



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

Περί Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους με Δεδομένα
Άγνωστης Πιθανοτικής Κατανομής

**On Data-Driven Polynomial Chaos Expansion with
Unknown Propability Distribution**

Μεταπτυχιακή εργασία

Διεπιστημονικό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών (ΔΠΜΣ)
“Υπολογιστική Μηχανική”

Στυλιανός Κεσόπουλος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2024

*Αφιερώνεται στον Παππού μου
Στέλιο Κεσόπουλο*

Ευχαριστίες

Είναι δύσκολο σε μια σελίδα να εκφράσει κανείς το ευχαριστώ που θέλει να πει στα πρόσωπα που συνέβαλαν όχι μόνο στην εκπόνησή της μεταπτυχιακής εργασίας αλλά και στη στήριξη καθόλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού. Σίγουρα σε ένα κείμενο δεν μπορούν να αναφερθούν όλοι. Τα λόγια πολλές φορές είναι λίγα σε αυτές τις περιπτώσεις και την ευχαρίστηση που νιώθεις κάνοντας μια καλή μελέτη πάνω σε αυτό που αγαπάς.

Αρχικά, λοιπόν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Κύριο Κυριάκο Χ. Γιαννάκογλου, καθηγητή στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και επιβλέποντα στη μεταπτυχιακή εργασία γιατί μου εμπιστεύτηκε αυτό το θέμα της αλλά πρωτίστως για την στήριξη που μου έδειξε χωρίς να υπολογίζει ωράριο και κούραση. Θέλω να τον ευχαριστήσω επίσης για την μέθοδο σκέψης που μου εμφύσησε στη μελέτη σύνθετων φαινομένων και στην αντίληψη που πρέπει να έχω ως μηχανικός.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη που με βοήθησε στη μεταπτυχιακή εργασία από τις εφαρμογές σε επίπεδο διαμόρφωσης λογισμικού μέχρι και στην αφιέρωση χρόνου για την εξήγηση της θεωρίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου που καθόλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού δεθήκαμε, στηρίζαμε ο ένας τον άλλον. Η επαφή και η συνομιλία μαζί τους ήταν μια ευχάριστη ανάσα στην πίεσή και την κούραση της καθημερινότητας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Μαργαρίτα Μαστροκάλου που κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού, ως προϊσταμένη στην εργασία μου, μου έδωσε όλη την απαραίτητη στήριξη, κατανόηση αλλά και την ενθάρρυνση για την απόφαση μου να κάνω το συγκεκριμένο μεταπτυχιακό παράλληλα με την δουλειά.

Τέλος δεν θα ήταν υπερβολή να πω ότι η οικογένεια μου με έφτασε ως εδώ με την στήριξη που δεν μετριέται σε μέρες ή ώρες αλλά σε μια ολόκληρη ζωή. Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία αφιερώνεται στον Παππού μου, Στέλιο Κεσόπουλο, που φέρω το όνομα του και επέμενε στο να διαβάζω και να μελετάω αυτό που αγαπάω.

Περίληψη

Η ποσοτικοποίηση αβεβαιότητων Uncertainty Quantification (UQ) κατέχει κρίσιμο ρόλο στον σχεδιασμό συστημάτων στη σημερινή εποχή. Η εξασφάλιση της βέλτιστης λύσης όχι μόνο σε ένα σημείο λειτουργίας αλλά σε ένα εύρος αυτών καθιστά κρίσιμη τη διαδικασία της ποσοτικοποίησης των αβεβαιότητων. Οι μέθοδοι ποσοτικοποίησης αβεβαιοτήτων ποικίλουν με το υπολογιστικό κόστος να παίζει καθοριστικό ρόλο. Ενδεικτικά αναφέρονται η μέθοδος Monte Carlo, μέθοδος των στατιστικών ροπών και η μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους. Για παράδειγμα, η μέθοδος Monte Carlo απαιτεί μεγάλο αριθμό αξιολογημένων δειγμάτων. Η μεταπτυχιακή εργασία αποσκοπεί στην παρουσίαση της θεωρίας, του προγραμματισμού και της δοκιμής-επίδειξης επί παραδειγμάτων της μεθόδου του αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους, για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της συνάρτησης ενδιαφέροντος, με άγνωστη πιθανοτική κατανομή των αβέβαιων μεταβλητών. Στη μεταπτυχιακή εργασία, η παραπάνω μέθοδος αναφέρεται ως Data Driven Polynomial Chaos Expansion (DDPCE). Η ειδοποιός διαφορά με τη κλασική μέθοδο αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους, Polynomial Chaos Expansion (PCE), έγκειται στο γεγονός ότι η DDPCE δεν απαιτεί να είναι γνωστή η κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής σε αντίθεση με το PCE. Η μέθοδος DDPCE παρουσιάζεται και εφαρμόζεται τόσο στη περίπτωση μιας αβέβαιης μεταβλητής όσο και στη περίπτωση πολλών. Στα αριθμητικά παραδείγματα γίνεται σύγκριση τόσο με τις αναλυτικές λύσεις όσο και με τη μέθοδο Monte Carlo. Επίσης πραγματοποιείται εφαρμογή της μεθόδου σε πρόβλημα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής για τον υπολογισμό αβεβαιοτήτων που σχετίζονται με τις συνθήκες ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Department
Laboratory of Parallel CFD & Optimization Unit

On Data-Driven Polynomial Chaos Expansion with
unknown Propability Distribution

Master's Thesis
Computational Mechanics MSc Program

Stylianos Kesopoulos

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2024

Abstract

Uncertainty Quantification (UQ) is pivotal in contemporary system design, as it ensures the optimal solution across a range of operating points rather than just a single one. The process of quantifying uncertainties is thus essential. Various methods exist for uncertainty quantification, with computational cost being a significant consideration. Examples include the Monte Carlo method, the statistical moments method, and the Polynomial Chaos Expansion (PCE) method. For instance, the Monte Carlo method necessitates evaluating a large number of samples. This thesis focuses on presenting the theory, programming, and testing of examples using the Polynomial Chaos Expansion method for calculating the mean and standard deviation of a function of interest, even when the distribution of the uncertain variable is unknown. In this thesis this approach is referred to as Data-Driven Polynomial Chaos Expansion (DDPCE). The key difference between DDPCE and the classical

PCE method is that the former does not require the probabilistic distribution, of the uncertain variables to be known. The DDPCE method is demonstrated and applied to both single and multiple uncertain variables. Numerical examples compare the results with both analytical solutions and the Monte Carlo method. An application of the method is also carried out in a CFD problem, in external aerodynamics, to compute the statistical moments of quantities of interest, in the presence of uncertain flow conditions.

Ακρωνύμια

EMΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
DP	Design Point
SOO	Single-Objective Optimization
MOO	Multi-Objective Optimization
PCE	Polynomial Chaos Expansion
DDPCE	Data Driven Polynomial Chaos Expansion
MC	Monte Carlo
PDF	Probability Density Function
GQ	Gauss Quadrature
UQ	Uncertainty Quantification
QoI	Quantity Of Interest
MoM	Method of Moments
FOSM	First Order Second Moment
SOSM	Second Order Second Moment

Συμβολισμοί

x	Αβέβαιη μεταβλητή
N	Πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού
D	Πεδίο ορισμού για μια αβέβαιη μεταβλητή
\vec{D}	Πεδίο ορισμού για πάνω από μια αβέβαιες μεταβλητές
N_s	Αριθμός δειγμάτων
P_i	Ορθογώνια Πολυώνυμα βαθμού i
$p_j^{(i)}$	Συντελεστές Ορθογώνιων Πολυώνυμων P_i βαθμού i και αρίθμησης j
ψ_i	Πολυδιάστατα Ορθογώνια Πολυώνυμα βαθμού i
δ	Σύμβολο Kronecker
a_i	Συντελεστές Πολυωνυμικού Χάους τάξης i
k	Τάξη χάους
t	Μετρητής αβέβαιων μεταβλητών
T	Πλήθος αβέβαιων μεταβλητών
n	Αριθμός Συντελεστών a_i Πολυδιάστατου PCE
$\lambda^{(t)}$	Collocation points για κάθε αβέβαιη μεταβλητή t
μ_ν	ν -οστή Στατιστική Ροπή
M	Μητρώο Στατιστικών Ροπών
M_P	Μητρώο με τις τιμές των Πολυωνύμων P_i για $\lambda^{(t)}$
M_ψ	Μητρώο με τις τιμές των Πολυωνύμων ψ_i
R^{-1}	Μητρώο με τους συντελεστές $p_j^{(i)}$ των πολυωνύμων P_i
V_F	Τιμές της F σε μορφή διανύσματος

V_a	Τιμές των a_i σε μορφή διανύσματος
F	Συνάρτηση Ενδιαφέροντος
\hat{F}	Συνάρτηση Κόστους
F_r	Ανασκευασμένη συνάρτηση ενδιαφέροντος F
F_{rl}	Ανασκευασμένη συνάρτηση ενδιαφέροντος F με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων
μ_F	Μέση τιμή συνάρτησης ενδιαφέροντος
σ_F	Τυπική απόκλιση συνάρτησης ενδιαφέροντος
s_m	Συντελεστής για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους
h	Συντελεστής πολυωνύμων που προκύπτουν από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων
He	Πολυώνυμο Hermite
\mathcal{L}	Πολυώνυμο Legendre
L	Πολυώνυμο Laguerre

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά ζητήματα για τη βελτιστοποίηση	1
1.2 Βελτιστοποίηση υπό Αβεβαιότητες-Στιβαρός Σχεδιασμός	3
1.3 Μέθοδοι Ποσοτικοποίησης Αβεβαιοτήτων	4
1.3.1 Μέθοδος Monte Carlo	4
1.3.2 Μέθοδος των Στατιστικών Ροπών	5
1.3.3 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους	7
1.4 Στόχος της Μεταπτυχιακής εργασίας	7
1.5 Δομή της Μεταπτυχιακής εργασίας	8
2 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού χάους	9
2.1 Ανάπτυγμα PCE για $T = 1$	9
2.1.1 Ορθογώνια Πολυώνυμα	11
2.1.2 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης για $T = 1$	12
2.1.3 Υπολογισμός συντελεστών PCE για $T = 1$	14
2.2 Ανάπτυγμα PCE για $T > 1$	15
2.2.1 Πολυδιάστατα Ορθογώνια Πολυώνυμα	16
2.2.2 Υπολογισμός Συντελεστών στο PCE για $T > 1$	18
2.2.3 Υπολογισμός Μέσης τιμής και Τυπικής απόκλισης στο PCE για $T > 1$	20
3 Ανάπτυγμα DDPCE για $T = 1$	23

3.1	Εισαγωγικά Σχόλια	23
3.2	DDPCE για $T = 1$	23
3.2.1	Ορθοκανονικά Πολυώνυμα	24
3.2.2	Υπολογισμός Μέσης τιμής και Τυπικής απόκλισης της F με χρήση DDPCE για $T = 1$	30
4	Αριθμητικές εφαρμογές DDPCE για $T = 1$	35
4.1	Εισαγωγικά σχόλια	35
4.1.1	Εφαρμογή σε Γραμμική Συνάρτηση	35
4.1.2	Εφαρμογή σε Εκθετική Συνάρτηση	42
4.1.3	Εφαρμογή σε Τριγωνομετρική Συνάρτηση	46
5	Ανάπτυγμα DDPCE για $T > 1$	49
5.1	Εισαγωγικά σχόλια	49
5.1.1	Παράδειγμα υπολογισμού συντελεστών DDPCE για $T = 2$	49
6	Αριθμητικές εφαρμογές DDPCE για $T > 1$	53
6.1	Εισαγωγικά σχόλια	53
6.1.1	Εφαρμογή σε Πολυωνυμική Συνάρτηση	53
6.1.2	Εφαρμογή σε Τριγωνομετρική Συνάρτηση	58
7	Εφαρμογή της μεθόδου DDPCE σε ροή γύρω από αεροτομή	61
7.1	Εισαγωγικά σχόλια	61
7.2	Υπολογισμός μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης L και D	61
8	Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα	67
8.1	Σύνοψη Συμπερασμάτων	67
8.2	Προτάσεις για μελλοντική μελέτη	68
A'	Υπολογισμός συντελεστών ορθοκανονικών πολυωνύμων με χρήση DDPCE	69
A'.1	Υπολογισμός για $T = 1$	69

Α.2 Υπολογισμός για $T > 1$	74
Βιβλιογραφία	81

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά ζητήματα για τη βελτιστοποίηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι βασικές αρχές για τα ζητήματα της βελτιστοποίησης αλλά και κυριότερα για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας "Uncertainty Quantification" όπου είναι και το θέμα της μεταπτυχιακής εργασίας.

Η βελτιστοποίηση είναι η διαδικασία μέσα από την οποία επιδιώκεται να βρεθεί η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος. Στην σημερινή εποχή δεν είναι επιθυμητό μόνο να βρεθεί μια οποιαδήποτε αλλά αυτή η λύση να είναι η βέλτιστη. Η συνθετότητα των προβλημάτων που αντιμετωπίζονται στη σημερινή εποχή από τους μηχανικούς αλλά και ο όγκος των δεδομένων που τίθενται προς επεξεργασία επιβάλλει η διαδικασία αυτή να γίνεται με υπολογιστικές μεθόδους αλλά και συνεχώς να εξελίσσεται ως ξεχωριστός επιστημονικός τομέας μελέτης.

Για να μπορέσει να ξεκινήσει η διαδικασία της βελτιστοποίησης πρέπει να αποφασιστεί από τον εκάστοτε μηχανικό ως προς ποιο κριτήριο είναι επιθυμητό να ευρεθεί η βέλτιστη λύση. Ορίζεται λοιπόν η "συνάρτηση στόχος" και θα συμβολίζεται ως \hat{F} . Σκοπός είναι αυτή είτε να ελαχιστοποιηθεί είτε να μεγιστοποιηθεί. Η απόφαση για το αν θα μεγιστοποιηθεί ή θα ελαχιστοποιηθεί έχει να κάνει με τον ορισμό της συνάρτησης \hat{F} . Στη διαδικασία της βελτιστοποίησης δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο καθώς αν θα οριστεί ως επιθυμητό να μεγιστοποιηθεί η \hat{F} καθώς αρκεί για παράδειγμα να ελαχιστοποιηθεί η $\frac{1}{\hat{F}}$. Με βάση το παραπάνω η "συνάρτηση στόχος" για λόγους ενιαίας αντιμετώπισης των προβλημάτων θα καλείται **συνάρτηση κόστους** αποτυπώνοντας έτσι την λογική της ελαχιστοποίησης.

Η "συνάρτηση κόστους" επηρεάζεται από τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις μεταβλητές περιβάλλοντος για τις οποίες γίνεται μια σύντομη αναφορά παρακάτω.

- Οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι μεταβλητές που ορίζει ο χρήστης και σαφώς επηρεάζουν τη λύση του προβλήματος. Οι μεταβλητές σχεδιασμού συμβολίζονται με $\vec{b} \in \mathbb{R}^N$, όπου N είναι το πλήθος των μεταβλητών.
- Οι μεταβλητές περιβάλλοντος (environmental variables) είναι όλες οι μεταβλητές που καθορίζουν το περιβάλλον μέσα στο οποίο γίνεται η εκάστοτε μελέτη-υπολογισμός και επηρεάζουν τη "συνάρτηση κόστους".

Σαφώς μπορεί να υπάρξουν και περιπτώσεις προβλημάτων όπου κάποιες μεταβλητές σχεδιασμού συμπίπτουν με τις μεταβλητές περιβάλλοντος. Στο πλαίσιο αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας δεν εξετάζεται η παραπάνω περίπτωση.

Ανάλογα με το πλήθος των συναρτήσεων κόστους που τίθενται σε ένα πρόβλημα ορίζεται η μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση (Single Objective Optimization (SOO)) σε περίπτωση που η συνάρτηση κόστους είναι μια και η πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση (Multiple Objective Optimization (MOO)) σε περίπτωση που είναι περισσότερες. Η επιλογή του πλήθους των συναρτήσεων στόχων αλλά και το ποιες θα επιλεγούν έγκειται στη κρίση του εκάστοτε μηχανικού.

Υπάρχουν δύο μεγάλες οικογένειες μεθόδων για να υπολογισθεί η βέλτιστη λύση. Οι στοχαστικές (Stochastic) και οι αιτιοκρατικές (Deterministic).

- Οι στοχαστικές μέθοδοι "ψάχνουν" στο πεδίο ορισμού και καταφέρνουν να βρουν την βέλτιστη λύση χωρίς να χρησιμοποιούν παραγώγους [5] [9][29] αλλά με τυχαίο τρόπο.
- Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι χρησιμοποιούν τις παραγώγους της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού πρώτης και σπανιότερα δεύτερης τάξης, για να βρουν το ακρότατο [29].

Η διαφορά στη συμπεριφορά των δύο μεθόδων έγκειται στο γεγονός ότι οι στοχαστικές είναι γενικά αργές μέθοδοι, σε σχέση με τις αιτιοκρατικές, αλλά είναι αποτελεσματικές αν τους επιτραπεί να αξιολογήσουν επαρκές πλήθος υποψήφιων λύσεων. Από την άλλη, στη χρησιμοποίηση των αιτιοκρατικών μεθόδων ελοχεύει ο κίνδυνος του εγκλωβισμού σε κάποιο τοπικό ακρότατο. Για την αποφυγή του παραπάνω ενδεχομένου, συνιστάται ο υβριδικός συνδυασμός δηλαδή η εύρεση της περιοχής στην οποία είναι η βέλτιστη λύση με τη χρήση στοχαστικών αλγορίθμων και, έπειτα, η χρήση μιας αιτιοκρατικής μεθόδου για τον "λεπτομερή" υπολογισμό της λύσης (εκλέπτυνση της λύσης, solution refinement).

1.2 Βελτιστοποίηση υπό Αβεβαιότητες-Στιβαρός Σχεδιασμός

Στις περισσότερες τεχνικές βελτιστοποίησης, οι μεταβλητές σχεδιασμού που καθορίζουν τη λύση του προβλήματος θεωρούνται ότι λαμβάνουν μια τιμή η οποία είναι "σαφής". Παρόλα αυτά στα πραγματικά προβλήματα οι τιμές που λαμβάνουν δεν είναι οι θεωρητικά ακριβείς αλλά είναι πιθανόν να υπόκεινται σε στοχαστικότητα. Μια μεταβλητή που συμπεριφέρεται στοχαστικά, μπορεί να ακολουθεί ή να μην ακολουθεί μια γνωστή πιθανοτική κατανομή. Στην πρώτη περίπτωση, είναι γνωστές η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση. Άρα, η αβέβαιη μεταβλητή έχει ένα συγκεκριμένο "νόμο συμπεριφοράς" ο οποίος πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά την επίλυση λ.χ. ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ή όταν απλώς γίνεται ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας της απόκρισης του συστήματος.

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία επεκτείνει τις σχετικές μεθόδους ποσοτικοποίησης αβεβαιοτήτων (ειδικά αυτές που αφορούν τη μέθοδο αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους - βλ. σε άλλα σημεία της εργασίας) στην περίπτωση που διαθέτουμε επαρκή δεδομένα, χωρίς όμως να είναι γνωστή η πιθανοτική κατανομή που ακολουθούν. Επισημαίνεται, επίσης, ότι είτε θα είναι γνωστή η συνάρτηση απόκρισης (λ.χ. θα είναι διαθέσιμο το λογισμικό αξιολόγησης της λύσης, πιθανόν ένας κώδικας CFD, που θα υπολογίζει την απόκριση ή θα δημιουργείται ένα υποκατάστατο μοντέλο αυτού).

Αυτές καλούνται αβέβαιες μεταβλητές και συμβολίζονται με c όπου $\vec{c} \in \mathbb{R}^T$ και T είναι το πλήθος των αβέβαιων μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές μπορεί να ακολουθούν γνωστές στατιστικές κατανομές (λ.χ. Κανονική, εκθετική κλπ) είτε μπορεί να είναι άγνωστη η κατανομή που ακολουθούν.

Το εύρος μέσα στο οποίο κινούνται οι αβέβαιες μεταβλητές επηρεάζει σαφώς το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης αλλάζοντας και το σημείο λειτουργίας γεγονός που μπορεί να έχει σημαντικό αντίκτυπο στη λειτουργία του εκάστοτε συστήματος. Για τον λόγο αυτόν, κρίθηκε αναγκαίο να αναπτυχθούν και να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι που να παρέχουν τη δυνατότητα ποσοτικοποιηθεί η επίδραση αυτών των διακυμάνσεων στη "συνάρτηση κόστους". Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας (Uncertainty Quantification)**. Σχετικά η **Ποσότητα Ενδιαφέροντος (Quantity Of Interest - QoI)** ή **συνάρτηση ενδιαφέροντος** η οποία στο παρόν κείμενο θα συμβολίζεται με F και εκφράζει την ποσότητα εκείνη που δέχεται την επίδραση αβέβαιης μεταβλητής c .

Η συνάρτηση κόστους σε προβλήματα βελτιστοποίησης υπό αβεβαιότητες ορίζεται συνήθως ως ένας γραμμικός συνδυασμός της μέσης τιμής μ_F και της τυπικής απόκλισης σ_F της συνάρτησης ενδιαφέροντος, εισάγοντας έναν συντελεστή βάρους μεταξύ αυτών. Άρα, σε προβλήματα βελτιστοποίησης με αβεβαιότητες ή προβλήματα στιβαρού

σχεδιασμού robust design στη μηχανική, η "συνάρτηση κόστους" που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί τίθεται συνήθως στη μορφή:

$$\hat{F} = \mu_F + s_m \sigma_F \quad (1.1)$$

Αναλόγως της επιλογής του συντελεστή βάρους s_m αν είναι μεγαλύτερο δίνεται έμφαση στην τυπική απόκλιση και αν είναι μικρότερο δίνεται περισσότερη έμφαση στη μέση τιμή.

1.3 Μέθοδοι Ποσοτικοποίησης Αβεβαιοτήτων

Βασικό σημείο στη βελτιστοποίηση υπό αβεβαιότητες είναι ο υπολογισμός της μέσης τιμής μ_F και της τυπικής απόκλισης σ_F της QoI. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον υπολογισμό των αυτών των ποσοτήτων. Ενδεικτικά αναφέρονται κάποιες από αυτές τις μεθόδους.

1.3.1 Μέθοδος Monte Carlo

Η βασική μέθοδος για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της QoI είναι η Monte Carlo [17] [6]. Η μέθοδος Monte Carlo ορίζει ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση για ένα σύνολο τιμών F πλήθους N_s υπολογίζονται αντίστοιχα ως:

$$\mu_F = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} F_i}{N_s}, \quad \sigma_F = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_s} (F_i - \mu_F)^2}{N_s}}$$

Η μέθοδος Monte Carlo χρειάζεται εκατοντάδες ή χιλιάδες αξιολογημένα δείγματα για να μπορέσει να επιφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα καθώς η ακρίβεια αυξάνεται με τον αριθμό των δειγμάτων [17] [6]. Οι σύγχρονες μέθοδοι μειώνουν πολύ το υπολογιστικό κόστος. Αυτό μεταφράζεται σε ένα, συνήθως τεράστιο, αριθμό κλήσεων της συνάρτησης F (λ.χ. επιλύσεων των εξισώσεων ροής, αν το πρόβλημα αφορά αεροδυναμική βελτιστοποίηση) που καθιστά τη μέθοδο απαγορευτική για βιομηχανικές εφαρμογές. Συνηθίζεται, όμως, η χρήση της ώστε να παράξει τιμές αναφοράς για τα μ_F και σ_F με τα οποία συγκρίνονται τα αποτελέσματα άλλων μεθόδων, όπως είναι αυτές που παρουσιάζονται στη συνέχεια, αλλά και η βασική μέθοδος που αναπτύσσεται στην εργασία αυτή.

1.3.2 Μέθοδος των Στατιστικών Ροπών

Στη μέθοδο *MoM* χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα Taylor[12][2] γύρω από τη μέση τιμή της αβέβαιης μεταβλητής c . Η τάξη της μεθόδου *MoM* καθορίζεται από τη μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων της *QoI* που διατηρείται στο ανάπτυγμα Taylor.

Γενικά, το ανάπτυγμα Taylor για την F γράφεται

$$F(\bar{c} + \Delta c) = F|_{\bar{c}} + \left. \frac{\delta F}{\delta c_i} \right|_{\bar{c}_i} \Delta c_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 F}{\delta c_i \delta c_j} \right|_{\bar{c}} \Delta c_i \Delta c_j + O(\Delta c^3)$$

Αν στο ανάπτυγμα κρατηθούν μόνο παράγωγοί πρώτης τάξης, δηλαδή οι $\left. \frac{\delta F}{\delta c_i} \right|_{\bar{c}_i}$ και η βελτιστοποίηση βασιστεί στη συνάρτηση κόστους της εξίσωσης (1.1) τότε η μέθοδος ονομάζεται First Order Second Moment (FOSM) και, για αυτήν, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της F δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu_F = F|_{\bar{c}}, \quad \sigma_F = \sqrt{\sum_{i=1}^T \left[\left. \frac{\delta F}{\delta c_i} \right|_{\bar{c}} \right]^2 \sigma_i^2}$$

όπου σ_i η τυπική απόκλιση για την εκάστοτε c_i αβέβαιη μεταβλητή. Ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της F με τη μέθοδο FOSM[12][2] είναι ανεξάρτητη της PDF της αβέβαιης μεταβλητής c .

Με τη διατήρηση στο σχήμα και της δεύτερης τάξης παραγώγου, δηλαδή της ποσότητας $\left. \frac{\delta^2 F}{\delta c_i \delta c_j} \right|_{\bar{c}} \Delta c_i \Delta c_j$, για την ίδια συνάρτηση κόστους, η μέθοδος Δεύτερης Τάξης Δεύτερης Ροπής ή ονομάζεται Second Order Second Moment (SOSM)[12][2], τότε, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της F δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu_F = F|_{\bar{c}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left[\left. \frac{\delta^2 F}{\delta c_i^2} \right|_{\bar{c}} \right] \sigma_i^2, \quad \sigma_F = \sqrt{\sum_{i=1}^T \left[\left. \frac{\delta F}{\delta c_i} \right|_{\bar{c}} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \left[\left. \frac{\delta^2 F}{\delta c_i \delta c_j} \right|_{\bar{c}} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}$$

Υπολογισμός παραγώγων

Για να μπορέσουν να εφαρμοστούν οι μέθοδοι SOSM και FOSM χρειάζεται υπολογιστούν οι παράγωγοι της $F(\vec{U}(\vec{c}), \vec{c})$ ως προς c , και U είναι το διάνυσμα των μεταβλητών ροής (λ.χ. αν επιλύεται ένα πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης), χρησιμοποιείται η συζυγής μέθοδος (Adjoint method)[30]. Αυτή περιγράφεται στη συνέχεια στη διακριτή (discrete adjoint) εκδοχή της. Συγκεκριμένα η μεταβολή της F ως προς c

είναι

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{c}} \delta \vec{c} \quad (1.2)$$

Οι εξισώσεις ροής ικανοποιούνται σε κάθε σημείο αλλά και για κάθε μεταβολή οπότε οι εξισώσεις γράφονται

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{U}, \vec{c}) = 0 \quad (1.3)$$

$$\delta \vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{c}} \delta \vec{c} = 0 \quad (1.4)$$

όπου

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{c}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial c_1} & \frac{\partial R_1}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial c_T} \\ \frac{\partial R_2}{\partial c_1} & \frac{\partial R_2}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial c_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_m}{\partial c_1} & \frac{\partial R_m}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial R_m}{\partial c_T} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial U_1} & \frac{\partial R_1}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial U_M} \\ \frac{\partial R_2}{\partial U_1} & \frac{\partial R_2}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial U_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_m}{\partial U_1} & \frac{\partial R_m}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial R_m}{\partial U_M} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Το διάνυσμα της μεταβολής $\delta \vec{R}$ διάστασης m πολλαπλασιάζεται με ένα διάνυσμα $\vec{\Psi}^T$ ίσης διάστασης και αφαιρείται από την εξίσωση (1.2). Η συνάρτηση F δεν αλλοιώνεται αφού ισχύει $\delta \vec{R} = 0$ [30]. Έπειτα δημιουργείται η επαυξημένη συνάρτηση F_{aug} και υπολογίζεται η μεταβολή της,

$$F_{aug} = F - \vec{\Psi}^T R \quad (1.6)$$

$$\delta F_{aug} = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{c}} \delta \vec{c} - \vec{\Psi}^T \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{c}} \delta \vec{c} \right) \quad (1.7)$$

ή

$$\delta F_{aug} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \delta \vec{U} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{c}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{c}} \right) \delta \vec{c} \quad (1.8)$$

Σκοπός είναι να υπολογιστεί το διάνυσμα Ψ έτσι ώστε να μηδενίζεται ο όρος

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = 0 \quad (1.9)$$

Με αυτόν τρόπο δεν απαιτείται ο υπολογισμός της μεταβολής της του πεδίου ροής δU αλλά μόνο της μεταβολής της συνάρτησης F ως προς c [30]. Άρα καταλήγοντας η **συζυγής εξίσωση** που πρέπει να επιλυθεί είναι

$$\left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \vec{\Psi} = \left[\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right]^T \quad (1.10)$$

1.3.3 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους

Μια άλλη γνωστή μέθοδος για το UQ είναι το PCE [11][22]. Στη θεωρία του κλασικού PCE, που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο (2), είναι απαραίτητο να είναι γνωστή η κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής. Με βάση τη γνωστή κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής προσαρμόζονται συγκεκριμένα πολυώνυμα για τον υπολογισμό των συντελεστών του πολυωνυμικού χάους όπου δίνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της QoI.

Η μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάζει τη θεωρία και εφαρμογές μιας ενδιαφέρουσας παραλλαγής του "κλασικού" PCE, του PCE που βασίζεται σε δεδομένα (data driven, με την έννοια που θα δοθεί παρακάτω) ή, συνοπτικά, DDPCE. Αυτά αναλύονται διεξοδικά στα κεφάλαια (3),(5). Η ειδοποιός διαφορά του DDPCE με το κλασικό PCE είναι ότι για την αβέβαιη μεταβλητή δεν είναι γνωστή η κατανομή που τη διέπει και στην διαδικασία υπολογισμού δεν είναι αναγκαία η γνώση της αντίστοιχης PDF.

1.4 Στόχος της Μεταπτυχιακής εργασίας

Με βάση τα όσα παρουσιάστηκαν παραπάνω σε πολλά προβλήματα ποσοτικοποίησης αβεβαιοτήτων είναι πιθανό να είναι άγνωστη η κατανομή που ακολουθούν οι αβέβαιες μεταβλητές. Ο λόγος για τον οποίο στην παραπάνω περίπτωση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κλασικό PCE είναι γιατί προϋποθέτει να είναι γνωστή η κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής και κατέπεκταση η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $w(x)$ αλλά και η αντίστοιχη οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων (όπως παρουσιάζεται αναλυτικά και στο κεφάλαιο 2) με βάση τον πίνακα 2.1. Παρόλαυτα είναι αναγκαίο να υπολογιστούν οι τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της F όταν είναι άγνωστη η κατανομή που ακολουθεί η αβέβαιη μεταβλητή τόσο στην περίπτωση που είναι μια όσο και στην περίπτωση που είναι πολλές.

Το όνομα της μεθόδου Data Driven Polynomial Chaos Expansion υποδεικνύει ότι η μέθοδος παίρνει ως είσοδο δεδομένα (Data) για την κάθε αβέβαιη μεταβλητή c και αυτά τα δεδομένα "οδηγούν" (Driven) τη μέθοδο ώστε να πραγματοποιηθεί το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους. Με τον όρο "οδηγούν" εννοείται ότι μόνο από τις τιμές των αβέβαιων μεταβλητών υπολογίζονται τα αντίστοιχα ορθοκανονικά πολυώνυμα αλλά και τα collocation points (αναλυτικά παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3) που είναι αναγκαία για τον υπολογισμό των συντελεστών του PCE. Επιπλέον όπως και στο κλασικό PCE σε συγκεκριμένα καθορισμένους κόμβους έτσι και στο DDPCE χρειάζεται να υπολογιστεί η τιμή της F στα collocation points. Η μέθοδος DDPCE δίνει λοιπόν τη δυνατότητα στο μηχανικό με βάση τα δεδομένα των αβέβαιων μεταβλητών να εφαρμόσει τη μέθοδο του αναπτύγματος του πολυωνυμικού χάους (PCE), στην περίπτωση που είναι άγνωστη η πιθανοτική κατανομή της κάθε αβέβαιης μεταβλητής, και κατ' επέκταση να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της συνάρτησης F .

1.5 Δομή της Μεταπτυχιακής εργασίας

- Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι βασικές αρχές, γνώσεις και μαθηματικοί τύποι της μεθόδου του PCE. Εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται η διαδικασία υπολογισμού των συντελεστών του PCE αλλά και οι αποδείξεις των βασικών σχετικών σχέσεων. Η παραπάνω διαδικασία γίνεται σε δύο υποκεφάλαια. Ένα για την περίπτωση υπολογισμού με μια αβέβαιης μεταβλητής και ένα για την περίπτωση πολλών αβέβαιων μεταβλητών. Παρουσιάζεται η βασική θεωρία για τα ορθογώνια πολυώνυμα καθώς και οι σχέσεις υπολογισμού της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης χρησιμοποιώντας τους συντελεστές του PCE.
- Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η θεωρία του DDPCE για μια αβέβαιη μεταβλητή. Ορίζεται αρχικά η ειδικότερη διαφορά με το PCE η οποία είναι ότι είναι άγνωστη η πιθανοτική κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής. Έπειτα, αποδεικνύεται γιατί οι σχέσεις που συσχετίζουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση με τους συντελεστές του DDPCE είναι ίδιες με το PCE.
- Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται αριθμητικές εφαρμογές για την περίπτωση υπολογισμού των συντελεστών DDPCE για μια αβέβαιη μεταβλητή. Οι αριθμητικές εφαρμογές γίνονται χρησιμοποιώντας μια γραμμική, μια εκθετική και μια τριγωνομετρική συνάρτηση των οποίων η αναλυτική λύση είναι γνωστή και γίνεται σύγκριση καθώς και με τη μέθοδο Monte Carlo.
- Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η θεωρία του DDPCE για πάνω από μια αβέβαιες μεταβλητές με άγνωστη κατανομή. Επίσης περιλαμβάνεται παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας.
- Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται αριθμητικές εφαρμογές της θεωρίας DDPCE για πάνω από μια αβέβαιες μεταβλητές. Χρησιμοποιείται μια γραμμική και μια τριγωνομετρική συνάρτηση και συγκρίνονται οι υπολογισμοί της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης με τις αναλυτικές λύσεις αλλά και τον υπολογισμό των παραπάνω ποσοτήτων με τη μέθοδο Monte Carlo.
- Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζεται μια εφαρμογή της μεθόδου DDPCE σε ένα πρόβλημα υπολογιστικής ρευστομηχανικής επιλύοντας την ροή σε μια αεροτομή NACA με σκοπό τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της άνωσης (Lift) και της οπισθέλκουσας (Drag) θεωρώντας αβέβαιες μεταβλητές τη γωνία πρόσπτωσης α_∞ και την επ' άπειρο ταχύτητα U_∞ της ροής.
- Στο παράρτημα Α' γίνεται υπολογισμός των συντελεστών βασικών οικογενειών ορθοκανονικών πολυωνύμων με τη μέθοδο DDPCE.

Κεφάλαιο 2

Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού χάους

Το κεφάλαιο αυτό περιγράφει τις βασικές αρχές και τη μέθοδο του αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion) που θα αναφέρεται ως PCE για λόγους συντομίας στο υπόλοιπο κείμενο της μεταπτυχιακής εργασίας. Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο υποκεφάλαια. Το πρώτο αναφέρεται στο PCE για μια αβέβαιη μεταβλητή. Το δεύτερο αναφέρεται σε πολλές αβέβαιες μεταβλητές (πολυδιάστατο PCE).

Στη συνέχεια, η μέθοδος Data Driven Polynomial Chaos Expansion (που θα αναφέρεται ως DDPCE για λόγους συντομίας στο υπόλοιπο κείμενο της μεταπτυχιακής εργασίας) επιδιώκει να υπολογίσει τους συντελεστές του πολυωνυμικού χάους στην περίπτωση που είναι άγνωστη η κατανομή πιθανότητας των αβέβαιων μεταβλητών και το οποίο είναι εκεί που εστιάζει αυτή η εργασία.

2.1 Ανάπτυγμα PCE για $T = 1$

Η θεωρία του πολυωνυμικού χάους πρώτη φορά προτάθηκε από τον Norbert Wiener το 1938 [24]. Η θεωρία του γενικευμένου πολυωνυμικού χάους αναπτύχθηκε το 2002 [26]. Η θεωρία ορίζει ότι μία συνάρτηση F με μία μεταβλητή εισόδου x μπορεί να προσεγγιστεί μέσω μίας σειράς πολυωνύμων [18] [10] [25]. Σκοπός είναι να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της F .

Έστω μία συνάρτηση $F(x)$, όπου η αβέβαιη μεταβλητή x κατανέμεται στοχαστικά στο πεδίο ορισμού D . Η κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής $w(x)$ (Probability Density Function, PDF) είναι γνωστή. Στο υπόλοιπο κείμενο οι αβέβαιες μεταβλητές θα συμβολίζονται με x και το πλήθος τους με T .

Με βάση τη θεωρία του PCE, η συνάρτηση ενδιαφέροντος F προσεγγίζεται ως γραμμικός συνδυασμός κατάλληλης οικογένειας ορθογώνιων πολυωνύμων ([18],[10], [25],[27]) που συμβολίζονται P_i όπου i ο βαθμός του πολυωνύμου. Ως εκ τούτου:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x) \quad (2.1)$$

Η ν -οστή στατιστική ροπή ενός συνόλου τιμών $F(x)$ περιγράφεται από τον τύπο [27]

$$\mu_\nu = \int_D F(x)^\nu d\Gamma(x) \quad (2.2)$$

όπου $d\Gamma(x) = w(x)dx$. Παρουσιάζονται τα παρακάτω σχετικά παραδείγματα:

- Για $\nu = 0$, η σχέση (2.2) γίνεται

$$\mu_0 = \int_D F(x)^0 d\Gamma(x) = \int_D w(x)dx = 1$$

- Για $\nu = 1$, η ποσότητα μ_1 είναι η μέση τιμή και η σχέση (2.2) γίνεται

$$\mu_1 = \mu_F = \int_D F(x)^1 d\Gamma(x) = \int_D F(x)w(x)dx$$

- Για $\nu = 2$, υπολογίζεται η ποσότητα μ_2

$$\mu_2 = \int_D F(x)^2 d\Gamma(x) = \int_D F(x)^2 w(x)dx$$

και, με βάση αυτά, υπολογίζεται η τυπική απόκλιση ως

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_F^2} = \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}$$

Αναπτύσσοντας αναλυτικά το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.2) και αντικαθιστώντας την F χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1), η ν -οστή στατιστική ροπή του συνόλου F μπορεί

να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
\langle F^\nu \rangle &= \int_D (F(x))^\nu w(x) dx = \int_D \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x) \right)^\nu w(x) dx \\
&= \int_D \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x) \right) \cdots \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x) \right)}_{\nu \text{ φορές}} w(x) dx \\
&= \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_\nu=0}^{\infty} a_{i_1} \cdots a_{i_\nu} \int_D P_{i_1}(x) \cdots P_{i_\nu}(x) w(x) dx \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, η μέση τιμή μ_1 της συνάρτησης ενδιαφέροντος F θα συμβολίζεται ως μ_F , η ποσότητα μ_2 θα συμβολίζεται ως $\langle F^2 \rangle$ και η τυπική απόκλιση με σ_F .

2.1.1 Ορθογώνια Πολυώνυμα

Για δύο ορθογώνια πολυώνυμα ισχύει ότι το εσωτερικό γινόμενο τους με τη συνάρτηση βάρους $w(x)$ είναι [28],[27]:

$$\langle P_i(x), P_j(x) \rangle_w = \int_D P_i(x) P_j(x) w(x) dx = \langle P_i(x), P_i(x) \rangle_w \delta_{ij} \quad (2.4)$$

όπου δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.5)$$

Με βάση τον ορισμό της εξίσωσης 2.4 προκύπτουν οι ιδιότητες των ορθογώνιων πολυωνύμων που αξιοποιούνται σε πολλές εφαρμογές. Κάθε πολυώνυμο βαθμού i μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός μιας οικογένειας ορθογώνιων πολυωνύμων. Για κάθε στοχαστική κατανομή υπάρχει διαφορετική οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων που την προσεγγίζει, όπως παρουσιάζεται και στο πίνακα 2.1,[27].

Όταν $i = j$, τότε η εξίσωση (2.4) γίνεται

$$\langle P_i(x), P_i(x) \rangle_w = \|P_i\|_w^2 = \gamma_i \quad (2.6)$$

όπου $\sqrt{\gamma_i}$ ορίζεται ως το μέτρο κανονικότητας του πολυωνύμου P_i [27]. Στην περίπτωση που είναι ορθοκανονικά τα πολυώνυμα $\gamma_i = 1$.

Κατανομή	Κανονική	Ομοιόμορφη	Εκθετική	Γάμμα	β-
PDF	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{1}{2}$	e^{-x}	$\frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$	$\frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1)}$
Ονομασία Πολυωνύμων P_i	<i>Hermite</i> $He_i(x)$	<i>Legendre</i> $\mathcal{L}_i(x)$	<i>Laguerre</i> $L_i(x)$	<i>Generalized Laguerre</i> $L_i^\alpha(x)$	<i>Jacobi</i> $J_i^{\alpha, \beta}(x)$
Συνάρτηση Βάρους	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	1	e^{-x}	$x^\alpha e^{-x}$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$
Πεδίο ορισμού D	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$[-1, 1]$

Πίνακας 2.1: Στοιχεία συχνών στοχαστικών κατανομών. Παρουσιάζονται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τα ορθογώνια πολυώνυμα που μπορούν να την προσεγγίσουν, η συνάρτηση βάρους $w(x)$ και το πεδίο ορισμού D [27].

2.1.2 Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Τυπικής Απόκλισης για $T = 1$

Η μέση τιμή του συνόλου τιμών της $F(x)$ την εξίσωση (2.1) υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F] = \mu_F = \langle F^1 \rangle &= \int_D (F(x))^1 w(x) dx = \int_D F(x) w(x) dx \\ &= \int_D \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x) \right) w(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int_D P_i(x) w(x) dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

Όμως, σε κάθε οικογένεια ορθογώνιων πολυωνύμων, το πρώτο στοιχείο είναι ίδιο, $P_0(x) = 1$. Επίσης, η συνολική πιθανότητα ενός στοχαστικού φαινομένου ισούται με 1, άρα $\int_D w(x) dx = 1$, ή

$$P_0(x) = 1 \quad (2.8)$$

Οπότε

$$\int_D P_i(x) w(x) dx = \int_D P_i(x) P_0(x) w(x) dx \equiv 0 \quad (2.9)$$

για κάθε $i > 0$,

$$\mu_F = a_0 \int_D P_0(x) w(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_D P_i(x) w(x) dx \Rightarrow \mu_F = a_0 \int_D w(x) dx$$

ή, αλλιώς,

$$\mu_F = a_0 \quad (2.10)$$

Η διακύμανση (variance, var) και η τυπική απόκλιση σ_F υπολογίζονται

$$var(F) = \sigma_F^2 = \langle F^2 \rangle - \mu_F^2 \quad (2.11)$$

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_F^2} = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \mu_F^2} \quad (2.12)$$

όπου

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \int_D (F(x))^2 w(x) dx = \int_D \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x) \right)^2 w(x) dx \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} \int_D P_{i_1}(x) P_{i_2}(x) w(x) dx \end{aligned}$$

Από την 2.4 προκύπτει,

$$\langle F^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \int_D P_i(x)^2 w(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \|P_i(x)\|_w^2$$

οπότε:

$$\langle F^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \gamma_i \quad (2.13)$$

Η κανονικοποίηση των πολυωνύμων γίνεται με διαίρεση με το αντίστοιχο μέτρο κανονικότητας της κάθε οικογένειας πολυωνύμων σύμφωνα με τον πίνακα 2.1

$$\tilde{P}_i(x) = \frac{P_i(x)}{\|P_i(x)\|} = \frac{P_i(x)}{\sqrt{\gamma_i}} \quad (2.14)$$

Για λόγους απλότητας, στο υπόλοιπο του κειμένου τα ορθοκανονικά \tilde{P}_i πολυώνυμα θα συμβολίζονται με το σύμβολο P_i , όπως τα ορθογώνια. Έτσι προκύπτει η σχέση

$$\langle F^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \quad (2.15)$$

Η τελική σχέση υπολογισμού της τυπικής απόκλισης προκύπτει από τις σχέσεις (2.10), (2.12) και (2.15)

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 - a_0^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \quad (2.16)$$

2.1.3 Υπολογισμός συντελεστών PCE για $T = 1$

Τα παραπάνω υπολογίζουν το ανάπτυγμα του πολυωνυμικού χάους με άπειρους όρους. Στις πραγματικές εφαρμογές, λόγω περιορισμού σε υπολογιστικό κόστος, πραγματοποιείται αποκοπή και παραμένει πεπερασμένο πλήθος όρων στο ανάπτυγμα του πολυωνυμικού χάους. Αυτό το σημείο είναι που αποφασίζει ο χρήστης ότι θα "σταματήσει" να υπολογίζει ορθογώνια πολυώνυμα. Ορίζεται ως k και ονομάζεται **τάξη χάους**. Δηλαδή χρειάζεται να υπολογιστούν τα πολυώνυμα P_i με $i = 0 \dots k$. Η ακρίβεια υπολογισμού αυξάνεται όσο μεγαλώνει το k αλλά, ταυτόχρονα, αυξάνεται και το σχετικό υπολογιστικό κόστος.

Επομένως οι σχέσεις (2.10)(2.16)(2.1) ξαναγράφονται ως

$$\mu_F \simeq a_0 \quad (2.17)$$

$$\sigma_F \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} \quad (2.18)$$

$$F(x) \simeq \sum_{i=0}^k a_i P_i(x) \quad (2.19)$$

Για να υπολογιστούν οι συντελεστές του PCE χρησιμοποιείται η **προβολή Galerkin** (Galerkin Projection) [28],[27]. Επιπλέον τα πολυώνυμα διέπονται από τις ιδιότητες ορθογωνιότητας και κανονικότητας που χρησιμοποιούνται παρακάτω για τον υπολογισμό των συντελεστών του PCE . Για $i = 0, 1 \dots k$ είναι

$$\langle F(x), P_i(x) \rangle_w = \int_D F(x) P_i(x) w(x) dx \simeq \int_D F(x) P_i(x) w(x) dx \quad (2.20)$$

δηλαδή

$$\langle F(x), P_i(x) \rangle_w = \left\langle \sum_{j=0}^k a_j P_j(x), P_i(x) \right\rangle_w = a_i \|P_i(x)\|_w^2 = a_i \quad (2.21)$$

Άρα, προκύπτει η εξίσωση που υπολογίζει τα a_i χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα P_i και την αντίστοιχη συνάρτηση βάρους $w(x)$ σύμφωνα με τον πίνακα 2.1 για κάθε στοχαστική κατανομή,

$$a_i = \int_D F(x) P_i(x) w(x) dx \quad (2.22)$$

Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα 2.22 χρησιμοποιείται Gauss Quadrature (GQ) [28].

Η μέθοδος (GQ) υπολογίζει το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης $F(x)$ σε ένα πεδίο ορισμού (ολοκλήρωσης D) με βάση την παρακάτω σχέση:

$$\int_D F(x)dx = \sum_{\lambda=1}^{n_g} d_\lambda F(x_\lambda) \quad (2.23)$$

όπου n_g ο αριθμός των αναγκαίων όρων-κόμβων όπου υπολογίζεται η τιμή της F .

Άρα απαιτούνται $k + 1$ τιμές της συνάρτησης F για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος. Η συνάρτηση F μπορεί να προσεγγιστεί από την κατάλληλη οικογένεια πολυωνύμων με βάση τον πίνακα 2.1 ανάλογα την κατανομή. Οι κόμβοι x_λ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου βαθμού $k + 1$, δηλαδή του P_{k+1} της οικογένειας πολυωνύμων [14]. Τα βάρη d_λ υπολογίζονται από τη σχέση

$$d_\lambda = \frac{E_{k+1}}{E_k} \cdot \frac{\gamma_k}{P_{k+1}(x_\lambda) \cdot P_k(x_\lambda)} \quad (2.24)$$

όπου E_k είναι ο συντελεστής του όρου x^k στο πολυώνυμο βαθμού P_k . Ανάλογα το πλήθος των κόμβων n_g που θα επιλεγούν επηρεάζεται τόσο η ακρίβεια όσο και το υπολογιστικό κόστος. Περισσότεροι κόμβοι οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια αλλά και μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

2.2 Ανάπτυγμα PCE για $T > 1$

Ακολουθεί η θεωρία του PCE όπως αυτή εφαρμόζεται για πάνω από μια αβέβαιη μεταβλητή. Η συνάρτηση ενδιαφέροντος που παρουσιάστηκε παραπάνω, στην πλειοψηφία των προβλημάτων βελτιστοποίησης, επηρεάζεται από πολλές αβέβαιες μεταβλητές.

Ορίζεται με T το πλήθος των αβέβαιων μεταβλητών και $t = 1 \dots T$ τον δείκτη αρίθμησης τους. Η F παίρνει ως είσοδο ένα διάνυσμα διάστασης T . Θεωρούμε ότι οι αβέβαιες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν την ίδια στοχαστική κατανομή με διαφορετικές παραμέτρους, για παράδειγμα στην β - κατανομή διαφορετικοί παράμετροι (α, β) , στη Γ - (Γάμμα κατανομή) τα στοιχεία (α, β, Γ) , κ.ο.κ. Είναι

$$F = F(\vec{x}), \quad \text{όπου } \vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_T) \quad (2.25)$$

Για την F ισχύουν τα παρακάτω:

- Το πεδίο ορισμού της F είναι $\vec{D} \equiv D_1 \times D_2 \times \dots \times D_T$
- Κάθε αβέβαιη μεταβλητή έχει τη δική της συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με διαφορετικές παραμέτρους όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Ορίζεται λοιπόν ως $w_i(x_i)$ για την κάθε αβέβαιη μεταβλητή ξεχωριστά

$$W(\vec{x}) = \prod_{i=1}^T w_i(x_i) = w_1(x_1) w_2(x_2) \cdots w_T(x_T) \quad (2.26)$$

Η συνάρτηση F με πολλές αβέβαιες μεταβλητές μπορεί να προσεγγιστεί με μια νέα οικογένεια πολυωνύμων Ψ τα οποία αναλύονται παρακάτω.

2.2.1 Πολυδιάστατα Ορθογώνια Πολυώνυμα

Όπως και στην παρουσίαση της θεωρίας του PCE για μια αβέβαιη μεταβλητή, έτσι εδώ θα χρησιμοποιηθούν ορθογώνια πολυώνυμα. Οι ιδιότητες των ορθογώνιων πολυωνύμων, που παρουσιάστηκαν προηγουμένως για τα μονοδιάστατα, ισχύουν και για τα πολυδιάστατα.

Τα πολυδιάστατα πολυώνυμα θα συμβολίζονται με ψ_n όπου n είναι η τάξη του κάθε πολυωνύμου. Επιπλέον τα πολυώνυμα ψ_n ορίζονται ως το γινόμενο των μονοδιάστατων πολυωνύμων P_{it} , όπου it ο δείκτης των πολυωνύμων της κάθε αβέβαιης μεταβλητής, με τη συνθήκη ότι η μέγιστη τάξη του πολυωνύμου που προκύπτει από το ανωτέρω γινόμενο να είναι ίση με την τάξη n του πολυωνύμου ψ_n .

Όσον αφορά το πλήθος των δυνατών συνδυασμών n από τη θεωρία των διακριτών μαθηματικών, της Συνδυαστικής και της Συνολοθεωρίας [3], [7], [27] γνωρίζουμε ότι κάθε ακέραιος αριθμός n μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμα μικρότερων ακέραιων αριθμών πλήθους n . Αυτό το στοιχείο χρησιμεύει ώστε να υπολογιστεί το μέγιστο δυνατό πλήθος συνδυασμών του ανωτέρω γινομένου. Πιο συγκεκριμένα:

$$n = \binom{T}{k} = \binom{k+T-1}{k} = \frac{(k+T-1)!}{k!(T-1)!} = \frac{T(T+1)(T+2)\cdots(T+k-1)}{k!} \quad (2.27)$$

όπου $\binom{T}{k}$ συμβολίζει τον Gaussian binomial coefficient [23] για τον υπολογισμό των μέγιστων συνδυασμών αλλά και για την επιλογή των κατάλληλων αριθμών n .

Από τη θεωρία της Συνδυαστικής, το πλήθος των δυνατών συνδυασμών T στοιχείων

με άθροισμα μικρότερο ή ίσο ενός k_{max} είναι ίσο με

$$n = \binom{k_{max}+T}{k_{max}} = \frac{(k_{max}+T)!}{k_{max}!T!} = \frac{T(T+1)(T+2)\cdots(T+k_{max})}{k_{max}!} \quad (2.28)$$

Ορίζεται ο δείκτης (m_j^k) [27] που συμβολίζει την αρίθμηση κάθε πολυωνύμου ψ_n για κάθε τάξη n αλλά και για κάθε μονοδιάστατο πολυώνυμο j . Με απλά λόγια για τις T αβέβαιες μεταβλητές έχουν υπολογιστεί μονοδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα P . Τα πολυώνυμα P πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους όπως αναφέρθηκε παραπάνω και παράγουν τα πολυώνυμα ψ_n . Δηλαδή:

$$\psi_{(m_j^k)}(\vec{x}) = \prod_{t=1}^T P_{i_t}(x_t) \quad (2.29)$$

$$\sum_{t=1}^T i_t = k \quad (2.30)$$

Για τον υπολογισμό του γινομένου τους πολυωνύμων, ο πολλαπλασιασμός σε κάθε τάξη k αντιστοιχίζεται με τον δείκτη (m_j^k) στην απόλυτη αρίθμηση των ψ_n όπως φαίνεται και στον πίνακα 2.2.

Ο δείκτης j "κινείται" μεταξύ των τιμών που φαίνονται παρακάτω.

$$1 \leq j \leq \binom{k+T-1}{k} \quad (2.31)$$

Αυτή αποτελεί τη σχετική κατάταξη των αθροισμάτων, η οποία δεν λαμβάνει υπόψη συνδυασμούς με άθροισμα μικρότερο του εκάστοτε k . Ισχύει προφανώς ότι

$$\psi_0(\vec{x}) = 1 \quad (2.32)$$

ανεξαρτήτου κατανομής αφού αποτελεί γινόμενο μονάδων με βάση την εξίσωση (2.8). Από τον ορισμό (2.29) ισχύει ότι ίσχυε και για τα μονοδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα δηλαδή ότι το εσωτερικό γινόμενο (προβολή Galerkin) δύο πολυωνύμων της οικογένειας Ψ θα είναι μηδενικό, εκτός από την περίπτωση που ταυτίζονται μεταξύ τους.

$$\langle \psi_i(\vec{x}), \psi_j(\vec{x}) \rangle_W = \int_{\bar{D}} \cdots \int \psi_i(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} = \langle \psi_i(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \rangle_W \delta_{ij} \quad (2.33)$$

Στην περίπτωση $i=j$, το εσωτερικό γινόμενο (2.33) ισούται με το τετράγωνο της κατά W -νόρμας του πολυωνύμου ψ_i .

$$\begin{aligned} \langle \psi_n(\vec{x}), \psi_n(\vec{x}) \rangle_W &= \int_{\bar{D}} \cdots \int \psi_n^2(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\bar{D}} \cdots \int \prod_{t=1}^T P_{i_t}^2(x_t) \prod_{t=1}^T w_t(x_t) dx_1 \cdots dx_T \\ &= \int_{D_1} P_{i_1}^2 w_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{D_T} P_{i_T}^2 w_T(x_T) dx_T \\ &= \prod_{t=1}^T \int_{D_1} P_{i_t}^2 w_t(x_t) dx_t = \prod_{t=1}^T \|P_{i_t}\|_{w_t}^2 \\ &= \left(\prod_{t=1}^T \|P_{i_t}\|_{w_t} \right)^2 = (\|\psi_n\|_W)^2 = \|\psi_n\|_W^2 \end{aligned}$$

στην οποία τέθηκε

$$\|\psi_n\|_W = \prod_{t=1}^T \|P_{i_t}\|_{w_t} \quad (2.34)$$

οπότε

$$\langle \psi_n(\vec{x}), \psi_n(\vec{x}) \rangle_W \equiv \|\psi_n\|_W^2 = \gamma_n \quad (2.35)$$

όπου $\sqrt{\gamma_n}$ για το πολυώνυμο ψ_n είναι το μέτρο κανονικότητας. Όπως και στην περίπτωση της ανάπτυξης του 1D PCE για $\gamma_i = 1$, τα πολυώνυμα είναι πλέον ορθοκανονικά, κι αυτό επιτυγχάνεται εύκολα διαιρώντας κάθε οικογένεια με το αντίστοιχο μέτρο κανονικότητας,

$$\tilde{\psi}_n(\vec{x}) = \frac{\psi_n(\vec{x})}{\|\psi_n(\vec{x})\|} = \frac{\psi_n(\vec{x})}{\sqrt{\gamma_n}} \quad (2.36)$$

Στα επόμενα κεφάλαια για λόγους απλότητας το σύμβολο $\tilde{\psi}$ θα γράφεται ψ .

2.2.2 Υπολογισμός Συντελεστών στο PCE για $T > 1$

Έχοντας υπολογίσει τα πολυώνυμα ψ_n , η F θα γραφτεί

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n a_i \psi_i(\vec{x}) \quad (2.37)$$

τάξη	σχετική(j)	Απόλυτη (m_j^k)
$k = 0$	1	0
$k = 1$	1	1
	2	2
$k = 2$	1	3
	2	4
	3	5

Πίνακας 2.2: Υπολογισμός του συντελεστή m_j^k για την ταξινόμηση-αρίθμηση των πολυωνύμων για $k = 2$ και $T = 2$.

Η ν -οστή στατιστική ροπή του συνόλου F υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
\langle F^\nu \rangle &= \int_{\vec{D}} \cdots \int_{\vec{D}} (F(\vec{x}))^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{D}} \cdots \int_{\vec{D}} \left(\sum_{i=0}^n a_i \psi_i(\vec{x}) \right)^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \int_{\vec{D}} \cdots \int_{\vec{D}} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^n a_i \psi_i(\vec{x}) \right) \cdots \left(\sum_{i=0}^n a_i \psi_i(\vec{x}) \right)}_{T \text{ φορές}} \left(\prod_{i=1}^T w_i(x_i) \right) dx_1 \cdots dx_T
\end{aligned}$$

$$\langle F^\nu \rangle = \sum_{i_1=0}^n \cdots \sum_{i_T=0}^n a_{i_1} \cdots a_{i_T} \int_{\vec{D}} \cdots \int_{\vec{D}} \psi_{i_1}(\vec{x}) \cdots \psi_{i_T}(\vec{x}) w_1(x_1) \cdots w_T(x_T) dx_1 \cdots dx_T \quad (2.38)$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών a_i γίνεται από τον υπολογισμό του παρακάτω ολοκληρώματος,

$$\left. \begin{aligned}
\langle F(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \rangle_W &= \int_{\vec{D}} \cdots \int_{\vec{D}} F(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \simeq \int_{\vec{D}} \cdots \int_{\vec{D}} F(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
\langle F(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \rangle_W &= \left\langle \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda \psi_\lambda(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \right\rangle_W = a_i \|\psi_i(\vec{x})\|_W^2 = a_i
\end{aligned} \right\} \implies$$

$$\implies a_i \simeq \int_{\vec{D}} \cdots \int_{\vec{D}} F(\vec{x}) \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.39)$$

2.2.3 Υπολογισμός Μέσης τιμής και Τυπικής απόκλισης στο PCE για $T > 1$

Εδώ αποδεικνύεται ότι και στη θεωρία του πολυδιάστατου PCE, ως επέκταση του μονοδιάστατου, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της συνάρτησης ενδιαφέροντος συσχετίζονται με τους συντελεστές του αναπτύγματος που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2.1.3. Με βάση την εξίσωση (2.33) και την ιδιότητα (2.32)[27], προκύπτει

$$\begin{aligned}\mu_F = \langle F^1 \rangle &= \int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} (F(\vec{x}))^1 W(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} F(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} \left(\sum_{i=0}^n a_i \psi_i(\vec{x}) \right) W(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=0}^n a_i \int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\psi_0(\vec{x}) = 1$ άρα

$$\int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} W(\vec{x}) d\vec{x} = \left(\int_{D_1} w_1(x_1) dx_1 \right) \cdots \left(\int_{D_T} w_T(x_T) dx_T \right) = 1 \quad (2.41)$$

Επιπλέον, σε κάθε στοχαστικό φαινόμενο η συνολική αθροιστική πιθανότητα εμφάνισης ισούται με τη μονάδα, ή

$$\int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \equiv 0, \quad \forall i > 0 \quad (2.42)$$

Η ορθογωνιότητα με το μηδενικό πολυώνυμο δίνει

$$\begin{aligned}\mu_F &= a_0 \int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} \psi_0(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} + \sum_{i=1}^n a_i \int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_F &= a_0 \int_{\bar{D}} \cdots \int_{\bar{D}} 1 \cdot W(\vec{x}) d\vec{x} = a_0 \int_{D_1} w_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{D_T} w_T(x_T) dx_T\end{aligned}$$

ή

$$\mu_F = a_0 \quad (2.43)$$

Το στοιχείο $\langle F^2 \rangle$ υπολογίζεται

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \int \cdots \int_{\vec{D}} (F(\vec{x}))^2 W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\vec{D}} \left(\sum_{i=0}^n a_i \psi_i(\vec{x}) \right)^2 W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n a_{i_1} a_{i_2} \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_{i_1}(\vec{x}) \psi_{i_2}(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

Με βάση την εξίσωση 2.33, υπολογίζεται

$$\langle F^2 \rangle = \sum_{i=0}^n a_i^2 \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x})^2 W(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=0}^n a_i^2 \|\psi_i(\vec{x})\|_W^2$$

και, από τον ορισμό της νόρμας 2.35, είναι

$$\langle F^2 \rangle = \sum_{i=0}^n a_i^2 \gamma_i \quad (2.44)$$

Για $\gamma_i = 1$ η εξίσωση (2.44) γίνεται

$$\langle F^2 \rangle = \sum_{i=0}^n a_i^2 \quad (2.45)$$

Η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από τις (2.43),(2.45)

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2 - a_0^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (2.46)$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η συσχέτιση του δείκτη n που αναφέρεται στο πολυδιάστατο PCE με την τάξη χάους k της κάθε αβέβαιης μεταβλητής και το πλήθος αυτών T περιγράφεται από τις σχέσεις (2.27)(2.28).

Κεφάλαιο 3

Ανάπτυγμα DDPCE για $T = 1$

3.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η θεωρία του PCE με γνωστή την κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής. Το ανάπτυγμα DDPCE βρίσκει εφαρμογές σε περιπτώσεις όπου δίνεται ένα σύνολο τιμών της αβέβαιης μεταβλητής χωρίς όμως να είναι γνωστή η κατανομή που ακολουθεί. Το σύνολο τιμών της αβέβαιης μεταβλητής ονομάζεται πεδίο ορισμού και θα συμβολίζεται με D . Η τιμή της συνάρτησης ενδιαφέροντος F χρειάζεται να υπολογιστεί σε σημεία που προκύπτουν από τη μέθοδο DDPCE.

3.2 DDPCE για $T = 1$

Με βάση το ανάπτυγμα του πολυωνυμικού χάους που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συνάρτηση F προσεγγίζεται με βάση τη σχέση (2.19) αφού αρχικά επιλεγεί η τάξη χάους k

$$F(x) = \sum_{i=0}^k a_i P_i(x)$$

Τα $k + 1$ ορθοκανονικά πολυώνυμα $P_i(x)$ ορίζονται με βάση τη σχέση:

$$P_i(x) = \sum_{j=0}^i p_j^{(i)} x^j \quad (3.1)$$

όπου i είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P_i . Οι συντελεστές κάθε πολυωνύμου $P_i(x)$ συμβολίζονται με $p_j^{(i)}$ με το j να αριθμεί τους συντελεστές του.

Η εξίσωση (3.1) γράφεται για κάθε i :

- $i = 0$: $P_0(x) = p_0^{(0)}$
- $i = 1$: $P_1(x) = p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x$
- $i = 2$: $P_2(x) = p_0^{(2)} + p_1^{(2)}x + p_2^{(2)}x^2$
- \vdots
- $i = k$: $P_k(x) = p_0^{(k)} + p_1^{(k)}x + p_2^{(k)}x^2 + \dots + p_k^{(k)}x^k$

Η εξίσωση (2.19) σε πλήρες ανάπτυγμα γίνεται

$$f(x) := \sum_{i=1}^k a_i P_i(x) = a_0 p_0^{(0)} + a_1 (p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x) + \dots + a_k (p_0^{(k)} + p_1^{(k)}x + p_2^{(k)}x^2 + \dots + p_k^{(k)}x^k)$$

Η ν -οστή στατιστική ροπή ενός δείγματος στο πεδίο ορισμού D της μεταβλητής x υπολογίζεται ως

$$\mu_\nu = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^\nu \quad (3.2)$$

Προφανώς, $\mu_0 = 1$ και μ_1 είναι η μέση τιμή. Τα παραπάνω στοιχεία χρησιμοποιούνται στην ενότητα 3.2.1 για τον υπολογισμό των συντελεστών $p_i^{(j)}$

3.2.1 Ορθοκανονικά Πολυώνυμα

Δεδομένου ότι για κάθε στοχαστική κατανομή υπάρχει και μια οικογένεια ορθογώνιων-ορθοκανονικών πολυωνύμων, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2.1.1, τα πολυώνυμα P_i επιλέγεται να είναι ορθοκανονικά, ακόμη και για την περίπτωση που δεν είναι γνωστή η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας των αβέβαιων μεταβλητών. Η εξίσωση (2.4) ισχύει και εδώ. Επειδή όμως, η συνάρτηση $w(x)$ είναι άγνωστη, το $d\Gamma(x)$ εμπεριέχει και το $w(x)$,

$$\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = \int_D P_i(x) P_j(x) d\Gamma(x) = \langle P_i(x), P_i(x) \rangle = \delta_{ij} \quad (3.3)$$

Αναπτύσσεται η εξίσωση (3.3) με σκοπό να υπολογιστούν οι συντελεστές $p_j^{(i)}$ των πολωνύμων P_i . Στη συνέχεια, αναπτύσσονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί μέχρι $i = 2, j = 2$, για εύκολη κατανόηση. Έπειτα, οι σχέσεις αυτές θα γενικευτούν και για μεγαλύτερες τιμές.

Για $i = 0, j = 0$

$$\langle P_0(x), P_0(x) \rangle = 1$$

$$\langle P_0(x), P_0(x) \rangle = \int_D P_0(x)P_0(x)d\Gamma(x) = \int_D p_0^{(0)}p_0^{(0)}d\Gamma(x) = \int_D p_0^{(0)2}d\Gamma(x) = 1$$

Όμως, το $p_0^{(0)}$ είναι σταθερός αριθμός οπότε

$$p_0^{(0)2} \int_D 1d\Gamma(x) = 1 \Rightarrow p_0^{(0)} = 1 \quad (3.4)$$

Για $i = 0, j = 1$

$$\langle P_0(x), P_1(x) \rangle = 0$$

$$\langle P_0(x), P_1(x) \rangle = \int_D P_0(x)P_1(x)d\Gamma(x) = \int_D p_0^{(0)}(p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x)d\Gamma(x) = 0$$

$$\int_D (p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x)d\Gamma(x) = p_0^{(1)} \int_D 1d\Gamma(x) + p_1^{(1)} \int_D xd\Gamma(x) = p_0^{(1)}\mu_0 + p_1^{(1)}\mu_1 = 0$$

$$p_0^{(1)}\mu_0 + p_1^{(1)}\mu_1 = 0 \quad (3.5)$$

Για $i = 1, j = 1$

$$\langle P_1(x), P_1(x) \rangle = 1$$

$$\langle P_1(x), P_1(x) \rangle = \int_D P_1(x)P_1(x)d\Gamma(x) = \int_D (p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x)(p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x)d\Gamma(x) = 1$$

$$\int_D (p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x)^2 d\Gamma(x) = p_0^{(1)2} \int_D 1d\Gamma(x) + 2p_0^{(1)}p_1^{(1)} \int_D xd\Gamma(x) + p_1^{(1)2} \int_D x^2d\Gamma(x) = 1$$

$$p_0^{(1)2} \mu_0 + 2p_0^{(1)}p_1^{(1)}\mu_1 + p_1^{(1)2} \mu_2 = 1$$

και, βγάζοντας κοινούς παράγοντες τους όρους $p_0^{(1)}$ και $p_1^{(1)}$, προκύπτει η εξίσωση

$$p_0^{(1)}(p_0^{(1)}\mu_0 + p_1^{(1)}\mu_1) + p_1^{(1)}(p_1^{(1)}\mu_2 + p_0^{(1)}\mu_1) = 1$$

Λόγω της εξίσωσης (3.5),

$$p_1^{(1)}(p_1^{(1)}\mu_2 + p_0^{(1)}\mu_1) = 1 \quad (3.6)$$

Για $i = 0, j = 2$

$$\langle P_0(x), P_2(x) \rangle = 0$$

$$\langle P_0(x), P_2(x) \rangle = \int_D P_0(x)P_2(x)d\Gamma(x) = \int_D p_0^{(0)}(p_0^{(2)} + p_1^{(2)}x + p_2^{(2)}x^2)d\Gamma(x) = 0$$

$$\int_D (p_0^{(2)} + p_1^{(2)}x + p_2^{(2)}x^2)d\Gamma(x) = p_0^{(2)} \int_D 1d\Gamma(x) + p_1^{(2)} \int_D xd\Gamma(x) + p_2^{(2)} \int_D x^2d\Gamma(x) = 0$$

$$p_0^{(2)}\mu_0 + p_1^{(2)}\mu_1 + p_2^{(2)}\mu_2 = 0 \quad (3.7)$$

Για $i = 1, j = 2$

$$\langle P_1(x), P_2(x) \rangle = 0$$

$$\langle P_1(x), P_2(x) \rangle = \int_D P_1(x)P_2(x)d\Gamma(x) = \int_D (p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x)(p_0^{(2)} + p_1^{(2)}x + p_2^{(2)}x^2)d\Gamma(x) = 0$$

$$p_0^{(1)}p_0^{(2)}\mu_0 + p_0^{(1)}p_1^{(2)}\mu_1 + p_0^{(1)}p_2^{(2)}\mu_2 + p_1^{(1)}p_0^{(2)}\mu_1 + p_1^{(1)}p_1^{(2)}\mu_2 + p_1^{(1)}p_2^{(2)}\mu_3 = 0$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τα $p_0^{(1)}$ και $p_1^{(1)}$

$$p_0^{(1)}(p_0^{(2)}\mu_0 + p_1^{(2)}\mu_1 + p_2^{(2)}\mu_2) + p_1^{(1)}(p_0^{(2)}\mu_1 + p_1^{(2)}\mu_2 + p_2^{(2)}\mu_3) = 0$$

Λόγω της εξίσωσης (3.7) και $p_1^{(1)} \neq 0$, τελικά προκύπτει η εξίσωση

$$p_0^{(2)}\mu_1 + p_1^{(2)}\mu_2 + p_2^{(2)}\mu_3 = 0 \quad (3.8)$$

Για $i = 2, j = 2$

$$\langle P_2(x), P_2(x) \rangle = 1$$

$$\langle P_2(x), P_2(x) \rangle = \int_D P_2(x)P_2(x)d\Gamma(x) = \int_D (p_0^{(2)} + p_1^{(2)}x + p_2^{(2)}x^2)^2 d\Gamma(x) = 1$$

$$(p_0^{(2)})^2\mu_0 + (p_1^{(2)})^2\mu_1 + (p_2^{(2)})^2\mu_2 + 2p_0^{(2)}p_1^{(2)}\mu_1 + 2p_0^{(2)}p_2^{(2)}\mu_2 + 2p_1^{(2)}p_2^{(2)}\mu_3 = 1$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τα $p_0^{(2)}$, $p_1^{(2)}$ και $p_2^{(2)}$

$$p_0^{(2)}(p_0^{(2)}\mu_0 + p_1^{(2)}\mu_1 + p_2^{(2)}\mu_2) + p_1^{(2)}(p_1^{(2)}\mu_2 + p_0^{(2)}\mu_1 + p_2^{(2)}\mu_3) + p_2^{(2)}(p_2^{(2)}\mu_4 + p_0^{(2)}\mu_2 + p_1^{(2)}\mu_3) = 1$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (3.7),(3.8) προκύπτει η σχέση

$$p_2^{(2)}(p_2^{(2)}\mu_4 + p_0^{(2)}\mu_2 + p_1^{(2)}\mu_3) = 1 \quad (3.9)$$

Συνοπτικά ξαναγράφονται οι εξισώσεις (3.4),(3.5),(3.7),(3.6),(3.9),(3.8). Σε αυτές τις 6 εξισώσεις οι στατιστικές ροπές μ είναι γνωστές από την εξίσωση (3.2) και οι 6 συντελεστές $p_j^{(i)}$ άγνωστοι.

- $p_0^{(0)} = 1$
- $p_0^{(1)}\mu_0 + p_1^{(1)}\mu_1 = 0$
- $p_1^{(1)}(p_1^{(1)}\mu_2 + p_0^{(1)}\mu_1) = 1$
- $p_0^{(2)}\mu_0 + p_1^{(2)}\mu_1 + p_2^{(2)}\mu_2 = 0$
- $p_0^{(2)}\mu_1 + p_1^{(2)}\mu_2 + p_2^{(2)}\mu_3 = 0$
- $p_2^{(2)}(p_2^{(2)}\mu_4 + p_0^{(2)}\mu_2 + p_1^{(2)}\mu_3) = 1$

Οι συντελεστές των πολυωνύμων $p_j^{(i)}$ υπολογίζονται σε διαδοχικά βήματα. Έτσι, διαμορφώνονται τα παρακάτω συστήματα για $i = 1, 2$ (το i αναφέρεται στους πάνω δείκτες, στις προηγούμενες σχέσεις)

- Για $i = 1$ (δηλαδή ένα σύστημα με 2 αγνώστους):

$$p_0^{(1)}\mu_0 + p_1^{(1)}\mu_1 = 0$$

$$p_1^{(1)}\mu_2 + p_0^{(1)}\mu_1 = \frac{1}{p_1^{(1)}}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(1)} \\ p_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{p_1^{(1)}} \end{bmatrix}$$

- Για $i = 2$ (δηλαδή ένα σύστημα με αγνώστους)

$$p_0^{(2)}\mu_0 + p_1^{(2)}\mu_1 + p_2^{(2)}\mu_2 = 0$$

$$p_0^{(2)}\mu_1 + p_1^{(2)}\mu_2 + p_2^{(2)}\mu_3 = 0$$

$$p_2^{(2)} \mu_4 + p_0^{(2)} \mu_2 + p_1^{(2)} \mu_3 = \frac{1}{p_2^{(2)}}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(2)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{p_2^{(2)}} \end{bmatrix}$$

Σε οποιοδήποτε από αυτά τα συστήματα, το μητρώο M του αριστερού μέλους ονομάζεται Hankel Kernel [16] [20]. Εν τέλει, τα συστήματα που πρέπει να λυθούν για να υπολογιστούν οι συντελεστές των πολυωνύμων είναι k όπου $k = 0 \dots k$ (υπολογίζεται και για $k = 0$ δηλαδή το πρώτο σύστημα όπου είναι εκφυλισμένο) όσα δηλαδή και η επιλεγμένη τάξη χάους. Με τη γενίκευση των παραπάνω, για να μπορέσει να σχηματιστεί το μητρώο M πρέπει να υπολογιστεί η $2k$ -στατιστική ροπή με βάση τη σχέση (3.2). Το μητρώο M γενικά γράφεται

$$M = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Και το γενικευμένο σύστημα για κάθε k διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(k)} \\ p_1^{(k)} \\ \vdots \\ p_k^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{p_k^{(k)}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

που επιλύεται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Πολλαπλασιάζεται το δεξί και το αριστερό μέλος κάθε εξίσωσης του συστήματος

με τον ίδιο συντελεστή $p_{\kappa}^{(\kappa)}$ οπότε γίνεται

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{\kappa} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{\kappa+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{\kappa} & \mu_{\kappa+1} & \cdots & \mu_{2\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(\kappa)} p_{\kappa}^{(\kappa)} \\ p_1^{(\kappa)} p_{\kappa}^{(\kappa)} \\ \vdots \\ p_{\kappa}^{(\kappa)2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ορίζονται βοηθητικά:

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0^{(\kappa)} p_{\kappa}^{(\kappa)} \\ p_1^{(\kappa)} p_{\kappa}^{(\kappa)} \\ \vdots \\ p_{\kappa}^{(\kappa)2} \end{bmatrix}$$

οπότε αρκεί να λυθεί το σύστημα (με αγνώστους τα q):

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{\kappa} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{\kappa+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{\kappa} & \mu_{\kappa+1} & \cdots & \mu_{2\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Οι συντελεστές των πολυωνύμων p υπολογίζονται συναρτήσει των ποσοτήτων q , ως

$$\begin{bmatrix} p_0^{(\kappa)} \\ p_1^{(\kappa)} \\ \vdots \\ p_{\kappa}^{(\kappa)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_0}{p_{\kappa}^{(\kappa)}} \\ \frac{q_1}{p_{\kappa}^{(\kappa)}} \\ \vdots \\ \sqrt{q_{\kappa}} \end{bmatrix}$$

Οπότε, για $j = \kappa$,

$$p_{\kappa}^{(\kappa)} = \sqrt{q_{\kappa}} \quad (3.12)$$

και για $j = 0 \dots \kappa - 1$,

$$p_j^{(\kappa)} = \frac{q_j}{p_{\kappa}^{(\kappa)}} \quad (3.13)$$

Επίσης για τον υπολογισμό των συντελεστών $p_j^{(i)}$ υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος.

Έχοντας διαμορφώσει το μητρώο M με τις στατιστικές ροπές για τάξη χάους k με βάση την σχέση (3.10) ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα [1]:

- Το συμμετρικό μητρώο M παραγοντοποιείται κατά Cholesky σε $M = R^T R$. Σκοπός είναι να υπολογιστεί το άνω τριγωνικό μητρώο R όπου

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,k+1} \\ & r_{22} & \dots & r_{2,k+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & \emptyset & & r_{k+1,k+1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

- Έπειτα υπολογίζεται ο αντίστροφος του R , R^{-1} [1] τα στοιχεία του οποίου είναι οι συντελεστές $p_i^{(j)}$, με βάση αυτούς τους συντελεστές υπολογίζονται τα ορθοκανονικά πολυώνυμα P , όπου ορίστηκαν ανωτέρω με βάση το θεώρημα του Mysovskih [15]. Το μητρώο R^{-1} (το μητρώο R^{-1} είναι, επίσης, άνω τριγωνικό) σχηματίζεται ως εξής:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} p_0^{(0)} & p_0^{(1)} & p_0^{(2)} & \dots & p_0^{(k)} \\ & p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \dots & p_1^{(k)} \\ & & p_2^{(2)} & \dots & p_2^{(k)} \\ & \emptyset & & \ddots & \vdots \\ & & & & p_k^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.2.2 Υπολογισμός Μέσης τιμής και Τυπικής απόκλισης της F με χρήση DDPCE για $T = 1$

Όπως παρουσιάστηκε και στη θεωρία του PCE στο κεφάλαιο 2.1.2, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της F υπολογίζεται από τους συντελεστές του πολυωνυμικού χάους με βάση τις εξισώσεις (2.17) ,(2.18).

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν και στο DDPCE καθώς το μόνο στοιχείο που διαφοροποιείται είναι οι συντελεστές των πολυωνύμων $p_i^{(j)}$ που στο DDPCE πρέπει να υπολογιστούν ενώ στο PCE ήταν συντελεστές που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες ομάδες πολυωνύμων ανάλογα με την κατανομή (πχ *Hermite*, *Legendre*, *Laguerre* κ.λ.π.). Και στις δύο περιπτώσεις τα πολυώνυμα είναι ορθοκανονικά.

points [13][1], τα οποία θα συμβολίζονται με λ , δηλαδή

$$\vec{x}_\lambda = \begin{bmatrix} x_{\lambda_0} \\ x_{\lambda_1} \\ \vdots \\ x_{\lambda_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

- Υπολογίζονται οι τιμές $F(x_{\lambda_i}) = F(\lambda_i)$ και γράφονται στη μορφή διανύσματος ως εξής:

$$\vec{V}_F = \begin{bmatrix} F(\lambda_0) \\ F(\lambda_1) \\ \vdots \\ F(\lambda_k) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

- Με βάση την εξίσωση (2.19) υπολογίζεται το ανάπτυγμα της F για κάθε collocation point λ_i [21][1]. Η εξίσωση (2.19) πρέπει να ικανοποιείται για κάθε λ_i
 - $F(\lambda_0) = a_0P_0(\lambda_0) + a_1P_1(\lambda_0) + a_2P_2(\lambda_0) + \dots + a_kP_k(\lambda_0)$
 - $F(\lambda_1) = a_0P_0(\lambda_1) + a_1P_1(\lambda_1) + a_2P_2(\lambda_1) + \dots + a_kP_k(\lambda_1)$
 - \vdots
 - $F(\lambda_k) = a_0P_0(\lambda_k) + a_1P_1(\lambda_k) + a_2P_2(\lambda_k) + \dots + a_kP_k(\lambda_k)$

Στις παραπάνω $k + 1$ εξισώσεις, οι τιμές της $F(\lambda_i)$ είναι γνωστές καθώς και τα πολυώνυμα P_i . Οι $k + 1$ συντελεστές a_i είναι οι μόνοι άγνωστοι. Οπότε διαμορφώνεται ένα σύστημα $k + 1$ εξισώσεων με $k + 1$ αγνώστους [1][21]. Η επίλυση του υπολογίζει τους συντελεστές a_i . Το σύστημα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$M_P V_a = V_F \quad (3.20)$$

όπου το μητρώο $M_P(k + 1 \times k + 1)$ εμπεριέχει τα πολυώνυμα P_i από τις εξισώσεις στο βήμα 3.2.2 και ορίζεται ως

$$M_P(l, c) = P_c(\lambda_l) = \begin{bmatrix} P_0(\lambda_0) & P_1(\lambda_0) & P_2(\lambda_0) & \dots & P_k(\lambda_0) \\ P_0(\lambda_1) & P_1(\lambda_1) & P_2(\lambda_1) & \dots & P_k(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(\lambda_k) & P_1(\lambda_k) & P_2(\lambda_k) & \dots & P_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

όπου ο δείκτης $l = 0 \dots k$ συμβολίζει τις γραμμές (*lines*) και ο δείκτης $c = 0 \dots k$ συμβολίζει τις στήλες (*columns*).

Οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους a_i γράφονται στη μορφή διανύσματος ως εξής:

$$\vec{V}_a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k]^T$$

- Αφού έχουν υπολογιστεί οι συντελεστές a_i , η F μπορεί να ανασχευαστεί με βάση τη σχέση (2.19). Ενδεχομένως η ανασχευασμένη F μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια απλή πολυωνυμική προσέγγιση μιας πιο σύνθετης συνάρτησης που απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος για να υπολογιστεί η απόκριση για μια συγκεκριμένη τιμή.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές εφαρμογές DDPCE

για $T = 1$

4.1 Εισαγωγικά σχόλια

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν εφαρμογές της μεθόδου DDPCE σε διάφορους τύπους συναρτήσεων με μια αβέβαιη μεταβλητή. Θεωρείται ότι το x ακολουθεί κανονική κατανομή για λόγους απόδειξης και επαλήθευσης των αποτελεσμάτων (χωρίς αυτό να χρησιμοποιηθεί στην εφαρμογή της μεθόδου). Ως μέτρο σύγκρισης θα είναι ο υπολογισμός των τιμών με την αντίστοιχη μέθοδο Monte Carlo και των αναλυτικών υπολογισμών των ολοκληρωμάτων.

Έστω λοιπόν ότι είναι διαθέσιμα N_s δείγματα της αβέβαιης μεταβλητής x στο πεδίο ορισμού της D . Τα δείγματα N_s δημιουργούνται με χρήση της υπορουτίνας `ran3` (που δημιουργεί N_s αριθμό δειγμάτων κατανεμημένων ομοιόμορφα μεταξύ του 0-1) και, έπειτα, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Box Muller [8], μετασχηματίζονται αυτά τα δεδομένα σε κανονική κατανομή με την επιθυμητή μέση τιμή και τυπική απόκλιση.

4.1.1 Εφαρμογή σε Γραμμική Συνάρτηση

Έστω συνάρτηση ενδιαφέροντος $F(x) = 4x + 2$. Η μεταβλητή x ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu_x = 2$ και τυπική απόκλιση $\sigma_x = 1$.

Δηλαδή:

$$x \sim \mathcal{N}(2, 1)$$

Η συνάρτηση βάρους w είναι

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$$

Με τον αναλυτικό υπολογισμό των παρακάτω ολοκληρωμάτων προκύπτει

$$\begin{aligned} \mu_F &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (4x+2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx \implies \\ \implies \mu_F &= \left[5 \operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \equiv [\Phi_1(x)]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου

$$\Phi_1(x) = 5 \operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

και $\operatorname{erf}(x)$ είναι η συνάρτηση σφάλματος Gauss (*Gauss error function*) [4]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (4.2)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\mu_F = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_1(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_1(x) \implies \mu_F = 5 - (-5) = 10$$

Ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης απαιτεί τον υπολογισμό του όρου $\langle F^2 \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x))^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (4x+2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx \implies \\ \implies \langle F^2 \rangle &= \left[58 \operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2^{\frac{7}{2}} (x+3) e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \equiv [\Phi_2(x)]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

όπου

$$\Phi_2(x) = 58 \operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2^{\frac{7}{2}} (x+3) e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

Με τον υπολογισμό των ορίων της $\Phi_2(x)$

$$\langle F^2 \rangle = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_2(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_2(x) \implies \langle F^2 \rangle = 58 - (-58) = 116$$

άρα οι υπολογισμοί με τη μέθοδο DDPCE πρέπει να καταλήξουν σε

$$\mu_F = 10, \sigma_F = 4$$

Ο υπολογισμός των παραπάνω τιμών επαναλαμβάνεται με τη χρήση της θεωρίας που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3 και την εφαρμογή των παρακάτω βημάτων:

1. Αρχικά ορίζεται η τάξη του χάους k . Επειδή η $F(x)$ είναι γραμμική αναμένεται οι (ουσιαστικά μη μηδενικοί) συντελεστές του πολυωνυμικού χάους a_i να είναι 2 ενώ, αν $k > 2$, οι επόμενοι αναμένεται να είναι σχεδόν ίσοι με μηδέν. Για να φανούν τα ανωτέρω, επιλέγεται ενδεικτικά τάξη χάους $k = 3$.
2. Δημιουργούνται με βάση την υπορουτίνα `ran3` [19] και τον μετασχηματισμό Box Muller [8] ένα σύνολο τιμών ($N_s = 10000$) του x που ακολουθεί, σκόπιμα, κανονική κατανομή.
3. Έπειτα υπολογίζεται το μητρώο με τις στατιστικές ροπές M με βάση τη σχέση 3.10,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2.012 & 5.019 & 14.004 \\ 2.012 & 5.019 & 14.004 & 42.611 \\ 5.019 & 14.004 & 42.611 & 138.613 \\ 14.004 & 42.611 & 138.613 & 476.056 \end{bmatrix}$$

4. Το μητρώο M παραγοντοποιείται κατά Cholesky και προκύπτει το μητρώο R ,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2.012 & 5.019 & 14.004 \\ & 0.986 & 3.963 & 14.645 \\ & & 1.309 & 7.857 \\ & & & \emptyset & 1.931 \end{bmatrix}$$

5. Υπολογίζεται το αντίστροφο μητρώο του R δηλαδή το R^{-1} , το οποίο εμπεριέχει

τους συντελεστές p των πολυωνύμων P που ορίστηκαν στη σχέση (3.1).

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} p_0^{(0)} & p_0^{(1)} & p_0^{(2)} & \dots & p_0^{(k)} \\ & p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \dots & p_1^{(k)} \\ & & p_2^{(2)} & \dots & p_2^{(k)} \\ & \emptyset & & \ddots & \vdots \\ & & & & p_k^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2.040 & 2.343 & -1.312 \\ & 1.014 & -3.071 & 4.800 \\ & & 0.764 & -3.107 \\ & \emptyset & & 0.518 \end{bmatrix}$$

6. Από τον πίνακα R υπολογίζονται επίσης τα στοιχεία a, b που διαμορφώνουν τον πίνακα J από την εξίσωση (3.16), και τελικά υπολογίζονται οι ιδιοτιμές. Έτσι υπολογίζεται

$$J = \begin{bmatrix} 2.012 & 0.986 & & \emptyset \\ 0.986 & 2.008 & 1.328 & \\ & 1.328 & 1.982 & 1.475 \\ \emptyset & & 1.475 & 1.986 \end{bmatrix}$$

του οποίου οι ιδιοτιμές προκύπτουν

$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} 2.692 \\ 1.311 \\ 4.098 \\ -0.114 \end{bmatrix}$$

7. Για κάθε ιδιοτιμή υπολογίζονται οι τιμές των πολυωνύμων P με βάση την εξίσωση (3.1). Στην περίπτωση που είναι γνωστή η συνάρτηση F υπολογίζεται η τιμή της για κάθε λ_i . Έτσι σχηματίζεται το μητρώο M_P και το διάνυσμα $V_F(\lambda_i)$.

Επιλύοντας το σύστημα που περιγράφεται στην εξίσωση (6.5) υπολογίζονται οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους a_i .

$$V_F = \begin{bmatrix} 12.770 \\ 7.244 \\ 18.392 \\ 1.545 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.690 & -0.387 & -0.808 \\ 1 & -0.711 & -0.369 & 0.808 \\ 1 & 2.116 & 2.588 & 1.808 \\ 1 & -2.156 & 2.703 & -1.899 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.770 \\ 7.244 \\ 18.392 \\ 1.545 \end{bmatrix}$$

Με την επίλυση του συστήματος, οι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής:

$$V_a = \begin{bmatrix} 10.047 \\ 3.944 \\ -6.8015 \cdot 10^{-17} \\ -4.7121 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Στο ίδιο αριθμητικό παράδειγμα θα παρουσιαστεί η περίπτωση που είναι άγνωστος ο αναλυτικός τύπος της $F(x)$ (δηλαδή δεν είναι γνωστή η $F(x) = 4x + 2$) αλλά υπάρχουν οι τιμές $x, y(x)$ ($N_s = 10000$ ζεύγη $x, y(x)$). Χρειάζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων μια πολυωνυμική προσέγγιση των σημείων αυτών ως υποκατάστατο της F . Σκοπός είναι να υπολογιστούν οι συντελεστές h_i για την προσέγγιση των σημείων $x, y(x)$. Επιλέγεται δευτεροβάθμιο πολυωνύμου προσέγγισης ενώ η συνάρτηση είναι γραμμική. Ο συντελεστής h_2 αναμένεται να υπολογιστεί σχεδόν ίσος με μηδέν. Οι υπολογισμοί δίνουν

$$h_0 = 2.0000000000891029$$

$$h_1 = 4.0000000009507088$$

$$h_2 = -1.976 \cdot 10^{-9} \approx 0$$

οπότε τα σημεία $y(x)$ προσεγγίζονται από την πολυωνυμική συνάρτηση

$$F(x) = h_0 + h_1x + h_2 = 2.0000000000891029 + 4.0000000009507088x$$

Στα προηγούμενα βήματα το μόνο που διαφοροποιείται είναι ο τρόπος υπολογισμού των τιμών V_F που πριν ήταν γνωστή ενώ τώρα χρησιμοποιήθηκε ένα υποκατάστατο της F . Άρα, υπολογίζονται οι τιμές του υποκατάστατου της συνάρτησης $F(x)$ για κάθε λ_i και διαμορφώνεται το παρακάτω σύστημα. Το μητρώο M_p είναι ίδιο αφού εξαρτάται μόνο από την αβέβαιη μεταβλητή x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.690 & -0.387 & -0.808 \\ 1 & -0.711 & -0.369 & 0.808 \\ 1 & 2.116 & 2.588 & 1.808 \\ 1 & -2.156 & 2.703 & -1.899 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.7695 \\ 7.243 \\ 18.392 \\ 1.544 \end{bmatrix}$$

Με την επίλυση του συστήματος οι συντελεστές είναι οι παρακάτω

$$V_a = \begin{bmatrix} 10.048 \\ 3.943 \\ 2.088 \cdot 10^{-11} \\ -1.333 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix}$$

Μέθοδος	μ_F	Σφάλμα μ_F (%)	σ_F	Σφάλμα σ_F (%)
Αναλυτική	10	—	4	—
MC (100)	10.170	1.70	4.047	1.17
MC (1000)	9.886	1.14	3.876	3.09
MC (10000)	10.047	0.47	3.954	1.15
MC (100000)	9.996	0.04	3.963	0.93
DDPCE (k=3)	10.047	0.47	3.944	1.40
DDPCE (k=4)	10.047	0.47	3.944	1.40
DDPCE -least(k=3)	10.048	0.48	3.944	1.40
DDPCE -least(k=4)	10.048	0.48	3.944	1.40

Πίνακας 4.1: Εφαρμογή 4.1.1. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ της αναλυτικής λύσης, της μεθόδου Monte Carlo και της μεθόδου DDPCE για τάξη χάους $k = 3, 4$.

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα συγκριτικά αποτελέσματα της μεθόδου DDPCE με τη Monte Carlo και την αναλυτική λύση. Τα συμπεράσματα που βγαίνουν από την εφαρμογή της γραμμικής συνάρτησης είναι ότι

- Η μέθοδος Monte Carlo φαίνεται ότι για τη μέση τιμή απαιτείται μεγάλος αριθμός δειγμάτων για να μπορέσει το σφάλμα να "πέσει" στο σφάλμα του DDPCE.
- Η μέθοδος DDPCE και διατηρεί το σφάλμα στο 0.47 για τη μέση τιμή που η μέθοδος Monte Carlo "πιάνει" στα 10000 δείγματα.
- Η χρησιμοποίηση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων φαίνεται ότι βγάζει το ίδιο ικανοποιητικά αποτελέσματα με την περίπτωση που είναι γνωστή η F . Αντίστοιχα το υπολογιστικό κόστος είναι ίδιο καθώς οι κλήσεις της συνάρτησης F εξαρτώνται από την επιλεγόμενη τάξη χάους k και αντίστοιχα λ_i .

Τέλος, παρουσιάζεται συγκριτικός πίνακας με τον υπολογισμό των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων με τη μέθοδο Monte Carlo των ανασκευασμένων συναρτήσεων σε σύγκριση με την αναλυτική λύση

$$F(x) = 4x + 2$$

με την ανασκευασμένη

$$F_r(x) = a_0 p_0^{(0)} + a_1 (p_0^{(1)} + p_1^{(1)} x) = 10.047 + 3.944(-2.040 + 1.014x) = 2.00124 + 3.99921x$$

Μέθοδος	μ_F	Σφάλμα μ_F (%)	σ_F	Σφάλμα σ_F (%)
Αναλυτική	10	—	4	—
F	10.047	0.47	3.954	1.15
F_r	10.047	0.47	3.944	1.40
F_{rl}	10.048	0.48	3.944	1.40

Πίνακας 4.2: Εφαρμογή 4.1.1. Σύγκριση αποτελεσμάτων υπολογισμού μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης με τη μέθοδο Monte Carlo μεταξύ της αναλυτικής λύσης F_{an} , της F_r και της F_{rl} .

και στην περίπτωση της ανασκευασμένης υπολογισμένο με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

$$F_{rl}(x) = a_0 p_0^{(0)} + a_1 (p_0^{(1)} + p_1^{(1)} x) = 10.048 + 3.944(-2.040 + 1.014x) = 2.00224 + 3.99921x$$

4.1.2 Εφαρμογή σε Εκθετική Συνάρτηση

Η μέθοδος DDPCE εφαρμόζεται στην $e^{-\frac{x}{2}}$ (εκθετική). Η κύρια διαφορά με την προηγούμενη εφαρμογή είναι ότι θα γίνει προσπάθεια να προσεγγιστεί μια εκθετική συνάρτηση με μια πολυωνυμική. Σαφώς κρίσιμο ρόλο σε αυτή την εφαρμογή παίζει η τάξη χάους k καθώς είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί σωστά ώστε να επιτευχθεί το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Όπως αναφέρθηκε έστω $F(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ με $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Δηλαδή η μέση τιμή είναι $\mu_x = 0$ η διακύμανση $\sigma_x^2 = 1$, άρα και τυπική απόκλιση $\sigma_x = 1$. Υπολογίζεται η συνάρτηση βάρους:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}}$$

Υπολογίζεται αναλυτικά η μέση τιμή

$$\begin{aligned} \mu_F &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[\frac{\sqrt[8]{e} \operatorname{erf}\left(\frac{2x+1}{2^{\frac{3}{2}}}\right)}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} \implies \\ &\implies \mu_F = \sqrt[8]{e} = 1.133148453 \dots \end{aligned}$$

και η τυπική απόκλιση υπολογίζεται αφού υπολογιστεί πρώτα το μέγεθος $\langle F^2 \rangle$

$$\langle F^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x))^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\frac{x}{2}})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[\frac{\sqrt{e} \operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} \implies$$

$$\implies \langle F^2 \rangle = \sqrt{e} = 1.648721271 \dots$$

έπειτα υπολογίζεται με βάση τον παρακάτω τύπο

$$\sigma_F = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \mu_F^2} = \sqrt{0.364695854} = 0.603900534 \dots$$

Υπολογισμός με την χρήση DDPCE της μ_F και σ_F σε εφαρμογή εκθετικής συνάρτησης

Σε αυτήν και την επόμενη εφαρμογές, λόγω του γεγονότος ότι η ίδια η διαδικασία επαναλαμβάνεται για πολλές τάξεις χάους και συγκεκριμένα από $k = 2 \dots 7$ παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα κάθε τάξης χάους καθώς και ο συγκριτικός πίνακας μεταξύ τους. Η διαδικασία και τα βήματα είναι ίδια με βάση το κεφάλαιο 3.

Οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους και η μέση τιμή και τυπική απόκλιση υπολογίζονται κατά περίπτωση ως

- $k = 2$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.122 \\ a_1 = -0.549 \\ a_2 = 0.173 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \mu_F = 1.1221 \\ \sigma_F = 0.5107 \end{array} \right.$$

- $k = 3$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.122 \\ a_1 = -0.550 \\ a_2 = 0.181 \\ a_3 = -0.043 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \mu_F = 1.1222 \\ \sigma_F = 0.5802 \end{array} \right.$$

- $k = 4$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.122 \\ a_1 = -0.550 \\ a_2 = 0.181 \\ a_3 = -0.044 \\ a_4 = 0.008 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = 1.1222 \\ \sigma_F = 0.5804 \end{cases}$$

- $k = 5$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.122 \\ a_1 = -0.550 \\ a_2 = 0.181 \\ a_3 = -0.044 \\ a_4 = 0.008 \\ a_5 = -0.001 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = 1.1222 \\ \sigma_F = 0.5804 \end{cases}$$

- $k = 6$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.122 \\ a_1 = -0.550 \\ a_2 = 0.181 \\ a_3 = -0.044 \\ a_4 = 0.008 \\ a_5 = -0.001 \\ a_6 = 0 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = 1.1222 \\ \sigma_F = 0.5804 \end{cases}$$

- $k = 7$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.122 \\ a_1 = -0.550 \\ a_2 = 0.181 \\ a_3 = -0.044 \\ a_4 = 0.008 \\ a_5 = -0.001 \\ a_6 = 0 \\ a_7 = 0 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = 1.1222 \\ \sigma_F = 0.5804 \end{cases}$$

Μέθοδος	μ_F	Σφάλμα μ_F (%)	σ_F	Σφάλμα σ_F (%)
Αναλυτική	1.133	—	0.604	—
MC (100)	1.1183	1.31	0.6589	9.11
MC (1000)	1.1395	0.56	0.5744	4.88
MC (5000)	1.1222	0.97	0.5749	4.80
MC (10000)	1.1222	0.96	0.5804	3.89
MC (100000)	1.1298	0.30	0.5839	3.32
DDPCE (2)	1.1221	0.97	0.5107	15.44
DDPCE (3)	1.1222	0.96	0.5802	3.93
DDPCE (4)	1.1222	0.96	0.5804	3.89
DDPCE (5)	1.1222	0.96	0.5804	3.89
DDPCE (6)	1.1222	0.96	0.5804	3.89
DDPCE (7)	1.1222	0.96	0.5804	3.89

Πίνακας 4.3: Εφαρμογή 4.1.2. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ της αναλυτικής λύσης, της μεθόδου Monte Carlo και της μεθόδου DDPCE για τάξη χάους $k = 2 \dots 7$.

Στον πίνακα 4.3 παρουσιάζονται τα συγκριτικά αποτελέσματα της μεθόδου με την Monte Carlo και την αναλυτική λύση όπως παρουσιάστηκαν και παραπάνω. Τα συμπεράσματα που βγαίνουν από την εφαρμογή της γραμμικής συνάρτησης είναι ότι

- Η μέθοδος του DDPCE προσεγγίζει ικανοποιητικά την μέση τιμή με ποσοστό σφάλματος που κυμαίνεται μέσο όρο στο 0.96%.
- Για την τυπική απόκλιση φαίνεται ότι επηρεάζει η τάξη του χάους στο σφάλμα. κάτι που με βάση τους υπολογισμούς είναι λογικό καθώς για τάξη χάους k μεγαλύτερη από 5 οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους τείνουν στο 0 οπότε δεν επηρεάζουν και το αποτέλεσμα. Μάλιστα, φαίνεται ότι για τάξη χάους $k = 4$ επιτυγχάνεται σφάλμα κοντά στο 3.90%
- Σε σχέση με τη μέθοδο Monte Carlo τα αποτελέσματα είναι πολύ πιο ικανοποιητικά σε σχέση με το ποσοστό σφάλματος με την αναλυτική λύση αλλά και τη σταθερότητα του σφάλματος.

4.1.3 Εφαρμογή σε Τριγωνομετρική Συνάρτηση

Θα εφαρμοστεί η ίδια μέθοδος για μια τριγωνομετρική συνάρτηση. Επίσης, σε αυτήν την εφαρμογή, οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους θα υπολογιστούν για $k = 2 \dots 6$. Έστω ότι η συνάρτηση είναι $F(x) = \sin(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{\pi x}{2})$ με $x \sim \mathcal{N}(2, 0.25)$. Η μέση τιμή είναι $\mu_x = 2$, η διακύμανση $\sigma_x^2 = 0.25$, άρα η τυπική απόκλιση είναι $\sigma_x = 0.5$. Υπολογίζεται η συνάρτηση βάρους w σύμφωνα με τη σχέση (4.1.1),

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.5^2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2 \cdot 0.5^2}}$$

Υπολογίζονται τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} \mu_F &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{\pi x}{2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.5^2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2 \cdot 0.5^2}} dx \implies \\ &\implies \mu_F = -0.356347 \dots \end{aligned}$$

Υπολογίζεται ο όρος $\langle F^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x))^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{\pi x}{2}))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.5^2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2 \cdot 0.5^2}} dx \implies \\ &\implies \langle F^2 \rangle = 0.179832108 \dots \end{aligned}$$

και στη συνέχεια η τυπική απόκλιση

$$\sigma_F = \sqrt{0.179832108 - (-0.356347)^2} = \sqrt{0.0528489245526102} = 0.22988893 \dots$$

Υπολογισμός με την χρήση DDPCE της μ_F και σ_F σε εφαρμογή τριγωνομετρικής συνάρτησης

Οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους και η μέση τιμή και τυπική απόκλιση υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} &\bullet k = 2 \\ &\left. \begin{aligned} a_0 &= -0.360 \\ a_1 &= 0.083 \\ a_2 &= 0.187 \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = -0.360 \\ \sigma_F = 0.207 \end{cases} \end{aligned}$$

- $k = 3$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = -0.356 \\ a_1 = 0.110 \\ a_2 = 0.145 \\ a_3 = -0.152 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = -0.356 \\ \sigma_F = 0.238 \end{cases}$$

- $k = 4$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = -0.356 \\ a_1 = 0.109 \\ a_2 = 0.150 \\ a_3 = -0.126 \\ a_4 = -0.042 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = -0.356 \\ \sigma_F = 0.228 \end{cases}$$

- $k = 5$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = -0.356 \\ a_1 = 0.109 \\ a_2 = 0.149 \\ a_3 = -0.128 \\ a_4 = -0.038 \\ a_5 = 0.026 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = -0.356 \\ \sigma_F = 0.229 \end{cases}$$

- $k = 6$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = -0.356 \\ a_1 = 0.109 \\ a_2 = 0.149 \\ a_3 = -0.128 \\ a_4 = -0.038 \\ a_5 = 0.024 \\ a_6 = 0.004 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = -0.356 \\ \sigma_F = 0.229 \end{cases}$$

Μέθοδος	μ_F	Σφάλμα μ_F (%)	σ_F	Σφάλμα σ_F (%)
Αναλυτική	-0.356	—	0.230	—
MC (100)	-0.342	4.16	0.258	12.06
MC (1000)	-0.366	2.70	0.225	2.30
MC (5000)	-0.359	0.70	0.229	0.43
MC (10000)	-0.356	0.02	0.229	0.22
MC (100000)	-0.356	0.02	0.230	0.04
DDPCE (2)	-0.360	1.12	0.207	9.99
DDPCE (3)	-0.356	0.02	0.238	3.34
DDPCE (4)	-0.356	0.02	0.229	0.88
DDPCE (5)	-0.356	0.02	0.229	0.23
DDPCE (6)	-0.356	0.02	0.229	0.23

Πίνακας 4.4: Εφαρμογή 4.1.3. Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ της αναλυτικής λύσης, της μεθόδου Monte Carlo και της μεθόδου DDPCE για τάξη χάους $k = 2 \dots 6$.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της γραμμικής συνάρτησης είναι ότι

- Η μέθοδος DDPCE προσεγγίζει ικανοποιητικά την μέση τιμή με σφάλμα κάτω του 1% για k μεγαλύτερο του 4. Η τυπική απόκλιση προσεγγίζεται το ίδιο ικανοποιητικά για k μεγαλύτερο του 5.
- Παρατηρείται ότι εδώ οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους δεν βαίνουν μειούμενοι, αλλά ακολουθούν ταλαντωτική πορεία, κάτι που είναι λογικό λόγω της φύσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Κεφάλαιο 5

Ανάπτυγμα DDPCE για $T > 1$

5.1 Εισαγωγικά σχόλια

Στο υποκεφάλαιο (2.2) παρουσιάστηκε η θεωρία του πολυδιάστατου PCE . Στη μέθοδο του PCE τα πολυώνυμα που υπολογίζονται ανάλογα την εκάστοτε κατανομή της αβέβαιης μεταβλητής πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους και δημιουργούν νέα πολυώνυμα ψ_n , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.27,2.28,2.2 και 2.37.

Στη μέθοδο του DDPCE, αντίστοιχα, τα πολυώνυμα P υπολογίζονται με τον τρόπο που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Οι τιμές των πολυωνύμων για κάθε αβέβαιη μεταβλητή έχουν υπολογιστεί για συγκεκριμένα collocation points ($\vec{\lambda}$). Αφού έχουν υπολογιστεί τα πολυώνυμα P για κάθε αβέβαιη μεταβλητή πρέπει τα πολυώνυμα να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους για να δημιουργήσουν τα πολυώνυμα ψ_n με βάση τη σχέση (2.29).

5.1.1 Παράδειγμα υπολογισμού συντελεστών DDPCE για $T = 2$

Έστω ένα πρόβλημα με δυο αβέβαιες μεταβλητές x_1, x_2 οπότε $(t=1,2), T = 2$. Η τάξη χάους επιλέγεται να είναι $k = 2$ και για τις δύο αβέβαιες μεταβλητές και την παρακάτω μέση τιμή και τυπική απόκλιση.

$$\begin{aligned} \chi_1 &\sim N(\mu_1, \sigma_1) \\ \chi_2 &\sim N(\mu_2, \sigma_2) \end{aligned}$$

Ο αριθμός των συντελεστών του πολυδιάστατου PCE με βάση τα ανωτέρω δεδομένα θα είναι

Τάξη χάρους	Πολυώνυμο Ψ		Βαθμός P_{it}		Πλήθος για k $\binom{k+T-1}{k}$	Συνολικό Πλήθος $\binom{k_{max}+T}{k_{max}}$
	Σχετική (j)	Απόλυτη (m_j^k)	$t=1$ i_1	$t=2$ i_2		
$k=0$	1	0	0	0	1	6
$k=1$	1	1	1	0	2	
	2	2	0	1		
$k=2$	1	3	2	0	3	
	2	4	1	1		
	3	5	0	2		

Πίνακας 5.1: Πίνακας αντιστοίχισης δεικτών για $k = 0 \dots 2$ για δυο μεταβλητές ($t=1, 2$) [27].

$$n = \binom{k+T-1}{k} = \binom{2+2-1}{2} = 6$$

Για να υπολογιστούν αυτοί οι συντελεστές του PCE ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Για κάθε αβέβαιη μεταβλητή υπολογίζονται τα πολυώνυμα P και οι τιμές τους για κάθε collocation point. Έπειτα διαμορφώνεται το μητρώο M_p που αναφέρεται στο βήμα 5 του κεφαλαίου 3 για το μονοδιάστατο. Δηλαδή για τις δύο μεταβλητές x_1, x_2 υπολογίζονται:

$$\vec{\lambda}^{(1)} = \begin{bmatrix} \lambda_0^{(1)} \\ \lambda_1^{(1)} \\ \lambda_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad \vec{\lambda}^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda_0^{(2)} \\ \lambda_1^{(2)} \\ \lambda_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

όπου $\lambda_i^{(t)}$ $t = 1, 2$ οι δείκτες για τα για κάθε αβέβαιη μεταβλητή.

Υπολογίζονται τα μητρώα $M_p^{(1)}$ και $M_p^{(2)}$

$$M_P^{(1)} = P_c^{(1)}(\lambda_i^{(1)}) = \begin{bmatrix} P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) & P_1^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) & P_2^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \\ P_0^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) & P_1^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) & P_2^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \\ P_0^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) & P_1^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) & P_2^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) \end{bmatrix}$$

$$M_P^{(2)} = P_c^{(2)}(\lambda_i^{(2)}) = \begin{bmatrix} P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_1^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_2^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) \\ P_0^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_1^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_2^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) \\ P_0^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) & P_1^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) & P_2^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) \end{bmatrix}$$

2. Έπειτα υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης F για $\lambda_i^{(t)}$

$$\mathbf{V}_F = \begin{bmatrix} F(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) \\ F(\lambda_1^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) \\ F(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) \\ F(\lambda_2^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) \\ F(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) \\ F(\lambda_0^{(1)}, \lambda_2^{(2)}) \end{bmatrix}$$

3. Για να υπολογιστούν οι συντελεστές a_i πρέπει να επιλυθεί το παρακάτω σύστημα

$$M_\psi V_a = V_F \quad (5.1)$$

όπου

$$M_\psi = \begin{bmatrix} \psi_0(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_1(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_2(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_3(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_4(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_5(\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) \\ \psi_0(\lambda_1^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_1(\lambda_1^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_2(\lambda_1^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_3(\lambda_1^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_4(\lambda_1^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_5(\lambda_1^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) \\ \psi_0(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_1(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_2(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_3(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_4(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_5(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) \\ \psi_0(\lambda_2^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_1(\lambda_2^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_2(\lambda_2^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_3(\lambda_2^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_4(\lambda_2^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) & \psi_5(\lambda_2^{(1)}, \lambda_0^{(2)}) \\ \psi_0(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_1(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_2(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_3(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_4(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) & \psi_5(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) \\ \psi_0(\lambda_0^{(1)}, \lambda_2^{(2)}) & \psi_1(\lambda_0^{(1)}, \lambda_2^{(2)}) & \psi_2(\lambda_0^{(1)}, \lambda_2^{(2)}) & \psi_3(\lambda_0^{(1)}, \lambda_2^{(2)}) & \psi_4(\lambda_0^{(1)}, \lambda_2^{(2)}) & \psi_5(\lambda_0^{(1)}, \lambda_2^{(2)}) \end{bmatrix}$$

Με την ανάλυση των ψ στο γινόμενο των P , σύμφωνα με τον πίνακα 5.1, το μητρώο M_ψ μπορεί να γραφτεί:

$$M_\psi = \begin{bmatrix} P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_2^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_2^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) \\ P_0^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_1^{(2)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_2^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_2^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) \\ P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_2^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_2^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) \\ P_0^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_2^{(2)}(\lambda_2^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_2^{(1)}) \cdot P_2^{(2)}(\lambda_0^{(2)}) \\ P_0^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_2^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_1^{(1)}) \cdot P_2^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) \\ P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) & P_2^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_0^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) & P_1^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_1^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) & P_0^{(1)}(\lambda_0^{(1)}) \cdot P_2^{(2)}(\lambda_2^{(2)}) \end{bmatrix}$$

Και οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους a_i γράφονται με τη μορφή δια-

νύσματος ως εξής:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{a}}^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]$$

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικές εφαρμογές DDPCE

για $T > 1$

6.1 Εισαγωγικά σχόλια

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν εφαρμογές της μεθόδου σε διάφορους τύπους συναρτήσεων με περισσότερες της μίας ($T > 1$) αβέβαιες μεταβλητές. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρείται ότι οι αβέβαιες μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή για λόγους επαλήθευσης των αποτελεσμάτων. Μέτρο σύγκρισης είναι ο υπολογισμός των τιμών με τη μέθοδο Monte Carlo και μέσω αναλυτικών υπολογισμών των ολοκληρωμάτων.

6.1.1 Εφαρμογή σε Πολυωνυμική Συνάρτηση

Έστω συνάρτηση F με τον παρακάτω τύπο όπου οι δύο αβέβαιες μεταβλητές x_1, x_2 ακολουθούν κανονική κατανομή,

$$F(\vec{x}) = F(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2, \quad F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x_1 \sim \mathcal{N}(2, 1)$$

$$x_2 \sim \mathcal{N}(2, 9)$$

Οι συναρτήσεις βάρους για κανονική κατανομή όπως αναφέρονται στον πίνακα 2.1

υπολογίζονται:

$$w_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{1}}\right)^2}$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-2}{\sqrt{9}}\right)^2}$$

Ο υπολογισμός της ολικής συνάρτησης βάρους γίνεται ως εξής

$$\begin{aligned} W(\vec{x}) &= w_1(x_1) w_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{1}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-2}{\sqrt{9}}\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow W(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 \cdot 3)\sqrt{2\pi^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-2}{1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-2}{3}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση F είναι γραμμική ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τη μέση τιμή και την διακύμανση

$$\mu_F = 8\mu_{x_1} + 2\mu_{x_2} \Rightarrow \mu_F = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20$$

$$\sigma_F^2 = 8^2\sigma_{x_1}^2 + 2^2\sigma_{x_2}^2 \Rightarrow \sigma_F^2 = 64 \cdot 1 + 4 \cdot 9 = 100$$

Καταλήγοντας

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_F^2} = \sqrt{8^2\sigma_{x_1}^2 + 2^2\sigma_{x_2}^2} \Rightarrow \sigma_F = \sqrt{100} = 10$$

Αρχικά γίνεται ο υπολογισμός της αναλυτικής λύσης. Για τη μέση τιμή

$$\begin{aligned} \mu_F &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1, x_2) w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (8x_1 + 2x_2) \frac{1}{(1 \cdot 3)\sqrt{2\pi^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-2}{1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-2}{3}\right)^2\right]} dx_1 dx_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu_F = \left[[\Phi_1(\vec{x})]_{-\infty}^{+\infty} \right]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned} \quad (6.1)$$

όπου

$$\Phi_1(\vec{x}) = \frac{3 \exp\left(-\frac{1}{18}(x_2 - 2)^2\right) \operatorname{erf}\left(\frac{2-x_1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{(5\pi \operatorname{erf}\left(\frac{2-x_1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1 - 2)^2\right)) \operatorname{erf}\left(\frac{2-x_2}{3\sqrt{2}}\right)}{\pi} \quad (6.2)$$

Υπολογίζοντας τα όρια

$$\mu_F = 20 \quad (6.3)$$

Υπολογίζεται ο όρος $\langle F^2 \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x_1, x_2))^2 w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (8x_1 + 2x_2)^2 \frac{1}{(1 \cdot 3)\sqrt{2\pi}^2} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_1-8}{1} \right)^2 + \left(\frac{x_2-8}{3} \right)^2 \right]} dx_1 dx_2 \implies \\ \implies \langle F^2 \rangle &= \left[[\Phi_2(\vec{x})]_{-\infty}^{+\infty} \right]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned} \Phi_2(\vec{x}) &= - \frac{48\pi \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-2}{3\sqrt{2}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{2}}\right) + 125\pi(x_1-2) \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-2}{3\sqrt{2}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{2}}\right)}{\pi} \\ &\quad - \frac{54\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{18}(x_2-2)^2} (x_1-2) \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{2}}\right) - 3\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{18}(x_2-2)^2} (x_1-2)x_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{2}}\right)}{\pi} \\ &\quad + \frac{24\sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{18}(-x_2^2+4x_2-40)+2} \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{2}}\right) + 32\pi \operatorname{erf}\left(\frac{2-x_1}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-2}{3\sqrt{2}}\right)}{\pi} \\ &\quad + \frac{141\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1-2)^2} \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-2}{3\sqrt{2}}\right) - 108e^{-\frac{1}{2}(x_1-2)^2 - \frac{1}{18}(x_2-2)^2} - 6e^{-\frac{1}{2}(x_1-2)^2 - \frac{1}{18}(x_2-2)^2} x_2}{\pi} \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας τα όρια

$$\langle F^2 \rangle = 500 \quad (6.4)$$

η τυπική απόκλιση γίνεται

$$\begin{aligned} \sigma_F &= \sqrt{\sigma_F^2} = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \mu_F^2} \\ \sigma_F &= \sqrt{500 - 20^2} = \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

Για να υπολογιστούν οι συντελεστές του πολυωνυμικού χάους ακολουθούνται τα εξής βήματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 5:

1. Επιλέγεται τάξη χάους $k = 2$ (δεδομένου ότι η συνάρτηση F σε αυτή την εφαρμογή είναι γραμμική) και για τις δύο αβέβαιες μεταβλητές. Το συνολικό πλήθος

πολυωνύμων, σύμφωνα με την εξίσωση (2.28), ίσο με

$$\binom{k_{max} + T}{k_{max}} = \frac{(k_{max} + T)!}{k_{max}! T!} = \frac{(2 + 2)!}{2! 2!} = \frac{4!}{4} = 6$$

2. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα πολυώνυμα P για τις δύο μεταβλητές x_1, x_2 και τα collocation points λ . Για τις δύο μεταβλητές x_1, x_2 υπολογίζονται:

$$\vec{\lambda}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.004 \\ 0.349 \\ 3.666 \end{bmatrix} \quad \vec{\lambda}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.012 \\ -2.954 \\ 6.997 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζονται τα μητρώα $M_p^{(1)}$ και $M_p^{(2)}$ για τις τιμές $\lambda^{(t)}$

$$M_P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0051 & -0.7422 \\ 1 & -1.6702 & 1.3362 \\ 1 & 1.6864 & 1.3601 \end{bmatrix} \quad M_P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0052 & -0.7419 \\ 1 & -1.6701 & 1.3361 \\ 1 & 1.6865 & 1.3597 \end{bmatrix}$$

3. Έπειτα διαμορφώνεται το μητρώο M_ψ , όπως στη 5.1.

$$M_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0.0052 & 0.0052 & -0.7419 & 0.0005 & -0.7419 \\ 1 & -1.6701 & 0.0052 & 1.3361 & -0.0087 & -0.7419 \\ 1 & 0.0052 & -1.6701 & -0.7419 & -0.0087 & 1.3361 \\ 1 & 1.6865 & 0.0052 & 1.3597 & 0.0088 & -0.7419 \\ 1 & -1.6701 & -1.6701 & 1.3361 & 2.7893 & 1.3361 \\ 1 & 0.0052 & 1.6865 & -0.7419 & 0.0088 & 1.3597 \end{bmatrix}$$

Οι τιμές της συνάρτησης F εισάγονται σε ένα διάνυσμα V_F

$$\mathbf{V}_F = \begin{bmatrix} F(2.004, 2.012) \\ F(0.349, 2.012) \\ F(2.004, -2.954) \\ F(3.666, 2.012) \\ F(0.349, -2.954) \\ F(2.004, 6.997) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.0571 \\ 6.8129 \\ 10.1239 \\ 33.3484 \\ -3.1202 \\ 30.0256 \end{bmatrix}$$

Επιλύοντας το παρακάτω σύστημα υπολογίζονται οι συντελεστές a

$$M_\psi V_a = V_F \quad (6.5)$$

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} 19.985 \\ 7.905 \\ 5.929 \\ -7.429 \cdot 10^{-16} \\ 1.263 \cdot 10^{-15} \\ -7.578 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Παρουσιάζεται ο πίνακας 6.1 που συγκρίνει την αναλυτική λύση, το DDPCE και τη μέθοδο Monte Carlo . Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα του DDPCE είναι ικανοποιητικά με μικρή απόκλιση από την αναλυτική λύση.

Μέθοδος	μ_F	Σχετικό Σφάλμα (%)	σ_F	Σχετικό Σφάλμα (%)
Αναλυτική	20	—	10	—
DDPCE	19.984	0.08	9.882	1.18
MC (10000)	20.163	0.82	10.404	4.04
MC (50000)	19.989	0.05	10.064	0.64
MC (100000)	19.985	0.08	10.011	0.11

Πίνακας 6.1: Εφαρμογή 6.1.1. Πίνακας σύγκρισης αποτελεσμάτων μεταξύ των μεθόδων Monte Carlo και DDPCE με την αναλυτική λύση.

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στο πίνακα 6.1 συνάγονται ότι το σφάλμα είναι μικρότερο του 1% για τη μέση τιμή και μικρότερο του 2% για την τυπική απόκλιση που είναι ικανοποιητικό αποτέλεσμα.

6.1.2 Εφαρμογή σε Τριγωνομετρική Συνάρτηση

Εδώ γίνεται εφαρμογή στην τριγωνομετρική συνάρτηση, $F(x_1, x_2) = \sin(\frac{\pi x_1}{4} + \frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{\pi x_2}{2})$. Οι μεταβλητές x_1, x_2 ακολουθούν κανονική κατανομή ως εξής:

$$x_1 \sim \mathcal{N}(8, 0.25) \quad x_2 \sim \mathcal{N}(8, 0.25)$$

Η ολική συνάρτηση βάρους

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-8}{0.5}\right)^2} \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-8}{0.5}\right)^2} \quad (6.6)$$

$$W(x_1, x_2) = \frac{4}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-8}{0.5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-8}{0.5}\right)^2\right]} \quad (6.7)$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} \mu_F &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi x_1}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \frac{4}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-8}{0.5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-8}{0.5}\right)^2\right]} dx_1 dx_2 \implies \\ \implies \mu_F &= 0.6189613067 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x_1, x_2))^2 w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right)\right)^2 \frac{4}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-8}{0.5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-8}{0.5}\right)^2\right]} dx_1 dx_2 \implies \\ \implies \langle F^2 \rangle &= 0.4646400437 \end{aligned}$$

Άρα, η τυπική απόκλιση υπολογίζεται ως

$$\sigma_F = \sqrt{0.4646400437 - (0.6189613067)^2} = \sqrt{0.0815269445} = 0.2855292358$$

Υπολογίζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση για τάξεις χάους από $k = 2 \dots 5$ και παρουσιάζονται στον πίνακα 6.2. Θα παρουσιαστούν οι συντελεστές για $k = 5, n = 21$:

$$\left. \begin{array}{ll}
 a_0 = 0.598 & a_{11} = 0.002 \\
 a_1 = 0.128 & a_{12} = 0.036 \\
 a_2 = -0.011 & a_{13} = 0.009 \\
 a_3 = -0.056 & a_{14} = 0.033 \\
 a_4 = 0.008 & a_{15} \approx 0 \\
 a_5 = -0.243 & a_{16} = -0.001 \\
 a_6 = -0.009 & a_{17} = 0.002 \\
 a_7 = -0.008 & a_{18} = -0.007 \\
 a_8 = -0.067 & a_{19} = 0.003 \\
 a_9 = -0.007 & a_{20} = 0.003 \\
 a_{10} = 0.003 &
 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_F = 0.5984955048 \\ \sigma_F = 0.2910017950 \end{cases} \quad (6.8)$$

Μέθοδος	μ_F	Σφάλμα μ_F (%)	σ_F	Σφάλμα σ_F (%)
Αναλυτική	0.619	—	0.286	—
DDPCE ($k = 2, n = 6$)	0.580	6.25	0.363	27.30
DDPCE ($k = 3, n = 10$)	0.592	4.44	0.305	6.96
DDPCE ($k = 4, n = 15$)	0.598	3.34	0.292	2.20
DDPCE ($k = 5, n = 21$)	0.598	3.31	0.291	1.92
MC (1000)	0.623	0.57	0.280	1.78
MC (10000)	0.620	0.17	0.285	0.25
MC (50000)	0.620	0.14	0.285	0.22

Πίνακας 6.2: Εφαρμογή 6.1.2. Συγκριτική παρουσίαση αποτελεσμάτων μεταξύ της μεθόδου DDPCE για πολλές διαφορετικές τάξεις χάους σε σχέση με την αναλυτική λύση και τη μέθοδο Monte Carlo.

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του πίνακα 6.2 προκύπτουν οι παρακάτω εκτιμήσεις:

- Το σφάλμα για τιμές τάξης χάους για $k \geq 4$ είναι μικρότερο του 4% για την μέση τιμή και για την τυπική απόκλιση. Το σφάλμα παρότι είναι σχετικά μεγαλύτερο από τις προηγούμενες θεωρείται ότι είναι ικανοποιητικό και αποδεκτό.
- Λόγω της φύσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων οι συντελεστές που υπολογίζονται προκύπτουν με θετικές και αρνητικές τιμές. Για αυτό και ήταν αναγκαία η μελέτη με μεγάλη τάξη χάους ($k = 5, n = 21$) για την προσέγγιση της συνάρτησης.

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογή της μεθόδου **DDPCE** σε ροή γύρω από αεροτομή

7.1 Εισαγωγικά σχόλια

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου **DDPCE** σε ένα πρόβλημα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής. Συγκεκριμένα θεωρείται ότι η ροή γύρω από μια αεροτομή δέχεται ως αβέβαιες μεταβλητές (x) την ταχύτητα της ροής U_∞ και την γωνία πρόσπτωσης α_∞ . Οι υπόλοιπες μεταβλητές περιβάλλοντος θεωρούνται σταθερές. Οι εξισώσεις ροής που περιγράφουν το πρόβλημα είναι εκείνες του συμπιεστού ρευστού. Επειδή γίνεται η υπόθεση ατρίβους ροής χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Euler. Η επίλυση της ροής πραγματοποιείται για τη μεμονωμένη αεροτομή NACA4415. Το πλέγμα που φαίνεται στο σχήμα 7.1 είναι μη δομημένο και αποτελείται από 6.512 κόμβους και 12.773 τριγωνικά στοιχεία. Σκοπός είναι να υπολογιστεί η τιμή της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της δύναμης άνωσης L και της οπισθέλκουσας D .

7.2 Υπολογισμός μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης L και D

Εισάγονται ως δεδομένα $N_s = 10.000$ δείγματα, δηλαδή για κάθε αβέβαιη μεταβλητή έγιναν 10.000 κλήσεις υπορουτίνας, άρα συνολικά 20.000 κλήσεις, για τη δημιουργία των δειγμάτων. Επιλέγεται τάξη χάους $k = 2$. Επειδή οι αβέβαιες μεταβλητές είναι $T = 2$ υπολογίζεται με βάση τη σχέση (2.28) ότι $n = 6$. Έτσι πρέπει να υπολογιστούν

6 του PCE και αντίστοιχα να γίνουν 6 κλήσεις του λογισμικού επίλυσης της ροής για τον υπολογισμό των L και D . Οι παραπάνω αβέβαιες μεταβλητές, a_∞ και U_∞ , για λόγους επαλήθευσης αποτελεσμάτων, ακολουθούν κανονική κατανομή με

$$a_\infty \sim \mathcal{N}(2, 0.15) \quad U_\infty \sim \mathcal{N}(240, 3)$$

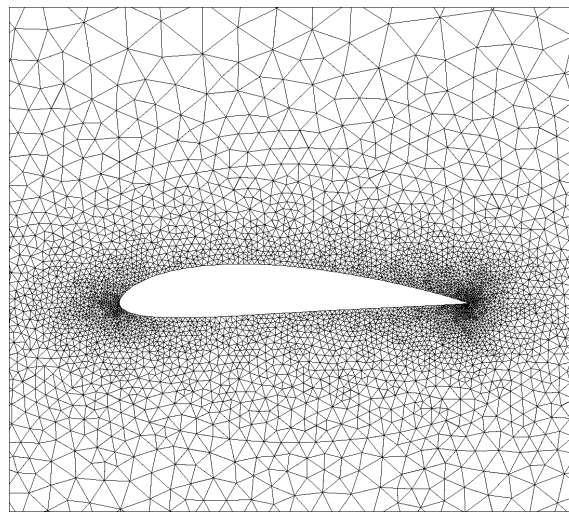
Υπολογίζονται με χρήση του κλασικού PCE αλλά και του DDPCE η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των L , D . Στον πίνακα 7.2 παρουσιάζονται συγκριτικά τα σχετικά αποτελέσματα. Το σφάλμα της μεθόδου DDPCE υπολογίζεται σε σχέση με το αποτέλεσμα της μεθόδου του κλασικού PCE. Ο λόγος που συγκρίνεται με το κλασικό PCE είναι ότι οι αβέβαιες μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή οπότε χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα ορθογώνια πολυώνυμα *Hermite* (πίνακας 2.1) για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Το υπολογιστικό κόστος για τη μέθοδο του κλασικού PCE είναι όσοι και οι απαραίτητοι Gauss κόμβοι, δηλαδή $n_g = 9$ κλήσεις του λογισμικού επίλυσης της ροής και υπολογισμού των L και D , ενώ το αντίστοιχο κόστος για τη μέθοδο DDPCE είναι $n = 6$ υπολογίζοντας επιπλέον την ανάγκη δημιουργία και αντιστροφής του μητρώου R και υπολογισμού των collocation points δηλαδή των ιδιοτιμών του πίνακα J όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3. Τα collocation points παρουσιάζονται στον πίνακα 7.1 και τα πεδία του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή με συνθήκες ροής για κάθε collocation point στα σχήματα 7.2,7.3,7.4,7.5,7.6 και 7.7. Η κλίμακα μεγεθών του αριθμού Mach που παρουσιάζονται στο σχήμα 7.7 ισχύει και για τα υπόλοιπα σχήματα.

collocation point	a_∞ (°)	U_∞ ($\frac{m}{s}$)
0	1.7583	239.9569
1	2.0046	239.9569
2	1.7583	244.8657
3	2.2548	239.9569
4	2.0046	244.8657
5	1.7583	235.0188

Πίνακας 7.1: Τα $n = 6$ collocation points που υπολογίστηκαν από τη μέθοδο DDPCE.

Μέθοδος	L				D			
	μ_L	Σφάλμα μ_L (%)	σ_L	Σφάλμα σ_L (%)	μ_D	Σφάλμα μ_D (%)	σ_D	Σφάλμα σ_D (%)
PCE ($k = 2, n = 6$)	340.5558611	–	9.376793587	–	20.97180638	–	3.088054385	–
DDPCE ($k = 2, n = 6$)	340.4006235	0.045	8.93722029	4.687	20.95298354	0.089	2.979821004	3.504

Πίνακας 7.2: Παρουσίαση αποτελεσμάτων υπολογισμού για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του L και D .

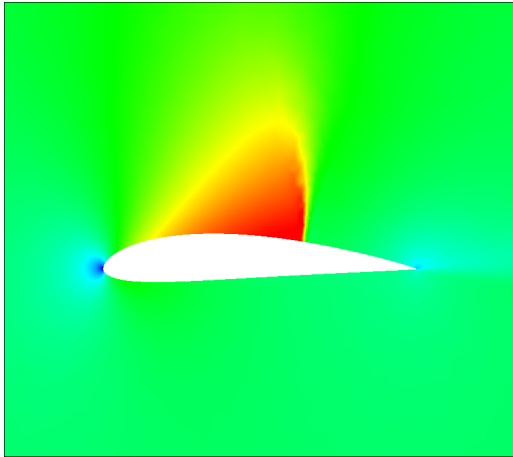


Σχήμα 7.1: Πλέγμα γύρω από την αεροτομή NACA4415.

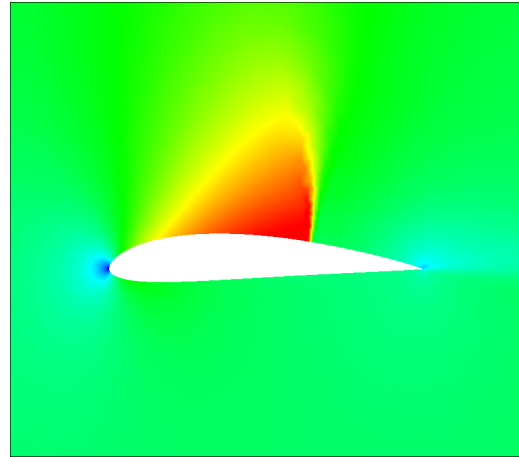
Συμπερασματικά, για τάξη χάους $k = 2$:

- Για τη μέση τιμή το σφάλμα είναι για το L είναι μικρότερο του 0.05% και για το D είναι μικρότερο του 0.09%.
- Για τη τυπική απόκλιση το σφάλμα για το L είναι μικρότερο του 5% ενώ για το D μικρότερο του 4%.
- Η μέθοδος DDPCE προσεγγίζει ικανοποιητικά τα αποτελέσματα του κλασικού PCE που θεωρούνται ως σημείο αναφοράς. Και από αυτή την εφαρμογή φαίνεται ότι η μέθοδος DDPCE είναι αποτελεσματική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μηχανικούς σε πραγματικά προβλήματα παίρνοντας υπόψη βεβαίως ότι το σφάλμα για τη μέση τιμή εμφανίζεται μικρότερο σε σχέση με το αντίστοιχο της τυπικής απόκλισης.
- Η παραπάνω εφαρμογή έδειξε ότι πέρα από τα αριθμητικά παραδείγματα που παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια (4) και (6) η μέθοδος DDPCE είναι αποτελεσματική

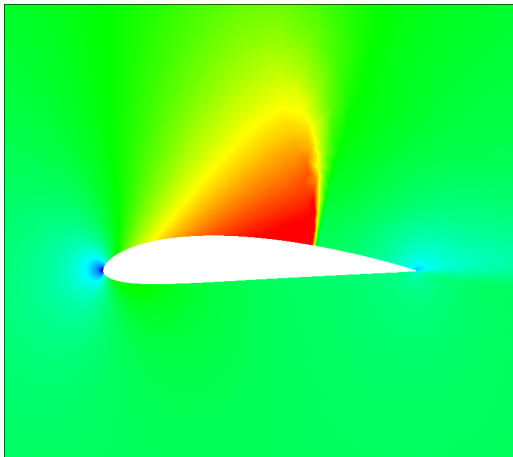
και σε πραγματικά προβλήματα όπου δεν είναι διαθέσιμη η αναλυτική λύση. Επίσης η χρήση της μεθόδου Monte Carlo είναι ασύμφορη για τέτοιες εφαρμογές καθώς το υπολογιστικό κόστος είναι πολύ μεγάλο.



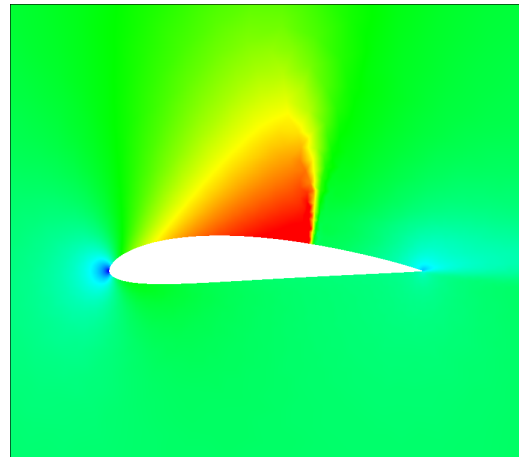
Σχήμα 7.2: *collocation point 0*



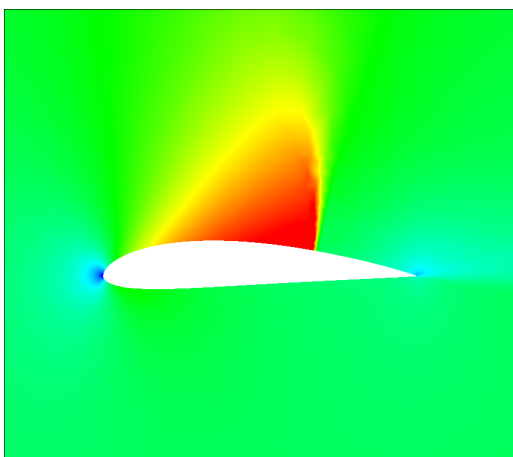
Σχήμα 7.3: *collocation point 1*



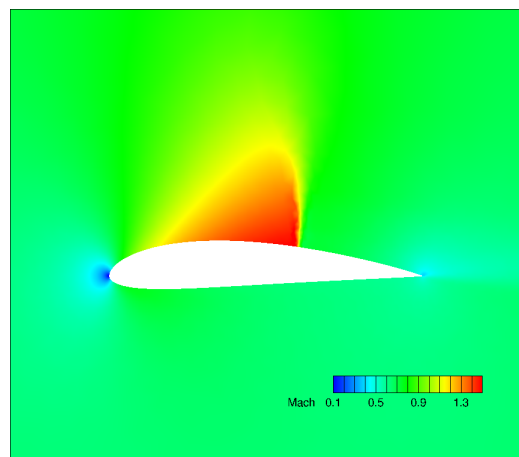
Σχήμα 7.4: *collocation point 2*



Σχήμα 7.5: *collocation point 3*



Σχήμα 7.6: *collocation point 4*



Σχήμα 7.7: *collocation point 5*

Κεφάλαιο 8

Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

8.1 Σύνοψη Συμπερασμάτων

Στη μεταπτυχιακή εργασία έγινε μια σύντομη παρουσίαση της κλασικής μεθόδου PCE ως μια μέθοδο ποσοτικοποίησης αβεβαιοτήτων. Κύρια συμβολή αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας ήταν η παρουσίαση της θεωρίας του DDPCE για μια και πολλές αβέβαιες μεταβλητές. Η μέθοδος DDPCE δίνει τη δυνατότητα να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της F όταν είναι άγνωστο τι κατανομή ακολουθούν οι αβέβαιες μεταβλητές. Στο κείμενο της μεταπτυχιακής εργασίας παρουσιάζεται η θεωρία της μεθόδου DDPCE και τα αντίστοιχα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν, τόσο για την περίπτωση μιας όσο και για την περίπτωση των πολλών αβέβαιων μεταβλητών.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν αριθμητικά παραδείγματα που βοηθούν τον αναγνώστη στην κατανόηση της μεθόδου. Σε αυτά τα παραδείγματα χρησιμοποιήθηκε ως μέτρο σύγκρισης για τον υπολογισμό του σφάλματος η αναλυτική λύση των συναρτήσεων και πραγματοποιήθηκε σύγκριση με το αντίστοιχο σφάλμα της Monte Carlo σε σχέση με την αναλυτική. Επίσης, έγινε εφαρμογή της μεθόδου DDPCE σε ένα πραγματικό πρόβλημα για τον υπολογισμό της μέση τιμής και της τυπικής απόκλισης των L , D .

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να εξαχθούν τα εξής συμπεράσματα:

- Η μέθοδος DDPCE είναι αποτελεσματική μέθοδος στην περίπτωση που είναι άγνωστη η κατανομή που ακολουθούν οι αβέβαιες μεταβλητές. Το παραπάνω στοιχείο επαληθεύτηκε με τις διάφορες αριθμητικές εφαρμογές στις οποίες ήταν γνωστή η κατανομή (κανονική) που ακολουθούσαν οι αβέβαιες μεταβλητές όμως, στη μέθοδο DDPCE, αυτό αγνοήθηκε.
- Η κύρια εφαρμογή σε ένα πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής που είχε ως σκο-

πό τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της άνωσης και της οπισθόκλισης μιας μεμονωμένης αεροτομής σε ατριβή ροή και θεωρούνταν αβέβαιες μεταβλητές η επ' άπειρο γωνία και ταχύτητα ροής (οι οποίες ακολουθούσαν κανονική κατανομή τους αλλά δεν χρησιμοποιήθηκε στη DDPCE) όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 7 έδειξε ότι η DDPCE μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πραγματικά προβλήματα.

- Όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου DDPCE είναι οι $k+1$ κλήσεις της F , δηλαδή ανάλογο της τάξης χάους, στην περίπτωση της μιας αβέβαιης μεταβλητής. Στην περίπτωση ύπαρξης πολλών αβέβαιων μεταβλητών το κόστος της μεθόδου DDPCE είναι οι n , που υπολογίζεται από την σχέση (2.28), κλήσεις της F στην περίπτωση πολλών αβέβαιων μεταβλητών, παίρνοντας υπόψη επιπλέον την δημιουργία και αντιστροφή του μητρώου R αλλά και τον υπολογισμό των collocation points που όμως θεωρούνται απλές υπολογιστικές πράξεις.

8.2 Προτάσεις για μελλοντική μελέτη

Για μελλοντική μελέτη προτείνεται:

- Η μέθοδος DDPCE για λόγους επαλήθευσης συγκρίθηκε με τη μέθοδο του κλασικού PCE στο κεφάλαιο (7) και με τις αβέβαιες να ακολουθούν την ίδια κατανομή (κανονική). Επομένως τα σχετικά σφάλματα που υπολογίστηκαν και αναφέρονται στο κείμενο αφορούν την παραπάνω περίπτωση. Προτείνεται να δοκιμαστεί και στην περίπτωση που η κάθε αβέβαιη μεταβλητή ακολουθεί διαφορετική κατανομή. Θα δοθεί έτσι μια πληρέστερη εικόνα για την ακρίβεια της μεθόδου.
- Στο πραγματικό πρόβλημα στο κεφάλαιο (7) εξετάστηκε η περίπτωση όπου υπάρχουν 2 αβέβαιες μεταβλητές. Προτείνεται να εξεταστεί η περίπτωση όπου οι αβέβαιες μεταβλητές είναι εκατοντάδες αν και, εκ των πραγμάτων, μια τέτοια περίπτωση συνεπάγεται πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος.
- Θεωρήθηκε ότι οι αβέβαιες μεταβλητές είναι στοχαστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος DDPCE στην περίπτωση που οι αβέβαιες μεταβλητές εξαρτώνται στοχαστικά.
- Να συγκριθεί με άλλες μεθόδους UQ όπως η μέθοδος των στατιστικών ροπών που, επίσης, ανέπτυξε η ερευνητική ομάδα του ΕΜΠ.
- Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος DDPCE με είσοδο πειραματικά δεδομένα για τις αβέβαιες μεταβλητές.
- Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος DDPCE σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης.

Παράρτημα Α΄

Υπολογισμός συντελεστών ορθοκανονικών πολυωνύμων με χρήση DDPCE

Α΄.1 Υπολογισμός για $T = 1$

Σε αυτήν την ενότητα θα επιδειχθεί ότι οι συντελεστές των πολυωνύμων που προκύπτουν από τη μέθοδο DDPCE προσεγγίζουν τους συντελεστές των πολυωνύμων των βασικών οικογενειών ορθοκανονικών πολυωνύμων (Hermite, Legendre, Laguerre) για την περίπτωση μιας αβέβαιης μεταβλητής x .

Α΄.1.1 Πολυώνυμα Hermite - Κανονική κατανομή

Θα δειχθεί ότι τα πολυώνυμα που προκύπτουν από τη μέθοδο DDPCE προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τους συντελεστές των πολυωνύμων *Hermite* για την περίπτωση της κανονικής κατανομής με πεδίο ορισμού το $[-\infty, \infty]$ και συνάρτηση βάρους $w^{(He)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Υπενθυμίζεται ότι τα πρώτα 4 κανονικοποιημένα πιθανοτικά πολυώνυμα *Hermite* [28] είναι τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
He_0(x) &= 1 \\
He_1(x) &= x \\
He_2(x) &= 0.707106781x^2 - 0.707106781 \\
He_3(x) &= 0.408248290x^3 - 1.224744871x
\end{aligned}$$

Για λόγους καλύτερης απεικόνισης και σύγκρισης οι παραπάνω συντελεστές εισάγονται στον πίνακα Α'.1. Με βάση τη μέθοδο DDPCE που παρουσιάστηκε παραπάνω υπολογίζονται τα αντίστοιχα πολυώνυμα P για διάφορους αριθμούς δειγμάτων. Τα δείγματα αυτά δημιουργούνται από γεννήτρια τυχαίων αριθμών που παράγει ομοιόμορφη κατανομή και έπειτα χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Box-Muller [8].

	$He_0(x)$	$He_1(x)$	$He_2(x)$	$He_3(x)$
x^0	1	0	-0.707106781	0
x^1	0	1	0	-1.224744871
x^2	0	0	0.707106781	0
x^3	0	0	0	0.408248290

Πίνακας Α'.1: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολυωνύμων *Hermite*.

Επιλέγονται οι αριθμοί δειγμάτων $N_s = 10000, 50000, 100000$ και στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στους υπολογισμούς των συντελεστών

$N_s = 10000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	-0.011818	-0.742496	0.001584
x^1	0	1.014240	-0.015076	-1.416190
x^2	0	0	0.763867	-0.000906
x^3	0	0	0	0.517736

Πίνακας Α'.2: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολυωνύμων *Hermite* που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 10000$.

$N_s = 50000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	0.000787	-0.742300	0.006315
x^1	0	1.010963	-0.005731	-1.408126
x^2	0	0	0.758660	-0.011039
x^3	0	0	0	0.511291

Πίνακας Α'.3: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολωνύμων *Hermite* που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο *DDPCE* για $N_s = 50000$.

$N_s = 100000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	0.001084	-0.741938	0.005753
x^1	0	1.011957	-0.003569	-1.409677
x^2	0	0	0.759781	-0.009296
x^3	0	0	0	0.512531

Πίνακας Α'.4: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολωνύμων *Hermite* που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο *DDPCE* για $N_s = 100000$.

Α'.1.2 Πολυώνυμα Legendre - Ομοιόμορφη κατανομή

Η μέθοδος επίδειξης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα Α'.1.1 θα ακολουθηθεί και σε αυτήν. Η διαφορά είναι ότι η αβέβαιη μεταβλητή σε αυτή την περίπτωση θα ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή. Τα πολυώνυμα με τα οποία θα συγκριθεί η μέθοδος *DDPCE* είναι τα επωνομαζόμενα *Legendre*[28] με πεδίο ορισμού το $[-1, +1]$ και συνάρτηση βάρους $w(x) = 1$.

Τα πρώτα 4 κανονικοποιημένα πολυώνυμα *Legendre* είναι τα παρακάτω:

$$\mathcal{L}_0(x) = 1$$

$$\mathcal{L}_1(x) = 1.732050808x$$

$$\mathcal{L}_2(x) = 3.354101966x^2 - 1.118033989$$

$$\mathcal{L}_3(x) = 6.614378278x^3 - 3.968626967x$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως,

	$\mathcal{L}_0(x)$	$\mathcal{L}_1(x)$	$\mathcal{L}_2(x)$	$\mathcal{L}_3(x)$
x^0	1	0	-1.118033989	0
x^1	0	1.732050808	0	-3.968626967
x^2	0	0	3.354101966	0
x^3	0	0	0	6.614378278

Πίνακας Α'.5: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολωνύμων Legendre.

$N_s = 10000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	-0.006656	-1.108161	-0.003193
x^1	0	1.733071	-0.009805	-3.981090
x^2	0	0	3.328367	0.010786
x^3	0	0	0	6.590298

Πίνακας Α'.6: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολωνύμων Legendre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 10000$.

$N_s = 50000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	0.001462	-1.121042	0.000310
x^1	0	1.728464	-0.007861	-3.967830
x^2	0	0	3.349182	-0.020864
x^3	0	0	0	6.601353

Πίνακας Α'.7: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολωνύμων Legendre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 50000$.

$N_s = 100000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	0.003009	-1.119523	-0.004698
x^1	0	1.732241	0.006266	-3.963858
x^2	0	0	3.359310	0.017269
x^3	0	0	0	6.615722

Πίνακας Α'.8: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολυωνύμων Legendre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 100000$.

Α'.1.3 Πολυώνυμα Laguerre - Εκθετική κατανομή

Το πεδίο ορισμού των πολυωνύμων laguerre είναι το $[0, \infty]$ και η συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x}$. Οι συντελεστές των πρώτων 4 κανονικοποιημένων πολυωνύμων Laguerre παρουσιάζονται στον πίνακα Α'.9:

	$L_0(x)$	$L_1(x)$	$L_2(x)$	$L_3(x)$
x^0	1	1	1	1
x^1	0	-1	-2	-3
x^2	0	0	0.5	1.5
x^3	0	0	0	-0.159999996

Πίνακας Α'.9: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολυωνύμων Laguerre.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως,

$N_s = 10000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	-1.003811	0.996564	-1.073502
x^1	0	0.999424	-1.946456	3.190170
x^2	0	0	0.476845	-1.586047
x^3	0	0	0	0.173159

Πίνακας Α'.10: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολυωνύμων Laguerre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 10000$.

$N_s = 50000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	-1.007915	1.020311	-1.079561
x^1	0	1.004412	-2.048528	3.321500
x^2	0	0	0.518142	-1.719446
x^3	0	0	0	0.199575

Πίνακας Α'.11: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολυωνύμων *Laguerre* που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο *DDPCE* για $N_s = 50000$.

$N_s = 100000$				
	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
x^0	1	-0.996684	0.983636	-0.992488
x^1	0	0.999645	-1.958038	2.917535
x^2	0	0	0.485565	-1.419535
x^3	0	0	0	0.151932

Πίνακας Α'.12: Συντελεστές Ορθοκανονικών πολυωνύμων *Laguerre* που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο *DDPCE* για $N_s = 100000$.

Α'.2 Υπολογισμός για $T > 1$

Όπως και για την περίπτωση της μιας αβέβαιης μεταβλητής θα παρουσιαστεί η ίδια διαδικασία για πάνω από μια μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση των δύο αβέβαιων μεταβλητών ($T=2$) και για τάξη χάους $k = 2$. Υπενθυμίζεται ότι θεωρείται ότι οι αβέβαιες μεταβλητές ακολουθούν ίδια κατανομή. Με βάση τον πίνακα 5.1 θα υπολογιστούν τα πολυώνυμα ψ .

A'.2.1 Πολυδιάστατα Πολυώνυμα Hermite - Κανονική κατανομή

Για τα πολυώνυμα Hermite από τον παρακάτω πολλαπλασιασμό προκύπτουν οι συντελεστές για κάθε πολυώνυμο ψ

$$\psi_0(\vec{x}) = He_0(x_1)He_0(x_2)$$

$$\psi_1(\vec{x}) = He_1(x_1)He_0(x_2)$$

$$\psi_2(\vec{x}) = He_0(x_1)He_1(x_2)$$

$$\psi_3(\vec{x}) = He_2(x_1)He_0(x_2)$$

$$\psi_4(\vec{x}) = He_1(x_1)He_1(x_2)$$

$$\psi_5(\vec{x}) = He_0(x_1)He_2(x_2)$$

Και εισάγονται στο παρακάτω πίνακα.

	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	0	0	-0.70710678	0	-0.70710678
x^1	0	1	1	0	0	0
x^2	0	0	0	0.70710678	1	0.70710678

Πίνακας A'.13: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Hermite.

Οι ίδιοι πολλαπλασιασμοί πραγματοποιούνται με την διαφορά ότι αντί για τα πολυώνυμα Hermite πολλαπλασιάζονται τα πολυώνυμα P που υπολογίστηκαν προηγουμένως A'.1.1 για $N_s = 10000, 50000, 100000$. Δηλαδή:

$$\psi_0(\vec{x}) = P_0(x_1)P_0(x_2)$$

$$\psi_1(\vec{x}) = P_1(x_1)P_0(x_2)$$

$$\psi_2(\vec{x}) = P_0(x_1)P_1(x_2)$$

$$\psi_3(\vec{x}) = P_2(x_1)P_0(x_2)$$

$$\psi_4(\vec{x}) = P_1(x_1)P_1(x_2)$$

$$\psi_5(\vec{x}) = P_0(x_1)P_2(x_2)$$

$N_s = 10000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	-0.011818	-0.011818	-0.742496	0.000140	-0.742496
x^1	0	1.014240	1.014240	-0.015076	0.000144	-0.015076
x^2	0	0	0	0.763867	1.028683	0.763867

Πίνακας Α'.14: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Hermite που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 10000$.

$N_s = 50000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	0.000787	0.000787	-0.742300	0.000001	-0.742300
x^1	0	1.010963	1.010963	-0.005731	0.000001	-0.005731
x^2	0	0	0	0.758660	1.022046	0.758660

Πίνακας Α'.15: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Hermite που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 50000$.

$N_s = 100000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	0.001084	0.001084	-0.741938	0.000001	-0.741938
x^1	0	1.011957	1.011957	-0.003569	0.000001	-0.003569
x^2	0	0	0	0.759781	1.024057	0.759781

Πίνακας Α'.16: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Hermite που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 100000$.

Α'.2.2 Πολυδιάστατα Πολυώνυμα Legendre - Ομοιόμορφη κατανομή

Όμοίως για τα πολυώνυμα Legendre οι συντελεστές εισάγονται στο πίνακα Α'.17.

	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	0	0	-1.118033989	0	-1.118033989
x^1	0	1.732050808	1.732050808	0	0	0
x^2	0	0	0	3.354101966	3	3.354101966

Πίνακας Α'.17: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Legendre.

$N_s = 10000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	-0.006656	-0.006656	-1.108161	0.000044	-1.108161
x^1	0	1.733071	1.733071	-0.009805	0.000133	-0.009805
x^2	0	0	0	3.328367	3.003535	3.328367

Πίνακας Α'.18: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Legendre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 10000$.

$N_s = 50000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	0.001462	0.001462	-1.121042	0.000002	-1.121042
x^1	0	1.728464	1.728464	-0.007861	0.000006	-0.007861
x^2	0	0	0	3.349182	2.987588	3.349182

Πίνακας Α'.19: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Legendre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 50000$.

$N_s = 100000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	0.003009	0.003009	-1.119523	0.000009	-1.119523
x^1	0	1.732241	1.732241	0.006266	0.000027	0.006266
x^2	0	0	0	3.359310	3.000659	3.359310

Πίνακας Α'.20: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Legendre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 100000$.

Α'.2.3 Πολυδιάστατα Πολυώνυμα Laguerre - Εκθετική κατανομή

Ομοίως για τα πολυώνυμα Laguerre Οι συντελεστές εισάγονται στο πίνακα Α'.21.

	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	1	1	1	1	1
x^1	0	-1	-1	-2	1	-2
x^2	0	0	0	0.5	1	0.5

Πίνακας Α'.21: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Laguerre.

$N_s = 10000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	-1.003811	-1.003811	0.996564	1.007637	0.996564
x^1	0	0.999424	0.999424	-1.946456	1.006476	-1.946456
x^2	0	0	0	0.476845	0.998848	0.476845

Πίνακας Α'.22: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Laguerre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 10000$.

$N_s = 50000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	-1.007915	-1.007915	1.020311	1.015893	1.020311
x^1	0	1.004412	1.004412	-2.048528	1.024877	-2.048528
x^2	0	0	0	0.518142	1.008843	0.518142

Πίνακας Α'.23: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων Laguerre που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο DDPCE για $N_s = 50000$.

$N_s = 100000$						
	$\psi_0(\vec{x})$	$\psi_1(\vec{x})$	$\psi_2(\vec{x})$	$\psi_3(\vec{x})$	$\psi_4(\vec{x})$	$\psi_5(\vec{x})$
x^0	1	-0.996684	-0.996684	0.983636	0.993379	0.983636
x^1	0	0.999645	0.999645	-1.958038	0.992674	-1.958038
x^2	0	0	0	0.485565	0.999290	0.485565

Πίνακας Α'.24: Συντελεστές Πολυδιάστατων Ορθοκανονικών πολυωνύμων *Laguerre* που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο *DDPCE* για $N_s = 100000$.

Βιβλιογραφία

- [1] Ahlfeld R, Belkouchi B, Montomoli F.: SAMBA: Sparse Approximation of Moment-Based Arbitrary Polynomial Chaos. *Journal of Computational Physics* (2016)
- [2] Anastasios K. Papageorgiou, Kimon B. Fragkos¹, Evangelos M. Papoutsis-Kiachagias and Kyriakos C. Giannakoglou: Uncertainty quantification and robust design for aerodynamic applications, using continuous adjoint methods. 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6) 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7) (2018)
- [3] Anderson, I.: *Combinatorics of Finite Sets*. Clarendon Press (1987)
- [4] Andrews, L. C.: *Special Functions of Mathematics for Engineers*. SPIE Press (1992)
- [5] Ashlock, D.: *Evolutionary Computation for Modeling and Optimization*. Springer (2006)
- [6] Asmussen, S. and Glynn, P. W.: *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*. Springer (2007)
- [7] Blizard, W. D.: Multiset theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **30**(1), 36–66 (1989)
- [8] Box, G. E. P. and Muller, M. E.: A note on the generation of random normal deviates. *Annals of Mathematical Statistics* **29**(2), 610–611 (1958)
- [9] Bäck, T.: *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice: Evolution Strategies, Evolutionary Programming, Genetic Algorithms*. Oxford University Press (1996)
- [10] Dodson, M. and Parks, G.T.: Robust aerodynamic Design Optimization Using Polynomial-Chaos. *Journal of Aircraft* **46**(2), 635–646 (2009)
- [11] Eldred, M. S. and Burkardt, J.: Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification. American Institute of Aeronautics and Astronautics (2009)

- [12] E.M. Papoutsis-Kiachagias, V.G. Asouti and K.C. Giannakoglou: Assessment of variants of the method of moments and polynomial chaos approaches to aerodynamic uncertainty quantification. *ECCOMAS Proceedia* (2021)
- [13] G.H. Golub, J.H. Welsch: Calculation of Gauss quadrature rules, *Math. Comput.* 221–23 (1968)
- [14] Golub, G. H. and Welsch, J. H.: Calculation of Gauss Quadrature Rules. *Mathematics of Computation* **23**, 221–230 (1969)
- [15] I. P. Mysovskikh: I. P. Mysovskikh, On the construction of cubature formulas with the smallest number of nodes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1968, Volume 178, Number 6, 1252–1254
- [16] J.M. Varah: Positive definite Hankel matrices of minimal condition. Elsevier Science Inc (2003)
- [17] Martinelli, M. and Duvigneau, D.I.: Comparison of second-order derivatives and metamodel-based Monte-Carlo approaches to estimate statistics for robust design of a transonic wing. 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (2008)
- [18] Poles, S. and Lovinson, A.: A Polynomial Chaos Approach to Robust Multiobjective Optimization. *Hybrid and Robust Approaches to Multiobjective Optimization* (2009)
- [19] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P.: *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Programming*, Second Edition. Press Syndicate of the University of Cambridge (1992)
- [20] S. Al-Homidan and M. Alshahrani: Positive definite hankel matrices using cholesky factorization
- [21] S. Oladyshkin a, F.P.J. de Barros b, W. Nowaka: Global sensitivity analysis: A flexible and efficient framework with an example from stochastic hydrogeology. Elsevier Ltd (2011)
- [22] Shankaran, Sriram and Jameson, A.: Robust Optimal Control using Polynomial Chaos and Adjoints for Systems with Uncertain Inputs. 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (2011)
- [23] Sunil K. Chebolu and Keir Lockridge: *Gaussian Binomial Coefficients in Group Theory, Field Theory, and Topology*. The American Mathematical Monthly (2021)
- [24] Wiener, W.: The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics* **60**(4), 897–926 (1938)
- [25] Xiu, D.: fast Numerical Methods for Stochastic Computations. A Review. *Communications in Computational Physics* **5**(2–4), 242–272644 (2009)

- [26] Xiu, D. and Karniadakis, G. E.: The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing* **24**(2), 619–644 (2002)
- [27] Πάμπλης Γεώργιος: Υλοποίηση Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους στον Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό – Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους υπό Στοχαστικές Εισόδους, 2015
- [28] Γιαννάκογλου, Κ.: Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς. Ε.Μ.Π. (2003)
- [29] Γιαννάκογλου, Κ.: Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική. Ε.Μ.Π. (2006)
- [30] Γιαννάκογλου, Κ.: Μέθοδοι στοχαστικής και αιτιοκρατικής Βελτιστοποίησης και εφαρμογές. Ε.Μ.Π. (2012)