδιάστατων εξισώσεων Helmholtz μόνο για τις τρίτες συνιστώσες των πεδίων. Το μειονέκτημα αυτής της μείωσης της διάστασης είναι η πολυπλοκότητα που εμφανίζεται στις νέες συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας, οι οποίες περιέχουν συνδυασμούς των κάθετων και των εφαπτόμενων παραγώγων των πεδίων. Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα, εξετάζουμε το θεώρημα του Green και το λήμμα του Rellich για τα εξωτερικά πεδία και διατυπώνουμε ένα ισοδύναμο εσωτερικό συνοριακό

πρόβλημα που ικανοποιεί τη συνθήκη Shapiro-Lopatinskij. Η ύπαρξη λύσεων προκύπτει από την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης και τη θεωρία Riesz-Fredholm. Στη περίπτωση του Hölder συνεχή σχεδαστή, διατυπώνουμε το πρόβλημα σε ολόκληρο το χώρο \mathbb{R}^3 με την διηλεκτρική συνάρτηση να έχει συμπαγή φορέα, ενώ υποθέτουμε μια σταθερή μαγνητική διαπερατότητα. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του σχεδαστή, το πρόβλημα μελετάται στις δύο διαστάσεις. Αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα της λύσης του ευθέως προβλήματος χρησιμοποιώντας τους τύπους του Green και το λήμμα του Rellich. Για να δείξουμε την ύπαρξη λύσης, χρησιμοποιούμε ένα ισοδύναμο σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων Lippmann-Schwinger [16, 25, 33, 34, 39, 53]. Οι ιδιότητες των αντίστοιχων ολοκληρωτικών τελεστών μας επιτρέπουν να εφαρμόσουμε τη θεωρία Riesz-Fredholm.

2.1 Ελλειπτικά Συνοριακά Προβλήματα

2.1.1 Ελλειπτικά συστήματα

Έστω $A(x, D)u(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο πεδίο και $A(x, D) = [A_{ij}(x, D)]_{p \times p}$, $x \in \Omega$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας με $A_{ij}(x, D) = \sum_{|a| \leq a_{ij}} a_{ij}^{(a)}(x) D^a$ με ομαλούς συντελεστές $a_{ij}^{(a)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Επίσης χρησιμοποιούμε το συμβολισμό πολλαπλών δεικτών $D^a = D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n}$ με $|a| = a_1 + \dots + a_n$ και θέτουμε $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ με $i = \sqrt{-1}$. Έστω a δηλώνει τη τάξη του A_{ij} . Αν $A_{ij} \equiv 0$, τότε $a_{ij} = 0$. Αλλάζουμε τους δείκτες $(1, \dots, p)$ στους δείκτες $T = (j_1, \dots, j_p)$, συμβολίζουμε με $m(T)$ το άθροισμα των τάξεων $a_{1j_1} + \dots + a_{pj_p}$ και θέτουμε $m = \max_t \left(m(T) \right)$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό *Fourier* εισάγουμε τον όρο $\frac{1}{i}$, διότι ισχύει

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) = i\xi_j F(\phi) \text{ δηλαδή}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (2.1.1)$$

Έστω $x \in \bar{\Omega}$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό *Fourier* παρατηρούμε ότι $\det A(x, \xi)$ είναι τάξης μικρότερης ή ίσης του m . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $x(\xi) = \pi_m \det A(x, \xi)$ είναι το άθροισμα των όρων τάξης m στην ορίζουσα του $A(x, \xi)$.

Ορισμός 2.1.1 (*Volevic – ellipticity*) Ο διαφορικός τελεστής A ονομάζεται μη-εκφυλισμένος στο $x \in \Omega$ αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο x δεν είναι ταυτοτικά ίσο με μηδέν. Ο τελεστής είναι ελλειπτικός στο x αν $x(\xi) = \pi_m \det A(x, \xi) \neq 0$ για κάθε $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

DN-αριθμοί Αν $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$ είναι αυθαίρετοι ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_{ij} \leq s_i + t_j$ για όλα τα i, j , τότε

$$a_{1,j_1} + \dots + a_{p,j_p} \leq \sum_{i=1}^p (s_i + t_j) \quad (2.1.2)$$

για κάθε τροποποιημένους δείκτες j_1, \dots, j_p .

Λήμμα 2.1.2 Για κάθε $p \times p$ πίνακα $a = [a_{i,j}]$ με στοιχεία ακέραιους ή ίσους με $-\infty$ υπάρχουν ακέραιοι $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$ έτσι ώστε να ισχύει $\sum_{i=1}^p (s_i + t_j) = m$ και $s_i + t_j \geq a_{i,j}$, όπου m συμβολίζει το μέγιστο του αθροίσματος $a_{1,j_1} + \dots + a_{p,j_p}$. Επομένως οι αριθμοί $s_i, t_j, i, j = 1, \dots, p$ ονομάζονται *DN-αριθμοί* για τον πίνακα $[a_{i,j}]$.

Σχόλιο

1) Για δεδομένα s_i, t_j μπορεί να γίνει αντικατάσταση με $s_i + c, t_j + c$ με c

σταθερά.

2) Η επιλογή των DN-αριθμών δεν είναι μοναδική.

3) Για αυθαίρετους πραγματικούς αριθμούς $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε το DN-κύριο μέρος $\Pi_D A(x, \xi) = [A'_{ij}(x, \xi)]_{p \times p} = [\pi_{s_i+t_j} A_{ij}(x, \xi)]_{p \times p}$.

Ορισμός 2.1.3 Ο τελεστής $A(x, D)$ ονομάζεται DN-ελλειπτικός στο $x \in \bar{\Omega}$, αν υπάρχουν DN-αριθμοί $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$ έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi(\xi) = \det \Pi_D A(x, \xi) \neq 0 \text{ για κάθε } 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$$

Έστω $\nu : \partial\Omega \rightarrow T(\mathbb{R}^n)$ ένα εσωτερικής κατεύθυνσης μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$. Για κάθε $x \in \partial\Omega$ υπάρχει ευθύ άθροισμα $T_x \mathbb{R}^n = T_x(\partial\Omega) \oplus \text{span}(\nu_x)$ και $T_x^* \mathbb{R}^n = [\text{span}(\nu_x)]^\circ \oplus [T_x(\partial\Omega)]^\circ$.

Ορισμός 2.1.4 Έστω $S \subset V$. Ο εκμηδενιστής (annihilator) του S στο V^* (sym b S°), είναι το σύνολο των γραμμικών συναρτησιακών $f \in V^*$ τέτοιος ώστε $[f, s] = 0$ για όλα τα $s \in S$.

Σχόλιο Αν V είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος, τότε ο εκμηδενιστής είναι ισομορφικός με το ορθογώνιο συμπλήρωμα του, δηλαδή $V = S \oplus S^\circ$.

Ορισμός 2.1.5 Ο δυϊκός χώρος του εφαπτόμενου χώρου $T_x(\partial\Omega)$ είναι ο $T_x^*(\partial\Omega)$ και ονομάζεται συνεφαπτόμενος χώρος. Ισοδύναμα, γράφουμε $\xi = \xi' + \xi_n$ όπου $\xi' \in T_x^*(\partial\Omega)$, με ξ_n κάθετο στο σύνορο $\partial\Omega$, δηλαδή $\xi_n, \nu \geq 0, \nu \in T_x(\partial\Omega)$.

Ορισμός 2.1.6 Έστω $\nu \geq 2$. Ο τελεστής $A(x, D)$ ονομάζεται κανονικά ελλειπτικός στο $x \in \partial\Omega$, αν για κάθε $0 \neq \xi' \in T_x^*(\partial\Omega)$ το πολυώνυμο

του $\lambda \in \mathbb{C}$ $P(\lambda) = \chi(\xi', \lambda) = \det \pi A(x, (\xi, \lambda))$ έχει ρίζες r στο άνω ημι-επίπεδο $Im \lambda > 0$ και ισάριθμο αριθμό ριζών στο κάτω ημι-επίπεδο $Im \lambda < 0$ μετρώντας και τις πολλαπλότητες των ριζών.

Έστω Ω είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο σύνολο στον \mathbb{R}^r με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$.

Ο συνοριακός τελεστής έχει τη μορφή

$$b(x, D)\phi = \sum_{|s| \leq m} b_s(x) T_0(D^s \phi), \quad x \in \partial\Omega, \quad m = ord(b) \quad (2.1.3)$$

όπου T_0 είναι ο τελεστής ίχνους. Για να είναι ο συνοριακός τελεστής

$$b(x, D) : W_2^{l+m+1/2}(\Omega) \rightarrow W_2^l(\partial\Omega) \quad (2.1.4)$$

συνεχής, πρέπει οι συντελεστές $b_s(x)$ να ανήκουν στο $C^1(\partial\Omega)$.

2.1.2 Συνθήκη Shapiro-Lopatinskij

Έστω $L(\lambda) = \sum_{j=0}^l A_j \lambda^j$ είναι ένας $p \times p$ πίνακας πολυωνύμων με ορίζουσα $\det L(\lambda) \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω γ^+ είναι το απλό, κλειστό περίγραμμα του άνω ημι-επιπέδου $Im \lambda > 0$ το οποίο περιέχει τις ιδιοτιμές του τελεστή $L(\lambda)$. Από [65, Πόρισμα σελ.33], υπάρχει ένα γ^+ φασματικής τριάδας (X_+, T_+, Y_+) και ένας χώρος βάσης του γ^+ -φασματικού ζεύγους (Q_+, T_+) με διάσταση r [65, Πόρισμα 2.9-2.10]. Έστω $M^+ = M_{L(\frac{1}{i} \frac{d}{dt})}^+$ συμβολίζει τον υπόχωρο του $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^p)$ που περιέχει τις λύσεις της εξίσωσης $L(\frac{1}{i} \frac{d}{dt})u = 0$ τέτοιο ώστε $u(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ με $\dim M^+ = r$ και από [66, Πόρισμα 2.9] κάθε $u \in M^+$ γράφεται στη μορφή $u(t) = X_+ e^{itT_+} \cdot c$ για μοναδικό $c \in \mathbb{C}^r$.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ και ο διαφορικός τελεστής έχει τη μορφή:

$$A(x, D)\phi = \sum_{|s| \leq n} a_s(x) D^s \phi, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (2.1.5)$$

όπου n η τάξη του διαφορικού τελεστή και $a_s(x) \neq 0$ στον Ω . Ο τελεστής $D^s : W_2^{l+|s|}(\Omega) \rightarrow W_2^l(\Omega)$ είναι συνεχής διότι

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{W_2^{l+|s|}(\Omega)} &= \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq s \leq l+|s|} \|D^s(\phi)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{0 \leq s \leq l+|s|} \|D^s \phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \sum_{0 \leq s \leq s} \|D^s \phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|D^s \phi\|_{W_2^l(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

και $a_s : W_2^l(\Omega) \rightarrow W_2^l(\Omega)$ συνεχής. Συνεπώς ο τελεστής $A : W_2^{l+|s|}(\Omega) \rightarrow W_2^l(\Omega)$ είναι συνεχής.

Ορισμός 2.1.7 *Κύριο μέρος ενός τελεστή A ονομάζουμε το διαφορικό τελεστή που έχει τη μορφή:*

$$A^0 \phi := \sum_{|s|=n} a_s(x) D^s \phi$$

Έστω ότι έχουμε ένα τελεστή τάξης $2m$ και m συνοριακές συνθήκες $(b_j(x, D), j = 1, \dots, m)$ με τάξη m_j έτσι ώστε $0 \leq m_j \leq 2m - 1$.

Στη συνέχεια θα μετατρέψουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε πρόβλημα αρχικών τιμών για να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα είναι ελλειπτικό.

Βήμα 1 Βρίσκουμε το A^0 που είναι το κύριο μέρος του τελεστή $A(x, D)$.

Βήμα 2 Βρίσκουμε ένα x_0 του συνόρου $\partial\Omega$ και θέτουμε ένα σύστημα συνεταγμένων με αρχή το x_0 . Ο άξονας x_r θα έχει κατεύθυνση προς το Ω και

ο άλλος άξονας θα είναι κάθετος στον x_r .

Βήμα 3 Ο μετασχηματισμός *Fourier* χρησιμοποιείται για τις $r - 1$ μεταβλητές, δηλαδή

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{r-1}} \right) \longrightarrow \left(\xi_1, \dots, \xi_{r-1} \right) \quad (2.1.7)$$

με $T_{\partial\Omega}$ είναι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του $\partial\Omega$ στο σημείο x_0 . Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό *Fourier* στο κύριο μέρος, συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{F}_{r-1} A^0(x_0, D) = A^0\left(x_0; \xi', \frac{1}{i} \frac{d}{dx_r}\right) = A^0\left(x_0; \xi' \frac{1}{i} \frac{d}{dt}\right)$$

με $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) \neq 0$ και $t \geq 0$.

Συνεπώς ο διαφορικός τελεστής παίρνει τη μορφή

$$A^0\left(x_0; \xi', \frac{1}{i} \frac{d}{dt}\right) = 0, \\ 0 \neq \xi' \in T_{\partial\Omega} \simeq \mathcal{R}^{r-1}.$$

Το σύνολο λύσεων της (2.1.2) το συμβολίζουμε με M το οποίο διασπάται σε τρία υποσύνολα:

$$M = M^+ \oplus M^- \oplus M^0 \quad (2.1.8)$$

με $P(z) = A^0(x_0, \xi', z)$. Θεωρούμε λ τέτοιο ώστε $P(\lambda) = 0$ με

\mathbf{M}^+ : χώρος λύσεων όπου οι χαρακτηριστικές ρίζες του $P(z)$ βρίσκονται στο άνω ημι-επίπεδο $Im\lambda > 0$.

\mathbf{M}^- : χώρος λύσεων όπου οι χαρακτηριστικές ρίζες του $P(z)$ βρίσκονται στο κάτω ημι-επίπεδο $Im\lambda < 0$.

\mathbf{M}^0 : χώρος λύσεων οι χαρακτηριστικές ρίζες του $P(z)$ είναι πραγματικές. Στη περίπτωση που ο διαφορικός τελεστής είναι ελλειπτικός συνεπάγεται ότι το σύνολο λύσεων είναι μηδέν.

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό *Fourier* και ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα, ορίζονται οι συνοριακοί τελεστές b_j , $j = 1, \dots, m$ οι οποίοι έχουν τη μορφή

$$b_j \left(x_0; \xi' \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \right) u(0) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.1.9)$$

Θεώρημα 2.1.8 Το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.1.2), (2.1.9) έχει μοναδική λύση $u = 0$ στο χώρο M^+ για όλα τα $0 \neq \xi' \in T_{\partial\Omega} \simeq \mathbb{R}^{r-1}$.

Σχόλια

- 1) Θέτουμε τον τελεστή $T_{x_0} = T_{\partial\Omega} \oplus n_{x_0}$ με $T_{\partial\Omega} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{r-1}} \right\}$, $n_{x_0} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} \right\} = \left\{ \frac{d}{dt} \right\}$
- 2) Θέτουμε συνθήκη $t \geq 0$ διότι η λύση του προβλήματος (2.1.2), (2.1.9) βρίσκεται στο M^+ .

Θεώρημα 2.1.9 Έστω $B(\lambda) = \sum_{j=0}^{\mu} B_j \lambda^j$ είναι ένας $r \times r$ πίνακας πολυωνύμων τάξης μ . Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

a) Για όλα τα $y \in \mathbb{C}^r$, υπάρχει μοναδικό $u \in M^+$ τέτοιο ώστε $B \left(\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \right) u(0) = y$.

b) Αν (X_+, Y_+) είναι ένα γ^+ -φασματικό ζεύγος για το $L(\lambda)$, όπου X_+ είναι ένας $p \times r$ πίνακας και T_+ είναι ένας $r \times r$ πίνακας, τότε ο πίνακας $\Delta_B^+ = \sum_{j=0}^{\mu} B_j X_+ T_+^j$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $\det \Delta_B^+ \neq 0$.

c) Ο $r \times r$ πίνακας (Lopatinskij)

$$G = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} B(\lambda) L^{-1}(\lambda) [I \dots \lambda^{l-1} I] d\lambda$$

έχει τάξη r .

d) Υπάρχει $pl \times r$ πίνακας S τέτοιος ώστε $GS = I_r$ και $SG = P'_{\gamma^+}$ με P'_{γ^+} ορίζεται ο αριστερός πίνακας προβολής *Calderon*.

e) Οι γραμμές του $r \times p$ πίνακα πολυωνύμων $B(\lambda)\tilde{L}(\lambda)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (*modulo* $p^+(\lambda)$), όπου $\det L(\lambda) = p^+(\lambda)p^-(\lambda)$ με $p^+(\lambda)$ περιέχει τις ρίζες του $L(\lambda)$ εσωτερικά του γ και $p^-(\lambda)$ περιέχει τις ρίζες εξωτερικά του γ .

Απόδειξη: Βρίσκεται στο βιβλίο του Wloka [66]. □

Συμπεραίνουμε ότι για να αποδείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη των *Shapiro – Lopatinskij* αρκεί να ισχύει μια από τις πέντε συνθήκες.

2.2 Προβλήματα σκέδασης για πλάγια πρόσπτωση

Ο κύλινδρος $\Omega_{int} \subset \mathbb{R}^3$ είναι απείρως μακρύν και παράλληλος με τον άξονα z . Είναι τμηματικά σταθερός και δέχεται τη μορφή $\Omega_{int} := \Omega_{int}^1 \cup \Omega_{int}^2$, με $\Omega_{int}^1 \cap \Omega_{int}^2 = \emptyset$. Το εξωτερικό χωρίο $\Omega_{ext} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_{int}}$ είναι ένα άπειρο ομοιογενές μέσο που χαρακτηρίζεται από τη διηλεκτρική σταθερά ϵ_0 και η μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Κάθε στρώμα Ω_{int}^j , $j = 1, 2$ είναι φραγμένο και ομοιογενές με σταθερές ιδιότητες υλικού ϵ_j και μ_j , αντίστοιχα. Το σύνορο $\partial\Omega$ είναι αρκετά ομαλό και αποτελείται από δύο ανεξάρτητες επιφάνειες $\partial\Omega_0$ και $\partial\Omega_1$, με το $\partial\Omega_1$ να βρίσκεται στο εσωτερικό του $\partial\Omega_0$. Στη συνέχεια, τα εξωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία $\mathbf{E}^{ext}, \mathbf{H}^{ext} : \Omega_{ext} \rightarrow \mathbb{C}^3$, και τα εσωτερικά πεδία $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1 : \Omega_{int}^1 \rightarrow \mathbb{C}^3$, and $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2 : \Omega_{int}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}^{ext} - i\omega\mu_0\mathbf{H}^{ext} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}^{ext} + i\omega\epsilon_0\mathbf{E}^{ext} &= 0, & \text{στο } \Omega_{ext}, \\ \nabla \times \mathbf{E}^1 - i\omega\mu_1\mathbf{H}^1 &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}^1 + i\omega\epsilon_1\mathbf{E}^1 &= 0, & \text{στο } \Omega_{int}^1, \\ \nabla \times \mathbf{E}^2 - i\omega\mu_2\mathbf{H}^2 &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}^2 + i\omega\epsilon_2\mathbf{E}^2 &= 0, & \text{στο } \Omega_{int}^2, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

όπου $\omega > 0$ είναι η συχνότητα. Στο σύνορο $\partial\Omega$ θεωρούμε τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{ext}, & \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{ext}, & \text{στο } \partial\Omega_0, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^2, & \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^2, & \text{στο } \partial\Omega_1,\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα.

Η κυλινδρική συμμετρία του μέσου και η ειδική δομή του επιτρέπει τη μείωση του προβλήματος τρισδιάστατης σκέδασης (2.2.1) – (2.2.2) σε ένα πρόβλημα 2D μόνο για τις z - συντεταγμένες των πεδίων, (για παράδειγμα [28, 49, 64]). Ορίζουμε με $\theta \in (0, \pi)$ τη γωνία πρόσπτωσης ως προς τον αρνητικό άξονα z και $\phi \in [0, 2\pi]$ την πολική γωνία της διεύθυνσης πρόσπτωσης. Ορίζουμε $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ τον αριθμό κύματος Ω_{ext} και ορίζουμε με $k_j = \omega\sqrt{\mu_j\epsilon_j}$, τον αριθμό κύματος του Ω_{int}^j , $j = 1, 2$. Υποθέτουμε $k_1 \neq k_2$. Έστω $\beta = k_0 \cos \theta$, στη συνέχεια ορίζουμε $\kappa_j^2 = k_j^2 - \beta^2$, $j = 0, 1, 2$. Οι συντελεστές επιλέγονται έτσι ώστε $\kappa_1^2, \kappa_2^2 > 0$. Συμβολίζουμε με Ω_0 την οριζόντια διατομή του εξωτερικού πεδίου και με Ω την οριζόντια διατομή του κυλίνδρου, που δίνεται με $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Το απλά συνεκτικό χωρίο Ω_2 έχει C^2 κλειστό σύνορο Γ_1 και το διπλά συνεκτικό χωρίο Ω_1 έχει εξωτερικό σύνορο Γ_0 .

Ορίζουμε $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Συμβολίζουμε με $e^{ext}(\mathbf{x})$, $h^{ext}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_0$ τις z - συνιστώσες του εξωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, αντίστοιχα. Τα πεδία $e^j(\mathbf{x})$ και $h^j(\mathbf{x})$ περιγράφουν τις z - συνιστώσες των ηλεκτρικών και μαγνητικών εσωτερικών πεδίων, για $\mathbf{x} \in \Omega_j$, $j = 1, 2$, αντίστοιχα. Ακολουθώντας το [64], γνωρίζουμε ότι τα πεδία ικανοποιούν το σύστημα των εξ-

ισώσεων Helmholtz

$$\begin{aligned}
\Delta e^{ext} + \kappa_0^2 e^{ext} &= 0, & \Delta h^{ext} + \kappa_0^2 h^{ext} &= 0, & \text{στο } \Omega_0, \\
\Delta e^1 + \kappa_1^2 e^1 &= 0, & \Delta h^1 + \kappa_1^2 h^1 &= 0, & \text{στο } \Omega_1, \\
\Delta e^2 + \kappa_2^2 e^2 &= 0, & \Delta h^2 + \kappa_2^2 h^2 &= 0, & \text{στο } \Omega_2.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Οι συνοριακές συνθήκες (2.2.2) μπορούν να ξαναγραφτούν στη διδιάστατη μορφή [28, 64]. Έστω $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ και $\boldsymbol{\tau} = (-n_2, n_1)$ είναι το κάθετο και το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σύνορο Γ_j , $j = 0, 1$, αντίστοιχα. Το διάνυσμα \mathbf{n} του συνόρου Γ_j κατευθύνεται προς Ω_j , $j = 0, 1$. Ορίζουμε $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla$, $\frac{\partial}{\partial \tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla$, όπου ∇ είναι η βαθμίδα και ορίζουμε

$$\tilde{\mu}_j = \frac{\mu_j}{\kappa_j^2}, \quad \tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\kappa_j^2}, \quad \beta_j = \frac{\beta}{\kappa_j^2}, \quad \text{για } j = 0, 1, 2.$$

Οι συνθήκες διαπερατότητας (2.2.2) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}
e^1 &= e^{ext}, & \text{στο } \Gamma_0, \\
\tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} &= \tilde{\mu}_0 \omega \frac{\partial h^{ext}}{\partial n} + \beta_0 \frac{\partial e^{ext}}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_0, \\
h^1 &= h^{ext}, & \text{στο } \Gamma_0, \\
\tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} &= \tilde{\epsilon}_0 \omega \frac{\partial e^{ext}}{\partial n} - \beta_0 \frac{\partial h^{ext}}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_0, \\
e^1 &= e^2, & \text{στο } \Gamma_1, \\
\tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} &= \tilde{\mu}_2 \omega \frac{\partial h^2}{\partial n} + \beta_2 \frac{\partial e^2}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_1, \\
h^1 &= h^2, & \text{στο } \Gamma_1, \\
\tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} &= \tilde{\epsilon}_2 \omega \frac{\partial e^2}{\partial n} - \beta_2 \frac{\partial h^2}{\partial \tau}, & \text{στο } \Gamma_1.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Τα εξωτερικά πεδία αποτελούνται από τα προσπίπτοντα πεδία e^{inc} , h^{inc} και τα σκεδασμένα πεδία e^0, h^0 , δηλαδή $e^{ext} = e^{inc} + e^0$ και $h^{ext} = h^{inc} + h^0$. Τα εισερχόμενα κύματα παίρνουν τη μορφή

$$e^{inc}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin \theta e^{i\kappa_0 \mathbf{x} \cdot (\cos \phi, \sin \phi)}, \quad h^{inc}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.2.5)$$

Τα σκεδασμένα πεδία πρέπει να ικανοποιούν τη Sommerfeld συνθήκη ακτινοβολίας

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial e^0}{\partial r} - i\kappa_0 e^0 \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial h^0}{\partial r} - i\kappa_0 h^0 \right) = 0, \quad (2.2.6)$$

όπου $r = |\mathbf{x}|$, ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις.

Από τη συνθήκη ακτινοβολίας καταλήγουμε στις ασυμπτωτικές εξισώσεις [16]

$$e^0(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\sqrt{r}} e^\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(r^{-3/2}), \quad h^0(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\kappa_0 r}}{\sqrt{r}} h^\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(r^{-3/2}),$$

όπου $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/r \in S$, με S να είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Το ζεύγος (e^∞, h^∞) ονομάζεται μακρινό πεδίο του σκεδασμένου κύματος.

2.2.1 Σκεδαστής με τμηματικά σταθερό δείκτη διάθλασης

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε την καλή τοποθέτηση του ευθέως προβλήματος σκέδασης (2.2.3) – (2.2.6). Αρχικά αποδεικνύουμε την ύπαρξη λύσης. Χρησιμοποιώντας [57], αποδεικνύουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη Shapiro-Lopatinkij, με σταθερούς ηλεκτρομαγνητικούς συντελεστές, για το ακόλουθο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Επομένως, πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει διακριτό σύνολο κυματάρημων κ_1 και κ_2 στο $\Omega_{1,2} := \Omega_1 \cup \bar{\Omega}_2$. Θέ-

του με τη τμηματικά συνεχή συνάρτηση [23]

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ \kappa_2^2/\kappa_1^2, & \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases}$$

και ορίζουμε τον τελεστή $\mathbf{A} = -(\Delta + \lambda p)\mathbf{I}_2$, για $\lambda \in \mathbb{R}$, όπου \mathbf{I}_2 είναι ένας 2×2 ταυτοτικός πίνακας. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα των ιδιοτιμών Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u}^j &= 0, \quad \text{in } \Omega_j, \\ \mathbf{M}\mathbf{u}^1 &= 0, \quad \text{on } \Gamma_0, \\ \mathbf{M}^1\mathbf{u}^1 - \mathbf{M}^2\mathbf{u}^2 &= 0, \quad \text{on } \Gamma_1, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

όπου $\mathbf{u}^j = (e^j, h^j)^\top$, $j = 1, 2$.

Οι συνοριακοί τελεστές έχουν τη μορφή

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_2, \quad \text{on } \Gamma_0, \quad \text{and} \quad \mathbf{M}^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_j \frac{\partial}{\partial \tau} & \tilde{\mu}_j \omega \frac{\partial}{\partial n} \\ 0 & 1 \\ \tilde{\epsilon}_j \omega \frac{\partial}{\partial n} & -\beta_j \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix}, \quad \text{on } \Gamma_1.$$

Το πρόβλημα εσωτερικής ιδιοτιμής (2.2.7) είναι ένα σύστημα με μια συνθήκη Dirichlet στο εξωτερικό σύνορο Γ_0 και μια ειδική συνθήκη μετάδοσης στο εσωτερικό σύνορο Γ_1 . Για να αποδειχθεί η ελλειπτικότητα και στη συνέχεια η διακριτικότητα των ιδιοτιμών για αυτό το εσωτερικό πρόβλημα, αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής \mathbf{A} είναι ελλειπτικός, κανονικά ελλειπτικός

και ότι η συνθήκη Shapiro-Lopatinskij ικανοποιείται και στα δύο σύνορα. Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι ο τελεστής \mathbf{A} είναι ελλειπτικός και κανονικά ελλειπτικός. Παρατηρούμε ότι το κύριο σύμβολο του τελεστή \mathbf{A} δίνεται από

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \xi_1^2 + \xi_2^2 & 0 \\ 0 & \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Ο τελεστής \mathbf{A} είναι ελλειπτικός επειδή $\det \mathbf{A}_0 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \neq 0$, για όλα $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ [66, Ορισμός 9.21]. Επιπλέον, ο τελεστής \mathbf{A} είναι κανονικά ελλειπτικός αφού η ορίζουσα του \mathbf{A}_0 έχει τη ρίζα $\xi_2 = i|\xi_1|$ πολλαπλότητας 2 στο άνω ημίεπίπεδο $\Im \xi_2 > 0$, και τη ρίζα $\xi_2 = -i|\xi_1|$ πολλαπλότητας 2 στο κάτω ημίεπίπεδο $\Im \xi_2 < 0$ [66, Ορισμός 9.24]. Επίσης, δείχνουμε ότι η συνθήκη Shapiro-Lopatinskij ικανοποιείται στα σύνορα Γ_0 and Γ_1 , ώστε το πρόβλημα της συνοριακών τιμών (2.2.7) είναι ελλειπτικό.

Πρόταση 2.2.1 *Αν $\mu_1 \neq \mu_2$, τότε το πρόβλημα ιδιοτιμών (2.2.7) είναι ελλειπτικό και το σύνολο των ιδιοτιμών είναι διακριτό.*

Απόδειξη: Έχει αποδειχθεί ότι ο τελεστής \mathbf{A} είναι ελλειπτικός και κανονικά ελλειπτικός για όλα τα $\mathbf{x} \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η συνθήκη Shapiro-Lopatinskij ικανοποιείται στο Γ_0 και στο Γ_1 [66]. Έστω $\mathbf{M}_0 = \mathbf{I}_2$ είναι ο κύριος τελεστής του \mathbf{M} και $\mathbf{A}_{co} = \mathbf{A}_0$ ο cofactor πίνακας του \mathbf{A}_0 . Παρατηρούμε ότι η συνθήκη Shapiro-Lopatinskij ικανοποιείται στο Γ_0 επειδή οι γραμμές του πίνακα $\mathbf{M}_0 \mathbf{A}_{co}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη στο σύνορο Γ_1 , επιλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε $\mathbf{x}_1 = (0, 0) \in \Gamma_1$ με κάθετα και εφαπτόμενα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{n}_1 = (0, -1)$ και $\boldsymbol{\tau}_1 = (1, 0)$, στο \mathbf{x}_1 , αντίστοιχα. Σε αυτό

το σύστημα συντεταγμένων, το κύριο σύμβολο των τελεστών δίνεται από [66]

$$\mathbf{M}_0^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\beta_j\xi_1 & i\tilde{\mu}_j\omega\xi_2 \\ 0 & 1 \\ i\tilde{\epsilon}_j\omega\xi_2 & -i\beta_j\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Για να ικανοποιηθεί η συνθήκη Shapiro-Lopatinskij Γ_1 , πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mathbf{M}_0^1 \mathbf{A}_{co} \equiv 0(\text{mod } a^-), \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_0^2 \mathbf{A}_{co} \equiv 0(\text{mod } a^+),$$

όπου $\alpha^+(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2 - i|\xi_1|)^2$ and $\alpha^-(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2 + i|\xi_1|)^2$ [57, 61].

Χρησιμοποιώντας [49], θεωρούμε ότι υπάρχουν τέσσερις σταθερές a_1, a_2, a_3 και a_4 τέτοιες ώστε

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left[a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -i\beta_1\xi_1 \\ i\tilde{\mu}_1\omega\xi_2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} i\tilde{\epsilon}_1\omega\xi_2 \\ i\beta_1\xi_1 \end{pmatrix} \right] \equiv 0(\text{mod } a^-), \quad (2.2.8a)$$

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left[a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -i\beta_2\xi_1 \\ i\tilde{\mu}_2\omega\xi_2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} i\tilde{\epsilon}_2\omega\xi_2 \\ i\beta_2\xi_1 \end{pmatrix} \right] \equiv 0(\text{mod } a^+). \quad (2.2.8b)$$

όπου κάθε γραμμή των εξισώσεων (2.2.8a) – (2.2.8b) έχει υπόλοιπο μηδέν, όταν διαιρούνται από a^- και a^+ , αντίστοιχα. Από (2.2.8a), παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο πολυώνυμα $p(\xi_2) = p_1\xi_2 + p_2$, και $q(\xi_2) = q_1\xi_2 + q_2$ που ικανοποιούν

$$(\xi_2 + i|\xi_1|)(\xi_2 - i|\xi_1|) \left[a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -i\beta_1\xi_1 \\ i\tilde{\mu}_1\omega\xi_2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} i\tilde{\epsilon}_1\omega\xi_2 \\ i\beta_1\xi_1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} p_1\xi_2 + p_2 \\ q_1\xi_2 + q_2 \end{pmatrix} (\xi_2 + i|\xi_1|)^2. \quad (2.2.9)$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές απο τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης, προκύπτει ότι

$$p_1 = ia_4\tilde{\epsilon}_1\omega, \quad p_2 = -a_1 + ia_2\beta_1\xi_1, \quad \text{and} \quad p_2 + ip_1|\xi_1| = a_1 - ia_2\beta_1\xi_1 + a_4\tilde{\epsilon}_1\omega|\xi_1|,$$

καταλήγοντας σε

$$a_1 - ia_2\beta_1\xi_1 + a_4\tilde{\epsilon}_1\omega|\xi_1| = 0.$$

Ομοίως, από τη δεύτερη εξίσωση (2.2.9), έχουμε

$$a_2\tilde{\mu}_1\omega|\xi_1| + a_3 + ia_4\beta_1\xi_1 = 0.$$

Ακολουθώντας παρόμοια βήματα, από το σύστημα (2.2.8b), έχουμε

$$a_1 - ia_2\beta_2\xi_1 - a_4\tilde{\epsilon}_2\omega|\xi_1| = 0,$$

$$a_2\tilde{\mu}_2\omega|\xi_1| - a_3 - ia_4\beta_2\xi_1 = 0.$$

Οι τέσσερις τελευταίες εξισώσεις καταλήγουν στο σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & -i\beta_1\xi_1 & 0 & \tilde{\epsilon}_1\omega|\xi_1| \\ 0 & \tilde{\mu}_1\omega|\xi_1| & 1 & i\beta_1\xi_1 \\ 1 & -i\beta_2\xi_1 & 0 & -\tilde{\epsilon}_2\omega|\xi_1| \\ 0 & \tilde{\mu}_2\omega|\xi_1| & -1 & -i\beta_2\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

με ορίζουσα

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (\tilde{\mu}_2 \tilde{\epsilon}_2 \omega^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2 - \tilde{\mu}_1 \tilde{\epsilon}_1 \omega^2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\epsilon}_2 \omega^2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\epsilon}_1 \omega^2) |\xi_1|^2 \\ &= \frac{\omega^2 |\xi_1|^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2} (\mu_1 - \mu_2) (\epsilon_1 + \epsilon_2). \end{aligned}$$

Επειδή $\mu_1 \neq \mu_2$, η ορίζουσα είναι μηδενική το οποίο συνεπάγεται ότι $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Έτσι, η συνθήκη Shapiro-Lopatinskij ικανοποιείται στο Γ_1 . Ορίζουμε $\mathbb{L} = (\mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{M}^1, \mathbf{M}^2)$. Σημειώνουμε ότι ο συζηγής τελεστής (formally adjoint operator) $\mathbf{A}^* : (H^2(\Omega_j))^2 \rightarrow (L_2(\Omega_j))^2$, $j = 1, 2$ είναι ίδιος με τον τελεστή $\mathbf{A} : (H^2(\Omega_j))^2 \rightarrow (L_2(\Omega_j))^2$, $j = 1, 2$ [65, Ορισμός 10.1]. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι συνοριακοί τελεστές \mathbf{M}, \mathbf{M}^j είναι πραγματικοί. Συνεπώς, το εσωτερικό συνοριακό πρόβλημα ιδιοτιμών το οποίο περιγράφεται από τον τελεστή \mathbb{L} είναι αυτοσυζυγές [65, Ορισμός 14.6] και ο δείκτης του τελεστή \mathbb{L} είναι μηδέν [65, Πόρισμα 15.8]. Επομένως, το συνοριακό πρόβλημα (2.2.7) είναι ελλειπτικό, ο τελεστής \mathbb{L} έχει την ιδιότητα Fredholm και το φάσμα υπάρχει, είναι πραγματικό και διακριτό [2, 3, 55]. \square

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (2.2.3) – (2.2.6) χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green και το λήμμα του Rellich.

Θεώρημα 2.2.2 *Εάν $\mu_1 \neq \mu_2$ και κ_1^2 δεν είναι εσωτερική ιδιοτιμή Dirichlet για τον χωρίο $\Omega_{1,2}$, τότε το πρόβλημα (2.2.3) – (2.2.6) έχει το πολύ μία λύση.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι το ομοιογενές πρόβλημα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Θεωρούμε έναν δίσκο S_r με κέντρο $(0, 0)$, ακτίνα $r > 0$ και σύνορο Γ_r , ο οποίος περιέχει $\bar{\Omega}$. Ορίζουμε $\Omega_r := S_r \setminus \bar{\Omega}$. Στη συνέχεια, με \bar{u} συμβολίζουμε το συζυγές του πεδίου u . Εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα

του Green για e^1, \bar{e}^1 και h^1, \bar{h}^1 στο Ω_1 :

$$\int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} e^1 \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial n} ds = \int_{\Omega_1} (|\nabla e^1|^2 - \kappa_1^2 |e^1|^2) dx, \quad (2.2.10a)$$

$$\int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} h^1 \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial n} ds = \int_{\Omega_1} (|\nabla h^1|^2 - \kappa_1^2 |h^1|^2) dx, \quad (2.2.10b)$$

και στο Ω_2 για τα πεδία e^2, \bar{e}^2 και h^2, \bar{h}^2 :

$$\int_{\Gamma_1} e^2 \frac{\partial \bar{e}^2}{\partial n} ds = \int_{\Omega_2} (|\nabla e^2|^2 - \kappa_2^2 |e^2|^2) dx, \quad (2.2.11a)$$

$$\int_{\Gamma_1} h^2 \frac{\partial \bar{h}^2}{\partial n} ds = \int_{\Omega_2} (|\nabla h^2|^2 - \kappa_2^2 |h^2|^2) dx. \quad (2.2.11b)$$

Οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες παίρνουν τη μορφή

$$e^1 = e^0, \quad \text{στο } \Gamma_0, \quad (2.2.12a)$$

$$\tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} = \tilde{\mu}_0 \omega \frac{\partial h^0}{\partial n} + \beta_0 \frac{\partial e^0}{\partial \tau}, \quad \text{στο } \Gamma_0, \quad (2.2.12b)$$

$$h^1 = h^0, \quad \text{στο } \Gamma_0, \quad (2.2.12c)$$

$$\tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} = \tilde{\epsilon}_0 \omega \frac{\partial e^0}{\partial n} - \beta_0 \frac{\partial h^0}{\partial \tau}, \quad \text{στο } \Gamma_0, \quad (2.2.12d)$$

$$e^1 = e^2, \quad \text{στο } \Gamma_1, \quad (2.2.12e)$$

$$\tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} = \tilde{\mu}_2 \omega \frac{\partial h^2}{\partial n} + \beta_2 \frac{\partial e^2}{\partial \tau}, \quad \text{στο } \Gamma_1, \quad (2.2.12f)$$

$$h^1 = h^2, \quad \text{στο } \Gamma_1, \quad (2.2.12g)$$

$$\tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} = \tilde{\epsilon}_2 \omega \frac{\partial e^2}{\partial n} - \beta_2 \frac{\partial h^2}{\partial \tau}, \quad \text{στο } \Gamma_1. \quad (2.2.12h)$$

Χρησιμοποιώντας (2.2.10a) και (2.2.12h) έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{\epsilon}_1 \int_{\Gamma_0} e^1 \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial n} ds &= \tilde{\epsilon}_1 \int_{\Omega_1} (|\nabla e^1|^2 - \kappa_1^2 |e^1|^2) dx + \tilde{\epsilon}_1 \int_{\Gamma_1} e^1 \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial n} ds \\
&= \tilde{\epsilon}_1 \int_{\Omega_1} (|\nabla e^1|^2 - \kappa_1^2 |e^1|^2) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} e^1 \left(\tilde{\epsilon}_2 \frac{\partial \bar{e}^2}{\partial n} + \frac{\beta_1}{\omega} \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial \tau} - \frac{\beta_2}{\omega} \frac{\partial \bar{h}^2}{\partial \tau} \right) ds.
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Παρομοίως, οι εξισώσεις (2.2.10b) και (2.2.12f) καταλήγουν στην εξίσωση

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_1 \int_{\Gamma_0} h^1 \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial n} ds &= \tilde{\mu}_1 \int_{\Omega_1} (|\nabla h^1|^2 - \kappa_1^2 |h^1|^2) dx + \tilde{\mu}_1 \int_{\Gamma_1} h^1 \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial n} ds \\
&= \tilde{\mu}_1 \int_{\Omega_1} (|\nabla h^1|^2 - \kappa_1^2 |h^1|^2) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} h^1 \left(\tilde{\mu}_2 \frac{\partial \bar{h}^2}{\partial n} + \frac{\beta_2}{\omega} \frac{\partial \bar{e}^2}{\partial \tau} - \frac{\beta_1}{\omega} \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial \tau} \right) ds.
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Εφαρμόζοντας ξανά την πρώτη ταυτότητα του Green και χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη (2.2.12d) για τα εξωτερικά πεδία e^0 και \bar{e}^0 στο Ω_r , καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}
\tilde{\epsilon}_0 \int_{\Gamma_r} e^0 \frac{\partial \bar{e}^0}{\partial n} ds &= \tilde{\epsilon}_0 \int_{\Omega_r} (|\nabla e^0|^2 - \kappa_0^2 |e^0|^2) dx + \tilde{\epsilon}_0 \int_{\Gamma_0} e^0 \frac{\partial \bar{e}^0}{\partial n} ds \\
&= \tilde{\epsilon}_0 \int_{\Omega_r} (|\nabla e^0|^2 - \kappa_0^2 |e^0|^2) dx + \int_{\Gamma_0} e^0 \left(\tilde{\epsilon}_1 \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial n} - \frac{\beta_1}{\omega} \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial \tau} + \frac{\beta_0}{\omega} \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial \tau} \right) ds.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Συνδυάζοντας τα εξωτερικά μαγνητικά πεδία και την εξίσωση (2.2.12b) έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_0 \int_{\Gamma_r} h^0 \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial n} ds &= \tilde{\mu}_0 \int_{\Omega_0} (|\nabla h^0|^2 - \kappa_0^2 |h^0|^2) dx + \tilde{\mu}_0 \int_{\Gamma_0} h^0 \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial n} ds \\ &= \tilde{\mu}_0 \int_{\Omega_r} (|\nabla h^0|^2 - \kappa_0^2 |h^0|^2) dx + \int_{\Gamma_0} h^0 \left(\tilde{\mu}_1 \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial n} + \frac{\beta_1}{\omega} \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial \tau} - \frac{\beta_0}{\omega} \frac{\partial \bar{e}^0}{\partial \tau} \right) ds.\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

Το φανταστικό μέλος της εξίσωσης (2.2.15) χρησιμοποιώντας (2.2.11a), (2.2.12a), (2.2.12e) και (2.2.13) δίνεται από

$$\begin{aligned}\Im \left(\tilde{\epsilon}_0 \int_{\Gamma_r} e^0 \frac{\partial \bar{e}^0}{\partial n} ds \right) &= \Im \left(-\frac{\beta_1}{\omega} \int_{\Gamma_0} e^1 \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial \tau} ds + \frac{\beta_0}{\omega} \int_{\Gamma_0} e^0 \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial \tau} ds \right) \\ &\quad + \Im \left(\frac{\beta_1}{\omega} \int_{\Gamma_1} e^1 \frac{\partial \bar{h}^1}{\partial \tau} ds - \frac{\beta_2}{\omega} \int_{\Gamma_1} e^2 \frac{\partial \bar{h}^2}{\partial \tau} ds \right).\end{aligned}$$

Επίσης, το φανταστικό μέλος της εξίσωσης (2.2.16) χρησιμοποιώντας (2.2.11b), (2.2.12c), (2.2.12g) και (2.2.14), έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}\Im \left(\tilde{\mu}_0 \int_{\Gamma_r} h^0 \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial n} ds \right) &= \Im \left(\frac{\beta_1}{\omega} \int_{\Gamma_0} h^1 \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial \tau} ds - \frac{\beta_0}{\omega} \int_{\Gamma_0} h^0 \frac{\partial \bar{e}^0}{\partial \tau} ds \right) \\ &\quad + \Im \left(\frac{\beta_2}{\omega} \int_{\Gamma_1} h^2 \frac{\partial \bar{e}^2}{\partial \tau} ds - \frac{\beta_1}{\omega} \int_{\Gamma_1} h^1 \frac{\partial \bar{e}^1}{\partial \tau} ds \right).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$-\int_{\Gamma_j} e^k \frac{\partial \bar{h}^k}{\partial \tau} ds = \overline{\int_{\Gamma_j} h^k \frac{\partial \bar{e}^k}{\partial \tau} ds} \quad k = 0, 1, 2, \quad j = 0, 1,$$

και τις δύο τελευταίες εξισώσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\Im \left(\tilde{\epsilon}_0 \int_{\Gamma_r} e^0 \frac{\partial \bar{e}^0}{\partial n} ds + \tilde{\mu}_0 \int_{\Gamma_r} h^0 \frac{\partial \bar{h}^0}{\partial n} ds \right) = 0.$$

Αυτή η εξίσωση, μαζί με τη συνθήκη ακτινοβολίας (2.2.6) ως προς $r \rightarrow \infty$ και το Λήμμα του Rellich, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι $e^0 = h^0 = 0$, σε Ω_0 και επομένως $e^0 = h^0 = 0$, σε Γ_0 [28].

Στη συνέχεια, πρέπει να δείξουμε ότι και τα εσωτερικά πεδία είναι ταυτοτικά μηδέν. Το εσωτερικό πρόβλημα παίρνει τη μορφή (2.2.7). Έτσι, από τη Πρόταση 2.2.1 και την υπόθεση ότι το $\lambda = \kappa_1^2$ δεν είναι εσωτερική ιδιοτιμή Dirichlet στο $\Omega_{1,2}$, λαμβάνουμε ότι $\mathbf{u}^j = 0$, στο Ω_j , για $j = 0, 1$, με αποτέλεσμα $e^1 = h^1 = 0$, στο Ω_1 και $e^2 = h^2 = 0$, στο Ω_2 . \square

Για το επόμενο θεώρημα, χρειαζόμαστε την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης. Έτσι, παρουσιάζουμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Phi_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_j |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_j, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad (2.2.17)$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Εισάγουμε το δυναμικό απλού και διπλού στρώματος για μια συνεχή πυκνότητα f , που δίνεται από

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{klj} f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_l, \\ (\mathcal{D}_{klj} f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n(\mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_l, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

για $k, l = 0, 1, 2$ και $j = 0, 1$. Το δυναμικό του απλού στρώματος \mathcal{S} είναι συνεχές σε \mathbb{R}^2 και οι κάθετες και οι εφαπτόμενες παράγωγοί τους καθώς το $\mathbf{x} \rightarrow \Gamma_j$ ικανοποιούν τις τυπικές σχέσεις διαπήδησης, βλέπε για παράδειγμα

[15, 22]. Ορίζουμε τους τελεστές

$$\begin{aligned}
(S_{klj}f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\
(D_{klj}f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n(\mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\
(NS_{klj}f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n(\mathbf{x})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\
(ND_{klj}f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial n(\mathbf{x}) \partial n(\mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\
(TS_{klj}f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \Gamma_l, \\
(TD_{klj}f)(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \tau(\mathbf{x}) \partial n(\mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \Gamma_l.
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Υπάρχουν δύο συνηθισμένοι τρόποι μετατροπής του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.2.3) – (2.2.6) σε ένα σύστημα συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων: η άμεση μέθοδος (direct method) που βασίζεται στο θεώρημα του Green και η έμμεση μέθοδος (indirect method) [16]. Λαμβάνοντας υπόψη την εργασία [42], εξετάζουμε μια υβριδική μέθοδο (hybrid method) που συνδυάζει και τα δύο.

Θεώρημα 2.2.3 *Εάν το $\mu_1 \neq \mu_2$ και το κ_1^2 δεν είναι εσωτερική ιδιοτιμή Dirichlet για $\Omega_{1,2}$, το κ_2^2 δεν είναι εσωτερική ιδιοτιμή Dirichlet για Ω_2 και το κ_0^2 δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet στο $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_0}$, τότε το πρόβλημα (2.2.3) – (2.2.6) έχει μια μοναδική λύση .*

Απόδειξη: Συνδυάζουμε τον δεύτερο τύπο του Green για τα πεδία στους τομείς Ω_0 και Ω_2 , και τελεστές απλού στρώματος για τα εσωτερικά πεδία

στο Ω_1 . Υποθέτουμε ότι οι λύσεις έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}
e^0(\mathbf{x}) &= \mathcal{D}_{000}\phi_0^e(\mathbf{x}) - \mathcal{S}_{000}\psi_0^e(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\
h^0(\mathbf{x}) &= \mathcal{D}_{000}\phi_0^h(\mathbf{x}) - \mathcal{S}_{000}\psi_0^h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\
e^1(\mathbf{x}) &= \mathcal{S}_{110}\psi_1^e(\mathbf{x}) + \mathcal{S}_{111}\psi_2^e(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\
h^1(\mathbf{x}) &= \mathcal{S}_{110}\psi_1^h(\mathbf{x}) + \mathcal{S}_{111}\psi_2^h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\
e^2(\mathbf{x}) &= \mathcal{S}_{221}\psi_3^e(\mathbf{x}) - \mathcal{D}_{221}\phi_3^e(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_2, \\
h^2(\mathbf{x}) &= \mathcal{S}_{221}\psi_3^h(\mathbf{x}) - \mathcal{D}_{221}\phi_3^h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_2,
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

για τις πυκνότητες $\psi_j^u := \partial_n u^j|_{\Gamma_k}$ και $\phi_j^u := u^j|_{\Gamma_k}$, $j = 0, 3$, για $k = 0, 1$ και αυθαίρετες πυκνότητες ψ_j^u , $j = 1, 2$, για $u = e, h$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις διαπήδησης, βλέπουμε ότι τα πεδία λύνουν το ευθύ πρόβλημα εάν οι πυκνότητες ικανοποιούν το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
&S_{100}\psi_1^e + S_{101}\psi_2^e - \left(D_{000} + \frac{1}{2}\right)\phi_0^e + S_{000}\psi_0^e = e^{inc} \\
&\tilde{\mu}_1\omega \left(NS_{100} + \frac{1}{2}\right)\psi_1^h + \tilde{\mu}_1\omega NS_{101}\psi_2^h + \beta_1TS_{100}\psi_1^e + \beta_1TS_{101}\psi_2^e - \tilde{\mu}_0\omega ND_{000}\phi_0^h \\
&+ \tilde{\mu}_0\omega \left(NS_{000} - \frac{1}{2}\right)\psi_0^h - \beta_0 \left(TD_{000} + \frac{\partial_\tau}{2}\right)\phi_0^e + \beta_0TS_{000}\psi_0^e = \beta_0\partial_\tau e^{inc} \\
&S_{100}\psi_1^h + S_{101}\psi_2^h - \left(D_{000} + \frac{1}{2}\right)\phi_0^h + S_{000}\psi_0^h = 0 \\
&\tilde{\epsilon}_1\omega \left(NS_{100} + \frac{1}{2}\right)\psi_1^e + \tilde{\epsilon}_1\omega NS_{101}\psi_2^e - \beta_1TS_{100}\psi_1^h - \beta_1TS_{101}\psi_2^h - \tilde{\epsilon}_0\omega ND_{000}\phi_0^e \\
&+ \tilde{\epsilon}_0\omega \left(NS_{000} - \frac{1}{2}\right)\psi_0^e + \beta_0 \left(TD_{000} + \frac{\partial_\tau}{2}\right)\phi_0^h - \beta_0TS_{000}\psi_0^h = \tilde{\epsilon}_0\omega\partial_n e^{inc} \\
&S_{110}\psi_1^e + S_{111}\psi_2^e - S_{211}\psi_3^e + \left(D_{211} - \frac{1}{2}\right)\phi_3^e = 0 \\
&\tilde{\mu}_1\omega NS_{110}\psi_1^h + \tilde{\mu}_1\omega \left(NS_{111} - \frac{1}{2}\right)\psi_2^h + \beta_1TS_{110}\psi_1^e + \beta_1TS_{111}\psi_2^e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{\mu}_2\omega \left(NS_{211} + \frac{1}{2} \right) \psi_3^h + \tilde{\mu}_2\omega ND_{211}\phi_3^h - \beta_2 TS_{211}\psi_3^e + \beta_2 \left(TD_{211} - \frac{1}{2}\partial_\tau \right) \phi_3^e = 0 \\
& S_{110}\psi_1^h + S_{111}\psi_2^h - S_{211}\psi_3^h + \left(D_{211} - \frac{1}{2} \right) \phi_3^h = 0 \\
& \tilde{\epsilon}_1\omega NS_{110}\psi_1^e + \tilde{\epsilon}_1\omega \left(NS_{111} - \frac{1}{2} \right) \psi_2^e - \beta_1 TS_{110}\psi_1^h - \beta_1 TS_{111}\psi_2^h \\
& - \tilde{\epsilon}_2\omega \left(NS_{211} + \frac{1}{2} \right) \psi_3^e + \tilde{\epsilon}_2\omega ND_{211}\phi_3^e + \beta_2 TS_{211}\psi_3^h - \beta_2 \left(TD_{211} - \frac{1}{2}\partial_\tau \right) \phi_3^h = 0.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει παραπάνω αριθμό άγνωστων πυκνοτήτων από αριθμό εξισώσεων. Για να μειώσουμε τον αριθμό των άγνωστων πυκνοτήτων, επιβάλλουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\tilde{\epsilon}_1\psi_1^e = -\tilde{\epsilon}_0\psi_0^e, \quad \tilde{\mu}_1\psi_1^h = -\tilde{\mu}_0\psi_0^h, \quad \tilde{\mu}_1\psi_2^h = \tilde{\mu}_2\psi_3^h, \quad \tilde{\epsilon}_1\psi_2^e = \tilde{\epsilon}_2\psi_3^e. \quad (2.2.21)$$

Επομένως, το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}, \quad (2.2.22)$$

$$\begin{aligned}
& \text{με } \boldsymbol{\phi} = (\phi_0^e, \psi_1^h, \phi_0^h, \psi_1^e, \phi_3^e, \psi_2^h, \phi_3^h, \psi_2^e)^\top \in \mathbb{C}^8, \\
& \mathbf{f} = (e^{inc}, \beta_0\partial_\tau e^{inc}, 0, \tilde{\epsilon}_0\omega\partial_n e^{inc}, 0, 0, 0, 0)^\top \in \mathbb{C}^8, \text{ και}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta_0}{2}\partial_\tau & \tilde{\mu}_1\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_0}{2}\partial_\tau & \tilde{\epsilon}_1\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_2}{2}\partial_\tau & -\tilde{\mu}_1\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2}{2}\partial_\tau & -\tilde{\epsilon}_1\omega \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας τελεστής $\mathbf{C} = (C_{kj})_{1 \leq k, j \leq 8}$ έχει τα στοιχεία

$$\begin{aligned}
C_{11} &= -D_{000}, & C_{14} &= S_{100} - \frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_0} S_{000}, \\
C_{18} &= S_{101}, & C_{21} &= -\beta_0 T D_{000}, \\
C_{22} &= \tilde{\mu}_1 \omega (N S_{100} - N S_{000}), & C_{23} &= -\tilde{\mu}_0 \omega N D_{000}, \\
C_{24} &= \beta_1 T S_{100} - \frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_0} \beta_0 T S_{000}, & C_{26} &= \tilde{\mu}_1 \omega N S_{101}, \\
C_{28} &= \beta_1 T S_{101}, & C_{32} &= S_{100} - \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_0} S_{000}, \\
C_{33} &= -D_{000}, & C_{36} &= S_{101}, \\
C_{41} &= -\tilde{\epsilon}_0 \omega N D_{000}, & C_{42} &= -\beta_1 T S_{100} + \beta_0 \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_0} T S_{000}, \\
C_{43} &= \beta_0 T D_{000}, & C_{44} &= \tilde{\epsilon}_1 \omega (N S_{100} - N S_{000}), \\
C_{46} &= -\beta_1 T S_{101}, & C_{48} &= \tilde{\epsilon}_1 \omega N S_{101}, \\
C_{54} &= S_{110}, & C_{55} &= D_{211}, \\
C_{58} &= S_{111} - \frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2} S_{211}, & C_{62} &= \tilde{\mu}_1 \omega N S_{110}, \\
C_{64} &= \beta_1 T S_{110}, & C_{65} &= \beta_2 T D_{211}, \\
C_{66} &= \tilde{\mu}_1 \omega (N S_{111} - N S_{211}), & C_{67} &= \tilde{\mu}_2 \omega N D_{211}, \\
C_{68} &= \beta_1 T S_{111} - \beta_2 \frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2} T S_{211}, & C_{72} &= S_{110}, \\
C_{76} &= S_{111} - \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2} S_{211}, & C_{77} &= D_{211}, \\
C_{82} &= -\beta_1 T S_{110}, & C_{84} &= \tilde{\epsilon}_1 \omega N S_{110}, \\
C_{85} &= \tilde{\epsilon}_2 \omega N D_{211}, & C_{86} &= -\beta_1 T S_{111} + \beta_2 \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2} T S_{211}, \\
C_{87} &= -\beta_2 T D_{211}, & C_{88} &= \tilde{\epsilon}_1 \omega (N S_{111} - N S_{211}),
\end{aligned}$$

και τα υπόλοιπα είναι μηδέν.

Η ειδική μορφή του \mathbf{B} και ο φραγμένος εφαπτομενικός τελεστής $\partial_\tau : H^{1/2}(\Gamma_j) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_j)$, για $j = 0, 1$, καταλήγει σε ένα φραγμένο αντίστροφο πίνακα \mathbf{B}^{-1} . Τότε, το σύστημα (2.2.22) γράφεται στη μορφή

$$(\mathbf{I}_8 + \mathbf{K})\phi = \mathbf{g}, \quad (2.2.23)$$

όπου \mathbf{I}_8 είναι ένας 8×8 ταυτοτικός τελεστής, $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ και

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{f} = \left(-2e^{inc}, 0, 0, \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\tilde{\epsilon}_1} \partial_n e^{inc}, 0, 0, 0, 0 \right)^\top.$$

Ορίζουμε τους χώρους γινόμενο

$$\begin{aligned} H_1 &:= \left(H^{1/2}(\Gamma_0) \times H^{-1/2}(\Gamma_0) \right)^2 \times \left(H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1) \right)^2, \\ H_2 &:= \left(H^{-1/2}(\Gamma_0) \times H^{-3/2}(\Gamma_0) \right)^2 \times \left(H^{-1/2}(\Gamma_1) \times H^{-3/2}(\Gamma_1) \right)^2, \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αντιστοίχισης των ολοκληρωτικών τελεστών [16, 45], συνεπάγεται ότι ο τελεστής $\mathbf{K} : H_1 \rightarrow H_2$ είναι συμπαγής. Επιπλέον, δείχνουμε ότι αυτός ο τελεστής είναι επίσης αντιστρέψιμος.

Έστω ότι ϕ λύνει το $(\mathbf{I}_8 + \mathbf{K})\phi = 0$, δηλαδή το ευθύ πρόβλημα για το $e^{inc} = \partial_n e^{inc} = \partial_\tau e^{inc} = 0$, στο Γ_0 . Από το θέωρημα 2.2.2, έχουμε ότι $e^j = h^j = 0$, στο Ω_j , για $j = 0, 1, 2$. Κατασκευάζουμε τα πεδία $\tilde{e}(\mathbf{x}), \tilde{h}(\mathbf{x})$

$$\tilde{e}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{100}\psi_1^e(\mathbf{x}) + \mathcal{S}_{101}\psi_2^e(\mathbf{x}), \quad \tilde{h}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_{100}\psi_1^h(\mathbf{x}) + \mathcal{S}_{101}\psi_2^h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0,$$

τα οποία είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο Ω_0 . Έτσι, $\tilde{e} = \tilde{h} = 0$, στο Ω_0 , και κατά συνέπεια στο Γ_0 . Στη συνέχεια προκύπτει ότι $e_1 = \tilde{e} = 0$, και $h_1 = \tilde{h} = 0$, στο Γ_0 . Η σχέση διαπήδησης της κανονικής παραγώγου της στο

Γ_0 περιγράφεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} 0 &= NS_{100}\psi_1^u - \frac{1}{2}\psi_1^u + NS_{101}\psi_2^u \\ &= NS_{100}\psi_1^u + \frac{1}{2}\psi_1^u + NS_{101}\psi_2^u, \end{aligned}$$

για $u = e, h$.

Συνεπώς $\psi_1^e = \psi_1^h = 0$, στο Γ_0 . Από τη σχέση (2.2.21), προκύπτει ότι $\psi_0^e = \psi_0^h = 0$. Από τις σχέσεις διαπήδησης στο σύνορο Γ_1 συμπεραίνουμε ότι

$$\left(NS_{111} - \frac{1}{2}\right)\psi_2^e = 0, \quad \left(NS_{111} - \frac{1}{2}\right)\psi_2^h = 0, \quad \text{στο } \Gamma_1.$$

Εφόσον το κ_1^2 δεν είναι εσωτερική ιδιοτιμή Dirichlet στο Ω_1 , η μοναδική επιλυσιμότητα των παραπάνω ολοκληρωτικών εξισώσεων δίνει $\psi_2^e = \psi_2^h = 0$ στο Γ_1 . Χρησιμοποιώντας το (2.2.21), παίρνουμε επίσης $\psi_3^e = \psi_3^h = 0$, στο Γ_1 . Καθώς τα πεδία e^0, h^0 τείνουν στο Γ_0 , χρησιμοποιώντας (2.2.12a) και (2.2.12c) συνεπάγεται

$$\left(D_{000} - \frac{1}{2}\right)\phi_0^e = 0, \quad \left(D_{000} - \frac{1}{2}\right)\phi_0^h = 0, \quad \text{στο } \Gamma_0.$$

Η αντιστρεψιμότητα εδώ προκύπτει από την υπόθεση ότι το κ_0^2 δεν είναι μια εσωτερική ιδιοτιμή Dirichlet στο $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_0}$. Τότε $\phi_0^e = \phi_0^h = 0$, σε Γ_0 .

Η ίδια διαδικασία για τα πεδία e^2, h^2 , μειώνει τις συνοριακές συνθήκες (2.2.12e) και (2.2.12g) σε

$$\left(D_{211} - \frac{1}{2}\right)\phi_3^e = 0, \quad \left(D_{211} - \frac{1}{2}\right)\phi_3^h = 0, \quad \text{στο } \Gamma_1.$$

Η υπόθεση για κ_2^2 οδηγεί στην ασήμαντη λύση $\phi_3^e = \phi_3^h = 0$, στο Γ_1 . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού $\phi = 0$. \square

2.2.2 Σκεδαστής με Hölder συνεχή δείκτη διάθλασης

Έστω $\mathbf{x}' = (x, z)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, και $z \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε έναν διηλεκτρικό, ισότροπο και μη ομογενή κύλινδρο στο χώρο \mathbb{R}^3 , ο οποίος είναι απείρως μακρύς και παράλληλος με τον άξονα z . Ο κύλινδρος χαρακτηρίζεται από τη χωρικά εξαρτώμενη ηλεκτρική διαπερατότητα $\epsilon(\mathbf{x}') = \epsilon(x) > 0$ και σταθερή μαγνητική διαπερατότητα $\mu(\mathbf{x}') = \mu_0$. Θεωρούμε ότι $\epsilon = \epsilon_0$, εξωτερικά της μπάλας η οποία περιέχει την μη ομοιογένεια.

Επομένως, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα (\mathbf{E}, \mathbf{H}) ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^3. \quad (2.2.24)$$

Ορίζουμε με $\theta \in (0, \pi)$, τη γωνία πρόσπτωσης ως προς τον άξονα z και με $\phi \in [0, 2\pi]$, τη πολική γωνία. Στη συνέχεια, το εγκάρσιο μαγνητικό (TM) λοξά προσπίπτον κύμα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} E^{inc}(\mathbf{x}', t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \mathbf{p} e^{ik_0 \mathbf{x}' \cdot \mathbf{d}} e^{-i\omega t}, \\ H^{inc}(\mathbf{x}', t) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} (\sin \phi, -\cos \phi, 0) e^{ik_0 \mathbf{x}' \cdot \mathbf{d}} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

για το διάνυσμα $\mathbf{p} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$, και κατεύθυνση πρόσπτωσης $\mathbf{d} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, -\cos \theta)$. Ορίζεται $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, όπου $\omega > 0$ είναι η συχνότητα. Ορίζουμε $\beta = k_0 \cos \theta$ και $\kappa_0^2 = k_0^2 - \beta^2$. Λαμβάνοντας υπόψη τη κυλινδρική συμμετρία του σκεδαστή (παράλληλο ως προς τον άξονα z και z -ανεξάρτητο από τις παραμέτρους του υλικού), θεωρούμε την ακόλουθη μορφή για ένα χρονο-αρμονικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα [28, 49]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}', t) = \mathbf{e}(x) e^{-i\beta z} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}', t) = \mathbf{h}(x) e^{-i\beta z} e^{-i\omega t}. \quad (2.2.26)$$

Οι εξισώσεις Maxwell (2.2.24) για ένα κύμα της μορφής (2.2.26) γράφονται στο σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon}{k^2} \nabla e \right) + \frac{k^2}{\omega \epsilon} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla h + k^2 e &= 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^2, \\ \frac{k^2}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{k^2} \nabla h \right) - \frac{k^2}{\omega \mu_0} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla e + k^2 h &= 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

όπου e και h είναι οι z - συντεταγμένες των πεδίων \mathbf{e} και \mathbf{h} , αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι $k^2(x) = \omega^2 \mu_0 \epsilon(x) - \beta^2$ και

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, ορίζουμε τον δείκτη διάθλασης $n(x) = \frac{\epsilon(x)}{\epsilon_0} \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, για $\alpha \in (0, 1)$ και τη συνάρτηση $m := 1 - n$ με συμπαγή φορέα. Επομένως, η εξίσωση (2.2.27) χρησιμοποιώντας τη ταυτότητα $\nabla \cdot (f \nabla g) = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$, για βαθμωτές συναρτήσεις f και g , παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Delta e + \kappa_0^2 e &= k_0^2 m e - \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \left(\frac{\epsilon}{k^2} \right) \cdot \nabla e - \frac{k^2}{\omega \epsilon} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla h, \quad \text{στο } \mathbb{R}^2, \\ \Delta h + \kappa_0^2 h &= k_0^2 m h - \frac{k^2}{\mu_0} \nabla \left(\frac{\mu_0}{k^2} \right) \cdot \nabla h + \frac{k^2}{\omega \mu_0} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla e, \quad \text{στο } \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε

$$\begin{aligned} \kappa_0^2 - k^2(x) &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \omega^2 \mu_0 \epsilon(x) \\ &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n(x) \\ &= k_0^2 m(x). \end{aligned}$$

Παρομοίως, οι z - συνιστώσες του εισερχόμενου κύματος, χρησιμοποιώντας (2.2.26) και (2.2.29), παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} e^{inc}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin \theta e^{i\kappa_0 x \cdot (\cos \phi, \sin \phi)}, \\ h^{inc}(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Δεδομένου του σχεδασμένου κύματος (2.2.29), βρίσκουμε τη λύση (e, h) της εξίσωσης (2.2.28) στο χώρο \mathbb{R}^2 , τέτοια ώστε το σχεδασμένο κύμα

$$\begin{aligned} e^{sc} &= e - e^{inc}, \\ h^{sc} &= h - h^{inc}, \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.2.6).

Αποδεικνύουμε τη καλή τοποθέτηση του ευθέως προβλήματος (2.2.28) - (2.2.29) λαμβάνοντας υπόψη τις εργασίες [16, 49] και εφαρμόζουμε την αρχή μοναδικής συνέχισης (unique continuation principal) για ελλειπτικούς τελεστές [24, 54].

Αρχικά διατυπώνουμε το θεώρημα μοναδικότητας λύσης του προβλήματος (2.2.28) - (2.2.29) λαμβάνοντας υπόψη κάποιες προϋποθέσεις για το δείκτη διάθλασης n .

Θεώρημα 2.2.4 Έστω $n \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Τότε, το πρόβλημα (2.2.28) - (2.2.29) έχει το πολύ μια ακτινοβολούσα λύση.

Απόδειξη: Για να αποδειχθεί η μοναδικότητα, αρκεί να δείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα, $e^{inc} = h^{inc} = 0$, έχει τη μηδενική λύση. Έστω $\Omega_r \subset \mathbb{R}^2$ δίσκος με ακτίνα r και σύνορο Γ_r , το οποίο περιέχει τη μη ομοιογένεια. Εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα *Green* στο Ω_r και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2.2.27) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_0}{\kappa_0^2} \int_{\Gamma_r} e^{sc} \frac{\partial \overline{e^{sc}}}{\partial \nu} ds &= \int_{\Omega_r} \left(\frac{\epsilon(x)}{k^2(x)} |\nabla e^{sc}|^2 + e^{sc} \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon(x)}{k^2(x)} \nabla e^{sc} \right) \right) dx \\
&= \int_{\Omega_r} \left(\frac{\epsilon(x)}{k^2(x)} |\nabla e^{sc}|^2 - \epsilon |e^{sc}|^2 \right) dx \\
&\quad - \frac{\beta}{\omega} \int_{\Omega_r} e^{sc} J \nabla \left(\frac{1}{k^2(x)} \right) \cdot \nabla \overline{h^{sc}} dx,
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα. Ομοίως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green για το μαγνητικό πεδίο προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_0}{\kappa_0^2} \int_{\Gamma_r} h^{sc} \frac{\partial \overline{h^{sc}}}{\partial \nu} ds &= \int_{\Omega_r} \left(\frac{\mu_0}{k^2(x)} |\nabla h^{sc}|^2 + h^{sc} \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{k^2(x)} \nabla \overline{h^{sc}} \right) \right) dx \\
&= \int_{\Omega_r} \left(\frac{\mu_0}{k^2(x)} |\nabla h^{sc}|^2 - \mu_0 |h^{sc}|^2 \right) dx \\
&\quad + \frac{\beta}{\omega} \int_{\Omega_r} h^{sc} J \nabla \left(\frac{1}{k^2(x)} \right) \cdot \nabla \overline{e^{sc}} dx.
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green στο Ω_r , καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\int_{\Gamma_r} e^{sc} \overline{h^{sc}} J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \cdot \nu ds = \int_{\Omega_r} \nabla \cdot \left(e^{sc} \overline{h^{sc}} J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) dx.$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης μηδενίζεται όταν το k είναι σταθερό στο σύνορο Γ_r . Επιπλέον, το δεξί μέλος γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_r} \nabla \cdot \left(e^{sc} \overline{h^{sc}} J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) dx = \int_{\Omega_r} \overline{h^{sc}} \left(\nabla e^{sc} \cdot J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) dx \\
&\quad + \int_{\Omega_r} e^{sc} \left(\nabla \overline{h^{sc}} \cdot J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) dx + \int_{\Omega_r} e^{sc} \overline{h^{sc}} \nabla \cdot J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) dx.
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μηδέν διότι $\nabla \cdot J \nabla f = (\partial_{x_1 x_2} - \partial_{x_2 x_1}) f = 0$, για κάθε βαθμωτή συνάρτηση f . Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις

προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega_r} \overline{h^{sc}} \left(\nabla e^{sc} \cdot J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) dx = - \int_{\Omega_r} e^{sc} \left(\nabla \overline{h^{sc}} \cdot J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) dx. \quad (2.2.33)$$

Λαμβάνοντας υπόψη το άθροισμα του φανταστικού μέλους των εξισώσεων (2.2.31) και (2.2.32) :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_0}{\kappa_0^2} \Im \int_{\Gamma_r} e^{sc} \frac{\partial \overline{e^{sc}}}{\partial \nu} ds + \frac{\mu_0}{\kappa_0^2} \Im \int_{\Gamma_r} h^{sc} \frac{\partial \overline{h^{sc}}}{\partial \nu} ds \\ &= -\frac{\beta}{\omega} \Im \int_{\Omega_r} e^{sc} J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \cdot \nabla \overline{h^{sc}} dx \\ &+ \frac{\beta}{\omega} \Im \int_{\Omega_r} h^{sc} J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \cdot \nabla \overline{e^{sc}} dx \quad (2.2.34) \\ &= -\frac{\beta}{\omega} \Im \int_{\Omega_r} e^{sc} J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \cdot \nabla \overline{h^{sc}} dx \\ &- \frac{\beta}{\omega} \Im \int_{\Omega_r} h^{sc} J \nabla \left(\frac{1}{k^2} \right) \cdot \nabla \overline{e^{sc}} dx. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις με την (2.2.33), καταλήγουμε την εξίσωση

$$\Im \left(\frac{\epsilon_0}{\kappa_0^2} \int_{\Gamma_r} e^{sc} \frac{\partial \overline{e^{sc}}}{\partial \nu} ds + \frac{\mu_0}{\kappa_0^2} \int_{\Gamma_r} h^{sc} \frac{\partial \overline{h^{sc}}}{\partial \nu} ds \right) = 0. \quad (2.2.35)$$

Από τη συνθήκη ακτινοβολίας (1.0.7) προκύπτει ότι [64]

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \left[\frac{\epsilon_0}{\kappa_0^2} \left| \frac{\partial e^{sc}}{\partial \nu} \right|^2 + \epsilon_0 |e^{sc}|^2 + \frac{\mu_0}{\kappa_0^2} \left| \frac{\partial h^{sc}}{\partial \nu} \right|^2 + \mu_0 |h^{sc}|^2 \right] ds \\ &= -2\kappa_0 \lim_{r \rightarrow \infty} \Im \left(\frac{\epsilon_0}{\kappa_0^2} \int_{\Gamma_r} e^{sc} \frac{\partial \overline{e^{sc}}}{\partial \nu} ds + \frac{\mu_0}{\kappa_0^2} \int_{\Gamma_r} h^{sc} \frac{\partial \overline{h^{sc}}}{\partial \nu} ds \right). \quad (2.2.36) \end{aligned}$$

Συνεπώς, από την εξίσωση (2.2.35) και την εφαρμογή του λήμματος Rellich [16] προκύπτει ότι $e^{sc} = h^{sc} = 0$, in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_r}$. Λαμβάνοντας υπόψη, ότι το σύστημα (2.2.28) είναι ελλειπτικό και $n \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, συνεπάγεται ότι από

το θεώρημα(unique continuation principle) προκύπτει ότι $e^{sc} = h^{sc} = 0$, in \mathbb{R}^2 [16, 54]. \square

Για να αποδείξουμε ύπαρξη μοναδικής λύσης, ξαναγράφουμε την εξίσωση (2.2.28) ως σύστημα Lippmann-Schwinger ολοκληρωτικών εξισώσεων [16].

Ορίζουμε τη θεμελιώδη λύση (2.2.17) με $j = 0$. Η πρώτη εξίσωση της (2.2.28) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} e(x) &= \int_{\Gamma_r} \left(\frac{\partial e^{inc}}{\partial n(y)} \Phi(x, y) - e^{inc} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) \\ &\quad - \int_{\Omega_r} \left(k_0^2 m(y) e(y) - \frac{k^2(y)}{\epsilon(y)} \nabla \left(\frac{\epsilon(y)}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla e(y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(y)^2}{\epsilon(y)\omega} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla h(y) \right) \Phi(x, y) dy, \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Επιπλέον, προκύπτει

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\Gamma_r} \left(\frac{\partial h^{inc}}{\partial n(y)} \Phi(x, y) - h^{inc} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) \\ &\quad - \int_{\Omega_r} \left(k_0^2 m(y) h(y) - k^2(y) \nabla \left(\frac{1}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla h(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k(y)^2}{\mu_0 \omega} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla e(y) \right) \Phi(x, y) dy \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Ορίζουμε τους ολοκληρωτικούς τελεστές

$$\begin{aligned} (S[m]f)(x) &= k_0^2 \int_{\Omega_r} \Phi(x, y) m(y) f(y) dy, & x \in \mathbb{R}^2, \\ (K[g]f)(x) &= \int_{\Omega_r} \Phi(x, y) \frac{k^2(y)}{g(y)} \nabla \left(\frac{g(y)}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla f(y) dy, & x \in \mathbb{R}^2, \\ (L[g]f)(x) &= \frac{\beta}{\omega} \int_{\Omega_r} \Phi(x, y) \frac{k^2(y)}{g(y)} J \nabla \left(\frac{1}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla f(y) dy, & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

όπου εξαρτώνται από τις συναρτήσεις στις αγκύλες και δρουν στη συνάρτηση f . Τότε, το σύστημα των εξισώσεων (2.2.43) – (2.2.44) παίρνει τη συμπαγή μορφή

$$(\mathbf{I} + \mathbf{T})\mathbf{u} = \mathbf{u}^{inc}, \quad (2.2.40)$$

όπου \mathbf{I} είναι ένας 2×2 ταυτοτικός πίνακας και

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} S[m] - K[\epsilon/k^2] & -L[\epsilon] \\ L[\mu_0] & S[m] - K[1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{u}^{inc} = \begin{pmatrix} e^{inc} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.41)$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε το θεώρημα ισοδυναμίας του προβλήματος (2.2.28) – (2.2.29) και του συστήματος το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στο θεώρημα απόδειξης της μοναδικότητας.

Θεώρημα 2.2.5 *Αν $e, h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ είναι λύση του προβλήματος (2.2.28) – (2.2.29), τότε e, h λύνουν το σύστημα*

$$(\mathbf{I} + \mathbf{T})\mathbf{u} = \mathbf{u}^{inc}, \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \quad (2.2.42)$$

Αντιστρόφως, αν $e, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ επιλύουν το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (2.2.42), τότε e, h είναι λύση του προβλήματος (2.2.28) – (1.0.7).

Απόδειξη: Αυτή η απόδειξη ακολουθεί την ίδια διαδικασία με την απόδειξη του [16, Θεώρημα 8.3]. Έστω e, h η λύση του (2.2.28) – (2.2.29). Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2.2, θεωρούμε ένα αυθαίρετο σημείο $x \in \mathbb{R}^2$ και επιλέγουμε έναν ανοιχτό δίσκο Ω_r , με όριο Γ_r , που περιέχει το συμπαγή φορέα m , έτσι ώστε $x \in \Omega_r$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green για e στο Ω_r και λαμβάνοντας

υπόψη την εξίσωση (2.2.28) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
e(x) &= \int_{\Gamma_r} \left(\frac{\partial e^{inc}}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - e^{inc} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \\
&\quad - \int_{\Omega_r} \left(k_0^2 m(y) e(y) - \frac{k^2(y)}{\epsilon(y)} \nabla \left(\frac{\epsilon(y)}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla e(y) \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2(y)}{\epsilon(y) \omega} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla h(y) \right) \Phi(x, y) dy.
\end{aligned} \tag{2.2.43}$$

Επιπλέον, προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_r} \left(\frac{\partial e^{sc}}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - e^{sc} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_r} \left(\Phi(x, y) \Delta e^{sc} - e^{sc} \Delta \Phi(x, y) \right) dy = 0,
\end{aligned}$$

διότι το πεδίο e^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας (2.2.6). Αξίζει να σημειωθεί ότι στο χωρικό ολοκλήρωμα, μπορούμε να ενσωματώσουμε τον χώρο \mathbb{R}^2 , καθώς το m έχει συμπαγή φορέα στο Ω_r και το ϵ και το k^2 είναι σταθερά εκτός Ω_r .

Ομοίως, για το μαγνητικό πεδίο έχουμε

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{\Gamma_r} \left(\frac{\partial h^{inc}}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - h^{inc} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \\
&\quad - \int_{\Omega_r} \left(k_0^2 m(y) h(y) - k^2(y) \nabla \left(\frac{1}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla h(y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k^2(y)}{\mu_0 \omega} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla e(y) \right) \Phi(x, y) dy.
\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση (2.2.43) με την εξίσωση (2.2.44) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.2.39), συμπεραίνουμε ότι το σύστημα (2.2.42) είναι ικανοποιημένο. Το δεύτερο στοιχείο του \mathbf{u}^{inc} είναι μηδέν λόγω της ειδικής μορφής του πεδίου, όπως (2.2.29).

Αντιστρόφως, έστω $e, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ είναι λύση του συστήματος (2.2.42), τότε επειδή το m έχει συμπαγή φορέα, από [16, Θεώρημα 8.1], προκύπτει ότι $e, h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ορίζουμε

$$e^{sc}(x) = - \int_{\Omega_r} \left(k_0^2 m(y) e(y) - \frac{k^2(y)}{\epsilon(y)} \nabla \left(\frac{\epsilon(y)}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla e(y) - \frac{k^2(y)}{\epsilon(y)\omega} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla h(y) \right) \Phi(x, y) dy, \quad (2.2.45)$$

$$h^{sc}(x) = - \int_{\Omega_r} \left(k_0^2 m(y) h(y) - k^2(y) \nabla \left(\frac{1}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla h(y) + \frac{k^2(y)}{\mu_0 \omega} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2(y)} \right) \cdot \nabla e(y) \right) \Phi(x, y) dy. \quad (2.2.46)$$

Εφόσον το Φ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (2.2.6) ομοιόμορφα σε σχέση με τα y , και το m έχει συμπαγή φορέα, αποδεικνύεται εύκολα ότι e^{sc}, h^{sc} ικανοποιούν επίσης τις συνθήκες ακτινοβολίας. Επιπλέον, το παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Delta e^{sc} + \kappa_0^2 e^{sc} &= k_0^2 m e - \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \left(\frac{\epsilon}{k^2} \right) \cdot \nabla e - \frac{k^2}{\omega \epsilon} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla h, \\ \Delta h^{sc} + \kappa_0^2 h^{sc} &= k_0^2 m h - \frac{k^2}{\mu_0} \nabla \left(\frac{\mu_0}{k^2} \right) \cdot \nabla h + \frac{k^2}{\omega \mu_0} J \nabla \left(\frac{\beta}{k^2} \right) \cdot \nabla e. \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

Εφόσον $\Delta e^{inc} + \kappa_0^2 h^{inc} = 0$ και $\Delta h^{inc} + \kappa_0^2 h^{inc} = 0$, το παραπάνω σύνολο εξισώσεων καταλήγει σε (2.2.28). \square

Θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι το παραπάνω θεώρημα εγγυάται την ισοδυναμία μεταξύ του προβλήματος σκέδασης (2.2.28) - (2.2.29) και του συστήματος ολοκληρωτικών εξισώσεων (2.2.42). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ύπαρξη λύσης.

Θεώρημα 2.2.6 Το πρόβλημα σκέδασης (2.2.28) - (2.2.29) έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη: Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα 2.2.5 αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης του (2.2.42). Σημειώνουμε ότι ο τελεστής $S : H^m(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^{m+2}(\mathbb{R}^2)$ είναι φραγμένος και οι τελεστές $K, L : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ έχουν έναν ασθενώς ιδιόμορφο πυρήνα και ως εκ τούτου είναι συμπαγείς [16]. Έτσι, ο τελεστής $\mathbf{T} : (H^1(\mathbb{R}^2))^2 \rightarrow (H^1(\mathbb{R}^2))^2$ είναι επίσης συμπαγής και ισχύει η θεωρία Riesz-Fredholm. Πρέπει να δείξουμε ότι η ομογενής εξίσωση $(\mathbf{u}^{inc} \equiv \mathbf{0})$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Με το θεώρημα 2.2.5 μια λύση $(\mathbf{I} + \mathbf{T})\mathbf{u} = \mathbf{0}$, λύνει το πρόβλημα ομοιογενούς σκέδασης με $e^{inc} = h^{inc} = 0$, και επομένως από το θεώρημα 2.2.2 προκύπτει ότι $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. \square

2.3 Αριθμητική επίλυση ευθέων προβλημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται αριθμητική επίλυση του ευθέως προβλήματος (2.2.28) – (2.2.29) θεωρώντας τη λύση του γραμμικού συστήματος (2.2.22) ή (2.2.23). Χειριζόμαστε τις ιδιομορφίες των πυρήνων των ολοκληρωτικών τελεστών χρησιμοποιώντας κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης και προσεγγίζοντας τους ομαλούς πυρήνες με τον τραπεζοειδή κανόνα [45]. Δεν παρουσιάζουμε εδώ τις μορφές και τις αποσυνθέσεις των πυρήνων αφού μπορούν να βρεθούν σε προηγούμενες εργασίες [16, 45]. Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Maue [47] για να μειώσουμε την υπερ-ιδιομορφία των κάθετων και εφαπτομενικών παραγώγων διπλού δυναμικού [28].

Παρουσιάζουμε αποτελέσματα για δύο παραδείγματα. Στην πρώτη περίπτωση, εξετάζουμε τέσσερις αυθαίρετες σημειακές πηγές και κατασκευάζουμε συνοριακά δεδομένα έτσι ώστε να έχουμε αναλυτικά πεδία ως λύσεις. Τα συγκρίνουμε με την αριθμητική λύση. Η αναμενόμενη εκθετική σύγκλιση επιτυγχάνεται [43]. Το δεύτερο παράδειγμα ασχολείται με το αρχικό πρόβλημα σκέδασης από ένα πλάγια προσπίπτον κύμα. Η ορθότητα της παραγόμενης λύσης δεν

μπορεί να ελεγχθεί για αυτήν την περίπτωση, αλλά το πρώτο παράδειγμα δικαιολογεί την ακρίβεια του προτεινόμενου αριθμητικού σχήματος.

Υποθέτουμε την ακόλουθη παραμετρική αναπαράσταση για τις ομαλές συνοριακές καμπύλες

$$\Gamma_0 := \{ \mathbf{x}^0(t) = (x_1^0(t), x_2^0(t)), t \in [0, 2\pi] \},$$

$$\Gamma_1 := \{ \mathbf{x}^1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t)), t \in [0, 2\pi] \},$$

όπου $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι C^2 -ομαλή, 2π -περιοδική, '1-1' και αριστερόστροφη παραμετροποίηση. Θεωρούμε $2n$ ισαπέχοντα σημεία ταξινόμησης

$$t_j = \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, \dots, 2n - 1.$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αριθμητικά το ευθύ πρόβλημα σκέδασης στο διδιάστατο χώρο, \mathbb{R}^2 . Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία περιγράφονται με βάση τις εξισώσεις Lippmann-Schwinger και ο δείκτης διάθλασης παρουσιάζει Hölder συνέχεια.

Για τον αριθμητικό υπολογισμό των παραγώγων, χρησιμοποιούμε την αριθμητική μέθοδο εύρεσης του παραγώγου, μία διαδικασία που χρησιμοποιεί πολυωνυμική παρεμβολή για να επιτύχει ακρίβεια υψηλού βαθμού.

Αφού υπολογίσουμε τις παραγώγους, αναζητούμε τη λύση ενός συστήματος εξισώσεων που μας επιτρέπει να βρούμε τις πυκνότητες των πεδίων. Αυτές οι πυκνότητες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για τον υπολογισμό των μακρινών πεδίων, τα οποία είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση της συμπεριφοράς των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε μεγαλύτερες αποστάσεις από την πηγή.

2.3.1 Τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης

Παράδειγμα 1 Θεωρούμε 4 αυθαίρετα σημεία $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \Omega$, και $\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \in \Omega_0$ και ορίζουμε τις συνοριακές συναρτήσεις $f_j^k(\mathbf{x})$, $k = 0, 1$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
f_1^0(\mathbf{x}) &= H_0^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) - H_0^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})|), \\
f_2^0(\mathbf{x}) &= -\kappa_1\tilde{\mu}_1\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_4(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|} - \kappa_1\beta_1 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_3(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|} \\
&\quad + \kappa_0\tilde{\mu}_0\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_2(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_2(\mathbf{x})|} + \kappa_0\beta_0 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})|}, \\
f_3^0(\mathbf{x}) &= H_0^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) - H_0^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_2(\mathbf{x})|), \\
f_4^0(\mathbf{x}) &= -\kappa_1\tilde{\epsilon}_1\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_3(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|} + \kappa_1\beta_1 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_4(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|} \\
&\quad + \kappa_0\tilde{\epsilon}_0\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})|} - \kappa_0\beta_0 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_2(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_2(\mathbf{x})|}, \\
f_1^1(\mathbf{x}) &= H_0^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) - H_0^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|), \\
f_2^1(\mathbf{x}) &= -\kappa_1\tilde{\mu}_1\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_4(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|} - \kappa_1\beta_1 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_3(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|} \\
&\quad - \kappa_2\tilde{\mu}_2\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_4(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|} - \kappa_2\beta_2 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_3(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|}, \\
f_3^1(\mathbf{x}) &= H_0^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) - H_0^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|), \\
f_4^1(\mathbf{x}) &= -\kappa_1\tilde{\epsilon}_1\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_3(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|} + \kappa_1\beta_1 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_4(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|} \\
&\quad - \kappa_2\tilde{\epsilon}_2\omega \frac{H_1^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_3(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|} + \kappa_2\beta_2 \frac{H_1^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_4(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|},
\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{r}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{z}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Επομένως, τα πεδία

$$\begin{aligned}
e^0(\mathbf{x}) &= H_0^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})|), \quad h^0(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}_2(\mathbf{x})|), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \\
e^1(\mathbf{x}) &= H_0^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|), \quad h^1(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\kappa_1|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \\
e^2(\mathbf{x}) &= H_0^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_3(\mathbf{x})|), \quad h^2(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\kappa_2|\mathbf{r}_4(\mathbf{x})|), \quad \mathbf{x} \in \Omega_2,
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων Helmholtz

$$\Delta e^j + \kappa_j^2 e^j = 0, \quad \Delta h^j + \kappa_j^2 h^j = 0, \quad j = 0, 1, 2,$$

και τις συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας

$$f_1^0 = e^1 - e^0, \quad \text{on } \Gamma_0,$$

$$f_2^0 = \tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} - \tilde{\mu}_0 \omega \frac{\partial h^0}{\partial n} - \beta_0 \frac{\partial e^0}{\partial \tau}, \quad \text{on } \Gamma_0,$$

$$f_3^0 = h^1 - h^0, \quad \text{on } \Gamma_0,$$

$$f_4^0 = \tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} - \tilde{\epsilon}_0 \omega \frac{\partial e^0}{\partial n} + \beta_0 \frac{\partial h^0}{\partial \tau}, \quad \text{on } \Gamma_0,$$

$$f_1^1 = e^1 - e^2, \quad \text{on } \Gamma_1,$$

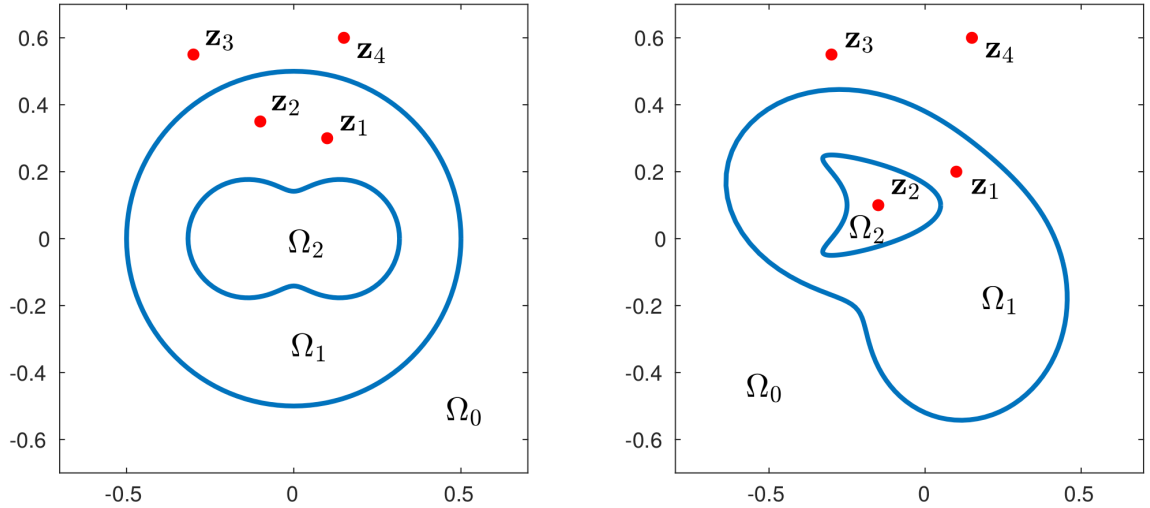
$$f_2^1 = \tilde{\mu}_1 \omega \frac{\partial h^1}{\partial n} + \beta_1 \frac{\partial e^1}{\partial \tau} - \tilde{\mu}_2 \omega \frac{\partial h^2}{\partial n} - \beta_2 \frac{\partial e^2}{\partial \tau}, \quad \text{on } \Gamma_1,$$

$$f_3^1 = h^1 - h^2, \quad \text{on } \Gamma_1,$$

$$f_4^1 = \tilde{\epsilon}_1 \omega \frac{\partial e^1}{\partial n} - \beta_1 \frac{\partial h^1}{\partial \tau} - \tilde{\epsilon}_2 \omega \frac{\partial e^2}{\partial n} + \beta_2 \frac{\partial h^2}{\partial \tau}, \quad \text{on } \Gamma_1.$$

Τα εξωτερικά πεδία e^0, h^0 ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας (1.0.7).

Συγκρίνουμε τις αριθμητικές λύσεις u_n^j , για $u = e, h, j = 0, 1, 2$, με τις θεω-



Σχήμα 2.1. Η γεωμετρία του προβλήματος και η θέση των σημειακών πηγών που εξετάστηκαν στην πρώτη (αριστερά) και στη δεύτερη (δεξιά) περίπτωση του πρώτου παραδείγματος.

ρητικές λύσεις (2.3.1), ως προς τη παράμετρο διαμέρισης n . Χρησιμοποιώντας

την ασυμπτωτική συμπεριφορά των εξισώσεων Hankel, μπορούμε επίσης να συσχετίσουμε το ακριβές μακρινό πεδίο του σχεδιασμένου κύματος, που δίνεται από

$$e^\infty(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{-4ie^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa_0}} e^{-i\kappa_0\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{z}_1}, \quad h^\infty(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{-4ie^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa_0}} e^{-i\kappa_0\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{z}_2}, \quad \hat{\mathbf{x}} \in S,$$

με τα αριθμητικά πεδία να παίρνουν τη τιμή

$$e_n^\infty(\hat{\mathbf{x}}(t)) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa_0}} \int_0^{2\pi} e^{-i\kappa_0\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}^0(t)} [-i\kappa_0(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0(t)))\phi_0^e(t) - \psi_0^e(t)] |\mathbf{x}^{0'}(t)| dt,$$

$$h_n^\infty(\hat{\mathbf{x}}(t)) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa_0}} \int_0^{2\pi} e^{-i\kappa_0\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}^0(t)} [-i\kappa_0(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0(t)))\phi_0^h(t) - \psi_0^h(t)] |\mathbf{x}^{0'}(t)| dt,$$

όπου λύνονται οι συναρτήσεις πυκνότητας (2.2.22) με το δεξί μέλος να αντικαθιστάται με

$$\mathbf{f} = (f_1^0, \dots, f_4^0, f_1^1, \dots, f_4^1)^\top.$$

Θεωρούμε ένα εσωτερικό σύνορο Γ_1 με παραμετρική μορφή

$$\mathbf{x}^1(t) = \sqrt{0.1 \cos^2 t + 0.02 \sin^2 t} (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

και το σύνορο Γ_0 είναι κύκλος με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα 0.5. Οι παράμετροι των υλικών έχουν τιμές $(\epsilon_0, \mu_0) = (1, 1)$, $(\epsilon_1, \mu_1) = (2, 2)$, και $(\epsilon_2, \mu_2) = (3, 3)$. Θέτουμε $\omega = 1$ και $\theta = \pi/3$. Οι πηγές τοποθετούνται στις θέσεις $\mathbf{z}_1 = (0.1, 0.3)$, $\mathbf{z}_2 = (-0.1, 0.35) \in \Omega_1$, και $\mathbf{z}_3 = (-0.3, 0.55)$, $\mathbf{z}_4 = (0.15, 0.6) \in \Omega_0$. Στους πίνακες Πίνακα 2.1 και Πίνακα 2.2 βλέπουμε τις αριθμητικές και τις ακριβείς τιμές των εσωτερικών πεδίων στη θέση $(0, -0.3) \in \Omega_1$, και $(0.2, 0) \in \Omega_2$, αντίστοιχα, για τον αυξάνοντα αριθμό διαμέρισης n . Η σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των ακριβών σχεδιασμένων πεδίων στο κοντινό και στο μακρινό πεδίο παρουσιάζεται στους παρακάτω πίνακες. Υπολογίζουμε το κοντινό πεδίο στη θέση $(0.2, 0.7)$ και το μακρινό πεδίο στην

n	$e_n^1(0, -0.3)$	$h_n^1(0, -0.3)$
8	$0.358002472423 + i 0.465413341071$	$0.340975378878 + i 0.470609286666$
16	$0.371293663181 + i 0.464362535355$	$0.359126522592 + i 0.469698417374$
32	$0.371625795959 + i 0.464351276823$	$0.359231933566 + i 0.469693507804$
64	$0.371625444291 + i 0.464351267787$	$0.359232825162 + i 0.469693536105$
	$e^1(0, -0.3)$	$h^1(0, -0.3)$
	$0.371625444291 + i 0.464351267787$	$0.359232825161 + i 0.469693536105$

Πίνακας 2.1. Τα αριθμητικά και τα θεωρητικά εσωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στο Ω_1 .

n	$e_n^2(0.2, 0)$	$h_n^2(0.2, 0)$
8	$0.095999847542 + i 0.523746820044$	$0.334044441714 + i 0.476243803875$
16	$0.110704266109 + i 0.520805574336$	$0.350976468890 + i 0.473070152121$
32	$0.111073699187 + i 0.520785772802$	$0.351044736683 + i 0.473067712107$
64	$0.111073338024 + i 0.520785762600$	$0.351045738875 + i 0.473067595167$
	$e^2(0.2, 0)$	$h^2(0.2, 0)$
	$0.111073338024 + i 0.520785762600$	$0.351045738874 + i 0.473067595167$

Πίνακας 2.2. Τα αριθμητικά και τα θεωρητικά εσωτερικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στο Ω_2 .

κατεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}(0)$. Η εκθετική σύγκλιση φαίνεται ξεκάθαρα, όπου σχεδιάζουμε την L^2 -νόρμα (σε ημιλογαριθμική κλίμακα) η διαφορά μεταξύ του ακριβούς και του υπολογισμένου κοντινού και μακρινού πεδίου, αντίστοιχα.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα από την παραμετροποίηση του συνόρου και των παραμέτρων του υλικού.

Για να το υποστηρίξουμε αυτό, εξετάζουμε επίσης την ακόλουθη περίπτωση: ένα εσωτερικό όριο σε σχήμα χαρταετού Γ_1 με τη παραμετρική μορφή

$$\mathbf{x}^1(t) = (0.15 \cos t + 0.1 \cos 2t - 0.2, 0.15 \sin t + 0.15), \quad t \in [0, 2\pi],$$

n	$e_n^0(0.2, 0.7)$	$h_n^0(0.2, 0.7)$
8	$0.959974539981 - i 0.688119559604$	$0.949222323693 - i 0.596002286134$
16	$0.968181135721 - i 0.686366381756$	$0.960497156194 - i 0.607397006008$
32	$0.968378330983 - i 0.686291758194$	$0.960550801453 - i 0.607417933832$
64	$0.968378106099 - i 0.686291722922$	$0.960551378447 - i 0.607418413636$
	$e^0(0.2, 0.7)$	$h^0(0.2, 0.7)$
	$0.968378106099 - i 0.686291722922$	$0.960551378446 - i 0.607418413635$

Πίνακας 2.3. Το προσεγγιστικό και το ακριβές μακρινό πεδίο των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων στο Ω_0 .

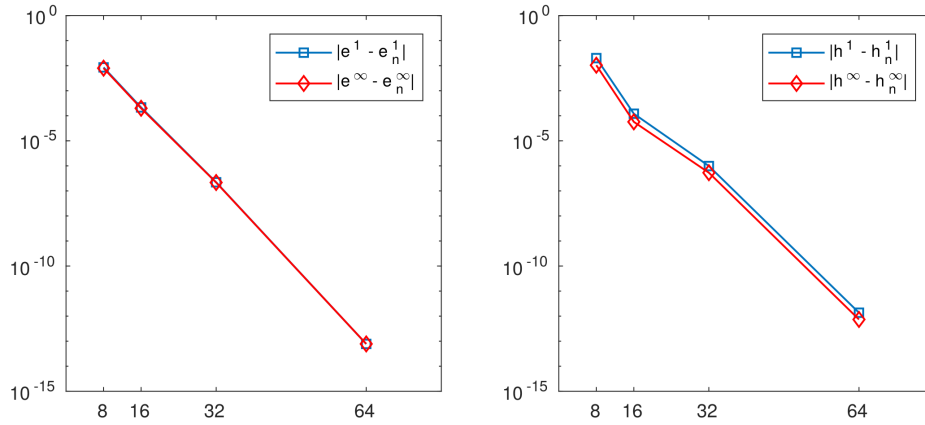
n	$e_n^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$	$h_n^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$
8	$0.542584437477 - i 0.654900164839$	$0.648825689486 - i 0.546227842661$
16	$0.551320002791 - i 0.656421849521$	$0.656410781814 - i 0.551518614562$
32	$0.551551141020 - i 0.656427307849$	$0.656426811866 - i 0.551550742378$
64	$0.551550951838 - i 0.656427255240$	$0.656427255241 - i 0.551550951838$
	$e^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$	$h^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$
	$0.551550951838 - i 0.656427255240$	$0.656427255240 - i 0.551550951838$

Πίνακας 2.4. Το προσεγγιστικό και το ακριβές μακρινό πεδίο των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων.

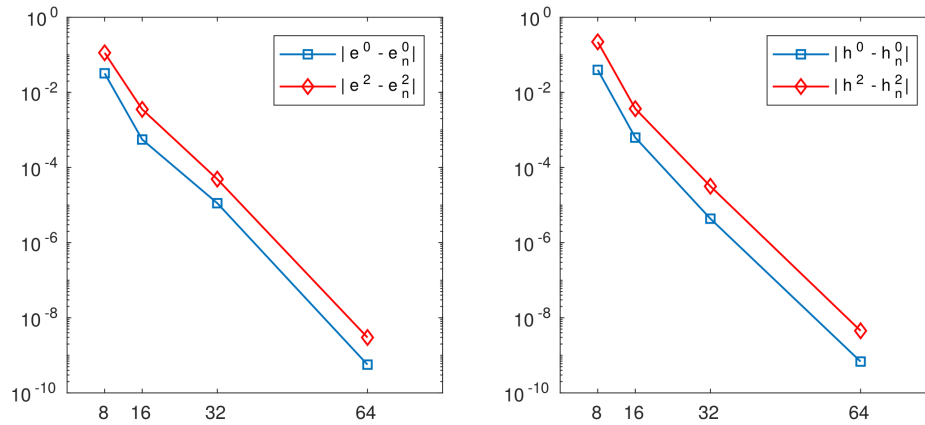
και ένα σύνορο Γ_0 έχοντας την παραμετροποίηση

$$\mathbf{x}^0(t) = \frac{0.45 + 0.3 \cos t - 0.1 \sin 2t}{1 + 0.7 \cos t} (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Θέτουμε $\omega = 2$ και $\theta = \pi/6$, με τιμές παραμέτρων των υλικών $(\epsilon_0, \mu_0) = (1, 1)$, $(\epsilon_1, \mu_1) = (3, 2)$, και $(\epsilon_2, \mu_2) = (4, 3)$. Οι θέσεις των σημείων πηγής δίνονται στη δεξιά εικόνα. Η αναμενόμενη σύγκλιση επιτυγχάνεται και για αυτή την περίπτωση.

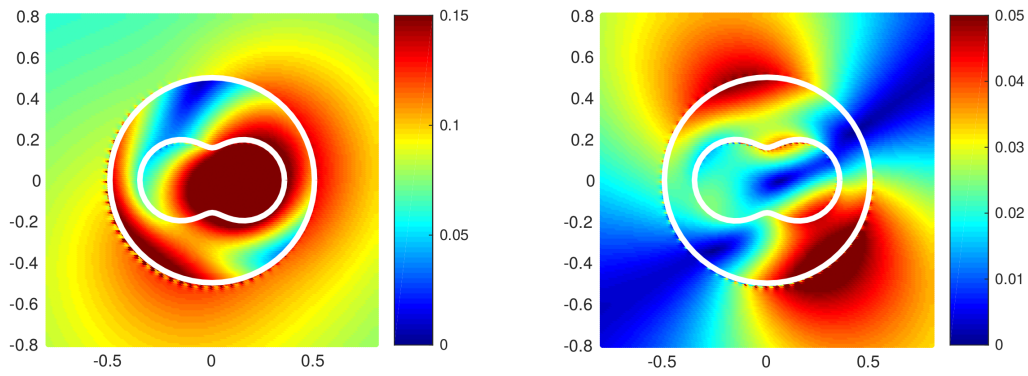


Σχήμα 2.2. Η L^2 -νόρμα (σε ημιλογαριθμική κλίμακα) της διαφοράς μεταξύ του υπολογισμένου και του ακριβούς εσωτερικού (μπλε γραμμή) και του μακρινού πεδίου (κόκκινη γραμμή) του ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου. Τα διαγράμματα είναι σε σχέση με n , για την πρώτη περίπτωση του πρώτου παραδείγματος.

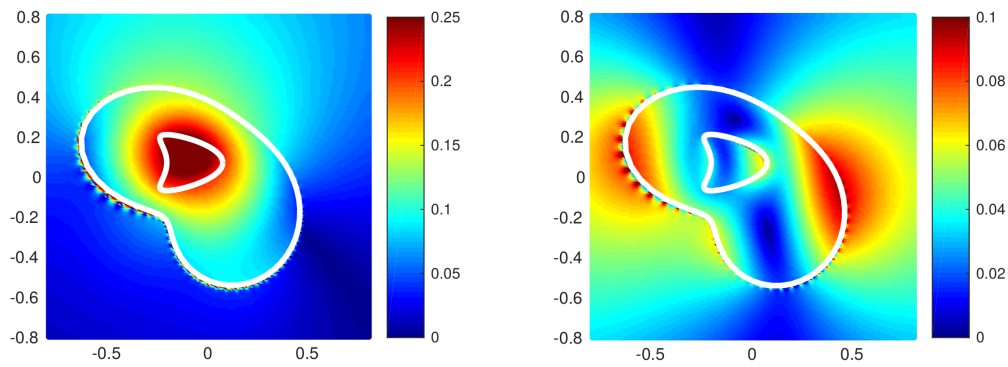


Σχήμα 2.3. Το L^2 -norm (σε ημιλογαριθμική κλίμακα) της διαφοράς μεταξύ του υπολογισμένου και του ακριβούς σχεδασμένου (μπλε γραμμή) και του εσωτερικού (κόκκινη γραμμή) ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου. Τα διαγράμματα είναι σε σχέση με n , για τη δεύτερη περίπτωση του πρώτου παραδείγματος.

Πλάγιο Προσπίπτον Κύμα Θεωρούμε το πρόβλημα σκέδασης ενός πλάγιου προσπίπτοντος κύματος της μορφής (2.2.5), για διαφορετικές τιμές της πολικής γωνίας ϕ , που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση του συμβάντος στο \mathbb{R}^2 . Για τη ρύθμιση του πρώτου παραδείγματος, με $\omega = 2$ και $\phi = \pi/6$, παρουσιάζουμε την κατανομή των νορμών $|e_n^j|$ και $|h_n^j|$, για $j = 0, 1, 2$. Στη δεύτερη εικόνα, οι τιμές αντιστοιχούν στη δεύτερη περίπτωση $\omega = 2$ και



Σχήμα 2.4. Η νόρμα του ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου, για $\omega = 2$ και $\phi = \pi/6$.



Σχήμα 2.5. Η νόρμα του ηλεκτρικού (αριστερά) και του μαγνητικού (δεξιά) πεδίου, για $\omega = 2$ και $\phi = \pi/2$.

$\phi = \pi/2$. Οι παράμετροι των υλικών παραμένουν ίδιοι όπως στο παράδειγμα 1.

n	$e_n^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$	$h_n^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$
8	$0.993319494211 + i 1.009133801346$	$-0.018421009850 - i 0.004947726129$
16	$0.994010792440 + i 1.011577516180$	$-0.018442242474 - i 0.004931405262$
32	$1.211607176927 + i 1.201391675134$	$-0.017447924789 - i 0.005939745469$
64	$1.103309422675 + i 1.106344862792$	$-0.018021560174 - i 0.005454141432$
	$e^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$	$h^\infty(\hat{\mathbf{x}}(0))$
	$1.103309422675 + i 1.106344862792$	$-0.018021560174 - i 0.005454141432$

Πίνακας 2.5. Το προσεγγιστικό και το ακριβές μακρινό πεδίο των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων.

2.3.2 Hölder συνεχής δείκτης διάθλασης

Αρχικά, θεωρούμε το τετράγωνο πεδίο ορισμού $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Το εν λόγω πεδίο ορισμού θα χρησιμοποιηθεί για να καθορίσουμε τη δομή που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων.

Επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου για την εύρεση των μερικών παραγώγων [5, 6, 67]. Υποθέτουμε επίσης ότι όλες οι συναρτήσεις που συμμετέχουν στη διαδικασία είναι τουλάχιστον συνεχώς παραγωγίσιμες. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει την χρήση της μεθόδου των Clenshaw - Curtis για τον αριθμητικό υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων πάνω στο D [14, 26, 27]. Στο χωρίο D , αυτή η μέθοδος αποδεικνύεται εξίσου ακριβής με τη μέθοδο Gauss, με το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι τα βάρη του ολοκληρώματος μπορούν να υπολογιστούν γρήγορα.

Κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου εύρεσης παραγώγου, εκτιμούμε τις παραγώγους με την χρήση των τιμών των συναρτήσεων στα σημεία του πλέγματος. Η ομοιόμορφη κατανομή των σημείων του πλέγματος επιτρέπει την ακριβή εκτίμηση των παραγώγων.

Κεφάλαιο 3

Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης

Το κεφάλαιο αυτό επιχειρεί να αποτυπώσει σε βάθος μια προσέγγιση για την αντιμετώπιση ενός ευρύτερου προβλήματος σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, προσδιορίζοντας το δείκτη διάθλασης.

Αρχικά, αποδεικνύουμε το αντίστροφο πρόβλημα θεωρητικά, επικεντρώνοντας στις συνθήκες μετάδοσης στο σύνορο [8, 9, 10, 11, 12, 19, 20, 38, 40, 50]. Αυτή η ανάλυση προϋποθέτει γνώση των μακρινών πεδίων, μιας κεντρικής έννοιας στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, που αναφέρεται στην περιοχή μακριά από την πηγή όπου τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν ομοιόμορφη διανυσματική διεύθυνση. Επιπλέον, για να εμβαθύνουμε στην κατανόηση του τρόπου διάδοσης των κυμάτων, υιοθετούμε μια πολιική προσέγγιση, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες για την αναπαράσταση των συνθηκών μετάδοσης.

Επόμενο βήμα είναι η περιγραφή των μεθόδων Jacobi και Tikhonov. Η μέθοδος Jacobi είναι μια διαδικασία επαναληπτικής βελτιστοποίησης, προσφέροντας συνεχή βελτίωση της εκτίμησης μέσω διαδοχικών επαναλήψεων. Από την άλλη πλευρά, η μέθοδος Tikhonov εισάγει την έννοια της ομαλοποίησης, βοηθώντας στην αντιμετώπιση των προβλημάτων αστάθειας που μπορεί να προκύπτουν σε πιο περίπλοκα μοντέλα.

Το τελευταίο τμήμα του κεφαλαίου επικεντρώνεται στην δημιουργία αλγο-

ρίθμων για την ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης. Αυτός το τμήμα περιλαμβάνει την πρακτική εφαρμογή των προηγούμενων θεωρητικών πλαισίων, αποδεικνύοντας πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αντιμετωπίσουν πραγματικά προβλήματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο, προσπαθούμε να παρουσιάσουμε έναν συνδυασμό θεωρητικής γνώσης και πρακτικής εφαρμογής, με σκοπό την επίλυση παρόμοιων, σύνθετων προβλημάτων σκέδασης με ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

3.1 Μοναδικότητα δίσκου

Η κύρια προϋπόθεση για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος είναι η γνώση του του μακρινού πεδίου που αντιστοιχεί στο ομογενές πρόβλημα διαπερατότητας. Οι εξισώσεις μακρινού πεδίου έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} e^\infty(\hat{\mathbf{x}}) &= (D^\infty \psi_1^e)(\hat{\mathbf{x}}) - (S^\infty \phi_1^e)(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in S \\ h^\infty(\hat{\mathbf{x}}) &= (D^\infty \psi_1^h)(\hat{\mathbf{x}}) - (S^\infty \phi_1^h)(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in S \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

όπου S είναι η μοναδιαία. Οι τελεστές μακρινου πεδίου έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} (S^\infty f)(\hat{\mathbf{x}}) &= \int_{\Gamma} \Phi^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in S \\ (D^\infty f)(\hat{\mathbf{x}}) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in S \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

όπου Φ^∞ είναι το μακρινό πεδίο της συνάρτησης Green Φ , με εξίσωση:

$$\Phi^\infty(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa_0}} e^{-i\kappa_0 \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}$$

Για να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, πρέπει να περιγράψουμε τα πεδία με αναλυτικό τρόπο. Ισοδύναμα, το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί από τις πολικές συντεταγμένες με το εσωτερικό πεδίο να έχει ως όριο, έναν

κύκλο με ακτίνα R . Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να αποδείξει ότι τα δεδομένα μακρινά πεδία $(e^\infty(\hat{\mathbf{x}}), h^\infty(\hat{\mathbf{x}}))$, για όλα $\hat{\mathbf{x}} \in S$ ενός εισερχόμενου πεδίου μας δίνουν τη μοναδικότητα του δίσκου.

Θεώρημα 3.1.1 Ένας δίσκος με συζευγμένες συνοριακές συνθήκες καθορίζεται μοναδικά, εάν είναι γνωστό το μακρινό πεδίο για ένα προσπίπτον επίπεδο κύμα.

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την Jacobi-Anger εξίσωση για το εισερχόμενο κύμα το πεδίο παίρνει την αναλυτική μορφή:

$$e^{inc} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_0}} e^{ik_0\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_0}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_0\rho) e^{-in\phi}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1.3)$$

Η αναλυτική μορφή των εξωτερικών πεδίων έχει περιγραφεί από τις εξισώσεις:

$$e^{ext}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(D_n J_n(k_0\rho) + E_n H_n^{(1)}(k_0\rho) \right) e^{in\phi} \quad (3.1.4)$$

όπου

$$\begin{aligned} e^{sc}(\rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n H_n^{(1)}(k_0\rho) e^{in\phi}, \\ e^{inc}(\rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n J_n(k_0\rho) e^{in\phi}, \quad D_n = i^n \frac{\sin\theta}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_0}}, \\ h^{sc}(\rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(k_0\rho) e^{in\phi} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Με τον ίδιο τρόπο, η αναλυτική μορφή των εσωτερικών πεδίων γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} e^{int}(\rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n J_n(k_1\rho) e^{in\phi} \\ h^{int}(\rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n J_n(k_1\rho) e^{in\phi} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

όπου $\rho \leq R$ για το εσωτερικό χωρίο. Για να βρούμε τους συντελεστές της παραπάνω σειράς, θα χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες για τις πολικές συντεταγμένες και προκύπτουν το σύστημα

$$\begin{aligned}
K_n \left(J_n(\kappa_1 R) \right) - E_n \left(H_n^{(1)}(\kappa_0 R) \right) &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{\epsilon_0}} i^n J_n(\kappa_0 R) \\
M_n \left(\tilde{\mu}_1 \omega \kappa_1 J_n'(\kappa_1 R) \right) + K_n \left(\frac{\beta_1}{R} J_n(\kappa_1 R) i n \right) \\
+ B_n \left(-\tilde{\mu}_0 \omega \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) \right) + E_n \left(-\frac{\beta_0}{R} H_n^{(1)}(\kappa_0 R) i n \right) &= \frac{\beta_0 \sin\theta}{R\sqrt{\epsilon_0}} i^n J_n(\kappa_0 R) i^n \\
M_n \left(J_n(\kappa_1 R) \right) - B_n \left(H_n^{(1)}(\kappa_0 R) \right) &= 0 \\
K_n \left(\tilde{\epsilon}_1 \omega \kappa_1 J_n'(\kappa_1 R) \right) + M_n \left(-\frac{\beta_1}{R} J_n(\kappa_1 R) i n \right) \\
+ E_n \left(-\tilde{\epsilon}_0 \omega \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) \right) + B_n \left(\frac{\beta_0}{R} H_n^{(1)}(\kappa_0 R) i n \right) &= \tilde{\epsilon}_0 \omega \frac{\sin\theta}{\sqrt{\epsilon_0}} i^n \kappa_0 J_n'(\kappa_0 R)
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Επιλύοντας το σύστημα η ορίζουσα είναι

$$\begin{aligned}
D = & - \left(\tilde{\epsilon}_1 \omega^2 \kappa_1^2 H_n^{(1)}(\kappa_0 R) J_n'(\kappa_1 R) - \tilde{\epsilon}_0 \omega^2 \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) J_n(\kappa_1 R) \right) \\
& \left(\tilde{\mu}_0 \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) J_n(\kappa_1 R) - \tilde{\mu}_1 \kappa_1 H_n^{(1)}(\kappa_0 R) J_n'(\kappa_1 R) \right) \\
& - (J_n(\kappa_1 R))^2 (H_n^{(1)}(\kappa_0 R))^2 n^2 \frac{(\beta_1 - \beta_0)^2}{R^2}
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Οι συντελεστές ορίζονται

$$\begin{aligned}
K_n &= - \frac{2i^{n+1} \sin\theta \tilde{\epsilon}_0 \omega^2 \tilde{\mu}_1 \kappa_1 J_n'(\kappa_1 R) H_n^{(1)}(\kappa_0 R) - \tilde{\mu}_0 \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) J_n(\kappa_1 R)}{\pi R \sqrt{\epsilon_0} D} \\
M_n &= \frac{2i^n \sin\theta \tilde{\epsilon}_0 \omega J_n(\kappa_1 R) H_n^{(1)}(\kappa_0 R) n (\beta_1^2 - \beta_0^2)}{\pi R^2 \sqrt{\epsilon_0} D}
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$B_n = \frac{2i^n \sin\theta (J_n(\kappa_1 R))^2 n \tilde{\epsilon}_0 \omega (\beta_1 - \beta_0)}{\pi R^2 \sqrt{\epsilon_0} D}, \quad E_n = \frac{i^n \sin\theta D_{E_n}}{\sqrt{\epsilon_0} D} \tag{3.1.10}$$

όπου

$$\begin{aligned}
D_{E_n} &= - \left(\tilde{\epsilon}_1 \omega^2 \kappa_1 J_n(\kappa_0 R) J'_n(\kappa_1 R) - \tilde{\epsilon}_0 \omega^2 \kappa_0 J'_n(\kappa_0 R) J_n(\kappa_1 R) \right) \\
&\quad \left(\tilde{\mu}_1 \kappa_1 J'_n(\kappa_1 R) H_n^{(1)}(\kappa_0 R) - \tilde{\mu}_0 \kappa_0 J_n(\kappa_1 R) H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) \right) \\
&\quad + n^2 H_n^{(1)}(\kappa_0 R) J_n(\kappa_0 R) (J_n(\kappa_1 R))^2 \frac{(\beta_1 - \beta_0)^2}{R^2} \\
&= \left(\tilde{\epsilon}_1 \omega^2 W(J_n(\kappa_1 R), H_n^{(1)}(\kappa_0 R)) + (\tilde{\epsilon}_1 - \tilde{\epsilon}_0) \omega^2 \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) J_n(\kappa_1 R) \right) \\
&\quad \left(\tilde{\mu}_1 W(J_n(\kappa_1 R), H_n^{(1)}(\kappa_0 R)) + (\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_0) \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) J_n(\kappa_1 R) \right) \\
&\quad - (J_n(\kappa_1 R))^2 (H_n^{(1)}(\kappa_0 R))^2 n^2 \frac{(\beta_1 - \beta_0)^2}{R^2}
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

και

$$W(J_n(\kappa_1 R), H_n^{(1)}(\kappa_0 R)) = \left(\kappa_1 H_n^{(1)}(\kappa_0 R) J'_n(\kappa_1 R) - \kappa_0 H_n^{(1)'}(\kappa_0 R) J_n(\kappa_1 R) \right).$$

Παρατηρούμε ότι από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel και Bessel τα σχεδασμένα κύματα μπορούν να επεκταθούν κατά μήκος του ορίου στον εσωτερικά εκτός από το μηδέν[16].

Από την εργασία του [4], θεωρούμε δύο δίσκους D_1 και D_2 με κέντρα z_1 και z_2 οι οποίοι έχουν τα ίδια μακρινά πεδία δηλαδή $u_{\infty,1} = u_{\infty,2}$ για ένα εισερχόμενο κύμα, όπου $u_{\infty,1} = (e_1^\infty, h_1^\infty)$ and $u_{\infty,2} = (e_2^\infty, h_2^\infty)$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Rellich, καταλήγουμε στην εξίσωση $u_1^{sc} = u_2^{sc}$, όπου $u_1^{sc} = (e_1^{sc}, h_1^{sc})$, $u_2^{sc} = (e_2^{sc}, h_2^{sc})$ in $\mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$. Επίσης, ισχύει ότι $u^{sc} = u_1^{sc} = u_2^{sc}$. Επιπλέον, έστω $z_1 \neq z_2$. Συνεπάγεται ότι το σχεδασμένο πεδίο u_1^{sc} μπορεί να επεκταθεί στο χώρο $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_1\}$ και το δεύτερο σχεδασμένο πεδίο u_2^{sc} επεκτείνεται στο χώρο $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_2\}$. Από την εξίσωση $u^{sc} = u_1^{sc} = u_2^{sc}$, καταλήγουμε ότι u^{sc} είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz. Επειδή το σχεδασμένο πεδίο u^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας τότε

ισχύει $u^{sc} = 0$ στον \mathbb{R}^2 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ορίζουμε $D = D_1$ με κέντρο το μηδέν και R είναι η ακτίνα, υποθέτουμε το εσωτερικό πρόβλημα. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων για σταθερό n . Έστω $(e^0, h^0), (e, h) \in H^1(B) \times H^1(B)$. Θεωρούμε τις αναπαραστάσεις:

$$e^0(x) = S_k \partial_n e^0(x) - D_k e^0(x),$$

$$h^0(x) = S_k \partial_n h^0(x) - D_k h^0(x),$$

$$e(x) = S \partial_n e(x) - D e(x),$$

$$h(x) = S \partial_n h(x) - D h(x).$$

Επιπλέον, λαμβάνουμε υπόψη τις εξισώσεις από την εργασία [28] για $u = e, h$, οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned} (NS - \frac{1}{2}I) \partial_n u &= NDu, & (NS_k - \frac{1}{2}I) \partial_n u^0 &= ND_k u^0 \\ (TDu - TS \partial_n u) &= -\frac{1}{2} \partial_\tau u, & (TD_k u^0 - TS_k \partial_n u^0) &= -\frac{1}{2} \partial_\tau u^0, \\ (D + \frac{1}{2}I)u &= S \partial_n u, & (D_k + \frac{1}{2}I)u^0 &= S_k \partial_n u^0 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.1.12) και τις συνοριακές συνθήκες έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (S_k - S) \partial_n e^0 - (D_k - D) e^0 &= 0, \\ \left(\tilde{\mu}_0 \omega (NS_k - \frac{1}{2}I) - \tilde{\mu}_1 \omega (NS - \frac{1}{2}I) \right) \partial_n h^0 - \\ (\tilde{\mu}_0 \omega ND_k - \tilde{\mu}_1 \omega ND) h^0 + \beta_1 (TS_k - TS) \partial_n e^0 - \beta_1 (TD_k - TD) e^0 &= 0, \\ (S_k - S) \partial_n h^0 - (D_k - D) h^0 &= 0, \\ \left(\tilde{\epsilon}_0 \omega (NS_k - \frac{1}{2}I) - \tilde{\epsilon}_1 \omega (NS - \frac{1}{2}I) \right) \partial_n e^0 - \\ (\tilde{\epsilon}_0 \omega ND_k - \tilde{\epsilon}_1 \omega ND) e^0 + \beta_1 (TD_k - TD) h^0 - \beta_1 (TS_k - TS) \partial_n h^0 &= 0, \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω σύστημα, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $Z(k)v=0$, όπου

$$Z(k) = \begin{pmatrix} -(D_k - D) & 0 & (S_k - S) & 0 \\ -\beta_1(TD_k - TD) & -(\tilde{\mu}_0\omega ND_k - \tilde{\mu}_1\omega ND) & \beta_1(TS_k - TS) & \tilde{\mu}_0\omega(ANS_k) - \tilde{\mu}_1\omega(ANS) \\ 0 & -(D_k - D) & 0 & (S_k - S) \\ -(\tilde{\epsilon}_0\omega ND_k - \tilde{\epsilon}_1\omega ND) & \beta_1(TD_k - TD) & \tilde{\epsilon}_0\omega(ANS_k) - \tilde{\epsilon}_1\omega(ANS) & -\beta_1(TS_k - TS) \end{pmatrix}$$

$ANS_k = (NS_k - \frac{1}{2}I)$, $ANS = (NS - \frac{1}{2}I)$ και $v = (e^0, h^0, \partial_n e^0, \partial_n h^0)^T$. και την κεντρική ιδέα από τις αναφορές [12, 20, 35, 52] αποδεικνύουμε ότι τελεστής $Z(k)$ είναι Fredholm. Εφαρμόζοντας την αναλυτική Θεωρία Fredholm έχουμε ότι ο τελεστής εκτός από ένα διακριτό σύνολο. Τότε, έχουμε λύση μόνο για ένα διακριτό πεπερασμένο σύνολο ιδιοτιμών[55]. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο και ως εκ τούτου οι δύο δίσκοι πρέπει να έχουν το ίδιο κέντρο. Για να αποδείξουμε ότι οι δύο δίσκοι έχουν την ίδια ακτίνα, ακολουθώντας το [48] παίρνουμε ότι οι δίσκοι D_1 και D_2 έχουν την ίδια ακτίνα.

Πιο αναλυτικά, αρκεί να δείξουμε ότι για $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ και $d \in \mathcal{S}$, ισχύει ότι $\Phi_e^\infty(-d, z) = \tilde{\sigma} e^{sc}(z, d)$ με $\tilde{\sigma} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sin\theta} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa}}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green, προκύπτει ότι

$$\Phi_e^{sc}(x, z) = \int_{\partial D} \left[\Phi_e^{sc}(y, z) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_e^{sc}(y, z)}{\partial n(y)} \Phi(x, y) \right] ds(y)$$

Από την ασυμπτωτική συμπεριφορά του $\Phi(x, y)$, έχουμε

$$\Phi_e^\infty(-d, z) = \tilde{\sigma} \int_{\partial D} \left[\Phi_e^{sc}(y, z) \frac{\partial e^i(y, d)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_e^{sc}(y, z)}{\partial n(y)} e^i(y, d) \right] ds(y)$$

όπου $e(y, d) := e^{sc}(y, d) + e^i(y, d)$ and $G_e(y, z) = \Phi_e^{sc}(y, z) + \Phi(y, z)$. Λαμβάνοντας υπόψιν την εργασία [48], συνεπάγεται ότι

$$\Phi_e^\infty(-d, z) = \tilde{\sigma} \int_{\partial D} \left[\Phi_e^{sc}(y, z) \frac{\partial e(y, d)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_e^{sc}(y, z)}{\partial n(y)} e(y, d) \right] ds(y) \quad (3.1.13)$$

και

$$e^{sc}(z, d) = \int_{\partial D} \left[e(y, d) \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial n(y)} - \frac{\partial e^{sc}(y, d)}{\partial n(y)} \Phi(y, z) \right] ds(y) \quad (3.1.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (3.1.13) και (3.1.14), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\sigma}} \Phi_e^\infty(-d, z) - e^{sc}(z, d) &= \\ &= \int_{\partial D} \left[G_e(y, z) \frac{\partial e(y, d)}{\partial n(y)} - \frac{\partial G_e(y, z)}{\partial n(y)} e(y, d) \right] ds(y) \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Επιπλέον, από τις συνοριακές συνθήκες συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} e^1 &= G_e, \\ h^1 &= G_h, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \tau} &= \frac{\tilde{\mu}_1 \omega}{\beta_0} \frac{\partial h^1}{\partial n} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{\partial e^1}{\partial \tau} - \frac{\tilde{\mu}_0 \omega}{\beta_0} \frac{\partial h^{sc}}{\partial n}, \\ \frac{\partial e}{\partial n} &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \frac{\partial e^1}{\partial n} - \frac{\beta_1}{\epsilon_0 \omega} \frac{\partial h^1}{\partial \tau} + \frac{\beta_0}{\epsilon_0 \omega} \frac{\partial h^{sc}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial G_e}{\partial \tau} &= \frac{\tilde{\mu}_1 \omega}{\beta_0} \frac{\partial \Phi_h^1}{\partial n} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{\partial \Phi_e^1}{\partial \tau} - \frac{\tilde{\mu}_0 \omega}{\beta_0} \frac{\partial \Phi_h^{sc}}{\partial n}, \\ \frac{\partial G_e}{\partial n} &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \frac{\partial \Phi_e^1}{\partial n} - \frac{\beta_1}{\epsilon_0 \omega} \frac{\partial \Phi_h^1}{\partial \tau} + \frac{\beta_0}{\epsilon_0 \omega} \frac{\partial \Phi_h^{sc}}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.1.16) στις εξισώσεις (3.1.15), έχουμε

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} \left[G_e(y, z) \frac{\partial e(y, d)}{\partial n(y)} - \frac{\partial G_e(y, z)}{\partial n(y)} e(y, d) \right] ds(y) \\
&= \int_{\partial D} \left[\frac{\partial e(y, d)}{\partial n(y)} G_e - \frac{\partial G_e(y, z)}{\partial n(y)} e(y, d) \right] ds(y) \\
&= \int_{\partial D} \left[\Phi_e^{sc}(y, z) \frac{\partial e(y, d)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_e^{sc}(y, z)}{\partial n(y)} e(y, d) \right] ds(y) \\
&+ \int_{\partial D} \left[\Phi_e(y, z) \frac{\partial e(y, d)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_e(y, z)}{\partial n(y)} e(y, d) \right] ds(y) = 0
\end{aligned}$$

Επομένως, οι σχεδιαστές D_1 και D_2 έχουν την ίδια ακτίνα. Επίσης, τα μακρινά πεδία εξαρτώνται μόνο από τη γωνία που δημιουργείται από το διάνυσμα παρατήρησης και τότε θα γνωρίζουμε τα μακρινά πεδία που προέρχονται από από ένα προσπίπτοντα κύματα. Τότε, έχουμε μοναδικότητα. \square

3.2 Αριθμητικές μέθοδοι

Ο δείκτης διάθλασης χρησιμεύει ως βασικό χαρακτηριστικό της διάδοσης του φωτός μέσα σε ένα μέσο. Είναι ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό στο πλαίσιο των προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης, ζωτικής σημασίας για τον προσδιορισμό του τρόπου με τον οποίο επηρεάζεται το ηλεκτρομαγνητικό κύμα καθώς διασχίζει ένα μέσο. Ωστόσο, η ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης σε ένα υποκαθορισμένο σύστημα συχνά θέτει μια σημαντική πρόκληση, δεδομένης της πολυπλοκότητας του.

Αυτό το κομμάτι της διατριβής εμβαθύνει στην εφαρμογή μιας παραλλαγής της μεθόδου Jacobi, περιγράφοντας την εφαρμογή της για την εκτίμηση του δείκτη διάθλασης ενός μέσου που υποβάλλεται σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Ξεκινάμε με την επιλογή μιας αρχικής εικασίας για τη συνάρτηση δείκτη διάθλασης. Αυτή η αρχική εκτίμηση είναι ζωτικής σημασίας, καθώς αποτελεί

τη βάση για όλες τις επόμενες επαναλήψεις. Ωστόσο, ο προσδιορισμός μιας ιδανικής αρχικής εικασίας μπορεί συχνά να είναι μια πολύπλοκη εργασία από μόνη της, που απαιτεί βαθιά κατανόηση των ιδιοτήτων του μέσου και της υποκείμενης φυσικής. Κάθε επανάληψη περιλαμβάνει τον επανυπολογισμό του δείκτη διάθλασης σε κάθε σημείο του πλέγματος, χρησιμοποιώντας τα γειτονικά σημεία και τα υπάρχοντα δεδομένα πεδίου για την ενημέρωση των τιμών του δείκτη διάθλασης.

Η ενσωμάτωση της ομαλοποίησης Tikhonov στη μέθοδο Jacobi μπορεί να βελτιώσει σημαντικά τη σταθερότητα και την αξιοπιστία της διαδικασίας εκτίμησης του δείκτη διάθλασης. Αυτή η υβριδική προσέγγιση συνδυάζει τα πλεονεκτήματα και των δύο μεθόδων, επιτρέποντας μια πιο ισχυρή λύση σε πολύπλοκα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα. Αυτός ο συνδυασμός παρέχει μια αποτελεσματική προσέγγιση για τον ακριβή προσδιορισμό του δείκτη διάθλασης σε πολύπλοκα συστήματα.

Τέλος, συζητάμε την ακρίβεια του εκτιμώμενου δείκτη διάθλασης. Συγκρίνοντας τον ανακατασκευασμένο δείκτη διάθλασης με τον πραγματικό δείκτη διάθλασης αξιολογείται η ακρίβεια της μεθόδου. Αυτή η αξιολόγηση μπορεί να απαιτήσει την επιστροφή στο αρχικό στάδιο, προτρέποντας την επιλογή μιας διαφορετικής αρχικής εικασίας για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων.

Κατά τη διάρκεια αυτού του κεφαλαίου, οι αναγνώστες θα αποκτήσουν μια ολοκληρωμένη κατανόηση της εφαρμογής της μεθόδου Jacobi στον αλγόριθμο που έχει κατασκευαστεί για την εκτίμηση του δείκτη διάθλασης. Επεξηγώντας πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι για την αποκρυπτογράφηση πολύπλοκων φυσικών φαινομένων, στοχεύουμε να παρέχουμε πολύτιμες γνώσεις του συνδυασμού των μαθηματικών και της φυσικής. Αυτή η τομή δεν είναι απλώς ενδιαφέρουσα από θεωρητική σκοπιά, αλλά παίζει επίσης

ζωτικό ρόλο σε πολυάριθμες εφαρμογές του πραγματικού κόσμου, που κυμαίνονται από τον εντοπισμό εγκλεισμάτων σε μη ομογενή μέσα καθώς και σε ιατρικές εφαρμογές.

3.2.1 Μέθοδος Tikhonov

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, υπάρχουν εξισώσεις οι οποίες είναι μη καλά τοποθετημένες. Επομένως, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov για να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα στη παρούσα διατριβή. Έστω η μη καλά τοποθετημένη εξίσωση

$$A\phi = f \quad (3.2.1)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov, προσεγγίζουμε το μη φραγμένο τελεστή A^{-1} με ένα γραμμικό και φραγμένο τελεστή R_α . Το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης: Εύρεση του $\phi_\alpha \in X$ το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση Tikhonov

$$J_\alpha := \|A\phi - f\|^2 + \alpha\|\phi\|^2. \quad (3.2.2)$$

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε κάποια βασικά θεωρήματα που έχουν χρησιμοποιηθεί [16]

Θεώρημα 3.2.1 Έστω X, Y χώροι Hilbert και $\alpha > 0$. Τότε η συνάρτηση Tikhonov έχει ελάχιστη και μοναδική λύση ϕ_α . Αυτό το ελάχιστο είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$(\alpha I + A^*A)\phi_\alpha = A^*f \quad (3.2.3)$$

και εξαρτάται συνεχώς από το f .

Απόδειξη: Το συμπέρασμα προκύπτει από τη θεωρία Riesz-Fredholm [16].□

Θεώρημα 3.2.2 Η λύση ϕ_α της εξίσωσης (3.2.3) παίρνει τη μορφή $\phi_\alpha = R_\alpha I$ όπου $R_\alpha : Y \rightarrow X$ με τύπο

$$R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$$

και είναι μοναδική. Επίσης, αν ο τελεστής είναι "1-1" με πυκνό σύνολο τιμών τότε υπάρχει μοναδικό α τέτοιο ώστε

$$\|AR_\alpha f - f\| = \delta \quad (3.2.4)$$

όπου $0 \leq \delta \leq \|f\|$.

Η παράμετρος ομαλοποίησης επιλέγεται εκ των προτέρων. Η σύγκλιση του αριθμητικού αλγορίθμου εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρου, η οποία μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων.

3.2.2 Μέθοδος Jacobi

Για την επίλυση του συστήματος $Ax = b$ χρησιμοποιούμε την επαναληπτική μέθοδο Jacobi. Το σύστημα επιλύεται προσεγγιστικά όπου η ακολουθία $x^{(k)}$ προσεγγίζει τη λύση του συστήματος $x = A^{-1}b$. Για παράδειγμα, επιλύουμε ένα 3x3 σύστημα με τον κλασικό τρόπο αλλά και με τη χρήση των Jacobi επαναλήψεων. Η λύση του συστήματος έχει τη μορφή

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

Στη συνέχεια, επιλύουμε το ίδιο σύστημα με τη μέθοδο Jacobi. Γνωρίζοντας τη προσέγγιση $x^{(k-1)}$ της εξίσωσης $x = A^{-1}b$, βρίσκουμε τη προσέγγιση $x^{(k)}$

$$x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)})/a_{11}$$

$$x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)})/a_{22}$$

$$x_3^{(k)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-1)})/a_{33}$$

Για να μπορεί να λυθεί το σύστημα με την επαναληπτική μέθοδο, θα πρέπει τα διαγώνια στοιχεία να είναι διάφορο του μηδενός. Για ένα γενικό σύστημα $n \times n$ ισχύει

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}$$

με $a_{ii} \neq 0$ και $i = 1, \dots, n$.

3.2.3 Μέθοδος Clenshaw - Curtis

Η μέθοδος Clenshaw-Curtis είναι μια αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση ολοκληρωμάτων με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Ένας απλός τρόπος για να κατανοήσουμε τη μέθοδο Clenshaw-Curtis, είναι να ολοκληρώσουμε στο $x = \cos(\theta)$. Τότε το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^\pi f(\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta$$

Χρησιμοποιώντας (αν γνωρίζουμε) τον μετασχηματισμό Fourier του συνημιτόνου

$$f(\cos\theta) = F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta)$$

το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \sin\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2A_n}{1-n^2}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι δε γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του συνημιτόνου, υπολογίζουμε το διακριτό μετασχηματισμό συνημιτόνου του $F(\theta)$ για ισαπέχοντα σημεία $\theta = \pi s/N, s = 0, 1, \dots, N,$

$$a_n = 2 \sum_{s=0}^N F\left(\frac{\pi s}{N}\right) \cos \frac{\pi s n}{N}$$

Συνεπάγεται ότι

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n}{N}\right) \cos(n\theta)$$

Επομένως η εξίσωση αριθμητικής ολοκλήρωσης Clenshaw-Curtis παίρνει τη μορφή

$$\int_0^\pi f(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n}{N}\right) \frac{2}{1-n^2}$$

Ο λόγος που αυτό συνδέεται με τα πολυώνυμα Chebyshev είναι ότι κατά τον ορισμό ισχύει ότι $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$. Έτσι, η συνημιτονική σειρά Fourier που παρουσιάζεται είναι μια προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$ με χρήση των πολυωνύμων Chebyshev:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x),$$

και έτσι ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $f(x)$ ολοκληρώνοντας την προσεγγιστική της επέκταση σε όρους πολυωνύμων Chebyshev. Τα σημεία αξιολόγησης $x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)$ αντιστοιχούν στα ακρότατα του πολυωνύμου Chebyshev.

3.3 Αριθμητική επίλυση αντίστροφων προβλημάτων

3.3.1 Τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης

Μας ενδιαφέρει να λύσουμε αριθμητικά το αντίστροφο πρόβλημα της ανακατασκευής του δείκτη διάθλασης της δισδιάστατης διατομής του κυλίνδρου, χρησιμοποιώντας τη γνώση των μακρινών πεδίων ($e^\infty(\hat{x})$, $h^\infty(\hat{x})$), για $\hat{x} \in S$, όπου S στο μοναδιαίο κύκλο, για ένα εισερχόμενο κύμα της μορφής (2.2.5).

Πρώτα, λύνουμε το ευθύ πρόβλημα για να βρούμε τις πυκνότητες και μετά τα μακρινά πεδία.

Έστω ότι $\kappa_1^2 = n_0 \kappa_0^2$, στο σύνορο Γ με $n_0 \neq 1$ και $\kappa_1^2(x) = n(x) \kappa_0^2$, για $x \in D_1$ και έναν τμηματικά συνεχή δείκτη διάθλασης n . Θέτοντας $n = 1 - m$ και χρησιμοποιώντας την εργασία [18] το πρόβλημα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Delta e^{ext} + \kappa_0^2 e^{ext} &= 0, & \Delta h^{ext} + \kappa_0^2 h^{ext} &= 0, & x \in D_0, \\ \Delta e^1 + \kappa_0^2 e^1 &= m \kappa_0^2 e^1, & \Delta h^1 + \kappa_0^2 h^1 &= m \kappa_0^2 e^1, & x \in D_1, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} e^1 &= e^0 + g_1, & \text{on } \Gamma, \\ \lambda_\mu \tilde{\mu}_0 \frac{\partial h^1}{\partial n} + \frac{\beta_0}{n_0} \frac{\partial e^1}{\partial \tau} &= \tilde{\mu}_0 \frac{\partial h^0}{\partial n} + \beta_0 \frac{\partial e^0}{\partial \tau} + g_2, & \text{on } \Gamma, \\ h^1 &= h^0 + g_3, & \text{on } \Gamma, \\ \lambda_\epsilon \tilde{\epsilon}_0 \frac{\partial e^1}{\partial n} - \frac{\beta_0}{n_0} \frac{\partial h^1}{\partial \tau} &= \tilde{\epsilon}_0 \frac{\partial e^0}{\partial n} - \beta_0 \frac{\partial h^0}{\partial \tau} + g_4, & \text{on } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

όπου $\lambda_\mu = \frac{\mu_1}{n_0 \mu_0}$, $\lambda_\epsilon = \frac{\epsilon_1}{n_0 \epsilon_0}$, $g_1 = e^{inc}$, $g_2 = \beta_0 \partial_\tau e^{inc}$, $g_3 = 0$ και $g_4 = \tilde{\epsilon}_0 \partial_n e^{inc}$.

Εφαρμόζουμε την ευθύ μέθοδο (Green's formulas) και προκύπτουν οι

παρακάτω αναπαραστάσεις των πεδίων

$$\begin{aligned}
e^0(\mathbf{x}) &= \mathcal{D}_0\psi^e(\mathbf{x}) + \mathcal{S}_0\phi^e(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\
h^0(\mathbf{x}) &= \mathcal{D}_0\psi^h(\mathbf{x}) + \mathcal{S}_0\phi^h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\
e^1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}(\mathcal{S}_1\phi^e - \mathcal{D}_1\psi^e - \mathcal{S}_m\phi_1)(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\
h^1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\tilde{\mu}_0}(\mathcal{S}_1\phi^h - \mathcal{D}_1\psi^h - \mathcal{S}_m\psi_1)(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

όπου έχουμε εισάγει τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος (2.2.18) για το χώρο $f \in C(\Gamma)$ και το χωρικό δυναμικό

$$(\mathcal{S}_m g)(\mathbf{x}) = \kappa_0^2 \int_{D_1} \Phi_1(x, \mathbf{y}) m(\mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in D_1,$$

για τη θεμελιώση λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Phi_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_j |\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_j, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές εξισώσεις και τις γνωστές σχέσεις διαπήδησης, οι πυκνότητες ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} S_1 - S_0 \right) \phi^e - \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} D_1 + D_0 \right) \psi^e - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} S_m \phi^1 + \left(\frac{1}{2\tilde{\epsilon}_0} + \frac{1}{2} \right) \psi^e = g_1 \\
& \left(\lambda_\mu N S_1 - \tilde{\mu}_0 N S_0 \right) \phi^h - \left(\lambda_\mu N D_1 + \tilde{\mu}_0 N D_0 \right) \psi^h + \left(\frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\epsilon}_0} T S_1 - \beta_0 T S_0 \right) \phi^e, \\
& - \left(\frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\epsilon}_0} T D_1 + \beta_0 T D_0 \right) \psi^e - \lambda_\mu N S_m \psi_1 - \frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\epsilon}_0} T S_m \phi_1 + \left(\frac{\lambda_\mu - \tilde{\mu}_0}{2} \right) \phi^h \\
& \quad \quad \quad + \left(\frac{\beta_0}{2n_0 \tilde{\epsilon}_0} \partial_\tau + \frac{\beta_0}{2} \partial_\tau \right) \psi^e = g_2, \\
& \left(\frac{1}{\tilde{\mu}_0} S_1 - S_0 \right) \phi^h - \left(\frac{1}{\tilde{\mu}_0} D_1 + D_0 \right) \psi^h + \left(\frac{1}{2\tilde{\mu}_0} + \frac{1}{2} \right) \psi^h - \frac{1}{\tilde{\mu}_0} S_m \psi_1 = g_3, \\
& \left(\lambda_\epsilon N S_1 - \tilde{\epsilon}_0 N S_0 \right) \phi^e - \left(\lambda_\epsilon N D_1 + \tilde{\epsilon}_0 N D_0 \right) \psi^e - \left(\frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\mu}_0} T S_1 + \beta_0 T S_0 \right) \phi^h \\
& \quad \quad \quad + \left(\frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\mu}_0} T D_1 + \beta_0 T D_0 \right) \psi^h - \lambda_\epsilon N S_m \phi_1 + \frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\mu}_0} T S_m \psi_1 + \left(\frac{\lambda_\epsilon - \tilde{\epsilon}_0}{2} \right) \phi^e
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\beta_0}{2n_0\tilde{\mu}_0}\partial_\tau - \frac{\beta_0}{2}\partial_\tau\right)\psi^h = g_4,$$

όπου έχουμε εισάγει τους ολοκληρωτικούς τελεστές (2.2.19) και τους χωρικούς τελεστές

$$\begin{aligned} (S_m f)(x) &= \int_{D_1} \Phi_1(x, \mathbf{y}) m(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d(\mathbf{y}), & x \in \Gamma, \\ (NS_m f)(x) &= \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_{D_1} \Phi_1(x, \mathbf{y}) m(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & x \in \Gamma, \\ (TS_m f)(x) &= \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \int_{D_1} \Phi_1(x, \mathbf{y}) m(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), & x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Από (3.3.3), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \phi^e - \mathcal{D}_1 \psi^e - \mathcal{S}_m \phi_1 - \tilde{\epsilon}_0 \phi_1 &= 0, & \text{στο } D_1, \\ \mathcal{S}_1 \phi^h - \mathcal{D}_1 \psi^h - \mathcal{S}_m \psi_1 - \tilde{\mu}_0 \psi_1 &= 0, & \text{στο } D_1, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

. Οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται στη συμπαγή μορφή

$$(\mathbf{B} + \mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad (3.3.6)$$

όπου $\mathbf{u} = (\psi^e, \phi^h, \psi^h, \phi^e, \phi_1, \psi_1)^\top$, $\mathbf{w} = (g_1, g_2, g_3, g_4, 0, 0)^\top$ και

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\tilde{\epsilon}_0} + \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\beta_0}{2n_0\tilde{\epsilon}_0} + \frac{\beta_0}{2}\right) \partial_\tau & \frac{\lambda_\mu - \tilde{\mu}_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\tilde{\mu}_0} + \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\beta_0}{2n_0\tilde{\mu}_0} - \frac{\beta_0}{2}\right) \partial_\tau & \frac{\lambda_\epsilon - \tilde{\epsilon}_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\epsilon}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\mu}_0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας-τελεστής $\mathbf{A} = (A_{kj})_{1 \leq k, j \leq 6}$ έχει στοιχεία

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -\left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}D_1 + D_0\right), & A_{14} &= \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}S_1 - S_0\right), \\
A_{15} &= -\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}S_m, & A_{21} &= -\left(\frac{\beta_0}{n_0\tilde{\epsilon}_0}TD_1 + \beta_0TD_0\right), \\
A_{22} &= \left(\lambda_\mu NS_1 - \tilde{\mu}_0 NS_0\right), & A_{23} &= -\left(\lambda_\mu ND_1 + \tilde{\mu}_0 ND_0\right), \\
A_{24} &= \left(\frac{\beta_0}{n_0\tilde{\epsilon}_0}TS_1 - \beta_0TS_0\right), & A_{25} &= -\frac{\beta_0}{n_0\tilde{\epsilon}_0}TS_m, \\
A_{26} &= A_{45} = -\lambda_\mu NS_m, & A_{32} &= \left(\frac{1}{\tilde{\mu}_0}S_1 - S_0\right), \\
A_{33} &= -\left(\frac{1}{\tilde{\mu}_0}D_1 + D_0\right), & A_{36} &= -\frac{1}{\tilde{\mu}_0}S_m, \\
A_{41} &= -\left(\lambda_\epsilon ND_1 + \tilde{\epsilon}_0 ND_0\right), & A_{42} &= -\left(\frac{\beta_0}{n_0\tilde{\mu}_0}TS_1 + \beta_0TS_0\right), \\
A_{43} &= \left(\frac{\beta_0}{n_0\tilde{\mu}_0}TD_1 + \beta_0TD_0\right), & A_{44} &= \left(\lambda_\epsilon NS_1 - \tilde{\epsilon}_0 NS_0\right), \\
A_{46} &= \frac{\beta_0}{n_0\tilde{\mu}_0}TS_m, & A_{51} &= A_{63} = -\mathcal{D}_1, \\
A_{54} &= A_{62} = \mathcal{S}_1, & A_{55} &= A_{66} = -\mathcal{S}_m,
\end{aligned}$$

και τα υπόλοιπα είναι μηδέν.

Σημειώνουμε ότι ο τελεστής \mathbf{B} είναι φραγμένος και ο τελεστής \mathbf{A} είναι συμπαγής στο χώρο $C(\Gamma)^4 \times C(D_1)^2$ επειδή

$$\begin{aligned}
S_j, D_j, ND_j, NS_j, TS_j, TD_j &: C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma), \\
\mathcal{S}_1, \mathcal{D}_1 &: C(\Gamma) \rightarrow C(D_1), \\
\mathcal{S}_m &: C(D_1) \rightarrow C(D_1) \\
S_m, NS_m, TS_m &: C(D_1) \rightarrow C(\Gamma)
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

είναι όλοι συμπαγείς τελεστές [16, 17, 18]. Αφού λύσουμε το ευθύ πρόβλημα συνεπάγεται ότι έχουμε γνωστό το μακρινό πεδίο. Χρησιμοποιώντας τις ανα- παραστάσεις (3.3.3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} e^\infty(\hat{x}) &= (D^\infty \psi^e)(\hat{x}) + (S^\infty \phi^e)(\hat{x}), \quad \hat{x} \in S, \\ h^\infty(\hat{x}) &= (D^\infty \psi^h)(\hat{x}) + (S^\infty \phi^h)(\hat{x}), \quad \hat{x} \in S. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Οι τελεστές μακρινού πεδίου δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} (S^\infty f)(\hat{x}) &= \int_{\Gamma} \Phi^\infty(\hat{x}, y) f(y) ds, \\ (D^\infty f)(\hat{x}) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi^\infty}{\partial n(y)}(\hat{x}, y) f(y) ds, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

όπου $\hat{x} \in S$ και

$$\Phi^\infty(\hat{x}, y) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa_0}} e^{-i\kappa_0 \hat{x} \cdot y}.$$

Το αντικείμενο της ακόλουθης ανάλυσης είναι να δώσει μια εικόνα για τη λύση του προβλήματος του αντίστροφου μέσου για έναν τμηματικά σταθερό δείκτη διάθλασης. Η προσέγγιση που παρουσιάζεται μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση του γενικότερου προβλήματος της ανάκτησης του δείκτη διάθλασης ενός πλήρως μη ομογενές μέσου. Δεν ασχολούμαστε με το πρόβλημα εύρεσης του συνόρου του αντίστροφου εμποδίου αλλά υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το σύνορο του σχεδαστή.

Θέτουμε

$$n(x) = \begin{cases} \kappa_0^2 \sum_j n_j \chi_{D_{1,j}}(x), & x \in D_1, \\ n_0 \neq 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D_1, \end{cases}$$

για κ_0^2 συνεχή και $D_1 = \bigcup_j D_{1,j}$, για ασύνδετα φραγμένα υποσύνολα $D_{1,j}$.

Οι αναπαράστασεις των λύσεων έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} e^1(x) &= \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}(\tilde{S}_1\phi^e - \tilde{D}_1\psi^e - S_m\phi_1)(x), & x \in D_1, \\ h_1(x) &= \frac{1}{\tilde{\mu}_0}(\tilde{S}_1\phi^h - \tilde{D}_1\psi^h - S_m\phi_1)(x), & x \in D_1, \\ e^0(x) &= \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}(S_0\phi^e)(x), h_0(x) = \frac{1}{\tilde{\mu}_0}(S_0\phi^h)(x) & x \in D_0. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Λαμβάνουμε υπόψη ότι $\tilde{\epsilon}_1$ και $\tilde{\mu}_1$ είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Οι συνοριακές συνθήκες και οι σχέσεις διαπήδησης καταλήγουν στο ακόλουθο σύστημα εξισώσεων για τις πυκνότητες

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}S_1\phi^e - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}\left(D_1 - \frac{1}{2}\right)\psi^e - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}S_m\phi_1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0}S_0\phi^e(x) = e^{inc}, \quad (3.3.11a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_\mu\left(NS_1 + \frac{1}{2}\right)\phi^h - \lambda_\mu ND_1\psi^h - \lambda_\mu NS_m\psi_1 - \left(NS_0 - \frac{1}{2}\right)\phi^h - \frac{\beta_0}{\tilde{\epsilon}_0}TS_0\phi^e \\ + \frac{\beta_0}{n_0\epsilon_0}\left(TS_1\phi^e - \left(TD_1 - \frac{1}{2}\partial_\tau\right)\psi^e - TS_m\phi_1\right) = \beta_0\frac{\partial e^{inc}}{\partial\tau}, \end{aligned} \quad (3.3.11b)$$

$$\frac{1}{\tilde{\mu}_0}S_1\phi^h - \frac{1}{\tilde{\mu}_0}\left(D_1 - \frac{1}{2}\right)\psi^h - \frac{1}{\tilde{\mu}_0}S_m\psi_1 - \frac{1}{\tilde{\mu}_0}S_0\phi^h = 0, \quad (3.3.11c)$$

$$\begin{aligned} \lambda_\epsilon\left(NS_1 + \frac{1}{2}\right)\phi^e - \lambda_\epsilon ND_1\psi^e - \lambda_\epsilon NS_m\phi_1 - \left(NS_0 - \frac{1}{2}\right)\phi^e + \frac{\beta_0}{\tilde{\mu}_0}TS_0\phi^h \\ - \frac{\beta_0}{n_0\mu_0}\left(TS_1\phi^h - \left(TD_1 - \frac{1}{2}\partial_\tau\right)\psi^h - TS_m\psi_1\right) = \tilde{\epsilon}_0\frac{\partial e^{inc}}{\partial n}. \end{aligned} \quad (3.3.11d)$$

Όπως και στην εξίσωση (3.3.5), προκύπτει ότι

$$S_m\phi_1 + \tilde{\epsilon}_0\phi_1 = \tilde{S}_1\phi^e - \tilde{D}_1\psi^e, \text{ στο } D_1, \quad (3.3.12a)$$

$$S_m\psi_1 + \tilde{\mu}_0\psi_1 = \tilde{S}_1\phi^h - \tilde{D}_1\psi^h, \text{ στο } D_1. \quad (3.3.12b)$$

Η αναπαράσταση απλού στρώματος των εξωτερικών πεδίων (δες (3.3.10)) μας

επιτρέπει να λάβουμε τις λεγόμενες εξισώσεις μακρινού πεδίου

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} S^\infty \psi^e = e^\infty, \quad \frac{1}{\tilde{\mu}_0} S^\infty \psi^h = h^\infty, \quad \text{στο } S. \quad (3.3.13)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε οκτώ εξισώσεις (4 συνοριακές, 2 χωρικές και 2 μακρινού πεδίου) και επτά άγνωστες συναρτήσεις (δείκτης διάθλασης και 6 πυκνότητες). Έτσι, εξετάζουμε έναν συνδυασμό των (3.3.13) της μορφής

$$S^\infty(\psi^e + \psi^h) = \tilde{\epsilon}_0 e^\infty + \tilde{\mu}_0 h^\infty, \quad \text{στο } S. \quad (3.3.14)$$

Προτείνουμε την αποσύνθεση του πλήρους συστήματος εξισώσεων σε δύο υποσυστήματα, ένα (με 6 εξισώσεις) που πρέπει να λυθεί για τις συναρτήσεις πυκνότητας και ένα (με μία εξίσωση) για τον δείκτη διάθλασης (ή τη συνάρτηση m ισοδύναμα). Η επιλογή είναι προφανής διότι μόνο στην εξίσωση (3.3.12) εμφανίζεται η άγνωστη ποσότητα m . Επιλέγουμε (3.3.12b) χωρίς βλάβη της γενικότητας και τη ξαναγράφουμε στη μορφή

$$\mathcal{S}[\psi_1](m) = \tilde{S}_1 \phi^h - \tilde{D}_1 \psi^h - \tilde{\mu}_0 \psi_1. \quad (3.3.15)$$

Αυτή η εξίσωση είναι ολοκληρωτική Fredholm πρώτου είδους για τον συμπαγή τελεστή ($\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}_m$) ενεργώντας γραμμικά στην άγνωστη συνάρτηση m . Συνεπώς, η εξίσωση είναι μη καλά τοποθετημένη και χρειάζονται μέθοδοι ομαλοποίησης για την επίλυση της.

Επιπλέον, χρησιμοποιούμε την εξίσωση ολοκληρώματος επιφάνειας (3.3.11c) και την χωρική ολοκληρωτική εξίσωση (3.3.12a) για να βρούμε τις χωρικές πυκνότητες ϕ_1, ψ_1 . Αντικαθιστώντας αυτές τις πυκνότητες στις ολοκληρωτικές εξισώσεις (3.3.11a), (3.3.11b) και (3.3.11d) και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση μακρινού πεδίου (3.3.14), το πρώτο υποσύστημα (το οποίο λύνεται ως προς

τις πυκνότητες) παίρνει τη συμπαγή μορφή

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{d}, \quad (3.3.16)$$

όπου $\boldsymbol{\phi} = (\psi^e, \phi^h, \psi^h, \phi^e)^\top$ και $\mathbf{d} = (e^{inc}, \beta_0 \partial_\tau e^{inc}, \tilde{\epsilon}_0 \partial_n e^{inc}, \tilde{\epsilon}_0 e^\infty + \tilde{\mu}_0 h^\infty)^\top$.

Ο πίνακας $\mathbf{C} = (C_{kj})_{1 \leq k, j \leq 6}$ έχει στοιχεία

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} \left(D_1 - \frac{1}{2} I \right) + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} S_m (\tilde{S}_m + I \tilde{\epsilon}_0)^{-1} \tilde{D}_1, \\ C_{14} &= \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} \left(S_1 - S_m (\tilde{S}_m + I \tilde{\epsilon}_0)^{-1} \tilde{S}_1 \right) - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} S_0, \\ C_{21} &= -\frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\epsilon}_0} \left(T D_1 - T S_m (\tilde{S}_m + I \tilde{\epsilon}_0)^{-1} \tilde{D}_1 \right), \\ C_{22} &= \lambda_\mu N S_1 - N S_0 + \lambda_\mu N S_m S_m^{-1} (\lambda_\mu S_0 - S_1), \\ C_{23} &= -\lambda_\mu N D_1 + \lambda_\mu N S_m S_m^{-1} \left(D_1 - \frac{1}{2} I \right), \\ C_{24} &= \frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\epsilon}_0} \left(T S_1 - T S_m (\tilde{S}_m + \epsilon_0 I)^{-1} \tilde{S}_1 \right) - \frac{\beta_0}{\tilde{\epsilon}_0} T S_0, \\ C_{31} &= -\lambda_\epsilon N D_1 + \lambda_\epsilon N S_m (\tilde{S}_m + I \tilde{\epsilon}_0)^{-1} \tilde{D}_1, \\ C_{32} &= -\frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\mu}_0} \left(T S_1 - T S_m S_m^{-1} (S_1 - S_0) \right) + \frac{\beta_0}{\tilde{\mu}_0} T S_0, \\ C_{33} &= \frac{\beta_0}{n_0 \tilde{\mu}_0} \left(T D_1 - T S_m S_m^{-1} \left(D_1 - \frac{1}{2} I \right) \right), \\ C_{34} &= \lambda_\epsilon N S_1 - N S_0 - \lambda_\epsilon N S_m (\tilde{S}_m + I \tilde{\epsilon}_0)^{-1} \tilde{S}_1, \\ C_{41} &= S^\infty, \quad C_{43} = S^\infty \end{aligned}$$

και τα υπόλοιπα είναι μηδέν.

Επισημαίνουμε ότι αυτό το σύστημα είναι επίσης μη καλά τοποθετημένο λόγω της εμφάνισης των τελεστών του μακρινού πεδίου στην τελευταία γραμμή.

Η κατά προσέγγιση λύση κατασκευάζεται επαναληπτικά εφαρμόζοντας το

ακόλουθο σχήμα βάσει του [36], αρχικά θεωρήθηκε για πρόβλημα αντίστροφου εμποδίου.

Αλγόριθμος

Βήμα 1 Δίνεται μια αρχική εικασία του δείκτη διάθλασης του D_1 , και λύνουμε το υποσύστημα των εξισώσεων (3.3.16) για τις άγνωστες πυκνότητες.

Βήμα 2 Αντικαθιστούμε τις πυκνότητες στην εξίσωση (3.3.15) προς επίλυση για την ενημέρωση του δείκτη διάθλασης.

Βήμα 3 Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα μέχρι να ικανοποιηθεί ένα κατάλληλο κριτήριο διακοπής.

Για να χειριστούμε τη μη καλή τοποθέτηση της εξίσωσης, εφαρμόζουμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov. Η παράμετρος ομαλοποίησης επιλέγεται με δοκιμή και σφάλμα, καθώς δεν είναι στο πεδίο αυτής της έρευνας η εφαρμογή πιο εξελιγμένων τεχνικών.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι λύνουμε την εξίσωση σε κάθε εσωτερικό σημείο και εστιάζουμε στον συγκεκριμένο δείκτη διάθλασης. Έστω το διακριτικό εσωτερικό πεδίο αποτελείται από x_1, \dots, x_N σημεία με δείκτες διάθλασης n_1, \dots, n_N , αντίστοιχα. Ξεκινάμε εξετάζοντας την εξίσωση στο πρώτο εσωτερικό σημείο (για παράδειγμα x_1) να λυθεί για n_1 και θέτουμε n_1, \dots, n_N ως αρχική εικασία. Όταν προχωράμε στο σημείο x_2 , αντικαθιστούμε τη τιμή n_1 με την ανακατασκευασμένη τιμή και θέτουμε στη τιμή n_2, \dots, n_N την αρχική εικασία. Φτάνοντας στο N -στο σημείο, οι $N - 1$ σημειακοί δείκτες διάθλασης αντικαθίστανται από τις ήδη ανακατασκευασμένες τιμές και λύνουμε για την τελευταία. Με αυτόν τον τρόπο, αναμένουμε ότι το σφάλμα θα μειωθεί καθώς η διαδικασία συνεχίζεται αφού λιγότεροι δείκτες διάθλασης είναι άγνωστοι.

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τους κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης και τους λείους πυρήνες με τον τραπεζοειδή κανόνα [17, 44]. Τα χωρικά ολοκληρώματα υπολογίζονται από τη μέθοδο Clenshaw–Curtis [14]. Η μέθοδος Nyström χρησιμοποιείται για τη λύση των παραμετροποιημένων εξισώσεων. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις εργασίες [28, 29] όπου παρουσιάζεται μια διεξοδική ανάλυση της αριθμητικής προσέγγισης των συνοριακών ολοκληρωτικών τελεστών.

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για σκεδαστές με διαφορετικές ιδιότητες και γεωμετρίες υλικού. Για να αποφύγουμε ένα «αντίστροφο έγκλημα», χρησιμοποιούμε διαφορετικές αναπαραστάσεις των πεδίων και μόνο τα μισά σημεία ταξινόμησης χρησιμοποιούνται στο αντίστροφο πρόβλημα σε σύγκριση με το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα. Επιπλέον, προσθέτουμε θόρυβο στα προσομοιωμένα δεδομένα (μακρινά πεδία) σε σχέση με το L_2 -νόρμα

$$e_\delta^\infty = e^\infty + \delta_1 \frac{\|e^\infty\|_2}{\|a\|_2} a, \quad h_\delta^\infty = h^\infty + \delta_2 \frac{\|h^\infty\|_2}{\|b\|_2} b,$$

όπου δ_1, δ_2 είναι δοσμένα επίπεδα θορύβου και $a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2$, για $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Διακριτοποιούμε το χωρίο με ένα ορθογώνιο ίσο πλέγμα μεγέθους $N \times N$ και το σύνορο αποτελείται από $2n$ ισαπέχοντα σημεία. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την παραμετροποίηση της συνοριακής καμπύλης και τις παραμέτρους του υλικού στο εξωτερικό πεδίο και στο σύνορο. Το κριτήριο διακοπής βασίζεται στο απόλυτο σφάλμα μεταξύ του ακριβούς και του ανακατασκευασμένου δείκτη διάθλασης και ικανοποιείται όταν το σφάλμα αυξάνεται σε σύγκριση με το προηγούμενο βήμα επανάληψης. Στα ακόλουθα παραδείγματα, χρησιμοποιούμε $N = 41$ και $n = 32$ σημεία και το εξωτερικό χωρίο χαρακτηρίζεται

από $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, και δείκτη διάθλασης $n_0 = 1$. Θέτουμε $\delta_1 = \delta_2 = 2\%$ ως επίπεδο θορύβου. Και στα δύο παραδείγματα ξεκινάμε με μια αρχική εικασία ενός ομοιογενούς σχεδαστή με n^{init} (πάνω δεξιά εικόνα και στα δύο σχήματα). Στο πρώτο παράδειγμα, εξετάζουμε έναν ελλειψοειδή σχεδαστή με παραμετροποίηση συνόρων

$$x(t) = (0.7 \cos t, 0.5 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ορίζουμε τη μαγνητική διαπερατότητα $\mu_1 = 3$ και τη διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_1 = 3$. Το μέσο χαρακτηρίζεται από σταθερό δείκτη διάθλασης $n_1 = 1, 2$ και τετράγωνο με $n_2 = 1, 7$. Αυτές είναι οι τιμές που πρέπει να ανακτηθούν.

Οι γωνίες έχουν τις τιμές $\theta = \phi = \pi/6$ και συχνότητα $\omega = 3$. Στο σχήμα [Σχήμα 3.3](#) παρουσιάζουμε τον ανακατασκευασμένο δείκτη διάθλασης (κάτω αριστερά) και το απόλυτο σφάλμα (κάτω δεξιά), για την αρχική εικασία $n^{init} = 2.2$ και $\lambda_1 = 10^{-6}$ και $\lambda_2 = 0.01$, τις παραμέτρους ομαλοποίησης για το πρώτο και το δεύτερο υποσύστημα, ισοδύναμα.

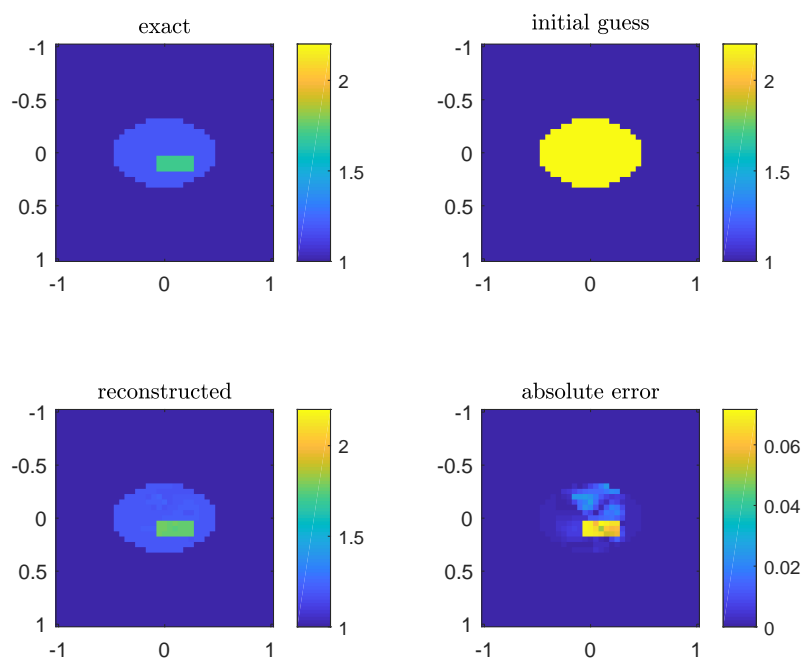
Στο δεύτερο παράδειγμα, εξετάζουμε έναν σχεδαστή σε σχήμα χαρταετού με παραμετροποίηση ορίων

$$x(t) = (0.6 \cos t + 0.3 \cos 2t - 0.2, 0.8 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

και ιδιότητες υλικού $\mu_1 = 2$ και $\epsilon_1 = 3$. Ο σχεδαστής παραδέχεται μια πολυεπίπεδη δομή με $n_1 = 1.3$ και $n_2 = 1.5$ όπως στο πρώτο παράδειγμα. Θέτουμε $\theta = \pi/6$ και $\phi = \pi/5$ με συχνότητα $\omega = 1$.

Οι ανακατασκευές παρουσιάζονται στο [Σχήμα 3.4](#) για $n^{init} = 2.5$ και $\lambda_1 = 10^{-6}$ και $\lambda_2 = 0.001$. Εδώ, παρατηρούμε επίσης τη βελτίωση των ανακατασκευών καθώς εκτελείται ο αλγόριθμος.

Συνοψίζοντας, οι ανακατασκευές είναι καλής ποιότητας και ο αλγόριθμος



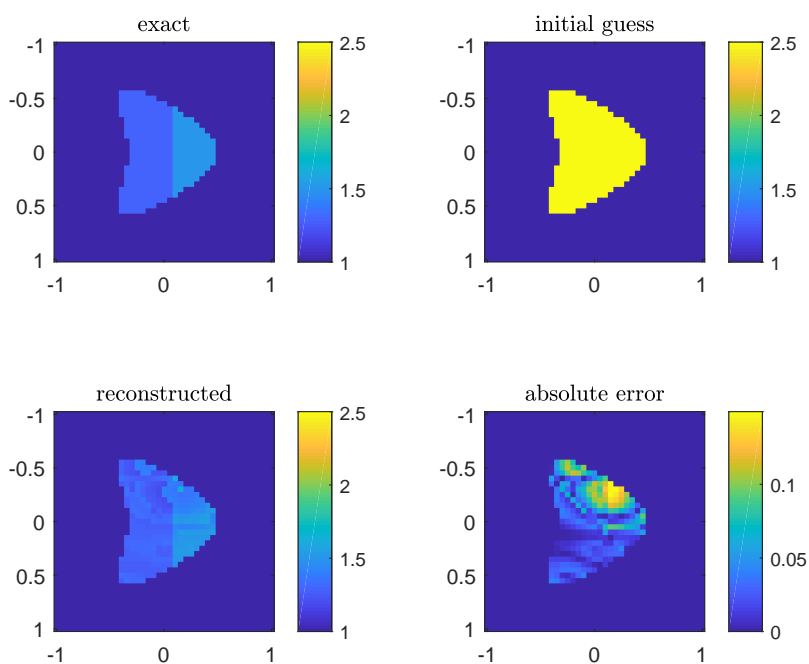
Σχήμα 3.1. Ο ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης και το απόλυτο σφάλμα του για ένα σχεδαστή.

λειτουργεί χωρίς υποθέσεις για την εσωτερική δομή του μέσου, αλλά απαιτεί μόνο τη γνώση της γεωμετρίας του σχεδαστή. Λειτουργεί για διαφορετικές κατευθύνσεις πρόσπτωσης, διάφορες γεωμετρίες και παραμέτρους υλικού.

3.3.2 Hölder συνεχής δείκτης διάθλασης

Μας ενδιαφέρει να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα της ανακατασκευής του δείκτη διάθλασης $n(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ από τη γνώση του μακρινού πεδίου του σχεδασμένου κύματος $(e^\infty(\hat{x}), h^\infty(\hat{x}))$, για κάθε $\hat{x} \in S$.

Για να υπολογίσουμε τα μακρινά πεδία, θεωρούμε (2.2.43) και (2.2.44). Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος (ολοκλήρωμα) στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.2.43) αντιστοιχεί στο προσπίπτον πεδίο ενώ ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει το σχεδασμένο πεδίο, από (2.2.30). Το ίδιο ισχύει και για το μαγνητικό πεδίο, εννοώντας την εξίσωση (2.2.44). Έτσι, υπολογίζουμε τα μακρινά πεδία,



Σχήμα 3.2. Ο ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης και το απόλυτο σφάλμα του για σκεδαστή.

χρησιμοποιώντας τις αναπαράστασεις, μέσω του συστήματος

$$\begin{pmatrix} e^\infty \\ h^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S^\infty[m] + K^\infty[\epsilon] & L^\infty[\epsilon] \\ -L^\infty[\mu_0] & -S^\infty[m] + K^\infty[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix}, \quad (3.3.17)$$

όπου ο εκθέτης(∞) στους τελεστές ολοκλήρωσης σημαίνει ότι έχουμε να κάνουμε με τους τελεστές απομακρυσμένου πεδίου, όπου η συνάρτηση Green Φ αντικαθίσταται από

$$\Phi^\infty(\hat{x}, y) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\kappa_0}} e^{-i\kappa_0 \hat{x} \cdot y}, \quad \hat{x} \in S, y \in \mathbb{R}^2.$$

Παρατηρούμε ότι οι ολοκληρωτικοί τελεστές, εκτός από τους S και S^∞ , ενεργούν μη γραμμικά στην άγνωστη συνάρτηση n . Λαμβάνουμε υπόψη ότι όλες οι συναρτήσεις m , ϵ και k εξαρτώνται από τις n . Για να ξεπεραστεί

αυτή η δυσκολία, προτείνουμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα τοπικά και επαναληπτικά. Η αριθμητική λύση θα ληφθεί με μια σημειακή προσέγγιση (θα διευκρινιστεί αργότερα).

Περίπτωση 1 Εφόσον προτείνουμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων σημειακά, υποθέτουμε ότι η άγνωστη συνάρτηση n είναι τοπικά ομοιογενής, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να παραβλέψουμε τους τελεστές που περιλαμβάνουν τις παραγώγους του n .

Με αυτή την υπόθεση, το αντίστροφο πρόβλημα αντιστοιχεί στη λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$e(x) + (S[e]m)(x) = e^{inc}(x), \quad (3.3.18a)$$

$$h(x) + (S[h]m)(x) = 0, \quad (3.3.18b)$$

$$-(S^\infty[e + h]m)(\hat{x}) = e^\infty(\hat{x}) + h^\infty(\hat{x}). \quad (3.3.18c)$$

Στο παραπάνω σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων, ανταλλάξαμε τους ρόλους των συναρτήσεων πυκνότητας και υλικού αφού τώρα η συνάρτηση m (ισοδύναμα n) είναι αυτή που μας ενδιαφέρει. Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο εξισώσεις (3.3.18a) και (3.3.18b) στο \mathbb{R}^2 και την εξίσωση απομακρυσμένου πεδίου (3.3.18c) στον μοναδιαίο κύκλο S αλλά και τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις (η δύο συναρτήσεις πυκνότητας και m) οι οποίες υπάρχουν στον \mathbb{R}^2 . Αυτό είναι ένα υποκαθορισμένο σύστημα εξισώσεων, που είναι ένας άλλος λόγος για να εξετάσουμε το ενδεχόμενο να το λύσουμε σημειακά. Από την άλλη πλευρά, το πλεονέκτημα εδώ είναι ότι οι ολοκληρωτικοί τελεστές ενεργούν γραμμικά και στις συναρτήσεις πυκνότητας και υλικού, επομένως δεν χρειάζεται γραμμικοποίηση όπως στα περισσότερα αντίστροφα προβλήματα.

Περίπτωση 2 Ένας άλλος τρόπος για να χειριστούμε τη μη γραμμικότητα του πλήρους συστήματος είναι να εξετάσουμε μια μέθοδο προσέγγισης. Προτείνουμε ένα επαναληπτικό σχήμα όπου οι όροι που περιλαμβάνουν τις παραγώγους του n θα υπολογιστούν στο προηγούμενο βήμα επανάληψης. Ορίζουμε

$$(M[e, h]m)(x) = (K[e]\epsilon)(x) + (L[h]\epsilon)(x),$$

$$(N[e, h]m)(x) = (K[h]1)(x) - (L[e]\mu_0)(x),$$

δύο τελεστές που ενεργούν σε μη γραμμικά m . Στη συνέχεια, προτείνουμε να λύσουμε το πλήρες σύστημα εξισώσεων με το επαναληπτικό σχήμα:

$$e(x) + (S[e]m^{(k)})(x) = e^{inc}(x) + (M[e, h]m^{(k-1)})(x), \quad (3.3.19a)$$

$$h(x) + (S[h]m^{(k)})(x) = (N[e, h]m^{(k-1)})(x), \quad (3.3.19b)$$

$$-(S^\infty[e + h]m^{(k)})(\hat{x}) = e^\infty(\hat{x}) + h^\infty(\hat{x}) \quad (3.3.19c)$$

$$- (M^\infty[e, h]m^{(k-1)})(\hat{x}) - (N^\infty[e, h]m^{(k-1)})(\hat{x}), \quad (3.3.19d)$$

για $k = 1, 2, \dots$ όπου θέτουμε $m^{(0)} = 0$. Το πρώτο βήμα αυτού του σχήματος συμπίπτει με το σύστημα (3.3.18) και στη συνέχεια έρχεται η συμβολή των όρων.

Και για τα δύο σχήματα, προτείνουμε μια μέθοδο διπλής επανάληψης όπου οι συναρτήσεις πυκνότητας βρίσκονται “παντού” και η συνάρτηση υλικού m “σημείο προς σημείο”. Ο εξωτερικός βρόχος, για τον διαχωρισμό του συστήματος (3.3.18) σε δύο υποπροβλήματα είναι καλά μελετημένος και έχει

εφαρμοστεί με επιτυχία σε πολλά αντίστροφα προβλήματα [4, 13, 36]. Ο εσωτερικός βρόχος, που αντιστοιχεί στη σημειακή ανακατασκευή της συνάρτησης m βασίζεται στην επαναληπτική μέθοδο Jacobi. Η ιδέα προέρχεται από τη γραμμική άλγεβρα και τον διαχωρισμό μπλοκ και τις μεθόδους Jacobi. Εκεί, η γραμμική εξίσωση για έναν άγνωστο με τιμή πίνακα χωρίζεται σε μια ακολουθία εξισώσεων για τις στήλες του και στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος Jacobi, βλέπε για παράδειγμα [32, 37]. Το σκίτσο του αλγορίθμου για το πρώτο σχήμα παρουσιάζεται στο [Αλγόριθμος 1](#) και στο [Σχήμα 3.3](#) παρουσιάζουμε πώς ανακατασκευάζεται το m σημείο προς σημείο. Η μέθοδος της διπλής επανάληψης εφαρμόζεται επίσης στο σύστημα (3.3.19) του δεύτερου σχήματος.

	Input	Output
$j = 1 :$	$\left[\begin{array}{cccc} m_1^{(k-1)} & m_2^{(k-1)} & \dots & m_{N^2}^{(k-1)} \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{cccc} m_1^{(k)} & m_2^{(k-1)} & \dots & m_{N^2}^{(k-1)} \end{array} \right]$
$j = 2 :$	$\left[\begin{array}{cccc} m_1^{(k)} & m_2^{(k-1)} & \dots & m_{N^2}^{(k-1)} \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{cccc} m_1^{(k)} & m_2^{(k)} & \dots & m_{N^2}^{(k-1)} \end{array} \right]$
\vdots	\vdots	\vdots
$j = N^2 :$	$\left[\begin{array}{cccc} m_1^{(k)} & m_2^{(k)} & \dots & m_{N^2}^{(k-1)} \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{cccc} m_1^{(k)} & m_2^{(k)} & \dots & m_{N^2}^{(k)} \end{array} \right]$

Σχήμα 3.3. Γραφική απεικόνιση του εσωτερικού βρόχου τύπου Jacobi του [Αλγόριθμος 1](#). Σε κάθε βήμα επανάληψης, μόνο ένας συντελεστής (κόκκινο) θεωρείται άγνωστος. Η ανακτημένη τιμή (μπλε) χρησιμοποιείται ως είσοδος για το επόμενο βήμα.

Αλγόριθμος 1 Η μέθοδος της διπλής επανάληψης (Περίπτωση 1).

Input: Μακρινά πεδία $e^\infty(\hat{x})$ και $h^\infty(\hat{x})$, για όλα τα $\hat{x} \in S$ και αρχική υπόθεση $m^{(0)}(x)$, για $x \in \Omega_r$.

Output: Ανακατασκευασμένο $\tilde{m}(x)$, για $x \in \Omega_r$.

$k = 1$

repeat

Δοθέντος $m^{(k-1)}$, επιλύουμε το καλά τοποθετημένο υποσύστημα εξισώσεων

$$e^{(k)}(x) + (S[e^{(k)}]m^{(k-1)})(x) = e^{inc}(x), \quad (3.3.20)$$

$$h^{(k)}(x) + (S[h^{(k)}]m^{(k-1)})(x) = 0, \quad (3.3.21)$$

για την ανάκτηση των συναρτήσεων πυκνότητας $e^{(k)}$ και $h^{(k)}$. Θεωρούμε ότι x_1, \dots, x_{N^2} εσωτερικά σημεία και ορίζουμε $m_j = m(x_j)$.

for $j = 1, \dots, N^2$ **do**

Ξαναγράφουμε την εξίσωση (3.3.18c) ως

$$-(S_j^\infty[e^{(k)} + h^{(k)}]m_j^{(k)})(\hat{x}) = e^\infty(\hat{x}) + h^\infty(\hat{x}) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{N^2} (S_\ell^\infty[e^{(k)} + h^{(k)}]m_\ell^{(k-1)})(\hat{x}), \quad (3.3.22)$$

να λυθεί για $m_j^{(k)}$. Ο τελεστής S_j^∞ αναφέρεται στη διακριτική μορφή του τελεστή απομακρυσμένου πεδίου που ενεργεί μόνο στο m_j . Ο τελεστής που εμφανίζεται στην εξίσωση (3.3.22) είναι συμπαγής και συνεπώς εφαρμόζουμε την ομαλοποίηση Tikhonov για να το λύσουμε.

Update $m_j^{(k-1)} = m_j^{(k)}$

end for

$$m^{(k)} = \alpha m^{(k)} + (1 - \alpha)m^{(k-1)}, \text{ για } \alpha \in (0, 1).$$

$k = k + 1$

until ικανοποιείται το κριτήριο διακοπής

Θεωρούμε το τετράγωνο πεδίο ορισμού $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Υπολογίζουμε αριθμητικά τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στα ολοκληρώματα. Αυτή η μέθοδος προσεγγίζει την παράγωγο μιας συνάρτησης με ένα σταθμισμένο γραμμικό άθροισμα σε ορισμένα κομβικά σημεία [5].

Έστω $x = (x_1, x_2) \in D$. Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα μη ομοιόμορφα

κατανεμημένα σημεία πλέγματος

$$x_{kj} := (x_1(k), x_2(j)) = \left(-\cos\left(\frac{k-1}{N-1}\pi\right), -\cos\left(\frac{j-1}{N-1}\pi\right) \right), \quad \text{για } k, j = 1, \dots, N.$$

Η αριθμητική μέθοδος για την εύρεση παραγώγου σε συνδυασμό με τέτοια διακριτοποίηση δίνει ακριβή αποτελέσματα [6, 67].

Δεδομένου ότι όλες οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις θεωρούνται ότι είναι τουλάχιστον συνεχώς παραγωγίσιμες, εφαρμόζουμε τη μέθοδο Clenshaw - Curtis για να υπολογίσουμε αριθμητικά τα διπλά ολοκληρώματα στα D [14, 26, 27]. Στο επιλεγμένο χωρίο D , η μέθοδος Clenshaw - Curtis είναι εξίσου ακριβής με τη μέθοδο Gauss και το πλεονέκτημά της είναι ότι τα βάρη υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το FFT [63]. Στα ακόλουθα παραδείγματα, θεωρούμε το $\Omega_r \subseteq D \subset \mathbb{R}^2$.

Στη συνέχεια, τα ολοκληρώματα που ορίζονται στο (2.2.39) παίρνουν τη διακριτή μορφή

$$\begin{aligned} (S^{(N)}[m]f)_{kj} &= k_0^2 \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N w_{\mu\nu} \Phi_{kj\mu\nu} m_{\mu\nu} f_{\mu\nu}, \\ (K^{(N)}[g]f)_{kj} &= \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N w_{\mu\nu} \Phi_{kj\mu\nu} \left[\alpha_{\mu\nu}^{(1)}(Q_1^{(N)}f)_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu}^{(2)}(Q_2^{(N)}f)_{\mu\nu} \right], \\ (L^{(N)}[g]f)_{kj} &= \frac{\beta}{\omega} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N w_{\mu\nu} \Phi_{kj\mu\nu} \left[\beta_{\mu\nu}^{(2)}(Q_1^{(N)}f)_{\mu\nu} - \beta_{\mu\nu}^{(1)}(Q_2^{(N)}f)_{\mu\nu} \right], \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

για $k, j = 1, \dots, N$, όπου w είναι οι συναρτήσεις βάρους από τη μέθοδο Clenshaw-Curtis για την προσέγγιση του διπλού ολοκληρώματος και $Q_j^{(N)}$ είναι τα βάρη που προσεγγίζουν τη μερική παράγωγο ∂_{y_j} , για $j = 1, 2$. Εδώ, για λόγους παρουσίασης, έχουμε εισαγάγει τις συναρτήσεις (ανάλογα με το

m):

$$\begin{aligned}\alpha^{(j)}[g](x) &:= \frac{k^2(x)}{g(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{g(x)}{k^2(x)} \right), \\ \beta^{(j)}[g](x) &:= \frac{k^2(x)}{g(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{k^2(x)} \right),\end{aligned}\tag{3.3.24}$$

για $j = 1, 2$. Οι τελεστές που εμφανίζονται στην εξίσωση (3.3.23) περιλαμβάνουν τη παράγωγο των συναρτήσεων υλικού που χρειάζονται μόνο για τη δημιουργία δεδομένων μακρινού πεδίου και στο δεύτερο σχήμα. Εκεί, η συνάρτηση m είναι γνωστή ή έχει ήδη ανακτηθεί και έτσι μπορούμε να την υπολογίσουμε αριθμητικά. Οι συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν στη διακριτική τους μορφή έχουν μορφή πίνακα μεγέθους $N \times N$. Τις διανυσματοποιούμε ως εξής

$$\text{vec}(f) = [f_{11}, \dots, f_{1N}, f_{21}, \dots, f_{2N}, \dots, f_{N1}, \dots, f_{NN}]^T,$$

όπου $f_{kj} = f(x_{kj})$, με αποτέλεσμα μια διανυσματική συνάρτηση μεγέθους $N^2 \times 1$.

Τα δεδομένα μακρινού πεδίου δημιουργούνται με την επίλυση της καλά τοποθετημένης διακριτικής μορφής του συστήματος (2.2.42) για τις συναρτήσεις πυκνότητας e και h , και, στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τις λαμβανόμενες τιμές στο (3.3.17) για να λάβουμε τα προσομοιωμένα δεδομένα. Θεωρούμε $2n$ ισαπέχοντα σημεία $t_j = j\pi/n$, για $j = 0, \dots, 2n - 1$ και $\hat{x}_j = (\cos t_j, \sin t_j)$. Προκειμένου να αποφευχθεί η διάπραξη αντιστρόφου εγκλήματος, χρησιμοποιούμε διαφορετική ολοκληρωτική αναπαράσταση για τα πεδία και προσθέτουμε τυχαίο θόρυβο στα δεδομένα του μακρινού πεδίου. Προσθέτουμε θόρυβο στα δεδομένα μακρινού πεδίου ως προς την L^2 -νόρμα ως εξής

$$\mathbf{u}_\delta = \mathbf{u}^\infty + \delta \frac{\|\mathbf{u}^\infty\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} \mathbf{v},\tag{3.3.25}$$

για ένα δεδομένο επίπεδο θορύβου δ , όπου το \mathbf{v} έχει πραγματικά και φαν-

ταστικά μέρη κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Η παράμετρος ομαλοποίησης ενημερώνεται σε κάθε βήμα επανάληψης του εξωτερικού βρόχου ως

$$\lambda_k = \lambda_0 0.9^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

όπου $\lambda_0 > 0$ είναι μια σταθερή αρχική παράμετρος. Στα ακόλουθα παραδείγματα, θεωρούμε ότι το Ω_r είναι δίσκος με κέντρο μηδέν και ακτίνα ένα. Ορίζουμε $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$. Τα δεδομένα μακρινό πεδίου υπολογίζονται για $n = 32$ και προσθέτουμε $\delta = 3\%$ θόρυβο.

Περίπτωση 1

Η συχνότητα είναι $\omega = 3$, η γωνία πρόσπτωσης $\theta = 3\pi/5$ και η πολική γωνία $\phi = \pi/4$. Στο πρώτο παράδειγμα, εξετάζουμε τη συνάρτηση

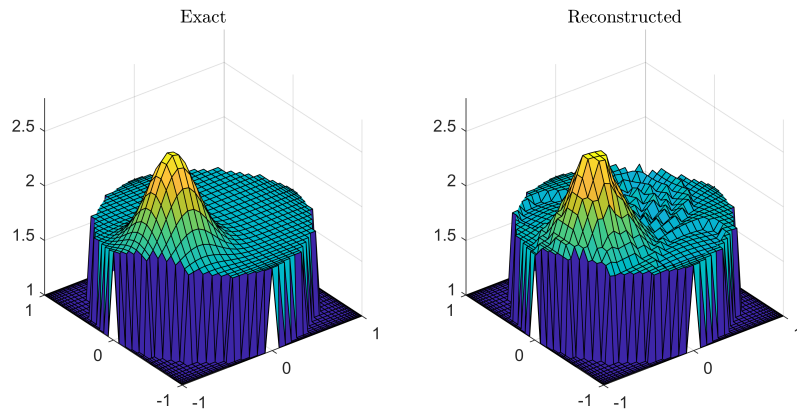
$$n(x) = 1.75 + 0.9e^{-10(x_1+0.5)^2 - 10(x_2+0.2)^2}, \quad x \in \Omega_r, \quad (3.3.26)$$

και $n(x) = 1$, για $x \in D \setminus \Omega_r$. Ορίσαμε $N = 41$ και $\lambda_0 = 0,001$. Η αρχική εικασία είναι $n^{(0)} = 1 - m^{(0)} = 2,8$. Τα αποτελέσματα μετά από δέκα επαναλήψεις παρουσιάζονται στο [Σχήμα 3.4](#) και [Σχήμα 3.5](#).

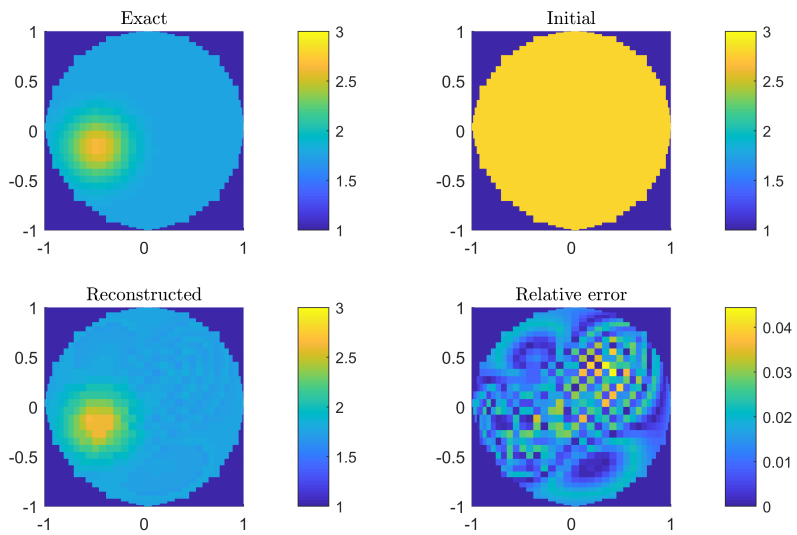
Στο δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε έναν δείκτη διάθλασης απλώς για να δείξουμε τη σκοπιμότητα του προτεινόμενου σχήματος. Θέτουμε

$$n(x) = \begin{cases} 2.6, & \text{για } |x| < 0.3 \\ 2.3, & \text{για } 0.3 < |x| < 0.6 \\ 2, & \text{για } 0.6 < |x| < 1 \\ 1, & \text{για } x \in D \setminus \Omega_r \end{cases} \quad (3.3.27)$$

Στο [Σχήμα 3.6](#) και [Σχήμα 3.7](#) παρουσιάζουμε την θεωρητική (αριστερά) και την ανακτημένη (δεξιά) συνάρτηση μετά από οκτώ επαναλήψεις με



Σχήμα 3.4. Ο ακριβής δείκτης διάθλασης n του πρώτου παραδείγματος (αριστερά). Η ανακατασκευασμένη τιμή μετά από δέκα επαναλήψεις από θορυβώδη δεδομένα (δεξιά).



Σχήμα 3.5. Ο δείκτης διάθλασης n του πρώτου παραδείγματος σε επίπεδο $x - y$. Επάνω αριστερά: αληθινή συνάρτηση. Επάνω δεξιά: αρχική εικασία. Κάτω αριστερά: ανακατασκευασμένη λειτουργία. Κάτω δεξιά: σχετικό σφάλμα.

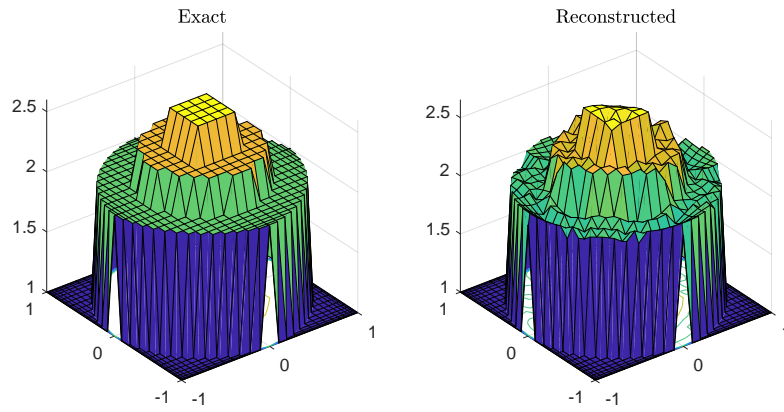
$N = 31$ σημεία δειγματοληψίας και αρχική εικασία $n^{(0)} = 1 - m^{(0)} = 2, 8$.

Η παράμετρος ομαλοποίησης ορίστηκε $\lambda_0 = 0, 001$.

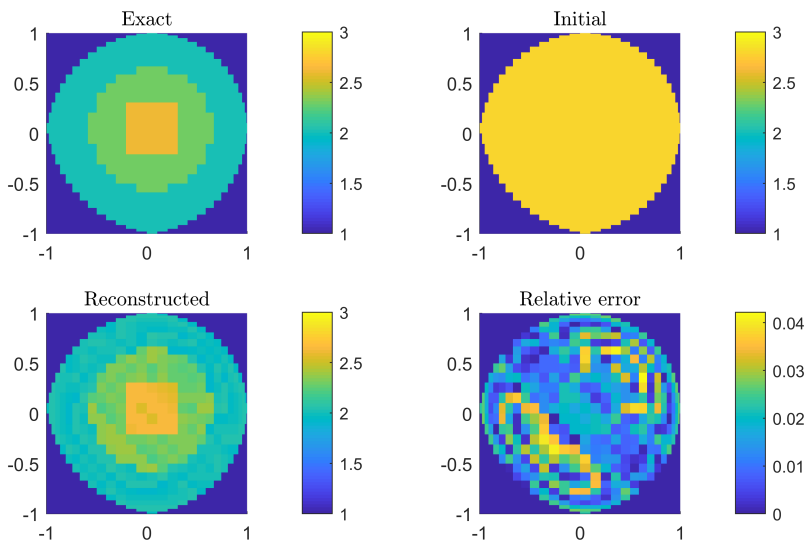
Περίπτωση 2

Ο ανακτημένος δείκτης διάθλασης παρουσιάζεται στο [Σχήμα 3.8](#) και [Σχήμα 3.9](#) για θορυβώδη δεδομένα μετά από δέκα επαναλήψεις και $N = 41$.

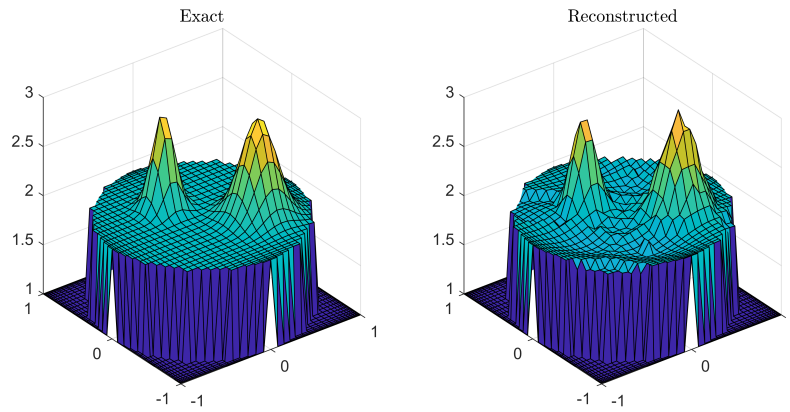
Παρατηρούμε ότι λαμβάνουμε ικανοποιητικές ανακατασκευές μετά από λίγα βήματα επανάληψης τόσο για τμηματικούς σταθερούς όσο και για εξαρτώμενους από το χώρο δείκτες διάθλασης από θορυβώδη δεδομένα. Και τα δύο αριθμητικά σχήματα παράγουν σταθερές ανακατασκευές. Καθώς οι επαναλήψεις προχωρούν, βλέπουμε ότι το σφάλμα μειώνεται καθώς οι ανακατασκευασμένες τιμές συμβάλλουν στις επόμενες αρχικές εικασίες, βλέπε επίσης [Σχήμα 3.3](#). Ωστόσο, εφόσον λύνουμε σημείο προς σημείο, η αύξηση από $N = 31$ σε $N = 41$ αυξάνει τον υπολογιστικό χρόνο σε αρκετά λεπτά.



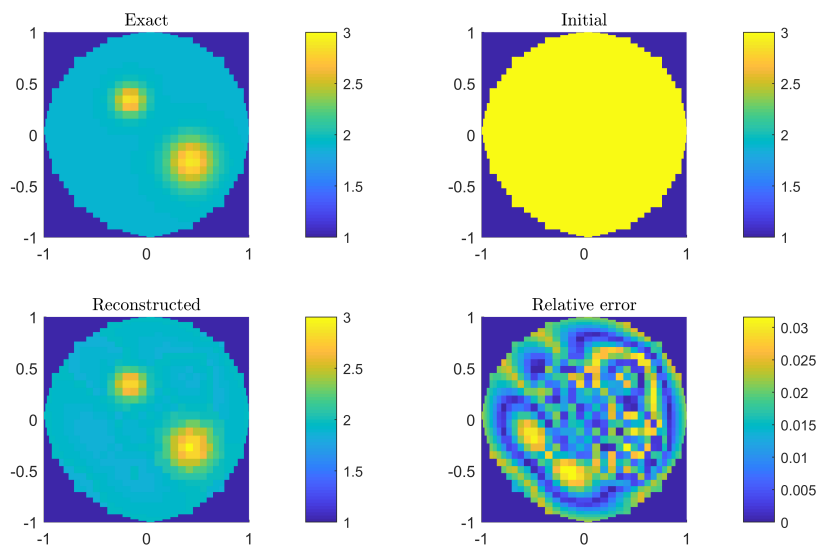
Σχήμα 3.6. Ο ακριβής δείκτης διάθλασης n του δεύτερου παραδείγματος (αριστερά). Η ανακατασκευασμένη τιμή μετά από δέκα επαναλήψεις από θορυβώδη δεδομένα (δεξιά).



Σχήμα 3.7. Ο δείκτης διάθλασης n του δεύτερου παραδείγματος σε επίπεδο $x-y$. Επάνω αριστερά: θεωρητικός δείκτης διάθλασης. Επάνω δεξιά: αρχική εικασία. Κάτω αριστερά: ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης. Κάτω δεξιά: σχετικό σφάλμα.



Σχήμα 3.8. Ο ακριβής δείκτης διάθλασης n του τρίτου παραδείγματος (αριστερά) και η ανακατασκευασμένη τιμή του μετά από δέκα επαναλήψεις από δεδομένα με θόρυβο 2% (δεξιά).



Σχήμα 3.9. Ο δείκτης διάθλασης n του τρίτου παραδείγματος στο επίπεδο $x-y$. Επάνω αριστερά: θεωρητικός δείκτης διάθλασης. Επάνω δεξιά: αρχική εικασία. Κάτω αριστερά: ανακατασκευασμένος δείκτης διάθλασης. Κάτω δεξιά: σχετικό σφάλμα.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Η παρούσα διατριβή εξετάζει το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης που προκύπτει από τη μη ομοιγένεια του σχεδαστή με πλάγια πρόσπτωση. Στο ευθύ πρόβλημα, έχουμε εξετάσει την καλή τοποθέτηση του προβλήματος κατά Hadamard σε σχέση με την κυλινδρική συμμετρία του μη ομογενούς ή τμηματικά σταθερού σχεδαστή.

Επίσης, έχουμε αποδείξει τη μοναδικότητα δίσκου λαμβάνοντας υπόψη ένα πλάγιο προσπίπτον κύμα και τα μακρινά πεδία που προκύπτουν από τα σχεδασμένα πεδία. Στη συνέχεια, έχουμε αναπτύξει μια αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος το οποίο περιγράφεται από ένα υποκαθορισμένο σύστημα εξισώσεων.

Επιπλέον, δημιουργήθηκε αλγόριθμος ο οποίος βασίζεται σε κλασσικές αριθμητικές μεθόδους για να επιλύσουμε το υποκαθορισμένο σύστημα αριθμητικά. Αυτές οι μέθοδοι είναι χρήσιμες για τη βελτίωση της σύγκλισης της αριθμητικής λύσης.

Το γεγονός ότι η αριθμητική λύση εξαρτάται από την αρχική πρόβλεψη για τον δείκτη διάθλασης υπογραμμίζει τη σημασία της επιλογής της καθώς επηρεάζει τη τελική ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης.

Τέλος, έγινε αναπαράσταση των ανακατασκευών σε εικόνες για διάφορα

παραδείγματα σχεδαστών για την αξιολόγηση του αλγορίθμου που χρησιμοποιήσαμε. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε, με τις ανακατασκευές και τις αριθμητικές προσεγγίσεις, επιβεβαιώνουν την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου στην επίλυση του προβλήματος ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης με πλάγια πρόσπτωση.

Βιβλιογραφία

- [1] Douglis A. Agmon, S. and I. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1964.
- [2] M. S. Agranovich, Y. V. Egorov, and M. A. Shubin. *Partial Differential Equations IX*, volume 79. Springer-Encyclopedia of Mathematical Sciences, Berlin, 1997.
- [3] M. S Agranovich and M.I. Vishik. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. *Russian Mathematical Surveys*, 19(3), 1964.
- [4] A. Altundang and R. Kress. On a two-dimensional inverse scattering problem for a dielectric. *Appl. Analysis*, 91(4):757–771, 2012.
- [5] R. Bellman, B. G. Kashef, and J. Casti. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 10(1):40–52, 1972.
- [6] C. W. Bert and M. Malik. Differential quadrature method in computational mechanics: a review. *Applied Mechanics Reviews*, 49(1):1–28, 1996.

- [7] A.A. Bitsadze, A.V. and Samarskii. On some of the simplest generalizations of linear elliptic boundary problems. *Dokl. Akad. Nauk*, 185(4), 1969.
- [8] F. Cakoni and D. Gintides. New results on transmission eigenvalues. *Inverse Problems Imaging*, pages 39 – 48, 2010.
- [9] F. Cakoni and Haddar. On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium. *Applicable Analysis*, pages 475 – 493, 2009.
- [10] F. Cakoni and R. Kress. A boundary integral equation method for the transmission eigenvalue problem. *Appl. Analysis*, 96(1):23–38, 2017.
- [11] Gintides D. Cakoni, F. and H. Haddar. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues. *SIAM J. MATH. ANAL.*, pages 237 – 255, 2010.
- [12] Haddar H. Cakoni, F. and S. Mengz. Boundary integral equations for the transmission eigenvalue problem for maxwell’s equations. *J. Integral Equations Applications*, pages 375 – 406, 2015.
- [13] R. Chapko, D. Gintides, and L. Mindrinos. The inverse scattering problem by an elastic inclusion. *Advances in Computational Mathematics*, 44:453–476, 2018.
- [14] C. W. Clenshaw and A. R. Curtis. A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik*, (2):197–205, 1960.

- [15] D. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, New York, 1983.
- [16] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Number 93 in Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 3rd edition, 2013.
- [17] D. Colton and R. Kress. *Linear Integral Equations*. Number 82 in Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 3rd edition, 2014.
- [18] D. Colton and M. Piana. The simple method for solving the electromagnetic inverse scattering problem: the case of te polarized waves. *Inverse Problems*, pages 597–614, 1998.
- [19] Päivärinta L. Colton, D. and J. Sylvester. The interior transmission problem. *Inverse Problems Imaging*, pages 13–28, 2007.
- [20] A. Cossonniere and H. Haddar. Surface integral formulation of the interior transmission problem. *The Journal of Integral Equations and Applications*, 25(3):341–376, 2013.
- [21] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 106:205–220, 1985.
- [22] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*. Wiley-Interscience, New York, 1962.
- [23] S. J. Cox and J. R. McLaughlin. Extremal eigenvalue problems for composite membranes, i*. *Applied Mathematics and Optimization*, 22:153–167, 1990.

- [24] Nornberg G. dos Santos E. M. and Soave N. On unique continuation principles for some elliptic systems. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 38:1667–1680, 2021.
- [25] Li Y. Feng, L. and L. Zhang. The scattering of electromagnetic wave at oblique incidence in inhomogeneous chiral medium. *J. Math. Anal. Appl.*, 417:719–732, 2014.
- [26] W. M. Gentleman. Implementing clenshaw-curtis quadrature, i methodology and experience. *Communications of the ACM*, 15(5):337–342, 1972.
- [27] W. M. Gentleman. Implementing clenshaw-curtis quadrature, ii computing the cosine transformation. *Communications of the ACM*, 15(5):343–346, 1972.
- [28] D. Gintides and L. Mindrinos. The direct scattering problem of obliquely incident electromagnetic waves by a penetrable homogeneous cylinder. *Journal of Integral Equations and Applications*, 28(1):91–122, 2016.
- [29] D. Gintides and L. Mindrinos. The inverse electromagnetic scattering problem by a penetrable cylinder at oblique incidence. *Applicable Analysis*, 98(4):781–798, 2019.
- [30] D. Gintides, L. Mindrinos and S. Giogiakas. The scattering problem of obliquely incident electromagnetic waves by an inhomogeneous infinitely long cylinder. *Physica Scripta*, 98(11):1–13, 2023.

- [31] D. Gintides, L. Mindrinos and S. Giogiakas. A theoretical and numerical study of oblique scattering by an inhomogeneous cylinder. *Journal of Physics Conference Series*, pages 1–9, 2023.
- [32] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins University press, Baltimore, 2013.
- [33] P. Hähner. An exterior boundary-value problem for the maxwell equations with boundary data in a sobolev space. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 109:213–224, 1988.
- [34] T. Hohage. Fast numerical solution of the electromagnetic medium scattering problem and applications to the inverse problem. *Journal of Computational Physics*, 214:224–238, 2006.
- [35] G. C. Hsiao and W. Wendland. *Boundary Integral Equations*. 2008.
- [36] T. Johansson and B. D. Sleeman. Reconstruction of an acoustically sound-soft obstacle from one incident field and the far-field pattern. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 72(1):96–112, 2007.
- [37] C. T. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. SIAM, 1995.
- [38] A. Kirsch. On the existence of transmission eigenvalues. *Inverse Problems Imaging*, pages 155–172, 2009.
- [39] A. Kirsch and Lechleiter A. The operator equations of lippmann–schwinger type for acoustic and electromagnetic scattering. *Applicable Analysis*, pages 807–830, 2009.

- [40] A. Kirsch and R. Kress. Uniqueness in inverse obstacle scattering(acoustics). *Inverse Problems*, pages 285–299, 1993.
- [41] R. Kittappa and R.E. Kleinman. Acoustic scattering by penetrable homogeneous objects. *J.Math.Phys.*, 16:421–432, 1975.
- [42] R. E. Kleinman and P. A. Martin. On single integral equations for the transmission problem of acoustics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48(2):307–325, 1988.
- [43] R. Kress. Numerical solution of boundary integral equations in time-harmonic electromagnetic scattering. *Electromagnetics*, 10(1–2):1–20, 1990.
- [44] R. Kress. A collocation method for a hypersingular boundary integral equation via trigonometric differentiation. *Journal of Integral Equations and Applications*, 26(2):197–213, 2014.
- [45] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Springer, New York, 3rd edition, 2014.
- [46] K. Krupchyk and J. Tuomela. The shapiro-lopatinskij condition for elliptic boundary value problems. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, pages 287–329, 2006.
- [47] A.W. Maue. Über die formulierung eines allgemeinen beugungsproblems durch eine integralgleichung. *Zeitschrift für Physik*, pages 601–618, 1949.
- [48] G. Nakamura and H. Wang. Inverse scattering for obliquely incident polarized electromagnetic waves. *Inverse problems*, 28(10):105004, 2012.

- [49] G. Nakamura and H. Wang. The direct electromagnetic scattering problem from an imperfectly conducting cylinder at oblique incidence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 397:142–155, 2013.
- [50] Sleeman B.D. Nakamura, G. and H. Wang. On uniqueness of an inverse problem in electromagnetic obstacle scattering for an impedance cylinder. *Inverse Problems*, 28, 2012.
- [51] A. Nakaoka. On boundary value problems for elliptic equations degenerating on the boundary. *Publ. RIMS, Kyoto Univ*, pages 455–482, 1972.
- [52] J. C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*. App. Math. Sci. Springer, New York, 2001.
- [53] R. Potthast. Electromagnetic scattering from an orthotropic medium. *Journal Of Integral Equations And Applications*, 11(2):197–215, 1999.
- [54] M. H. Protter. Unique continuation for elliptic equations. *American Mathematical Society*, 95:81–91, 1960.
- [55] N. Raymond. *Elements of spectral theory*. IRMAR - Institut de Recherche Mathématique de Rennes, France, 2018.
- [56] Y. A. Roitberg and Z. G. Sheftel. Boundary value problems with a parameter in l_p for systems elliptic in the sense of douglis - nirenberg. *Ukrainian Mathematical Journal*, 19:100–104, 1967.
- [57] Y. A. Roitberg and Z. G. Sheftel. Nonlocal boundary-value problems for elliptic equations and systems. *Siberian Mathematical Journal*, 13(1):118–129, 1972.

- [58] M. Schechter. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, pages 457–486, 1959.
- [59] M. Schechter. A generalization of the problem of transmission. *Sc. Nor. Sup. Di Pisa*, pages 207–236, 1960.
- [60] M. Schechter. Mixed boundary problems for general elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, pages 183–201, 1960.
- [61] Z. G. Sheftel. Energy inequalities and general boundary value problems for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Sib. Mat. Zh.*, 6(3):636–668, 1965.
- [62] N. Shimakura. *Partial Differential Operators of Elliptic Type*. American Mathematical Society, Providence, 1st edition, 1992.
- [63] L. N. Trefethen. Is gauss quadrature better than clenshaw–curtis? *SIAM review*, 50(1):67–87, 2008.
- [64] H. Wang and G. Nakamura. The integral equation method for electromagnetic scattering problem at oblique incidence. *Applied Numerical Mathematics*, 62(7):860–873, 2012.
- [65] J. Wloka. *Partial Differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [66] J. Wloka, B. Rowley, and B. Lawruk. *Boundary value problems for elliptic systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1995.

- [67] U. Yücel and K. Boubaker. Differential quadrature method (dqm) and boubaker polynomials expansion scheme (bpes) for efficient computation of the eigenvalues of fourth-order sturm–liouville problems. *Applied Mathematical Modelling*, 36(1):158–167, 2012.
- [68] S.D. Zhitarashu, N.V. and Éidel'man. On nonlocal boundary problems for elliptic equations. *Matem. Isslem*, 20(2), 1971.