



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ»

ΜΕΛΕΤΗ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ
ΜΕ ΜΟΝΤΕΛΟ BOUSSINESQ
ΣΕ ΔΥΟ ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ευστράτιος Ν. Φονιάς



«ΕΠΙΣΤΗΜΗ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ
ΠΟΡΩΝ»

Επιβλέπων: Καθηγητής Κ. Μέμος

Αθήνα, Μάρτιος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ»

ΜΕΛΕΤΗ ΘΡΑΥΣΗΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ
ΜΕ ΜΟΝΤΕΛΟ BOUSSINESQ
ΣΕ ΔΥΟ ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ευστράτιος Ν. Φονιάς



«ΕΠΙΣΤΗΜΗ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ
ΠΟΡΩΝ»

Επιβλέπων: Καθηγητής Κ. Μέμος

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αποσκοπεί στο να διερευνήσει τις δυνατότητες προσομοίωσης της κυματικής διάδοσης σε περιοχή που ορίζεται από δύο οριζόντιες διαστάσεις μέσω ενός υπολογιστικού μοντέλου Boussinesq για κυματισμούς με ελαφριά μη γραμμικότητα και βελτιωμένη διασπορά. Επιπρόσθετα, εξετάστηκε από το μοντέλο αυτό το φαινόμενο απώλειας ενέργειας λόγω προσομοίωσης του φαινομένου της κυματικής θραύσης. Τα προκύπτοντα αποτελέσματα του μοντέλου συγκρίνονται με διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις αλλά και με το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE 21 BW. Τα αποτελέσματα του υπό διερεύνηση μοντέλου κρίνονται σε υψηλό βαθμό ικανοποιητικά.

Ευχαριστίες

Θα ήταν παράλειψη, η μη αναφορά των προσωπικοτήτων που βοήθησαν στην ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.

Στους καταλυτικότερους παράγοντες κατατάσσεται ο επιβλέπων, Καθηγητής ΕΜΠ, Κωνσταντίνος Μέμος, επιστημονικός υπεύθυνος για το αποτέλεσμα που παρουσιάζεται, άνθρωπος που με τίμησε με την εμπιστοσύνη του για την ολοκλήρωση της παρούσας μελέτης. Μεταδίδοντας τις ολοκληρωμένες γνώσεις του πάνω στον τομέα της Θαλάσσιας Υδροδυναμικής, δίνοντας σταδιακά, αλλά άμεσα, το θάρρος να εισχωρήσω στο βαθύ αντικείμενο της μελέτης, ερχόμαστε στο τελικό αποτέλεσμα που σίγουρα αποσπά την προσωπική μου ικανοποίηση για την ποιότητα της προκύπτουσας μελέτης.

Επίσης, θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να αποδώσω προσωπικά στον Αναπληρωτή Καθηγητή ΑΠΘ, Θεοφάνη Καραμπά για τον αρχικό κώδικα του μοντέλου που μου εμπιστεύθηκε αλλά και για τις ζωτικής σημασίας συμβουλές του για την κατανόηση φαινομένων σχετιζόμενων με τις χρησιμοποιούμενες υπολογιστικές μεθόδους.

Τέλος, ευχαριστώ το συνάδελφο και προσωπικό μου φίλο υποψήφιο διδάκτορα ΕΜΠ, Μιχάλη Χονδρό για τις ζωτικής σημασίας παρατηρήσεις του που συνέβαλλαν καθοριστικά στην ολοκλήρωση της παρούσας μελέτης.

Περιεχόμενα Εργασίας

Πρόλογος	iii
Ευχαριστίες	v
Περιεχόμενα Εργασίας	vii
Ευρετήριο Όρων και Συμβόλων	xi
Περίληψη Μεταπτυχιακής Εργασίας.....	xiii
EXTENDED ABSTRACT.....	xv
1. Θεωρίες ανάλυσης και θραύσης τυχαίων κυματισμών	1
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Ανάλυση στην περιοχή χρόνου.....	3
1.3 Ανάλυση στην περιοχή συχνοτήτων	6
1.3.1 Συνήθεις τύποι φασμάτων.....	9
1.3.2 Κατευθυντικά φάσματα.....	12
1.4 Ανάλυση Fourier	14
1.5 Προσομοίωση κυματικών χρονοσειρών	16
1.6 Θραύση κυματισμών.....	18
1.6.1 Εισαγωγή	18
1.6.2 Κριτήρια θραύσης.....	22
2. Μοντέλα τύπου Boussinesq για τη διάδοση κυματισμών	25
2.1 Εισαγωγή στα μοντέλα Boussinesq.....	25
2.2 Εξέλιξη μοντέλων Boussinesq	27
2.3 Εξισώσεις Boussinesq κατά Peregrine (1967, 1972).....	30
2.4 Μοντέλα Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς.....	32
2.4.1 Εξισώσεις Boussinesq κατά Madsen et al. (1991).....	33
2.4.2 Εξισώσεις Boussinesq κατά Nwogu (1993)	38
2.4.3 Αριθμητικό σχήμα επίλυσης κατά Wei και Kirby (1995)	41
2.4.4 Εξισώσεις Boussinesq κατά Zou (1999)	42
2.5 Μοντέλα Boussinesq υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς.....	45
2.5.1 Πλήρως μη-γραμμικές εξισώσεις κατά Wei et al. (1995).....	45
2.5.2 Πλήρως μη-γραμμικές εξισώσεις κατά Gobbi, Kirby και Wei (2000)	46

2.5.3	Πλήρως μη-γραμμικές εξισώσεις των Madsen et al. (2002, 2003, 2006).....	49
2.5.4	Μέθοδος Fourier – Boussinesq για μη γραμμικούς κυματισμούς των Bingham και Agnon (2005)	52
2.5.5	Εξισώσεις υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς του Li (2008).....	55
3.	Προσθήκες στα μοντέλα κυματικής διάδοσης τύπου Boussinesq	57
3.1	Εισαγωγή.....	57
3.2	Θραύση κυματισμών στα μοντέλα Boussinesq.....	58
3.2.1	Μοντέλο θραύσης επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model)	58
3.2.2	Μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model).....	64
3.2.3	Μοντέλο θραύσης στροβιλότητας (vorticity wave-breaking model).....	68
3.3	Επίδραση τριβής πυθμένα.....	72
3.4	Οριακές συνθήκες.....	77
3.4.1	Όρια γένεσης κύματος εντός του υπολογιστικού πεδίου (Internal wave generation)	77
3.4.2	Όρια ακτινοβολίας ή απορροφητικά όρια (Transmitting or absorbing boundaries)	80
4.	Κατάσρωση τροποποιημένου μαθηματικού μοντέλου Boussinesq (Memos et al. 2005)..	85
4.1	Εισαγωγή.....	85
4.2	Εξισώσεις των Beji και Nadaoka (1996)	86
4.3	Παρουσίαση βασικών εξισώσεων τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq Memos et al. (2005)	91
4.3.1	Διακριτοποίηση των βασικών εξισώσεων του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq Memos et al. (2005).....	91
4.3.2	Αριθμητικό σχήμα επίλυσης πεπερασμένων διαφορών.....	93
4.4	Εισαγωγή της θραύσης στο τροποποιημένο μοντέλο Boussinesq	95
4.5	Μείξη εντός του καννάβου του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq.....	97
4.6	Οριακές συνθήκες στο τροποποιημένο μοντέλο Boussinesq	99
4.6.1	Συνάρτηση πηγής τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq (Memos et al. 2005)...	99
4.6.2	Απορροφητικά όρια (Wei και Kirby, 1995)	101
4.7	Δυνατότητες προσομοίωσης τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq Memos et al. (2005)	102
5.	Θεωρητικό υπόβαθρο υπολογιστικού μοντέλου MIKE 21 BW	103
5.1	Εισαγωγή.....	103
5.2	Γενική περιγραφή.....	103

5.3 Βασικές εξισώσεις για το 2DH κυματικό μοντέλο Boussinesq του προγράμματος MIKE 21 BW	105
5.4 Προσομοίωση θραύσης στο λογισμικό MIKE 21 BW	107
5.5 Αριθμητική εφαρμογή	108
5.5.1 Κυματικό μοντέλο Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις MIKE 21 BW	108
5.5.2 Κυματικό μοντέλο Boussinesq σε μία οριζόντια διάσταση MIKE 21 BW.....	109
6. Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq και MIKE 21 BW - Σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις	111
6.1 Εισαγωγή.....	111
6.2 Το πείραμα των Beji και Battjes (1994) – μονοχρωματικοί κυματισμοί.....	112
6.2.1 Πειραματική διάταξη πειράματος Beji και Battjes (1994).....	112
6.2.2 Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq.....	115
6.2.3 Εφαρμογή MIKE 21 BW.....	117
6.2.4 Διαγράμματα – σχολιασμός αποτελεσμάτων	123
6.3 Το πείραμα των Beji και Battjes (1992) – θραυόμενοι κυματισμοί.....	129
6.3.1 Πειραματική διάταξη πειράματος Beji και Battjes (1992).....	129
6.3.2 Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq.....	132
6.3.3 Εφαρμογή MIKE 21 BW.....	135
6.3.4 Διαγράμματα – σχολιασμός αποτελεσμάτων	137
6.4 Το πείραμα των Beji και Battjes (1994) – φασματικοί κυματισμοί.....	153
6.4.1 Πειραματική διάταξη πειράματος Beji και Battjes (1994).....	153
6.4.2 Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq.....	155
6.4.3 Εφαρμογή MIKE 21 BW.....	156
6.4.4 Διαγράμματα – σχολιασμός αποτελεσμάτων	157
7. Συμπεράσματα εργασίας - προτάσεις	165
7.1 Γενικά συμπεράσματα μεταπτυχιακής εργασίας.....	165
7.2 Συμπεράσματα για το τροποποιημένο μαθηματικό μοντέλο Boussinesq (Memos et al. 2005).....	166
7.3 Συμπεράσματα για το λογισμικό MIKE 21 BW	167
7.4 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα ως προς το τροποποιημένο μαθηματικό μοντέλο Boussinesq (Memos et al. 2005)	168
Βιβλιογραφικές αναφορές.....	169

Παράρτημα 1 (Κώδικες προσομοίωσης)

Ευρετήριο Όρων και Συμβόλων

1. Σύμβολα με ελληνικούς χαρακτήρες

α	κυματικό εύρος
β	κλίση πυθμένα
Δx	χωρικό βήμα στον άξονα x
Δy	χωρικό βήμα στον άξονα y
Δt	χρονικό βήμα
$\epsilon (=H/d)$	παράμετρος κλίμακας που εκφράζει τη μη γραμμικότητα
ζ	ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας μετρούμενη από τη στάθμη ηρεμίας
θ	γωνία διεύθυνσης
ν	συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας
ξ	παράμετρος καθορισμού τύπου θραύσης
ρ	πυκνότητα θαλάσσιου αποδέκτη
$\sigma (=d/L)$	παράμετρος κλίμακας που εκφράζει τη διασπορά συχνοτήτων
φ	γωνία φάσης
Φ	συνάρτηση δυναμικού ταχυτήτων
Φ_{κ}	μειωτική συνάρτηση φάσματος TMA
Ψ	ροϊκή συνάρτηση
$\omega (=2\pi/T)$	γωνιακή συχνότητα

2. Σύμβολα με λατινικούς χαρακτήρες

$c (=L/T)$	ταχύτητα διάδοσης κύματος ή φασική ταχύτητα
c_g	ταχύτητα ομάδας κυματισμών
d	θαλάσσιο βάθος μετρούμενο από τη στάθμη ηρεμίας
E	συνάρτηση κατευθυντικού φάσματος
$f (=1/T)$	συχνότητα
G	συνάρτηση διάχυσης ή γωνιακής κατανομής φάσματος
g	επιτάχυνση βαρύτητας

H	ύψος κύματος (κατακόρυφη απόσταση κορυφής και κοιλίας)
h (=d+ζ)	συνολικό βάθος
k (=2π/L)	αριθμός κύματος
L	μήκος κύματος
p	πίεση
P	πιθανότητα εμφάνισης γεγονότος
S	συνάρτηση μονοδιάστατου φάσματος
T	περίοδος κύματος
u	συνιστώσα ταχύτητας με διεύθυνση κατά x
U	συνιστώσα της μέσης ως προς το βάθος οριζόντιας ταχύτητας κατά x
v	συνιστώσα ταχύτητας με διεύθυνση κατά y
V	συνιστώσα της μέσης ως προς το βάθος οριζόντιας ταχύτητας κατά y

3. Δείκτες

α	συνιστώσα σε βάθος z_α
b	μέγεθος στη στάθμη του πυθμένα (bottom)
br	θραύση (breaking)
i	στοιχείο χωρικού καννάβου κατά τον άξονα x
j	στοιχείο χωρικού καννάβου κατά τον άξονα y
k	στοιχείο χρονικού καννάβου
mean	μέση τιμή μεγέθους
o	μέγεθος βαθέων υδάτων
rms	μέση τετραγωνική τιμή μεγέθους (route mean square)
s	χαρακτηριστική τιμή μεγέθους (significant) / μέγεθος στην επιφάνεια
t	χρονική παράγωγος
x	χωρική παράγωγος κατά τον άξονα x
y	χωρική παράγωγος κατά τον άξονα y

4. Συντημήσεις όρων

ΣΗΥ	στάθμη ηρεμούντος ύδατος
BW	Boussinesq Waves

Περίληψη Μεταπτυχιακής Εργασίας

Η μελέτη και η ποσοτικοποίηση των κυματικών διαδικασιών αποτελεί σημαντικό στοιχείο τόσο για το σχεδιασμό τεχνικών έργων, όσο και για την επαρκή κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα στην παράκτια ζώνη. Οι κυματικές δράσεις αποτελούν σημαντικό παράγοντα στο σχεδιασμό έργων πολιτικού μηχανικού (λιμενικά έργα, έργα προστασίας ακτών, έργα στο υπεράκτιο περιβάλλον κτλ.) αλλά και για τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται οι γεωμετρίες των ακτών. Τα κύματα που οδεύουν προς την ακτή υφίστανται πλήθος μεταβολών στη διατομή τους όπως ρήχωση και διάθλαση λόγω της μεταβολής της βαθυμετρίας, περίθλαση και ανάκλαση (μερική ή ολική) λόγω της παρεμβολής εμποδίων κατά τη διάδοσή τους, θραύση, κ.α. Για την μελέτη των παραπάνω φαινομένων έχουν αναπτυχθεί από τους ερευνητές μια σειρά θεωριών και προσομοιωμάτων ώστε να περιγράψουν πληρέστερα το φαινόμενο.

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία χρησιμοποιεί ένα μοντέλο κυματικής διάδοσης τύπου Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις με χαρακτηριστικά βελτιωμένης διασποράς και ήπιας μη γραμμικότητας σε δύο οριζόντιες διαστάσεις (2DH). Για την αριθμητική επίλυση επιστρατεύεται ένα σχήμα με ακρίβεια τέταρτης τάξης πρόβλεψης – διόρθωσης το οποίο απλοποιεί την αριθμητική διαδικασία. Επιπροσθέτως, εισάγεται τεχνητή διάχυση στο σχήμα προκειμένου να εξαλείψει τυχόν αστάθειες, ενώ μελετάται και το φαινόμενο της θραύσης των κυματισμών με το μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας. Το προτεινόμενο μοντέλο εξετάζεται έναντι κυματικής διάδοσης απλών και σύνθετων κυματισμών με χρήση του προαναφερθέντος σχήματος αριθμητικής επίλυσης και τα προκύπτοντα αποτελέσματα συγκρίνονται με πειραματικές μετρήσεις και με το εμπορικό λογισμικό MIKE 21 BW. Επιγραμματικά αναφέρουμε τα κύρια σημεία των κεφαλαίων στα οποία διαρθρώνεται η εργασία:

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εκτενής περιγραφή των κυματισμών που απαντώνται στη φύση καθώς επίσης και των μεθόδων ανάλυσης από πλευράς μηχανικού, ενώ γίνεται και προσέγγιση του φαινομένου της θραύσης των κυματισμών και κατηγοριοποίηση μέσω κριτηρίων, των κυρίων τύπων θραύσης που συναντούμε σε παράκτιες περιοχές.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, γίνεται προσπάθεια ιστορικής αναδρομής στα μοντέλα κυματικής διάδοσης τύπου Boussinesq από τις εξισώσεις Peregrine (1967, 1972), στα μεταγενέστερα μοντέλα βελτιωμένης διασποράς και μη γραμμικότητας (Madsen et al, 1991, Nwogu, 1993, Zou, 1999), έως τις πρόσφατες εργασίες οι οποίες δίνουν μοντέλα πλήρους διασποράς και μη γραμμικότητας με εφαρμοσιμότητα για κάθε σχετικό βάθος ύδατος (Bingham και Agnon, 2005, Li, 2008 κ.α.). Παράλληλα, το τρίτο κεφάλαιο δίνει μία σειρά από προσθήκες στα μοντέλα τύπου Boussinesq ώστε να μπορεί ο ερευνητής να προσεγγίσει φαινόμενα που παίρνουν μέρος κατά την κυματική διάδοση, όπως η θραύση των κυματισμών, η τριβή πυθμένα και οι οριακές συνθήκες στο πεδίο μελέτης. Δίνονται πληροφορίες και κατευθύνσεις για την ορθή θεώρησή τους και την πλήρη κατανόησή τους.

Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί την είσοδο στο κύριο τμήμα της εργασίας, καθώς παρουσιάζεται το προτεινόμενο μοντέλο κυματικής διάδοσης, με βελτιωμένα χαρακτηριστικά

διασποράς και ήπιας μη γραμμικότητας σε δύο οριζόντιες διαστάσεις (2DH). Δίνονται οι αρχικές εξισώσεις (Beji και Nadaoka, 1996) από τις οποίες παράγονται οι εξισώσεις του αριθμητικού κώδικα, το σχήμα επίλυσης τύπου πρόβλεψης-διόρθωσης που χρησιμοποιείται (Wei και Kirby, 1996), αλλά και τα φαινόμενα που πρέπει να προσομοιωθούν δεδομένων των πειραμάτων που θα χρησιμοποιηθούν για την επιβεβαίωση του εν λόγω μοντέλου (θραύση με μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας, μείξη εντός του κανάβου προσομοίωσης, οριακές συνθήκες).

Το πέμπτο κεφάλαιο αποτελεί μία εκτενή περιγραφή του εμπορικού λογισμικού MIKE 21 BW το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την ισχυροποίηση των συμπερασμάτων και των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν από το προτεινόμενο μοντέλο σε σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις. Αναφερόμαστε εκτενώς στις εξισώσεις που χρησιμοποιούνται από το πρόγραμμα και στις μεθόδους προσομοίωσης της θραύσης για την μελέτη δισδιάστατης κυματικής διάδοσης.

Στο έκτο κεφάλαιο συγκρίνονται τα αποτελέσματα μεταβολής ελεύθερης επιφάνειας για τα μονοδιάστατα πειράματα των Beji και Battjes (1992, 1994) με τη δισδιάστατη (μονοδιάστατη προσέγγιση με τη θεώρηση δεύτερης οριζόντιας διάστασης επαρκούς μήκους ώστε να μην επηρεάζονται οι θέσεις ελέγχου στο μέσον της υπολογιστικής περιοχής) προσέγγιση του προτεινόμενου μοντέλου αλλά και του λογισμικού MIKE 21 BW. Ελέγχονται απλοί κυματισμοί θραυόμενοι και μη, ως προς τη διάδοσή τους πάνω από διατομή ύφαλου τραπεζίου σχετικά απότομης κλίσης. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν κρίνονται για το προτεινόμενο μοντέλο πολύ ικανοποιητικά, ενώ συμπεράσματα αναφέρονται εκτενώς στο τελευταίο κεφάλαιο (έβδομο) της εργασίας.

Τέλος, στο παράρτημα παρατίθενται οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας συμπεριλαμβανομένου και του προτεινόμενου μοντέλου.

EXTENDED ABSTRACT

1. INTRODUCTION

The study and quantification of wave processes in the offshore region as well as in shallower waters and the surf zone is considered as the most fundamental element not only for the design of technical works, but also for the understanding of the phenomena that occur within the coastal zone. Waves that propagate towards the shore are subject to many deformations attributed to shoaling and refraction, because of bathymetric changes, diffraction and reflection (full or partial), due to interaction with obstacles interpolated between the wave form and the shore, etc. Scientists have developed a large array of theories and models to describe the wave transformation, among which, Boussinesq-type wave models have a prominent position, being accurate in simulating wave propagation especially in shallow water regions. The most recent models are capable of precise simulation of highly nonlinear and fully dispersive wave characteristics. However, extra care should be taken when dealing with those models because they usually do not account wave breaking and the resulting energy dissipation. Wave breaking is the most significant process in the surf zone and a complete model must be able to admeasure the contribution of this phenomenon.

Many attempts have been made in order to incorporate wave breaking formulations, the earliest successful of which is considered the surface roller model proposed as a concept by Svendsen (1984) and implemented by the study of Schäffer et al. (1993). This approach incorporated an extra term in momentum conservation equation linked to the surface roller thickness, which was related to the front slope of the wave form. Madsen et al. (1997a) expanded the surface-roller approach in a two-horizontal dimension concept and dealt with irregular wave conditions (1997b).

A more recent approach was proposed by Svendsen and Yu (1996) and introduces an extra term not only in momentum conservation equation but also in the mass conservation equation. In the study which has certain similarities with surface roller model, the flow was not considered irrotational (as before). Therefore, a complex form of flow was considered, dividing the water column to an irrotational part placed underneath a rotational part of the flow connected with the surface roller and producing turbulence. This theory, introduced a vorticity parameter that must be calculated. Veeramony and Svendsen (2000) separated the two flow forms, by introducing two different horizontal velocities, one for the irrotational part and one for the rotational.

A quite different approached was introduced by Zelt (1991) who proposed an eddy viscosity formulation to describe wave breaking by adding a term to the momentum conservation equation. The eddy viscosity wave breaking model was furtherly developed by Kennedy et al. (1999) combined in a Boussinesq model in one horizontal dimension by proposing a more realistic form of the beginning and cessation of breaking. This resulted in an efficient simulation of regular wave propagation and decay over a sloping bed. The model was expanded by Chen et al. (2000) in two horizontal dimensions.

The present work, concentrates on the use of a modified Boussinesq-type model, initially introduced by Memos et al. (2005) close to the works of Beji and Nadaoka (1996) and Li and

Zhan (2001). This model can simulate wave propagation with improved dispersion and weakly nonlinear characteristics by means of a fourth-order accurate predictor-corrector numerical scheme which makes feasible to discretise the involved equations. The first chapters present the wave model and the extensions introduced for the description of the wave breaking formulation. In the last chapters, the model is calibrated and verified against experimental measurements and results of the application of the computation program MIKE 21 BW. Those tests involved regular and irregular wave propagation over a reef trapezoid bar.

2. GOVERNING EQUATIONS

The proposed Boussinesq-type model is derived by the equations introduced by Beji and Nadaoka (1996) for slowly varying depth. The depth integrated form of mass conservation equation is given by:

$$\zeta_t + \nabla[(d + \zeta)\mathbf{u}] = 0 \quad (1)$$

where ζ is the surface elevation, d the water depth, $\mathbf{u} = (u, v)$ is the depth averaged velocity vector and t is the time. The continuity equation is valid in any water depth without restrictions on nonlinearity.

The momentum equation for the two horizontal dimensions (2DH) is written:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + g\nabla\zeta = (1 + \beta)\frac{d}{2}\nabla[\nabla(d\mathbf{u}_t)] + \beta\frac{gd}{2}\nabla[\nabla(d\nabla\zeta)] - (1 + \beta)\frac{d^2}{6}\nabla(\nabla\mathbf{u}_t) - \beta\frac{gd^2}{6}\nabla(\nabla^2\zeta) \quad (2)$$

where g is the gravitational acceleration and β is a parameter. The set of the equations are valid for slowly varying bathymetries and can be valid till the boundary of deep waters if $\beta = 1/5$ ($d/L_o < 0.50$, L_o the wavelength in deep waters).

Expressing the momentum equations using the two horizontal dimensions x and y we obtain a form similar to the one given by Li and Zhan (2001):

$$\begin{aligned} u_t + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ = (1 + \beta)\left(\frac{d^2}{3}u_{xxt} + dd_xu_{xt}\right) + (1 + \beta)\frac{1}{3}d^2v_{xyt} + (1 + \beta)\frac{1}{2}(dd_xv_{yt} + dd_yv_{xt}) \\ + \beta gd \cdot \left(d_x \cdot \zeta_{xx} + \frac{1}{2}d_y \cdot \zeta_{xy} + \frac{1}{2}d_x \cdot \zeta_{yy}\right) + \beta\frac{gd^2}{3} \cdot (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} v_t + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ = (1 + \beta)\left(\frac{d^2}{3}v_{yyt} + dd_yv_{yt}\right) + (1 + \beta)\frac{1}{3}d^2u_{xyt} + (1 + \beta)\frac{1}{2}(dd_xu_{yt} + dd_yu_{xt}) \\ + \beta gd \cdot \left(d_y \cdot \zeta_{yy} + \frac{1}{2}d_x \cdot \zeta_{xy} + \frac{1}{2}d_y \cdot \zeta_{xx}\right) + \beta\frac{gd^2}{3} \cdot (\zeta_{yyy} + \zeta_{xxy}) \end{aligned} \quad (3b)$$

3. NUMERICAL MODEL OF THE BASE SOLVER

Numerical scheme

The equations (1), (3a) and (3b) are to be discretised in order to obtain the numerical model, which is the widely known predictor-corrector scheme or more commonly known as the third-order explicit Adams-Bashforth scheme (Press et al. 1989; Wei and Kirby 1995).

Firstly, the values of ζ , u and v at time level $n + 1$ are predicted from their corresponding values at time levels n , $n - 1$ and $n - 2$:

$$\zeta_{ij}^{n+1} = \zeta_{ij}^n + \frac{dt}{12} \cdot (23 \cdot E_{ij}^n - 16 \cdot E_{ij}^{n-1} + 5 \cdot E_{ij}^{n-2}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} - (1 + \beta)d_{ij}d_{xij} \left(u_{xij}^n - u_{xij}^{n-1} \right) - (1 + \beta) \frac{d_{ij}^2}{3} \left(u_{xxij}^{n+1} - u_{xxij}^n \right) \\ = u_{ij}^n + \frac{dt}{12} \cdot (23 \cdot F_{ij}^n - 16 \cdot F_{ij}^{n-1} + 5 \cdot F_{ij}^{n-2}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v_{ij}^{n+1} - (1 + \beta)d_{ij}d_{yij} \left(v_{yij}^n - v_{yij}^{n-1} \right) - (1 + \beta) \frac{d_{ij}^2}{3} \left(v_{yyij}^{n+1} - v_{yyij}^n \right) \\ = v_{ij}^n + \frac{dt}{12} \cdot (23 \cdot G_{ij}^n - 16 \cdot G_{ij}^{n-1} + 5 \cdot G_{ij}^{n-2}) \end{aligned} \quad (6)$$

Where:

$$E(\zeta, u, v) = [(d + \zeta)u]_x + [(d + \zeta)u]_y \quad (7)$$

$$F' = F + F_1 + Z3x \quad (8)$$

$$F = uu_x + vu_x + g\zeta_x \quad (9)$$

$$F_1 = (1 + \beta) \frac{d^2}{3} v_{xyt} + \frac{1}{2}(1 + \beta) \left(dd_x \frac{\partial v_t}{\partial y} + dd_y \frac{\partial v_t}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$Z3x = \beta \frac{gd^2}{3} (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) + \beta gd \left(d_x \zeta_{xx} + \frac{1}{2} d_y \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_x \zeta_{yy} \right) \quad (11)$$

$$G' = G + G_1 + Z3y \quad (12)$$

$$G = vv_x + uv_x + g\zeta_y \quad (13)$$

$$G_1 = (1 + \beta) \frac{d^2}{3} u_{xyt} + \frac{1}{2}(1 + \beta) \left(dd_y \frac{\partial u_t}{\partial x} + dd_x \frac{\partial u_t}{\partial y} \right) \quad (14)$$

$$Z3y = \beta \frac{gd^2}{3} (\zeta_{yyy} + \zeta_{xxy}) + \beta gd \left(d_y \zeta_{yy} + \frac{1}{2} d_x \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_y \zeta_{xx} \right) \quad (15)$$

The expression above is a general expression of a tridiagonal system that is linear in the unknowns at level $n + 1$ (or $k + 1$).

The corrector scheme is the fourth-order Adams-Moulton method given by the expression:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n + \frac{dt}{24} \cdot (9 \cdot E_{i,j}^{n+1} + 19 \cdot E_{i,j}^n - 5 \cdot E_{i,j}^{n-1} + E_{i,j}^{n-2}) \quad (17)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{dt}{24} \cdot (9 \cdot F_{i,j}^{n+1} + 19 \cdot F_{i,j}^n - 5 \cdot F_{i,j}^{n-1} + F_{i,j}^{n-2}) \quad (18)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \frac{dt}{24} \cdot (9 \cdot G_{i,j}^{n+1} + 19 \cdot G_{i,j}^n - 5 \cdot G_{i,j}^{n-1} + G_{i,j}^{n-2}) \quad (19)$$

The $n + 1$ values are corrected through an iterative procedure where the velocities are updated from known values obtained in the k th iteration by the following expression:

$$\begin{aligned} u_t^{k+1} - (1 + \beta) \left(\frac{d^2}{3} \frac{\partial^2 u_t^{k+1}}{\partial x^2} + dd_x \frac{\partial u_t^{k+1}}{\partial x} \right) &= -u^k \frac{\partial u^k}{\partial x} - v^k \frac{\partial u^k}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta^k}{\partial x} \\ &= (1 + \beta) \left[\frac{1}{3} d^2 \frac{\partial^2 v_t^k}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(dd_x \frac{\partial v_t^k}{\partial y} + dd_y \frac{\partial v_t^k}{\partial x} \right) \right] + \beta g d \\ &\quad \cdot \left(d_x \cdot \zeta_{xx}^k + \frac{1}{2} d_y \cdot \zeta_{xy}^k + \frac{1}{2} d_x \cdot \zeta_{yy}^k \right) + \beta \frac{gd^2}{3} \cdot (\zeta_{xxx}^k + \zeta_{xyy}^k) \end{aligned} \quad (20)$$

for u or v (similarly) velocity components.

The corrector step is iterated until the error between two successive results reaches a predefined limit for the variables ζ , u and v which is defined as:

$$\Delta f = \frac{\sum_{i=1,j=1}^{i=M,j=N} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^*|}{\sum_{i=1,j=1}^{i=M,j=N} |f_{i,j}^{n+1}|} \quad (21)$$

where f is one of the variables mentioned before and Δf is the error between two successive results which do not exceed 1‰.

Boundary conditions

Absorbing boundaries

In the boundaries of the model's computational field we apply sponge layers for the outgoing waves similar to those of Wei and Kirby (1995) which occur by dividing the variables ζ , u and v with the parameter rm which consists the absorption factor given (for the two horizontal dimensions) by the expression:

$$rm_x = 1 + dks(i, j) = 1 + 0.25 \cdot f(x) \quad \text{or} \quad rm_y = 1 + 0.25 \cdot f(y) \quad (22)$$

where we have for x -axis (and similarly for y -axis):

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x - x_s}{x_m - x_s}\right)^2 - 1}{\exp(1) - 1} \quad (23)$$

and x_s is the x coordinate of the beginning of the sponge layer (for x direction the computational model ranges from $x = 0$ to $x = x_m$ and the absorbing boundary from $x = x_s$ to

$x = x_m$). It would be more efficient to create absorbing boundaries with width two or three times the wavelength created.

Internal Wave Generation

In the present study, the source function used is proposed by Memos et al. (2005) by introducing this wave generator in a parallel position to y axis, and as a result the function yields:

$$f(x, y, t) = g(x) \cdot s(y, t) \quad (24)$$

where $g(x)$ is a Gaussian-shape equation and $s(y, t)$ is an equation that gives the timeseries of the values entering the computational field. The equations can be expressed through the following form:

$$g(x) = \exp[-b(x - x_{sf})^2] \quad (25)$$

$$s(y, t) = D \sin(\lambda y - \omega t) \quad (26)$$

where b is a shape parameter for the source function, x_{sf} is the central x-position of the function for a line source parallel to y axis inside the field, D is the amplitude of the source function and $\lambda = k \sin(\theta)$ is the wavenumber in y axis and k the wave number in linear theory.

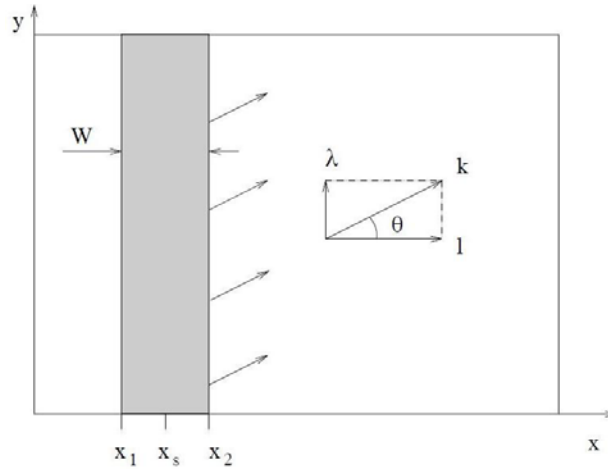


Fig.1: Definition of the source function inside the computational field. [7]

For introducing a regular wave in the computational field, the amplitude D is given by the expression:

$$D = \frac{2\alpha_0(1 + B_1(kd)^2)(\omega^2 + B_1gk^4d^3)\cos\theta}{\omega l_1 k \left[1 + \left(B_1 + \frac{1}{3} \right) (kd)^2 \right]} \quad (27)$$

where $B_1 = 1/15$ and parameter l_1 is defined by:

$$l_1 = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \cdot \exp(-l^2/4b) \quad (28)$$

In the above equation $l = k\cos(\theta)$ is the wave number in x direction, and the parameter b the greater value it obtains, the less wide the source function becomes. The function's width W is equal to the absolute difference of the coordinates x_1 and x_2 where the wave heights are equal to $\exp(-5) = 0.0067$ times the maximum amplitude D. As a result, values x_1 and x_2 must satisfy the equation:

$$b(x - x_{sf})^2 = 5 \quad (29)$$

from which the source function width is equal to:

$$W = |x_2 - x_1| = 2 \sqrt{\frac{5}{b}} \quad (30)$$

Given that L is the wavelength we obtain acceptable results when applying the source function when the width is almost equal to half wavelength or:

$$W = \delta \frac{L}{2} \quad (31)$$

Parameter δ is of $O(1)$ and a value of $\delta = 0.3$ gives satisfactory results. By combining the last two equations we have:

$$b = \frac{80}{\delta^2 L^2} \quad (32)$$

It has to be noted that in irregular waves b is defined by peak frequency and it is used for all the wave train components.

4. WAVE BREAKING FORMULATION

The main target of the present work is to account the energy dissipation because of wave breaking so that the present wave model can be applied inside the surf zone. This venture is feasible by adding an eddy viscosity formulation proposed by Chen et al. (2000), which adds an extra term in momentum equations (in two horizontal dimensions) given by the form:

$$\mathbf{R}_{bx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[\mathbf{v}((d + \zeta)u_\alpha)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}((d + \zeta)u_\alpha)_y + \mathbf{v}((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_y \right\} \quad (33a)$$

$$\mathbf{R}_{by} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[\mathbf{v}((d + \zeta)v_\alpha)_y \right]_y + \frac{1}{2} \left[\mathbf{v}((d + \zeta)u_\alpha)_y + \mathbf{v}((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_x \right\} \quad (34b)$$

where \mathbf{v} is the eddy viscosity localized in the front face of the wave expressed as:

$$\mathbf{v} = B \cdot \delta_b^2 \cdot (d + \zeta) \cdot \zeta_t \quad (35)$$

In which, δ_b is a mixing length coefficient set equal to a dimensionless value of 1.2 and quantity B varies from 0 to 1 and controls the occurrence of energy dissipation defined as:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 1, & \zeta_t \geq 2\zeta_t^* \\ \frac{\zeta_t}{\zeta_t^*} - 1, & \zeta_t^* < \zeta_t \leq 2\zeta_t^* \\ 0, & \zeta_t \leq \zeta_t^* \end{cases} \quad (36)$$

In the above expression, the parameter ζ_t^* determines the initiation and cessation of breaking defined by:

$$\zeta_t^* = \begin{cases} \zeta_t^{(F)}, & t \geq T^* \\ \zeta_t^{(l)} + \frac{t - t_0}{T^*} \cdot (\zeta_t^{(F)} - \zeta_t^{(l)}), & 0 \leq t - t_0 < T^* \end{cases} \quad (37)$$

In which $T^* = 5\sqrt{d/g}$ is the transition time, t_0 is the time that braking initiates ($t - t_0$ the “age” of breaking phenomenon), $\zeta_t^{(l)}$ is a parameter equal to $0.65\sqrt{gd}$ for monotone sloping beaches and $0.35\sqrt{gd}$ for bar beaches and $\zeta_t^{(F)}$ is equal to $0.15\sqrt{gd}$. In every breaking event the eddy viscosity is filtered for stability purpose using a three point filter before inserting the computed values in the expressions in \mathbf{R}_b .

When studying the phenomenon in two horizontal dimensions (2DH), the wave direction must be defined in order to determine the “age” of the breaking event. The direction determined by an angle θ , is given by the expression

$$\theta = \arctan\left(\frac{\zeta_y}{\zeta_x}\right) \quad (38)$$

Additional formulations

Subgrid turbulent mixing

In order to account the effects of unresolved small-scale motions and more specifically the turbulent processes, a Smagorinsky-type subgrid model is used (Chen et al., 2000; Kirby et al., 1998), which adds one more term \mathbf{F}_{bs} in momentum equations that has the following components:

$$\mathbf{F}_{bsx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_y + v_s((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_y \right\} \quad (39a)$$

$$\mathbf{F}_{bsy} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v_s((d + \zeta)v_\alpha)_y \right]_y + \frac{1}{2} \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_y + v_s((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_x \right\} \quad (39b)$$

In which v_s is the eddy viscosity coefficient because of turbulence inside the subgrid estimated from (Kirby et al., 1998):

$$v_s = c_m \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left[(U_x)^2 + (V_y)^2 + \frac{1}{2} \cdot (U_y + V_x)^2 \right]^{1/2} \quad (40)$$

In this expression U and V are the time-averaged wave field velocities, Δx and Δy the finite dimensions of the subgrid in x and y directions, respectively and c_m is a mixing parameter equal to a value of 0.2.

5. RESULTING MODEL CAPABILITIES

The resulting model can describe wave propagation with accuracy in the surf zone and account effectively the wave breaking due to bathymetric changes that violently affect the wave form. In the following figure it is shown a snapshot of regular wave propagation (wave height 4.5 cm and period 1.0 sec) over a hemispherical obstacle.

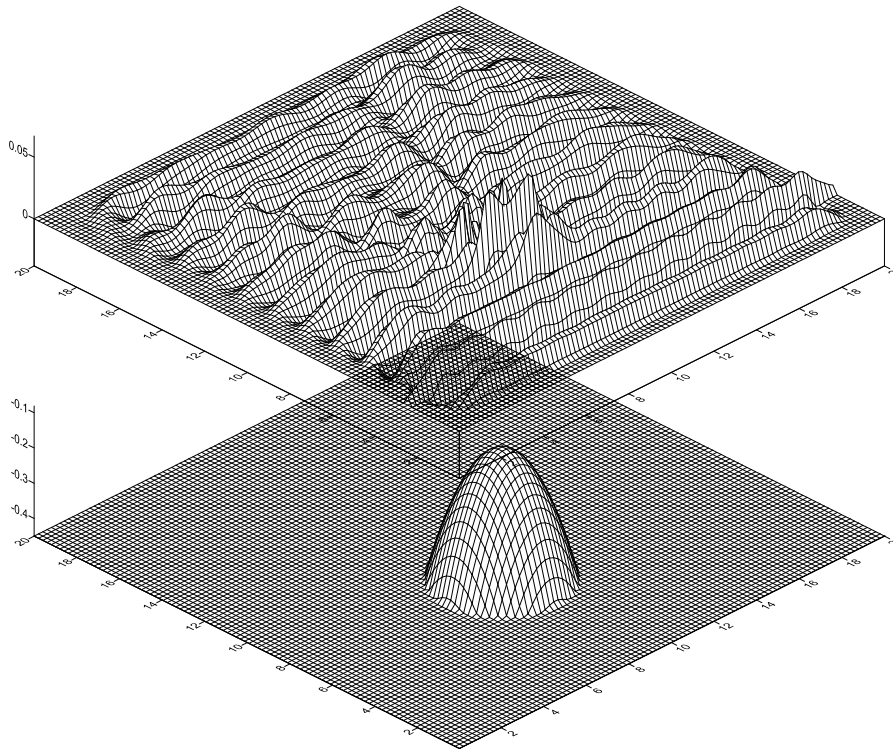


Fig.2: Snapshot of wave propagation over a hemispherical obstacle with modified Boussinesq model of Memos et al. (2005)

6. MODEL VERIFICATION

The resulting set of Boussinesq equations is going to be verified through the experimental 1DH results of Beji and Battjes (1993). Despite the fact that the experiments were performed in a wave flume and thus do not give information about wave propagation in the second horizontal dimension, the numerical field is formed as pseudo-two-dimensional by giving a second wide horizontal dimension. The numerical results which are going to be compared with the experimental are extracted from the middle of the second (across the wave propagation) horizontal dimension. The same computational technique is also applied by MIKE 21 software.

Computational results for simulation of wave propagation and breaking of monochromatic and random waves will be illustrated over a submerged trapezoidal bar. In order to distinguish the effects of non breaking wave propagation over a submerged obstacle due to nonlinear wave-wave interactions, from the effects of wave breaking, the proposed model is

firstly applied for nonbreaking monochromatic waves of wave height 2.0cm and wave frequency 0.5Hz.

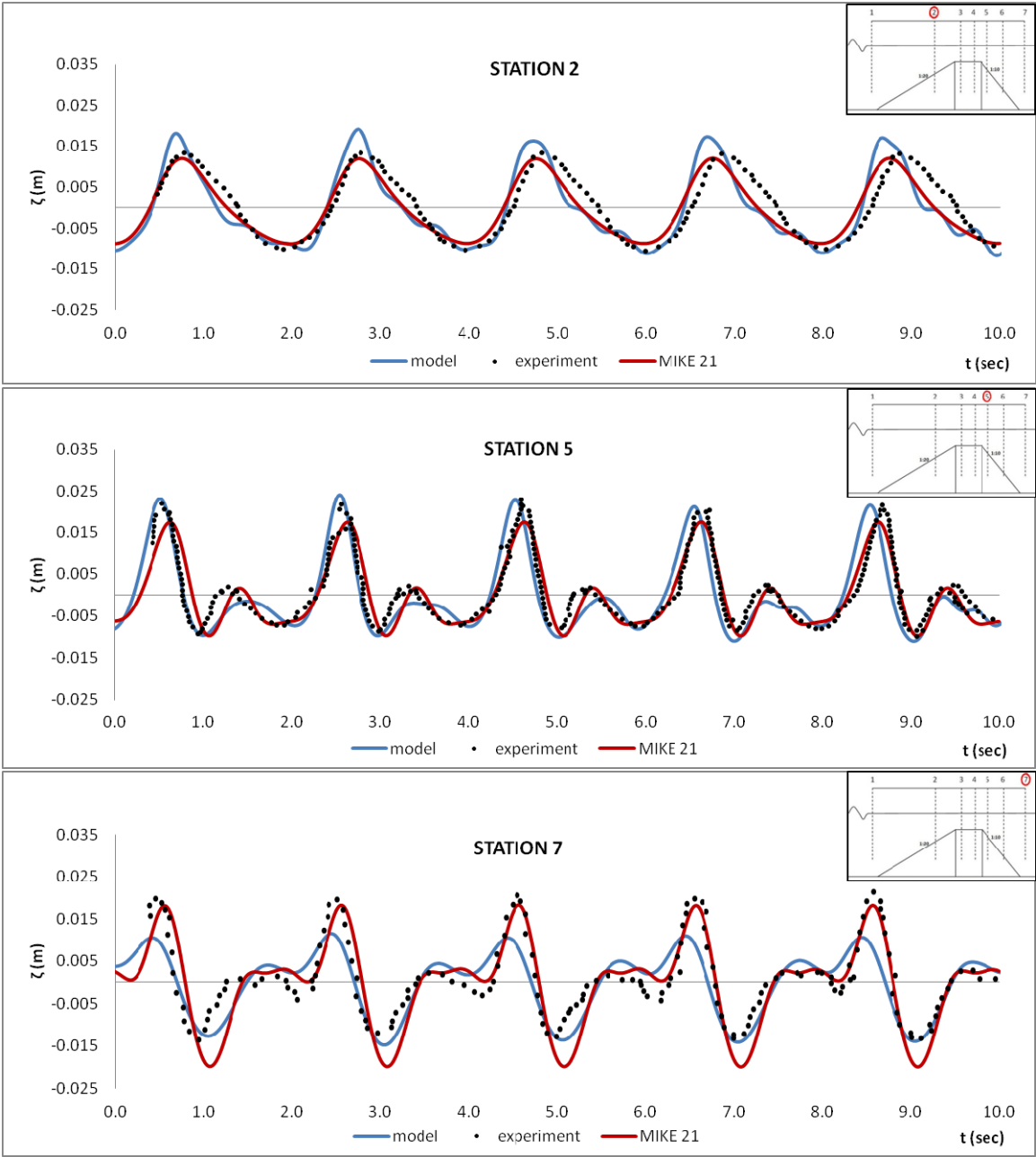


Fig.3: Computed timeseries of free surface displacement in sensors spotted on the submerged breakwater for nonbreaking regular waves ($H=2.0$ cm and $T=2.0$ sec) – comparison with experimental measurements (dots: experimental data, blue line: model results, red line: MIKE 21 results)

The resulting timeseries in stations 5 (end of bar crest) and 7 (down drift of the mound) are depicted in Fig.3. The model results show satisfactory convergence to experimental measurements until the beginning of the down slope. In the down slope stations the ability of the computational models is not at the same level due to the weakly nonlinear characteristics of the equations involved.

Furthermore, the main target of this study was to evaluate the ability of the proposed modified model by Memos et al. (2005) to account wave breaking. Several tests for monochromatic short and long waves, spilling and plunging breaking wave forms are tested. In the next figures, results for the experimental setup of Beji and Battjes (1992) are shown, involving short spilling breaking regular waves, of wave height 5.9cm and wave frequency 1.0Hz (Fig.4) and long plunging breaking regular waves, of wave height 5.4cm and wave frequency 0.4Hz (Fig.5). The proposed model and MIKE 21 use the default breaking parameters for the eddy viscosity model and surface roller model, respectively.

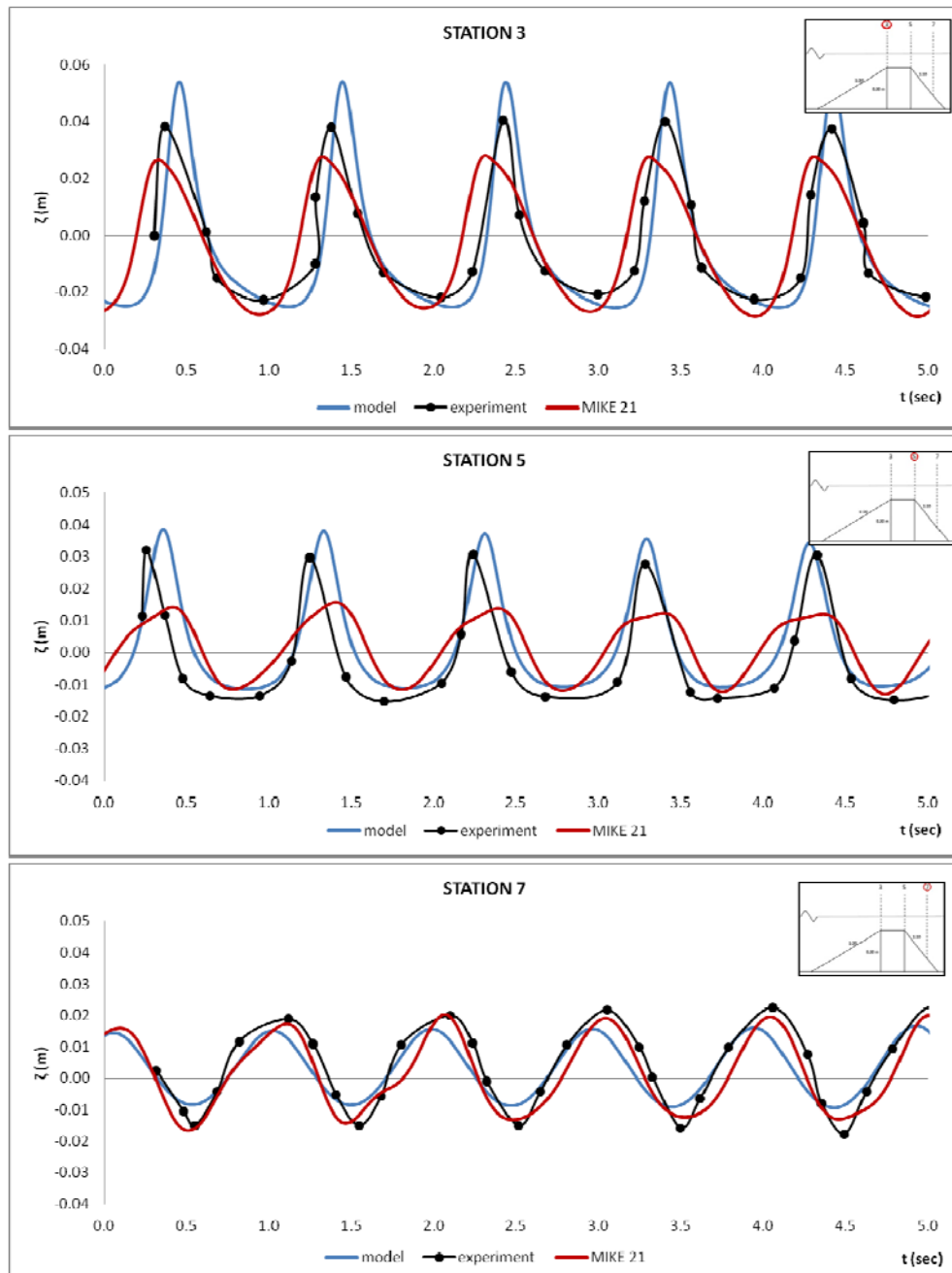


Fig 4: Computed timeseries of the free surface displacement in sensors spotted on the submerged breakwater for short spilling breaking regular waves ($H=5.9$ cm and $T=1.0$ sec) – comparison with experimental measures (dots: experimental measures, blue line: model results, red line: MIKE 21 results)

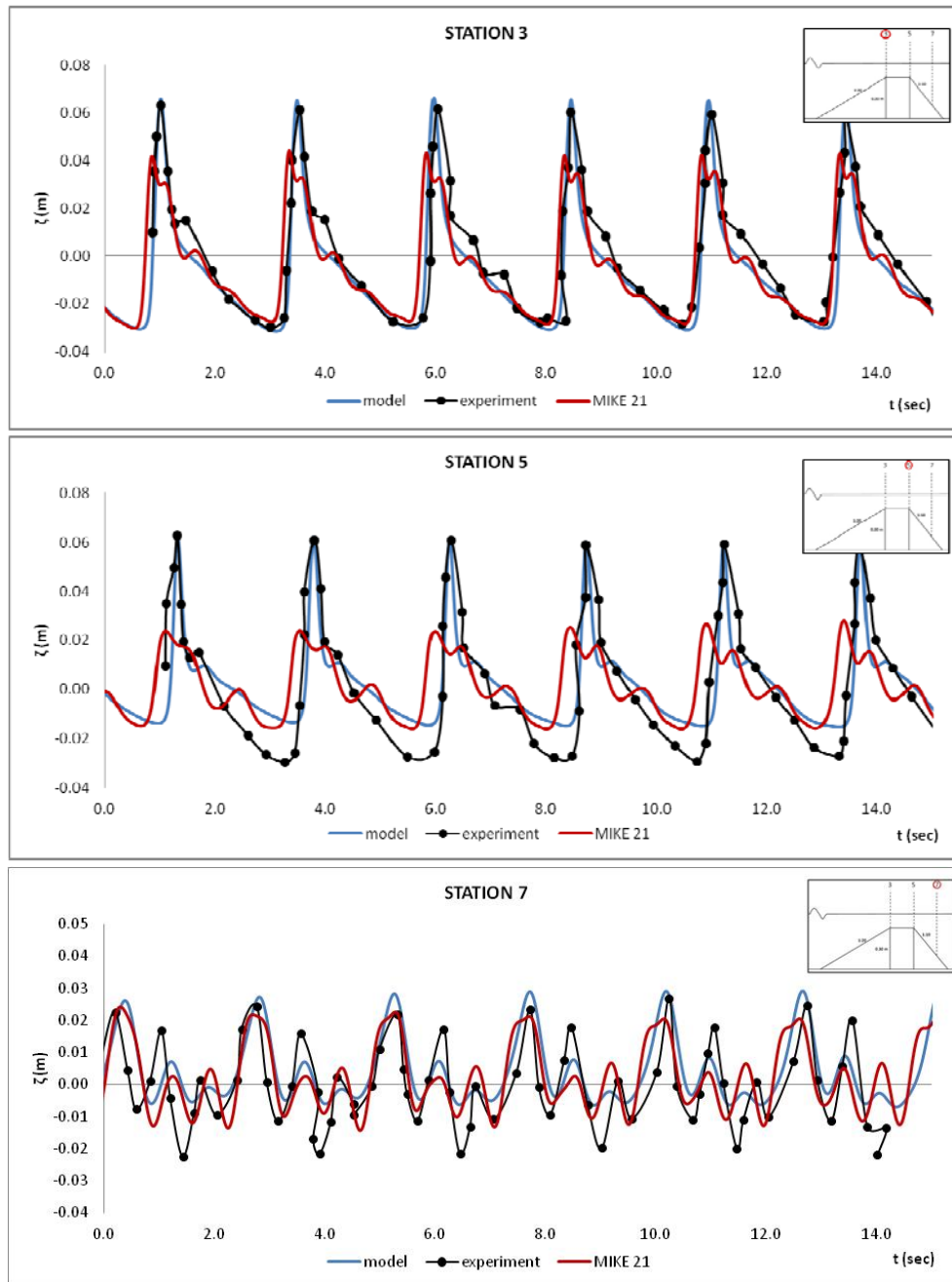


Fig 5: Computed timeseries of the free surface displacement in sensors spotted on the submerged breakwater for long plunging breaking regular waves ($H=5.4$ cm and $T=2.5$ sec) – comparison with experimental measurements (dots: experimental measures, blue line: model results, red line: MIKE 21 results)

In the results presented above, it occurs that the model can predict more effectively wave breaking using the default breaking parameters ($\zeta_t^{(1)}=0.35(gd)^{1/2}$ for bar beaches and $\zeta_t^{(F)}=0.15(gd)^{1/2}$), whereas MIKE 21 for default parameters determined by Schäffer et al. (1993) (breaking angles $(\varphi_B, \varphi_o)=(14^\circ, 7^\circ)$) the wave form is decreased rapidly. Thus, the proposed model can generally describe more accurately the experimental timeseries.

The modified Boussinesq model was additionally verified for random nonbreaking waves incorporating a JONSWAP spectrum with significant wave height of 1.8cm and peak

frequency 0.5Hz. The same experimental setup was used, where the sensors were placed in the same manner as in monochromatic nonbreaking waves. The measured timeseries of surface elevation at station 2 was used as input to the model. In the images below, the surface elevation timeseries are illustrated in the sensors 4 (downstream of structure's freeboard) and 6 (midway of structure's downslope), along with the resulting spectra from the records.

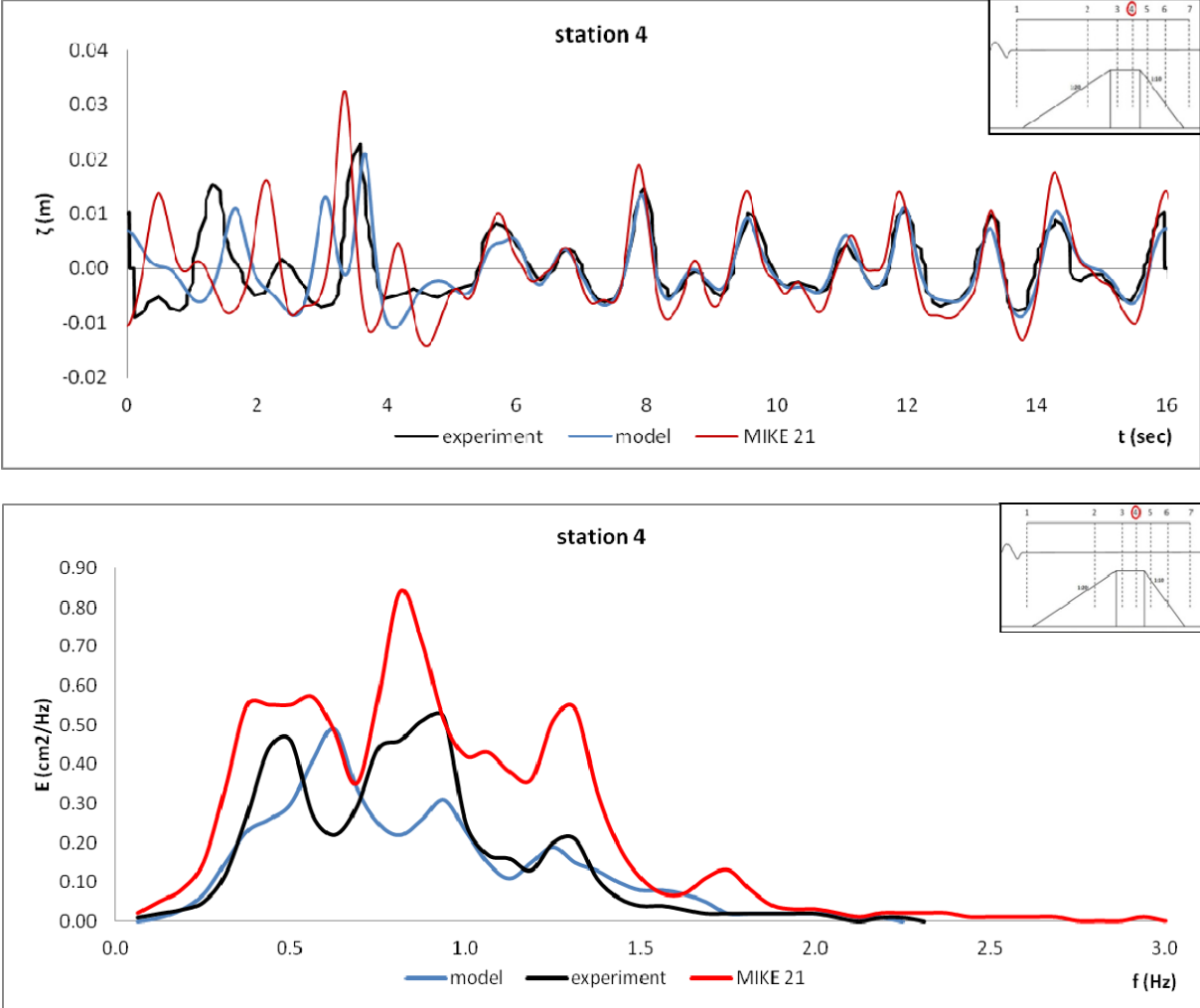


Fig 6: Computed timeseries (top) and spectra (bottom) of the free surface displacement in sensor 4 (downstream of breakwater's freeboard) for irregular waves ($H_s=1.8$ cm and $T_p=2.0$ sec) – comparison with experimental measurements (black line: experimental measurements, blue line: model results, red line: MIKE 21 results)

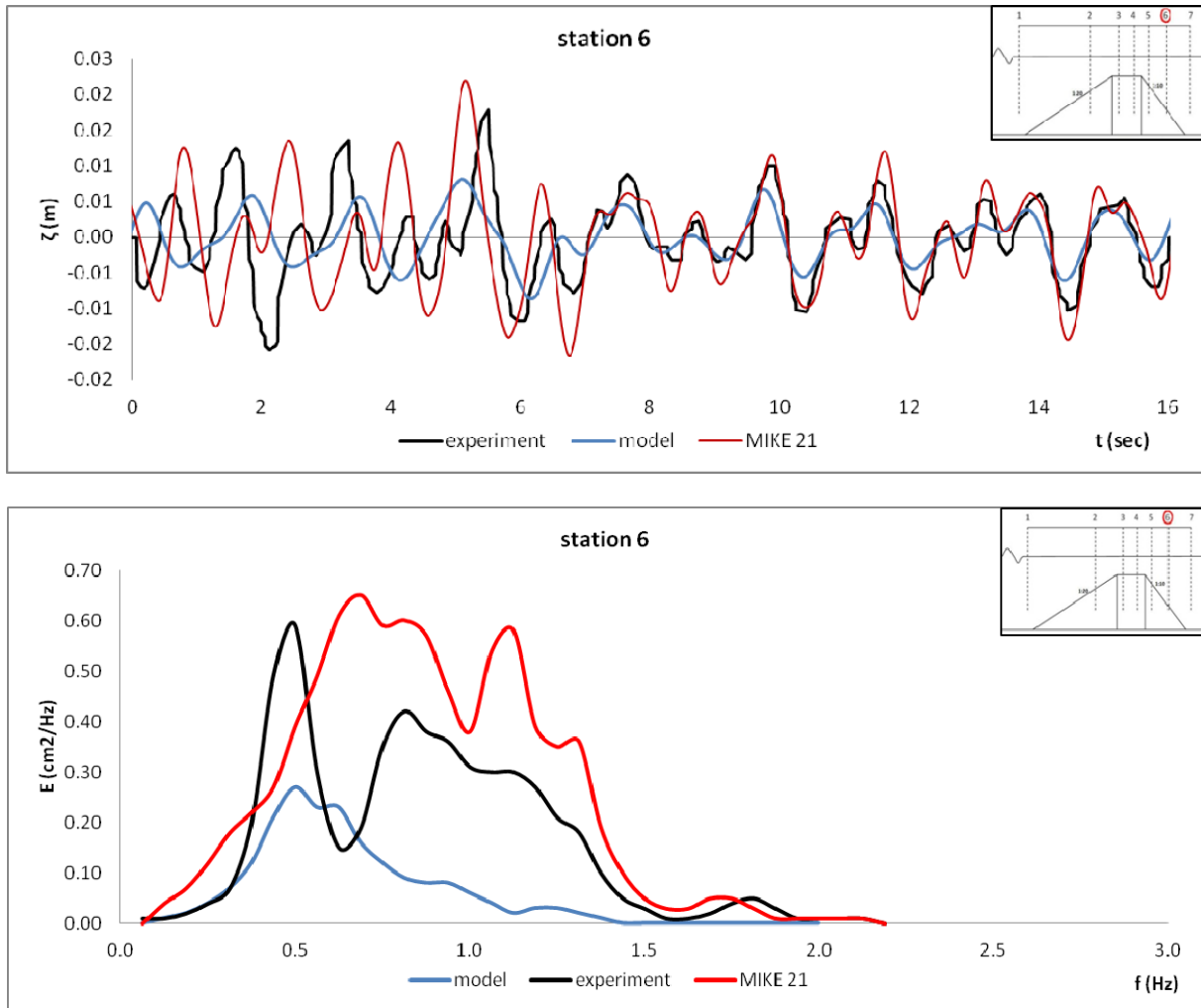


Fig 7: Computed timeseries (top) and spectra (bottom) of the free surface displacement in sensor 6 (midway of breakwater’s downslope) for irregular waves ($H_s=1.8$ cm and $T_p=2.0$ sec) – comparison with experimental measurements (black line: experimental measurements, blue line: model results, red line: MIKE 21 results)

From those diagrams it can be concluded that, as in regular nonbreaking waves, the proposed Boussinesq model can predict with accuracy the surface elevation at the sensors of the submerged structure until the beginning of the downslope, where the wave train is subject to highly nonlinear phenomena that affect the wave form. Furthermore, it has been observed a difference in spectra especially in sensors 5, 6 and 7 where the timeseries seem to have a small hysteresis of about 2 peak wave periods in contrast to the experimental data, before acquiring a so-called steady state. This phenomenon strongly affects the resulting spectrum due to the fact that difference in surface elevation leads to energy deviations and finally to differences in spectral shape.

7. CONCLUSIONS

An advanced model for wave propagation in two horizontal dimensions is presented, capable of describing satisfactorily the depth induced wave breaking in 2DH by means of the eddy viscosity breaking criterion, which functions smoothly within the basic modified model presented by Memos et al. (2005). The equations describing the flow included improved dispersion and weakly nonlinear characteristics. The eddy viscosity formulation does not produce instabilities when combined with the equipped 4th order accurate predictor-corrector numerical scheme, tested for regular short and long, breaking and nonbreaking waves and random nonbreaking waves. The obtained results showed generally good agreement with the experimental measurements and overall slightly better behavior (especially in test cases with plunging breaking waves) than that of MIKE 21.

Future investigations that would contribute to those presented above, would include the adding of higher order nonlinear terms in the governing equations in order to make the model able to predict more accurately the nonlinear phenomena due to the flow over the submerged structure, along with the release of higher order harmonics that appear in the downslope of the breakwater.

REFERENCES

1. Beji, S., Battjes, J.A., 1993. "Experimental investigation of wave propagation over a bar". *Coastal Engineering*, vol. 19, Issue 1-2, pp 151-162.
2. Beji, S., Battjes, J.A., 1994. "Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar". *Coastal Engineering*, vol. 23, Issue 1-2, pp 1-16.
3. Beji, S., Nadaoka, K., 1996. "A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth". *Ocean Engineering*, vol. 23, Issue 8, pp 691-704.
4. CEM, Coastal Engineering Manual, 2008, In: <http://chl.erdc.usace.army.mil/cem>
Last access: June 2010.
5. Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B., Chawla, A., 2000. "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I: 2D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, pp 48-56.
6. Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 2000. "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I: 1D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, pp 39-47.
7. Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B., Dalrymple, R.A., 1998. "Fully nonlinear Boussinesq wave model, Documentation and user's manual." Center for Applied Coastal Research, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Delaware, Research Report no. CACR-98-06.

8. Li, Y.S., Zhan, J.M., 2001. "Boussinesq-type model with boundary-fitted coordinate system," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, vol. 127, No. 3, pp 152-160.
9. Madsen, P.A., Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., 1997a. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part I: model description and cross-shore motion of regular waves". *Coastal Engineering*, vol. 32, Issue 4, pp 255-287.
10. Madsen, P.A., Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., 1997b. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part II: surf beat and swash oscillations for wave groups and irregular waves". *Coastal Engineering*, vol. 32, Issue 4, pp 289-319.
11. Memos, C.D., Karambas, Th. V., Avgeris, I., 2005. "Irregular wave transformation in the nearshore zone: experimental investigations and comparisons with a higher order Boussinesq model". *Ocean Engineering*, vol. 32, Issues 11-12, pp 1465-1485.
12. Newland, D. E. 1984. *An introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis* (second edition). Longman Scientific & Technical, England.
13. Schäffer, H.A., Madsen, P.A., Deigaard, R., 1993. "A Boussinesq model for waves breaking in shallow water." *Coastal Engineering*, vol. 20, Issues (3-4), pp 185-202.
14. Svendsen, I.A., 1984. "Wave heights and set-up in a surf zone". *Coastal Engineering*, vol. 8, Issue 4, pp. 303-329.
15. Svendsen, I.A., Yu, K., Veeramony, J., 1996. "A Boussinesq breaking wave model with vorticity". *Proceedings of the 25th International Conference on Coastal Engineering*, pp 1192-1204, Orlando.
16. Veeramony, J., Svendsen, I.A. 2000. "The flow in surf-zone waves," *Coastal Engineering*, vol. 39, Issues 2-4, pp 93-122.
17. Wei, G., Kirby, J.T., 1994. "A high order time-dependent numerical model for the extended Boussinesq equations". *Proceedings of the International Symposium: Waves-Physical and Numerical Modeling*, pp 544-553, Vancouver.
18. Wei, G., Kirby, J.T., 1995. "Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, No. 5, 251-261.
19. Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R., 1995. "A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 294, pp 71-92.
20. Zelt, J. A. (1991). "The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves." *Coastal Engineering*, vol. 15, pp 205-246.

1. Θεωρίες ανάλυσης και θραύσης τυχαίων κυματισμών

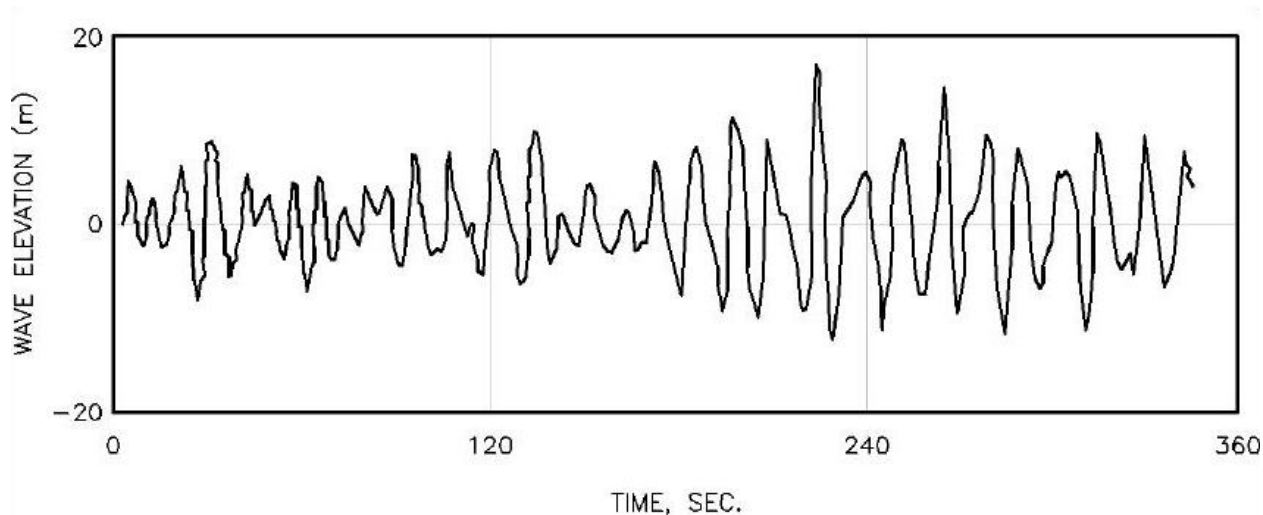
1.1 Εισαγωγή

Μεταβολές στην ελεύθερη επιφάνεια ενός θαλάσσιου αποδέκτη και ειδικότερα κύματα δημιουργούνται υπό την επίδραση παραγόντων όπως άνεμος, σεισμός αλλά και βίαιες μεταβολές ατμοσφαιρικής πίεσης. Κύματα περιόδου 3 με 25 sec οφείλονται σε ανέμους και είναι θεμελιώδεις χαρακτηριστικό κάθε παράκτιας περιοχής. Στην παρούσα εργασία, οι κυματισμοί θα είναι μόνο ανεμογενείς (πλην ιδιαίτερης αναφοράς σε άλλες περιπτώσεις).

Η απλούστερη θεώρηση που μπορεί να γίνει ώστε να περιγραφεί το προφίλ των κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια ενός θαλάσσιου αποδέκτη είναι η σχεδόν ημιτονοειδής μορφή με σταθερό ύψος κύματος, περίοδο και κατεύθυνση (μονοχρωματικά κύματα). Ωστόσο, η ντετερμινιστική θεώρηση των παραπάνω μεγεθών δεν μπορεί στην πραγματικότητα να ισχύσει καθώς είναι αναγκαίο να λαμβάνουμε υπόψη τα χαρακτηριστικά της θάλασσας ως στατιστικές παραμέτρους ώστε να λάβουμε υπόψη μας τον τυχηματικό χαρακτήρα τους. Αποτέλεσμα της προσέγγισης αυτής είναι η περιπλοκή των αναλύσεων, αλλά και η ρεαλιστικότερη περιγραφή της θαλάσσιας επιφάνειας. Ένα απλό στιγμιότυπο της θαλάσσιας επιφάνειας αποδεικνύει την ακανόνιστη κατανομή της διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας (*Εικόνα 1.1*) όπως και ένα γράφημα που θα προκύψει από μετρήσεις πεδίου (*Εικόνα 1.2*) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η εικόνα της θαλάσσιας επιφάνειας στη φύση είναι αποτέλεσμα επαλληλίας πολλών κυματισμών με ποικιλία υψών και περιόδων, κινούμενα προς διαφορετικές κατευθύνσεις.



Εικόνα 1.1 : Φωτογραφικό στιγμιότυπο θαλάσσιας διαταραχής.



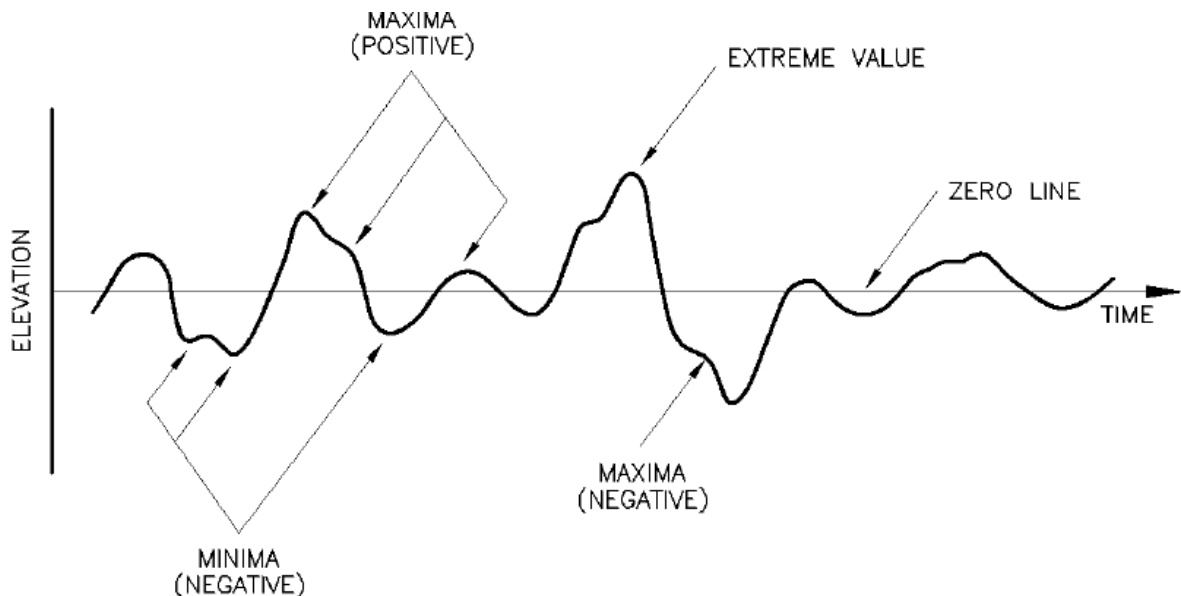
Εικόνα 1.2 : Κυματικό προφίλ θαλάσσιας διαταραχής από μετρήσεις πεδίου (CEM 2008). [16]

Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε διαταραχή στην επιφάνεια της θάλασσας είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης των δράσεων της διεπιφάνειας ανέμου – θάλασσας. Στην περιοχή που η δράση του ανέμου είναι εντονότερη, παρατηρείται μεγάλη μεταβολή στο εύρος των υψών και περιόδων κύματος και το μήκος μεταξύ μεμονωμένων κορυφών ισούται με ένα ή δύο μήκη κύματος. Τα κύματα στην περιοχή αυτή συνιστούν τον όρο θάλασσα (ή sea). Κύματα που εντοπίζονται στη φύση μακριά από την πηγή γένεσης ονομάζονται αποθάλασσα (ή swell) και έχουν χαρακτηριστικό γνώρισμα το περιορισμένο εύρος μεταβλητότητας πλησιάζοντας τη μορφή των μονοχρωματικών κυματισμών στα βαθιά νερά. Η αποθάλασσα έχει κύματα με ομοιομορφία σε ύψος κύματος, περίοδο και κατευθυντικότητα. Ένα στιγμιότυπο θαλάσσιας επιφάνειας στη φύση μπορεί να συντίθεται μόνο από θάλασσα ή μόνο από αποθάλασσα ή από συνδυασμό των δύο.

Για την επεξεργασία σύνθετων κυματισμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε η φασματική ανάλυση είτε η ανάλυση στην περιοχή χρόνου. Οι φασματικές προσεγγίσεις βασίζονται στον μετασχηματισμό Fourier της θαλάσσιας επιφάνειας, συνιστώντας την πλέον μαθηματικώς ορθότερη προσέγγιση για την ανάλυση μίας τρισδιάστατης, χρονικά εξαρτημένης καταγραφής ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας. Η μέθοδος είναι ιδιαίτερα περίπλοκη λόγω ελάχιστων διαθέσιμων μετρήσεων, οπότε χρήσιμες καθίστανται απλοποιημένες μέθοδοι. Η ανάλυση στην περιοχή χρόνου περιλαμβάνει μία χρονοϊστορία της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας σε ένα συγκεκριμένο σημείο και από αυτήν την καταγραφή εξαγονται τα απαραίτητα στατιστικά χαρακτηριστικά, συνιστώντας μια άκρως φυσική εισαγωγή στην ανάλυση σύνθετων κυματισμών προτού εμβαθύνουμε σε πιο περίπλοκες φασματικές προσεγγίσεις. Παρόλα αυτά, μειονέκτημα της ανάλυσης στην περιοχή χρόνου είναι η αδυναμία λήψης πληροφορίας για την κατεύθυνση των κυμάτων εμφανίζοντας ως απλό κύμα σε ένα συγκεκριμένο σημείο, μία υπέρθεση δύο μικρότερων κυματισμών διαφορετικών κατευθύνσεων που συμβαίνει να συμβάλλουν τη δεδομένη στιγμή που προκύπτει η πληροφορία. Αντίστοιχα, μειονέκτημα της φασματικής προσέγγισης αποτελεί το γεγονός ότι η μέθοδος είναι γραμμική και υπάρχει ενδεχόμενο παραποίησης των μη-γραμμικών κυματισμών.

1.2 Ανάλυση στην περιοχή χρόνου

Η μέθοδος αυτή απαιτεί μετρήσεις από το φυσικό αποδέκτη, ενώ η *Εικόνα 1.2* συνιστά ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μίας χρονοσειράς που καταμετράται η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ενός θαλάσσιου αποδέκτη. Οι μετρήσεις σε ένα τυχαίο σημείο εμφανίζουν πολλά μέγιστα και ελάχιστα, όπως φαίνεται και στην *Εικόνα 1.3*, και άρα είναι απαραίτητο να ορίσουμε μία μέθοδο διαχωρισμού των επιμέρους κυμάτων που δίνουν την προαναφερθείσα καταγραφή.



Εικόνα 1.3 : Χαρακτηριστικό σχέδιο επεξεργασίας ενός τυχαίου κυματισμού (Ochi 1973). [91]

Στην ανάλυση στην περιοχή χρόνου ο πρωτογενής κυματισμός που δίνεται από την καταγραφή θα πρέπει να χωριστεί σε έναν αριθμό τμημάτων τα οποία θα θεωρηθούν ως μεμονωμένα κύματα στα οποία θα μετρηθεί το εκάστοτε ύψος κύματος και η περίοδος του. Η διαδικασία αυτή θα γίνει για όλα τα τμήματα της καταγραφής, οπότε και θα μπορούν να εξαχθούν στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος.

Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στον προσδιορισμό της περιόδου κύματος καθώς είναι πιθανό να εμφανισθούν δύο κορυφές σε μία κοιλιά κάτω από τη μέση στάθμη ύδατος (ΜΣΥ). Ένας ιδιαίτερα κοινός τρόπος προσδιορισμού είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών τομών της ελεύθερης επιφάνειας με τη ΜΣΥ είτε με ανοδική κλίση (zero up-crossing period), είτε με καθοδική κλίση (zero down-crossing period).

Στα στατιστικά χαρακτηριστικά της καταγραφής της διαταραχής σε μία θαλάσσια επιφάνεια σημαντικά από πλευράς μηχανικού ορίζονται το χαρακτηριστικό ύψος H και η χαρακτηριστική περίοδος T . Το μέν χαρακτηριστικό ύψος κύματος μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους, όπως το μέσο ύψος όλων των κυμάτων H_{mean} , το μέσο τετραγωνικό ύψος H_{rms} , το μέγιστο ύψος H_{max} και το μέσο ύψος του ενός τρίτου των υψηλότερων κυματισμών $H_{1/3}$ που συγγέεται όχι εσφαλμένα, αν και είναι στατιστική έννοια, με την έννοια του σημαντικού ύψους κύματος H_s όπως παρουσιάστηκε αρχικά από τους Sverdrup και Munk (1947) και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$H_s = \frac{1}{N/3} \cdot \sum_{i=1}^{N/3} H_i \quad (1.1)$$

όπου N ο αριθμός των μεμονωμένων υψών H_i της καταγραφής τοποθετημένα σε φθίνουσα σειρά.

Αντίστοιχα, το μέσο τετραγωνικό ύψος κύματος H_{rms} δίνεται από τη σχέση:

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N H_j^2} \quad (1.2)$$

όπου H_j τα ξεχωριστά ύψη της καταγραφής.

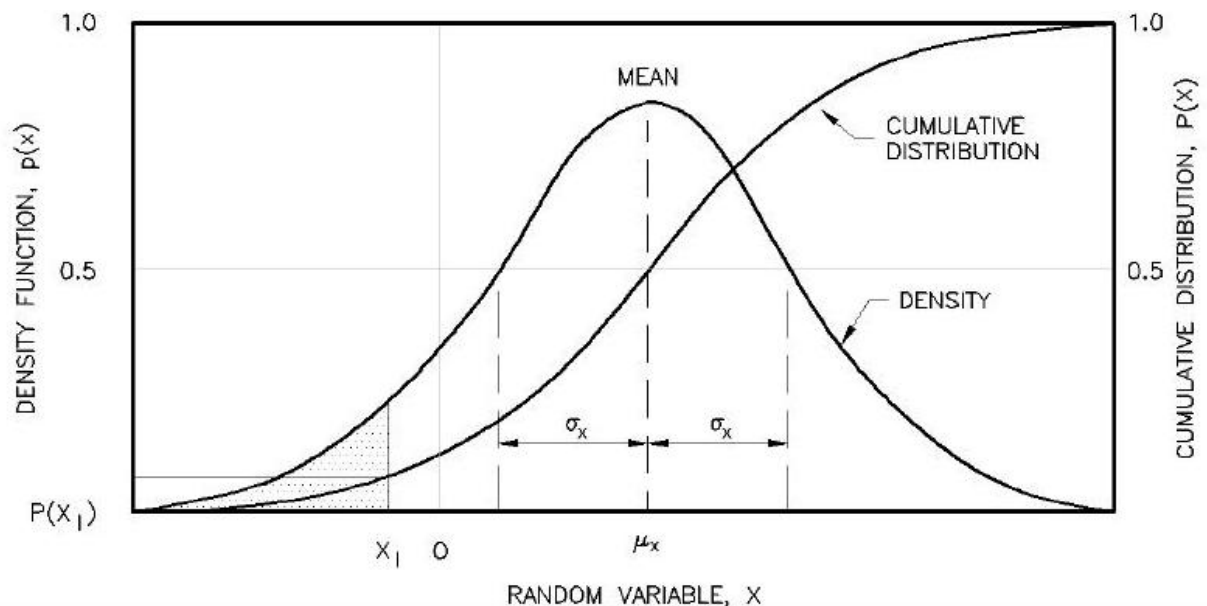
Επίσης η πιθανότητα ώστε ένα ύψος κύματος να είναι μεγαλύτερο (ή μικρότερο ή ίσο) από ένα ύψος κύματος σχεδιασμού H_d δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$P(H > H_d) = \frac{m}{N} \quad (1.3)$$

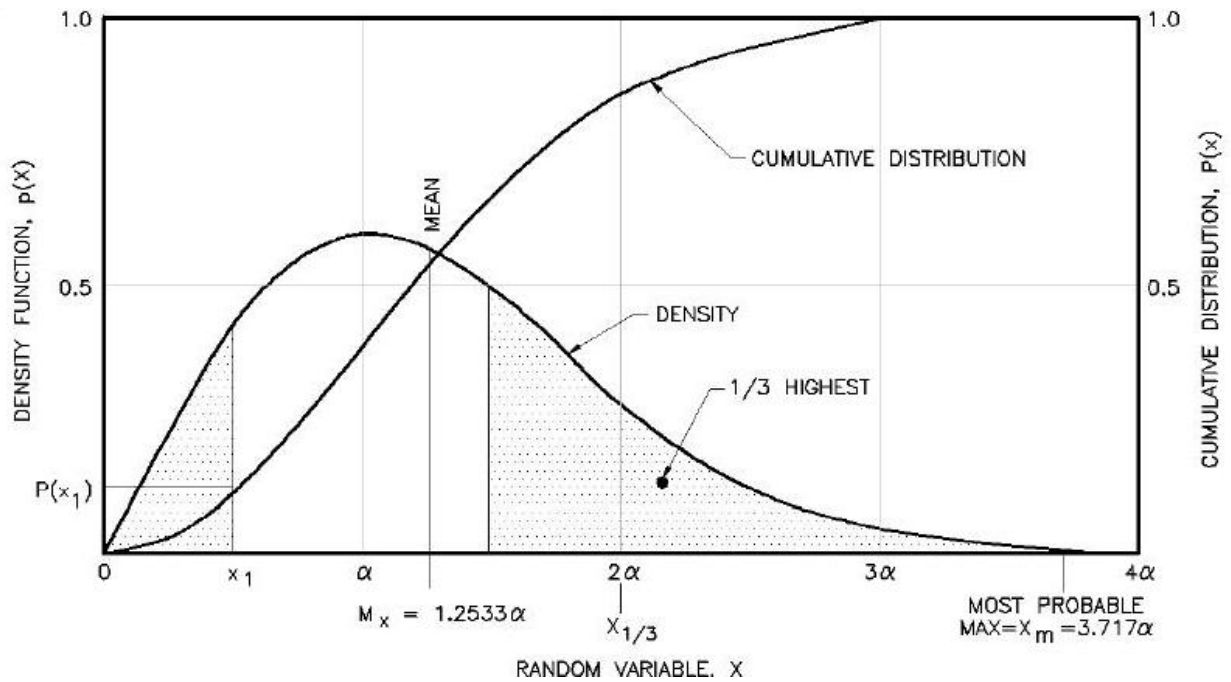
$$P(H \leq H_d) = 1 - \frac{m}{N} \quad (1.4)$$

όπου m ο αριθμός των υψηλότερων κυμάτων του κύματος σχεδιασμού H_d .

Για την μελέτη τυχαίων θαλάσσιων κυματισμών θεωρούμε ότι η κατανομή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ακολουθεί κανονική κατανομή (Gaussian) και η κατανομή του ύψους κύματος, όπως έγινε αρχικά η προσέγγιση από τον Longuet-Higgins (1952), ακολουθεί κατανομή Rayleigh (Εικόνα 1.4 και Εικόνα 1.5 αντίστοιχα).



Εικόνα 1.4 : Απεικόνιση κανονικής κατανομής (Gaussian) που ακολουθεί η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και αθροιστική κατανομή (CEM 2008). [16]



Εικόνα 1.5 : Απεικόνιση κατανομής Rayleigh που ακολουθεί το ύψος κύματος και αθροιστική κατανομή (CEM 2008). [16]

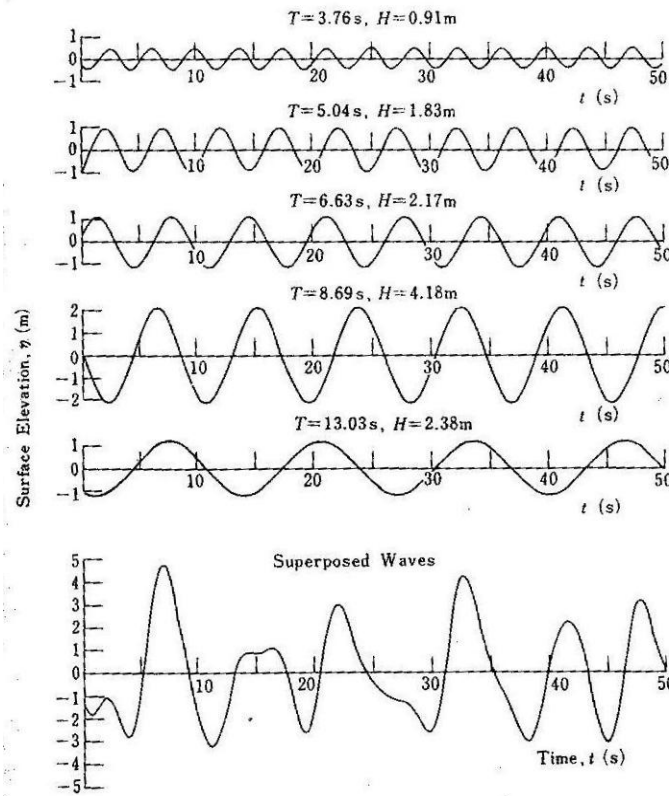
Η Gaussian κατανομή χρησιμοποιείται για να περιγράψει κυρίως τις βραχυχρόνιες μεταβολές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ενώ δεδομένης της κατανομής Rayleigh μπορούμε να εξαγάγουμε στατιστικές παραμέτρους για το ύψος κύματος.

$$\left. \begin{aligned} H_{1/3} &\approx 4.00 \cdot \sqrt{m_0} = 1.416 \cdot H_{rms} \\ H_{1/10} &= 1.27 \cdot H_{1/3} = 1.80 \cdot H_{rms} = 5.091 \cdot \sqrt{m_0} \\ H_{1/100} &= 1.67 \cdot H_{1/3} = 2.36 \cdot H_{rms} = 6.672 \cdot \sqrt{m_0} \\ H_{max} &= 1.86 \cdot H_{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (1.5a - 1.5d)$$

όπου m_0 η ροπή μηδενικής τάξης που θα αναλυθεί εκτενέστερα στο κεφάλαιο 1.3.

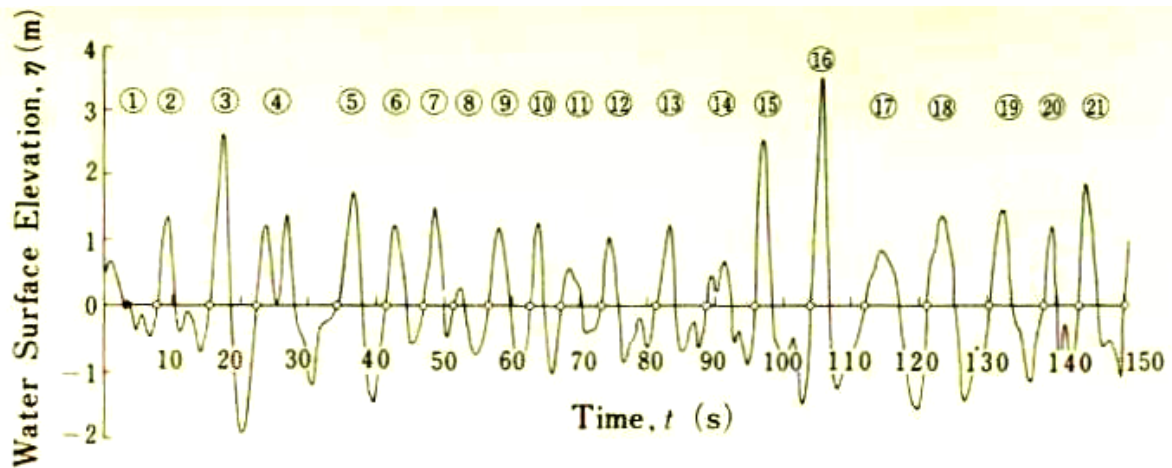
1.3 Ανάλυση στην περιοχή συχνοτήτων

Για την ανάλυση των θαλάσσιων κυματισμών, που θεωρούνται αρχικά τυχαίοι λόγω της μορφής της θαλάσσιας επιφάνειας της σημειακής καταγραφής, γίνεται η υπόθεση πως η εν λόγω μορφή προκύπτει από υπέρθεση πολλών μονοχρωματικών κυματισμών απειροστού ύψους και ποικίλων κατευθύνσεων. Στην *Εικόνα 1.6* που ακολουθεί φαίνεται ένα παράδειγμα ενός σύνθετου προφίλ που προκύπτει από επαλληλία πέντε απλών κυματισμών διαφορετικών υψών κύματος και διαφορετικών περιόδων.



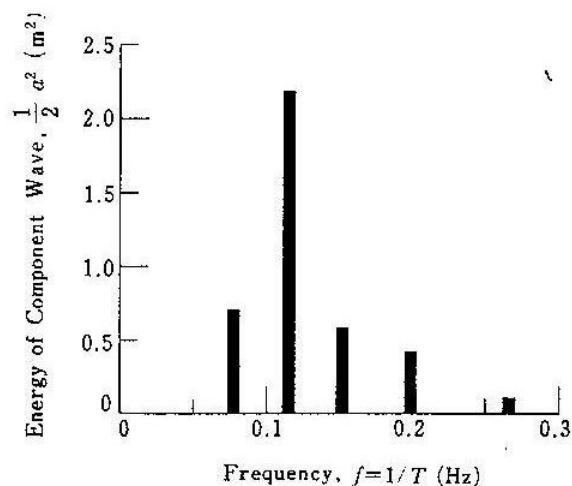
Εικόνα 1.6 : Προσομοίωση τυχαίων κυματισμών με επαλληλία ημιτονοειδών κυματισμών (Goda 1985) [34]

Η κατανομή της ενέργειας των προαναφερθέντων κυματισμών σε συνάρτηση με τη συχνότητα και την κατεύθυνση δίνει το λεγόμενο κυματικό φάσμα και πιο συγκεκριμένα, η κατανομή της κυματικής ενέργειας σε σχέση μόνο με τη συχνότητα δίνει το λεγόμενο φάσμα συχνοτήτων, ενώ αναφορικά με τη συχνότητα και την κατεύθυνση ονομάζεται κατευθυντικό φάσμα. Η μέθοδος της επαλληλίας απλών κυματισμών για την προσέγγιση τυχαίων μεταβολών στη θαλάσσια επιφάνεια είναι συνήθως πρακτική για την προσομοίωση θαλασσίων κυματισμών στη φύση. Επίσης, είναι εξίσου εφικτή η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η εξαγωγή ενός αριθμού ξεχωριστών απλών κυματισμών από τυχαία κυματικά προφίλ (*Εικόνα 1.7*).



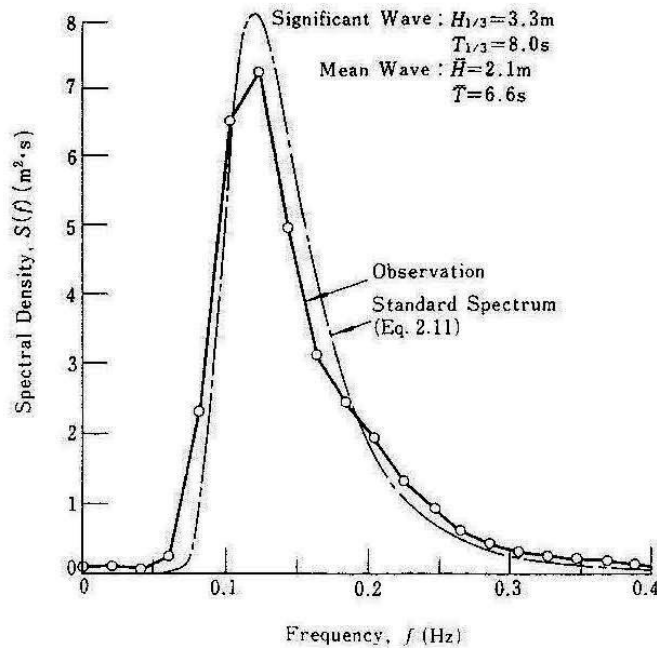
Εικόνα 1.7 : Χρονοσειρά ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας (Goda 1985). [34]

Για την παραπάνω χρονοσειρά ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται η *Εικόνα 1.8* που δίνει την ενέργεια που αντιστοιχεί σε κάθε συχνότητα (πέντε στήλες, δηλαδή πέντε συχνότητες).



Εικόνα 1.8 : Φασματική αναπαράσταση υπερτιθέμενων κυματισμών (Goda 1985). [34]

Για την περίπτωση πραγματικών κυματισμών δεν έχουμε πεπερασμένο αριθμό συχνοτήτων αλλά άπειρο και άρα το φάσμα και ακριβέστερα η συνάρτηση φάσματος συχνοτήτων παριστάνεται με συνεχή γραμμή όπως στην *Εικόνα 1.9* έχοντας μονάδες m^2s στον κάθετο άξονα και s^{-1} στον οριζόντιο άξονα.



Εικόνα 1.9 : Παράδειγμα φάσματος θαλασσιών κυματισμών (Goda 1985). [34]

Μέσα από το παραπάνω διάγραμμα εξάγονται έννοιες όπως οι ροπές n-οστής τάξης αλλά και το λεγόμενο σημαντικό ύψος κύματος ως συνάρτηση της ροπής μηδενικής τάξης (σχέση 1.5a). Ως ροπή μηδενικής τάξης ορίζεται m_0 η τιμή του εμβαδού του φάσματος:

$$m_0 = \int_0^{\infty} E(f)df \quad (1.6)$$

Η σχέση γενικεύεται δίνοντας τις ροπές ανωτέρων τάξεων από τη σχέση:

$$m_i = \int_0^{\infty} f^i \cdot E(f)df, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα βαθιά και τα ενδιάμεσα νερά, το σημαντικό ύψος κύματος που προκύπτει από τη φασματική ανάλυση είναι συνήθως μεγαλύτερο από αυτό που δίνει η ανάλυση στην περιοχή του χρόνου. Κατά τη διάρκεια έντονων ανεμολογικών γεγονότων, το φάσμα τείνει στο να έχει μία κεντρική κορυφή και προβλέψιμο σχήμα. Για την «αποθάλασσα» (swell) όπου η διαταραχή έχει διαδοθεί σε μεγάλη απόσταση από το σημείο γένεσης τα κύματα έχουν την τάση να εμφανίζουν μία απότομη κορυφή στη συχνότητα κορυφής f_p , ενώ κύματα στα ρηγά νερά κοντά στη θραύση, τείνουν να έχουν μικρότερες κορυφές σε συχνότητες $2 f_p$, $3 f_p$ κοκ. που αποτελούν αρμονικές του ίδιου κύριου κυματισμού. Η παρουσία αρμονικών υποδηλώνει ότι το κύμα έχει απότομη κορυφή και επίπεδη κοιλία υψηλά μη γραμμικών κυματισμών, όπως συμβαίνει κοντά στη θραύση.

Για την στοχαστική απεικόνιση των κυματισμών χρησιμοποιούνται δύο παράμετροι, το φασματικό πλάτος ν και το φασματικό εύρος ϵ , λειτουργώντας ως παράμετροι προσδιορισμού του πλάτους του φάσματος και παίρνουν τιμές από 0 έως 1. Εκφράζονται μέσω των σχέσεων:

$$v = \sqrt{\frac{m_0 \cdot m_2}{m_1^2} - 1} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 \cdot m_4}} \quad (1.9)$$

Για ένα στενό φάσμα οι τιμές των παραμέτρων v και ε τείνουν στο 0. Για παράδειγμα, για τα δύο πιο κοινά εμπειρικά φάσματα, το φάσμα Pierson-Moskowitz (PM) (Pierson and Moskowitz 1964) και το φάσμα JONSWAP (Hasselmann et al. 1973) που θα αναλυθούν στην επόμενη ενότητα η τιμή της παραμέτρου v ισούται με 0.425 και 0.389 αντίστοιχα και το φασματικό εύρος είναι και στις δύο περιπτώσεις ίσο με 1.

Οι τιμές του φασματικού εύρους δεν είναι επαρκείς για τον προσδιορισμό της ευρύτητας του φάσματος λόγω της διακύμανσης του θορύβου σε υψηλότερες συχνότητες του φάσματος, θόρυβος που εισέρχεται στις τιμές των ροπών δεύτερης και τέταρτης τάξης για τον υπολογισμό του ε . Για το λόγο αυτό ο Goda (1974) πρότεινε μία φασματική παράμετρο κορυφής Q_p που ορίζεται ως:

$$Q_p = \frac{2}{m_0^2} \cdot \int_0^\infty f \cdot E^2(f) df \quad (1.10)$$

Η φασματική παράμετρος κορυφής εξαρτάται μόνο από τη ροπή μηδενικής τάξης και δε συνδέεται άμεσα από το φασματικό εύρος ε . Γενικά προκύπτει ότι ένα μικρό ε συνεπάγεται ένα μεγάλο Q_p και αντιστρόφως.

Σημαντικό μειονέκτημα της φασματικής ανάλυσης, είναι η απώλεια πληροφορίας για τα μεμονωμένα κύματα που συνθέτουν την καταγραφή. Αντίθετα, στα πλεονεκτήματα συγκαταλέγονται η ευκολία εφαρμογής της προσέγγισης μετά τη λήψη καταγραφής από κάποιο απλό όργανο μέτρησης, το γεγονός ότι οι θεωρίες γένεσης και εξέλιξης κυματισμών σε παράκτιες περιοχές βασίζονται σε φασματικές αναλύσεις καθώς και ότι αποτελεί την πιο ευρείας εφαρμογής μέθοδο για την διερεύνηση της κατεύθυνσης των κυματισμών. Στα θετικά στοιχεία θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ανάλυση κατά Fourier (που θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο) για φαινόμενα κυματικής μορφής, έχει υψηλότερες δυνατότητες εφαρμογής και είναι ανά πάσα στιγμή διαθέσιμες.

1.3.1 Συνήθεις τύποι φασμάτων

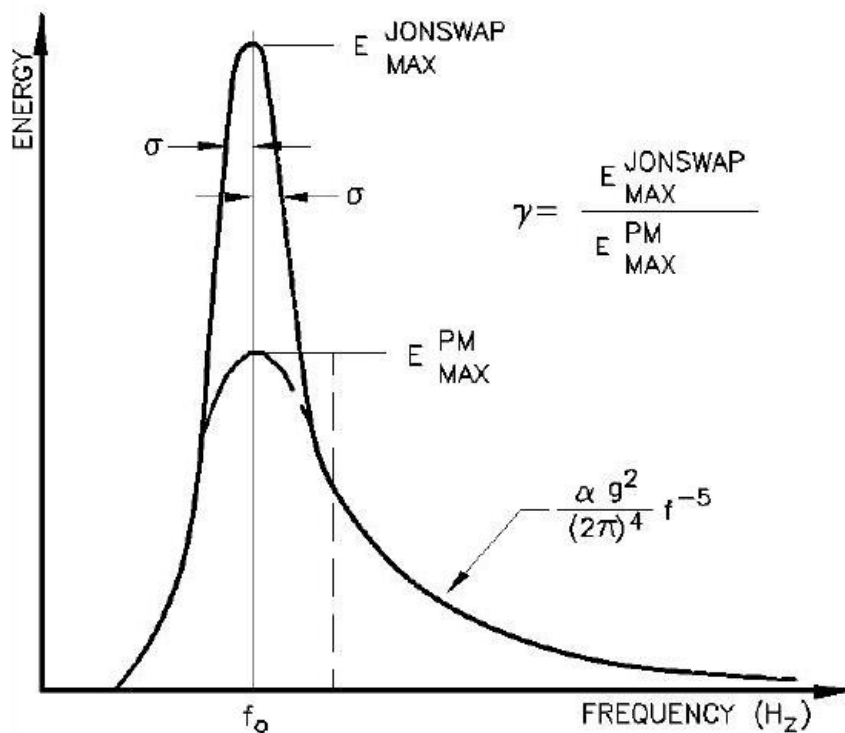
Γενικά, τα φάσματα της θαλάσσιας επιφάνειας δεν ακολουθούν κάποια συνήθη μαθηματική μορφή. Ωστόσο, υπό συγκεκριμένες ανεμολογικές συνθήκες το φάσμα έχει ένα συγκεκριμένο σχήμα. Έχει ευρεθεί μία σειρά από εμπειρικές εκφράσεις ικανές να δώσουν το φάσμα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας οι οποίες και καλούνται παραμετρικά φασματικά μοντέλα καθώς εκφράζονται συναρτήσει ενός αριθμού φυσικών μεγεθών (ταχύτητα ανέμου, χαρακτηριστικό ύψος κύματος, συντελεστές σχήματος κτλ.) για τις συνήθεις εφαρμογές του μηχανικού.

Πρώτα ο Phillips (1958) ανέπτυξε μία εξίσωση για το ισοδύναμο πεδίο φάσματος στα βαθιά νερά για πλήρως ανεπτυγμένη θάλασσα, η οποία αποτέλεσε τη βάση για μεταγενέστερες προσεγγίσεις. Η σχέση αυτή δίνεται σε όρους της γωνιακής συχνότητας ω μέσω της σχέσης:

$$E(\omega) = \alpha \cdot g^2 \cdot \omega^{-5} \quad (1.11)$$

όπου α η σταθερά κατά Phillips (=0.0081) και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Ένα ακόμα συνηθισμένο φάσμα είναι το φάσμα κατά Pierson-Moskowitz PM (Pierson και Moskowitz 1964) και επέκταση αυτού είναι το φάσμα JONSWAP (Hasselmann et al. 1973, 1976) το οποίο είναι ένα φάσμα πέντε παραμέτρων εκ των οποίων οι τρεις διατηρούνται σταθερές. Η σχέση μεταξύ των φασμάτων PM και JONSWAP φαίνεται στην *Εικόνα 1.10*.



Εικόνα 1.10 : Σύγκριση φασμάτων PM και JONSWAP (Chakrabarti 1987). [17]

Αλλα ευρέως χρησιμοποιούμενα διπαραμετρικά κυματικά φάσματα παράγονται από τα φάσματα PM και JONSWAP. Σε αυτά συμπεριλαμβάνονται τα φάσματα των Bretschneider (1959), ISSC (1964), Scott (1965), ITTC (1966), Liu (1971), Mitsuyasu (1972), Goda (1985a) και των Bouws et al. (1985).

Ένα κυματικό φάσμα έξι παραμέτρων που αναπτύχθηκε από τους Ochi και Hubble (1976) δίνει τη δυνατότητα περιγραφής πολλών κορυφών στο ενεργειακό φάσμα συνδυάζοντας θαλάσσιους κυματισμούς και «αποθάλασσα».

Η μορφή του φάσματος PM για πλήρως ανεπτυγμένη θάλασσα, εκφράζεται σε όρους συχνότητας f και ταχύτητας ανέμου U_w σε ύψος 19.5 m από τη ΜΣΥ μέσω της σχέσης:

$$E(f) = \frac{0.0081 \cdot g^2}{(2\pi)^4 \cdot f^5} \cdot \exp\left(-0.74 \cdot \left[\frac{2\pi \cdot U_w \cdot f}{g}\right]^{-4}\right) \quad (1.12)$$

Το φάσμα PM περιγράφει πλήρως ανεπτυγμένη θάλασσα μέσω μόνο της παραμέτρου U_w και θεωρώντας ανάπτυγμα πελάγους και διάρκεια πνοής ανέμου άπειρη, ισχυρισμός ο οποίος θεωρείται ότι ευσταθεί όταν άνεμος πνέει σε μία τεράστια περιοχή με σταθερή ταχύτητα, χωρίς ουσιαστική αλλαγή στην κατεύθυνση για δεκάδες ώρες.

Το φάσμα JONSWAP για θάλασσες με περιορισμένο ανάπτυγμα πελάγους προέκυψε από τη σύντηξη των λέξεων Joint North Sea Wave Project – JONSWAP (Hasselmann et al. 1973) και εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$E(f) = \frac{\alpha \cdot g^2}{(2\pi)^4 \cdot f^5} \cdot \exp\left[-1.25 \cdot \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \cdot \gamma \cdot \exp\left[-\frac{\left(\frac{f}{f_p}-1\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right] \quad (1.13)$$

όπου οι εκφράσεις των παραμέτρων που υπεισέρχονται δίνονται από τις σχέσεις:

$$f_p = 3.5 \cdot \left[\frac{g^2 \cdot F}{U_{10}^3}\right]^{-0.33} \quad ; \quad \alpha = 0.076 \cdot \left[\frac{g \cdot F}{U_{10}^2}\right]^{-0.22} \quad ; \quad 1 \leq \gamma \leq 7$$

$\sigma = 0.07$ για $f \leq f_p$ και $\sigma = 0.09$ για $f > f_p$

Στην παραπάνω εξίσωση α είναι η παράμετρος κλίμακας, γ ο συντελεστής μεγέθυνσης κορυφής, f_p η συχνότητα κορυφής, U_{10} η ταχύτητα σε ύψος 10 m από την επιφάνεια της θάλασσας και F το μήκος του αναπτύγματος πελάγους.

Στα ρηχά νερά, το κυματικό φάσμα αποκλίνει από τις συνήθεις φασματικές μορφές που δόθηκαν ως τώρα και σε συχνότητες πέραν της κορυφής δεν μειώνεται βάσει του f^5 . Το γεγονός αυτό οφείλεται στην επίδραση του βάθους στη μορφή του φάσματος και στην αλληλεπίδραση μεταξύ των φασματικών συνιστωσών. Για να ληφθεί υπόψη η μεταβολή αυτή, προτάθηκε από τους Bouws et al. (1984) μία μεταβολή στο φάσμα JONSWAP ώστε να αναπαρασταθεί το φάσμα στα ρηχά νερά, το οποίο ονομάστηκε φάσμα TMA από τα αρχικά των πηγών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή του (Texel, Marsen και Arsløe) πολλαπλασιάζοντας την μορφή του κλασικού φάσματος JONSWAP με μία συνάρτηση Φ . Η μορφή του φάσματος TMA δίνεται ως ακολούθως:

$$S_{TMA}(\omega, d) = S_{JONSWAP}(\omega) \cdot \Phi_{\kappa}(\omega_d) \quad (1.14)$$

όπου η έκφραση της συνάρτησης Φ (μειωτικός συντελεστής $0 < \Phi_{\kappa}(\omega_d) < 1$) και των συνακόλουθων παραμέτρων δίνονται από τη σχέση:

$$\Phi_{\kappa}(\omega_d) = \begin{cases} 0.5 \cdot \omega_d^2 & \omega_d \leq 1 \\ 1 - 0.5 \cdot (2 - \omega_d)^2 & 1 < \omega_d < 2 \\ 1 & \omega_d \geq 2 \end{cases} \quad (1.15)$$

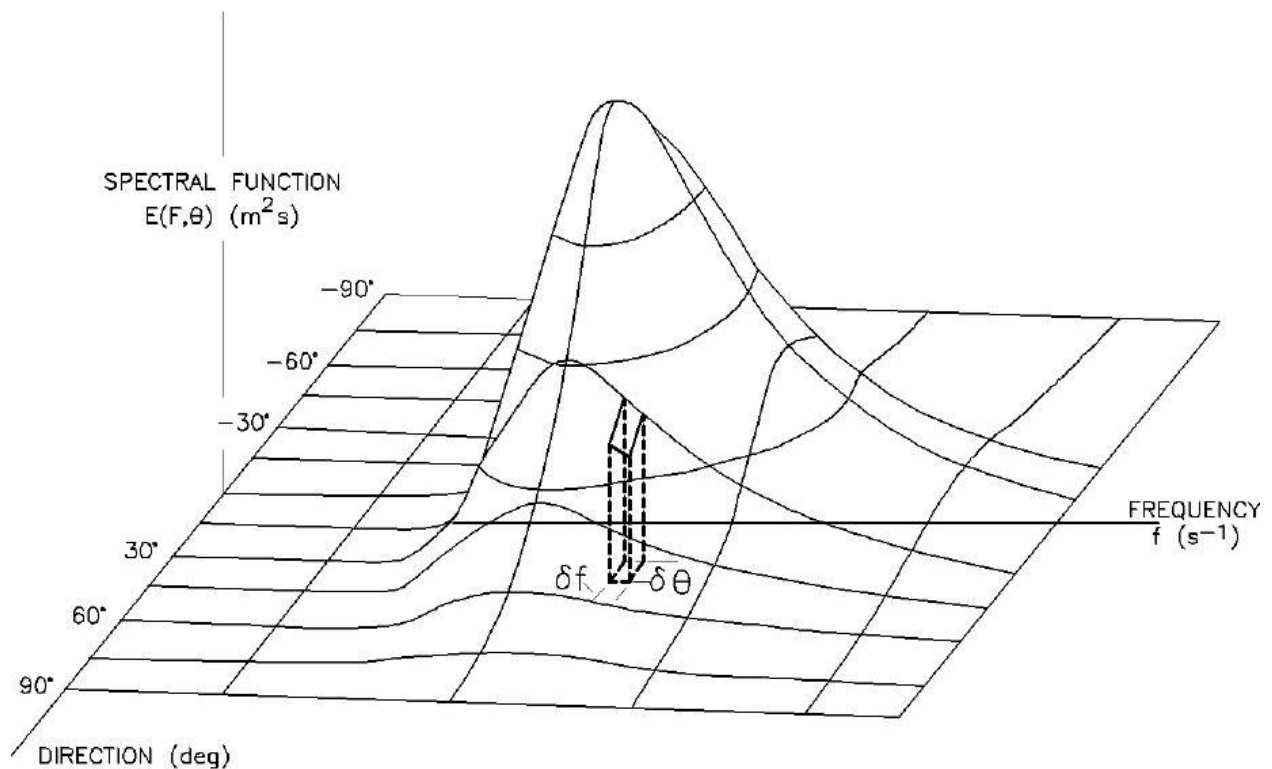
ενώ ω_d η γωνιακή ταχύτητα που επηρεάζεται από το βάθος του πυθμένα μέσω της σχέσης:

$$\omega_d = 2\pi \cdot f \cdot \sqrt{\frac{d}{g}} \quad (1.16)$$

Όπου d το βάθος πυθμένα, f η συχνότητα και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

1.3.2 Κατευθυντικά φάσματα

Τα μονοδιάστατα φάσματα δε λαμβάνουν υπόψη τους την μεταβολή της διεύθυνσης στις εκφράσεις που τα συνθέτουν. Ωστόσο, η πραγματική θαλάσσια επιφάνεια συντίθεται από μεγάλο αριθμό κυμάτων που έρχονται από διαφορετικές κατευθύνσεις. Για το λόγο αυτό παράλληλα με την κυματική συχνότητα, εισέρχεται στη μαθηματική έκφραση της θαλάσσιας επιφάνειας η κυματική διεύθυνση με τη μορφή της γωνίας θ . Κάθε κυματική συχνότητα περιλαμβάνει κύματα διαφορετικών κατευθύνσεων θ , δίνοντας τα λεγόμενα δισδιάστατα φάσματα που συμβολίζονται ως $E(f, \theta)$ με μορφή όπως στην ακόλουθη εικόνα:



Εικόνα 1.11 : Σχηματική απεικόνιση δισδιάστατου φάσματος $E(f, \theta)$ (CEM 2008). [16]

Η μαθηματική περιγραφή της θαλάσσιας επιφάνειας προκύπτει ως υπέρθεση ενός μεγάλου αριθμού απλών ημιτονοειδών κυματισμών με διαφορετικές συχνότητες και κατευθύνσεις. Συνήθως εξυπηρετεί να εκφράζεται το φάσμα $E(f, \theta)$, που περιγράφει τη γωνιακή κατανομή της κυματικής ενέργειας ως εξής:

$$E(f, \theta) = S(f) \cdot G(f, \theta) \quad (1.17)$$

Όπου $S(f)$ το γνωστό μονοδιάστατο φάσμα και $G(f, \theta)$ μια αδιάστατη ποσότητα γνωστή ως συνάρτηση διάχυσης ή συνάρτηση γωνιακής κατανομής για την οποία ισχύει:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(f, \theta) d\theta = 1 \quad (1.18)$$

Μία έκφραση της συνάρτησης διάχυσης δίνεται από τους St.Denis και Pierson (1953), οι οποίοι εισήγαγαν μία συνάρτηση ανάλογη του τετραγώνου του συνημίτονου της γωνίας θ για την ανάλυση διάθλασης κατευθυντικών κυματισμών:

$$G(f, \theta) = G(\theta) + \frac{2}{\pi} \cdot \cos^2 \theta \quad , \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.19)$$

$$G(\theta) = 0 \quad , \quad |\theta| > \frac{\pi}{2}$$

Με την παραπάνω έκφραση νοείται ότι έχουμε εφαρμογή της παραπάνω σχέσης μόνο γύρω από μία κύρια διεύθυνση $|\theta| < \pi/2$, αλλά στη φύση γενικά ισχύει όχι για ένα ημιεπίπεδο αλλά για κάθε κατεύθυνση $0 < \theta < 2\pi$.

Ο Nagai (1972) γενίκευσε την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας για τις μελέτες διάθλασης την έκφραση:

$$G(\theta) = \frac{2l!!}{\pi \cdot (2l-1)!!} \cdot \cos^{2l} \theta \quad , \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.20)$$

Οι Longuet-Higgins et al. (1963) ανέλυσαν μετρήσεις πεδίου χρησιμοποιώντας την ακόλουθη συνάρτηση διάχυσης:

$$G(\theta) = G(s) \cdot \cos^{2s} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2^{2s-1}}{\pi} \cdot \frac{\Gamma^2 \cdot (s+1)}{\Gamma \cdot (2s-1)} \cdot \cos^{2s} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (1.21)$$

Όπου $G(s)$ ένας παράγοντας κανονικοποίησης για να ικανοποιεί τη σχέση 1,18 και αποτελεί τη σύνδεση της συνάρτησης G με τη συχνότητα f γεγονός που εκμεταλλεύτηκαν μετέπειτα ερευνητές. Οι Mitsuyasu et al. (1975) πρώτοι τυποποίησαν τη μεταβολή της κατευθυντικής διάχυσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα μέσω της παραμέτρου διάχυσης s μέσω της σχέσης:

$$s = s_{\max} \cdot \left(\frac{f}{f_p} \right)^b \quad (1.22)$$

Όπου $b = 5$ για $f < f_p$ και $b = -2.5$ για $f \geq f_p$, ενώ η παράμετρος s_{\max} έχει μέση τιμή ίση με 10 για ανεμογενείς κυματισμούς και εκφράζεται συναρτήσει της αδιάστατης ταχύτητας του ανέμου.

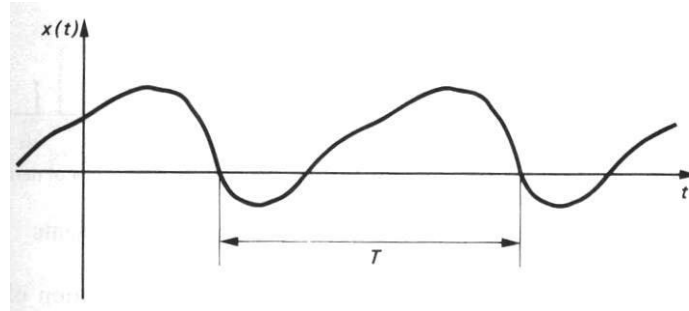
Ο Borgman (1965) πρότεινε την ακόλουθη έκφραση:

$$G(\theta) = \frac{\exp(k \cdot \cos \theta)}{2\pi I_0(k)} \quad (1.23)$$

Όπου I_0 η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης και k παράμετρος προσαρμογής της συμπεριφοράς της $G(\theta)$ με τις δεδομένες συνθήκες του κυματικού πεδίου ομοίως με την παράμετρο s της σχέσης 1.21.

1.4 Ανάλυση Fourier

Βάση της ανάλυσης συχνοτήτων, μία περιοδική συνάρτηση μπορεί να διαχωριστεί στις αρμονικές οι οποίες τη συνθέτουν όπως επίσης γίνεται να συμβεί και το αντίστροφο. Έστω μία περιοδική χρονικά συνάρτηση $x(t)$ με περίοδο T όπως στο ακόλουθο σχήμα (Εικόνα 1.12):



Εικόνα 1.12 : Τυχαία περιοδική χρονικά συνάρτηση με περίοδο T (Newland 1984). [89]

Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί η συνάρτηση $x(t)$ να εκφραστεί σαν μια άπειρη τριγωνομετρική σειρά της μορφής:

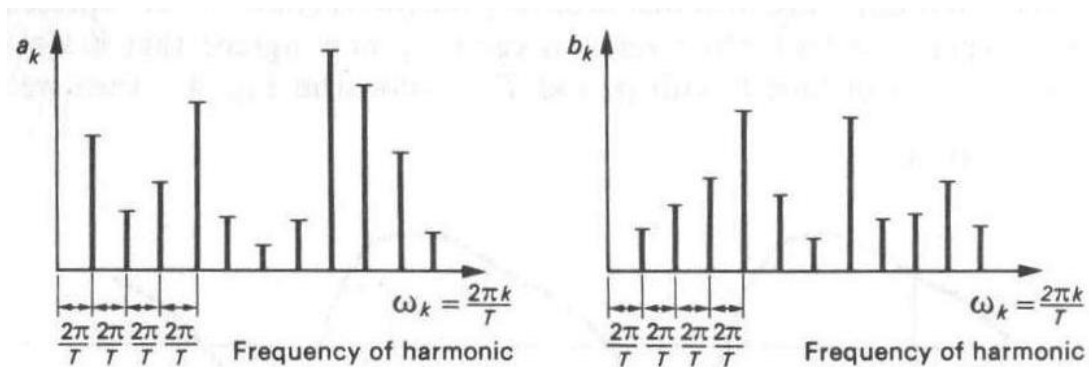
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \cdot \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (1.24)$$

Όπου a_0 , a_k και b_k σταθεροί συντελεστές Fourier που δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (k \geq 1) \quad (1.25)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (k \geq 1)$$

Αν στο προηγούμενο γράφημα μετατοπισθεί ο χρονικός άξονας ώστε να έχουμε ίσα εμβαδά εκατέρωθεν, ο συντελεστής a_0 μηδενίζεται ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές είναι διαφορετικοί μεταξύ τους παίρνοντας τιμές που μπορούν να παρασταθούν γραφικά στην Εικόνα 1.13.



Εικόνα 1.13 : Γραφική παράσταση των συντελεστών Fourier a_k και b_k (Newland 1984). [89]

Στα παραπάνω σχήματα δίνεται στον οριζόντιο άξονα η γωνιακή συχνότητα της k αρμονικής βάσει της σχέσης:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (1.27)$$

Ενώ η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών αρμονικών είναι:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.28)$$

Είναι φανερό ότι όταν η τιμή της περιόδου T γίνει πολύ μεγάλη, η διαφορά συχνοτήτων $\Delta\omega$ γίνεται πολύ μικρή, οι συντελεστές Fourier τείνουν να προσεγγίσουν ο ένας τον άλλον, ενώ οριακά όταν $T \rightarrow \infty$ τότε οριακά προκύπτει $\Delta\omega \rightarrow 0$. Και άρα στην ειδική αυτήν περίπτωση η $x(t)$ δεν συνιστά περιοδική συνάρτηση και δεν μπορεί να αναλυθεί σε διακριτά τμήματα συχνοτήτων. Σε αυτές τις περιπτώσεις και υπό ορισμένες συνθήκες, ακολουθούμε διαδικασία κατά την οποία η συνάρτηση (1.24) μετασχηματίζεται από άθροισμα σε ολοκλήρωμα Fourier και οι συντελεστές Fourier σε συνεχείς συναρτήσεις συχνότητας που ονομάζονται μετασχηματισμοί Fourier.

Αντικαθιστώντας στην αρχική συνάρτηση (1.24) τις τιμές των συντελεστών Fourier για $a_0 = 0$ προκύπτει:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right) \cdot \cos \frac{2\pi kt}{T} + \left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \right) \cdot \sin \frac{2\pi kt}{T} \right] \quad (1.29)$$

Ενώ αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.27) και (1.28) στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\Delta\omega}{\pi} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega_k t dt \right) \cdot \cos \omega_k t + \left(\frac{\Delta\omega}{\pi} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \omega_k t dt \right) \cdot \sin \omega_k t \right] \quad (1.30)$$

Όταν $T \rightarrow \infty$ τότε $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ και το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα με όρια από $\omega = 0$ έως $\omega = \infty$ και άρα έχουμε:

$$x(t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos \omega t dt \right\} \cdot \cos \omega t + \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sin \omega t dt \right\} \cdot \sin \omega t \quad (1.31)$$

Ή απλοποιώντας την εξίσωση θέτοντας:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sin \omega t dt \quad (1.32)$$

Έχουμε:

$$x(t) = 2 \cdot \int_{\omega=0}^{\infty} A(\omega) \cdot \cos \omega t d\omega + 2 \cdot \int_{\omega=0}^{\infty} B(\omega) \cdot \sin \omega t d\omega \quad (1.33)$$

Οι όροι $A(\omega)$ και $B(\omega)$ είναι οι συνιστώσες του μετασχηματισμού Fourier της $x(t)$ και η σχέση (1.33) είναι μία αναπαράσταση της $x(t)$ μέσω ενός ολοκληρώματος Fourier ή ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

Οι σχέσεις (1.32) και (1.33) μπορούν να γραφούν με τη βοήθεια της σχέσης:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (1.34)$$

Που δίνουν τη συνάρτηση $X(\omega)$ ως:

$$X(\omega) = A(\omega) - i \cdot B(\omega) \quad (1.35)$$

Μέσω της σχέσης (1.32) μετασχηματίζεται η (1.35) σε:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot (\cos\theta - i\sin\theta) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (1.36)$$

Η σχέση που προέκυψε δίνει τη συνάρτηση $X(\omega)$ που ονομάζεται μετασχηματισμός της $x(t)$ κατά Fourier. Αποδεικνύεται ότι η σχέση (1.33), δεδομένου ότι η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής, μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$x(t) = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (1.37)$$

Σημαντικό στοιχείο ώστε να υφίσταται το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.36) είναι να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.38)$$

Άρα για $t \rightarrow \infty$ η $x(t)$ τείνει στο μηδέν. Οι συναρτήσεις $x(t)$ και $X(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμού Fourier, ενώ όταν η $x(t)$ είναι πραγματική και άρτια, τότε και η $X(\omega)$ είναι πραγματική και άρτια.

1.5 Προσομοίωση κυματικών χρονοσειρών

Δεδομένου ενός μονοδιάστατου φάσματος είναι απαραίτητο σε ορισμένες περιπτώσεις να χρησιμοποιηθεί το φάσμα για τον υπολογισμό ύψους κύματος, περιόδου και γωνίας φάσης για μία συγκεκριμένη συχνότητα. Αυτού του είδους προσέγγιση για την προσομοίωση τυχαίων κυματισμών από γνωστό κυματικό φάσμα καλείται *ντετερμινιστική φασματική μέθοδος εύρους*, καθώς μεμονωμένες κυματικές συνιστώσες μέσω αυτής της μεθόδου υπέρθεσης είναι ντετερμινιστικές (Borgman 1969). Τυχαίοι κυματισμοί που προσομοιώνονται μέσω αυτής της προσέγγισης είναι δυνατό να μην ικανοποιείται η συνθήκη για μία γκαουσιανή θαλάσσια κατάσταση αν δεν ισχύσει $N \rightarrow \infty$ στο όριο. Πρακτικά, για $200 \leq N \leq 1200$ κυματισμούς, μπορεί να αναπαραχθεί ικανοποιητικά το φάσμα.

Το παραγόμενο κυματικό προφίλ από διάφορες μεθόδους προσομοίωσης χρησιμοποιείται σε έναν αριθμό εφαρμογών μηχανικού παρά το γεγονός ότι απαιτούν έναν μεγάλο αριθμό κυματικών συνιστωσών και σημαντικό υπολογιστικό χρόνο. Οι αλγόριθμοι ARMA (Spanos 1983) και οι ψηφιακές μέθοδοι προσομοίωσης (Hudspeth and Chen 1979) είναι δύο εναλλακτικές για την προσομοίωση τυχαίων κυματισμών από ένα δεδομένο μονοδιάστατο φάσμα.

Υπάρχουν δύο τρόποι για την προσομοίωση του προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας από γνωστά κυματικά φάσματα: ντετερμινιστικές και μη-ντετερμινιστικές φασματικές μέθοδοι εύρους.

Στις ντετερμινιστικές φασματικές μεθόδους το ύψος κύματος, η περίοδος και η γωνία φάσης που σχετίζονται με μία συχνότητα f_1 που αντιστοιχεί σε πυκνότητα ενέργειας $E(f_1)$ μπορούν να υπολογισθούν μέσω των ακόλουθων σχέσεων:

$$\left. \begin{aligned} H(f_1) &= H|_{f_1} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot E(f_1) \cdot \Delta f} \\ T(f_1) &= T|_{f_1} = \frac{1}{f_1} \\ \varepsilon(f_1) &= \varepsilon|_{f_1} = 2\pi r_N \end{aligned} \right\} \quad (1.39a - 1.39c)$$

Όπου η γωνία φάσης ε είναι αυθαίρετη αφού η παράμετρος r_N συνιστά έναν αριθμό με τιμές από μηδέν έως ένα. Οι χρονοσειρές του κυματικού προφίλ σε ένα σημείο x μία χρονική στιγμή t μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης (Tucker et al. 1984):

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^N H(n) \cos[k(n)x - 2\pi f(n)t + \varepsilon(n)] \quad (1.40)$$

Όπου $k = 2\pi/L(n)$ και $L(n)$ το μήκος κύματος της n -οστής συχνότητας $f(n)$, N ο συνολικός αριθμός τμημάτων συχνοτήτων πλάτους Δf . Δεν απαιτείται η κατάτμηση του φάσματος ισόποσα παρά μόνο χάριν διευκόλυνσης υπολογισμών. Η τιμή του ύψους κύματος είναι ευαίσθητη ως προς την επιλογή του Δf , αλλά καθώς παραμένει μικρό, η μέθοδος αυτή παράγει ικανοποιητικό προφίλ τυχαίου κυματισμού. Η χρήση Δf ίσων διαστάσεων, προϋποθέτει το N να είναι μεγαλύτερο από 50 ώστε να έχουμε ικανοποιητική αναπαραγωγή του φάσματος.

Στις μη-ντετερμινιστικές φασματικές μεθόδους, το προφίλ της κυματικής επιφάνειας παριστάνεται σε όρους δύο ανεξάρτητων συντελεστών Fourier. Αυτές οι τυχαίες μεταβλητές a_n και b_n ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή με μηδενικό μέσο και απόκλιση $E(f)\Delta f$ προκύπτουν από τη σχέση:

$$n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot \cos [k(n) - 2\pi f(n)t] + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \sin [k(n) - 2\pi f(n)t] \quad (1.41)$$

Ουσιαστικά, ένα εύρος και μία φάση για συγκεκριμένους κυματισμούς αντικαθίστανται από δύο εύρη, τους συντελεστές των ημιτόνων και συνημιτόνων στο προφίλ του κύματος. Αυτός ο τυχαίος συντελεστής πλησιάζει την αναπαράσταση μιας θάλασσας που ακολουθεί κανονική κατανομή για μεγάλη τιμή του αριθμού N . Οι Elgar et al. (1985) θεώρησαν ταυτόχρονη προσομοίωση στενών και ευρέων φασμάτων χρησιμοποιώντας περισσότερες από 1000 συνιστώσες Fourier και κατέληξαν στη διαπίστωση ότι και οι δύο μέθοδοι αποδίδουν όμοια στατιστικά αποτελέσματα.

1.6 Θραύση κυματισμών

1.6.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα θαλάσσιο κύμα το οποίο διαδίδεται σε πυθμένα με σχετικά μεγάλο βάθος νερού σε σχέση με το μήκος κύματος. Εάν δεν έχουμε επίδραση στη διάδοσή του από κάποιον εξωτερικό παράγοντα όπως άνεμος ή θαλάσσια ρεύματα, το κύμα δε μεταβάλλει τα χαρακτηριστικά του και θεωρείται υδροδυναμικά ευσταθές. Τα θαλάσσια κύματα πλησιάζοντας την ακτή υφίστανται την επίδραση του πυθμένα, όταν το σχετικό βάθος νερού είναι μικρό, δηλαδή $d/L < 0.5$. Μετά την οριακή τιμή του σχετικού βάθους η διατομή του κύματος υφίσταται παραμορφώσεις στις οποίες αξίζει να αναφερθούμε στην μείωση του μήκους κύματος και στη μείωση του ύψους κύματος αρχικά και στη συνέχεια την αύξησή του (καθώς μειώνεται το βάθος πυθμένα).

Οι παραμορφώσεις που υφίσταται το κύμα αυξάνουν σημαντικά όταν το βάθος γίνει μικρότερο από μια κρίσιμη τιμή (η οποία εξαρτάται από την αρχική καμπυλότητα και την κλίση πυθμένα). Μετά την τιμή αυτή το μήκος κύματος μειώνεται, το ύψος κύματος αυξάνεται, η καμπυλότητα του κύματος αυξάνει και εμφανίζονται ασυμμετρίες και υψηλές αρμονικές στη διατομή του. Επίσης, εμφανίζεται στροβιλότητα στην οριακή στοιβάδα κοντά στον πυθμένα. Οι τιμές των παραμορφώσεων αυτών μπορούν να πάρουν κάποιες οριακές τιμές, πέρα από τις οποίες εμφανίζεται το φαινόμενο της θραύσης του κύματος, δηλαδή εμφανίζεται διάχυση ενός σημαντικού ποσοστού ενέργειας του κύματος (υδροδυναμική αστάθεια ενός κύματος).

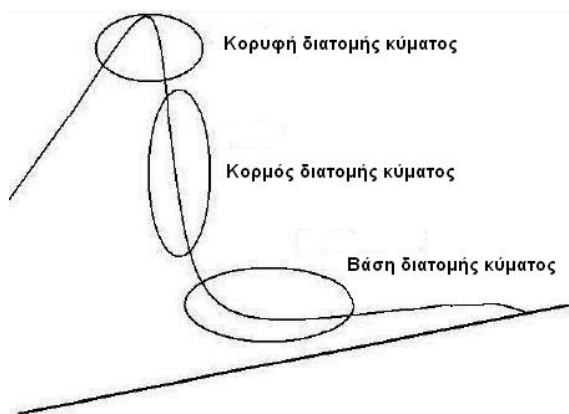
Πρέπει σε αυτό το σημείο να γίνει διαχωρισμός της θραύσης κυματισμών σε βαθιά νερά σε σχέση με τη θραύση λόγω της επίδρασης πυθμένα, καθώς οφείλονται σε διαφορετικά γενεσιουργά αίτια. Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει η θραύση θαλασσίων κυματισμών σε παράκτιες περιοχές λόγω του πυθμένα.

Αρχικά πρέπει να διαχωρίσουμε τις ζώνες της διατομής του κύματος καθώς η θραύση εμφανίζεται σε κάποια εξ'αυτών των διατομών:

Κορυφή διατομής

Κορμός διατομής

Βάση διατομής κύματος



Εικόνα 1.14 : Ζώνες εκδήλωσης θραύσης κυματισμού

Η θραύση που εκδηλώνεται στην κορυφή της διατομής του κύματος είναι η σημαντικότερη για τα έργα του μηχανικού διότι ασκεί τις μεγαλύτερες φορτίσεις στις κατασκευές. Η

εκδήλωση θραύσης σε κάποια από τις ζώνες της διατομής του κύματος εξαρτώνται από τις ακόλουθες παραμέτρους:

- Κλίση πυθμένα $\tan\beta$
- Ύψος κύματος και μήκος κύματος στα βαθιά H_0, L_0
- Σχετικό βάθος νερού d/L

Η θραύση εξαρτάται άμεσα από την κλίση του πυθμένα και την αρχική καμπυλότητα (στα βαθιά) μέσω της κυματικής παραμέτρου ξ_0 η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\xi_0 = \frac{\tan\beta}{\sqrt{\frac{H_0}{L_0}}} \quad (1.42)$$

Όπου β η κλίση του πυθμένα και ο δείκτης «ο» στους όρους, αφορά τα χαρακτηριστικά κύματος για τα βαθιά νερά. Ο όρος H_0/L_0 συνιστά την αρχική καμπυλότητα (βαθέων υδάτων) του κύματος.

Κατά Galvin 1968, Battjes 1974 διακρίνονται οι ακόλουθοι τύποι θραύσης που συνδέονται με την παράμετρο ξ_0 ως ακολούθως:

- Θραύση κυλίσεως (spilling): Η αστάθεια εμφανίζεται στην κορυφή της διατομής του κύματος δημιουργώντας αφρό στο μέτωπο του κύματος.

$$\xi_0 < 0.5$$

- Θραύση εκτινάξεως (plunging): Η κορυφή του κύματος καμπυλώνεται καθώς κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα από τον κορμό του κύματος και υπό την επίδραση της βαρύτητας καταλήγοντας σε έναν ισχυρό παφλασμό.

$$0.5 < \xi_0 < 3.3$$

- Θραύση εφορμήσεως (surging): Η θραύση εμφανίζεται στη βάση της διατομής, ενώ το κύμα συνεχίζει να διαδίδεται προς την ακτή με την απομειωμένη ενέργεια που διατηρεί.

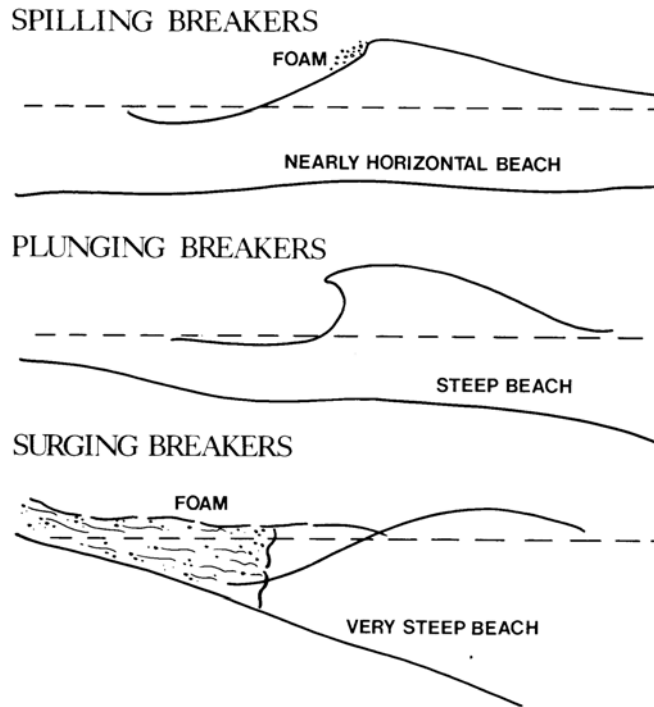
$$\xi_0 > 3.3$$

- Θραύση καταρρεύσεως (collapsing): Το εμπρόσθιο τμήμα της διατομής τείνει να γίνει κατακόρυφο και στη συνέχεια τείνει να καταρρεύσει.

$$\xi_0 > 3.3$$

Οι μορφές θραύσης δεν εμφανίζονται μεμονωμένα στη φύση, αλλά συνήθως εξαρτώνται από τις παραμέτρους που περιγράψαμε, ενώ εναλλάσσονται όσον αφορά την εμφάνισή τους στην παράκτια ζώνη.

Σχηματικά συγκριτικά με την κλίση του πυθμένα, συγκεντρώνουμε στην *Εικόνα 1.15* τους ακόλουθους τύπους εξομοιώνοντας τη μορφή θραύσης εφορμήσεως και καταρρεύσεως οι οποίες εμφανίζονται για πυθμένες μεγάλης κλίσης:



Εικόνα 1.15 : Μορφές θραύσης κυματισμών (σχέση με κλίση πυθμένα). [79]

Όπως προέκυψε και από το διαχωρισμό τύπων θραύσης βάσει της παραμέτρου ξ_0 η θραύση κυλίσσεως τείνει να εμφανίζεται για κύματα υψηλής αρχικής καμπυλότητας και σχετικά ελαφρά κεκλιμένους πυθμένες. Η θραύση τύπου εκτινάξεως εμφανίζεται για σχετικά πιο κεκλιμένους πυθμένες για κύματα ενδιάμεσης αρχικής καμπυλότητας, ενώ οι τύποι εφορμήσεως/καταρρεύσεως συμβαίνουν για κυματισμούς μικρής αρχικής καμπυλότητας και απότομες κλίσεις πυθμένα. Στη θραύση εκτινάξεως καταστρέφεται η κυματομορφή ενώ κύματα μικρού σχετικά εύρους είναι δυνατό να μην υποστούν θραύση, αλλά να ανακλαστούν από την ακτή δημιουργώντας στάσιμα κύματα. Το φαινόμενο της θραύσης συμβαίνει σε μία ζώνη πεπερασμένου εύρους που καλείται ζώνη θραύσεως.

Η θραύση τύπου κυλίσσεως διαφέρει ως προς την κίνηση ρευστού σε σχέση με τα κύματα που δεν έχουν υποστεί θραύση (Dinoky, Le Méhauté, and Lin 1970) και δημιουργούν ασθενέστερη τύρβη κοντά στον πυθμένα με αποτέλεσμα να τείνουν να γίνονται λιγότερο αποδοτικοί στην κίνηση ιζημάτων σε σύγκριση με τους τύπους εκτινάξεως και καταρρεύσεως. Οι πιο έντονες τοπικά κινήσεις ρευστού δημιουργούνται από θραύση τύπου εκτινάξεως, όπου η κορυφή του κύματος που υφίσταται αυτού του τύπου θραύση κινείται σαν αυτόνομη φλέβα υπό πτώση δημιουργώντας την έντονη κίνηση στα υδάτινα μόρια του πυθμένα.

Η μετάβαση από έναν τύπο θραύσεως σε έναν άλλον είναι σύνθετο φαινόμενο όχι πάντα ξεκάθαρο καθώς η επίδραση κατεύθυνσης και έντασης τοπικού ανέμου μπορεί να επηρεάσει τον τύπο θραύσης. Κατά τον Douglass (1990) επεδείχθη ότι άνεμοι που πνέουν από ξηρά (onshore winds) συμβάλλουν στο ότι τα κύματα θραύονται σε μεγαλύτερα βάθη μέσω θραύσης κυλίσσεως, ενώ άνεμοι που πνέουν από τη θάλασσα (offshore winds) βοηθούν ώστε τα κύματα να θραύονται σε πιο ρηχά ύδατα με θραύση τύπου εκτινάξεως.



Εικόνα 1.16 : Θραύση τύπου κυλίσεως (*spilling*)



Εικόνα 1.17 : Θραύση τύπου εκτινάξεως (*plunging*)



Εικόνα 1.18 : Θραύση τύπου εφορμήσεως/καταρρεύσεως (*surging/collapsing*)

1.6.2 Κριτήρια θραύσης

Ένας μεγάλος αριθμός μελετών έχουν πραγματοποιηθεί για την ανάπτυξη σχέσεων που προβλέπουν το ύψος κύματος κατά την έναρξη της θραύσης H_b . Ο όρος δείκτης θραύσης χρησιμοποιείται για την περιγραφή του αδιάστατου ύψους θραύσης. Δύο συνήθεις εκφράσεις είναι ο δείκτης βάθους θραύσης:

$$\gamma_b = \frac{H_b}{d_b} \quad (1.43)$$

Όπου d_b το βάθος στη θραύση. Επίσης ορίζεται και ο δείκτης ύψους θραύσης:

$$\Omega_b = \frac{H_b}{H_o} \quad (1.44)$$

Η έναρξη της θραύσης μπορεί να καθοριστεί με διάφορους τρόπους (Singamsetti and Wind 1980). Ο πιο κοινός τύπος προσδιορισμού είναι το σημείο στο οποίο το ύψος κύματος γίνεται μέγιστο. Άλλοι ορισμοί αναφέρουν το σημείο όπου η κεφαλή του μετώπου του κύματος γίνεται κατακόρυφη (plunging breaker) και το σημείο ακριβώς προτού εμφανισθεί αφρός στην κορυφή της διατομής του κύματος (spilling breaker).

Αρχικά, μελέτες πάνω στο ζήτημα της έναρξης θραύσης πραγματοποιήθηκαν με χρήση μοναχικών κυμάτων. Ο McCowan (1891) θεωρητικά εκτίμησε ότι ο δείκτης βάθους θραύσης ισούται με $\gamma_b = 0.78$ για ένα μοναχικό κύμα που ταξιδεύει πάνω σε οριζόντιο πυθμένα, τιμή που χρησιμοποιείται ως δείκτης πρώτης εκτίμησης σε πρακτικά προβλήματα μηχανικού. Ο Munk (1949) εξήγαγε την έκφραση $\Omega_b = 0.3 \cdot (H_o/L_o)^{-1/3}$ για την εκτίμηση του δείκτη ύψους θραύσης για μοναχικό κύμα. Συνακόλουθες μελέτες, βασισμένες σε περιοδικούς κυματισμούς οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι οι δείκτες θραύσης εξαρτώνται από την κλίση του πυθμένα και την αρχική καμπυλότητα του κύματος.

Από εργαστηριακά δεδομένα σε μονοχρωματικούς κυματισμούς που θραύονται σε λείες επίπεδες κλίσεις, ο Weggel (1972) εξήγαγε την ακόλουθη σχέση για το δείκτη βάθους θραύσης:

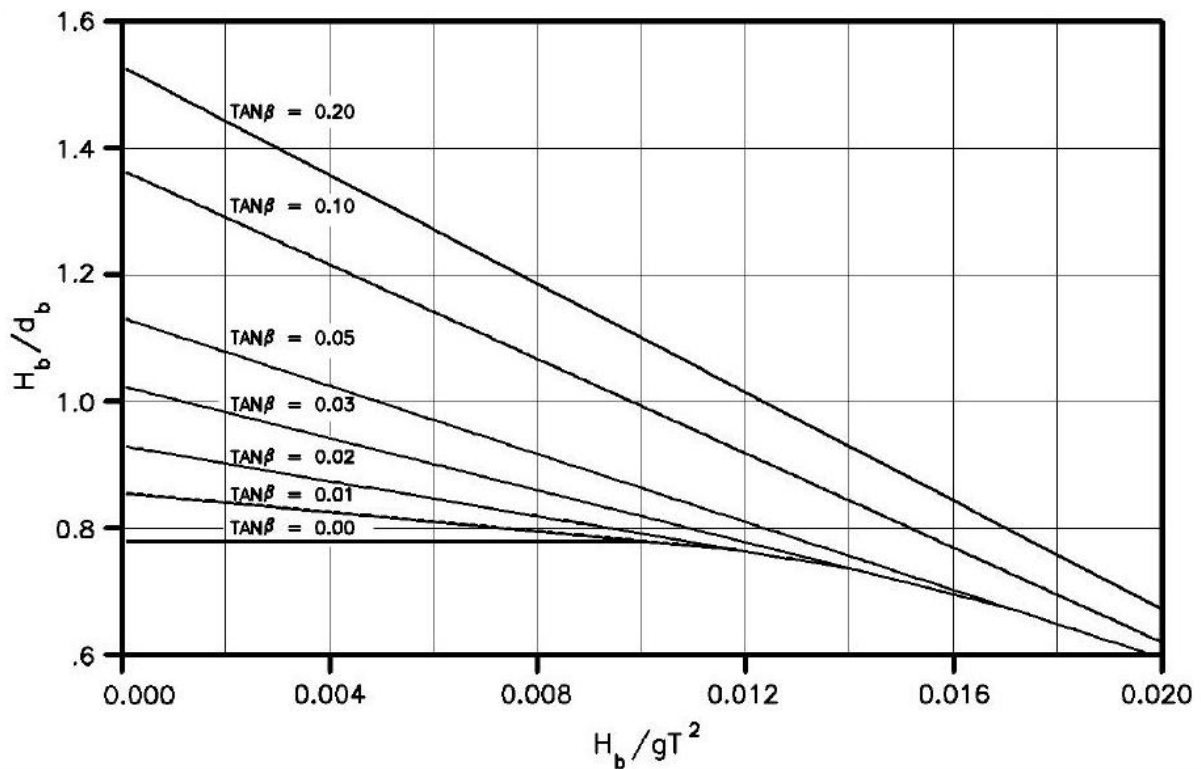
$$\gamma_b = b - a \cdot \frac{H_b}{gT^2} \quad (1.45)$$

Που ισχύει όταν $\tan\beta \leq 0.1$ και $H_o'/L_o \leq 0.06$, ενώ T είναι η περίοδος κύματος, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και H_o' το ισοδύναμο ύψος κύματος στα βαθιά που δεν έχει υποστεί διάθλαση. Οι παράμετροι κλίσης a και b δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$a = 43.81(1 - e^{-19\tan\beta}) , \quad b = \frac{1.56}{1 + e^{-19.5\tan\beta}} \quad (1.46)$$

Στην *Εικόνα 1.19* δίνεται πως επηρεάζεται ο δείκτης βάθους θραύσης από την καμπυλότητα κύματος και την κλίση πυθμένα. Για κύματα μικρής καμπυλότητας, ο δείκτης θραύσης περιορίζεται στη θεωρητική τιμή 0.78 καθώς η κλίση πυθμένα τείνει στο μηδέν και διπλασιάζεται από την θεωρητική τιμή (άθροισμα του αρχικού και του πλήρως ανακλώμενου τμήματος) ή 1.56, καθώς η κλίση πυθμένα τείνει στο άπειρο. Για ανομοιόμορφες κλίσεις ακτών, θα πρέπει να χρησιμοποιείται ο μέσος όρος κλίσης πυθμένα από το σημείο έναρξης

θραύσης μέχρι το σημείο που τελειώνει το ένα μήκος κύματος προς τη μεριά της ανοιχτής θάλασσας.



Εικόνα 1.19 : Συσχετισμός δείκτη βάθους θραύσης με το λόγο H_b/gT^2 (Weggel 1972). [114]

Οι Komar και Gaughan (1973) παρήγαγαν μία ημι-εμπειρική σχέση για το δείκτη ύψους θραύσης από τη γραμμική θεωρία:

$$\Omega_b = 0.56 \cdot \left(\frac{H_o'}{L_o} \right)^{-1/5} \quad (1.47)$$

Όπου η σταθερά 0.56 προέκυψε εμπειρικά από εργαστηριακά δεδομένα και μετρήσεις πεδίου.

Σε σύνθετους κυματισμούς η έναρξη της θραύσης μπορεί να εμφανιστεί σε μία ευρεία ζώνη ως μεμονωμένα κύματα διαφορετικών υψών και περιόδων που φτάνουν τα όρια καμπυλότητάς τους. Στην ζώνη που απαραίτητως όλα τα κύματα έχουν θραυτεί (saturated breaking zone), το ύψος κύματος μπορεί να σχετιστεί με το τοπικό βάθος μέσω της σχέσης:

$$H_{rms,b} = 0.42 \cdot d \quad (1.48)$$

Για το μέσο τετραγωνικό ύψος (rms) κύματος (Thornton και Guza 1983) ή περίπου:

$$H_{mo,b} = 0.6 \cdot d \quad (1.49)$$

Για το ύψος κύματος που αντιστοιχεί στη ροπή μηδενικής τάξης. Το αριθμητικό μοντέλο φασματικού μετασχηματισμού (STWAVE, Smith et al. 2001) χρησιμοποιεί ένα κριτήριο

αναπαραγωγής της θραύσης λόγω ρήξης λαμβάνοντας υπόψη ουσιαστικά τη θραύση λόγω και βάθους και λόγω καμπυλότητας κύματος (Miche 1951):

$$H_{m0,b} = 0.1L \cdot \tanh(kd) \quad (1.50)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε ένα συγκεκριμένο βάθος, ένας σύνθετος κυματισμός που συντίθεται από μεγαλύτερους και μικρότερους κυματισμούς, ο μεγάλος κυματισμός μπορεί να θραυτεί περνώντας το βάθος αυτό, ενώ ο μικρότερος μπορεί να μη θραυστεί. Για το λόγο αυτό ορίζουμε την έννοια του ποσοστού θραυόμενων κυματισμών σε ένα συγκεκριμένο σημείο Q_b και δεδομένης της κατανομής Rayleigh μπορεί να δοθεί ως λύση της εξίσωσης:

$$\frac{1 - Q_b}{\ln Q_b} = \left(\frac{H_{rms}}{H_{max}} \right)^2 \quad (1.51)$$

Όπου H_{rms} το μέσο τετραγωνικό ύψος κύματος και H_{max} το μέγιστο ύψος κύματος σε δεδομένο βάθος το οποίο μάλιστα δίνεται από τη σχέση $H_{max} = \gamma_T \cdot h$ με γ_T σταθερά που ισούται περίπου με 0.6. Προφανώς όταν $H_{rms} \ll H_{max}$ τότε $Q_b \ll 1$ οπότε και έχουμε μη θραυόμενους κυματισμούς.

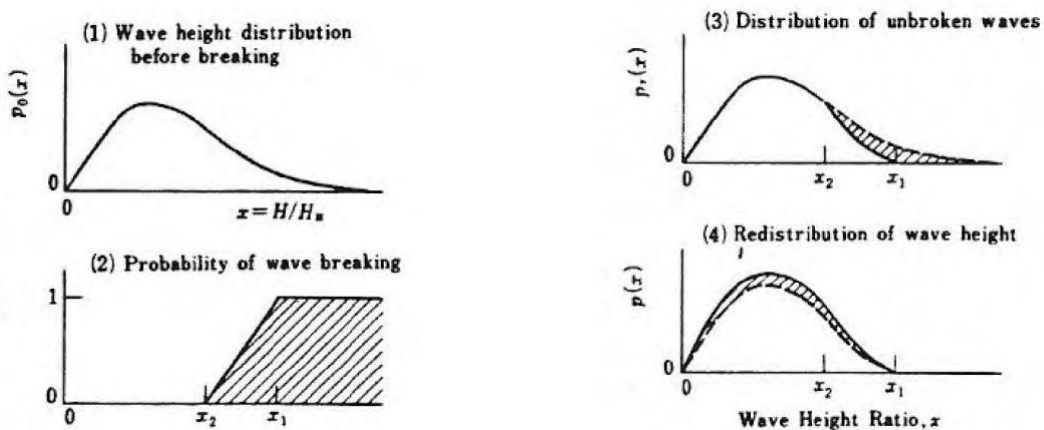
Μία γενική μέθοδος για την πρόβλεψη του ύψους κύματος στη ζώνη θραύσης για μία μακρά ευθεία ακτή προκύπτει από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης ενέργειας:

$$\frac{d(EC_g)}{dx} = -\delta \quad (1.52)$$

Όπου E η κυματική ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας ίση με $E = \bar{E} \cdot \cos\varphi$, $\bar{E} = 0.125\rho g H_{rms}^2$ η μέση πυκνότητα κυματικής ενέργειας, φ η γωνία πρόσπτωσης, C_g η ταχύτητα ομάδας και δ η απώλεια ενέργειας λόγω θραύσης. Η ροή κυματικής ενέργειας EC_g προσδιορίζεται είτε από τη γραμμική είτε από ανώτερης τάξης θεωρία. Η απώλεια ενέργειας λόγω θραύσης δίνεται από την ακόλουθη έκφραση κατά Battjes και Janssen (1978):

$$\delta = 0.25 \cdot Q_b \cdot f \cdot \rho \cdot g \cdot H_{max}^2 \quad (1.53)$$

Όπου ρ η πυκνότητα νερού, H_{max} η μέγιστη τιμή του H_b που αναφέρθηκε παραπάνω και $f = 1/T_p$, T_p η περίοδος κορυφής του φάσματος. Η αποκομμένη κατανομή υψών εντός της ζώνης θραύσης φαίνεται και στην *Εικόνα 1.20* που ακολουθεί:



Εικόνα 1.20 : Αποκομμένη κατανομή υψών εντός της ζώνης θραύσης. [79]

2. Μοντέλα τύπου Boussinesq για τη διάδοση κυματισμών

2.1 Εισαγωγή στα μοντέλα Boussinesq

Τα μοντέλα Boussinesq περιλαμβάνουν εξισώσεις ροής ενός ιδεατού ρευστού στις οποίες έχει απαλειφθεί το βάθος z . Ωστόσο, παραμένει η κατακόρυφη επίδραση της ροής στις εξισώσεις κάτω από την κυματική μορφή. Το στοιχείο αυτό είναι χρήσιμο διότι οι θαλάσσιοι κυματισμοί διαδίδονται στο οριζόντιο επίπεδο, ενώ η συμπεριφορά τους κατά την κατακόρυφη έννοια είναι διαφορετική (σε σχέση με την κυματική διαταραχή). Συχνά, στην περίπτωση των μοντέλων Boussinesq το ενδιαφέρον σε πρώτο επίπεδο εντοπίζεται στην κυματική διάδοση. Η απαλοιφή της κατακόρυφης διάστασης πραγματοποιήθηκε πρώτα από τον Joseph Boussinesq το 1871 με στόχο να προσεγγίσει μία λύση για το μοναχικό κύμα. Η προσέγγισή του περιελάμβανε τα ακόλουθα βήματα:

- Ανάπτυξη κατά Taylor της οριζόντιας και κατακόρυφης ταχύτητας ροής (ή του δυναμικού ταχυτήτων Φ) γύρω από ένα δεδομένο βάθος
- Η ανάπτυξη κατά Taylor περιορίζεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό όρων
- Η διατήρηση μάζας (εξίσωση συνέχειας) για ένα ασυμπίεστο ρευστό και η αστρόβιλη ροή χρησιμοποιούνται ώστε να αντικαταστήσουν τις κατακόρυφες μερικές παραγώγους των ποσοτήτων στα αναπτύγματα κατά Taylor με οριζόντιες μερικές παραγώγους.

Στη συνέχεια, η προσέγγιση Boussinesq εφαρμόζεται στις εξισώσεις ροής ώστε να εξαφανίσουν την εξάρτηση από την κατακόρυφη συντεταγμένη και σαν αποτέλεσμα οι μερικές διαφορικές εξισώσεις δίνονται σε όρους των οριζόντιων συντεταγμένων και του χρόνου. Η ουσία των εξισώσεων Boussinesq βρίσκεται στην απαλοιφή του βάθους z στην περιγραφή εξέλιξης της κυματομορφής, ενώ για να δείξουμε σημαντικά στοιχεία των εξισώσεων επιλέγουμε χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων κατά x και αμελητέα μεταβολή κατά y .

Η έκφραση των εξισώσεων Boussinesq γίνεται με σκοπό την πιστότερη προσομοίωση των κυματικών διαταραχών σε αβαθή ύδατα, την μελέτη φαινομένων ρήχωσης, διάθλασης, ανάκλασης και περίθλασης ώστε να μπορεί ο μελετητής να λάβει υπόψη του τα αποτελέσματα για τον πληρέστερο σχεδιασμό των κατασκευών. Επιπρόσθετα, θα δίνεται η δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης της μορφής της ακτογραμμής και του πυθμένα.

Όπως αποδεικνύεται, οι θεωρίες Stokes ανωτέρας τάξεως δεν μπορούν να εφαρμοσθούν στα αβαθή ύδατα με επάρκεια καθώς δεν μπορούν να συμπεριλάβουν στις εκφράσεις τους το φαινόμενο της θραύσης των κυματισμών και άρα την διάχυση της κυματικής ενέργειας. Ιδιαίτερες απαιτήσεις προσδιορισμού της ζώνης θραύσεως που προκύπτει από την επαλληλία πολλών απλών κυματισμών επιτείνει το πρόβλημα αυτό.

Η περιγραφή που θα ακολουθήσει περιλαμβάνει επαρκώς μακρά κύματα με αναλογία βάθους προς μήκος κύματος μικρότερη από 10% ($d/L < 0.1$). Για να λάβουμε υπόψη μας τη σχέση μεταξύ σχετικού βάθους και παραμέτρου κλίσης του κυματισμού ορίζουμε ένα άνω

όριο που μπορεί να φθάσει το 1/7. Για την ανάλυση των διασπειρόμενων κυματισμών λαμβάνουμε υπόψη δυο σημαντικές παραμέτρους κλίμακας, την παράμετρο $\epsilon=H/d$ ή ζ/d (ύψος κύματος ή ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας προς τοπικό βάθος) η οποία εκφράζει τη μη γραμμικότητα και την παράμετρο $\sigma^2=(d/L)^2$ (τοπικό βάθος προς ένα χαρακτηριστικό μήκος, συνήθως το μήκος κύματος) που εκφράζει την διασπορά συχνοτήτων.

Μια αρχική μορφή των εξισώσεων Boussinesq περιγράφεται με τη βοήθεια της συνάρτησης δυναμικού Φ και της εξίσωσης Laplace σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες πυθμένα και ελεύθερης επιφάνειας για αστρόβιλη ροή ασυμπιέστου ρευστού, οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{για } -h \leq z \leq \zeta(x, t) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g \cdot z = 0 \quad \text{για } z = \zeta(x, t) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{για } z = \zeta(x, t) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{για } z = -h \quad (2.4)$$

Στις παραπάνω σχέσεις αντικαθιστώντας τις εκφράσεις της συνάρτησης δυναμικού ταχυτήτων Φ με την οριζόντια και κατακόρυφη ταχύτητα ροής ($u = \partial \Phi / \partial x$ και $w = \partial \Phi / \partial z$ αντίστοιχα) και διατηρώντας τους όρους πρώτης και δεύτερης τάξης (απαλείφοντας τους όρους ανώτερης τάξης), δίνεται μια πρώτη μορφή των εξισώσεων Boussinesq. Υπάρχει πληθώρα εκφράσεων εξισώσεων τύπου Boussinesq όλες με κοινό σημείο την απαλοιφή της συνιστώσας του βάθους λαμβάνοντας, ωστόσο, μερική επίδραση της κατακόρυφης επιτάχυνσης. Οπότε μία παράμετρος που διαφοροποιεί τις εκφράσεις των σχέσεων είναι ο τρόπος θεώρησης της προαναφερθείσας κατακόρυφης επιτάχυνσης.

Επίσης, μπορούν να προκύψουν διαφορετικές εκφράσεις των εξισώσεων Boussinesq διαφοροποιώντας τη θεώρηση της παραμέτρου οριζόντιας ταχύτητας, επιλέγοντας ως διαφορετικές εκφράσεις:

- την ταχύτητα στη στάθμη ηρεμίας ύδατος $u(x,0,t)$ (velocity at the still water level)
- την ταχύτητα πυθμένα $u(x,-h,t)$ (bottom velocity)
- τη μέση ταχύτητα κατά το στιγμιαίο βάθος $h+\zeta$ (depth-averaged velocity)
- την ταχύτητα σε τυχαίο βάθος (velocity at an arbitrary depth)

Στα ομοιώματα Boussinesq πρέπει να επισημάνουμε ότι η κατακόρυφη κατά το βάθος κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας είναι πολυωνυμική δεύτερου βαθμού και η κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας είναι γραμμική. Σε δισδιάστατη οριζόντια προσομοίωση (2DH) οι εξισώσεις Boussinesq προκύπτουν κατ' αναλογία με την μονοδιάστατη οριζόντια έννοια που περιγράψαμε παραπάνω.

2.2 Εξέλιξη μοντέλων Boussinesq

Οι εξισώσεις τύπου Boussinesq είναι ικανές για να εκτιμήσουν την κυματική εξέλιξη σε παράκτιες περιοχές. Η έναρξη για τις μεταγενέστερες βελτιώσεις στα μοντέλα Boussinesq δόθηκε από δύο γεγονότα. Το πρώτο ήταν η όλο και αυξανόμενη διαθεσιμότητα υπολογιστικών εργαλείων για την πραγματοποίηση των αναλύσεων, ενώ ως δεύτερο γεγονός θεωρήθηκε η ανάπτυξη παραλλαγών της αρχικής θεωρίας η οποία μπορούσε να βελτιστοποιηθεί ώστε να δώσει καλύτερα χαρακτηριστικά διασποράς σε όλο και μεγαλύτερα βάθη ύδατος.

Το αρχικό μοντέλο που περιελάμβανε μέτρια διασπορά και μη γραμμικά χαρακτηριστικά δημιουργήθηκε από τον Boussinesq το 1971. Οι εξισώσεις δημιουργήθηκαν μόνο για οριζόντιο πυθμένα. Αργότερα, οι Mei και LeMéhauté (1966) και ο Peregrine (1967) έδωσαν μορφή εξισώσεων Boussinesq για μεταβλητό βάθος. Οι Mei και LeMéhauté (1966) χρησιμοποίησαν την ταχύτητα του πυθμένα σαν εξαρτημένη μεταβλητή, ενώ ο Peregrine (1967) χρησιμοποίησε ταχύτητα εξαρτώμενη από το βάθος. Αξιοσημείωτη είναι η τεχνική αναπτυγμάτων που χρησιμοποιήθηκε από τον Peregrine για την ολοκλήρωση των εξισώσεων συνέχειας και Euler η οποία πρωτοεμφανίστηκε από τον Keller (1948).

Με τη χρονική πάροδο, τα μοντέλα Boussinesq λάμβαναν όλο και ευρύτερη εφαρμοσιμότητα στη μελέτη κυματικής διάδοσης. Λόγω της μεγάλης δημοφιλίας στην κοινότητα της παράκτιας μηχανικής, οι εξισώσεις του Peregrine (1967) αναφέρονται συχνά ως συνήθεις ή «κλασικές» εξισώσεις Boussinesq, ικανές να περιγράψουν το μη-γραμμικό μετασχηματισμό σύνθετων και πολυκατευθυντικών κυματισμών στα ρηχά νερά. Η κατακόρυφη ταχύτητα θεωρείται ότι μεταβάλλεται γραμμικά με το βάθος.

Οι εξισώσεις Boussinesq εμπεριέχουν τις χαμηλότερης τάξης επιδράσεις διασποράς και μη-γραμμικότητας. Με τον τρόπο αυτόν μπορούν να προσμετρήσουν την μεταφορά ενέργειας ανάμεσα σε τμήματα διαφορετικών συχνοτήτων, αλλαγές στη μορφή της διατομής των κυμάτων και την εξέλιξη των κυματικών ομάδων στην υπό ρήχωση κυματοσειρά (π.χ. Freilich and Guza 1984).

Ωστόσο, οι συνήθεις εξισώσεις Boussinesq (Peregrine, 1967) είχαν δύο βασικούς περιορισμούς που τις καθιστούσε εφαρμόσιμες μόνο σε σχετικά ρηχά νερά: α) το μοντέλο μέσου βάθους αδυνατούσε να περιγράψει ικανοποιητικά τα χαρακτηριστικά διασποράς της διάδοσης κυματισμού στα ενδιάμεσα νερά και β) η ελαφρώς μη-γραμμική θεώρηση περιόριζε τα μέγιστα ύψη κύματος που θα μπορούσαν να προσομοιωθούν. Για τον περιορισμό των αποκλίσεων στην ταχύτητα φάσης μικρότερες από 5% το βάθος ύδατος πρέπει να είναι περίπου ίσο με το $1/5$ του ισοδύναμου μήκους κύματος στα βαθιά (McCowan 1987).

Πρόσφατα, μία μεγάλη προσπάθεια πραγματοποιήθηκε για την επέκταση της εφαρμοσιμότητας των μοντέλων σε βαθύτερα ύδατα με τη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς των εξισώσεων. Ο Witting (1984) χρησιμοποίησε έναν διαφορετικό από τον αρχικό πλήρως μη-γραμμικό, σχετιζόμενο με το βάθος, τρόπο έκφρασης της εξίσωσης ορμής για μία οριζόντια διάσταση, εκφρασμένο ως προς την ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια. Χρησιμοποιήθηκε ανάπτυξη κατά Taylor για το συσχετισμό των διαφορετικών ταχυτήτων-μεταβλητών στις ισχύουσες εξισώσεις, με τις σταθερές της ανάπτυξης να δίνουν τελικά βελτιωμένα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς. Διατηρώντας όρους διασποράς έως και τέταρτης τάξης, ο Witting έλαβε τελικά σχετικά ακριβή αποτελέσματα για κύματα και σε

βαθεία και σε ρηχά νερά. Ωστόσο, οι αναπτύξεις που παρουσιάστηκαν από τον Witting ισχύουν μόνο για σταθερό βάθος πυθμένα.

Οι Murray (1989) και Madsen et al. (1991) εξέτασαν τα χαρακτηριστικά διασποράς διαφόρων μορφών των εξισώσεων Boussinesq συμπεριλαμβανομένης και της ανάπτυξης Padé του Witting (1984). Οι Madsen et al. τροποποίησαν τις εξισώσεις που μελετήθηκαν από τους Abbott et al. (1984), συμπεριλαμβάνοντας βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς στα βαθεία νερά χωρίς, ωστόσο, να προσομοιώνεται η διάδοση των κυματισμών από βαθεία σε ρηχά νερά, δηλαδή η μεταβολή του βάθους, διότι είχε γίνει η αρχική υπόθεση οριζοντίου πυθμένα. Εξέλιξη σε αυτήν την κατεύθυνση έχουμε από τους Madsen και Sørensen (1992) που συμπεριέλαβαν παραγώγους πρώτης τάξης του βάθους στη Σ.Η. για την προσέγγιση των όρων διασποράς, ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί μελέτη σε ελαφρά κεκλιμένο πυθμένα.

Οι Yoon και Liu (1989) παρήγαγαν ένα σύστημα εξισώσεων μελετώντας την αλληλεπίδραση ρευμάτων και ελαφρά μη γραμμικών κυμάτων, μέθοδος η οποία υιοθετήθηκε αργότερα από τον Nwogu (1993) ο οποίος υπέθεσε ίδιας τάξης λόγο βάθους στη Σ.Η. προς μήκος κύματος και χωρικών παραγώγων του βάθους στη Σ.Η.. Αποτέλεσμα εντατικής εργασίας αποτέλεσε η ανάπτυξη ενός συστήματος εξισώσεων Boussinesq με ισχύ σε δύο διαστάσεις.

Ένα χρόνο αργότερα, οι Beji και Battjes (1994) μελέτησαν τη διάδοση κύματος πάνω από τραπεζοειδή διατομή χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς στα βαθεία νερά. Η μελέτη έγινε με παρόμοια τεχνική χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Peregrine (1967) καθώς οι εξισώσεις διαφέρουν από αυτές που ανέπτυξαν οι Madsen et al. (1991). Τα αποτελέσματα του μοντέλου επιβεβαιώθηκαν με διεξαγωγή πειραμάτων σε κυματικό κανάλι.

Εναλλακτικά, προσέγγισαν το θέμα οι Wei και Kirby (1994) οι οποίοι έδωσαν μια πιο άμεση μορφή στις εξισώσεις του Nwogu (1993). Αντί να συμπεριληφθούν οι όροι σφαλμάτων αποκοπής τρίτης παραγώγου, οι πρώτες παράγωγοι διακριτοποιήθηκαν σε τέταρτη τάξη χρονικά και χωρικά. Εκτενέστερη ανάλυση δίνεται σε επόμενη παράγραφο κατά Wei και Kirby (1995). Πρόσθετες βελτιώσεις έγιναν από τους ίδιους μελετητές επεκτείνοντας τις εξισώσεις του Nwogu (1993) ώστε να περιλαμβάνουν όλες τις τάξεις της μη γραμμικής παραμέτρου. Παρότι σε σχέση με τις τυπικές, οι πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό πρόσθετων παραγώγων, περιπλέκοντας την αριθμητική επίλυση. Ωστόσο, οι εξισώσεις επιλύθηκαν σε μία οριζόντια διάσταση από τους Wei et al. (1995) με χρήση του σχήματος εκτίμησης-διόρθωσης των Wei και Kirby (1994). Συγκριτικά με τα αποτελέσματα που δίνονται από μία ακριβή αριθμητικά μέθοδο οριακών στοιχείων των Grilli et al. (1989) προκύπτει σαφώς ότι οι νέες εξισώσεις βελτιώνουν την περιγραφή του μετασχηματισμού του ύψους κύματος στη ρήχωση.

Οι Nadaoka et al. (1994) προσέγγισαν το θέμα από ακόμα μία διαφορετική σκοπιά. Κατέστρωσαν ένα σύστημα εξισώσεων Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις για το οποίο χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Galerkin για την πρόβλεψη της βέλτιστης μορφής του προφίλ οριζόντιας ταχύτητας. Αποτέλεσμα της θεώρησης αυτήν ήταν η παραγωγή ενός μοντέλου με εξαιρετικά χαρακτηριστικά διασποράς σε ένα μεγάλο εύρος βαθών γεγονός που αποδείχθηκε και από μονοδιάστατα πειράματα. Το υπολογιστικό μοντέλο διαμορφώθηκε από τους Beji και Nadaoka (1994) για να ληφθεί η δεύτερη οριζόντια διάσταση στους υπολογισμούς. Στα όρια του υπολογιστικού πεδίου εισήγαγαν φιλτράρισμα των εξερχόμενων

κυματισμών μέσω μίας συνθήκης ακτινοβολίας ανώτερης τάξης που προτάθηκε αρχικά από τους Engquist και Majda (1977). Τέλος οι Beji και Nadaoka (1996) παρουσίασαν ένα σύστημα εξισώσεων Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς, που η διαδικασία κατάστρωσης των επιμέρους εξισώσεων είναι εξαιρετικά σύντομη.

Οι Schäffer και Madsen (1995), μέσω των προσεγγίσεων του Nwogu (1993) και των Madsen και Sørensen (1992), ενσωμάτωσαν πρόσθετες βελτιώσεις σε ένα σύστημα εξισώσεων Boussinesq. Οι Madsen et al. (1996) διατήρησαν τους όρους ανώτερης τάξης στην εξίσωση διασποράς και στη διασπορά εύρους δίνοντας μία νέα μορφή στις εξισώσεις Boussinesq. Οι Schäffer και Madsen (1995) περιέγραψαν μία νέα περίπλοκη (καθώς περιλαμβάνει όρους παραγώγων πέμπτης τάξης) τεχνική βελτίωσης των χαρακτηριστικών γραμμικής διασποράς στα βαθιά νερά. Οι Chen et al. (1996) μέσω της ίδιας τεχνικής βελτίωσαν τη συχνότητα γραμμικής διασποράς λόγω αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος. Οι Madsen και Schäffer (1998) έδωσαν μοντέλα Boussinesq ανώτερης τάξης, τις οποίες ανέπτυξαν σε όρους της οριζόντιας ταχύτητας στη Σ.Η., της μέσης στο βάθος οριζόντιας ταχύτητας και της οριζόντιας ταχύτητας σε τυχαίο βάθος.

Ο Karambas (1999) ανέπτυξε την κατακόρυφη ταχύτητα σε δυναμοσειρά και επέλυσε αναλυτικά την εξίσωση Laplace, δίνοντας ένα σύστημα εξισώσεων Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς για μονοχρωματικούς κυματισμούς. Επιπρόσθετα ο Ζου (1999) καταλήγει σε εξισώσεις με ακρίβεια τρίτης τάξης ($O(\epsilon^2, \epsilon\sigma^2, \sigma^4)$, $\sigma=d/L_0$). Οι κάθετες κατανομές οριζόντιας και κατακόρυφης ταχύτητας εκφράζονται με πολυώνυμα τέταρτης και τρίτης τάξης, αντίστοιχα.

Μεταγενέστερες έρευνες όπως αυτές των Madsen και Schäffer (1998) και Gobbi, Kirby και Wei (2000) αύξησαν το όριο του σχετικού βάθους εφαρμογής των μοντέλων Boussinesq μέχρι $kd=6$ (k : ο αριθμός κύματος, d : το βάθος νερού), ενώ οι Agnon, Madsen και Schäffer (1999) παρουσίασαν μία νέα προσέγγιση χάρη στην οποία μπορεί να επιτευχθεί η ίδια ακρίβεια τόσο στις γραμμικές όσο και στις μη γραμμικές ιδιότητες. Η εργασία των τελευταίων βασίστηκε σε μία ακριβή λύση των οριακών συνθηκών, της ελεύθερης επιφάνειας και του πυθμένα, συνδυάζοντας μία προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Laplace. Το πεδίο ταχυτήτων εκφράστηκε συναρτήσει της κάθετης και της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας στη Σ.Η. καταφέροντας με την προσέγγισή τους να περιγράψουν τα μη γραμμικά κύματα διασποράς μέχρι βάθους $kd=6$, χωρίς όμως να μπορούν να δώσουν μία ακριβή διανομή του κατακόρυφου πεδίου ταχυτήτων.

Ακόμα πιο πρόσφατες μελέτες, οδήγησαν πρακτικά σε εξάλειψη του βάθους νερού ως περιορισμό και είναι σε θέση να αναλύσουν κυματισμούς υψηλής μη γραμμικότητας με μεγάλη ακρίβεια και αποτελεσματικότητα. Μεταξύ των μελετών αυτών συμπεριλαμβάνονται αυτές των Madsen et al. (2002, 2003) οι εξισώσεις των οποίων έχουν ευρύτατη εφαρμογή έως σχετικό βάθος $kd\approx 25$ για την περιγραφή κυματισμών υψηλής μη γραμμικότητας. Υπάρχει δυνατότητα υπολογισμού ταχυτήτων έως και σε σχετικά βάθη $kd\approx 12$, χάρη στην γενίκευση της εργασίας των Agnon, Madsen και Schäffer (1999) επεκτείνοντας τη λύση Laplace από ένα ακαθόριστο επίπεδο- z και όχι από τη Σ.Η..

Οι Bingham και Agnon (2005) παρουσίασαν μία νέα μέθοδο για υψηλής μη-γραμμικότητας πλήρως διασπειρόμενα κύματα η οποία δίνει μικρό σφάλμα προσέγγισης για όλο το εύρος $0\leq kd\leq\infty$, απαλείφοντας ουσιαστικά τον περιορισμό του βάθους. Η μέθοδος που παρουσιάστηκε είναι τύπου Boussinesq, αλλά περιλαμβάνει ένα γενικευμένο δισδιάστατο

(2D) μετασχηματισμό Hilbert για να απαλείψει περιορισμούς στο σχετικό βάθος. Ο μετασχηματισμός Hilbert εκτιμάται μέσω ενός μετασχηματισμού Fourier (FFT).

Ερχόμενοι σε όλο και πιο σύγχρονες έρευνες, αξίζει να αναφερθούμε στη μελέτη του Li (2008) ο οποίος πρότεινε ένα σύστημα εξισώσεων που περιλαμβάνουν τα πλεονεκτήματα της εξίσωσης ήπιας κλίσης και των μοντέλων Boussinesq. Συνδυάζοντας τις δύο μεθόδους περιγράφει πλήρως διασπειρόμενους, απλούς και σύνθετους μη-γραμμικούς κυματισμούς σε όλα τα βάθη καθώς η μεν εξίσωση ήπιας κλίσης (mild slope equation) περιγράφει ικανοποιητικά τη διάδοση απλών γραμμικών κυματισμών σε βαθιά νερά ($kd=10$), ενώ τα μοντέλα Boussinesq περιγράφουν επαρκώς τη διάδοση σύνθετων κυματισμών με έντονα μη-γραμμικό χαρακτήρα σε ρηχότερα ύδατα.

Σε κάθε μελέτη υπάρχουν πάντα πρακτικά προβλήματα σχετικά με το πόσο αποτελεσματικά, ακριβή και σταθερά είναι τα αριθμητικά σχήματα επίλυσης των εξισώσεων. Οι όλο και υψηλότερης τάξεως παράγωγοι συμβάλλουν με την πολυπλοκότητά τους στα προβλήματα αυτά. Λύση συνιστά η χρήση συστημάτων διακριτοποιημένων γραμμικών εξισώσεων για την απλοποίηση των εξισώσεων.

2.3 Εξισώσεις Boussinesq κατά Peregrine (1967, 1972)

Η αρχική μορφή των εξισώσεων Boussinesq δόθηκε από τον Peregrine (1967, 1972) στην οποία στηρίζονται μεταγενέστερες προσεγγίσεις. Η μορφή των εξισώσεων προκύπτει από τις εξισώσεις κίνησης κατά Euler για ιδεατό ρευστό και την εξίσωση συνέχειας αναπτύσσοντας τις εξισώσεις με μία τεχνική παρόμοια με αυτή που εισήγαγε πρώτος ο Keller (1948). Οι εξισώσεις περιγράφουν επαρκώς μακρούς κυματισμούς σε ύδατα μεταβαλλόμενου βάθους.

Στις εξισώσεις οι δύο οριζόντιες διευθύνσεις κατά x και y περιγράφονται με τον ίδιο τρόπο οπότε για την απλοποίηση των εκφράσεων με $\mathbf{u} = (U, V)$ συμβολίζεται το διάνυσμα της μέσης κατά το βάθος ταχύτητας κατά x και y , $d = d(x, y)$ το βάθος μετρούμενο από τη στάθμη ηρεμίας, ενώ ο τελεστής οριζόντιας βαθμίδας ορίζεται ως $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Οπότε οι εξισώσεις κίνησης κατά Euler εκφράζονται με τις σχέσεις:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \nabla p = 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0 \quad (2.5b)$$

Και η εξίσωση συνέχειας δίνει:

$$\nabla \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5c)$$

Επιπροσθέτως, για κάθε θεωρία μακρών κυματισμών ισχύει ότι $O(\sigma^2) \ll 1$, ενώ για απειροστού ύψους κύματα ισχύει $\varepsilon = O(1)$, αλλά για το μοναχικό κύμα και τις εξισώσεις Boussinesq οι παράμετροι σ^2 και ε είναι της ίδιας τάξης ($O(\sigma^2) = O(\varepsilon) \ll 1$). Αυτό το γεγονός δίνει την τελική μορφή των σχέσεων κατά Peregrine οι οποίες δεν αποτελούν τίποτε άλλο

παρά έκφραση της εξίσωσης συνέχειας (διατήρηση μάζας σχ. 2.6) και διατήρησης της ορμής αντίστοιχα (σχ. 2.7):

$$\zeta_t + \nabla[(d + \zeta) \cdot \mathbf{u}] = 0 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{g} \cdot \nabla\zeta = \frac{d}{2} \cdot \nabla[\nabla(d \cdot \mathbf{u}_t)] - \frac{d^2}{6} \cdot \nabla(\nabla\mathbf{u}_t) \quad (2.7)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις μπορούν να απλοποιηθούν ανάλογα με τον αριθμό των διαστάσεων που θέλει να εισάγει ο μελετητής ή να γίνουν πιο πολύπλοκες ανάλογα με τον αριθμό των πρόσθετων μη γραμμικών όρων που επιθυμεί και πάλι ο μελετητής να εισάγει καθώς αναπτύσσει κατά Taylor τις εξισώσεις 2.5a-2.5c.

Για την περίπτωση μονοδιάστατης ανάλυσης (1D) σε οριζόντιο πυθμένα, με θεώρηση πρόσθετων μη γραμμικών όρων, οι Karambas και Kouitias (1992) μετασχημάτισαν τις παραπάνω εξισώσεις στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(d + \zeta) \cdot U] = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{d}{2} \cdot \frac{\partial^3(d \cdot U)}{\partial x^2 \cdot \partial t} - \frac{d^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \cdot \partial t} - \mathbf{g} \cdot \frac{U \cdot |U|}{C^2 \cdot (d + \zeta)} + \nu_T \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

Όπου ν_T (m^2/sec) ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας και C ο συντελεστής τριβής κατά Chezy ($m^{1/2}/sec$). Η παραπάνω θεώρηση σε συνδυασμό με ένα ακριβές αριθμητικό σχήμα δίνει αποδεκτά αποτελέσματα έχοντας τη δυνατότητα να προσομοιώσει την κυματική παραμόρφωση τόσο σε αβαθή ύδατα όσο και στην περιοχή θραύσης εκτιμώντας την απαγωγή της κυματικής ενέργειας λόγω της θραύσης υπό τις δεδομένες συνθήκες.

Στην περιοχή των βαθέων υδάτων ο δείκτης διασποράς σ^2 καθίσταται σημαντικός και άρα δεν μπορούν να εφαρμοσθούν οι εξισώσεις Boussinesq. Για τη γραμμική θεωρία η τιμή της παραμέτρου ϵ είναι ίση με μηδέν και μπορούμε να εκφράσουμε τη σχέση διασποράς με την ακόλουθη έκφραση:

$$\frac{C^2}{g \cdot d} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot k^2 \cdot d^2} \quad \text{ή} \quad \omega^2 = g \cdot d \cdot k^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot k^2 \cdot d^2} \quad (2.10)$$

Η οποία συμπίπτει με τη γνωστή σχέση διασποράς της θεωρίας γραμμικών κυματισμών κατά Airy για μικρές τιμές του γινομένου kd , ενώ για μεγαλύτερες τιμές (βαθεία νερά) προκύπτουν διαφορές. Οπότε μπορεί να περιοριστεί η εφαρμογή των εξισώσεων Boussinesq σε ρηχά νερά σε βαθμό ώστε να επιτύχουμε απόκλιση στην ταχύτητα φάσης έως $\pm 5\%$ εάν θεωρήσουμε ένα σχετικό βάθος εφαρμογής της δεδομένης θεώρησης $d/L_0 \leq 0.22$ (L_0 το μήκος κύματος σε βαθεία νερά).

2.4 Μοντέλα Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς

Όπως προκύπτει από όσα προαναφέρθηκαν, η αδυναμία των εξισώσεων Boussinesq όπως δόθηκαν από τον Peregrine (1971) έγκειται στη συσχέτισή τους με τα χαρακτηριστικά διασποράς της γραμμικής θεωρίας (Airy), γεγονός που δικαιολογεί την ισχύ του μοντέλου μόνο για μικρά σχετικά βάθη (ρηχά νερά). Η προσπάθεια λοιπόν που συνεχίστηκε μεταγενέστερα ώστε να διευρυνθεί η εφαρμογή των νέων εκφράσεων των εξισώσεων Boussinesq, αποσκοπούσε στην βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερα σχετικά βάθη (ενδιάμεσα και βαθιά νερά).

Σε αυτήν την κατεύθυνση πρώτος ο Witting (1984) και στη συνέχεια και άλλοι ερευνητές κινήθηκαν με παρόμοιο τρόπο. Η προσέγγιση δηλαδή για τη βελτίωση του μοντέλου έγινε με εισαγωγή πρόσθετων όρων στην εξίσωση ορμής, ανάλογοι μίας παραμέτρου διασποράς. Στη συνέχεια έγινε ταύτιση των σχέσεων διασποράς με το ανάπτυγμα Padé της σχέσης διασποράς κατά Witting (1984) για τη γραμμική θεωρία και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\omega^2 = g \cdot d \cdot k^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{15} \cdot (k \cdot d)^2}{1 + \frac{2}{5} \cdot (k \cdot d)^2} \quad (2.11)$$

Οι συντελεστές της παραπάνω σχέσης 1/15 και 2/5 εμπεριέχουν την παράμετρο διασποράς που αναφέραμε και παίρνει πλήθος τιμών ανάλογα με το από ποια ταχύτητα παράγεται η εκάστοτε σχέση και συμβολίζεται με διαφορετικό σύμβολο ανά εργασία, ως B κατά Madsen, Murray & Sørensen (1991), ως α και β κατά Nwogu (1993). Η εργασία των Schäffer & Madsen (1995) αποτελεί σταθμό καθώς συγκεντρώνει τα προγενέστερα αποτελέσματα και καταλήγει σε νέα μορφή εξισώσεων με χαρακτηριστικά διασποράς που αντιστοιχούν σε ανάπτυξη κατά Padé της σχέσης διασποράς για τη γραμμική θεωρία με τη χρήση πέντε παραμέτρων διασποράς (α , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2). Στη συνέχεια θα αναφερθούμε εκτενέστερα στα σημαντικότερα μοντέλα Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς με τη χρονική σειρά που παρουσιάστηκαν από τους ερευνητές.

Στο σύνολο των μελετών για την παραγωγή μοντέλων Boussinesq αξίζει να αναφερθούμε επιγραμματικά στις μελέτες (με χρονολογική σειρά) των:

- Madsen et al.(1991)
- Madsen και Sørensen (1992)
- Nwogu (1993)
- Beji και Battjes (1994)
- Wei και Kirby (1995)
- Schäffer και Madsen (1995)
- Wei et al. (1995)
- Madsen και Schäffer (1998)
- Karambas (1999)
- Zou (1999)

2.4.1 Εξισώσεις Boussinesq κατά Madsen et al. (1991)

Η συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζει μία μορφή των εξισώσεων Boussinesq που ισχύει για σύνθετες κυματοσειρές σε δύο διαστάσεων. Από πλευράς υπολογιστικού μοντέλου οι προτεινόμενες εξισώσεις δεν διαφέρουν πολύ από αυτές που προτάθηκαν από τους Abbott et al. (1978). Ωστόσο, οι εξισώσεις που προτάθηκαν σε αυτήν την εργασία παρουσιάζουν βελτιωμένες ιδιότητες της ταχύτητας φάσης και της ταχύτητας ομάδας (C , C_g) για γραμμικά κύματα στα βαθιά νερά.

Οι νέες εξισώσεις θα ικανοποιούν τις ακόλουθες απαιτήσεις:

A. Θα εκφράζονται κατά τις δύο οριζόντιες διαστάσεις σε όρους της ελεύθερης επιφάνειας και της ολοκληρωμένης (κατά το βάθος) ταχύτητας.

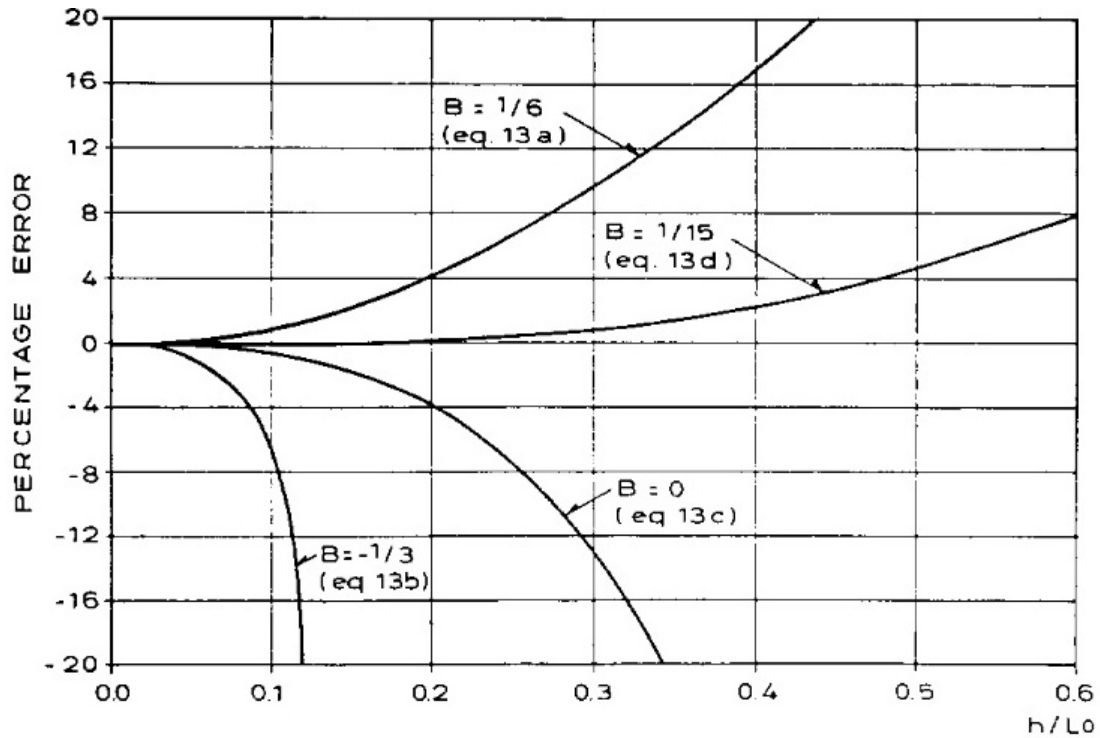
B. Τα προκύπτοντα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς θα ακολουθούν την εξίσωση:

$$\frac{C^2}{g \cdot d} = \frac{1 + B \cdot (k \cdot d)^2}{1 + \left(B + \frac{1}{3}\right) \cdot (k \cdot d)^2} \quad (2.12)$$

Όπου B μία παράμετρος που επιλέγεται ρητά ώστε να βελτιώσει την ακρίβεια σε βαθιά νερά. Οι τιμές που μπορούσε να πάρει η παράμετρος B ως τότε ήταν:

$$B = \begin{cases} 1/6 & \text{για ταχύτητα πυθμένα } U_b \text{ (Svedsen 1974, Witting 1984)} \\ -1/3 & \text{για επιφανειακή ταχύτητα } U_s \text{ (Svedsen 1974)} \\ 0 & \text{από κλασικές εξισώσεις Boussinesq για μέση ταχύτητα } \bar{U} \\ 1/15 & \text{με ανάπτυγμα Padé κατά Witting (1984)} \end{cases}$$

Από τα αποτελέσματα των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν, προκύπτει ότι η τελευταία προσέγγιση γίνει και τα καλύτερα αποτελέσματα. Στο διάγραμμα που (Σχήμα 2.1) ακολουθεί δίνεται στον κάθετο άξονα το ποσοστό σφάλματος της ταχύτητας φάσης για τις διάφορες μορφές των εξισώσεων Boussinesq σε σχέση με την προκύπτουσα ταχύτητα φάσης από τη θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης ($100(C - C_{\text{Stokes}})/C_{\text{Stokes}}$), ενώ στον κάθετο άξονα δίνεται το σχετικό βάθος h/L_o (βάθος προς μήκος κύματος στα βαθιά).



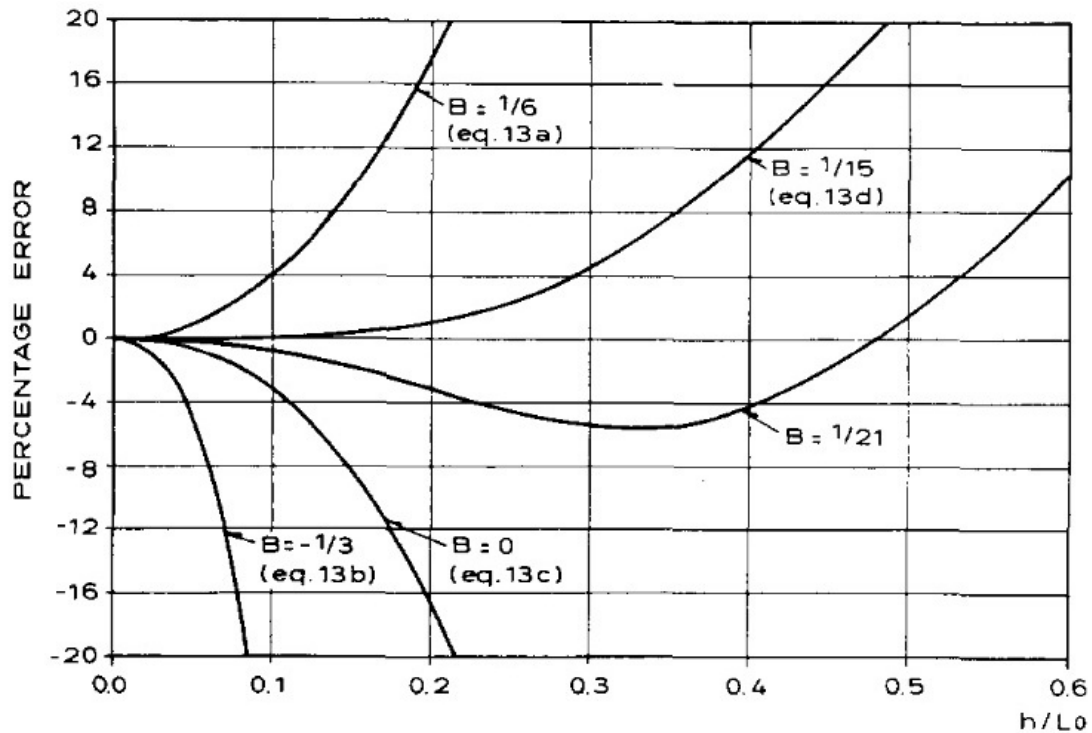
Σχήμα 2.1: Απόκλιση (%) ταχύτητας φάσης διαφόρων μορφών των εξισώσεων Boussinesq σε σχέση με τη γραμμική θεωρία Stokes. [69]

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι για να έχουμε ένα επαρκές σφάλμα περί την τιμή 5% το σχετικό βάθος που μπορεί να ισχύσει το μοντέλο Boussinesq είναι για $h/L_0 \leq 0.22$ (με εξαίρεση τη θεώρηση της παραμέτρου $B = -1/3$). Παρατηρούμε ότι η πιο επιτυχής θεώρηση προκύπτει από την προσέγγιση Padé κατά Witting που δίνει δυνατότητα εφαρμογής έως σχετικό βάθος $h/L_0 \leq 0.50$.

Η ίδια διερεύνηση πραγματοποιήθηκε από την εργασία αυτή και για την ταχύτητα ομάδας (C_g). Η εξίσωση γραμμικής διασποράς συναρτήσει της ταχύτητας ομάδας έχει τη μορφή:

$$C_g = C \cdot \left[1 + \frac{B \cdot (k \cdot d)^2}{1 + B \cdot (k \cdot d)^2} - \frac{\left(B + \frac{1}{3}\right) \cdot (k \cdot d)^2}{1 + \left(B + \frac{1}{3}\right) \cdot (k \cdot d)^2} \right] \quad (2.13)$$

Με την παράμετρο B να παίρνει τις ίδιες τιμές με πριν ανάλογα με την αρχική θεώρηση ταχυτήτων, η απόκλιση της ταχύτητας ομάδας για μοντέλο Boussinesq σε σχέση με την ταχύτητα ομάδας της θεωρίας Stokes 1^{ης} τάξης δίνεται στο ακόλουθο Σχήμα 2.2:



Σχήμα 2.2: Απόκλιση (%) ταχύτητας ομάδας διαφόρων μορφών των εξισώσεων Boussinesq σε σχέση με τη γραμμική θεωρία Stokes. [69]

Από το διάγραμμα προκύπτει το ότι αν θέλουμε να περιορίσουμε την απόκλιση των ταχυτήτων ομάδας σε ένα ποσοστό περίπου 6% τα σχετικά βάθη ισχύος για όλες τις τιμές της παραμέτρου B είναι:

$$h/L_0 = \begin{cases} 0.055 & (B=1/6) \\ 0.12 & (B=-1/3) \\ 0.13 & (B=0) \\ 0.32 & (B=1/15) \end{cases}$$

Όπου και πάλι προκύπτει η υπεροχή της μεθόδου του Witting που δίνει την ευρύτερη εφαρμογή του μοντέλου Boussinesq για μεγαλύτερα σχετικά βάθη και έδωσε την έμπνευση για την νέα μορφή των εξισώσεων. Ξεκινώντας από την κλασική μορφή των εξισώσεων Boussinesq που επιλύθηκαν από τους Abbott et al. (1984) έχουμε:

$$S_t + P_x + Q_y = 0 \quad (2.14a)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{P \cdot Q}{d}\right)_y + g \cdot d \cdot S_x - \frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot (P_{xxt} + Q_{xyt}) = 0 \quad (2.14b)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{P \cdot Q}{d}\right)_x + g \cdot d \cdot S_y - \frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot (Q_{yyt} + P_{xyt}) = 0 \quad (2.14c)$$

Όπου

d το συνολικό βάθος του νερού (=h+ζ)

h το βάθος του ακίνητου αποδέκτη
S η ανύψωση της επιφάνειας
P, Q οι ολοκληρωμένοι κατά το βάθος όροι ταχύτητας (m²/sec) κατά x και y

Η σχέση γραμμικής διασποράς που συνδέει τις παραπάνω σχέσεις είναι η σχέση 2.12 για B=0. Μια κλασική διαδικασία απλοποίησης όρων υψηλότερων τάξεων είναι η εισαγωγή εξίσωσης μακρών κυματισμών σαν πρώτη προσέγγιση (Mei, 1983). Για έναν ήπιας κλίσης θαλάσσιο πυθμένα οι χωρικές παράγωγοι της στάθμης ηρεμίας μπορούν να αμεληθούν και σαν πρώτη προσέγγιση λαμβάνουμε:

$$(P_{xxt} + Q_{xyt}) \approx -g \cdot h \cdot (S_{xxx} + S_{xyy}) \quad (2.15a)$$

$$(Q_{yyt} + P_{xyt}) \approx -g \cdot h \cdot (S_{yyy} + S_{yxx}) \quad (2.15b)$$

Έτσι, η προσέγγιση των εξισώσεων (2.14a-2.14c) μπορεί να δοθεί με χρήση της παραπάνω προσέγγισης, η οποία για ρηχά νερά δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, αλλά για βαθύτερα ύδατα τα χαρακτηριστικά διασποράς θα ήταν πολύ «πτωχά» με χρήση συντελεστή B=-1/3 όπως προέκυψε προηγουμένως (σχήμα 1.1).

Οπότε επιλέγοντας οι Madsen et al. (1991) τη θεώρηση των ακόλουθων ποσοτήτων:

$$\epsilon_1 \equiv -B \cdot h^2 \cdot [P_{xxt} + Q_{xyt} + g \cdot h \cdot (S_{xxx} + S_{xyy})] \quad (2.16a)$$

$$\epsilon_2 \equiv -B \cdot h^2 \cdot [Q_{yyt} + P_{xyt} + g \cdot h \cdot (S_{yyy} + S_{yxx})] \quad (2.16b)$$

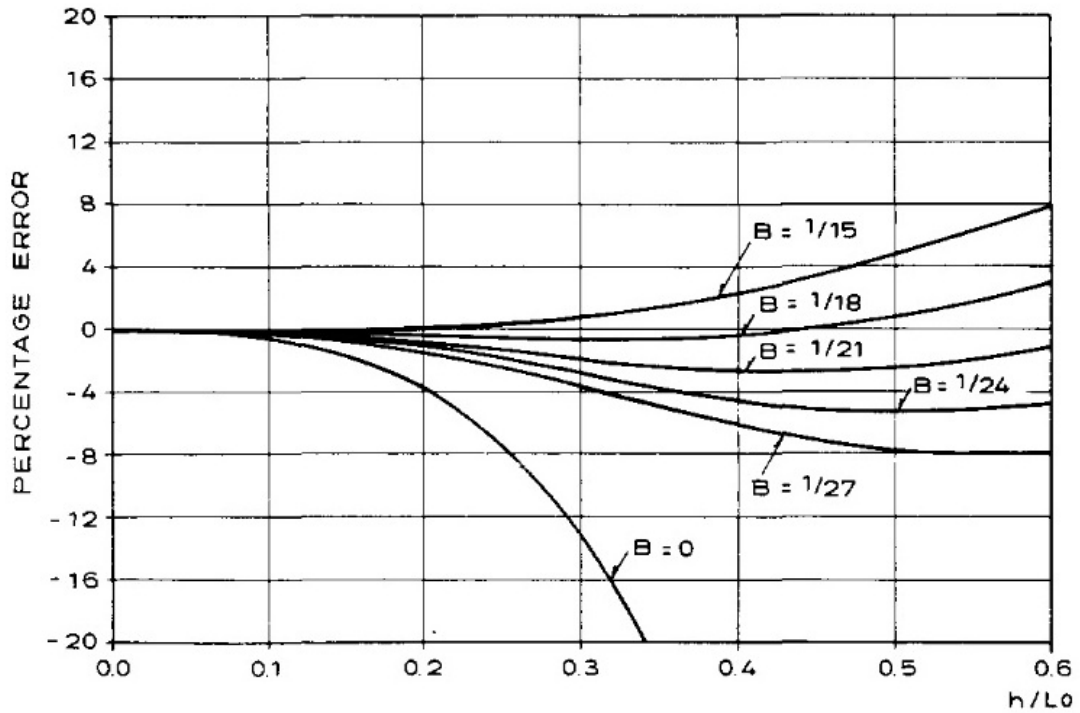
Σύμφωνα με τις εξισώσεις 2.15a-2.15b οι παραπάνω όροι είναι ασήμαντοι για τα ρηχά νερά και μπορούν να προστεθούν στις εξισώσεις Boussinesq χωρίς να επηρεάσουν την ακρίβειά τους και άρα έχουμε:

$$S_t + P_x + Q_y = 0 \quad (2.17a)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{PQ}{d}\right)_y + gdS_x - \left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(P_{xxt} + Q_{xyt}) - Bgh^3(S_{xxx} + S_{xyy}) = 0 \quad (2.17b)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{PQ}{d}\right)_x + gdS_y - \left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(Q_{yyt} + P_{xyt}) - Bgh^3(S_{yyy} + S_{yxx}) = 0 \quad (2.17c)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ικανοποιούν την απαίτηση που τέθηκε από την αρχή, τα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς να ακολουθούν τη σχέση (2.12) και η ταχύτητα ομάδας τη σχέση (2.13) και μάλιστα η παράμετρος B πλέον δεν παίρνει μόνο τις τιμές που περιγράψαμε, αλλά αποτελεί ένα συντελεστή προσαρμογής του μοντέλου στα αποτελέσματα της θεωρίας Stokes 1^{ης} τάξης. Στο ακόλουθο Σχήμα 2.3, όπου δίνονται τα αποτελέσματα της προσέγγισης προκύπτει ότι για B =1/21 η απόκλιση της ταχύτητας φάσης είναι πλέον μικρότερη από 3% για σχετικά βάθη έως h/L₀<0.75 (και η απόκλιση της ταχύτητας ομάδας ίση με 6% για σχετικά βάθη h/L₀<0.55):



Σχήμα 2.3: Απόκλιση (%) ταχύτητας φάσης σε σχέση με τη γραμμική θεωρία Stokes για C κατά Madsen et al. (1991) (σχέση 1.8). [69]

Η προσθήκη υψηλότερης τάξης μη γραμμικών όρων δυσχεραίνει την πρακτική πλευρά του μαθηματικού ομοιώματος περισσότερο σε σχέση με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που επιτυγχάνει.

2.4.2 Εξισώσεις Boussinesq κατά Nwogu (1993)

Σε αυτήν την εργασία παρουσιάζεται ένας εναλλακτικός τύπος δισδιάστατων εξισώσεων Boussinesq μεταβλητού βάθους, χρησιμοποιώντας την ταχύτητα σε τυχαίο βάθος (έστω z_a) από την ελεύθερη επιφάνεια ως μεταβλητή ταχύτητας. Οι εξισώσεις προκύπτουν από συνεχή διαφορίση της εξίσωσης συνέχειας και των εξισώσεων κίνησης κατά Euler και είναι εφαρμόσιμες για κύματα που διαδίδονται σε μεταβλητό βάθος. Οι εξισώσεις κατά Nwogu (1992) δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\zeta_t + \nabla[(d + \varepsilon\zeta) \cdot \mathbf{u}_a] + \mu^2 \nabla \left\{ \left(\frac{z_a^2}{2} - \frac{d^2}{6} \right) d \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_a) + \left(z_a + \frac{d}{2} \right) d \nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_a)] \right\} = 0 \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{u}_{at} + \nabla\zeta + \varepsilon(\mathbf{u}_a \cdot \nabla)\mathbf{u}_a + \mu^2 \cdot \left\{ \frac{z_a^2}{2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{at}) + z_a \nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_{at})] \right\} = 0 \quad (2.18b)$$

Όπου $\varepsilon = \alpha_0/h_0$ (τυπικό κυματικό εύρος/χαρακτηριστικό βάθος ύδατος) και $\mu = h_0/L$ (L : τυπικό μήκος κύματος για την οριζόντια διεύθυνση) και $\mathbf{u}_a = (u_a, v_a)$ είναι το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας σε βάθος z_a .

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παριστά την οριζόντια διάδοση σύνθετων πολύκατευθυντικών κυματισμών σε ύδατα μεταβλητού βάθους εκφράζοντας την εξίσωση συνέχειας (διατήρηση μάζας) και ορμής αντίστοιχα, με δεδομένο ότι $O(\varepsilon) = O(\mu^2) \ll 1$ και $O(\nabla h) = O(1)$. Σε σχέση με τις εξισώσεις κατά Peregrine (1967) εισέρχεται στην εξίσωση συνέχειας ένας πρόσθετος όρος διασποράς που την καθιστά μη ακριβή, ενώ οι συντελεστές των όρων διασποράς στην εξίσωση ορμής είναι διαφορετικοί.

Απλοποιώντας το φαινόμενο για την περίπτωση μονοδιάστατης διάδοσης (1D) με σταθερό βάθος αποδέκτη, οι εξισώσεις κατά Nwogu δίνουν:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + d \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta \mathbf{u}_a)}{\partial x} + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \cdot d^3 \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{u}_a}{\partial x^3} = 0 \quad (2.19a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{u}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial x} + \alpha \cdot d^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_a}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.19b)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_a}{d} \right)^2 + \frac{z_a}{d}$$

Γραμμικοποιώντας το παραπάνω σύστημα και αντικαθιστώντας μία λύση της μορφής $\zeta = \alpha \cdot \exp[i \cdot (kx - \omega t)]$ και $u_a = u_0 \cdot \exp[i \cdot (kx - \omega t)]$ προκύπτει μία λύση γραμμικής διασποράς της μορφής:

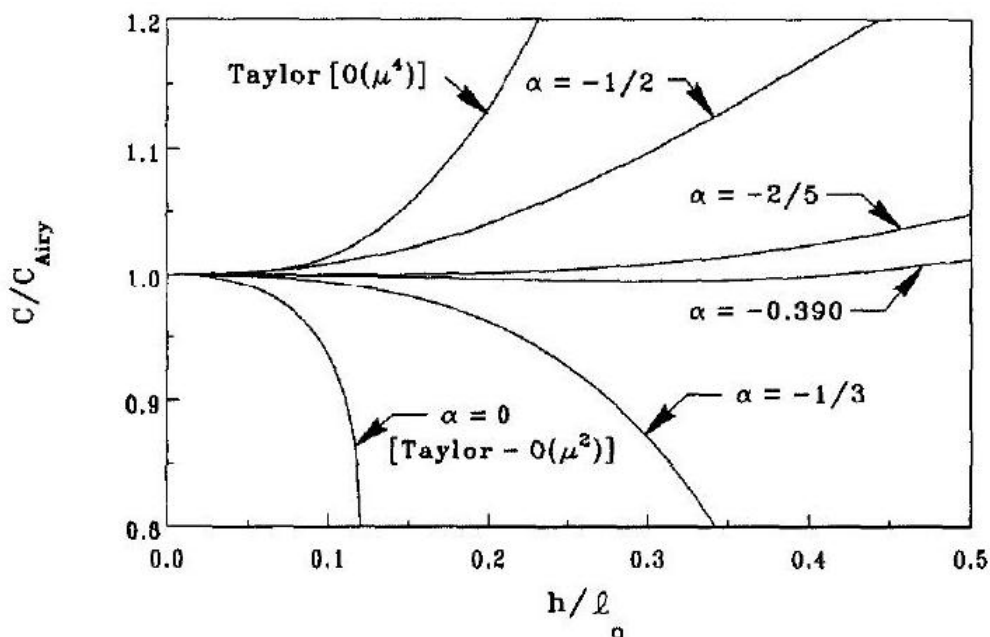
$$\frac{C^2}{g \cdot d} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \cdot (kd)^2}{1 - \alpha \cdot (kd)^2} \quad (2.20)$$

Οι κλασικές εξισώσεις Boussinesq αντιστοιχούν σε $\alpha = -1/3$, ενώ η σχέση γραμμικής διασποράς για τη γραμμική θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης (Airy) είναι:

$$\frac{C^2}{g \cdot d} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\tanh(kd)}{kd} \quad (2.21)$$

Στα ρηχά νερά έχουμε $kd \rightarrow 0$ οπότε και έχουμε σύγκλιση σχέσεων διασποράς ασυμπτωτικά. Το πρόβλημα δημιουργείται σε βαθύτερα νερά όπου οι αποκλίσεις αυξάνονται για τυχαίες τιμές της παραμέτρου α .

Συνεπώς βασικό πλεονέκτημα των εξισώσεων του Nwogu είναι η δυνατότητα βελτιστοποίησης της παραμέτρου α με τέτοιο τρόπο ώστε για δεδομένη περιοχή τιμών kd να έχουμε προσέγγιση αποτελεσμάτων στην γραμμική θεωρία. Για $\alpha = -2/5$ η σχέση 2.20 μεταπίπτει στη σχέση 2.12 για $B=1/15$ ήτοι την προσέγγιση Padé κατά Witting (1984). Ο Nwogu προσδιόρισε βέλτιστη τιμή $\alpha = -0.39$ που αντιστοιχεί σε βάθος $z_a = -0.53d$ προσέγγιση η οποία δίνει μέγιστη απόκλιση από τη γραμμική θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης μικρότερη από 2% για εύρος λόγου h/L_o μεταξύ των τιμών 0 και 0.5, ενώ οι κλασικές εξισώσεις Boussinesq για $\alpha = -1/3$ δίνουν ποσοστό λάθους 85% για μέγιστο σχετικό βάθος $h/L_o < 0.48$. Στο Σχήμα 2.4 φαίνονται και οπτικά τα αποτελέσματα απόκλισης της ταχύτητας φάσης από τη γραμμική θεωρία.

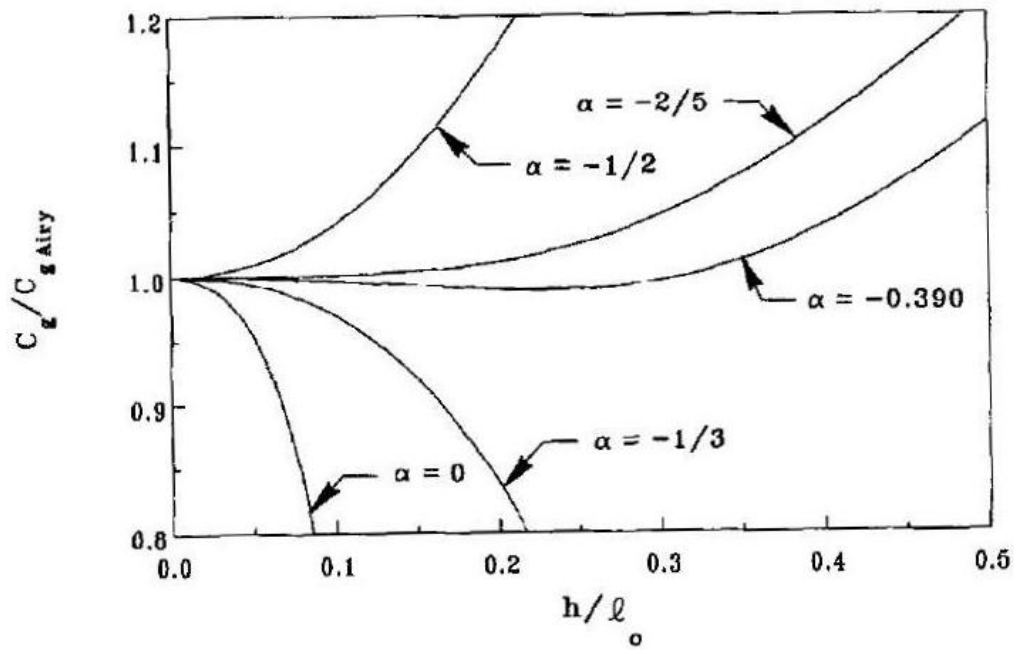


Σχήμα 2.4: Σύγκριση κανονικοποιημένης ταχύτητας φάσης για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου α (Nwogu 1993). [90]

Για λόγους πληρότητας δίνουμε και την έκφραση της ταχύτητας ομάδας που προτείνεται μέσω της νέας μορφής των εξισώσεων:

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C \cdot \left\{ 1 - \frac{\frac{(kd)^2}{3}}{[1 - \alpha \cdot (kd)^2] \cdot [1 - (\alpha + \frac{1}{3}) \cdot (kd)^2]} \right\} \quad (2.22)$$

Η οποία για την τιμή που προτείνει ο Nwogu δίνει και για την ταχύτητα ομάδας μέγιστη απόκλιση ίση με 12% για μεγαλύτερο σχετικό βάθος, αποτέλεσμα σαφώς πιο βελτιωμένο από τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.5:



Σχήμα 2.5: Σύγκριση κανονικοποιημένης ταχύτητας ομάδας για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου α (Nwogu 1993). [90]

Οι εξισώσεις κατά Nwogu (1992) σε μία οριζόντια διάσταση, επιλύθηκαν με χρήση ενός προσεγγιστικού σχήματος Crank-Nicholson, συμπεριλαμβάνοντας τους όρους σφαλμάτων αποκοπής τρίτης παραγώγου ως διαταραχές με επανατοποθέτηση στο αριθμητικό σχήμα που υιοθετήθηκε.

2.4.3 Αριθμητικό σχήμα επίλυσης κατά Wei και Kirby (1995)

Οι ερευνητές Wei και Kirby (1995) χρησιμοποίησαν τις εξισώσεις Boussinesq που παρήχθησαν από το Nwogu (1992) 2.18a και 2.18b οι οποίες δίνονται (χάριν οπτικής διευκόλυνσης), έχοντας αφαιρέσει τις παραμέτρους ϵ και μ , παρακάτω:

$$\zeta_t + \nabla[(d + \zeta) \cdot \mathbf{u}_a] + \nabla \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{d^2}{6} \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_a) + \left(z_\alpha + \frac{d}{2} \right) \nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_a)] \right\} = 0 \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{u}_{at} + g\nabla\zeta + (\mathbf{u}_a \cdot \nabla)\mathbf{u}_a + \left\{ \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{at}) + z_\alpha \nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_{at})] \right\} = 0 \quad (2.23b)$$

Για την επίλυση καταστρώθηκε ένα πιο ακριβές σχήμα στο οποίο η χωρική διακριτοποίηση σε όρους πρώτης τάξης γίνεται με ακρίβεια τέταρτης τάξης, οδηγώντας σε ένα σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x^4, \mu^2)$ συγκριτικά με τους όρους διασποράς του μοντέλου $O(\mu^2)$. Επιπρόσθετα, οι όροι διασποράς διακριτοποιούνται σε δεύτερη τάξη οδηγώντας σε σφάλματα τάξης $O(\Delta x^2)$ σε σύγκριση με τους πραγματικούς όρους διασποράς. Οι εξισώσεις γράφονται με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνεται δυνατή η υψηλότερης τάξης διακριτοποίηση κατά το χρόνο η οποία γίνεται και αυτή με ακρίβεια τέταρτης τάξης. Το σύνθετο αριθμητικό σχήμα που προκύπτει αποτελείται από το ρητό σχήμα τρίτης τάξης Adams-Bashforth (για το βήμα πρόβλεψης) και το ρητό σχήμα τέταρτης τάξης Adams-Moulton (για το βήμα διόρθωσης που ολοκληρώνεται με χρήση ενός απλού κριτηρίου σύγκλισης).

Το σχήμα αυτό χρησιμοποιήθηκε μεταγενέστερα από πολλούς άλλους ερευνητές και θα αποτελέσει βάση για την ανάπτυξη του μοντέλου Boussinesq της παρούσας εργασίας.

2.4.4 Εξισώσεις Boussinesq κατά Zou (1999)

Σε αυτήν την εργασία παρουσιάζεται από τον Zou μία νέα μορφή των εξισώσεων Boussinesq με ακρίβεια τρίτης τάξης $O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4)$ ενώ οι χωρικές παράγωγοι 4^{ου} βαθμού εκφράζονται με ακρίβεια 2^{ου} βαθμού. Οι κατακόρυφες κατανομές οριζόντιων και κατακόρυφων ταχυτήτων είναι πολυώνυμα 4^{ου} και 3^{ου} βαθμού αντίστοιχα.

Για την περίπτωση οριζόντιου πυθμένα οι εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης δίνουν (με χρήση της μέσης κατά το βάθος ταχύτητας $\bar{\mathbf{u}}$):

$$\zeta_t + \nabla[(d + \zeta) \cdot \bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (2.24a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + g\nabla\zeta + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + G = \frac{1}{3} \cdot (d + \zeta)^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t) + \frac{1}{15} d^2 \nabla[\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}_t + g\nabla\zeta)] \quad (2.24b)$$

$$G = \frac{1}{3} \nabla \left\{ d^2 \left[(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})^2 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{10} \nabla^2 (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right] \right\} - d\nabla\zeta \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t \quad (2.24c)$$

Για πυθμένα μεταβλητού βάθους και υπόθεση ήπιας κλίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $O(\nabla h) \leq O(\mu)$ ή $\nabla h = O(\mu^2)$ οι εξισώσεις Boussinesq που θα προκύψουν είναι:

$$\zeta_t + \nabla[(d + \zeta) \cdot \bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_t + g\nabla\zeta + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + G &= \frac{1}{2} \cdot (d + \zeta) \nabla(\nabla \cdot (h\bar{\mathbf{u}}_t)) - \frac{1}{6} \cdot (d + \zeta)^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t) \\ &+ \frac{1}{15} d^2 \nabla[\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}_t + g\nabla\zeta)] \end{aligned} \quad (2.25b)$$

$$G = \frac{1}{3} \nabla \left\{ d^2 \left[(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})^2 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{10} \nabla^2 (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right] \right\} - d\nabla\zeta \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{2} \zeta \nabla[\nabla \cdot (d\bar{\mathbf{u}}_t)] \quad (2.25c)$$

Οι οποίες προέκυψαν ουσιαστικά ίδιες με τις προηγούμενες με την διαφορά της προσθήκης ενός πρόσθετου όρου για την προσμέτρηση της ήπιας κλίσης. Τέλος για τη βελτίωση της απόκρισης του μοντέλου από τα βαθειά στα ρηχά νερά έχουμε την προσθήκη δύο ακόμα όρων στην εξίσωση ποσότητας κίνησης μέσω δύο παραμέτρων B_1 και B_2 οπότε το σύστημα των εξισώσεων γίνεται:

$$\zeta_t + \nabla[(d + \zeta) \cdot \bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_t + g\nabla\zeta + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + G &= \frac{1}{2} \cdot (d + \zeta) \nabla(\nabla \cdot (d\bar{\mathbf{u}}_t)) - \frac{1}{6} \cdot (d + \zeta)^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t) \\ &+ B_1 d^2 \nabla[\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}_t + g\nabla\zeta)] + B_2 \nabla[\nabla \cdot (d^2 \bar{\mathbf{u}}_t + gd^2 \nabla\zeta)] \end{aligned} \quad (2.26b)$$

$$G = \frac{1}{3} \nabla \left\{ d^2 \left[(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})^2 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{10} \nabla^2 (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right] \right\} - \frac{1}{2} \zeta \nabla[\nabla \cdot (h\bar{\mathbf{u}}_t)] \quad (2.26c)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μεταπίπτουν στις εξισώσεις κατά Schäffer και Madsen (1995) αμελώντας το μεγαλύτερης τάξης μη γραμμικό όρο G , αμελώντας τις δεύτερης τάξης παραγώγους του βάθους d , αλλά και στις εξισώσεις κατά Madsen και Sørensen (1991) θέτοντας $B_1=B_2=1/30$.

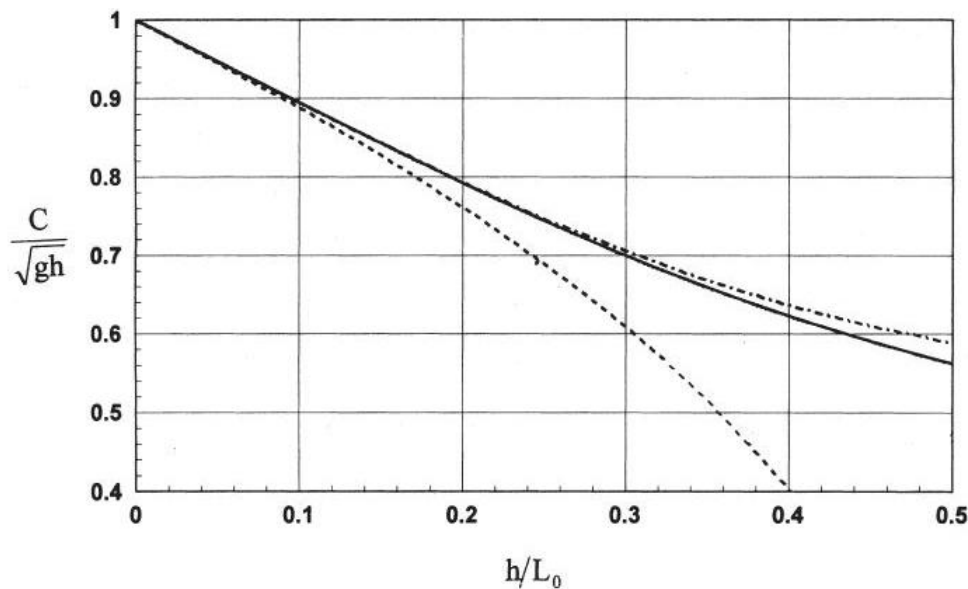
Μελετώντας την εργασία του Ζου για τα στοιχεία γραμμικής διασποράς προκύπτει η ακόλουθη έκφραση της εξίσωσης διασποράς:

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = g \cdot d \cdot \frac{1 + \frac{1}{15} \cdot (kd)^2}{1 + \frac{2}{5} \cdot (kd)^2} = g \cdot d \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \cdot (kd)^2 + \frac{2}{15} \cdot (kd)^4 + O((kd)^6) \right] \quad (2.27)$$

Ενώ η αντίστοιχη έκφραση της γραμμικής θεωρίας είναι η σχέση 2.21 η οποία μπορεί και να γραφεί ως:

$$\frac{C^2}{g \cdot d} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\tanh(kd)}{kd} = 1 - \frac{1}{3} \cdot (kd)^2 + \frac{2}{15} \cdot (kd)^4 - \frac{17}{315} \cdot (kd)^6 + O((kd)^8) \quad (2.28)$$

Στο παρακάτω Σχήμα 2.6 συγκρίνονται τα αποτελέσματα των ταχυτήτων φάσης της θεωρίας Stokes 1^{ης} τάξης, των εξισώσεων κατά Ζου και των κλασικών εξισώσεων Boussinesq.

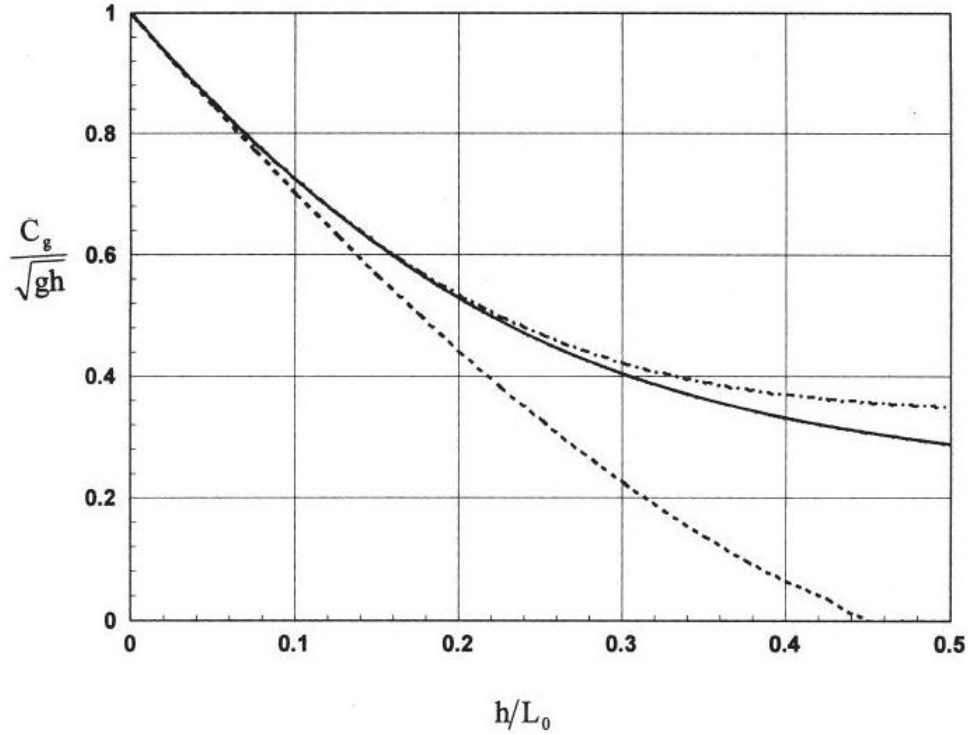


Σχήμα 2.6: Σύγκριση αδιαστατοποιημένης ταχύτητας φάσης για θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης (Solid line), Ζου (dash-dot line) και κλασικής μορφής Boussinesq (dashed line). [124]

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για τη διατήρηση σφάλματος σε ένα ποσοστό 5% η κλασική μορφή των εξισώσεων Boussinesq ισχύει για σχετικά βάθη έως $h/L_0 < 0.22$ και οι εξισώσεις κατά Ζου (1999) τρίτης τάξης έχει μεγαλύτερη εφαρμοσιμότητα έως $h/L_0 < 0.5$. Κατά αντίστοιχο τρόπο έχουμε και τη σχέση που δίνει την ταχύτητα ομάδας βάσης της συγκεκριμένης εργασίας:

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C \cdot \left[1 + \frac{(kd)^2}{15 + (kd)^2} \cdot \frac{2 \cdot (kd)^2}{5 + 2 \cdot (kd)^2} \right] \quad (2.29)$$

Στο παρακάτω σχήμα συγκρίνονται τα αποτελέσματα των ταχυτήτων ομάδας της θεωρίας Stokes 1^{ης} τάξης, των εξισώσεων κατά Ζου και των κλασικών εξισώσεων Boussinesq.



Σχήμα 2.7: Σύγκριση αδιαστατοποιημένης ταχύτητας ομάδας για θεωρία Stokes 1^{ης} τάξης (Solid line), Zou (dash-dot line) και κλασικής μορφής Boussinesq (dashed line). [124]

Από το παραπάνω Σχήμα 2.7 προκύπτει ότι για τη διατήρηση σφάλματος σε ένα ποσοστό 5% η κλασική μορφή των εξισώσεων Boussinesq ισχύει για σχετικά βάρη έως $h/L_0 < 0.13$ και οι εξισώσεις κατά Zou (1999) τρίτης τάξης έχει μεγαλύτερη εφαρμοσιμότητα έως $h/L_0 < 0.3$.

Η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας του παρόντος μοντέλου είναι ίδιας ακρίβειας με τις βελτιωμένες εκφράσεις κατά Madsen et al. (1991), Madsen και Sørensen (1992) και Nwogu (1993), αλλά οι τελευταίες εξισώσεις είναι ακρίβειας 2^{ης} τάξης ως προς την κατανομή ταχύτητας και πίεσης και άρα δεν βελτιώθηκαν σε σχέση με τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq. Οι εξισώσεις που προτάθηκαν από τον Zou (1999) δίνουν ακρίβεια 3^{ου} βαθμού ως προς τις κατανομές ταχύτητας (u, w) και πίεσης (p). Οι κατανομές θα προκύψουν από οριζόντια παραγωγή και διακριτοποίηση κατά τη διάσταση z της συνάρτησης δυναμικού ταχυτήτων (ϕ), ήτοι:

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 - \frac{\mu^2}{2} \cdot (z+1)^2 \cdot \nabla^2 \phi_0 + \frac{\mu^4}{4!} \cdot (z+1)^4 \cdot \nabla^2 \nabla^2 \phi_0 + O(\mu^6) \quad (2.30)$$

$$u = \bar{u} - \frac{\mu^2}{2} \cdot \left[(z+1)^2 - \frac{1}{3} \cdot H^2 \right] \cdot \nabla^2 \bar{u} + \frac{\mu^4}{4!} \cdot [(z+1)^4 - 2 \cdot H^4] \cdot \nabla^2 \nabla^2 \bar{u} + O(\mu^6) \quad (2.31)$$

$$w = -\mu \cdot (z+1) \cdot \nabla \bar{u} + \frac{\mu^3}{6} \cdot (z+1) \cdot [(z+1)^2 - H^2] \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + O(\mu^5) \quad (2.32)$$

$$p = p_0 - (z - \varepsilon z) + \frac{1}{2} \cdot \mu^2 \cdot [(z+1)^2 - H^2] \cdot [\nabla \bar{u}_t + \varepsilon \bar{u} \cdot \nabla^2 \bar{u} - \varepsilon (\nabla \cdot \bar{u})^2] - \frac{1}{4!} \cdot \mu^4 \cdot [(z+1)^2 - H^2]^2 \cdot \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}_t) + O(\mu^6) \quad (2.33)$$

2.5 Μοντέλα Boussinesq υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς

Τα ομοιώματα Boussinesq που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, έδιναν αποτελέσματα για διάδοση κυματισμών ελαφρώς μη γραμμικών και με χαρακτηριστικά μικρής διασποράς (υπόθεση $O(\varepsilon)=O(\sigma^2)\ll 1$). Σε πιο πρόσφατες μελέτες αναπτύχθηκαν μοντέλα που περιελάμβαναν μη γραμμικούς όρους ανώτερης τάξης και χαρακτηριστικά βελτιωμένης διασποράς οπότε και ουσιαστικά αίρεται ο περιορισμός του βάθους εφαρμογής των μοντέλων. Αρχή αποτέλεσε η εργασία των Wei et al. (1995) που διατήρησε όλους τους όρους της μη γραμμικής παραμέτρου ε και τους όρους διασποράς έως $E(\sigma^2)$ ενώ η εξέλιξη και επέκταση των μοντέλων πρακτικά για κάθε βάθος ήρθε χρονικά με τις μελέτες των:

- Madsen και Schäffer (1998)
- Agnon, Madsen και Schäffer (1999)
- Gobbi, Kirby και Wei (2000)
- Madsen et al. (2002)
- Madsen et al. (2003)
- Bingham και Agnon (2005)
- Li (2008)

2.5.1 Πλήρως μη-γραμμικές εξισώσεις κατά Wei et al. (1995)

Η αρχή διαμόρφωσης των πλήρως μη γραμμικών μοντέλων έγινε από τους Wei et al. (1995), όπου χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του Nwogu (1993), πρότειναν εξισώσεις που διατηρούν όλους τους όρους των τάξεων της παραμέτρου μη γραμμικότητας ε και διατηρώντας τους όρους διασποράς της τάξης $O(\sigma^2)$.

Οι προκύπτουσες εξισώσεις έχουν τη μορφή:

$$\zeta_t + \nabla \cdot M = 0 \quad (2.34)$$

όπου

$$M = (d + \varepsilon\zeta) \cdot \left[u_\alpha + \sigma^2 \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} \cdot (d^2 - d\varepsilon\zeta + (\varepsilon\zeta)^2) \right] \nabla(\nabla \cdot u_\alpha) + \left[z_\alpha + \frac{1}{2} \cdot (d - \varepsilon\zeta) \right] \cdot \nabla(\nabla \cdot (du_\alpha)) \right\} \right] + O(\sigma^4) \quad (2.35)$$

Και

$$u_{\alpha t} + \varepsilon \cdot (u_\alpha \cdot \nabla) u_\alpha + \nabla\zeta + \sigma^2 \cdot V_1 + \varepsilon\sigma^2 \cdot V_2 = O(\sigma^4) \quad (2.36)$$

όπου

$$V_1 = \frac{1}{2} z_\alpha^2 \nabla(\nabla \cdot u_{\alpha t}) + z_\alpha \nabla[\nabla \cdot (du_{\alpha t})] - \nabla \left[\frac{1}{2} (\varepsilon\zeta)^2 \nabla \cdot u_{\alpha t} + \varepsilon\zeta \nabla \cdot (du_{\alpha t}) \right]$$

$$V_2 = \nabla \left\{ (z_\alpha - \varepsilon \zeta) \cdot (u_\alpha \cdot \nabla) \cdot [\nabla \cdot (du_\alpha)] + \frac{1}{2} [z_\alpha^2 - (\varepsilon \zeta)^2] (u_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot u_\alpha) \right\} + \frac{1}{2} \nabla \{ \nabla \cdot (du_\alpha) + \varepsilon \zeta \nabla \cdot u_\alpha \} \quad (2.37)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι για τις παραπάνω εκφράσεις δεν ισχύει η υπόθεση ότι $\varepsilon = O(\sigma^2)$, ενώ οι εξισώσεις κατά Nwogu προκύπτουν από τις παραπάνω με απαλοιφή των όρων $O(\sigma^4, \varepsilon \sigma^2)$. Για την αριθμητική επίλυση του μη-γραμμικού συστήματος προτάθηκε ένα σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector).

2.5.2 Πλήρως μη-γραμμικές εξισώσεις κατά Gobbi, Kirby και Wei (2000)

Στην μελέτη αυτή παρουσιάστηκε ένα μοντέλο Boussinesq με ακρίβεια 4^{th} τάξεως ($O(kd)^4$) στο οποίο το δυναμικό ταχυτήτων προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο $4^{ου}$ βαθμού ως προς το βάθος z . Το μοντέλο παράγεται για οριζόντιο πυθμένα, ενώ επέκταση σε μεταβλητό πυθμένα, αναφορά του αριθμητικού σχήματος επίλυσης και επιβεβαίωση με εργαστηριακά πειράματα αναφέρονται εκτενώς στην εργασία των Gobbi και Kirby (1999). Μία νέα εξαρτημένη μεταβλητή ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος του δυναμικού ταχυτήτων σε δύο διαφορετικές στάθμες στην υδάτινη στήλη και η βαρύτητα και η θέση τους επιλέγεται ώστε να δίνουν μία ακριβή προσέγγιση της σχέσης γραμμικής διασποράς (4,4) ανάλυση Padé κατά Witting (1984). Το προκύπτον μοντέλο ελέγχθηκε για την προφανή ικανότητά του για ορθή παραγωγή ελαφρώς μη-γραμμικών κυματικών ιδιοτήτων σε ενδιάμεσα σχετικά βάθη νερού, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα της θεωρίας Stokes σε δυνάμεις του ε για τυχαίες τιμές του σ . Η προαναφερθείσα ανεξάρτητη μεταβλητή ορίστηκε ως:

$$\tilde{\varphi} = \beta \varphi_\alpha + (1 - \beta) \varphi_b \quad (2.38)$$

Όπου φ_α και φ_b είναι τα δυναμικά ταχυτήτων στις θέσεις $z = z_\alpha$ και $z = z_b$, ενώ β είναι μία παράμετρος βαρύτητας. Οπότε βάση της παραπάνω σχέσης το δυναμικό ταχυτήτων φ εκφράζεται σε όρους του $\tilde{\varphi}$ βάσει της σχέσης:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \{ B - (1 + z)^2 \} \nabla^2 \tilde{\varphi} + \frac{1}{4} \sigma^4 \left\{ B - B(1 + z)^2 - \frac{1}{6} D + \frac{1}{6} (1 + z)^4 \right\} \nabla^2 \nabla^2 \tilde{\varphi} + O(\sigma^6) \quad (2.39)$$

όπου

$$B = \beta(1 + z_\alpha)^2 + (1 - \beta)(1 + z_b)^2 \quad (2.40)$$

$$D = \beta(1 + z_\alpha)^4 + (1 - \beta)(1 + z_b)^4 \quad (2.41)$$

Ορίζουμε ως συνολικό αδιάστατο βάθος το $H = 1 + \varepsilon \zeta$ (ζ αδιαστατοποιημένο με το ύψος κύματος) η σχέση διατήρησης μάζας δίνει:

$$\zeta_t + \nabla \cdot \left\{ H \cdot \left[\nabla \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(B - \frac{1}{3} H^2 \right) \nabla (\nabla^2 \tilde{\varphi}) + \frac{1}{4} \sigma^4 \left(B^2 - \frac{1}{3} B H^2 - \frac{1}{6} D + \frac{1}{30} H^4 \right) \nabla (\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\varphi}) \right] \right\} = O(\sigma^6) \quad (2.42)$$

Ενώ η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$\begin{aligned}
\zeta + \tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2}\sigma^2(B - H^2)\nabla^2\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{4}\sigma^4\left(B^2 - BH^2 - \frac{1}{6}D + \frac{1}{6}H^4\right)\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_t \\
+ \frac{1}{2}\varepsilon\left\{(\nabla\tilde{\varphi})^2 + \sigma^2(B - H^2)\nabla\tilde{\varphi} \cdot \nabla(\nabla^2\tilde{\varphi}) + \sigma^2H^2(\nabla^2\tilde{\varphi})^2\right. \\
+ \frac{1}{2}\sigma^4\left(B^2 - BH^2 - \frac{1}{6}D + \frac{1}{6}H^4\right)\nabla\tilde{\varphi} \cdot \nabla(\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}) \\
\left. + \frac{1}{4}\sigma^4(B^2 - 2BH^2 + H^4)[\nabla(\nabla^2\tilde{\varphi})]^2 + \sigma^4\left(BH^2 - \frac{1}{3}H^4\right)(\nabla^2\tilde{\varphi})(\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi})\right\} = O(\sigma^6)
\end{aligned}
\tag{2.43}$$

Οι εξισώσεις 2.42 και 2.43 συνιστούν ένα πλήρως μη γραμμικό μοντέλο 4^{ης} τάξης. Αμελώντας τους όρους $O(\sigma^4)$ και θέτοντας $\beta = 1$ συσχετίζοντας τη θέση z_α με το B βάσει της σχέσης $B = 2\alpha + 1$. Εάν επιπρόσθετα αμελήσουμε και τους όρους $O(\varepsilon\sigma^2)$ προκύπτει το μοντέλο του Nwogu όπως εκφράστηκε με τη χρήση συνάρτησης δυναμικού από τους Chen και Liu (1995).

Ακόμη, μπορούμε να πάρουμε μέσω των συνήθων θεωρήσεων Boussinesq, ένα υψηλότερης τάξης μοντέλο, θεωρώντας $\varepsilon/\sigma^2 = O(1)$ και διατηρώντας όρους τάξης $O(\varepsilon\sigma^2, \sigma^4)$, που δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\zeta_t + \nabla \cdot \left\{ H\nabla\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\sigma^2\left[BH - \frac{1}{3}(1 + 3\varepsilon\zeta)\right]\nabla(\nabla^2\tilde{\varphi}) + \frac{1}{4}\sigma^4\left(B^2 - \frac{1}{3}B - \frac{1}{6}D + \frac{1}{30}\right)\nabla(\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi})\right\} \\
= O(\sigma^6)
\end{aligned}
\tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\zeta + \tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2}\sigma^2[B - (1 + \varepsilon\zeta)]\nabla^2\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{4}\sigma^4\left(B^2 - B - \frac{1}{6}D + \frac{1}{6}\right)\nabla^2\nabla^2\tilde{\varphi}_t \\
+ \frac{1}{2}\varepsilon[(\nabla\tilde{\varphi})^2 + \sigma^2(B - 1)\nabla\tilde{\varphi} \cdot \nabla(\nabla^2\tilde{\varphi}) + \sigma^2(\nabla^2\tilde{\varphi})^2] = O(\sigma^6)
\end{aligned}
\tag{2.45}$$

Από ανάλυση Padé (4,4) προκύπτουν οι στάθμες z_α και z_b :

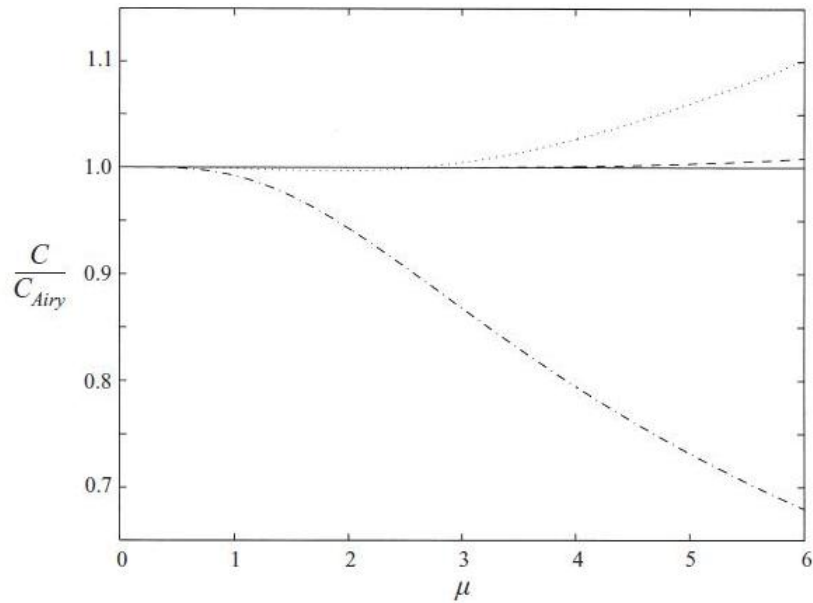
$$z_\alpha = \left\{ \frac{1}{9} - \left[\frac{8\beta}{567(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{8}{567\beta(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1
\tag{2.46}$$

$$z_b = \left\{ \frac{1}{9} - \left[\frac{8\beta}{567(1-\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1
\tag{2.47}$$

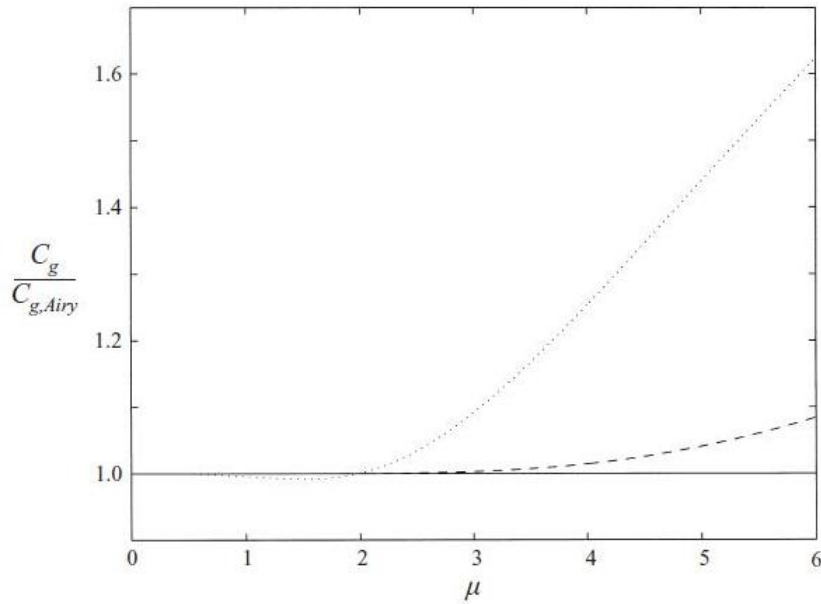
Οι παραπάνω τιμές είναι πραγματικές (και μη θετικοί) μόνο αν $0.018 \leq \beta \leq 0.467$. Επίσης σε περίπτωση μεταβλητού βάθους η μεταβολή της τιμής της παραμέτρου β δεν εμφανίζει σημαντική επίδραση στο μοντέλο.

Στα σχήματα που ακολουθούν συγκρίνεται η απόκλιση της ταχύτητας φάσης (Σχήμα 2.8) και της ταχύτητας ομάδας (Σχήμα 2.9) σε σχέση με την τιμή τους που προκύπτει από τη θεωρία Airy για τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq $O(\sigma^2)$, τις εξισώσεις Nwogu (1993) και του υπό εξέταση μοντέλου των Gobbi και Kirby (2000) το οποίο μάλιστα φαίνεται να εμφανίζει

βελτιωμένες ιδιότητες γραμμικής διασποράς προσεγγίζοντας την ακριβή λύση σε ενδιάμεσα και βαθιά νερά. Η βελτίωση σε σχέση με το μοντέλο του Nwoogu είναι εμφανέστερη ακόμα περισσότερο στην απεικόνιση της ταχύτητας ομάδας.



Σχήμα 2.8: Αναλογία γραμμικής ταχύτητας φάσης σε σχέση με την ακριβή λύση κατά θεωρία Airy συναρτήσει παραμέτρου διασποράς ($\mu=\sigma$). Κλασικές εξισώσεις Boussinesq (dash-dot line), Nwoogu με $\alpha=-0.39$ (dot line), Gobbi-Kirby (4,4) Padé (dashed line). [32]



Σχήμα 2.9: Αναλογία γραμμικής ταχύτητας ομάδας σε σχέση με την ακριβή λύση κατά θεωρία Airy συναρτήσει παραμέτρου διασποράς ($\mu=\sigma$). Nwoogu με $\alpha=-0.39$ (dot line), Gobbi-Kirby (4,4) Padé (dashed line). [32]

2.5.3 Πλήρως μη-γραμμικές εξισώσεις των Madsen et al. (2002, 2003, 2006)

Η εργασία των Madsen, Bingham και Liu (2002) χρησιμοποιούσε ως αφετηρία την προσέγγιση των Agnon, Madsen και Schäffer (1999) για να παράγουν ένα μοντέλο Boussinesq που θα βελτιώνει την ακρίβεια της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας και των γραμμικών και μη γραμμικών ιδιοτήτων, προσέγγιση ικανή να περιγράψει τη διασπορά μη γραμμικών κυμάτων ως $kd \approx 6$. Στην παρούσα μελέτη οι ερευνητές κατάφεραν να αποδώσουν τα γραμμικά και μη γραμμικά χαρακτηριστικά ως $kd=40$ και το κατακόρυφο προφίλ δυναμικού έως $kd=12$. Η μέθοδος είναι εφαρμόσιμη σε υψηλής μη γραμμικότητας κυματισμούς σε ρηχά νερά και σε υψηλής μη γραμμικότητας κυματισμούς στα βαθιά. Η θεωρητική διατύπωση της μεθόδου περιλαμβάνει την ακριβή έκφραση οριακών συνθηκών σε τυχαίο βάθος \hat{z} (και όχι στην ελεύθερη επιφάνεια όπως κατά Agnon et al.) μέσω ανάπτυξης της εξίσωσης Laplace σε σειρά πεπερασμένων σειρών στο τυχαίο βάθος διατηρώντας όρους έως και 5^{ης} τάξης. Η επιλογή της στάθμης \hat{z} έχει μεγάλη σημασία στην περίπτωση πεπερασμένων όρων της σειράς, καθώς επηρεάζει τη μορφή των όρων αποκοπής. Στην εργασία τους οι Madsen et al. (2003) εφάρμοσαν τρεις μεθόδους αποκοπής (truncation methods):

- Μια απλή αποκοπή των όρων του αναπτύγματος της σειράς Taylor.
- Εφαρμογή στην οριακή συνθήκη πυθμένα της προσέγγισης Padé σε συνδυασμό με βελτιστοποίηση όρων κλίσης.
- Εφαρμογή στην στάθμη ηρεμίας και στην οριακή συνθήκη πυθμένα της προσέγγισης Padé.

Σε όλες τις μεθόδους, η στάθμη \hat{z} υπολογίζεται με γνώμονα την ελαχιστοποίηση του μέσου (κατά βάθος) σχετικού σφάλματος ταχύτητας σε σύγκριση με τη γραμμική προσέγγιση. Θέτουμε kd το πεδίο εφαρμογής και πιο συγκεκριμένα $\kappa_0 = kd = 6$, και ελαχιστοποιούμε την παράσταση:

$$F_2(\sigma, kd) = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0} F_1(\sigma, kd) dk = \frac{1}{\kappa_0} \int_0^{\kappa_0} \left[\frac{1}{d} \int_{-d}^0 \left(\frac{u(\hat{z}) - u_{\text{stokes}}(\hat{z})}{u_{\text{stokes}}(0)} \right)^2 dz \right] dk \quad (2.48)$$

Όπου σ το ποσοστό του βάθους που δίνει τη στάθμη $\hat{z} = \sigma d$ και u_{stokes} η ταχύτητα κατά τη γραμμική θεωρία Stokes, και προκύπτει περίπου $\sigma \approx -0.5$ και F_1 είναι το το σφάλμα της μέσης στο βάθος ταχύτητας σε σχέση με την ταχύτητα στόχο u_{stokes} .

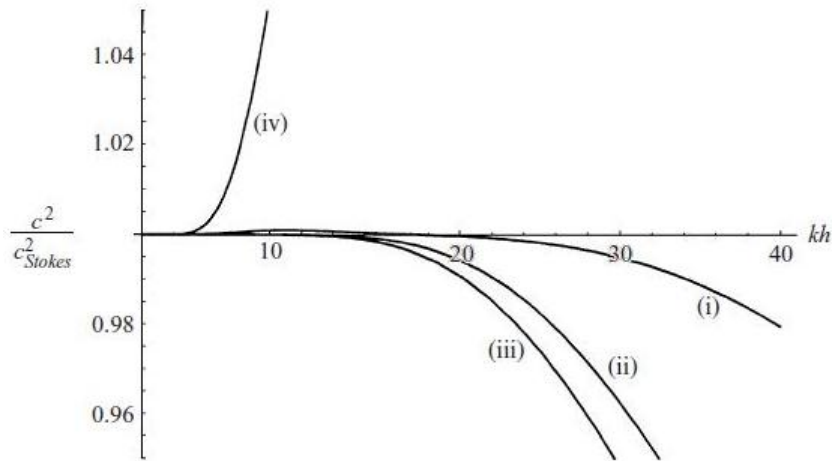
Η εξίσωση γραμμικής διασποράς με διατήρηση των όρων χαμηλής τάξης δίνει:

$$\frac{\omega^2}{ghk^2} = \frac{1}{kh} \left(\frac{\text{sh}(k(h + \hat{z}))\text{ch}(k\hat{z}) - \text{ch}(k(h + \hat{z}))\text{sh}(k\hat{z})}{\text{ch}(k(h + \hat{z}))\text{ch}(k\hat{z}) - \text{sh}(k(h + \hat{z}))\text{sh}(k\hat{z})} \right) \quad (2.49)$$

Όπου

$$\text{ch}(\lambda) = \left(1 + \frac{4}{9}\lambda^2 + \frac{1}{63}\lambda^4 \right), \quad \text{sh}(\lambda) = \left(1 + \frac{1}{9}\lambda^3 + \frac{1}{945}\lambda^5 \right) \quad (2.50)$$

Οι μέθοδοι αποκοπής εισάγουν σφάλματα εξαρτώμενα ως προς τη μορφή και την τάξη τους από την μέθοδο που εφαρμόζεται. Από το ακόλουθο Σχήμα 2.10 προκύπτει η ακρίβεια της σχέσης γραμμικής διασποράς για $\sigma = -0.5$, $\sigma = -0.2$, για ανάλυση Padé (4,4) με $\sigma = 0$ και ανάλυση Padé (8,10) της πρότυπης λύσης (target solution).



Σχήμα 2.10: Ακρίβεια του τετραγώνου της ταχύτητας φάσης βάσει των σχέσεων 2.49 και 2.50 με (i) $\sigma=-0.2$, (ii) $\sigma=-0.5$, (iii) Padé (8, 10) ακριβούς λύσης και (iv) $\sigma=0$ και Padé (4, 4). [74]

Συγκεντρωτικά, η ακρίβεια που προκύπτει από κάθε μέθοδο αποκοπής δίνεται στους πίνακες 2.1 και 2.2 που ακολουθούν κατά Madsen et al. (2003). Στον Πίνακα 2.1, η τρίτη και τέταρτη στήλη βασίζονται στην γραμμική ανάλυση των ιδιοτήτων του μοντέλου, η πέμπτη παρουσιάζει το σφάλμα στην 3η αρμονική της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και η τελευταία περιέχει τα σφάλματα στην οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια για ένα μη γραμμικό κύμα με κλίση $H/L=0.12$. Είναι προφανές ότι η αντιμετώπιση των τριών μεθόδων αποκοπής μπορεί να εφαρμοστεί σε συνάρτηση με πιο χαμηλόβαθμες εξισώσεις. Οπότε ο Πίνακας 2.2 συνοψίζει τα σφάλματα που προκύπτουν από αποκοπή και περιέχει μόνο μέχρι τους όρους των παραγώγων 3^{ης} τάξης. Προφανώς, η μέθοδος III με $\hat{z} = -0.2h$ και $\hat{z} = -0.5h$ είναι με διαφορά η ακριβέστερη από τις τρεις.

Επισημαίνουμε ότι A_3 είναι το σφάλμα στην 3^η αρμονική ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας και εκφράζεται σε σχέση με το αθροιστικό εύρος ρήχωσης βάσει της σχέσης:

$$\frac{A}{A_s} = \exp\left(-\int_0^{\kappa^*} \frac{\gamma - \gamma_s}{\kappa^*} d\kappa^*\right), \quad \kappa^* = k_0 d = \frac{2\pi}{L_0} d \quad (2.51)$$

Πίνακας 2.1: Εύρος σχετικών βαθών εφαρμογής και σφαλμάτων των τριών μεθόδων αποκοπής. [74]

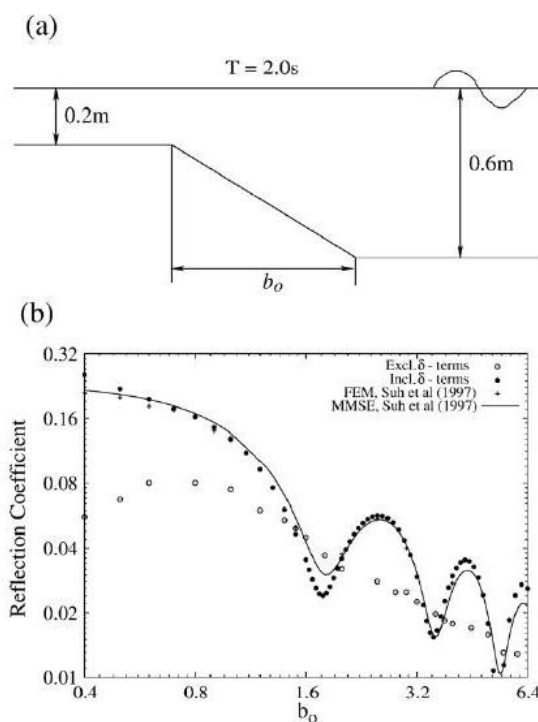
method	formal accuracy	error < 2% in c^2	error < 1% in $\sqrt{F_1}$	error < 5% in A_3	error < 2% in u_c
I ($\sigma=-0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 8.8$	$kh < 4.7$	-	-
II ($\sigma=-0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 17$	$kh < 5.2$	$kh < 14$	$kh < 16.5$
III ($\sigma=-0.5$)	$k^8 h^8$	$kh < 25$	$kh < 9.5$	$kh < 21$	$kh < 25$
III ($\sigma=-0.2$)	$k^8 h^8$	$kh < 40$	$kh < 10$	$kh < 32$	$kh < 39$

Πίνακας 2.2: Εύρος σχετικών βαθών εφαρμογής και σφαλμάτων αποκοπής (μέχρι τους όρους των παραγώγων 3^{ης} τάξης). [74]

method	formal accuracy	error < 2% in c^2	error < 1% in ∇F_1	error < 5% in A_3	error < 2% in u_c
II ($\sigma=-0.5$)	$k^2 h^2$	$kh < 7.5$	$kh < 2.2$	$kh < 6.5$	$kh < 7.5$
III ($\sigma=-0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 10$	$kh < 3.5$	$kh < 8.3$	$kh < 10$

Έως το σημείο αυτό, το μοντέλο Boussinesq που προτάθηκε από τους Madsen et al. (2002, 2003) είχε εφαρμογή σε οριζόντιο πυθμένα ή πυθμένα με ήπια κλίση. Η μελέτη το 2006 των Madsen, Fuhrman και Wang θέτει ως στόχο την επέκταση του μοντέλου και σε απότομα μεταβαλλόμενες βαθυμετρίες για πλήρως μη γραμμικά κύματα. Η επέκταση του μοντέλου γίνεται διατηρώντας τους όρους $\nabla^2 \hat{z}$, $\nabla^2 \hat{z}$ και $\nabla \hat{z} \cdot \nabla \hat{z}$. Εισάγονται τελεστές J_I και J_{II} εκφραζόμενοι ως αναπτύγματα μίας αδιάστατης παραμέτρου $\delta \ll 1$ και τελεστών κλίσης έως 5^{ης} τάξης. Η εξίσωση Laplace, οι οριακές συνθήκες πυθμένα και ελεύθερης επιφάνειας μετασχηματίζονται δίνοντας ακρίβεια $O(\delta^3)$. Επίτευγμα της προσέγγισης είναι πλέον η στάθμη \hat{z} να είναι μία ανεξάρτητη συνάρτηση που δε θα είναι πλέον ένα απλό ποσοστό του βάθους d της στάθμης ηρεμίας. Με τη μέθοδο αυτή αίρεται η βασική παραδοχή της ήπια μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και κατ' επέκταση υπολογίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια η τιμή των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης και η μεταβολή φάσης (downshift / upshift). Το μοντέλο έχει, ωστόσο, κάποια όρια εφαρμογής τα οποία ποσοτικοποιούνται από τους συγγραφείς στα $|\nabla d| < 0.25$, $|\nabla \hat{z}| < 0.10$, $|\hat{z} \nabla^2 \hat{z}| < 0.030$, $|\hat{z}^2 \nabla^3 \hat{z}| < 0.015$ εντός των οποίων θεωρείτε μη αναγκαία η πραγματοποίηση ομαλοποίησης (smoothing).

Στο Σχήμα 2.11 που δεξιά φαίνεται (a) η πειραματική διάταξη του Booij (1983) και (b) η σύγκριση του μοντέλου με απότομα μεταβαλλόμενες βαθυμετρίες (ύπαρξη όρων δ) και του μοντέλου για ήπια μεταβαλλόμενες βαθυμετρίες (χωρίς όρους δ) με τις πρότυπες λύσεις των Suh et al. (1997) με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και Suh et al. (1997) με τη διευρυμένη γραμμική εξίσωση ήπιας κλίσης (MMSE). Από τη διαγραμματική απεικόνιση προκύπτει ότι το νέο μοντέλο εκτιμά με πολύ καλή ακρίβεια τον συντελεστή ανάκλασης, ακόμη και για κλίσεις πυθμένα ως 1:1.



Σχήμα 2.11: (a) πειραματική διάταξη του Booij (1983) και (b) σύγκριση συντελεστή ανάκλασης μοντέλου με δ όρους (filled circles) και μοντέλου χωρίς δ όρους (open circles) σε σχέση με πρότυπες λύσεις των Suh et al. (1997). [76]

2.5.4 Μέθοδος Fourier – Boussinesq για μη γραμμικούς κυματισμούς των Bingham και Agnon (2005)

Η εργασία των Bingham και Agnon (2005) έδωσε ένα νέο μοντέλο Boussinesq πλήρους διασποράς με πολύ μικρές αποκλίσεις στα αποτελέσματα που δίνει για κάθε σχετικό βάθος. Η δυνατότητά του αυτή έγκειται στην επιστράτευση ενός γενικευμένου μετασχηματισμού Hilbert ούτως ώστε να εξαλειφθεί κάθε περιορισμός σχετικού βάθους. Ο μετασχηματισμός Hilbert αξιολογείται μέσω ενός ταχέως μετασχηματισμού Fourier (FFT) γεγονός που περιορίζει το υπολογιστικό πεδίο να είναι τετραγωνικό με συνθήκες ανοικτού ορίου ή στερεά όρια. Οι υπολογιστικές διαδικασίες περιλαμβάνουν παραγώγους έως και 6^{ης} τάξης, ενώ το μοντέλο Fourier-Boussinesq προσεγγίζει τον τελεστή διασποράς $\tan(kd)/(kd)$ με μία συνάρτηση αναλογίας kd . Ο γενικευμένος τελεστής Hilbert χρησιμοποιείται για τη μετατροπή των περιπτώσεων δυνάμεων σε άρτιες δυνάμεις κατάλληλες για αξιολόγηση μέσω μεθόδων πεπερασμένων διαφορών, γεγονός που επιτυγχάνει μικρά σφάλματα για κάθε βάθος $0 \leq kd < \infty$.

Θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς με $z=0$ στη στάθμη ηρεμίας και $V(x, z, t)$ ο όγκος του ρευστού και περιορίζεται από την ελεύθερη επιφάνεια $z = \zeta(x, t)$ και από τον πυθμένα $z = -d(x)$. Το δυναμικό ταχύτητας $\varphi(x, z, t)$ ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα οριακών τιμών:

$$\nabla^2 \varphi + \varphi_{zz} = 0 \quad (2.52)$$

$$\varphi_z + \nabla \varphi \cdot \nabla h = 0, \quad z = -h \quad (2.53)$$

$$\zeta_t + \nabla \tilde{\varphi} \cdot \nabla \zeta - (1 + \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) \tilde{\varphi} = 0 \quad (2.54)$$

$$\tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2} \nabla \tilde{\varphi} \cdot \nabla \tilde{\varphi} - \frac{1}{2} (1 + \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) \tilde{\varphi}_z^2 + g\zeta = 0 \quad (2.55)$$

Οι οριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας εκφράζονται σε όρους του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια $\tilde{\varphi} = \varphi(x, \zeta(x, t), t)$ ενώ οι αρχικές συνθήκες των ζ και $\tilde{\varphi}$ πρέπει επίσης να είναι γνωστές.

Υιοθετώντας μία ανάπτυξη Taylor κατά Dommermurth και Yue (1987) για την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια, οδηγούμαστε σε ένα σταθερό κατά το χρόνο $N \times N$ γραμμικό σύστημα εξισώσεων το οποίο μπορεί να λυθεί με την χρήση μεθόδων επίλυσης μητρωικών προβλημάτων. Στην περίπτωση αυτή, η προσέγγιση του δυναμικού ταχύτητας γίνεται με σειρές αποκοπής στη μη γραμμική παράμετρο $\varepsilon = k\alpha \ll 1$, όπου k ο κυμαριθμός και α το κυματικό εύρος. Έτσι $\varphi = \sum_{m=1}^M \varphi^{(m)}$, όπου $\varphi^{(m)} = O(\varepsilon^m)$, ενώ η τιμή του $\varphi^{(m)}$ στην ελεύθερη επιφάνεια υπολογίζεται μέσω σειράς Taylor γύρω από $z = 0$:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{M-m} \frac{\zeta^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial z^n} \cdot \hat{\varphi}^{(m)} \quad (2.56)$$

Όπου $\hat{\varphi} = \varphi(x, 0, t)$, και από τους όρους κάθε τάξης της μη γραμμικής παραμέτρου ε προκύπτει μία ρητή ακολουθία για την εκτίμηση των δυναμικών ταχυτήτων:

$$\hat{\varphi}^{(1)} = \tilde{\varphi} \quad (2.57)$$

$$\hat{\varphi}^{(m)} = - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\zeta^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial z^n} \cdot \hat{\varphi}^{(m-n)} \quad , \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (2.58)$$

Το πρόβλημα λοιπόν περιορίζεται στον υπολογισμό των $\hat{\varphi}_z^{(m)}$ και $\hat{\varphi}^{(m)}$, αφού οι ανώτερης τάξης παράγωγοι κατά z λαμβάνονται εφαρμόζοντας την αρνητική οριζόντια Λαπλασιανή σε αυτές τις δύο ποσότητες. Τέλος, η παράγωγος κατά z της σχέσης 2.56 χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της $\hat{\varphi}_z$.

Η διαδικασία των μικρών διαταραχών προϋποθέτει ήπια μη γραμμικότητα και κανέναν περιορισμό στο σχετικό βάθος kd . Το σχήμα συγκλίνει για μη γραμμικά κύματα σταθερού προφίλ έως και 80% της οριακής κλίσης του κύματος για κάθε kd . Το όριο αυτό είναι κατ' ουσία το ίδιο με αυτό των Dommermuth και Yue (1987), και παρότι είχε γίνει η θεώρηση κυμάτων βαθέων υδάτων στο κείμενό τους, τελικά προέκυψε ότι η μέθοδος τους έχει την ίδια συμπεριφορά με το παρόν μοντέλο σε ρηχά νερά.

Το πρόβλημα λύνεται βάση υπολογισμού της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας στην στάθμη ηρεμίας από το δυναμικό στη συγκεκριμένη θέση. Παράγεται μία μέθοδος Boussinesq για το σκοπό αυτό, είναι ασυμπτωτικά ακριβής και στα δύο όρια του kd . Οι προγενέστερες μέθοδοι Boussinesq ικανοποιούν την σχέση γραμμικής διασποράς σε όρους της αδιάστατης ταχύτητας φάσης $c^2/(gd)$, που είναι συνάρτηση του $(kd)^2$. Αυτό τις καθιστά εφαρμόσιμες σε προβλήματα μεταβλητού βάθους, καθώς μπορούν να εκφραστούν σε όρους τοπικών διαφορικών τελεστών. Η ακριβής σχέση γραμμικής διασποράς είναι υπερβατικά, $c^2/(gd) = \tan(kd)/(kd)$ και τείνει στο $1/(kd)$ στα βαθιά νερά. Έτσι, οι υπάρχουσες μέθοδοι Boussinesq αποκλίνουν στο σημείο αυτό. Για να διορθωθεί η ακρίβεια για $kd \rightarrow \infty$ εισάγονται περιπτές δυνάμεις του kd στην προσέγγιση, μαζί με έναν γενικευμένο (2D) μετασχηματισμό Hilbert \mathcal{H} που εκφράζει τις δυνάμεις αυτές στο φυσικό χώρο και εκφράζεται με τη σχέση:

$$\mathcal{H}\nabla\varphi = \mathcal{F}^{-1}\{k\mathcal{F}\{\varphi\}\} \quad (2.59)$$

Όπου \mathcal{F} ο συνήθης 2D $(\vec{x}:\vec{k})$ μετασχηματισμός Fourier και \mathcal{F}^{-1} ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

Η πιο βασική μέτρηση ακρίβειας της διασποράς για μία μέθοδο Boussinesq είναι πόσο καλά προσεγγίζει τη σχέση γραμμικής διασποράς $c^2/(gd) = \tan(kd)/(kd)$. Προσεγγίζοντάς την με τη μέθοδο Fourier-Boussinesq χαμηλότερης τάξης προκύπτει η αντίστοιχη ρητή προσέγγιση χαμηλότερης τάξης:

$$\frac{c^2}{(gd)} \approx \frac{1}{1 + (kd)} \quad (2.60)$$

Στο χώρο \mathbf{x} συσχετίζεται για την έκφραση της μεθόδου, το ikd με το $d\nabla$ και το kd με το $d\mathcal{H}\nabla$, οπότε προκύπτει:

$$\tanh(d\nabla) = i\tanh(kd) \approx \frac{ikd}{1 + ikd} = \frac{d\nabla}{1 + d\mathcal{H}\nabla} \quad (2.61)$$

Από όπου προκύπτει:

$$[1 + d\mathcal{H}\nabla]\hat{\omega} = -d\nabla \cdot \vec{\hat{u}} \quad (2.62)$$

Η οποία λύνεται ως προς $\hat{w} = \varphi_z(x, 0, t)$ μέσω δοκιμών καθώς ο μετασχηματισμός Hilbert λειτουργεί μόνο στο αριστερό μέλος των εξισώσεων. Από την επίλυση αυτή προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\hat{\varphi} + \zeta\hat{w} = \tilde{\varphi} \quad (2.63)$$

$$d\nabla^2\hat{\varphi} + [1 + d\mathcal{H}\nabla]\hat{w} = 0 \quad (2.64)$$

άρα έχουμε

$$\tilde{w} = \hat{w} - \zeta\nabla^2\hat{\varphi} \quad (2.65)$$

Λύση που αποτελεί την χαμηλότερης τάξης μέθοδο και παρουσιάζει ενδιαφέρον για πολύ μακρά και πολύ βραχέα κύματα. Οι συγγραφείς παρουσίασαν και λύσεις ανώτερης τάξης με ρητές (τροποποιημένες ή μη) προσεγγίσεις Padé, ενώ μελέτησαν και την περίπτωση μεταβαλλόμενης βυθομετρίας.

2.5.5 Εξισώσεις υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς του Li (2008)

Ο Li (2008) πρότεινε ένα νέο μοντέλο Boussinesq που συνδυάζει τα θετικά στοιχεία της εξίσωσης ήπιας κλίσης (mild slope equation) και των κλασικών εξισώσεων Boussinesq. Η εξίσωση ήπιας κλίσης μπορεί να εφαρμοστεί σε πολύ βαθειά νερά ($kd > 10$) για γραμμικούς κυματισμούς ενώ οι κλασικές εξισώσεις Boussinesq δεν μπορούν να εφαρμοσθούν σε τέτοια βάθη χωρίς την προσθήκη όρων χωρικών παραγώγων υψηλότερης τάξης. Αντίθετα, πλεονέκτημα των εξισώσεων Boussinesq είναι σε περιορισμένο βάθος νερού για την προσομοίωση σύνθετων και μη γραμμικών κυματισμών τους οποίους δεν μπορεί να προσομοιώσει άμεσα η εξίσωση ήπιας κλίσης. Οι εξισώσεις που παρήχθησαν εκμεταλλεύτηκαν τα προτερήματα των δύο προσεγγίσεων με αποτέλεσμα να μη χρειαστεί η προσθήκη όρων χωρικής παραγώγου υψηλότερης τάξης.

Αρχικά, προσεγγίζεται η κατακόρυφη κατανομή της συνάρτησης δυναμικού για την περίπτωση σταθερού βάθους αλλά και μεταβαλλόμενου πυθμένα. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται η συνάρτηση υπερβολικού συνημιτόνου της λύσης της θεωρίας Stokes 1^{ης} τάξης. Στη συνέχεια, από την εξίσωση Laplace προκύπτει μία νέα συνάρτηση δυναμικού. Η νέα συνάρτηση κατακόρυφης κατανομής συγκρίνεται με αυτήν που προκύπτει από την προσέγγιση Boussinesq. Η επανάληψη της διαδικασίας δίνει προσεγγίσεις κάθε τάξης οι οποίες οδηγούν σε εξισώσεις Boussinesq με μεγαλύτερη ακρίβεια από τις κλασικές εξισώσεις. Για την περίπτωση δισδιάστατης ροής οι εξισώσεις έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(d + \zeta)\mathbf{u}_\alpha] + \nabla \\ \cdot \left\{ \nabla \cdot [(F_1 - dF_2)\mathbf{u}_\alpha] + d\nabla \cdot \left[\left(F_2 - z_\alpha F_4 + \frac{1}{2} z_\alpha^2 \right) \mathbf{u}_\alpha \right] + dz_\alpha \nabla \cdot [(F_4 - z_\alpha)\mathbf{u}_\alpha] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} dz_\alpha^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha + g\nabla \zeta \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \cdot \left[\left(F_3 - z_\alpha F_4 + \frac{1}{2} z_\alpha^2 \right) \mathbf{u}_\alpha \right] + z_\alpha \nabla \cdot [(F_4 - z_\alpha)\mathbf{u}_\alpha] + \frac{1}{2} dz_\alpha^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Όπου $\mathbf{u}_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$ η οριζόντια ταχύτητα στη θέση $z_\alpha = -0.66d$ για απλούς κυματισμούς (regular waves) και $z_\alpha = -0.544d$ για σύνθετους κυματισμούς (irregular waves), ενώ:

$$F_1 = \frac{1}{k^3} \left[kd - \frac{\sinh(kd)}{\cosh(kd + kz_\alpha)} \right] \quad (2.68)$$

$$F_2 = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh(kd + kz_\alpha)} \right] \quad (2.69)$$

$$F_3 = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{\cosh(kd)}{\cosh(kd + kz_\alpha)} \right] \quad (2.70)$$

$$F_4 = \frac{1}{k} \tanh(kd + kz_\alpha) \quad (2.71)$$

Μοναδικό μειονέκτημα συνιστά η ανάγκη υπολογισμού του κυματαριθμού k , που ενώ για απλούς κυματισμούς υπολογίζεται από τη σχέση διασποράς, για σύνθετους κυματισμούς υπεισέρχεται σφάλμα στον υπολογισμό του καθιστώντας το μοντέλο μη ακριβές για βαθειά νερά.

3. Προσθήκες στα μοντέλα κυματικής διάδοσης τύπου Boussinesq

3.1 Εισαγωγή

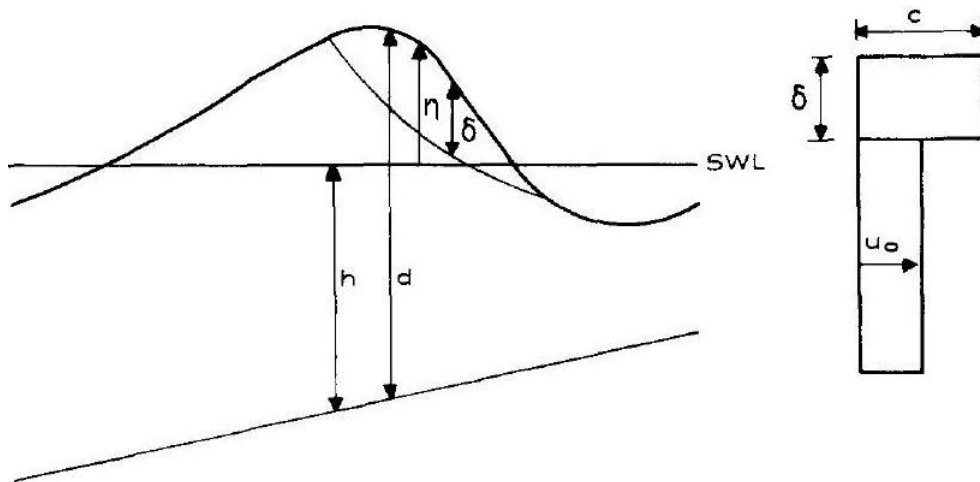
Τα μοντέλα κυματικής διάδοσης τύπου Boussinesq που περιγράψαμε στις προηγούμενες ενότητες αποσκοπούσαν στην αύξηση της μη γραμμικότητας και την βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς στην περιγραφή της κυματικής διάδοσης. Ωστόσο, για να θεωρηθεί ένα μοντέλο κυματικής διάδοσης πλήρες, θα πρέπει να δύναται να προσομοιώσει μία σειρά από επιπρόσθετα φαινόμενα και διεργασίες που λαμβάνουν χώρα την ίδια στιγμή. Στα φαινόμενα αυτά συμπεριλαμβάνονται η θραύση των κυματισμών, η τριβή πυθμένα, η επιφανειακή τάση του ανέμου, η επίδραση ρευμάτων, η ανάκλαση των κυματισμών, η αναρρίχηση στην ακτή, το wave set-up και wave set-down σε συνδυασμό με μοντέλα κυκλοφορίας, αλλά και πρόσθετες διεργασίες υπολογιστικής φύσεως όπως τα όρια γένεσης των κυματισμών και οι οριακές και αρχικές συνθήκες της εκάστοτε περιοχής μελέτης. Παρότι τα φαινόμενα αυτά συντιθέμενα μπορούν να δώσουν μία ρεαλιστική εικόνα του υπό μελέτη φαινομένου της κυματικής διάδοσης, οι ίδιες αυτές προσθήκες καθιστούν την υπολογιστική διαδικασία δυσχερή και σύνθετη καθώς έχουμε απαιτήσεις βαθμονόμησης πολλών παραμέτρων αλλά και ζητήματα ευστάθειας των αριθμητικών σχημάτων, προβλήματα που δεν έχουν πάντα ξεκάθαρη επίλυση αλλά απαιτούν πρόσθετη διερεύνηση. Στην ενότητα αυτή θα εμβαθύνουμε κυρίως στις παραμέτρους που θα ληφθούν υπόψη και στο προτεινόμενο μοντέλο που θα παρουσιαστεί σε επόμενο κεφάλαιο, δηλαδή στη θραύση κυματισμών, στην εισαγωγή της τριβής πυθμένα και στις οριακές συνθήκες.

3.2 Θραύση κυματισμών στα μοντέλα Boussinesq

Η θραύση είναι ένας από τους πλέον σύνθετους μηχανισμούς που λαμβάνουν χώρα κατά την κυματική διάδοση. Είναι υπεύθυνη για την ταχεία σκέδαση ενέργειας η οποία συμβάλλει στην στερεομεταφορά στην παράκτια ζώνη. Μία σειρά από ερευνητές επιχείρησαν με πολύ καλά αποτελέσματα να αναπτύξουν θεωρίες για την περιγραφή της έναρξης, της διάδοσης και των διαδικασιών που δημιουργούν τη θραύση, θεωρίες τις οποίες ενέταξαν στα μοντέλα Boussinesq. Σε αυτές τις μελέτες συγκαταλέγονται αυτές των Schäffer, Madsen, Kennedy, Svendsen κλπ. από τις οποίες τρία μοντέλα προσομοίωσης θραύσης προέκυψαν και αποτέλεσαν τον ακρογωνιαίο λίθο για την ανάπτυξη των υπολοίπων και στα οποία θα αναφερθούμε, το μοντέλο θραύσης επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model), το μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model) και το μοντέλο θραύσης της στροβιλότητας (vorticity wave-breaking model).

3.2.1 Μοντέλο θραύσης επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model)

Το μοντέλο θραύσης επιφανειακού κυλίνδρου ή “surface roller model” των Schäffer et al. (1993) που παρουσιάζεται σε αυτήν την ενότητα αποτελεί τροποποίηση της προσέγγισης κατά Deigaard (1989) για τη μελέτη της διάδοσης κυματισμού λαμβάνοντας υπόψη τη θραύση. Μέσω μίας θεώρησης επιφανειακού κυλίνδρου έγιναν οι υπολογισμοί σε μία διάσταση. Βασιζόμενοι στην υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής οριζόντιας ταχύτητας σε μη θραυόμενο κύμα, ένας πρόσθετος συναγωγικός όρος ορμής οφειλόμενος στη θραύση συμπεριλήφθηκε στην ολοκληρωμένη κατά το βάθος εξίσωση ορμής θεωρώντας ένα ανομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας που προτάθηκε από τον Svendsen (1984). Η τυπική διατομή που χρησιμοποιήθηκε δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 3.3:



Σχήμα 3.3: Προσομοίωση διατομής θραύσης με τη μέθοδο του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller). [98]

Επισημαίνουμε ότι:

- η ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας
- δ διάσταση του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller)
- h βάθος πυθμένα στη συγκεκριμένη θέση

- c ταχύτητα φάσης κύματος
- u₀ προφίλ οριζόντιας ταχύτητας

Κατά συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα του Stive (1980) η ταχύτητα του επιφανειακού κυλίνδρου λήφθηκε ίση με 1.2 έως 1.3 φορές την ταχύτητα φάσης του κύματος στα ρηχά νερά. Το φαινόμενο της θραύσης λάμβανε χώρα όταν η μέγιστη κλίση του μετώπου του κύματος λάμβανε μία μέγιστη τιμή, ενώ σταματούσε όταν η κλίση του μετώπου έφτανε σε μία ελάχιστη τιμή.

Η γεωμετρία του κυλίνδρου μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο. Για το λόγο αυτό πέραν των μέγιστων και ελάχιστων ορίων κλίσης μετώπου, εισάγεται και μία παράμετρος σχήματος για τον κύλινδρο $f_{\delta}=1.5$ που αφορά στο διαχωρισμό του από την υποκείμενη ροή, αλλά και μία χρονική κλίμακα για την ανάπτυξη του κυλίνδρου.

Συμπερασματικά, το μοντέλο της μονοδιάστατης διάδοσης περιγράφει ικανοποιητικά φαινόμενα στη ζώνη θραύσης προβλέποντας τη μεταβολή της μέσης στάθμης ύδατος και το ύψος κύματος στη ζώνη αυτή (πριν, κατά τη διάρκεια και μετά τη θραύση) όπως αποδεικνύεται από πειραματικά αποτελέσματα. Το μοντέλο αυτό κρίθηκε ικανό να αναπαράγει το φαινόμενο μετατροπής της δυναμικής ενέργειας σε κινητική στην εξωτερική μεταβατική περιοχή.

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι οι Schäffer et al. (1992) πρότειναν επέκταση του μοντέλου σε δύο οριζόντιες διαστάσεις παρουσιάζοντας ένα προκαταρκτικό παράδειγμα.

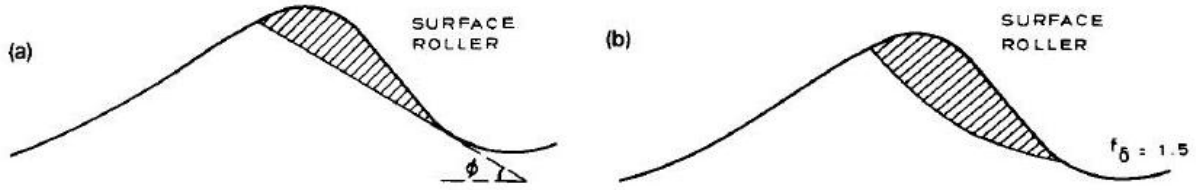
Μαθηματικοποιώντας, τη θεωρία θραύσης που εισήχθη με βάση τη μελέτη αυτή και βάσει του σχήματος 3.3 προκύπτει το μονοδιάστατο προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας που θεώρησαν οι Schäffer et al. (1993) από τη σχέση:

$$u = \begin{cases} c, & \zeta - \delta \leq z \leq \zeta \\ u_0, & -d \leq z \leq \zeta - \delta \end{cases} \quad (3.1)$$

Και με ολοκλήρωση της εξίσωσης ορμής και θέτοντας $P = \int_{-d}^{\zeta} u dz$ θα προκύψει ο επιπλέον όρος του επιφανειακού κυλίνδρου που θα πρέπει να προστεθεί στην εξίσωση ορμής και τελικά δίνεται από τη σχέση:

$$R = \delta \cdot \left(c - \frac{P}{d}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\delta}{d}\right)^{-1} \quad (3.2)$$

Ο χρονικός και χωρικός προσδιορισμός του επιφανειακού κυλίνδρου γίνεται γεωμετρικά (Σχήμα 3.4). Καθώς το υπό ρήχωση κύμα πλησιάζει την ακτή, η τοπική κλίση του μετώπου αυξάνει, αποσταθεροποιείται και επέρχεται η θραύση. Θεωρώντας για ένα μη θραυόμενο κύμα η τοπική κλίση του μετώπου είναι ίση με $\tan\phi$, οδηγείται σε θραύση μόλις λάβει αυτή η κλίση μία μέγιστη οριακή τιμή. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η υδάτινη περιοχή πάνω από την κρίσιμη κλίση ανήκει στον επιφανειακό κύλινδρο. Η θραύση σταματάει όταν η κλίση γίνει μικρότερη από $\tan\phi$.



Σχήμα 3.4: (a) Γεωμετρικός προσδιορισμός του επιφανειακού κυλίνδρου (b) Ο ίδιος κύλινδρος με εφαρμογή συντελεστή σχήματος $f_{\delta} = 1.5$. [98]

Η έναρξη της θραύσης συμβαίνει όταν η κρίσιμη γωνία πάρει μέγιστη τιμή $\varphi = \varphi_B$ και μεταβάλλεται έως τη λήξη της όπου $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi_0 < \varphi_B$). Οι Schäffer et al. (1993), καθώς οι μεταβολές λόγω θραύσης είναι συνήθως απότομες, πρότειναν έναν εκθετικό νόμο χρονικής μείωσης της κλίσης $\tan\varphi$ μέσω της σχέσης:

$$\tan\varphi(t) = \tan\varphi_0 + (\tan\varphi_B - \tan\varphi_0) \cdot \exp\left(-\ln 2 \cdot \frac{t - t_B}{t^*}\right) \quad (3.3)$$

Όπου t_B ο χρόνος έναρξης θραύσης και t^* η χρονική κλίμακα ανάπτυξης του επιφανειακού κυλίνδρου. Ο επιφανειακός κύλινδρος θεωρείται το υδάτινο τμήμα πάνω από την κλίση $\tan\varphi$ και η θραύση τερματίζεται όταν γίνει μικρότερη από την τιμή αυτή. Για την προσομοίωση του φαινομένου σε κάθε χρονικό βήμα προσδιορίζεται γεωμετρικά, πολλαπλασιάζεται το πάχος του κυλίνδρου δ με συντελεστή σχήματος f_{δ} πριν εισαχθεί στην εξίσωση 3.2 (μονοδιάστατη περίπτωση).

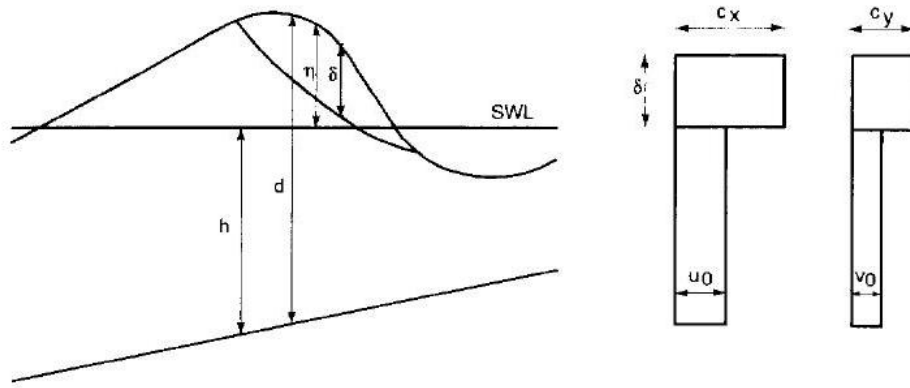
Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Madsen et al. (1997) επέκτειναν το μοντέλο θραύσης του επιφανειακού κυλίνδρου σε δύο οριζόντιες διαστάσεις ορίζοντας προφίλ ταχύτητας κατά το Σχήμα 3.5, ενώ οι όροι επιφανειακού κυλίνδρου που εισάγονται κατ' αναλογία στις εξισώσεις ορμής δίνονται από τις εκφράσεις:

$$R_{xx} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \cdot \left(c_x - \frac{P}{d}\right)^2 \quad (3.4)$$

$$R_{yy} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \cdot \left(c_y - \frac{Q}{d}\right)^2 \quad (3.5)$$

$$R_{xy} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \cdot \left(c_x - \frac{P}{d}\right) \cdot \left(c_y - \frac{Q}{d}\right) \quad (3.6)$$

Όπου $\delta = \delta(x, y, t)$ το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου, c_x, c_y οι ταχύτητες φάσης των ρευστών σωματιδίων και P, Q οι ολοκληρωμένες κατά το βάθος συνιστώσες της οριζόντιας ταχύτητας κατά x, y αντίστοιχα. Για το γεωμετρικό προσδιορισμό, ωστόσο, του επιφανειακού κυλίνδρου η περίπτωση δύο διαστάσεων είναι δυσκολότερη καθώς ο πόδας του κυλίνδρου είναι καμπύλη και όχι μεμονωμένο σημείο μεταβάλλοντας κατά την άλλη οριζόντια διάσταση την κρίσιμη κλίση έχοντας πλέον $\tan\varphi(y, t)$ κατά x , γεγονός που καθιστά πολύπλοκο τον προσδιορισμό του κυλίνδρου σε κάθε χρονικό βήμα.

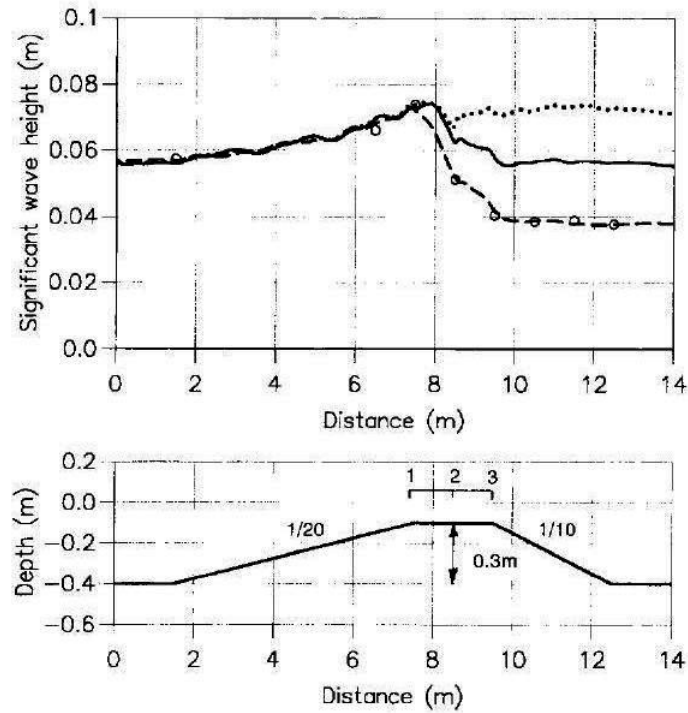


Σχήμα 3.5: Προσομοίωση διατομής θραύσης και προφίλ οριζόντιων ταχυτήτων σωματιδίων σε δύο οριζόντιες διαστάσεις με τη μέθοδο του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller). [71]

Μειονέκτημα του προσδιορισμού των επιφανειακών κυλίνδρων είναι ότι πέραν από το φ_B , υπάρχει εξάρτηση και από τις παραμέτρους φ_0 , t^* και f_δ . Από τους Madsen et al. (1997a) διερευνήθηκε η επίδραση των μεταβλητών στο φαινόμενο οδηγώντας στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Η τιμή του φ_0 δεν είναι κρίσιμη στις εφαρμογές όπου η θραύση οδηγείται προοδευτικά έως την ακτογραμμή. Βασιζόμενος στο υδραυλικό άλμα, ο Deigaard (1989) εκτίμησε μία τιμή του φ_0 να είναι της τάξης των 10° ως βάση των υπολογισμών. Σε ειδικές περιπτώσεις όπως θραύση επί του οριζώντιου τμήματος ύφαλου εμποδίου τραπεζοειδούς διατομής η γωνία φ_0 μειώνεται στις 7° με 8° με αντίστοιχη μείωση και της γωνίας φ_B .
- Η παράμετρος t^* (ή $t_{1/2}$) ορίζει τη μετάβαση μεταξύ των δύο γωνιών θραύσης ενώ εξετάστηκε η επίδραση ανάμεσα σε χρονικές τιμές $T/10$ και $T/2$, όπου T η χαρακτηριστική περίοδος της εισερχόμενης κυματοσειράς. Η αύξηση της τιμής της παραμέτρου επηρεάζει την επιφάνεια του κυλίνδρου με δύο τρόπους: αυξάνει τη μέγιστη τιμή του δ και μειώνεται η αρχική ανάπτυξη του κυλίνδρου, οδηγώντας σε μία ελαφρώς ηπιότερη μείωση του ύψους κύματος. Προτεινόμενη τιμή από την εργασία θεωρήθηκε η $T/5$.
- Η παράμετρος f_δ μεταβάλλεται από 1.0 έως 2.0. Προκύπτει ότι παρότι μία μεγάλη τιμή του f_δ δίνει μεγάλο κύλινδρο στο στιγμιαίο προσδιορισμό, η επιρροή στο φαινόμενο είναι μικρή, καθώς η προσπάθεια να μεγαλώσει ο κύλινδρος οδηγεί σε αυξημένη θραύση που τείνει να μειώσει το μέγεθος και πάλι σε επόμενα χρονικά βήματα. Στην εργασία των Madsen et al. (1987a) υιοθετείται η τιμή $f_\delta = 1.5$. Οι Schäffer et al. (1993) δέχονται την τιμή αυτή για θραύση τύπου spilling, ενώ οι Ozanne et al. (2000) θεωρούν ότι για θραύση τύπου plunging είναι ίση με $f_\delta = 2.0$.

Έπειτα από δοκιμές και διερευνήσεις για θραύση τύπου spilling σε ακτές με επίπεδη κλίση οδηγήθηκαν σε αποδεκτά συμπεράσματα θεωρώντας ότι $\varphi_B = 20^\circ$ κάτι που βέβαια δεν ισχύει και για θραύσεις τύπου plunging οι οποίες απαιτούν μία ελαφρά αύξηση στις γωνίες θραύσης, ενώ σε περίπτωση θραύσης πάνω από ύφαλο τραπέζιο απαιτείται ελαφρά μείωση των γωνιών για την αποδεκτή προσομοίωση. Αποτελέσματα των παραπάνω οπτικοποιούνται στο Σχήμα 3.6 όπου εφαρμόζονται από τους Madsen et al. (1997a) στο πείραμα Beji – Battjes (1993) για τη χωρική μεταβολή του σημαντικού ύψους κύματος.



Σχήμα 3.6: Χωρική μεταβολή του ύψους κύματος και της βαθυμετρίας για το πείραμα των Beji και Battjes (1993). (α) Μοντέλο Madsen et al. (1997a) $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$ (συνεχής γραμμή), (β) Μοντέλο Madsen et al. (1997a) $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ (διακεκομμένη γραμμή), (γ) Μοντέλο Madsen et al. (1997a) χωρίς θραύση(τελείες), (δ) αποτελέσματα πειράματος (κύκλοι). [71]

Οι Memos et al. (2005) υπολογίζουν τον όρο ορμής του επιφανειακού κυλίνδρου θεωρώντας τιμές $\varphi_B = 20^\circ$, $\varphi_o = 10^\circ$, $f_\delta = 1.5$ και $t_{1/2} = T_p/5$ (T_p η περίοδος κορυφής του εισερχόμενου φάσματος) μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$M_u = (d + \zeta) \cdot \vec{u}_o^2 + \delta \cdot (\vec{c}^2 - \vec{u}_o^2) \quad (3.7)$$

Όπου $\vec{u}_o = (u_o, v_o)$ η ταχύτητα των μορίων του νερού στον πυθμένα και υπολογίζεται συναρτήσει της μέσης κατά το βάθος ταχύτητας από τη σχέση:

$$\vec{u}_o = \vec{U} \cdot \frac{h}{h - \delta} - \vec{c} \cdot \frac{\delta}{h - \delta}, \quad \vec{U} = \frac{1}{h} \int_{-d}^{\zeta} \vec{u} dz, \quad h = d + \zeta \quad (3.8)$$

Και $\vec{c} = (c_x, c_y)$ η ταχύτητα μεταφοράς του επιφανειακού κυλίνδρου. Για τον προσδιορισμό της οι Madsen et al. (1997a) έκαναν μία νέα προσέγγιση καθώς την προσδιόρισαν από το στιγμιαίο κυματικό πεδίο και επανατροφοδοτούσαν το πεδίο με αυτή. Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας προσδιορίζεται από μία σχέση της μορφής $\zeta = \zeta(\omega t - k_x x - k_y y)$ που αντιστοιχεί στη διάδοση απλού κυματικού πεδίου και άρα με (k_x, k_y) τους κυματαριθμούς στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις έχουμε:

$$(c_x, c_y) = (k_x, k_y) \cdot \frac{\omega}{k^2} \quad (3.9)$$

ή σε όρους ελεύθερης επιφάνειας:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \frac{-\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} \quad (3.10)$$

εφαρμόζεται στο σημείο κάθε κυματικού μετώπου με την πιο απότομη κλίση, δίνοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα για απλούς και σύνθετους κυματισμούς. Επισημαίνεται, ωστόσο, ότι ο προσδιορισμός της ταχύτητας επιφανειακού κυλίνδρου από το μοντέλο και η επανεισαγωγή της σε αυτό, ενδέχεται να οδηγήσει σε αστάθειες και θόρυβο, κάτι που απαιτεί τη χρήση κατάλληλων φίλτρων.

Στο μοντέλο των Memos et al. (2005) χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των ταχυτήτων στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις του επιφανειακού κυλίνδρου οι εκφράσεις κατά Sørensen et al. (1998) που δίνονται παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \frac{1.3 \cdot \sqrt{gd}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \quad (3.11)$$

Ο Koutsourelakis (2009) εισήγαγε θραύση επιφανειακού κυλίνδρου στο μονοδιάστατο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη των Schäffer et al. (1993) για τους επιπλέον όρους ορμής λόγω του κυλίνδρου, και θεώρησε ταχύτητα μεταφοράς του κυλίνδρου ίση με την προκύπτουσα από γραμμική θεωρία. Το μοντέλο που προέκυψε επαληθεύτηκε για μονοχρωματικούς κυματισμούς (2009) σύμφωνα με το πείραμα των Beji και Battjes (1993) ελέγχοντας τις τιμές γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$, $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ και $(\varphi_B, \varphi_o) = (18^\circ, 9^\circ)$, του χρόνου διάρκειας του φαινομένου $t_{1/2}$ οι τιμές 0.2T και 0.1T, ενώ για spilling θραύση θεωρήθηκε $f_\delta = 1.5$ και για plunging $f_\delta = 2.0$.

Το μοντέλο επαληθεύτηκε αργότερα από τους Koutsourelakis και Memos (2011) για θραυόμενους σύνθετους κυματισμούς σύμφωνα με το πείραμα των Luth et al. (1993) για σύνθετους θραυόμενους κυματισμούς για τις τιμές των γωνιών $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

3.2.2 Μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model)

Το μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας ή “eddy viscosity model” αποτελεί μετεξέλιξη των προσεγγίσεων των Heiner και Housner (1970) και του Zelt (1991). Αρχικά οι Heiner και Housner (1970) εισήγαγαν τεχνητούς όρους στις εξισώσεις διατήρησης ορμής για να περιγράψουν την αιφνίδια ταραχή κατά μήκος ενός tsunami bore. Οι όροι αυτοί διατήρησαν τη συνολική ορμή, πράγμα που είναι πολύ σημαντικό για ένα σχήμα θραύσης. Ο Zelt (1991) χρησιμοποίησε ένα σχηματισμό τυρβώδους συνεκτικότητας κατά κάποιον τρόπο όμοιο με αυτόν των δύο προηγούμενων ερευνητών, μαζί με ένα Lagrangian μοντέλο Boussinesq για να μελετήσει τη θραύση και την αναρρίχηση μοναχικών κυμάτων. Στη βάση του σχήματος θραύσης που θεωρήθηκε από τους Chen et al. (2000) και μελετάται στην ενότητα αυτή αλλά και ενδελεχώς στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, χρησιμοποιήθηκε ένα απλό μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας σε σύγκριση με τα διαθέσιμα μοντέλα, αλλά με δυνατότητες επεκτάσεων που παρείχαν μία πιο ρεαλιστική περιγραφή της έναρξης και της κατάπαυσης της κυματικής θραύσης, τα οποία συγκρίθηκαν με εργαστηριακές μετρήσεις δίνοντας πολύ θετικά αποτελέσματα για την περιγραφή της κυματικής θραύσης και της κυματικής αναρρίχησης.

Για την περιγραφή του μοντέλου, οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τις εξισώσεις Boussinesq των Nwogu (1993) και Wei et al. (1995) οι οποίες στην αρχική τους μορφή είναι για μη θραυόμενους κυματισμούς, οπότε χρησιμοποιήθηκε ο απλός μετασχηματισμός τυρβώδους συνεκτικότητας για την περιγραφή τυρβώδους μείξης και διάχυσης που προκαλείται από τη θραύση. Η εξίσωση διατήρησης μάζας δεν μεταβάλλεται, ενώ εισάγεται στις εξισώσεις ορμής ο πρόσθετος όρος τυρβώδους συνεκτικότητας \mathbf{R}_b δίνοντας τη μορφή:

$$u_{\alpha t} + \dots - \mathbf{R}_b = 0 \quad (3.12)$$

όπου $u_{\alpha t}$ η χρονική παράγωγος της ταχύτητας κατά μία εκ των δύο οριζόντιων διευθύνσεων σε τυχαίο βάθος z_α ενώ:

$$\mathbf{R}_{bx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_y + v((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_y \right\} \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{R}_{by} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v((d + \zeta)v_\alpha)_y \right]_y + \frac{1}{2} \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_y + v((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_x \right\} \quad (3.13b)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις ορμής στις δύο διευθύνσεις με $(d + \zeta)$ και ολοκληρώνοντας στα όρια ενός συμβάντος θραύσης, οι πρόσθετοι όροι φαίνεται να διατηρούν τη συνολική ορμή.

Η τυρβώδης συνεκτικότητα ν η οποία είναι συνάρτηση και του χώρου και του χρόνου υπολογίζεται με τρόπο παρόμοιο με αυτόν κατά Zelt (1991) αλλά με κάποιες διαφορές μέσω της σχέσης:

$$\nu = B \cdot \delta_b^2 \cdot (d + \zeta) \cdot \zeta_t \quad (3.14)$$

όπου δ_b μία παράμετρος μήκους μείξης η οποία από ένα πλήθος δοκιμών τέθηκε από τους ερευνητές μία αδιάστατη τιμή $\delta_b = 1.2$, ενώ οι υπολογιστικές διαδικασίες δεν επηρεάζονται από μεταβολές της παραμέτρου καθώς τιμές μεταξύ 0.9 και 1.5 δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Η ποσότητα B μεταβάλλεται ομαλά από 0 έως 1 για την αποφυγή απότομης

εκκίνησης της θραύσης και άρα της συνακόλουθης αστάθειας, οπότε και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$B = \begin{cases} 1, & \zeta_t \geq 2\zeta_t^* \\ \frac{\zeta_t}{\zeta_t^*} - 1, & \zeta_t^* < \zeta_t \leq 2\zeta_t^* \\ 0, & \zeta_t \leq \zeta_t^* \end{cases} \quad (3.15)$$

Η παράμετρος ζ_t^* είναι καθοριστική για την έναρξη και λήξη της θραύσης. Η χρήση του ζ_t ως παράμετρο έναρξης διασφαλίζει με απλό τρόπο ότι η διάχυση συγκεντρώνεται στο εμπροσθεν τμήμα του μετώπου του κύματος, όπως συμβαίνει στη φύση. Στο μοντέλο των ερευνητών, ένα συμβάν θραύσης ξεκινά όταν το ζ_t υπερβεί μία αρχική τιμή, αλλά καθώς η θραύση αναπτύσσεται το κύμα θα συνεχίσει να θραύεται ακόμα και αν η τιμή ζ_t πέσει σε χαμηλότερη τιμή από την αρχικά θεωρούμενη. Το πεδίο τιμών λοιπόν, του ζ_t^* μειώνεται χρονικά από μία αρχική τιμή $\zeta_t^{(I)}$ σε μία τελική τιμή $\zeta_t^{(F)}$. Η μεταβολή μεταξύ των οριακών τιμών θεωρήθηκε ότι γίνεται γραμμικά για την προσομοίωση της εξέλιξης του ζ_t^* , μέσω της σχέσης:

$$\zeta_t^* = \begin{cases} \zeta_t^{(F)}, & t \geq T^* \\ \zeta_t^{(I)} + \frac{t - t_0}{T^*} \cdot (\zeta_t^{(F)} - \zeta_t^{(I)}), & 0 \leq t - t_0 < T^* \end{cases} \quad (3.16)$$

όπου T^* είναι ο χρόνος διάρκειας του φαινομένου, t_0 είναι ο χρόνος έναρξης του φαινομένου και άρα $t - t_0$ είναι η μη αρνητική «ηλικία» του φαινομένου της θραύσης. Οι τιμές που υιοθετήθηκαν για τις παραμέτρους έναρξης θραύσης $\zeta_t^{(I)}$ και λήξης θραύσης $\zeta_t^{(F)}$ είναι ίσες με $0.65\sqrt{gd}$ και $0.15\sqrt{gd}$, αντίστοιχα, ενώ ο χρόνος διάρκειας θραύσης $T^* = 5\sqrt{d/g}$ και δεν αποτελούν αμετάβλητες σταθερές αλλά προέκυψαν από βαθμονόμηση για τα μοντέλα εξισώσεων των Nwogu (1993) και Wei et al. (1995) στα οποία εισήχθη το υπό εξέταση κριτήριο θραύσης, ώστε να συμφωνούν με τα αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων.

Το μοντέλο θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας έχει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- Η χρήση της παραμέτρου ζ_t^* συνδέεται με την ποσότητα ζ_t η οποία προκύπτει από τις συνήθεις εξισώσεις Boussinesq.
- Εμφανίζει επαρκή ευστάθεια η θεώρηση του μοντέλου σε σύγκριση με άλλα δοκιμαζόμενα μοντέλα θραύσης.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα είναι ότι σε ειδικές περιπτώσεις όπως σε στάσιμα υδραυλικά άλματα, το κριτήριο μπορεί να αναχθεί σε φαινόμενο Doppler σε βαθμό που να μην αναγνωρίζεται η έναρξη θραύσης.

Για κυματική δραστηριότητα σε μία οριζόντια διάσταση (1D), τα γεγονότα θραύσης καθορίζονται με επάρκεια. Η ποσότητα t_0 , ο χρόνος έναρξης θραύσης, ποικίλει γενικά για διαφορετικά γεγονότα θραύσης εντός ενός συστήματος, αλλά είναι απλό να ερευνηθεί ένα οποιοδήποτε μεμονωμένο γεγονός καθώς οδεύει προς την ακτή. Για παράδειγμα στην εξωτερική ζώνη θραύσης, ένα κύμα μπορεί να έχει ξεκινήσει να θραύεται λίγο νωρίτερα από μία δεδομένη χρονική στιγμή, οπότε ο χρόνος της θραύσης ως τότε θα είναι μικρός και ίσος με $t - t_0$ και η τιμή του ζ_t^* θα είναι ελαφρώς μικρότερη του $\zeta_t^{(I)}$. Ωστόσο, την ίδια στιγμή

μπορεί να συμβεί μία άλλη θραύση στην εσωτερική ζώνη θραύσης όπου $t - t_0 > T^*$ και άρα $\zeta_t^* = \zeta_t^{(F)}$.

Για όλα τα γεγονότα θραύσης η τυρβώδης συνεκτικότητα ν προτείνεται να φιλτράρεται για λόγους σταθερότητας μέσω ενός φίλτρου τριών σημείων πριν την εισαγωγή τους στις εκφράσεις των παραμέτρων \mathbf{R}_b των εξισώσεων 3.13a και 3.13b.

Για την περίπτωση μελέτης του φαινομένου σε δύο οριζόντιες διαστάσεις (2D) το φαινόμενο γίνεται ελαφρώς πιο σύνθετο, καθώς απαιτείται καθορισμός της κατεύθυνσης του κύματος προκειμένου να εκτιμηθεί η «ηλικία» του θραυόμενου γεγονότος.

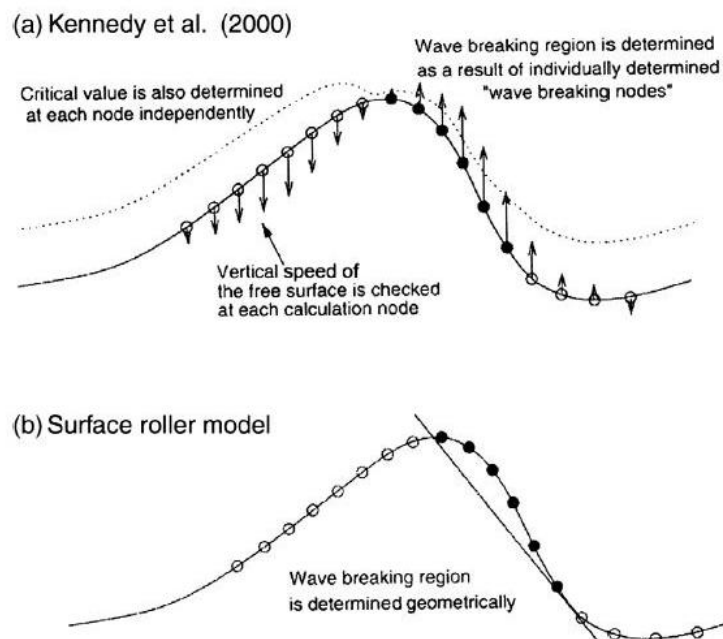
Θεωρώντας ένα κατ' αρχήν οδεύον κυματικό πεδίο, η εφαρμογή της συνθήκης ακτινοβολίας κατά Sommerfeld ($\zeta_t + \mathbf{c} \cdot \nabla \zeta = 0$) σε ένα τοπικά σταθερό βάθος νερού δίνει το διάνυσμα της φασικής ταχύτητας κατά όμοιο τρόπο με την εργασία των Madsen et al. (1997a), μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{c} = (c_x, c_y) = -\frac{\zeta_t}{\zeta_x^2 + \zeta_y^2} \nabla \zeta \quad (3.18)$$

Συνεπώς η γωνία διάδοσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\zeta_y}{\zeta_x}\right) \quad (3.19)$$

Γνωρίζοντας, λοιπόν, την κατεύθυνση του κύματος, το μοντέλο μπορεί να εκτιμήσει την «ηλικία» του κυματικού γεγονότος σε δεδομένη τοποθεσία, ανιχνεύοντας το ιστορικό θραύσης στα σημεία του αριθμητικού καννάβου κατά μήκος της κυματικής ακτίνας. Από το σημείο αυτό η διαδικασία είναι ίδια με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Για την παράμετρο έναρξης θραύσης $\zeta_t^{(1)}$ προτείνονται τιμές με εύρος $0.65\sqrt{gd}$ και $0.35\sqrt{gd}$ με τις χαμηλότερες τιμές να συνίστανται για ακτές με ύφαλα εμπόδια ή τάφρους και αραιή χωρική διακριτοποίηση, ενώ οι υψηλότερες τιμές για ακτές μονοτονικά μειούμενου βάθους. Οι υπόλοιπες τιμές έχουν ίδιες τιμές με αυτές της μονοδιάστατης περίπτωσης.



Σχήμα 3.7: Σχηματική σύγκριση των μοντέλων θραύσης (a) τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model) και (b) επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller model). [22]

Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί η συνεισφορά της εργασίας του Chondros (2008) ο οποίος εισήγαγε τη θεώρηση θραύσης που περιγράψαμε στο μοντέλο των Karambas και Memos (2008) στην μονοδιάστατη θεώρησή του και επαληθεύτηκε για θραύση μονοχρωματικών κυματισμών τύπου spilling και plunging βάσει του πειράματος Beji και Battjes (1993), ελέγχοντας τόσο τις προτεινόμενες τιμές $\zeta_t^{(I)} = 0.65\sqrt{gd}$, $\zeta_t^{(F)} = 0.15\sqrt{gd}$, $T^* = 5\sqrt{d/g}$ και $\delta_b = 1.2$, όσο και τις τιμές $\zeta_t^{(I)} = 0.35\sqrt{gd}$, $\zeta_t^{(F)} = 0.25\sqrt{gd}$ και $\delta_b = 2.5, 3.5$.

Σε μεταγενέστερη εργασία, ο Chondros (2011) μελέτησε τη θραύση σύνθετων κυματισμών (φάσματα JONSWAP) με εισαγωγή του μοντέλου θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας (με ταυτόχρονη διερεύνηση των ίδιων με πριν παραμέτρων θραύσης) στο μοντέλο των Karambas και Memos (2009) επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματα με βάση τα πειράματα των Luth et al. (1993) και των Beji και Battjes (1993).

3.2.3 Μοντέλο θραύσης στροβιλότητας (vorticity wave-breaking model)

Το μοντέλο θραύσης στροβιλότητας που εισήχθη από τους Svendsen και Yu (1996) αποτελεί ένα διαφορετικό μοντέλο προσομοίωσης θραύσης, που σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα, περιλαμβάνει πρόσθετο όρο θραύσης και στην εξίσωση συνέχειας πέρα από την εξίσωση ορμής. Σημαντική λεπτομέρεια της συγκεκριμένης θεώρησης που εμφανίζει ομοιότητες στη σύλληψη με τη θεωρία του επιφανειακού κυλίνδρου, είναι η θεώρηση για τον προσδιορισμό της ταχύτητας u στο σύστημα των εξισώσεων Boussinesq ότι για την περίπτωση θραυόμενων κυμάτων, η ροή δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί αστρόβιλη και άρα η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla^2 \Psi = \omega \quad (3.20)$$

όπου ω είναι η στροβιλότητα που πρέπει να υπολογιστεί ξεχωριστά, ενώ η παραπάνω εξίσωση λύνεται εισάγοντας τις συνήθεις θεωρήσεις των θεωριών Boussinesq ότι δηλαδή το βάθος νερού προς το μήκος κύματος μ και το κυματικό εύρος προς το βάθος νερού δ είναι μικρά και η ποσότητα δ/μ^2 είναι της τάξης της μονάδας. Οι εξισώσεις που προέκυψαν χώριζαν την υδάτινη στήλη σε ένα αστρόβιλο τμήμα ροής υποκείμενο ενός στροβιλού τμήματος κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια άμεσα συνδεδεμένου με τον επιφανειακό κύλινδρο, λειτουργώντας ως πηγή στροβίλων και τύρβης.

Οι Veeramony και Svendsen (2000) έκαναν τη θεώρηση της ύπαρξης μίας συνιστώσας δυναμικού ταχύτητας u_p και της συνιστώσας u_r που αντιστοιχεί σε στροβιλή ροή, ώστε αθροιζόμενες να δίνουν την συνολική ταχύτητα u και αντίστοιχα ορίζουμε τις μέσες εκφράσεις στο βάθος των παραπάνω ταχυτήτων U_p , U_r και U .

Οι αδιάστατες εκφράσεις της οριζόντιας ταχύτητας \hat{u} , της κατακόρυφης ταχύτητας \hat{w} και της στροβιλότητας $\hat{\omega}$, δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\hat{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \delta \sqrt{gh_0} u \quad (3.21)$$

$$\hat{w} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \delta \mu \sqrt{gh_0} w \quad (3.22)$$

$$\hat{\omega} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} = \frac{\delta \sqrt{gh_0}}{h_0} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \mu^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\delta \sqrt{gh_0}}{h_0} \omega \quad (3.23)$$

Το τελικό σύστημα εξισώσεων που προέκυψαν περιελάμβανε τρεις εξισώσεις, την εξίσωση συνέχειας, την εξίσωση ποσότητας κίνησης στις οποίες προστέθηκαν οι ακόλουθες ποσότητες:

$$\Delta M = \int_{-d}^{\delta z} (u_r^2 - U_r^2) dz \quad (3.24)$$

$$\Delta P = \int_{-d}^{\delta z} \int_z^{\delta z} \int_{-d}^z (u_r - U_r) dz dz dz \quad (3.25)$$

και η εξίσωση μεταφοράς στροβιλότητας για την τυρβώδη ροή που παράγεται από τις εξισώσεις κατά Reynolds και με κατάλληλη αδιαστατοποίηση δίνει:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \delta u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \delta w \frac{\partial \omega}{\partial z} = \nu_t \left(\mu^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \quad (3.26)$$

όπου ν_t το κινηματικό ιξώδες.

Μετατρέποντας το σύστημα συντεταγμένων από (x, z, t) σε (x, σ, t) μέσω της σχέσης:

$$\sigma = \frac{d + z}{d + \delta \zeta_e} \quad (3.27)$$

όπου ζ_e η στάθμη του πόδα του επιφανειακού κυλίνδρου σε αδιάστατη μορφή, έχουμε:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial \sigma^2} + O(\delta, \mu^2) \quad (3.28)$$

με $k = \nu_t / d^2$

Οι τιμές των όρων ΔM και ΔP είναι άμεσα εξαρτώμενες από το πεδίο των στροβιλισμών και είναι αμελητέες απουσία του φαινομένου. Απαλείφοντας τις τιμές τους προκύπτει ένα κλασικό σύστημα εξισώσεων Boussinesq, ενώ στη ζώνη θραύσης ξεκινούν να έχουν μη μηδενικές τιμές οι όροι αυτοί.

Το διαστατικό πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου $\hat{\zeta}_e$ κατά αναλογία με τα υδραυλικά άλματα, δίνεται μέσω της σχέσης:

$$\frac{\hat{\zeta}_e}{d_2 \sqrt{\xi}} = 0.78 e^{\hat{x}/l_r} \left(\frac{\hat{x}}{l_r} - \frac{\hat{x}^2}{l_r^2} \right) \quad (3.29)$$

όπου d_2 το βάθος κατάντη του επιφανειακού κυλίνδρου, $\xi = d_2/d_1$ και d_1 το βάθος ανάντη του κυλίνδρου, l_r το μήκος του κυλίνδρου και $\hat{x} = 0$ η θέση του πόδα του επιφανειακού κυλίνδρου. Ο διαστατικός στροβιλισμός προκύπτει με την ίδια θεώρηση ως:

$$\frac{\hat{\omega}_s d_2 \xi}{U_1} = 15.75 \left(1 - \frac{\hat{x}}{l_r} \right) \quad (3.30)$$

όπου U_1 η μέση κατά το βάθος ταχύτητα ανάντη του κυλίνδρου.

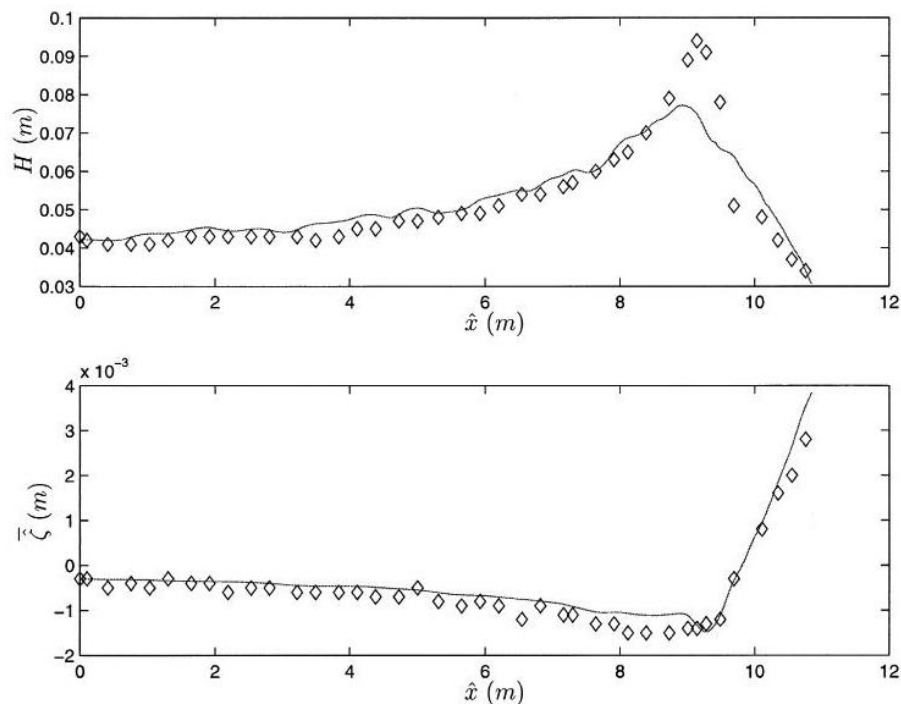
Από την εξίσωση μεταφοράς του στροβιλισμού σε αδιάστατη μορφή προκύπτει:

$$\omega = \sigma \omega_s + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin(\pi \sigma) \quad (3.31)$$

όπου

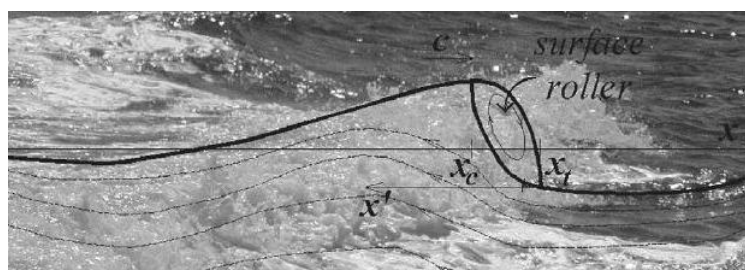
$$G_n(t) = (-1)^n \frac{2}{n\pi} \int_0^t \frac{\partial \omega_s}{\partial \tau} e^{n^2 \pi^2 \kappa (\tau - t)} d\tau \quad (3.32)$$

Το μοντέλο κατά Veeramony και Svendsen (2000) επαληθεύτηκε για μία σειρά πειραμάτων με θραυόμενους κυματισμούς. Χαρακτηριστικό είναι το Σχήμα 3.8 που δίνει επαλήθευση του μοντέλου για τα πειράματα των Hansen και Svendsen (1979) για θραύση μονοχρωματικών κυματισμών τύπου spilling.



Σχήμα 3.8: Σύγκριση μεταξύ αποτελεσμάτων μοντέλου Veeramony και Svendsen (2000) (συνεχής γραμμή) και πειραματικών μετρήσεων κατά Hansen και Svendsen (1979) (ρόμβοι) για (α)ύψη κύματος και (β) set-up (έναρξη κλίσης στα $x = 0$). [113]

Σε μεταγενέστερη περίοδο έχουμε το πλήρως μη-γραμμικό μοντέλο των Musumeci et al. (2005) το οποίο υπερέιχε σε ακρίβεια αυτού των Veeramony και Svendsen (2000) για προσομοίωση θραυόμενων κυματισμών συγκρινόμενο με πειραματικά δεδομένα. Οι ερευνητές εφάρμοσαν τη θεωρία ομοιότητας με το υδραυλικό άλμα λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.29) και (3.30). Το Σχήμα 3.9 αναφέρεται στον πόδα του επιφανειακού κυλίνδρου (εδώ $x' \equiv \hat{x}$ από πριν) που κινείται στο μέτωπο του θραυόμενου κυματισμού με ταχύτητα c και θεωρούμε κινούμενο σύστημα αξόνων με ταχύτητα c κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ισχύει $x' = x_t - x$.

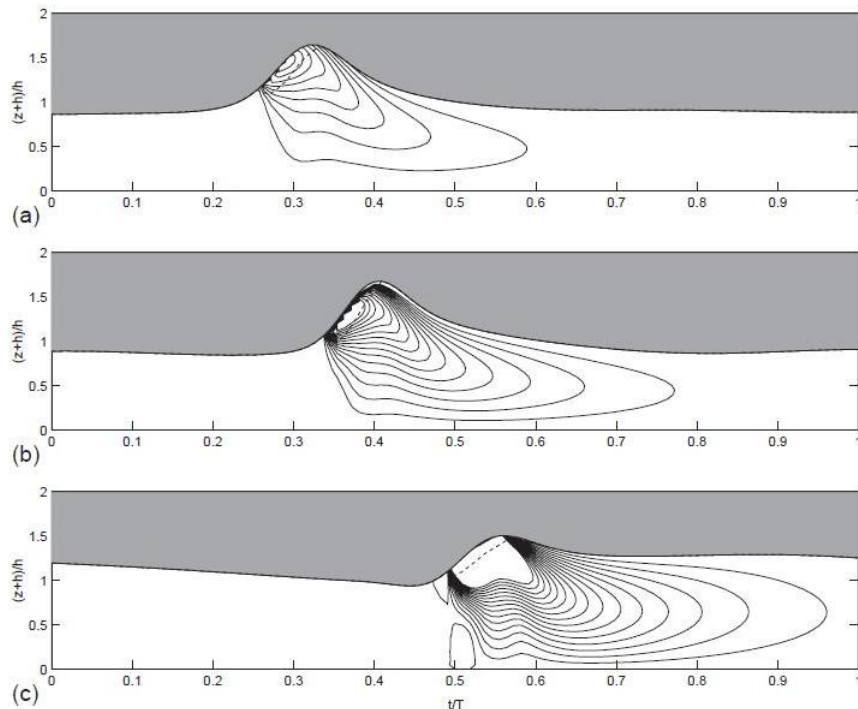


Σχήμα 3.9: Σχηματική αποτύπωση του τοπικού συστήματος αναφοράς που υιοθετήθηκε για την αριθμητική προσομοίωση ενός κινούμενου θραυόμενου κύματος στο μοντέλο των Musumeci et al. (2005). [86]

Οι συγγραφείς πρότειναν ο (διαστατικός) συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας να λάβει τιμές μέσω της σχέσης:

$$\hat{\nu}_t = C_v \hat{d} \sqrt{gd} \quad (3.33)$$

όπου ο συντελεστής C_v βαθμονομείται πειραματικά λαμβάνοντας τιμές από 0.01 έως 0.03. Οι Musumeci et al. (2005) υιοθέτησαν ως κριτήριο θραύσης αυτό της κλίσης της ελεύθερης επιφάνειας των Schäffer et al. (1993) με $(\varphi_B, \varphi_o) = (30^\circ, 10^\circ)$. Στο Σχήμα 3.10 φαίνεται η εξέλιξη των στροβιλισμών στη διάρκεια ενός γεγονότος θραύσης.



Σχήμα 3.10: Απεικόνιση μέσω γραμμών ίσης στροβιλότητας σε ένα θραυόμενο κύμα: (a) στην έναρξη της θραύσης, (b) στην περιοχή μετάδοσης και (c) στην εσωτερική ζώνη θραύσης. [86]

3.3 Επίδραση τριβής πυθμένα

Κάθε θεωρία διάδοσης κύματος ισχύει στην αρχική της σύλληψη για σταθερό, οριζόντιο και αδιαπέρατο πυθμένα κάτι το οποίο δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε πραγματικές συνθήκες, λόγω των πολλών διαφορετικών ειδών πυθμένα που απαντώνται στη φύση:

- Βραχώδεις πυθμένες, με τραχεία γεωμετρική μορφή που κάθε άλλο παρά οριζόντιοι ή ομαλοί μπορούν να θεωρηθούν και άρα θα πρέπει να ληφθεί ιδιαίτερη μέριμνα για την τραχύτητα και τη μεταβλητή τους γεωμετρία.
- Αμμώδεις πυθμένες, που σχηματίζουν μικρής ή μεγάλης κλίμακας, σχηματισμούς με διάφορες τιμές πορώδους που μεταβάλλονται χρονικά και επιτρέπουν τη ροή διαμέσου των πόρων τους.
- Ιλυώδεις (ή αργιλικούς) πυθμένες, που υπό την επίδραση ύδατος συμπεριφέρονται ως παχύρευστα υγρά μεγάλου ιξώδους.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η τραχύτητα, το πορώδες, το ιξώδες και η μεταβλητή γεωμετρία συμβάλλει στην απόσβεση κυματικής ενέργειας η οποία γίνεται εντονότερη όσο πιο εύκαμπτος είναι ο πυθμένας και όσο περισσότερο εκτίθεται το μεταδιδόμενο κύμα στους προαναφερθέντες παράγοντες απόσβεσης της κυματικής ενέργειας.

Η τριβή πυθμένα προσομοιώθηκε στο μοντέλο Memos et al. (2005) αλλά και από τον I. Koutsourelakis (2009) ενώ αναλύεται παρακάτω από τους Dean και Dalrymple (1984).

Οι γραμμικοποιημένες δισδιάστατες εξισώσεις κατά Navier-Stokes για ένα ιξώδες ρευστό είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.35)$$

Όπου $\nu = \mu/\rho$ το κινηματικό ιξώδες ρ η πυκνότητα του ρευστού, u η οριζόντια ταχύτητα κατά x και w η κατακόρυφη ταχύτητα κατά z .

Συμπερασματικά κοντά στον πυθμένα ($O(\delta)$, όπου δ είναι η κάθετη διάσταση του βάθους στην οποία η ταχύτητα u αυξάνεται απότομα) τα τυρβώδη φαινόμενα μπορούν να γίνουν πολύ σημαντικά. Για το λόγο αυτό είναι χρήσιμος ο διαχωρισμός του πεδίου ροής σε δύο μέρη, ένα αστρόβιλο και ένα στροβιλό του οποίου η ολική ταχύτητα ικανοποιεί τη σχέση:

$$u = u_p + u_r \quad (3.36)$$

και η ταχύτητα του αστρόβιλου πεδίου ικανοποιεί την εξίσωση Euler:

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.37)$$

όπου ρ η πυκνότητα του νερού και p η πίεση, ενώ η ταχύτητα του στροβιλού πεδίου ικανοποιεί την προσεγγιστική εξίσωση στροβιλικότητας:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (3.38)$$

Η συνολική ταχύτητα (πραγματικό μέρος) μπορεί να εκφρασθεί μέσω των δύο αυτών συνιστωσών μέσω της σχέσης:

$$u = \frac{g\alpha k}{\sigma \cosh(kd)} \left[\cosh(k(d + \zeta)) \cdot \cos(kx - \sigma t) - e^{-\sqrt{\sigma/2\nu}(d+\zeta)} \cdot \cos \left(kx - \sigma t + \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}(d + \zeta) \right) \right] \quad (3.39)$$

η οποία φανερώνει μία μετατοπισμένη φάση του τυρβώδους όρου σε σχέση με την τιμή της στάθμης. Το προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας κοντά στον πυθμένα δίνεται στο ακόλουθο σχήμα για δεδομένο κύμα με $k\delta = 0.01$ και $\delta = \sqrt{\nu/2\sigma}$. Επισημαίνουμε ότι α είναι το κυματικό εύρος, k ο αριθμός κύματος, σ η γωνιακή ταχύτητα και x, t η θέση και ο χρόνος αντίστοιχα.

Η κατακόρυφη συνιστώσα προσδιορίζεται εύκολα μέσω της εξίσωσης συνέχειας:

$$w = - \int_0^{d+\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} ds$$

$$w = - \frac{g\alpha k}{\sigma \cosh(kd)} \left[\sinh(k(d + \zeta)) e^{i(\psi + \pi/2)} - k \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} \left(e^{-(1-i)\sqrt{\sigma/2\nu}(d+\zeta)} - 1 \right) \cdot e^{i(\psi + 3\pi/4)} \right] \quad (3.40)$$

Ισχύει ότι $\psi = kx - \sigma t$ και s η στάθμη πάνω από τον πυθμένα. Η κατακόρυφη ταχύτητα αποτελείται από δύο όρους κοντά στον πυθμένα, ο πρώτος είναι κυματογεννής και ο δεύτερος είναι όρος διόρθωσης λόγω οριακού στρώματος ο οποίος είναι κατά πολύ μικρότερος του u_r .

Η στιγμιαία διατμητική τάση που ασκείται στον πυθμένα μπορεί να ληφθεί από την κλασική σχέση (Newton):

$$\tau_{xz} = \rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{z=-d} \quad (3.41)$$

από την οποία μόνο ο πρώτος όρος είναι σημαντικός άρα:

$$\tau_{xz} \approx \rho\nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \Big|_{z=-d} \quad (3.42)$$

ή

$$\tau_{xz} \cong \rho \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} \frac{g\alpha k}{\cosh(kd)} \cos \left(kx - \sigma t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.43)$$

Η διατμητική τάση στον πυθμένα είναι κατά αυτόν τον τρόπο αρμονική και διαφέρει φασικά από τη μετακίνηση της ελεύθερης επιφάνειας κατά 45° . Η μέση τιμή της διατμητικής τάσης πυθμένα είναι μηδενική.

Μία ιδιαίτερα χρηστική σχέση για τη διατμητική τάση δίνεται παρακάτω:

$$\tau_{xz} = \frac{\rho f}{8} u_b \cdot |u_b| \quad (3.44)$$

όπου u_b η ταχύτητα πυθμένα που προκύπτει από ροή δυναμικού έξω από το οριακό στρώμα και f είναι ένας όρος τριβής που υπολογίζεται παρακάτω.

Η μέγιστη ταχύτητα δίνεται μέσω της σχέσης:

$$(u_b)_{\max} = \frac{g\alpha k}{\sigma \cosh(kd)} = \zeta_b \sigma \quad (3.45)$$

όπου ζ_b η μέγιστη οριζόντια μετακίνηση των υγρών μορίων στον πυθμένα (λόγω κυματισμού) για ροή υγρού αμελητέου ιξώδους. Αν θεωρηθεί ότι η μέγιστη ταχύτητα πυθμένα αντιστοιχεί στη μέγιστη διαμητική τάση πυθμένα, τότε λόγω των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει:

$$\rho \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} \frac{g\alpha k}{\cosh(kd)} = \frac{\rho f}{8} (u_b)_{\max}^2 \quad (3.46)$$

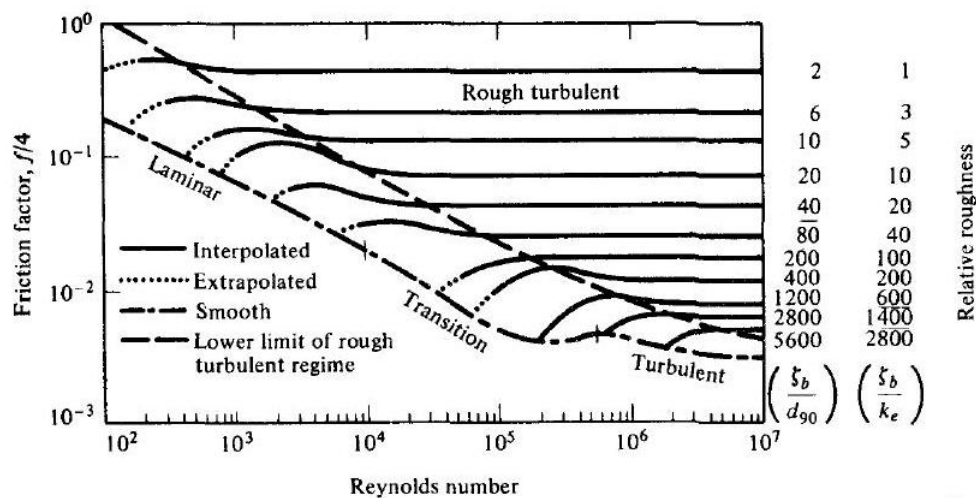
οπότε ο όρος τριβής δίνεται μέσω της έκφρασης:

$$f = \frac{8}{R_b^{1/2}} \quad (3.47)$$

και R_b ο αριθμός Reynolds πυθμένα που δίνεται από τη σχέση:

$$R_b = \frac{u_b \zeta_b}{\nu} \quad (3.48)$$

Ο παράγων τριβής σε σχέση με τον αριθμό Reynolds πυθμένα δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (Σχήμα 3.11). Για λείους πυθμένες η έκφραση είναι έγκυρη για R_b έως 10^4 .



Σχήμα 3.11: Συντελεστής τριβής f ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds R_b και της σχετικής τραχύτητας. [23]

Στο διάγραμμα d_{90} είναι η διάμετρος του κόκκου της άμμου από τον οποίο το 90% των υπόλοιπων κόκκων είναι λεπτότερο. Ο Kamphuis (1975), με κάποια επιφύλαξη, για να προσδιορίσει τη σχετική τραχύτητα πυθμένα όρισε ένα ισοδύναμο μέγεθος κόκκου άμμου ως $k_e = 2d_{90}$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτουν για στρωτή ροή πάνω από οριακό στρώμα πυθμένα λείου, άκαμπτου και αδιαπέρατου. Ωστόσο, όταν τα κυματικά φαινόμενα είναι έντονα ή όταν ο πυθμένας είναι πολύ τραχύς, το οριακό στρώμα χαρακτηρίζεται ως τυρβώδες, όπως συμβαίνει συνηθέστερα στη φύση. Οι πειραματικές εργασίες των Jonsson (1966), Kamphuis (1975) και Jonsson και Carlsen (1976) όπως και η θεωρητική εργασία του Kajiwara (1968) εμβάθυναν στη φύση του τυρβώδους οριακού στρώματος και της εξάρτησής του από τον αριθμό Reynolds και της σχετικής τραχύτητας πυθμένα k_e/ζ_b .

Όπως και στη ροή αγωγών, για τραχεία τυρβώδη ροή, η τιμή του συντελεστή τριβής f είναι ανεξάρτητη του αριθμού Reynolds R_b και ο Kamphuis πρότεινε:

$$f \approx 0.1(k_e/\zeta_b)^{3/4} \quad , \quad k_e/\zeta_b > 0.02 \quad (3.49)$$

και

$$\frac{1}{2\sqrt{f}} + \ln \frac{1}{2\sqrt{f}} = -0.35 - \frac{4}{3} \ln \frac{k_e}{\zeta_b} \quad , \quad k_e/\zeta_b < 0.02 \quad (3.50)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν όταν $k_e/\zeta_b \geq 2200/R_b$ και $R_b > 5 \cdot 10^4$. Η μέση πυθμενική διατμητική τάση λόγω της επίδρασης των κυμάτων είναι μηδενική, ήτοι:

$$\overline{\tau_{xz}} = \frac{\rho f}{8} u_b \cdot |u_b| = 0 \quad (3.51)$$

Ωστόσο, η απόσβεση ενέργειας είναι μη μηδενική και καθορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\epsilon_D = \overline{\tau_{xz} u_b} \quad (3.52)$$

ή

$$\epsilon_D = \frac{\rho f}{8} (u_{b\max})^3 \cos^2(kx - \omega t) |\cos(kx - \omega t)| \quad (3.53)$$

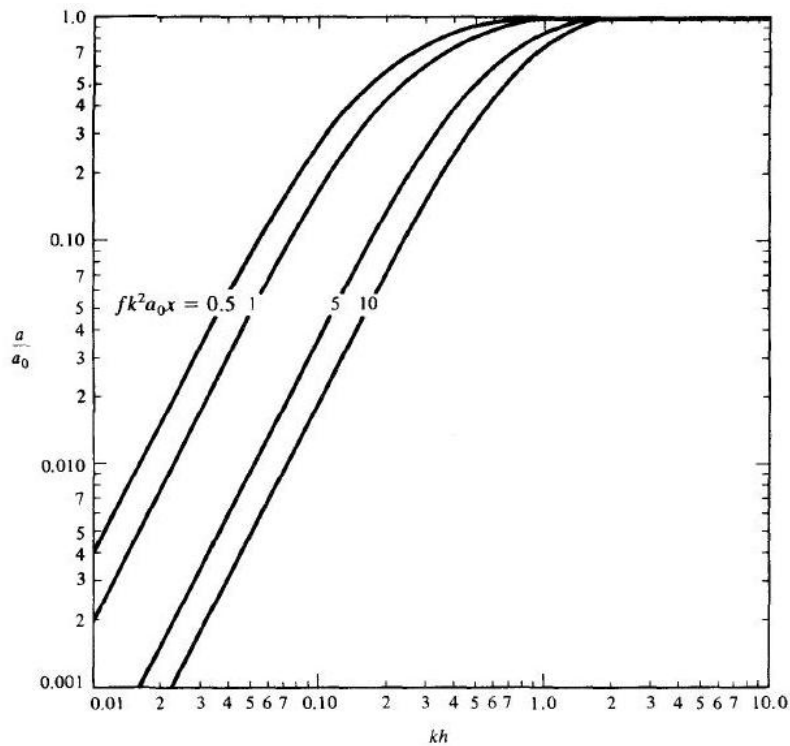
Και η μέση τιμή σε μία κυματική περίοδο είναι:

$$\epsilon_D = \frac{\rho f}{6\pi} (u_{b\max})^3 = \frac{\rho f}{6\pi} \left(\frac{\alpha \sigma}{\sinh(kd)} \right)^3 \quad (3.54)$$

από την οποία προκύπτει ότι η απόσβεση ενέργειας αυξάνεται μειούμενου του βάθους. Η μείωση του ύψους κύματος α σε σχέση με την απόσταση πάνω από επίπεδο πυθμένα δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha(x) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{2f}{3\pi} \cdot \frac{k^2 \alpha_0 x}{(2kd + \sinh(2kd)) \sinh(kd)}} \quad (3.55)$$

όπου α_0 το ύψος κύματος σε βαθιά νερά όπου η τριβή είναι αμελητέα, όπως παριστάνεται και στο ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 3.12):



Σχήμα 3.12: Μεταβολή του ύψους κύματος σε σχέση με την απόσβεση ενέργειας λόγω τυρβώδους οριακού στρώματος. [23]

Η μείωση του ύψους κύματος αυξάνεται με την αύξηση του συντελεστή τριβής f και καθώς μειώνεται το βάθος νερού. Σε βαθιά νερά ο λόγος α/α_0 τείνει στη μονάδα, ενώ η ασύμπτωτη στα ρηχά νερά ισούται με:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1}{1 + \frac{f}{6\pi} \cdot \frac{\alpha_0 x}{d^2}} \quad (3.56)$$

Όλες οι παραπάνω θεωρήσεις προϋποθέτουν άκαμπτο και αδιαπέρατο πυθμένα. Στην περίπτωση ύπαρξης πορώδους, ιλυώδους και λοιπών ειδών πυθμένα, θα πρέπει να τροποποιήσουμε τις θεωρήσεις απόσβεσης ενέργειας καθώς το φαινόμενο είναι σαφώς εντονότερο λόγω εντάσεως τυρβώδους ροής κοντά στον πυθμένα.

3.4 Οριακές συνθήκες

Η προσομοίωση της κυματικής διάδοσης μέσω των μοντέλων Boussinesq συμπληρώνονται από τις απαραίτητες οριακές συνθήκες. Στη βιβλιογραφία απαντώνται κατά κανόνα συνθήκες που αναφέρονται σε:

- Όρια γένεσης κύματος εντός του υπολογιστικού πεδίου (Internal wave generation)
- Όρια ακτινοβολίας ή απορροφητικά όρια (transmitting or absorbing boundaries)

Τα είδη ορίων αναλύονται παρακάτω.

3.4.1 Όρια γένεσης κύματος εντός του υπολογιστικού πεδίου (Internal wave generation)

Εντός του υπολογιστικού πεδίου η διαταραχή μέσω της απλούστερης μεθόδου μπορεί να εισαχθεί με καθορισμό στο ανάντη όριο του καννάβου των τιμών για τις συναρτήσεις $\zeta(t)$, $u(t)$ και $v(t)$ σε κάθε χρονικό βήμα (Wei και Kirby 1995). Μειονέκτημα της μεθόδου είναι η αδυναμία διαχείρισης ανακλώμενων κυματισμών που επανέρχονται στο όριο.

Τομή στην μέθοδο γένεσης κυματισμών εντός του υπολογιστικού πεδίου, αποτέλεσε η τεχνική της συνάρτησης πηγής για την παραγωγή κυματισμών, η οποία συνδυαζόμενη με την εφαρμογή των στοιβάδων απορρόφησης (sponge layers) που θα αναλυθούν παρακάτω, απαγορεύουν τη γένεση κυμάτων στα όρια του πεδίου οπότε μοναδική πηγή κυματισμών καθίσταται η ορισθείσα από το μελετητή.

Η αρχή για την εισαγωγή κυματισμών έγινε με την εργασία των Larsen και Dancy (1983) οι οποίοι μέσω προσθαφαίρεσης μάζας κατά μήκος γραμμής (περίπτωση πεδίου δύο οριζόντιων διαστάσεων) ή σημείου (μονοδιάστατη περίπτωση) για την παραγωγή κύματος φασικής ταχύτητας c και αρχικής (initial) ανύψωσης ζ^1 , διαδιδόμενος υπό γωνία θ από τη γραμμή γένεσης 1. Ο προαναφερθείς κυματισμός έχει ταχύτητα κάθετη στη γραμμική πηγή ίση με $c \sin \theta$. Αν η απόσταση προοδευτικών σημείων στη γραμμική πηγή είναι ίση με Δs , τότε ο όγκος ρευστού κατά το 1 είναι $\zeta^1 c \sin \theta \Delta s$ και στις δύο κατευθύνσεις, ποσότητα που πρέπει να επαναπροσθεθεί στο πεδίο για την εξισορρόπηση του όγκου στο σύστημα και δεδομένου ότι κάθε σημείο περικλείει μία περιοχή διαστάσεων $\Delta x \Delta y$, όπου Δx και Δy τα χωρικά βήματα στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας που προστίθεται σε κάθε σημείο του 1 είναι για πρόβλημα δύο οριζόντιων διαστάσεων:

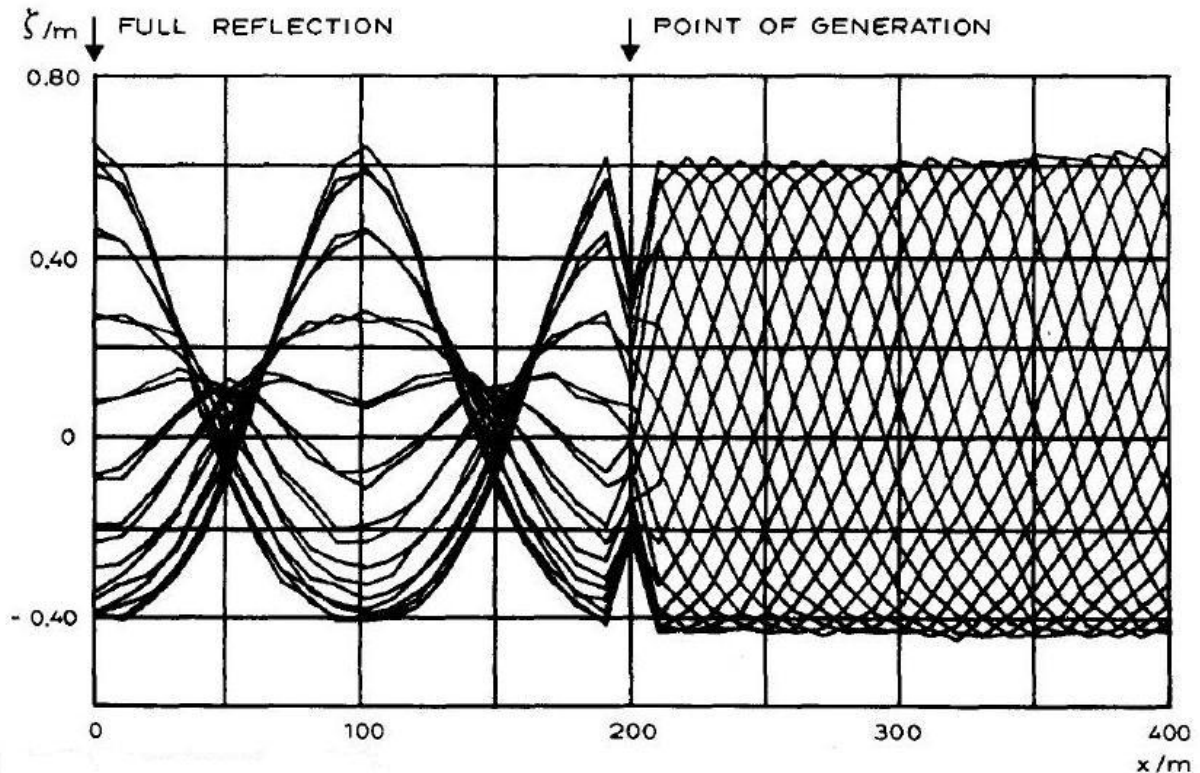
$$\zeta^* = 2\zeta^1 c \Delta t \frac{\Delta s}{\Delta x \Delta y} \sin \theta \quad (3.57)$$

ή για μονοδιάστατες περιπτώσεις:

$$\zeta^* = 2\zeta^1 C_r \quad (3.58)$$

Όπου $C_r = c \Delta t / \Delta x$ είναι ο αριθμός Courant ο οποίος εν γένει καθορίζει την ευστάθεια του υπολογιστικού σχήματος λαμβάνοντας τιμές έως οριακά μονάδα (για να μπορεί να είναι ευσταθές το υπολογιστικό σχήμα). Στο σχήμα που ακολουθεί (Σχήμα 3.13), οι Larsen και Dancy (1983) απεικονίζουν ένα παράδειγμα γένεσης μονοδιάστατου κυματισμού (Cnoidal) με

το σημείο γένεσης ($x = 200$ m) και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας με πλήρη ανάκλαση στα αριστερά του σχήματος. Απεικονίζεται ένα στάσιμο κύμα αριστερά της πηγής και το διαδιδόμενο κύμα δεξιά αυτής με διπλάσιο ύψος από το αρχικό χωρίς να διαστρεβλώνεται περνώντας από τη θέση της πηγής.



Σχήμα 3.13: Δοκιμή γένεσης κυματισμών στο εσωτερικό του υπολογιστικού πεδίου (Larsen και Dancy1983). [61]

Σημαντικό μειονέκτημα της παραπάνω προσέγγισης συνιστά η αδυναμία εφαρμογής της στην περίπτωση μη έκκεντρου καννάβου, λόγω εμφάνισης θορύβου γύρω από το σημείο της πηγής, όπως διαπιστώθηκε και από τον Wei (1997). Οι Gobbi και Kirby (1999) ακολουθώντας την προσέγγιση των Wei et al. (1999), κάνουν την υπόθεση κατανομής της συνάρτησης πηγής με τη μορφή κανονικής κατανομής (Gaussian shape). Κατά συνέπεια για σταθερό βάθος και παραγωγή μονοχρωματικών κυματισμών γωνιακής ταχύτητας ω , η μονοδιάστατη συνάρτηση πηγής δίνει:

$$f_s(x, t) = D_s \exp[-\beta_s(x - x_s)^2] \sin(\omega t) \quad (3.59)$$

Με x_s το κέντρο της πηγής, β_s ο βαθμός συγκέντρωσης της πηγής και D_s το μέτρο της συνάρτησης της πηγής.

Αν θεωρηθεί ότι το παραγόμενο κύμα έχει μικρό εύρος, μπορούμε να παράξουμε μέσω των συναρτήσεων Green αναλυτική έκφραση για την παράμετρο D_s (Gobbi και Kirby 1999).

Η τιμή της παραμέτρου σχήματος β_s είναι τυχαία, αλλά επηρεάζει πολύ την παραγωγή του επιθυμητού κύματος. Θεωρητικά θα έπρεπε η τιμή της παραμέτρου να είναι όσο το δυνατόν υψηλότερη ώστε να είναι πιο επικεντρωμένη η συνάρτηση πηγής, αλλά τελικά αν η περιοχή της συνάρτησης πηγής είναι στενή, τα παραγόμενα κύματα παρουσιάζουν διαταραχές, ενώ

σε περιπτώσεις κυματισμών πεπερασμένου εύρους έχουμε και ταυτόχρονη εμφάνιση θορύβου. Καθορίζοντας το εύρος της περιοχής της πηγής W_s να είναι ίσο με την απόσταση μεταξύ δύο ισαπεχουσών συντεταγμένων από το κέντρο της πηγής όπου ισχύει η ισότητα:

$$\exp[-\beta_s(x - x_s)^2] = e^{-5}$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$W_s = 2\sqrt{5/\beta_s} \quad (3.60)$$

Μέσω δοκιμών διαπιστώθηκε ότι για μονοχρωματικούς κυματισμούς, μία πηγή με κυματικό εύρος W_s ίσο με περίπου ένα μήκος κύματος δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για κύματα σε ένα μεγάλο εύρος από ύψη κύματος και κυματαριθμούς. Όταν η μη γραμμικότητα του εισερχόμενου κυματισμού είναι πολύ υψηλή ($O(1)$) η μέθοδος της συνάρτησης πηγής αποτυγχάνει να παράξει ορθά το επιθυμητό κύμα.

Οι Lee και Suh (1998) μέσω μελέτης της γένεσης κυματισμών σε δύο χρονοεξαρτώμενα μοντέλα εξισώσεων ήπιας κλίσης των Copeland (1985) και Radder Dingemans (1985). Η εσωτερική παραγωγή κυμάτων προσεγγίστηκε από τη σκοπιά της μεταφοράς μάζας και τη σκοπιά της μεταφοράς ενέργειας, που μελετήθηκαν με χρήση ταχύτητας φάσης και της ταχύτητας ενέργειας, αντίστοιχα. Οι μελετητές απέδειξαν ότι η προσέγγιση μεταφοράς μάζας που μελετήθηκε από τους Larsen και Dancy (1983) για τις εξισώσεις Boussinesq κατά Peregrine (1967) και από τους Madsen και Larsen για τις εξισώσεις του Copeland, δεν μπορεί να παράγει κατάλληλα κύματα για εξισώσεις Radder Dingemans (1985). Οι χρονοεξαρτώμενες εξισώσεις προβλέπουν την εξέλιξη της ενέργειας των κυματισμών καθώς και την αλλαγή της ταχύτητας φάσης. Η χρήση της προσέγγισης της γεωμετρικής οπτικής δίνει κατ' αναλογία ένα ζεύγος εξισώσεων από το οποίο προκύπτει η ταχύτητα μεταφοράς της ενέργειας. Στο μοντέλο Copeland η ταχύτητα ενέργειας ταυτίζεται με την ταχύτητα φάσης. Άλλωστε, το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να αποδώσει τη συμπεριφορά ομάδας τυχαίων κυματισμών. Όπως όμως αναφέρουν οι Lee και Suh (1998) η ενεργειακή προσέγγιση δεν είναι σίγουρο πως δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για άλλες χρονο-εξαρτώμενες εξισώσεις, όπως τα μοντέλα Boussinesq, εκτός αυτών που ελέγχθηκαν στην εργασία τους.

Μέσω της ταχύτητας μεταφοράς ενέργειας C_e αντί της ταχύτητας φάσης C_p προκύπτει μία σχέση παρόμοια με τη σχέση 3.58:

$$\zeta^* = 2\zeta^l C_e \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.61)$$

όπου $\zeta^l = \alpha e^{i\omega t}$ και α το εύρος εισερχόμενων κυματισμών. Η ταχύτητα μεταφοράς ενέργειας C_e υπολογίζεται κατά μοναδικό τρόπο και εξαρτάται από τον τύπο κυματικών εξισώσεων του κάθε μοντέλου και άρα για το μοντέλο Copeland (1985) αφορά ταχύτητα φάσης C_p και για το μοντέλο Radder και Dingemans (1985) ταχύτητα ομάδας C_g .

3.4.2 Όρια ακτινοβολίας ή απορροφητικά όρια (Transmitting or absorbing boundaries)

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που απασχόλησαν τους ερευνητές αποτελεί η απορρόφηση, η αμετάβλητη διέλευση και η μερική ή ολική ανάκλαση της κυματικής ενέργειας μέσω των ανοικτών ορίων ή σε συγκεκριμένες περιοχές του υπολογιστικού μοντέλου. Η πιο χρηστική έκφραση συνθήκης ακτινοβολίας που χρησιμοποιείται, είναι η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld ή συνθήκη ελεύθερης διάβασης, μέσω της οποίας οι κυματικές διαταραχές εξέρχονται από το πεδίο (ανοικτό όριο) και μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά μέσω της σχέσης:

$$\zeta_t + c \cos \theta \zeta_x = 0 \quad (3.62)$$

με c την ταχύτητα φάσης και θ τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος στο όριο.

Η απλή και χρηστική έκφραση δεν μπορεί να εφαρμοστεί αυτούσια σε περίπτωση διασπειρόμενων κυματισμών καθώς δεν υπάρχει συγκεκριμένη τιμή της φασικής ταχύτητας που χαρακτηρίζει το σύστημα, όπως επίσης σε δισδιάστατες εφαρμογές η διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων δεν είναι εξ' αρχής γνωστή. Σε περίπτωση που η κύρια διεύθυνση κυμάτων βρίσκεται κοντά στον άξονα x η προσεγγιστική οριακή συνθήκη ακτινοβολίας των Engquist και Majda (1977) δίνει:

$$\zeta_{tt} + c \zeta_{xt} - \frac{c^2}{2} \zeta_{yy} = 0 \quad (3.63)$$

που αντιστοιχεί σε παραβολική προσέγγιση στο εξερχόμενο κύμα, ενώ οι Wei και Kirby (1995) αντιμετωπίζουν το πρόβλημα καθορισμού φασικής ταχύτητας με τη θεώρηση ότι η μοναδική φασική ταχύτητα ισούται με αυτή των μακρών κυματισμών, ήτοι $c = \sqrt{gd}$.

Η σχέση 3.63 εισάγει αναπόφευκτα κυματική ανάκλαση κατά μήκος των ορίων γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε αστάθειες το μοντέλο. Για την επίλυση του προβλήματος οι Israeli και Orszag (1981) προτείνουν εφαρμογή στοιβάδας απορρόφησης (sponge layer) στην περιοχή του ορίου και μίας συνθήκης ακτινοβολίας ανώτερης τάξης. Με πρόσθεση των όρων απορρόφησης, οι Wei και Kirby (1995) δίνουν τις εξισώσεις ποσότητας κίνησης για τις δύο οριζόντιες διευθύνσεις:

$$U_t = F(\zeta, u, v) + [F_1(v)]_t - w_1(x)u - w_2(x)(u_{xx} + u_{yy}) \quad (3.64)$$

$$V_t = G(\zeta, u, v) + [G_1(u)]_t - w_1(x)v - w_2(x)(v_{xx} + v_{yy}) \quad (3.65)$$

με F , G , F_1 και G_1 οι όροι των εξισώσεων ποσότητας κίνησης για τους οποίους δίνονται αναλυτικές εκφράσεις στο επόμενο κεφάλαιο, u και v οι οριζόντιες συνιστώσες ταχύτητας και w_1 και w_2 οι συντελεστές απόσβεσης που δίνονται από τις σχέσεις:

$$w_1(x) = \begin{cases} 0, & x < x_s \\ \alpha_1 \omega f(x), & x > x_s \end{cases} \quad (3.66)$$

$$w_2(x) = \begin{cases} 0, & x < x_s \\ \alpha_2 \nu f(x), & x > x_s \end{cases} \quad (3.67)$$

Οι σταθερές α_1 και α_2 προσδιορίζονται κατά την εκτέλεση του μοντέλου, ω είναι η γωνιακή ταχύτητα, ν το κινηματικό ιξώδες, x_s η τετμημένη της αρχής της στοιβάδας απορρόφησης (για τη διεύθυνση της εν λόγω στοιβάδας το υπολογιστικό μοντέλο εκτείνεται από $x = 0$ έως $x = x_m$ και η στοιβάδα απορρόφησης από $x = x_s$ έως $x = x_m$), ενώ η συνάρτηση $f(x)$ είναι εκθετικής μορφής και δίνεται από τη σχέση:

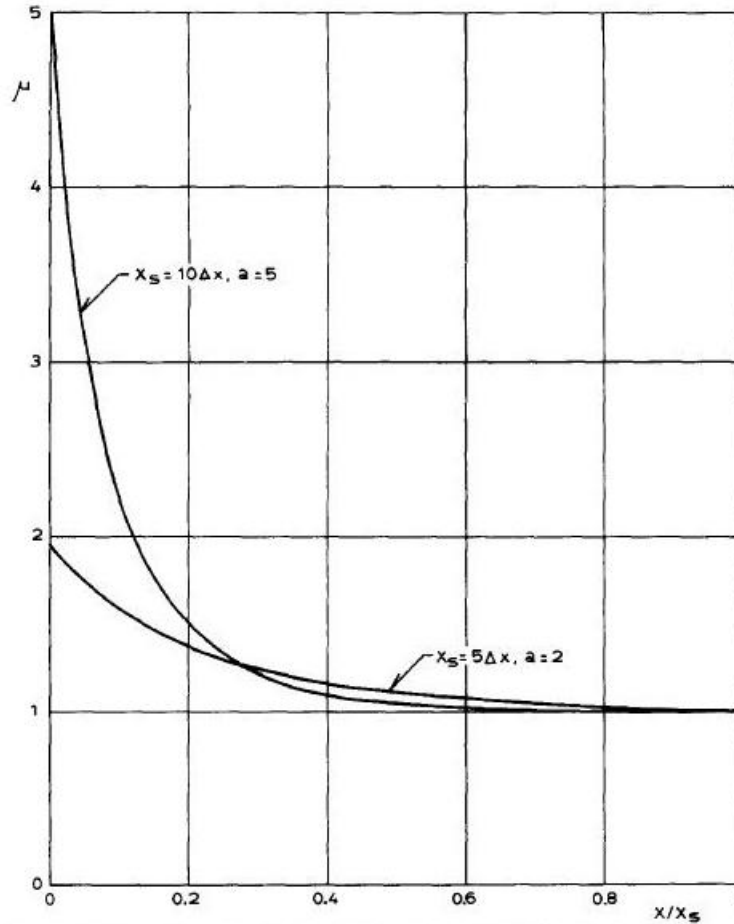
$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x - x_s}{x_m - x_s}\right)^n - 1}{\exp(1) - 1} \quad (3.68)$$

Τέλος, οι Wei και Kirby (1995) προτείνουν πλάτος στοιβάδας απορρόφησης να λαμβάνεται ίσο με δύο ή τρεις φορές το μήκος κύματος.

Σε μία προγενέστερη προσπάθεια των Larsen και Dancy (1983) χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της στοιβάδας απορρόφησης (sponge layer) στα ανοικτά όρια, με τέτοιο τρόπο ώστε να απορροφούν βαθμιαία την κυματική ενέργεια διαιρώντας τα κυματικά μεγέθη ζ , u και ν με μία συνάρτηση $\mu(x)$, για την οποία δεδομένου του εύρους της στοιβάδας απορρόφησης κατά μήκος μίας οριζόντιας διεύθυνσης $0 \leq x \leq x_s$, δίνεται μέσω της σχέσης:

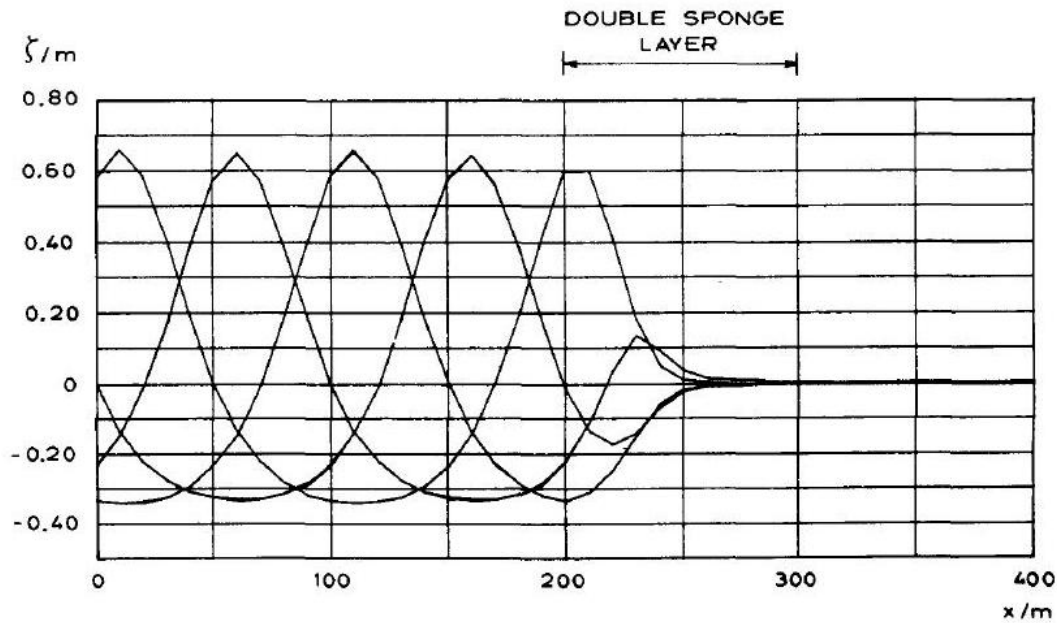
$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x > x_s \\ \exp[(2^{-x/dx} - 2^{-x_s/dx}) \ln a], & 0 \leq x \leq x_s \end{cases} \quad (3.69)$$

με a σταθερά εξαρτώμενη από τον αριθμό των γραμμών του καννάβου στη στοιβάδα. Η συνάρτηση $\mu(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x = x_s$ και δίνεται η μορφή της για δύο διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών x_s/dx και a στο ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 3.14).



Σχήμα 3.14: Συνάρτηση $\mu(x)$ για δύο διαφορετικά συστήματα στοιβάδων απορρόφησης (Larsen και Dancy1983). [61]

Για την αποτύπωση των αποτελεσμάτων της παραπάνω τεχνικής, οι ερευνητές δημιούργησαν ένα πεδίο που στο αριστερό άκρο παρήγαγαν κυματισμούς τύπου Cnoidal ύψους ενός μέτρου. Τα χωρικά διαστήματα του καννάβου επιλέχθηκαν ίσα με $dx = 10$ m και τοποθετήθηκαν δύο στοιβάδες εύρους $5dx$ τοποθετημένες εκατέρωθεν της γραμμής $x = 250$. Όπως προκύπτει από το Σχήμα 3.15 που ακολουθεί, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας διακρίνεται δύσκολα έπειτα από διπλό πέρασμα από τις στοιβάδες απορρόφησης.



Σχήμα 3.15: Δοκιμή αποτελεσματικότητας τεχνικής στοιβάδων απορρόφησης (Larsen και Dancy1983). [61]

Κλείνοντας την ενότητα, αξίζει να αναφερθούμε στο βελτιωμένο σχήμα των Yoon και Choi (2001) το οποίο κινείται στα ίδια πλαίσια με τους προηγούμενους ερευνητές καθώς προτείνουν μία συνάρτηση $v(x)$ που πολλαπλασιάζεται με τις μεταβλητές ζ , u και v και δίνεται από τη σχέση:

$$v(x_*) = \begin{cases} 1, & x_* > x_s \\ \exp[-(b^{-x_*/dx} - b^{-x_s/dx}) \ln \Lambda], & 0 \leq x_* \leq x_s \end{cases} \quad (3.70)$$

και οι νέα παράμετρος b δίνεται από τη σχέση:

$$b = [1 + r_s + \exp(-1/r_s)] \quad (3.71)$$

$$r_s = 10/t_s \quad (3.72)$$

όπου x_s το πλάτος της στοιβάδας απορρόφησης, x_* τυχαία θέση υπολογισμού εντός του πεδίου, t_s ο αριθμός των σημείων του καννάβου που ανήκουν στη στοιβάδα απορρόφησης και Λ παράμετρος που ισούται με 2.

4. Κατάστροψη τροποποιημένου μαθηματικού μοντέλου Boussinesq (Memos et al. 2005)

4.1 Εισαγωγή

Όπως κατέστη σαφές στο προηγούμενο κεφάλαιο, η επιστημονική κοινότητα έχει δώσει ένα μεγάλο αριθμό μοντέλων κυματικής διάδοσης τύπου Boussinesq με στόχο την όλο και πιστότερη προσομοίωση της κυματικής διάδοσης. Οι σχετικές μελέτες περιορίζονται είτε σε μονοδιάστατα προβλήματα είτε προσεγγίζουν το πρόβλημα της δισδιάστατης κυματικής διάδοσης. Τα πιο πρόσφατα μοντέλα είναι ικανά να προσομοιώσουν κυματισμούς πλήρους διασποράς και υψηλής μη γραμμικότητας. Ωστόσο, όπως είναι αναμενόμενο προκύπτουν προβλήματα ως προς την εφαρμογή, την ευστάθεια και την ακρίβεια των αριθμητικών σχημάτων επίλυσης, γεγονός που οφείλεται στην πολυπλοκότητα των συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων που πρέπει να προσομοιωθούν ιδιαίτερα όταν πρέπει να συμπεριληφθούν όροι με παραγώγους υψηλότερων τάξεων.

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην παρουσίαση ενός νέου μοντέλου Boussinesq από τους Memos et al. (2005) για την περιγραφή κυματικής διάδοσης σε δύο οριζόντιες διαστάσεις. Οι βασικές εξισώσεις που συνθέτουν το μοντέλο είναι αυτές που παρήχθησαν από τους Beji και Nadaoka (1996) και τους Li και Zhan (2001) και αναλύονται διεξοδικά στην επόμενη ενότητα. Το σχήμα επίλυσης που επιστρατεύεται είναι το σύστημα «πρόβλεψης-διόρθωσης» ή σχήμα “predictor-corrector” των Wei και Kirby (1995) και αποτελείται από το ρητό σχήμα τρίτης τάξης Adams-Bashforth (για το βήμα πρόβλεψης) και το ρητό σχήμα τέταρτης τάξης Adams-Moulton (για το βήμα διόρθωσης που ολοκληρώνεται με χρήση ενός απλού κριτηρίου σύγκλισης).

Επιπροσθέτως, σημαντική προσπάθεια θα αποτελέσει η εισαγωγή στο δισδιάστατο μοντέλο και η μελέτη της προσομοίωσης της θραύσης. Η απόπειρα αυτή θα γίνει εισάγοντας στο δεξιό μέρος των εξισώσεων ποσότητας κίνησης μίας επιπλέον ποσότητας με στόχο την προσομοίωση απώλειας ενέργειας λόγω θραύσης, όρος ο οποίος υπολογίζεται όπως προτείνεται από την ομάδα μελετητών Kennedy et al. (1999, 2000) και εκφράστηκε αρχικά σε μία οριζόντια διάσταση (Kennedy, Chen, Kirby και Dalrymple, 1999) και επεκτάθηκε σε δύο οριζόντιες (Chen, Kirby, Dalrymple, Kennedy και Chawla, 2000).

Το μοντέλο θα συγκριθεί με πειραματικά δεδομένα και εμπορικό ολοκληρωμένο υπολογιστικό πακέτο για θραυόμενους και μη θραυόμενους κυματισμούς.

4.2 Εξισώσεις των Beji και Nadaoka (1996)

Αρχικά, πρέπει να μελετήσουμε τις γενικές εξισώσεις στην αρχική μορφή που πήραν οι μελετητές και τις έφεραν σε αξιοποιήσιμη μορφή για την παρούσα εργασία.

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Boussinesq για ήπια μεταβαλλόμενο πυθμένα (Peregrine, 1967) έχουμε:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\zeta = \frac{d}{2}\nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_t) - \frac{d^2}{6}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_t)] \quad (4.1)$$

$$\zeta_t + \nabla[(d + \zeta)\mathbf{u}] = 0 \quad (4.2)$$

Όπου $\mathbf{u} = (u, v)$ το διδιάστατο μεταβαλλόμενο κατά το βάθος διάνυσμα ταχύτητας, ζ η επιφανειακή ανύψωση, $d = d(x, y)$ το μεταβλητό βάθος νερού μετρούμενο από τη στάθμη ηρεμίας και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Ο δείκτης t υποδηλώνει μερική παραγωγή ως προς το χρόνο και ∇ είναι ο διδιάστατος οριζόντιος τελεστής βαθμίδας.

Μέσω μίας στοιχειώδους προσθαφαίρεσης στην εξίσωση 4.1 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\zeta \\ = (1 + \beta)\frac{d}{2}\nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_t) - \beta\frac{d}{2}\nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_t)] - (1 + \beta)\frac{d^2}{6}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \\ + \beta\frac{d^2}{6}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Όπου β είναι μία παράμετρος που θα ορισθεί αργότερα. Αντίθετα στην συνήθη πρακτική της πλήρους αντικατάστασης, στόχος είναι η μερική αντικατάσταση των όρων διασποράς ώστε να καταλήξουμε σε μία μορφή με καλύτερα χαρακτηριστικά διασποράς. Όπως επισημάνθηκε από τον Peregrine (1967) η μορφή των όρων (μη γραμμικών και διασποράς) μπορεί να διαφέρουν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις πρώτης τάξης:

$$\mathbf{u}_t + g\nabla\zeta = 0 \quad , \quad \zeta_t + \nabla \cdot (d\mathbf{u}) \quad (4.4)$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση της 4.4, $\mathbf{u}_t = -g\nabla\zeta$ για την αντικατάσταση των όρων που είναι ανάλογοι της παραμέτρου β (όμοια θα ενεργούσαμε για την αντικατάσταση των όρων αναλόγων του $(1 + \beta)$) στην εξίσωση 4.3 οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\zeta \\ = (1 + \beta)\frac{d}{2}\nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_t) + \beta\frac{gd}{2}\nabla[\nabla \cdot (d\nabla\zeta)] - (1 + \beta)\frac{d^2}{6}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \\ - \beta\frac{gd^2}{6}\nabla(\nabla^2 \cdot \zeta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Η οποία αποτελεί μία εξίσωση ορμής με όρους στο δεξί μέλος που περιέχουν και την ταχύτητα \mathbf{u} και την ανύψωση ζ . Αν στη σχέση 4.5 θέσουμε $\beta = 0$ θα λάβουμε την αρχική εξίσωση ποσότητας κίνησης 4.1, ενώ για $\beta = -1$ αντιστοιχεί στην αντικατάσταση του \mathbf{u}_t με το $-g\nabla\zeta$ στην εξίσωση 4.1 (πλήρης αντικατάσταση των όρων διασποράς).

Οι εξισώσεις 4.2 και 4.5 συντάσσουν τις βελτιωμένες εξισώσεις Boussinesq για μεταβλητό βάθος. Συγκρινόμενες με τις παραγόμενες εξισώσεις από παρόμοια μοντέλα (Madsen και

Sørensen, 1992; Nwogu, 1993) είναι εμφανής η συντομία της διαδικασίας. Η μορφοποίηση θα θεωρηθεί ολοκληρωμένη με τον προσδιορισμό της τιμής της παραμέτρου β .

Σε γραμμικοποιημένη μορφή οι σχέσεις 4.2 και 4.5 αποδίδουν την ακόλουθη σχέση διασποράς:

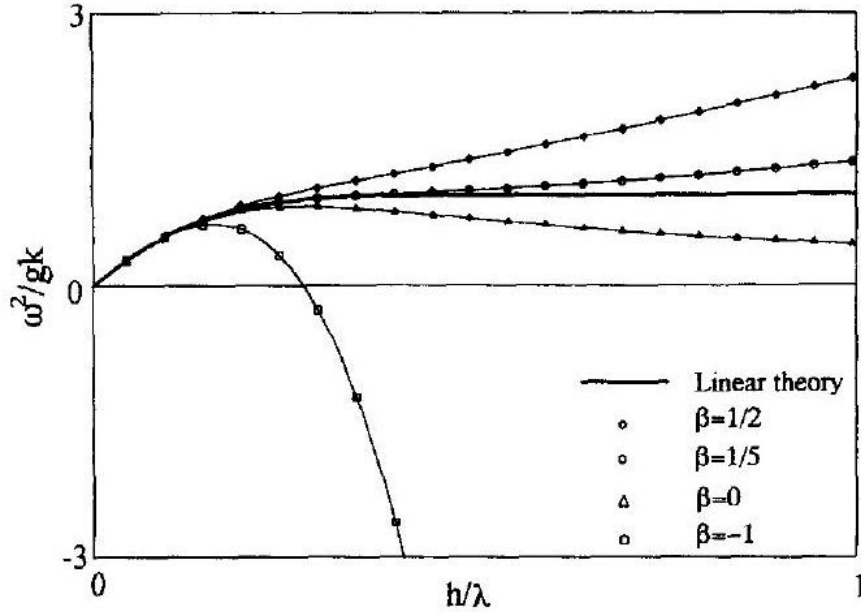
$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{kd \cdot (1 + \beta k^2 d^2/3)}{[1 + (1 + \beta) k^2 d^2/3]} \quad (4.6)$$

Όπου ω η γωνιακή ταχύτητα, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ και k_x, k_y οι επιμέρους συνιστώσες του κυματαριθμού στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να δοθεί έμφαση στο ότι η σχέση διασποράς 4.6 είναι ταυτόσημη με τις σχέσεις αφενός των Madsen και Sørensen (1992) όπου $B = \beta/3$ και του Nwogu (1993) όπου $\alpha = -(1 + \beta)/3$. Έτσι, ορίζοντας τις παραμέτρους αυτές σε συμφωνία είναι δυνατόν να καταστούν οι σχέσεις διασποράς των τριών μοντέλων ταυτόσημες. Αυτό σημαίνει ότι όλα αυτά τα μοντέλα θα έχουν ταυτόσημες ταχύτητες ομάδας όσο θα προκύπτει συμφωνία μεταξύ των παραμέτρων διασποράς. Βασικά, υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να οριστεί η παράμετρος διασποράς: ταυτίζοντας την τελική σχέση διασποράς με μία δεύτερης τάξης επέκταση Padé της σχέσης γραμμικής διασποράς (Witting, 1984; Madsen και Sørensen, 1992) ή ελαχιστοποιώντας τα σφάλματα στην ταχύτητα φάσης (ή ταχύτητα ομάδας) σε ένα προδιαγεγραμμένο εύρος (Madsen et al., 1991; Nwogu, 1993; Chen και Liu, 1995). Η επιλογή μίας εκ των δύο προσεγγίσεων έχει μικρή σημασία. Εδώ, χρησιμοποιείται η πρώτη προσέγγιση και η παράμετρος β καθορίζεται από την δεύτερης τάξης επέκταση Padé της σχέσης γραμμικής διασποράς $\omega^2/gk = \tanh(kd)$:

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{kd + k^3 d^3/15}{1 + 2k^2 d^2/5} \quad (4.7)$$

Το οποίο απαιτεί $\beta = 1/5$ ώστε η εξίσωση 4.6 να είναι ταυτόσημη με την 4.7. Αυτή η λεπτομέρεια έχει το χαρακτηριστικό ότι βρίσκεται σε συμφωνία με την βασική υποκείμενη διαδικασία μέσω της οποίας λαμβάνονται οι εξισώσεις Boussinesq, ότι είναι μία ασυμπτωτική επέκταση κοντά στο όριο των μακρών κυμάτων. Το Σχήμα 4.1 συγκρίνει τις καμπύλες διασποράς για $\beta = 0, -1, 1/2, 1/5$ (κάθε τιμή από τις οποίες αντιστοιχεί σε διαφορετική ασυμπτωτική επέκταση του $\omega^2/gk = \tanh(kd)$ για μικρές τιμές του kd) με τις ακριβείς εκφράσεις της γραμμικής θεωρίας. Ανάμεσα σε αυτές τις ασυμπτωτικές εκφράσεις, ξεκάθαρα αυτή που αντιστοιχεί στην επέκταση τύπου Padé είναι η καλύτερη και άρα η προτιμότερη. Έτσι, με τη θεώρηση του $\beta = 1/5$ το μοντέλο μπορεί να μελετά τη διάδοση σχετικά βραχύτερων κυματισμών ($d/\lambda = 1$) με αποδεκτές αποκλίσεις στο κυματικό εύρος και ταχύτητα φάσης. Η τιμή της παραμέτρου $\beta = 1/5$ για το μοντέλο, συμβαδίζει με την $B = 1/15$ του μοντέλου κατά Madsen και Sørensen (1992) και $\alpha = -2/5$ στο μοντέλο του Nwogu.



Σχήμα 4.1: Καμπύλες διασποράς για διάφορες τιμές της παραμέτρου διασποράς συγκρινόμενες με τη γραμμική θεωρία (εδώ $h \equiv d$ και λ το μήκος κύματος). [8]

Για την παραγωγή μίας μορφής των εξισώσεων ποσότητας κίνησης που θα δίνουν δυνατότητα για διακριτοποίηση αναλύουμε τη σχέση 4.5 βάσει των τελεστών και στη συνέχεια αναπτύσσουμε επιπρόσθετα τις εξισώσεις κατά x και ενεργούμε με παρόμοιο τρόπο και κατά y .

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης αποτελείται από άθροισμα τεσσάρων όρων

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\zeta &= (1 + \beta) \frac{d}{2} \nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_t)] + \beta \frac{gd}{2} \nabla[\nabla \cdot (d\nabla\zeta)] - (1 + \beta) \frac{d^2}{6} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_t) - \beta \frac{gd^2}{6} \nabla(\nabla^2 \cdot \zeta) \\
 &= A1 + A2 - A3 - A4
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Οπότε κατά x έχουμε:

$$u_t + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = A1_x + A2_x - A3_x - A4_x \tag{4.9}$$

Υπολογίζουμε τους όρους κατά x :

$$\begin{aligned}
 A1 &= (1 + \beta) \frac{d}{2} \nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u}_t)] \\
 &= (1 + \beta) \frac{d}{2} \nabla \left[\frac{\partial}{\partial x} (du_t) \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} (dv_t) \cdot \vec{j} \right] \\
 &= (1 + \beta) \frac{d}{2} \nabla [(d_x u_t + du_{xt}) \cdot \vec{i} + (d_y v_t + dv_{yt}) \cdot \vec{j}] \\
 A1_x &= (1 + \beta) \frac{d}{2} [(d_x u_{xt} + du_{xxt} + d_x u_{xt}) + (d_y v_{xt} + d_x v_{yt} + dv_{xyt})]
 \end{aligned}$$

$$= (1 + \beta) \frac{d}{2} (2d_x u_{xt} + d_y v_{xt} + d_x v_{yt} + du_{xxt} + dv_{xyt})$$

$$A1_x = (1 + \beta) dd_x u_{xt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} dd_y v_{xt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} dd_x v_{yt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} d^2 u_{xxt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} d^2 v_{xyt} \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} A2 &= \beta \frac{gd}{2} \nabla [\nabla \cdot (d\nabla\zeta)] = \beta \frac{gd}{2} \nabla [\nabla \cdot (d \cdot (\zeta_x \cdot \vec{i} + \zeta_y \cdot \vec{j}))] \\ &= \beta \frac{gd}{2} \nabla \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [d \cdot (\zeta_x \cdot \vec{i} + \zeta_y \cdot \vec{j})] \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} [d \cdot (\zeta_x \cdot \vec{i} + \zeta_y \cdot \vec{j})] \cdot \vec{j} \right\} \\ &= \beta \frac{gd}{2} \nabla \left\{ [d_x (\zeta_x \cdot \vec{i} + \zeta_y \cdot \vec{j}) + d (\zeta_{xx} \cdot \vec{i} + \zeta_{xy} \cdot \vec{j})] \cdot \vec{i} + [d_y (\zeta_x \cdot \vec{i} + \zeta_y \cdot \vec{j}) + d (\zeta_{yx} \cdot \vec{i} + \zeta_{yy} \cdot \vec{j})] \cdot \vec{j} \right\} \\ &= \beta \frac{gd}{2} \nabla (d_x \cdot \zeta_x + d \cdot \zeta_{xx} + d_y \cdot \zeta_y + d \cdot \zeta_{yy}) \end{aligned}$$

$$A2_x = \beta \frac{gd}{2} (d_x \cdot \zeta_{xx} + d_x \cdot \zeta_{xx} + d \cdot \zeta_{xxx} + d_y \cdot \zeta_{xy} + d_x \cdot \zeta_{yy} + d \cdot \zeta_{xyy})$$

$$= \beta \frac{gd}{2} (2d_x \cdot \zeta_{xx} + d_y \cdot \zeta_{xy} + d_x \cdot \zeta_{yy} + d \cdot \zeta_{xxx} + d \cdot \zeta_{xyy})$$

$$A2_x = \beta gd \cdot \left(d_x \cdot \zeta_{xx} + \frac{1}{2} d_y \cdot \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_x \cdot \zeta_{yy} \right) + \beta \frac{gd^2}{2} \cdot (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) \quad (4.9b)$$

$$-A3 = -(1 + \beta) \frac{d^2}{6} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) = -(1 + \beta) \frac{d^2}{6} \nabla (u_{xt} \cdot \vec{i} + v_{yt} \cdot \vec{j})$$

$$-A3_x = -(1 + \beta) \frac{d^2}{6} (u_{xxt} + v_{xyt}) \quad (4.9c)$$

$$-A4 = -\beta \frac{gd^2}{6} \nabla (\nabla^2 \cdot \zeta) = -\beta \frac{gd^2}{6} \nabla (\zeta_{xx} \cdot \vec{i} + \zeta_{yy} \cdot \vec{j})$$

$$-A4_x = -\beta \frac{gd^2}{6} (\zeta_{xxx} + \zeta_{yyy}) \quad (4.9d)$$

Και τελικά η εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά x δίνει:

$$\begin{aligned}
u_t + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
= (1 + \beta) dd_x u_{xt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} dd_y v_{xt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} dd_x v_{yt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} d^2 u_{xxt} \\
+ (1 + \beta) \frac{1}{2} d^2 v_{xyt} + \beta gd \cdot \left(d_x \cdot \zeta_{xx} + \frac{1}{2} d_y \cdot \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_x \cdot \zeta_{yy} \right) + \beta \frac{gd^2}{2} \cdot (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) \\
- (1 + \beta) \frac{d^2}{6} (u_{xxt} + v_{xyt}) - \beta \frac{gd^2}{6} (\zeta_{xxx} + \zeta_{yyy})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_t + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
= (1 + \beta) \frac{1}{2} d^2 u_{xxt} - (1 + \beta) \frac{d^2}{6} u_{xxt} + (1 + \beta) dd_x u_{xt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} d^2 v_{xyt} \\
- (1 + \beta) \frac{d^2}{6} v_{xyt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} dd_x v_{yt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} dd_y v_{xt} + \beta gd \\
\cdot \left(d_x \cdot \zeta_{xx} + \frac{1}{2} d_y \cdot \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_x \cdot \zeta_{yy} \right) + \beta \frac{gd^2}{2} \cdot (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) - \beta \frac{gd^2}{6} (\zeta_{xxx} + \zeta_{yyy})
\end{aligned}$$

Που καταλήγει στην τελική έκφραση κατά Li και Zhan (2001):

$$\begin{aligned}
u_t + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
= (1 + \beta) \left(\frac{d^2}{3} u_{xxt} + dd_x u_{xt} \right) + (1 + \beta) \frac{1}{3} d^2 v_{xyt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} (dd_x v_{yt} + dd_y v_{xt}) \\
+ \beta gd \cdot \left(d_x \cdot \zeta_{xx} + \frac{1}{2} d_y \cdot \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_x \cdot \zeta_{yy} \right) + \beta \frac{gd^2}{3} \cdot (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Κατά όμοιο τρόπο προκύπτει η έκφραση της εξίσωσης ορμής κατά y:

$$\begin{aligned}
v_t + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\
= (1 + \beta) \left(\frac{d^2}{3} v_{yyt} + dd_y v_{yt} \right) + (1 + \beta) \frac{1}{3} d^2 u_{xyt} + (1 + \beta) \frac{1}{2} (dd_x u_{yt} + dd_y u_{xt}) \\
+ \beta gd \cdot \left(d_y \cdot \zeta_{yy} + \frac{1}{2} d_x \cdot \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_y \cdot \zeta_{xx} \right) + \beta \frac{gd^2}{3} \cdot (\zeta_{yyy} + \zeta_{xxy}) \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Ενώ η εξίσωση συνέχειας διακριτοποιείται χωρίς ιδιαίτερες επισημάνσεις.

4.3 Παρουσίαση βασικών εξισώσεων τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq Memos et al. (2005)

Στις υποενότητες που ακολουθούν παρουσιάζουμε τις βασικές εξισώσεις του τροποποιημένου μοντέλου Memos και Karambas (2005), καθώς και όλες τις θεωρήσεις φαινομένων που θα υπεισέλθουν στον κώδικα του υπό εξέταση μοντέλου.

4.3.1 Διακριτοποίηση των βασικών εξισώσεων του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq Memos et al. (2005)

Σε αυτό το σημείο διακριτοποιούμε τους όρους της εξίσωσης (4.10) οπότε με όμοιο τρόπο ενεργούμε και για την (4.11). Ξαναδίνουμε τη μορφή της εξίσωσης ποσότητας κίνησης κατά x σημειώνοντας ως εκθέτες k τις διαφορετικές χρονικές στιγμές αναφοράς και i τις αντίστοιχες χωρικές θέσεις για τον υπολογισμό της ταχύτητας u. Επισημαίνουμε ότι οι εξισώσεις Boussinesq σε όρους της μέσης κατά το βάθος ταχύτητας με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς που αναπτύχθηκαν από τους Beji και Nadaoka (1996) προκύπτουν στην απλοποιημένη μορφή τους αγνοώντας τις δεύτερης τάξης χωρικές παραγώγους του βάθους νερού που είναι πολύ μικρές για ελαφρώς μεταβαλλόμενο πυθμένα.

$$\begin{aligned}
 u_t^{k+1} - (1 + \beta) \left(\frac{d^2}{3} \frac{\partial^2 u_t^{k+1}}{\partial x^2} + dd_x \frac{\partial u_t^{k+1}}{\partial x} \right) &= -u^k \frac{\partial u^k}{\partial x} - v^k \frac{\partial u^k}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta^k}{\partial x} \\
 &= (1 + \beta) \left[\frac{1}{3} d^2 \frac{\partial^2 v_t^k}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(dd_x \frac{\partial v_t^k}{\partial y} + dd_y \frac{\partial v_t^k}{\partial x} \right) \right] + \beta g d \\
 &\quad \cdot \left(d_x \cdot \zeta_{xx}^k + \frac{1}{2} d_y \cdot \zeta_{xy}^k + \frac{1}{2} d_x \cdot \zeta_{yy}^k \right) + \beta \frac{g d^2}{3} \cdot (\zeta_{xxx}^k + \zeta_{xyy}^k)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Οπότε διακριτοποιούμε έναν προς έναν τους παραπάνω όρους έχοντας υπόψη μας τις γενικές εκφράσεις των παραγώγων:

$$\partial_x f_j = \frac{1}{12 d x} (f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}) \tag{4.13}$$

$$\partial_{xx} f_j = \frac{1}{d x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) \tag{4.14}$$

$$\partial_{xxx} f_j = \frac{1}{2 d x^3} (-f_{j-2} + 2f_{j-1} - 2f_{j+1} + f_{j+2}) \tag{4.15}$$

Οι βασικές εξισώσεις που χρησιμοποιούμε στο μοντέλο δίνονται στην ακόλουθη μορφή και στην εργασία των Li και Zhan (2001):

$$\zeta_t = -\nabla \cdot [(h + \zeta)\mathbf{u}] \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
u_t - (1 + \beta) \cdot \left(\frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} + hh_x \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) \\
= -g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + (1 + \beta) \frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 v_t}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} (1 + \beta) \left(hh_x \frac{\partial v_t}{\partial y} + hh_y \frac{\partial v_t}{\partial x} \right) \\
+ \beta \frac{gh^2}{3} (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) + \beta gh \left(h_x \zeta_{xx} + \frac{1}{2} h_y \zeta_{xy} + \frac{1}{2} h_x \zeta_{yy} \right) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_t - (1 + \beta) \cdot \left(\frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 v_t}{\partial y^2} + hh_y \cdot \frac{\partial v_t}{\partial y} \right) \\
= -g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + (1 + \beta) \frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 u_t}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} (1 + \beta) \left(hh_x \frac{\partial u_t}{\partial y} + hh_y \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) \\
+ \beta \frac{gh^2}{3} (\zeta_{yyy} + \zeta_{xxy}) + \beta gh \left(h_y \zeta_{yy} + \frac{1}{2} h_x \zeta_{xy} + \frac{1}{2} h_y \zeta_{xx} \right) \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο δείκτης t υποδηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο, ζ η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, u και v οι μέσες κατά το βάθος ταχύτητες του δισδιάστατου πεδίου και h το βάθος από τον πυθμένα ως τη ΣΗΥ. Η παράμετρος β ισούται με 1/5 ενώ στη διακριτοποίηση της σχέσης αντικαθιστούμε την έκφραση με την ακόλουθη:

$$(1 + \beta)/3 = (\gamma - \alpha) , \quad \gamma = 1/15 , \quad \alpha = -1/3 \quad (4.19)$$

4.3.2 Αριθμητικό σχήμα επίλυσης πεπερασμένων διαφορών

Οι αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων Boussinesq μπορούν να εμφανίσουν αξιοσημείωτα σφάλματα αποκοπής (truncation errors), που προκύπτουν από τις πεπερασμένες διαφορές των κυρίαρχων όρων των εξισώσεων, εάν αφεθούν να μεγαλώσουν σε τιμή και να φθάσουν συγκριτικά τους όρους που περιγράφουν τα φαινόμενα ήπιας γραμμικής διασποράς. Πολλά σχήματα που αναπτύχθηκαν για την επίλυση των εξισώσεων Boussinesq κάνουν χρήση του τεχνάσματος της ρητής αφαίρεσης όρων συγκρίσιμων με της υψηλότερης τάξης σφάλματα αποκοπής, ώστε να μετατρέψουν τα ασταθή εναπομείναντα σφάλματα σε υψηλότερη τάξη σε σχέση με τις επιδράσεις μη γραμμικότητας και διασποράς.

Για την επίλυση του μοντέλου Boussinesq που περιγράφηκε προηγουμένως χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών μέσω μίας κατά κάποιον τρόπο διαφορετικής προσέγγισης από τη χρήση ενός υψηλότερης τάξης σχήματος προκειμένου να γίνουν οι υπολογισμοί. Το σχήμα επίλυσης που χρησιμοποιείται για την προώθηση στο χρόνο είναι, για την πρόβλεψη των παραμέτρων ζ, u και v τη χρονική στιγμή n + 1 το τρίτης τάξης σχήμα Adams-Bashforth και για το βήμα διόρθωσης των τιμών αυτών το τέταρτης τάξης Adams-Moulton σχήμα διόρθωσης (γνωστή ως μέθοδος predictor-corrector).

Ακολουθώντας μία χρήση συμβόλων όμοια με αυτή που χρησιμοποίησαν οι Kirby et al. (1998) στο εγχειρίδιο του υπολογιστικού κώδικα FUNWAVE 1.0, προκύπτουν οι κατάλληλες εκφράσεις για το σχήμα πρόβλεψης και διόρθωσης (predictor-corrector).

Το σχήμα πρόβλεψης προκύπτει μέσω των σχέσεων (4.20-4.27):

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n + \frac{dt}{12} \cdot (23 \cdot E_{i,j}^n - 16 \cdot E_{i,j}^{n-1} + 5 \cdot E_{i,j}^{n-2}) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} - (1 + \beta)d_{i,j}d_{x_{i,j}}(u_{x_{i,j}}^n - u_{x_{i,j}}^{n-1}) - (1 + \beta)\frac{d_{i,j}^2}{3}(u_{xx_{i,j}}^{n+1} - u_{xx_{i,j}}^n) \\ = u_{i,j}^n + \frac{dt}{12} \cdot (23 \cdot F_{i,j}^n - 16 \cdot F_{i,j}^{n-1} + 5 \cdot F_{i,j}^{n-2}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1} - (1 + \beta)d_{i,j}d_{y_{i,j}}(v_{y_{i,j}}^n - v_{y_{i,j}}^{n-1}) - (1 + \beta)\frac{d_{i,j}^2}{3}(v_{yy_{i,j}}^{n+1} - v_{yy_{i,j}}^n) \\ = v_{i,j}^n + \frac{dt}{12} \cdot (23 \cdot G_{i,j}^n - 16 \cdot G_{i,j}^{n-1} + 5 \cdot G_{i,j}^{n-2}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$E(\zeta, u, v) = [(d + \zeta)u]_x + [(d + \zeta)u]_y \quad (4.23)$$

$$F' = F + F_1 + Z3x \quad (4.24)$$

$$F = uu_x + vu_x + g\zeta_x \quad (4.25)$$

$$F_1 = (1 + \beta)\frac{d^2}{3}v_{xyt} + \frac{1}{2}(1 + \beta)\left(dd_x\frac{\partial v_t}{\partial y} + dd_y\frac{\partial v_t}{\partial x}\right) \quad (4.26)$$

$$Z3x = \beta\frac{gd^2}{3}(\zeta_{xxx} + \zeta_{yy}) + \beta gd\left(d_x\zeta_{xx} + \frac{1}{2}d_y\zeta_{xy} + \frac{1}{2}d_x\zeta_{yy}\right) \quad (4.27)$$

Αντίστοιχα οι ποσότητες που συνθέτουν την εξίσωση ποσότητας κατά y δίνονται από τις σχέσεις:

$$G' = G + G_1 + Z3y \quad (4.28)$$

$$G = vv_x + uv_x + g\zeta_y \quad (4.29)$$

$$G_1 = (1 + \beta) \frac{d^2}{3} u_{xyt} + \frac{1}{2} (1 + \beta) \left(dd_y \frac{\partial u_t}{\partial x} + dd_y \frac{\partial u_t}{\partial y} \right) \quad (4.30)$$

$$Z3y = \beta \frac{gd^2}{3} (\zeta_{yyy} + \zeta_{xxy}) + \beta gd \left(d_y \zeta_{yy} + \frac{1}{2} d_x \zeta_{xy} + \frac{1}{2} d_y \zeta_{xx} \right) \quad (4.31)$$

Η παράθεση των διαγωνίως διαφοροποιημένων και μη γραμμικών χρονικών παραγώγων στο δεξί μέλος των εξισώσεων ποσότητας κίνησης καθίσταται πλήρως τριδιαγώνιο. Οι κυρίαρχες εξισώσεις διακριτοποιούνται σε έναν κεντρικό κάρναβο όπου $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$, $t = n\Delta t$. Η στάθμη n αναφέρεται σε πληροφορία στο παρόν χρονικό επίπεδο.

Το σχήμα διόρθωσης δίνεται μέσω των σχέσεων (4.32-4.34):

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n + \frac{dt}{24} \cdot (9 \cdot E_{i,j}^{n+1} + 19 \cdot E_{i,j}^n - 5 \cdot E_{i,j}^{n-1} + E_{i,j}^{n-2}) \quad (4.32)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{dt}{24} \cdot (9 \cdot F_{i,j}^{n+1} + 19 \cdot F_{i,j}^n - 5 \cdot F_{i,j}^{n-1} + F_{i,j}^{n-2}) \quad (4.33)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \frac{dt}{24} \cdot (9 \cdot G_{i,j}^{n+1} + 19 \cdot G_{i,j}^n - 5 \cdot G_{i,j}^{n-1} + G_{i,j}^{n-2}) \quad (4.34)$$

Το σχήμα διόρθωσης επαναλαμβάνεται μέχρι η απόκλιση μεταξύ δύο διαδοχικών αποτελεσμάτων να φτάσει σε ένα αποδεκτό όριο, το οποίο υπολογίζεται για καθεμία από τις τρεις εξαρτημένες μεταβλητές u , v και ζ και ορίζονται ως:

$$\Delta f = \frac{\sum_{i=1,j=1}^{i=M,j=N} |f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^*|}{\sum_{i=1,j=1}^{i=M,j=N} |f_{i,j}^{n+1}|} \quad (4.35)$$

Όπου $f = \{u, v, \zeta\}$, $f_{i,j}^{n+1}$ και $f_{i,j}^*$ συμβολίζουν τους παρόντες και τους αμέσως προηγούμενους όρους, αντίστοιχα, ενώ ο υπολογισμός των όρων επαναλαμβάνεται αν οι δύο διαδοχικές μεταβλητές στον υπολογιστικό κώδικα που προτείνουμε υπερβαίνουν την οριακή τιμή 0.01 ή 1%.

Τέλος, για λόγους οπτικής διευκόλυνσης επισημαίνουμε ότι στον χρησιμοποιούμενο κώδικα δίνεται η γενική κωδικοποιητική διάκριση των συμβολισμών:

- XXn Τιμή παραμέτρου XX τη χρονική στιγμή $n + 1$
- XXb Τιμή παραμέτρου XX τη χρονική στιγμή n
- XX1 Τιμή παραμέτρου XX τη χρονική στιγμή $n - 1$
- XXx Τιμή παραμέτρου XX τη χρονική στιγμή $n - 2$

ενώ η χωρική διακριτοποίηση προσδιορίζεται από τα διατεταγμένα ζεύγη των μητρώων των υπολογιστικών παραμέτρων του κώδικα. Σε περίπτωση εκ των προτέρων γνώσης ότι μία

παράμετρος όπως λ.χ. τα χωρικά βήματα dx και dy δε μεταβάλλονται, όπως στη μελέτη μας, τότε συμβολίζουμε dx και dy και όχι $dx(i, j)$ και $dy(i, j)$ όπως θα χρησιμοποιούσαμε αν κάναμε σε περίπτωση που επιδιώκουμε πύκνωση του καννάβου σε συγκεκριμένες θέσεις.

4.4 Εισαγωγή της θραύσης στο τροποποιημένο μοντέλο Boussinesq

Το φαινόμενο της θραύσης πρόκειται να προσομοιωθεί μέσω του κριτηρίου θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας (eddy viscosity model) που περιγράψαμε στο εδάφιο 3.2.2, οπότε στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης στις δύο διευθύνσεις υπεισέρχονται οι ακόλουθοι όροι:

$$\mathbf{R}_{bx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_y + v((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_y \right\} \quad (4.36a)$$

$$\mathbf{R}_{by} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v((d + \zeta)v_\alpha)_y \right]_y + \frac{1}{2} \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_y + v((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_x \right\} \quad (4.36b)$$

Οι όροι αυτοί θα πρέπει να αναλυθούν σε απλούστερες μορφές ώστε να εισαχθούν στον προτεινόμενο από την εργασία κώδικα και να προσομοιωθούν με επάρκεια τη θραύση. Παρακάτω αναλύουμε τον όρο θραύσης κατά x \mathbf{R}_{bx} και με όμοιο τρόπο θα αναλυθεί και ο όρος θραύσης κατά την y έννοια.

$$\mathbf{R}_{bx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_y + v((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_y \right\}$$

Θέτουμε $1/(d + \zeta) = 1/hh$ και $(d + \zeta) = h$ οπότε η παραπάνω σχέση απλοποιείται οπτικά:

$$\mathbf{R}_{bx} = \frac{1}{hh} \cdot \left\{ \left[v(h \cdot u_\alpha)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[v(h \cdot u_\alpha)_y + v(h \cdot v_\alpha)_x \right]_y \right\} = \frac{1}{hh} \cdot \{ [1] + [2] \}$$

Και έχουμε ένα άθροισμα δύο όρων που είναι ίσοι με:

$$[1] = \left[v \cdot (h \cdot u_\alpha)_x \right]_x =$$

$$= v_x \cdot (h \cdot u)_x + v \cdot (h \cdot u)_x = v_x \cdot (h_x \cdot u + h \cdot u_x) + v \cdot (h_{xx} \cdot u + 2 \cdot h_x \cdot u_x + h \cdot u_{xx})$$

και

$$[2] = \frac{1}{2} \left[v(h \cdot u)_y + v(h \cdot v)_x \right]_y = 0.5 \cdot \left\{ v \cdot \left[(h \cdot u)_y + (h \cdot v)_x \right] \right\}_y =$$

$$= 0.5 \cdot \left[v \cdot (h_y \cdot u + h \cdot u_y + h_x \cdot v + h \cdot v_x) \right]_y =$$

$$= 0.5v_y \cdot (h_y \cdot u + h \cdot u_y + h_x \cdot v + h \cdot v_x) + 0.5v \cdot (h_{yy} \cdot u + 2 \cdot h_y \cdot u_y + h_x \cdot v_y + h_y \cdot v_x + h \cdot v_{xy}) =$$

$$= 0.5v_y \cdot (h_y \cdot u + h \cdot u_y + h_x \cdot v + h \cdot v_x) + 0.5v \cdot (h_{yy} \cdot u + 2 \cdot h_y \cdot u_y + h_x \cdot v_y + h_y \cdot v_x + h \cdot v_{xy})$$

Θεωρώντας επιπρόσθετα ότι το μοντέλο που παρουσιάζεται αφορά ήπια μεταβαλλόμενους πυθμένες, ήτοι μηδενική δεύτερη χωρική παράγωγο του βάθους, τότε έχουμε:

$$[1] = v_x \cdot (h_x \cdot u + h \cdot u_x) + v \cdot (2 \cdot h_x \cdot u_x + h \cdot u_{xx})$$

$$[2] = 0.5v_y \cdot (h_y \cdot u + h \cdot u_y + h_x \cdot v + h \cdot v_x) + 0.5v \cdot (2 \cdot h_y \cdot u_y + h \cdot u_{yy} + h_x \cdot v_y + h_y \cdot v_x + h \cdot v_{xy})$$

Και ακολουθώντας την ονοματολογία του κώδικα συγκεντρώνουμε τις μεταβλητές του κώδικα που αφορούν τη θραύση:

Πίνακας 4.1: Αντιστοίχιση μεταβλητών όρου θραύσης κατά τον άξονα x στον προτεινόμενο κώδικα περιγραφής κυματικής διάδοσης.

Ονομασία μεταβλητής κώδικα (αξ. X)	Φυσική ερμηνεία - αντιστοίχιση
disp1	$h \cdot u_{xx}$
disp2	$2 \cdot h_x \cdot u_x$
disp3	$2 \cdot h_y \cdot u_y$
disp4	$h \cdot v_{xy}$
disp5	$h_x \cdot u$
disp6	$h \cdot u_x$
disp7	$h_x \cdot v_y$
disp8	$h_y \cdot v_x$
disp9	$h \cdot u_y$
disp10	$h \cdot u_x$
disp11	$h_y \cdot u$
disp12	$h_x \cdot v$
disp13	$h \cdot v_x$
dk(i, j)	v
dkx	v_x
dky	v_y

Με όμοια προσέγγιση λαμβάνουμε και τις εκφράσεις της εξίσωσης ποσότητας κίνησης κατά y ενώ αξίζει να επισημάνουμε και πάλι το γεγονός ότι θεωρούμε για το μοντέλο ότι πρόκειται για ομαλά μεταβαλλόμενο πυθμένα και για το λόγο αυτό αγνοούμε τις δεύτερες χωρικές παραγώγους του βάθους h_{xx} , h_{xy} και h_{yy} .

4.5 Μείξη εντός του καννάβου του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq

Τα μοντέλα Boussinesq βασίζονται σε ολοκληρωμένες στο βάθος εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης. Ωστόσο, το μέγεθος του καννάβου διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όταν η επιλογή του μεγέθους του σχετίζεται με την προσομοίωση επιφανειακών κυμάτων και συνήθως είναι μικρότερο από το τυπικό βάθος νερού. Για το λόγο αυτό η κατανομή του οριζόντιου συντελεστή διασποράς μπορεί να καταστεί σημαντικός παράγοντας ο οποίος θα επηρεάσει τη ροή λόγω του κυματικού πεδίου. Λόγω της απουσίας ενός μοντέλου υποκαννάβου στις εξισώσεις, το υποκείμενο κυματικό πεδίο που δημιουργείται από τη θραύση, μπορεί να γίνει τόσο χαοτικό ώστε να δίνονται απολύτως μη ρεαλιστικά αποτελέσματα για την πραγματοποιούμενη ροή.

Για την αποφυγή της παραπάνω επίδρασης, επιστρατεύουμε ένα μοντέλο υποκαννάβου τύπου Smagorinsky (Smagorinsky 1963) ώστε να επηρεάσουμε την προκύπτουσα κινηματική συνεκτικότητα στην υποκείμενη ροή. Οι σχέσεις που μας βοηθούν στο σημείο αυτό, μοιάζουν με τους όρους της θραύσης, στοχεύοντας ακριβώς εκεί, να εισάγουν τεχνητή διάχυση ώστε να συμβάλλουν στην ευστάθεια του σχήματος και άρα στη λήψη ρεαλιστικών αποτελεσμάτων για τη ροή. Οι όροι που εισέρχονται στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης όμοια με τους όρους θραύσης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{F}_{bsx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_y + v_s((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_y \right\} \quad (4.37a)$$

$$\mathbf{F}_{bsy} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v_s((d + \zeta)v_\alpha)_y \right]_y + \frac{1}{2} \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_y + v_s((d + \zeta)v_\alpha)_x \right]_x \right\} \quad (4.37b)$$

Όπου εδώ v_s είναι η κινηματική συνεκτικότητα λόγω της τύρβης του υποκαννάβου και δίνεται από τη σχέση:

$$v_s = c_m \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left[(U_x)^2 + (V_y)^2 + \frac{1}{2} \cdot (U_y + V_x)^2 \right]^{1/2} \quad (4.38)$$

στην οποία U και V είναι οι ταχύτητες του μέσου χρονικά υποκείμενου κυματικού πεδίου, Δx και Δy είναι οι διαστάσεις του εν λόγω καννάβου κατά x και y , αντίστοιχα και c_m είναι μία παράμετρος μείξης ίση με μία προτεινόμενη τιμή ίση με 0.2.

Για την προσομοίωση, λαμβάνουμε το υποκείμενο κυματικό πεδίο μέσω χρήσης της μέσης τιμής της στιγμιαίας ταχύτητας πάνω από δύο κυματικές περιόδους κορυφής και ενημερώνοντας την τιμή του v_s συνακόλουθα.

Για την εισαγωγή της θεώρησης στον προτεινόμενο κώδικα αναλύουμε τον όρο \mathbf{F}_{bsx} που θα εισαχθεί στην εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά x , οπότε λαμβάνουμε και πάλι ένα άθροισμα δύο όρων [1] και [2] όμοια με πριν, αλλά στο σημείο αυτό στόχος μας όπως προαναφέραμε είναι η εισαγωγή τεχνητής διάχυσης στο σχήμα και όχι ο λεπτομερής χειρισμός του μοντέλου τύπου Smagorinsky, οπότε θεωρούμε μηδενικούς τους όρους που εμπεριέχουν χωρική παράγωγο του βάθους και άρα προκύπτει ότι:

$$\mathbf{F}_{bsx} = \frac{1}{hh} \cdot \left[v_{sx} \cdot h \cdot u_x + v_s \cdot h \cdot u_{xx} + 0.5v_{sy} \cdot (h \cdot u_y + h \cdot v_x) + 0.5v_s \cdot (h \cdot u_{yy} + h \cdot v_{xy}) \right]$$

Και απλοποιώντας τις τιμές h και h αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $h = 2 \cdot h$ λόγω του συσχετισμού τους με την ποσότητα $(d + \zeta)$ στον υποκάναβο, λαμβάνοντας την τελική μορφή του όρου που θα εισέλθει στον κώδικα:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{bsx}} = v_{sx} \cdot u_x + v_s \cdot u_{xx} + 0.5v_{sy} \cdot (u_y + v_x) + 0.5v_s \cdot (u_{yy} + v_{xy})$$

ή

$$\mathbf{F}_{\mathbf{bsx}} = [2 \cdot v_{sx} \cdot u_x + 2 \cdot v_s \cdot u_{xx}] + [v_{sy} \cdot (u_y + v_x) + v_s \cdot (u_{yy} + v_{xy})] = \text{smag1x} + \text{smag2x}$$

4.6 Οριακές συνθήκες στο τροποποιημένο μοντέλο Boussinesq

Όπως και στη θεωρητική αναφορά στα μοντέλα κυματικής διάδοσης, έτσι και στο τροποποιημένο μοντέλο που θα παρουσιάσουμε πρέπει να αναφερθούμε στις οριακές συνθήκες και πιο συγκεκριμένα στην εξίσωση πηγής που επιλέγουμε για την παραγωγή των απαιτούμενων κυματισμών αλλά και στα απορροφητικά όρια που θα ορίσουμε στα άκρα του υπολογιστικού πεδίου.

4.6.1 Συνάρτηση πηγής τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq (Memos et al. 2005)

Η συνάρτηση πηγής δόθηκε από τους Memos et al. (2005) και είναι παρόμοια με εκείνη που παρήγαγαν οι Wei et al (1999) βασιζόμενοι στις εξισώσεις του Nwogu (1993). Θεωρούμε ότι σε σταθερό βάθος d θέλουμε να παράγουμε ένα κύμα με εύρος α_0 και γωνιακής ταχύτητας ω . Η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης διάδοσης του κύματος και ενός εκ των δύο οριζοντίων αξόνων (έστω του x) είναι θ , όπως δίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το κέντρο της περιοχής της πηγής είναι παράλληλο στον άξονα y , οπότε μετατρέπουμε την εξίσωση πηγής $f(x, y, t)$ σε γινόμενο δύο συναρτήσεων:

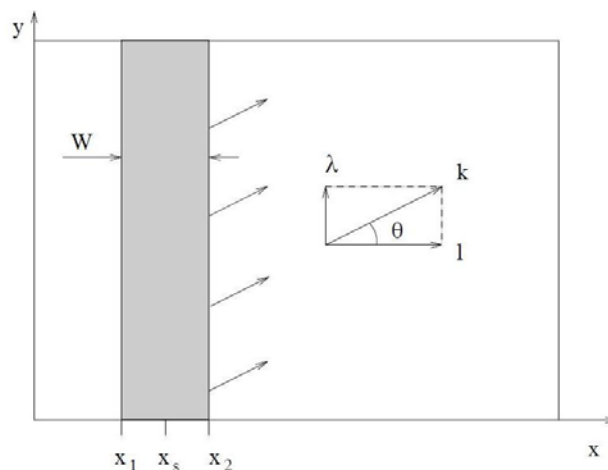
$$f(x, y, t) = g(x) \cdot s(y, t) \quad (4.39)$$

όπου η συνάρτηση $g(x)$ είναι μία συνάρτηση γκαουσιανού (Gaussian) σχήματος και $s(y, t)$ είναι η χρονοσειρά εισόδου του μεγέθους της συνάρτησης πηγής, ενώ οι εκφράσεις στις οποίες αναλύονται είναι:

$$g(x) = \exp[-\beta(x - x_s)^2] \quad (4.40)$$

$$s(y, t) = D \sin(\lambda y - \omega t) \quad (4.41)$$

όπου β είναι η παράμετρος σχήματος για τη συνάρτηση πηγής, x_s είναι η κεντρική θέση μίας πηγής κατά x για μία γραμμική πηγή παράλληλη στον y άξονα, D είναι το μέγεθος της συνάρτησης πηγής και $\lambda = k \sin(\theta)$ ο κυματαριθμός κατά τον y άξονα και k ο κυματαριθμός από τη γραμμική θεωρία.



Σχήμα 4.2: Ορισμός της συνάρτησης πηγής εντός του υπολογιστικού πεδίου. [57]

Για έναν λοιπόν μονοχρωματικό κυματισμό ή για ένα απλό μέρος μίας τυχαίας κυματοσειράς, το μέγεθος D της συνάρτησης κύματος ορίστηκε από τους Memos et al (2005) μέσω της σχέσης:

$$D = \frac{2\alpha_0(1 + B(kd)^2)(\omega^2 + Bgk^4d^3)\cos\theta}{\omega I_1 k \left[1 + \left(B + \frac{1}{3}\right)(kd)^2\right]} \quad (4.42)$$

με $B = 1/15$ και η παράμετρος I_1 μέσω της σχέσης:

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cdot \exp(-l^2/4\beta) \quad (4.43)$$

όπου $l = k\cos(\theta)$ ο κυματαριθμός κατά τον x άξονα όπως φαίνεται και στο σχήμα που προηγήθηκε, ενώ για την παράμετρο σχήματος β όσο μεγαλύτερη τιμή λάβει, τόσο στενότερη γίνεται η συνάρτηση πηγής που εκφράζεται μέσω της τιμής του εύρους W που ισούται με τη διαφορά των τετμημένων x_1 και x_2 όπου τα ύψη κύματος που αντιστοιχούν στις θέσεις αυτές είναι ίσα με $\exp(-5) = 0.0067$ φορές το μέγιστο μέγεθος D . Οπότε οι τιμές x_1 και x_2 πρέπει να ικανοποιούν την τετραγωνική εξίσωση:

$$\beta(x - x_s)^2 = 5 \quad (4.44)$$

από την οποία το εύρος της συνάρτησης πηγής προκύπτει ίσο με:

$$W = |x_2 - x_1| = 2 \sqrt{\frac{5}{\beta}} \quad (4.45)$$

Δεδομένου ότι L είναι το μήκος κύματος προκύπτουν για την εφαρμογή της συνάρτησης αποδεκτά αποτελέσματα όταν το εύρος συνάρτησης πηγής ισούται περίπου με μισό μήκος κύματος ή:

$$W = \delta \frac{L}{2} \quad (4.46)$$

με δ παράμετρο τάξης μονάδας όπου για τις αναλύσεις που θα ακολουθήσουν θεωρήθηκε ότι η τιμή $\delta = 0.3$ δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Οπότε τελικά η σχέση 4.45 μέσω της 4.46 δίνει:

$$\beta = \frac{80}{\delta^2 L^2} \quad (4.47)$$

Επισημαίνουμε ότι για τυχαίους κυματισμούς η τιμή της παραμέτρου σχήματος β καθορίζεται από τη συχνότητα κορυφής και χρησιμοποιείται για όλα τα μέρη της κυματοσειράς.

4.6.2 Απορροφητικά όρια (Wei και Kirby, 1995)

Στα όρια του υπολογιστικού πεδίου εφαρμόζονται συνθήκες απορρόφησης των κυματισμών κατά Wei και Kirby (1995) παρόμοια με τον τρόπο που περιγράψαμε στην παράγραφο 3.4.2, αφού οι τιμές των ποσοτήτων ζ, u και v διαιρούνται με την ποσότητα rm που συνιστά τον όρο απορρόφησης και δίνεται από τη σχέση:

$$rm_x = 1 + dks(i, j) = 1 + 0.25 \cdot f(x) \quad \text{ή} \quad rm_y = 1 + 0.25 \cdot f(y) \quad (4.48)$$

όπου για τον άξονα x έχουμε (και ομοίως για τον y):

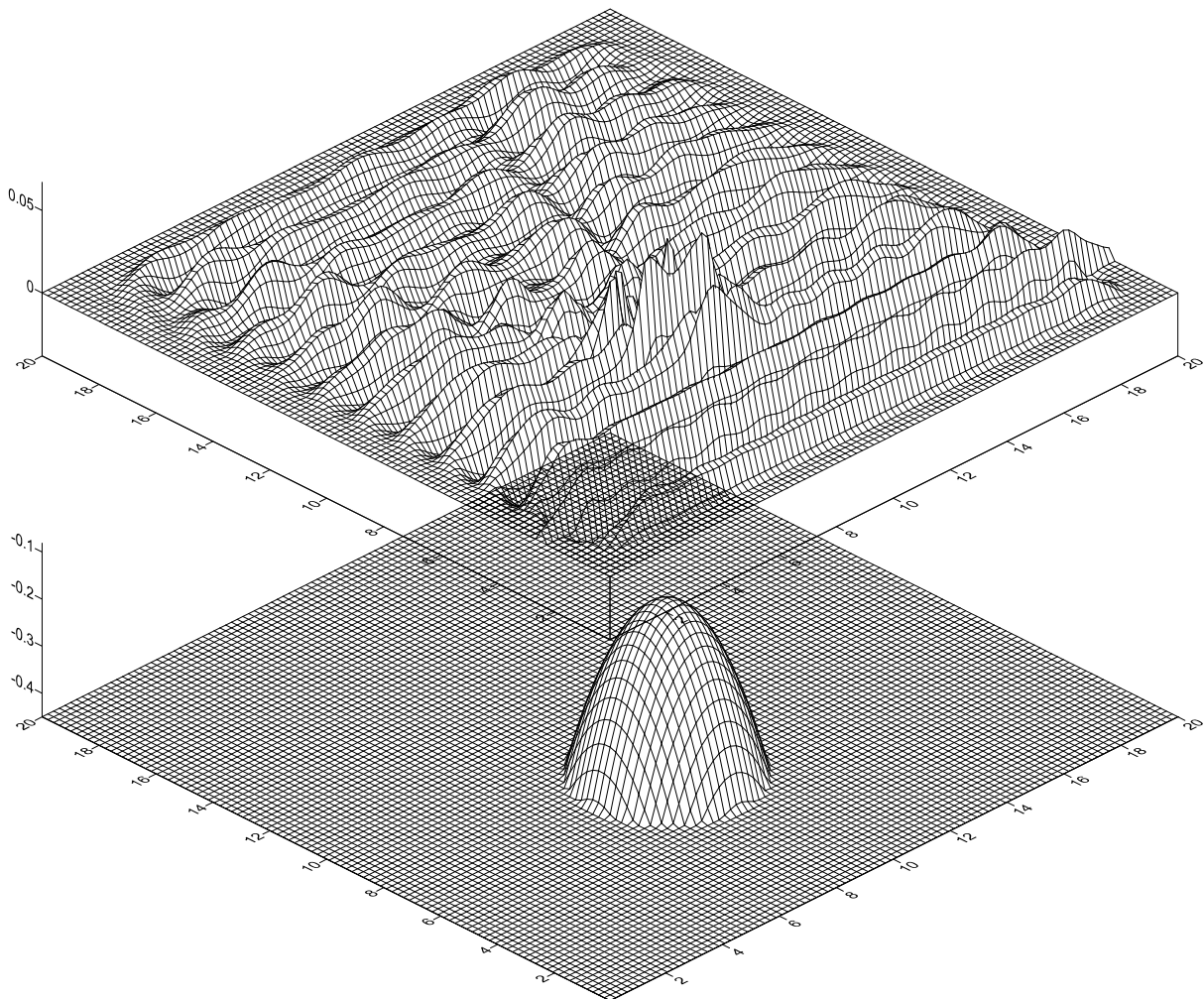
$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x - x_s}{x_m - x_s}\right)^2 - 1}{\exp(1) - 1} \quad (4.49)$$

και x_s η τετμημένη της αρχής της στοιβάδας απορρόφησης (για τη διεύθυνση της εν λόγω στοιβάδας το υπολογιστικό μοντέλο εκτείνεται από $x = 0$ έως $x = x_m$ και η στοιβάδα απορρόφησης από $x = x_s$ έως $x = x_m$).

Οι Wei και Kirby (1995) προτείνουν, όπως προαναφέραμε, πλάτος στοιβάδας απορρόφησης να λαμβάνεται ίσο με δύο ή τρεις φορές το μήκος κύματος. Λαμβάνοντας υπόψη μας τη σύσταση αυτή θεωρούμε ότι τα απορροφητικά όρια που θα επιβληθούν έχουν διαστάσεις 30 κόμβων και στις δύο διευθύνσεις και δεδομένου ότι θεωρήσαμε για τις αναλύσεις μας χωρικά βήματα $dx = dy = 0.05$ m προκύπτει πλάτος απορροφητικών ορίων ίσο με 1.5 m το οποίο προσεγγίζει μία φορά το μήκος κύματος των απλών κυματισμών στα βαθιά νερά, αλλά συμμορφώνεται πλήρως με τη σύσταση σε πιο αβαθή ύδατα.

4.7 Δυνατότητες προσομοίωσης τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq Memos et al. (2005)

Αποτέλεσμα της εφαρμογής των παραπάνω θεωρήσεων είναι ένα μοντέλο Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις ικανό να προσομοιάσει με ικανοποιητική επάρκεια, φαινόμενα κυματικής διάδοσης με σημαντικότερη συνεισφορά την ορθή προσομοίωση του φαινομένου της κυματικής θραύσης, όπως θα αποδειχθεί σε επόμενο κεφάλαιο. Χαρακτηριστικό είναι το *Σχήμα 4.3* στο οποίο φαίνεται η περίπτωση διάδοσης κύματος επάνω από ημισφαιρικό εμπόδιο (ο πυθμένας του πεδίου είναι πέραν του εμποδίου οριζόντιος). Στην απεικόνιση μπορούμε να δούμε εμφανώς τη ρήχωση του θεωρούμενου μονοχρωματικού κυματισμού (ύψους 4.5 cm και περιόδου 1.0 sec) τη διαμόρφωση του πεδίου ροής ακριβώς πίσω από το ύψαλο εμπόδιο αλλά εξετάζοντας προσεκτικότερα τα αποτελέσματα να δούμε και την απομείωση της κυματικής ενέργειας λόγω της θραύσης.



Σχήμα 4.3: Παράδειγμα διάδοσης κυματισμού πάνω από ημισφαιρικό εμπόδιο με το προτεινόμενο τροποποιημένο μοντέλο Boussinesq Memos et al. (2005)

5. Θεωρητικό υπόβαθρο υπολογιστικού μοντέλου MIKE 21 BW

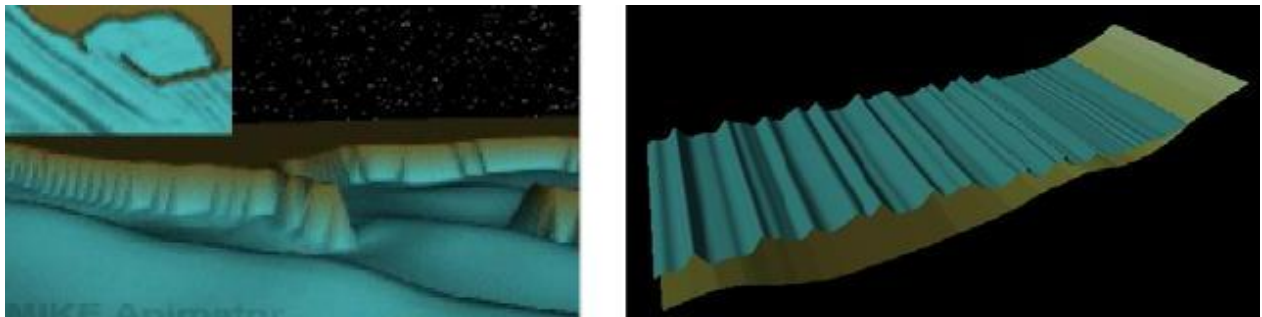
5.1 Εισαγωγή

Το ολοκληρωμένο υπολογιστικό πακέτο MIKE 21 αποτελεί ένα άμεσο εργαλείο μηχανικού για ευρεία μελέτη φαινομένων ροής με ελεύθερη επιφάνεια σε μία ή δύο οριζόντιες διαστάσεις. Στην ενότητα αυτή θα γίνει εκτενής αναφορά στο υπομοντέλο BW του προγράμματος και πιο συγκεκριμένα στις εξισώσεις που χρησιμοποιεί για την προσομοίωση της κυματικής διάδοσης. Το λογισμικό MIKE 21 BW θα αποτελέσει επικουρικά μαζί με τα πειραματικά αποτελέσματα μία πηγή επιβεβαίωσης του προτεινόμενου υπολογιστικού μοντέλου.

5.2 Γενική περιγραφή

Το λογισμικό MIKE 21 BW περιλαμβάνει δύο modules για την προσομοίωση της κυματικής διάδοσης, ένα μονοδιάστατο (1DH) για τη μελέτη του μετασχηματισμού του κύματος από τα βαθιά προς την ακτή και ένα δισδιάστατο (2DH) για τον υπολογισμό της κυματικής διαταραχής σε περιοχές λιμενικών έργων και παράκτιες περιοχές, βασιζόμενα στην αριθμητική λύση των μετασχηματισμών της περιοχής χρόνου των εξισώσεων Boussinesq (Σχήμα 5.1). Οι εξισώσεις εμπεριέχουν μη γραμμικότητα και διασπορά συχνοτήτων. Βασικά, η διασπορά συχνοτήτων εισάγεται στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση των κατακόρυφων επιταχύνσεων στην κατανομή των πιέσεων.

Και τα δύο modules επιλύουν τις εξισώσεις τύπου Boussinesq χρησιμοποιώντας μία έκφραση ροής (flux-formulation) με βελτιστοποιημένα τα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς. Οι αναβαθμισμένες αυτές εξισώσεις τύπου Boussinesq (οι οποίες παράγονται από τις εργασίες των Madsen et al., 1991, και Madsen και Sørensen, 1992) καθιστούν τα modules κατάλληλα για την προσομοίωση της διάδοσης της κατευθυντικής διάδοσης κυματοσειράς από τα βαθιά στα ρηχά νερά. Το μέγιστο σχετικό βάθος εφαρμογής $d/L_0 = 0.5$ (βάθος d , προς μήκος κύματος στα βαθιά νερά L_0) ή $kd = 3.1$, όπου kd ο σχετικός κυματαριθμός, ενώ για τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq (π.χ. Peregrine, 1967) έχουν εφαρμογή για $d/L_0 = 0.22$ ή $kd = 1.4$.



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση των δύο κυματικών module του λογισμικού MIKE 21 BW. Το δισδιάστατο (αριστερά) και το μονοδιάστατο (δεξιά).

Οι εξισώσεις του μοντέλου επεκτάθηκαν ώστε να μπορούν να λάβουν υπόψη τη θραύση κυματισμών και τη μεταβολή της ακτογραμμής όπως περιγράφονται στις εργασίες των Madsen et al. (1997 a, b) και Sørensen et al. (1998, 2004).

Το 2DH module (σε δύο οριζόντιες χωρικές διαστάσεις) επιλύει τις αναβαθμισμένες εξισώσεις Boussinesq μέσω ενός πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών με μεταβλητές οριζόμενες σε έναν εναλλασσόμενο ορθογωνικό κάρναβο. Το μοντέλο δύναται να αναπαράγει τα συνδυασμένα αποτελέσματα από φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε λιμενικές εγκαταστάσεις και παράκτιες ζώνες, μεταξύ των οποίων:

- Ρήχωση (Shoaling)
- Διάθλαση (Refraction)
- Περίθλαση (Diffraction)
- Κυματική θραύση (Wave breaking)
- Τριβή πυθμένα (Bottom friction)
- Μετακίνηση ακτογραμμών (Moving shoreline)
- Μερική ανάκλαση και μετάδοση (Partial reflection and transmission)
- Μη γραμμική αλληλεπίδραση κυματισμών (Non-linear wave-wave interaction)
- Διασπορά συχνοτήτων (Frequency spreading)
- Κατευθυντική διασπορά (Directional spreading)

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι φαινόμενα όπως η ομαδοποίηση κυμάτων (wave grouping), “surf beats”, δημιουργία δεσμευμένων χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων (generation of sub-harmonics and super-harmonics) και αλληλεπιδράσεις τριάδων συντονισμού (near-resonant triad interactions) μπορούν να εξετασθούν μέσω του λογισμικού MIKE 21 BW. Έτσι, λεπτομέρειες όπως η γένεση και η απελευθέρωση ταλαντώσεων χαμηλών συχνοτήτων λόγω μετασχηματισμού αρχικού κύματος περιγράφονται επαρκώς από το μοντέλο.

Η κυματική θραύση εφαρμόζεται μέσω του μοντέλου επιφανειακού κυλίνδρου για θραύση τύπου spilling, όπως περιγράψαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η κίνηση ακτογραμμής βασίζεται στην ακόλουθη προσέγγιση: το υπολογιστικό πεδίο διευρύνεται τεχνικά αντικαθιστώντας την άκαμπτη ακτή με μία διαπερατή ακτή πολύ χαμηλού πορώδους. Κοντά στην κινούμενη ακτογραμμή η υδάτινη επιφάνεια εισέρχεται μαζί με τον πυθμένα και συνεχίζεται εντός της πορώδους ακτής, καθορίζοντας τη στιγμιαία θέση της ακτογραμμής από τη συγκεκριμένη γραμμή τομής.

Το 1DH module (σε μία οριζόντια χωρική διάσταση) επιλύει τις ενισχυμένες εξισώσεις Boussinesq μέσω μίας κλασικής μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων Galerkin με πεπλεγμένη παρεμβολή μεταβλητών σε εναλλασσόμενο και μη εναλλασσόμενο πλέγμα υπολογισμού. Οι μεταβολές της δυναμικής ζώνης θραύσης και της ζώνης διαβροχής προσομοιώνονται για οποιοδήποτε προφίλ ακτής μέσω αυτού του μοντέλου. Το μονοδιάστατο μοντέλο είναι ικανό να προσομοιώσει ικανοποιητικά όλα τα συνδυαστικά φαινόμενα της δισδιάστατης έκδοσης. Το ζήτημα εμφάνισης υψηλότερης τάξης χωρικών διαφορικών αντιμετωπίζεται με γραμμικοποίηση των εξισώσεων Boussinesq αφού εισαχθεί μία επιπρόσθετη μεταβλητή και μία επιπρόσθετη αλγεβρική εξίσωση. Οι τελικές εξισώσεις εμπεριέχουν μόνο όρους με διαφορετικά δεύτερης τάξης για τις χωρικές συντεταγμένες (Sørensen et al., 2004).

5.3 Βασικές εξισώσεις για το 2DH κυματικό μοντέλο Boussinesq του προγράμματος MIKE 21 BW

Τα μοντέλα Boussinesq του λογισμικού MIKE 21 BW επιλύουν, όπως προαναφέρθηκε, τις αναβαθμισμένες εξισώσεις Boussinesq εκφρασμένες σε μία ή δύο οριζόντιες διαστάσεις σε όρους της ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας ζ και των ολοκληρωμένων κατά το βάθος συνιστωσών ταχύτητας P και Q .

Οι εξισώσεις για το 2DH BW module είναι:

Εξίσωση συνέχειας:

$$n \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

Εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά x :

$$\begin{aligned} n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{P^2}{h} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{PQ}{h} \right)}{\partial y} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + F_x n^2 g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \\ + n^2 P \left[\alpha + \beta \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{h} \right] + \frac{g P \sqrt{P^2 + Q^2}}{h^2 C^2} + n \Psi_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά y :

$$\begin{aligned} n \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{h} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{PQ}{h} \right)}{\partial x} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + F_y n^2 g h \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \\ + n^2 Q \left[\alpha + \beta \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{h} \right] + \frac{g Q \sqrt{P^2 + Q^2}}{h^2 C^2} + n \Psi_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

όπου οι όροι διασποράς Ψ_1 και Ψ_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \Psi_1 \equiv - \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 (P_{xxt} + Q_{xyt}) - n B g d^3 (\zeta_{xxx} + \zeta_{xxy}) \\ - d d_x \left(\frac{1}{3} P_{xt} + \frac{1}{6} Q_{yt} + n B g d (2\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) \right) - d d_y \left(\frac{1}{6} Q_{xt} + n B g d \zeta_{xy} \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 \equiv - \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 (Q_{yyt} + P_{xyt}) - n B g d^3 (\zeta_{yyy} + \zeta_{xyy}) \\ - d d_y \left(\frac{1}{3} Q_{yt} + \frac{1}{6} P_{xt} + n B g d (2\zeta_{yy} + \zeta_{xx}) \right) - d d_x \left(\frac{1}{6} P_{yt} + n B g d \zeta_{xy} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις οι δείκτες x , y και t υποδηλώνουν μερική παραγωγή στο χώρο και στο χρόνο, αντίστοιχα.

Παρακάτω επισημαίνουμε τους συμβολισμούς των εξισώσεων που προηγήθηκαν.

P πυκνότητα ροής κατά x σε $m^3/(msec)$

Q πυκνότητα ροής κατά y σε $m^3/(msec)$

B όρος διασποράς Boussinesq

F_x όρος οριζόντιας τάσης κατά x

F_y όρος οριζόντιας τάσης κατά y

x, y καρτεσιανές συντεταγμένες

t χρόνος σε sec

h συνολικό βάθος ίσο με $h = d + \zeta$ σε m

d βάθος στη μέση στάθμη ηρεμίας σε m

g βαρυτική επιτάχυνση σε m/sec^2

n πορώδες

C αριθμός αντίστασης Chezy σε $m^{1/2}/sec$

α συντελεστής αντίστασης για στρωτή ροή σε πορώδες μέσο

β συντελεστής αντίστασης για τυρβώδη ροή σε πορώδες μέσο

ζ ανύψωση θαλάσσιας επιφάνειας πάνω από σημείο αναφοράς σε m

Οι όροι θραύσης R_{xx} , R_{xy} και R_{yy} αναλύονται στην ενότητα περιγραφής της προσομοίωσης της θραύσης από το λογισμικό.

Οι όροι οριζόντιας τάσης που αναφέραμε, περιγράφονται μέσω μίας σχέσης κλίσης τάσης (gradient-stress) η οποία δίνει:

$$F_x = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v_t \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (5.6)$$

$$F_y = - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_t \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) \right] \quad (5.6)$$

όπου v_t είναι η οριζόντια τυρβώδης συνεκτικότητα.

Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε και τις σχέσεις που χρησιμοποιούνται για το 1DH BW module:

Εξίσωση συνέχειας:

$$n \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (5.7)$$

Εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά x:

$$n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{P^2}{h} \right)}{\partial x} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + n^2 g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} - n \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} - \frac{1}{3} d \frac{\partial d}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} - n^2 B g d^2 \frac{\partial w}{\partial x} + n^2 P \left[\alpha + \beta \frac{|P|}{h} \right] + \frac{g P |P|}{h^2 C^2} = 0 \quad (5.8)$$

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \quad (5.9)$$

5.4 Προσομοίωση θραύσης στο λογισμικό MIKE 21 BW

Οι όροι θραύσης R_{xx} , R_{xy} και R_{yy} αφορούν την προεξέχουσα ορμή που οφείλεται από την ανομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας λόγω της παρουσίας του επιφανειακού κυλίνδρου και δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις (επανάληψη από το κεφάλαιο 3):

$$R_{xx} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \cdot \left(c_x - \frac{P}{d} \right)^2 \quad (5.10)$$

$$R_{yy} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \cdot \left(c_y - \frac{Q}{d} \right)^2 \quad (5.11)$$

$$R_{xy} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \cdot \left(c_x - \frac{P}{d} \right) \cdot \left(c_y - \frac{Q}{d} \right) \quad (5.12)$$

όπου $\delta = \delta(t, x, y)$ είναι το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου και c_x και c_y οι ταχύτητες του κυλίνδρου στις δύο διευθύνσεις κατά Madsen et al (1997a) και πιο πρόσφατα κατά Sørensen et al (2004) και εδείχθη στο σχήμα 3.5.

Η ταχύτητα του κυλίνδρου (c_x, c_y) είναι σημαντική παράμετρος στο μοντέλο του επιφανειακού κυλίνδρου του MIKE 21 BW. Ο μετασχηματισμός που παρουσιάστηκε από τους Sørensen et al (2004) χρησιμοποιείται και βασίζεται στην ακόλουθη προσέγγιση της ταχύτητας του κυλίνδρου:

$$(c_x, c_y) = (c \cdot \cos\theta, c \cdot \sin\theta) \quad (5.13)$$

$$c = f_v \sqrt{gh} \quad (5.14)$$

Χρησιμοποιώντας τον παράγοντα ταχύτητας κυλίνδρου $f_v = 1.0$ λαμβάνουμε την ταχύτητα φάσης της γραμμικής θεωρίας για ρηχά νερά, μία καλή προσέγγιση μέχρις εκτός της ζώνης θραύσης, ενώ $f_v = 1.3$ (προεπιλεγμένη τιμή στο MIKE 21 BW) είναι καταλληλότερη εντός της ζώνης θραύσης (Madsen et al, 1997a). Η χρονική μετάβαση από $f_v = 1.0$ σε $f_v = 1.3$ επιτυγχάνεται με μία εκθετική σχέση (Sørensen et al, 2004). Η χρονική σταθερά που εφαρμόζεται είναι η ίδια για την μεταβολή της γωνίας θραύσης.

Για την κατεύθυνση θ του κυλίνδρου υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι στο MIKE 21 BW:

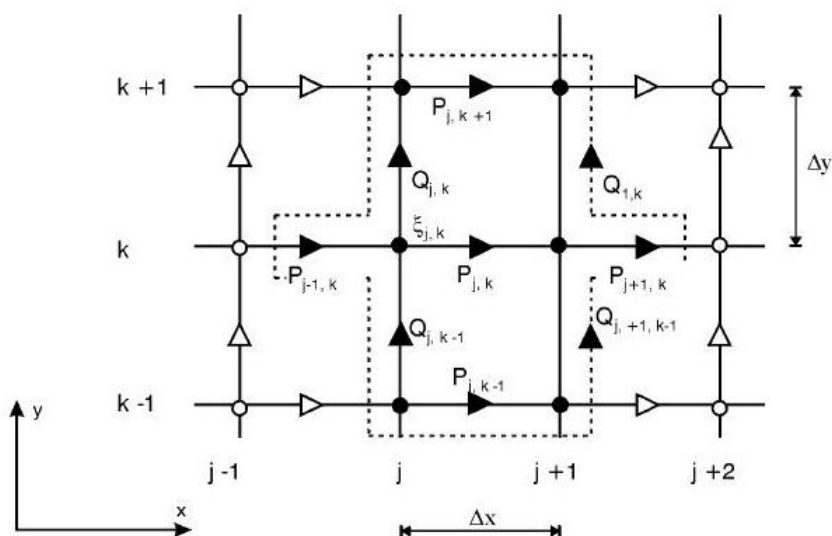
Τύπος ταχύτητας κυλίνδρου 1: Η κατεύθυνση του κυλίνδρου καθορίζεται ανά πάσα στιγμή από το στιγμιαίο κυματικό πεδίο, διαδικασία που μπορεί στην έναρξή της να προκαλέσει προβλήματα σταθερότητας.

Τύπος ταχύτητας κυλίνδρου 3: Η κατεύθυνση του κυλίνδρου ορίζεται προς μία καθορισμένη διεύθυνση.

5.5 Αριθμητική εφαρμογή

5.5.1 Κυματικό μοντέλο Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις MIKE 21 BW

Η αριθμητική μέθοδος που επιστρατεύεται από το λογισμικό βασίζεται σε ένα σχήμα που ονομάζεται SYSTEM 21, που πρωτοεισηγήθη από τους Abbott et al (1978). Από τότε αυτό το εύχρηστο σχήμα βρίσκεται σε συνεχή βελτίωση (Madsen et al, 1991 και Madsen και Sørensen, 1992). Οι διαφορικές εξισώσεις διακριτοποιούνται χωρικά σε έναν ορθογωνικό τμηματικό κάνναβο όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 5.2). Οι βαθμωτές ποσότητες όπως η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ορίζονται ευθέως στους κόμβους του καννάβου, ενώ τα διανυσματικά μεγέθη ορίζονται στο μέσο γειτονικών κόμβων (επί των πλευρών βρόχων).



Σχήμα 5.2: Απεικόνιση καννάβου για το 2DH module του λογισμικού MIKE 21 BW.

Η ολοκλήρωση στο χρόνο γίνεται μέσω ενός πεπλεγμένου χρονικού σχήματος. Ο εφαρμοζόμενος αλγόριθμος είναι εναλλασσόμενης διεύθυνσης ή Alternative Direction Implicit (ADI), που χρησιμοποιεί μία τεχνική τύπου “fractional-step” και “side-feeding” (semi-linearization of non-linear terms), ενώ το τελικό τριδιαγώνιο σύστημα λύνεται με τη μέθοδο του αλγορίθμου “double-sweep”.

5.5.2 Κυματικό μοντέλο Boussinesq σε μία οριζόντια διάσταση MIKE 21 BW

Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι για το μονοδιάστατο module του λογισμικού χρησιμοποιείται για την επίλυση του 1DH συστήματος εξισώσεων, μία μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, η οποία μπορεί να αποδώσει σοβαρά σφάλματα ειδικά σε περιπτώσεις εφαρμογής ίσης τάξης συναρτήσεων παρεμβολής για τον υπολογισμό παροχών και ανύψωσης, και άρα χρησιμοποιείται μικτή παρεμβολή για τη λήψη σταθερών λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι στοιχεία με τετραγωνικές παροχές και γραμμική ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας και επιπρόσθετοι όροι εμφανίζονται σε αυτήν την κατεύθυνση, οπότε επιστρατεύονται πλέον κατά περίπτωση κατάλληλα σχήματα επίλυσης ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι το παρόν μοντέλο υποστηρίζει σταθερό και μεταβαλλόμενο πλέγμα (mesh) για επίτευξη μέγιστου βαθμού προσαρμοστικότητας.

6. Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq και MIKE 21 BW - Σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε εκτενώς στις δυνατότητες προσομοίωσης κυματικής διάδοσης του προτεινόμενου μοντέλου Boussinesq. Θα συγκριθεί σε συνθήκες όμοιες με πειραματικές διατάξεις που έδωσαν μία σειρά από αποτελέσματα για τα μεγέθη προσομοίωσης (κυρίως μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας) αλλά και με το ευρέως αποδεκτό εμπορικό πακέτο προσομοίωσης MIKE 21 BW. Επίσης, θα διερευνηθεί κατά πόσο το προτεινόμενο μοντέλο και το εμπορικό λογισμικό μπορούν να περιγράψουν την κυματική διάδοση σε κάποιες απλές διατάξεις παράκτιων περιοχών που ορίζονται από πειράματα διαθέσιμα στη διεθνή βιβλιογραφία.

Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι τα περισσότερα πειράματα που ήταν διαθέσιμα στη βιβλιογραφία και έδιναν επαρκή αποτελέσματα ώστε να χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία ήταν κατά κύριο λόγο μονοδιάστατα, αφορούσαν δηλαδή κυματική διάδοση σε μία οριζόντια διάσταση. Για να αξιοποιηθούν τα ευρήματα αυτά και να συγκριθούν με το προτεινόμενο (δισδιάστατο) μοντέλο αλλά και με το λογισμικό MIKE 21 BW, αποδίδουμε στην υπολογιστική περιοχή δεύτερη οριζόντια διάσταση επαρκούς εύρους όπου οι εισερχόμενοι κυματισμοί διαδίδονται στη μία οριζόντια διάσταση μέσω μιας γραμμικής πηγής παράλληλης στη θεωρούμενη οριζόντια διάσταση. Τα υπό διερεύνηση αποτελέσματα λαμβάνονται από το μέσον της διάστασης αυτής κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης της εισερχόμενης κυματικής διαταραχής.

Στις αναλύσεις που θα περιγραφούν εκτενέστερα στις επόμενες ενότητες θα απεικονισθούν για τα πειράματα των Beji και Battjes που θα εξετάσουμε, σε κοινούς άξονες οι χρονοσειρές $\zeta(t)$ καταγραφής προτεινόμενου μοντέλου Boussinesq, προγράμματος MIKE 21 BW και πειραματικών μετρήσεων και θα σχολιασθούν. Επιπροσθέτως, σε κάθε ανάλυση θα παρουσιαστεί και στατιστική ανάλυση των χρονοσειρών $\zeta(t)$ με στόχο την διαμόρφωση πληρέστερης εικόνας για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων του μοντέλου. Η στατιστική ανάλυση θα πραγματοποιηθεί μέσω των παρακάτω μεγεθών/παραμέτρων (Hughes, 1993):

- ✓ Μέση ανύψωση (mean elevation):

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i \quad (6.1)$$

- ✓ Τυπική απόκλιση (standard deviation):

$$\zeta_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta_i - \bar{\zeta})^2} \quad (6.2)$$

- ✓ Λοξότητα (skewness):

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\zeta_{\text{rms}}^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta_i - \bar{\zeta})^3 \quad (6.3)$$

- ✓ Κύρτωση (kurtosis)

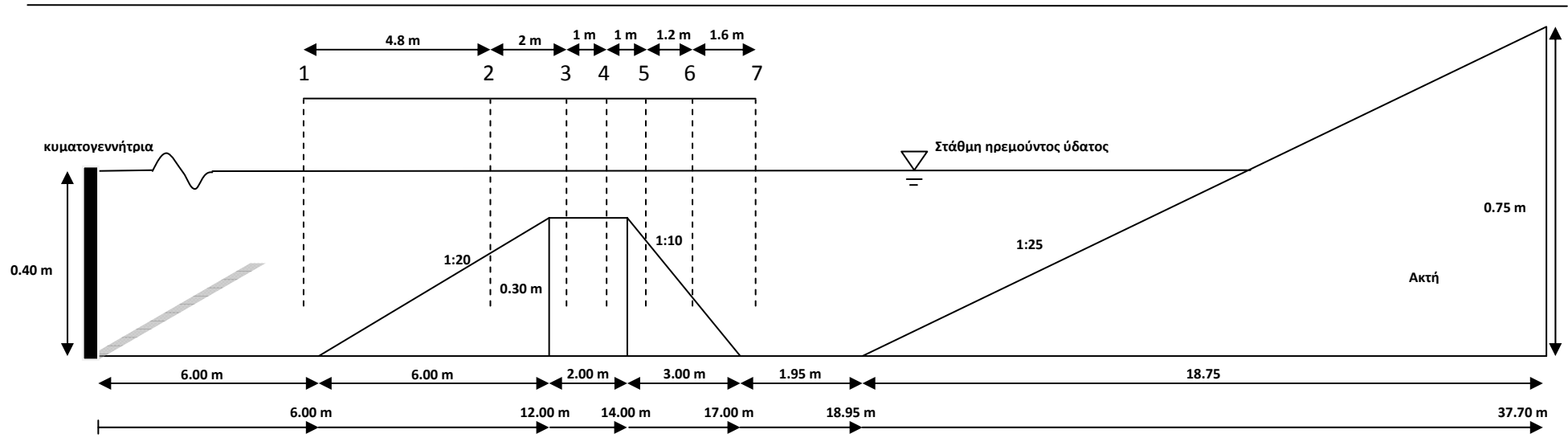
$$\beta_2 = \frac{1}{\zeta_{\text{rms}}^4} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta_i - \bar{\zeta})^4 \quad (6.4)$$

6.2 Το πείραμα των Beji και Battjes (1994) – μονοχρωματικοί κυματισμοί

Στην ενότητα αυτή ελέγχεται η ακρίβεια προσομοίωσης του προτεινόμενου μοντέλου Boussinesq και του λογισμικού MIKE 21 BW έναντι διάδοσης βραχέων, μονοχρωματικών κυματισμών (short, monochromatic waves) μη θραυόμενων που διαδίδονται πάνω από αδιαπέρατη ύφαλη διάταξη. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα του πειράματος Beji και Battjes (1994).

6.2.1 Πειραματική διάταξη πειράματος Beji και Battjes (1994)

Τα πειράματα εκτελέστηκαν στο κυματικό κανάλι (wave flume) του τεχνολογικού Πανεπιστημίου του Delft του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών με διαστάσεις μήκους 37.70 m, πλάτους 0.80 m και ύψους 0.75 m. Στα πειράματα που διενεργήθηκαν στο κανάλι η στάθμη ηρεμούντος ύδατος ήταν στα 0.40 m, ενώ η γενική μορφή της πειραματικής διάταξης φαίνεται στο Σχήμα 6.1 που ακολουθεί:



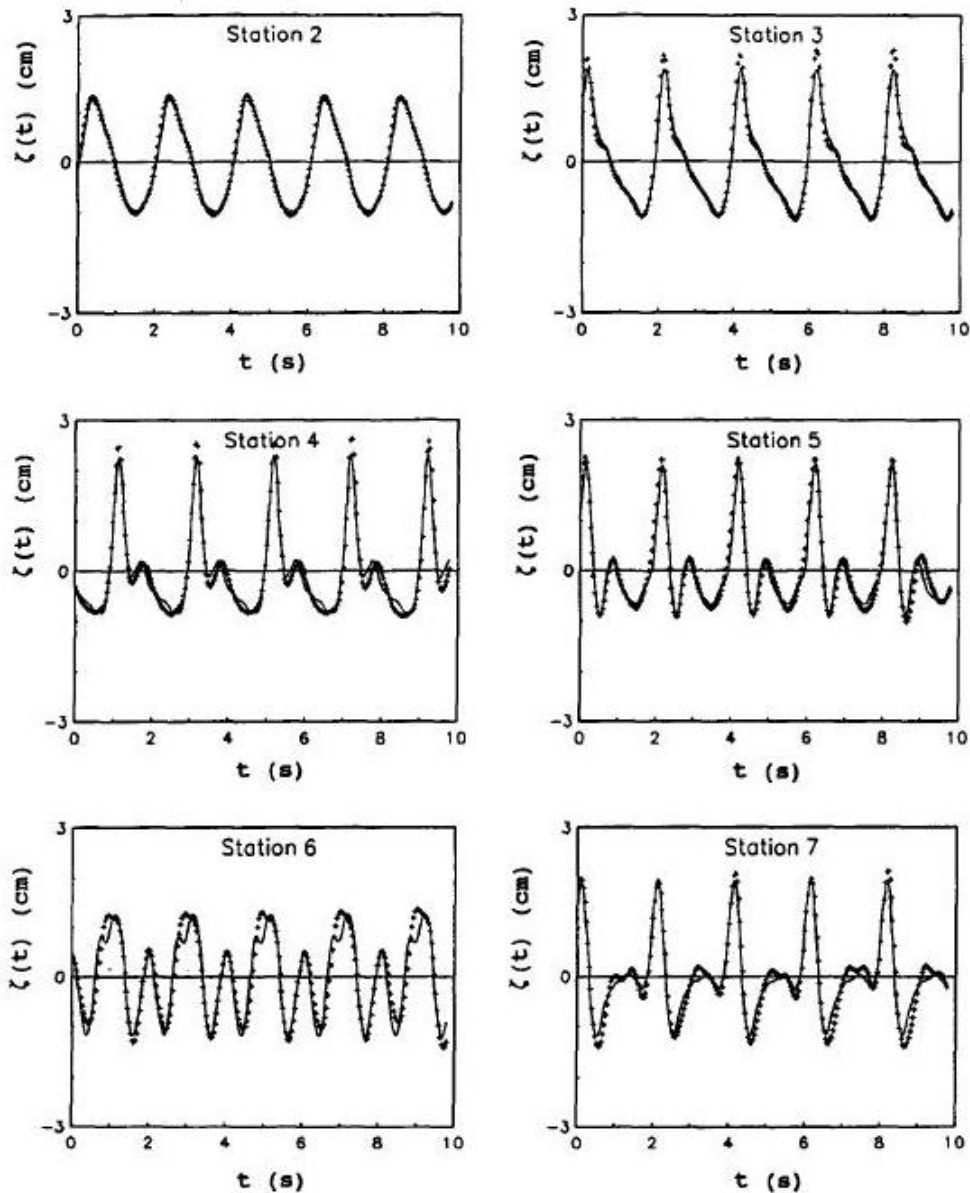
Σχήμα 6.1: Απεικόνιση διάταξης για το πείραμα των *Beji* και *Battjes* (1994). Οι αριθμοί 1-7 αντιστοιχούν στις θέσεις των αισθητήρων που χρησιμοποιήθηκαν για την καταγραφή των διαταραχών.

Στο παραπάνω σχήμα διακρίνουμε το προφίλ του πυθμένα που διαμορφώθηκε για τη διεξαγωγή των πειραμάτων. Διακρίνεται το ύφαλο εμπόδιο αποτελούμενο από μία ανοδική κλίση 1:20, στέψη πλάτους 2.0 m και ύψους 0.30 m από τον πυθμένα και καθοδική κλίση 1:10. Στο τέλος του καναλιού, αντίθετα από το μηχανισμό γένεσης των κυματισμών κατασκευάστηκε επίπεδη ακτή με κλίση 1:25 επί της οποίας τοποθετήθηκαν χονδρόκοκκα υλικά για τη μείωση ανάκλασης των κυματισμών.

Στο κυματικό κανάλι αναπτύσσονται μέσω κυματογεννήτριας, υδραυλικά καθοδηγούμενης, εμβολοειδούς τύπου, κυματισμοί μονοχρωματικοί, καθώς επίσης και χρονοσειρές τυχαίας φάσης αντίστοιχες του φάσματος JONSWAP. Το σήμα ελέγχου παράγεται μέσω ειδικευμένου υπολογιστή που συνδέεται με ένα μετατροπέα DA-AD που τροφοδοτεί με τάση έναν ενισχυτή ο οποίος στέλνει σήμα στον driver. Τα σήματα αυτά, τα οποία επεξεργάστηκε ο υπολογιστής μέσω ενός πακέτου λογισμικού που αναπτύχθηκε στο πανεπιστήμιο, δίνουν τις χρονοσειρές που συνθέτουν την κυματική διαταραχή.

Η διαταραχή καθώς διαδίδεται στη διάταξη του πειράματος, καταγράφεται από επτά (7) αισθητήρες τοποθετημένους στις αντίστοιχες θέσεις που φαίνονται στο σχήμα που προηγήθηκε. Ο πρώτος εξ αυτών τοποθετήθηκε στην περιοχή σταθερού βάθους (0.4 m), σε απόσταση 6 m από την κυματογεννήτρια και του πόδα του ύφαλου εμποδίου, οπότε και ο αισθητήρας αυτός (gage 1) συνέστησε τον «αισθητήρα αναφοράς» των εισερχόμενων κυματισμών. Οι υπόλοιποι αισθητήρες λάμβαναν μετρήσεις στην ανοδική κλίση του υφάλου (gage 2), στη στέψη του (gage 3,4) και στην καθοδική κλίση του (gage 5,6,7).

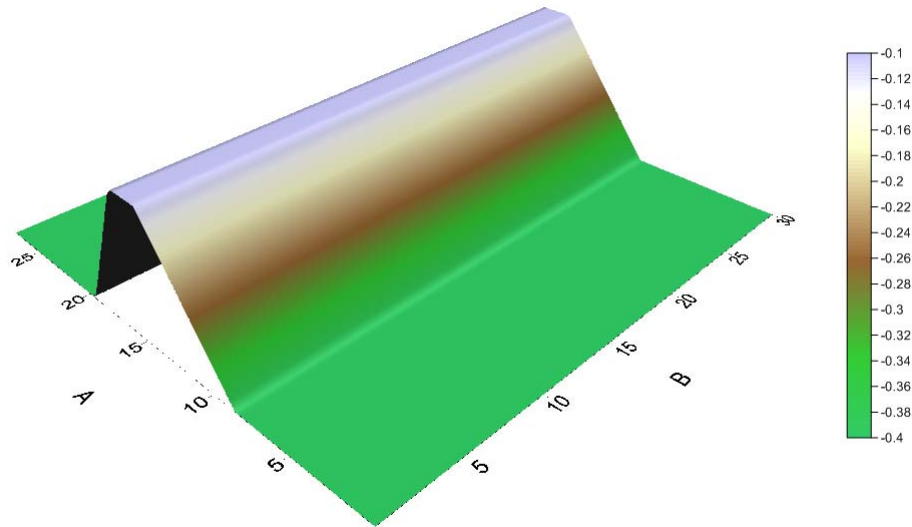
Οι πειραματικές διερευνήσεις περιελάμβαναν θραυόμενους και μη θραυόμενους κυματισμούς. Τα πειράματα έγιναν για περιοδικούς κυματισμούς συχνότητας $f = 0.5 \text{ Hz}$ και ύψους κύματος $H = 2.0 \text{ cm}$, αλλά και για τυχαίους κυματισμούς JONSWAP με συχνότητα κορυφής φάσματος $f_p = 0.5 \text{ Hz}$ και χαρακτηριστικό ύψος κύματος $H_s = 1.8 \text{ cm}$. Στην παρούσα μελέτη ελέγχουμε τη διάδοση απλών κυματισμών μη θραυόμενων συχνότητας $f = 0.5 \text{ Hz}$ και αρχικού ύψους κύματος $H = 2.0 \text{ cm}$. Τα αποτελέσματα δίνονται στο *Σχήμα 6.2* όπου με συνεχή γραμμή δίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα και με (+) ένα βελτιωμένο μοντέλο Boussinesq που χρησιμοποίησαν οι ερευνητές για σύγκριση.



Σχήμα 6.2: Πειραματικές μετρήσεις ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας για απλούς κυματισμούς $f = 0.5 \text{ Hz}$ και $H = 2.0 \text{ cm}$ πειράματος *Beji και Battjes (1994)*. [7]

6.2.2 Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq

Τα πειράματα που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, αφορούν μονοδιάστατη διάδοση κυματισμών. Ωστόσο, το υπό εξέταση τροποποιημένο μοντέλο Boussinesq αφορά διάδοση σε δύο οριζόντιες διαστάσεις. Για τη σύνδεση των πειραματικών μετρήσεων και του μοντέλου, διαμορφώνουμε ένα υπολογιστικό πεδίο σε δύο οριζόντιες διαστάσεις όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου. Αποδίδουμε στην υπολογιστική περιοχή δεύτερη οριζόντια διάσταση επαρκούς εύρους όπου οι εισερχόμενοι κυματισμοί διαδίδονται στη μία οριζόντια διάσταση μέσω μίας γραμμικής πηγής παράλληλης στη θεωρούμενη οριζόντια διάσταση και τα υπό διερεύνηση αποτελέσματα λαμβάνονται από το μέσον της διάστασης αυτής κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης της εισερχόμενης κυματικής διαταραχής. Η διάταξη παρουσιάζεται στο *Σχήμα 6.3*:



Σχήμα 6.3: Θεωρούμενη διάταξη υπολογιστικού πεδίου για το πείραμα των Beji και Battjes (1994) όπου άξονας A: Διάσταση κατά μήκος του πειράματος και άξονας B: Διάσταση δισδιάστατης προσομοίωσης πειράματος

Για την εφαρμογή του μοντέλου επισημαίνουμε ότι επιλέχθηκαν χωρική διακριτοποίηση και στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις $dx = dy = 0.05 \text{ m}$ και χρονική διακριτοποίηση $dt = 0.005 \text{ sec}$ οπότε ο δημιουργούμενος κάρναβος $lm \times Jm = 600 \times 550$ δίνει μήκος κατά τη διάσταση του πειράματος ίσο με 25 m και κατά τη θεωρούμενη δεύτερη οριζόντια διάσταση μήκος ίσο με 30 m το οποίο είναι επαρκές ώστε να μην επηρεάσουν τα πλευρικά όρια το μέσον κατά μήκος της διάστασης του πειράματος όπου εξάγουμε τα αποτελέσματα μέτρησης της ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας για να συγκριθούν με τις πειραματικές μετρήσεις.

Η εφαρμογή του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq για το πείραμα των Beji και Battjes (1994) γίνεται κατά τον τρόπο που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4 πλην της προσομοίωσης της θραύσης καθώς η ανάλυση γίνεται για μη θραυόμενους κυματισμούς. Η συνάρτηση πηγής τοποθετείται στη θέση της κυματογεννήτριας στο πείραμα, ενώ τα απορροφητικά όρια έχουν εύρος $x_s = 30dx$, τοποθετώντας ωστόσο τις στοιβάδες απορρόφησης σε απόσταση από τη θέση γένεσης κυματισμών (θεώρηση μήκους 2.5 m προ της πηγής κυματισμών εκ των οποίων το 1.5 m αφορά τη στοιβάδα απορρόφησης) για την αποφυγή ασταθειών.

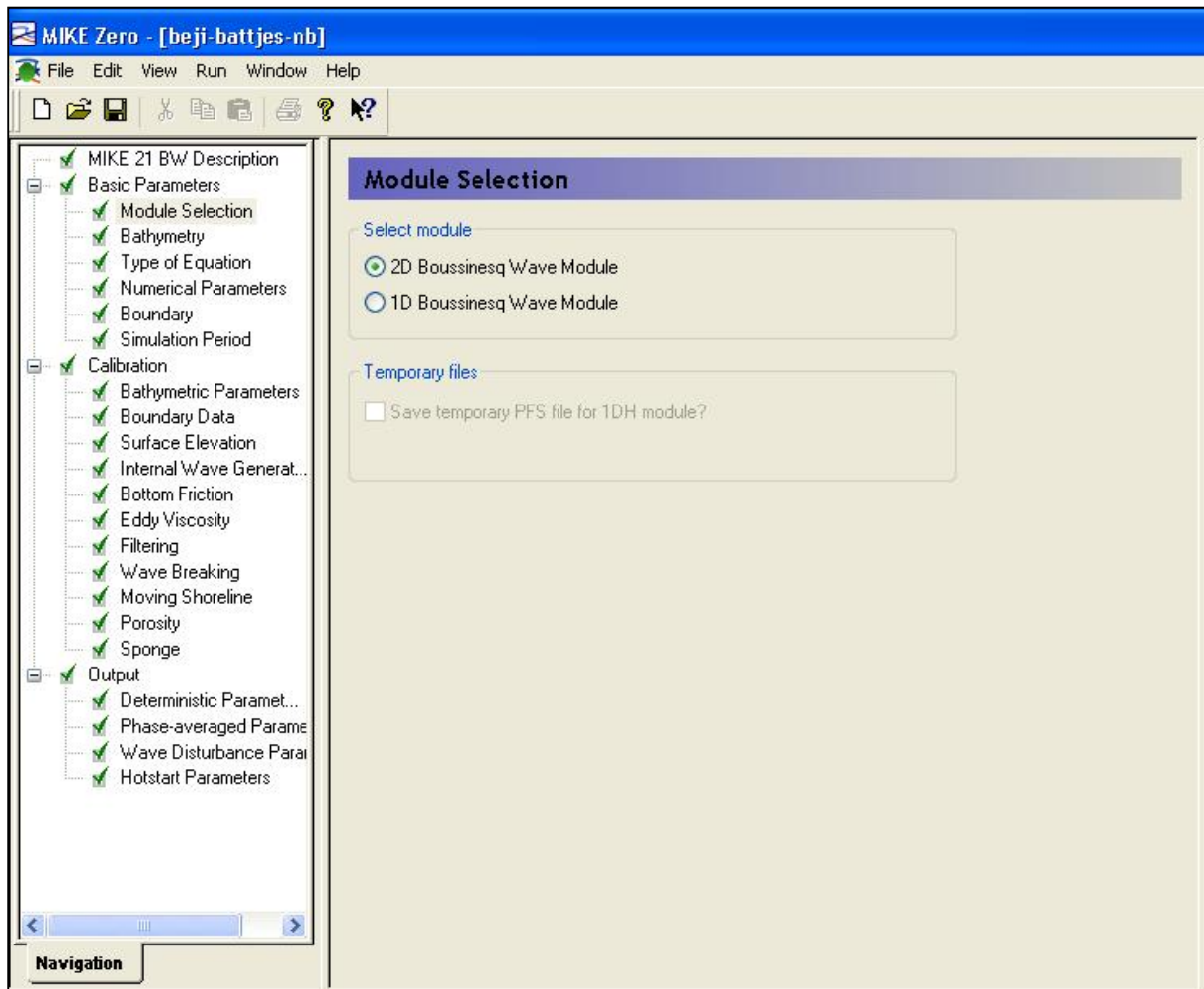
Όσον αφορά τη διάρκεια διεξαγωγής των αναλύσεων προέκυψε και από το προτεινόμενο μοντέλο αλλά και από το MIKE 21 ότι δεδομένου του υπολογιστικού πεδίου, σε χρόνο 40 sec μπορούμε να έχουμε μονιμοποίηση συνθηκών ροής στις θέσεις ελέγχου των μετρήσεων.

Βάσει των παραπάνω κατασκευάζουμε τον κώδικα Boussinesq ο οποίος παρουσιάζεται στην πλήρη μορφή του (δηλαδή με την προσθήκη της θραύσης κυματισμών) στο παράρτημα της εργασίας.

6.2.3 Εφαρμογή MIKE 21 BW

Για την προσομοίωση του προβλήματος μέσω του υπολογιστικού προγράμματος MIKE 21 BW επιλέγουμε το συγκεκριμένο υποπρόγραμμα από τη γενική καρτέλα του προγράμματος. Το πρόγραμμα εμφανίζει ένα δενδροδιάγραμμα με τις απαραίτητες θεωρήσεις που πρέπει να γίνουν για την μελέτη.

Αρχικά μέσω του Module Selection επιλέγουμε την περίπτωση μοντέλου Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις 2D Boussinesq Wave Module (Σχήμα 6.4):

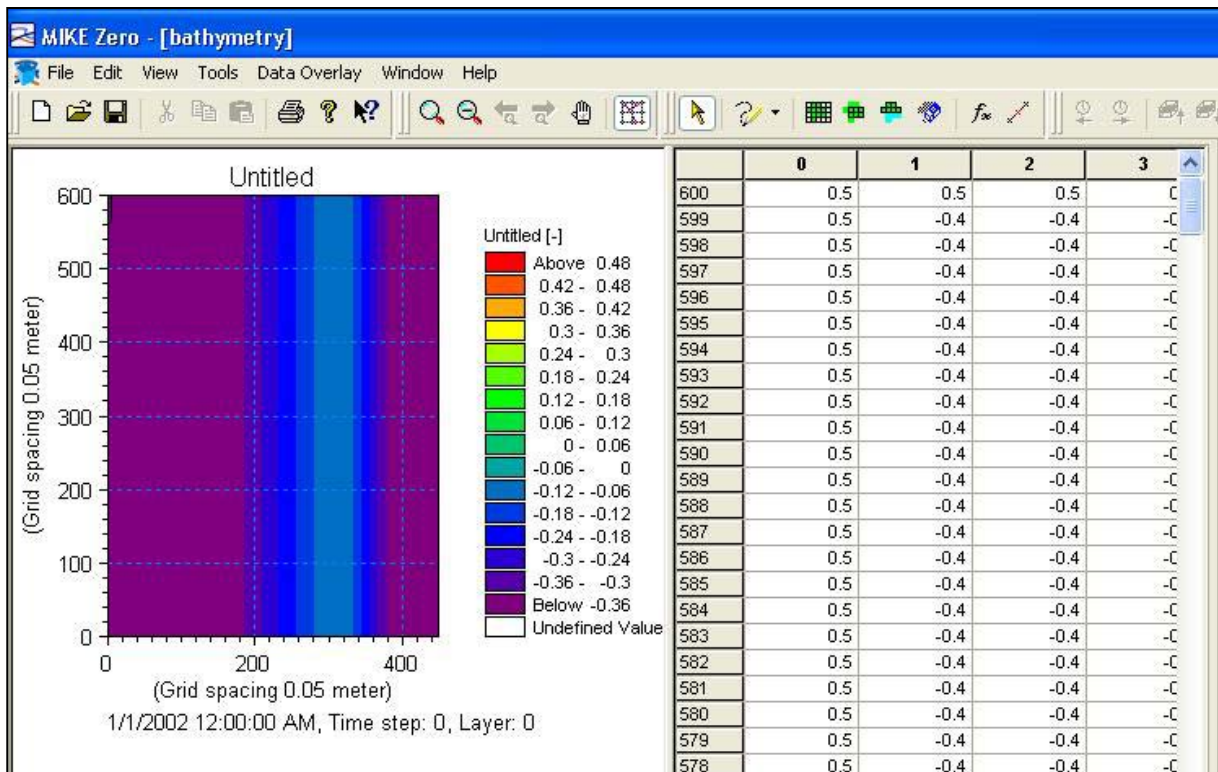


Σχήμα 6.4: Επιλογή διαστάτου module στο πρόγραμμα MIKE 21 BW.

Στη συνέχεια ακολουθώντας κατά σειρά και ορίζοντας όλες τις παραμέτρους έχουμε τον ορισμό της βαθυμετρίας (Bathymetry), όπου επιλέγουμε το Cold start, select bathymetry (Σχήμα 6.5) και εισάγουμε από αρχείο (π.χ. Excel) με χωρικά βήματα $dx = dy = 0.05$ m, τη βαθυμετρία του πειράματος η οποία είναι ίδια με αυτή που εισήχθη στο προτεινόμενο μοντέλο και δίνεται στο Σχήμα 6.6.

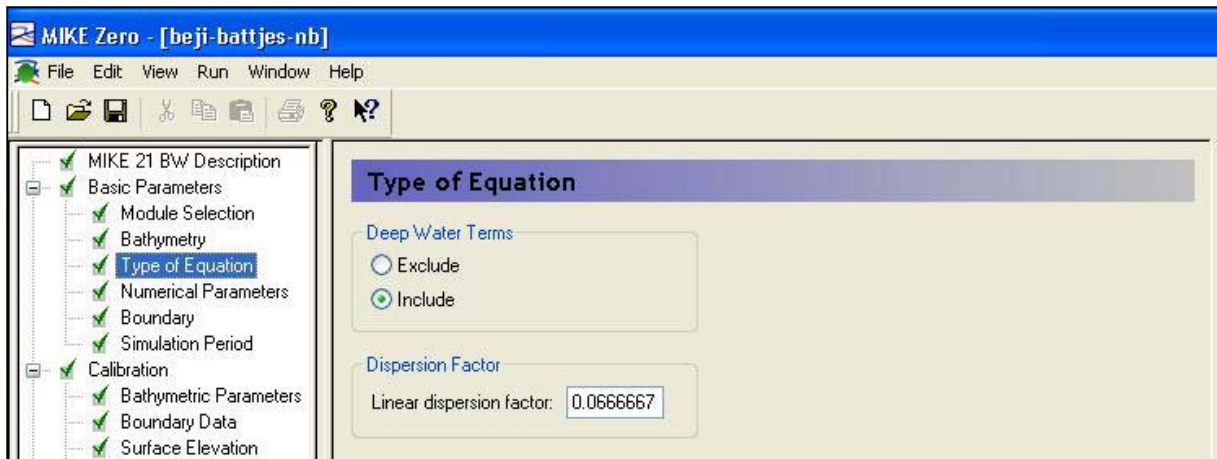


Σχήμα 6.5: Ορισμός βαθυμετρίας στο πρόγραμμα MIKE 21 BW.



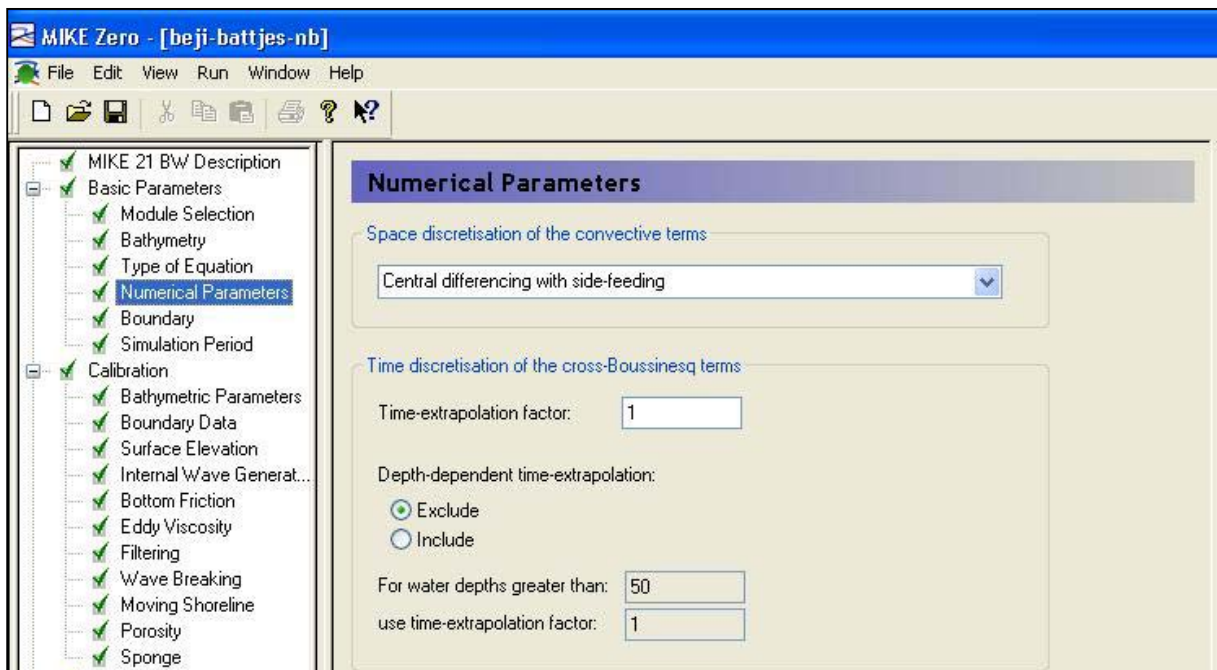
Σχήμα 6.6: Μορφή εισηγμένης βαθυμετρίας στο πρόγραμμα MIKE 21 BW για το πείραμα των Beji και Battjes (1994).

Στην καρτέλα type of Equation επιλέγουμε την εισαγωγή των όρων διασποράς για βαθιά νερά (με λόγο σχετικού βάθους $d/L > 0.5$) ενώ στην παράμετρο γραμμικής διασποράς δεν αλλάζουμε την προεπιλεγμένη τιμή του προγράμματος (Σχήμα 6.7) όπως άλλωστε συνίσταται και από το εγχειρίδιο του λογισμικού.



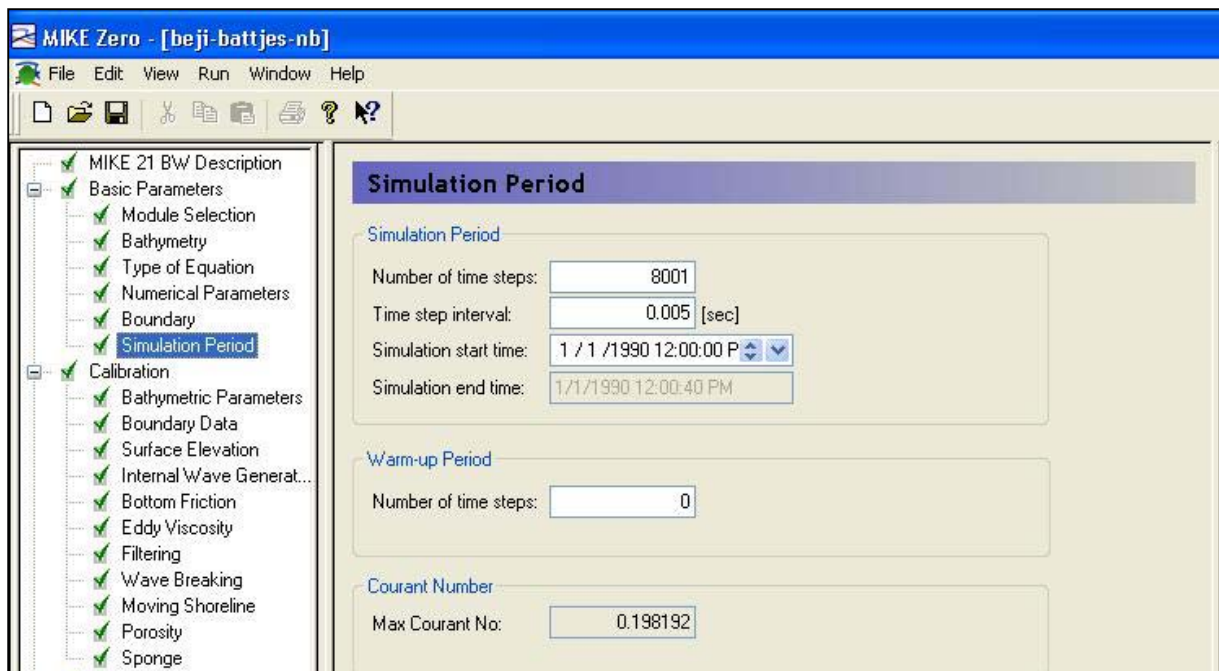
Σχήμα 6.7: Επιλογή βελτιωμένων εξισώσεων διασποράς στο πρόγραμμα MIKE 21 BW.

Ορίζουμε το σχήμα πεπερασμένων διαφορών που θα εφαρμοστεί, επιλέγοντας σχήμα κεντρικών διαφορών με πλευρική τροφοδότηση (central differencing with side-feeding) η οποία είναι και η συνιστώμενη επιλογή μαζί με τις πρόσθετες παραμέτρους της καρτέλας (Σχήμα 6.8).



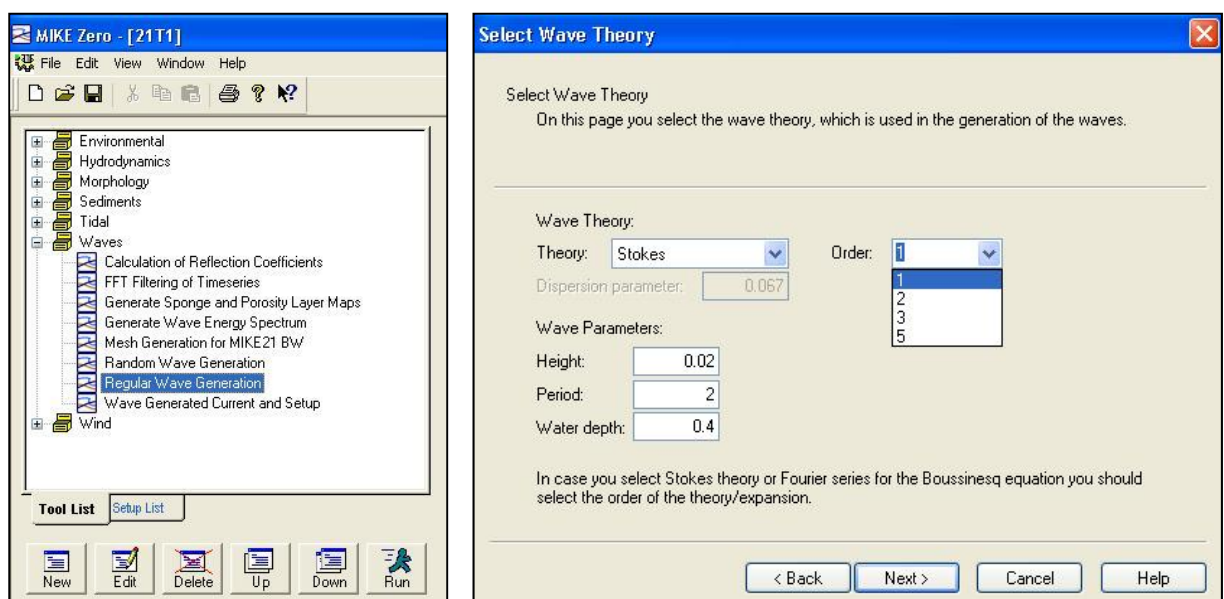
Σχήμα 6.8: Επιλογή σχήματος επίλυσης στο πρόγραμμα MIKE 21 BW.

Στη συνέχεια, ορίζουμε το χρόνο προσομοίωσης στο πρόγραμμα όπως προαναφέραμε για το πείραμα 40 sec με χρονικό βήμα 0.005 sec (άρα 8001 χρονικά βήματα), ενώ από το θεωρούμενο χρόνο δεν ορίζουμε κάποιο αρχικό τμήμα ως χρόνο για «ζέσταμα» (warm-up period). Οι επιλογές φαίνονται στο Σχήμα 6.9 που ακολουθεί:



Σχήμα 6.9: Ορισμός του χρόνου προσομοίωσης στο πρόγραμμα MIKE 21 BW.

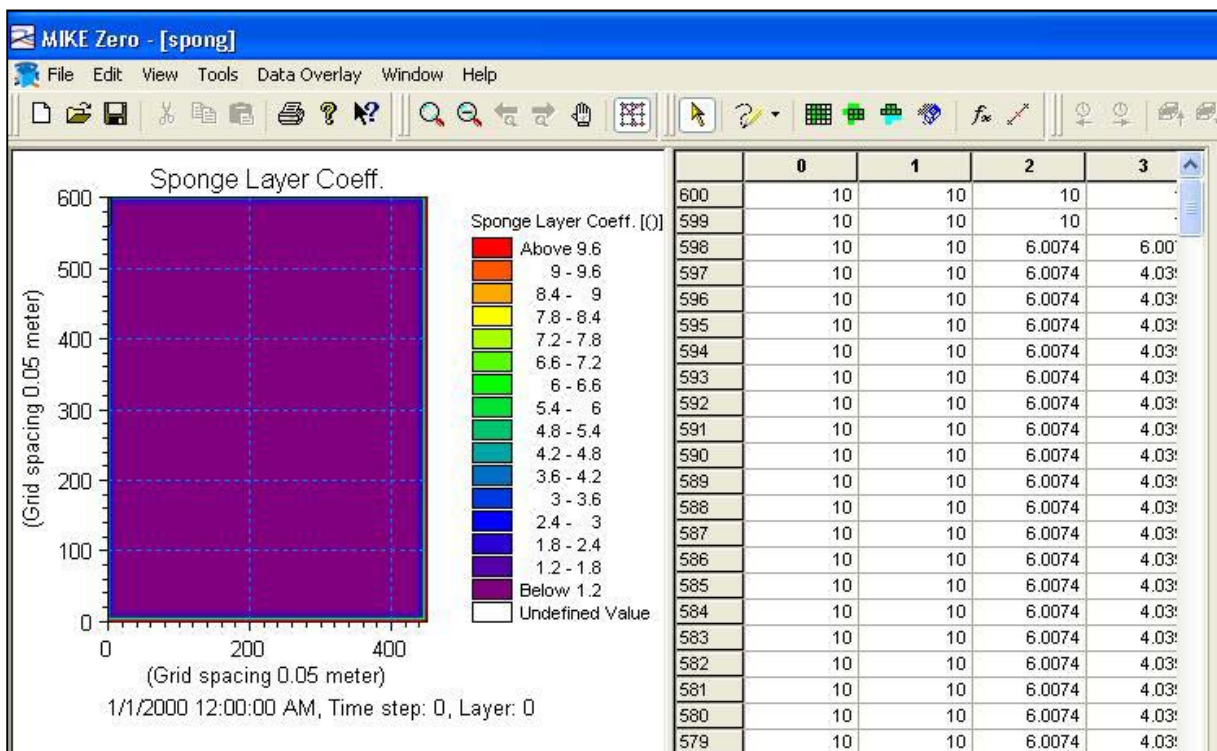
Στο πεδίο Internal Wave Generation πρέπει να εισάγουμε την πηγή που το πρόγραμμα θα αναγνώσει κυματισμούς που θα εισάγουμε εντός της υπολογιστικής περιοχής. Την εισαγωγή των κυματικών διαταραχών την πραγματοποιούμε μέσω του MIKE 21 TOOLS επιλέγοντας τη δημιουργία μονοχρωματικού κύματος με τα κατά περίπτωση επιθυμητά χαρακτηριστικά (εδώ συχνότητας $f = 0.5$ Hz και αρχικού ύψους κύματος $H = 2.0$ cm) για όσο χρόνο διαρκεί η προσομοίωση (40 sec) (Σχήμα 6.10).



Σχήμα 6.10: Ορισμός κυματικής διαταραχής μέσω MIKE 21 TOOLS στο πρόγραμμα MIKE 21 BW.

Με δεδομένη τη διαταραχή ορίζουμε μία γραμμική πηγή κατά μήκος του θεωρούμενου δεύτερου άξονα της υπολογιστικής περιοχής, σε κάθε σημείο της οποίας παράγει τη διαταραχή που ορίσαμε.

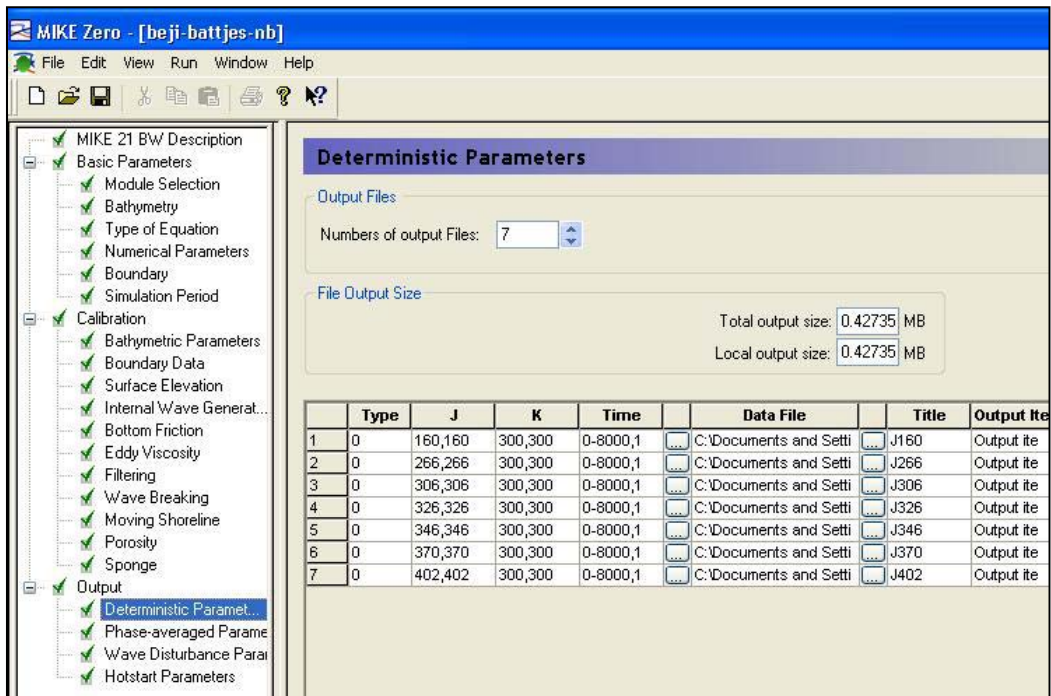
Παράλληλα, δεν πρέπει να αμελήσουμε τον ορισμό των απορροφητικών στοιβάδων (sponge layers) στα όρια του υπολογιστικού πεδίου για την απορρόφηση των εξερχόμενων κυματισμών από το πεδίο. Ο ορισμός γίνεται εύκολα και πάλι μέσω αρχείου (π.χ. Excel) όπου στα όρια με παραβολική μορφή (όμοια με το προτεινόμενο μοντέλο) ορίζουμε σύμφωνα με τις οδηγίες του προγράμματος συντελεστές απορρόφησης από 1 (μηδενική απορρόφηση) έως 10 (πλήρης απορρόφηση) οπότε έχουμε μία μορφή που δίνεται στο *Σχήμα 6.11* που ακολουθεί:



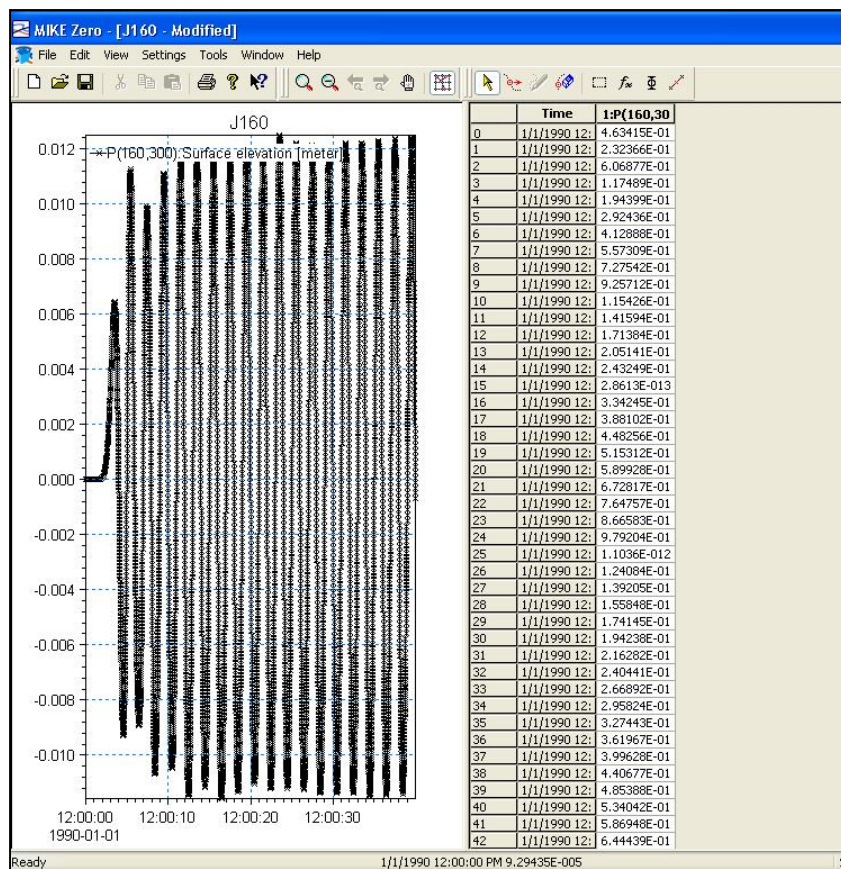
Σχήμα 6.11: Ορισμός απορροφητικών στοιβάδων (sponge layers) MIKE 21 BW.

Επισημαίνουμε ότι τα πεδία που δεν αναφέραμε στο αρχικό δένδροδιάγραμμα περιλαμβάνουν παραμέτρους που είτε τις αποκλείουμε (π.χ. τριβή πυθμένα) ή χρησιμοποιούμε τις προδιαγεγραμμένες τιμές του λογισμικού (π.χ. παράμετροι βαθυμετρίας). Επίσης αποκλείουμε τη θραύση των κυματισμών για το συγκεκριμένο πείραμα (Wave breaking > Exclude).

Τέλος ορίζουμε τα μεγέθη που χρειαζόμαστε να εξάγει το πρόγραμμα για να συγκρίνουμε με αυτά του μοντέλου και του πειράματος. Σε αυτά συμπεριλαμβάνονται οι χρονοσειρές στις θέσεις των αισθητήρων βάσει της πειραματικής διάταξης που ορίζονται από την καρτέλα deterministic parameters , type 0 όπως φαίνεται στο *Σχήμα 6.12*, ενώ το *Σχήμα 6.13* δίνει τη μορφή της ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας σε μία εκ των θέσεων ελέγχου.



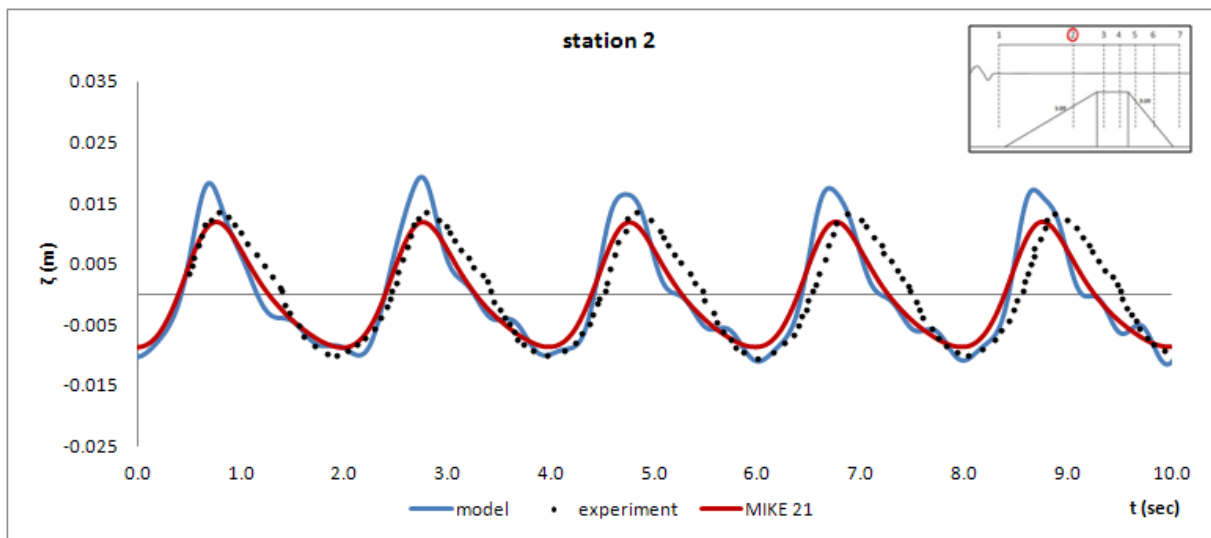
Σχήμα 6.12: Καθορισμός αρχείων αποτελεσμάτων MIKE 21 BW.



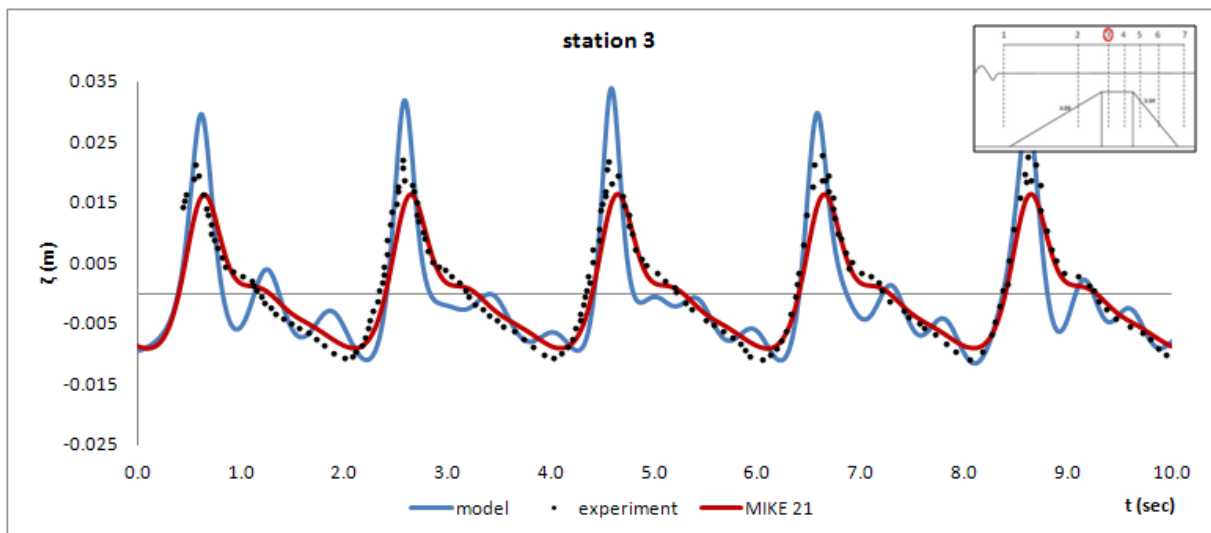
Σχήμα 6.13: Μορφή χρονοσειράς μεταβολής ελεύθερης επιφάνειας MIKE 21 BW.

6.2.4 Διαγράμματα – σχολιασμός αποτελεσμάτων

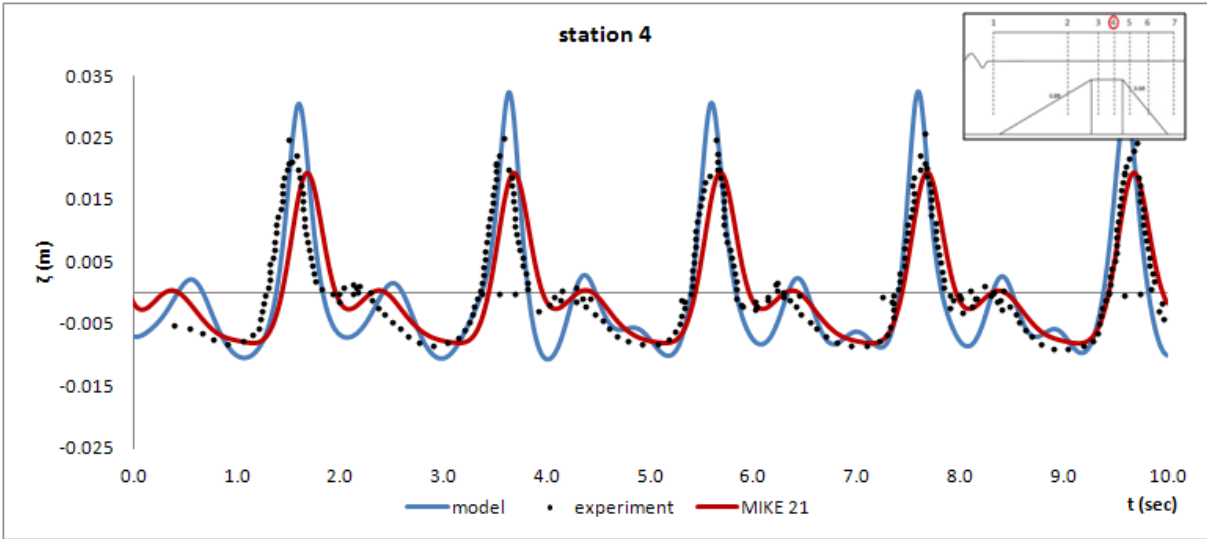
Στα διαγράμματα που ακολουθούν συγκρίνουμε για το πείραμα των Beji και Battjes (1994) τις χρονοσειρές ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\zeta(t)$ που προκύπτουν για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό συχνότητας $f = 0.5 \text{ Hz}$ και αρχικού ύψους κύματος $H = 2.0 \text{ cm}$, στους σταθμούς μετρήσεων 2 έως 7. Επισημαίνουμε ότι ο σταθμός 1 ορίζεται ως «σταθμός αναφοράς» και χρησιμοποιείται απλά για επιβεβαίωση της δημιουργίας της επιθυμητής διαταραχής εντός του υπολογιστικού πεδίου. Επίσης, παραθέτουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά μοντέλου και προγράμματος και τα συγκρίνουμε με αυτά που προκύπτουν από τη χρονοσειρά του πειράματος.



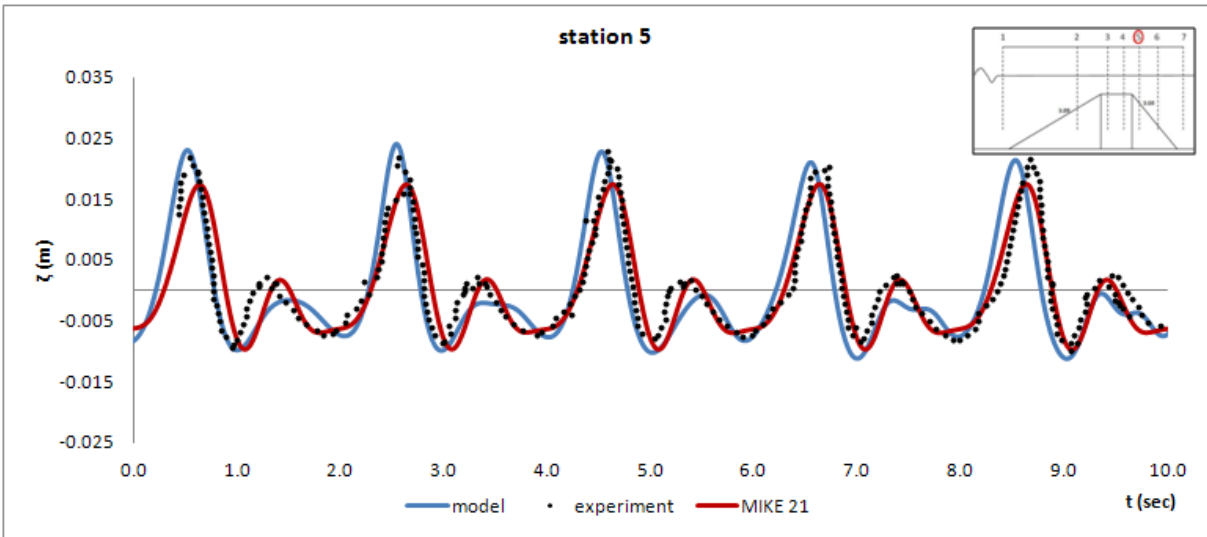
Σχήμα 6.14: Αισθητήρας 2: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



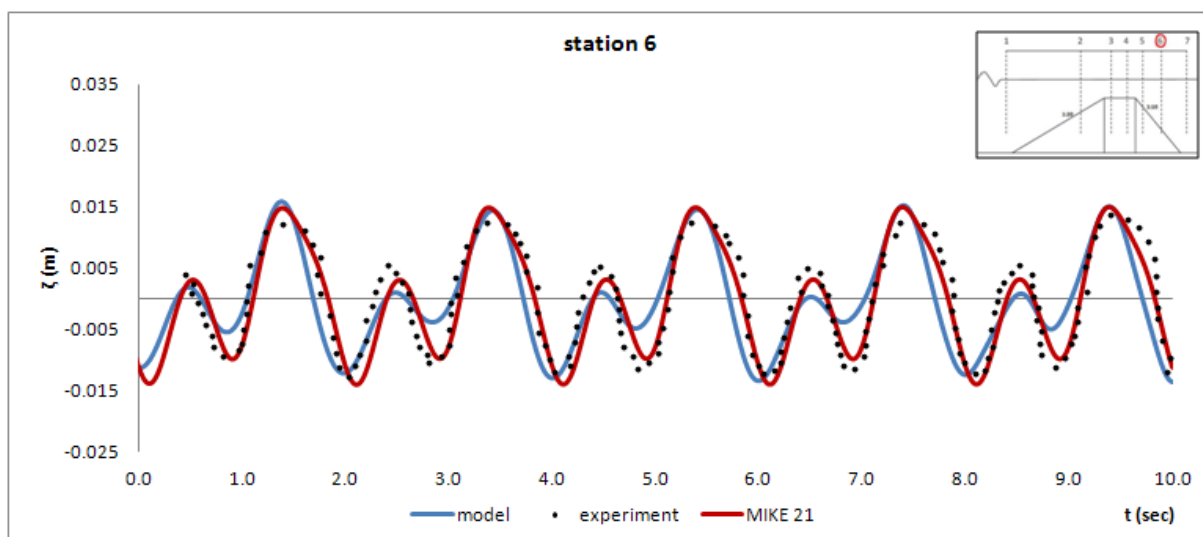
Σχήμα 6.15: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



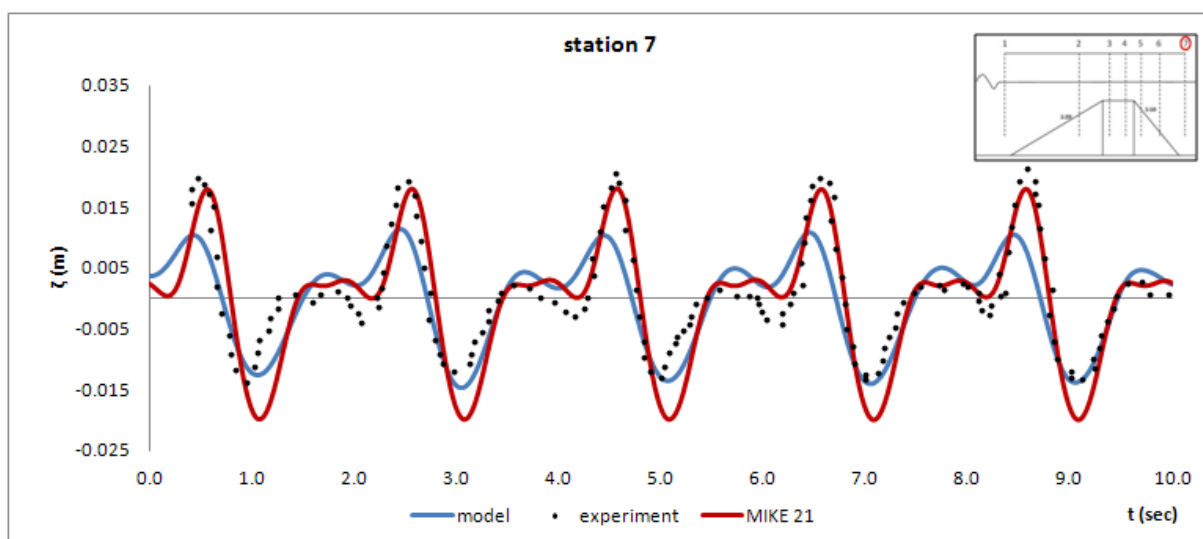
Σχήμα 6.16: Αισθητήρας 4: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.17: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.18: Αισθητήρας 6: Σύγκριση χρονοσειρών $z(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.19: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $z(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

Στα παραπάνω διαγράμματα χρονοσειρών μεταβολής της στάθμης ελεύθερης επιφάνειας, προκύπτει εμφανώς με μία πρώτη προσέγγιση αρκετά καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων των μοντέλων με τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι παρατηρούμενες αποκλίσεις είναι δυνατό να αποδοθούν στην ακρίβεια προσομοίωσης των μοντέλων λόγω των χρησιμοποιούμενων εξισώσεων σε αυτά και πιο συγκεκριμένα με τα χαρακτηριστικά διασποράς τους αλλά και με την τάξη των μη γραμμικών όρων που διατηρούνται σε αυτές.

Πιο συγκεκριμένα, στον αισθητήρα 2 (Σχήμα 6.14) φαίνεται η δυνατότητα ικανοποιητικής προσομοίωσης της κυματικής διάδοσης από το προτεινόμενο μοντέλο και το MIKE 21 καθώς δίνουν με πολύ καλή προσέγγιση τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας στη συγκεκριμένη θέση. Ωστόσο, το προτεινόμενο μοντέλο φαίνεται να υπερτερεί του MIKE 21 διότι, παρά το γεγονός ότι φαίνεται ελαφρώς να υπερεκτιμάει τις κορυφές, αποδίδει ορθότερα τη μορφή της θαλάσσιας διαταραχής αφού το MIKE 21 υποεκτιμά και κορυφές και κοιλίες στις χρονοσειρές του σχήματος.

Στις επόμενες θέσεις μετρήσεων, στους αισθητήρες 3 και 4 στη στέψη του υφάλου, όπου ο κυματισμός έχει γίνει σαφώς περισσότερο μη γραμμικός λόγω της παρεμβολής της απότομης κλίσης του υφάλου, με αποτέλεσμα το προτεινόμενο μοντέλο αλλά και το MIKE 21 να εμφανίζουν σχετικά μικρές αποκλίσεις καθώς βασίζονται σε σύστημα εξισώσεων ελαφρώς μη γραμμικές. Χαρακτηριστικό είναι το *Σχήμα 6.16* όπου το μοντέλο υπερεκτιμά τις κορυφές και το MIKE 21 κορυφές και κοιλίες της διαταραχής.

Στο *Σχήμα 6.17* στη θέση του αισθητήρα 5 βρισκόμαστε πλέον στην καθοδική κλίση της ύφαλης κατασκευής τμήμα του έργου όπου ξεκινούν να συμβαίνουν μη γραμμικές επιδράσεις σαφώς πιο σύνθετης μορφής από το τμήμα ανοδικής κλίσης καθώς η κυματομορφή τείνει να αναδημιουργηθεί λόγω της απότομης αύξησης του βάθους του πυθμένα και μάλιστα όχι με τον αντίστροφο τρόπο που είχε μεταβληθεί στις προηγούμενες θέσεις. Παρατηρούμε την ανάπτυξη μίας πρόσθετης κορυφής στις χρονοσειρές μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας, η οποία είχε ήδη ξεκινήσει να εμφανίζεται από τους αισθητήρες της στέψης. Στα αποτελέσματα μοντέλου και MIKE 21 παρατηρούμε από το μεν μοντέλο ικανότητα απόδοσης της κυρίαρχης αρμονικής έναντι του MIKE 21 που την υποεκτιμά, ενώ ως προς τη δεύτερη αρμονική το μοντέλο υποεκτιμά τις κορυφές σε αντίθεση με το MIKE 21 που φαίνεται να αποδίδει σχετικά καλύτερα την αρμονική αυτή.

Στους δύο τελευταίους αισθητήρες 6 και 7 (*Σχήμα 6.18* και *Σχήμα 6.19*) που βρίσκονται προς τη βάση της καθοδικής κλίσης του υφάλου φαίνεται εντονότερα η απελευθέρωση υψηλότερων αρμονικών που οφείλονται στην αύξηση της μη γραμμικότητας λόγω της ανοδικής κλίσης από το ύφαλο εμπόδιο. Το πολύπλοκο αυτό φαινόμενο είναι αδύνατο να περιγραφεί από τα σημερινά μοντέλα, ενώ έχουν ήδη εκτελεστεί και σειρές πειραμάτων για τη διερεύνηση του φαινομένου (Johnson et al. 1951, Jolas 1960, Losada et al. 1997, Massel 1983). Επιπροσθέτως, χαρακτηριστικό στοιχείο που αξίζει να σημειωθεί είναι στον αισθητήρα 7 η απόκλιση των χρονοσειρών του μοντέλου και του MIKE 21 από τις πειραματικές μετρήσεις για χρόνο περίπου ίσο με $1.5T$ αποτέλεσμα της μη σταθεροποίησης των συνθηκών του πειράματος οι οποίες απαιτούν να παρέλθει ένα χρονικό διάστημα ώστε να γίνουν και πάλι περιοδικές (start up period). Κατά αντιστοιχία, παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο στα υπολογιστικά μοντέλα καθώς μπορεί να ορισθεί και από τον μελετητή ένα αρχικό χρονικό διάστημα από την έναρξη με μηδενικά τα υπό διερεύνηση μεγέθη (συνθήκες “cold start”) έως μία θεωρούμενη χρονική στιγμή (warm up period). Τα αποτελέσματα που δίνονται για τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για τα μοντέλα, αποτελούν τμήμα των σταθεροποιημένων συνθηκών ροής (steady state condition). Από τα παραπάνω φαίνεται η δυσκολία προσομοίωσης της διάδοσης της κυματικής διαταραχής στην περιοχή της καθοδικής κλίσης καθώς και το προτεινόμενο μοντέλο και το MIKE 21 φαίνεται να προσεγγίζουν τη μορφή της διαταραχής, να εμφανίζουν τις υψηλότερες αρμονικές αλλά να αδυνατούν να περιγράψουν επακριβώς το φαινόμενο στις θέσεις αυτές.

Πρέπει να υπογραμμίσουμε στο σημείο αυτό, το γεγονός ότι στο πείραμα των Beji και Battjes (1994) δε δίνονται στοιχεία σχετικά με τη θεώρηση ή όχι της επίδρασης της τριβής πυθμένα, επίδραση που οδηγεί στην απώλεια ενέργειας και άρα θα επηρέαζε τα αποτελέσματα του κυματικού προφίλ. Επίσης, δεν χρησιμοποιήθηκε η επίδραση της τριβής πυθμένα ούτε και στο σύστημα εξισώσεων Boussinesq που χρησιμοποιήθηκε για τη σύγκριση με το πείραμα, θεώρηση που έγινε και στο προτεινόμενο από την παρούσα εργασία μοντέλο. Ωστόσο, αν στο κυματικό κανάλι που διενεργήθηκαν τα πειράματα υπήρχε αδιαπέρατος πυθμένας, τότε αναπόφευκτα θα είχαμε επίδραση τριβής που θα εντεινόταν με τη διάδοση του κυματισμού

κατάντη σε ποσοστό που δε θα μπορούσαμε να ορίσουμε χωρίς επιπρόσθετα δεδομένα για την πειραματική διάταξη.

Πίνακας 6.1: Σύγκριση στατιστικών παραμέτρων πειραματικών καταγραφών, προτεινόμενου μοντέλου και προγράμματος MIKE 21 (μονοχρωματικός μη θραυόμενος κυματισμός με $f = 0.5 \text{ Hz}$ και $H = 2.0 \text{ cm}$).

Στατιστική παράμετρος		Τυπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση	Μέγιστη τιμή	Ελάχιστη τιμή
Αριθμός αισθητήρα						
Αισθητήρας 2	Πείραμα	0.00813	0.14612	-1.46911	0.01351	-0.01049
	Μοντέλο	0.00905	0.66753	-0.89444	0.01923	-0.01167
	MIKE 21	0.00713	0.34572	-1.34224	0.01201	-0.00883
Αισθητήρας 3	Πείραμα	0.00889	0.81082	-0.27991	0.02289	-0.01097
	Μοντέλο	0.01017	1.75625	2.34795	0.03403	-0.01167
	MIKE 21	0.00742	0.78871	-0.37283	0.01652	-0.00913
Αισθητήρας 4	Πείραμα	0.00861	1.33862	0.91850	0.02560	-0.00917
	Μοντέλο	0.01077	1.62185	1.71634	0.03258	-0.01067
	MIKE 21	0.00806	1.10826	0.13960	0.01937	-0.00823
Αισθητήρας 5	Πείραμα	0.00808	1.29600	0.68146	0.02244	-0.00960
	Μοντέλο	0.00907	1.32863	0.66252	0.02417	-0.01116
	MIKE 21	0.00798	0.94744	-0.32178	0.01743	-0.00983
Αισθητήρας 6	Πείραμα	0.00863	-0.05031	-1.46833	0.01378	-0.01272
	Μοντέλο	0.00791	0.38362	-0.72388	0.01577	-0.01349
	MIKE 21	0.00864	0.15106	-1.13372	0.01489	-0.01404
Αισθητήρας 7	Πείραμα	0.00841	0.68806	0.23881	0.02127	-0.01369
	Μοντέλο	0.00757	-0.51072	-0.97318	0.01150	-0.01484
	MIKE 21	0.01029	-0.28683	-0.49588	0.01821	-0.01988

Συμπερασματικά, για τη διάδοση μονοχρωματικού μη θραυόμενου κυματισμού πάνω από ύφαλο εμπόδιο τραπεζοειδούς διατομής μπορούμε να πούμε ότι το προτεινόμενο μοντέλο αλλά και το πρόγραμμα MIKE 21 δύνανται να περιγράψουν ικανοποιητικά τη διάδοση της κυματικής διαταραχής, με εξαίρεση την εμφάνιση αποκλίσεων στο πεδίο αποσύνθεσης του κυματισμού καθώς αρμονικές δεύτερης και υψηλότερης τάξης διαδίδονται σε σχετικά βαθειά νερά στην περιοχή κατάντη του ύφαλου εμποδίου.

6.3 Το πείραμα των Beji και Battjes (1992) – θραυόμενοι κυματισμοί

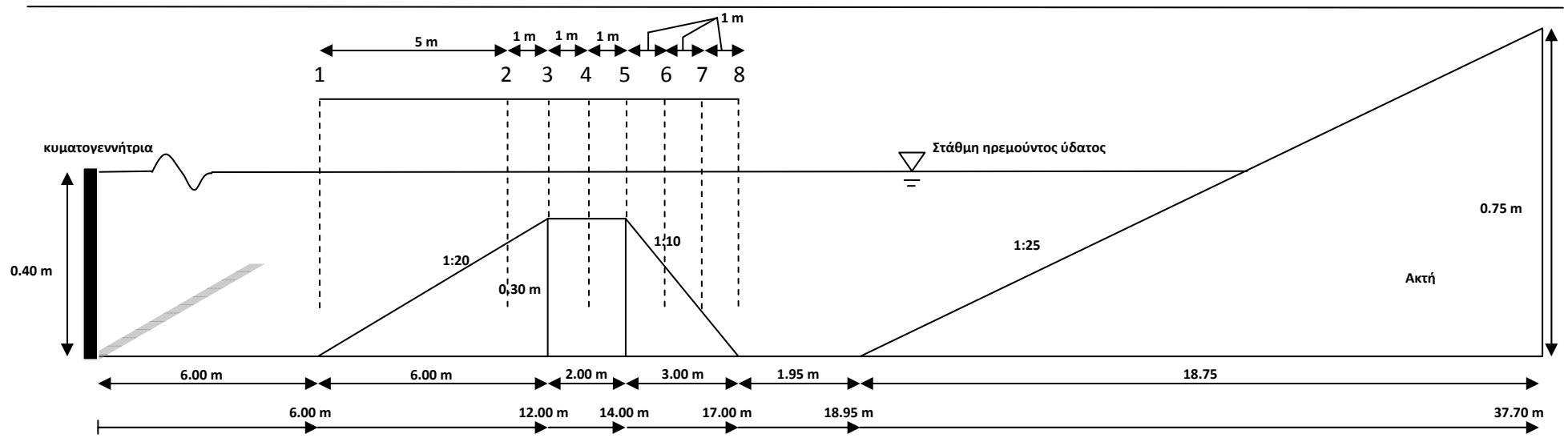
Στην ενότητα αυτή ελέγχεται η ακρίβεια προσομοίωσης του προτεινόμενου δισδιάστατου μοντέλου Boussinesq έναντι διάδοσης βραχέων και μακρών μονοχρωματικών κυματισμών (short and long, monochromatic waves), με ταυτόχρονη θεώρηση της επίδρασης του φαινομένου της θραύσης, που διαδίδονται πάνω από αδιαπέρατη ύφαλη διάταξη, σύμφωνα με το μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας που αναπτύχθηκε από τους Kennedy et al (1999) και επεκτάθηκε σε δύο οριζόντιες διαστάσεις από τους Chen et al (2000). Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα του πειράματος Beji και Battjes (1992) και του λογισμικού MIKE 21 BW.

6.3.1 Πειραματική διάταξη πειράματος Beji και Battjes (1992)

Οι Beji και Battjes (1992), προκειμένου να διαχωρίσουν τις μεμονωμένες επιδράσεις συντηρητικών (μη θραυόμενων) μη γραμμικών κυματικών αλληλεπιδράσεων από αυτές που περιλαμβάνουν κυματική θραύση, έπρεπε να πραγματοποιήσουν πειραματικές διερευνήσεις και για μη θραυόμενους (και μη γραμμικούς κυματισμούς, §6.2) και για θραυόμενους κυματισμούς τύπου εκτινάξεως (plunging) και κυλίσεως (spilling). Τα κριτήρια επιλογής τύπου θραύσης είναι, όπως αναφέρεται στην εργασία των ερευνητών, ως έναν βαθμό υποκειμενικά, οπότε και οι επιλογές των κυματικών χαρακτηριστικών των πειραμάτων έγιναν μέσω δοκιμών (trial-and-error) και προσωπικής κρίσης. Η πειραματική διάταξη έχει την ίδια μορφή με εκείνη που περιγράψαμε στην παράγραφο 6.2.1 με μόνη διαφορά να εντοπίζεται στη διάταξη των αισθητήρων καθώς πλέον έχουμε 8 συνολικά αισθητήρες όπως προκύπτει και από το *Σχήμα 6.20*. Οι μελετητές προκειμένου να διερευνήσουν τα αποτελέσματα κυματισμών υψηλών και χαμηλών συχνοτήτων διενέργησαν τις ακόλουθες δύο ομάδες πειραμάτων:

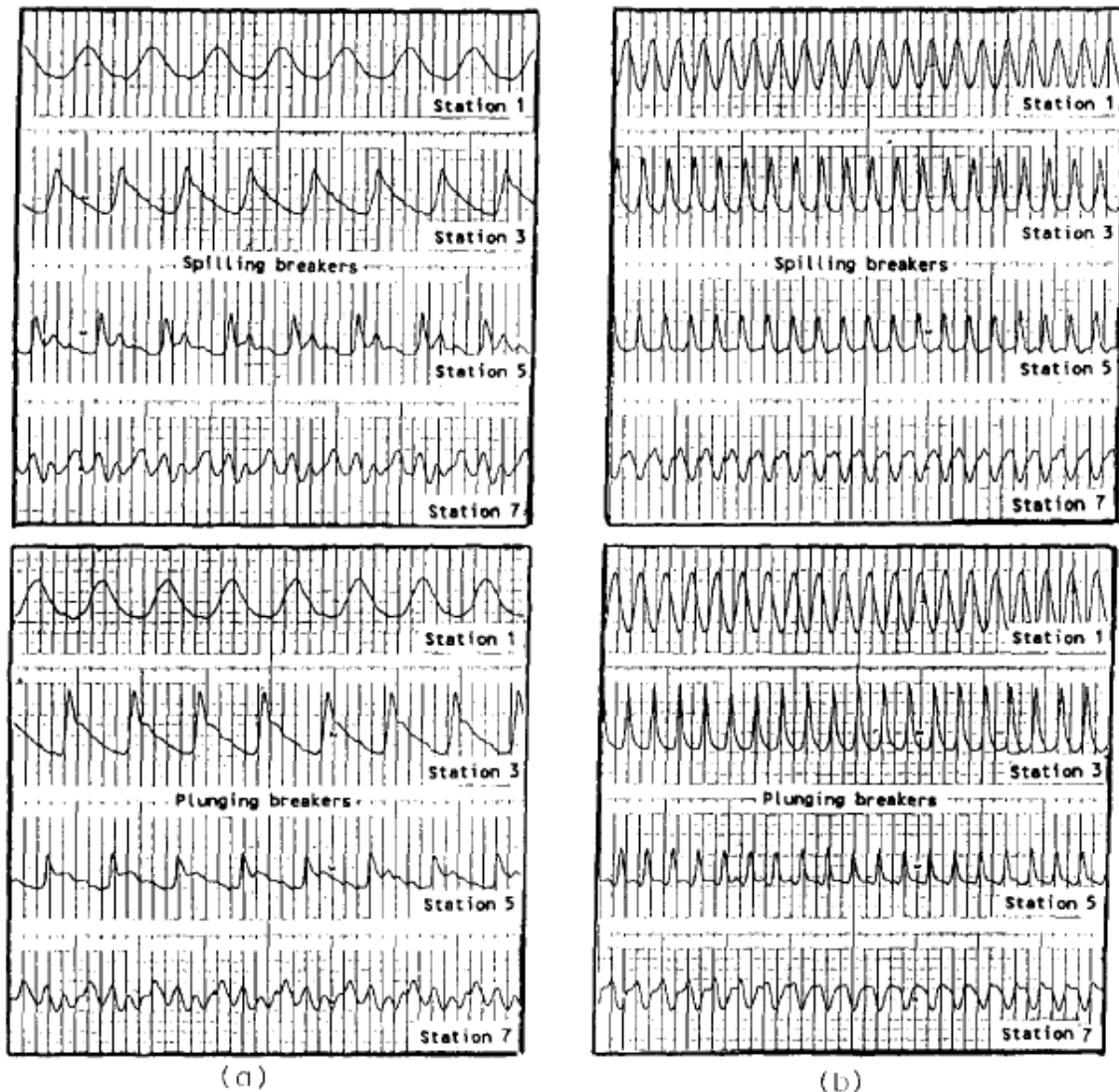
1. Βραχείς κυματισμούς συχνότητας $f = 1.0$ Hz και αρχικού ύψους κύματος:
 - $H = 4.1$ cm
 - $H = 5.9$ cm
 - $H = 6.9$ cm
2. Μακρούς κυματισμούς συχνότητας $f = 0.4$ Hz και αρχικού ύψους κύματος:
 - $H = 2.9$ cm
 - $H = 4.4$ cm
 - $H = 5.4$ cm

Για τα πειράματα υψηλών συχνοτήτων οι αρχικοί κυματισμοί επιλέχθηκαν με μεγαλύτερο ύψος κύματος καθώς στόχος ήταν η διατήρηση της μη γραμμικής παραμέτρου $\varepsilon = \alpha/d$ περίπου ίδια στη ρηχότερη περιοχή του κυματικού καναλιού και για τις δύο ομάδες πειραμάτων.



Σχήμα 6.20: Απεικόνιση διάταξης για το πείραμα των *Beji* και *Battjes* (1992). Οι αριθμοί 1-8 αντιστοιχούν στις θέσεις των αισθητήρων που χρησιμοποιήθηκαν για την καταγραφή των διαταραχών.

Τα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων για την περίπτωση θραυόμενων κυματισμών στις δύο ομάδες των πειραμάτων που διενεργήθηκαν παρατίθενται στο ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 6.21). Δεδομένου ότι δεν εμφανίζονται ενδείξεις τιμών στους άξονες και καθώς οι τιμές μεταβολών της ελεύθερης επιφάνειας λήφθηκαν μέσω γραφικού προγράμματος, υπάρχει μικρό ενδεχόμενο τα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων που θα συγκριθούν με το προτεινόμενο μοντέλο και το MIKE 21 BW, να εμπεριέχουν ένα μικρό ποσοστό σφάλματος το οποίο δε θα μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τα συμπεράσματα που θα προκύψουν από τη σύγκριση.



Σχήμα 6.21: Πειραματικές μετρήσεις ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας για απλούς κυματισμούς (α) μακρούς κυματισμούς $f = 0.4 \text{ Hz}$ και (β) βραχείς κυματισμούς $f = 1.0 \text{ Hz}$ για το πείραμα των *Beji και Battjes* (1992). [6]

6.3.2 Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq

Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση χρησιμοποιούμε το δισδιάστατο μοντέλο Boussinesq για την προσομοίωση της κυματικής διάδοσης, αναλυτικά περιγραφή του οποίου δόθηκε στο κεφάλαιο 4 ενώ αναφέρουμε επιγραμματικά τις εξισώσεις που συνθέτουν το μοντέλο:

$$\zeta_t = -\nabla \cdot [(h + \zeta)\mathbf{u}] \quad , \quad \mathbf{u} = (u, v) \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} u_t - (1 + \beta) \cdot \left(\frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} + hh_x \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) \\ = -g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + (1 + \beta) \frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 v_t}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}(1 + \beta) \left(hh_x \frac{\partial v_t}{\partial y} + hh_y \frac{\partial v_t}{\partial x} \right) \\ + \beta \frac{gh^2}{3} (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) + \beta gh \left(h_x \zeta_{xx} + \frac{1}{2} h_y \zeta_{xy} + \frac{1}{2} h_x \zeta_{yy} \right) + \mathbf{R}_{bx} + \mathbf{F}_{bsx} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} v_t - (1 + \beta) \cdot \left(\frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 v_t}{\partial y^2} + hh_y \cdot \frac{\partial v_t}{\partial y} \right) \\ = -g \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + (1 + \beta) \frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 u_t}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}(1 + \beta) \left(hh_x \frac{\partial u_t}{\partial y} + hh_y \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) \\ + \beta \frac{gh^2}{3} (\zeta_{yyy} + \zeta_{xxy}) + \beta gh \left(h_y \zeta_{yy} + \frac{1}{2} h_x \zeta_{xy} + \frac{1}{2} h_y \zeta_{xx} \right) + \mathbf{R}_{by} + \mathbf{F}_{bsy} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Όπου στο δεξί μέλος των εξισώσεων ποσότητας κίνησης προστίθενται οι όροι θραύσεις \mathbf{R}_{bx} κατά x και \mathbf{R}_{by} κατά y και οι όροι εισαγωγής τεχνητής διάχυσης με σχήμα επίλυσης \mathbf{F}_{bsx} κατά x και \mathbf{F}_{bsy} κατά y, αντίστοιχα, οι οποίοι δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\mathbf{R}_{bx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_{x_x} \right]_x + \frac{1}{2} \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_y + v((d + \zeta)v_\alpha)_{x_y} \right]_y \right\} \quad (6.7a)$$

$$\mathbf{R}_{by} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v((d + \zeta)v_\alpha)_{y_y} \right]_y + \frac{1}{2} \left[v((d + \zeta)u_\alpha)_y + v((d + \zeta)v_\alpha)_{x_x} \right]_x \right\} \quad (6.7b)$$

$$\mathbf{F}_{bsx} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_{x_x} \right]_x + \frac{1}{2} \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_y + v_s((d + \zeta)v_\alpha)_{x_y} \right]_y \right\} \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{F}_{bsy} = \frac{1}{d + \zeta} \cdot \left\{ \left[v_s((d + \zeta)v_\alpha)_{y_y} \right]_y + \frac{1}{2} \left[v_s((d + \zeta)u_\alpha)_y + v_s((d + \zeta)v_\alpha)_{x_x} \right]_x \right\} \quad (6.8b)$$

Όπου οι προτεινόμενες τιμές των μεταβλητών δίνονται στις αντίστοιχες ενότητες του κεφαλαίου 4 ενώ ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας ν ο οποίος δίνεται μέσω της σχέσης 3.14, για $\delta_b = 1.2$ δίνει:

$$\nu = 1.44B \cdot (d + \zeta) \cdot \zeta_t \quad (6.9)$$

η τιμή του ν για κάθε γεγονός θραύσης στο υπολογιστικό μοντέλο φιλτράρεται μέσω ενός φίλτρου 5 σημείων επαναλαμβανόμενο 3 φορές, πριν εισαχθεί εκ νέου στον κώδικα:

$$\nu(i, j) = 0.6 \cdot \nu(i, j) + 0.1 \cdot \nu(i + 1, j) + 0.1 \cdot \nu(i - 1, j) + 0.1 \cdot \nu(i, j + 1) + 0.1 \cdot \nu(i, j - 1) \quad (6.10)$$

Η ποσότητα B όπως προαναφέρθηκε, μεταβάλλεται ομαλά από 0 έως 1 για την αποφυγή απότομης εκκίνησης της θραύσης μέσω της σχέσης:

$$B = \begin{cases} 1, & \zeta_t \geq 2\zeta_t^* \\ \frac{\zeta_t}{\zeta_t^*} - 1, & \zeta_t^* < \zeta_t \leq 2\zeta_t^* \\ 0, & \zeta_t \leq \zeta_t^* \end{cases} \quad (6.11)$$

Η παράμετρος ζ_t^* είναι καθοριστική για την έναρξη και λήξη της θραύσης. Ένα συμβάν θραύσης ξεκινά όταν το ζ_t υπερβεί μία αρχική τιμή, αλλά καθώς η θραύση αναπτύσσεται το κύμα θα συνεχίσει να θραύεται ακόμα και αν η τιμή ζ_t πέσει σε χαμηλότερη τιμή από την αρχικά θεωρούμενη. Το πεδίο τιμών λοιπόν, του ζ_t^* μειώνεται χρονικά από μία αρχική τιμή $\zeta_t^{(1)}$ σε μία τελική τιμή $\zeta_t^{(F)}$, μέσω γραμμικής μεταβολής που δίνεται μέσω της σχέσης:

$$\zeta_t^* = \begin{cases} \zeta_t^{(F)}, & t \geq T^* \\ \zeta_t^{(1)} + \frac{t - t_0}{T^*} \cdot (\zeta_t^{(F)} - \zeta_t^{(1)}), & 0 \leq t - t_0 < T^* \end{cases} \quad (6.12)$$

όπου T^* είναι ο χρόνος διάρκειας του φαινομένου, t_0 είναι ο χρόνος έναρξης του φαινομένου και άρα $t - t_0$ είναι η μη αρνητική «ηλικία» του φαινομένου της θραύσης. Οι τιμές που υιοθετήθηκαν για τις παραμέτρους έναρξης θραύσης $\zeta_t^{(1)}$ και λήξης θραύσης $\zeta_t^{(F)}$ είναι ίσες με $0.35\sqrt{gd}$ και $0.15\sqrt{gd}$, αντίστοιχα, όπως προτείνεται και από τους μελετητές του μοντέλου για περιπτώσεις κλίσεων τύπου bar-trough, ενώ ο χρόνος διάρκειας θραύσης $T^* = 5\sqrt{d/g}$.

Επισημαίνουμε ότι οι παραπάνω προτεινόμενες τιμές δεν αποτελούν αμετάβλητες σταθερές αλλά προέκυψαν από βαθμονόμηση για τα μοντέλα εξισώσεων των Nwogu (1993) και Wei et al. (1995) στα οποία εισήχθη το υπό εξέταση κριτήριο θραύσης, ώστε να συμφωνούν με τα αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων και ελέγχονται και ως προς τη συμφωνία τους με τα αποτελέσματα των μετρήσεων του πειράματος Beji και Battjes (1992) στην παρούσα ενότητα.

Για τον έλεγχο των πειραματικών μετρήσεων και του μοντέλου, διαμορφώνουμε και πάλι ένα υπολογιστικό πεδίο σε δύο οριζόντιες διαστάσεις αποδίδοντας στην υπολογιστική περιοχή δεύτερη οριζόντια διάσταση επαρκούς εύρους όπου οι εισερχόμενοι κυματισμοί διαδίδονται στη μία οριζόντια διάσταση μέσω μίας γραμμικής πηγής παράλληλης στη θεωρούμενη οριζόντια διάσταση κατά τα δεδομένα της παραγράφου 4.6.1 και τα υπό διερεύνηση αποτελέσματα λαμβάνονται από το μέσον της διάστασης αυτής κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης της εισερχόμενης κυματικής διαταραχής. Η διάταξη παρουσιάζεται στο *Σχήμα 6.3*.

Για την εφαρμογή του μοντέλου επιλέχθηκαν όπως και στην προηγούμενη περίπτωση χωρική διακριτοποίηση και στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις $dx = dy = 0.05$ m και χρονική διακριτοποίηση $dt = 0.005$ sec οπότε ο δημιουργούμενος κάρναβος $1m \times 1m = 600 \times 550$ δίνει μήκος κατά τη διάσταση του πειράματος ίσο με 25 m και κατά τη θεωρούμενη δεύτερη οριζόντια διάσταση μήκος ίσο με 30 m το οποίο είναι επαρκές ώστε να μην επηρεάσουν τα πλευρικά όρια το μέσον κατά μήκος της διάστασης του πειράματος όπου εξαγάγουμε τα αποτελέσματα μέτρησης της ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας για να συγκριθούν με τις πειραματικές μετρήσεις.

Η εφαρμογή του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq για το πείραμα των Beji και Battjes (1992) γίνεται κατά τον τρόπο που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4 αλλά και στην αρχή της παραγράφου αυτής καθώς πρόκειται για ανάλυση θραυόμενων κυματισμών. Η συνάρτηση πηγής τοποθετείται στη θέση της κυματογεννήτριας στο πείραμα, ενώ τα απορροφητικά όρια έχουν εύρος $x_s = 30\lambda x$, τοποθετώντας ωστόσο τις στοιβάδες απορρόφησης σε απόσταση από τη θέση γέννησης κυματισμών (θεώρηση μήκους 2.5 m προ της πηγής κυματισμών εκ των οποίων το 1.5 m αφορά τη στοιβάδα απορρόφησης) για την αποφυγή ασταθειών.

Όσον αφορά τη διάρκεια διεξαγωγής των αναλύσεων προέκυψε και από το προτεινόμενο μοντέλο αλλά και από το MIKE 21 ότι δεδομένου του υπολογιστικού πεδίου και των επιβαλλόμενων συνθηκών, σε χρόνο 40 sec μπορούμε να έχουμε μονιμοποίηση συνθηκών ροής στις θέσεις ελέγχου των μετρήσεων.

Βάση των παραπάνω κατασκευάζουμε τον κώδικα Boussinesq ο οποίος παρουσιάζεται στην πλήρη μορφή του (δηλαδή με την προσθήκη της θραύσης κυματισμών) στο παράρτημα της εργασίας.

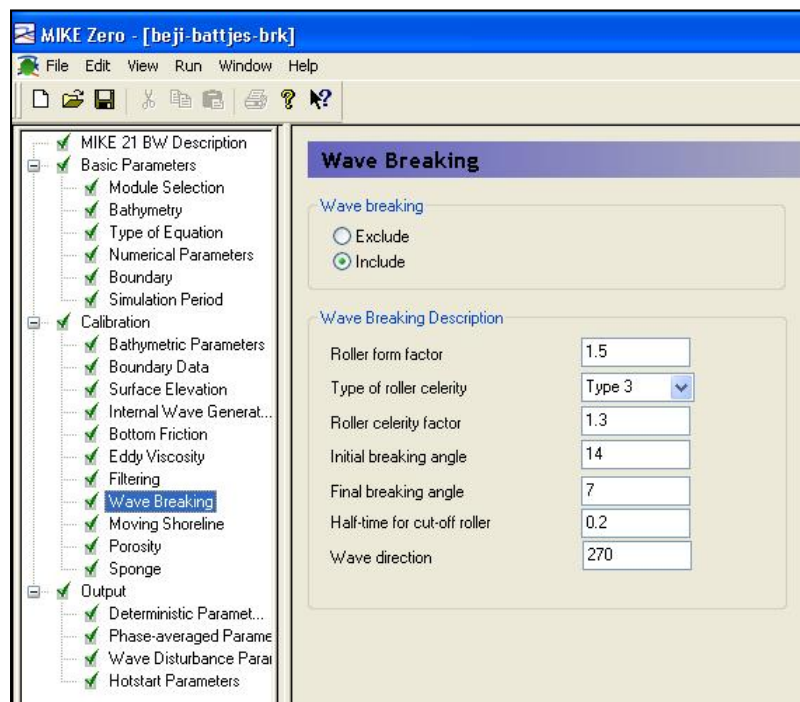
6.3.3 Εφαρμογή MIKE 21 BW

Για την προσομοίωση του προβλήματος μέσω του υπολογιστικού προγράμματος MIKE 21 BW ακολουθούμε διαδικασία ταυτόσημη με αυτή της παραγράφου 6.2.3, με μοναδικές διαφορές τις ακόλουθες:

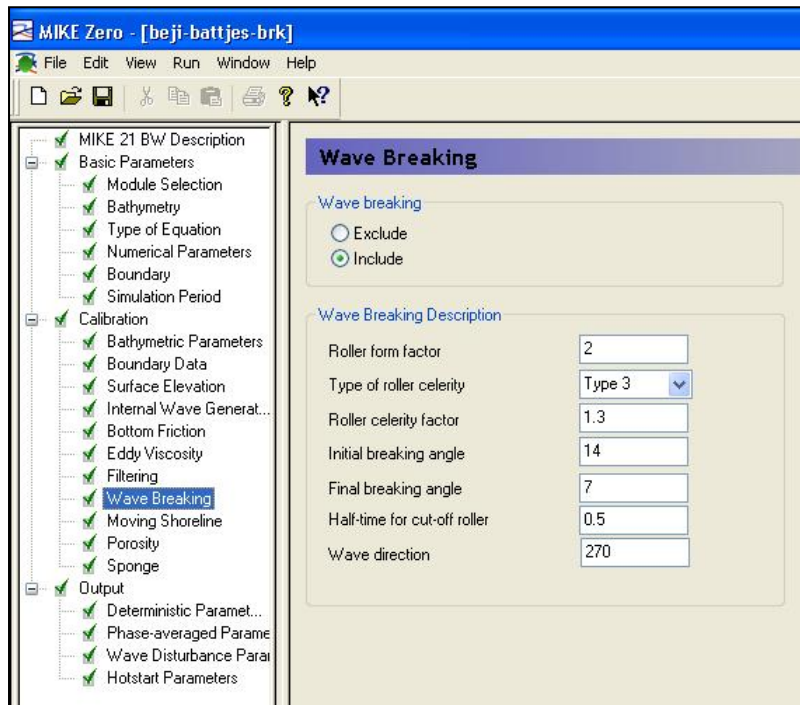
- Στις εντολές του calibration εισάγεται ο κυματισμός ανάλογα με την περίπτωση που απαιτείται από τις υπό εξέταση ομάδες πειραμάτων (§ 6.3.1)
- Επιλέγουμε εκτύπωση μεταβολής ελεύθερης επιφάνειας βάσει των θέσεων αισθητήρων που ορίζονται από το Σχήμα 6.20.

Επιπρόσθετα, οι νέες σειρές πειραμάτων διαφέρουν διότι εισάγονται θραυόμενοι κυματισμοί, οπότε θα πρέπει να συμπεριλάβουμε τους όρους θραύσης στην εξίσωση ορμής του προγράμματος. Όπως φαίνεται και στα σχήματα που ακολουθούν, αυτό επιτυγχάνεται μέσω προσδιορισμού των ακόλουθων παραμέτρων:

- Πάχος επιφανειακού κυλίνδρου $\delta = 1.5$ για θραύση κυλίσσεως (Σχήμα 6.22) και $\delta = 2.0$ για θραύση εκτινάξεως (Σχήμα 6.23).
- Τύπος ταχύτητας κυλίνδρου “Type 3” που αντιστοιχεί σε κυματισμούς ίδιας κατεύθυνσης.
- Ταχύτητα κυματισμού ίση με 1.3 βάσει των υποδείξεων κατά Schäffer et al (1993).
- Αρχική και τελική γωνία θραύσης επιλέγεται η συνιστώμενη (δεδομένης κλίσης πυθμένα τύπου bar-trough) κατά Schäffer et al (1993) ($14^\circ, 7^\circ$), ενώ ελέγχουμε και στην περίπτωση βραχέων κυματισμών τις τιμές ($20^\circ, 10^\circ$) κατά Madsen et al (1997a) (γενική σύσταση).
- Παράμετρος $t_{1/2}$ που καθορίζει τη διαφορά μεταξύ γωνιών θραύσης ίση με T/5 για κάθε περίπτωση.



Σχήμα 6.22: Εισαγωγή θραύσης κυλίσσεως στο MIKE 21 BW και γωνίες θραύσης ($14^\circ, 7^\circ$)



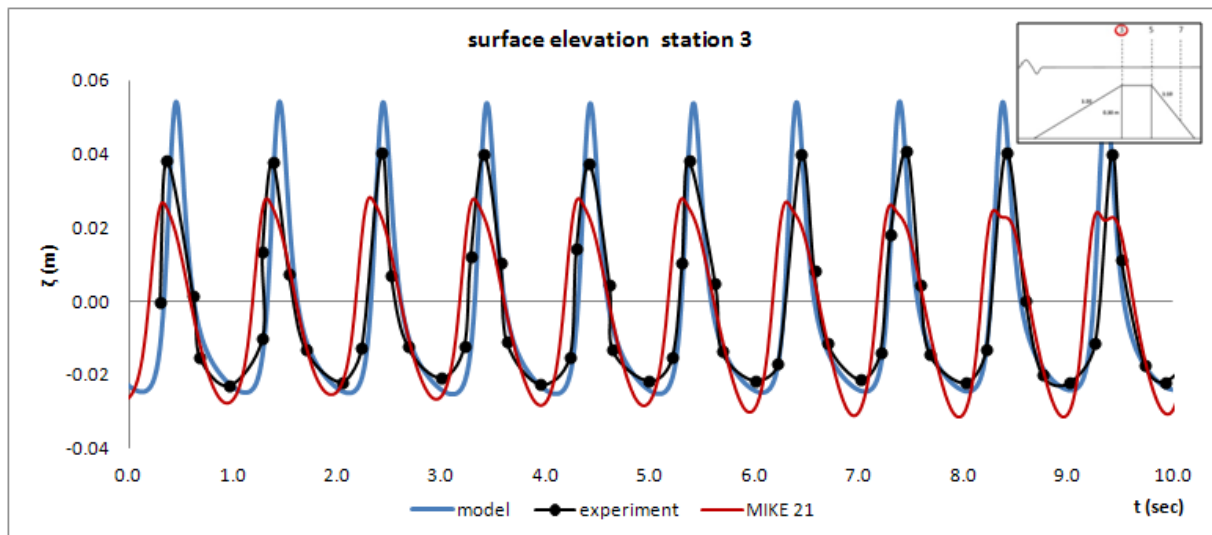
Σχήμα 6.23: Εισαγωγή θραύσης εκτινάξεως στο MIKE 21 BW και γωνίες θραύσης (14°, 7°)

Επισημαίνουμε ότι για την προσομοίωση στο MIKE 21 BW, η μη τοποθέτηση της ανοδικής κλίσης της τελικής φάσης (κλίση 1:25 πειραματικής διάταξης) αφαιρεί την ανάγκη τοποθέτησης αυθαίρετων μαθηματικών φίλτρων για την αναίρεση ασταθειών στην περιοχή της ακτογραμμής καθώς εκεί δεν λειτουργεί ο μηχανισμός της θραύσης.

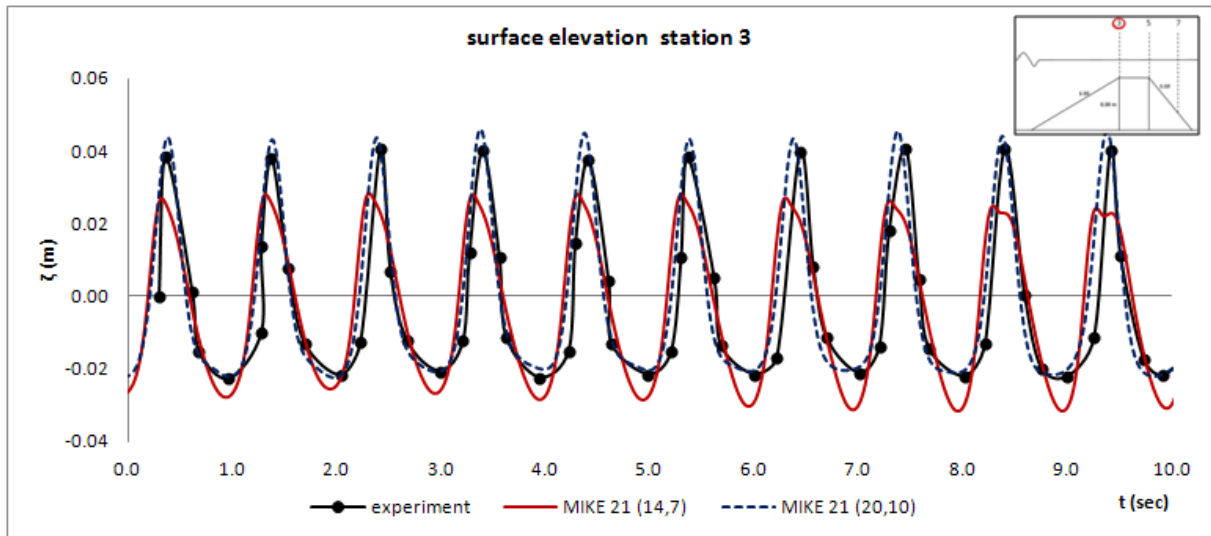
6.3.4 Διαγράμματα – σχολιασμός αποτελεσμάτων

Στα διαγράμματα που ακολουθούν συγκρίνουμε για το πείραμα των Beji και Battjes (1992) τις τιμές των χρονοσειρών μεταβολής ελεύθερης επιφάνειας στους σταθμούς μετρήσεων 3, 5 και 7 που δίνονται από το Σχήμα 6.11 και βρίσκονται στα άκρα της στέψης του ύφαλου εμποδίου και στην καθοδική κλίση, με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου Boussinesq και του λογισμικού MIKE 21 BW. Οι τιμές των παραμέτρων θραύσης που επιλέγονται για το μοντέλο είναι $\zeta_t^{(1)} = 0.35\sqrt{gd}$ και $\zeta_t^{(F)} = 0.15\sqrt{gd}$ και για το MIKE 21 ελέγχουμε δύο ζεύγη γωνιών θραύσης για την περίπτωση βραχέων κυματισμών, την προτεινόμενη κατά Schäffer et al (1993) που υιοθετούμε δεδομένης της μορφής του πυθμένα $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ για όλες τις αναλύσεις θραυόμενων κυματισμών και $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

1. Μεταβολή στάθμης ελεύθερης επιφάνειας για κυματισμό με αρχικό ύψος $H = 5.9$ cm και περίοδο $T = 1$ sec, θραύση τύπου κυλίσεως (spilling).

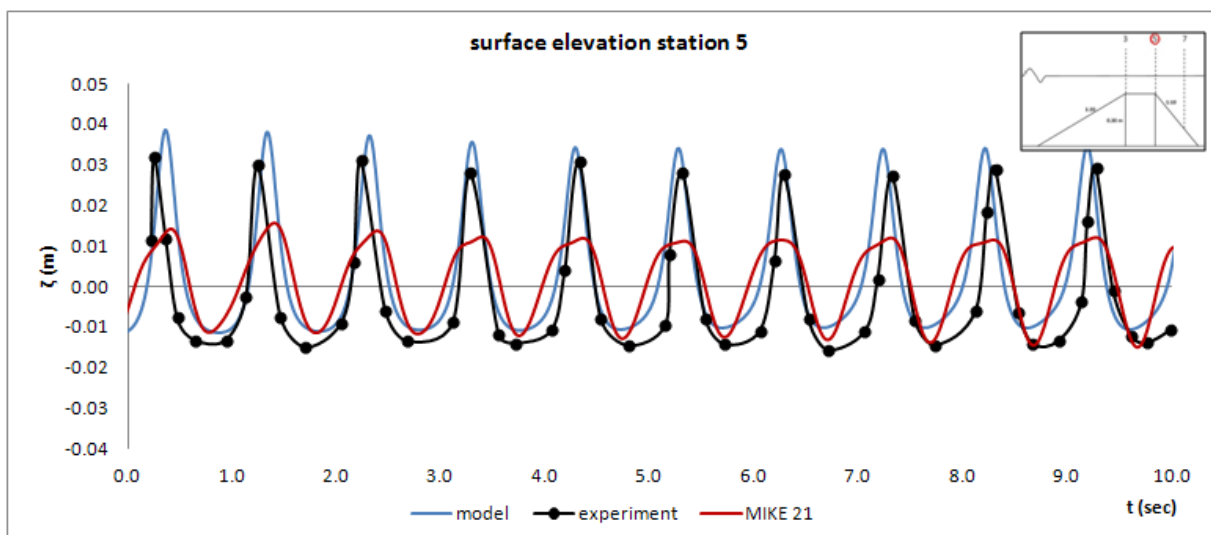


Σχήμα 6.24: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

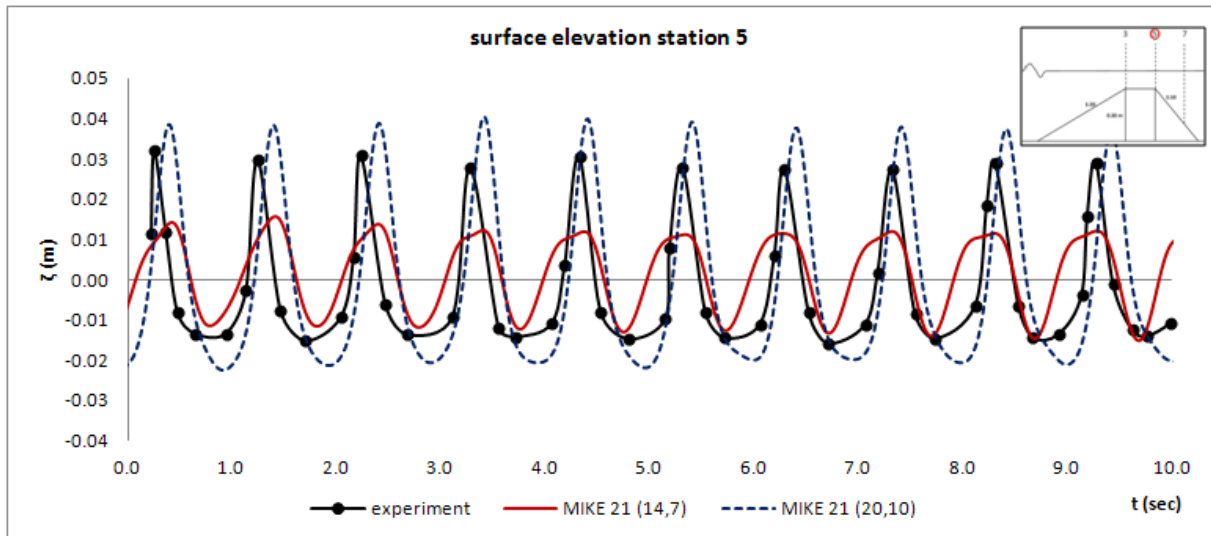


Σχήμα 6.25: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ πειράματος, MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ και MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

Στην περίπτωση του αισθητήρα 3 (Σχήμα 6.24) ο οποίος αντιστοιχεί σε θέση μέτρησης στο άνω άκρο της ανοδικής κλίση του ύφαλου έργου, παρατηρούμε καλή προσέγγιση της πειραματικής χρονοσειράς από το πρόγραμμα, ενώ από το MIKE 21 προκύπτουν αδυναμίες προσέγγισης για θεώρηση γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ κατά Schäffer et al (1993). Ωστόσο, τα στατιστικά χαρακτηριστικά του προγράμματος βελτιώνονται και πλησιάζουν αυτά του μοντέλου αν γίνει θεώρηση γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$ κατά Madsen et al (1997a) (Σχήμα 6.25).

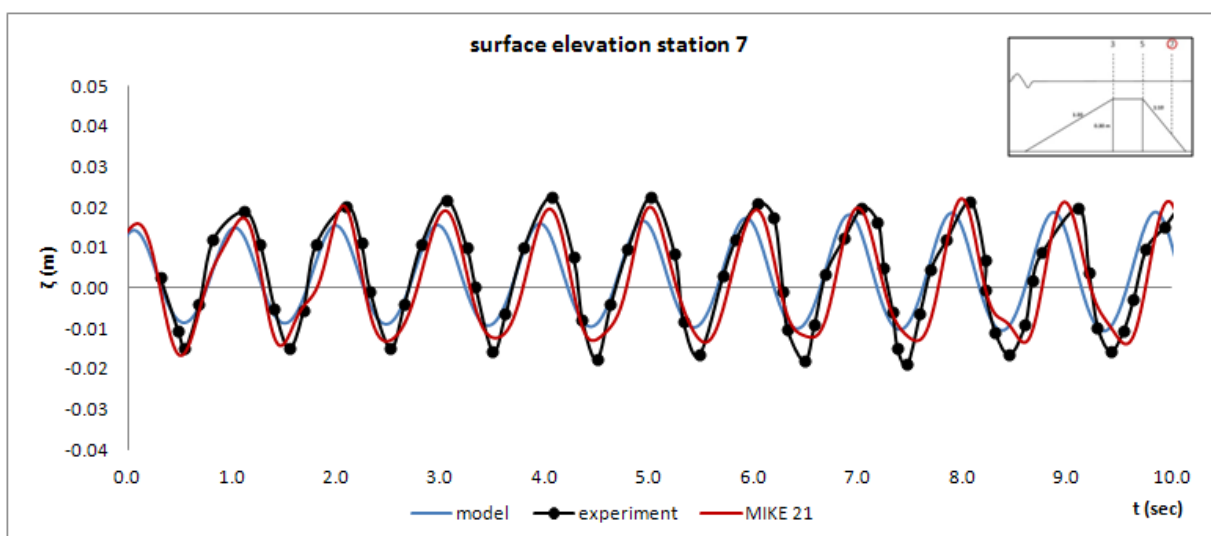


Σχήμα 6.26: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

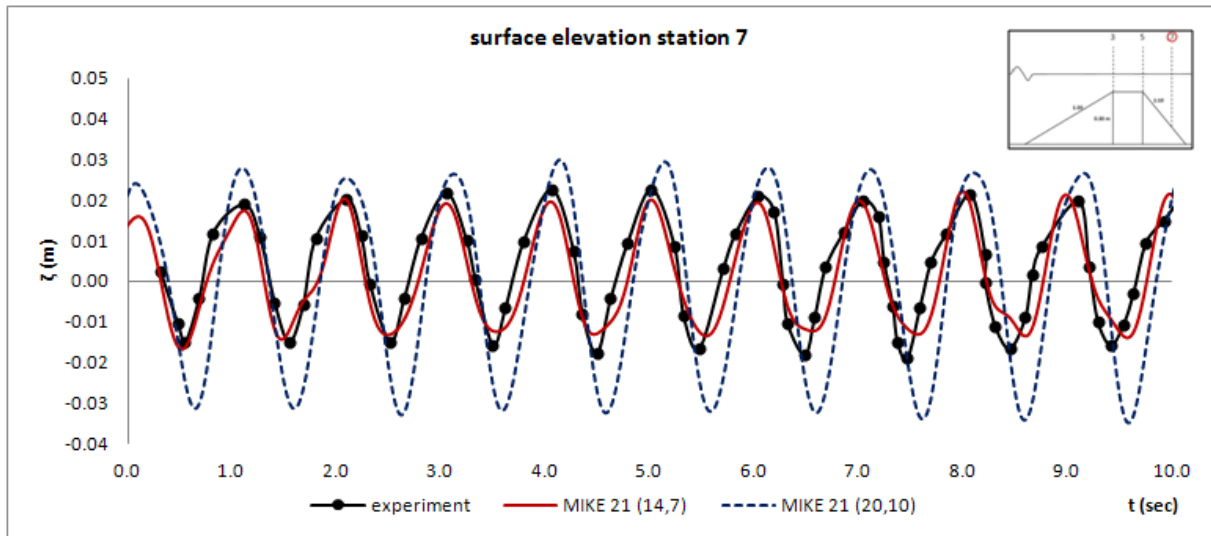


Σχήμα 6.27: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ πειράματος, MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ και MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

Ο αισθητήρας 5, ο οποίος τοποθετείται επί της στέψης του αδιαπέρατου έργου στο άκρο πριν την έναρξη της καθοδικής κλίσης, παρατηρούμε μικρές αποκλίσεις στη μορφή του διαγράμματος του μοντέλου και μεγαλύτερες στους προγράμματος, σε σχέση με τις πειραματικές μετρήσεις (Σχήμα 6.26). Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι το ύψος της διαταραχής στην περίπτωση του μοντέλου (δηλαδή η διαφορά κορυφής και κοιλίας στην χρονοσειρά του μοντέλου) προσεγγίζει καλύτερα την αντίστοιχη πειραματική σε σύγκριση με αυτή που δίνεται από το MIKE 21 για θεώρηση γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ κατά Schäffer et al (1993). Εδώ και πάλι μπορούμε να παρατηρήσουμε βελτίωση των στατιστικών χαρακτηριστικών για το πρόγραμμα στην περίπτωση όπου υιοθετηθεί $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$ κατά Madsen et al (1997a) (Σχήμα 6.27).



Σχήμα 6.28: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



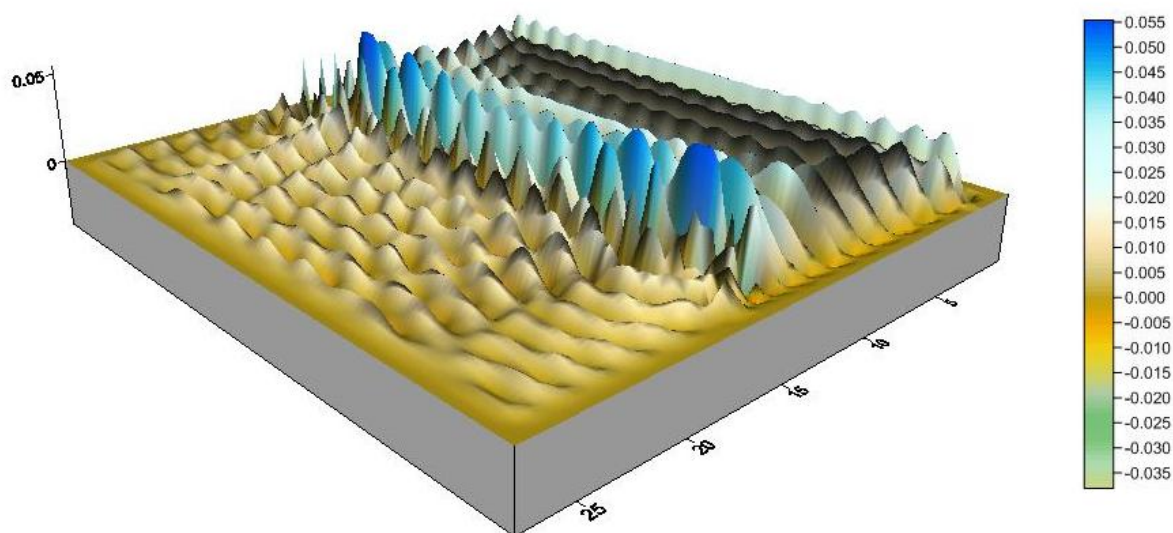
Σχήμα 6.29: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ πειράματος, MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ και MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

Στο Σχήμα 6.28 για την περίπτωση του αισθητήρα 7 που βρίσκεται στο τμήμα καθοδικής κλίσης του υφάλου, τμήμα που παρατηρούνται έντονα μη γραμμικές διεργασίες (όσον αφορά την κυματική διάδοση), παρατηρείται ικανοποιητική προσέγγιση της διαταραχής από το προτεινόμενο μοντέλο και για πρώτη φορά από το MIKE 21 με θεώρηση γωνιών θραύσης κατά Schäffer et al (1993). Εδώ, για πρώτη φορά παρατηρούμε να μη δουλεύουν οι προτεινόμενες τιμές γωνιών θραύσης κατά Madsen et al (1997a) όπως ξεκάθαρα φαίνεται στο Σχήμα 6.29.

Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε τις χρονοσειρές μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας για κυματισμό με αρχικά χαρακτηριστικά $H = 5.9$ cm και $T = 1$ sec για την πρώτη ομάδα πειραμάτων για βραχείς κυματισμούς και θραύση τύπου κυλίσεως (spilling). Από τις παραπάνω αναλύσεις προκύπτει ότι το προτεινόμενο μοντέλο χρησιμοποιώντας τις προτεινόμενες τιμές του μοντέλου θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας για διάδοση πάνω από πυθμένα με μορφή bar-trough μπορεί να περιγράψει επαρκώς την κυματική διάδοση σε σύγκριση με το πρόγραμμα MIKE 21 για το οποίο χρειάζεται βαθμονόμηση των παραμέτρων θραύσης καθώς δεν προσομοιώνουν με ικανοποιητική ακρίβεια την κυματική διάδοση οι ίδιες τιμές σε κάθε θέση ελέγχου. Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχυροποιούνται και από την πινακοποίηση των στατιστικών χαρακτηριστικών των χρονοσειρών του πειράματος, του μοντέλου και του προγράμματος MIKE 21 για τις δύο θεωρήσεις των γωνιών θραύσης που υιοθετούνται στις αναλύσεις (Πίνακας 6.2).

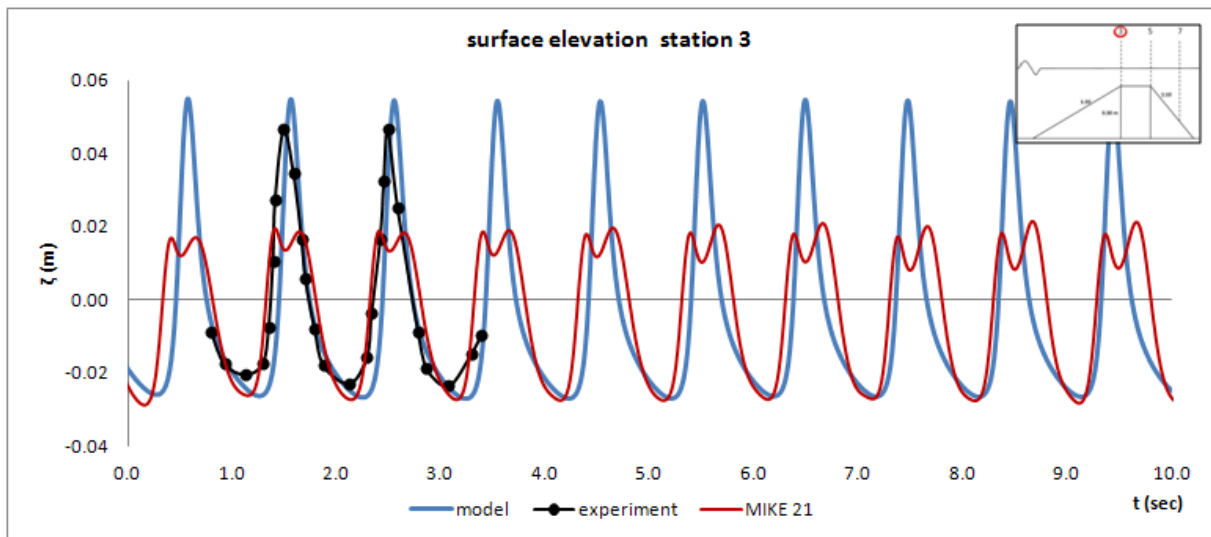
Πίνακας 6.2: Σύγκριση στατιστικών παραμέτρων πειραματικών καταγραφών, προτεινόμενου μοντέλου και προγράμματος MIKE 21 (μονοχρωματικός βραχύς θραυόμενος κυματισμός με $f = 1.0 \text{ Hz}$ και $H = 5.9 \text{ cm}$).

Στατιστική παράμετρος		Τοπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση	Μέγιστη τιμή	Ελάχιστη τιμή
Αριθμός αισθητήρα						
Αισθητήρας 3	Πείραμα	0.01855	0.87454	-0.63334	0.04065	-0.02283
	Μοντέλο	0.02405	1.23872	0.21747	0.05438	-0.02541
	MIKE 21 (14°,7°)	0.02004	0.16659	-1.49726	0.02827	-0.03154
	MIKE 21 (20°,10°)	0.02223	0.90802	-0.68258	0.04608	-0.02236
Αισθητήρας 5	Πείραμα	0.01284	1.09057	-0.17744	0.03200	-0.01573
	Μοντέλο	0.01475	1.04722	-0.29945	0.03849	-0.01130
	MIKE 21 (14°,7°)	0.00909	-0.28123	-1.41223	0.01578	-0.01496
	MIKE 21 (20°,10°)	0.02023	0.74761	-0.92994	0.04054	-0.02226
Αισθητήρας 7	Πείραμα	0.01194	-0.26571	-1.32878	0.02306	-0.01936
	Μοντέλο	0.00939	0.10012	-1.45614	0.01880	-0.01050
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01167	0.22957	-1.41875	0.02208	-0.01669
	MIKE 21 (20°,10°)	0.02120	-0.15454	-1.47099	0.02980	-0.03484

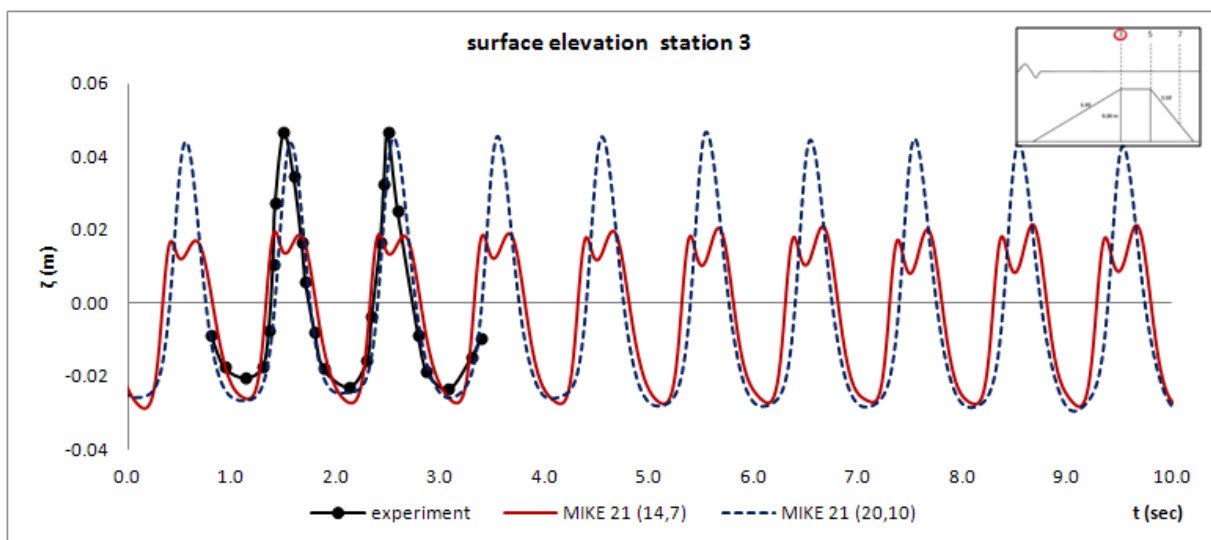


Σχήμα 6.30: Στιγμιότυπο ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας εντός του υπολογιστικού πεδίου για το προτεινόμενο μοντέλο τη χρονική στιγμή λήξης της ανάλυσης για μονοχρωματικούς βραχείς θραυόμενους (spilling) κυματισμούς με $f = 1.0 \text{ Hz}$ και $H = 5.9 \text{ cm}$

2. Μεταβολή στάθμης ελεύθερης επιφάνειας για κυματισμό με αρχικό ύψος $H = 6.9$ cm και περίοδο $T = 1$ sec , θραύση τύπου εκτινάξεως (plunging).

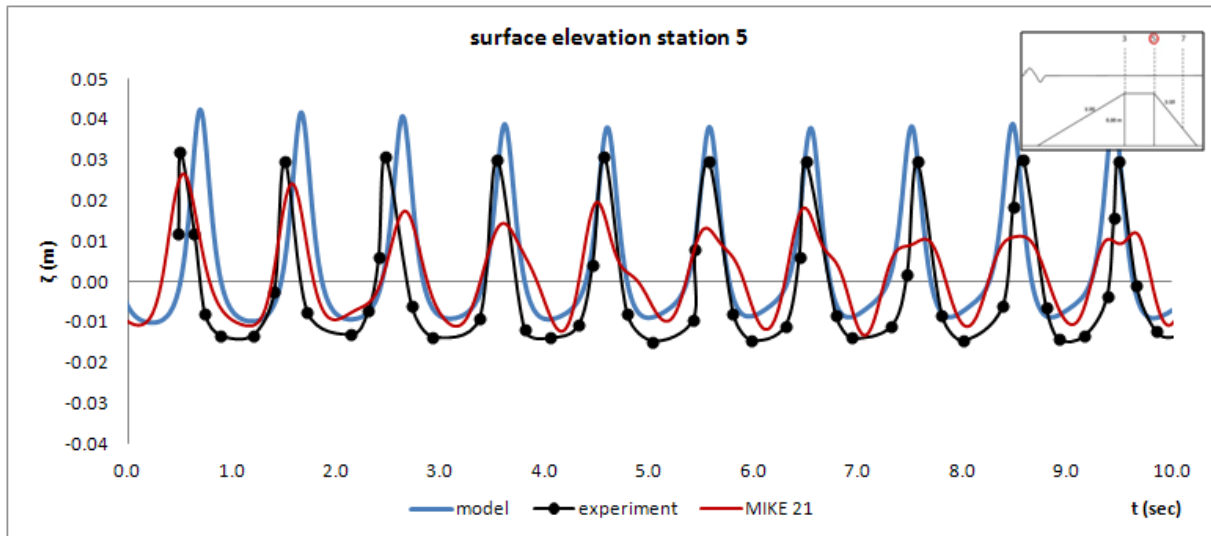


Σχήμα 6.31: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

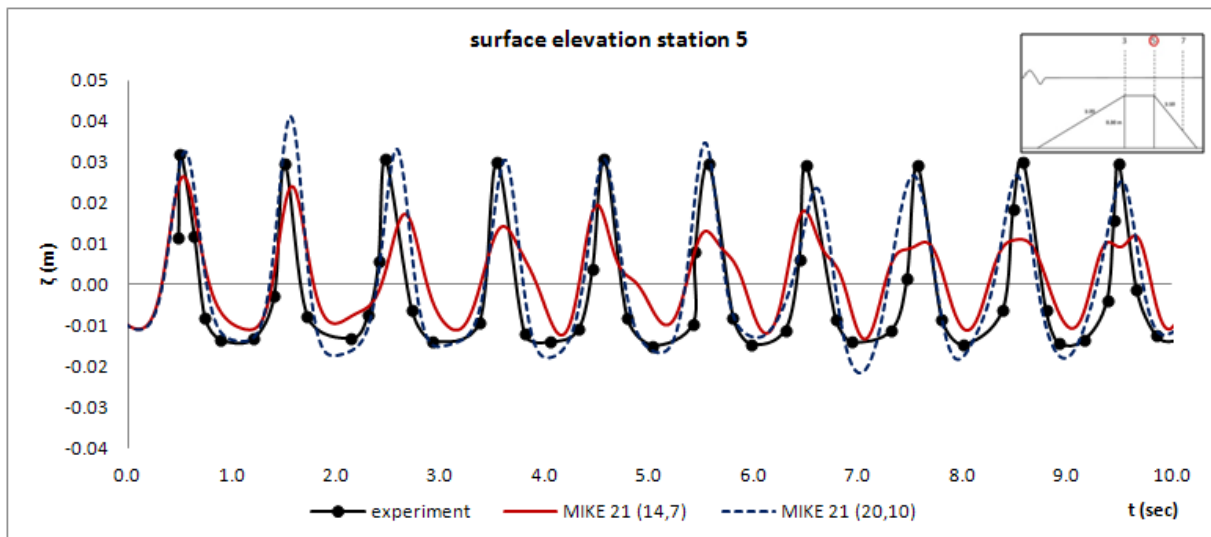


Σχήμα 6.32: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ πειράματος, MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ και MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

Στην περίπτωση του αισθητήρα 3 (Σχήμα 6.31) ο οποίος βρίσκεται στο άνω άκρο της ανοδικής κλίση του ύφαλου έργου, παρατηρούμε όπως και στην προηγούμενη διερεύνηση για βραχείς, μονοχρωματικούς κυματισμούς, καλή προσέγγιση της πειραματικής χρονοσειράς από το πρόγραμμα, σε αντίθεση με το MIKE 21 που εμφανίζει αδυναμίες ορθής προσομοίωσης για θεώρηση γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ κατά Schäffer et al (1993), ενώ βελτιώνεται η μορφή για θεώρηση γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$ κατά Madsen et al (1997a) (Σχήμα 6.32).

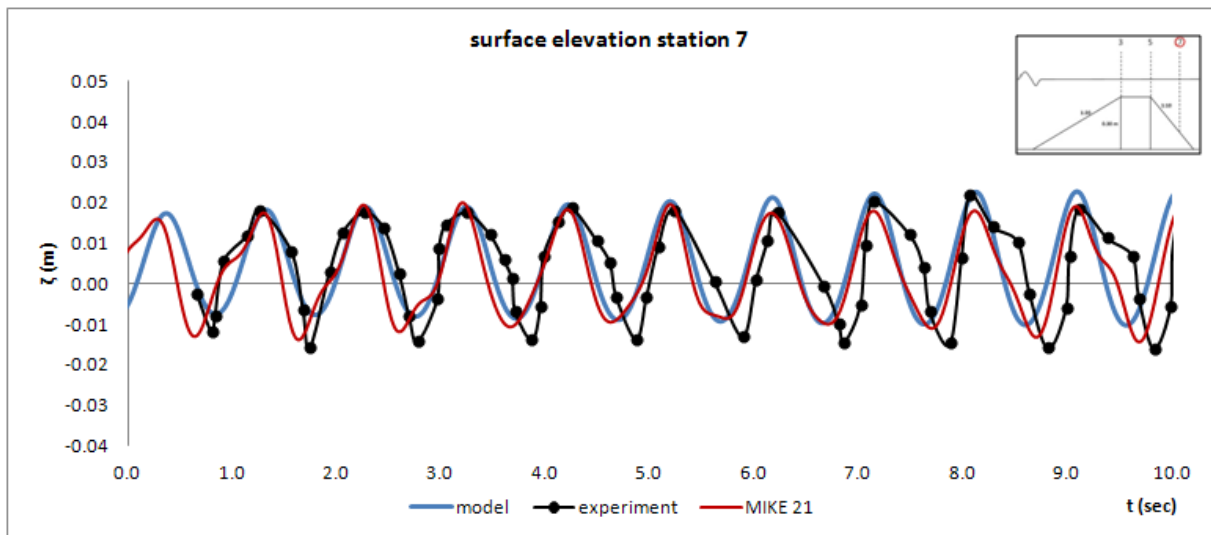


Σχήμα 6.33: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

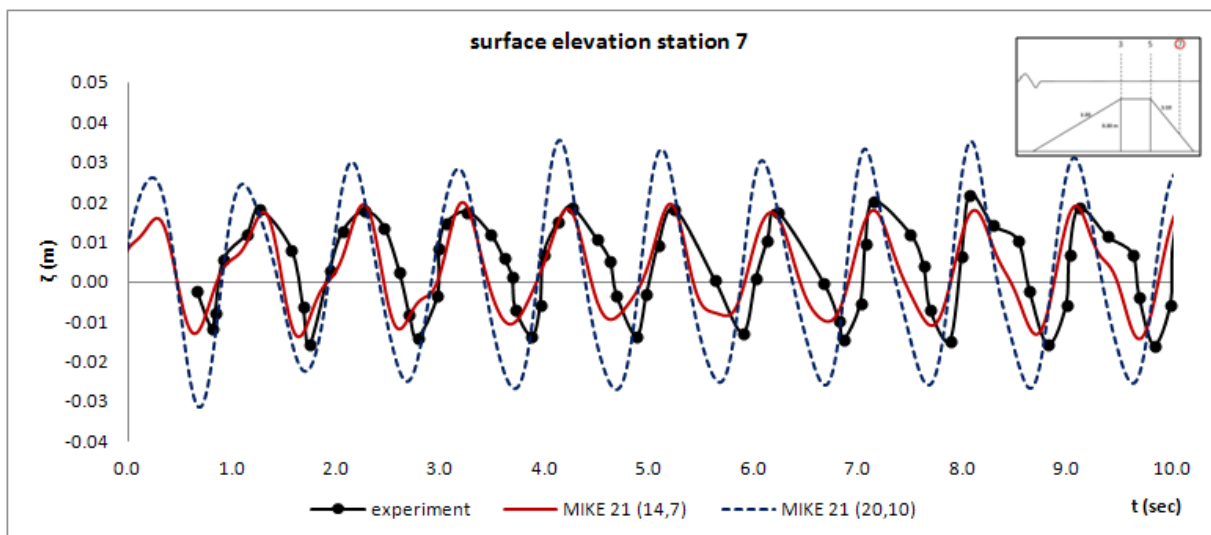


Σχήμα 6.34: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ πειράματος, MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ και MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

Ο αισθητήρας 5 (Σχήμα 6.33) στο κατάντη άκρο της στέψης, δίνει και πάλι ελαφρές αποκλίσεις στη μορφή του διαγράμματος του μοντέλου και του προγράμματος (μεγαλύτερης κλίμακας αποκλίσεις) σε σχέση με τις πειραματικές μετρήσεις εμφανίζοντας και πάλι ύψος της διαταραχής στην περίπτωση του μοντέλου (δηλαδή η διαφορά κορυφής και κοιλίας στην χρονοσειρά του μοντέλου) σε κοντινότερες τιμές με αυτές του πειράματος συγκριτικά με αυτή που δίνεται από το MIKE 21, το οποίο δίνει πιο αποδεκτή μορφή χρονοσειράς με θεώρηση $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$ (Σχήμα 6.34).



Σχήμα 6.35: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.36: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ πειράματος, MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ και MIKE 21 για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$.

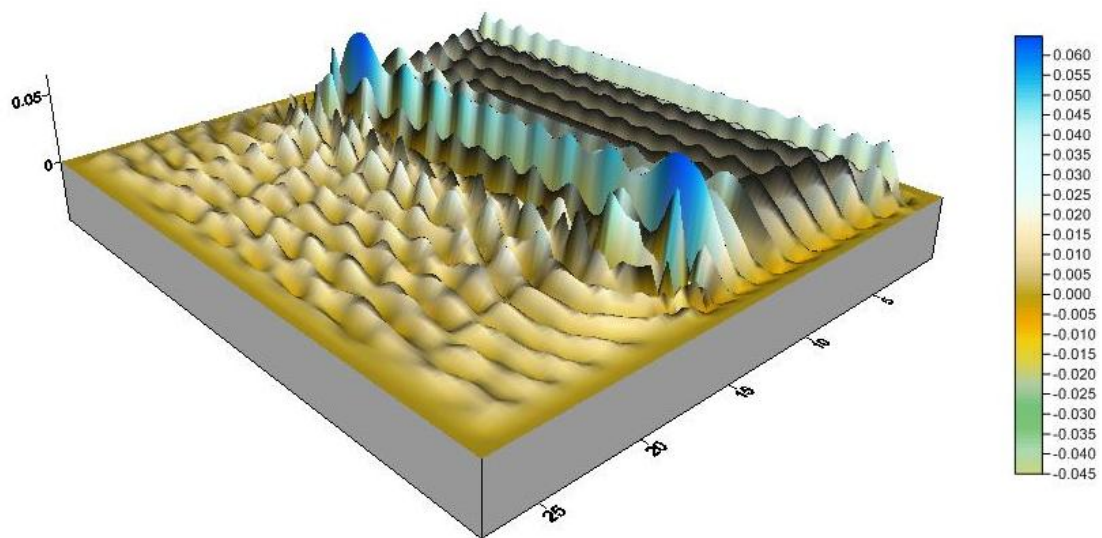
Στο Σχήμα 6.35 δίνεται η χρονοσειρά ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας του αισθητήρα 7 που βρίσκεται στο τμήμα καθοδικής κλίσης του υφάλου, όπου παρατηρείται ικανοποιητική προσέγγιση της διαταραχής από το προτεινόμενο μοντέλο και για πρώτη φορά από το MIKE 21 με θεώρηση γωνιών θραύσης κατά Schäffer et al (1993). Και για την περίπτωση θραύσης τύπου εκτινάξεως (plunging) βραχέως μονοχρωματικού κυματισμού, για πρώτη φορά παρατηρούμε να μη δουλεύουν οι προτεινόμενες τιμές γωνιών θραύσης κατά Madsen et al (1997a) όπως ξεκάθαρα φαίνεται στο Σχήμα 6.36.

Στην παραπάνω ομάδα σχημάτων δίνονται οι χρονοσειρές μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας για κυματισμό με αρχικά χαρακτηριστικά $H = 6.9$ cm και $T = 1$ sec για την πρώτη ομάδα πειραμάτων για βραχείς κυματισμούς και θραύση τύπου εκτινάξεως (plunging). Από τις παραπάνω αναλύσεις προκύπτει ότι το προτεινόμενο μοντέλο χρησιμοποιώντας τις προτεινόμενες τιμές του μοντέλου θραύσης τυρβώδους συνεκτικότητας για διάδοση πάνω

από πυθμένα με μορφή bar-trough μπορεί και πάλι να περιγράψει επαρκώς την κυματική διάδοση σε σύγκριση με το πρόγραμμα MIKE 21 για το οποίο χρειάζεται βαθμονόμηση των παραμέτρων θραύσης καθώς δεν προσομοιώνουν με ικανοποιητική ακρίβεια την κυματική διάδοση οι ίδιες τιμές σε κάθε θέση ελέγχου. Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχυροποιούνται και από την πινακοποίηση των στατιστικών χαρακτηριστικών των χρονοσειρών του πειράματος, του μοντέλου και του προγράμματος MIKE 21 για τις δύο θεωρήσεις των γωνιών θραύσης που υιοθετούνται στις αναλύσεις (Πίνακας 6.3).

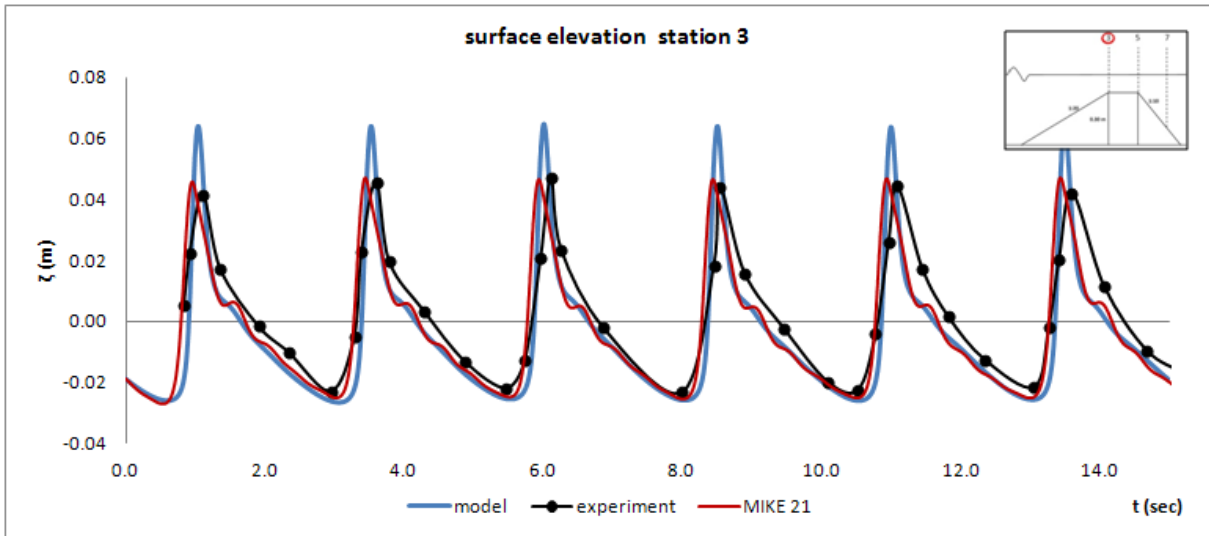
Πίνακας 6.3: Σύγκριση στατιστικών παραμέτρων πειραματικών καταγραφών, προτεινόμενου μοντέλου και προγράμματος MIKE 21 (μονοχρωματικός βραχύς θραυόμενος κυματισμός με $f = 1.0 \text{ Hz}$ και $H = 6.9 \text{ cm}$).

Στατιστική παράμετρος		Τυπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση	Μέγιστη τιμή	Ελάχιστη τιμή
Αριθμός αισθητήρα						
Αισθητήρας 3	Πείραμα	0.02046	1.19219	0.02668	0.04655	-0.02345
	Μοντέλο	0.02294	1.54445	1.21959	0.05500	-0.02704
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01793	-0.11826	-1.67629	0.02131	-0.02898
	MIKE 21 (20°,10°)	0.02497	0.76402	-0.92184	0.04697	-0.02965
Αισθητήρας 5	Πείραμα	0.01301	1.11325	-0.13676	0.03200	-0.01488
	Μοντέλο	0.01558	1.08128	-0.22598	0.04251	-0.01015
	MIKE 21 (14°,7°)	0.00979	0.31558	-0.94581	0.02661	-0.01335
	MIKE 21 (20°,10°)	0.01634	0.65512	-0.91306	0.04115	-0.02163
Αισθητήρας 7	Πείραμα	0.01018	-0.31230	-1.22529	0.02188	-0.01602
	Μοντέλο	0.01038	0.13660	-1.41910	0.02276	-0.01028
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01008	0.11146	-1.32736	0.01995	-0.01442
	MIKE 21 (20°,10°)	0.01988	0.09515	-1.40226	0.03556	-0.03167

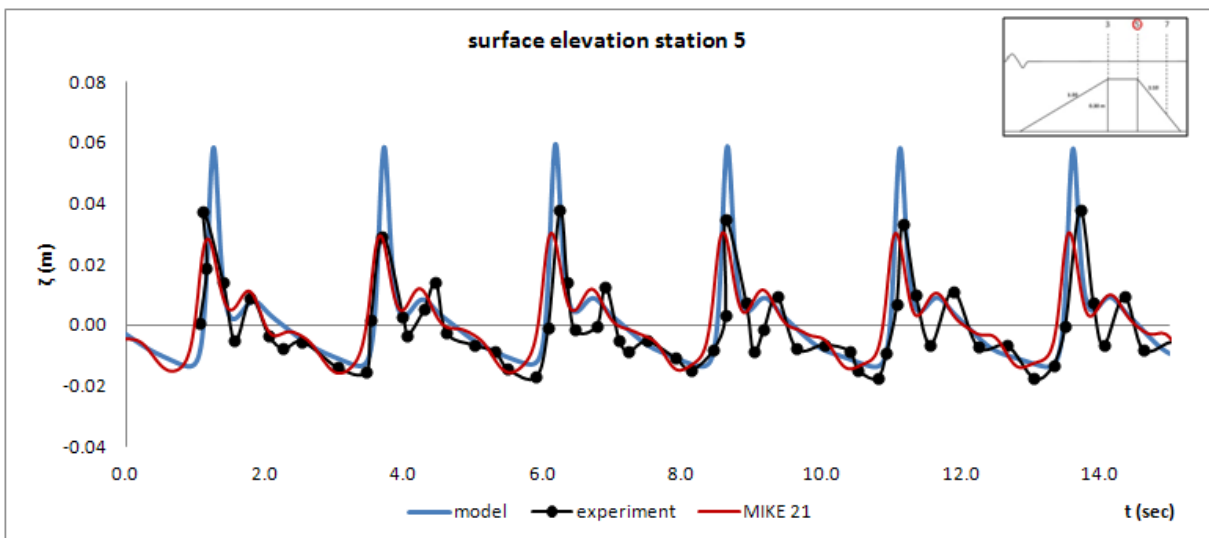


Σχήμα 6.37: Στιγμιότυπο ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας εντός του υπολογιστικού πεδίου για το προτεινόμενο μοντέλο τη χρονική στιγμή λήξης της ανάλυσης για μονοχρωματικούς βραχείς θραυόμενους (plunging) κυματισμούς με $f = 1.0 \text{ Hz}$ και $H = 6.9 \text{ cm}$

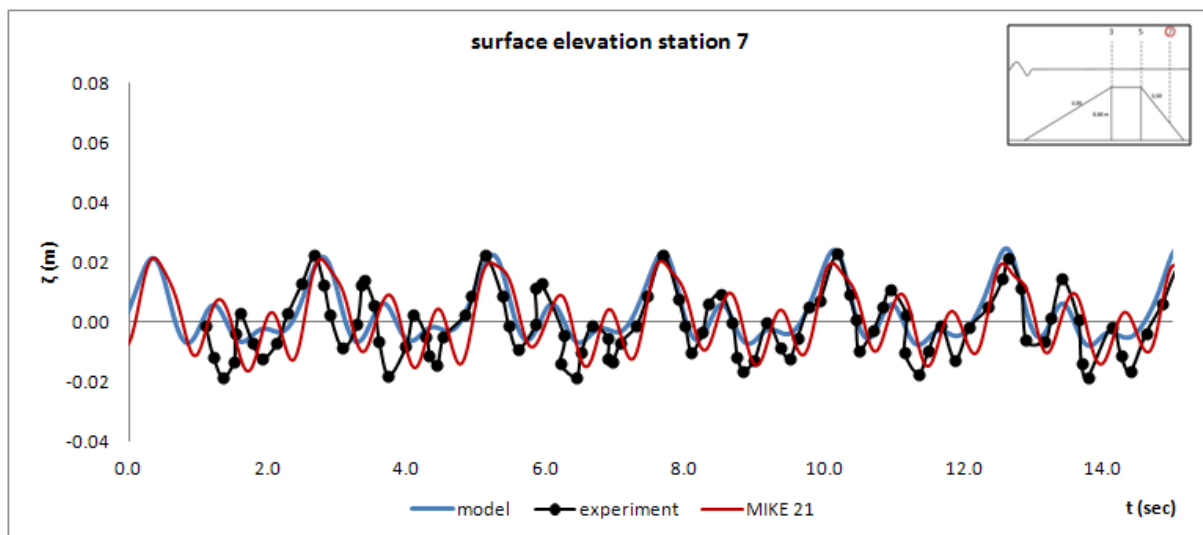
3. Μεταβολή στάθμης ελεύθερης επιφάνειας για κυματισμό με αρχικό ύψος $H = 4.4$ cm και περίοδο $T = 2.5$ sec , θραύση τύπου κυλίσεως (spilling).



Σχήμα 6.38: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.39: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

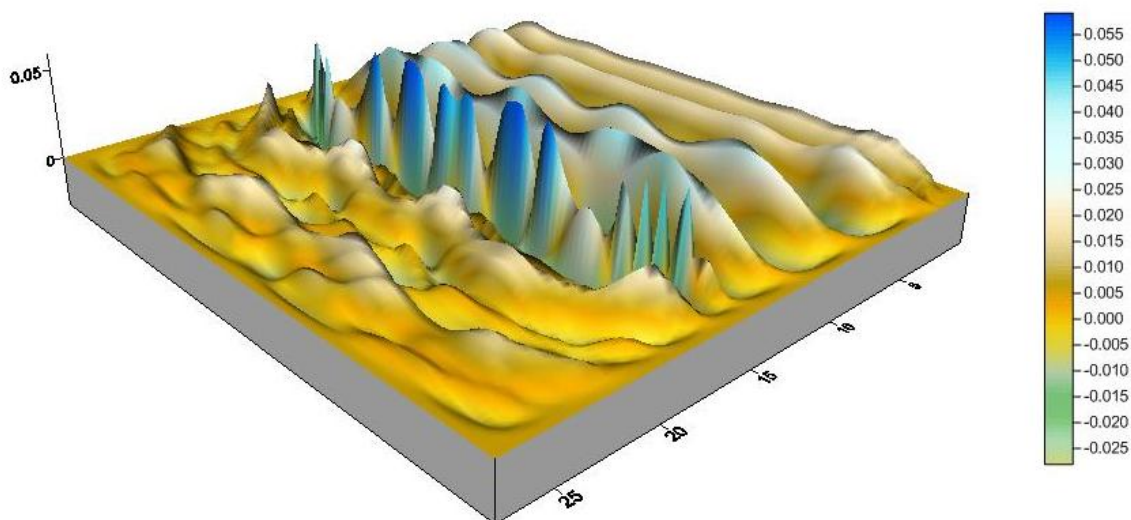


Σχήμα 6.40: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

Τα Σχήματα 6.38, 6.39 και 6.40 δίνουν τις χρονοσειρές μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας που αφορούν μακρό κυματισμό με αρχικά χαρακτηριστικά $H = 4.4$ cm και $T = 2.5$ sec για τη δεύτερη ομάδα πειραμάτων για μακρούς κυματισμούς και θραύση τύπου κυλίσεως (spilling). Η χρονοσειρά που αφορά τον αισθητήρα 3 (Σχήμα 6.38) δίνει καλή προσέγγιση της πειραματικής χρονοσειράς από το μοντέλο και το MIKE 21, με το μοντέλο να δίνει ελαφρώς υψηλότερες τιμές στις κορυφές. Στο Σχήμα 6.39 για τον αισθητήρα 5 παρατηρούμε ότι το μοντέλο δίνει σε σύγκριση με το MIKE 21 καλύτερα αποτελέσματα ως προς την πιστότερη αναπαράσταση της διαταραχής. Πιο συγκεκριμένα, το προτεινόμενο μοντέλο Boussinesq δύναται να εκτιμήσει ορθότερα την κυματομορφή στη συγκεκριμένη θέση (με κάποια εμφανή υπερεκτίμηση των κορυφών περίπου 2 cm) σε σύγκριση με το MIKE 21 που υποεκτιμά τις κορυφές (περίπου 1 cm) της διαταραχής και παράλληλα δεν περιγράφει ορθά και τις δεύτερες κορυφές που αρχίζουν να εμφανίζονται. Όσον αφορά τον αισθητήρα 7 στο Σχήμα 6.40 φαίνεται εν γένει ότι και το προτεινόμενο μοντέλο και το MIKE 21 δύναται να προσεγγίσουν (και ποιοτικά ως προς τη μορφή και ποσοτικά) την κυματική διαταραχή του πειράματος. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι εδώ για το πρόγραμμα η θεώρηση γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ κατά Schäffer et al (1993) επιτυγχάνει για την περίπτωση μακρών κυματισμών σχετικά καλύτερα αποτελέσματα προσομοίωσης από ότι για βραχείς κυματισμούς. Βελτιώνει εμφανώς τα στατιστικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς του προγράμματος, τα οποία μαζί με τα χαρακτηριστικά μοντέλου και πειράματος δίνονται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 6.4):

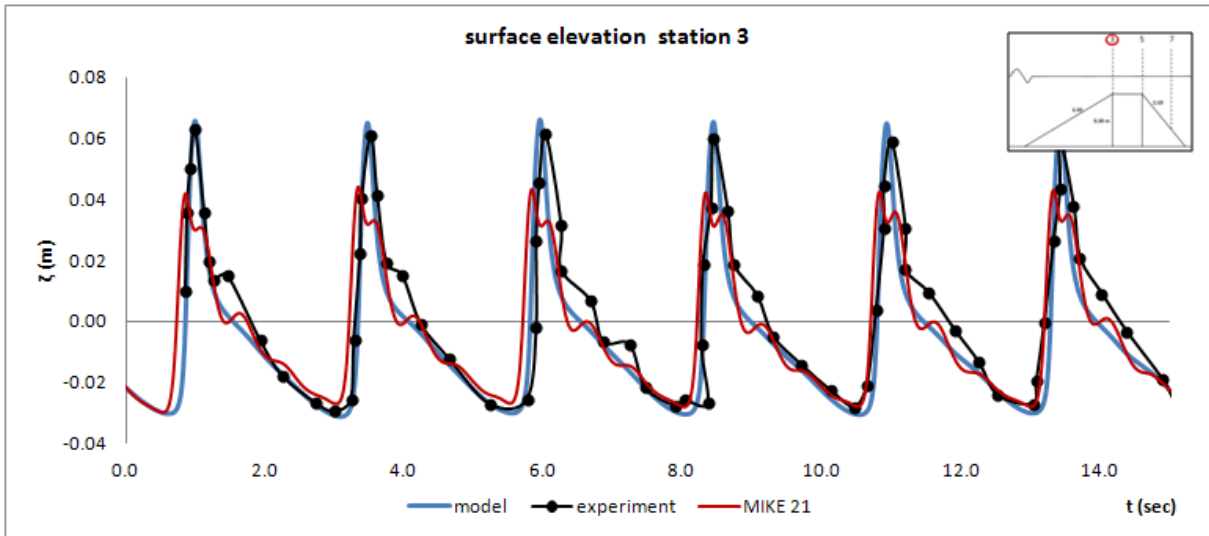
Πίνακας 6.4: Σύγκριση στατιστικών παραμέτρων Πειραματικών καταγραφών, προτεινόμενου μοντέλου και προγράμματος MIKE 21 (μονοχρωματικός μακρύς θραυόμενος κυματισμός με $f = 0.4 \text{ Hz}$ και $H = 4.4 \text{ cm}$).

Στατιστική παράμετρος		Τυπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση	Μέγιστη τιμή	Ελάχιστη τιμή
Αριθμός αισθητήρα						
Αισθητήρας 3	Πείραμα	0.01801	0.73680	-0.48639	0.04647	-0.02348
	Μοντέλο	0.02074	1.55811	2.27051	0.06462	-0.02684
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01978	0.97602	0.06287	0.04723	-0.02707
Αισθητήρας 5	Πείραμα	0.01171	1.20725	1.14817	0.03765	-0.01795
	Μοντέλο	0.01534	1.95757	4.12863	0.05943	-0.01391
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01171	0.65128	-0.12306	0.03047	-0.01607
Αισθητήρας 7	Πείραμα	0.01010	0.37177	-0.76019	0.02273	-0.01880
	Μοντέλο	0.00897	1.03754	-0.10022	0.02494	-0.00799
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01027	0.34008	-0.93110	0.02134	-0.01638

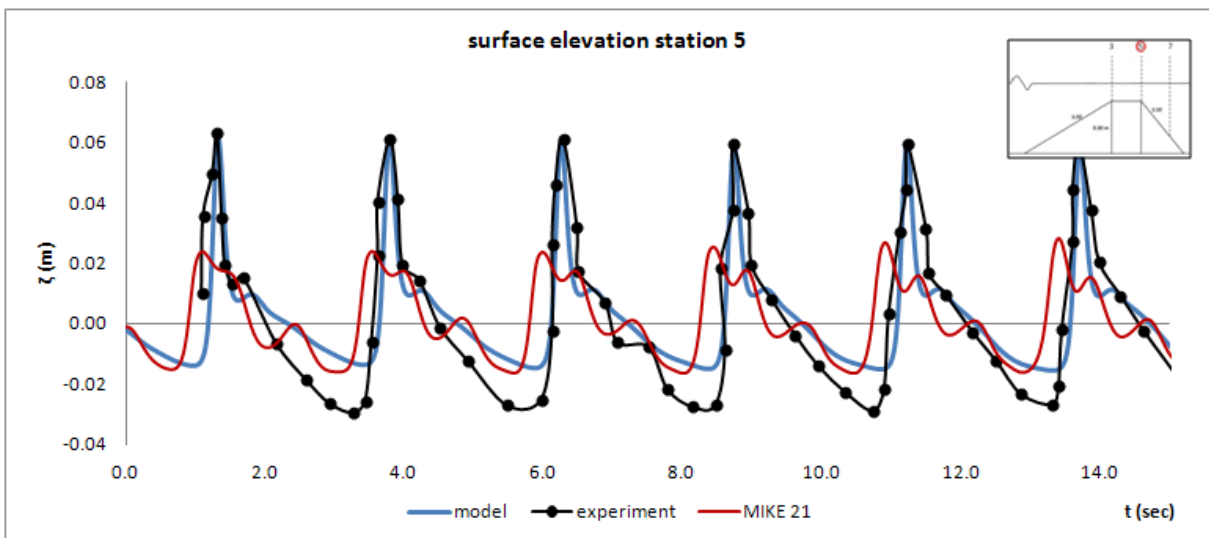


Σχήμα 6.41: Στιγμιότυπο ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας εντός του υπολογιστικού πεδίου για το προτεινόμενο μοντέλο τη χρονική στιγμή λήξης της ανάλυσης για μονοχρωματικούς μακρούς θραυόμενους (spilling) κυματισμούς με $f = 2.5 \text{ Hz}$ και $H = 4.4 \text{ cm}$

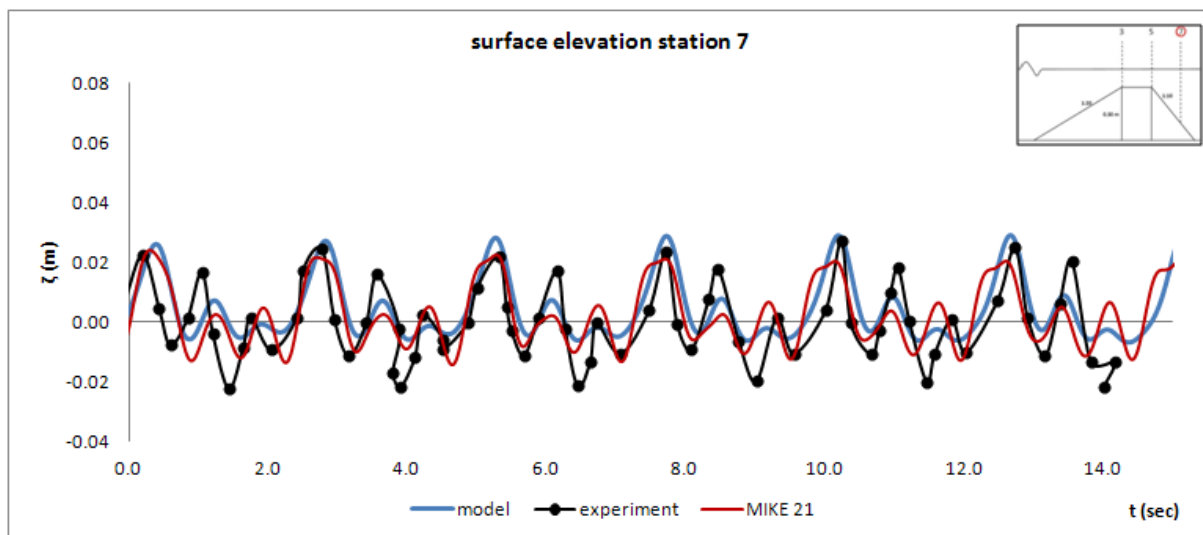
4. Μεταβολή στάθμης ελεύθερης επιφάνειας για κυματισμό με αρχικό ύψος $H = 5.4$ cm και περίοδο $T = 2.5$ sec , θραύση τύπου εκτινάξεως (plunging).



Σχήμα 6.42: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.43: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

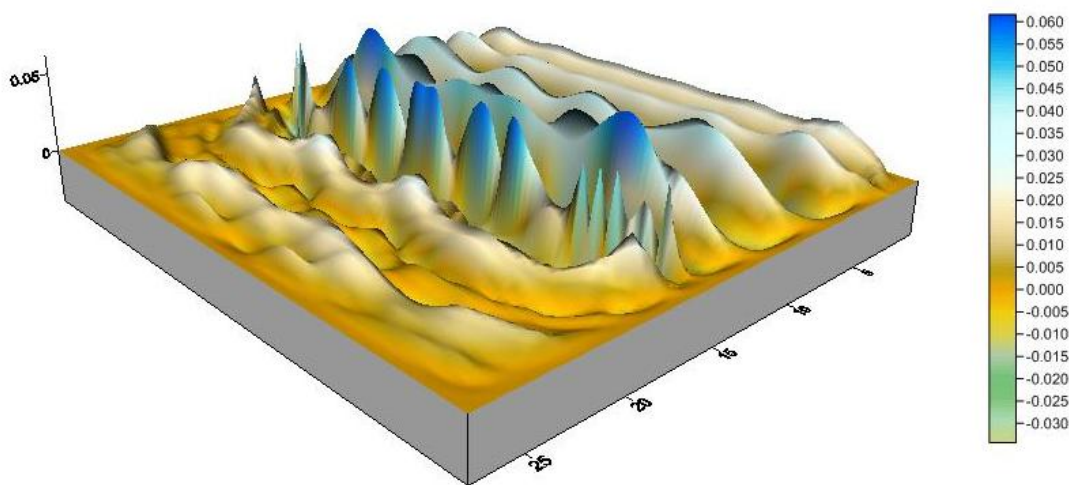


Σχήμα 6.44: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

Τα Σχήματα 6.42, 6.43 και 6.44 δίνουν τις χρονοσειρές μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας που αφορούν μακρό κυματισμό με αρχικά χαρακτηριστικά $H = 5.4$ cm και $T = 2.5$ sec για τη δεύτερη ομάδα πειραμάτων για μακρούς κυματισμούς και θραύση τύπου εκτινάξεως (plunging). Στον αισθητήρα 3 (Σχήμα 6.42) δίνεται ξεκάθαρα ορθότερα η μορφή της χρονοσειράς της ελεύθερης επιφάνειας από το μοντέλο σε σύγκριση με το MIKE 21 το οποίο προφανώς λόγω θεώρησης υψηλότερου ποσοστού θραύσης (το οποίο ορίζεται από τις συνιστώμενες τιμές γωνιών θραύσης από τις μελέτες της βιβλιογραφίας). Στο Σχήμα 6.43 για τον αισθητήρα 5 παρατηρούμε ότι το μοντέλο συνεχίζει να αναπαριστά πιστότερα την κυματική διαταραχή στη θέση αυτή συγκριτικά με το MIKE 21 στο οποίο το υψηλό ποσοστό θραύσης έχει απομοιώσει ακόμη περισσότερο τη μορφή της διαταραχής. Τέλος, ο αισθητήρα 7 (Σχήμα 6.44) φανερώνει και από το μοντέλο και από το πρόγραμμα πιστή ποιοτική αναπαράσταση της πειραματικής χρονοσειράς (ως προς τη μορφή μεγίστων και ελαχίστων). Ωστόσο και πάλι ποσοτικά είναι εμφανής η υπεροχή του προτεινόμενου μοντέλου αφού οι ακρότατες τιμές βρίσκονται και πάλι πιο κοντά στις αντίστοιχες πειραματικές. Ιδιαίτερα λοιπόν σε αυτή τη διερεύνηση, προκύπτει ότι το πρόγραμμα υιοθετεί υψηλές τιμές γωνιών θραύσης για την επίτευξη προσέγγισης χρονοσειράς στο σταθμό 7, εις βάρος των προηγούμενων χρονοσειρών στους δύο προηγούμενους σταθμούς που προκύπτουν εμφανώς απομειωμένες σε σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις και τα προκύπτοντα στατιστικά χαρακτηριστικά των καταγραφών (Πίνακας 6.5).

Πίνακας 6.5: Σύγκριση στατιστικών παραμέτρων Πειραματικών καταγραφών, προτεινόμενου μοντέλου και προγράμματος MIKE 21 (μονοχρωματικός μακρύς θραυόμενος κυματισμός με $f = 0.4 \text{ Hz}$ και $H = 4.4 \text{ cm}$).

Στατιστική παράμετρος		Τυπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση	Μέγιστη τιμή	Ελάχιστη τιμή
Αριθμός αισθητήρα						
Αισθητήρας 3	Πείραμα	0.02387	0.82048	-0.23540	0.06139	-0.02968
	Μοντέλο	0.02329	1.37351	1.55285	0.06637	-0.03152
	MIKE 21 (14°,7°)	0.02078	0.86160	-0.43913	0.04412	-0.03025
Αισθητήρας 5	Πείραμα	0.02487	0.80782	-0.37557	0.06249	-0.02971
	Μοντέλο	0.01732	1.60364	2.53215	0.06206	-0.01545
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01238	0.37190	-1.02267	0.02825	-0.01631
Αισθητήρας 7	Πείραμα	0.01066	0.39591	-0.51563	0.02658	-0.02223
	Μοντέλο	0.01002	1.17267	0.24571	0.02926	-0.00646
	MIKE 21 (14°,7°)	0.01051	0.50671	-0.89032	0.02417	-0.01446



Σχήμα 6.45: Στιγμιότυπο ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας εντός του υπολογιστικού πεδίου για το προτεινόμενο μοντέλο τη χρονική στιγμή λήξης της ανάλυσης για μονοχρωματικούς μακρούς θραυόμενους (plunging) κυματισμούς με $f = 2.5 \text{ Hz}$ και $H = 5.4 \text{ cm}$.

6.4 Το πείραμα των Beji και Battjes (1994) – φασματικοί κυματισμοί

Στην ενότητα αυτή ελέγχεται η ακρίβεια προσομοίωσης του προτεινόμενου μοντέλου Boussinesq και του λογισμικού MIKE 21 BW έναντι διάδοσης σύνθετων κυματισμών (random waves) μη θραυόμενων που διαδίδονται πάνω από αδιαπέρατη ύφαλη διάταξη. Ελέγχουμε περίπτωση μη θραυόμενων κυματισμών για να διαχωρίσουμε μη γραμμικά φαινόμενα (wave-wave interactions) από τα φαινόμενα θραύσης. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα του πειράματος Beji και Battjes (1994).

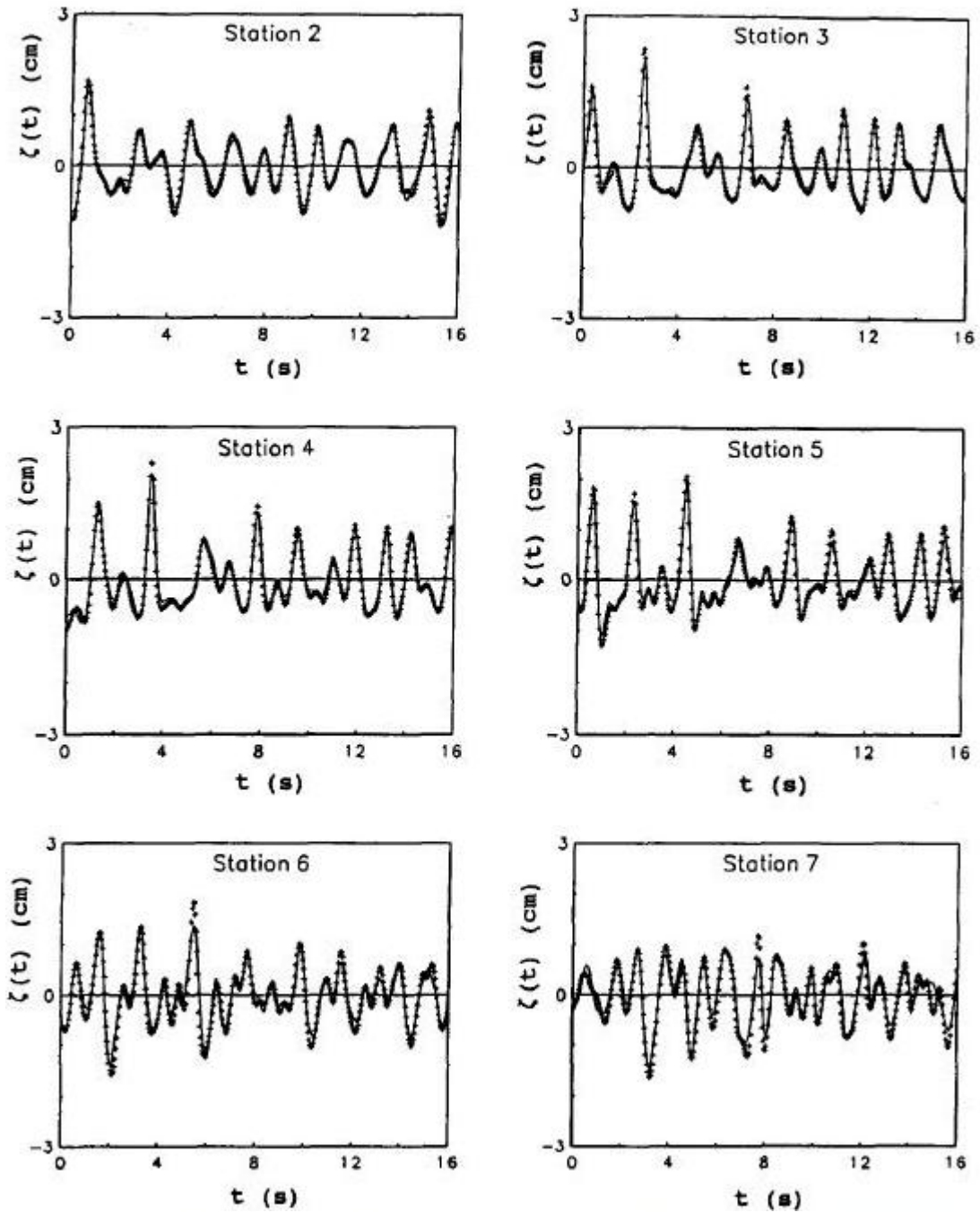
6.4.1 Πειραματική διάταξη πειράματος Beji και Battjes (1994)

Τα πειράματα εκτελέστηκαν στο κυματικό κανάλι (wave flume) του τεχνολογικού Πανεπιστημίου του Delft του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών με διαστάσεις μήκους 37.70 m, πλάτους 0.80 m και ύψους 0.75 m. Στα πειράματα που διενεργήθηκαν στο κανάλι η στάθμη ηρεμούντος ύδατος ήταν στα 0.40 m, ενώ η γενική μορφή της πειραματικής διάταξης είναι ίδια με αυτή που δόθηκε στο *Σχήμα 6.1* που προηγήθηκε.

Η διαταραχή καθώς διαδίδεται στη διάταξη του πειράματος, καταγράφεται από επτά (7) αισθητήρες τοποθετημένους στις αντίστοιχες θέσεις που φαίνονται στο σχήμα που προηγήθηκε. Ο πρώτος εξ' αυτών τοποθετήθηκε στην περιοχή σταθερού βάθους (0.4 m), σε απόσταση 6 m από την κυματογεννήτρια και του πόδα του ύφαλου εμποδίου, οπότε και ο αισθητήρας αυτός (gage 1) συνέστησε τον «αισθητήρα αναφοράς» των εισερχόμενων κυματισμών. Οι υπόλοιποι αισθητήρες λάμβαναν μετρήσεις στην ανοδική κλίση του υφάλου (gage 2), στη στέψη του (gage 3,4) και στην καθοδική κλίση του (gage 5,6,7). Τα βάθη ύδατος στη θέση των αισθητήρων είναι:

Αισθητήρας 1	0.40 m
Αισθητήρας 2	0.24 m
Αισθητήρας 3	0.10 m
Αισθητήρας 4	0.10 m
Αισθητήρας 5	0.12 m
Αισθητήρας 6	0.19 m
Αισθητήρας 7	0.40 m

Οι πειραματικές διερευνήσεις περιελάμβαναν, όπως προαναφέραμε στην παράγραφο 6.2.1 θραυόμενους και μη θραυόμενους κυματισμούς. Τα πειράματα έγιναν για περιοδικούς κυματισμούς συχνότητας $f = 0.5$ Hz και ύψους κύματος $H = 2.0$ cm, αλλά και για τυχαίους κυματισμούς JONSWAP με συχνότητα κορυφής φάσματος $f_p = 0.5$ Hz και χαρακτηριστικό ύψος κύματος $H_s = 1.8$ cm. Στην παρούσα ενότητα ελέγχουμε τη διάδοση τυχαίων κυματισμών JONSWAP με συχνότητα κορυφής φάσματος $f_p = 0.5$ Hz και χαρακτηριστικό ύψος κύματος $H_s = 1.8$ cm. Τα αποτελέσματα δίνονται στο *Σχήμα 6.46* όπου με συνεχή γραμμή δίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα και με (+) ένα βελτιωμένο μοντέλο Boussinesq που χρησιμοποίησαν οι ερευνητές για σύγκριση.



Σχήμα 6.46: Πειραματικές μετρήσεις ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας για τυχαίους κυματισμούς JONSWAP $f = 0.5 \text{ Hz}$ και $H = 1.8 \text{ cm}$ πειράματος Beji και Battjes (1994). [7]

6.4.2 Εφαρμογή τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq

Τα πειράματα που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, αφορούν μονοδιάστατη διάδοση κυματισμών. Διαμορφώνουμε και πάλι ένα υπολογιστικό πεδίο σε δύο οριζόντιες διαστάσεις όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου. Αποδίδουμε στην υπολογιστική περιοχή δεύτερη οριζόντια διάσταση επαρκούς εύρους όπου οι εισερχόμενοι κυματισμοί διαδίδονται στη μία οριζόντια διάσταση μέσω μίας γραμμικής πηγής παράλληλης στη θεωρούμενη οριζόντια διάσταση και τα υπό διερεύνηση αποτελέσματα λαμβάνονται από το μέσον της διάστασης αυτής κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης της εισερχόμενης κυματικής διαταραχής. Η διάταξη είναι όμοια με αυτή που δόθηκε στο *Σχήμα 6.3*.

Για την εφαρμογή του μοντέλου επισημαίνουμε ότι επιλέχθηκαν χωρική διακριτοποίηση και στις δύο οριζόντιες διευθύνσεις $dx = dy = 0.05 \text{ m}$ και χρονική διακριτοποίηση $dt = 0.0025 \text{ sec}$ οπότε ο δημιουργούμενος κάρναβος $Im \times Jm = 600 \times 550$ δίνει μήκος κατά τη διάσταση του πειράματος ίσο με 25 m και κατά τη θεωρούμενη δεύτερη οριζόντια διάσταση μήκος ίσο με 30 m το οποίο είναι επαρκές ώστε να μην επηρεάσουν τα πλευρικά όρια το μέσον κατά μήκος της διάστασης του πειράματος όπου εξάγουμε τα αποτελέσματα μέτρησης της ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας για να συγκριθούν με τις πειραματικές μετρήσεις.

Η εφαρμογή του τροποποιημένου μοντέλου Boussinesq για το πείραμα των Beji και Battjes (1994) γίνεται κατά τον τρόπο που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4 πλην της προσομοίωσης της θραύσης καθώς η ανάλυση γίνεται για μη θραυόμενους κυματισμούς. Η συνάρτηση πηγής τοποθετείται στη θέση της κυματογεννήτριας στο πείραμα, ενώ τα απορροφητικά όρια έχουν εύρος $x_s = 30dx$, τοποθετώντας ωστόσο τις στοιβάδες απορρόφησης σε απόσταση από τη θέση γένεσης κυματισμών (θεώρηση μήκους 2.5 m προ της πηγής κυματισμών εκ των οποίων το 1.5 m αφορά τη στοιβάδα απορρόφησης) για την αποφυγή ασταθειών.

Όσον αφορά τη διάρκεια διεξαγωγής των αναλύσεων προέκυψε και από το προτεινόμενο μοντέλο αλλά και από το MIKE 21 ότι δεδομένου του υπολογιστικού πεδίου, σε χρόνο 60 sec μπορούμε να έχουμε μονιμοποίηση συνθηκών ροής στις θέσεις ελέγχου των μετρήσεων.

Για την προσομοίωση της εισαγόμενης κυματικής διαταραχής, λόγω του ότι δεν μπορούμε μέσω του φάσματος να παράγουμε τη συγκεκριμένη διαταραχή που θα ταυτισθεί με τη χρονοσειρά του αισθητήρα 2 (καθώς ένα φάσμα δίνει άπειρο αριθμό χρονοσειρών), εισάγουμε ως διαταραχή του υπολογιστικού πεδίου τη χρονοσειρά ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας του αισθητήρα 2 όπως δόθηκε από τα πειραματικά δεδομένα.

Βάση των παραπάνω κατασκευάζουμε τον κώδικα Boussinesq ο οποίος παρουσιάζεται στην πλήρη μορφή του (δηλαδή με την προσθήκη της θραύσης κυματισμών) στο παράρτημα της εργασίας.

6.4.3 Εφαρμογή MIKE 21 BW

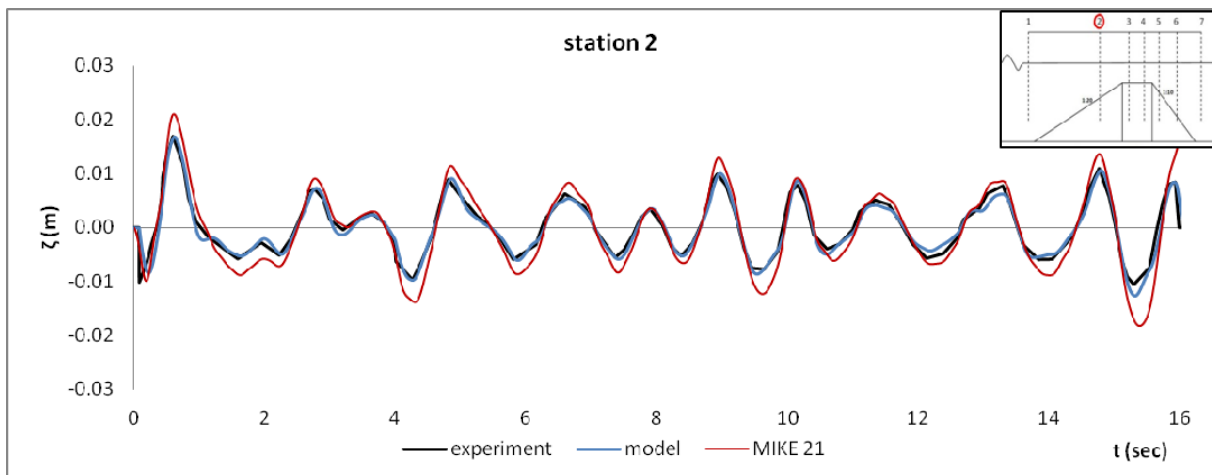
Για την προσομοίωση του προβλήματος μέσω του υπολογιστικού προγράμματος MIKE 21 BW ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της παραγράφου 6.2.3 με τη μόνη διαφορά ότι για τη σωστή εισαγωγή της διαταραχής πρέπει να εισάγουμε τυχαίους κυματισμούς. Επιλέγουμε στο πεδίο Internal Wave Generation να εισάγουμε την πηγή που το πρόγραμμα θα αναγνώσει εντός της υπολογιστικής περιοχής στη θέση του αισθητήρα 2. Την εισαγωγή των κυματικών διαταραχών την πραγματοποιούμε μέσω του MIKE 21 TOOLS επιλέγοντας τη δημιουργία τυχαίας χρονοσειράς εισόδου (η διαταραχή στο σταθμό 2 στη θέση του αισθητήρα) για όσο χρόνο διαρκεί η προσομοίωση (60 sec).

Με δεδομένη τη διαταραχή ορίζουμε μία γραμμική πηγή κατά μήκος του θεωρούμενου δεύτερου άξονα της υπολογιστικής περιοχής, σε κάθε σημείο της οποίας παράγει τη διαταραχή που ορίσαμε στη θέση του σταθμού 2.

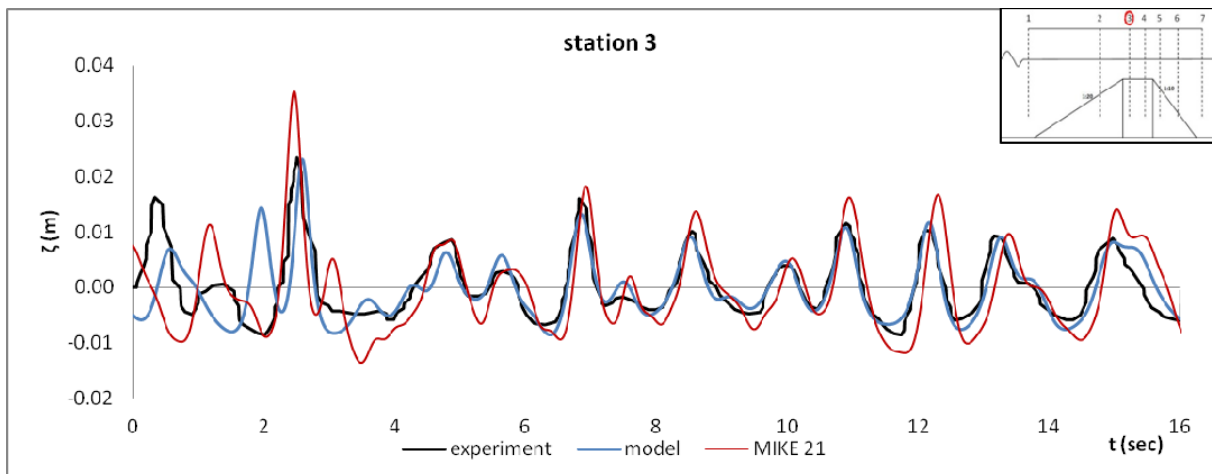
Τέλος ορίζουμε τα μεγέθη που χρειαζόμαστε να εξάγει το πρόγραμμα για να συγκρίνουμε με αυτά του μοντέλου και του πειράματος. Σε αυτά συμπεριλαμβάνονται οι χρονοσειρές στις θέσεις των αισθητήρων βάσει της πειραματικής διάταξης που ορίζονται από την καρτέλα `deterministic parameters , type 0`.

6.4.4 Διαγράμματα – σχολιασμός αποτελεσμάτων

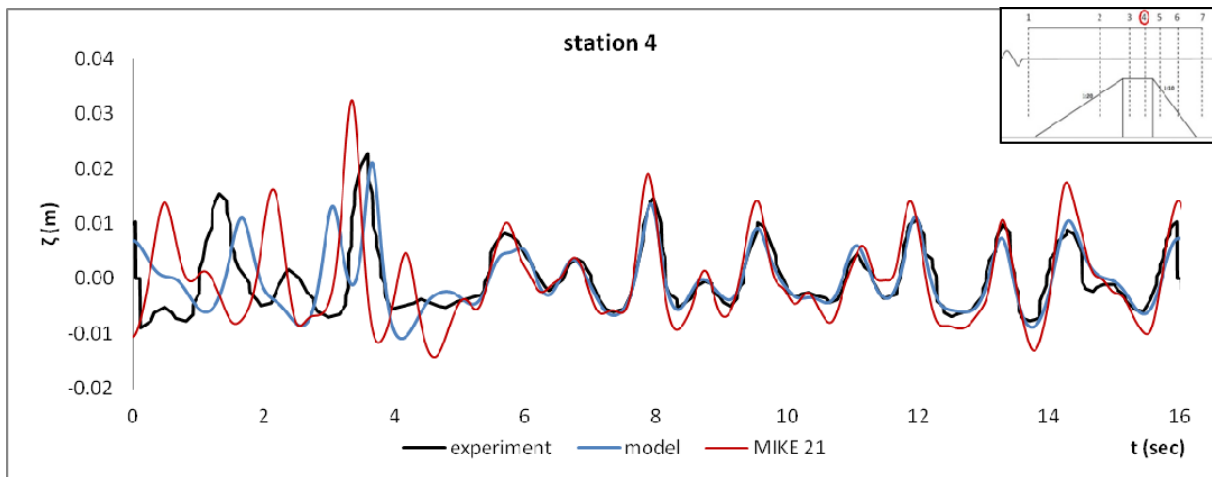
Στα διαγράμματα που ακολουθούν συγκρίνουμε για το πείραμα των Beji και Battjes (1994) τις χρονοσειρές ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\zeta(t)$ που προκύπτουν για εισερχόμενο φασματικό κυματισμό συχνότητας κορυφής $f_p=0.5$ Hz και χαρακτηριστικού ύψους κύματος $H_s=1.8$ cm, στους σταθμούς μετρήσεων 2 έως 7. Επίσης, παραθέτουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά μοντέλου και προγράμματος και τα συγκρίνουμε με αυτά που προκύπτουν από τη χρονοσειρά του πειράματος.



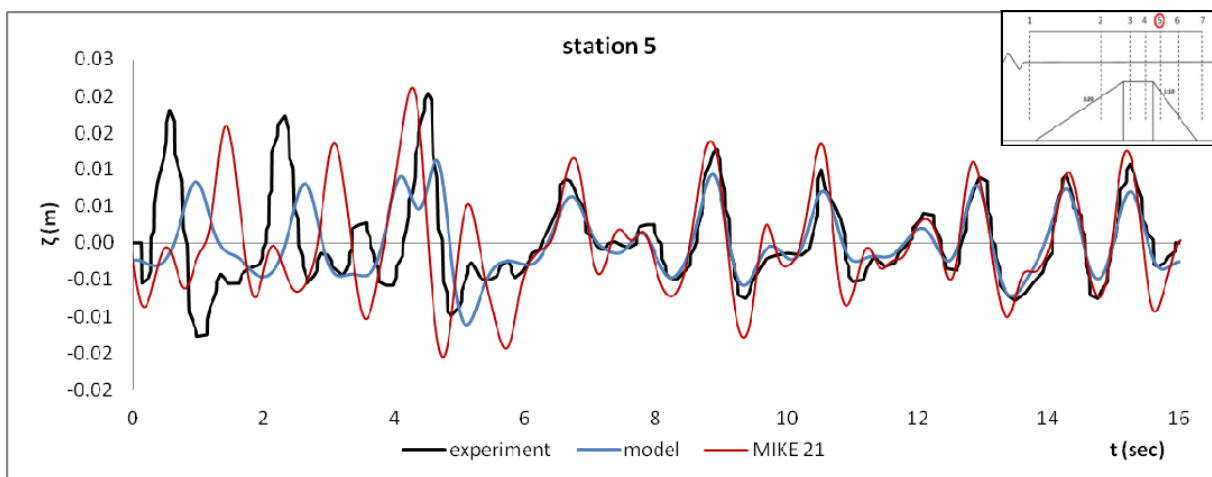
Σχήμα 6.47: Αισθητήρας 2: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



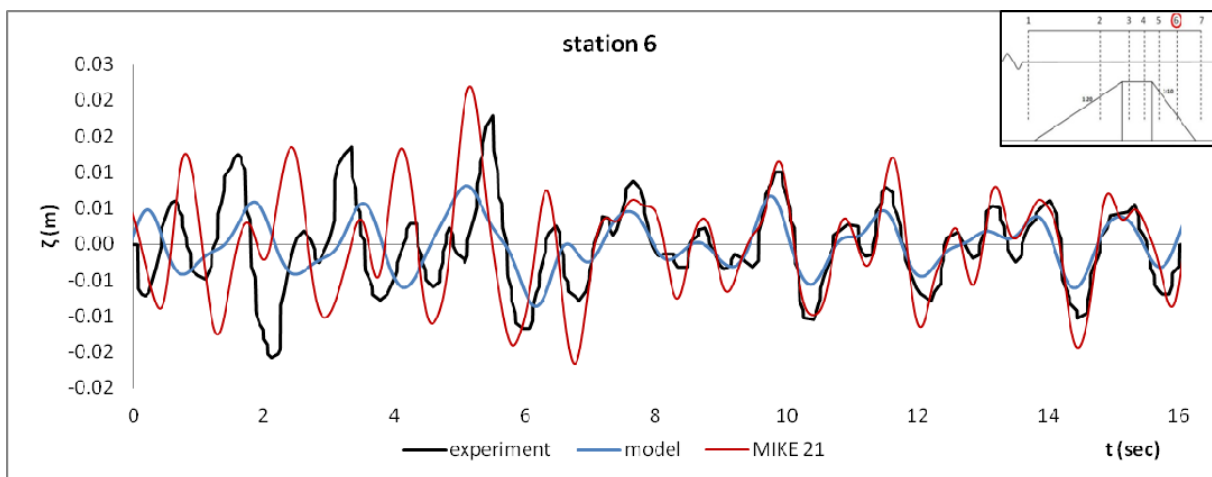
Σχήμα 6.48: Αισθητήρας 3: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



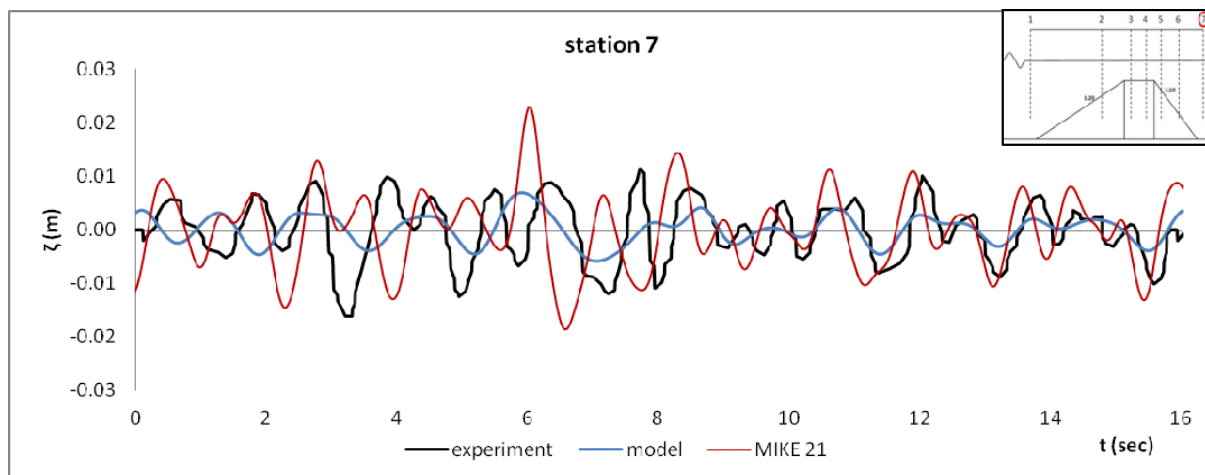
Σχήμα 6.49: Αισθητήρας 4: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.50: Αισθητήρας 5: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.51: Αισθητήρας 6: Σύγκριση χρονοσειρών $\zeta(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.52: Αισθητήρας 7: Σύγκριση χρονοσειρών $z(t)$ μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

Στα παραπάνω διαγράμματα χρονοσειρών μεταβολής της στάθμης ελεύθερης επιφάνειας, προκύπτει εμφανώς με μία πρώτη προσέγγιση αρκετά καλή συμφωνία των αποτελεσμάτων των μοντέλων με τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι παρατηρούμενες αποκλίσεις είναι δυνατό να αποδοθούν στην ακρίβεια προσομοίωσης των μοντέλων λόγω των χρησιμοποιούμενων εξισώσεων σε αυτά και πιο συγκεκριμένα με τα χαρακτηριστικά διασποράς τους αλλά και με την τάξη των μη γραμμικών όρων που διατηρούνται σε αυτές.

Πιο συγκεκριμένα, στον αισθητήρα 2 (Σχήμα 6.47) φαίνεται η δυνατότητα ανάγνωσης και αναπαραγωγής της χρονοσειράς που εισάγουμε στη θέση αυτή από τα υπολογιστικά προγράμματα. Στις επόμενες θέσεις μετρήσεων, στους αισθητήρες 3 και 4 (Σχήμα 6.48 και Σχήμα 6.49) στη στέψη του υφάλου, όπου ο κυματισμός έχει γίνει σαφώς περισσότερο μη γραμμικός λόγω της παρεμβολής της απότομης κλίσης, προκύπτει ότι το προτεινόμενο μοντέλο αλλά και το MIKE 21 εμφανίζουν σχετικά μικρές αποκλίσεις καθώς βασίζονται σε σύστημα εξισώσεων ελαφρώς μη γραμμικές.

Στο Σχήμα 6.50 στη θέση του αισθητήρα 5 βρισκόμαστε πλέον στην καθοδική κλίση του υφάλου όπου ξεκινούν να συμβαίνουν μη γραμμικές επιδράσεις σαφώς πιο σύνθετης μορφής από το τμήμα ανοδικής κλίσης καθώς η κυματομορφή τείνει να αναδημιουργηθεί λόγω της απότομης αύξησης του βάθους του πυθμένα και μάλιστα όχι με τον αντίστροφο τρόπο που είχε μεταβληθεί στις προηγούμενες θέσεις, αλλά με την απελευθέρωση υψηλότερων αρμονικών. Στα αποτελέσματα μοντέλου και MIKE 21 παρατηρούμε την αρχή εντονότερων αποκλίσεων σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα, γεγονός που θα φανεί εντονότερα στην φασματική αναπαράσταση της μετρούμενης κυματοσειράς των σταθμών του πειράματος.

Στους δύο τελευταίους αισθητήρες 6 και 7 (Σχήμα 6.51 και Σχήμα 6.52) που βρίσκονται προς τη βάση της καθοδικής κλίσης του υφάλου φαίνεται εντονότερα η απελευθέρωση υψηλότερων αρμονικών που οφείλονται στην αύξηση της μη γραμμικότητας σε σχέση με τη μη γραμμικότητα που εμφανίζεται στην ανοδική κλίση του ύφαλου εμποδίου. Το πολύπλοκο αυτό φαινόμενο είναι αδύνατο να περιγραφεί από τα σημερινά μοντέλα, ενώ έχουν ήδη εκτελεστεί και σειρές πειραμάτων για τη διερεύνηση του φαινομένου (Johnson et al. 1951, Jolas 1960, Losada et al. 1997, Massel 1983).

Επιπροσθέτως, χαρακτηριστικό στοιχείο που αξίζει να σημειωθεί είναι στους αισθητήρες (ιδιαίτερα στους τελευταίους του πειράματος) εμφανίζεται απόκλιση των χρονοσειρών του μοντέλου και του MIKE 21 από τις πειραματικές μετρήσεις για χρόνο ίσο μέχρι $2.0T_p$ αποτέλεσμα της μη σταθεροποίησης των συνθηκών του πειράματος οι οποίες απαιτούν να παρέλθει ένα χρονικό διάστημα ώστε να γίνουν και πάλι περιοδικές (start up period). Κατά αντιστοιχία, παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο στα υπολογιστικά μοντέλα καθώς μπορεί να ορισθεί και από τον μελετητή ένα αρχικό χρονικό διάστημα από την έναρξη με μηδενικά τα υπό διερεύνηση μεγέθη (συνθήκες “cold start”) έως μία θεωρούμενη χρονική στιγμή (warm up period). Τα αποτελέσματα που δίνονται για τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για τα μοντέλα, αποτελούν τμήμα των σταθεροποιημένων συνθηκών ροής (steady state condition). Από τα παραπάνω φαίνεται η δυσκολία προσομοίωσης της διάδοσης της κυματικής διαταραχής στην περιοχή της καθοδικής κλίσης καθώς και το προτεινόμενο μοντέλο και το MIKE 21 φαίνεται να προσεγγίζουν τη μορφή της διαταραχής, να εμφανίζουν τις υψηλότερες αρμονικές αλλά να αδυνατούν να περιγράψουν επακριβώς το φαινόμενο στις θέσεις αυτές. Το φαινόμενο αυτό καταδεικνύεται εντονότερα στην αναπαράσταση των φασμάτων για τις θέσεις ελέγχου και στον προσδιορισμό των στατιστικών χαρακτηριστικών τους που θα επακολουθήσει.

Πρέπει να υπογραμμίσουμε για ακόμα μια φορά, το γεγονός ότι στο πείραμα των Beji και Battjes (1994) δε δίνονται στοιχεία σχετικά με τη θεώρηση ή όχι της επίδρασης της τριβής πυθμένα, επίδραση που οδηγεί στην απώλεια ενέργειας και άρα θα επηρέαζε τα αποτελέσματα του κυματικού προφίλ. Επίσης, δεν χρησιμοποιήθηκε η επίδραση της τριβής πυθμένα ούτε και στο σύστημα εξισώσεων Boussinesq που χρησιμοποιήθηκε για τη σύγκριση με το πείραμα, θεώρηση που έγινε και στο προτεινόμενο από την παρούσα εργασία μοντέλο. Ωστόσο, αν στο κυματικό κανάλι που διενεργήθηκαν τα πειράματα υπήρχε αδιαπέρατος πυθμένας, τότε αναπόφευκτα θα είχαμε επίδραση τριβής που θα εντεινόταν με τη διάδοση του κυματισμού κατάντη σε ποσοστό που δε θα μπορούσαμε να ορίσουμε χωρίς επιπρόσθετα δεδομένα για την πειραματική διάταξη.

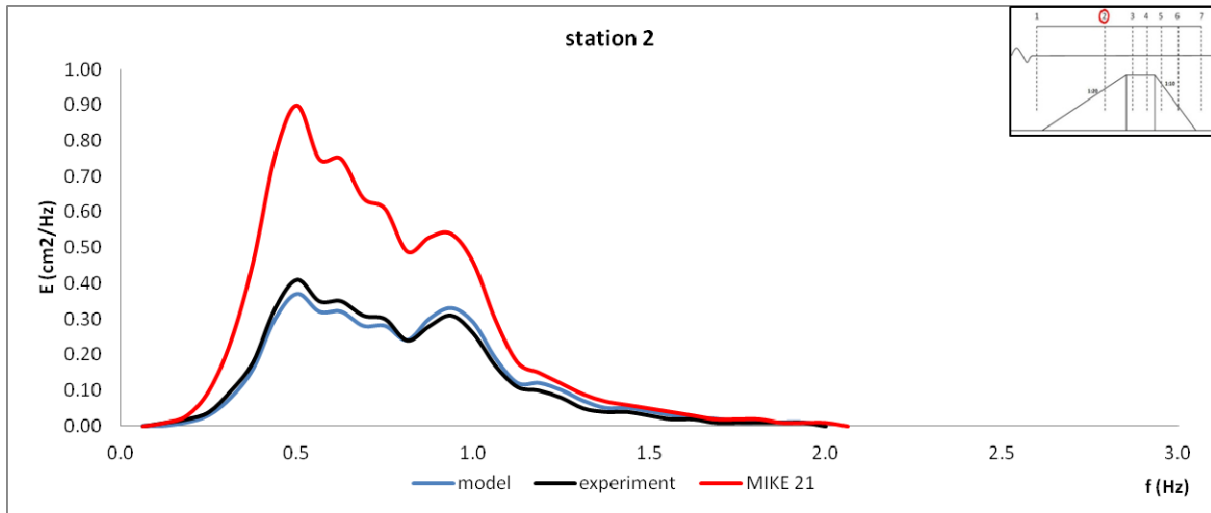
Ακολουθώντας, μετατρέπουμε τις χρονοσειρές μέσω μετασχηματισμού fourier (“FOURIER.F90”) που παραθέσαμε παραπάνω σε φάσματα ώστε να συγκρίνουμε τα φασματικά χαρακτηριστικά σε κάθε θέση ελέγχου του πειράματος. Τα φασματικά χαρακτηριστικά που θα ποσοτικοποιήσουν τα προκύπτοντα αποτελέσματα είναι:

- Ροπή μηδενικής τάξης m_0 βάσει της σχέσης (1.6) ολοκληρώνοντας την επιφάνεια του φάσματος για κάθε θέση ελέγχου με χρήση κώδικα υπολογισμού του ολοκληρώματος της συνάρτησης με τον εναλλακτικό κανόνα Simpson (“SIMPSON.FOR”):

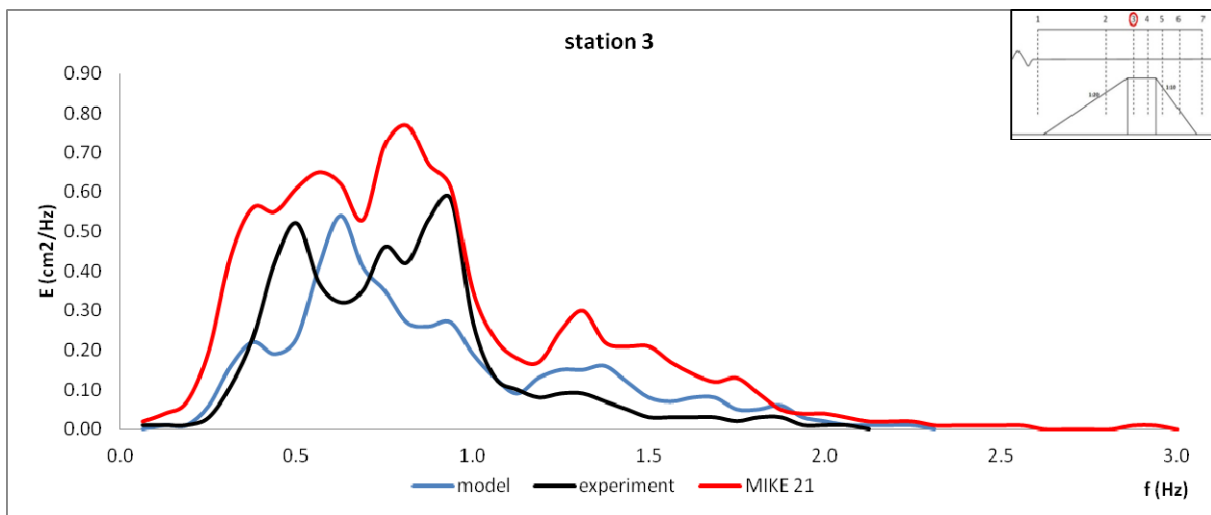
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{48} [17f(x_0) + 59f(x_1) + 43f(x_2) + 49f(x_3) + 48 \sum_{i=4}^{n-4} f(x_i) + 49f(x_{n-3}) + 43f(x_{n-2}) + 59f(x_{n-1}) + 17f(x_n)]$$

Με a και b αρχική και τελική τετμημένη, n πλήθος σημείων και $h = b - a$.

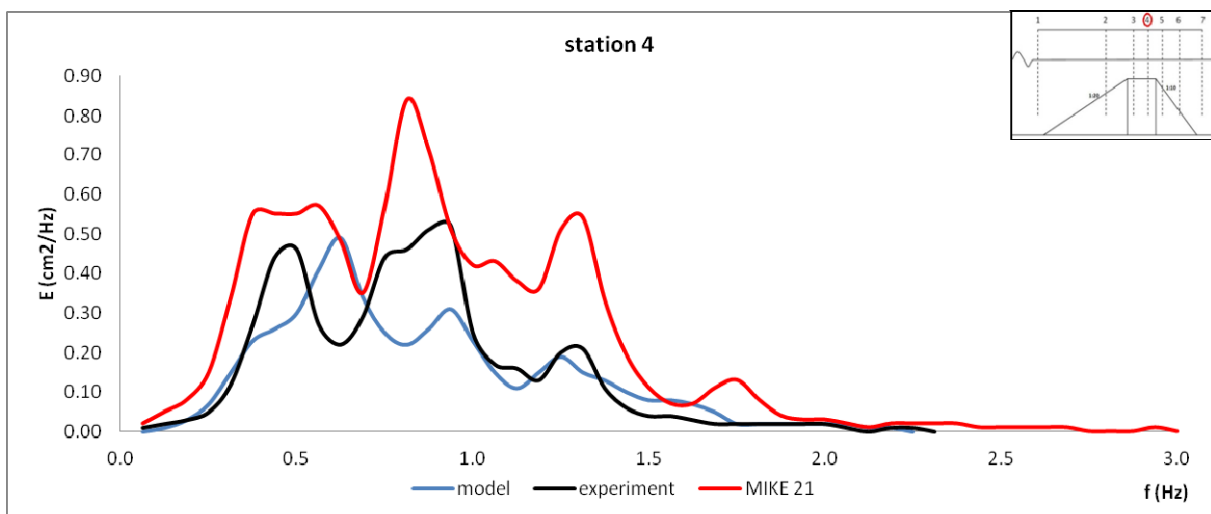
- Το σημαντικό ύψος κύματος H_{m0} κυματισμού ίσο με το τετραπλάσιο της τετραγωνικής ρίζας της ροπής μηδενικής τάξης.
- Την περίοδο κορυφής T_p (αντίστοιχα συχνότητα κορυφής f_p)
- Τη μέγιστη φασματική συχνότητα $S(f)$ που αντιστοιχεί στη συχνότητα κορυφής



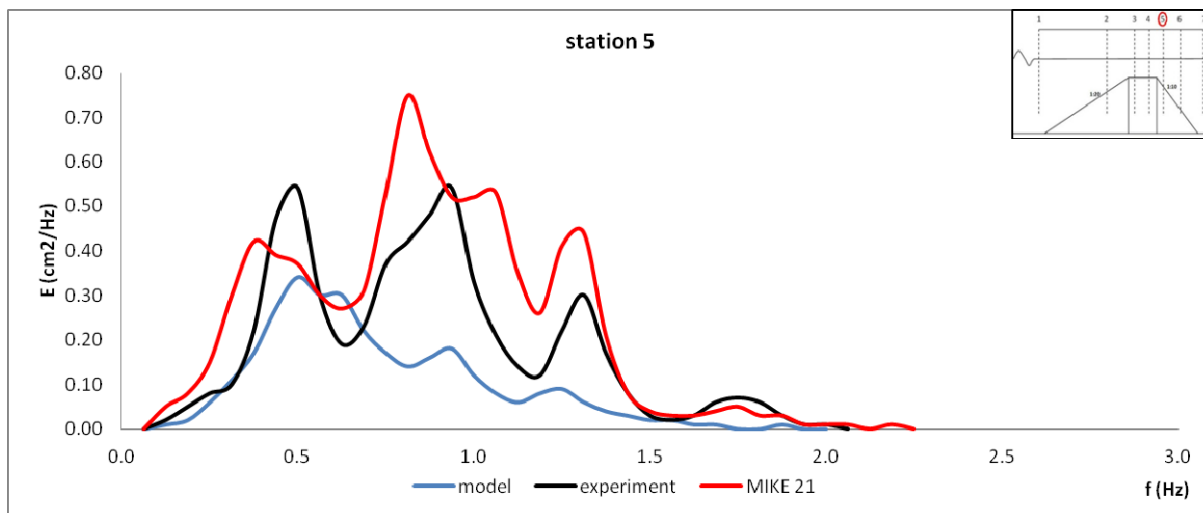
Σχήμα 6.53: Αισθητήρας 2: Σύγκριση φασμάτων μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



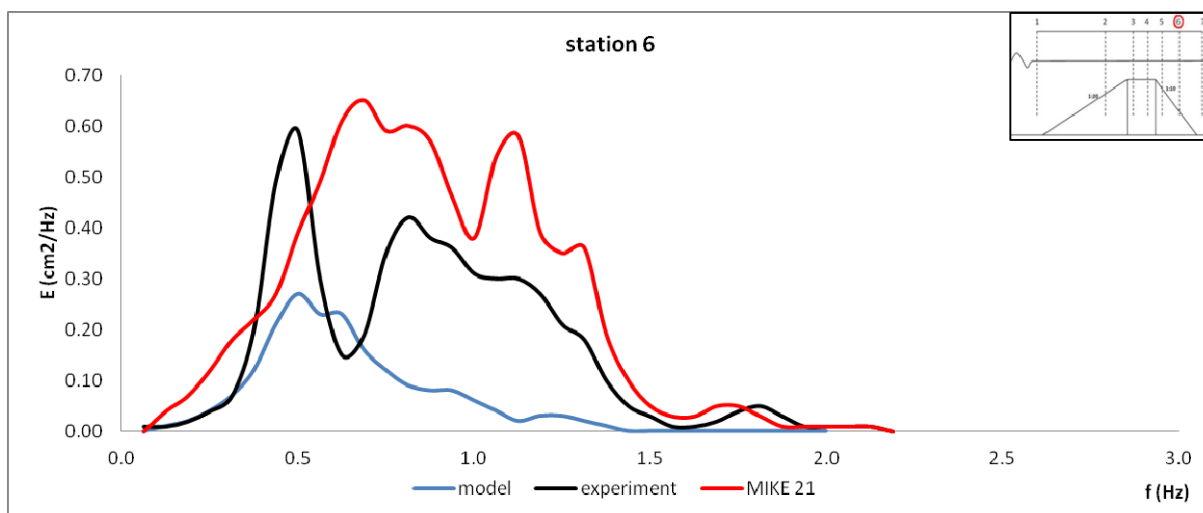
Σχήμα 6.54: Αισθητήρας 3: Σύγκριση φασμάτων μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



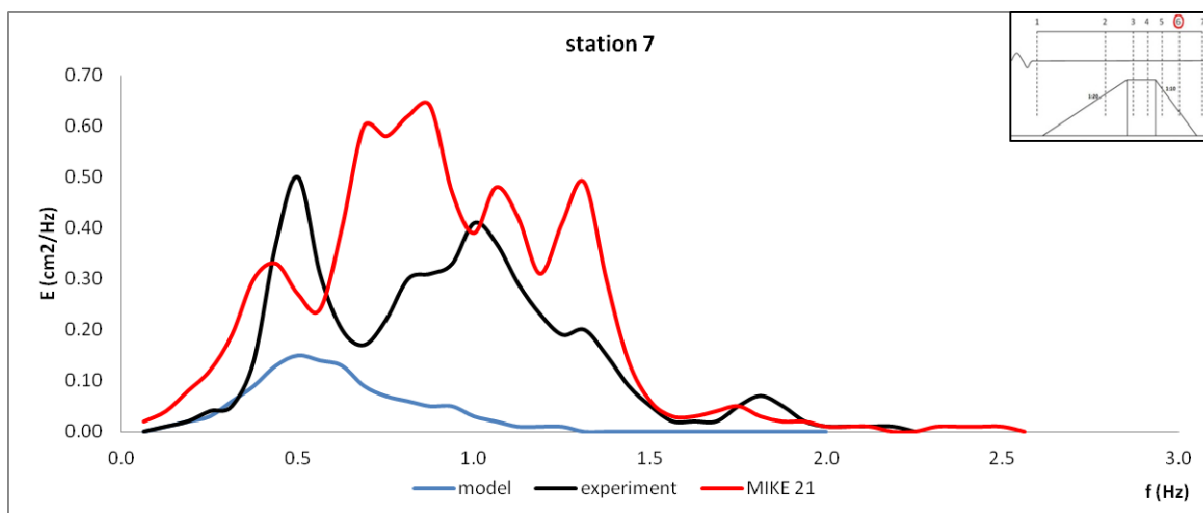
Σχήμα 6.55: Αισθητήρας 4: Σύγκριση φασμάτων μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.56: Αισθητήρας 5: Σύγκριση φασμάτων μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.57: Αισθητήρας 6: Σύγκριση φασμάτων μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.



Σχήμα 6.58: Αισθητήρας 7: Σύγκριση φασμάτων μοντέλου, πειράματος και MIKE 21.

Πίνακας 6.6: Σύγκριση στατιστικών παραμέτρων πειραματικών καταγραφών, προτεινόμενου μοντέλου και προγράμματος MIKE 21 (φάσμα JONSWAP με $f_p = 0.5$ Hz και $H_s = 1.8$ cm).

Στατιστική παράμετρος		Ενέργεια φάσματος ή ροπή μηδενικής τάξης m_0 (cm ²)	Σημαντικό ύψος κύματος H_{m0} (cm)	Συχνότητα κορυφής φάσματος f_p (Hz)	Ενέργεια φάσματος (cm ² /Hz)
Αριθμός αισθητήρα					
Αισθητήρας 2	Μοντέλο	0.25985	2.03902	0.50000	0.3700
	Πείραμα	0.26230	2.04860	0.50000	0.4100
	MIKE 21	0.52777	2.90591	0.50000	0.9000
Αισθητήρας 3	Μοντέλο	0.31662	2.25078	0.62500	0.5400
	Πείραμα	0.34238	2.34052	0.93750	0.5800
	MIKE 21	0.63222	3.18049	0.81250	0.7700
Αισθητήρας 4	Μοντέλο	0.30978	2.22632	0.62500	0.4900
	Πείραμα	0.35358	2.37851	0.93750	0.5200
	MIKE 21	0.64466	3.21163	0.81250	0.8400
Αισθητήρας 5	Μοντέλο	0.19234	1.75427	0.50000	0.3400
	Πείραμα	0.36845	2.42802	0.50000	0.5400
	MIKE 21	0.50884	2.85331	0.81250	0.7500
Αισθητήρας 6	Μοντέλο	0.12114	1.39218	0.50000	0.2700
	Πείραμα	0.34551	2.35121	0.50000	0.5900
	MIKE 21	0.52700	2.90379	0.68750	0.6500
Αισθητήρας 7	Μοντέλο	0.07242	1.07641	0.50000	0.1500
	Πείραμα	0.32726	2.28825	0.50000	0.5000
	MIKE 21	0.51169	2.86129	0.87500	0.6400

Οι αποκλίσεις μεταξύ των φασμάτων για τα υπολογιστικά μοντέλα και τα πειραματικά αποτελέσματα οφείλονται σε χρονικές αποκλίσεις στις χρονοσειρές που εισάγουμε στον κώδικα παραγωγής φασμάτων αφού δίνουν κυματικές συνιστώσες με διαφορετικά χαρακτηριστικά από τα πειραματικά ματαβάλλοντας τη μορφή του προκύπτοντος φάσματος είτε σε περιοχή χαμηλών συχνοτήτων, είτε σε υψηλότερες συχνότητες.

Συμπερασματικά, για τη διάδοση σύνθετου μη θραυόμενου κυματισμού πάνω από ύφαλο εμπόδιο τραπεζοειδούς διατομής μπορούμε να πούμε ότι το προτεινόμενο μοντέλο αλλά και το πρόγραμμα MIKE 21 δύνανται να περιγράψουν ικανοποιητικά τη διάδοση της κυματικής διαταραχής, με εξαίρεση την εμφάνιση αποκλίσεων στο πεδίο αποσύνθεσης του κυματισμού καθώς αρμονικές υψηλότερης τάξης διαδίδονται σε σχετικά βαθιά νερά στην περιοχή κατάντη του ύφαλου εμποδίου.

7. Συμπεράσματα εργασίας - προτάσεις

7.1 Γενικά συμπεράσματα μεταπτυχιακής εργασίας

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εξετάστηκε η ικανότητα προσομοίωσης κυματικής διάδοσης μέσω ενός μοντέλου Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις, με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς και ήπιας μη γραμμικότητας βασισμένο στις εξισώσεις της εργασίας των Beji και Nadaoka (1996), επί των οποίων εφαρμόστηκε θεωρία προσομοίωσης διάχυσης ενέργειας λόγω θραύσης των κυματισμών κατά Chen et al (2000). Το μοντέλο που προέκυψε διακριτοποιήθηκε μέσω ενός σχήματος επίλυσης τέταρτης τάξης πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το αριθμητικό μοντέλο συγκρίθηκαν με πειραματικά δεδομένα από τη διεθνή βιβλιογραφία και με τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE 21 BW. Από τη γενική ανασκόπηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

- ❖ Τα μοντέλα κυματικής διάδοσης τύπου Boussinesq αποτελούν ένα πολύ χρηστικό υπολογιστικό εργαλείο για τη μελέτη διάδοσης κυματισμών. Οι εργασίες που δημοσιεύτηκαν με την πάροδο των ετών, έδωσαν μία σειρά από μοντέλα, με σημαντικότερα τα πιο πρόσφατα, που δύνανται να προσομοιώσουν φαινόμενα διάδοσης κυματισμών πλήρους διασποράς και υψηλής μη γραμμικότητας ικανά να αναπαράγουν φαινόμενα ρήχωσης, διάθλασης, περίθλασης, κυματικής θραύσης, επίδρασης ρευμάτων και τριβής πυθμένα κ.α. Ωστόσο, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί και ένα σχήμα επίλυσης ευσταθές, ικανό να δίνει ακριβείς λύσεις για κάθε περίπτωση από τις προαναφερθείσες.
- ❖ Επιπρόσθετα, εμφανίζεται η ανάγκη να εμπλουτισθεί η διεθνής βιβλιογραφία από πειράματα σε δύο οριζόντιες διαστάσεις με εκτενή περιγραφή των πειραματικών διατάξεων και των θεωρήσεων, άμεσα προσβάσιμων από τη διεθνή κοινότητα ώστε να υπάρχει δυνατότητα επιβεβαίωσης αριθμητικών μοντέλων, ανάπτυξης αναλυτικότερων θεωριών προσομοίωσης και βαθμονόμησης παραμέτρων των θεωριών που υιοθετούνται. Στην παρούσα εργασία, αξιοποιήσιμη πηγή πειραμάτων αποτέλεσαν τα πειράματα των Beji και Battjes (1992, 1994) τα οποία παρότι ήταν σε μία οριζόντια διάσταση, αξιοποιήθηκαν ως πηγή επαλήθευσης του προτεινόμενου μοντέλου (με θεώρηση δεύτερης οριζόντιας διάστασης μεγάλου μήκους) καθώς ήταν διαθέσιμες όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για την ακριβή απόδοση της πειραματικής διάταξης στο προτεινόμενο μοντέλο Boussinesq και στο MIKE 21 BW.
- ❖ Το φαινόμενο της θραύσης χρήζει επιπρόσθετης ανάλυσης καθώς οι κλασικές θεωρήσεις επιφανειακού κυλίνδρου και τυρβώδους συνεκτικότητας απαιτούν βαθμονόμηση στις παραμέτρους προσομοίωσης, ορισμένες φορές και πέραν των προτεινόμενων τιμών, όπως προέκυψε κυρίως για το λογισμικό MIKE 21 BW αλλά και από το προτεινόμενο μοντέλο. Είναι απαραίτητο να προκύψουν είτε τιμές που να δύνανται να προσομοιώνουν τη θραύση σε κάθε περίπτωση και σε κάθε τύπο (spilling, plunging) είτε να υπάρχει κάποιο εύχρηστο κριτήριο, βάσει του οποίου να δίνονται τιμές στις μεταβλητές προσομοίωσης της θραύσης. Προς την κατεύθυνση ορθότερης προσομοίωσης, από φυσικής απόψεως κινείται το μοντέλο της στροβιλότητας, το οποίο

κάνει για πρώτη φορά τη θεώρηση στροβιλής ροής για την προσομοίωση των ταχυτήτων του υπολογιστικού πεδίου υπό την επίδραση του φαινομένου της θραύσης. Ο μελλοντικός προσανατολισμός προς τη θεώρηση αυτή και τις προεκτάσεις που μπορεί να λάβει είναι δυνατό να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

- ❖ Τα αποτελέσματα των πειραμάτων των Beji και Battjes (1994) κυρίως για μη θραυόμενους κυματισμούς κατέδειξαν την έντονη απελευθέρωση υψηλότερων αρμονικών κατάντη του ύφαλου εμποδίου που επιδρά δραστικά στο κυματικό προφίλ, φαινόμενο το οποίο εμφανίζουν αδυναμίες να το αποδώσουν πλήρως τα αριθμητικά αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και του MIKE 21 BW στην περιοχή καθοδικής κλίσης του ύφαλου έργου. Η αδυναμία των μοντέλων οφείλεται στο γεγονός ότι τα χρησιμοποιούμενα συστήματα εξισώσεων είναι ήπιας μη γραμμικότητας και άρα αδυνατούν να περιγράψουν το προαναφερθέν έντονα μη γραμμικό φαινόμενο.

7.2 Συμπεράσματα για το τροποποιημένο μαθηματικό μοντέλο Boussinesq (Memos et al. 2005)

Συνοψίζοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και τη σύγκρισή τους με τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και τα αποτελέσματα του λογισμικού MIKE 21 BW μπορούμε να εξάγουμε τις ακόλουθες διαπιστώσεις:

- ❖ Το προτεινόμενο μοντέλο δύναται να προσομοιώσει με ικανοποιητική ακρίβεια διάδοση μακρών, μη θραυόμενων, μονοχρωματικών κυματισμών σε ύφαλο εμπόδιο, με εξαίρεση την κατάντη περιοχή όπου έχουμε την εμφάνιση υψηλότερων αρμονικών οι οποίες καθίστανται υπεύθυνες για τις αποκλίσεις. Οι ίδιες δυνατότητες προσομοίωσης αφορούν και για τη διάδοση σύνθετων μη θραυόμενων κυματισμών.
- ❖ Το μοντέλο που παρουσιάστηκε χαρακτηρίζεται μοντέλο ήπιας μη γραμμικότητας. Κατά συνέπεια είναι απαραίτητο να συμπεριληφθούν στις εξισώσεις και όροι υψηλότερης μη γραμμικότητας για την ελαχιστοποίηση αποκλίσεων αυξανόμενης της μη γραμμικότητας.
- ❖ Η προσομοίωση θραύσης με το μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας βάσει της μελέτης των Chen et al. (2000) βελτιώνει τα αποτελέσματα των αναλύσεων για θραυόμενους απλούς κυματισμούς για τύπους κυλίσεως και εκτινάξεως, χωρίς να δημιουργεί αστάθειες καθώς το μοντέλο με χρήση των συνιστώμενων τιμών για τις παραμέτρους προσομοίωσης και του προτεινόμενου “filtering” τιμών λειτουργεί υποδειγματικά.
- ❖ Το τροποποιημένο μαθηματικό μοντέλο Boussinesq (Memos et al. 2005) όπως παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία, με προσομοίωση θραύσης κυματισμών κατά Chen et al (2000) (με τις προτεινόμενες τιμές των παραμέτρων θραύσης $\zeta_t^{(1)} = 0.35\sqrt{gd}$) δίνει αποτελέσματα που προσεγγίζουν ορθότερα τις πειραματικές μετρήσεις σε σχέση με αυτά του λογισμικού MIKE 21 BW (για γωνίες θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$). Τα αποτελέσματα του MIKE 21 BW βελτιώνονται μόνο στις αρχικές θέσεις μετρήσεων με θεώρηση γωνιών θραύσης $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$, ενώ δίνουν αποτελέσματα που αποκλίνουν περισσότερο από τις προτεινόμενες τιμές γωνιών (δεδομένης της μορφής του πυθμένα), στην περιοχή της υπήνεμης πλευράς του ύφαλου.
- ❖ Αποδεικνύεται μέσω των πειραμάτων η ικανοποιητική δυνατότητα περιγραφής θραύσης τύπων spilling και plunging, για περιπτώσεις τόσο βραχέων κυματισμών όσο και μακρών. Πρέπει να επισημανθεί για την περίπτωση των βραχέων κυματισμών στη

διατομή ελέγχου στο πέρας της στέψης, ότι τα αποτελέσματα εμφανίζουν ένα είδος “set-up” αφού εμφανίζουν συμφωνία με τα πειραματικά ως προς τη μορφή και τη διαφορά μεγίστου-ελαχίστου στην χρονοϊστορία μεταβολής ελεύθερης επιφάνειας, αλλά οι αριθμητικές τιμές του μοντέλου εμφανίζονται ελαφρώς υψηλότερα από αυτές του πειράματος. Στην περίπτωση μελέτης διάδοσης και θραύσης μακρών κυματισμών κρίνονται υποδειγματικά τα προκύπτοντα αποτελέσματα συγκρινόμενα με αυτά του πειράματος.

- ❖ Σημαντικό μειονέκτημα αποτέλεσε ο υπολογιστικός χρόνος για την ολοκλήρωση της κάθε ανάλυσης καθώς τα συνήθη υπολογιστικά εργαλεία και η κωδικοποίηση των εξισώσεων σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90/95 απαίτησε για κάθε ανάλυση ένα μέσο πραγματικό χρόνο προσομοίωσης της τάξης των 24 ωρών.

7.3 Συμπεράσματα για το λογισμικό MIKE 21 BW

Βάσει των αποτελεσμάτων του μοντέλου MIKE 21 BW και μέσα από τη σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα του μοντέλου και των πειραματικών μετρήσεων μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- ❖ Το πρόγραμμα MIKE 21 BW δύναται να περιγράψει σε ικανοποιητικό βαθμό την κυματική διάδοση μακρών, μη θραυόμενων, απλών και σύνθετων κυματισμών σε ύφαλο έργο, με μικρές αποκλίσεις στο κατάντη τμήμα του λόγω εμφάνισης των υψηλότερων αρμονικών. Αυτό συμβαίνει διότι και το MIKE 21 (όπως το προτεινόμενο μοντέλο) δεν περιέχει όρους υψηλής μη γραμμικότητας.
- ❖ Επίσης, από τις αναλύσεις για θραυόμενους βραχείς και μακρούς μονοχρωματικούς κυματισμούς, προέκυψε η αδυναμία πλήρους και ορθής προσομοίωσης του φαινομένου της θραύσης από το πρόγραμμα, γεγονός που οφείλεται στις τιμές των γωνιών θραύσης που θεωρήθηκαν. Η μελέτη των Madsen et al. (1997a) πρότεινε $(\varphi_B, \varphi_o) = (20^\circ, 10^\circ)$ γωνίες που εξετάστηκαν για τη διάδοση βραχέων κυματισμών τύπου spilling και plunging και παρότι δίνουν καλύτερη συμπεριφορά στους πρώτους αισθητήρες μετρήσεων (έναρξη και πέρας στέψης ύφαλου), έχουν ισχυρές αποκλίσεις στον αισθητήρα στο κατάντη τμήμα. Από την άλλη, η θεώρηση κατά Schäffer et al. (1993) για $(\varphi_B, \varphi_o) = (14^\circ, 7^\circ)$ βελτιώνει τα αποτελέσματα του κατάντη αισθητήρα, αλλά αλλοιώνει τα αποτελέσματα των προηγούμενων δύο. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι προτεινόμενες τιμές δεδομένης της μορφής του πυθμένα είναι αυτές κατά Schäffer et al. (1993) οι οποίες δεν αποδίδουν ορθά τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας στις περιοχές ανοδικής κλίσης του υφάλου και επί της στέψης αυτού.
- ❖ Το πρόγραμμα αδυνατεί να αποδώσει επαρκώς τη θραύση τύπου plunging (σημαντικότερη από πλευράς ακτομηχανικής θραύση), όπως αναφέρεται και στο εγχειρίδιό του. Ωστόσο, η θεώρηση πάχους επιφανειακού κυλίνδρου ίσου με 2 αντί 1.5 βελτιώνει τα αποτελέσματα. Επίσης, η χρήση φίλτρου τιμών σε περίπτωση αδυναμίας προσομοίωσης θραύσης από το πρόγραμμα δεν έχει φυσική σημασία και αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα καθώς μειώνει τεχνητά την κυματική ενέργεια και άρα την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.
- ❖ Αξίζει βέβαια να σημειωθεί ότι το MIKE 21 BW είναι ένα ισχυρό εμπορικό υπολογιστικό εργαλείο καθώς κατά αντιπαραβολή με τα προτεινόμενα πρόγραμμα εκτελεί ταχέως τις

απαιτούμενες αναλύσεις. Ενδεικτικά, μία ανάλυση (σε 2 οριζόντιες διαστάσεις) που το προτεινόμενο μοντέλο καλείται να ολοκληρώσει σε 24 ώρες, το MIKE 21 BW μπορεί να την ολοκληρώσει σε μόνο 4 ώρες (16,67%).

7.4 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα ως προς το τροποποιημένο μαθηματικό μοντέλο Boussinesq (Memos et al. 2005)

Στόχος πλήθους μελετών που ασχολήθηκαν με τα μοντέλα τύπου Boussinesq αποτέλεσε η διεύρυνση της εφαρμοσιμότητάς τους. Αθροίζοντας την προσπάθεια που έγινε μέσω της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, μπορούμε να πούμε με ασφάλεια ότι παρουσιάστηκε ένα ευσταθές και ακριβές μοντέλο Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις με ικανότητα προσομοίωσης φαινομένων θραύσης για απλούς και σύνθετους κυματισμούς, ικανό να προσομοιώσει επαρκώς το φαινόμενο της κυματικής θραύσης. Το τροποποιημένο μαθηματικό μοντέλο Boussinesq (Memos et al. 2005) μπορεί σαφώς να βελτιωθεί στη συνέχεια μέσω των ακόλουθων διερευνήσεων:

- Εισαγωγή υψηλότερων όρων μη γραμμικότητας στις εξισώσεις του μοντέλου.
- Προσομοίωση για το φαινόμενο της θραύσης μέσω του μοντέλου στροβιλότητας και περαιτέρω διερεύνηση προς τη συγκεκριμένη θεώρηση.
- Επαλήθευση του μοντέλου με περισσότερα πειράματα για θραυόμενους κυματισμούς και μη, αλλά και επαλήθευσή του για τυχαίους θραυόμενους κυματισμούς (φάσματα).
- Επέκταση των δυνατοτήτων του μοντέλου (μακροπρόθεσμα) για εφαρμογή σε τυχαία μεταβαλλόμενους πυθμένες χωρίς περιορισμούς.

Βιβλιογραφικές αναφορές

1. Abbott, M.B., Petersen, H.M., Skovgaard, O., 1978. "On the numerical modeling of short waves in shallow water". *Journal of Hydraulic Research*, vol. 16, Issue 3, pp 173-204.
2. Abbott, M.B., McCowan, A.D., Warren, I.R., 1984. "Accuracy of short-wave numerical models," *Journal of Hydraulic Research*, vol. 110, Issue 10, pp 1287-1301.
3. Agnon, Y., Madsen, P.A., Schäffer, H.A., 1999. "A new approach to high order Boussinesq models". *Journal of Fluid Mechanics*, 399, 319-333.
4. Battjes, J.A. 1974. "Surf Similarity," *Proceedings of the 14th Coastal Engineering Conference*, American Society of Civil Engineers, pp 466-480.
5. Battjes, J.A., Janssen, J.P., 1978. "Energy loss and setup due to breaking of random waves". *Proceedings of the 16th International Conference on Coastal Engineering*, pp 569-587, Hamburg.
6. Beji, S., Battjes, J.A., 1993. "Experimental investigation of wave propagation over a bar". *Coastal Engineering*, vol. 19, Issue 1-2, pp 151-162.
7. Beji, S., Battjes, J.A., 1994. "Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar". *Coastal Engineering*, vol. 23, Issue 1-2, pp 1-16.
8. Beji, S., Nadaoka, K., 1996. "A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth". *Ocean Engineering*, vol. 23, Issue 8, pp 691-704.
9. Bingham, H.B., Agnon, Y., 2005. "A Fourier Boussinesq method for nonlinear water waves". *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 24, pp 255-274.
10. Booij, N., 1983. "A note on the accuracy of the mild-slope equation". *Coastal Engineering*, vol. 7, issue 3, pp 191-203.
11. Borgman, L. E. 1965. Hyd. Engrg. Lab., University of California, Berkley, HEL1-12.
12. Borgman, L. E. 1969. "Ocean wave Simulation for Engineering Design," *ASCE Jour. Waterw., Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 95, pp 557-583.
13. Bouws, E., Gunther, H., Rorenthal, W., and Vincent, C. L. 1984. "Similarity of the Wind Wave Spectrum in Finite Depth Water, Part I-Spectral Form," *Jour. Geophys. Res.*, vol. 89, No. C1, pp 975-986.

14. Bouws, E., Gunther, H., and Vincent, C. L. 1985. "Similarity of the wind wave spectrum in finite-depth water, Part I-Spectral form," *J. Geophys. Res.*, vol. 85, No. C3, pp 1524-1530.
15. Bretschneider, C. L. 1959. "Wave Variability and Wave Spectra for Wind-Generated Gravity Waves," U.S. Army Corps of Engrs., Beach Erosion Board, Tech. Memo. No. 118.
16. CEM, Coastal Engineering Manual, 2008, In: <http://chl.erdc.usace.army.mil/cem>
Last access: June 2010.
17. Chakrabarti, S. K. 1987. "Hydrodynamics of Offshore Structures," WIT Press, Southampton, UK
18. Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B., Chawla, A., 2000. "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I: 2D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, pp 48-56.
19. Chondros, M., 2008. "Διάδοση και θραύση κυματισμών στην παράκτια ζώνη". Διπλωματική εργασία Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.
20. Chondros, M., 2010. "Διάδοση και θραύση τυχαίων κυματισμών στην παράκτια ζώνη". Μεταπτυχιακή εργασία ΔΠΜΣ: «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη ΕΜΠ.
21. Copeland, G.J.M., 1985. "A practical alternative to the mild-slope wave equation". *Coastal Engineering*, vol. 9, Issue 2, pp 125-149.
22. D' Alessandro, F., Tomasicchio, G.R., 2008. "The BCI criterion for the initiation of breaking process in Boussinesq-type equations wave models". *Coastal Engineering*, vol. 55, No. 12, pp 1174-1184.
23. Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1984. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
24. Deigaard, R., 1989. "Mathematical modeling of waves in the surf zone". *Progress report No. 69*, pp. 47-59. Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark, Lyngby.
25. Divoky, D., LeMéhauté, B., and Lin, A. 1970. "Breaking Waves on Gentle Slopes," *Journal of Geophysical Research*, vol. 75, No. 9, pp 1681-1692.
26. Dommermuth, D., Yue, D.K.P., 1987. "A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves". *Journal of Fluid Mechanics*, 184, pp 267-288.
27. Douglass, S.L. 1990. "Influence of Wind on Breaking Waves," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, vol. 116, No. 6, pp 651-663.

28. Elgar, S. et al. 1985. "Wave Group Statistics from Numerical Simulation of a Random Sea," *Jour. Applied Ocean Res.*, vol. 7, pp 93-96.
29. Engquist, B., Majda, A., 1977. "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves". *Mathematics of Computation*, vol. 31, No 139, pp 629-651.
30. Galvin, C.J. 1968. "Breaker Type Classification on Three Laboratory Beaches," *Journal of Geophysical Research*, vol. 73, No. 12, pp 3651-3659.
31. Gobbi, M.F., Kirby, J.T., 1999. "Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model". *Coastal Engineering*, vol. 37, Issue 1, pp 57-96.
32. Gobbi, M.F., Kirby, J.T., Wei, G.E., 2000. "A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to $O(kh)^4$ ". *Journal of Fluid Mechanics*, 405, pp 181-210.
33. Goda, Y. 1974. "Estimation of wave Statistics from Spectra Information", *Proc. Intl. Symposium on Ocean Wave Meas. and Anal.*, ASCE, vol. 1, pp 320-337.
34. Goda, Y. 1985. *Random Seas and Design of Maritime Structures*. University of Tokyo, Japan.
35. Goda, Y. 1985a. "Numerical Examination of Several Statistical Parameters of Sea Waves", *Rept. Port and Harbor Res. Inst.*, vol. 24, No. 4, pp 65-102.
36. Goda, Y. 1985b. *Random Seas and Design of Maritime Structures*, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, Japan.
37. Goda, Y., 1999. *Random seas and design of maritime structures*, 2nd Edition. Advanced Series on Ocean Engineering, vol. 15, World Scientific.
38. Grilli, S.T., Skourup, J., Svendsen, I.A., 1989. "An efficient boundary element method for nonlinear water waves", *Eng. Anal. With Boundary Elements*, vol. 6, No 2, pp 97-107.
39. Hasselmann et al. 1973. "Measurements of Wind-Wave Growth and Swell Decay during the Joing North Sea Wave Project (JONSWAP)," *Deutsche Hydrograph. Zeit.*, *Erganzungsheft Reihe A* (80), No. 12.
40. Hansen, J.B., Svendsen, I.A., 1979. "Regular waves in shoaling water: Experimental data". *Technical Report, ISVA Series*, Paper 21.
41. Hasselmann, K. et al. 1976. "A Parametric Wave Prediction Model," *Jour. Phys. Ocean.*, vol. 6, pp 200-228.
42. Heitner, K. L., Housner, G.W. (1970). "Numerical model for tsunami runup." *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, vol. 96, pp 701-719.

43. Hudspeth, R. T., and Chen, M. C. 1979. "Digital Simulation of Nonlinear Random Waves," *ASCE Jour. Waterw., Port, Coastal and Ocean Engr.*, vol. 105, pp 67-85.
44. Hughes, S.A., 1993. *Physical Models and Laboratory Techniques in Coastal Engineering*. Advanced Series on Ocean Engineering, vol. 7. World Scientific.
45. ISSC 1964. *Proceedings of the Second International Ship Structures Congress*, Delft, Netherlands.
46. ITTC 1966. "Recommendations of the 11th International Towing Tank Conference," *Proc. 11th ITTC*, Tokyo, Japan.
47. Israeli, M., Orszag, S.A., 1981. "Approximation of radiation boundary conditions". *Journal of Computational Physics*, vol. 41, Issue 1, pp 115-135.
48. Jonsson, I.G. 1966. "Wave Boundary Layers," *Proc. 10th Conf. Coastal Eng.*, ASCE, Tokyo, pp 127-148.
49. Jonsson, I.G., Carlsen, N.A., 1976. "Experimental and Theoretical Investigations in an Oscillatory Rough Turbulent Boundary Layer," *J. Hydraulics Res.*, vol. 14.
50. Kajiwara, K., 1968. "A model of the Bottom Boundary Layer in Water Waves," *Bull. Earthquake Res. Inst. (Japan)*, vol. 46, pp 75-123.
51. Kamphuis, J.W., 1975. "Friction Factor under Oscillatory Waves," *J. Waterways, Harbors Coastal Eng. Div.*, ASCE, vol. 101, pp 135-144.
52. Karambas, Th. V., Koutitas, C., 1992. "A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations". *Coastal Engineering*, vol. 18, Issues 1-2, pp 1-19.
53. Karambas, Th. V., 1999. "A unified model for periodic non-linear dispersive waves in intermediate and shallow water". *Journal of Coastal Research*, vol. 15, Issue 1, pp 128-139.
54. Karambas, Th. V., Memos, C.D., 2009. "Boussinesq model for weakly nonlinear fully dispersive water waves". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 135, No. 5, pp 187-199.
55. Keller, J.B., 1948. "The solitary wave and periodic waves in shallow water". *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 1, Issue 4, pp 323-339.
56. Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 2000. "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I: 1D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, pp 39-47.
57. Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B., Dalrymple, R.A., 1998. "Fully nonlinear Boussinesq wave model, Documentation and user's manual." Center for

Applied Coastal Research, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Delaware, Research Report no. CACR-98-06.

58. Komar, P. D., and Gaughan, M. K. 1973. "Airy Wave Theory and Breaker Height Prediction." *Proceedings of the 13th Coastal Engineering Conference*, American Society of Civil Engineers, pp 405-418.
59. Koutsourelakis, I.G., 2009. Προσομοίωση θραύσης μονοχρωματικών κυματισμών και τριβής πυθμένα σε ένα εξελιγμένο ομοίωμα Boussinesq. Μεταπτυχιακή εργασία ΔΠΜΣ: «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.
60. Koutsourelakis, I.G., Memos, C.D., 2011. "Wave breaking and bottom friction over mildly sloping bed and bar in a new Boussinesq wave model". *Proceedings of the 34th IAHR World Congress*.
61. Larsen, J., Dancy, H., 1983. "Open boundaries in short wave simulations - A new approach". *Coastal Engineering*, vol. 7, Issue 3, pp 285-297.
62. Lee, C., Suh, K.D., 1998. "Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations". *Coastal Engineering*, vol. 34, Issues 1-2, pp 35-57.
63. Liu, P. C. 1971. "Normalized and Equilibrium Spectra of Wind-Wave in Lake Michigan," *Jour. Phys. Ocean.*, vol. 1, No. 4, pp 249-257.
64. Li, Y.S., Zhan, J.M., 2001. "Boussinesq-type model with boundary-fitted coordinate system," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, vol. 127, No. 3, pp 152-160.
65. Li, B., 2008. "Wave equations for regular and irregular water wave propagation". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 134, No. 2, pp 121-142.
66. Longuet-Higgins, M.S. 1952. "On the Statistical Distribution of the Wave Heights of Sea Waves," *Jour. Marine Res.*, vol. 11, pp 245-266.
67. Longuet-Higgins, M.S., et al. 1963. *Ocean Wave Spectra*, Prentice-Hall, Inc.
68. Luth, H.R., Klopman, G., Kitou, N., 1993. "Kinematics of waves breaking partially on an offshore bar". *Rep. H1573, 13 pp.*, Delft Hydraulics, Delft, Netherlands.
69. Madsen, P.A., Murray, R., Sørensen, O.R., 1991. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics". *Coastal Engineering*, vol. 15, Issue 4, pp 371-388.
70. Madsen, P.A., Sørensen, O.R., 1992. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry." *Coastal Engineering*, vol. 18, Issues 3-4, pp 183-204.

71. Madsen, P.A., Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., 1997a. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part I: model description and cross-shore motion of regular waves". *Coastal Engineering*, vol. 32, Issue 4, pp 255-287.
72. Madsen, P.A., Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., 1997b. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part II: surf beat and swash oscillations for wave groups and irregular waves". *Coastal Engineering*, vol. 32, Issue 4, pp 289-319.
73. Madsen, P.A., Schäffer, H.A., 1998. "Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis," *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 356, pp 3123-3184.
74. Madsen, P.A., Bingham, H.B., Hua Liu, 2002. "A new Boussinesq model for fully nonlinear waves from shallow to deep water". *Journal of Fluid Mechanics*, 462, 1-30.
75. Madsen, P.A., Bingham, H.B., Schäffer, H.A., 2003. "Boussinesq-type formulations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves: derivation and analysis". *Proceedings of the Royal Society of London*, A 459, pp 1075-1104.
76. Madsen, P.A., Fuhrman, D.R., Wang, B., 2006. "A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry". *Coastal Engineering*, vol. 53, Issue 5-6, 487-504.
77. Mei, C.C., LeMéhauté, B., 1966. "Note on the equations of long waves over an uneven bottom," *J. Geophys. Res.*, vol. 71, Issue 2, 393-400.
78. Memos, C.D., Karambas, Th. V., Avgeris, I., 2005. "Irregular wave transformation in the nearshore zone: experimental investigations and comparisons with a higher order Boussinesq model". *Ocean Engineering*, vol. 32, Issues 11-12, pp 1465-1485.
79. Memos, C.D., 2010. Θαλάσσια Υδροδυναμική, πρόχειρες σημειώσεις, Αθήνα.
80. Miche, M. 1951. "Le Pouvoir Réfléchissant des Ouvrages Maritimes Exposés à L' Action de la Houle," *Annals des Ponts et Chaussées*, 121e Année, pp 285-319 (translated by Lincoln and Chevron, University of California, Berkley, Wave Research Laboratory, Series 3, Issue 363, June 1954).
81. McCowan, J. 1891. "On the Solitary Wave," *Philosophical Magazine*, 5th Series, vol. 36, pp 430-437.
82. McCowan, J., 1891. "On the solitary wave". *Philosophical Magazine*, 5th Series, vol. 32, Issue 194, pp 45-58.
83. Mitsuyasu, H. 1972. "The One-Dimensional Wave Spectra at Limited Fetch," *Proc. 13th Coastal Engr. Conf.*, vol. 1, pp 289-306.

84. Mitsuyasu, H. et al. 1975. "Observations of the Directional spectrum of Ocean Waves Using a Cloverleaf Buoy," *Jour. Phys. Ocean.*, vol. 5, pp 750-760.
85. Munk, W. H. 1949. "The Solitary Wave Theory and Its Applications to Surf Problems," *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 51, pp 376-462.
86. Musumeci, R.E., Svendsen, I.A., Veeramony, J., 2005. "The flow in the surf zone: a fully nonlinear Boussinesq-type approach". *Coastal Engineering*, vol. 52, Issue 7, pp 565-598.
87. Nadaoka, K., Beji, S., Nakagawa, Y., 1994. "A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions," *Proceedings of the 24th Coastal Engineering Conference*, Kobe, pp 427-441.
88. Nagai, K. 1972. Diffraction of the irregular sea due to breakwaters. In: *Coastal Engineering in Japan*, vol. 15, pp 59-67.
89. Newland, D. E. 1984. *An introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis* (second edition). Longman Scientific & Technical, England.
90. Nwogu, O., 1993. "Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation." *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, vol. 119, No. 6, pp 618-638.
91. Ochi, M. K. 1973. "On Prediction of Extreme Values," *Jour. Ship Res.*, vol. 1, pp 29-37.
92. Peregrine, D.H., 1967. "Long waves on a beach". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 27, Issue 4, pp 815-827.
93. Peregrine, D.H., 1972. "Equations for water waves and the approximation behind them". In: R.E. Meyer, Editor, *Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport*, Academic Press, New York.
94. Phillips, O. M. 1958. "On the Generation of Waves by Turbulent Wind," *Jour. Fluid Mech.*, vol. 2, pp 417-445.
95. Pierson, W. J., and Moskowitz, L. 1964. "A Proposed Spectral Form for Fully-Developed Wind Sea Based on the Similarity Law of S. A. Kitaigorodskii," *Journal of Geophysical Research*, vol. 69, pp 5181-5203.
96. Radder, A.C., Dingemans, M.W., 1985. "Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves". *Wave Motion*, vol. 7, Issue 5, pp 473-485.
97. Schäffer, H.A., Deigaard, R., Madsen, P.A., 1992. "A two-dimensional surf zone model based on the Boussinesq equations". *Proceedings of the 23rd International Conference on Coastal Engineering*, chapter 43, pp 576-590.

98. Schäffer, H.A., Madsen, P.A., Deigaard, R., 1993. "A Boussinesq model for waves breaking in shallow water." *Coastal Engineering*, vol. 20, Issues (3-4), pp 185-202.
99. Schäffer, H.A., Madsen, P.A., 1995. "Further enhancements of Boussinesq type equations". *Coastal Engineering*, vol. 26, Issues (1-2), pp 1-14.
100. Scott, J. R. 1965. "A Sea Spectrum for Model Tests and Long-Term Ship Prediction," *Jour. Ship Res.*, vol. 9, pp 145-152.
101. Singamsetti, S. R., and Wind, H. G. 1980. "Characteristics of Breaking and Shoaling Periodic Waves Normally Incident on to Plane Beaches of Constant Slope," Report M1371, Delft Hydraulic Laboratory, Delft, The Netherlands.
102. Smith, J. M., Sherlock, A. R., and Resio, D. T. 2001. "STWAVE: Steady-State Spectral Wave Model User's Guide for STWAVE Version 3.0," ERDC/CHL SR-01-01, U.S. Army Engineer Research and Development Center, Vicksburg, MS, 80 pp.
103. Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., Madsen, P.A., 1998. "Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part III. Wave-induced horizontal nearshore circulations". *Coastal Engineering*, vol. 33, pp 155-176.
104. Sørensen, O R, Schäffer, H A and Sørensen. L S (2004), "Boussinesqtype modelling using an unstructured finite element technique". *Coastal Engineering*, vol. 50, pp 181-198.
105. Spanos, P. D. 1983. "ARMA Algorithms for Ocean Wave Modeling," *ASME Jour. Energy Resources Tech.*, vol. 105, pp 300-309.
106. St. Denis, M., and Pierson, W. J. 1953. "On the Motion of Ships in Confused Seas," *Trans. SNAME*, vol. 61, pp 280-357.
107. Stive, M.J.F., 1980. "Velocity and pressure field of spilling breakers". *Proceedings of the 17th International Conference on Coastal Engineering*, pp. 547-566, Sydney.
108. Svendsen, I.A., 1984. "Wave heights and set-up in a surf zone". *Coastal Engineering*, vol. 8, Issue 4, pp. 303-329.
109. Svendsen, I.A., Yu, K., Veeramony, J., 1996. "A Boussinesq breaking wave model with vorticity". *Proceedings of the 25th International Conference on Coastal Engineering*, pp 1192-1204, Orlando.
110. Sverdrup, H. U., and Munk, W. H. 1947. *Wind, Sea and Swell: Theory of Relations for Forecasting*, U.S. Navy Hydro. Office, Publication No. 601.
111. Thornton, E. B., and Guza, E. T. 1983. "Transformation of Wave Height Distribution," *Journal of Geophysical Research*, vol. 88, No. C10, pp 5925-5938.

112. Tucker, M. J., et al. 1984. "Numerical Simulation of a Random Sea: A Common Error and Its Effect Upon Wave Group Statistics," *Jour. Applied Ocean Res.*, vol. 6, pp 118-122.
113. Veeramony, J., Svendsen, I.A. 2000. "The flow in surf-zone waves," *Coastal Engineering*, vol. 39, Issues 2-4, pp 93-122.
114. Weggel, J. R. 1972. "Maximum Breaker Height," *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, vol. 98, No. WW4, pp 529-548.
115. Wei, G., Kirby, J.T., 1994. "A high order time-dependent numerical model for the extended Boussinesq equations". *Proceedings of the International Symposium: Waves-Physical and Numerical Modeling*, pp 544-553, Vancouver.
116. Wei, G., Kirby, J.T., 1995. "Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, No. 5, 251-261.
117. Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R., 1995. "A fully non-linear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly non-linear unsteady waves". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 294, pp 71-92.
118. Wei, G., 1997. Simulation of water waves by Boussinesq models. Phd dissertation, University of Delaware, 202 pp.
119. Wei, G., Kirby, J.T., Sinha, A., 1999. "Generation of waves in Boussinesq models using a source function method". *Coastal Engineering*, vol. 36, Issue 4, pp 271-299.
120. Witting, J.M., 1984. "A unified model for the evolution nonlinear water waves". *Journal of Computational Physics*, vol. 56 (2), pp 203-236.
121. Yoon, S.B., Liu, P.L.F., 1989. "Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water." *J. Fluid Mech.*, 205, pp 397-419.
122. Yoon, S.-B., Choi, J.-W., 2001. "A note on extension of fully dispersive weakly nonlinear wave equations for rapidly varying topography". *Coastal Engineering Journal*, vol. 43, Issue 3, pp 143-160.
123. Zelt, J. A. (1991). "The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves." *Coastal Engineering*, vol. 15, pp 205-246.
124. Zou, Z.L., 1999. "Higher order Boussinesq equations." *Ocean Engineering*, vol. 26, pp 767-792.

Παράρτημα 1 (Κώδικες προσομοίωσης)

A. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΒΑΘΥΜΕΤΡΙΑΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (iim=1430, jjm=800)
dimension d(iim,jjm), dn(iim,jjm)
data dx,D0/0.05,0.40/
data IM,JM/600,550/
data JMS1,JMS2,JMS3/170,390,430/
data slop1,slop2,slop3/20.,10.,25./
data jsbr1,jsbr2/290,330/
c smoothing parameters
sm1=0.8
sm2=(1.-sm1)/2.
jsm=20
sm4=0.6
sm5=(1.-sm4)/2.
c initial conditions
do i=1,im
do j=1,jm
d(i,j)=d0
end do
end do
c *****
c bathymetry production
c *****
do i=1, im
do j=1, jms1
d(i,j)=d0
end do
do j=jms1+1, jsbr1
d(i,j)=d(i,j-1)-dx/slop1
end do
do j=jsbr1+1, jsbr2
d(i,j)=d(i,j-1)
end do
do j=jsbr2+1, jms2
d(i,j)=d(i,j-1)+dx/slop2
end do
do j=jms2+1, jms3
d(i,j)=d(i,j-1)
end do
do j=jms3+1, jm
d(i,j)=d(i,j-1) !-dx/slop3
end do
end do
c *****
c smoothing bathymetry
c *****
do i=1,im
do j=jms1,jms3
d(i,j)=sm1*d(i,j)+sm2*(d(i,j+1)+d(i,j-1))
end do
end do
do ijk=1,5
do i=2, im-1
do j=2, jm-1
d(i,j)=.5*d(i,j)+.125*d(i+1,j)+.125*d(i-1,j)
& +.125*d(i,j-1)+.125*d(i,j+1)
end do
end do
end do
open (unit=8,file='depth.dat')
write (8,*) im,jm
do j=1,jm
```

```
write (8,*) j
write (8,16) (d(i,j), i=1,im)
end do
16 format (3f25.7)
close(8)
do i=1,im
do j=1, jm
dn(i,j)=-d(i,j)
end do
end do
open (unit=17,file='depth3.dat')
do j=1,JM
do i=1,IM
write (17,16) i*dx,j*dx,dn(i,j)
end do
end do
close(17)
do j=1,jm
write (*,*) j, d(im/2,j)
end do
write (*,*) 'freeboard=', d(im/2,310)
stop
end
```

B. ΠΥΚΝΩΣΗ ΤΙΜΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (ΧΡΟΝΙΚΗ)

```
program times
!Chondros M., pyknwsh timwn
integer i,j
parameter ijm=60000
dimension p(ijm),r(ijm),s(ijm),t(ijm)
open (unit=1,file='exp.dat')
open (unit=2,file='dist.dat')
im=5120
! im=actual number of points in the initial array
do j=1,im
read (1,*) p(j),r(j)
end do
in=p(im)/0.005
! 0.005 the required time step
do i=1,in
s(i)=float(i)*0.005
end do
do j=1,im-1
do i=1,in
if (s(i).gt.p(j).and.s(i).lt.p(j+1).and.r(j+1)>r(j)) t(i)=(s(i)-p(j))*abs(r(j+1)-
r(j))/(p
(j+1)-p(j))+r(j)
continue
if (s(i).gt.p(j).and.s(i).lt.p(j+1).and.r(j+1)<r(j)) t(i)=(p(j+1)-s(i))*(r(j)-
r(j+1))/(p(
j+1)-p(j))+r(j+1)
continue
if (s(i).gt.p(j).and.s(i).lt.p(j+1).and.r(j+1).eq.r(j)) t(i)=r(j)
continue
end do
end do
do i=2,in-1
if (t(i).eq.0) t(i)=(t(i+1)+t(i-1))/2
continue
end do
do i=1,in
write (2,*) s(i),t(i)
! time and elevation required
end do
end program times
```

Γ. ΚΩΔΙΚΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ FOURIER

```
PARAMETER (JJM=80000)
C FINITE FOURIER SERIES ANALYSIS
DIMENSION F(JJM),A(JJM),B(JJM),AMPL(JJM)
open (3,file='7c.dat')
open (11,file='17c.dat')
read (3,*) NN,DT
do 87 i=1,NN
87 READ (3,*) abcd,F(I)
CLOSE(3)
NNN=NN-1
N=NN/2
DO 5 I=1,N
write (*,*) i
A(I)=0
DO 10 K=1,NN
10 A(I)=A(I)+F(K)*SIN(6.2832*I*(K-1)/NNN)
5 A(I)=2*A(I)/NN
DO 15 I=1,N
write (*,*) i
B(I)=0
DO 20 K=1,NN
20 B(I)=B(I)+F(K)*COS(6.2832*I*(K-1)/NNN)
15 B(I)=2*B(I)/NN
AMAX=0
DO 30 I=1,N
write (*,*) i
AMPL(I)=(A(I)**2+B(I)**2)
30 continue
do j=1,4
do i=2,n-1
ampl(i)=(.5*ampl(i)+.25*ampl(i-1)+.25*ampl(i+1))
end do
end do
do 85 k=1,N
85 WRITE(11,40) K/(NN*DT),.5*AMPL(K)*(NN*dt)
40 FORMAT(2F12.6)
STOP
END
```

Δ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ SIMPSON

```
program simpson38
integer i
PARAMETER IJM=20000
dimension g(IJM), f(IJM)
open (unit=10,file='17c.dat')
open (unit=11,file='ROPH7c.dat')
n=1600
do i=1,n
read (10,*) G(I),F(I)
end do
H=(G(N)-G(1))/N
sum=0.
DO I=4,N-4
SUM=SUM+F(I)
END DO
XINTE=(H/48)*(59*F(1)+43*F(2)+49*F(3)+48*SUM+49*F(N-3)+43*F(N-2)+59*F(N-
1)+17*F(N))
HS=4*SQRT(XINTE)
! write (*,*) sum
WRITE (*,*) XINTE, HS
WRITE (11,*) XINTE, HS

STOP
end program simpson38
```

E. ΚΩΔΙΚΑΣ BOUSSINESQ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΩΝ BEJI ΚΑΙ BATTJES (1992) (long plunging waves)

```

implicit real*8 (a-h,o-z)
implicit integer*4 (i-n)
parameter (iim=1510, jjm=570)
c 2D NONLINEAR DISPERSIVE WAVES
DIMENSION H(iim, jjm), d(iim, jjm), Z(iim, jjm), U(iim, jjm), dn(iim, jjm)
DIMENSION ZB(iim, jjm), UNP(iim, jjm), UN(iim, jjm), ZN(iim, jjm),
! DK(iim, jjm), zm(iim, jjm), VNP(iim, jjm), VN(iim, jjm)
!, ZNP(iim, jjm), UB(iim, jjm), ZZ(iim, jjm), UU(iim, jjm), zin(iim, jjm)
!, dks(iim, jjm), dd(iim, jjm), VB(iim, jjm), VV(iim, jjm), vc(iim, jjm)
!, He(iim, jjm), zs(iim, jjm), V(iim, jjm), ed(iim, jjm), uc(iim, jjm)
!, itb(iim, jjm), ctb(iim, jjm), zt(iim, jjm), umax(iim, jjm), vmax(iim, jjm)
DIMENSION A(iim, jjm), B(iim, jjm), C(iim, jjm), G(iim, jjm), H11(iim, jjm)
DIMENSION usn(iim, jjm), usb(iim, jjm), us(iim, jjm), uso(iim, jjm),
! vsn(iim, jjm), vsb(iim, jjm), vs(iim, jjm), vsn(iim, jjm), usl(iim, jjm),
! vs1(iim, jjm), hpr(iim, jjm), usnp(iim, jjm), vsnp(iim, jjm)
dimension fscr(jjm), ew(iim, jjm), dkm(iim, jjm)
dimension eu(iim, jjm), ev(iim, jjm), euv(iim, jjm), ez(iim, jjm)
c *****
c Application data
c *****
data DT, DX, D0, TEND/0.005, 0.05, 0.4, 40.0/
data ga, pi/9.81, 3.1415926/
DY=DX
DATA Ho, PER, thita/0.054, 2.5, 0.0/
data isbr, jsbr1, jsbr2/13, 290, 330/
data JMS3, JMS4/170, 390/
jst=50
CS=0.5 !smagorinsky data
DEL=2*DX !smagorinsky data
nm=int(tend/dt)+1
nint=5
anut0=18.1
qmin=1.00
wfl=0.99
wf2=(1.-wfl)/4.
c *****
c breaking parameters
c *****
cbrk=1.2
c cbrk=2.5
c cbrk=3.5
itbrk=0
et1=0.35
et2=0.15
coeft=5.0
ddk=dx*0.05
do i=1, iim
do j=1, jjm
itb(i, j)=float(nm)
ctb(i, j)=0.35
end do
end do
c *****
c bathymetry
c *****
open (unit=8, file='depth.dat')
read (8, *) im, jm
do j=1, jjm
read (8, *) jaa
read (8, *) (d(i, j), i=1, iim)
end do
16 format (10f7.3)
close(8)
den=0.25*Ho
c zo is the roughness, d50=D50 (?) of the sand
c for the estimation of the omega critical

```



```

c *****
c Bottom Friction
c *****
data d50/0.0000625/
zo=.1*d50
fc=0.03
c *****
c Result files
c *****
open (unit=34,file='anipsosiA.dat')
open (unit=54,file='anipsosiC.dat')
c initially since z(i,j)=0
do i=1,im
do j=1,jm
h(i,j)=d(i,j)
end do
end do
c *****
c Initial conditions
c *****
do j=1,jm
do i=1,im
umax(i,j)=0.
vmax(i,j)=0.
zin(i,j)=0.
dks(i,j)=0.
dk(i,j)=0.
zs(i,j)=0.
uc(i,j)=0.
vc(i,j)=0.
UN(i,j)=0.0
ub(i,j)=0.
u(i,j)=0.
vn(i,j)=0.0
vb(i,j)=0.
v(i,j)=0.
zn(i,j)=0.0
zb(i,j)=0.
z(i,j)=0.
UU(i,j)=0.
VV(i,j)=0.
ZZ(i,j)=0.
znp(i,j)=0.
unp(i,j)=0.
vnp(i,j)=0.
zm(i,j)=0.
end do
end do
c *****
c Time Loop
c *****
ian=0
100 ian=ian+1
ITER=0
T=ian*DT
c *****
c STOIXEIA KYMATISMWN
c *****
pi2=2.*pi
aleno=ga*(per**2)/pi2
alen=aleno
39 alenp=alen
akapa=pi2/alenp
akd=akapa*d0
alen=aleno *tanh(akd)
dlen=abs(alen - alenp)
if (dlen.gt.0.001) goto 39
c *****
c Source Function
c *****
delta=.3
wa=delta*alen/2.

```

```

bta=80./((delta*alen)**2)
akl=pi2/alen
AB=1./15.
amp=Ho/2.
w=pi2/per
chis=jst*dy
do j=2,jm-1
chi=j*dy
fscr(j)=exp(-bta*(chi-chis)**2)
end do
aky=akl*cos(thita)
Ail=sqrt(pi/bta)*exp(-aky**2/(4*bta))
c memos
adk=cos(thita)*2*amp*(1+AB*(akl*d0)**2)*(W**2+AB*ga*akl**4*d0**3)/
!(W*Ail*akl*(1+(AB+1./3.)*(akl*d0)**2))
do j=2,jm-1
do i=2,im-1
akx=akl*sin(thita)
z1=adk*sin(akx*j*dy-2*pi*t/per)
zin(i,j)=qmin*z1*fscr(j)
end do
end do
c *****
c FIRST APPROXIMATION
c *****
c PREDICTOR CONTINUITY
DO J=2,JM-1
DO I=2,IM-1
H(i,j)=D(i,j)+ZB(i,j)
if (d(i,j).lt.DEN) THEN
HH=H(i,j)
ELSE
HH=d(i,j)
END IF
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
UNX=(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))/12./DX
UBX=(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))/12./DX
UX=(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))/12./DX
UUX=(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))/12./DX
ZNX=(-ZN(i+2,j)+8*ZN(i+1,j)-8*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-2,j))/12./DX
ZBX=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))/12./DX
ZX=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))/12./DX
ZZX=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))/12./DX
DDX=(-d(i+2,j)+8*d(i+1,j)-8*d(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
UU0=(23*UB(i,j)-16*U(i,j)+5*UU(i,j))/12.
ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
UU1X=(23*UBX-16*UX+5*UUX)/12.
ZZ1X=(23*ZBX-16*ZX+5*ZZX)/12.
ANLU=-DT*(DDX*UU0+d(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)
else
UNX=(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))/2./DX
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
UX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
ZNX=(ZN(i+1,j)-ZNP(i-1,j))/2./DX
ZBX=(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))/2./DX
ZX=(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))/2./DX
ZZX=(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))/2./DX
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
UU0=(23*UB(i,j)-16*U(i,j)+5*UU(i,j))/12.
ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
UU1X=(23*UBX-16*UX+5*UUX)/12.
ZZ1X=(23*ZBX-16*ZX+5*ZZX)/12.
ANLU=-DT*(DDX*UU0+d(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)
end if
if (J.ge.3.and.J.le.JM-2) then
VNY=(-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2))/12./DY
VBY=(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))/12./DY
VY=(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))/12./DY
VVY=(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))/12./DY
ZNY=(-ZN(i,j+2)+8*ZN(i,j+1)-8*ZNP(i,j-1)+ZNP(i,j-2))/12./DY
ZBY=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))/12./DY

```

```

ZY=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))/12./DY
ZZY=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))/12./DY
DDY=(-d(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
VV0=(23*VB(i,j)-16*V(i,j)+5*VV(i,j))/12.
ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
VV1Y=(23*VBY-16*VY+5*VVY)/12.
ZZ1Y=(23*ZBY-16*ZY+5*ZZY)/12.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
else
VNY=(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))/2./DY
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
ZNY=(ZN(i,j+1)-ZNP(i,j-1))/2./DY
ZBY=(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))/2./DY
ZY=(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))/2./DY
ZZY=(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))/2./DY
DDY=(D(i,j+1)-D(i,j-1))/2./DY
VV0=(23*VB(i,j)-16*V(i,j)+5*VV(i,j))/12.
ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
VV1Y=(23*VBY-16*VY+5*VVY)/12.
ZZ1Y=(23*ZBY-16*ZY+5*ZZY)/12.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
end if
AET=ANLU+ANLV+dt*zin(i,j)
ZN(i,j)=(ZB(i,j)+AET)
END DO
END DO
do j=1,jm
zn(1,j)=zn(2,j)
zn(im,j)=zn(im-1,j)
end do
do i=1,im
zn(i,1)=zn(i,2)
zn(i,jm)=zn(i,jm-1)
end do
c PREDICTOR MOMENTUM
DO J=2,JM-1
DO I=2,IM-1
alfa=-1./3.
bita=0.
gamma=1./15.
if (i.eq.2.or.i.eq.im-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
if (d(i,j).gt.DEN) THEN
HH=D(i,j)
ELSE
HH=H(i,j)
END IF
c the system is written:
c B(1)*x(1)+C(1)*x(2)=dd(i,j)
c A(2)*x(2)+B(2)*x(2)+C(2)*x(2)=dd(2)
c A(3)*x(3)+B(3)*x(3)+C(3)*x(3)=dd(3)
c ....
c ....
c ...
c A(im)*x(im)+B(im)*x(im)=dd(im)
CTM=(alfa-gamma)*HH**2
DD3X=CTM/dx**2.
A(i,j)=DD3X
B(i,j)=1.-2.*DD3X
C(i,j)=DD3X
IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
FRICT=DT*CB*U(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)

```

```

ELSE
FRICT=0.
END IF
IF (I.EQ.2) THEN
Zxxx=(-3*ZB(5,j)+14.*ZB(4,j)-24.*ZB(3,j)+
! 18.*ZB(2,j)-5*ZB(1,j))/2./DX**3
GOTO 266
ELSE
END IF
IF (I.EQ.(IM-1)) THEN
Zxxx=(5.*ZB(im,j)-18.*ZB(im-1,j)+24.*ZB(im-2,j)-
! 14.*ZB(im-3,j)+3.*ZB(im-4,j))/2./DX**3
GOTO 266
ELSE
END IF
Zbxxx=(ZB(i+2,j)-2.*ZB(i+1,j)+2.*ZB(i-1,j)-ZB(i-2,j))
! /2./DX**3
Zlxxx=(Z(i+2,j)-2.*Z(i+1,j)+2.*Z(i-1,j)-Z(i-2,j))
! /2./DX**3
Zzxxx=(ZZ(i+2,j)-2.*ZZ(i+1,j)+2.*ZZ(i-1,j)-ZZ(i-2,j))
! /2./DX**3
Zxxx=(23*Zbxxx-16*Zlxxx+5.*Zzxxx)/12.
266 CONTINUE
Zbxyy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i+1,j)+ZB(i+1,j-1))-
! (ZB(i-1,j+1)-2.*ZB(i-1,j)+ZB(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zlxyy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i+1,j)+Z(i+1,j-1))-
! (Z(i-1,j+1)-2.*Z(i-1,j)+Z(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zzxyy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i+1,j)+ZZ(i+1,j-1))-
! (ZZ(i-1,j+1)-2.*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zxyy=(23*Zbxyy-16*Zlxyy+5.*Zzxyy)/12.
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
UBXP=UB(i,j)*(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))
UXP=U(i,j)*(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))
UUXP=UU(i,j)*(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))
UUX=(DT/(12*DX))*(23*UBXP-16*UXP+5*UUXP)/12.
ZBXP=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))
ZXP=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))
ZZXP=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))
VAR2=ga*DT/(12*DX)*ZBXP
VAR3=ga*DT/(12*DX)*ZXP
VAR4=ga*DT/(12*DX)*ZZXP
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
ELSE
UBXP=UB(i,j)*(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))
UXP=U(i,j)*(U(i+1,j)-U(i-1,j))
UUXP=UU(i,j)*(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))
UUX=(DT/(2*DX))*(23*UBXP-16*UXP+5*UUXP)/12.
VAR2=ga*DT/(2*DX)*(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))
VAR3=ga*DT/(2*DX)*(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))
VAR4=ga*DT/(2*DX)*(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPXX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(23*ZKBX-16*ZKPX+5*ZKPXX)/12.
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(ZZ(I,J+1)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(23*ZKBY-16*ZKPY+5*ZKPY)/12.
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))-(ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))-(Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZZKxy=((ZZ(I+1,J+1)-ZZ(I-1,J+1))-(ZZ(I+1,J-1)-ZZ(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKXY=(23*ZKbxy-16*ZKxy+5*ZZKxy)/12.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UBYP=VB(i,j)*(-UB(i,j+2)+8*UB(i,j+1)-8*UB(i,j-1)+UB(i,j-2))
UYYP=V(i,j)*(-U(i,j+2)+8*U(i,j+1)-8*U(i,j-1)+U(i,j-2))

```

```

UUYP=VV(i,j)*(-UU(i,j+2)+8*UU(i,j+1)-8*UU(i,j-1)+UU(i,j-2))
VUY=(DT/(12*DX))*(23*UBYP-16*UYP+5*UUYP)/12.
DDY=(-D(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
ELSE
UBYP=VB(i,j)*(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))
UYP=V(i,j)*(U(i,j+1)-U(i,j-1))
UUYP=VV(i,j)*(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))
VUY=(DT/(2*DX))*(23*UBYP-16*UYP+5*UUYP)/12.
DDY=(D(i,j+1)-D(I,J-1))/2./DY
END IF
Vbxy=((VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Vxy=((V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VVxy=((VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Vbxyt=(3*Vbxy-4*Vxy+VVxy)/2.
Vlxyt=(Vbxy-VVxy)/2.
VVxyt=-(3*VVxy-4*Vxy+Vbxy)/2.
Vxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(23*Vbxyt-16*Vlxyt+5*VVxyt)/12.
Vbx=(VB(I+1,J)-VB(I-1,J))/2./dx
Vx=(V(I+1,J)-V(I-1,J))/2./dx
VVx=(VV(I+1,J)-VV(I-1,J))/2./dx
Vby=(VB(I,J+1)-VB(I,J-1))/2./dx
Vy=(V(I,J+1)-V(I,J-1))/2./dx
VVy=(VV(I,J+1)-VV(I,J-1))/2./dx
Vbxt=(3*Vbx-4*Vx+VVx)/2.
Vlxt=(Vbx-VVx)/2.
VVxt=-(3*VVx-4*Vx+Vbx)/2.
Vbyt=(3*Vby-4*Vy+VVy)/2.
Vlyt=(Vby-VVy)/2.
VVyt=-(3*VVy-4*Vy+Vby)/2.
DUX=DT*(U(i+1,j)-2*U(i,j)+U(i-1,j))/(DX**2)
DUBX=DT*(UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j))/(DX**2)
DUUX=DT*(UU(i+1,j)-2*UU(i,j)+UU(i-1,j))/(DX**2)
DUY=DT*(U(i,j+1)-2*U(i,j)+U(i,j-1))/(DY**2)
DUBY=DT*(UB(i,j+1)-2*UB(i,j)+UB(i,j-1))/(DY**2)
DUUY=DT*(UU(i,j+1)-2*UU(i,j)+UU(i,j-1))/(DY**2)
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
UPX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
UBY=(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))/2./DY
UPY=(U(i,j+1)-U(i,j-1))/2./DY
UUUY=(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))/2./DY
UX=(23*UBX-16*UPX+5*UUUX)/12.
UY=(23*UBY-16*UPY+5*UUUY)/12.
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VPY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
VBX=(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))/2./DX
VPX=(V(i+1,j)-V(i-1,j))/2./DX
VVVX=(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))/2./DX
VY=(23*VBY-16*VPY+5*VVVY)/12.
VX=(23*VBX-16*VPX+5*VVVX)/12.
DKX=(DK(i+1,j)-DK(i-1,j))/2./DX
DKY=(DK(i,j+1)-DK(i,j-1))/2./DY
HX=(ZB(I+1,J)-ZB(I-1,J))/2./DX
HY=(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))/2./DY
DISP1=DK(i,j)*(23*DUBX-16*DUX+5*DUUX)/12.
DISP2=DT*2.*DK(I,J)*HX*UX/HH
DISP3=DT*DK(I,J)*HY*UY/HH
DISP4=DT*DK(I,J)*(23*Vbxy-16*Vxy+5*VVxy)/12.
DISP5=DT*DKX*HX*(23*UB(I,J)-16*U(I,J)+5*UU(I,J))/12./HH
DISP6=DK(i,j)*(23*DUBY-16*DUY+5*DUUY)/12.
DISP7=DT*0.5*DK(I,J)*HX*VY/HH
DISP8=DT*0.5*DK(I,J)*HY*VX/HH
DISP9=DT*0.5*DKY*UY
DISP10=DT*DKX*UX
DISP11=DT*0.5*DKY*HY*(23*UB(I,J)-16*U(I,J)+5*UU(I,J))/12./HH
DISP12=DT*0.5*DKY*HX*(23*VB(I,J)-16*V(I,J)+5*VV(I,J))/12./HH
DISP13=DT*0.5*DKY*VX
DISPX=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8+DISP9+DISP10

```

```

&+DISP11+DISP12+DISP13
if ((i.ge.3.and.i.le.im-2).and.(j.ge.3.and.j.le.jm-2)) then
UBSMX=-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j)
USMSX=-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j)
UUSMX=-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j)
USMX=(DT/(12*DX))*(23*UBSMX-16*USMSX+5*UUSMX)/12.
ELSE
UBSMX=UB(i+1,j)-UB(i-1,j)
USMSX=U(i+1,j)-U(i-1,j)
UUSMX=UU(i+1,j)-UU(i-1,j)
USMX=(DT/(2*DX))*(23*UBSMX-16*USMSX+5*UUSMX)/12.
END IF
VSMX=DT*(23*VBX-16*VX+5*VVX)/12.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UBSMY=-UB(i,j+2)+8*UB(i,j+1)-8*UB(i,j-1)+UB(i,j-2)
USMSY=-U(i,j+2)+8*U(i,j+1)-8*U(i,j-1)+U(i,j-2)
UUSMY=-UU(i,j+2)+8*UU(i,j+1)-8*UU(i,j-1)+UU(i,j-2)
USMY=(DT/(12*DX))*(23*UBSMY-16*USMSY+5*UUSMY)/12.
ELSE
UBSMY=UB(i,j+1)-UB(i,j-1)
USMSY=U(i,j+1)-U(i,j-1)
UUSMY=UU(i,j+1)-UU(i,j-1)
USMY=(DT/(2*DX))*(23*UBSMY-16*USMSY+5*UUSMY)/12.
END IF
U2SMX=(23*DUBX-16*DUX+5*DUUX)/12.
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(23*DVBX-16*DUX+5*DVVX)/12.
Ubxxy=((UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
UUXy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
USMXY=DT*(23*UBXY-16*UXY+5*UUXY)/12.
IF (ian .GT. 30) THEN
qqq=USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2
if (qqq.eq.0.0) qqq=0.00001
AM=(CS*DEL)**2*(qqq)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(qqq)**(-0.5)*
!(2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
END IF
SMAG1=2*DMX*USMX+2*AM*U2SMX
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2
DPO=UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j)
UXXT=CTM*DPO/(DX*DX)
Z3x=DT*gamma*ga*HH**2*(Zxxx+Zxyy)
! +DT*gamma*ga*HH*DDX*(2*ZKXX+ZKYY)+DT*gamma*ga*HH*DDY*ZKXY
Vyt=(23*Vbyx-16*Vlyt+5*VVyt)/12.
Vxt=(23*Vbxt-16*Vlxt+5*VVxt)/12.
UXT=(UBX-UPX)
slpy=(.5+gamma)*HH*DDX*Vyt+(0.5+gamma)*HH*DDY*Vxt
SLP=DDX*HH*UXT+2*gamma*DDX*HH*UXT+slpy
www=u(i,j)**2+v(i,j)**2
frs=dt*fc*ub(i,j)*sqrt(www)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*ub(i,j)+frs
if (ddx.gt.0.0.or.abs(ddx).lt.1) slp=0.
DD(i,j)=UB(i,j)-UUX-VUY-VAR+UXXT+Vxyt+Z3x+SLP+DISPX+SMAG
!
c -frict-frst
END DO
END DO
do j=2,jm-1
B(1,j)=1.
C(1,j)=0.0
DD(1,j)=UN(1,j)
DD(1,j)=0.

```

```

A(IM,j)=0.0
B(IM,j)=1.0
DD(IM,j)=UN(IM,j)
DD(IM,j)=0.
G(1,j)=C(1,j)/B(1,j)
do I=2,im
G(i,j)=C(i,j)/(B(i,j)-A(i,j)*G(i-1,j))
end do
H11(1,j)=DD(1,j)/B(1,j)
do I=2,im
H11(i,j)=(DD(i,j)-A(i,j)*H11(i-1,j))/(B(i,j)-A(i,j)*G(i-1,j))
end do
UN(im,j)=H11(im,j)
do I=im-1,1,-1
UN(i,j)=H11(i,j)-G(i,j)*UN(i+1,j)
end do
end do
do i=2,im-1
do j=2,jm-1
H(i,j)=d(i,j)+zn(i,j)
end do
end do
do j=1,jm
un(1,j)=UN(2,J)
un(im,j)=UN(IM-1,J)
end do
do i=1,im
un(i,1)=un(i,2)
un(i,jm)=un(i,jm-1)
end do
c PREDICTOR MOMENTUM Y
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
alfa=-1./3.
bita=0.
gamma=1./15.
if (j.eq.2.or.j.eq.jm-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
if (d(I,j).gt.DEN) THEN
HH=D(i,j)
ELSE
HH=H(i,j)
END IF
c the system is written:
c B(1)*x(1)+C(1)*x(2)=dd(i,j)
c A(2)*x(2)+B(2)*x(2)+C(2)*x(2)=dd(2)
c A(3)*x(3)+B(3)*x(3)+C(3)*x(3)=dd(3)
c ....
c ....
c ...
c A(im)*x(im)+B(im)*x(im)=dd(im)
CTM=(alfa-gamma)*HH**2
DD3X=CTM/dx**2.
A(i,j)=DD3X
B(i,j)=1.-2.*DD3X
C(i,j)=DD3X
IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
FRICT=DT*CB*V(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)
ELSE
FRICT=0.
END IF
IF (J.EQ.2) THEN
Zyyy=(-3*ZB(i,5)+14.*ZB(i,4)-24.*ZB(i,3)+
! 18.*ZB(i,2)-5*ZB(i,1))/2./DX**3

```

```

GOTO 267
ELSE
END IF
IF (J.EQ.(JM-1)) THEN
Zyyy=(5.*ZB(i,jm)-18.*ZB(i,jm-1)+24.*ZB(i,jm-2)-
! 14.*ZB(i,jm-3)+3.*ZB(i,jm-4))/2./DX**3
GOTO 267
ELSE
END IF
Zbyyy=(ZB(i,j+2)-2.*ZB(i,j+1)+2.*ZB(i,j-1)-ZB(i,j-2))
! /2./DX**3
Zlyyy=(Z(i,j+2)-2.*Z(i,j+1)+2.*Z(i,j-1)-Z(i,j-2))
! /2./DX**3
Zzyyy=(ZZ(i,j+2)-2.*ZZ(i,j+1)+2.*ZZ(i,j-1)-ZZ(i,j-2))
! /2./DX**3
Zyyy=(23*Zbyyy-16*Zlyyy+5.*Zzyyy)/12.
267 CONTINUE
Zbxyy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i,j+1)+ZB(i-1,j+1))-
!(ZB(i+1,j-1)-2.*ZB(i,j-1)+ZB(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zlxyy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i,j+1)+Z(i-1,j+1))-
!(Z(i+1,j-1)-2.*Z(i,j-1)+Z(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zzxyy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i,j+1)+ZZ(i-1,j+1))-
!(ZZ(i+1,j-1)-2.*ZZ(i,j-1)+ZZ(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zxyy=(23*Zbxyy-16*Zlxyy+5.*Zzxyy)/12.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
VBYP=VB(i,j)*(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))
VYP=V(i,j)*(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))
VVYP=VV(i,j)*(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))
VVY=(DT/(12*DX))*(23*VBYP-16*VYP+5*VVYP)/12.
ZBYP=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))
ZYP=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))
ZZYP=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))
VAR2=ga*DT/(12*DX)*ZBYP
VAR3=ga*DT/(12*DX)*ZYP
VAR4=ga*DT/(12*DX)*ZZYP
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDY=(-D(i,j+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
ELSE
VBYP=VB(i,j)*(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))
VYP=V(i,j)*(V(i,j+1)-V(i,j-1))
VVYP=VV(i,j)*(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))
VVY=(DT/(2*DX))*(23*VBYP-16*VYP+5*VVYP)/12.
VAR2=ga*DT/(2*DX)*(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))
VAR3=ga*DT/(2*DX)*(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))
VAR4=ga*DT/(2*DX)*(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDY=(D(i,j+1)-D(I,J-1))/2./DY
END IF
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPXX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(23*ZKBX-16*ZKPX+5*ZKPXX)/12.
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(23*ZKBY-16*ZKPY+5*ZKPY)/12.
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))-(ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))-(Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKXy=((ZZ(I+1,J+1)-ZZ(I-1,J+1))-(ZZ(I+1,J-1)-ZZ(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKXY=(23*ZKbxy-16*ZKxy+5*ZKXy)/12.
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
VBXP=UB(i,j)*(-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j))
VXP=U(i,j)*(-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j))
VVXP=UU(i,j)*(-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j))
UVX=(DT/(12*DX))*(23*VBXP-16*VXP+5*VVXP)/12.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+D(i-2,j))/12./DX
ELSE
VBXP=UB(i,j)*(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))
VXP=U(i,j)*(V(i+1,j)-V(i-1,j))

```



```

VVXP=UU(i,j)*(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))
UVX=(DT/(2*DX))*(23*VBXP-16*VXP+5*VVXP)/12.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
Ubxxy=((UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
UUxy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Ubxxyt=(3*Ubxxy-4*Uxy+UUxy)/2.
Ulxxyt=(Ubxxy-UUxy)/2.
UUxyt=-(3*UUxy-4*Uxy+Ubxxy)/2.
Uxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(23*Ubxxyt-16*Ulxxyt+5*UUxyt)/12.
Ubx=(UB(I+1,J)-UB(I-1,J))/2./dx
Ux=(U(I+1,J)-U(I-1,J))/2./dx
UUx=(UU(I+1,J)-UU(I-1,J))/2./dx
Uby=(UB(I,J+1)-UB(I,J-1))/2./dx
Uy=(U(I,J+1)-U(I,J-1))/2./dx
UUy=(UU(I,J+1)-UU(I,J-1))/2./dx
Ubxxt=(3*Ubx-4*Ux+UUx)/2.
Ulxxt=(Ubx-UUx)/2.
UUxxt=-(3*UUx-4*Ux+Ubx)/2.
Ubyyt=(3*Uby-4*Uy+UUy)/2.
Ulyyt=(Uby-UUy)/2.
UUyyt=-(3*UUy-4*Uy+Uby)/2.
DVY=DT*(V(i,j+1)-2*V(i,j)+V(i,j-1))/(DY**2)
DVBY=DT*(VB(i,j+1)-2*VB(i,j)+VB(i,j-1))/(DY**2)
DVVY=DT*(VV(i,j+1)-2*VV(i,j)+VV(i,j-1))/(DY**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VPY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
VBX=(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))/2./DX
VPX=(V(i+1,j)-V(i-1,j))/2./DX
VVVX=(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))/2./DX
VY=(23*VBY-16*VPY+5*VVVY)/12.
VX=(23*VBX-16*VPX+5*VVVX)/12.
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
UPX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
UBY=(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))/2./DY
UPY=(U(i,j+1)-U(i,j-1))/2./DY
UUUY=(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))/2./DY
UX=(23*UBX-16*UPX+5*UUUX)/12.
UY=(23*UBY-16*UPY+5*UUUY)/12.
DKX=(DK(i+1,j)-DK(i-1,j))/2./DX
DKY=(DK(i,j+1)-DK(i,j-1))/2./DY
HY=(ZB(I,J+1)-ZB(I,J-1))/2./DY
HX=(ZB(I+1,J)-ZB(I-1,J))/2./DX
DISP1=DK(i,j)*(23*DVBY-16*DVY+5*DVVY)/12.
DISP2=DT*2.*DK(I,J)*HY*VY/HH
DISP3=DT*DK(I,J)*HX*VX/HH
DISP4=DT*DK(I,J)*(23*Ubxxy-16*Uxy+5*UUxy)/12.
DISP5=DT*DKY*HY*(23*VB(I,J)-16*V(I,J)+5*VV(I,J))/12./HH
DISP6=DK(i,j)*(23*DVBX-16*DVX+5*DVVX)/12.
DISP7=DT*0.5*DK(I,J)*HY*UX/HH
DISP8=DT*0.5*DK(I,J)*HX*UY/HH
DISP9=DT*0.5*DKX*VX
DISP10=DT*DKY*VY
DISP11=DT*0.5*DKX*HX*(23*VB(I,J)-16*V(I,J)+5*VV(I,J))/12./HH
DISP12=DT*0.5*DKX*HY*(23*UB(I,J)-16*U(I,J)+5*UU(I,J))/12./HH
DISP13=DT*0.5*DKX*UY
DISPY=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8
&+DISP9+DISP10+DISP11+DISP12+DISP13
if ((i.ge.3.and.i.le.im-2).and.(j.ge.3.and.j.le.jm-2)) then
VBSMX=-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j)
VSMSX=-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j)
VVSMSX=-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j)
VSMX=(DT/(12*DX))*(23*VBSMX-16*VSMSX+5*VVSMSX)/12.

```

```

ELSE
VBSMX=VB(i+1,j)-VB(i-1,j)
VMSX=V(i+1,j)-V(i-1,j)
VVSX=VV(i+1,j)-VV(i-1,j)
VSMX=(DT/(2*DX))*(23*VBSMX-16*VMSX+5*VVSX)/12.
END IF
USMX=DT*(23*UBX-16*UX+5*UUX)/12.
USMY=DT*(23*UBY-16*UY+5*UUY)/12.
if ((i.ge.3.and.i.le.im-2).and.(j.ge.3.and.j.le.jm-2)) then
VBSMY=-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2)
VMSY=-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2)
VVSY=-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2)
VSMY=(DT/(12*DX))*(23*VBSMY-16*VMSY+5*VVSY)/12.
ELSE
VBSMY=VB(i,j+1)-VB(i,j-1)
VMSY=V(i,j+1)-V(i,j-1)
VVSY=VV(i,j+1)-VV(i,j-1)
VSMY=(DT/(2*DX))*(23*VBSMY-16*VMSY+5*VVSY)/12.
END IF
DUX=DT*(U(i+1,j)-2*U(i,j)+U(i-1,j))/(DX**2)
DUBX=DT*(UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j))/(DX**2)
DUUX=DT*(UU(i+1,j)-2*UU(i,j)+UU(i-1,j))/(DX**2)
U2SMX=(23*DUBX-16*DUX+5*DUUX)/12.
DUY=DT*(U(i,j+1)-2*U(i,j)+U(i,j-1))/(DY**2)
DUBY=DT*(UB(i,j+1)-2*UB(i,j)+UB(i,j-1))/(DY**2)
DUUY=DT*(UU(i,j+1)-2*UU(i,j)+UU(i,j-1))/(DY**2)
U2SMY=(23*DUBY-16*DUY+5*DUUY)/12.
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(23*DVBX-16*DVX+5*DVVX)/12.
V2SMY=(23*DVBX-16*DVX+5*DVVX)/12.
USMXY=DT*(23*UBXY-16*UXY+5*UUXY)/12.
Vbxy=((VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Vxy=((V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VVxy=((VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VSMXY=DT*(23*VBXY-16*VXY+5*VVXY)/12.
IF (ian .GT. 30) THEN
qqq=USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2
if (qqq.eq.0.0) qqq=0.00001
AM=(CS*DEL)**2*(qqq)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(qqq)**(-0.5)*
!(2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
DMY=(CS*DEL)**2*0.5*(qqq)**(-0.5)*
!(2*USMX*USMXY+2*VSMX*VSMXY+(USMY+VSMX)*(U2SMY+VSMXY))
ELSE
AM=0.
DMX=0.
DMY=0.
END IF
SMAG1=2*DMY*VSMY+2*AM*V2SMY
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2
DPO=VB(i,j+1)-2*VB(i,j)+VB(i,j-1)
VYYT=CTM*DPO/(DY*DY)
Z3Y=DT*gamma*ga*HH**2*(ZYYY+Zxxy)
! +DT*gamma*ga*HH*DDY*(2*ZKYY+ZKXX)+DT*gamma*ga*HH*DDX*ZKXY
Uyt=(23*Ubyt-16*Ulyt+5*UUYt)/12.
Uxt=(23*Ubx-16*Ulx+5*UUXt)/12.
VYT=(VBY-VPY)
slpx=(.5+gamma)*HH*DDX*Uyt+(1+2*gamma)*HH*DDY*Uxt
SLP=DDY*HH*VYT+2*gamma*DDY*HH*VYT+slpx
www=u(i,j)**2+v(i,j)**2
frs=dt*fc*vb(i,j)*sqrt(www)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*vb(i,j)+frs
if (ddy.gt.0.or.abs(ddy).lt.1) slp=0.
DD(I,J)=VB(I,J)-VVY-UVX-VAR+VYYT+Uxyt+Z3Y+SLP+DISPY+SMAG
!
c -frict-frst

```

```

END DO
end do
do i=2,im-1
B(i,1)=1.
C(i,1)=0.0
DD(i,1)=VN(i,2)
DD(i,1)=0.
A(i,jm)=0.0
B(i,jm)=1.0
DD(i,jm)=VN(i,jm-1)
DD(i,jm)=0.
G(i,1)=C(i,1)/B(i,1)
do j=2,jm
G(i,j)=C(i,j)/(B(i,j)-A(i,j)*G(i,j-1))
end do
H11(i,1)=DD(i,1)/B(i,1)
do j=2,jm
H11(i,j)=(DD(i,j)-A(i,j)*H11(i,j-1))/(B(i,j)-A(i,j)*G(i,j-1))
end do
VN(i,jm)=H11(i,jm)
do j=jm-1,1,-1
VN(i,j)=H11(i,j)-G(i,j)*VN(i,j+1)
end do
end do
do i=2,im-1
do j=2,jm-1
H(i,j)=d(i,j)+zn(i,j)
end do
end do
do j=1,jm
vn(1,j)=vn(2,j)
vn(im,j)=vn(im-1,j)
end do
do i=1,im
vn(i,1)=VN(I,2)
vn(i,jm)=VN(I,JM-1)
end do
c *****
c FINAL APPROXIMATION
c *****
c CORRECTOR CONTINUITY
430 CONTINUE
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
H(I,J)=D(I,J)+ZB(I,J)
if (d(I,j).gt.DEN) THEN
HH=D(I,J)
ELSE
HH=H(I,J)
END IF
dxdt=-(dx**2)/6.+ga*HH*(dt**2)/6.
CTC=bita*(HH**2)+dxdt
CTC=bita*(HH**2)
ORCON=1.+2.*CTC/(dx**2)
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
UNX=(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))/12./DX
UBX=(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))/12./DX
UX=(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))/12./DX
UUX=(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))/12./DX
ZNX=(-ZN(i+2,j)+8*ZN(i+1,j)-8*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-2,j))/12./DX
ZBX=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))/12./DX
ZX=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))/12./DX
ZZX=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))/12./DX
DDX=(-d(i+2,j)+8*d(i+1,j)-8*d(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
UU0=(19*UB(i,j)+9*UNP(i,j)-5*U(i,j)+UU(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
UU1X=(19*UBX+9*UNX-5*UX+UUX)/24.
ZZ1X=(19*ZBX+9*ZNX-5*ZX+ZZX)/24.
ANLU=-DT*(DDX*UU0+D(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)
else
UNX=(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))/2./DX
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX

```

```

UX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
ZNX=(ZN(i+1,j)-ZNP(i-1,j))/2./DX
ZBX=(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))/2./DX
ZX=(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))/2./DX
ZZX=(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))/2./DX
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
UU0=(19*UB(i,j)+9*UNP(i,j)-5*U(i,j)+UU(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
UU1X=(19*UBX+9*UNX-5*UX+UUX)/24.
ZZ1X=(19*ZBX+9*ZNX-5*ZX+ZZX)/24.
ANLU=-DT*(DDX*UU0+D(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)
end if
if (j.ge.3.and.j.le.jm-2) then
VNY=(-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2))/12./DY
VBY=(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))/12./DY
VY=(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))/12./DY
VVY=(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))/12./DY
ZNY=(-ZN(i,j+2)+8*ZN(i,j+1)-8*ZNP(i,j-1)+ZNP(i,j-2))/12./DY
ZBY=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))/12./DY
ZY=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))/12./DY
ZZY=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))/12./DY
DDY=(-D(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
VV0=(19*VB(i,j)+9*VNP(i,j)-5*V(i,j)+VV(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
VV1Y=(19*VBY+9*VNY-5*VY+VVY)/24.
ZZ1Y=(19*ZBY+9*ZNY-5*ZY+ZZY)/24.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
else
VNY=(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))/2./DY
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
ZNY=(ZN(i,j+1)-ZNP(i,j-1))/2./DY
ZBY=(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))/2./DY
ZY=(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))/2./DY
ZZY=(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))/2./DY
DDY=(D(i,j+1)-D(i,j-1))/2./DY
VV0=(19*VB(i,j)+9*VNP(i,j)-5*V(i,j)+VV(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
VV1Y=(19*VBY+9*VNY-5*VY+VVY)/24.
ZZ1Y=(19*ZBY+9*ZNY-5*ZY+ZZY)/24.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
end if
AET=ANLU+ANLV+dt*zin(i,j)
ZNP(i,j)=(ZB(i,j)+AET)/ORCON
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
END DO
end do
do j=1,jm
znp(1,j)=(48*znp(2,j)-36*znp(3,j)+16*znp(4,j)
! -3*znp(5,j))/25.
znp(1,j)=znp(2,j)
znp(im,j)=(48*znp(im-1,j)-36*znp(im-2,j)+16*znp(im-3,j)
! -3*znp(im-4,j))/25.
znp(im,j)=znp(im-1,j)
zn(1,j)=znp(1,j)
zn(im,j)=znp(im,j)
end do
do i=1,im
znp(i,1)=(48*znp(i,2)-36*znp(i,3)+16*znp(i,4)
! -3*znp(i,5))/25.
znp(i,jm)=znp(i,jm-1)
zn(i,1)=znp(i,1)
zn(i,jm)=znp(i,jm)
end do
c CORRECTOR MOMENTUM Y
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
H(i,j)=D(i,j)+ZB(i,j)
alfa=-1./3.
bita=0.

```

```

gamma=1./15.
if (j.eq.2.or.j.eq.jm-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
if (d(i,j).gt.DEN) THEN
HH=d(i,j)
ELSE
HH=H(i,j)
END IF
IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
if(h(i,j).eq.0.0) H(i,j)=zo
FRICT=DT*CB*V(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)
ELSE
FRICT=0.
END IF
IF (J.EQ.2) THEN
Zyyy=(-3*ZB(i,5)+14.*ZB(i,4)-24.*ZB(i,3)+
! 18.*ZB(i,2)-5*ZB(i,1))/2./DX**3
GOTO 767
ELSE
END IF
IF (j.EQ.(JM-1)) THEN
Zyyy=(5.*ZB(i,jm)-18.*ZB(i,jm-1)+24.*ZB(i,jm-2)-
! 14.*ZB(i,jm-3)+3.*ZB(i,jm-4))/2./DX**3
GOTO 767
ELSE
END IF
Zbyyy=(ZB(i,j+2)-2.*ZB(i,j+1)+2.*ZB(i,j-1)-ZB(i,j-2))
! /2./Dy**3
Znyyy=(ZNP(i,j+2)-2.*ZNP(i,j+1)+2.*ZNP(i,j-1)-ZNP(i,j-2))
! /2./Dy**3
Zlyyy=(Z(i,j+2)-2.*Z(i,j+1)+2.*Z(i,j-1)-Z(i,j-2))
! /2./Dy**3
Zzyyy=(ZZ(i,j+2)-2.*ZZ(i,j+1)+2.*ZZ(i,j-1)-ZZ(i,j-2))
! /2./Dy**3
Zyyy=(19*Zbyyy+9*Znyyy-5*Zlyyy+Zzyyy)/24.
767 CONTINUE
ZNxxy=((ZNP(i+1,j+1)-2.*ZNP(i,j+1)+ZNP(i-1,j+1))-
! (ZNP(i+1,j-1)-2.*ZNP(i,j-1)+ZNP(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zbxxy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i,j+1)+ZB(i-1,j+1))-
! (ZB(i+1,j-1)-2.*ZB(i,j-1)+ZB(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zlxxxy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i,j+1)+Z(i-1,j+1))-
! (Z(i+1,j-1)-2.*Z(i,j-1)+Z(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zzxxxy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i,j+1)+ZZ(i-1,j+1))-
! (ZZ(i+1,j-1)-2.*ZZ(i,j-1)+ZZ(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zxxy=(19*Zbxxy+9*ZNxxy-5*Zlxxxy+Zzxxxy)/24.
CTM=(alfa-gamma)*HH**2
C ! -ga*HH*(DT**2)/6.0+(DX**2)/6.0
ORMX=1.-2*CTM/(DX**2)
C +2*DK(i,j)*DT/(DX**2)
if (j.ge.3.and.j.le.jm-2) then
VNYP=VN(i,j)*(-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2))
VBYP=VB(i,j)*(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))
VYP=V(i,j)*(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))
VVYP=VV(i,j)*(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))
VYV=(DT/(12*DY))*(9*VNYP+19*VBYP-5*VYP+VVYP)/24.
ZBYP=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))
ZYP=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))
ZZYP=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))
ZNYP=(-ZNP(i,j+2)+8*ZNP(i,j+1)-8*ZNP(i,j-1)+ZNP(i,j-2))
VAR2=ga*DT/(12*DY)*ZBYP
VAR3=ga*DT/(12*DY)*ZYP
VAR4=ga*DT/(12*DY)*ZZYP
VAR1=ga*DT/(12*DY)*ZNYP
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDY=(-D(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY

```

```

ELSE
VNYP=VN(i,j)*(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))
VBYP=VB(i,j)*(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))
VYP=V(i,j)*(V(i,j+1)-V(i,j-1))
VVYP=VV(i,j)*(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))
VVY=(DT/(2*DY))*(9*VNYP+19*VBYP-5*VYP+VVYP)/24.
VAR2=ga*DT/(2*DY)*(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))
VAR3=ga*DT/(2*DY)*(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))
VAR4=ga*DT/(2*DY)*(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))
VAR1=ga*DT/(2*DY)*(ZNP(i,j+1)-ZNP(i,j-1))
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDY=(D(i,j+1)-D(I,J-1))/2./DY
END IF
ZKNX=(ZNP(I+1,J)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I-1,J))/(DX**2)
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPXX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(9*ZKNX+19*ZKBX-5*ZKPX+ZKPXX)/24.
ZKNY=(ZNP(I,J+1)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I,J-1))/(DY**2)
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(ZZ(I,J+1)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(9*ZKNY+19*ZKBY-5*ZKPY+ZKPY)/24.
ZKNxy=((ZNP(I+1,J+1)-ZNP(I-1,J+1))-(ZNP(I+1,J-1)-ZNP(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))-(ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))-(Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZZKxy=((ZZ(I+1,J+1)-ZZ(I-1,J+1))-(ZZ(I+1,J-1)-ZZ(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKXY=(9*ZKNXY+19*ZKBXY-5*ZKXY+ZZKXY)/24.
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
VNXP=UN(i,j)*(-VN(i+2,j)+8*VN(i+1,j)-8*VNP(i-1,j)+VNP(i-2,j))
VBXP=UB(i,j)*(-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j))
VXP=U(i,j)*(-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j))
VVXP=UU(i,j)*(-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j))
UVX=(DT/(12*DX))*(9*VNXP+19*VBXP-5*VXP+VVXP)/24.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
ELSE
VNXP=UN(i,j)*(VN(i+1,j)-VNP(i-1,j))
VBXP=UB(i,j)*(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))
VXP=U(i,j)*(V(i+1,j)-V(i-1,j))
VVXP=UU(i,j)*(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))
UVX=(DT/(2*DX))*(9*VNXP+19*VBXP-5*VXP+VVXP)/24.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
DVNY=DT*(VN(i,j+1)-2*VN(i,j)+VNP(i,j-1))/(DY**2)
DXY=DT*(V(i,j+1)-2*V(i,j)+V(i,j-1))/(DY**2)
DVBY=DT*(VB(i,j+1)-2*VB(i,j)+VB(i,j-1))/(DY**2)
DVVY=DT*(VV(i,j+1)-2*VV(i,j)+VV(i,j-1))/(DY**2)
DVNX=DT*(VN(i+1,j)-2*VN(i,j)+VNP(i-1,j))/(DX**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
VNY=(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))/2./DY
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VPY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
VNX=(VN(i+1,j)-VNP(i-1,j))/2./DX
VBX=(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))/2./DX
VPX=(V(i+1,j)-V(i-1,j))/2./DX
VVVX=(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))/2./DX
VY=(9*VNY+19*VBY-5*VPY+VVVY)/24.
VX=(9*VNX+19*VBX-5*VPX+VVVX)/24.
UNX=(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))/2./DX
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
UPX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
UNY=(UN(i,j+1)-UNP(i,j-1))/2./DY
UBY=(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))/2./DY
UPY=(U(i,j+1)-U(i,j-1))/2./DY

```

```

UUUY=(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))/2./DY
UX=(9*UNX+19*UBX-5*UPX+UUUX)/24.
UY=(9*UNY+19*UBY-5*UPY+UUUY)/24.
DKX=(DK(i+1,j)-DK(i-1,j))/2./DX
DKY=(DK(i,j+1)-DK(i,j-1))/2./DY
HY=(ZB(I,J+1)-ZB(I,J-1))/2./DY
HX=(ZB(I+1,J)-ZB(I-1,J))/2./DX
DISP1=DK(i,j)*(9*DVNY+19*DVBVY-5*DVY+DVVY)/24.
DISP2=DT*2.*DK(I,J)*HY*VY/HH
DISP3=DT*DK(I,J)*HX*VX/HH
DISP5=DT*DKY*HY*(9*VN(I,J)+19*VB(I,J)-5*V(I,J)+VV(I,J))/24./HH
DISP6=DK(i,j)*(9*DVNX+19*DVBX-5*DVX+DVVX)/24.
DISP7=DT*0.5*DK(I,J)*HY*UX/HH
DISP8=DT*0.5*DK(I,J)*HX*UY/HH
DISP9=DT*0.5*DKX*VX
DISP10=DT*DKY*VY
DISP11=DT*DKX*HX*(9*VN(I,J)+19*VB(I,J)-5*V(I,J)+VV(I,J))/48./HH
DISP12=DT*DKX*HY*(9*UN(I,J)+19*UB(I,J)-5*U(I,J)+UU(I,J))/48./HH
DISP13=DT*0.5*DKX*UY
DPO=VN(i,j+1)+VNP(i,j-1)-VB(i,j+1)+2*VB(i,j)-VB(i,j-1)
VYYT=CTM*DPO/(DY*DY)
UNxy=((UN(I+1,J+1)-UN(I-1,J+1))-(UN(I+1,J-1)-UN(I-1,J-1)))
! /4./DX**2
UBxy=((UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1)))
! /4./DX**2
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))
! /4./DX**2
UUxy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))
! /4./DX**2
UNxyt=(11*UNxy-18*UBxy+9*Uxy-2*UUxy)/6.
UBxyt=(2*UNxy+3*UBxy-6*Uxy+UUxy)/6.
U1xyt=-(2*UUxy+3*Uxy-6*UBxy+UNxy)/6.
UUxyt=-(11*UUxy-18*Uxy+9*UBxy-2*UNxy)/6.
Uxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(9*UNxyt+19*UBxyt-5*U1xyt+UUxyt)/24.
Ubx=(UB(I+1,J)-UB(I-1,J))/2./dx
Ux=(U(I+1,J)-U(I-1,J))/2./dx
UUX=(UU(I+1,J)-UU(I-1,J))/2./dx
Uny=(UN(I,J+1)-UNP(I,J-1))/2./dx
Uby=(UB(I,J+1)-UB(I,J-1))/2./dx
Uy=(U(I,J+1)-U(I,J-1))/2./dx
UUY=(UU(I,J+1)-UU(I,J-1))/2./dx
Ubxxt=(3*Ubx-4*Ux+UUX)/2.
U1xt=(Ubx-UUX)/2.
UUxt=-(3*UUX-4*Ux+Ubx)/2.
Ubyy=(3*Uby-4*Uy+UUY)/2.
U1yt=(Uby-UUY)/2.
UUyt=-(3*UUY-4*Uy+Uby)/2.
DISP4=DT*DK(I,J)*(9*UNxy+19*UBxy-5*Uxy+UUxy)/24.
DISPY=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8
&+DISP9+DISP10+DISP11+DISP12+DISP13
if ((i.ge.3.and.i.le.im-2).and.(j.ge.3.and.j.le.jm-2)) then
VNSMX=-VN(i+2,j)+8*VN(i+1,j)-8*VNP(i-1,j)+VNP(i-2,j)
VBSMX=-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j)
VMSX=-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j)
VVSX=-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j)
VSMX=(DT/(12*DX))*(9*VNSMX+19*VBSMX-5*VMSX+VVSX)/24.
ELSE
VNSMX=VN(i+1,j)-VNP(i-1,j)
VBSMX=VB(i+1,j)-VB(i-1,j)
VMSX=V(i+1,j)-V(i-1,j)
VVSX=VV(i+1,j)-VV(i-1,j)
VSMX=(DT/(2*DX))*(9*VNSMX+19*VBSMX-5*VMSX+VVSX)/24.
END IF
USMX=DT*(9*UNX+19*UBX-5*UX+UUUX)/24.
USMY=DT*(9*UNY+19*UBY-5*UY+UUUY)/24.
if ((i.ge.3.and.i.le.im-2).and.(j.ge.3.and.j.le.jm-2)) then
VNSMY=-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2)
VBSMY=-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2)
VMSY=-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2)
VVSY=-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2)
VSMY=(DT/(12*DX))*(9*VNSMY+19*VBSMY-5*VMSY+VVSY)/24.
ELSE

```

```

VNSMY=VN(i,j+1)-VNP(i,j-1)
VBSMY=VB(i,j+1)-VB(i,j-1)
VMSY=V(i,j+1)-V(i,j-1)
VVS MY=VV(i,j+1)-VV(i,j-1)
VSMY=(DT/(2*DX))*(9*VNSMY+19*VBSMY-5*VMSY+VVS MY)/24.
END IF
DUNX=DT*(UN(i+1,j)-2*UN(i,j)+UNP(i-1,j))/(DX**2)
DUX=DT*(U(i+1,j)-2*U(i,j)+U(i-1,j))/(DX**2)
DUBX=DT*(UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j))/(DX**2)
DUUX=DT*(UU(i+1,j)-2*UU(i,j)+UU(i-1,j))/(DX**2)
U2SMX=(9*DUNX+19*DUBX-5*DUX+DUUX)/24.
DUNY=DT*(UN(i,j+1)-2*UN(i,j)+UNP(i,j-1))/(DY**2)
DUY=DT*(U(i,j+1)-2*U(i,j)+U(i,j-1))/(DY**2)
DUBY=DT*(UB(i,j+1)-2*UB(i,j)+UB(i,j-1))/(DY**2)
DUUY=DT*(UU(i,j+1)-2*UU(i,j)+UU(i,j-1))/(DY**2)
U2SMY=(9*DUNY+19*DUBY-5*DUY+DUUY)/24.
DVNX=DT*(VN(i+1,j)-2*VN(i,j)+VNP(i-1,j))/(DX**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(9*DVNX+19*DVBX-5*DVX+DVVX)/24.
V2SMY=(9*DVNY+19*DVBY-5*DVY+DVVY)/24.
USMXY=DT*(9*UNXY+19*UBXY-5*UXY+UUXY)/24.
Vnxy=((VN(I+1,J+1)-VN(I-1,J+1))-(VN(I+1,J-1)-VN(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Vbxy=((VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Vxy=((V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VVxy=((VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VSMXY=DT*(9*VNXY+19*VBXY-5*VXY+VVXY)/24.
IF (ian .GT. 30) THEN
qqq=USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2
if (qqq.eq.0.0) qqq=0.00001
AM=(CS*DEL)**2*(qqq)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(qqq)**(-0.5)*
!(2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
DMY=(CS*DEL)**2*0.5*(qqq)**(-0.5)*
!(2*USMX*USMXY+2*VSMX*VSMXY+(USMY+VSMX)*(U2SMY+VSMXY))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
DMY=0.0
END IF
SMAG1=2*DMY*VSMY+2*AM*V2SMY
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2
Z3Y=DT*gamma*ga*HH**2*(ZYYY+Zxxy)
! +DT*gamma*ga*HH*DDY*(2*ZKYY+ZKXX)+DT*gamma*ga*HH*DDX*ZKXY
VYT=(VNY-VBY)
Uyt=(23*Ubyt-16*U1yt+5*UUyt)/12.
Uxt=(23*Ubx-16*U1xt+5*UUxt)/12.
slpx=(.5+gamma)*HH*DDX*Uyt+(1+2*gamma)*HH*DDY*Uxt
SLP=DDY*HH*VYT+2*gamma*DDY*HH*VYT+slpx
www=u(i,j)**2+v(i,j)**2
frs=dt*fc*vb(i,j)*sqrt(www)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*vb(i,j)+frs
if (ddy.gt.0.or.abs(ddy).lt.1) slp=0.
VNP(i,j)=(VB(i,j)-VVY-UVX-VAR-VYVT+Uxyt+Z3Y+SLP
! +DISPY+SMAG)/ORMX
c -frict-frst
END DO
END DO
do j=1,jm
vnp(1,j)=(48*vnp(2,j)-36*vnp(3,j)+16*vnp(4,j)
! -3*vnp(5,j))/25.
vnp(1,j)=vnp(2,j)
vnp(im,j)=(48*vnp(im-1,j)-36*vnp(im-2,j)+16*vnp(im-3,j)
! -3*vnp(im-4,j))/25.
vnp(im,j)=vnp(im-1,j)
vn(1,j)=vnp(1,j)

```



```

vn(im,j)=vnp(im,j)
end do
do i=1,im
vnp(i,1)=0.
vnp(i,jm)=0.
vn(i,1)=0.
vn(i,jm)=0.
end do
c CORRECTOR MOMENTUM X
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
H(i,j)=D(i,j)+ZB(i,j)
alfa=-1./3.
bita=0.
gamma=1./15.
if (i.eq.2.or.i.eq.im-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
if (d(i,j).gt.DEN) THEN
HH=d(i,j)
ELSE
HH=H(i,j)
END IF
IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
if(h(i,j).eq.0.0) H(i,j)=zo
FRICT=DT*CB*U(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)
ELSE
FRICT=0.
END IF
IF (I.EQ.2) THEN
Zxxx=(-3*ZB(5,j)+14.*ZB(4,j)-24.*ZB(3,j)+
! 18.*ZB(2,j)-5*ZB(1,j))/2./DX**3
GOTO 766
ELSE
END IF
IF (I.EQ.(IM-1)) THEN
Zxxx=(5.*ZB(im,j)-18.*ZB(im-1,j)+24.*ZB(im-2,j)-
! 14.*ZB(im-3,j)+3.*ZB(im-4,j))/2./DX**3
GOTO 766
ELSE
END IF
Zbxxx=(ZB(i+2,j)-2.*ZB(i+1,j)+2.*ZB(i-1,j)-ZB(i-2,j))
! /2./DX**3
Znxxx=(ZNP(i+2,j)-2.*ZNP(i+1,j)+2.*ZNP(i-1,j)-ZNP(i-2,j))
! /2./DX**3
Zlxxx=(Z(i+2,j)-2.*Z(i+1,j)+2.*Z(i-1,j)-Z(i-2,j))
! /2./DX**3
Zzxxx=(ZZ(i+2,j)-2.*ZZ(i+1,j)+2.*ZZ(i-1,j)-ZZ(i-2,j))
! /2./DX**3
Zxxx=(19*Zbxxx+9*Znxxx-5*Zlxxx+Zzxxx)/24.
766 CONTINUE
ZNxyy=((ZNP(i+1,j+1)-2.*ZNP(i+1,j)+ZNP(i+1,j-1))-
! (ZNP(i-1,j+1)-2.*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zbxyy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i+1,j)+ZB(i+1,j-1))-
! (ZB(i-1,j+1)-2.*ZB(i-1,j)+ZB(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zlxyy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i+1,j)+Z(i+1,j-1))-
! (Z(i-1,j+1)-2.*Z(i-1,j)+Z(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zzxyy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i+1,j)+ZZ(i+1,j-1))-
! (ZZ(i-1,j+1)-2.*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zxyy=(19*Zbxyy+9*ZNxyy-5.*Zlxyy+Zzxyy)/24.
CTM=(alfa-gamma)*HH**2
c ! -ga*HH*(DT**2)/6.0+(DX**2)/6.0
ORMX=1.-2*CTM/(DX**2)
c +2*DK(i,j)*DT/(DX**2)
IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN

```

```

UNXP=UNP(i,j)*(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))
UBXP=UB(i,j)*(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))
UXP=U(i,j)*(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))
UUXP=UU(i,j)*(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))
UUX=(DT/(12*DX))*(9*UNXP+19*UBXP-5*UXP+UUXP)/24.
ZBXP=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))
ZXP=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))
ZZXP=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))
ZNXP=(-ZNP(i+2,j)+8*ZNP(i+1,j)-8*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-2,j))
VAR2=ga*DT/(12*DX)*ZBXP
VAR3=ga*DT/(12*DX)*ZXP
VAR4=ga*DT/(12*DX)*ZZXP
VAR1=ga*DT/(12*DX)*ZNXP
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
ELSE
UNXP=UN(i,j)*(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))
UBXP=UB(i,j)*(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))
UXP=U(i,j)*(U(i+1,j)-U(i-1,j))
UUXP=UU(i,j)*(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))
UUX=(DT/(2*DX))*(9*UNXP+19*UBXP-5*UXP+UUXP)/24.
VAR2=ga*DT/(2*DX)*(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))
VAR3=ga*DT/(2*DX)*(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))
VAR4=ga*DT/(2*DX)*(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))
VAR1=ga*DT/(2*DX)*(ZNP(i+1,j)-ZNP(i-1,j))
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
ZKNX=(ZNP(I+1,J)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I-1,J))/(DX**2)
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPXX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(9*ZKNX+19*ZKBX-5*ZKPX+ZKPXX)/24.
ZKNY=(ZNP(I,J+1)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I,J-1))/(DY**2)
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPYY=(ZZ(I,J+1)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(9*ZKNY+19*ZKBY-5*ZKPY+ZKPYY)/24.
ZKNxy=((ZNP(I+1,J+1)-ZNP(I-1,J+1))-(ZNP(I+1,J-1)-ZNP(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))-(ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))-(Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZZKxy=((ZZ(I+1,J+1)-ZZ(I-1,J+1))-(ZZ(I+1,J-1)-ZZ(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKXY=(9*ZKNXY+19*ZKBXY-5*ZKXY+ZZKXY)/24.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UNYP=VNP(i,j)*(-UN(i,j+2)+8*UN(i,j+1)-8*UNP(i,j-1)+UNP(i,j-2))
UBYP=VB(i,j)*(-UB(i,j+2)+8*UB(i,j+1)-8*UB(i,j-1)+UB(i,j-2))
UYP=V(i,j)*(-U(i,j+2)+8*U(i,j+1)-8*U(i,j-1)+U(i,j-2))
UUYP=VV(i,j)*(-UU(i,j+2)+8*UU(i,j+1)-8*UU(i,j-1)+UU(i,j-2))
VUY=(DT/(12*DY))*(9*UNYP+19*UBYP-5*UYP+UUYP)/24.
DDY=(-D(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
ELSE
UNYP=VNP(i,j)*(UN(i,j+1)-UNP(i,j-1))
UBYP=VB(i,j)*(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))
UYP=V(i,j)*(U(i,j+1)-U(i,j-1))
UUYP=VV(i,j)*(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))
VUY=(DT/(2*DY))*(9*UNYP+19*UBYP-5*UYP+UUYP)/24.
DDY=(D(i,j+1)-D(I,J-1))/2./DY
END IF
DUNX=DT*(UN(i+1,j)-2*UN(i,j)+UNP(i-1,j))/(DX**2)
DUX=DT*(U(i+1,j)-2*U(i,j)+U(i-1,j))/(DX**2)
DUBX=DT*(UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j))/(DX**2)
DUUX=DT*(UU(i+1,j)-2*UU(i,j)+UU(i-1,j))/(DX**2)
DUNY=DT*(UN(i,j+1)-2*UN(i,j)+UNP(i,j-1))/(DY**2)
DUY=DT*(U(i,j+1)-2*U(i,j)+U(i,j-1))/(DY**2)
DUBY=DT*(UB(i,j+1)-2*UB(i,j)+UB(i,j-1))/(DY**2)
DUUY=DT*(UU(i,j+1)-2*UU(i,j)+UU(i,j-1))/(DY**2)
UNX=(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))/2./DX
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX

```

```

UPX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
UNY=(UN(i,j+1)-UNP(i,j-1))/2./DY
UBY=(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))/2./DY
UPY=(U(i,j+1)-U(i,j-1))/2./DY
UUUY=(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))/2./DY
UX=(9*UNX+19*UBX-5*UPX+UUUX)/24.
UY=(9*UNY+19*UBY-5*UPY+UUUY)/24.
VNY=(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))/2./DY
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VPY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
VNX=(VN(i+1,j)-VNP(i-1,j))/2./DX
VBX=(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))/2./DX
VPX=(V(i+1,j)-V(i-1,j))/2./DX
VVVX=(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))/2./DX
VY=(9*VNY+19*VBY-5*VPY+VVVY)/24.
VX=(9*VNX+19*VBX-5*VPX+VVVX)/24.
DKX=(DK(i+1,j)-DK(i-1,j))/2./DX
DKY=(DK(i,j+1)-DK(i,j-1))/2./DY
HX=(ZB(I+1,J)-ZB(I-1,J))/2./DX
HY=(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))/2./DY
IF (d(i,j).lt.DEN) THEN
DKX=(H(i+1,j)*DK(i+1,j)-H(i-1,j)*DK(i-1,j))/2./DX/H(i,j)
ELSE
DKX=(DK(i+1,j)-DK(i-1,j))/2./DX
END IF
DISP1=DK(i,j)*(9*DUNX+19*DUBX-5*DUX+DUUX)/24.
DISP2=DT*2.*DK(I,J)*HX*UX/HH
DISP3=DT*DK(I,J)*HY*UY/HH
DISP5=DT*DKX*HX*(9*UN(I,J)+19*UB(I,J)-5*U(I,J)+UU(I,J))/24./HH
DISP6=DK(i,j)*(9*DUNY+19*DUBY-5*DUY+DUUY)/24.
DISP7=DT*0.5*DK(I,J)*HX*VY/HH
DISP8=DT*0.5*DK(I,J)*HY*VX/HH
DISP9=DT*0.5*DKY*UY
DISP10=DT*DKX*UX
DISP11=DT*DKY*HY*(9*UN(I,J)+19*UB(I,J)-5*U(I,J)+UU(I,J))/48./HH
DISP12=DT*DKY*HX*(9*VN(I,J)+19*VB(I,J)-5*V(I,J)+VV(I,J))/48./HH
DISP13=DT*0.5*DKY*VX
DPO=UN(i+1,j)+UNP(i-1,j)-UB(i+1,j)+2*UB(i,j)-UB(i-1,j)
UXXT=CTM*DPO/(DX*DX)
VNxy=((VNP(I+1,J+1)-VNP(I-1,J+1))-(VNP(I+1,J-1)-VNP(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VBxy=((VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Vxy=((V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VVxy=((VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
VNxyt=(11*VNxy-18*VBxy+9*Vxy-2*VVxy)/6.
VBxyt=(2*VNxy+3*VBxy-6*Vxy+VVxy)/6.
Vlxyt=-(2*VVxy+3*Vxy-6*VBxy+VNxy)/6.
VVxyt=-(11*VVxy-18*Vxy+9*VBxy-2*VNxy)/6.
Vxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(9*VNxyt+19*VBxyt-5*Vlxyt+VVxyt)/24.
VNx=(VN(I+1,J)-VNP(I-1,J))/2./dx
Vbx=(VB(I+1,J)-VB(I-1,J))/2./dx
Vx=(V(I+1,J)-V(I-1,J))/2./dx
VVx=(VV(I+1,J)-VV(I-1,J))/2./dx
Vby=(VB(I,J+1)-VB(I,J-1))/2./dx
Vy=(V(I,J+1)-V(I,J-1))/2./dx
VVy=(VV(I,J+1)-VV(I,J-1))/2./dx
Vbxt=(3*Vbx-4*Vx+VVx)/2.
Vlxt=(Vbx-VVx)/2.
VVxt=-(3*VVx-4*Vx+Vbx)/2.
Vbyt=(3*Vby-4*Vy+VVy)/2.
Vlyt=(Vby-VVy)/2.
VVyt=-(3*VVy-4*Vy+Vby)/2.
DISP4=DT*DK(I,J)*(9*VNxy+19*VBxy-5*Vxy+VVxy)/24.
DISPX=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8+DISP9+
& DISP10+DISP11+DISP12+DISP13
if ((i.ge.3.and.i.le.im-2).and.(j.ge.3.and.j.le.jm-2)) then
UNSMX=(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))

```

```

UBSMX=(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))
USMSX=(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))
UUSMX=(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))
USMX=(DT/(12*DX))*(9*UNSMX+19*UBSMX-5*USMSX+UUSMX)/24.
ELSE
UNSMX=UN(i+1,j)-UNP(i-1,j)
UBSMX=UB(i+1,j)-UB(i-1,j)
USMSX=U(i+1,j)-U(i-1,j)
UUSMX=UU(i+1,j)-UU(i-1,j)
USMX=(DT/(2*DX))*(9*UNSMX+19*UBSMX-5*USMSX+UUSMX)/24.
END IF
VSMX=DT*(9*VNX+19*VBX-5*VX+VVX)/24.
if ((i.ge.3.and.i.le.im-2).and.(j.ge.3.and.j.le.jm-2)) then
UNSMY=(-UN(i,j+2)+8*UN(i,j+1)-8*UNP(i,j-1)+UNP(i,j-2))
UBSMY=(-UB(i,j+2)+8*UB(i,j+1)-8*UB(i,j-1)+UB(i,j-2))
USMSY=(-U(i,j+2)+8*U(i,j+1)-8*U(i,j-1)+U(i,j-2))
UUSMY=(-UU(i,j+2)+8*UU(i,j+1)-8*UU(i,j-1)+UU(i,j-2))
USMY=(DT/(12*DX))*(9*UNSMY*19*UBSMY-5*USMSY+UUSMY)/24.
ELSE
UNSMY=UN(i,j+1)-UNP(i,j-1)
UBSMY=UB(i,j+1)-UB(i,j-1)
USMSY=U(i,j+1)-U(i,j-1)
UUSMY=UU(i,j+1)-UU(i,j-1)
USMY=(DT/(2*DX))*(9*UNSMY*19*UBSMY-5*USMSY+UUSMY)/24.
END IF
U2SMX=(9*DUNX+19*DUBX-5*DUX+DUUX)/24.
DVNX=DT*(VN(i+1,j)-2*VN(i,j)+VNP(i-1,j))/(DX**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(9*DVNX+19*DVBX-5*DVX+DVVX)/24.
UNxy=((UN(I+1,J+1)-UN(I-1,J+1))-(UN(I+1,J-1)-UN(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
UUxy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Ubxxy=((UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
Uxyy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
UUxyy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
USMXY=DT*(9*UNXY+19*UBXY-5*UXY+UUXY)/24.
IF (ian .GT. 30) THEN
qqq=abs(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)
if(qqq.eq.0.0) qqq=0.00001
AM=(CS*DEL)**2*(qqq)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(qqq)**(-0.5)*
!(2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
END IF
SMAG1=2*DMX*USMX+2*AM*U2SMX
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2
Z3x=DT*gamma*ga*HH**2*(Zxxx+Zxyy)
! +DT*gamma*ga*HH*DDX*(2*ZKXX+ZKYY)+DT*gamma*ga*HH*DDY*ZKXY
Vyt=(23*Vbyy-16*Vlyt+5*VVyt)/12.
Vxt=(23*Vbxt-16*Vlxt+5*VVxt)/12.
UXT=(UNX-UBX)
slpy=(.5+gamma)*HH*DDX*Vyt+(0.5+gamma)*HH*DDY*Vxt
SLP=DDX*HH*UXT+2*gamma*DDX*HH*UXT+slpy
www=u(i,j)**2+v(i,j)**2
frs=dt*fc*ub(i,j)*sqrt(www)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*ub(i,j)+frs
if (ddx.gt.0.or.abs(ddx).lt.1) slp=0.
UNP(i,j)=(UB(i,j)-UUX-VUY-VAR-UXXT+Vxyt+Z3x+SLP
! +DISPX+SMAG)/ORMX
c -frict-frst
END DO

```

```

END DO
c *****
c final conditions for u velocities
c in computational domain's limits Y-axis
c *****
do j=1, jm
unp(1, j)=UNP(2, J)
unp(im, j)=UNP(IM-1, J)
un(1, j)=UN(2, J)
unp(im, j)=UN(IM-1, J)
end do
c *****
c 5-points filtering for u velocities
c in boundaries of X-axis
c *****
do i=1, im
unp(i, 1)=(48*unp(i, 2)-36*unp(i, 3)+16*unp(i, 4)
! -3*unp(i, 5))/25.
unp(i, jm)=unp(i, jm-1)
un(i, 1)=unp(i, 1)
un(i, jm)=unp(i, jm)
end do
c *****
c smoothing for u, v, z
c *****
do i=2, im-1
do j=2, jm-1
znp(i, j)=.99*znp(i, j)+.0025*znp(i, j+1)+.0025*znp(i, j-1)
! +.0025*znp(i+1, j)+.0025*znp(i-1, j)
unp(i, j)=.99*unp(i, j)+.0025*unp(i, j+1)+.0025*unp(i, j-1)
! +.0025*unp(i+1, j)+.0025*unp(i-1, j)
vnp(i, j)=.99*vnp(i, j)+.0025*vnp(i, j+1)+.0025*vnp(i, j-1)
! +.0025*vnp(i+1, j)+.0025*vnp(i-1, j)
end do
end do
DU=0.
DV=0.
DZ=0.
DZZ=0.0
DUU=0.0
DVV=0.0
do j=2, jm-1
DO I=2, IM-1
DU=DU+ABS(UN(i, j)-UNP(i, j))
DV=DV+ABS(VN(i, j)-VNP(i, j))
DZ=DZ+ABS(ZN(i, j)-ZNP(i, j))
DUU=DUU+abs(UNP(i, j))
DVV=DVV+abs(VNP(i, j))
DZZ=DZZ+abs(ZNP(i, j))
END DO
end do
if (DUU.lt..001) DUU=1.
if (DVV.lt..001) DVV=1.
if (DZZ.lt..001) DZZ=1.
DUL=DU/DUU
DVL=DV/DVV
DZL=DZ/DZZ
301 IF (DUL.GE.0.001.OR.DZL.GE.0.001.OR.DVL.GE.0.001
! ) THEN
ITER=ITER+1
if (iter.EQ.1.OR.ian.EQ.1)then
c *****
c BREAKING
c *****
do i=2, im-1
do j=2, jm-1
ZBXP=(ZB(i+1, j)-ZB(i-1, j))/2./DX
ZBYP=(ZB(i, j+1)-ZB(i, j-1))/2./DY
HH=D(i, j)+ZNP(i, j)
zt(i, j)=(znp(i, j)-z(i, j))/2./dt
etmp=max(0.00001, abs(zbxp))
angle=atan(zbyp/etmp)

```

```

atmp=45.0/180*pi
if(abs(angle).LE.atmp)then
iage=min(itb(i,j+1),itb(i,j-1))
iage=min(iage,itb(i,j))
if(iage.LT.nm)then
dp=max(ddk,d(i,j))
trnt=coef*t*sqrt(abs(dp/ga))
et_tc=et1-(et1-et2)*float(ian-iage)*dt/trnt
ctb(i,j)=max(et_tc,et2)
else
ctb(i,j)=et1
endif
elseif(angle.GT.atmp)then
iage=min(itb(i+1,j+1),itb(i-1,j-1))
iage=min(iage,itb(i,j))
if(iage.LT.nm)then
dp=max(ddk,d(i,j))
trnt=coef*t*sqrt(abs(dp/ga))
et_tc=et1-(et1-et2)*float(ian-iage)*dt/trnt
ctb(i,j)=max(et_tc,et2)
else
ctb(i,j)=et1
endif
elseif(angle.LT.-atmp)then
iage=min(itb(i+1,j-1),itb(i-1,j+1))
iage=min(iage,itb(i,j))
if(iage.LT.nm)then
dp=max(ddk,HH)
trnt=coef*t*sqrt(abs(dp/ga))
et_tc=et1-(et1-et2)*float(ian-iage)*dt/trnt
ctb(i,j)=max(et_tc,et2)
else
ctb(i,j)=et1
endif
endif
enddo
enddo
endif
GOTO 300
ELSE
GOTO 350
ENDIF
300 continue
IF (ITER.GT.200) GOTO 350
do j=2,jm-1
DO I=2,IM-1
VN(i,j)=VNP(i,j)
UN(i,j)=UNP(i,j)
ZN(i,j)=ZNP(i,j)
END DO
end do
GOTO 430
350 CONTINUE
write (*,444) t,iter,zb(im/2,40),zb(im/2,110),zb(im/2,216)
444 format(f15.6,i10,6f15.6)
do i=1,im
do j=1,jm
dk(i,j)=0.
end do
end do
do i=2,im-1
do j=2,jm-1
HH=D(i,j)+Znp(i,j)
zt(i,j)=(znp(i,j)-z(i,j))/2./dt
dp=max(ddk,HH)
et_tc=ctb(i,j)*sqrt(abs(ga*dp))
tmp=zt(i,j)
if(tmp.LE.et_tc)then
cbr=0.
itb(i,j)=nm
else
cbr=min(1.0,(tmp/et_tc-1.0))

```

```

itbrk=1
itb(i,j)=min(itb(i,j),ian)
endif
c fanis -ddk?
if(znp(i,j)+d(i,j).LT.ddk)then
cbr=1.0
dp=max(ddk,abs(znp(i,j)))
endif
dk(i,j)=cbr*cbrk**2*dp*abs(zt(i,j))
enddo
enddo
do ijk=1,3
do i=2,im-1
do j=2,jm-1
dk(i,j)=.6*dk(i,j)+.10*dk(i+1,j)+.10*dk(i-1,j)+
& .10*dk(i,j+1)+.10*dk(i,j-1)
end do
end do
end do
c *****
c sponge layer
c *****
idump1=30
idump2=im-30
do j=1,jm
do i=1,idump1-1
xmxs=i*dx-idump1*dx
xlmxs=idump1*dx
parx=(xmxs/xlmxs)**2
fdxp=exp(parx)-1
ena=1.
fdx=fdxp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdx
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm
vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
do i=idump2,im
xmxs=i*dx-idump2*dx
xlmxs=im*dx-idump2*dx
parx=(xmxs/xlmxs)**2
fdxp=exp(parx)-1
ena=1.
fdx=fdxp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdx
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm
vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
end do
jdump1=30
jdump2=jm-30
do i=1,im
do j=1,jdump1
ymys=j*dy-jdump1*dy
ylmys=jdump1*dy
pary=(ymys/ylmys)**2
fdyp=exp(pary)-1
ena=1.
fdy=fdyp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdy
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm
vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
do j=jdump2,jm

```

```

ymys=j*dy-jdump2*dy
ylmys=jm*dy-jdump2*dy
pary=(ymys/ylmys)**2
fdyp=exp(pary)-1
ena=1.
fdy=fdyp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdy
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm
vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
end do
c *****
c SMOOTHING
c *****
c afl=.125
afl=.25
rps=afl*per/dt
irps=int(afl*per/dt)
dif=abs(ian/rps-int(ian/irps))
IF (dif.lt.dt) THEN
do i=2, im-1
do j=2, jm-1
znp(i,j)=wf1*znp(i,j)+wf2*(znp(i,j+1)+znp(i,j-1)
! +znp(i+1,j)+znp(i-1,j))
unp(i,j)=wf1*unp(i,j)+wf2*(unp(i,j+1)+unp(i,j-1)
! +unp(i+1,j)+unp(i-1,j))
vnp(i,j)=wf1*vnp(i,j)+wf2*(vnp(i,j+1)+vnp(i,j-1)
! +vnp(i+1,j)+vnp(i-1,j))
end do
end do
else
end if
write(34,123) t,znp(im/2,50), znp(im/2,170), znp(im/2,290)
write(54,123) t,znp(im/2,330), znp(im/2,370)
c theseis censurs,1,3,5,7
c *****
c PALAIOSI
c *****
do J=1,JM
DO I=1,IM
ZZ(i,j)=Z(i,j)
Z(i,j)=ZB(i,j)
ZB(i,j)=ZNP(i,j)
UU(i,j)=U(i,j)
U(i,j)=UB(i,j)
UB(i,j)=UNP(i,j)
UNP(I,J)=UN(I,J)
VV(i,j)=V(i,j)
V(i,j)=VB(i,j)
VB(i,j)=VNP(i,j)
end do
end do
555 format(2f12.6)
IF(ian*dt.lt.TEND) GOTO 100
c *****
c END OF TIME LOOP
c *****
open (unit=75,file='zzz.dat')
do i=1,im
do j=1,jm
write(75,123) i*dx,j*dy,znp(i,j)
end do
end do
close (75)
123 format (5f12.5)
stop
END

```