

Μελέτη Αξιονικών Αστέρων

Διπλωματική εργασία
Μάριος Καγιάντζας

Επιβλέπων: Χ. Κούβαρης



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:
Χριστόφορος Κούβαρης, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ
Νικόλαος Μαυρόματος, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ
Κωσταντίνος Αναγνωστόπουλος, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

Αθήνα, Ιούνιος 2024

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Χριστόφορο Κούβαρη για την καθοδήγηση του σε αυτήν την διπλωματική εργασία.

.....
Μάριος Καγιάντζας

© (2024) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Abstract

The goal of this thesis is to study the axion, a hypothetical particle which is a result of the Peccei-Quinn mechanism solution for the CP Problem of the strong interactions, which also constitutes a good candidate for a particle responsible for dark matter. In the first part of the thesis, we introduce the concepts and the mathematical tools that we will use. In the second part, initially we present the CP Problem along with an analysis of the vacuum structure of quantum chromodynamics. Then, we describe the Peccei-Quinn mechanism as a solution of the problem and how the axion pops up from the breaking of an extra global $U(1)_A$ symmetry. Lastly, we study the populations of axions today and how they emerged. In the third and last part of the thesis, we study configurations of stars which consists of axions and we analyse the radiation power that is produced when an axion star executes a hyperbolic trajectory around a neutron star.

Keywords: dark matter, CP problem, axion, axion stars

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του axion, ενός υποθετικού σωματιδίου που είναι αποτέλεσμα του μηχανισμού Peccei-Quinn για την λύση του CP Προβλήματος των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, που επίσης αποτελεί ένα καλό υποψήφιο για σωματίδιο υπεύθυνο για την σκοτεινή ύλη. Στο πρώτο μέρος της εργασίας, κάνουμε μία εισαγωγή πάνω στις έννοιες και τα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε. Στο δεύτερο μέρος, αρχικά παρουσιάζουμε το CP Πρόβλημα μαζί με την ανάλυση της δομής του κενού της κβαντικής χρωμοδυναμικής. Έπειτα, περιγράφουμε τον μηχανισμό Peccei-Quinn σαν λύση του προβλήματος και πως το axion προκύπτει από το σπάσιμο μίας επιπλέον καθολικής $U(1)_A$ συμμετρίας. Τέλος, μελετάμε τους πληθυσμούς των axion σήμερα και το πως αυτοί προέκυψαν. Στο τρίτο και τελευταίο μέρος της εργασίας, μελετάμε συνθέσεις αστέρων που αποτελούνται από axion και αναλύουμε την ισχύ ακτινοβολίας που παράγεται όταν ο αξιονικός αστέρας εκτελεί υπερβολική τροχιά γύρω από έναν αστέρα νετρονίων.

Λέξεις κλειδιά: σκοτεινή ύλη, CP πρόβλημα, axion, αξιονικοί αστέρες

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	6
1.1	Συμβολισμοί και Συμβάσεις	6
2	Εισαγωγή Στην Κοσμολογία	8
2.1	Πληθωριστικό Σύμπαν	10
2.2	Σκοτεινή Ύλη	13
2.2.1	Αποδείξεις Ύπαρξης Σκοτεινής Ύλης	14
2.3	Θερμοδυναμική του Διαστελλόμενου Σύμπαντος	17
2.3.1	Θερμοδυναμική σε Ισορροπία	17
2.3.2	Εξίσωση Boltzmann	19
3	Εισαγωγή Στη Θεωρία Πεδίου	21
3.1	Λαγκρανζιανός Φορμαλισμός Θεωρίας Πεδίου	21
3.2	Ολοκλήρωμα Διαδρομής	23
3.3	Κβαντική Χρωμοδυναμική	25
4	CP Πρόβλημα	28
4.1	Αξονική Ανωμαλία	28
4.2	Instantons	31
4.2.1	Τοπολογία και Ομοτοπία	34
4.2.2	Κενά αριθμών περιέλιξης	37
4.2.3	Instantons	39
4.2.4	κενά- θ	41
4.2.5	θ όροι σε QED, Ηλεκτρασθενή	42
4.3	CP Πρόβλημα	42
4.4	Ενέργεια κενού θ	43
5	Μηχανισμός Peccei-Quinn	45
5.1	Το Πρόβλημα του Χαμένου Μεσονίου του Weinberg	45
5.2	Επίδραση Instantons	49
5.3	Axion	51

5.4	Axion Κβαντικής Χρωμοδυναμικής	52
5.5	Axion Συζεύξεις	53
5.6	Axion Μοντέλα	54
5.6.1	KSVZ	54
5.6.2	DFSZ	55
6	Κοσμολογία Axion	58
6.1	Θερμική Παραγωγή Axion	58
6.2	Ψυχρή Παραγωγή Axion	60
6.2.1	Τοπολογικά ελαττώματα	64
7	Βαρυτικά Δεμένα Συστήματα	67
7.1	Αστέρας Μποζονίων	67
7.2	Μη Σχετικιστική Ενεργή Θεωρία Πεδίου	68
7.3	Αξιονικός Αστέρας	69
8	Ραδιοσήμα από Σύστημα Αστέρων Axion-Νετρονίου	71
8.1	Axion Ηλεκτρομαγνητισμός	71
8.2	Σύστημα Διπλού Αστέρα	75
8.3	Σήμα από Αραιωμένο Αξιονικό Αστέρα	79
8.4	Σήμα από Πυκνό Αξιονικό Αστέρα	81
9	Συμπεράσματα	85

Κατάλογος Σχημάτων

- 1 Σχηματική μορφή του δυναμικού $V(\varphi)$. (a) Περιοχή του μικρού ενεργειακού φράγματος κοντά στο $\varphi = 0$ που διαχωρίζει το επίπεδο κέντρο του δυναμικού με τα πραγματικά ελάχιστα. (b) Περιοχή της αργής κύλισης του inflaton προς το πραγματικό ελάχιστο. (c) Περιοχή ταλάντωσης του πεδίου στο ελάχιστο του δυναμικού. Σχήμα από The Early Universe, [18]. 12
- 2 Παράδειγμα βαρυτικής εστίασης. Εικόνα από NASA/ESA Hubble Space Telescope 15
- 3 Το φάσμα γωνιακής ισχύος CMB μετά από επτά χρόνια μετρήσεων από τον δορυφόρο WMAP. Οι μαύρες κουκκίδες με τις ράβδους σφάλματος αντιπροσωπεύουν τις μετρήσεις και η κόκκινη καμπύλη είναι μία θεωρητική πρόβλεψη. Η μπλε ζώνη αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη διασπορά (κοσμική διακύμανση) λόγω της τυχαιότητας των πρώιμων διαταραχών. Εικόνα από WMAP Science Team [20]. 16
- 4 Η γωνία axion θ (μπλε γραμμή) και η πυκνότητα ενέργειας των axion κανονικοποιημένη από την τωρινή πυκνότητα ενέργειας CDM, ως συνάρτηση της T_{osc}/T , όπου $T_{osc} \equiv T_1$. Έχει επιλεγεί αρχική γωνία $\theta_1 \equiv \alpha_1 = 1$. Εικόνα από [9]. 63
- 5 Γραφική παράσταση μάζας M και ακτίνας R_{99} για έναν αξιονικό αστέρα. Οι μαύρες κουκκίδες είναι κρίσιμα σημεία που διαχωρίζουν τις σταθερές λύσεις, με την πάνω κουκκίδα να αφορά τους αραιωμένους αξιονικούς αστέρες και την κάτω του πυκνούς. Οι διακεκομμένες γραμμές που ενώνουν τα κρίσιμα σημεία είναι η ασταθής λύση. $m_a = 10^{-4}eV$ και M_\odot μάζα του Ήλιου. Εικόνα από [5]. 70
- 6 Το σύστημα συντεταγμένων που περιγράφει το σύστημα διπλού αστέρα. Ο μοβ κύκλος είναι ο αστέρας νετρονίων, ο πορτοκαλί ο αξιονικός αστέρας και το μπλε αστέρι είναι η Γη. Εικόνα από [19]. 77
- 7 Το παραγόμενο σήμα από την υπερβολική τροχιά του AS1 γύρω από έναν NS για $e = 1.5$ 80
- 8 Το παραγόμενο σήμα από την υπερβολική τροχιά του AS2 γύρω από έναν NS για $e = 1.5$ 84

1 Εισαγωγή

Στο επικρατέστερο μοντέλο της κοσμολογίας σήμερα, Λ CDM, θεωρείται πως μόνο το 5% της ολικής μάζας-ενέργειας του σύμπαντος είναι στην μορφή της συνηθισμένης μάζας. Το 68% προέρχεται από την σκοτεινή ενέργεια η οποία με βάση το Λ CDM είναι η ενέργεια με την οποία το Σύμπαν διαστέλλεται και το υπόλοιπο 27% αποδίδεται στην σκοτεινή ύλη. Η ύπαρξη αυτής της μάζας απαιτείται από παρατηρήσιμα βαρυτικά δεδομένα όπως απρόσμενες τροχιές αντικειμένων γαλαξία, το φαινόμενο του βαρυτικού φακού και από μετρήσεις της Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου (Cosmic Microwave Background, CMB).

Το Καθιερωμένο Πρότυπο της σωματιδιακής φυσικής είναι μία χβαντική θεωρία πεδίου η οποία μας επιτρέπει να μελετήσουμε τα στοιχειώδη σωματίδια και τις αλληλεπιδράσεις τους. Παρόλη την θεωρητική και πειραματική επιτυχία το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν έχει απαντήσει σε όλα τα προβλήματα της σύγχρονης φυσικής. Ένα από αυτά τα προβλήματα είναι η αδυναμία πρόβλεψης κάποιου σωματιδίου υπεύθυνου για την σκοτεινή ύλη όπως προβλέπεται από την κοσμολογία.

Ένα δεύτερο πρόβλημα του Καθιερωμένου Προτύπου είναι το CP Πρόβλημα. Σε αυτό το πρόβλημα η παράμετρος θ της θεωρίας που σχετίζεται με την ηλεκτρική ροπή του νετρονίου έχει πειραματικά πολύ μικρή τιμή της τάξης 10^{-10} , [1]. Η τιμή αυτή είναι απρόσμενη καθώς η παράμετρος αναμένεται να έχει τιμή πρώτης τάξης.

Μία λύση του CP Προβλήματος είναι ο μηχανισμός Peccei-Quinn, στον οποίο το Καθιερωμένο Πρότυπο επεκτείνεται από μία καθολική συμμετρία $U(1)_{PQ}$. Το αυθόρμητο σπάσιμο αυτής της συμμετρίας παράγει ένα ψευδο-βαθμωτό σωματίδιο, axion, που αλληλεπιδρά αδύναμα και έχει πολύ μικρή μάζα. Το σπάσιμο της συμμετρίας μπορεί να εξηγήσει τον λόγο της πολύ μικρής τιμής -πρακτικά μηδέν- της παραμέτρου θ του CP Προβλήματος, αλλά και το axion λόγω των χαρακτηριστικών του είναι κατάλληλο υποψήφιο για σωματίδιο σκοτεινής ύλης. Επομένως η εκτενής θεωρητική και πειραματική έρευνα πάνω στο axion είναι δικαιολογημένη καθώς λύνονται και τα δύο αυτά προβλήματα εφόσον αυτό υπάρχει.

1.1 Συμβολισμοί και Συμβάσεις

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία θα συμβολίζουμε τα τετραδιανύσματα ως

$$x^\mu = (t, x, y, z)^T.$$

Χρησιμοποιούμε την μετρική Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Με την μετρική μπορούμε να φτιάξουμε τα συναλλοίωτα τετραδιανύσματα

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \equiv (x^0, -\vec{x}).$$

Όπως φαίνεται παραπάνω θα χρησιμοποιηθεί η σύμβαση άθροισης Einstein σε δείκτες που επαναλαμβάνονται. Οι τελεστές παραγωγής για τα τετραδιανύσματα γράφονται ως

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z).$$

Ορίζουμε τον τετραδιάστατο αντισυμμετρικό τανυστή, ανάλογο του τανυστή Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ με

$$\varepsilon^{0123} = +1.$$

Τέλος, στις περισσότερες περιπτώσεις θα θεωρούμε ότι: $\hbar = c = k_B = 1$ και όποτε χρειάζεται θα επαναφέρουμε τις μονάδες με διαστατική ανάλυση.

Επίσης χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση Pauli-Dirac των πινάκων γ .

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

με $\sigma^\mu = (\mathbb{I}_{2 \times 2}, \sigma_i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}_{2 \times 2}, -\sigma_i)$ και σ_i οι πινάκες Pauli, $\mathbb{I}_{2 \times 2}$ μοναδιαίος πινάκας 2×2 .

$h = 0.71$ η σημερινή τιμή της αδιάστατης παραμέτρου Hubble.

2 Εισαγωγή Στην Κοσμολογία

Τα κοσμολογικά δεδομένα δείχνουν ότι το Σύμπαν είναι ισοτροπικό και ομογενές. Η μετρική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα τέτοιο σύμπαν στο οποίο οι αποστάσεις μπορούν να μεγαλώνουν σαν συνάρτηση του χρόνου, είναι η μετρική Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (2. 0. 1)$$

Η χρονική μεταβλητή t είναι ο κοσμολογικός κανονικός χρόνος και είναι ο χρόνος που ο παρατηρητής βλέπει το σύμπαν να διαστέλλεται γύρω του. Οι χωρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) είναι κινούμενες συντεταγμένες, δηλαδή παρόλο που η κανονική απόσταση μπορεί να αλλάζει σαν συνάρτηση του συντελεστή κλίμακας $R(t)$, η κινούμενη απόσταση παραμένει σταθερή. Αν το σύμπαν είναι ισοτροπικό και ομογενές τότε ότι χρειαζόμαστε να ξέρουμε για την γεωμετρία του βρίσκεται στο $R(t)$, στο k και στην καμπυλότητα.

- $k = +1$ Το Σύμπαν είναι κλειστό και έχει θετική καμπυλότητα.
- $k = 0$ Το Σύμπαν είναι επίπεδο και δεν έχει καμπυλότητα.
- $k = -1$ Το Σύμπαν είναι ανοιχτό και έχει αρνητική καμπυλότητα.

Έχει αποδειχτεί μέσω του φαινομένου Doppler για τις ηλεκτρομαγνητικές συχνότητες του φωτός από μακρινά γαλαξιακά αντικείμενα, ότι οι συχνότητες οι οποίες φτάνουν στην γη έχουν μία μετατόπιση προς το ερυθρό, δηλαδή είναι μεγαλύτερες από αυτές που είχαν αρχικά επειδή απομακρύνεται το αντικείμενο από την γη: $z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$, λ είναι ο αντίστοιχος κυματριθμός και $c = \lambda f$. Όταν $z > 0$ λέμε ότι υπάρχει μετατόπιση προς το μπλε, ενώ όταν $z < 0$ μετατόπιση προς το ερυθρό. Γενικά η πλειοψηφία των γαλαξιών απομακρύνεται από την γη. Όταν $z > 0 \rightarrow f_{ob} > f_{em}$. Το παραπάνω υποδεικνύει ότι το Σύμπαν διαστέλλεται, δηλαδή ο συντελεστής κλίμακας $R(t)$ αυξάνεται ως συνάρτηση του χρόνου. Ο ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος δίνεται από την παράμετρο Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R}. \quad (2. 0. 2)$$

Η ταχύτητα με την οποία απομακρύνονται τα μακρινά γαλαξιακά αντικείμενα από την γη δίνεται από τον νόμο του Hubble

$$v(t) = H(t)d(t), \quad (2. 0. 3)$$

όπου $d(t)$ η κανονική απόσταση. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Einstein από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και την μετρική Robertson-Walker μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{R^2}. \quad (2. 0. 4)$$

Χρησιμοποιώντας τον πρώτο νόμο Θερμοδυναμικής $dQ = dE + PdV$, και αφού το Σύμπαν είναι ομογενές, ζητάμε $dQ = 0$. Τότε σε συνδυασμό με την εξίσωση Friedmann μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση επιτάχυνσης

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (2.0.5)$$

Το ρ είναι η πυκνότητα ενέργειας και το $P = w\rho$ είναι η πίεση της αντίστοιχης πυκνότητας ενέργειας για κάθε περίπτωση υλικού που γεμίζει το Σύμπαν [27].

- Μη σχετικιστική ύλη: $w = 0$, $\rho \propto R^{-3}$.
- Σχετικιστική ύλη: $w = 1/3$, $\rho \propto R^{-4}$.
- Σκοτεινή Ενέργεια: $w < -1/3$, για ένα τέτοιο w συμβάλει στην επιτάχυνση της διαστολής του σύμπαντος $\dot{R} > 0$, αφού $R(t) > 0$. Μία τέτοιου είδους πίεση ασκεί ο όρος της κοσμολογικής σταθεράς Λ στις εξισώσεις Einstein με $w = -1$.

Μπορούμε να προσθέσουμε τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς στην εξίσωση Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.0.6)$$

Διαιρώντας με H^2 μπορούμε να ανακτήσουμε το άθροισμα της πυκνότητας ενέργειας των διάφορων ειδών ύλης του σύμπαντος.

$$1 = \Omega_i + \Omega_k + \Omega_\Lambda. \quad (2.0.7)$$

$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_i$, $\Omega_k = \frac{-k}{R^2H^2}$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$, όπου Ω είναι η πυκνότητα ενέργειας διαιρεμένη με την κρίσιμη ενέργεια $\Omega_\chi = \frac{\rho_\chi}{\rho_c}$, $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$. Η σύγκριση μεταξύ κρίσιμης πυκνότητας και συνολικής πυκνότητας καθορίζει την γεωμετρία του σύμπαντος. Εάν το Σύμπαν έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από την κρίσιμη τότε είναι κλειστό $k = +1$. Αν έχει μικρότερη πυκνότητα από την κρίσιμη τότε είναι ανοιχτό $k = -1$. Τέλος στην περίπτωση που $\rho = \rho_c$ τότε το Σύμπαν είναι επίπεδο.

Ιστορία Πρώιμου Σύμπαντος. Σύμφωνα με τις Μεγάλες Ενοποιητικές Θεωρίες (Grand Unified Theory, GUT) με βάση μία ομάδα βαθμίδας G , όπου η ομάδα αυτή θα μπορούσε να είναι μία οποιαδήποτε κατάλληλη. Στην κλίμακα μάζας της GUT $\approx 10^{16}GeV$ η G σπάει στην ομάδα του Καθιερωμένου Προτύπου $G_S = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ από μία αναμενόμενη τιμή του κενού (vacuum expectation value, vev) κατάλληλη για ένα πεδίο Higgs φ . Μετά την Μεγάλη Έκρηξη, η ομάδα G σπάει και το Σύμπαν γεμίζει με μία ζεστή “σούπα” άμαζων σωματιδίων όλων των κατηγοριών. Σε κοσμικό χρόνο $t \sim 10^{-37}s$ που αντιστοιχεί για θερμοκρασία $T \sim 10^{16}GeV$ η G σπάει στην G_S και τα βαθμιδοποιημένα μποζόνια και τα μποζόνια Higgs αποκτούν μάζα.

Κατά την μετάβαση φάσης της GUT, τοπολογικά σταθερά αντικείμενα, όπως μονόπολα μπορούν να παραχθούν. Τα μονόπολα αυτά μπορούν να οδηγήσουν σε κοσμολογικά προβλήματα που αποφεύγονται από το πληθωρισμό του Σύμπαντος. Σε χρόνους $t \sim 10^{-10}s$ ή θερμοκρασία $T \sim 100\text{GeV}$, συμβαίνει η Ηλεκτρασθενής μετάβαση και η ομάδα G_S σπάει σε $G_{EW} = SU(3)_C \times U(1)_{em}$, σε χρόνο $t \sim 10^{-4}s$ ή $T \sim 1\text{GeV}$ ο περιορισμός του χρώματος στην QCD αναγκάζει τα κουάρκ να σχηματίσουν αδρόνια. Σε χρόνο $t \approx 180s$ ή $T = 1\text{MeV}$ συμβαίνει η νουκλεοσύνθεση και τελικά σε χρόνο $t = 200,000h^{-1}y$ ή $T = 3000K$ αποσυνδέεται η μάζα από την ακτινοβολία. Η ακτινοβολία από αυτήν την στιγμή εξελίσσεται ανεξάρτητα από το υπόλοιπο σύμπαν και ανιχνεύεται σήμερα σαν το CMB [21].

2.1 Πληθωριστικό Σύμπαν

Η εικασία της Μεγάλης Έκρηξης είναι η υπερισχύουσα στην Κοσμολογία. Όμως για το πολύ νέο Σύμπαν, που ήταν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία υπάρχουν τρία προβλήματα που δεν μπορούν να εξηγηθούν με αυτήν την θεωρία. Το πρόβλημα της επιπεδότητας, το πρόβλημα του ορίζοντα και το πρόβλημα των μονοπόλων. Το πληθωριστικό σύμπαν (inflation), είναι ένα σενάριο κατά το οποίο το σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά και εισήχθη ώστε να εξηγήσει τα τρία παραπάνω προβλήματα.

Πρόβλημα της Επιπεδότητας. Εξετάζοντας την παράμετρο πυκνότητας Ω_0 σήμερα παρατηρούμε, ότι η παράμετρος είναι προσεγγιστικά ίση με την μονάδα και από την εξίσωση Friedmann αυτό σημαίνει ότι το k πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Δηλαδή ότι η γεωμετρία του Σύμπαντος πρέπει να είναι επίπεδη.

$$1 - \Omega(t) = -\frac{k}{R^2 H^2}. \quad (2.1.1)$$

Εξετάζοντας την τιμή της παραμέτρου πίσω στο χρόνο βλέπουμε ότι αυτή είναι ακόμα πιο κοντά στη μονάδα, ακόμα και για χρόνους Plank ($t_p \approx 5 \times 10^{-44}s$)

$$|1 - \Omega_P| \leq 1 \times 10^{-60} s. \quad (2.1.2)$$

Ένας τέτοιος πολύ μικρός αριθμός όπως και στην περίπτωση του CP Προβλήματος δεν μπορεί να είναι τυχαίος.

Πρόβλημα του Ορίζοντα. Τα πειραματικά δεδομένα για το πρώιμο Σύμπαν προέρχονται από τις μετρήσεις του CMB όταν η θερμοκρασία ήταν $T_d = 3000K$. Η ομοιομορφία του CMB σήμερα, $T_0 = 2.73K$ με διακυμάνσεις $\frac{\delta T}{T} \approx 10^{-5}$, υποδεικνύει ότι υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ περιοχών του σύμπαντος που δεν έχουν επαφή μεταξύ τους. Επομένως όλο το σύμπαν πρέπει να βρισκόταν σε επαφή μεταξύ του, για αρκετό χρόνο ώστε να έρθει σε θερμική ισορροπία. Ποια κομμάτια του σύμπαντος βρίσκονται σε επαφή; Αν ένα σήμα φωτός σε χρόνο $t = 0$ φτάσει σε

έναν παρατηρητή πριν ή ακριβώς σε κάποιον χρόνο t , τότε τα δύο αυτά διαφορετικά κομμάτια του σύμπαντος αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Το σήμα φωτός δεν μπορεί να φτάσει όλα τα κομμάτια του διαστήματος, καθώς για μεγάλες αποστάσεις η ταχύτητα διαστολής του σύμπαντος είναι μεγαλύτερη από αυτή του φωτός. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον παρατηρήσιμο ορίζοντα (ή ορίζοντα σωματιδίων) ως μία σφαίρα με ακτίνα d_H , όπου d_H είναι η απόσταση που διένυσε το φως μέχρι να φτάσει τον παρατηρητή. Το φως ικανοποιεί την εξίσωση της γεωδαισιακής $ds^2 = 0$. Με βάση την μετρική RW ο παρατηρήσιμος ορίζοντας ορίζεται

$$d_H = R(t) \int_0^t \frac{dt}{R(t)}. \quad (2.1.3)$$

Ο χρόνος της αποσύνδεσης μάζας και ακτινοβολίας μπορεί να υπολογισθεί

$$\frac{T_0}{T_d} = \frac{2.73K}{3000K} = \frac{R(t_d)}{R(t_0)} = \left(\frac{t_d}{t_0}\right)^{2/3}, \quad (2.1.4)$$

όπου $t_d \approx 200,000h^{-1}y$. Η απόσταση που έχει ταξιδέψει το φως από το CMB είναι:

$$R(t_0) \int_{t_d}^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = 3t_0[1 - (\frac{t_d}{t_0})^{2/3}] \approx 3t_0 \approx 6,000h^{-1}Mpc. \quad (2.1.5)$$

Μία σφαίρα με ακτίνα αυτήν την απόσταση ονομάζεται “last scattering distance”. Ο ορίζοντας των σωματιδίων σε χρόνο t_d ήταν $2H^{-1}(t_d) = 3t_d \approx 0.168h^{-1}Mpc$ και έχει επεκταθεί σήμερα στη τιμή $0.168h^{-1}(\frac{R(t_0)}{R(t_d)}) \approx 184h^{-1}Mpc$. Η γωνία που αντιστοιχεί σήμερα στον ορίζοντα $\theta_d \approx 184/6,000 \approx 0.03$, επομένως ο ουρανός χωρίζεται σε $4\pi/(0.03)^2 \approx 14,000$ διαφορετικά μέρη τα οποία δεν επικοινωνούν μεταξύ τους. Άρα πως μπορεί η θερμοκρασία από την ακτινοβολία μαύρου σώματος του CMB να είναι τόσο καλά συντονισμένη μεταξύ όλων αυτών των διαφορετικών περιοχών;

Πρόβλημα των Μονοπόλων. Αυτό το πρόβλημα δημιουργείται όταν συνδυάζονται η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης με μία GUT που προβλέπει την δημιουργία μονοπόλων. Όταν η GUT ομάδα G σπάει σε θερμοκρασία T_S στην $G_S = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ μέσω ενός πεδίου Higgs φ , η διαδικασία αυτή αντιστοιχεί σε μία μετάβαση φάσης δεύτερης τάξης $\langle\varphi\rangle(T) = \langle\varphi\rangle(T=0)(1 - \frac{T^2}{T_S^2})^{1/2}$, $m_H = \lambda\langle\varphi\rangle(T)$, όπου λ σταθερά σύζευξης του Higgs. Η μετάβαση φάσης της GUT παράγει μονόπολα που είναι τοπικές αποκλίσεις από το κενό με ακτίνα $\sim M_X^{-1}$, μάζας $m_M = M_X/a_G$ και με $\varphi = 0$ στο κέντρο, a_G σταθερά σύζευξης της GUT. Η ακτίνα αυτή ορίζει μία σφαίρα S^2 στην οποία εάν ο τοπολογικός χώρος του κενού G/G_S είναι ομοτοπικά μη τετριμμένος δημιουργούνται μονόπολα. Τα μονόπολα δημιουργούνται μέσω του μηχανισμού Kibble, [15], ανάμεσα σε περιοχές μεγέθους $\xi_G = (\lambda^2 T_S)^{-1}$ και ο σχετικός αριθμός μονοπόλων είναι $r_M = n_M/T^3$.

Από την πλευρά της GUT υπολογίζεται πως $r_M \geq 10^{-10}$. Ενώ από την πλευρά της θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης στην εποχή της νουκλεοσύνθεσης υπολογίζεται $r_M \leq 10^{-19}$. Υπάρχει πολύ μεγάλη ασυμφωνία στην τάξη μεγέθους. Τα μαγνητικά μονόπολα αποτελούν τοπολογικά ελαττώματα μηδενικής διάστασης. Υπάρχουν άλλα τοπολογικά ελαττώματα μίας διάστασης και δύο διαστάσεων, οι κοσμικές χορδές και τα τοιχώματα τομέων.

Πληθωριστικό Σύμπαν. Τα τρία παραπάνω προβλήματα μπορούν να λυθούν υποθέτοντας ότι κάποια στιγμή στο πρώιμο Σύμπαν η διαστολή του επιταχυνόταν, $\ddot{R} > 0$. Υποθέτουμε πως υπάρχει ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο φ , με όνομα inflaton, και με δυναμική ενέργεια $V(\varphi)$, όπου αυτή η συνάρτηση έχει ελάχιστα τα $\varphi = \pm\sigma$ με $V(\sigma) = 0$, αλλά κοντά στην περιοχή του $\varphi = 0$ είναι επίπεδη, [21]. Για πολύ μεγάλες θερμοκρασίες η μορφή της συνάρτησης $V(\varphi)$ που εξαρτάται και από την θερμοκρασία T , έχει ελάχιστο το $\varphi = 0$. Όμως όσο η θερμοκρασία μειώνεται, το δυναμικό παίρνει την μορφή με τα δύο συμμετρικά ελάχιστα $\pm\sigma$. Αλλά παραμένει ακόμα ένα μικρό ενεργειακό φράγμα που διαχωρίζει το τοπικό ελάχιστο $\varphi = 0$ και τα δύο πραγματικά ελάχιστα.

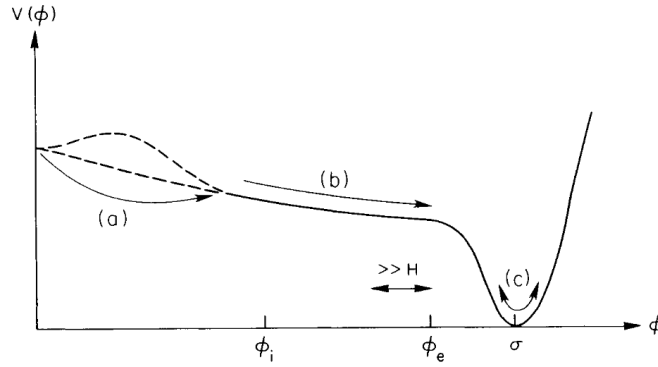


Figure 1: Σχηματική μορφή του δυναμικού $V(\varphi)$. (a) Περιοχή του μικρού ενεργειακού φράγματος κοντά στο $\varphi = 0$ που διαχωρίζει το επίπεδο κέντρο του δυναμικού με τα πραγματικά ελάχιστα. (b) Περιοχή της αργής κύλισης του inflaton προς το πραγματικό ελάχιστο. (c) Περιοχή ταλάντωσης του πεδίου στο ελάχιστο του δυναμικού. Σχήμα από The Early Universe, [18].

Κάποια στιγμή μέσω χβαντικών διακυμάνσεων $\varphi = \varphi_{cl} + \Delta\varphi_{qm}$, $\Delta\varphi_{qm} \ll \varphi_{cl}$ το inflaton βρίσκεται σε σημείο φ_i έξω από την περιοχή του μικρού ενεργειακού φράγματος, περιοχή (a) στο Σχήμα. Τότε μία φούσκα δημιουργείται στο Σύμπαν με $\varphi = \varphi_i$ και το inflaton πηγαίνει προς το πραγματικό ελάχιστο πολύ αργά λόγω του πολύ επίπεδου δυναμικού, σε αυτήν την κατάσταση έχει πυκνότητα ενέργειας $\rho \approx V(\varphi = 0) \equiv V_0$. Από την εξίσωση Friedmann (2. 0. 4), το R μεγαλώνει

γρήγορα και το όρος της καμπυλότητας $\frac{k}{R^2}$ μπορεί να θεωρηθεί μηδέν. Άρα

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} V_0. \quad (2.1.6)$$

Δηλαδή $R(t) \propto e^{Ht}$, $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V_0}$ =σταθερό, επομένως η φούσκα μεγαλώνει εκθετικά για κάποιο χρόνο και όταν φτάνουμε στο τέλος του πληθωρισμού για $t = t_f$ το inflaton φ ταλαντώνεται στο ελάχιστο του δυναμικού σ και στο τέλος διασπάται και αναθερμαίνει το Σύμπαν σε θερμοκρασία T_R . Το Σύμπαν ύστερα περιγράφεται από την καθιερωμένη κοσμολογία.

$$\frac{R(t_f)}{R(t_i)} = e^{H(t_f-t_i)} \equiv e^{H\tau}. \quad (2.1.7)$$

Το παραπάνω σενάριο ονομάζεται “new inflation”. Ο ορίζοντας των σωματιδίων κατά την διάρκεια της inflation παίρνει την μορφή

$$d(t) = e^{Ht} \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt'}{e^{Ht'}} \approx \frac{e^{H(t_f-t_i)}}{H}. \quad (2.1.8)$$

Για $t_f - t_i \gg H$, ο ορίζοντας μεγαλώνει εκθετικά γρήγορα κατά την διάρκεια αυτή και το πρόβλημα του ορίζοντα μπορεί να αποφευχθεί. Για τον όρο της καμπυλότητας στο τέλος της inflation έχουμε:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{k}{R^2 H^2} = -\frac{k}{H^2} e^{-2H\tau}, \quad (2.1.9)$$

για αρκετά μεγάλο $H\tau$ το κλάσμα $\frac{k}{H^2} e^{-2H\tau} \ll 1$. Άρα το σημερινό σύμπαν είναι επίπεδο με μεγάλη ακρίβεια. Τα μαγνητικά μονόπολα αραιώνονται παρά πολύ επίσης λόγω του μεγάλου $H\tau$ και επειδή $T_R \gg m_M$ δεν μπορούν να παραχθούν νέα μετά την Αναθέρμανση. Το ίδιο ισχύει και για τα υπόλοιπα τοπολογικά ελαττώματα.

Αναθέρμανση. Μετά τον πληθωρισμό του Σύμπαντος όλη η ύλη έχει αραιωθεί σε χαμηλές πυκνότητες. Η Αναθέρμανση είναι η διαδικασία κατά την οποία η ενέργεια που έχει διασκορπιστεί από τον πληθωρισμό ξαναπαίρνει τη μορφή της ύλης που γνωρίζουμε. Η Αναθέρμανση χαρακτηρίζεται από μία θερμοκρασία που συμβολίζεται με T_R .

2.2 Σκοτεινή Ύλη

Μετά τον Πληθωρισμό και την Αναθέρμανση, το Σύμπαν πέρασε από την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας στην εποχή κυριαρχίας της ύλης. Αργότερα πέρασε στην εποχή κυριαρχίας της σκοτεινής ενέργειας, στην οποία βρίσκεται μέχρι και σήμερα. Η ενέργεια του Σύμπαντος μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη:

α) την σχετικιστική ενέργεια σωματιδίων και ακτινοβολίας όπως τα φωτόνια, τα

νετρίνο και την μη-σχετικιστική μάζα βαρυονίων, β) την σκοτεινή ύλη και γ) την σκοτεινή ενέργεια που όπως αναφέρθηκε αποτελεί το 68% της ενεργείας του Σύμπαντος.

Αθροίζοντας τις μάζες των κλάστερ γαλαξιών μπορεί να δοθεί ένα κάτω όριο της πυκνότητας μάζας αυτήν την στιγμή στο Σύμπαν $\Omega_{m,0} \geq 0.2$. Όμως η πυκνότητα βαρυονικής μάζας είναι μόνο $\Omega_{bary,0} \approx 0.04$, [27]. Δηλαδή η πυκνότητα της μη βαρυονικής μάζας είναι τουλάχιστον 5 φορές μεγαλύτερη από αυτήν της βαρυονικής, από την οποία όλα τα αστέρια, πλανήτες έχουν φτιαχτεί. Τα τελευταία αστροφυσικά δεδομένα δείχνουν ότι η σκοτεινή ύλη αποτελεί το 85% της ύλης του Σύμπαντος.

2.2.1 Αποδείξεις Ύπαρξης Σκοτεινής Ύλης

Σκοτεινή Ύλη σε Γαλαξίες. Μία πρώτη απόδειξη ύπαρξης σκοτεινής ύλης ήρθε μέσω της παρατήρησης ότι διάφορα φωτεινά αντικείμενα στο εξωτερικό μέρος του γαλαξία έχουν απρόσμενες τροχιές με βάση την ορατή ύλη. Θεωρώντας ότι ένας αστέρας έχει κυκλική τροχιά γύρω από τον άξονα συμμετρίας του γαλαξία με επιτάχυνση

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad (2.2.1)$$

κάνοντας μία Νευτωνική ανάλυση του προβλήματος,

$$ma = \frac{GM(r)m}{r^2}, \quad (2.2.2)$$

και χρησιμοποιώντας την (2.2.1) καταλήγουμε

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (2.2.3)$$

G είναι η σταθερά του Newton και $M(r)$ είναι η μάζα του γαλαξία που εμπεριέχεται μέχρι την ακτίνα r . Στο εξωτερικό μέρος ενός σπειροειδή γαλαξία η μάζα είναι πολύ πιο αραιωμένη από το κέντρο του, επομένως μετά από μία κρίσιμη ακτίνα R μπορούμε να θεωρήσουμε την μάζα $M(R) = M_c$, σταθερή και έτσι η ταχύτητα θα φθίνει σαν $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$. Όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τους περισσότερους γαλαξίες, καθώς η συνάρτηση $v(r)$ γίνεται σχεδόν σταθερή για μεγάλες ακτίνες. Μιας και μόνο η συνάρτηση μάζας $M(r)$ έχει εξάρτηση από την ακτίνα σημαίνει πως στην εξίσωση (2.2.3) πρέπει $M(r) \propto r$. Η λύση είναι η πρόταση πως υπάρχει κάποια έξτρα αόρατη μάζα με πυκνότητα $\rho_{DM}(r) \propto \frac{1}{r^2}$.

Βαρυτική Εστίαση. Με βάση την Γενική Σχετικότητα του Einstein η σκοτεινή ύλη δεν θα επηρεάσει μόνο την τροχιά της ύλης, αλλά και του φωτός. Όταν το φως περνάει δίπλα από ένα βαρύ αντικείμενο η τροχιά του κάμπτεται και έτσι μπορεί να δημιουργηθούν πολλαπλά είδωλα της πηγής, το αντικείμενο αυτό λειτουργεί σαν φακός ανάμεσα στην πηγή του φωτός και τον παρατηρητή. Το

φαινόμενο αυτό ονομάζεται Βαρυτική Εστίαση και η σκοτεινή ύλη λειτουργεί σαν το βαρύ αντικείμενο - φακός. Εάν το βαρύ αντικείμενο, είναι για παράδειγμα ένα Massive Compact Halo Objects (MACHOS), το οποίο είναι αντικείμενο φτιαγμένο από βαρυονική μάζα, βρίσκεται ακριβώς πάνω στην ευθεία μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή, η γωνία μεταξύ των παραμορφωμένων εικόνων της πηγής δίνεται

$$\theta_E = 2\sqrt{4GM \frac{d_{LS}}{d_L d_S}}, \quad (2.2.4)$$

όπου d_{LS} είναι η απόσταση μεταξύ του φακού και της πηγής, d_L η απόσταση του παρατηρητή από τον φακό και d_S η απόσταση του παρατηρητή από την πηγή. Η γωνία θ_E ονομάζεται ακτίνα Einstein. Η εικόνα της πηγής σε αυτήν την περίπτωση είναι ένα τέλειο δακτυλίδι φωτός. Στην περίπτωση που το MACHO δεν βρίσκεται στην ευθεία του παρατηρητή με την πηγή, η εικόνα της πηγής παραμορφώνεται σε δύο η περισσότερα τόξα.

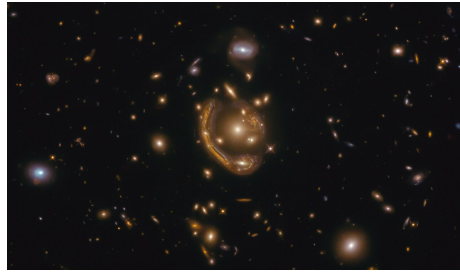


Figure 2: Παράδειγμα βαρυτικής εστίασης. Εικόνα από NASA/ESA Hubble Space Telescope

Έχει υπολογισθεί πως η πιθανότητα ένα αστέρι στον γαλαξία μας να μπορεί να εστιασθεί βαρυτικά από ένα MACHO που δεν είναι σκοτεινή ύλη μη βαρυονικής φύσεως είναι της τάξης 10^{-7} . Επομένως δεν υπάρχουν αρκετά MACHOs για να δικαιολογούν την σκοτεινή ύλη στους γαλαξίες. Επίσης οι επιδράσεις τις σκοτεινής ύλης μέσω βαρυτικής εστίασης έχουν μελετηθεί σε μακρινά κλάστερ γαλαξιών.

Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου. Η Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB) είναι ακτινοβολία από την πολύ πρώιμη εποχή του Σύμπαντος όπου τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια συνδυάζονται ώστε να φτιάξουν Υδρογόνο και τα φωτόνια κινούνται ελεύθερα. Το φως που μας φτάνει έχει διασταλεί όσο και η διαστολή του Σύμπαντος, οπότε η συχνότητα του φωτός που ήταν πιο μεγάλη από ακτίνες γ , πλέον μας φτάνει με συχνότητα μικροκυμάτων. Το CMB ακτινοβολεί σαν μαύρο σώμα με μέση θερμοκρασία $\langle T \rangle = 2.73K$. Παρόλα αυτά

υπάρχουν μεταβολές στην θερμοκρασία για κάθε περιοχή του ουρανού

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \frac{T(\theta, \varphi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (2. 2. 5)$$

με διακυμάνσεις $\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = 1.1 \times 10^{-5}$. Τα (θ, φ) ορίζουν μία σφαιρική επιφάνεια και έτσι οι θερμοκρασιακές διακυμάνσεις μπορούν να αναλυθούν σαν ένα σύνολο σφαιρικών αρμονικών

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (2. 2. 6)$$

Μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές της παραπάνω σχέσης (2. 2. 6) από την σειρά

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} |a_{lm}|^2, \quad (2. 2. 7)$$

και να κάνουμε την γραφική παράσταση των συντελεστών C_l ως προς l . Αυτή η σχέση ονομάζεται φάσμα γωνιακής ισχύος.

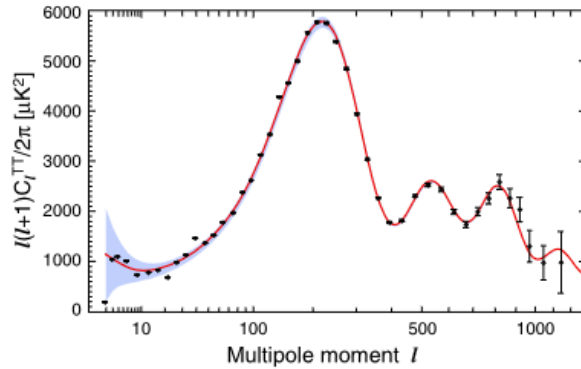


Figure 3: Το φάσμα γωνιακής ισχύος CMB μετά από επτά χρόνια μετρήσεων από τον δορυφόρο WMAP. Οι μαύρες κουκκίδες με τις ράβδους σφάλματος αντιπροσωπεύουν τις μετρήσεις και η κόκκινη καμπύλη είναι μία θεωρητική πρόβλεψη. Η μπλε ζώνη αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη διασπορά (κοσμική διακύμανση) λόγω της τυχαιότητας των πρώιμων διαταραχών. Εικόνα από WMAP Science Team [20].

Από τις κορυφές της παράστασης μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα βαρυονικής μάζας και συνολικής μάζας, [20] $\Omega_b h^2 = 0.0225$, $\Omega_m h^2 = 0.1334$. Επομένως αφού οι αριθμοί δεν είναι ίσοι η βαρυονική μάζα είναι μόνο ένα μέρος της συνολικής μάζας και η διαφορά τους είναι σκοτεινή ύλη $\Omega_{dm} h^2 = 0.1109$.

Υποψήφια Σωματίδια Σκοτεινής Ύλης. Ένα σωματίδιο υποψήφιο για σκοτεινή ύλη θα πρέπει αρχικά να μην είναι βαρυονικής φύσεως, να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο ή να έχει πολύ ασθενείς αλληλεπιδράσεις με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Καθώς επίσης να αλληλεπιδρά μόνο με την βαρύτητα με τα αλλά βαρυονικά σωματίδια καθώς και με τον εαυτό του. Πρέπει επίσης, να είναι σταθερό για κοσμολογικούς χρόνους. Μπορούμε να ταξινομήσουμε την Σκοτεινή Ύλη σε δύο περιπτώσεις:

- Θερμή Σκοτεινή Ύλη (HDM): Μορφή σκοτεινής ύλης που αποτελείται από σωματίδια που ταξιδεύουν με σχετικιστικές ταχύτητες.
- Ψυχρή Σκοτεινή Ύλη (CDM): Μορφή σκοτεινής ύλης που αποτελείται από σωματίδια που έχουν χαμηλές ταχύτητες.

Η ψυχρή σκοτεινή ύλη είναι καθιερωμένη σήμερα, αλλά υπάρχουν και μοντέλα που συμπεριλαμβάνουν και τις δύο. Η περίπτωση να υπάρχει μόνο HDM έχει αποκλειστεί, καθώς αυτό έρχεται σε αντίθεση με παρατηρήσεις όπως ο σχηματισμός γαλαξιών, που ενώ συμβαίνει νωρίτερα από σχηματισμό σούπερ κλάστερ γαλαξιών, δεν προβλέπεται σε μία θεωρία HDM [18].

2.3 Θερμοδυναμική του Διαστελλόμενου Σύμπαντος

2.3.1 Θερμοδυναμική σε Ισορροπία

Το πολύ πρώιμο Σύμπαν ήταν μία πολύ καλή προσέγγιση θερμικής ισορροπίας. Οπότε θέλοντας να αναλύσουμε την θερμική ιστορία του Σύμπαντος, μία καλή αρχή είναι να ανακεφαλαιώσουμε τους βασικούς τύπους της στατιστικής φυσικής για την πυκνότητα πληθυσμού n , πυκνότητα ενεργείας ρ και πίεση p ενός αραιωμένου ασθενώς αλληλεπιδρώμενου αερίου σωματιδίων με g εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Το αέριο βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με θερμοκρασία T . Και $f(\vec{p})$ η κατανομή των σωματιδίων του αερίου στο χώρο των φάσεων.

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p, \quad (2.3.1)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p, \quad (2.3.2)$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(\vec{p}) d^3p, \quad (2.3.3)$$

όπου $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Στην κινητική ισορροπία, δηλαδή στην κατάσταση που τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους πολύ γρηγορότερα από την κλίμακα χρόνου που αλλάζουν οι παράμετροι που επηρεάζουν την ισορροπία, όπως για παράδειγμα η

πίεση ή η θερμοκρασία, τότε η κατανομή f δίνεται από την στατιστική Fermi-Dirac ή Bose-Einstein ανάλογα το είδος των σωματιδίων.

$$f_{FD}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1}, \quad (2.3.4)$$

$$f_{BE}(\vec{p}) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} - 1}, \quad (2.3.5)$$

μ είναι το χημικό δυναμικό της και όταν βρίσκεται το σύστημα σε χημική ισορροπία τότε τα χημικά δυναμικά διάφορων ειδών σωματιδίων που αλληλεπιδρούν συσχετίζονται μεταξύ τους. Σε μία αλληλεπίδραση όπου το είδος a αλληλεπιδρά με τα είδη b, c, d

$$a + b \longleftrightarrow c + d.$$

Η σχέση των χημικών δυναμικών στην χημική ισορροπία είναι $\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d$. Βάζοντας τις κατανομές στις σχέσεις για πυκνότητα πληθυσμού, πυκνότητα ενέργειας και πίεσης για κάποιο είδος μάζας m , χημικού δυναμικού μ και θερμοκρασία T , αυτές γίνονται

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{\frac{E-\mu}{T} \pm 1} E dE, \quad (2.3.6)$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{\frac{E-\mu}{T} \pm 1} E^2 dE, \quad (2.3.7)$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{\frac{E-\mu}{T} \pm 1} dE. \quad (2.3.8)$$

Στο σχετικιστικό όριο, το οποίο είναι το σχετικό με το πρώιμο Σύμπαν $T \gg m$, και θεωρώντας ότι δεν υπάρχει εκφυλισμός μεταξύ των ειδών $T \gg \mu$.

$$n = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & (Bose) \\ \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} g T^3 & (Fermi), \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$\rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & (Bose) \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & (Fermi), \end{cases} \quad (2.3.10)$$

$$p = \rho/3. \quad (2.3.11)$$

Στην περίπτωση που $\mu > 0$ για ένα είδος Bose-Einstein μπορεί να δημιουργηθεί ένα συμπύκνωμα Bose-Einstein που πρέπει να αντιμετωπιστεί αλλιώς από άλλες περιπτώσεις.

2.3.2 Εξίσωση Boltzmann

Στην αρχή της ιστορίας του Σύμπαντος, το μεγαλύτερο μέρος του βρισκόταν σε θερμική ισορροπία, κάνοντας την παραπάνω υπόθεση μία πολλή καλή προσέγγιση. Όμως έχουν υπάρξει διάφορες απομακρύνσεις από αυτήν δημιουργώντας την ανάγκη περιγραφής των πληθυσμών σε κατάσταση μη ισορροπίας. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω της εξίσωσης Boltzmann. Ακολουθώντας το, [18]. Η εξίσωση Boltzmann εκφράζει την δράση του τελεστή Liouville $\hat{L}[f]$ πάνω στην κατανομή των χώρων φάσεων ενός είδους χ , $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = f(x^\mu, p^\mu)$ σε όρους του τελεστή σύγκρουσης $C[f]$

$$\hat{L}[f] = C[f]. \quad (2.3.12)$$

Στην μη-σχετικιστική μορφή του ο τελεστής Liouville $\hat{L}[f]$ δίνεται

$$\hat{L}[f] = \frac{\partial}{\partial t} f + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\vec{F}}{m_\chi} \cdot \nabla_{\vec{v}} f, \quad (2.3.13)$$

ο όρος $\frac{\partial}{\partial t} f + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$ μπορεί να μετατραπεί στην Γενική Σχετικότητα σε $p^\alpha \partial_\alpha f$. Και ο τελευταίος όρος που είναι ο όρος δύναμης μπορεί να γραφτεί

$$\frac{\vec{F}}{m_\chi} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = \frac{dp^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} f, \quad (2.3.14)$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta, \quad (2.3.15)$$

Άρα συνολικά η συναλλοίωτη μορφή του τελεστή Liouville είναι

$$\hat{L}[f] = [p^\alpha \partial_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \frac{\partial}{\partial p^\alpha}] f. \quad (2.3.16)$$

Για ένα ομογενές και ισοτροπικό Robertson-Walker Σύμπαν η πυκνότητα του χώρου φάσεων $f = f(\vec{p}, t) = f(E, t)$ και ο τελεστής γίνεται

$$\hat{L}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (2.3.17)$$

Η πυκνότητα πληθυσμού του είδους χ είναι

$$n_\chi = \frac{g}{8\pi^3} \int f(E, t) d^3 p. \quad (2.3.18)$$

Δρώντας τον τελεστή Liouville στον πληθυσμό n_χ η εξίσωση Boltzmann γίνεται

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3 \frac{\dot{R}}{R} n_\chi = \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3 p}{E}. \quad (2.3.19)$$

Θεωρώντας διαδικασίες του τύπου $\chi + i \longleftrightarrow 1 + 2$, όπου τα είδη $i, 1, 2$ βρίσκονται σε θερμική ισορροπία, ο όρος σύγκρουσης μπορεί να γραφτεί

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3 p}{E} = - \int d\Pi_\chi d\Pi_i d\Pi_1 d\Pi_2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\chi + p_i - p_1 - p_2) |M|^2 \cdot [f_\chi f_1 (1 \pm f_1) (1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_\chi) (1 \pm f_i)]. \quad (2. 3. 20)$$

Όπου $d\Pi_k = \frac{g_k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{E}$, f_k οι αντίστοιχες πυκνότητες στον χώρο φάσεων, g_k οι εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας. Η τετραδιάστατη συνάρτηση δέλτα εξασφαλίζει την διατήρηση ενέργειας-ορμής, και το $|M|^2$ είναι το στοιχείο πίνακα των αλληλεπιδράσεων. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει συμπύκνωμα Bose-Einstein ή εκφυλισμός Fermi είναι καλή προσέγγιση $1 \pm f_k \simeq 1$, αφού $f_k = e^{-(E_k - \mu_k)/T} \ll 1$ και η εξίσωση Boltzmann (2. 3. 19) γίνεται

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi = - \int d\Pi_\chi d\Pi_i d\Pi_1 d\Pi_2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\chi + p_i - p_1 - p_2) |M|^2 [f_\chi f_1 - f_1 f_2], \quad (2. 3. 21)$$

ο όρος $3Hn_\chi$ είναι όρος που συνδέει την αραίωση της πυκνότητας πληθυσμού με την διαστολή του σύμπαντος.

3 Εισαγωγή Στη Θεωρία Πεδίου

3.1 Λαγκρανζιανός Φορμαλισμός Θεωρίας Πεδίου

Εξισώσεις Κίνησης. Ένας τρόπος να οριστεί μία Θεωρία Πεδίου είναι μέσω του Λαγκρανζιανού φορμαλισμού. Σε ένα 3+1 διαστατό χώρο η Δράση S της Λαγκρανζιανής πυκνότητας \mathcal{L} μπορεί να γραφτεί σαν το ολοκλήρωμα σε όλο τον χώρο της \mathcal{L} η οποία είναι συνάρτηση πεδίων $\varphi(x)$ και των παράγωγων του $\partial_\mu \varphi(x)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)). \quad (3.1.1)$$

Η δυναμική της Λαγκρανζιανής, δηλαδή οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος, μπορούν να καθοριστούν από την Αρχή Ελάχιστης Δράσης. Δηλαδή για κάθε σύστημα το οποίο εξελίσσεται από κάποιο αρχικό χρόνο t_1 σε ένα t_2 η διαδρομή $\varphi(x)$ η οποία θα ακολουθήσει το σύστημα αυτό, θα είναι αυτή η οποία ελαχιστοποιεί την Δράση. Δηλαδή $\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0$

$$\delta S = \int dx^4 \delta \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)), \quad (3.1.2)$$

$$\delta S = \int dx^4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \partial_\mu \varphi, \quad (3.1.3)$$

$$[\delta, \partial_\mu] \varphi = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\delta S = \int dx^4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \delta \varphi, \quad (3.1.5)$$

$$\delta S = \int dx^4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right]. \quad (3.1.6)$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να θεωρηθεί μηδέν καθώς μέσω Θεωρήματος Gauss μπορεί να γίνει ολοκλήρωμα επιφάνειας πάνω στο σύνορο του τετραδιάστατου χωροχρόνου. Θεωρούμε ότι τα πεδία στο σύνορο τείνουν στο μηδέν πολύ γρήγορα, οπότε γενικότερα όροι στην Λαγκρανζιανή που έχουν ολική παράγωγο δεν αλλάζουν τις εξισώσεις κίνησης. Καταλήγουμε άρα

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.1.7)$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις Euler-Lagrange.

Θεώρημα Noether. Μπορούμε να μελετήσουμε την επίδραση συνεχών μετασχηματισμών πάνω στα πεδία της μορφής $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}$, όπου α μία απειροελάχιστη παράμετρος. Εάν αυτός ο μετασχηματισμός αφήνει τις εξισώσεις κίνησης αναλλοίωτες τότε λέμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Για να είναι συμμετρία της Λαγκρανζιανής κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό θα πρέπει να αλλάζει το πολύ κατά έναν όρο επιφάνειας, τέτοιον ώστε $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu j^\mu$, όπου $\partial_\mu j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha}$

$$\partial_\mu j^\mu = \int dx^4 \left[\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \right] \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha} + \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha} \right]. \quad (3.1.8)$$

Ο πρώτος όρος είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange και είναι μηδέν και ο δεύτερος είναι η απόκλιση του j^μ

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (3.1.9)$$

και

$$j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}. \quad (3.1.10)$$

Το διανυσματικό πεδίο j^μ λέγεται ρεύμα Noether και όταν ικανοποιεί την συνθήκη $\partial_\mu j^\mu = 0$ αποκαλείται διατηρούμενο ρεύμα. Επομένως για κάθε συνεχή συμμετρία της Λαγκρανζιανής υπάρχει ένα διατηρούμενο ρεύμα. Θεωρώντας το απειροελάχιστο α σαν συνάρτηση του χωροχρόνου και όχι σταθερό, $\alpha = \alpha(x)$ μπορούμε να παράγουμε το αποτέλεσμα των Gell-Mann-Levy που μας επιτρέπει να πάρουμε την έκφραση του j^μ αλλά και του $\partial_\mu j^\mu$

$$\delta\mathcal{L} = \alpha(x) \partial_\mu j^\mu + (\partial_\mu \alpha(x)) j^\mu. \quad (3.1.11)$$

Φορμαλισμός Ηλεκτρομαγνητισμού στην Θεωρία Πεδίου. Η Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία μπορεί να περιγράφεται από τις εξισώσεις του Maxwell και ο σκοπός είναι να τις γράψουμε σε συναλλοίωτη μορφή. Αυτό μπορεί να γίνει γράφοντας τον αντισυμμετρικό ταυιστή ισχύος του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_z & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.12)$$

$\tilde{F}^{\mu\nu}$ είναι ο dual ηλεκτρομαγνητικός ταυιστής ισχύος με μορφή

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_z & E_y & -B_x \\ E_z & 0 & -E_x & -B_y \\ -E_y & E_x & 0 & -B_z \\ B_x & B_y & B_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.13)$$

όπου $J^\nu = (\rho, \vec{J})$ είναι η πυκνότητα τετρα-ρεύματος. Ο ταυιστής $F^{\mu\nu}$ μπορεί να γραφτεί σε όρους του τετρα-δυναμικού $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.1.14)$$

Και οι εξισώσεις Maxwell μπορούν να καθοριστούν από την Λανγκραζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_{\mu}J^{\mu}. \quad (3.1.15)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}) - A_{\mu}j^{\mu}. \quad (3.1.16)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} = -J^{\nu}. \quad (3.1.17)$$

1ος όρος:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}A_{\beta})} = \frac{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu}\partial_{\rho}A_{\sigma})}{\partial(\partial_{\alpha}A_{\beta})}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} = 2\delta_{\rho}^{\alpha}\delta_{\sigma}^{\beta}\partial_{\alpha}A_{\beta}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} = 2\partial^{\mu}A^{\nu}. \quad (3.1.18)$$

2ος όρος:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}A_{\beta})} = \frac{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu}\partial_{\rho}A_{\sigma})}{\partial(\partial_{\alpha}A_{\beta})}g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} = 2\partial^{\nu}A^{\mu}. \quad (3.1.19)$$

Άρα συνολικά

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}A_{\beta})} = \partial_{\mu}(\partial^{\nu}A^{\mu} - \partial^{\mu}A^{\nu}) = \partial_{\mu}F^{\mu\nu}. \quad (3.1.20)$$

Και οι εξισώσεις κίνησης (3.1.7), δηλαδή οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν την μορφή

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = J^{\nu} \quad (3.1.22)$$

και

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\nu}F_{\rho\sigma} \equiv \partial_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.1.23)$$

ιδιότητα Bianchi

3.2 Ολοκλήρωμα Διαδρομής

Ολοκλήρωμα Διαδρομής στην Κβαντομηχανική. Στην μονοδιάστατη μη-σχετικιστική κβαντομηχανική με Χαμιλτονιανή

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x, t). \quad (3.2.1)$$

Εάν θεωρήσουμε την αρχική κατάσταση $|x_i\rangle$ σε χρόνο t_i και θέλουμε να την δράσουμε πάνω στην τελική κατάσταση $\langle x_f|$ σε χρόνο t_f ώστε να βρούμε το πλάτος της πιθανότητας μετάβασης, τότε εάν η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τον χρόνο μπορούμε να γράψουμε τις καταστάσεις $|x_i(t)\rangle = e^{it_i\hat{H}}|x_i\rangle$ και $\langle x_f| = \langle x_f|e^{-t_f\hat{H}}$. Έτσι γράφουμε το στοιχείο πίνακα σαν

$$\langle x_f|x_i\rangle = \langle x_f|e^{-i(t_f-t_i)\hat{H}}|x_i\rangle. \quad (3.2.2)$$

Για την Χαμιλτονιανή θεωρούμε ότι είναι μία συνεχής παραγωγίσιμη συνάρτηση του χρόνου t οπότε μπορούμε να χωρίσουμε το χωρίο $t_f - t_i$ σε n απειροελάχιστα διαστήματα $\delta t = \frac{(t_f - t_i)}{n}$ και $t_n = t_i + n\delta t$

$$t_i = t_0 < t_1 \dots < t_n < t_{n+1} = t_f. \quad (3. 2. 3)$$

Και τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\langle x_f | x_i \rangle = \langle x_f | e^{(-iH\delta t)^n} | x_i \rangle, \quad (3. 2. 4)$$

βάζοντας τον μοναδιαίο μετασχηματισμό $1 = \int dx |x\rangle \langle x|$ ανάμεσα από κάθε χρονικό διάστημα

$$\langle x_f | x_i \rangle = \int dx_n \dots dx_1 \langle x_f | e^{-iH(t_n)\delta t} | x_n \rangle \langle x_n | \dots | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-iH(t_i)\delta t} | x_i \rangle. \quad (3. 2. 5)$$

Κάθε κατάσταση $|x_j\rangle$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω της ιδιοκατάστασης ορμής $\langle p | x \rangle = e^{-ipx}$ βάζοντας ανάμεσα από κάθε $|x_n\rangle$ την ταυτότητα $I = \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p|$. Λύνοντας το ολοκλήρωμα ως προς τις ορμές πραγματοποιείται ένας μετασχηματισμός Legendre που μετατρέπει την Χαμιλτονιανή στην Λαγκρανζιανή $L = p\dot{x} - H$, [28], και παίρνοντας το όριο $\delta t \rightarrow 0$ καταλήγουμε

$$\langle x_f | x_i \rangle = \int dx_n \dots dx_1 e^{i \int L dt}, \quad (3. 2. 6)$$

$$\langle x_f | x_i \rangle = \int_{x_i}^{x_f} Dx(t) e^{iS[x]}. \quad (3. 2. 7)$$

Όπου S δράση της Λαγκρανζιανής $S = \int L(x, \dot{x}) dt$ και $Dx(t)$ σημαίνει ότι ολοκληρώνουμε προς όλες τις πιθανές διαδρομές dx_n με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (x_n, x_{n-1}) .

Με τον φορμαλισμό του Ολοκληρώματος Διαδρομής η θεωρία της κβαντομηχανικής αντιμετωπίζει τον χρόνο σαν άλλη μία παράμετρο, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί στον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Το ολοκλήρωμα διαδρομής αθροίζει όλες τις πιθανές διαδρομές που μπορεί να κάνει η αρχική μας κατάσταση για να βρεθεί στην τελική, κάθε διαδρομή συμβάλλει με την δικιά της αντίστοιχη πιθανότητα. Η πιο πιθανή διαδρομή είναι η κλασική και μετά ακολουθούν κβαντικές διορθώσεις της τάξης δυνάμεων \hbar .

Ολοκλήρωμα Διαδρομής στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Για την περίπτωση της Θεωρίας Πεδίου οι αντίστοιχες καταστάσεις ενδιάμεσου χρόνου $|x\rangle \langle x|$ είναι τα πεδία Φ . Αντίστοιχα ισχύει ότι οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $\hat{\Phi}$ είναι

$$\hat{\Phi} |\Phi\rangle = \varphi |\Phi\rangle, \quad (3. 2. 8)$$

και ο ταυτότητα είναι

$$I = \int D\Phi |\Phi\rangle \langle \Phi|. \quad (3. 2. 9)$$

Με παρόμοιο τρόπο το ολοκλήρωμα διαδρομής δίνεται

$$\langle \varphi(x, x_0) | \varphi(y, y_0) \rangle = \int D\Phi(\vec{x}, t) e^{iS[\Phi]}, \quad (3.2.10)$$

y_0 αρχικός χρόνος, x_0 τελικός χρόνος. Το μέτρο της ολοκλήρωσης είναι το $D\Phi = \prod d\Phi$ και η Λαγκρανζιανή μετατρέπεται στην αντίστοιχη Λαγκρανζιανή πυκνότητα $S = \int dx^4 \mathcal{L}$. Το πεδίο Φ δεν είναι κατ' ανάγκη μία κατάσταση ενός σωματιδίου, αλλά μπορεί να είναι κατάσταση δύο ή και περισσότερων σωματιδίων.

Κλασικό Όριο. Γράφοντας το ολοκλήρωμα διαδρομής με το \hbar ,

$$\int D\Phi e^{\frac{i}{\hbar} S[\Phi]}. \quad (3.2.11)$$

Για να προσεγγίσουμε το κλασικό όριο πρέπει απλά να πάρουμε το όριο $\hbar \rightarrow 0$. Σε αυτό το όριο η ταλάντωση του εκθετικού στο μιγαδικό επίπεδο έχει άπειρη συχνότητα, αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μόνο τα ακρότατα της Δράσης θα συνεισφέρουν για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Δηλαδή η Δράση για την οποία ισχύει $\delta S = 0$, όπως ακριβώς οι εξισώσεις Euler-Lagrange της κλασικής μηχανικής. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό είναι κάνοντας μία περιστροφή Wick $t \rightarrow -i\tau$ που μετατρέπει τον χώρο από Minkowski σε Ευκλείδειο

$$ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.2.12)$$

και το ολοκλήρωμα διαδρομής γράφεται

$$\int D\Phi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\Phi]}. \quad (3.2.13)$$

Όταν παίρνουμε το όριο $\hbar \rightarrow 0$ σε αυτήν την περίπτωση, περιμένουμε το αποτέλεσμα να είναι καλώς ορισμένο. Επομένως κυριαρχεί το Φ_0 το οποίο ελαχιστοποιεί την δράση. Αφού για οποιοδήποτε άλλο Φ το $S[\Phi]$ είναι μεγαλύτερο και τείνει γρηγορότερα στο άπειρο. Επομένως στο κλασικό όριο μόνο η κλασική διαδρομή x_{cl} είναι σημαντική και στην ουσία είναι η μόνη δυνατή διαδρομή.

3.3 Κβαντική Χρωμοδυναμική

Η Κβαντική Χρωμοδυναμική ή QCD είναι η θεωρία που περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα κουάρκ και στα γλουόνια. Τα αδρόνια είναι φτιαγμένα από κουάρκ, φερμιόνια με σπιν 1/2 και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω του γλουονίου που είναι μποζόνιο με σπιν 1.

Το γλουόνιο είναι το ανάλογο του φωτονίου στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED), δηλαδή κάθε αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωματιδίων στην QCD γίνεται μέσω ανταλλαγής γλουονίων. Το ανάλογο του ηλεκτρικού φορτίου είναι το φορτίο χρώματος, που αποτελεί νέο κβαντικό αριθμό. Στην QED υπάρχει μόνο

έναν τύπος ηλεκτρικού φορτίου με είτε θετικό φορτίο είτε αρνητικό. Στην QCD υπάρχουν τρία είδη φορτίων χρώματος, που το κάθε ένα από αυτά έχει ένα αντίστοιχο αντί-χρώμα. Τα τρία αυτά είδη είναι το κόκκινο, το πράσινο, το μπλε. Σωματίδια με ουδέτερο χρώμα μπορούν να συμβούν είτε συνδυάζοντας τρία κουάρκ με διαφορετικά χρώματα το καθένα τα οποία ονομάζονται βαρυόνια, είτε συνδυάζοντας ένα κουάρκ με αντικουάρκ τα οποία έχουν αντίθετο φορτίο χρώματος. Τα γλουόνια και αυτά έχουν φορτίο χρώματος και υπάρχουν 8 διαφορετικά γλουόνια όσοι είναι και οι γεννήτορες της αντίστοιχης συμμετρίας της QCD. Η QCD περιγράφεται από μία Λαγκρανζιανή με έναν όρο τύπου Yang-Mills και έναν όρο φερμιονίων τύπου Dirac

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_i \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi_i, \quad (3.3.1)$$

όπου $i = 1, 2, 3$ οι γεύσεις των κουαρκ. Η Λαγκρανζιανή της QCD μένει αναλλοίωτη κάτω από την συμμετρία $SU(3)$ η οποία έχει γεννήτορες τους πίνακες Gell-Mann.

$$U = e^{i\theta^a T^a}. \quad (3.3.2)$$

Τα φερμιόνια μετασχηματίζονται $\psi \rightarrow U\psi$. Και ο ταυιστής ισχύος πεδίου μετασχηματίζεται

$$F_{\mu\nu}^a \cdot T^a \rightarrow U F_{\mu\nu}^a \cdot T^a U^\dagger, \quad (3.3.3)$$

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c. \quad (3.3.4)$$

Οι γεννήτορες T^a έχουν την ιδιότητα

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (3.3.5)$$

Και ορίζονται

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a, \quad (3.3.6)$$

οι πίνακες λ^a είναι οι πίνακες Gell-Mann

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Επίσης ζητώντας για την βαθμιδοποιημένη $SU(3)$ όπου τα θ^a δεν είναι σταθερές αλλά συναρτήσεις που εξαρτώνται από τον χωροχρόνο, για την συναλλοίωτη παράγωγο ισχύει

$$D_\mu \psi(x) = U D_\mu \psi(x), \quad (3.3.7)$$

έτσι τα μποζόνια $A_\mu = A_\mu^a T^a$ είναι

$$A_\mu = \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger + U A_\mu U^\dagger. \quad (3.3.8)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu, \quad (3. 3. 9)$$

και ο ταυιστής ισχύος πεδίου

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (3. 3. 10)$$

Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις σε αντίθεση με τις ηλεκτρομαγνητικές είναι αλληλεπιδράσεις μικρής εμβέλειας και λόγω της Μη-Αβελιανής φύσης της συμμετρίας $SU(3)$ οι φορείς της δύναμης, δηλαδή τα γλουόνια, μπορούν να αλληλεπιδράσουν με τον εαυτό τους.

Στην Λαγκρανζιανή της QCD επιτρέπεται και όπως θα προκύψει από την επόμενη ενότητα, οφείλει να μπει ένας παραπάνω όρος \mathcal{L}_θ ,

$$\mathcal{L}_\theta = \theta \frac{g}{32\pi^2} F^{a\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}^a, \quad (3. 3. 11)$$

όπου $\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^a$. Αυτός ο όρος σπάει την συμμετρία CP η οποία δεν παρατηρείται στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Οπότε δεν χρησιμοποιείται σαν όρος της Λαγκρανζιανής.

4 CP Πρόβλημα

4.1 Αξονική Ανωμαλία

Ξεκινώντας από μία Λαγκρανζιανή με συμμετρία βαθμίδας $U(1)$ ή $SU(N)$ για φερμιόνια με μάζα m , και D_μ , $F^{\mu\nu}$ η συναλλοίωτη παράγωγος και ο ταυυστής ισχύος της θεωρίας αντίστοιχα είναι.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + i\bar{\psi}_L \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \sigma^\mu D_\mu \psi_R + m\bar{\psi}_L \psi_R + h.c., \quad (4.1.1)$$

όπου $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}$. Μπορούμε να κάνουμε 2 ειδών περιστροφές

$$U(1)_L : \psi_L \rightarrow e^{-ia_L} \psi_L,$$

$$U(1)_R : \psi_R \rightarrow e^{-ia_R} \psi_R.$$

Στην περίπτωση που οι δύο γωνίες a ισούνται, τότε η συμμετρία ονομάζεται $U(1)_V : a_L = a_R = a_V$. Και για το διατηρούμενο ρεύμα ισχύει ότι

$$\Psi \rightarrow e^{-ia_V} \Psi, \quad (4.1.2)$$

$$\Psi' = (1 - ia_V) \Psi, \quad (4.1.3)$$

$$\delta\Psi = -ia_V \Psi, \quad (4.1.4)$$

$$\delta\bar{\Psi} = +ia_V \bar{\Psi}. \quad (4.1.5)$$

Άρα από (3.1.10)

$$j_V^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (4.1.6)$$

$$\partial_\mu j_V^\mu = 0. \quad (4.1.7)$$

Δηλαδή στην περίπτωση της $U(1)_V$ το ρεύμα διατηρείται κλασικά. Στην περίπτωση που η μία γωνία a είναι ίση με την αντίθετη της άλλης, η συμμετρία ονομάζεται $U(1)_A : a_R = -a_L = a_A$,

$$\Psi \rightarrow e^{-i\gamma^5 a_A} \Psi, \quad (4.1.8)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow (e^{-i\gamma^5 a_A} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger e^{i(\gamma^5)^\dagger a_A} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 e^{-i(\gamma^5) a_A} = \bar{\Psi} e^{-i\gamma^5 a_A}, \quad (4.1.9)$$

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -\mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (4.1.10)$$

και έχει ιδιότητες

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (4.1.11)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (4.1.12)$$

Δηλαδή το $\delta\Psi$ είναι

$$\delta\Psi = -ia_v \gamma^5 \Psi, \quad (4.1.12)$$

$$\delta\bar{\Psi} = -ia_v \gamma^5 \bar{\Psi}. \quad (4.1.13)$$

Για το διατηρούμενο ρεύμα ισχύει από Gell-Mann-Levy (3.1.11)

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu a_A \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi + a_A (2im \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi), \quad (4.1.14)$$

$$j_5^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi, \quad (4.1.15)$$

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi. \quad (4.1.16)$$

Άρα στην περίπτωση της $U(1)_A$:

- όταν $m \rightarrow 0$, $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ διατηρείται κλασικά.
- όταν $m \neq 0$, $\partial_\mu j_5^\mu = 2im \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi$ δεν διατηρείται για φερμιόνια με μάζα.

Όμως ακόμα και για την περίπτωση που $m \rightarrow 0$, προκύπτει κβαντική ανωμαλία από το μέτρο της Ιακωβιανής στο ολοκλήρωμα διαδρομής. Δηλαδή για έναν τελεστή \hat{O}

$$\langle \hat{O}(x_1, \dots, x_n) \rangle = \frac{1}{Z(0)} \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} O(x_1, \dots, x_n). \quad (4.1.17)$$

Από το μέτρο του ολοκληρώματος προκύπτει

$$D\bar{\psi} D\psi \rightarrow [J_c J]^{-1} D\bar{\psi} D\psi, \quad (4.1.18)$$

$$\psi(x) \rightarrow \Delta(x) \psi(x), \quad (4.1.19)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \Delta_c(x), \quad (4.1.20)$$

$$J = e^{\int d^4x \langle x | \text{Tr} \{ \ln \Delta \} | x \rangle}, \quad (4.1.21)$$

- Για $U(1)_V$:

$$\Delta(x) = e^{ia(x)}, \quad (4.1.22)$$

και

$$J_c J = 1. \quad (4.1.23)$$

Άρα η $U(1)_V$ είναι συμμετρία και της χβαντικής θεωρίας αφού το ολοκλήρωμα διαδρομής παραμένει αναλλοίωτο.

- Για $U(1)_A$:

$$\Delta(x) = e^{i\beta(x)\gamma^5}, \quad (4.1.24)$$

$$J = J_c = e^{i \int d^4x \text{Tr}\{\langle x|\beta(x)\gamma^5|x\rangle\}}, \quad (4.1.25)$$

όπου καταλήγει

$$J_c J = e^{i \int d^4x \beta(x) \frac{e^2}{16\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}. \quad (4.1.26)$$

Άρα, από το μέτρο του ολοκληρώματος προκύπτει ένας έξτρα όρος

$$\int D\bar{\psi} D\psi D A e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \rightarrow \int D\bar{\psi} D\psi D A e^{i \int d^4x [\mathcal{L} - J_\mu^5 \partial^\mu \beta + \beta \frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}]}, \quad (4.1.27)$$

$$\partial_\mu j_5^\mu = \beta \frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (4.1.28)$$

ονομάζεται Adler-Bell-Jackiw ανωμαλία.

Ένας τέτοιος όρος είναι Lorentz αναλλοίωτος και αναλλοίωτος βαθμίδας. Πρέπει να προστεθεί στην Λαγκρανζιανή ακόμα και αν η μάζα είναι μηδενική [29]. Όμως τα quark έχουν μάζα άρα μετά από μετασχηματισμό $U(1)_A$

$$\partial_\mu j_5^\mu = \beta \frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad (4.1.29)$$

$$m\bar{\psi}_L\psi_R \rightarrow me^{i2\beta}\bar{\psi}_L\psi_R. \quad (4.1.30)$$

Η μάζα δεν είναι κατ' ανάγκη πραγματική παράμετρος

$$m = |m|e^{i\theta_m}, \quad (4.1.31)$$

και άρα συνολικά ο όρος μάζας μετά από έναν μετασχηματισμό $U(1)_A$ γίνεται

$$m\bar{\psi}_L\psi_R \rightarrow me^{i(\theta_m - 2\beta)}\bar{\psi}_L\psi_R. \quad (4.1.32)$$

Θέτοντας επίσης κατάλληλα την θ_m μπορούμε να μεταφέρουμε τον όρο από την φάση του όρου μάζας στον όρο $\tilde{F}F$. Η καινούργια θ_m δεν μπορεί να απαλειφθεί και για τους δύο όρους ταυτόχρονα.

Για Λαγκρανζιανές περισσότερων φερμιονίων με διαφορετικές μάζες η φάση αυτή μπαίνει στον πίνακα μάζας M .

$$\theta_m \rightarrow \theta_m - \text{Arg}(\det M). \quad (4.1.33)$$

Επομένως η $U(1)_A$ είναι συμμετρία της κλασικής θεωρίας μόνο όταν θεωρούμε ότι $m=0$ και δεν είναι συμμετρία της κβαντικής θεωρίας ακόμα όταν οι μάζες είναι μηδέν.

Η ανωμαλία αυτή παρατηρήθηκε πρώτα μέσω της διάσπασης των ουδέτερων πιονίων σε δύο φωτόνια, [25]. Το πiónιο δεν αλληλεπιδρά απευθείας με τον ηλεκτρομαγνητισμό, αλλά τέτοιου είδους διασπάσεις μπορούν να παρατηρηθούν μέσω διορθώσεων ενός βρόγχου. $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_P \\ \Psi_N \end{pmatrix}$ όπου Ψ διπλέτα isospin $SU(2)$ του πρωτονίου και του νετρονίου.

Το πiónιο αλληλεπιδρά με το Ψ με μία αλληλεπίδραση τύπου

$$\mathcal{L}_{int} = i \frac{2m_N}{f_\pi} \pi^\alpha (\bar{\Psi} \gamma^5 \sigma^\alpha \Psi), \quad (4.1.34)$$

όπου m_N μάζα νετρονίου, f_π σταθερά διάσπασης πιονίου, σ^α πίνακες Pauli. Ενδιαφερόμαστε μόνο για $\alpha = 3$ δηλαδή $\sigma^3 = \text{diag}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και θεωρώντας $\pi^3 \equiv \pi^0$

$$\mathcal{L}_{int} = i \frac{2m_N}{f_\pi} \pi^0 (\bar{\Psi}_P \gamma^5 \Psi_P) - i \frac{2m_N}{f_\pi} \pi^0 (\bar{\Psi}_N \gamma^5 \Psi_N). \quad (4.1.35)$$

Το νετρόνιο δεν αλληλεπιδρά ηλεκτρομαγνητικά και η ποσότητα $\bar{\Psi}_P \gamma^5 \Psi_P$ έχει μη μηδενική τιμή σε παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$\langle A | \bar{\Psi}_P \gamma^5 \Psi_P | A \rangle = i \frac{e^2}{32\pi^2} \frac{1}{m} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (4.1.36)$$

Επομένως

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \pi^0 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (4.1.37)$$

4.2 Instantons

Όμως ένας όρος τύπου

$$\text{Tr} [\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = \partial_\mu K^\mu, \quad (4.2.1)$$

αφού είναι ολική παράγωγος μπορούμε να υποθέσουμε ότι μπορεί να αφαιρεθεί από την Λαγκρανζιανή καθώς δεν αλλάζει τις εξισώσεις κίνησης. Όπου

$$K^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\nu\rho} [F_{\alpha\sigma} - \frac{g}{3} f_{abc} A_{b\rho} A_{c\sigma}]. \quad (4.2.2)$$

Ο όρος $\theta \tilde{F}F$ δεν συμπεριλαμβάνεται στο Καθιερωμένο Πρότυπο και θεωρείται ότι $\theta = 0$. Όμως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός που να το θέτει αυτό, παρόλο

που δεν επηρεάζει τις εξισώσεις κίνησης. Στον χώρο Minkowski ο όρος θ είναι πραγματικός. Όμως σε Ευκλείδειο χώρο γίνεται φανταστικός. Οι κλασικές λύσεις που περιγράφουν τροχιές στο ολοκλήρωμα διαδρομής φαινομένου σήραγγας, είναι ευκλείδειες εξισώσεις κίνησης [31]. Στην ευκλείδεια διατύπωση αυτός ο όρος επηρεάζει τοπολογικά τους κλασικούς μετασχηματισμούς που προκύπτουν.

Ευκλείδειος Φορμαλισμός Θεωρίας Πεδίου. Η Κβαντική Θεωρία πεδίου μπορεί να διατυπωθεί μέσω της Ευκλείδειας μετρικής $\delta_{\mu\nu}$ αντί για την μετρική Minkowski $g_{\mu\nu}$. Ο μετασχηματισμός που αλλάζει την μετρική από $g_{\mu\nu}$ σε $\delta_{\mu\nu}$ λέγεται περιστροφή Wick και δίνεται

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow x^\mu = (-ix^0, \vec{x}). \quad (4.2.3)$$

Η νόρμα επίσης αλλάζει

$$x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = (-ix^0)^2 - \vec{x}^2 = -(x^{02} - \vec{x}^2). \quad (4.2.4)$$

Και η Δράση αλλάζει

$$S \rightarrow -iS_E. \quad (4.2.5)$$

Επίσης δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στα αναλλοίωτα και συναλλοίωτα διανύσματα λόγω της μετρικής $\delta_{\mu\nu}$, $x^\mu = x_\mu$. Η περιστροφή Wick είναι πολύ χρήσιμη για μία μη διαταρακτική θεωρία πεδίου, όχι μόνο λόγω της πιο απλής μετρικής, αλλά και επειδή αρκετά μεγέθη δεν είναι καλώς ορισμένα στα μαθηματικά του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων διαδρομής χρησιμοποιώντας την μετρική Minkowski.

Όμως σε Ευκλείδειο χώρο ένα ολοκλήρωμα όγκου μίας ολικής παράγωγου μπορεί να μετατραπεί σε επιφανειακό ολοκλήρωμα μέσω Θεωρήματος Gauss

$$\int d^4x \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right] = \int d^4x \partial_\mu K^\mu = \int_{S^3} d\Omega_\mu K^\mu. \quad (4.2.6)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα πάνω σε μία επιφάνεια τετραδιάστατης σφαίρας με όρια το Ευκλείδειο άπειρο. Αν $K^\mu(x) \rightarrow 0$ όσο γρήγορα όσο $|x| \rightarrow \infty$ τότε αυτό το ολοκλήρωμα είναι μηδέν και μπορεί όντως να μην συμπεριληφθεί στην Λαγκρανζιανή. Αυτό δεν ισχύει πάντα. Θεωρώντας ότι $A_\mu = 0$ τότε $F_{\mu\nu} = 0$ και δεν χρειάζεται να συμπεριλάβουμε τον όρο αυτόν στην Λαγκρανζιανή.

Για να βρούμε instanton λύσεις πρέπει να υιοθετήσουμε την Ευκλείδεια μετρική μέσω περιστροφής Wick $x^0 = ix^4$. Για μία ομάδα $SU(N)$ σε Ευκλείδεια θεωρία Yang-Mills:

- Οι Γεννήτορες της ομάδας έχουν την παρακάτω άλγεβρα

$$[T_a, T_b] = f_{abc} T_c, \quad (4.2.7)$$

$$\text{Tr}[T_a T_b] = -\frac{1}{2}\delta_b^a. \quad (4.2.8)$$

- Ένα στοιχείο U της ομάδας μπορεί να εκφραστεί σαν

$$U = e^{-i\theta^a T_a}. \quad (4.2.9)$$

- Τα πεδία Dirac ψ μετασχηματίζονται σαν

$$\psi \rightarrow U\psi, \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}U^{-1}. \quad (4.2.10)$$

- Τα βαθμιδοποιημένα πεδία A_μ μετασχηματίζονται σαν

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}. \quad (4.2.11)$$

- Ο ταυιστής πεδίου της ομάδας ορίζεται

$$F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + [A_\mu{}^a, A_\nu{}^a]. \quad (4.2.12)$$

- Η Λαγκρανζιανή δίνεται

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}], \quad (4.2.13)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}{}^b \text{Tr}[T_a T_b] = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}{}^b. \quad (4.2.14)$$

Το ολοκλήρωμα όγκου, δράση του όρου θ , όπως αναφέρθηκε ήδη, στην ευκλείδεια διατύπωση είναι

$$\int d^4x \text{Tr}[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = \int d^4x \partial_\mu K^\mu = \int_{S^3} d\sigma_\mu K^\mu. \quad (4.2.15)$$

[24]

Το ολοκλήρωμα είναι πάνω στο σύνορο μίας τετραδιάστατης σφαίρας στο άπειρο S^3 και $d\sigma_\mu$ στοιχείο αυτής της σφαίρας ή όγκος στον τρισδιάστατο χώρο. Το ολοκλήρωμα αυτό πρέπει να μην μηδενίζεται ώστε να επηρεάζει τις κλασικές λύσεις του ολοκληρώματος διαδρομής. Για να μηδενίζεται αυτό το ολοκλήρωμα $\int d^4x \text{Tr}[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}]$ πρέπει το $F^{\mu\nu}$ να είναι $\mathcal{O}(\frac{1}{r^3})$

$$S_E = \int d^4x \text{Tr}[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = \int_0^\infty dr r^3 \int d\Omega \text{Tr}[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}(r, \Omega) F_{\mu\nu}(r, \Omega)]. \quad (4.2.16)$$

Αν ο $F^{\mu\nu}$ είναι της τάξης $\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ τότε μπορούμε να δούμε ότι το ακτινικό ολοκλήρωμα $\int dr \frac{1}{r} = \ln r$ απειρίζεται. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A_μ είναι τάξης $\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ αλλά αυτό είναι λάθος. Το ότι εξαφανίζεται το $F_{\mu\nu}$ στο άπειρο δεν

σημαίνει ότι εξαφανίζονται και τα δυναμικά. Σημαίνει ότι στο άπειρο τα A_μ είναι ένας μετασχηματισμός βαθμίδας του μηδενός.

$$A_\mu \rightarrow gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}, \quad (4.2.17)$$

δηλαδή

$$A_\mu \rightarrow g(x)\partial_\mu g(x)^{-1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (4.2.18)$$

Φιξάροντας το $A_0 = 0$ η g είναι συνάρτηση μόνο γωνιακών μεταβλητών. Με κάθε πεπερασμένη δράση στον Ευκλείδειο χώρο υπάρχει ένα σχετιζόμενο στοιχείο ομάδας, σε αυτήν την περίπτωση ένας χάρτης από την S^3 στην ομάδα G όπου $g \in G$.

Γενικά για έναν μετασχηματισμό βαθμίδας h για το A_μ ισχύει

$$A_\mu \rightarrow hA_\mu h^{-1} + h\partial_\mu h^{-1} \quad (4.2.19)$$

και

$$g \rightarrow hg + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (4.2.20)$$

Αν μπορούσαμε να διαλέξουμε $h = g^{-1}$ στο άπειρο, τότε το βαθμιδοποιημένο πεδίο της πεπερασμένης δράσης θα ήταν όμοιο με έναν μετασχηματισμό βαθμίδας με $A_\mu = 0$ στο άπειρο. Σε ένα ολοκλήρωμα διαδρομής η ολοκλήρωση γίνεται για ανόμοια βαθμιδοποιημένα πεδία. Οπότε θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε: για $A_\mu \rightarrow 0$ όσο $x \rightarrow 0$, όμως γενικώς η h δεν μπορεί να επιλεγεί ως g^{-1} στο άπειρο.

4.2.1 Τοπολογία και Ομοτοπία

Ορισμός Ομοτοπίας. Έστω $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ συνεχείς κλειστοί βρόχοι στο x_0 . Είναι ομοτοπικοί ($\alpha \sim \beta$) εάν υπάρχει συνεχής χάρτης $H : [0, 1] \otimes [0, 1] \rightarrow X$ τέτοιος ώστε

$$H(s, 0) = \alpha(s), H(s, 1) = \beta(s), 0 \leq s \leq 1, \quad (4.2.21)$$

$$H(0, t) = H(1, t) = x_0, 0 \leq t \leq 1. \quad (4.2.22)$$

Ο χάρτης H ονομάζεται Ομοτοπία ανάμεσα στο α και το β .

Ορισμός Θεμελιώδους Ομάδας. Έστω X τοπολογικός χώρος. Το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων κλειστών βρόχων στο $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ ονομάζεται θεμελιώδης ομάδα (η πρώτη ομοτοπική ομάδα) του X στο x_0 .

$$\pi_1(X, x_0) = \{g : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x_0)\}. \quad (4.2.23)$$

ν -οστή ομοτοπική ομάδα.

$$\pi_n(X, x_0) = \{g : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)\}. \quad (4. 2. 24)$$

Μία ομοτοπική κλάση περιέχει όλες τις συναρτήσεις που συνδέονται μέσω ομοτοπίας και μπορεί η μία να μετατραπεί στην άλλη με συνεχή τρόπο. Κάθε συνάρτηση ανήκει μόνο σε μία ομοτοπική κλάση [23].

Στην περίπτωση των instantons μπορούμε με έναν μετασχηματισμό βαθμίδας να μετατρέψουμε το $g(x)$ σε ένα οποιοδήποτε άλλο ομοτοπικό χάρτη της ίδιας ομοτοπικής κλάσης, αλλά όχι διαφορετικής. Η αναλλοίωτη ποσότητα που σχετίζεται με την πεπερασμένη δράση δεν είναι ένα χάρτης από την S^3 στην ομάδα G αλλά μία ομοτοπική κλάση τέτοιων χαρτών.

Ακολουθώντας το [7],

Παράδειγμα $S^1 \rightarrow U(1)$. Ο κύκλος S^1 παραμετροποιείται από $\theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$ και η ομάδα $U(1)$ είναι τοπολογικά ισοδύναμη με ένα κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε ένα υποσύνολο από συναρτήσεις από την S^1 στην $U(1)$ μπορεί να είναι

$$f_\alpha(\theta) = e^{i(\nu\theta + \alpha)}, \quad (4. 2. 24)$$

για $\nu \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$. Αυτές οι συναρτήσεις ανήκουν σε μία ομοτοπική κλάση με α και ν σταθερά όπου $H(\theta, t)$ ομοτοπία

$$H(\theta, t) = e^{i(\nu\theta + (1-\alpha_0)t + \alpha_1 t)}, \quad (4. 2. 25)$$

$$H(\theta, 0) = e^{i(\nu\theta + \alpha_0)}, \quad (4. 2. 26)$$

$$H(\theta, 1) = e^{i(\nu\theta + \alpha_1)}, \quad (4. 2. 27)$$

$$H(0, t) = H(0, t) = e^{i[(1-\alpha_0)t + \alpha_1 t]}. \quad (4. 2. 28)$$

Κάθε ζευγάρι συναρτήσεων με διαφορετικό ν ανήκει σε διαφορετική ομοτοπική κλάση και έτσι κάθε συνάρτηση από $S^1 \rightarrow U(1)$ μπορεί να τοποθετηθεί σε μία ομοτοπική κλάση που χαρακτηρίζεται από $\nu \in \mathbb{Z}$ και ονομάζεται αριθμός περιέλιξης (winding number). Παρατηρούμε ότι $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$, αν αυτή η ομάδα ήταν μηδέν τότε δε θα χρειαζόμασταν αριθμούς περιέλιξης, καθώς όλες οι συναρτήσεις αυτές θα ανήκαν στην ίδια ομοτοπική κλάση και θα μπορούσε να μετατραπεί η μία στην άλλη με συνεχή τρόπο.

Ο αριθμός περιέλιξης για μία οποιαδήποτε συνάρτηση g που ανήκει στο υποσύνολο που μελετάμε, μπορεί να δοθεί από την παρακάτω σχέση

$$\nu = \frac{-i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \frac{dg^{-1}(\theta)}{d\theta}. \quad (4.2.29)$$

Επίσης εάν $g(\theta) = g(\theta_2)g(\theta_1)$ τότε $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Ορίζοντας

$$K_\mu = \frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu, \quad (4.2.30)$$

τότε

$$\nu = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} r d\theta \hat{r}_\mu K_\mu, \quad (4.2.31)$$

$$A_\nu = g \partial_\nu g^{-1}, \quad (4.2.32)$$

όπου \hat{r}_μ μοναδιαίο διάνυσμα. Από νόμο Gauss

$$\nu = \int d^2x \partial_\mu K_\mu, \quad (4.2.33)$$

$$\nu = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.2.34)$$

Παράδειγμα $S^3 \rightarrow SU(2)$. Τώρα παίρνοντας την G να είναι $SU(2)$ είναι γνωστό ότι οποιοδήποτε στοιχείο της ομάδας αυτής μπορεί να γραφτεί

$$g = a + ib \cdot \sigma, \quad (4.2.35)$$

όπου $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Τοπολογικά δηλαδή $SU(2)$ είναι S^3 . Και $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$. Ορίζοντας χάρτες από την $S^3 \rightarrow SU(2)$ έχουμε, τον τετριμμένο.

$$g_0(x) = 1, \quad (4.2.36)$$

ανήκει στην κλάση 0 της $\pi_3(SU(2))$, την ταυτότητα του συνόλου.

$$g_1(x) = (x_4 + ix \cdot \sigma)/r, \quad (4.2.37)$$

ορίζει την κλάση 1 της $\pi_3(SU(2))$. Οι παραπάνω ανήκουν στην οικογένεια χαρτών

$$g_\nu(x) = [g_1(x)]^\nu, \quad (4.2.38)$$

$\nu \in \mathbb{Z}$ και εκτός από αριθμός περιέλιξης ονομάζεται και Pontryagin index. Κάθε χάρτης από $S^3 \rightarrow SU(2)$ είναι ομοτοπικός με μία από τις $g_\nu(x)$. Ο αριθμός περιέλιξης μπορεί να εκφραστεί με την παρακάτω σχέση

$$\nu = -\frac{1}{24\pi^2} \int d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \varepsilon^{ijk} \text{Tr}[g \partial_i g^{-1} g \partial_j g^{-1} g \partial_k g^{-1}], \quad (4.2.39)$$

όπου $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ οι τρεις γωνίες που παραμετροποιούν την S^3 . Ορίζοντας

$$K^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\alpha\nu} [F_{\alpha\rho\sigma} - \frac{g}{3} f_{abc} A_{b\rho} A_{c\sigma}], \quad (4.2.40)$$

που μπορεί να γράφει στο άπειρο σαν

$$K^\mu = \frac{1}{3g^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} Tr[g\partial_\nu g^{-1} g\partial_\rho g^{-1} g\partial_\sigma g^{-1}]. \quad (4.2.41)$$

Έχουμε ότι

$$\nu = \int_{S^3} d\Omega_\mu K^\mu \quad (4.2.42)$$

και άρα καταλήγουμε ότι

$$\int d^4x Tr[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] = -8\pi^2 \nu. \quad (4.2.43)$$

Κάθε ευκλείδεια πεπερασμένη δράση μπορεί να χαρακτηριστεί από έναν αριθμό περιέλιξης ν . Όταν η κλάση $\nu = 0$ αντιστοιχεί σε πεδία που με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό βαθμίδας έχουν εξάρτηση της τάξης $\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ όταν $r \rightarrow \infty$. Τότε μη μηδενικοί αριθμοί περιέλιξης αντιστοιχούν στα πεδία που δεν μπορούν να μηδενιστούν στο άπειρο.

Ότι ισχύει για την $SU(2)$ ισχύει ακριβώς το ίδιο και για την ομάδα $SU(3)$ μιας και αυτή έχει ισοδύναμη τοπολογία, με $\pi_3(SU(3)) = \mathbb{Z}$.

4.2.2 Κενά αριθμών περιέλιξης

Το κλασικό κενό μίας θεωρίας πεδίου είναι το πεδίο που ελαχιστοποιεί την ενέργεια του συστήματος. Σε μη-Αβελιανές θεωρίες $SU(N)$ δεν υπάρχει ένα μόνο κενό, αλλά πολλά τοπολογικά διαφορετικά κενά είναι δυνατά. Σε μία μη-Αβελιανή ευκλείδεια δράση

$$S_E = \int d^4x Tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}], \quad (4.2.44)$$

η βασική κατάσταση του συστήματος (κενό) είναι $F_{\mu\nu}^\alpha = 0$ που υπονοεί $A_\mu = A_\mu^\alpha T^\alpha = U(x) \partial_\mu U(x)^{-1}$, όπου $U(x)$ δυναμικό βαθμίδας.

Απόδειξη. Θεωρούμε $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $A_\mu = U \partial_\mu U^{-1}$.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu U \partial_\nu U^{-1} + U \partial_\mu \partial_\nu U^{-1} - \partial_\nu U \partial_\mu U^{-1} + U \partial_\nu \partial_\mu U^{-1} + (U \partial_\mu U^{-1})(U \partial_\nu U^{-1}) - (U \partial_\nu U^{-1})(U \partial_\mu U^{-1}).$$

Από τις ιδιότητες

$$\partial_\mu \partial_\nu U^{-1} = \partial_\nu \partial_\mu U^{-1} \text{ και } UU^{-1} = 1. \text{ Βρίσκουμε ότι}$$

$$\partial_\mu(UU^{-1}) = 0 \rightarrow U\partial_\mu U^{-1} = -U^{-1}\partial_\mu U.$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu U\partial_\nu U^{-1} - \partial_\nu U\partial_\mu U^{-1} - (U^{-1}\partial_\mu U)(U\partial_\nu U^{-1}) + (U^{-1}\partial_\nu U)(U\partial_\mu U^{-1}),$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu U\partial_\nu U^{-1} - \partial_\nu U\partial_\mu U^{-1} - UU^{-1}\partial_\mu U\partial_\nu U^{-1} + U^{-1}U\partial_\nu U\partial_\mu U^{-1},$$

Άρα τελικά

$$F_{\mu\nu} = 0. \quad \square$$

Εάν φιξάρουμε $A_0 = 0$ τότε γνωρίζουμε ότι τα δυναμικά $U(x)$ δεν θα έχουν χρονική εξάρτηση, αφού $A_0 = U(x)\partial_0 U(x)^{-1} = 0$. Ακόμη τα $A_i = U(x)\partial_i U(x)^{-1}$ καταλήγουν σε $F_{\mu\nu}^\alpha = 0$ και η $U(x)$ είναι μία συνάρτηση $U(x) : \{\mathbb{R}^3 \rightarrow SU(N)\}$. Βάζουμε μία συνοριακή συνθήκη για το $U(x)$ τέτοια ώστε στο άπειρο $|x| \rightarrow \infty$ να τείνει σε έναν σταθερό πίνακα. Αυτό μπορεί να γίνει με συνεχή παραμόρφωση του U με μετασχηματισμό [8]

$$U \rightarrow H_\varepsilon U, \quad (4.2.45)$$

όπου

$$H_\varepsilon(r, \Omega) = \frac{1}{r+1} + \frac{r}{r+1}U^{-1}(\varepsilon r, \Omega). \quad (4.2.46)$$

Η συνάρτηση $H_\varepsilon(r, \Omega)$

- είναι συνεχής στον \mathbb{R}^3 .
- με $\varepsilon \rightarrow 0$ μπορεί να καταλήξει στην μονάδα.
- $H_\varepsilon U \rightarrow \mathbb{I}$ όταν $r \rightarrow \infty$.

Βάζοντας ένα σημείο στο άπειρο όπου η U παίρνει τιμή ανεξάρτητα από την κατεύθυνση, είναι τοπολογικά ισοδύναμο με $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$. Αφού ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος με το άπειρο ορισμένο ως σημείο του χώρου είναι τοπολογικά ισοδύναμος με την S^3 .

Αν κάθε $U(x)$ δεν μπορεί να μετατραπεί με συνεχή τρόπο σε ένα άλλο $U'(x)$ τότε θα πρέπει να υπάρχει παραπάνω από μία κατάσταση κενού. Έστω ότι ένα $U(x)$ δεν μπορεί να παραμορφωθεί με τον παραπάνω τρόπο σε ένα άλλο $U'(x)$, τα A_μ και A'_μ είναι μετασχηματισμοί βαθμίδας του μηδενός και δίνουν αναλόγως $F_{\mu\nu}^\alpha = 0$ και $F_{\mu\nu}^{\prime\alpha} = 0$. Αν προσπαθήσουμε να παραμορφώσουμε το A_μ στο A'_μ τότε θα πρέπει να περάσουμε μέσα από δυναμικά που δεν είναι μετασχηματισμοί βαθμίδας του μηδενός και επομένως δεν έχουν μηδενικό ταυυστή πεδίου. Αυτό υπονοεί ότι υπάρχει κάποιο ενεργειακό φράγμα ανάμεσα σε αυτά τα δύο διαφορετικά κενά που αντιστοιχούν σε διαφορετικές βασικές καταστάσεις.

Η U είναι μία συνάρτηση $S^3 \rightarrow SU(N)$ και κάθε ομάδα $SU(N)$ έχει $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$ για $N \geq 2$. Επομένως για κάθε κενό μπορούμε να αναθέσουμε έναν αριθμό

περιέλιξης

$$\begin{aligned} n &= -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} \text{Tr}[(U\partial_i U^{-1})(U\partial_j U^{-1})(U\partial_k U^{-1})] \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} \text{Tr}[A_i A_j A_k]. \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

Μικροί μετασχηματισμοί βαθμίδας. Όλες οι διαφορετικές $U(x)$ από την ίδια ομοτοπική κλάση μπορούν να σχηματιστούν από έναν μικρό μετασχηματισμό βαθμίδας. Αυτό ορίζεται ως ένας μετασχηματισμός που μπορεί με συνεχή τρόπο να μετατραπεί σε μοναδιαίο μετασχηματισμό $V = \mathbb{I}$

$$U\partial_\mu U^{-1} \rightarrow VU\partial_\mu U^{-1}V^{-1} + V\partial_\mu V^{-1} \rightarrow VU\partial_\mu(VU)^{-1}, \quad (4.2.48)$$

$$U \rightarrow VU. \quad (4.2.49)$$

Ένας μετασχηματισμός V_{small} θα μετατρέψει ένα κενό U_n με αριθμό περιέλιξης n σε ένα $V_{small}U_n$ με ίδιο αριθμό περιέλιξης. Όλοι οι μικροί μετασχηματισμοί βαθμίδας ανήκουν στην τετριμμένη ομοτοπική κλάση.

Μεγάλοι μετασχηματισμοί βαθμίδας. Ένας μεγάλος μετασχηματισμός βαθμίδας από την άλλη, ορίζεται ως ένας μετασχηματισμός που δεν μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο στον μοναδιαίο και έτσι δεν ανήκει στην τετριμμένη ομοτοπική κλάση. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός θα μετατρέψει ένα κενό με αριθμό περιέλιξης n σε ένα άλλο με $m \neq n$. Θα μπορούσαμε να πούμε πως δεν είναι καν μετασχηματισμοί βαθμίδας καθώς δεν περιγράφουν την ίδια κατάσταση.

Δηλαδή μία θεωρία βαθμίδας $SU(N)$ έχει άπειρο αριθμό κενών που διαχωρίζονται από ενεργειακά φράγματα, και το ένα είναι τοπολογικά διαφορετικό από το άλλο. Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας στο άπειρο (μεγάλοι μετασχηματισμοί βαθμίδας) αλλάζουν μία κατάσταση σε μία διαφορετική, ενώ οι μικροί μετασχηματισμοί βαθμίδας αντιστοιχούν μία κατάσταση σε μία διαφορετική περιγραφή της ίδιας κατάστασης, [12].

4.2.3 Instantons

Instanton είναι μία μη διαταραχτική λύση της ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης, τέτοια ώστε να έχει μία μη μηδενική πεπερασμένη δράση. Δηλαδή ένα instanton είναι ένα τοπικό ελάχιστο της ευκλείδειας δράσης, [28]

$$\int d^4x \text{Tr}[(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}^{\mu\nu})^2] \geq 0, \quad (4.2.50)$$

$$\int d^4x \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \geq \mp \text{Tr}[F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}]. \quad (4.2.51)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \text{ λόγω ιδιότητας } \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -2\delta_\gamma^\rho\delta_\sigma^\delta$$

$$\int d^4x \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \geq 8\pi^2|\nu|, \quad (4.2.52)$$

$$S_E \geq 8\pi^2|\nu|. \quad (4.2.53)$$

- για $\nu > 0$ $F = \tilde{F}$, $S_E = 8\pi^2\nu$
self-dual instanton λύση.
- για $\nu < 0$ $F = -\tilde{F}$, $S_E = -8\pi^2\nu$
anti self-dual anti-instanton λύση.

Αν οποιαδήποτε από τις παραπάνω περιπτώσεις ισχύει, το αντίστοιχο πεδίο βαθμίδας ελαχιστοποιεί την δράση για ένα συγκεκριμένο τοπολογικό φορτίο ν και συγκεκριμένα λύνει τις εξισώσεις κίνησης. Καθώς και $S_0 = \frac{8\pi^2}{g^2}$ είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να έχει η δράση, όπου g είναι η ανάλογη σύζευξη για κάθε διαφορετική ομάδα Lie.

Ένα παράδειγμα instanton είναι για $\nu = 1$ στην $SU(2)$:

$$A_\mu^a = -\eta_{a\mu\nu} \frac{x_\nu - x_0}{(x - x_0)^2 + \rho^2}, \quad (4.2.54)$$

$$\eta_{abc} = \varepsilon_{abc}, \eta_{ab0} = \delta_{ab},$$

ρ είναι το μέγεθος του instanton και x_0 είναι η τοποθεσία του. Ο τανυστής ισχύος του πεδίου δίνεται

$$F_{\mu\nu}^a = -4\eta_{a\mu\nu} \frac{\rho^2}{(x - x_0)^2 + \rho^2}. \quad (4.2.55)$$

Το παραπάνω ονομάζεται BPST instanton.

Θεωρώντας το σύνορο του τετραδιάστατου χώρο-χρόνου να είναι ένας κύλινδρος όπου τα καπάκια του τείνουν να φτάσουν στο άπειρο $t = \pm\infty$, η τοπολογία του χώρου παραμένει S^3 . Ο αριθμός περιέλιξης τότε είναι $n = n_+ - n_-$, μία γραμμή που τυλίγει την κυλινδρική επιφάνεια n φορές. Το άνω καπάκι συμβάλλει n_+ και το κάτω $-n_-$ το πρόσημο “-” είναι λόγω της κατεύθυνσης του καπακιού προς τους αρνητικούς χρόνους.

$$t \rightarrow +\infty, A_i = g_n \partial_i g_n^{-1},$$

$$t \rightarrow -\infty, A_i = g_m \partial_i g_m^{-1}.$$

Στην περίπτωση της $SU(2)$

$$g_n = (g_1)^n, \quad (4.2.56)$$

$$g_1 = e^{-i\pi \frac{x \cdot \sigma}{(x^2 + \rho^2)^{1/2}}}. \quad (4.2.57)$$

Το g_n είναι στοιχείο της αντίστοιχης ομάδας $SU(N)$ και τα g_n και g_m δεν είναι ομοτοπικά μεταξύ τους. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου στο άπειρο επιτυγχάνεται $F_{\mu\nu} = 0$, αλλά μέσα στον όγκο του κυλίνδρου το $F_{\mu\nu} \neq 0$. Επομένως υπάρχει ενέργεια ανάμεσα σε αυτά τα 2 κενά και άρα κβαντομηχανικά μπορεί να υπάρξει κάποια μετάβαση μέσω φαινομένου σήραγγας.

Τα instantons είναι λύσεις των εξισώσεων κίνησης της ευκλείδειας δράσης μίας θεωρίας Yang-Mills και περιγράφουν μεταβάσεις κβαντικού φαινομένου σήραγγας μεταξύ 2 τοπολογικά διαφορετικών κενών όσο ο χρόνος εξελίσσεται από το $t = -\infty$ στο $t = +\infty$.

4.2.4 κενά- θ

Το πλάτος της μετάβασης μπορεί να δοθεί

$$e^{-S_E}. \quad (4.2.58)$$

Λόγω του φαινομένου σήραγγας υπάρχει εκφυλισμός των καταστάσεων των κλασικών κενών και έτσι το κανονικό κβαντικό κενό είναι μία υπέρθεση καταστάσεων κλασικών κενών θ . Ορίζοντας την $|\theta\rangle$

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} |n\rangle. \quad (4.2.59)$$

Ασκώντας έναν μεγάλο μετασχηματισμό βαθμίδας g_1 με αριθμό περιέλιξης 1

$$\begin{aligned} g_1 |\theta\rangle &= g_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} |n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} g_1 |n\rangle, \\ g_1 |\theta\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} |n+1\rangle = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{-i(n'-1)\theta} |n'\rangle = e^{i\theta} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{-in'\theta} |n'\rangle, \\ g_1 |\theta\rangle &= e^{i\theta} |n\rangle. \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

Η $|\theta\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση της g_1 με ιδιοτιμή $e^{i\theta}$ και αφού η χαμιλτονιανή είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας $[H, g_1] = 0$, η $|\theta\rangle$ είναι και ιδιοκατάσταση της ενέργειας. Επομένως διαφορετική θ περιγράφει διαφορετική θεωρία.

4.2.5 θ όροι σε QED, Ηλεκτρασθενή

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική(QED). Στην QED ένας τέτοιος όρος δεν χρειάζεται να προστεθεί στην Λαγκρανζιανή καθώς $\pi_3(U(1)) = 0$ και έτσι κάθε συνάρτηση g μπορεί να μετατραπεί σε μία οποιαδήποτε άλλη με έναν μετασχηματισμό βαθμίδας (με συνεχή τρόπο). Επομένως παίρνουμε σαν συνάρτηση g μία τετριμμένη π. χ. $g(x) = 1$ στο άπειρο όπου $A_\mu = g\partial_\mu g^{-1} = 0$ με αποτέλεσμα $\int d^4x Tr[\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = 0$.

Ηλεκτρασθενής. Στην περίπτωση της ηλεκτρασθενούς Λαγκρανζιανής γνωρίζουμε ότι η ομάδα της θεωρίας είναι $G = SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ και όπως είδαμε $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$, επομένως κάνοντας έναν μετασχηματισμό $U(1)_L$

$$\psi_L \rightarrow e^{-i\theta} \psi_L, \quad (4.2.61)$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (4.2.62)$$

Αυτό με τη σειρά του δημιουργεί στο μέτρο του ολοκληρώματος διαδρομής έναν επί πλέον όρο

$$D\psi_L D\bar{\psi}_L \rightarrow D\psi_L D\bar{\psi}_L e^{\theta \int Tr[\tilde{F}^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}^\alpha]}. \quad (4.2.63)$$

Όμως κάνοντας έναν $U(1)_R$ μετασχηματισμό με ίδιο θ

$$\nu_{eR} \rightarrow e^{-i\theta} \nu_{eR}, \quad (4.2.64)$$

$$e_R \rightarrow e^{-i\theta} e_R. \quad (4.2.65)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός δεν δημιουργεί έξτρα όρο στο ολοκλήρωμα διαδρομής καθώς τα δεξιόστροφα φερμιόνια δεν μετασχηματίζονται με $SU(2)_R$. Έτσι εξαφανίζεται η εξάρτηση από το θ στον όρο μάζας $m\bar{\psi}_L e_R$ ή $m\bar{\psi}_L \nu_{eR}$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε αυθαίρετα ότι $\theta = 0$.

Άρα και στις δύο αυτές περιπτώσεις δεν υπάρχει τοπολογικός όρος στην Λαγκρανζιανή.

4.3 CP Πρόβλημα

Για την QCD που έχει συμμετρία $SU(3)_C$, ο όρος θ πρέπει να προστεθεί και η νέα Λαγκρανζιανή θα είναι

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{\theta g^2}{32\pi^2} Tr[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}]. \quad (4.3.1)$$

Η τιμή του θ θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε καθώς είναι ιδιότητα του κενού. Αν $\theta \neq 0$ τότε από το Θεώρημα CPT ο όρος αυτός παραβιάζει την συμμετρία ανάστροφης χώρου δηλαδή παραβιάζει την CP

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \xrightarrow{P} -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (4.3.2)$$

αφού

$$Tr[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] = 4Tr[\vec{E} \cdot \vec{B}] \quad (4.3.3)$$

και

$$\vec{E} \xrightarrow{P} -\vec{E}, \vec{B} \xrightarrow{P} \vec{B}, \vec{E} \xrightarrow{C} \vec{E}, \vec{B} \xrightarrow{C} -\vec{B}.$$

Αν $\theta = 0$, ή έχουμε άμαζα φερμιόνια τότε η συμμετρία CP δεν παραβιάζεται. Στην περίπτωση των άμαζων φερμιονίων δεν εμφανίζεται ο όρος $m\bar{\psi}_L\psi_R$ αφού $m = 0$ και όπως στην περίπτωση της ηλεκτρασθενούς μπορούμε αυθαίρετα να θέσουμε $\theta = 0$. Γενικά όμως τα φερμιόνια, κουάρκ στην QCD, δεν είναι άμαζα και η θ δεν έχει λόγο να είναι μηδέν. Όμως τα πειραματικά δεδομένα που προκύπτουν από την μέτρηση της ηλεκτρικής ροπής του νετρονίου δείχνουν ότι $|d_n| < 1.8 \times 10^{-26} e \cdot cm$, [1]. Δηλαδή $|\theta| < 10^{-10}$ αυτή η πολύ μικρή τιμή της γωνίας θ είναι περίεργη και υποδεικνύει ότι υπάρχει κάποιος λόγος να είναι τόσο μικρή. Αυτό το ερώτημα ονομάζεται CP πρόβλημα.

4.4 Ενέργεια κενού θ

Θεώρημα Vafa-Witten. Σε θεωρίες Βαθμίδας, όπως η QCD, οι μη-χειραλικές συμμετρίες που δεν επηρεάζουν τις μάζες των κουάρκ δεν μπορούν να σπάσουν αυθόρμητα όσο $\theta = 0$, [35].

Για παράδειγμα εάν στην QCD έχουμε έναν αριθμό γεύσεων φερμιονίων n_1 με μάζα m_1 και έναν αριθμό γεύσεων n_2 με μάζα m_2 , τότε η θεωρία θα ήταν αναλλοίωτη κάτω από όλους τους μοναδιαίους καθολικούς μη-χειραλικούς μετασχηματισμούς στις γεύσεις των φερμιονίων που μετατίθενται με τον πίνακα μάζας. Δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση είναι $U(n_1) \otimes U(n_2)$. Ένα παράδειγμα από την QCD τέτοιων συμμετριών είναι η διατήρηση του βαρυονικού αριθμού και το isospin. Αυτές οι συμμετρίες δεν μπορούν αν σπάσουν αυθόρμητα. Χρησιμοποιώντας αυτό το επιχείρημα μπορούμε να δείξουμε ότι η ενέργεια του κενού θ είναι χαμηλότερη για $\theta = 0$.

Το κενό θ είναι περιοδικό

$$V_{F\bar{F}}(x) = V_{F\bar{F}}(x + 2\pi), \quad (4.4.1)$$

και

$$\begin{aligned} e^{-\int d^4x_E V[\theta]} &= \int [dA_\mu]_\nu e^{-S_E[A_\mu]} e^{-i\theta \int d^4x_E F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}} \\ \left| \int [dA_\mu]_\nu e^{-S_E[A_\mu]} e^{-i\theta \int d^4x_E F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}} \right| &\leq \int [dA_\mu]_\nu \left| e^{-S_E[A_\mu]} e^{-i\theta \int d^4x_E F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}} \right| \\ &= \int [dA_\mu]_\nu e^{-S_E^{\theta=0}} = e^{\int d^4x_E V[0]}. \end{aligned}$$

Άρα το κενό θ έχει ένα ολικό ελάχιστο στο $\theta = 0$,

$$V_{F\tilde{F}}(\theta) \geq V_{F\tilde{F}}(0). \quad (4.4.2)$$

Το γεγονός αυτό δεν σημαίνει πως η θ θα πέφτει πάντα στην $\theta = 0$ που διατηρεί την CP. Αυτό συμβαίνει γιατί η θ δεν είναι δυναμική παράμετρος, αλλά είναι μία σταθερά που προμηθεύεται από πριν. Επομένως μπορεί να έχει μία οποιαδήποτε τιμή.

Dilute Instanton Gas. Θέλοντας να μελετήσουμε κβαντομηχανικά το φαινόμενο σήραγγας μεταξύ δύο κενών, δηλαδή το πλάτος μετάβασης από ένα κενό θ' σε ένα θ για κάποιο χρόνο t πρέπει να πάρουμε το $\langle \theta' | e^{-i\hat{H}T} | \theta \rangle$. Είναι βοηθητικό να περάσουμε στην διατύπωση του φανταστικού χρόνου (περιστροφή Wick), $\langle \theta' | e^{-\hat{H}T} | \theta \rangle$, καθώς στον πραγματικό χρόνο οι κλασικά απαγορευμένες διαδρομές δεν ορίζουν κάποια διαδρομή που να κυριαρχεί στο ολοκλήρωμα διαδρομής, [6],

$$\langle \theta' | e^{-\hat{H}T} | \theta \rangle = N \int [DA_\mu]_\nu e^{-S[A_\mu]} e^{i\nu[A_\mu]\theta}. \quad (4.4.3)$$

Φτιάχνουμε προσεγγιστικές λύσεις από n instantons και n' anti-instantons και προσθέτουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις

$$\langle \theta' | e^{-\hat{H}T} | \theta \rangle \propto \sum_{(n,n') \in \mathcal{N}^2} \frac{1}{n!} [Ke^{-S_0} VT]^n \frac{1}{n'!} [Ke^{-S_0} VT]^{n'} e^{i(n-n')\theta}. \quad (4.4.4)$$

Κρατώντας μόνο τα πραγματικά μέρη και γνωρίζοντας $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, σε αυτήν την περίπτωση $x = -2KT e^{-S_0} e^{i\theta}$,

$$e^{\frac{E(\theta)T}{V}} = e^{-2KT e^{-S_0} \cos(\theta)}, \quad (4.5.5)$$

$$\frac{E(\theta)}{V} = -2K e^{-S_0} \cos(\theta). \quad (4.4.6)$$

Όπου $S_0 = \frac{8\pi^2}{g^2}$, VT ο όγκος του χωροχρόνου και K σταθερά που αντιστοιχεί στην ανάλογη συμμετρία $SU(N)$, g σταθερά σύζευξης αυτής. Το όνομα “Dilute Instanton Gas” προκύπτει λόγω ότι η παραπάνω προσέγγιση μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη της στατιστικής μηχανικής.

5 Μηχανισμός Peccei-Quinn

5.1 Το Πρόβλημα του Χαμένου Μεσονίου του Weinberg

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως $U(1)$ πρόβλημα, διατυπώθηκε από τον Steven Weinberg, [36] και λύθηκε από τον Gerard 't Hooft [34]. Θεωρώντας την QCD με δύο γεύσεις κουάρκ u, d και $q = (u, d)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i\bar{q}\gamma^\mu D_\mu q - \bar{q}Mq, \quad (5.1.1)$$

όπου

$$M = \begin{pmatrix} m_u e^{i\theta_\lambda} & 0 \\ 0 & m_d e^{i\theta_\lambda} \end{pmatrix}. \quad (5.1.2)$$

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι μάζες των κουάρκ προέρχονται από συζεύξεις Yukawa των πινάκων Higgs και Yukawa, όποτε γενικά περιμένουμε να υπάρχει μία θ_λ . Η παραπάνω Λαγκρανζιανή σπάει κάτω από μετασχηματισμούς $U(2)_V \otimes U(2)_A$. Για την καθολική συμμετρία $U(2)_V = U(1)_V \otimes SU(2)_V$ μένει αναλλοίωτη κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς και μας δίνει την διατήρηση του βαρυονικού αριθμού ($U(1)_V$) και το isospin ($SU(2)_V$). Για την $SU(2)_V$ χρειάζεται να θεωρήσουμε ότι οι μάζες των κουάρκ είναι εκφυλισμένες δηλαδή $m_u = m_d$.

Στο όριο όπου οι μάζες των κουάρκ είναι μηδέν $m_q \rightarrow 0$, τα κουάρκ μετασχηματίζονται κάτω από $U(2)_A = U(1)_A \otimes SU(2)_A$ σαν

$$q_R \rightarrow e^{i(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} q_R, \quad (5.1.3)$$

$$q_L \rightarrow e^{-i(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} q_L, \quad (5.1.4)$$

$$q \rightarrow e^{i\gamma_5(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} q, \quad (5.1.5)$$

όπου $\vec{\sigma}$ οι πίνακες Pauli τα $\eta^0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ απλές σταθερές και $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εάν οι μάζες των κουάρκ δεν είναι μηδέν τότε οι συμμετρία $U(2)_A$ δεν είναι συμμετρία της κλασικής θεωρίας καθώς σπάει από τον όρο μάζας

$$\bar{q}Mq \rightarrow q^\dagger e^{-i\gamma_5(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} \gamma^0 M e^{i\gamma_5(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} q = q^\dagger \gamma^0 e^{2i\gamma_5(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} M q, \quad (5.1.6)$$

$$\bar{q}Mq \rightarrow \bar{q} e^{2i\gamma_5(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} M q. \quad (5.1.7)$$

Χρησιμοποιήσαμε $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. Για χαμηλές ενέργειες σε κβαντική ενεργή θεωρία

- $m_q = 0$.
- $SU(2)_A, U(1)_A$ καθολικές συμμετρίες (global).

Σε χαμηλές ενέργειες συμβαίνει αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας και

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = -v^3 \approx \Lambda_{QCD}^3 \neq 0, \quad (5.1.8)$$

ο τελεστής αυτός μετασχηματίζεται μη τετριμμένα κάτω από την $U(2)_A$ αφού,

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \rightarrow \langle 0 | \bar{q} e^{2i\gamma^5(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} q | 0 \rangle. \quad (5.1.9)$$

Επομένως σπάει τις χειραλικές συμμετρίες $SU(2)_A, U(1)_A$ στην κλίμακα ενέργειας της QCD $\Lambda_{QCD} \approx 200 MeV$.

Από το Θεώρημα Goldstone για κάθε σπασμένο γεννήτορα έχουμε ένα άμαζο μποζόνιο Goldstone. Προωθούμε τις σταθερές σε πεδία $(\eta^0, \vec{\pi}) \rightarrow (\eta^0(x), \vec{\pi}(x))$. Η $U(2)_A$ συμμετρία έχει 4 γεννήτορες, επομένως περιμένουμε και 4 άμαζα μποζόνια Goldstone τα οποία όπως φαίνονται από την ονομασία τους είναι τα 3 πόνια π^0, π^+, π^- και το η^0 . Επειδή η συμμετρία αυτή είναι προσεγγιστική αφού θεωρήσαμε ότι οι μάζες των κουάρκ είναι μηδέν, όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει μιας και έχουν μικρές μάζες ($m_u = 2.2 MeV, m_d = 4.7 MeV$), τα σωματίδια αποκτούν μάζα και ονομάζονται ψευδό-μποζόνια Goldstone. Τότε τα κουάρκ μετασχηματίζονται κάτω από την $U(2)_A$

$$q_R \rightarrow e^{i(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} \tilde{q}_R, \quad (5.1.10)$$

$$q_L \rightarrow e^{-i(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} \tilde{q}_L, \quad (5.1.11)$$

$$q \rightarrow e^{i\gamma^5(\eta^0 + \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})} \tilde{q}, \quad (5.1.12)$$

$\tilde{q} = (\tilde{q}_L, \tilde{q}_R)$ είναι τα πεδία κουάρκ τα οποία δεν περιέχουν Goldstone μποζόνια, [37]. Αυτά ορίζονται από τον μετασχηματισμό

$$\tilde{q} \rightarrow e^{i(\frac{\eta^0}{f_0} + \frac{\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}}{f_\pi})} \tilde{q}. \quad (5.1.13)$$

Θεωρούμε $U = e^{i(\frac{\eta^0}{f_0} + \frac{\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}}{f_\pi})}$, για διευκόλυνση θεωρούμε $f_\eta = f_\pi = f$,

$$U = e^{i\frac{H}{f}}. \quad (5.1.14)$$

Ενεργή Λαγκρανζιανή.

$$\mathcal{L}_{eff} = \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U + \langle \bar{q}q \rangle Tr[MU^\dagger + MU]. \quad (5.1.15)$$

Ο Πρώτος όρος μας δίνει τους κινητικούς όρους των σωματιδίων: $\partial_\mu \eta^0 \partial^\mu \eta^0$, $\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}$. Ο Δεύτερος όρος είναι ο όρος μάζας ή δυναμικού της Λαγκρανζιανής $\mathcal{L} = T - V$. Ξεχνώντας προς το παρόν την εκθετική φάση στον πίνακα μάζας,

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}, \quad (5.1.16)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi^3 + \eta^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^3 + \eta^0 \end{pmatrix}, \quad (5.1.17)$$

$$\langle \bar{q}q \rangle Tr[MU^\dagger + MU] = -v^3 Tr[M(U^\dagger + U)]. \quad (5.1.18)$$

Για να βρούμε το δυναμικό στον φορτισμένο τομέα θέτουμε $\pi^3 = \eta^0 = 0$

$$U = e^i \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\pi^+/f \\ \sqrt{2}\pi^-/f & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1.19)$$

$$U + U^\dagger = e^{i\Pi/f} + e^{-i\Pi/f}. \quad (5.1.20)$$

Σειρές Taylor:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\begin{aligned} e^{i\Pi/f} + e^{-i\Pi/f} &= 1 + \frac{i\Pi/f}{1!} + \frac{(i\Pi/f)^2}{2!} + \frac{(i\Pi/f)^3}{3!} + \dots \\ &+ 1 + \frac{-i\Pi/f}{1!} + \frac{(-i\Pi/f)^2}{2!} + \frac{(-i\Pi/f)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι περιττές δυνάμεις απαλείφονται μεταξύ τους και περισσεύουν μόνο οι άρτιες,

$$e^{i\Pi/f} + e^{-i\Pi/f} = 2\left(1 + \frac{(i\Pi/f)^2}{2!} + \frac{(i\Pi/f)^4}{4!} + \dots\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} = 2 \cos(\Pi/f).$$

Ο πίνακας Π δεν είναι διαγωνοποιημένος και δεν μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτησή του εύκολα. Για αυτό θεωρούμε

$$\Pi = \sqrt{\Pi^2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2\pi^+\pi^-} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\pi^+\pi^-} \end{pmatrix}, \quad (5.1.21)$$

$$\cos(\Pi/f) = \cos\left(\frac{\sqrt{2\pi^+\pi^-}}{f}\right). \quad (5.1.22)$$

Και άρα

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= \text{Tr}[M(U^\dagger + U)] = -2v^3 \text{Tr} \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \cos(\Pi/f) \\ &= -v^3 \text{Tr} \begin{pmatrix} m_u \cos\left(\frac{\sqrt{2\pi^+\pi^-}}{f}\right) & 0 \\ 0 & m_d \cos\left(\frac{\sqrt{2\pi^+\pi^-}}{f}\right) \end{pmatrix} \\ &= -v^3(m_u + m_d) \cos\left(\frac{\sqrt{2\pi^+\pi^-}}{f}\right). \end{aligned}$$

Επομένως

$$V_{\pm} = -v^3(m_u + m_d) - v^3(m_u + m_d) \frac{(\sqrt{2\pi^+\pi^-})^2/f^2}{2!}, \quad (5.1.23)$$

$$V_{\pm} = -v^3(m_u + m_d) - v^3(m_u + m_d) \frac{\pi^+\pi^-}{f^2}, \quad (5.1.24)$$

που μας δίνει την μάζα των φορτισμένων πιονίων

$$m_{\pi}^2 = \frac{(m_u + m_d)v^3}{f^2}. \quad (5.1.25)$$

Κάνοντας το ίδιο για τον ουδέτερο τομέα, θέτουμε $\pi^+ = \pi^- = 0$,

$$U = e^i \begin{pmatrix} (\pi^3 + \eta^0)/f & 0 \\ 0 & (-\pi^3 + \eta^0)/f \end{pmatrix}. \quad (5.1.26)$$

Πάλι ισχύει ότι $U^\dagger + U = 2 \cos(\Pi/f)$,

$$\cos(\Pi/f) = \begin{pmatrix} \cos((\pi^3 + \eta^0)/f) & 0 \\ 0 & \cos((- \pi^3 + \eta^0)/f) \end{pmatrix}, \quad (5.1.27)$$

Και άρα

$$V(\pi^3, \eta^0) = \text{Tr}[M(U^\dagger + U)]$$

$$\begin{aligned}
&= -2v^3 \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos((\pi^3 + \eta^0)/f) & 0 \\ 0 & \cos((-\pi^3 + \eta^0)/f) \end{pmatrix} \right] \\
&= -v^3 \text{Tr} \begin{pmatrix} m_u \cos((\pi^3 + \eta^0)/f) & 0 \\ 0 & m_d \cos((-\pi^3 + \eta^0)/f) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$V(\pi^3, \eta^0) = -v^3 m_u \cos(\pi^3/f + \eta^0/f) - v^3 m_d \cos(-\pi^3/f + \eta^0/f). \quad (5. 1. 28)$$

Από την παραπάνω σχέση δίνεται η μάζα σε γραμμικούς συνδυασμούς του π^3 και του η^0 . Ένας από αυτούς θα είναι το ηλεκτρικά ουδέτερο πόνιο π^0 και ο άλλος ένας θα έχει κάποια σχέση με το η , λόγω κβαντικών αριθμών. Όμως ο λόγος των μαζών του πονίου και του ήτα έχει μεγάλη διάφορα με την πειραματική μέτρηση

$$\frac{m_\eta}{m_\pi} \sim \frac{m_u}{m_d} \sim 0.5. \quad (5. 1. 29)$$

Επομένως δεν υπάρχει το συγκεκριμένο ήτα σωματίδιο που προβλέπεται από την προσεγγιστική $U(2)_V \otimes U(2)_A$. Το ίδιο πρόβλημα παραμένει όταν λαμβάνουμε υπόψη στην αρχική μας συμμετρία και το strange κουάρκ, που τότε η συμμετρία γίνεται $U(3)_A$ και έχουμε τρία ουδέτερα μεσόνια π^0, η, η' .

5.2 Επίδραση Instantons

Το $U(1)_A$ πρόβλημα λύνεται όταν λάβουμε υπόψη τον έξτρα όρο στο δυναμικό που προέρχεται από τα instantons [26]. Το αντίστοιχο ρεύμα για την $U(1)_A$ είναι $j_A^\mu = \bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 d$ και όπως είδαμε η απόκλιση του δίνει ένα παραπάνω όρο λόγω instantons

$$\partial_\mu j_A^\mu = -2m_u \bar{u}i\gamma_5 u - 2m_d \bar{d}i\gamma_5 d + 4\frac{a_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}. \quad (5. 2. 1)$$

Όπου $\tilde{G}^{a\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{a\alpha\beta}/2$ είναι ο τανυστής ισχύος των γλουονίων με συμμετρία βαθμίδας $SU(3)_C$. Ο συντελεστής 4 μπροστά από τον $\tilde{G}G$ όρο προέρχεται από τις δύο δυνατές χειραλικότητες για κάθε ένα από τα δύο κουάρκ u, d . Επομένως η νέα Λαγκρανζιανή μπορεί να γραφτεί

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD} + \delta\mathcal{L}, \quad (5. 2. 2)$$

όπου

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \beta j_A^\mu + \beta \partial_\mu j_A^\mu, \quad (5. 2. 3)$$

ο πρώτος όρος είναι μηδέν αφού φ =σταθερά

$$\delta\mathcal{L} = \varphi \partial_\mu j_A^\mu = -2m_u \bar{u}i\beta\gamma_5 u - 2m_d \bar{d}i\beta\gamma_5 d + 4\beta \frac{a_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}. \quad (5. 2. 4)$$

Οι πρώτοι δύο όροι είναι οι αλλαγές φάσης στους όρους μάζας του κάθε κουάρκ. Ο οποίος όρος είναι του τύπου $\bar{q}_L m e^{i\theta_\lambda} q_R + h.c.$ Μετά την $U(1)_A$ η φάση του θα αλλάξει και θα γίνει $e^{i(\theta_\lambda - 4\beta)}$.

- θ_λ προέρχεται από Yukawa couplings.
- $4\beta = \theta_{QCD}$ προέρχεται από το κενό της QCD.

Μπορούμε να ορίσουμε μία $\bar{\theta} = \theta_{QCD} - \theta_\lambda$ σαν την μόνη φάση που υπάρχει στην Λαγκρανζιανή, καθώς μπορούμε να την μεταφέρουμε από τον όρο μάζας στον όρο $\tilde{G}G$ ορίζοντάς την ξανά. Αυτός ο όρος θα προσφέρει ένα νέο δυναμικό στην Λαγκρανζιανή το οποίο όπως είδαμε θα είναι περιοδικό και θα έχει μορφή

$$V_{\tilde{G}G} = \Lambda^4 \cos(\bar{\theta}). \quad (5. 2. 5)$$

Τώρα όμως που προσθέσαμε και το ψευδομποζόνιο Goldstone ήτα (η^0), προσφέρει και αυτό στην παραβίαση της CP στον όρο $\tilde{G}G$ κατά $\frac{\eta^0}{2f}$. Άρα

$$V_{\tilde{G}G} = \Lambda^4 \cos\left(-\bar{\theta} + \frac{2\eta^0}{f}\right). \quad (5. 2. 6)$$

Το νέο δυναμικό είναι

$$\begin{aligned} V(\pi^3, \eta^0, \bar{\theta}) &= -v^3 m_u \cos(\pi^3/f + \eta^0/f) - v^3 m_d \cos(-\pi^3/f + \eta^0/f) + V_{\tilde{G}G} \\ &= -v^3 m_u \cos(\pi^3/f + \eta^0/f) - v^3 m_d \cos(-\pi^3/f + \eta^0/f) + \Lambda^4 \cos\left(-\bar{\theta} + \frac{2\eta^0}{f}\right). \end{aligned} \quad (5. 2. 7)$$

Κάνοντας ανάπτυγμα Taylor και δίνοντας βάση μόνο στους τετραδικούς όρους

$$\begin{aligned} &\sim v^3 \frac{m_u}{2f} (\pi^3/f + \eta^0/f)^2 + v^3 \frac{m_d}{2} (-\pi^3/f + \eta^0/f)^2 - \frac{\Lambda^4}{2} (-\bar{\theta} + \eta^0/f)^2, \\ &\sim v^3 \frac{m_u}{2f^2} (\pi^3 \pi^3 + 2\pi^3 \eta^0 + \eta^0 \eta^0) + v^3 \frac{m_d}{2f^2} (\pi^3 \pi^3 - 2\pi^3 \eta^0 + \eta^0 \eta^0) \\ &\quad - \frac{\Lambda^4}{2} (\bar{\theta}^2 - 4\bar{\theta} \eta^0/f + 4\eta^0 \eta^0/f^2), \\ &\sim v^3 \frac{m_u + m_d}{2f^2} \pi^3 \pi^3 + \left(v^3 \frac{m_u + m_d}{2f^2} - \frac{4\Lambda^4}{2f^2}\right) \eta^0 \eta^0, \quad \Lambda^4 \gg m v^3, \\ &\sim v^3 \frac{m_u + m_d}{2f^2} \pi^3 \pi^3 - \frac{2\Lambda^4}{f^2} \eta^0 \eta^0. \end{aligned}$$

Άρα το ήτα παίρνει την μάζα του από τον καινούργιο όρο και το πόνιο από το σπάσιμο της χειραλικής συμμετρίας

$$m_\pi^2 = \frac{(m_u + m_d)v^3}{f^2}, \quad (5. 2. 8)$$

$$m_\eta \simeq \frac{4\Lambda^2}{f} + \mathcal{O}(m_q v^3). \quad (5.2.9)$$

Έτσι δικαιολογείται η μεγάλη μάζα του ήτα αλλά πλέον έχουμε έναν όρο στην Λαγκρανζιανή ο οποίος παραβιάζει την CP συμμετρία.

5.3 Axion

Παρατηρούμε ότι στο δυναμικό (5.2.7) εάν $\bar{\theta} = 0$, διατηρείται η CP, τότε ο κάθε ένας από τους τρεις όρους μπορεί να ελαχιστοποιηθεί όταν

$$\langle \pi^3 \rangle = \langle \eta^0 \rangle = 0. \quad (5.3.1)$$

Στο δυναμικό έχουμε τρεις όρους όμως μόνο 2 βαθμούς ελευθερίας, το η^0 και το π^3 , οπότε ελαχιστοποιώντας και τους τρεις όρους ταυτόχρονα, αφήνει πάντα κάποιον όρο που παραβιάζει την CP. Αν εισάγουμε όμως ένα νέο όρο τύπου μεσονίου που δεν προσθέτει καινούργιους όρους στο δυναμικό, τότε θα έχουμε και τρίτο βαθμό ελευθερίας και θα μπορούμε να απαλείψουμε την παραβίαση της CP συμμετρίας. Αυτό μπορεί να γίνει θεωρώντας ένα νέο σωματίδιο φ που ονομάζεται axion και προσθέτει στην Λαγκρανζιανή τους όρους

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \varphi \frac{a_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{int}(\partial_\mu \varphi, q). \quad (5.3.2)$$

Επομένως τώρα ο όρος μάζας και $\tilde{G}G$ στην Λαγκρανζιανή είναι

$$\mathcal{L} \ni m_q \bar{q}_L q_R e^{i(\gamma_5 \frac{\eta^0}{f})} + h.c. + (\bar{\theta} + 2\frac{\eta^0}{f} + \frac{\varphi}{f_\varphi}) \frac{a_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}. \quad (5.3.3)$$

Η CP διατηρείται όταν ορίσουμε $a \rightarrow \frac{\varphi}{f_\varphi} + \bar{\theta}$ και ζητάμε $\langle a \rangle = 0$. Δηλαδή το axion έχει $\text{ven} \langle \varphi \rangle = -f_\varphi \bar{\theta}$. Μπορούμε να μεταφέρουμε το φ από τον $\tilde{G}G$ όρο στον όρο μάζας ορίζοντας

$$\eta^0 \rightarrow \eta^0 + \frac{a f}{2f_a}, \quad (5.3.4)$$

$f_\varphi = f_a$. Οι νέοι όροι στο δυναμικό γράφονται

$$\begin{aligned} V(\pi^3, \eta^0, \varphi) &= -v^3 m_u \cos\left(\frac{\pi^3}{f} + \frac{\eta^0}{f} - \frac{a}{2f_a}\right) \\ &- v^3 m_u \cos\left(-\frac{\pi^3}{f} + \frac{\eta^0}{f} - \frac{a}{2f_a}\right) + \Lambda^4 \cos\left(\frac{2\eta^0}{f}\right). \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Κάνοντας παρόμοια ανάλυση μας ενδιαφέρουν οι τετραδικοί όροι

$$\frac{m_u}{2} \left(\frac{\pi^3}{f} + \frac{\eta^0}{f} - \frac{a}{2f_a}\right)^2 + \frac{m_d}{2} \left(-\frac{\pi^3}{f} + \frac{\eta^0}{f} - \frac{a}{2f_a}\right)^2. \quad (5.3.6)$$

Επίσης το axion έχει μία γωνία μίξης με το π^0 την $\varphi_{\alpha\pi} = \frac{m_d - m_u}{2(m_d + m_u)} \frac{f}{f_a}$ και το π^0 ορίζεται

$$\pi^0 \rightarrow \pi^3 - \varphi_{\alpha\pi} a. \quad (5.3.7)$$

Έτσι καταλήγουμε

$$\begin{aligned} & v^3 \frac{m_d + m_u}{2} \frac{1}{4f_a^2} aa + v^3 \frac{m_d + m_u}{2f^2} \pi^3 \pi^3 \\ &= v^3 \frac{m_d + m_u}{2f^2} \pi^0 \pi^0 - v^3 \frac{m_d + m_u}{2f^2} \frac{(m_d - m_u)^2}{4(m_d + m_u)^2} \frac{1}{f_a^2} aa + v^3 \frac{m_d + m_u}{2} \frac{1}{4f_a^2} aa \\ &= v^3 \frac{m_d + m_u}{2f^2} \pi^0 \pi^0 + v^3 \frac{m_u m_d}{2(m_u + m_d)} \frac{1}{f_a^2} aa. \end{aligned}$$

Άρα

$$m_\pi^2 = \frac{(m_u + m_d)v^3}{f^2}, \quad (5.3.8)$$

$$m_a^2 = v^3 \frac{m_u m_d}{m_u + m_d} \frac{1}{f_a^2} = \frac{m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \frac{m_\pi^2 f^2}{f_a^2}. \quad (5.3.9)$$

Όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά f_a , μικραίνει η μάζα του axion καθώς έχει και πιο αδύναμες αλληλεπιδράσεις με τα φωτόνια, αδρόνια και μεσόνια. Το παραπάνω μοντέλο ονομάζεται αδρονικό αξιονικό μοντέλο.

5.4 Axion Κβαντικής Χρωμοδυναμικής

Γενικά ο μηχανισμός Peccei-Quinn βασίζεται στην ιδέα ότι υπάρχει μία επί πλέον καθολική αξονική συμμετρία $U(1)_{PQ}$, [24], η οποία σπάει αυθόρμητα στην κλίμακα του f_a . Αυτή η συμμετρία συμπεριλαμβάνεται μέσα στο Καθιερωμένο Πρότυπο και πρέπει να προστεθεί μέσω κάποιου αξιονικού μοντέλου. Ο ρόλος του axion είναι τέτοιος ώστε να θέτει την φάση θ που παραβιάζει την CP ίση με μηδέν. Ο τρόπος με τον οποίο δουλεύει είναι ότι κάποιο πεδίο $S(x)$ κουβαλάει το axion σαν γωνιακό βαθμό ελευθερίας

$$S(x) = \varphi(x) e^{ia(x)/f_a}. \quad (5.4.1)$$

Σε χαμηλές ενέργειες η συμμετρία PQ σπάει, η ven του πεδίου $S(x)$ θα βρεθεί στην φάση του πίνακα μάζας και θα δημιουργήσει έναν έξτρα όρο που παραβιάζει την CP. Το πεδίο $S(x)$ τότε έχει ven

$$\langle S \rangle = \langle \varphi \rangle e^{i\alpha/f_a}, \quad (5.4.2)$$

όπου το α είναι τώρα ανεξάρτητο από τις θέσεις x . Ο όρος αυτός στον πίνακα μάζας πρέπει να απαλειφθεί. Αυτό γίνεται μέσω ενός αξονικού $U(1)_A$ μετασχηματι-

σμού των κουάρκ $q \rightarrow qe^{i\gamma^5 \alpha/2f_a}$. Τότε θα γεννηθεί ένας καινούργιος όρος παραβίασης CP $\frac{\alpha}{f_a} \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}$. Η συνολική Λαγκρανζιανή μαζί με το Καθιερωμένο Πρότυπο, την φάση θ που παραβιάζει την CP και τις αλληλεπιδράσεις του axion είναι

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{SM} + \theta \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a + \frac{\alpha}{f_a} \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{int}[\partial_\mu a; \Psi]. \quad (5.4.3)$$

Σε χαμηλές ενέργειες το ενεργό δυναμικό του axion έχει τέτοιο ελάχιστο στο οποίο ισχύει

$$\langle a \rangle = -f_a \theta = \alpha. \quad (5.4.4)$$

Έτσι εξαφανίζεται ο CP παραβατικός όρος και αυτό που μένει είναι ένα έξτρα ψευδό-βαθμωτό σωματίδιο. Η γωνία θ από σταθερά γίνεται μία δυναμική παράμετρος της θεωρίας

$$\theta \rightarrow \theta(x) = \theta + \frac{a(x)}{f_a}. \quad (5.4.5)$$

5.5 Axion Συζεύξεις

Δίνοντας βάση μόνο στους $U(1)_{PQ} = U(1)_A$ μετασχηματισμούς των κουάρκ

$$q \rightarrow e^{i\gamma^5 \frac{q}{2f_a}} q, \quad (5.5.1)$$

από την ανωμαλία του ρεύματος πέρα από τον όρο γλουονίων θα υπάρξουν και όροι μίξης μετά τα κουάρκ

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\partial_\mu a}{2f_a} \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q + a 2i \frac{m_a}{2f_a} \bar{q} \gamma^5 q. \quad (5.5.2)$$

Μέσα από αυτούς τους όρους και από την Ενεργή θεωρία μετά το σπάσιμο της χειραλικής συμμετρίας, μπορούμε να βρούμε ότι οι όροι αλληλεπίδρασης των axion είναι [17]

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g_{\alpha\gamma}}{4} a F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{AV} + \mathcal{L}_{\alpha\pi\pi\pi}, \quad (5.5.3)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{AV} = \frac{\partial_\mu a}{f_a} (C_{app} \bar{p} \gamma^\mu \gamma^5 p + C_{ann} \bar{n} \gamma^\mu \gamma^5 n + i C_{a\pi NN} (\frac{\pi^+}{f_\pi} \bar{p} \gamma^\mu n - \frac{\pi^-}{f_\pi} \bar{n} \gamma^\mu p)), \quad (5.5.4)$$

$$\mathcal{L}_{\alpha\pi\pi\pi} = C_{a\pi\pi\pi} \frac{\partial_\mu a}{f_a f_\pi} (\pi^0 \pi^+ \partial_\mu \pi^- + \pi^0 \pi^- \partial_\mu \pi^+ + \pi^+ \pi^- \partial_\mu \pi^0). \quad (5.5.5)$$

Καθώς στην περίπτωση του μοντέλου DFSZ υπάρχει σύζευξη και με τα λεπτόνια

$$\mathcal{L}_{al} = C_{al}\partial_\mu a(\bar{l}\gamma^\mu\gamma^5 l). \quad (5. 5. 6)$$

Ο όρος αλληλεπίδρασης με τα φωτόνια, $\tilde{F}F$, μπορεί να δημιουργηθεί όπως στο μοντέλο DFSZ που δημιουργείται απευθείας από την θραύση της PQ συμμετρίας. Αλλιώς δημιουργείται μέσω ενός βρόγχου τριγωνικών διαγραμμάτων Feynman, σε μοντέλα που το άξιο αλληλεπιδρά με το ουδέτερο πόνιο σε μία Ενεργή θεωρία πεδίου. Επίσης το $g_{\alpha\gamma}$ εξαρτάται από το μοντέλο.

5.6 Axion Μοντέλα

Το αρχικό αξιονικό μοντέλο PQWW, από τους Peccei-Quinn-Weinberg-Wilczek, έχει απορριφθεί από πειραματικά δεδομένα, καθώς προέβλεπε μάζα στην Ηλεκτροσθενή κλίμακα. Αυτά που δεν έχουν απορριφθεί και χαρακτηρίζονται ως αόρατα αξιονικά μοντέλα λόγω των αδύναμων αλληλεπιδράσεων που έχει το άξιο είναι τα KSVZ και DFSZ.

5.6.1 KSVZ

Το KSVZ, από τους Kim-Shifman-Vainshtein-Zakharov, [16], [30], θεωρείται ένα μοντέλο αόρατων αξιονίων. Σε αυτό το μοντέλο προστίθεται ένα νέο βαρύ κουάρκ $Q = (Q_L, Q_R)$ τριπλέτα κάτω από $SU(3)_C$ μετασχηματισμούς. Το PQ βαθμωτό πεδίο Φ έχει διπλάσιο PQ φορτίο κάτω από χειραλικές περιστροφές και είναι singlet. Η Λαγκρανζιανή για αυτό το μοντέλο γράφεται

$$\mathcal{L}_{KSVZ} = \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi^\dagger + \bar{Q}iD_\mu\gamma^\mu Q - (y_Q\Phi\bar{Q}_L Q_R + h.c) - V(\Phi), \quad (5. 6. 1)$$

όπου

$$V(\Phi) = \lambda_\Phi(|\Phi|^2 - \frac{v_\alpha^2}{2})^2. \quad (5. 6. 2)$$

Και η $U(1)_{PQ}$

$$\Phi \rightarrow e^{ia}\Phi, \quad (5. 6. 3)$$

$$Q_L \rightarrow e^{ia/2}Q_L, \quad (5. 6. 4)$$

$$Q_R \rightarrow e^{ia/2}Q_R. \quad (5. 6. 5)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος μάζας Yukawa μένει αναλλοίωτος κάτω από την $U(1)_{PQ}$. Όταν το Φ αποκτά νεν τότε η συμμετρία σπάει

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\alpha + \rho_\alpha)e^{ia/v_\alpha}, \quad (5. 6. 6)$$

$$V(\Phi) = \lambda_\Phi (|\Phi|^2 - \frac{v_\alpha^2}{2})^2 = \lambda_\Phi (\frac{1}{2}(v_\alpha + \rho_\alpha)^2 - \frac{v_\alpha^2}{2})^2 = \lambda_\Phi (\rho_\alpha^4 + 2v_\alpha \rho_\alpha^3 + v_\alpha^2 \rho_\alpha^2). \quad (5.6.7)$$

Επομένως το ρ_α αποκτά μάζα

$$m_{\rho_\alpha} = \sqrt{2\lambda_\Phi} v_\alpha. \quad (5.6.8)$$

Και το βαρύ κουάρκ Q αποκτά μάζα από τον όρο Yukawa

$$y_Q \frac{v_\alpha}{\sqrt{2}} \bar{Q}_L Q_R e^{ia/v_\alpha} + h.c., \quad (5.6.9)$$

$$m_Q = y_Q \frac{v_\alpha}{\sqrt{2}}. \quad (5.6.10)$$

Ο παραπάνω όρος είναι υπεύθυνος για την δημιουργία του $a\tilde{G}G$ καθώς το Q μετασχηματίζεται σαν

$$Q \rightarrow e^{-i\gamma^5 \frac{a}{2v_\alpha}} Q. \quad (5.6.11)$$

Οι μάζες των Q και ρ_α είναι πολύ μεγάλες διότι το πειραματικό κάτω όριο της v_α είναι πολύ μεγάλο της τάξης $v_\alpha > 10^9 \text{Gen}$. Επομένως στην ενεργή θεωρία μπορούμε να απαλείψουμε τα δύο αυτά πεδία. Ο όρος της χειραλικής ανωμαλίας $a\tilde{G}G$ βρίσκεται στην θεωρία σαν μνήμη του χειραλικού μετασχηματισμού που συνέβη σε υψηλές ενέργειες.

5.6.2 DFSZ

Το DFSZ μοντέλο από τους Dine-Fischler-Srednicki-Zhitnisk, [11], [38], βασίζεται σε 2 Higgs Doublets στην $SU(2)_L$ H_u, H_d και ένα βαθμωτό πεδίο Φ singlet στην $SU(2)_L$ τα οποία έχουν το axion σαν γωνιακό βαθμό ελευθερίας. Το Φ επίσης θεωρούμε ότι έχει υπερφορτίο $Y = 0$, επομένως δεν θα έχει ρόλο στην βαθμιδοποίηση της Λαγκρανζιανής της Ηλεκτροασθενούς Θεωρίας. Το δυναμικό της θεωρίας είναι της μορφής

$$V(H_u, H_d, \Phi) = \lambda_u (|H_u|^2 - \frac{v_\alpha^2}{2})^2 + \lambda_d (|H_d|^2 - \frac{v_\alpha^2}{2})^2 +$$

$$\lambda_\Phi (|\Phi|^2 - \frac{v_\alpha^2}{2})^2 + \tilde{V}(|H_u|^2, |H_d|^2, |\Phi|^2, |H_u H_d^\dagger|^2, |H_u H_d|^2) + \lambda H_u H_d \Phi^2. \quad (5.6.12)$$

Η Λαγκρανζιανή της μάζας των φερμιονίων έχει την ίδια μορφή για κάθε γενιά

$$\mathcal{L}_{DFSZ}^Y = -Y_u \bar{q}_L H_u u_R - Y_d \bar{q}_L H_d d_R - Y_e \bar{l}_L H_d e_R. \quad (5.6.13)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα δεύτερο μοντέλο DFSZ όπου η μάζα του ηλεκτρονίου θα δίνεται από το $\tilde{H}_u = i\sigma_2 H_u$ που σε αυτήν την περίπτωση θα άλλαζε η τιμή σε κάποιες από τις συζεύξεις του axion χωρίς όμως να αλλάζει η μορφή τους. Όπου τα πεδία H_u, H_d, Φ παίρνουν vevs

$$\langle H_u \rangle = \frac{v_u}{\sqrt{2}} e^{i \frac{a}{v_{PQ}} X_u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6.14)$$

$$\langle H_d \rangle = \frac{v_d}{\sqrt{2}} e^{i \frac{a}{v_{PQ}} X_d} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.6.15)$$

$$\langle \Phi \rangle = \frac{v_\varphi}{\sqrt{2}} e^{i \frac{a}{v_{PQ}} X_\varphi}. \quad (5.6.16)$$

Για να μένει ο τελευταίος όρος του δυναμικού, $H_u H_d \Phi^2$, αναλλοίωτος κάτω από τις περιστροφές μπορούμε εύκολα να δούμε ότι θα πρέπει

$$X_u + X_d + 2X_\varphi = 0. \quad (5.6.17)$$

Επίσης βάζοντας μία δεύτερη συνθήκη το axion να μην αλληλεπιδρά με το μποζόνιο Z

$$c\partial_\mu a Z^\mu = 0, \quad (5.6.18)$$

οδηγούμαστε στην σχέση

$$X_u v_u^2 - X_d v_d^2 = 0. \quad (5.6.19)$$

Και καταλήγουμε $X_\Phi = -1$, $X_u = 2 \frac{v_d^2}{v^2}$, $X_d = 2 \frac{v_u^2}{v^2}$, όπου $v^2 = v_u^2 + v_d^2$ και

$$v_{PQ}^2 = v_\Phi^2 + v^2 \sin^2(\beta), \quad (5.6.20)$$

$$\sin(\beta) = \frac{v_u}{v}, \quad (5.6.21)$$

$$\cos(\beta) = \frac{v_d}{v}. \quad (5.6.22)$$

Με αυτές τις αλλαγές οι όροι Yukawa μετασχηματίζονται

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DFSZ}^Y = & -Y_u \frac{v_u}{\sqrt{2}} \bar{u}_L u_R e^{2i \sin^2(\beta) \frac{a}{v_{PQ}}} - Y_d \frac{v_d}{\sqrt{2}} \bar{d}_L d_R e^{2i \cos^2(\beta) \frac{a}{v_{PQ}}} \\ & - Y_e \frac{v_d}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R e^{2i \cos^2(\beta) \frac{a}{v_{PQ}}}. \end{aligned} \quad (5.6.23)$$

Τώρα κάνοντας τους χειραλικούς μετασχηματισμούς για κάθε φερμιόνιο

$$u \rightarrow e^{-i\gamma^5 \sin^2(\beta) \frac{a}{v_{PQ}}} u, \quad (5.6.24)$$

$$, d \rightarrow e^{-i\gamma^5 \cos^2(\beta) \frac{a}{v_{PQ}}} d \quad (5. 6. 25)$$

$$e \rightarrow e^{-i\gamma^5 \cos^2(\beta) \frac{a}{v_{PQ}}} e. \quad (5. 6. 26)$$

Τότε ο όρος μάζας παίρνει την συνηθισμένη μορφή $m_i \bar{\psi} \psi$ όπου $m_i = -Y_i \frac{v_i}{\sqrt{2}}$ και ψ το αντίστοιχο φερμιόνιο. Και δημιουργείται ο όρος ανωμαλίας. Στην QCD

$$\delta \mathcal{L} = \frac{2}{32\pi^2 v_{PQ}} a G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}, \quad (5. 6. 27)$$

το 2 στον ονομαστή έχει να κάνει με το γεγονός ότι θεωρήσαμε 2 γεύσεις κουάρκ. Αλλά και ο Ηλεκτρομαγνητικός όρος είναι

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{4} g_{\alpha\gamma} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (5. 6. 28)$$

6 Κοσμολογία Axion

Εάν το axion υπάρχει, ικανοποιεί τις συνθήκες για να είναι υποψήφιο σωματίδιο ψυχρής σκοτεινής ύλης (CDM). Η κοσμολογική ιστορία του axion ξεκινά με το σπάσιμο της $U(1)_{PQ}$ σε θερμοκρασίες $T = T_{PQ} \sim f_{PQ}$. Για πολύ μεγάλες θερμοκρασίες $T \gg \Lambda_{QCD}$, το axion έχει αμελητέα μάζα, όμως όσο η θερμοκρασία μειώνεται αναπτύσσει μάζα μέσω της επίδρασης instanton της QCD. Μπορούμε προσεγγιστικά να υποθέσουμε ότι το axion αποκτά μάζα περίπου την στιγμή μετάβασης της QCD σε θερμοκρασία $T \sim \Lambda_{QCD}$.

Στα αξιονικά μοντέλα το δυναμικό του axion μπορεί να έχει πολλά ολικά ελάχιστα, καθώς η θ γωνία του ανώμαλου όρου της QCD δεν χρειάζεται κατά ανάγκη να χαλαρώσει στο ολικό ελάχιστο $\theta = 0$ του instanton δυναμικού. Γενικά

$$V(a) = m_a^2 \left(\frac{f_a}{N}\right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{a}{f_a/N}\right)\right), \quad (6.0.1)$$

για $N > 1$ υπάρχει μία συμμετρία Z_N μεταξύ των κενών που διατηρούν την CP,

$$\frac{a}{f_a} = 2\pi n, n = (0, 1, 2, \dots, N-1). \quad (6.0.2)$$

Για $N = 1$ είναι εύκολο να δούμε ότι το μόνο κενό που υπάρχει είναι το

$$\frac{a}{f_a} = 0. \quad (6.0.3)$$

Γενικά, μετά την μετάβαση φάσης από το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, απομεινάρια “λάθος” κενών μπορούν να οδηγήσουν σε τοπολογικά ελαττώματα όπως τοιχώματα τομέων, χορδές και μονόπολα, εφόσον η συμμετρία που μένει είναι ομοτοπικά μη τετριμμένη. Στην περίπτωση των axions μπορούν να δημιουργηθούν τοιχώματα τομέων που είναι καταστρεπτικά για την κοσμολογία και πρέπει να αποφευχθούν.

Το axion είναι άμαζο για μεγάλες θερμοκρασίες, αφού όμως για αυτές τις θερμοκρασίες καμιά τιμή δεν είναι ξεχωριστή ενεργειακά, το axion μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή για τις διάφορες διακριτές περιοχές του Σύμπαντος.

Ο πληθυσμός των axion στο Σύμπαν σήμερα είναι αποτέλεσμα θερμικών και μη θερμικών διαδικασιών στο πρώιμο Σύμπαν. Στην περίπτωση των μη θερμικών διαδικασιών υπάρχουν τρεις τρόποι παραγωγής: ο μηχανισμός επανευθυγράμμισης κενού, διάσπαση axion κοσμικής χορδής και διάσπαση τοιχωμάτων τομέων axion.

6.1 Θερμική Παραγωγή Axion

Εάν η θερμοκρασία είναι αρκετά υψηλή τα θερμικά axions δημιουργούνται και καταστρέφονται στις αλληλεπιδράσεις σωματιδίων στο πρώιμο Σύμπαν. Τα

axions μπορούν να δημιουργηθούν, σε όλα τα μοντέλα, μέσω των μηχανισμών φωτοπαραγωγής, $\gamma + Q \rightarrow Q + a$ και μετατροπή πιονίου-axion, $N + \pi \rightarrow N + a$. Δηλαδή γενικότερα δημιουργείται από διαδικασίες του τύπου $a + i \longleftrightarrow i + 1$. Η πυκνότητα των θερμικών axion δίνεται από την εξίσωση Boltzmann (2. 3. 21)

$$\frac{dn_a}{dt} + 3Hn_a = - \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_1 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_i - p_1 - p_2) |M|^2 [f_a f_i - f_1 f_1]. \quad (6. 1. 1)$$

Για τον παράγοντα $[f_a f_i - f_1 f_1]$ ισχύει ότι

$$f_i = e^{-E_i/T}, \quad (6. 1. 2)$$

$$f_1 = e^{-E_1/T}. \quad (6. 1. 3)$$

Από το ενεργειακό μέρος της συνάρτησης δέλτα ισχύει $E_a + E_i = E_1 + E_1$,

$$f_i f_1 = e^{-(E_i+E_1)/T} = e^{-(E_a+E_i)/T} = f_a^{eq} f_i^{eq}, \quad (6. 1. 4)$$

αφού $f_a^{eq} = e^{-E_a/T}$, $f_i^{eq} = e^{-E_i/T} = f_i$. Άρα

$$[f_a f_i - f_1 f_1] = [f_a f_i - f_a^{eq} f_i^{eq}] = f_i^{eq} [f_a - f_a^{eq}]. \quad (6. 1. 5)$$

Ο όρος σύγκρουσης μπορεί να γραφτεί σε όρους n_a και τελικά έχουμε

$$\frac{dn_a^{th}}{dt} + 3Hn_a^{th} = \Gamma(n_a^{eq} - n_a^{th}). \quad (6. 1. 6)$$

Η είναι ο παράγοντας Hubble, Γ είναι ο ρυθμός που τα axions δημιουργούνται και καταστρέφονται

$$\Gamma = \sum_i n_i \langle \sigma_i v \rangle, \quad (6. 1. 7)$$

$$\langle \sigma_i v \rangle = \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_1 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_i - p_1 - p_2) |M|^2 e^{-E_a/T} e^{-E_i/T}. \quad (6. 1. 8)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2. 3. 9) για μποζόνια και θεωρώντας $T \propto R^{-1}$

$$\frac{dn_a^{eq}}{dt} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \frac{dR^{-3}}{dt} \frac{dn_a^{eq}}{dt} = -3 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\dot{R}}{R} R^{-3} \frac{dn_a^{eq}}{dt} = -3H \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3,$$

$$\frac{dn_a^{eq}}{dt} + 3Hn_a^{eq} = 0. \quad (6. 1. 9)$$

Συνδυάζοντας τις 2 εξισώσεις (6. 1. 6), (6. 1. 9) για την πυκνότητα των axions έχουμε

$$\frac{d}{dt}[R^3(n_a^{th} - n_a^{eq})] = -\Gamma R^3(n_a^{th} - n_a^{eq}). \quad (6. 1. 10)$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης (6. 1. 10) είναι

$$\ln[R^3(n_a^{th} - n_a^{eq})] = -\Gamma t,$$

$$n_a^{th} - n_a^{eq} = \frac{e^{-\Gamma t}}{R^3}. \quad (6. 1. 11)$$

δηλαδή η θερμική ισορροπία επιτυγχάνεται εκθετικά γρήγορα όταν $\Gamma(T) > H(T)$, επειδή $H = \frac{1}{2t}$. Η θερμική παραγωγή των axions έγινε όταν αυτή η σχέση ικανοποιούνταν στον πρώιμο Σύμπαν, μέχρι που τα axions για κάποια θερμοκρασία αποσύζευξης T_{dc} , όπου $\Gamma(T_{dc}) = H(T_{dc})$ αποσυνδέθηκαν από το πλάσμα. Επομένως αφού η θερμική ισορροπία είχε επιτευχθεί και ο πληθυσμός των axions είχε καθιερωθεί στο πολύ πρώιμο Σύμπαν, δεν αραιώθηκε ο πληθυσμός από τον πληθωρισμό του σύμπαντος.

Για $f_a > 10^9 GeV$ η ζωή του axion είναι μεγαλύτερη από αυτήν του σύμπαντος. Μεταξύ της τελευταίας τους αποσύζευξης για θερμοκρασία T_{dc} μέχρι σήμερα ο αριθμός τους έχει ελάχιστα αραιωθεί και μετατοπιστεί προς το ερυθρό από την διαστολή του σύμπαντος. Ο σημερινός τους αριθμός είναι

$$n_a^{th}(t_0) = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{dc}^3 \left(\frac{R_{dc}}{R_0}\right)^3 = \frac{7.5}{cm^3} \frac{106.75}{N_D}, \quad (6. 1. 12)$$

N_D ο ενεργός αριθμός των θερμικών βαθμών ελευθερίας. Για $f_a \gtrsim 10^8 GeV$ η θερμική παραγωγή καταστέλλεται.

Το άνω όριο της μάζας του axion έχει δοθεί από [10] ως $m_a < 0.529 eV$.

6.2 Ψυχρή Παραγωγή Axion

Υπάρχουν 3 σημαντικές θερμοκρασίες για την ψυχρή παραγωγή axions: η πρώτη είναι η T_{PQ} η οποία είναι η θερμοκρασία που σπάει η συμμετρία $U(1)_{PQ}$, η δεύτερη είναι η T_R η θερμοκρασία αναθέρμανσης τους Σύμπαντος και η τρίτη θερμοκρασία είναι η θερμοκρασία T_1 που η μάζα του axion γίνεται αρκετά μεγάλη ώστε να μην είναι αμελητέα. Σε θερμοκρασίες υψηλότερες από την κλίμακα της QCD η μάζα του axion είναι κατά προσέγγιση μηδέν. Αλλά για θερμοκρασίες κοντά στην μετάβαση αποκτά μάζα απότομα. Επομένως η μάζα του axion είναι σημαντική από την χρονική στιγμή t_1 και μετά

$$m_a(t)t_1 \approx 1, \quad (6. 2. 1)$$

η θερμοκρασία του Σύμπαντος εκείνη την στιγμή είναι $T_1 = 1 GeV$.

Υπάρχουν 3 μηχανισμοί παραγωγής μη θερμικών-ψυχρών axion: μηχανισμός επανευθυγράμμισης κενού, διάσπαση axion χορδής και διάσπαση τοιχώματος τομέα. Για θερμοκρασίες $T_{PQ} > T_R$ ο μόνος μηχανισμός είναι ο μηχανισμός επανευθυγράμμισης κενού. Δηλαδή καθώς το Σύμπαν ψύχεται σπάει η Peccei-Quinn συμμετρία, ύστερα ο πληθωρισμός του σύμπαντος αραιώνει και λύνει προβλήματα τοπολογικών ελαττωμάτων, όπως χορδών και τα τοιχώματα τομέων που δημιουργούνται. Ενώ για θερμοκρασίες $T_{PQ} < T_R$ όλοι οι μηχανισμοί παίζουν το ρόλο τους. Εφόσον πρώτα σπάει η Peccei-Quinn συμμετρία και αραιώνει τα τοπολογικά ελαττώματα ο πληθωρισμός του σύμπαντος, επειδή η $U(1)_{PQ}$ σπάει σε θερμοκρασία χαμηλότερη από αυτήν της αναθέρμανσης, καθώς το Σύμπαν θερμαίνεται, η $U(1)_{PQ}$ επαναφέρεται. Ύστερα το Σύμπαν ψύχεται πάλι και ξαναδημιουργούνται τοπολογικά ελαττώματα αφού ξανασπάει η συμμετρία σε κάποιον χρόνο μετά την Αναθέρμανση.

Κοσμολογική Εξέλιξη του Axion Πεδίου. Ένα μοντέλο axion, περιγράφεται από την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^\dagger\partial^\mu\varphi - \frac{\lambda}{4}(|\varphi|^2 - v_\alpha^2)^2, \quad (6.2.2)$$

όπου $T_{PQ} = v_\alpha$. Το πεδίο φ αποκτά vev

$$\langle\varphi\rangle = v_\alpha e^{ia/v_\alpha}, \quad (6.2.3)$$

όπου $f_a = v_\alpha/N$. Για θερμοκρασίες $T \approx \Lambda_{QCD}$ οι μη διαταρακτικές επιδράσεις της QCD δίνουν στην μάζα του axion ένα δυναμικό της μορφής

$$V(a) = m_a(T)^2 f_a^2 (1 - \cos \frac{a}{f_a}), \quad (6.2.4)$$

το οποίο προς το παρόν θεωρούμε ότι έχει ένα μόνο ολικό ελάχιστο και άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου $T_{PQ} > T_R$. Για την μετρική Friedmann-Robertson-Walker, οι εξισώσεις κίνησης για την δράση $S = \int dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{L}$ γράφονται

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 + 3\frac{\dot{R}}{R} - \frac{1}{R^2}\nabla_x^2)a(x) + \frac{dV_a(a(x))}{da} &= 0, \\ \ddot{a} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a} - \frac{1}{R^2}\nabla_x^2 a + m_a^2(T)f_a \sin \frac{a}{f_a} &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Για $a \approx 0$, $\sin \frac{a}{f_a} \approx a$ και αμελώντας τις χωρικές παραγώγους η (6.2.5) γίνεται

$$\ddot{a} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a} + m_a^2(T)f_a \frac{a}{f_a} = 0. \quad (6.2.6)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η διαφορική εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση με παραμέτρους που εξαρτώνται από τον χρόνο. Για χρόνους $t < t_1$ ο όρος μάζας είναι αμελητέος και η εξίσωση γίνεται

$$\ddot{a} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a} = 0. \quad (6. 2. 7)$$

Το Σύμπαν σε αυτήν του την κοσμολογική φάση είναι κυριαρχούμενο από ακτινοβολία δηλαδή $R(t) = \sqrt{t}$ ή $H(t) = \frac{1}{2t}$.

$$\ddot{a} + \frac{3}{2t}\dot{a} = 0, \quad (6. 2. 8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = -\frac{3}{2t},$$

$$\dot{a} = ce^{lnt^{-\frac{3}{2}}},$$

$$\dot{a} = ct^{-\frac{3}{2}},$$

$$a(t) = a_{1/2}t^{-\frac{1}{2}} + a_0. \quad (6. 2. 9)$$

Η λύση της εξίσωσης δείχνει ότι για μεγάλους χρόνους όσο διαστέλεται το σύμπαν η τιμή των axion γίνεται σταθερή. Για χρόνους $t > t_1$ θεωρούμε ότι $a(t) = t^{\frac{-3}{4}}\psi(t)$, [32]

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{3}{2t}\frac{d}{dt}\right)t^{\frac{-3}{4}}\psi(t) + m_a t^{\frac{-3}{4}}\psi(t) = 0. \quad (6. 2. 10)$$

- $\frac{d^2}{dt^2}(t^{\frac{-3}{4}}\psi) = \frac{21}{16}t^{\frac{-11}{4}}\psi(t) - \frac{3}{4}t^{\frac{-7}{4}}\frac{d\psi}{dt} - \frac{3}{4}t^{\frac{-7}{4}}\frac{d\psi}{dt} + t^{\frac{-3}{4}}\frac{d^2\psi}{dt^2}$
- $\frac{3}{2t}\frac{d}{dt}(t^{\frac{-3}{4}}\psi(t)) = -\frac{9}{8}t^{\frac{-11}{4}}\psi + \frac{3}{2}t^{\frac{-7}{4}}\frac{d\psi}{dt}$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{3}{16t^2} + m_a^2(t)\right)\psi(t) = 0, \quad (6. 2. 11)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2(t)\right)\psi(t) = 0, \quad (6. 2. 12)$$

όπου

$$\omega^2(t) = \frac{3}{16t^2} + m_a^2(t). \quad (6. 2. 13)$$

Για $t > t_1$ ο όρος $\frac{3}{16t^2}$ μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρός, άρα $\omega \approx m_a$. Η εξίσωση παραμένει μία εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα που εξαρτάται από τον χρόνο και το axion ταλαντώνεται για χρόνους πολύ μεγαλύτερους του t_1 . Όμως κοντά σε χρόνο t_1 αυτή η προσέγγισή δεν ισχύει και χρειάζονται περαιτέρω αριθμητικές μέθοδοι για την ανάλυση της δυναμικής.

Μηχανισμός Επανευθυγράμμισης Κενού. Είναι ο κύριος μηχανισμός παραγωγής axion στο Σύμπαν. Περιληπτικά στην περίπτωση του ενός μόνο κενού του δυναμικού του axion, το axion σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες από αυτές της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής, επιλέγεται στοχαστικά μία γωνιά του δυναμικού a_1 , $a = f_a \alpha_1$. Αυτή για τιμές μεγαλύτερες του t_1 , στην οποία η μάζα του αρχίζει να γίνεται σημαντική, ταλαντώνεται πάνω στο δυναμικό με γωνιακή συχνότητα $m_a(t)$. Η πυκνότητα ενέργειας είναι

$$\rho_{a,0} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{1}{2}m_a^2 a^2(t). \quad (6.2.14)$$

Άρα την χρονική στιγμή t_1

$$\rho_{a,0} = \frac{m_a}{2t_1} f_a \alpha_1^2, \quad (6.2.15)$$

για κάποιον μεταγενέστερο χρόνο t

$$\rho_{a,0} = \frac{m_a}{2t_1} f_a \alpha_1^2 \left(\frac{R_1}{R}\right)^3. \quad (6.2.16)$$

Και ο πληθυσμός

$$n_{a,0} = \frac{\rho_{a,0}}{m_a} = \frac{1}{2t_1} f_a \alpha_1^2 \left(\frac{R_1}{R}\right)^3. \quad (6.2.17)$$

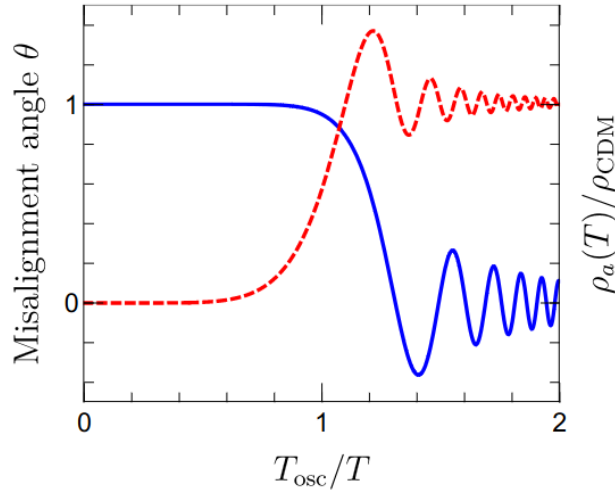


Figure 4: Η γωνία axion θ (μπλε γραμμή) και η πυκνότητα ενέργειας των axion κανονικοποιημένη από την τωρινή πυκνότητα ενέργειας CDM, ως συνάρτηση της T_{osc}/T , όπου $T_{osc} \equiv T_1$. Έχει επιλεγεί αρχική γωνία $\theta_1 \equiv \alpha_1 = 1$. Εικόνα από [9].

Στην περίπτωση που $T_{PQ} < T_R$, δηλαδή στην περίπτωση που η inflation έχει ήδη συμβεί και τα “λάθος” κενά του δυναμικού του axion δεν αραιώνουν, το δυναμικό είναι

$$V(a) = m_a^2 \left(\frac{f_a}{N}\right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{a}{f_a/N}\right)\right). \quad (6. 2. 18)$$

Υπάρχουν πολλοί τρόποι ταλάντωσης και πολλές γωνίες ευθυγράμμισης α_i . Για κάθε πεδίο a έχει επιλεχθεί μια δική του α_i στην περιοχή του στο Σύμπαν, στην οποία ταλαντώνεται γύρω από το κενό του. Επειδή υπάρχουν όμως N κενά, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι μία υπέρθεση όλων των ιδιοσυχνοτήτων αυτών των κενών.

Σε αυτήν την περίπτωση η πυκνότητα ενέργειας και ο πληθυσμός για κάποιο μεταγενέστερο χρόνο t είναι

$$\rho_{a,N} \sim \frac{m_a N^2 f_a^2}{2t_1} \left(\frac{R_1}{R}\right)^3, \quad (6. 2. 19)$$

και ο πληθυσμός είναι τότε

$$n_{a,N} \sim \frac{N^2 f_a^2}{2t_1}. \quad (6. 2. 20)$$

6.2.1 Τοπολογικά ελαττώματα

Τοιχώματα Τομέων. Ένα τοίχωμα τομέα είναι ένα τοπολογικό ελάττωμα που δημιουργείται μετά από το αυθόρμητο σπάσιμο μίας συμμετρίας που δεν έχει “τέλειο” κενό. Δηλαδή εάν ο χάρτης $G \rightarrow H$ το κενό χαρακτηρίζεται από την ομάδα G/H , εάν $\pi(G/H) \neq I$ τότε δημιουργούνται τοιχώματα τομέων. Στην ουσία ένα τοίχωμα τομέα είναι ένα ενεργειακό φράγμα που δημιουργείται ανάμεσα σε δύο κενά του δυναμικού και τα διαχωρίζει. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε πεδίο φ διαλέγει ένα κενό στην δική του περιοχή ακτίνας ξ στο Σύμπαν, εν γένει δύο πεδία σε διαφορετικές περιοχές θα έχουν διαλέξει διαφορετικό κενό ομοτοπικά. Στα σύνορα αυτών των περιοχών δημιουργούνται τα τοιχώματα τομέων. Το πεδίο φ πάνω στο τοίχωμα τομέα παίρνει την τιμή του “λάθος” κενού, τοπικού ελάχιστου του δυναμικού.

Οποτεδήποτε το Σύμπαν περνά από ένα αυθόρμητο σπάσιμο όπως το παραπάνω, τα τοιχώματα τομέων είναι αναπόφευκτα. Όμως αυτά είναι καταστρεπτικά για την κοσμολογία καθώς η μάζα τους υπολογίζεται να ξεπερνά κατά πολύ την συνολική μάζα του παρατηρήσιμου σύμπαντος και επίσης οδηγούν σε μεγάλες διακυμάνσεις στις θερμοκρασίες του CMB κάτι που δεν παρατηρείται. Επιπλέον ακολουθούν Μη-Νευτωνική Βαρύτητα καθώς τα τοιχώματα τομέων μεταξί τους απωθούνται.

Κοσμικές Χορδές. Κάθε εκφυλισμένο ομοτοπικά διαφορετικό κενό, έχει μία οικογένεια εκφυλισμένων ομοτοπικά ίδιων κενών με αυτό. Τα κενά αυτά χαρακτηρίζονται από μία φάση στην νεν της θεωρίας $\langle \varphi \rangle = v e^{i\theta}$. Όταν η ομάδα

$G \rightarrow H$ έχει κενό $M = G/H$ με $\pi_1(M) \neq I$, τότε δεν υπάρχει τρόπος με τον οποίο μπορούμε ομοτοπικά να πάμε από τα εκφυλισμένα κενά στο “λάθος” κενό στο κέντρο του δυναμικού με $|\varphi| = 0$. Όταν ένα πεδίο φ περνάει από την μετάβαση φάσης σε ένα συγκεκριμένο τεμάχιο του Σύμπαντος, διαλέγει ένα κενό με κάποια συγκεκριμένη φάση $\langle \varphi \rangle = v_\sigma e^{i\theta_\sigma}$. Το πεδίο δεν μπορεί να έχει το ίδιο κενό σε μία σφαίρα μεγαλύτερη από τον παρατηρήσιμο ορίζοντα του d_h , αφού το μήκος συσχέτισης δεν ξεπερνάει τον d_h . Στα σύνορα των τεμαχίων αυτών μπορούμε να ορίσουμε ένα κλειστό μονοπάτι που το πεδίο φ να παίρνει όλες τις τιμές $[0, 2\pi]$. Επομένως εκεί θα υπάρχει κάποιο σημείο που δεν πέρασε την μετάβαση φάσης και έμεινε στο “λάθος” κενό στο κέντρο του δυναμικού $|\varphi| = 0$. Αυξάνοντας την διάσταση από ένα μονοδιάστατο κυκλικό μονοπάτι στο σύνορο των τεμαχίων σε μία τρισδιάστατη κλειστή επιφάνεια, τότε δημιουργείται μία κοσμική χορδή που δεν πέρασε ποτέ από το σπάσιμο της συμμετρίας.

Οι κοσμικές χορδές μπορούν να έχουν άπειρο μήκος ή να τελειώνουν σε λούπα στον εαυτό τους. Οι χορδές αυτές κόβουν συνεχώς τον εαυτό τους σε βρόγχους διασκορπίζοντας την ενέργεια τους ως βαρυτικά κύματα [18], και με αυτόν τον τρόπο η ενέργειά τους διασκορπίζεται και δεν κυριαρχεί στο σύμπαν.

Πρόβλημα Τοιχωμάτων Τομέων Axion και Επίλυση. Σε κάθε μοντέλο axion είναι αναπόφευκτη η δημιουργία των τοιχωμάτων τομέων. Υπάρχουν τρεις τρόποι να λυθεί το πρόβλημα αυτό [32]. Ο πρώτος είναι να θεωρήσουμε ότι ο πληθωρισμός του σύμπαντος συμβαίνει μετά το σπάσιμο της συμμετρίας PQ και αραιώνονται τα τοιχώματα τομέων. Ο δεύτερος είναι να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μόνο ένα κενό, $N = 1$, επομένως δεν δημιουργούνται, ή ο “τοίχος” είναι ενεργειακά ίδιος για όλα τα κενά και κάθε κενό μπορεί να παραμορφωθεί σε ένα άλλο ομοτοπικά.

Ο τρίτος τρόπος είναι θεωρώντας ότι συμβαίνει ένα επί πλέον μικρό σπάσιμο στην $Z(N)$ συμμετρία του κενού, και κάθε επέκταση στην $U(1)_{PQ}$. Προσθέτοντας στο δυναμικό τον όρο

$$\delta V = -\xi(\varphi^{-i\delta} + h.c.), \quad (6. 2. 21)$$

αλλάζει τον όρο στην Ενεργή Θεωρία

$$\delta V_a = -2v_a \xi \cos\left(\frac{a}{f_a} - \delta\right). \quad (6. 2. 22)$$

Το δ είναι αρκετά μικρό ώστε να μην επηρεάζει τον μηχανισμό Peccei-Quinn. Το $\left|\frac{a}{f_a} - \delta\right|$ είναι μικρότερο μόνο για ένα κενό, το οποίο θεωρούμε το πραγματικό. Η ενέργεια αυτού του κενού έχει μειωθεί κατά ξv_a σε σχέση με τα άλλα “λάθος” κενά, και όσο το Σύμπαν διαστέλλεται και η πυκνότητα ενέργειας των τοιχωμάτων τομέων μεγαλώνει πιο αργά από την πυκνότητα ενέργειας του πραγματικού κενού, το πραγματικό κενό κυριαρχεί. Τα όρια των παραμέτρων δεν αφήνουν πολύ χώρο για την τρίτη επίλυση αλλά δεν έχει απορριφθεί τελείως.

Axion Χορδές και Διάσπαση. Στο σπάσιμο της καθολικής $U(1)_{PQ}$ δημιουργούνται axion χορδές, ανεξάρτητα αν $N \geq 1$. Οι χορδές αυτές διασπώνται και μπορούν να δημιουργήσουν axions μέσω μη θερμικών διαδικασιών. Αυτά πολύ γρήγορα αποκτούν μη σχετικιστικές ταχύτητες συμβάλλοντας στην πυκνότητα πληθυσμού των ψυχρών axion [32]. Όμως παρόλα αυτά η αύξηση αυτή είναι αρκετά μικρή και ο κύριος μηχανισμός παραγωγής είναι ο μηχανισμός επανευθυγράμμισης κενού.

7 Βαρυτικά Δεμένα Συστήματα

7.1 Αστέρας Μποζονίων

Ένα συμπύκνωμα Bose-Einstein είναι μία μακροσκοπική κατάσταση της ύλης, στην οποία τα μποζόνια απασχολούν σε μεγάλο αριθμό την πιο χαμηλή ενεργειακή κβαντική κατάσταση. Ένας αστέρας Μποζονίων είναι ένα σύστημα μποζονίων βαρυτικά δεμένο μεταξύ τους σε κατάσταση συμπυκνώματος Bose-Einstein που τα μποζόνια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και οι βαρυτικές τους αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από την Γενική Σχετικότητα, [22]. Οι πιο απλοί μποζονικοί αστέρες αποτελούνται από πανομοιότυπα μποζόνια. Ένας Αστέρας Μποζονίων περιγράφεται από τις εξισώσεις Einstein-Klein-Gordon και την δράση

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{R}{8\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^* \partial_\mu \Phi) - U(|\Phi|^2) \right], \quad (7.1.1)$$

όπου R είναι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci. Παίρνοντας την μεταβολή της Δράσης ως προς την μετρική $g^{\mu\nu}$ μας δίνει τις εξισώσεις Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (7.1.2)$$

όπου

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^* \partial_\mu \Phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\sigma\tau} (\partial_\sigma \Phi^* \partial_\tau \Phi + \partial_\tau \Phi^* \partial_\sigma \Phi) + U(|\Phi|^2) \right], \quad (7.1.3)$$

ο ταυιστής τάσης-ενέργειας. Και η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης για το πεδίο Φ είναι η μη γραμμική Klein-Gordon

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu - \frac{dU}{d|\Phi|^2} \right] \Phi = 0. \quad (7.1.4)$$

Η Δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς $U(1)$ του βαθμωτού μιγαδικού πεδίου Φ , $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\chi}$, όπου χ σταθερά. Το αντίστοιχο ρεύμα και φορτίο Noether είναι

$$j_\mu = -i(\Phi \partial_\mu \Phi^* - \Phi^* \partial_\mu \Phi), \quad (7.1.5)$$

$$Q = \int j^0 dx^3. \quad (7.1.6)$$

Ημικλασικά το φορτίο Q μπορεί να ερμηνευτεί σαν ένα μέτρο των αριθμών των συμπυκνωμένων κβαντισμένων πεδίων στον Μποζονικό Αστέρα. Η συνολική μάζα μπορεί απλά να προσεγγιστεί ως mQ . Ένας αστέρας χαρακτηρίζεται από έναν

σχηματισμό της μάζας που παραμένει τοπικός. Επομένως η λύση για το πεδίο Φ πρέπει να είναι τοπική και ανεξάρτητη του χρόνου ώστε να αφήνει το βαρυτικό πεδίο στατικό. Χρησιμοποιώντας μία αρμονική λύση για το πεδίο Φ μπορεί να επιτευχθεί αυτό

$$\varphi(r, t) = \varphi_0(r)e^{i\omega t}. \quad (7. 1. 7)$$

Οι Μποζονικοί Αστέρες αυτοί, έχουν σφαιρική συμμετρία και μετρική ανεξάρτητη του χρόνου

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + g(r)^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7. 1. 8)$$

Επίσης θέτουμε την συνθήκη στο άπειρο ώστε η μετρική αυτή να μοιάζει με την μετρική Schwarzschild

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{g(r)}. \quad (7. 1. 9)$$

Οι Μποζονικοί αστέρες για ένα απλό δυναμικό $V(|\varphi|^2) = m^2|\varphi|^2$ για $\varphi_0(r = 0) = 0$ έχουν λύση μαύρης τρύπας. Ενώ για $\varphi_0(r = 0) = \varphi_c$ υπάρχουν λύσεις με κάποια ενεργή ακτίνα και γνωστή μάζα με n διακεκριμένες ιδιοτιμές $\omega^{(n)}$. Όσο το n μεγαλώνει τόσο περισσότεροι είναι οι ρυθμοί του φ_0 και αποτελούν διεγερμένες καταστάσεις. Ενώ η λύση που δεν έχει κανέναν τέτοιο ρυθμό αποτελεί την βασική κατάσταση. Όσο μεγαλώνει το φ_c μεγαλώνει και η μάζα του Αστέρα και μικραίνει η ακτίνα R_{99} , που περιέχει το 99% των σωματιδίων. Αυτό υποδεικνύει ότι ο Αστέρας γίνεται πυκνότερος, μέχρι όμως μία κρίσιμη μάζα M_* . Όσο μεγαλώνει το φ_c η μάζα μικραίνει. Σε αυτήν την περίπτωση ο Αστέρας είτε θα καταρρεύσει σε μαύρη τρύπα είτε θα μειώσει την μάζα του κάτω από την M_* μέσω ακτινοβολίας βαθμωτού πεδίου. Η κρίσιμη μάζα έχει δοθεί αριθμητικά $M_* = 0.633/Gm$.

Όταν η μάζα M είναι πολύ μικρότερη από την κρίσιμη M_* τα μποζόνια δεν είναι σχετικιστικά. Σε αυτό το όριο οι εξισώσεις του πεδίου μπορούν να μετατραπούν με αποτέλεσμα η εξίσωση Einstein να γίνεται Poisson

$$\nabla^2 V = 4\pi T^{00} = 4\pi Gm^2 \varphi \varphi^*, \quad (7. 1. 10)$$

V το βαρυτικό δυναμικό. Και η εξίσωση Klein-Gordon καταλήγει στην Schrodinger για $\hbar = 1$

$$i\partial_t \Phi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \Phi + mV\Phi, \quad (7. 1. 11)$$

όπου $\varphi(x, t) = \Phi(x, t)e^{imt}$. Στο όριο αυτό τα μποζόνια δεν είναι σχετικιστικά και σχηματίζεται ένα βαρυτικά δεμένο συμπύκνωμα Bose-Einstein στο οποίο όλα τα μποζόνια βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση με κυματοσυνάρτηση $\varphi(x, t)$.

7.2 Μη Σχετικιστική Ενεργή Θεωρία Πεδίου

Για ορμές σε κλίμακες πολύ μικρότερες από αυτήν της μάζας m_a του axion, όπως έχουν τα axions που παράγονται από μη θερμικούς μηχανισμούς, το axion μπορεί να περιγραφεί από μία μη σχετικιστική ενεργή θεωρία πεδίου στην οποία

οι γωνιακές συχνότητες θα είναι κοντά στο m_a [4]. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ ενός ζευγαριού axion χαρακτηρίζονται από ένα $V_{eff}(\psi^*\psi)$ και περιγράφονται από την ενεργή Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}i(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) - \mathcal{H}_{eff}, \quad (7.2.1)$$

όπου η ενεργή Χαμιλτονιανή πυκνότητα έχει την μορφή

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{1}{2m_a}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V_{eff}(\psi^*\psi). \quad (7.2.2)$$

Το V_{eff} έχει ελάχιστο για $\psi^*\psi = 0$ όπου $V_{eff}(0) = 0$ και μπορούμε να το αναπτύξουμε

$$V_{eff} = m_a\psi^*\psi + m_a^2 f_a^2 \sum_{n=2} \frac{v_n}{(n!)^2} \left(\frac{\psi^*\psi}{2m_a f_a^2}\right)^n. \quad (7.2.3)$$

Η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μία καθολική $U(1)$, που σημαίνει ότι ο αριθμός των axions παραμένει σταθερός

$$N = \int \psi^*\psi dx^3. \quad (7.2.4)$$

Όμως αυτό δεν συμβαίνει στην σχετικιστική περίπτωση. Για μία τέτοια περιγραφή οι εξισώσεις Schrodinger-Poisson αλλάζουν

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + [V'_{eff}(\psi^*\psi) + mV]\psi, \quad (7.2.5)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G m^2 \psi\psi^*. \quad (7.2.6)$$

7.3 Αξιονικός Αστéρας

Έχει προταθεί πως η ψυχρή σκοτεινή ύλη είναι φτιαγμένη από axions. Αυτά ταλαντώνονται πάνω στο ελάχιστο του δυναμικού και δημιουργούν μία σύμφωνη κατάσταση μηδενικού ρυθμού ($N = 1$), δηλαδή σε κατάσταση συμπυκνώματος Bose-Einstein, [33]. Το συμπύκνωμα αυτό μπορεί να είναι αποτέλεσμα του μηχανισμού επανευθυγράμμισης.

Οι Αξιονικοί Αστéρες είναι μποζονικοί αστέρες που αποτελούνται από axions [5]. Οι κλασικές λύσεις για έναν Αξιονικό Αστéρα μπορούν να βρεθούν λύνοντας τις εξισώσεις Einstein-Klein-Gordon για ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο $a(r, t)$ και για δυναμικό το $V(\Phi) = m_a^2 f_a^2 (1 - \cos(\frac{\Phi}{f_a}))$. Μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: στους Αραιωμένους Αξιονικούς Αστéρες και στους Πυκνούς Αξιονικούς Αστéρες. Η ισορροπία των δυνάμεων στον αστέρα επιτυγχάνεται μέσω των ελκτικών δυνάμεων από την βαρύτητα και τις αυτό-αλληλεπιδράσεις των axions και τις απωστικές δυνάμεις λόγω της κινητικής πίεσης από τις συγχρούσεις των axions.

Αραιωμένοι Αξιονικοί Αστέρες. Οι λύσεις αυτές είναι προσεγγιστικά τοπικές και προσεγγιστικά περιοδικές καθώς είναι κάτω από όριο της κρίσιμης μάζας M_* . Οι λύσεις αναφέρονται ως Αραιωμένοι Αξιονικοί Αστέρες λόγω της πυκνότητας ενέργειας των αξιονίων που είναι πολύ μικρότερη από την κλίμακα της QCD, ακόμα και στο κέντρο του αστέρα. Τα αξιόνια δεν είναι σχετικιστικά οπότε μπορούν να περιγραφούν από την Μη Σχετικιστική Ενεργή Θεωρία Πεδίου, και η πυκνότητα αριθμών $\psi^*\psi$ είναι μικρή συγκριτικά με $m_a f_a^2$ οπότε το ενεργό δυναμικό προσεγγίζεται ως

$$V_{eff} = \frac{2\pi a}{m_a} (\psi^*\psi)^2. \quad (7.3.1)$$

Πυκνοί Αξιονικοί Αστέρες. Έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να υπάρξει και μία άλλη μορφή αξιονικού αστέρα [3]. Σε αυτήν την περίπτωση ο αστέρας έχει μικρότερη ακτίνα R_{99} και μικρότερη μάζα. Οι λύσεις αυτές προκύπτουν ακολουθώντας την ασταθή διακλάδωση από το κρίσιμο σημείο των αραιωμένων αξιονικών αστέρων αυξάνοντας την πυκνότητα των αξιονίων. Όταν η ακτίνα μειωθεί κατά περίπου 7 τάξεις μεγέθους προκύπτει ένα δεύτερο κρίσιμο σημείο με σταθερές λύσεις. Οι λύσεις αυτές αναφέρονται ως Πυκνοί Αξιονικοί Αστέρες.

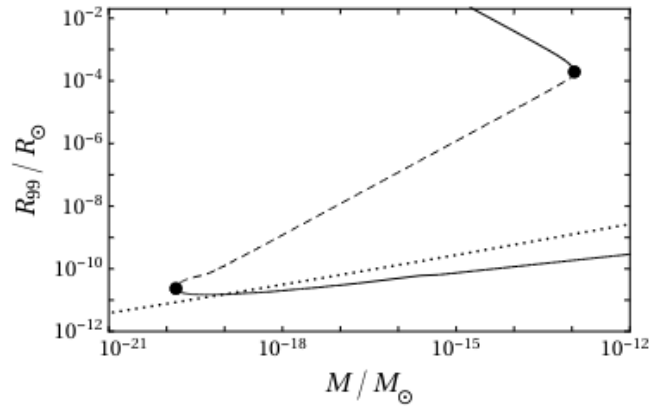


Figure 5: Γραφική παράσταση μάζας M και ακτίνας R_{99} για έναν αξιονικό αστέρα. Οι μαύρες κουκίδες είναι κρίσιμα σημεία που διαχωρίζουν τις σταθερές λύσεις, με την πάνω κουκίδα να αφορά τους αραιωμένους αξιονικούς αστέρες και την κάτω του πυκνούς. Οι διακεκομμένες γραμμές που ενώνουν τα κρίσιμα σημεία είναι η ασταθής λύση. $m_a = 10^{-4}eV$ και M_\odot μάζα του Ήλιου. Εικόνα από [5].

8 Ραδιοσήμα από Σύστημα Αστέρων Axion-Νετρονίου

Οι αξιονικοί αστέρες όπως ταξιδεύουν στο διάστημα μπορούν να περάσουν από μία περιοχή με ισχυρό μαγνητικό πεδίο. Το μέγεθος αυτού του μαγνητικού πεδίου ενισχύει σημαντικά την μετατροπή axion-φωτονίου οδηγώντας σε μεγάλη ηλεκτρομαγνητική ισχύ ακτινοβολίας.

Ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από έναν αστέρα νετρονίων κοντά στην περιοχή του. Εάν ένας axion αστέρας παγιδευτεί σε τροχιά ή περάσει κοντά από τον αστέρα νετρονίων, λόγω της περιστροφής του μαγνητικού πεδίου δημιουργείται ένα χαρακτηριστικό σήμα στην κλίμακα των μJy . Τα δεδομένα για τις γραφικές παραστάσεις έχουν προμηθευτεί από [19].

8.1 Axion Ηλεκτρομαγνητισμός

Θέλοντας να μελετήσουμε την Λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασεων του axion, επομένως χωρίς τους όρους $\mathcal{L} = \partial_\mu a \partial^\mu a - V(a)$, πέρα από τις βαρυτικές και κυρίως τις ηλεκτρομαγνητικές, οι όροι που μας ενδιαφέρουν είναι

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - c_\gamma \frac{\alpha}{4\pi f_a} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (8.1.1)$$

θα πάρουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς το πεδίο A_μ

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0. \quad (8.1.2)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$. Οπότε μας μένει να υπολογίσουμε μόνο τον πρώτο όρο στις εξισώσεις Euler-Lagrange τον οποίο θα τον αναλύσουμε σε δύο σκέλη.

1ο σκέλος:

$$-\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (8.1.3)$$

2ο σκέλος:

$$-c_\gamma \frac{\alpha}{4\pi f_a} \partial_\mu \left(\frac{\partial (a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right), \quad (8.1.4)$$

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho),$$

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\rho - \partial_\nu A_\mu \partial_\rho A_\sigma + \partial_\nu A_\mu \partial_\sigma A_\rho).$$

Επικεντρωνόμαστε μόνο στον 1ο όρο: $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma$.

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}, \quad (8.1.5)$$

- $\alpha \equiv \mu$,
 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta_\mu^\mu\delta_\nu^\beta\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\delta_\rho^\mu\delta_\sigma^\beta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\mu\sigma}\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma$.
 Αφού $\varepsilon^{\mu\nu\mu\sigma} = 0$.
- $\alpha \equiv \nu$,
 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta_\mu^\nu\delta_\nu^\beta\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\delta_\rho^\nu\delta_\sigma^\beta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\mu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\nu\sigma}\partial_\mu A_\nu = 0$.
- $\alpha \equiv \rho$,
 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\beta\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\delta_\rho^\rho\delta_\sigma^\beta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\mu\sigma}\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu$.
- $\alpha \equiv \sigma$,
 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta_\mu^\sigma\delta_\nu^\beta\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\delta_\rho^\sigma\delta_\sigma^\beta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\mu}\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\sigma}\partial_\mu A_\nu = 0$.

Άρα, από τον 1ο όρο:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu.$$

Αντίστοιχα για τους άλλους όρους βρίσκουμε

2ος όρος:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\sigma A_\rho - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu.$$

3ος όρος:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu A_\mu.$$

4ος όρος:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\sigma A_\rho + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu A_\mu.$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\sigma A_\rho - \partial_\rho A_\sigma) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \tilde{F}^{\rho\sigma} + \tilde{F}^{\mu\nu} + \tilde{F}^{\sigma\rho} + \tilde{F}^{\nu\mu}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\partial(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 4\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (8.1.6)$$

Και άρα

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial(aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \partial_\mu\left(a\frac{\partial(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = 4\partial_\mu(a\tilde{F}^{\mu\nu}) = 4\partial_\mu a\tilde{F}^{\mu\nu} + 4a\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (8.1.7)$$

Απο ιδιότητα Bianchi (3.1.23), $\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Δηλαδή τελικά οι εξίσωση κίνησης είναι

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -c_\gamma \frac{\alpha}{\pi f_a} \partial_\mu a \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (8.1.8)$$

Έτσι τα ρεύματα που παράγονται από axion είναι

$$j_a^0 = -c_\gamma \frac{\alpha}{\pi f_a} \nabla a \cdot \vec{B}, \quad (8.1.9)$$

και

$$\vec{j}_a = c_\gamma \frac{\alpha}{\pi f_a} [(\partial_t a)\vec{B} + (\nabla a) \times \vec{E}]. \quad (8.1.10)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu. \quad (8.1.11)$$

Στην βαθμίδα Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, δηλαδή $\partial_\mu\partial^\nu A^\mu = \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = 0$ και άρα η εξίσωση κίνησης γίνεται [2]:

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu = j_a^\nu,$$

$$\partial^2 A^\mu = j_a^\mu. \quad (8.1.12)$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο συναρτήσεων Green για καθυστερημένα δυναμικά έχουμε ότι

$$A_a^\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{j_a^\mu(y, t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (8.1.13)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο δεν έχει χρονική εξάρτηση και ότι το axion πεδίο έχει μία περιοδική ημιτονική εξάρτηση στο χρόνο $e^{im_a t}$, $a(\vec{y}, t) = a(\vec{y})e^{im_a t}$

$$A_a^\mu(\vec{x}, t) = \frac{e^{im_a t}}{4\pi} \int d^3y \frac{j_a^\mu(y) e^{-im_a |\vec{x} - \vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (8.1.14)$$

Θέτουμε μία απόσταση $r \equiv |\vec{x}| \gg |\vec{y}|$ με $|\vec{x} - \vec{y}| \simeq r - \vec{n}_x \cdot \vec{y}$ και $\vec{n}_x \equiv \vec{x}/r = \hat{r}$ τότε

$$A_a^\mu(\vec{x}, t) \simeq e^{im_a t} \frac{e^{-im_a r}}{4\pi r} \int d^3 y j_a^\mu(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}}. \quad (8.1.15)$$

Στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό και το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, η χωρική εξάρτηση του ρεύματος από το axion γίνεται

$$j_a^0(y) = -c_\gamma \frac{\alpha}{\pi f_a} \nabla a(\vec{y}) \cdot \vec{B} a(\vec{y}) \vec{B}, \quad (8.1.16)$$

και

$$\vec{j}_a = c_\gamma \frac{\alpha}{\pi f_a} m_a. \quad (8.1.17)$$

Άρα

$$A_a^0 = -\frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \frac{e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \int d^3 y \nabla a(\vec{y}) \cdot \vec{B} e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}}, \quad (8.1.18)$$

$$\vec{A}_a = i \frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \vec{B} \frac{m_a e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \int d^3 y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}}. \quad (8.1.19)$$

Η απόσταση του παρατηρητή r είναι ανεξάρτητη από την παραγωγή του ∇ . Και στην ουσία το δυναμικό $A^\mu = A^\mu(\vec{x}, \tau)$, όπου $\tau = t - r$ ο καθυστερημένος χρόνος[14]

$$\nabla \tau = \nabla(t - r) = -\hat{r}, \quad (8.1.20)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_a(\vec{y}, \tau). \quad (8.1.21)$$

Από κανόνα αλυσίδας

$$\vec{B} = \nabla \tau \times \partial_t \vec{A}_a = -\hat{r} \times \partial_t \vec{A}_a,$$

$$\vec{B} = \frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \hat{r} \times \vec{B} \frac{m_a^2 e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \int d^3 y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}}, \quad (8.1.22)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_a}{\partial t} - \nabla A_a^0 \quad (8.1.23)$$

Εάν το πεδίο axion είναι ομογενές στο χώρο τότε $a(\vec{y}) = a_0$ και $A_a^0 = 0$. Άρα,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_a}{\partial t}, \quad (8.1.24)$$

$$\vec{E} = -\frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \vec{B} \frac{m_a^2 e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \int d^3 y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}}. \quad (8.1.25)$$

Η ισχύς της ακτινοβολίας δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} r^2 \left| \vec{n}_x \cdot \vec{E} \times \vec{B} \right| = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{c\gamma\alpha}{\pi f_a} \right)^2 \left(\frac{m_a^2}{4\pi r} \right)^2 \left(\int d^3y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}} \right)^2 \hat{r} \cdot (\vec{B} \times (\vec{r} \times \vec{B})). \quad (8.1.26)$$

Από ιδιότητα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot (\vec{B} \times (\vec{r} \times \vec{B})) &= \hat{r} \cdot (\hat{r}(\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{B} \cdot \hat{r})) = \hat{r}^2 |\vec{B}|^2 - (\hat{r} \cdot \vec{B})(\hat{r} \cdot \vec{B}) \\ &= |\vec{B}|^2 - |\hat{r}|^2 |\vec{B}|^2 \cos^2(\theta_r) = |\vec{B}|^2 (1 - \cos^2(\theta_r)) = |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r). \end{aligned}$$

Αρά τελικά η ισχύς ακτινοβολίας είναι

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{c\gamma\alpha}{\pi f_a} \right)^2 \left(\frac{m_a^2}{4\pi r} \right)^2 \left(\int d^3y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}} \right)^2 |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r). \quad (8.1.27)$$

8.2 Σύστημα Διπλού Αστέρων

Σε ένα σύστημα διπλού αστέρων, οι δύο αστέρες έχουν καθορισμένες τροχιές γύρω από το κέντρο μάζας. Στο σύστημα που θα μελετηθεί θεωρούμε ότι ο Αξιοονικός αστέρας έχει βαρυτική αλληλεπίδραση με έναν αστέρα νετρονίων. Μπορεί να έχει τρία είδη τροχιών: κυκλική, ελλειπτική, υπερβολική. Τα πρώτα δύο μελετήθηκαν στο [19]. Σε αυτήν την διπλωματική εργασία δίνεται βάση στην υπερβολική τροχιά.

Γεωμετρία του Συστήματος. Αρχικά θεωρούμε ότι $M_{NS} \gg M_{AS}$ οπότε στο σύστημά μας ο αστέρας νετρονίων μπορεί να θεωρηθεί ακίνητος. Επίσης ακίνητος θεωρείται και ο παρατηρητής (η Γη) μιας και είναι σε μία απόσταση πολύ μακρινή. Το σύστημα συντεταγμένων που μας ενδιαφέρει έχει κέντρο τον αστέρα νετρονίων και περιγράφει την κίνηση του αξιονικού αστέρα. Ο αξιονικός αστέρας θεωρούμε ότι εκτελεί κίνηση πάνω στο επίπεδο (x, y) με συντεταγμένες $(\vec{r}_s \cos \varphi_a, \vec{r}_s \sin \varphi_a, 0)$. Ο Παρατηρητής για αυτό το σύστημα για αρχή έχει μία τυχαία κατεύθυνση $\hat{n}_{obs} = \hat{r} = (\sin \theta_e \cos \varphi_e, \sin \theta_e \sin \varphi_e, \cos \theta_e)$. Ύστερα θα θεωρήσουμε ότι $\varphi = 0$, δηλαδή ότι η Γη βρίσκεται πάνω στο (x, z) επίπεδο.

Η Γη βρίσκεται σε απόσταση \vec{r} από τον αστέρα νετρονίων και \vec{R} από τον αξιονικό αστέρα. Επομένως για την απόσταση μεταξύ Γης και αξιονικού αστέρα ισχύει: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_s \Rightarrow \hat{R} = \frac{\vec{r}}{|\vec{R}|} - \frac{\vec{r}_s}{|\vec{R}|}$, και αφού $r_s \ll R$ και $r \approx R$ καταλήγουμε

$$\hat{R} = \hat{r}. \quad (8.2.1)$$

Το Μαγνητικό Πεδίο. Θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο του αστέρα νετρονίων δημιουργείται από ένα περιστρεφόμενο μαγνητικό δίπολο \vec{m}_{NS} που

αποκλίνει από τον άξονα περιστροφής του αστέρα κατά μία γωνία γ και έχει συχνότητα περιστροφής ω

$$\vec{m}_{NS} = m(\sin \gamma \cos \omega t, \sin \gamma \sin \omega t, \cos \gamma). \quad (8. 2. 2)$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [\vec{m}_{NS} - 3(\vec{m}_{NS} \cdot \hat{r})\hat{r}], \quad (8. 2. 3)$$

$r = (\cos \xi, \sin \xi, 0)$ η θέση του αξιονικού αστέρα, όπου $\xi = \xi(t)$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (b_x, b_y, b_z), \quad (8. 2. 4)$$

$$b_x = \sin \gamma \cos \omega t - 3 \sin \gamma \cos \omega t \cos^2 \xi - 3 \sin \gamma \sin \omega t \sin \xi \cos \xi,$$

$$b_x = \sin \gamma \cos \omega t - 3 \sin \gamma \cos \xi \cos(\omega t - \xi), \quad (8. 2. 5)$$

$$b_y = \sin \gamma \sin \omega t - 3 \sin \gamma \sin \omega t \sin^2 \xi - 3 \sin \gamma \cos \omega t \cos \xi \sin \xi,$$

$$b_y = \sin \gamma \sin \omega t - 3 \sin \gamma \sin \xi \cos(\omega t - \xi), \quad (8. 2. 6)$$

$$b_z = \cos \gamma. \quad (8. 2. 7)$$

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι

$$|\vec{B}|^2 = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\right)^2 |\vec{b}|^2, \quad (8. 2. 8)$$

$$|\vec{b}|^2 = 1 + 3 \sin^2 \gamma \cos^2(\omega t - \xi). \quad (8. 2. 9)$$

Όταν η $\Gamma\eta$ είναι σε τυχαία θέση

$$\begin{aligned} \hat{n}_{obv} \cdot \vec{b} &= \sin \gamma \cos \omega t \sin \theta \cos \varphi - 3 \sin \gamma \cos(\omega t - \xi) \cos \xi \sin \theta \cos \varphi \\ &+ \sin \gamma \cos \omega t \sin \theta \sin \varphi - 3 \sin \gamma \cos(\omega t - \xi) \sin \xi \sin \theta \sin \varphi + \cos \gamma \cos \theta \end{aligned}$$

Άρα

$$\hat{n}_{obv} \cdot \vec{b} = \sin \gamma \sin \theta [\cos(\omega t - \varphi) - 3 \cos(\omega t - \xi) \cos(\xi - \varphi)] + \cos \gamma \cos \theta. \quad (8. 2. 10)$$

Όμως,

$$\hat{n}_{obv} \cdot \vec{b} = |\hat{n}_{obv}| |\vec{b}| \cos \theta_r, \quad (8.2.11)$$

$$\cos \theta_r = \frac{\hat{n}_{obv} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad (8.2.12)$$

$$\sin^2 \theta_r = 1 - \cos^2 \theta_r. \quad (8.2.13)$$

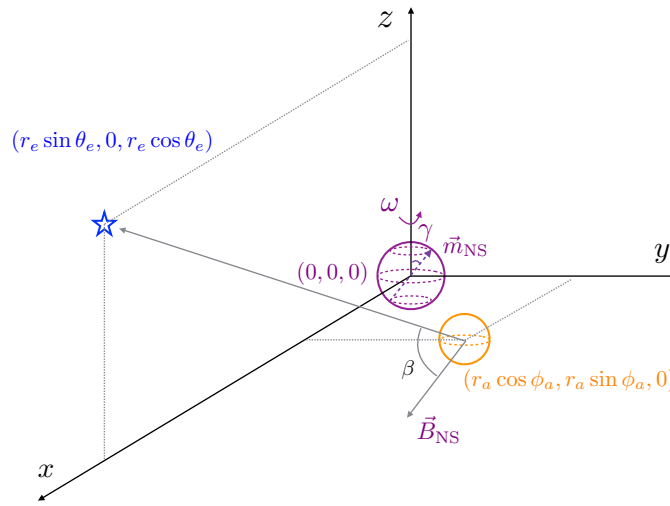


Figure 6: Το σύστημα συντεταγμένων που περιγράφει το σύστημα διπλού αστέρα. Ο μοβ κύκλος είναι ο αστέρας νετρονίων, ο πορτοκαλί ο αξιωνικός αστέρας και το μπλε αστέρι είναι η Γη. Εικόνα από[19].

Πρόβλημα Δύο Σωμάτων. Η βαρυτική αλληλεπίδραση των δύο αστέρων μπορεί να περιγραφεί κλασικά από την παρακάτω Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M_{AS} \dot{r}_a^2 + \frac{1}{2} M_{AS} r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \frac{GM_{NS} M_{AS}}{r_a}. \quad (8.2.14)$$

Η Λαγκρανζιανή αυτή περιγράφει την κίνηση του αξιωνικού αστέρα γύρω από τον αστέρα νετρονίων. Παίρνοντας τις εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = 0, \quad (8.2.15)$$

βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dt} (M_{AS} r_a^2 \dot{\varphi}_a) = 0, \quad (8.2.16)$$

δηλαδή η στροφορμή διατηρείται

$$M_{AS}r_a^2\dot{\varphi}_a = J, \quad (8.2.17)$$

$$\dot{\varphi}_a = \frac{J}{M_{AS}r_a^2}. \quad (8.2.18)$$

Σε αυτό το σύστημα η Χαμιλτονιανή διατηρείται αφού δεν εμφανίζεται ο χρόνος t ως μεταβλητή στη Λαγκρανζιανή, $[\mathcal{H}, t] = 0$, διατηρείται η ενέργεια

$$\frac{1}{2}M_{AS}\dot{r}_a^2 + \frac{1}{2}M_{AS}r_a^2\dot{\varphi}_a^2 - \frac{GM_{NS}M_{AS}}{r_a} = E. \quad (8.2.19)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (8.2.18), (8.2.19):

$$\frac{1}{2}M_{AS}\dot{r}_a^2 + \frac{J^2}{2M_{AS}r_a^2} + \frac{GM_{NS}M_{AS}}{r_a} = E. \quad (8.2.20)$$

Η θέση r_a ως συνάρτηση της γωνίας $\varphi_a = \varphi_a(t)$ δίνεται [13]

$$r(\varphi_a) = -\frac{(1-e^2)r_0}{1+e\cos\varphi_a}, \quad (8.2.21)$$

$$r_0 = \frac{J^2}{GM_{NS}(1-e^2)}, \quad (8.2.22)$$

όπου r_0 θεωρούμε το μέτρο της αρχικής απόστασης του αξιονικού αστέρα από τον αστέρα νετρονίων. Η φύση της τροχιάς εξαρτάται από το μέτρο της e :

- $e > 1$ υπερβολή.
- $e = 1$ παραβολή.
- $e < 1$ έλλειψη.
- $e = 0$ κύκλος.

Λύνοντας και ολοκληρώνοντας την εξίσωση (8.2.20) βρίσκουμε

$$t = \sqrt{\frac{M_{AS}}{2}} \int \frac{dr_a}{\sqrt{\frac{GM_{NS}M_{AS}}{r_a} - \frac{J^2}{2M_{AS}r_a^2} + E}}. \quad (8.2.23)$$

Για την περίπτωση των υπερβολικών τροχιών η παραπάνω εξίσωση ολοκληρώνεται πιο εύκολα μέσω μίας βοηθητικής μεταβλητής $H = H(t)$, που ονομάζεται έκκεντρη ανωμαλία

$$r_a(t) = -r_0(1 - e \cosh(H)). \quad (8.2.24)$$

Η εξίσωση (8. 2. 23) γίνεται

$$t = \sqrt{\frac{r_0^3}{GM_{NS}}} (e \sinh(H) - H). \quad (8. 2. 25)$$

Η έκκεντρη ανωμαλία συνδέεται με την μέση ανωμαλία $M = M(t)$

$$M = e \sinh(H) - H, \quad (8. 2. 26)$$

όπου $M = \sqrt{\frac{GM_{NS}}{r_0^3}} t$. Υπολογίζουμε την έκκεντρη ανωμαλία H αριθμητικά και μετά βρίσκουμε την πραγματική ανωμαλία φ_a που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$\tan \frac{\varphi_a}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{H}{2}. \quad (8. 2. 27)$$

Και αφού έχουμε το φ_a μπορούμε να υπολογίσουμε την τροχιά r_a .

8.3 Σήμα από Αραιωμένο Αξιονικό Αστέρρα

Το μόνο που χρειάζεται για να υπολογίσουμε το σήμα από έναν Αραιωμένο Αξιονικό Αστέρρα (AS1) είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int d^3y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}}$. Σε έναν αραιωμένο αστέρρα, η ακτίνα του θα είναι στην τάξη των km ενώ το $m_a \sim \mathcal{O}(10^{-4} - 10^{-6})eV$ [19]. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε

$$m_a \hat{n}_x \cdot \vec{y} = m_a |\hat{n}_x| |\vec{y}| \cos \delta \leq m_a R_{AS1} \simeq 0, \quad (8. 3. 1)$$

αφού το y είναι μεταβλητή πάνω στην ακτίνα του axion αστέρρα και

$$e^{im_a \hat{n}_x \cdot \vec{y}} \simeq 1. \quad (8. 3. 2)$$

Η προσέγγιση ότι $a(y) = a$ είναι καλή στην περίπτωση του Αραιωμένου Αστέρρα. Σε αυτήν την περίπτωση όλος ο όγκος V του αστέρρα μπορεί να διαιρεθεί σε μικρά κουτιά που το πεδίο axion έχει μία συγκεκριμένη τιμή a_i για κάθε κουτί αντίστοιχα. Επομένως, i κουτί:

$$I_i = \int d^3y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}} = \frac{a_i}{m_a^3}. \quad (8. 3. 3)$$

Το axion δεν έχει συσχέτιση για αποστάσεις μεγαλύτερες από το μήκος κύματος de Broglie $d_a = \frac{1}{m_a v^3}$, όπου v η ταχύτητα του σαν ποσοστό της ταχύτητας του φωτός. Επομένως σε έναν όγκο V υπάρχουν $\frac{V}{d_a^3}$ axions. Αθροίζοντας όλα τα κουτιά και θεωρώντας τον μέσο όρο των τιμών $\bar{a}_i = a$ βρίσκουμε ότι

$$I = \sum_i I_i \frac{V}{d_a^3} = \frac{a}{m_a^3} \frac{V}{d_a^3}, \quad (8. 3. 4)$$

όπου $a = \bar{a}_i$ η μέση τιμή των τιμών του πεδίου στον όγκο V . Άρα η ισχύς ακτινοβολίας γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{c\gamma\alpha}{\pi f_a} \right)^2 \left(\frac{m_a^2}{4\pi r} \right)^2 \left(\frac{a}{m_a^3} \right)^2 \frac{V}{d_a^3} |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c\gamma\alpha}{\pi f_a} \right)^2 \frac{m_a^4}{(4\pi)^2} \left(\frac{a}{m_a^3} \right)^2 V m_a^3 v^3 |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c\gamma\alpha}{\pi f_a} \right)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} m_a a^2 V v^3 |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r). \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Η πυκνότητα ενέργειας του axion σε ένα κουτί μήκους d_a είναι $\rho_{a_i} = \frac{1}{2} m_a^2 a_i^2$. Άρα ανά μέσο όρο $\rho_a = \frac{1}{2} m_a^2 a^2$. Και η μάζα του αραιωμένου axion αστέρα είναι $M_{AS1} = \rho_a V$. Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \left(\frac{c\gamma\alpha}{\pi f_a} \right)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\rho_a}{m_a} V v^3 |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r), \\ \frac{dP}{d\Omega} &= \left(\frac{c\gamma\alpha}{\pi f_a} \right)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M_{AS1}}{m_a} v^3 |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r), \end{aligned}$$

και καταλήγουμε [19]

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{c\gamma\alpha}{f_a} \right)^2 \frac{M_{AS1}}{16\pi^4 m_a} v^3 |\vec{B}|^2 \sin^2(\theta_r). \quad (8.3.6)$$

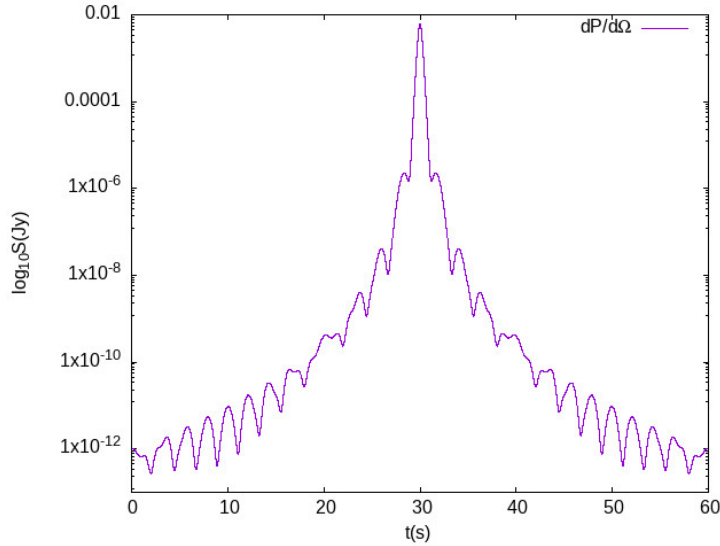


Figure 7: Το παραγόμενο σήμα από την υπερβολική τροχιά του AS1 γύρω από έναν NS για $e = 1.5$.

8.4 Σήμα από Πυκνό Αξιονικό Αστέρρα

Για έναν Πυκνό Αξιονικό Αστέρρα (AS2), η ακτίνα του θα είναι μικρότερη, στην τάξη των m . Ο αστέρας είναι πιο συμπαγής και επειδή είναι σε κατάσταση συμπυκνώματος Bose-Einstein, μπορεί να προσεγγιστεί ότι η χωρική μακροσκοπική κυματοσυνάρτηση πυκνότητας του πεδίου $a(\vec{r})$ είναι ίδια με αυτήν της 1S κατάστασης του ατόμου το Υδρογόνου

$$a(\vec{r}) = \frac{\sqrt{M_{AS2}}}{m_a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R_{AS2}^{3/2}} e^{-r/R_{AS2}}. \quad (8.4.1)$$

Για την πυκνότητα ενέργειας ισχύει ότι

$$\int \rho_a dV = M_{AS2}, \quad (8.4.2)$$

$$\int \frac{1}{2} m_a^2 a(\vec{r})^2 d^3 r = M_{AS2}. \quad (8.4.3)$$

Έχουμε ότι

$$\vec{y} = y(\sin \varphi_B \cos \gamma_B, \sin \varphi_B \sin \gamma_B, \cos \varphi_B), \quad (8.4.4)$$

οι γωνίες φ_B, γ_B είναι οι γωνίες που σχηματίζει το μαγνητικό πεδίο \vec{B} πάνω στην θέση του αξιονικού αστέρρα,

$$\hat{n}_x = \hat{r} = (\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad (8.4.5)$$

η θέση της Γης πάνω στο επίπεδο (x, z) . Άρα,

$$\hat{n}_x \cdot \vec{y} \equiv \vec{y} \cdot \hat{r} = y(\sin \varphi_B \cos \gamma_B \sin \theta + \cos \varphi_B \cos \theta). \quad (8.4.6)$$

Επομένως,

$$A_a^0 = -\frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \frac{e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \int d^3 y \nabla a(\vec{y}) \cdot \vec{B}. \quad (8.4.7)$$

Το A_a^0 δεν είναι μηδέν, όμως όπως θα φανεί αργότερα δεν συνεισφέρει καθόλου στην ισχύ ακτινοβολίας. Για το διανυσματικό δυναμικό ισχύει η (8.1.19)

$$\vec{A}_a = i \frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \vec{B} \frac{m_a e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \int d^3 y a(y) e^{im_a \vec{n}_x \cdot \vec{y}},$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_a &= \frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \vec{B} \frac{m_a e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \int \frac{\sqrt{M_{AS2}}}{m_a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R_{AS2}^{3/2}} e^{-y/R_{AS2}} \\ &\cdot e^{im_a y(\sin \varphi_B \cos \gamma_B \sin \theta + \cos \varphi_B \cos \theta)} y^2 \sin \varphi_B dy d\varphi_B d\gamma_B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_a &= \frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \vec{B} \frac{m_a e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \frac{\sqrt{M_{AS2}}}{m_a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R_{AS2}^{3/2}} \\ &\cdot \int e^{-y/R_{AS2}} y^2 \sin \varphi_B dy d\varphi_B \int_{-\pi}^{\pi} e^{im_a y (\sin \varphi_B \cos \gamma_B \sin \theta + \cos \varphi_B \cos \theta)} d\gamma_B. \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Και για τις συναρτήσεις Bessel ισχύει ότι

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8.4.9)$$

$$J_0(-z) = J_0(z), \quad \text{Άρα } J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \theta}.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \vec{A}_a &= \frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \vec{B} \frac{e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \frac{\sqrt{M_{AS2}}}{m_a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R_{AS2}^{3/2}} \\ &\cdot \int e^{-y/R_{AS2}} y^2 \sin \varphi_B e^{im_a y \cos \varphi_B \cos \theta} 2\pi J_0(m_a y \sin \varphi_B \sin \theta) dy d\varphi_B. \end{aligned} \quad (8.4.10)$$

Αυτό το ολοκλήρωμα καταλήγει στο

$$\begin{aligned} \vec{A}_a &= \frac{c_\gamma \alpha}{\pi f_a} \vec{B} \frac{m_a e^{im_a(t-r)}}{4\pi r} \frac{\sqrt{M_{AS2}}}{m_a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R_{AS2}^{3/2}} 2\pi \frac{4R_{AS2}^3}{(1 + m_a^2 R_{AS2}^2)^2}, \\ \Rightarrow \vec{A}_a &= 2 \frac{c_\gamma \alpha}{f_a} \vec{B} \frac{e^{im_a(t-r)}}{\pi r} \sqrt{M_{AS2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R_{AS2}^{3/2}}{(1 + m_a^2 R_{AS2}^2)^2}, \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}_a}{\partial t} - \nabla_\tau A_a^0 = -im_a \vec{A}_a + \partial_t A_a^0 \hat{r}, \\ \Rightarrow \vec{E} &= -im_a (\vec{A}_a - A_a^0 \hat{r}), \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla_\tau \times \partial_t \vec{A}_a = -\hat{r} \times \partial_t \vec{A}_a, \\ \Rightarrow \vec{B} &= -im_a \hat{r} \times \vec{A}_a. \end{aligned} \quad (8.4.13)$$

Επομένως η ισχύς ακτινοβολίας γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{2}r^2 \left| \hat{r} \cdot \vec{E} \times \vec{B} \right| = \frac{1}{2}r^2 \left| \hat{r} \cdot (-im_a(\vec{A}_a - A_a^0 \hat{r}) \times (-im_a \hat{r} \times \vec{A}_a)) \right|, \\ \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{2}r^2 \left| (-im_a)^2 \hat{r} \cdot ((\vec{A}_a - A_a^0 \hat{r}) \times (\hat{r} \times \vec{A}_a)) \right|. \quad (8.4.14)\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο μπορεί να φανεί γιατί δεν συνεισφέρει στην ακτινοβολία το A_a^0

$$\begin{aligned}\hat{r} \cdot ((\vec{A}_a - A_a^0 \hat{r}) \times (\hat{r} \times \vec{A}_a)) &= \hat{r} \cdot (\vec{A}_a \times \hat{r} \times \vec{A}_a - A_a^0 \hat{r} \times \hat{r} \times \vec{A}_a) \\ &= \hat{r} [(\vec{A}_a \cdot \vec{A}_a) \hat{r} - (\vec{A}_a \cdot \hat{r}) \vec{A}_a - A_a^0 (\hat{r} \cdot \vec{A}_a) \hat{r} + A_a^0 (\hat{r} \cdot \hat{r}) \vec{A}_a] \\ &= \left| \vec{A}_a \right|^2 |\hat{r}|^2 - (\vec{A}_a \cdot \hat{r})(\vec{A}_a \cdot \hat{r}) - A_a^0 (\hat{r} \cdot \vec{A}_a) |\hat{r}|^2 + A_a^0 |\hat{r}|^2 \hat{r} \cdot \vec{A}_a \\ &= \left| \vec{A}_a \right|^2 - \left| \vec{A}_a \right|^2 |\hat{r}|^2 \cos^2 \theta_r - A_a^0 \hat{r} \cdot \vec{A}_a + A_a^0 \hat{r} \cdot \vec{A}_a \\ &= \left| \vec{A}_a \right|^2 (1 - \cos^2 \theta_r) = \left| \vec{A}_a \right|^2 \sin^2 \theta_r. \quad (8.4.15)\end{aligned}$$

Δηλαδή χρησιμοποιώντας την (8.4.15),

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{2}r^2 \left| \hat{r} \cdot \vec{E} \times \vec{B} \right| \\ &= \frac{1}{2}r^2 m_a^2 \left| \vec{A}_a \right|^2 \sin^2 \theta_r = \frac{1}{2}r^2 m_a^2 4 \left(\frac{c\gamma\alpha}{f_a} \right)^2 \vec{B}^2 \frac{1}{\pi^2 r^2} M_{AS2} \frac{2}{\pi} \frac{R_{AS2}^3}{(1 + m_a^2 R_{AS2}^2)^4} \sin^2 \theta_r.\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{c\gamma\alpha}{f_a} \right)^2 4 \frac{M_{AS2} m_a^2 R_{AS2}^3}{\pi^3 (1 + m_a^2 R_{AS2}^2)^4} \vec{B}^2 \sin^2 \theta_r. \quad (8.4.16)$$

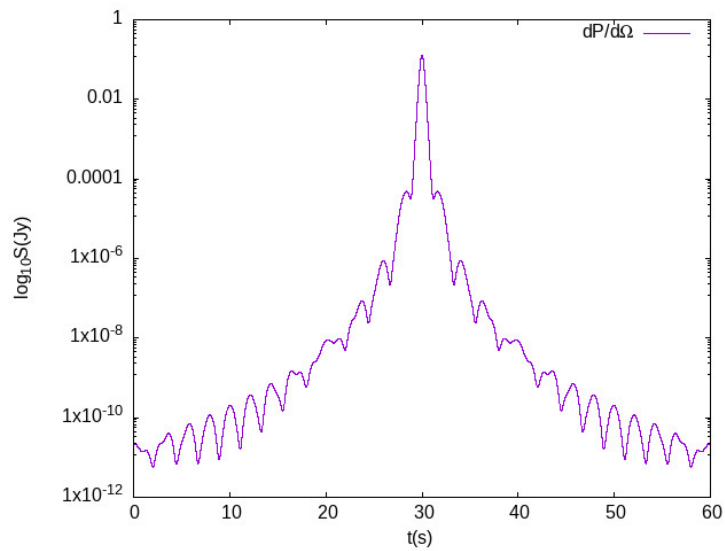


Figure 8: Το παραγόμενο σήμα από την υπερβολική τροχιά του AS2 γύρω από έναν NS για $e = 1.5$.

Η κορυφή επιτυγχάνεται και στις δύο περιπτώσεις όταν ο αξιονικός αστέρας είναι στην μικρότερη απόσταση από τον αστέρα νετρονίων. Οι πολλές τάξεις μεγέθους του σήματος έχουν να κάνουν με το γεγονός ότι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο τετράγωνο είναι εξαρτημένο από την απόσταση ως r^{-6} .

9 Συμπεράσματα

Το axion εφόσον υπάρχει προσφέρει καλή εξήγηση για την λύση του προβλήματος CP και είναι υποψήφιο σωματίδιο για την σκοτεινή ύλη. Η Κβαντική Χρωμοδυναμική φαίνεται να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την CP συμμετρία. Η ομάδα $SU(3)_C$ της QCD εξαναγκάζει το κενό της να είναι μία υπέρθεση τοπολογικά διαφορετικών κενών. Κάθε τέτοιο κενό μπορεί να μετατραπεί στο άλλο μέσω κλασικών λύσεων των εξισώσεων κίνησης, τα instantons. Τίποτα δεν εξαναγκάζει το κενό να είναι αυτό που αφήνει την CP συμμετρία αναλλοίωτη, επομένως ο όρος παραβίασης της αναμένεται να είναι πρώτης τάξης.

Η Peccei-Quinn λύση του προβλήματος προσθέτει μία έξτρα προσεγγιστική χειραλική συμμετρία $U(1)_{PQ}$, η οποία δυναμικά καθορίζει το κενό της QCD να είναι ταυτόσημο με εκείνο που δεν παραβιάζει την CP. Όταν αυτή η χειραλική συμμετρία σπάει, ένα νέο ψευδό-μποζόνιο Goldstone δημιουργείται, το axion. Οι αλληλεπιδράσεις του με το καθιερωμένο πρότυπο είναι αρκετά ασθενείς, λόγω της μεγάλης τιμής της σταθεράς διάσπασης του f_a , καθώς και εξαρτούνται από το μοντέλο περιγραφής, όπως και η μάζα του είναι πολύ μικρή. Μία σημαντική σύζευξη του axion είναι αυτή με το ηλεκτρομαγνητισμό, η οποία υπάρχει σε όλα τα μοντέλα και οδηγεί στην μετατροπή axion-φωτονίου.

Κοσμολογικά ο πληθυσμός των axion στο σύμπαν δημιουργείται μέσω θερμικών και κυρίως ψυχρών διαδικασιών στο πρώιμο σύμπαν. Ο κυριότερος μηχανισμός είναι ο μηχανισμός επανευθυγράμμισης κενού. Τα axions που δημιουργήθηκαν από αυτόν μπορούν να αποδοθούν ως υποψήφια για σκοτεινή ύλη.

Τα axions ως μποζόνια μπορούν να βρεθούν σε καταστάσεις συμπυκνώματος Bose-Einstein. Υπό συνθήκες, αυτά τα συμπυκνώματα μπορούν να δημιουργήσουν διαμορφώσεις αστερών. Οι αστέρες αυτοί καθώς ταξιδεύουν στο διάστημα, μπορούν να αλληλεπιδράσουν με ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο της τάξης $10^{12}G$, όπως σε έναν αστέρα νετρονίων. Ένα είδος αλληλεπίδρασης είναι η περίπτωση υπερβολικής τροχιάς του αξιονικού αστέρα γύρω από τον αστέρα νετρονίων. Αντιμετωπίζοντας τον αστέρα νετρονίων σαν ένα μαγνητικό δίπολο έχει ως αποτέλεσμα την εξάρτηση της ισχύος ακτινοβολίας από το r^{-6} της απόστασης. Έτσι όσο ο αξιονικός αστέρας πλησιάζει τον αστέρα νετρονίων η μετατροπή axion-φωτονίου πολλαπλασιάζεται και παράγει ένα χαρακτηριστικό σήμα κάνοντας εφικτή την παρατήρηση του σήματος στην Γη, ενισχύοντας την υπόθεση ύπαρξης του axion.

Βιβλιογραφία

- [1] Christopher Abel, Samer Afach, Nicholas J Ayres, Colin A Baker, Gilles Ban, Georg Bison, Kazimierz Bodek, Vira Bondar, Martin Burghoff, Estelle Chanel, et al. Measurement of the permanent electric dipole moment of the neutron. *Physical Review Letters*, 124(8):081803, 2020.
- [2] Yang Bai and Yuta Hamada. Detecting axion stars with radio telescopes. *Physics Letters B*, 781:187–194, 2018.
- [3] Eric Braaten, Abhishek Mohapatra, and Hong Zhang. Dense axion stars. *Physical review letters*, 117(12):121801, 2016.
- [4] Eric Braaten, Abhishek Mohapatra, and Hong Zhang. Nonrelativistic effective field theory for axions. *Physical Review D*, 94(7):076004, 2016.
- [5] Eric Braaten and Hong Zhang. Colloquium: The physics of axion stars. *Reviews of Modern Physics*, 91(4):041002, 2019.
- [6] Curtis G Callan Jr, Roger Dashen, and David J Gross. Toward a theory of the strong interactions. *Physical Review D*, 17(10):2717, 1978.
- [7] Sidney Coleman. *Aspects of symmetry: selected Erice lectures*. Cambridge University Press, 1988.
- [8] Wilco J den Dunnen. *Vacuum structure of the strong interaction with a Peccei-Quinn symmetry*. PhD thesis, PhD thesis, 2008.
- [9] Luca Di Luzio, Maurizio Giannotti, Enrico Nardi, and Luca Visinelli. The landscape of qcd axion models. *Physics Reports*, 870:1–117, 2020.
- [10] Eleonora Di Valentino, Elena Giusarma, Massimiliano Lattanzi, Olga Mena, Alessandro Melchiorri, and Joseph Silk. Cosmological axion and neutrino mass constraints from planck 2015 temperature and polarization data. *Physics Letters B*, 752:182–185, 2016.
- [11] Michael Dine, Willy Fischler, and Mark Srednicki. A simple solution to the strong cp problem with a harmless axion. *Physics Letters B*, 104(3):199–202, 1981.
- [12] John Dougherty. Large gauge transformations and the strong cp problem. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 69:50–66, 2020.
- [13] Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Pearson Education India, 2011.
- [14] David J Griffiths. Introduction to electrodynamics fourth edition. 2021.
- [15] Thomas WB Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(8):1387, 1976.

-
- [16] Jihn E. Kim. Weak-interaction singlet and strong CP invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 43:103–107, Jul 1979.
- [17] Jihn E Kim and Gianpaolo Carosi. Axions and the strong c p problem. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):557, 2010.
- [18] Edward W Kolb and Michael S Turner. The early universe addison. *Wesley Abb*, 4, 1990.
- [19] Chris Kouvaris, Tao Liu, and Kun-Feng Lyu. Radio signals from axion star-neutron star binaries. *Physical Review D*, 109(2):023008, 2024.
- [20] D Larson, J Dunkley, G Hinshaw, Eiichiro Komatsu, MR Nolta, CL Bennett, B Gold, M Halpern, RS Hill, N Jarosik, et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap*) observations: power spectra and wmap-derived parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):16, 2011.
- [21] George Lazarides. Inflationary cosmology. In *Cosmological Crossroads: An Advanced Course in Mathematical, Physical and String Cosmology*, pages 351–391. Springer, 2002.
- [22] Steven L Liebling and Carlos Palenzuela. Dynamical boson stars. *Living Reviews in Relativity*, 26(1):1, 2023.
- [23] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [24] Roberto D Peccei. The strong cp problem and axions. In *Axions: Theory, Cosmology, and Experimental Searches*, pages 3–17. Springer, 2008.
- [25] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [26] Javier Redondo. 3 hours with axions. 2016.
- [27] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [28] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [29] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge university press, 2014.
- [30] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov. Can confinement ensure natural cp invariance of strong interactions? *Nuclear Physics B*, 166(3):493–506, 1980.
- [31] Mikhail Shifman. *Advanced topics in quantum field theory: A lecture course*. Cambridge University Press, 2022.
- [32] Pierre Sikivie. Axion cosmology. In *Axions: Theory, Cosmology, and Experimental Searches*, pages 19–50. Springer, 2008.

-
- [33] Pierre Sikivie and Q Yang. Bose-einstein condensation of dark matter axions. *Physical Review Letters*, 103(11):111301, 2009.
- [34] G. 't Hooft. How instantons solve the $u(1)$ problem. *Physics Reports*, 142(6):357–387, 1986.
- [35] Cumrun Vafa and Edward Witten. Parity conservation in quantum chromodynamics. *Physical Review Letters*, 53(6):535, 1984.
- [36] Steven Weinberg. The $u(1)$ problem. *Physical Review D*, 11(12):3583, 1975.
- [37] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1995.
- [38] A. R. Zhitnitsky. On Possible Suppression of the Axion Hadron Interactions. (In Russian). *Sov. J. Nucl. Phys.*, 31:260, 1980.