



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

# Κατανεμημένος Έλεγχος Μη-Γραμμικών Πολυπρακτορικών Συστημάτων με Κορεσμό Εισόδου για Αναζήτηση Ισορροπίας Nash

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Ε. ΓΑΛΑΝΟΠΟΥΛΟΥ



Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης  
Λέκτορας ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2024





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

# Κατανεμημένος Έλεγχος Μη-Γραμμικών Πολυπρακτορικών Συστημάτων με Κορεσμό Εισόδου για Αναζήτηση Ισορροπίας Nash

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

**ΝΙΚΟΛΑΟΥ Ε. ΓΑΛΑΝΟΠΟΥΛΟΥ**

**Επιβλέπων:** Χαράλαμπος Ψυλλάκης  
Λέκτορας ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 28η Ιου 2024.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....  
Χαράλαμπος Ψυλλάκης  
Λέκτορας ΕΜΠ

.....  
Ιωάννης Κορδώνης  
Επ. Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Αντώνιος Αλεξανδρίδης  
Καθηγητής Παν. Πατρών

Αθήνα, Ιούνιος 2024





Copyright © - All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.  
Νικόλαος Γαλανόπουλος, 2024.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

#### **ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ**

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

.....  
Νικόλαος Γαλανόπουλος

17 Ιουνίου 2024



## Περίληψη

---

Ένα παίγνιο αποτελεί μια αλληλεπίδραση μεταξύ πρακτόρων, στην οποία το σύνολο των επιλεγμένων δράσεων καθορίζει τα ατομικά οφέλη κάθε πράκτορα. Ένα ιδιαίτερο γνώρισμα κάποιων παιγνίων είναι η ύπαρξη Ισορροπίας Nash, δηλαδή ενός συμβιβαστικού συνδυασμού δράσεων από τον οποίο κανένας πράκτορας δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς. Οι συμβιβαστικές αυτές διατάξεις έχουν μεγάλη σημασία σε μη-συνεργατικά παίγνια, ενώ αποτελούν εκφραστικό εργαλείο για την περιγραφή επιθυμητής αναδυόμενης συμπεριφοράς.

Στην παρούσα εργασία, επικεντρωνόμαστε σε στατικά παίγνια, δηλαδή παίγνια ενός γύρου όπου οι πράκτορες ανακοινώνουν τις κινήσεις τους ταυτόχρονα. Εξετάζουμε στατικά παίγνια με κυρτές και ομαλές συναρτήσεις κόστους και αναλύουμε τους συνήθεις τρόπους αναζήτησης Ισορροπίας Nash. Αναγνωρίζουμε τα πλεονεκτήματα της κατανεμημένης αναζήτησης και αναπτύσσουμε online εκδοχή του Preconditioned Proximal Point Αλγορίθμου. Αποδεικνύουμε την προσεγγιστική της σύγκλιση, ανάγοντάς την σε πρόβλημα περιορισμού συνεχώς παραγωγίσιμων μεταβλητών, των μεταβλητών ASPPPA. Έπειτα, θεωρούμε σμήνος από Μη-Επανδρωμένα Εναέρια Οχήματα συγκεντρωμένης μάζας με κορεσμό στην είσοδό τους, που συμμετέχουν σε στατικό παίγνιο με δράση την θέση τους στον τρισδιάστατο χώρο. Σχεδιάζουμε μη-γραμμικούς ελεγκτές βασισμένους στην Prescribed Performance αρχιτεκτονική, με σκοπό την ρύθμιση των ASPPPA μεταβλητών των UAV πρακτόρων. Τέλος, προσομοιώνουμε αριθμητικά το σύστημα σε παίγνια επίτευξης πολυγωνικού σχηματισμού και συγκρίνουμε τις επιδόσεις του με εκείνες ενός αντίστοιχου συστήματος, το οποίο σχεδιάστηκε με συναφή προγενέστερη μέθοδο.

## Λέξεις Κλειδιά

Πολυπρακτορικά Συστήματα, Κατανεμημένη Αναζήτηση Ισορροπίας Nash, Κυρτή Βελτιστοποίηση, Preconditioned Proximal Point Algorithm, Κατανεμημένος Έλεγχος, Prescribed Performance Control, Μη-Επανδρωμένα Εναέρια Οχήματα, Κορεσμός Είσοδου





## Abstract

---

A game is an interaction between agents where the set of the chosen actions determines the individual rewards for each agent. A special feature of some games is the existence of a Nash Equilibrium, i.e., a set of actions from which no agent has any incentive to unilaterally deviate. These configurations are of great importance in non-cooperative games and offer an expressive framework for describing desired emergent behavior.

In this diploma thesis, we focus on static games, which consist of one turn where agents reveal their actions simultaneously. We consider static games with convex and smooth cost functions and analyze the main Nash Equilibrium seeking frameworks. We explain the advantages of distributed seeking and develop an online version of the Preconditioned Proximal Point algorithm. We prove its approximate convergence by reducing the convergence problem to a regulation problem of smooth variables, named ASPPPA. Then, we consider a swarm of concentrated-mass Unmanned Aerial Vehicles with input saturation, participating in a game where each agent's action is its position in three-dimensional space. We design nonlinear controllers based on the Prescribed Performance Control architecture to regulate the ASPPPA variable of each UAV agent. Finally, we numerically simulate the system in polygonal formation games and compare its performance with that of a similar system designed using a related, pre-existing method.

## Keywords

Multiagent Systems, Distributed Nash Equilibrium Seeking, Convex Optimization, Preconditioned Proximal Point Algorithm, Distributed Control, Prescribed Performance Control, Unmanned Aerial Vehicles, Input Saturation



*στην οικογένειά μου*



## Ευχαριστίες

---

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Χαράλαμπο Ψυλλάκη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε στην ανάληψη της παρούσας εργασίας, τη συνεργασία που είχαμε κατά την εκπόνηση της και για την καθοριστική του βοήθεια σε σημεία καμπής της προόδου της. Επίσης, ευχαριστώ τόσο τον κ. Ψυλλάκη όσο και τον επίκουρο καθηγητή κ. Ιωάννη Κορδώνη, των οποίων οι διαλέξεις μου εμφύσησαν το ενδιαφέρον μου για τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επιπλέον τον καθηγητή της ΣΕΜΦΕ, κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, για τις γνώσεις που μου μετέδωσε στο μάθημα της Ανάλυσης Πινάκων, οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην εργασία αυτή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την αγάπη και στήριξη που πάντα μου παρέχουν, όπως και τους συμφοιτητές φίλους μου με τους οποίους μοιραζόμαστε όλα αυτά τα χρόνια αρκετά άγχη, αλλά και πολλές χαρές. : )

Αθήνα, Ιούνιος 2024

*Νικόλαος Γαβριλόπουλος*



# Περιεχόμενα

---

<b>Περίληψη</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Ευχαριστίες</b>	<b>7</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>15</b>
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής	16
1.2 Οργάνωση του τόμου	16
1.3 Συμβολισμοί	17
<b>2 Θεωρητικό Υπόβαθρο</b>	<b>19</b>
2.1 Έννοιες Ανάλυσης Πινάκων	19
2.1.1 Θεώρημα Δίσκων Gershgorin	19
2.1.2 Διανυσματικοί Χώροι με Νόρμα ή Εσωτερικό Γινόμενο	20
2.1.3 Γινόμενο Kronecker	20
2.2 Έννοιες Διανυσματικής Ανάλυσης	21
2.2.1 Διαφορισιμότητα	21
2.2.2 Ομαλότητα	21
2.3 Έννοιες Κυρτής Βελτιστοποίησης	22
2.3.1 Κυρτότητα	22
2.3.2 Ελαχιστοποίηση Κυρτών Συναρτήσεων	22
2.4 Έννοιες Θεωρίας Γράφων	23
2.4.1 Βασικοί Ορισμοί	23
2.4.2 Μονοπάτια και Συνεκτικότητα	23
2.4.3 Στοχαστικότητα Πίνακα	24
<b>3 Κατανεμημένη Εύρεση Ισορροπίας Nash</b>	<b>25</b>
3.1 Ισορροπία Nash σε Παίγνια με Κυρτές Συναρτήσεις Κόστους	25
3.2 Κεντρικοποιημένη Αναζήτηση	26
3.2.1 Gradient Play	26
3.2.2 Γιατί χρησιμοποιούμε αλγορίθμους διακριτού χρόνου;	26
3.3 Κατανεμημένη Αναζήτηση	27
3.3.1 Ανάγκη για Κατανεμημένους Αλγορίθμους	27
3.3.2 Τοπικά Διανύσματα	27
3.3.3 Επικοινωνία Πρακτόρων	27

3.3.4 Κατανεμημένο Gradient Play . . . . .	28
3.4 Αλγόριθμοι . . . . .	28
3.4.1 PPP Αλγόριθμος . . . . .	28
3.4.2 Προσεγγιστικός PPP Αλγόριθμος . . . . .	29
<b>4 Προσεγγιστική Εύρεση Ισορροπίας Nash</b>	<b>31</b>
4.1 Διάσπαση Κατάστασης-Εκτίμησης . . . . .	31
4.2 Σύγκλιση Προσεγγιστικού PPPA . . . . .	32
4.2.1 Δυναμική Σφάλματος . . . . .	32
4.2.2 Απόδειξη Σύγκλισης . . . . .	33
4.3 Εξομάλυνση του Αλγορίθμου Αναζήτησης . . . . .	39
4.3.1 Μεταβλητές ASPPPA . . . . .	39
4.3.2 Ιδιότητες των Εξομαλυμένων Μεταβλητών Σφάλματος . . . . .	40
4.3.3 Προσεγγιστική Εύρεση Ισορροπίας Nash . . . . .	41
<b>5 Αναζήτηση Ισορροπίας Nash σε UAV σύστημα</b>	<b>43</b>
5.1 Δυναμικό Μοντέλο . . . . .	43
5.2 Αρχιτεκτονική Ελέγχου . . . . .	44
5.2.1 Αποσύζευξη Εισόδων Ελέγχου . . . . .	45
5.2.2 Prescribed Performance Έλεγχος με Τροποποίηση Αναφοράς . . . . .	45
5.3 Ανάλυση Σύγκλισης . . . . .	47
<b>6 Προσομοιώσεις</b>	<b>53</b>
6.1 Formation Control . . . . .	53
6.1.1 Διατύπωση του Παιγνίου . . . . .	53
6.1.2 Ιδιότητες του Παιγνίου . . . . .	54
6.1.3 Αποτελέσματα της Προσομοίωσης . . . . .	55
6.2 Επανεξέταση του Formation Control . . . . .	60
6.2.1 Προπαρασκευή . . . . .	60
6.2.2 Διατύπωση του Παιγνίου . . . . .	62
6.2.3 Ιδιότητες του Παιγνίου . . . . .	63
6.2.4 Αποτελέσματα της Προσομοίωσης . . . . .	65
6.3 Σύγκριση με την S-GRANE σχεδίαση . . . . .	70
6.3.1 Διατύπωση του Παιγνίου . . . . .	70
6.3.2 Ιδιότητες του Παιγνίου . . . . .	71
6.3.3 Αποτελέσματα της Προσομοίωσης . . . . .	71
<b>7 Επίλογος</b>	<b>83</b>
7.1 Σύνοψη . . . . .	83
7.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις . . . . .	84
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>87</b>



## Κατάλογος Σχημάτων

---

2.1	Εφαρμογή Θεωρήματος Gershgorin σε Αυθαίρετο $3 \times 3$ Μιγαδικό Πίνακα . . .	19
2.2	Παράδειγμα Συνεκτικού και Μη-Συνεκτικού Γράφου. . . . .	24
2.3	Περιγραφή Ρίψης Τίμιου Νομίσματος με Αλυσίδα Markov . . . . .	24
4.1	Παρεμβολή με ΖΟΗ και την Ομαλή Συνάρτηση Εξομάλυνσης . . . . .	40
5.1	Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων για το UAV Μοντέλο Συγκεντρωμένης Μάζας	44
6.1	Γράφος Επικοινωνίας . . . . .	54
6.2	Θέσεις . . . . .	56
6.3	Εκτιμήσεις x-Συνιστωσών . . . . .	56
6.4	Εκτιμήσεις y-Συνιστωσών . . . . .	57
6.5	Εκτιμήσεις z-Συνιστωσών . . . . .	57
6.6	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι x-Συνιστωσών . . . . .	58
6.7	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι y-Συνιστωσών . . . . .	58
6.8	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι z-Συνιστωσών . . . . .	59
6.9	Τροχιές Πρακτόρων . . . . .	59
6.10	Τροχιές Πρακτόρων (Κάτοψη) . . . . .	60
6.11	Θέσεις . . . . .	66
6.12	Εκτιμήσεις x-Συνιστωσών . . . . .	66
6.13	Εκτιμήσεις y-Συνιστωσών . . . . .	67
6.14	Εκτιμήσεις z-Συνιστωσών . . . . .	67
6.15	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι x-Συνιστωσών . . . . .	68
6.16	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι y-Συνιστωσών . . . . .	68
6.17	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι z-Συνιστωσών . . . . .	69
6.18	Τροχιές Πρακτόρων . . . . .	69
6.19	Τροχιές Πρακτόρων (Κάτοψη) . . . . .	70
6.20	Θέσεις . . . . .	72
6.21	Εκτιμήσεις x-Συνιστωσών . . . . .	73
6.22	Εκτιμήσεις y-Συνιστωσών . . . . .	73
6.23	Εκτιμήσεις z-Συνιστωσών . . . . .	74
6.24	Βοηθητικές Είσοδοι x-Συνιστωσών . . . . .	74
6.25	Βοηθητικές Είσοδοι y-Συνιστωσών . . . . .	75
6.26	Βοηθητικές Είσοδοι z-Συνιστωσών . . . . .	75
6.27	Τροχιές Πρακτόρων . . . . .	76
6.28	Θέσεις . . . . .	77

6.29	Εκτιμήσεις $x$ -Συνιστωσών	77
6.30	Εκτιμήσεις $y$ -Συνιστωσών	78
6.31	Εκτιμήσεις $z$ -Συνιστωσών	78
6.32	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι $x$ -Συνιστωσών	79
6.33	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι $y$ -Συνιστωσών	79
6.34	Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι $z$ -Συνιστωσών	80
6.35	Τροχιές Πρακτόρων	80
7.1	Σχηματική Αναπαράσταση Πρακτόρων	83

## Κατάλογος Πινάκων

---

6.1	Σταθερές Πρώτου Παιγνίου . . . . .	53
6.2	Σταθερές Πρώτης Προσομοίωσης . . . . .	55
6.3	Σταθερές Δεύτερου Παιγνίου . . . . .	64
6.4	Σταθερές Δεύτερης Προσομοίωσης . . . . .	65
6.5	Σταθερές Τρίτου Παιγνίου . . . . .	71
6.6	Σταθερές Προσομοίωσης S-GRANE . . . . .	72
6.7	Σταθερές Προσομοίωσης ASPPPA . . . . .	76



## Κεφάλαιο 1

### Εισαγωγή

---

Ο κλάδος των Πολυπρακτορικών Συστημάτων επικεντρώνεται στη μελέτη σύνθετων αλληλεπιδράσεων μεταξύ πολλών πρακτόρων. Καθημερινά παραδείγματα τέτοιων συστημάτων είναι τα οδικά δίκτυα, τα κοινωνικά δίκτυα και το χρηματιστήριο.

Οι πράκτορες πολύ πιθανόν να δρουν αποσκοπώντας στη μεγιστοποίηση του οφέλους τους. Όταν η συνολική δράση των πρακτόρων καθορίζει τα οφέλη του κάθε ενός, λέμε πως οι πράκτορες συμμετέχουν σε παίγνιο. Πλέον, έχουμε εισέλθει στον κλάδο της Θεωρίας Παιγνίων, ο οποίος μελετάει αλληλεπιδράσεις όπως οι παραπάνω. Θα επικεντρωθούμε σε συγκεκριμένη κατηγορία παιγνίων, τα στατικά παίγνια, δηλαδή παίγνια ενός γύρου. Όλοι οι πράκτορες ανακοινώνουν ταυτόχρονα την κίνησή τους και επωμίζονται άμεσα τα αντίστοιχα οφέλη [1]. Παράδειγμα στατικού παιγνίου αποτελεί το παιχνίδι “Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί”.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό κάποιων παιγνίων είναι η ύπαρξη Ισορροπίας Nash. Μια τέτοια ισορροπία είναι ουσιαστικά κάποια συνολική δράση των πρακτόρων από την οποία αν αποφάσιζε να αποκλίνει μόνο ένας πράκτορας, θα ζημιωνόταν. Διαισθητικά, η Ισορροπία Nash, περιγράφει την έκβαση ενός παιγνίου όπου κανένας πράκτορας δεν μπορεί να βασίζεται πως θα συνεργαστεί με κάποιον άλλο, οπότε όλοι, στην ανάγκη τους να μη ζημιωθούν, συμβιβάζονται. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Παράδοξο του Φυλακισμένου [2, Παράδειγμα 1.1].

Στη γενική περίπτωση, η αναζήτηση Ισορροπιών Nash είναι υπολογιστικά δύσκολη [3]. Ωστόσο, υπάρχει σημαντική έρευνα πάνω σε αλγορίθμους για αναζήτηση Ισορροπιών Nash σε μία κατηγορία παιγνίων, τα στατικά παίγνια με κυρτές και διαφορίσιμες συναρτήσεις κόστους. Οι ιδιότητες των συναρτήσεων κόστους αυτών, επιτρέπουν την ανάπτυξη πρακτικά αποδοτικών αλγορίθμων αναζήτησης με τα εξελιγμένα εργαλεία του κλάδου της Κυρτής Βελτιστοποίησης, ενώ δεν θυσιάζουν εκφραστικότητα από ενδιαφέροντα παίγνια [4].

Το σύνθημα μοτίβο αναζήτησης είναι το εξής. Κάθε πράκτορας επικοινωνεί την ατομική υποψήφια δράση του στους υπόλοιπους πράκτορες και με βάση τις αντίστοιχες πληροφορίες που έλαβε από αυτούς, την ανανεώνει με χρήση κάποιου κανόνα. Αυτό συνεχίζεται επαναληπτικά. Η παραπάνω μέθοδος αναζήτησης έχει υψηλό κόστος λόγω της ανάγκης για επικοινωνία όλων των πρακτόρων μεταξύ τους. Στην πράξη, χρησιμοποιούνται καταναμημένοι αλγόριθμοι όπου κάθε πράκτορας επικοινωνεί με ορισμένους μόνο γείτονες, ανταλλάσσοντας επιπλέον τις ατομικές του εκτιμήσεις για την υποψήφια δράση των υπολοίπων πρακτόρων.

## 1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής

Στόχος της εργασίας είναι η online εφαρμογή κατανεμημένου αλγορίθμου αναζήτησης Ισορροπίας Nash σε πολυπρακτορικό σύστημα που αποτελείται από UAVs. Τα UAVs έχουν τη δική τους δυναμική, οπότε η παρακολούθηση του αλγορίθμου αναζήτησης θα μετατραπεί σε πρόβλημα ελέγχου. Βασιζόμαστε στην προγενέστερη εργασία [5] και επιχειρούμε να την επεκτείνουμε με τις παρακάτω προσθήκες και αλλαγές.

- Χρησιμοποιούμε ως αλγόριθμο αναζήτησης μια online εκδοχή του Preconditioned Proximal Point αλγορίθμου, με χαμηλή ανάγκη για επικοινωνία.
- Υποθέτουμε κορεσμό στις εισόδους του υπό-έλεγχου συστήματος.

## 1.2 Οργάνωση του τόμου

Η εργασία μας είναι οργανωμένη σε επτά κεφάλαια.

- Στο Κεφάλαιο 2, αναφέρονται βασικοί μαθηματικοί ορισμοί και λήμματα που χρειάζονται στην ανάλυσή μας σε επόμενα κεφάλαια.
- Στο Κεφάλαιο 3, εισάγουμε την έννοια της Ισορροπίας Nash σε παίγνια με κυρτές και ομαλές συναρτήσεις κόστους και περιγράφουμε τρόπους εύρεσής της. Αναδεικνύουμε την ανάγκη για κατανεμημένους αλγορίθμους και παρουσιάζουμε τον PPP αλγόριθμο τον οποίο τροποποιούμε, ώστε να μπορεί να εφαρμόζεται online.
- Στο Κεφάλαιο 4, αποδεικνύεται η προσεγγιστική σύγκλιση της τροποποιημένης εκδοχής του PPPA. Στη συνέχεια, εξομαλύνουμε κατάλληλα την εκδοχή αυτήν, ώστε να ανάγουμε το πρόβλημα προσεγγιστικής εύρεσης Ισορροπίας Nash σε πρόβλημα ελέγχου ομαλών μεταβλητών στο συνεχή χρόνο.
- Στο Κεφάλαιο 5, αποδεικνύουμε πως το πρόβλημα της προσεγγιστικής εύρεσης Ισορροπίας Nash μπορεί να λυθεί για στόλο πρακτόρων που μοντελοποιούν UAV δυναμική με κορεσμό στην είσοδο. Χρησιμοποιούμε ως μέθοδο ελέγχου τον Prescribed Performance έλεγχο με τροποποίηση αναφοράς.
- Στο Κεφάλαιο 6, προσομοιώνουμε αριθμητικά το σύστημα που εξετάσαμε στα Κεφάλαια 4 και 5, ώστε να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά μας αποτελέσματα. Επιλύουμε πρόβλημα πολυγωνικού σχηματισμού των UAVs (Formation Control), ενώ συγκρίνουμε τη σχεδίαση μας με την προγενέστερη σχεδίαση του [5].
- Τέλος, στο Κεφάλαιο 7, συνοψίζουμε τα συμπεράσματά μας για την εργασία και αναφέρουμε πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις.

## 1.3 Συμβολισμοί

Παρακάτω διατυπώνουμε συμβολισμούς που χρησιμοποιούμε στην εργασία.

- Δοθέντος θετικού ακεραίου  $n$ , συμβολίζουμε με  $[n]$  το σύνολο  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- Συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|$  τη 2-νόρμα όπως ορίζεται σε διανύσματα και πίνακες. Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.
- Συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|_\infty$  την  $\infty$ -νόρμα διανυσμάτων.
- Έστω διανύσματα ιδίων διαστάσεων  $x, y$ . Συμβολίζουμε με  $x \perp y$  την καθετότητα των δύο διανυσμάτων, δηλαδή πως  $\langle x, y \rangle = 0$ .
- Συμβολίζουμε με  $\text{col}(\{x_i\})$  ένα διάνυσμα στήλη ή πίνακα, με στοιχεία ή αντιστοίχως γραμμές τα  $x_i$ . Τα  $x_i$  μπορεί να είναι βαθμωτά ή και διανύσματα.
- Με  $\text{diag}(\{d_i\})$  συμβολίζουμε ένα διαγώνιο πίνακα, με διαγώνια στοιχεία τα βαθμωτά  $d_i$ .
- Με  $\text{blkdiag}(\{A_i\})$  συμβολίζουμε ένα block διαγώνιο πίνακα, με διαγώνια στοιχεία τους πίνακες  $A_i$ .
- Έστω πίνακας  $A$ . Συμβολίζουμε με  $\kappa(A)$  το 2-condition number του, ενώ με  $\lambda_{\max}(A)$ ,  $\lambda_{\min}(A)$ , τη μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιοτιμή του.
- Συμβολίζουμε με  $\mathbb{I}_n$  τον μοναδιαίο πίνακα διάστασης  $n \times n$ .
- Με  $\mathbf{0}$  συμβολίζουμε πίνακα ή διάνυσμα που αποτελείται μόνο από μηδενικά. Οι διαστάσεις του είτε θα αναγράφονται, είτε θα εξάγονται από τα συμφραζόμενα. Αντίστοιχα συμβολίζουμε με  $\mathbf{1}$  τον πίνακα ή διάνυσμα που όλες του τις συνιστώσες είναι ίσες με τη μονάδα.

Έστω  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  θετικά ορισμένος πίνακας.

- Ο συμβολισμός  $\mathcal{Q} > 0$  σημαίνει ακριβώς πως ο  $\mathcal{Q}$  είναι θετικά ορισμένος.
- Δοθέντων διανυσμάτων  $x, y \in \mathbb{R}^m$ , το  $\mathcal{Q}$ -επαγόμενο εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ως  $\langle x, y \rangle_{\mathcal{Q}} = \langle x, \mathcal{Q}y \rangle$ .
- Η  $\mathcal{Q}$ -επαγόμενη νόρμα ενός διανύσματος  $x$  ορίζεται ως  $\|x\|_{\mathcal{Q}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{Q}}}$ .

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^n$ .

- Συμβολίζουμε με  $f \circ x := \text{col}((f(x_i))_{i \in [n]})$ , την κατά στοιχείο εφαρμογή της συνάρτησης  $f$  στις συνιστώσες του διανύσματος  $x$ .





## Κεφάλαιο 2

### Θεωρητικό Υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικά μαθηματικά εργαλεία που αφορούν την Ανάλυση Πινάκων, τη Διανυσματική Ανάλυση, την Κυρτή Βελτιστοποίηση και τη Θεωρία Γράφων, που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια της εργασίας.

#### 2.1 Έννοιες Ανάλυσης Πινάκων

##### 2.1.1 Θεώρημα Δίσκων Gershgorin

Αρχίζουμε παραθέτοντας ένα απλό αλλά ισχυρό θεώρημα, που αφορά τη θέση των ιδιοτιμών ενός μιγαδικού πίνακα στο μιγαδικό επίπεδο.

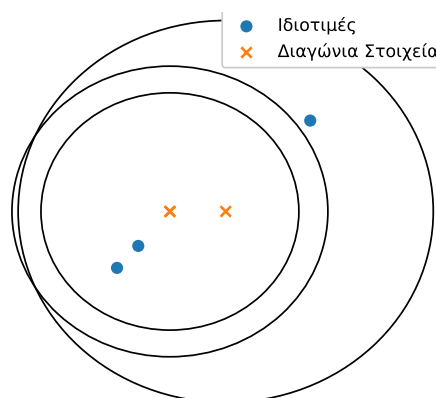
**Λήμμα 2.1** (Gershgorin Circle Theorem [6, Θ. 6.1.1]). Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $R_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ . Ορίζουμε για κάθε  $i \in [n]$  το σύνολο

$$D(a_{ii}, R_i) := \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq R_i\},$$

δηλαδή τον δίσκο κέντρου  $a_{ii}$  και ακτίνας  $R_i$ . Το φάσμα του πίνακα  $A$  περιέχεται εντός της ένωσης των παραπάνω δίσκων,

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i \in [n]} D(a_{ii}, R_i).$$

Το θεώρημα Gershgorin επεκτείνεται κατάλληλα και για block πίνακες [7, Θ. 2.7].



Σχήμα 2.1: Εφαρμογή Θεωρήματος Gershgorin σε Αυθαίρετο  $3 \times 3$  Μιγαδικό Πίνακα

### 2.1.2 Διανυσματικοί Χώροι με Νόρμα ή Εσωτερικό Γινόμενο

Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της νόρμας και του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων χωρίς κάποια περαιτέρω διευκρίνιση. Για θεωρία διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα ή εσωτερικό γινόμενο, παραπέμπουμε σε συγγράμματα Γραμμικής Άλγεβρας, όπως το [8, Κεφ. 1].

### 2.1.3 Γινόμενο Kronecker

Συνεχίζουμε ορίζοντας την πράξη του γινομένου Kronecker που επιτρέπει τη συνοπτική γραφή σύνθετων πινάκων.

**Ορισμός 2.1** (Γινόμενο Kronecker). Έστω πίνακες  $A = [a_{ij}]$  διαστάσεων  $m \times n$  και  $B = [b_{ij}]$  διαστάσεων  $p \times q$ . Το γινόμενο Kronecker των πινάκων  $A$  και  $B$  ορίζεται ως

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Παραθέτουμε, για καλύτερη κατανόηση του ορισμού, ενδεικτικά παραδείγματα γινομένων Kronecker.

**Παράδειγμα 2.1** (Υπολογισμοί Γινομένων Kronecker).

$$1. \text{ Έστω } A = \mathbf{1}_{1 \times 2}, B = \mathbb{I}_3. \text{ Τότε, } A \otimes B = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. \text{ Έστω } A = 3 \cdot \mathbf{1}_{2 \times 1}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \text{ Τότε, } A \otimes B = \begin{bmatrix} 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$3. \text{ Έστω } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \text{ Τότε, } A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Κλείνουμε την ενότητα της Ανάλυσης Πινάκων εξετάζοντας το φάσμα του γινομένου Kronecker δύο τετράγωνων πινάκων.

**Λήμμα 2.2** (Φάσμα Γινομένου Kronecker Τετράγωνων Πινάκων [9, Θ. 4.2.12]). Έστω τετραγωνικοί πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  με φάσματα  $\sigma(A)$  και  $\sigma(B)$ . Τότε, το μεταξύ τους γινόμενο Kronecker ( $A \otimes B$ ) έχει ως φάσμα το πολλαπλό των γινομένων των επιμέρους ιδιοτιμών των  $A$  και  $B$ , δηλαδή

$$\sigma(A \otimes B) := \{\lambda \cdot \mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}.$$

## 2.2 Έννοιες Διανυσματικής Ανάλυσης

### 2.2.1 Διαφορισιμότητα

Εκκινάμε υπενθυμίζοντας ορισμούς που αφορούν την παραγωγισιμότητα διανυσματικών συναρτήσεων.

**Ορισμός 2.2** (Gradient). Έστω βαθμωτή συνάρτηση πολλών μεταβλητών  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_m)$ . Ως *gradient* της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  ορίζουμε το διάνυσμα στήλη που περιέχει όλες τις μερικές παραγώγους της  $f$  στο  $x_0$ , αν υπάρχουν, και το συμβολίζουμε ως

$$\nabla f(x_0) \equiv \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} := \text{col} \left( \left( \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x_0} \right)_{i \in [m]} \right). \quad (2.2)$$

Προχωράμε θεωρώντας διανυσματικά πεδία  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Κάθε συνιστώσα του  $\mathbf{f}(x)$ , είναι μια βαθμωτή συνάρτηση. Συλλέγουμε τα gradients όλων αυτών των βαθμωτών συνιστωσών σε ένα πίνακα, που ονομάζουμε Ιακωβιανό.

**Ορισμός 2.3** (Jacobian Matrix). Έστω διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ο Ιακωβιανός πίνακας της  $\mathbf{f}(x) := \text{col}(f_i(x))_{i \in [n]}$  περιέχει σε κάθε γραμμή του τα gradients των συναρτήσεων που την απαρτίζουν. Συγκεκριμένα,

$$J_{\mathbf{f}}(x) := \text{col}((\nabla^T f_i(x))_{i \in [n]}). \quad (2.3)$$

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε την έννοια της διαφορισιμότητας διανυσματικών συναρτήσεων.

**Ορισμός 2.4** (Διαφορισιμότητα [10]). Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  θεωρείται παραγωγίσιμο στο  $\mathbb{R}^m$ , αν για κάθε  $x_0$  ο Ιακωβιανός του πίνακας  $J_{\mathbf{f}}(x_0)$  είναι καλώς ορισμένος και επιπλέον ισχύει πως

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) - J_{\mathbf{f}}(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0. \quad (2.4)$$

Καλούμε τον πίνακα  $J_{\mathbf{f}}(x)$ , παράγωγο της  $\mathbf{f}$ .

Ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά απαιτεί το άθροισμα  $\mathbf{f}(x_0) + J_{\mathbf{f}}(x_0)(x - x_0)$  να είναι η γραμμικοποίηση της  $f$ . Δεν θα επεκταθούμε στον αυστηρό ορισμό των παραγώγων μεγαλύτερης τάξης. Για τις ανάγκες της εργασίας, μπορούμε να θεωρούμε την παράγωγο τάξης  $k$  ενός  $k$ -φορών παραγωγίσιμου διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{f}$ , ως κατάλληλο πίνακα όλων των μικτών παραγώγων τάξης  $k$ , των επιμέρους συνιστωσών του,  $f_i$ .

### 2.2.2 Ομαλότητα

Κλείνουμε την ενότητα της Διανυσματικής Ανάλυσης, υπενθυμίζοντας την έννοια της συνεχούς παραγωγισιμότητας.

**Ορισμός 2.5** (Συνεχής Παραγωγισιμότητα). Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ονομάζεται  $k$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμο ή ισοδύναμα λέμε πως ανήκει στην κλάση  $C^k$ , αν οι  $k$ -πρώτες παράγωγοί του, είναι συνεχείς.

## 2.3 Έννοιες Κυρτής Βελτιστοποίησης

### 2.3.1 Κυρτότητα

Ξεκινάμε ορίζοντας μια από τις βασικότερες έννοιες της Κυρτής Βελτιστοποίησης, την κυρτή συνάρτηση.

**Ορισμός 2.6** (Convexity/Strict Convexity [11]). Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Η  $f$  ονομάζεται κυρτή στο  $\mathbb{R}^m$  ή απλώς κυρτή, αν

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad (2.5)$$

για κάθε  $x$  και  $y$  στο  $\mathbb{R}^m$  και κάθε  $\lambda \in [0, 1]$ . Αν η ανισότητα (2.5) ισχύει γνησίως για κάθε  $x \neq y \in \mathbb{R}^m$  και  $\lambda \in (0, 1)$ , τότε η  $f$  ονομάζεται γνησίως κυρτή (strictly convex).

Ο ορισμός της κυρτότητας αποκτάει την παρακάτω ισοδύναμη μορφή, για παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**Ορισμός 2.7** (Ορισμός Κυρτότητας για Παραγωγίσιμη Συνάρτηση [11]). Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Η  $f$  είναι κυρτή αν

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \quad (2.6)$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}^m$ . Η  $f$  είναι γνησίως κυρτή, αν η ανισότητα (2.6) ισχύει γνησίως για κάθε  $x \neq y \in \mathbb{R}^m$ .

Διαισθητικά ο παραπάνω ορισμός μας λέει πως η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή αν η γραμμικοποίηση της  $f$  ή ισοδύναμα οποιοδήποτε εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στην  $f$ , την υποεκτιμά, για οποιαδήποτε επιλογή "κέντρου"  $x$  [11].

### 2.3.2 Ελαχιστοποίηση Κυρτών Συναρτήσεων

Στη μία διάσταση γνωρίζουμε πως αν μια κυρτή συνάρτηση έχει κρίσιμο σημείο, δηλαδή σημείο μηδενισμού της παραγώγου της, αυτό είναι τοπικό ελάχιστο. Αυτή η συνθήκη επεκτείνεται κατάλληλα και για τις διανυσματικές συναρτήσεις.

**Λήμμα 2.3** (Συνθήκη Ελαχίστου Κυρτής Παραγωγίσιμης Συνάρτησης [11]). Έστω παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Η  $f$  εμφανίζει ελάχιστο στο  $x_0$  αν και μόνο αν

$$\nabla f(x_0) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Κλείνουμε την υποενότητα της κυρτής βελτιστοποίησης αναφέροντας ιδιότητες συναρτήσεων που θα διευκολύνουν παρακάτω την ανάλυση ακροτάτων. Αρχίζουμε με την έννοια του radial unboundedness.

**Ορισμός 2.8** (Radial Unboundedness). Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Η  $f$  ονομάζεται ακτινικά μη-φραγμένη (radially unbounded), αν

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty. \quad (2.8)$$

Το radial unboundedness μας εξασφαλίζει πως ένα τοπικό ελάχιστο μιας κυρτής συνάρτησης  $f$ , είναι και ολικό της ελάχιστο. Διαισθητικά, η συνάρτησή μας μοιάζει με "κοιλάδα" καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων, οπότε δεν μπορεί να έχει ελάχιστο "στο άπειρο". Τέλος, αναφέρουμε δύο ιδιότητες για διανυσματικές συναρτήσεις. Οι διανυσματικές συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν θα είναι gradients κυρτών συναρτήσεων.

**Ορισμός 2.9** (Strong Monotonicity). Έστω συνάρτηση  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Η  $\phi$  ονομάζεται μισχυρά μονότονη ή απλώς ισχυρά μονότονη, αν υπάρχει θετική σταθερά  $\mu$  τέτοια ώστε

$$\langle x - y, \phi(x) - \phi(y) \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad (2.9)$$

για οποιαδήποτε  $x, y \in \mathbb{R}^m$ .

**Ορισμός 2.10** (Lipschitz Continuity). Έστω συνάρτηση  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Έστω  $S$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}^m$ . Η  $\phi$  ονομάζεται  $L$ -Lipschitz συνεχής στο  $S$ , εάν υπάρχει θετική σταθερά  $L$  τέτοια ώστε

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad (2.10)$$

για οποιαδήποτε  $x, y \in S$ , Η αναφορά στο  $S$  παραλείπεται όταν  $S = \mathbb{R}^m$ . Τότε, απλώς καλούμε τη  $\phi$  Lipschitz συνεχή.

## 2.4 Έννοιες Θεωρίας Γράφων

### 2.4.1 Βασικοί Ορισμοί

Ξεκινάμε ορίζοντας την έννοια του γράφου με βάρη και του μη-κατευθυνόμενου γράφου.

**Ορισμός 2.11** (Γράφος με Βάρη). Ένας γράφος με βάρη (weighted graph) περιγράφεται από την τριπλέτα  $(V, E, W)$ .

- Το σύνολο  $V$  περιέχει τις "ονομασίες" των κορυφών (nodes ή vertices) του γράφου.
- Το σύνολο  $E \subseteq V \times V$  περιέχει στοιχεία της μορφής  $(i, j)$  τα οποία ονομάζονται ακμές (edges) του γράφου.
- Ο πίνακας  $W \in \mathbb{R}^{|V| \times |V|}$  ονομάζεται πίνακας γειννιάσης (adjacency matrix) και ισχύει πως  $w_{ij} > 0$  αν  $(i, j) \in E$ , αλλιώς  $w_{ij} = 0$ .

**Ορισμός 2.12** (Undirected Graph). Ένας γράφος με συμμετρικό πίνακα γειννιάσης, ονομάζεται μη-κατευθυνόμενος.

### 2.4.2 Μονοπάτια και Συνεκτικότητα

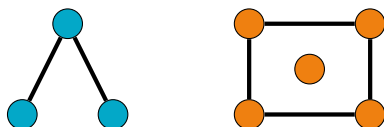
Συνεχίζουμε με έννοιες που θα μας επιτρέψουν να αναφερθούμε στη συνεκτικότητα ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος.

**Ορισμός 2.13** (Γειτονιά Κόμβου). Έστω μη-κατευθυνόμενος γράφος  $G(V, E, W)$ . Ορίζουμε ως γειτονιά ενός κόμβου  $v \in V$ , το σύνολο

$$\mathcal{N}_v := \{v' \in V : (v, v') \in E\}. \quad (2.11)$$

**Ορισμός 2.14** (Μονοπάτι [12]). Έστω μη-κατευθυνόμενος γράφος  $G(V, E, W)$ . Μια ακολουθία κόμβων  $P = \{v_i\}_{i \in [k]}$ , ονομάζεται μονοπάτι αν  $v_{i+1} \in \mathcal{N}_{v_i}$  για κάθε  $i \in [k - 1]$  και κανένας κόμβος δεν επαναλαμβάνεται.

**Ορισμός 2.15** (Connectivity [12]). Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται συνεκτικό (connected) αν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών του.



Σχήμα 2.2: Παράδειγμα Συνεκτικού και Μη-Συνεκτικού Γράφου.

### 2.4.3 Στοχαστικότητα Πίνακα

Τέλος, ορίζουμε την έννοια της στοχαστικότητας και διπλής στοχαστικότητας, για ένα τετραγωνικό πίνακα.

**Ορισμός 2.16** (Stochasticity/Double Stochasticity [13]). Ένας πίνακας  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ονομάζεται στοχαστικός αν

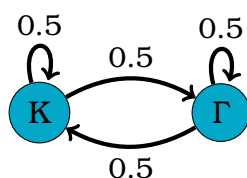
1. Όλα τα στοιχεία του είναι μη-αρνητικά.
2. Κάθε γραμμή του πίνακα αθροίζεται στη μονάδα, δηλαδή

$$\sum_{j \in [n]} w_{ij} = 1, \tag{2.12}$$

για κάθε  $i \in [n]$ .

Αν επιπλέον κάθε στήλη του πίνακα  $W$  αθροίζεται στη μονάδα, ο  $W$  ονομάζεται διπλά στοχαστικός.

Ένα μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο βρίσκουν σημαντική εφαρμογή οι στοχαστικοί πίνακες, είναι οι Αλυσίδες Markov. Παρακάτω, παραθέτουμε Αλυσίδα Markov που περιγράφει τη ρίψη ενός τίμιου νομίσματος. Ο πίνακας πρόσπτωσης τέτοιων αλυσίδων οφείλει να είναι στοχαστικός, διότι κάθε γραμμή του περιγράφει κατανομή πιθανότητας. Εδώ, λόγω συμμετρίας, τυχάνει να είναι και διπλά στοχαστικός.



Σχήμα 2.3: Περιγραφή Ρίψης Τίμιου Νομίσματος με Αλυσίδα Markov

Εμείς χρησιμοποιούμε την έννοια της στοχαστικότητας για να συνδυάσουμε, με κυρτό τρόπο, πληροφορίες μεταξύ πρακτόρων. Αυτός ο συνδυασμός έχει πιθανοτική προέκταση, συγκεκριμένα αναμενόμενη τιμή, αλλά δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω.

## Κεφάλαιο 3

# Κατανεμημένη Εύρεση Ισοροπίας Nash

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε τυπικά την έννοια της Ισοροπίας Nash. Επικεντρωνόμαστε σε στατικά παίγνια με κυρτές συναρτήσεις κόστους και αναφέρουμε κεντρικοποιημένες και κατανεμημένες μεθόδους εύρεσης τέτοιων Ισοροπιών. Τέλος, παρουσιάζουμε ένα πρόσφατο αλγόριθμο κατανεμημένης αναζήτησης τον PPPA και τον οποίο τροποποιούμε ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί online, σε συστήματα με δυναμική.

### 3.1 Ισοροπία Nash σε Παίγνια με Κυρτές Συναρτήσεις Κόστους

Εστω  $N$  πράκτορες. Κάθε πράκτορας διαθέτει σύνολο επιτρεπτών δράσεων,  $\Omega_i$ . Συμβολίζουμε με  $x_i \in \Omega_i$ , την υποψήφια δράση του πράκτορα  $i$  που παρακάτω θα την αναφέρουμε και ως κατάσταση του πράκτορα. Συμβολίζουμε με  $x_{-i} := \text{col}((x_j)_{j \in [N] \setminus \{i\}})$ , την από κοινού υποψήφια δράση όλων των πρακτόρων εκτός του  $i$ . Επιπλέον, κάθε πράκτορας έχει τοπική συνάρτηση κόστους,  $J_i(x_i, x_{-i})$ , που επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει. Στην εργασία αυτή θεωρούμε πως το σύνολο επιτρεπτών δράσεων κάθε πράκτορα είναι το  $\Omega_i = \mathbb{R}^n$ . Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε την έννοια της Ισοροπίας Nash για παίγνιο όπως το παραπάνω.

**Ορισμός 3.17.** Ορίζουμε ως Ισοροπία Nash ένα συνολικό διάνυσμα δράσεων  $x^* \in \mathbb{R}^{Nn}$ , από το οποίο αν ένας πράκτορας παρεκκλίνει, αυξάνει την τοπική συνάρτηση κόστους του. Ισοδύναμα,

$$x_i^* = \underset{y}{\text{argmin}} J_i(y, x_{-i}^*), \forall i \in [N]. \quad (3.1)$$

Στόχος μας στην εργασία αυτήν είναι να αναπτύξουμε και να αναλύσουμε αλγορίθμους εύρεσης Ισοροπίας Nash. Εξετάζουμε συγκεκριμένο είδος παιγνίων, τα στατικά παίγνια με κυρτές συναρτήσεις κόστους, καθώς η εύρεση ισοροπιών Nash μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας εργαλεία του ανεπτυγμένου κλάδου της κυρτής βελτιστοποίησης. Το παίγνιο με το οποίο θα ασχοληθούμε έχει μη συμπαγή σύνολα δράσεων. Εξαιτίας αυτού, πέρα από την κυρτότητα και ομαλότητα, εισάγουμε την επιπλέον υπόθεση για radial unboundedness, που εμφανίζεται σε σχετικές εργασίες [14, Υπ. 2],[15, Υπ. 1(i)].

**Υπόθεση 1.** Για κάθε  $i \in [N]$ , η συνάρτηση κόστους  $J_i(x_i, x_{-i})$  είναι  $C^2$ , ενώ είναι γνησίως κυρτή και ακτινικά μη φραγμένη ως προς τη μεταβλητή  $x_i \in \mathbb{R}^n$ , για κάθε  $x_{-i} \in \mathbb{R}^{(N-1)n}$ .

Σύμφωνα με το [16, Πόρ. 4.2], η Υπόθεση 1 εξασφαλίζει την ύπαρξη Ισοροπίας Nash.

Επιπλέον, εξασφαλίζει πως ένα σημείο  $x$  είναι Ισορροπία Nash αν και μόνο αν

$$F(x) = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

όπου  $F$  είναι η pseudo-gradient απεικόνιση του παιγνίου (στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως game mapping [17]),

$$F(x) := \text{col}((\nabla_i J_i(x_i, x_{-i}))_{i \in [N]}). \quad (3.3)$$

Παραπάνω, ισχύει πως  $\nabla_i J_i(x_i, x_{-i}) := \frac{\partial J_i}{\partial x_i}$ . Προχωράμε, εισάγοντας μια υπόθεση για το game mapping του παιγνίου που εξετάζουμε.

**Υπόθεση 2.** Η pseudo-gradient απεικόνιση  $F$  είναι  $\mu$ -ισχυρά μονότονη και  $\theta_0$ -Lipschitz συνεχής.

Η Υπόθεση 2 εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της Ισορροπίας Nash [14, Υπ. 3]. Ένα καλό νοητικό μοντέλο των δύο παραπάνω υποθέσεων είναι παίγνιο με τετραγωνικές συναρτήσεις κόστους, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής  $J_i(x) = x^T Q_i x + c_i^T x$ , όπου  $Q_i > 0$ .

## 3.2 Κεντρικοποιημένη Αναζήτηση

Θέλουμε να αναπτύξουμε αλγορίθμους εύρεσης Ισορροπίας Nash για παίγνιο που ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις. Προσωρινά θεωρούμε πως, ανά πάσα στιγμή, κάθε πράκτορας γνωρίζει την κατάσταση κάθε άλλου πράκτορα.

### 3.2.1 Gradient Play

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3, η συνθήκη (3.2) σε συνδυασμό με την Υπόθεση 1 συνεπάγονται πως κάθε πράκτορας έχει βελτιστοποιήσει τη συνάρτηση κόστους του, ως προς τη μόνη ελεύθερη μεταβλητή του, δηλαδή το διάνυσμα δράσης του. Αυτό ακριβώς απαιτεί ο ορισμός της Ισορροπίας Nash. Άρα, μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα της αναζήτησης Ισορροπίας σε εύρεση μηδενικού των gradients,  $\nabla_i J_i(x_i, x_{-i})$ . Μία πρώτη προσέγγιση θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε κάποιο σχήμα λογικής gradient descent [11, Ενότητα 9.3]. Αυτή είναι η ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο που παραθέτουμε παρακάτω, τον Gradient Play.

#### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3.1: Gradient Play

---

**Αρχικοποίηση:** Ορισμός της κατάστασης,  $x_i[0]$ .  
**for all**  $k \geq 0$  **do**  
     BROADCAST( $x_i[k]$ )  
      $x_i[k+1] \leftarrow x_i[k] - \eta \nabla_i J_i(x_i[k], x_{-i}[k])$   
**end for**

---

### 3.2.2 Γιατί χρησιμοποιούμε αλγορίθμους διακριτού χρόνου;

Ο αλγόριθμος Gradient Play διατυπώνεται στη βιβλιογραφία και ως αλγόριθμος συνεχούς χρόνου [15, 18], ενώ υπάρχει γενικότερα έρευνα πάνω σε τέτοιες τεχνικές [19, 20]. Ωστόσο, η παρούσα διατύπωση του Gradient Play ως αλγόριθμος διακριτού χρόνου δεν επηρεάζει τη



δυνατότητα σύγκλισής του και μας δίνει το πλεονέκτημα να έπεται “νεκρός” χρόνος μεταξύ των βημάτων του αλγορίθμου. Ο χρόνος αυτός μας είναι απαραίτητος, διότι κάθε πράκτορας πρέπει να προλαβαίνει να μαθαίνει την κατάσταση των υπολοίπων πρακτόρων, ώστε να εκτελεί σωστά τους κανόνες ανανέωσης του αλγορίθμου που ακολουθεί.

### 3.3 Κατανεμημένη Αναζήτηση

#### 3.3.1 Ανάγκη για Κατανεμημένους Αλγορίθμους

Ζήτημα της κεντρικοποιημένης προσέγγισης αποτελεί η θεώρηση πως κάθε πράκτορας μπορεί να γνωρίζει ακριβώς, σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, την κατάσταση κάθε άλλου πράκτορα. Σε πολλά παίγνια, οι στρατηγικές των πρακτόρων παραμένουν κρυφές - πχ. οι στρατηγικές των εταιρειών στο χρηματιστήριο, ενώ οι κινήσεις τους και τα αποτελέσματά των κινήσεων γίνονται γνωστά, παρά μόνο με κάποια καθυστέρηση. Ένα άλλο πρόβλημα είναι πως η ανάγκη για άμεση επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων είναι κοστοβόρα, αν κάθε πράκτορας επικοινωνεί με κάθε άλλο πράκτορα και αρκετά εύθραυστη, αν λειτουργεί σε λογική leader-follower. Γι’ αυτό δουλεύουμε με κατανεμημένη λογική, όπου κάθε πράκτορας εκτιμά την κατάσταση των υπολοίπων πρακτόρων.

#### 3.3.2 Τοπικά Διανύσματα

Προτού προχωρήσουμε, εισάγουμε απαραίτητο συμβολισμό, ώστε να διευκολύνουμε την αναφορά μας στα “τοπικά” διανύσματα των πρακτόρων. Συμβολίζουμε με  $\mathbf{x}_{(i)}$  το διάνυσμα εκτιμήσεων του πράκτορα  $i$ . Συγκεκριμένα, ορίζουμε  $\mathbf{x}_{(i)} := \text{col}((\mathbf{x}_{i,j})_{j \in [N]})$ , όπου  $\mathbf{x}_{i,j}$  είναι η εκτίμηση του πράκτορα  $i$  για την κατάσταση του πράκτορα  $j$ . Ισχύει πως  $\mathbf{x}_{i,i} := x_i$ , όπου  $x_i$  είναι η κατάσταση του πράκτορα  $i$ . Επίσης, ορίζουμε το διάνυσμα  $\mathbf{x}_{j,-i} := \text{col}((\mathbf{x}_{j,l})_{l \in [N] \setminus \{i\}})$ , δηλαδή το διάνυσμα εκτιμήσεων του πράκτορα  $j$  χωρίς την εκτίμησή του για την κατάσταση του πράκτορα  $i$ .

#### 3.3.3 Επικοινωνία Πρακτόρων

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι πράκτορες επικοινωνούν μεταξύ τους με στόχο την ανταλλαγή εκτιμήσεων. Θεωρούμε ένα γράφο επικοινωνίας  $G([N], E, W)$  μεταξύ  $N$  πρακτόρων. Οι ακμές του γράφου αυτού υποδηλώνουν το ποιοι πράκτορες επικοινωνούν μεταξύ τους. Εισάγουμε την παρακάτω υπόθεση για τη δομή του γράφου επικοινωνίας.

**Υπόθεση 3.** *Ο γράφος επικοινωνίας είναι μη κατευθυνόμενος και συνεκτικός. Ο πίνακας πρόσπτωσης του,  $W$ , είναι στοχαστικός. Επίσης, υποθέτουμε πως τα βάρη που αντιπροσωπεύουν self-loops, δηλαδή τα βάρη  $w_{ii}$ , είναι θετικά για κάθε  $i \in [N]$ .*

Ο γράφος επικοινωνίας μπορεί να θεωρηθεί κατευθυνόμενος [21] ή χρονικά μεταβαλλόμενος [22, 23], ωστόσο δεν θα μας απασχολήσουν τέτοιες περιπτώσεις.

### 3.3.4 Κατανεμημένο Gradient Play

Μια πρώτη σκέψη για να πετύχουμε κατανεμημένη αναζήτηση Ισορροπίας Nash θα ήταν να τροποποιήσουμε τον Αλγόριθμο 3.1, ώστε να χρησιμοποιεί εκτιμήσεις. Αυτό δεν αρκεί από μόνο του, διότι κάθε πράκτορας ενδεχομένως να μην εκτιμά σωστά την κατάσταση των υπολοίπων, οπότε πολύ πιθανόν οι πράκτορες να συγκλίνουν σε σημείο που ψευδώς πιστεύουν ότι είναι Ισορροπία Nash. Για να το αντιμετωπίσουμε αυτό, θα προσθέσουμε στους κανόνες ανανέωσης των εκτιμήσεων και της δυναμικής όρους συμφωνίας (consensus), που διασφαλίζουν πως όλοι οι πράκτορες θα εκτιμήσουν ασυμπτωτικά την κατάσταση των υπολοίπων πρακτόρων χωρίς σφάλμα. Έτσι, θα μπορούν να συγκλίνουν ορθά στη ζητούμενη Ισορροπία Nash.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3.2: Σχήμα Κατανεμημένου Gradient Play

---

**Αρχικοποίηση:** Ορισμός της κατάστασης,  $x_i[0]$  και των εκτιμήσεων  $\mathbf{x}_{i,-i}[0]$ .  
**for all**  $k \geq 0$  **do**  
  MULTICAST( $\mathbf{x}_{(i)}[k]$ )  
   $x_i[k+1] \leftarrow x_i[k] - \eta \nabla_i J_i(x_i[k], \mathbf{x}_{i,-i}[k]) + \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\mathbf{x}_{j,i}[k] - x_i[k])$   
   $\mathbf{x}_{i,-i}[k+1] \leftarrow \mathbf{x}_{i,-i}[k] + \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\mathbf{x}_{j,-i}[k] - \mathbf{x}_{i,-i}[k])$   
**end for**

---

Το παραπάνω σχήμα βασίζεται στις εργασίες [14, 24]. Τονίζουμε πως το σχήμα αυτό κάνει multi-casting, σε αντίθεση με τον Αλγόριθμο 3.1 που κάνει broad-casting, δηλαδή, στον κατανεμημένο αλγόριθμο κανένας πράκτορας δεν επικοινωνεί με όλους τους άλλους, παρά μόνο με συγκεκριμένους, που ενδεχομένως να θεωρεί είτε “γείτονες”, είτε “έμπιστους”, αναλόγως του τρόπου επικοινωνίας. Ο παραπάνω αλγόριθμος αποτελεί μια πρώτη λύση στο πως να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της κατανεμημένης αναζήτησης, ωστόσο δεν αποτελεί τον μοναδικό ή βέλτιστο αλγόριθμο. Στη βιβλιογραφία εξετάζονται περαιτέρω μέθοδοι που επιδιώκουν συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως λόγου χάριν ταχεία σύγκλιση [17]. Παρακάτω, εξετάζουμε έναν τέτοιο αλγόριθμο.

## 3.4 Αλγόριθμοι

### 3.4.1 PPP Αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος στον οποίο βασίζεται η παρούσα εργασία είναι ο Preconditioned Proximal-Point Αλγόριθμος (PPPA) [25]. Ο PPP Αλγόριθμος διατυπώνεται παρακάτω.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3.3: PPP Αλγόριθμος με Αραγή Επικοινωνία

---

**Αρχικοποίηση:** Ορισμός της κατάστασης,  $x_i[0]$  και των εκτιμήσεων,  $\mathbf{x}_{i,-i}[0]$ .  
**for all**  $v \geq 0$  **do**  
  MULTICAST( $\mathbf{x}_{(i)}[vD]$ )  
   $\mathbf{x}_{i,-i}[(v+1)D] \leftarrow \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{i,-i}[vD] + \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,-i}[vD])$   
   $x_i[(v+1)D] \leftarrow \operatorname{argmin}_y (J_i(y, \mathbf{x}_{i,-i}[(v+1)D]) + \frac{1}{2a} \|y - x_i[vD]\|^2 + \frac{1}{2a} \|y - \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,i}[vD]\|^2)$   
**end for**

---

Σε κάθε επανάληψη του κύριου βρόχου, οι πράκτορες επικοινωνούν με τους γείτονες τους, ανταλλάσσοντας μεταξύ τους την κατάσταση τους και τις εκτιμήσεις που έχουν σχηματίσει. Με αυτές τις πληροφορίες, μπορούν να ανανεώσουν τις εκτιμήσεις τους με κυρτό συνδυασμό των πιο πρόσφατων εκτιμήσεων που έχουν στη διάθεση τους. Στη συνέχεια, ανανεώνουν την κατάσταση τους μέσω της επίλυσης προβλήματος κυρτής βελτιστοποίησης.

Ο πρώτος όρος της συνάρτησης προς βελτιστοποίηση είναι η τοπική συνάρτηση κόστους, αποτιμημένη με τις νέες εκτιμήσεις που υπολογίστηκαν. Ο δεύτερος όρος (proximal point όρος) δρα σαν regularization όρος. Ποινικοποιεί τις μεγάλες μεταβολές μεταξύ διαδοχικών ανανεώσεων στην κατάσταση του πράκτορα και βελτιώνει τη σύγκλιση της λύσης του προβλήματος [26]. Ο τελευταίος όρος είναι όρος συμφωνίας (consensus). Εκ πρώτης όψεως, δεν θυμίζει τον αντίστοιχο consensus όρο του Αλγορίθμου 3.2, ωστόσο αν θυμηθούμε τη στοχαστικότητα του πίνακα επικοινωνίας  $W$  που επιβάλλει η Υπόθεση 3, παρατηρούμε πως είναι αυτούσιος.

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε πως η PPP δυναμική για τον  $i$ -οστό πράκτορα ορίζεται ως

$$\mathbf{x}_{i-i}^{[(v+1)D]} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{i-i}^{[vD]} + \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,-i}^{[vD]} \right) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x}_i^{[(v+1)D]} = \operatorname{argmin}_y \left( J_i(y, \mathbf{x}_{i-i}^{[(v+1)D]}) + \frac{1}{2a} \|y - \mathbf{x}_i^{[vD]}\|^2 + \frac{1}{2a} \|y - \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,i}^{[vD]}\|^2 \right), \quad (3.5)$$

όπου  $a$  σταθερός, θετικός ρυθμός. Για ενδιάμεσες στιγμές  $k$ , όπου  $\lfloor \frac{k}{D} \rfloor = v$ , ισχύει πως  $\mathbf{x}_{i-i}^{[k+1]} = \mathbf{x}_{i-i}^{[(v+1)D]}$  και  $x_i^{[k+1]} = x_i^{[(v+1)D]}$ . Αποκλίνουμε ελαφρώς από τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο [25, Αλγ. 1]. Θεωρούμε πως κάθε πράκτορας έχει σύνολο δράσεων το  $\mathbb{R}^n$  και καθιστούμε τις ανανεώσεις του αλγορίθμου πιο αραιές, εισάγοντας το μήκος παραθύρου  $D$ .

### 3.4.2 Προσεγγιστικός PPP Αλγόριθμος

Ο Αλγόριθμος 3.3 θεωρεί ως ατομικό βήμα την επίλυση του κυρτού προβλήματος. Η θεώρηση αυτή δεν είναι πρακτικώς εφαρμόσιμη. Στην πραγματικότητα, θα προσεγγίζαμε τη λύση του προβλήματος με κάποια επαναληπτική μέθοδο, μεταξύ διαδοχικών επικοινωνιών και θα καταλήγαμε σε σχήμα όπως το παρακάτω.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3.4: Σχήμα Προσεγγιστικού PPP Αλγορίθμου με Αραιή Επικοινωνία

---

**Αρχικοποίηση:** Ορισμός της κατάστασης,  $x_i[0]$  και των εκτιμήσεων,  $\mathbf{x}_{i-i}[0]$ .  
**for all**  $v \geq 0$  **do**  
  MULTICAST( $\mathbf{x}_{(i)}[vD]$ )  
   $\mathbf{x}_{i-i}[(v+1)D] \leftarrow \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{i-i}[vD] + \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,-i}[vD])$   
  **for**  $l \in [D]$  **do**  
     $k \leftarrow vD + l - 1$   
     $x_i[k+1] \leftarrow \text{APPROXIMATE}(k)$   
  **end for**  
**end for**

---

Η βασική μας ιδέα είναι να προσεγγίσουμε τη λύση του κυρτού προβλήματος στον κανόνα (3.5) με gradient descent. Έστω  $k$  τέτοιο  $\lfloor \frac{k}{D} \rfloor = v$ . Η προσεγγιστική PPP δυναμική για τον  $i$ -οστό πράκτορα ορίζεται παρακάτω,

$$\mathbf{x}_{i,-i}^{[(v+1)D]} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{i,-i}^{[vD]} + \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,-i}^{[vD]} \right) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{s}_i^{[k+1]} = \mathbf{x}_i^{[k]} - \gamma \nabla_i J_i(\mathbf{x}_i^{[k]}, \mathbf{x}_{i,-i}^{[(v+1)D]}) - \frac{\gamma}{\alpha} \left( 2\mathbf{x}_i^{[k]} - \mathbf{x}_i^{[vD]} - \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,i}^{[vD]} \right), \quad (3.7)$$

όπου  $\gamma$  και  $\alpha$  σταθεροί, θετικοί ρυθμοί. Αντίστοιχα με πριν, για ενδιαμέσες στιγμές  $k$  όπου  $\lfloor \frac{k}{D} \rfloor = v$ , ισχύει πως  $\mathbf{x}_{i,-i}^{[k+1]} = \mathbf{x}_{i,-i}^{[(v+1)D]}$ .

Ορίζουμε ως  $s_i$  το σήμα αναφοράς που παράγει ο προσεγγιστικός PPPA για τον  $i$ -οστό πράκτορα. Θεωρούμε επίσης πως το σήμα αναφοράς αρχικοποιείται ως  $s_i^{[0]} = x_i^{[0]}$ . Η κατάσταση του πράκτορα πολύ πιθανόν να μην ακολουθεί το  $s_i$  ακριβώς. Σε φυσικό σύστημα, υπάρχει σφάλμα παρακολούθησης  $z_i^{[k]} := x_i^{[k]} - s_i^{[k]}$ , τέτοιο ώστε η πραγματική κατάσταση κάθε πράκτορα να μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - \gamma \nabla_i J_i(x_i^{[k]}, \mathbf{x}_{i,-i}^{[(v+1)D]}) - \frac{\gamma}{\alpha} \left( 2x_i^{[k]} - x_i^{[vD]} - \sum_{j \in [N]} w_{ij} x_{j,i}^{[vD]} \right) + z_i^{[k+1]}. \quad (3.8)$$

Το σφάλμα παρακολούθησης  $z_i$  μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή στο εικονικό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (3.8).

Παραπάνω, εισάγαμε την έννοια του σήματος αναφοράς  $s_i$ . Οι μεταβλητές  $s_i$  μπορούν να θεωρηθούν ως ιδανική δυναμική που ο Προσεγγιστικός PPPA επιβάλλει στους πράκτορες. Ωστόσο, οι πράκτορες μπορεί να έχουν τη δική τους δυναμική - πχ. ρομπότ που υπόκειται στους νόμους του Νεύτωνα και συμμετέχει σε παίγνιο με δράση τη θέση του. Με βάση τις εξισώσεις που γράψαμε στην παρούσα υπό-ενότητα, ο αλγόριθμος που καταλήγουμε και αναλύουμε στη συνέχεια είναι ο εξής.

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3.5:** Προσεγγιστικός PPP Αλγόριθμος με Αραιή Επικοινωνία και Δυναμική

**Αρχικοποίηση:** Ορισμός της κατάστασης,  $x_i[0]$  και των εκτιμήσεων,  $\mathbf{x}_{i,-i}[0]$ .

**for all**  $v \geq 0$  **do**

BROADCAST( $\mathbf{x}_{(i)}[vD]$ )

$\mathbf{x}_{i,-i}[(v+1)D] \leftarrow \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{i,-i}[vD] + \sum_{j \in [N]} w_{ij} \mathbf{x}_{j,-i}[vD])$

**for**  $l \in [D]$  **do**

$k \leftarrow vD + l - 1$

$s_i \leftarrow x_i[k] - \gamma \nabla_i J_i(x_i[k], \mathbf{x}_{i,-i}[(v+1)D]) - \frac{\gamma}{\alpha} (2x_i[k] - x_i[vD] - \sum_{j \in [N]} w_{ij} x_{j,i}[vD])$

$x_i[k+1] \leftarrow \text{EVOLVE}(s_i)$

**end for**

**end for**

Η EVOLVE αποτελεί αφηρημένη κλήση στις πραγματικές δυναμικές εξισώσεις των πρακτόρων. Παίζει τον ρόλο του black box για ένα υπό έλεγχο σύστημα με αναφορά την ιδανική δυναμική  $s_i$ .

## Κεφάλαιο 4

# Προσεγγιστική Εύρεση Ισορροπίας Nash

Στο παρόν κεφάλαιο, αποδεικνύουμε πως ο Προσεγγιστικός PPP Αλγόριθμος οδηγεί πράκτορες που συμμετέχουν σε στατικό παίγνιο που ικανοποιεί τις Υποθέσεις 1 και 2, σε γειτονιά της μοναδικής του Ισορροπίας Nash. Έπειτα, μεταφέρουμε τον αλγόριθμο αυτό στο συνεχή χρόνο, ώστε να ανάγουμε το πρόβλημα της προσεγγιστικής εύρεσης Ισορροπίας Nash, σε πρόβλημα ρύθμισης μεταβλητών συνεχούς χρόνου.

### 4.1 Διάσπαση Κατάστασης-Εκτίμησης

Εισάγουμε την έννοια της διάσπασης Κατάστασης-Εκτίμησης, η οποία μας επιτρέπει να γράφουμε συνοπτικά κανόνες ανανέωσης που εμπλέκουν τις εκτιμήσεις και την κατάσταση των πρακτόρων.

Αρχικά, ορίζουμε το ολικό διάνυσμα εκτίμησης ως  $\mathbf{x} := \text{col}((\mathbf{x}_{(i)})_{i \in [N]})$ . Έπειτα, ορίζουμε τους ακόλουθους πίνακες [25, Εξ. 4a-4b]:

$$\mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n_{<i}} & \mathbb{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n_{>i}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{S}_i := \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_{<i}} & \mathbf{0}_{n_{<i} \times n} & \mathbf{0}_{n_{<i} \times n_{>i}} \\ \mathbf{0}_{n_{>i} \times n_{<i}} & \mathbf{0}_{n_{>i} \times n} & \mathbb{I}_{n_{>i}} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

όπου  $n$  είναι η διάσταση της κατάστασης κάθε πράκτορα,  $n_{<i} := (i-1)n$  και  $n_{>i} := (N-i)n$ . Όταν το διάνυσμα εκτιμήσεων του πράκτορα  $i$  πολλαπλασιαστεί με  $\mathcal{R}_i$ , λαμβάνουμε την κατάσταση του πράκτορα  $i$ ,  $\mathcal{R}_i \mathbf{x}_{(i)} = \mathbf{x}_i$ . Αντιθέτως, ο πίνακας  $\mathcal{S}_i$  αφαιρεί την κατάσταση του πράκτορα  $i$ ,  $\mathcal{S}_i \mathbf{x}_{(i)} = \mathbf{x}_{i-}$ .

Τέλος, ορίζουμε τους πίνακες  $\mathcal{R} := \text{blkdiag}((\mathcal{R}_i)_{i \in [N]})$  και  $\mathcal{S} := \text{blkdiag}((\mathcal{S}_i)_{i \in [N]})$ , όπως και τα διανύσματα  $\mathbf{x} := \text{col}((\mathbf{x}_i)_{i \in [N]})$ ,  $\mathbf{x}_- := \text{col}((\mathbf{x}_{i-})_{i \in [N]})$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  περιγράφει την από κοινού κατάσταση των πρακτόρων, ενώ το διάνυσμα  $\mathbf{x}_-$  περιέχει όλες τις εκτιμήσεις τους. Ισχύει πως  $\mathbf{x} = \mathcal{R}\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x}_- = \mathcal{S}\mathbf{x}$ . Επιπλέον,  $\mathbf{x} = \mathcal{R}^T \mathbf{x} + \mathcal{S}^T \mathbf{x}_-$ .

**Πρόταση 4.1.** Έστω  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{Nn}$ , διάνυσμα που υπόκειται στην ακόλουθη διάσπαση κατάστασης-εκτίμησης  $\mathbf{x} = \mathcal{R}^T \mathbf{x} + \mathcal{S}^T \mathbf{x}_-$ . Τότε, ισχύει πως:

1.  $\mathcal{R}^T \mathbf{x} \perp \mathcal{S}^T \mathbf{x}_-$
2.  $\|\mathcal{R}^T \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
3.  $\|\mathcal{S}^T \mathbf{x}_-\| = \|\mathbf{x}_-\|$

Αυτές οι ιδιότητες συνοψίζονται στην παρακάτω “Πυθαγόρεια” εξίσωση,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}_-\|^2.$$

Απόδειξη. Κατ’ αρχάς, παρατηρούμε πως  $\forall i \in [N]$ ,  $\mathcal{S}_i \mathcal{R}_i^T = \mathbf{0}$  το οποίο συνεπάγεται ότι  $\mathcal{S} \mathcal{R}^T = \mathbf{0}$ . Με χρήση αυτής της σχέσης, μπορεί άμεσα να αποδειχθεί πως  $\mathcal{R}^T \mathbf{x} \perp \mathcal{S}^T \mathbf{x}_-$ . Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι οι μόνες πιθανώς μη-μηδενικές συνιστώσες του  $\mathcal{R}^T \mathbf{x}$  συνθέτουν το διάνυσμα  $\mathbf{x}$ . Εναλλακτικά, μπορεί να επιβεβαιωθεί πως  $\mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathbb{I}$ . Αντίστοιχο επιχείρημα μπορεί να διατυπωθεί για το  $\mathcal{S}^T \mathbf{x}_-$ . Η παρατήρηση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης. Η “Πυθαγόρεια” εξίσωση προκύπτει από το γεγονός πως  $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathcal{R}^T \mathbf{x} + \mathcal{S}^T \mathbf{x}_-\|^2$ , τις ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας και του Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου και τέλος, μέσω των τριών ιδιοτήτων που αποδείξαμε για την Πρόταση αυτή.  $\square$

## 4.2 Σύγκλιση Προσεγγιστικού PPPA

### 4.2.1 Δυναμική Σφάλματος

Έστω  $\mathbf{x}_D'^{[v+1]}$  βήμα του PPP αλγορίθμου με αρχική συνθήκη το  $\mathbf{x}^{[vD]}$ , δηλαδή την κατάσταση που παράγει το εικονικό σύστημα (3.6), (3.8) στο βήμα  $vD$ . Στόχος μας είναι να αποδείξουμε πως κατά τη διάρκεια ενός παραθύρου, δηλαδή μεταξύ διαδοχικών επικοινωνιών, ο αλγόριθμός μας προσεγγίζει ικανοποιητικά τον PPPA. Για να το πετύχουμε, θα εξετάσουμε τη νόρμα σφάλματος  $\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}_D'^{[v+1]}\|$ , για  $l \in [D]$  και για αυθαίρετο, σταθερό και μη αρνητικό ακέραιο  $v$ .

**Παρατήρηση 1.** Σημειώνουμε πως σύμφωνα με την (3.4) και την (3.6), τόσο ο PPPA όσο και ο αλγόριθμός μας παράγουν εκτιμήσεις με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Συνεπώς,  $\mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]} = \mathbf{x}_-^{[vD+l]}$ , για κάθε  $l \in [D]$ .

**Πόρισμα 4.1.** Συνέπεια της προηγούμενης Παρατήρησης και της Πρότασης 4.1 είναι πως

$$\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}_D'^{[v+1]}\| = \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}_D'^{[v+1]}\|,$$

για κάθε  $l \in [D]$ .

Εκ κατασκευής του  $\mathbf{x}_D'^{[v+1]}$ , η εξίσωση (3.5) και το Λήμμα 2.3 συνεπάγονται πως τα gradient των συναρτήσεων προς βελτιστοποίηση είναι ίσα με μηδέν και άρα, σε συμπαγή μορφή έχουμε πως

$$\mathbf{x}_D'^{[v+1]} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{[vD]} + \mathcal{R} \mathbf{W} \mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{a} \mathbf{F}(\mathbf{x}_D'^{[v+1]}, \mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]})). \quad (4.3)$$

όπου  $\mathbf{F}$  είναι η επεκτεταμένη pseudo-gradient απεικόνιση,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_-) := \text{col}((\nabla_i J_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-}))_{i \in [N]})$  και  $\mathbf{W} := \mathbf{W} \otimes \mathbb{I}_n$ . Βασίζομενοι στην (3.8), γράφουμε τον κανόνα ανανέωσης του από κοινού διανύσματος κατάστασης, στην παρακάτω συνοπτική μορφή,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{[vD+l]} &= \mathbf{x}^{[vD+l-1]} - \gamma \mathbf{F}(\mathbf{x}^{[vD+l-1]}, \mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]}) \\ &\quad - \frac{\gamma}{\alpha} (2\mathbf{x}^{[vD+l-1]} - \mathbf{x}^{[vD]} - \mathcal{R} \mathbf{W} \mathbf{x}^{[vD]}) + \mathbf{z}^{[vD+l]}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου  $z^{[vD+l]} := \text{col}(z_i^{[vD+l]})$  το από κοινού διάνυσμα διαταραχών. Μπορούμε να γράψουμε τη δυναμική του σφάλματος ως εξής,

$$\begin{aligned} x^{[vD+l]} - x_D'^{[v+1]} &= (x^{[vD+l-1]} - x_D'^{[v+1]}) - \gamma \mathbf{F}(x^{[vD+l-1]}, \mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]}) \\ &\quad - \frac{\gamma}{a}(2x^{[vD+l-1]} - x^{[vD]} - \mathcal{R}\mathbf{W}\mathbf{x}^{[vD]}) + z^{[vD+l]}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Αντικαθιστούμε τον όρο  $\mathcal{R}\mathbf{W}\mathbf{x}^{[vD]}$  μέσω της (4.3) και λαμβάνουμε πως

$$\begin{aligned} x^{[vD+l]} - x_D'^{[v+1]} &= (x^{[vD+l-1]} - x_D'^{[v+1]}) - \gamma \mathbf{F}(x^{[vD+l-1]}, \mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]}) \\ &\quad - \frac{\gamma}{a}(2x^{[vD+l-1]} - 2x_D'^{[v+1]} - a\mathbf{F}(x_D'^{[v+1]}, \mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]})) + z^{[vD+l]}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Τέλος, απλοποιούμε την (4.6) ώστε να καταλήξουμε στην εξής συνοπτική έκφραση για τη δυναμική του σφάλματος,

$$\begin{aligned} x^{[vD+l]} - x_D'^{[v+1]} &= (1 - 2\frac{\gamma}{a})(x^{[vD+l-1]} - x_D'^{[v+1]}) \\ &\quad - \gamma(\mathbf{F}(x^{[vD+l-1]}, \mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]}) - \mathbf{F}(x_D'^{[v+1]}, \mathbf{x}_{D-}'^{[v+1]})) + z^{[vD+l]}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

#### 4.2.2 Απόδειξη Σύγκλισης

Στην παρούσα υποενότητα, βασιζόμαστε σε ιδέες του [27, Κεφ. 3]. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε πως ο αλγόριθμός μας εξελίσσεται συστολικά κατά προσέγγιση, γύρω από το σημείο ισορροπίας που αναζητάμε, δηλαδή πως σε κάθε επανάληψη, η απόκλιση μας από το σημείο ισορροπίας μικραίνει προσεγγιστικά κατά πολλαπλασιαστικό παράγοντα μικρότερο της μονάδας. Θα υπάρχουν και κάποιοι ακόμα όροι που οφείλονται στην εικονική διαταραχή  $z_i$ , αλλά υπό κατάλληλες συνθήκες που θα διατυπώσουμε παρακάτω, θα θεωρούνται αμελητέοι ή ακριβέστερα, σχεδιαστικά ανεκτοί. Πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε την προσεγγιστική συστολή σε μήκος ενός παραθύρου, μεταξύ του προσεγγιστικού και του ιδανικού αλγορίθμου.

**Λήμμα 4.4.** Υπάρχει θετική σταθερά  $K$  τέτοια ώστε, για κάθε  $l \in [D]$ ,

$$\|x^{[vD+l]} - x_D'^{[v+1]}\| \leq K\|x^{[vD+l-1]} - x_D'^{[v+1]}\| + \|z^{[vD+l]}\|.$$

*Απόδειξη.* Αρχικά, ορίζουμε  $\mathbf{x} := \mathbf{x}^{[vD+l-1]}$  και  $\mathbf{y} := \mathbf{x}_D'^{[v+1]}$ , για λόγους αναγνωσιμότητας. Επίσης, ορίζουμε τον όρο  $\mathcal{Q}_0[v; l]$  εξετάζοντας το δεξιό μέλος της (4.7) και παραλείποντας τον όρο διαταραχής  $z^{[vD+l]}$ ,

$$\mathcal{Q}_0[v; l] = (1 - 2\frac{\gamma}{a})(x - y) - \gamma(\mathbf{F}(x, \mathbf{y}_-) - \mathbf{F}(y, \mathbf{y}_-)). \quad (4.8)$$

Από ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας και του Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου, έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_0[v; l]\|^2 &= (1 - 2\frac{\gamma}{a})^2\|x - y\|^2 + \gamma^2\|\mathbf{F}(x, \mathbf{y}_-) - \mathbf{F}(y, \mathbf{y}_-)\|^2 \\ &\quad - 2(1 - 2\frac{\gamma}{a})\gamma\langle x - y, \mathbf{F}(x, \mathbf{y}_-) - \mathbf{F}(y, \mathbf{y}_-) \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Μπορούμε να φράξουμε τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της (4.9) από τη Lipschitz συνέχεια της  $\mathbf{F}$  [25, Λημ. 3], ως

$$\|\mathbf{F}(x, \mathbf{y}_-) - \mathbf{F}(y, \mathbf{y}_-)\|^2 \leq \partial_0^2 \|x - y\|^2. \quad (4.10)$$

Για να φράξουμε τον όρο εσωτερικού γινομένου της (4.9), εισάγουμε την παρακάτω υπόθεση.

**Υπόθεση 4.** Υποθέτουμε πως  $-2(1 - 2\frac{\gamma}{a})\gamma < 0$  ή ισοδύναμα, πως  $0 < \gamma < \frac{a}{2}$ , αφού  $a, \gamma > 0$ .

Μπορούμε πλέον να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός πως το game mapping είναι ισχυρά μονότονο,

$$\begin{aligned} \langle x - y, \mathbf{F}(x, \mathbf{y}_-) - \mathbf{F}(y, \mathbf{y}_-) \rangle &= \sum_{i \in [N]} \langle x_i - y_i, \nabla_i J_i(x_i, \mathbf{y}_{i,-i}) - \nabla_i J_i(y_i, \mathbf{y}_{i,-i}) \rangle \\ &\geq \sum_{i \in [N]} \mu \|x_i - y_i\|^2 = \mu \|x - y\|^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Η πρώτη εξίσωση στην (4.11) προκύπτει από τον ορισμό των  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$ . Η ανισότητα προκύπτει εφαρμόζοντας σε κάθε εσωτερικό γινόμενο την Υπόθεση 2. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.9), (4.10) και (4.11) και την Υπόθεση 4, συμπεραίνουμε πως

$$\|\mathcal{Q}_0[v; l]\| \leq \sqrt{\eta} \|x^{[vD+l-1]} - x_D'^{[v+1]}\|, \quad (4.12)$$

όπου  $\eta := (1 - 2\frac{\gamma}{a})^2 - 2\mu(1 - 2\frac{\gamma}{a})\gamma + \partial_0^2 \gamma^2 \geq 0$ . Επανερχόμαστε στην εξίσωση (4.7). Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα και την (4.12), καταλήγουμε πως

$$\begin{aligned} \|x^{[vD+l]} - x_D'^{[v+1]}\| &\leq \|\mathcal{Q}_0[v; l]\| + \|z^{[vD+l]}\| \\ &\leq \sqrt{\eta} \|x^{[vD+l-1]} - x_D'^{[v+1]}\| + \|z^{[vD+l]}\|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη, ορίζοντας  $K := \sqrt{\eta}$ . □

Σε αυτό το σημείο, σχολιάζουμε την επιλογή μας να εισάγουμε την Υπόθεση 4.

**Παρατήρηση 2.** Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε παρόμοιο αποτέλεσμα, απαιτώντας την άρνηση της Υπόθεσης 4. Ωστόσο, επειδή ο αλγόριθμος μας βασίζεται σε gradient descent, ο ρυθμός  $\gamma$  οφείλει να είναι θετικός. Συνεπώς, η άρνηση της Υπόθεσης 4 θα συνεπαγόταν πως  $\gamma \geq \frac{a}{2}$ . Επιλέγουμε να διατηρήσουμε τον ρυθμό  $\gamma$  μικρό για να βελτιώσουμε τη συμπεριφορά και σύγκλιση του αλγορίθμου μας, οπότε απορρίπτουμε το παραπάνω ενδεχόμενο.

Η παρακάτω παρατήρηση είναι απαραίτητη για να διασφαλίσουμε την προσεγγιστική συστολικότητα που επιθυμούμε.

**Παρατήρηση 3.** Εάν επιλέξουμε τον ρυθμό  $\gamma$  έτσι ώστε  $0 < \gamma < \min\left\{\frac{4a+2\mu a^2}{a^2 \partial_0^2 + 4+4a\mu}, \frac{a}{2}\right\}$ , εξασφαλίζουμε πως  $K < 1$ .

Συνεχίζουμε την απόδειξή μας, συμπεραίνοντας την προσεγγιστική συστολικότητα μεταξύ του προσεγγιστικού και ιδανικού PPP αλγορίθμου με αναφορά την αρχή ενός παραθύρου επικοινωνίας, προσαρτώντας και την απόκλιση των εκτιμήσεων.



**Πόρισμα 4.2.** Έστω  $l \in [D]$ . Υπάρχουν θετικές σταθερές  $\xi_l$  και  $c_l$ , εξαρτώμενες από το  $l$ , τέτοιες ώστε

$$\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| \leq \xi_l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + c_l M_D[v; l],$$

όπου  $M_D[v; l] := \sup_{vD+1 \leq k \leq vD+l} \|z^{[k]}\|$ .

Απόδειξη. Αρχικά, εφαρμόζουμε επαναληπτικά το Λήμμα 4.4,  $l$  φορές,

$$\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| \leq K^l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + \sum_{j=1}^l K^{l-j} \|z^{[vD+j]}\|. \quad (4.14)$$

Εξ ορισμού, για κάθε  $j \in [l]$ , ισχύει πως  $\|z^{[vD+j]}\| \leq M_D[v; l]$ . Άρα,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| &\leq K^l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + M_D[v; l] \sum_{j=1}^l K^{l-j} \\ &\leq K^l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + \left( \frac{1 - K^l}{1 - K} \right) M_D[v; l]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 4.1 για να αντικαταστήσουμε το αριστερό μέλος της (4.15),

$$\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| \leq K^l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + \left( \frac{1 - K^l}{1 - K} \right) M_D[v; l]. \quad (4.16)$$

Καθώς το  $K$  είναι θετικό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.1, ώστε να φράξουμε τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (4.16),

$$\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| \leq K^l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + \left( \frac{1 - K^l}{1 - K} \right) M_D[v; l]. \quad (4.17)$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη, ορίζοντας  $\xi_l := K^l$  και  $c_l := \left( \frac{1 - K^l}{1 - K} \right)$ .  $\square$

Βασιζόμενοι στο [25, Εξ. 10], εισάγουμε τον θετικά ορισμένο πίνακα  $\Phi := \mathbb{I}_{Nn} + \mathbf{W}$ , ο οποίος καλείται *preconditioning matrix*. Ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος λόγω της Υπόθεσης 3 και του Λήμματος 2.1. Ως τώρα, αποδείξαμε την προσεγγιστική συστολικότητα της απόκλισης του προσεγγιστικού από τον ιδανικό PPPA. Για να μεταβούμε σε συστολικότητα μεταξύ του APPPA και της ισορροπίας Nash, θα χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα από το [25] που αφορούν την  $\Phi$ -επαγόμενη νόρμα.

**Λήμμα 4.5.** Έστω  $l \in [D]$ . Υπάρχουν θετικές σταθερές  $r_l$  και  $\beta_l$ , εξαρτώμενες από το  $l$ , τέτοιες ώστε

$$\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} \leq r_l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} + \beta_l M_D[v; l],$$

όπου  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{x}^*$  και  $\mathbf{x}^*$  η ισορροπία Nash του παιχνιδιού.

Απόδειξη. Έχουμε πως

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} &\leq \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\|_{\Phi} + \|\mathbf{x}'_D^{[v+1]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} \\ &\leq \sqrt{\hat{r}_{\max}(\Phi)} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + \|\mathbf{x}'_D^{[v+1]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Λαμβάνουμε την πρώτη ανισότητα με άμεση εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας και τη δεύτερη με χρήση της ανισότητας Rayleigh για τον θετικά ορισμένο πίνακα  $\Phi$ . Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.2, για να καταλήξουμε στις ακόλουθες ανισότητες,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} &\leq \xi_l \sqrt{\lambda_{\max}(\Phi)} \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\| + c_l \sqrt{\lambda_{\max}(\Phi)} M_D[v; l] + \|\mathbf{x}'_D^{[v+1]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} \\ &\leq \xi_l \sqrt{\kappa(\Phi)} \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\|_{\Phi} + c_l \sqrt{\lambda_{\max}(\Phi)} M_D[v; l] + \|\mathbf{x}'_D^{[v+1]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι και πάλι απόρροια της ανισότητας Rayleigh, ενώ η εμφάνιση του  $\kappa(\Phi)$  οφείλεται στο γεγονός πως  $\Phi > 0$ . Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό μας, ορίζουμε  $\xi'_l := \xi_l \sqrt{\kappa(\Phi)}$  και  $c'_l := c_l \sqrt{\lambda_{\max}(\Phi)}$ . Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} \leq \xi'_l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\|_{\Phi} + c'_l M_D[v; l] + \|\mathbf{x}'_D^{[v+1]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi}. \quad (4.20)$$

Επιθυμούμε να φράξουμε τον πρώτο και τελευταίο όρο της (4.20), με όρο ανάλογο του  $\|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi}$ . Για να το πετύχουμε, ξεκινάμε εξετάζοντας τον πρώτο όρο,

$$\|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\|_{\Phi} \leq \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} + \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}'_D^{[v+1]}\|_{\Phi}. \quad (4.21)$$

Παρατηρούμε πως εμφανίστηκε ένας όρος ανάλογος του  $\|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi}$  συν ο τελευταίος όρος της (4.20). Στρέφουμε την προσοχή μας στον τελευταίο αυτό όρο. Καθώς το  $\mathbf{x}'_D^{[v+1]}$  είναι το αποτέλεσμα ενός βήματος του PPPA με αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}^{[vD]}$ , μπορούμε να επικαλεστούμε το Λήμμα 5 και Θεώρημα 1 του [25] για να λάβουμε πως

$$\|\mathbf{x}'_D^{[v+1]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} \leq A \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi}, \quad (4.22)$$

όπου  $A = \frac{2}{2+\rho_a}$  και  $\rho_a$  θετική σταθερά που ορίζεται στο Λήμμα 4 του [25]. Συνδυάζοντας τις (4.20), (4.21) και (4.22), λαμβάνουμε τις ακόλουθες ανισότητες,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} &\leq \xi'_l \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} + c'_l M_D[v; l] + (1 + \xi'_l) \|\mathbf{x}'_D^{[v+1]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} \\ &\leq (\xi'_l + A(1 + \xi'_l)) \|\mathbf{x}^{[vD]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} + c'_l M_D[v; l]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη, ορίζοντας  $\tau_l := \xi'_l + A(1 + \xi'_l)$  και  $\beta_l := c'_l$ .  $\square$

Η σταθερά  $r_D$ , ορισμένη με βάση το παραπάνω Λήμμα, περιγράφει την εξέλιξη της απόκλισης του αλγορίθμου μας από την Ισορροπία Nash, μεταξύ διαδοχικών επικοινωνιών. Παρακάτω, διαπιστώνουμε πως αν μεγαλώσουμε αρκετά το μήκος παραθύρου  $D$ , δηλαδή πως ο αλγόριθμος μας έχει περιθώριο αρκετών επαναλήψεων, ώστε να προσεγγίσει καλά τον PPPA, τότε ο παράγοντας  $r_D$  είναι μικρότερος της μονάδας, άρα συστολικός.

**Παρατήρηση 4.** Έχουμε πως  $\xi'_D = K^D \sqrt{\kappa(\Phi)} > 0$ , όπου  $K$  η σταθερά που ορίζεται στο Λήμμα 4.4. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε πως  $K < 1$ , σύμφωνα με την Παρατήρηση 3. Καθώς  $\lim_{D \rightarrow \infty} \xi'_D = 0^+$ , υπάρχει αρκούντως μεγάλος αριθμός επαναλήψεων  $D_0$ , τέτοιος ώστε  $\xi'_D < \frac{1-A}{1+A}$ ,  $\forall D \geq D_0$ . Η ανισότητα αυτή δεν είναι αντιφατική, διότι  $0 < A < 1$ , άρα  $\frac{1-A}{1+A} > 0$ . Επίσης, είναι ισοδύναμη με την ανισότητα  $r_D < 1$ .

Με βάση την Παρατήρηση 4, κάνουμε την παρακάτω υπόθεση.

**Υπόθεση 5.** Υποθέτουμε πως έχουμε επιλέξει τον ρυθμό  $\gamma$  σύμφωνα με την Παρατήρηση 3 και αρκούντως μεγάλο μήκος παραθύρου  $D$ , έτσι ώστε το  $r_D$  να είναι μικρότερο της μονάδας.

Τώρα εισάγουμε μία ακόμα υπόθεση, σχετική με την από κοινού εικονική διαταραχή  $z$ , που καθιστά τους όρους που οφείλονται στη διαταραχή, σχεδιαστικά ανεκτούς.

**Υπόθεση 6.** Υποθέτουμε πως οι εικονικές διαταραχές  $z_i^{[k]}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες, δηλαδή πως υπάρχει θετική σταθερά  $U$ , τέτοια ώστε  $\|z_i^{[k]}\| \leq U$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και  $i \in [N]$ . Επιπλέον, υποθέτουμε την ύπαρξη σταθεράς  $\epsilon > 0$ , τέτοιας ώστε για κάθε  $i \in [N]$ ,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|z_i^{[k]}\| \leq \epsilon$ .

**Παρατήρηση 5.** Εξ ορισμού της από κοινού εικονικής διαταραχής  $z^{[k]}$ , έχουμε πως

$$\|z^{[k]}\|^2 = \sum_{i \in [N]} \|z_i^{[k]}\|^2 \leq N \max_{i \in [N]} \{ \|z_i^{[k]}\|^2 \},$$

συνεπώς, η Υπόθεση 6 συνεπάγεται ότι η  $\|z^{[k]}\|$  είναι φραγμένη και πως  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|z^{[k]}\| \leq \sqrt{N}\epsilon$ .

Είμαστε σε θέση να αποδειξουμε πως ο προσεγγιστικός μας αλγόριθμος οδηγεί ασυμπτωτικά την κατάσταση και τις εκτιμήσεις των πρακτόρων, σε γειτονιά του σημείου ισορροπίας Nash.

**Λήμμα 4.6.** Έστω  $\epsilon > 0$ . Υπάρχει θετική σταθερά  $c_{x,l}$ , ανεξάρτητη του  $\epsilon$ , τέτοια ώστε,  $\forall l \in [D]$

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \|x^{[vD+l]} - x^*\| \leq c_{x,l}\epsilon.$$

*Απόδειξη.* Λόγω της Υπόθεσης 6, υπάρχει  $v_0 > 0$  τέτοιο ώστε, για κάθε  $k \geq v_0 D$ ,  $\|z^{[k]}\| < \sqrt{N}\epsilon$ . Έστω  $k \geq v_0 D > 0$ . Αυτό το  $k$  μπορεί να γραφθεί μοναδικά ως  $vD + l$ , όπου  $l \in [D]$ . Αρχικά, εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.5, ώστε να λάβουμε την ακόλουθη ανισότητα,

$$\|x^{[vD+l]} - x^*\|_{\Phi} \leq r_l \|x^{[vD]} - x^*\|_{\Phi} + \beta_l M_D[v; l]. \quad (4.24)$$

Εφαρμόζουμε ξανά το Λήμμα 4.5  $v - v_0$  φορές, ώστε να καταλήξουμε από τον όρο  $x^{[vD]}$  στον  $x^{[v_0 D]}$ ,

$$\|x^{[vD+l]} - x^*\|_{\Phi} \leq r_l r_D^{v-v_0} \|x^{[v_0 D]} - x^*\|_{\Phi} + \beta_l M_D[v; l] + r_l \beta_D \sum_{j=1}^{v-v_0} M_D[v_0 + j - 1; D] r_D^{v-v_0-j}. \quad (4.25)$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός πως για κάθε  $k \geq v_0 D$ ,  $\|z^{[k]}\| < \sqrt{N}\epsilon$ ,

$$\|x^{[vD+l]} - x^*\|_{\Phi} \leq r_l r_D^{v-v_0} \|x^{[v_0 D]} - x^*\|_{\Phi} + \beta_l \sqrt{N}\epsilon + r_l \beta_D \sqrt{N}\epsilon \sum_{j=1}^{v-v_0} r_D^{v-v_0-j}. \quad (4.26)$$

Αποτιμώντας το γεωμετρικό άθροισμα, έχουμε πως

$$\|x^{[vD+l]} - x^*\|_{\Phi} \leq r_l r_D^{v-v_0} \|x^{[v_0 D]} - x^*\|_{\Phi} + (\beta_l + r_l \beta_D \left( \frac{1 - r_D^{v-v_0}}{1 - r_D} \right)) \sqrt{N}\epsilon. \quad (4.27)$$

Λόγω της Υπόθεσης 5, ισχύει ότι

$$\lim_{v \rightarrow \infty} r_D r_D^{v-v_0} \|\mathbf{x}^{[v_0 D]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} = 0, \quad (4.28)$$

διότι  $r_D < 1$ , ενώ ο όρος  $\|\mathbf{x}^{[v_0 D]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi}$  είναι πεπερασμένος. Μπορεί να επαληθευθεί πως ο όρος αυτός είναι πεπερασμένος, εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.5  $v_0$  φορές,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{[v_0 D]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} &\leq r_D^{v_0} \|\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} + \beta_D \sum_{j=1}^{v_0} M_D[j-1; 0] r_D^{v-j} \\ &\leq r_D^{v_0} \|\mathbf{x}^{[0]} - \mathbf{x}^*\|_{\Phi} + \frac{\beta_D \sqrt{N} U}{1 - r_D}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Η δεύτερη ανισότητα της (4.29) είναι συνέπεια του φράγματος της εικονικής διαταραχής  $z^{[k]}$  (βλ. Υπόθεση 6 και Παρατήρηση 5) και του γεγονότος πως  $r_D < 1$ . Συνδυάζοντας τις (4.27), (4.28) και την ανισότητα Rayleigh, λαμβάνουμε ότι

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta_{\min}(\Phi)}} \left( \beta_l + \left( \frac{r_l \beta_D}{1 - r_D} \right) \right) \sqrt{N} \epsilon. \quad (4.30)$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη ορίζοντας  $c_{x,l} := \frac{1}{\sqrt{\beta_{\min}(\Phi)}} \left( \beta_l + \left( \frac{r_l \beta_D}{1 - r_D} \right) \right) \sqrt{N}$ .  $\square$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι και το APPP σήμα αναφοράς συγκλίνει σε γειτονιά της Ισορροπίας Nash.

**Λήμμα 4.7.** Έστω  $\epsilon > 0$ . Υπάρχει θετική σταθερά  $c_s$ , ανεξάρτητη του  $\epsilon$ , τέτοια ώστε

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|s^{[k]} - \mathbf{x}^*\| \leq c_s \epsilon.$$

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό του σφάλματος παρακολούθησης, έχουμε πως  $s^{[k]} := \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{z}^{[k]}$ . Άρα, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας, έχουμε πως

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|s^{[k]} - \mathbf{x}^*\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^*\| + \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{[k]}\|. \quad (4.31)$$

Χρησιμοποιώντας την “Πυθαγόρεια” εξίσωση της Πρότασης 4.1 στην (4.31), καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|s^{[k]} - \mathbf{x}^*\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^*\| + \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{[k]}\|. \quad (4.32)$$

Υπενθυμίζουμε πως παραπάνω,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{x}^*$ . Ως συνέπεια της Υπόθεσης 6, ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (4.32), δύναται να φραχθεί ως

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{[k]}\| \leq \sqrt{N} \epsilon. \quad (4.33)$$

Για τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (4.32), ισχύει πως

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^*\| &= \limsup_{v \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\| \\ &\leq \limsup_{v \rightarrow \infty} \max_{l \in [D]} \|\mathbf{x}^{[vD+l]} - \mathbf{x}^*\| \leq \max_{l \in [D]} \{c_{x,l}\} \epsilon. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Για την ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο θετικός ακέραιος  $k$  μπορεί να γραφθεί μοναδικά ως  $k = vD + l$ , όπου  $v \geq 0$  και  $l \in [D]$ . Η τελευταία ανισότητα στην (4.34) προκύπτει από εφαρμογή του Λήμματος 4.6. Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (4.32), (4.33) και (4.34) λαμβάνουμε το ακόλουθο:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|s^{[k]} - x^*\| \leq \left( \max_{l \in [D]} \{c_{x,l}\} + \sqrt{N} \right) \epsilon. \quad (4.35)$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη ορίζοντας  $c_s := \left( \max_{l \in [D]} \{c_{x,l}\} + \sqrt{N} \right)$ .  $\square$

## 4.3 Εξομάλυνση του Αλγορίθμου Αναζήτησης

### 4.3.1 Μεταβλητές ASPPPA

Προηγουμένως, αποδείξαμε πως εάν το πολυπρακτορικό σύστημα ακολουθεί ικανοποιητικά τον προσεγγιστικό PPPA, συγκλίνουμε σε γειτονιά της Ισοροπίας Nash του παιγνίου που εξετάζουμε. Θα μεταφέρουμε το πρόβλημα παρακολούθησης της APPP δυναμικής στον συνεχή χρόνο, διότι έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο αναζήτησης σε συστήματα συνεχούς χρόνου και κατ'επέκτασιν, να εκμεταλλευτούμε την πληθώρα τεχνικών ελέγχου που έχει αναπτυχθεί για τέτοιου είδους συστήματα.

Για να πετύχουμε τη μεταφορά αυτή, εισάγουμε τις μεταβλητές ASPPPA (Approximate Smooth PPPA). Αποτελούν μεταβλητές σφάλματος συνεχούς χρόνου, οι οποίες προσαρτούν ομαλά τη διακριτή δυναμική που παράγει ο Προσεγγιστικός PPPA. Είναι βασισμένες σε εργασίες όπως οι [28, 29] πάνω στο "συγγενικό" πρόβλημα του *consensus*. Ορίζονται ως

$$z_i(t) := x_i(t) - \rho \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T + T \right) - \left[ 1 - \rho \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right] s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right), \quad (4.36)$$

όπου  $x_i(t)$  η πραγματική κατάσταση του πράκτορα  $i$ ,  $s_i$  η APPP αναφορά του πράκτορα  $i$  και  $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  η ακόλουθη,  $n$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, συνάρτηση εξομάλυνσης,

$$\rho(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau_d] \\ \rho_n \int_{\tau_d}^t \left( \sin \left( \frac{\pi(\sigma - \tau_d)}{T - \tau_d} \right) \right)^n d\sigma, & t \in [\tau_d, T] \\ 1, & t > T \end{cases} \quad (4.37)$$

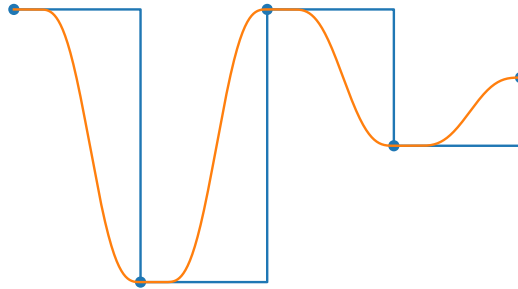
Η  $\rho_n$  είναι σταθερά κανονικοποίησης που ορίζεται ως

$$\rho_n := \left( \int_{\tau_d}^T \left( \sin \left( \frac{\pi(\sigma - \tau_d)}{T - \tau_d} \right) \right)^n d\sigma \right)^{-1}. \quad (4.38)$$

**Παρατήρηση 6.** Η σταθερά  $\tau_d$  θέτει εμμέσως ανώτατο επιτρεπτό όριο στην καθυστέρηση της επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων, εντός μίας περιόδου επικοινωνίας. Εντός αυτού του ορίου δεν τίθεται πρόβλημα λειτουργίας του συστήματος μας, καθώς δεν εμπλέκονται στους υπολογισμούς οι πληροφορίες που ανταλλάσσονται. Εάν το  $\tau_d$  τείνει να γίνει ίσο με την περίοδο επικοινωνίας  $T$ , τότε η παρεμβολή μεταξύ δειγμάτων γίνεται όλο και πιο απότομη, σχεδόν βηματική.

### 4.3.2 Ιδιότητες των Εξομαλυμένων Μεταβλητών Σφάλματος

Οι μεταβλητές  $z_i(t)$  που ορίζονται στην (4.36) περιέχουν ασυνεχείς όρους κατάστασης. Ωστόσο, η συνάρτηση εξομάλυνσης  $\rho$  που ορίζεται στις σχέσεις (4.37) και (4.38) εξασφαλίζει τη συνέχεια τους. Διαισθητικά, αντί να κάνουμε παρεμβολή των δειγμάτων με την ασυνεχή μέθοδο Zero Order Hold (ZOH), επιλέγουμε ομαλή μετάβαση μεταξύ των δειγμάτων, για να εξασφαλίσουμε συνεχή παραγωγισιμότητα των μεταβλητών σφάλματος. Αυτή η ιδιότητα μας είναι αναγκαία παρακάτω, όπου ανάγουμε το πρόβλημα της προσεγγιστικής εύρεσης Ισορροπίας Nash σε πρόβλημα ρύθμισης των μεταβλητών ASPPPA.



Σχήμα 4.1: Παρεμβολή με ZOH και την Ομαλή Συνάρτηση Εξομάλυνσης

Πιο συγκεκριμένα, με βάση την ανάλυση του [28], καταλήγουμε στις παρακάτω παρατηρήσεις για τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα των μεταβλητών ASPPPA.

**Παρατήρηση 7.** Έστω πως το διάνυσμα κατάστασης  $x_i(t)$  είναι συνεχές. Τότε, και οι μεταβλητές σφάλματος  $z_i$  είναι συνεχείς για  $t \neq kT, k \in \mathbb{N}$ , αφού οι συναρτήσεις  $x_i$  και  $\rho$  είναι συνεχείς. Επιπλέον, για  $t = kT$ , ισχύει πως,

$$\lim_{t \rightarrow kT^-} z_i(t) = x_i(kT) - \rho(T)s_i(kT) - [1 - \rho(T)]s_i((k-1)T) = x_i(kT) - s_i(kT)$$

και

$$\lim_{t \rightarrow kT^+} z_i(t) = x_i(kT) - \rho(0)s_i((k+1)T) - [1 - \rho(0)]s_i(kT) = x_i(kT) - s_i(kT),$$

από όπου συνεπάγεται η συνέχεια των εξομαλυμένων μεταβλητών σφάλματος για κάθε  $t$ .

**Παρατήρηση 8.** Έστω πως το διάνυσμα κατάστασης  $x_i(t)$  είναι 2-φορές συνεχώς παραγωγίσιμο. Οι μεταβλητές σφάλματος  $z_i$  είναι 2-φορές παραγωγίσιμες. Για  $l \in [2]$ , ισχύει πως

$$z_i^{(l)}(t) = x_i^{(l)}(t) - \frac{d^l \rho}{dt^l} \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \left[ s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T + T \right) - s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right].$$

Η συνέχεια των παραγώγων για  $t = kT$  εξασφαλίζεται από το γεγονός πως  $\frac{d^l \rho}{dt^l}(0) = \frac{d^l \rho}{dt^l}(T) = 0$ .

### 4.3.3 Προσεγγιστική Εύρεση Ισορροπίας Nash

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το κύριο Θεώρημα της εργασίας μας.

**Θεώρημα 4.1.** Έστω  $N$  πράκτορες που συμμετέχουν σε στατικό παίγνιο. Εάν:

1. Ισχύουν οι υποθέσεις 1 - 5.
2. Οι μεταβλητές  $z_i(t)$ , που ορίζονται στις (3.6), (3.7) και (4.36), είναι ομοιόμορφα φραγμένες και υπάρχει θετική σταθερά  $\epsilon$ , τέτοια ώστε  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| \leq \epsilon$ .

τότε, τα διανύσματα κατάστασης  $x_i(t)$  όλων των πρακτόρων, είναι ομοιόμορφα φραγμένα και υπάρχει σταθερά  $c$  ανεξάρτητη του  $\epsilon$ , τέτοια ώστε για κάθε  $i \in [N]$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| \leq c\epsilon.$$

Απόδειξη. Βασιζόμενοι στην εξίσωση (4.36) έχουμε πως

$$\begin{aligned} x_i(t) - x^* &= z_i(t) + \rho \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \left[ s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T + T \right) - x^* \right] \\ &\quad + \left[ 1 - \rho \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right] \left[ s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) - x^* \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στην (4.39) λαμβάνουμε την παρακάτω ανισότητα,

$$\begin{aligned} \|x_i(t) - x^*\| &\leq \|z_i(t)\| + \rho \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \left\| s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T + T \right) - x^* \right\| \\ &\quad + \left[ 1 - \rho \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right] \left\| s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) - x^* \right\|, \end{aligned} \quad (4.40)$$

διότι οι όροι που περιέχουν τη συνάρτηση εξομάλυνσης είναι θετικοί, καθώς  $\text{range}(\rho) = [0, 1]$ . Οι δύο τελευταίοι όροι της (4.40) αποτελούν κυρτό συνδυασμό, άρα

$$\|x_i(t) - x^*\| \leq \|z_i(t)\| + \max \left\{ \left\| s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) - x^* \right\|, \left\| s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T + T \right) - x^* \right\| \right\}. \quad (4.41)$$

Πλέον, μπορούμε να φράξουμε το  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\|$ . Λόγω της (4.41), ισχύει πως

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| + \limsup_{k \rightarrow \infty} \max \left\{ \left\| s_i^{[k]} - x^* \right\|, \left\| s_i^{[k+1]} - x^* \right\| \right\}. \quad (4.42)$$

Οι υποθέσεις που διατυπώσαμε στο Θεώρημα αυτό είναι αρκετές για να επικαλεστούμε την ισχύ του Λήμματος 4.7. Συνεπώς, με βάση το Λήμμα αυτό, έχουμε πως

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| \leq (1 + c_s)\epsilon. \quad (4.43)$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξή μας, ορίζοντας  $c := 1 + c_s$ . □





## Κεφάλαιο 5

# Αναζήτηση Ισοροπίας Nash σε UAV σύστημα

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζουμε τις ιδέες που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια και συγκεκριμένα το Θεώρημα 4.1, που ουσιαστικά λέει πως regulation των μεταβλητών ASPPPA συνεπάγεται προσεγγιστική σύγκλιση σε Ισοροπία Nash. Το σύστημα στο οποίο εφαρμόζονται, αποτελείται από πράκτορες που ακολουθούν τη δυναμική ενός μοντέλου συγκεντρωμένης μάζας για UAVs (Unmanned Aerial Vehicles) [30].

### 5.1 Δυναμικό Μοντέλο

Θεωρούμε πως κάθε πράκτορας έχει δυναμική που περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= \frac{1}{m_i} D_i v_i + d_i + \frac{1}{m_i} G_i(\text{sat} \circ F_i),\end{aligned}\tag{5.1}$$

όπου το  $p_i$  είναι διάνυσμα τριών συντεταγμένων και περιγράφει τη θέση του  $i$ -οστού UAV εντός του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Το  $v_i$  είναι το αντίστοιχο διάνυσμα ταχυτήτων στους τρεις προαναφερθέντες άξονες. Ο πίνακας  $D_i$  είναι σταθερός και διαγώνιος πίνακας με αρνητικά στοιχεία. Τα μέτρα των στοιχείων αυτών περιγράφουν τους συντελεστές τριβής στους τρεις άξονες. Ο όρος  $d_i$  περιγράφει εξωγενείς διαταραχές (πχ. βαρύτητα). Το  $m_i$  εκφράζει τη μάζα του UAV.

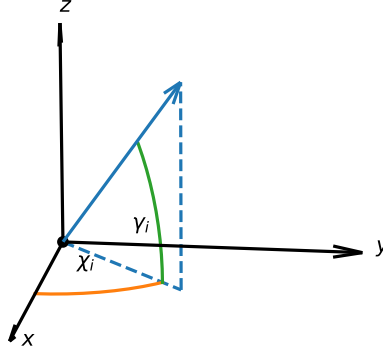
Τέλος, το  $F_i$  αποτελεί το διάνυσμα εισόδων ελέγχου που όπως παρατηρούμε, υπεισέρχεται σε κορεσμό. Η συνάρτηση κορεσμού έχει συμμετρικές στάθμες και ορίζεται ως

$$\text{sat}(x) := \begin{cases} x, & |x| < u_{max} \\ \text{sgn}(x) \cdot u_{max}, & |x| \geq u_{max}, \end{cases}\tag{5.2}$$

όπου  $\text{sgn}$  η συνάρτηση προσήμου. Το διάνυσμα εισόδων ελέγχου είναι εκφρασμένο σε τοπικό σύστημα αναφοράς του UAV, μέσω των δυνάμεων ώσης (thrust) και άρσης (lift). Για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη ελέγχου στους τρεις άξονες αναφοράς, είναι αναγκαία η ύπαρξη του μητρώου στροφής  $G_i$ . Το μητρώο στροφής ορίζεται ως

$$G_i := \text{Rot}_z(\chi_i)\text{Rot}_y(-\gamma_i),\tag{5.3}$$

όπου  $\chi_i$  είναι η γωνία πορείας του αεροπλάνου (heading angle), ενώ  $\gamma_i$  είναι η γωνία ίχνους πτήσης (flight path angle), που υποδηλώνει αν το αεροπλάνο κινείται προς υψηλότερο ή χαμηλότερο υψόμετρο.



Σχήμα 5.1: Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων για το UAV Μοντέλο Συγκεντρωμένης Μάζας

Προτού συνεχίσουμε, εισάγουμε την παρακάτω υπόθεση για τις εξωγενείς διαταραχές.

**Υπόθεση 7.** Οι εξωγενείς διαταραχές  $d_i(t)$  είναι τμηματικά συνεχείς ως προς το χρόνο και φραγμένες, δηλαδή υπάρχουν σταθερές  $\bar{d}_i$  τέτοιες ώστε  $\|d_i\| \leq \bar{d}_i, \forall i \in [N], t \geq 0$ .

Έστω πως τα UAVs συμμετέχουν σε ένα στατικό παίγνιο σαν αυτό που υποτίθεται στο Θεώρημα 4.1. Το διάνυσμα δράσεων του κάθε πράκτορα είναι το διάνυσμα θέσης του,  $p_i$ . Τότε, μπορούμε σύμφωνα με τις παραπάνω δυναμικές εξισώσεις να ορίσουμε τις μεταβλητές ASPPPA για το σύστημα των UAVs και να λάβουμε την εξής ισοδύναμη δυναμική,

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= v_i + \eta_i \\ \dot{v}_i &= \frac{1}{m_i} D_i v_i + d_i + \frac{1}{m_i} G_i(\text{sat} \circ F_i), \end{aligned} \quad (5.4)$$

όπου

$$\eta_i := -\dot{\rho} \left( t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \left[ s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T + T \right) - s_i \left( \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right]. \quad (5.5)$$

Για να μπορέσουν τα UAVs να βρεθούν κοντά στην ισορροπία Nash του παιγνίου που συμμετέχουν, θα πρέπει να ρυθμίσουμε τις εξομαλυμένες μεταβλητές σφάλματος  $z_i$ , ώστε να παραμείνουν φραγμένες και να συγκλίνουν σε γειτονιά του μηδενός.

## 5.2 Αρχιτεκτονική Ελέγχου

Στις δυναμικές εξισώσεις (5.4), το διάνυσμα ταχυτήτων  $v_i$  μπορεί να θεωρηθεί ως εικονική είσοδος ελέγχου για τη δυναμική της μεταβλητής σφάλματος  $z_i$ . Εφαρμόζουμε backstepping σχήμα ελέγχου, στο οποίο η ταχύτητα  $v_i$  ακολουθεί την τροχιά  $-\beta_1 z_i - \eta_i$ , έτσι ώστε  $\dot{z}_i \approx -\beta_1 z_i$ . Διαισθητικά, για  $\beta_1 > 0$ , το παραπάνω θα συνεπαγόταν την επιτυχημένη ρύθμιση της μεταβλητής σφάλματος  $z_i$ .

### 5.2.1 Αποσύζευξη Εισόδων Ελέγχου

Το διάνυσμα στροφής με το οποίο πολλαπλασιάζεται η είσοδος ελέγχου, δυσχεραίνει τη σχεδίαση της. Θεωρούμε πως οι γωνίες κατεύθυνσης και ίχνους πτήσης είναι μετρήσιμες, άρα πως έχουμε στη διάθεσή μας το μητρώο στροφής. Για την αποσύζευξη της επίδρασης των συνιστωσών ελέγχου που θα σχεδιάσουμε, ορίζουμε

$$(\text{sat} \circ F_i) := \frac{1}{\sqrt{3}} G_i^T (\text{sat} \circ u_i), \quad (5.6)$$

όπου το  $u_i$  αποτελεί βοηθητική εικονική είσοδο που θα σχεδιάσουμε παρακάτω. Απαιτούμε η βοηθητική είσοδος να έχει ίδιο επίπεδο κορεσμού με την  $F_i$ , δηλαδή ίσο με  $u_{max}$ . Τότε, ισχύει ότι

$$\|\text{sat} \circ F_i\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{3}} \|G_i^T (\text{sat} \circ u_i)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|G_i^T (\text{sat} \circ u_i)\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|G_i^T\| \cdot \|\text{sat} \circ u_i\| \leq u_{max}, \quad (5.7)$$

άρα πως ο μετασχηματισμός της κορεσμένης  $F_i$  είναι καλώς ορισμένος ως προς την κορεσμένη  $u_i$ , διότι όντως σέβεται το κοινό επίπεδο κορεσμού  $u_{max}$ . Με τον μετασχηματισμό αυτό, οι δυναμικές εξισώσεις που μας απασχολούν, αλλάζουν στις

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= v_i + \eta_i \\ \dot{v}_i &= \frac{1}{m_i} D_i v_i + d_i + \frac{1}{\sqrt{3} m_i} (\text{sat} \circ u_i). \end{aligned} \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Prescribed Performance Έλεγχος με Τροποποίηση Αναφοράς

Το ζητούμενο μας πλέον είναι να σχεδιάσουμε τη βοηθητική είσοδο  $u_i$ , έτσι ώστε το  $v_i$  να ακολουθεί την τροχιά  $-\beta_1 z_i - \eta_i$ . Για να το πετύχουμε αυτό, χρησιμοποιούμε την Prescribed Performance αρχιτεκτονική ελέγχου [31]. Η ύπαρξη κορεσμού στην είσοδο ελέγχου, επιβάλλει αλλαγή στο κλασικό PPC σχήμα, οπότε χρησιμοποιούμε PPC με τροποποίηση στο σήμα αναφοράς [32]. Ξεκινάμε ορίζοντας το σήμα αναφοράς που αναφέραμε προηγουμένως,

$$a_i := -\beta_1 z_i - \eta_i. \quad (5.9)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τον όρο τροποποίησης της αναφοράς,  $\sigma_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ο όρος αυτός παράγεται με την εξής διαφορική εξίσωση,

$$\dot{\sigma}_i = -\beta_i \sigma_i + \Delta u_i, \sigma_i(0) = \mathbf{0}, \quad (5.10)$$

όπου το  $\beta_i > 0$  αποτελεί σταθερά προς σχεδίαση, ενώ ο όρος  $\Delta u_i$  αποτελεί την υστέρηση λόγω κορεσμού και ορίζεται ως

$$\Delta u_i := (\text{sat} \circ u_i) - u_i. \quad (5.11)$$

Η μέθοδος σχεδιασμού που χρησιμοποιούμε, εγγυάται πως το  $v_i$  ακολουθεί την τροποποιημένη αναφορά  $a'_i := a_i + \sigma_i$ , ικανοποιώντας κάποιες προδιαγραφές για την ταχύτητα σύγκλισης και το μόνιμο σφάλμα. Οι προδιαγραφές αυτές περιγράφονται από μία συνάρτηση επίδοσης. Έστω πως κάθε πράκτορας έχει τη δική του συνάρτηση επίδοσης  $\phi_i$ , που

ορίζεται ως

$$\varphi_i(t) := (\varphi_i^0 - \varphi_i^\infty) \exp(-\delta_i t) + \varphi_i^\infty, \quad (5.12)$$

με  $\varphi_i^0 > \varphi_i^\infty > 0$  και  $\delta_i > 0$ . Το  $\varphi_i^\infty$  ποσοτικοποιεί τη μέγιστη ανοχή μας στο μόνιμο σφάλμα και το  $\delta_i$  τον ρυθμό σύγκλισης. Ορίζουμε το κανονικοποιημένο σφάλμα ως εξής

$$\xi_i(t) := \frac{v_i - \alpha'_i}{\varphi_i}. \quad (5.13)$$

Σχεδιάζουμε το σήμα ελέγχου με βάση τις παρακάτω εξισώσεις

$$\epsilon_i(t) := (T \circ \xi_i) \quad (5.14)$$

$$u_i(t) := -k_i \epsilon_i, \quad (5.15)$$

όπου με  $T$  συμβολίζουμε την αύξουσα συνάρτηση  $T(x) = \tan(0.5\pi x)$ , ενώ με  $k_i > 0$  μια σταθερά προς σχεδίαση. Διαλέγουμε τις συναρτήσεις επίδοσης έτσι ώστε, να ισχύει πως  $\varphi_i^0 > \|v_i(0) - \alpha'_i(0)\|_\infty$  και άρα να είναι καλώς ορισμένες, για  $t = 0$ , οι μεταβλητές που εισάγαμε στην εξίσωση (5.14). Λόγω της αρχικοποίησης του APPPA και του όρου τροποποίησης της αναφοράς και λόγω των ιδιοτήτων της συνάρτησης εξομάλυνσης, η παραπάνω απαίτηση είναι ισοδύναμη με  $\varphi_i^0 > \|v_i(0)\|_\infty$ .

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω νόμο ελέγχου, δημιουργούμε το εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τον  $i$ -οστό πράκτορα

$$\dot{z}_i = -\beta_1 z_i + \phi_i \xi_i + \sigma_i \quad (5.16)$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{1}{\varphi_i} [\dot{v}_i - \dot{\alpha}_i - \dot{\sigma}_i - \xi_i \dot{\phi}_i] \quad (5.17)$$

$$\dot{v}_i = \frac{1}{m_i} D_i v_i + d_i + \frac{1}{\sqrt{3}m_i} (\text{sat} \circ u_i) \quad (5.18)$$

$$\dot{\sigma}_i = -\beta_i \sigma_i + \Delta u_i. \quad (5.19)$$

Έστω τα διανύσματα  $\xi := \text{col}((\xi_i)_{i \in [N]})$ ,  $z := \text{col}((z_i)_{i \in [N]})$  και  $\sigma := \text{col}((\sigma_i)_{i \in [N]})$ , το διάνυσμα κατάστασης  $p := \text{col}((p_i)_{i \in [N]})$  και το διάνυσμα εκτιμήσεων  $\mathbf{p}_- := \text{col}((\mathbf{p}_{i,-})_{i \in [N]})$ . Ορίζουμε τη μεταβλητή  $\mathbf{h} := \text{col}(\xi, \sigma, z, \mathbf{p}_-)$ . Το συνολικό σύστημα που περιγράφει την  $\mathbf{h}$  θεωρείται υβριδικό, καθώς εμπλέκει συνεχή και διακριτή δυναμική. Μπορεί να περιγραφεί, για  $t \in [kT, (k+1)T)$ , από σύνολο διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών, με βάση το παρακάτω πρότυπο

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= f_\xi(t, \xi(t), z(t), \sigma(t), p^{[k]}, p^{[k-1]}, \mathbf{p}_-^{[k-1]}, \mathbf{p}^{\lfloor \frac{k-1}{D} \rfloor}) \\ \dot{\sigma}(t) &= f_\sigma(t, \sigma(t)) \\ \dot{z}(t) &= f_z(t, \xi(t), z(t), \sigma(t)) \\ \dot{p}(t) &= f_p(t, \xi(t), z(t), \sigma(t), p^{[k]}, p^{[k-1]}, \mathbf{p}_-^{[k-1]}, \mathbf{p}^{\lfloor \frac{k-1}{D} \rfloor}) \\ \mathbf{p}_-^{[k+1]} &= f_{\mathbf{p}_-}(p^{[k]}, \mathbf{p}_-^{[k]}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Παραλείπουμε για συντομία, τις αναλυτικές εκφράσεις των απεικονίσεων. Η απεικόνιση  $f_{\mathbf{p}_-}$  εξαρτάται μόνο από τα  $p^{[k]}, \mathbf{p}_-^{[k]}$  διότι είτε  $\mathbf{p}_-^{[k+1]} = \mathbf{p}_-^{[k]}$  ή όπως υποδεικνύει η (3.6), χρ-

σιμοποιούμε τα  $p^{[k]}, p_-^{[k]}$  για τη δημιουργία νέων εκτιμήσεων. Ανάλογη επιχειρηματολογία ισχύει και για τις υπόλοιπες απεικονίσεις που εξαρτώνται από το διάνυσμα κατάστασης  $p$  και το διάνυσμα εκτιμήσεων  $p_-$ . Κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση για το υβριδικό σύστημα (5.20).

**Παρατήρηση 9.** Για το υβριδικό σύστημα (5.20), οι απεικονίσεις  $f_\xi, f_\sigma, f_z$  και  $f_p$  είναι τμηματικά συνεχείς ως προς το χρόνο. Επίσης, είναι και τοπικά Lipschitz συνεχείς ως προς τις μεταβλητές  $(\xi, \sigma, z, p)$  σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $(-1, 1)^{3N} \times \mathbb{R}^{9N}$ , για αυθαίρετες και σταθερές τιμές των δειγματοληπτημένων δυναμικών και εκτιμήσεων.

### 5.3 Ανάλυση Σύγκλισης

Είμαστε σε θέση να αποδείξουμε πως υπάρχουν διατάξεις στις οποίες ο κατανεμημένος νόμος ελέγχου που προτείνουμε, εγγυάται να οδηγήσει το πολυπρακτορικό σύστημα των UAVs, σε γειτονιά του σημείου Ισορροπίας Nash. Βασιζόμαστε στη λογική των [5, 32].

**Θεώρημα 5.2.** Έστω πως  $N$  πράκτορες, που περιγράφονται από την UAV δυναμική των εξισώσεων (5.8), συμμετέχουν σε εικονικό στατικό παίγνιο με δράση το διάνυσμα θέσης τους,  $p_i$  και συναρτήσεις κόστους,  $J_i$ , που εξαρτώνται από τις θέσεις των UAVs. Έστω επίσης το μη κενό και ανοικτό σύνολο  $\Omega = (-1, 1)^{3N} \times \mathbb{R}^{3N^2+6N}$ . Αν

1. Ισχύουν οι υποθέσεις 1 - 5 και 7.
2. Ο κατανεμημένος νόμος ελέγχου που προτείνεται στην (5.15), εφαρμόζεται ως βοηθητική εικονική είσοδος στην (5.6).

τότε, υπάρχει τιμή  $\underline{u}$ , τέτοια ώστε η ανισότητα  $u_{max} > \underline{u}$  να συνεπάγεται πως  $\mathbf{h} \in \Omega', \forall t \geq 0$ , όπου  $\mathbf{h}$  είναι η μεταβλητή κατάστασης του υβριδικού συστήματος (5.20) και  $\Omega'$  είναι συμπαγές υποσύνολο του  $\Omega$ . Επιπλέον, για κάθε πράκτορα  $i \in [N]$ , ισχύει πως

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t) - p^*\| \leq c\epsilon,$$

όπου  $\epsilon$  είναι σταθερά σχεδίασης και  $c$  είναι σταθερά ανεξάρτητη του  $\epsilon$ .

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε πως με  $\|\cdot\|_\infty$  συμβολίζουμε την  $\infty$ -νόρμα διανυσμάτων. Εκ κατασκευής των συναρτήσεων επίδοσης, έχουμε πως  $\varphi_i^0 > \|v_i(0) - a_i'(0)\|_\infty$ , άρα, ως συνέπεια αυτού,  $\|\xi_i(0)\|_\infty < 1$ . Αφού όλα τα κανονικοποιημένα σφάλματα είναι μικρότερα της μονάδας, υπάρχει ανώτατο όριο  $M \geq 0$  στο πόσο ξεπέρασαν τον κορεσμό οι βοηθητικές είσοδοι ελέγχου κάθε πράκτορα, δηλαδή

$$\|u_i(0)\|_\infty < M + u_{max}, \quad (5.21)$$

ή ισοδύναμα, από τις (5.14), (5.15),

$$\|e_i(0)\|_\infty < \frac{M + u_{max}}{k_i} := \tilde{\epsilon}_i, \quad (5.22)$$

$$\|\xi_i(0)\|_\infty < T^{-1} \left( \frac{M + u_{max}}{k_i} \right) := \tilde{\xi}_i. \quad (5.23)$$

Με βάση τις διαπιστώσεις μας για τα  $\xi_i(0)$ , καταλήγουμε πως  $\mathbf{h}(0) \in \Omega$ . Σύμφωνα με την Παρατήρηση 9 και επιχειρήματα ανάλογα με τα Θεωρήματα 1 και 2 του [33], υπάρχει μοναδική μεγιστική λύση  $\mathbf{h}_0 : [0, \tau_{max}) \rightarrow \Omega$  για το υβριδικό σύστημα (5.20), στο πεδίο ύπαρξης της μεταβλητής  $\mathbf{h}$ . Μεγιστική λύση σημαίνει πως αδυνατούμε να βρούμε επέκταση της λύσης  $\mathbf{h}_0$ , για χρόνο μεγαλύτερο από  $\tau_{max}$ . Στη συνέχεια, ορίζουμε τα σύνολα

$$\mathcal{E}_i := \left\{ \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{e}_i\|_\infty \leq \frac{M + u_{max}}{k_i} \right\}, \forall i \in [N].$$

Σύμφωνα με την (5.22), ισχύει πως  $\mathbf{e}_i(0) \in \text{int}(\mathcal{E}_i), \forall i \in [N]$ , συνεπώς, υπάρχει χρονικό υποσύνολο της μορφής  $\mathcal{T} = [0, t') \subset [0, \tau_{max})$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{e}_i \in \mathcal{E}_i$ , για κάθε  $t \in \mathcal{T}$ .

Πλέον, στόχος μας αποτελεί η εύρεση τιμής για το επίπεδο κορεσμού  $u_{max}$ , που να διασφαλίζει πως τα σύνολα  $\mathcal{E}_i$  είναι θετικά αναλλοίωτα. Εκ κατασκευής των συνόλων  $\mathcal{E}_i$ , λαμβάνουμε πως

$$\|u_i(t)\|_\infty \leq M + u_{max}, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (5.24)$$

το οποίο συνεπάγεται το παρακάτω φράγμα στην υστέρηση λόγω κορεσμού,

$$\|\Delta u_i(t)\|_\infty \leq M, \forall t \in \mathcal{T}. \quad (5.25)$$

Ολοκληρώνουμε τη διαφορική εξίσωση (5.19),

$$\sigma_i(t) = \int_0^t \exp(-\beta_i(t-s)) \Delta u_i(s) ds. \quad (5.26)$$

Υπολογίζουμε την  $\infty$ -νόρμα της εξίσωσης (5.26) και εφαρμόζουμε την ανισότητα (5.25), ώστε να καταλήξουμε στο παρακάτω φράγμα για την τροποποίηση της αναφοράς, εντός του  $\mathcal{T}$ ,

$$\|\sigma_i(t)\|_\infty \leq M \int_0^t \exp(-\beta_i(t-s)) ds = \frac{M}{\beta_i} (1 - \exp(-\beta_i t)) \leq \frac{M}{\beta_i} := \tilde{\sigma}_i. \quad (5.27)$$

Συνεχίζουμε την απόδειξη, δείχνοντας πως οι εξομαλυμένες μεταβλητές σφάλματος  $z_i$  είναι φραγμένες για κάθε  $t \in \mathcal{T}$ . Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση (5.16), έχουμε πως

$$z_i(t) = \exp(-\hat{\eta}_1 t) z_i(0) + \int_0^t \exp(-\hat{\eta}_1(t-s)) (\varphi_i(s) \xi_i(s) + \sigma_i(s)) ds. \quad (5.28)$$

Λόγω της αρχικοποίησης της προσεγγιστικής PPP δυναμικής, ισχύει ότι  $\|z_i(0)\|_\infty = 0$ . Επιπλέον, αφού για κάθε  $t \in \mathcal{T}$ , έχουμε πως  $\|\xi_i(t)\|_\infty \leq \tilde{\xi}_i$  και  $|\varphi_i(t)| \leq \varphi_i^0$ , καταλήγουμε στις παρακάτω ανισότητες και το ζητούμενο φράγμα,

$$\|z_i(t)\|_\infty \leq \frac{(\varphi_i^0 \tilde{\xi}_i + \tilde{\sigma}_i)}{\hat{\eta}_1} (1 - \exp(-\hat{\eta}_1 t)) \quad (5.29)$$

$$\leq \frac{(\varphi_i^0 \tilde{\xi}_i + \tilde{\sigma}_i)}{\hat{\eta}_1} := \tilde{z}_i. \quad (5.30)$$

Τώρα, δείχνουμε πως η παραγόμενη προσεγγιστική PPP δυναμική είναι φραγμένη στο  $\mathcal{T}$ . Έστω  $k = \nu D + l$  θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε  $kT \in \mathcal{T}$  και  $l \in [D]$ . Τότε, με τον ίδιο τρόπο

που αναπτύξαμε την (4.27), ισχύει πως

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^{[k]} - \mathbf{p}^*\|_{\Phi} &\leq r_l r_D^v \|\mathbf{p}^{[0]} - \mathbf{p}^*\|_{\Phi} + (\beta_l + r_l \beta_D \left( \frac{1 - r_D^v}{1 - r_D} \right)) \sqrt{N} (\sqrt{3} \tilde{z}_i) \\ &\leq r_l \max \left\{ \|\mathbf{p}^{[0]} - \mathbf{p}^*\|_{\Phi}, \frac{\beta_D}{1 - r_D} \sqrt{3N} \tilde{z}_i \right\} + \beta_l \sqrt{3N} \tilde{z}_i. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι συνέπεια του κυρτού συνδυασμού που σχηματίζεται στην πρώτη. Προσπαθούμε να φράξουμε τη νόρμα του σφάλματος με σταθερά ανεξάρτητη του  $k$ . Με βάση την ανισότητα (5.31), έχουμε πως

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}^{[k]} - \mathbf{p}^*\|_{\Phi} &\leq (1 + r_l) \max \left\{ \|\mathbf{p}^{[0]} - \mathbf{p}^*\|_{\Phi}, \frac{\beta_D}{1 - r_D} \sqrt{3N} \tilde{z}_i \right\} \\ &\leq (1 + r_1) \max \left\{ \|\mathbf{p}^{[0]} - \mathbf{p}^*\|_{\Phi}, \frac{\beta_D}{1 - r_D} \sqrt{3N} \tilde{z}_i \right\} := \widetilde{\Delta \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Η πρώτη ανισότητα απορρέει από την ανισότητα  $0 < 1 - r_D < 1$ , που ισχύει λόγω της Υπόθεσης 5 και την ανισότητα  $\beta_l < \beta_D$ , που προκύπτει εξετάζοντας τα Λήμματα 4.4 και 4.5. Η δεύτερη ανισότητα, προκύπτει από το γεγονός πως οι σταθερές  $r_l$  που ορίζονται στο Λήμμα 4.5, είναι αύξουσες ως προς τον δείκτη  $l$ , οπότε  $r_l < r_1, \forall l \in [D]$ . Με βάση την ανισότητα (5.32) και με χρήση της τριγωνικής ανισότητας και της ανισότητας Rayleigh, προκύπτει πως

$$\|\mathbf{p}^{[k]}\| \leq \frac{\|\mathbf{p}^{[k]}\|_{\Phi}}{\sqrt{\lambda_{\min}(\Phi)}} \leq \frac{\|\mathbf{p}^{[k]} - \mathbf{p}^*\|_{\Phi} + \|\mathbf{p}^*\|_{\Phi}}{\sqrt{\lambda_{\min}(\Phi)}} \leq \frac{\widetilde{\Delta \mathbf{p}} + \|\mathbf{p}^*\|_{\Phi}}{\sqrt{\lambda_{\min}(\Phi)}} := \tilde{\mathbf{p}}. \quad (5.33)$$

το οποίο συνεπάγεται πως  $\|\mathbf{p}^{[k]}\| \leq \tilde{\mathbf{p}}$  και  $\|\mathbf{p}^k\| \leq \tilde{\mathbf{p}}$ . Σύμφωνα με την εξίσωση της προσεγγιστικής PPP δυναμικής (3.7) και τις Υποθέσεις 2,3, ισχύει πως

$$\begin{aligned} \|s_i^{[k]}\| &\leq \left(1 + 4 \frac{\gamma}{a}\right) \tilde{\mathbf{p}} + \gamma \sup_{\|\mathbf{p}'\| \leq \sqrt{2}\tilde{\mathbf{p}}} \|\nabla_i \mathcal{J}_i(\mathbf{p}')\| \\ &\leq \left(1 + 4 \frac{\gamma}{a}\right) \tilde{\mathbf{p}} + \gamma \theta_0 \sup_{\|\mathbf{p}'\| \leq \sqrt{2}\tilde{\mathbf{p}}} \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}^*\| \\ &\leq \left(1 + 4 \frac{\gamma}{a} + \sqrt{2}\gamma\theta_0\right) \tilde{\mathbf{p}} + \gamma\theta_0 \|\mathbf{p}^*\| := \tilde{s}_i. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Φράσσοντας όλες τις δειγματοληπτημένες δυναμικές, μπορούμε να φράξουμε και το διάνυσμα θέσης  $p_i(t)$  στο συνεχή χρόνο, για  $t \in \mathcal{T}$ , συνδυάζοντας τον ορισμό των εξομαλυμένων μεταβλητών σφάλματος (4.36), με τα φράγματα για το σφάλμα (5.30) και την APPP δυναμική (5.34), ως

$$\|p_i(t)\| \leq \sqrt{3} \tilde{z}_i + \tilde{s}_i := \tilde{p}_i. \quad (5.35)$$

Η εμφάνιση της  $\sqrt{3}$  οφείλεται στο γεγονός πως η (5.30) αποτελεί φράγμα στην  $\infty$ -νόρμα, ενώ εδώ ασχολούμαστε με την Ευκλείδεια. Στη συνέχεια, φράσσουμε το διάνυσμα ταχυτήτων  $v_i(t)$  στο  $\mathcal{T}$ . Λόγω του ορισμού του κανονικοποιημένου σφάλματος (5.13), με τριγωνική ανισότητα και εφαρμογή των ανάλογων φραγμάτων (5.23), (5.27), (5.30), (5.34) λαμβάνουμε πως

$$\|v_i(t)\| \leq \sqrt{3} \phi_i^0 \tilde{\xi}_i + \tilde{\rho}_1 \sqrt{3} \tilde{z}_i + \sqrt{3} \tilde{\sigma}_i + 2\rho_n \tilde{s}_i := \tilde{v}_i. \quad (5.36)$$

Τέλος, φράσσουμε την παράγωγο της αναφοράς,  $\dot{a}_i$ . Από τις εξισώσεις (5.9) και (5.16), ισχύει πως

$$\dot{a}_i = \hat{r}_1^2 z_i - \hat{r}_1 \phi_i \xi_i - \hat{r}_1 \sigma_i - \dot{\eta}_i. \quad (5.37)$$

Με αντίστοιχη χρήση των ανισοτήτων που χρησιμοποιήσαμε για την ανάπτυξη της (5.36), καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα

$$\|\dot{a}_i\| \leq \hat{r}_1^2 \sqrt{3} \tilde{z}_i + \hat{r}_1 \phi_i^0 \sqrt{3} \tilde{\xi}_i + \hat{r}_1 \sqrt{3} \tilde{\sigma}_i + \frac{2n\pi}{T - t_D} \rho_n \tilde{\xi}_i := \tilde{a}_i. \quad (5.38)$$

Ο όρος  $\frac{2n\pi}{T-t_D} \rho_n$  οφείλεται σε διπλή παραγωγή της συνάρτησης εξομάλυνσης και στο γεγονός πως οι συναρτήσεις  $\cos$  και  $\sin$  έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας.

Τώρα εξετάζουμε τη θετική αμεταβλητότητα των συνόλων  $\mathcal{E}_i$ . Για τον  $i$ -οστό πράκτορα, είτε ισχύει πως  $\epsilon_i \in \text{int}(\mathcal{E}_i)$  ή ότι  $\epsilon_i \in \partial(\mathcal{E}_i)$ , για  $t \in \mathcal{T}$ . Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση λόγω της συνέχειας των μεταβλητών  $\epsilon_i$ . Αν  $\epsilon_i \in \partial(\mathcal{E}_i)$ , για τουλάχιστον μια εκ των συνιστωσών του  $\epsilon_i$ , έστω την  $j$ -οστή, ισχύει πως  $|\epsilon_{ij}| = \frac{M+u_{max}}{k_i}$ . Αυτό συνεπάγεται ότι  $|u_{ij}| = M + u_{max}$  και κατά συνέπεια  $|\Delta u_{ij}| = M$ . Λόγω του ορισμού του ελεγκτή μέσω της (5.15), ισχύει η παρακάτω ισότητα προσήμων

$$\text{sgn}(\text{sgn}(u_{ij})) = \text{sgn}(u_{ij}) = -\text{sgn}(\epsilon_{ij}). \quad (5.39)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $V_{ij} := \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^2$ . Η συνάρτηση αυτή είναι θετικά ορισμένη, αύξουσα ως προς  $\epsilon_{ij}$  και μάλιστα ακτινικά μη-φραγμένη. Λόγω των διαφορικών εξισώσεων (5.17), (5.18) και (5.19) και με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας, η  $V_{ij}$  έχει την εξής χρονική παράγωγο,

$$\dot{V}_{ij} = \frac{1}{\phi_i} \frac{\partial T(\xi_{ij})}{\partial \xi_{ij}} \epsilon_{ij} \left[ \frac{1}{m_i} (D_i v_i)_j + d_{ij} + \frac{1}{\sqrt{3} m_i} \text{sat}(u_{ij}) - \dot{a}_{ij} + \beta_i \sigma_{ij} - \Delta u_{ij} - \xi_{ij} \dot{\phi}_i \right]. \quad (5.40)$$

Εξαιτίας της εξίσωσης προσήμων (5.39) και του γεγονότος πως  $|\text{sat}(u_{ij})| = u_{max}$ , αντικαθιστούμε τον όρο  $\text{sat}(u_{ij})$ ,

$$\dot{V}_{ij} = \frac{1}{\phi_i} \frac{\partial T(\xi_{ij})}{\partial \xi_{ij}} \epsilon_{ij} \left[ \frac{1}{m_i} (D_i v_i)_j + d_{ij} - \frac{1}{\sqrt{3} m_i} \text{sgn}(\epsilon_{ij}) u_{max} - \dot{a}_{ij} + \beta_i \sigma_{ij} - \Delta u_{ij} - \xi_{ij} \dot{\phi}_i \right]. \quad (5.41)$$

Καθώς  $\Delta u_{ij} = \text{sat}(u_{ij}) - u_{ij}$  και  $|u_{ij}| \geq u_{max}$ , ισχύει πως  $\text{sgn}(\Delta u_{ij}) = -\text{sgn}(u_{ij})$ . Επειδή  $|\Delta u_{ij}| = M$ , έπεται πως

$$\dot{V}_{ij} = \frac{1}{\phi_i} \frac{\partial T(\xi_{ij})}{\partial \xi_{ij}} \epsilon_{ij} \left[ \frac{1}{m_i} (D_i v_i)_j + d_{ij} - \text{sgn}(\epsilon_{ij}) \left( \frac{1}{\sqrt{3} m_i} u_{max} + M \right) - \dot{a}_{ij} + \beta_i \sigma_{ij} - \xi_{ij} \dot{\phi}_i \right]. \quad (5.42)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $\text{sgn}(x) \cdot x = |x|$  και το γεγονός πως η  $T(\xi_{ij})$  έχει μη-αρνητική παράγωγο ως προς  $\xi_{ij}$ , φράσσουμε τη χρονική παράγωγο  $\dot{V}_{ij}$  ως εξής,

$$\dot{V}_{ij} \leq \left| \frac{1}{\phi_i} \frac{\partial T(\xi_{ij})}{\partial \xi_{ij}} \epsilon_{ij} \right| \left[ \left| \frac{1}{m_i} (D_i v_i)_j \right| + |d_{ij}| - \frac{1}{\sqrt{3} m_i} u_{max} - M + |\dot{a}_{ij}| + |\beta_i \sigma_{ij}| + |\xi_{ij} \dot{\phi}_i| \right]. \quad (5.43)$$

Εφαρμόζοντας τις ανισότητες (5.27), (5.36), (5.38) και την Υπόθεση 7 στην ανισότητα (5.43) και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως ο πίνακας των συντελεστών τριβής,  $D_i$ , είναι διαγώνιος,



συμπεραίνουμε ότι

$$\dot{V}_{i,j} \leq \left| \frac{1}{m_i \phi_i} \frac{\partial T(\xi_{i,j})}{\partial \xi_{i,j}} \epsilon_{i,j} \right| \left[ \|D_i\|_\infty \tilde{v}_i + m_i(\tilde{a}_i + \tilde{\alpha}_i + \tilde{\phi}_i) - \frac{1}{\sqrt{3}} u_{max} \right], \quad (5.44)$$

όπου το φράγμα της παραγώγου της συνάρτησης επίδοσης ορίζεται ως  $\tilde{\phi}_i := \delta_i(\phi_i^0 - \phi_i^\infty)$ . Βρήκαμε τη συνθήκη που θέλουμε να εφαρμόσουμε στο επίπεδο κορεσμού  $u_{max}$ .

**Υπόθεση 8.** Το επίπεδο κορεσμού  $u_{max}$  είναι αρκούντως μεγάλο, έτσι ώστε

$$u_{max} > \max_{i \in [N]} \left\{ \|u_i(0)\|_\infty - M, \sqrt{3}(\|D_i\|_\infty \tilde{v}_i + m_i(\tilde{a}_i + \tilde{\alpha}_i + \tilde{\phi}_i)) \right\}.$$

Λόγω της Υπόθεσης 8 έχουμε πως  $\dot{V}_{i,j} \leq 0$ . Συνεπώς, αποδείξαμε ότι  $\forall i \in [N], j \in [3]$ , είτε ισχύει ότι  $|\epsilon_{i,j}| < \frac{M+u_{max}}{k_i}$  ή  $|\epsilon_{i,j}| = \frac{M+u_{max}}{k_i}$ . Οστόσο, στην τελευταία αυτήν περίπτωση, η χρονική παράγωγος και η μορφή της συνάρτησης  $V_{i,j}$  υποδηλώνει πως το  $|\epsilon_{i,j}|$  εξελίσσεται προς μικρότερες τιμές. Συνεπώς, πράγματι το σύνολο  $\mathcal{E}_i$  είναι θετικά αναλλοίωτο και καθώς  $\epsilon_i(0) \in \mathcal{E}_i$ , έπεται πως  $\mathcal{T} \equiv [0, \tau_{max})$ . Εξετάζοντας τα φράγματα που αναπτύξαμε παραπάνω, ουσιαστικά αποδείξαμε πως η μεγιστική λύση  $\mathbf{h}_0 : [0, \tau_{max}) \rightarrow \Omega$  περιέχεται εντός του  $\Omega'$ , ενός συμπαγούς υποσυνόλου του  $\Omega$  που ορίζεται ως

$$\Omega' := [-\tilde{\xi}, \tilde{\xi}]^{3N} \times [-\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}]^{3N} \times [-\tilde{z}, \tilde{z}]^{3N} \times [-\tilde{p}, \tilde{p}]^{3N} \times [-\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}]^{3N(N-1)},$$

όπου τα όρια  $\tilde{\xi}, \tilde{\sigma}, \tilde{z}, \tilde{p}$  ορίζονται με τη βοήθεια των ανισοτήτων (5.22), (5.27), (5.30) και (5.35) ως  $\tilde{\xi} := \max_{i \in [N]} \tilde{\xi}_i$ ,  $\tilde{\sigma} := \max_{i \in [N]} \tilde{\sigma}_i$ ,  $\tilde{z} := \max_{i \in [N]} \tilde{z}_i$  και  $\tilde{p} := \max_{i \in [N]} \tilde{p}_i$ , ενώ το όριο  $\tilde{\mathbf{p}}$  ορίζεται στην ανισότητα (5.33). Αυτές οι συννοριακές τιμές είναι ανεξάρτητες από το χρόνο, συνεπώς, με επιχειρήματα ανάλογα του Θεωρήματος 1 του [33], σε περίπτωση που  $\tau_{max} < \infty$ , μπορούμε να επεκτείνουμε απεριόριστα τη μεγιστική λύση  $\mathbf{h}_0$  στο σύνολο  $\Omega'$ . Αυτή η επέκταση είναι άτοπη, άρα συμπεραίνουμε πως  $\tau_{max} = \infty$ . Αυτό σημαίνει πως τα φράγματα που αναπτύξαμε παραπάνω, εφαρμόζονται για κάθε  $t \geq 0$ .

Επαναφέρουμε την προσοχή μας στην εξίσωση (5.28). Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση επίδοσης  $\phi_i$  με βάση την εξίσωση (5.12) και εφαρμόζουμε τις ανισότητες (5.23) και (5.27). Φράσσουμε τη νόρμα  $\|z_i(t)\|_\infty$  ως εξής

$$\|z_i(t)\|_\infty \leq \frac{\exp(-\delta_i t) - \exp(-\hat{\lambda}_1 t)}{\hat{\lambda}_1 - \delta_i} (\phi_i^0 - \phi_i^\infty) \tilde{\xi}_i + \frac{\phi_i^\infty \tilde{\xi}_i + \tilde{\sigma}_i}{\hat{\lambda}_1} (1 - \exp(-\hat{\lambda}_1 t)). \quad (5.45)$$

Αφήνοντας το  $t$  να προσεγγίσει το  $\infty$ , λαμβάνουμε πως

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| \leq \sqrt{3} \frac{(\phi_i^\infty \tilde{\xi}_i + \tilde{\sigma}_i)}{\hat{\lambda}_1}. \quad (5.46)$$

Ορίζουμε  $\epsilon := \sqrt{3} \max_{i \in [N]} \left\{ \frac{(\phi_i^\infty \tilde{\xi}_i + \tilde{\sigma}_i)}{\hat{\lambda}_1} \right\}$ . Οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.1 ικανοποιούνται από τις Υποθέσεις μας και τις σχέσεις (5.30), (5.46). Μπορούμε λοιπόν να επικαλεστούμε το Θεώρημα και να καταλήξουμε στο ζητούμενο.  $\square$



## Κεφάλαιο 6

### Προσομοιώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό προσομοιώνουμε αριθμητικά το σύστημα που αναπτύξαμε, ώστε να διαπιστώσουμε και την πρακτική του εφαρμοσιμότητα. Κατ' αρχάς, εξετάζουμε δύο παίγνια πολυγωνικών σχηματισμών. Στο πρώτο, προκαθορίζουμε τον σχηματισμό, ενώ στο δεύτερο, επιχειρούμε να βρούμε τον πλησιέστερο πολυγωνικό σχηματισμό στις αρχικές θέσεις των πρακτόρων. Τέλος, συγκρίνουμε την επίδοση του συστήματός μας με την αντίστοιχη επίδοση του S-GRANE συστήματος [5].

#### 6.1 Formation Control

##### 6.1.1 Διατύπωση του Παιγνίου

Θεωρούμε τέσσερα UAVs τα οποία θέλουμε να οδηγήσουμε σε κοινό ύψος και τετραγωνικό σχηματισμό, με κατανεμημένο τρόπο. Δημιουργούμε ένα παίγνιο με την ακόλουθη μορφή συναρτήσεων κόστους,

$$J_i(p_i, p_{-i}) := \frac{c}{2} \|p_i - p_C\|^2 + \frac{c}{2(N-1)} \sum_{j \in [N]} \|p_i - p_j - h_{ij}\|^2. \quad (6.1)$$

Ο πρώτος όρος ποινικοποιεί την απόσταση του  $i$ -οστού πράκτορα από ένα σταθερό σημείο  $p_C$ . Ο δεύτερος όρος επιβάλλει στον  $i$ -οστό πράκτορα να έχει συγκεκριμένες σχετικές αποστάσεις από τους υπολοίπους πράκτορες. Οι σχετικές αποστάσεις δίνονται από τα διανύσματα  $h_{ij}$ , εκφρασμένες στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τις επιλογές μας για τις σταθερές του παιγνίου.

Πίνακας 6.1: Σταθερές Πρώτου Παιγνίου

$c$	6
$p_C$	$\mathbf{0}_{3 \times 1}$
$h_{ii}$	$\mathbf{0}_{3 \times 1}$
$h_{12}$	$[0, 4, 0]^T$
$h_{13}$	$[-4, 4, 0]^T$
$h_{14}$	$[-4, 0, 0]^T$
$h_{23}$	$[-4, 0, 0]^T$
$h_{24}$	$[-4, -4, 0]^T$
$h_{34}$	$[0, -4, 0]^T$
$h_{ij}$	$-h_{ji}$

Η λογική πίσω από την επιλογή των σταθερών είναι η εξής. Ο πρώτος όρος επιδιώκει να στείλει τους πράκτορες στο  $\mathbf{0}$  που αποτελεί το “κέντρο” του σχηματισμού. Ο δεύτερος όρος επιθυμεί οι πράκτορες να σχηματίσουν τετράγωνο πλευράς 4. Δίνουμε μεγάλη βαρύτητα στον πρώτο όρο, ώστε το σύστημα μας να συγκλίνει πιο γρήγορα.

### 6.1.2 Ιδιότητες του Παιγνίου

Το παραπάνω παίγνιο έχει game mapping που μπορεί να γραφθεί στη συνοπτική μορφή

$$F(p) = A_G p + B_G, \tag{6.2}$$

όπου

$$A_G = 14 \cdot \mathbb{I}_{12} - 2 \cdot (\mathbf{1}_{4 \times 4} \otimes \mathbb{I}_3). \tag{6.3}$$

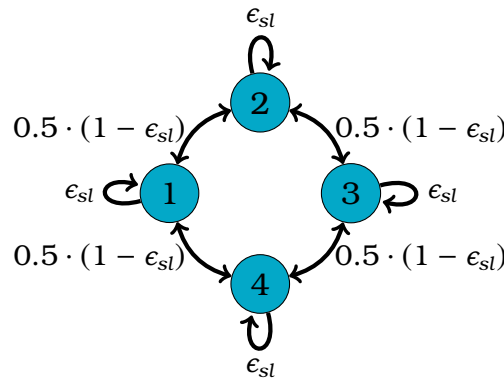
Παραλείπουμε τον όρο  $B_G$  για συντομία. Η ισοροπία Nash του παραπάνω παιγνίου υπολογίζεται βρίσκοντας το “μηδενικό” του game mapping του και προκύπτει ίση με

$$\begin{aligned} p_1^* &= [-1.1429, 1.1429, 0]^T, p_2^* = [-1.1429, -1.1429, 0]^T, \\ p_3^* &= [1.1429, -1.1429, 0]^T, p_4^* = [1.1429, 1.1429, 0]^T, \end{aligned}$$

η οποία αποδίδει ικανοποιητικά τον σχηματισμό που επιθυμούμε. Αποτελεί τετράγωνο πλευράς  $\simeq 2.29$ , σε ύψος  $= 0$ .

Ο πίνακας  $A_G$  είναι συμμετρικός και πραγματικός, άρα έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Το Λήμμα 2.1 εξασφαλίζει πως  $A_G > 0$ . Οι συναρτήσεις κόστους είναι γνήσια κυρτές ως προς τη μεταβλητή δράσης και εκ κατασκευής  $C^2$ . Ικανοποιείται επίσης το radial unboundedness, οπότε ικανοποιείται η Υπόθεση 1. Επιπλέον, ικανοποιείται και η Υπόθεση 2. Συγκεκριμένα, το game mapping του παραπάνω παιγνίου είναι  $\mu$ -ισχυρά μονότονο με  $\mu = \hat{\lambda}_{\min}(M) = 6$ . Επίσης, είναι και  $\partial_0$ -Lipschitz συνεχές με  $\partial_0 = \hat{\lambda}_{\max}(M) = 14$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως οι ιδιάζουσες τιμές του  $A_G$  ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του, αφού  $A_G > 0$ .

Σε αυτό το σημείο, εισάγουμε τη μορφή του γράφου επικοινωνίας. Αποτελεί συμμετρικό δακτύλιο με self-loops και απεικονίζεται παρακάτω. Αυτή η μορφή θα χρησιμοποιηθεί σε όλες μας τις προσομοιώσεις και θα προσδιορίζεται μοναδικά από το βάρος που θα επιλέγουμε για τα self-loops. Η προτεινόμενη τοπολογία ικανοποιεί την Υπόθεση 3.



Σχήμα 6.1: Γράφος Επικοινωνίας

Με χρήση του [25, Λήμ. 4] υπολογίζουμε άνω φράγμα στην επιτρεπτή τιμή της σταθεράς  $a$  που εμπλέκεται στον κανόνα ανανέωσης (3.7). Προκύπτει πως  $a_{max} = 0.0193$ . Επιπλέον, με βάση την Παρατήρηση 3, υπολογίζουμε την ανώτατη επιτρεπτή τιμή του βήματος εκμάθησης  $\gamma$ , η οποία προκύπτει ίση με  $\gamma_{max} = 0.0082$ . Τέλος, προσδιορίζουμε τον ελάχιστο αριθμό επαναλήψεων του gradient descent που προσεγγίζει ικανοποιητικά τη λύση ενός βήματος του PPPA (βλ. Παρατήρηση 4). Ο ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων είναι  $D_0 = 4$ .

### 6.1.3 Αποτελέσματα της Προσομοίωσης

Είμαστε σε θέση να σχεδιάσουμε τις παραμέτρους του συστήματος.

Πίνακας 6.2: Σταθερές Πρώτης Προσομοίωσης

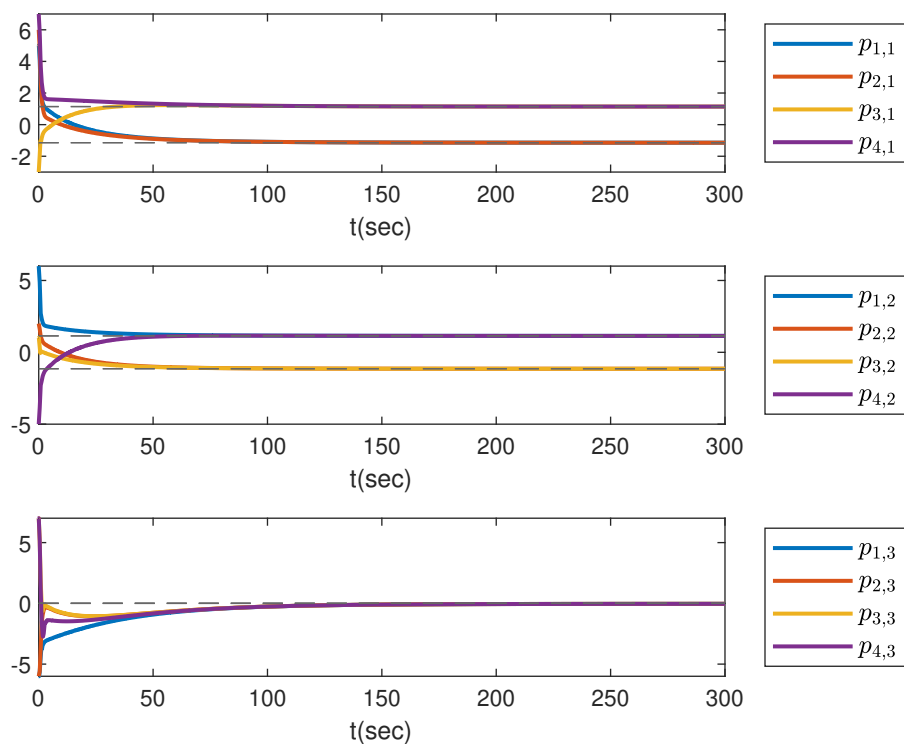
Φυσικές Σταθερές	
$g$ (Επιτάχυνση της βαρύτητας)	9.8m/s <sup>2</sup>
$m_i$ (Μάζα)	0.8kg
$ D_{i,j} $ (Συντελεστής Τριβής)	0.3kg/s
Σταθερές Επικοινωνίας	
$T$ (Περίοδος Δειγματοληψίας)	0.1s
$\tau_d$ (Deadzone)	$T/5$
$n$ (Σταθερά της Συνάρτησης Εξομάλυνσης)	2
$\epsilon_{sl}$ (Self-loop συντελεστής)	0.1
Σταθερές APPPA	
$a$ (Σταθερά των Regularization και Consensus)	$0.85 \cdot a_{max}$
$\gamma$ (Ρυθμός Εκμάθησης)	$0.95 \cdot \gamma_{max}$
$D$ (Επαναλήψεις Gradient Descent)	$D_0$
Σταθερές Συνάρτησης Επίδοσης	
$\delta_i$ (Ρυθμός Σύγκλισης)	0.07
$\phi_i^0$	5.4643
$\phi_i^\infty$ (Ανοχή στο Μόνιμο Σφάλμα)	0.05
Σταθερές Ελέγχου	
$u_{max}$ (Επίπεδο Κορεσμού)	$16\sqrt{3}$
$k_i$ (Κέρδος Ελέγχου)	20
$\lambda_1$ (Ρυθμός Μείωσης Σφάλματος)	10
$\beta_i$ (Ρυθμός Μείωσης Τροποποίησης Αναφοράς)	10

Παρακάτω αναφέρουμε σχεδιαστικές παραδοχές για όλες μας τις προσομοιώσεις και έπειτα παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από την τρέχουσα προσομοίωση.

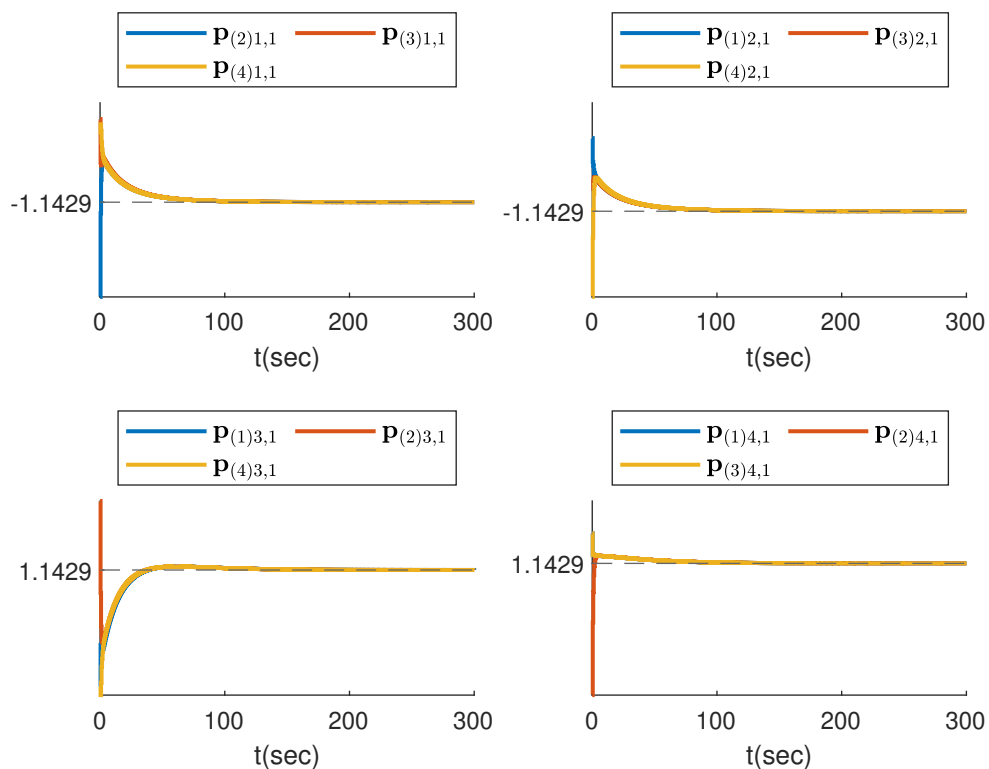
**Παρατήρηση 10.** Οι θέσεις και οι εκτιμήσεις αρχικοποιήθηκαν τυχαία. Κάθε συνιστώσα αρχικοποιείται ως ακέραιος αριθμός εντός του διαστήματος  $[-7, 7]$ . Οι συνιστώσες των ταχυτήτων αρχικοποιούνται τυχαία εντός του διαστήματος  $[-0.5, 0.5]$ .

**Παρατήρηση 11.** Τουίζουμε πως το  $\phi_i^0$  υπολογίστηκε ως  $5 + \max_{i \in [N]} \|v_i(0)\|_\infty$  για συμμετρία. Σε πραγματικές συνθήκες, πιθανόν θα έπρεπε να μας δίνεται κάποια global εκτίμηση του όρου  $\max_{i \in [N]} \|v_i(0)\|_\infty$  ή κάθε πράκτορας να έχει διαφορετική συνάρτηση επίδοσης.

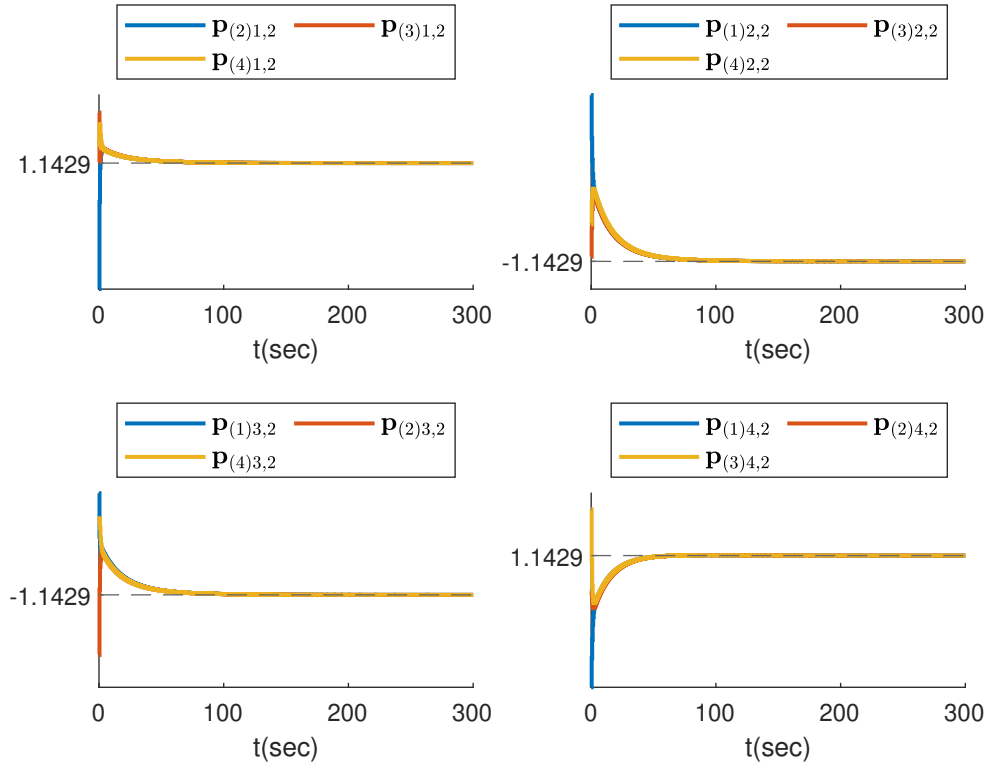
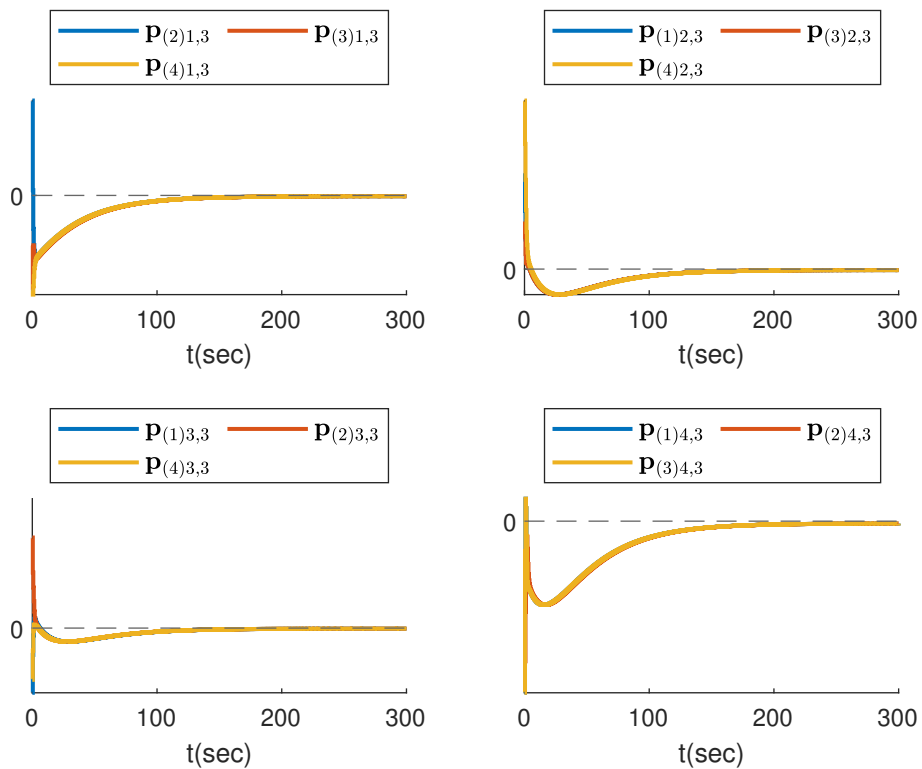
**Παρατήρηση 12.** Το απαραίτητο επίπεδο κορεσμού βρέθηκε δοκιμαστικά, τόσο επειδή το φράγμα που αναπτύξαμε είναι σύνθετο, αλληλά επειδή είναι και συντηρητικό [32, Παρατ. 7].

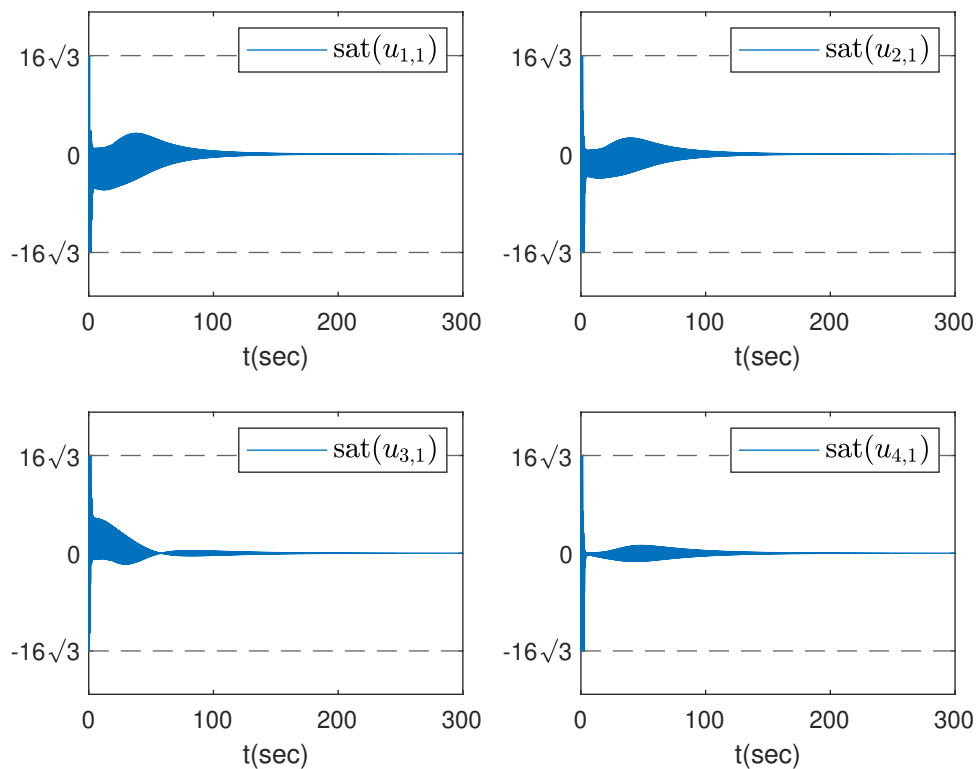


Σχήμα 6.2: Θέσεις

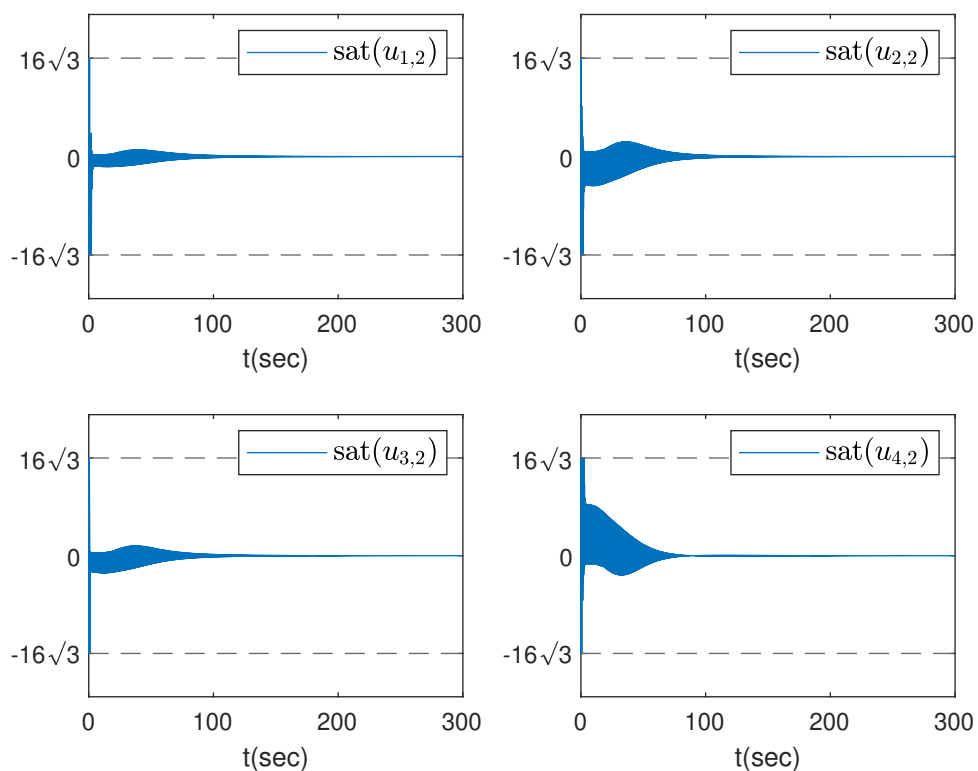


Σχήμα 6.3: Εκτιμήσεις  $x$ -Συνιστωσών

Σχήμα 6.4: Εκτιμήσεις  $y$ -ΣυνιστωσώνΣχήμα 6.5: Εκτιμήσεις  $z$ -Συνιστωσών

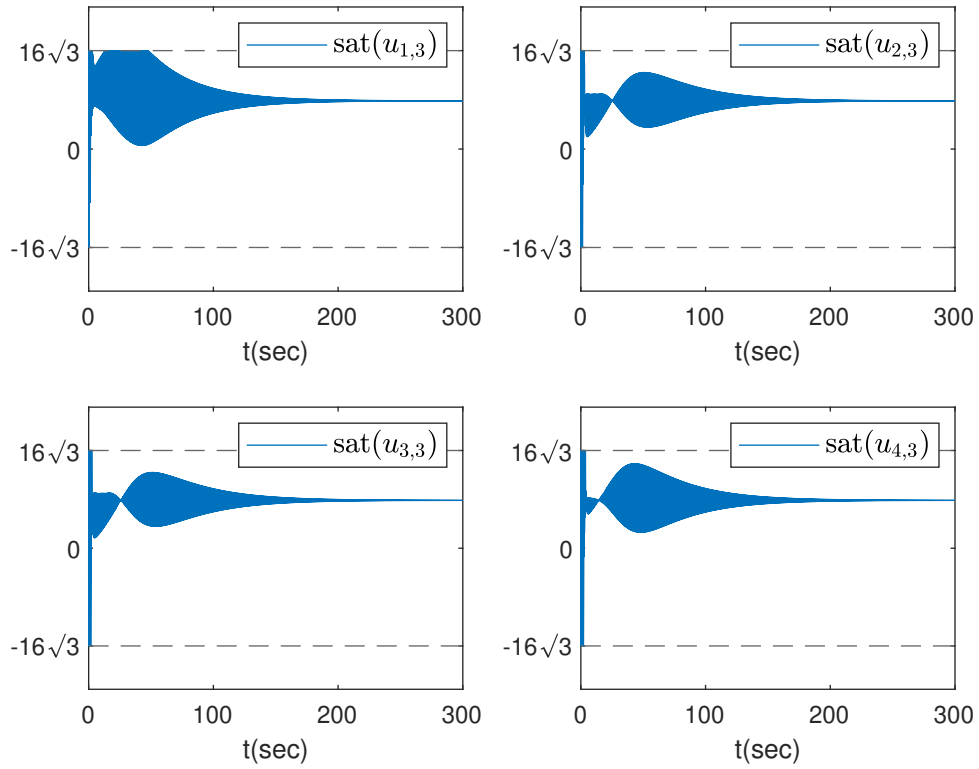


Σχήμα 6.6: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι  $x$ -Συνιστωσών

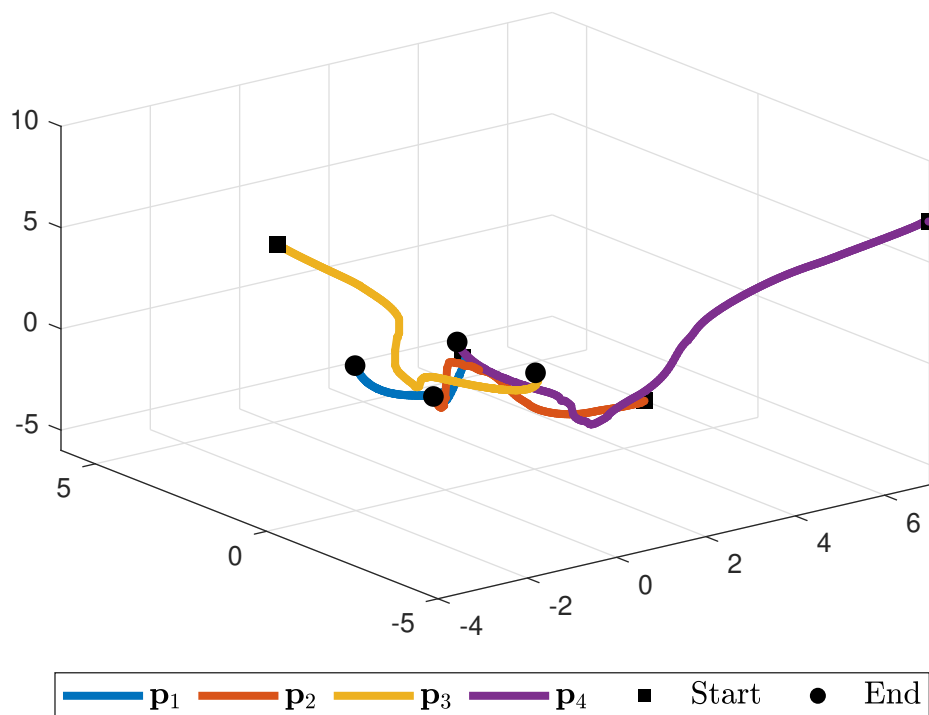


Σχήμα 6.7: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι  $y$ -Συνιστωσών

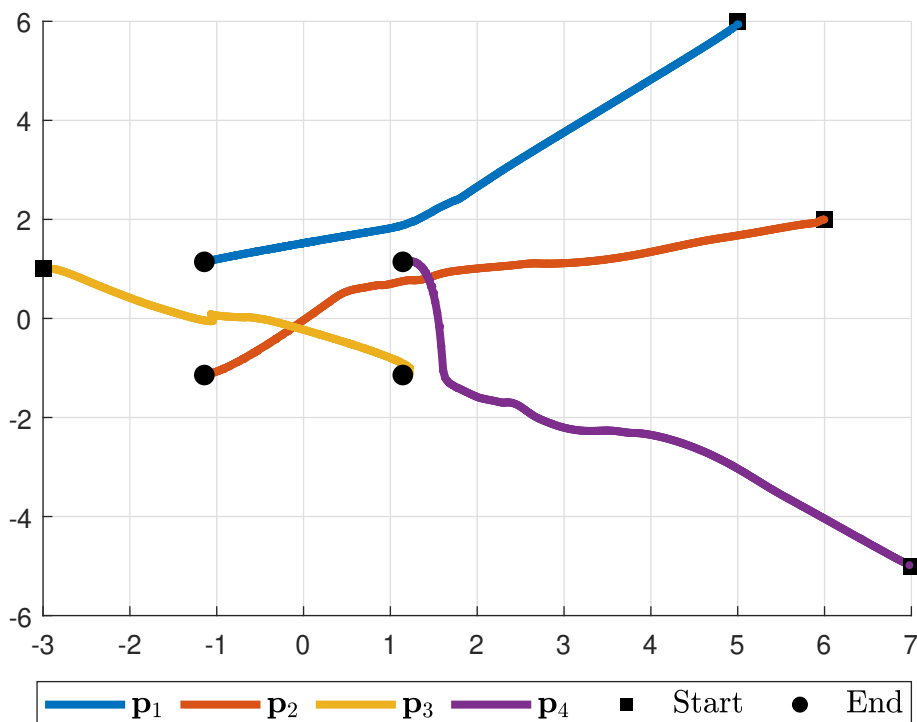




Σχήμα 6.8: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι z-Συνιστωσών



Σχήμα 6.9: Τροχιές Πρακτόρων



Σχήμα 6.10: Τροχιές Πρακτόρων (Κάτοψη)

**Παρατήρηση 13.** Στην αρχή της προσομοίωσης, οι βοηθητικές εισοδοί κάθε άξονα εμφανίζουν κορεσμό. Αυτό ενδεχομένως οφείλεται σε συνδυασμό της επιλογής του  $\phi_0$  και του ρυθμού σύγκλισης, της αρχικοποίησης των εκτιμήσεων και της αραής επικοινωνίας. Η ανάγκη για υψηλό επίπεδο κορεσμού προκύπτει από την ύπαρξη της βαρύτητας στον z-άξονα.

**Παρατήρηση 14.** Η δομή του παιχνιδιού στον z-άξονα, σε συνδυασμό με τη μεγάλη εξωτερική διαταραχή (βαρύτητα), οδηγούν σε αργή σύγκλιση στον άξονα αυτό και αυξημένες απαιτήσεις από τον ελεγκτή.

## 6.2 Επανεξέταση του Formation Control

### 6.2.1 Προπαρασκευή

Παρακάτω εξετάζουμε πιο σύνθετο τρόπο δημιουργίας πολυγωνικού σχηματισμού. Στόχος είναι να βρούμε το “πλησιέστερο” πολύγωνο. Θα επανέρθουμε παρακάτω στην έννοια του πλησιέστερου. Υποθέτουμε  $N$  πράκτορες που θέλουμε να σχηματίζουν κανονικό  $N$ -γωνο γύρω από κάποιο κεντρικό σημείο  $p_C$ , σε κοινό ύψος αυτό του κέντρου. Στο  $N$ -γωνο, ο  $i$ -οστός πράκτορας θα έχει ως γείτονα τους πράκτορες  $(i + 1 \bmod N)$  και  $(i - 1 \bmod N)$ . Τότε, για το επιθυμητό διάνυσμα θέσης του  $i$ -οστού πράκτορα, ισχύει πως

$$p_i^d = p_C + \begin{bmatrix} R \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot i}{N} + \vartheta\right) \\ R \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot i}{N} + \vartheta\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

όπου  $R$  η ακτίνα του  $N$ -γώνου και  $\vartheta$  η γωνία στροφής του πολυγώνου. Για τη διαφορά των επιθυμητών διανυσμάτων, μεταξύ των πρακτόρων  $i, j$  ισχύει πως

$$p_i^d - p_j^d = R \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi i}{N} + \vartheta\right) - \cos\left(\frac{2\pi j}{N} + \vartheta\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi i}{N} + \vartheta\right) - \sin\left(\frac{2\pi j}{N} + \vartheta\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Χρησιμοποιούμε βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για τη διαφορά ημιτόνων και συνημιτόνων και καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση,

$$p_i^d - p_j^d = 2 \sin\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right) \begin{bmatrix} -R \sin\left(\frac{\pi \cdot (i+j)}{N} + \vartheta\right) \\ R \cos\left(\frac{\pi \cdot (i+j)}{N} + \vartheta\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Στόχος μας είναι να αποπλέξουμε την παραπάνω εξίσωση από τα  $R$  και  $\vartheta$ . Θέλουμε να είναι αυθαίρετα, ώστε να αποτελούν βαθμούς ελευθερίας για την εύρεση του πλησιέστερου πολυγώνου. Αρχίζουμε με τον παρακάτω μετασχηματισμό,

$$p_i^d - p_j^d = 2 \sin\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right) \text{Rot}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} R \cos\left(\frac{\pi \cdot (i+j)}{N} + \vartheta\right) \\ R \sin\left(\frac{\pi \cdot (i+j)}{N} + \vartheta\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Συνεχίζουμε παραγοντοποιώντας τον τελευταίο όρο της προηγούμενης έκφρασης,

$$p_i^d - p_j^d = 2 \sin\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right) \text{Rot}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & -\sin\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & \cos\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \cos\left(\frac{\pi \cdot 2j}{N} + \vartheta\right) \\ R \sin\left(\frac{\pi \cdot 2j}{N} + \vartheta\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Ο πίνακας που εμφανίσαμε είναι ουσιαστικά ο πίνακας  $\text{Rot}_z\left(\frac{\pi \cdot (i-j)}{N}\right)$  με μηδενισμένη την τελευταία του γραμμή. Σύμφωνα με τριγωνομετρικές ταυτότητες για το ημίτονο και το συνημίτονο διπλού τόξου, έχουμε πως

$$p_i^d - p_j^d = \text{Rot}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & -1 + \cos\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & 0 \\ 1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & \sin\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \cos\left(\frac{\pi \cdot 2j}{N} + \vartheta\right) \\ R \sin\left(\frac{\pi \cdot 2j}{N} + \vartheta\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Απλοποιούμε περαιτέρω την προκύπτουσα έκφραση, αποτιμώντας το γινόμενο πινάκων,

$$p_i^d - p_j^d = \begin{bmatrix} -1 + \cos\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & -1 + \cos\left(\frac{2\pi \cdot (i-j)}{N}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \cos\left(\frac{\pi \cdot 2j}{N} + \vartheta\right) \\ R \sin\left(\frac{\pi \cdot 2j}{N} + \vartheta\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.4), καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση για την επιθυμητή διαφορά,

$$p_i^d - p_j^d = \begin{bmatrix} -1 + \cos\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & -1 + \cos\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (p_j^d - p_C). \quad (6.11)$$

Ορίζουμε με βάση την εξίσωση (6.11), για κάθε  $i, j \in [N]$ , τον πίνακα

$$R_{i,j} := \begin{bmatrix} -1 + \cos\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & -1 + \cos\left(\frac{2\pi(i-j)}{N}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Επιπλέον, ορίζουμε τους παρακάτω πίνακες προβολών,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Οι παραπάνω πίνακες είναι συμμετρικοί και ταυτοδύναμοι (idempotent).

### 6.2.2 Διατύπωση του Παιγνίου

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τις συναρτήσεις κόστους για το formation πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε. Ο σχηματισμός που επιδιώκουμε συνοψίζεται στις δύο παρακάτω συνθήκες, για κάθε  $i, j \in [N]$ ,

$$P_1(p_i^d - p_j^d) = R_{i,j}(p_j^d - p_C), \quad (6.14)$$

$$P_2(p_i^d - p_C) = \mathbf{0}. \quad (6.15)$$

Η πρώτη συνθήκη ισοδυναμεί με τη διατήρηση του πολυγωνικού σχηματισμού όπως αυτός περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας, ενώ η δεύτερη περιγράφει τη διατήρηση του ύψους των πρακτόρων, στο ύψος του κέντρου. Εισάγουμε την εξής μορφή τετραγωνικής συνάρτησης κόστους,

$$J_i(p_i, p_{-i}) := \frac{e}{2} \sum_{j \in [N]} \|P_1(p_i - p_j) - R_{i,j}(p_j - p_C)\|^2 + \frac{f}{2} \|P_1(p_i - p_i^{[0]})\|^2 + \frac{c}{2} \|P_2(p_i - p_C)\|^2. \quad (6.16)$$

Ο πρώτος όρος και τρίτος όρος επιδιώκουν, όπως προαναφέραμε, τον σχηματισμό ενός  $N$ -γώνου σε κοινό ύψος γύρω από το  $p_C$ . Υπάρχουν πολλοί τέτοιοι σχηματισμοί διαφορετικής ακτίνας, όπως και γωνίας στροφής. Γι' αυτό προσθέτουμε τον δεύτερο όρο ο οποίος επιχειρεί να διαλέξει τον σχηματισμό που βρίσκεται το πλησιέστερο δυνατό στις αρχικές θέσεις των πρακτόρων.

### 6.2.3 Ιδιότητες του Παιγνίου

Συνεχίζουμε δείχνοντας πως το παίγνιο δύναται να ικανοποιεί τις Υποθέσεις 1 και 2. Το game mapping αποτελείται από όρους της μορφής,

$$\nabla_i J_i(p_i, p_{-i}) = e \sum_{j \in [N]} (P_1 p_i - (P_1 + R_{ij}) p_j + R_{ij} p_C) + f \cdot P_1 p_i - f \cdot P_1 p_i^{[0]} + c \cdot P_2 p_i - c \cdot P_2 p_C. \quad (6.17)$$

Επιμερίζουμε και αντικαθιστούμε το  $R_{ij}$  σύμφωνα με την εξίσωση (6.12),

$$\begin{aligned} \nabla_i J_i(p_i, p_{-i}) &= ((N \cdot e + f)P_1 + cP_2)p_i - e \sum_{j \in [N]} P_1 \text{Rot}_z \left( \frac{2\pi \cdot (i-j)}{N} \right) p_j \\ &\quad + e \left( \sum_{j \in [N]} R_{ij} \right) p_C - f \cdot p_i^{[0]} - c \cdot P_2 p_C. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Έστω  $\mathbf{i}$  η φανταστική μονάδα. Από την ταυτότητα  $\sum_{k \in [N]} \exp(-\mathbf{i} \frac{2\pi k}{N}) = 0$ , έχουμε πως

$$\sum_{j \in [N]} R_{ij} = -N \cdot P_1, \quad (6.19)$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} \nabla_i J_i(p_i, p_{-i}) &= ((N \cdot e + f)P_1 + cP_2)p_i - e \sum_{j \in [N]} P_1 \text{Rot}_z \left( \frac{2\pi \cdot (i-j)}{N} \right) p_j \\ &\quad - eN \cdot P_1 p_C - f \cdot P_1 p_i^{[0]} - c \cdot P_2 p_C. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Με βάση την (6.20), το game mapping και αυτού του παιγνίου μπορεί επίσης να γραφθεί στη μορφή  $F(p) = A_G p + B_G$ . Ο πίνακας  $B_G$  είναι ίσος με

$$B_G = -eN(\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes P_1 p_C) - c(\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes P_2 p_C) - f(\mathbf{1}_{N \times 1} \otimes P_1 p^{[0]}). \quad (6.21)$$

Σε αυτό το σημείο επιλέγουμε  $c := (N-1)e + f$ . Ο πίνακας  $A_G$  είναι ένας  $3N \times 3N$  πίνακας που αποτελείται από τα εξής blocks διαστάσεων  $3 \times 3$ ,

$$\begin{cases} A_{ii} = ((N-1)e + f)\mathbb{I}_3, \\ A_{ij} = -e \cdot P_1 \text{Rot}_z \left( \frac{2\pi \cdot (i-j)}{N} \right), i \neq j. \end{cases} \quad (6.22)$$

Παρατηρούμε πως  $A_{ij} = A_{ji}^T$  για κάθε  $i, j \in [N]$ , συνεπώς, ο πίνακας  $A_G$  είναι συμμετρικός. Επιπλέον, σύμφωνα με το Θεώρημα Gershgorin για block πίνακες [7] και το γεγονός πως οι πίνακες περιστροφής έχουν μοναδιαία 2-νόρμα, ισχύει πως

$$\sigma(A_G) \subseteq D((N-1)e + f, (N-1)e), \quad (6.23)$$

δηλαδή πως το φάσμα του  $A_G$ , περιέχεται εντός δίσκου κέντρου  $(N-1)e + f$  και ακτίνας  $(N-1)e$ , στο μιγαδικό επίπεδο. Αφού ο  $A_G$  έχει πραγματικές ιδιοτιμές όντας συμμετρικός

και πραγματικός, καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα για το φάσμα του,

$$f \leq \hat{\lambda} \leq 2 \cdot (N - 1)e + f, \forall \hat{\lambda} \in \sigma(A_G). \quad (6.24)$$

Επιλέγοντας  $f \geq 0$ , διασφαλίζουμε πως  $A_G > 0$  και άρα πως το game mapping ικανοποιεί την Υπόθεση 2.

Οι συναρτήσεις κόστους είναι  $C^2$  και γνήσια κυρτές ως προς τις μεταβλητές δράσεις τους, αφού  $A_G > 0$ . Για να αποδείξουμε το radial unboundedness ως προς τη μεταβλητή δράσης, αρχίζουμε από την παρακάτω ανισότητα,

$$J_i(p_i, p_{-i}) \geq \frac{f}{2} \|P_1(p_i - p_i^{[0]})\|^2 + \frac{c}{2} \|P_2(p_i - p_C)\|^2. \quad (6.25)$$

Έστω  $m_{e,f} := 0.5 \cdot \min\{e, f\}$  και  $\epsilon_1 := P_1 p_i^{[0]}$ ,  $\epsilon_2 := P_2 p_C$ . Τότε, ισχύει πως

$$J_i(p_i, p_{-i}) \geq m_{e,f} \|P_1(p_i - p_i^{[0]})\|^2 + m_{e,f} \|P_2(p_i - p_C)\|^2 \quad (6.26)$$

$$\geq m_{e,f} \|P_1 p_i\|^2 - 2m_{e,f} \langle P_1 p_i, \epsilon_1 \rangle + m_{e,f} \|P_2 p_i\|^2 - 2m_{e,f} \langle P_2 p_i, \epsilon_2 \rangle. \quad (6.27)$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε πως,

$$J_i(p_i, p_{-i}) \geq m_{e,f} \|P_1 p_i\|^2 - 2m_{e,f} \|P_1 p_i\| \|\epsilon_1\| + m_{e,f} \|P_2 p_i\|^2 - 2m_{e,f} \|P_2 p_i\| \|\epsilon_2\| \quad (6.28)$$

$$\geq m_{e,f} \|P_1 p_i\|^2 + m_{e,f} \|P_2 p_i\|^2 - 4m_{e,f} \max\{\|\epsilon_1\|, \|\epsilon_2\|\} \cdot \max\{\|P_1 p_i\|, \|P_2 p_i\|\}. \quad (6.29)$$

Εξ ορισμού των προβολικών πινάκων  $P_1$  και  $P_2$ , ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\|P_1 p_i\|^2 + \|P_2 p_i\|^2 = \|p_i\|^2, \quad (6.30)$$

$$\max\{\|P_1 p_i\|, \|P_2 p_i\|\} \leq \|p_i\|. \quad (6.31)$$

Αν τις εφαρμόσουμε στην ανισότητα (6.29), καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα από την οποία προκύπτει το radial unboundedness και άρα η ικανοποίηση της Υπόθεσης 1,

$$J_i(p_i, p_{-i}) \geq m_{e,f} \|p_i\|^2 - 4m_{e,f} \max\{\|\epsilon_1\|, \|\epsilon_2\|\} \cdot \|p_i\|. \quad (6.32)$$

Πίνακας 6.3: Σταθερές Δεύτερου Παιγνίου

$e$	2
$f$	1
$c$	$(N - 1)e + f$
$p_C$	$[0, 0, 1]^T$

Επιλέγοντας τις παραπάνω σταθερές για τις συναρτήσεις κόστους και την αρχική διάταξη,

$$p_1^{[0]} = [-1, -4, -2]^T, p_2^{[0]} = [-3, -4, 4]^T,$$

$$p_3^{[0]} = [5, -1, -7]^T, p_4^{[0]} = [2, 2, 2]^T,$$

η ισορροπία Nash του παιγνίου προκύπτει ίση με

$$p_1^* = [-2.7778, 0, 1]^T, p_2^* = [-0.7778, -3.1111, 1]^T, \\ p_3^* = [3.2222, -0.5556, 1]^T, p_4^* = [0.6667, 2.8889, 1]^T,$$

που αποτελεί προσεγγιστικά τετράγωνο πλευράς  $\simeq 4$  σε ύψος = 1.

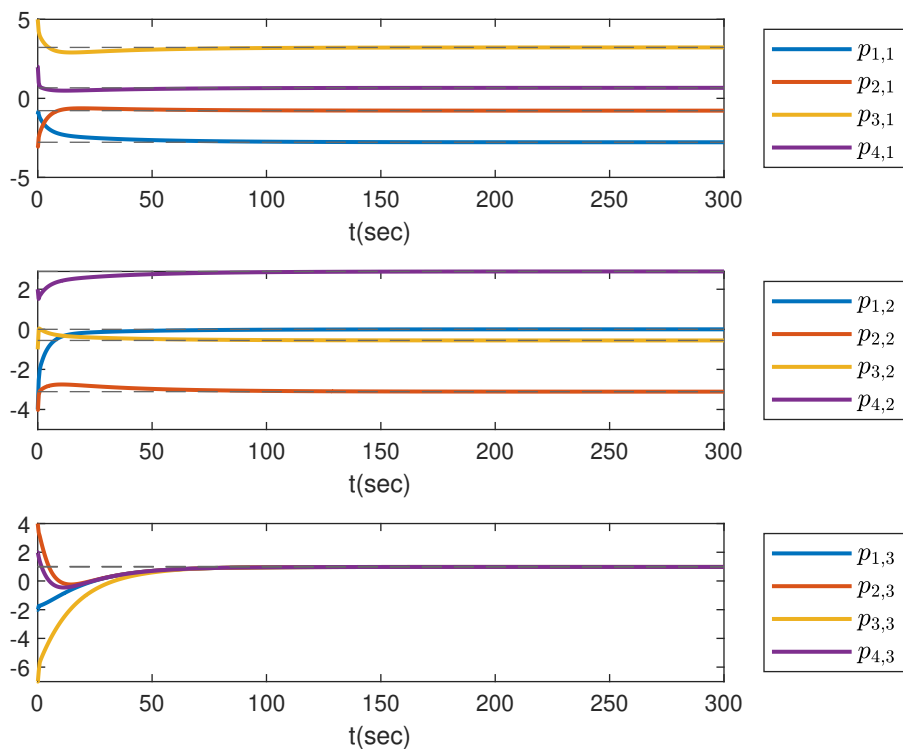
Όσον αφορά τις χαρακτηριστικές σταθερές του παιγνίου, το game mapping του είναι  $\mu$ -ισχυρά μονότονο με  $\mu = \hat{l}_{\min}(A_G) = 1$  και  $\partial_0$ -Lipschitz συνεχές με  $\partial_0 = \hat{l}_{\max}(A_G) = 9$ . Αντίστοιχα με πριν, υπολογίζουμε άνω φράγματα για τις tunable παραμέτρους του PPPA. Έχουμε πως  $a_{\max} = 0.01$  και  $\gamma_{\max} = 0.0042$ . Τέλος, ο ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων είναι  $D_0 = 4$ .

### 6.2.4 Αποτελέσματα της Προσομοίωσης

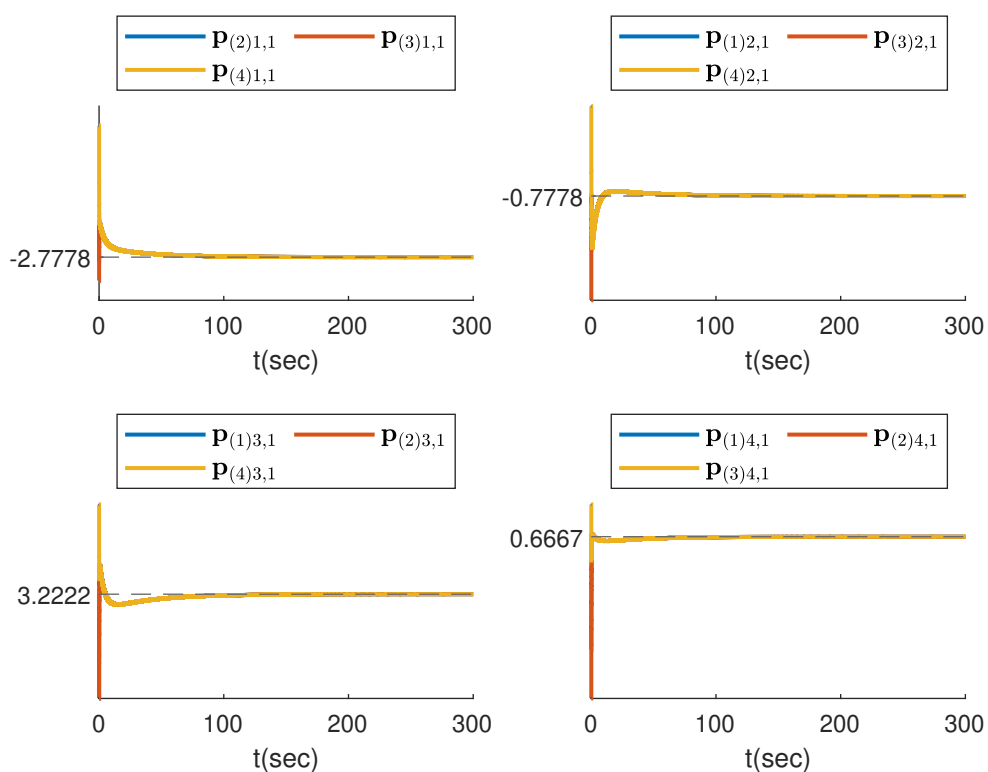
Παραθέτουμε τις σχεδιαστικές μας επιλογές για τις παραμέτρους του συστήματος, όπως και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις. Τονίζουμε την ανάγκη για χαμηλή περίοδο δειγματοληψίας, που μεταφράζεται στην ανάγκη για διεκπεραίωση πολλών επαναλήψεων του αλγορίθμου σε μικρό χρονικό διάστημα.

Πίνακας 6.4: Σταθερές Δεύτερης Προσομοίωσης

Φυσικές Σταθερές	
$g$ (Επιτάχυνση της βαρύτητας)	9.8m/s <sup>2</sup>
$m_i$ (Μάζα)	0.8kg
$ D_{i,j} $ (Συντελεστής Τριβής)	0.3kg/s
Σταθερές Επικοινωνίας	
$T$ (Περίοδος Δειγματοληψίας)	0.01s
$\tau_d$ (Deadzone)	$T/5$
$n$ (Σταθερά της Συνάρτησης Εξομάλυνσης)	2
$\epsilon_{sl}$ (Self-loop συντελεστής)	0.1
Σταθερές APPPA	
$a$ (Σταθερά των Regularization και Consensus)	$0.85 \cdot a_{\max}$
$\gamma$ (Ρυθμός Εκμάθησης)	$0.95 \cdot \gamma_{\max}$
$D$ (Επαναλήψεις Gradient Descent)	$D_0$
Σταθερές Συνάρτησης Επίδοσης	
$\delta_i$ (Ρυθμός Σύγκλισης)	0.05
$\phi_i^0$	5.3876
$\phi_i^\infty$ (Ανοχή στο Μόνιμο Σφάλμα)	0.05
Σταθερές Ελέγχου	
$u_{\max}$ (Επίπεδο Κορεσμού)	$20\sqrt{3}$
$k_i$ (Κέρδος Ελέγχου)	30
$\hat{l}_1$ (Ρυθμός Μείωσης Σφάλματος)	20
$\beta_i$ (Ρυθμός Μείωσης Τροποποίησης Αναφοράς)	10

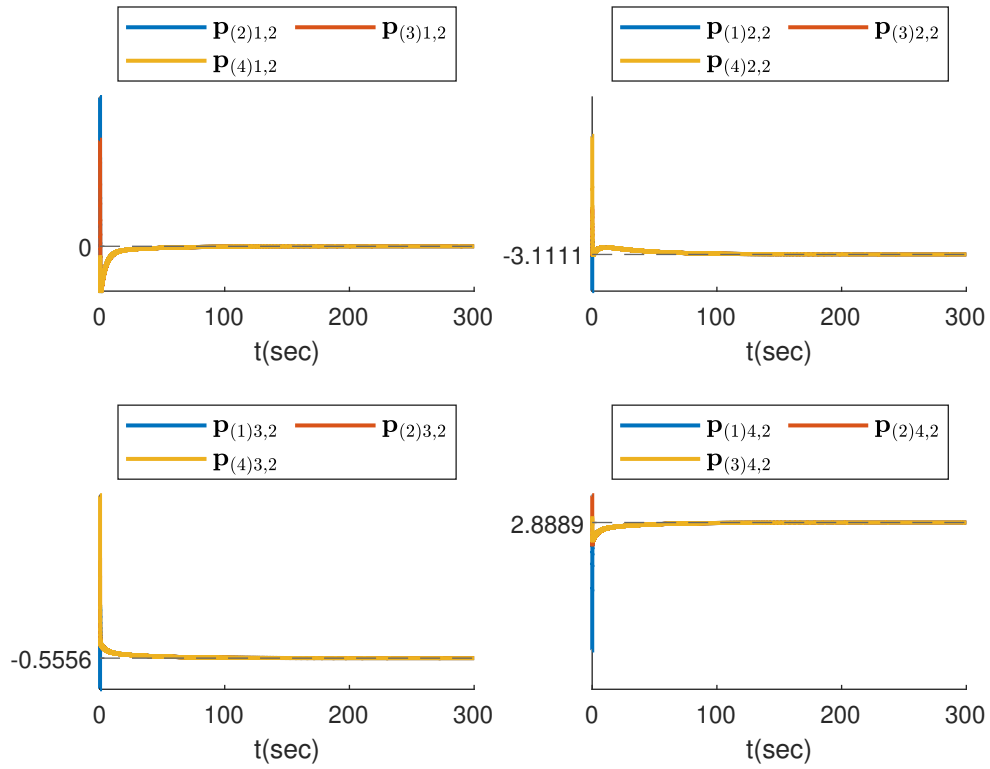
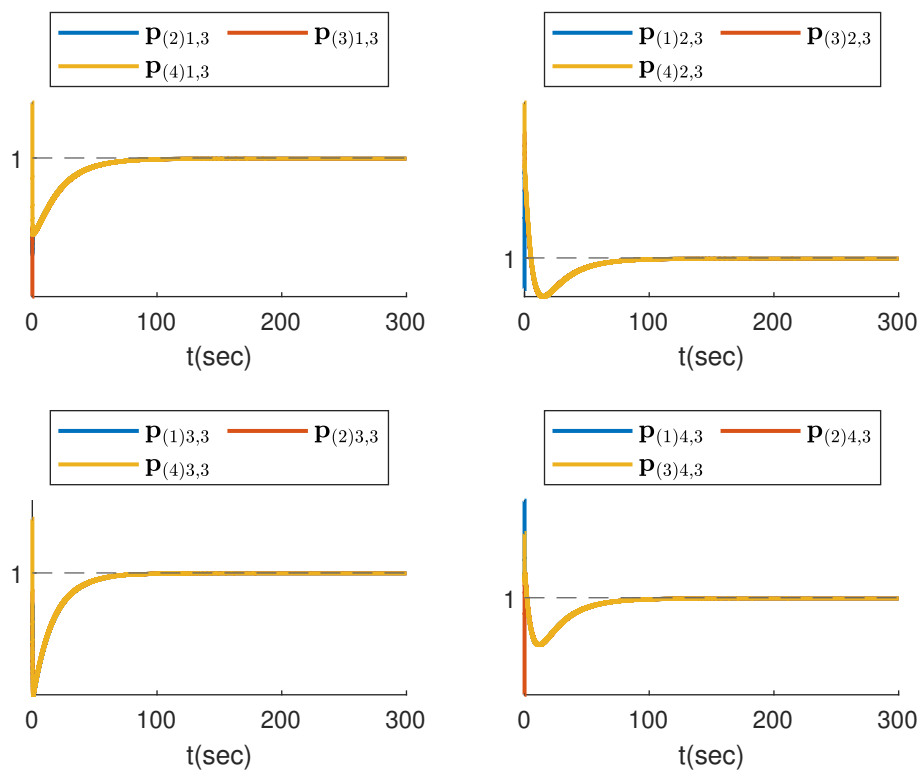


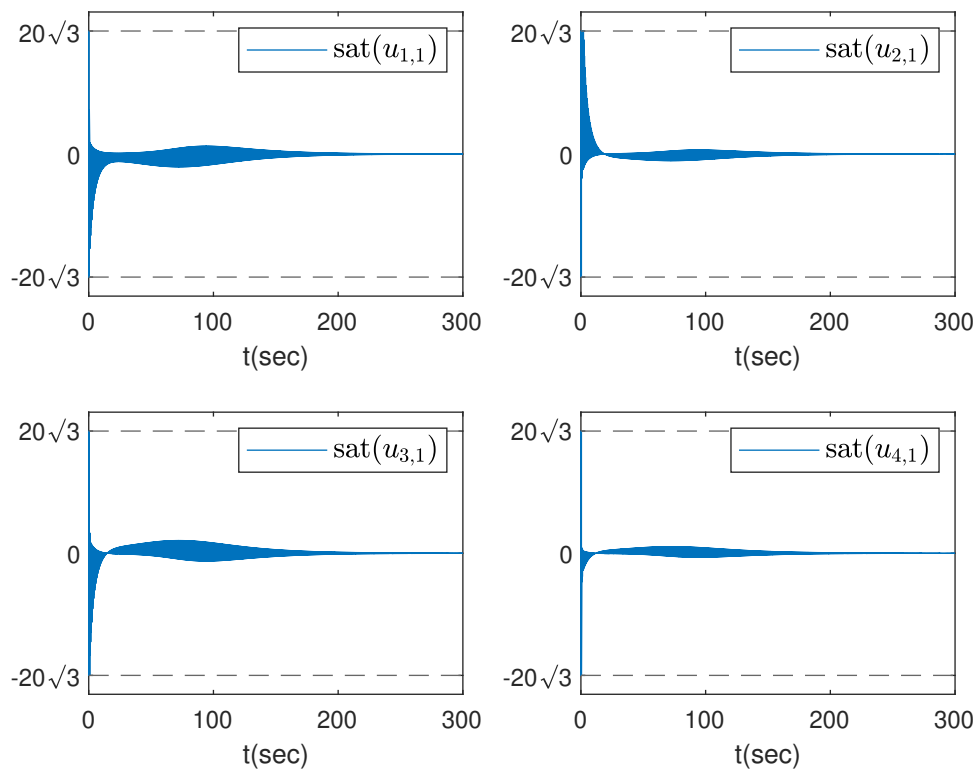
Σχήμα 6.11: Θέσεις



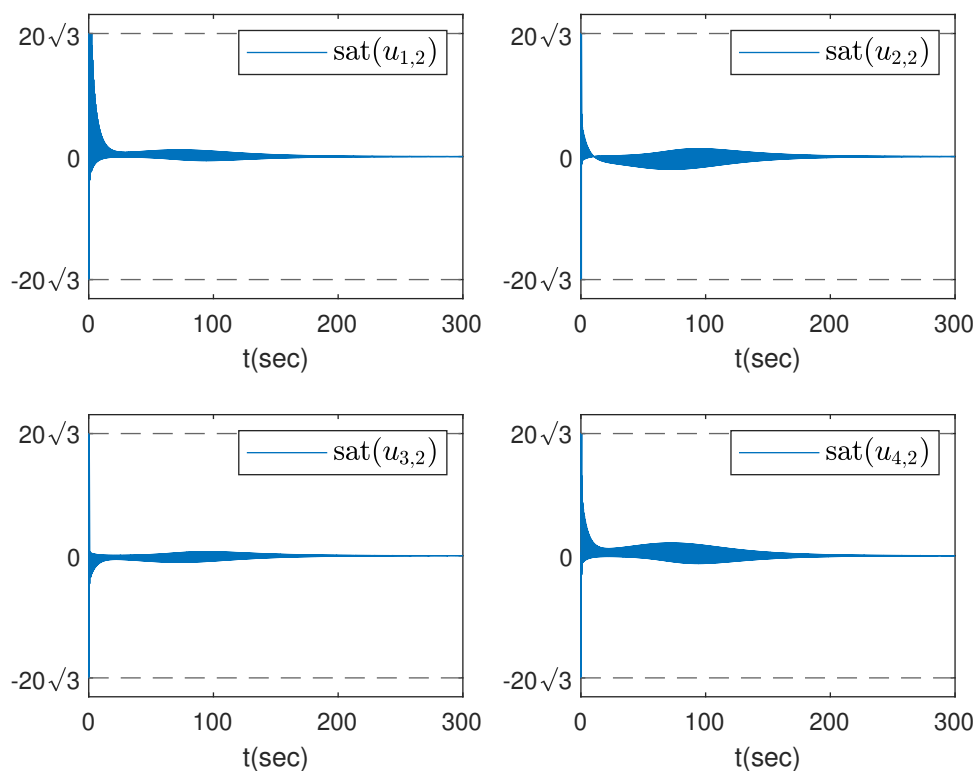
Σχήμα 6.12: Εκτιμήσεις x-Συνιστωσών



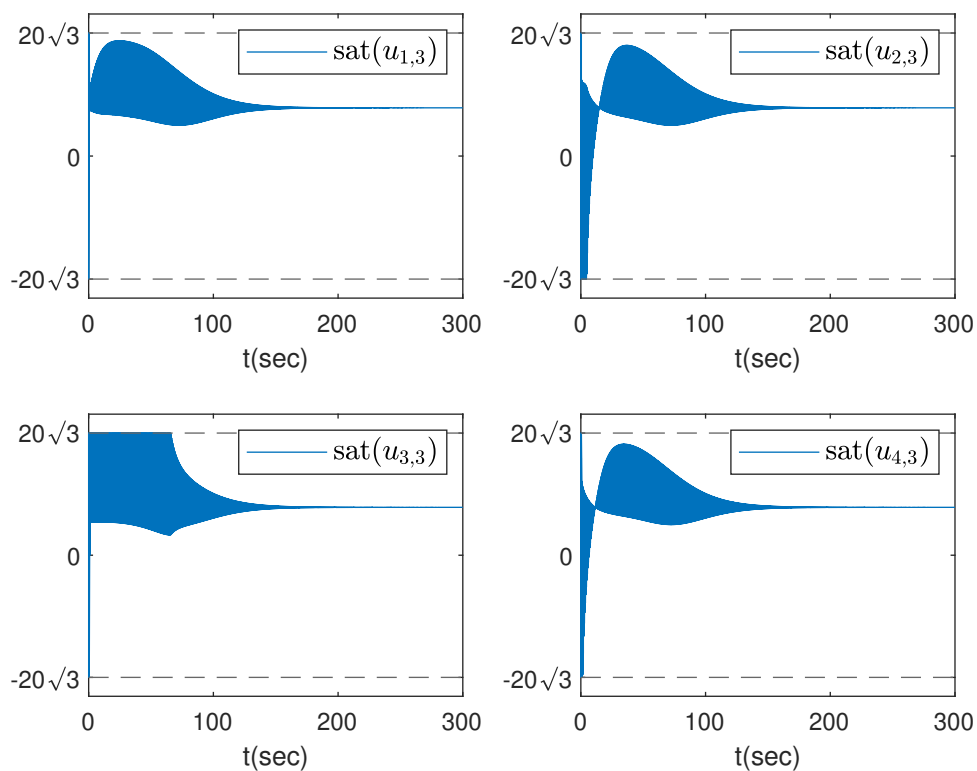
Σχήμα 6.13: Εκτιμήσεις  $y$ -ΣυνιστωσώνΣχήμα 6.14: Εκτιμήσεις  $z$ -Συνιστωσών



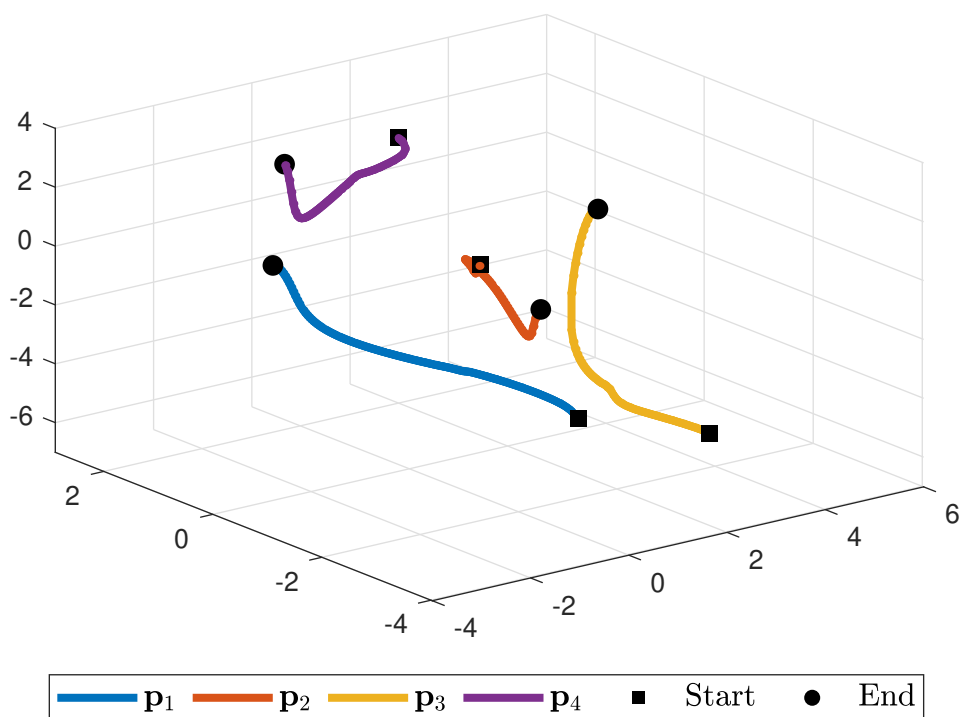
Σχήμα 6.15: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι  $x$ -Συνιστωσών



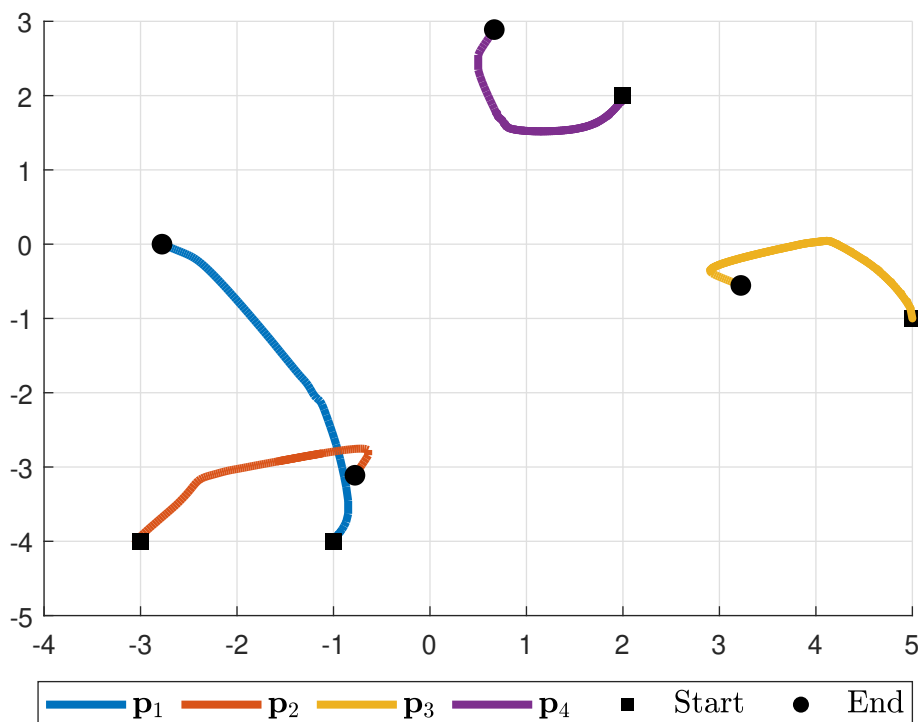
Σχήμα 6.16: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι  $y$ -Συνιστωσών



Σχήμα 6.17: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι z-Συνιστωσών



Σχήμα 6.18: Τροχιές Πρακτόρων



Σχήμα 6.19: Τροχιές Πρακτόρων (Κάτοψη)

**Παρατήρηση 15.** Βλέπουμε πως το μήκος σχεδόν όλων των τροχιών είναι μικρό, που σημαίνει ότι πετύχαμε σε κάποιο βαθμό την εύρεση του πλησιέστερου σχηματισμού. Τα μήκη θα μπορούσαν να μειωθούν περισσότερο, εάν η διάταξη των πρακτόρων στο σχηματισμό ήταν ελεύθερη μεταβλητή προς βελτιστοποίηση.

**Παρατήρηση 16.** Παρά το πλεονέκτημα της απλής μορφής και ανάλυσης των συναρτήσεων κόστους που επιλέξαμε, αντιμετωπίζουμε πρόβλημα με την ταχύτητα σύγκλισης. Υπάρχει ανάγκη για μεγάλη τιμή του συντελεστή  $f$ , έτσι ώστε η σταθερά ισχυρής μονοτονίας,  $\mu$ , να μην είναι πολύ μικρότερη από τη Lipschitz σταθερά,  $\theta_0$  και να μπορεί ο APPPA να συγκλίνει πιο γρήγορα. Ωστόσο, η αλόγιστη αύξηση του συντελεστή  $f$ , θυσιάζει σημαντικά τον επιθυμητό πολυγωνικό σχηματισμό. Στην παραπάνω προσομοίωση, χρειάστηκε πολύ μικρή περίοδος δειγματοληψίας για να λάβουμε έναν σχηματισμό που μοιάζει τετραγωνικός.

## 6.3 Σύγκριση με την S-GRANE σχεδίαση

### 6.3.1 Διατύπωση του Παιγνίου

Ολοκληρώνουμε τις προσομοιώσεις, συγκρίνοντας την ASPPPA σχεδίαση με την S-GRANE σχεδίαση [5]. Σε αντίθεση με την ASPPPA σχεδίαση, η S-GRANE σχεδίαση δεν υποθέτει κορεσμό εισόδου. Επεκτείνουμε στις τρεις διαστάσεις το παίγνιο που χρησιμοποιείται στο προαναφερθέν άρθρο. Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις συναρτήσεων κόστους είναι της μορφής

$$J_i(p_i, p_{-i}) := \frac{e_i}{2} \sum_{j \in [N]} \|P_1(p_i - p_j - h_{ij})\|^2 + \frac{f_i}{2} \|P_1(p_i - p_{mi})\|^2 + \frac{c_i}{2} \|P_2 p_i\|^2, \quad (6.33)$$

όπου  $P_1$  και  $P_2$  οι προβολικοί πίνακες που ορίσαμε στην (6.13).

Πίνακας 6.5: Σταθερές Τρίτου Παιγνίου

$e_i$	$\frac{1}{6} \cdot i$
$f_i$	$10 + \frac{1}{6} \cdot i$
$c_i$	10.1941
$p_{mx}$	$[1, -4, 8, -9, 13]^T$
$p_{my}$	$\mathbf{0}_{N \times 1}$
$p_{mz}$	$\mathbf{0}_{N \times 1}$
$h_{1x}$	$[0, 5, -7, 9, -8]^T$
$h_{2x}$	$[-5, 0, -6, 2, -9]^T$
$h_{3x}$	$[7, 6, 0, 7, -4]^T$
$h_{4x}$	$[-9, -2, -7, 0, -2]^T$
$h_{5x}$	$[8, 9, 4, 2, 0]^T$
$h_y$	$\mathbf{0}_{N^2 \times 1}$
$h_z$	$\mathbf{0}_{N^2 \times 1}$

Παραπάνω παραθέτουμε τις επιλογές μας για τις σταθερές του επεκτεταμένου παιγνίου. Συμβολίζουμε με  $p_{mx}$  το διάνυσμα  $p_{mx} := \text{col}((p_{mix})_{i \in [N]})$ , όπου  $p_{mix}$  η  $x$ -συνιστώσα του διανύσματος  $p_{mi}$ . Επίσης, συμβολίζουμε με  $h_x$  το διάνυσμα  $h_x := \text{col}((h_{ix})_{i \in [N]})$ , όπου  $h_{ix} := \text{col}((h_{ijx})_{j \in [N]})$ . Αναλόγως ορίζονται και τα υπόλοιπα διανύσματα που εμφανίζονται στον παραπάνω πίνακα.

### 6.3.2 Ιδιότητες του Παιγνίου

Η ισορροπία Nash του παραπάνω παιγνίου προκύπτει ίση με

$$p_1^* = [1.0373, 0, 0]^T, p_2^* = [-3.7094, 0, 0]^T, p_3^* = [7.4023, 0, 0]^T, \\ p_4^* = [-7.4067, 0, 0]^T, p_5^* = [11.1367, 0, 0]^T.$$

Αποτελεί σχηματισμό ευθείας παράλληλης στον  $x$ -άξονα.

Όπως και στα προηγούμενα παίγνια, έτσι και σε αυτό, το game mapping μπορεί να γραφθεί στη μορφή  $F(p) = A_G p + B_G$ . Το επεκτεταμένο παίγνιο ικανοποιεί την Υπόθεση 1 με επιχειρηματολογία ανάλογη αυτής για το προηγούμενο παίγνιο. Επίσης, ικανοποιείται και η Υπόθεση 2 με ανάλυση όμοια αυτής του [5] και των προηγούμενων παιγνίων. Καταλήγουμε πως το game mapping του παραπάνω παιγνίου είναι  $\mu$ -ισχυρά μόνोटονο με  $\mu = \beta_{\min}(\frac{1}{2}(A_G + A_G^T)) = 10.1941$ . Επίσης, είναι και  $\partial_0$ -Lipschitz συνεχές με  $\partial_0 = \sigma_{\max}(A_G) = 14.6883$ , όπου  $\sigma_{\max}(A_G)$  η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του  $A_G$ . Για τις tunable παραμέτρους του PPPA, καταλήγουμε στις εξής ανώτατες τιμές τους,  $a_{\max} = 0.0173$  και  $\gamma_{\max} = 0.0074$ . Το ελάχιστο μήκος παραθύρου μεταξύ διαδοχικών επικοινωνιών προκύπτει ίσο με  $D_0 = 3$ .

### 6.3.3 Αποτελέσματα της Προσομοίωσης

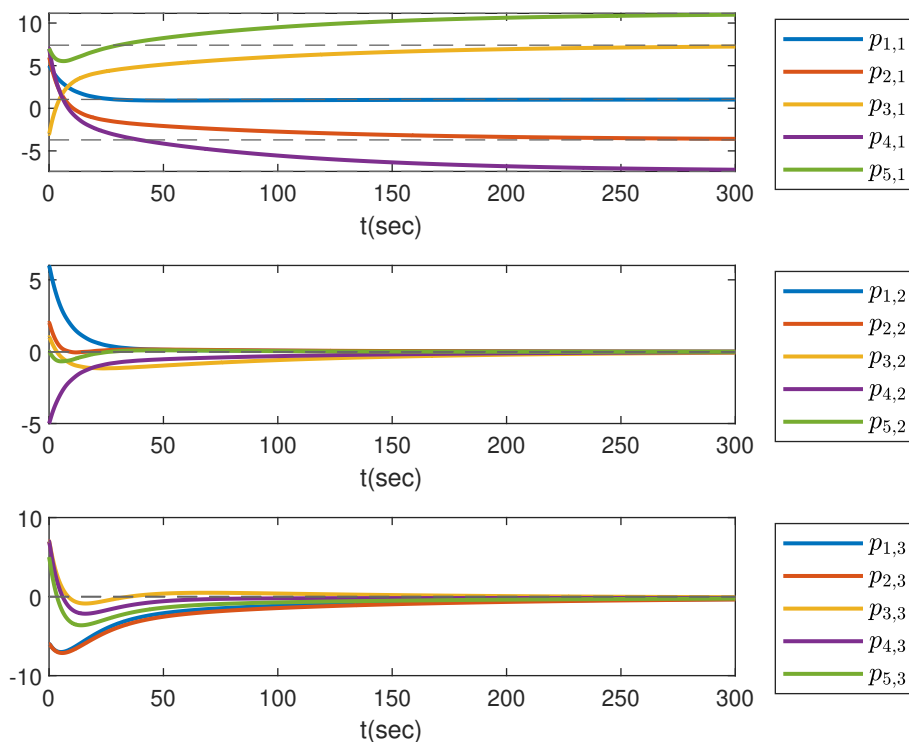
Ολοκληρώνουμε την επιλογή του παιγνίου, εισάγοντας ημιτονοειδή διαταραχή στους άξονες  $x, y$ , ακολουθώντας τη λογική της προσομοίωσης στην οποία βασιζόμαστε. Η διαταραχή  $d_i$  στο σύστημα (5.8), είναι της μορφής  $d_i(t) = \left[ \frac{0.1}{m_i} \cdot \cos(t + i\frac{\pi}{6}), \frac{0.1}{m_i} \cdot \sin(t + i\frac{\pi}{6}), -g \right]^T$ .

**S-GRANE**

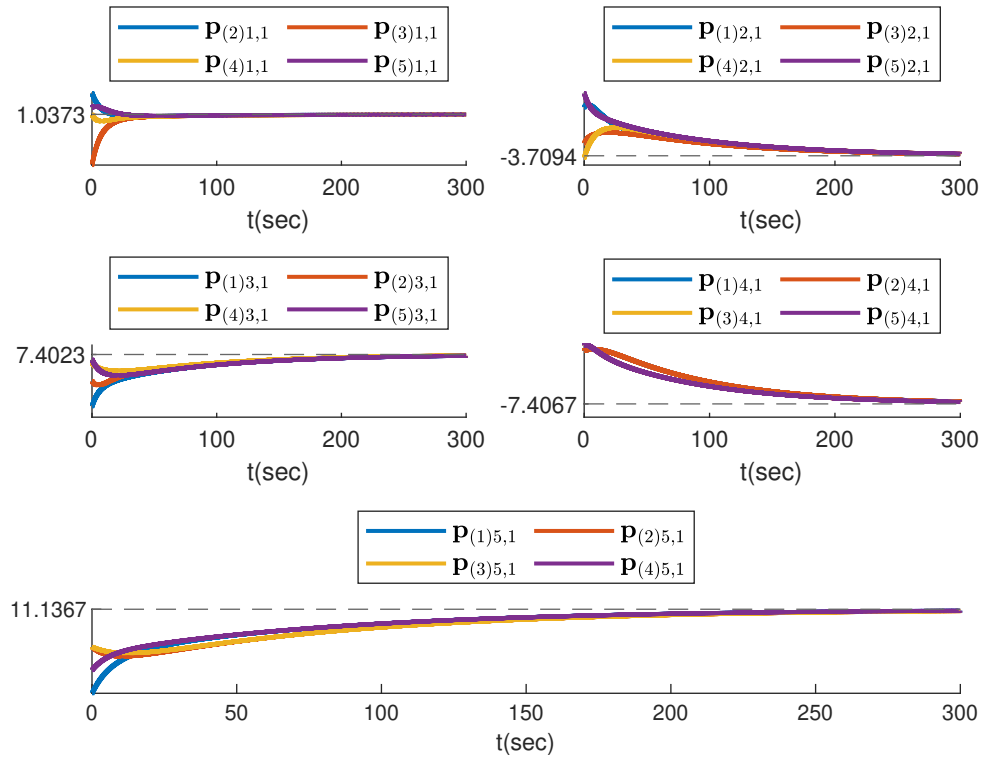
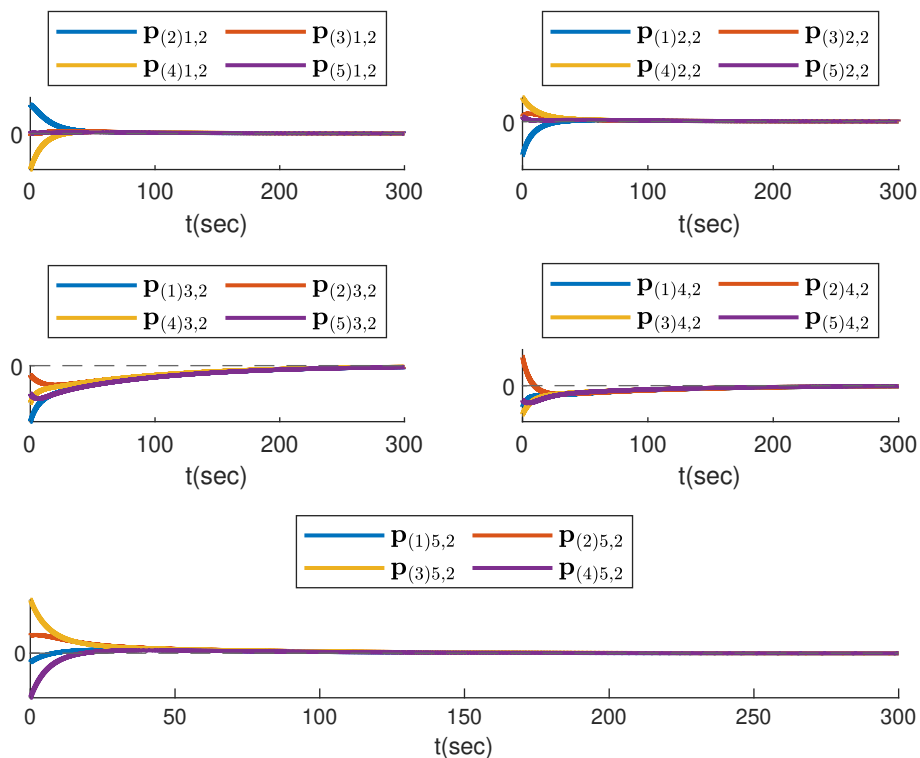
Παρακάτω παραθέτουμε τις σχεδιαστικές επιλογές μας και τις γραφικές παραστάσεις της προσομοίωσης της S-GRANE σχεδίασης. Η επιλογή του self-loop συντελεστή και των tunable παραμέτρων του GRANE έγινε σύμφωνα με τις υποθέσεις και τα θεωρήματα του [5].

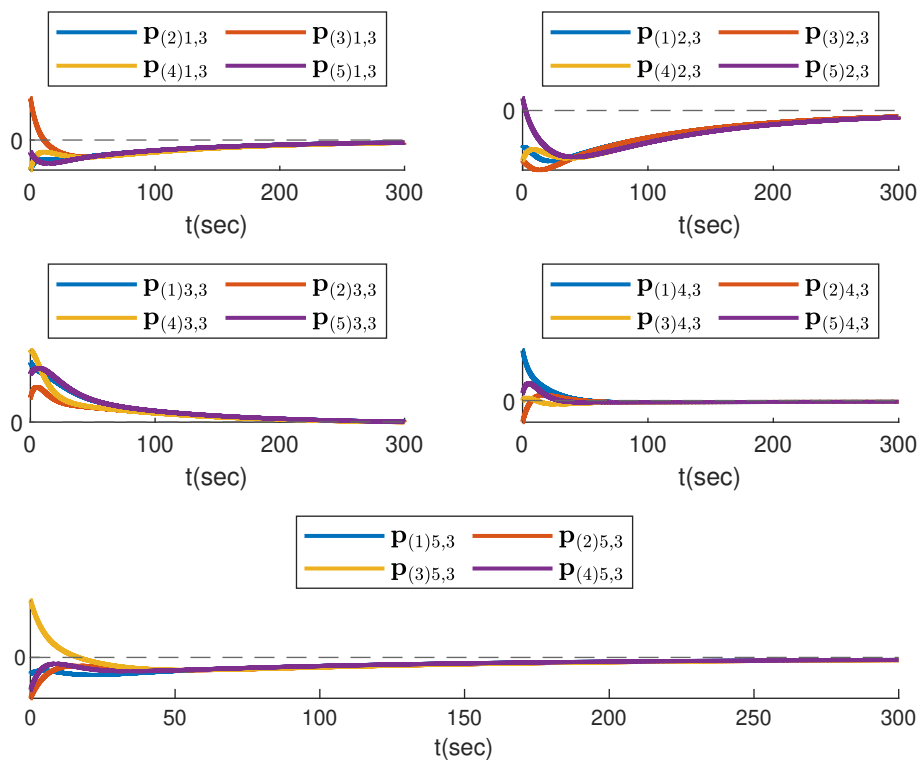
Πίνακας 6.6: Σταθερές Προσομοίωσης S-GRANE

Φυσικές Σταθερές	
$g$ (Επιτάχυνση της βαρύτητας)	9.8m/s <sup>2</sup>
$m_i$ (Μάζα)	0.8kg
$ D_{i,j} $ (Συντελεστής Τριβής)	0.3kg/s
Σταθερές Επικοινωνίας	
$T$ (Περίοδος Δειγματοληψίας)	0.1s
$\tau_d$ (Deadzone)	$T/5$
$n$ (Σταθερά της Συνάρτησης Εξομάλυνσης)	2
$\epsilon_{sl}$ (Self-loop συντελεστής)	0
Σταθερές GRANE	
$a$ (Ρυθμός Εκμάθησης)	0.065
$\beta$ (Παράμετρος Ορμής)	0.011
Σταθερές Συνάρτησης Επίδοσης	
$\delta_i$ (Ρυθμός Σύγκλισης)	0.07
$\phi_i^0$	5.4643
$\phi_i^\infty$ (Ανοχή στο Μόνιμο Σφάλμα)	0.05
Σταθερές Ελέγχου	
$k_i$ (Κέρδος Ελέγχου)	20
$\beta_1$ (Ρυθμός Μείωσης Σφάλματος)	10

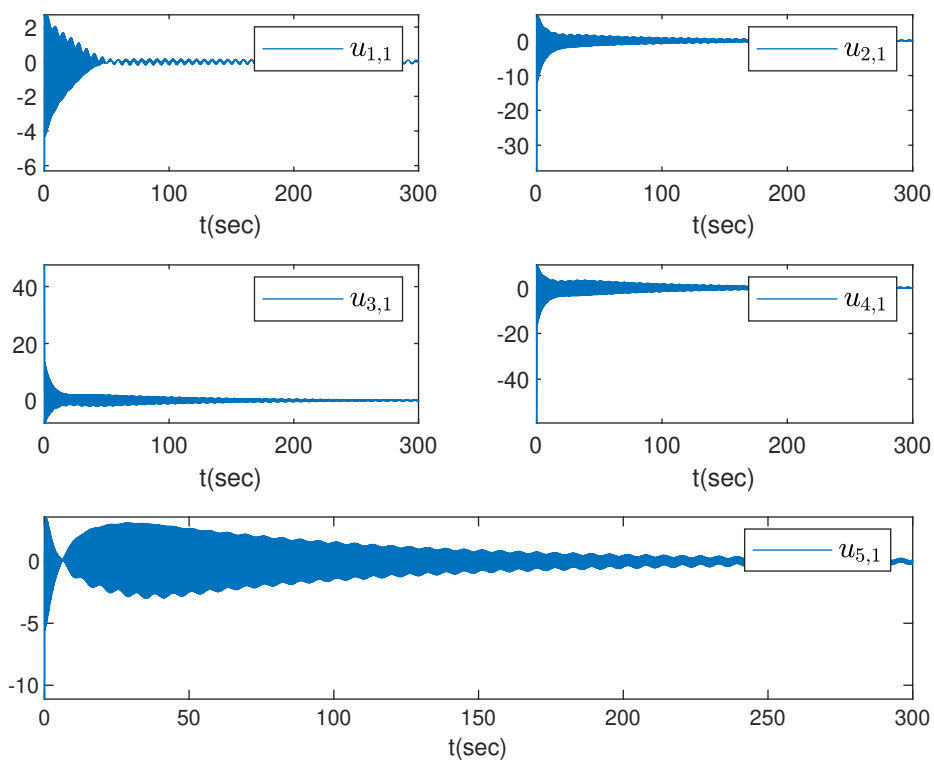


Σχήμα 6.20: Θέσεις

Σχήμα 6.21: Εκτιμήσεις  $x$ -ΣυνιστωσώνΣχήμα 6.22: Εκτιμήσεις  $y$ -Συνιστωσών

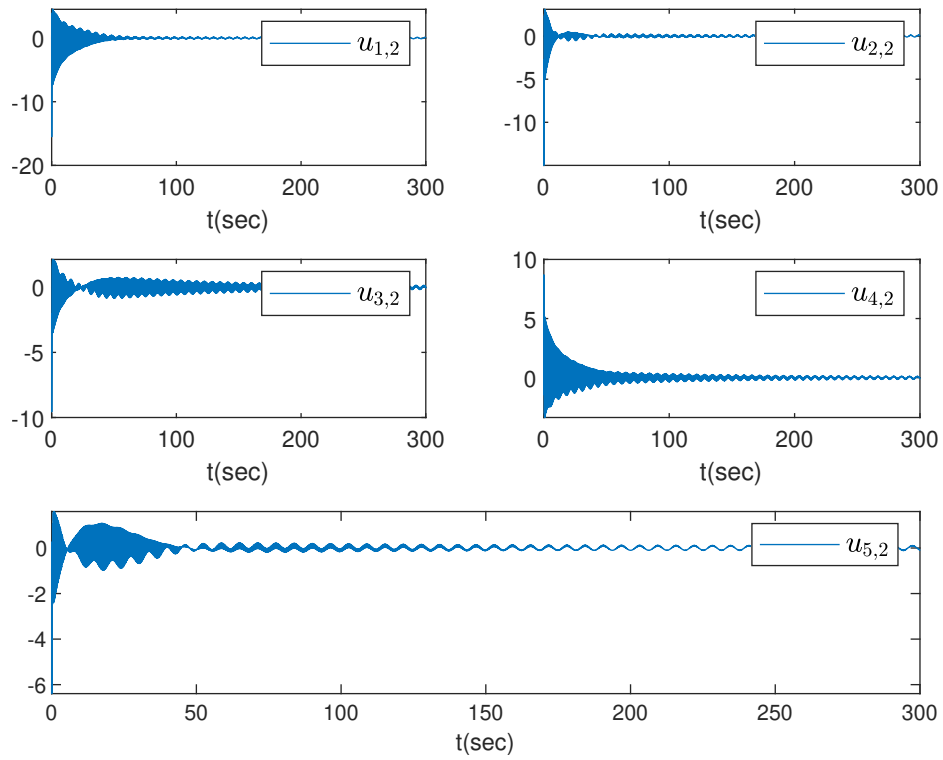
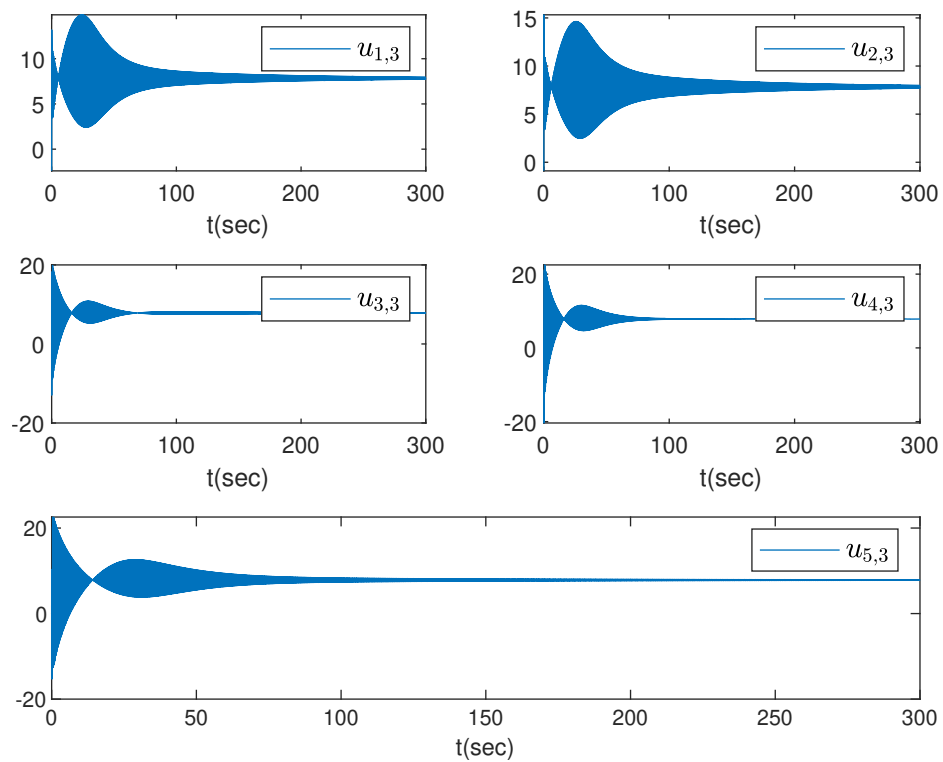


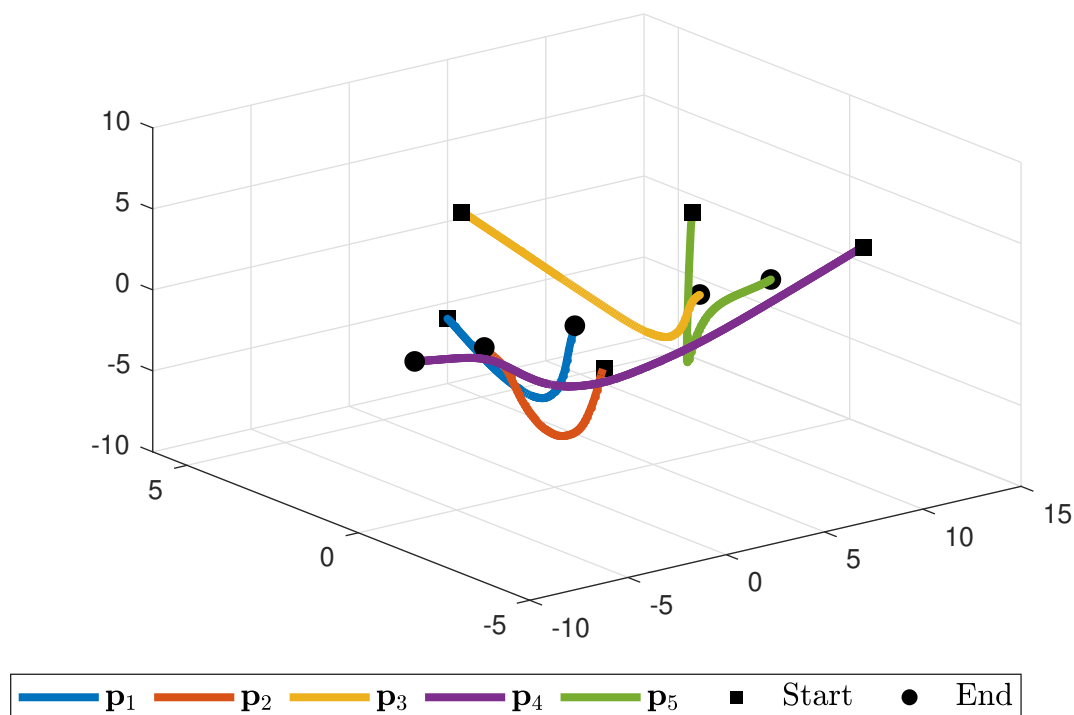
Σχήμα 6.23: Εκτιμήσεις z-Συνιστωσών



Σχήμα 6.24: Βοηθητικές Είσοδοι x-Συνιστωσών



Σχήμα 6.25: Βοηθητικές Είσοδοι  $y$ -ΣυνιστωσώνΣχήμα 6.26: Βοηθητικές Είσοδοι  $z$ -Συνιστωσών



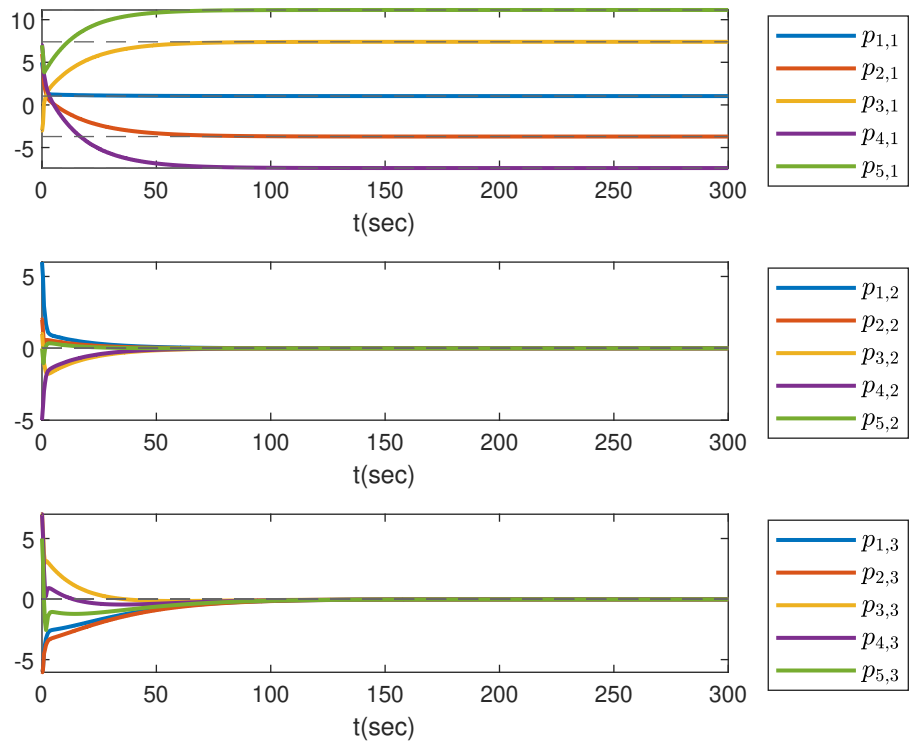
Σχήμα 6.27: Τροχιές Πρακτόρων

**ASPPPA**

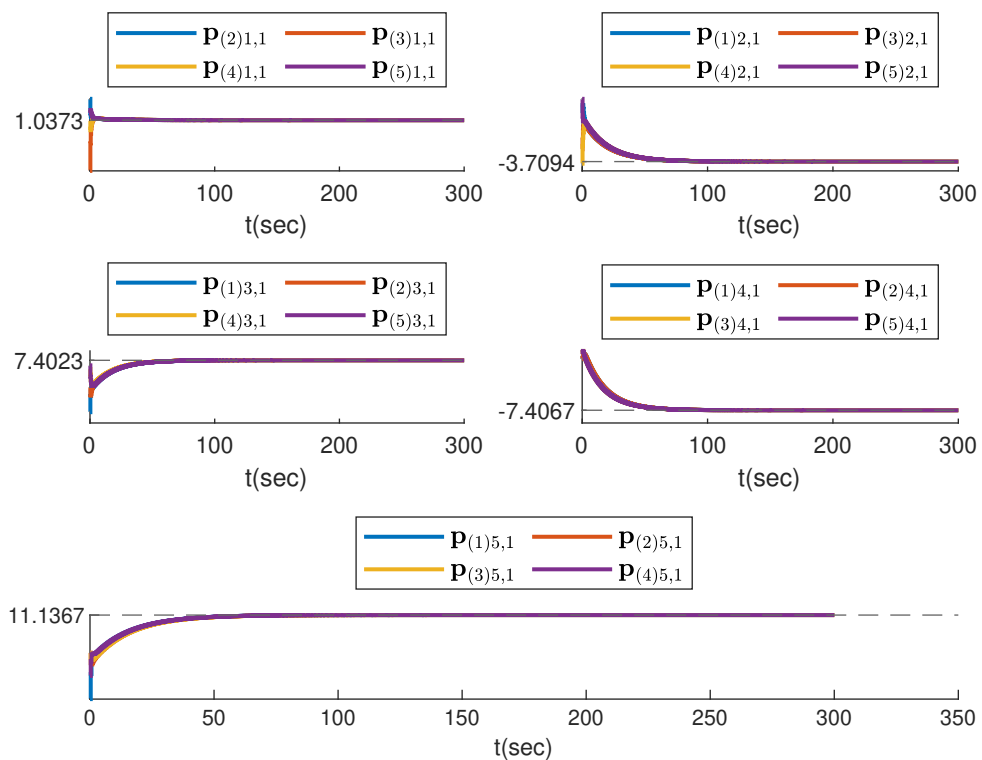
Τέλος, παραθέτουμε την ASPPPA σχεδίαση και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της.

Πίνακας 6.7: Σταθερές Προσομοίωσης ASPPPA

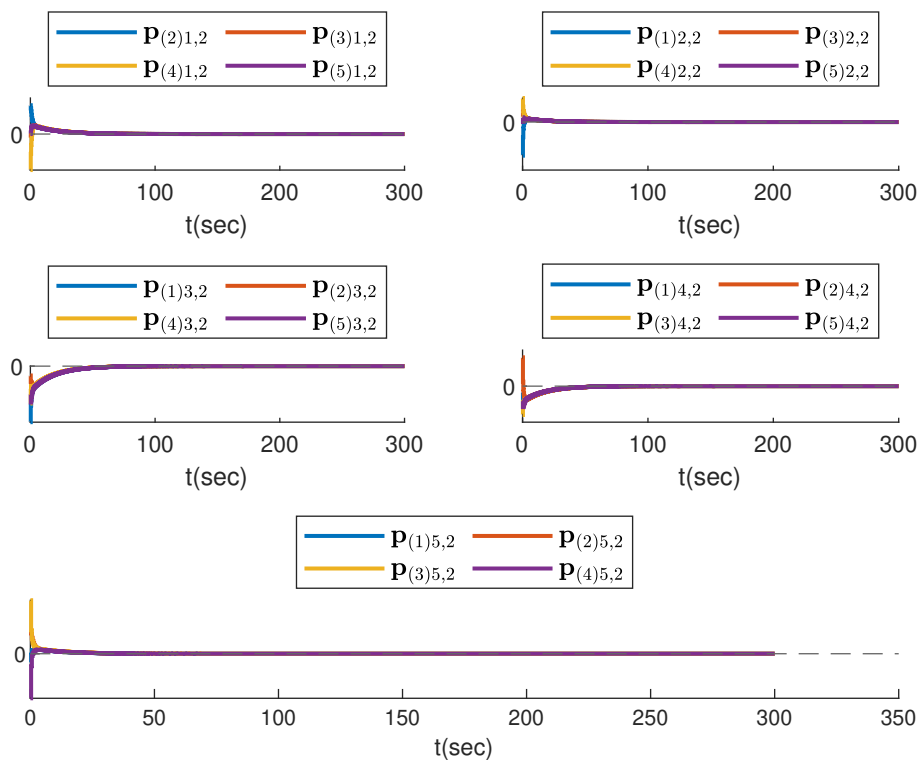
Φυσικές Σταθερές	
$g$ (Επιτάχυνση της βαρύτητας)	$9.8\text{m/s}^2$
$m_i$ (Μάζα)	$0.8\text{kg}$
$ D_{i,j} $ (Συντελεστής Τριβής)	$0.3\text{kg/s}$
Σταθερές Επικοινωνίας	
$T$ (Περίοδος Δειγματοληψίας)	$0.1\text{s}$
$\tau_d$ (Deadzone)	$T/5$
$n$ (Σταθερά της Συνάρτησης Εξομάλυνσης)	$2$
$\epsilon_{sl}$ (Self-loop συντελεστής)	$0.1$
Σταθερές APPPA	
$a$ (Σταθερά των Regularization και Consensus)	$0.85 \cdot a_{\max}$
$\gamma$ (Ρυθμός Εκμάθησης)	$0.95 \cdot \gamma_{\max}$
$D$ (Επαναλήψεις Gradient Descent)	$D_0$
Σταθερές Συνάρτησης Επίδοσης	
$\delta_i$ (Ρυθμός Σύγκλισης)	$0.05$
$\phi_i^0$	$5.4643$
$\phi_i^\infty$ (Ανοχή στο Μόνιμο Σφάλμα)	$0.05$
Σταθερές Ελέγχου	
$u_{\max}$ (Επίπεδο Κορεσμού)	$16\sqrt{3}$
$k_i$ (Κέρδος Ελέγχου)	$20$
$\lambda_1$ (Ρυθμός Μείωσης Σφάλματος)	$10$
$\beta_i$ (Ρυθμός Μείωσης Τροποποίησης Αναφοράς)	$10$



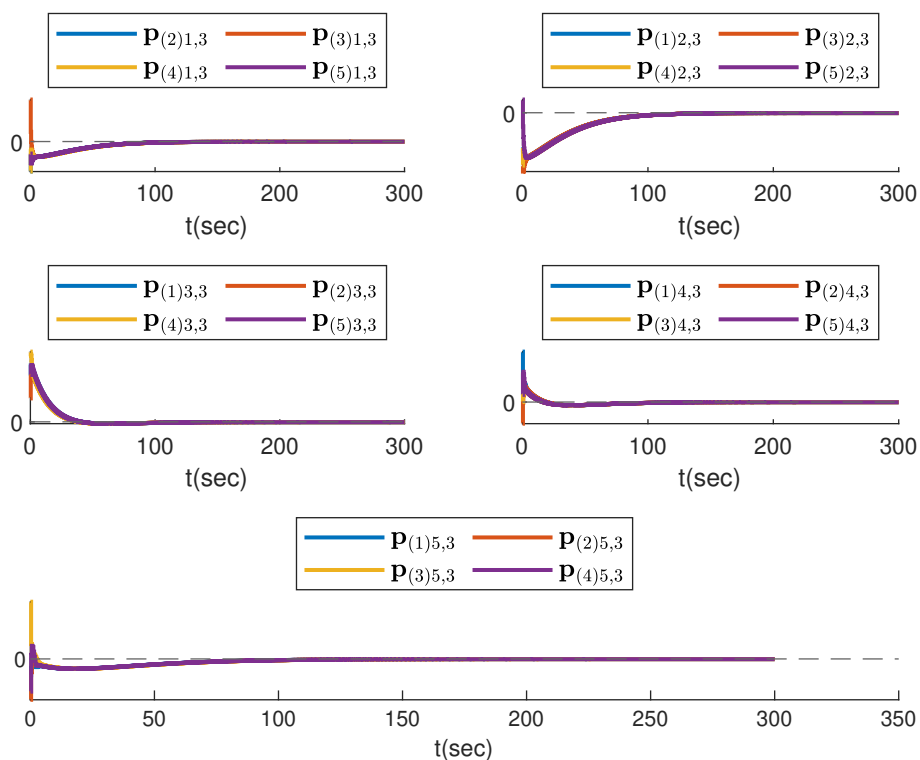
Σχήμα 6.28: Θέσεις



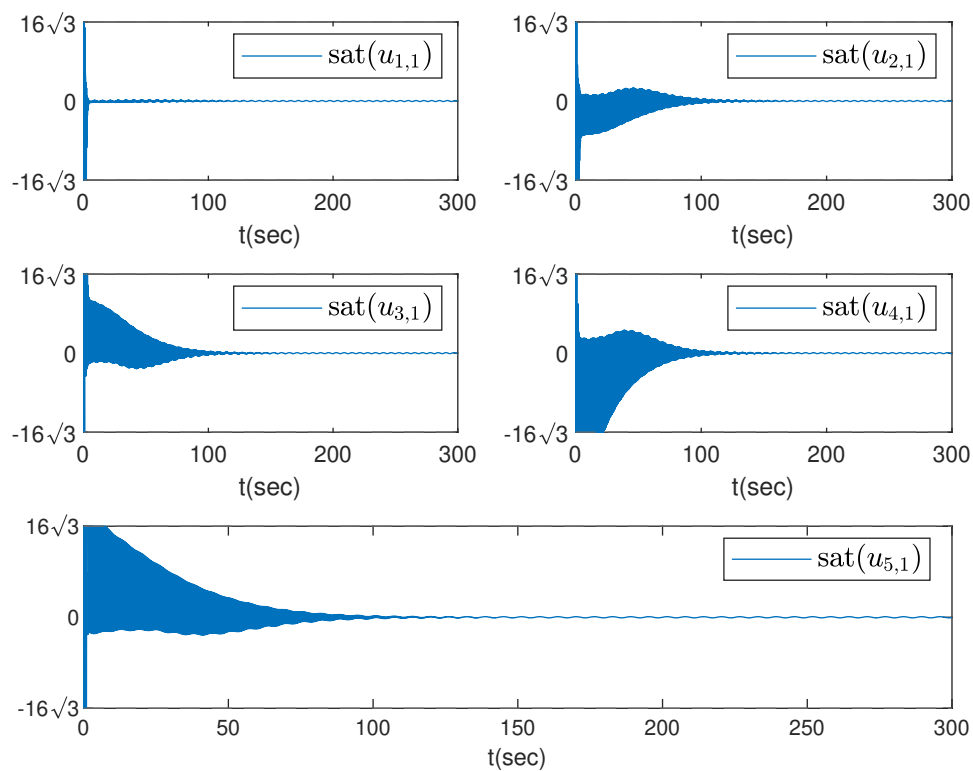
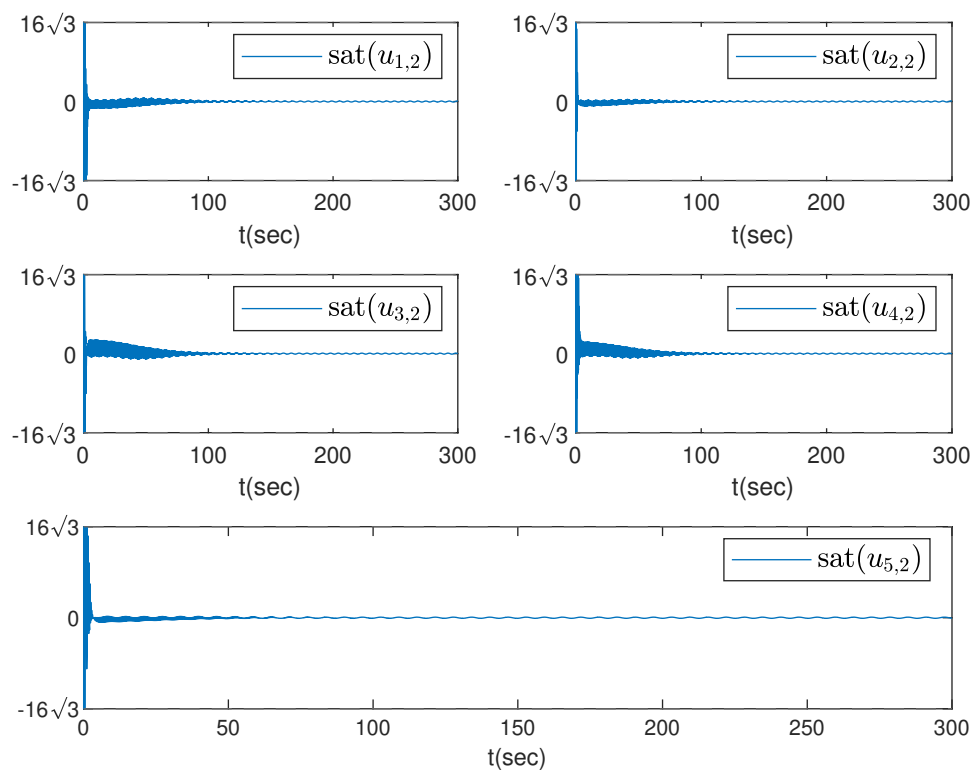
Σχήμα 6.29: Εκτιμήσεις x-Συνιστωσών

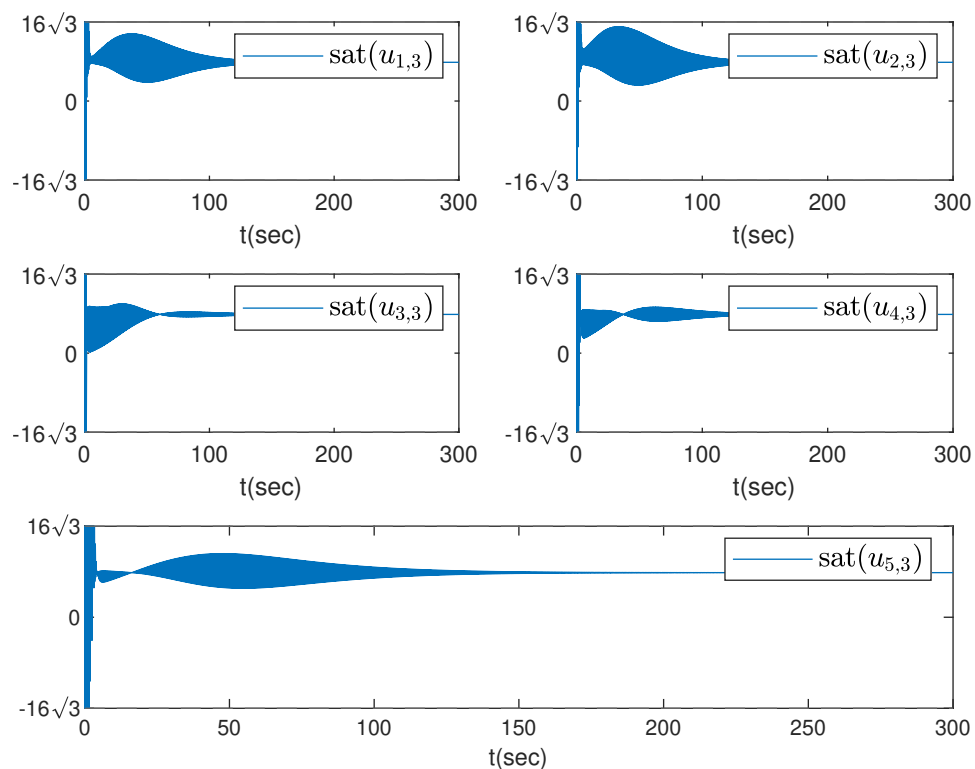


Σχήμα 6.30: Εκτιμήσεις y-Συνιστωσών

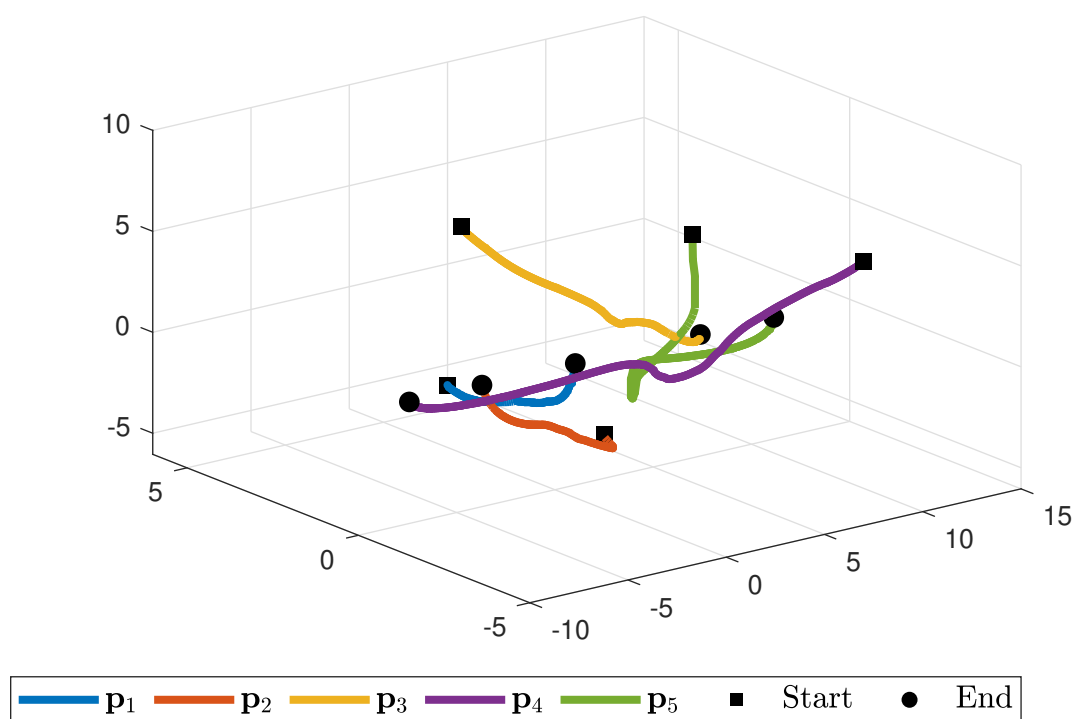


Σχήμα 6.31: Εκτιμήσεις z-Συνιστωσών

Σχήμα 6.32: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι  $x$ -ΣυνιστωσώνΣχήμα 6.33: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι  $y$ -Συνιστωσών



Σχήμα 6.34: Κορεσμένες Βοηθητικές Είσοδοι z-Συνιστωσών



Σχήμα 6.35: Τροχιές Πρακτόρων

## Παρατηρήσεις

Κλείνουμε το κεφάλαιο με παρατηρήσεις πάνω στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των δύο συστημάτων.

**Παρατήρηση 17.** Η κυματοειδής μορφή των  $x$  και  $y$  βοηθητικών εισόδων ελέγχου οφείλεται στην εξωγενή ημιτονοειδή διαταραχή. Η διαταραχή φαίνεται να επηρεάζει τη περιβάλλουσα της εισόδου και όχι να επιδρά απλώς προσθετικά. Η αντιστάθμιση της εξωγενούς διαταραχής από τον PPC γίνεται χωρίς γνώση της μορφής της διαταραχής και των δυναμικών εξισώσεων του υπό-έλεγχου συστήματος, οπότε είναι λογικό που η αντιστάθμιση είναι πιο επιτυχής στη μόνιμη κατάσταση.

**Παρατήρηση 18.** Σε όλες τις προσομοιώσεις που παρουσιάσαμε, η υψίσυχη μορφή των βοηθητικών εισόδων ελέγχου οφείλεται στο γεγονός πως η αναφορά μας περιέχει την εξομαλιωμένη δυναμική του PPPA και την παράγωγό της, δύο μεγέθη που μεταβάλλονται ανάλογα με την περίοδο δειγματοληψίας που επιλέξαμε.

**Παρατήρηση 19.** Στην προσομοίωση αυτή, οι ASPPPA πράκτορες επικοινωνούν πιο αραιά από τους αντίστοιχους S-GRANE πράκτορες. Συγκεκριμένα, έχουν ανάγκη για επικοινωνία ανά 0.3s, αντί για την επικοινωνία ανά 0.1s των S-GRANE πρακτόρων.

**Παρατήρηση 20.** Βλέπουμε πως οι S-GRANE πράκτορες εκμεταλλεύονται την απουσία κορεσμού. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 6.24 υπάρχουν εισόδοι των S-GRANE πρακτόρων που φτάνουν σε τιμές με μέτρο ίσο ακόμα και το 40, υπερβαίνοντας κατά πολύ το κατώφλι κορεσμού που έχουμε επιβάλει στους ASPPPA πράκτορες.

**Παρατήρηση 21.** Ακόμα και με την ύπαρξη κορεσμού εισόδου και την πιο αραιή επικοινωνία, η ASPPPA σχεδίαση υπερέχει σε ταχύτητα σύγκλισης της αντίστοιχης S-GRANE σχεδίασης. Οι ASPPPA πράκτορες συγκλίνουν σε γειονιά πολύ κοντινή στην ισορροπία Nash, τουλάχιστον τρεις φορές γρηγορότερα από τους S-GRANE πράκτορες.

**Παρατήρηση 22.** Η κύρια διαφορά στη σχεδίαση των ελεγκτών των δύο συστημάτων αφορά τη σταθερά του ρυθμού σύγκλισης. Στην S-GRANE σχεδίαση, η μικρή αύξηση στον ρυθμό βελτίωνε την ταχύτητα σύγκλισης. Στην ASPPPA σχεδίαση, λόγω του κορεσμού και της ήδη ταχύτερης σύγκλισης, επιλέξαμε να μειώσουμε τον ρυθμό, ώστε οι βοηθητικές εισόδοι να μην είναι τόσο έντονα χρονικά μεταβαλλόμενες

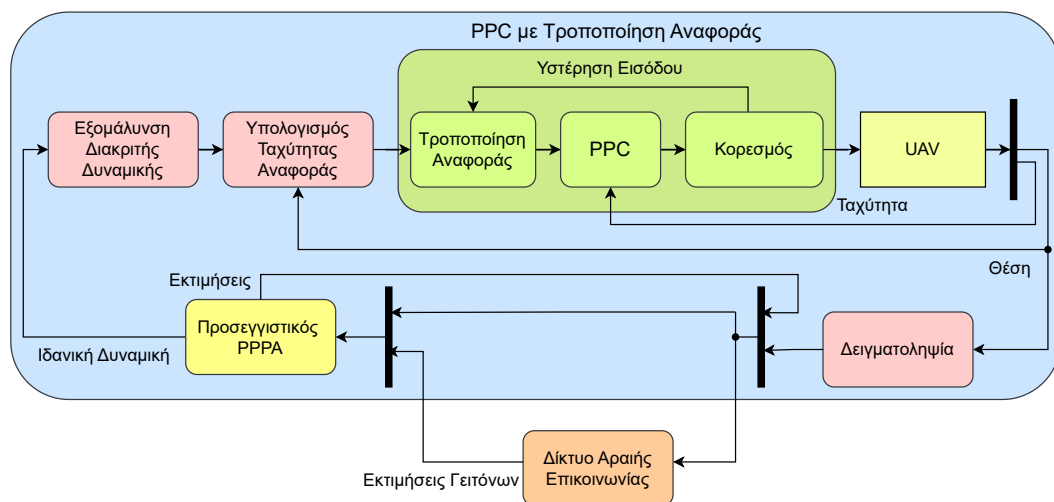




## Επίλογος

### 7.1 Σύνοψη

Αναπτύξαμε ένα σύστημα για online και καταναμημένη αναζήτηση Ισορροπίας Nash σε κατάλληλο παίγνιο με κυρτές συναρτήσεις κόστους. Στη συνέχεια, το εφαρμόσαμε σε σμήνος από UAVs συγκεντρωμένης μάζας με κορεσμό στην είσοδό τους.



Σχήμα 7.1: Σχηματική Αναπαράσταση Πρακτόρων

Βασιστήκαμε σε πρόσφατο αλγόριθμο αναζήτησης, τον Preconditioned Proximal Point Algorithm, όπως και σε state-of-the-art μη-γραμμική αρχιτεκτονική ελέγχου για σύστημα με κορεσμό, τον Prescribed Performance Έλεγχο με Reference Modulation. Εφαρμόσαμε επιτυχώς το σύστημα για καταναμημένη επίτευξη τετραγωνικού σχηματισμού. Δοκιμάσαμε επίσης μέθοδο εύρεσης του πλησιέστερου τετραγωνικού σχηματισμού στις αρχικές θέσεις των πρακτόρων. Παρ' ότι η επίτευξη του σχηματισμού ήταν ικανοποιητική, η μέθοδος αυτή έχει ανάγκη πολλών επαναλήψεων για να συγκλίνει. Τέλος, με ένα ενδεικτικό παίγνιο, διαπιστώσαμε σημαντική βελτίωση στην ταχύτητα σύγκλισης από προηγούμενη ανάλογη σχεδίαση στο task της online και καταναμημένης αναζήτησης Ισορροπίας Nash, η οποία δεν υποθέτει κορεσμό στην είσοδο.

## 7.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Το σύστημα που σχεδιάσαμε έχει αυξημένη πολυπλοκότητα, οπότε υπάρχουν αρκετές πτυχές του με αξία να διερευνηθούν. Κάποιες από αυτές είναι οι παρακάτω.

- Μελέτη της επίδρασης του ελεγκτή. Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών ελεγκτών με ή και χωρίς κορεσμό στην είσοδο.
- Ανάπτυξη λιγότερο συντηρητικών φραγμάτων τόσο για τη σύγκλιση του APPPA όσο και για το ελάχιστο επίπεδο κορεσμού του PPC ελεγκτή.
- Αξιολόγηση της κλιμακωσιμότητας του συστήματος.
- Επέκταση του συστήματος για χρονικά μεταβαλλόμενες τοπολογίες επικοινωνίας.
- Επέκταση του συστήματος για παίγνια με περιορισμούς στις επιτρεπτές δράσεις.
- Επέκταση του συστήματος για αναζήτηση γενικευμένων ισορροπιών Nash (GNE) [34].
- Προσθήκη όρων αποφυγής συγκρούσεων στον καταναμεμημένο νόμο ελέγχου.
- Προσδιορισμός συναρτήσεων για το πρόβλημα εύρεσης του πλησιέστερου πολυγωνικού σχηματισμού (όπως εξετάστηκε στην Ενότητα 6.2), με ταχύτερο ρυθμό σύγκλισης.

## Βιβλιογραφία

---

- [1] Oscar Volij. *Static Games*, σελίδες 8649–8668. Springer New York, New York, NY, 2009.
- [2] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos και Vijay V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.
- [3] Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg και Christos H. Papadimitriou. *The Complexity of Computing a Nash Equilibrium*. *SIAM Journal on Computing*, 39(1):195–259, 2009.
- [4] Miloš S. Stankovic, Karl H. Johansson και Dušan M. Stipanovic. *Distributed Seeking of Nash Equilibria With Applications to Mobile Sensor Networks*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4):904–919, 2012.
- [5] Dimitra Kalyva και Haris E. Psillakis. *Distributed control of a mobile robot multi-agent system for Nash equilibrium seeking with sampled neighbor information*. *Automatica*, 166:111712, 2024.
- [6] Roger A. Horn και Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 2η έκδοση, 2012.
- [7] Héctor N. Salas. *Gershgorin’s theorem for matrices of operators*. *Linear Algebra and its Applications*, 291(1):15–36, 1999.
- [8] Panayiotis I. Psarrakos. *Topics in Matrix Analysis*. National Technical University of Athens, 2020.
- [9] Roger A. Horn και Charles R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [10] J. Marsden και A. Tromba. *Vector Calculus*. Macmillan Learning, 2012.
- [11] Stephen Boyd και Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [12] Stavros Nikolopoulos, Loukas Georgiadis και Leonidas Palios. *Algorithmic Graph Theory*. Kallipos, Open Academic Editions, 2016.
- [13] Michail Loulakis. *Στοχαστικές Διαδικασίες*. Kallipos, Open Academic Editions, 2016.
- [14] Dian Gadjov και Lacra Pavel. *A Passivity-Based Approach to Nash Equilibrium Seeking Over Networks*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(3):1077–1092, 2019.

- [15] Claudio De Persis και Sergio Grammatico. *Distributed averaging integral Nash equilibrium seeking on networks*. *Automatica*, 110:108548, 2019.
- [16] Tamer Başar και Geert Jan Olsder. *Dynamic noncooperative game theory*. SIAM, 1998.
- [17] Tatiana Tatarenko, Wei Shi και Angelia Nedić. *Geometric Convergence of Gradient Play Algorithms for Distributed Nash Equilibrium Seeking*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(11):5342–5353, 2021.
- [18] Maojiao Ye. *Distributed Nash Equilibrium Seeking for Games in Systems With Bounded Control Inputs*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(8):3833–3839, 2021.
- [19] Zhi Feng, Guoqiang Hu, Xiwang Dong και Jinhua Lü. *Adaptively Distributed Nash Equilibrium Seeking of Noncooperative Games for Uncertain Heterogeneous Linear Multi-Agent Systems*. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 10(6):3871–3882, 2023.
- [20] Yao Zou, Bomin Huang, Ziyang Meng και Wei Ren. *Continuous-time distributed Nash equilibrium seeking algorithms for non-cooperative constrained games*. *Automatica*, 127:109535, 2021.
- [21] Yanan Zhu, Wenwu Yu, Guanghui Wen και Guanrong Chen. *Distributed Nash Equilibrium Seeking in an Aggregative Game on a Directed Graph*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(6):2746–2753, 2021.
- [22] Mattia Bianchi και Sergio Grammatico. *Fully Distributed Nash Equilibrium Seeking Over Time-Varying Communication Networks With Linear Convergence Rate*. *IEEE Control Systems Letters*, 5(2):499–504, 2021.
- [23] Maojiao Ye και Guoqiang Hu. *Distributed Nash Equilibrium Seeking in Multiagent Games Under Switching Communication Topologies*. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 48(11):3208–3217, 2018.
- [24] Lăcrău Pavel. *Distributed GNE Seeking Under Partial-Decision Information Over Networks via a Doubly-Augmented Operator Splitting Approach*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(4):1584–1597, 2020.
- [25] Mattia Bianchi, Giuseppe Belgioioso και Sergio Grammatico. *A fully-distributed proximal-point algorithm for Nash equilibrium seeking with linear convergence rate*. *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, σελίδες 2303–2308, 2020.
- [26] Neal Parikh και Stephen P. Boyd. *Proximal Algorithms*. *Found. Trends Optim.*, 1:127–239, 2013.
- [27] Ειρηναίος Μιχαήλ. *Προσεγγιστική Βέλτιστη Συμφωνία Κινούμενων Ρομπότ με Χαμηλή Συχνότητα Επικοινωνίας*. Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, 2023.

- [28] Haris E. Psillakis και Konstantinos A. Oikonomidis. *Adaptive Fuzzy Approximate Optimal Consensus of Lagrangian Agents: An EXTRA-Based Smoothing Approach*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 31(11):4064–4074, 2023.
- [29] Athanasios K. Gkesoulis, Haris E. Psillakis και Athanasios Rafail Lagos. *Optimal Consensus via OCPI Regulation for Unknown Pure-Feedback Agents With Disturbances and State Delays*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(8):4338–4345, 2022.
- [30] Athanasios K. Gkesoulis και Haris E. Psillakis. *Distributed UAV Formation Control with Prescribed Performance*. *2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, σελίδες 439–445, 2020.
- [31] Charalampos P. Bechlioulis και George A. Rovithakis. *Approximation-free prescribed performance control for unknown SISO pure feedback systems*. *2013 European Control Conference (ECC)*, σελίδες 4544–4549, 2013.
- [32] Filippos Fotiadis και George A. Rovithakis. *Input-Constrained Prescribed Performance Control for High-Order MIMO Uncertain Nonlinear Systems via Reference Modification*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(5):3301–3308, 2024.
- [33] R. A. Garcia J. L. Mancilla Aguilar και M. I. Troparevsky. *Stability of a certain class of hybrid dynamical systems*. *International Journal of Control*, 73(15):1362–1374, 2000.
- [34] Mattia Bianchi, Giuseppe Belgioioso και Sergio Grammatico. *Fast generalized Nash equilibrium seeking under partial-decision information*. *Automatica*, 136:110080, 2022.