ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ Cvar & Var

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΙΚΟΛΑΣ ΣΙΑΤΤΑΟΥΛΑΣ

Τριμελής Επιτροπή : Κοκολάκης Γ. (Επιβλέπων Καθηγητής)

Βόντα Φ.

Σπηλιώτης Ι.

Αθήνα, 2012

Πρόλογος

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να εξετάσουμε επενδυτικές στρατηγικές μιας ασφαλιστικής εταιρείας για μια χρονική περίοδο. Θα κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκια που αποτελούνται από δύο ή τρία στοιχεία ενεργητικού. Οι αναλογίες στο χαρτοφυλάκιο θα επιλεχθούν με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε το ρίσκο να ελαχιστοποιηθεί. Για να εκτιμήσουμε το ρίσκο σωστά θα χρησιμοποιήσουμε δύο τρόπους αξιολόγησης ρίσκου : τη διακύμανση (Var) και το αναμενόμενο έλλειμμα (Cvar).

Νικόλας Σιατταούλας,

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου (*Modern Portfolio Theory*)

Η Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου αποτελεί μία από τις σημαντικότερες οικονομικές θεωρίες με μεγάλες επιρροές σε μετέπειτα οικονομικά μοντέλα στο τομέα της ανάλυσης ρίσκου. Η θεωρία αυτή αναπτύχθηκε από τον Harry Markowitz το 1952. Είναι μια στρατηγική επένδυσης με στόχο την μέγιστη απόδοση για το δεδομένο επίπεδο ρίσκου αγοράς. Βασίζεται στα risk-return trade-offs και efficient diversification. Έτσι, τα στοιχεία ενεργητικού επιλέγονται βάσει του πώς αλληλεπιδρούν και όχι βάσει του πώς συμπεριφέρονται μόνα τους. Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία αυτή, ένας ιδανικός συνδυασμός από στοιχεία ενεργητικού (*assets*) θα εξασφαλίσει το ελάχιστο ρίσκο για δεδομένη απόδοση. Προσπάθειες να ελαχιστοποιηθεί το ρίσκο είναι βασικές για ασφαλιστικές και χρηματοοικονομικές εταιρείες όπου τα κέρδη τους εξαρτώνται από τη συχνότητα ανεξέλεγκτων μεταβολών.

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία ελαχιστοποιούμε το ρίσκο έτσι ώστε να εισάγουμε επενδυτικές στρατηγικές για μια ασφαλιστική εταιρεία. Όμως, ο όρος ρίσκο έχει πολλές έννοιες στο κλάδο της ανάλυσης ρίσκου. Συνήθως το συνδέουμε με την αβεβαιότητα κάποιας επένδυσης. Αξιωματικά θεωρούμε ως ρίσκο την πιθανότητα η πραγματική απόδοση μίας επένδυσης να είναι μικρότερη από την αναμενόμενη. Οι επενδυτές αναζητούν το μικρότερο δυνατό ρίσκο και ως εκ τούτου όσο μεγαλύτερο είναι το ρίσκο επένδυσης τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι και η αναμενόμενη απόδοση. Κάνουμε μια προσπάθεια έτσι ώστε να ερευνήσουμε και να παρουσιάσουμε τη βέλτιστη κατανομή βάρους των στοιχείων ενεργητικού του χαρτοφυλακίου μίας ασφαλιστικής εταιρείας. Ερευνούμε δύο συγκεκριμένα μοντέλα με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων αξιολόγησης της κατανομής των στοιχείων ενεργητικού του χαρτοφυλακίου. Τα δυο εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η διακύμανση (Var) και το αναμενόμενο έλλειμμα (Cvar) τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω.

Κεφάλαιο 1ο

Θεωρητικό Υπόβαθρο

1.1 Ρίσκο και αβεβαιότητα

Ο Frank Knight (1921) στην προσπάθειά του να εξηγήσει το ρίσκο δήλωσε ότι : "Για να διαχωριστεί η μετρήσιμη αβεβαιότητα από τη μη μετρήσιμη, ο όρος "ρίσκο" θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την πρώτη περίπτωση ενώ ο όρος "αβεβαιότητα" για τη δεύτερη. Επομένως, η αβεβαιότητα για τον Knight είναι κάτι μη μετρήσιμο ενώ το ρίσκο θεωρείται μετρήσιμο. Με τον τρόπο αυτό, τίθεται ένας σαφής διαχωρισμός μεταξύ των δύο. Επίσης, ο Knight εξηγεί ότι οι καταστάσεις που εμπεριέχουν ρίσκο είναι οι καταστάσεις αυτές με άγνωστη κατάληξη αλλά με γνωστή την κατανομή πιθανότητας.

Πέραν όμως του ορισμού του ρίσκου από τον Frank Knight (1921) υπάρχουν και άλλες ερμηνείες του ρίσκου. Συγκεκριμένα στην ανάλυση ρίσκου, το ρίσκο είναι η πιθανότητα ένα συγκεκριμένο δυσμενές γεγονός να συμβεί σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Ο Artzner (1998) λέει ότι το χρηματοοικονομικό ρίσκο είναι συνδεδεμένο με τη μεταβλητότητα της μελλοντικής αξίας μίας θέσης (*position*). Εφόσον το ρίσκο συνδέεται με την αβεβαιότητα, τότε κατ' επέκταση συνδέεται και με την τυχαιότητα.

1.2 Μέτρα κινδύνου

Τα μέτρα κινδύνου είναι πολύ σημαντικά στη διαχείριση κινδύνου. Η μέτρηση του κινδύνου βοηθά τον ασφαλιστή να υπολογίσει το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο (ή ρίσκο) κόστος μίας ζημιάς από ένα τυχαίο συμβάν. Ένα μέτρο κινδύνου χρησιμοποιείται στον προσδιορισμό των κεφαλαίων που κρατούνται ως αποθεματικά (*capital reserves*) έτσι ώστε τα ρίσκα που λαμβάνονται από τις ασφαλιστικές εταιρείες να είναι αποδεκτά από τον ελεγκτή. Τα πιο δημοφιλή μέτρα κινδύνου είναι η διακύμανση (*variance*), η τυπική απόκλιση (*standard deviation*) και η συνδιακύμανση (*covariance*) στη περίπτωση του συνδυασμού στοιχείων ενεργητικού (Markowitz,1952), αν και τα πιο μοντέρνα μέτρα είναι βασισμένα σε κατανομές απώλειας που περιγράφουν τις απώλειες ενός χαρτοφυλακίου σε μια χρονική περίοδο. Τα μέτρα αυτά είναι το αναμενόμενο έλλειμμα (*Expected shortfall*) και η δυνητική ζημιά (*Value at risk*).

1.3 Συνεκτικά (*coherent*) μέτρα κινδύνου

Ένα “συνεκτικό μέτρο” κινδύνου πρέπει να ικανοποιεί τα εξής τέσσερα αξιώματα:

Μονοτονία *(Monotonicity*)

Υποπροσθετικότητα (*Subadditivity*)

Θετική Ομοιογένεια (*Positive Homogeneity*)

Αναλλοίωτο Μετατόπισης (*Translational Invariance*)

1.4 Τα αξιώματα των συνεκτικών μέτρων κινδύνου

Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ όπου Ω το σύνολο όλων των ενδεχομένων , $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας. Επίσης, υποθέτουμε ότι η απώλεια του χαρτοφυλακίου είναι μια τυχαία μεταβλητή X, στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ο στόχος μας είναι να καθορίσουμε τον αριθμό ρ(X) ο οποίος είναι το ελάχιστο κεφάλαιο το οποίο αν προσθέσουμε στη θέση με ζημιά (position with loss) όπως δίνεται από την τ.μ. X και επενδύσουμε με ρίσκο τότε η θέση (position) θα γινόταν αποδεκτή. Επίσης ορίζουμε ως F το ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών το οποίο σηματοδοτεί τις απώλειες του χαρτοφυλακίου σε μια χρονική περίοδο τέτοιο ώστε X : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $X^{-1}(-\infty, \alpha] \in \mathcal{F}$. Όλα τα αξιώματα του $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι έγκυρα ούτως ώστε να θεωρείται μέτρο ρίσκου (risk measure).

ΑΞΙΩΜΑ 1ο

Αναλλοίωτο Μετατόπισης (*Translational Invariance*)

Για κάθε $X \in$ F και για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\rho(X + a) = \rho(X) - \alpha$.

Παρατηρούμε ότι προσθέτοντας (ή αντίστοιχα αφαιρώντας) το αρχικό ποσό α στην αρχική θέση μειώνουμε (ή αντίστοιχα αυξάνουμε) το μέτρο ρίσκου κατά α.

ΑΞΙΩΜΑ 2ο

Υποπροσθετικότητα (*Subadditivity*)

Για κάθε $X_1, X_2 \in$ F ισχύει $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

Κατά Artzner et al. (1998) “το άθροισμα μέτρων κινδύνου δεν δημιουργεί πρόσθετο κίνδυνο”. Ας υποθέσουμε ότι δύο γραφεία μιας εταιρείας υπολογίζουν χωριστά τα μέτρα κινδύνου που έχουν πάρει αντίστοιχα. Ο επιβλέπων των δύο γραφείων θα μπορεί τότε ξέροντας τα χωριστά μέτρα κινδύνου, $\rho(X_1)$και $\rho(X_2)$ αντίστοιχα, να έχει μια ένδειξη του συνολικού κίνδυνου $\rho(X_1 + X_2)$ ο οποίος είναι ή ίσος ή μικρότερος από το άθροισμα των χωριστών μέτρων κινδύνου. Αυτό επιτρέπει σε μια εταιρεία να μοιράσει το κεφάλαιο της σε ένα αριθμό γραφείων. Επομένως, η υποπροσθετικότητα προϋποθέτει ότι τα μέτρα κινδύνου πρέπει να λάβουν υπόψη τη μείωση κινδύνου η οποία προκύπτει από τη διαφοροποίηση χαρτοφυλακίων.

ΑΞΙΩΜΑ 3^{ο}

Θετική Ομοιογένεια (*Positive Homogeneity*)

Για όλα τα $X \in$ F και για κάθε $\lambda \geq 0$ έχουμε $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.

Για $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας το 2^{ο} Αξίωμα έχουμε,

$$\rho(nX) = \rho(X + \cdots + X) \leq \rho(X) + \cdots + \rho(X) = n\rho(X).$$

Έτσι, εάν αυξήσουμε το χαρτοφυλάκιο κατά 10% τότε το ρίσκο θα αυξηθεί επίσης κατά 10%.

Ορισμός 1 Κυρτό (*convex*) **μέτρο ρίσκου:**

Ένα μέτρο ρίσκου ρ ονομάζεται κυρτό εάν ικανοποιείται για $X_1,\ X_2 \in \mathcal{F}$ η παρακάτω ιδιότητα:

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2),\ \forall\ \lambda \in [0,1]$$

Η ιδιότητα αυτή αντικατοπτρίζει τη βασική ιδέα σύμφωνα με την οποία η διαφοροποίηση (*diversification*) δεν αυξάνει το ρίσκο.

ΑΞΙΩΜΑ 4^{ο}

Μονοτονία (*Monotonicity*)

Για κάθε $X_1,\ X_2 \in$ F με $X_1 \leq X_2$ έχουμε $\rho(X_2) \leq \rho(X_1)$.

Δηλαδή, αν το χαρτοφυλάκιο X_2 έχει πάντοτε καλύτερες αποδόσεις από το χαρτοφυλάκιο X_1 κάτω από όλα τα πιθανά σενάρια, τότε το ρίσκο του X_2 θα πρέπει να είναι μικρότερο από το ρίσκο του X_1.

Ορισμός 2 Συνεκτικό (*coherent*) **μέτρο ρίσκου:**

Ένα μέτρο ρίσκου που ικανοποιεί τα τέσσερα προαναφερθέντα ονομάζεται συνεκτικό.

1.5 Διακύμανση (*Variance*)

Η διακύμανση είναι ένα από τα πιο ευρέως διαδεδομένα μέσα για τη μέτρηση του ρίσκου στα χρηματοοικονομικά. Ανάμεσα στα μέτρα τα οποία ο Markowitz (1952) θεώρησε για την βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου ήταν και η διακύμανση της απόδοσης (*return*). Το εφάρμοσε σε χαρτοφυλάκια οποιουδήποτε βάρους με οποιαδήποτε μορφή συσχετισμού (*correlation*) μεταξύ ασφαλειών (*securities*). Η διακύμανση της απόδοσης σειρών του παρελθόντος ορίζεται ως η μέση τιμή των τετραγωνικών αποκλίσεων της απόδοσης από το μέσο όρο ή ως η αναμενόμενη τετραγωνική απόκλιση από το μέσο. Η διακύμανση μετρά το μέγεθος της αστοχίας των παρατηρήσεων γύρω από το μέσο. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της διακύμανσης, τόσο μεγαλύτερη αναμένεται να είναι και η απόκλιση των παρατηρήσεων γύρω από το μέσο. Η διακύμανση είναι εύκολο να υπολογιστεί και συχνά εκφράζεται σε ετήσια βάση. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου X, και η οποία θα συμβολίζεται ως R_x , έχει μέσο $E(R_x)$ και διακύμανση $Var(R_x)$. Ο Markowitz (1952) όρισε ως μέσο και διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου τα παρακάτω:

$$E(R_X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i$$

$$Var(R_X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \ ,$$

όπου $x_{i,j} = 1, \dots, n$ είναι το βάρος που αντιστοιχεί στο κάθε ένα από τα n στοιχεία ενεργητικού και $\mu_{i,j} = 1, \dots, n$, είναι οι απόδοση που αντιστοιχεί στο κάθε ένα από τα n στοιχεία ενεργητικού. Η συνδιακύμανση (*covariance*) των στοιχείων ενεργητικού i και j εκφράζεται ως

$$\sigma_{ij} = E\{[(R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j,$$

όπου ρ_{ij} είναι ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των στοιχείων ενεργητικού ($\rho_{ij} = 1$ όταν $i = j$). Επίσης, σ_i και σ_j είναι οι τυπικές αποκλίσεις των i και j στοιχείων ενεργητικού ($i, j = 1, \dots, n$) αντίστοιχα.

Όμως, πρέπει να επισημάνουμε και τα μειονεκτήματα της διακύμανσης. Όταν χρησιμοποιούμε τη διακύμανση, υποθέτουμε ότι η ροπή 2ης τάξης της κατανομής ζημιάς (*second moment of the loss distribution*) υπάρχει (Embrechts et al., 2005). Επίσης η διακύμανση είναι ένα καλό μέτρο ρίσκου για συμμετρικές κατανομές αλλά υστερεί στις ιδιαίτερα ασύμμετρες κατανομές. Οι μόνες κατανομές οι οποίες χρησιμοποιούν τη διακύμανση ικανοποιητικά για τη μέτρηση του ρίσκου είναι η Κανονική (*Normal*) και η Student λόγω της συμμετρίας τους γύρω από τον μέσο. Αυτά είναι μερικά από τα μειονεκτήματα τα οποία οδήγησαν τους επενδυτές στην αναζήτηση εναλλακτικών μέτρων ρίσκου.

1.6 Δυνητική ζημιά (*Value at risk*)

Μαθηματική προσέγγιση

Έχουμε το χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και το τυχαίο κέρδος ή απώλεια των στοιχείων ενεργητικού του χαρτοφυλακίου X. Τα ακόλουθα ποσοστά περιγράφονται ούτως ώστε να χρησιμοποιηθούν σε ορισμούς. Συμβολίζουμε ως:

$x_{(a)} = q_a(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \geq a\}$ (το κατώτερο α-quantile του X)

$x^{(a)} = q^a(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] > a\}$ (το ανώτερο α-quantile του X), όπου α ο βαθμός εμπιστοσύνης.

Ορισμός 3 Δυνητική Ζημιά (*Value-at-Risk* (VaR))

Έστω ότι $a \in (0,1)$ και X μια τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Τότε θεωρούμε τη δυνητική ζημιά ως το κατώτερο α-quantile της δοθείσας κατανομής απώλειας στο βαθμό εμπιστοσύνης α.

Συμβολίζουμε ως :

$$VaR^a = VaR^a[X] = -x^{(\alpha)} = q_{1-\alpha}(-X)$$

τη δυνητική ζημιά στο βαθμό α της τυχαίας μεταβλητής X.

Έτσι, για ένα συγκεκριμένο βαθμό εμπιστοσύνης α, η δυνητική ζημιά (VaR^a) του χαρτοφυλακίου είναι το μικρότερο ποσό ζ τέτοιο ώστε, με πιθανότητα α, η απώλεια είναι μικρότερη η ίση με το ζ.

Όμως, η δυνητική ζημιά έχει κάποιες μη επιθυμητές μαθηματικές ιδιότητες όπως έχουν δείξει πρόσφατες δημοσιεύσεις (Artzner et al., 1997, 1998; Klüppelberg and Rootzén, 1999, Acerbi et al., 2001). Η δυνητική ζημιά δε συμφωνεί με το αξίωμα της υποπροσθετικότητας όπως αναφέρεται από τους Embrechts (2000) and Tasche (2002). Συνήθως το πρόβλημα παρουσιάζεται στη περίπτωση των μη κανονικών κατανομών (Artzner et al., 1997, 1998). Άρα η δυνητική ζημιά δε μπορεί να είναι συνεκτικό μέτρο ρίσκου και μπορεί να προκαλέσει συσσωρευμένα προβλήματα ρίσκου (Artzner et al., 1998). Μερικές φορές αυτά τα μειονεκτήματα δε επιτρέπουν την εφαρμογή της επενδυτικής στρατηγικής *diversification* (Artzner et al., 1998, Tasche, 2002). Επίσης, έχει διαπιστωθεί ότι είναι μη-κυρτό μέτρο ρίσκου και μη ομαλή συνάρτηση θέσεων (positions) .

1.7 Αναμενόμενο έλλειμμα (*Conditional Value-at-Risk* ή *Expected Shortfall*)

Μαθηματική προσέγγιση

Ορισμός 4 Αναμενόμενο έλλειμμα *(Conditional Value-at-Risk* (CVaR)*).*

Παρακάτω παραθέτουμε τις πιο διαδεδομένες διατυπώσεις του αναμενόμενου ελλείμματος.

i) Υποθέτοντας $E[X^{-}] < \infty$,

$$CVaR^{a} = CVaR^{a}(X) = \inf\left\{ \left(\frac{E[\,(X-s)^{-}]}{a}\right) - s\colon s \in \mathbb{R} \right\}, \qquad 0 < a < 1$$

είναι το αναμενόμενο έλλειμμα στο βαθμό α της τυχαίας μεταβλητής X.

ii) Το αναμενόμενο έλλειμμα στο βαθμό εμπιστοσύνης α μπορεί να γραφτεί και ως ακολούθως :

$$ES_{a} = ES_{a}(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR^{z}[X]dz\,, \qquad 0 < \alpha < 1$$

εδώ θεωρούμε το αναμενόμενο έλλειμμα ως το μέσο όρο των $100(1-\alpha)\%$ απωλειών.

iii) Το TVaR (Tail Value-at-Risk) ορίζεται ως

$$TVaR^{a} = \frac{1}{a-1}\int_{\alpha}^{1} VaR^{z}[X]dz\,, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Έτσι, TVaR είναι ο μέσος όρος όλων των ποσοστιαίων του X για το ανώτερο α-ποσοστό. Από τον προηγούμενο ορισμό το TVaR σχετίζεται με το αναμενόμενο έλλειμμα όπως αναφέρεται από τους Acerbi and Tasche (2001). Το TVaR είναι ένα συνεκτικό μέτρο ρίσκου το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες της μονοτονίας, αναλλοίωτου μετατόπισης, θετικής ομοιογένειας και υποπροσθετικότητας .

iv) Σε κάποιες άλλες δημοσιεύσεις το αναμενόμενο έλλειμμα ορίζεται ως :

$$CVaR_{a}^{+}[X] = E\big[X\big|X > VaR_{a}[X]\big], \qquad 0 < \alpha < 1$$

όπου $CVaR_{a}^{+}$ είναι το υπό συνθήκη-αναμενόμενο έλλειμμα δεδομένου ότι η απώλεια είναι μεγαλύτερη από τη δυνητική ζημιά. Οι Mausser and Rosen (1999) έχουν αναφερθεί στο $CVaR_{a}^{+}$ ως « mean shortfall ». Ωστόσο, οι Acerbi et al. (2001) και Acerbi και Tasche (2001) θεώρησαν το αναμενόμενο έλλειμμα να είναι το ίδιο με το Cvar. Ακόμα, οι Acerbi et al. (2001) απόδειξαν ότι το $CVaR^{+}$ δεν είναι ένα συνεκτικό μέτρο ρίσκου. Η τελευταία δημοσίευση των Acerbi et al.

(2001), Rockafellar και Uryasev (2000a) έδειξε ότι CVaR and $CVaR^+$ είναι δυο διαφορετικά μέτρα ρίσκου καθώς το πρώτο αποδείχτηκε ότι είναι συνεκτικό ενώ το άλλο όχι.

Για γενικές κατανομές, το CVaR έχει πιο ελκυστικές ιδιότητες από VaR (Tasche, 2002). Έχει αποδειχτεί ότι το CVaR είναι υποπροσθετικό και κυρτό (Rockafellar and Uryasev, 2000b). Τα Overall Expected Shortfall ή CVaR ή TVaR, είναι συνεκτικά μέτρα ρίσκου αφού ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες της συνεκτικότητας (Artzner et al. 1997, 1999) και την πρόταση αυτή πρώτος απέδειξε ο Pflug (2000). Αν και το CVaR δεν είναι σύνηθες εργαλείο στο χρηματοοικονομικό τομέα, αρχίζει πλέον να εφαρμόζεται συχνότερα στις ασφαλιστικές εταιρείες (Embrechts at al., 1997). Έτσι, θεωρείται ένα πολύ ευέλικτο εργαλείο σε προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων(Artzner et al., 1997, 1999).

Στη διπλωματική αυτή εργασία αναμενόμενο έλλειμμα (ES), (CVaR) και TVaR) είναι τα ίδια μέτρα ρίσκου με τις ίδιες ιδιότητες όπως έχουν δείξει πρόσφατες μελέτες (Rockafellar και Uryasev, 2000b). Για λόγους απλούστευσης θα χρησιμοποιηθούν οι πιο γνωστές ορολογίες Cvar και Expected Shortfall.

Περιγραφή της CVaR προσέγγισης

Στη δημοσίευση των Rockafellar και Uryasev (2000b), έγινε αναφορά μιας νέα μεθόδου βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου. Αυτή η μέθοδος είναι κατάλληλη για οποιαδήποτε επενδυτική εταιρεία και γενικά για όποια επιχείρηση χρειάζεται υπολογισμό ρίσκου. Το CVaR υπολογίζεται και βελτιστοποιείται χρησιμοποιώντας μία βοηθητική συνάρτηση. ‘Εχουν δείξει ότι το ελάχιστο CVaR και τα βέλτιστα βάρη μπορούν να ληφθούν βασισμένα σε δεδομένα από σενάρια διάφορων απολαβών ελαχιστοποιώντας μία σχετικά απλή κυρτή συνάρτηση. Επίσης, αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να παρουσιαστεί σαν ένα γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού, επιλύσιμο από οποιοδήποτε υψηλής ποιότητας λογισμικό σύμφωνα με τους Rockafellar and Uryasev (2000b). Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με παραδείγματα από τους (Birge και Louveaux, 1997, Ermoliev και Wets, 1988, Kall και Wallace, 1995, Kan και Kibzun, 1996, Pflug, 1996, Prekopa, 1995).

Οι Rockafellar και Uryasev (2000b) υποθέτουν ότι η απώλεια εκφράζεται με μορφή εξίσωσης $z = f(x, Y)$ όπου το $\boldsymbol{x}$ παριστά το χαρτοφυλάκιο το οποίο επιλέχθηκε από ένα σύνολο χαρτοφυλακίων X στον $\mathbb{R}^n$ ενώ Y είναι τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$. Το διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ αναπαριστά τις μελλοντικές αξίες των μεταβλητών και z είναι μια τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή στον $\mathbb{R}$ εξαρτάται από το $\boldsymbol{x}$. Η κατανομή πιθανότητας του $\boldsymbol{y}$ έχει πυκνότητα πιθανότητας p($\boldsymbol{y}$) η οποία αναπαράγεται με χρήση κώδικα προσομοίωσης κατά Morgan (1996).

Οι Rockafellar και Uryasev(2000b) θέτουν:

$$\Psi(x,a) = \int_{f(x,y)\le a} p(y)dy$$

με την f(x, y) να έχει ανώτατο όριο το α.

Για καθορισμένο $\boldsymbol{x}$ και συναρτήσει μόνο του a, Ψ είναι η αθροιστική κατανομή για την απώλεια που σχετίζεται με $\boldsymbol{x}$. Η Ψ είναι μια σημαντική συνάρτηση για τον καθορισμό των VaR και CVaR αφού είναι πλήρως συνδεδεμένη με αυτές η τυχαία μεταβλητή y. Για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε ότι η $\Psi(\boldsymbol{x},a)$ δε μειώνεται σε σχέση με το a και είναι παντού συνεχής.

Οι τιμές β-VaR και β-CVaR από την τυχαία μεταβλητή ζημιάς συσχετισμένες με το x δίνονται από τις εξής συναρτήσεις :

$$a_\beta(x) = \min\{a \in \mathbb{R}: \Psi(x,a) \ge \beta\}$$

και

$$\varphi_\beta(x) = (1-\beta)^{-1} \int_{f(x,y)\ge a_\beta(x)} f(x,y)p(y)dy$$

αντίστοιχα, όπου β η πιθανότητα στο (0, 1).

Στην πρώτη εξίσωση το $a_\beta(x)$ βγαίνει ως το αριστερό τελικό σημείο του μη κενού διαστήματος που αποτελείται από τις αξίες a ώστε $\Psi(x,a) = a$. Στη δεύτερη εξίσωση η πιθανότητα $f(x,y) \ge a_\beta(x)$ είναι ίση με $1-\beta$. Άρα η $\varphi_\beta(x)$ παρουσιάζεται ως η αναμενόμενη τιμή της απώλειας σχετιζόμενη με το x συγκρίσιμη με τη ζημιά όντας ίση με $a_\beta(x)$ ή μεγαλύτερη.

Εν προσθήκη ορίζουμε μια συνάρτηση F_β στον $X \times \mathbb{R}$ ως εξής:

$$F_\beta(x,a) = a + (1-\beta)^{-1} \int_{y\in\mathbb{R}^m} [f(x,y)-a]^+ p(y)dy \qquad (1.1)$$

όπου $[t]^+ = \begin{cases} t \;\; \gamma\iota\alpha \; t > 0, \\ 0 \;\; \gamma\iota\alpha \; t \le 0. \end{cases}$

Η εξίσωση αυτή χαρακτηρίζει τα $a_\beta(x)$ και $\varphi_\beta(x)$. Έτσι τα ακόλουθα θεωρήματα έχουν το ρόλο της επεξήγησης των βασικών σχέσεων των $a_\beta(x)$ και $\varphi_\beta(x)$ με την εξίσωση F_β.

Θεώρημα 1: Ως συνάρτηση του a, η $F_\beta(\boldsymbol{x}, a)$ είναι κυρτή και συνεχώς διαφοροποιήσιμη. Η β-CVaR της ζημιάς σχετιζόμενη με κάθε $\boldsymbol{x} \in X$ μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση

$$\varphi_\beta(x) = \min\{F_\beta(x, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

της οποίας το σύνολο που παίρνει αξίες του a για το οποίο επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση είναι η εξής,

$$A_\beta(x) = \arg min\{F_\beta(x, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

είναι ένα μη κενό φραγμένο διάστημα και η β-VaR της ζημιάς δίνεται από την

$$a_\beta(x) = left\ endpoint\ \tau o \upsilon\ A_\beta(x)$$

Συγκεκριμένα,

$$a_\beta(x) \in \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta\,(x, a) \quad \text{και} \quad \varphi_\beta(x) = F_\beta\left(x, a_\beta(x)\right).$$

Το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (1.1) μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος θα ήταν να κάνουμε δειγματοληψία σύμφωνα με την πυκνότητα πιθανότητας $p(y)$. Αν η δειγματοληψία παράγει ένα σύνολο διανυσμάτων $y_1, \dots, y_q$, τότε η προσέγγιση του $F_\beta(x, a)$ είναι κυρτή και κατά τμήματα γραμμική ως προς a, η οποία μπορεί εύκολα να ελαχιστοποιηθεί με line search τεχνικές ή χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού.

Θεώρημα 2: Ελαχιστοποιώντας το β-CVaR της απώλειας σχετιζόμενης με $\boldsymbol{x}$ **(**$\boldsymbol{x} \in X$) είναι ανάλογο του να ελαχιστοποιήσουμε το $F_\beta(x, a)$ για $(x, a) \in X \times \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\min\{\varphi_\beta(x) : x \in X\} = \min\{F_\beta(x, a) : (x, a) \in X \times \mathbb{R}\}$$

όπου , το ζευγάρι (x^*, a^*) επιτυγχάνει το δεύτερο ελάχιστο εάν μόνο εάν το x^*επιτυγχάνει το πρώτο ελάχιστο και $a^* \in A_\beta(x^*)$. Έτσι σε περιπτώσεις όπου το διάστημα $A_\beta(x^*)$ συρρικνώνεται σε ένα σημείο, η ελαχιστοποίηση $F_\beta(x, a)$ στο $(x, a) \in X \times \mathbb{R}$ παράγει ένα ζευγάρι (x^*, a^*), όχι αναγκαία μοναδικό, ώστε το x^* να ελαχιστοποιεί το β-CVaR και το a^* να δίνει το ανάλογο β-VaR. Επιπρόσθετα, η $F_\beta(x, a)$ είναι κυρτή ως προς (x, a) και $\varphi_\beta(x)$ είναι κυρτή ως προς το x, εφόσον η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι κυρτή ως προς x και συγκεκριμένα στη περίπτωση όπου οι περιορισμοί είναι τέτοιοι ώστε το X είναι ένα κυρτό σύνολο, η κοινή ελαχιστοποίηση είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού.

Κεφάλαιο 2ο

Μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μαθηματικές και στατιστικές τεχνικές καθώς επίσης και η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος. Θα κάνουμε χρήση δύο μοντέλων, τα οποία είναι βασικά για βελτιστοποίηση αφού δοθεί το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο. Επίσης, γίνεται μια πρώτη παρουσίαση του προγράμματος που θα χρησιμοποιηθεί.

2.1 Ανάλυση του προβλήματος

Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει στοιχεία ενεργητικού και παθητικού για κάθε της τομέα. Τα στοιχεία ενεργητικού μπορεί να είναι ασφάλιστρα και γενικά οποιεσδήποτε άλλες κεφαλαιακές απαιτήσεις. Τα στοιχεία παθητικού είναι οι τυχόν ζημιές που προκύπτουν και οι ζημιές από συμφωνητικά εκδοθέντα σε προηγούμενα χρόνια και που βρίσκονται ακόμη σε ισχύ. Άρα, το πρόβλημα που προκύπτει για την ασφαλιστική εταιρεία είναι να κατανεμηθεί αποδοτικά το αρχικό κεφάλαιο σε στοιχεία ενεργητικού ώστε το ρίσκο να είναι υπό έλεγχο. Δηλαδή, πρέπει να βρούμε τη σωστή αναλογία στοιχείων ενεργητικού ούτως ώστε να ελαχιστοποιηθεί το ρίσκο.

Παρακάτω, θα αναλύσουμε το πρόβλημα από μαθηματική και στατιστική άποψη.

Έστω ότι P είναι το διαθέσιμο κεφάλαιο μίας ασφαλιστικής εταιρείας τη χρονική στιγμή t=0 και έστω ότι X είναι η τυχαία μεταβλητή της ζημιάς της εταιρείας η οποία θα πληρωθεί τη χρονική στιγμή t=T. Επομένως, η ζημιά πληρώνεται από την εταιρεία στο τέλος της περιόδου $[0, T]$. Τα στοιχεία ενεργητικού επενδύονται σε n χρεόγραφα. Έτσι, έχουμε n διαφορετικές τιμές χρεογράφων στη τελική χρονική στιγμή t=T με συμβολισμούς $S_1, \dots, S_n$ και οι οποίες είναι μη προβλέψιμες. Ακολούθως έχουμε $r_i = \frac{S_i - S_{0i}}{S_{0i}}$ το οποίο αναπαριστά την απόδοση του χρεογράφου στη χρονική περίοδο $[0, T]$. Η σχετική τιμή του i χρεογράφου συμβολίζεται με R_i, όπου $R_i = 1 + r_i = \frac{S_i}{S_{0i}}, i = 1, .., n$. Συνήθως τα $R_i = 1, \dots, n$ θεωρούνται ότι ακολουθούν την Log-Normal κατανομή. Για το αριθμητικό παράδειγμα αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιηθούν δύο τυχαίες αποδόσεις στοιχείων ενεργητικού και ένα στοιχείο ενεργητικού με μηδενικό ρίσκο (riskless asset). Έτσι, το πρώτο στοιχείο ενεργητικού ακολουθεί Log-Normal κατανομή με μέσο μ_1 και διακύμανση σ_1^2, δηλαδή $\mathrm{R}_1 \sim \mathrm{logN}(\mu_1, \sigma_1)$ και το δεύτερο στοιχείο ενεργητικού ακολουθεί Log-Normal κατανομή με μέσο μ_2 και διακύμανση σ_2^2, δηλαδή $\mathrm{R}_2 \sim \mathrm{logN}(\mu_2, \sigma_2)$, όπου $\mu_1 \neq \mu_2$ και $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Το στοιχείο ενεργητικού με μηδενικό ρίσκο είναι σταθερό.

Η ασφαλιστική εταιρεία επενδύει το ποσό P τη χρονική στιγμή t=0 ούτως ώστε να καλύψει τις μελλοντικές ζημιές οι οποίες θα πρέπει να πληρωθούν τη στιγμή T. Άρα, $P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} N_i S_{0i}$, όπου P_i είναι το ποσό που επενδύθηκε στο i χρεόγραφο. Το P_i είναι ίσο με $N_i S_{0i}$ και όπου N_i είναι ο αριθμός μονάδων που επενδύθηκαν στο χρεόγραφο.

Τη χρονική στιγμή T η συνολική αξία είναι

$$\text{Total Wealth} = \sum_{i=1}^{n} N_i S_i = \sum_{i=1}^{n} N_i\, S_{0i} \frac{S_i}{S_{0i}} = \sum_{i=1}^{n} N_i\, S_{0i} R_i = P \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i S_{0i}}{P} R_i = P \sum_{i=1}^{n} x_i\, R_i$$

όπου $x_i = \frac{N_i S_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} N_i S_{0i}}, i = 1, \dots, n$ το βάρος της επένδυσης του χαρτοφυλακίου. Για να αποφύγουμε την πιθανότητα της αρνητικής τελικής αξίας απαιτούμε $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Άρα, δεν επιτρέπεται η ανοιχτή πώληση (short-selling).

Η καθαρή ζημιά (net loss) της ασφαλιστικής εταιρείας εκφράζεται ως :

$$\text{Net Loss} = X - P \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

Η καθαρή ζημιά θεωρείται το σημείο όπου οι ζημιές ξεπερνούν τα έσοδα (assets, cash). Στην περίπτωση επενδύσεων, καθαρή ζημιά θεωρείται ότι προκύπτει όταν η επένδυση πέσει κάτω από την αρχική τιμή αγοράς. Αρνητική καθαρή ζημιά υποδηλώνει κέρδος για την ασφαλιστική εταιρεία. Η βασική υπόθεση σε αυτήν την εξίσωση είναι ότι το X είναι ανεξάρτητο από οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή R_i.

Η ασφαλιστική εταιρεία επιλέγει την επενδυτική στρατηγική έτσι ώστε το ρίσκο να ελαχιστοποιηθεί. Δύο μέτρα ρίσκου τίθενται υπό διερεύνηση: CVaR και διακύμανση (variance). Έτσι, προκειμένου να εξετάσουμε τη βέλτιστη επενδυτική στρατηγική για μια ασφαλιστική εταιρεία προτείνονται δύο μοντέλα τα οποία βασίζονται σε δύο διαφορετικά μέτρα ρίσκου.

2.2 Τα μοντέλα

Εφαρμόζουμε δύο προσεγγίσεις για την ελαχιστοποίηση του ρίσκου. Το πρώτο μοντέλο ελαχιστοποιεί τη διακύμανση της καθαρής ζημιάς ενώ το δεύτερο ελαχιστοποιεί το Cvar.

2.3 Πρώτο μοντέλο - Ελαχιστοποίηση της διακύμανσης

Το μοντέλο αυτό ουσιαστικά ελαχιστοποιεί τη διακύμανση της καθαρής ζημιάς. Είναι ένα κλασσικό μοντέλο το οποίο για καιρό τώρα χρησιμοποιείται στη μέτρηση του κινδύνου αγοράς (market risk). Η πρώτη προσέγγιση αυτού του μοντέλου έγινε από τον Markowitz (1952) όπου χαρακτηρίστηκε ως μοντέλο μίας χρονικής περιόδου αφού οι αποφάσεις λαμβάνονταν μόνο στην έναρξη της χρονικής περιόδου. Έτσι, η διακύμανση της καθαρής ζημιάς έχει ως εξής :

$$\begin{aligned} Var(\text{Net Loss}) &= VarX + P^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, R_i\right) \\ &= VarX + P^2 \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\, \varrho_{ij}\sqrt{VarR_i VarR_j} \quad (2.1), \end{aligned}$$

επισημάνουμε ότι $P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} N_i S_{0i}$ και όπου ϱ_{ij} είναι ίσο με 1 όταν $i = j$ ενώ όταν $i \neq j$, το ϱ_{ij} είναι ο συντελεστής συσχέτισης των R_i και R_j. Η σχέση (2.1) ελαχιστοποιείται χρησιμοποιώντας εμπειρικούς εκτιμητές για $Var(X)$ και $Cov(R_i, R_j)$. Έχουμε ότι $Cov(R_i, R_j) = \varrho_{ij}\sqrt{VarR_i VarR_j}$ και $Var(X) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2$, όπου $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$. Εμπειρικά, η συνδιακύμανση ανάμεσα στις ακαθάριστες αποδόσεις στοιχείων ενεργητικού, $Cov(R_i, R_j)$, είναι $\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(R_{ki} - \bar{R}_i)^2$ για $i = j$ και $\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(R_{ki} - \bar{R}_i)(R_{kj} - \bar{R}_j)$ όταν $i \neq j$, όπου $\bar{R}_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} R_{ki}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

2.4 Δεύτερο μοντέλο - Ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου ελλείμματος

Το αναμενόμενο έλλειμμα (*Expected Shortfall-ES*) το οποίο επίσης αποκαλείται Conditional Value-at-Risk (CVaR) αποτελεί ένα μέτρο εκτίμησης κινδύνου το οποίο έχει ερευνηθεί εκτενώς όσον αφορά τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου. Είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου το οποίο είναι κυρτό και υποπροσθετικό και άρα είναι ευκολότερο να ελαχιστοποιηθεί λαμβάνοντας υπόψη τα βάρη των στοιχείων ενεργητικού του χαρτοφυλακίου. Το αναμενόμενο έλλειμμα ή CVaR ελαχιστοποιείται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\min_{\xi,\ \underline{x}}\{\, \xi + \frac{1}{1-a}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(X_i - P\sum_{j=1}^{n} x_j R_{ij} - \xi\Big)_+\} \qquad (2.2)$$

όπου $(z)_+ = \max(z, 0)$

Η σχέση (2.2) έχει το ίδιο ελάχιστο με τον εμπειρικό εκτιμητή του CVaR (Rockafellar and Uryasev, 2000b). Έχουμε ότι X_i είναι μία παρατήρηση από το X δηλαδή, έχουμε ένα δείγμα $X_1, \dots, X_N$ από την αρχική κατανομή του X. Τότε, $\underline{R_i} = (R_{i1}, \dots, R_{in})$ είναι μία πραγμάτωση του τυχαίου διανύσματος $\underline{R} = (R_1, \dots, R_n)$. Επομένως, έχουμε ένα δείγμα του $\underline{R}$ μεγέθους N από την αρχική κατανομή του $\underline{\boldsymbol{R}}$.

2.5 Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς

Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης που υπόκειται σε περιορισμούς ως προς τις πιθανές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι περιορισμοί μπορεί να είναι είτε περιορισμοί ισότητας ή περιορισμοί ανισότητας. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με προβλήματα ελαχιστοποίησης υπό περιορισμούς. Τα κύρια στοιχεία ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με περιορισμούς είναι οι μεταβλητές, η αντικειμενική συνάρτηση, οι περιορισμοί και τα όρια των μεταβλητών.

Άρα, η βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς είναι ένα σύνολο διαδικασιών για την επίλυση του γενικού γραμμικού προβλήματος προγραμματισμού:

$$\min_{\theta} F(\theta)$$

που υπόκειται στους γραμμικούς περιορισμούς

$$A\theta = B$$

$$C\theta \geq D$$

τους μη γραμμικούς περιορισμούς

$$G(\theta) = 0$$

$$H(\theta) \geq 0$$

και τα εξής όρια

$$\theta_l \leq \theta \leq \theta_u$$

Οι $G(\theta)$ και $H(\theta)$ είναι συναρτήσεις οι οποίες δίνονται από το χρήστη και πρέπει να έχουν παράγωγο πρώτης τάξης ως προς θ. Η αντικειμενική συνάρτηση $F(\theta)$ έχει πρώτης και δεύτερης τάξης παραγώγους ως προς τις παραμέτρους, και ο πίνακας δεύτερης τάξης είναι γνήσια μη αρνητικός.

2.6 Περιορισμοί

Υπάρχουν πολλών ειδών περιορισμοί: γραμμική ισότητα, γραμμική ανισότητα, μη γραμμική ανισότητα, μη γραμμική ισότητα και όρια. Εμάς μας ενδιαφέρουν η γραμμική ισότητα, η γραμμική ανισότητα και τα όρια.

Περιορισμοί γραμμικής ισότητας

Οι περιορισμοί γραμμικής ισότητας έχουν τη μορφή:

$$A\theta = b$$

Όπου A είναι $m_1 \times k$ πίνακας γνωστών περιορισμών και b είναι ένα $m_1 \times 1$ διάνυσμα γνωστών περιορισμών ενώ θ είναι το διάνυσμα παραμέτρων.

Περιορισμοί γραμμικής ανισότητας

Οι περιορισμοί γραμμικής ανισότητας φέρουν τη μορφή :

$$C\theta \geq d$$

όπου C είναι ένας $m_2 \times k$ πίνακας γνωστών περιορισμών, και d ένα $m_2 \times 1$ διάνυσμα γνωστών μεταβλητών, και θ ένα διάνυσμα παραμέτρων.

Όρια

Τα όρια είναι ένας τύπος περιορισμού γραμμικής ανισότητας. Για ευκολία υπολογισμού καθορίζονται ξεχωριστά από τους άλλους περιορισμούς ανισότητας. Για να καθορίσουμε τα όρια, τα κατώτατα και τα ανώτατα αντίστοιχα τα τοποθετούμε στη πρώτη και δεύτερη στήλη ενός πίνακα με γραμμές όσες έχει και το διάνυσμα παραμέτρου.

2.7 Λογισμικό

Το λογισμικό το οποίο χρησιμοποιούμε σε αυτή τη διπλωματική εργασία είναι η Matlab η οποία έχει δημιουργηθεί για επίλυση προβλημάτων που απαιτούν γρήγορους υπολογισμούς. Η Matlab μας επιτρέπει να κάνουμε πράξεις με πίνακες, γραφικές παραστάσεις από συναρτήσεις ή δεδομένα, να εφαρμόσουμε αλγόριθμους και γενικά βρίσκει πολλές εφαρμογές.

.

Κεφάλαιο 3ο

Εφαρμογή του προγράμματος Matlab

3.1 Δομή του προγράμματος

Ο κώδικας εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα της Matlab και δίνεται στο παράρτημα. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Ορίζουμε και δηλώνουμε τις παραμέτρους και μεταβλητές.
2. Αναπαράγουμε τυχαίους αριθμούς από κατάλληλη κατανομή (προσομοίωση).
3. Κατασκευάζουμε τις απαραίτητες συναρτήσεις.
4. Βάζουμε τις αρχικές συνθήκες των συναρτήσεων (περιορισμοί, αρχικά σημεία).
5. Παρουσίαση αποτελεσμάτων.

3.2 Προσομοίωση

Η προσομοίωση είναι μια από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές στη χρηματοοικονομική. Από μία έρευνα η οποία βασίστηκε στη χρονική περίοδο 1973 έως 1988, η προσομοίωση κατατάχτηκε μεταξύ των τριών πιο σημαντικών τεχνικών στην επιχειρησιακή έρευνα (Law, 2007). Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα προγραμματισμού Matlab της οποίας μερικά από τα κύρια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Πλεονεκτήματα

Η προσομοίωση είναι η πιο διαδομένη μέθοδος για μελέτη περίπλοκων συστημάτων. Θα σκιαγραφήσουμε μερικούς από τους λόγους γιατί είναι τόσο διαδομένη.

Καταρχήν μας επιτρέπει να ερευνήσουμε ένα μοντέλο του προβλήματος που ερευνούμε. Τα μοντέλα που χρησιμοποιεί η Matlab λαμβάνουν υπόψη : χρόνο, τις μεταβλητές και τους περιορισμούς που εμπλέκονται και πώς όλα αυτά, τα οποία σχετίζονται αλληλεπιδρούν μεταξύ τους συναρτήσει του χρόνου.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι η προσομοίωση μας δίνει ότι πιο κοντινό στη πραγματικότητα. Άρα μπορούμε να δοκιμάσουμε διαφορετικά σενάρια και ιδέες τις οποίες μπορούμε να εφαρμόσουμε και έτσι να βρούμε το ιδανικό μοντέλο το οποίο λειτουργεί πιο αποδοτικά.

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι δεν απαιτεί υποθέσεις πού απλοποιούν το πρόβλημα. Οι αναλυτικές μέθοδοι απαιτούν υποθέσεις για απλοποίηση στην επίλυση του προβλήματος, σε αντίθεση με την προσομοίωση που δεν έχει λιγότερους περιορισμούς.

Επίσης μόλις κατασκευάσουμε το μοντέλο μας και το τρέξουμε μπορούμε να συλλέξουμε ακριβή δεδομένα. Άρα ο χρήστης δε θα παρατηρήσει μόνο τη συμπεριφορά του μοντέλου σε μια γενική κλίμακα αλλά μπορεί να παρατηρήσει τη λειτουργικότητα σε βάθος (Winston, 2004).

Ουσιαστικά η προσομοίωση μας παρέχει τη δυνατότητα της σύγκρισης και αξιολόγησης εναλλακτικών σεναρίων και λύσεων ώστε να δούμε ποίες πληρούν τις προϋποθέσεις (Law, 2007).

Μειονεκτήματα

Όπως όλες οι τεχνικές έτσι και η προσομοίωση έχει και τα μειονεκτήματα της. Πρώτα απ' όλα, η προσομοίωση απαντά στις ερωτήσει τύπου ''What if'' και δεν είναι μια τεχνική βελτιστοποίησης. Μπορούμε να την θεωρήσουμε σα μέθοδο βελτιστοποίησης κάτω υπό διάφορες συνθήκες είναι όμως μια διαδικασία που απαιτεί πολύ χρόνο (Winston, 2004). Ακόμα το κάθε μοντέλο που κατασκευάζουμε είναι μοναδικό και πιθανόν να μη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παρόμοια προβλήματα. Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο όγκος δεδομένων και η ρεαλιστική προσομοίωση δίνουν μια υπερβολική αυτοπεποίθηση στο χρήστη για την εγκυρότητα του μοντέλου (Law, 2007).

3.3 fmincon

Η εντολή "$fmincon$" είναι η κύρια εντολή για επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Η "$fmincon$" βρίσκει το ελάχιστο μιας ορισμένης μη γραμμικής συνάρτησης με περιορισμούς (*constraints*) σε ελάχιστο χρόνο. Η εντολή αυτή ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $f(x)$ υπό συγκεκριμένους περιορισμούς :

$$c(x) \leq 0$$
$$ceq(x) = 0$$
$$A * x \leq b$$
$$Aeq * x = beq$$
$$lb \leq x \leq ub$$

όπου $x,b,beq,lb,$ και ub διανύσματα, A και Aeq είναι πίνακες με περιορισμούς, $c(x)$ και $ceq(x)$ είναι συναρτήσεις που επιστρέφουν διανύσματα, και $f(x)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση που επιστρέφει μονοδιάστατο μέγεθος. Επίσης οι $f(x), c(x)$, και $ceq(x)$ μπορούν να είναι μη γραμμικές συναρτήσεις.

Η παρακάτω εντολή χρησιμοποιείται για να βρεθεί το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης δεδομένων των περιορισμών :

$$x = fmincon\ (fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub),$$

όπου $x0$ είναι η αρχική τιμή και η fun είναι η συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Είναι μια εντολή η οποία δέχεται ένα διάνυσμα x και επιστρέφει ένα μονοδιάστατο μέγεθος f. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα προϋποθέτει γραμμικούς περιορισμούς που μπορεί να είναι ισότητες ή ανισότητες. Έτσι για τους γραμμικούς περιορισμούς χρησιμοποιούμε διανύσματα ή πίνακες.

$A * x \le b$: γραμμικές ανισότητες,

$Aeq * x = beq$: γραμμικές ισότητες.

Αφού το πρόβλημα υπόκειται σε γραμμικές ανισότητες και ισότητες, η $fmincon$ ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση η οποία παίρνει αρχική τιμή $x0$ και αναζητεί το ελάχιστο x της συνάρτησης που περιγράφει η fun με γραμμικές ανισότητες $A * x \le b$ και γραμμικές ισότητες $Aeq * x = beq$. Η αρχική τιμή $x0$ μπορεί να είναι μονοδιάστατο μέγεθος, διάνυσμα ή πίνακας. Αν το πρόβλημα δεν έχει ανισότητες, τότε συμβολίζουμε με $A = []$ και $b = []$ ενώ αν δεν έχουμε ισότητες τότε συμβολίζουμε με $Aeq = []$ και $beq = []$. Προσδιορίζουμε κατώτερο lb και ανώτερο ub όριο για τις τιμές της x, ώστε η λύση να ικανοποιεί τις συνθήκες $lb \le x \le ub$. Αν η $x(i)$ δεν έχει κάτω όριο τότε θέτουμε $lb(i) = -Inf$, και αν δεν έχει άνω όριο τότε θέτουμε $ub(i) = Inf$. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε μόνο γραμμικούς περιορισμούς και όρια.

Για να υπολογίσουμε τη τιμή της συνάρτησης στο x γράφουμε τη παρακάτω εντολή

$$[x, fval] = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

Η $fval$ είναι η συνάρτηση για την βέλτιστη τιμή του x κάτω υπό περιορισμούς.

3.4 Εφαρμογή

Παρουσιάζουμε ένα απλό παράδειγμα για να δείξουμε πως δουλεύει η $fmincon$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = -x_1 x_2 x_3$. Ας σημειώσουμε ότι η συνάρτηση αυτή μπορεί να μην είναι πάντα κυρτή, άρα μπορεί να μας δώσει αναξιόπιστα αποτελέσματα. Για χάριν όμως του παραδείγματος θα δώσουμε έμφαση στη διαδικασία της Matlab . Συνεχίζουμε λέγοντας ότι η $fmincon$ μας δίνει τη τιμή του x που ελαχιστοποιεί την $f(x)$ αρχίζοντας π.χ. από το σημείο $x = [10; 10; 10]$, με περιορισμούς :

$$2x_1 + 4\,x_2 + 6x_3 \geq 15$$

$$x_1 + 3\,x_2 + 5x_3 \leq 200.$$

Τα επόμενα βήματα μας δίνουν μια καλή αίσθηση της διαδικασίας που ακολουθούμε για επίλυση του προβλήματος. Στη συνέχεια δημιουργούμε ένα m-file ($myfun.m$) το οποίο επιστρέφει το μονοδιάστατο μέγεθος f της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$function\, f = myfun(x)$$

$$f = -x(1) * x(2) * x(3);$$

$$end$$

Μετά ξαναγράφουμε τους παραπάνω περιορισμούς ως εξής:

$$-2x_1 - 4\,x_2 - 6x_3 \leq -15$$

$$x_1 + 3\,x_2 + 5x_3 \leq 200.$$

Αφού οι περιορισμοί είναι γραμμικοί εκφράζονται ως πίνακες ανισότητας $A.x \leq b$, όπου

$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} -15 \\ 200 \end{bmatrix}$.

Αφού θέσουμε αρχικό σημείο και τρέξουμε το $main.m$ το οποίο περιέχει τις ανισότητες, το αρχικό σημείο και την $fmincon$ η οποία καλεί την $myfun$ από το αρχείο $myfun.m$. Το σύμβολο “ %” χρησιμοποιείται για σχολιασμό.

% main program

$A =$ [-2 -4 -6; 1 3 5]; % περιορισμοί ανισότητας

$b =$ [-15 200];

$x0$ = [10; 10; 10]; % αρχική τιμή

$[x, fval] \ = \ fmincon(@myfun, x0, A, b)$;

Αφού το τρέξουμε βρίσκουμε:

$$x_1 = 66.6667$$

$$x_2 = 22.2222$$

$$x_3 = 13.3333$$

Και η τιμή της συνάρτησης είναι fval = -1.9753e+004.

Κεφάλαιο 4ο

Παρουσίαση αποτελεσμάτων

4.1 Αναλυτική περιγραφή των προβλημάτων

Ο κύριος σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι να μειωθεί το ρίσκο ενός χαρτοφυλακίου διαλέγοντας τη βέλτιστη επενδυτική στρατηγική. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ελαχιστοποιώντας τα δύο μέτρα ρίσκου: τη διακύμανση της καθαρής ζημιάς και το αναμενόμενο έλλειμμα (Cvar). Λύνουμε προβλήματα βελτιστοποίησης με δύο στοιχεία ενεργητικού (1η περίπτωση: ένα που εμπεριέχει ρίσκο και ένα χωρίς ρίσκο, 2η περίπτωση: και τα δύο με ρίσκο) ή τρία στοιχεία ενεργητικού (δύο με ρίσκο και ένα χωρίς). Σε γενικές γραμμές εξετάζουμε δύο περιπτώσεις, λύνοντας τα προβλήματα με την απώλεια κατανεμημένη κατά Pareto ή κατά Log-Normal.

Στη πρώτη περίπτωση έχουμε ζημιά με κατανομή Pareto με $\gamma = 5$, $\lambda = 4000$ και στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ζημιά με Log-Normal κατανομή με μ = 6.5 και σ = 0.903056. Το αναμενόμενο ποσό διεκδίκησης (το αναμενόμενο ποσό που θα διεκδικηθεί από τους ασφαλιζόμενους) είναι 1000 για τις δυο ως άνω κατανομές ζημιάς και η ασφαλιστική εταιρεία παίρνει ασφάλιστρα 1100. Για κάθε περίπτωση επιλέγουμε τέσσερις διαφορετικούς συνδυασμούς στοιχείων ενεργητικού ώστε να βρούμε τον βέλτιστο.

Ο πρώτος συνδυασμός είναι ένα στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Το πρώτο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο έχει μέση απολαβή της τάξης του 13.883% και Log-Normal κατανομή, $R_1 \sim logN(\mu_1 = 0.005,\ \sigma_1 = 0.5)$ ενώ το στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο έχει 4% απολαβή, $R_3 = 1.04$ με πιθανότητα 1. Ο δεύτερος συνδυασμός στοιχείων ενεργητικού πάλι αποτελείται από ένα με ρίσκο και ένα χωρίς, όμως εδώ το στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο έχει διαφορετική μέση απολαβή. Το δεύτερο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο είναι Log-Normal κατανεμημένο με μέση απολαβή της τάξης 17.029%, $R_2 \sim logN(\mu_1 = 0.006,\ \sigma_1 = 0.55)$ και το στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο έχει όπως προηγουμένως (απολαβή 4%, $R_3 = 1.04$). Ο τρίτος συνδυασμός αφορά τα δυο στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο τα οποία συσχετίζονται με συντελεστή συσχετισμού που παίρνει τιμές, -0.5 , 0 και 0.5 και ακολούθως στο τέταρτο συνδυασμό χρησιμοποιούμε το συνδυασμό δυο στοιχείων ενεργητικού τα οποία μπορούν να συσχετίζονται θετικά, αρνητικά ή καθόλου μαζί με ένα χωρίς ρίσκο. Τα τέσσερα διαφορετικά χαρτοφυλάκια χρησιμοποιούνται στη περίπτωση της Log-Normal και ακολούθως της Pareto ζημιάς. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η Log-Normal κατανομή θεωρείται "thin-tailed" σε αντίθεση με την Pareto η οποία είναι ''heavy tailed''.

Θα αναλύσουμε τρία προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα αφορά την μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων του CVaR και της διακύμανσης. Όσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα αποτελεσμάτων τόσο μεγαλύτερο και το ρίσκο αφού τα πιθανά σενάρια αυξάνονται. Μια επένδυση η οποία έχει διαφορετικές απολαβές έχει μεγάλη μεταβλητότητα, έτσι εξετάζουμε για διαφορετικό αριθμό N (δείγμα) και για k=500 επαναλήψεις. Το κομμάτι αυτό μας δίνει μια ιδέα για πιο N έχουμε μια καλή προσέγγιση του CVaR και της διακύμανσης.

Ο υπολογισμός του CVaR έχει βασιστεί σε βαθμό εμπιστοσύνης 99%. Το ελβετικό τεστ αξιοπιστίας (SST) απαιτεί τον ίδιο βαθμό εμπιστοσύνης για ασφαλιστικές εταιρείες βασισμένες στα ελβετικά δεδομένα. Ο βαθμός εμπιστοσύνης εξαρτάται από τον επενδυτή. Όσο περισσότερο δεν αρέσει στον επενδυτή το ρίσκο τόσο μεγαλύτερος και ο απαιτούμενος βαθμός εμπιστοσύνης (Alexander, 2008).

Για την επίλυση του πρώτου προβλήματος χρησιμοποιούμε τα μοντέλα τα οποία προαναφέραμε. Προσομοιώνουμε για διαφορετικά δείγματα και τρέχουμε το πρόγραμμα για k=500 υπό κάποιους περιορισμούς. Θεωρούμε το διάνυσμα x ως το χαρτοφυλάκιο και θεωρούμε:

$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ και $x_1, \dots, x_n \geq 0$ για $i = 1, \dots, n$,

όπου n ο αριθμός των στοιχείων ενεργητικού για μια συγκεκριμένη επενδυτική στρατηγική. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, x_i είναι το ποσοστό του αντίστοιχου στοιχείου ενεργητικού. Οι περιορισμοί δεν επιτρέπουν short selling για τα n στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο ή χωρίς . Χρησιμοποιούμε N=2000 (το τυχαίο δείγμα) και επαναλαμβάνουμε το πείραμα για k=500 φορές και ακολούθως για N=5000, 10,000, και 1,000,000. Οι βέλτιστες αναλογίες x_i και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις καταγράφονται. Για ευκολία χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

x_1: η αναλογία του πρώτου στοιχείου ενεργητικού με ρίσκο μέσης απολαβή 13.883%

x_2: η αναλογία του δεύτερου στοιχείου ενεργητικού με ρίσκο μέσης απολαβή 17.029%

x_3: η αναλογία του στοιχείου ενεργητικού χωρίς ρίσκο με απολαβή 4%.

Το δεύτερο πρόβλημα αφορά την ανάλυση του αναμενόμενου ελλείμματος και της διακύμανσης για ένα περιορισμένο αριθμό σεναρίων. Λύνουμε τα προβλήματα βελτιστοποίησης για δύο στοιχεία ενεργητικού με ρίσκου υπό τους ίδιους περιορισμούς. Παρουσιάζουμε παρακάτω τις βέλτιστες αναλογίες για τις δυο κατανομές ζημιών.

Το τελευταίο πρόβλημα είναι παρόμοιο με το δεύτερο αν και σε αυτή τη περίπτωση εφαρμόζεται μόνο για το αναμενόμενο έλλειμμα όπου προστίθεται ένας περιορισμός. Ο περιορισμός αυτός εφαρμόζεται στην αναμενόμενη απολαβή. Το αναμενόμενο κέρδος δίνεται από :

$$\text{Expected Profit} = P \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(R_i) - E(X), \qquad i = 1, \dots, n$$

Ο υπολογισμός του αναμενόμενου κέρδους είναι πλήρως εμπειρικός $E(R_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} R_{ki}$ και $E(X) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$. Στο πρόβλημα αυτό το αναμενόμενο κέρδος θα πάρει τις τιμές με αντίστοιχο κέρδος 1%, 2% and 3%. Άρα το αναμενόμενο κέρδος είναι 1% P , 2% P και 3% P για κάθε περιορισμό όπου P το ποσό που επενδύθηκε (P =1100).

4.2 Περιγραφή του προγράμματος της προσομοίωσης

Περιγράφουμε εν συντομία πως δουλεύει η προσομοίωση και πως συλλέγουμε τα δεδομένα.

Ο στόχος της MPT (βλέπε εισαγωγή) προσομοίωσης είναι να δοκιμάσει όλα τα πιθανά σενάρια με διαφορετικά ποσοστά στοιχείων ενεργητικού και να επιλέξει τα ποσοστά αυτά που ελαχιστοποιούν το ρίσκο. Η εντολή *mvnrnd* στη Matlab χρησιμοποιείται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από τη πολυμεταβλητή κανονική κατανομή για στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο.

Προσομοιώνουμε τις κατανομές ζημιάς με χρήση της εντολής *randraw* η οποία μπορεί να παράγει τυχαίους αριθμούς από 50 διαφορετικές κατανομές. Χρησιμοποιώντας την εντολή αυτή παράγουμε αριθμούς από δυο κατανομές, και συγκεκριμένα από τις κατανομές Pareto (second class) και Log-Normal με παραμέτρους αυτές που προσδιορίσαμε προηγουμένως.

4.3 Η ποικιλία των αποτελεσμάτων

Είναι σημαντικό στην στατιστική ανάλυση να ερευνούμε την ευαισθησία των υπολογισμών μας αναλόγως των διαφορετικών δειγμάτων. Στο κομμάτι αυτό που ακολουθεί εξετάζουμε τη συμπεριφορά την βέλτιστης αναλογίας ούτως ώστε να μειώσουμε το ρίσκο για διαφορετικά N (2000, 5000, $10^4, 10^6$) εκτελώντας το πείραμα για k=500 επαναλήψεις. Θεωρούμε τη ζημιά στην πρώτη περίπτωση να έχει Pareto κατανομή και στη δεύτερη Log-Normal κατανομή.

4.4 Αναμενόμενο έλλειμμα όταν k=500

Στο στάδιο αυτό ελαχιστοποιούμε το πρόβλημα για το αναμενόμενο έλλειμμα. Με τη βοήθεια της Matlab παίρνουμε τους παρακάτω πίνακες. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (3.2) την οποία προαναφέραμε και έτσι το γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης επιλύνεται με τους περιορισμούς $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ και $0 \leq x_i \leq 1$. Υπενθυμίζουμε ότι $R_1 \sim logN(\mu_1 = 0.005,\ \sigma_1 = 0.5)$ μέσης απολαβή 13.883%, $R_2 \sim logN(\mu_1 = 0.006,\ \sigma_1 = 0.55)$ μέσης απολαβή 17.029%, $R_3 = 1.04$ και το ποσό που επενδύσαμε P=1100. Πρώτα έχουμε τη περίπτωση.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
R_1 και R_3	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0.2180 x_2=0.7820	0.3713, 0.3713	0.5486, 0.4513	6429.059
N=5000	x_1=0.5887 x_2=0.4113	0.3007, 0.3007	0.6043, 0.3956	6547.155
N=10,000	x_1=0.7448 x_2=0.2552	0.2499, 0.2499	0.6231, 0.3956	7579.870
N=1,000,000	x_1= 0.6476 x_2=0.3524	0.0271, 0.0271	0.6409, 0.3590	7293.440

Πίνακας : Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για το 1ο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και το στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο με Pareto ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
R_1 και R_3	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1= 0.5786 x_2=0.4214	0.3577, 0.3577	0.5229, 0.4770	5851.139
N=5000	x_1= 0.6740 x_2= 0.3260	0.2902, 0.2902	0.5735, 0.4264	5878.893
N=10,000	x_1= 0.7139 x_2= 0.2861	0.2304, 0.2304	0.5950, 0.4049	5837.694
N=1,000,000	x_1= 0.5716 x_2= 0.4284	0.0244, 0.0244	0.5914, 0.4085	6499.596

Πίνακας 2: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για το 1ο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και το στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο με Log-Normal ζημιά.

Αναλύοντας τα αποτελέσματα στις δύο περιπτώσεις της τυχαίας ζημιάς, η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει περισσότερο στο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και μέση απολαβή 13.883% παρά σε αυτό χωρίς. Παρά ταύτα όμως έχει βρεθεί ότι στη περίπτωση N=2000 με Pareto ζημιά, η προτεινόμενη επενδυτική στρατηγική είναι να επενδύσουμε στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Στους πίνακες έχουμε τη τυπική απόκλιση, τις μέσες απολαβές των στοιχείων ενεργητικού και το ελαχιστοποιημένο Cvar για τα διάφορα δείγματα. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε το N η τυπική απόκλιση μειώνεται. Για N=10^6 παρατηρούμε ότι οι αναλογίες πλησιάζουν τη βέλτιστη. Επίσης παρατηρούμε ότι επενδύουμε περισσότερο στο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο στη περίπτωση της Pareto από ότι στη περίπτωση της Log-Normal. Το πρόγραμμα για N=2,000 χρειάζεται περίπου 40 δευτερόλεπτα ενώ για να N=10^6 περίπου 20 λεπτά. Ο αλγόριθμος για τα υπόλοιπα N=5000 και N=10,000, πήρε περίπου 1 λεπτό.

Ακολούθως εξετάζουμε το χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από το στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο R_2 και το στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
$R_2$and R_3	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0.2845 x_2=0.7155	0.3588, 0.3588	0.4175, 0.5824	6197.025
N=5000	x_1=0.7538 x_2=0.2462	0.2977, 0.2977	0.6190, 0.3809	6288.626
N=10,000	x_1=0.7522 x_2=0.2478	0.2334, 0.2334	0.6320, 0.3679	7571.569
N=1,000,000	x_1=0.5943 x_2=0.4057	0.0256, 0.0256	0.6450, 0.3549	7352.844

Πίνακας 3: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για το 2ο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και το στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο με Pareto ζημιά

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
R_2 και R_3	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=1 x_2=0	0.3570, 0.3570	0.5268, 0.4731	5342.447
N=5000	x_1=0.9999 x_2= 0.00001	0.2876, 0.2876	0.5872, 0.4127	6737.833
N=10,000	x_1=0.6480 x_2= 0.3520	0.2218, 0.2218	0.6066, 0.3933	6312.585
N=1,000,000	x_1= 0.5910 x_2=0.4090	0.0245, 0.0245	0.5920, 0.4079	6571.135

Πίνακας 4: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για το 2ο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και το στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο με Log-Normal ζημιά.

Τα αποτελέσματα στους Πίνακες 3 και 4 δείχνουν ότι στη περίπτωση που ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ένα στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και απολαβή 17.029% και ένα χωρίς ρίσκο και απολαβή 4%, πρέπει να προτιμήσουμε να επενδύσουμε περισσότερο από το αρχικό κεφάλαιο στο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο. Παρατηρείται μερική διαφοροποίηση αφού για

N=2,000 υπό Pareto ζημιά η ασφαλιστική εταιρεία συμβουλεύεται να επενδύσει περίπου 72% του αρχικού κεφαλαίου στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Αυτό αντιτίθεται των αποτελεσμάτων για διαφορετικά N. Έτσι μπορούμε να το παραλείψουμε αφού έχουμε μικρή διαφοροποίηση στα αποτελέσματα. Ακόμα οι τυπικές αποκλίσεις των υπολογισμών βασισμένοι στις 500 προσομοιώσεις είναι αρκετά κοντά στις τυπικές αποκλίσεις όπου το στοιχείο ενεργητικού με το λιγότερο ρίσκο εξεταζόταν. Επίσης η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να αυξήσει την επένδυση της στο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο όπου η κατανομή ζημιάς έχει ''heavy tail''. Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι για N=10^6 παίρνουμε τις μικρότερες τυπικές αποκλίσεις για τις βέλτιστες αναλογίες και ακόμα οι τιμές των μέσων είναι κοντά στις βέλτιστες. Οι υπολογισμοί μας παίρνουν το ίδιο χρονικό διάστημα με αυτά των προηγουμένων.

Ακολούθως λύνουμε το πρόβλημα του αναμενόμενου ελλείμματος όταν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από 2 συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού. Ο συντελεστής συσχετισμού είναι 0.5 και οι βέλτιστες αναλογίες για διαφορετικά N κατά Pareto και Log-Normal ζημιάς παρουσιάζονται παρακάτω.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
R_1και R_2 ρ = 0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2,000	x_1=0.2151 x_2=0.7849	0.3994, 0.3994	0.4597, 0.5402	6531.076
N=5,000	x_1=0.9450 x_2= 0.0547	0.3392, 0.3392	0.4673, 0.5326	7696.308
N=10,000	x_1=0.7333 x_2=0.2667	0.2991, 0.2991	0.4335, 0.5664	7378.667
N=1,000,000	x_1=0.4750 x_2= 0.5249	0.0328, 0.0328	0.4456, 0.5543	7344.684

Πίνακας 5: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο θετικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και Pareto ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
R_1και R_2 ρ = 0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2,000	x_1=0 x_2=1	0.4068, 0.4068	0.4787, 0.5212	4804.293
N=5,000	x_1=0.00008 x_2=0.99992	0.3416, 0.3416	0.4819, 0.5180	6369.432
N=10,000	x_1=0.2992 x_2=0.7008	0.2775, 0.2775	0.4543, 0.5456	7278.033
N=1,000,000	x_1=0.4794 x_2=0.5206	0.0315, 0.0315	0.4589, 0.5410	6551.696

Πίνακας 6: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο θετικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και Log-Normal ζημιά.

Οι Πίνακες 5 και 6 δείχνουν ότι η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να προτιμήσει να επενδύσει περισσότερο σε ένα στοιχείο ενεργητικού αφού είναι θετικά συσχετισμένες. Στο πίνακα 5 για τα N=2000 και $N=10^6$ επιλέγουμε να επενδύσουμε στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο ενώ για N=5000 και $N=10^4$ είναι προτιμητέο το πρώτο. Στο Πίνακα 6 για τα N=2000 και N=5000 φαίνεται ότι πρέπει να επενδύσουμε αρκετό από το αρχικό κεφάλαιο στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο. Για τα $N=10^4$ επενδύουμε το 70.08% του κεφαλαίου στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο. Όμως για $N=10^6$ η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει το 52.06% του αρχικού κεφαλαίου στο στοιχείο ενεργητικού με περισσότερο ρίσκο. Αυτό συμφωνεί με τη στρατηγική για Pareto ζημιά. Στη περίπτωση αυτή επενδύουμε 52.49% του αρχικού κεφαλαίου σε αυτό με το περισσότερο ρίσκο. Τα χρονικά διαστήματα για N=2000 και N=5000 είναι 40 και 58 δευτερόλεπτα αντίστοιχα. Για $N=10^4$ το χρονικό διάστημα των υπολογισμών είναι 1.05 λεπτά και για $N=10^6$ είναι περίπου 20 λεπτά.

Ομοίως με προηγουμένως υπολογίζουμε τις βέλτιστες αναλογίες για δυο στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και συντελεστή συσχετισμού -0.5.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
R_1και R_2 ρ = -0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Mean	99% CVaR
N=2000	x_1=0.2911 x_2=0.7089	0.3301, 0.3301	0.4798, 0.5201	6955.13
N=5000	x_1=0.3963 x_2=0.6037	0.2505, 0.2505	0.4862, 0.5137	8031.633
N=10,000	x_1=0.4146 x_2=0.5854	0.1873, 0.1873	0.4800, 0.5199	7951.327
N=1,000,000	x_1=0.4885 x_2=0.5115	0.0193, 0.0193	0.4857, 0.5142	7320.008

Πίνακας 7: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και Pareto ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
R_1και R_2 ρ = -0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0 x_2=1	0.3285, 0.3285	0.4888, 0.5111	6677.491
N=5000	x_1=0.2913 x=0.7087	0.2519, 0.2519	0.4876, 0.5123	7114.291
N=10,000	x_1=0.7542 x_2=0.2458	0.1789, 0.1789	0.4830, 0.5169	6847.198
N=1,000,000	x_1= 0.4825 x_2=0.5175	0.0196, 0.0196	0.4885, 0.5114	6528.151

Πίνακας 8: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και Log-Normal ζημιά.

Σύμφωνα με το Πίνακα 7 η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει περισσότερο στο δεύτερο στοιχείου ενεργητικού. Για N=10^6 πρέπει να επενδυθεί 48.85% και 51.15% του αρχικού κεφαλαίου στο πρώτο και δεύτερο στοιχείο ενεργητικού αντίστοιχα. Το 99% CVaR στη περίπτωση αυτή βρέθηκε 7320. Αυτή η τιμή μας δίνει να καταλάβουμε πόση είναι η μέση απώλεια στην ουρά της Pareto κατανομής. Στη περίπτωση της Log-Normal ζημιάς για N=2000 και N=5000 η βέλτιστη στρατηγική είναι να επενδυθεί το κεφάλαιο περισσότερο στο στοιχείο ενεργητικού με την μεγαλύτερη απολαβή. Για N=10^4 η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει 75.42% του κεφαλαίου σε αυτό με το λιγότερο ρίσκο. Για N=10^6 οι αναλογίες φτάνουν στο 48.25% και 51.75% του αρχικού κεφαλαίου αντίστοιχα. Σε γενικές γραμμές για N= 10^6 η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική και για τις δύο κατανομές ζημιάς είναι να επενδυθεί το 51% περίπου του αρχικού κεφαλαίου στο στοιχείο ενεργητικού με το περισσότερο ρίσκο. Η τυπική απόκλιση για N=10^6 είναι 0.0195 και τα χρονικά διαστήματα των υπολογισμών είναι τα ίδια με το συντελεστή συσχετισμού 0.5.

Οι παρακάτω πίνακες αποτελούνται από τις βέλτιστες αναλογίες με τις τυπικές αποκλίσεις τους και τους μέσους και το 99% CVaR στη περίπτωση δύο μη συσχετισμένων στοιχείων ενεργητικού με διαφορετικές απολαβές με Pareto και Log-Normal ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
R_1και R_2 ρ = 0	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=1 x_2=0	0.3703, 0.3703	0.4819, 0.5180	7268.25
N=5000	x_1=0.9999 x_2=0.0001	0.2811, 0.2811	0.4732, 0.5267	8232.63
N=10,000	x_1=0.7904 x_2=0.2096	0.2301, 0.2301	0.4875, 0.5124	6976.08
N= 10^6	x_1=0.4872 x_2=0.5128	0.0249, 0.0249	0.4732, 0.5267	7356.27

Πίνακας 9: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο μη συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και Pareto ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
$R_1$and R_2 ρ = 0	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0.3288,x_2=0.6712	0.3739, 0.3739	0.4837, 0.5162	5993.573
N=5000	x_1=0.4326,x_2=0.5674	0.2769, 0.2769	0.5089, 0.4910	5931.324
N=10,000	x_1=0.7040 ,x_2=0.2960	0.2071, 0.2071	0.4724, 0.5275	6826.972
$N=10^6$	x_1= 0.4677,x_2=0.5323	0.0220, 0.0220	0.4816, 0.5183	6511.276

Πίνακας 10: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο μη συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και Log-Normal ζημιά.

Σύμφωνα με το Πίνακα 9 διαπιστώνουμε ότι το ρίσκο ελαχιστοποιείται όταν επενδύουμε περισσότερο στο πρώτο στοιχείου ενεργητικού με τη μικρότερη απολαβή. Όμως για $N = 1\times10^6$ θα πρέπει να επενδύσουμε 48.72% του κεφαλαίου στο πρώτο και 51.28% στο δεύτερο. Επίσης σύμφωνα με το Πίνακα 10 πρέπει να επενδύσουμε περισσότερο στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού με την μεγαλύτερη απολαβή. Αν και στη περίπτωση N=10,000 με Log-Normal ζημιά θα πρέπει να επενδυθεί το 70.04% του κεφαλαίου στο πρώτο στοιχείο ενεργητικού .

Ακολούθως εξετάζουμε τη περίπτωση του χαρτοφυλακίου με τρία στοιχεία ενεργητικού.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
R_1, R_2 και R_3 ρ = 0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1= 1 x_2=0 x_3=0	0.3683, 0.3768, 0.3656	0.3214, 0.3711,0.3074	6479.56
N=5000	x_1=0 x_2=1 x_3=0	0.3326, 0.3422, 0.3127	0.3216, 0.4083,0.2700	8042.94
N=10,000	x_1=0.5871 x_2=0.3076 x_3= 0.1053	0.2995, 0.2830,0.2674	0.3460, 0.4026,0.2513	7269.91
$N=10^6$	x_1=0.2971 x_2=0.4940 x_3= 0.2089	0.0400, 0.0375, 0.0400	0.3324, 0.4708,0.1966	7372.12

Πίνακας 11: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο θετικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς με Pareto ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
R_1, R_2 *και* R_3 *ρ = 0.5*	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0.00004 x_2=0.02536,x_3=0.9746	0.3744, 0.3721,0.3661	0.3360, 0.3513, 0.3126	5951.255
N=5000	x_1=0.0001 x_2=0.5971, x_3=0.4028	0.3131, 0.3215,0.3097	0.3221, 0.3831, 0.2947	5673.30
N=10,000	x_1=0.0001 x_2=0.2919, x_3= 0.7080	0.2792, 0.2741,0.2645	0.3078, 0.3931, 0.2990	6375.954
$N=10^6$	x_1=0.2680 x_2=0.4444, x_3=0.2876	0.0370, 0.0326,0.0373	0.3071, 0.4342, 0.2585	6541.524

Πίνακας 12: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο θετικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς με Log-Normal ζημιά.

Οι βέλτιστες αναλογίες στο Πίνακα 11 υποδεικνύουν ότι στη περίπτωση των 3 στοιχείων ενεργητικού η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει περισσότερο σε αυτά με το μεγαλύτερο ρίσκο όταν η ζημιά ακολουθεί Pareto κατανομή. Το ποσοστό που επενδύεται στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο είναι αμελητέο για μικρό N ενώ για $N=10^6$ φτάνει στο 21% αρχικού κεφαλαίου. Στη περίπτωση της Log-Normal ζημιάς για $N=10^6$ επενδύουμε 28% του αρχικού κεφαλαίου στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο και 44% στο σε αυτό με τη μεγαλύτερη απολαβή. Παρατηρείται ότι για $N=10^6$ η αναλογία είναι κοντά στη βέλτιστη γεγονός που μας δείχνει ότι για $N=10^6$ παίρνουμε καλύτερα αποτελέσματα σε σύγκριση με μικρότερα N.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
R_1, R_2 και R_3 *ρ* = -0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0.8208 x_2=0.1791,x_3=0.0001	0.3398, 0.3394,0.2327	0.4374, 0.4751,0.0873	7987.30
N=5000	x_1=0.1100 x_2=0.4681, x_3=0.4219	0.2699, 0.2700,0.1305	0.4708, 0.4933,0.0358	7458.14
N=10,000	x_1=0.49644 x_2=0.50353,x_3=0.00003	0.1945, 0.1921,0.0567	0.4933, 0.4982,0.0083	7026.10
$N=10^6$	x_1= 0.4690 x_2= 0.5310 x_3=0	0.0192, 0.0192,0	0.4838, 0.5161,0	7269.90

Πίνακας 13: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς με Pareto ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
R_1, R_2 και R_3 ρ = -0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0.7589 x_2=0.2410,x_3=0.0001	0.3420, 0.3361, 0.2371	0.4704, 0.4346, 0.0948	5138.714
N=5000	x_1=0.3777 x_2=0.6222,x_3=0.0001	0.2462, 0.2473, 0.1400	0.4657, 0.4953, 0.0388	6446.847
N=10,000	x_1=0 x_2=1 ,x_3=0	0.1799, 0.1770, 0.0652	0.4779, 0.5094, 0.0125	6541.060
$N=10^6$	x_1=0.4834 x_2=0.5166,x_3=0	0.0178, 0.0178, 0	0.4887, 0.5113, 0	6521.780

Πίνακας 14: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς με Log-Normal ζημιά.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 13 ο επενδυτής πρέπει να αποφύγει να επενδύσει στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Η στρατηγική εδώ είναι να επενδύσουμε περισσότερο σε ένα από αυτά με ρίσκο. Στη περίπτωση της Pareto ζημιάς πρέπει να επενδύσουμε σε αυτό με τη μεγαλύτερη απολαβή. Για N=1,000,000 πρέπει να επενδυθεί 46.90% του αρχικού κεφαλαίου στο πρώτο στοιχείο ενεργητικού και 53.10% στο δεύτερο με περισσότερο ρίσκο. Ομοίως στη περίπτωση της Log-Normal ζημιάς πρέπει να επενδύσουμε περισσότερο στα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και όσο αυξάνουμε το N οι αναλογίες των δυο διαφοροποιείται και φτάνουμε για $N=10^6$ όπου επενδύουμε 48.33% στο πρώτο στοιχείο ενεργητικού και 51.66% στο δεύτερο.

Η τελευταία προσομοίωση αφορά ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από 2 μη συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 1η : Ζημιά κατά Pareto				
R_1, R_2 και R_3 ρ = 0	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0.000057 x_2=0.999683,x_3=0.00026	0.3648, 0.3698, 0.3273	0.3834, 0.4064, 0.2101	10400.5
N=5000	x_1=0.000025 x_2=0.99997,x_3= 0.000005	0.3054, 0.3103, 0.2413	0.4040, 0.4480, 0.1479	7465.23
N=10,000	x_1=0.2786 x_2=0.7213,x_3= 0.0001	0.2379, 0.2341, 0.2011	0.4129, 0.4707, 0.1162	7341.37
$N=10^6$	x_1= 0.4867 x_2= 0.5133,x_3=0	0.0246, 0.0246, 0	0.4760, 0.5239, 0	7342.335

Πίνακας 15: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο μη συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς με Pareto ζημιά.

Αναμενόμενο έλλειμμα - Περίπτωση 2η: Log-Normal ζημιά				
R_1, R_2 και R_3 $\rho = 0$	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	99% CVaR
N=2000	x_1=0 x_2=1 x_3=0	0.3607, 0.3683, 0.3144	0.3817, 0.4179, 0.2003	5834.243
N=5000	x_1=0.7033 x_2=0.2966 x_3=0.0001	0.2958, 0.2928, 0.2423	0.4021, 0.4438, 0.1539	6129.476
N=10,000	x_1=0.2200 x_2=0.4383 x_3= 0.3417	0.2347, 0.2367, 0.1986	0.4108, 0.4676, 0.1214	6086.448
$N=10^6$	x_1=0.4692 x_2=0.5307 x_3=0.0001	0.022662, 0.022634, 0.0031	0.4835, 0.5160, 0.00038	6539.539

Πίνακας 16: Ανάλυση αναμενόμενου ελλείμματος για δύο μη συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς με Log-Normal ζημιά.

Λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω δύο πίνακες ο επενδυτής θα πρέπει να προτιμήσει ένα από τα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και να αποφύγει το στοιχείου ενεργητικού χωρίς. Ο Πίνακας 15 μας προτρέπει να επενδύσουμε περισσότερο στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού με μέση απολαβή R_2 = 17.029% και σύμφωνα με τον Πίνακα 16 ο επενδυτής πρέπει να ακολουθήσει την ίδια στρατηγική. Όταν η ζημιά είναι Log-Normal κατανεμημένη το ποσό που επενδύεται στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού είναι κατά ελάχιστα μικρότερο από αυτό στη περίπτωση της Pareto κατανομής. Πρέπει να επισημάνουμε ότι για $N=10^6$ οι τυπικές αποκλίσεις είναι μικρότερες από αυτές για μικρότερα N και επίσης το 99% CVaR στη Pareto περίπτωση είναι πάντα μεγαλύτερο από αυτό στη Log-Normal περίπτωση.

4.5 Ανάλυση διακύμανσης για k=500

Ένα κοινό μαθηματικό εργαλείο μέτρησης του ρίσκου είναι η διακύμανση. Σε γενικές γραμμές όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση τόσο μεγαλύτερο είναι το εύρος των πιθανών αποτελεσμάτων άρα τόσο μεγαλύτερο και το ρίσκο. Σε αυτό το κομμάτι ελαχιστοποιούμε τη διακύμανση της καθαρής απώλειας και βρίσκουμε τις αναλογίες σε κάθε περίπτωση. Εκτελούμε 500 προσομοιώσεις σε διαφορετικά σενάρια και εξετάζουμε την επενδυτική στρατηγική. Επίσης παρουσιάζουμε τις τυπικές αποκλίσεις, τους μέσους και την ελάχιστη διακύμανση.

Πρώτα εξετάζουμε τη περίπτωση με δύο στοιχεία ενεργητικού, το ένα με ρίσκο και μέση απολαβή 13.883% και το άλλο χωρίς ρίσκο και προκαθορισμένη απολαβή 4%. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε αφού εκτελούμε το πείραμα για k=500 και διαφορετικά δειγματικά μεγέθη οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει όλο το αρχικό της κεφάλαιο στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Το συμπέρασμα παραμένει το ίδιο αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο (απολαβή 17.029%). Ομοίως καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με τη ζημιά να κατανέμεται Log-Normal. Άρα προχωρούμε στη περίπτωση όπου ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο.

Διακύμανση – Περίπτωση 1η: Ζημιά με κατανομή Pareto				
R_1 και R_2 ρ = 0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	Ελάχιστη Διακύμανση
N=2000	x_1=0.6300 x_2=0.3700	0.0392, 0.0392	0.6330, 0.3669	2176881.45
N=5000	x_1=0.5704 x_2=0.4296	0.0258, 0.0258	0.6334, 0.3665	2204444.20
N=10,000	x_1=0.6334 x_2=0.3666	0.0175, 0.0175	0.6344, 0.3655	2005863.48
$N=10^6$	x_1=0.6376 x_2=0.3624	0.0017, 0.0017	0.6341, 0.3658	2063171.12

Πίνακας 17: Ανάλυση διακύμανσης για δύο θετικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ζημιά κατανομής Pareto.

Διακύμανση – Περίπτωση 2η: Ζημιά με κατανομή Log-Normal				
R_1 και R_2 ρ = 0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	Ελάχιστη Διακύμανση
N=2000	x_1=0.7008 x_2=0.2992	0.0401, 0.0401	0.6339, 0.3660	1735792.39
N=5000	x_1=0.6590 x_2=0.3410	0.0247, 0.0247	0.6331, 0.3668	1438159.30
N=10,000	x_1=0.6269 x_2=0.3731	0.0173, 0.0173	0.6339, 0.3660	1716049.64
$N=10^6$	x_1=0.6340 x_2=0.3660	0.0016, 0.0016	0.6341, 0.3658	1623855.49

Πίνακας 18: Ανάλυση διακύμανσης για δύο θετικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ζημιά κατανομής Log-Normal.

Σύμφωνα με τον πίνακα 17 η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει το περισσότερο αρχικό κεφάλαιο στο στοιχείο ενεργητικού με απολαβή 13.883%. Οι βέλτιστες αναλογίες για τα N=2000 υποδεικνύουν ότι πρέπει να επενδυθεί το 63% του αρχικού κεφαλαίου στο πρώτο στοιχείο ενεργητικού. Για $N=10^6$ το κεφάλαιο προς επένδυση θα πρέπει να είναι 64% και 36% του αρχικού κεφαλαίου στο πρώτο και δεύτερο στοιχείο ενεργητικού αντίστοιχα. Ομοίως ο πίνακας 18 καταλήγει στη ίδια επενδυτική στρατηγική.

Ακολούθως ελαχιστοποιούμε τη διακύμανση στη περίπτωση 2 αρνητικών συσχετισμένων στοιχείων ενεργητικού με ρίσκο.

Διακύμανση – Περίπτωση 1η: Ζημιά με κατανομή Pareto				
R_1 και R_2 ρ = - 0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	Ελάχιστη Διακύμανση
N=2000	x_1=0.5450 x_2=0.4550	0.0146, 0.0146	0.5454, 0.4545	1547611.87
N=5000	x_1=0.5490 x_2=0.4510	0.0098, 0.0098	0.5451, 0.4548	1779759.04
N=10,000	x_1=0.5448 x_2=0.4552	0.0065, 0.0065	0.5450, 0.4549	1762312.05
$N=10^6$	x_1=0.5454 x_2=0.4546	0.0006, 0.0006	0.5452, 0.4547	1793556.88

Πίνακας 19: Ανάλυση διακύμανσης για δύο αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο με ζημιά κατανομής Pareto.

Διακύμανση – Περίπτωση 2η: Ζημιά με κατανομή Log-Normal				
R_1 και R_2 ρ = - 0.5	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	Ελάχιστη Διακύμανση
N=2000	x_1=0.5449 x_2=0.4551	0.0152, 0.0152	0.5438, 0.4561	1164722.18
N=5000	x_1=0.5465 x_2=0.4535	0.0102, 0.0102	0.5453, 0.4546	1437536.27
N=10,000	x_1=0.5490 x_2=0.4510	0.0067, 0.0067	0.5452, 0.4547	1446983.61
$N=10^6$	x_1=0.5441 x_2=0.4559	0.0006, 0.0006	0.5452, 0.4547	1391874.00

Πίνακας 20: Ανάλυση διακύμανσης για δύο αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ζημιά κατανομής Log-Normal.

Οι Πίνακες 19 και 20 μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι εάν ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει περισσότερο στο στοιχείο ενεργητικού με το λιγότερο ρίσκο.

Διακύμανση – Περίπτωση 1η: Ζημιά με κατανομή Pareto				
R_1 και R_2 ρ = 0	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	Ελάχιστη Διακύμανση
N=2000	x_1=0.5608 x_2=0.4392	0.0234, 0.0234	0.5680, 0.4319	1792365.78
N=5000	x_1=0.5679 x_2=0.4321	0.0148, 0.0148	0.5674, 0.4325	1762793.36
N=10,000	x_1=0.5760 x_2=0.4240	0.0095, 0.0095	0.5682, 0.4317	2021033.43
$N=10^6$	x_1=0.5677 x_2=0.4323	0.0010, 0.0010	0.5677, 0.4322	1919839.29

Πίνακας 21: Ανάλυση διακύμανσης για δύο μη συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ζημιά κατανομής Pareto

Διακύμανση – Περίπτωση 2η: Ζημιά με κατανομή Log-Normal				
R_1 και R_2 ρ = 0	Βέλτιστες αναλογίες	Τυπική Απόκλιση	Μέσος	Ελάχιστη Διακύμανση
N=2000	x_1=0.5522 x_2=0.4478	0.0216, 0.0216	0.5673,0.4326	2032156.32
N=5000	x_1=0.5827 x_2=0.4173	0.0146, 0.0146	0.5681, 0.4318	2026518.56
N=10,000	x_1=0.5717 x_2=0.4283	0.0104, 0.0104	0.5675, 0.4324	1461993.64
$N=10^6$	x_1=0.5685 x_2=0.4315	0.0010, 0.0010	0.5676, 0.4323	1513835.09

Πίνακας 22: Ανάλυση διακύμανσης για δύο μη συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ζημιά κατανομής Log-Normal.

Ελαχιστοποιώντας τη διακύμανση η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει περισσότερο στο πρώτο στοιχείο ενεργητικού από ότι στο δεύτερο και το ίδιο ισχύει είτε έχουμε θετικό ή αρνητικό συντελεστή συσχετισμού. Το χρονικό διάστημα που απαιτούν οι υπολογισμοί για N=2000, 5000 και 10^4 είναι 10, 13 και 16 δευτερόλεπτα αντίστοιχα. Για $N=10^6$ απαιτούνται 28 λεπτά.

Το επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από 3 στοιχεία ενεργητικού για διαφορετικό N (δείγμα).

4.6 Η επιλογή του σωστού *N* για τη ανάλυση

Από την ανάλυση των δύο μοντέλων για διαφορετικό αριθμό N και κατανομών ζημιάς θεωρούμε τα αποτελέσματα αξιόπιστα και μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για περαιτέρω ανάλυση. Αν και η ύπαρξης μιας μικρής διαφοροποίηση αποτελεσμάτων είναι κάτι που αναμένεται αφού για να πάρουμε πιο ακριβή αποτελέσματα πρέπει τρέξουμε εκατομμύρια προσομοιώσεις. Ο παράλληλος προγραμματισμός θα ήταν μια λύση για το παραπάνω αλλά αυτό είναι πέραν της διπλωματικής αυτής. Παρατηρήθηκε ότι για $N=10^6$ πήραμε τις μικρότερες αποκλίσεις πράγμα που μας δείχνει ότι οι βέλτιστες αναλογίες είναι πολύ κοντά στις πραγματικά βέλτιστες τιμές. Έτσι συνεχίζουμε την ανάλυση με $N=10^6$ και για $k=1$ παίρνοντας περισσότερο αξιόπιστα αποτελέσματα.

4.7 Αναμενόμενο έλλειμμα όταν k=1

Στο μέρος αυτό ο στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το αναμενόμενο έλλειμμα και τη διακύμανση και να βρούμε την καλύτερη επενδυτική στρατηγική. Παίρνουμε $k=1$ που σημαίνει ότι δεν θα επαναλάβουμε το πείραμα πάνω από μια φορά. Παρακάτω παρουσιάζουμε μια λεπτομερή ανάλυση χαρτοφυλακίων με δύο ή τρία στοιχεία ενεργητικού με κατανομή ζημιάς Pareto και Log-Normal. Επίσης κάνουμε μια σύγκριση των δύο μοντέλων.

Πρώτα, επιλύουμε το πρόβλημα ελαχιστοποιώντας το αναμενόμενο έλλειμμα με το χαρτοφυλάκιο να αποτελείται από ένα στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και ένα στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Η προσέγγιση μας εδώ είναι πλήρως εμπειρική. Παρουσιάζουμε σε πίνακες τις βέλτιστες αναλογίες και τις τιμές του 99% CVaR.

Κατανομή Ζημιάς	x_1	x_2	99% CVaR
Pareto	0.6223	0.3777	7266.432
Log-Normal	0.5881	0.4119	6562.883

Πίνακας 23: Βέλτιστες αναλογίες και 99% CVaR – 1^{ο} στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και χωρίς

Κατανομή Ζημιάς	x_1	x_2	99% CVaR
Pareto	0.6110	0.3890	7275.932
Log-Normal	0.5916	0.4084	6516.473

Πίνακας 24: Βέλτιστες αναλογίες και 99% CVaR – 2ο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και χωρίς

Σύμφωνα με τον Πίνακα 23 πρέπει να επενδύσουμε περισσότερα στο στοιχείο ενεργητικού το οποίο έχει απολαβή 13.883%. Έτσι η ασφαλιστική πρέπει να κατανέμει το κεφάλαιο της 62.23% και 58.81% στο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο για κατανομές Pareto και Log-Normal αντίστοιχα. Παρατηρείται επίσης ότι το 99% CVaR της Log-Normal ζημιάς είναι μικρότερο από το 99% CVaR της Pareto ζημιάς. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι το ποσό που επενδύεται στο στοιχείο ενεργητικού για την Pareto κατανομή είναι μεγαλύτερο από αυτό για το στοιχείο ενεργητικού για την Log-Normal κατανομή. Οι βέλτιστες αναλογίες του Πίνακα 24 υποστηρίζουν τα συμπεράσματα μας από τον Πινάκα 23. Όταν έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από ένα στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και απολαβή 17.029% και ένα χωρίς, πρέπει να προτιμήσουμε να επενδύσουμε σε αυτό με ρίσκο. Επίσης το 99% CVaR της Pareto περίπτωσης είναι μεγαλύτερο από αυτό της log-Normal περίπτωσης πράγμα που οφείλεται στη ’’heavy tail’’ της Pareto. Τα χρονικά διαστήματα για τους υπολογισμούς είναι μόλις ένα δευτερόλεπτο.

Ο επόμενος Πίνακας αφορά δύο στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο. Αφού ο συντελεστής συσχετισμού παίζει σημαντικό ρόλο στις αναλογίες των στοιχείων ενεργητικού κατασκευάζουμε το Πίνακα 25 και εξετάζουμε για κάθε κατανομή τρείς διαφορετικούς συντελεστές συσχετισμού ρ =-0.5,0,0,5.

Κατανομή Ζημιάς	ρ	x_1	x_2	99% CVaR
Pareto	-0.5	0.4978	0.5022	7272.947
	0	0.4972	0.5028	7477.117
	0.5	0.4835	0.5165	7372.955
Log-Normal	-0.5	0.4751	0.5249	6522.139
	0	0.4564	0.5436	6533.819
	0.5	0.4616	0.5384	6532.341

Πίνακας 25: Βέλτιστες αναλογίες και 99% CVaR – δύο στοιχεία ενεργητικού

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε για το πρόβλημα δυο συσχετισμένων ή μη στοιχείων ενεργητικού είναι παρόμοια με αυτά ενός στοιχείου ενεργητικού με ρίσκου και χωρίς ρίσκο. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 25 μας οδηγούν στο συμπέρασμα να επενδύσουμε στο στοιχείο ενεργητικού με το περισσότερο ρίσκο. Για τις διάφορες τιμές του συντελεστή συσχετισμού επενδύουμε περίπου 52% του αρχικού κεφαλαίου στο στοιχείο ενεργητικού με τη μεγαλύτερη απολαβή (R_2) και περίπου 48% στο στοιχείο ενεργητικού με το μικρότερο ρίσκο (R_1).

Σημειώνουμε ότι για τη Pareto κατανομή ζημιάς το 99% CVaR είναι μεγαλύτερο από αυτό της Log-Normal ζημιάς. Τα χρονικά διαστήματα για τους υπολογισμούς είναι περίπου 2 sec.

Εν συνεχεία ερευνούμε το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ένα στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και δύο συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού.

Κατανομή Ζημιάς	ρ	x_1	x_2	x_3	99% CVaR
Pareto	-0.5	0.4600	0.5400	-	7293.835
	0	0.4482	0.5518	-	7294.023
	0.5	0.3225	0.5014	0.1761	7383.342
Log-Normal	-0.5	0.4861	0.5139	-	6506.247
	0	0.4891	0.5109	-	6554.141
	0.5	0.2637	0.4341	0.3022	6528.804

Πίνακας 26: Βέλτιστες αναλογίες και 99% CVaR – τρία στοιχεία ενεργητικού

Από προηγούμενη ανάλυση (βλέπε Πίνακες 11-16) το κεφάλαιο που επενδύεται στα δύο στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο είναι ίσο και συνήθως αμελητέο μέρος του κεφαλαίου πάει στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Πάρα ταύτα όταν ο συντελεστής συσχετισμού παίρνει τη τιμή του 0.5 πρέπει να επενδύσουμε 17.61% και 30.22% του αρχικού κεφαλαίου στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο με Pareto και Log-Normal κατανομή ζημιάς αντίστοιχα. Όταν τα στοιχεία ενεργητικού είναι αρνητικά ή μη συσχετισμένα πρέπει να επιδιώξουμε να επενδύσουμε μόνο στα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και όχι στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς. Σημειώνουμε ότι το ποσό που επενδύεται στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού είναι μεγαλύτερο από αυτό του πρώτου. Ακόμα όσο πιο ''βαρεία'' η ουρά της κατανομής τόσο μεγαλύτερο και το 99% CVaR. Η Pareto κατανομή ζημιάς έχει πιο χοντρή ουρά από ότι η Log-Normal και έτσι το αναμενόμενο έλλειμμα θα είναι μεγαλύτερο. Τα χρονικά διαστήματα των υπολογισμών ήταν περίπου 3 δευτερόλεπτα.

4.8 Διακύμανση όταν k=1

Στόχος εδώ είναι η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική για την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της καθαρής ζημιάς. Υπολογίζουμε τις βέλτιστες αναλογίες για N=1,000,000.

Πρώτα ελαχιστοποιούμε τη διακύμανση στη περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από ένα στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και ένα στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Το αποτέλεσμα έδειξε ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι να επενδυθεί όλο το αρχικό κεφάλαιο στο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο. Το χρονικό διάστημα που πήρε το πρόγραμμα ήταν περίπου 2 sec.

Μετά λύνουμε το πρόβλημα των δύο στοιχείων ενεργητικού με ρίσκο. Σημαντικό εδώ είναι να παρατηρήσουμε πως η στρατηγική μεταβάλλεται εδώ επειδή έχουμε συσχετισμένα στοιχεία ενεργητικού. Ακολούθως υπολογίζουμε τις βέλτιστες αναλογίες για τους τρείς διαφορετικές συντελεστές συσχετισμού. Κάνοντας χρήση της συνάρτησης 2.1 η διακύμανση εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Variance} = x_1^2\sigma_{11} + x_2^2\sigma_{22} + 2x_1x_2\sigma_{12}$$

όπου $\sigma_{ii} = VarR_i$ και $\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j),\ i,j = 1,2$ (βλέπε σελ. 16). Στη περίπτωση όπου τα στοιχεία ενεργητικού είναι ανεξάρτητα ο τρίτος όρος της εξίσωσης γίνεται μηδέν.

Κατανομή Ζημιάς	ρ	x_1	x_2	Διακύμανση
Pareto	-0.5	0.5452	0.4548	1809833.025
	0	0.5678	0.4322	1928861.328
	0.5	0.6367	0.3633	2048973.301
Log-Normal	-0.5	0.5453	0.4547	1389413.106
	0	0.5674	0.4326	1519939.139
	0.5	0.6339	0.3661	1629444.940

Πίνακας 27:Βέλτιστες αναλογίες και ελάχιστη διακύμανση - δύο στοιχεία ενεργητικού

Όπως φαίνεται στο Πίνακα 27 η καλύτερη στρατηγική είναι να επενδύσουμε στο στοιχείο ενεργητικού με τη μικρότερη απολαβή όταν ο στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τη διακύμανση της καθαρής ζημιάς. Για τη τιμή ρ=0.5 η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να επενδύσει το 64% του αρχικού κεφαλαίου (P=1100) στο πρώτο στοιχείο ενεργητικού ενώ όταν ρ=-0.5 τότε πρέπει να επενδυθεί το 55%. Αυτό ισχύει και για τις 2 κατανομές αφού τα αποτελέσματα μας δίνουν περίπου τις ίδιες αναλογίες. Η τιμή της διακύμανσης για την Pareto είναι μεγαλύτερη από αυτήν της Log-Normal περίπτωσης για κάθε συντελεστή συσχετισμού. Αυτό είναι ένα καίριο σημείο αφού μας δίνει να καταλάβουμε το ρόλο που παίζει η κατανομή ζημιάς στις αναλογίες των στοιχείων ενεργητικού.

Ακολουθούν τα αποτελέσματα της περίπτωσης του χαρτοφυλακίου με τρία στοιχεία ενεργητικού. Η διακύμανση εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Variance} = x_1^2\sigma_{11} + x_2^2\sigma_{22} + 2x_1x_2\sigma_{12}$$

Όπου σ_{ii} η διακύμανση της ακαθάριστης απολαβής του στοιχείου ενεργητικού R_i, $i = 1,2,3$. Αφού $\sigma_{13} = \text{cov}(R_1, R_3)$ και $\sigma_{23} = \text{cov}(R_2, R_3)$ είναι μηδέν. Το R_3 έχει προκαθορισμένη απολαβή άρα ο συντελεστής συσχετισμού μεταξύ R_i και ενός μονοδιάστατο μεγέθους θα είναι μηδέν.

Κατανομή Ζημιάς	ρ	x_3	Διακύμανση
Pareto	-0.5	1	1644419.783
	0	1	1685086.755
	0.5	1	1675986.260
Log-Normal	-0.5	1	1256567.661
	0	1	1241568.921
	0.5	1	1252122.708

Πίνακας 28:Βέλτιστες αναλογίες και ελάχιστη διακύμανση - τρία στοιχεία ενεργητικού

Το παραπάνω πρόβλημα έδειξε ότι το αρχικό κεφάλαιο μίας ασφαλιστικής εταιρείας θα πρέπει να επενδυθεί στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Αυτή η στρατηγική είναι η πιο ασφαλής. Η διακύμανση της Pareto κατανομής είναι μεγαλύτερη από αυτή της Log-Normal και η χρονική διάρκεια των υπολογισμών είναι 1 sec.

4.9 Σύγκριση των βέλτιστων στρατηγικών μέσω δύο μοντέλων

Εδώ θα συγκρίνουμε τη διακύμανση και τη προσέγγιση CVaR για $k=1$ και $N=10^6$ κάνοντας διάφορους συνδυασμούς στοιχείων ενεργητικού και συσχέτισης με ζημιά κατανεμημένη κατά Pareto και Log-Normal. Θα ερευνήσουμε πώς το CVaR και η διακύμανση επηρεάζονται από τα τέσσερα διαφορετικά χαρτοφυλάκια. Μετά από μια σειρά ελεγχόμενων βελτιστοποιήσεων συγκρίνουμε τις αναλογίες που υπολογίσαμε ελαχιστοποιώντας τη διακύμανση και το CVaR και ερευνούμε πως συμπεριφέρονται τα δύο μοντέλα σε σχέση με τη κατανομή ζημιάς.

Η διακύμανση είναι ένα συνηθισμένο μέτρο ρίσκου το οποίο βασίζεται στη κατανομή της ζημιάς. Το Conditional value-at-risk (CVaR) μετρά το αναμενόμενο έλλειμμα της ουράς της κατανομής δεδομένου ότι κάποιο όριο ζημιάς έχει ξεπεραστεί. Οι περιορισμοί είναι οι ίδιο στις δύο περιπτώσεις. Είναι ενδιαφέρον ότι η διακύμανση είναι ανεξάρτητη του επίπεδου εμπιστοσύνης του οποίου αναφέρεται το CVaR. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διακύμανση λαμβάνει υπόψη όλη τη κατανομή ενώ το CVaR επικεντρώνεται στην αναμενόμενη απώλεια.

Χρησιμοποιώντας σα μέτρο ρίσκο την ελάχιστη διακύμανση για χαρτοφυλάκιο, αποτελούμενο από δύο στοιχεία ενεργητικού με το ένα εκ των δύο να μην εμπεριέχει ρίσκο (ομόλογο), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει να επενδύσουμε περισσότερο στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Σε αντίθεση με τη διακύμανση, το CVaR μοντέλο μας παροτρύνει να επενδύσουμε 60% του αρχικού κεφαλαίου στο στοιχείο ενεργητικού με ρίσκο και το υπόλοιπο σε αυτό χωρίς ρίσκο (ομόλογο).

Έχοντας εξετάσει τη περίπτωση του χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από δύο στοιχεία ενεργητικού με διαφορετικές απολαβές η διακύμανση μας προτρέπει να επενδύσουμε στο στοιχείο ενεργητικού με το μικρότερο ρίσκο και το CVaR μας προτρέπει να επενδύσουμε στο στοιχείο ενεργητικού με το περισσότερο ρίσκο. Περίπου 50% και 54% του αρχικού κεφαλαίου σύμφωνα με το CVaR στο δεύτερο στοιχείο ενεργητικού και 54% και 63% στο πρώτο στοιχείο ενεργητικού σύμφωνα με τη διακύμανση για κατανομές ζημιάς Pareto και Log-Normal αντίστοιχα.

Το τελευταίο τύπος χαρτοφυλακίου αποτελείται από τρία στοιχεία ενεργητικού (δύο στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και ένα χωρίς ρίσκο). Η βέλτιστη στρατηγική για την ασφαλιστική εταιρεία με βάση τη διακύμανση είναι να επενδύσουμε στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Τα εμπειρικά αποτελέσματα του CVaR μας λέει ότι για $\rho = 0$ και $\rho = -0.5$ πρέπει να επενδύσουμε στα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο ενώ είναι θετικά συσχετισμένα πρέπει να επενδύσουμε και σε αυτό χωρίς ρίσκο. Είναι προφανές ότι οι στρατηγικές που αναπτύσσονται μέσω των δύο ως άνω εργαλείων διαφέρουν.

4.10 Αναμενόμενο έλλειμμα με περιορισμό κέρδους

Σε αυτό το μέρος παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του 3ου προβλήματος (βλέπε σελ 27). Επικεντρωνόμαστε να ελαχιστοποιήσουμε το αναμενόμενο έλλειμμα τηρώντας το νέο περιορισμό. Η βελτιστοποίηση του προβλήματος με προϋπόθεση του αναμενόμενου κέρδους για τρείς διαφορετικές τιμές με ζημιές κατανομής Pareto και Log-Normal. Το πρόβλημα αυτό για δύο στοιχεία ενεργητικού δε λύνεται. Οι περιορισμοί που έχουμε εδώ είναι γραμμικές ισότητες (οι αναλογίες που ισούνται με μονάδα και το αναμενόμενο κέρδος) έτσι η λύση των εξισώσεων αυτών με αγνώστους x_1 και x_2 είναι μοναδική, όμως δεν ικανοποιεί το περιορισμό $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ και έτσι δε μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα για δύο στοιχεία ενεργητικού. Όπως προηγουμένως χρησιμοποιούμε N=10^6 και k=1 επαναλήψεις. Καταγράφουμε τις αναλογίες για κάθε συντελεστή συσχετισμού και κάθε τιμή του αναμενόμενου κέρδους. Το χρονικό διάστημα για κάθε περίπτωση είναι περίπου 1 min.

Κατανομή	ρ	Αν. κέρδος	x_1	x_2	x_3	99% CVaR
Pareto	-0.5	P.1%	9.11x10-5	7.31x10-5	0.8091	6040.753
		P.2%	1.62x10-6	4.79x10-7	0.8194	6041.199
		P.3%	5.16x10-5	1.03x10-8	0.8505	6301.636
	0	P.1%	2.13x10-12	7.95x10-11	0.8852	6653.314
		P.2%	2.27x10-5	4.40x10-7	0.8573	6391.750
		P.3%	1.03x10-7	3.66x10-9	0.8075	6021.407
	0.5	P.1%	2.77x10-16	2.11x10-16	0.8834	6525.284
		P.2%	6.52x10-6	3.01x10-8	0.8415	6219.977
		P.3%	6.17x10-12	4.70x10-12	0.9014	6667.553
Log-Normal	-0.5	P.1%	3.44x10-9	2.53x10-7	0.8033	5302.409
		P.2%	0.0011	3.96x10-6	0.8036	5306.325
		P.3%	2.45x10-8	5.81x10-6	0.8035	5325.470
	0	P.1%	6.32x10-7	2.81x10-6	0.8499	5613.388
		P.2%	3.85x10-12	2.92x10-12	0.8918	5848.347
		P.3%	1.61x10-7	1.01x10-7	0.7897	5205.211
	0.5	P.1%	4.97x10-10	3.05x10-10	0.8812	5838.762
		P.2%	5.63x10-16	4.24x10-16	0.8925	5851.014
		P.3%	5.06x10-5	8.01x10-7	0.8017	5281.241

Πίνακας 29: Βέλτιστες αναλογίες για κατανομή ζημιάς Pareto και Log-Normal με τρία στοιχεία ενεργητικού.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 29 η ασφαλιστική εταιρεία κατανέμει περισσότερο από το κεφάλαιο της στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο, φτάνοντας περίπου το 80% με 90%. Άρα ο ρόλος του στοιχείου ενεργητικού χωρίς ρίσκο είναι πολύ σημαντικός. Αναλόγως όμως από την κατανομή ζημιάς το κεφάλαιο που πρέπει να επενδυθεί διαφέρει.

Το ποσό που επενδύεται στα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο είναι της τάξης του 1×10^{-6} , άρα πολύ μικρό. Ενδιαφέρον έχει να προσέξουμε πώς οι αναλογίες κυμαίνονται σύμφωνα με τους συντελεστές συσχέτισης. Για αρνητικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης πρέπει να αυξήσουμε το ποσό που επενδύουμε στα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο και να το μειώσουμε όταν τα δύο στοιχεία ενεργητικού δε συσχετίζονται. Ενόσω το ρ αυξάνεται και πλησιάζει το 1, ο επενδυτής θα πρέπει να μειώσει την επένδυση του στα στοιχεία ενεργητικού με ρίσκο. Εξετάζοντας τη συμπεριφορά των αναλογιών στη περίπτωση της Log-Normal κατανομής αντίστοιχα με το αναμενόμενο κέρδος παρατηρούμε ότι ενόσω η τιμή του αναμενόμενου κέρδους αυξάνεται, αυξάνεται και η επένδυση στο στοιχείο ενεργητικού με το λιγότερο ρίσκο.

Κεφάλαιο 5ο

Παρατηρήσεις και σχόλια

Στη διπλωματική εργασία αυτή κατασκευάσαμε χαρτοφυλάκια με χρήση δυο μοντέλων υποθέτοντας ότι οι απώλειες μας έχουν κατανομή α) Pareto και β) Log-Normal. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε τα μέτρα ρίσκου CVar (αναμενόμενο έλλειμμα) και variance (διακύμανση). Ο εμπειρικός τρόπος υπολογισμού της διακύμανσης της καθαρής ζημιάς είναι ευθύς και τον εφάρμοσε πρώτος ο Markowitz (1952). Για το CVaR μοντέλο υιοθετούμε τη προσέγγιση των Rockafellar και Uryasev (2000b). Τα αποτελέσματα φανερώνουν ότι τα δυο μοντέλα μπορούν να βελτιωθούνε με χρήση γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού. Η διακύμανση της συνολικής απολαβής και το 99% CVaR ελαχιστοποιούνται υπό μερικούς περιορισμούς.

Αρχικά εξετάσαμε τη σταθερότητα των αποτελεσμάτων . Με χρήση τεσσάρων διαφορετικών δειγμάτων επαναλάβαμε το πείραμα για 500 φορές τόσο για το CVaR όσο και για το variance μοντέλο. Τα αποτελέσματα δείχνουν κάποιες διαφοροποιήσεις οι οποίες όμως είναι αμελητέες. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δείγμα μεγέθους $N=10^6$ το οποίο μας δίνει πολύ μικρές τυπικές αποκλίσεις για τις αναλογίες. Το πρόγραμμα Matlab εκτελεί αποτελεσματικά δεκάδες χιλιάδες προσομοιώσεις τις οποίες απαιτούσε ο κώδικας. Το χρονικό διάστημα που χρειαζόταν για να τρέξει το πρόγραμμα κυμαινόταν μεταξύ μερικών δευτερολέπτων και μερικών λεπτών αναλόγως του προβλήματος.

Ακολούθως κατασκευάσαμε χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από δύο ή τρία στοιχεία ενεργητικού ελαχιστοποιώντας το CVaR και τη διακύμανση (χωρίς να έχουμε την επιλογή του short sale όπως και προαναφέραμε). Συγκρίναμε τις δύο προσεγγίσεις και παρατηρήσαμε ότι οι αναλογίες των στοιχείων ενεργητικών διαφέρουν. Συγκεκριμένα το μοντέλο της διακύμανσης προσφέρει τη πιο ασφαλή στρατηγική αφού το μεγαλύτερο μέρος της επένδυσης τοποθετείται στο ενεργητικό με το λιγότερο ρίσκο. Ο στόχος του μέτρου ρίσκου είναι να ελαχιστοποιήσει το ρίσκο σε όλη τη κατανομή ζημιάς και έτσι προτιμούνται τα στοιχεία ενεργητικού με το μικρότερο ρίσκο. Αντιθέτως η προσέγγιση CVaR συνιστά να επενδύσουμε στα στοιχεία ενεργητικού με τις μεγαλύτερες απολαβές και ρίσκο.

Ένα ακόμα σημείο που ερευνήσαμε ήταν αυτό του συντελεστή συσχετισμού ο οποίος σύμφωνα με τα αποτελέσματα μας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη στρατηγική που θα ακολουθήσουμε. Χρησιμοποιώντας τη CVaR "προσέγγιση" παρατηρήσαμε ότι όσο ο συντελεστής συσχετισμού αυξάνεται και πλησιάζει τη τιμή της μονάδα η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να επενδύσει στο στοιχείο ενεργητικού με το μεγαλύτερο ρίσκο. Ενώ για τη διακύμανση σήμαινε ότι θα πρέπει να επενδύσουμε στο στοιχείο ενεργητικού με το μικρότερο ρίσκο. Σημαντικό είναι να επισημάνουμε ότι όταν υποθέταμε απώλεια κατά Pareto η τιμή του ελαχιστοποιημένου μέτρου ρίσκου ήταν πάντα μεγαλύτερη από αυτή της Log-Normal περίπτωσης. Αυτό εξηγείται από την ασύμμετρη κατανομή Pareto έχοντας "heavier tail''.

Στο τελευταίο μέρος της διπλωματικής, το CVaR χρησιμοποιήθηκε για να επιλύσει το πρόβλημα με περιορισμό στο αναμενόμενο κέρδος. Το πρόβλημα επιλύθηκε για τρείς διαφορετικές τιμές του αναμενόμενου κέρδους. Ερευνούμε για 1%, 2% και 3% του αναμενόμενου κέρδους, μια διαδικασία που κοινώς χρησιμοποιείται σε ασφαλιστικές εταιρείες. Χρησιμοποιήσαμε τρία στοιχεία ενεργητικού κα αποτελέσματα μας προτρέπουν να επενδύσουμε περισσότερο στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Όταν δύο στοιχεία ενεργητικού είναι θετικά συσχετισμένα θα πρέπει να ενισχύσουμε την επένδυση σε αυτό χωρίς ρίσκο, ενώ όταν είναι αρνητικά συσχετισμένα θα πρέπει να επενδύσουμε περισσότερο σε αυτά με ρίσκο πράγμα που μας δίνει να καταλάβουμε πόσο μεγάλο ρόλο παίζει ο συντελεστής συσχετισμού. Παρατηρούμε ακόμα ότι εάν αυξήσουμε τη τιμή του αναμενόμενου κέρδους πρέπει να αυξήσουμε και την επένδυση στο στοιχείο ενεργητικού χωρίς ρίσκο. Επίσης η συμπεριφορά των κατανομών ζημιάς παίζουν σημαντικό ρόλο στις αναλογίες των στοιχείων ενεργητικού.

Το πρόβλημα κατανομής των στοιχείων ενεργητικού σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι ύψιστης σημασίας στο χώρο της ανάλυσης κινδύνου. Η προσέγγιση του CVaR είναι η καλύτερη εναλλακτική της διακύμανσης αφού οι ασφαλιστικές εταιρείες ασχολούνται με μεγάλες ζημιές και έτσι το ενδιαφέρον τους επικεντρώνεται σε υπολογισμούς αναμενόμενης ζημιάς λόγω μεγάλης πτώσης κάποιας τιμής. Το CVaR είναι ένα αποδοτικό εργαλείο για βελτιστοποίηση όταν θεωρούμε τη ζημιά με διάφορες κατανομές και ακόμα είναι πολύ σταθερό σε αριθμητικούς υπολογισμούς. Η ανάλυση κινδύνου είναι ακόμα υπό εξέλιξη και το CVaR δείχνει να έχει μεγάλη προοπτική.

Σαν προτάσεις για περαιτέρω έρευνα συνιστούμε ανάλυση πιο περίπλοκων προβλημάτων. Για παράδειγμα η δημιουργία χαρτοφυλακίου με περισσότερο από τρία στοιχεία ενεργητικού. Επίσης θα μπορούσε να γίνει ανάλυση προβλημάτων πολλαπλών περιόδων. Τα σταθερά και ακριβή αποτελέσματα θα πρέπει να προέρχονται από υπολογισμούς που τρέχουν συγχρόνως, άρα ο παράλληλος προγραμματισμός (μια τεχνική προγραμματισμού όπου μεγάλα προβλήματα χωρίζονται σε μικρότερα και υπολογίζονται ταυτοχρόνως) θα μπορεί να είναι μια αποτελεσματικότερη μέθοδος επίλυσης σύνθετων προβλημάτων. Εν κατακλείδι απατώνται έρευνες χρησιμοποιώντας το αναμενόμενο έλλειμμα βασισμένες σε πραγματικά δεδομένα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Υπολογισμός του αναμενόμενου ελλείμματος:

Ο κύριος κώδικας του Cvar:

```
% global n
% αριθμός σεναρίων, όσα και αυτά στο  myfES.m
n = 2000; % n=5000, 10000 or 1000000
global K
%  n αριθμός σεναρίων τα οποία τρέχουν k φορές για να ελέγξουν τη μεταβλητότητα στο μοντέλο μας
K = 500;
% προσδιορίζουμε τις παραμέτρους της ζημιάς με κατανομή Pareto
alpha = 5;
lambda = 4000;
mu = 0.005;                  % μέσος του 1ου ενεργητικού
% mu = 0.006;                % μέσος του 2ου ενεργητικού
% προσδιορίζουμε το διάνυσμα των μέσων των 2 συσχετισμένων ενεργητικών
% mu = [0.005, 0.006];  % μέσος των 2 συσχετισμένων ενεργητικών
sigma = 0.5;                 % τυπική απόκλιση του 1ου ενεργητικού
% sigma = 0.55;              % τυπική απόκλιση του 2ου ενεργητικού
% προσδιορίζουμε το πίνακα της συνδιακύμανσης
% sigma = [0.5^2, -0.5*0.5*0.55; -0.5*0.5*0.55, 0.55^2];
% προσδιορίζουμε τις παραμέτρους για τη κατανομή ζημιάς
a1 = 6.5;
```

```
k1 = 0.903056;

P = 1100;

sol1 = [];

sol2 = [];

for i=1:K

clear global mm

global mm

mm = mvnrnd(mu,sigma,n);

clear global mmm

global mmm

mmm = exp(mm);      % ενεργητικό με ρίσκο

clear global mmmm

global mmmm

mmmm = 1.04*ones(n,1);     % ενεργητικό χωρίς ρίσκο

clear global m

global m

m = cat(2,mmm, mmmm);     % η περίπτωση με 3 ενεργητικά

% m = mmm;

% μόνο για 2 συσχετισμένα ενεργητικά αντί για cat(2,mmm, mmmm)

clear global lossd     % κατανομή ζημιάς

global lossd

% lossd = randraw('pareto2', [lambda, alpha], n); % Pareto ζημιά

lossd = randraw('lognorm', [a1, k1], n); % Log-Normal ζημιά

lossd = repmat(lossd,1,2);

% lossd = repmat(lossd,1,3);   % η περίπτωση  τριών ενεργητικών
```

```
clear global zet
global zet
zet = lossd./P - m;
clear global m1
global m1
m1 = mean(m(:,1));
clear global m2
global m2
m2 = mean(m(:,2));
% clear global m3    % m3 χρησιμοποιείται στη περίπτωση των τριών ενεργητικών
% global m3
% m3 = mean(m(:,3));
y0 = [100, 0.5, 0.5];        % αρχικές τιμές για x1 και x2
lb = cat(2,-10^10, 0, 0); % κατώτατα όρια
ub = [10^10, 1, 1];          % ανώτατα όρια
% y0 = [100, 0.01, 0.09, 0.6]; % περίπτωση 3η
% lb = cat(2,-10^10, 0, 0, 0);
% ub = [10^10, 1, 1, 1];
options = optimset('Algorithm','interior-point');
% καλούμε τις myfES και mycES
[x, fval] = fmincon(@myfES,y0,[],[],[],[],lb,ub,@mycES,options);
weight = cat(2,x);
sol1 = [sol1;weight];
sol2 = [sol2;fval];
end
```

% ο μέσος και η τυπική απόκλιση για την slack variable και τα weights στο sol1 και MinEs value in

```
% sol2

mean1 = mean(sol1);

mean2 = mean(sol2);

standev1 = std(sol1);

standev2 = std(sol2);
```

Η συνάρτηση περιορισμού είναι ένα m-file το οποίο ονομάζουμε mycES.m. Ελέγχει εάν οι αναλογίες είναι ίσες με μονάδα

```
function [c, ceq] = mycES(y)

global mm

global mmm

global mmmm

global m

global m1

global m2

global m3

c=[]; % περιορισμός γραμμικής ανισότητας

ceq = y(2)+y(3)-1;              % 2 ενεργητικά - περιορισμός γραμμικής ισότητας

% ceq = y(2)+y(3)+y(4)-1;       % 3 ενεργητικά - περιορισμός γραμμικής ισότητας

end
```

Η CVaR υπολογίζεται με βοήθεια του m-file myfES.m.

```
function maxaES = myfES(y)


global n

n = 2000; % n = 5000, 10000 or 1000000

beita = 0.99;  % κριτήριο επιλυσιμότητας

P = 1100;

global zet

maxaES = y(1)+(1/(n*(1-beita)))*sum(max(P*(y(2).*zet(:,1)+
y(3).*zet(:,2))- y(1),0)); % 2 Assets case

% maxaES = y(1)+(1/(n*(1-beita)))*sum(max(P*(y(2).*zet(:,1)+
y(3).*zet(:,2)+ y(4).*zet(:,3))-y(1),0));  % 3 Assets case

% y(1)  slack variable (χαλαρή μεταβλητή)

% y(2), y(3), y(4) οι αναλογίες x1, x2, x3 αντίστοιχα

end
```

Επίσης χρησιμοποιούμε το randraw.m αρχείο το οποίο περιέχει περισσότερο από 50 κατανομές και χρησιμοποιείται στο κώδικα μας για να παράγει αριθμούς από τις Pareto και Log-Normal κατανομές. Μπορούμε να το βρούμε στη ιστοσελίδα www.mathworks.com.

Υπολογισμός της διακύμανσης της απολαβής

Κυρίως κώδικας της διακύμανσης:

```
global n
% αριθμός σεναρίων; το n όσο και στο myfES.m
n = 2000;  % n=5000, 10000 or 1000000
global r
r = 0 ;        %  συντελεστής συσχετισμού  r = {-0.5, 0, 0.5}
global K
% n σενάρια τρέχουν K φορές για να βρούμε τη μεταβλητότητα στο μοντέλο μας
K = 500;
% για το δεύτερο πρόβλημα K = 1
% προσδιορίζουμε τις παραμέτρους για την Pareto ζημιά
alpha = 5;
lambda = 4000;
mu = 0.005;    % μέσος του μέσος του πρώτου ενεργητικού με ρίσκο
% mu = 0.006;        % μέσος του δεύτερου ενεργητικού με ρίσκο
%  διάνυσμα μέσων
% mu = [0.005, 0.006];
sigma = 0.5;              % τυπική απόκλιση του πρώτου ενεργητικού με ρίσκο
% sigma = 0.55;           % τυπική απόκλιση του δεύτερου ενεργητικού με ρίσκο
%  πίνακας συνδιακύμανσης
sigma = [0.5^2, r*0.5*0.55; r*0.5*0.55, 0.55^2];
% προσδιορίζουμε τις παραμέτρους για την lognormal ζημιά
```

```
a1 = 6.5;

k1 = 0.903056;

P = 1100;

sol1=[];

sol2 =[];

for i=1:K

clear global mm

global mm

mm = mvnrnd(mu,sigma,n);

clear global mmm

global mmm

mmm = exp(mm); % ενεργητικό με ρίσκο

clear global mmmm

global mmmm

mmmm = 1.04*ones(n,1); % ενεργητικό χωρίς ρίσκο

clear global m

global m

m = cat(2,mmm,mmmm);

% m = mmm ;

% μόνο για 2 συσχετισμένα ενεργητικά αντί για cat (2,mmm, mmmm)

clear global lossd      % κατανομή ζημιάς

global lossd

lossd = randraw('pareto2', [lambda, alpha], n);   % Pareto ζημιά

% lossd = randraw('lognorm', [a1, k1], n);   % Log-Normal ζημιά

clear global m1
```

```
global m1

m1 = mean(m(:,1))

clear global m2

global m2

m2 = mean(m(:,2));

% clear global m3     % το m3 χρησιμοποιείται στη περίπτωση των 3 ενεργητικών

% global m3

% m3 = mean(m(:,3));

y0 = [0.5, 0.5];     % αρχικές τιμές για x1 και x2

lb = [ 0, 0];      % κατώτατα όρια

ub = [ 1, 1];      % ανώτατα όρια

% y0 = [ 0.5, 0.2, 0.3 ]; % περίπτωση 3 ενεργητικών

% lb = [ 0, 0, 0 ];

% ub = [ 1, 1, 1 ];

Options = optimset('Algorithm','interior-point');

% καλούνται οι myfVAR και mycVAR συναρτήσεις

[x, fval] = fmincon(@myfVAR,y0,[],[],[],[],lb,ub,@mycVAR,
options);

weight = cat(2,x);

sol1 = [sol1;weight];

sol2 = [sol2;fval];

end

% ο μέσος και η τυπική απόκλιση για την slack variable και τα weights στο sol1 και MinEs
value in

% sol2

mean1 = mean(sol1);
```

```
mean2 = mean(sol2);

standev1 = std(sol1);

standev2 = std(sol2);
```

Χρησιμοποιούμε το m-file με το όνομα mycVAR.m για να ελέγξουμε αν οι αναλογίες είναι ίσες με μονάδα.

```
function [c, ceq] = mycVAR(y)

global mm

global mmm

global mmmm

global m

global m1

global m2

global m3

c=[]; % περιορισμός γραμμικής ανισότητας

ceq = y(2)+y(3)-1;              % 2 ενεργητικά  - περιορισμός γραμμικής ισότητας

% ceq = y(2)+y(3)+y(4)-1;       % 3 ενεργητικά  - περιορισμός γραμμικής ισότητας


end
```

Η διακύμανση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση που προσδιορίζουμε στο m-file myfVAR.m.

```
function minVar = myfVAR(y)


% συντελεστής συσχετισμού ={-0.5, 0, 0.5}

global r

r = 0;

P = 1100;

global lossd

global m

minVar = var(lossd) + P^2*(y(1)^2*var(m(:,1)) +
y(2)^2*var(m(:,2)) +
2*y(1)*y(2)*r*sqrt(var(m(:,1))*var(m(:,2))));

% περιπτώσεις με 2 ή 3 ενεργητικά

% minVar = var(lossd) + P^2*(y(1)^2*var(m(:,1)));

% περίπτωση με ρίσκο ή χωρίς


end
```

Πάλι χρησιμοποιούμε το randraw.m αρχείο το οποίο περιέχει περισσότερο από 50 κατανομές και χρησιμοποιείται στο κώδικα μας για να αναπαράγει αριθμούς από τις Pareto και Log-Normal κατανομές. Μπορούμε να το βρούμε στη σελίδα www.mathworks.com.

Στο $3^{ο}$ πρόβλημα όπου προστίθεται ο περιορισμός του αναμενόμενου κέρδους χρησιμοποιούμε το αρχείο file mycES.m:

```
function [c, ceq] = mycES(y)


global m1

global m2

global m3

global lossd

global P

P = 1100;

global pb4

pb4 = 0.01;  % profit margin = {1%, 2%, 3%}

c=[];

% ceq = [y(2)+y(3)-1, P*(y(2)*m1 + y(3)*m2)- mean(lossd(:,1))-
P*pb4];       % 2 Assets case

% ceq = [y(2)+y(3)+y(4)-1, P*(y(2)*m1 + y(3)*m2 + y(4)*m3)-
mean(lossd(:,1))- P*pb4] ;



end
```

Βιβλιογραφία

1. Acerbi C., Nordio C. and Sirtori C. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management, *Derivatives Desk Abaxbank*, Milano, Italy.

2. Acerbi C. and Tasche D. (2001). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance 26*, pp 1487-1503.

3. Alexander C. (2008). Value-at-Risk Models. John Wiley & Sons Ltd 4.

4. Artzner P. (1999). Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance. *North American Actuarial Journal 3* (2), pp 11–29.

5. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M. and Heath D. (1998). Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance 9, (3), pp 203-228.

6. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M. and Heath D. (1997). *Thinking Coherently, Risk 10*, (11), pp 68-71.

7. Birge J.R. and Louveaux F. (1997). Introduction to Stochastic Programming, Springer, New York.

8. Delbaen F., (1998). Coherent risk measures on general probability spaces. *Working paper*, ETH Zürich.

9. Dhaene J., Goovaerts M. J. and Kaas R. (2003). Economic capital allocation derived from risk measures. *North American Actuarial Journal 7* (2), pp 44–59.

10. Embrechts P. (2000), Extreme value theory: Potential and limitations as an integrated risk management tool. *Derivatives Use, Trading & Regulation 6*, (1), pp. 449-456.

11. Embrechts P., Frey R. and McNeil A. J. (2005). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press, United States of America.

12. Embrechts P., Klüppelberg C. and Mikosch, T. (1997), Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer, New York.

13. Embrechts P., Resnick S. I., and Samorodnitsky G. (1999). Extreme value theory as a risk management tool. *North American Actuarial Journal 3* (2), pp 32-41.

14. Ermoliev Yu. M. and Wets R. J-B. (1988). Numerical Techniques for Stochastic Optimization. *Springer Series in Computational Mathematics 10*.

15. Hardy M.R., and Wirch J.L. (1999). A synthesis of risk measures for capital adequacy, *Insurance of Mathematics and Economics 25*, pp 337–347.

16. Higham D. J. and Higham N.J. (2005). Matlab Guide, Second Edition. Society of Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia.

17. Hürlimann W. (2003). Conditional Value-at-Risk Bounds for compound Poisson Risks and a Normal Approximation. *Journal of Applied Mathematics 3*, pp 141–153.

18. Jones B.L. and Zitikis R. (2007). *Insurance: Mathematics and Economics 41* (2), pp 279–297.

19. Kall P. and Wallace S.W. (1995). Stochastic Programming. John Wiley & Sons, England.

20. Kan Y. S. and Kibzun A.I. (1996). Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. John Wiley & Sons, New York.

21. Klüppelberg C. and Rootzén, H. (1999). A single number can't hedge against economic catastrophes, *Ambio 28* (6), pp 550-555.

22. Royal Society (1983). Risk Assessment: A study group report, *The Royal Society*, London.

23. Knight F. H. (1921), Risk, Uncertainty and Profit. Houghton Mifflin Company, Boston, New York.

24. Krokhmal P., Palmquist J. and Uryasev S. (2001). Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk and Constraints. Center for Applied Optimization, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Gainesville.

25. Landsman Z. and Sherris M. (2001). Risk measures and insurance premium principles. *Insurance of Mathematics and Economics 29*, pp 103–115.

26. Law A. (2007). Simulation Modeling and Analysis. Fourth edition. Mc Graw-Hill International, United States of America.

27. Mausser H. and Rosen D. (1999). Efficient risk/return frontiers for credit risk. *Algo Research Quarterly 2* (4), pp 35–47.

28. Markowitz H. (1952). Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, United States of America.

29. McGraw H. (2009). The VaR implementation handbook. Financial risk and applications in asset management, measurement and modeling. Gregoriou G.N. United States of America.

30. Morgan JP (1996). Risk Metrics Technical Manual. Fourth Edition, JP Morgan and Reuters, NewYork.

31. Pflug, G. (1996). Optimization of Stochastic Models: The Interface Between Simulation and Optimization, Kluwer Academic Publishers, London, United Kingdom.

32. Pflug G. (2000). Some remarks on the Value-at-Risk and the conditional Value-at-Risk. Uryasev, S., Editor, 2000. Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

33. Prekopa, A. (1995). Stochastic Programming. Akadémiai Kiadó Prielle Komélia, and Kluwer Academic Publishers, Budapest, Hungary.

34. Rockafellar R. T. and Uryasev S. (2000a). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance 26* (7), pp 1443-1471.

35. Rockafellar R. T. and Uryasev S. (2000b). Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk 2* (3), pp 21–41.

36. Tasche D., (2002). Expected shortfall and beyond, *Journal of Banking & Finance 26*, pp 1519-1533.

37. Venkataraman P. (2009). Applied Optimization with MATLAB programming. Second Edition, John Wiley & Sons, United States of America.

38. Winston W. (2004). Operations Research (applications and Algorithms). International Student edition, Duxbury.