



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μελέτη της Πολύπλοξης Δυναμικής Συγχρονισμού Περιοδικώς
Διαταραγμένων Ηλεκτρονικών Ταλαντωτών μέσω Αναγωγής σε
Γενικευμένες Μεταβλητές Δράσης-Γωνίας

Study of the Complex Synchronization Dynamics of Periodically
Forced Electronic Oscillators via Reduction to Generalized
Action-Angle Variables

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Κωνσταντίνου Μεταξά

Επιβλέπων: Ιωάννης Κομίνης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2024



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING
DIVISION OF COMMUNICATIONS, ELECTRONICS AND INFORMATION SYSTEMS

**Study of the Complex Synchronization Dynamics of Periodically
Forced Electronic Oscillators via Reduction to Generalized
Action-Angle Variables**

DIPLOMA THESIS

by

Konstantinos Metaxas

Supervisor: Yannis Kominis
Associate Professor N.T.U.A.

Athens, July 2024



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολο-
γιστών
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληρο-
φορικής

Μελέτη της Πολύπλοκης Δυναμικής Συγχρονισμού Περιοδικώς
Διαταραγμένων Ηλεκτρονικών Ταλαντωτών μέσω Αναγωγής σε
Γενικευμένες Μεταβλητές Δράσης-Γωνίας

Study of the Complex Synchronization Dynamics of Periodically
Forced Electronic Oscillators via Reduction to Generalized
Action-Angle Variables

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Κωνσταντίνου Μεταξά

Επιβλέπων: Ιωάννης Κομίνης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 5η Ιουλίου, 2024.

.....
Ιωάννης Κομίνης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Πάυλος-Πέτρος Σωτηριάδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2024

.....
Κωνσταντίνος Μεταξάς

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών, Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνος Μεταξάς, 2024.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια η φασματική θεωρία των δυναμικών συστημάτων έχει προσελκύσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον συμπληρώνοντας και επεκτείνοντας κλασικές τεχνικές. Συγκεκριμένα, το φάσμα του τελεστή Koopman περιέχει σημαντικές πληροφορίες για την γεωμετρία του φασικού χώρου και παρέχει μια κατάλληλη συζυγία που γραμμικοποιεί ολικά το σύστημα. Φασματικά αναπτύγματα κατάλληλων παρατηρήσιμων ποσοτήτων γενικεύουν έννοιες όπως τα *isochrons* και τα *isostables* παρέχοντας συγχρόνως αποδοτικούς τρόπους ολικού αριθμητικού υπολογισμού τους. Επιπλέον, το φάσμα του τελεστή μπορεί να συνδεθεί με γνωστές έννοιες όπως οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες (σημείων ισορροπίας, οριακών κύκλων) και μέσω του ορισμού κατάλληλων συναρτησιακών χώρων, στους οποίους φασματικά αναπτύγματα έχουν νόημα, γενικεύεται η ανάλυση στο πεδίο Laplace σε μη γραμμικά συστήματα. Με αυτόν τον τρόπο εισάγονται γενικευμένες μεταβλητές δράσης-γωνίας για *dissipative* συστήματα. Η εφαρμογή της αναγωγής περιοδικών συστημάτων σε αυτές παρέχει έναν αυστηρό και γενικό τρόπο μελέτης περιοδικά διαταραγμένων ταλαντωτών, γενικεύοντας προσεγγιστικά μοντέλα πρώτης τάξης, ευρέως χρησιμοποιούμενα στην ηλεκτρονική βιβλιογραφία. Τα μοντέλα αυτά βασίζονται σε επιχειρήματα στο πεδίο της συχνότητας, ερμηνεύουν τον συγχρονισμό ως το αποτέλεσμα κατάλληλης ανάμειξης αρμονικών και εμφανίζουν ως κυριότερους περιορισμούς την απαίτηση για ασθενή διέγερση και σχεδόν αρμονική ταλάντωση. Υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις για την περιοδική διαταραχή, συνάγουμε ότι η μελέτη είναι ισοδύναμη με αυτήν μιας μονοδιάστατης κυκλικής απεικόνισης βάσει της οποίας μπορούν να προκύψουν οι περιοχές συντονισμού, γνωστές ως *Arnold Tongues*. Θεωρώντας δύο πολύ κλασικούς ηλεκτρονικούς ταλαντωτές (*Colpitts* και διαφορικοί *LC*) μελετάμε αναλυτικά και αριθμητικά την μη γραμμική δυναμική τους προσδιορίζοντας τις καμπύλες διακλάδωσης που επιβάλλουν ποιοτικά διαφορετικά φασικά πορτραίτα. Για τον ταλαντωτή *Colpitts* χρησιμοποιώντας την θεωρία *Shilnikov* αποδεικνύουμε την ποιοτική δομή του διαγράμματος διακλάδωσης καθώς και την ύπαρξη χαοτικής συμπεριφοράς. Στην περίπτωση των διαφορικών *LC* ταλαντωτών, η θεωρία κανονικών μορφών και η μέθοδος *Melnikov* επιτρέπουν την αναλυτική απόδειξη της ύπαρξης των καμπυλών διακλάδωσης και της τοπολογικής ισοδυναμίας, τουλάχιστον σε μια περιοχή της αρχής, όλων των κυκλωμάτων που ανήκουν στην αυτήν οικογένεια. Διεγείροντας περιοδικά τα παραπάνω συστήματα, προσδιορίζουμε, με βάση την αναπτυχθείσα θεωρία, τις περιοχές συντονισμού και επεκτείνουμε την μελέτη, χρησιμοποιώντας την περιγραφή σε μεταβλητές δράσης-γωνίας, σε περιπτώσεις γενικότερων περιοδικών διαταραχών. Τα αριθμητικά αποτελέσματα και οι προσομοιώσεις επιβεβαιώνουν την ισχύ και την ευρωστία των προτεινομένων μεθόδων. Η μελέτη ολοκληρώνεται με την εξέταση του χαοτικού συγχρονισμού του ταλαντωτή *Colpitts*. Οι θεωρητικά θεμελιωμένες μέθοδοι που αναπτύχθηκαν εισάγουν μια νέα προσέγγιση και γενικεύουν τις προσεγγιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην ηλεκτρονική βιβλιογραφία, επιτρέπουν την μελέτη την δυναμικής συγχρονισμού σε αυστηρό και γενικότερο πλαίσιο, παρέχουν δυνατότητες σχεδίασης ακριβών συστημάτων χρονισμού και δείχνουν ότι ένας ταλαντωτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διαιρέτης, πολλαπλασιαστής συχνότητας, ή και ως γεννήτρια χαοτικών σημάτων μέσω κατάλληλης επιλογής των παραμέτρων της διέγερσης.

Λέξεις Κλειδιά

Μεταβλητές Δράσης-Γωνίας, Τελεστής Koopman, Κυκλικές Απεικονίσεις, Πολύπλοκη Δυναμική Συγχρονισμού, Διακλάδώσεις, Μη Γραμμική Δυναμική, Χάος, Διαιρέτες Συχνότητας, Ηλεκτρονικοί Ταλαντωτές.

Abstract

Over the last years, spectral theory of dynamical systems has attracted attention complementing and expanding classical techniques. In particular, the spectrum of the Koopman operator contains important information regarding the geometry of the phase space and provides an appropriate conjugacy that globally linearizes the system. Spectral expansions of appropriate observables generalize notions like the isochrons and the isostables providing efficient numerical algorithms for their global computation. Moreover the operator's spectrum can be connected with known notions like the stable and unstable manifolds (of limit points or limit cycles) and through the definition of appropriate functional spaces, in which spectral expansions are valid, the Laplace domain analysis is extended to nonlinear systems. In this way, generalized action-angle coordinates can be defined. The application of this reduction on periodic systems provides a rigorous and general framework for the study of periodically perturbed oscillators, generalizing approximate first order models that are usually utilized in the field of electronics. These models rely essentially on frequency-domain arguments, interpreting synchronization as the result of harmonic mixing, and suffer from the limitations of weak forcing and nearly harmonic oscillations. Under certain conditions for the periodic forcing, the study is equivalent to that of a one dimensional circle map based on which the synchronization regions, referred to as Arnold tongues, can be derived. Considering two classical electronic oscillators (Colpitts and differential LC) we study analytically and numerically the nonlinear dynamics associated with each of them determining the bifurcation curves that result in qualitatively different phase portraits. Using Shilnikov theory we prove the qualitative structure of the bifurcation diagram of the Colpitts oscillator and show the existence of chaotic behavior. Regarding the differential LC oscillators, combining normal form theory and the Melnikov method, we analytically prove the existence of each bifurcation curve and the topological equivalence, at least in a neighborhood of the origin, of all systems belonging to this family. Periodically stimulating the above systems, we determine, based on the developed theory, the synchronization regions and extend the study, using the complete description with action-angle coordinates, to cases of general periodic forcing. The numerical results and the conducted simulations verify the validity and the robustness of the proposed methods. The study is concluded with the investigation of the chaotic synchronization of the Colpitts oscillator. The rigorous developed methods introduce a new approach and generalize the approximate techniques used in the electronics literature, allow the study of the synchronization dynamics of periodically perturbed oscillators in a general context, provide capabilities regarding the design of accurate timing systems and demonstrate that a single limit cycle oscillator can function as a divider, multiplier or a chaotic generator, depending on the driving signal.

Keywords

Generalized Action-Angle Variables, Koopman Operator, Circle Maps, Complex Synchronization Dynamics, Bifurcations, Nonlinear Dynamics, Chaos, Frequency Dividers, Electronic Oscillators.

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία δεν θα είχε ολοκληρωθεί, και βεβαίως θα είχε πολύ διαφορετική μορφή, χωρίς τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κύριο Κομίνη. Τον ευχαριστώ για όσα έμαθα κατά την διάρκεια εκπόνησής της, για την υποστήριξη, την εμπιστοσύνη και το ουσιαστικό ενδιαφέρον που μου επέδειξε, αλλά και για την ελευθερία που μου έδωσε κατά την μελέτη του θέματος. Μέσω της συνεργασίας μας είμαι πλέον βέβαιος ότι η περιοχή των Δυναμικών Συστημάτων, και ευρύτερα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, είναι αυτή που θα ήθελα επιστημονικά να ακολουθήσω και το γεγονός αυτό αποτελεί έναν ακόμη λόγο για τον οποίο τον ευχαριστώ. Εν ολίγοις, ο κύριος Κομίνης ήταν ο καλύτερος επιβλέπων που θα μπορούσα να έχω και ελπίζω η συνεργασία μας να συνεχιστεί. Επίσης, ευχαριστώ: τον κύριο Σωτηριάδη για το ειλικρινές ενδιαφέρον και τις σημαντικές συμβουλές του, καθώς και τον κύριο Ψυλλάκη, όχι μόνο ως μέλος της τριμελούς επιτροπής, αλλά κυρίως για τις πολύτιμες γνώσεις που απέκτησα από τα μαθήματα Ελέγχου στην Σχολή.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω την Υ.Δ. Γεωργία Χειμώνα για την άψογη συνεργασία και την ουσιαστική βοήθεια που μου προσέφερε, όποτε αυτή χρειάστηκε. Εξάλλου, η έρευνά της αποτέλεσε βάση για την παρούσα εργασία. Από το Εργαστήριο Ηλεκτρονικής, θα ήθελα να αναφερθώ στον Δρ. Βασίλη Αλιμήση για την συνεργασία σε θέματα σχετικά με την έρευνά του.

Βεβαίως, ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν στην Πανδώρα, αφού χωρίς αυτήν πολλά θα ήταν διαφορετικά.

Κυρίως, όμως, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην μητέρα μου Άννα: η ανεκτίμητη υποστήριξη της όλα αυτά τα χρόνια και γενικότερα όσα έχω μάθει από αυτήν, αποτελούν λίγους μόνο από τους λόγους για τους οποίους την ευχαριστώ.

Κωνσταντίνος Μεταξάς,
Αθήνα, 5η Ιουλίου 2024.

Contents

Περίληψη	vii
Abstract	viii
Ευχαριστίες	ix
Contents	xii
Εκτενής Περίληψη στα Ελληνικά - Extended Summary in Greek	1
0.1 Εισαγωγή	1
0.2 Εκθέτες Λγαρυπον, Χάος και Παράξενοι Ελκυστές	3
0.2.1 Εκθέτες Λγαρυπον	3
0.2.2 Χάος και Παράξενοι Ελκυστές	5
0.3 Ο Τελεστής Koorman στα Δυναμικά Συστήματα	7
0.3.1 Ορισμοί	7
0.3.2 Ελκυστές και Ιδιοσυναρτήσεις	10
0.3.3 Φασματικά Αναπτύγματα	10
0.3.4 Μεταβλητές Δράσης-Γωνίας για Συστήματα με Διασπορά: Σημεία Ισορροπίας	17
0.3.5 Αναγωγή σε Μεταβλητές Δράσης-Γωνίας για Περιοδικά Συστήματα	18
0.3.6 Συγχρονισμός Περιοδικά Διαταραγμένων Ταλαντωτών	23
0.3.7 Γραμμική Προσέγγιση	23
0.3.8 Γενικότερη Προσέγγιση	24
0.4 Κυκλικές Απεικονίσεις	25
0.4.1 Κυκλικές Απεικονίσεις και Αριθμός Περιστροφής	25
0.4.2 Περιορισμός σε Απεικονίσεις που Διατηρούν τον Προσανατολισμό και Ταξινόμηση Poincaré	26
0.4.3 Περιοχές Συγχρονισμού: Γλώσσες του Arnold	28
0.5 Ηλεκτρονικοί Ταλαντωτές	29
0.5.1 Διπολικό Τρανζίστορ	29
0.5.2 MOS Τρανζίστορ	30
0.5.3 Διαφορικοί LC Ταλαντωτές	31
0.5.4 Ο Ταλαντωτής Colpitts	32
0.5.5 Ανασκόπηση Συνηθισμένων Μεθόδων Ανάλυσης	32
0.6 Μη Γραμμική Δυναμική Ηλεκτρονικών Ταλαντωτών	36
0.6.1 Μη γραμμική δυναμική διαφορικών LC Ταλαντωτών	36
0.6.2 Μη Γραμμική Δυναμική του Ταλαντωτή Colpitts	42
0.7 Πολύπλοκη Δυναμική Συγχρονισμού Ηλεκτρονικών Ταλαντωτών	45
0.7.1 Η γενική τεχνική	45
0.7.2 Πολύπλοκη Δυναμική Συγχρονισμού Διαφορικών LC Ταλαντωτών	46
0.7.3 Πολύπλοκη Δυναμική Συγχρονισμού του Ταλαντωτή Colpitts	48
0.8 Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις	52
1 Introduction	54

2	Preliminaries on Lyapunov Exponents, Chaos and Strange Attractors	57
2.1	Lyapunov Exponents	57
2.2	Chaos and Strange Attractors	60
3	The Koopman Operator in Dynamical Systems	62
3.1	Preliminaries	62
3.2	Attractors and Eigenfunctions	68
3.3	Spectral Expansions	70
3.3.1	Equilibria	70
3.3.2	Limit Cycle Systems	75
3.3.3	Quasiperiodic Attractors	79
3.3.4	More General Attractors	80
3.4	Action - Angle Variables for Dissipative Systems: Equilibria	83
3.4.1	Numerical Methods	84
3.5	Phase - Amplitude Reduction for Limit Cycles	85
3.5.1	The Classical Approach	85
3.5.2	Connection with the Koopman eigenfunctions	87
3.5.3	Numerical Methods	90
3.6	Synchronization of Periodically Forced Oscillators	93
3.6.1	Linear Approximation	95
3.6.2	A More General Approach	95
4	Circle Maps	98
4.1	Circle maps and Rotation Number	98
4.2	Restriction to Orientation Preserving Maps and Poincaré Classification	101
4.3	Synchronization Regions: Arnold Tongues	107
5	Electronic Oscillators	110
5.1	The BJT	110
5.2	MOS transistor	112
5.3	Differential <i>LC</i> Oscillators	113
5.4	The Colpitts Oscillator	115
5.5	Review on Common Methods of Analysis	116
5.5.1	Autonomous Oscillators	116
5.5.2	Phase Reduction and Isochrons	117
5.5.3	Locking to Periodic Forcing	118
6	Nonlinear Dynamics of Electronic Oscillators	123
6.1	Nonlinear Dynamics of Differential <i>LC</i> Oscillators	123
6.1.1	Local Bifurcations	123
6.1.2	Melnikov's Method	124
6.1.3	Global Bifurcations	128
6.1.4	Symmetry and Bifurcations	131
6.1.5	Dynamics of the MOS and BJT implementations	133
6.2	Nonlinear Dynamics of the Colpitts Oscillator	136
6.2.1	Orbits Homoclinic to a Saddle-Focus: The Shilnikov Phenomenon	137
6.2.2	Bifurcations of the Colpitts Oscillator	140
7	Complex Synchronization Dynamics of Electronic Oscillators	145
7.1	The General Technique of Analysis	145
7.2	Complex Synchronization Dynamics of Differential <i>LC</i> Oscillators	147
7.2.1	Isochrons and Phase Response Curves	147
7.2.2	Synchronization	148

7.2.3	Synchronization under Strong and Rapid Perturbation: Complete Action- Angle Representation	153
7.3	Complex Synchronization Dynamics of the Colpitts Oscillator	161
7.3.1	Isochrons and Phase Response Curves	161
7.3.2	Synchronization	162
7.3.3	Chaotic Synchronization	169
8	Conclusion and Future Research	173
8.1	Summary and Conclusions	173
8.2	Future Research	174

List of Figures

3.1	Top: (a) PRC and (b) PTC corresponding to (3.172) parameter values $Q = 3, G = 0.5$. Bottom: (c) PRC and (d) PTC for specific amplitude values.	88
3.2	(a) Isochrons corresponding to (3.172) computed according to (3.186). (b) The limit cycle. Parameter values $Q = 3, G = 0.5$	88
3.3	The term $f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t}$ for the Van der Pol (3.196). It is apparent that it does not converge to a constant number as stated in relation (21) of [45], but to a periodic function as expansions of the form (3.107) and (3.119) suggest.	92
3.4	Geometrical construction of the observable [42].	93
3.5	Van der Pol system (3.198). First row: (a) $r_1(x, y)$ and (b) $e_1^T \nabla r_1$ Second row: (c) $e_1^T \nabla \theta$ and (d) isochrons. Third row: (e) isostables and (f) contours of isostables (blue) and isochrons (orange). Fourth row: (g) $e_1^T Q(\theta) = e_1^T \nabla \theta(r_1 = 0, \theta)$	94
3.6	Synchronization regions of (3.172) with sinusoidal forcing. Parameters $Q = 3, G = 0.5$. The linear model fails to predict the regions even for small amplitude forcing.	96
4.1	Rotation number of a circle map of the form (4.1) for three different values of the forcing A . (a) $A = 0.44$, (b) $A = 1.34$, (c) $A = 3$. Plateaus correspond to locked states. Rotation number is nondecreasing in ϕ for orientation preserving maps (a,b), and constant regions increase and widen as A increases. System under consideration is (3.172).	109
5.1	Simplified structure of a BJT transistor and current flow in a BJT operating in active mode from [52].	110
5.2	Circuit symbols for the BJT (a) and for the MOS (b).	111
5.3	Physical structure of a NMOS transistor [52].	112
5.4	Equivalent circuit of an LC differential oscillator.	113
5.5	Different implementations of the differential LC oscillator: (a) MOS transistors and (b) BJTs. (c) Schematic of a Colpitts oscillator.	115
5.6	Block diagram of the oscillator for the Harmonic Balance method [58].	117
5.7	Block diagram of the injection-locking mechanism used in the Harmonic Balance method [58].	118
6.1	Phase portrait of the Duffing oscillator from [60].	128
6.2	Bifurcation diagram with respect to μ_1, μ_2 parameters (ϵ_1, ϵ_2 in the figure) for system (6.3) from [35].	130
6.3	Bifurcation diagram with respect to Q, G parameters for the BJT implementation. The blue line corresponds to a supercritical Hopf bifurcation ($H^{(1)}$), the vertical red line to a pitchfork ($F^{(1)}$), the green to a subcritical Hopf ($H^{(2)}$), the magenta to a homoclinic bifurcation (P) and the orange to a saddle-node (K).	134

6.4	Phase portraits of system (6.53) describing the BJT implementation for parameters (Q, G) belonging to each of the regions defined by the bifurcation curves of Fig. 6.3. Blue color corresponds to attractors, red to unstable entities, circles to nodes and crosses to saddles. (a): parameters lie in the region between $H^{(1)}$ and $F_-^{(1)}$. (b): parameters lie in the region between $H^{(1)}$ and $F_+^{(1)}$, but above $H^{(1)}$. (c) parameters lie in the region between $F_+^{(1)}$ and $H^{(2)}$. (d) parameters lie in the region between $H^{(2)}$ and P . (e) parameters lie in the region between P and K . (f) parameters lie in the region between K and F_-^1	135
6.5	Bifurcation diagram with respect to Q, G parameters for the MOS implementation. The blue line corresponds to a supercritical Hopf bifurcation ($H^{(1)}$), the vertical red line to a pitchfork ($F^{(1)}$), the green to a subcritical Hopf ($H^{(2)}$) the magenta to a homoclinic bifurcation (P) and the orange to a saddle-node (K).	136
6.6	Homoclinic orbit and definition of cross-sections $\Pi_{0,1}$ for the study of (6.61) from [60].	137
6.7	Solution of (6.72) for $\delta > 1$ in (a) and period of the periodic orbit in (b). From [60]. .	139
6.8	Solution of (6.72) for $\delta < 1$ in (a) and enlarged in (b). (c) Dependence of the limit cycles on μ . From [60].	140
6.9	(a) Homoclinic orbit of the Colpitts oscillator (6.57). (b) Bifurcation diagram of the Colpitts oscillator (6.57). Tangent bifurcations are denoted with T , flip with F and homoclinic with H . The second index $n = 1$ refers to the fundamental structure. The superscript in $F_{1,1}$ denotes the second Feigenbaum cascade and the first index is used for enumerating purposes in the case of multiple occurrences of the same type of bifurcation.	141
6.10	Feigenbaum cascade with $\log_{10} Q = 0.1271$ fixed. (a) Primary cycle, parameter values $\log_{10} g = 0.29$. (b) Limit cycle after the first period doubling $F_{0,1}$, parameter value $\log_{10} g = 0.32$. (c) Limit cycle after the second period doubling $F_{1,1}$, parameter value $\log_{10} g = 0.38$. (d) Limit cycle after the third period doubling $F_{1,1}^{(2)}$, parameter value $\log_{10} g = 0.397$	142
6.11	(a) Feigenbaum strange attractor for parameter values $\log_{10} Q = 0.1271, \log_{10} g = 0.41$. (b) Shilnikov strange attractor for parameter values $\log_{10} Q = 0.164, \log_{10} g = 0.6$. . .	143
6.12	Bifurcation diagram of the generalized period doubling bifurcation from [35]. The F_{\pm}^1 curve corresponds to a period doubling bifurcation and the $T^{(2)}$ to a saddle-node bifurcation. The $\beta_{1,2}$ parameters are equivalent bifurcation parameters of the normal form.	143
6.13	Coexistence of limit cycle attractors. (a) Bistability due to cusp degeneracy of curve $T_{1,1}$: $\log_{10} g = 0.518, \log_{10} Q = 0.06$. (b) Bistability due to overlap of different structures: $\log_{10} g = 0.775, \log_{10} Q = 0.6765$	143
7.1	Isochrons for the autonomous system (7.8) (with $A = 0$). (a) and (b) The parameters lie between $H^{(1)}$ and $F_+^{(1)}$ but the Floquet exponent in (b) is smaller. (c) The parameters lie between $F_+^{(1)}$ and $H^{(2)}$. (d) The parameters lie between $H^{(2)}$ and P . (e) The parameters lie between P and K . The limit cycle and the equilibria present for each case can be found in Fig. 6.4.	149
7.2	Top: (a) PRC and (b) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 1.25, G = 0.68$. Bottom: (c) PRC and (d) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 3, G = 0.5$.	150
7.3	Top: (a) PRC and (b) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 1.25, G = 0.68$ for weak and strong forcing. Bottom: (c) PRC and (d) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 3, G = 0.5$ for weak and strong forcing.	151
7.4	Synchronization regions (Arnold Tongues) corresponding to (7.8). (a) Parameter values $Q = 1.26, G = 0.68$ and (b) parameter values $Q = 3, G = 0.5$	151
7.5	Rotation number ρ as a function of the variable s controlling the period of the perturbation for fixed amplitude forcing $A = 1.3$ In (a) it is not increasing for $Q = 1.25, G = 0.68$. In (b) it is increasing for $Q = 3, G = 0.50$	152

7.6	Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = \mathcal{F}(x(t)) $ in (e). The frequency spacing equals $1/2(kT_0 + T_s)$. Forcing parameters: $A = 1.6$, $s = 0.56$, $k = 2$, 1:2 locking. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$	154
7.7	Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = \mathcal{F}(x(t)) $ in (e). The frequency spacing equals $1/(kT_0 + T_s)$. Forcing parameters: $A = 2$, $s = 0.1$, $k = 2$, 1:1 locking. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$	155
7.8	Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = \mathcal{F}(x(t)) $ in (e). Forcing parameters: $A = 2.85$, $s = 0.73$, $k = 2$. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$	156
7.9	Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = \mathcal{F}(x(t)) $ in (e). Forcing parameters: $A = 1.54$, $s = 0.22$, $k = 10$, unlocked state. Circuit parameters $Q = 1.26$, $G = 0.68$	157
7.10	(a) and (b) Koopman eigenfunction associated with λ_1 . (c) Isostables and isochrons. (d) First coordinate of gradient $e_1^T \nabla r_1$. (e) First coordinate of gradient $e_1^T \nabla \theta$ and (f) $e_1^T \nabla \theta(0, \theta) = e_1^T Q(\theta)$. (g) Time evolution of the Koopman modes associated with $k\lambda_1 + i\nu\omega$, $k \geq 1$	159
7.11	Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.13) in (b). Corresponding time series of x in (a). Orbit of the phase and isostable variable in (c) and (d). Output spectrum $X(f) = \mathcal{F}(x(t)) $ in (e). Forcing parameters: $A = 1$, $s = 0.1$, $k = 0$, 1 : 1 locking. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$	160
7.12	Isochrons for the autonomous system (7.15) (with $A = 0$). In (a) the stable limit cycle is the unique attractor of the system and no unstable limit cycles exist. In (b) the parameters lie above $F_{0,1}$ and below $F_{1,1}$ of Fig. 6.9; thus a period doubling bifurcation has resulted in a stable period two cycle and the period one cycle has lost stability. In (c) the parameters lie above $F_{0,1}$ and below $F_{1,1}^{(2)}$ of Fig. 6.9; another period doubling bifurcation has occurred. In (d) and (e) two stable limit cycles coexist.	163
7.13	PRC and PTC curves for parameter values $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$ corresponding to case (a) of Fig. 7.12. (a) PRC curves for different amplitudes of forcing. (b) The Winfree Time Crystal. (c) PRCs for two fixed amplitude values. (d) PTCs for two fixed amplitude values. (e) PTC derived from (7.15) and from simulation in Simulink.	164
7.14	(a) Resonance diagram for the Colpitts oscillator (7.15). (b) Devil's staircase for $A = 68$. Parameter values $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$	165
7.15	Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.15) in (a) and from simulation in Simulink in (b). Corresponding time series of x in (c). Circle map orbit in (d) and corresponding cobweb in (e). Circle map orbit using the simulation derived PTC in (f). Output spectrum $X(f) = \mathcal{F}(x(t)) $ in (g) and enlarged in (h). The frequency spacing equals $1/3(kT + T_s)$. Forcing parameters: $A = 64$, $s = 0.31$, $k = 40$. Circuit parameters $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$	166
7.16	Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.15) in (a) and from simulation in Simulink in (b). Corresponding time series of x in (c). Circle map orbit in (d) and corresponding cobweb in (e). Circle map orbit using the simulation derived PTC in (f). Output spectrum $X(f) = \mathcal{F}(x(t)) $ in (g) and enlarged in (h). The frequency spacing equals $1/2(kT + T_s)$. Forcing parameters: $A = 64$, $s = 0.44$, $k = 40$. Circuit parameters $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$	167

- 7.17 Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.15) in (a) and from simulation in Simulink in (b). Corresponding time series of x in (c). Circle map orbit in (d) and corresponding cobweb in (e). Circle map orbit using the simulation derived PTC in (f). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (g) and enlarged in (h). Forcing parameters: $A = 64$, $s = 0.23$, $k = 40$. Circuit parameters $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$ 168
- 7.18 (a) Strange Attractor. (b) Synchronized Responce. (c) Spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ of the synchronized responce. Circuit parameters $\log_{10} Q = 0.69$, $\log_{10} g = 0.88$ $k = 0.5$ and forcing parameters $A = 2$, $\omega_{out} = 0.99$ 170
- 7.19 (a) Coupling strength $\epsilon = 0.01$. The oscillators are not locked. (b) The coupling strength is close but smaller than $\epsilon_{c,max}$: modulation intermittency. (c) Locking with $\epsilon > \epsilon_{c,max}$. Circuit parameters: $\log_{10} Q = 0.69$, $\log_{10} g = 0.88$, $k = 0.5$ 171

Εκτενής Περίληψη στα Ελληνικά - Extended Summary in Greek

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθεται εκτενής και αναλυτική περίληψη της εργασίας στα ελληνικά. Ακολουθείται η ίδια δομή με το κύριο σώμα της εργασίας, αλλά αποδείξεις και πολύ λεπτομερείς επεξηγήσεις παραλείπονται και μπορούν να βρεθούν πλήρως αναλυμένες στα αντίστοιχα Κεφάλαια. Αναφορές σε Σχήματα αφορούν αυτά του κυρίου μέρους της Εργασίας και η παράθεσή τους δεν επαναλαμβάνεται στην παρούσα περίληψη. Η αντιστοίχιση του κάθε Σχήματος με την σελίδα που αυτό βρίσκεται, υπάρχει στην αρχική λίστα Σχημάτων.

0.1 Εισαγωγή

Οι ταλαντωτές εμφανίζονται κατά την μελέτη πολλών τεχνολογικών (ηλεκτρονικών, μηχανικών) και βιολογικών (δυναμική πληθυσμού, νευρωνικά δίκτυα) συστημάτων. Ειδικότερα σε ηλεκτρονικές εφαρμογές χρησιμοποιούνται συχνά ως γεννήτριες σημάτων ρολογιού ή ως φέροντα σήματα εντός ευρύτερων τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Διεγείρομενα από εξωτερικά σήματα μπορούν να συγχρονιστούν με αυτά δίνοντας στην έξοδο περιοδικές κυματομορφές με προσαρμοζόμενα φασματικά χαρακτηριστικά και χαμηλό θόρυβο φάσης. Ο συγχρονισμός έχει βρει ευρεία εφαρμογή στα ηλεκτρονικά στους βρόχους κλειδωμένης φάσης (PLL) και σε διαίρετες συχνότητας, οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για την διαίρεση της συχνότητας ενός σήματος αναφοράς με έναν ακέραιο αριθμό [14]. Επιπλέον, ολοκληρωμένες υλοποιήσεις συγχρονισμένων ταλαντωτών χρησιμοποιούνται ευρέως στο πεδίο των ασύρματων επικοινωνιών, ως εναλλακτική των ψηφιακών υλοποιήσεων, προσφέροντας χαμηλή κατανάλωση ισχύος και χαμηλό θόρυβο φάσης [7]. Συγκεκριμένα, ο κυριότερος περιορισμός κατά την σχεδίαση synthesizer συχνότητας είναι η ισχύς, η οποία απαιτεί την χρήση αναλογικών συγχρονισμένων ταλαντωτών αντί ψηφιακών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (βασισμένους σε flip-flop διαίρετες συχνότητας με λογική βασισμένη σε ρεύμα) [51]. Στο πλαίσιο των χαοτικών συστημάτων, ο συγχρονισμός έχει βρει εφαρμογή στο πλαίσιο των ασφαλών επικοινωνιών [34].

Λόγω της σημασίας του σε πρακτικές εφαρμογές, ο συγχρονισμός των ταλαντωτών έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας στο πεδίο των ηλεκτρονικών. Οι περισσότερες αναπτυχθείσες μέθοδοι [10, 7, 6, 58, 25, 9, 8, 26] εστιάζουν στην εύρεση προσεγγιστικών τύπων για το locking range, το συχνοτικό διάστημα, δηλαδή, εντός του οποίου παρατηρείται κλειδώμα συχνότητας. Η μέθοδος Harmonic Balance έχει παραδοσιακά χρησιμοποιηθεί ως το κυρίαρχο εργαλείο για την μελέτη ηλεκτρονικών ταλαντωτών και έχει επεκταθεί με φυσικό τρόπο και στην περίπτωση περιοδικής διαταραχής [58]. Ισοδύναμες αναλύσεις έχουν αναπτυχθεί και με χρήση φασιδετών [27]. Η μέθοδος του Averaging σε συνδυασμό με την μέθοδο Slowly Varying Amplitude έχει επίσης χρησιμοποιηθεί εκτενώς [10, 7, 6, 8]. Ουσιαστικά, όλες οι παραπάνω μέθοδοι βασίζονται σε φασματικά επιχειρήματα, ερμηνεύοντας το φαινόμενο του συγχρονισμού ως το αποτέλεσμα της κατάλληλης ανάμειξης αρμονικών. Οι υποθέσεις στις οποίες βασίζονται οι μέθοδοι αυτές περιορίζουν την εφαρμογή τους σε περιπτώσεις ασθενούς έγχυσης, ενώ οι προσεγγιστικά συνηγμένοι τύποι για το locking-range αντιστοιχούν σε γραμμικές προσεγγίσεις των συνόρων των πραγματικών περιοχών συγχρονισμού. Η εισαγωγή των μοντέλων φάσης [55, 56] στο πεδίο των ηλεκτρονικών, περιορίστηκε κυρίως σε αυτόνομα συστήματα, ενώ γραμμικές προσεγγίσεις διαταραγμένων μοντέλων αντιμετωπίζουν τους ίδιους περιορισμούς με τις προαναφερθείσες μεθόδους Harmonic Balance και Averaging.

Εκτός από τους θεωρητικούς περιορισμούς των υπάρχουσών μεθόδων, η μελέτη του συγχρονισμού στο πεδίο της συχνότητας αποκρύπτει εφαρμογές όπου ο ίδιος ταλαντωτής μπορεί να λειτουργήσει ως διαίρετης ή πολλαπλασιαστής συχνότητας, ως γεννήτρια χαοτικών σημάτων ή ως ισχυρά μη γραμμικός ταλαντωτής, αναλόγως με την εφαρμοζόμενη διαταραχή. Επιπλέον, οι συνέπειες του συγχρονισμού φάσης στο πεδίο του χρόνου, σε εφαρμογές που απαιτούν λ.χ. ακριβή μέτρηση χρόνου, συχνά αμελούνται.

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσουμε ένα ενοποιημένο και αυστηρό πλαίσιο για την μελέτη περιοδικά διαταραγμένων ταλαντωτών και παρουσιάζουμε πιθανές εφαρμογές της προτεινόμενης μεθοδολογίας στην διάφραση ή τον πολλαπλασιασμό συχνότητας, καθώς και σε ό,τι αφορά την ρύθμιση των φασματικών ιδιοτήτων του σήματος εξόδου.

Μαθηματικά, οι αυτοσυντηρούμενοι ταλαντωτές είναι δυναμικά συστήματα που έχουν ως ελκυστές οριακούς κύκλους οι οποίοι χαρακτηρίζονται από μια συχνότητα και από κατάλληλες ποσότητες που ποσοτικοποιούν την ελκτικότητα τους, ενώ οι χαοτικές ταλαντώσεις συνδέονται με την ύπαρξη ενός παράξενου ελκυστή. Οι έννοιες αυτές μπορούν να μελετηθούν συνολικά με χρήση της θεωρίας Koopman η οποία δίνει την δυνατότητα επέκταση παρατηρήσιμων ποσοτήτων σε ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή και γενικεύει την ανάλυση στο πεδίο Laplace από τα γραμμικά στα μη γραμμικά συστήματα. Επιπλέον, μέσω των ιδιοσυναρτήσεων του δίνεται η δυνατότητα ορισμού των *isochrons* που οδηγεί στα γνωστά μοντέλα φάσης, αλλά και η γενίκευσή τους με τον ορισμό κατάλληλων μεταβλητών δράσης στις οποίες η δυναμική είναι γραμμική.

Η μελέτη του συγχρονισμού των ταλαντωτών σε εξωτερικές διεγέρσεις γίνεται συνήθως στην βιβλιογραφία της ηλεκτρονικής με χρήση προσεγγιστικών πρώτης τάξης μοντέλων που στηρίζονται στην ιδέα της κατάλληλης μείξης των αρμονικών και απαιτούν πολύ μικρά πλάτη. Δείχνουμε ότι η διδιάστατη απεικόνιση σε μεταβλητές-δράση γωνίας μπορεί να περιγράψει τον συγχρονισμό με αυθαίρετη εξωτερική διέγερση, ενώ αν αυτή έχει μια πιο ειδική μορφή (χωρίς περιορισμού στο πλάτος της), η ανάλυση ανάγεται στην μελέτη μιας μονοδιάστατης κυκλικής απεικόνισης από την οποία προκύπτουν πλήρως οι περιοχές συντονισμού. Η κυκλική αυτή απεικόνιση καθορίζεται από τις καμπύλες απόκρισης φάσης PRC και PTC. Εντός των περιοχών συγχρονισμού το σήμα εξόδου είναι συγχρονισμένο με την διαταραχή, ενώ εκτός αυτού η κίνηση είναι απεριοδική (χαοτική ή ημιπεριοδική). Η μεθοδολογία αυτή είναι γενική και μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικούς ταλαντωτές. Εκτός από τον συγχρονισμό περιοδικών συστημάτων μελετάμε και την δυνατότητα χαοτικού συγχρονισμού.

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν δύο συγκεκριμένα δυναμικά συστήματα ηλεκτρονικών ταλαντωτών: ο διαφορικός LC ταλαντωτής και ο Colpitts. Για την μελέτη του πολύπλοκου συγχρονισμού τους απαιτείται πρώτα μια αναλυτική μελέτη της μη γραμμικής δυναμικής του κάθε συστήματος και ο προσδιορισμός των διακλαδώσεων που σχετίζονται με τις παραμέτρους τους. Για την αναλυτική μελέτη χρησιμοποιείται η θεωρία Melnikov και Shilnikov ενώ ο ακριβής υπολογισμός των καμπυλών διακλάδωσης πραγματοποιείται αριθμητικά για κάθε σύστημα.

Η παρούσα εργασία είναι οργανωμένη ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 3, εισάγουμε τους βασικούς ορισμούς του χάους, των (παράξενων) ελκυστών και των εκθετών Lyapunov, έννοιες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν κατά την διάρκεια της εργασίας.
- Στο Κεφάλαιο 3, μελετάμε αναλυτικά τον τελεστή Koopman στα δυναμικά συστήματα, με ιδιαίτερη έμφαση στα φασματικά αναπτύγματα, και τον συνδέουμε με την μελέτη των περιοδικά διαταραγμένων ταλαντωτών.
- Στο Κεφάλαιο 4, μελετάμε αναλυτικά τις κυκλικές απεικονίσεις που προκύπτουν κατά την μελέτη του συγχρονισμού περιοδικά διαταραγμένων συστημάτων, όπως δείξαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.
- Στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζουμε τις βασικές αρχές λειτουργίας των τρανζίστορ και με βάση αυτές μοντελοποιούμε τα συστήματα των διαφορικών LC ταλαντωτών και του Colpitts. Παρέχεται επίσης μια ανασκόπηση και συζήτηση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην βιβλιογραφία των ηλεκτρονικών για την ανάλυση αυτόνομων και περιοδικά διαταραγμένων ταλαντωτών.
- Στο Κεφάλαιο 6, μελετάται αυστηρά η μη γραμμική δυναμική κάθε κλάσης ταλαντωτών τόσο θεωρητικά όσο και αριθμητικά προσδιορίζοντας τις καμπύλες διακλάδωσης.
- Στο Κεφάλαιο 7, μελετάται ο πολύπλοκος συγχρονισμός κάθε ταλαντωτή, προσδιορίζονται τα διαγράμματα συντονισμού στο επίπεδο των παραμέτρων της διαταραχής (πλάτος και συχνότητα) και δείχνουμε ότι η κυκλική απεικόνιση περιγράφει επαρκώς την δυναμική συγχρονισμού. Εξετάζοντας τη δομή των *isochrons*, η οποία καθορίζει τις ιδιότητες συγχρονισμού του συστήματος, προκύπτει ότι σε αυτήν αντανακλάται η πολύπλοκη δυναμική των αυτόνομων συστημάτων. Επιπλέον, παρέχεται ένα παράδειγμα χρήσης της πλήρους διδιάστατης απεικόνισης σε μεταβλητές δράσης-γωνίας για

την μελέτη του συγχρονισμού και ολοκληρώνουμε με την εξέταση του χαοτικού συγχρονισμού του ταλαντωτή Colpitts.

- Στο Κεφάλαιο 8, συνοψίζεται η εργασία και παρέχονται κατευθύνσεις μελλοντικών επεκτάσεων.

0.2 Εκθέτες Lyapunov, Χάος και Παράξενοι Ελκυστές

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται οι θεμελιώδεις ορισμοί του χάους και των εκθετών Lyapunov, καθώς και ιδιότητες των τελευταίων, οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν καθόλη την έκταση της εργασίας.

0.2.1 Εκθέτες Lyapunov

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

όπου η f είναι C^r , $r \geq 1$ συνάρτηση και έστω $\phi(x, t)$ η ροή του πεδίου.

Definition 0.2.1. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\phi(x_0, t)$ η τροχιά με ασχική συνθήκη x_0 . Συμβολίζουμε με $\Phi(t)$ τον θεμελιώδη πίνακα της εξίσωσης πινάκων,

$$\dot{X} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\phi(x_0, t)} X = A(t)X, \quad X(0) = I_n. \quad (2)$$

Για $e \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε τον χαρακτηριστικό εκθέτη Lyapunov στην κατεύθυνση του e ως

$$\lambda(x_0, e) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{\|\Phi(t)e\|}{\|e\|} \right), \quad (3)$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι συνήθως Ευκλείδεια νόρμα στον \mathbb{R}^n . Αν $\Phi \equiv 0$, ορίζουμε $\lambda(x_0, e) = -\infty$.

Οι απαραίτητες τροποποιήσεις του ορισμού για την περίπτωση που το σύστημα (1) είναι διακριτού χρόνου είναι προφανείς. Σημειώνουμε ότι όλα τα σημεία που ανήκουν στην ίδια τροχιά χαρακτηρίζονται από τον ίδιο εκθέτη Lyapunov. Αυτό δείχνει ότι οι εκθέτες Lyapunov είναι μια ιδιότητα συνυφασμένη με την κάθε τροχιά.

Αν κρατήσουμε σταθερή την τροχιά μπορούμε να θεωρήσουμε τους εκθέτες Lyapunov ως συναρτήσεις ορισμένες στον \mathbb{R}^n , $\lambda(e)$. Από τον ορισμό είναι προφανές ότι η νόρμα του διανύσματος e δεν επηρεάζει τον εκθέτη, δηλαδή $\lambda(ce) = \lambda(e)$ για κάθε μη-μηδενικό c , και έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε $\|e\| = 1$. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της νόρμας μπορούμε να δείξουμε ότι,

$$\lambda(e_1 + e_2) \leq \max(\lambda(e_1), \lambda(e_2)), \quad \forall e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

από όπου έπεται αμέσως ότι το σύνολο,

$$A_r = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(u) \leq r\}, \quad (5)$$

όπου $r \in \mathbb{R}$, είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^n . Επομένως, οι εκθέτες Lyapunov μιας τροχιάς δεν μπορούν να λάβουν περισσότερες από $n = \dim \mathbb{R}^n$ διαφορετικές τιμές. Αυτό μπορεί να το δει κανείς ως εξής: αν προς άτοπο δεν ίσχυε, τότε θα υπήρχαν k διανύσματα u_i ώστε το u_k να γράφεται ως γραμμικό συνδυασμός των u_i και $\lambda(u_k) > \lambda(u_i)$, $i = 1, \dots, k-1$ το οποίο όμως αντιβαίνει στην (4).

Έστω λοιπόν $\nu_1 > \dots > \nu_s$ οι $s \leq n$ διαφορετικοί εκθέτες Lyapunov μια δεδομένης τροχιάς. Αν ορίσουμε τα σύνολα

$$L_i = \{e \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(e) \leq \nu_i\}, \quad (6)$$

έχουμε

$$\{0\} = L_{s+1} \subset L_s \subset \dots \subset L_1 = \mathbb{R}^n \quad (7)$$

και

$$\lambda(e) = \nu_i \iff e \in L_i - L_{i+1}. \quad (8)$$

Definition 0.2.2. Οι αριθμοί ν_i ορίζονται ως το φάσμα των εκθετών Lyapunov που σχετίζονται με την τροχιά $\phi(x_0, t)$. Η πολλαπλότητα καθενός από τους ν_i ορίζεται ως $k_i = \dim L_i - \dim L_{i+1}$.

Η ομοιότητα μεταξύ του ορισμού της πολλαπλότητας ενός εκθέτη Lyapunov και ενός γενικευμένου ιδιόχωρου ενός γραμμικού τελεστή (πίνακα) πρέπει να είναι προφανής.

Υπό ορισμένες συνθήκες το όριο στην (3) υπάρχει και παρακάτω παραθέτουμε τις προϋποθέσεις αυτές.

Definition 0.2.3. Ο θεμελιώδης πίνακας Φ λέγεται κανονικός, αν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)| < \infty \quad (9)$$

για κάθε βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του \mathbb{R}^n τέτοια ώστε,

$$\sum_{i=1}^n \lambda(e_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(b_i) \text{ για κάθε άλλη βάση } \{b_1, \dots, b_n\}, \quad (10)$$

ισχύει ότι,

$$\sum_{i=1}^n \lambda(e_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)|. \quad (11)$$

Σημειώνεται ότι από την ταυτότητα του Abel,

$$\log |\det \Phi(t)| = \int_0^t \text{tr}(\Phi(\tau)) d\tau, \quad (12)$$

οπότε δεν χρειάζεται ουσιαστικά κανείς την γνώση του ίδιου του θεμελιώδους πίνακα. Έχουμε τώρα το ακόλουθο Θεώρημα.

Theorem 0.2.1. Αν $\Phi(t)$ κανονικός, τότε το όριο στην (3) υπάρχει για κάθε $e \in \mathbb{R}^n$

Proof. Δείτε [37]. □

Οι εκθέτες Lyapunov είναι ένα είδος φάσματος που χαρακτηρίζει μια δεδομένη τροχιά. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον τελεστή Koopman και θα εισάγουμε μέσω αυτού ένα άλλο πολύ χρήσιμο φάσμα που επιτρέπει την ανάπτυξη συναρτήσεων τροχιών σε ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή. Οι εκθέτες Lyapunov θα αποδειχθούν ιδιαίτερα χρήσιμοι κατά την μελέτη του χαοτικού συγχρονισμού.

Για να κάνουμε πιο συγκεκριμένη την έννοια των εκθετών Lyapunov, μελετάμε το φάσμα δύο συγκεκριμένων τροχιών: σημεία ισορροπίας και περιοδικές τροχιές, τις οποίες ορίζουμε παρακάτω.

Definition 0.2.4. • Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε x_0 λέγεται σημείο ισορροπίας του (2.1), αν $f(x_0) = 0$.

- Έστω $\gamma(t)$ μία περιοδική λύση του (2.1). Τότε

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \gamma(t), t \in \mathbb{R}\} \quad (13)$$

είναι ένας οριακός κύκλος του (2.1).

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και έστω $\Phi(t)$ ο θεμελιώδης πίνακας που είναι λύση του,

$$\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\phi(x_0, t)} X = A(t)X, \quad X(0) = I_n. \quad (14)$$

Τότε η τροχιά $\phi(x_0, t)$ λέγεται υπερβολική, αν υπάρχει προβολικός πίνακας P και σταθερές $k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$, ώστε

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(\tau)\| &\leq k_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}, \quad t \geq \tau \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(\tau)\| &\leq k_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}, \quad t \leq \tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Είναι προφανές ότι αν x_0 σημείο ισορροπίας, η υπερβολικότητα είναι ισοδύναμη με την μη ύπαρξη ιδιοτιμών με μηδενικό πραγματικό μέρος του γραμμικοποιημένου πίνακα.

Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1) έχει ως λύση έναν υπερβολικό οριακό κύκλο συχνότητας ω . Έστω x_0 ένα σημείο στον οριακό κύκλο του (1) και έστω $\Phi(t)$ ο θεμελιώδης πίνακας του (2). Η θεωρία Floquet συνεπάγεται ότι $\Phi(t, 0) = U(t)e^{Dt}U^{-1}(0)$, όπου ο πίνακας U είναι $t = 2\pi/\omega$ περιοδικός, $e^{Dt} = \text{diag}(1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ και $1 \neq |\mu_i|$, $i = 1, \dots, n-1$ είναι οι πολλαπλασιαστές Floquet. Η σχέση $|\mu_i| \neq 1$, προκύπτει από την υπόθεση ότι ο κύκλος είναι υπερβολικός. Ορίζουμε τους εκθέτες Floquet ως $\lambda_i = 2\pi \log(\mu_i)/\omega$ οι οποίοι ποσοτικοποιούν πόσο ελκτικό ή απωστικός είναι ο οριακός κύκλος κατά αναλογία με τις ιδιοτιμές του Jacobian πίνακα στην περίπτωση ενός σημείου ισορροπίας. Σημειώνουμε ότι $1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ είναι ιδιοτιμές του monodromy matrix $\Phi(2\pi/\omega, 0)$.¹ Είναι προφανές ότι ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής αν και μόνον αν $1 > |\mu_i|$, $i = 1, \dots, n-1$. Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση.

Proposition 0.2.2. 1. Έστω x_0 σημείο ισορροπίας του (1) και έστω λ_i οι διαφορετικές ιδιοτιμές του Jacobian πίνακα, τότε $\nu_i = \text{Re}(\lambda_i)$.

2. Αν το (1) επιδέχεται έναν υπερβολικό οριακό κύκλο με εκθέτες Floquet λ_i , τότε $\nu_i = \text{Re}(\lambda_i)$.

Proof. Δείτε την Απόδειξη στο Κεφάλαιο 2. □

Σημειώνεται ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος σχετικά με την ύπαρξη του ορίου ισχύουν στην περίπτωση του σημείου ισορροπίας, αλλά όχι στην περίπτωση των οριακών κύκλων.

Έτσι καταλήγουμε ότι στις δυο συνηθισμένες περιπτώσεις σημείων ισορροπίας και οριακών κύκλων το φάσμα Lyapunov ταυτίζεται με τις ιδιοτιμές όπως αυτές προκύπτουν από την κλασσική γραμμικοποίηση και την θεωρία Floquet μέσω της γραμμικοποίησης γύρω από την κατάλληλη τροχιά.

Στην πράξη, ο υπολογισμός του φάσματος για μια τυχαία τροχιά μπορεί να γίνει μόνο αριθμητικά. Ένας κλασσικό αλγόριθμος είναι ο [65], τον οποίον και θα χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 7 για την μελέτη του χαοτικού συγχρονισμού του ταλαντωτή Colpitts.

0.2.2 Χάος και Παράξενοι Ελκυστές

Στην παρούσα ενότητα κάνουμε συγκεκριμένο τι εννοούμε με τον όρο χάος και ορίζουμε τους παράξενους (χαοτικούς ελκυστές), έννοια τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

Οι ορισμοί που θα ακολουθήσουν αφορούν συστήματα συνεχούς χρόνου της μορφής (1), αλλά οι απαραίτητες τροποποιήσεις για την περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου είναι προφανείς.

Definition 0.2.5. Έστω A συμπαγές και αναλλοίωτο (για θετικούς χρόνους) σύνολο της (1). Λέμε ότι η ροή $\phi(x, t)$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες στο A , αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ και για κάθε γειτονιά U του x , υπάρχει $y \in U$ και $t > 0$ τέτοια ώστε,

$$\|\phi(x, t) - \phi(y, t)\| > \epsilon. \quad (16)$$

Definition 0.2.6. Η ροή $\phi(x, t)$ της (1) είναι *topologically transitive* σε ένα κλειστό αναλλοίωτο σύνολο A αν για οποιαδήποτε ανοιχτά σύνολα $U, V \subset A$, υπάρχει $t > 0$ τέτοιο ώστε $\phi(U, t) \cap V \neq \emptyset$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τι εννοούμε λέγοντας ότι ένα αναλλοίωτο σύνολο είναι χαοτικό.

Definition 0.2.7. Ένα συμπαγές και αναλλοίωτο σύνολο A είναι χαοτικό αν η ροή έχει ευαίσθητη εξάρτηση και είναι *topologically transitive* στο A .

Η έννοια του συνόλου Cantor θα αποδειχθεί χρήσιμη στα επόμενα.

Definition 0.2.8. Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, ένα σύνολο $E \subseteq X$ λέγεται σύνολο Cantor αν είναι πλήρως *disconnected*, *perfect* (κάθε σημείο του E είναι σημείο συσσώρευσης) και συμπαγές.

¹Έπεται αμέσως ότι μ_1, \dots, μ_{n-1} είναι ιδιοτιμές της απεικόνισης Poincaré ορισμένης από οποιαδήποτε εγκάρσια τομή Σ στον κύκλο. Οι πολλαπλασιαστές είναι ανεξάρτητοι από την τομή Σ , αφού απεικονίσεις Poincaré αντιστοιχούσε σε διαφορετικές τομές είναι μεταξύ τους συζυγείς.

Στο σημείο αυτό δίνουμε ένα θεμελιώδες παράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο όλων των αμφι-άπειρων (και από τις δύο μεριές) ακολουθιών N συμβόλων, που ορίζονται ως,

$$\Sigma^N = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \Delta^i, \quad \Delta^i = \Delta = \{1, \dots, N\}. \quad (17)$$

Έστω $a, b \in \Sigma^N$ δυο σύμβολο-ακολουθίες με $a = \{\dots a_{-n} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_n \dots\}$, $b = \{\dots b_{-n} \dots b_{-1} b_0 b_1 \dots b_n \dots\}$, όπου $a_i, b_i \in \Delta$. Η τελεία διαχωρίζει την ακολουθία σε δύο άπειρα μέρη και απλώς εξυπηρετεί ως σημείο εκκίνησης. Αν εφοδιάσουμε το Σ^N με την συνάρτηση

$$d(a, b) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{\delta_{a_i, b_i}}{1 + \delta_{a_i, b_i}}, \quad (18)$$

όπου δ είναι το δέλτα του Kronecker, είναι προφανές ότι ο (Σ^N, d) γίνεται μετρικός χώρος. Αποδεικνύεται [61] ότι ο Σ^N είναι συμπαγής, πλήρως disconnected και perfect, οπότε είναι σύνολο Cantor. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση μετατόπισης,

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma^N &\rightarrow \Sigma^N \\ (\dots a_{-1} a_0 a_1 \dots) &\rightarrow (\dots a_{-1} a_0 a_1 \dots), \end{aligned} \quad (19)$$

και αναφερόμαστε σε αυτήν ως μια πλήρη μετατόπιση N συμβόλων. Αποδεικνύεται ότι η σ έχει αριθμησιμο άπειρο πλήθος περιοδικών τροχιών, υπεραριθμησιμο άπειρο πλήθος απεριοδικών τροχιών και μια πυκνή τροχιά [61]. Το τελευταίο δείχνει ότι η σ είναι topologically transitive στο Σ^N . Επιπλέον έστω ότι η U είναι περιοχή του $a \in \Sigma^N$ ακτίνας ϵ . Όσο μικρή και αν αυτή επιλεγεί, υπάρχει πάντα $n > 0$ ώστε $a_i = b_i \forall |i| \leq n$. Επομένως, η σ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες στο Σ^n και έτσι καταλήγουμε ότι το Σ^n είναι χαοτικό.

Παρότι ο χώρος και το σύστημα που κατασκευάστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα φαίνονται πλήρως θεωρητικά, θα δούμε αργότερα ότι υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, συστήματα συνεχούς και διακριτού χρόνου είναι τοπολογικά ισοδύναμα με πλήρεις μετατοπίσεις N συμβόλων.

Προτού ορίσουμε τον παράξενο ελκυστή, χρειάζεται να ορίσουμε την έννοια του ελκυστή γενικότερα.

Definition 0.2.9. Ένα κλειστό και αναλλοίωτο σύνολο A λέγεται ελκυστής, αν υπάρχει γειτονιά U του A τέτοια ώστε

$$\phi(U, t) \subset A, \quad \forall t > 0, \quad \bigcap_{t > 0} \phi(U, t) = A, \quad (20)$$

και η $\phi(\cdot, t)$ είναι topologically transitive στο A .

Ο παραπάνω ορισμός είναι ουσιαστικά τοπολογικός. Ελκυστές μπορούν να οριστούν και με βάση έννοιες της θεωρίας μέτρου. Ο επόμενος ορισμός οφείλεται στον Milnor και για αυτό ελκυστές με την παρακάτω ιδιότητα αναφέρονται ως ελκυστές Milnor.

Definition 0.2.10. Ένα κλειστό και αναλλοίωτο σύνολο A λέγεται ελκυστής Milnor, αν υπάρχει μια περιοχή έλξης D θετικού μέτρου, και δεν υπάρχει κανένα μικρότερο σύνολο $A' \subset A$ του οποίου η περιοχή έλξης να ταυτίζεται με το D με εξαίρεση ίσως σύνολα μηδενικού μέτρου.

Η διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών οφείλεται στο γεγονός ότι σε έναν ελκυστή Milnor επιτρέπονται κάποια σημεία να ξεφύγουν από αυτόν, ενώ μια τέτοια περίπτωση αντιβαίνει στον ορισμό του ελκυστή με την τοπολογική έννοια.

Έχοντας ορίσει την έννοια του ελκυστή, μπορούμε να δώσουμε και τον ορισμό του παράξενου ελκυστή.

Definition 0.2.11. Ένας ελκυστής A λέγεται παράξενος ελκυστής, αν είναι χαοτικός.

Σημειώνουμε ότι, υποθέτοντας ότι ο χώρος φάσης είναι τριδιάστατος, τροχιές που εξελίσσονται πάνω στον παράξενο ελκυστή έχουν έναν θετικό, έναν αρνητικό και έναν εκθέτη Lyapunov ίσο με το 0. Ο θετικός εκθέτης οφείλεται στην ευαισθησία του ελκυστή ως προς την αρχικές συνθήκες, ο αρνητικός στο ότι το σύνολο αποτελεί ελκυστή και ο μηδενικός ελκυστής δείχνει ότι η κίνηση πραγματοποιείται πάνω στον ελκυστή.

0.3 Ο Τελεστής Koopman στα Δυναμικά Συστήματα

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την μελέτη του τελεστή Koopman στα δυναμικά συστήματα. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για ιδιότητες που συνδέουν ελκυστές με τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή και επιτρέπουν φασματικά αναπτύγματα παρατηρήσιμων ποσοτήτων.

0.3.1 Ορισμοί

Θεωρούμε δυναμικά συστήματα συνεχούς χρόνου της μορφής,

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (21)$$

όπου $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια C^r , $r \geq 2$ συνάρτηση, ώστε η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης είναι εξασφαλισμένες και έστω $\phi(x, t)$ η ροή του (21). Μια παρατηρήσιμη ποσότητα είναι μια C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ σε έναν χώρο Banach \mathcal{F} .

Definition 0.3.1. Έστω $f \in \mathcal{F}$. Ο τελεστής ημιομάδας Koopman $U^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ συσχετισμένος με την ροή ϕ ορίζεται ως

$$U^t f = f \circ \phi(\cdot, t). \quad (22)$$

Από τον ορισμό έπεται αμέσως ότι ο U^t είναι γραμμικός. Στην συνέχεια ορίζουμε τον γεννήτορα ή απειροστό τελεστή Koopman.

Definition 0.3.2. Έστω \mathcal{D} ένα πυκνό υποσύνολο του \mathcal{F} και $f \in \mathcal{D}$. Ο απειροστός τελεστής Koopman ορίζεται ως,

$$Lf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U^t f - f}{t}. \quad (23)$$

Το ότι $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$ εξασφαλίζει την σύγκλιση του ορίου στην (23) αφού ο τελεστής είναι ισχυρά συνεχής [54]. Από τον ορισμό (21) έπεται αμέσως ότι

$$Lf(x) = F(x) \cdot \nabla f(x), \quad (24)$$

και \cdot δηλώνει το σύννηδες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n . Χρησιμοποιώντας τον απειροστό τελεστή L , μπορούμε να ορίσουμε το φάσμα του τελεστή.

Εκτός από τον απειροστό τελεστή, μπορεί να οριστεί και ο τελεστής Perron-Frobenius που συνδέεται με τον δυϊκό τελεστή του U^t , U^{*t} . Ο δυϊκός τελεστής δρά στον χώρο \mathcal{F}^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ και ικανοποιεί

$$\psi(U^t f) = (U^{*t} \psi)(f), \quad f \in \mathcal{F}, \quad \psi \in \mathcal{F}^*. \quad (25)$$

Περιορίζοντας τις παρατηρήσιμες συναρτήσεις σε ένα συμπαγή χώρο του φασικού χώρου τα συναρτησιακά μπορούν να συσχετιστούν με ένα μέτρο και αυτό (δείτε Κεφάλαιο 3) με μια L^1 συνάρτηση πυκνότητας ρ . Τότε μπορεί ο οριστεί ο τελεστής Perron-Frobenius $P^t : L^1(K) \rightarrow L^1(K)$ ως

$$(U^{*t} \psi)(f) = \int_K f(x) (P^t \rho)(x) dx. \quad (26)$$

Σε περίπτωση που το σύστημα διατηρεί το μέτρο, οι δύο τελεστές είναι αυτοσυζυγείς και adjoint, οπότε οι περιγραφές με βάση οποιονδήποτε από τους δύο είναι ισοδύναμες. Σε dissipative συστήματα, αυτό δεν ισχύει. Με παρόμοιο τρόπο με τον τελεστή Koopman, μπορούν να οριστούν ιδιοτιμές (point spectrum) και ο απειροστός τελεστής, γνωστός ως τελεστής Liouville.

Definition 0.3.3. Ορίζουμε το resolvent σύνολο του τελεστή Koopman $\rho(L)$ ως το σύνολο όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο αντίστροφος του $\lambda I - L$ υπάρχει και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής σε πυκνά υποσύνολα του \mathcal{F} .

Τώρα ορίζουμε το φάσμα του τελεστή.

Definition 0.3.4. Το φάσμα του U^t , ή ισοδύναμα του L , ορίζεται ως το συμπλήρωμα του *resolvent* συνόλου, $\sigma(L) = \mathbb{C} - \rho(L)$.

Το φάσμα μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε: point, continuous και residual [12]. Ένα $\lambda \in \sigma(L)$ ανήκει στο continuous φάσμα αν ο $\lambda I - L$ είναι ένα προς ένα, δεν είναι επί, αλλά έχει πυκνή εικόνα. Αυτή η φασματική συνιστώσα αφορά το την εργοδική συμπεριφορά ενός χαοτικού συστήματος πάνω στον ελκυστή. Το point φάσμα αποτελείται από όλα τα $\lambda \in \sigma(L)$ για τα οποία ο $\lambda I - L$ δεν είναι ένα προς ένα. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούν να οριστούν ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές του τελεστή. Αυτή η συνιστώσα είναι η πιο σημαντική και χαρακτηρίζει συστήματα τα οποία κατέχουν οριακούς κύκλους και σημεία ισορροπίας. Η residual συνιστώσα αποτελείται από όλα τα $\lambda \in \sigma(L)$ ώστε ο $\lambda I - L$ είναι ένα-προς-ένα, αλλά δεν είναι επί και δεν έχει πυκνή εικόνα.

Definition 0.3.5. Μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Koopman αντίστοιχη της ιδιοτιμής $\lambda \in \mathbb{C}$ στο point φάσμα, είναι μια συνάρτηση $\phi_\lambda \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε

$$U^t \phi_\lambda(x) = e^{\lambda t} \phi_\lambda(x) \quad (27)$$

Ισοδύναμα,

$$L \phi_\lambda(x) = \lambda \phi_\lambda(x). \quad (28)$$

Από τον ορισμό έπεται ότι αν $\phi_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_2}$ είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχες των λ_1, λ_2 , τότε η $\phi_k = \phi_{\lambda_1}^{k_1} \phi_{\lambda_2}^{k_2}$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση αντίστοιχη της ιδιοτιμής $k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2$, $k_{1,2} \in \mathbb{R}$, και αν ϕ_λ ιδιοσυνάρτηση αντίστοιχης της ιδιοτιμής λ , τότε το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $c \phi_\lambda$ για κάθε μη μηδενικό $c \in \mathbb{R}$.

Οι επεκτάσεις για τον τελεστή Perron-Frobenius πρέπει να είναι προφανείς. Σημειώνεται πως σε συστήματα που διατηρούν το μέτρο, οι ιδιοτιμές των δύο ταυτίζονται.

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ορισμένες σε όλο τον φασικό χώρο και το $U^t \phi_\lambda(x)$ είναι καλώς ορισμένο για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να ορίσουμε ιδιοσυναρτήσεις και σε μικρότερα σύνολα και να τις επεκτείνουμε στην συνέχεια σε κατάλληλα μεγαλύτερα.

Definition 0.3.6. Έστω A μη αναλλοίωτο σύνολο. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in A$, υπάρχει διάστημα I_x ώστε $\phi(x, t) \in A \forall t \in I_x$. Μια συνάρτηση ϕ_λ λέγεται *open eigenfunction* σχετική της ιδιοτιμής λ αν,

$$U^t \phi_\lambda(x) = e^{\lambda t} \phi_\lambda(x) \forall t \in I_x. \quad (29)$$

Αν το A είναι *proper* (δηλαδή τόσο κατά την προς τα μπροστά όσο και κατά την προς τα πίσω ροή) αναλλοίωτο υποσύνολο του φασικού χώρου, τότε η ϕ_λ λέγεται *subdomain eigenfunction* και $I_x = \mathbb{R}$.

Προφανώς αν το A είναι όλος ο φασικός χώρος, $I_x = \mathbb{R}$ και ϕ_λ ιδιοσυνάρτηση του U^t . Για την επέκταση των ιδιοσυναρτήσεων αυτών σε μεγαλύτερα σύνολα χρειαζόμαστε τον χρόνο που απαιτείται για ένα σημείο να φτάσει το A . Αυτός μπορεί να οριστεί διαισθητικά για θετικούς χρόνους ως

$$\phi(z, \tau) \in \text{cl}(A), \quad \phi(z, t) \notin A, \quad \forall 0 < t < \tau, \quad (30)$$

και για αρνητικούς $\tau < 0$, ως

$$\phi(z, \tau) \in \text{cl}(A), \quad \phi(z, t) \notin A, \quad \forall \tau < t < 0. \quad (31)$$

Προφανώς είναι $t(x) = 0$ αν $x \in A$. Αν P είναι το σύνολο όλων των σημείων για τα οποία ο t ορίζεται (δείτε Κεφάλαιο 3 για λεπτομερή συζήτηση) μπορούμε να επεκτείνουμε τις ιδιοσυναρτήσεις σε *open eigenfunctions* σύμφωνα με το επόμενο.

Proposition 0.3.1. Έστω A κλειστό και συνεκτικό και έστω $\phi_\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\dot{\phi}_\lambda(x) = \lambda \phi_\lambda(x), \quad x \in A. \quad (32)$$

Για $z \in P$, επεκτείνουμε την ϕ_λ ως,

$$\phi(z) = e^{-\lambda t(z)} \phi(\phi(z, t(z))). \quad (33)$$

Τότε η ϕ_λ είναι συνεχής *open eigenfunction* στο P αρκεί το t_2 ή το t_1 να είναι πεπερασμένα.

Από την ανωτέρω κατασκευή, είναι προφανές ότι αν P είναι proper αναλλοίωτο υποσύνολο του φασικού χώρου, η ϕ_λ είναι subdomain ιδιοσυνάρτηση. Αν ο P ταυτίζεται με όλο τον φασικό χώρο η ϕ_λ είναι ιδιοσυνάρτηση του U^t .

Αν υποθέσουμε ότι το (21) είναι γραμμικό, δηλαδή $F(x) = Ax$, με διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i και αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα w_i, v_i αντίστοιχα. Τότε (δείτε Κεφάλαιο 3) οι ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\phi_i = \langle x, w_i \rangle$ αντίστοιχη της λ_i και κάθε γραμμική συνάρτηση της κατάστασης αναπτύσσεται σε ένα πεπερασμένο άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή. Επίσης έπεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου είναι μια ρητή συνάρτηση με πόλους στα λ_j . Οι παρατηρήσεις αυτές θα γενικευθούν κατάλληλα και στην μη γραμμική περίπτωση.

Για λόγους πληρότητας, αν ο πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε βασιζόμενοι στην διάσπαση Jordan μπορούμε να ορίσουμε την έννοια των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων όπως παρακάτω (περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 3).

Definition 0.3.7. Μια διανυσματική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, με στοιχεία στο \mathcal{F} , λέγεται είναι ένα διάνυσμα γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων, αν υπάρχει πίνακας Jordan J , καλούμενος ιδιοπίνακας, ώστε

$$U^t \phi(x) = e^{Jt} \phi(x). \quad (34)$$

Στην γραμμική περίπτωση, η ευσταθής, η ασταθής και η κεντρική πολλαπλότητα ταυτίζονται με τους αντίστοιχους χώρους που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα. Συγκεκριμένα αν υποθέσουμε u ασταθείς ιδιοτιμές, $(\lambda_1, \dots, \lambda_u)$, c ουδέτερα ευσταθείς $(\lambda_{u+1}, \dots, \lambda_{u+c})$ και s ευσταθείς $(\lambda_{u+c+1}, \dots, \lambda_{u+c+s})$, βασιζόμενοι στο ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις, μπορούμε να εκφράσουμε τους χώρους αυτούς ως

$$\begin{aligned} M_s &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_1(x), \dots, \phi_{u+c}(x) = 0\} \\ M_c &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_1(x), \dots, \phi_u(x) = 0, \phi_{u+c+1}(x) = 0, \dots, \phi_{u+c+s}(x) = 0\} \\ M_u &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_{u+c+1}(x) = 0, \dots, \phi_{u+c+s}(x) = 0\}, \end{aligned} \quad (35)$$

όπου οι ϕ είναι (γενικευμένες) ιδιοσυναρτήσεις. Ο παραπάνω ορισμός θα επεκταθεί με εντελώς φυσιολογικό τρόπο στην μη γραμμική περίπτωση.

Ο Koopman resolvent τελεστής θα μας χρειαστεί για την επέκταση της ανάλυσης Laplace στην μη γραμμική περίπτωση.

Definition 0.3.8. Ορίζουμε τον resolvent τελεστή ως

$$R(s; L) = (sI - L)^{-1}, \quad s \in \rho(L). \quad (36)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο U^t είναι ισχυρός συνεχής και την ολοκληρωτική αναπαράσταση του resolvent τελεστή για παρατηρήσιμες ποσότητες σε κατάλληλου συναρτησιακού χώρου, προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace του $U^t f(x)$ υπάρχει και,

$$\mathcal{L}(U^t f)(s, x_0) = \int_0^\infty e^{-st} f(\phi(x_0, t)) dt = R(s, L)f(x_0), \quad \text{Re}(s) > w, \quad (37)$$

για κάποιον πραγματικό w . Παρόμοιες εκφράσεις μπορεί κανείς να λάβει για τον Fourier μετασχηματισμό παρατηρήσιμων ποσοτήτων φραγμένης κύμανσης. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική ανακατασκευή της $U^t f$ από τον μετασχηματισμό Laplace της, και υποθέτοντας ότι $w < 0$, έχουμε ότι ο Fourier μετασχηματισμός της $U^t f$ υπάρχει, συγκλίνει απολύτως και ισούται με,

$$\mathcal{F}(U^t f)(s, x_0) = \int_0^\infty f(\phi(x_0, t)) e^{-i\omega t} dt = R(i\omega, L)(f)(x_0). \quad (38)$$

Κλείνουμε την ενότητα μελετώντας την επίδραση την επίδραση της ιδιότητας της συζυγίας στον τελεστή Koopman. Αν έχουμε δύο συστήματα τα οποία είναι C^k diffeomorphic, με C^k diffeomorphism $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και με αντίστοιχες ροές $\phi_1(x, t)$ και $\phi_2(y, t)$, τότε αν $\phi_{2,\lambda}$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση (αντίστοιχη της ιδιοτιμής λ) του τελεστή Koopman συσχετισμένη με την ροή ϕ_2 , προκύπτει ότι ότι η $\phi_{2,\lambda} \circ h$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Koopman συσχετισμένη με την ροή ϕ_1 και αντίστοιχη της ίδιας ιδιοτιμής λ . Αντίστοιχο συμπέρασμα έχει κανείς και για την περίπτωση των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων.

0.3.2 Ελκυστές και Ιδιοσυναρτήσεις

Μελετάμε την σχέση μεταξύ ολικά ελκτικών ελκυστών A και του τελεστή Koopman. Τα αποτελέσματα είναι γενικά και δεν απαιτείται η υπόθεση συγκεκριμένου τύπου ελκυστή (π.χ σημείο ισοροπίας).

Proposition 0.3.2. *Ο ελκυστής A είναι ολικά ελκτικός αν και μόνος αν*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U^t f = 0, \quad (39)$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$ με $f(x) = 0, \forall x \in A$.

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 3. □

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε το επόμενο

Proposition 0.3.3. *Έστω ότι ο A είναι ολικά ελκτικός και ϕ_λ μια ιδιοσυνάρτηση. Τότε,*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda) < 0 &\iff \phi_\lambda(x) \equiv 0, \forall x \in A \\ \operatorname{Re}(\lambda) = 0 &\iff \phi_\lambda(x) \not\equiv 0, \forall x \in A \end{aligned} \quad (40)$$

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 3. □

Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που είναι ταυτοτικά ίσες με το μηδέν πάνω στον ελκυστή σχετίζονται με την ιδιότητα της ευστάθειας. Αντιθέτως οι ιδιοσυναρτήσεις που δεν είναι ταυτοτικά ίσες με το μηδέν σχετίζονται με καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές, αφού ο τελεστής Koopman περιορισμένος πάνω στον ελκυστή είναι ορθομοναδιαίος. Οι παρατηρήσεις αυτές θα προκύψουν και πάλι στην συνέχεια, όταν θα μελετήσουμε φασματικές επεκτάσεις παρατηρήσιμων ποσοτήτων.

Έστω τώρα ότι ο χώρος X είναι συμπαγής και αναλλοίωτος. Τότε έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Theorem 0.3.4. *Έστω ϕ_λ μια ιδιοσυνάρτηση με $\lambda < 0$. Τότε το σύνολο*

$$M_0 = \{x \in X \mid \phi_\lambda(x) = 0\}, \quad (41)$$

είναι αναλλοίωτο και ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 3. □

Το παραπάνω Θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που $X = \mathbb{R}^n$ αρκεί η ϕ_λ να μην μηδενίζεται στο άπειρο. Επεκτείνοντας το παραπάνω Θεώρημα έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Corollary 0.3.4.1. *Έστω $\phi_{\lambda_i}, i = 1, \dots, m$ ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή συσχετισμένες με ιδιοτιμές $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Τότε η τομή*

$$M = \bigcap_{j=1}^m \{x \in X \mid \phi_{\lambda_j}(x) = 0\}, \quad (42)$$

ορίζει ένα αναλλοίωτο και ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σύνολο.

Επομένως το σύνολο M όπως ορίστηκε παραπάνω περιλαμβάνει πάντοτε οποιονδήποτε άλλον ολικά ασυμπτωτικό ελκυστή A . Η σύνδεση με την ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα όπως ορίστηκε στην γραμμική περίπτωση πρέπει να είναι προφανής και παρακινεί τις γενικεύσεις που θα ακολουθήσουν.

0.3.3 Φασματικά Αναπτύγματα

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε τις ιδιότητες συστημάτων που έχουν οριακούς κύκλους, σημεία ισοροπίας, αναλλοίωτους τόρους ή εργοδικούς ελκυστές με ιδιαίτερη έμφαση στις δύο πρώτες περιπτώσεις. Ενδιαφερόμαστε για της συνθήκες υπό τις οποίες η χρονική εξέλιξη μιας παρατηρήσιμης ποσότητας μπορεί να αναπτυχθεί σε ένα (πιθανώς άπειρο) άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή. Μελετάμε την περίπτωση κάθε ελκυστή ξεχωριστά.

Σημεία Ισορροπίας

Υποθέτουμε ότι το σύστημα (21) έχει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας (χωρίς βλάβη της γενικότητας η αρχή των αξόνων) με περιοχή έλξης B και απαιτούμε την ακόλουθη συνθήκη μη συντονισμού (non-resonance) στις (απλές) ιδιοτιμές του [60].

Definition 0.3.9. Οι ιδιοτιμές λ_i του γραμμικοποιημένου γύρω από την αρχή συστήματος που προκύπτει από το (21), λέγονται non-resonant αν δεν υπάρχουν μη αρνητικού ακέραιοι m_i , τουλάχιστον δύο μη μηδενικοί, ώστε

$$\lambda_s = m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n, \quad s \in \{1, \dots, n\}. \quad (43)$$

Αν το πεδίο F είναι αναλυτικό και το σημείο ισορροπίας υπερβολικό, η θεωρία κανονικών μορφών [60] συνεπάγεται την ύπαρξη μιας αναλυτικής αλλαγής μεταβλητών h με $Dh(0) = I_n$, ώστε (21) και το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα να είναι C^∞ συζυγή σε μια περιοχή της αρχής.

Αφού γνωρίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις ενός γραμμικού συστήματος και βασιζόμενοι στην (40), γνωρίζουμε και τις ιδιοσυναρτήσεις του μη γραμμικού συστήματος (21) τουλάχιστον σε μια γειτονιά της αρχής,

$$s(x) = (s_1(x), \dots, s_n(x)), \quad s_j(x) = \langle h(x), w_j \rangle, \quad (44)$$

οι οποίες επίσης είναι αναλυτικές. Η απεικόνιση s παρέχει μια αναλυτική συζυγία προς το διαγώνιο γραμμικό σύστημα.

Έστω $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια επαρκώς ομαλή παρατηρήσιμη ποσότητα με $g(0) = 0$. Παρόμοια με την γραμμική περίπτωση θέλουμε να αναπτύξουμε την g στις ιδιοσυναρτήσεις s_j του μη γραμμικού συστήματος. Αφού η s είναι αναλυτική μπορούμε να καταλήξουμε στο ακόλουθο ανάπτυγμα κοντά στην αρχή (Δείτε Κεφάλαιο 3 για λεπτομέρειες),

$$g(x) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n} v_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1}(x) \dots s_n^{k_n}(x) \quad (45)$$

Τα διανύσματα $v_{k_1 \dots k_n}$ ονομάζονται Koopman modes και μαζί με τα $s_{k_1 \dots k_n}$ μπορούν να θεωρηθούν ως οι προβολές πάνω στις ιδιοτιμές $k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n$. Αν $g \equiv \text{id}$ τότε έχουμε,

$$v_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1 \dots k_n} s^{-1}}{\partial^{k_1} y_1 \dots \partial^{k_n} y_n}. \quad (46)$$

Για τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $Ds^{-1} = V$ και $s(s^{-1}) = \text{id}$ συνεπάγεται ότι $Ds_i = w_i$, όπου το w_i είναι το i -οστό αριστερό ιδιοδιάνυσμα. Επομένως για x επαρκώς μικρό $s_i(x) = \langle x, w_i \rangle$, που σημαίνει ότι σε μια περιοχή της αρχής οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να προσεγγιστούν από τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του γραμμικοποιημένου συστήματος, όπως και αναμενόταν.

Επομένως, για x σε μια γειτονιά της αρχής έχουμε,

$$U^t g(x) = \sum_{j=1}^n s_j(x) v_j e^{\lambda_j t} + \sum_{k_1 + \dots + k_n > 1} v_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1}(x) \dots s_n^{k_n}(x) \exp((k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n) t), \quad (47)$$

που δίνει την φασματική διάσπαση της χρονικής εξέλιξης μιας παρατηρήσιμης ποσότητας στα Koopman modes (v_j), στις ιδιοσυναρτήσεις (s_j) και στις ιδιοτιμές (λ_j). Το πρώτο άθροισμα αντιστοιχεί στο γραμμικό κομμάτι και το άπειρο άθροισμα στο μη γραμμικό μέρος της (21). Προφανώς αν $g(0) \neq 0$, προστίθεται ένας σταθερός όρος. Αν το ανάπτυγμα Taylor της g έχει νόημα σε όλο το πεδίο έλξης B , τότε το ανάπτυγμα (47) επεκτείνεται επίσης σε όλο το B (δείτε Κεφάλαιο 3).

Τώρα προχωράμε στον ορισμό του κατάλληλου συναρτησιακού χώρου, ο οποίος θα είναι κλειστός ως προς την δράση του τελεστή, ώστε αναπτύγματα της μορφής (45) και (46) να έχουν νόημα. Ακολουθώντας το [48, 54] ορίζουμε τον Modulated Fock Space (MFS) ως τον χώρο όλων των συναρτήσεων $g = f \circ s$ όπου $s : B \rightarrow \mathbb{C}^n$ είναι οι (αναλυτικές και μιγαδικές) ιδιοσυναρτήσεις Koopman και $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ακέραια, με

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz < \infty, \quad (48)$$

που μπορεί να οριστεί και ως το τετράγωνο της νόρμας στον χώρο. Το εσωτερικό γινόμενο από το οποίο προκύπτει η παραπάνω νόρμα είναι το,

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} f_1(z) f_2^c(z) e^{-|z|^2} dz. \quad (49)$$

Αποδεικνύεται (Δείτε το Κεφάλαιο 3 για περισσότερες λεπτομέρειες) ότι ο χώρος είναι κλειστός υπό την δράση του τελεστή Koopman, και εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο (49), είναι Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) με πυρήνα $K(z, w) = \exp(s(z) \cdot s(w))$.

Όπως ορίστηκε ο MFS, είναι ένας αναλλοίωτος ως προς την δράση του U^t χώρος και περιλαμβάνει όλες τις παρατηρήσιμες συναρτήσεις που επιδέχονται φασματικά αναπτύγματα. Παρότι οι συνθήκες μπορεί να μοιάζουν περιοριστικές, ικανοποιούνται τετριμμένα για τις περισσότερες συναρτήσεις που θα συναντήσουμε στα επόμενα. Τέλος σημειώνουμε ότι τα φασματικά αναπτύγματα επιβεβαιώνουν την ύπαρξη μόνο του point φάσματος.

Έστω τώρα g μια συνάρτηση στον MFS. Τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις (δείτε Κεφάλαιο 3) για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace και έτσι αποδεικνύεται το επόμενο Θεώρημα.

Theorem 0.3.5. Έστω f μια παρατηρήσιμη ποσότητα με $f(0) = 0$ στον MFS. Τότε η δράση του resolvent τελεστή στην f , ή ισοδύναμα ο μετασχηματισμός Laplace του $U^t f$, δίνεται από την,

$$R(z, L)f(x_0) = \sum_{j=1}^n \frac{s_j(x_0)v_j}{z - \lambda_j} + \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n, k_1 + \dots + k_n > 1} \frac{v_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1}(x_0) \dots s_n^{k_n}(x_0)}{z - (k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n)}. \quad (50)$$

Η ROC είναι η $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > \max_i \operatorname{Re}(\lambda_i)\}$.

Proof. Δείτε το Κεφάλαιο 3. □

Ο μετασχηματισμός Laplace αντιστοιχεί πλήρως στο ανάπτυγμα (47) και αποτελείται από το γραμμικό κομμάτι (πρώτο άθροισμα) και από το μη γραμμικό (δεύτερος άπειρο άθροισμα) λόγω της μη γραμμικότητας της F . Κατά αυτόν τον τρόπο έχουμε μια πλήρη αναπαράσταση της χρονικής εξέλιξης συναρτήσεων στον MFS. Προφανώς, αν $f(0) \neq 0$, προστίεται ένας όρος της μορφής $f(0)/z$ στο ανάπτυγμα Laplace και η ROC γίνεται $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Έστω τώρα ότι η nonresonance υπόθεση δεν ισχύει. Σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να έχουμε ένα ανάπτυγμα παρόμοιο με το (47), αλλά μπορούμε να αποδείξουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με συζυγίες. Υποθέτουμε ότι η αρχή είναι ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας με απλές ιδιοτιμές. Το Θεώρημα του Hartman συνεπάγεται την ύπαρξη ενός C^1 diffeomorphism h ορισμένου σε μια περιοχή N της αρχής, ώστε

$$U^t h(x) = e^{Jt} h(x), \quad x \in N, \quad t \in I(x), \quad (51)$$

J όπου είναι ο Jacobian πίνακας και $I(x)$ είναι ένα διάστημα εξαρτώμενο από το x . Επιπλέον αν $k = V^{-1}h$, όπου ο V περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του J , τότε η συζυγία k έχει τις ιδιοσυναρτήσεις Koopman ως στοιχεία παρόμοια με το (44). Η συζυγία μπορεί να επεκταθεί σε όλο το B (δείτε Κεφάλαιο 3), αρκεί το σημείο ισορροπίας να είναι ευσταθές [48]. Η περίπτωση ενός ασταθούς σημείου ισορροπίας είναι παρόμοια με αντιστροφή του χρόνου. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση οι συναρτήσεις $k = V^{-1}h \in C^1(B)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις της (21) σε όλο το πεδίο έλξης B . Προφανώς αν ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται, ισχύουν τα αυτά συμπεράσματα, αλλά για τις γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις.

Για υπερβολικά σαγματικά σημεία ισορροπίας, οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να επεκταθούν σε open eigenfunctions στο P και οι ολικές ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες, W_P^u, W_P^s στο P είναι προφανώς ισοδύναμες με αυτές στην (35).

Έστω τώρα ότι το σημείο ισορροπίας είναι μη υπερβολικό. Υποθέτουμε u ασταθείς ιδιοτιμές $(\lambda_1, \dots, \lambda_u)$, c ουδέτερα ευσταθείς $(\lambda_{u+1}, \dots, \lambda_{u+c})$ και s ευσταθείς $(\lambda_{u+c+1}, \dots, \lambda_{u+c+s})$, όλες απλές. Από το Θεώρημα Palmer ² [33], αν γράψουμε την Jacobian σε δυο μπλοκ A, B κάθε ένα από τα οποία σχετίζεται με τις μηδενικού και μη μηδενικού πραγματικού μέρους ιδιοτιμές, τότε (21) είναι C^0 συζυγής με το σύστημα,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + r(x) \\ \dot{y} &= Ay. \end{aligned} \quad (52)$$

²Απαιτεί φραγμένους μη γραμμικούς όρους στην F .

Τότε χρησιμοποιώντας την (52) αποδεικνύεται ότι ο τελεστής Koopman έχει u ασταθείς ιδιοτιμές s_1, \dots, s_u και s ευσταθείς s_{u+1}, \dots, s_{u+s} . Επομένως η τομή των zero-level συνόλων, όπως έχουν οριστεί στην (35), αποτελούν τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες, και αντίστοιχα η κεντρική πολλαπλότητα δίνεται πάλι από την (35). Οι τροποποιήσεις για την περίπτωση που ο A δεν διαγωνοποιείται πρέπει να είναι προφανείς.

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον τελεστή Koopman έχουμε γενικεύσει τους ορισμούς για την ευσταθή, ασταθή και κεντρική πολλαπλότητα δυναμικών συστημάτων που κατέχουν σημεία ισορροπίας. Έχουμε επίσης αποδείξει ότι υπό την συνθήκη nonresonance για τις ιδιοτιμές, η χρονική εξέλιξη μιας παρατηρήσιμης ποσότητας μπορεί να αναπτυχθεί σε ένα άπειρο άθροισμα Koopman ιδιοσυναρτήσεων σχετικών με ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος και με αυτόν τον τρόπο να έχουμε τον μετασχηματισμό Laplace της.

Οριακοί Κύκλοι

Υποθέτουμε ότι η (21) κατέχει έναν υπερβολικό, ευσταθή οριακό κύκλο με πεδίο έλξης B και συχνότητας ω . Θεωρούμε την διάσπαση Floquet $\Phi(t, 0) = U(t)e^{Dt}U^{-1}(0)$ για τον θεμελιώδη πίνακα, όπου ο πίνακας U είναι $T = 2\pi/\omega$ περιοδικός, $e^{DT} = \text{diag}(1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ και $1 > |\mu_1| > \dots > |\mu_{n-1}|$ είναι οι Floquet πολλαπλασιαστές. Το ότι $|\mu_i| < 1$, προκύπτει από τις υποθέσεις υπερβολικότητας και ευστάθειας. Ορίζουμε τους εκθέτες Floquet ως $\lambda_i = 2\pi \log(\mu_i)/\omega$. Σημειώνεται ότι οι $1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ είναι ιδιοτιμές του monodromy matrix $\Phi(2\pi/\omega, 0)$.

Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα (δείτε Κεφάλαιο 3) συνεπάγεται ότι εντός του B , η (21) μπορεί να μετασχηματιστεί στην

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(\theta)y \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (53)$$

όπου ο A είναι 2π περιοδικός. Πρακτικά διαχωρίζει το διάνυσμα κατάστασης σε μεταβλητές εντός και εκτός ελκυστή.

Έστω τώρα $g(y, \theta)$ μια διανυσματική συνάρτηση, αναλυτική ως προς y (εκτός ελκυστή μεταβλητή) και L^2 στην θ (πάνω στον ελκυστή μεταβλητή). Οι ιδιοσυναρτήσεις που σχετίζονται με τους εκθέτες Floquet είναι

$$z(y, \theta) = U^{-1}(\theta)y \quad (54)$$

όπου ο πίνακας $U \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ είναι ο περιοδικός πίνακας Floquet των y συντεταγμένων στην (53). Σημειώνουμε ότι ο U^{-1} είναι ο πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι τα αριστερά ιδιοδιανύσματα Floquet, ώστε $z_i(y, \theta) = \langle y, w_i \rangle$ (η ομοιότητα με την περίπτωση των σημείων ισορροπίας πρέπει να είναι εμφανής).

Επομένως παρόμοια με την (45) μπορούμε να αναπτύξουμε την g σε ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή (δείτε Κεφάλαιο 3),

$$g(y, \theta) = \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}, k \in \mathbb{Z}} a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k} z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}, \quad (55)$$

όπου τα $a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k}$ είναι τα Koopman modes. Σημειώνουμε ότι

$$e_i^T \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=0} \sim w_i, \quad (56)$$

το οποίο σημαίνει ότι κοντά στον οριακό κύκλο, το ανάπτυγμα προσεγγίζεται από το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο (ανάπτυγμα Floquet). Το ανάπτυγμα στην (55) είναι παρόμοιο με το (45) και δείχνει ότι μια παρατηρήσιμη ποσότητα αναλυτική στις y μεταβλητές και L^2 στην θ επεκτείνεται σε ιδιοσυναρτήσεις Koopman. Σημειώνουμε ότι η g είναι συνάρτηση των μετασχηματισμένων μεταβλητών (y, θ) . Αυτές συνδέονται διαφορομορφικά με τις αρχικές συντεταγμένες x μέσω της $(y, \theta) = (h_1(x), h_2(x))$, ώστε $s_i(x) = z_i \circ h_1$, $s_n = e^{ih_2}$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις Koopman συσχετισμένες με τους εκθέτες Floquet και την ιδιοτιμή $i\omega$, αντίστοιχα, στις αρχικές συντεταγμένες. Οι ιδιοτιμές παραμένουν αναλλοίωτες. Από την (55) έχουμε την χρονική εξέλιξη της g ως,

$$U^t g(y, \theta) = \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}, k \in \mathbb{Z}} e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_{n-1} \lambda_{n-1} + i\omega k)t} a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k} z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}. \quad (57)$$

Παρόμοια παίρνει κανείς το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης $G(x)$ εκπεφρασμένης στις αρχικές μεταβλητές. Συνοψίζοντας, στην περίπτωση των οριακών κύκλων έχουμε ιδιοσυναρτήσεις $s_i = z_i$ ο h συσχετισμένες με τις λ_i και την $s_n = e^{ih_2(x)}$ αντίστοιχη της $i\omega$. Στην (57), για $m_i = 0$, έχουμε την λύση σταθερή κατάστασης η οποία αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα Fourier του οριακού κύκλου, επιβεβαιώνοντας ότι ο περιορισμός του τελεστή πάνω στον ελκυστή είναι ορθομοναδιαίος. Γενικώς, οι ιδιοτιμές του τελεστή έχουν την μορφή $\lambda = m_1\lambda_1 + \dots + m_{n-1}\lambda_{n-1} + ik\omega$ με αντίστοιχη ιδιοσυναρτηση,

$$z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}, s_1^{m_1} \dots s_{n-1}^{m_{n-1}} s_n^k. \quad (58)$$

Σημειώνουμε ότι πάνω στο ελκυστή \mathcal{A} (οριακό κύκλο) ο τελεστής Koopman $U^t|_{\mathcal{A}}$ είναι ορθομοναδιαίος και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι μεταξύ τους ορθογώνιες στο \mathcal{A} . Ο κατάλληλος συναρτησιακός χώρος MFS που περιλαμβάνει τις $g(y, \theta)$ αναλυτικές ως προς y και L^2 ως προς θ μπορεί να γίνει με παρόμοιο τρόπο με την περίπτωση των σημείων ισορροπίας, με την διαφορά ότι τώρα δεν απαιτούμε τον μηδενισμό των παρατηρήσιμων ποσοτήτων επί του ελκυστή. Περισσότερες λεπτομέρειες για την κατασκευή και ιδιότητες του χώρου βρίσκονται στο Κεφάλαιο 3. Το σημαντικό είναι ότι οι παρατηρήσιμες ποσότητες που θα χρησιμοποιήσουμε μπορούν να θεωρηθούν ότι ανήκουν σε αυτόν, ώστε φασματικά αναπτύγματα να έχουν νόημα σε όλο το B .

Για g στον MFS, αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και έτσι έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Theorem 0.3.6. Έστω g μια παρατηρήσιμη ποσότητα στον MFS. Η δράση του resolvent τελεστή στην g , ή ισοδύναμα ο μετασχηματισμός Laplace του $U^t g$, δίνεται από την

$$R(s, L)g(x_0) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}} \frac{a_{k_1, \dots, k_{n-1}, m} z_1^{k_1}(x_0) \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}(x_0) e^{ik\theta(x_0)}}{s - (k_1\lambda_1 + \dots + k_{n-1}\lambda_{n-1} + im\omega)}, \quad (59)$$

με $ROC \{s \in \mathbb{C} | \text{Re}(s) > 0\}$.

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 3. □

Ο μετασχηματισμός Laplace αντιστοιχεί πλήρως στο ανάπτυγμα (57) και αποτελείται από τον μετασχηματισμό Fourier της λύσης σταθερής κατάστασης που εξελίσσεται πάνω στον κύκλο (πρώτο άθροισμα, $k_i = 0$) και από την συνεισφορά της μη γραμμικότητας της F (άπειρος δεύτερος όρος). Κατά αυτόν τον τρόπο έχουμε μια πλήρη αναπαράσταση των παρατηρήσιμων ποσοτήτων στον MFS.

Αν υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές λ_j είναι απομονωμένες, τότε το θεώρημα υπολοίπων μπορεί να εφαρμοστεί και μας δίνει αμέσως το ανάπτυγμα (57), από το οποίο ο μετασχηματισμός Laplace έπεται επίσης (59). Σε αυτήν την περίπτωση ο μετασχηματισμός Laplace θα ήταν μια μερόμορφη συνάρτηση κατά αντιστοιχία με την γραμμική περίπτωση. Ωστόσο, σε κατάλληλους συναρτησιακούς χώρους, το ανάπτυγμα (57) και ο μετασχηματισμός Laplace (59) ισχύουν ανεξάρτητα από το αν οι ιδιοτιμές είναι απομονωμένες.

Κατά αντιστοιχία μπορεί κανείς να ορίζει ευσταθείς, ασταθείς και κεντρικές πολλαπλότητες για τους οριακούς κύκλους ως το την από κοινού τομή των zero level συνόλων των ασταθών, ευσταθών και ευσταθών-ασταθών ιδιοσυναρτήσεων αντίστοιχων των εκθετών Floquet. Οι ορισμοί (35) εφαρμόζονται αμέσως.

Κλείνουμε την ενότητα επισημαίνοντας ότι στην περίπτωση των οριακών κύκλων δεν απαιτείται καμία nonresonance υπόθεση όπως στην περίπτωση των σημείων ισορροπίας.

Αναλλοίωτοι Τόροι

Η ανάλυση που θα ακολουθήσει πάνω στους ημιπεριοδικούς ελκυστές αποτελεί φυσική επέκταση των προηγούμενων ιδεών.

Υποθέτουμε ότι η (21) επιδέχεται έναν ημιπεριοδικό ελκυστή, δηλαδή υπάρχει ένας m διαστατος, αναλλοίωτος τόρος. Πάνω στον τόρο η δυναμική του συστήματος είναι συζυγής με την

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \theta \in S^m, \quad \omega \in \mathbb{R}^m. \quad (60)$$

Στις συνέχεια υποθέτουμε την KAM συνθήκη για τις μη συντονισμένες συχνότητες ω_i [60],

$$|k \cdot \omega| \geq \gamma/|k|^\tau, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad (61)$$

για κάποια $\gamma, \tau > 0$, όπου $|k| = \max_i |k_i|$. Τονίζουμε ότι οι KAM συνθήκη είναι γενική με την έννοια ότι οι συχνότητες που την ικανοποιούν έχουν μέτρο 1. Επιβάλλοντας κάποιες επιπλέον συνθήκες στο γραμμικοποιημένο σύστημα (δείτε Κεφάλαιο 3) ο θεμελιώδης πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος μπορεί να διασπαστεί σε έναν ημιπεριοδικό πίνακα U και έναν διαγώνιο πίνακα D με $n - m$ Floquet πολλαπλασιαστές με $|\mu_i| < 1$. Χρησιμοποιώντας μια συζυγία σε όλο το πεδίο έλξης (δείτε Κεφάλαιο 3) αντίστοιχη με την (53), μπορούμε να φέρουμε το σύστημα στην μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(\theta)y \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned}, \quad y \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad \theta \in S^m. \quad (62)$$

Παρόμοια με την περίπτωση του οριακού κύκλου μπορούμε να βρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στους $n - m$ Floquet εκθέτες, ενώ οι υπόλοιπες m θα έχουν την μορφή $e^{i\theta_i}$, ώστε γενικά μια ιδιοσυνάρτηση να έχει την μορφή,

$$z_1^{k_1} \dots z_{n-m}^{k_{n-m}} e^{i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)}, \quad (63)$$

αντίστοιχη της ιδιοτιμής $k_1\lambda_1 + \dots + k_{n-m}\lambda_{n-m} + i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)$. Οι ιδιοτιμές με $k_i = 0$ αντιστοιχούν στο φάσμα του τελεστή όταν αυτός περιοριστεί στον ελκυστή επιβεβαιώνοντας ότι είναι ορθομοναδιαίος. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις παρατηρήσιμες ποσότητες που είναι αναλυτικές στις (y) μεταβλητές και L^2 στις (θ) μπορούν να αναπτυχθούν ως,

$$g(y, \theta) = \sum_{\{k_1, \dots, k_{n-m}\} \in \mathbb{N}^{n-m}, \{\ell_1, \dots, \ell_m\} \in \mathbb{Z}^m} a_{k_1, \dots, k_{n-m}, \ell_1, \dots, \ell_m} z_1^{k_1} \dots z_{n-m}^{k_{n-m}} e^{i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)}, \quad (64)$$

Η κατασκευή του συναρτησιακού χώρου γίνεται παρόμοια. Η χρονική εξέλιξη μιας παρατηρήσιμης ποσότητας δίνεται από την

$$U^t g(y, \theta) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-m} \in \mathbb{N}, \ell_1, \dots, \ell_m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-m} + i(\omega_1 + \dots + \omega_{n-m})t)} a_{k_1, \dots, k_{n-m}, \ell_1, \dots, \ell_m} z_1^{k_1} \dots z_{n-m}^{k_{n-m}} e^{i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)} \quad (65)$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της,

$$R(s, L)g(x_0) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}, \ell_1, \dots, \ell_m \in \mathbb{Z}} \frac{a_{k_1, \dots, k_{n-m}, \ell_1, \dots, \ell_m} z_1^{k_1}(x_0) \dots z_{n-m}^{k_{n-m}}(x_0) e^{i(\ell_1\theta_1(x_0) + \dots + \ell_m\theta_m(x_0))}}{s - (k_1\lambda_1 + \dots + k_{n-m}\lambda_{n-m} + i(\ell_1\omega_1 + \dots + \ell_m\omega_m))}. \quad (66)$$

Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν και για την μορφή του μετασχηματισμού. Σημειώνεται ότι για την εξαγωγή των αναπτυγμάτων απαιτείται μια nonresonance συνθήκη στις συχνότητες, κατά αντιστοιχία με τα σημεία ισορροπίας. Επιπλέον αυτά τα συστήματα παρέχουν ένα απλό παράδειγμα μη απομονωμένων ιδιοτιμών, αφού υπό την υπόθεση μη συντονισμού, η ιδιοτιμή $\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή. Κλείνουμε με την παρατήρηση ότι και στις τρεις περιπτώσεις που μελετήθηκαν ως τώρα το φάσμα του τελεστή ταυτίζεται με την point συνιστώσα του. Παρακάτω, όπου θα μελετηθούν γενικότερα εργοδικοί ελκυστές, θα προκύψει και μια συνεχής συνιστώσα που οφείλεται στην πιθανώς χαοτική συμπεριφορά.

Γενικότεροι Ελκυστές

Παρότι ενδιαφερόμαστε κυρίως για τους παραπάνω τρεις τύπου ελκυστών στην παρούσα ενότητα δείχνουμε πώς μπορούν τα προηγούμενα αποτελέσματα να γενικευθούν σε συστήματα με διασπορά που κατέχουν Milnor ελκυστές. Σε αυτήν την περίπτωση θα προκύψει και η συνεχής συνιστώσα του φάσματος.

Υποθέτουμε ότι το (21) επιδέχεται έναν ολικό, συμπαγή ελκυστή A , με (συμπαγή)³ πεδίο έλξης B , στο οποίο η δυναμική είναι εργοδική. Όταν ο U^t περιοριστεί στον A , είναι ορθομοναδιαίος [54] στον χώρο

³Αν δεν είναι συμπαγής, θεωρούμε ένα συμπαγές υποσύνολό του B .

συναρτήσεων $L^2(A)$, ως προς το μέτρο μ , και οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως ορισμένες σε όλο το B και συμβολίζουμε τον χώρο τους με H_A . Αντίστοιχα με τις (53) και (62), αν A είναι μια κανονικά υπερβολική m διαστατη πολλαπλότητα και συγκεκριμένες φασματικές συνθήκες συντρέχουν [53], η (21) είναι C^r συζυγής σε μια γειτονιά του A με το,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= A(u)y \\ \dot{u} &= \omega(u),\end{aligned}\tag{67}$$

όπου οι μεταβλητές u αντιστοιχούν σε μεταβλητές πάνω στον ελκυστή και οι y σε έξω από τον ελκυστή. Οι μεταβλητές (u, y) επεκτείνονται σε ολόκληρο το πεδίο έλξης B (δείτε Κεφάλαιο 3). Έστω τώρα H_B είναι ο χώρος Hilbert των συναρτήσεων που είναι ορθογώνιες προς αυτές στο H_A . Η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με την $f \equiv 0$ στο A [48]. Είναι προφανές ότι ο H_B είναι αναλλοίωτος υπό την δράση του U^t . Αν $H'_B = H_b \cup 1$, όπου 1 συμβολίζει τις σταθερές στο B συναρτήσεις, και $H = H'_B \otimes H_A$ είναι ο χώρος που παράγεται από το τανυστικό γινόμενο των χώρων αποδεικνύεται [48] ότι

$$\sigma(U^t) = \text{cl} \left[\bigcup_{a \in \sigma(U^t|_{H_A}), b \in \sigma(U^t|_{H_B})} a + b \right],\tag{68}$$

όπου το cl συμβολίζει το closure του συνόλου. Συγκεκριμένα αν (s_1, \dots, s_n) είναι οι ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχες των ιδιοτιμών με αρνητικά μέρη $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ τότε

$$\sigma(U^t) = \text{cl} \left(\sigma(U^t|_{H_A}) + k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n \right), \{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n.\tag{69}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύει τα αποτελέσματα που είχαμε συνάγει για τους προηγούμενους ειδικού τύπου ελκυστές και δείχνει ότι το φάσμα μπορεί να διασπαστεί σε δύο συνιστώσες, μια που εξαρτάται από τις εκτός του ελκυστή μεταβλητές και μια που εξαρτάται από τις επί του ελκυστή μεταβλητές. Η διαφορά έγκειται στο ότι το $\sigma(U^t|_{H_A})$ μπορεί γενικά να περιλαμβάνει και συνεχή συνιστώσα. Ο τρόπος που οι προηγούμενες περιπτώσεις προκύπτουν ως ειδική περίπτωση των παραπάνω είναι προφανής (δείτε Κεφάλαιο 3). Οι Reproducing Kernel Hilbert Spaces όπως είχαν οριστεί στις προηγούμενες περιπτώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό του H'_B . Συγκεκριμένα ορίζουμε ως H'_B τον όλων των ακεραίων συναρτήσεων $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ που μηδενίζονται στον A , ώστε

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(s_1(z), \dots, s_n(z))|^2 e^{-(|s_1|^2 + \dots + |s_n|^2)} dz < \infty.\tag{70}$$

Η νόρμα και το εσωτερικό γινόμενο μπορούν να οριστούν με τον γνωστό τρόπο. Ο ορισμός αυτός είναι συνεπής με αυτόν των ειδικών περιπτώσεων. Σημειώνουμε ότι στις προηγούμενες κατασκευές των χώρων Hilbert, δεν απαιτήσαμε οι παρατηρήσιμες συναρτήσεις να μηδενίζονται στον ελκυστή αφού ορίζαμε απευθείας τον H αντί του H'_B .

Σε ό,τι αφορά τον χαρακτηρισμό του φάσματος επί του ελκυστή $\sigma(U^t|_A)$, ο τελεστής Koopman μπορεί να διασπαστεί ως [48],

$$U^t|_A = \sum_{j=1}^{\infty} P_j e^{i\omega_j t} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dE(\omega).\tag{71}$$

Ο πρώτος όρος εκφράζει το point spectrum του τελεστή και οφείλεται στην σχεδόν περιοδική κίνηση πάνω στον ελκυστή. Ο τελεστής P_j είναι ο τελεστής προβολής, προβάλλοντας μια συνάρτηση $g \in L^2(A)$ πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις $\phi_{i\omega_j}$. Σημειώνεται ότι οι ιδιοτιμές $i\omega_j$ είναι καθαρά φανταστικές αφού ο $U^t|_A$ είναι ορθομοναδιαίος και είναι απλές από την υπόθεση της εργοδικότητας.

Ο δεύτερος όρος εκφράζει την συνεισφορά της συνεχούς συνιστώσας του φάσματος, όπου το E συμβολίζει ένα συνεχές φασματικό μέτρο. Αποδεικνύεται ότι η δράση του resolvent τελεστή (και αντίστοιχα ο μετασχηματισμός Laplace του $U^t g(x_0)$ όταν υπάρχει) σε μια συνάρτηση g δίνεται από την

$$R(s, L_A)g(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(x_0)V_j}{s - i\omega_j} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(\omega)}{s - i\omega} g(x_0), \text{Re}(s) > 0\tag{72}$$

η οποία εκφράζει την σχεδόν περιοδική και την περιοδική συνιστώσα της κίνησης επί του ελκυστή. Από την (72), οι περιοδικές και ημιπεριοδικές ελκυστές είναι ειδικές περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχει καθόλου απεριοδική συνιστώσα και η περιοδική συνιστώσα εκφράζει την κίνηση στην μόνιμη κατάσταση.

Ένα απλό παράδειγμα συστήματος με συνεχές φάσμα είναι το απλό εκρεμμές το οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί στις μεταβλητές δράσης-γωνίας (για $I \in [a, b]$)

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0 \\ \dot{\theta} &= I. \end{aligned} \quad (73)$$

Είναι προφανές ότι κάθε $g(I, \theta) = g(I)$ είναι ιδιοσυνάρτηση αντίστοιχ της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ ενώ δεν υπάρχουν ιδιοσυναρτήσεις εξαρτώμενες από το θ . Ωστόσο είναι προκύπτει ότι οι γενικευμένες συναρτήσεις $g(I, \theta) = e^{i\theta} \delta(I - c)$, που αντιστοιχούν σε μέτρα είναι ιδιοσυναρτήσεις και αναφέρονται ως ιδιο-μέτρα. Επομένως το σύστημα έχει συνεχές φάσμα. Για τετραγωνικά ολοκληρώσιμη $f(I, \theta)$, και κατάλληλα ορισμένο μέτρο έχουμε

$$U^t f(I, \theta) = f^*(I) + \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta t} dP_{\beta} (f(I, \theta)), \quad (74)$$

με $f^*(I)$ την μέση τιμή της f που είναι σε συνέπεια με την (3.139).

0.3.4 Μεταβλητές Δράσης-Γωνίας για Συστήματα με Διασπορά: Σημεία Ισορροπίας

Επεκτείνουμε τον ορισμό μεταβλητών δράσης-γωνίας από τα Χαμιλτονιανά συστήματα σε συστήματα με διασπορά που έχουν σημεία ισορροπίας. Οι ιδέες θα εφαρμοστούν αντίστοιχα και σε συστήματα με οριακούς κύκλους.

Υποθέτουμε ότι η (21) έχει την αρχή ως ευσταθές σημείο ισορροπίας με ιδιοτιμές $0 > \text{Re}(\lambda_1) > \dots > \text{Re}(\lambda_n)$, η nonresonance συνθήκη ισχύει, έστω B η περιοχή έλξης, και έστω g μια κατάλληλη παρατηρήσιμη ποσότητα. Τότε ο όρος $s_1(x) v_1 e^{\lambda_1 t}$ κυριαρχεί στην χρονική εξέλιξη όπως προκύπτει από την (47). Ορίζουμε τα isostables ως ακολούθως.

Definition 0.3.10. Υπό τις προηγούμενες υποθέσεις ορίζουμε τα isostables \mathcal{I}_{τ} ως

$$\mathcal{I}_{\tau} = \{x \in B \mid a|s_1(x)| = e^{\text{Re}(\lambda_1)\tau}\}, \quad (75)$$

και $a = 1$ αν $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και $a = 2$ διαφορετικά.

Η διάκριση οφείλεται στην ύπαρξη συζυγών όρων στην περίπτωση μιγαδική ιδιοτιμής. Σε κάθε περίπτωση τα επιπεδοσύνολα $|s_1|$ αντιστοιχούν στα isostables και ποσοτικοποιούν την σύγκλιση προς το σημείο ισορροπίας. Ισοδύναμα θα μπορούσαν να οριστούν ως,

$$\mathcal{I}_{\tau} = \left\{ x \in B \mid \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\text{Re}(\lambda_1)t} \left\| \phi(x, t) - a|s_1(x)| \text{Re} \left(a_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi)} \right) e^{\text{Re}(\lambda_1)t} \right\| = 0 \right\}, \quad (76)$$

όπου $\varphi \in [0, 2\pi)$ για $a = 2$ και $\varphi = 0$ ή π διαφορετικά. Η επέκταση σε ασταθή σημεία ισορροπίας γίνεται με αντιστροφή του χρόνου.

Αποδεικνύεται (δείτε Κεφάλαιο 3) ότι η ροή $\phi(T, \cdot)$ απεικονίζει τα isostables \mathcal{I}_{τ} στα isostables $\mathcal{I}_{\tau+T}$. Επιπλέον, αν $x \in \mathcal{I}_{\tau}$ και $x' \in \mathcal{I}_{\tau'}$ έπεται ότι

$$\tau - \tau' = \frac{1}{\text{Re}(\lambda_1)} \log \left| \frac{s_1(x)}{s_1(x')} \right|, \quad (77)$$

Αν η ιδιοτιμή $\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1$ είναι μιγαδική, μπορούμε να ορίσουμε τα isochrons ως τα επιπεδοσύνολα του $\arg(s_1(x))$. Είναι προφανώς αναλλοίωτα ως προς την απεικόνιση $\phi(2\pi/\omega_1, \cdot)$. Αν $|s_1| = r_1$ και $\arg(s_1) = \theta_1$, υποθέτοντα ότι λ_1 είναι μιγαδική, έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1. \end{aligned} \quad (78)$$

Επομένως τα isostables αφορούν την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας ενώ τα isochrons την έννοια της φάσης. Έτσι, στην περίπτωση των σημείων ισορροπίας, τα isostables είναι η πιο σημαντική μεταβλητή. Στην περίπτωση επίπεδων συστημάτων τα isostables-isochrons παρέχουν ισοδύναμες μεταβλητές δράσης-γωνίας για το σύστημα (78) και έχουμε μια ένα προς ένα σχέση ανάμεσα στις (x, y) μεταβλητές και τις μεταβλητές δράσης-γωνίας (r_1, θ_1) εντός του B . Αν η διάσταση είναι μεγαλύτερη από 2 (ή η ιδιοτιμή πραγματική), τότε περισσότερες ιδιοσυναρτήσεις Koopman σχετικές με τις $\lambda_i, i \geq 2$ θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να παρέχουν ένα προς ένα αντιστοιχία.

Κοντά στο σημείο ισορροπία οι ιδιοσυναρτήσεις s_1 προσεγγίζονται ως $\langle x, w_1 \rangle$. Επομένως τα isostables είναι παράλληλα υπερεπίπεδα για $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και κυλινδρικές επιφάνειες με σταθερό αν άξονα για μιγαδική λ_1 .

Αριθμητικές Μέθοδοι

Οι ιδιοσυναρτήσεις Koopman παρέχουν ισοδύναμες μεταβλητές δράσης-γωνίας. Τα isostables ου αποτελούν και την πιο σημαντική μεταβλητή στην περίπτωση αυτή μπορούν να υπολογιστούν αριθμητικά με βάση το παρακάτω Θεώρημα.

Theorem 0.3.7. *Αν f μια παρατηρήσιμη ποσότητα ⁴ με $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$ και λ_1 η κυρίαρχη ιδιοτιμή. Θεωρούμε το Laplace average*

$$f_{\lambda_1}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t} dt. \quad (79)$$

Τότε η f_{λ_1} είναι μη-τετριμμένη ιδιοσυνάρτηση αντίστοιχη της λ_1 και τα επίπεδοσύνολα $|f_{\lambda_1}|$ αντιστοιχούν στα isostables, ώστε αν $x \in \mathcal{I}_\tau$ και $x' \in \mathcal{I}_{\tau'}$, να ισχύει ότι

$$|f_{\lambda_1}(x)| = |f_{\lambda_1}(x')| \iff \tau = \tau' \quad (80)$$

Proof. Δείτε για την απόδειξη το Κεφάλαιο 3. □

Το παραπάνω Θεώρημα παρέχει επίσης έναν τρόπο υπολογισμού των isochrons στην περίπτωση μιγαδικής ιδιοτιμής. Ανώτερης τάξης ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να υπολογιστούν ως

$$f_{\lambda_k}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(f(\phi(x, t)) - f_{\lambda_1}(x) e^{\lambda_1 t} - \dots - f_{\lambda_{k-1}}(x) e^{\lambda_{k-1} t} \right) e^{-\lambda_k t} dt. \quad (81)$$

Αν η ιδιοτιμή είναι πραγματική αποδεικνύεται (δείτε Κεφάλαιο 3)

$$f_{\lambda_1}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\phi(x, t)) e^{-\sigma_1 t}. \quad (82)$$

Η παραπάνω δίνει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού χωρίς το αριθμητικό πρόβλημα αστάθειας κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

0.3.5 Αναγωγή σε Μεταβλητές Δράσης-Γωνίας για Περιοδικά Συστήματα

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε το πρόβλημα ορισμού μεταβλητών δράσης-γωνίας (ισοδύναμα πλάτους-φάσης) στην περίπτωση περιοδικών συστημάτων. Η μέθοδος της αναγωγής σε μοντέλα φάσης είναι πολύ δημοφιλής στους ταλαντωτές και έχει αναπτυχθεί ανεξάρτητα από το πλαίσιο του τελεστή Koopman [21, 64, 28, 50, 15]. Η θεωρία Koopman όμως γενικεύει και ενοποιεί την προσέγγιση.

Η κλασική Προσέγγιση

Υποθέτουμε ότι η (21) επιδέχεται έναν ευσταθή, υπερβολικό οριακό κύκλο Γ με πεδίο έλξης B , συχνότητα ω , περίοδο $2\pi/\omega$ και εκθέτες Floquet $1 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1}$. Έστω $x_0 \in \Gamma$, τότε $\phi(x_0, t)$ είναι μια παραμετροποίηση της Γ . Είναι φυσικό να οριστεί μια φάση $\theta \in [0, 2\pi/\omega)$ σε κάθε σημείο $x \in \Gamma$ ως

$$x = \phi(x_0, \theta/\omega). \quad (83)$$

⁴Δεν ανήκει απαραίτητα στον MFS όπως ορίστηκε νωρίτερα, αλλά βοηθάει την συζήτηση να υποτεθεί ότι ανήκει.

Το σημείο μηδενικής φάσης x_0 επιλέγεται αυθαίρετα και η θ αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο. Ο ορισμός της φάσης μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου έλξης του οριακού κύκλου μέσω της έννοιας των isochrons. Το συμπλήρωμα του B αναφέρεται ως phaseless set [28]. Τα isochrons ορίζονται ως ακολούθως (δεν πρέπει να συγχέονται με τα isochrons των σημείων ισορροπίας).

Definition 0.3.11. Υποθέτοντας ότι η (21) επιδέχεται έναν ευσταθή, υπερβολικό οριακό κύκλο πεδίο έλξης B , ορίζουμε το isochron \mathcal{I}_θ αντίστοιχο της φάσης θ ως,

$$\mathcal{I}_\theta = \left\{ x \in B \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(x, t) - \phi(x_0, t + \theta)\| = 0 \right\}. \quad (84)$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι τα isochrons είναι τα σύνολα σημείων που μοιράζονται την ίδια ασυμπτωτική φάση, με την έννοια ότι συγκλίνουν προς την ίδια τροχιά στην μόνιμη κατάσταση. Η φάση εξελίσσεται γραμμικά για κάθε $x \in B$ και μπορεί να θεωρηθεί η μεταβλητή γωνίας για το σύστημα. Αποδεικνύεται ότι τα isochrons είναι [64] $n - 1$ διαστατες πολλαπλότητες που διαιρούν το πεδίο έλξης. Είναι αναλλοίωτα ως προς την απεικόνιση $\phi(\cdot, 2\pi/\omega)$ που ορίζει μια επεικόνιση Poincaré.

Αν (21) διαταραχθεί από μια συνάρτηση $g(x, t)$ περιόδου T_1 ώστε η μεταβλητή κατάσταση να παραμένει πάντα μέσα στο B , έχουμε για την φάση

$$\dot{\theta} = \nabla\theta \cdot (F(x) + g(x, t)) = \omega + \nabla\theta \cdot g(x, t), \quad (85)$$

Αν και η παραπάνω σχέση ισχύει εντός όλου του πεδίου έλξης, ο υπολογισμός του $\nabla\theta$ είναι δύσκολος και χωρίς την θεωρία Koopman δεν υπάρχει τρόπος να βρεθεί. Επιπλέον η εξίσωση είναι πεπλεγμένη με την κατάσταση x . Για αυτό συχνά προσεγγίζεται σε πρώτη τάξη, ώστε το $\nabla\theta$ να προσεγγίζεται από $\nabla\theta|_{\phi(x,t)} = Q(\theta)$ και η $g(x, t)$ από την $g(\phi(x_0, \theta/\omega), t) = g(\theta, t)$. Η συνάρτηση $Q(\theta)$ μπορεί να βρεθεί ως η περιοδική λύση της

$$\dot{z} = - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\phi(x_0, t)}^T z, \quad (86)$$

με την συνθήκη κανονικοποίησης $Q(0) \cdot F(x_0) = \omega$. Επομένως η προσέγγιση πρώτης τάξης είναι η

$$\dot{\theta} = \omega + Q(\theta)^T g(\theta, t). \quad (87)$$

Παρότι η εξίσωση εξαρτάται μόνο από το θ , χρησιμοποιούνται περαιτέρω προσεγγίσεις [50, 21, 28] για να την κάνουν αυτόνομη. Έστω $\theta = \phi + \omega_1 t$, όπου $\omega_1 = 2\pi/T_1$. Τότε η (87) γίνεται

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + Q(\phi + \omega_1 t)^T g(\phi + \omega_1 t, t), \quad \Delta\omega = \omega - \omega_1. \quad (88)$$

Αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι το $|T_1 - T|$ είναι μικρό ⁵, τότε η (89) προσεγγίζεται με τον χρονικό μέσο όρο της ως προς την συχνότητα ω_1 , αφού η ϕ εξελίσσεται πιο αργά,

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} Q^T(\phi + \omega_1 t) g(\phi + \omega_1 t, t) dt = \Delta\omega + h(\phi), \quad (89)$$

όπου η h είναι 2π περιοδική ως προς ϕ . Είναι προφανές ότι αν

$$\min_{\phi \in [0, 2\pi)} h(\phi) < |\Delta\omega| < \max_{\phi \in [0, 2\pi)} h(\phi), \quad (90)$$

τότε η (90) έχει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας που αντιστοιχεί σε κλειδωμένη κατάσταση. Μια αντίστοιχη ανάλυση χρησιμοποιείται για ανώτερης τάξης συγχρονισμούς $1 : m$, όπου $|T_1 - mT|$ είναι μικρό, και ο χρονικός μέσος όρος λαμβάνεται ως προς nT_1 . Η ειδική περίπτωση όπου $h(\phi) = \sin(\phi)$, (89) αναφέρεται ως εξίσωση Adler. Η παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιείται συχνά στην βιβλιογραφία των ηλεκτρονικών και θα αναφερθεί εκτενέστερα στα επόμενα [25, 26, 10, 7, 38].

Η παραπάνω μέθοδος έχει πολλούς περιορισμούς, συγκεκριμένα γίνεται η υπόθεση ότι η διαταραχή είναι πολύ ασθενής, ώστε να προσεγγιστεί τόσο το $\nabla\theta$ όσο και η g από τις τιμές τους στον οριακό

⁵Αντιστοιχεί σε $1 : 1$ συγχρονισμό όπως θα εξηγηθεί παρακάτω

κύκλο και επιπλέον ο χρονικός μέσος όρος στην (87) εισάγει επιπλέον σφάλματα. Ένα πιο γενικό πλαίσιο παρέχεται από τις συναρτήσεις PRC και PTC. Αν υποθέσουμε ότι η διαταραχή g είναι πεπερασμένης διάρκειας T_d , και επιβάλλεται την χρονική στιγμή που ο ταλαντωτής έχει φάση θ , μετά από χρόνο T_d , το σημείο θα μετακινηθεί σε διαφορετικό isochron με φάση θ_{new} δηλαδή θα ανήκει στο $\mathcal{I}_{\theta_{new}}$. Έτσι ορίζουμε,

$$\text{PRC}(\theta) = \theta_{new} - \theta, \text{ PTC}(\theta) = \theta + \text{PRC}(\theta) \bmod 2\pi, \theta \in S^1. \quad (91)$$

Η PRC δίνει την διαφορά φάσης ανάμεσα σε κάθε σημείο του οριακού κύκλου και του διαταραγμένου μόλις η διαταραχή σβήσει. Εφόσον δίνει διαφορές, η PRC είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου μηδενικής φάσης x_0 . Αντιθέτως, η PTC εξαρτάται από την επιλογή του σημείου x_0 και διαφορετικές επιλογές οδηγούν σε PTC που διαφέρουν κατά έναν προσθετικό παράγοντα. Σημειώνεται ότι η PTC λαμβάνεται $\bmod 2\pi$ και εκ κατασκευής η $\text{PRC} \in (-\pi, \pi]$ ⁶. Θετικές (αρνητικές) τιμές για την PRC αντιστοιχούν σε προήγηση (καθυστέρηση) φάσης. Η PRC περιγράφει πλήρως την απόκριση ενός ταλαντωτή όταν αυτός υπόκειται σε πεπερασμένης διάρκειας διαταραχές⁷. Αν μπορούμε να ελέγξουμε τόσο το πλάτος A της διαταραχής όσο και την φάση του ταλαντωτή την στιγμή της εφαρμογής της, οι PRC, PTC γίνονται συναρτήσεις και του πλάτους με $\text{PRC}(\theta, A = 0) = 0$. Η επιφάνεια $\text{PTC}(A, \theta)$ αναφέρεται ως Winfree Time Crystal [64, 28].

Οι PRCs μπορούν να διαχωριστούν [28] σε Τύπου 1 ή Τύπου 0 αντιστοιχώντας σε συνεχείς και ασυνεχείς συναρτήσεις, αντίστοιχα. Μπορούμε επίσης να τις χωρίσουμε [28] σε Τύπου I και Τύπου II, αν ο οριακός κύκλος είναι αποτέλεσμα διακλάδωσης σάγματο-κόμβου σε ομοκλινική πολλαπλότητα ή αν έχει δημιουργηθεί μέσω διακλάδωσης Hopf, αντίστοιχα. Οι PRCs λαμβάνουν θετικές τιμές στην πρώτη περίπτωση, και τόσο θετικές όσο και αρνητικές στην δεύτερη. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση Q και οι PRC συνδέονται μέσω της

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\partial \text{PRC}(A, \theta)}{\partial A} = Q(\theta), \quad (92)$$

με $T_d \rightarrow 0$. Για αυτόν τον λόγο η συνάρτηση $Q(\theta)$ αναφέρεται ως απειροστή PRC (IPRC).

Ως ένα αριθμητικό παράδειγμα, αν και θα εξετάσουμε πολύ περισσότερα στο Κεφάλαιο 7,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Qy + QGx(1 - x^2) + AQGx(1 - x^2)g(t) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q, \end{aligned} \quad (93)$$

με $Q = 3$, $G = 0.5$. Το σχήμα 3.1 τις καμπύλες PRC και PTC όταν η διαταραχή $g(t)$ αντιστοιχεί σε ορθογώνιο παλμό πλάτους 1 και διάρκεια $T/10$. Τα isochrons του (αυτόνομου) συστήματος φαίνονται στο Σχήμα 3.2 υπολογισμένα με βάση την (102) που θα παρουσιαστεί παρακάτω

Σύνδεση με τις Ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Koopman

Στην περίπτωση των περιοδικών συστημάτων, οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Koopman δίνονται από την (58),

$$z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}, \quad (94)$$

με αντίστοιχη ιδιοτιμή $m_1\lambda_1 + \dots + m_{n-1}\lambda_{n-1} + ik\omega$. Ο περιορισμός του τελεστή στον οριακό κύκλο έχει τις $e^{ik\theta}$ ως ιδιοσυναρτήσεις. Είναι προφανές ότι $\dot{\theta} = \omega$ σε όλο το πεδίο έλξης, οπότε από την (57) για $g \equiv \text{id}$, έπεται ότι τα isochrons είναι τα επιπεδοσύνολα του ορίσματος της ιδιοσυνάρτησης που είναι αντίστοιχη της ιδιοτιμής $i\omega$, που είναι ένας ισοδύναμος ορισμός με τον (84) (αφού οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στους εκθέτες Floquet μηδενίζονται στην μόνιμο κατάσταση). Η παρατήρηση αυτή δίνει

$$\text{PRC}(\theta) = \theta(x_{new}) - \theta, \theta(x) = \arg(f_\omega(x)), \quad (95)$$

και αντίστοιχα για την PTC.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια των isochrons για πιο γενικούς ελκυστές. Έστω ότι η (21) επιδέχεται έναν ευσταθή ελκυστή Milnor, με πεδίο έλξης B , σε μια περιοχή του οποίου

⁶ Αφού δύο σημεία δεν μπορούν να διαφέρουν σε φάση μεγαλύτερη από την μισή περίοδο.

⁷ Αρκεί φυσικά το τελικό σημείο μόλις η διαταραχή σβήσει να μην ανήκει στο phaseless set

υπάρχει συζυγία της μορφής (67). Επιπλέον υποθέτουμε ότι ο $U^t|_A$ επιδέχεται m ομαλές ιδιοσυναρτήσεις $s_i(u(x))$ (αντίστοιχες στις $i\omega_i$). Τότε μπορούν να οριστούν τα γενικευμένα isochrons ως,

$$\mathcal{I}_{s_1, \dots, s_m} = \{x \in B \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(x, t) - \phi(s(x), t)\| = 0\}, \quad (96)$$

που αντιστοιχεί στην κοινή τομή των επιπεδοσυνόλων των ορισμάτων των s_i . Μπορούν επίσης να οριστούν isochrons σχετικά με την i -οστή μεταβλητή γωνίας, κρατώντας ελεύθερες τις υπόλοιπες μεταβλητές γωνίας. Η εφαρμογή των παραπάνω σε περιοδικά και ημιπεριοδικά συστήματα δίνει τους γνωστούς ορισμούς.

Αντίστοιχα με την μεταβλητή φάση μπορούμε να ορίσουμε και μια μεταβλητή δράση (πλάτους). Έστω s_j ιδιοσυνάρτηση σχετική με τον εκθέτη Floquet $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$. Τότε αν $r_j = s_j$ για $\lambda_j \in \mathbb{R}$ και $r_j = |s_j|$, $\theta_j = \arg(s_j)$ διαφορετικά, έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{r}_j &= \sigma_j r_j \\ \dot{\theta}_j &= \omega_j. \end{aligned} \quad (97)$$

Επομένως αν υποθέσουμε $m < n$ μιγαδικές ιδιοτιμές και απορρίψουμε τις περισσευούμενες μεταβλητές λόγω συζυγών όρων, έχουμε $n - m - 1$ μεταβλητές δράσης και $m + 1$ μεταβλητές γωνίας που εξείσσονται σύμφωνα με την (97). Οι r_i, θ_i, θ είναι ισοδύναμες μεταβλητές δράσης-γωνίας και ο ελκυστής αντιστοιχεί στο $r_i = 0$. Η μεταβλητή θ είναι υπεύθυνη για την περιοδική κίνηση επί του οριακού κύκλου και τα επιπεδοσύνολά της αντιστοιχούν στα isochrons. Οι υπόλοιπες μεταβλητές γωνίας μαζί με τις μεταβλητές δράσης r_j αντιστοιχούν στην μεταβατική δυναμική. Όπως και στην περίπτωση των σημείων ισορροπίας η r_1 μεταβλητή δράσης κυριαρχεί στην σύγκλιση στον οριακό κύκλο, ενώ η θ κυριαρχεί στην εξέλιξη της φάσης, οπότε η δυναμική μπορεί να αναχθεί στο διδιάστατο σύστημα,

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \quad (98)$$

Είναι προφανές ότι η (98) γενικεύει το μοντέλο φάσης που συζητήθηκε προηγουμένως προσαυξάνοντας το με την πιο σημαντική μεταβλητή δράσης.

Definition 0.3.12. Με τους παραπάνω συμβολισμούς ορίζουμε τα *isostables* του Γ , ως

$$\mathcal{I}_{r_0} = \{x \in B \mid r_1(x) = r_0\}. \quad (99)$$

Συγκρίνοντας την περίπτωση των οριακών κύκλων και των σημείων ισορροπίας, βλέπουμε ότι στην πρώτη περίπτωση η πιο σημαντική μεταβλητή είναι η φάση, η οποία χαρακτηρίζει την κίνηση πάνω στον ελκυστή. Η μεταβλητή της δράσης εκφράζει και στις δύο περιπτώσεις τον ρυθμό σύγκλισης προς τον ελκυστή και στην περίπτωση των οριακών κύκλων επιτρέπονται και αρνητικές τιμές της λόγω των διαφορετικών τοπολογικών ιδιοτήτων τους.

Σημειώνεται ότι η αναγωγή (98) είναι ακριβής για επίπεδα συστήματα και παρέχει μια ένα προς ένα σχέση, μεταξύ των (x, y) και των (r_1, θ) .

Θεωρώντας τώρα το διαταραγμένο σύστημα, μπορούμε να επαυξήσουμε την (85) με την r μεταβλητή,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega + \nabla\theta \cdot g(x, t) \\ \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 + \nabla r_1 \cdot g(x, t). \end{aligned} \quad (100)$$

Ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις έχουμε,

$$\nabla r_1 = \nabla s_1 \text{ or } \nabla |s_1|, \quad \nabla\theta = \frac{\nabla s_n}{i s_n}. \quad (101)$$

Προφανώς για να έχει νόημα η (100) πρέπει η διαταραχή να είναι τέτοια ώστε η μεταβλητή κατάστασης να παραμένει πάντα εντός του πεδίου έλξης. Είναι προφανές ότι $Q(\theta) = \nabla\theta(r_1 = 0, \theta)$.

Αριθμητικές Μέθοδοι

Στην παρούσα ενότητα συζητάμε μεθόδους υπολογισμού των isochrons (επιπεδοσύνολα της θ) και των isostables (επιπεδοσύνολα της r_1). Αντίστοιχα με την (79) έχουμε το ακόλουθο.

Theorem 0.3.8. *Αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια παρατηρήσιμη συνάρτηση ⁸ με μη μηδενική αρμονική στην ω όταν περιοριστεί στον οριακό κύκλο. Τότε η*

$$f_\omega(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r U^t f(x) e^{-i\omega t} dt, \quad (102)$$

είναι μη τετριμμένη ιδιοσυνάρτηση αντίστοιχη της $i\omega$ και έτσι τα επιπεδοσύνολα της $\arg(f_\omega(x))$ αντιστοιχούν στα isochrons.

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 3. □

Το όριο στην (102) συγκλίνει με ρυθμό $1/r$, ώστε το διάστημα ολοκλήρωσης δεν χρειάζεται να είναι πολύ μεγάλο. Αντίθετα με την (79) η ολοκληρωτέα δεν έχει την μορφή $0 \cdot \infty$, οπότε αριθμητικά ζητήματα αυτού του τύπου δεν συναντώνται. Το ∇f_ω μπορεί να υπολογιστεί ολικά οδηγώντας στο $\nabla \theta$, αφού

$$e_i^T \nabla f_\omega(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \nabla f(\phi(x, t)) \cdot (\Phi(t) e_i) e^{-i\omega t} dt, \quad (103)$$

όπου $\Phi(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από την $\phi(x, t)$.

Αντίστοιχα για τα isostables έχουμε το ακόλουθο.

Theorem 0.3.9. *Έστω f μια παρατηρήσιμη συνάρτηση ⁹ με $f|_\Gamma \equiv 0$, $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$ όπου v_1 είναι το δεξί ιδιοδιάνυσμα του monodromy matrix και λ_1 η κυρίαρχη ιδιοτιμή. Θεωρούμε το Laplace average*

$$f_{\lambda_1}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t} dt. \quad (104)$$

Τότε η f_{λ_1} είναι μη τετριμμένη ιδιοσυνάρτηση αντίστοιχη της λ_1 και τα επιπεδοσύνολα f_{λ_1} ή $|f_{\lambda_1}|$ (αναλόγως με την λ_1) αντιστοιχούν στα isostables.

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 3. □

Η ολοκληρωτέα $f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t}$ έχει την μορφή $0 \cdot \infty$. Ο όρος αυτός ασυμπτωτικά τείνει σε μια περιοδική συνάρτηση και η ολοκλήρωση πρέπει να έχει πολύ καλή ακρίβεια ώστε να μην προκύψουν αριθμητικά σφάλματα. Για τον ίδιο λόγο, το διάστημα T δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλο. Συγκεκριμένα είναι καλό για αριθμητικούς λόγους να αποτιμάται το ολοκλήρωμα μετά την παρέλευση του μεταβατικού διαστήματος και για χρόνο ίσο με την περίοδο της συνάρτησης ορίου. Αντίθετα με την περίπτωση του σημείου ισορροπίας, λόγω των καθαρά φανταστικών ιδιοτιμών, η f_{λ_1} δεν μπορεί να υπολογιστεί ως το όριο της ολοκληρωτέας παρόμοια με την (82). Αυτό φαίνεται από το Σχήμα 3.3 όπου φαίνεται η χρονική εξέλιξη της $f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t}$ για τον ταλαντωτή Van der Pol (108). Επομένως η σχέση (21) στο [45] δεν ισχύει.

Ο αριθμητικός υπολογισμός μεταβλητών δράσης μεγαλύτερης τάξης γίνεται παρόμοια με την (81).

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε το gradient ∇r_1 ολικά,

$$e_i^T \nabla f_{\lambda_1}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \nabla f(\phi(x, t)) \cdot (\Phi(t) e_i) e^{-\lambda_1 t} dt, \quad (105)$$

όπου $\Phi(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από την $\phi(x, t)$.

Έτσι με την θεωρία του τελεστή Koopman μπορούμε να υπολογίσουμε ολικά τόσο τα isochrons και τα isostables αλλά και τα gradients αυτών που περιγράφουν πλήρως την (100). Συγκεκριμένα για επίπεδα συστήματα η αναγωγή είναι ακριβής.

⁸ Δεν ανήκει αναγκαίως στον MFS, αλλά βοηθάει την συζήτηση να το υποθέσουμε.

⁹ Δεν ανήκει αναγκαίως στον MFS, αλλά βοηθάει την συζήτηση να το υποθέσουμε.

Ένα τελευταίο θέμα που παραμένει είναι η επιλογή της κατάλληλης παρατηρήσιμης f αφού οι συνθήκες μη εκφυλισμού ικανοποιούνται για όλες σχεδόν τις συναρτήσεις, αλλά η συνθήκη $f|_{\Gamma} \equiv 0$ στην περίπτωση των isostables δεν είναι τετριμμένη. Μια τέτοια κατασκευή είναι η ακόλουθη [42].

Αρχικά θεωρούμε το ανάπτυγμα Fourier της λύσης σταθερής κατάστασης

$$\phi(x_0, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\phi}. \quad (106)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει επίπεδο π ώστε $P(\phi(x_0, t))$, όπου P είναι η ορθογώνια προβολή στο π , να είναι ένα star set. Ορίζουμε την απεικόνιση,

$$g : (\phi, \rho) \rightarrow P(c_0) + \rho \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(c_k) e^{ik\phi}. \quad (107)$$

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ως παρατηρήσιμη ποσότητα την,

$$f(x) = \frac{\|P(x) - P(c_0)\|}{\|P(\phi(x_0, \phi)) - P(c_0)\|} - 1, \quad (108)$$

όπου ϕ είναι τέτοια ώστε $P(x) = g(\phi, \rho)$. Για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $\rho = 1$ ώστε $f(x) = 0, x \in \Gamma$. Το Σχήμα 3.4 δείχνει την κατασκευή

Ο υπολογισμός του ∇r_1 απαιτεί τον υπολογισμό του ∇f στην (105). Επειδή ο υπολογισμός της f γίνεται αριθμητικά ένας απευθείας υπολογισμός εισάγει περαιτέρω σφάλματα. Αντ' αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως gradient το,

$$\nabla f(x) = \xi(\pi(P(\phi(x, t)))), \quad (109)$$

όπου π είναι η προβολή του σημείου $P(\phi(x, t))$, στην προβολή του οριακού κύκλου επί του επιπέδου και ορίζεται ως $\pi(P(x)) = P(\phi(x_0, \phi))$ και ξ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στον προβεβλημένο οριακό κύκλο.

Ως αριθμητικό παράδειγμα, αν θεωρείται το σύστημα Van der Pol,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1(1 - x_1^2) - x_1. \end{aligned} \quad (110)$$

Όλες οι προηγούμενες ποσότητες φαίνονται στο Σχήμα 3.5.

0.3.6 Συγχρονισμός Περιοδικά Διαταραγμένων Ταλαντωτών

Εφαρμόζουμε την θεωρία Koopman για την μελέτη του πολύπλοκου συγχρονισμού ταλαντωτών. Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = F(x) + g(x, t), \quad (111)$$

όπου g είναι περιοδική με περίοδο T_1 και υποθέτουμε ότι ο αυτόνομος ταλαντωτής έχει συχνότητα ω . Το πρόβλημα του συγχρονισμού διατυπώνεται ως εξής: υπό ποιες προϋποθέσεις για την διαταραχής είναι ο ταλαντωτής κλειδωμένος με αυτήν. Με $1 : n$ συμβολίζεται η κατάσταση όπου η παρατηρούμενη συχνότητα ισούται με $1/n$ αυτήν της διαταραχής.

0.3.7 Γραμμική Προσέγγιση

Χωρίς καθόλου γνώση θεωρίας Koopman και χρησιμοποιώντας μόνο την μεταβλητή γωνίας από την (100), προσεγγίζουμε το $\nabla \theta(x)$ με $Q(\theta) = \nabla \theta(r_1 = 0, \theta)$ και την $g(x, t)$ με $g(\phi(x_0, \theta/\omega), t) = g(\theta, t)$ καταλήγοντας στην (87). Θέτοντας $\theta = \phi + \omega_1 t$, παίρνουμε την,

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + Q(\phi + \omega_1 t)^T g(\phi + \omega_1 t, t), \quad \Delta\omega = \omega - \omega_1. \quad (112)$$

Για την περίπτωση του $1 : 1$ συγχρονισμού θεωρούμε $T_1 = T + T_s$, $|T_s|$ μικρό. Τότε [21] λαμβάνοντας τον χρονικό μέσο όρο ως προς T_1 έχουμε,

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} Q^T(\phi + \omega_1 t) g(\phi + \omega_1 t, t) dt = \Delta\omega + h(\phi), \quad (113)$$

όπου h είναι 2π περιοδική ως προς ϕ . Οι περιορισμοί της μεθόδου αυτής οφείλονται στην προσέγγιση μόνο με το μοντέλο φάσης, την γραμμική προσέγγιση του $\nabla\theta$ και του g από τις τιμές του πάνω στον οριακό κύκλο και από το averaging. Οι περιορισμοί αυτοί απαιτούν πολύ μικρό πλάτος διαταραχής και πολύ μικρό T_s .

Η εξίσωση (91), δείχνει ότι μια συγχρονισμένη κατάσταση αντιστοιχεί σε ένα ευσταθές ισορροπίας. Η κατάσταση αυτή καταστρέφεται μέσω μια διακλάδωσης σάγματος-κόμβου. Το μοντέλο αυτό προβλέπει γραμμική εξάρτηση του $(\Delta\omega)$ από το πλάτος της διαταραχής και πρέπει να ερμηνευθεί ως ότι τα όρια συγχρονισμού στο $A - T_1$ επίπεδο ξεκινούν από το σημείο T_1 και για μικρό $\Delta\omega$ ακολουθούν τις εφαιπόμενες στο σημείο αυτό. Για μεγαλύτερα πλάτη εμφανίζονται δυναμικά φαινόμενα που δεν μπορούν να περιγραφούν από αυτό μοντέλο. Αντίστοιχες προσεγγιστικές αναλύσεις ισχύουν και για συγχρονισμούς ανώτερης τάξης (δείτε Κεφάλαιο 3). Η παραπάνω ανάλυση θα δούμε ότι είναι μια από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες μεθόδους στα ηλεκτρονικά. Ως ένα πρακτικό παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύστημα (93) με παραμέτρους $Q = 3, G = 0.5$ και $g(x, t) = Av_i(t) = \cos(\omega_1 t)$, τότε το Σχήμα 3.6 δείχνει τις περιοχές συγχρονισμού. Είναι προφανές ότι η γραμμική προσέγγιση της (90) δεν προβλέπει με ακρίβεια τις περιοχές αυτές ούτε για μικρά πλάτη. Αν και δεν έχει ακόμη οριστεί, ο παρονομαστής του αριθμού περιστροφής αντιστοιχεί στον λόγο μεταξύ της συχνότητας εξόδου και της διαταραχής.

0.3.8 Γενικότερη Προσέγγιση

Επεκτείνουμε το απλό γραμμικό μοντέλο χρησιμοποιώντας την θεωρία Koopman.

Η αναγωγή σε μεταβλητές δράσης-γωνίας είναι η,

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega + \nabla\theta \cdot g(x, t) \\ \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 + \nabla r_1 \cdot g(x, t).\end{aligned}\quad (114)$$

Το σύστημα (114) μπορεί να ιδωθεί ως αυτόνομο στο $S^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Ορίζουμε την εγκάρσια τομή Poincaré Σ που αντιστοιχεί στην παρατήρηση του συστήματος ανά χρόνους ίσους με πολλαπλάσια της T_1 . Δεν επιβάλλουμε καμία συνθήκη στην διαταραχή πέραν της μορφής,

$$g(x, t) = A \sum_{n \in \mathbb{N}} h(x, t - nT_1), \quad (115)$$

όπου η h έχει πεπερασμένη διάρκεια (T_{on}). Παρότι μπορεί να φαίνεται περιοριστική η μορφή αυτή, αποτελεί πολύ κοινή περίπτωση. Εφαρμογές περιλαμβάνουν συγχρονισμό ηλεκτρονικών [25, 26], νευρωνικών [28] και οπτικών συστημάτων [23]. Εφόσον μεταξύ δύο διαδοχικών περιόδων το σύστημα εξελίσσεται αυτόνομα¹⁰, μπορεί να οριστεί μια διδιάστατη απεικόνιση,

$$\begin{aligned}r_1 &\rightarrow e^{\sigma_1 T_1} (r_1 + \delta_1(r_1, \theta)) \\ \theta &\rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta_2(r_1, \theta) \bmod 2\pi,\end{aligned}\quad (116)$$

όπου οι συναρτήσεις δ_i αναπαριστούν την διαφορά ανάμεσα στις παλιές (θ, r_1) και τις καινούργιες μεταβλητές μετά την εφαρμογή της διαταραχής.

Το σύστημα (114) και η απεικόνιση (116), περιγράφουν πλήρως την απόκριση επίπεδων συστημάτων, ενώ και σε μεγαλύτερες διαστάσεις η προσέγγιση είναι πολύ καλή και δικαιολογείται λόγω της αμελητέας συνεισφοράς των εκθετών Floquet ανώτερης τάξης.

Αν ο παράγοντας $\sigma_1 T_1$ είναι επαρκώς αρνητικός, η μεταβλητή δράσης στην (116) μπορεί να παραλειφθεί ως συγκλίνουσα ισχυρώς στο 0, οπότε αναγόμεστε στην κυκλική απεικόνιση,

$$\theta \rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta_2(0, \theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \bmod 2\pi, \quad (117)$$

που απεικονίζει τον S^1 στον εαυτό του. Η μελέτη της (117) θα φανερώσει τις περιοχές συγχρονισμού του συστήματος. Για παράδειγμα, η περιοχή συγχρονισμού 1 : 1 αντιστοιχεί σε ένα σημείο ισορροπίας και η 1 : n περιοχή σε έναν n κύκλο. Γενικώς συγχρονισμοί ανώτερης τάξης παρατηρούνται δυσκολότερα

¹⁰Θεωρούμε την συνολική επίπτωση της διαταραχής σαν να εφαρμόζεται ισοδύναμα στο αρχικό σημείο (θ, r_1) κατά την έλευση της και αυτή να έχει μηδενική διάρκεια.

αφού οι αντίστοιχες περιοχές τους είναι πολύ στενές. Από την (117) είναι προφανές ότι μόνο ο όρος $\omega T_1 \bmod 2\pi$ επηρεάζει τις ιδιότητες του συγχρονισμού και αν $T_1 = kT + sT$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0, 1)$ τότε μόνο ο $s\omega T = 2\pi s$ έχει σημασία. Τέλος σημειώνουμε ότι συγχρονισμοί της μορφής $m : n$ σημαίνουν ότι η κυκλική απεικόνιση πραγματοποιεί m περιστροφές μετά από n περιόδους της διαταραχής. Αλλά η συχνότητα της περιοδικής κίνησης στην έξοδο βρίσκεται σε $1/n$ σχέση με την συχνότητα εισόδου.

Με χρήση της θεωρίας Koopman καταλήξαμε με αυστηρό τρόπο ότι μια κυκλική απεικόνιση μπορεί να περιγράψει την δυναμική συγχρονισμού ενός περιοδικά διαταραγμένου ταλαντωτή. Σε αντίθεση με το απλό γραμμικό μοντέλο φάσης, οι προσεγγίσεις που έγιναν βασίζονται στην θεωρία Koopman και επιτρέπουν την ανάλυση σε ακόμα πιο γενικό πλαίσιο με χρήση της μεταβλητής δράσης.

0.4 Κυκλικές Απεικονίσεις

Στην παρούσα ενότητα παραθέτουμε τα βασικότερα αποτελέσματα στις κυκλικές. Παραλείπουμε κάποια ενδιάμεσα βοηθητικά αποτελέσματα καθώς και αποδείξεις. Η ανάλυση με όλες τις λεπτομέρειες βρίσκεται στο Κεφάλαιο 4.

Μελετάμε την κυκλική απεικόνιση

$$\theta \rightarrow \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \bmod 2\pi, \quad (118)$$

που περιγράφει στροβοσκοπικά την φάση ενός ταλαντωτή υπό την επίδραση περιοδικής εξωτερική διαταραχής.

0.4.1 Κυκλικές Απεικονίσεις και Αριθμός Περιστροφής

Έστω $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ η C^1 συνάρτηση που ορίζει την κυκλική απεικόνιση,

$$\theta \rightarrow f(\theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \bmod(2\pi), \quad (119)$$

είτε γενικά κάποια άλλη κυκλική απεικόνιση.

Definition 0.4.1. Ορίζουμε το *lift* της f ως μια C^1 συνάρτηση F που ικανοποιεί

$$f(x \bmod 2\pi) = F(x) \bmod 2\pi. \quad (120)$$

Το *lift* απλώς δίνει την "ξετυλιγμένη" φάση της κυκλικής απεικόνισης. Είναι προφανές ότι δύο *lift* της f διαφέρουν κατά $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και ότι η F^n είναι ένα *lift* της f^n .

Definition 0.4.2. Μια απεικόνιση f λέγεται ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό αν η F είναι αύξουσα με συνεχή αντίστροφη.

Η συγκεκριμένη απεικόνιση $f(\theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A)$, έχει την ιδιότητα αυτή αν η παράγωγος της PRC παίρνει τιμές μόνο εντός του $(-1, 1)$. Η συνθήκη $|\text{PRC}'| < 1$ είναι προφανώς ικανή και αναγκαία. Ακόμη και αν δεν ισχύει αυτό, είναι αληθές ότι $F(0) = \min_{x \in [0, 2\pi)} F(x)$ και $F(2\pi) = \max_{x \in [0, 2\pi)} F(x)$ και αυτές οι δύο ιδιότητες είναι που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη των παρακάτω.

Proposition 0.4.1. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$F(x + 2k\pi) = F(x) + 2k\pi. \quad (121)$$

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Από το παραπάνω, έπεται ότι η $F^n - \text{id}$ είναι 2π περιοδική.

Τώρα ορίζουμε την πιο σημαντική ποσότητα που χαρακτηρίζει μια κυκλική απεικόνιση.

Definition 0.4.3. Ορίζουμε τον αριθμό περιστροφής ως,

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{2n\pi}. \quad (122)$$

Το κίνητρο πίσω από τον ορισμό πρέπει να είναι προφανές: περιγράφει την κατά μέσο όρο αύξηση στην φάση ανά επανάληψη της κυκλικής απεικόνισης. Στην περίπτωση στερεάς περιστροφής, $\theta \rightarrow \theta + 2\pi a = R_a$, $\rho = a$ ώστε ρητοί αριθμοί περιστροφής αντιστοιχούν σε περιοδικές κινήσεις και άρρητοι σε ημιπεριοδικές [30]. Τα αποτελέσματα αυτής της ειδικής περίπτωσης θα γενικευθούν για γενικότερες κυκλικές απεικονίσεις.

Στα παρακάτω σταθεροποιούμε το x και συμβολίζουμε το $\rho(x)$ με ρ . Είναι επίσης προφανές ότι αν ο αριθμός περιστροφής υπάρχει και F_1, F_2 είναι δύο lift της f , τότε εφόσον αυτά διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο τους 2π , οι αντίστοιχοι αριθμοί περιστροφής διαφέρουν κατά έναν ακέραιο αριθμό.

Η παρακάτω πρόταση θεμελιώνει την ύπαρξη του αριθμού περιστροφής και τον συνδέει με την περίπτωση της στερεάς περιστροφής.

Proposition 0.4.2. *Ο αριθμός περιστροφής υπάρχει. Επιπλέον αν υπάρχει περιοδική τροχιά, τότε ο ρ είναι ρητός.*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Προφανώς η παραπάνω πρόταση, όπως και όλες οι προηγούμενες, εξακολουθούν να ισχύουν ακόμα και αν δεν υποθέσουμε καμία συγκεκριμένη μορφή για την f , αλλά απαιτήσουμε αυτή να διατηρεί τον προσανατολισμό.

Από τον ορισμό έπεται αμέσως ότι $\rho(f^m) = m\rho(f)$. Όταν η f επιδέχεται έναν m ο αριθμό περιστροφής είναι ρητός, $\rho(f) = k/m$ για κάποιον ακέραιο k . Ο παρονομαστής του ρ αντιστοιχεί στην τάξη της περιοδικής τροχιάς, ενώ ο αριθμητής δείχνει πόσες περιστροφές έχουν γίνει (πόσες φορές η φάση έχει τμήσει το 2π) προτού ο κύκλος κλείσει. Επομένως είναι φυσιολογικό να ορίσει κανείς το κλασματικό μέρος [30] $\tau(f) = \rho(f) \bmod 1$ που χαρακτηρίζει τις ιδιότητες σχετικά με την περιοδικότητα. Πρακτικά το τ είναι ιδιότητα της απεικόνισης, ενώ το ρ εξαρτάται και από το lift.

0.4.2 Περιορισμός σε Απεικονίσεις που Διατηρούν τον Προσανατολισμό και Ταξινόμηση Poincaré

Παρότι έχουμε δείξει ότι η ύπαρξη περιοδικής τροχιάς είναι συνεπάγεται ρητές τιμές του ρ δεν μπορούμε ακόμα να αποδείξουμε παραπάνω αποτελέσματα λόγω του ότι η F δεν είναι αναγκάως γνησίως αύξουσα. Στα παρακάτω κάνουμε την υπόθεση αυτή, ενώ δεν απαιτείται κάποια συγκεκριμένη μορφή της f . Έτσι θα μπορέσουμε να χαρακτηρίσουμε πλήρως όλες τις τροχιές της κυκλικής απεικόνισης. Σημειώνεται ότι η υπόθεση ότι η f διατηρεί τον προσανατολισμό ισχύει για σίγουρα μικρά προς μέτρια πλάτη διαταραχής, αλλά όχι αναγκάως για πολύ ισχυρά.

Αρχικά έχουμε ότι ο αριθμός περιστροφής είναι ανεξάρτητος του σημείου x .

Proposition 0.4.3. *Αν ο αριθμός περιστροφής ρ υπάρχει, τότε είναι ανεξάρτητος του x .*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη περιοδικής τροχιάς συνεπάγεται ρητό αριθμό περιστροφής. Ισχύει και το αντίστροφο.

Proposition 0.4.4. *Με τις παραπάνω υποθέσεις αν $\rho(F) = p/q$, όπου p, q σχετικώς πρώτοι ακέραιοι, η f έχει περιοδική τροχιά περιόδου q .*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Είναι προφανές ότι αν ο $\rho(F)$ είναι άρρητος, τότε η f δεν έχει περιοδική τροχιά. Κατά αντιστοιχία με το Κεφάλαιο 3, όπου δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του τελεστή Koopman παραμένουν αναλλοίωτες μεταξύ συζυγών συστημάτων το ίδιο έχουμε και για την περίπτωση του αριθμού περιστροφής.

Proposition 0.4.5. *Έστω ότι η f είναι ορισμένη όπως παραπάνω και g ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε $\tau(f) = \tau(g^{-1} \circ f \circ g)$.*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Επιπλέον έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετικά με την εξάρτηση του αριθμού περιστροφής ρ από την συνάρτηση f .

Proposition 0.4.6. *Ο $\rho(f)$ εξαρτάται συνεχώς από την f , δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν f, g είναι δ κοντά στην C^0 τοπολογία¹¹, $|\tau(f) - \tau(g)| < \epsilon$.*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Proposition 0.4.7. *Για έναν ομοιομορφισμό που διατηρεί τον προσανατολισμό, αν $\rho(f) = p/q$ όπου p, q είναι σχετικώς πρώτοι ακέραιοι, όλες οι περιοδικές τροχιές έχουν την ίδια περίοδο q .*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Συνεχίζουμε με τον πλήρη χαρακτηρισμό όλων των τροχιών μιας τέτοιας κυκλικής απεικόνισης ξεκινώντας από την περίπτωση του ρητού αριθμού περιστροφής.

Proposition 0.4.8. *Αν f ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό με ρητό αριθμό περιστροφής $\tau(f) = p/q$, η τροχιά ενός σημείου x που ανήκει στον κύκλο έχει την ίδια τάξη¹² στο $[0, 2\pi)$ με την τροχιά του 0 υπό την δράση της στεράς περιστροφής $\theta \rightarrow \theta + 2\pi p/q$.*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Definition 0.4.4. *Έστω g ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό στον S^1 . Τότε το σημείο $x \in S^1$ είναι ετεροκλινικό στα $y_1 \in S^1$ και $y_2 \in S^1$ υπό την g αν,*

$$\|g^n(x) - g^n(y_1)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \|g^n(x) - g^n(y_2)\| \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0. \quad (123)$$

Proposition 0.4.9. *Έστω f ένα ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό με ρητό αριθμό περιστροφής $\tau(f) = p/q$.*

- *Αν η f έχει ακριβώς μια περιοδική τροχιά, τότε σημείο που δεν ανήκει σε αυτήν είναι ετεροκλινικό υπό την f^q σε δύο σημεία της τροχιάς. Αν $q > 1$, τα σημεία είναι διαφορετικά, ενώ η περίπτωση $q = 1$ αντιστοιχεί σε ομοκλινική τροχιά.*
- *Αν υπάρχουν περισσότερες περιοδικές τροχιές, κάθε σημείο που δεν ανήκει σε κάποια εξ αυτών είναι ετεροκλινικό σε δύο σημεία που ανήκουν σε διαφορετικές περιοδικές τροχιές.*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Οι προηγούμενες προτάσεις χαρακτηρίζουν πλήρως όλες τις τροχιές μιας κυκλικής απεικόνισης που χαρακτηρίζεται από ρητό αριθμό περιστροφής ρ .

Σε ό,τι αφορά την περίπτωση του άρρητου αριθμού περιστροφής, γνωρίζουμε ήδη ότι δεν υπάρχουν περιοδικές τροχιές, οπότε πρέπει παρατηρείται ημιπεριοδική ή χαοτική κίνηση. Πράγματι αυτό ισχύει όπως δείχνουν τα επόμενα αποτελέσματα

Definition 0.4.5. *Η απεικόνιση f είναι topologically transitive στον S^1 , αν για κάθε $U, V \subseteq S^1$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Proposition 0.4.10. *Έστω f ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό με άρρητο αριθμό περιστροφής $\tau(f)$.*

- *Αν η f είναι topologically transitive, τότε f η είναι συζυγής με στερεά περιστροφή με αριθμό περιστροφής $\tau(f)$.*
- *Αν f δεν είναι topologically transitive, τότε υπάρχει ένα σύνολο Cantor στον κύκλο και μια τροχιά που το γεμίζει πυκνά. Σημεία εκτός του συνόλου αυτού είναι ομοκλινικά προς αυτό*

¹¹ $\sup_{x \in S^1} |f(x) - g(x)| < \delta$

¹²Δηλαδή, $m p/q \bmod 1 < n p/q \bmod 1$, αν και μόνον αν $f^m(x) \leq f^n(x)$.

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Η παραπάνω πρόταση χαρακτηρίζει πλήρως όλες τις πιθανές τροχιές ενός ομοιομορφισμού που διατηρεί τον προσανατολισμό με άρρητο αριθμό περιστροφής. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε ημιπεριοδική κίνηση ενώ η δεύτερη σε χαοτική. Μαζί με τα αποτελέσματα για τον ρητό αριθμό, ολοκληρώνουν την ταξινόμηση όλων των πιθανών τροχιών μιας τέτοιας απεικόνισης, η οποία αναφέρεται ως ταξινόμηση Poincaré.

Σημειώνουμε ότι αν επιβληθούν περαιτέρω συνθήκες, όπως για παράδειγμα η f να είναι C^1 διαφορομορφισμός, περιορίζονται περαιτέρω οι πιθανές περιπτώσεις για τις τροχιές. Συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα του Denjoy.

Theorem 0.4.11. *Αν $f : S^1 \rightarrow S^1$ είναι C^1 διαφορομορφισμός, με άρρητο $\rho(f)$ και παράγωγο φραγμένης κύμανσης, τότε f είναι transitive στον S^1 και έτσι είναι συζηγής προς μια περιστροφή της μορφής $R_{\rho(f)}$.*

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

0.4.3 Περιοχές Συγχρονισμού: Γλώσσες του Arnold

Στην παρούσα ενότητα επιστρέφουμε την ειδική μορφή της κυκλικής απεικόνισης (118), και μελετάμε την επίδραση του πλάτους A στον όρο της PRC και στις περιοχές συγχρονισμού. Θεωρούμε μικρά προς μεσαία πλάτη ώστε η f να διατηρεί τον προσανατολισμό.

Θέτουμε $\omega T_1 = \phi$, συμβολίζουμε τον αριθμό περιστροφής με $\rho(\phi, A)$ και την $PRC(\theta, A)$ με $\gamma(\theta, A)$. Τότε έπεται αμέσως (δείτε το Κεφάλαιο 4) ότι ο $\rho(\phi, A)$ εξαρτάται συνεχώς από τα ορίσματα του και με μη φθίνουσα σχέση ως προς το ϕ . Οι περιοχές συγχρονισμού γνωστές και ως γλώσσες του Arnold, λόγω του σχημάτος τους, ορίζονται αυστηρά όπως παρακάτω.

Definition 0.4.6. *Για $r \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$T_r = \{(\phi, A) \mid \rho(\phi, A) = r\}. \quad (124)$$

Όταν ο r είναι ρητός, η T_r είναι μια περιοχή συγχρονισμού ή κλειδωμένη κατάσταση.

Σημειώνεται ότι ο παραπάνω ορισμός εξακολουθεί να ισχύει και για περιπτώσεις όπου η f δεν διατηρεί τον προσανατολισμό. Το παρακάτω αποτέλεσμα δείχνει την ύπαρξη και την ποιοτική συμπεριφορά των περιοχών αυτών.

Proposition 0.4.12. *Για κάθε ρητό p/q υπάρχουν συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2 του A με $\phi_1(0) = \phi_2(0) = p/q$, $\phi_1(A) < \phi_2(A)$ για $A \in [0, \epsilon)$ και τέτοιες ώστε*

$$(\phi, A) \in T_{p/q} \iff \phi_1(A) \leq \phi \leq \phi_2(A). \quad (125)$$

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Η παραπάνω πρόταση χαρακτηρίζει πλήρως τις περιοχές του επιπέδου παραμέτρων της εισόδου, όπου υπάρχει ρητός αριθμός περιστροφής και αντιστοιχούν σε καταστάσεις συγχρονισμού σε σχέση με την διαταραχή. Καθώς το πλάτος αυξάνεται, η απεικόνιση παύει να διατηρεί τον προσανατολισμό και τα σύνορα των περιοχών συγχρονισμού μπορεί να επικαλυφθούν οδηγώντας σε πολύ-ευστάθεια και πολύπλοκα φαινόμενα.

Αναφορικά με την περίπτωση των άρρητων αριθμών περιστροφής έχουμε το ακόλουθο.

Proposition 0.4.13. *Για άρρητο αριθμό περιστροφής ζ , υπάρχει συνάρτηση ψ του $A \in [0, \epsilon)$, ώστε*

$$\rho(\phi, A) = \zeta \iff \phi = \psi(\zeta). \quad (126)$$

Proof. Δείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 4. □

Για ομοιομορφισμούς που διατηρούν τον προσανατολισμό ο αριθμός περιστροφής ρ είναι μη-φθίνουσα συνάρτηση του ϕ . Αν το πλάτος της διαταραχής είναι ισχυρό, η μονοτονία παύει να ισχύει, αλλά σε κάθε περίπτωση ο αριθμός περιστροφής είναι σταθερός (ως συνάρτηση του ϕ με το πλάτος σταθερό) στα διαστήματα που αντιστοιχούν σε ρητές τιμές. Το γράφημα $\rho(\phi, A)$ για σταθερό A λέγεται Devils Staircase. Το Σχήμα 4.1 δείχνει τον αριθμό περιστροφής μιας απεικόνισης της μορφής (118) (που έχει προκύψει από το σύστημα (93)) για τρεις διαφορετικές τιμές του πλάτους A . Στις δύο πρώτες περιπτώσεις (a) και (b), η απεικόνιση διατηρεί τον προσανατολισμό και ο αριθμός περιστροφής ρ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του ϕ , ενώ αυτό δεν ισχύει στον (c). Καθώς το πλάτος αυξάνεται, τα διαστήματα σταθερού ρ αυξάνονται αντιστοιχώντας στην εμφάνιση περισσότερων κλειδωμένων καταστάσεων, ενώ το πλάτος κάθε τέτοιες περιοχής αυξάνεται.

Για $A = 0$, το μέτρο Lebesgue των τιμών του ϕ που αντιστοιχούν σε ρητές τιμές του ρ είναι μηδέν, ενώ το μέτρο Lebesgue των τιμών που αντιστοιχούν σε άρρητες τιμές του ϕ είναι ένα. Καθώς το A αυξάνεται το σύνολο των σημείων του ϕ που αντιστοιχούν σε ρητή τιμή για το ρ έχει θετικό μέτρο και το σύνολο των σημείων του ϕ για τα οποία το ρ λαμβάνει άρρητη τιμή είναι ένα σύνολο Cantor. Επομένως, για μικρό A μια τιμή του ϕ επιλεγμένη τυχαία θα αντιστοιχεί πιθανότερα σε άρρητη τιμή του ρ , αλλά μπορεί να μετατραπεί σε ρητή με μια αυθαίρετα μικρή διαταραχή.

Από την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε ότι ο αριθμός περιστροφής της κυκλικής απεικόνισης που δείξαμε ότι περιγράφει την δυναμική του περιοδικά διαταραγμένου ταλαντωτή λαμβάνει ρητές τιμές αν και μόνον αν υπάρχει περιοδική τροχιά. Δείξαμε ότι οι περιοχές αυτές στο επίπεδο των παραμέτρων της εισόδου είναι καλώς ορισμένες, τα όρια τους μεταβάλλονται συνεχώς με το πλάτος και αντιστοιχούν ουσιαστικά σε συγχρονισμένες με την είσοδο καταστάσεις. Ο παρανομαστής του αριθμού περιστροφής αντιστοιχεί και στην τάξη συγχρονισμού. Όσο η απεικόνιση διατηρεί τον προσανατολισμό, η ταξινόμηση Poincaré χαρακτηρίζει πλήρως όλες τις πιθανές τροχιές, για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού περιστροφής, ενώ αν αυτό πάψει να ισχύει οι περιοχές συγχρονισμού μπορεί να επικαλύπτονται οδηγώντας σε πιο πολύπλοκα φαινόμενα.

0.5 Ηλεκτρονικοί Ταλαντωτές

Πολλές ηλεκτρονικές συσκευές απαιτούν περιοδικά σήματα για να λειτουργήσουν. Τυπικά παραδείγματα περιλαμβάνουν υπολογιστικά συστήματα, όπου ο χρονισμός είναι πολύ σημαντικός καθώς και τηλεπικοινωνιακά συστήματα όπου τα περιοδικά σήματα μεταφέρουν την πληροφορία. Στην παρούσα ενότητα, αφού παρουσιάσουμε συνοπτικά τις αρχές λειτουργίας των τρανζίστορ, μοντελοποιούμε τις δύο κατηγορίες ταλαντωτών που θα μελετήσουμε και κάνουμε μια ανασκόπηση των βασικών μεθόδων ανάλυσης αυτόνομων και περιοδικά διαταραγμένων ταλαντωτών στο πεδίο της ηλεκτρονικής.

0.5.1 Διπολικό Τρανζίστορ

Το διπολικό τρανζίστορ αφευρέθηκε στα Bell Labs το 1948. Είναι μια διάταξη τριών ακροδεκτών και η λειτουργία της μπορεί να συνοψιστεί ως η μετατροπή μιας τάσης εισόδου μεταξύ των δύο ακροδεκτών σε ρεύμα που ρέει στον τρίτο. Το Σχήμα 5.1 (a) δείχνει την δομή ενός npn τρανζίστορ. Οι τρεις ημιαγωγικές περιοχές είναι ο εκπομπός (n τύπου), η βάση (p τύπου) και ο συλλέκτης (n τύπου). Δύο pn δίοδοι σχηματίζονται μεταξύ του εκπομπού και της βάσης (EB) και του συλλέκτη και της βάσης (CB). Στην ορθή ενεργό περιοχή, για την οποία ενδιαφερόμαστε, η ένωση (EB) είναι ορθά πολωμένη, ενώ η (CB) ανάστροφα.

Το Σχήμα 5.1 (b) δείχνει την ροή ρεύματος για ένα διπολικό τρανζίστορ που πολώνεται στην ορθή ενεργό περιοχή από την V_{BE} και την V_{CB} . Η ορθή πόλωση της ένωσης (EB) θα προκαλέσει την ροή ρεύματος λόγω των ηλεκτρονίων που εγγέονται από τον εκπομπό στην βάση και λόγω των οπών που εγγέονται από την βάση τον εκπομπό. Το ρεύμα που ρέει μέσω της (EB) i_E κυριαρχείται από την συνιστώσα των ηλεκτρονίων. Τα εγγεόμενα από τον εκπομπό προς την βάση ηλεκτρόνια είναι φορείς μειονότητας και έτσι θα παρατηρηθεί διάχυση προς τον συλλέκτη. Κατά την διάχυση κάποια ηλεκτρόνια θα επανασυνδυαστούν με οπές και θα χαθούν. Τελικά το ρεύμα του συλλέκτη i_c θα εξαρτάται από τα ηλεκτρόνια στην περιοχή αυτήν και έτσι,

$$i_c = I_s e^{v_{BE}/V_T}, \quad (127)$$

όπου I_S είναι μια σταθερά με διαστάσεις ρεύματος, εξαρτώμενη από την γεωμετρία και τις προσμεϊξεις στην βάση. Με $V_T = kT/q$ συμβολίζεται η θερμοκή τάση.

Το ρεύμα i_b οφείλεται σε μια συνιστώσα εγγεόμεννη από την βάση προς τον εκπομπό οπών και από μια συνιστώσα οπών που παρέχει το εξωτερικό κύκλωμα για να αντισταθμίσει όσες χάνονται κατά την επανασύνδεση. Αμφότερες είναι ανάλογες του e^{v_{BE}/V_T} , ώστε i_B να μπορεί να εκφραστεί ως

$$i_b = i_c/\beta. \quad (128)$$

Η παράμετρος β κυμαίνεται από 50 σε 200.

Για το ρεύμα του εκπομπού προφανώς έχουμε,

$$i_e = i_c + i_b = (\beta + 1)i_c, \quad i_c = \alpha i_e, \quad (129)$$

όπου $\alpha = \beta/(\beta + 1)$.

Στο παραπάνω μοντέλο ο διπολικό μπορεί να ιδωθεί ως ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός της τάσης v_{BE} στο ρεύμα i_c . Στην ορθή ενεργό περιοχή αμελούμε την εξάρτηση από την v_{CB} (φαινόμενο Early) λόγω των μικρών ποσοτικών διαφορών που αυτή εισάγει. Τα ρεύματα των υπόλοιπων ακροδεκτών i_b, i_e , είναι απλώς ανάλογα του i_c και ιδανικά $i_c = i_e$. Στο σχήμα 5.2 φαίνεται το κυκλωματικό σύμβολο του ηρη BJT.

Η λειτουργία του ηρη τρανζίστορ είναι αντίστοιχη αλλά λόγω των διαφορετικών προσμεϊξεων έχουμε εκθετική σχέση του i_c από την v_{EB} (αναστροφή τάσης).

Αν η τάσης v_{BE} μεταβάλλεται γύρω από το σημείο ισορροπίας DC, φαινόμενα φόρτισης εκφόρτισης οδηγούν στην ύπαρξη χωρητικότητων στις υψηλές συχνότητες. Παραλείποντας μια διεξοδική ανάλυση, το φορτίο που είναι αποθηκευμένο στην βάση οδηγεί στην ύπαρξη μιας χωρητικότητας λόγω διάχυσης. Αντίστοιχα, οι μεταβολές στο αποθηκευμένο φορτίο στην περιοχή απογύμνωσης μεταξύ βάσης εκπομπού οδηγεί σε μια ακόμη χωρητικότητα που μαζί με την προηγούμενη δημιουργούν την συνολική χωρητικότητα μεταξύ βάσης και εκπομπού (C_π). Επειδή κατά στην ορθή περιοχή η ένωση CB είναι ανάστροφα πολωμένη δημιουργείται μια ακόμη χωρητικότητα μεταξύ του συλλέκτη και της βάσης (C_μ) η οποία εξαρτάται από την τάση V_{CB} .

0.5.2 MOS Τρανζίστορ

Το Σχήμα 5.3 δείχνει την φυσική δομή ενός NMOS τρανζίστορ. Το τρανζίστορ κατασκευάζεται σε ένα p-τύπου υπόστρωμα, στο οποίο σχηματίζονται δύο ισχυρά νοθευμένες περιοχές, η πηγή και η υποδοχή. Ένα λεπτό στρώμα μονωτή αναπτύσσεται στην επιφάνεια επί του οποίου σχηματίζεται το ηλεκτρόδιο της πύλης. Το υπόστρωμα σχηματίζει ηη ενώσεις με την πηγή και την υποδοχή και είναι ανάστροφα πολωμένες. Αμελούμε την επίδραση του σώματος και θεωρούμε το τρανζίστορ ως στοιχείο τριών ακροδεκτών: πύλη (G), πηγή (S) και υποδοχή (D).

Αν η πηγή και η υποδοχή είναι γειώμενες και εφαρμοστεί μια θετική τάση στην πύλη, οπές απωθούνται από το υπόστρωμα, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια περιοχή απογύμνωσης (κανάλι) από το αρνητικό φορτίο των ατόμων. Η θετική τάση ελκύει ηλεκτρόνια από την υποδοχή και την πηγή προς το κανάλι και όταν συσσωρευτεί επαρκές πλήθος ηλεκτρονίων μια ηη περιοχή δημιουργείται από την υποδοχή προς την πηγή. Η ελάχιστη απαιτούμενη v_{GS} είναι η τάση κατωφλίου V_t . Οπότε για $V_{GS} > V_t$, και θετική v_{DS} τάση, ρέει ρεύμα στο κανάλι. Το βάθος του καναλιού δεν είναι ομοιόμορφο αφού σε κάθε σημείο του εξαρτάται από το πόσο η εφαρμοζόμενη τάση υπερβαίνει την V_t . Έτσι προκύπτει ότι,

$$i_d = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t - v_{DS}/2) v_{DS}, \quad (130)$$

όπου W, L είναι το πλάτος και το μήκος μήκος της περιοχής απογύμνωσης, μ_n είναι η κινητικότητα των ηλεκτρονίων και C_{ox} είναι η χωρητικότητα οξειδίου. Αν $v_{DS} > V_{GS} - V_t$, προκαλείται κορεσμός (κατάσταση ισοδύναμη με την ορθή ενεργό περιοχή του BJT), οδηγώντας στην,

$$i_d = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t)^2. \quad (131)$$

Έτσι συγκρίνοντας αφηρημένα τα δύο τρανζίστορ, βλέπουμε ότι η λειτουργία τους συνίσταται στην μη γραμμική μετατροπή μιας τάσης εισόδου σε ρεύμα. Η διαφορά έγκειται στο είδος της μη γραμμικότητας

(εκθετική για τα BJT και τετραγωνική για τα MOS). Παρόμοια με το BJT, και στο MOS τρανζίστορ το ρεύμα εξόδου εξαρτάται ασθενώς από την τάση v_{DC} , μέσω του φαινομένου Early, αλλά λόγω των ποσοτικών μόνο μεταβολών που αυτή προκαλεί, δεν θα την λάβουμε υπόψη.

Φαινόμενα φόρτισης-εκφόρτισης μοντελοποιούνται επίσης μέσω παρασιτικών χωρητικοτήτων, παρόμοια με το BJT, όταν εφαρμόζεται μεταβλητή τάση στην είσοδο. Οι χωρητικότητες C_{gd} , C_{gs} οφείλονται στο φαινόμενο χωρητικότητας στην πύλη. Η C_{sb} και η C_{db} , είναι οι χωρητικότητες απογύμνωσης των pn διόδων που δημιουργούνται από την πηγή και το υπόστρωμα, και την υποδοχή και το υπόστρωμα. Όλες οι παραπάνω εξαρτώνται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά W, L του στοιχείου και από την χωρητικότητα οξειδίου C_{ox} . Το Σχήμα 5.2 δείχνει το κυκλωματικό σύμβολο. Η λειτουργία ενός PMOS τρανζίστορ είναι παρόμοια με τις κατάλληλες μετατροπές (n κανάλι, p πηγή και υποδοχή).

0.5.3 Διαφορικοί LC Ταλαντωτές

Αφηρημένα οποιοσδήποτε LC διαφορικό ταλαντωτής μπορεί να μοντελοποιηθεί όπως στο Σχήμα 5.4.

Η αντίσταση R_{nl} αντιστοιχεί σε μια μη γραμμική ελεγχόμενη από τάση πηγή ρεύματος $I = -I_0(V_I)f(v_c/V_r)$ όπου v_c είναι η τάση του πυκνωτή, v_r και I_0 είναι σταθερές με διαστάσεις τάσης και ρεύματος, αντίστοιχα, και V_I είναι η τάση πόλωσης. Η συνάρτηση f υποτίθεται περιττή, τουλάχιστον C^4 , με $f(0) = 1$ και $f^{(3)}(0) < 0$. Η εν σειρά με το πηνίο συνδεδεμένη αντίσταση οφείλεται στις ωμικές απώλειές του. Χρησιμοποιώντας νόμους Kirchhoff έχουμε το σύστημα,

$$\begin{aligned} C \frac{dv_c}{dt} &= -i_L + I_0 f(v/V_r) \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_c - Ri_L. \end{aligned} \quad (132)$$

Θέτοντας $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ και κάνοντας τις παρακάτω αλλαγές μεταβλητών,

$$x = \frac{v_c}{V_r}, \quad y = \frac{Ri_L}{V_r} \quad \text{and} \quad \tau = \omega_0 t \quad (133)$$

το σύστημα (132) γίνεται,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -Qy + QGf(x) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{Q}(x - y), \end{aligned} \quad (134)$$

όπου

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad G = \frac{RI_0}{V_r}. \quad (135)$$

Έστω ότι θέλουμε να διεγείρουμε το σύστημα με μια εξωτερική πηγή. Η διαταραχή μπορεί να είναι είτε αθροιστική, ως ένας χρονικά εξαρτώμενος όρος στην $v_I = V_{in}g(t) + V_I$, όπου V_I αντιστοιχεί στην τάση πόλωσης εν τη απουσία της διαταραχής και V_{in} είναι το πλάτος του εφαρμοζόμενου σήματος. Η μόνη παράμετρος που επηρεάζεται είναι η I_0 που γίνεται $I_0(t) = I_0(1 + Ag(t))$, όπου A είναι το ενεργό πλάτος της διαταραχής ανάλογο προς το V_{in} . Έτσι η (134) γίνεται,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -Qy + QGf(x) + QGAf(x)g(\tau) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{Q}(x - y). \end{aligned} \quad (136)$$

Εναλλακτικά η διαταραχή θα μπορούσε να εισαχθεί άμεσα μέσω της μεθόδου έγχυσης [10] ενός σήματος ρεύματος. Με αναφορά στο 5.4, η κατάσταση αυτή είναι ισοδύναμη με την εισαγωγή μιας πηγής ρεύματος παράλληλα με τον C . Σε αυτήν την περίπτωση ένας όρος $i(t) = I_{in}g(t)$ προστίθεται στην εξίσωση του v_c στην (132), ώστε μετά την κανονικοποίηση (133) το σύστημα γίνεται,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -Qy + QGf(x) + Ag(\tau) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{Q}(x - y), \end{aligned} \quad (137)$$

όπου A είναι το πλάτος της διαταραχής.

Το αυτόνομο σύστημα (134) και τα διαταραγμένα (136), (137) μπορούν να ιδωθούν ως αντιπρόσωποι αυτής της κλάσης ταλαντωτών οι οποίοι διαφέρουν μόνο στην μορφή της f .

Πρακτικές υλοποιήσεις φαίνονται στο Σχήμα 5.4. Στην MOS υλοποίηση στο (α) είναι

$$f(x) = x(1 - x^2), \quad I_0 = aV_{DD}, \quad V_r = V_{DD}, \quad (138)$$

όπου a είναι η κλίση της μη γραμμικότητας στην αρχή των αξόνων και V_{DD} είναι η τάση πόλωσης. Στην περίπτωση των BJT,

$$f(x) = \tanh(x), \quad I_0 = \gamma I_{C_{Qn4}}, \quad V_r = 2V_T, \quad (139)$$

όπου $\gamma = g(\alpha)$, και η g είναι αύξουσα με $\gamma \rightarrow 1$ καθώς το $\alpha \rightarrow 1$.

0.5.4 Ο Ταλαντωτής Colpitts

Θεωρούμε τον ταλαντωτή Colpitts του Σχήματος 5.5. Η αντίσταση R αντιστοιχεί στις ωμικές απώλειες του πηνίου. Στα παρακάτω αμελούμε την αγωγιμότητα G_0 . Χρησιμοποιώντας νόμους Kirchoff, έχουμε

$$\begin{aligned} C_1 \dot{v}_{C1} &= -I_s \exp(-v_{C2}/V_T) + i_L \\ C_2 \dot{v}_{C2} &= I_s \exp(-v_{C2}/V_T) + i_L - I \\ L \dot{i}_L &= -v_{C1} - v_{C2} - Ri_L + V_{cc}, \end{aligned} \quad (140)$$

όπου V_{cc} η τάση πόλωσης και I το ρεύμα πόλωσης. Εισάγοντας κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών (δείτε Κεφάλαιο 5) καταλήγουμε στο σύστημα,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)} (1 - e^{-x_2} + x_3) \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{Qk} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q} x_3, \end{aligned} \quad (141)$$

όπου

$$k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad g = \frac{IL}{V_T R (C_1 + C_2)}. \quad (142)$$

Αν θέλουμε να διεγείρουμε τον ταλαντωτή με ένα περιοδικό σήμα, τότε μια πολύ συνηθισμένη μέθοδος συνίσταται στην εισαγωγή παράλληλα με το I , μιας χρονοεξαρτώμενης πηγής ρεύματος $i = IAf(t)$, όπου A είναι το κανονικοποιημένο πλάτος της διαταραχής. Αυτό οδηγεί στην αλλαγή $I \rightarrow I(1 + f(t))$. Έτσι το (141) γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)} (1 - e^{-x_2} + x_3) \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{Qk} (x_3 + Af(t)) \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q} x_3, \end{aligned} \quad (143)$$

0.5.5 Ανασκόπηση Συνηθισμένων Μεθόδων Ανάλυσης

Παρουσιάζουμε μια ανασκόπηση των πιο συχνά χρησιμοποιούμενων μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην βιβλιογραφία των ηλεκτρονικών ταλαντωτών για την ανάλυση αυτόνομων και περιοδικά διαταραγμένων ταλαντωτών σημειώνοντας τους περιορισμούς που κάθε μία έχει. Τεχνικές λεπτομέρειες παραλείπονται, αφού διεξοδική ανάλυση των μεθόδων βρίσκεται στο Κεφάλαιο 5.

Αυτόνομοι Ταλαντωτές

Το κριτήριο Barkhausen [52] είναι η πιο κλασική μέθοδος ανάλυσης ταλαντωτών. Σύμφωνα με αυτό, η όλα τα στοιχεία γραμμικοποιούνται και η κρίσιμη τιμή των παραμέτρων για την οποία η χαρακτηριστική εξίσωση έχει φανταστικές ρίζες είναι το κριτήριο ταλάντωσης. Η μέθοδος είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με την εύρεση της διακλάδωσης Hopf [35] για το σύστημα όταν αυτό γραμμικοποιείται γύρω από την αρχή. Παρόλα αυτά, η συνθήκη δεν εξασφαλίζει ότι ο κύκλος που θα προκύψει είναι ευσταθής.

Στον [40], ο ταλαντωτής Colpitts υποτίθεται ότι λειτουργεί κοντά στην καμπύλη Hopf. Αυτό επιτρέπει την αναγωγή στην κεντρική πολλαπλότητα [60, 11] και στην προσέγγιση του συστήματος σε αυτήν από την κανονική μορφή Hopf. Το πρόβλημα της μεθόδου είναι ότι είναι έγκυρη σε μια μικρή μόνο γειτονιά της καμπύλης Hopf όπου ο οριακός κύκλος είναι σχεδόν ημιτονοειδής. Ουσιαστικά προσεγγίζεται ο οριακός κύκλος που γεννιέται κατά την διακλάδωση Hopf και δεν παρέχει περαιτέρω πληροφορία για την δυναμική του. Μπορεί να ιδωθεί ως γενίκευση του κριτηρίου Barkhausen.

Άλλη οικογένεια μεθόδων είναι αυτές που σχετίζονται με την μέθοδο Harmonic Balance [58]. Κατά την εφαρμογή της στα ηλεκτρονικά βλέπει κανείς τα παθητικά στοιχεία σαν να σχηματίζουν μια συνάρτηση μεταφορά $H(s)$ της οποίας η είσοδος είναι μια μη γραμμική συνάρτηση $f(v)$, ενώ ως έξοδο δίνει καθαρά ημιτονική τάση $v = A \cos(\omega t)$ (δείτε Σχήμα 5.6). Το φίλτρο H απορρίπτει όλες τις φασματικές συνιστώσες στο ανάπτυγμα της $f(v)$ εκτός της θεμελιώδους. Η προσέγγιση αυτή είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με τις παραπάνω και έχει νόημα μόνο κοντά στην καμπύλη Hopf.

Μια άλλη προσέγγιση [9] συνίσταται στην θεώρηση του μη γραμμικού ταλαντωτή ως ασθενώς μη γραμμικού και την προσέγγιση της τάσης εξόδου ως μιας μικρής μη γραμμικής διαταραχής ενός ημιτονικού όρου. Κάτι τέτοιο είναι αληθές, αν για παράδειγμα οι ωμικές απώλειες τείνουν στο μηδέν. Όλες οι μέθοδοι έχουν ουσιαστικά του ίδιους περιορισμούς: ασθενής μη γραμμικότητα ή λειτουργία κοντά στην καμπύλη Hopf και ημιτονική προσέγγιση της τάσης εξόδου.

Εκτός των παραπάνω, έχουν προταθεί και αυστηρές, ποιοτικές μέθοδοι σε συγκεκριμένα κυκλώματα. Η πιο κλασική είναι αυτή του Colpitts [41, 18] όπου αναλύονται οι διακλαδώσεις του (141). Την μέθοδο αυτήν εφαρμόζουμε και εμείς στην μελέτη της μη γραμμικής δυναμικής των ταλαντωτών. Παρόμοιες μελέτες έχουν εισάγει παραδείγματα του χάους μελετώντας το κύκλωμα του Chua [31, 32]. Ποιοτικές προσεγγίσεις [14] έχουν γίνει και για την MOS υλοποίηση του διαφορικού LC , αλλά έχουν περιοριστεί σε αριθμητική εύρεση των διακλαδώσεων, παρά την γενικότερη μελέτη αυτής της κλάσης ταλαντωτών.

Αναγωγή Φάσης και Isochrons

Η ιδέα της αναγωγής σε μοντέλα φάσης εισήχθη στους ηλεκτρονικούς ταλαντωτές για πρώτη φορά στο [15] όπου χρησιμοποιήθηκε το πρώτης τάξης γραμμικό μοντέλο για τον καθορισμό της επίδρασης του θορύβου σε έναν ταλαντωτή. Στην συνέχεια στα [55, 56] εισήχθη η έννοια των isochrons, καθώς και δευτεροβάθμιες προσεγγίσεις τους, οι οποίες όμως αριθμητικά δεν έχουν κάποιο όφελος σε σχέση με την χρήση του τελεστή Koopman που παρουσιάσαμε. Δεν έχει αξιοποιηθεί περαιτέρω η έννοια των isochrons στα ηλεκτρονικά.

Συγχρονισμός σε Περιοδική Διαταραχή

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση τοπυ συγχρονισμού περιοδικά διαταραγμένων ταλαντωτών μπορούν να χωριστούν σε τρεις οικογένειες: harmonic balance, averaging και μοντέλα φάσης.

Harmonic Balance

Υποθέτουμε ότι ένα εξωτερικό σήμα εγχέεται στον ταλαντωτή και ότι τα παθητικά στοιχεία συγκροτούν ένα bandpass φίλτρο με κεντρική συχνότητα ω ίση δηλαδή με την συχνότητα του αυτόνομου ταλαντωτή. Το Σχήμα 5.7 δείχνει το block διάγραμμα του συστήματος [58]. Η τάση εξόδου υποτίθεται ημιτονοειδής $v_o = B \cos(\omega t + \phi)$ και η είσοδος $v_i(t) = Ah(\omega_{in}t)$ όπου h είναι 2π περιοδική συνάρτηση. Η f οφείλεται στο μη γραμμικό κομμάτι του κυκλώματος.

Υποθέτοντας ότι η έξοδος κλειδώνει στην είσοδο, $\omega_0 = N\omega_{in}$ και έτσι,

$$f(v_i, v_o) = f(Ah(\omega_{int}), B \cos(\omega_0 t + \phi)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(A, B, \phi) \cos(n\omega_0 t) + b_n(A, B, \phi) \sin(n\omega_0 t). \quad (144)$$

Εφαρμόζοντας το φίλτρο,

$$Ae^{j\phi} = H(j\omega) (a_1(A, B, \phi) - jb_1(A, B, \phi)). \quad (145)$$

Στην (145) το bandpass φίλτρο H έχει την μορφή $H(j\omega) = H_2(j(\omega - \omega_0))$ ώστε κανείς μεγιστοποιεί το $\omega - \omega_0$ μεγιστοποιώντας την εξίσωση κατάλληλα ως προς ϕ . Ως παράδειγμα, αν διαταραχθεί περιοδικά η BJT υλοποίηση του LC διαφορικού ταλαντωτή, και ακολουθώντας τα παραπάνω καταλήγει κανείς ότι (δείτε Κεφάλαιο 5 για λεπτομέρειες)

$$\Delta\omega_{\max} = \frac{\omega}{Q} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{N(\theta)}{D(\theta)}, \quad (146)$$

όπου N, D συναρτήσεις του θ . Οι βασικοί περιορισμοί της μεθόδου είναι: η έξοδος υποτίθεται αρμονική, μη γραμμικά φαινόμενα αμελούνται, το φίλτρο προσεγγίζεται από πρώτης τάξης φίλτρο, η διαταραχή υποτίθεται ασθενής. Στους περιορισμούς της είναι πολύ κοντά στις περιπτώσεις των ασθενώς μη γραμμικών ταλαντωτών και της γραμμικής προσέγγισης του μοντέλου φάσης (που θα παρουσιαστούν παρακάτω).

Averaging και Ασθενώς Μεταβαλλόμενη Φάση και Πλάτος

Η ιδέα του averaging έχει ήδη συζητηθεί και θέτει σοβαρούς περιορισμούς. Συγκεκριμένα [21], θεωρώντας ένα σύστημα

$$\dot{x} = \epsilon f(x, t, \epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (147)$$

όπου ϵ μικρό και $f \in C^r, r \geq 2$, φραγμένη σε φραγμένα σύνολα και T περιοδική. Για το averaged σύστημα

$$\dot{y} = \frac{\epsilon}{T} \int_0^T f(y, t, 0) dt, \quad (148)$$

αν το ϵ είναι επαρκώς μικρό, τα x, y είναι $O(\epsilon)$ κοντά σε μια χρονική κλίμακα $t \sim 1/\epsilon$, θεωρώντας ότι την $t = 0$ ξεκινούν $O(\epsilon)$ κοντά. Επομένως το averaging έχει νόρμα για μικρά μόνο ϵ .

Υπάρχουν πολλές εργασίες [10, 7, 6, 8] π[ου ακολουθούν την μέθοδο αυτή σε συνδυασμό με την μέθοδο των αργά μεταβαλλόμενων πλάτους και φάσης. Ως ένα παράδειγμα αναφέρουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα στο [10] (πλήρης ανάλυση στο Κεφάλαιο 5). Θεωρούμε τον MOS διαφορικό LC ταλαντωτή, αλλά με την αντίσταση παράλληλα με το πηνίο. Υποθέτοντας ασθενή έγχυση, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι η

$$\ddot{v} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{v} + \omega_0^2 v = -\frac{\omega_0 R}{Q} \frac{d}{dt} (i_{nl}(v) + i_{in}(v, v_{in})). \quad (149)$$

Θεωρούμε αρμονική είσοδο και ότι η έξοδος έχει κλειδώσει στην μισή συχνότητα, δηλαδή $v_{in} = V_{in} \cos(\omega_{in} t)$, $v = V(t) \cos(\omega t + \theta(t))$. Η φάση $\theta(t)$ και το πλάτος $V(t)$ υποτίθεται ότι μεταβάλλονται πολύ αργά σε σχέση με τους όρους $\omega_{in} t$. Εφαρμόζοντας averaging στο σύστημα που προκύπτει για τα V, θ καταλήγουμε ότι μόνο οι αρμονικές στην συχνότητα ω έχουν συνεισφορά στην δυναμική. Για κυβική μη γραμμικότητα έχει κανείς το σύστημα,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{\omega_0 a R}{2Q} \left(\frac{1}{aR} - 1 + \frac{3}{4} c V^2 - \frac{k V_{in}}{2} \cos(2\theta) \right) \\ \dot{\theta} &= \Delta\omega - \frac{a \omega_0 k V_{in} R}{4Q} \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (150)$$

Η ύπαρξη σημείου ισορροπίας αντιστοιχεί σε κλειδωμένη με την είσοδο κατάσταση. Τέτοια κατάσταση υπάρχει αν,

$$|\omega - \omega_0| = |\Delta\omega| \leq \frac{\omega_0 a k R V_{in}}{4Q} = \Delta\omega_{\max}, \quad (151)$$

από την οποία προκύπτει το μέγιστο locking range. Γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας δείχνει ότι αυτό είναι ευσταθές.

Οι ομοιότητες της μεθόδου αυτής με την Harmonic Balance μέθοδο είναι πολλές. Αρχικά σε αμφότερες τις περιπτώσεις υποτίθεται ότι ο αυτόνομος ταλαντωτής είναι σχεδόν γραμμικός με συχνότητα κοντά στην ω_0 , η συχνότητα εξόδου είναι και αυτή κοντά στην ω_0 και μόνο οι όροι συντονισμού με αρμονικό περιεχόμενο στην ω_0 έχουν σημασία (επειδή είτε ένα bandpass φίλτρο, είτε το averaging απορρίπτει τις άλλες αρμονικές). Επιπλέον στην μέθοδο αυτή γίνεται η υπόθεση ότι το πλάτος και η φάση δεν μεταβάλλονται γρήγορα, μια προσέγγιση που εισάγει περαιτέρω σφάλματα. Με επισκόπηση της (151), καταλήγει κανείς ότι το locking range είναι συμμετρικό γύρω από την ω_0 και αυξάνεται γραμμικά με το πλάτος εισόδου. Ωστόσο αυτό δεν είναι σωστό, όπως έχει εξηγηθεί και για την γραμμικοποίηση του μοντέλου φάσης και θα συζητηθεί και πάλι στα επόμενα. Ουσιαστικά, η (151) δίνει την κλίση των συνόρων των περιοχών συντονισμού για πολύ μικρά πλάτη και μικρές συχνοτικές αποκλίσεις $\Delta\omega$.

Γραμμικά Μοντέλα Φάσης

Η αναγωγή σε γραμμικά μοντέλα φάσης έχει εμφανιστεί πρόσφατα [25, 26] ως η ενοποιητική θεωρία του συγχρονισμού των ηλεκτρονικών ταλαντωτών. Ουσιαστικά η μέθοδος είναι ακριβώς ίδια με την γραμμική προσέγγιση της εξίσωσης φάσης που παρουσιάστηκε στο μέρος του τελεστή Koopman. Συγκεκριμένα, αν ο αυτόνομος ταλαντωτής έχει συχνότητα ω_0 και η διαταραχή περιοδική συχνότητας ω (με όχι μεγάλη διαφορά οι δύο συχνότητες), και αν $\theta = \phi + \omega t$, η εξίσωση φάσης προσεγγίζεται σε πρώτη τάξη και μετά από averaging,

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{1}{T} \int_0^T Q^T(\phi + \omega t)g(t)dt = \Delta\omega + h(\phi). \quad (152)$$

Το διάνυσμα διαταραχών g θεωρείται ότι έχει μια μόνο ενεργό συνιστώσα, την i . Το locking range τώρα δίνεται από την $\Delta\omega_{\max} = \max_{\phi} |h(\phi)|$, η οποία στην περίπτωση ημιτονικής εισόδου δίνει $\max_{\phi} |h(\phi)| = A|\Gamma_1|/2$, όπου $|\Gamma_1|$ είναι το πλάτος της πρώτης αρμονικής της Q .

Η περιορισμοί της μεθόδου συνοψίζονται στα παρακάτω.

- Η μεταβλητή των isostables αμελείται πλήρως. Επιπλέον το gradient $\nabla\theta$ προσεγγίζεται από τις αντίστοιχες τιμές του πάνω στον οριακό κύκλο, όπως και η διαταραχή. Αυτή η πρώτη τάξης προσέγγιση ισχύει μόνο για πολύ μικρές τιμές του πλάτους της διαταραχής.
- Στην εξίσωση της φάσης έχει γίνει averaging το οποίο εισάγει περαιτέρω περιορισμούς στο πόσο ισχυρή μπορεί να είναι η διαταραχή.
- Το μέγιστο locking range προέκυψε συμμετρικό ως προς το ω_0 και ανάλογο του πλάτους. Αυτό το συμπέρασμα είναι ακριβώς ανάλογο με τις μεθόδους Harmonic Balance και averaging. Η σωστή ερμηνεία είναι ότι το προσεγγιστικό μοντέλο φάσης δίνει την κλίση της εφαπτομένης των συνόρων των Arnold tongues, παρά τα ίδια τα όρια.

Στο [26], έχει γίνει μια προσπάθεια να συμπεριληφθεί και η επίδραση της διαταραχής στο πλάτος της ταλάντωσης. Συγκεκριμένα, η απόκλιση του πλάτους μεταξύ του αυτόνομου ταλαντωτή και του διαταραγμένου σε κάποια φάση ϕ , θεωρείται ότι μπορεί να δοθεί ως χρονικός μέσος όρος ενός γινομένου αντίστοιχου με το $Q^T(\phi + \omega t)g(t)$, μόνο που τώρα η συνάρτηση Q αντικαθίσταται από μια άλλη συνάρτηση D υπεύθυνη για το πλάτος. Η επίδραση του πλάτους στην (152) τώρα είναι, (152),

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{h(\phi)}{1 + A(\phi)}. \quad (153)$$

Στο παραπάνω έχει γίνει η υπόθεση ότι ναι μεν το πλάτος επιτρέπεται να έχει μικρές αποκλίσεις από την αυτόνομη τιμή του, αλλά τα χαρακτηριστικά της κυματομορφής παραμένουν αναλλοίωτα. Η προσέγγιση αυτή δεν αίρει τον περιορισμό για μικρά πλάτη, ενώ το averaging εισάγει τους γνωστούς περιορισμούς. Ουσιαστικά είναι σαν να προσεγγίζεται το σύστημα δράσης-γωνίας (114) με το

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega + \nabla(\theta, r_1) \cdot g(t) \\ r_1 &= \sigma_1 r_1 + \nabla r_1(0, \theta)g(t), \end{aligned} \quad (154)$$

και στην συνέχεια να εφαρμόζεται averaging στην εξίσωση της δράσης. Παρόλα αυτά δεν υπάρχει κάποια αυστηρή εξαγωγή της (153), από την (154) που να δικαιολογεί τον παράγοντα $1/(1+A)$ στην εξίσωση της φάσης. Επομένως, τα gradients προσεγγίζονται και πάλι από τις αντίστοιχες τιμές τους στον οριακό κύκλο περιορίζοντας την εφαρμογή της μεθόδου και πάλι σε ασθενείς διαταραχές.

Συνοψίζοντας, οι μέθοδοι Harmonic Balance, Averaging και το κλασσικό μοντέλο φάσης (χωρίς την επίδραση του πλάτους) είναι ουσιαστικά ισοδύναμες: οι ιδιότητες του συγχρονισμού καθορίζονται από τον συνδυασμό των συχνοτήτων που δίνουν την θεμελιώδη είτε μέσω κατάλληλου φιλτραρίσματος είτε μέσω averaging. Η μεταβλητή δράσης αγνοείται και η δυναμική προσεγγίζεται σε μια πολύ μικρή περιοχή του οριακού κύκλου, κάτι που απαιτεί πολύ ασθενή έγχυση. Οι μέθοδοι αυτές ουσιαστικά προσεγγίζουν την εφαιπτομένη των συνόρων των περιοχών συντονισμού για πολύ μικρά πλάτη και πολύ μικρές συχνοτικές διαφορές. Με αυτόν τον τρόπο πολλά δυναμικά φαινόμενα αμελούνται. Η θεώρηση και του πλάτους στο [26] παραμένει περιοριστική, αφού ουσιαστικά προσεγγίζει την διαταραχή και το gradient της μεταβλητής δράσης (όπως και της φάσης) από τις τιμές πάνω στον κύκλο και στην συνέχεια εφαρμόζει averaging, απαιτώντας και πάλι ασθενές πλάτος διαταραχής. Το πρόβλημα του συγχρονισμού αντιμετωπίζεται στην γενικότητα του από την θεωρία Koopman.

0.6 Μη Γραμμική Δυναμική Ηλεκτρονικών Ταλαντωτών

Μελετάμε την μη γραμμική δυναμική του διαφορικού LC ταλαντωτή καθώς και του Colpitts. Τεχνικές λεπτομέρειες παραλείπονται και μπορούν να βρεθούν πλήρων αναλυμένες στο Κεφάλαιο 6.

0.6.1 Μη γραμμική δυναμική διαφορικών LC Ταλαντωτών

Οι ταλαντωτές αυτοί περιγράφονται από το σύστημα (134),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Qy + QGf(x) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q,\end{aligned}\tag{155}$$

με f τουλάχιστον C^4 , περιττή και $f^{(3)}(0) < 0$. Δείχνουμε αναλυτικά ότι τουλάχιστον σε μια περιοχή της αρχής, ανεξαρτήτως από την μορφή της f , όλα τα συστήματα της μορφής (155) εμφανίζουν ποιοτικά την αυτή την συμπεριφορά. Υποθέτοντας $f(x) = x - cx^3 + O(x^5)$ και κάνοντας κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών το σύστημα γράφεται,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3 + O(x_1^5).\end{aligned}\tag{156}$$

Αμελώντας τους όρους ανώτερης τάξης το (156) αντιστοιχεί στην κανονική μορφή Bogdanov-Takens με \mathbb{Z}_2 συμμετρία (υπό την $x \rightarrow -x$) [35, 60].

Τοπικές Διακλαδώσεις

Η αρχή είναι σημείο ισορροπίας για κάθε μ_1, μ_2 . Εξετάζοντας τον Jacobian πίνακα, προκύπτει ότι για $\mu_i = 0$ το σύστημα έχει μια διπλή μηδενική ιδιοτιμή αντιστοιχώντας σε codim-2 Bogdanov-Takens διακλάδωση. Για $\mu_1 < 0$ and $\mu_2 < 0$ η αρχή είναι ευσταθής. Στο $\mu_2 = 0$, $\mu_1 < 0$ συμβαίνει μια διακλάδωση Hopf (συμβολίζεται ως $H^{(1)}$). Με κατάλληλους μετασχηματισμούς (δείτε Κεφάλαιο 6) αποδεικνύουμε ότι είναι supercritical διακλάδωση. Για $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ ο Jacobian πίνακας έχει μια μηδενική ιδιοτιμή. Από την (156) φαίνεται ότι για $\mu_1 = 0$, δύο συμμετρικά σημεία ισορροπίας $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$ διακλαδώνονται από την αρχή. Για $\mu_1 > 0$, η αρχή γίνεται σάγμα, ενώ εξετάζοντας τον Jacobian πίνακα στα συμμετρικά σημεία, προκύπτει ότι αυτά δημιουργούνται ασταθή. Οπότε μια subcritical Pitchfork (συμβολίζεται ως $F^{(1)}$) διακλάδωση συμβαίνει στο $\mu_1 = 0$. Τα δύο συμμετρικά σημεία ισορροπίας γίνονται ευσταθή μέσω μιας subcritical Hopf διακλάδωσης (συμβολίζεται ως $H^{(2)}$) για $\mu_1 = \mu_2$, ενώ δύο ασταθείς οριακοί κύκλοι διακλαδώνονται.

Περαιτέρω τοπικές διακλαδώσεις δεν υπάρχουν. Πρέπει όμως να υπάρχουν ολικές διακλαδώσεις οριακών κύκλων γιατί για $\mu_2 < 0$, δεν υπάρχει κανένας οριακός κύκλος, αφού $\nabla \cdot f(x) < 0$. Επομένως πρέπει να έχουν συμβεί ολικές διακλαδώσεις που προκαλούν την καταστροφή των ευσταθών και ασταθών οριακών κύκλων. Η μελέτη τους απαιτεί την Θεωρία Melnikov.

Μέθοδος Melnikov

Θεωρούμε ένα διδιάστατο διαταραγμένο Χαμιλτονιανό σύστημα της μορφής,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y, \epsilon, \mu) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y, \epsilon, \mu), \end{aligned} \quad (157)$$

όπου H είναι η Χαμιλτονιανή, μ είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων, ϵ είναι η παράμετρος διαταραχής και f, g επαρκώς ομαλές συναρτήσεις. Στα παρακάτω $h(x, y, \epsilon, \mu) = (f(x, y, \epsilon, \mu), g(x, y, \epsilon, \mu))$. Υποθέτουμε ότι [60, 21],

- Για $\epsilon = 0$, η (157) έχει μια ομοκλινική τροχιά Γ που συνδέει το σάγμα x_0 με τον εαυτό του.
- Για $\epsilon = 0$, (157) υπάρχει μια μονό-παραμετρική οικογένεια οριακών κύκλων $\Gamma_h : (x_h(t), y_h(t))$ περιόδου T_h για $h \in I$, όπου I κάποιο διάστημα.

Αρχικά εξετάζουμε την διατήρηση των περιοδικών τροχιών υπό την επίδραση της διαταραχής. Ορίζουμε την συνάρτηση Melnikov ως ακολούθως.

Definition 0.6.1. Ορίζουμε την (πρώτης τάξης) συνάρτηση Melnikov κατά μήκος ενός οριακού κύκλου ως,

$$M(h, \mu) = \int_0^{T_h} (\dot{y}_h, -\dot{x}_h) \cdot (f(x_h(t), y_h(t), 0, \mu), g(x_h(t), y_h(t), 0, \mu)) dt, \quad h \in I. \quad (158)$$

Όπως έχει οριστεί, η συνάρτηση Melnikov δίνει σε πρώτη τάξη την απόσταση μεταξύ των επιπέδων της Χαμιλτονιανής ενός σημείου και της εικόνας του μέσω της απεικόνιση Poincaré (Κεφάλαιο 6). Έπεται ότι ένας οριακός κύκλος διατηρείται αν η απόσταση αυτή είναι μηδέν. Σε σχέση με την συνάρτηση Melnikov έχουμε το ακόλουθο.

Theorem 0.6.1. Αν υπάρχει $h_0 \in I$ και μ_0 ώστε

$$M(h_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial h}(h_0, \mu_0) \neq 0, \quad (159)$$

τότε για επαρκώς μικρό ϵ η (157) έχει έναν υπερβολικό κύκλο Γ_ϵ για $\mu = \mu_0 + O(\epsilon)$, δηλαδή ο Γ_{h_0} διατηρείται ως περιοδική τροχιά υπό την επίδραση της διαταραχής.

Proof. Δείτε [2]. □

Στην συνέχεια εξετάζουμε την διατήρηση της ομοκλινικής τροχιάς. Έστω $W^s(x_{\epsilon,0})$ και $W^u(x_{\epsilon,0})$ η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα του διαταραγμένου σάγματος, αντίστοιχα. Για ϵ μικρό, το σημείο ισορροπίας διατηρείται ως σάγμα, είναι ϵ κοντά στο αδιατάρακτο, όπως και οι αντίστοιχες πολλαπλότητες. Παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση, ορίζουμε την συνάρτηση Melnikov ως ακολούθως.

Definition 0.6.2. Η πρώτη τάξης συνάρτηση Melnikov υπολογισμένη κατά μήκος της ομοκλινικής τροχιάς ορίζεται ως

$$M(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0(t)) \cdot h(q_0(t), 0, \mu) dt. \quad (160)$$

Από τον ορισμό (δείτε Κεφάλαιο 6) προκύπτει ότι αποτελεί την πρώτη τάξης προσέγγιση της απόστασης μεταξύ $W^u(x_{\epsilon,0})$ και του $W^s(x_{\epsilon,0})$. Επομένως για σταθερό μ , και ϵ μικρό, οι πολλαπλότητες είτε ταυτίζονται είτε δεν τέμνονται καθόλου. Με απλή επισκόπηση των ορισμών των δύο συναρτήσεων Melnikov προκύπτει ότι η μόνη διαφορά είναι στην καμπύλη επί της οποίας γίνεται η ολοκλήρωση, αν και η ανάλυση για την εξαγωγή τους είναι διαφορετική (δείτε Κεφάλαιο 6). Έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Theorem 0.6.2. *Αν υπάρχει μ_0 ώστε*

$$M(\mu_0) = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \mu}(\mu_0) \neq 0, \quad (161)$$

τότε για ϵ επαρκώς μικρό, οι ευσταθής και ασταθής πολλαπλότητα του $x_{\epsilon,0}$, $W_{\epsilon,\mu}^s(x_{\epsilon,0})$ και $W_{\epsilon,\mu}^u(x_{\epsilon,0})$, ταυτίζονται για $\mu = \mu_0 + O(\epsilon)$.

Proof. Δείτε [60]. □

Με χρήση της παραπάνω θεωρίας μπορούμε να μελετήσουμε τις ολικές διακλαδώσεις του (155).

Ολικές Διακλαδώσεις

Για να μετατρέψουμε το (156) στην μορφή (157), εισάγουμε την αλλαγή μεταβλητών,

$$x = \epsilon u, \quad y = \epsilon^2 v, \quad \mu_1 = \epsilon^2, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \nu, \quad t \rightarrow t/\epsilon, \quad (162)$$

οπότε το (156) γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^2 + \epsilon (\nu v - u^2 v). \end{aligned} \quad (163)$$

Το σύστημα (163) έχει τώρα την μορφή (157) και συγκεκριμένα αντιστοιχεί στον Ταλαντωτή Duffing. Για $\epsilon = 0$, η Χαμιλτονιανή είναι η $H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4$ και το πορτραίτο φάσης του γνωστό και απεικονίζεται στο Σχήμα 6.1. Δύο συμμετρικές ομοκλινικές τροχιές Γ_0^\pm (λόγω \mathbb{Z}_2 συμμετρίας) συνδέουν την αρχή (που είναι σάγμα) με τον εαυτό της και αντιστοιχούν στο μηδενικό επίπεδο της H . Για $-1/4 < h < 0$, κάθε επίπεδο της $H(u, v) = h$ αντιστοιχεί σε δύο συμμετρικές περιοδικές τροχιές που συγκρούονται στο $h = 0$ σχηματίζοντας μια συμμετρική ομοκλινική τροχιά. Για $h > 0$ υπάρχει μια μοναδική περιοδική τροχιά.

Λόγω συμμετρίας αρκεί να εξετάσουμε μόνο την Γ_0^+ . Παραμετροποιώντας την τροχιά και υπολογίζοντας την συνάρτηση Melnikov, καταλήγουμε ότι, $M(\nu) = 0$ για $\nu = 4/5$, και έτσι για επαρκώς μικρά ϵ , το σύστημα (163) έχει ομοκλινική τροχιά για $\nu = 4/5 + O(\epsilon)$ ή ισοδύναμα στις μ μεταβλητές, μια ομοκλινική καμπύλη διακλάδωσης (συμβολίζεται με P)

$$\mu_2 = \frac{4}{5}\mu_1 + O(\mu_1^{3/2}). \quad (164)$$

Έτσι έχουμε αποδείξει αναλυτικά την ύπαρξη ομοκλινικής διακλάδωσης οριακών κύκλων και η παραπάνω εξίσωση δίνει την γραμμική προσέγγιση της καμπύλης για μ_1 μικρό (ισοδύναμα της εφαπτομένη στο $\mu_1 = 0$).

Για τον καθορισμό του πλήθους των οριακών και τον προσδιορισμό της καμπύλης διακλάδωσης σάγματος-κόμβου, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Melnikov υπολογισμένη στις περιοδικές τροχιές. Πάνω σε μια περιοδική τροχιά $\gamma_h(t)$ της (163), η συνάρτηση Melnikov είναι

$$\begin{aligned} M(h, \nu) &= \int_0^{T_h} \dot{u}_h (\nu v - u^2 v) dt \\ &= \nu I_1(h) - I_2(h). \end{aligned} \quad (165)$$

Επειδή $I_1(h) > 0$ αρκεί η μελέτη των ριζών της

$$N(h, \nu) = \nu - R(h), \quad R(h) = \frac{I_2(h)}{I_1(h)}. \quad (166)$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της R καταλήγουμε (δείτε Κεφάλαιο 6) στα ακόλουθα.

1. Για $\nu > 1$, $\nu > R(h)$ για κάθε $h \in (-1/4, 0)$ και υπάρχει μοναδικό $h > h^*$ ώστε $R(h) = \nu_0$. Επομένως, υπάρχει ευσταθής περιοδική τροχιά για ϵ και $\nu = \nu_0 + O(\epsilon)$.

2. Αν $\nu_0 \in (R_m, 4/5)$, $\nu < R(h)$ για κάθε $h \in (-1/4, 0)$ και υπάρχουν $h_1, h_2 > h^*$ ώστε $R(h_i) = \nu$. Οπότε, υπάρχουν δύο περιοδικές τροχιές για μικρό ϵ και $\nu = \nu_0 + O(\epsilon)$, η μια ευσταθής και η άλλη ασταθής εντός της ευσταθούς.
3. Αν $\nu_0 \in (4/5, 1)$, υπάρχει μοναδικό $h_0 \in (-1/4, 0)$ ώστε $R(h) = \nu$ και μοναδικό $h_2 > h^*$ ώστε $R(h_2) = \nu$. Άρα το (6.34) έχει δύο συμμετρικούς υπερβολικούς κύκλους για $\nu = \nu_0 + O(\epsilon)$. Οι συμμετρικές τροχιές είναι ασταθείς αφού $R(h) < \nu_0$ για $h > h_0$ και $R(h) > \nu_0$ για $h < h_0$. Η τρίτη εντός της οποίας βρίσκονται οι άλλες δύο είναι ευσταθής.
4. Στο $\nu = R_m$ συμβαίνει διακλάδωση σάγματος-κόμβου και οι ευσταθείς και ασταθείς κύκλοι συγκρούονται και εξαφανίζονται.
5. Αν $\nu < R_m$, $\nu < R(h)$ για κάθε $h > -1/4$. Άρα δεν υπάρχουν περιοδικές τροχιές.

Επιστρέφονται στις αρχικές παραμέτρους μ του (156), μπορούμε να ολοκληρώσουμε την ανάλυση διακλαδώσεων. Για

$$4\mu_1/5 + O(\mu_1^{3/2}) < \mu_2 < \mu_1, \mu_1 > 0, \quad (167)$$

υπάρχουν τρεις κύκλοι: ένας ευσταθής (που γεννήθηκε από supercritical Hopf διακλάδωση της αρχής) και δύο ασταθείς (γεννήθηκαν από subcritical Hopf διακλαδώσεις των συμμετρικών σημείων ισορροπίας). Ο ευσταθής οριακός κύκλος περικυκλώνει τους ασταθείς και τα σημεία ισορροπίας. Στην καμπύλη ομοκλινικής διακλάδωσης οι δύο ασταθείς κύκλοι συγκρούονται και δημιουργούν μια συμμετρική ομοκλινική τροχιά. Για

$$R_m\mu_1 + O(\mu_1^{3/2}) < \mu_2 < 4\mu_1/5 + O(\mu_1^{3/2}), \mu_1 > 0, \quad (168)$$

υπάρχουν δύο κύκλοι: ένας μεγαλύτερος ευσταθής που περικυκλώνει τον ασταθή. Για

$$\mu_2 = R_m\mu_1 + O(\mu_1^{3/2}), \mu_1 > 0, \quad (169)$$

οι δύο κύκλοι συγκρούονται και εξαφανίζονται μέσω μια διακλάδωσης σάγματος-κόμβου (συμβολίζεται με K). Για

$$\mu_2 < R_m\mu_1 + O(\mu_1^{3/2}), \mu_1 > 0, \quad (170)$$

δεν υπάρχουν οριακοί κύκλοι και η (156) έχει δύο συμμετρικά ευσταθή σημεία ισορροπίας και την αρχή ως σάγμα. Το Σχήμα 6.2 συνοψίζει τις διακλαδώσεις του (156). Τονίζουμε ότι οι (169) και (164) αντιστοιχούν ουσιαστικά στις εφαπτόμενες των πραγματικών καμπυλών. Επομένως κάθε ηλεκτρονικός ταλαντωτής του οποίου η μη γραμμική συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις που θέσαμε έχει δυναμική τοπολογικά ισοδύναμη, τουλάχιστον κοντά στην αρχή, με το σύστημα (156). Αν τώρα εκφράσουμε τις καμπύλες διακλάδωσης ως προς τις Q, G μεταβλητές θα έχουμε

$$\text{Σημεία Ισορροπίας: Η αρχή και } (\pm\sqrt{\mu_1}, 0), \mu_1 > 0, \Leftrightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{G-1}{Gc}}, \pm\sqrt{\frac{G-1}{Gc}} \right), G > 1.$$

$$\text{Supercritical Hopf Διακλάδωση } H^{(1)} : \mu_2 = 0, \mu_1 < 0 \Leftrightarrow Q^2G = 1, G > 0.$$

$$\text{Subcritical Pitchfork Διακλάδωση } F^{(1)} : \mu_1 = 0 \Leftrightarrow G = 1. \quad (171)$$

$$\text{Subcritical Hopf Διακλάδωση } H^{(2)} : \mu_1 = \mu_2, \mu_1 > 0 \Leftrightarrow (3 - 2G)Q^2 = 1, G > 1.$$

$$\text{Homoclinic Bifurcation Διακλάδωση } P : \mu_1 = 4\mu_2/5, \mu_1 > 0 \Leftrightarrow 12 - 7G = 5/Q^2, G > 0.$$

$$\text{Saddle-Node Διακλάδωση } K : \mu_1 = R_m\mu_2, \mu_1 > 0 \Leftrightarrow G(1 - 3R_m) + 3R_m = 1/Q^2, G > 0.$$

Συμμετρία και Διακλαδώσεις

Με κίνητρο την συμμετρία $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ του (155) στην παρούσα ενότητα μελετάμε τη σχέση μεταξύ συμμετρίας και διακλαδώσεων γενικότερα.

Definition 0.6.3. Μια ομάδα Lie είναι μια κλειστή υποομάδα των γραμμικών, αντιστρέψιμων μετασχηματισμών του \mathbb{R}^n στο \mathbb{R}^n , που συμβολίζουμε ως Γ .

Χρησιμοποιώντας την δράση της Γ σε έναν γραμμικό χώρο V , μπορούμε να αναπαραστήσουμε την Γ με μια γραμμική απεικόνιση με αντίστοιχο πίνακα T_γ .

Definition 0.6.4. Ένα δυναμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ είναι αναλλοίωτο ως προς την Γ αν,

$$f(\gamma x) = \gamma f(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (172)$$

ή ισοδύναμα,

$$f(T_\gamma x) = T_\gamma f(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (173)$$

Επομένως αν $x(t)$ είναι λύση, τότε και η $\gamma \cdot x(t) = T_\gamma x(t)$ είναι λύση.

Η απλούστερη μη τετριμμένη ομάδα είναι η ισόμορφη προς την \mathbb{Z}_2 . Στην αναπαράσταση με πίνακες αποτελείται από δύο στοιχεία R, I_n ώστε $R^2 = I_n$. Για τον R , υπάρχει πίνακας ομοιότητας S ώστε ο R στις νέες συνταγμένες να έχει την μορφή,

$$R = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & -I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad (174)$$

με $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 1$ και συμβολίζουμε με X^+, X^- την εικόνα των I_{n_1}, I_{n_2} αντιστοίχως. Στα επόμενα χρησιμοποιείται η ως άνω μορφή του R .

Definition 0.6.5. Για σημεία ισορροπίας ορίζουμε:

- Ένα σημείο ισορροπίας x_0 λέγεται σταθερό αν $Rx_0 = x_0$.
- Δύο σημεία ισορροπίας είναι R - συζυγή αν $x_1 = Rx_0$.

Αναλόγως για οριακούς κύκλους:

- Μια περιοδική λύση x_f λέγεται σταθερή (F λύση-κύκλος) αν $Rx_f(t) = x_f(t)$ για κάθε t .
- Μια περιοδική λύση x_s λέγεται συμμετρική (R λύση κύκλος) αν $Rx_s(t) = x_s(t + T/2)$ για κάθε t , όπου T η περίοδος.

Μια σταθερή περιοδική λύση x_f ανήκει στον αναλλοίωτο ως προς R χώρο και έτσι απαιτεί $n_1 \geq 2$. Αναλόγως, η x_s απαιτεί $n_2 \geq 2$. Γεωμετρικά αμφότεροι κύκλοι αντιστοιχούν σε R αναλλοίωτες κλειστές καμπύλες και οποιοσδήποτε R αναλλοίωτος κύκλος είναι είτε τύπου F είτε S [35]. Προφανώς αν x_0 μη αναλλοίωτος, υπάρχει και δεύτερος κύκλος x_1 συζυγής προς αυτόν.

Οι διακλαδώσεις των R συζυγών σημείων ισορροπίας δεν παρουσιάζουν καμία διαφορά, απλώς γίνονται σε ζεύγη. Έχουμε το ακόλουθο σχετικά με τα σταθερά σημεία.

Theorem 0.6.3. Έστω $f(x, \mu)$ διανυσματικό πεδίο ορίζον ένα \mathbb{Z}_2 αναλλοίωτο σύστημα, x_0 ένα σταθερό σημείο ισορροπίας και μ μια παράμετρος.

- Αν για $\mu = 0$ το σημείο ισορροπίας έχει μια μηδενική ιδιοτιμή με ιδιοδιάνυσμα $v \in X^+$, τότε συμβαίνει μια *fold* διακλάδωση και έτσι υπάρχουν τελικά δύο σημεία ισορροπίας αντίθετης ευστάθειας.
- Αν για $\mu = 0$ έχει μια μηδενική ιδιοτιμή με ιδιοδιάνυσμα $v \in X^-$, τότε μια *pitchfork* διακλάδωση οδηγεί στην δημιουργία δύο R συζυγών σημείων ισορροπίας, ενώ το αρχικό σημείο αλλάζει ευστάθεια.
- Αν για $\mu = 0$ το σημείο ισορροπίας έχει δύο καθαρά φανταστικές συζυγείς ιδιοτιμές με ιδιόχωρο X^c , τότε συμβαίνει μια *Hopf* διακλάδωση. Αν ο X^c ανήκει στον X^+ , η διακλάδωση *Hopf* συμβαίνει εντός του X^+ οπότε δημιουργείται ένας F κύκλος. Αν ο X^c ανήκει στον X^- , τότε η διακλάδωση *Hopf* συμβαίνει εντός X^- , με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένας S κύκλος.

Στην περίπτωση του (155), $n_2 = 2, n_1 = 0$, ώστε μόνο διακλαδώσεις Pitchfork και Hopf που οδηγούν σε S κύκλους μπορούν να συμβούν.

Στρεφόμαστε τώρα στις διακλαδώσεις οριακών κύκλων. Διακλαδώσεις μη αναλλοίωτων κύκλων δεν παρουσιάζουν ουδεμία διαφορά, ώστε ασχολούμαστε με τους κύκλους τύπου F, S .

Ξεκινάμε με την περίπτωση των F κύκλων. Αποδεικνύεται (Κεφάλαιο 6) ότι σε αυτήν την περίπτωση η απεικόνιση Poincaré είναι R αναλλοίωτη ανάγοντας την ανάλυση σε αυτήν \mathbb{Z}_2 συμμετρικών διακριτού χρόνου συστημάτων. Έχουμε το παρακάτω

Theorem 0.6.4. Έστω $f(x, \mu)$ διανυσματικό πεδίο ορίζον ένα \mathbb{Z}_2 συμμετρικό σύστημα, όπου μ παράμετρος και έστω ότι x_f ένας κύκλος.

- Αν στο $\mu = 0, \mu_1 = 1$, κανένας άλλος πολλαπλασιαστής δεν έχει μέτρο 1, και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $v \in X^+$, τότε μια fold (saddle-node) διακλάδωση συμβαίνει εντός του X^+ με αποτέλεσμα να δημιουργούνται δύο F - κύκλοι με διαφορετικούς τύπους ευστάθειας.
- Αν για $\mu = 0, \mu_1 = 1$, κανένας άλλος πολλαπλασιαστής δεν έχει μέτρο 1, και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $v \in X^-$, τότε συμβαίνει μια διακλάδωση Pitchfork εντός του X^- δημιουργώντας δύο R συζυγείς κύκλους, ενώ ο αρχικός αλλάζει την ευστάθειά του.
- Αν για $\mu = 0, \mu_1 = -1$ και κανένας άλλος πολλαπλασιαστής δεν έχει μέτρο 1, τότε συμβαίνει μια flip (period-doubling) διακλάδωση. Αν το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $v \in X^+$, τότε ο κύκλος διπλασίας περιόδου είναι F αλλιώς S τύπου.
- Αν για $\mu = 0, \mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ και κανένας άλλος πολλαπλασιαστής δεν έχει μέτρο 1, τότε μια αναλλοίωτη καμπύλη διακλαδώνεται από το σημείο ισορροπίας αντιστοιχώντας σε έναν αναλλοίωτο τόρο $T^2 = R(T^2)$ για το συνεχούς χρόνου σύστημα.

Συνεχίζοντας με τους S κύκλους, αποδεικνύεται (Κεφάλαιο 6) ότι η απεικόνιση Poincaré δεν είναι R αναλλοίωτη, αλλά γράφεται ως $P = Q^2$ για κατάλληλα ορισμένη Q . Η συνθήκη αυτή δεν επιτρέπει την εμφάνιση διπλασιασμών περιόδου, ενώ απαιτεί κατάλληλη τροποποίηση των συνθηκών $v \in X^\pm$ με $Bv = \pm v$, όπου B η Jacobian της Q . Με αυτές τις τροποποιήσεις το Θεώρημα εφαρμόζεται.

Στο (155), $n_2 = 2$ και έτσι έχουμε μόνο Pitchfork, και Hopf διακλαδώσεις οδηγώντας σε S κύκλους, και διακλαδώσεις σάγματος-κόμβου για τους S κύκλους, σε συνέπεια με τα παραπάνω. Αύξηση της τάξης του συστήματος στο Σχήμα 5.5, με προσθήκη επιπλέον tanks διατηρεί την \mathbb{Z}_2 συμμετρία περιορίζοντας τα δυναμικά φαινόμενα που μπορούν να προκύψουν σε παρόμοια με το επίπεδο σύστημα.

Δυναμική της Υλοποίησης BJT και MOS

Στα προηγούμενα μελετήσαμε τους διαφορικούς LC ταλαντωτές γενικά και δείξαμε ότι η δυναμική συμπεριφορά τους είναι ίδια σε τουλάχιστον μια περιοχή της αρχής. Στην παρούσα ενότητα υπολογίζουμε αριθμητικά τις πλήρεις καμπύλες διακλάδωσης για την υλοποίηση του ταλαντωτή με BJT και MOS.

Για την υλοποίηση με BJT έχουμε $f(x) = \tanh(x)$ και $c = -1/3$. Οι ανώτεροι όροι της f θα αλλάξουν ποσοτικά τις καμπύλες διακλάδωσης, ώστε η γραμμική προσέγγιση θα παύσει να ισχύει μακριά από το σημείο Bogdanov-Takens. Η καμπύλη διακλάδωσης supercritical Hopf ($H^{(1)}$) συμβαίνει ακριβώς στο $Q^2G = 1$ και η Pitchfork στο $G = 1$ ($F^{(1)}$). Τα συζυγή σημεία ισορροπίας δίνονται από την

$$(x_e, y_e) = (\pm z, \pm z), \quad G \tanh z = z, \quad G > 1, \quad z \neq 0. \quad (175)$$

Η subcritical Hopf καμπύλη διακλάδωσης ($H^{(2)}$) δίνεται από την

$$(G, Q^2) = \left(\frac{r}{\tanh r}, \frac{\tanh r}{r(1 - \tanh^2 r)} \right), \quad r > 0. \quad (176)$$

Η ομοκλινική (P) και η fold (K) δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά μακριά από το BT σημείο $(Q, G) = (1, 1)$, έτσι χρησιμοποιούμε το MATCONT [16]. Το Σχήμα 6.3 δείχνει τις καμπύλες διακλάδωσης στο επίπεδο των παραμέτρων. Οι καμπύλες ομοκλινικής και fold διακλάδωσης (Q, G) παύουν να είναι

ευθείες καθώς απομακρυνόμαστε από το $(1, 1)$, όπως αναμένεται. Σημειώνεται ότι η ποιοτική περιγραφή του (156) περιγράφει πλήρως την δυναμική του (155) με την δεδομένη μορφή της f .

Το Σχήμα 6.4 δείχνει φασικά πορτραίτα του (155) για τιμές παραμέτρων που αντιστοιχούν σε κάθε περιοχή του Σχήματος 6.3. Στο (a), οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή κάτω από την καμπύλη supercritical Hopf και μεταξύ της καμπύλης Pitchfork της Hopf. Επομένως, η αρχή είναι ευσταθής και δεν υπάρχουν άλλοι ελκυστές (είτε σε θετικού είτε σε αρνητικούς χρόνους). Στο (b), οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή πάνω από την καμπύλη supercritical Hopf και μεταξύ της καμπύλης Pitchfork της Hopf. Άρα η αρχή είναι repeller και διακλαδώνεται ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Στο (c), οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή που ορίζεται από τη καμπύλη Pitchfork και την subcritical Hopf, οπότε έχουν δημιουργηθεί δύο συμμετρικά ασταθή σημεία ισορροπίας. Τα σημεία αυτά έχουν γίνει ευσταθή και έχουν δημιουργηθεί δύο ασταθείς οριακοί κύκλοι γύρω τους, στο (d), όπου οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή μεταξύ της καμπύλης subcritical Hopf και της ομοκλινικής καμπύλης. Στο (e), οι ασταθείς κύκλοι έχουν ενωθεί σε έναν μεγαλύτερο μέσω της ομοκλινικής διακλάδωσης και οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή που ορίζεται από την ομοκλινική καμπύλη και την καμπύλη σάγματος-κόμβου. Τέλος, στο (f), οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή του επιπέδου μεταξύ της καμπύλης pitchfork και της καμπύλης σάγματος κόμβου και υπάρχουν μόνο σημεία ισορροπίας. Είναι προφανές ότι τα φασικά επίπεδα του συστήματος με την συγκεκριμένη f και του (156) είναι ποιοτικά ίδια και οι καμπύλες διακλάδωσης διαφέρουν μόνο ποσοτικά.

Θεωρώντας την MOS υλοποίηση έχουμε $f(x) = x(1 - x^2)$ και επειδή δεν υπάρχουν $O(x^5)$ όροι, το σύστημα που προκύπτει στην περίπτωση αυτή είναι ακριβώς ισοδύναμο με το (155) σε όλο τον φασικό χώρο. Τα σημεία ισορροπίας, οι διακλάδωσεις Pitchfork και Hopf ($H^{(1)}, H^{(2)}$) δίνονται από την (171), αλλά οι καμπύλες ομοκλινικής διακλάδωσης και διακλάδωσης σάγματος-κόμβου πρέπει να υπολογιστούν αριθμητικά για σημεία μακριά από το $(Q, G) = (1, 1)$. Το Σχήμα 6.5 δείχνει το διάγραμμα διακλάδωσης ως προς τις παραμέτρους Q, G . Είναι προφανές ότι ποιοτικά είναι παρόμοιο με αυτό του BJT και μόνο ποσοτικά χαρακτηριστικά των καμπυλών διαφέρουν. Οι καμπύλες ομοκλινικής διακλάδωσης και σάγματος-κόμβου παύουν να είναι γραμμικές μακριά από το $(Q, G) = (1, 1)$ και είναι μάλιστα πολύ κοντά μεταξύ τους. Για αυτό στο (b) παρέχονται μεγεθυμένες. Τα φασικά πορτραίτα είναι προφανώς παρόμοια με αυτά στο Σχήμα 6.4.

0.6.2 Μη Γραμμική Δυναμική του Ταλαντωτή Colpitts

Θεωρούμε τον ταλαντωτή Colpitts ο οποίος περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)} (1 - e^{-x_2} + x_3) \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{Qk} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q} x_3. \end{aligned} \quad (177)$$

Η αρχή είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας και γραμμικοποιώντας γύρω από αυτό προκύπτει αμέσως ότι είναι ευσταθές για $g < 1$ και ασταθές (saddle-focus) για $g > 1$. Στο $g = 1$ συμβαίνει μια supercritical Hopf διακλάδωση. Πριν την μελέτη των ολικών διακλάδωσεων, θα χρειαστούμε κάποια στοιχεία από την θεωρία του Shilnikov.

Τροχιές Ομοκλινικές σε Saddle-Focus: Το Φαινόμενο Shilnikov

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται (χωρίς την πλήρη ανάλυση, δείτε Κεφάλαιο 6) κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα που σχετίζονται με ομοκλινικές τροχιές σε saddle-focus σημεία ισορροπίας. Θεωρούμε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x - \omega y + Q_1 \\ \dot{y} &= \omega x + \rho y + Q_2 \\ \dot{z} &= \lambda z + Q_3, \end{aligned} \quad (178)$$

όπου $Q_{1,2,3}$ είναι $O(\|x\|^2)$ κοντά στην αρχή. Υποθέτουμε ότι η (178) δέχεται μια ομοκλινική τροχιά Γ συνδέουσα την αρχή με τον εαυτό της και $\lambda > -\rho > 0$. Θεωρούμε δύο τομές Poincaré Π_0 και Π_1 όπως στο Σχήμα 6.6, τις απεικονίσεις $P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_1$ και $P_1 : \Pi_1 \rightarrow \Pi_0$ και χρησιμοποιούμε την $P = P_1 \circ P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_0$ ως απεικόνιση Poincaré. Θεωρούμε ότι το Π_0 είναι επαρκώς κοντά στην αρχή, ώστε το σφάλμα από την χρήση της γραμμικοποιημένης ροής του πεδίου για τον προσδιορισμό του $P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_1$ να είναι μικρό (δείτε Κεφάλαιο 6). Επιπλέον επιλέγεται έτσι ώστε καμία τροχιά να μην επιστρέφει στο Π_0 προτού τμήσει το Π_1 , ενώ το Π_1 είναι επαρκώς μεγάλο, ώστε $P_0(\Pi_0) \in \text{int}(\Pi_1)$. Έτσι ορίζουμε το Π_0 ως

$$\Pi_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [\epsilon e^{2\pi\rho/\omega}, \epsilon], y = 0, z \in (0, \epsilon] \right\}. \quad (179)$$

Προσεγγίζοντας τον P_1 ως έναν αφφινικό μετασχηματισμό, καταλήγουμε ότι η απεικόνιση Poincaré έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\rho/\lambda} \left(a \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) \right) + x_0 \\ x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\rho/\lambda} \left(a \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) \right) \end{bmatrix}. \quad (180)$$

Θεωρώντας τα ορθογώνια

$$R_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, \epsilon e^{2\pi\rho/\omega} \leq x \leq \epsilon, \epsilon e^{-2\pi(k+1)\lambda/\omega} \leq z \leq \epsilon e^{-2\pi k\lambda/\omega} \right\}, \quad (181)$$

τα οποία καλύπτουν όλο το Π_0 , έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Theorem 0.6.5. *Για k επαρκώς μεγάλο, το R_k περιέχει ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor στο οποίο η απεικόνιση Poincaré P είναι τοπολογικά ισοδύναμη με μια πλήρη μετατόπιση δύο συμβόλων.*

Proof. Δείτε [61]. □

Το Θεώρημα μας λέει ότι σε μια περιοχή της ομοκλινικής τροχιάς, το σύστημα (178) έχει χαοτική συμπεριφορά και αριθμήσιμα άπειρο πλήθος horseshoes.

Έστω τώρα παράμετρος μ ώστε η Γ να υπάρχει για $\mu = 0$, ενώ οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες διαχωρίζονται για $\mu \neq 0$. Σε μια περιοχή της ομοκλινικής τροχιάς τόσο στον φασικό χώρο όσο και στον χώρο των παραμέτρων, μετά από κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών ($\delta = -\rho/\lambda$), η απεικόνιση Poincaré γράφεται ως,

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} \alpha x z^\delta \cos(\xi \log z + \Phi_1) + x_0 + \epsilon\mu \\ \beta x z^\delta \cos(\xi \log z + \Phi_2) + x_0 + \mu \end{bmatrix}. \quad (182)$$

Τα σταθερά σημεία της P αντιστοιχούν σε κύκλους ενός loop για την (178). Θεωρώντας τον Jacobian πίνακα γύρω από το σημείο ισορροπίας (δείτε Κεφάλαιο 6) έχουμε ότι για $\delta > 1$, ώστε $-\rho > \lambda$,

- $\mu \leq 0$: δεν υπάρχουν μη τετριμμένες περιοδικές τροχιές
- $\mu > 0$: για κάθε μ , υπάρχει σταθερό σημείο για $z > 0$.

Από την γραμμικοποίηση προκύπτει ότι για $\mu > 0$, η μοναδική περιοδική τροχιά είναι ευσταθής για μ και z μικρά και η ομοκλινική τροχιά είναι ελκυστής. Η περίοδος της περιοδικής τροχιάς ως συνάρτησης του μ φαίνεται στο Σχήμα 6.7 (b).

Αντίστοιχα, αν $\delta < 1$, έχουμε,

- $\mu < 0$: πεπερασμένο αριθμό σημείων ισορροπίας
- $\mu = 0$: αριθμήσιμα άπειρο πλήθος σημείων ισορροπίας
- $\mu > 0$: πεπερασμένο αριθμό σημείων ισορροπίας

Καθώς το $|\mu|$ πλησιάζει το μηδέν, συμβαίνει ένα άπειρο πλήθος διακλαδώσεων σάγματος-κόμβου και διπλασιασμού περιόδου. Οι κύκλοι που δημιουργούνται από αυτές υφίστανται και οι ίδιοι τις αυτές διακλαδώσεις. Συνοπτικά ας εξετάσουμε τις διακλαδώσεις ενός σημείου ισορροπίας (δείτε Κεφάλαιο 6 για μεγαλύτερη ανάλυση). Καθώς αυξάνουμε το μ από αρνητικές προς θετικές τιμές, μια διακλάδωση σάγματος-κόμβου οδηγεί στην δημιουργία ευσταθών κύκλων αν $\delta > 1/2$ και ασταθών διαφορετικά, καθώς και ενός σαγματικού. Ο ευσταθής (ασταθής) κύκλος υφίσταται διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου δύο φορές, ώστε αφού έχει ξανά δημιουργηθεί, καταστρέφεται μέσω μιας διακλάδωσης σάγματος-κόμβου. Έτσι προκύπτει ποιοτικά η εξάρτηση των οριακών κύκλων από το μ όπως στο Σχήμα 6.8 (c).

Κλείνοντας σημειώνουμε ότι εκτός από την κύρια ομοκλινική τροχιά, εμφανίζονται και δευτερεύουσες για $\delta < 1$. Οι τροχίες αυτές περνούν μια φορά από μια γειτονιά του σημείου ισορροπίας προτού κλείσουν σε αυτό. Για κάθε τέτοια τροχιά οι προηγούμενες αναλύσεις ισχύουν περιπλέκοντας την δυναμική του συστήματος. Επομένως, μια ομοκλινική διακλάδωση τύπου Shilnikov οργανώνει τρεις οικογένειες διακλαδώσεων: σάγματος κόμβου, διπλασιασμού περιόδου και δευτερεύουσες ομοκλινικές.

Διακλαδώσεις του Ταλαντωτή Colpitts

Μελετάμε τις διακλαδώσεις του ταλαντωτή Colpitts ως προς τις παραμέτρους Q, G σταθεροποιώντας το $k = 1/2$. Στο $g = 1$, συμβαίνει μια supercritical Hopf διακλάδωση η οποία οδηγεί στην δημιουργία του κύριου οριακού κύκλου. Περαιτέρω τοπικές διακλαδώσεις δεν υπάρχουν. Για $g > 1$, οι ιδιοτιμές είναι οι $\rho \pm i\omega$, λ με $\lambda > -\rho > 0$ και έτσι η αρχή είναι saddle-focus. Το σύστημα (177) έχει μια ομοκλινική τροχιά όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.9 (a). Επομένως η Θεωρία Shilnikov εφαρμόζεται, με μια τροποποίηση: η ασταθής πολλαπλότητα W^u έχει διάσταση 2, οπότε η ευστάθεια των τροχιών αντιστρέφεται, ισοδύναμα αντιστρέφεται ο χρόνος. Σημειώνεται ότι $\delta < 1/2$ επομένως οι διακλαδώσεις σάγματος-κόμβου σε μια περιοχή της ομοκλινικής τροχιάς οδηγούν σε ευσταθείς οριακού κύκλους.

Το διάγραμμα διακλαδώσεων του (177) είναι περίπλοκο και στο Σχήμα 6.9 (b), φαίνεται η θεμελιώδης δομή του. Με T συμβολίζονται οι διακλαδώσεις σάγματος-κόμβου, με F οι διπλασιασμοί περιόδου και με H η ομοκλινική διακλάδωση. Ο δείκτης $n = 1$ δείχνει ότι αναφερόμαστε στην θεμελιώδη δομή και ο εκθέτης στην $F_{1,1}$ δηλώνει την δεύτερη σε σειρά διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου. Ο πρώτος δείκτης χρησιμοποιείται για λόγους απαρτίμησης. Όλες οι καμπύλες έχουν υπολογισθεί με χρήση του MATCONT [16].

Κάτω από την καμπύλη $F_{0,1}$ ο κύριος οριακός κύκλος είναι ο μοναδικός ελκυστής και καθώς περνάμε την καμπύλη διπλασιασμού περιόδου, δημιουργείται ένας κύκλος διπλάσιας περιόδου. Καθώς περνάμε την $F_{1,1}$, συμβαίνει ακόμη ένας διπλασιασμός περιόδου, ακολουθούμενος από ακόμη έναν στην $F_{1,1}^{(2)}$. Έτσι έχουμε χάος τύπου Feigenbaum που προκύπτει από διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου (Σχήμα 6.10). Ο αντίστοιχος παράξενος ελκυστής φαίνεται στο Σχήμα 6.11 (a). Σημειώνεται ότι αμφότερες οι $F_{2,1}$ και $F_{1,1}$ οδηγούν σε οριακό κύκλο περιόδου τετραπλάσιας σε σχέση με τον κύριο.

Εξετάζουμε τις διακλαδώσεις από τις καμπύλες T . Δείχνουμε κάποιες μόνο από το άπειρο πλήθος τους. Η $T_{1,1}$ έχει δύο συνδιάστασης 2 Cusp εκφυλισμένα σημεία με αρνητικό συντελεστή κανονικής μορφής. Σε αυτά τρεις κύκλοι συγκρούονται και καταστρέφονται. Μεταξύ των δύο καμπυλών της $T_{1,1}$ με κέντρο το σημείο Cusp συνυπάρχουν δύο ευσταθείς κύκλοι μαζί με έναν ασταθή. Εκτός την περιοχής αυτής υπάρχει μόνο ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Γενικά τα Cusp σημεία στις καμπύλες σάγματος-κόμβου λόγω του φαινομένου Shilnikov οδηγούν σε πολυστάθεια.

Από την προηγούμενη ανάλυση γνωρίζουμε ότι επαρκώς κοντά στην ομοκλινική τροχιά (και στον χώρο των παραμέτρων και στον φασικό χώρο) υπάρχει χαοτική συμπεριφορά. Ένα τυπικό παράδειγμα χάους Shilnikov φαίνεται στο Σχήμα 6.11 (b). Σημειώνουμε ότι υπάρχουν και δευτερεύουσες ομοκλινικές τροχίες σχετικές με την H_1 , οι οποίες δεν φαίνονται στο Σχήμα 6.9 γιατί αριθμητικοί περιορισμοί δεν επιτρέπουν τον υπολογισμό τους.

Η δομή του Σχήματος 6.9 είναι θεμελιώδης υπό την έννοια ότι η $F_{0,1}$ δημιούργησε έναν κύκλο περιόδου δύο και όλες οι υπόλοιπες διακλαδώσεις αφορούσαν αυτόν τον κύκλο, ορίζοντας την περιοχή του επιπέδου παραμέτρων που οργανώνεται από την κύρια ομοκλινική διακλάδωση. Η δομή αυτή επαναλαμβάνεται με την διαφορά ότι καμπύλες διακλάδωσης σάγματος-κόμβου ορίζουν αντίστοιχες περιοχές του επιπέδου που οργανώνονται από άλλες ομοκλινικές καμπύλες (με περισσότερες επιστροφές σε μια περιοχή της αρχής πριν κλείσουν). Για παράδειγμα η καμπύλη T_3 ορίζει την περιοχή όπου οι περαιτέρω διακλαδώσεις αφού

έναν κύκλο με τρία τοπικά μέγιστα του x_3 . Οι διαφορετικές αυτές δομές δεν πρέπει να συγχέονται με τις δευτερεύουσες ομοκλινικές καμπύλες και τα αντίστοιχα φαινόμενα που αυτές συνεπάγονται.

Εκτός από τις διακλαδώσεις που συζητήθηκαν παραπάνω και σχετίζονται με το φαινόμενο Shilnikov, υπάρχουν και άλλες όπως η T_1 και η F_1 που σχετίζονται με την επικάλυψη διαφορετικών δομών του διαγράμματος διακλαδώσεων. Η T_1 έχει δύο συνδιάστασης 2 Cusp εκφυλισμένα σημεία με αντίθετους συντελεστές κανονικής μορφής: το αριστερό έχει αρνητικό ενώ το δεξί θετικό. έτσι μεταξύ των κλάδων της T_1 συνυπάρχουν δύο διαφορετικοί ευσταθείς κύκλοι μαζί με έναν ασταθή. Η κατάσταση αντιστρέφεται για το άλλο Cusp σημείο. Η F_1 έχει δύο συνδιάστασης 2 εκφυλισμένα σημεία γενικευμένης διακλάδωσης διπλασιασμού περιόδου με θετικό συντελεστή κανονικής μορφής. Από τα σημεία αυτά ξεκινά ακόμη μια διακλάδωση σάγματος-κόμβου (δείτε Κεφάλαιο 6). Αναλόγως με την περιοχή όπου βρίσκονται οι παράμετροι σε σχέση και με την καμπύλη σάγματος-κόμβου, υπάρχει ένας ευσταθής κύκλος περιόδου δύο (αναφερόμαστε στην απεικόνιση Poincaré) και ένας ασταθής περιόδου ένα, είτε ένας ευσταθής περιόδου 2 που συνυπάρχει με έναν ευσταθή περιόδου ένα και με έναν ασταθή περιόδου δύο.

Κλείνοντας σημειώνουμε ότι η θεμελιώδης δομή επιλαμβάνεται γεμίζοντας τον χώρο παραμέτρων. Οι διαφορετικές περιοχές μπορεί να επικαλύπτονται οδηγώντας σε πολυστάθια. Πολυστάθια μπορεί να προκύψει και εντός της αυτής δομής λόγω των Cusp σημείων. Τυπικά παραδείγματα διστάθια φαίνονται στο Σχήμα 6.13. Στο (a), οι παράμετροι βρίσκονται στην οριζόμενη από τους δύο κλάδους της $T_{1,1}$ περιοχής. Στο (b), οι παράμετροι βρίσκονται πάνω από την $F_{0,1}$, και από την T_3 , οδηγώντας στην ύπαρξη ευσταθών κύκλων που ανήκουν σε διαφορετικές δομές.

0.7 Πολύπλοκη Δυναμική Συγχρονισμού Ηλεκτρονικών Ταλαντωτών

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε το πρόβλημα του συγχρονισμού των ηλεκτρονικών ταλαντωτών που περιγράφηκαν προηγουμένως. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: για τιμές παραμέτρων για τις οποίες υπάρχει ένας ευσταθής οριακός κύκλος, τι πλάτος και συχνότητα πρέπει να έχει μια εξωτερική διαταραχή, ώστε να κλειδώσει σε αυτήν ο ταλαντωτής. Χρησιμοποιώντας την κυκλική απεικόνιση θα εξάγουμε το διάγραμμα συγχρονισμού και για τους δύο ταλαντωτές. Για τους διαφορικούς LC ταλαντωτές μελετάμε και ένα παράδειγμα όπου πρέπει να χρησιμοποιηθεί η διδιάστατη απεικόνιση, αντί της μονοδιάστατης κυκλικής και ολοκληρώνουμε με ένα παράδειγμα χαοτικού συγχρονισμού του Colpitts.

0.7.1 Η γενική τεχνική

Η τεχνική που χρησιμοποιούμε είναι βασικά κοινή και για τους δύο ταλαντωτές και βασίζεται στην θεωρία Koopman και στις κυκλικές απεικονίσεις. Θεωρούμε ότι οι παράμετροι είναι τέτοιες ώστε να υπάρχει ευσταθής οριακός κύκλος. Εφαρμόζουμε διαταραχή $A g(x, t)$ περιόδου T_1 και πλάτους A , ώστε η κατάσταση να βρίσκεται πάντα εντός του πεδίου έλξης του κύκλου. Για την $g(x, t)$ υποθέτουμε την μορφή,

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(x, t - nT_1), \quad (183)$$

όπου $h(x, \cdot)$ είναι συνάρτηση πεπερασμένης διάρκειας T_{on} και $T_1 = kT + sT$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0, 1)$. Παρατηρώντας το σύστημα στροβοσκοπικά ανά χρόνους T_1 , ή ορίζοντας ισοδύναμα μια τομή Poincaré, περιγράφουμε το σύστημα με την διδιάστατη απεικόνιση (δείτε Κεφάλαιο 7 ή προηγούμενα μέρη της μετάφρασης),

$$\begin{aligned} r_1 &\rightarrow e^{\sigma_1 T_1} (r_1 + \delta_1(r_1, \theta)) \\ \theta &\rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta_2(r_1, \theta) \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (184)$$

η οποία είναι ακριβής για την περίπτωση των LC ταλαντωτών και πολύ καλή προσέγγιση για τον Colpitts. Οι δ_i περιγράφουν την διαφορά ανάμεσα στις παλαιές μεταβλητές και τις νέες μετά την εφαρμογή της διαταραχής. Αν ο παράγοντας $\sigma_1 T_1$ (ισοδύναμα ο $\sigma_1 kT$) είναι επαρκώς αρνητικός τα σημεία της τομής κινούνται πρακτικά πάνω στον οριακό κύκλο και η μεταβλητή r_1 μπορεί να αγνοηθεί επιτρέποντας την προσέγγιση από την κυκλική απεικόνιση,

$$\theta \rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta(0, \theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \pmod{2\pi}, \quad (185)$$

όπου η $PRC(\theta, A)$ αντιστοιχεί στην διαφορά φάσης ανάμεσα στο παλαιό και το καινούργιο σημείο μόλις η διαταραχή σβήσει για πλάτος διαταραχής A . Η διαφορά αυτή μετράται μέσω των isochrons κατά τα γνωστά και έτσι η δομή των τελευταίων επηρεάζει σημαντικά την απόκριση του ταλαντωτή αφού καθορίζει την κυκλική απεικόνιση. Οι περιοχές συγχρονισμού στο επίπεδο $A - T_1$ που αντιστοιχούν σε κλειδωμένες καταστάσεις και επιβάλλουν ρητή σχέση μεταξύ της παρατηρούμενης συχνότητας και αυτής της διαταραχής χαρακτηρίζονται από ρητό αριθμό περιστροφής. Αντιθέτως άρρητες τιμές, τουλάχιστον για μικρά-μεσαία πλάτη που η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη οδηγούν σε ημιπεριοδική ή χαοτική κίνηση. Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των περιοχών στο $A - T_1$ που χαρακτηρίζονται από ρητούς αριθμούς περιστροφής. Ουσιαστικά, λόγω περιοδικότητας της απεικόνισης ως προς T , οι περιοχές είναι στο επίπεδο $A - s$ και ο παράγοντας k απλώς εξασφαλίζει την γρήγορη σύγκλιση στον οριακό κύκλο. Τονίζουμε ότι $\rho = p/q$ αν και μόνο αν υπάρχει τροχιά περιόδου q . Ο αριθμητής δείχνει πόσες φορές η φάση έχει περάσει το 2π και από πλευράς συχνοτικής σχέσης μεταξύ εισόδου εξόδου δεν έχει σημασία.

Τα βήματα που ακολουθούμε συνοψίζονται ως εξής

1. Υποθέτουμε μια μορφή για την h και επιλέγουμε παραμέτρους που οδηγούν στην ύπαρξη ευσταθούς κύκλου.
2. Προσδιορίζουμε την δομή των isochrons και έτσι την PRC ως συνάρτηση της φάσης θ και για διαφορετικά πλάτη A .
3. Προσδιορίζουμε τον αριθμό περιστροφής ρ για διάφορα s και A , οπότε και το διάγραμμα συγχρονισμού.
4. Βρίσκουμε κατάλληλο k και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με την απευθείας τις διαφορικές εξισώσεις.

Η περίπτωση γρήγορων και ισχυρών διαταραχών δεν αντιμετωπίζεται από τα παραπάνω και θα εξεταστεί ξεχωριστά για τον διαφορικό LC ταλαντωτή. Αντίστοιχα θα εξεταστεί ξεχωριστά η περίπτωση του χαοτικού συγχρονισμού του Colpitts.

0.7.2 Πολύπλοκη Δυναμική Συγχρονισμού Διαφορικών LC Ταλαντωτών

Υποθέτουμε την MOS υλοποίηση (παρόμοια αντιμετωπίζεται η περίπτωση του BJT), με διέγερση εφαρμοζόμενη ως τάση,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Qy + QGx(1 - x^2) + QGAx(1 - x^2)p(t) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q,\end{aligned}\tag{186}$$

όπου για την περιοδική $p(t)$ υποθέτουμε την γνωστή μορφή με $h(t) = \mathbf{1}_{[0, T_{on})}(t)$, $T_{on} = T/10$ και $T_1 = kT + sT$, $k \in \mathbb{N}$ όπου T η περίοδος του αυτόνομου κύκλου.

Isochrons και Phase Response Curves

Το Σχήμα 7.1 δείχνει τα isochrons για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων.

Στα (a) και (b), οι παράμετροι Q και G ανήκουν στην περιοχή μεταξύ των $H^{(1)}$ και $F_+^{(1)}$ του Σχήματος 6.5. Ωστόσο, στο (a), είναι πιο κοντά στην $H^{(1)}$ από ότι στο (b), όπου ο (μη τετριμμένος) εκθέτης Floquet είναι πιο αρνητικός. Γι αυτό στο (a), τα isochrons μοιάζουν με αυτά της κανονικής μορφής Hopf και είναι περίπου λογαριθμικές σπείρες, ενώ στο (b) η δομή αυτή παύει να ισχύει. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις ορίζονται σε ολόκληρο τον φασικό χώρο εκτός του σημείου ισορροπίας.

Στο (c) οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή μεταξύ των $F_+^{(1)}$ και $H^{(2)}$, οπότε το phaseless set περιλαμβάνει την ευσταθή πολλαπλότητα του σάγματος και τα δύο συμμετρικά σημεία ισορροπίας, οδηγώντας σε πιο περίπλοκη δομή. Στο (d) οι παράμετροι βρίσκονται μεταξύ των $H^{(2)}$ και P και έτσι το phaseless set περιλαμβάνει τις ευσταθείς πολλαπλότητες (εσωτερικό ασταθών των κύκλων) των συμμετρικών σημείων ισορροπίας, την ευσταθή πολλαπλότητα της αρχής και τους δύο ασταθείς κύκλους, περιπλέκοντας περαιτέρω την δομή. Στο (e) οι παράμετροι βρίσκονται μεταξύ των P και K , επομένως το phaseless set αποτελείται από τον ασταθή κύκλο, μαζί με το εσωτερικό του. Από τα παραπάνω και από το Σχήμα

7.1, καταλήγουμε ότι η δομή των isochrons είναι αλληλένδετη με την πολυπλοκότητα στην δυναμική του συστήματος.

Χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους των (a), (b) για να μελετήσουμε τον συγχρονισμό. Το Σχήμα 7.2 δείχνει την PRC σαν συνάρτηση του πλάτους και της φάσης, καθώς και τον Winfree time crystal. Είναι προφανής η επίδραση της δομής των isochrons στην διαφορετική μορφή των PRC, PTC. Στο Σχήμα 7.3 φαίνεται οι PRC και PTC για ίδιες παραμέτρους (Q, G) υπό ισχυρή και ασθενή διαταραχή. Για μικρά-μεσαία πλάτη η πλήρης κατηγοριοποίηση όλων των τροχιών είναι εφικτή, ενώ για ισχυρές διαταραχές η απεικόνιση παύει να διατηρεί τον προσανατολισμό και έτσι αυτό δεν είναι πλέον δυνατόν. Παρόλα αυτά ο αριθμός περιστροφής εξακολουθεί να χαρακτηρίζει τις κλειδωμένες καταστάσεις.

Συγχρονισμός

Έχοντας βρει την PTC για διάφορες τιμές του πλάτους, μπορούμε να βρούμε τον αριθμό περιστροφής και έτσι το διάγραμμα συγχρονισμού. Οι περιοχές αυτές ξεκινούν από ρητές τιμές του οριζόντιου άξονα και τα σύνορα τους αντιστοιχούν σε διακλάδωση σάγματος-κόμβου για μικρά-μεσαία πλάτη. Το Σχήμα 7.4, δείχνει τις περιοχές συγχρονισμού για τα δύο σύνολα παραμέτρων. Το διάγραμμα είναι συμμετρικό τόσο ως προς s όσο και ως προς ρ . Οι ποσοτικές διαφορές που παρατηρούνται είναι αποτέλεσμα των διαφορών στις PTC οι οποίες με την σειρά τους οφείλονται στην διαφορετική δομή των isochrons. Στο (a), οι περιοχές 1 : 2 και 1 : 1 είναι ευρείες και επικαλύπτονται καθώς το πλάτος αυξάνεται, ενώ ανώτεροι συγχρονισμοί, όπως 1 : 3, είναι στενοί και μπορούν να παρατηρηθούν για μικρά μόνο πλάτη. Αντιθέτως, στην δεύτερη περίπτωση οι περιοχές συγχρονισμού είναι καλώς ορισμένες, ενώ ανώτεροι συγχρονισμοί είναι πιο εύκολα παρατηρήσιμοι. Οι περιοχές μεγαλώνουν αλλά δεν επικαλύπτονται καθώς το πλάτος αυξάνεται. Η απεικόνιση τώρα είναι σχεδόν αντιστρέψιμη και ο αριθμός περιστροφής είναι αύξων ως προς s , ακόμη και για μεγάλη πλάτη. Οι διαφορές ανάμεσα στα δύο σύνολα παραμέτρων φαίνονται και από Devil's staircase που αντιστοιχεί σε οριζόντια τομή των διαγραμμάτων συγχρονισμού. Στο Σχήμα 7.5 παρατηρούμε ότι για την πρώτη περίπτωση στο (a) η απεικόνιση δεν είναι αντιστρέψιμη για μεγάλα πλάτη διαταραχής, με αποτέλεσμα ο αριθμός περιστροφής να μην είναι αύξων. Αντιθέτως για την δεύτερη περίπτωση στο (b), η απεικόνιση είναι σχεδόν αντιστρέψιμη, ώστε ο αριθμός περιστροφής να είναι συνεχής και αύξων. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι το δεύτερο σύνολο παραμέτρων είναι καταλληλότερο για συγχρονισμό.

Για το δεύτερο σύνολο παραμέτρων συγκρίνουμε την πραγματική απόκριση του συστήματος με αυτήν της κυκλικής απεικόνισης. Επειδή ο εκθέτης Floquet $\lambda = -1.1$ ο κύκλος είναι επαρκώς ελκτικός και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k = 2$ για τα επόμενα.

Στο Σχήμα 7.6, οι παράμετροι της διαταραχής βρίσκονται στην περιοχή $\rho = 1/2$. Για την κυκλική απεικόνιση αυτό μεταφράζεται σε έναν δύο κύκλο στα (c) και (d). Από την κυματομορφή στο (a), βλέπουμε ότι το σήμα είναι περιοδικό, ενώ στο (b) η τομή Poincaré αντιστοιχεί πλήρως στον δύο κύκλο της κυκλικής απεικόνισης. Στο (e) βλέπουμε ότι όπως και όταν ο ταλαντωτής λειτουργεί αυτόνομα, σε κατάσταση κλειδώματος το φάσμα είναι διακριτό. Επιπλέον αφού $\rho = 1/2$, η απόσταση μεταξύ των φασματικών κορυφών είναι $1/2(kT_0 + T_s)$ και το σήμα εξόδου έχει συχνότητα ίση με το $1/2$ της συχνότητας εισόδου, δηλαδή η πρώτη αρμονική βρίσκεται στην $1/2(kT_0 + T_s)$.

Στο Σχήμα 7.7 φαίνεται ένα παράδειγμα 1 : 1 συγχρονισμού το οποίο μπορεί να αναλυθεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που μελετήσαμε την περίπτωση του 1 : 2 (περισσότερες λεπτομέρειες βρίσκονται στο Κεφάλαιο 7).

Στο Σχήμα 7.8 οι παράμετροι δεν ανήκουν σε περιοχή με καλώς ορισμένο αριθμό περιστροφής με αποτέλεσμα η κίνηση να είναι απεριοδική. Αυτό φαίνεται τόσο από την τροχιά της κυκλικής απεικόνισης στα (c) και (d) όσο και από την τομή Poincaré στον συνεχή χρόνο στο (b) τα σημεία της οποίας γεμίζουν πυκνά τον κύκλο υποδεικνύοντας μάλλον ημιπεριοδική κίνηση. Από το φάσμα στο (e) παρατηρούμε ότι η απόσταση μεταξύ των φασματικών κορυφών δεν είναι σταθερή και αποτελείται από τον γραμμικό συνδυασμό δύο ανεξάρτητων συχνοτήτων. Επομένως η κίνηση είναι ημιπεριοδική.

Σε ό,τι αφορά το άλλο σετ παραμέτρων, στις περιοχές συγχρονισμού οι τροχιές είναι ποιοτικά ίδιες, ενώ αλλάζει η συχνοτική διαφορά των αρμονικών λόγω του μεγαλύτερου k που απαιτείται (λόγω μεγαλύτερου εκθέτη Floquet) και της διαφορετικής συχνότητας του αυτόνομου συστήματος. Ωστόσο στην περίπτωση όπου οι παράμετροι ανήκουν σε περιοχή που χαρακτηρίζεται από άρρητο αριθμό περιστροφής όπως στο Σχήμα 7.9, η κίνηση είναι ποιοτικά διαφέρει από την ημιπεριοδική που είδαμε στην περίπτωση του προηγούμενου συνόλου παραμέτρων. Πράγματι, αν και η τροχιά της κυκλικής απεικόνισης είναι προφανώς

απεριοδική (c),(d), όπως και η χρονοσειρά στο (a), από τα σημεία της απεικόνισης Poincaré που γεμίζουν συγκεκριμένα τμήματα του κύκλου στο (b) και από το συνεχές φάσμα στο (e), καταλήγουμε ότι η κίνηση είναι χαοτική. Επομένως, αν και η περίπτωση αυτή δεν είναι η καταλληλότερη για εφαρμογές συγχρονισμού, δίνει την δυνατότητα παραγωγής ενός χαοτικού σήματος εξόδου.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι ένας συγχρονισμένος ταλαντωτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διαιρέτης συχνότητας μετατρέποντας μια περιοδική είσοδο σε περιοδική έξοδο με ελεγχόμενες φασματικές γραμμές μειώνοντας συγχρόνως τον θόρυβο φάσης λόγω της απροσδιοριστίας στην φάση του ταλαντωτή. Το κλειδίωμα στην φάση επιτρέπει την χρήση σε εφαρμογές όπου απαιτείται ακριβής χρονισμός. Αν λειτουργήσει στην ξεκλειδωτή (μη συγχρονισμένη) κατάσταση μπορεί να παρέχει ημιπεριοδική ή χαοτική έξοδο. Ουσιαστικά, ο ίδιος ταλαντωτής μπορεί να λειτουργήσει ως διαιρέτης, πολλαπλασιαστής ή ως γεννήτρια χαοτικών σημάτων, αναλόγως με την εφαρμοζόμενη είσοδο.

Συγχρονισμός υπό την επίδραση ισχυρής και ταχέως διαταραχής: Πλήρης αναπαράσταση με μεταβλητές δράσεις-γωνίας

Στην παρούσα ενότητα αίρουμε τον περιορισμό το $\sigma_1 T_1$ να είναι επαρκώς μικρό και μελετάμε την διδιάστατη απεικόνιση η οποία περιγράφει ακριβώς το σύστημα, εφόσον αυτό είναι επίπεδο. Στο Σχήμα 7.10 (a) και (b), παρουσιάζεται η ιδιοσυνάρτηση Koopman σχετική με τον εκθέτη Floquet λ_1 και στο (c) φαίνονται διάφορες ισοσταθμικές αυτής (isostables) μαζί με isochrons. Κάθε τομή δύο τέτοιων καμπυλών ορίζει ένα μοναδικό σημείο του φασικού χώρου και αντίστροφα. Είναι λοιπόν προφανής η ένα προς ένα αντιστοιχία των (r_1, θ) συντεταγμένων με τις (x, y) . Στα (d) και (e), φαίνονται τα gradients ∇r_1 και $\nabla \theta$ που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της απόκρισης σε γενική διαταραχή και στο (f) φαίνεται ο περιορισμός του $\nabla \theta_x$ στον οριακό κύκλο, δηλαδή η IPRC $Q(\theta)$. Στο (g) για να συνδέσουμε το παράδειγμα περαιτέρω με τα αναπτύγματα Koopman, παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη του $(U^t f)e^{-\lambda_1 t}$, η οποία κατά τα γνωστά συγκλίνει σε περιοδική τροχιά.

Διαταράσσουμε περιοδικά την MOS υλοποίηση του διαφορικού LC ταλαντωτή με ένα σήμα άμεσης έγχυσης της μορφής,

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_1), \quad (187)$$

χωρίς να επιβάλλουμε κάποιον περιορισμό στο $\sigma_1 T_1$. Θεωρούμε την περίπτωση $T_1 = 0 + 0.1T_0$, ή ισοδύναμα, $k = 0$ και $s = 0.1$, οπότε η αναγωγή στην μονοδιάστατη κυκλική απεικόνιση δεν είναι πλέον έγκυρη και για αυτό χρησιμοποιούμε την πλήρη διδιάστατη απεικόνιση για την μελέτη του συγχρονισμού. Στο Σχήμα 7.11 (c) και (d), φαίνεται η απόκριση της διακριτής απεικόνισης, και οι μεταβλητές δράσης-γωνίας συγκλίνουν σε ένα σημείο ισορροπίας που αντιστοιχεί σε 1 : 1 συγχρονισμένη κατάσταση. Είναι προφανές ότι το σημείο ισορροπίας βρίσκεται μακριά από τον οριακό κύκλο ($r = 0$) ώστε η αναγωγή στο μοντέλο φάσης να μην είναι έγκυρη. Από την χρονοσειρά της μεταβλητής x προκύπτει ότι η ταλάντωση είναι ισχυρά μη γραμμική. Τα σημεία της απεικόνισης Poincaré στο (b), συγκλίνουν σε ένα σταθερό σημείο, σε συνέπεια με τα αποτελέσματα της διακριτής απεικόνισης. Εξετάζοντας το φάσμα της x μεταβλητής στο (e), βρίσκουμε ότι (προφανώς είναι διακριτό) η φασματική απόσταση μεταξύ των κορυφών είναι $1/(sT_0)$, οπότε το σήμα εξόδου έχει συχνότητα δεκαπλάσια σε σχέση με αυτήν του αυτόνομου ταλαντωτή. Η θεωρία Koopman γενικεύει λοιπόν με φυσικό τρόπο την μονοδιάστατη κυκλική απεικόνιση. Σημειώνουμε ότι η ερμηνεία ενός 1 : q συγχρονισμού στην περίπτωση αυτή χρειάζεται περισσότερη προσοχή, αφού μπορεί να αντιστοιχεί σε κύκλο ή σημείο ισορροπίας για την r μεταβλητή (δείτε Κεφάλαιο 7).

Αυτή η μέθοδος συγχρονισμού μπορεί να αξιοποιηθεί για την παραγωγή ισχυρά μη γραμμικών ταλαντωτών με χαμηλό θόρυβο φάσης και πολλαπλασιαστών (ως προς την συχνότητα του αυτόνομου συστήματος).

0.7.3 Πολύπλοκη Δυναμική Συγχρονισμού του Ταλαντωτή Colpitts

Μελετάμε με αντίστοιχο τρόπο τον πολύπλοκο συγχρονισμό ενός Ταλαντωτή Colpitts, υποθέτοντας ότι η διαταραχή είναι μια πηγή ρεύματος παράλληλα προς αυτήν της πόλωσης με $I Af(t)$, όπου

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0, T_{on})}(t - nT_1), \quad (188)$$

και $T_{on} = T/10$, $T_1 = kT + sT$, $k \in \mathbb{N}$ και T είναι η περίοδος του αυτόνομου συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, κατά τον υπολογισμό των PRCs και της απόκρισης υπό την διαταραχή χρησιμοποιούμε προσομοίωση στο Simulink (όπου υπάρχουν μη ιδανικότητες) για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων. Η ενότητα κλείνει με τον χαοτικό συγχρονισμό του ταλαντωτή.

Isochrons και Phase Response Curves

Μελετάμε την δομή των isochrons ως προς τις παραμέτρους Q, g σταθεροποιώντας το $k = 0.5$. Το Σχήμα 7.12 δείχνει τις αντίστοιχες πολλαπλότητες. Στο (a), παράμετροι είναι τέτοιες ώστε ένας οριακός κύκλος είναι ο μοναδικός ελκυστής/repeller, αφού δεν έχει συμβεί καμία διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου ή σάγματος-κόμβου. Επομένως, το phaseless set περιλαμβάνει την διδιάστατη ευσταθή πολλαπλότητα τη αρχής. Στο (b), οι παράμετροι βρίσκονται πάνω από την $F_{0,1}$ και κάτω από την $F_{1,1}$ του Σχήματος 6.9 (b), με αποτέλεσμα η διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου να έχει οδηγήσει σε έναν ευσταθή δύο-κύκλο, ενώ ο αρχικός έχει γίνει σαγματικός. Το phaseless set περιλαμβάνει το $W^s(0)$, τον ασταθή κύκλο και την ευσταθή πολλαπλότητα αυτού. Στο (c), οι παράμετροι βρίσκονται πάνω από την $F_{1,1}$ και την $F_{1,1}^{(2)}$ του Σχήματος 6.9 (b). Επομένως έχει συμβεί ακόμη ένας διπλασιασμός περιόδου περιπλέκοντας περαιτέρω την δομή των isochrons. Για τις παραμέτρους στα (d) και (e), έχουμε συνύπαρξη δύο ευσταθώς κύκλων, οπότε κάθε πεδίο του φασικού χώρου θα συγκλίνει σε έναν εξ αυτών αναλόγως με τις ευσταθείς πολλαπλότητες του καθενός. Επομένως η φάση κάθε σημείου δεν είναι απαραίτητα αυτή του ιδίου κύκλου, οδηγώντας σε περίπλοκη δομή. Τα σχήματα αυτά δείχνουν τα isochrons σαν να υπήρχε ο ένας από τους δύο μόνο κύκλους. Προκύπτει λοιπόν και πάλι ότι η δυναμική του αυτόνομου επηρεάζει την δομή των isochrons και επομένως την απόκριση του συστήματος σε περιοδικές διαταραχές.

Η δομή των isochrons καθορίζει τις PRC, επομένως την κυκλική απεικόνιση και έτσι την απόκριση σε περιοδικές διαταραχές. Για το πρώτο σύνολο παραμέτρων ($\log_{10} g = 1, \log_{10} Q = 1.35$, ο κυρίαρχος εκθέτης Floquet είναι -0.022), υπολογίζουμε τις PRC και PTC για διάφορες τιμές του πλάτους A . Στο Σχήμα 7.13 (a) φαίνονται οι PRCs, και στο (b) ο Winfree Time Crystal (επιφάνεια ορισμένη από την PTC). Οι PRCs και οι PTCs για δύο δεδομένα πλάτη φαίνονται στα (c) και (d). Όπως και στους διαφορικού LC ταλαντωτές, παρότι για ισχυρή διαταραχή η PTC δεν αντιστρέφεται, ο αριθμός περιστροφής εξακολουθεί να χαρακτηρίζει τις ιδιότητες του συγχρονισμού. Στο (e), συγκρίνεται η θεωρητικά υπολογισμένη PTC με αυτήν που προκύπτει από προσομοίωση στο Simulink. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό της PTC, στην προσομοίωση δεν χρησιμοποιούνται τα isochrons αλλά μετράται απευθείας η χρονική καθυστέρηση από την προσομοίωση. Η πολύ μικρή διαφορά ανάμεσα στα δύο αποτελέσματα δείχνει ότι η μελέτη της κυκλικής απεικόνισης του θεωρητικού συστήματος συνεπάγεται έγκυρα αποτελέσματα και για το πραγματικό σύστημα, και δείχνει περαιτέρω ότι η μέθοδος συγχρονισμού μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα που είναι "μαύρα κουτιά", χωρίς την χρήση εξισώσεων, για τον προσδιορισμό του διαγράμματος συγχρονισμού

Συγχρονισμός

Ο προσδιορισμός του Winfree Time Crystal, επιτρέπει τον υπολογισμό του $\rho(s, A)$ και την εξαγωγή των διαγραμμάτων συγχρονισμού. Παρόμοια με τους διαφορικούς LC ταλαντωτές τα συμπεράσματα σχετικά με τις περιοχές συγχρονισμού ισχύουν και σε αυτήν την περίπτωση. Αυτές φαίνονται στο Σχήμα 7.14 (a). Για μικρά πλάτη η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη και οι περιοχές δεν επικαλύπτονται. Καθώς το πλάτος αυξάνεται, οι περιοχές επικαλύπτονται με τρόπο παρόμοιο με την πρώτη περίπτωση των διαφορικών LC ταλαντωτών και μόνο ποσοτικές διαφορές παρατηρούνται. Η γενικότερη ομοιότητα με την πρώτη περίπτωση προκύπτει και από το γεγονός ότι ο οριακός κύκλος δεν είναι ιδιαίτερα ελκτικός (κυρίαρχος εκθέτης Floquet κοντά στο μηδέν). Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν και από την εξέταση του $\rho(s; A)$ για σταθερό και ισχυρό A στο Σχήμα 7.14, αφού αυτός δεν είναι αύξων ως προς s .

Μαζί με την σύγκριση της απόκρισης μεταξύ του συνεχούς συστήματος και της ανηγμένης κυκλικής απεικόνισης πραγματοποιούμε και προσομοιώσεις για την επαλήθευση της λειτουργίας. Επιλέγεται $k = 40$ επειδή ο πολλαπλασιαστής Floquet είναι αρκετά μεγάλος. Παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα συγχρονισμού και περισσότερα μπορούν να βρεθούν στο Κεφάλαιο 7.

Στο Σχήμα 7.15, οι παράμετροι ανήκουν στην περιοχή $1 : 3$ συγχρονισμού του Σχήματος 7.14 (a). Η κυκλική απεικόνιση βασιζόμενη στην θεωρητικά υπολογισμένη PTC φαίνεται στο (d) ενώ η υπολογισ-

μένη μέσω προσομοίωσης στο (e). Η τροχιά συγκλίνει σε έναν τρία κύκλο όπως αναμένεται. Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν και για το cobweb στο (f). Σημειώνεται ότι οι διαφορές στα ποσοτικά χαρακτηριστικά του 3 κύκλου ανάμεσα στην προσομοίωση και το θεωρητικό σύστημα, οφείλονται κατά κύριο λόγο στο διαφορετικό σημείο μηδενικής φάσης. Η χρονοσειρά της x μεταβλητή της εξόδου, αντίστοιχη της τάσης V_{c1} , είναι περιοδική όπως φαίνεται στο (c), ενώ το φάσμα στα (g) και (h) είναι διακριτό με την φασματική διαφορά ανάμεσα στις αρμονικές να ισούται με $1/3(kT + T_s)$. Προφανώς η συχνότητα του σήματος εξόδου ισούται με το ένα τρίτο αυτής της εισόδου. Στα (a) και (b), τα σημεία της απεικόνισης Poincaré συγκλίνουν σε έναν τρία κύκλο σε συνέπεια με την διακριτή απεικόνιση. Η συμφωνία των αποτελεσμάτων μεταξύ της προσομοίωσης και των υπολογισμών με βάση το ιδανικό μοντέλο δείχνει ότι η κυκλική απεικόνιση μπορεί να περιγράψει πλήρως την δυναμική συγχρονισμού του πραγματικού συστήματος. Προφανώς τα χαρακτηριστικά του κλειδώματος είναι ποιοτικά ίδια με αυτά των διαφορικών LC ταλαντωτών.

Περαιτέρω παραδείγματα υπάρχουν στο Κεφάλαιο 7: στο Σχήμα 7.16 ένα παράδειγμα 1 : 2 συγχρονισμού το οποίο αναλύεται ακριβώς παρόμοια με παραπάνω και μια μη συγχρονισμένη κατάσταση με χαοτική έξοδο στο Σχήμα 7.17. Η ανάλυση της τελευταίας είναι ανάλογη της χαοτικής κίνησης στους διαφορικούς LC ταλαντωτές.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνουν την ποιοτικά πανομοιότυπη δυναμική συγχρονισμού τόσο του Colpitts όσο και των διαφορικών LC ταλαντωτών, όπως και αναμέναμε. Κυρίως, όμως, δείχνουν ότι η ανάλυση συμφωνεί με τις προσομοιώσεις μη ιδανικών μοντέλων αποδεικνύοντας την ευρωστία της μεθόδου.

Χαοτικός Συγχρονισμός

Όπως έχουμε ήδη δει ο ταλαντωτής Colpitts παρουσιάζει δύο ποιοτικά διαφορετικούς παράξενους ελκυστές: τύπου Feigenbaum και τύπου Shilnikov. Η χαοτική συμπεριφορά επιτρέπει τον χαοτικό συγχρονισμό του Colpitts είτε υπό την επίδραση περιοδικής διαταραχής (συγχρονισμός φάσης) είτε μέσω κατάλληλης σύζευξης με άλλο πανομοιότυπο σύστημα (πλήρης συγχρονισμός).

Στον συγχρονισμό φάσης το σύστημα αντιμετωπίζεται ως ένας ταλαντωτής με χαοτικά διαμορφούμενο πλάτος και ομοιόμορφα περιστρεφόμενη φάση. Υποθέτουμε την ύπαρξη κατάλληλης τομής Poincaré, ώστε η φάση να μπορεί να οριστεί ως γραμμική συνάρτηση μεταξύ δύο διαδοχικών επιστροφών του συστήματος σε αυτήν (σε κάθε επιστροφή η φάση έχει αυξηθεί κατά 2π). Ορίζουμε ως ω την μέση συχνότητα επιστροφής σε αυτήν. Σημειώνεται πως η έννοια της φάσης δεν είναι καλώς ορισμένη για όλους τους χαοτικούς ταλαντωτές. Ακόμη και όταν είναι, αυξάνεται τμηματικά γραμμικά και η αύξηση της μπορεί να ιδωθεί ως διαχυτική. Γενικά, όσο πιο ευρύς είναι η αρμονική μιας παρατηρήσιμη ποσότητας στην ω , τόσο πιο ισχυρό είναι το χάος οδηγώντας σε κακώς ορισμένη φάση.

Υποθέτοντας την περίπτωση ενός ταλαντωτή με καλώς ορισμένη φάση, ο συγχρονισμός του με μια εξωτερική διαταραχή γίνεται με παρόμοιο τρόπο με την περίπτωση των περιοδικών συστημάτων. Για κλειδώμα 1:1 πρέπει η συχνότητα εισόδου δεν διαφέρει πολύ από την ω . Γενικά στο επίπεδο $A - T_{in}$ οι περιοχές συγχρονισμού δεν διαφέρουν ποιοτικά από τις Arnold tongues. Σημειώνεται όμως ότι το πλάτος της διαταραχής δεν πρέπει να είναι υπερβολικά ισχυρό ώστε να καταστείλει το χαοτικά διαμορφούμενο πλάτος.

Στο πεδίο της συχνότητας, ο περιορισμός της καλώς ορισμένης φάσης δεν είναι πια τόσο σημαντικός για την εξέταση του συγχρονισμού. Το φάσμα του αυτόνομου χαοτικού συστήματος είναι συνεχές με peak στην ω , ενώ του διαταραγμένου παρουσιάζει γενικά κορυφές τόσο στην ω όσο και στην ω_{in} . Αν η ω_{in} και το A είναι τέτοια ώστε να υπάρχει κλειδώμα, οι φασματικές γραμμές που οφείλονται στην ω απορροφώνται από αυτές της ω_{in} , ή ισοδύναμα η ετεροσυσχέτιση των δύο σημάτων παρουσιάζει μέγιστα για χρονικές στιγμές kT_{in} .

Εξετάζοντας το μέσο πεδίο $X = (x_1 + \dots + x_n)/n$, όπου κάθε x_i αντιστοιχεί στην x μεταβλητή του διαταραγμένου συστήματος με αρχική συνθήκη $(x_i(0), y_i(0), z_i(0))$, είναι προφανές ότι σε περίπτωση μη συγχρονισμού, για μεγάλο n , αυτό τείνει στο μηδέν, ενώ ταλαντώνεται με συχνότητα ω διαφορετικά.

Μελετάμε τον ταλαντωτή Colpitts για τιμές παραμέτρων $\log_{10} Q = 0.69$, $\log_{10} g = 0.88$, και $k = 0.5$, για τις οποίες υπάρχει παράξενος ελκυστής τύπου Feigenbaum όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.18. Σε αυτήν την περίπτωση η φάση είναι καλώς ορισμένη και ως συχνότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η

$$\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi \frac{N_t}{t}, \quad (189)$$

όπου N_t το πλήθος των μέγιστων της x μεταβλητής στο διάστημα $[0, t]$. Επειδή $\omega \approx 1$ διαταράσσουμε το σύστημα με $f(t) = \cos(\omega_{in}t)$ όπου $\omega_{in} = 0.99$ και πλάτος $A = 2$.

Το Σχήμα 7.18 (b) δείχνει την σύγκριση μεταξύ του αυτόνομου ταλαντωτή και του συγχρονισμένου στο πεδίο του χρόνου. Παρότι η διαταραχή έχει συγχρονίσει κατάλληλα την φάση, δεν έχει καταστείλει το χαοτικά διαμορφούμενο πλάτος. Στο (c), είναι ξεκάθαρο ότι το φάσμα παραμένει συνεχές αλλά με κύρια φασματική γραμμή στην ω_{in} . Χρησιμοποιώντας διαφορετικά πλάτη μπορεί κανείς να εξάγει το διάγραμμα συγχρονισμού όπως στην περίπτωση των περιοδικών συστημάτων, αλλά σημειώνεται πως οι αντίστοιχες περιοχές θα είναι πολύ πιο στενές.

Στον πλήρη συγχρονισμό συνδέουμε δύο πανομοιότυπους χαοτικούς ταλαντωτές Colpitts μέσω σύζευξης που αντιστοιχεί σε σύνδεση με αντιστάσεις (resistive coupling). Ο στόχος είναι ο πλήρης συγχρονισμός των δύο συστημάτων, δηλαδή ανεξαρτήτως της αρχικής συνθήκης, η κατάσταση των δύο ταλαντωτών τελικά να ταυτίζεται. Προφανώς, σύζευξη μεταξύ περιοδικών συστημάτων οδηγεί σε αντίστοιχο συγχρονισμό, αλλά επειδή η ανάλυση βασίζεται στην αναγωγή φάσης, μπορεί να διεξαχθεί κατά παρόμοιο τρόπο με τα προηγούμενα.

Αν $\epsilon > 0$, $u = (x + y)/2$, $v = y - x$ και εισάγουμε την σύζευξη μεταξύ δύο συστημάτων Colpitts, έχουμε,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + \epsilon(y - x) = f(x, t) + \epsilon v \\ \dot{y} &= f(y, t) - \epsilon(y - x) = f(y, t) - \epsilon v.\end{aligned}\tag{190}$$

Γραμμικοποιώντας γύρω από την σύγχρονη λύση $x = y = u$, και μετά από κατάλληλους χρονο-εξαρτώμενους μετασχηματισμούς (δείτε Κεφάλαιο 7), καταλήγουμε ότι για $\epsilon > \lambda_{max}/2 = \epsilon_c$ όπου λ_{max} ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov του χαοτικού συστήματος, η σύγχρονη κατάσταση είναι ευσταθής κατά μέσο όρο με την έννοια ότι μικρές διαταραχές τείνουν στο μηδέν κατά μέσο όρο.

Μπορούμε να θεωρήσουμε το διάγραμμα $\log|v|$ (όπου $|\cdot|$ σημαίνει εφαρμογή της απόλυτου τιμής σε κάθε θέση του διανύσματος) σαν μια μεταβλητή που πραγματοποιεί πολυδιάστατο τυχαίο περίπατο, όπου η u μπορεί να ιδωθεί ως θόρυβος. Κοντά στο κατώφλι του συγχρονισμού, η δυναμική του τυχαίου περιπάτου καθορίζεται από διακυμάνσεις και έτσι η κατανομή $\log v$ "απλώνει στον χρόνο" αντιστοιχώντας σε έντονες αυξομειώσεις για τις μεταβλητές v . Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως modulation intermittency.

Επειδή ένας παράξενος ελκυστής αποτελείται από άπειρες ασταθείς περιοδικές τροχιές, οι οποίες είναι πυκνές στον ελκυστή [30], η μελέτη της μετάβασης στην σύγχρονη κατάσταση μπορεί να γίνει εξετάζοντας αυτές. Κάθε τέτοια περιοδική τροχιά έχει έναν τετριμμένο πολλαπλασιαστή ίσο με ένα και έναν ασταθή κυρίαρχο πολλαπλασιαστή. Μια διακλάδωση συμβαίνει για την i -οστή περιοδική τροχιά στο $\epsilon_{c,i}$ όταν το μέτρο του κυρίαρχου πολλαπλασιαστή γίνεται ίσο με 1, και η διεύθυνση τείνει να γίνει ευσταθής.

Η τιμή ϵ_c που βρήκαμε προηγουμένως δεν αντιστοιχεί απαραίτητα στην $E = \max_i \epsilon_{c,i}$, όπου ο συγχρονισμός είναι πραγματικά πλήρης. Για $\epsilon \in (\epsilon_c, E)$, η σύγχρονη κατάσταση είναι ευσταθής μόνο κατά μέσο όρο, αντιστοιχώντας σε έναν Milnor ελκυστή υπό την έννοια ότι σχεδόν όλες οι αρχικές συνθήκες σε μια περιοχή αυτού συγκλίνουν σε αυτόν. Αφού όμως υπάρχουν περιοδικές τροχιές που δεν είναι συγχρονισμένες, υπάρχουν και πυκνά σύνολα αρχικών συνθηκών που δεν συγκλίνουν στην σύγχρονη κατάσταση. Αυτές οι συνθήκες μπορεί να συγκλίνουν σε άλλη περιοδική τροχιά, σε άλλον ελκυστή ή να τείνουν στο άπειρο. Η πρώτη περίπτωση από τις παραπάνω αντιστοιχεί σε σχεδόν πλήρη συγχρονισμό, ενώ στις υπόλοιπες ο συγχρονισμός μπορεί να είναι μόνο παροδικός. Αντίστοιχα αν $e = \min_i \epsilon_{c,i}$, τότε για $\epsilon < e$, η σύγχρονη κατάσταση είναι ασταθής, ενώ για $\epsilon \in (e, E)$, σχεδόν όλες οι αρχικές συνθήκες αποκλίνουν από αυτή. Επομένως στον πλήρη συγχρονισμό υπάρχει ένα διάστημα (e, E) εντός του οποίου συμβαίνουν διακλαδώσεις.

Για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στον ταλαντωτή Colpitts, υπολογίζουμε τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov, με τον αλγόριθμο από το [65], ίσο με $\lambda = 0.031$, οπότε $\epsilon_c = 0.015$. Στο Σχήμα 7.19 φαίνεται η χρονοσειρά της διαφοράς της κατάστασης των δύο ταλαντωτών. Στο (a), η σύζευξη είναι ασθενέστερη από το κατώφλι, οπότε οι ταλαντωτές δεν είναι συγχρονισμένοι. Στο (b), η σύζευξη ϵ είναι κοντά στο κατώφλι, και παρατηρείται modulation intermittency. Στο (c), $\epsilon > \epsilon_c$ και έχουμε πλήρη συγχρονισμό. Παρότι δεν είμαστε σίγουροι ότι $\epsilon_{c,max}$, οι μικρές αυξομειώσεις της διαφοράς δηλώνουν ότι $\epsilon < \epsilon_{c,max}$. Προφανώς με αύξηση της ισχύος της σύζευξης ο συγχρονισμός θα γίνει πλήρης και η προς αυτόν σύγκλιση θα επιταχυνθεί.

Στην παρούσα ενότητα μελετήθηκε διεξοδικά ο πολύπλοκος συγχρονισμός ηλεκτρικών ταλαντωτών.

Δείξαμε ότι η κυκλική απεικόνιση όπως προέκυψε από την ανάλυση Koopman και τα αντίστοιχα αποτελέσματα, μπορεί να περιγράψει πλήρως τον συγχρονισμό τόσο των διαφορικών LC ταλαντωτών όσο και του Colpitts και συζητήσαμε σχετικές εφαρμογές. Αν η διαταραχή είναι ταχύς και ισχυρή απαιτείται η περιγραφή μέσω της διδιάστατης απεικόνισης σε μεταβλητές δράση-γωνίας για την μελέτη της δυναμικής συγχρονισμού που αποτελεί φυσική γενίκευση της μονοδιάστατης κυκλικής απεικόνισης. Τέλος μελετήθηκε η δυνατότητα συγχρονισμού του χαοτικού ταλαντωτή Colpitts τόσο ως προς την φάση όσο και πλήρως.

0.8 Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε τον τελεστή Koopman και τις εφαρμογές του στον πολύπλοκο συγχρονισμό ηλεκτρονικών ταλαντωτών αναλύοντας επίσης την μη γραμμική δυναμική των τελευταίων.

Η θεωρία του τελεστή επιτρέπει μια πιο συνολική θεώρηση δυναμικών συστημάτων με ελκυστές και τα φασματικά αναπτύγματα παρατηρήσιμων συναρτήσεων γενικεύουν την γνωστή γραμμική περίπτωση. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να ορισθούν μεταβλητές δράσης-γωνίας (isochrons-isostables) γενικεύοντας την γνωστή αναγωγή στο μοντέλο φάσης. Οι αποδοτικοί αλγόριθμοι αριθμητικού υπολογισμού επιτρέπουν την εφαρμογή σε πρακτικά συστήματα. Υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις για την διαταραχή, καταλήξαμε ότι μια μονοδιάστατη κυκλική απεικόνιση περιγράφει πλήρως την δυναμική συγχρονισμού περιοδικά διαταραγμένων συστημάτων, και οι περιοχές συγχρονισμού αντιστοιχούν σε ρητές τιμές του αριθμού περιστροφής.

Στην συνέχεια αναλύοντας την φυσική λειτουργία των MOS, BJT μοντελοποιήσαμε σε μορφή δυναμικού συστήματος την λειτουργία των διαφορικών LC ταλαντωτών καθώς και του ταλαντωτή Colpitts οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν ως χαρακτηριστικά παραδείγματα. Εξετάζοντας τις συνηθισμένες μεθόδους ανάλυσης αυτόνομων και περιοδικά διαταραγμένων συστημάτων στην βιβλιογραφία των ηλεκτρονικών, δείξαμε ότι ουσιαστικά βασίζονται στην ίδια αρχή και απαιτούν πολύ ασθενή διαταραχή, δίνοντας πρακτικά την κλίση των συνόρων των περιοχών συγχρονισμού.

Εξετάζοντας αναλυτικά την μη γραμμική δυναμική αρχικά των διαφορικών LC ταλαντωτών, δείξαμε ότι, τουλάχιστον σε μια περιοχή της αρχής, η ποιοτική συμπεριφορά τους είναι πανομοιότυπη και προσδιορίσαμε τις καμπύλες διακλαδώσεων. Οι ταλαντωτές αυτοί ανήκουν γενικότερα στην ομάδα των \mathbb{Z}_2 συμμετρικών συστημάτων τα οποία επίσης αναλύσαμε για να δείξουμε τις ομοιότητες που παρουσιάζουν. Στην συνέχεια, μελετώντας τον ταλαντωτή Colpitts είδαμε ότι χαρακτηρίζεται από πολύπλοκη συμπεριφορά και η θεμελιώδης δομή των διακλαδώσεων του υπαγορεύεται από το φαινόμενο Shilnikov. Αριθμητικά υπολογίσαμε κάποιες από τις άπειρες καμπύλες σάγματος-κόμβου και διπλασιασμού περιόδου.

Υπολογίζοντας αριθμητικά τα isochrons είδαμε ότι η πολύπλοκη δυναμική των παραπάνω συστημάτων αντανακλάται στην πολύπλοκη δομή τους. Για παραμέτρους για τις οποίες υπάρχει ένας ευσταθής κύκλος, μελετήσαμε τον πολύπλοκο συγχρονισμό κάθε συστήματος χρησιμοποιώντας την κυκλική απεικόνιση, προσδιορίσαμε το διάγραμμα συγχρονισμού και επιβεβαιώσαμε την συνέπεια μεταξύ των συμπερασμάτων από την μελέτη της κυκλικής απεικόνισης και των αποτελεσμάτων από την απευθείας επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Στην σύγχρονη κατάσταση οι ταλαντωτές μπορούν σαν διαιρέτες συχνότητας μετατρέποντας ένα περιοδικό σήμα εισόδου σε περιοδική έξοδο με ελεγχόμενες φασματικές γραμμές ή σαν ακριβή "ρολόγια" λόγω τους περιορισμένου θορύβου φάσης. Εκτός των περιοχών συγχρονισμού η έξοδος είναι απεριοδική (χαοτική ή ημιπεριοδική) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αντίστοιχες εφαρμογές. Εξετάζοντας το διάγραμμα συγχρονισμού για διαφορετικές τιμές παραμέτρων (άρα και διαφορετική δομή isochrons) καταλήξαμε ότι παράμετροι που οδηγούν σε πιο ελκτικούς κύκλους παρουσιάζουν διαφορετικές ιδιότητες συγχρονισμού. Γενικεύοντας την ανάλυση, δείξαμε ότι η διδιάστατη απεικόνιση σε μεταβλητές δράσης γωνίας μπορεί να περιγράψει την δυναμική υπό αυθαίρετη διαταραχή. Έτσι, η αναπτυχθείσα ανάλυση προσφέρει την δυνατότητα συνολικής μελέτης του συγχρονισμού ηλεκτρονικών ταλαντωτών και δείχνει την δυνατότητα πρακτικών εφαρμογών που συχνά συσκοτίζονται από την χρήση των παραδοσιακών τεχνικών, ότι δηλαδή ένας ταλαντωτής μπορεί να λειτουργήσει ως διαιρέτης, πολλαπλασιαστής, ή γεννήτρια χαοτικών σημάτων, αναλόγως με τις παραμέτρους της εισόδου. Ολοκληρώσαμε την μελέτη δείχνοντας την δυνατότητα συγχρονισμού του χαοτικού ταλαντωτή Colpitts είτε εν φάσει είτε πλήρως.

Οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν προσφέρουν ένα γενικό πλαίσιο για την μελέτη του συγχρονισμού ηλεκτρονικών (και όχι μόνο) ταλαντωτών. Μελλοντικές επεκτάσεις περιλαμβάνουν την χρήση συγχρονισμένων ταλαντωτών ως ακριβή ρολόγια σε συστήματα που απαιτούν ακρίβεια στην μέτρηση του χρό-

νου. Επιπλέον, ο κατάλληλος συνδυασμός αποκρίσεων συγχρονισμένων ταλαντωτών θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένα σύστημα πολλαπλασιαστή συχνότητας. Η εφαρμογή των μεθόδων σε γενικεύσεις των συστημάτων που εξετάστηκαν έχει επίσης ενδιαφέρον, όπως η χρήση LC ταλαντωτών με πολλαπλά LC tanks που διατηρούν την \mathbb{Z}_2 συμμετρία. Η ύπαρξη αναλλοίωτων τόρων σε τέτοια συστήματα επιτρέπει γενικότερους συγχρονισμούς και αντίστοιχες επεκτάσεις των μεθόδων και σε θεωρητικό επίπεδο με την μελέτη συζευγμένων κυκλικών απεικονίσεων. Μια ακόμη δυνατότητα περιλαμβάνει την αξιολόγηση της μεταβλητής δράσης (isostables) για την γενικότερη μελέτη διαταραγμένων συστημάτων είτε από γενικότερες συναρτήσεις είτε από ισχυρές και ταχείες διαταραχές. Τέλος, οι αναπτυγμένες μέθοδοι επιτρέπουν την εφαρμογή τους σε συστήματα τύπου "μαύρα κουτιά" όπου η δυναμική του συστήματος δεν είναι γνωστή, αλλά μόνο παρατηρήσιμες ποσότητες του συστήματος είναι διαθέσιμες. Έτσι μπορεί κανείς να προσδιορίσει τις κύριες ιδιοτιμές του τελεστή Koopman τέτοιων συστημάτων από τις χρονοσειρές ή να υπολογίσει πλήρως πειραματικά την κυκλική απεικόνιση και το αντίστοιχο διάγραμμα συγχρονισμού.

Chapter 1

Introduction

Oscillators are ubiquitous across various technological (e.g., electronic, mechanical) and biological systems (e.g., population dynamics, neural systems). Particularly in electronic applications, they serve as essential components, functioning either as clock signal generators or as carriers of relevant information within telecommunication systems. When subjected to periodic external perturbations, oscillators can synchronize, producing a periodic output signal with a tunable frequency, while concurrently reducing phase noise owing to the locking mechanism. Common applications of synchronization in electronics encompass the frequency dividers within a Phase-Locked Loop (PLL), tasked with dividing the frequency of a reference signal by an integer number [14]. Moreover, integrated implementations of synchronized oscillators, are used in the field of wireless communications, as an alternative to digitally implemented dividers, offering low-power consumption and low-phase noise [7]. In particular, the main limitation in the design of frequency synthesizers for portable communication devices is the power budget, which requires the use of analog synchronized oscillators instead of digital integrated circuits (flip-flop-based frequency dividers with current-mode logic) [51]. Synchronization within chaotic systems is also applied in the context of safe communications [34].

Due to their importance in practical applications, synchronized oscillators have been a subject of theoretical research in the electronics literature. Most developed analyses [10, 7, 6, 58, 25, 9, 8, 26] aim to derive an approximate formula for the locking range, namely the frequency interval inside of which the output signal is locked to the perturbation. Harmonic Balance has been traditionally used as the primary tool for the study of autonomous oscillators and has been naturally extended to synchronization applications [58]. Equivalent analyses are also conducted through phasor-based methods [27]. Averaging combined with the method of Slowly Varying Amplitude has also been extensively utilized [10, 7, 6, 8]. Both methods rely essentially on spectral arguments, interpreting synchronization as the result of harmonic mixing. The assumptions that both analyses are based on, limit their application to cases of weak forcing, while the approximate derived formulae for the locking range, correspond merely to its linear approximation. The introduction of phase models [55, 56] in the field of electronics was mainly restricted to the development of numerical methods for the computation of isochrons. The crucial connection between the synchronization properties of a periodically perturbed oscillator and the isochrons was neglected. Approximate linear phase models for periodically forced oscillators [25, 26], suffered from the same limitations as the Harmonic Balance and Averaging methods. An attempt was made in [26] to introduce an amplitude variable to consider the effect of strong forcing, but it lacked rigorous foundation. Qualitative analyses have also been suggested [14], but the methodology is intuitive rather than rigorously founded.

Apart from the theoretical limitations of the existing analyses, the study of synchronization in the frequency domain, obscures applications in which a single limit cycle oscillator can function as a divider, multiplier, chaotic generator, or as a strongly nonlinear oscillator depending on the driving signal. Moreover, the implications on the time domain of phase locking in applications, e.g. demanding precise timing measurements, is commonly neglected. In this work, we develop a unified and rigorous framework for the study of periodically forced oscillators and demonstrate several possible applications of the proposed methodology in frequency division, multiplication and in terms of the tunable characteristics of the output signal.

Mathematically, self-sustained oscillations are associated with the existence of stable limit cycles

of autonomous dynamical systems, while chaotic oscillations are associated with the existence of strange attractors. These concepts can be treated in a unifying way within the Koopman operator framework that has been developed over the past years. This formalism allows the spectral expansions of appropriate functions of the state variables (observables) offering insight about their time evolution. Generalization of the Laplace domain analysis of nonlinear systems follows as well. Moreover, the Koopman operator methods enable the calculation of the isostables and the isochrons of a limit cycle, as a natural generalization of the well-known action-angle variables for conservative systems, that facilitate the dimensional reduction and the analysis of the corresponding dynamical systems. The angle variable, corresponding to the phase of a limit cycle, has been introduced independently of the Koopman operator framework in the electronic literature [56, 55], but the application on synchronization [25, 26] still relies on frequency-domain arguments.

The synchronization of oscillating systems corresponds to their locking to a periodic perturbation. Utilizing the action-angle reduction, we show that under suitable forms of forcing—without the need for small amplitudes—the analysis of the perturbed system reduces to that of a one-dimensional circle map. This family of maps, which depends on the Phase Response Curve (PRC) or equivalently the Phase Transition Curve, is crucially affected by the structure of the isochrons and captures all relevant information regarding synchronization. The study of these maps reveals synchronization regions in terms of the forcing parameters. The introduction of the action variable allows the extension of this map to a two-dimensional representation without constraints on the form of the forcing. This formalism facilitates the investigation of synchronization in limit cycle oscillators subject to external forcing in a unified and comprehensive manner. Furthermore, the notion of the angle variable (or phase), along with Lyapunov exponents, proves valuable in the examination of chaotic synchronization. Chaotic synchronization can be viewed either as the locking to a periodic perturbation or as the mutual synchronization of two identical chaotic systems.

In this work, two common families of electronic oscillators are studied as particular applications: the differential *LC* and the Colpitts. Through modeling, it becomes evident that a rigorous bifurcation analysis is essential to ensure the appropriate selection of parameters for the circuit elements, thus achieving the desired dynamical behavior, whether periodic or chaotic. Using analytical tools, such as the Shilnikov and the Melnikov theory, we deduce the qualitative aspects of the dynamics and extend them numerically, computing the global bifurcations curves of each system.

Finally, the study of the corresponding circle map (irrespective of which family of oscillators is used) reveals the synchronization regions (Arnold Tongues) which define the locking regions of the system subjected to external forcing. Within these regions the output is periodic and the system functions as a frequency divider, converting periodic input signals into periodic outputs with controllable spectral lines. Conversely, outside these regions, the system operates in the unlocked state and can generate a chaotic output with a continuous spectrum or a quasiperiodic output. Although rapid and strong forcing perturbations cannot be described by the circle map, the two-dimensional map is shown to adequately capture the dynamical characteristics of the system revealing the locking state. In that case the system can be used as a multiplier with respect to the fundamental frequency. Moreover, the chaotic region of the Colpitts oscillator allows one to either synchronize it in phase with an external force or completely synchronize two identical oscillators irrespective of their initial "seed" (initial point). Practical applications of these oscillators include frequency dividers-multipliers with tunable spectral lines, chaotic or quasiperiodic generators, and precise time-keepers due to the locked phase and elimination of phase ambiguity. Essentially, a single limit cycle oscillator can function as a divider, multiplier, or chaotic generator depending on the driving signal.

The present thesis is organized as follows.

- In Chapter 2, we introduce the fundamental definitions of chaos, (strange) attractors and Lyapunov exponents which will be useful throughout the thesis.
- In Chapter 3, we study in detail the Koopman operator in dynamical systems, emphasizing on spectral expansions, and connect it with the study of the dynamics of periodically forced oscillators.
- In Chapter 4, we study in depth the circle maps that arise within the study of synchronization,

as proven in the framework of the Koopman operator, and discuss its implications on the synchronization dynamics of the continuous time system.

- In Chapter 5, we present the basic operational principles of the MOS and BJT transistors providing a mathematical modeling of the two oscillator families-the differential LC and the Colpitts. These models serve as practical applications of the theoretical methods discussed. Additionally, we provide a review of the most commonly employed methods in electronics literature for analyzing autonomous and periodically forced oscillators, discussing their primary limitations.
- In Chapter 6, we rigorously study the nonlinear dynamics associated with each class of oscillators both analytically and numerically, determining the bifurcation curves.
- In Chapter 7, we study the complex synchronization of each family of oscillators obtaining the resonance diagram with respect to the forcing parameter space (amplitude and frequency of the perturbation) and show that the circle map can adequately capture the relevant to synchronization properties. The isochron structure, which determines the synchronization properties of the system, depend on the dynamical characteristics of the autonomous systems. Moreover, we provide an example where the two-dimensional action-angle map is necessary to describe the dynamics and conclude the Chapter with the study of the chaotic synchronization of the Colpitts oscillator.
- In Chapter 8, we summarize the present work and provide directions for future research.

Chapter 2

Preliminaries on Lyapunov Exponents, Chaos and Strange Attractors

We begin the study by giving some preliminary definitions and properties concerning the Lyapunov exponents and the concept of chaos. Although we are mostly interested in limit cycle systems, these fundamental notions will be used in later Chapters. Our treatment follows [60].

2.1 Lyapunov Exponents

We consider a continuous dynamical system,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

where f is a C^r , $r \geq 1$ function and denote its flow by $\phi(x, t)$.

Definition 2.1.1. *Let $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and consider the trajectory $\phi(x_0, t)$. We denote by $\Phi(t)$ the fundamental solution matrix of,*

$$\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\phi(x_0, t)} X = A(t)X, \quad X(0) = I_n. \quad (2.2)$$

For a vector $e \in \mathbb{R}^n$, we define the Lyapunov characteristic exponent in the direction of e by

$$\lambda(x_0, e) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{\|\Phi(t)e\|}{\|e\|} \right), \quad (2.3)$$

where $\|\cdot\|$ denotes the standard Euclidean norm on \mathbb{R}^n . If $\Phi \equiv 0$, we define $\lambda(x_0, e) = -\infty$.

If system (2.1) is discrete and not continuous, the modifications of the definition should be apparent. It is important to note that all points belonging to the same trajectory, are characterized by the same Lyapunov exponent. This suggests that the Lyapunov exponents are a property of the trajectory under consideration.

Fixing the trajectory, we can consider the Lyapunov exponents as functions defined on \mathbb{R}^n , $\lambda(e)$. From the definition it is evident that the actual norm of e is irrelevant so that $\lambda(ce) = \lambda(e)$ for any nonzero c and without loss of generality one can always assume that $\|e\| = 1$. The properties of the norm suggest that

$$\lambda(e_1 + e_2) \leq \max(\lambda(e_1), \lambda(e_2)), \quad \forall e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

from which it follows directly that the set

$$A_r = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(u) \leq r\}, \quad (2.5)$$

where $r \in \mathbb{R}$, is a subspace of \mathbb{R}^n . Hence, the Lyapunov exponents of a trajectory cannot admit more than $n = \dim \mathbb{R}^n$ different values. This can be seen as follows: if this was not true, there would be k vectors u_i such that u_k is a linear combination of u_i and $\lambda(u_k) > \lambda(u_i)$, $i = 1, \dots, k-1$ which is a contradiction by (2.4).

Let $\nu_1 > \dots > \nu_s$ be the $s \leq n$ distinct Lyapunov exponents of the trajectory. Then we if we define the sets

$$L_i = \{e \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(e) \leq \nu_i\}, \quad (2.6)$$

we have

$$\{0\} = L_{s+1} \subset L_s \subset \dots \subset L_1 = \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

and

$$\lambda(e) = \nu_i \iff e \in L_i - L_{i+1}. \quad (2.8)$$

Definition 2.1.2. *The numbers ν_i are defined as the spectrum of the Lyapunov exponents associated with the trajectory $\phi(x_0, t)$. The multiplicity of each ν_i is defined as $k_i = \dim L_i - \dim L_{i+1}$.*

The reader should note the similarity between the multiplicity of a Lyapunov exponent and that of the generalized eigenspace of a matrix. In the following, we briefly state certain conditions for the existence of the limit in (2.3).

Definition 2.1.3. *The fundamental matrix Φ is called regular, if*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)| < \infty \quad (2.9)$$

and for any basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ of \mathbb{R}^n such that

$$\sum_{i=1}^n \lambda(e_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(b_i) \text{ for any other basis } \{b_1, \dots, b_n\}, \quad (2.10)$$

we have

$$\sum_{i=1}^n \lambda(e_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)|. \quad (2.11)$$

We remark that Abel's identity suggests that

$$\log |\det \Phi(t)| = \int_0^t \text{tr} (\Phi(\tau)) d\tau, \quad (2.12)$$

so that one does not essentially need to know the fundamental matrix $\Phi(t)$. Now we have the following

Theorem 2.1.1. *If $\Phi(t)$ is regular, then the limit in (2.3) exists for any $e \in \mathbb{R}^n$*

Proof. See [37]. □

The Lyapunov exponents are a type of spectrum that characterize a a specific trajectory of a dynamical system. In the next chapter, we will study the Koopman operator and introduce another very useful spectrum that characterizes the system as a whole and enables the expansion of trajectories to eigenfunctions of the operator. Two very important solutions of dynamical systems are fixed points and limit cycles which we define next.

Definition 2.1.4. • *Let $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Then x_0 is called a fixed point of (2.1), if $f(x_0) = 0$.*

• *Let $\gamma(t)$ be a periodic solution of (2.1). Then*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \gamma(t), t \in \mathbb{R}\} \quad (2.13)$$

is a limit cycle of (2.1).

- Let $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and let $\Phi(t)$ be the fundamental solution matrix of,

$$\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\phi(x_0, t)} X = A(t)X, \quad X(0) = I_n. \quad (2.14)$$

Then the trajectory $\phi(x_0, t)$ is hyperbolic, if there exists a projection matrix P and constants $k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$, such that

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(\tau)\| &\leq k_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}, \quad t \geq \tau \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(\tau)\| &\leq k_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}, \quad t \leq \tau. \end{aligned} \quad (2.15)$$

It is clear that if x_0 is a fixed point, hyperbolicity implies that there are no eigenvalues, for which the linearization (Jacobian) matrix possesses eigenvalues with zero real part. Let us assume that (2.1) admits a hyperbolic limit cycle with frequency ω . Let x_0 be a point on the limit cycle of (2.1) and let $\Phi(t)$ be the fundamental solution matrix of (2.14). Floquet theory suggests that $\Phi(t, 0) = U(t)e^{Dt}U^{-1}(0)$, where the matrix U is $t = 2\pi/\omega$ periodic, $e^{Dt} = \text{diag}(1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ and $1 \neq |\mu_i|$, $i = 1 \dots, n-1$ are the Floquet multipliers. The fact that $|\mu_i| \neq 1$, follows from the hyperbolicity assumption. We also define the Floquet exponents by $\lambda_i = 2\pi \log(\mu_i)/\omega$ which quantify how attractive or repelling is the limit cycle in the same way that the eigenvalues of the Jacobian do in the case of an equilibrium. We note that $1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ are the eigenvalues of the monodromy matrix $\Phi(2\pi/\omega, 0)$.¹ It is clear that the limit cycle is stable if and only if $1 > |\mu_i|$, $i = 1, \dots, n-1$.

The Lyapunov spectrum of fixed points and limit cycles is straightforward to compute: it includes the characteristic exponents (eigenvalues or Floquet exponents) of the linearization matrices, as the next Proposition shows.

Proposition 2.1.2. 1. Let x_0 be a hyperbolic fixed point of (2.1) and let λ_i be the (distinct) eigenvalues of the Jacobian linearization matrix, then $\nu_i = \text{Re}(\lambda_i)$.

2. If (2.1) admits a hyperbolic limit cycle with Floquet exponents λ_i and x_0 a point of the cycle, then $\nu_i = \text{Re}(\lambda_i)$.

Proof. 1. In that case $\Phi(t) = \exp(Jt)$ where J is the Jacobian matrix. Now if we choose as e a generalized eigenvector of J , it follows that $\nu_i = \lambda_i$. In particular the assumptions of Theorem 2.1.1 hold, so that one only needs to take the limit $t \rightarrow \infty$ in (2.3). Since the spaces L_i cover \mathbb{R}^n the eigenvalues are the only Lyapunov exponents.

2. Let $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ be an increasing sequence with $\lim t_n = \infty$ and $e = u_i(0)$ where $U(t) = [u_1 \dots u_n]$. Then Floquet theory implies,

$$\frac{1}{t_n} \log \|\Phi(t_n)u_i(0)\| = \frac{1}{t_n} \log \|u_i(t_n)e^{\lambda_i t_n}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Re}(\lambda_i), \quad (2.16)$$

since $\|u_i(t_n)\|$ is bounded. Hence for every sequence $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ the limit $f(t_n)$ converges to $\text{Re}(\lambda_i)$ which shows that $\nu_i = \lambda_i$. Since the spaces L_i cover \mathbb{R}^n , the result follows. \square

We note that in the case of the fixed point, the assumptions of Theorem 2.1.1 hold. However, in the case of the limit cycle, the limit in (2.9) does not exist, and this is the reason why we worked with sequences in the proof. Thus, we conclude that in the two common cases of fixed points and limit cycles, the Lyapunov spectrum coincides with the eigenvalues provided by the Jacobian matrix and the Floquet theory, respectively.

Regarding the computation of Lyapunov exponents of arbitrary orbits, this can be done only numerically. A very popular algorithm is provided by [65], which we will use in Chapter 7, when we study the chaotic synchronization of the Colpitts oscillator.

¹It follows immediately that μ_1, \dots, μ_{n-1} are eigenvalues of the Poincare map defined by any transversal cross-section Σ on the cycle. The multipliers are independent of the cross-section Σ , since Poincare maps corresponding to different transversal cross-sections are conjugate.

2.2 Chaos and Strange Attractors

In this section we define what we mean by the terms chaos and strange attractors that we will frequently use in the following Chapters. We state the definitions for continuous time dynamical systems of the form (2.1) but the appropriate modifications of the definitions for the case of maps should be obvious.

Definition 2.2.1. *Let A be a compact and invariant set of (2.1). We say that the flow $\phi(x, t)$ has sensitive dependence on initial conditions on A , if there exists $\epsilon > 0$ such that for any $x \in A$ and any neighborhood U of x , there exists $y \in U$ and $t > 0$ such that*

$$\|\phi(x, t) - \phi(y, t)\| > \epsilon. \quad (2.17)$$

Definition 2.2.2. *The flows $\phi(x, t)$ of (2.1) is topologically transitive on a closed invariant set A if for any two open sets $U, V \subset A$, there exists $t > 0$ such that $\phi(U, t) \cap V \neq \emptyset$.*

Now we can define precisely when an invariant set is chaotic.

Definition 2.2.3. *A compact and invariant set A is chaotic if it has sensitive dependence on initial conditions and the flow is topologically transitive on A .*

The concept of a Cantor set will be also useful in the discussion to follow.

Definition 2.2.4. *If (X, d) is a metric space, a set $E \subseteq X$ is a Cantor set if it is totally disconnected, perfect (every point in E is a limit point) and compact.*

Now let us give a fundamental example. We consider the set of all bi-infinite sequences of N symbols, defined as,

$$\Sigma^N = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \Delta^i, \quad \Delta^i = \Delta = \{1, \dots, N\}. \quad (2.18)$$

Let $a, b \in \Sigma^N$ be two symbol sequences with $a = \{\dots a_{-n} \dots a_{-1} \cdot a_0 a_1 \dots a_n \dots\}$, $b = \{\dots b_{-n} \dots b_{-1} \cdot b_0 b_1 \dots b_n \dots\}$, where $a_i, b_i \in \Delta$. The dot separates the sequence into two infinite parts and merely serves as a starting point. If we equip Σ^N with the function

$$d(a, b) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{\delta_{a_i, b_i}}{1 + \delta_{a_i, b_i}}, \quad (2.19)$$

where δ is Kronecker's delta, it is clear that (Σ^N, d) becomes a metric space. It can be proven [61] that Σ^N is compact, totally disconnected and perfect, hence it is a Cantor set. Now we define the shift map,

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma^N &\rightarrow \Sigma^N \\ (\dots a_{-1} \cdot a_0 a_1 \dots) &\rightarrow (\dots a_{-1} a_0 \cdot a_1 \dots), \end{aligned} \quad (2.20)$$

and refer to it as a full shift on N symbols. It can be proven that σ possesses a countable infinity of periodic orbits, an uncountable infinity of nonperiodic orbits and a dense orbit [61]. The latter suggests that σ is topologically transitive on Σ^N . Further suppose that U is a neighborhood of $a \in \Sigma^N$. No matter how small it might be chosen, there always exists a $n > 0$ such that $a_i = b_i \forall |i| \leq n$. Hence, σ has sensible dependence on initial conditions on Σ^N and we conclude that Σ^N is chaotic.

Although the space and system constructed above may appear purely theoretical, we will later see that under certain conditions, discrete and continuous-time systems are topologically conjugate to a full shift of N symbols. Before defining the strange attractor, we first need to define the notion of the attractor.

Definition 2.2.5. *A closed invariant set A is an attractor, if there is a neighborhood U of A such that*

$$\phi(U, t) \subset A, \quad \forall t > 0, \quad \bigcap_{t>0} \phi(U, t) = A, \quad (2.21)$$

and $\phi(\cdot, t)$ is topologically transitive on A .

The above definition is essentially topological. Attractors can be also defined in a measure theoretic context. The following definition is due to Milnor and is referred to as a Milnor attractor.

Definition 2.2.6. *A closed invariant set A is a Milnor attractor, if there exists a realm of attraction D with positive measure, and there is no smaller set $A' \subset A$ whose realm of attraction coincides with D up to a set of Lebesgue measure zero.*

The distinction between the two definitions lies in the fact that the Milnor attractor permits some points to escape from it, whereas this scenario is not possible in an attractor in the topological sense. Now that we have defined an attractor, the definition of a strange attractor comes naturally.

Definition 2.2.7. *An attractor A is called a strange attractor, if it is chaotic.*

We remark that, assuming the phase space is three-dimensional, trajectories evolving on the strange attractor of the system possess one Lyapunov exponent equal to zero, one negative, and one positive. The positive exponent accounts for the system's sensitive dependence on initial conditions, the negative one indicates that the set is attracting, and the zero exponent reflects the fact that we are on the attractor.

Now that we have covered the fundamental definitions regarding the chaotic behavior of a dynamical system, it's worth noting that the treatment has not been extensive since our primary focus is on systems possessing limit cycles and on their response to periodic forcing. However, we will find that chaotic behavior naturally arises in various scenarios, and the above discussion will prove useful. Furthermore, in Chapter 7, we will explore how chaotic systems can also be synchronized under certain conditions. We continue in the next Chapter with a detailed study of the Koopman operator in dynamical systems.

Chapter 3

The Koopman Operator in Dynamical Systems

In this chapter we study the recent theoretical advancements on Koopman operator. We mainly focus on properties regarding the connection between attractors (particularly limit cycles and equilibria) and Koopman eigenfunctions as well as spectral expansions of state observables. All theoretical results will be utilized in the study of complex synchronization of electronic oscillators.

3.1 Preliminaries

We consider an autonomous continuous time dynamical system

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

where $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a C^r , $r \geq 2$ function so that existence and uniqueness of solutions are assured and denote the flow of (3.1) by $\phi(x, t)$. An observable is a C^1 function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ in a Banach space \mathcal{F} .

Definition 3.1.1. *Let $f \in \mathcal{F}$. The Koopman semigroup operator $U^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ associated with the flow ϕ is defined by*

$$U^t f = f \circ \phi(\cdot, t). \quad (3.2)$$

From the definition it immediately follows that U^t is linear. Moreover it should be clear that Koopman operator is a Markov operator ($U^t c = c$ for any constant function) and is a contraction with respect to the supremum norm,

$$\|U^t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad t \geq 0, \quad f \in L^\infty. \quad (3.3)$$

Next we define the *generator* or infinitesimal Koopman operator.

Definition 3.1.2. *Let \mathcal{D} be a dense subset of \mathcal{F} and $f \in \mathcal{D}$. The generator of the Koopman operator is defined as*

$$Lf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U^t f - f}{t}. \quad (3.4)$$

The fact that $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$ guarantees the convergence of the limit in (3.4) since the operator is strongly continuous [54]. From the definition and (3.1) it follows immediately that

$$Lf(x) = F(x) \cdot \nabla f(x), \quad (3.5)$$

and \cdot denotes the usual inner product in \mathbb{R}^n .

Apart from the infinitesimal operator, there is also a dual operator U^{*t} acting on the conjugate space \mathcal{F}^* of the bounded linear functional $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$. This operator satisfies,

$$\psi(U^t f) = (U^{*t} \psi)(f), \quad f \in \mathcal{F}, \quad \psi \in \mathcal{F}^*. \quad (3.6)$$

If we restrict the observables on a compact subspace K of the phase space, bounded linear functionals can be associated with a measure μ and that, provided it is absolutely continuous, with a L^1 density function ρ . Then we have,

$$\psi(f) = \int_K f(x)\rho(x)dx, \quad (3.7)$$

and we can define the Perron-Frobenius operator $P^t : L^1(K) \rightarrow L^1(K)$, by

$$\left(U^{*t}\psi \right) (f) = \int_K f(x)(P^t\rho)(x)dx, \quad (3.8)$$

from which it follows that

$$\int_K f(x) \left(P^t\rho \right) (x)dx = \int_K (U^t f)(x)\rho(x)dx. \quad (3.9)$$

If S is a measurable subset of K and f is the characteristic function of S , then

$$\int_S \left(P^t\rho \right) (x)dx = \int_{\phi(S,t)^{-1}} \rho(x)dx, \quad (3.10)$$

where $\phi(S,t)^{-1} = \{x|\phi(x,t) \in S\}$ is the preimage of S through the dynamics. Hence, the Perron-Frobenius operators is related to the forward propagation of densities, and the Koopman operator with the backward propagation of observables. One can consider the above equation as the definition of the Perron-Frobenius operator. Since under the conditions impose on F , the flow is smooth, we have

$$\left(P^t\rho \right) (x) = \int_{\phi(x,t)^{-1}} \frac{\rho(x)}{|\det J|} dx, \quad (3.11)$$

where J is the Jacobian matrix. If the system is measure-preserving, that is $\mu(\phi(S,t)^{-1}) = \mu(S)$ for the invariant measure, $\mathcal{F} = L^2(\mu)$ equipped with the standard norm and the dynamics is invertible, then it is obvious that the norm of any observable remains invariant under the action of the operators which are unitary and satisfy $U^t = P^{-t}$. This means that the Perron-Frobenius operator associated with the forward flow coincides with the Koopman operator associated with the backward flow. Moreover, P^t and U^t are adjoint,

$$\langle P^t f, \rho \rangle = \langle f, U^t \rho \rangle. \quad (3.12)$$

The generator A of the Perron-Frobenius operator is known as the Liouville operator [5] satisfies

$$P^t = e^{tA}, \quad (3.13)$$

and its action on a density function is given by,

$$A\rho = -\nabla \cdot (\rho F). \quad (3.14)$$

That is, the time evolution of $g(x,t) = P^t(\rho(x))$ satisfies

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla \cdot (gF) = 0. \quad (3.15)$$

Now we proceed with defining the spectrum of the operator.

Definition 3.1.3. We define the resolvent set of the Koopman operator $\rho(L)$ as the set of all $\lambda \in \mathbb{C}$ such that the inverse of $\lambda I - L$ exists and is a bounded linear operator on a dense domain of \mathcal{F} . The spectrum of U^t , or equivalently L , is defined as the complement of the resolvent set, $\sigma(L) = \mathbb{C} - \rho(L)$.

Having defined the spectrum of the operator, or equivalently, its generator, we want to define its eigenfunctions and eigenvalues which we will enable spectral expansion of observable functions in appropriate functional spaces. But before that we need to deal with a technical matter. The spectrum of the operator is generally the union of three disjoint sets: point, continuous and residual [12].

- The point spectrum consists of all $\lambda \in \sigma(L)$ for which $\lambda I - L$ is not injective. Thus, we can define eigenvalues and eigenvectors. This component is the most important and characterizes systems possessing (hyperbolic) limit cycles equilibria and invariant tori.
- A $\lambda \in \sigma(L)$ is in the continuous spectrum if $\lambda I - L$ is injective, is not surjective and has a dense image. This spectral component capture the ergodic behavior of chaotic systems on the attractor.
- A $\lambda \in \sigma(L)$ is in the residual spectrum if $\lambda I - L$ is injective, is not surjective and does not have a dense image.

Definition 3.1.4. *An eigenfunction of the Koopman operator associated with $\lambda \in \mathbb{C}$ in the point spectrum, which will be called eigenvalue, is a function $\phi_\lambda \in \mathcal{F}$ such that*

$$U^t \phi_\lambda(x) = e^{\lambda t} \phi_\lambda(x). \quad (3.16)$$

Equivalently,

$$L\phi_\lambda(x) = \lambda\phi_\lambda(x). \quad (3.17)$$

From the definition it follows that, if $\phi_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_2}$ are two eigenfunctions associated with eigenvalues λ_1, λ_2 , then $\phi_k = \phi_{\lambda_1}^{k_1} \phi_{\lambda_2}^{k_2}$ is an eigenfunction associated with $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$, $k_{1,2} \in \mathbb{R}$, since

$$U^t(\phi_{\lambda_1}^{k_1} \phi_{\lambda_2}^{k_2}) = U^t(\phi_{\lambda_1}^{k_1})U^t(\phi_{\lambda_2}^{k_2}) = \exp((k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)t)\phi_{\lambda_1}^{k_1} \phi_{\lambda_2}^{k_2} \quad (3.18)$$

Moreover it is straightforward to see that if ϕ_λ is an eigenfunction associated with λ , so is $c\phi_\lambda$ for any nonzero $c \in \mathbb{R}$. The extension to the Perron-Frobenius operator should be apparent. A $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue in the point spectrum, associated with the eigenfunction ρ , if

$$P^t \rho = \lambda^t \rho, \quad (3.19)$$

or equivalently in terms of its generator,

$$A\rho = \log(\lambda)\rho. \quad (3.20)$$

If the system is measure preserving, we stated that the operators are adjoint, which implies that the also share the same spectrum, but generally different eigenfunctions. For dissipative systems, the two operator theoretic frameworks are not equivalent and in the following we focus on the Koopman operator.

At this point we remark that the eigenfunctions are defined in the whole phase space, thus $U^t \phi_\lambda(x)$ is well defined for any $t \in \mathbb{R}$. We introduce the notion of eigenfunctions defined in smaller subsets and extend them properly in larger ones.

Definition 3.1.5. *Let A be a set that is not invariant. We assume that for each $x \in A$, there exists an interval I_x such that $\phi(x, t) \in A \forall t \in I_x$. A function ϕ_λ is called an open eigenfunction associated with the eigenvalue λ if,*

$$U^t \phi_\lambda(x) = e^{\lambda t} \phi_\lambda(x) \forall t \in I_x. \quad (3.21)$$

If A is a proper (namely, both forward and backward) invariant subset of the phase space, ϕ_λ is call a subdomain eigenfunction and $I_x = \mathbb{R}$.

It is clear that if A coincides with the whole phase space, then $I_x = \mathbb{R}$ and ϕ_λ is an eigenfunction of U^t . Obviously, forward invariant sets correspond to $I_x = (t_1, \infty)$ and correspondingly for backward invariant. Frequently we have functions evolving as eigenfunctions but defined in smaller regions of the phase space. In order to extend these "local" eigenfunctions from a set A to larger sets, we need to define the time that it takes a point to reach A : heuristically, we say that a point needs time $\tau > 0$ to reach A , if,

$$\phi(z, \tau) \in \text{cl}(A), \quad \phi(z, t) \notin A, \quad \forall 0 < t < \tau, \quad (3.22)$$

and similarly for negative time $\tau < 0$,

$$\phi(z, \tau) \in \text{cl}(A), \quad \phi(z, t) \notin A, \quad \forall \tau < t < 0. \quad (3.23)$$

The above observations motivate the following definition.

Definition 3.1.6. For an open and connected set A , we define its reachable set as $P = F \cup B \cup A$, where

$$F = \bigcup_{t \geq 0} \left[\phi(\text{cl}(A), -t) - \bigcup_{0 \leq \tau < t} \phi(A, -\tau) \bigcup_{\gamma < 0} \phi(A, -\gamma) \right], \quad (3.24)$$

$$B = \bigcup_{t \leq 0} \left[\phi(\text{cl}(A), -t) - \bigcup_{t < \tau \leq 0} \phi(A, -\tau) \bigcup_{0 < \gamma} \phi(A, -\gamma) \right]. \quad (3.25)$$

Then the time to reach A is a function $t : P \rightarrow \mathbb{R}$. If $z \in A$, it is defined as $t(z) = 0$ and if $z \in F$, $t(z)$ is the unique number such that

$$z \in \phi(\text{cl}(A), -t(z)) - \bigcup_{0 \leq \tau < t(z)} \phi(A, -\tau) \bigcup_{\gamma < 0} \phi(A, -\gamma). \quad (3.26)$$

For $z \in B$, the definition is analogous. For $z \in P$, we define $I_z = (t_1, t_2)$ as,

$$t \in I_z \implies \phi(z, -t) \in P, \quad t > t_2 \implies \phi(z, -t) \notin B, \quad t < t_1 \implies \phi(z, -t) \notin F. \quad (3.27)$$

From the definition, P is essentially the set of all points that can reach A through either the backward or the forward flow and the function $t(z)$ merely gives the corresponding time. We remark that the difference in the definition compared to [48] is to handle some special cases. Now we can extend eigenfunctions defined in subsets of the phase space to open eigenfunctions on P .

Proposition 3.1.1. Let A be open and connected and assume that there exists a $\phi_\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\dot{\phi}_\lambda(x) = \lambda \phi_\lambda(x), \quad x \in A. \quad (3.28)$$

For $z \in P$, we extend ϕ_λ as,

$$\phi(z) = e^{-\lambda t(z)} \phi(\phi(z, t(z))). \quad (3.29)$$

Then ϕ_λ is continuous and an open eigenfunction on P provided that t_2 or t_1 are finite.

Proof. Since t_1 or t_2 are finite, A is not invariant. Let $z \in P$ and $\tau \in \mathbb{R}$, then $t(\phi(z, \tau)) = t(z) - \tau$. Thus we have,

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(\phi(z, \tau)) &= e^{-\lambda t(\phi(z, \tau))} \phi_\lambda \left[\phi(\phi(z, \tau), t(\phi(z, \tau))) \right] \\ &= e^{-\lambda(t(z) - \tau)} \phi_\lambda(\phi(z, t(z))) \\ &= e^{\lambda \tau} \phi_\lambda(z), \end{aligned} \quad (3.30)$$

which shows that ϕ_λ is an open eigenfunction. To prove the continuity of $\phi_\lambda(z)$ on P , let $\epsilon > 0$, $x \in P$ and t such that $\phi(x, -t) \in A$. Since A is open, we choose $\delta_1 > 0$ such that $\|\phi(x, -t) - \phi(y, -t)\| < \delta_1$ implies that $\phi(y, -t) \in A$. The continuity of ϕ_λ on A allows us to select δ_1 small enough so that,

$$\left\| \phi_\lambda(\phi(x, -t)) - \phi_\lambda(\phi(y, -t)) \right\| < \epsilon e^{-\text{Re}(\lambda)t}, \quad (3.31)$$

from which one immediately has,

$$\left\| \phi_\lambda(x) - \phi_\lambda(y) \right\| = e^{\text{Re}(\lambda)t} \left\| \phi_\lambda(\phi(x, -t)) - \phi_\lambda(\phi(y, -t)) \right\| < \epsilon. \quad (3.32)$$

Since by continuity of the flow $\phi(\cdot, t)$ there exists $\delta > 0$ such that,

$$\|x - y\| < \delta \implies \|\phi(x, -t) - \phi(y, -t)\| < \delta_1, \quad (3.33)$$

the proof is complete. \square

From the above construction, it follows that if P is a proper invariant subset of the phase space, ϕ_λ is a subdomain eigenfunction. If P coincides with the whole phase space ϕ_λ is an eigenfunction of U^t . Before continuing let us assume that (3.1) is linear, i.e., $F(x) = Ax$ and find the eigenfunctions to motivate the following analysis. Let A have distinct eigenvalues λ_i with associated left and right eigenvectors v_i, w_i respectively. It is straightforward to see that

$$\phi_i = \langle x, w_i \rangle, \quad (3.34)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the standard inner product in \mathbb{C}^n , is an eigenfunction associated to λ_i . Hence the spectrum of the Koopman operator in the linear case contains the eigenvalues of A and linear combination of them. Further, because the v_i and w_i form biorthogonal bases, for an arbitrary $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$x_0 = \sum_{j=1}^n \langle x_0, w_j \rangle v_j = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_0) v_j, \quad (3.35)$$

from which it follows that

$$\begin{aligned} C\phi(x_0, t) &= CU^t \sum_{j=1}^n \phi_j(x_0) v_j \\ &= C \sum_{j=1}^n U^t \phi_j(x_0) v_j \\ &= \sum_{j=1}^n \exp(\lambda_j t) \phi_j(x_0) C v_j, \end{aligned} \quad (3.36)$$

for any matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Hence, any linear function of the state is expanded into a finite sum of eigenfunctions in the linear system case. We keep this in mind for future reference in the nonlinear case. From (3.36) it further follows that in the Laplace domain the output function is a rational function with poles at λ_j .

For completeness of the presentation, let us assume that the eigenvalues are not distinct so that A is not necessarily diagonalizable. In that case, let s be the number of distinct eigenvalues, let g_h denote the geometric multiplicity of λ_h , $m_{k,h}, k \leq g_h$ the length of the k -th chain associated with the eigenvalue λ_h and $M_h \max_k m_{k,h}$ the maximum length of the chain. Then A can be decomposed as

$$A = \sum_{h=1}^s \lambda_h P_h + D_h, \quad (3.37)$$

where D_h are nilpotent matrices such that $D_h^{M_h} = 0$ and $D_h^k \neq 0, k \leq M_h$. The matrices P_h are projection matrices to the corresponding eigenspaces and we have the relations

$$D_h D_k = \delta_{hk} D_h, \quad P_h D_k = D_h P_k = \delta_{h,k} D_h, \quad P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \quad (3.38)$$

where δ_{ij} is Kronecker's delta. We remark that the above decomposition is general and holds for finite dimensional, linear operators and is referred to as the Kato Decomposition [29]. Thus, one can compute the exponential matrix of A ,

$$e^{At} = \sum_{h=1}^s \left(e^{\lambda_h t} P_h + \sum_{j < M_h} \frac{1}{j!} t^j e^{\lambda_h t} D_h^j \right). \quad (3.39)$$

The matrix D_h can be written as

$$D_h = \sum_{n=1}^{g_h} D_{n,h}, \quad (3.40)$$

where $D_{n,h}$ is nilpotent with index $m_{n,h}$. Thus, (3.39) can be written equivalently as,

$$e^{At} = \sum_{h=1}^s \left(e^{\lambda_h t} P_h + \sum_{k=1}^{g_h} \sum_{j=1}^{m_{k,h}-1} \frac{1}{k!} t^k e^{\lambda_h k} D_{k,h}^j \right). \quad (3.41)$$

Now, let $v_h^{k,i}$, $h = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, g_h$, $i = 1, \dots, m_{k,h}$ the k -th chain of generalized eigenvectors and $w_h^{k,i}$ the corresponding dual chain. Then one has the relations,

$$\begin{aligned} Av_h^{k,1} &= \lambda_h v_h^{k,1}, \quad Av_h^i = \lambda_h v_h^{k,i} + v_h^{k,i-1}, \quad 2 \leq i \leq m_{k,h} \\ A^* w_h^{k,m_{k,h}} &= \lambda_h^c w_h^{k,m_{k,h}}, \quad A^* w_h^{k,i} = \lambda_h^c w_h^{k,i} + w_h^{k,i+1}, \quad i < m_{k,h} \end{aligned} \quad (3.42)$$

If $\phi_h^{k,i}(x) = \langle x, w_h^{k,i} \rangle$ [48], then it is straightforward that $\dot{\phi}_h^{k,i}(x) = \lambda_h \phi_h^{k,i}(x) + \phi_h^{k,i+1}$ and $\phi_h^{k,m_{k,h}}$ is a usual eigenfunction associated with λ_h . The rest functions $\phi_h^{k,i}$, $1 \leq i \leq m_{k,h}$ can be thought of generalized eigenfunctions [48] associated with the chain $m_{k,h}$. From the above relations we have,

$$U^t \phi_h^{k,i}(x) = \sum_{n=i}^{m_{k,h}} \frac{1}{(n-i)!} t^{n-i} e^{\lambda_h t} \phi_h^{k,n}(x), \quad (3.43)$$

and thus, we can connect the eigenfunctions with the decomposition of the matrix A ,

$$\begin{aligned} P_h x &= \sum_{k=1}^{g_h} \sum_{n=1}^{m_{k,h}} \phi_h^{k,n}(x) v_h^{k,n} \\ D_{k,h}^j x &= \sum_{n=j+1}^{m_{k,h}} \phi_h^{k,j}(x) v_h^{n-j,j}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

The above analysis motivates the following definition.

Definition 3.1.7. A vector function $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, whose indices belong in \mathcal{F} , is called a vector of generalized eigenfunctions if there exists a Jordan matrix J , called eigenmatrix, such that

$$U^t \phi(x) = e^{Jt} \phi(x). \quad (3.45)$$

It is obvious that the case of a diagonal matrix J is equivalent to the regular definition of eigenfunctions. Thus, the case of multiple eigenvalues complicates the definition with technical details without adding essentially new information. With the above presentation we wanted to illustrate that the concept of eigenfunctions can be extended naturally to treat this case as well. In what follows we will not treat generalized eigenfunctions in more detail, since all results can be modified in an straightforward manner.

In the linear case the stable, unstable and center manifolds are simply the spans of the corresponding eigenvectors in each case. If we assume u unstable eigenvalues $(\lambda_1, \dots, \lambda_u)$, c neutrally stable $(\lambda_{u+1}, \dots, \lambda_{u+c})$ and s stable $(\lambda_{u+c+1}, \dots, \lambda_{u+c+s})$, we can express these spaces as

$$\begin{aligned} M_s &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_1(x), \dots, \phi_{u+c}(x) = 0\} \\ M_c &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_1(x), \dots, \phi_u(x) = 0, \phi_{u+c+1}(x) = 0, \dots, \phi_{u+c+s}(x) = 0\} \\ M_u &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_{u+c+1}(x) = 0, \dots, \phi_{u+c+s}(x) = 0\}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

where ϕ are corresponding (generalized) eigenfunctions. The above equivalent definition will be generalized in a straightforward manner in the nonlinear case.

Now we return back to the general case of nonlinear systems. In order to extend the Laplace domain analysis to the nonlinear case and connect it with the spectrum of the operator, we define the Koopman resolvent.

Definition 3.1.8. We define the resolvent operator by

$$R(s; L) = (sI - L)^{-1}, \quad s \in \rho(L). \quad (3.47)$$

Since the semigroup operator U^t is strongly continuous, there exists a $w \in \mathbb{R}$ such that

$$\|U^t f\| \leq M e^{wt} \|f\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.48)$$

where $\|\cdot\|$ is a norm in \mathcal{F} . Thus, for the resolvent we have the following representation [17]

$$R(s, L)f = \int_0^\infty e^{-st} U^t f dt, \quad f \in \mathcal{F}, \quad (3.49)$$

for $\operatorname{Re}(s) > w$, which we will use in the following to derive the Laplace transform of observables in an appropriate functional space. We note that if f belongs to a kernel Hilbert space (in the next sections we will provide such spaces), then it is absolutely bounded and hence the integral in (3.49) converges pointwise. For more general spaces, the integral would converge strongly but not necessarily pointwise [54]. Under the previous assumptions on f , it is straightforward to prove that the Laplace transform of $U^t f(x)$ exists so that,

$$\mathcal{L}(U^t f)(s, x_0) = \int_0^\infty e^{-st} f(\phi(x_0, t)) dt = R(s, L)f(x_0), \quad \operatorname{Re}(s) > w. \quad (3.50)$$

Further, we can obtain similar expressions for the Fourier transform of an observable of bounded variation. In particular it is well known[59], that in this case we can reconstruct $U^t f$ by

$$U^t f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \mathcal{L}(f)(s, x_0) ds, \quad c > w, \quad t > 0, \quad (3.51)$$

and if $w < 0$, we conclude that the Fourier transform of $U^t f$ exists, converges absolutely and is given by

$$\mathcal{F}(U^t f)(s, x_0) = \int_0^\infty f(\phi(x_0, t)) e^{-i\omega t} dt = R(i\omega, L)(f)(x_0). \quad (3.52)$$

We close this section by considering how conjugacies affect the the Koopman operator. We consider two dynamical systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \dot{y} &= F_2(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3.53)$$

with flows $\phi_1(x, t)$ and $\phi_2(y, t)$ respectively. We assume that the two systems are C^k diffeomorphic, that is there exists a C^k diffeorphism $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that

$$h(\phi_1(x, t)) = \phi_2(h(x), t). \quad (3.54)$$

Then, if $\phi_{2,\lambda}$ is an eigenfunction (with eigenvalue λ) of the Koopman operator associated with ϕ_2 , we have

$$\exp(\lambda t) \phi_{2,\lambda}(h(x)) = \phi_{2,\lambda}(\phi_2(h(x), t)) = \phi_{2,\lambda}(h(\phi_1(x, t))), \quad (3.55)$$

which shows that $\phi_{2,\lambda} \circ h$ is an eigenfunction of the Koopman operator associated with ϕ_1 with the same eigenvalue λ . The result is obviously true for generalized eigenfunctions as well.

3.2 Attractors and Eigenfunctions

Now we study the connection between globally attractive attractor A and the Koopman operator. The results in this section are general and are not limited to specific cases of attractors.

We begin with a straightforward result.

Proposition 3.2.1. *The attractor A is globally attractive if and only if*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U^t f = 0, \quad (3.56)$$

for any $f \in \mathcal{F}$ with $f(x) = 0, \forall x \in A$.

Proof. The necessity is straightforward. For the sufficiency, one needs to consider the function $d(x)$ where d is the distance from the attractor A . Then,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(x, t)) = 0 \implies \omega(x) \subseteq A, \quad (3.57)$$

and the result follows. \square

In the same manner we can prove the following.

Proposition 3.2.2. *Let A be globally attractive and ϕ_λ an eigenfunction. Then,*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda) < 0 &\iff \phi_\lambda(x) \equiv 0, \forall x \in A \\ \operatorname{Re}(\lambda) = 0 &\iff \phi_\lambda(x) \not\equiv 0, \forall x \in A \end{aligned} \quad (3.58)$$

Proof. If $\phi_\lambda(x) = 0 \forall x \in A$, it follows from the previous proposition that $U^t \phi_\lambda(x) = 0$ which implies $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Now suppose that $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Since A is globally attractive, for any $y \in A$ there exists a x such that $y \in \omega(x)$ ¹ and hence an increasing sequence $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ with $t_n \rightarrow \infty$ such that $\phi(t_n, x) \rightarrow y$. Now continuity of ϕ_λ implies that

$$\phi_\lambda(y) = \phi_\lambda(\lim \phi(t_n, x)) = \lim \phi_\lambda(\phi(x, t_n)) = 0, \quad (3.59)$$

which concludes the proof of the first equivalence.

For the second equivalence, let $\phi_\lambda \not\equiv 0$ in A . Then it is clear that $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$. If $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |U^t \phi_\lambda(x)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_\lambda(\phi(x, t))| = \infty, \quad (3.60)$$

which is a contradiction since ϕ_λ is bounded on A . If $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, then the result follows immediately from the first equivalence. \square

The above proposition suggests that eigenfunctions that vanish on the attractor are associated with the stability properties. In contrast eigenfunctions that are not identically zero, are related to the dynamics on the attractor and are associated with purely imaginary eigenvalues, while the Koopman operator is unitary when restricted on the attractor. These observations will arise again when we study spectral expansions of observables.

Now, let X be a compact forward invariant set. Then we have, the following converse-like theorem of the previous proposition.

Theorem 3.2.3. *Let ϕ_λ be an eigenfunction with $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Then the set*

$$M_0 = \{x \in X \mid \phi_\lambda(x) = 0\}, \quad (3.61)$$

is forward invariant and globally asymptotically stable.

Proof. Let

$$B_a = \{x \in X \mid \|\phi_\lambda(x)\| < a\}, \quad (3.62)$$

and for $\epsilon > 0$, define

$$N_\epsilon = \{x \in X \mid \min_{y \in M_0} \|x - y\| < \epsilon\}. \quad (3.63)$$

¹A point y belongs to the omega limit set $\omega(x)$ of a point x , if there exists a sequence $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ with $t_n \rightarrow \infty$, such that $\phi(x, t_n) \rightarrow y$.

Then, for $t > 0$,

$$\|U^t \phi_\lambda\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \|\phi_\lambda\| < a, \quad (3.64)$$

which shows the invariancy. Further it follows that $\omega(x) \subseteq M_0$. Now continuity implies that there exist $a > 0, \delta > 0$ such that $N_\delta \subseteq B_a \subseteq N_\epsilon$ and hence

$$x \in N_\delta \implies \phi(x, t) \in N_\epsilon, \quad (3.65)$$

which concludes the proof. \square

The above theorem holds for $X = \mathbb{R}^n$ provided that ϕ_λ doesn't vanish at infinity. Extending the above Theorem we naturally conclude the following.

Corollary 3.2.3.1. *Let ϕ_{λ_i} , $i = 1, \dots, m$ be eigenfunctions of the Koopman operator associated with eigenvalues $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Then the intersection*

$$M = \bigcap_{j=1}^m \{x \in X \mid \phi_{\lambda_j}(x) = 0\}, \quad (3.66)$$

is invariant and globally asymptotically stable.

As a result, the set M as defined above, always includes any other global attractor A (Proposition 3.2.2). The connection with the stable and unstable manifolds, as defined in the linear case should be obvious and motivates the generalization to follow.

3.3 Spectral Expansions

In this section we study properties of systems possessing limit cycles, equilibria, quasiperiodic and ergodic attractors with a special focus in the first two cases. We are interested in the conditions under which the time evolution of an observable can be expanded into a (infinite) sum of the time evolution of eigenfunctions. We deal with each attractor separately.

3.3.1 Equilibria

We assume that (3.1) admits a hyperbolic stable fixed point (without loss of generality the origin) with basin of attraction B and impose the non-resonance condition on its (simple) eigenvalues [60].

Definition 3.3.1. *The eigenvalues λ_i of the linearized system around the origin of (3.1) are called non-resonant if there are no nonnegative integers m_i , at least two nonzero, such that*

$$\lambda_s = m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n, \quad s \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.67)$$

If the vector field F is analytic and the fixed point hyperbolic, normal form theory [60] implies that there is an analytic change of variables h with $Dh(0) = I_n$, such that (3.1) and the induced linearized system are C^∞ conjugate in a neighborhood N of the origin. Since we know the eigenfunctions of a linear system (3.34), and based on (3.58), we know that the eigenfunctions of the nonlinear system (3.1) at least in a neighborhood of the origin, are given by

$$s(x) = (s_1(x), \dots, s_n(x)), \quad s_j(x) = \langle h(x), w_j \rangle, \quad (3.68)$$

and, further, are analytic. The map s provides an analytic conjugacy to the linear diagonal system.

Let $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be an observable sufficiently smooth with $g(0) = 0$. Similar to the linear case, we wish to expand g in terms of the eigenfunctions of the nonlinear system s_j . Since s is analytic we can Taylor expand $g(s^{-1}(y))$ near the origin to obtain

$$\begin{aligned} g(s^{-1}(y)) &= g(0) + (Dg)^T Ds^{-1}y \\ &+ \frac{1}{2}y^T (Ds^{-1})^T (D^2g) Ds^{-1}y + \frac{1}{2}y^T \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} D^2 s_j^{-1}y + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \quad (3.69)$$

where $D^k u$ denotes the derivative of order k of the function u evaluated at 0 and $\mathcal{O}(3)$ denote higher order terms. Higher order terms can be expressed in a similar manner in terms of the derivatives of s^{-1} and g . Now assume that g is vector valued. If we set $y = s(x)$, we get the expansion near the origin

$$g(x) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n} v_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1}(x) \dots s_n^{k_n}(x) \quad (3.70)$$

The vectors $v_{k_1 \dots k_n}$ are called the Koopman modes and with $s_{k_1 \dots k_n}$ can be seen as projections on the eigenvalue $k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n$. If $g \equiv \text{id}$ then we have

$$v_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1 \dots k_n} s^{-1}}{\partial^{k_1} y_1 \dots \partial^{k_n} y_n}. \quad (3.71)$$

For the eigenvectors of the Jacobian matrix we have $Ds^{-1} = V$ and $s(s^{-1}) = \text{id}$ implies that $Ds_i = w_i$, where w_i the i -th left eigenvector. Hence, for x sufficiently small $s_i(x) = \langle x, w_i \rangle$, which means that near the origin the eigenfunctions can be approximated by those of the linearized system, as expected.

Now, for x in a neighborhood of the origin we have the expansion,

$$U^t g(x) = \sum_{j=1}^n s_j(x) v_j e^{\lambda_j t} + \sum_{k_1 + \dots + k_n > 1} v_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1}(x) \dots s_n^{k_n}(x) e^{(k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n) t}, \quad (3.72)$$

which gives the spectral decomposition of the time evolution an observable in terms of Koopman modes (v_j), eigenfunction (s_j) and eigenvalues (λ_j). The first summation corresponds to the linear part and the infinite sum to the nonlinear part of (3.1). We note that if $g(0) \neq 0$, a constant term is added to the summation representing. If the Taylor expansion (3.69) is valid in the whole basin of attraction B , the expansion in (3.72) can also be extended to the whole B using the notion of open eigenfunctions.

Proposition 3.3.1. *If g is analytic in B , then the spectral expansion (3.72) is valid in the whole basin of attraction B replacing s_i by (possibly open) eigenfunctions.*

Proof. Let $z \in B = \cup_{t>0} \phi(N, -t)$ and $t(z)$ the time it needs to reach N . Then,

$$U^\tau g(z) = U^\tau g(\phi(x, -t(z))) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n} \tilde{v}_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1}(x) \dots s_n^{k_n}(x) e^{(k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n) \tau}, \quad (3.73)$$

where $\tilde{v}_{k_1 \dots k_n}$ is the Koopman mode associated with $g \circ \phi(\cdot, -t(z))$. Since,

$$\tilde{v}_{k_1 \dots k_n} = v_{k_1 \dots k_n} e^{-(k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n) t(z)}, \quad (3.74)$$

and the eigenfunctions are extended as $\tilde{s}_i(z) = e^{-\lambda_i t(z)} s_i(\phi(z, t(z)))$, we have the expansion in open eigenfunctions

$$U^\tau g(z) = U^\tau g(\phi(x, -t(z))) = \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n} v_{k_1 \dots k_n} \tilde{s}_1^{k_1}(x) \dots \tilde{s}_n^{k_n}(x) e^{(k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n) \tau}, \quad (3.75)$$

in the whole basin of attraction B . □

Now let us study in greater detail the class of functions that admit expansions of the form (3.70) and (3.71) and remain invariant (in the sense that they remain in the same functional space) under the action of the operator. Following [48, 54] we define the Modulated Fock Space (MFS) as the space of functions $g = f \circ s$ where $s : B \rightarrow \mathbb{C}^n$ are the (analytic and complexified) Koopman eigenfunctions and $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ entire, with

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz < \infty, \quad (3.76)$$

which can be defined as the (squared) norm of the space. An inner product of the following form can also be defined

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} f_1(z) f_2^c(z) e^{-|z|^2} dz. \quad (3.77)$$

The space is closed under the action of the Koopman operator,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} |f \circ \phi(x, t)|^2 e^{-|h(z)|^2} dh(z) &= \int_{\mathbb{C}^n} |f(h)|^2 e^{-|h(\phi(x, -t))|^2} d(h \circ \phi(x, -t)) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} |f(h(z))|^2 e^{-|\exp(-\lambda t)h(z)|^2} d\left(e^{-\lambda_1 t} h_1(z)\right) \dots d\left(e^{-\lambda_n t} h_n(z)\right) \\
&= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \int_{\mathbb{C}^n} |f(h)|^2 e^{-|\exp(-\lambda t)h(z)|^2} dh < \infty
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Further, equipped with the inner product (3.77) the space is a Reproducing Kernel Hilbert Space with kernel,

$$K(z, w) = \exp(s(z) \cdot s(w)). \tag{3.79}$$

This can be seen as follows: The monomials

$$\frac{1}{(m_1! \dots m_n!)^{1/2}} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}, \quad (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \tag{3.80}$$

form an orthonormal base in this space, since

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^{2k} e^{-|z|^2} dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2)^k e^{-(x^2 + y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^{2k+1} e^{-r^2} dr d\phi = k! \pi, \tag{3.81}$$

and odd parity implies $\langle z^n, n^m \rangle = 0$ for $n \neq m$. Moreover,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} |z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}|^2 e^{-(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)} dz_1 \dots dz_n &= \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^{2m_1} e^{-|z|^2} dz \right) \dots \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^{2m_n} e^{-|z|^2} dz \right) \\
&= m_1! \dots m_n! \pi^n.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

The fact that (3.79) is a kernel is straightforward. A few remarks regarding the construction of the space are in order. As defined the MFS is an invariant space under U^t and includes all observables admitting a spectral expansion. It is important to note that the condition on the norm is essential so that the space remains invariant. Although the conditions may seem restrictive they are trivially satisfied by all common observable that will be used in the study of particular systems in the following sections. We also note that this construction is more general (see [48]) and allows one to decompose the spectrum of the Koopman operator to the spectrum on the attractor (DC term corresponding to zero eigenvalue) and off the attractor (terms vanishing at the fixed point). This will prove of particular interest when we study limit cycle systems. We also note that the spectral expansion derived validates that only point spectrum is of interest in this case.

Having defined an appropriate space of functions that admit spectral expansion, we can also explicitly find their Laplace transform connecting the analysis of nonlinear systems to the linear case. Let g be an observable in the MFS. The space is Hilbert and $\|U^t f\| \leq \|f\|$ since $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ (simple inspection of (3.76) and (3.72)), hence the summations in (3.72) are strongly convergent and U^t is strongly continuous. Thus, the assumptions on (3.50) are satisfied and the Laplace transform exists. We can prove using the dominated convergence theorem (we will provide the proof for limit cycle systems, this one here is similar) the following.

Theorem 3.3.2. *Let f be an observable in the MFS, with $f(0) = 0$. Then action of resolvent operator on f , or equivalently the Laplace transform of $U^t f$, is given by*

$$R(z, L)f(x_0) = \sum_{j=1}^n \frac{s_j(x_0)v_j}{z - \lambda_j} + \sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n, k_1 + \dots + k_n > 1} \frac{v_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1}(x_0) \dots s_n^{k_n}(x_0)}{z - (k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n)}. \tag{3.83}$$

The ROC is $\{z \in \mathbb{C} | \text{Re}(z) > \max_i \text{Re}(\lambda_i)\}$.

Proof. See the similar proof of Theorem 2.4.1. □

The Laplace transform corresponds completely to (3.72) and is constituted of a linear term (first summation) and of the contribution of the nonlinearity in F (infinite second term). In this way we have a complete representation of the time evolution of any observable in the defined MFS. Further we have a one to one correspondence between the Laplace domain expansion (3.83) and the time domain expansion (3.72). Apparently, if $f(0) \neq 0$, a term $f(0)/z$ is added to the Laplace transform modifying the ROC to $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Now let us assume that the nonresonance assumption is not valid. In this case, we cannot derive an expansion similar to (3.72) but we can still prove conjugacy results. We still assume that the origin is a hyperbolic fixed point with simple eigenvalues. Hartman's theorem implies the existence of C^1 diffeomorphism h , with $Dh(0) = I$, defined in a neighborhood of the origin N , such that

$$U^t h(x) = e^{Jt} h(x), \quad x \in N, \quad t \in I(x), \quad (3.84)$$

J is the Jacobian and $I(x) = (a(x), b(x))$ is an interval depending on the initial point x . One can extend $I(x)$ to $I(x) = (a(x), \infty)$, if the fixed point is stable, and to $(-\infty, b(x))$ if it is unstable. For saddles, $I(x)$ remains bounded. Further if we use $k = V^{-1}h$ as the diffeomorphism, where V is the matrix containing the eigenvectors of J , then (3.84) implies

$$k \circ \phi(x, t) = e^{\Lambda t} k(x), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (3.85)$$

which shows that the conjugacy k has Koopman eigenfunctions as components, similar to (3.68). If the matrix is not diagonalizable then one speaks of generalized eigenfunctions (see Section 3.1). The conjugacy can be extended to the whole basin of attraction B , provided that the fixed point is stable, as we show next.

Proposition 3.3.3. *If the fixed point is stable, then there exists a C^1 diffeomorphism $h : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ with $Dh(0) = I$ between the nonlinear and the linearized system.*

Proof. By the inverse Lyapunov theorem, there exists a Lyapunov function V and a neighborhood of the origin U such that $\dot{V}(x) < 0$, $x \in U$ and $V(x) > 0$, $x \in U$, but not at the origin. The neighborhood U can be chosen small enough to be contained in the region N , in which Hartman's theorem provides a conjugacy h . Let Σ be a level set of V in U , homeomorphic to a sphere. Then, for any $x \in B$ there exist a unique point $x_0(x) \in \Sigma$ and a unique time $t(x) \in \mathbb{R}$ such that $\phi(x, t(x)) = x_0(x) \in \Sigma$. Now define,

$$\tilde{h}(x) = e^{-At(x)} h(\phi(x, t(x))), \quad x \in B. \quad (3.86)$$

It follows that,

$$U^\tau \tilde{h}(x) = e^{-A(t(x)-\tau)} h(\phi(\phi(x, \tau), t(x) - \tau)) = e^{A\tau} e^{-At(x)} h(x, t(x)) = e^{A\tau} \tilde{h}(x). \quad (3.87)$$

Since the time $t(x)$ for x to cross Σ is the same as that of $y = \tilde{h}(x)$ to cross $h(\Sigma)$, the invertibility of $\tilde{h}(x)$ is proven. Moreover, all functions in the definition of \tilde{h} depend in C^1 manner on their arguments and the proof is complete. \square

Correspondingly, the Koopman eigenfunctions $k = V^{-1}h$ are extended to the whole basin of attraction B . The case of unstable fixed points is treated analogously through time reversing. Although we are studying continuous time systems, in the next section of limit cycle systems, we will need the discrete version of the above Proposition, which we state and prove below.

Proposition 3.3.4. *Consider a discrete time system $x_{n+1} = f(x_n)$ where f is a C^2 diffeomorphism. If the origin is a hyperbolic stable equilibrium with basin of attraction B then there exists a C^1 conjugacy $h : C^1(B) \rightarrow \mathbb{R}^n$ to the linearized system.*

Proof. By the inverse Lyapunov theorem, there exists a neighborhood U of the origin and a function V such that $V(x_{n+1}) < V(x_n)$ and $V(x) > 0$ in U (but not at the origin). The region U is chosen to lie within N in which Hartman's theorem provide a conjugacy h . Let Σ be a level set of V in U ,

homeomorphic to a sphere, and $\Sigma' = f(\Sigma)$. Then for any $x \in B$, there exists a unique $n(x) \in \mathbb{Z}$ and $x_0(x)$ in the region between Σ and Σ' such that $f^{n(x)}(x) = x_0(x)$. If A is the Jacobian matrix of f and

$$\tilde{h}(x) = A^{-n(x)} h \left(f^{n(x)}(x) \right), \quad (3.88)$$

then it is clear that $U^m h(x) = A^m h(x)$ since $n(f^m(x)) = n(x) - m$. With similar arguments as in the case of continuous time, the invertibility of \tilde{h} follows. The only problem in the above construction is that $n(x)$ is C^1 in the region between $f^k(\Sigma)$ and $f^{k+1}(\Sigma)$ but not on the boundaries. This can be solved by considering a different level set Σ' such that each $f(\Sigma^k)$ lies within $f^m(\Sigma')$ and $f^m(\Sigma')$. Since the map $\tilde{h}(x)$ remains the same, the proof is complete. \square

Returning to the continuous time case, if the (hyperbolic) equilibrium is a saddle, then the above construction does not hold since one cannot find a Lyapunov function V . Nevertheless, the extension to the whole basin of attraction can be achieved through open eigenfunctions,

$$s(x) = e^{-\lambda t(x)} k(\phi(x, t(x))), \quad x \in P. \quad (3.89)$$

Thus, the global stable and unstable manifolds in P , $W_P^{s(u)} = P \cap W^{s(u)}$, where

$$W^u = \bigcup_{t \geq 0} \phi(W_{loc}^u(0), t), \quad W^s = \bigcup_{t \leq 0} \phi(W_{loc}^s(0), t), \quad (3.90)$$

are clearly equivalent to those defined in (3.46), where s_i are the open eigenfunctions defined previously.

The case of a nonhyperbolic fixed point possessing a center manifold can be treated in a similar manner. We assume u unstable eigenvalues $(\lambda_1, \dots, \lambda_u)$, c neutrally stable $(\lambda_{u+1}, \dots, \lambda_{u+c})$ and s stable $(\lambda_{u+c+1}, \dots, \lambda_{u+c+s})$ of the Jacobian matrix at the origin (all simple). Based on Palmer's theorem ² [33], if we write the Jacobian as two blocks A, B with each capturing the non-zero real part eigenvalues and the zero-part, respectively, then (3.1) is C^0 conjugate (that is there exists a homeomorphism that maps orbits) to the system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + r(x) \\ \dot{y} &= Ay. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Then in a similar manner as (3.85), we prove that the Koopman operator possesses u unstable eigenfunctions s_1, \dots, s_u and s stable s_{u+1}, \dots, s_{u+s} respectively. The zeros level sets are backward and forward invariant by Corollary 3.2.3.1 and as defined on (3.46), constitute the center-unstable and center stable, respectively, manifolds, since the dynamics on them is given by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + r(x) \\ \dot{z}_{u(s)} &= \text{diag} \left(\lambda_{(1)(u+c+1)}, \dots, \lambda_{(u)(u+c+s)} \right) z_{u(s)}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

In the same manner the dynamics on the center manifold as defined in (3.46), is given by

$$\dot{x} = Bx + r(x), \quad (3.93)$$

as expected for the center manifold. The modifications for the case of non-simple eigenvalues should be apparent through the notion of generalized eigenfunctions.

Hence, using the Koopman operator framework we have shown that under nonresonance conditions for a fixed point, the time evolution of any observable can be decomposed into a infinite summation of Koopman eigenfunctions associated with the eigenvalues of the linearized field and derived its Laplace transform. We have also, extended globally the conjugacy to the linearized system and generalized the definitions of stable, unstable and center manifolds.

²It demands bounded nonlinear terms in F .

3.3.2 Limit Cycle Systems

We assume that (3.1) admits a hyperbolic, stable limit cycle Γ with basin of attraction B and frequency ω . Let γ be a parametrization of the limit cycle, equivalently a periodic solution of (3.1) and Φ the fundamental solution matrix of

$$\dot{X} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\gamma} X = A(t)X, \quad X(0) = I_n. \quad (3.94)$$

Floquet theory suggests that $\Phi(t, 0) = U(t)e^{Dt}U^{-1}(0)$, where the matrix U is $T = 2\pi/\omega$ periodic, $e^{DT} = \text{diag}(1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ and $1 > |\mu_1| > \dots > |\mu_{n-1}|$ are the Floquet multipliers. The fact that $|\mu_i| < 1$, follows from stability and hyperbolicity assumptions. We also define the Floquet exponents by $\lambda_i = 2\pi \log(\mu_i)/\omega$ which quantify the attractiveness of the limit cycle in the same way that the eigenvalues of the Jacobian do in the case of an equilibrium. We note that $1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ are the eigenvalues of the monodromy matrix $\Phi(2\pi/\omega, 0)$.

We begin with the proof of a fundamental result [36] that allows the global linearization of the nonlinear system in the same way as in the case of equilibria.

Theorem 3.3.5. *In the basin of attraction B , system (3.1) is conjugate through a C^1 diffeomorphism to the system*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(\theta)y, \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \theta \in S^1 \quad (3.95)$$

where A is 2π periodic.

Proof. First rescale time so that $\omega = 1$. In a neighborhood N of Γ , there exist functions $s(x)$ and $z(x)$ such that

$$\dot{s} = 1, \quad \dot{z} = g(z, s), \quad (3.96)$$

where $s(0) = s(2\pi)$, g is 2π periodic in s and $z = 0$ on Γ . The above system can also be seen as a non-autonomous field identifying $t = s$. We use interchangeably the two considerations. Let $A(t) = Dg|_{z=0}$. First we prove the conjugacy of (3.96) to $\dot{y} = A(t)y$ in the basin of attraction Ω of $z = 0$ in (3.96). By Floquet theory,

$$y(t) = P(t)e^{Dt}P^{-1}(0)y_0 = \tilde{P}(t)e^{Bt}y_0, \quad \tilde{P}(0) = I. \quad (3.97)$$

Considering a Poincaré section at $t = 2k\pi$, we get the discrete systems

$$y_{n+1} = e^{2\pi B}y_n, \quad z_{n+1} = g(z_n). \quad (3.98)$$

The above systems are conjugate (through h) in the whole basin of attraction Ω as a result of the Proposition regarding the linearization of discrete time systems. Now let $\Phi(z, t, t_0)$ denote the flow of (3.96) starting from the point z at the time t_0 (since it is non-autonomous the starting time matters). Let $z \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, $z_0 = \Phi(z, -s, s) \in \{(z, 0) | z \in \Omega\}$ and define,

$$\tilde{h}(z, s) = \left(\tilde{P}(s)e^{Bs}e^{-2\pi mB}h(g^m(z_0)), s \right) \quad (3.99)$$

Since h is a conjugacy between the two discrete systems, the form of \tilde{h} simplifies to,

$$\tilde{h}(z, s) = \left(P(s)e^{Bs}h(z_0), s \right), \quad (3.100)$$

which clearly evolves as (y, t) with $\dot{y} = A(t)y$. The invertibility is obvious and hence the conjugacy inside Ω is proven.

Thus, (3.95) is conjugate to $\dot{y} = A(t)y$ inside N . To extend the conjugacy inside the whole basin of attraction B , consider the cross-section $\Sigma = \{z \in N | s(z) = 0\}$ and define $t(x)$ as the minimum $r \in \mathbb{R}$ such that $\phi(x, r) \in \Sigma$ (this time obviously exists due to the stability of Γ , is negative if the point x is after the first intersection with Σ and positive otherwise). Then, for $x \in B$ we define

$$H(x) = (y, t') = \left(\tilde{P}(-t(x))e^{-Bt(x)}\tilde{h}(\phi(x, t(x))), -t(x) \right). \quad (3.101)$$

Since $t(\phi(x, \tau)) = t(x) - \tau$, it is clear that $H(x)$ satisfies

$$\dot{y} = A(t')y, \quad \dot{t}' = 1. \quad (3.102)$$

The invertibility follows from the fact that the time in the (y, t') domain is the same as $t(x)$ and since all functions depend in a C^1 manner on their arguments, the proof is complete. \square

The above proposition practically decouples the evolution to on- and off- attractor variables. Let $g(y, \theta)$ be a vector valued function, analytic in y (off the attractor variables) and L^2 in θ (on the attractor variables). We want to derive an expansion in terms of Koopman eigenfunctions. The eigenfunctions associated with the Floquet exponents are

$$z(y, \theta) = U^{-1}(\theta)y \quad (3.103)$$

where the matrix $U \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ is the periodic Floquet matrix of the y coordinates in (3.95). To see that, one should only note that

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}(t)y) = D(U^{-1}(t)y). \quad (3.104)$$

We remark that U^{-1} is the matrix whose rows are the left Floquet eigenvectors, so that $z_i(y, \theta) = \langle y, w_i \rangle$ (notice the similarity with the case of equilibria).

Hence, in the same manner as in (3.70) Taylor expanding we have,

$$\begin{aligned} g(y, \theta) &= \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}} b_{m_1, \dots, m_{n-1}}(\theta) y_1^{m_1} \dots y_{n-1}^{m_{n-1}} \\ &= \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}} b_{m_1, \dots, m_{n-1}}(\theta) \left(P^{-1}(\theta)z\right)_1^{m_1} \dots \left(P^{-1}(\theta)z\right)_{n-1}^{m_{n-1}} \\ &= \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{m_1, \dots, m_{n-1}}(\theta) z_1^{m_1}(y, \theta) \dots z_{n-1}^{m_{n-1}}(y, \theta) \\ &= \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}, k \in \mathbb{Z}} a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k} z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

where $a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k}$ are the Koopman modes. We note that

$$e_i^T \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{y=0} \sim w_i, \quad (3.106)$$

which means that near the limit cycle, the expansion can be approximated by the linearized system. The expansion in (3.105) is similar to the one in (3.70) and shows how an observable analytic in y and L^2 in θ is expanded in terms of Koopman eigenfunctions. We note that g is a function of the transformed coordinates (y, θ) . They are diffeomorphically connected with the initial coordinates x through $(y, \theta) = (h_1(x), h_2(x))$, so that $s_i(x) = z_i \circ h_1, s_n = e^{ih_2}$ are the Koopman eigenfunctions associated with the Floquet exponents and with $i\omega$, respectively, on the initial coordinates. The eigenvalues (Floquet exponents and $i\omega$) remain unchanged. From (3.105) we have the time evolution of the observable g as,

$$U^t g(y, \theta) = \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}, k \in \mathbb{Z}} e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_{n-1} \lambda_{n-1} + i\omega k)t} a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k} z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}. \quad (3.107)$$

If we have a function $G(x)$ expressed in the initial coordinates, we have the expansion

$$\begin{aligned} U^t G(x) &= U^t g(h_1(x), h_2(x)) \\ &= \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}, k \in \mathbb{Z}} e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_{n-1} \lambda_{n-1} + i\omega k)t} a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k} s_1^{m_1}(x) \dots s_{n-1}^{m_{n-1}}(x) s_n^k(x). \end{aligned} \quad (3.108)$$

To summarize, in the case of limit cycle systems we have the eigenfunctions $s_i = z_i \circ h$ associated with λ_i and $s_n = e^{ih_2(x)}$ associated with $i\omega$. In (3.107), for $m_i = 0$, we have the steady state solution corresponding to the Fourier expansion of the limit cycle verifying that the operator when restricted on the attractor is unitary. Generally an eigenvalue of the Koopman operator has the form $\lambda = m_1\lambda_1 + \dots + m_{n-1}\lambda_{n-1} + ik\omega$ and associated eigenfunction

$$z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}, s_1^{m_1} \dots s_{n-1}^{m_{n-1}} s_n^k. \quad (3.109)$$

Now we are interested in constructing the functional space of functions admitting an expansion of the form (3.105) and which is closed under the action of the operator. First we note that on the attractor \mathcal{A} (limit cycle) the Koopman operator $U^t|_{\mathcal{A}}$ is unitary and hence eigenfunctions on \mathcal{A} are mutually orthogonal. Next we define the space of functions $g(y, \theta)$ analytic in y and L^2 in θ such that

$$\|g\|^2 = \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \int_{S^1} |g(z, \theta)|^2 e^{-|z|^2} d\theta dz < \infty, \quad (3.110)$$

and equip it with the inner product,

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \frac{1}{\pi^{n-1}} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \int_{S^1} g_1 g_2^c e^{-|z|^2} d\theta dz, \quad (3.111)$$

where with S^1 we denote the circle of length 2π . The similarity with the case of equilibria should be obvious. To prove that it is closed with respect to the action of U^t ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \int_{S^1} |f \circ \phi(x, t)|^2 e^{-|z|^2} dz d\theta &= \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \int_{S^1} |f(z, \theta)|^2 e^{-|z(\phi(x, -t))|^2} d(z \circ \phi(x, -t)) d\theta \\ &= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \int_{S^1} |f(z, \theta)|^2 e^{-(e^{-2\lambda_1 t}|z_1|^2 + \dots + e^{-2\lambda_{n-1} t}|z_{n-1}|^2)} dz d\theta \\ &< \infty \end{aligned} \quad (3.112)$$

We note that the above construction is equivalent to defining the space of all g (analytic in z and L^2 in θ) by

$$g(y, \theta) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}} f_{k_1, \dots, k_{n-1}}(\theta) z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}, f_{k_1, \dots, k_{n-1}}(\theta) \in L^2(\theta), \quad (3.113)$$

with inner product

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}} k_1! \dots k_{n-1}! \int_{S^1} f_{k_1, \dots, k_{n-1}}^1(\theta) f_{k_1, \dots, k_{n-1}}^2(\theta) d\theta, \quad (3.114)$$

and with norm

$$\|g\|^2 = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}} k_1! \dots k_{n-1}! \int_{S^1} |f_{k_1, \dots, k_{n-1}}(\theta)|^2 d\theta. \quad (3.115)$$

Using (3.81) and (3.82) it follows that (3.110) and (3.111) are equivalent with (3.114) and (3.115), respectively. In this case, functions of the form

$$\frac{1}{2\pi} \frac{z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}}}{(m_1! \dots m_{n-1}!)^{1/2}} e^{im_n\theta}, (z_1, \dots, z_{n-1}, \theta) \in \mathbb{C}^{n-1} \times S^1, \quad (3.116)$$

form an orthonormal basis of the MFS. To show that the space is a kernel Hilbert space, one only needs to notice that the kernel is given by

$$K(z, w) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}} \frac{(z_1 w_1)^{k_1} \dots (z_{n-1} w_{n-1})^{k_{n-1}}}{k_1! \dots k_{n-1}!}. \quad (3.117)$$

We close the discussion of the functional space with an interesting relation, namely one has

$$\langle K(w, z), g(w, \theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}} z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}} \int_{S^1} f_{k_1, \dots, k_{n-1}}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} g(z, \theta) d\theta, \quad (3.118)$$

which means that the inner product of a kernel and a function in the space, yields the average value of the function at that point with respect to the angle variable. For this reason the space is often called Average Kernel Hilbert Space [48]. We note again that in this functional space, expansions of the form (3.105) are valid inside the whole basin of attraction B . The construction of the space even though it seems restrictive, will contain all observables used in the following.

Having constructed the space of observables that admit an expansion in terms of Koopman eigenfunctions for limit cycle systems, we wish to find the Laplace transform of expansions of the (3.105). The space is Hilbert and $\|U^t f\| \leq \|f\|$ since $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ (simple inspection of (3.107) and (3.115)), hence the summations in (3.107) are strongly convergent and U^t is strongly continuous. Thus the assumptions on (3.50) are satisfied and the Laplace transform exists. We prove the following (the proof of which is similar to the omitted proof of (3.83))

Theorem 3.3.6. *Let g be an observable in the MFS. Then action of resolvent operator on g , or equivalently the Laplace transform of $U^t g$, is given by*

$$R(s, L)g(x_0) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}} \frac{a_{k_1, \dots, k_{n-1}, m} z_1^{k_1}(x_0) \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}(x_0) e^{ik\theta(x_0)}}{s - (k_1 \lambda_1 + \dots + k_{n-1} \lambda_{n-1} + im\omega)}, \quad (3.119)$$

with ROC $\{s \in \mathbb{C} | \text{Re}(s) > 0\}$.

Proof. For some N, M we have

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k_1 + \dots + k_{n-1} \leq N, |m| \leq M} a_{k_1, \dots, k_{n-1}, m} z_1^{k_1}(x_0) \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}(x_0) e^{im\theta(x_0)} e^{(k_1 \lambda_1 + \dots + k_{n-1} \lambda_{n-1} + im\omega - s)t} \right\|^2 \\ & \leq \sum_{k_1 + \dots + k_{n-1} \leq N, |m| \leq M} e^{2(k_1 \lambda_1 + \dots + k_{n-1} \lambda_{n-1} - s)t} |a_{k_1, \dots, k_{n-1}, m}|^2 k_1! \dots k_{n-1}! \\ & \leq e^{-2\text{Re}(s)t} \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}} |a_{k_1, \dots, k_{n-1}, m}|^2 k_1! \dots k_{n-1}! = e^{-\text{Re}(s)t} \|g\|^2. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Since, the right hand side is integrable for $\text{Re}(s) > 0$, the dominated convergence theorem implies that

$$\begin{aligned} R(s, L)g(x_0) &= \int_0^\infty \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}, k \in \mathbb{Z}} e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_{n-1} \lambda_{n-1} - s + ik\omega)t} a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k} z_1^{m_1}(x_0) \dots z_{n-1}^{m_{n-1}}(x_0) e^{ik\theta} ds \\ &= \sum_{\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \in \mathbb{N}^{n-1}, k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty e^{(m_1 \lambda_1 + \dots + m_{n-1} \lambda_{n-1} - s + ik\omega)t} a_{m_1, \dots, m_{n-1}, k} z_1^{m_1}(x_0) \dots z_{n-1}^{m_{n-1}}(x_0) e^{ik\theta} ds \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{m_1, \dots, m_{n-1}, m} z_1^{m_1}(x_0) \dots z_{n-1}^{m_{n-1}}(x_0) e^{ik\theta(x_0)}}{s - (m_1 \lambda_1 + \dots + m_{n-1} \lambda_{n-1} + ik\omega)}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

□

The Laplace transform corresponds completely to the expansion in (3.107) and is constituted of the Fourier expansion of the steady state solution evolving on the limit cycle (first summation, $k_i = 0$) and of the contribution of the nonlinearity in F (infinite second term). In this way we have a complete representation of the time evolution of any observable in the defined MFS. Further we have a one to one correspondence between the Laplace domain expansion (3.119) and the time domain expansion (3.107).

If we assume that the eigenvalues λ_j are isolated, one could use the Residue Theorem to obtain,

$$a_{k_1, \dots, k_{n-1}, m} = \text{Res} (R(s, L)g(x_0)) (\lambda_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_j} R(s, L)g(x_0) ds, \quad (3.122)$$

where γ_j is a closed curve surrounding λ_j , from which the expansion in (3.107) follows immediately. This would imply that the Laplace transform given in (3.119) would be a meromorphic function, similar to the linear case. However we have shown that in appropriate functional spaces, the expansion (3.107) holds irrespectively of whether the eigenvalues are isolated, in which case the Laplace transform in (3.119) would not be meromorphic. This observation is obviously valid for the case of equilibria as well.

The discussion on the definition of stable and unstable manifolds of equilibria is naturally extended in the case of hyperbolic limit cycle systems. Namely, we define the stable (unstable) manifold as the joint zero level sets of unstable (stable) Koopman eigenfunctions associated with the unstable (stable) Floquet exponents. The definitions in (3.46) apply immediately. Similarly, one can treat the case of non-hyperbolic limit cycles possessing purely imaginary Floquet exponents. Definitions of (3.46) are also applicable in that case.

We close with one important observation. To derive the spectral expansion on systems with an equilibrium a nonresonance condition was imposed. In the case of limit cycle systems no such condition is needed.

3.3.3 Quasiperiodic Attractors

The analysis of quasiperiodic attractors serves as a natural extension of the ideas we have discussed thus far. We will observe that all the properties we derived earlier are applicable, albeit modified, in an analogous manner in this case. In particular, the connection with the limit cycle case should become obvious.

Suppose that (3.1) possesses a quasiperiodic attractor, namely an m dimensional attracting, invariant torus. On the torus the dynamics is conjugate to

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \theta \in S^m, \quad \omega \in \mathbb{R}^m. \quad (3.123)$$

Next we assume KAM conditions for the incommensurate frequencies ω_i [60],

$$|k \cdot \omega| \geq \gamma/|k|^\tau, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad (3.124)$$

for some $\gamma, \tau > 0$, where $|k| = \max_i |k_i|$. We remark that the KAM condition is generic in the sense that frequencies satisfying this are of measure 1 (full measure). Further, we suppose that the linearization matrix $A(\theta)$ of the nonlinear function F on an orbit belonging on the torus has a full spectrum, which means that there are m isolated $\lambda \in \mathbb{C}$ for which the system

$$\dot{z} = (A(\theta + \omega t) - \lambda I)z, \quad (3.125)$$

does not have an exponential dichotomy. Then, the fundamental matrix of the linearized system can be decomposed in a quasi periodic matrix U and a diagonal matrix D having $n - m$ Floquet multipliers with $|\mu_i| < 1$. We can use a conjugacy to transform the system to a similar form with (3.95), but with m angle variables and $n - m$ dimensional y vector that captures the off-attractor evolution,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(\theta)y \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned}, \quad y \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad \theta \in S^m. \quad (3.126)$$

The conjugacy is valid inside the whole basin of attraction using arguments identical to the limit cycle case. Similar to (3.103), we find the eigenfunctions corresponding to the $n - m$ Floquet exponents. The other m eigenfunctions have the form $e^{i\theta_i}$, so that the general form of the eigenfunction is, similar to (3.109),

$$z_1^{k_1} \dots z_{n-m}^{k_{n-m}} e^{i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)}, \quad (3.127)$$

associated with eigenvalue $k_1\lambda_1 + \dots + k_{n-m}\lambda_{n-m} + i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)$. The $k_i = 0$ eigenvalues correspond to the on attractor spectrum verifying that the restriction of the operator on the attractor is unitary. Under these assumptions, expansions of the form (3.105) are valid for observables analytic in off the attractor variables (y) and L^2 in on the attractor (θ). Namely for such an observable g ,

$$g(y, \theta) = \sum_{\{k_1, \dots, k_{n-m}\} \in \mathbb{N}^{n-m}, \{\ell_1, \dots, \ell_m\} \in \mathbb{Z}^m} a_{k_1, \dots, k_{n-m}, \ell_1, \dots, \ell_m} z_1^{k_1} \dots z_{n-m}^{k_{n-m}} e^{i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)}, \quad (3.128)$$

The construction of the Hilbert space is exactly similar to the one in the case of limit cycle systems, with the appropriate modification that the angle variables $\theta \in S^m$ instead of S^1 and that the $z \in \mathbb{C}^{n-m}$. In the same manner we prove that the time evolution of observables in this space admit a Laplace transform of the form (3.119), but with $n - m$ Floquet exponents λ_i and m frequencies ω_i . Namely, we have

$$U^t g(y, \theta) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-m} \in \mathbb{N}, \ell_1, \dots, \ell_m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-m} + i(\omega_1 + \dots + \omega_{n-m})t)} a_{k_1, \dots, k_{n-m}, \ell_1, \dots, \ell_m} z_1^{k_1} \dots z_{n-m}^{k_{n-m}} e^{i(\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m)} \quad (3.129)$$

and

$$R(s, L)g(x_0) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}, \ell_1, \dots, \ell_m \in \mathbb{Z}} \frac{a_{k_1, \dots, k_{n-m}, \ell_1, \dots, \ell_m} z_1^{k_1}(x_0) \dots z_{n-m}^{k_{n-m}}(x_0) e^{i(\ell_1\theta_1(x_0) + \dots + \ell_m\theta_m(x_0))}}{s - (k_1\lambda_1 + \dots + k_{n-m}\lambda_{n-m} + i(\ell_1\omega_1 + \dots + \ell_m\omega_m))}. \quad (3.130)$$

The $m_i = 0$ part will now correspond to the multi-dimensional Fourier expansion of an orbit on the torus (on attractor evolution) and the second part to the transient evolution (off attractor) towards the attractor. It should also be noted that, like in the case of a stable equilibrium, a nonresonant condition (of KAM type) is needed so that spectral expansions are valid.

In the previous section of limit cycle systems, we mentioned that if the eigenvalues are not isolated, then the Laplace transform is not meromorphic and the Residue Theorem would not apply. The invariant tori constitute naturally such a case, since under the iccomensurate condition on the frequencies, $\ell_1\theta_1 + \dots + \ell_m\theta_m$ can become arbitrarily close to zero, although the KAM condition guarantees the existence of the spectral expansion.

We close the section of Spectral Expansion with a comment on the spectrum of the operator. In all three cases considered (equilibria, limit cycles, tori), the spectrum of the operator coincides with its point spectrum, thus the continuous and residual spectra are empty. If the attractor was in general ergodic and we are interested in the spectrum of the operator when restricted on it, then the on-the-attractor spectrum would have a continuous component as well. This observation will prove useful in the case of synchronization later on.

3.3.4 More General Attractors

Even though, as stated in the beginning, we are interested in the cases of systems possessing equilibria, limit cycles or invariant tori as attractors, we investigate in this section how the previous results can be extended to general dissipative systems possessing a Milnor attractor. In this case we will see that the continuous component of the spectrum will become important.

Assume that (3.1) admits a global, compact attractor A , with (compact)³ basin of attraction B , on which the dynamics is ergodic. This means that almost all points on A are accessible and an invariant measure μ exists on A . An example would be if F is divergence free on a bounded domain. When U^t is restricted on A , it is unitary [54] on the space of functions $L^2(A)$, with respect to μ , and these functions can be thought of as being defined on the whole B and we denote their space by H_A . This property should be expected from the analysis of both the periodic and quasiperiodic systems (we had imposed the condition that observables were L^2 in the angle variables to derive the spectral expansions). Similar to (3.95) and (3.126), if A is a normally hyperbolic m dimensional manifold and

³If it is not compact one just consider a compact subset of B .

certain spectral conditions [53] hold, (3.1) is C^r conjugate in a neighborhood of A to

$$\begin{aligned}\dot{y} &= A(u)y \\ \dot{u} &= \omega(u),\end{aligned}\tag{3.131}$$

where the u coordinates can be considered as on-attractor and y as off-attractor (c.f. with the case of periodic limit cycle systems). The coordinates (u, y) can be extended to the whole basin of attraction B using a construction similar to the cases of equilibria and limit cycles. Now let H_B be the Hilbert space of functions orthogonal to those in H_A ,

$$\int_B f \phi d\mu = 0 \quad \forall \phi \in H_A.\tag{3.132}$$

The above requirement is essentially equivalent to $f \equiv 0$ on A [48]. It is clear that H_B is invariant under U^t . Now let $H'_B = H_B \cup 1$, where 1 denotes the constant functions on B , and let $H = H'_B \otimes H_A$ be the tensor product of the two spaces. Then it can be proven [48] that the eigenvalues are given by

$$\sigma(U^t) = \text{cl} \left[\bigcup_{a \in \sigma(U^t|_{H_A}), b \in \sigma(U^t|_{H_B})} a + b \right],\tag{3.133}$$

where cl denotes the closure of the set. In particular, if (s_1, \dots, s_n) are principal eigenfunctions associated with negative real part eigenvalues $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ then

$$\sigma(U^t) = \text{cl} \left(\sigma(U^t|_{H_A}) + k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n \right), \quad \{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{N}^n.\tag{3.134}$$

The above result generalizes the analysis of the previously studied attractors that in a natural way: the spectrum of the operator can be decomposed into two components. The first depends on the off-attractor variables and the second one on the on-attractor variables. For example in the limit cycle case, the on-attractor spectrum $\sigma(U^t|_{H_A})$ consists of the eigenfunctions $e^{ik\theta}$ with associated eigenvalues $ik\omega$. The off-attractor spectrum $\sigma(U^t|_{H_B})$ consists of the linear combination of Floquet exponents with the on-attractor frequency, namely the eigenfunctions are given by

$$z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta},\tag{3.135}$$

and the associated eigenvalues are $m_1 \lambda_1 + \dots + m_{n-1} \lambda_{n-1} + ik\omega$. The only difference in the general case is that the on-attractor spectrum $\sigma(U^t|_{H_A})$ can generally contain a continuous component. Before we study this issue in more detail, we want to connect the Reproducing Kernel Hilbert Spaces that we constructed for the particular cases of systems possessing equilibria, limit cycles or invariant tori. We choose as H'_B the RKHS space of all entire functions $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ vanishing on A , such that

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(s_1(z), \dots, s_n(z))|^2 e^{-(|s_1|^2 + \dots + |s_n|^2)} dz < \infty.\tag{3.136}$$

The inner product and the norm can be defined in the usual way. This definition consistent with all previously studied cases. We remark that in the previous constructions of the Hilbert spaces we did not require that the observables vanish on the attractor because we were essentially we defining immediately H instead of H'_B .

Now we are returning to the issue of characterizing in more detail the on-attractor spectrum $\sigma(U^t|_A)$. The Koopman operator can be decomposed as [48],

$$U^t|_A g = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} d[E(\omega)g] = \sum_{j=1}^{\infty} P_j g e^{i\omega_j t} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d[E(\omega)g],\tag{3.137}$$

where E is an operator valued measure and can be separated into two terms. The first term represents the point (atomic) spectrum of the operator and captures the almost periodic motion on the attractor.

The operator P_j are projection operators projecting a function $g \in L^2(A)$ into the eigenfunction $\phi_{i\omega_j}$, namely

$$P_j g = \langle g, \phi_{i\omega_j} \rangle = \phi_{i\omega_j} V_j. \quad (3.138)$$

We note that the eigenvalues $i\omega_j$ are purely imaginary since $U^t|_A$ is unitary and simple by the ergodicity assumption. The second term represents the contribution of the continuous component of the spectrum, where E denotes a continuous spectral measure. In a similar manner as in the previous cases, one can show that the resolvent operator (and correspondingly the Laplace transform of $U^t g(x_0)$ when it exists) acting on an observable g is given by

$$R(s, L_A)g(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(x_0)V_j}{s - i\omega_j} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[E(\omega)g(x_0)]}{s - i\omega}, \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (3.139)$$

which captures the almost periodic and aperiodic motion on the attractor. In view of (3.139), periodic and quasiperiodic attractors follow naturally as particular cases with no contribution of the continuous component of the spectrum, while the (almost) periodic component corresponds to the steady state solutions.

We remark that if one studies the autocorrelation $R(t) = \langle U^t g, g \rangle$ of a L^2 observable g , then for any x ,

$$R(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U^{t+\tau} g(x) U^\tau g(x) d\tau = \int_{\mathbb{R}} e^{it\omega} d\sigma_g(\omega), \quad (3.140)$$

where $\sigma_g(\omega) = \langle E(\omega)g, g \rangle$. Thus, we conclude that $\sigma_g(\omega)$ is the Fourier measure of $R(t)$.

As a simple example of a system possessing continuous spectrum, one can consider the simple pendulum (even though it is Hamiltonian rather than dissipative (3.137) holds) which can be transformed to the action variables (for $I \in [a, b]$)

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0 \\ \dot{\theta} &= I. \end{aligned} \quad (3.141)$$

It is clear that any $g(I, \theta) = g(I)$ is an eigenfunction corresponding to the eigenvalue $\lambda = 0$ and no eigenfunction depending on θ exists. If we consider the generalized function (measure) $g(I, \theta) = e^{i\theta} \delta(I - c)$, then

$$U^t g(I, \theta) = e^{i(I t + \theta)} \delta(I - c) = e^{i c t} g(I, \theta). \quad (3.142)$$

As a result, the system possesses a continuous spectrum and eigenfunctions are replaced by eigenmeasures. For a square integrable observable $f(I, \theta)$,

$$\begin{aligned} f(I, \theta) &= f^*(I) + \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} a_j(I) e^{ij\theta} \Rightarrow \\ U^t f(I, \theta) &= f^*(I) + \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} e^{ij I t} a_j(I) e^{ij\theta}, \end{aligned} \quad (3.143)$$

where $f^*(I)$ is the mean value of f . If we define,

$$dP_\beta (f(I, \theta)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} a_j(I) e^{ij\theta} \delta(jI - \beta) d\beta, \quad P(A) = \int_A dP_\beta, \quad (3.144)$$

it is straightforward to show that P is a projection valued measure. This allows the representation,

$$U^t f(I, \theta) = f^*(I) + \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta t} dP_\beta (f(I, \theta)), \quad (3.145)$$

which is consistent with (3.139). The above example suggests that even though the Koopman operator spectrum is continuous, the spectrum of single trajectories is discrete and peaked at jI .

3.4 Action - Angle Variables for Dissipative Systems: Equilibria

Eigenfunctions of the Koopman operator have enabled us to derive spectral expansions of the evolution of appropriate observables and to generalize the notion of stable, unstable and center manifolds. Now we extend the notion of action-angle variables of Hamiltonian systems in dissipative utilizing the Koopman operator framework. We study separately equilibria and limit cycles although the ideas are the same.

Suppose that (3.1) admits the origin as a stable equilibrium with eigenvalues $0 > \text{Re}(\lambda_1) > \dots > \text{Re}(\lambda_n)$, nonresonance condition holds, denote the basin of attraction by B , and let g be an appropriate observable (see previous section). Then we have the expansion in (3.72) and as $t \rightarrow \infty$ the term $s_1(x)v_1e^{\lambda_1 t}$ dominates the time evolution. Here we must note that if $\text{Im}(\lambda_1) \neq 0$, there is also the conjugate term of $s_1(x)v_1e^{\lambda_1 t}$, so that eventually all points having the same $|s_1(x)|$ converge to the fixed point with the same rate. Hence we define the isostables as

Definition 3.4.1. *Under the previous assumptions, we define the isostable \mathcal{I}_τ as*

$$\mathcal{I}_\tau = \left\{ x \in B \mid a|s_1(x)| = e^{\text{Re}(\lambda_1)\tau} \right\}, \quad (3.146)$$

and $a = 1$ if $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ and $a = 2$ otherwise.

The distinction between the cases of real and complex eigenvalue are due to the presence of a conjugate term in the second case. In each case however, the level sets of $|s_1|$ correspond to the isostables of the system and quantify the rate of convergence toward the fixed point. We note that equivalently isostables could be defined as

$$\mathcal{I}_\tau = \left\{ x \in B \mid \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\text{Re}(\lambda_1)t} \left\| \phi(x, t) - a|s_1(x)| \text{Re} \left(v_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi)} \right) e^{\text{Re}(\lambda_1)(t+\tau)} \right\| = 0 \right\}, \quad (3.147)$$

where $\varphi \in [0, 2\pi)$ for $a = 2$ and $\varphi = 0$ or π otherwise. The distinction is again due to the complex or real nature of λ_1 . The equivalence should be obvious by simple inspection of (3.4.1) and the expansion (3.72). The extension to unstable fixed points follows directly by reversing time.

Now we connect the flow with the isostables. Let $x \in \mathcal{I}_\tau$. Then $|s_1(x)| = e^{a\text{Re}(\lambda_1)t}$ and because s_1 is an eigenfunction associated with λ_1 ,

$$U^t s_1(x) = e^{\lambda_1 t} s_1(x) \implies U^t |s_1(x)| = e^{\text{Re}(\lambda_1)t} |s_1(x)|, \quad (3.148)$$

from which it follows that the flow $\phi(\cdot, T)$ maps the isostables \mathcal{I}_τ to the isostables $\mathcal{I}_{\tau+T}$. Further, let $x \in \mathcal{I}_\tau$ and $x' \in \mathcal{I}_{\tau'}$. Then it is clear that

$$\tau - \tau' = \frac{1}{\text{Re}(\lambda_1)} \log \left| \frac{s_1(x)}{s_1(x')} \right|, \quad (3.149)$$

which gives a relation between the time need for a point to travel from one isostable to the other.

In the same way we can define the isochrons, if the eigenvalue $\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1$ is complex, as the level sets of $\arg(s_1(x))$. They can be equivalently seen as invariant sets under the map $\phi(\cdot, 2\pi/\omega_1)$. Their true importance will be later shown in the case of limit cycle systems. If we set $|s_1| = r_1$ and $\arg(s_1) = \theta_1$, assuming λ_1 is complex, we have

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Hence, we see that the isostables capture the stability property of the equilibrium while the isochrons are related to the phase. In case of planar dynamical system, the isostables and the isochrons provide equivalent action-angle coordinates (3.150) according to the transformation

$$(x, y) \xrightarrow{(|s_1(x,y)|, \arg s_1(x,y))} (r, \theta), \quad (3.151)$$

and we have a one-to-one correspondence between the (x, y) coordinates and the action-angle coordinates in B . If the system's dimension is higher than two (or the eigenvalues are real), then more Koopman eigenfunctions associated with $\lambda_i, i \geq 2$ should be used in order to provide a one-to-one correspondence, in the same manner as for the λ_1 case.

In the vicinity of the fixed point, the eigenfunction s_1 can be approximated by $\langle x, w_1 \rangle$. Hence the isostables are parallel hyperplanes for $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ and cylindrical hypersurfaces with constants axes in the case of complex λ_1 . The same observations are valid for higher order isostables and isochrons respectively.

3.4.1 Numerical Methods

The definition of isostables provides an extension of the action-angle coordinates and are based on the computation of the leading Koopman eigenfunction. Until now all results are rather theoretical and do not provide a way to actually compute it in a given system. In this section we present an efficient computation based on Laplace Averages [49].

Theorem 3.4.1. *Let f be an observable with $f(0) = 0$ ⁴ with $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$ and λ_1 the leading eigenvalue. Consider the Laplace average*

$$f_{\lambda_1}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t} dt. \quad (3.152)$$

Then f_{λ_1} is a nontrivial eigenfunction associated with λ_1 and the level sets $|f_{\lambda_1}|$ correspond to isostables, so that if $x \in \mathcal{I}_\tau$ and $x' \in \mathcal{I}_{\tau'}$, we have

$$|f_{\lambda_1}(x)| = |f_{\lambda_1}(x')| \iff \tau = \tau' \quad (3.153)$$

Proof. We have,

$$\begin{aligned} U^r f_{\lambda_1}(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(x, t+r)) e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= e^{\lambda_1 r} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_r^{T+r} f(\phi(x, t)) e^{-\lambda t} dt \\ &= e^{\lambda_1 r} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(x, t)) e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{T} \int_0^r f(\phi(x, t)) e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{T} \int_T^{T+r} f(\phi(x, t)) e^{-\lambda t} dt \\ &= e^{\lambda_1 r} f_{\lambda_1}(x), \end{aligned} \quad (3.154)$$

which shows that f_{λ_1} is an eigenfunction associated with λ_1 . The non degenerate condition $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$ comes from the fact that in the vicinity of the fixed point $s_1 = \langle x, w_1 \rangle$ and hence $\langle \nabla s_1(0), v_1 \rangle \neq 0$. It can also be seen as imposing the condition that the first Koopman mode in the expansion of f on s_1, λ_1 is nonzero so that the eigenfunction is nontrivial. Then by definition of the isostables the result follows. \square

The necessity of $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$ can be seen alternatively as follows. Assume that we are using (3.147) as the definition of isostables and denote $\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1$. Then for a $x \in \mathcal{I}_\tau$ we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma_1 t} \left| U^t f(x) - e^{\sigma_1(t+\tau)} \left\langle \nabla f(x), \operatorname{Re} \left(v_1 e^{i(\omega_1 t + \theta)} \right) \right\rangle \right| = 0, \quad (3.155)$$

which follows from simple inspection of (3.72). Thus,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U^t f(x) e^{-\lambda_1 t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{\sigma_1(t+\tau) - \lambda_1 t} \left\langle \nabla f(x), \operatorname{Re} \left(v_1 e^{i(\omega_1 t + \theta)} \right) \right\rangle dt. \quad (3.156)$$

⁴It does not necessarily belong to the MFS defined in earlier section, but the expansions are valid in a neighborhood of the cycle

Hence,

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_1}(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{\sigma_1(t+\tau) - \lambda_1 t} \left\langle \nabla f(x), \operatorname{Re} \left(v_1 e^{i(\omega_1 t + \theta)} \right) \right\rangle dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{\sigma_1 \tau - i \omega_1 t} \left\langle \nabla f(x), \frac{v_1 e^{i(\omega_1 t + \theta)} + v_1^c e^{i(\omega_1 t + \theta)}}{2} \right\rangle dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_0^T \langle \nabla f(0), v_1 \rangle e^{\sigma_1 \tau + i \theta} dt + \int_0^T \langle \nabla f(0), v_1 \rangle e^{\sigma_1 \tau - (i \theta + 2 \omega_1 t)} dt \right).
\end{aligned} \tag{3.157}$$

From here it is straightforward to evaluate the integrals and get

$$|f_{\lambda_1}(x)| = \frac{1}{a} |\langle \nabla f(0), v_1 \rangle| e^{\sigma_1 t}, \tag{3.158}$$

and so that it is in agreement with (3.4.1) it is necessary to have $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$. The above proof is due to [45] but it is equivalent to the above.

Higher order Koopman eigenfunctions can be obtained through Laplace averages as,

$$f_{\lambda_k}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(f(\phi(x, t)) - f_{\lambda_1}(x) e^{\lambda_1 t} - \dots - f_{\lambda_{k-1}}(x) e^{\lambda_{k-1} t} \right) e^{-\lambda_k t} dt. \tag{3.159}$$

The case of unstable equilibria is the same with time reversing. Laplace averages (3.152) provide a way of easily numerically computing isostables but require the evaluation of an integral that often introduces numerical errors. Based on (3.155), (3.156), (3.159) we see that in the case of a real eigenvalue,

$$f_{\lambda_1}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\phi(x, t)) e^{-\sigma_1 t}. \tag{3.160}$$

If λ_1 is not real, one can use the map $\phi(\cdot, 2\pi/\omega_1)$, under which the corresponding isochrons are invariant, in order to calculate the isostables [45], but the computation of the integral with sufficient accuracy imposes usually no significant errors.

3.5 Phase - Amplitude Reduction for Limit Cycles

In this section we deal with the problem of defining action-angle coordinates for dissipative systems possessing a stable limit cycle (equivalently phase - amplitude reduction). It will be the most important section for the rest of the treatment. This approach is very common in oscillators since the concepts of phase and isochrons have been proposed in a context independent of the Koopman operator framework [21, 64, 28, 50, 15]. We will connect these ideas with the analysis developed in the previous sections and show how this theory generalizes previous results.

3.5.1 The Classical Approach

Assume that (3.1) admits a stable, hyperbolic limit cycle Γ with basin of attraction B , frequency ω , period $2\pi/\omega$ and Floquet exponents $0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1}$. Let $x_0 \in \Gamma$, then $\phi(x_0, t)$ is parametrization of Γ . It is natural to introduce a phase $\theta \in [0, 2\pi/\omega)$ at its point $x \in \Gamma$ as

$$x = \phi(x_0, \theta/\omega). \tag{3.161}$$

The above definition suggests that x_0 is arbitrarily chosen as the zero phase point and θ grows linearly with time (in S^1). Equivalently, equivalent definitions include some normalization factors in the phase in order to belong in $S^1(0, 1)$ or $S^1(0, 2\pi)$. We consider all these definitions equivalent (as they differ only by a normalization factor) and use them interchangeable in the following. Having defined the phase on the limit cycle, we can extend this definition by attributing a phase at each point in the basin of attraction. The complement of B is usually referred to as the phaseless set [28]. We do this by defining the isochrons (they should not be confused with the isochrons defined for equilibria, we will connect the ideas later on),

Definition 3.5.1. Assume that (3.1) admits a stable, hyperbolic limit cycle with basin of attraction B . We define the isochron \mathcal{I}_θ associated with the phase θ as,

$$\mathcal{I}_\theta = \left\{ x \in B \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(x, t) - \phi(x_0, t + \theta)\| = 0 \right\}. \quad (3.162)$$

The definition suggests that isochrons are the set of points that share the same asymptotic phase, in that they evolve towards the same trajectory on the limit cycle. The phase evolves linearly with for every $x \in B$ and can be thought of as the angle coordinate of the system. It has been proven [64] that isochrons are $n - 1$ dimensional manifolds partitioning the basin of attraction. They are invariant with respect to the map $\phi(\cdot, 2\pi/\omega)$ (compare this with the observation regarding equilibria), which defines a Poincaré map and corresponds to stroboscopically observing the system at times multiples of the period $2\pi/\omega$.

Now, let us assume that (3.1) is perturbed by an external periodic function $g(x, t)$ of period T_1 which is such that the state variable always remains inside B . Then (3.1) becomes

$$\dot{x} = F(x) + g(x, t). \quad (3.163)$$

We want to establish a relation similar to (3.163) for the perturbed phase. Generally, we have

$$\dot{\theta} = \nabla\theta \cdot (F(x) + g(x, t)) = \omega + \nabla\theta \cdot g(x, t), \quad (3.164)$$

since at the absence of forcing the phase evolves linearly. This equation is valid globally in B , but until now we have provided no method for calculation of $\nabla\theta$ (we will return to this later). Moreover this equation depends on x and cannot be solved alone. This makes this equation alone (without an action coordinate) impractical to use. As a frequent simplification, suppose that the perturbation is weak and of order $\mathcal{O}(\epsilon)$, so that we can approximate $\nabla\theta$ by $\nabla\theta|_{\phi(x_0, t)} = Q(\theta)$ and $g(x, t)$ by $g(\phi(x_0, \theta/\omega), t) = g(\theta, t)$. Now, the conjugate first variational equation,

$$\dot{z} = - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\phi(x_0, t)}^T z, \quad (3.165)$$

has a periodic solution (exactly similar to the Floquet theory) which is normal to the isochrons on the limit cycle, so that Q satisfies (3.166) with the normalization $Q(0) \cdot F(x_0) = \omega$, which follows from the fact that $\nabla\theta \cdot F(x) = \omega \forall x \in B$. Hence the restriction of $\nabla\theta$ on the limit cycle can be found through backward integration of (3.166), resulting in

$$\dot{\theta} = \omega + Q(\theta)^T g(\theta, t). \quad (3.166)$$

The equation depends only on θ and can be solved alone. But usually further approximations are used [50, 21, 28] to make the equation autonomous. Let $\theta = \phi + \omega_1 t$, where $\omega_1 = 2\pi/T_1$. Then (3.166) becomes

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + Q(\phi + \omega_1 t)^T g(\phi + \omega_1 t, t), \quad \Delta\omega = \omega - \omega_1. \quad (3.167)$$

As an example, suppose that $|T_1 - T|$ is small⁵. Then (3.168) is usually averaged with the frequency ω_1 , since ϕ evolves slowly to yield,

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} Q^T(\phi + \omega_1 t) g(\phi + \omega_1 t, t) dt = \Delta\omega + h(\phi), \quad (3.168)$$

where h is 2π periodic in ϕ . It is evident that if

$$\min_{\phi \in [0, 2\pi)} |h(\phi)| < |\Delta\omega| < \max_{\phi \in [0, 2\pi)} |h(\phi)|, \quad (3.169)$$

then (3.169) has a stable equilibrium which corresponds to a phase locked state, or a synchronized state. A similar analysis can be used for higher order synchronization $n : m$, in which $|T_1 - mT/n|$ is small,

⁵It corresponds to a 1 : 1 synchronization as will explained in the next

and the averaging will be with respect to the period nT_1 . In the particular case that $h(\phi) = \sin(\phi)$, (3.168) is referred to as the Adler's equation. We will study synchronization dynamics more thoroughly in the next sections. This above analysis for a time periodic forced oscillator is frequently used in the study of electronic oscillators [25, 26, 10, 7, 38].

The above described approach imposes many limitations, namely it assumes that the perturbation is weak, so that we can approximate both $\nabla\theta$ and g by their values on the limit cycle and further averages (3.166) in order to make it autonomous. A more general framework is provided through the use of the PRC and PTC curves that pose on restriction on the strength of the perturbation. Suppose that the perturbation g is of finite duration T_d . Then if it is applied when the oscillator has phase θ (thus the point in the phase space belongs to \mathcal{I}_θ), after time T_d , the point will be moved to a different one having in general a different phase θ_{new} . The new point belongs to $\mathcal{I}_{\theta_{new}}$. Then we define,

$$\text{PRC}(\theta) = \theta_{new} - \theta, \text{PTC}(\theta) = \theta + \text{PRC}(\theta) \bmod 2\pi, \theta \in S^1. \quad (3.170)$$

The definition of PRC (Phase Response Curve) suggests that it gives the phase difference between every point belonging to the limit cycle and its image when, the perturbation vanishes. Since it gives differences, PRC is independent of the choice of the zero-phase point x_0 . In contrast, PTC (Phase Transition Curve) does depend on the choice of x_0 and a different choice results in a PTC differing by an additive factor. It should be noted here that the PTC is taken $\bmod 2\pi$ and by construction $\text{PRC} \in (-\pi, \pi]$ ⁶. Positive (negative) values of the PRC correspond to advances (delays) in the phase. The PRC describes completely the phase of an oscillator subject to finite duration external perturbations⁷. If we can control both the amplitude A of the perturbation and the phase when it is applied, PRC, PTC depend on the amplitude as well and $\text{PRC}(\theta, A = 0) = 0$. The surface defined by $\text{PTC}(A, \theta)$ is referred to as as the Time Crystal of Winfree [64, 28].

The PRCs can be distinguished [28] to Type 1 or Type 0 corresponding to continuous and discontinuous functions, respectively. We can also classify them [28] as Type I and Type II, if the limit cycle is a result of a saddle-node bifurcation in a homoclinic manifold or if it is created through a Hopf bifurcation, respectively. The PRCs admit positive values in the first case, and both positive and negative values in the second one. We note that the PRC and Q functions are related according to

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\partial \text{PRC}(A, \theta)}{\partial A} = Q(\theta), \quad (3.171)$$

and with $T_d \rightarrow 0$. For this reason $Q(\theta)$ is referred to as the Infinitesimal PRC (IPRC).

To make the discussion more precise, consider as an example (we will examine in detail more examples in Chapter 7) the system,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Qy + QGx(1 - x^2) + AQGx(1 - x^2)g(t) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q, \end{aligned} \quad (3.172)$$

which we will study in greater detail in the following, with $Q = 3$, $G = 0.5$. Fig. 3.1 shows the PRC and PTC curves calculated with the perturbation $g(t)$ corresponding to a rectangular pulse of amplitude 1 and duration equal to $T/10$. The isochrons of the (autonomous) system are shown in Fig. 3.2 computed with (3.186) that will be presented in the following.

3.5.2 Connection with the Koopman eigenfunctions

In case of limit cycle systems, eigenfunctions of the Koopman operator are given by (3.109),

$$z_1^{m_1} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}} e^{ik\theta}, \quad (3.173)$$

with associated eigenvalue $m_1\lambda_1 + \dots + m_{n-1}\lambda_{n-1} + ik\omega$. The restriction of the operator on the limit cycle has $e^{ik\theta}$ as eigenfunctions. By definition

$$U^t(e^{i\theta}) = e^{i\omega t} e^{i\theta}, \quad (3.174)$$

⁶Since two points cannot differ by a phase greater than half of the period, if they do we can always map this phase difference to $(-\pi, \pi]$.

⁷Provided that the final point will not belong to the phaseless set.

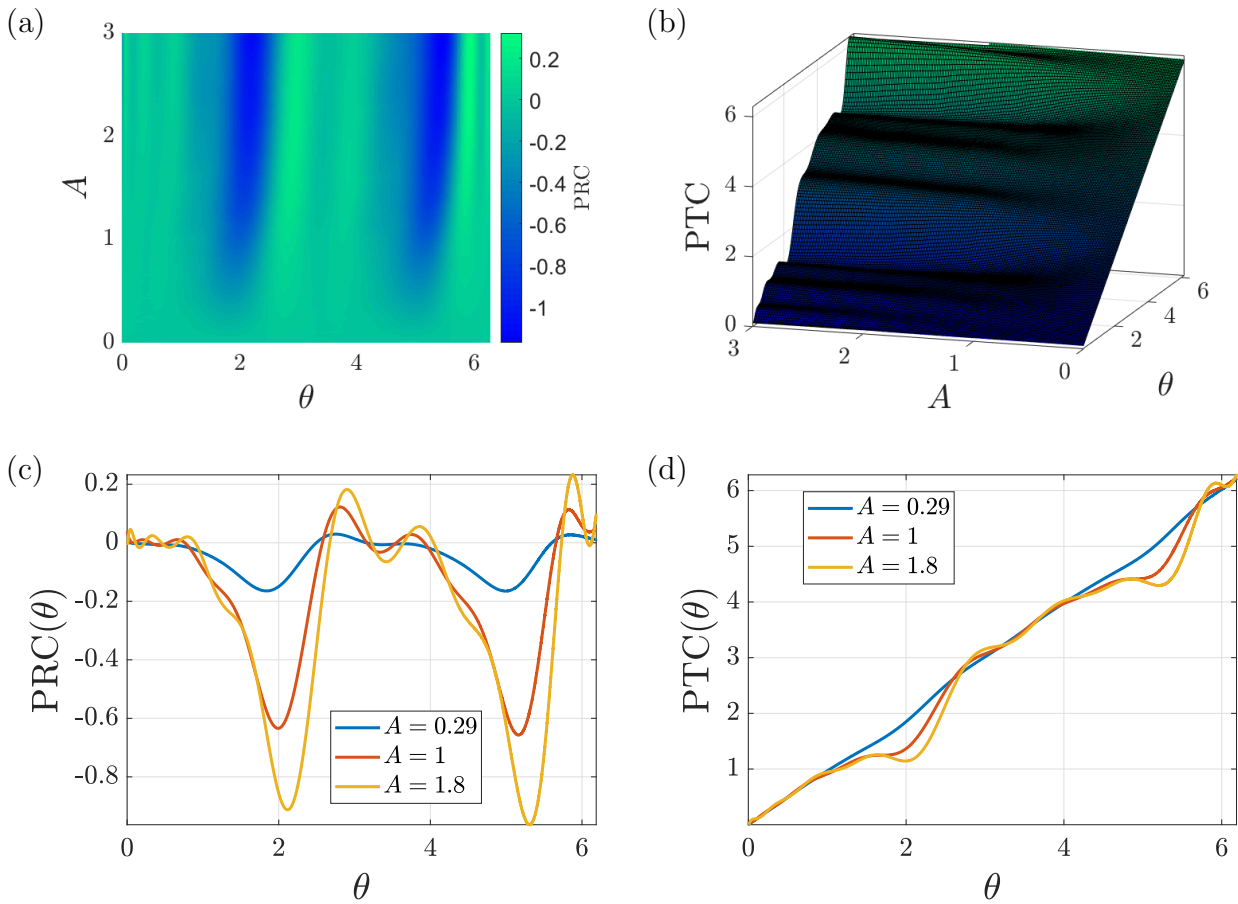


Figure 3.1: Top: (a) PRC and (b) PTC corresponding to (3.172) parameter values $Q = 3$, $G = 0.5$. Bottom: (c) PRC and (d) PTC for specific amplitude values.

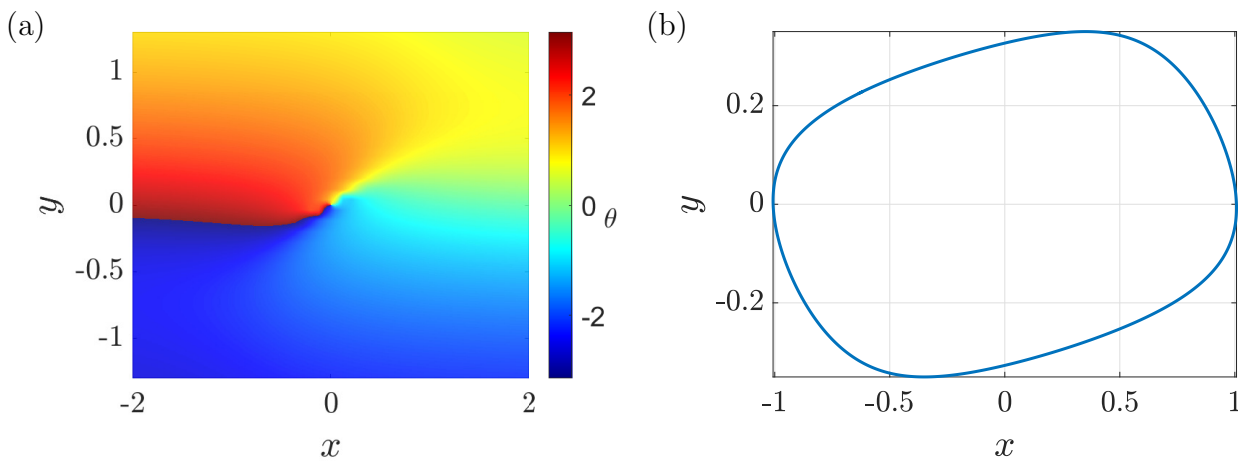


Figure 3.2: (a) Isochrons corresponding to (3.172) computed according to (3.186). (b) The limit cycle. Parameter values $Q = 3$, $G = 0.5$

and hence

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (3.175)$$

and this relation holds in the whole basin of attraction. From (3.107) for $g \equiv \text{id}$, it follows that if we define isochrons as the levels sets of the argument of the eigenfunction associated with the eigenvalue $i\omega$, we have an equivalent definition with (3.162) (since the eigenfunctions associated with the Floquet exponents vanish at the steady state). This observation connects the well known property of phase with the Koopman operator spectrum and enables the computation of the PRC as,

$$\text{PRC}(\theta) = \theta(x_{\text{new}}) - \theta, \quad \theta(x) = \arg(f_\omega(x)), \quad (3.176)$$

and correspondingly for the PTC.

At this point we want to make a general remark and show that the notion of isochrons can be viewed in a more general context. Suppose that (3.1) admits a stable Milnor attractor, with basin of attraction B , in a neighborhood of which, a conjugacy to the form (3.131) exists (see previous subsections). Further suppose that $U^t|_A$ admits m smooth eigenfunctions $s_i(u(x))$ (corresponding to eigenvalues $i\omega_i$). Then we can define the generalized isochrons as

$$\mathcal{I}_{s_1, \dots, s_m} = \left\{ x \in B \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(x, t) - \phi(s(x), t)\| = 0 \right\}, \quad (3.177)$$

which corresponds to the joint level sets of the arguments of s_i . We also define the isochrons associated with only the i -th angle, by letting the remaining angle variable to be free. For the particular case of periodic systems, the definition is consistent (only one eigenfunction s_1 exists), while the case of two-dimensional tori suggest the existence of two angle variables θ_1, θ_2 each corresponding to one principal eigenfunction. We will not deal with this type of attractors and in what remains we focus on limit cycle systems.

Phase reduction provides an equivalent angle variable for (3.1). We can extend the reduction by defining action variables in accordance with the case of equilibria. Let s_j be an eigenfunction associated with one of the Floquet exponents $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$. Then we have

$$U^t s_j(x) = e^{\lambda_j t} s_j(x). \quad (3.178)$$

If we define $r_j = s_j$ for $\lambda_j \in \mathbb{R}$ and $r_j = |s_j|$, $\theta_j = \arg(s_j)$ otherwise, we have

$$\begin{aligned} \dot{r}_j &= \sigma_j r_j \\ \dot{\theta}_j &= \omega_j. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Hence, if we eliminate redundant variables (due to conjugate eigenvalues-eigenfunctions) we get

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ &\vdots \\ \dot{\theta}_m &= \omega_m \\ \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 \\ &\vdots \\ \dot{r}_{n-m-1} &= \sigma_{n-m-1} r_{n-m-1} \end{aligned} \quad (3.180)$$

where we have assumed m complex eigenvalues. The equation (3.180) provide the action angle coordinates of the system and the attractor is just $r_i = 0$. The variable θ captures the periodic dynamics on the limit cycle and its level sets correspond to the isochrons. The other phase variables along with r_j correspond to the transient dynamics. As in the case of equilibria, the r_1 action coordinate

dominates the convergence towards the limit cycle, while the θ variable dominates the phase evolution, so that the dynamics can be reduced to

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 \\ \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \tag{3.181}$$

It is clear that (3.181) generalizes the phase reduction model considered in the previous section by augmenting it with the most significant action variable.

Definition 3.5.2. *With the above notation we define the isostables of Γ ,*

$$\mathcal{I}_{r_0} = \{x \in B \mid r_1(x) = r_0\}. \tag{3.182}$$

A few remarks concerning the similarities and differences with equilibria are in order. In the last case, the isostables are the most important notion, since the phase doesn't characterize the motion on the attractor (besides it is not always well defined). In limit cycle systems, it is rather the phase of particular interest and for this reason it was defined first. Simple inspection of (3.182), (3.4.1) shows one difference: in the case of limit cycles we allow the r variable to obtain negative values if λ is real. This is due to the topological difference between limit cycles and equilibria.

It is very important to note that the reduction in (3.181) is exact for planar systems and provide a one-to-one correspondence

$$(x, y) \longleftrightarrow (r_1, \theta). \tag{3.183}$$

Considering now the perturbed equation (3.163), we can augment (3.164) by the r variable to yield,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega + \nabla\theta \cdot g(x, t) \\ \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 + \nabla r_1 \cdot g(x, t), \end{aligned} \tag{3.184}$$

which is exact for planar systems. In terms of the eigenfunctions we have

$$\begin{aligned} \nabla r_1 &= \nabla s_1 \text{ or } \nabla |s_1| \\ \nabla \theta &= \frac{\nabla s_n}{i s_n}. \end{aligned} \tag{3.185}$$

We remark that in order (3.184) to hold the perturbation must be such that the state variable always remains inside the basin of attraction of the limit cycle, otherwise the problem is now well defined. Now it is clear that the infinitesimal PRC corresponds to $Q(\theta) = \nabla\theta(r_1 = 0, \theta)$.

3.5.3 Numerical Methods

In this section we provide numerical methods for the computation of isochrons (level sets of θ) and isostables (level sets of r_1). Thanks to the Koopman operator formalism these ideas we only need to define appropriate eigenfunctions for each eigenvalue and then consider the corresponding level sets. Following (3.152) we prove,

Theorem 3.5.1. *Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be an observable ⁸ with non zero harmonic at ω when restricted on the limit cycle. Then*

$$f_\omega(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r U^t f(x) e^{-i\omega t} dt, \tag{3.186}$$

is a non trivial eigenfunction associated with $i\omega$ and hence the level sets of $\arg(f_\omega(x))$ correspond to isochrons.

⁸It does not necessarily belong to the MFS defined in earlier section, but the expansions are valid in a neighborhood of the attractor

Proof. The fact that f_ω defines an eigenfunction associated with $i\omega$ is proven exactly in the same way as (3.153). The non degeneracy condition guarantees that the in the expansion of $U^t f$ in eigenfunctions the projection of the steady state part on the $i\omega$ eigenfunction will be non zero, so that f_ω will be non trivial.

Alternatively, we can calculate the integral in (3.186) as follows. Let $x \in \mathcal{I}_\theta$. Then,

$$\begin{aligned} & \left| f_\omega(x) - \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(x_0, t + \theta)) e^{-i\omega t} dt \right| = \\ & \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r (f(\phi(x, t)) - f(\phi(x_0, t + \theta))) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \\ & \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r |f(\phi(x, t)) - f(\phi(x_0, t + \theta))| dt = 0, \end{aligned} \quad (3.187)$$

from which it follows that

$$f_\omega(x) = e^{i\theta} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(x_0, t)) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.188)$$

□

The limit in (3.186) converges with order $1/r$ so that the interval must be too large to numerically good results. Unlike (3.152) the integrand is not of the form $0 \cdot \infty$ so that such numerical issues do not arise in this case. In the same way one can calculate ∇f_ω to obtain $\nabla \theta$ globally,

$$\begin{aligned} e_i^T \nabla f_\omega(x) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r e_i^T \frac{\partial}{\partial x} f(\phi(x, t)) e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \nabla f(\phi(x, t)) \cdot (\Phi(t) e_i) e^{-i\omega t} dt, \end{aligned} \quad (3.189)$$

where $\Phi(t)$ is the monodromy matrix satisfying the first variational equation

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\phi(x, t)} \Phi, \quad \Phi(0) = I_n. \quad (3.190)$$

We can work in a similar manner for the isostables. We prove in exactly the same way the following

Theorem 3.5.2. *Let f be an observable⁹ with $f|_\Gamma \equiv 0$, $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$ where v_1 is the right eigenvector of the monodromy matrix and λ_1 the leading eigenvalue. Consider the Laplace average*

$$f_{\lambda_1}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t} dt. \quad (3.191)$$

Then f_{λ_1} is a nontrivial eigenfunction associated with λ_1 and the level sets f_{λ_1} or $|f_{\lambda_1}|$ (depending on λ_1) correspond to isostables.

Proof. The proof can be obtained through simple modification of (3.152) and (3.186). We want only to note that (3.191) essentially extracts the projection on λ_1 and the condition $\langle \nabla f(0), v_1 \rangle \neq 0$ guarantees that this projection is non zero (see the discussion in previous Section). □

We want to make a comment regarding (3.191). The integrand $f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t}$ is of the form $0 \cdot \infty$, as one can see by inspection of (3.107). This term asymptotically tends to a periodic function, and the integration must have very low tolerance so that numerical errors don't result in the integral diverging. For the same reason, the interval T must not be too large. In particular, numerically it is efficient to evaluate the integral after the transient interval has passed and for time equal to one period of the limit function. Unlike the equilibrium case, because of the imaginary eigenvalues, f_{λ_1} cannot be computed as the limit of the integrand similarly to (3.160). This can be seen by Fig. 3.3 where the time evolution of the term $f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t}$ for the Van der Pol (3.196) system is illustrated. Hence relation

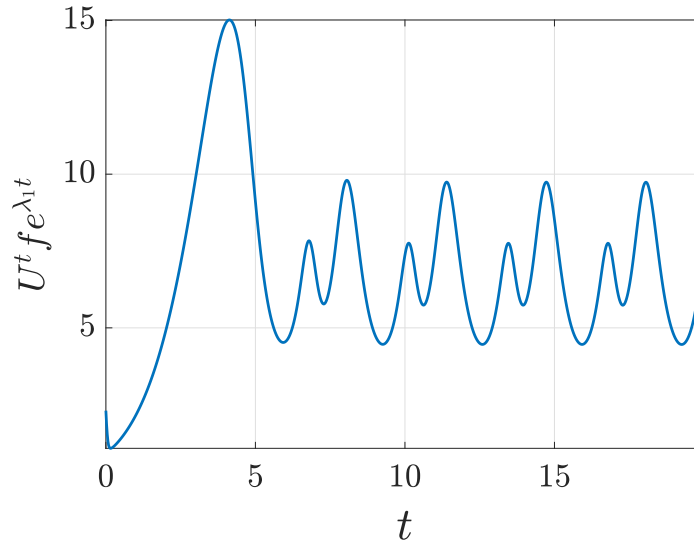


Figure 3.3: The term $f(\phi(x, t)) e^{-\lambda_1 t}$ for the Van der Pol (3.196). It is apparent that it does not converge to a constant number as stated in relation (21) of [45], but to a periodic function as expansions of the form (3.107) and (3.119) suggest.

(21) in [45] does not hold. Considering the numerical computation of higher order action variables, one could use the same method as in the case of equilibria (3.159).

In the same manner as (3.189) we can obtain the gradient ∇r_1 globally,

$$e_i^T \nabla f_{\lambda_1}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \nabla f(\phi(x, t)) \cdot (\Phi(t)e_i) e^{-\lambda_1 t} dt, \quad (3.192)$$

where $\Phi(t)$ is the monodromy matrix satisfying the first variational equation

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\phi(x,t)} \Phi, \quad \Phi(0) = I_n. \quad (3.193)$$

In this way, through the Koopman operator framework we can globally compute both the isochrons and the isostables along with their gradients describing completely (3.184). In particular if the system is planar this reduction is exact and one can work with the action-angle variables instead of the original coordinates.

A final issue concerning the observables remains. The nondegeneracy conditions are easily satisfied for almost any choice of f . The real issue is satisfying the condition $f|_{\Gamma} \equiv 0$ in case of isostables. We give a construction of such an observable following [42]. First we consider the Fourier expansion of the steady state solution

$$\phi(x_0, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}. \quad (3.194)$$

Now assume that there exists a plane π such that $P(\phi(x_0, t))$, where P denotes the orthogonal projection on π , is a star set. Then we define the map

$$g : (\varphi, \rho) \rightarrow P(c_0) + \rho \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(c_k) e^{ik\varphi}. \quad (3.195)$$

Then, we can use as an observable

$$f(x) = \frac{\|P(x) - P(c_0)\|}{\|P(\phi(x_0, \varphi)) - P(c_0)\|} - 1, \quad (3.196)$$

⁹It does not necessarily belong to the MFS defined in earlier section, but the expansions are valid in a neighborhood of the cycle

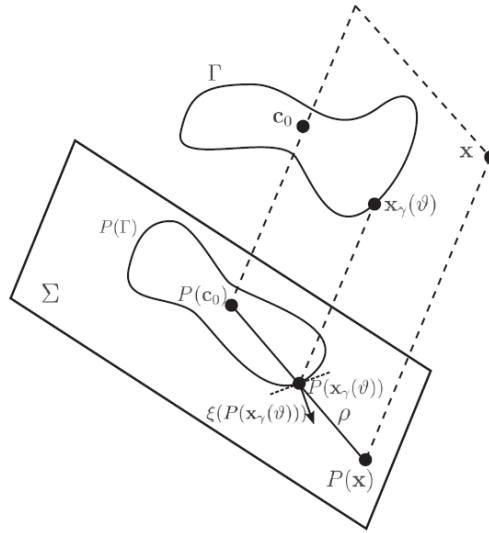


Figure 3.4: Geometrical construction of the observable [42].

where φ is such that $P(x) = g(\varphi, \rho)$. For any $x \in \Gamma$ it follows that $\rho = 1$ so that $f(x) = 0, x \in \Gamma$. Fig. 3.4 illustrates the geometry of the discussed construction.

The computation of ∇r_1 requires the computation of ∇f in (3.192). A straightforward computation of the gradient of the observable f would introduce further numerical errors considering that we do not have a closed form of f . In order to avoid this, we use as the gradient,

$$\nabla f(x) = \xi(\pi(P(\phi(x, t)))), \quad (3.197)$$

where π is the projection of the point $P(\phi(x, t))$, on the projection of the limit cycle on the plane defines as $\pi(P(x)) = P(\phi(x_0, \phi))$ and ξ the unit vector normal to the projected limit cycle. From the geometry in Fig. 3.4, it should be clear that since the limit cycle corresponds to the zero level set of f , the gradient on the limit cycle and ξ are parallel so that after the transient time, the two computational schemes coincide.

As a numerical example we consider the Van der Pol system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1(1 - x_1^2) - x_1. \end{aligned} \quad (3.198)$$

All the quantities discussed are illustrated in Fig. 3.5. The calculations have been performed according to the numerical schemes discussed in this section.

3.6 Synchronization of Periodically Forced Oscillators

In this section we consider the application of the Koopman operator framework to the complex synchronization of limit cycle systems. We consider the perturbed system

$$\dot{x} = F(x) + g(x, t), \quad (3.199)$$

where g is a periodic function of t with period T_1 and assume that the autonomous oscillator has frequency ω and period $T = 2\pi/\omega$. The problem of synchronization can be stated as follows: under which conditions, is the oscillator locked in phase with the external perturbation, so that they oscillate with frequencies in a rational relation, and if they are not locked what phenomena arise. We denote as $1 : n$ synchronization the situation under which the observed frequency of the oscillator is equal to the $1/n$ of the forcing frequency.

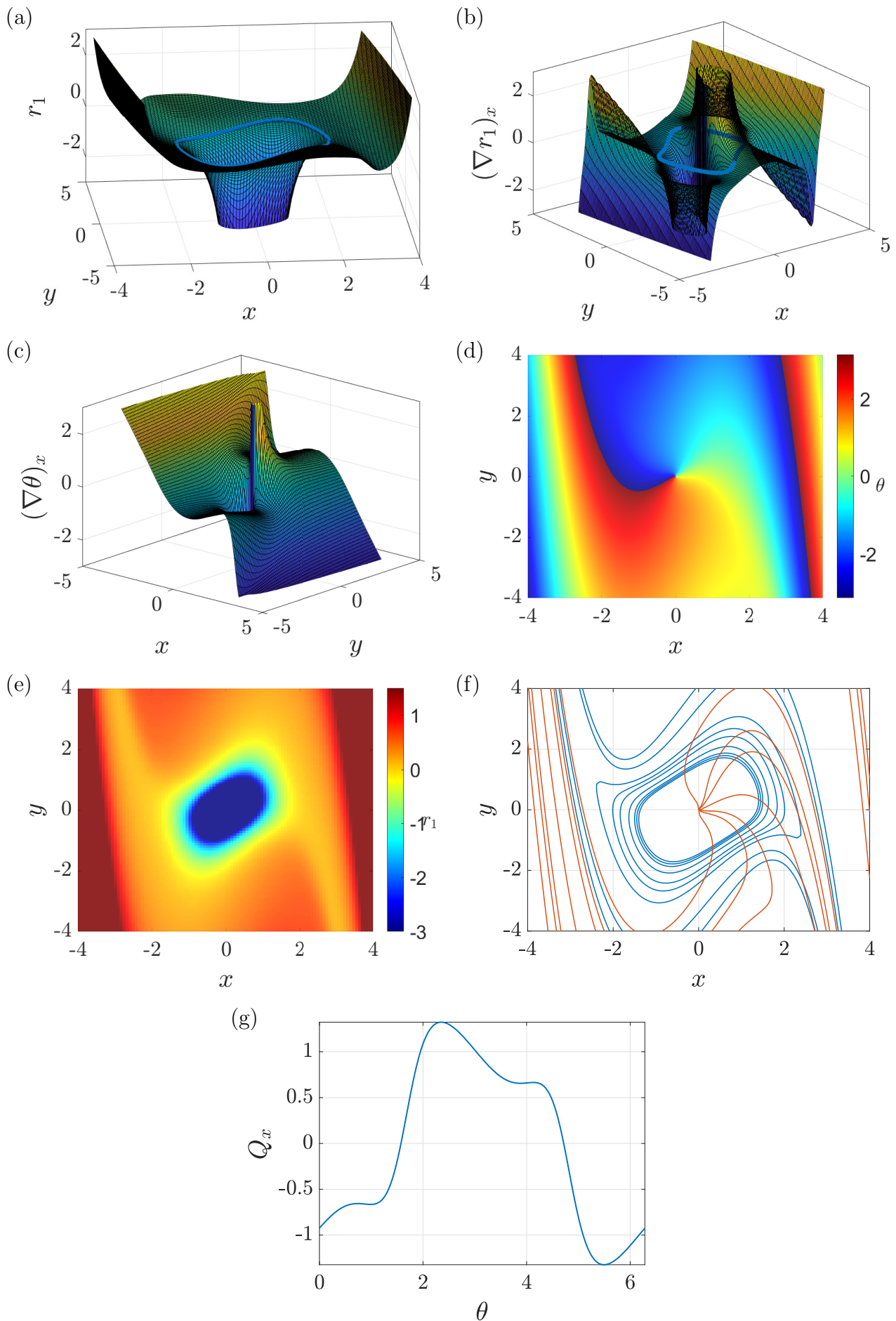


Figure 3.5: Van der Pol system (3.198). First row: (a) $r_1(x, y)$ and (b) $e_1^T \nabla r_1$. Second row: (c) $e_1^T \nabla \theta$ and (d) isochrons. Third row: (e) isostables and (f) contours of isostables (blue) and isochrons (orange). Fourth row: (g) $e_1^T Q(\theta) = e_1^T \nabla \theta(r_1 = 0, \theta)$.

3.6.1 Linear Approximation

In the previous section, when we were discussing the case of weakly periodically perturbed oscillators, we gave a first approach to study this problem without any knowledge of the Koopman operator framework. Using only the angle variable from the system (3.184), we approximated $\nabla\theta(x)$ by $Q(\theta) = \nabla\theta(r_1 = 0, \theta)$ and $g(x, t)$ by $g(\phi(x_0, \theta/\omega), t) = g(\theta, t)$ and arrived at (3.166). Next letting $\theta = \phi + \omega_1 t$, we get (3.168), which we repeat here,

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + Q(\phi + \omega_1 t)^T g(\phi + \omega_1 t, t), \quad \Delta\omega = \omega - \omega_1. \quad (3.200)$$

As an example of the case of 1 : 1 synchronization we suppose that $T_1 = T + T_s$, $|T_s|$ small. Then [21] can be averaged with respect to the period T_1 to yield

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} Q^T(\phi + \omega_1 t) g(\phi + \omega_1 t, t) dt = \Delta\omega + h(\phi), \quad (3.201)$$

where h is 2π periodic in ϕ . Here we want to note that averaging is essentially equivalent to considering only the resonant terms in the double Fourier series of $Q^T(\phi + \omega_1 t)g(\phi + \omega_1 t, t)$ (since it is 2π periodic in ϕ and T_1 periodic in t). Now we can state the limiting conditions that are assumed to derive this simple phase model: validity of the truncated angle coordinates, linear approximation of $\nabla\theta$ by $Q(\theta)$, approximation of g by its value on the limit cycle and averaging. All these considerations are usually summarized as "weak forcing" condition and "small detunings" (small $\Delta\omega$).

Despite the limitations of the above method, we see that under the conditions (3.170), the equation for the phase possesses a stable equilibrium which corresponds exactly to the phase locked or synchronized state. This state is destroyed at the borders of synchronization (as $\Delta\omega$ approaches its maximal or minimal value) through a saddle node bifurcation. The model predicts that there is a linear relation between the locking range ($\Delta\omega$) and the amplitude of the forcing. This is not the case even for small perturbation, and taking into account the approximations to derive it, we conclude that the correct interpretation is that for $\Delta\omega$ near zero, the synchronization borders at the $A - T_1$ plane (where A denotes the amplitude forcing) emanate from the point T_1 (or ω_1 if one uses $A - \omega_1$ synchronization plane) and are linear following their tangent lines. For higher amplitude values, more complex phenomena like period doubling bifurcations can occur which are not described by this model. Outside the synchronization region quasiperiodic or chaotic motion occurs.

One can derive similar linear approximations for higher order synchronization states 1 : n . The derivation is exactly identical, but in this case one should consider a relation $T_1 = T/n + T_s$, set $n\theta = \phi + \omega_1 t$ and average (3.201) by nT_1 where now the detuning $\Delta\omega = n\omega - \omega_1$. The linear analysis is identical and one can conclude that these synchronization regions emanate from T_1/n points in the $A - T_1$ plane.

The analysis described above is the most frequently used in the study of periodically forced oscillators due to its simplicity. Even though quantitative and even qualitative results for cannot be derived for most amplitude forcings, it shows that 1 : n synchronization regions on the $A - T_1$ plane emanate from T_1/n points. To illustrate the limitations we consider the system (3.172) with parameters $Q = 3, G = 0.5$ and $g(x, t) = Av_i(t) = \cos(\omega_1 t)$, namely without the terms depending on x (corresponding to "direct injection" as will be explained in the next). Fig. 3.6 shows the true synchronization regions. Equation (3.169) does not accurately predict the regions even for small forcing. It is apparent that the regions are linear with A only for small values. The rotation number ρ has not yet been defined but roughly speaking, it is the ratio between the observed frequency of the forced oscillator and the forcing.

3.6.2 A More General Approach

In this section we extend the simple, linear model used to describe the synchronization properties using the ideas of the Koopman operator framework. This way enables us the study of complex synchronization of oscillators subject to strong forcing and the derived results are not approximations.

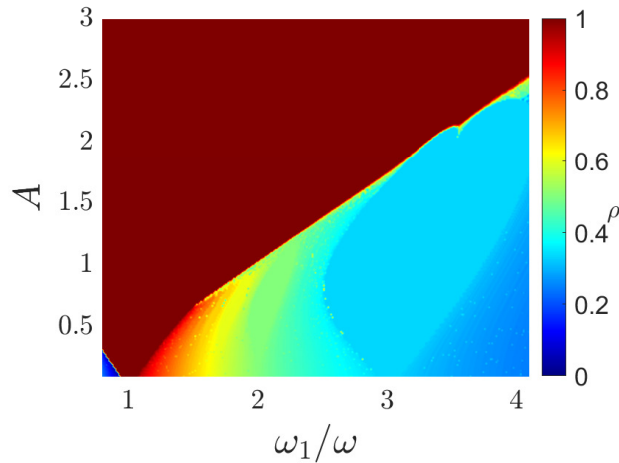


Figure 3.6: Synchronization regions of (3.172) with sinusoidal forcing. Parameters $Q = 3, G = 0.5$. The linear model fails to predict the regions even for small amplitude forcing.

We begin with the perturbed system (3.199). The reduced action-angle equations describing the motion of the perturbed system are

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega + \nabla\theta \cdot g(x, t) \\ \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 + \nabla r_1 \cdot g(x, t).\end{aligned}\tag{3.202}$$

We remark that higher order action coordinates have negligible contribution, since they correspond to larger Floquet exponents $|\lambda_i|$. If the system is planar, equations are exact as explained previously. System (3.202) defines an autonomous system in $S^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. We define a (obviously transversal) Poincaré section

$$\Sigma = \{(\theta, r_1, t) \in S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid t \bmod T_1 = 0\},\tag{3.203}$$

which corresponds to stroboscopically observing the system at times equal to multiples of the forcing period. We impose no condition on the forcing apart from being of the form,

$$g(x, t) = A \sum_{n \in \mathbb{N}} h(x, t - nT_1),\tag{3.204}$$

where the function h is a finite duration (T_{on}) perturbation (meaning that outside the $[0, T_{on})$ interval they are 0). The assumption on the forcing profile may seem too restrictive, but it is a very common case. Applications include synchronization of electronic systems [25, 26], neurons [28] and optical systems [23]. Since between two periods the system evolves autonomously¹⁰, a two dimensional map is defined

$$\begin{aligned}r_1 &\rightarrow e^{\sigma_1 T_1} (r_1 + \delta_1(r_1, \theta)) \\ \theta &\rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta_2(r_1, \theta) \bmod 2\pi,\end{aligned}\tag{3.205}$$

where the functions δ_i represent the difference between the old action-angle coordinates (θ, r_1) and the new ones after the application of the forcing.

System (3.202) and hence the map (3.205), describe completely the system only in the planar case, in which there is a one to one relation between the (x, y) variables and the (θ, r_1) . Even in the multi-dimensional case, however, due to the strong convergence of the other action variables, the approximation is reasonable.

Now suppose that the $\sigma_1 T_1$ factor is sufficiently negative (this corresponds to either a strongly attractive limit cycle and/or to a sufficiently high period of the perturbation). Then the action equation

¹⁰We consider the aggregate effect of the perturbation as equivalently applied to the initial point (r_1, θ) at its arrival and having zero time length. The equivalency should be apparent to the reader.

in (3.205) can be omitted since it converges rapidly to 0, namely to the limit cycle. Hence considering only the angle equation, we get the circle map,

$$\theta \rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta_2(0, \theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \bmod 2\pi, \quad (3.206)$$

which is a map of S^1 to itself. We note that we assume the cycle to be born via a Hopf bifurcation, as will be the case in the application to follow. Equation (3.206) can be studied to yield the synchronization regions of the initial perturbed system. That is, 1 : 1 synchronization region corresponds to a stable fixed point for the circle map and generally 1 : n region corresponds to an n cycle, since the phase of the oscillator returns to the same value after exactly n periods of the forcing thus (the perturbed oscillator) having frequency equal to $1/n$ the forcing frequency. We remark that higher order synchronization are narrow and hence more difficult to observe in practical experiments. From the form of (3.206) it is clear that only the term $\omega T_1 \bmod 2\pi$ affects the synchronization properties of the system. If $T_1 = kT + sT$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0, 1)$ then only the $s\omega T = 2\pi s$ matters. We make a final remark regarding regions of $m : n$ locking of the circle map. In these regions the circle map orbits performs m rotations after n periods of the forcing. But the frequency of the forced oscillator is in $1/n$ relation with the frequency of the forcing.

In this way, in view of the Koopman operator, we have rigorously derived a circle map orbit to study the synchronization of periodically perturbed oscillators. Unlike the simple linear phase model, the approximations used here are confirmed by the Koopman operator framework developed in the previous sections. In the next chapter we study circle maps of the form (3.206) in a more general setting before applying the theory to study the synchronization properties of electronic oscillators.

Chapter 4

Circle Maps

In the previous chapter we derived the circle map,

$$\theta \rightarrow \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \bmod 2\pi, \quad (4.1)$$

that describes stroboscopically the angle (phase) variable of an oscillator subject to periodic forcing. This circle map could describe the synchronization properties of the oscillator. In this section we study the dynamics of this circle map to establish some results that will enable us to decide whether the map possesses a cycle or not (a condition equivalent to locking as described in the previous section). Our treatment follows [30] and [60] with some modifications.

4.1 Circle maps and Rotation Number

The circle S^1 can be viewed as $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Let $f : S^1 \rightarrow S^1$ be the function defining the circle map,

$$\theta \rightarrow f(\theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \bmod 2\pi, \quad (4.2)$$

or an even more general circle map $\theta \rightarrow f(\theta)$. We begin with a useful definition.

Definition 4.1.1. *For f defining a circle map, we define as a lift of f a C^1 function F satisfying*

$$f(x \bmod 2\pi) = F(x) \bmod 2\pi. \quad (4.3)$$

The lift simply corresponds to the unwrapped phase of the circle map. We will say that f is C^1 and F is C^1 . In the definition we used *a* instead of *the* lift since we have the following

Proposition 4.1.1. *If F_1, F_2 are both lifts of f , then they differ by $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.*

Proof. The proof is obvious from the definition (4.3). □

Further we can find a lift of f^{n1} if we know a lift of f .

Proposition 4.1.2. *If F is a lift of f , then F^n is a lift of f^n .*

Proof. We have

$$(F \circ F)(x) \bmod 2\pi = f \circ (F(x) \bmod 2\pi) = f \circ f(x \bmod 2\pi), \quad (4.4)$$

and the result follows inductively. □

Now we introduce the notion of an orientation preserving map.

Definition 4.1.2. *We say that f is an orientation preserving homeomorphism if any lift F is increasing with continuous inverse.*

¹Superscript denotes composition.

We note that viewing f as being defined on the circle rather than $[0, 2\pi)$, solves the discontinuity problem caused by the modulo operator. In this case we consider that any $x, y \in S^1$ with $x \neq y$ define exactly two connected closed intervals.

In the case of the circle map that we are discussing, $f(\theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A)$, if the derivative of PRC admits values outside $(-1, 1)$ the map is not orientation preserving. The constraint $|\text{PRC}'| < 1$ is obviously necessary and sufficient. However, it is still true that $F(0) = \min_{x \in [0, 2\pi)} F(x)$ and $F(2\pi) = \max_{x \in [0, 2\pi)} F(x)$ (see Fig. 3.1) in either case and this property is the one we will need in this section.

Proposition 4.1.3. *For any $k \in \mathbb{Z}$ we have*

$$F(x + 2k\pi) = F(x) + 2k\pi. \quad (4.5)$$

Proof. The proof is straightforward since,

$$F(\theta + 2k\pi) = \theta + 2k\pi + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta + 2k\pi, A) = F(\theta) + 2k\pi. \quad (4.6)$$

The proposition holds in general for any f under the assumption of orientation preserving homeomorphism. Let $k = 1$ at first. Then,

$$F(x + 2\pi) \bmod 2\pi = f(x + 2\pi \bmod 2\pi) = f(x) = F(x) \bmod 2\pi. \quad (4.7)$$

Thus, $F(x + 2\pi) = F(x) + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. If $m > 1$, intermediate value theorem implies the existence of $y \in (x, x + 2\pi)$ such that

$$F(y) = F(x) + 2m\pi. \quad (4.8)$$

It is clear then that

$$f(x \bmod 2\pi) = f(y \bmod 2\pi) \implies y = x + 2j\pi, j \in \mathbb{Z}, \quad (4.9)$$

which contradicts the choice of y . The case $m < -1$ (since F is increasing) can be treated in the same way. For $k \neq 1$, the result follows inductively. \square

Proposition 4.1.4. *The function $F^n - id$ is 2π periodic.*

Proof. We have,

$$F(x + 2\pi) - (x + 2\pi) = F(x) - x, \quad (4.10)$$

and since F^n is a lift (Proposition 4.1.2),

$$F^n(x + 2k\pi) - (x + 2\pi) = F^n(x) - x. \quad (4.11)$$

\square

Proposition 4.1.5. *There exists an integer k_n such that*

$$2k_n\pi < F^n(x) - x < 2(k_n + 3)\pi, x \in \mathbb{R}, n \geq 1. \quad (4.12)$$

Proof. Since $F^n(x) - x$ is periodic it suffices to prove the statement for $x \in [0, 2\pi)$. There exists $m \in \mathbb{Z}$ such that $2m\pi \leq F^n(0) \leq 2(m + 1)\pi$. Now Proposition 4.1.3 implies that $2(m + 1)\pi \leq F^n(2\pi) \leq 2(m + 2)\pi$ from which one has,

$$2(m - 1)\pi + x \leq 2m\pi \leq F^n(0) \leq F^n(x) \leq F^n(2\pi) \leq 2(m + 2)\pi \leq 2(m + 2)\pi + x, \quad (4.13)$$

and the result follows for $k_n = m - 1$. \square

All we used in the proof is that F admits its minimal and maximal values at $0, 2\pi$ respectively along with the property described in Proposition 4.1.3. Now we define the most important quantity that describes a circle map. We will use it extensively in the applications that will follow in order to decide whether periodic orbits exist (equivalently synchronization).

Definition 4.1.3. If F is a lift of f , we define the rotation number as,

$$\rho(F(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{2n\pi}. \quad (4.14)$$

The motivation of the definition should be clear: it describes the average increase in phase at every iteration. In case of a rigid rotation, $\theta \rightarrow \theta + 2\pi a = R_a$, $\rho = a$ so that rational rotation numbers correspond to periodic motions and irrational to an aperiodic motion that densely fills the cycle [30]. Let $x \in \mathbb{R}$ be fixed. For simplifications reasons we denote $\rho(F(x))$ by $\rho(F)$.

Proposition 4.1.6. Let F_1, F_2 be two lifts, with corresponding rotation numbers ρ_1, ρ_2 (which we assume to exist). Then $\rho_1 = \rho_2 + k$, for some integer k .

Proof. There exists an integer k , such that

$$F_1 = F_2 + 2k\pi \implies F_1(F_1) = F_1(F_2 + 2k\pi) = F_1(F_2) + 2k\pi = F_2(F_2) + 4k\pi, \quad (4.15)$$

and inductively it follows that $F_1^n = F_2^n + 2nk\pi$. Now it is clear that $\rho_1 = \rho_2 + k$. \square

Now we prove the existence of ρ and relate it with the case of a rigid rotation.

Proposition 4.1.7. The rotation number exists for a circle map defined as above.

Proof. We first consider the case that f admits a cycle of period m , that is

$$f^m(\theta) = \theta, \quad F^m(x) = x + 2k\pi, \quad (4.16)$$

for some integer k . Now Proposition 4.1.3 implies $F^{jm} = x + 2jk\pi$, for any positive integer j , and hence

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x)|}{2jm\pi} = \frac{|k|}{m}. \quad (4.17)$$

Now for an arbitrary positive integer n , we have $n = jm + r$, $0 \leq r < m$ and since $|F^r(x) - x|$ is bounded by a constant M , one has

$$\begin{aligned} \frac{|F^n(x) - F^{jm}(x)|}{2\pi n} &= \frac{|F^r(F^{jm}(x)) - F^{jm}(x)|}{2\pi n} \\ &\leq \frac{M}{2\pi n}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

So it follows that,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{2n\pi} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x)|}{2(jm+r)\pi} = \frac{|k|}{m}. \quad (4.19)$$

This shows further that whenever f possesses a periodic orbit, ρ exists and is rational in accordance with the simple rigid rotation.

Now for the general case we have,

$$2k_n\pi \leq F^n(x) - x < 2(k_n + 3)\pi, \quad (4.20)$$

for any x and any $n \geq 1$ and some positive integer k_n . Hence, for any positive integer m ,

$$\begin{aligned} k_n &< \frac{F^n(x) - x}{2\pi} < k_n + 3 \\ k_n &< \frac{F^{2n}(x) - F^n(x)}{2\pi} < k_n + 3 \\ &\vdots \\ k_n &< \frac{F^{mn}(x) - F^{n(m-1)}(x)}{2\pi} < k_n + 3. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Adding them by parts yields,

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{mn}(x) - x}{2mn\pi} < \frac{k_n + 3}{n}, \quad (4.22)$$

which together with the first equation in (4.21) yields

$$\left| \frac{F^{mn}(x)}{mn} - \frac{F^n(x)}{n} \right| < \frac{3}{n}. \quad (4.23)$$

Interchanging m with n gives

$$\left| \frac{F^{mn}(x)}{mn} - \frac{F^m(x)}{m} \right| < \frac{3}{m}. \quad (4.24)$$

Adding by parts (4.23) and (4.24) yields

$$\left| \frac{F^n(x)}{n} - \frac{F^m(x)}{m} \right| < 3 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right), \quad (4.25)$$

which shows that $F^n(x)/n$ is a Cauchy sequence and the result follows from completeness of \mathbb{R} . \square

Some remarks regarding the rotation number are in order. From the proofs it follows that nothing changes if we consider generally orientation preserving homeomorphisms. The Proposition 4.1.5 is the only that actually demands the condition $F(0) = \min_{x \in [0, 2\pi)} F(x)$ and $F(2\pi) = \max_{x \in [0, 2\pi)} F(x)$ and is used only in the proof of Proposition 4.1.7, to show that the rotation number exists for a map that does not possess a periodic orbit. Hence, in a more general setting, if one considers circle maps for which the propositions 4.1.1 - 4.1.6 without 4.1.5 can be proven, we can still conclude that the rotation number exists and is rational if f possesses a periodic orbit. The actual necessity of Proposition 4.1.5 is that $F^n - x$ must be bounded by two integers of constant difference for every n . This in turn is used to prove that $F^n(x)/n$ is a Cauchy sequence and conclude convergence.

From the definition of the rotation number it immediately follows that $\rho(F^m) = m\rho(F)$. When f admits an m cycle the rotation number is rational and $\rho(F) = k/m$ for some positive integer k . The denominator of ρ corresponds to the order of the cycle and the nominator merely shows how many rotations have been made (how many times the phase θ has crossed the 2π value) before the cycle closes. Hence it is natural to consider the fractional part [30] $\tau = \rho \bmod 1$ which captures the relevant information. In other words, $\rho(F)$ depends on the choice of F , but $\tau(f)$ is a property of the circle map f (along with point x).

4.2 Restriction to Orientation Preserving Maps and Poincaré Classification

Although we have proved that rational ρ is equivalent to the existence of periodic orbit(s), we cannot proceed with proving further results due to the fact that F is not necessarily increasing. Assuming this, we will be able to characterize completely each orbit of the circle map. Although this assumption is true for small to moderate forcings it does not necessarily hold for strong perturbations as it is evident by Fig. 3.1. In this section we restrict to orientation preserving homeomorphism without assuming any particular form for f . We remark that the previous results continue to hold under the assumption of orientation preservation for arbitrary map f .

Proposition 4.2.1. *We have*

$$|x - y| < 2\pi \implies |F^n(x) - F^n(y)| < 2\pi, \quad n \geq 1. \quad (4.26)$$

Proof. Since $x < 2\pi + y$,

$$F(x) < F(y + 2\pi) = F(y) + 2\pi \quad (4.27)$$

Using the same arguments for $y < x + 2\pi$, the result follows inductively. \square

Now we can prove that the rotation number is a property of the map and is independent of the choice of the point x .

Proposition 4.2.2. *The rotation number ρ is independent of the choice of x .*

Proof. Let $x, y \in \mathbb{R}$ and $y = y_1 + 2a\pi$, $a \in \mathbb{Z}$, $|x - y_1| < 2\pi$. Then,

$$\begin{aligned} |F^n(x) - F^n(y)| &= |F^n(x) - F^n(y_1 + 2a\pi)| \\ &= |F^n(x) - F^n(y_1) - 2a\pi| \\ &\leq |F^n(x) - F^n(y_1)| + 2a\pi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hence, by Proposition 4.1.6,

$$\frac{|F^n(x) - F^n(y)|}{2n\pi} \leq \frac{a+1}{n}, \quad (4.29)$$

and the result follows. \square

We showed in Proposition 4.1.7 that the existence of a periodic orbit implied a rational rotation number. Now we prove the converse.

Proposition 4.2.3. *With the above assumptions, if $\tau(f) = p/q$ where p, q are relatively prime positive integers, f admits a periodic orbit of period q .*

Proof. Since $\rho(f^q) = q\rho(f) = p$, it suffices to show that if the rotation number is integer (or equivalently $\tau = 0$), then f admits a fixed point. Suppose it is not true. Then $F(x) - x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, since if it was not that case $x \bmod 2\pi$ would be a fixed point of f . If we choose F such that $F(0) \in [0, 2\pi)$, then $0 < F(x) - x < 2\pi$, since otherwise $F(y) - y \in 2\pi\mathbb{Z}$ for some y . By continuity, there exists a $\delta > 0$ such that

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 2\pi - \delta < 2\pi, \quad x \in [0, 2\pi). \quad (4.30)$$

Since $F(x) - x$ is periodic, the inequality is extended to the whole real line. Setting, $x = F^i(0)$, $0 \leq i \leq n-1$, and adding by parts the deduced inequalities, one has

$$n\delta \leq F^n(0) \leq n(2\pi - \delta), \quad (4.31)$$

which contradicts the hypothesis that $\rho(F) \in \mathbb{Z}_{>0}$. The contradiction implies that f does possess a periodic orbit. \square

It is now straightforward to see that, if $\rho(F)$ is irrational, f cannot admit a periodic orbit. The following fundamental result shows that the period of each periodic orbit is actually the same.

Proposition 4.2.4. *For an orientation preserving homeomorphism, if $\tau(f) = p/q$ where p, q are relatively prime positive integers, all periodic orbits have the same period q .*

Proof. Suppose that $y \in [0, 2\pi)$ is a point that belongs to a i periodic orbit and $x \bmod 2\pi = y$. Then

$$F^i(x) = x + 2j\pi, \implies \frac{j}{i} = k + \frac{p}{q}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.32)$$

which follows by the existence of the rotation number. We can choose a lift F for which $k = 0$, so that $j = mp, i = mq$, for some positive integer m . Now we need to use that F is increasing. If

$$F^q(x) - 2p\pi > x \implies F^{2q}(x) - 4p\pi = F^q(F^q - 2p\pi) - 2p\pi > F^q(x) - 2p\pi > x, \quad (4.33)$$

and inductively $F^{mq} - 2mp\pi > x$. But $F^{mq} - 2mp\pi = F^i - 2j\pi = x$, which gives a contradiction. Similarly one can show that $F^q - 2p\pi < x$ lead to a contradiction, from which it follows that $F^q - 2p\pi = x$. The fact that f has a lift F satisfying the previous relation shows that every periodic orbit must have period q . \square

In Chapter 2, when we were studying the Koopman operator, we showed that eigenvalues are invariant under conjugacies and eigenfunctions are transferred in a natural way between the conjugate systems. Now we show that the rotation number is also invariant with respect to conjugacies.

Proposition 4.2.5. *Let f be defined as above and h an orientation preserving homeomorphism. Then $\tau(f) = \tau(h^{-1} \circ f \circ h)$.*

Proof. Let F, H lifts of f, g such that $F(0), H(0) \in [0, 2\pi)$ and let $W = H^{-1} \circ F \circ H$, $w = h^{-1} \circ f \circ h$. It is straightforward to see that H^{-1} is a lift of h^{-1} ,

$$H^{-1}(x) \bmod 2\pi = h^{-1} \left(h(H^{-1}(x) \bmod 2\pi) \right) = h^{-1} \left(H(H^{-1}(x)) \bmod 2\pi \right) = h^{-1}(x \bmod 2\pi), \quad (4.34)$$

and similarly $H^{-1} \circ F \circ H$ is a lift of $h^{-1} \circ f \circ h$. Now from the proof of Proposition 4.1.5, it follows that $|H^{-1}(x) - x| < 4\pi$ and from the proof of Proposition 4.1.6,

$$|x - y| < 4\pi \implies |F^n(x) - F^n(y)| < 4\pi. \quad (4.35)$$

Thus,

$$\left| (H^{-1}F^nH)(x) - F^n(x) \right| \leq \left| (H^{-1}F^nH)(x) - (F^nH)(x) \right| + \left| F^n(x) - (F^nH)(x) \right| < 8\pi. \quad (4.36)$$

Now it is clear that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(H^{-1}F^nH)(x) - F^n(x)}{2n\pi} \right| = 0, \quad (4.37)$$

and the result follows. \square

By utilizing similar arguments we can prove the following.

Proposition 4.2.6. *$\tau(f)$ depends continuously on f , in that for every $\epsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that if f, g are δ close in C^0 topology², $|\rho(f) - \rho(g)| < \epsilon$.*

Proof. For a fixed ϵ we can choose n such that $3/n < \epsilon$ and $\delta > 0$ such that $F^n(0), G^n(0)$ are bounded by the same integers k_n given by Proposition 4.1.5. Following the arguments as in the proof of Proposition 4.1.4, the conclusion follows immediately by taking the limit $m \rightarrow \infty$ and using the existence of the rotation number. \square

Having proven the fundamental results on the rotation number we continue with characterizing the orbits of the map, based on the rotation number.

Rational Rotation Number

Proposition 4.2.7. *For an orientation preserving homeomorphism f with rational rotation number $\tau(f) = p/q$, the orbit of a point z belonging to the cycle has the same order³ in $[0, 2\pi)$ with the orbit of 0 under the rigid rotation defined by $\theta \rightarrow \theta + 2p\pi/q$.*

Proof. We denote by π the projection to S^1 . Let F be a lift of f such that $F^q(z) = z + 2p\pi$. If we define the set

$$A = \pi^{-1} \left(\{z, f(z), \dots, f^{q-1}(z)\} \right), \quad (4.38)$$

where $\pi^{-1}(\cdot)$ denotes the inverse image under the projection, then $[z, z + 2p\pi]$ is partitioned into pq intervals by A . This follows immediately from the fact that $\{z, f(z), \dots, f^{q-1}(z)\}$ partitions $[z, z + 2\pi]$ into q intervals and from the definition of A . From the properties of F , the interval $[z, z + 2p\pi]$ is also partitioned into the intervals $[z, F(z)], \dots, [F^{q-1}(z), F^q(z)]$. Hence each $[F^i(z), F^{i+1}(z)]$ contains exactly $p + 1$ points of A . In the ordering of the points of A that partition $[z, z + 2p\pi]$, let z_1 be the right neighbor of z and $z_{1p} = \pi(z_1)$. Then there exist $k \in \mathbb{Z}^+$ such that $f^k(z) = z_{1p}$ and hence $z_1 = F^k(z) - r = G(z)$ for some $r \in \mathbb{Z}$. Now we argue that G preserves the ordering, that is if z_n is n steps righter than z then $G^n(z) = z_n$. Indeed, if we consider the ordered set $\{z, z_1, \dots, z_q\}$ with $z_q < z + 2\pi$ and $z_{q+1} = z + 2\pi$, the fact that G is increasing and that $G(z) = z_1$ shows that $G^\ell(z) = z_\ell$ for $\ell \leq q$. Repeating the same argument, we conclude that the ordering is preserved under G . Hence, $G^p(z) = F(z)$ from which we have $f^{kp}(z) = f(z)$ and thus $kp = 1 \bmod q$. As a result the orbit is ordered as $(z, \dots, f^{(q-1)k}(z))$ which is the same as that of the rigid rotation $R_{p/q}$. \square

² $\sup_{x \in S^1} |f(x) - g(x)| < \delta$

³That is $mp/q \bmod 1 < np/q \bmod 1$, if and only if $f^m(z) \leq f^n(z)$.

Definition 4.2.1. Let g be an orientation preserving homeomorphism defined on S^1 . Then $x \in S^1$ is heteroclinic to $y_1 \in S^1$ and $y_2 \in S^1$ under g if,

$$\|g^n(x) - g^n(y_1)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \|g^n(x) - g^n(y_2)\| \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0. \quad (4.39)$$

Before completing the classification of all orbits associated with an rational rotation number, we need the following lemma [30].

Lemma 4.2.8. Let $f : I \rightarrow I$, where I is some closed interval (e.g. S^1), be a continuous increasing map. Then any $x \in I$ that is not a fixed point is positively and negatively asymptotic to adjacent fixed points.

Proof. Let $x \in I$ be a non-fixed point. Let (a, b) be the maximal open interval containing x and no fixed points. Then $f(x) - x$ cannot change sign inside $[a, b]$ and since f is increasing $f((a, b)) \subseteq [a, b]$. Suppose that $f(x) - x > 0$, $x \in (a, b)$. Then $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ is increasing and as bounded, converges. The limit point y is a fixed point since by continuity,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = f(y). \quad (4.40)$$

The case $f(x) - x < 0$, $x \in (a, b)$ can be treated analogously. Similar arguments for f^{-1} conclude the proof. \square

Proposition 4.2.9. Let f be an orientation preserving homeomorphism with rational rotation number $\tau(f) = p/q$.

- If f possesses exactly one periodic orbit, then every point not belonging to this orbit is heteroclinic under f^q to two points on the periodic orbit. If $q > 1$, these points are distinct, while $q = 1$ corresponds to a homoclinic orbit.
- If more than one periodic orbits exist, then each point not belonging to one of them is heteroclinic to two points belonging to separate periodic orbits.

Proof. Let $y \in S^1$ be a point belonging to the periodic orbit (exists from Propositions 4.1.10 and of period q by Proposition 4.2.1), i.e. a fixed point for f^q , $x \in \mathbb{R}$, $x \bmod 2\pi = y$ and F a lift with $F^q(x) = x + 2\pi p$. Then considering $G = F^q - p$, restricted to $[x, x + 2\pi]$, assumptions of Lemma 4.2.8 hold and the first case follows from Lemma 4.2.8, since fixed points (for f^q) will belong to the same periodic orbit. The fact that forward and backward points are distinct if the periodic orbit includes more than one point follows immediately from the proof of Lemma 4.2.8.

If more than one periodic orbit exists, then we need to prove that the two fixed points provided by Lemma 4.2.8 belong to separate periodic orbits. If it is not true, there exist adjacent zeros $a < b$ of $F^q(x) - x - p$, for which $x = a \bmod 2\pi$ and $y = b \bmod 2\pi$ belong to the same q periodic orbit of f and further no periodic orbits exist in the set

$$A = \{d \in S^1 | d = z \bmod 2\pi, z \in (a, b)\}. \quad (4.41)$$

It follows that there exists $0 < k \leq q - 1$, such that $f^k(x) = y$ and

$$B = \bigcup_{n=1}^{q-1} f^{nk}(A), \quad (4.42)$$

contains no periodic orbits. But B covers the complement of $\{f^n(x)\}_{n=0}^{q-1}$ which means that the map admits only one periodic orbit. This is a contradiction and the result follows. \square

Propositions 4.1.9, 4.1.10, 4.2.1, 4.2.2 and 4.2.4 characterize completely the possible orbits of an orientation preserving circle map possessing a rational rotation number ρ .

Irrational Rotation Number

We now study the case of irrational rotation numbers. We already know that no periodic orbits exist, so we assume that either quasiperiodic motion or chaotic motion can arise. Indeed that is the case and can be concluded by the following results.

Definition 4.2.2. *A map f is topologically transitive on S^1 , if for any $U, V \subseteq S^1$, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Lemma 4.2.10. *Let $f : S^1 \rightarrow S^1$ be an orientation preserving homeomorphism with irrational rotation number ρ . Let $m, n \in \mathbb{Z}$, with $n \neq m$, $x \in S^1$ and denote by I any of the two intervals defined by $f^n(x)$ and $f^m(x)$. Then the forward $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ and backward $\{f^{-k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ iterates of f intersect I .*

Proof. We consider the case of forward orbits, since the other case can be treated similarly. Equivalently, we need to show that $S^1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(I)$, where $f^{-k}(I)$ is an interval on the projected circle S^1 . It is clear that if $I_k = f^{-k(n-m)}(I)$, then I_n and I_{n-1} share a common endpoint. If S^1 is not covered by I_k , then the sequence of endpoints must converge to a $z \in S^1$. Thus,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-k(n-m)} \circ f^m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(-k+1)(n-m)} \circ f^m(x) = f^{(n-m)}(x), \quad (4.43)$$

which is a contradiction, since f does not possess any periodic orbits (irrational ρ). \square

Proposition 4.2.11. *Let $f : S^1 \rightarrow S^1$ be an orientation preserving homeomorphism with irrational rotation number ρ . Then, the ω limit set $\omega(x)$ is independent of the choice of $x \in S^1$.*

Proof. Let $x, y \in S^1$ and take $z \in \omega(x)$. By definition, there exists a sequence $k_n \rightarrow \infty$ such that $f^{k_n}(x) \rightarrow z$. By the previous Lemma, there exists a sequence a_n such that $f^{a_n}(y)$ is inside the interval defined by $f^{k_n}(x)$ and $f^{k_n+1}(x)$. Since $f^{k_n}(x) \rightarrow z$, it follows that $f^{a_n}(y) \rightarrow z$ and thus $z \in \omega(y)$. By symmetry, $\omega(y) \subseteq \omega(x)$ and the proof is complete. \square

Proposition 4.2.12. *Let $f : S^1 \rightarrow S^1$ be an orientation preserving homeomorphism with irrational rotation number ρ . Then, the ω limit set is either the whole S^1 or a Cantor set in S^1 .*

Proof. It is obvious that ω is closed, non-empty and invariant under the action of f . Suppose that there exists another set $A \subseteq S^1$ which is non-empty, closed and f invariant. Thus, $\omega \subseteq A$ which shows that ω is the minimal set of S^1 with these properties and any closed, f invariant subset of ω is either \emptyset or ω itself. Since the boundary $\partial\omega$ is closed and invariant subset of ω , we have that $\partial\omega = \emptyset$ or S^1 . The first case implies that $\omega = S^1$. If $\partial\omega = \omega$, it is clear that ω is totally disconnected. Moreover, if $x \in \omega$, there exists a sequence $k_n \rightarrow \infty$ such that $f^{k_n}(x) \rightarrow x$. The invariance implies that $f^{k_n}(x) \in \omega$ and hence ω is perfect, concluding the proof. \square

Lemma 4.2.13. *Let $f : S^1 \rightarrow S^1$ be an orientation preserving homeomorphism with irrational rotation number ρ . Let $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the lift of f , such that $\rho(F) = \tau(f)$, n_1, n_2, m_1, m_2 not necessarily distinct integers and $x \in \mathbb{R}$. Then we have*

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \iff F^{n_1}(x) + 2m_1\pi < F^{n_2}(x) + 2m_2\pi. \quad (4.44)$$

Proof. Let $p(y) = F^{n_1}(y) + 2m_1\pi - F^{n_2}(y) - 2m_2\pi$. If p changed sign, then, by continuity, it would also have a zero. Thus, there would exist a $y \in \mathbb{R}$ such that $F^{n_1}(y) - F^{n_2}(y) = 2(m_2 - m_1)\pi$, which is a contradiction since f does not have periodic orbits. Now suppose that $F^{n_1}(x) + 2m_1\pi < F^{n_2}(x) + 2m_2\pi$. The previous argument shows that $F^{n_1}(y) + 2m_1\pi < F^{n_2}(y) + 2m_2\pi$, $\forall y \in \mathbb{R}$. If $z = F^{n_2}(0)$ and for $x = 0$ we have $F^{n_1-n_2}(z) - z < m_1 - m_2$. Since this inequality is also independent of z , we get $F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$. Inductively, we conclude that $F^{n(n_1-n_2)}(0) < m_2 - m_1$. Thus,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{2n(n_1-n_2)\pi} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}. \quad (4.45)$$

The inequality is strict since the left hand side is irrational, while the right one is not and the "if" direction is proven.

Now suppose that $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$. By exact same arguments we can not have $F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$ since that would imply $n_1\rho + m_1 > n_2\rho + m_2$. Equality cannot hold since f has not periodic orbits. Thus, we conclude that $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ and the proof is complete. \square

Now we can prove the main result on circle maps characterized by irrational rotation numbers, referred to as the Poincaré classification.

Theorem 4.2.14. *Let $f : S^1 \rightarrow S^1$ be an orientation preserving homeomorphism with irrational rotation number ρ .*

- *If f is topologically transitive then f is conjugate to a rigid rotation $R_{\tau(f)}$.*
- *If f is not topologically transitive, then f is semi-conjugate (in the sense that the conjugacy is surjective but not invertible) to $r_{\tau(f)}$.*

Proof. Let F be a lift of f such that $\rho(F) = \tau(f)$, $\theta \in S^1$ and $x \in \mathbb{R}$ whose projection on S^1 is θ . Consider the set $B = \{F^n(x) + 2\pi m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. If π is the projection on S^1 , then $B = \pi^{-1}(f^n(\theta))_{n \in \mathbb{Z}}$. Now let $R_\tau = x + 2\tau\pi$ (we denote for simplification $\tau = \tau(f)$), the lift of a rigid rotation.

We define

$$\begin{aligned} H : B &\rightarrow \mathbb{R} \\ F^n(x) + 2m\pi &\rightarrow 2\pi(n\tau + m). \end{aligned} \tag{4.46}$$

The previous Lemma implies that H is increasing, and since τ is irrational, $H(B)$ is dense in \mathbb{R} . For $F^n(x) + m \in B$,

$$H \circ F(F^n(x) + 2m\pi) = 2\pi((n+1)\tau + m) = R_\tau \circ H(F^n(x) + 2m\pi), \tag{4.47}$$

which shows that $H \circ F = R_\tau \circ H$ in B . Now let $y \in \text{cl}(B) - B$. Then there exists a sequence $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in B$ such that $x_n \rightarrow y$. Since H is monotone the right (limsup) and left (liminf) limits of $H(x_n)$ are independent of the choice of x_n . If they are not equal, then $\mathbb{R} - H(B)$ would contain an interval, which contradicts the density of $H(B)$. Thus we can define $H(y) = \lim H(x_n)$ and H can be extended continuously to the whole $\text{cl}(B)$. The projection of $\text{cl}(B)$ to S^1 is just ω . If f is transitive we have $\omega = S^1$, and $\text{cl}(B) = \mathbb{R}$, thus H is extended to the whole \mathbb{R} . As a result, H remains strictly monotone in \mathbb{R} and a conjugacy is defined between F and R_τ on the whole \mathbb{R} .

If f is not transitive, ω and thus $\text{cl}(B)$, is a Cantor set. We remark that H extended on $\text{cl}(B)$ is monotone (not strictly), surjective and continuous. To extend H to \mathbb{R} it suffices to define H as constant between the intervals defined by points in the Cantor set. This constant is equal to the value of H at the endpoints. Thus, H is a semi-conjugacy between F and R_τ .

In either case, since for $z \in B$,

$$H(z + 2\pi) = 2\pi(n\tau + m + 1) = H(z) + 2\pi, \tag{4.48}$$

and periodicity persists the under continuous expansion, a (semi)conjugacy $h : S^1 \rightarrow S^1$ can be defined as the projection of H to S^1 between f and $R_\tau|_{S^1}$. \square

At this point, we remark that in the case of rational rotation number, the circle map f could never be semi-conjugate to a rigid rotation, since that would imply the existence of only periodic orbits. The above Theorem is summarized in the following corollary.

Corollary 4.2.14.1. *Let f be an orientation preserving homeomorphism with irrational rotation number $\tau(f)$.*

- *If f is topologically transitive, then f is conjugate to a rigid rotation with rotation number $\tau(f)$.*
- *If f is not topologically transitive, then there exists a Cantor set on the circle and an orbit that densely fills it. Points outside the Cantor set are homoclinic to it.*

The above discussion completely characterizes all possible orbits of an orientation preserving homeomorphism with an irrational rotation number. The first case corresponds to a quasiperiodic motion while the second to a chaotic. Together with the results on rational rotation numbers provide a complete characterization of all possible orbits of an orientation preserving homeomorphism and

is referred to as the Poincaré classification. We remark again that no explicit form for the map has been assumed and that under small and moderate forcing the map under consideration falls into this category.

Closing this Section, we remark that imposing further conditions such as f being a C^1 diffeomorphism, restricts the possibilities of Theorem 4.2.14. We state the most important result in the following Theorem, known as Denjoy's Theorem.

Theorem 4.2.15. *If $f : S^1 \rightarrow S^1$ is a C^1 diffeomorphism, with irrational $\rho(f)$ and derivative of bounded variation, then f is transitive in S^1 and Proposition 4.2.14 implies that it is conjugate (through a homeomorphism) to $R_{\tau(f)}$.*

Proof. See [30]. □

4.3 Synchronization Regions: Arnold Tongues

In the first section we considered a circle map of the form (4.1), defined the rotation number and proved several results relating it with periodic orbits. But we could not provide a complete study of the orbits unless F was increasing. In the previous section we restricted to orientation preserving homeomorphisms and completed the study of all possible orbits of a circle map. The results didn't require any particular form for f . In this section we return to the map (4.1), study the effect of the amplitude A in the PRC term and the synchronization regions. We keep considering small and moderate forcing so that f is orientation preserving. We denote $\omega T_1 = \phi$, the rotation number by $\rho(\phi, A)$ and PRC(θ, A) by $\gamma(\theta, A)$. Then we have the following.

Proposition 4.3.1. *The rotation number $\rho(\phi, A)$ is continuous in (ϕ, A) and nondecreasing in ϕ .*

Proof. The continuous dependence follows by Proposition 4.2.6. For fixed A and for $\phi_1 > \phi_2$,

$$F(\theta, \phi_1, A) = \theta + \phi_1 + \gamma(\theta, A) > \theta + \phi_2 + \gamma(\theta, A) = F(\theta, \phi_2, A) \implies F^n(\theta, \phi_1, A) > F^n(\theta, \phi_2, A), \quad (4.49)$$

and the result follows. □

For the F^2 term one has,

$$F^2(\theta, \phi, A) = \theta + \phi + \gamma(\theta, A) + \gamma(\theta + \phi + \gamma(\theta, A), A), \quad (4.50)$$

and similarly as one considers higher orders of F^n , more composite terms of the form $\gamma(\theta + k\phi + G(\theta, \phi, A))$ appear. In general, by Taylor's Theorem, there exists a $\xi = \xi(\theta, k, \phi, A)$ such that

$$\gamma(\theta + k\phi + G(\theta, \phi, A), A) = \gamma(\theta + k\phi, A) + \gamma'(\xi, A)G(\theta, \phi, A), \quad (4.51)$$

where prime denotes differentiation with respect to θ and G is a term consisting compositions of γ with itself. Hence for the general term F^n , $n \geq 1$, we can write

$$F^n(\theta, \phi, A) = \theta + n\phi + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma(\theta + j\phi, A) + h(\theta, \phi, A), \quad (4.52)$$

where h is a function as differentiable as γ and $h \rightarrow 0$ as $A \rightarrow 0$. Now we define rigorously the synchronization regions, which are called Arnold Tongues.

Definition 4.3.1. *For $r \in \mathbb{R}$ we define*

$$T_r = \{(\phi, A) \mid \rho(\phi, A) = r\}. \quad (4.53)$$

When r is rational, T_r is called an Arnold Tongue and corresponds to a locked or synchronized state, as explained in Chapter 2.

We note that Arnold Tongues can also be defined in the case that f is not orientation preserving which we will use later on. We now prove the existence and qualitative behavior of the Tongues for at least small to moderate forcing.

Proposition 4.3.2. *For each rational p/q there exist functions ϕ_1, ϕ_2 of A with $\phi_1(0) = \phi_2(0) = p/q$, $\phi_1(A) < \phi_2(A)$ for $A \in [0, \epsilon)$ and such that*

$$(\phi, A) \in T_{p/q} \iff \phi_1(A) \leq \phi \leq \phi_2(A). \quad (4.54)$$

Proof. Considering the equation,

$$H(\theta, \phi, A) = F^q(\theta, \phi, A) - \theta - 2p\pi = 0, \quad (4.55)$$

it is clear that a solution with respect to θ with fixed ϕ, A corresponds to a periodic solution with period q . For $A = 0, \phi = 2p/q$ is a solution for all θ and since,

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \phi} \right|_{A=0, \phi=2p/q\pi} = q \neq 0, \quad (4.56)$$

implicit function theorem implies the existence of a C^1 function $\phi(\theta, A)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $A \in [0, \epsilon)$ such that,

$$F^q(\theta, \phi(\theta, A), A) - \theta - 2p\pi = 0, \quad (4.57)$$

with $\phi(\theta, 0) = 2p/q\pi$. Now taking

$$\phi_1(A) = \inf_{\theta \in [0, 2\pi)} \phi(\theta, A), \quad \phi_2(A) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \phi(\theta, A), \quad (4.58)$$

it is clear that

$$(\phi, A) \in T_{p/q} \iff \phi_1(A) \leq \phi \leq \phi_2(A). \quad (4.59)$$

What remains to be proven is that $\phi_2(A) > \phi_1(A)$ as A increases from zero. This follows from the fact that

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial A} \right|_{A=0} = - \left. \frac{\partial F^q / \partial A}{\partial F^q / \partial \phi} \right|_{A=0} = - \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \gamma(\theta + 2jp/q\pi) \neq 0, \quad (4.60)$$

since γ , corresponding to the PRC, takes both positive and negative values (the limit cycle is born via a Hopf bifurcation, see Chapter 2) and generically $\partial \phi / \partial A$ is not identically zero. \square

The Proposition we just proved characterizes completely the regions of rational rotation number, for at least small amplitude of the forcing, which correspond to periodic orbits for the circle map and which in turn imply synchronization with the perturbation, as explained in Chapter 2. As the amplitude increases and the map stops preserving orientation, the Arnold Tongues naturally continue (as they are continuous functions of the parameters) but they can overlap leading to multistability phenomena. We remark that as $p + q$ increases the tongues become narrower and the observation in practical experiments is difficult [28]. We will provide and study particular synchronization diagrams in the Chapter of synchronization of electronic oscillators. There is also a similar result concerning the case of irrational rotation numbers, which we state in the following.

Proposition 4.3.3. *For any irrational number ζ , there exists a function ψ of $A \in [0, \epsilon)$ such that*

$$\rho(\phi, A) = \zeta \iff \phi = \psi(\zeta). \quad (4.61)$$

Proof. See [22]. \square

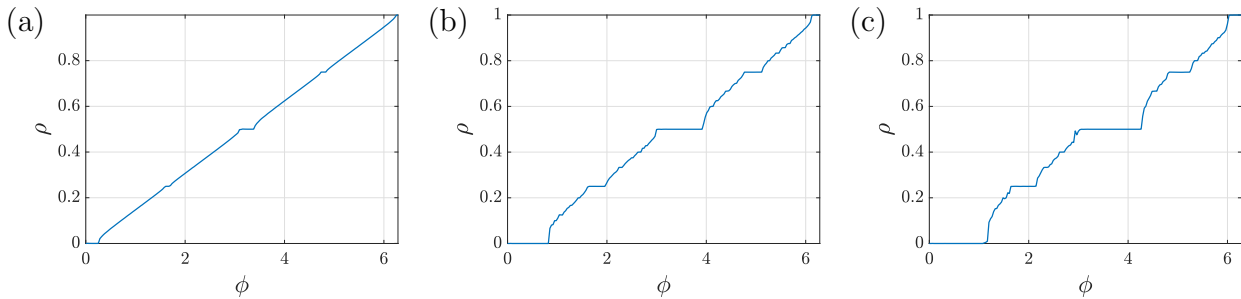


Figure 4.1: Rotation number of a circle map of the form (4.1) for three different values of the forcing A . (a) $A = 0.44$, (b) $A = 1.34$, (c) $A = 3$. Plateaus correspond to locked states. Rotation number is nondecreasing in ϕ for orientation preserving maps (a,b), and constant regions increase and widen as A increases. System under consideration is (3.172).

For orientation preserving maps, the rotation number ρ was proved to be a nondecreasing function of ϕ . If the forcing is strong, the monotonicity fails to hold. In either way, the rotation number is constant on intervals corresponding to rational rotation numbers. The graph of $\rho(\phi, A)$ for fixed A is called the Devils Staircase. In Fig. 4.1 the rotation number of a circle map of the form (4.1) (referring to the system (3.172)) for three different values of the forcing A is shown. For the two cases in (a) and (b), the map preserves orientation and ρ is nondecreasing in ϕ , while this is not the case in (c). As the amplitude is increased, the intervals of constant ρ are increased corresponding to the appearance of more locked states. Moreover, the existing synchronization regions are widened.

Let us examine Fig. 4.1 in more detail. For $A = 0$, we conclude that the Lebesgue measure of ϕ values corresponding to rational values of ρ is zero, while the Lebesgue measure of ϕ values corresponding to irrational values is one (full measure). As A is increased the set of ϕ values corresponding to rational values for ρ has a positive measure. The set of ϕ values corresponding to irrational ρ is a Cantor set. Hence, for A small a ϕ value chosen at random, will most likely correspond to an irrational ρ , but it can be converted to a rational number by an arbitrarily small perturbation.

In this chapter, we studied circle maps of the form (4.1), which arise from the investigation of synchronization in periodically forced limit cycle systems (see Chapter 2). We defined the rotation number and showed that the existence of periodic orbits implies that it assumes rational values. Assuming further that the map preserves orientation (which holds true for at least small to moderate forcing), we demonstrated the equivalence between rational values and the existence of periodic orbits and provided a complete classification of arbitrary orbits. We then defined synchronization regions in the $A - \phi = \omega T_1$ plane, known as Arnold Tongues, corresponding to rational rotation numbers emanating from rational multiples of 2π . We established the existence and the form of these regions for at least small forcing amplitudes A . As the amplitude increases, the boundaries evolve continuously but may also overlap, leading to multistability. We examined the effect of amplitude forcing on $\rho(\phi; A)$ (considering A as a parameter) and concluded that increasing A results in the appearance of new synchronization regions and the widening of existing ones, while the non-invertibility of f is reflected into ρ ceasing to non-decreasing in ϕ . With this machinery in place, we are now ready to delve into the complex synchronization of electronic oscillators in Chapter 6. In the next chapter, we will mathematically model electronic oscillators and explore the nonlinear dynamics associated with the autonomous systems in Chapter 5.

Chapter 5

Electronic Oscillators

Various electronic systems require periodic signals to operate. Typical applications include computational and control systems, where timing is crucial, telecommunication systems, where the periodic signals are used as carriers of the relevant information, and phase locked loops where the phase of an oscillator is locked to an external signal. In this Chapter we are concerned with the mathematical modeling of electronic oscillators. We are mostly interested in two types of oscillators: the differential LC and the Colpitts. We begin with some basic properties of the transistors and continue with the derivation of the models. We conclude this chapter by reviewing the primary methods found in electronics literature for analyzing autonomous and periodically forced oscillators, along with a discussion of their limitations.

5.1 The BJT

The BJT (Bipolar Junction Transistor) was invented at the Bell Labs in 1948 and resulted in the replacement of vacuum tubes with transistors. It is a three-terminal device and its basic principle can be summarized as the use of voltage between two terminals to control the current flowing in the third terminal. Fig. 5.1 (a) illustrates a simplified structure of a npn BJT that. The three semiconductor regions are the emitter (n type), the base (p type) and the collector (n type). Two pn junctions are formed between the emitter-base (EB) and the collector-base (CB). The active mode, in which we are interested, is the state when the (EB) junction is forward biased and the (CB) reverse biased.

Fig. 5.1 (b) shows the current flow for a transistor operating in forward mode that is biased through V_{BE} and V_{CB} that we will use to analyze the behavior. Forward bias on the (EB) junction will cause current consisting of electrons injected from the emitter to the base and holes injected from the base into the emitter. The current flowing through the (EB) junction is denoted by i_E and is dominated by the electron component. The electrons injected from the emitter into the base are minority carriers and due to lower concentration at the emitter side, diffusion will occur towards the collector. During the diffusion, some electrons will be lost due to recombination with holes. Finally, the current of the

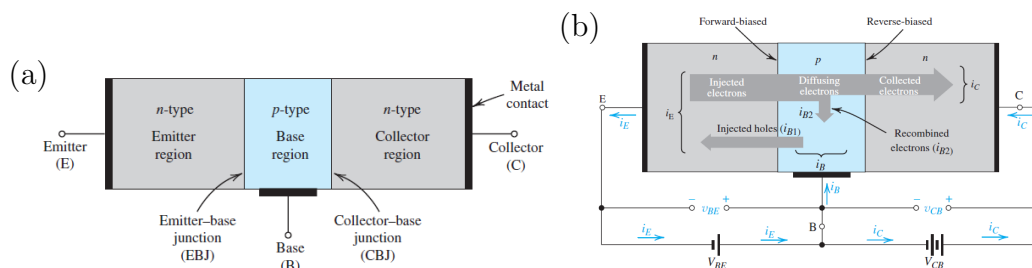


Figure 5.1: Simplified structure of a BJT transistor and current flow in a BJT operating in active mode from [52].

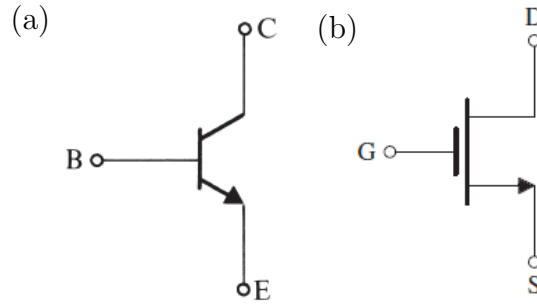


Figure 5.2: Circuit symbols for the BJT (a) and for the MOS (b).

collector i_c will depend on the electrons that reach its region. Hence,

$$i_c = I_S e^{v_{BE}/V_T}, \quad (5.1)$$

where I_S is a constant with current dimensions, referred to as saturation current and depends on the geometry and on the doping profile of the base. With $V_T = kT/q$, we denote the thermal voltage.

The base current i_b is comprised of a component due to the holes injected from the base into the emitter and of component that owed to the holes that the external circuit must provide in order to compensate for the holes lost during recombination. Both current components are proportional to e^{v_{BE}/V_T} , so that we can express i_b as a percentage of the collector current i_c ,

$$i_b = i_c/\beta. \quad (5.2)$$

The parameter β typically ranges from 50 to 200 and is referred to as common-emitter current gain. The emitter current equals the sum of the currents of the collector and the base. Thus,

$$i_e = i_c + i_b = (\beta + 1)i_c, \quad i_c = \alpha i_e, \quad (5.3)$$

where the constant $\alpha = \beta/(\beta + 1)$ is referred to as common-base current gain.

In the model we presented, the BJT can be viewed as a non-linear transformation of the voltage v_{BE} to the current i_c . This current is independent of the voltage v_{CB} provided that it is positive so that the operation is in the forward mode. The current flowing through the other two terminals i_b, i_e , are merely proportional to i_c and assuming that the doping of the emitter region is strong, while the doping of the base region is weak, the factor $\alpha \rightarrow 1$ so that one can neglect the current flowing through the base and consider $i_c = i_e$. Fig. 5.2 shows the circuit symbol of a npn BJT.

We remark that the operation of the pnp transistor is similar but the doping profile for each region is reversed. This implies the exponential relation between i_c and v_{EB} (reversed voltage). Here we must also note that the collector current i_c depends weakly on the voltage v_c through a linear relation, with the reciprocal of the proportional coefficient referred to as Early resistance, but it will not be very important in the analysis of oscillators ¹.

In the previous analysis we have assumed that the transistor is biased with constant voltages so that it operates always in the forward mode. If the voltage v_{BE} alternates values around the DC point, then the transistor alternates between forward mode and cutoff. This transition is not instantaneous but charge-storage phenomena impose time dependence. The charge stored in the base during forward mode is,

$$Q = i_c \tau_F, \quad (5.4)$$

where τ_F denotes forward base-transit time. This results in the small-signal diffusion capacitance,

$$C_{de} = \frac{dQ}{dv_{BE}} = \frac{\tau_F}{V_T} i_c, \quad (5.5)$$

¹It introduces only small quantitative differences.

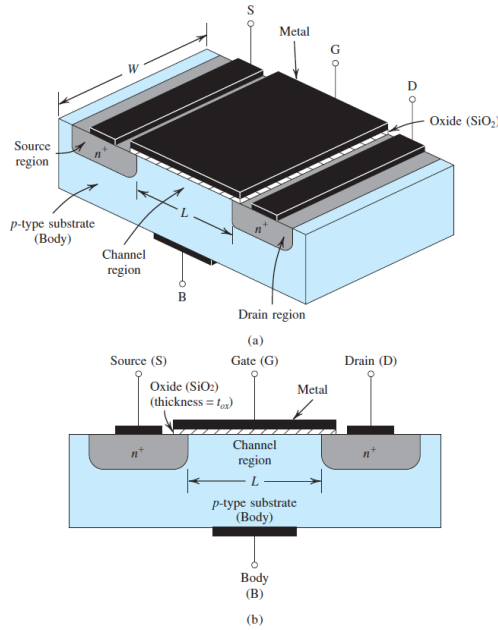


Figure 5.3: Physical structure of a NMOS transistor [52].

where we used (5.1). Usually one approximates i_c in the above, by its DC value.

Changes in v_{BE} result in changes in the charge stored in the depletion region between the base and the emitter. This phenomenon is modeled through the capacitance of the junction (EB) and can be approximated by,

$$C_e = 2C_{e0}, \quad (5.6)$$

where C_{e0} corresponds to the value of C_e when no voltage is applied at (EB) junction. During forward mode the (CB) junction is reverse biased and presents a capacitance referred to as depletion capacitance. Its value depends on the reverse bias v_{CB} and is denoted by C_μ . The two capacitances C_e, C_{de} can be aggregated to yield to the emitter-base capacitance C_π , so that the BJT exhibits two major parasitic capacitances: C_π, C_μ .

5.2 MOS transistor

In this section we provide a brief analysis of the other important type of transistor: the MOS transistor. The ability to shrink the dimensions and integrate it have made MOS transistor very popular in electronic devices. Fig. 5.3 illustrates the physical structure of a NMOS transistor. The transistor is fabricated on a p-type substrate, in which two heavily doped regions, called source and drain, are formed. A thick layer of electrical insulator is grown on the surface on top of which the gate electrode is formed. The substrate forms pn junctions with each of the source and drain regions. These junctions are reverse biased. We will neglect the effect of the body on the operation of the transistor and consider MOS as a three terminal element comprising of the gate(G), the source (S) and the drain (D).

If the drain and the source are grounded and a positive voltage is applied to the gate, holes are repelled from the substrate and being pushed downward, a depletion region (called henceforth channel) by the negative charge of atoms is formed. The positive voltage attracts electrons from the drain and the source towards the channel and when a sufficient number is accumulated, an n region is created connecting the drain and the source. The minimum voltage v_{GS} needed to accomplish that is called threshold voltage V_t . For $V_{GS} > V_t$, if a positive v_{DS} voltage is applied, current flows through the channel. The depth of the channel is not uniform, since it depends at every point on the amount by which the voltage exceeds V_t . This results in an approximately trapezoidal shape. Considering that the

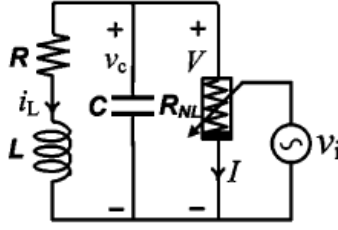


Figure 5.4: Equivalent circuit of an LC differential oscillator.

stewed charge is proportional to the area of the channel, one can conclude that

$$i_d = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t - v_{DS}/2) v_{DS}, \quad (5.7)$$

where W, L denote the width and length of the depletion region, μ_n is the mobility of the electrons and C_{ox} denotes the oxide capacitance. If $v_{DS} > V_{GS} - V_t$, the channel is quenched and saturation appears (which is the equivalent of the forward mode in the BJT), resulting in

$$i_d = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t)^2. \quad (5.8)$$

Here we can see the similarities between the two types of transistors. Abstractly, both operate as nonlinear voltage controlled currents. The difference lies in the exact form of the nonlinearity (exponential for the BJT and quadratic for the MOS). We are mostly interested in this characteristic for both of the transistors. We should also remark that similar to the BJTs, in the saturation region the current i_d does depend weakly on the applied v_{DC} , in a linear manner, phenomenon called Early. Similarly we are not interested in these type of phenomena.

We close this section with a brief discussion about the parasitic capacitances. Similarly to the BJT, charge storage phenomena demand some time and are modeled by parasitic capacitances. The capacitances C_{gd}, C_{gs} result from the gate capacitance effect. The C_{sb} and C_{db} , are the depletion capacitances of the pn junctions formed by the source region and the substrate, and the drain region and the substrate, respectively. All of them depend on the geometrical dimension W, L of the element and on the oxide capacitance C_{ox} . The circuit symbol is shown in Fig. 5.2. The operation of a PMOS transistor is similar with the appropriate modifications (n channel, p doped source and drain).

5.3 Differential LC Oscillators

In this section we mathematically model the differential LC oscillators. Abstractly, any oscillator belonging in this class can be equivalently modeled by the circuit shown in Fig. 5.4.

The resistance R_{nl} equivalently corresponds to a nonlinear voltage controlled current source $I = -I_0(V_I)f(v_c/V_r)$ where v_c denotes the voltage across the capacitor, v_r and I_0 are constants having voltage and current dimensions, respectively, and V_I stands for the bias voltage. Function f is assumed to be odd, at least C^4 , with $f(0) = 1$ and $f^{(3)}(0) < 0$. The resistance connected in series with the inductor corresponds to its ohmic losses. The name of the oscillator results from the passive elements L, C (inductor and capacitor) and of the properties of f . Applying Kirchhoff laws, we deduce the system,

$$\begin{aligned} C \frac{dv_c}{dt} &= -i_L + I_0 f(v/V_r) \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_c - Ri_L. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Setting $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ and introducing the change of variables,

$$x = \frac{v_c}{V_r}, \quad y = \frac{Ri_L}{V_r} \quad \text{and} \quad \tau = \omega_0 t \quad (5.10)$$

system (5.9) is transformed to the dimensionless equivalent one,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -Qy + QGf(x) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{Q}(x - y),\end{aligned}\tag{5.11}$$

where

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad G = \frac{RI_0}{V_r}.\tag{5.12}$$

Now let us suppose that we want to perturb the autonomous oscillator by an external voltage signal. We can insert the perturbation as an additive, time-dependent term in $v_I = V_{in}g(t) + V_I$, where V_I corresponds to the bias voltage at the absence of forcing and V_{in} is the amplitude of the applied signal. The only parameter that is affected is I_0 which becomes $I_0(t) = I_0(1 + Ag(t))$, where A is the effective amplitude of the perturbation proportional to V_{in} . Hence (5.11) becomes,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -Qy + QGf(x) + QGAf(x)g(\tau) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{Q}(x - y).\end{aligned}\tag{5.13}$$

Another approach of perturbing the system would be the *direct* injection method [10] where, a current signal is used as the external forcing. Referring to Fig. 5.4, this situation is equivalent with a time dependent current source parallel to the capacitor C . In that case, a time dependent current $i(t) = I_{in}g(t)$ term is added in the differential equation for v_c in (5.9), which after the normalization (5.10) results in the forced system,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -Qy + QGf(x) + Ag(\tau) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{Q}(x - y),\end{aligned}\tag{5.14}$$

where A denotes again the effective amplitude of the forcing. We note that the main difference between the two approaches is that the forcing term in (5.13) depends on the state variable x , while this not the case in (5.14). When we study the complex synchronization of electronic oscillators, we will mainly focus on the first approach, namely (5.13), as being the most common. The autonomous system (5.11) and the forced systems (5.13), (5.14) can be viewed as the the representatives of all systems belonging in this class which differ only in the nonlinear term f .

Practical implementations of such circuits are shown in Fig 5.4. In case of the MOS implementation in (a) one can deduce, using (5.8) that [14]

$$f(x) = x(1 - x^2), \quad I_0 = aV_{DD}, \quad V_r = V_{DD},\tag{5.15}$$

where a denotes the slope of the nonlinearity at the origin and V_{DD} denotes the bias current. In the case of the BJT implementation (b), one has

$$f(x) = \tanh(x), \quad I_0 = \gamma I_{C_{Qn4}}, \quad V_r = 2V_T,\tag{5.16}$$

where $\gamma = g(\alpha)$, α is the common-base forward short-circuit current gain defined in (5.3) and g is an increasing function such that $\gamma \rightarrow 1$ as $\alpha \rightarrow 1$. We remark that in both implementations the parasitic capacitances are either in parallel to C (e.g. C_{gs} for the MOS and C_μ for the BJT) or are negligibly small compared with it. We note that regarding the two forcing technique, with reference to Fig. 5.5, the first approach (5.13) is equivalent to adding a time dependent component in v_I , $v_I = V_{in}g(t) + V_I$, while the second (5.14) can be implemented by connection a time dependent current source parallel to the LC tank. We will analyze the nonlinear dynamics for this of class of oscillators in the next Chapter, where we will show that, at least around the origin, they all share the same qualitative behavior.

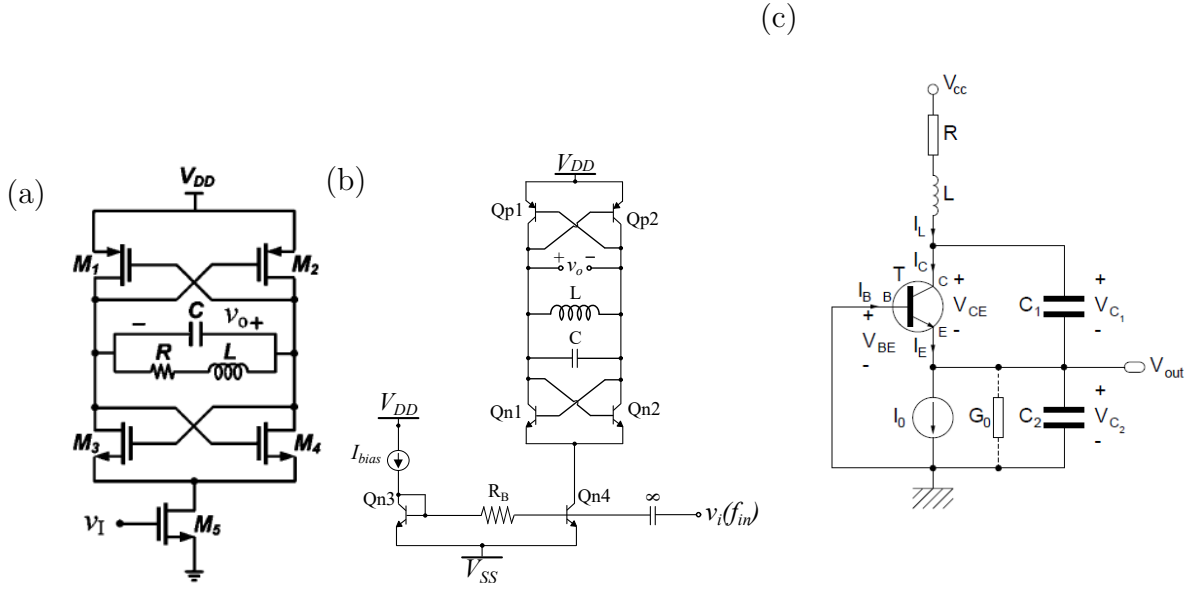


Figure 5.5: Different implementations of the differential LC oscillator: (a) MOS transistors and (b) BJTs. (c) Schematic of a Colpitts oscillator.

5.4 The Colpitts Oscillator

We consider the Colpitts oscillator shown in Fig. 5.5 (c). The parasitic capacitances of the BJT can be included in the capacitors $C_{1,2}$. The resistor R corresponds to the ohmic losses of the inductor and G_0 to the parallel conductance of the current source I_0 . In the following we assume that G_0 is negligible.

Using Kirchhoff laws, we deduce the following equations

$$\begin{aligned} C_1 \dot{v}_{C1} &= -I_s \exp(-v_{C2}/V_T) + i_L \\ C_2 \dot{v}_{C2} &= I_s \exp(-v_{C2}/V_T) + i_L - I \\ L \dot{i}_L &= -v_{C1} - v_{C2} - R i_L + V_{cc}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

where V_{cc} and I correspond to the bias voltage and current, respectively. It is straightforward to see that the unique equilibrium of (5.17) is,

$$\begin{aligned} v_{C1,eq} &= V_{cc} - RI - V_T \ln\left(\frac{I_s}{I}\right) \\ v_{C2,eq} &= V_T \ln\left(\frac{I_s}{I}\right) \\ i_{L,eq} &= I. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Introducing the change of variables,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{v_{C1} - v_{C1,eq}}{V_T} \\ x_2 &= \frac{v_{C2} - v_{C2,eq}}{V_T} \\ x_3 &= \frac{i_L - i_{L,eq}}{I} \\ t &= \omega_0 t', \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

system (5.17) becomes,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)} \left(1 - e^{-x_2} + x_3\right) \\
\dot{x}_2 &= \frac{g}{Qk} x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q} x_3,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

where the parameters Q, g, k in terms of the circuit elements are given by,

$$k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad g = \frac{IL}{V_T R(C_1 + C_2)}. \tag{5.21}$$

Now suppose that we want to perturb the Colpitts oscillator by an external signal. A very common approach is to connect in parallel with the current source I , a time dependent current source $i = IAf(t)$, where A is the normalized amplitude of the perturbation. This results in an additive term in the second equation (for v_{C_2}) of (5.17), or equivalently $I \rightarrow I(1 + Af(t))$. Applying the change of variables described in (5.19), the autonomous system (5.20) takes the form

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)} \left(1 - e^{-x_2} + x_3\right) \\
\dot{x}_2 &= \frac{g}{Qk} (x_3 + Af(t)) \\
\dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q} x_3,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

where the parameters Q, g, k are again given by (5.21). We will use the model (5.22) when we study the complex synchronization of the Colpitts oscillator subject to external forcing.

5.5 Review on Common Methods of Analysis

In this Section we review the most frequent methods used in electronics literature to study the behavior of non-linear oscillators and stress the main limitation of each technique. We present the methods concerning autonomous and forced oscillators separately. Exclusively in this section we use j to denote the imaginary unit in accordance with the electronic literature.

5.5.1 Autonomous Oscillators

Barkhausen criterion [52] is the traditional method that designers use to analyze an electronic oscillator. In this approach, small signal analysis is used to derive the characteristic equation for the oscillator. Then, it is argued that oscillations start when the roots of this equation belong to the right complex plane. The critical values of the parameters are those for which there exists roots lying on the imaginary axis. Essentially, this approach is equivalent to linearizing the system around an equilibrium and determining when a Hopf [35] bifurcation occurs, and arguing that when this happens a limit cycle is born. However, this condition is only necessary and not sufficient, since in the case of a subcritical Hopf bifurcation ($a > 0$ in (5.23)), an unstable limit cycle bifurcates and no self sustained oscillations are present.

In [40], the Colpitts oscillator is assumed to operate near the Hopf bifurcation curve. This allows one to approximate its behavior by the reduction on the center manifold [60, 11]. Then, performing appropriate transformations, one obtains in polar coordinates the system

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= d\mu_1 r + ar^3 + O(\mu_1^2 r, \mu_1 r^3, r^5) \\
\dot{\theta} &= \omega + c\mu_1 + br^2 + O(\mu_1^2, \mu_1 r^2, r^4), \quad \omega = \sqrt{-\mu_1},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

where $\mu_1 = g$ is the effective parameter which is close the bifurcation Hopf curve and d, a, b are functions of the parameters g, Q . Then neglecting higher order terms, one obtains approximate forms for the

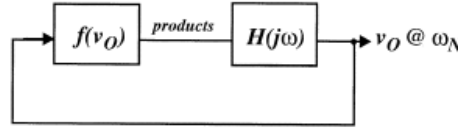


Figure 5.6: Block diagram of the oscillator for the Harmonic Balance method [58].

frequency and the amplitude of the oscillation, namely

$$A = \sqrt{-\frac{d\mu_1}{a}}, \quad \omega_0 = \omega + c\mu_1 - \frac{bd\mu_1}{a} \approx \omega. \quad (5.24)$$

The problem with this approach is that it is valid only in a small neighborhood of the Hopf bifurcation curve where the limit cycle is nearly sinusoidal. The analytical result actually approximates the nearly sinusoidal limit cycle born at the Hopf bifurcation and does not offer insight regarding the behavior for other parameter values. This approach can be seen as an analytical generalization of the Barkhausen criterion, in that it considers the case dynamics of the system, but suffers from the same limitation that parameters must lie near the Hopf bifurcation curve.

Another family of approaches is based on the Harmonic Balance [58] method. When applied to the electronics literature, one usually sees the passive elements (inductors, capacitors) as a bandpass filter with transfer function $H(s)$ whose input is a nonlinear function of the output voltage $f(v)$ and whose output is the output voltage $v = A \cos(\omega t)$, which is assumed to be purely harmonic (see Fig. 5.6). Then, H filters all components in the expansion of $f(v)$ except for the first which leads to self sustained oscillations,

$$A = |H(j\omega)| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos(\theta)) \cos(\theta) d\theta. \quad (5.25)$$

This approach is essentially similar to the two above and is thus valid only for parameters near the Hopf curve.

Another variant [9] of this method is to assume that the oscillator can be written as a weakly perturbed one and the solution can be approximated by

$$v(t) = A \cos(\omega t) + \epsilon h(\omega t, \epsilon), \quad (5.26)$$

where ϵ is a small parameter quantifying the nonlinearity and h a nonlinear function whose harmonics are found through the harmonic balance method. As an example, in (5.9) if one considers the ohmic losses R tending to zero arrives at a situation where this method is applicable. These methods suffer from the same limitations and essentially do not differ by those previously discussed. In all these methods the oscillator is viewed as nearly sinusoidal because the parameters lie close to the Hopf curve or as a linear with a very weak nonlinear perturbation.

Apart from these, qualitative methods have also been proposed. The most classical rigorous study of autonomous nonlinear oscillators is that in [41, 18] where the bifurcations associated with the system (5.20) are studied in order to determine the behavior of the Colpitts oscillator. This approach is similar to the nonlinear dynamics approach we follow here and will be presented in the next Chapter. Other studies have introduced the notion of chaos in electronics literature investigating the Chua's circuit [31, 32]. Qualitative approaches [14] have been presented for the MOS implementation of the differential LC oscillator, but have been limited to the numerical analysis of the particular system rather than analytically showing the universal behavior of differential LC oscillators.

5.5.2 Phase Reduction and Isochrons

The concept of phase reduction was first introduced in the electronics literature in [15], where it was used to determine the effect of noise on the oscillator. Clearly the noise affects only the asymptotic phase (c.f. the discussion on Chapter 3) and the approximate linear relation

$$\dot{\theta} = \omega + Q^T(\theta)g(\theta), \quad (5.27)$$

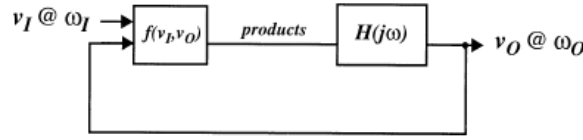


Figure 5.7: Block diagram of the injection-locking mechanism used in the Harmonic Balance method [58].

was used to show that a constant phase difference was induced if the noise was deterministic. Moreover stochastic properties of the phase were obtained in the case of white noise. The vector Q was referred to as the "perturbation projection vector" but is exactly the same vector that we used in Chapter 3 when we approximated linearly $\nabla\theta$ on the limit cycle. The locking state is interpreted as the state where the phase difference between the oscillator and the perturbation is constant and corresponds to the equilibrium of (5.27). Next in [55, 56] the notion of isochrons was introduced and linear and quadratically approximation near the limit cycle were obtained. These approximations have diminished significance in view of the Koopman operator framework, since one does not need to use approximations. No further work on isochrons and how they are related to the synchronization properties of a system are found in electronics literature.

5.5.3 Locking to Periodic Forcing

Synchronization properties of oscillators have attracted much interest and the corresponding methods used can be divided into three families: harmonic balance, averaging and phase reduction. We discuss each of them and demonstrate their limitations.

Harmonic Balance Approach

We assume that a periodic signal is injected into an oscillator. The passive elements are assumed to form a bandpass filter with central frequency ω equal to that of unperturbed oscillator. Fig. 5.7 illustrates the block diagram of the system [58]. The output voltage is assumed purely harmonic $v_o = B \cos(\omega_0 t + \phi)$ and the input signal is $v_i(t) = Ah(\omega_{in} t)$ where h is a 2π periodic function. The function f accounts for the nonlinear part of the circuit. Then, supposing that locking between the input and output signals occurs, $\omega_0 = N\omega_{in}$ and hence,

$$f(v_i, v_o) = f(Ah(\omega_{in} t), B \cos(\omega_0 t + \phi)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(A, B, \phi) \cos(n\omega_0 t) + b_n(A, B, \phi) \sin(n\omega_0 t). \quad (5.28)$$

Now, assuming that ω_0 lies sufficiently close to ω and using standard Harmonic Balance arguments one has,

$$Ae^{j\phi} = H(j\omega) (a_1(A, B, \phi) - jb_1(A, B, \phi)). \quad (5.29)$$

In (5.29) the bandpass filter H usually has the form $H(j\omega) = H_2(j(\omega - \omega_0))$ so that one is able to deduce the maximum value of $|\omega - \omega_0|$ by maximizing it with respect to ϕ .

In order to be more specific, we consider the case of a differential LC oscillator which is forced such that $I_0(t) = \Gamma h(\omega_{in} t; A)$, where $h(\cdot; A)$ is 2π periodic and $h(\omega_{in} t; 0) = 1$. The filter is approximated as,

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0. \quad (5.30)$$

We assume that the output voltage has the form

$$v = v_V B \cos(\omega_{out} t + \theta), \quad B > 0. \quad (5.31)$$

Expanding the periodic signal I_0 in Fourier series,

$$\frac{I_0(t)}{\Gamma} = a_0(A) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(A) \cos(nN\omega_{out} t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(A) \sin(nN\omega_{out} t), \quad (5.32)$$

where

$$a_n(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi; A) \cos(n\phi) d\phi, \quad c_n(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi; A) \sin(n\phi) d\phi \quad (5.33)$$

Similarly expanding $f(v/v_r)$ yields,

$$f(v/V_r) = b_0(B) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(B) \cos(n\omega_{out}t + n\theta), \quad b_n(B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(B \cos \phi) \cos(n\phi) d\phi. \quad (5.34)$$

The parity of f implies $b_{2n} = 0$ and thus the series in Eq. (5.34) contain only odd terms. Multiplying (5.34) with (5.31) yields,

$$\begin{aligned} -\frac{I_0(t)f(v/V_r)}{\Gamma} &= 2a_0(A) \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}(B) \cos[(2m-1)(\omega_{out}t + \theta)] \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n(A) b_{2m-1}(B) \left[\cos(\alpha_{n,m}(t)) + \cos(\beta_{n,m}(t)) \right] \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_n(A) b_{2m-1}(B) \left[\sin(\alpha_{n,m}(t)) + \sin(\beta_{n,m}(t)) \right], \end{aligned} \quad (5.35)$$

where

$$\alpha_{n,m}(t) = (nN - (2m-1))\omega_{out}t - (2m-1)\theta, \quad \beta_{n,m}(t) = (nN - (2m-1))\omega_{out}t + (2m-1)\theta. \quad (5.36)$$

Next we assume that the bandpass filter H rejects all components away from ω . Considering that ω_{out} lies sufficiently close to ω , the indices m, n of the terms of the double summation in (5.35) that pass through the filter must satisfy,

$$nN - (2m-1) = \pm 1 \Rightarrow m = \frac{nN + 1 \mp 1}{2}. \quad (5.37)$$

Let S be the set in which n belongs so that (5.37) gives integer values for m . Applying the filter to the terms in (5.35) and using phasors, one has,

$$v_r B e^{j\theta} = \frac{2H_0\Gamma}{1 + 2jQ\frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \left[a_0(A)b_1(B)e^{j\theta} + \sum_{n \in S} (a_n(A) - jc_n(A)) \left(b_{nN-1}(B)e^{-j(nN-1)\theta} + b_{nN+1}(B)e^{j(nN+1)\theta} \right) \right], \quad (5.38)$$

where $\Delta\omega = \omega_{out} - \omega$. Now if we set

$$\begin{aligned} N(\theta) &= \sum_{n \in S} a_n(A) d_n(B) \sin(nN\theta) - c_n(A) s_n(B) \cos(nN\theta) \\ D(\theta) &= b_1(B) a_0(A) + \sum_{n \in S} a_n(A) s_n(A) \cos(nN\theta) + c_n(A) d_n(B) \sin(nN\theta), \end{aligned} \quad (5.39)$$

where $s_n(B) = b_{nN+1}(B) + b_{nN-1}(B)$ and $d_n(B) = b_{nN+1}(B) - b_{nN-1}(B)$. The maximum locking range is now given by

$$\Delta\omega_{\max} = \frac{\omega}{Q} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{N(\theta)}{D(\theta)}. \quad (5.40)$$

The above is a typical method to analyze the synchronization properties of a circuit under periodic forcing. It has many limitations: the output is assumed harmonic, many nonlinear dynamical phenomena are neglected, the filter is assumed to be first order. Essentially it is true only under very weak injection and under the assumption that the unperturbed limit cycle is nearly sinusoidal. Besides, one assumes that the frequency of the free running oscillator is $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ which is not true (it might be the case that they are not even close). In its limitation it is very close to those of weakly nonlinear oscillators and first order phase reduction models and does add anything new in the proposed methods.

Averaging and Weakly Varying Phase-Amplitude

The idea of averaging has already been discussed in the derivation of (3.168) and is actually a rigorous method, when it is applicable, but sets serious limitations in the systems. To show the theory behind it, following [21], we consider a system

$$\dot{x} = \epsilon f(x, t, \epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.41)$$

where ϵ is sufficiently small, f is C^r , $r \geq 2$, in its arguments bounded on bounded sets and periodic in T . We also consider the averaged equation,

$$\dot{y} = \frac{\epsilon}{T} \int_0^T f(y, t, 0) dt. \quad (5.42)$$

Then, if ϵ is sufficiently small, x, y are $O(\epsilon)$ close on a time scale $t \sim 1/\epsilon$, provided that at $t = 0$ they are $O(\epsilon)$ close. Hence the averaging is meaningful only for a very small parameter ϵ .

There are many works [10, 7, 6, 8] that follow this approach together with the slowly varying phase-amplitude method. We follow [10] as an example. We consider the MOS differential LC oscillator, but the resistor is assumed to be connected in parallel with the inductor instead of series connected. Under weak forcing decompose $i = -f(v, v_{in})$ into two components, namely $i = i_{nl}(v) + i_{in}(v, v_{in})$ and approximate $i_{in}(v, v_{in}) = i_{in}(v, 0) + g(v)v_{in}$. The differential equation describing the model is now written (not normalized)

$$\ddot{v} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{v} + \omega_0^2 v = -\frac{\omega_0 R}{Q} \frac{d}{dt} (i_{nl}(v) + i_{in}(v, v_{in})). \quad (5.43)$$

Suppose that $v_{in} = V_{in} \cos(\omega_{in} t)$, $v = V(t) \cos(\omega t + \theta(t))$, where $\omega_{in} = n\omega$ and ω is close to ω_0 . Then assuming that $V(t), \theta(t)$ vary slowly compared to ωt , one approximates

$$\dot{v} = -\omega V(t) \sin(\omega t + \theta(t)), \quad (5.44)$$

and obtains the following system after averaging

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \left(V + R \left(I_{nl}^c + I_{in0}^c + \frac{V_{in}}{2} (G_{n-1} + G_{n+1}) \cos(n\theta) \right) \right) \\ \dot{\theta} &= \Delta\omega + \frac{\omega_0 R V_{in}}{4QV} (G_{n-1} - G_{n+1}) \sin(n\theta), \end{aligned} \quad (5.45)$$

where $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $I_{nl}^c(V, \theta)$ is the first harmonic of $i_{nl}(v)$, $G_k(V, \theta)$ denotes k -th harmonic of $g(v)$ and $I_{in0}^c(V, \theta)$ is the first harmonic of $i_{in}(v, 0)$. Averaging is equivalent to retaining only the first harmonic at ω , which in turn is essentially equivalent to the Harmonic Balance method. As we explained in Section 5.3, the nonlinearity has the form

$$f(v, v_{in}) = av \left(1 - \left(\frac{v}{V_{dd}} \right)^2 \right) + Aav \left(1 - \left(\frac{v}{V_{dd}} \right)^2 \right) v_{in}. \quad (5.46)$$

Here we approximate $1 - (v/V_{dd})^2$ by 1 and hence (5.46) by,

$$f(v, v_{in}) = av(1 - cv^2 + kv_{in}), \quad c = a/V_{dd}^2, \quad k = A/a. \quad (5.47)$$

Then assuming $n = 2$ (5.45) becomes,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{\omega_0 a R}{2Q} \left(\frac{1}{aR} - 1 + \frac{3}{4} c V^2 - \frac{k V_{in}}{2} \cos(2\theta) \right) \\ \dot{\theta} &= \Delta\omega - \frac{a \omega_0 k V_{in} R}{4Q} \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (5.48)$$

The equilibrium of (5.48) corresponds to the locked state of the system and it is straightforward to see that, a fixed point exists provided that

$$|\Delta\omega| \leq \frac{\omega_0 akRV_{in}}{4Q} = \Delta\omega_{\max}, \quad (5.49)$$

which gives the maximum locking range. Linearizing around the equilibrium, one directly concludes that the solution is stable.

One should immediately notice the similarity in the above approach and the Harmonic Balance. In both cases, it has assumed that the free-running oscillator is nearly sinusoidal with frequency close to ω_0 , the output frequency is close to the free-running and only the resonance terms whose harmonic components are located at ω_0 matter (either a filter rejects other components, or averaging them, they have no contribution). Moreover, in this case one assumes that the amplitude and the phase of the output signal vary slowly. Inspecting the result in (5.49), one would conclude that the locking range increases linearly with the input amplitude and is symmetrical around ω_0 . However, this is not true and as shown in Chapter 3, a similar result is derived under linear approximation of the phase model, which we will review in the following. Essentially, (5.49) provides the slope of the borders of the Arnold Tongues which coincides with the locking range only for infinitesimal amplitudes.

Thus, we conclude that these assumptions are too restrictive and hold only for nearly sinusoidal free-running oscillators, which are perturbed by a weak forcing. In essence, the two methods are nearly identical and suffer from serious limitations, only to yield an approximate result for the locking range. The latter will be shown in the following for the third family of methods.

Phase Reduction Models

Phase Reduction Models have appeared recently [25, 26] as unifying the theory of synchronization in electronic oscillators. Essentially the proposed method is exactly similar to that described in Section 3.6.1. Specifically, we assume that the free-running (unperturbed oscillator) has frequency ω_0 and the perturbation is periodic of frequency ω . Then if the phase of the oscillator is $\theta = \phi + \omega t$, the phase equation is approximated by

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + Q^T(\phi + \omega t)g(t), \quad \Delta\omega = \omega_0 - \omega, \quad (5.50)$$

where the vector the perturbation is assumed purely time-dependent (no dependence on the state variable) and is denoted by g . It is further assumed that g has only one nonzero entry (corresponding to one source), i . The equation (5.50) is further approximated by the averaged equation,

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{1}{T} \int_0^T Q^T(\phi + \omega t)g(t)dt = \Delta\omega + h(\phi). \quad (5.51)$$

Then, the locking range is given by

$$\Delta\omega_{\max} = \max_{\phi} |h(\phi)|, \quad (5.52)$$

which in case of sinusoidal forcing yields $\max_{\phi} |h(\phi)| = A|\Gamma_1|/2$, where $|\Gamma_1|$ is the amplitude of the first harmonic of the Q function. Similar arguments hold for higher synchronization ratios. It is clear that this approach is exactly identical to that of Section 3.6.1 and has already been proposed in [50, 28] outside the electronic literature. We refer to the above model as the classical phase model.

We summarize again the serious assumptions and corresponding limitations of this approach.

- The action variable has been completely omitted. Moreover the gradient $\nabla\theta$ has been approximated by the its values on the limit cycle. This is true only for very weak forcing.
- The phase equation has been averaged. As has already been mentioned in the discussion of previous methods, this imposes very restrictions on the forcing amplitude.
- The maximum locking range is shown to be symmetric around ω_0 and proportional to the amplitude of the forcing. This is exactly equivalent to the Harmonic Balance and the Averaging methods. The appropriate interpretation is that this reduced, approximate phase model gives the tangent of the Arnold tongues (resonance regions) rather than the borders themselves.

In [26], an attempt has been made to deal with the effect of the perturbation on the amplitude of the oscillator. It is assumed that the oscillator is nearly sinusoidal with amplitude A_0 and that the perturbation's effect is a small amplitude deviation $A(t)$. The form of the oscillation is assumed to remain unchanged. This deviation is defined as,

$$A(t) = \sqrt{\frac{E(t)}{E_0(t)}} - 1, \quad (5.53)$$

where $E(t)$ is an energy-like variable of the circuit and the subscript 0 denotes the absence of forcing. The deviation $A(t)$ is assumed to be given as the response of an LTI system to the perturbation,

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\tau)D(t-\tau, \omega\tau + \phi)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} g_i(t-\tau)D(\tau, \omega(t-\tau) + \phi)d\tau, \quad (5.54)$$

where ϕ is defined as previously and $D(t, \theta)$ is a function vanishing at $t = \infty$. Next [26] averages (5.54) to obtain the average deviation of the amplitude,

$$A(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{\infty} g_i(t)D(\tau, \omega t + \theta)d\tau dt. \quad (5.55)$$

This amplitude deviation is assumed to have the following effect on the phase equation (5.51),

$$\dot{\phi} = \Delta\omega + \frac{h(\phi)}{1 + A(\phi)}. \quad (5.56)$$

In the above approach, the amplitude is allowed to attain small deviations when the forcing is applied but the qualitative characteristics of the waveform remain unchanged. This maintains the restriction of weak forcing and does not solve it as is mentioned in [26]. Averaging imposes the usual restrictions as well. Essentially, it is like approximating the action-angle system (3.202) by

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega + \nabla(\theta, r_1) \cdot g(t) \\ \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 + \nabla r_1(\theta, 0) \cdot g(t), \end{aligned} \quad (5.57)$$

and averaging the action equation. But still there is no rigorous derivation of (5.56), from (5.57). (5.57). Hence, the gradients are again approximated from those on the limit cycle, limiting the applications of this method again only to weak injections. Theoretical considerations related to the validity of the assumption also arise.

To conclude, the Harmonic Balance, the Averaging and the classic phase model (without the effect on amplitude) are essentially equivalent: the synchronization characteristics are determined by the mixing of harmonics that result at a fundamental harmonic either through averaging arguments or because of the existence of a filter. The action variable is completely neglected and all the dynamics is assumed to evolve in a very close neighborhood of the limit cycle. Examining 3.6, it is clear that these methods yield the tangents of the borders of the resonance regions. Moreover it is clear that for synchronization case discussed in Chapter 3, these approaches fail to describe properly the dynamical phenomena associated with locking. The consideration of the effect of the amplitude deviation on the phase in the model proposed in [26] and discussed briefly above, is still restrictive: it essentially corresponds to the approximation of the gradients of the action angle variables by those computed on the limit cycle together with averaging, imposing thus the requirement of weak forcing. The derivation also is theoretically justified by the the action-angle system. No such approach actually provides a unifying framework, as opposed to the Koopman operator theory, and would fail to describe properly the dynamics associated with the periodically perturbed oscillators that we will address in the following.

Chapter 6

Nonlinear Dynamics of Electronic Oscillators

In this chapter we study the nonlinear dynamics associated with each of the two classes of electronic oscillators we modeled in Chapter 4: the differential LC and the Colpitts.

6.1 Nonlinear Dynamics of Differential LC Oscillators

We consider the dynamical system (5.11),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Qy + QGf(x) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q,\end{aligned}\tag{6.1}$$

with f at least C^4 , odd and $f^{(3)}(0) < 0$. We first show analytically that at least in a neighborhood of the origin, regardless of the exact form of f , all systems having the form (6.1) behave qualitatively the same. Let $f(x) = x - cx^3 + O(x^5)$. We introduce the following change of variables,

$$\begin{aligned}x_1 &= 3Q\sqrt{Gc}x, \\ x_2 &= 9Q^2\sqrt{Gc}(-Qy + QGf(x)), \\ \tilde{\tau} &= \frac{\tau}{3Q}, \quad \mu_1 = 9Q^2(G - 1), \quad \mu_2 = 3(Q^2G - 1).\end{aligned}\tag{6.2}$$

transforming (6.1) into,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3 + O(x_1^5).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Truncating the system (6.3) results in the Bogdanov-Takens normal form with \mathbb{Z}_2 symmetry (under $x \rightarrow -x$) [35, 60], which we study in detail. Henceforth, when referring to (6.3) we will mean the truncating system.

6.1.1 Local Bifurcations

The origin is an equilibrium for any μ_1, μ_2 . The Jacobian matrix around the origin is given by

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}\tag{6.4}$$

with $\tau = \mu_2$ and $\Delta = -\mu_1$. It is clear that at $\mu_i = 0$ the Jacobian matrix admits a double zero eigenvalue, corresponding to a codim-2 Bogdanov-Takens bifurcation (from which the name of the normal form arises). In the following we study the bifurcations with respect to μ_1, μ_2 .

For $\mu_1 < 0$ and $\mu_2 < 0$ the origin is stable. At $\mu_2 = 0$, $\mu_1 < 0$ a Hopf bifurcation (denoted $H^{(1)}$) occurs. At this point, using the transformation

$$z = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\mu_1} \\ -\mu_1 & 0 \end{bmatrix},\tag{6.5}$$

we can bring the system into the form

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-\mu_1} \\ \sqrt{-\mu_1} & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} f_1(z) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

where

$$f_1(z) = -\left(\mu_1\sqrt{-\mu_1}z_2 - \mu_1\mu_2z_1 + \mu_1\sqrt{-\mu_1}z_2^3 - \mu_1^2z_2^2z_1\right) / \mu_1. \quad (6.7)$$

Hence, changing into polar coordinates,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= d\mu_1r + ar^3 + O(\mu_1^2r, \mu_1r^3, r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu_1 + br^2 + O(\mu_1^2, \mu_1r^2, r^4), \quad \omega = \sqrt{-\mu_1}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

we conclude that $a = \mu_1/8 < 0$, from which it follows that the Hopf bifurcation is supercritical and a stable limit cycle bifurcates.

At $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ the Jacobian matrix in (6.4) has a zero eigenvalue. From (6.3) we see that at $\mu_1 = 0$, two symmetric equilibria at $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$ bifurcate from the origin. For $\mu_1 > 0$, we see from (6.4) that the origin becomes a saddle gaining a stable manifold while the Jacobian matrix at the symmetric equilibria is,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu_1 & \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

from which it follows that the symmetric equilibria are born unstable. Hence a subcritical Pitchfork (denoted $F^{(1)}$) bifurcation at $\mu_1 = 0$ occurs. From (6.9) we see that the symmetric equilibria gain stability via a Hopf bifurcation (denoted $H^{(2)}$) at $\mu_1 = \mu_2$. In the same manner as with the Hopf bifurcation at the origin, we can prove that the Hopf bifurcation at $\mu_1 = \mu_2$ is subcritical giving rise to two symmetric unstable limit cycles.

No other local bifurcations associated with equilibria exist. Now we turn our attention to global bifurcations associated with the periodic orbits. It is clear that for $\mu_2 < 0$, no limit cycles exist (neither stable nor unstable), since $\nabla \cdot f(x) < 0$. Hence, global bifurcations must occur that cause the destruction of the stable and unstable limit cycles. In the study of global bifurcations we will need the Melnikov method which we introduce in the following subsection.

6.1.2 Melnikov's Method

We consider two dimensional, perturbed Hamiltonian systems of the form,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y, \epsilon, \mu) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y, \epsilon, \mu), \end{aligned} \quad (6.10)$$

where H is the Hamiltonian, μ is a vector of parameters, ϵ is a perturbation parameter and f, g are assumed to depend smoothly on their arguments. In the following we denote by $h(x, y, \epsilon, \mu) = (f(x, y, \epsilon, \mu), g(x, y, \epsilon, \mu))$. We assume that [60, 21],

- For $\epsilon = 0$, (6.10) has a homoclinic orbit Γ connecting the hyperbolic saddle point x_0 with itself.
- For $\epsilon = 0$, (6.10) has a one-parameter family of periodic orbits $\Gamma_h : (x_h(t), y_h(t))$ with period T_h for $h \in I$, where I is some interval.

First we study how the periodic orbits persist under the perturbation. We consider a cross section Σ and for any point $z \in \Sigma$ we define the Poincaré return map $P(h, \epsilon, \mu)$ and the function that gives the difference between the two levels of the Hamiltonian,

$$d(h, \epsilon, \mu) = H(P(h, \epsilon, \mu)) - h, \quad h = H(z). \quad (6.11)$$

Namely, we are interested in the difference between the values of the Hamiltonian at the beginning point on Σ and at the end point on Σ . Let $q_{h,\epsilon,\mu}(t) = (x_{h,\epsilon,\mu}(t), y_{h,\epsilon,\mu}(t))$ denote the orbit of the perturbed system (6.10) starting from a point z which lies in the intersection of Σ with the h -level set of the Hamiltonian. Taylor expanding d yields [21]

$$\begin{aligned} d(h, \epsilon, \mu) &= \int_0^{T(h,\epsilon,\mu)} \dot{H}(q_{h,\epsilon,\mu}(t)) dt \\ &= \int_0^{T(h,\epsilon,\mu)} \nabla H(q_{h,\epsilon,\mu}(t)) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}(q_{h,\epsilon,\mu}(t)) + \epsilon f(q_{h,\epsilon,\mu}(t), \epsilon, \mu), -\frac{\partial H}{\partial x}(q_{h,\epsilon,\mu}(t)) + \epsilon g(q_{h,\epsilon,\mu}(t), \epsilon, \mu) \right) dt \\ &= \epsilon \int_0^{T(h,\epsilon,\mu)} \nabla H(q_{h,\epsilon,\mu}(t)) \cdot h(q_{h,\epsilon,\mu}(t), 0, \mu) dt + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (6.12)$$

where $T_{h,\epsilon,\mu}$ is the time that $q_{h,\epsilon,\mu}$ needs to return to Σ . For ϵ small $\Gamma_{h,\epsilon,\mu}$ persists as periodic orbits [60] and

$$T(h, \epsilon, \mu) = T_h + O(\epsilon), \quad x_{h,\epsilon,\mu} = x_h + O(\epsilon), \quad y_{h,\epsilon,\mu} = y_h + O(\epsilon). \quad (6.13)$$

Hence, approximating (6.12) T, x, y at first order yields

$$d(h, \epsilon, \mu) = \epsilon \int_0^{T_h} \nabla H(x_h(t), y_h(t)) \cdot h(x_h(t), y_h(t), 0, \mu) dt + O(\epsilon^2). \quad (6.14)$$

Equivalently, (6.14) can be written in the following forms

$$\begin{aligned} d(h, \epsilon, \mu) &= \epsilon \int_0^{T_h} (-\dot{y}_h, \dot{x}_h) \cdot \left(f(x_h(t), y_h(t), 0, \mu), g(x_h(t), y_h(t), 0, \mu) \right) dt + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \oint_{\Gamma_h} g(x, y, 0, \mu) dx - f(x, y, 0, \mu) dy + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \iint_{\text{int } \Gamma_h} \nabla \cdot h(x, y, 0, \mu) dx dy + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (6.15)$$

where the last equality follows from Green's Theorem. Thus, it is natural to define the Melnikov function as follows.

Definition 6.1.1. We define the (first order) Melnikov function along a limit cycle as,

$$M(h, \mu) = \int_0^{T_h} (\dot{y}_h, -\dot{x}_h) \cdot \left(f(x_h(t), y_h(t), 0, \mu), g(x_h(t), y_h(t), 0, \mu) \right) dt, \quad h \in I, \quad (6.16)$$

which gives the first order approximation of the displacement d .

From the definitions it follows that a limit cycle persists under the perturbation if h is a zero of $d(h, \epsilon, \mu)$ and the Melnikov function gives the first order approximation of d with respect to ϵ . We have the following result.

Theorem 6.1.1. If there exists a $h_0 \in I$ and μ_0 such that

$$M(h_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \mu}(h_0, \mu_0) \neq 0, \quad (6.17)$$

then for sufficiently small ϵ (6.10) has a hyperbolic limit cycle Γ_ϵ for $\mu = \mu_0 + O(\epsilon)$, namely Γ_{h_0} persists as a periodic orbit for small perturbations.

Proof. See [2]. □

Next we are interested in the persistence of the homoclinic orbit. This case is more complicated. First we consider a fixed μ and drop the explicit dependence of all variables on this parameter. Every $p \in \Gamma$ can be parametrized as $p = q_0(-t_0)$ where $q_0(t) = (x_1(t), y_1(t))$ denotes the homoclinic orbit and $t_0 \in \mathbb{R}$. A vector π_p normal to Γ at the point p is given by $\pi_p = \nabla H(q_0(-t_0))$. Now for small ϵ , the saddle point x_0 persists as a saddle equilibrium $x_{\epsilon,0} = x_0 + O(\epsilon)$ and depends smoothly on ϵ . Accordingly, the local stable and unstable manifolds of $x_{\epsilon,0}$, $W_{loc}^s(x_{\epsilon,0})$ and $W_{loc}^u(x_{\epsilon,0})$ are ϵ close to the unperturbed manifolds, $W_{loc}^s(x_0)$ and $W_{loc}^u(x_0)$. The global stable and unstable manifolds are now given by

$$\begin{aligned} W^s(x_{\epsilon,0}) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi(W_{loc}^s(x_{\epsilon,0}), t) \\ W^u(x_{\epsilon,0}) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi(W_{loc}^u(x_{\epsilon,0}), t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Let $p \in \Gamma$. Then $W^s(x_0)$ and $W^u(x_0)$ intersect transversely π_p at p and hence $W^s(x_{\epsilon,0})$ and $W^u(x_{\epsilon,0})$ intersect π_p transversely at points p_ϵ^s and p_ϵ^u . Generally the points of intersection might not be unique. We choose p_ϵ^s and p_ϵ^u to be the points closest to $x_{\epsilon,0}$ in the sense that the perturbed flow does not intersect π_p again in positive and negative times, respectively. It can be proven that with this definition p_ϵ^u and p_ϵ^s are unique [60]. The signed distance between $W^s(x_{\epsilon,0})$ and $W^u(x_{\epsilon,0})$ at p is now defined as,

$$d(p, \epsilon) = d(t_0, \epsilon) = \frac{(p_\epsilon^u - p_\epsilon^s) \cdot \nabla H(q_0(-t_0))}{\|\nabla H(q_0(-t_0))\|}. \quad (6.19)$$

We also remark that, if $q_\epsilon^s(t)$ and $q_\epsilon^u(t)$ denote the orbits of the perturbed system with initial condition p_ϵ^s and p_ϵ^u , respectively, then they are $O(\epsilon)$ close to the orbit $q_0(t - t_0)$ of the unperturbed vector field, for positive and negative times, respectively. The same holds for their time derivatives as well.

Now approximating $d(t_0, \epsilon)$ at first order around $\epsilon = 0$, we have

$$d(t_0, \epsilon) = d(t_0, 0) + \epsilon \frac{\partial d}{\partial \epsilon}(t_0, 0) + O(\epsilon^2) = \epsilon \frac{\nabla H(q_0(-t_0)) \cdot (q_1^u - q_1^s)}{\|\nabla H(q_0(-t_0))\|} + O(\epsilon^2), \quad (6.20)$$

where

$$q_1^u = \left. \frac{\partial q_\epsilon^u}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad q_1^s = \left. \frac{\partial q_\epsilon^s}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (6.21)$$

If we define the Melnikov function by,

$$M(t_0) = \nabla H(q_0(t_0)) \cdot (q_1^u - q_1^s), \quad (6.22)$$

then it is clear that it is the lowest order approximation in the Taylor expansion of the distance between $W^u(x_{\epsilon,0})$ and $W^s(x_{\epsilon,0})$ at the point p . In order to compute explicitly the function $M(t_0)$, we need to consider the time-dependent Melnikov function,

$$M(t, t_0) = \nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot (q_1^u(t) - q_1^s(t)), \quad (6.23)$$

where

$$q_1^u(t) = \left. \frac{\partial q_\epsilon^u(t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad q_1^s(t) = \left. \frac{\partial q_\epsilon^s(t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad (6.24)$$

and $q_\epsilon^u(t)$, $t < 0$, (respectively $q_\epsilon^s(t)$, $t > 0$) denotes the orbit of the perturbed vector field with $q_\epsilon^u(0) = q_\epsilon^u$ ($q_\epsilon^s(0) = q_\epsilon^s$). Now, using the fact that each of the q_1^u and q_1^s satisfies the perturbed vector field and using the properties of the Hamiltonian, it is straightforward to show that [60],

$$\frac{d}{dt} (\nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot q_1^{u,s}(t)) = \nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot h(q_0(t - t_0), 0). \quad (6.25)$$

To simplify the notation, let $\Delta^{u,s}(t) = \nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot q_1^{u,s}(t)$. Integrating (6.25), we get

$$\begin{aligned} \Delta^u(0) - \Delta^u(-a) &= \int_{-a}^0 \nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot h(q_0(t - t_0), 0) dt \\ \Delta^s(a) - \Delta^s(0) &= \int_0^a \nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot h(q_0(t - t_0), 0) dt, \end{aligned} \quad (6.26)$$

for some $a > 0$, from which it follows that

$$M(t_0) = \Delta^u(0) - \Delta^s(0) = \Delta^s(a) - \Delta^u(-a) + \int_{-a}^a \nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot h(q_0(t - t_0), 0) dt. \quad (6.27)$$

Recalling now that $q_1^{u,s}$ is bounded [60] as $t \rightarrow \infty$ and $t \rightarrow -\infty$, respectively, and that

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \nabla H(q_0(t - t_0)) = 0, \quad (6.28)$$

we conclude that

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0(t - t_0)) \cdot h(q_0(t - t_0), 0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0(t)) \cdot h(q_0(t), 0) dt. \quad (6.29)$$

Similar to (6.15), one can write equivalent forms for (6.29),

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0(t)) \cdot h(q_0(t), 0) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0(t)) \cdot (f(q_0(t), 0), g(q_0(t), 0)) dt \\ &= \oint_{\Gamma} g(x, y, 0) dx - g(x, y, 0) dy \\ &= \iint_{\text{int } \Gamma} \nabla \cdot h(x, y, 0) dx dy. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Thus we note that the Melnikov function is constant for every t_0 , which shows that, at first order, the distance between the stable and unstable manifolds $W^u(x_{\epsilon,0})$ and $W^s(x_{\epsilon,0})$ is constant at every point p . Hence for a fixed μ and ϵ sufficiently small, the stable and unstable manifolds either coincide ($M = 0$) or do not intersect at all ($M \neq 0$). Now considering the Melnikov function as a function of the parameter μ , we summarize the previous analysis in the following definition similar to Definition 6.1.1.

Definition 6.1.2. *The first order Melnikov function evaluated on a homoclinic orbit is defined as*

$$M(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0(t)) \cdot h(q_0(t), 0, \mu) dt. \quad (6.31)$$

By simple inspection of the two Definitions 6.1.1 and 6.1.2, we observe that the only difference lies in the evaluation of the contour integral, although the derivation in each case is different. Similar to Theorem 5.1.1, we have the following Theorem regarding the effect of the parameter μ .

Theorem 6.1.2. *If there exists a μ_0 such that*

$$M(\mu_0) = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \mu}(\mu_0) \neq 0, \quad (6.32)$$

then for ϵ sufficiently small the stable and unstable manifolds of $x_{\epsilon,0}$, $W_{\epsilon,\mu}^s(x_{\epsilon,0})$ and $W_{\epsilon,\mu}^u(x_{\epsilon,0})$, coincide for $\mu = \mu_0 + O(\epsilon)$.

Proof. See [60]. □

Now we have developed all the necessary tools to study the global bifurcations associated with the limit cycles of (6.1).

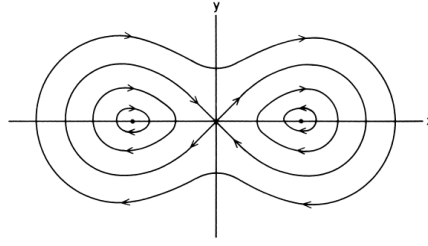


Figure 6.1: Phase portrait of the Duffing oscillator from [60].

6.1.3 Global Bifurcations

We use the Melnikov method to study the global bifurcations associated with system (6.3) for $\mu_1, \mu_2 > 0$, but first we need to transform it to the form (6.10). Following [57], we introduce the following change of variables

$$x = \epsilon u, \quad y = \epsilon^2 v, \quad \mu_1 = \epsilon^2, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \nu, \quad t \rightarrow t/\epsilon, \quad (6.33)$$

which transforms (6.3) into

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^2 + \epsilon (\nu v - u^2 v). \end{aligned} \quad (6.34)$$

System (6.34) is now of the form (6.10) and in particular it corresponds to a perturbed Duffing Oscillator. For $\epsilon = 0$, the Hamiltonian is given by

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4, \quad (6.35)$$

and its phase portrait is well known and depicted in Fig. 6.1. Two symmetric homoclinic orbits Γ_0^\pm (\mathbb{Z}_2 symmetry) connect the origin (which is a saddle) with itself and correspond to the zero level set of H . We note that for $-1/4 < h < 0$, each level set of $H(u, v) = h$ corresponds to two symmetric periodic orbits, which collide at $h = 0$ forming the symmetric homoclinic orbits. For $h > 0$ a unique symmetric periodic orbit exists.

Due to symmetry it suffices to consider only the Γ_0^+ orbit in order to investigate the persistence of the homoclinic orbit. It is straightforward to see that a parametrization of

$$\Gamma_0^+ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid H(u, v) = 0 \text{ and } u > 0\}, \quad (6.36)$$

is

$$q_0(t) = (u_0(t), v_0(t)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\cosh(t)}, -\frac{\sqrt{2} \tanh(t)}{\cosh(t)} \right). \quad (6.37)$$

Hence, evaluating the Melnikov function along q_0 , we have

$$\begin{aligned} M(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0(t)) \cdot (f(q_0, 0, \nu), g(q_0, 0, \nu)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \nu v_0^2 - u_0^2 v_0^2 dt \\ &= \frac{4}{3}\nu - \frac{16}{15}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Thus, $M(\nu) = 0$ for $\nu = 4/5$, and by Theorem 5.1.2 we conclude that for sufficiently small ϵ , system (6.34) possesses a homoclinic orbit at $\nu = 4/5 + O(\epsilon)$ or equivalently returning to the μ parameters, a homoclinic bifurcation curve (denoted P)

$$\mu_2 = \frac{4}{5}\mu_1 + O\left(\mu_1^{3/2}\right). \quad (6.39)$$

Thus we have proved the existence of a global homoclinic bifurcation of limit cycles and (6.39) gives the linear approximation of the bifurcation curve for μ_1 small (equivalently the tangent at $\mu_1 = 0$).

Now the difficult part of the analysis of global bifurcations is to determine the exact number of limit cycles that exist after the homoclinic bifurcation and find the saddle-node (of limit cycles bifurcation) locus (if it exists). The complete analysis with all the details can be found in [11] or [13], here we state the main results omitting some technical proofs. We evaluate the Melnikov function along a periodic orbit $\gamma_h(t)$ of (6.34). Thus,

$$\begin{aligned} M(h, \nu) &= \int_0^{T_h} (\dot{v}_h, -\dot{u}_h) \cdot \left(f(u_h(t), v_h(t), 0, \nu), g(u_h(t), v_h(t), 0, \nu) \right) dt \\ &= \int_0^{T_h} \dot{u} (\nu v - u^2 v) dt \\ &= \nu I_1(h) - I_2(h). \end{aligned} \quad (6.40)$$

It is clear that $I_1(h) > 0$ (Green's Theorem) and hence one can consider the function

$$N(h, \nu) = \nu - R(h), \quad R(h) = \frac{I_2(h)}{I_1(h)}, \quad (6.41)$$

and study its zeros. Considering v as a function of u, h (since $H(u, v) = h$), a straightforward calculation of the derivative of $I_{1,2}$ with respect to h , results in the following system [11]

$$\begin{aligned} h \left(h + \frac{1}{4} \right) \dot{I}_1 &= \left(\frac{3}{4}h + \frac{1}{4} \right) I_1 - \frac{5}{16} I_2 \\ h \left(h + \frac{1}{4} \right) \dot{I}_2 &= -1\frac{1}{4}h I_1 + \frac{5}{4}h I_2, \end{aligned} \quad (6.42)$$

where dot denotes differentiation with respect to h . From (6.42) one can immediately derive the differential equation that $R(h)$ satisfies, which is the following Ricatti equation,

$$4h(4h + 1)\dot{R} - 5R^2 - (8h - 4)R + 4h = 0. \quad (6.43)$$

Using (6.43) and the definition of $R(h)$ we can prove the following properties for R ,

- $\lim_{h \rightarrow -1/4} R(h) = 1$
- $R(0) = 4/5$
- $\lim_{h \rightarrow \infty} R(h) = \infty$
- $R(h) > 1/2$ for $h > 0$
- There exists a unique $h^* > 0$ such that $\dot{R}(h^*) = 0$. Further $\dot{R}(h^*) > 0$ for $h > h^*$ and $\dot{R}(h^*) < 0$ for $h < h^*$. Therefore at h^* , R admits a minimum $R_m \approx 0.752$.

Most properties can be proven in a straightforward manner based on (6.43). Detailed proofs are in [11].

Now based on the previous properties and recalling the connection between R , the Melnikov function $M(h, \nu)$ and the displacement function $d(h, \epsilon, \nu)$, we conclude the following.

1. For $\nu > 1$, $\nu > R(h)$ for any $h \in (-1/4, 0)$ and there exists a unique $h > h^*$ such that $R(h) = \nu_0$. Thus a stable periodic orbit exists for small ϵ and $\nu = \nu_0 + O(\epsilon)$.
2. If $\nu_0 \in (R_m, 4/5)$, $\nu < R(h)$ for any $h \in (-1/4, 0)$ and there exist $h_1, h_2 > h^*$ such that $R(h_i) = \nu$. Thus, two periodic orbits exist for small ϵ and $\nu = \nu_0 + O(\epsilon)$, one stable and one unstable inside the stable one.
3. If $\nu_0 \in (4/5, 1)$, there is a unique $h_0 \in (-1/4, 0)$ for which $R(h) = \nu$ and a unique $h_2 > h^*$ such that $R(h_2) = \nu$. This implies that the system (6.34) possesses two symmetric hyperbolic limit cycles for $\nu = \nu_0 + O(\epsilon)$. The orbits are unstable since $R(h) < \nu_0$ for $h > h_0$ and $R(h) > \nu_0$ for $h < h_0$. The third orbit, inside of which the two symmetric unstable cycles exist, is stable.

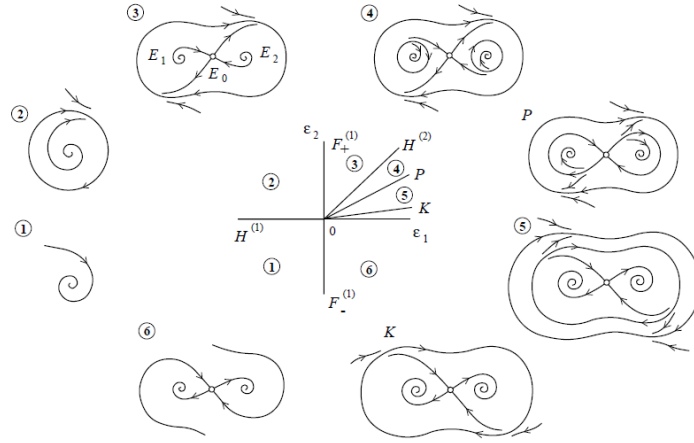


Figure 6.2: Bifurcation diagram with respect to μ_1, μ_2 parameters (ϵ_1, ϵ_2 in the figure) for system (6.3) from [35].

4. At $\nu = R_m$ a saddle node bifurcation occurs and the stable and unstable limit cycles collide and disappear.
5. If $\nu < R_m, \nu < R(h)$ for any $h > -1/4$. No periodic orbits exist.

Now returning to the original μ parameters of (6.3), we can complete the bifurcation analysis. For

$$4\mu_1/5 + O\left(\mu_1^{3/2}\right) < \mu_2 < \mu_1, \mu_1 > 0, \quad (6.44)$$

there are three cycles: one stable (which was born via supercritical Hopf bifurcation at the origin) and two unstable (born through subcritical Hopf bifurcations at the unstable equilibria). The stable limit cycles surrounds the two unstable and the equilibria. We derived this result from the analysis based on the Melnikov method. At (6.39) the two unstable limit cycles collide and form a (symmetric) homoclinic loop. For

$$R_m\mu_1 + O\left(\mu_1^{3/2}\right) < \mu_2 < 4\mu_1/5 + O\left(\mu_1^{3/2}\right), \mu_1 > 0, \quad (6.45)$$

there are two limit cycles: a bigger stable surrounding the unstable. At

$$\mu_2 = R_m\mu_1 + O\left(\mu_1^{3/2}\right), \mu_1 > 0, \quad (6.46)$$

the two limit cycles collide and disappear through a saddle node bifurcation of limit cycles (denoted K). For

$$\mu_2 < R_m\mu_1 + O\left(\mu_1^{3/2}\right), \mu_1 > 0, \quad (6.47)$$

no limit cycles exist and the (6.3) has two symmetric stable equilibria and a saddle at the origin. Fig. 6.2 summarizes the results we have proven about the bifurcations of system (6.3). We remark that the bifurcation curves (6.46) and (6.39) essentially correspond to the tangent at the origin of the real bifurcation curves.

As explained in the beginning of this section any electronic oscillator whose nonlinear function f satisfies the requirements following (6.1) (which are typical for a differential *LC* oscillator), demonstrates, at least around the origin, dynamics topologically conjugate to that of (6.3) and hence Fig. 6.3 is characteristic for this class of oscillators. If we want to express the bifurcation curves in terms of the

original parameters Q, G , we would have:

Symmetric Equilibria: The origin and $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$, $\mu_1 > 0$, $\Leftrightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{G-1}{Gc}}, \pm\sqrt{\frac{G-1}{Gc}} \right)$, $G > 1$.

Supercritical Hopf Bifurcation $H^{(1)}$: $\mu_2 = 0$, $\mu_1 < 0 \Leftrightarrow Q^2G = 1$, $G > 0$.

Subcritical Pitchfork Bifurcation $F^{(1)}$: $\mu_1 = 0 \Leftrightarrow G = 1$.

Subcritical Hopf Bifurcation $H^{(2)}$: $\mu_1 = \mu_2$, $\mu_1 > 0 \Leftrightarrow (3 - 2G)Q^2 = 1$, $G > 1$.

Homoclinic Bifurcation Bifurcation P : $\mu_1 = 4\mu_2/5$, $\mu_1 > 0 \Leftrightarrow 12 - 7G = 5/Q^2$, $G > 0$.

Saddle-Node Bifurcation K : $\mu_1 = R_m\mu_2$, $\mu_1 > 0 \Leftrightarrow G(1 - 3R_m) + 3R_m = 1/Q^2$, $G > 0$. (6.48)

6.1.4 Symmetry and Bifurcations

Before we study specific systems arising from differential LC oscillators, we wish to study the effect of symmetry on the bifurcations of a system in a more general context motivated from the fact that (6.1) possesses the symmetry $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$. We begin with some definitions.

Definition 6.1.3. A Lie group is a closed subgroup of the group of linear, invertible transformations of \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^n , which will be denoted by Γ .

Utilizing the act of Γ on a vector space V we can represent Γ by a linear map

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\rightarrow GL(V) \\ \gamma &\rightarrow \gamma \cdot v, \end{aligned} \tag{6.49}$$

where $\gamma \cdot v$ denotes the action of an element $\gamma \in \Gamma$ on an element $v \in V$ and $GL(V)$ is the group of invertible transformations of V into V . The representation of the group Γ enables us to think of it as analogous to the linear map on a vector space. Now we can define symmetric dynamical systems in a general context.

Definition 6.1.4. A dynamical system $\dot{x} = f(x)$ is said to be Γ equivariant, if

$$f(\gamma x) = \gamma f(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.50}$$

or equivalently

$$f(T_\gamma x) = T_\gamma f(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.51}$$

where T_γ denotes the representation of the action of γ .

The definition essentially implies that if f is Γ equivariant and $x(t)$ is a solution, then $\gamma \cdot x(t) = T_\gamma x(t)$ is also a solution. The simplest non-trivial group Γ is a group consisting of two elements, isomorphic to \mathbb{Z}_2 . In its representation it consists of two matrices R, I_n such that $R^2 = I_n$. There exists an invertible linear transformation T such that R in new coordinates has the form,

$$R = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & -I_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{6.52}$$

with $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 1$ and denote by X^+, X^- the image of I_{n_1}, I_{n_2} respectively. Next we assume that this coordinate transformation has been done and we have the following definition [35].

Definition 6.1.5. For equilibria we define:

- An equilibrium x_0 is called fixed, if $Rx_0 = x_0$.
- Two equilibria are called R -conjugate if $x_1 = Rx_0$.

For limit cycles analogously we define:

- A periodic solution x_f is called fixed (F solution-cycle) if $Rx_f(t) = x_f(t)$ for any t .
- A periodic solution x_s is called symmetric (S solution-cycle) if $Rx_s(t) = x_s(t + T/2)$ for any t , where T is the period.

Concerning the definition we remark that a fixed periodic solution x_f belongs to the space that is invariant under R and hence requires $n_1 \geq 2$. Analogously x_s requires $n_2 \geq 2$. When viewed geometrically as loci in \mathbb{R}^n , both cycles correspond to invariant curves and any R invariant cycle is either F or S [35]. It should be apparent for any non-invariant cycle x_0 , there exists a cycle x_1 conjugate to it.

Bifurcations of R conjugate equilibria do not exhibit any differences compared to the usual case. For codimension-1 bifurcations of equilibria, we can prove the following theorem [35].

Theorem 6.1.3. *Let $f(x, \mu)$ be a vector field defining a \mathbb{Z}_2 invariant system, x_0 a fixed equilibrium and μ a parameter.*

- If at $\mu = 0$ the equilibrium possesses a zero eigenvalue with corresponding eigenvector $v \in X^+$, then a fold bifurcation happens and two fixed type equilibria are born with different stability.
- If at $\mu = 0$ the equilibrium possesses a zero eigenvalue with corresponding eigenvector $v \in X^-$, then a pitchfork bifurcation happens and two R conjugate equilibria are born, while the original equilibrium changes stability.
- If at $\mu = 0$ the equilibrium possesses two conjugate, purely imaginary eigenvalues with corresponding eigenspace X^c , then a Hopf bifurcation occurs. If X^c belong to X^+ , the Hopf bifurcation happens inside X^+ giving rise to a F cycle. If X^c belongs to X^- , then the Hopf bifurcation happens inside X^+ giving rise to a S cycle.

It is clear that in the case of (6.1), $n_2 = 2, n_1 = 0$, so that only Pitchfork bifurcations and Hopf bifurcations giving rise to S cycles can occur. Next, we study the bifurcations of limit cycles. Bifurcations of non-invariant cycles have nothing different compared with the usual cases and hence we state some results for the F, S types.

We begin with the case of F cycles. Let Σ be an R -invariant, transversal to the cycle hyperplane that we use as cross-section. If the cycle is of type F one can easily prove that the Poincaré map, is $R|_\Sigma$ equivariant. That reduces the analysis to the study of \mathbb{Z}_2 symmetric discrete time dynamical systems. Using a similar decomposition as in (6.52) for the Jacobian of the Poincaré map, we can immediately prove a Theorem concerning the codim-1 bifurcations, similar to Theorem 5.1.3.

Theorem 6.1.4. *Let $f(x, \mu)$ be a vector field defining a \mathbb{Z}_2 symmetric system, where μ is a parameter, and suppose that it admits a x_f cycle.*

- If at $\mu = 0$, $\mu_1 = 1$, no other multiplier has modulus 1, and corresponding eigenvector $v \in X^+{}^1$, then a fold bifurcation happens inside X^+ giving rise to two F -cycles with different stability.
- If at $\mu = 0$, $\mu_1 = 1$, no other multiplier has modulus 1, and the corresponding eigenvector $v \in X^-{}^2$, then a pitchfork bifurcation happens inside X^- giving rise to two R conjugate cycles, while the original cycle changes stability.
- If at $\mu = 0$, $\mu_1 = -1$ and no other multiplier has modulus 1, then a flip (period-doubling) bifurcation occurs. If the corresponding eigenvector $v \in X^+$, then the period-two cycle is of F -type and otherwise of S type.
- If at $\mu = 0$, $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ and no other multipliers have modulus 1, then an invariant closed curve bifurcates from the fixed point corresponding to an invariant torus $T^2 = R(T^2)$ for the continuous time system.

¹Discrete analogue of the Jacobian of the Poincaré map for X^+ in the continuous case.

²Discrete analogue of the Jacobian of the Poincaré map for X^- in the continuous case.

Now we continue with the study of S cycles. In that case Σ cannot be selected to be R invariant, but one can choose two R conjugate cross-sections $\Sigma_{1,2}$ such that the Poincaré map $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ can be written as the composition of two R conjugate maps $Q_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ and $Q_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$. If we define $Q = R^1 Q_1$, we conclude that $P = Q^2$. In that case we have no symmetry for the discrete time system, but a different property.

Theorem 5.1.4 holds in this case as well, with appropriate modifications. The condition $P = Q^2$, rules out the period-doubling bifurcation, since if we denote by A and B the the Jacobian matrices of P and Q , then $A = B^2$. In the first two statements of the Theorem one should replace the condition $v \in X^\pm$ with $Bv = \pm v$, respectively. With this modification Theorem 5.1.4 applies in the S cycles as well.

In the case of (6.1), $n_2 = 2$ we have only a Pitchfork bifurcation, a Hopf bifurcation giving rise to an S cycle and a Saddle-Node bifurcation of this S cycle, in accordance with the previous results. We note that if multiple tanks are used in the implementations shown in Fig. 5.5, the \mathbb{Z}_2 symmetry persists, and the above results restrict the dynamical phenomena to be similar to those of the planar case with a single tank.

6.1.5 Dynamics of the MOS and BJT implementations

In the previous subsections we characterized the dynamics of a differential LC oscillator at least around the origin. In order to derive the complete bifurcation curves of a system of the form (6.1) and find the Homoclinic and Saddle-Node bifurcation curves away from the bifurcation point (where the linear approximation of the curve ceases to hold) we need to consider a particular form for f and numerically calculate the bifurcation curves with respect to Q, G . To this end in the following we study the MOS and BJT implementations of differential oscillators whose schematics are illustrated in Fig. 5.5.

We begin with the BJT implementation. In that case $f(x) = \tanh(x)$, $c = -1/3$ and (6.1) becomes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Qy + QG \tanh(x) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q, \end{aligned} \tag{6.53}$$

Since f has higher order terms that quantitatively affect the bifurcation curves, (6.48) correspond generally to the tangents of the real curves of (6.53). Similar calculations as in (6.4)-(6.8) show that the supercritical Hopf bifurcation ($H^{(1)}$) happens exactly at $Q^2 G = 1$ and the Pitchfork at $G = 1$ ($F^{(1)}$). This is expected since we are linearizing around the origin and local bifurcation curves associated with the origin must persist. The symmetric equilibria are given by

$$(x_e, y_e) = (\pm z, \pm z), \quad G \tanh z = z, \quad G > 1, \quad z \neq 0. \tag{6.54}$$

We can see that the equilibria as given in (6.48) are approximations of (6.54). The subcritical Hopf bifurcation curve ($H^{(2)}$) is given parametrically by

$$(G, Q^2) = \left(\frac{r}{\tanh r}, \frac{\tanh r}{r(1 - \tanh^2 r)} \right), \quad r > 0. \tag{6.55}$$

The Homoclinic (P) and the Saddle-Node bifurcation (K) curves cannot be computed analytically away from the point $(Q, G) = (1, 1)$ where the linear approximation provided by the Melnikov method is no longer valid. To this end, we compute numerically the curves using the continuation methods of MATCONT [16]. We remark that the homoclinic curve is computed via the homotopy method. Figure 6.3 illustrates the bifurcation diagram computed numerically. The bifurcation curves correspond exactly to those in (6.48), but the Homoclinic and Saddle-Node bifurcation curves are no longer straight lines as (Q, G) deviate from the Bogdanov-Takens point $(1, 1)$, as expected. It is important to note that the qualitative behavior of (6.3) describes completely the global behavior of (6.53) since no other bifurcations occur and no other equilibria exist.

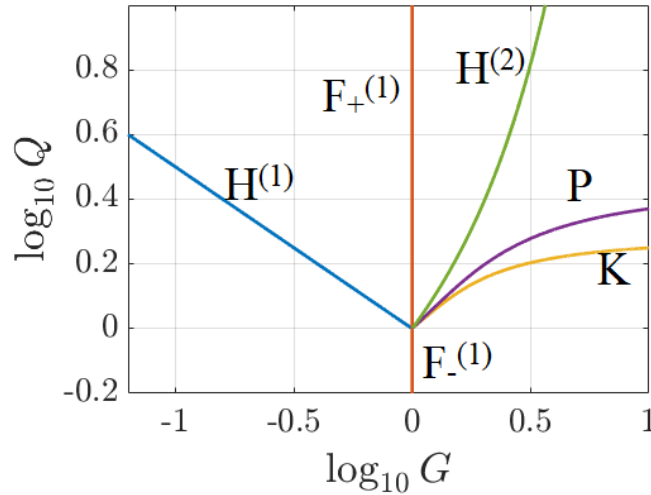


Figure 6.3: Bifurcation diagram with respect to Q, G parameters for the BJT implementation. The blue line corresponds to a supercritical Hopf bifurcation ($H^{(1)}$), the vertical red line to a pitchfork ($F^{(1)}$), the green to a subcritical Hopf ($H^{(2)}$), the magenta to a homoclinic bifurcation (P) and the orange to a saddle-node (K).

Figure 6.4 shows the phase portrait of (6.53) for parameters corresponding to each region defined by the bifurcation curves in Figure 6.3. In (a), the parameters belong to the region defined by the supercritical Hopf and Pitchfork bifurcations, but lie below the Hopf curve. Consequently, the origin is stable, and no other attractors or repellers exist. In (b), the parameters also belong to the region defined by the supercritical Hopf and Pitchfork bifurcations, but lie above the Hopf curve. As a result, the origin becomes a repeller, and a stable limit cycle bifurcates. At (c), the parameters belong to the region defined by the Pitchfork and subcritical Hopf curves, leading to the birth of two symmetric unstable equilibria. These symmetric equilibria gain stability, and two symmetric unstable limit cycles surrounding them bifurcate at (d), as the parameters lie in the region defined by the subcritical Hopf and Homoclinic curves. At (e), the two unstable limit cycles merge into a larger unstable cycle through a homoclinic bifurcation, as the parameters belong to the region defined by the Homoclinic and Saddle-Node curves. At (f), only equilibria exist, as the parameters are in the region defined by the Saddle-Node and Pitchfork curves. It is evident that the phase planes of (6.53) and (6.3) are qualitatively similar and the bifurcation curves differ only quantitatively.

Next we consider the MOS implementation. Then $f(x) = x(1 - x^2)$ and the system (6.1) becomes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Qy + QGx(1 - x^2) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q. \end{aligned} \quad (6.56)$$

No $O(x^5)$ terms exist and thus, system (6.3) is exactly equivalent to (6.1) inside the whole phase space, not only in a neighborhood of the origin. The equilibria, the Pitchfork and the Hopf bifurcation curves ($H^{(1)}, H^{(2)}$), are given by (6.48), but the Homoclinic and the Saddle-Node curves need to be numerically computed away from the point $(Q, G) = (1, 1)$. Figure 6.5 shows the bifurcation diagram of (6.56) with respect to the Q, G parameters. It is clear that qualitatively it is similar to the BJT case (Fig. 6.3), and only quantitative aspects of the bifurcation curves differ (e.g. P, K are concave in the case of the BJT and convex in the case of MOS). We also note that although (6.56) is equivalent to (6.3), the Homoclinic and Saddle-Node curves cease to be linear away from the point $(Q, G) = (1, 1)$ and, in fact, are very close (a quantitative difference with the BJT implementation). For this reason we provide an enlarged view of the curves in (b). The phase portraits closely resemble those in Fig. 6.4, hence we refrain from displaying them again.

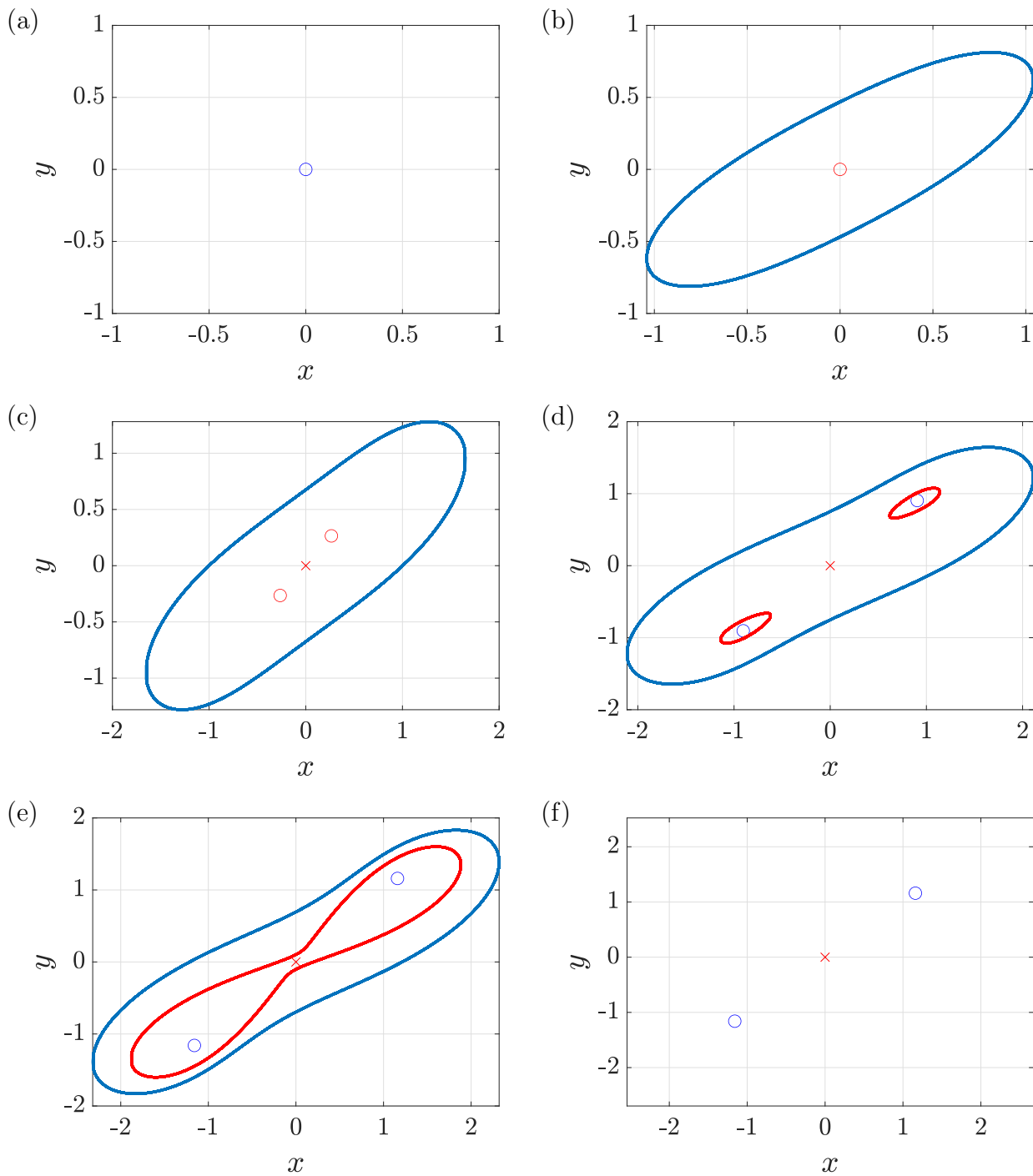


Figure 6.4: Phase portraits of system (6.53) describing the BJT implementation for parameters (Q, G) belonging to each of the regions defined by the bifurcation curves of Fig. 6.3. Blue color corresponds to attractors, red to unstable entities, circles to nodes and crosses to saddles. (a): parameters lie in the region between $H^{(1)}$ and $F_-^{(1)}$. (b): parameters lie in the region between $H^{(1)}$ and $F_+^{(1)}$, but above $H^{(1)}$. (c) parameters lie in the region between $F_+^{(1)}$ and $H^{(2)}$. (d) parameters lie in the region between $H^{(2)}$ and P . (e) parameters lie in the region between P and K . (f) parameters lie in the region between K and F_-^1 .

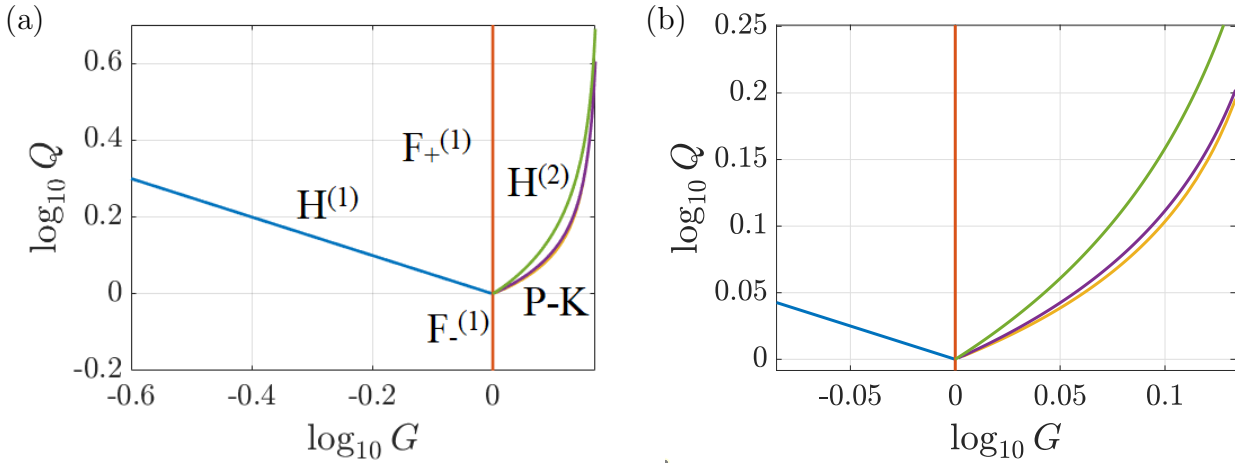


Figure 6.5: Bifurcation diagram with respect to Q, G parameters for the MOS implementation. The blue line corresponds to a supercritical Hopf bifurcation ($H^{(1)}$), the vertical red line to a pitchfork ($F^{(1)}$), the green to a subcritical Hopf ($H^{(2)}$) the magenta to a homoclinic bifurcation (P) and the orange to a saddle-node (K).

6.2 Nonlinear Dynamics of the Colpitts Oscillator

We consider the Colpitts oscillator of Fig. 5.5 (c) that is described by the system (5.22),

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)} \left(1 - e^{-x_2} + x_3\right) \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{Qk} x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q} x_3.\end{aligned}\tag{6.57}$$

It is clear that the unique equilibrium of the system is the origin. Linearizing about it, one has the Jacobian matrix,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g}{Q(1-k)} & \frac{g}{Q(1-k)} \\ 0 & 0 & \frac{g}{Qk} \\ -\frac{Qk(1-k)}{g} & -\frac{Qk(1-k)}{g} & -\frac{1}{Q} \end{bmatrix}\tag{6.58}$$

from which it follows that the characteristic polynomial is given by,

$$P(s) = s^3 + s^2/Q + s + g/Q.\tag{6.59}$$

Now using Routh's criterion one can immediately conclude that for $g < 1$, the origin is stable, while for $g > 1$ the matrix A has two unstable complex conjugate eigenvalues $\rho \pm i\omega$ and one real stable λ with $|\lambda| > |\rho| > 0$. At $g = 1$, using the reduction on the center manifold one can show that the a coefficient in (6.8) is given by

$$a = -\frac{1}{16} \frac{Q^5}{(1+4Q^2)(1+Q^2)^2} < 0,\tag{6.60}$$

so that a supercritical Hopf bifurcation occurs at $g = 1$ giving rise to a stable limit cycle of frequency 1. It is evident that there are no further local bifurcations concerning the origin. In fact, the Colpitts oscillator is known to possess complex behavior [41, 18] and two routes to chaos have been observed: period doublings and Shilnikov phenomenon. The first route to chaos is easy: bifurcations double the period of a limit cycle until it tends to infinity, when chaos arises. The second case is more delicate and we will discuss it first in its generality before we continue with the study of global bifurcations of the Colpitts oscillator.

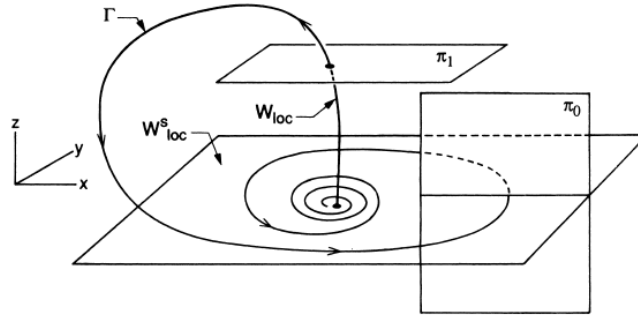


Figure 6.6: Homoclinic orbit and definition of cross-sections $\Pi_{0,1}$ for the study of (6.61) from [60].

6.2.1 Orbits Homoclinic to a Saddle-Focus: The Shilnikov Phenomenon

In this section we present some fundamental results associated with orbits homoclinic to a saddle-focus. Our treatment mostly follows [60, 61, 35]. We consider systems of the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho x - \omega y + Q_1 \\ \dot{y} &= \omega x + \rho y + Q_2 \\ \dot{z} &= \lambda z + Q_3,\end{aligned}\tag{6.61}$$

where $Q_{1,2,3}$ are $O(\|x\|^2)$ at the origin. It is clear that $\rho \pm i\omega$ and λ are eigenvalues of the Jacobian matrix at the origin. We assume that (6.61) admits a homoclinic orbit Γ connecting the origin with itself and that $\lambda > -\rho > 0$. We study orbits near Γ through a Poincaré map. We consider two cross-sections Π_0 and Π_1 as in Fig. 6.6. The cross-section Π_0 is a rectangle in the $x-z$ plane is defined as

$$\Pi_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [\epsilon e^{2\pi\rho/\omega}, \epsilon], y = 0, z \in (0, \epsilon] \right\}.\tag{6.62}$$

and Π_1 is an appropriate (will be made more specific shortly) rectangle belonging to the plane $z = \epsilon$. If $P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_1$ and $P_1 : \Pi_1 \rightarrow \Pi_0$ we use $P = P_1 \circ P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_0$ as the Poincaré map. For ϵ sufficiently small, we can use the linearized flow in order to find the map $P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_1$ [61] since the introduced error does not affect the results. Thus it is clear that the definition of Π_0 implies that an orbit does not return to Π_0 before it crosses Π_1 . It follows that, the map P_0 is given by

$$(x, 0, z) \xrightarrow{P_0} \left(x \left(\frac{\epsilon}{z} \right)^{\rho/\lambda} \cos \left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z) \right), x \left(\frac{\epsilon}{z} \right)^{\rho/\lambda} \sin \left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z) \right), \epsilon \right).\tag{6.63}$$

or in polar coordinates,

$$(r, \theta) = \left(x \left(\frac{\epsilon}{z} \right)^{\rho/\lambda}, \frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z) \right).\tag{6.64}$$

The rectangle Π_1 is chosen large enough so that $P_0(\Pi_0) \in \text{int}(\Pi_1)$. Let $p_0 = W^u(0) \cap \Pi_0$. We can approximate P_1 as an affine transformation,

$$P_1(h) = p_0 + Bh,\tag{6.65}$$

where h represents coordinates on Π_1 . The linear approximation is valid, since the introduced error is small and does not affect the results [61]. Hence, in this case,

$$(x, y, \epsilon)^T \xrightarrow{P_1} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\tag{6.66}$$

where $p_0 = (x_0, 0, 0)$ which is unique due to the definition of Π_1 . The form of the matrix B follows from the fact that every point in Π_0 has zero y component. Now we can find the Poincaré map $P = P_1 \circ P_0$,

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\rho/\lambda} \left(a \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) \right) + x_0 \\ x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\rho/\lambda} \left(a \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) \right) \end{bmatrix}. \quad (6.67)$$

Next we consider the rectangles

$$R_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, \epsilon e^{2\pi\rho/\omega} \leq x \leq \epsilon, \epsilon e^{-2\pi(k+1)\lambda/\omega} \leq z \leq \epsilon e^{-2\pi k\lambda/\omega} \right\}. \quad (6.68)$$

It is clear that

$$\Pi_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k. \quad (6.69)$$

The definition of R_k enable us to prove the following fundamental result [61].

Theorem 6.2.1. *For k sufficiently large, R_k contains an invariant Cantor set on which the Poincaré map P is topologically conjugate to a full shift of two symbols.*

Proof. See [61]. □

The theorem states that in a neighborhood (in the phase plane) of the homoclinic orbit, system (6.61) has chaotic behavior and a countable infinity of horseshoes [61]. Now we assume that there is a parameter μ such that Γ appears for $\mu = 0$, while the stable and unstable manifolds split for $\mu \neq 0$.³ We study how this homoclinic orbit is created following [19]. In a neighborhood of the homoclinic orbit in both the phase space (as we did before) and the parameter space, (6.67) becomes,

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\rho/\lambda} \left(a \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) \right) + x_0 + \epsilon\mu \\ x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\rho/\lambda} \left(a \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) + b \sin\left(\frac{\omega}{\lambda} \log(\epsilon/z)\right) \right) + f\mu \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

where we can assume without loss of generality that $f > 0$ ⁴. Rescaling we can set $f = 1$. The map (6.70) can be written in the following after appropriate transformations ($\delta = -\rho/\lambda$ is the important parameter),

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} \alpha x z^\delta \cos(\xi \log z + \Phi_1) + x_0 + \epsilon\mu \\ \beta x z^\delta \cos(\xi \log z + \Phi_2) + x_0 + \mu \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

We study fixed points of P that correspond to one-loop periodic orbits of (6.61). For z sufficiently small, the z component of the fixed point is given by the solution of

$$z - \mu = (\epsilon\mu + x_0)\beta z^\delta \cos(\xi \log z + \Phi_2). \quad (6.72)$$

The Jacobian of the Poincaré map is a matrix

$$J = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}, \quad (6.73)$$

where

$$\begin{aligned} A &= \alpha z^\delta \cos(\xi \log(z) + \Phi_1) \\ B &= \beta x z^{\delta-1} \left(\delta \cos(\xi \log(z) + \Phi_2) - \xi \sin(\xi \log(z) + \Phi_2) \right) \\ C &= \alpha x z^{\delta-1} \left(\delta \cos(\xi \log(z) + \Phi_1) - \xi \sin(\xi \log(z) + \Phi_1) \right) \\ D &= \beta z^\delta \cos(\xi \log(z) + \Phi_2). \end{aligned} \quad (6.74)$$

If $\delta > 1$, so that $-\rho > \lambda$, we have (see Fig. 6.7)

³More rigorously one can define a two dimensional cross-section Σ and define μ as a scalar parameter which is zero if $W^u(0)$ and $W^s(0)$ intersect on Σ . The parameter μ is a smooth function of the actual parameters of the system.

⁴The sign actually depends on the split of the stable and unstable manifolds.

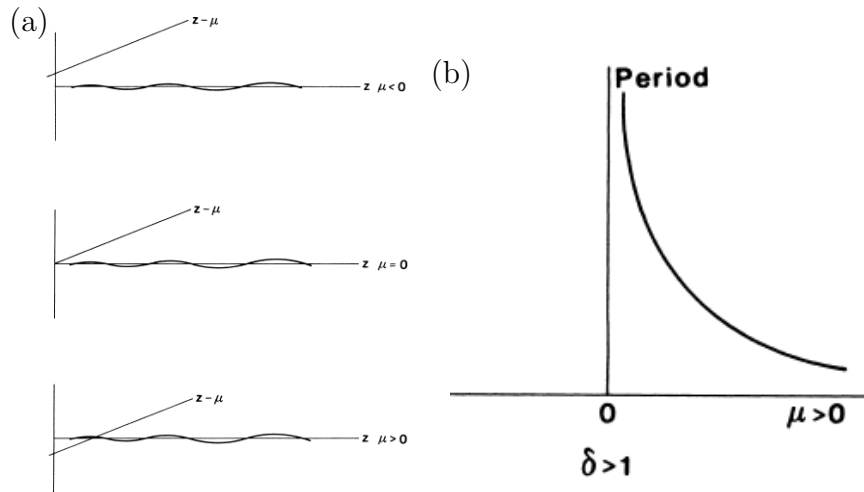


Figure 6.7: Solution of (6.72) for $\delta > 1$ in (a) and period of the periodic orbit in (b). From [60].

- $\mu \leq 0$: no non-trivial periodic orbits
- $\mu > 0$: there is one fixed point for each μ , for $z > 0$.

From (6.74) it is straightforward to conclude that for $\mu > 0$, the unique periodic orbit is stable for μ and z small (since the terms $z^\delta, z^{\delta-1}$ are small and hence the eigenvalues are small) and the homoclinic orbit is an attractor. The period of the corresponding periodic orbit depends on μ as is shown in Fig. 6.7 (b).

If $\delta < 1$, we have [19] (see Fig. 6.8)

- $\mu < 0$: finite number of fixed point
- $\mu = 0$: countable infinity of fixed points
- $\mu > 0$: finite number of fixed points

From (6.74) it follows that $\det J \sim z^{2\delta-1}$. Thus, regarding the stability one must distinguish the cases $\delta \in (1/2, 1)$ and $\delta \in (0, 1/2)$ since in the first case the map is area-contracting, while in the second case it is area-expanding.

At first we examine two particular cases for the fixed points that will prove useful in the general. From (6.76) and (6.74), if a fixed point corresponds to a local maximum of the right hand side of (6.76), then $B = 0$ and if a fixed point corresponds to a zero of the right hand side of (6.76), then $D = 0$. In the second case that $D = 0$, $\lambda_1 = A, \lambda_2 = B$ and the fixed point is a saddle since B is large and A is small. If $B = 0$, the eigenvalues are given by

$$\lambda_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4CD}}{2}, \quad (6.75)$$

and since $A \sim z^\delta, CD \sim z^{2\delta-1}$ one can neglect the A terms (since z is small). If $\delta < 1/2$ the eigenvalues can be made arbitrarily large and the fixed point is unstable. Analogously, if $\delta > 1/2$, the fixed point is stable.

In the two specific cases examined above, we encounter either a saddle ($D = 0$) or a stable (unstable) node ($B = 0$) depending on δ . Utilizing these observations and referring to Fig. 6.8 (b), we can analyze the stability and bifurcations of a fixed point in the general scenario, from its creation to its destruction. At $\mu = \mu_6 < 0$, a saddle-node bifurcation occurs. At $\mu = \mu_5 < 0$, the fixed point with lower z has larger period (since it passes closer to the fixed point of (6.61)) and is a saddle, while the other one is stable (unstable) depending on $\delta > 1/2$ or $\delta < 1/2$ (since it is close to having $B = 0$). We continue with studying the (un)stable fixed point. At $\mu = \mu_4 < 0$ the stable (unstable) fixed point has become

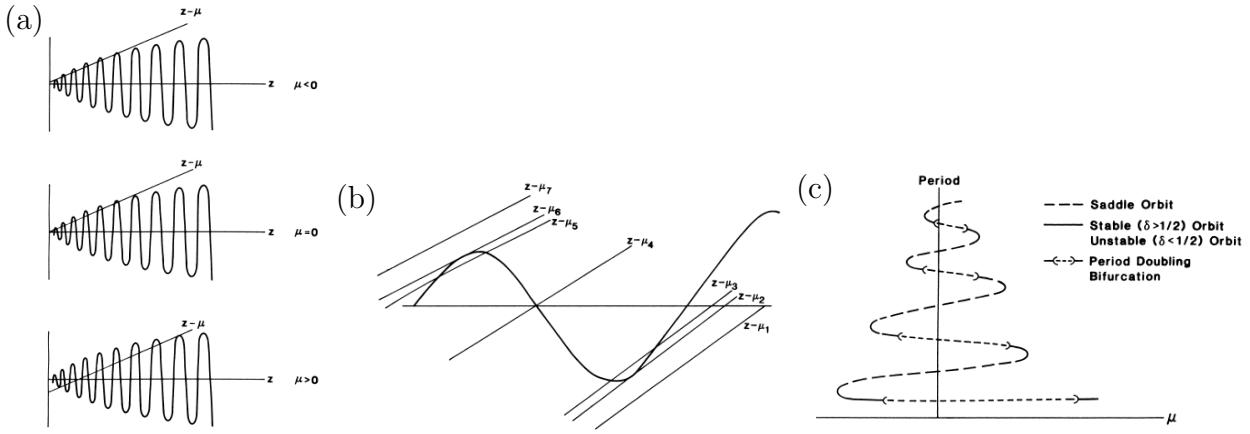


Figure 6.8: Solution of (6.72) for $\delta < 1$ in (a) and enlarged in (b). (c) Dependence of the limit cycles on μ . From [60].

a saddle, since $D = 0$, through a period-doubling bifurcation. At $\mu = \mu_3 > 0$, $B = 0$ again, and the saddle has become stable (unstable) via a (reverse) period doubling bifurcation. Finally at $\mu = \mu_2 > 0$ a saddle node bifurcation occurs and the fixed point is destroyed. This analysis is repeated for every fixed point and the dependence of the periodic orbits of the limit cycle on μ as shown in Fig. 6.8 should be clear. We remark that if ν_i denote the μ values for which the graph in Fig. 6.8 (c) admits a vertical tangent, then [60]

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} = -\exp(\rho\pi/\omega). \tag{6.76}$$

If the above quantity is small, then one-loop periodic orbits will be visible only for a narrow range of parameters.

We close the discussion by noting that double-pulse or subsidiary homoclinic orbits exist in the case $\delta < 1$. These orbits pass once through a neighborhood of the fixed point before they return to the origin. For any such orbit the previous analysis applies. To conclude a homoclinic bifurcation of the Shilnikov type organizes three infinite families of bifurcations: saddle-node, period-doubling and subsidiary homoclinic.

6.2.2 Bifurcations of the Colpitts Oscillator

Now we return to the study of the bifurcations of the Colpitts oscillator with respect to the Q, G parameters fixing $k = 1/2$. As we mentioned in the beginning, at $g = 1$, a supercritical Hopf bifurcation results in the birth of a stable limit cycle which we call the primary limit cycle. For $g > 1$, the eigenvalues are $\rho \pm i\omega$, λ with $\lambda > -\rho > 0$ and thus the origin is a saddle-focus. The system (6.57) admits a homoclinic orbit as shown in Fig. 6.9 (a). Hence we conclude that Shilnikov theory as presented in the previous Subsection applies, with one modification: the unstable manifold W^u has dimension 2, so that the stable orbits become unstable and vice versa. Equivalently we can think of the same phenomena but with time reversing. We note that $\delta < 1/2$ and hence saddle-node bifurcations in a neighborhood of the homoclinic orbit result in unstable limit cycles for (6.62) and, by time reversing, in stable for (6.57). We also expect period-doubling bifurcations.

The bifurcation diagram of (6.57) is quite complex and in Fig. 6.9 (b), we show its fundamental structure (we will comment on this later on). We denote with T the tangent (or saddle-node) bifurcations in which a saddle and a stable limit cycle collide and the leading multiplier becomes 1. With F we denote the flip (or period-doubling) bifurcations when the primary cycle loses stability and a cycle of double period is born. The leading multiplier becomes -1 . With H we denote the homoclinic bifurcation. The second index $n = 1$ means that we are referring to the fundamental structure. The superscript in $F_{1,1}$ denotes the second Feigenbaum cascade and the first index is used for enumerating purposes in the case of multiple occurrences of the same type of bifurcation. We examine in detail

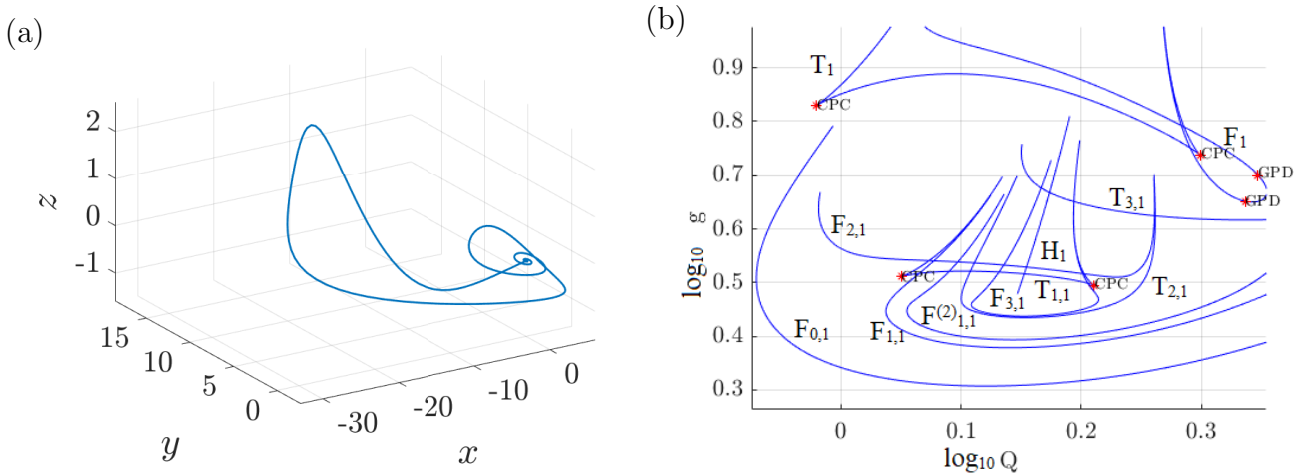


Figure 6.9: (a) Homoclinic orbit of the Colpitts oscillator (6.57). (b) Bifurcation diagram of the Colpitts oscillator (6.57). Tangent bifurcations are denoted with T , flip with F and homoclinic with H . The second index $n = 1$ refers to the fundamental structure. The superscript in $F_{1,1}$ denotes the second Feigenbaum cascade and the first index is used for enumerating purposes in the case of multiple occurrences of the same type of bifurcation.

the occurring bifurcations. All bifurcation curves have been computed using MATCONT [16] and in particular the homoclinic orbit using the homotopy method.

Under the $F_{0,1}$ curve the primary limit cycle is the unique attractor and as we cross the flip bifurcation curve a limit cycle of double period is born. Upon crossing $F_{1,1}$, another period doubling occurs, followed by yet another at $F_{1,1}^{(2)}$ (see Fig. 6.10). This suggests a Feigenbaum route-to-chaos through period doubling bifurcations. The corresponding strange attractor is shown in Fig. 6.11 (a). We note that both $F_{2,1}$ and $F_{1,1}$ lead to a limit cycle with a period four times that of the initial one. Additionally, another Feigenbaum cascade originates from $F_{2,1}$, similar to what was described previously.

Next we examine the tangent bifurcations denoted by the T curves. There is an infinite of such bifurcations (due to the Shilnikov phenomenon) but we only show the first three of them. The $T_{1,1}$ bifurcation admits two codim 2 Cusp (in these points the leading Floquet multiplier becomes 1, but the normal form of the fold bifurcation is zero) degeneracy points with negative normal form coefficient⁵. At these points three cycles collide and disappear. Between the two branches of the $T_{1,1}$ curve centered at each Cusp point, two different stable solutions coexist along with one unstable limit cycle. Outside this region there is one stable limit cycle. We note that a negative sign for the normal form coefficient is equivalent to time reversing and one should alternate the unstable-stable terms. The other $T_{1,1}, T_{2,1}$ curves do not admit such codimension 2 points. In general cusp points of the tangent bifurcation curves due to the Shilnikov phenomenon lead to multistability.

From the analysis of the previous subsection we know that sufficiently close to the homoclinic orbit in both the phase and the parameter space, horseshoes and chaotic behavior arises. A typical example of Shilnikov chaos can be seen in Fig. 6.11 (b). We note that there are also double-pulse or subsidiary homoclinic bifurcations associated with H_1 , which are not illustrated in Fig. 6.9 since numerical issues do not allow their precise computation.

In the beginning we mentioned that the structure illustrated in Fig. 6.9 is fundamental and we now want to make this precise. The $F_{0,1}$ resulted in a period doubling bifurcation and further flip or tangent bifurcations concerned this cycle. Essentially $F_{0,1}$ defines the parameter space where the one-pulse homoclinic orbit organizes the bifurcations. This structure repeats itself but with different bifurcation curve defining the corresponding region. A tangent bifurcation T_3 for example results in a cycle for which x_3 variable admits three local maxima in one period (opposed to two in the case of $F_{0,1}$) and is

⁵The Poincaré map is locally topologically equivalent to the normal form $\eta \rightarrow \eta + \beta_1 + \beta_2\eta - \eta^3$.

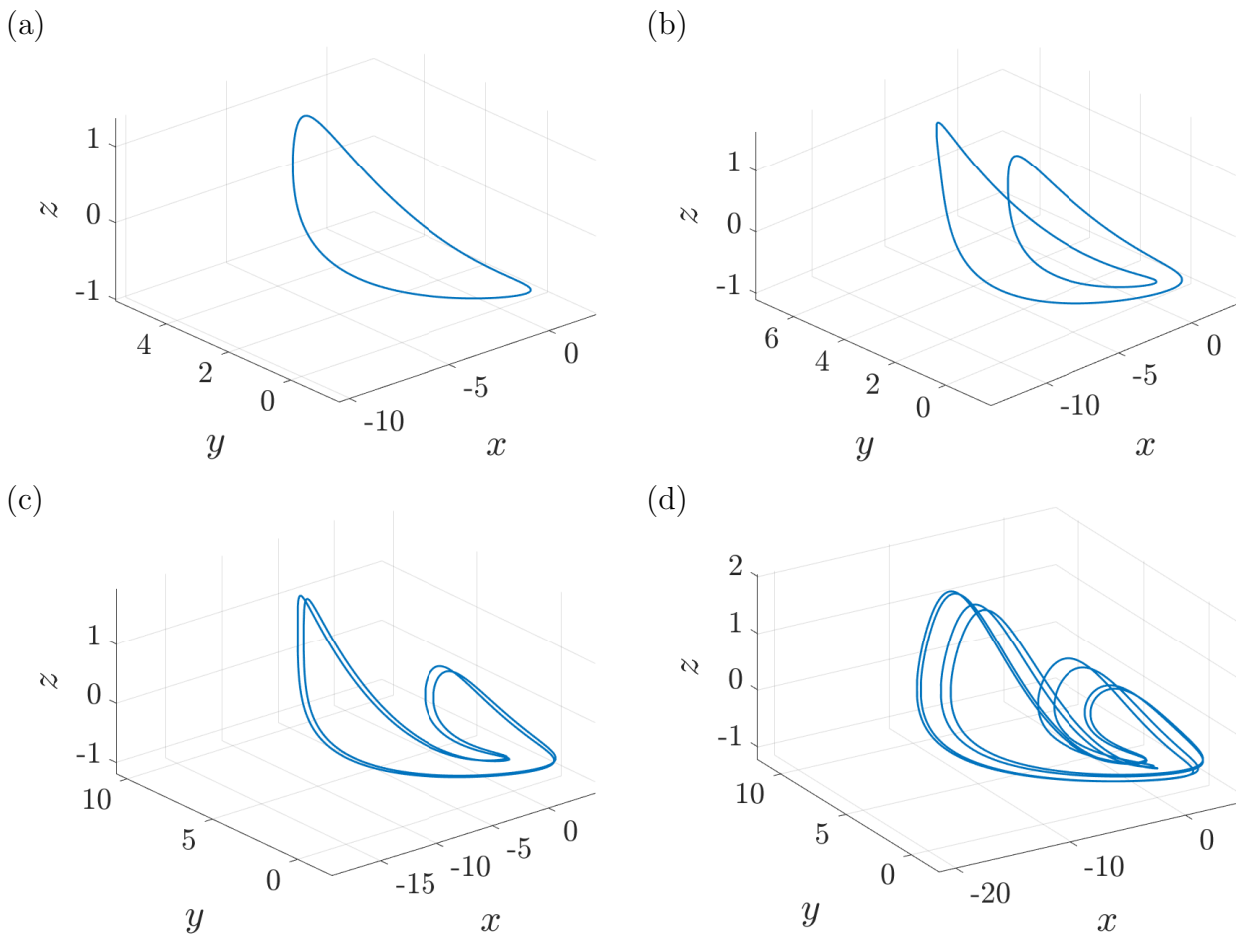


Figure 6.10: Feigenbaum cascade with $\log_{10} Q = 0.1271$ fixed. (a) Primary cycle, parameter values $\log_{10} g = 0.29$. (b) Limit cycle after the first period doubling $F_{0,1}$, parameter value $\log_{10} g = 0.32$. (c) Limit cycle after the second period doubling $F_{1,1}$, parameter value $\log_{10} g = 0.38$. (d) Limit cycle after the third period doubling $F_{1,1}^{(2)}$, parameter value $\log_{10} g = 0.397$.

not associated with the structure in Fig. 6.9. This bifurcation curve defines a region in the parameter space where a structure qualitatively similar to that in Fig. 6.9 exists, with the main difference that the new homoclinic bifurcation curve H_2 makes one big and one smaller turn before returning to the origin. At this point one should not confuse H_2 with the first subsidiary homoclinic bifurcation curve which is associated with the structure of H_1 and makes one big turns before returning to the origin.

Now we return to the main structure of Fig. 6.9. The previous bifurcations are associated with the existence of the Shilnikov-type Homoclinic orbit. However, the saddle-node locus T_1 and the period-doubling F_1 are not related to this phenomenon and we examine them now. These bifurcations result from the overlap of the different structures, as they were described previously. The T_1 curve exhibits two codim 2 Cusp degeneracy points but in this case the normal form coefficients are of opposite signs: the coefficient of the left point is negative, while that of the right one is positive. This means that between the two branches of the T_1 curve centered at the left Cusp point, two different stable solutions coexist along with one unstable limit cycle leading to multistability. The situation for the left cusp point is analogous, but with the interchange of stable and unstable roles. The F_1 curve admits two codim 2 points of generalized period doubling bifurcation with positive normal form coefficient. These points are the origin of an extra codim 1 saddle-node bifurcation locus. Figure 6.12 shows the bifurcation diagram of the normal form ⁶. In region 1, there is a stable fixed point. This fixed point loses stability and a stable period two cycle is born in region 2. In region 3, the equilibrium

⁶The Poincaré map is locally topologically equivalent to the normal form $\eta \rightarrow -(1 + \beta_1)\eta + \beta_2\eta^3 \pm \eta^5$.

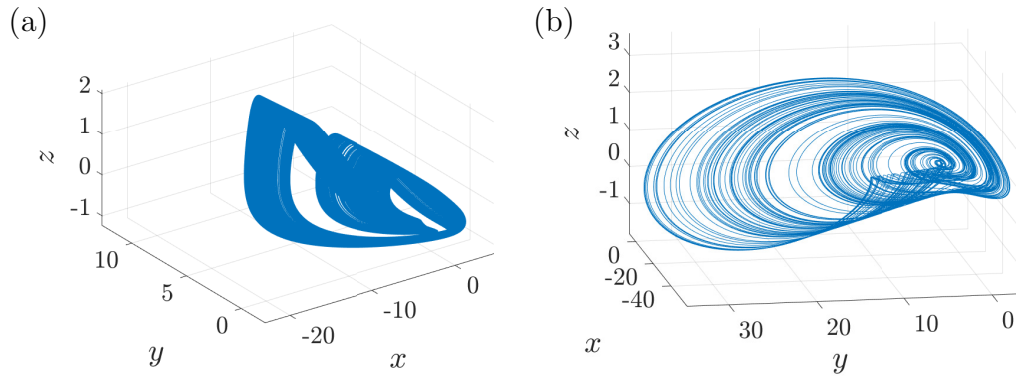


Figure 6.11: (a) Feigenbaum strange attractor for parameter values $\log_{10} Q = 0.1271, \log_{10} g = 0.41$. (b) Shilnikov strange attractor for parameter values $\log_{10} Q = 0.164, \log_{10} g = 0.6$

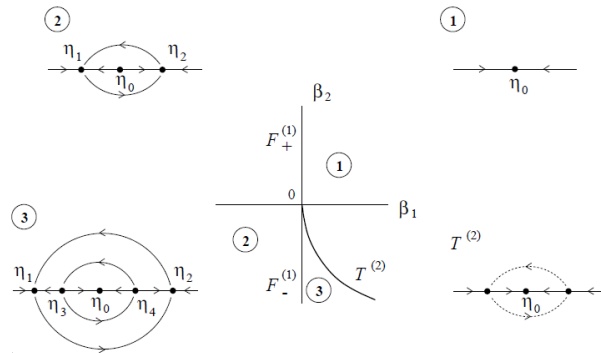


Figure 6.12: Bifurcation diagram of the generalized period doubling bifurcation from [35]. The F_{\pm}^1 curve corresponds to a period doubling bifurcation and the $T^{(2)}$ to a saddle-node bifurcation. The $\beta_{1,2}$ parameters are equivalent bifurcation parameters of the normal form.

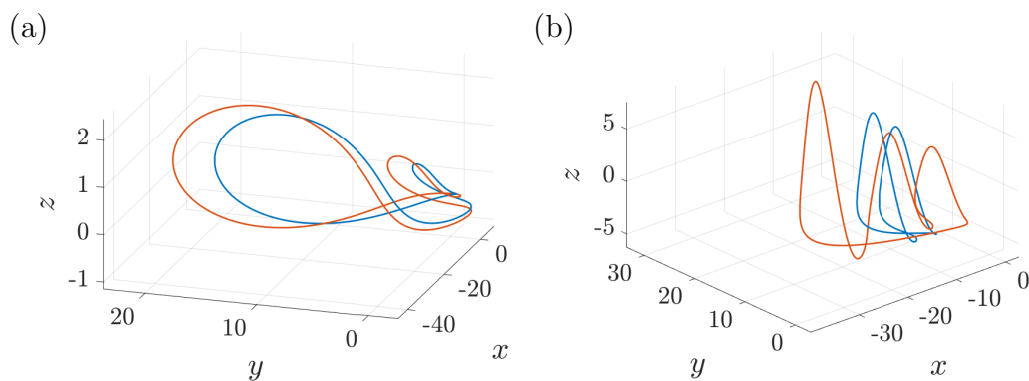


Figure 6.13: Coexistence of limit cycle attractors. (a) Bistability due to cusp degeneracy of curve $T_{1,1}$: $\log_{10} g = 0.518, \log_{10} Q = 0.06$. (b) Bistability due to overlap of different structures: $\log_{10} g = 0.775, \log_{10} Q = 0.6765$.

regains stability and another unstable period two cycle is born. The two period two cycles collide and disappear at the saddle-node curve $T^{(2)}$.

Concluding the analysis of the fundamental structure, we note once again that the same pattern repeats itself filling the parameter space. The different structures may overlap leading to multistability phenomena as mentioned previously. Multistability inside the same structure can be also observed due to the Cusp degeneracies. Two typical examples of multistability are shown in Fig. 6.13. In (a), the parameters lie within the region enclosed by the two branches of $T_{1,1}$ centered at the cusp point. In (b), the parameters lie above both $F_{0,1}$, resulting in the existence of a stable cycle with a period double that of the initial one, and T_3 , resulting in a stable cycle with three maxima of the x_3 variable per period.

Chapter 7

Complex Synchronization Dynamics of Electronic Oscillators

In Chapter 6, we conducted a bifurcation analysis of the differential LC and the Colpitts oscillator, examining the attractors and repellers that arise for various parameter values. In this chapter, we formulate the problem as follows: given parameter values that sustain a limit cycle and subject the oscillator to periodic forcing, what perturbation parameters (which are assumed to refer to the period and the amplitude of the perturbation) are needed to achieve locking between the oscillator and the external forcing. To address this question, we will employ the action-angle variables introduced in Chapter 3. We demonstrated that, under certain assumptions on the forcing, the contribution of the action variable is negligible, and the synchronization regions are fully determined by the circle map of the phase. An analytical treatment of the circle maps has been presented in Chapter 4. We apply this theory to two classes of oscillators: the differential LC and the Colpitts, and derive the synchronization diagrams, namely the Arnold tongues. The approach we will follow for both oscillators will be similar and will be analyzed in the next. It's noteworthy that for the differential LC oscillator, we present a scenario where the circle map reduction is ineffective, and the action variable becomes necessary. We demonstrate how to address this case accordingly. Finally for the case of Colpitts oscillator we investigate a different scenario: chaotic synchronization. We show that the chaotic oscillator can be locked to a external perturbation or mutually synchronize with another identical chaotic Colpitts oscillator when properly coupled.

7.1 The General Technique of Analysis

In this Section we present the general method that we use in order to study the synchronization properties of the differential LC and the Colpitts oscillator subject to periodic forcing. We mainly combine the results of Chapters 3 and 4.

First we assume that the parameters belong to a region such that the oscillators admit a stable limit cycle Γ with basin of attraction B (see Chapter 6). Both forced oscillators can be written in the form

$$\dot{x} = f(x) + Ag(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (7.1)$$

where $N = 2$ for the differential LC and $N = 3$ for the Colpitts oscillator. The function g is T_1 periodic with respect to t and represents the forcing, while A denotes its amplitude. We assume that in the presence of the perturbation the state variable remains always inside B and denote by $\phi(x, t)$ the flow of (7.1). Now we introduce the action-angle variables inside the basing of attraction B as in Chapter 3. We have proved that the isochrons (sets of points having the same asymptotic phase) and the isostables (sets of points converging to the steady state with the same rate) are given by level sets of appropriate Koopman eigenfunctions, which can be computed efficiently through Fourier and Laplace averages. In this way we can find the phase and isostable coordinate of each point in the phase space. Recalling Section 2.6.2, system (7.1) can be described by the action-angle equations

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega + \nabla\theta \cdot g(x, t) \\ \dot{r}_1 &= \sigma_1 r_1 + \nabla r_1 \cdot g(x, t), \end{aligned} \quad (7.2)$$

where θ is the phase (angle) variable, r_1 is the isostable (action) variable and $\sigma_1 = \text{Re}(\lambda_1)$ with λ_1 the leading Floquet exponent. We note that for the domain of the phase θ we use interchangeably the interval $[0, T)$, where T , is the period of the unforced limit cycle, and $[0, 2\pi)$ since they differ only by a normalization factor. For the differential LC oscillator (7.2) is exact, while for the Colpitts oscillator the introduced error due to higher order isostable coordinates is negligible. Next we assume that the perturbation $g(x, t)$ has the form,

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(x, t - nT_1), \quad (7.3)$$

where $h(x, \cdot)$ is a function of finite duration T_{on} . In the following we consider $T_1 = kT + sT, k \in \mathbb{N}, s \in [0, 1)$. The assumption on the forcing profile may seem restrictive, but it a very common case. Applications include synchronization of electronic systems [25, 26], neuromorphic systems [28] and optical systems [23]. System (7.3) defines an autonomous system in $S^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. We define the (obviously transversal) Poincaré section

$$\Sigma = \{(\theta, r_1, t) \in S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid t \bmod T_1 = 0\}, \quad (7.4)$$

which corresponds to stroboscopically observing the system at times equal to multiples of the forcing period. Since between two periods the system evolves autonomously, a two dimensional map is defined

$$\begin{aligned} r_1 &\rightarrow e^{\sigma_1 T_1} (r_1 + \delta_1(r_1, \theta)) \\ \theta &\rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta_2(r_1, \theta) \bmod 2\pi, \end{aligned} \quad (7.5)$$

where the functions δ_i represent the difference between the old action-angle coordinates (θ, r_1) and the new ones after the application of the forcing. Now if we assume that the factor $\sigma_1 T_1$ (or equivalently $\sigma_1 kT$) is sufficiently negative, the point we observe stroboscopically always belongs to the cycle itself (equivalently the period of the perturbation is sufficient for the oscillator to relax to its limit cycle) and we can neglect the action variable r_1 . This enables us to approximate (7.5) by the circle map

$$\theta \rightarrow \theta + \omega T_1 + \delta(0, \theta) = \theta + \omega T_1 + \text{PRC}(\theta, A) \bmod 2\pi, \quad (7.6)$$

where the function $\text{PRC}(\theta, A)$ corresponds to the phase difference between the point of the cycle having phase θ_n and the phase θ_{n+1} of the point after the perturbation ceases, when we apply a perturbation h of amplitude A . That is,

$$\text{PRC}(\theta, A) = \theta(\phi(y_n, T_{on})) - \theta(x_n), \quad y_n \in \Gamma \cap \mathcal{I}_{\theta(x_n)}, \quad (7.7)$$

where $\theta = \arg f_{i\omega}(x)$ and $f_{i\omega}$ is the Koopman eigenfunction related with the eigenvalue $i\omega$. Hence, the isochrons structure crucially affect the synchronization properties of the system. The map (7.6) has been extensively studied in Chapter 4, where we have shown that rational rotation numbers correspond to phase locking states which in turn imply rational relation between the forcing frequency and the frequency of the perturbed oscillator. We have proved that these regions exist and emanate from rational multiples of the period and form the Arnold tongues. When referring to these regions we will use interchangeably the terms "synchronization regions", "resonance regions", "locked states" and "Arnold tongues". In contrast, irrational rotation numbers, under the assumption of invertibility of the circle map (which we show that is true for at least small to moderate A), result in either quasiperiodic or chaotic behavior. In this way the problem of synchronization reduces to finding regions in the $A - T_1$ plane for which (7.6) admits a rational rotation number. We note that (7.6) suggests that only the sT term affects the synchronization properties, so that the synchronization diagram is periodic with respect to T and essentially it is a $s - A$ diagram. In other words, the necessity of the term kT is to ensure that the limit cycle will have enough time to relax to its limit cycle before the next perturbation comes.

A final remark on the interpretation of the diagrams is in order. As mentioned in Chapter 4, the crucial quantity characterizing the synchronization properties of (7.6) is the rotation number. It is rational, $\rho = p/q$, if and only if a periodic orbit of period q exists. The numerator p denotes how

many cycles the phase variable has completed, or equivalently, how many times it has crossed 2π before returning to the same value. From this perspective, concerning the locking properties of the continuous-time system, any p/q locked state corresponds to a continuous time solution with period equal to $1/q$ that of the forcing. Thus, for example regions such as $2 : 3$ and $1 : 3$ should be considered equivalent. They correspond to the same locking state with respect to the external perturbation.

From the above analysis we can summarize the technique as follows

1. Assume a certain form for the function h and choose appropriate parameters for which a stable limit cycle for the autonomous system exists.
2. Determine the isochron structure through the numerical methods discussed in Chapter 3. From this we can find the PRC function for any phase θ and for different amplitudes A .
3. Determine the rotation number ρ of (7.6) for different values of s and A and hence the resonance diagram.
4. Find a least value for k and compare with the results obtained with direct solving the differential equations.

Regarding the third step we want remark that the structure of isochrons determines the synchronization properties of the circle map and hence of the perturbed oscillator. This structure is a property of the autonomous oscillator and, in contrast with the PRC, does not depend on the nature of the perturbation. We will show that this structure depends on the dynamical phenomena described in Chapter 6 and provide a specific example on how the synchronization regions are affected.

Moreover, in the case of the differential LC oscillator we also investigate a scenario where the phase reduction is not valid and an action (r_1) coordinate is necessary to study the synchronization properties of the considered system. Finally, we show that the chaotic Colpitts oscillator can be locked to an external perturbation or mutually synchronize with another identical oscillator when properly coupled.

7.2 Complex Synchronization Dynamics of Differential LC Oscillators

We begin with the study of Differential LC Oscillators. The analysis cannot be carried out in a general form as in (6.2) and therefore we consider the MOS implementation (similar results can be derived for the BJT implementation as well) of Fig. 5.5 described by the non-autonomous system,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Qy + QGx(1 - x^2) + QGAx(1 - x^2)p(t) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q,\end{aligned}\tag{7.8}$$

where $p(t)$ is the periodic perturbation of period T_1 of amplitude A . We remark that we have made the assumption that the forcing is applied as a voltage signal at the gate of M_5 (see (5.15) and (5.16)). The parameters Q, G are such that a stable limit cycle exists (see Fig. 6.5). Further we assume that the perturbation $p(t)$ has the form,

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0, T_{on})}(t - nT_1),\tag{7.9}$$

where $\mathbb{1}_A(\cdot)$ is the characteristic function of the set A . In the following we consider $T_{on} = T/10$ and $T_1 = kT + sT, k \in \mathbb{N}$ where T is the period of the unforced limit cycle.

7.2.1 Isochrons and Phase Response Curves

We study the isochrons structure of (7.8) for different parameter values for which the system admits a stable limit cycle (see Chapter 6). Figure 7.1 shows the corresponding manifolds.

In (a) and (b), the parameters Q and G fall within the region defined by $H^{(1)}$ and $F_+^{(1)}$ of Fig. 6.5. However, in (a), their proximity to $H^{(1)}$ is greater compared to (b). This proximity influences

the dynamics significantly, resulting in distinct structures of the isochrons. Specifically, in (a), the isochrons resemble those of the Hopf normal form (6.8), also known as the Stuart-Landau oscillator [50], characterized by logarithmic spirals. Conversely, in (b), the isochrons exhibit a different pattern. Despite these differences, both cases share the characteristic of having the whole phase space, except for the origin, as the basin of attraction B . It's worth noting that the limit cycle's characteristics, such as period and Floquet exponent, differ between the two cases. The Floquet exponent takes values of $\lambda = -0.05$ and $\lambda = -1.1$ in cases (a) and (b) respectively.

In (c) the parameters lie within the $F_+^{(1)}$ and $H^{(2)}$ curves. Hence the origin is a saddle and two symmetric unstable fixed points have been born. As a result the phaseless set, includes the stable manifold of the origin along with the symmetric equilibria, leading to a more complicated structure of the isochrons. In (d) the parameters lie within the region defined by $H^{(2)}$ and P . Thus, two symmetric unstable limit cycles have been born surrounding the symmetric equilibria which have gained stability. The phaseless set now includes the stable manifolds of the symmetric equilibria, which coincides with the interior of each symmetric limit cycle, the stable manifold of the origin and the symmetric unstable limit cycles themselves. This complicates further the structure of the isochrons. In (e) the parameters lie in the region defined by P and K curves. Consequently, the two unstable limit cycles have merged into a bigger one and the phaseless set includes the unstable cycle, the stable manifold of the origin and the stable manifolds of the two symmetric stable fixed points (interior of the unstable cycle). This results in a further complication in the structure of the isochrons. From the above discussion and Fig. 7.1, we conclude that the structure of isochrons fully characterizes the dynamics of the system. This characterization depends not only on other attractors or repellers ((c)-(e)) but also on the limit cycle itself (e.g., the difference between (a) and (b)).

In the following, we concentrate on cases (a) and (b) to examine the variations introduced in the characteristics of the limit cycle due to different parameters and study how they affect the resonance diagrams. In both scenarios, the limit cycle is the unique attractor of the system, and the phaseless set comprises solely the origin. This setup enables us to employ arbitrary amplitudes for the forcing without concerns about points ending up in the phaseless set (which is just a point). Figure 7.2 illustrates the PRC as functions of the amplitude of the forcing and of the phase, and the Winfree time crystal [64, 28], which corresponds to the asymptotic phase of a perturbed point, for the perturbation given by (7.9). It's worth noting that the PRC, as defined in (7.7), depends crucially on the isochron structure as well as the form of the perturbation. The differing isochron structures observed in Fig. 7.1 lead to discrepancies between the PRC and PTC curves in Fig. 7.2.

As mentioned in Chapter 4, if the circle map defined in (7.6) is orientation preserving, we can fully classify every orbit of the circle map. A necessary and sufficient condition for this is that the PTC curve is monotonic. Figure 7.3 illustrates the PRC and PTC curves for the same set of parameters (Q, G) under weak and strong forcing. We conclude that the map is monotonic for at least small amplitudes, but this condition ceases to hold for stronger ones. This implies that with weak forcing, we can fully classify every possible orbit of the circle map (7.6). However, for stronger forcings, although this may not hold true, the rotation number can still capture significant information associated with the existence of periodic orbits. From Fig. 7.3, the influence of the isochron structure on the PRC and PTC curves becomes more apparent. It's important to note that these differences will significantly affect the synchronization properties of the system, as demonstrated in the following sections.

7.2.2 Synchronization

Having obtained the PTC curves for different amplitudes A , we can determine the rotation number of (7.6), and the diagram $\rho(s, A)$ corresponds to the synchronization diagram. As discussed in Chapter 4, synchronization regions, representing locked states, emanate from rational points on the horizontal axis and for at least small forcing, they do not overlap. At the boundaries, synchronization is destroyed via saddle-node bifurcations, resulting in unlocked states. Therefore, for a fixed forcing amplitude A , locked regions are determined by the loci of saddle-node bifurcations. Conversely, when fixing s and varying A , the bifurcations depend on how different tongues are traversed. In Fig. 7.4, the Arnold tongues for the two parameter sets are depicted. We note that the diagram is periodic with respect to the horizontal axis s , as previously explained, and thus, we limit the display to $s \in [0, 1)$.

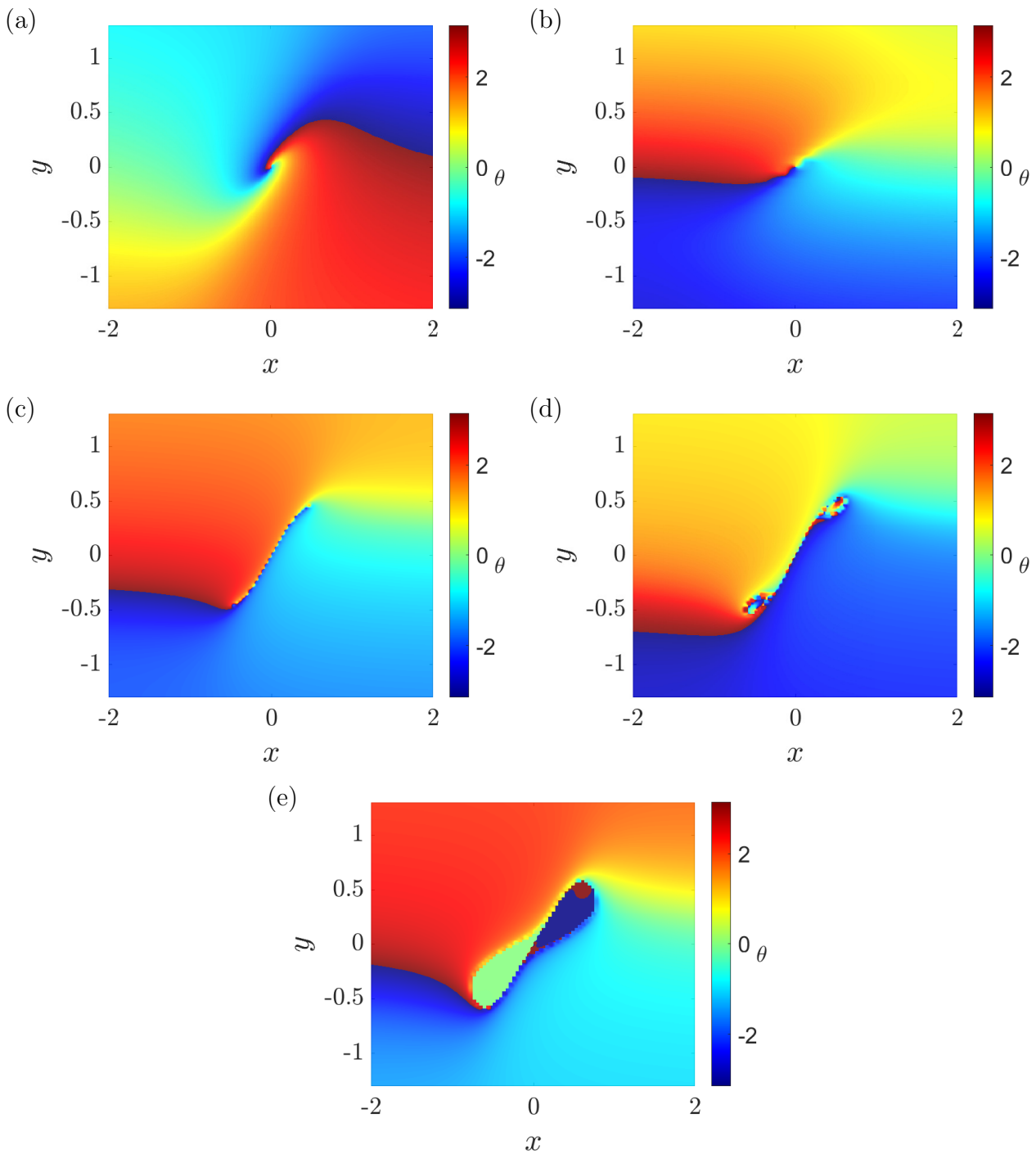


Figure 7.1: Isochrons for the autonomous system (7.8) (with $A = 0$). (a) and (b) The parameters lie between $H^{(1)}$ and $F_+^{(1)}$ but the Floquet exponent in (b) is smaller. (c) The parameters lie between $F_+^{(1)}$ and $H^{(2)}$. (d) The parameters lie between $H^{(2)}$ and P . (e) The parameters lie between P and K . The limit cycle and the equilibria present for each case can be found in Fig. 6.4.

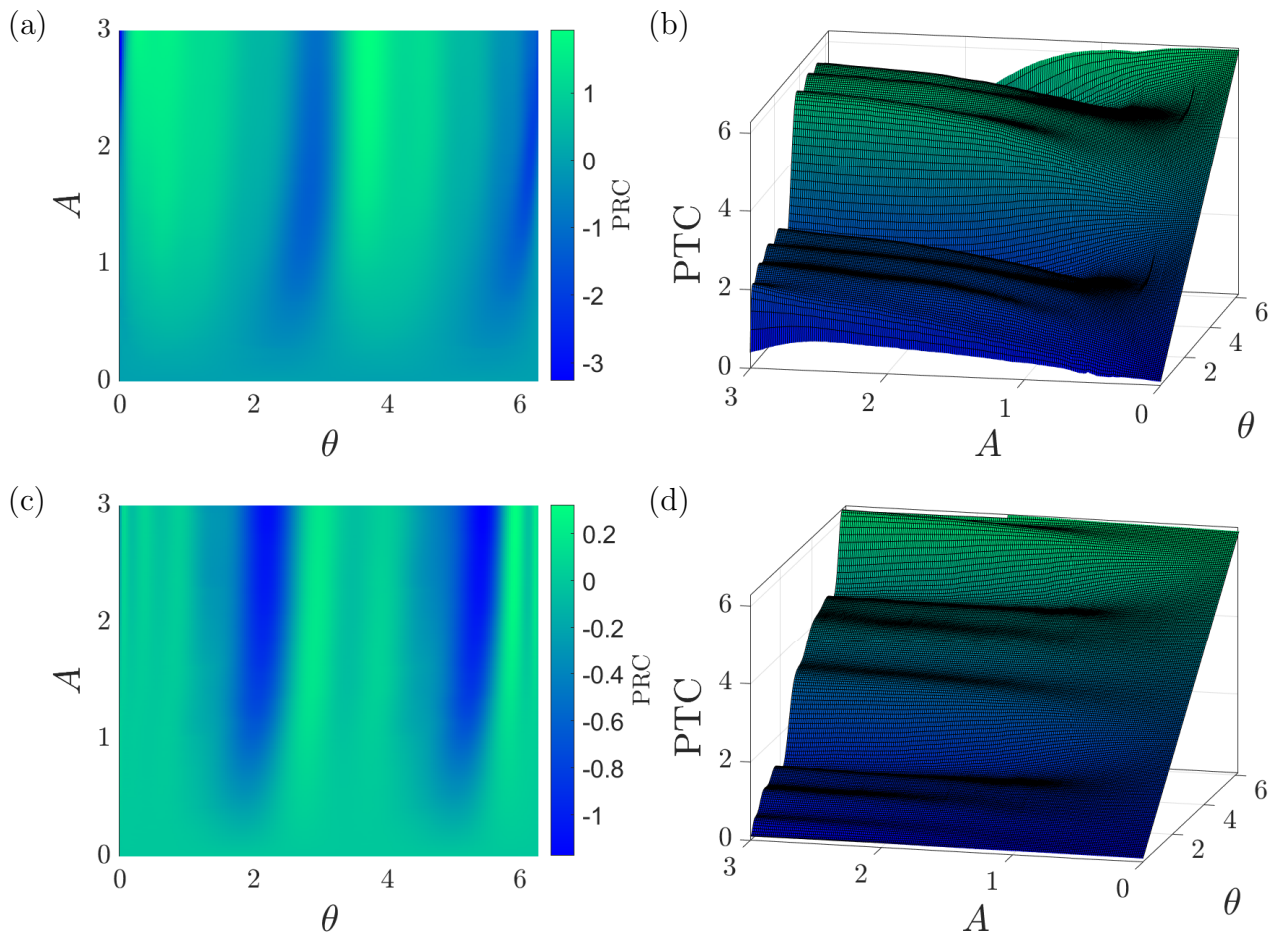


Figure 7.2: Top: (a) PRC and (b) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 1.25$, $G = 0.68$. Bottom: (c) PRC and (d) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 3$, $G = 0.5$.

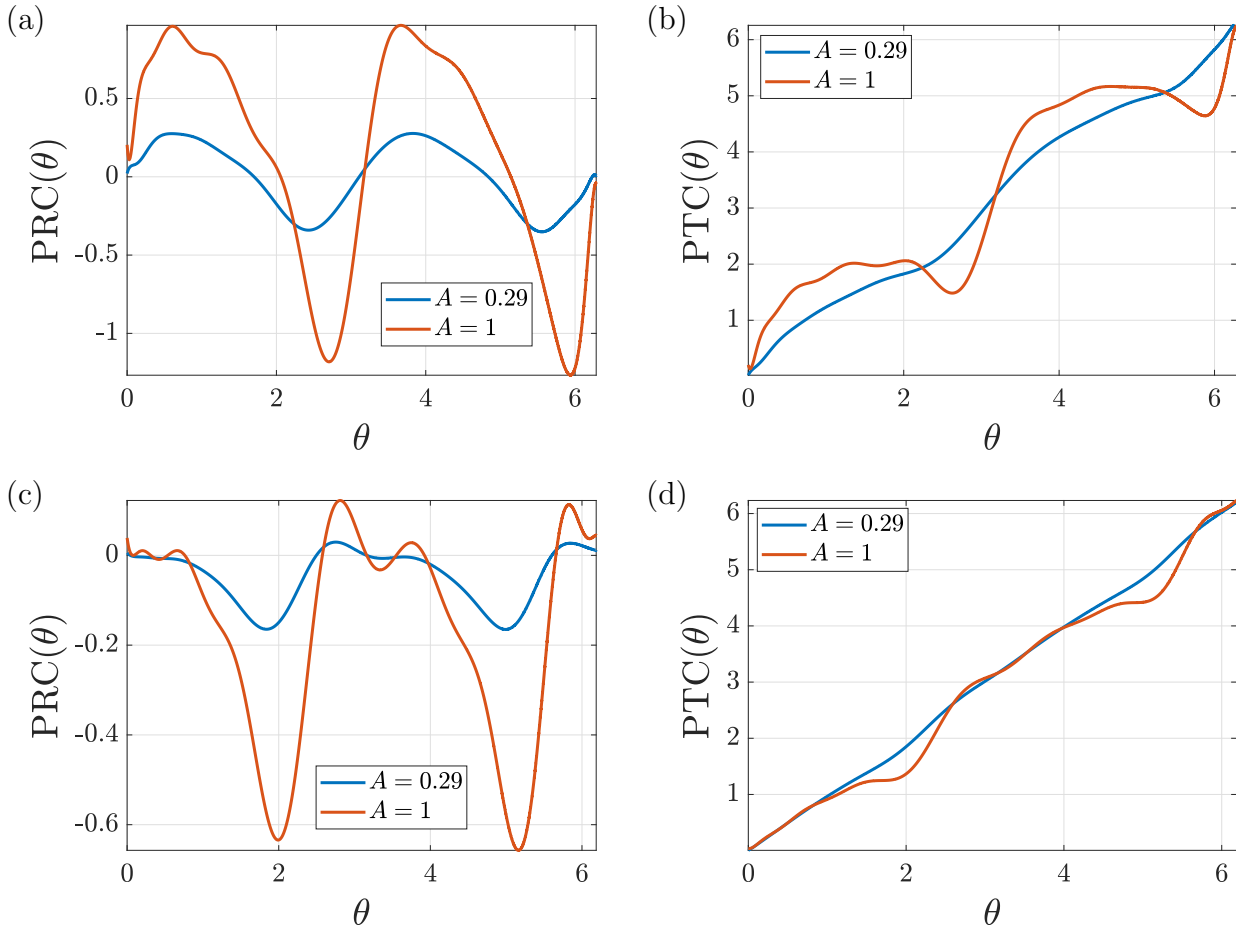


Figure 7.3: Top: (a) PRC and (b) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 1.25$, $G = 0.68$ for weak and strong forcing. Bottom: (c) PRC and (d) PTC corresponding to (7.8) parameter values $Q = 3$, $G = 0.5$ for weak and strong forcing.

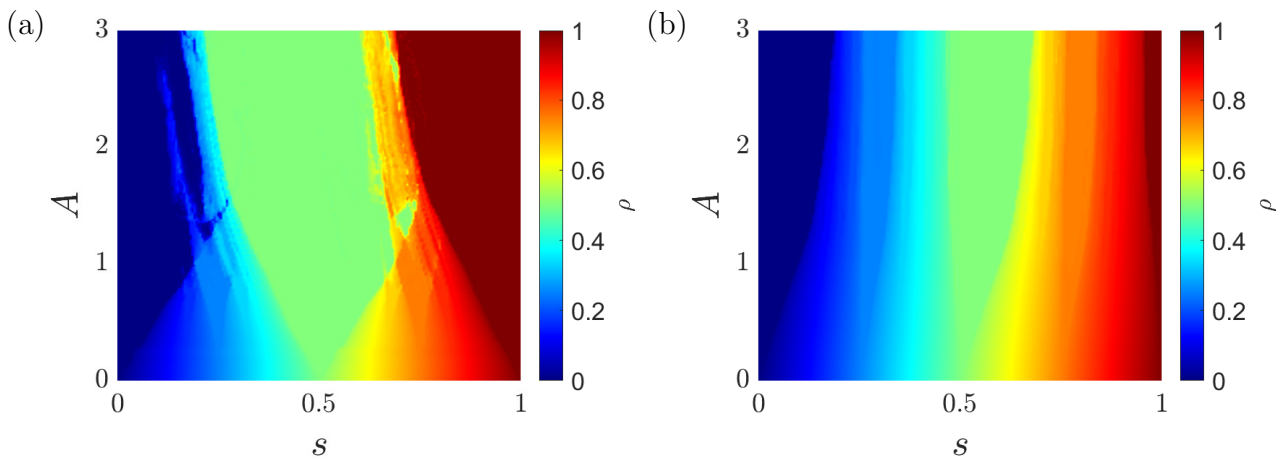


Figure 7.4: Synchronization regions (Arnold Tongues) corresponding to (7.8). (a) Parameter values $Q = 1.26$, $G = 0.68$ and (b) parameter values $Q = 3$, $G = 0.5$

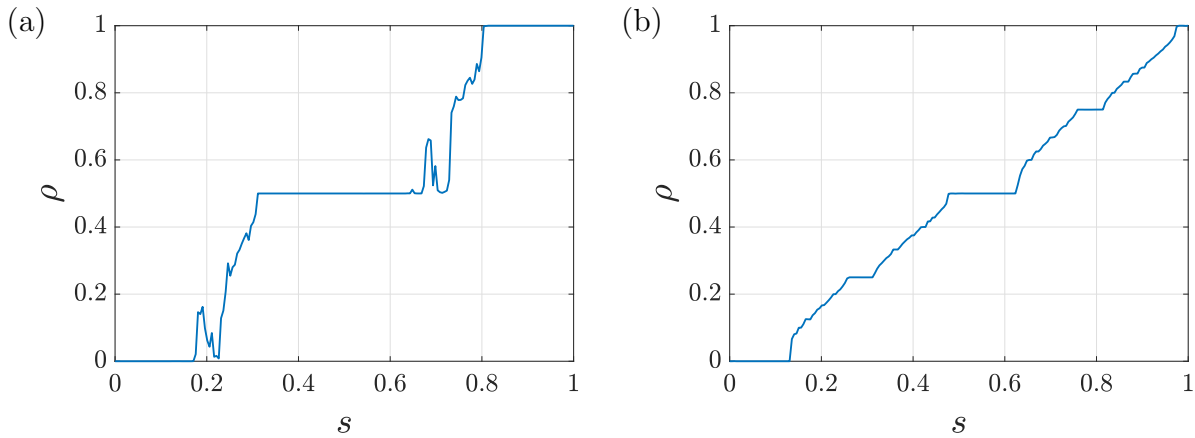


Figure 7.5: Rotation number ρ as a function of the variable s controlling the period of the perturbation for fixed amplitude forcing $A = 1.3$. In (a) it is not increasing for $Q = 1.25, G = 0.68$. In (b) it is increasing for $Q = 3, G = 0.50$.

The same periodicity holds for the ρ variable (only the term $\rho \bmod 1$ matters, see Chapter 4). The quantitative differences in the structure of the two cases due to the isochrons are evident. In case (a), the synchronization regions for $1 : 2$ and $1 : 1$ are broad and overlap with increasing amplitude, whereas higher-order synchronization regions, like $1 : 3$, are narrow and observable only for small forcing, where the map is invertible. Conversely, in the second case, locked regions are well-defined even for strong forcing, with higher-order synchronization, including $1 : 4$, being observable. The regions tend to widen with increasing amplitude. The map in the second case is nearly invertible and the rotation number is increasing in s , even for very large amplitudes, allowing us to infer that aperiodic motion outside the Arnold Tongues will be quasiperiodic, provided the map is topologically transitive. This conclusion contrasts with case (a), where such inference would not necessarily hold. For further confirmation of this observation, one could compare the Devil's staircase as depicted in Fig. 7.5 for each of the two cases, corresponding to a horizontal cross-section in Fig. 7.4. In (a), the map is not invertible for strong forcing, and the rotation number is not increasing, yet it still captures relevant synchronization information (remaining constant inside the resonance region). Conversely, in (b), the map is nearly invertible, and the rotation number is continuous and increasing.

We note again that in a p/q Arnold tongue, the numerator p denotes how many cycles the phase variable has completed, or equivalently, how many times it has crossed 2π before returning to the same value. From this perspective, concerning the spectral properties of the continuous-time system, regions such as $2 : 3$ and $1 : 3$ should be considered equivalent. They correspond to the same locking state with respect to the external perturbation.

After obtaining the resonance diagrams of the oscillator subjected to external periodic perturbation, we can observe the results on both the discrete circle map and the original continuous-time perturbed system. First, we present examples of $1 : 2$ and $1 : 1$ synchronizations, along with aperiodic motion, for the second parameter set in Fig. 7.4 (b). We note that the Floquet exponent $\lambda = -1.1$ and the cycle is sufficiently attracting, allowing us to set at least $k = 2$, which we use subsequently.

In Fig. 7.6, the forcing parameters lie in the resonance region defined by $\rho = 1/2$. In the discrete time (c) and (d), this translates to a stable period two cycle. As seen in (a), the resulting signal is periodic, while in (b), the Poincaré section (7.4) corresponds entirely to the period two cycle of the circle map. The spectrum of the output signal is depicted in (e). Under synchronization conditions, the spectrum remains discrete, but the spacing between the frequency peaks is determined by both the injected period T and the rational rotation number. In the case of $\rho = 1/2$, the frequency spacing equals $1/2(kT_0 + T_s)$ and the output signal has frequency equal to $1/2$ that of the forcing with the first harmonic centered at $1/2(kT_0 + T_s)$.

In Fig. 7.7, the forcing parameters lie in the resonance region defined by $\rho = 0$ which is $1 : 1$ synchronization region. In the discrete time (c) and (d), this translates to a fixed point for the circle

map. As seen in (a), the resulting signal is periodic, while in (b), the Poincaré section (7.4) corresponds entirely to the stable point of the circle map. The spectrum of the output signal is depicted in (e). The spectrum is again discrete, but the spacing between the frequency peaks equals $1/(kT_0 + T_s)$ and the output signal has frequency equal to $1/2$ that of the forcing with the first harmonic centered at $1/(kT_0 + T_s)$.

As a final example for this parameter set, we present a case of aperiodic motion in Fig. 7.8. The forcing parameters lie in a region between Arnold tongues where the rotation number is irrational (practically, due to limited numerical accuracy, the rotation number may appear rational but does not fall within any Arnold tongue). In discrete time (c) and (d), it is evident that the orbit of the circle map does not converge to any stable periodic cycle. However, we cannot definitively ascertain if the motion is chaotic or quasiperiodic, although we suspect it to be quasiperiodic based on the nature of the resonance diagram in Fig. 7.4. The time series in (a) confirms the aperiodic motion, and the Poincaré section in (b) does not converge to any orbit but fills the cycle. Upon examining the spectrum in (e), it becomes apparent that the spacing between the frequency peaks is not constant, contrasting with synchronized cases. However, it is also not continuous, confirming the hypothesis that the aperiodic motion is indeed quasiperiodic and not chaotic. In fact it is the linear combination of two incommensurate frequencies.

Next, we examine the first set of parameters: $Q = 1.25$ and $G = 0.68$. The synchronized cases do not differ compared to those of the previously studied parameter set, and for this reason, we do not repeat them here. The only quantitative difference is the spacing between the frequency peaks, which is influenced by the distinct characteristics of the limit cycle: the free-running frequency differs, and the Floquet multiplier is -0.05 , suggesting that higher values for k , at least 10, should be utilized for the oscillator to lock to the external perturbation. Despite the qualitative similarity in the synchronized cases, the aperiodic case is different. From Fig. 7.4 and the subsequent discussion, we suspect that the motion in this case will be chaotic instead of quasiperiodic. In Fig. 7.9, we assume parameters that lie within a region of an ill-defined rotation number, in the sense that it does not belong to any Arnold tongue. In (c) and (d), it is clear that the orbit of the circle map does not converge to any periodic orbit, as expected. Similarly, the time series of the output signal in (a) is not periodic. The points in the Poincaré section in (b) tend to fill specific parts of the cycle, suggesting that the motion is chaotic rather than quasiperiodic. Indeed, upon examining the spectrum in (e), we conclude that the spectral lines are continuous, confirming that the motion is chaotic.

From the above results, we can immediately see how a synchronized oscillator can be applied in practical scenarios. Firstly, the characteristics in the locked state suggest that the oscillator can function as a frequency divider, converting periodic input signals into periodic outputs with controllable spectral lines. Additionally, it can be utilized in applications requiring chaotic or quasiperiodic motion. When operated in the unlocked state, it can generate a chaotic output with a continuous spectrum or a quasiperiodic output. More generally, synchronization offers the significant advantage of having a locked phase, meaning that the issue of arbitrary phase is eliminated, resulting in reduced phase noise. Essentially, the above analysis suggests that a single limit cycle oscillator can function as a divider, multiplier or a chaotic generator, depending on the driving signal.

7.2.3 Synchronization under Strong and Rapid Perturbation: Complete Action-Angle Representation

In the previous subsections we made the assumption that $\sigma_1 T_1$ is sufficiently negative so that we can neglect the equation for r_1 in (7.5) and utilize only the circle map (7.6). Under this assumption we showed that the circle map describes effectively the synchronization dynamics of the the forced oscillator and derived the resonance diagram. Now we loosen this requirement and utilize both the angle and the action (isostable) variable to study (7.8).

Since the system (7.8) is planar, there is a one-to-one correspondence between each point (x, y) in the phase space and the action-angle coordinates (r, θ) . We have already computed the θ coordinate, which represents the isochrons. In Fig. 7.10 (a) and (b), the Koopman eigenfunction associated with the Floquet exponent λ_1 is illustrated. The iso-curves of this surface correspond to the isostables (as discussed in Chapter 3). In (c), various isochrons and isostable curves are shown. The intersection

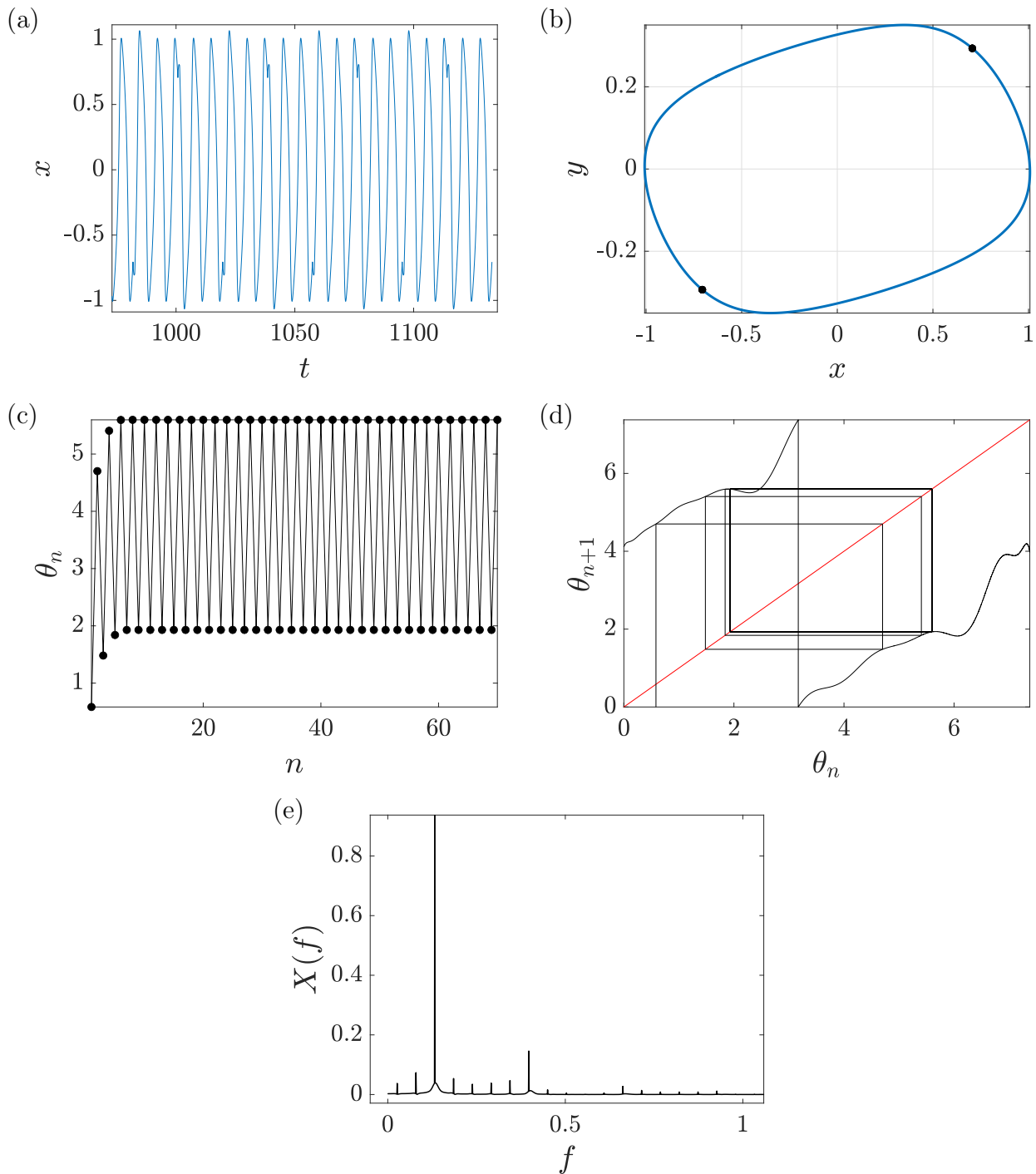


Figure 7.6: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (e). The frequency spacing equals $1/2(kT_0 + T_s)$. Forcing parameters: $A = 1.6$, $s = 0.56$, $k = 2$, 1:2 locking. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$.

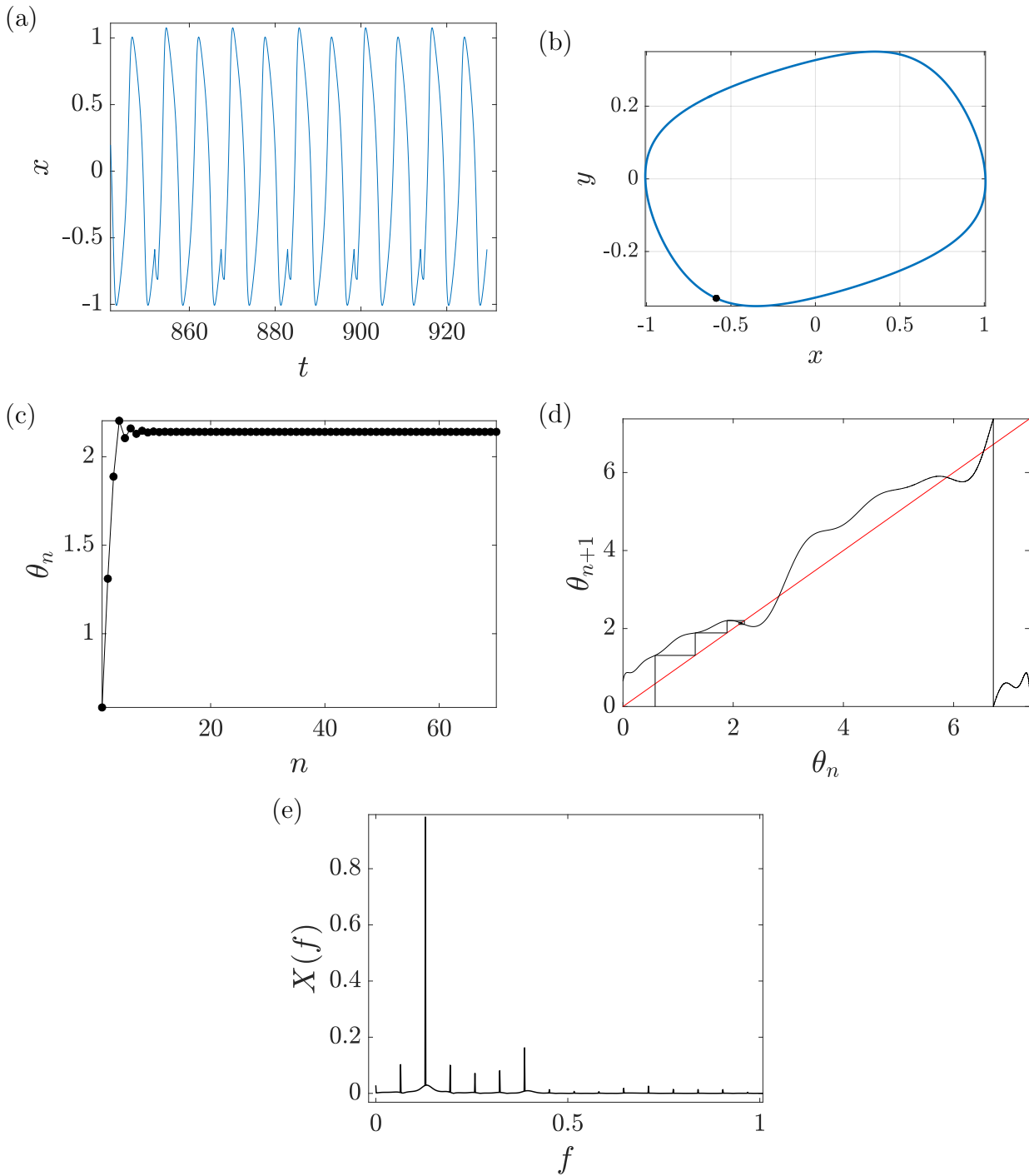


Figure 7.7: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (e). The frequency spacing equals $1/(kT_0 + T_s)$. Forcing parameters: $A = 2$, $s = 0.1$, $k = 2$, 1:1 locking. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$.

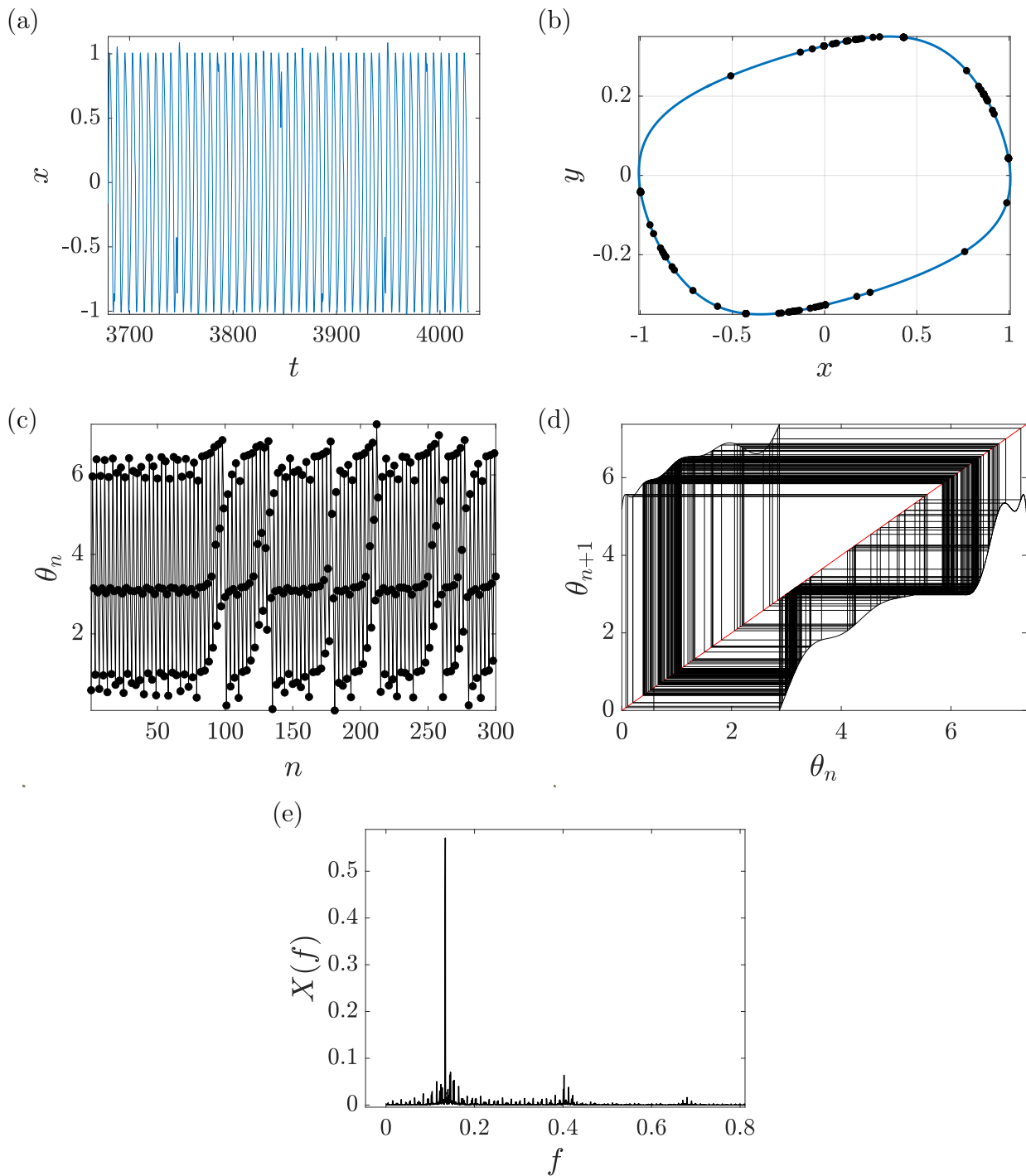


Figure 7.8: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (e). Forcing parameters: $A = 2.85$, $s = 0.73$, $k = 2$. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$.

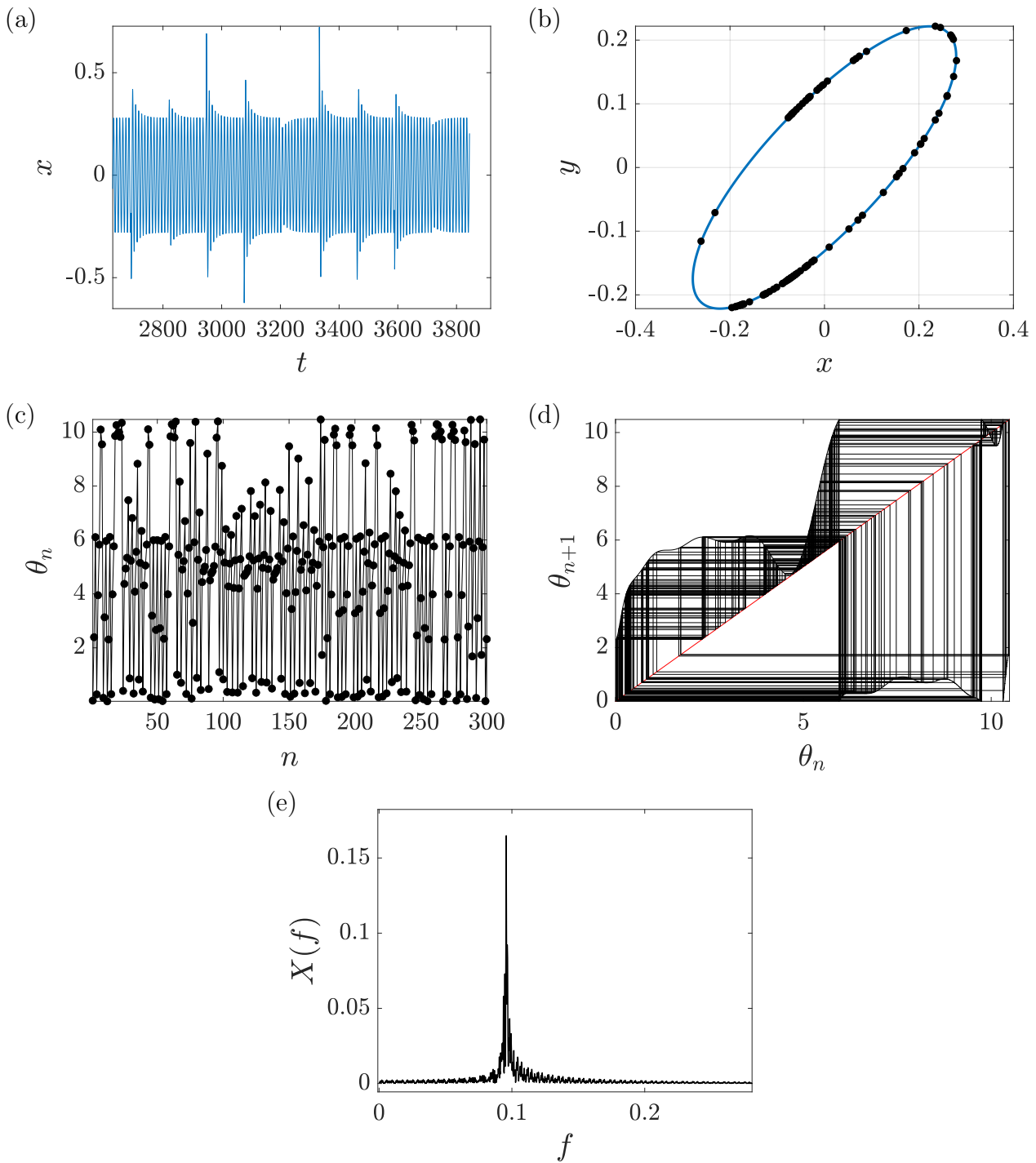


Figure 7.9: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.6) in (b). Corresponding time series of x in (a). Circle map orbit in (c) and corresponding cobweb in (d). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (e). Forcing parameters: $A = 1.54$, $s = 0.22$, $k = 10$, unlocked state. Circuit parameters $Q = 1.26$, $G = 0.68$.

of any two such curves defines a point with the corresponding action-angle coordinates. Conversely, from the (x, y) coordinates, one can straightforwardly determine (r, θ) . We remark again that the action-angle coordinates, as Koopman eigenfunctions, define a diffeomorphism,

$$\begin{aligned} h : B &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (r_1, \theta), \end{aligned} \quad (7.10)$$

and in these new coordinates, the system evolves linearly. In (d) and (e), the first coordinate of the gradients ∇r_1 and $\nabla \theta$ are displayed, which are used to determine the response of the system to a general perturbation as given by (7.2), and (f) shows the restriction of $\nabla \theta_x$ on the limit cycle, which is the well known infinitesimal PRC $Q(\theta)$ (see Chapter 3). As discussed in Chapter 3, the evolution of an observable can be expanded in a series of eigenfunctions, as expressed in (3.85). If $f \equiv 0$ on the limit cycle, which is the case for the observable used in computing the isostables, the time evolution of $f(x)$ is given by,

$$U^t f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{>0}, k \in \mathbb{Z}} e^{(m\lambda_1 + i\omega k)t} a_{m,k} s_1^m(x) s_2^k(x), \quad (7.11)$$

from which it follows that $(U^t f)e^{-\lambda_1 t}$ tends to

$$U^t f(x)e^{-\lambda_1 t} \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\omega k t} a_{1,k} s_1(x) s_2^k(x), \quad (7.12)$$

which is shown in (g) in order to give a practical insight of the Koopman operator framework introduced in Chapter 3.

Now we suppose the architecture of direct injection of the MOS oscillator, as discussed in Chapter 5, instead of the architecture that was previously discussed. In that case, (7.8) becomes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Qy + QGx(1 - x^2) + Ap(t) \\ \dot{y} &= (x - y)/Q. \end{aligned} \quad (7.13)$$

To illustrate this scenario we choose as the periodic perturbation,

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_1), \quad (7.14)$$

namely we assume that instead of a periodic sequence of rectangular pulses, the perturbation is a pulse series (equivalent to rectangular pulses with $T_{on} \rightarrow 0$). In this case however, we don't impose any restriction on $\sigma_1 T_1$. It can be made arbitrarily large (absolutely) so that the phase reduction model may not be valid. In such a scenario, the two-dimensional map (7.5) should be employed to determine whether the oscillator is locked to the external perturbation.

Let $T_1 = 0 + 0.1T_0$, or with the previously introduced notation, $k = 0$ and $s = 0.1$. In Figure 7.11, we observe the response of both the discrete-time map (7.5) and the continuous-time system to the applied perturbation. In (c) and (d), the two-dimensional map converges to an equilibrium, corresponding to a synchronized 1 : 1 state for the perturbed oscillator. However, the action variable r is far from 0 (the limit cycle), indicating that reduction with only the phase variable would not be valid. The time series of the x variable is periodic, as expected, but the oscillation is strongly nonlinear compared to earlier scenarios. In (b), the points of the Poincaré section converge to a fixed point (the transient phenomenon is not shown here), consistent with the discrete map in (c) and (d). Examining the spectrum of the time series of x in (e), we find that the spectrum is discrete, as expected for the synchronized state, with spacing between the frequency peaks equal to $1/(sT_0)$, namely the frequency of the perturbation. In essence, this results in the output signal having a frequency ten times that of the free-running oscillator.

Consequently, in the case of strong and rapid forcing, the circle map describing the evolution of the phase at the arrival of each perturbation should be augmented with the action variable to provide a valid description of the synchronization dynamics of the system. The Koopman operator framework

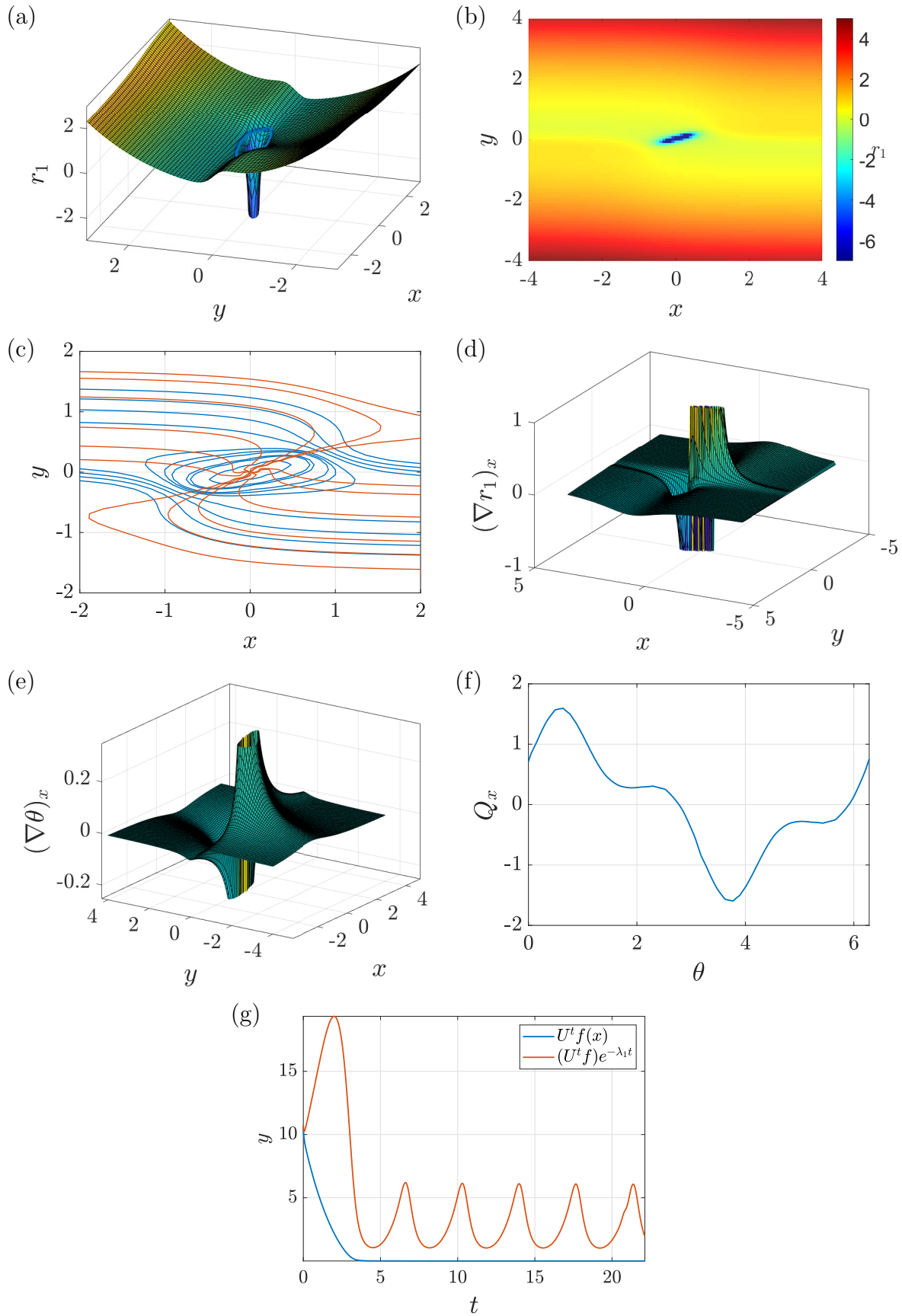


Figure 7.10: (a) and (b) Koopman eigenfunction associated with λ_1 . (c) Isostables and isochrons. (d) First coordinate of gradient $e_1^T \nabla r_1$. (e) First coordinate of gradient $e_1^T \nabla \theta$ and (f) $e_1^T \nabla \theta(0, \theta) = e_1^T Q(\theta)$. (g) Time evolution of the Koopman modes associated with $k\lambda_1 + i\nu\omega$, $k \geq 1$

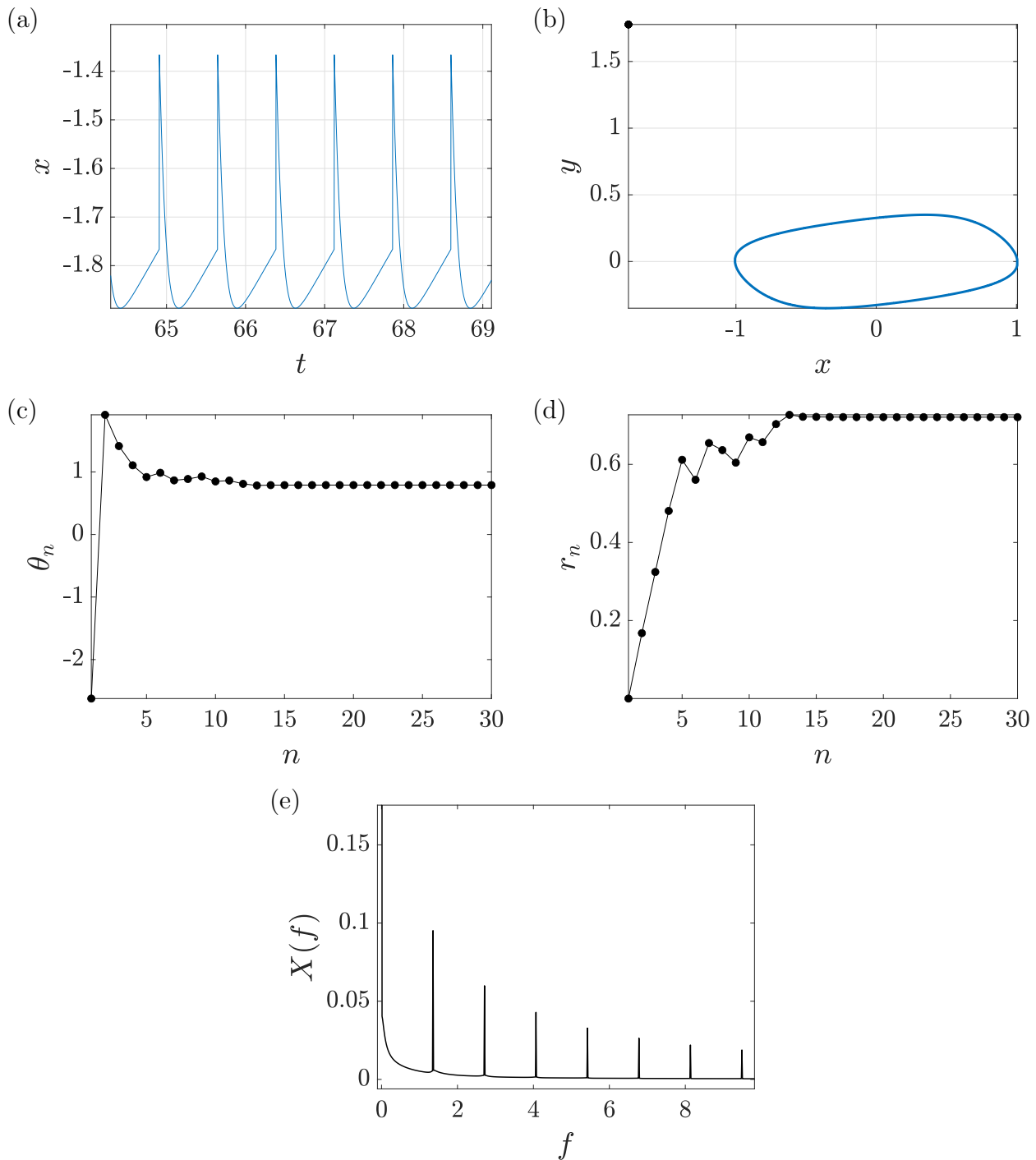


Figure 7.11: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.13) in (b). Corresponding time series of x in (a). Orbit of the phase and isostable variable in (c) and (d). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (e). Forcing parameters: $A = 1$, $s = 0.1$, $k = 0$, $1 : 1$ locking. Circuit parameters $Q = 3$, $G = 0.5$.

introduced in Chapter 3 naturally generalizes the one-dimensional circle map. However, one should be cautious when using with the cases of higher-order synchronization (with respect to the forcing).

In general, a 1 : 2 synchronization could correspond to either a two-cycle for both the r variable and the θ variable or to an equilibrium for the r variable and a two-cycle for the θ variable. Similar considerations apply for the general 1 : q case, motivating the generalization of Arnold tongues to apply in this scenario as well.

In terms of possible applications, the resulting periodic solutions were strongly nonlinear, which can be particularly useful in certain cases. Moreover, this scenario enables the design of oscillators with a frequency equal to a multiple of the free-running frequency (i.e., a multiplier), in contrast to the cases discussed in the previous subsection where the frequency was always divided. The significant advantage of the locked phase applies here as well.

7.3 Complex Synchronization Dynamics of the Colpitts Oscillator

We continue with the study of the periodically perturbed Colpitts oscillator (5.22), which is described by the system of equations,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)} \left(1 - e^{-x_2} + x_3\right) \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{Qk} (x_3 + Af(t)) \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g} (x_1 + x_2) - \frac{1}{Q}x_3.\end{aligned}\tag{7.15}$$

We note that, referring to Fig. 5.5 (c), we have assumed that the forcing corresponds to a current source $IAf(t)$ parallel to the bias source $I_0 = I$. Similar to the differential LC oscillator, we suppose that f is a periodic function of period T_1 , and A is the normalized amplitude of the perturbation. The parameters Q , g , and k are selected so that a stable limit cycle exists (see Chapter 6). Similar to (7.9), we assume the following form for the forcing,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0, T_{on})}(t - nT_1),\tag{7.16}$$

where $T_{on} = T/10$ and $T_1 = kT + sT$, where $k \in \mathbb{N}$ and T is the period of the unforced limit cycle. The steps we follow are in accordance with the case of the differential LC oscillator: we first study the isochrons, examining how they are affected by changes in the dynamics due to different parameters, and then analyze the phase response curves. We continue by deriving the Arnold tongues and investigating the synchronization dynamics. Both in the derivation of the PRCs and in the analysis of the response subject to a perturbation, we use a simulation in Simulink to compare with the theoretical findings, where non-idealities in the BJT and in the passive elements are considered. Concluding this section, instead of using both the action and the phase variable to study synchronization under strong and rapid forcing, we explore a different kind of synchronization possible in the Colpitts oscillator: chaotic synchronization.

7.3.1 Isochrons and Phase Response Curves

We begin with the study of the isochrons structure for different values of Q , g and fixing $k = 0.5$. Figure 7.12 shows the corresponding manifolds.

In (a), the parameters are such that a limit cycle is the unique attractor of the system. No period doubling or tangent bifurcations have occurred, resulting in the coexistence of attractors or the creation of repellers. Hence, the phaseless set contains only the two-dimensional stable manifold of the origin, $W^s(0)$. In (b), the parameters lie above the $F_{0,1}$ curve and below the $F_{1,1}$ curve of Fig. 6.9 (b), and a period-doubling bifurcation has resulted in a stable limit cycle of double period, while the initial limit cycle has become saddle. This results in a more complicated structure for the isochrons, as the phaseless set now contains both $W^s(0)$, the unstable limit cycle itself and its stable manifold.

In (c), the parameters lie above the curves $F_{1,1}$ and $F_{1,1}^{(2)}$ of Fig. 6.9 (b). Consequently, another period-doubling bifurcation has resulted in the birth of another stable limit cycle of double period, and the previous "period two" cycle has become unstable, resulting in two unstable limit cycles (period "one" and "two"). It is apparent that the isochron structure has become more complicated. For the parameters in (d) and (e), we have coexistence of two stable cycles. Hence, each point in the phase space will converge to either of them depending on whether it belongs to the basin of attraction of one or the other. Thus, the phase of each point that we are computing is not necessarily the phase that corresponds to the same limit cycle, thus further complicating the isochron structure. In the Figure we compute the phase as if there was only one cycle (we suppose that we do not know the existence of the other). From the discussion above, we again conclude that the structure of isochrons is crucially affected by the dynamics of the system and reveals its complexity. Even repellers that do not affect the stability properties of the system influence their structure.

As previously mentioned, isochrons are an intrinsic property of the system but crucially affect its response to an external periodic perturbation. Here, we focus on the first set of parameters ($\log_{10} g = 1, \log_{10} Q = 1.35$, leading Floquet exponent -0.022), where the system admits a unique stable limit cycle without other attractors or repellers. The phaseless set comprises only $W^s(0)$, and the structure of isochrons is relatively simple. Using the perturbation (7.16), we compute the PRC and PTC of the system (7.15) for different values of the forcing amplitude A . It's worth noting that the forcing A must allow for large values (compared to the case of differential LC oscillators) due to the large values of the state variables resulting from normalization. Fig. 7.13 (a) shows the PRCs, and (b) illustrates the Winfree Time Crystal (surface defined by PTC). The PRCs and the PTCs for two fixed amplitude values are depicted in (c) and (d). We remark that, as in the case of differential LC oscillators, the circle map (defined by the PTC) is not invertible for strong forcing, but the rotation number still captures the relevant synchronization information. Lastly, in (e), we compare the theoretically derived PTC (from the system (7.15)) with the one derived from simulation in Simulink. Here, we note that in order not to rely on any prior knowledge in the simulation, we have not used the isochrons to compute the PTC, but rather measured it via the delay in phase between the perturbed and the unperturbed time series directly from the simulation. Due to the ambiguity in the zero-phase point, we have translated the simulation-derived PTC so that a comparison makes sense. The close correspondence suggests that the results derived through the study of the circle map of the ideal system also yield valid results for the real system and further suggest a general way of extracting the PTC (which captures all the information essential for determining the circle map) from a circuit seen as a "black box", without the need for having the differential equations describing it.

7.3.2 Synchronization

After computing the Winfree Time Crystal, we can determine the rotation number $\rho(s, A)$ of the circle map (7.6) and establish the resonance diagram for the periodically perturbed Colpitts oscillator. We remind that due to the form of (7.6), only the term sT of T_1 matters in the synchronization properties, allowing us to restrict values to $s \in [0, 1)$. All observations regarding the form of the Arnold tongues discussed in the case of the differential LC oscillator naturally apply here as well, with only quantitative differences observed. Upon examining the leading Floquet exponent, we observe that it is of the same order as in the second case of the LC oscillator, hence we expect qualitatively similar behavior. Figure 7.14 (a) illustrates the Arnold tongues. For small forcing amplitudes (where the map is also invertible), the resonance regions are well defined and do not overlap. Higher-order synchronizations such as $1 : 3$ or $1 : 4$ can also be observed, but the corresponding regions are narrow. As the amplitude is increased, and the map ceases to preserve orientation, the regions become wider but also overlap, leading to the destruction of synchronization. It is worth noting that $1 : 1$ synchronization regions are particularly wide. These properties resemble those of the resonance diagram in Fig. 7.4 (a), implying a relationship between the attractivity of a limit cycle and its synchronization properties. Specifically, the circle map ceases to be invertible for stronger forcing, leading to the overlap of different synchronization regions. We can further validate this relationship by examining the Devil's staircase, namely the plot $\rho(s; A)$ for a fixed and large value of the forcing A in Fig. 7.14. As expected, the rotation number is not increasing in s since the map does not preserve orientation, similar to the case

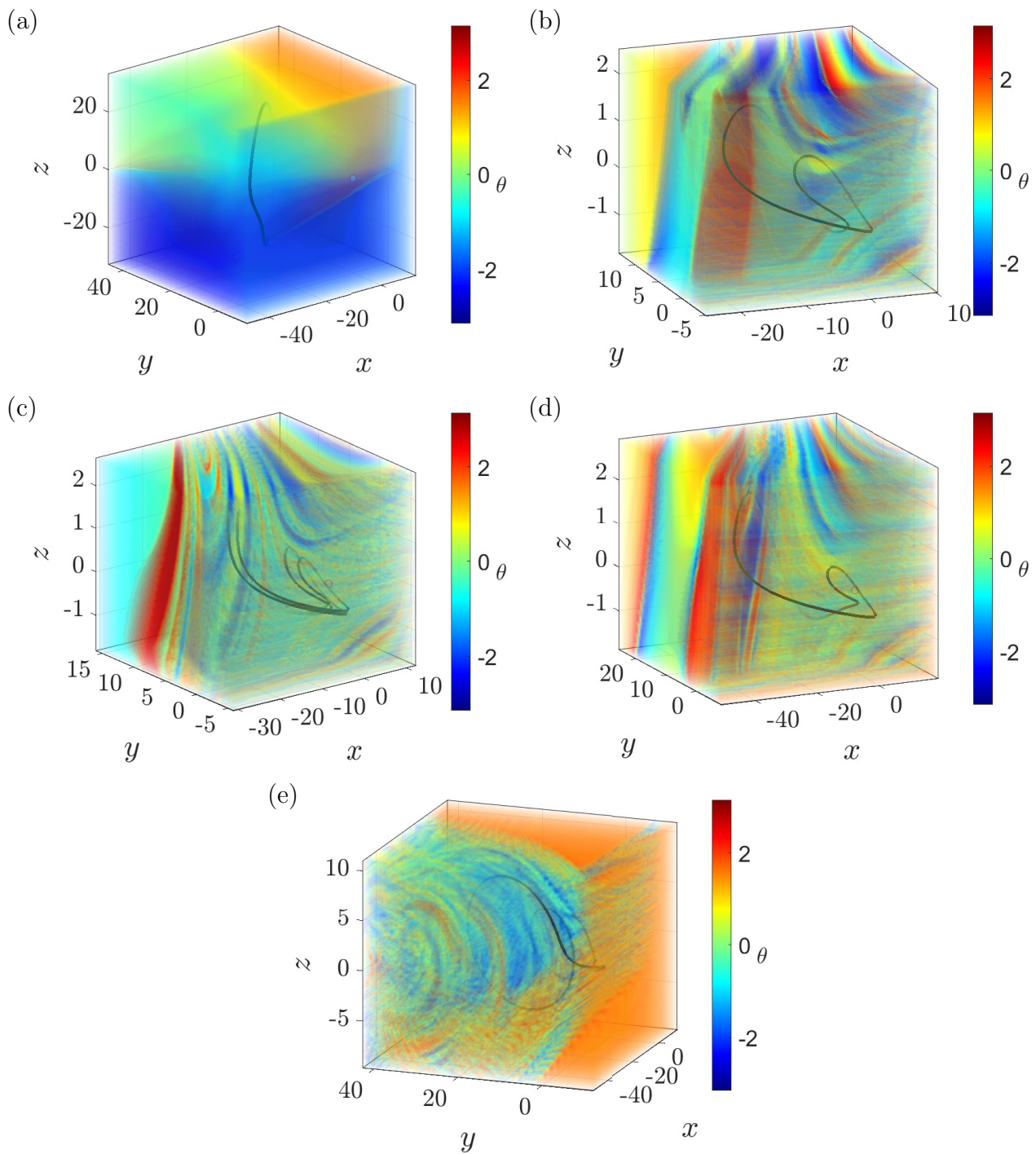


Figure 7.12: Isochrons for the autonomous system (7.15) (with $A = 0$). In (a) the stable limit cycle is the unique attractor of the system and no unstable limit cycles exist. In (b) the parameters lie above $F_{0,1}$ and below $F_{1,1}$ of Fig. 6.9; thus a period doubling bifurcation has resulted in a stable period two cycle and the period one cycle has lost stability. In (c) the parameters lie above $F_{0,1}$ and below $F_{1,1}^{(2)}$ of Fig. 6.9; another period doubling bifurcation has occurred. In (d) and (e) two stable limit cycles coexist.

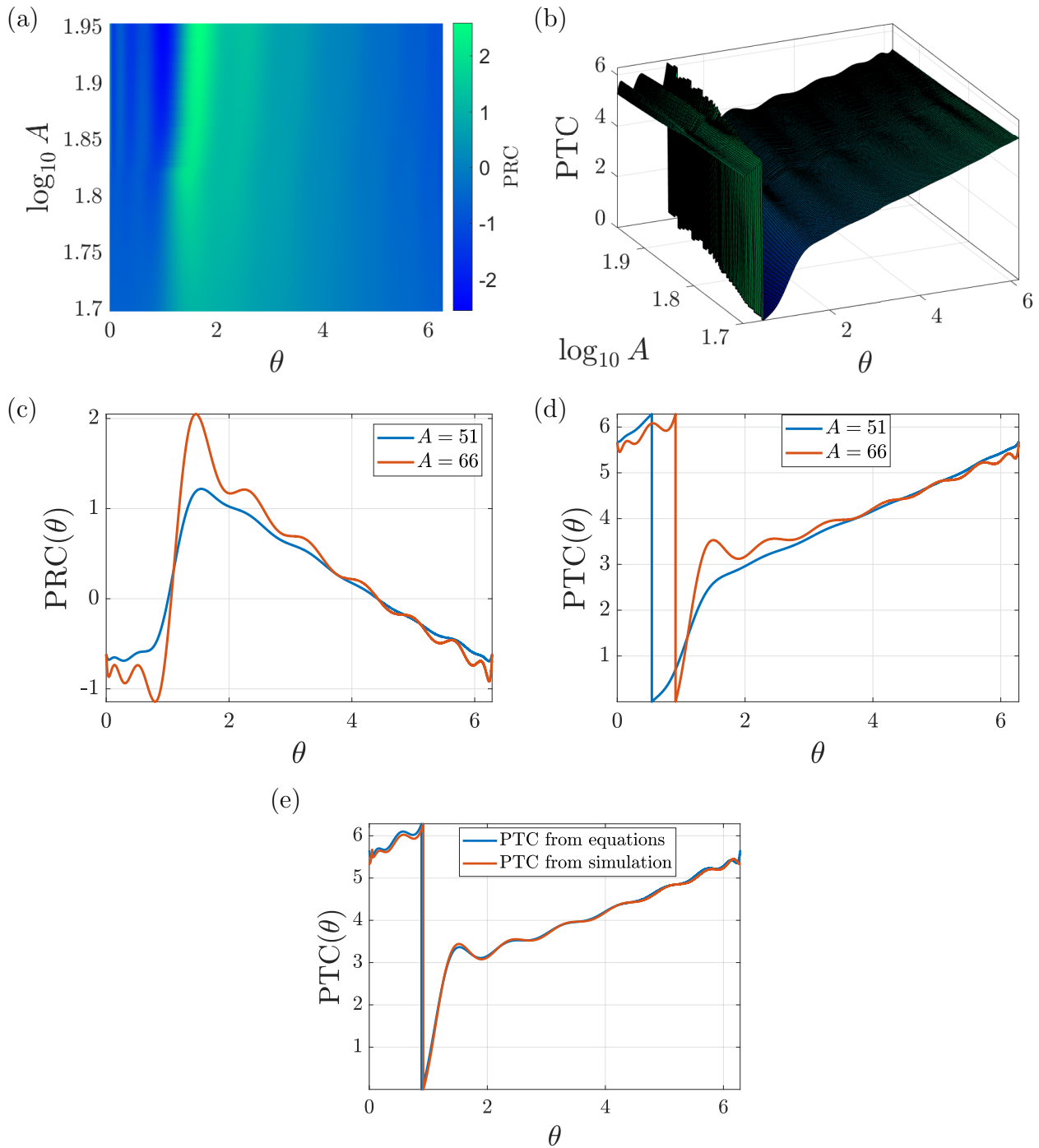


Figure 7.13: PRC and PTC curves for parameter values $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$ corresponding to case (a) of Fig. 7.12. (a) PRC curves for different amplitudes of forcing. (b) The Winfree Time Crystal. (c) PRCs for two fixed amplitude values. (d) PTCs for two fixed amplitude values. (e) PTC derived from (7.15) and from simulation in Simulink.

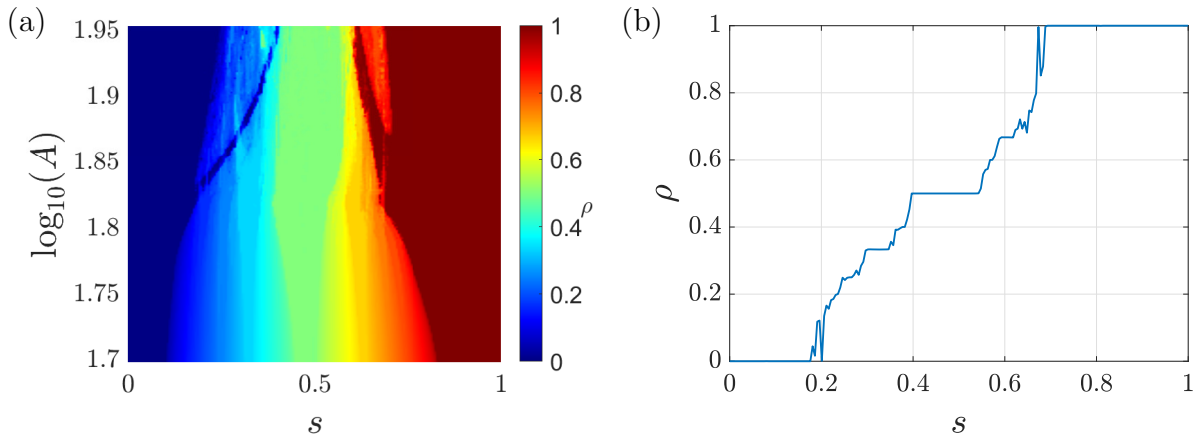


Figure 7.14: (a) Resonance diagram for the Colpitts oscillator (7.15). (b) Devil's staircase for $A = 68$. Parameter values $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$.

of the differential LC oscillator with the second set of parameters.

Having obtained the resonance diagram, we compute the response of the Colpitts oscillator in discrete time and continuous time for different forcing parameters s and A . We further perform simulations of the oscillator in Simulink to validate its operation. We remark that the small Floquet multiplier demands a value of $k = 40$.

In Fig. 7.15, the forcing parameters lie within the $1 : 3$ synchronization region of Fig. 7.14 (a). The circle map defined by the theoretically derived (d) and the simulation-derived (e) PTC converge to a 3-cycle. The same is apparent from the cobweb plot (f) (the cobweb with the PTC derived from simulation is omitted, since it does not offer anything new). We remark that the difference between the two 3-cycles (theoretical and simulation) is only due to the different zero-phase points. The x variable of the output, which corresponds to the voltage V_{c1} , is periodic as shown in (c). Its spectrum in (g) and (h) is discrete as expected under resonance conditions and suggests that the period of the output equals three times that of the forcing, and the spacing between the frequency peaks is $1/3(kT + T_s)$. In (a) and (b), we can see that the points of the points on the Poincaré section (7.4) (the transient phenomenon has been omitted) converge to a three-period cycle in accordance with the circle map orbits. The complete correspondence between the theoretical results and the simulation suggests that the circle map can accurately describe the synchronization dynamics of the perturbed oscillator. It is important to note that the computation of the PTC is irrelevant, whether it is derived theoretically or directly from the simulation. Moreover, the synchronization phenomenon, as seen in its generality, is qualitatively the same for both the Colpitts and the differential LC oscillator, in the sense that inside an Arnold tongue, the response is expected.

In Fig. 7.16, the forcing parameters lie within the $1 : 2$ synchronization region. The analysis of the results is exactly similar to that of the $1 : 3$ case and that of the cases of the previously described oscillator, so we do not repeat them again.

Finally, in Fig. 7.17, we explore the case of an unlocked state, where synchronization between the oscillator and the forcing fails. Here, the parameters lie in a region where the rotation number is irrational (practically rational but outside any tongue). Both the theoretically derived circle map (d), (e) and the simulation-derived map (f) suggest the absence of a periodic orbit as an attractor, indicating aperiodic motion. However, we cannot yet determine whether this motion is chaotic or quasiperiodic. Both the theoretical and simulated Poincaré sections show consistency with the circle map orbits, verifying the aperiodic motion, something also evident from the time-series of the x variable in (c). Nevertheless, (a) indicates that the points of the Poincaré section tend to cluster in specific parts of the circle rather than densely filling it, suggesting chaotic rather than quasiperiodic motion. This observation is further supported by examining the spectrum in (g), (h), which is continuous, unlike the discrete spectrum observed under synchronization.

Based on the analysis above, we can conclude that the circle map effectively captures the syn-

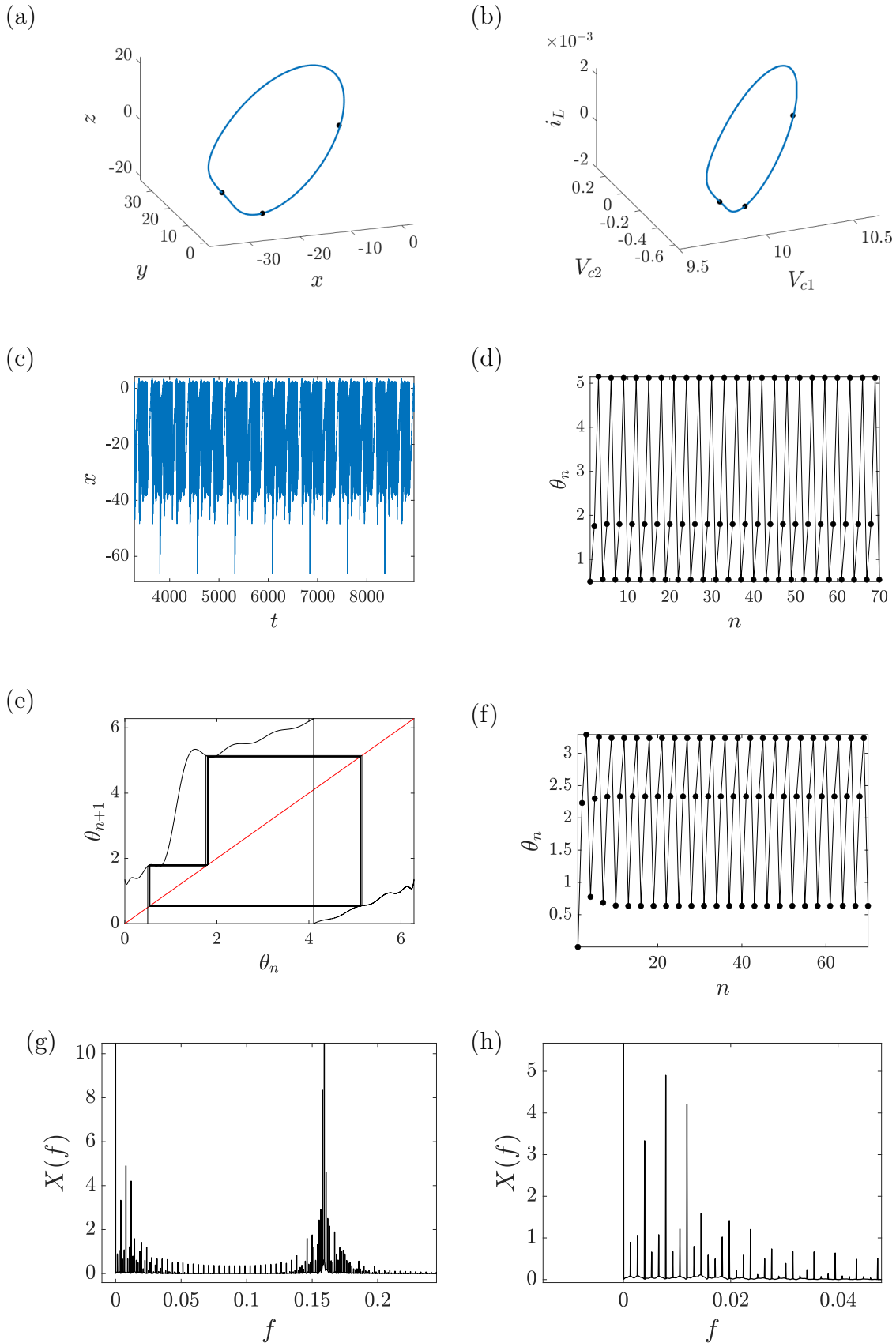


Figure 7.15: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.15) in (a) and from simulation in Simulink in (b). Corresponding time series of x in (c). Circle map orbit in (d) and corresponding cobweb in (e). Circle map orbit using the simulation derived PTC in (f). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (g) and enlarged in (h). The frequency spacing equals $1/3(kT + T_s)$. Forcing parameters: $A = 64$, $s = 0.31$, $k = 40$. Circuit parameters $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$.

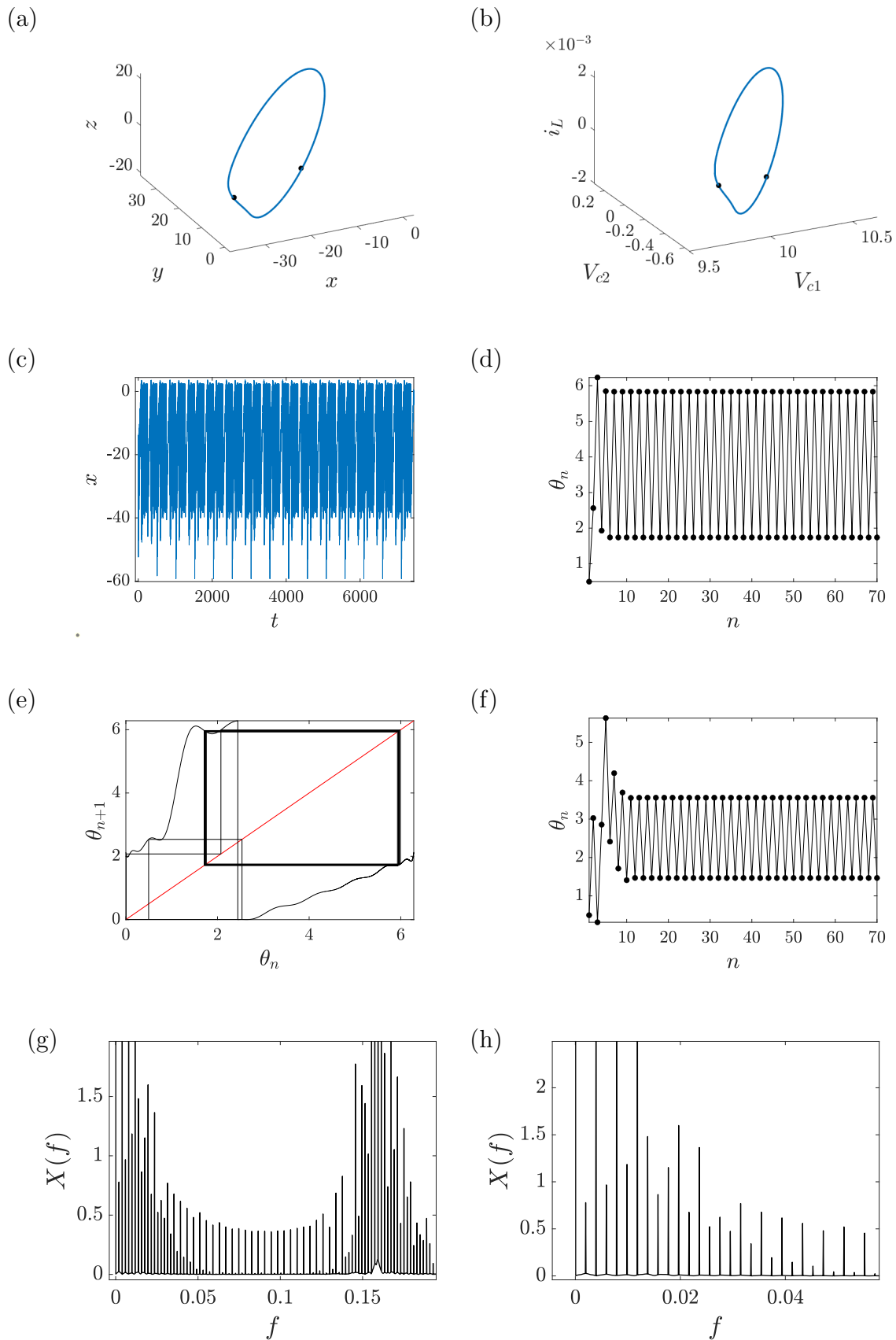


Figure 7.16: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.15) in (a) and from simulation in Simulink in (b). Corresponding time series of x in (c). Circle map orbit in (d) and corresponding cobweb in (e). Circle map orbit using the simulation derived PTC in (f). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (g) and enlarged in (h). The frequency spacing equals $1/2(kT + T_s)$. Forcing parameters: $A = 64$, $s = 0.44$, $k = 40$. Circuit parameters $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$.

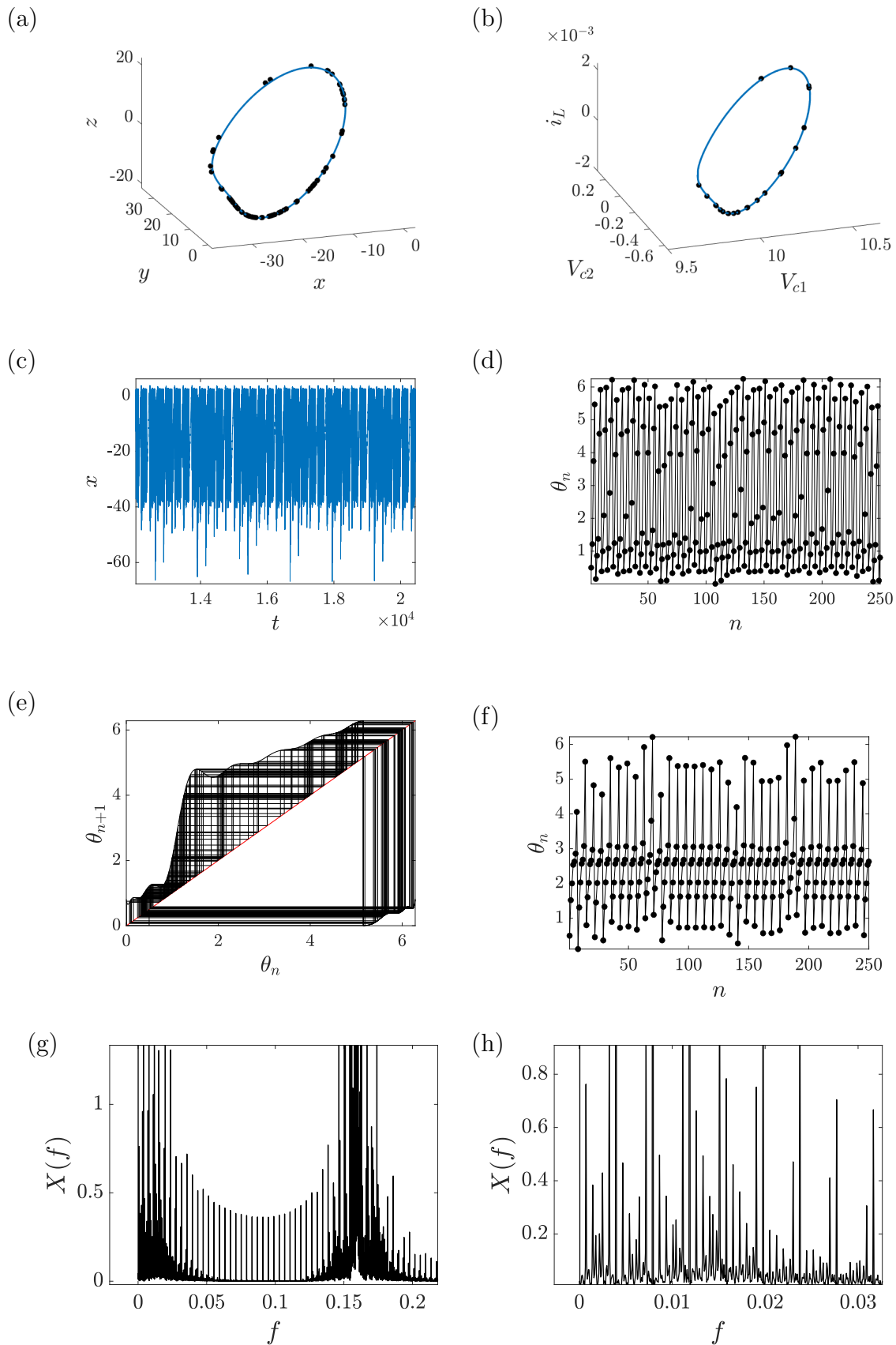


Figure 7.17: Limit Cycle and points at the time of arrival of each pulse obtained from system (7.15) in (a) and from simulation in Simulink in (b). Corresponding time series of x in (c). Circle map orbit in (d) and corresponding cobweb in (e). Circle map orbit using the simulation derived PTC in (f). Output spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ in (g) and enlarged in (h). Forcing parameters: $A = 64$, $s = 0.23$, $k = 40$. Circuit parameters $\log_{10} g = 1$, $\log_{10} Q = 1.35$, $k = 0.5$.

chronization dynamics of the perturbed Colpitts oscillator, as expected from the previous discussions on the synchronization of differential LC oscillators. Importantly, our analysis indicates consistency between the simulation of the non-ideal model and the theoretical results, suggesting robustness in this method of synchronization.

7.3.3 Chaotic Synchronization

In Chapter 6, we explored how the Colpitts oscillator demonstrates a strange attractor under certain parameter values. We noted that chaos in this oscillator can arise from either Shilnikov-type mechanisms or Feigenbaum cascades. This chaotic behavior distinguishes the Colpitts oscillator from the differential LC oscillators studied in previous sections, enabling a different form of synchronization: chaotic synchronization. Following [50], we can further categorize chaotic synchronization into phase synchronization, where the system is periodically perturbed, and complete synchronization, where two coupled identical oscillators synchronize with each other.

Phase Synchronization

We begin by studying phase synchronization. In this case, the system can be viewed as an oscillator with chaotically modulated amplitude and with an average uniformly rotating phase. We assume the existence of an appropriate Poincaré cross-section Σ such that the phase can be defined as

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2n\pi, \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad (7.17)$$

where t_n denotes the time of the n -th crossing with the Poincaré section Σ . Furthermore, we define ω as the radial frequency of the number of returns to the Poincaré cross-sections. It is important to note that this assumption does not hold for all chaotic oscillators; not all have a well-defined phase. Even if we assume this to be the case, the phase does not evolve linearly with time, as with limit cycle systems (see Chapter 3 and the Koopman eigenfunction), but can be seen as diffusive. Specifically,

$$\dot{\phi} = \omega + F, \quad (7.18)$$

where the function F represents the effective noise (which is deterministic). In general, the broader the peak of the spectral line of an observable at ω , the stronger the effect of the chaos resulting in an oscillator with an ill-defined phase.

Synchronization in this case can be achieved similarly to limit cycle systems by perturbing the oscillator with a periodic function. For a 1:1 locking, which we will examine, the input frequency should not significantly differ from ω . Generally, in the $A - T_{in}$ plane, the synchronization regions qualitatively resemble Arnold tongues, as in the case of synchronization of limit cycle systems. The forcing essentially suppresses the diffusion of the phase. It's worth noting that the amplitude of the perturbation should not be too strong to avoid suppressing the chaotic modulated amplitude.

Phase synchronization can also be examined in the frequency domain, where the limitation of a well-defined phase is not important. The autonomous oscillator has a continuous spectrum and a frequency peak at ω , while the spectrum of the perturbed oscillator demonstrates peaks at both ω and ω_{in} . If ω_{in} and A are such that locking occurs, the peak at ω is absorbed by that at ω_{in} , or equivalently, the autocorrelation of the output has non-decreasing maxima at times kT_{in} .

A final way of examining phase synchronization is through the mean field $X = (x_1 + \dots + x_n)/n$ where each x_i is the x variable of the oscillator with different initial conditions $(x_i(0), y_i(0), z_i(0))$ on the attractor. For large n , the mean field tends to 0, but under synchronization, it is oscillating with frequency ω .

We examine the Colpitts oscillator with $\log_{10} Q = 0.69$, $\log_{10} g = 0.88$, and $k = 0.5$, which results in a strange attractor due to Feigenbaum cascade, as illustrated in Fig. 7.18. In this case, the phase is well defined, and one can approximate the mean radial frequency as

$$\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi \frac{N_t}{t}, \quad (7.19)$$

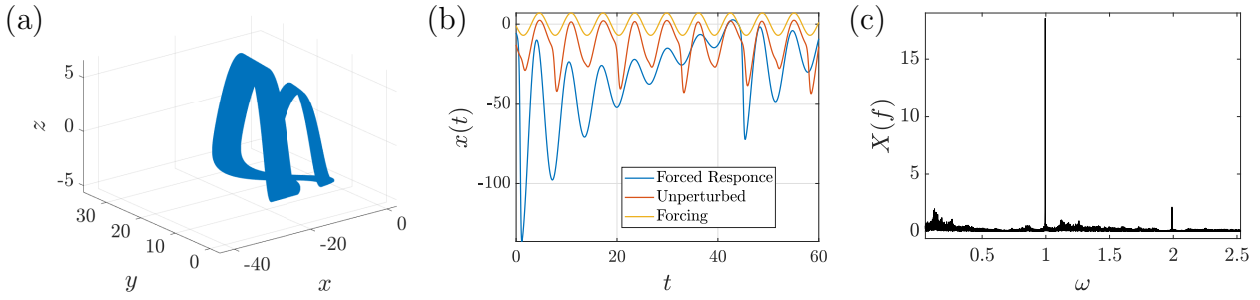


Figure 7.18: (a) Strange Attractor. (b) Synchronized Response. (c) Spectrum $X(f) = |\mathcal{F}(x(t))|$ of the synchronized response. Circuit parameters $\log_{10} Q = 0.69$, $\log_{10} g = 0.88$ $k = 0.5$ and forcing parameters $A = 2, \omega_{out} = 0.99$.

where N_t denotes the number of maxima of the x variable in the interval $[0, t]$. Practically, using a high value for t , we get $\omega \approx 1$. We perturb the oscillator exactly as in the previous subsections, but for the periodic function f in (7.15), we choose $f(t) = \cos(\omega_{in}t)$. To achieve 1:1 locking, we set $\omega_{in} = 0.99$ and the amplitude $A = 2$.

Fig. 7.18 (b) shows the comparison between the autonomous oscillator, the synchronized oscillator, and the forcing. As we can see, the forcing has modified the phase accordingly to synchronize with the perturbation, but it has not suppressed the chaotically modulated amplitude. The difference with the response of the autonomous oscillator is clear. In (c), we see that the spectrum remains continuous due to the chaotic amplitude, but it has the strongest peak at ω_{out} , while peaks at higher harmonics also appear indicating that synchronization has been achieved. A straightforward calculation of the mean radial frequency (7.19) shows that it is equal to ω_{out} as expected. Similar to the case of limit cycle systems, using different amplitudes, one can find the resonance diagram, whose form will be similar to Arnold tongues.

Complete Synchronization

We close the study of chaotic synchronization of the Colpitts oscillator by examining the Complete Synchronization. In this context we consider two identical dynamical systems demonstrating chaotic behavior,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad \dot{y} = f(y, t). \quad (7.20)$$

We note that the systems are not necessarily autonomous and hence the analysis to follow can be naturally applied to chaotic systems arising from periodically perturbed oscillators, as in the previous sections. The goal of complete synchronization is to introduce dissipative coupling between the two systems, which in electronic oscillators corresponds to coupling through resistors, in order to make identical, i.e. $x = y$ for large t . Hence, regardless of the different initial conditions of the systems that result in different orbits evolving on the strange attractor, the state variables will eventually coincide in the longterm. We note that the same idea of dissipative coupling can be applied to limit cycle systems as well, resulting in the mutual synchronization of the systems. The analysis of it is exactly similar to the phase dynamics presented in previous sections and for this reason we concentrate on chaotic systems.

In the following we assume that (7.20) describe two Colpitts oscillators. Let $\epsilon > 0$, $u = (x+y)/2$, $v = y - x$ and introduce the coupling

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + \epsilon(y - x) = f(x, t) + \epsilon v \\ \dot{y} &= f(y, t) - \epsilon(y - x) = f(y, t) - \epsilon v. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Linearizing around the synchronous solution $x = y = u$ in order to study its stability, we get

$$\dot{v} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{u(t)} v - 2\epsilon v. \quad (7.22)$$

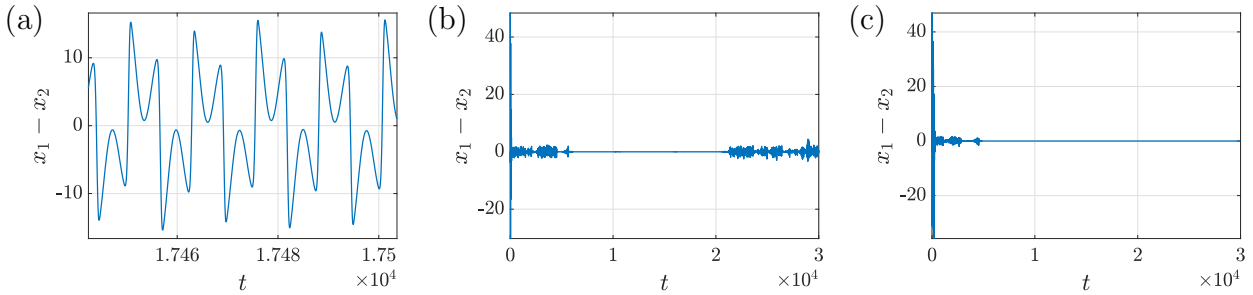


Figure 7.19: (a) Coupling strength $\epsilon = 0.01$. The oscillators are not locked. (b) The coupling strength is close but smaller than $\epsilon_{c,max}$: modulation intermittency. (c) Locking with $\epsilon > \epsilon_{c,max}$. Circuit parameters: $\log_{10} Q = 0.69$, $\log_{10} g = 0.88$, $k = 0.5$.

If we introduce the time dependent transformation $\tilde{v} = e^{-2\epsilon t}v$, (7.22) becomes,

$$\dot{\tilde{v}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{u(t)} \tilde{v}. \quad (7.23)$$

The mean growth of \tilde{v} is governed by the maximum Lyapunov exponent λ_{max} of the chaotic system (7.20) (see Chapter 2), which shows that for $\epsilon > \lambda_{max}/2 = \epsilon_c$ the synchronous solution is stable in the sense that small perturbations decay to zero on average.

Before examining numerical examples for the Colpitts oscillator, we make some remarks concerning the establishment of synchronization. We can consider the $\log |v|$ (where $|\cdot|$ denotes taking the absolute value of its element of the vector) variables as performing a multi-dimensional random walk, where the chaotic synchronous state u is viewed as noise. Near the synchronization threshold, the dynamics of the random walk are mainly determined by fluctuations, and the distribution of $\log v$ spreads in time, resulting in bursts in the time evolution of the v variables. This phenomenon is known as modulation intermittency.

Recalling that the strange attractor, as explained in Chapter 2, consists of an infinite number of unstable periodic orbits, which are also dense in the attractor [30], we can examine the transition to synchronization as the synchronization of these orbits. Each periodic orbit possesses a trivial multiplier equal to one and one always-unstable leading multiplier. A bifurcation occurs for the i -th periodic orbit at $\epsilon_{c,i}$ when the dominant multiplier's modulus equals 1, and the direction tends to become stable.

The ϵ_c value we found above does not necessarily correspond to $E = \max_i \epsilon_{c,i}$, where complete synchronization exists. For $\epsilon \in (\epsilon_c, E)$, the synchronous solution is stable only on average, as we explained before, and the synchronous state is a Milnor attractor in the sense that almost all initial conditions in a neighborhood of the attractor converge to it. Since there exist periodic orbits that fail to synchronize, there also exists a dense set of initial conditions for which the systems fail to synchronize with one another. This dense set of points might converge to another periodic orbit, a remote attractor, or escape to infinity. In the first case, the result is akin to complete synchronization, while the other cases suggest that almost synchronization is only transient. Correspondingly, we can define $e = \min_i \epsilon_{c,i}$, and for $\epsilon < e$, the synchronous solution is unstable, while for $\epsilon \in (e, E)$, almost all initial conditions diverge from the synchronous regime. Hence, in the case of chaotic complete synchronization, there exists an interval (e, E) where bifurcations occur, in contrast to the bifurcations of limit cycle systems.

Now we apply the ideas discussed to synchronize two Colpitts oscillators using the coupling of the form (7.21). We find that the maximum Lyapunov exponent, calculated using Wolf's algorithm [65], is $\lambda = 0.031$, hence $\epsilon_c = 0.015$. Fig. 7.19 illustrates the difference between the first state variable of the two oscillators. In (a), the coupling strength is smaller than the threshold, and as expected, the two chaotic oscillators are not synchronized. In (b), the coupling strength ϵ is close to the threshold, and modulation intermittency occurs. In (c), $\epsilon > \epsilon_c$ and synchronization is observed. We note here that we cannot explicitly compute $\epsilon_{c,max}$, so we are not certain that all periodic orbits are synchronized, but only that the synchronous state is a Milnor attractor. The small bursts that follow a synchronous

regime, before it becomes again synchronized, observed in (c), suggest that $\epsilon < \epsilon_{c,max}$. As the coupling strength is increased, the synchronization becomes complete, and these intermittencies are absent, while the convergence towards the synchronous state is also faster.

In this chapter, we examined the synchronization properties of both the differential LC and the Colpitts oscillators under periodic forcing. We demonstrated that a circle map effectively captures the information regarding synchronization, building upon the concepts introduced in Chapter 3. Using the analysis from Chapter 4, we derived synchronization regions based on circle maps. Applications of these concepts include frequency division or generally situations where oscillators with reduced phase noise are required. Subsequently, we explored the impact of strong and rapid forcing on the synchronization properties of the differential LC oscillators. Our analysis revealed that the two-dimensional map defined by the action-angle coordinates can effectively characterize this scenario. Applications of this case may include frequency multiplication. Lastly, we investigated synchronization mechanisms of the chaotic Colpitts oscillator: phase synchronization, where the oscillator is synchronized with an external forcing, and complete synchronization where two coupled oscillators synchronize with each other in the sense that the state variables coincide completely.

Chapter 8

Conclusion and Future Research

8.1 Summary and Conclusions

In this thesis, we present a comprehensive examination of the Koopman Operator and its applications in the complex synchronization dynamics of electronic oscillators while also rigorously studying the nonlinear dynamics associated with the autonomous systems. The proposed methods offer a unified and rigorous framework for the study of periodically forced oscillators through the reduction to generalized action-angle coordinates, a technique that has been introduced in the electronics literature. The developed methodology offers potential applications in frequency division, frequency multiplication, and in terms of the tunable characteristics of the output signal, which are often obscured when studied in the frequency domain.

The developed Koopman framework allows for a more generalized and unified treatment of dynamical systems with attractors. Under specific assumptions, any function of the state variables can be expanded into an infinite series of Koopman eigenfunctions, akin to the finite expansion seen in linear systems. For systems exhibiting limit cycle, this approach facilitates the extension of isochrons by leveraging certain Koopman eigenfunctions and offers efficient computational methods. The definition of isochrons is naturally extended to general systems with Milnor attractors within the Koopman operator framework. Additionally, the framework introduces action variables to complement the angle variables provided by isochrons, leading to a diffeomorphism that linearizes the system in the new variables. It is demonstrated that only one action variable dominates the time evolution of the others, offering a rigorous method for deriving action-angle coordinates in dissipative systems. This complements traditional phase reduction models, particularly in the case of limit cycle systems. Effective numerical methods for calculating gradients of the new variables enable rigorous study of systems under arbitrary perturbations, without the constraint of weak forcing. Focusing on periodic perturbations with specific characteristics (though not limited to weak forcing), we demonstrate that a circle map can effectively capture the complexity of the synchronization dynamics.

Analysis of this circle map reveals that the rotation number captures all pertinent information regarding synchronization. Rational rotation numbers indicate locking with external perturbations, with the denominator determining the synchronization order. Additionally, we prove the existence of Arnold tongues and their linear evolution of their borders with respect to the amplitude. With further constraints on forcing amplitude (generally avoiding excessively strong forcing), we demonstrate a comprehensive classification of all possible system orbits (Poincaré classification).

Subsequently, after briefly examining the operation of two transistor types (MOS and BJT), we model two basic oscillators—the differential LC and the Colpitts—for studying associated nonlinear dynamics and synchronization properties. Traditional approaches in electronic literature concerning the analysis of autonomous and forced oscillators are reviewed. Weakly nonlinear systems and nearly sinusoidal oscillations are commonly assumed in the former case, while a rigorous nonlinear analysis has been conducted on the Colpitts oscillator. Although the concept of isochrons has been introduced, it has not yet been further utilized. Approaches regarding the synchronization of electronic oscillators typically require nearly sinusoidal free-running oscillations, weak forcing, and small detunings. These methods primarily rely on frequency domain arguments, where synchronization properties are determined by frequency mixing resulting in the fundamental frequency, essentially providing the slope of Arnold

tongues' borders. Attempts to consider perturbation effects on amplitude still face limitations, and their derivations lack rigor. None of the aforementioned methods adequately describe synchronization properties of the systems under study due to amplitude limitations.

Before studying the synchronization properties of the considered oscillators, we first examine their nonlinear dynamics. We introduce the Melnikov method, demonstrating analytically that, at least in a neighborhood of the origin, all differential LC oscillators exhibit qualitatively similar behavior and elucidate the complete bifurcation picture. Motivated by the symmetry inherent in these systems, we explore the \mathbb{Z}_2 symmetry in a broader context. Turning our attention to the Colpitts oscillator, we show that the complex dynamics of its fundamental structure stem from the Shilnikov phenomenon, which we review. We identify some of the infinite number tangent and flip bifurcation curves. Cascading bifurcations of the latter type lead to another form of chaos: Feigenbaum chaos. This fundamental structure repeats itself throughout the parameter space.

Considering the main case of systems possessing stable limit cycle, we analyze the general methodology which is based on the phase-amplitude reduction and on the study of the circle map. We show that the isochrons capture the complex behavior of each system (depending on the parameters based on the preceding bifurcation analysis), determine the characteristics of the circle map and hence the synchronization properties of the system. Next we apply this method on each system and obtain the synchronization regions (Arnold Tongues). In this way, the oscillators can operate as frequency dividers, converting periodic input signals into periodic outputs with controllable spectral lines. They can also operate as precise time keepers with low phase noise as a result of the locked phase. In the case of differential LC oscillator we argue that when the parameters are such that a stable limit cycle with sufficiently negative Floquet exponent, exists, then the oscillator becomes more suitable for the locking mechanism. Conversely, if the oscillators are operated in the unlocked state, chaotic or quasiperiodic motion can be achieved. Further, we provide a scenario where the complete two dimensional action-angle map should be utilized to study the synchronization properties of the differential LC oscillator. The resulting periodic solution is strongly nonlinear with a frequency equal to a multiple of the free-running frequency exhibiting characteristics of a multiplier. Thus, the developed framework offers a unified treatment of periodically forced oscillators and demonstrates several practical applications that are usually obscured within the traditional methods utilized in the electronics literature. In particular, a single limit cycle oscillator can function as a divider, multiplier or a chaotic generator, depending on the driving signal. Finally, we show that the Colpitts oscillator when operating in the chaotic region, can be synchronized in phase with an externally applied signal or completely with another identical oscillator, if properly coupled.

8.2 Future Research

The methods proposed in this work offer a rigorous unified framework for studying the synchronization dynamics of electronic oscillators. Determining the resonance regions enables the design of an appropriate periodic perturbation to lock the free-running oscillator to the external reference signal. Consequently, the output signal experiences reduced phase noise and phase indeterminacy. This could be employed in systems requiring devices that can measure time with high accuracy. Moreover, combining appropriately locked oscillators could also yield frequency multipliers, in addition to applications in frequency division. It would be intriguing to apply the proposed methodology to generalizations of the considered oscillators, such as differential LC oscillators with multiple LC tanks. Generally, if n tanks are present, the dynamical system has order $2n$ but maintains the \mathbb{Z}_2 symmetry discussed in Chapter 6. The associated dynamical phenomena are more complex, allowing for different synchronization mechanisms.

The presence of invariant tori in such systems enables the study of generalized isochrons, as defined in Chapter 3. Investigating the generalization of the proposed circle map to two-dimensional coupled circle maps in the presence of periodic forcing would be an interesting theoretical pursuit. Another avenue for future research is utilizing the notion of isostables, which is often overlooked. For planar oscillators, the two-dimensional action-angle system provides a comprehensive characterization of the oscillators under autonomous operation or arbitrary forcing. For higher-dimensional systems, the

induced error is small. The corresponding map, obtained through an appropriate Poincaré section, facilitates the study of synchronization in a broader context without constraints on the period or form of the perturbation. This generalization offers significant new applications, such as using the system as a multiplier (with respect to the free-running frequency) instead of a divider.

Finally, the Koopman operator framework could be applied to electronic oscillators treated as black boxes, where the governing equations of their dynamics are unknown. In such cases, one could determine the principal eigenvalues of the operator by observing the time evolution of appropriate trajectories and proceed numerically with an analysis based solely on the observed time-series, as theoretically justified in Chapter 3, or calculate immediately the PTC from the time delay between time series and extract the corresponding resonance diagram purely experimentally.

Bibliography

- [1] R. Adler. “A Study of Locking Phenomena in Oscillators”. In: *Proceedings of the IRE* 34.6 (1946), pp. 351–357.
- [2] A. A. Andronov et al. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. Israel Program of Scientific Translations: Jerusalem, 1971.
- [3] V.-I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 1983.
- [4] R. I. Bogdanov. “Versal deformation of a singularity of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalue”. In: *Trudy Sem. Petrovsk.* 2 (1976), pp. 37–65.
- [5] Steven L Brunton et al. “Modern Koopman theory for dynamical systems”. In: *arXiv preprint arXiv:2102.12086* (2021).
- [6] Antonio Buonomo and Alessandro Lo Schiavo. “A Deep Investigation of the Synchronization Mechanisms in LC-CMOS Frequency Dividers”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 60.11 (2013), pp. 2857–2866.
- [7] Antonio Buonomo and Alessandro Lo Schiavo. “A Study of Injection Locking in Dual-Band CMOS Frequency Dividers”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 64.5 (2017), pp. 1225–1234.
- [8] Antonio Buonomo and Alessandro Lo Schiavo. “Analytical Approach to the Study of Injection-Locked Frequency Dividers”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 60.1 (2013), pp. 51–62.
- [9] Antonio Buonomo and Alessandro Lo Schiavo. “Nonlinear distortion analysis via perturbation method”. In: *International Journal of Circuit Theory and Applications* 38.5 (2010), pp. 515–526.
- [10] Antonio Buonomo and Alessandro Lo Schiavo. “Nonlinear dynamics of divide-by-two injection-locked frequency dividers in locked operation mode”. In: *International Journal of Circuit Theory and Applications* 42.8 (2014), pp. 794–807.
- [11] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer Science & Business Media, 1983.
- [12] Ruth F Curtain and Hans Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Vol. 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [13] R Cushman and J.A Sanders. “A codimension two bifurcation with a third order Picard-Fuchs equation”. In: *Journal of Differential Equations* 59.2 (1985), pp. 243–256. ISSN: 0022-0396.
- [14] Saeid Daneshgar, Oscar De Feo, and Michael Peter Kennedy. “Observations Concerning the Locking Range in a Complementary Differential LC Injection-Locked Frequency Divider—Part I: Qualitative Analysis”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 57.1 (2010), pp. 179–188.

- [15] A. Demir, A. Mehrotra, and J. Roychowdhury. “Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 47.5 (2000), pp. 655–674.
- [16] A. Dhooge, W. Govaerts, and Yu. A. Kuznetsov. “MATCONT: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs”. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 29.2 (June 2003), pp. 141–164.
- [17] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel, and Simon Brendle. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Vol. 194. Springer, 2000.
- [18] Oscar de Feo, Gian Mario Maggio, and Michael Kennedy. “The Colpitts oscillator: Families of periodic solutions and their bifurcations”. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 10 (May 2012).
- [19] P. Glendinning and Sparrow C. “Local and global behavior near homoclinic orbits”. In: *J. Statist. hys.* (645-696).
- [20] John Guckenheimer. “Isochrons and phaseless sets”. In: *Journal of Mathematical Biology* 1 (1975), pp. 259–273.
- [21] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Vol. 42. Springer Science & Business Media, 1983.
- [22] Michael R. Herman. “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”. fr. In: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 49 (1979), pp. 5–233.
- [23] Georgia Himona, Vassilios Kovanis, and Yannis Kominis. “Isochrons, phase response and synchronization dynamics of tunable photonic oscillators”. In: *Phys. Rev. Res.* 4 (1 Mar. 2022), p. L012039.
- [24] Georgia Himona, Vassilios Kovanis, and Yannis Kominis. “Time crystals transforming frequency combs in tunable photonic oscillators”. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 33.4 (Apr. 2023), p. 043134. ISSN: 1054-1500.
- [25] Brian Hong and Ali Hajimiri. “A General Theory of Injection Locking and Pulling in Electrical Oscillators—Part I: Time-Synchronous Modeling and Injection Waveform Design”. In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 54.8 (2019), pp. 2109–2121.
- [26] Brian Hong and Ali Hajimiri. “A General Theory of Injection Locking and Pulling in Electrical Oscillators—Part II: Amplitude Modulation in LC Oscillators, Transient Behavior, and Frequency Division”. In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 54.8 (2019), pp. 2122–2139.
- [27] Brian Hong and Ali Hajimiri. “A Phasor-Based Analysis of Sinusoidal Injection Locking in LC and Ring Oscillators”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 66.1 (2019), pp. 355–368.
- [28] Eugene M Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007.
- [29] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Vol. 132. Springer Science & Business Media, 2013.
- [30] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 54. Cambridge university press, 1995.
- [31] M.P. Kennedy. “Three steps to chaos. I. Evolution”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 40.10 (1993), pp. 640–656.
- [32] M.P. Kennedy. “Three steps to chaos. II. A Chua’s circuit primer”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 40.10 (1993), pp. 657–674.

- [33] Urs Kirchgraber and Kenneth James Palmer. “Geometry in the neighborhood of invariant manifolds of maps and flows and linearization”. In: *Longman Scientific and Technical* (1990).
- [34] G. Kolumban, M.P. Kennedy, and L.O. Chua. “The role of synchronization in digital communications using chaos. I . Fundamentals of digital communications”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 44.10 (1997), pp. 927–936.
- [35] Yu. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3rd ed. Springer Science & Business Media, 2004.
- [36] Yueheng Lan and Igor Mezić. “Linearization in the large of nonlinear systems and Koopman operator spectrum”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 242.1 (2013), pp. 42–53.
- [37] A. M. Lyapunov. *Stability of Motion*. Academic Press: New York, 1966.
- [38] Paolo Maffezzoni. “Analysis of Oscillator Injection Locking Through Phase-Domain Impulse-Response”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 55.5 (2008), pp. 1297–1305.
- [39] Paolo Maffezzoni et al. “Analysis and Design of Injection-Locked Frequency Dividers by Means of a Phase-Domain Macromodel”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 57.11 (2010), pp. 2956–2966.
- [40] G.M. Maggio, O. De Feo, and M.P. Kennedy. “A general method to predict the amplitude of oscillation in nearly sinusoidal oscillators”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 51.8 (2004), pp. 1586–1595.
- [41] G.M. Maggio, O. De Feo, and M.P. Kennedy. “Nonlinear analysis of the Colpitts oscillator and applications to design”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 46.9 (1999), pp. 1118–1130.
- [42] Alexandre Mauroy and Igor Mezić. “Global computation of phase-amplitude reduction for limit-cycle dynamics”. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28.7 (2018).
- [43] Alexandre Mauroy and Igor Mezić. “Global stability analysis using the eigenfunctions of the Koopman operator”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 61.11 (2016), pp. 3356–3369.
- [44] Alexandre Mauroy and Igor Mezić. “On the use of Fourier averages to compute the global isochrons of (quasi) periodic dynamics”. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 22.3 (2012).
- [45] Alexandre Mauroy, Igor Mezić, and Jeff Moehlis. “Isostables, isochrons, and Koopman spectrum for the action–angle representation of stable fixed point dynamics”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 261 (2013), pp. 19–30.
- [46] Alexandre Mauroy, Y Susuki, and Igor Mezić. *Koopman operator in systems and control*. Springer, 2020.
- [47] Igor Mezić. “Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator”. In: *Annual review of fluid mechanics* 45 (2013), pp. 357–378.
- [48] Igor Mezić. “Spectrum of the Koopman operator, spectral expansions in functional spaces, and state-space geometry”. In: *Journal of Nonlinear Science* 30.5 (2020), pp. 2091–2145.
- [49] Ryan Mohr and Igor Mezić. “Construction of eigenfunctions for scalar-type operators via Laplace averages with connections to the Koopman operator”. In: *arXiv preprint arXiv:1403.6559* (2014).

- [50] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press, 2001.
- [51] B. Razavi. “Challenges in portable RF transceiver design”. In: *IEEE Circuits and Devices Magazine* 12.5 (1996), pp. 12–25.
- [52] Adel Sedra et al. *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press, 2019.
- [53] George R Sell. “Vector fields in the vicinity of a compact invariant manifold”. In: *Equadiff 82: Proceedings of the international conference held in Würzburg, FRG, August 23–28, 1982*. Springer. 2006, pp. 568–574.
- [54] Yoshihiko Susuki, Alexandre Mauroy, and Igor Mezic. “Koopman resolvent: A laplace-domain analysis of nonlinear autonomous dynamical systems”. In: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 20.4 (2021), pp. 2013–2036.
- [55] Onder Suvak and Alper Demir. “Quadratic Approximations for the Isochrons of Oscillators: A General Theory, Advanced Numerical Methods, and Accurate Phase Computations”. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 29.8 (2010), pp. 1215–1228.
- [56] Önder Suvak and Alper Demir. “On Phase Models for Oscillators”. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 30.7 (2011), pp. 972–985.
- [57] F. Takens. “Forced oscillations and bifurcations”. In: *Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht* 3 (1974), pp. 1–59.
- [58] S. Verma, H.R. Rategh, and T.H. Lee. “A unified model for injection-locked frequency dividers”. In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 38.6 (2003), pp. 1015–1027.
- [59] DV Widder. “Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 33.4 (1931), pp. 851–892.
- [60] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2nd ed. Springer Science & Business Media, 2003.
- [61] Stephen Wiggins. *Global bifurcations and chaos: analytical methods*. Vol. 73. Springer Science & Business Media, 1988.
- [62] Stephen Wiggins. *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems*. Vol. 105. Springer Science & Business Media, 1994.
- [63] Dan Wilson and Jeff Moehlis. “Isostable reduction of periodic orbits”. In: *Physical Review E* 94.5 (2016), p. 052213.
- [64] Arthur T. Winfree. *The geometry of biological time*. Vol. 2. Springer, 1980.
- [65] Alan Wolf et al. “Determining Lyapunov exponents from a time series”. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16.3 (1985), pp. 285–317. ISSN: 0167-2789.