

Η  $p$ -χρωματισσιμότητα, η ορίζουσα και άλλες  
κλασικές αναλλοίωτες στην Θεωρία Κόμβων

Διπλωματική Εργασία

Αλεξάνδρα Φικιώρη



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Σοφία Λαμπροπούλου  
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2024

Αυτή η σελίδα σκοπίμως είναι κενή

# Η p-χρωματισσιμότητα, η ορίζουσα και άλλες κλασικές αναλλοίωτες στην Θεωρία Κόμβων

Διπλωματική Εργασία

Αλεξάνδρα Φικιώρη



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Σοφία Λαμπροπούλου  
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Η τριμελής εξεταστική επιτροπή

Σοφία Λαμπροπούλου  
Καθηγήτρια

Αριστείδης Κοντογεωργής  
Καθηγητής

Κοντοκώστας Δημήτριος  
Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Μάρτιος 2024

.....

Φικιώρη Αλεξάνδρα

Διπλωματούχα της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών Ε.Μ.Π.

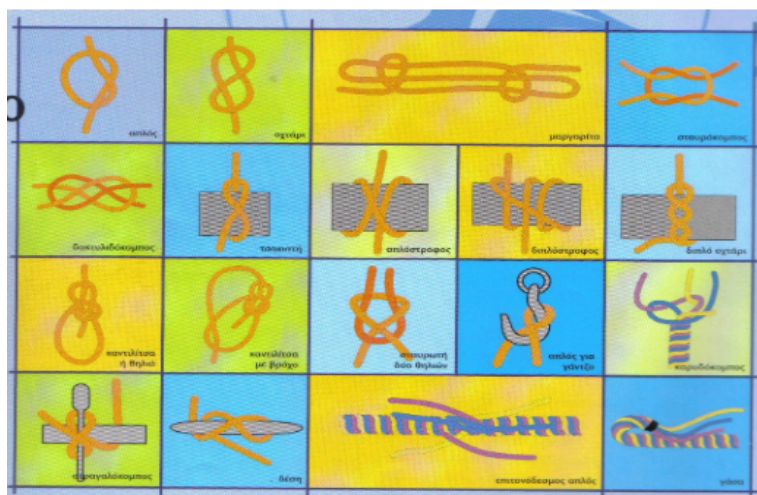
Copyright ©Φικιώρη Αλεξάνδρα, 2024.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

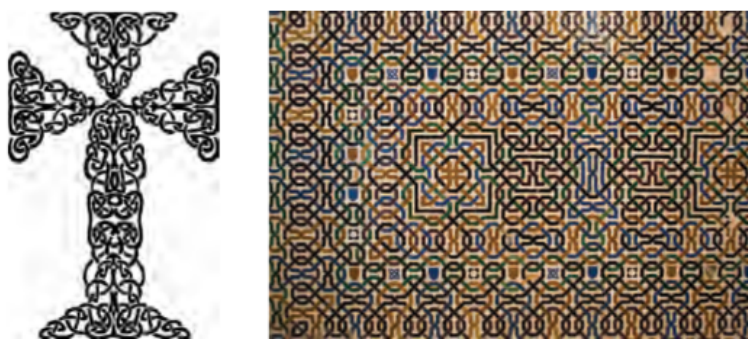
Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

# 1 Περίληψη

Εδώ και χιλιετίες, οι άνθρωποι δημιουργούν κόμβους για να αντιμετωπίσουν προβλήματα που συναντούν στην καθημερινότητά τους. Υπάρχουν πολυάριθμοι κόμβοι που χρησιμοποιούνται για πρακτικούς σκοπούς από ναυτικούς και οικοδόμους,



καθώς και κόμβοι που χρησιμοποιούνται για καλλιτεχνική ή ακόμη και πνευματική σημασία, όπως φαίνεται παρακάτω σε αυτόν τον κέλτικο σταυρό και το μοτίβο ψηφιδωτού της Αλάμπρας στη Γρανάδα της Ισπανίας.



Αλλά τι είναι ένας μαθηματικός κόμβος; Αρχικά, μία πρώτη περιγραφική προσέγγιση, θα βοηθήσει τον αναγνώστη να κατανοήσει την έννοια του κόμβου, μέσω προσωπικών του εμπειριών από την καθημερινότητα. Ένας κόμβος μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα νήμα, του οποίου τα άκρα, έπειτα από πολλές διασταυρώσεις ενώνονται. Ωστόσο, η θεωρία κόμβων αποτελεί μεγάλο κλάδο των μαθηματικών, και έτσι απαιτείται να δοθεί ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός για την συγκεκριμένη έννοια. Συγκεκριμένα ένας κόμβος είναι η εμφύτευση ενός κύκλου στον τρισδιάστατο χώρο. Στην παρούσα εργασία, γίνεται η προσπάθεια μιάς περιεκτικής θεμελίωσης των βασικών εννοιών της θεωρίας κόμβων, αλλά και η ανάπτυξη περεταίρω εργαλείων για εμφάνιση στα προβλήματα που απασχολούν τον

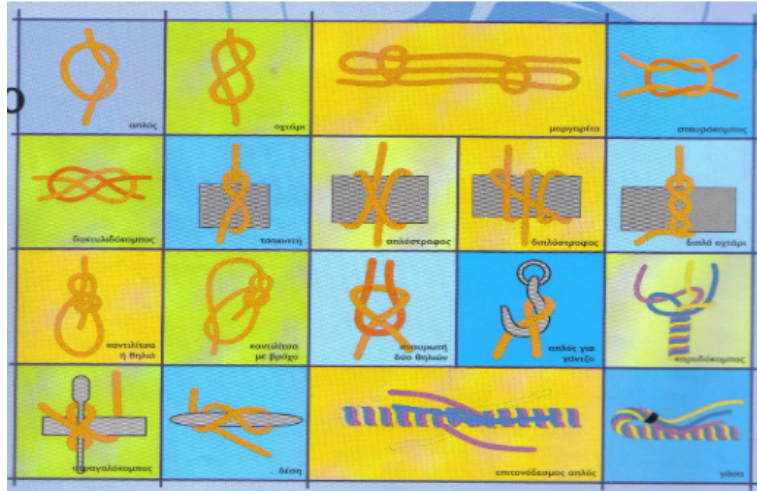
συγκεκριμένο τομέα των μαθηματικών. Αναλυτικότερα, το μεγάλο εγχείρημα που πολλοί επιστήμονες του 19ου, 20ου και 21ου αιώνα είχαν και έχουν αναλάβει να φέρουν εις πέρας, είναι η ταξινόμηση των κόμβων. Για τον σκοπό αυτό, ανέπτυξαν κάποιους μαθηματικούς αλγορίθμους για να μπορούν να ξεπεράσουν την δυσκολία της μαθηματικής επικοινωνίας ενός κόμβου. Επίσης ανέπτυξαν κάποιες αναλλοίωτες κόμβων οι οποίες θα αποτελούσαν τα απαραίτητα εργαλεία για τον διαχωρισμό τους. Συγκεκριμένα, μια αναλλοίωτη κόμβων είναι μία συνάρτηση από το σύνολο των κόμβων σε κάποιο σύνολο τιμών, η οποία έχει την ιδιότητα τοπολογικά ισοτοπικοί κόμβοι να παίρνουν την ίδια τιμή. Αυτό σημαίνει ότι αν μία αναλλοίωτη δίνει διαφορετικές τιμές σε ένα ζευγάρι κόμβων, τότε αυτοί είναι διαφορετικοί. Το πρόβλημα εύρεσης της απόλυτης και πλήρους αναλλοίωτης των κόμβων, που θα τους ταξινομήσει μαθηματικά είναι ακόμη ανοιχτό. Στα κεφάλαια που ακολουθούν, θα αναφερθούμε αναλυτικά σε τρόπους με τους οποίους κωδικοποιούνται οι κόμβοι, συγκεκριμένα κατά Gauss, Alexander-Briggs, Dowker-Thistlethwaite και μέσω της θεωρίας των πλεξίδων. Επίσης θα δούμε ότι οι κόμβοι χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες και θα εμβαθύνουμε σε τέσσερις αναλλοίωτες :

- $p$  - χρωματισσιμότητα
- Ορίζουσα κόμβων
- Αριθμός Λύσεως
- Αριθμός Διασταυρώσεων

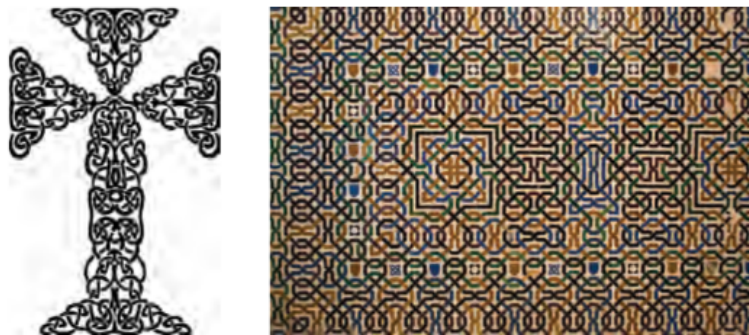
Λέξεις κλειδιά : Ισοτοπία, αναλλοίωτη κόμβων, ομοιομορφισμός, χρωματισσιμότητα κόμβων, ορίζουσα κόμβων, αριθμός λύσεως, αριθμός διασταυρώσεων.

## 2 Abstract

For millennia, people have been creating knots to deal with problems they encounter in their daily lives. There are numerous knots used for practical purposes by sailors and builders,



as well as knots used for artistic or even spiritual significance, as shown below in this Celtic cross and mosaic pattern in Alhambra in Granada, Spain.



But what is a mathematical knot? To begin with, a first descriptive approach will help the reader to understand the concept of a knot through personal experiences from everyday life. A knot can be represented as a thread, whose ends, after many crossings, come together. However, node theory is a large branch of mathematics, and so a rigorous mathematical definition of the concept is required. Specifically, a knot is the implantation of a circle in three-dimensional space. In this paper, we attempt to provide a comprehensive foundation of the basic concepts of knot theory and to develop further tools for deepening the problems of this particular area of mathematics. In particular, the major task that many scientists of the 19th, 20th and 21st centuries have undertaken and are still undertaking is the classification of

knots. For this purpose, they developed some mathematical algorithms to be able to overcome the difficulty of mathematical communication of a knot. They also developed some knot invariants which would be the necessary tools for their separation. In particular, a knot invariant is a function from the set of knots to some set of values, which has the property that topologically equivalent knots take the same value. This means that if an invariant gives different values to a pair of knots, then they are different. The problem of finding the absolute and complete invariant of the knots, which will mathematically classify them, is still open. In the following chapters, we will discuss in detail how knots are encoded. In particular, by Gauss, Alexander-Briggs, Dowker-Thistlethwaite and through braid theory. We will also see that knots are divided into three categories and we will go into four invariants:

- $p$  - colorability
- Determinant
- Unknotting number
- Crossing number

Key words : Isotopy, knot invariants, homeomorphism, knot colorability, knot determinant, unknotting number, crossing number.



### 3 Ευχαριστίες

Την παρούσα εργασία θα ήθελα να την αφιερώσω σε όλους τους ανθρώπους που έχουν διασχίσει το δρόμο της ζωής μου, καθώς καθένας από αυτούς συνέβαλε στο να γίνω ο άνθρωπος που είμαι σήμερα. Εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου που πέρασαν από τη ζωή μου, ακόμα κι αν ορισμένοι από αυτούς δεν ήταν προορισμένο να παραμείνουν δίπλα μου μέχρι το τέλος. Φυσικά, υπάρχουν συγκεκριμένοι άνθρωποι στους οποίους θα ήθελα να αφιερώσω αυτήν την εργασία και με ονομαστικό τρόπο. Πρόκειται για ανθρώπους που κατέχουν ιδιαίτερη θέση στην καρδιά μου, και χωρίς την παρουσία τους, δεν θα ήμουν η Αλεξάνδρα που είμαι σήμερα:

Στην κυρία Λαμπροπούλου η οποία με ενέμπνευσε να ασχοληθώ με την Θεωρία Κομβων. Στην γιαγιά μου Τζένη και στον παππού μου Ανδρέα, οι οποίοι μου χάρισαν την πιο ανέμελη και χαρούμενη παιδική ηλικία που θα μπορούσα να ζητήσω. Στη γιαγιά μου, Λίντα, η οποία με τη στήριξη, τον θαυμασμό και τις επιβραβεύσεις που μου έδειχνε για οτιδήποτε και αν πετύχαινα, είτε μικρό είτε μεγάλο, πάντα με έκανε να προσπαθώ για το κάτι παραπάνω. Στην αγαπημένη μου θεία, Άντα, που με την ανοιχτόμυαλη σκέψη της, την χωρίς κριτική αποδοχή της και την ειλικρινή της αγάπη, κατάφερε να αποτελέσει το μοναδικό μέλος της οικογένειάς με το οποίο ένιωθα ότι μπορώ να μοιραστώ κάθε μου σκέψη και συναίσθημα. Στον παππού μου, Αγησίλαο, που τόσο θα ήθελα να είχα γνωρίσει.

Στην εντυπωσιακή Ξενία, η οποία είναι η ενσάρκωση του πραγματικού φίλου και όπου αν ξεκινούσα να καταγράφω όλα τα πράγματα για τα οποία την ευχαριστώ, πιθανότατα να μην τελείωνα ποτέ.

Στους υπέροχους συμφοιτητές μου, Παυλίνα Μαρισέβη Μαριάνθη και Κοσμά, που αντίθετα με την προηγούμενη μου πεποίθηση για τις φίλιες μετα την ενηλικίωση, απέδειξαν ότι δεν διαμορφώνονται βάσει συμφερόντων. Πάντοτε ήταν εκεί για εμένα, χωρίς ποτέ να αναζητούν ανταπόδοση. Θα τους θυμάμαι και θα τους κρατώ στην καρδιά μου για όλη μου τη ζωή.

Στις παιδικές και παντοτινές μου φίλες, Αθηνά και Μαρία, οι οποίες αποτελούν για εμένα ανεξάντλητες πηγές χαράς και γέλιου. Είναι αυτές που έκαναν τα χρόνια της φοιτητικής μου ζωής αξέχαστα, χαρίζοντάς μου τις πιο όμορφες στιγμές.

Και προφανώς στις αδερφές μου, Ανδρεάνα και Αγησίλια Φικιώρη, τους δίδυμους πυλώνες μου, χωρίς τους οποίους δε θα μπορούσα να σταθώ.

Ωστόσο, η απόλυτη έμπνευση μου πηγάζει ειλικρινά από τους δύο καλύτερους μου φίλους, τους εκπληκτικούς ανθρώπους από τους οποίους πήρα το όνομά και το αίμα της ζωής μου, τον Γιώργο Φικιώρη και την Τόνια Νικολοπούλου. Οι γονείς μου ποτέ δεν μου έδωσαν την εντύπωση ότι υπήρχαν όρια σε όσα θα μπορούσα να κάνω ή σε ό,τι θα μπορούσα να γίνω. Γέμισαν το σπίτι μας με αγάπη, διασκέδαση, βιβλία και μουσική, προσπαθώντας αδιαλείπτως να μου παρέχουν πρότυπα από μεγάλους μαθηματικούς έως και μεγάλους καλλιτέχνες. Καθώς με καθοδήγησαν μέσα σε αυτά τα αξέχαστα εικοσιτρία χρόνια, δεν ξέρω αν συνηδαιοποίησαν ποτέ πως ο άνθρωπος ο οποίος ήθελα περισσότερο να γίνω ήταν εκείνοι. Σας ευχαριστώ μαμά και μπαμπά, είστε οι οδηγοί μου για τα πάντα.

Αυτή η σελίδα σκοπίμως είναι κενή

# Contents

<b>1</b>	<b>Περίληψη</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Ευχαριστίες</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Εισαγωγή : Βασικοί ορισμοί της θεωρίας κόμβων</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Κωδικοποιήσεις κόμβων</b>	<b>14</b>
5.1	Κωδικοποιήσεις των Gauss, Alexander-Briggs και Dowker-Thistlethwaite . . . . .	14
5.2	Πλεξίδες και Κόμβοι . . . . .	16
5.2.1	Ορισμοί . . . . .	16
5.2.2	Η ομάδα των πλεξίδων . . . . .	18
5.2.3	Σχέση που συνδέει τους κόμβους με τις πλεξίδες . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Χρωματισμός</b>	<b>28</b>
6.1	Τριχρωματισμότητα . . . . .	28
6.2	$p$ -χρωματισμότητα . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Ορίζουσα κόμβων</b>	<b>37</b>
<b>8</b>	<b>Συμπληρώματα κόμβων και 3-πολλαπλότητες</b>	<b>46</b>
<b>9</b>	<b>Τύποι κόμβων</b>	<b>47</b>
9.1	Κόμβοι Τόρου (Torus knots) . . . . .	47
9.2	Κόμβοι Δορυφόροι (Satellite knots) . . . . .	52
9.3	Υπερβολικοί Κόμβοι (Hyperbolic knots) . . . . .	53
<b>10</b>	<b>Ανίχνευση κόμβων τόρου με την βοήθεια του SnapPy</b>	<b>55</b>
<b>11</b>	<b>Αριθμός Λύσεως (Unknotting Number)</b>	<b>57</b>
<b>12</b>	<b>Αριθμός Διασταυρώσεων (Crossing Number)</b>	<b>62</b>
<b>13</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>67</b>
<b>14</b>	<b>Παράρτημα</b>	<b>70</b>

## 4 Εισαγωγή : Βασικοί ορισμοί της θεωρίας κόμβων

Όταν σκεφτόμαστε έναν κόμβο, συνήθως φανταζόμαστε ένα νήμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.α και όχι ένα νήμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.β. Ωστόσο, από τοπολογικής άποψης, τα νήματα αυτά είναι ουσιαστικά τα ίδια, εφόσον έχουν ελεύθερα άκρα.



Σχήμα 4.1. (α) και (β)

Στην τοπολογία δύο αντικείμενα στο ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο μπορούν να θεωρηθούν ίδια, όταν το ένα μπορεί να μετασχηματιστεί στο άλλο μέσω ενός αυτομοιομορφισμού  $h$  του  $\mathbb{R}^3$ . Το γεγονός ότι τα νήματα των Σχημάτων 4.1.α και 4.1.β είναι τα ίδια, από τοπολογικής άποψης, αποδεικνύεται στα Σχήματα 4.2.α - 4.2.δ. Τα Σχήματα 4.2.α, 4.2.β και 4.2.γ παραμορφώνονται στα Σχήματα 4.2.β, 4.2.γ και 4.2.δ αντίστοιχα μέσω ενός αυτομοιομορφισμού του  $\mathbb{R}^3$ .



Σχήμα 4.2. (α) (β) (γ) και (δ)

Ας εξετάσουμε τώρα τα δύο νήματα στα Σχήματα 4.3.α και 4.3.β που προκύπτουν από τα Σχήματα 4.1.α και 4.1.β αντίστοιχα με την ένωση των ακραίων σημείων τους. Από τοπολογικής άποψης τα δύο Σχήματα δεν φαίνονται να είναι ίδια. Μέχρι το τέλος της εργασίας θα μπορούμε να το αποδείξουμε κιόλας.



Σχήμα 4.3. (α) και (β)

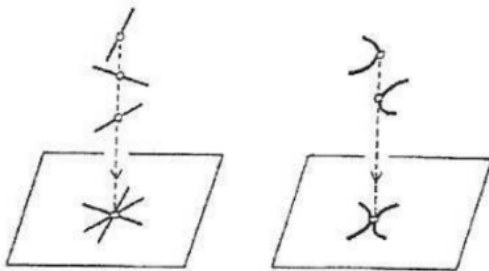
### Ορισμός 1:

Ένας κόμβος είναι η εμφύτευση<sup>1</sup> του κύκλου  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$  στον τρισδιάστατο χώρο  $\mathbb{R}^3$  ή στην σφαίρα  $S^3$ , ενώ κρίκος είναι η εμφύτευση  $k$  κύκλων στον  $\mathbb{R}^3$  ή στην σφαίρα  $S^3$ . Γενικότερα, κόμβος είναι ένας κρίκος με μία συνιστώσα.

Από τον ορισμό ενός κόμβου προκύπτει ότι οι κόμβοι «ζουν» στις τρεις διαστάσεις. Για τη μελέτη τους όμως είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την κάθετη προβολή τους σε ένα επίπεδο έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

1. Οι επαπτόμενες ευθείες σε όλα τα σημεία του κόμβου θα πρέπει να προβάλλονται πάνω σε ευθείες του επιπέδου προβολής (δηλαδή οι προβολές των επαπτομένων δεν εκφυλίζονται ποτέ σε σημείο).
2. Δεν προβάλλονται παραπάνω από δύο σημεία του κόμβου σε ένα σημείο του επιπέδου.
3. Δύο διαφορετικά σημεία του κόμβου μπορούν να προβληθούν στο ίδιο σημείο του επιπέδου μόνο αν οι προβολές των επαπτομένων τους δεν συμπίπτουν.
4. Το σύνολο των σημείων διασταύρωσης, στα οποία προβάλλονται δύο σημεία είναι πεπερασμένο.

Δηλαδή απαγορεύονται οι παρακάτω δύο καταστάσεις:



Η τριπλή διασταύρωση (τριπλό σημείο) διορθώνεται ως εξής :



Η διόρθωση του σημείου αναδρομής:



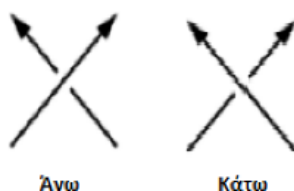
<sup>1</sup>Μιά εμφύτευση είναι η αποστολή ενός αντικειμένου σε χώρο μεγαλύτερης διάστασης, έτσι ώστε το αντικείμενο να είναι ομοιομορφικό με την εικόνα του.

Ενώ του εφαπτομενικού σημείου ως εξής :



**Ορισμός 2:**

Ένα διάγραμμα ενός κόμβου  $K$  είναι μια προβολή του  $K$  σε ένα επίπεδο (βλέπε Σχήμα 4.4) τέτοιο ώστε να έχει μόνο διπλά πεπερασμένα σημεία, με την πληροφορία "άνω" και "κάτω". Τα διπλά σημεία τα ονομάζουμε διασταυρώσεις (crossings).



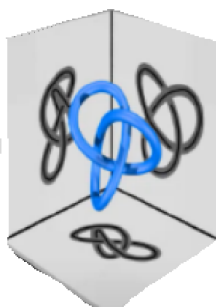
**Ορισμός 3:**

Ως κίνηση  $\Delta$  σε έναν κόμβο στον χώρο είναι μια κίνηση όπως αυτή στο παρακάτω σχήμα :



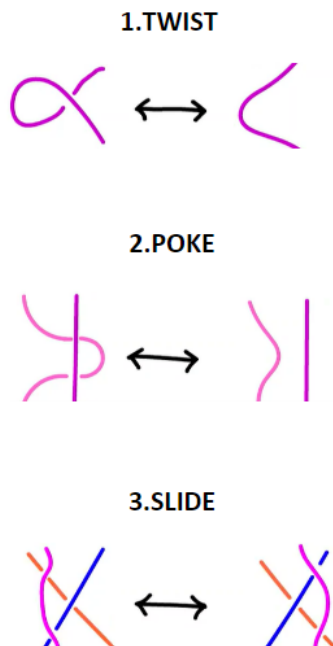
Δηλαδή υποθέτουμε δύο κοντινά σημεία ( έστω  $A, B$  ) ενός κόμβου  $K$ , και εισάγουμε ένα σημείο  $\Gamma$  στο χώρο, έτσι ώστε η επιφάνεια του τριγώνου  $AB\Gamma$  να μην τέμνει τον  $K$ . Αν αντικαθιστούμε το τόξο  $AB$  από το  $A\Gamma + \Gamma B$  παίρνουμε την κίνηση  $\Delta$ .

Ας παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο πως η προβολή ενός κόμβου  $K$  σε διαφορετικά επίπεδα μας δίνει οπτικά διαφορετικά διαγράμματα του  $K$  (Βλέπε Σχήμα 4.4). Εφόσον όμως τα διαγράμματα αυτά προέρχονται απο τον ίδιο κόμβο, μπορούμε για την μελέτη του  $K$  να χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε από αυτά επιθυμούμε.



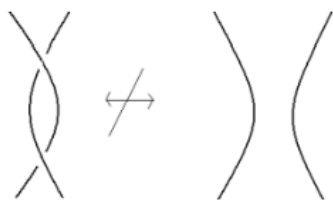
Σχήμα 4.4

Το 1927 ο Kurt Reidemeister χρησιμοποιώντας τις κινήσεις  $\Delta$ , δημιούργησε τις κινήσεις Reidemeister. Μια κίνηση Reidemeister είναι μια τοπική αλλαγή στην προβολή του κόμβου που διατηρεί την τοπολογία του. Συγκεκριμένα, υπάρχουν τρεις τύποι κινήσεων Reidemeister, που συμβολίζονται με  $R1$ ,  $R2$  και  $R3$ , όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Όπως προαναφέραμε, κάθε μία από αυτές τις κινήσεις αλλάζει την προβολή του κόμβου με έναν ορισμένο τρόπο, διατηρώντας όμως την υποκείμενη τοπολογία του. Για παράδειγμα, οι κινήσεις  $R2$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξάλειψη μιας διασταύρωσης περνώντας ένα νήμα πάνω ή κάτω από ένα άλλο, ενώ οι κινήσεις  $R1$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή ή την εξάλειψη μιας διασταύρωσης με τη συστροφή δύο νημάτων το ένα γύρω από το άλλο. Συνεπώς θα μπορούσαμε να πούμε πως μέσω των κινήσεων Reidemeister, κινούμαστε ανάμεσα στα διάφορα διαγράμματα του κόμβου.

**Παρατήρηση:** Η παρακάτω κίνηση δεν είναι κίνηση Reidemeister, γιατί δεν μπορεί να προέλθει από κινήσεις  $\Delta$ .



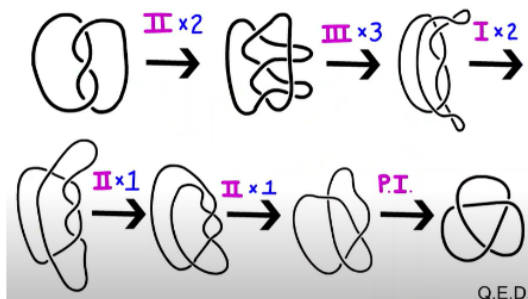
### Παράδειγμα:

Το διάγραμμα του Σχήματος 4.5.α είναι γνωστό ότι προέρχεται από τον κόμβο τριφύλλι (κόμβος trefoil). Έστω τώρα ένα διάγραμμα το οποίο δεν γνωρίζω από ποιόν κόμβο προέρχεται (Σχήμα 4.5.β).



Σχήματα 4.5.α και 4.5.β

Θα δείξουμε ότι τα δύο διαγράμματα διαφέρουν κατά πεπερασμένο πλήθος κινήσεων Reidemeister. Πράγματι:



Συνοπώς το Σχήμα 4.5.β είναι απλά μια διαφορετική προβολή του κόμβου τριφύλλι.

#### Ορισμός 4:

Ένας ομοιομορφισμός (Ελαστική παραμόρφωση του χώρου χωρίς να έχει ταυτόσημες εικόνες) είναι μια απεικόνιση  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $h^{-1}$ ,  $h$  συνεχείς και  $h$  1-1 και επί.

#### Ορισμός 5:

Θα λέω ότι ο κόμβος  $K1$  είναι ισοτοπικός (ισοτοπία) με τον κόμβο  $K2$  αν υπάρχει ομοιομορφισμός του χώρου τέτοιος ώστε η εικόνα του  $K1$  μέσω του ομοιομορφισμού να είναι το  $K2$  ( $h(K1) = K2$ ).

#### Ορισμός 6:

Τόξο μιας προβολής ενός κόμβου ορίζεται ως ένα κομμάτι της προβολής που αρχίζει από μία διασταύρωση η οποία έχει την πληροφορία "άνω" (ή "κάτω") και καταλήγει σε μία άλλη διασταύρωση η οποία έχει την πληροφορία "άνω" (ή "κάτω"), μεταξύ των οποίων υπάρχουν μόνο διασταυρώσεις με την πληροφορία "κάτω" ("άνω").



## 5 Κωδικοποιήσεις κόμβων

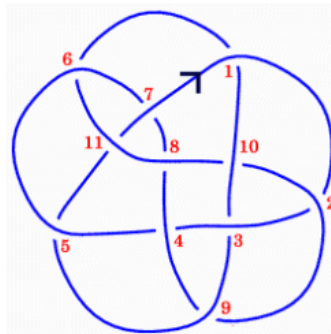
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις κωδικοποιήσεις Gauss, Alexander-Briggs και Dowker-Thistlethwaite. Επίσης παρουσιάζουμε την ομάδα των πλεξίδων αλλά και την σχέση των κόμβων με τις πλεξίδες. Αξιοποιώντας την ιδιότητα των πλεξίδων να δημιουργούν ομάδες με γεννήτορες, και το γεγονός ότι από κάθε κόμβο μπορώ να φτιάξω μια κλειστή ιστοπική πλεξίδα, είμαστε σε θέση να κωδικοποιήσουμε τους κόμβους μέσω λέξεων των ομάδων των πλεξίδων.

### 5.1 Κωδικοποιήσεις των Gauss, Alexander-Briggs και Dowker-Thistlethwaite.

#### Κωδικοποίηση κατά Gauss

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διάγραμμα για κάποιον προσανατολισμένο κόμβο. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο  $P$  του κόμβου που δεν βρίσκεται σε διασταύρωση. Στη συνέχεια, ακολουθούμε τον προσανατολισμό του κόμβου για να φτάσουμε στην πρώτη διασταύρωση και την ονομάζουμε 1. Στη συνέχεια, ακολουθούμε τον προσανατολισμό του κόμβου μέχρι την επόμενη διασταύρωση. Εάν η διασταύρωση στην οποία φτάνουμε δεν έχει ήδη σημειωθεί, τότε την ονομάζουμε 2 (δηλαδή μία μεγαλύτερη από τη διασταύρωση που ονομάσαμε τελευταία). Διαφορετικά, παραλείπουμε αυτή τη διασταύρωση και προχωράμε στην επόμενη. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία έως ότου όλες οι διασταυρώσεις σημειωθούν μία φορά. Με δεδομένη αυτή την σήμανση των διασταυρώσεων, ο συμβολισμός προκύπτει περπατώντας ξανά τον κόμβο, ξεκινώντας από το  $P$ . Καθώς ακολουθούμε τον κόμβο, καταγράφουμε τις διασταυρώσεις που συναντάμε, έχοντας κατά νου ότι αν τύχει να διασχίσουμε μια διασταύρωση μέσω ενός τόξου που έχει την πληροφορία “κάτω”, τότε καταγράφουμε την διασταύρωση με αρνητικό πρόσημο. Θα λέμε κίλλας ότι έχει μήκος όσο και το πλήθος των αριθμών που τον αντιπροσωπεύουν.

Για παράδειγμα ο παρακάτω κόμβος (σχήμα 5.1) σύμφωνα με το Gauss notation μπορεί να ονομαστεί ως : 1 -2 3 -4 5 6 -7 -8 4 -9 2 -10 8 11 -6 -1 10 -3 9 -5 -11 7 , και έχει μήκος 22.



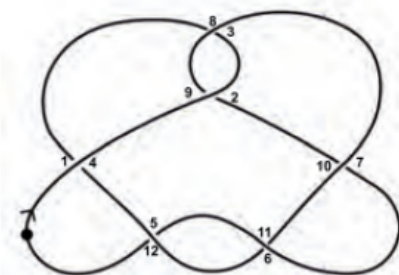
Σχήμα 5.1

## Κωδικοποίηση των Alexander-Briggs

Αυτός ο συμβολισμός οργανώνει απλά τους κόμβους βάση του αριθμού διασταυρώσεών τους (αναλυτικός ορισμός του αριθμού διασταυρώσεων εμφανίζεται στα επόμενα κεφάλαια). Κάθε κόμβος συμβολίζεται από έναν αριθμο με έναν δείκτη. Ο αριθμός συμβολίζει τον αριθμό διασταυρώσεων του κόμβου, ενώ ο δείκτης υποδεικνύει τη θέση του κόμβου ανάμεσα σε όλους τους κόμβους με εκείνο τον αριθμό διασταυρώσεων.

## Κωδικοποίηση κατά Dowker-Thistlethwaite

Για να κατασκευάσουμε μία κωδικοποίηση Dowker-Thistlethwaite (DT) για ένα διάγραμμα Κόμβου, επιλέγουμε πρώτα ένα σημείο βάσης και έναν προσανατολισμό. Ξεκινώντας από το σημείο βάσης, κινούμαστε κατά μήκος του διαγράμματος προς την κατεύθυνση που υποδεικνύει ο προσανατολισμός. Ξεκινώντας με την τιμή 1, σημαίνουμε τις διασταυρώσεις κάθε φορά που τις επισκεπτόμαστε, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Μετά από ένα “ταξίδι” στο διάγραμμα, κάθε διασταύρωση θα έχει δύο ετικέτες: μία ζυγή και μία μονή. Για διάγραμμα  $n$ -διασταυρώσεων, η μέθοδος έχει δημιουργήσει  $n$  ζεύγη τιμών. Τώρα θα προσθέσουμε ένα μείον σε κάθε ζυγή ετικέτα που αντιστοιχεί σε διασταύρωση με την πληροφορία “άνω”. Για παράδειγμα, τα ζεύγη που αντιστοιχούν στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2 είναι  $(1, 4)$ ,  $(-2, 9)$ ,  $(3, -8)$ ,  $(5, 12)$ ,  $(6, 11)$  και  $(7, 10)$ . Εφόσον κάθε ζυγός αριθμός είναι “ζευγαρωμένος” με έναν περιττό αριθμό, δεν χρειάζεται να καταγράψουμε και τα δύο στοιχεία του ζεύγους. Αντ’ αυτού, ταξινομούμε τις ζυγές τιμές σύμφωνα με τις μονές τιμές με τις οποίες είναι ζευγαρωμένες, έτσι ώστε η τιμή που είναι ζευγαρωμένη με το 1 να ακολουθείται πρώτα από την τιμή που είναι ζευγαρωμένη με το 3 κ.ο.κ. Αυτό το διατεταγμένο  $n$ -σύνολο ζυγών ακεραίων αριθμών είναι η κωδικοποίηση DT για το σχετικό προσανατολισμένο διάγραμμα. Χρησιμοποιώντας αυτή την κατασκευή, βλέπουμε ότι η κωδικοποίηση DT για το διάγραμμα στο σχήμα 5.2 είναι  $(4, -8, 12, 10, -2, 6)$ .



Σχήμα 5.2

## 5.2 Πλεξίδες και Κόμβοι

Γεωμετρικά, μπορούμε να θεωρήσουμε μια πλεξίδα ως ένα αντικείμενο που ζεί στις τρεις διαστάσεις. Για δική μας διευκόλυνση όμως, θα αντιμετωπίζουμε τις πλεξίδες ως αντικείμενα που είναι εμφυτευμένα στον χώρο  $\mathbb{C} \times [0, 1]$ .

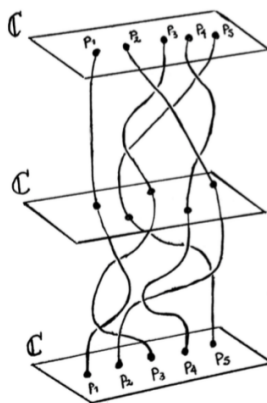
### 5.2.1 Ορισμοί

Για την κατασκευή των αμιγών πλεξίδων (βλέπε Σχήμα 5.3) επιλέγουμε  $n$  διακεκριμένα συνευθειακά σημεία  $\{z_1, \dots, z_n\}$  στον  $\mathbb{C} \times \{1\}$ , και θεωρούμε τις προβολές αυτών στο  $\mathbb{C} \times \{0\}$  τις οποίες και θα συμβολίζουμε  $\{z'_1, \dots, z'_n\}$ . Στην συνέχεια ορίζουμε τις τροχιές  $p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ , όπου κάθε τροχιά  $p_i$  είναι συνεχής, μονότονη και ξεκινά από το σημείο  $z_i$  και καταλήγει στο σημείο  $z'_i$ , για  $i = 1, \dots, n$ .

#### Ορισμός 7:

Μια αμιγής πλεξίδα με  $n$  νήματα είναι μια συλλογή τροχιών  $(p_1, \dots, p_n)$  που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. Κάθε  $p_i$  τέμνει το επίπεδο  $\mathbb{C} \times \{t\}$  σε ακριβώς ένα σημείο,  $\forall t \in [0, 1]$  και  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
2.  $\forall t \in [0, 1]$ , το σύνολο των τροχιών  $(p_1, \dots, p_n)$  συναντά το επίπεδο  $\mathbb{C} \times \{t\}$  σε  $n$  ακριβώς διακεκριμένα σημεία.



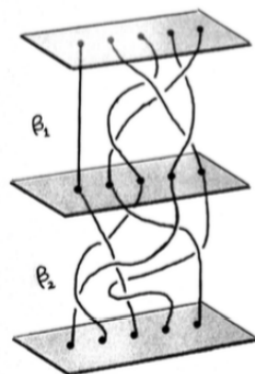
Σχήμα 5.3 Παράδειγμα μιας αμιγούς πλεξίδας με 5-νήματα, όπου απεικονίζεται και ένα ενδιάμεσο εγκάρσιο επίπεδο.

Γενικότερα, ορίζουμε τις συνεχείς και μονότονες τροχιές  $\beta_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ , όπου τα αρχικά τους σημεία είναι τα  $z_i$  όπως προηγουμένως, αλλά το πέρας τους είναι το σημείο  $z'_{\tau(i)}$ , (βλέπε Σχήμα 5.4) όπου  $\tau$  είναι μια μετάθεση του  $\{1, \dots, n\}$ . Με άλλα λόγια, η  $\tau$  ανήκει στη ομάδα μεταθέσεων  $n$  στοιχείων,  $S_n$ .

### Ορισμός 8:

Μια πλεξίδα με  $n$  νήματα είναι μια συλλογή από τροχιές  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  όπως τις περιγράψαμε προηγουμένως, οι οποίες ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. Κάθε  $\beta_i$  συναντά το επίπεδο  $\mathbb{C} \times \{t\}$  σε ένα ακριβώς σημείο, για κάθε  $t \in [0, 1]$  και για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Για κάθε  $t \in [0, 1]$ , το σύνολο των τροχιών  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  συναντά το  $\mathbb{C} \times \{t\}$  σε  $n$  διακεκριμένα σημεία.



Σχήμα 5.4 Παράδειγμα μιας πλεξίδας με 5-νήματα με μετάθεση

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

### Παρατήρηση

Οι αμιγείς πλεξίδες αποτελούν ένα υποσύνολο των πλεξίδων, καθώς σε μια αμιγής πλεξίδα αντιστοιχεί πάντα ως μετάθεση η ταυτοτική της  $S_n$ .

### Παρατήρηση

Μία πλεξίδα τρέχει από πάνω προς τα κάτω, έχει δηλαδή έναν φυσικό προσανατολισμό. Επιπλέον τρέχει μονότονα, χωρίς δηλαδή να παρουσιάζει τοπικά maxima ή minima. Τέλος τα νήματα μίας πλεξίδας δεν έχουν κοινά σημεία.

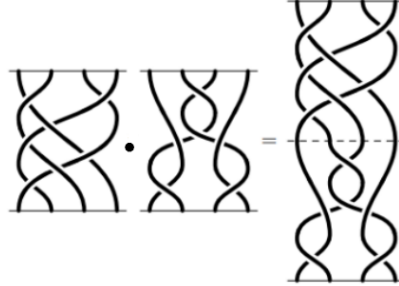
### Ισοτοπία πλεξίδων

Δύο πλεξίδες είναι ισοτοπικές (ανήκουν στην ίδια κλάση ισοτοπίας) αν μπορούμε να οδηγηθούμε από την μία στην άλλη μέσω κινήσεων ισοτοπίας. Αυτές οι ισοτοπίες αποτελούνται είτε από τις κινήσεις Reidemeister II και III, αν βρισκόμαστε στο επίπεδο, είτε από κινήσεις  $\delta$ , αν βρισκόμαστε στον χώρο, και τις ισοτοπίες επιπέδων, οι οποίες περιλαμβάνουν την αλλαγή των σχετικών υψών για δύο μη γειτονικές διασταυρώσεις, καθώς και μικρές μετατοπίσεις των τελικών σημείων που διατηρούν τη σειρά τους. Η κίνηση Reidemeister I δεν μπορεί να εφαρμοστεί, καθώς το twist εισάγει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα.

## 5.2.2 Η ομάδα των πλεξίδων

### Πράξη πλεξίδων

Δύο πλεξίδες με το ίδιο πλήθος νημάτων εκτελούν μια ειδική πράξη που ονομάζεται *γινόμενο* (συμβολίζεται  $\cdot$ ). Σε αυτήν τη πράξη, τα  $n$  πάνω σημεία της δεύτερης πλεξίδας ταυτίζονται με τα  $n$  κάτω σημεία της πρώτης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5 στην περίπτωση όπου το  $n$  είναι 4.



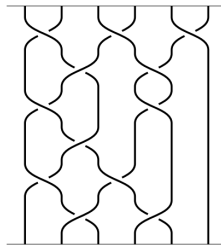
Σχήμα 5.5 Παράδειγμα γινομένου πλεξίδων για  $n=4$

Ωστόσο θα πρέπει να προσέξει κανείς ότι το αποτέλεσμα μετά από την εφαρμογή της πράξης σε δύο πλεξίδες θα βρίσκεται στον χώρο  $\mathbb{C} \times [0, 2]$  και όχι στον αρχικό μας χώρο  $\mathbb{C} \times [0, 1]$ . Αυτό λύνεται εύκολα με μια αναπαραμετροποίηση.

Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω  $\beta_1, \tilde{\beta}_1, \beta_2, \tilde{\beta}_2 \in B_n$ . Έστω επίσης  $\beta_1$  να ανήκει στην ίδια κλάση ισοτοπίας με το  $\tilde{\beta}_1$  και  $\beta_2$  να ανήκει στην ίδια κλάση ισοτοπίας με την  $\tilde{\beta}_2$ . Εφόσον η  $\beta_1$  βρίσκεται στην ίδια κλάση ισοτοπίας με την  $\tilde{\beta}_1$ , έχουμε ότι  $\beta_1 \cdot \beta_2$  ανήκει στην ίδια κλάση με την  $\tilde{\beta}_1 \cdot \beta_2$ . Ομοίως, εφόσον η  $\beta_2$  ανήκει στην ίδια κλάση με την  $\tilde{\beta}_2$ , έχουμε ότι  $\tilde{\beta}_1 \cdot \beta_2$  ανήκει στην ίδια κλάση ισοτοπίας με την  $\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2$  και έτσι θα έχουμε ότι το  $\beta_1 \cdot \beta_2$  βρίσκεται στην ίδια κλάση ισοτοπίας με την πλεξίδα  $\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2$ .

### Διαγράμματα πλεξίδων

Έστω  $\ell_1$  η ευθεία που περνά από τα σημεία  $z_1, \dots, z_n$ , και έστω  $\ell_2$  η ευθεία που περνά από τα σημεία  $z'_1, \dots, z'_n$ . Προβάλλοντας την τρισδιάστατη πλεξίδα που επιθυμούμε να μελετήσουμε στο επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες  $\ell_1$  και  $\ell_2$ , δημιουργούμε ένα διάγραμμα αυτής. Μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα στο Σχήμα 5.6. Για διευκόλυνση μας μελετάμε τις πλεξίδες μέσω των διαγραμμάτων τους.



Σχήμα 5.6 : Ένα παράδειγμα διαγράμματος μιας πλεξίδας

**Ορισμός 9:**

Το σύνολο των κλάσεων ισοτοπίας των πλεξίδων με  $n$  νήματα συμβολίζεται με  $B_n$ .

**Πρόταση 5.1**

Το  $B_n$  μαζί με την πράξη  $\cdot$  αποτελεί ομάδα.

**Απόδειξη**

Ουδέτερο στοιχείο:

Το ζητούμενο στοιχείο είναι η τετριμμένη πλεξίδα με  $n$  νήματα, την οποία θα συμβολίσουμε με  $\mathbf{1}$  και αποτελείται από  $n$  διακεκριμένα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα στοιχεία  $z_i \in \mathbb{C} \times \{1\}$  με τις αντίστοιχες προβολές τους  $z'_i \in \mathbb{C} \times \{0\}$ . Εάν επιλέξουμε τυχαίο στοιχείο  $\beta_1 \in B_n$  τότε έχουμε ότι  $\beta_1 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \beta_1 = \beta_1$ .

Αντίστροφο στοιχείο :

Εάν επιλέξουμε τυχαίο στοιχείο  $\beta \in B_n$  τότε μπορούμε να πάρουμε το αντίστροφο, μέσω της ανάκλασής του στο  $\mathbb{C} \times \{0\}$ , το οποίο και θα συμβολίσουμε με  $\beta^{-1}$ .

Προσεταιριστικότητα :

Είναι φανερό από την παρακάτω εικόνα πως η πράξη  $\cdot$  είναι προσεταιριστική στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των πλεξίδων, δηλαδή  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ , για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in B_n$ .

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

□

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο των αμιγών πλεξίδων με  $n$  νήματα αποτελεί μια υποομάδα της ομάδας  $B_n$ , εφόσον η  $P_n$  (η ομάδα των αμιγών πλεξίδων) είναι κλειστό ως προς το γινόμενο πλεξίδων και ως προς τα αντίστροφα.

## Στοιχειώδεις πλεξίδες

Αφού αποδείξαμε ότι το  $B_n$  είναι ομάδα, ο επόμενος μας στόχος είναι να βρούμε μια παράσταση για κάθε στοιχείο της. Ένα πρώτο βήμα για αυτό αποτελεί η παρατήρηση ότι κάθε στοιχείο του  $B_n$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια ακολουθία από στοιχειώδεις πλεξίδες, τις οποίες θα συμβολίσουμε με  $\sigma_i$  και  $\sigma_i^{-1}$ . Αυτές οι πλεξίδες έχουν την ακόλουθη μορφή:

Ορίζουμε ως  $\sigma_i$  τη στοιχειώδη πλεξίδα που έχει μια θετική διασταύρωση στο  $i$ -οστό και  $(i+1)$ -οστό νήμα (το  $i$ -οστό νήμα είναι πάνω από το  $(i+1)$ -οστό), ενώ τα άλλα νήματα είναι ταυτοτικά.

Ορίζουμε ως  $\sigma_i^{-1}$  τη στοιχειώδη πλεξίδα που έχει μια αρνητική διασταύρωση στο  $i$ -οστό και  $(i+1)$ -οστό νήμα (το  $i$ -οστό νήμα είναι κάτω από το  $(i+1)$ -οστό), ενώ τα άλλα νήματα είναι ταυτοτικά.



Σχήμα 5.7 : Οι στοιχειώδεις πλεξίδες

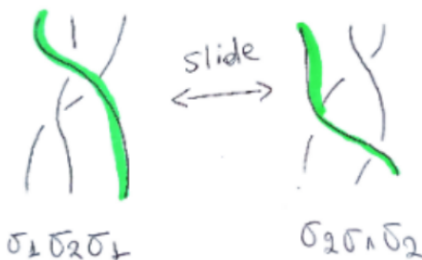
### Παρατηρήσεις:

1. Μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή:  $\sigma_i \sigma_j \leftrightarrow \sigma_j \sigma_i$ , όταν  $|i - j| > 1$  και  $1 \leq i, j \leq n - 1$ .



Σχήμα 5.8

2. Μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή:  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \leftrightarrow \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ , όταν  $1 \leq i \leq n - 2$ .



Σχήμα 5.9

Παρατηρούμε τώρα ότι μια πλεξίδα μπορεί να υποδιαιρεθεί σε οριζόντιες λωρίδες έτσι ώστε σε κάθε λωρίδα να υπάρχει μόνο μία διασταύρωση. Πράγματι αν δύο διασταυρώσεις βρεθούν στην ίδια οριζόντια λωρίδα, με μία μικρή ισοτοπία αυτό μπορεί να αλλάξει. Συνεπώς οποιαδήποτε πλεξίδα μπορεί να παραχθεί ως ένα γινόμενο των στοιχειωδών πλεξίδων.

Άρα το σύνολο  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$  αποτελεί σύνολο γεννητόρων για την ομάδα  $B_n$ .

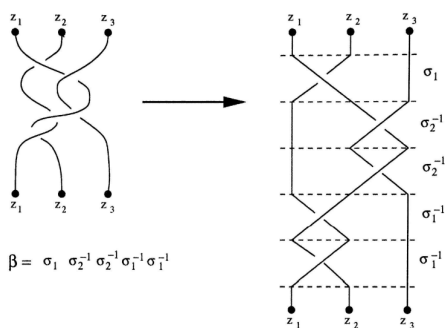
Με αυτές τις δύο σχέσεις ισοτοπίας πλεξίδων έχουμε μια παράσταση ικανή να περιγράψει την ομάδα  $B_n$ :

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ όταν } |i - j| > 2, 1 \leq i, j \leq n - 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ όταν } 1 \leq i \leq n - 2 \rangle.$$

Οι ομάδες των πλεξίδων ορίστηκαν το 1925 από τον Emil Artin [9]. Από τότε μελετώνται εκτενώς από τοπολόγους και αλγεβριστές και έχουν οδηγήσει σε πλούσιες θεωρίες με αρκετές προεκτάσεις. Επιπλέον παρουσιάζουν ερευνητικό ενδιαφέρον λόγω των εφαρμογών σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής. Η απόδειξη για την παραπάνω παράσταση οφείλεται στον Chow [3].

### Παράδειγμα

Η πλεξίδα του Σχήματος 5.10 μπορεί να ονομαστεί ως εξής:



Σχήμα 5.10

Θα λέμε ότι το  $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1}$  είναι η “λέξη” που αντιπροσωπεύει την παραπάνω πλεξίδα.



## Η ομάδα των πλεξίδων και η ομάδα μεταθέσεων

Αν δεν ξεχωρίζαμε σε μια πλεξίδα ποιο νήμα είχε την πληροφορία "άνω" και ποιο την πληροφορία "κάτω" τότε ο γεννήτορας  $\sigma_i$  δεν θα ξεχώριζε από τον γεννήτορα  $\sigma_i^{-1}$ . Άρα θα είχαμε ότι  $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$ , δηλαδή  $\sigma_i^2 = \sigma_i \sigma_i = \sigma_i \sigma_i^{-1} = \mathbf{1}$ .

Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι υπάρχει μια φυσική απεικόνιση από την ομάδα των πλεξίδων  $B_n$  στην ομάδα των μεταθέσεων  $S_n$ . Το γεγονός αυτό βασίζεται στο ότι αν στις σχέσεις των πλεξίδων προσθέσουμε την  $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$ , τότε έχουμε μια παράσταση για την ομάδα μεταθέσεων  $S_n$ .

Έστω  $\beta$  μια πλεξίδα  $n$  νημάτων. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε νήμα ξεκινάει από ένα σημείο  $i$ , διασταυρώνεται με κάποια νήματα και καταλήγει σε ένα σημείο  $b_i$ . Θεωρούμε τη μετάθεση  $\pi \in S_n$ , τέτοια ώστε:

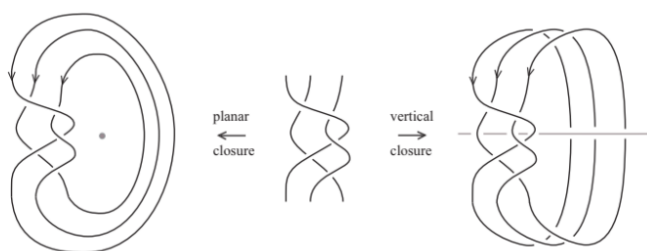
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Επίσης ορίζουμε  $\rho(\beta) \cdot \rho(\lambda) = \sigma(\lambda) \circ \sigma(\beta)$ . Παρατηρούμε εδώ ότι μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση  $\rho : B_n \rightarrow S_n$ , με  $\rho(\beta) = \pi$ . Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι η απεικόνιση αυτή είναι ένας ομομορφισμός της ομάδας  $B_n$  στην ομάδα  $S_n$ , ο οποίος μάλιστα είναι και επί (αφού για κάθε  $\pi \in S_n$  υπάρχει  $\beta \in B_n$  τέτοιο ώστε  $\rho(\beta) = \pi$ ).

**Παρατήρηση:** Ο πυρήνας του ομομορφισμού  $\rho$  είναι η ομάδα  $P_n$  ( η ομάδα των αμιγών πλεξίδων με  $n$  νήματα), άρα η  $P_n$  είναι κανονική υποομάδα της  $B_n$ .

### 5.2.3 Σχέση που συνδέει τους κόμβους με τις πλεξίδες

Αν δούμε μια πλεξίδα ως ένα τοπολογικό αντικείμενο, δηλαδή νήματα που τρέχουν μονότονα από πάνω προς τα κάτω, ορίζω το κλείσιμο μιας πλεξίδας να είναι η ένωση των πάνω σημείων  $z_i$  με τα κάτω  $z'_i$  μέσω απλών τόξων όπως φαίνεται στο σχήμα 5.11. Το αποτέλεσμα είναι ένα προσανατολισμένο διάγραμμα κόμβου ή κρίκου που περιελίσσεται γύρω από έναν καθορισμένο άξονα, τον braid axis. Ο προσανατολισμός του κρίκου δημιουργείται από την κατεύθυνση της πλεξίδας από πάνω προς τα κάτω. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για τον προσδιορισμό του braid axis. Το Σχήμα 5.11 απεικονίζει δύο από αυτούς: στην αριστερή εικόνα ο braid axis μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κάθετος στο επίπεδο προβολής της πλεξίδας, ενώ στη δεξιά εικόνα ο braid axis είναι μια οριζόντια γραμμή πίσω από το επίπεδο προβολής της πλεξίδας. Τα δύο αυτά κλεισίματα είναι το επίπεδο κλείσιμο (planar closure) και το κατακόρυφο κλείσιμο (vertical closure) αντίστοιχα. Προφανώς, τα δύο αυτά κλεισίματα για την ίδια πλεξίδα είναι ισοτοπικά.



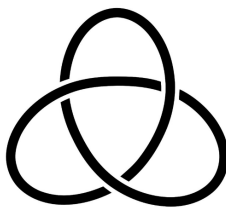
Σχήμα 5.11 : Δύο ισοτοπικά κλεισίματα πλεξίδας τριών νημάτων

### Θεώρημα Alexander

Κάθε προσανατολισμένο διάγραμμα κόμβου ή κρίκου είναι ισοτοπικό με το κλείσιμο μιας πλεξίδας.

### Απόδειξη

Κάθε πλεξίδα διαθέτει ένα χαρακτηριστικό, όπως προαναφέραμε: αποτελείται από νήματα που τρέχουν μονότονα από πάνω προς τα κάτω. Συνεπώς για να μετατρέψουμε έναν κόμβο σε πλεξίδα μας ενδιαφέρει να κρατήσουμε όλα τα τόξα του κόμβου που έχουν προσανατολισμό από πάνω προς τα κάτω και να απαλείψουμε με κατάλληλο τρόπο εκείνα που έχουν αντίθετο προσανατολισμό. Δεδομένου ενός διαγράμματος κόμβου, σημειώνω τα τοπικά ακρότατα, δηλαδή τα σημεία όπου αλλάζει ο προσανατολισμός. Για παράδειγμα, ας λάβουμε υπόψη το διάγραμμα του trefoil (Σχήμα 5.12):



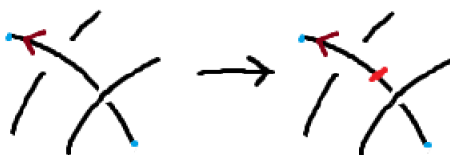
Σχήμα 5.12

Δίνοντάς του τον παρακάτω προσανατολισμό, σημειώνω τα τοπικά ακρότατα όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13 :



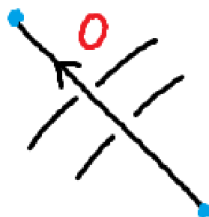
Σχήμα 5.13

Ως *uparc* και *downarc* ορίζω να είναι τα τμήματα με αρχή και πέρας δύο διαδοχικά τοπικά ακρότατα τα οποία έχουν προσανατολισμο από κάτω προς τα πάνω και πάνω προς τα κάτω αντίστοιχα. Τα *downarc* που είναι προσανατολισμένα προς τα κάτω είναι αποδεκτά. Αυτά που επιθυμούμε να τροποποιήσουμε είναι αυτά που είναι προσανατολισμένα προς τα επάνω, δηλαδή τα *uparcs*. Μας ενδιαφέρει να ασχοληθούμε με αμιγή *uparcs*, δηλαδή με τόξα που βρίσκονται μόνο πάνω ( *over uparcs* ) ή μόνο κάτω ( *under uparcs* ) απο τα υπόλοιπα. Τα *uparcs* που δεν πληρούν αυτή την προϋπόθεση, τα υποδιαιρούμε σε μικρότερα, τα οποία είναι αμιγή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.14.



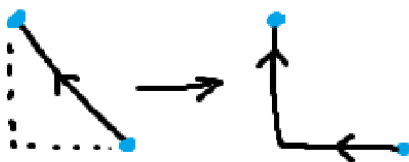
Σχήμα 5.14

Σε αυτό το σημείο θέλουμε να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα μετατρέπει κάθε αμιγές *uparc* σε ένα ζεύγος αντίστοιχων νημάτων της τελικής πλεξίδας. Έστω ότι θέλουμε να απαλείψουμε ένα *over uparc* (Σχήμα 5.15).



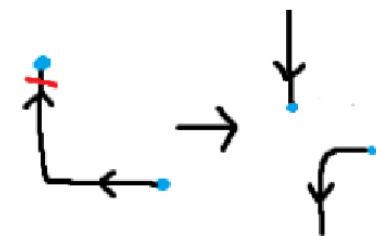
Σχήμα 5.15

Τώρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορώ πάντα να υποθέτω ότι τα *uparcs* δεν είναι ούτε κατακόρυφα ούτε οριζόντια, γιατί αν ήταν, μιά μικρή διαταραχή θα μπορούσε να τα απομακρύνει από αυτές τις κατηγορίες. Με τις προαναφερθείσες υποθέσεις μπορούμε να φτιάξουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα το αμιγές *uparc*, το οποίο και θα αναφέρεται ως τρίγωνο ολίσθησης (*sliding triangle*). Σε αυτό το τρίγωνο μπορώ με ισοτοπία να μεταφέρω την υποτείνουσα πάνω στις δύο κάθετες πλευρές και να πάρω το Σχήμα 5.16.



Σχήμα 5.16

Το μέρος του *uparc* που βρίσκεται στην οριζόντια πλευρά του τριγώνου πολύ εύκολα μπορώ να το ολισθήσω με ισοτοπία ώστε να δείχνει προς τα κάτω. Συνεπώς μόνο το *uparc* στην κατακόρυφη πλευρά μένει να απαλείψουμε, και εργαζόμαστε ως εξής: Κόβουμε στο άνω σημείο του δημιουργώντας δύο ελεύθερα άκρα (Σχήμα 5.17), και τραβάμε με ισοτοπία το άνω άκρο προς τα πάνω και το κάτω προς τα κάτω όπως φαίνεται στο σχήμα, μέχρι να μην υπάρχουν τοπικά *uparcs*. Στην παραπάνω διαδικασία λαμβάνουμε υπόψιν πως επειδή εργαζόμαστε με ένα over *uparc*, τραβάω καθένα από τα ελεύθερα άκρα πάνω από οτιδήποτε άλλο συναντήσει στον δρόμο του. Έτσι παίρνουμε ένα καινούριο ζευγάρι νημάτων της τελικής πλεξίδας που θέλουμε να φτιάξουμε. Αυτήν την διαδικασία την εφαρμόζω για κάθε *uparc*, ώστε στο τέλος να παίρνουμε μια ανοικτή πλεξίδα με τόσα νήματα όσα τα αμιγή *uparcs* που απαλείψαμε. Τέλος, αν υπάρχει τόξο το οποίο είναι προσανατολισμένο προς τα επάνω και δεν περνάει πάνω η κάτω από κάποιο άλλο τόξο, το ονομάζω *free uparc*, δίνοντας του οποιαδήποτε ονομασία επιθυμώ, είτε over είτε under, χωρίς να υπάρχει σημαντική διαφορά.



Σχήμα 5.17

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος θα πρέπει να ελέγξουμε ότι το κλείσιμο της τελικής πλεξίδας είναι ισοτοπικό με τον αρχικό κόμβο. Για να κλείσουμε την πλεξίδα θα πρέπει να ενώσουμε με απλά τόξα (*closure arcs*) τα αντίστοιχα άκρα των νημάτων της πλεξίδας. Αυτό επιτυγχάνεται ενώνοντας τα με τέτοιο τρόπο ώστε οποιοδήποτε άλλο νήμα να βρίσκεται κάτω από το τόξο του κλεισίματος (βλέπε Σχήμα 5.18). Με αυτόν τον τρόπο το τόξο κλεισίματος μαζί με τα αντίστοιχα νήματα φτιάχνουν ένα μεγαλύτερο τόξο το οποίο βρίσκεται πάνω από οποιοδήποτε τόξο του διαγράμματος. Άρα είναι ισοτοπικό με το αρχικό *uparc*.



Σχήμα 5.18

Ομοίως, αν το *uparc* έχει την πληροφορία "under" εργαζομαι με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μόνο που το τόξο κλεισίματος των δύο άκρων θα πρέπει να περνάει κάτω από όλα τα υπόλοιπα νήματα.

□

Το θεώρημα Alexander συνεπάγεται ότι ένας κόμβος ή κρίκος μπορεί να κωδικοποιηθεί μέσω της λέξης μιας πλεξίδας.

Γενικά, το κύριο πρόβλημα της θεωρίας κόμβων είναι ο προσδιορισμός τού κατά πόσο δύο κόμβοι μπορούν να μετασχηματιστούν ισοτοπικά ώστε να είναι ακριβώς ίδιοι. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι έχοντας ως μοναδικό εργαλείο τις 3 κινήσεις Reidemeister πάντα θα είμαστε σε θέση να δώσουμε απάντηση σε αυτό το πρόβλημα. Ωστόσο, δεν είναι πάντα τόσο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε κινήσεις Reidemeister για να ελέγξουμε αν δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί.

Παρόλο που οι κινήσεις Reidemeister μπορούν να κάνουν βασικές διακρίσεις, οι πιο πολύπλοκοι κόμβοι απαιτούν εναλλακτικές μεθόδους :

## 6 Χρωματισμός

### 6.1 Τριχρωματισμότητα

Ένα διάγραμμα λέμε ότι είναι *τριχρωματίσιμο* αν κάθε τόξο του μπορεί να χρωματιστεί με ένα από τρία χρώματα έτσι ώστε :

- Να χρησιμοποιούνται τουλάχιστον δύο χρώματα στο διάγραμμα.
- Σε κάθε διασταύρωση αν χρησιμοποιούμε δύο χρώματα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τρίτο, δηλαδή, σε κάθε διασταύρωση, είτε όλα τα χρώματα είναι τα ίδια ή είναι όλα διαφορετικά.

#### Παρατήρηση

Ο τετριμμένος κόμβος δεν είναι τριχρωματίσιμος αφού υπάρχει μόνο ένα τόξο και άρα μπορώ να χρησιμοποιήσω μόνο ένα χρώμα. (Παραβίαση του κανόνα 1).

#### Παράδειγμα

Παρακάτω βλέπουμε δύο διαγράμματα κόμβων τα οποία είναι χρωματισμένα με τρία χρώματα. Στον πρώτο τριχρωματισμό, σε κάθε διασταύρωση χρησιμοποιούνται τρία διαφορετικά χρώματα, ενώ στον δεύτερο, υπάρχουν διασταυρώσεις που χρησιμοποιείται μόνο ένα χρώμα. Ωστόσο, σε καμία από τις διασταυρώσεις των παρακάτω προβολών δεν χρησιμοποιούνται μόνο δύο χρώματα, οπότε αυτά τα δύο διαγράμματα είναι τριχρωματίσιμα.



#### Ορισμός 10:

Μία συνάρτηση  $I : \{\text{κόμβοι}\} \rightarrow L$ , όπου το σύνολο  $L$  μπορεί να αποτελείται από σύμβολα, αριθμούς, πολυώνυμα κλπ, λέγεται *αναλλοίωτη κόμβων* αν ισχύει:

$$K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$$

#### Παρατήρηση

Εξ ορισμού μια αναλλοίωτη κόμβων παίρνει την ίδια τιμή σε ισοτοπικούς κόμβους. Ισοδύναμα, αν μια αναλλοίωτη πάρει διαφορετικές τιμές σε δύο κόμβους, τότε αυτοί οι κόμβοι είναι μη ισοτοπικοί και άρα διαφορετικοί μεταξύ τους.

### Θεώρημα 1:

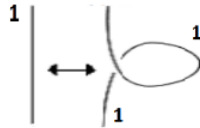
Η τριχρωματισιμότητα αποτελεί αναλλοίωτη ισοτοπίας.

### Απόδειξη

Αρκεί ναδειχθεί ότι οι κινήσεις Reidemeister διατηρούν την τριχρωματισιμότητα.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 1, έστω  $K$  ένα τριχρωματίσιμο διάγραμμα ενός κόμβου  $D$  με τα χρώματα 1, 2 και 3. Στα σχήματα που ακολουθούν έχουμε πάρει μια μικρή περιοχή του διαγράμματος του  $D$  και μελετάμε αν αλλάζει η τριχρωματισιμότητα του διαγράμματος μετά την εφαρμογή των τριών κινήσεων Reidemeister στην συγκεκριμένη περιοχή.

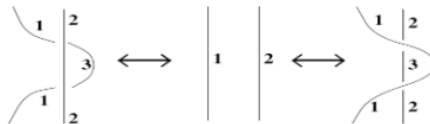
Έστω ότι σε κάποιο τόξο του  $K$ , που είναι χρωματισμένο με το χρώμα 1, εφαρμόζω την Reidemeister κίνηση 1 ( $R1$ :twist) :



Στην διασταύρωση που δημιουργείται από το twist, καθένα από τα δύο τόξα επιλέγουμε να έχουν το χρώμα 1. Οπότε δεν παραβιάζεται ο πρώτος κανόνας σε αυτή την διασταύρωση. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο χρώματα που χρησιμοποιούνται στο διάγραμμα, διότι πριν την εφαρμογή της κίνησης  $R1$  το διάγραμμα ήταν τριχρωματίσιμο, και επομένως χρησιμοποιούνταν τουλάχιστον δύο χρώματα. Άρα, ακόμη και μετά την εφαρμογή της κίνησης  $R1$ , υπάρχουν ακόμη τουλάχιστον δύο χρώματα στο διάγραμμα. Άρα η κίνηση  $R1$  διατηρεί την τριχρωματισιμότητα στον  $K$ .

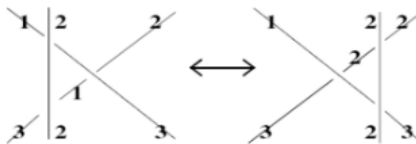
Έστω τώρα ότι σε κάποιο σημείο του διαγράμματος εφαρμόζω την Reidemeister κίνηση 2 (poke)

Τα νούμερα 1,2,3 αντιπροσωπεύουν τρία διαφορετικά χρώματα



Παρατηρώ ότι ούτε εδώ χαλάει η τριχρωματισιμότητα.

Τέλος, έστω ότι σε κάποιο σημείο του διαγράμματος εφαρμόζω την Reidemeister κίνηση 3 (slide)



Παρατηρώ ότι ούτε και εδώ χαλάει η τριχρωματισιμότητα.

□



## Παρατήρηση

Δεδομένου ότι δύο διαγράμματα ενός κόμβου  $K$  είναι ισοτοπικά, δηλαδή συνδέονται με μια σειρά κινήσεων Reidemeister, οι οποίες διατηρούν την τριχρωματισσιμότητα, συμπεραίνω ότι αν ένα διάγραμμα ενός κόμβου  $K$  είναι τριχρωματίσιμο, τότε κάθε διάγραμμα του κόμβου  $K$  είναι τριχρωματίσιμο.

## Παράδειγμα

Ο κόμβος trefoil είναι τριχρωματίσιμος και ο τετριμμένος κόμβος όχι, συνεπώς δεν είναι ισοτοπικοί.

## Παρατήρηση:

Αν δύο κόμβοι είναι τριχρωματίσιμοι δεν σημαίνει κατ' ανάγκην ότι είναι και ισοτοπικοί.

Προηγουμένως είδαμε πώς η τριχρωματισιμότητα χρησιμοποιείται για τη διάκριση μεταξύ κόμβων. Τώρα θα γενικεύσουμε αυτή την ιδέα σε μια νέα αναλλοίωτη που χρησιμοποιεί περισσότερα από τρία χρώματα. Αντί να προσθέτουμε περισσότερα χρώματα, όπως το μπλε, μαύρο, κόκκινο και τα παρόμοια, σκεφτόμαστε τα χρώματα ως αριθμούς. Δηλαδή, ονομάζουμε τα τόξα στο διάγραμμά μας με αριθμούς από το σύνολο  $L_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ . Ειδικότερα, για την τριχρωματισιμότητα, χρησιμοποιούμε τους αριθμούς του συνόλου  $\{0, 1, 2\}$  αντί για την κόκκινη, κίτρινη και μπλε παλέτα μας.

## 6.2 $p$ -χρωματισιμότητα

### Ορισμός 11:

Έστω  $\{0, \dots, p - 1\}$  χρώματα.

Λέμε ότι ένας κόμβος είναι  $p$ -χρωματίσιμος (όπου  $p$  πρώτος  $> 2$ ) αν:

- Χρησιμοποιεί τουλάχιστον 2 από τα  $p$  χρώματα.
- Σε κάθε διασταύρωση ισχύει

$$2X_3 - X_1 - X_2 \equiv 0 \pmod{p}$$

(όπου  $X_1, X_2, X_3$  τα τόξα της εκάστοτε διασταύρωσης, με  $X_3$  το τόξο με την πληροφορία "άνω", και  $X_1, X_2, X_3 \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ ).

Οι ορισμοί της  $p$ -χρωματισιμότητας και της τριχρωματισιμότητας παρουσιάζουν σημαντική ομοιότητα. Στην πραγματικότητα, όταν  $p = 3$ , οι δύο αυτοί ορισμοί συμφωνούν. Για να το αποδείξουμε, υποθέτουμε ένα τριχρωματίσιμο διάγραμμα κόμβου. Έστω επίσης μια διασταύρωση του διαγράμματος με τόξα τα  $x, y, z$ , στην οποία χρησιμοποιούνται όλα τα τρία διαφορετικά χρώματα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι το τόξο  $x$  έχει το χρώμα 0, το τόξο  $y$  έχει το χρώμα 1 και το τόξο  $z$  έχει το χρώμα 2. Θα δείξουμε ότι γι' αυτήν τη διασταύρωση ισχύει η εξίσωση

$$2X_3 - X_1 - X_2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Πράγματι:

Αν το τόξο  $x$  έχει την πληροφορία "άνω", τότε παίρνω ότι:

$$2 \cdot 0 - 1 - 2 = -3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Αν το τόξο  $y$  έχει την πληροφορία "άνω", τότε παίρνω ότι:

$$2 \cdot 1 - 2 - 0 = 0 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Αν το τόξο  $z$  έχει την πληροφορία "άνω", τότε παίρνω ότι:

$$2 \cdot 2 - 1 - 0 = 3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Στην περίπτωση όπου στη διασταύρωση χρησιμοποιούταν μόνο το ένα από τα τρία χρώματα, η εξίσωση

$$2X_3 - X_1 - X_2 \equiv 0 \pmod{3}$$

ισχύει τετριμμένα.

## Παρατηρήσεις

(1) Γιατί παίρνω  $p > 2$ ;

Εάν είχαμε διαθέσιμα μόνο δύο χρώματα ( $p = 2$ ), τότε θα αντιμετωπίζαμε πρόβλημα χρωματισμού του διαγράμματος του κόμβου: Σε κάθε διασταύρωση, υπάρχουν τρία τόξα, αλλά διαθέτουμε μόνο δύο διαφορετικά χρώματα. Επομένως, αν προσπαθούσαμε να χρωματίσουμε το πρώτο τόξο με το χρώμα 0 και το δεύτερο τόξο με το χρώμα 2, το τρίτο τόξο λόγω του δεύτερου κανόνα της χρωματισσιμότητας θα απαιτούσε να χρωματιστεί με ένα τρίτο, διαφορετικό χρώμα. Ωστόσο, επειδή έχουμε μόνο δύο διαφορετικά χρώματα στη διάθεσή μας, αυτό δεν είναι εφικτό. Συνεπώς, σε κάθε διασταύρωση θα χρησιμοποιώ ένα μόνο χρώμα. Αυτό σημαίνει ότι όλο το διάγραμμα θα είναι χρωματισμένο με το ίδιο χρώμα. Ωστόσο, αυτό παραβιάζει τον πρώτο κανόνα της χρωματισσιμότητας. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν μπορεί να υπάρξει λύση με  $p = 2$ .

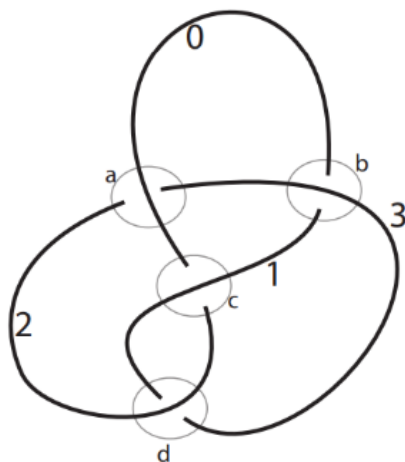
(2) Δεν χρειάζεται να χρησιμοποιώ και τις  $p$  “ταμπέλες” για να είναι  $p$ -χρωματίσιμος ο κόμβος.

(3) Γιατί παίρνω  $p$  πρώτο;

Τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων  $\text{mod } p$  μπορούν να επιλυθούν με τεχνάσματα από τη γραμμική άλγεβρα. Στην περίπτωση που ο  $p$  είναι πρώτος, οτιδήποτε γνωρίζουμε από την γραμμική άλγεβρα μπορεί να εφαρμοστεί στα γραμμικά συστήματα  $\text{mod } p$  (Αυτό συμβαίνει γιατί ο  $\mathbb{Z}_p$  είναι σώμα για κάθε  $p$  πρώτο και η γραμμική άλγεβρα “δουλεύει” κανονικά πάνω από όλα τα σώματα).

**Παράδειγμα :**

Το παρακάτω σχήμα είναι μια προβολή figure-8 knot με κάθε τόξο να έχει μία από τις αριθμητικές τιμές 0,1,2,3 και οι διασταυρώσεις να έχουν τις ενδείξεις a, b, c και d.



Παρατηρώ ότι χρησιμοποιούνται τουλάχιστον δύο χρώματα.

Επίσης, παρατηρώ ότι σε κάθε διασταύρωση ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $a \Rightarrow 0 - 2 - 3 = -5 \equiv 0 \pmod{5}$
- $b \Rightarrow 6 - 0 - 1 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$
- $c \Rightarrow 2 - 2 - 0 = 0 \equiv 0 \pmod{5}$
- $d \Rightarrow 4 - 1 - 3 = 0 \equiv 0 \pmod{5}$

Συνεπώς, ο *figure-8 knot* είναι 5-χρωματίσιμος.

## Θεώρημα 2:

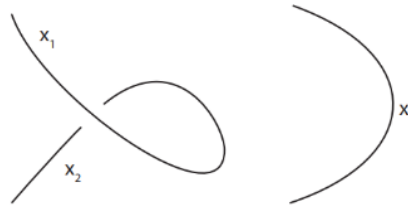
Όπως και στην τριχρωματισσιμότητα, έτσι και εδώ, η  $p$ -χρωματισσιμότητα αποτελεί αναλλοίωτη ιδιοτιμία. Άρα αν ένα διάγραμμα ενός κόμβου  $K$  είναι  $p$ -χρωματίσιμο, τότε κάθε διάγραμμα του  $K$  είναι  $p$ -χρωματίσιμο.

## Απόδειξη

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2, έστω  $D$  ένα  $p$ -χρωματικό διάγραμμα ενός κόμβου  $K$ . Στα σχήματα που ακολουθούν έχουμε πάρει μια μικρή περιοχή του διαγράμματος του  $K$  και μελετάμε αν αλλάζει η  $p$ -χρωματισσιμότητα του διαγράμματος μετά την εφαρμογή των τριών κινήσεων Reidemeister στην συγκεκριμένη περιοχή.

### Κίνηση R1:

Για την κίνηση R1 (twist), πρέπει να αποδείξουμε ότι αν τα δύο τόξα έχουν τις "ετικέτες"  $x_1$  και  $x_2$ , τότε όταν το twist αφαιρεθεί, τα  $x_1$  και  $x_2$  πρέπει να είναι ισοδύναμα :



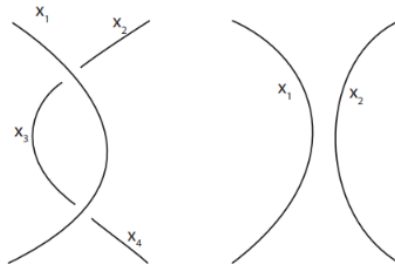
Πριν εφαρμόσω την κίνηση R1, λόγω του ορισμού της  $p$ -χρωματισσιμότητας, ισχύει ότι:

$$2x_1 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$$

Άρα πράγματι τα  $x_1, x_2$  είναι ισοδύναμα.

### Κίνηση R2:

Για την κίνηση R2, πρέπει να αποδείξουμε ότι μετά την αφαίρεση των δύο διασταυρώσεων θα πρέπει τα δύο τόξα που γίνονται ένα να είναι ισοδύναμα.



Πριν εφαρμόσω την  $R2$ , λόγω του ορισμού της  $p$ -χρωματισσιμότητας, ισχύει ότι:

- Για την πάνω διασταύρωση:

$$2x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

- Για την κάτω διασταύρωση:

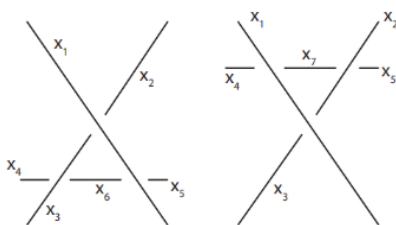
$$2x_1 - x_3 - x_4 \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

Αφαιρώντας την (1) από την (2) παίρνουμε ότι:

$$\Rightarrow x_2 - x_4 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x_2 \equiv x_4 \pmod{p}$$

### Κίνηση $R3$ :

Για την κίνηση  $R3$ , πρέπει να αποδείξουμε ότι κατά τη μεταφορά του τόξου από κάτω προς τα πάνω, το νέο τόξο  $x_7$  πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε όλες οι εξισώσεις να παραμένουν σε ισχύ.



Πριν εφαρμόσω την κίνηση  $R3$  ισχύουν, λόγω της  $p$ -χρωματισσιμότητας, οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$2x_1 - x_5 - x_6 \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

$$2x_3 - x_4 - x_6 \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \pmod{p} \quad (3)$$

Τώρα, το  $x_7$  πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε οι παρακάτω ισοδυναμίες να είναι σε ισχύ:

$$2x_1 - x_4 - x_7 \equiv 0 \pmod{p} \quad (4)$$

$$2x_2 - x_5 - x_7 \equiv 0 \pmod{p} \quad (5)$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \pmod{p} \quad (6)$$

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι η (6) είναι αμέσως σε ισχύ επειδή είναι ίδια με την (3) η οποία βρίσκεται σε ισχύ.

Αν θέσουμε  $x_7 = 2x_1 - x_4$  τότε η (4) ισχύει.

Θα δείξω ότι και η (5) ισχύει για το ίδιο  $x_7$ :

$$2x_2 - x_5 - x_7 \quad (7)$$

$$\equiv 2x_2 - x_5 - (2x_1 - x_4) \quad (8)$$

Από την (3) παίρνω ότι:  $x_2 \equiv 2x_1 - x_3$

Οπότε η (8)

$$\equiv 2(2x_1 - x_3) - x_5 - 2x_1 + x_4 \quad (10)$$

$$\equiv 2x_1 - 2x_3 - x_5 + x_4 \quad (11)$$

Από την (2) έχω ότι  $2x_3 - x_4 \equiv x_6 \Rightarrow -2x_3 + x_4 \equiv -x_6$

Οπότε η (11)

$$\equiv 2x_1 - x_6 - x_5 \equiv 0$$

Συνεπώς η (7)

$$\equiv 2x_1 - x_6 - x_5 \equiv 0 \implies 2x_2 - x_5 - x_7 \equiv 0$$

□

## 7 Ορίζουσα κόμβων

Σε αυτή την φάση θα χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική άλγεβρα για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα της εύρεσης ενός  $p$ -χρωματισμού ενός διαγράμματος ή της απόδειξης ότι δεν υπάρχει τέτοιος χρωματισμός. Θα βρούμε επίσης μια νέα αναλλοίωτη κόμβων στην πορεία.

Για να μεταφράσουμε το πρόβλημα του χρωματισμού ενός διαγράμματος κόμβου σε πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας, ξεκινάμε συμβολίζοντας το χρώμα κάθε τόξου με μια μεταβλητή. Αν το διάγραμμα κόμβου έχει  $n$  τόξα, τα χρωματίζουμε  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Σε κάθε διασταύρωση στο διάγραμμα, μπορούμε να γράψουμε μια γραμμική εξίσωση που να συνδέει αυτές τις μεταβλητές ως εξής: Αν το τόξο  $x_i$  περνάει πάνω από μια διασταύρωση όπου  $x_j$  και  $x_k$  είναι τα τόξα που ενώνονται για να σχηματίσουν το “κάτω” της διασταύρωσης, τότε γράφουμε:

$$2x_i - x_j - x_k \equiv 0 \pmod{p}$$

Ένας  $p$ -χρωματισμός του κόμβου υπάρχει αν υπάρχει μια λύση  $\vec{x}$ , σε αυτό το σύστημα γραμμικών εξισώσεων τέτοια ώστε οι συνιστώσες του  $\vec{x}$  να μην είναι όλες ίσες.

Τώρα το πρόβλημα της εύρεσης ενός  $p$ -χρωματισμού έχει περιοριστεί στην επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Όπως είναι τυπικό στη γραμμική άλγεβρα, θα γράψουμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως εξίσωση πίνακα.

Γενικά, ένα διάγραμμα με  $n$  διασταυρώσεις θα οδηγήσει σε έναν πίνακα  $n \times n$ . Ονομάζουμε αυτόν τον πίνακα **πίνακα χρωματισμού** και συμβολίζεται με  $A_D$ .

### Ορισμός 12:

Ο **πίνακας χρωματισμού**,  $A_D$ , ενός κόμβου  $K$  με  $n$  διασταυρώσεις είναι ένας πίνακας  $n \times n$ , έτσι ώστε κάθε στήλη να αντιπροσωπεύει ένα τόξο στην επίπεδη προβολή του  $K$  και κάθε γραμμή να αντιπροσωπεύει μια διασταύρωση στον  $K$ . Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας αυτός είναι τετραγωνικός. Το τόξο  $X_j$  που έχει την πληροφορία “άνω” στη διασταύρωση  $K_i$  δίνει την τιμή 2 στη θέση  $(K_i, X_j)$ . Τα τόξα  $X_k, X_l$  που έχουν την πληροφορία “κάτω” στη διασταύρωση  $K_i$  δίνουν την τιμή -1 στις θέσεις  $(K_i, X_k), (K_i, X_l)$ . Όλες οι άλλες θέσεις παίρνουν την τιμή 0 στον πίνακα  $A_D$ .

Οι συνήθεις τεχνικές της γραμμικής άλγεβρας εφαρμόζονται στην επίλυση συστημάτων εξισώσεων  $\text{mod } p$ . (Γενικά, για έναν πρώτο αριθμό  $p$ , οι ακέραιοι  $\text{mod } p$  σχηματίζουν ένα σώμα). Δυστυχώς, η πρόσθετη συνθήκη ότι τουλάχιστον δύο από τα  $x_i$  διαφέρουν, εισάγει μερικές λεπτές λεπτομέρειες που πρέπει να αντιμετωπιστούν προτού παρουσιαστούν γενικά αποτελέσματα.

Ξεκινάμε με μερικές παρατηρήσεις. Πρώτον, σημειώστε ότι θέτοντας κάθε  $x_i = 1$  αποτελεί λύση του συστήματος εξισώσεων. Αυτό ισχύει γενικά, επειδή ο πίνακας αποτελείται πάντα από γραμμές των οποίων οι μη μηδενικές καταχωρήσεις (δηλαδή οι 2, -1 και -1) έχουν άθροισμα μηδέν.

(Σημειώστε, ωστόσο, ότι μια λύση με όλα τα  $x_i = 1$  δεν αποτελεί λύση του προβλήματος χρωματισμού, επειδή χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο διαφορετικές καταχωρήσεις στο διάγραμμα των χρωμάτων). Δεύτερον, θυμηθείτε ότι για οποιαδήποτε εξίσωση πίνακα  $A\vec{x} = \vec{0}$ , αν  $\vec{w}$  και  $\vec{u}$  είναι δύο λύσεις και  $k$  είναι οποιαδήποτε σταθερά, τότε  $\vec{u} + \vec{w}$  και  $k\vec{w}$  είναι επίσης λύσεις. Αυτές οι δύο παρατηρήσεις συνεπάγονται ότι αν υπάρχει λύση  $\vec{w}$  με όχι όλες τις συνιστώσες ίσες, τότε υπάρχει λύση  $\vec{u}$  με οποιαδήποτε μία συνιστώσα της ίση με μηδέν (έστω  $u_i = 0$ ), δηλαδή:

$$\vec{u} = \vec{w} + (-w_i) * \vec{1}$$



Όπου το  $\vec{1}$  συμβολίζει ένα διάνυσμα  $n \times 1$  με όλες τις συνιστώσες ίσες με 1 και το  $w_i$  να είναι μία σταθερά που ισούται με την  $i$ -οστή συνιστώσα του  $\vec{w}$ .

Έτσι, αν για έναν κόμβο  $K$  αν υπάρχει έγκυρος  $p$ -χρωματισμός, τότε υπάρχει επίσης έγκυρος χρωματισμός με  $u_i = 0$ . Παρατηρήστε τι συνεπάγεται αυτό για τον πίνακα χρωματισμού: Μια λύση με άνισες όλες τις συνιστώσες και την  $i$ -οστή ίση με μηδέν, αντιστοιχεί σε μη μηδενική λύση του συστήματος εξισώσεων που καθορίζεται από τον αρχικό πίνακα με διαγραμμένη την  $i$ -οστή στήλη του.

Θυμηθείτε, από τη γραμμική άλγεβρα, ότι  $n$  διανύσματα στον  $\mathbb{R}^{n-1}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως, τα  $n$  διανύσματα γραμμές στον πίνακα χρωματισμού είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως, μία από τις  $n$  εξισώσεις είναι περιττή, οπότε είναι δυνατή η μείωση του συστήματος σε  $n - 1$  εξισώσεις και  $n - 1$  αγνώστους. Ποια όμως γραμμή είναι γραμμικά εξαρτημένη με τις υπόλοιπες;

Έστω  $r_1, \dots, r_i, \dots, r_n$  οι  $n$  γραμμές του συστήματος εξισώσεων. Ο checkboard αλγόριθμος δημιουργεί έναν συγκεκριμένο γραμμικό συνδυασμό των γραμμών, χρησιμοποιώντας μόνο συντελεστές  $c_i = \pm 1$ , έτσι ώστε ο παρακάτω γραμμικός συνδυασμός, να αθροίζει στο μηδενικό διάνυσμα:

$$c_1 r_1 + \dots + c_i r_i + \dots + c_n r_n = 0.$$

## Checkboard coloring

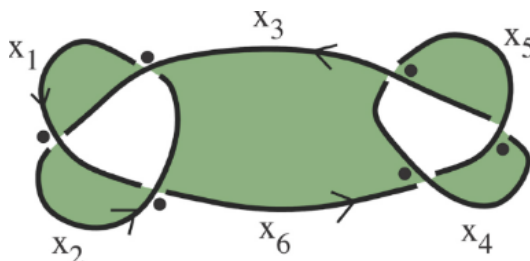
Δεδομένου ενός διαγράμματος ,  $D$ , ένας χρωματισμός checkboard του  $D$ , είναι ένας χρωματισμός των περιοχών του διαγράμματος χρησιμοποιώντας δύο χρώματα, για παράδειγμα τα χρώματα πράσινο και λευκό, έτσι ώστε οι πράσινες περιοχές να συνορεύουν μόνο με λευκές περιοχές και οι λευκές περιοχές να συνορεύουν μόνο με πράσινες περιοχές, π.χ. δεδομένου το παρακάτω διαγράμματος παίρνω τα παρακάτω checkboard colorings :



## Checkboard αλγόριθμος

Για να καθορίσουμε ποιοι συντελεστές  $c_i$  ισούνται με  $-1$  στον γραμμικό μας συνδυασμό, εφαρμόζουμε τον ακόλουθο έξυπνο αλγόριθμο. Πρώτον, προσανατολίζουμε τον κόμβο. Ανάλογα με τον προσανατολισμό που δώσαμε, σε κάθε διασταύρωση στο διάγραμμα βάζουμε μια τελεία στα δεξιά του άνω τόξου της διασταύρωσης . Τώρα, χρωματίζουμε το διάγραμμα του κόμβου με τον τρόπο που αναφέρθηκε προηγουμένως. Εάν η τελεία για μια διασταύρωση βρίσκεται σε μια πράσινη περιοχή, δίνουμε στη γραμμή του πίνακα που αντιστοιχεί σε αυτή τη διασταύρωση συντελεστή  $-1$ , διαφορετικά χρησιμοποιούμε συντελεστή  $1$ .

Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα ο αλγόριθμος εφαρμόζεται ως εξής :



Και συνεπώς παίρνω ότι :  $r_1 + r_2 + r_3 - r_4 - r_5 - r_6 = \vec{0}$

Με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο παίρνω ότι οποιαδήποτε γραμμή  $r_j$  είναι γραμμικώς εξαρτημένη με τις υπόλοιπες, συνεπώς η  $j$ -οστή γραμμή μπορεί να αφαιρεθεί χωρίς να αλλάξει ο χώρος λύσεων των εξισώσεων.

Άρα τώρα έχω έναν νέο πίνακα διάστασης  $n-1$  και τον ονομάζω  $\tilde{A}_D$ . Προχωράμε εφαρμόζοντας μεθόδους από τη γραμμική άλγεβρα στον σχετικό τετραγωνικό πίνακα για να μελετήσουμε αν ένα διάγραμμα κόμβου έχει ή όχι  $p$ -χρωματισμό. Θυμηθείτε, αν ο  $B$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε η εξίσωση έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν  $\det(B) = 0$ , ή, αφού εργαζόμαστε mod  $p$ , αν και μόνο αν ο  $p$  διαιρεί την ορίζουσα του  $B$ .

Το ακόλουθο θεώρημα συνοψίζει την παραπάνω συζήτηση.

### Θεώρημα 3:

Έστω  $A_D$  ένας πίνακας χρωματισμού που σχετίζεται με ένα διάγραμμα κόμβου,  $D$ , με  $n$  τόξα. Διαγράφοντας οποιαδήποτε στήλη και οποιαδήποτε γραμμή του  $A_D$  προκύπτει ένας νέος πίνακας  $\tilde{A}_D$ . Το διάγραμμα  $D$  μπορεί να είναι  $p$ -χρωματισμένο αν και μόνο αν η εξίσωση  $\tilde{A}_D X=0$  έχει μη τετριμμένη λύση mod  $p$  (δηλαδή ο  $p$  να διαιρεί την ορίζουσα του  $\tilde{A}_D$ ).

### Ορισμός 10:

Ο πίνακας  $\tilde{A}D_{ij}$  (ελάσσονας) είναι ο  $(n-1)$ -διάστατος πίνακας που σχηματίζεται αν αφαιρέσω την  $i$ -οστή γραμμή και την  $j$ -οστή στήλη του  $n$ -διάστατου πίνακα  $M$ .

### Ορισμός 11:

Η ορίζουσα ενός κόμβου  $K$  ορίζεται ως:  $\det(K) = \det(\tilde{A}D_{ij})$ .

#### Θεώρημα 4:

Η ορίζουσα ενός κόμβου δεν εξαρτάται από:

- Τον πίνακα  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{D}_{ij}$  που θα επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε.
- Το διάγραμμα κόμβου που θα επιλέξουμε να πάρουμε.

Επομένως, η ορίζουσα ενός κόμβου αποτελεί αναλλοίωτη κόμβων.

#### Απόδειξη:

- 1) Έστω τυχαίος πίνακας  $A_{n \times n}$ . Γνωρίζουμε ότι:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Με  $A_{ij}$  να είναι ο πίνακας  $A$  που του έχει αφαιρεθεί η  $i$ -οστή γραμμή και η  $j$ -οστή στήλη.

Αν στον  $A$  προσθέσω μια γραμμή και μια στήλη με τα στοιχεία όλα μηδέν εκτός από το διαγώνιο που το βάζω να είναι 1, δημιουργώ έναν νέο πίνακα, έστω  $B$ . Άρα:

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} \cdot b_{ij} \cdot \det(B_{ij})$$

Για το  $\det(B_{ij})$  επιλέγω να αφαιρέσω τη γραμμή και τη στήλη που πρόσθεσα πριν στον  $A$  για να πάρω τον  $B$ . Συνεπώς  $\det(B_{ij}) = \det(A)$ , και άρα  $\det(B) = \det(A)$ .

Συνεπώς, αν προσθέσουμε μια γραμμή και μια στήλη με στοιχεία όλα μηδέν εκτός από το στοιχείο της διαγωνίου που θα είναι 1, η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη.

2) Έστω τώρα ότι ο πίνακας  $A$  έχει την παρακάτω ιδιότητα:

Σε όλες τις γραμμές και τις στήλες, το άθροισμα των στοιχείων είναι μηδέν, και έστω  $n$ -διάστατος πίνακας  $\Gamma$ , όπου όλα του τα στοιχεία είναι ίσα με 1.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την  $\det(A + \Gamma)$  εκτελώντας τα παρακάτω βήματα:

3) Προσθέτουμε όλες τις γραμμές του πίνακα  $A + \Gamma$  στην  $i$ -οστή γραμμή. Έτσι, κάθε στοιχείο της  $i$ -οστής γραμμής θα ισούται με  $n$ , ενώ όλα τα άλλα στοιχεία θα μείνουν ίδια.

4) Προσθέτουμε όλες τις στήλες του πίνακα  $A + \Gamma$  στην  $j$ -οστή στήλη. Έτσι, το στοιχείο  $(ij)$  θα πάρει την τιμή  $n^2$ , και τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης  $j$  θα πάρουν την τιμή  $n$ . Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία θα παραμείνουν ίδια.

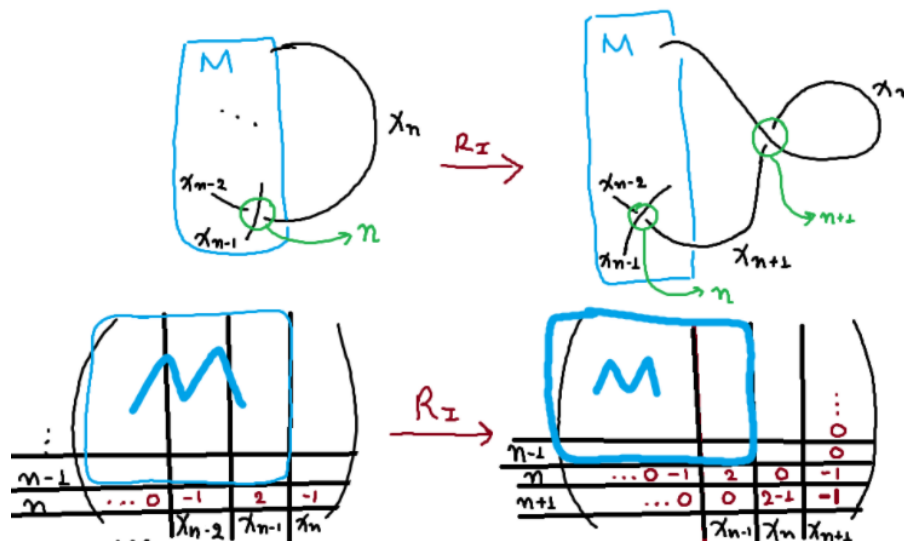
5) Βγάζουμε έξω από την ορίζουσα το  $n$  από την  $i$ -οστή γραμμή και το  $n$  από την  $j$ -οστή στήλη. Συνεπώς τα στοιχεία της  $i$ -οστής γραμμής και  $j$ -οστής στήλης παίρνουν την τιμή 1 και τα υπόλοιπα μένουν ως έχουν.

6) Τώρα κάθε γραμμή (εκτός από την  $i$ -οστή) του πίνακα  $A + \Gamma$  την αντικαθιστώ με αυτήν την γραμμή μείον την  $i$ -οστή. Έτσι κάθε στοιχείο αυτών των γραμμών θα πάρει την τιμή του αντίστοιχου στοιχείου του πίνακα  $A$ , εκτός από τα στοιχεία αυτά που θα ανήκουν στην  $j$ -οστή στήλη που θα πάρουν την τιμή μηδέν.

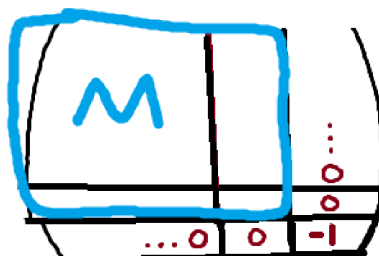
Έτσι αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την  $j$ -οστή στήλη, η ορίζουσα έχει ως εξής:

$\det(A + \Gamma) = n^2 \cdot (-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot \det(A_{ij})$ , με  $A_{ij}$  να είναι ο ελάσσονας πίνακας του  $A$ . Αυτό σημαίνει ότι οι απόλυτες τιμές των οριζουσών των ελάσσονων πινάκων του  $A$  είναι ίσες. Άρα η ορίζουσα ενός κόμβου δεν εξαρτάται από τον ελάσσονα πίνακα που θα επιλέξω να πάρω.

- Για αυτήν την απόδειξη θα αποδείξουμε ότι οι ορίζουσες των προβολών του  $K$  παραμένουν ίδιες κατ' απόλυτη τιμή. Πράγματι, εφαρμόζουμε κατ' αρχάς την κίνηση  $R1$ , και παίρνουμε τους αντίστοιχους πίνακες χρωματισμού, όπως στο παρακάτω σχήμα :



Για να βρούμε την ορίζουσα του πίνακα χρωματισμού στα αριστερά, σβήνουμε την  $n$ -οστή γραμμή και στήλη, οπότε μένει μόνο ο  $M$ . Συνεπώς έχει ορίζουσα ίση με  $\det(M)$ . Για να βρούμε την ορίζουσα του πίνακα χρωματισμού στα δεξιά, διαγράφουμε την  $n$ -οστή γραμμή και στήλη, οπότε πρέπει να βρούμε την ορίζουσα του πίνακα :



Η ορίζουσα, αν την αναλύσουμε ως προς τα στοιχεία της τελευταίας στήλης ισούται με :

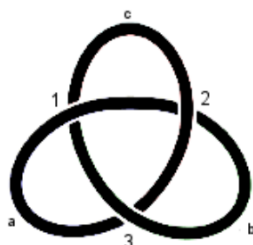
$$-1^{n+n} \cdot -1 \cdot \det(M) = -\det(M).$$

Άρα ταυτίζεται κατ' απόλυτη τιμή με την ορίζουσα του πίνακα χρωματισμού πριν εφαρμόσουμε την κίνηση  $R1$ .

Για την κίνηση  $R2$ :

Ο νέος πίνακας χρωματισμού μπορεί να μετασχηματιστεί στον πίνακα χρωματισμού πριν την εφαρμογή της κίνησης  $R2$  με την προσθήκη δύο γραμμών και στηλών που περιέχουν μόνο την τιμή 1 στη διαγώνιο. Αφαιρώντας ένα από αυτά τα καινούρια ζεύγη γραμμών και στηλών χρησιμοποιώ την παρατήρηση που απέδειξα στην αρχή της απόδειξης και παρατηρώ ότι η ορίζουσα του καινούριου πίνακα παραμένει ίδια. Αυτό μπορούμε να το δούμε με το παρακάτω παράδειγμα :

Ο κόμβος τριφύλλι έχει τον παρακάτω πίνακα χρωματισμού:



$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε την κίνηση  $R2$  στο διάγραμμα του κόμβου τριφύλλι παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα :



και τον παρακάτω πίνακα χρωματισμού:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, θέλουμε να ελέγξουμε ότι μπορούμε να μετασχηματίσουμε αυτόν τον πίνακα χρωματισμού στον προηγούμενο, πριν εκτελέσουμε την κίνηση  $R2$ , με την μόνη διαφορά ότι θα έχουν προστεθεί στον αρχικό πίνακα δύο καινούριες γραμμές καθεμία από τις οποίες περιέχει μόνο το στοιχείο 1 στη διαγώνιο.

Τα παρακάτω βήματα αποτελούν έναν τρόπο για να γίνει αυτό:

- (1) Προσθέτουμε την τέταρτη στήλη στην πρώτη.
- (2) Προσθέτουμε την πέμπτη γραμμή στην τέταρτη.
- (3) Προσθέτουμε την τέταρτη γραμμή στη δεύτερη.
- (4) Προσθέτουμε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή στην πέμπτη.
- (5) Προσθέτουμε την πέμπτη στήλη στη δεύτερη.
- (6) Προσθέτουμε την τέταρτη γραμμή στην πέμπτη.

Καταλήγουμε στον πίνακα:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και στήλη του πίνακα και αναλύοντας την ορίζουσα ως προς την τελευταία στήλη παίρνω πως οι ορίζουσες ταυτίζονται κατ' απόλυτη τιμή.

Για την κίνηση  $R3$ :

Η εφαρμογή κινήσεων  $R3$  διατηρεί τον ίδιο αριθμό τόξων και διασταυρώσεων και μπορεί να ελεγχθεί ότι ο πίνακας χρωματισμού πριν από την εφαρμογή της κίνησης  $R3$  μπορεί να μετασχηματιστεί στον πίνακα χρωματισμού μετά την εφαρμογή της κίνησης  $R3$ , χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πίνακες οι οποίοι δεν αλλάζουν αριθμητικά την ορίζουσα.

Συνεπώς, οι ορίζουσες των προβολών του  $K$  ταυτίζονται κατ' απόλυτη τιμή, και άρα η ορίζουσα είναι ανεξάρτητη από την προβολή του κόμβου που θα επιλέξουμε να πάρουμε.

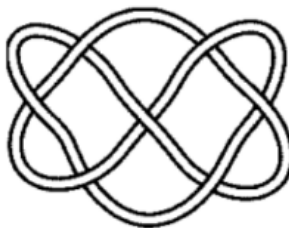
□

### Παρατήρηση:

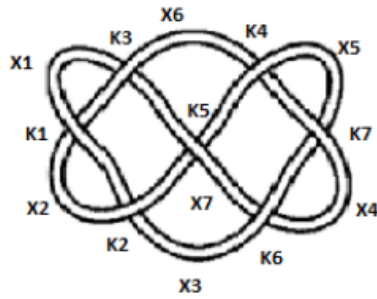
Συνεπώς, αν έχουμε δύο διαγράμματα κόμβων με διαφορετικές ορίζουσες, οι δύο αυτοί κόμβοι δεν είναι ισοτοπικοί.

### Παράδειγμα:

Έστω ο παρακάτω κόμβος.



Ονομάζω το κάθε τόξο  $Q_i$  και τον κάθε κόμβο  $K_i$  ως εξής :



Δημιουργώ τον παρακάτω πίνακα που αντιστοιχεί στο παραπάνω διάγραμμα ως εξής: Ο  $K1$  έχει άνω διασταύρωση το τόξο  $Q1$  άρα οπότε η θέση  $(K1, Q1)$  παίρνει την τιμή 2. Επίσης η κάτω διασταύρωση του  $K1$  αποτελείται από τα τόξα  $Q2$  και  $Q6$  άρα οι θέσεις  $(K1, Q2)$ ,  $(K1, Q6)$  παίρνουν την τιμή -1. Όλες οι άλλες θέσεις της πρώτης γραμμής παίρνουν την τιμή 0.

Όμοια συμπληρώνω και τις υπόλοιπες θέσεις του πίνακα.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
K1	2	-1	0	0	0	-1	0
K2	-1	2	-1	0	0	0	0
K3	-1	0	0	0	0	2	-1
K4	0	0	0	-1	2	-1	0
K5	0	-1	0	0	-1	0	2
K6	0	0	2	-1	0	0	-1
K7	0	0	-1	2	-1	0	0

Αφαιρώντας μια οποιαδήποτε γραμμή και στήλη του παραπάνω πίνακα παίρνω τον πίνακα  $M_k$ , και βρίσκω ότι η ορίζουσα του  $M_k$  ισούται με 15. Οι μόνοι δύο πρώτοι που διαιρούν το 15 είναι το 5 και το 3. Συνεπώς το παραπάνω διάγραμμα είναι 3-χρωματίσιμο και 5-χρωματίσιμο.



## 8 Συμπληρώματα κόμβων και 3-πολλαπλότητες

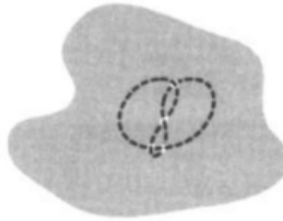
### Ορισμός 13:

Ένα σύνολο  $X$  λέγεται *τοπολογικός χώρος* όταν το  $X$  είναι εφοδιασμένο με μια τοπολογία  $\mathcal{T}$ , δηλαδή μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων  $U_i$  που ικανοποιούν κάποια αξιώματα, όπως

1.  $U_i \cap U_j \in \mathcal{T}$
2.  $\bigcup U_i \in \mathcal{T}$
3.  $\forall x \in X, \exists U_i : x \in U_i$

Στα μαθηματικά, μια 3-πολλαπλότητα (3-manifold) είναι ένας τοπολογικός χώρος που μοιάζει με έναν τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Συνήθως, περιγράφουμε μία 3-πολλαπλότητα ως εξής: Για κάθε σημείο της 3-πολλαπλότητας, υπάρχει μια μπάλα με κέντρο το συγκεκριμένο σημείο και ακτίνα  $r$ , τέτοια ώστε κάθε σημείο εντός αυτής της μπάλας να ανήκει στην 3-πολλαπλότητα.

Έστω ο  $\mathbb{R}^3$  να είναι ο τρισδιάστατος χώρος που μελετάμε τον κόμβο  $K$ . Ο χώρος γύρω από τον  $K$  θεωρούμε να είναι όλος ο  $\mathbb{R}^3$  εκτός του  $K$ , το οποίο το συμβολίζουμε ως εξής:  $M = \mathbb{R}^3 \setminus K$ . Ονομάζουμε τον  $M$  ως το συμπλήρωμα (complement) του κόμβου  $K$ . Είναι δηλαδή αυτό που απομένει αν αφαιρέσουμε τον κόμβο από τον χώρο (Σχήμα 8.1).



Σχήμα 8.1

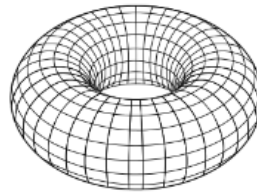
Ωστόσο, ας έχουμε υπόψη μας ότι η αφαίρεση του κόμβου αφήνει ένα πολύ λεπτό κενό στον  $\mathbb{R}^3$ , το οποίο έχει πάχος μόνο ένα σημείο. Το συμπλήρωμα ενός κόμβου είναι ένα παράδειγμα μίας 3-πολλαπλότητας. Για να το δούμε αυτό, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε σημείο  $p_i$  στο συμπλήρωμα του κόμβου, υπάρχει μια σφαίρα με κέντρο το  $p_i$  και ακτίνα  $r$ , η οποία βρίσκεται επίσης στο συμπλήρωμα του κόμβου. Αν διαλέξουμε ένα σημείο στον τρισδιάστατο χώρο που απέχει πολύ από τον κόμβο, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει μια τέτοια σφαίρα στο συμπλήρωμα του κόμβου που περιβάλλει το σημείο αυτό. Εάν το σημείο που επιλέγουμε στο συμπλήρωμα είναι πολύ κοντά στον κόμβο που λείπει, θα επιλέξουμε μια σφαίρα γύρω από το σημείο που είναι πολύ μικρή και αποφεύγει τον κόμβο. Η σφαίρα θα είναι τότε στο συμπλήρωμα του κόμβου. Άρα, πράγματι, το συμπλήρωμα ενός κόμβου είναι μία 3-πολλαπλότητα και μάλιστα, εξ ορισμού της ισοτοπίας είναι και αναλλοίωτη ισοτοπίας για τον κόμβο.

## 9 Τύποι κόμβων

Είναι γνωστό ότι κάθε κόμβος ανήκει ακριβώς σε έναν από τους εξής τρεις τύπους: κόμβοι τώρων, κόμβοι δορυφόροι και υπερβολικοί κόμβοι.

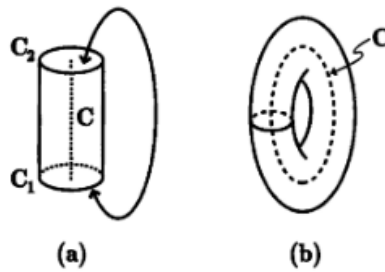
### 9.1 Κόμβοι Τόρου (Torus knots)

Σε αυτήν την παράγραφο θα ερευνήσουμε τους κόμβους τώρων, οι οποίοι αποτελούν ένα σύνολο κόμβων με ορισμένες κοινές ιδιότητες. Μπορούμε να σκεφτούμε έναν τόρο (torus) σαν ένα ντόνατ στον τρισδιάστατο χώρο (Σχήμα 9.1.1).



Σχήμα 9.1.1

Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε τον τετριμμένο τόρο είναι να πάρουμε έναν κύλινδρο στον  $\mathbb{R}^3$  με βάση τον μοναδιαίο κύκλο  $C_1$  και κορυφή τον μοναδιαίο κύκλο  $C_2$  (Σχήμα 9.1.2(a)). Τώρα κολλάμε μαζί τους  $C_1$  και  $C_2$  στον  $\mathbb{R}^3$  έτσι ώστε ο  $C$ , ο κεντρικός άξονας του κυλίνδρου, να γίνει ο τετριμμένος κόμβος (Σχήμα 9.1.(b)).



Σχήμα 9.1.2

Ο *κόμβος τόρου* είναι ένας κόμβος που βρίσκεται χωρίς αυτοδιασταυρώσεις πάνω σε έναν τόρο. Κάθε κόμβος τόρου καθορίζεται από ένα ζεύγος ακέραων αριθμών  $r$  και  $q$  που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έστω ότι το  $q$  αναπαριστά τις φορές που ο κόμβος περνά "μέσα" από την τρύπα του τόρου, και το  $r$  αναπαριστά τις φορές που περνά γύρω από την τρύπα. Για απλότητα, υποθέτουμε ότι  $r, q > 0$ . Ένας κόμβος κρίκου προκύπτει αν οι  $r$  και  $q$  δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους (οπότε ο αριθμός των συνιστωσών είναι  $\gcd(r, q)$ ). Ένας κόμβος τόρου είναι ισοτοπικός με τον τετριμμένο κόμβο εάν και μόνο εάν είτε το  $p$  είτε το  $q$  είναι ίσο με 1 ή -1.



Σχήμα 9.1.3 και 9.1.4 :Οι (0,1) και (1,0)-κόμβοι τόρων

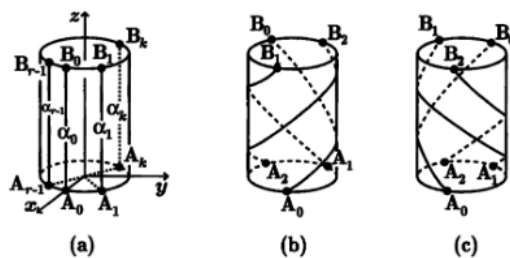
Κατασκευή ενός κόμβου τόρου:

Ας χρησιμοποιήσουμε τον κύλινδρο του Σχήματος 9.1.2 με ύψος 1 μονάδα και ως βάση έναν μοναδιαίο κύκλο στο επίπεδο  $xy$ . Έστω  $r$  σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στη βάση  $C_1$  και  $r$  σημεία που βρίσκονται στην κορυφή  $C_2$ ,  $A_0, A_1, \dots, A_{r-1}$  και  $B_0, B_1, \dots, B_{r-1}$  αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες έχουν ως εξής:

$$A_0 = (1, 0, 0), \quad A_1 = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r, 0), \quad \dots, A_{r-1} = (\cos 2(r-1)\pi r, \sin 2(r-1)\pi r, 0)$$

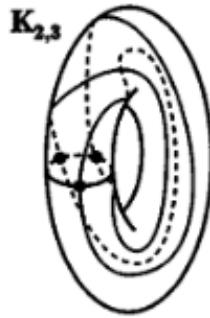
$$B_0 = (1, 0, 1), \quad B_1 = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r, 1), \quad \dots, B_{r-1} = (\cos 2(r-1)\pi r, \sin 2(r-1)\pi r, 1)$$

Ας συνδέσουμε τώρα τα σημεία  $A_k$  και  $B_k$  ( $k = 0, 1, \dots, r-1$ ) στον κύλινδρο με τα τμήματα  $a_k$  (Σχήμα 9.1.5(a)). Στη συνέχεια, διατηρώντας τη βάση  $C_1$  σταθερή, ας δώσουμε στροφή σε ολόκληρο τον κύλινδρο περιστρέφοντας την κορυφή γύρω από τον άξονα  $z$  κατά γωνία  $\frac{2\pi q}{r}$ , με  $q$  να είναι ένας ακέραιος αριθμός. Στα Σχήματα 9.1.5(b) και 9.1.5(c) βλέπουμε τις περιπτώσεις  $q = 2, r = 3$  και  $q = -2, r = 3$  αντίστοιχα.



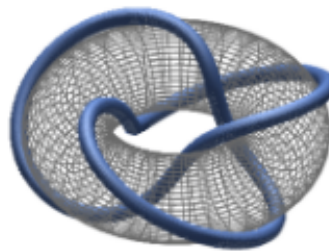
Σχήμα 9.1.5

Τέλος, ας ταυτίσουμε (να κολλήσουμε με φυσικό τρόπο) το σημείο  $(x, y, 0)$  του  $C_1$  με το σημείο  $(x, y, 1)$  του  $C_2$  (όπως και προηγουμένως, το κέντρο  $C$  γίνεται ο τετριμμένος κόμβος). Έτσι δημιουργείται ένας τετριμμένος τόρος  $T$ , με τα  $r$  τμήματα  $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$  που έχουν μετατραπεί σε κόμβο (ή κρίκο) στην επιφάνειά του. Αυτός ο κόμβος (ή κρίκος) ονομάζεται  $(q, r)$ -κόμβος τόρου (ή κρίκος τόρου) και συμβολίζεται με  $K_{q,r}$  (Σχήμα 9.1.6).



Σχήμα 9.1.6

Ο απλούστερος μη τετριμμένος κόμβος τόρου είναι ο κόμβος τριφύλλι. Αν ο κόμβος απλωθεί πάνω σε έναν τόρο, τότε περνά μέσα από την τρύπα του τόρου τρεις φορές και γύρω από τον τόρο δύο φορές (Σχήμα 9.1.7). Συνεπώς, ο κόμβος τριφύλλι είναι ένας  $(3, 2)$ -κόμβος τόρου.



Σχήμα 9.1.7

### Θεώρημα 5:

Ένας  $(q, r)$ -κόμβος τόρου είναι ισοτοπικός με έναν  $(r, q)$ -κόμβο τόρου.

### Παράδειγμα:

Η παρακάτω ακολουθία αριθμών εκφράζει το πλήθος των κόμβων τόρου για  $n$  διασταυρώσεις:  
 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 0, 1, 2, 2, 1, 2,  
 1, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1,  
 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 3, ...

Δηλαδή, το πλήθος των κόμβων τόρου με 1 διασταύρωση είναι 0, με 2 διασταυρώσεις είναι 0, με 3 διασταυρώσεις είναι 1, και ούτω καθεξής. Οι δείκτες  $q, r$  των κόμβων τόρου που αντιστοιχούν σε κόμβους με 16 ή λιγότερες διασταυρώσεις είναι :

$(3, 2), (5, 2), (7, 2), (9, 2), (11, 2), (13, 2), (15, 2), (4, 3), (5, 3), (7, 3), (8, 3)$  και  $(5, 4)$ .

Οι παραμετρικές εξισώσεις ενός  $(p, q)$ -κόμβο τόρου είναι:

$$x = (3 + \cos(qt)) \cdot \cos(pt)$$

$$y = (3 + \cos(qt)) \cdot \sin(pt)$$

$$z = \sin(qt)$$

Με τον παρακάτω κώδικα στην  $R$ , μπορούμε να αναπαραστήσουμε γραφικά οποιονδήποτε  $(p, q)$ -κόμβο τόρου:

```
z # install.packages("rgl")

# Φόρτωση του πακέτου rgl
library(rgl)

# Συνάρτηση για τον υπολογισμό των παραμετρικών εξισώσεων
parametric_equation <- function(t, q, p) {
  x <- (3 + cos(q * t)) * cos(p * t)
  y <- (3 + cos(q * t)) * sin(p * t)
  z <- sin(q * t)
  return(list(x = x, y = y, z = z))
}

# Ζήτηση των τιμών q και p από τον χρήστη
q <- as.numeric(readline(prompt = "give the value of q: "))
p <- as.numeric(readline(prompt = "give the value of p: "))

# Ορισμός του αριθμού των σημείων (κόμβων)
n_points <- 1000

# Δημιουργία των παραμετρικών τιμών
t_values <- seq(0, 2 * pi, length.out = n_points)

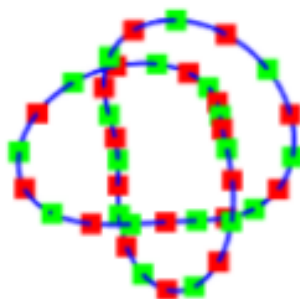
# Υπολογισμός των συντεταγμένων
coordinates <- parametric_equation(t_values, q, p)

# Σχεδίαση του 3D knot
open3d()
lines3d(coordinates$x, coordinates$y, coordinates$z, col = "blue", lwd = 2)

# Καθορισμός της θέσης των over και under crossings
for (i in seq(1, n_points, by = 50)) {
  points3d(coordinates$x[i], coordinates$y[i], coordinates$z[i], col = "red", size = 10)
  points3d(coordinates$x[i + 25], coordinates$y[i + 25], coordinates$z[i + 25], col = "green", size = 10)
}

# Επιπλέον ρυθμίσεις για το plot
aspect3d(1, 1, 1) # Ρύθμιση του κανόνα απεικόνισης
rglwidget() # Προβολή του 3D plot
```

Ας ελέγξουμε τον παραπάνω κώδικα χρησιμοποιώντας το απλό παράδειγμα του κόμβου τριφύλλι, ο οποίος προηγουμένως αποδείξαμε ότι είναι ένας  $(2,3)$ -κόμβος τόρου: Κατά την εκτέλεση του προγράμματος, πρώτα μας ζητείται να καθορίσουμε τις τιμές των  $q$  και  $p$ . Δίνουμε τιμή 2 στο  $p$  και τιμή 3 στο  $q$ . Πράγματι μας επιστρέφει το παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 9.1.8) το οποίο είναι ένα διάγραμμα του κόμβου τριφύλλι:



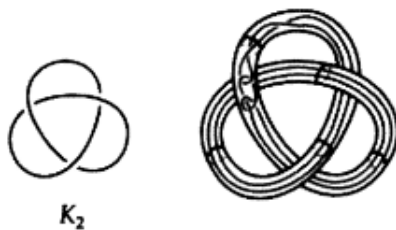
Σχήμα 9.1.8

## 9.2 Κόμβοι Δορυφόροι (Satellite knots)

Ένα δεύτερο σύνολο κόμβων που έχει αποκτήσει σημαντική σημασία τα τελευταία χρόνια είναι το σύνολο των κόμβων δορυφόρων. Ας υποθέσουμε τον κόμβο  $K_1$  ως έναν κόμβο στο εσωτερικό ενός τόρου (Σχήμα 9.2.1). Με το να "πλέξουμε" τον τόρο και να δημιουργήσουμε έναν νέο κόμβο από αυτόν, προκύπτει ο κόμβος  $K_2$  (Σχήμα 9.2.2(α)). Εντός αυτού του πλεγμένου τόρου, ο κόμβος  $K_1$ , που βρίσκεται εσωτερικά, αλλάζει τη μορφή του, δημιουργώντας έναν νέο κόμβο, τον  $K_3$  (Σχήμα 9.2.2(β)). Ο  $K_3$  είναι ένας κόμβος δορυφόρος. Ο  $K_2$  ονομάζεται companion κόμβος του κόμβου δορυφόρου. Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως πάντα υποθέτουμε ότι ο companion κόμβος δεν είναι ο τετριμμένος, διότι σε αυτήν την περίπτωση, ο κόμβος δορυφόρου που θα προέκυπτε θα ήταν πάλι ο  $K_1$ .



Σχήμα 9.2.1



Σχήματα 9.2.2 (α) και (β)

### 9.3 Υπερβολικοί Κόμβοι (Hyperbolic knots)

Στην προσπάθεια να αποδείξουμε το ευκλείδειο αίτημα που αναφέρει ότι, δεδομένης μιας ευθείας και ενός σημείου εκτός αυτής, υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία που περνά από το δεδομένο σημείο και είναι παράλληλη στην αρχική ευθεία, δημιουργούνται δύο νέες μη ευκλείδειες γεωμετρίες: η υπερβολική και η ελλειπτική. Οι χώροι για αυτές τις γεωμετρίες είναι χώροι καμπυλότητας +1 για την ελλειπτική, 0 για την ευκλείδεια και -1 για την υπερβολική γεωμετρία.

#### Ορισμός 14:

Ένας υπερβολικός κόμβος είναι ένας κόμβος που έχει ένα συμπλήρωμα στο οποίο μπορεί να δοθεί μια μετρική σταθερής καμπυλότητας -1.

#### Εξήγηση του παραπάνω ορισμού:

Καταρχάς, ας εξετάσουμε την έννοια της μετρικής. Η μετρική είναι μια συνάρτηση μέτρησης αποστάσεων. Συνεπώς, δεδομένων δύο σημείων εντός του τρισδιάστατου χώρου πλην του κόμβου, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ τους. Συνήθως μετράμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, έστω  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  και  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , στον τρισδιάστατο χώρο χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

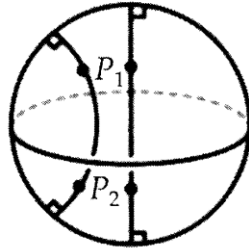
Αυτός ο τύπος μέτρησης της απόστασης ονομάζεται ευκλείδεια μετρική. Αλλά τώρα, στο συμπλήρωμα αυτού του κόμβου, θα μετρήσουμε την απόσταση με διαφορετικό τρόπο, χρησιμοποιώντας μία μετρική που έχει καμπυλότητα -1. Ένα επίπεδο, για παράδειγμα, έχει καμπυλότητα 0. Η Ευκλείδεια μετρική για τον τρισδιάστατο χώρο που δώσαμε προηγουμένως είναι ένα παράδειγμα μετρικής με καμπυλότητα μηδέν. Είναι μια λεγόμενη επίπεδη μετρική, που δεν έχει καμπυλότητα. Η μετρική που θέλουμε να βάλουμε στο συμπλήρωμα του κόμβου δεν είναι επίπεδη, αλλά έχει καμπυλότητα -1. Η γεωμετρία που προκύπτει ονομάζεται υπερβολική γεωμετρία και η μετρική ονομάζεται υπερβολική μετρική.

Μας ενδιαφέρει ο τρισδιάστατος χώρος, αφού το συμπλήρωμα ενός κόμβου είναι τρισδιάστατο. Θα περιγράψουμε ένα απλό μοντέλο ενός τρισδιάστατου χώρου που έχει μια υπερβολική μετρική. Θα τον ονομάσουμε υπερβολικό τρισδιάστατο χώρο και θα συμβολίζεται ως  $H^3$ . Το μοντέλο αυτό είναι το μοντέλο Poincare, τα σημεία του οποίου βρίσκονται μέσα στη μοναδιαία σφαίρα:

$$H^3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

Αν από αυτά τα δύο σημεία δεν περνάει κάποια διάμετρος της μοναδιαίας σφαίρας, θεωρώντας ένα κυκλικό τόξο το οποίο περνάει από αυτά τα δύο σημεία και είναι κάθετο στην μοναδιαία σφαίρα (Σχήμα 9.3.1) παίρνουμε ότι αυτό είναι και η συντομότερη διαδρομή από το ένα σημείο στο άλλο. Ενώ αν από αυτά τα δύο σημεία περνάει κάποια διάμετρος της μοναδιαίας σφαίρας παίρνουμε ως συντομότερη την διαδρομή το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει (Σχήμα 9.3.1). Κάθε τέτοια διαδρομή την ονομάζουμε  $w$  και λέμε ότι είναι μια γεωδαισιακή καμπύλη. Οι γεωδαισιακές καμπύλες στον  $H^3$  παίζουν το ρόλο που παίζουν οι ευθείες γραμμές στον ευκλείδειο χώρο, καθώς η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων στον ευκλείδειο χώρο είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει.





Σχήμα 9.3.1

Για να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $P_1$  και  $P_2$  που ανήκουν στον  $H^3$ , ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση  $\frac{2}{1-r^2}$  κατά μήκος της συντομότερης διαδρομής  $w$  από το  $P_1$  στο  $P_2$ , όπου  $r$  είναι η απόσταση από το κέντρο της μοναδιαίας σφαίρας. Επομένως, ο επίσημος ορισμός της απόστασης από το  $P_1$  στο  $P_2$  είναι:

$$d(P_1, P_2) = \int_w \frac{2 \cdot ds}{\sqrt{1-r^2}}$$

### Υπερβολικός όγκος

Κάθε υπερβολικός κόμβος έχει έναν υπερβολικό όγκο (hyperbolic volume). Αυτός είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και είναι ο όγκος του συμπληρώματος του κόμβου, όπως μετράται με την υπερβολική μετρική μας. Όταν αλλάζουμε τον υπερβολικό κόμβο με έναν άλλον ισοτοπικό, αλλάζουμε τον τρόπο που ο κόμβος αλληλεπιδρά με τον υπερβολικό χώρο, αλλά ο όγκος του χώρου παραμένει ίδιος. Συνεπώς, ο υπερβολικός όγκος παραμένει αναλλοίωτος καθώς εξαρτάται μόνο από τον ίδιο τον κόμβο και όχι από κάποια συγκεκριμένη προβολή του κόμβου. Άρα ο υπερβολικός όγκος είναι αναλλοίωτος για υπερβολικούς κόμβους.

## 10 Ανίχνευση κόμβων τόρου με την βοήθεια του SnapPy

Το SnapPy είναι ένα πρόγραμμα που βοηθάει να αποφανθούμε σε ποιόν απο τους τρεις τύπους κόμβων ανήκει ένας τυχαίος κόμβος  $K$ .

Αρχικά δημιουργούμε ένα διάγραμμα του κόμβου που θέλουμε να μελετήσουμε με τη βοήθεια της εντολής:

```
m = Manifold()
```

Αφού σχεδιάσουμε την προβολή, τον στέλνουμε στο SnapPy με την εντολή : `tools -> send to snappy`.

Εκτελούμε την εντολή `m.volume()` και εάν η τιμή δεν είναι μηδέν, ή αν είναι πάνω από 1, τότε αναγνωρίζουμε τον κόμβο ως υπερβολικό κόμβο και όχι ως κόμβο τόρου, ολοκληρώνοντας τη διαδικασία. Σε περίπτωση που δεν πρόκειται για υπερβολικό κόμβο εκτελούμε την εντολή `m.identify()`, η οποία μας πληροφορεί για τον κόμβο απο τον οποίο έχει προέλθει η συγκεκριμένη προβολή που σχεδιάσαμε. Δεδομένου ότι οι κόμβοι τόρου είναι ταξινομημένοι, και αν ο κόμβος δεν είναι πολύ μπερδεμένος ώστε το SnapPy να είναι σε θέση να τον αναγνωρίσει, θα μπορούμε να αποφανθούμε αν πρόκειται περί κόμβο τόρου ή όχι. Σε περίπτωση που η παραπάνω εντολή δεν φανεί χρήσιμη, εκτελούμε την εντολή `m.splitting_surfaces()`, η οποία αναφέρει εάν ο κόμβος είναι κόμβος δορυφόρος.

### Παράδειγμα

Έστω ότι θέλω να ελέγξω αν ο παρακάτω κόμβος είναι κόμβος τόρου.



Σχήμα 13.1

Με την εντολή `m.volume` παίρνω τιμή 2.8281... μεγαλύτερη από 1 και άρα ο παραπάνω κόμβος είναι υπερβολικός κόμβος. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε την εντολή `m.identify()` μας επιστρέφει ότι ο παραπάνω κόμβος είναι ο κόμβος  $5_2$  ο οποίος γνωρίζουμε ότι δεν είναι κόμβος τόρου. Ο μόνος κόμβος τόρου με 5 διασταυρώσεις είναι ο  $5_1$ .

## 11 Αριθμός Λύσεως (Unknotting Number)

### Ορισμός 15 :

Ο αριθμός λύσεως (unknotting number) ενός κόμβου  $K$  συμβολίζεται με  $u(K)$  και αντιπροσωπεύει τον ελάχιστο αριθμό διασταυρώσεων, στο πλήθος όλων των διαγραμμάτων του  $K$ , που πρέπει να αλλάξουν για να δημιουργηθεί ο τετριμμένος κόμβος. Διευκρινιστικά, η αλλαγή των διασταυρώσεων αναφέρεται σε σπάσιμο των διασταυρώσεων και δημιουργία άλλων εκ νέου, και όχι σε κινήσεις Reidemeister.

### Θεώρημα 6 :

Ο αριθμός λύσεως είναι αναλλοίωτη κόμβων

### Απόδειξη:

Έστω κόμβος  $K_1$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $D_1$  είναι το διάγραμμα του  $K_1$  με τον μικρότερο αριθμό λύσεως. Έστω επίσης  $K_2$  ένας κόμβος που είναι ισοτοπικός με τον  $K_1$ . Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το  $D_2$  είναι το διάγραμμα του  $K_2$  με τον μικρότερο αριθμό λύσεως. Εφόσον μπορούμε να θεωρήσουμε το  $D_2$  ως ένα διάγραμμα του  $K_1$  (αφού οι  $K_1$  και  $K_2$  είναι ισοτοπικός), από τον ορισμό έχουμε ότι:

$$u(D_1) \leq u(D_2) \quad (1)$$

Ωστόσο, εφόσον και το  $D_1$  είναι ένα διάγραμμα του  $K_2$ , προκύπτει και πάλι από τον ορισμό ότι:

$$u(D_2) \leq u(D_1) \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε ότι:

$$u(D_1) = u(D_2)$$

□

## Παρατηρήσεις:

### Κάθε κόμβος έχει πεπερασμένο αριθμό λύσεων:

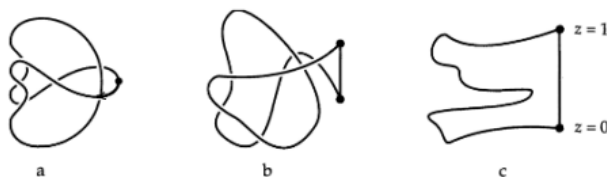
Δεδομένης μιας προβολής ενός κόμβου (Σχήμα 11.1(a)), ας επιλέξουμε ένα σημείο εκκίνησης στον κόμβο που για λόγους ευκολίας δεν βρίσκεται σε σημείο διασταύρωσης. Ας επιλέξουμε επίσης έναν προσανατολισμό για τον κόμβο. Τώρα, ξεκινώντας από αυτό το σημείο, κατευθυνόμαστε κατά μήκος του κόμβου προς την κατεύθυνση που επιλέξαμε. Την πρώτη φορά που φτάνουμε σε μια διασταύρωση, αλλάζουμε τη διασταύρωση, αν είναι απαραίτητο, έτσι ώστε το τόξο στο οποίο βρισκόμαστε να έχει την πληροφορία “άνω” και συνεχίζουμε την διαδρομή μας. Αν φτάσουμε σε μια διασταύρωση που έχουμε ήδη περάσει μια φορά, δεν την αλλάζουμε, αλλά συνεχίζουμε μέχρι να φτάσουμε πάλι στο σημείο εκκίνησης.



Σχήμα 11.1

Όταν γίνει αυτό, θα έχουμε μια προβολή (Σχήμα 11.1(b)) η οποία προέκυψε από τον αρχικό μας κόμβο αλλάζοντας τις διασταυρώσεις και που στην πραγματικότητα θα είναι ο τετριμμένος κόμβος, όπως θα δείξουμε:

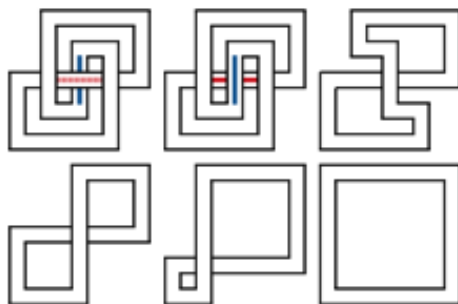
Για να δούμε ότι αυτός είναι ο τετριμμένος, τον προβάλλουμε στον τρισδιάστατο χώρο. Έστω ότι ο άξονας  $z$  είναι κάθετος στην οθόνη μας. Ξεκινώντας από το αρχικό σημείο, το τοποθετούμε στον τρισδιάστατο χώρο με συντεταγμένη  $z = 1$ . Τώρα, καθώς διασχίζουμε τον κόμβο, μειώνουμε τις συντεταγμένες  $z$  κάθε σημείου του κόμβου μέχρι να επιστρέψουμε στο σημείο απ' όπου ξεκινήσαμε. Αυτό το τελευταίο σημείο θα έχει συντεταγμένη  $z = 0$ . Αλλά, αφού δώσαμε στο αρχικό σημείο και στο τελευταίο σημείο συντεταγμένες  $z = 0$  και  $z = 1$ , και υποτίθεται ότι είναι το ίδιο σημείο, ενώνουμε με μια κάθετη γραμμή το ένα σημείο με το άλλο για να ολοκληρώσουμε τον κόμβο. Ας παρατηρήσουμε λοιπόν ότι όταν κοιτάζουμε ευθεία τον κόμβο μας κατά μήκος του άξονα  $z$ , βλέπουμε την προβολή που δημιουργήσαμε όταν εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο της παρατήρησης (Σχήμα 11.2 (b)). Αλλά όταν κοιτάζουμε την προβολή μας από το πλάι, βλέπουμε μια προβολή χωρίς διασταυρώσεις (Σχήμα 11.2(c)). Συνεπώς, αυτός ο κόμβος είναι ένας τετριμμένος κόμβος.



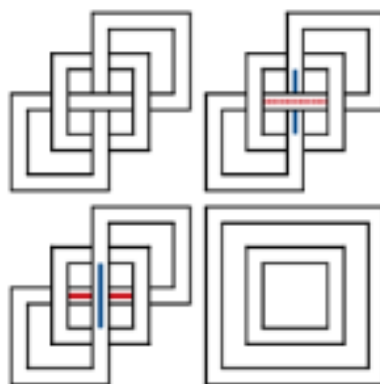
Σχήμα 11.2

2) Αν υπάρχει μια προβολή ενός κόμβου  $K$  όπου με μόνο μία αλλαγή στη διασταύρωση μπορούμε να τον μετατρέψουμε στον τετριμμένο, τότε ο αριθμός λύσεως (*unknotting number*) του  $K$  είναι ίσος με 1.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ για την Παρατήρηση 2 :**



Παρατηρούμε ότι στον κόμβο τριφύλλι αν αλλάξουμε μία διασταύρωση τότε προκύπτει ο τετριμμένος. Συνεπώς έχει αριθμό λύσεως = 1.



Παρατηρούμε ότι στον κρίκο whitehead αν αλλάξουμε μία διασταύρωση τότε προκύπτει ο τετριμμένος κόμβος. Συνεπώς έχει αριθμό λύσεως = 1.

**Πόρισμα:**

Ο  $u(K) = 0$  αν και μόνο εάν ο  $K$  είναι ισοτοπικός με τον τετριμμένο.

Για παράδειγμα, ο trefoil έχει  $u(\text{trefoil}) = 1$ , συνεπώς σύμφωνα με το πόρισμα δεν είναι ισοτοπικός με τον τετριμμένο.

Γενικά, είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί ο αριθμός λύσεως ενός κόμβου, καθώς δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι δεν υπάρχει καμία άλλη προβολή του  $K$  στην οποία, με λιγότερες αλλαγές διασταύρωσης, οδηγούμαστε στον τετριμμένο κόμβο. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν άπειρες οικογένειες κόμβων και κρίκων για τις οποίες οι αριθμοί λύσεως καθορίζονται πλήρως. Ένα παράδειγμα είναι η οικογένεια των torus-knots:

**Θεώρημα 7:**

Ο αριθμός λύσεως ενός  $(q, r)$ -κόμβο τόρου ισούται με

$$\frac{1}{2}((q-1) \cdot (r-1)).$$

**Παράδειγμα:**

Ο κόμβος τριφύλλι είναι ένας  $(3,2)$ -κόμβος τόρου, συνεπώς με βάση το θεώρημα 7 έχει αριθμό λύσεως 1.

Παρακάτω παραθέτουμε έναν πίνακα με τους αριθμούς λύσεως κόμβων με εώς και 10 διασταυρώσεις. Οι κόμβοι καταγράφονται με την κωδικοποίηση του Alexander-Briggs :

0 <sub>1</sub>	0	8 <sub>16</sub>	2	9 <sub>25</sub>	2	10 <sub>6</sub>	3	10 <sub>36</sub>	2	10 <sub>66</sub>	3	10 <sub>96</sub>	2	10 <sub>126</sub>	2	10 <sub>156</sub>	1
3 <sub>1</sub>	1	8 <sub>17</sub>	1	9 <sub>26</sub>	1	10 <sub>7</sub>	1	10 <sub>37</sub>	2	10 <sub>67</sub>	2	10 <sub>97</sub>	2	10 <sub>127</sub>	2	10 <sub>157</sub>	2
4 <sub>1</sub>	1	8 <sub>18</sub>	2	9 <sub>27</sub>	1	10 <sub>8</sub>	2	10 <sub>38</sub>	2	10 <sub>68</sub>	2	10 <sub>98</sub>	2	10 <sub>128</sub>	3	10 <sub>158</sub>	2
5 <sub>1</sub>	2	8 <sub>19</sub>	3	9 <sub>28</sub>	1	10 <sub>9</sub>	1	10 <sub>39</sub>	2	10 <sub>69</sub>	2	10 <sub>99</sub>	2	10 <sub>129</sub>	1	10 <sub>159</sub>	1
5 <sub>2</sub>	1	8 <sub>20</sub>	1	9 <sub>29</sub>	2	10 <sub>10</sub>	1	10 <sub>40</sub>	2	10 <sub>70</sub>	2	10 <sub>100</sub>	?	10 <sub>130</sub>	2	10 <sub>160</sub>	2
6 <sub>1</sub>	1	8 <sub>21</sub>	1	9 <sub>30</sub>	1	10 <sub>11</sub>	?	10 <sub>41</sub>	2	10 <sub>71</sub>	1	10 <sub>101</sub>	3	10 <sub>131</sub>	1	10 <sub>161</sub>	3
6 <sub>2</sub>	1	9 <sub>1</sub>	4	9 <sub>31</sub>	2	10 <sub>12</sub>	2	10 <sub>42</sub>	1	10 <sub>72</sub>	2	10 <sub>102</sub>	1	10 <sub>132</sub>	1	10 <sub>162</sub>	2
6 <sub>3</sub>	1	9 <sub>2</sub>	1	9 <sub>32</sub>	2	10 <sub>13</sub>	2	10 <sub>43</sub>	2	10 <sub>73</sub>	1	10 <sub>103</sub>	3	10 <sub>133</sub>	1	10 <sub>163</sub>	2
7 <sub>1</sub>	3	9 <sub>3</sub>	3	9 <sub>33</sub>	1	10 <sub>14</sub>	2	10 <sub>44</sub>	1	10 <sub>74</sub>	2	10 <sub>104</sub>	1	10 <sub>134</sub>	3	10 <sub>164</sub>	1
7 <sub>2</sub>	1	9 <sub>4</sub>	2	9 <sub>34</sub>	1	10 <sub>15</sub>	2	10 <sub>45</sub>	2	10 <sub>75</sub>	2	10 <sub>105</sub>	2	10 <sub>135</sub>	2	10 <sub>165</sub>	2
7 <sub>3</sub>	2	9 <sub>5</sub>	2	9 <sub>35</sub>	3	10 <sub>16</sub>	2	10 <sub>46</sub>	3	10 <sub>76</sub>	?	10 <sub>106</sub>	2	10 <sub>136</sub>	1		
7 <sub>4</sub>	2	9 <sub>6</sub>	3	9 <sub>36</sub>	2	10 <sub>17</sub>	1	10 <sub>47</sub>	?	10 <sub>77</sub>	?	10 <sub>107</sub>	1	10 <sub>137</sub>	1		
7 <sub>5</sub>	2	9 <sub>7</sub>	2	9 <sub>37</sub>	2	10 <sub>18</sub>	1	10 <sub>48</sub>	2	10 <sub>78</sub>	2	10 <sub>108</sub>	2	10 <sub>138</sub>	2		
7 <sub>6</sub>	1	9 <sub>8</sub>	2	9 <sub>38</sub>	3	10 <sub>19</sub>	2	10 <sub>49</sub>	3	10 <sub>79</sub>	?	10 <sub>109</sub>	2	10 <sub>139</sub>	4		
7 <sub>7</sub>	1	9 <sub>9</sub>	3	9 <sub>39</sub>	1	10 <sub>20</sub>	2	10 <sub>50</sub>	2	10 <sub>80</sub>	3	10 <sub>110</sub>	2	10 <sub>140</sub>	2		
8 <sub>1</sub>	1	9 <sub>10</sub>	3	9 <sub>40</sub>	2	10 <sub>21</sub>	2	10 <sub>51</sub>	?	10 <sub>81</sub>	2	10 <sub>111</sub>	2	10 <sub>141</sub>	1		
8 <sub>2</sub>	2	9 <sub>11</sub>	2	9 <sub>41</sub>	2	10 <sub>22</sub>	2	10 <sub>52</sub>	2	10 <sub>82</sub>	1	10 <sub>112</sub>	2	10 <sub>142</sub>	3		
8 <sub>3</sub>	2	9 <sub>12</sub>	1	9 <sub>42</sub>	1	10 <sub>23</sub>	1	10 <sub>53</sub>	3	10 <sub>83</sub>	2	10 <sub>113</sub>	1	10 <sub>143</sub>	1		
8 <sub>4</sub>	2	9 <sub>13</sub>	3	9 <sub>43</sub>	2	10 <sub>24</sub>	2	10 <sub>54</sub>	?	10 <sub>84</sub>	1	10 <sub>114</sub>	1	10 <sub>144</sub>	2		
8 <sub>5</sub>	2	9 <sub>14</sub>	1	9 <sub>44</sub>	1	10 <sub>25</sub>	2	10 <sub>55</sub>	2	10 <sub>85</sub>	2	10 <sub>115</sub>	2	10 <sub>145</sub>	2		
8 <sub>6</sub>	2	9 <sub>15</sub>	2	9 <sub>45</sub>	1	10 <sub>26</sub>	1	10 <sub>56</sub>	2	10 <sub>86</sub>	2	10 <sub>116</sub>	2	10 <sub>146</sub>	1		
8 <sub>7</sub>	1	9 <sub>16</sub>	3	9 <sub>46</sub>	2	10 <sub>27</sub>	1	10 <sub>57</sub>	2	10 <sub>87</sub>	2	10 <sub>117</sub>	2	10 <sub>147</sub>	1		
8 <sub>8</sub>	2	9 <sub>17</sub>	2	9 <sub>47</sub>	2	10 <sub>28</sub>	2	10 <sub>58</sub>	2	10 <sub>88</sub>	1	10 <sub>118</sub>	1	10 <sub>148</sub>	2		
8 <sub>9</sub>	1	9 <sub>18</sub>	2	9 <sub>48</sub>	2	10 <sub>29</sub>	2	10 <sub>59</sub>	1	10 <sub>89</sub>	2	10 <sub>119</sub>	1	10 <sub>149</sub>	2		
8 <sub>10</sub>	2	9 <sub>19</sub>	1	9 <sub>49</sub>	3	10 <sub>30</sub>	1	10 <sub>60</sub>	1	10 <sub>90</sub>	2	10 <sub>120</sub>	3	10 <sub>150</sub>	2		
8 <sub>11</sub>	1	9 <sub>20</sub>	2	10 <sub>1</sub>	1	10 <sub>31</sub>	1	10 <sub>61</sub>	?	10 <sub>91</sub>	1	10 <sub>121</sub>	2	10 <sub>151</sub>	2		
8 <sub>12</sub>	2	9 <sub>21</sub>	1	10 <sub>2</sub>	3	10 <sub>32</sub>	1	10 <sub>62</sub>	2	10 <sub>92</sub>	2	10 <sub>122</sub>	2	10 <sub>152</sub>	4		
8 <sub>13</sub>	1	9 <sub>22</sub>	1	10 <sub>3</sub>	2	10 <sub>33</sub>	1	10 <sub>63</sub>	2	10 <sub>93</sub>	2	10 <sub>123</sub>	2	10 <sub>153</sub>	2		
8 <sub>14</sub>	1	9 <sub>23</sub>	2	10 <sub>4</sub>	2	10 <sub>34</sub>	2	10 <sub>64</sub>	2	10 <sub>94</sub>	2	10 <sub>124</sub>	4	10 <sub>154</sub>	3		
8 <sub>15</sub>	2	9 <sub>24</sub>	1	10 <sub>5</sub>	2	10 <sub>35</sub>	2	10 <sub>65</sub>	2	10 <sub>95</sub>	1	10 <sub>125</sub>	2	10 <sub>155</sub>	2		

Πίνακας 11.1



## 12 Αριθμός Διασταυρώσεων (Crossing Number)

### Ορισμός 16:

Ο αριθμός διασταυρώσεων  $c(K)$ , ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων στο σύνολο όλων των ισοδύναμων διαγραμμάτων της κλάσης ισοτοπίας του  $K$ . Με άλλα λόγια, αν  $D(K)$  το σύνολο όλων των διαγραμμάτων του κόμβου  $K$ , τότε:

$$C(K) = \min_{D \in D_K} C(D)$$

Ένας υψηλός αριθμός διασταυρώσεων υποδηλώνει γενικά έναν πιο περίπλοκο κόμβο. Περισσότερες διασταυρώσεις σημαίνουν ότι ο κόμβος είναι πιο σφιχτοδεμένος ή περιπλεγμένος. Αντίθετα, ένας χαμηλότερος αριθμός διασταυρώσεων υποδηλώνει μια απλούστερη και λιγότερο περίπλοκη δομή.

### Θεώρημα 8:

Ο αριθμός διασταυρώσεων είναι αναλλοίωτη κόμβων.

### Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι το  $D_1$  είναι το διάγραμμα του  $K_1$  με τις λιγότερες διασταυρώσεις. Έστω επίσης  $K_2$  ένας κόμβος που είναι ισοτοπικός με τον  $K_1$ . Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το  $D_2$  είναι το διάγραμμα του  $K_2$  με τις λιγότερες διασταυρώσεις. Εφόσον μπορούμε να θεωρήσουμε το  $D_2$  ως ένα διάγραμμα του  $K_1$  (αφού οι  $K_1$  και  $K_2$  είναι ισοτοπικοί), από τον ορισμό έχουμε ότι:

$$C(D_1) \leq C(D_2) \quad (1)$$

Ωστόσο, εφόσον και το  $D_1$  είναι ένα διάγραμμα του  $K_2$ , προκύπτει και πάλι από τον ορισμό ότι:

$$C(D_2) \leq C(D_1) \quad (2)$$

Συνδιάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε ότι:

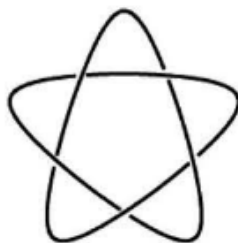
$$C(D_1) = C(D_2)$$

□

## Πώς προσδιορίζουμε τον αριθμό διασταύρωσης ενός κόμβου $K$ ;

Πρώτα, βρίσκουμε μια προβολή του κόμβου  $K$  με έστω  $n$  αριθμό διασταυρώσεων. Μετά γνωρίζουμε ότι ο αριθμός διασταυρώσεων του  $K$  θα είναι μικρότερος ή ίσος του  $n$ . Αν όλοι οι κόμβοι με λιγότερες διασταυρώσεις από  $n$  είναι γνωστοί, και αν ο  $K$  δεν είναι ισοτοπικός με κανέναν κόμβο που έχει αριθμό διασταυρώσεων μικρότερο του  $n$ , τότε ο  $K$  πρέπει να έχει αριθμό διασταυρώσεων που ισούται με  $n$ .

Έστω, για παράδειγμα, ο κόμβος  $5_1$ :



Σχήμα 12.1

Στην εικόνα 12.1 βλέπουμε μια προβολή του  $5_1$  με 5 διασταυρώσεις. Θα δείξουμε ότι ο  $5_1$  δεν είναι ισοτοπικός με κανέναν από τους:

- τετριμμένος,  $c(\text{τετριμμένου}) = 0$
- $3_1$ ,  $c(3_1) = 3$
- $4_1$ ,  $c(4_1) = 4$

Οι οποίοι, σύμφωνα με το παράρτημα στο τέλος της εργασίας, είναι όλοι οι κόμβοι με αριθμό διασταυρώσεων μικρότερο ή ίσο του 4.

Ο  $5_1$  γνωρίζω ότι είναι ένας  $(5, 2)$ -κόμβος τόρου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7, χρειαζόμαστε

$$\frac{1}{2} \cdot (5 - 1) \cdot (2 - 1) = 2$$

αλλαγές στις διασταυρώσεις για να πάρουμε τον τετριμμένο κόμβο. Συνεπώς, ο  $5_1$  έχει αριθμό λύσεων 2.

Εδώ είναι η πρώτη:



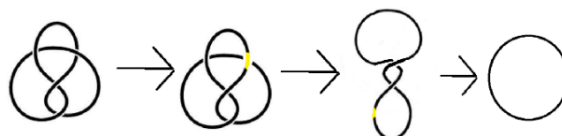
Σχήμα 12.2

Μετά οποιαδήποτε διασταύρωση και αν αλλάζουμε θα πάρουμε τον τετριμμένο.

Ο τετριμμένος κόμβος έχει αριθμό λύσεως 0, διαφορετικό από τον  $5_1$  (βλεπε πίνακα 11.1). Επομένως, ο τετριμμένος δεν είναι ισοτοπικός με τον  $5_1$ .

Ο Trefoil  $3_1$  είναι ένας (2, 3)-κόμβος τόρου, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 7, χρειαζόμαστε  $\frac{1}{2} \cdot (3 - 1) \cdot (2 - 1) = 1$  αλλαγές στις διασταυρώσεις για να πάρουμε τον τετριμμένο κόμβο. Συνεπώς, ο  $3_1$  έχει αριθμό λύσεως 1, διαφορετικό από τον  $5_1$ . Συνεπώς, ο  $5_1$  και ο  $3_1$  δεν είναι ισοτοπικοί.

Ο  $4_1$  (figure-8) δεν είναι ισοτοπικός με τον τετριμμένο, άρα έχει αριθμό λύσεως μεγαλύτερο του μηδέν. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι με μία αλλαγή μιας διασταύρωσης του  $4_1$  παίρνουμε τον τετριμμένο:



Σχήμα 12.3

Συνεπώς, ο  $4_1$  έχει αριθμό λύσεως 1.

Άρα ο  $5_1$  και ο  $4_1$  έχουν διαφορετικό αριθμό λύσεως. Συνεπώς, δεν είναι ισοτοπικοί.

Έτσι, ο κόμβος  $5_1$  έχει αριθμό διασταυρώσεων 5 αφού έχει προβολή (όπως βλέπουμε στο Σχήμα 12.1) με 5 διασταυρώσεις και διαφέρει από όλους τους κόμβους με λιγότερες από 5 διασταυρώσεις.

## Παρατήρηση

Γενικώς, είναι αρκετά δύσκολο να προσδιορίσουμε τον αριθμό διασταυρώσεων ενός συγκεκριμένου κόμβου. Σε περίπτωση που έχουμε έναν κόμβο σε μια προβολή με 15 διασταυρώσεις, πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν είναι εφικτό να τον σχεδιάσουμε με λιγότερες από 15 διασταυρώσεις; Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούσαμε το παραπάνω σκεπτικό, αλλά δυστυχώς, μέχρι στιγμής, δεν έχουμε πλήρη γνώση σχετικά με όλους τους κόμβους που έχουν 14 διασταυρώσεις. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν άπειρες οικογένειες κόμβων και κρίκων για τις οποίες οι αριθμοί διασταυρώσεων καθορίζονται πλήρως. Ένα παράδειγμα είναι η οικογένεια των torus-knots.

### Θεώρημα 9:

Ο αριθμός διασταυρώσεων ενός  $(q, r)$ -κόμβος τόρου ισούται με

$$\min\{q \cdot (r - 1), r \cdot (q - 1)\}.$$

Ενώ ορισμένες αναλλοίωτες (όπως π.χ. η χρωματισσιμότητα) είναι πολύ καλές στη διάκριση κόμβων, ο αριθμός διασταυρώσεων δεν είναι αφού συνήθως δεν μπορεί να υπολογιστεί από ένα μόνο διάγραμμα. Αντ' αυτού, ο αριθμός διασταυρώσεων παρέχει έναν χρήσιμο τρόπο ταξινόμησης των κόμβων με βάση την πολυπλοκότητα. Τέλος, ο αριθμός διασταυρώσεων παρουσιάζει την ακόλουθη ιδιότητα πεπερατότητας:

### Πρόταση 15.1:

Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , υπάρχουν πεπερασμένοι κόμβοι  $K_n$  τέτοια ώστε  $c(K) = n$  για όλα τα  $K \in K_n$ .

### Απόδειξη:

Έστω τυχαίος φυσικός αριθμός  $n$ . Καθένας από τους κόμβους με  $n$ -διασταυρώσεις έχει, σύμφωνα με την κωδικοποίηση κατά Gauss, μήκος που ισούται με  $2n$  (σε κάθε διασταύρωση υπάρχει ένα τόξο με την πληροφορία "άνω" και ένα με την πληροφορία "κάτω", οπότε από κάθε διασταύρωση περνάμε πάντα δύο φορές όταν εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο για να κωδικοποιήσουμε έναν κόμβο με την κωδικοποίηση Gauss). Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι αν  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n} : x_i = \pm 1, \dots, \pm n, i = 1, \dots, 2n\}$  τότε  $|A| < +\infty$ , για την ακρίβεια κιόλας  $|A| = 2n!$ , άρα υπάρχουν πεπερασμένες κωδικοποιήσεις κατά Gauss για κόμβους με  $n$  διασταυρώσεις, άρα και πεπερασμένοι κόμβοι με  $n$  διασταυρώσεις. Ας παρατηρήσουμε εδώ πως δεν υπάρχουν κατ' ανάγκην  $2n!$  διαφορετικοί κόμβοι. Μπορεί περισσότερες από μία κωδικοποιήσεις να κωδικοποιούν τον ίδιο κόμβο.

Με βάση την παραπάνω πρόταση, η ταξινόμηση των κόμβων μέσω του αριθμού διασταυρώσεων είναι ένα εφικτό υπολογιστικό πρόβλημα, αν και ο αριθμός των κόμβων με δεδομένο αριθμό διασταυρώσεων  $n$  αυξάνεται γρήγορα καθώς αυξάνεται το  $n$ :

<b>n</b>	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>kn</b>	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988	46927	253293

## 13 Επίλογος

Κλείνοντας την εργασία, ολοκληρώνουμε την προσπάθειά μας, ύστερα από πολλή έρευνα, να παρουσιάσουμε και να αναλύσουμε ικανοποιητικά, αλλά και περιεκτικά τις κύριες έννοιες της θεωρίας κόμβων, καθώς και κάποια από τα πιο ισχυρά εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί γύρω από αυτήν. Ειδικότερα, ως επιστέγασμα του εγχειρήματός μας θεωρούμε, ότι η έμφαση που δόθηκε στις αναλλοίωτες κόμβων, θα δώσει το έναυσμα σε εμάς αλλά και σε νεότερους ερευνητές και συναδέλφους, να μελετήσουν και να πορευτούν στα άγνωστα ακόμη νερά του συγκεκριμένου κλάδου των μαθηματικών, έτσι ώστε να απαντηθούν σύντομα πολλά ερωτήματα και να προχωρήσουμε όλο και πιο κοντά στην θεμελίωση μιάς ισχυρής και συμπαγούς θεωρίας κόμβων. Είναι γεγονός, ότι σε πολλές εφαρμογές των θετικών επιστημών, όπως στην Χημεία, τη Φυσική, τη Βιολογία και την Στατική Μηχανική απαιτείται η χρήση μεθόδων της θεωρίας κόμβων. Συνεπώς, πολλές σημαντικές ανακαλύψεις στην ιστορία του ανθρώπινου είδους, εξαρτώνται άμεσα από την εξέλιξη της έρευνας των μαθηματικών. Για πολλούς ανθρώπους, τα μαθηματικά είναι απλά μια στεγνή θεωρία, όμως η αλήθεια είναι ότι όλες οι εφαρμογές των επιστημών, που ανεβάζουν την ποιότητα της ζωής μας θεμελιώνονται από αυτά. Όπως έχουν ισχυριστεί και οι μεγαλύτεροι φιλόσοφοι της ιστορίας, τα μαθηματικά και οι αριθμοί διέπουν την λειτουργία όλου του κόσμου. Τα μαθηματικά είναι η γλώσσα του σύμπαντος.

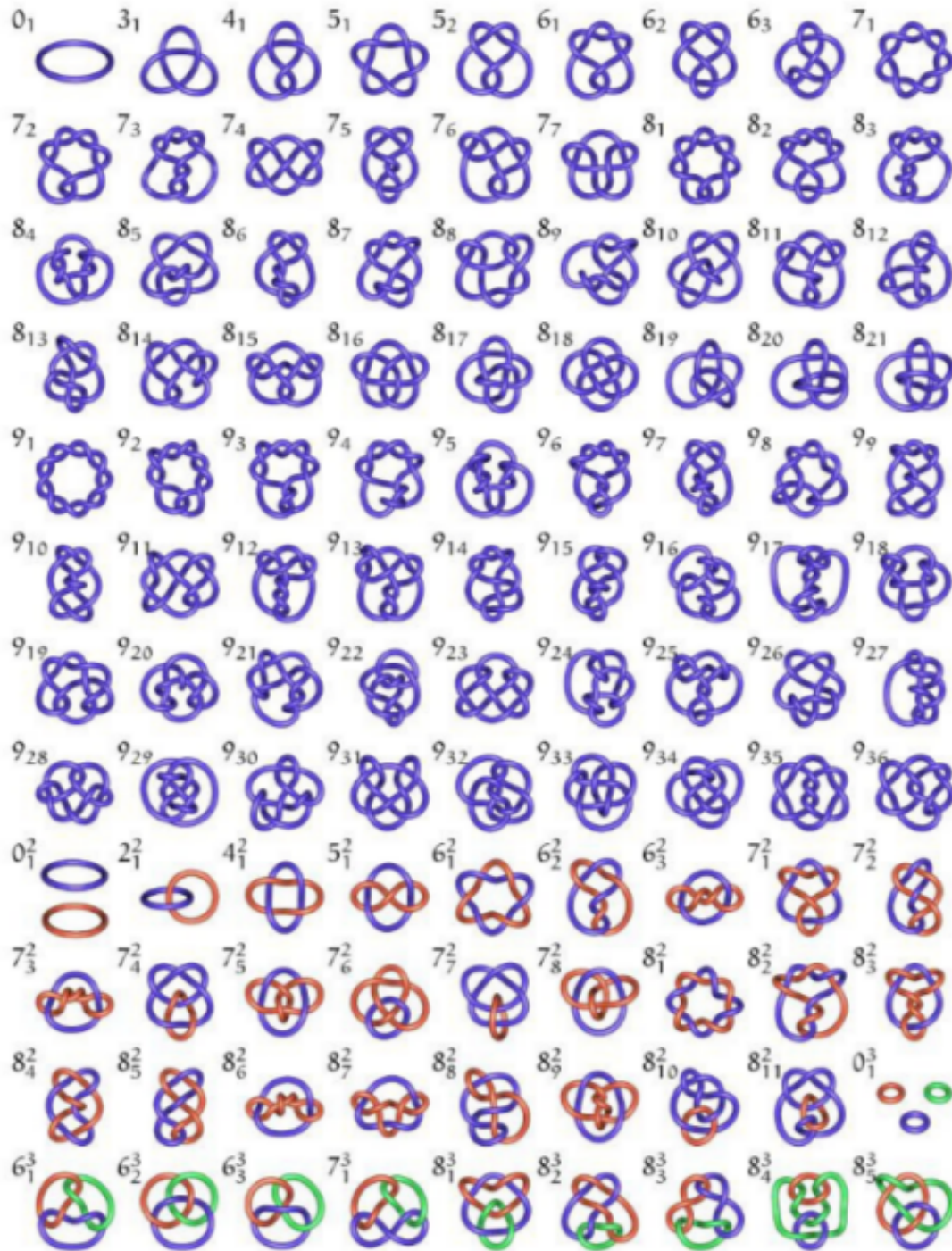
## References

- [1] Adams Colin. *The Knot Book*. (2004). [https://www.math.cuhk.edu.hk/course\\_builder/1920/math4900e/Adams--The%20Knot%20Book.pdf](https://www.math.cuhk.edu.hk/course_builder/1920/math4900e/Adams--The%20Knot%20Book.pdf)
- [2] Adams Colin, Flapman Erica, Henrich Allison, Kauffman Louis, Ludwig Lewis, Nelson Sam. *Encyclopedia of Knot Theory*. (2021). URL: <https://www.taylorfrancis.com/books/edit/10.1201/9781138298217/encyclopedia-knot-theory-colin-adams-erica-flapan-allison-henrich-louis-kauffman->
- [3] Adams Colin, Lambropoulou Sofia, Henrich Allison, Kauffman Louis, Ludwig Lewis. Diagrammatic representations of knots and links as closed braids, in the *Concise Encyclopedia of Knot Theory*, 2019
- [4] Breiland Anna-Lisa, Oesper Layla, Taalman Laura. "p-Coloring Classes of Torus Knots." (2004). URL: <https://educ.jmu.edu/~taalmala/OJUPKT/FinalPaper.pdf>
- [5] Butler Rex, Cohen Aaron, Dalton Matt, Louder Lars, Rettberg Ryan, Whitt Allen. "Explorations into Knot Theory: Colorability." (2001). URL: <https://www.math.utah.edu/vigre/annual-report/ncolorability.pdf>
- [6] Carter J. Scott, Silver Daniel S., Williams Susan G. "Three Dimensions of Knot Coloring." (2014). URL: <https://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.121.06.506>
- [7] Chris Sarakasidis. "Χωροι διαμόρφωσης και οι ομάδες πλεξίδων του Artin." (2014).
- [8] SnapPy. "Manifold: the main class." URL: <https://snappy.computop.org/manifold.html>
- [9] Diamantis Ioannis. *Σημειώσεις στη Θεωρία Κόμβων*. URL: <http://www.math.ntua.gr/~sofia/dissertations/Diamantis%20Lecture%20Notes%20-%20Knot%20Theory.pdf>
- [10] Han Youfa, Zhou Boxin. "The minimum number of coloring of knots." (2022). URL: <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0218216522500134>
- [11] Hurmuzov Mihail. *Hyperbolic Structure of Knot Complements*. URL: [https://homepages.math.uic.edu/~mhurmu2/stuff/Survey\\_2017\\_\\_\\_Hyperbolic\\_structure\\_of\\_knot\\_complements.pdf](https://homepages.math.uic.edu/~mhurmu2/stuff/Survey_2017___Hyperbolic_structure_of_knot_complements.pdf)
- [12] Kerr Jeremy William. "On the Number of Colors in Quandle Knot Colorings." (2016). URL: <https://digitalcommons.usf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=7299&context=etd>
- [13] Lambropoulou Sofia. *Θεωρία Κόμβων*. URL: <http://www.math.ntua.gr/~sofia/kostas/files/page1.html>
- [14] Livingston Charles. "Knot Coloring." URL: [https://legacy-www.math.harvard.edu/archive/139\\_spring\\_07/knotcolorability.pdf](https://legacy-www.math.harvard.edu/archive/139_spring_07/knotcolorability.pdf)
- [15] Mantopoulou Danae. *Οι Ομάδες Πλεξίδων και Εφαρμογές τους στην Κρυπτογραφία και τα Πολυμερή*. (2013). URL: [https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/8660/mantopouloud\\_braids.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/8660/mantopouloud_braids.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- [16] May Jessica. "Matrix Representation of Knot and Link Groups." (2006). URL: [https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1188&context=hmc\\_theses](https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1188&context=hmc_theses)
- [17] Murasugi Kunio. *Knot Theory and Its Applications*. (Έτος). URL: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/murasug3.pdf>

- [18] Mutzel Petra. "The Crossing Number of Graphs: Theory and Computation." URL: <https://www.hinkali.com/Education/CrossingNumber.pdf>
- [19] Przytycki Jozef H. "3-Coloring and other Invariants of Knots." (2006). URL: [https://www.researchgate.net/publication/2130172\\_3-Coloring\\_and\\_other\\_Invariants\\_of\\_Knots](https://www.researchgate.net/publication/2130172_3-Coloring_and_other_Invariants_of_Knots)
- [20] Przytycki Jozef H. "3-coloring and other elementary invariants of knots." (1998). URL: <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/bcp/bcp42/bcp42120.pdf>
- [21] Richter R. B., Salazar G. *Crossing Numbers*. (2008). URL: <https://www.math.uwaterloo.ca/~brichter/pubs/June2008.pdf>
- [22] Rourke, Adams Colin , Lambropoulou Sofia. "Markov's theorem in 3-manifolds." (1995). URL: <https://arxiv.org/abs/math/0405498#:~:text=In%20this%20paper%20we%20first,braided%20portion%20in%20the%20knot.>
- [23] Siwach Vikash. "Unknotting Number of some knots." (2013). URL: [https://www.icts.res.in/sites/default/files/knot2013\\_vikash.pdf](https://www.icts.res.in/sites/default/files/knot2013_vikash.pdf)
- [24] Sudipta Kolay. "Knot colorings: Coloring and Goeritz matrices." (2009). URL: <https://arxiv.org/pdf/1910.08044.pdf>
- [25] Unknown, *Knots and knot invariants*. URL: <https://www.bsmath.hu/20summer/StipeMain.pdf>
- [26] Unknown, *Colorable Knot*. (2014). URL: <https://ncatlab.org/nlab/show/colorable+knot>
- [27] Unknown, *Linear Algebra over  $Zp$* . URL: <https://www.math.purdue.edu/~arapura/algebra/ch14-15.pdf>
- [28] Unknown, *The Crossing Number of a Graph*. URL: <http://people.qc.cuny.edu/faculty/christopher.hanusa/courses/634sp12/Documents/634sp12ch9-2.pdf>
- [29] Unknown, *The Crossing Number Lemma*. URL: <https://people.math.rochester.edu/faculty/iosevich/tripods19august2pm+.pdf>
- [30] Unknown, *Ostrander-Robert-thesis*. (2014). URL: [https://scholarworks.calstate.edu/concern/parent/2801pk117/file\\_sets/wh246v87r](https://scholarworks.calstate.edu/concern/parent/2801pk117/file_sets/wh246v87r)
- [31] Wikipedia. "Crossing number." URL: <https://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/sl/126.htm>
- [32] Wikipedia. "Fox n-coloring." (2023). URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Fox\\_n-coloring](https://en.wikipedia.org/wiki/Fox_n-coloring)
- [33] Wikipedia. "Knot theory." URL: <https://sites.oglethorpe.edu/knottheory/>
- [34] Wikipedia. "Unknotting number." URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Unknotting\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Unknotting_number)
- [35] Wolfram Alpha. "Graph Crossing Number." URL: <https://mathworld.wolfram.com/GraphCrossingNumber.html>



# 14 Παράρτημα



Παράρτημα: Κόμβοι μέχρι εννιά διασταυρώσεις και παραδείγματα κρίκων με δύο και τρεις συστώσεις.