



Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο

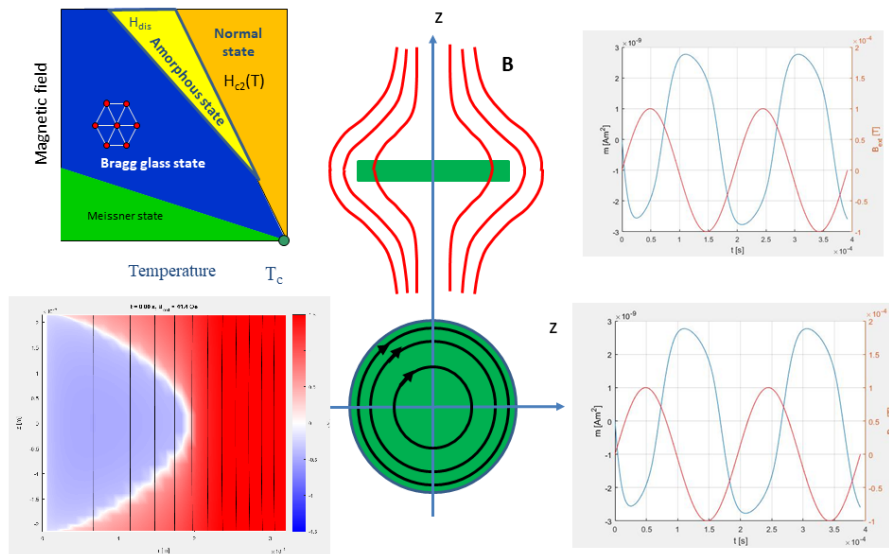


ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών  
«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

# Αριθμητικός υπολογισμός της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας υπεραγωγών 2ου είδους σε δοκίμια σχήματος δίσκου



Κωνσταντία Καλαντζή Φυσικός

Επιβλέπων: Μιχάλης Πίσσας, INN ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος

Εξεταστική επιτροπή  
Μιχάλης Πίσσας, Κώστας Κουσουρής, Γιάννης Σανάκης  
Αθήνα, Ιούνιος, 2024



# Περιεχόμενα

<b>1 Υπεραγωγιμότητα</b>	<b>11</b>
1.1 Ιστορικά-Εισαγωγικά στοιχεία	11
1.2 Υπεραγωγοί πρώτου είδους	14
1.2.1 Εισαγωγή	14
1.2.2 Φαινόμενο Meinsner	14
1.2.3 Κρίσιμο μαγνητικό πεδίο υπεραγωγού πρώτου είδους	15
1.2.4 Μαγνητικές ποσότητες Υπεραγωγών πρώτου είδους	16
1.2.5 Θεωρία London για την υπεραγωγιμότητα	18
1.3 Υπεραγωγοί δευτέρου είδους	22
1.3.1 Γενικά Χαρακτηριστικά	22
1.3.2 Θεωρία Ginzburg-Landau	23
1.3.3 Οι εξισώσεις Ginzburg-Landau	25
1.3.4 Χαρακτηριστικά μήκη στους υπεραγωγούς	29
1.3.5 Συμμετρία βαθμίδας και η GL θεωρία	31
1.3.6 Φλαξόνια	32
<b>2 Υπεραγωγοί με ατέλειες</b>	<b>37</b>
2.1 Κρίσιμο ρεύμα στους υπεραγωγούς δευτέρου είδους	37
2.2 Φαινομενολογική συμπεριφορά υπεραγωγών δευτέρου είδους	38
2.2.1 Το μοντέλο Bardeen-Stephen	41
2.2.2 Το κρίσιμο μοντέλο του Bean	42
2.3 Μαγνητική ροπή και εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα	44
2.3.1 Εισαγωγή	44
2.3.2 Εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα	45
<b>3 Ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά υπεραγωγίμου κυλίνδρου εντός εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου</b>	<b>49</b>
3.1 Περιγραφή του προτύπου	49
3.1.1 Πρότυπο του Bean για την κρίσιμη κατάσταση	50
3.2 Εξισώσεις κίνησης για την πυκνότητα ρεύματος	50
<b>4 Αλγόριθμος υπολογισμού του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος</b>	<b>57</b>
<b>5 Πειραματικές μετρήσεις</b>	<b>69</b>
5.1 Ανάπτυξη των κρυστάλλων $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$	69
5.2 Διάταξη μέτρησης εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας	71
5.3 Μετρήσεις εναλλασσόμενης μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας	75
5.4 Διάγραμμα φάσεων της ύλης φλαξονίων	76
5.4.1 Φαινόμενο Κορυφής	76

<b>6</b>	<b>Αριθμητικοί υπολογισμοί και σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις</b>	<b>79</b>
6.1	Γενικές παρατηρήσεις . . . . .	79
6.2	Επιλογή της καμπύλης του κρίσιμου ρεύματος . . . . .	79
6.3	Κατανομές του μαγνητικού πεδίου και της πυκνότητας ρεύματος στο εσωτερικό του υπεραγωγού με $n = 7$ και $T = 20 \text{ K}$ , $T = 35 \text{ K}$ . . . . .	81
6.4	Υπολογισμός της μιγαδικής εναλλασσόμενης επιδεκτικότητας και σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις . . . . .	86
6.4.1	Η περίπτωση $n = 4$ . . . . .	86
6.4.2	Η περίπτωση $n = 11$ . . . . .	92
6.5	Συμπεράσματα . . . . .	96



## Σκοπός της Διπλωματικής

Οι μετρήσεις εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας σε υπεραγωγούς μπορούν να δώσουν σημαντικές πληροφορίες αναφορικά με την δυναμική και την εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας συμπεριφοράς των φλαξονίων (flux lines ή Abrikosov flux lines). Η εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας συμπεριφορά των φλαξονίων οφείλεται στην δέσμευση τους σε ατέλειες του υπεραγωγού, μεγέθους όσο το μήκος συσχέτισης Ginzburg-Landau. Ένας υπεραγωγός παρουσία ατελειών μπορεί να περιγραφεί φαινομενολογικά σαν ένας μη γραμμικός αγωγός.

Ο πρώτος στόχος της διπλωματικής ήταν δημιουργία κώδικά σε περιβάλλον matlab για τον υπολογισμό της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας υπεραγωγών δευτέρου είδους, με ισχυρή δέσμευση φλαξονίων στις ατέλειες του υπεραγωγού, σχήματος κυλίνδρου.

Η ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά των φλαξονίων του υπεραγωγού περιγράφηκε με μία σχέση δύναμης μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου και την πυκνότητας ρεύματος (μη γραμμικός αγωγός). Αυτή η σχέση μπορεί να προέλθει από τη θερμική αποδέσμευση των φλαξονίων από τα κέντρα καρφώματος, θεωρώντας λογαριθμική μεταβολή του δυναμικού δέσμευσης των φλαξονίων με την πυκνότητα ρεύματος.

Ο υπολογισμός της πυκνότητας ρεύματος που επάγεται στον υπεραγωγού λόγω του εξωτερικά επιβαλλόμενου εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου έγινε χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον Ernst Helmut Brandt[1] και την υλοποίηση της σε κώδικά matlab από τους Simon Otten και and Francesco Grilli [2].

Ο δεύτερος στόχος της διπλωματικής ήταν η εξαγωγή της πυκνότητας κρίσιμου ρεύματος του υπεραγωγού  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  (για  $H_{dc} || H_{ac} || c$  - axis), έτσι ώστε να υπάρχει ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ θεωρητικών υπολογισμών και πειραματικών μετρήσεων της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας.



## Περίληψη

Οι μετρήσεις εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας σε υπεραγωγούς μπορούν να δώσουν σημαντικές πληροφορίες αναφορικά με την δυναμική και την εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας συμπεριφοράς των φλαξονίων (flux lines ή Abrikosov flux lines).

Η εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας συμπεριφορά των φλαξονίων οφείλεται στην δέσμευση τους σε ατέλειες του υπεραγωγού, μεγέθους όσο το μήκος συσχέτισης Ginzburg-Landau. Ένας υπεραγωγός παρουσία ατελειών μπορεί να περιγραφεί φαινομενολογικά σαν ένας μη γραμμικός αγωγός.

Η μη γραμμικότητα της σχέσης ηλεκτρικού πεδίου υπερρεύματος (ρεύμα από ζεύγη Cooper), στην οιονεί στατική προσέγγιση (αγνοούμε το ρεύμα μετατόπισης από τις εξισώσεις Maxwell), οδηγεί σε μία μη γραμμική εξίσωση διάχυσης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του υπεραγωγού, όταν υπεραγωγός βρεθεί εντός μεταβαλλόμενου εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Η αριθμητική επίλυση του ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος διευκολύνεται σημαντικά με τον αριθμητικό υπολογισμό (μη ισαπέχουσα διαμέριση του χωρίου ολοκλήρωσης) της συνάρτησης Green της ολοκληρωτικής σχέσης του νόμου του Ampere για τα συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υπεραγωγού.

Από την επίλυση αυτής εξίσωσης μπορεί να υπολογιστεί η χρονική μεταβολή της πυκνότητας υπερρεύματος που ρέει στο εσωτερικό του υπεραγωγού και κατά συνέπεια η μαγνητική ροπή του υπεραγωγού. Από τη μαγνητική ροπή μπορεί να υπολογιστεί η μιγαδική μαγνητική επιδεκτικότητα.

Ο σκοπός της διπλωματικής είναι ο υπολογισμός της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας υπεραγωγού δευτέρου είδους με μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου, πυκνότητας ρεύματος, σχήματος κυλινδρικού δίσκου.

Οι θεωρητικοί υπολογισμοί συγκρίθηκαν με τις πειραματικές μετρήσεις της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας που λάβαμε από ένα μονοκρυστάλλο του υπεραγωγού  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$ , χρησιμοποιώντας το σύστημα μαγνητικών μετρήσεων κάτω από εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο (ACMS option) της μετρητικής συσκευής φυσικών ιδιοτήτων της Quantum Design (PPMS) που βρίσκεται στο Ινστιτούτο Νανοεπιστήμης και Νανοτεχνολογίας του ΕΚΕΦΕ "Δημόκριτος".



## Abstract

AC magnetic susceptibility measurements in type II superconductors can provide important information regarding the phase diagram and dynamic behavior of flux lines (Abrikosov flux lines). The non-thermodynamic equilibrium behavior of these flux lines is due to their pinning to imperfections within the superconductor, with sizes of the order of Ginzburg-Landau coherence length.

A type II superconductor with pinning can be phenomenologically described as a non-linear conductor. In the quasi-static approximation, the non-linearity of the supercurrent (Cooper pair current) and electric field relationship (disregarding the displacement current from Maxwell's equations) leads to a non-linear diffusion equation for the magnetic field inside the superconductor.

The numerical solution of this electromagnetic problem is greatly facilitated by the numerical calculation (using non-equidistant partitioning of the integration space) of the Green function for the integral relation of Ampere's law, tailored to the specific geometrical characteristics of the superconductor. From the solution of this equation, the time variation of the supercurrent density flowing inside the superconductor and, consequently, the magnetic moment of the superconductor can be calculated. From the magnetic moment, the complex magnetic susceptibility can be derived.

This thesis aims to estimate the complex magnetic susceptibility of a type II superconductor with a non-linear relationship between the electric field and current density, assuming a cylindrical disk shape. The theoretical calculations were compared with the experimental measurements of the complex magnetic susceptibility obtained from a single crystal of the superconductor  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$ , using the magnetic measurement system under an alternating magnetic field (ACMS option) of the Quantum Design Physical Properties Measurement System (PPMS). By trial and error, we estimated the critical current curve, resulting in an acceptable agreement between the experimental and theoretical AC susceptibility data.

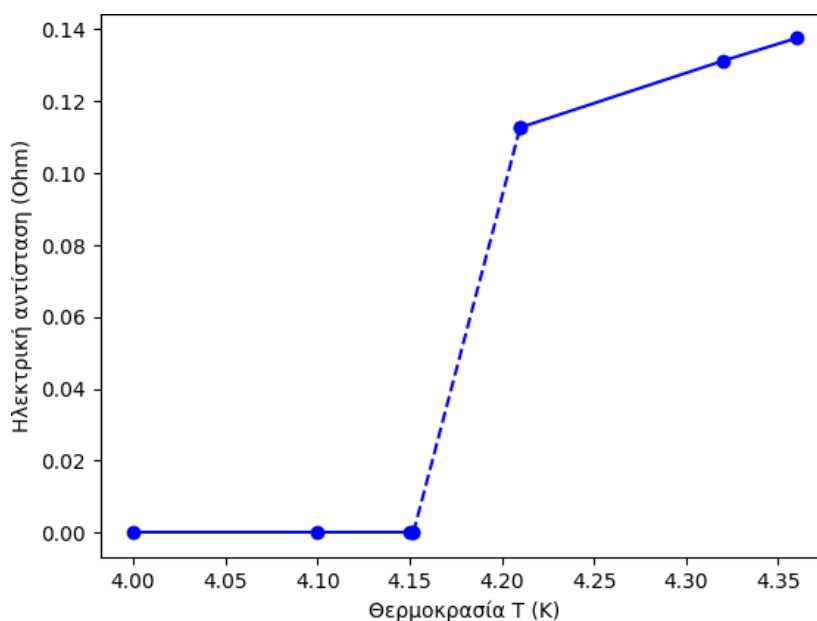


# Κεφάλαιο 1

## Υπεραγωγιμότητα

### 1.1 Ιστορικά-Εισαγωγικά στοιχεία

Η ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας <sup>1</sup> έγινε από την ομάδα του Ολλανδού φυσικού Kamerlingh Onnes το 1911. Καθοριστικό ρόλο σε αυτήν την ανακάλυψη, έπαιξε η υγροποίηση του Ηλίου (He), που πραγματοποιήσε ο ίδιος στο εργαστήριο του στο Leiden της Ολλανδίας το 1908. Χρησιμοποιώντας το υγρό Ήλιο ως ψυκτικό μέσο, πραγματοποίησε συστηματική μελέτη στην αντίσταση του Υδραργύρου (Hg) για πολύ χαμηλές τιμές θερμοκρασίας <sup>2</sup>. Έτσι, το 1911, παρατήρησε πως η αντίσταση του Υδραργύρου (Hg) μηδενίζεται απότομα στους 4.152 K. Η συμπεριφορά της ηλεκτρικής αντίστασης του υδραργύρου, σε χαμηλές θερμοκρασίες, αναπαρίσταται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Η ηλεκτρική αντίσταση του Hg σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας του. Η συγκεκριμένη μέτρηση κατέγραψε για πρώτη φορά το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας.

Η ηλεκτρική αντίσταση ιδανικού αγωγού (χωρίς κρυσταλλικές ατέλειες και προσμίξεις), αναμενόταν να είναι μονότονη συνάρτηση της θερμοκρασίας και να τείνει στο μηδέν, όταν η απόλυτη θερμοκρασία μηδενιστεί. Όμως με την ανακάλυψη του Onnes βλέπουμε πως πολλά μέταλλα όπως ο υδράργυρος, ο κασσίτερος, ο μόλυβδος, παρουσιάζουν μηδενισμό της ηλεκτρικής τους αντίστασης σε πεπερασμένη μη μηδενική θερμο-

<sup>1</sup> Για την συγγραφή αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιήσαμε τις αναφορές [3],[4], [5], [6],[7] [8], [9].

<sup>2</sup> Ο Onnes χρησιμοποίησε υδράργυρο στα πειράματά του γιατί μπορούσε ελαττώσει σημαντικά τις προσμίξεις με κλασματική απόσταξη.

κρασία. Η τιμή της θερμοκρασίας αυτής, χαρακτηριστική του υλικού και ονομάζεται κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης από την κανονική στην υπεραγώγιμη κατάσταση ( $T_c$ ).

Από πειραματικής σκοπιάς έχει μεγάλη σημασία ο τρόπος μέτρησης της τιμής της ηλεκτρικής αντίστασης των υπεραγώγιμων υλικών. Η ηλεκτρική αντίσταση ενός υλικού ορίζεται μέσω του λόγου  $R = V/I$ , όπου  $V$  η ένδειξη του βολτομέτρου (διαφορά δυναμικού) και  $I$  η ένδειξη του αμπερομέτρου (ρεύμα που διαρρέει το υλικό). Έστω ένα δείγμα μεγάλου μήκους σε σχέση με τις εγκάρσιες διαστάσεις του. Στο δείγμα διοχετεύουμε ηλεκτρικό ρεύμα με τη βοήθεια μίας πηγής ρεύματος. Αν το δείγμα βρίσκεται στην υπεραγώγιμη κατάσταση,  $T < T_c$ , τότε η διαφορά δυναμικού στα άκρα του δείγματος θα ισούται με μηδέν ή μηδενική ηλεκτρική αντίσταση. Όμως το ερώτημα που ανακύπτει είναι αν πράγματι η διαφορά δυναμικού λαμβάνει μηδενική τιμή ή πεπερασμένη τιμή, μικρότερη από την ευαισθησία του βολτομέτρου που χρησιμοποιούμε. Αν το βολτόμετρο έχει πεπερασμένη ευαισθησία τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα αλλά μπορούμε να θέσουμε ένα άνω όριο στην τιμή της ηλεκτρικής αντίστασης. Για τον ακριβέστερο υπολογισμό της παραπάνω, θα χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική πειραματική διάταξη. Συγκεκριμένα ένα υπεραγώγιμο δακτύλιο αυτεπαγωγής  $L$ . Αν εφαρμόσουμε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $B_{\text{ext}} = B_0 U(t)$  ( $U(t)$  είναι η συνάρτηση βήματος), τότε σύμφωνα με το νόμο Faraday θα δημιουργηθεί ηλεκτρικό ρεύμα

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{dF}{dt}$$

όπου  $F$ , η συνολική μαγνητική ροή που διαρρέει το δακτύλιο επιφάνειας  $S$ . Επειδή  $F = LI + SB_{\text{ext}}(t)$  και  $\mathcal{E} = RI$ , το ηλεκτρικό ρεύμα θα ικανοποιεί μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$LdI/dt + RI = -S \frac{dB_{\text{ext}}(t)}{dt} = -SB_0 \delta(t).$$

όπου  $L$  είναι η αυτεπαγωγή και  $R$  η ηλεκτρική αντίσταση του δακτυλίου. Η λύση της προηγούμενης εξίσωσης θα δίνεται από τη σχέση

$$I(t) = \begin{cases} -\frac{B_0 S}{L} \exp(-Rt/L), & \text{για } t > 0 \\ 0, & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Αν ο δακτύλιος έχει μη μηδενική αντίσταση τότε το ρεύμα θα σβήνει εκθετικά σύμφωνα με την σχέση:

$$I = -I_0 e^{-t/\tau}$$

όπου  $I_0 = B_0 S/L$ : το ρεύμα του διαρρέει τον δακτύλιο την χρονική στιγμή  $t = 0 + \epsilon$ ,  $\tau$ : ο χρόνος αποκατάστασης, που δίνεται από την σχέση  $\tau = L/R$ . Υπολογίζοντας τον εκθέτη της παραπάνω σχέσης μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της αντίστασης  $R$  του δακτυλίου. Για συνηθισμένα, κανονικά μέταλλα, σε χαμηλή θερμοκρασία, ένα τέτοιο ρεύμα θα έσβηνε σε κλάσματα δευτερολέπτου. Σε έναν υπεραγωγό, τέτοιου είδους ρεύματα έχουν παρατηρηθεί να παραμένουν για αρκετά χρόνια.

Τα επόμενα χρόνια που ακολούθησαν μετά την ανακάλυψη του φαινομένου της υπεραγωγιμότητας από τον Onnes, ανακαλύφθηκαν και άλλα υλικά πέρα από τον υδράργυρο, που περνούσαν στην υπεραγώγιμη κατάσταση με διαφορετικές τιμές κρίσιμης θερμοκρασίας. Αντιπροσωπευτικοί στοιχειακοί υπεραγωγοί είναι το αργίλιο ( $T_c = 1.2$  K), ο μόλυβδος ( $T_c = 7.19$  K), και το νιόβιο ( $T_c = 9.26$  K). Μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ενώσεις NbTi ( $T_c = 10$  K), Nb<sub>3</sub>Ge ( $T_c = 23$  K) και Nb<sub>3</sub>Sn ( $T_c = 18.3$  K) οι οποίες χρησιμοποιούνται στην κατασκευή υπεραγώγιμων καλωδίων για τη δημιουργία μεγάλων μαγνητικών πεδίων. Στους προηγούμενους υπεραγωγούς η υπεραγώγιμη κατάσταση μπορεί να εξηγηθεί με βάση την έμμεση ελκτική αλληλεπίδραση δύο ηλεκτρονίων που βρίσκονται στην επιφάνεια Fermi, με την μεσολάβηση των ταλαντώσεων του πλέγματος (φωνόνια). Αυτή η θεωρία διατυπώθηκε από τους Bardeen



Cooper και Schrieffer (θεωρία BCS). Για τις επιτυχείς προβλέψεις της θεωρίας τους τιμήθηκαν το 1972 με το βραβείο Nobel.

Το 1986 ανακαλύφτηκε ότι ορισμένα μεικτά οξειδία του χαλκού εμφανίζουν θερμοκρασίες μετάβασης μεγαλύτερες από τη θερμοκρασία βρασμού του υγρού αζώτου (77.3 K). Χαρακτηριστικές ενώσεις είναι  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  ( $T_c = 93$  K), και  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  ( $T_c = 110$  K). Γ' αυτούς τους υπεραγωγούς δεν υπάρχει γενικά αποδεκτή θεωρία που να μπορεί να εξηγήσει την υψηλή κρίσιμη θερμοκρασία. Σημαντικός υπεραγωγός είναι επίσης το διβορίδιο του μαγνησίου,  $\text{MgB}_2$ . Αυτός ο υπεραγωγός ανήκει στην κατηγορία των υπεραγωγών τύπου BCS. Η υψηλή κρίσιμη θερμοκρασία σ' αυτή την ένωση οφείλεται στην συνεισφορά δύο ενεργειακών ζωνών στο ζευγάρισμα των ηλεκτρονίων.

Τα τελευταία χρόνια έχει ανακαλυφθεί μία οικογένεια ενώσεων με βάση το σίδηρο ( $T_c = 39$  K) και το αρσενικό οι οποίες εμφανίζουν σχετικά υψηλές κρίσιμες θερμοκρασίες μετάβασης από την κανονική στην υπεραγωγίμη κατάσταση. Αντιπροσωπευτικός υπεραγωγός αυτής της κατηγορίας είναι η ένωση  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$  ( $T_c = 38$  K, για  $x = 0.4$ ). Οι πειραματικές μετρήσεις αυτής της διπλωματικής προέρχονται από αυτή την ένωση.

Για να συνοψίσουμε τα παραπάνω **ο μηδενισμός της ηλεκτρικής αντίστασης των υλικών ονομάστηκε "υπεραγωγιμότητα"**. Παρόλα αυτά η ιδιότητα της τέλει αγωγιμότητας δεν αρκεί για τον πλήρη χαρακτηρισμό του φαινομένου της υπεραγωγιμότητας. Το δεύτερο κύριο χαρακτηριστικό της υπεραγωγίμης κατάστασης είναι το **φαινόμενο Meissner**, το οποίο ανακαλύφθηκε από τους φυσικούς Walther Meissner και Robert Ochsenfeld το 1933. Σύμφωνα με το φαινόμενο αυτό όταν ένας υπεραγωγός ψυχθεί παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης, τότε αποβάλλει το μαγνητικό πεδίο από το εσωτερικό του, δηλαδή συμπεριφέρεται ως τέλειος διαμαγνήτης. Στην πραγματικότητα το μαγνητικό πεδίο σβήνει εκθετικά από την επιφάνεια προς το εσωτερικό του υπεραγωγού εντός ενός χαρακτηριστικού μήκους  $\lambda$ , μήκος διείσδυσης London. Τα υλικά που στην υπεραγωγίμη κατάσταση χαρακτηρίζονται από το φαινόμενο Meissner ονομάζονται υπεραγωγοί πρώτου είδους. Να σημειώσουμε πως υπάρχουν και ορισμένα υπεραγωγιμα κράματα που στην υπεραγωγίμη κατάσταση επιτρέπουν την διείσδυση του μαγνητικού πεδίου υπό την μορφή σωλήνων μαγνητικής ροής (φλαξόνια). Τέτοια υλικά ανήκουν στην κατηγορία των υπεραγωγών δευτέρου είδους. Τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των δύο προαναφερθέντων κατηγοριών θα αναλυθούν επαρκώς στην συνέχεια της εργασίας.

Η ανακάλυψη του φαινομένου Meissner οδήγησε στην ανάπτυξη μιας φαινομενολογικής θεωρίας για την υπεραγωγιμότητα το 1935 από τους αδερφούς London. Η θεωρία London περιέγραφε ικανοποιητικά το φαινόμενο Meissner και επέτρεψε να γίνουν οι πρώτες θεωρητικές προβλέψεις για την υπεραγωγιμότητα. Παρόλα αυτά δεν λαμβάνει υπόψη της τα κβαντικά φαινόμενα και επομένως δεν αποτελεί μια ολοκληρωμένη θεωρία για την υπεραγωγιμότητα, που δεν είναι παρά μια μακροσκοπική εκδήλωση κβαντικών φαινομένων. Στην συνέχεια αναπτύχθηκε η θεωρία Ginzburg Landau από τους Ginzburg και Lev Landau, η οποία στην αρχική της μορφή, αποτέλεσε μια φαινομενολογική θεωρία που μπορούσε να περιγράψει υπεραγωγούς πρώτου είδους χωρίς να εξετάζει τις μικροσκοπικές ποσότητες του συστήματος.

Τέλος, η θεωρία που έδωσε επιτυχείς προβλέψεις για την υπεραγωγιμότητα, διατυπώθηκε από τους J. Bardeen, N. Cooper, J. R. Schrieffer (1957) και είναι γνωστή ως BCS θεωρία. Πρόκειται για μια μικροσκοπική θεωρία που χαρακτηρίζεται από δύο κύρια σημεία. Το πρώτο είναι ότι, ηλεκτρόνια, μη μαγνητικού μετάλλου, κοντά στην επιφάνεια Fermi μπορούν να έχουν ελκτική αλληλεπίδραση μέσω ανταλλαγής κβάντων των ταλαντώσεων του πλέγματος (φωνονίων). Η ελκτική αυτή αλληλεπίδραση μεγιστοποιείται όταν τα ηλεκτρόνια έχουν αντίθετο σπιν και ορμή. Το δεύτερο κύριο σημείο έχει να κάνει με το φαινόμενο Cooper κατά το οποίο τα συζευγμένα πλέον ηλεκτρόνια λειτουργούν συνεργατικά και κινούνται χωρίς αντίσταση εντός του υλικού. Αποκτούν δηλαδή μποζονική συμπεριφορά και αποτελούν τον φορέα του υπερρεύματος εντός του υπεραγωγού.

## 1.2 Υπεραγωγοί πρώτου είδους

### 1.2.1 Εισαγωγή

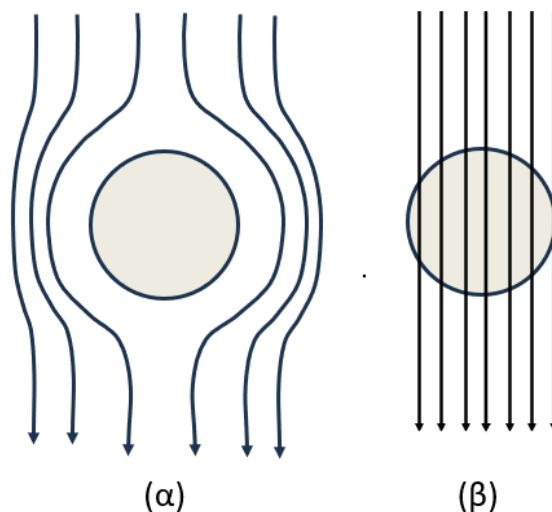
Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η υπεραγώγιμη κατάσταση ενός υλικού, χαρακτηρίζεται από δύο κύρια σημεία. Τον **μηδενισμό της ηλεκτρικής αντίστασης** του υλικού όταν αυτό ψυχθεί σε θερμοκρασία μικρότερη από την κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης ( $T_c$ ) και **την συμπεριφορά του υλικού** όταν αυτό βρεθεί σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ενώ ταυτοχρόνως βρίσκεται στην υπεραγώγιμη κατάσταση ( $T < T_c$ ). Με βάση το δεύτερο χαρακτηριστικό χωρίζουμε τους υπεραγωγούς σε δύο κατηγορίες, πρώτου και δεύτερου είδους. Η κατηγορία των υπεραγωγών πρώτου είδους περιλαμβάνει όλα τα υπεραγώγιμα στοιχεία εκτός από το Νιόβιο (Nb). Το Νιόβιο, υπεραγώγιμα κράματα και χημικές ενώσεις διαμορφώνουν την δεύτερη κατηγορία, των υπεραγωγών δεύτερου είδους. Στην τελευταία ανήκουν επίσης και οι υπεραγωγοί υψηλών θερμοκρασιών.

### 1.2.2 Φαινόμενο Meissner

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε αρχικά πως συμπεριφέρεται ένας ιδανικός αγωγός (άπειρη αγωγιμότητα) κάτω από την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, του οποίου η ένταση είναι αρκετά μικρή ώστε να μην καταστρέφεται η ιδανική κατάσταση του δείγματος. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση του υπεραγωγού, [5].

- **Ιδανικός Αγωγός**

Αρχικά, υποθέτουμε πως ο ιδανικός αγωγός ψύχεται κάτω από την κρίσιμη τιμή της θερμοκρασίας του ( $T_c$ ), απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Στην συνέχεια τοποθετούμε το δείγμα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Από τις παραπάνω θεωρήσεις είναι εύκολο να δείξουμε ότι το μαγνητικό πεδίο δεν διαπερνά το εσωτερικό του δείγματος όπως φαίνεται σχηματικά στην εικόνα 1.2(b). Αντίθετα καθώς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο αρχίζει να εισέρχεται στην επιφάνεια του ιδανικού αγωγού, παράγεται ρεύμα το οποίο σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz έχει τέτοια φορά έτσι ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί να είναι αντίθετο του εξωτερικού. Επομένως το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του δείγματος είναι μηδέν, εικόνα 1.2(a).



Σχήμα 1.2: Αναπαράσταση της μαγνητικής κατάστασης ενός ιδανικού αγωγού για  $T < T_c$  σχήμα (α) και  $T > T_c$  σχήμα (β),[5].

Το παραπάνω συμπέρασμα θα το δείξουμε μέσω των εξισώσεων του Maxwell [10]. Καθώς η μαγνητική ροή του  $B$ , που εισέρχεται στο δείγμα μεταβάλλεται, τότε μέσω του νόμου Faraday- Maxwell θα παραχθεί ένα ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  εντός του δείγματος:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

Θεωρούμε πως στην περίπτωση μας, ο ιδανικός αγωγός περιγράφεται από την ωμική σχέση,  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ , όπου  $\mathbf{j}$  η πυκνότητα ρεύματος και  $\rho$ , η ειδική ηλεκτρική αντίσταση του υλικού. Επειδή πρόκειται για ιδανικό αγωγό τότε  $\rho = 0$  και άρα  $\mathbf{E} = 0$ , στο εσωτερικό του δείγματος. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην εξίσωση 1.1 προκύπτει ότι  $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ , δηλαδή το μαγνητικό πεδίο δεν αλλάζει με το χρόνο. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αρχικά είχαμε απουσία μαγνητικού πεδίου τότε θα πρέπει και μετά την εφαρμογή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου,  $\mathbf{B} = 0$  στο εσωτερικό του δείγματος.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου έχουμε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και τοποθετούμε εντός του έναν "θερμό" ιδανικό αγωγό. Στην συνέχεια ψύχουμε το δείγμα έως ότου η θερμοκρασία του γίνει  $T < T_c$ . Σε αυτή την περίπτωση, του ιδανικού αγωγού, η ηλεκτροδυναμική προβλέπει ένα τελείως διαφορετικό αποτέλεσμα σε σχέση με προηγουμένως. Για  $T > T_c$ , η ηλεκτρική αντίσταση του δείγματος είναι πεπερασμένη, και επομένως το μαγνητικό πεδίο διεισδύει σε αυτό. Ψύχοντας το σε θερμοκρασία μικρότερη από την κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης το πεδίο παραμένει εντός του δείγματος όπως αναπαρίσταται στην εικόνα (1.1β).

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, βλέπουμε πως ο ιδανικός αγωγός εμποδίζει οποιαδήποτε μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό του. Η ίδια διατηρεί την αρχική τιμή της πριν και μετά την ψύξη του δείγματος. Αυτή η συμπεριφορά είναι που διαφοροποιεί έναν ιδανικό αγωγό από έναν υπεραγωγό, όπως θα δούμε και στην συνέχεια.

#### • Υπεραγωγός

Ένας υπεραγωγός χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα του τέλειου διαμαγνητισμού για  $T < T_c$ , δηλαδή αποβάλλει πλήρως τα μαγνητικά πεδία από το εσωτερικό του, που ουσιαστικά αποτελεί το φαινόμενο Meissner. Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει, είτε εφαρμόζοντας εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ενώ το δείγμα βρίσκεται στην υπεραγωγίμη κατάσταση ( $T < T_c$ ), είτε ψύχοντας τον υπεραγωγό παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Επομένως, για έναν υπεραγωγό ισχύει  $B = 0$  όταν  $T < T_c$ , ανεξάρτητα από την "μαγνητική ιστορία" του δείγματος, γεγονός που δεν ισχύει για την περίπτωση ιδανικού αγωγού όπως είδαμε. Να σημειώσουμε πως η παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζει πλήρως τους υπεραγωγούς πρώτου είδους, όταν βρίσκονται στην υπεραγωγίμη κατάσταση.

Συνοψίζοντας για να περιγράψουμε φαινομενολογικά την υπεραγωγίμη κατάσταση ( $T < T_c$ ) δεν αρκεί μόνο η συνθήκη της τέλειας αγωγιμότητας  $\rho = 0$ . Αναγκαίες είναι η παρακάτω εξισώσεις [11]:

$$\rho = 0, \text{ συνθήκη τέλειας αγωγιμότητας} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B} = 0, \text{ φαινόμενο Meissner} \quad (1.3)$$

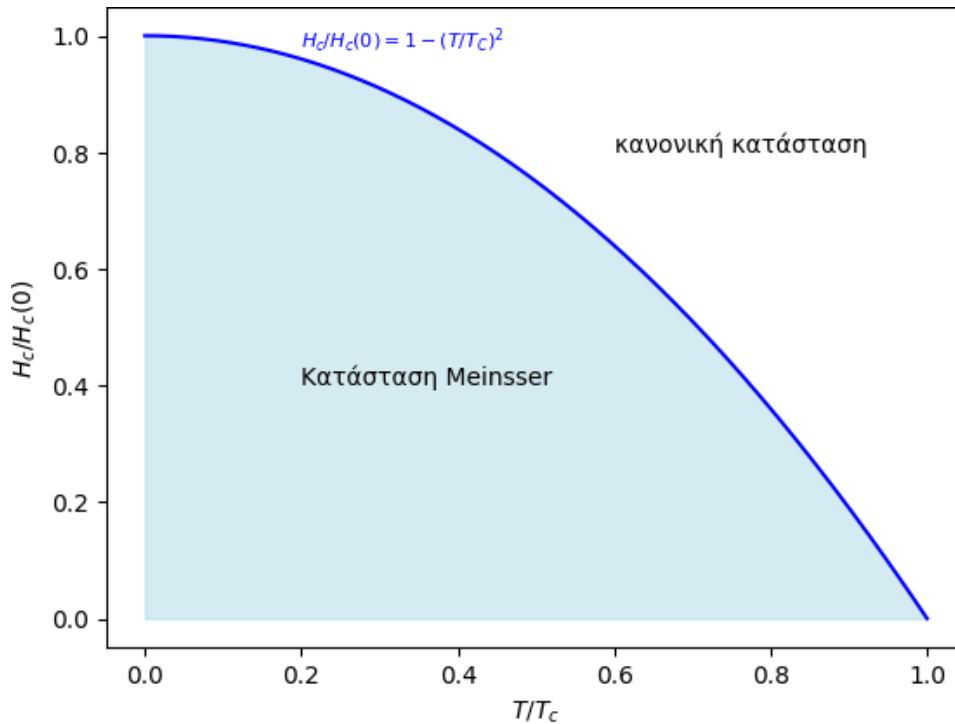
### 1.2.3 Κρίσιμο μαγνητικό πεδίο υπεραγωγού πρώτου είδους

Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό των υπεραγωγών πρώτου είδους αφορά την συμπεριφορά τους εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Συγκεκριμένα, όταν η τιμή του εφαρμοζόμενου πεδίου ξεπεράσει μια κρί-

σιμη τιμή,  $H_c$ , τότε οδηγούμαστε στην καταστροφή της υπεραγώγιμης κατάστασης του δείγματος. Αυτή η ελάχιστη τιμή του εφαρμοζόμενου πεδίου ονομάζεται **κρίσιμο πεδίο**, και η τιμή της δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση :

$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (1.4)$$

Επομένως για  $H < H_c(T)$ , το δείγμα συμπεριφέρεται ως τέλειος διαμαγνήτης, δηλαδή βρίσκεται στην υπεραγώγιμη κατάσταση. Ενώ για  $H > H_c(T)$ , το δείγμα μεταβαίνει στην κανονική κατάσταση. Η εξάρτηση του εξωτερικού πεδίου  $H$  από την θερμοκρασία του δείγματος  $T$ , αναπαριστάται στην παρακάτω γραφική παράσταση, Σχήμα 1.3, που ονομάζεται διάγραμμα φάσεων υπεραγωγού πρώτου είδους. Όπως βλέπουμε



Σχήμα 1.3: Διάγραμμα φάσεων υπεραγωγού πρώτου είδους

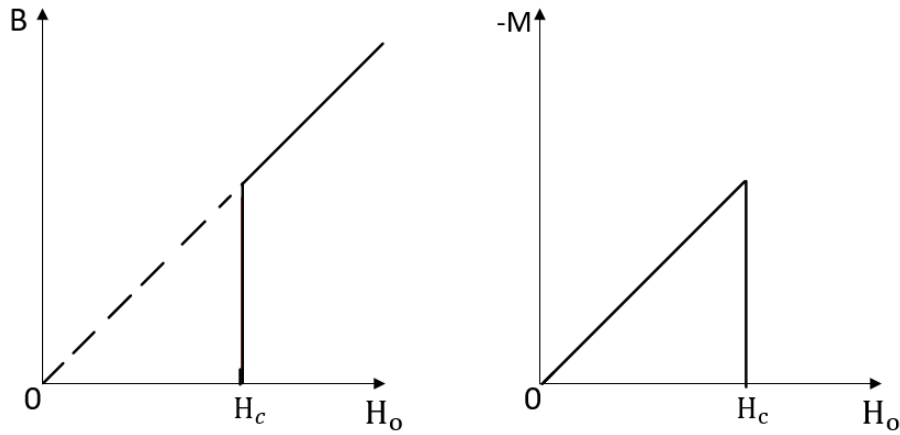
από το παραπάνω διάγραμμα, Σχήμα 1.3, τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη του κρίσιμου μαγνητικού πεδίου του υπεραγωγού,  $H_c/H_c(0) = f(T/T_c)$ , αναπαριστούν την κατάσταση Meissner, ενώ αυτά που βρίσκονται πάνω από την καμπύλη αναπαριστούν την κανονική κατάσταση του υπεραγωγού. Τέλος τα σημεία του άξονα των θερμοκρασιών από τη μηδενική ως και την κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης, αντιστοιχούν στην υπεραγώγιμη κατάσταση απουσία μαγνητικού πεδίου.

## 1.2.4 Μαγνητικές ποσότητες Υπεραγωγών πρώτου είδους

Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με την καμπύλη μαγνήτισης υπεραγωγών πρώτου είδους. Αρχικά, θεωρούμε ένα υπεραγώγιμο δείγμα εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $H_0 < H_c$ . Καθώς αυξάνουμε την τιμή του  $H_0$ , η μαγνητική επαγωγή εντός του δείγματος δεν μεταβάλλεται,  $B = 0$ , δηλαδή το δείγμα παραμένει στην κατάσταση Meissner. Το γεγονός αυτό πραγματοποιείται έως ότου η τιμή  $H_0$  φτάσει την κρίσιμη τιμή του μαγνητικού πεδίου  $H_c$ , όπου καταστρέφεται η υπεραγώγιμη κατάσταση του δείγματος και ισχύει:  $B = H_0$ . Επομένως η καμπύλη μαγνήτισης  $B = f(H_0)$  θα λαμβάνει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 1.4(a). Επίσης η μαγνητική επαγωγή  $B$  και το πεδίο  $H_0$ , συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}) \quad (1.5)$$

όπου  $\mathbf{M}$ , η μαγνητική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου. Λαμβάνοντας υπόψιν την συμπεριφορά της μαγνητικής επαγωγής  $B$  εντός του υπεραγωγού, συναρτήσει του εξωτερικού πεδίου  $H_0$  καθώς και την σχέση 1.5, μπορούμε να προβλέψουμε την συμπεριφορά της μαγνήτισης συναρτήσει του  $H_0$ . Έτσι η καμπύλη μαγνήτισης αναπαρίσταται πολλές φορές ως  $M$  συναρτήσει του  $H_0$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4(b).



Σχήμα 1.4: (a) Καμπύλη μαγνήτισης υπεραγωγού πρώτου είδους. (b) Μαγνητική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου,  $M$  συναρτήσει  $H_0$ .

Στην συνέχεια θα δούμε πως από τις σχέσεις που περιγράφουν την υπεραγώγιμη κατάσταση, 1.2, 1.3, προκύπτουν βασικά χαρακτηριστικά των υπεραγωγών πρώτου είδους.

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα υπεραγώγιμο υλικό εντός μαγνητικού πεδίου  $H_0$ . Το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική επαγωγή θα υπακούσουν τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1.7)$$

με

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.8)$$

Από την 1.6 εξίσωση προκύπτει η εξής συνοριακή συνθήκη για την μαγνητική επαγωγή:

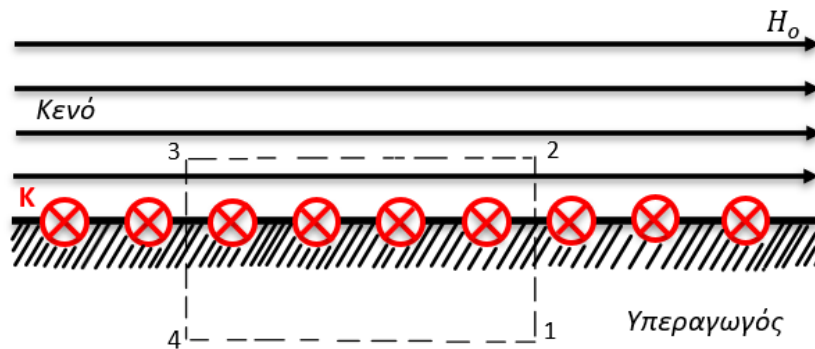
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1,2} = 0,$$

όπου  $\hat{\mathbf{n}}_{1,2}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην διεπιφάνεια των δύο μέσων. Στην προκειμένη περίπτωση είναι κάθετο στην επιφάνεια του υπεραγωγού, διότι θεωρούμε ότι ο χώρος εκτός του, δεν είναι τίποτα άλλο πέρα από το κενό. Αυτή η συνοριακή συνθήκη περιγράφει την συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής στην επιφάνεια του υπεραγωγού. Όμως από την σχέση 1.3 έχουμε  $\mathbf{B}_1 = 0$  στο εσωτερικό του υπεραγωγού. Επομένως, μέσω της παραπάνω σχέσης, στο εξωτερικό του θα ισχύει:  $\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1,2} = 0$ . Επίσης, επειδή το εξωτερικό του υπεραγωγού θεωρήσαμε πως είναι το κενό, έχουμε:  $\mathbf{M} = 0$  και μέσω της σχέσης 1.8, έχουμε:  $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2$ . Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει:

$$\mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1,2} = 0$$

Με άλλα λόγια, το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}$  έξω από τον υπεραγωγό, πρέπει να είναι εφαπτομενικό στην

επιφάνεια του. Η παραπάνω περιγραφή αναπαρίσταται στο Σχήμα 1.5. Από την εξίσωση Maxwell 1.7



Σχήμα 1.5: Υπεραγωγός πρώτου είδους τοποθετείται εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $H_0$  με αποτέλεσμα την δημιουργία επιφανειακού υπεραγωγίμου ρεύματος.

προκύπτει η συνοριακή συνθήκη:  $\hat{n}_{1,2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$ , όπου  $\mathbf{K}$ , η επιφανειακή κατανομή ρεύματος. Η παραπάνω περιγράφει την ασυνέχεια της παράλληλης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου  $H$ , στην επιφάνεια του υπεραγωγού και μέσω αυτής μπορεί να υπολογιστεί η επιφανειακή κατανομή ρεύματος  $\mathbf{K}$  του. Επειδή  $\mathbf{B}_1 = 0$  στο εσωτερικό του υπεραγωγού και  $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  έξω από αυτόν, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος που τον διαρρέει θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{K} = \hat{n}_{1,2} \times \mathbf{H}_0 \quad (1.9)$$

Τέλος, θα προσθέσουμε και ένα τρίτο στοιχείο ως χαρακτηριστικό υπεραγωγών πρώτου είδους. **Σε απλά συνεκτικά χωρία, επιφανειακά ρεύματα μπορούν να υπάρξουν μόνο όταν ο υπεραγωγός βρίσκεται τοποθετημένος εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου**. Αν υποθέσουμε πως τέτοια ρεύματα παρέμεναν και όταν "κλείναμε" το μαγνητικό πεδίο, τότε θα δημιουργούσαν το δικό τους πεδίο που θα διείσδυε στο εσωτερικό του υπεραγωγού, πράγμα αδύνατον. Από την άλλη σε πολλαπλά συνεκτικά χωρία, μπορούν να υπάρξουν επιφανειακά ρεύματα απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Κλασσικό παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης αποτελεί ο υπεραγωγίμος δακτύλιος (διπλά συνεκτικό χωρίο).

## 1.2.5 Θεωρία London για την υπεραγωγιμότητα

Πρόκειται για μια θεωρία υπεραγωγιμότητας που αναπτύχθηκε από τους αδερφούς London το 1935. Αποτελείται από δύο βασικές εξισώσεις (εξισώσεις London), που περιγράφουν φαινομενολογικά τους υπεραγωγούς πρώτου είδους. Όπως ο νόμος του Ohm,  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$ , όπου  $\rho$  η ηλεκτρική αντίσταση του δείγματος, περιγράφει ικανοποιητικά συνήθεις αγωγούς, έτσι και οι εξισώσεις London αποτελούν την πιο απλή περιγραφή του φαινομένου της υπεραγωγιμότητας. Από πειραματικές παρατηρήσεις γνωρίζουμε ότι σε έναν υπεραγωγό πρώτου είδους, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μηδενίζονται στο εσωτερικό του (φαινόμενο Meissner), εκτός από ένα επιφανειακό στρώμα στο οποίο "σβήνουν" εκθετικά, εντός ενός χαρακτηριστικού μήκους  $\lambda$  (μήκος διείσδυσης London). Η παρατήρηση αυτή, προκύπτει από τις ίδιες τις εξισώσεις, όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Οι εξισώσεις London μπορούν να εξαχθούν με την βοήθεια των κυματικών εξισώσεων Ηλεκτρομαγνητικού

πεδίου[9] :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \nabla \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} \quad (1.11)$$

όπου  $\mathbf{J}$ ,  $\rho$ , η πυκνότητα ρεύματος και η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου αντίστοιχα. Στην συνέχεια, για να μπορέσουμε να εξάγουμε τις εξισώσεις London, εκτός από τις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, θα λάβουμε υπόψιν τα δυο παρακάτω βασικά σημεία:

- Την πειραματική παρατήρηση ότι το ηλεκτρικό  $\mathbf{E}$  και το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  θα πρέπει να "σβήνουν" εκθετικά στην επιφάνεια του υπεραγωγού
- Το θεώρημα που απέδειξε ο von Laue. Η εξίσωση της μορφής  $\nabla^2 \Psi - \frac{1}{\lambda^2} \Psi = 0$ , επιδέχεται λύσεις που μειώνονται εκθετικά.

Συνυπολογίζοντας τα παραπάνω, απαιτούμε τα δεξιά μέλη των (1.10) και (1.11) εξισώσεων να είναι ίσα με  $\mathbf{E}/\lambda^2$  και  $\mathbf{B}/\lambda^2$ , αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι **εξισώσεις London** [5]:

$$\mathbf{E} = \mu_0 \lambda^2 \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + c^2 \nabla \rho \right) \quad (1.12)$$

και

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \lambda^2 \nabla \times \mathbf{J} \quad (1.13)$$

Να σημειώσουμε πως η δεύτερη εξίσωση London μπορεί να προκύψει από την πρώτη μέσω του νόμου του Faraday-Maxwell,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$  και λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\nabla \times \nabla \rho = 0$ , όπου  $\rho$  βαθμωτή ποσότητα.

Η ποσότητα  $\lambda$  ονομάζεται μήκος διείσδυσης London και δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{nq^2 \mu_0}} \quad (1.14)$$

όπου  $m = 2m_e$ ,  $n$ ,  $q = -2|e|$  είναι η μάζα, η πυκνότητα και το ηλεκτρικό φορτίο των φορέων του υπεραγωγίμου ρεύματος (ζεύγη Cooper).

Όπως μπορούμε να δούμε από την σχέση 1.14, το μήκος διείσδυσης London,  $\lambda$ , εξαρτάται από την θερμοκρασία του υπεραγωγού λόγω της άμεσης εξάρτησής του από την αριθμητική πυκνότητα των φορέων του υπερρεύματος,  $n$ . Μια φόρμουλα της θερμοκρασιακής εξάρτησης του  $\lambda$ , που δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πλήθος υπεραγωγίμων υλικών, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{[1 - (T/T_c)^4]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.15)$$

Όπου  $\lambda(0)$ , το μήκος διείσδυσης London για  $T = 0$  K. Η τιμή που λαμβάνει η συγκεκριμένη σταθερά εξαρτάται από το υπεραγωγίμο υλικό που εξετάζουμε.

Τελικά οι εξισώσεις που ικανοποιούν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, σε πρώτη προσέγγιση, σε έναν



υπεραγωγό πρώτου είδους δίνονται από τις εξής σχέσεις:

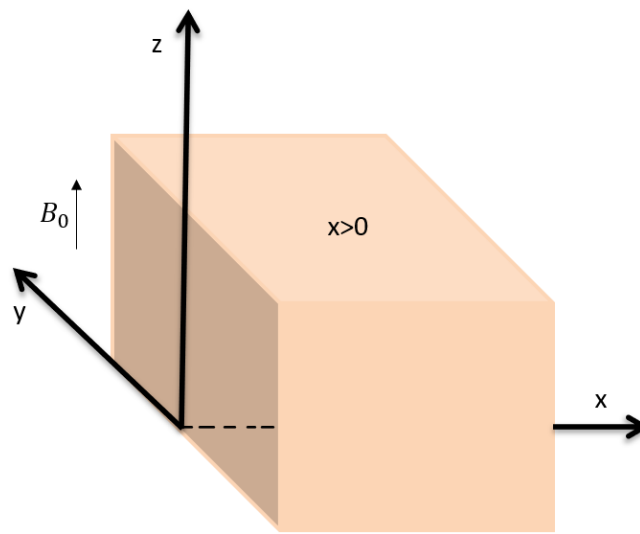
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{E} \quad (1.16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (1.17)$$

Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε με ποιόν τρόπο το μαγνητικό πεδίο διεισδύει εντός του υπεραγωγού, επιλύοντας τις παραπάνω εξισώσεις για συγκεκριμένο παράδειγμα υπεραγωγού.

### Παράδειγμα υπεραγωγίμου δείγματος

Θεωρούμε έναν υπεραγωγίμο χώρο  $x > 0$ . Η επιφάνεια του υπεραγωγού συμπίπτει με το  $x = 0$  επίπεδο.



Σχήμα 1.6: Υπεραγωγίμος χώρος,  $x > 0$  τοποθετημένος εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $B_0 \hat{e}_z$ .

Το παραπάνω σύστημα τοποθετείται εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $B_0$  κατά την  $z$  διεύθυνση, όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 1.6. Για να μελετήσουμε την συμπεριφορά του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}$  εντός του υπεραγωγού θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση 1.17 υπολογίζοντας μόνο το χωρικό μέρος του  $\mathbf{B}$  και όχι το χρονικό. Επομένως:

$$1.17 \implies \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις συμμετρίες του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι η μαγνητική επαγωγή  $\mathbf{B}$  εντός του υπεραγωγού θα έχει μόνο  $\hat{e}_z$  συνιστώσα και το μέτρο της θα εξαρτάται μόνο από την  $x$  συντεταγμένη δηλαδή,  $\mathbf{B} = B(x) \hat{e}_z$ . Επομένως, καταλήγουμε στην εξίσωση:

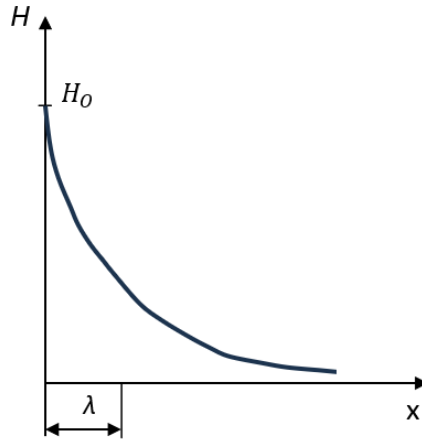
$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} B_z = 0 \quad (1.18)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:  $B_z(x = 0) = B_0$  και  $B_z(x \rightarrow \infty) = 0$ . Μέσω της δεύτερης λαμβάνουμε υπόψιν το φαινόμενο Meissner. Με βάση τα παραπάνω η λύση της 1.17 είναι:

$$B_z = B_0 e^{-x/\lambda} \quad (1.19)$$

Επομένως, συμπεραίνουμε πως, η μαγνητική επαγωγή υφίσταται εκθετική μείωση καθώς κινούμαστε προς





Σχήμα 1.7: Διείσδυση μαγνητικού πεδίου εντός ενός υπεραγώγιμου όγκου.

το εσωτερικό του υπεραγωγού, εντός χαρακτηριστικού μήκους  $\lambda$ , που δίνεται από την σχέση 1.14. Η παραπάνω συμπεριφορά του μαγνητικού πεδίου αναπαρίσταται στο Σχήμα 1.7.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του επαγόμενου υπερρεύματος  $\mathbf{J}$  εντός του υπεραγώγιμου χώρου. Το υπερρεύμα δίνεται από την σχέση:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},$$

όπου, με βάση τη γεωμετρία του προβλήματός μας έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial B_z(x)}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial B_z(x)}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y = -\frac{\partial B_z(x)}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y$$

Με βάση τα παραπάνω, και την σχέση την 1.19, το υπερρεύμα  $\mathbf{J}$  δίνεται από την έκφραση:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \implies -\frac{\partial B_z(x)}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y = \mu_0 \mathbf{J} \implies$$

$$\mathbf{J} = \frac{B_0 e^{-x/\lambda}}{\lambda \mu_0} \hat{\mathbf{e}}_y$$

Αν λάβουμε υπόψιν πως το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική επαγωγή εκτός του υπεραγώγιμου χώρου ικανοποιούν την σχέση  $B_0 = \mu_0 H_0$ , τότε το υπερρεύμα  $\mathbf{J}$  συναρτήσεως του μαγνητικού πεδίου  $H_0$  ικανοποιεί την σχέση:

$$\mathbf{J} = \frac{H_0}{\lambda} e^{-x/\lambda} \hat{\mathbf{e}}_y \quad (1.20)$$

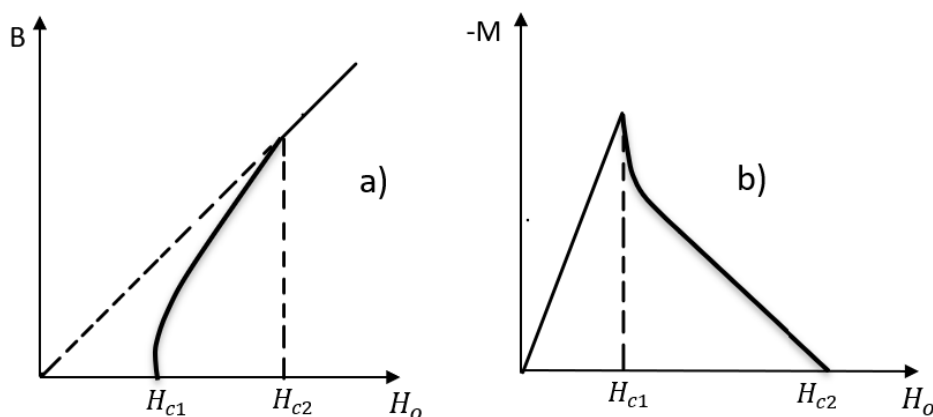
Έτσι, από την παραπάνω σχέση βλέπουμε πως το επαγόμενο υπερρεύμα εντός του χώρου που εξετάζουμε, σβήνει εκθετικά με την απόσταση από την επιφάνεια του δείγματος εντός του χαρακτηριστικού μήκους London. Παρουσιάζει δηλαδή όμοια συμπεριφορά με το μαγνητικό πεδίο, σχέση 1.19, ενώ ρέει στην  $\hat{\mathbf{e}}_y$  κατεύθυνση.

## 1.3 Υπεραγωγοί δευτέρου είδους

### 1.3.1 Γενικά Χαρακτηριστικά

Σε αντίθεση με τους υπεραγωγούς πρώτου είδους, υπάρχουν υλικά που παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά, όταν βρεθούν μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Τέτοια υλικά ανήκουν στην κατηγορία των υπεραγωγών δευτέρου είδους. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε την συμπεριφορά υπεραγωγών δευτέρου είδους εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

- Θεωρούμε υπεραγωγό σε σχήμα κυλίνδρου με μήκος  $l$  και ακτίνα  $R$ , έτσι ώστε  $l \gg 2R$ . Τοποθετείται εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $H_0$  με διεύθυνση παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου. Όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι μικρότερο από την πρώτη κρίσιμη τιμή μαγνητικού πεδίου, δηλαδή  $H < H_{c1}$  τότε ο υπεραγωγός βρίσκεται στην κατάσταση **Meissner**.
- Για την περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο είναι μεταξύ του πρώτου κρίσιμου και του δεύτερου κρίσιμου μαγνητικού πεδίου, δηλαδή  $H_{c1} < H < H_{c2}$ , τότε ο υπεραγωγός βρίσκεται στην **μικτή κατάσταση**. Σε αυτή την περίπτωση το μαγνητικό πεδίο διεισδύει στον κύλινδρο, αλλά η διείσδυση δεν είναι πλήρης. Αντίθετα η μαγνητική ροή εισέρχεται στον υπεραγωγό με κβαντισμένο τρόπο, μέσω δινών των λεγόμενων φλαζονίων. Κάθε φλαζόνιο αποτελείται από έναν κύριο πυρήνα που μπορεί να προσεγγιστεί με έναν μακρύ, λεπτό κύλινδρο με άξονα παράλληλο στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}$ . Από κάθε φλαζόνιο, εισέρχεται εντός του υπεραγωγού το ελάχιστο κβάντο μαγνητικής ροής,  $\Phi_0 = h/2e$ . Γύρω από τον πυρήνα κυκλοφορεί ρεύμα με την μορφή στροβίλου, με μέγιστη απόσταση παρατήρησης  $\lambda$  (μήκος London). Τα φλαζόνια βρίσκονται εντοπισμένα στο χώρο του κυλίνδρου και σε κατάσταση ισορροπίας δημιουργούν ένα εξαγωνικό πλέγμα, το πλέγμα Abrikoshov. Όσο αυξάνεται το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που έχει τοποθετηθεί ο κύλινδρος, αυξάνεται και η πυκνότητα των φλαζονίων  $n = B/\Phi_0$  που δημιουργούνται εντός του, και επομένως αυξάνεται η συνολική μαγνητική ροή εντός του κυλίνδρου. Αξίζει να σημειωθεί ότι στους υπεραγωγούς τύπου-II η δεύτερη κρίσιμη τιμή του μαγνητικού πεδίου  $H_{c2}$  μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή,  $H_c$  των υπεραγωγών πρώτου είδους.
- Τέλος για την περίπτωση όπου  $H > H_{c2}$ , τότε ο υπεραγωγός επιστρέφει στην κανονική κατάσταση, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο διεισδύει πλήρως εντός του.

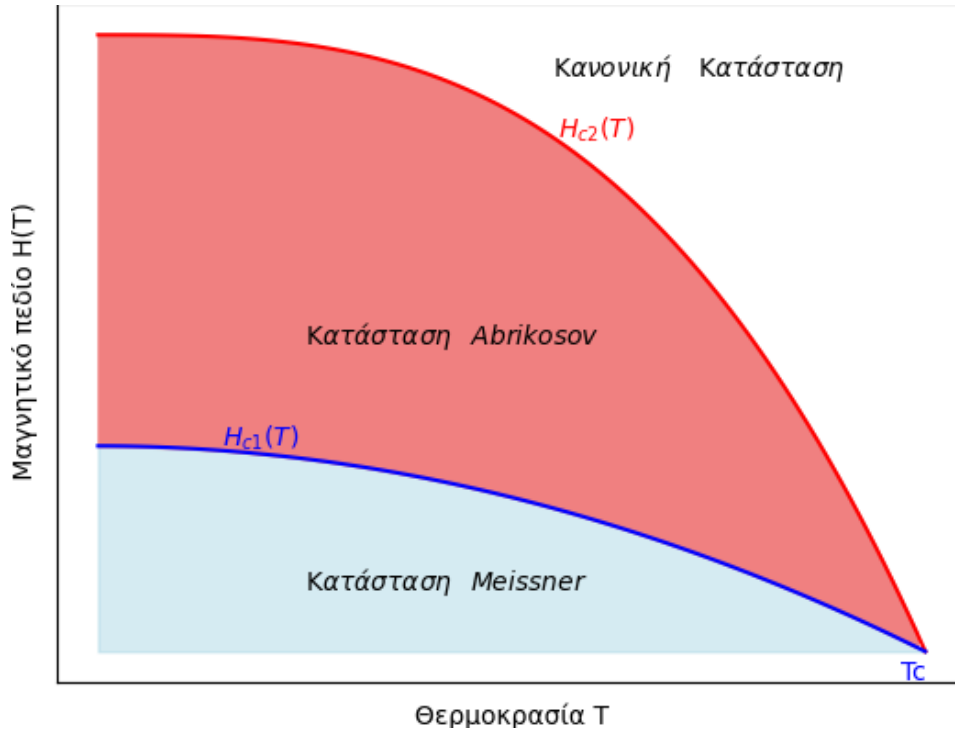


Σχήμα 1.8: a) Μαγνητική επαγωγή  $B$ , ως συνάρτηση του  $H_0$ , b) Μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου  $M$ , ως συνάρτηση του  $H_0$

Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω περιγραφή των υπεραγωγών δευτέρου είδους καθώς και την σχέση  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  η καμπύλη μαγνήτισης ( $B = f(H_0)$  ή  $M = f(H_0)$ ), λαμβάνει την μορφή που φαίνεται

στο Σχήμα 1.8.

Θα πρέπει να τονίσουμε πως τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη κρίσιμη τιμή μαγνητικού πεδίου έχουν άμεση εξάρτηση από την θερμοκρασία  $T$  του υπεραγωγού, δηλαδή  $H_{c1} = H_{c1}(T)$  και  $H_{c2} = H_{c2}(T)$ , όπως και στην περίπτωση των υπεραγωγών πρώτου είδους. Οι ακριβείς εκφράσεις για τις παραπάνω σχέσεις εξαρτώνται από τις ιδιότητες του κάθε υλικού και από την δομή του. Παρόλα αυτά, σε όλες τις περιπτώσεις, καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία  $T$  του υπεραγωγού οι τιμές  $H_{c1}$  και  $H_{c2}$  μειώνονται. Με βάση τα παραπάνω μια προσεγγιστική μορφή που λαμβάνει το διάγραμμα φάσεων υπεραγωγού δεύτερου είδους φαίνεται στο Σχήμα 1.9.



Σχήμα 1.9: : Διάγραμμα φάσεων υπεραγωγού δεύτερου είδους. Για  $H < H_{c1}(T)$ , το υλικό βρίσκεται στην υπεραγωγίμη κατάσταση (Meissner), για  $H_{c1}(T) < H < H_{c2}(T)$  βρίσκεται στην μεικτή κατάσταση (κατάσταση Abrikosov), ενώ για  $H > H_{c2}(T)$  το υλικό έρχεται στην κανονική κατάσταση.

### 1.3.2 Θεωρία Ginzburg-Landau

Η θεωρία London για την υπεραγωγιμότητα, που παρουσιάστηκε στην ενότητα 1.2.5, δεν συνυπολογίζει κβαντικά φαινόμενα και συνεπώς αδυνατεί στην πλήρη επεξήγηση του φαινομένου της υπεραγωγιμότητας. Η πρώτη κβαντική θεωρία για την υπεραγωγιμότητα που μπορεί σε φαινομενολογικό επίπεδο να περιγράψει όλα τα είδη υπεραγωγών, είναι η θεωρία Ginzburg-Landau (G.L theory). Σημαντικό αποτελεί το γεγονός ότι είναι η πρώτη θεωρία που κατάφερε να προβλέψει την ύπαρξη φλαξονίων στην υπεραγωγίμη κατάσταση για τους υπεραγωγούς δεύτερου είδους.

Η συγκεκριμένη θεωρία λαμβάνει υπόψιν τις εξής δύο παρατηρήσεις:

- Η υπεραγωγίμη κατάσταση είναι περισσότερο 'τακτοποιημένη' σε σχέση με την κανονική, δηλαδή χαρακτηρίζεται από **μικρότερη εντροπία**.
- Η μετάβαση από την μια κατάσταση στην άλλη απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου αποτελεί **μετάβαση δευτέρας τάξης**.

Η θεωρία των μεταβάσεων δευτέρας τάξης αναπτύχθηκε από τον Landau. Σύμφωνα με αυτήν, μετάβαση φάσης δευτέρας τάξης συμβαίνει όταν η κατάσταση ενός σώματος αλλάζει σταδιακά ενώ η συμμετρία

του αλλάζει απότομα, στην θερμοκρασία μετάβασης. Φαινόμενα όπως η σιδηρομαγνητική μετάβαση στο σημείο Curie, η μετάβαση του ηλίου (He) στην υπέρρευση κατάσταση καθώς και η μετάβαση από την κανονική στην υπεραγωγίμη κατάσταση, αποτελούν μεταβάσεις δευτέρας τάξης.

Για την περίπτωση της υπεραγωγιμότητας, κάτι τέτοιο γίνεται άμεσα αντιληπτό από τις καμπύλες μαγνήτισης που αναπαρίστανται στο Σχήμα 1.8. Οι μεταβάσεις:

- Για  $H = H_{c1}$ , μετάβαση από την κατάσταση Meissner στην μικτή κατάσταση (και αντίστροφα)
- Για  $H = H_{c2}$ , μετάβαση από την μικτή κατάσταση στην κανονική (και αντίστροφα),

πραγματοποιούνται με συνεχή τρόπο και επομένως αποτελούν μεταβάσεις δευτέρας τάξης.

Η τελευταία παρατήρηση υποδηλώνει την ύπαρξη μιας **παραμέτρου τάξης** (order parameter) για τον υπεραγωγό, η οποία είναι μη μηδενική για  $T < T_c$  και μηδενίζεται για  $T > T_c$ . Στην περίπτωση μας πρόκειται για την κυματοσυνάρτηση  $\Psi(\mathbf{r})$ , που περιγράφει την κατάσταση των ηλεκτρονίων στην υπεραγωγίμη κατάσταση. Είναι κανονικοποιημένη, έτσι ώστε η ποσότητα  $|\Psi(r)|^2$  να δίνει την πυκνότητα των φορέων του υπερρεύματος (ζεύγη Cooper), δηλαδή  $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n(\mathbf{r})$ . Σημαντικό σημείο της θεωρίας, αποτελεί το γεγονός ότι μπορεί να εφαρμοστεί, για θερμοκρασίες του υπεραγωγού κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης,  $T_c - T \ll T_c$ . Εκμεταλλευόμενοι την θεωρία των μεταβάσεων δευτέρας τάξης, μπορούμε να αναπτύξουμε την ελεύθερη ενέργεια  $F_s$  σε δυνάμεις της παραμέτρου τάξης,  $\Psi(\mathbf{r})$ .

#### Υπεραγωγός απουσία μαγνητικού πεδίου

Θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση, ομογενούς<sup>3</sup> υπεραγωγού απουσία μαγνητικού πεδίου. Σε αυτή την περίπτωση η παράμετρος τάξης  $\Psi$  είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή  $\mathbf{r}$ , και όπως ήδη αναφέραμε, για  $T$  κοντά στην  $T_c$  όπου η μετάβαση από την κανονική στην υπεραγωγίμη κατάσταση είναι μετάβαση δευτέρας τάξης, μπορούμε να αναπτύξουμε την ελεύθερη ενέργεια σε δυνάμεις της ποσότητας  $|\Psi|^2$ .

$$F_{s0} = F_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 \quad (1.21)$$

όπου  $F_n$  η ελεύθερη ενέργεια του υπεραγωγού στην κανονική κατάσταση, απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και  $\alpha, \beta$ , σταθεροί συντελεστές χαρακτηριστικοί για το κάθε υλικό.

Για να υπολογίσουμε την τιμή της  $|\Psi|^2$  για την οποία ελαχιστοποιείται η ελεύθερη ενέργεια, παίρνουμε την συνθήκη ακρότατου:

$$\frac{dF_{s0}}{d|\Psi|^2} = 0 \implies \alpha + \beta|\Psi|^2 = 0 \implies |\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (1.22)$$

Για να υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή της ελεύθερης ενέργειας, αντικαθιστούμε την σχέση 1.22 στην 1.21 και παίρνουμε:

$$F_{s0} - F_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} \quad (1.23)$$

Η παραπάνω έκφραση μας δίνει το κέρδος ενέργειας στην υπεραγωγίμη κατάσταση, απουσία εξωτερικού

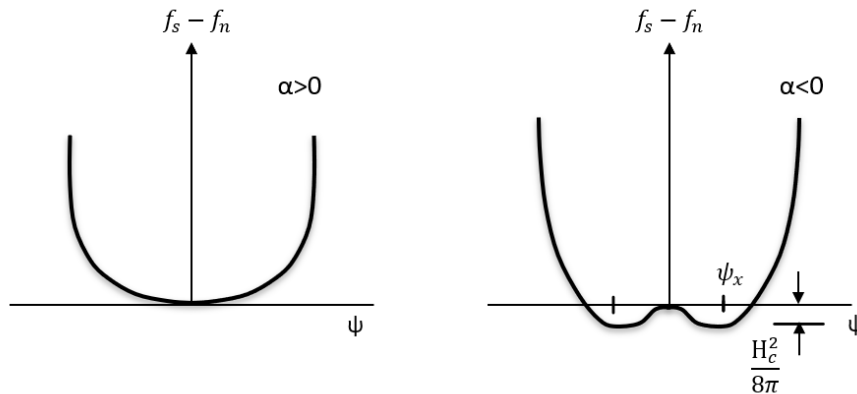
<sup>3</sup>Υλικά για τα οποία η υπεραγωγίμη κατάσταση επεκτείνεται ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο τους. Δεν περιορίζεται σε περιοχές ή διεπιφάνειες του υλικού.

μαγνητικού πεδίου. Από την πλευρά της θερμοδυναμικής γνωρίζουμε ότι:

$$F_n - F_{s0} = \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (1.24)$$

Συνδιάζοντας τις παραπάνω διαφορές, βρίσκουμε μια έκφραση για το κρίσιμο θερμοδυναμικό όριο  $H_c$ :

$$H_c^2 = 4\pi \frac{\alpha^2}{\beta} \quad (1.25)$$



Σχήμα 1.10: Η ελεύθερη ενέργεια  $f_s$  συναρτήσει της κυματοσυνάρτησης  $\Psi$  των υπεραγώγιμων ηλεκτρονίων απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Όσον αναφορά τους συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$ :

- Συντελεστής  $\alpha$ : επειδή η παράμετρος τάξης  $\Psi$  πρέπει να είναι μηδέν για  $T = T_c$  και να λαμβάνει πεπερασμένη τιμή για  $T < T_c$ , από την σχέση 1.22 προκύπτει ότι  $\alpha = 0$  για  $T = T_c$  και  $\alpha < 0$  για  $T < T_c$ . Επομένως μπορούμε να γράψουμε τον συντελεστή  $\alpha$  ως εξής:

$$\alpha \propto T - T_c \quad (1.26)$$

- Συντελεστής  $\beta$ : η έρευνα έχει δείξει πως αποτελεί μια θετική σταθερά,  $\beta > 0$ , με τιμή ανεξάρτητη από την θερμοκρασία,  $T$ .

Για την περίπτωση  $T > T_c$  έχουμε  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$  και η ελεύθερη ενέργεια  $F_{s0}$  παίρνει την μικρότερη τιμή για  $|\Psi|^2 = 0$ , δηλαδή  $F_{s0} = F_n$ . Από την τελευταία έκφραση συμπεραίνουμε πως δεν μπορεί να υπάρξει υπεραγώγιμη κατάσταση για θερμοκρασίες  $T$  μεγαλύτερες από την κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης  $T_c$ , διότι η ελεύθερη ενέργεια του υπεραγωγού ταυτίζεται με την ελεύθερη ενέργεια στην κανονική κατάσταση.

Οι δύο περιπτώσεις που προκύπτουν ανάλογα με το αν ο συντελεστής  $\alpha$  είναι θετικός ή αρνητικός διαφαίνονται στο Σχήμα 1.10.

Συνοψίζοντας, στην συνέχεια της εργασίας θα θεωρούμε πως ο συντελεστής  $\alpha$  θα δίνεται από την σχέση 1.26, δηλαδή θα αλλάζει πρόσημο στο σημείο μετάβασης και ο συντελεστής  $\beta$  θα είναι μια θετική σταθερά.

### 1.3.3 Οι εξισώσεις Ginzburg-Landau

Θα προχωρήσουμε τώρα στην γενικότερη περίπτωση, όπου θεωρούμε υπεραγωγό εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου,  $H_0$ . Για την περιγραφή της υπεραγωγιμότητας είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε,

αντί της ελεύθερης ενέργειας  $F_s$ , το δυναμικό Gibbs που έχει σαν ανεξάρτητες μεταβλητές μακροσκοπικά μεγέθη του συστήματος, όπως την θερμοκρασία του υπεραγωγού  $T$ , και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $H_0$ .

Κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης  $T_c$ , το δυναμικό Gibbs μπορεί να αναπτυχθεί σε δυνάμεις της παραμέτρου τάξης  $|\Psi|$  και συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση του  $H_0$ , η τελική έκφραση έχει ως εξής [5]:

$$G_{sH} = G_n + \int_V \left[ \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{b^2}{2\mu_0} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}_0 \right] dx^3 \quad (1.27)$$

Όπου  $q$ ,  $m$ , το φορτίο και η μάζα του φορέα του υπερρεύματος (ζεύγος Cooper) δηλαδή  $q = -2|e|$  και  $m = 2m_e$ .

- Ο όρος  $G_n$  αποτελεί το δυναμικό Gibbs όταν ο υπεραγωγός βρίσκεται στην κανονική κατάσταση.
- Ο τρίτος όρος εντός του ολοκληρώματος, αναπαριστά την κινητική ενέργεια ενός ζεύγους Cooper. Η έκφραση αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι ισχύει η σχέση:  $m\mathbf{u} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ , όπου  $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ , και καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{m} \left( -i\hbar\nabla - q\mathbf{A} \right) \quad (1.28)$$

Η σχέση 1.28 αντικαθίσταται στην έκφραση της κινητικής ενέργειας,  $\frac{1}{2}m\mathbf{u}^2$  και έτσι προκύπτει ο υπό εξέταση όρος.

- Ο όρος  $\frac{b^2}{2\mu_0}$  αναπαριστά την ενέργεια του μεσοσκοπικού μαγνητικού πεδίου.
- Ο τελευταίος όρος αναφέρεται στην πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου  $H_0$ .

Έχοντας την έκφραση 1.27, βλέπουμε πως το δυναμικό Gibbs είναι συνάρτηση της παραμέτρου τάξης  $|\Psi|^2$  και του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$ , ( $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}$ ). Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις εξισώσεις που δίνουν τις συναρτήσεις  $\Psi(\mathbf{x})$  και  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , έτσι ώστε, αντικαθιστώντας αυτές στην σχέση 1.27 να παίρνουμε την ελάχιστη τιμή του δυναμικού Gibbs,  $G_{sH}$ .

Για να το πραγματοποιήσουμε αυτό, θα πάρουμε την μεταβολή του συναρτησοειδούς  $G_{sH}$  ως προς της μεταβλητές  $\Psi(\mathbf{x})$ ,  $\Psi^*(\mathbf{x})$  και  $\mathbf{A}$  και θα καταλήξουμε στις δύο εξισώσεις της θεωρίας Ginzburg-Landau με τις συνοριακές τους συνθήκες.

Μεταβολή  $G_{sH}$  ως προς  $\Psi^*$

Η μεταβολή του δυναμικού Gibbs για απειροστή μεταβολή της παραμέτρου τάξης θα πρέπει να είναι μηδέν, επομένως:

$$\delta_{\Psi^*} G_{sH} = 0 \quad (1.29)$$

Μέσω της σχέσης 1.27 γράφουμε το δυναμικό Gibbs ως εξής:

$$G_{sH} = G_n + \int_V (\alpha \Psi \Psi^* + \frac{\beta}{2} \Psi \Psi^* \Psi \Psi^* + \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A}) \Psi (i\hbar \nabla - q\mathbf{A}) \Psi^* + \frac{b^2}{1\mu_0} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}_0) dx^3 \quad (1.30)$$

Για απειροστή μεταβολή της  $\Psi^*$ , η μεταβολή της  $G_{sH}$  είναι:

$$\delta_{\Psi^*} G_{sH} = \int_V (\alpha \Psi \delta \Psi^* + \frac{\beta}{2} [\delta(\Psi \Psi^* \cdot \Psi \Psi^*)] + \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla - \mathbf{A}q) \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla - \mathbf{A}q) \Psi) dx^3 \quad (1.31)$$

όπου η ποσότητα  $\delta(\Psi \Psi^* \cdot \Psi \Psi^*)$  μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\delta(\Psi \Psi^* \cdot \Psi \Psi^*) = \delta(\Psi \Psi^*) \Psi \Psi^* + \Psi \Psi^* \delta(\Psi \Psi^*) = \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* = 2\Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* \quad (1.32)$$

Αντικαθιστώντας την (1.32) στην (1.31) σχέση έχουμε:

$$\delta_{\Psi^*} G_{sH} = \int_V (\alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla - \mathbf{A}q) \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla - \mathbf{A}q) \Psi) dx^3 \quad (1.33)$$

Σε αυτό το σημείο για ευκολία θα θέσουμε,  $\mathbf{a} = (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A}) \Psi$  και θα χειριστούμε το τρίτο ολοκλήρωμα της σχέσης (1.33) ξεχωριστά.

$$I_1 = \frac{1}{2m} \int_V ((i\hbar \nabla - \mathbf{A}q) \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla - \mathbf{A}q) \Psi) dx^3 = \frac{1}{2m} \int_V (i\hbar \nabla - \mathbf{A}q) \delta \Psi^* \cdot \mathbf{a} dx^3 \implies$$

$$I_1 = \frac{1}{2m} \int_V i\hbar \nabla (\delta \Psi^*) \mathbf{a} dx^3 - \frac{1}{2m} \int_V \mathbf{A}q \delta \Psi^* \mathbf{a} dx^3$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της ταυτότητας:  $\mathbf{a} \nabla \delta \Psi^* = \nabla \cdot (\delta \Psi^* \mathbf{a}) - \delta \Psi^* \cdot \nabla \mathbf{a}$  και αντικαθιστώντας την, στην σχέση του ολοκληρώματος  $I_1$  έχουμε:

$$I_1 = \frac{1}{2m} \int_V (i\hbar \nabla (\delta \Psi^* \mathbf{a}) - i\hbar \delta \Psi^* \nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{A}q \delta \Psi^* \mathbf{a}) dx^3$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Gauss στο παραπάνω ολοκλήρωμα και έχουμε:

$$I_1 = \frac{1}{2m} \oint_S i\hbar \delta \Psi^* \mathbf{a} dS + \frac{1}{2m} \int_V (-i\hbar \delta \Psi^* \nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{A}q \delta \Psi^* \mathbf{a}) dx^3 \quad (1.34)$$

Αντικαθιστούμε την σχέση  $\mathbf{a} = (-i\hbar \nabla - \mathbf{A}) \Psi$  στην (1.34). Στην συνέχεια αντικαθιστούμε την σχέση (1.34) στην (1.31) και μετά απλές πράξεις καταλήγουμε στην τελική μορφή της μεταβολής του δυναμικού Gibbs για απειροστή μεταβολή της παραμέτρου τάξης,  $\Psi^*$ :

$$\delta_{\Psi^*} G_{sH} = \int_V (\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A})^2 \Psi) \delta \Psi^* + \frac{i\hbar}{2m} \oint_S \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A}) \Psi dS \quad (1.35)$$

Για να ισχύει η σχέση μηδενισμού της μεταβολής του δυναμικού Gibbs, σχέση (1.29), για μια αυθαίρετη,

μη μηδενική συνάρτηση  $\delta\Psi^*$ , θα πρέπει οι όροι εντός των δυο ολοκληρωμάτων της σχέσης (1.35), να είναι μηδέν. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η πρώτη εξίσωση Ginzburg-Landau με την συνοριακή της συνθήκη:

$$\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2\Psi = 0, \quad (1.36)$$

$$(-i\hbar\nabla\Psi - q\mathbf{A}\Psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0,$$

όπου  $\hat{\mathbf{n}}$  το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην επιφάνεια του υπεραγωγού.

Υπολογίζοντας την μεταβολή του δυναμικού Gibbs ως προς την παράμετρο  $\Psi$ , θα καταλήξουμε στην συζυγή έκφραση της σχέσης (1.36), που προφανώς είναι ισοδύναμες.

### Μεταβολή $G_{sH}$ ως προς το διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$

Το δυναμικό Gibbs,  $G_{sH}$ , συναρτήσει του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$ , γράφεται ως εξής:

$$G_{sH} = G_n + \int_V \left[ \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m}|(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} - \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0 \right] dx^3 \quad (1.37)$$

Μεταβάλλοντας το  $G_{sH}$  ως προς το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \delta_A G_{sH} &= \int_V \left[ \frac{1}{2m} \delta[(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})\Psi \cdot (i\hbar\nabla - q\mathbf{A})\Psi^*] + \delta\left[\frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} - \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0\right] \right] dx^3 \implies \\ \delta_A G_{sH} &= \int_V \left[ -\frac{1}{2m} q\Psi \delta A (i\hbar\nabla - q\mathbf{A})\Psi^* + \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})\Psi (-q\delta A)\Psi^* + \nabla \times \delta A \left(\frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} - \mathbf{H}\right) \right] dx^3 \implies \\ \delta_A G_{sH} &= \int_V \left[ \left( \frac{i\hbar q}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{q^2}{m} \mathbf{A} |\Psi|^2 + \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} \right) \delta \mathbf{A} \right] dx^3 - \oint_S \left[ \delta A \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} - \mathbf{H}_0 \right) \right] dS \end{aligned} \quad (1.38)$$

Για την εξαγωγή της τελευταίας εξίσωσης κάναμε χρήση της ταυτότητας:  $\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  και εφαρμόσαμε το θεώρημα Gauss από όπου και προέκυψε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης (1.38).

Για να ισχύει η σχέση  $\delta_A G_{sH} = 0$ , για αυθαίρετο  $\delta A$ , θα πρέπει οι όροι εντός των ολοκληρωμάτων της σχέσης (1.38) να είναι μηδέν.

Θέτοντας την πυκνότητα του υπερρεύματος του υπεραγωγού να δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar q}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q^2}{m} \mathbf{A} |\Psi|^2, \quad (1.39)$$

προκύπτει η δεύτερη εξίσωση Ginzburg-Landau:

$$\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} = \mathbf{J} \stackrel{\mathbf{b}=\nabla \times \mathbf{A}}{\implies} \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.40)$$

που δεν είναι άλλη από τον νόμο Ampere.

Από τον μηδενισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος της σχέσης (1.38) προκύπτει η σχέση:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0}. \quad (1.41)$$



Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις Ginzburg Landau είναι:

$$\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2\Psi = 0,$$

$$\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} = -\frac{i\hbar q}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{q^2}{m}\mathbf{A}|\Psi|^2$$

με συνοριακή συνθήκη:

$$(\nabla\Psi = q\mathbf{A}\Psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0.$$

Η λύση τους δίνει την χωρική μεταβολή της παραμέτρου τάξης  $\Psi$ , του υπερρεύματος  $\mathbf{J}$ , καθώς και την κατανομή του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}$  εντός του υπεραγωγού.

Παρακάτω θα δείξουμε ποία η φυσική σημασία της συνοριακής συνθήκης όσον αφορά την δεύτερη εξίσωση GL. Θεωρούμε πως ο υπεραγωγός βρίσκεται σε επαφή με το κενό ή με ένα δείγμα διηλεκτρικού υλικού. Αρχικά εκφράζουμε την συνοριακή συνθήκη ως προς τον όρο του τελεστή ανάδελτα γράφοντας και την συζυγή της έκφραση:

$$-i\hbar\nabla\Psi = q\mathbf{A}\Psi \quad , \quad i\hbar\nabla\Psi^* = q\mathbf{A}\Psi^*$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σχέσεις στην σχέση του υπερρεύματος  $J$ , ώστε να υπολογίσουμε το ρεύμα στην επιφάνεια του υπεραγωγού:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{i\hbar q}{2m}\Psi^*\nabla\Psi + \frac{i\hbar q}{2m}\Psi\nabla\Psi^* - \frac{q^2}{m}\mathbf{A}|\Psi|^2 \implies$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{q^2}{2m}\Psi^*\Psi\mathbf{A} + \frac{q^2}{2m}\Psi^*\Psi\mathbf{A} - \frac{q^2}{m}\mathbf{A}|\Psi|^2 \implies$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{q^2}{m}\mathbf{A}|\Psi|^2 - \frac{q^2}{m}\mathbf{A}|\Psi|^2 = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο και μας δείχνει πως στο σύνορο των δύο επιφανειών, η κάθετη συνιστώσα του υπερρεύματος  $\mathbf{J}_s$  είναι μηδέν. Με άλλα λόγια δεν θα διέλθει καθόλου υπερρεύμα στο διηλεκτρικό.

### 1.3.4 Χαρακτηριστικά μήκη στους υπεραγωγούς

Η θεωρία Ginzburg-Landau εισάγει δύο ποσότητες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην φαινομενολογική ερμηνεία των φλαξονίων για έναν υπεραγωγό τύπου II, όταν αυτός βρίσκεται στην κατάσταση Abrikosov. Έτσι, τα χαρακτηριστικά μήκη έχουν ως εξής:

- Μήκος διείσδυσης London:

$$\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n q^2} \quad (1.42)$$

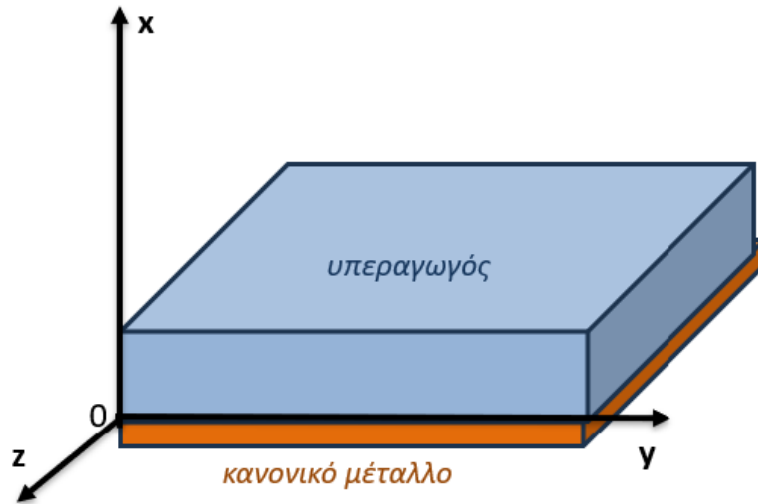
όπου  $n$ ,  $m$ ,  $q$  η πυκνότητα, η μάζα και το φορτίο των φορέων του υπερρεύματος αντίστοιχα. Ουσιαστικά, η ποσότητα  $\lambda$  δηλώνει το μήκος εντός του οποίου παρατηρείται μεταβολή του μαγνητικού πεδίου.

- Μήκος συσχέτισης  $\xi$  (coherence length):

$$\xi^2 = -\frac{\hbar^2}{2m\alpha} \quad (1.43)$$

όπου  $\alpha$ , ποσότητα που έχει οριστεί στην ενότητα (1.3.2) και παίρνει αρνητικές τιμές για την υπεραγώγιμη κατάσταση ( $T < T_c$ ) και θετικές για την κανονική.

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε την φυσική ερμηνεία της ποσότητας  $\xi$  μέσω ενός απλού παραδείγματος. Θεωρούμε απλό μέταλλο σε επαφή με ένα υπεραγωγό. Το γεγονός αυτό θα προκαλέσει μια τοπική μαγνητική επαγωγή στην υπεραγώγιμη πυκνότητα ηλεκτρονίων, κοντά στην επιφάνεια. Με άλλα λόγια, η παράμετρος τάξης  $|\Psi|$  θα πάρει λίγο διαφορετική τιμή στην υπεραγώγιμη επιφάνεια σε σχέση με την τιμή που παίρνει εντός υπεραγωγού,  $|\Psi| = 1$ . Να σημειώσουμε πως θεωρήσαμε ότι η παράμετρος τάξης  $\Psi$  είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα. Αμέσως ανακύπτει το ερώτημα: ποίο είναι το χαρακτηριστικό μήκος εντός του οποίου η παράμετρος τάξης επιστρέφει στην μονάδα;



Σχήμα 1.11: Υπεραγώγιμο δείγμα και κανονικό μέταλλο σε επαφή. Το στρώμα του κανονικού μετάλλου είναι αρκετά λεπτό και βρίσκεται στο επίπεδο  $x = 0$ .

Θεωρούμε πως ο υπεραγωγός εκτείνεται για  $x > 0$  και η επιφάνειά του βρίσκεται στο  $x = 0$  επίπεδο. Ο άξονας  $x$  είναι κάθετος στον υπεραγωγό ενώ σε περιοχή του χώρου  $x < 0$  εκτείνεται το κανονικό μέταλλο, όπως αναπαρίσταται στο σχήμα 1.11. Είναι προφανές πως η  $\Psi$  μπορεί να αλλάζει τιμή μόνο κατά μήκος του  $x$  άξονα,  $\Psi = \Psi(x)$ . Επομένως η πρώτη GL εξίσωση, σχέση (1.36), παίρνει την μορφή:

$$-\xi^2 \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} - \Psi + \Psi^3 = 0 \quad (1.44)$$

Θεωρούμε ότι το στρώμα του κανονικού μετάλλου στην διεπιφάνεια των δύο μέσων είναι αρκετά λεπτό, έτσι ώστε η  $\Psi$  να μην αποκλίνει πολύ από την μονάδα στην υπεραγώγιμη επιφάνεια. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\Psi(x) = 1 - \epsilon(x), \quad \epsilon(x) \ll 1 \quad (1.45)$$

Αντικαθιστώντας την 1.45 στην 1.44 και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς  $\epsilon(x)$ , προκύπτει:

$$\xi^2 \frac{d^2 \epsilon(x)}{dx^2} - 2\epsilon(x) = 0$$

Για  $x \rightarrow \infty$  τότε  $\Psi \rightarrow 1$  και μέσω της σχέσης 1.45 προκύπτει η συνοριακή συνθήκη:  $\epsilon(\infty) = 0$ . Επομένως, η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\epsilon(x) = \epsilon(0) e^{-\sqrt{2}x/\xi} \quad (1.46)$$

Από τις σχέσεις 1.45 και 1.46 άμεσα αντιλαμβανόμαστε πως η ποσότητα  $\xi$  αποτελεί το χαρακτηριστικό μήκος στο οποίο παρατηρείται μεταβολή της παραμέτρου τάξης  $\Psi$ .

Τόσο το μήκος συσχέτισης  $\xi$ , όσο και το μήκος διεσόδου London  $\lambda$  έχουν άμεση θερμοκρασιακή εξάρτηση, η οποία κόντα στην κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης δίνεται από την έκφραση:

$$\xi(T), \lambda(T) \propto (T - T_c)^{-1/2}$$

Τέλος, μια πολύ σημαντική ποσότητα της G.L. θεωρίας αποτελεί η παράμετρος Ginzburg-Landau,  $k = \frac{\lambda}{\xi}$ , η οποία κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας. Για  $k < 1/\sqrt{2}$  ο υπεραγωγός είναι πρώτου είδους, ενώ για  $k > 1/\sqrt{2}$  ο υπεραγωγός είναι δευτέρου είδους.

### 1.3.5 Συμμετρία βαθμίδας και η GL θεωρία

Οι εξισώσεις Ginzburg-Landau, όπως είδαμε προηγουμένως περιέχουν την παράμετρο τάξης  $\Psi$  και το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$ . Όπως είναι γνωστό η επιλογή του  $\mathbf{A}$  δεν είναι μοναδική. Συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi \tag{1.47}$$

όπου  $\phi$  μια βαθμωτή συνάρτηση, δεν αλλάζει το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση:  $\nabla \times \nabla\phi = 0$ .

Για να σιγουρέψουμε ότι τα θεωρητικά αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα της επιλογής του δυναμικού  $\mathbf{A}$ , ή αλλιώς παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, θα πρέπει να δείξουμε ότι οι ίδιες οι εξισώσεις GL ικανοποιούν την παραπάνω συμμετρία.

Μπορούμε να αποδείξουμε πως κάτι τέτοιο ικανοποιείται όταν χρησιμοποιήσουμε τους εξής μετασχηματισμούς για να περάσουμε από τις μεταβλητές  $\Psi$  και  $\mathbf{A}$  στις  $\Psi'$  και  $\mathbf{A}'$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\phi \tag{1.48}$$

$$\Psi' = \Psi \exp(iq\phi/\hbar), \tag{1.49}$$

όπου  $\phi$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της θέσης,  $\phi = \phi(\mathbf{x})$ .

### 1.3.6 Φλαξόνια

#### Κβάντωση μαγνητικής ροής

Όπως ήδη αναφέραμε η σημαντικότητα της θεωρίας Ginzburg-Landau διαφαίνεται από την πρόβλεψη των φλαξονίων στο εσωτερικό των υπεραγωγών δευτέρου είδους, στην κατάσταση Abrikosov. Λόγω της μη γραμμικότητας τους, η επίλυση των εξισώσεων Ginzburg-Landau αποτελεί ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα. Εδώ θα εξετάσουμε μια ειδική περίπτωση (προσέγγιση London), κατά την οποία η φάση της παραμέτρου τάξης εξαρτάται μόνο από τη θέση, είναι δηλαδή της μορφής  $\phi = \phi(x)$ . Μέσω της συγκεκριμένης προσέγγισης θα δείξουμε ότι η μαγνητική ροή εισέρχεται με κβαντισμένο τρόπο σε έναν υπεραγωγό δευτέρου είδους και συγκεκριμένα από κάθε περιοχή (φλαξόνιο), διέρχεται ένα κβάντο μαγνητικής ροής,  $\Phi_0$ .

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση ενός φλαξονίου σε έναν άπειρης έκτασης υπεραγωγό, [3]. Υποθέτουμε ακόμη πως  $k = \lambda/\xi \gg 1$ , οπότε σε αποστάσεις  $\rho \gg \xi$ , το μέτρο της παραμέτρου τάξης θα παραμένει σταθερό,  $|\Psi| = const$ . Αρχικά γράφουμε την παράμετρο τάξης  $\Psi$  στην μορφή:

$$\Psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})e^{i\phi}$$

Θα επιλέξουμε την  $f(x)$  με τέτοιο τρόπο ώστε η παράμετρος τάξης αν είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα δηλαδή  $|\Psi(x)|^2 = 1$ . Έτσι θεωρούμε ότι  $f(x) = 1$  και  $\phi = \phi(x)$  (προσέγγιση London). Σε αυτή την περίπτωση η δεύτερη εξίσωση Ginzburg-Landau 1.40, παίρνει την μορφή:

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{J} = -\frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \phi + \mathbf{A} \right) \quad (1.50)$$

όπου  $\Phi_0 = h/2|e|$ , το κβάντο μαγνητικής ροής. Παίρνοντας τον στροβιλισμό των δύο μελών της σχέσης 1.50 έχουμε:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = -\frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \times \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A} \right) \stackrel{\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}}{\implies} \mathbf{b} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \times \nabla \phi$$

Σε κάθε σημείο μακριά από το κέντρο του φλαξονίου ισχύει η ταυτότητα:  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , όμως στο κέντρο του φλαξονίου η ποσότητα  $\nabla \phi$  απειρίζεται. Για να δούμε τον τρόπο που συμπεριφέρεται η ποσότητα  $\nabla \times \nabla \phi$  στο κέντρο του φλαξονίου, παίρνουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της παραπάνω ποσότητας σε μια κυκλική επιφάνεια, ομόκεντρη με το κέντρο του φλαξονίου και εφαρμόζουμε θεώρημα Stokes.

$$\int \nabla \times \nabla \phi d\mathbf{S} = \oint_C \nabla \phi d\mathbf{l} = 2\pi$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε:  $\nabla \times \nabla \phi \rightarrow \infty$  στο κέντρο του φλαξονίου ενώ το επιφανειακό της ολοκλήρωμα ισούται με  $2\pi$ . Η παραπάνω συμπεριφορά είναι ίδια με την συμπεριφορά της συνάρτησης δέλτα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:  $\nabla \times \nabla \phi = 2\pi\delta(\rho)\hat{\mathbf{e}}_z$ , όπου  $\hat{\mathbf{e}}_z$ : μοναδιαίο διάνυσμα κατά την  $z$ -κατεύθυνση. Τελικά, η εξίσωση που περιγράφει την συμπεριφορά ενός φλαξονίου είναι:

$$\mathbf{b} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \Phi_0 \delta(\rho) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.51)$$

Από την παραπάνω σχέση θα προκύψει μια πολύ σημαντική ιδιότητα όσον αφορά το μαγνητικό πεδίο ενός φλαξονίου. Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση ως προς μια άπειρη επιφάνεια κάθετη στο  $\hat{\mathbf{e}}_z$  - διάνυσμα και εφαρμόζουμε το θεώρημα Stokes:

$$\int_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} + \lambda^2 \int_{\rho \rightarrow \infty} \nabla \times \nabla \times \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho \rightarrow \infty} \Phi_0 \delta(\rho) \hat{\mathbf{e}}_z \cdot d\mathbf{S} \implies$$

$$\Phi + \lambda^2 \oint_C \nabla \times \mathbf{b} \cdot d\rho = \Phi_0 \implies$$

$$\Phi = \Phi_0$$

Στο τελευταίο βήμα λάβαμε υπόψη μας ότι το μαγνητικό πεδίο σε άπειρη απόσταση ( $\rho \rightarrow \infty$ ) από το κέντρο του φλαξονίου είναι μηδέν.

Τελικά δείξαμε πως η μαγνητική ροή του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{b}$ , που διέρχεται από ένα φλαξόνιο είναι ίση με το κβάντο της μαγνητικής ροής  $\Phi_0 = h/2|e|$ .

### Μαγνητικό πεδίο Φλαξονίου

Όπως ήδη αναφέραμε τα φλαξόνια είναι εντοπισμένες περιοχές, που μπορούν να προσομοιαστούν με κύλινδρο ακτίνας  $\xi$ , γύρω από τον πυρήνα του οποίου κυκλοφορεί ρεύμα σε χαρακτηριστικό μήκος  $\lambda$ . Η εξίσωση που περιγράφει το μαγνητικό πεδίο ενός φλαξονίου είναι η 1.51. Εφαρμόζοντας την ταυτότητα:  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{b}) - \nabla^2 \mathbf{b}$  καθώς και την σχέση  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ , η συγκεκριμένη σχέση γίνεται:

$$\mathbf{b} - \lambda^2 \nabla^2 \mathbf{b} = \Phi_0 \delta(\rho) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.52)$$

Για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου του φλαξονίου θα θεωρήσουμε την απλούστερη περίπτωση απείρου υπεραγωγού και πως το φλαξόνιο εκτείνεται κατά μήκος του  $z$  άξονα. Το πρόβλημα παρουσιάζει αξιωματική συμμετρία και συμμετρία μετατόπισης κατά τον άξονα  $z$ . Επομένως το μαγνητικό πεδίο του φλαξονίου θα έχει μόνο ακτινική εξάρτηση,  $\mathbf{b} = b(\rho) \hat{\mathbf{e}}_z$ . Συνεπώς, η σχέση 1.52 θα λάβει την εξής μορφή:

$$b(\rho) - \lambda^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial b}{\partial \rho} \right) = \Phi_0 \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \implies \frac{d^2 b}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{db}{d\rho} - \frac{1}{\lambda^2} b = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \quad (1.53)$$

Η παραπάνω, πρόκειται για μια μη ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης. Η λύση της θα είναι το άθροισμα της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μίας μερικής λύσης. Η ομογενής εξίσωση έχει την μορφή:

$$\frac{d^2 b}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{db}{d\rho} - \frac{1}{\lambda^2} b = 0$$

Πρόκειται για μια τροποποιημένη εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης,  $n = 0$ , με γενική λύση:

$$b_0(\rho) = C_1 I_0 \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) + C_2 K_0 \left( \frac{\rho}{\lambda} \right)$$

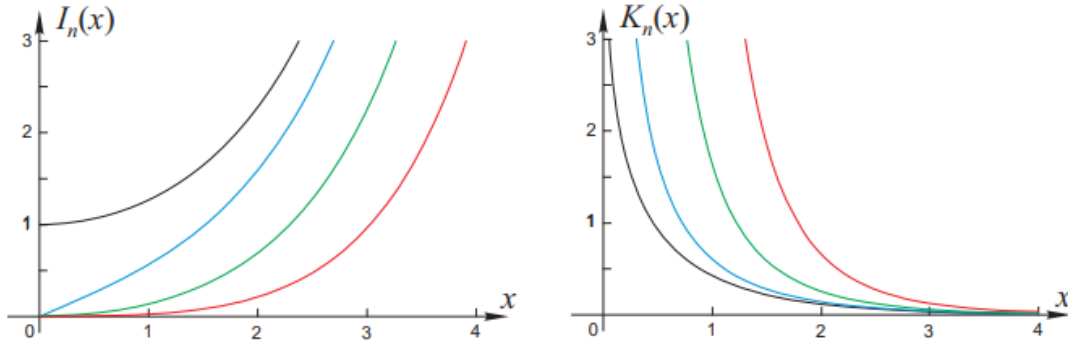
όπου  $C_1, C_2$  αυθαίρετες σταθερές και  $I_0, K_0$  οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Όσον αφορά την μερική λύση, εκείνη θα πρέπει να ικανοποιεί την αρχική μας εξίσωση:  $\mathbf{b} - \lambda^2 \nabla^2 \mathbf{b} = \Phi_0 \delta(\rho) \hat{\mathbf{e}}_z$ . Ταυτοχρόνως, γνωρίζουμε ότι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel δεύτερου είδους ικανοποιεί την εξίσωση:  $K_0(\rho) - \nabla^2 K_0(\rho) = 2\pi\delta(\rho)$ . Συνυπολογίζοντας τα παραπάνω καταλαβαίνουμε πως η μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$b_\mu(\rho) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(\rho/\lambda)$$

Επομένως η λύση της (1.53) θα είναι της παρακάτω μορφής:

$$b(\rho) = b_0(\rho) + b_\mu(\rho) \implies b(\rho) = C_1 I_0(\rho/\lambda) + C_2 K_0(\rho/\lambda) + \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(\rho/\lambda) \quad (1.54)$$

Η σχέση 1.54 μας δίνει το μαγνητικό πεδίου ενός φλαξονίου εντός απείρου υπεραγωγού. Εκμεταλλευόμενοι



Σχήμα 1.12: Γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων  $I_n(x)$  και  $K_n(x)$  για διαφορετικές τιμές του  $n$ . Για  $n = 0$ , μαύρες καμπύλες.

την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων  $K_0(x)$ ,  $I_0(x)$ , που η γραφική τους αναπαράσταση δίνεται στο Σχήμα 1.12, και συγκεκριμένα τις σχέσεις:  $K_0(x) \propto \ln 2 - 0.5772 - \ln(x)$ ,  $x \ll 1$  και  $K_0(x) \propto e^{-x}/\sqrt{x}$ ,  $x \gg 1$ , μπορούμε να καταλήξουμε στις εκφράσεις για το πως διαμορφώνεται το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του φλαξονίου καθώς και πολύ μακριά από αυτό. Για μεγάλες αποστάσεις από το κέντρο του φλαξονίου, το μαγνητικό πεδίο μειώνεται εκθετικά σύμφωνα με την σχέση:

$$b(\rho) = \frac{\Phi_0}{4\lambda^2}(\lambda/\rho)e^{-\rho/\lambda}, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (1.55)$$

Εκθετική μείωση του μαγνητικού πεδίου γίνεται αισθητή εντός του χαρακτηριστικού μήκους διεύδυσης  $\lambda$  από το κέντρο του φλαξονίου. Στο κέντρο του φλαξονίου, η σχέση 1.54 προβλέπει απειρισμό του μαγνητικού πεδίου της μορφής:

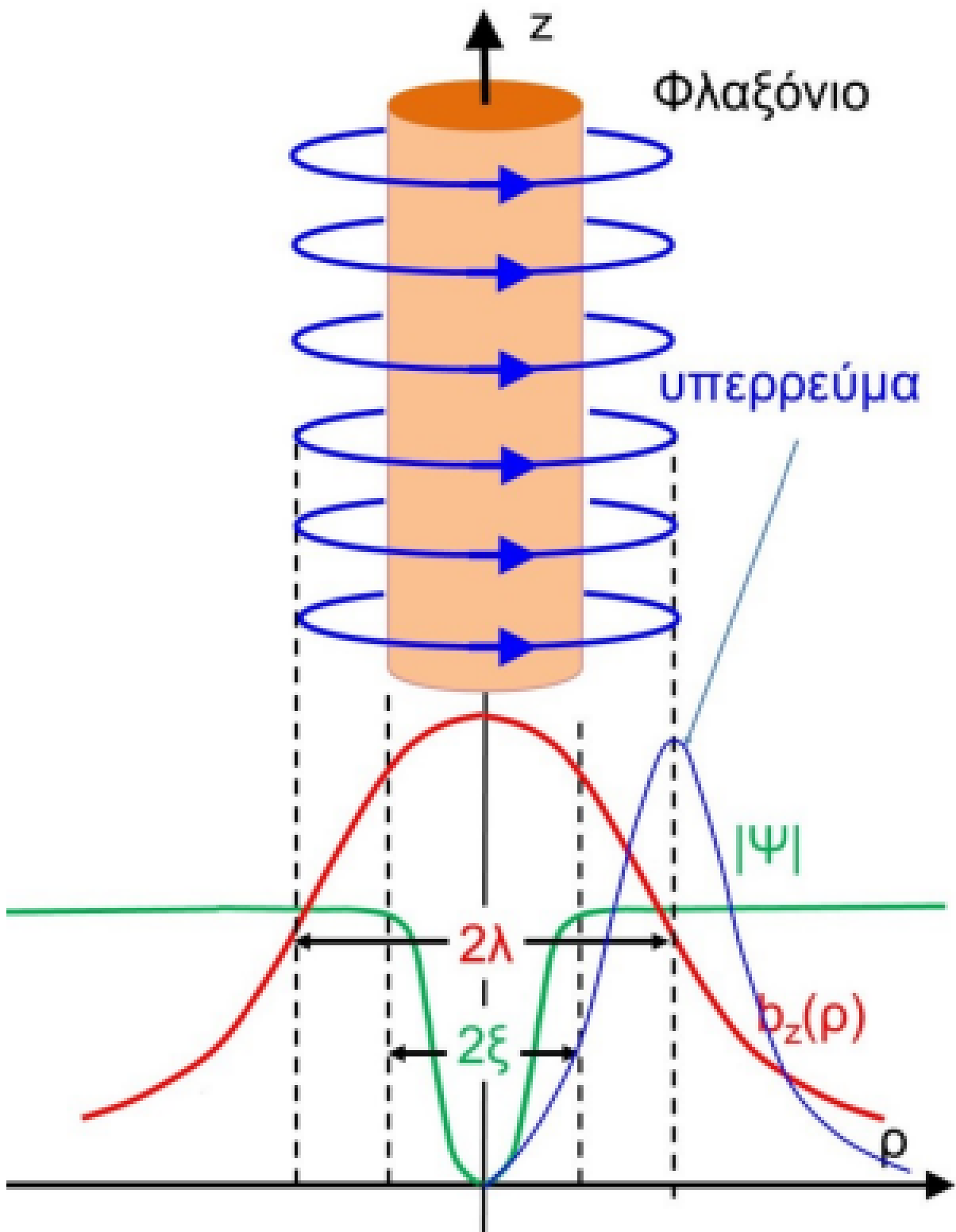
$$b(\rho) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}(\ln(\lambda/\rho) + 0.12), \quad \xi \ll \rho \ll \lambda$$

Στην πραγματικότητα ένας τέτοιος απειρισμός δεν ισχύει. Σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε πως το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του φλαξονίου είναι ίδιο με αυτό σε ακτίνα  $\xi$ .

$$b(\rho) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}(\ln(\lambda/\xi) + k_1) \approx 2B_{c1}, \quad (1.56)$$

όπου  $k_1$  μια σταθερά που εξαρτάται από τον λόγο Ginzburg-Landau,  $k = \lambda/\xi$ . Να σημειώσουμε πως για τον ορθό υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου φλαξονίου θα πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις Ginzburg-Landau, οι οποίες λαμβάνουν υπόψιν την μεταβολή της παραμέτρου τάξης  $\Psi$  με το  $\rho$  εντός του φλαξονίου.

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με το Σχήμα 1.13, ένα φλαξόνιο σε υπεραγωγό δευτέρου είδους αναπαρίσταται ως κύλινδρος εντός του οποίου εισέρχεται ένα κβάντο μαγνητική ροή,  $\Phi_0$ . Γύρω από το φλαξόνιο κυκλοφορεί υπερρεύμα, του οποίου η πυκνότητα γίνεται μέγιστη σε απόσταση  $\lambda$  από τον πυρήνα του φλαξονίου. Στον πυρήνα του φλαξονίου η παράμετρος τάξης μηδενίζεται σε χαρακτηριστική απόσταση  $\xi$  και τέλος το μαγνητικό πεδίο  $b(\rho)$  μειώνεται σημαντικά σε απόσταση  $\lambda$  από τον πυρήνα του.



Σχήμα 1.13: Δομή φλαξονίου σε υπεραγωγό δευτέρου είδους[8].





## Κεφάλαιο 2

### Υπεραγωγοί με ατέλειες

#### 2.1 Κρίσιμο ρεύμα στους υπεραγωγούς δευτέρου είδους

Θεωρούμε έναν υπεραγωγό δευτέρου είδους ο οποίος τοποθετείται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}$ , τέτοιο ώστε  $H_{c1} < H < H_{c2}$ . Τότε ο υπεραγωγός θα βρίσκεται στην κατάσταση Abrikosov (μικτή κατάσταση)<sup>1</sup>. Επίσης θεωρούμε πως διοχετεύεται ρεύμα σε αυτόν, που προέρχεται από εξωτερική πηγή, πυκνότητας  $J_{ext}$  και κατεύθυνσης κάθετης στο μαγνητικό πεδίο των φλαξονίων. Τότε ένα φλαξόνιο δέχεται δύναμη ανά μονάδα μήκους τύπου Lorentz  $\mathbf{F}_L = \mathbf{J}_{ext} \times \Phi_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ , όπου  $\Phi_0 = h/2|e|$ , το κβάντο μαγνητικής ροής. Θεωρήσαμε πως το μαγνητικό πεδίο του φλαξονίου έχει μόνο  $\hat{\mathbf{e}}_z$  συνιστώσα. Αν θεωρήσουμε την μέση μαγνητική επαγωγή πολλών φλαξονίων  $\mathbf{B}$  τότε η δύναμη Lorentz ανά μονάδα όγκου θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J}_{ext} \times \mathbf{B}.$$

Αν ο υπεραγωγός είναι ομογενής δηλαδή χωρίς ατέλειες τότε τα φλαξόνια θα μετακινηθούν για απειροστά μικρή δύναμη Lorentz. Στην περίπτωση όμως που ο υπεραγωγός είναι μη ομογενής τότε τα φλαξόνια δεσμεύονται από τις κρυσταλλικές ατέλειες του υλικού προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η ελεύθερη ενέργεια του συστήματος. Η δύναμη που τους ασκείται ονομάζεται δύναμη καρφώματος,  $\mathbf{F}_b$ . Όσο η δύναμη Lorentz είναι μικρότερη από την δύναμη καρφώματος τότε τα φλαξόνια δεν μετακινούνται. Ωστόσο σε μια κρίσιμη τιμή ρεύματος  $\mathbf{J}_c$  θα ισχύει:  $\mathbf{F}_L > \mathbf{F}_b$  και επομένως τα φλαξόνια θα αρχίσουν να μετακινούνται.

Στην περίπτωση ενός ιδανικού ομογενούς υπεραγωγού, η κρίσιμη τιμή ρεύματος  $\mathbf{J}_c$  θα είναι μηδέν. Αντίθετα για έναν μη ομογενή υπεραγωγό δευτέρου είδους, που περιέχει διάφορους τύπους ατελειών θα λαμβάνει πεπερασμένη τιμή. Η κρίσιμη τιμή ρεύματος  $\mathbf{J}_c$  εξαρτάται άμεσα από την δομή του υλικού και σε πολλούς υπεραγωγούς λαμβάνει αρκετά μεγάλη τιμή της τάξης των  $10^6 \text{ A/cm}^2$ .

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια αιτία κίνησης των φλαξονίων είναι όταν το εξωτερικό ρεύμα που διατρέχει τον υπεραγωγό δευτέρου είδους γίνει μεγαλύτερο από μια κρίσιμη τιμή ρεύματος  $\mathbf{J}_c$ . Μια δεύτερη αιτία κίνησης είναι η θερμική ενεργοποίηση του πλέγματος των φλαξονίων. Στην συνέχεια θα δείξουμε πώς η κίνηση αυτή των φλαξονίων δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$ . Θεωρούμε μια δέσμη φλαξονίων που περικλείεται από καμπύλη  $C(t)$ . Η μαγνητική ροή που εισέρχεται από κάθε επιφάνεια που έχει σαν σύνορο την καμπύλη  $C(t)$  είναι σταθερή διότι τόσο ο αριθμός των φλαξονίων παραμένει σταθερός εντός της καμπύλης, όσο και η μαγνητική ροή κάθε φλαξονίου,  $\Phi_0$ . Εφαρμόζουμε την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Faraday για κάθε επιφάνεια που έχει σαν σύνορο την προαναφερόμενη καμπύλη  $C(t)$  και έχουμε:

$$\mathcal{E}_m = \oint_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x} = -\frac{d\Phi}{dt} \implies \mathcal{E}_m = 0$$

<sup>1</sup>Για την συγγραφή αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιήσαμε τις αναφορές [3],[4], [5], [6],[7] [8], [9].

άρα,

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} \quad (2.1)$$

όπου  $v$  η ταχύτητα κίνησης των φλαξονίων. Η σχέση 2.1, αποδείχθηκε από τον Josephson και δείχνει πως η κίνηση των φλαξονίων δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$ , στον υπεραγωγό.

## 2.2 Φαινομενολογική συμπεριφορά υπεραγωγών δευτέρου είδους

Μια πολύ σημαντική ποσότητα για την περιγραφή των υπεραγωγών, η οποία μπορεί να μετρηθεί εύκολα στο εργαστήριο είναι η μαγνητική ροπή  $\mathbf{m}$ . Για έναν υπεραγωγό δευτέρου είδους που τοποθετείται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο,  $\mathbf{H}$ , η ποσότητα  $\mathbf{m}$  μπορεί να υπολογιστεί μέσω των εξισώσεων Maxwell και κάνοντας χρήση μιας φαινομενολογικής έκφρασης για την ταχύτητα κίνησης των φλαξονίων.

Όσο αναφορά τις εξισώσεις Maxwell θεωρούμε πως το πρώτο κρίσιμο μαγνητικό πεδίο  $H_{c1}$  είναι πολύ μικρότερο από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $H$  στο οποίο τοποθετείται ο υπεραγωγός, δηλαδή  $H \gg \gg H_{c1}$  παντού στο χώρο. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  και  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εντός του υπεραγωγού.

Αγνοώντας το ρεύμα μετατόπισης, οι εξισώσεις Maxwell που περιγράφουν το πρόβλημα μαζί με την σχέση 2.1 είναι:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \implies \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} \quad (2.5)$$

Η ταχύτητα των φλαξονίων  $\mathbf{v}$ , λόγω της θερμικής τους ενεργοποίησης δίνεται από τον τύπο του Arrhenius:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-\frac{U(\mathbf{J})}{k_B T}} \quad (2.6)$$

Όπου  $U(\mathbf{J})$  το δυναμικό καρφώματος των φλαξονίων. Στην γενικότερη περίπτωση ο παραπάνω ενεργειακός φραγμός έχει άμεση εξάρτηση από το ρεύμα  $\mathbf{J}$  που διατρέχει τον υπεραγωγό. Αντικαθιστώντας την σχέση 2.6 στην 2.5 προκύπτει πως οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου έχουν την εξής μορφή:

$$E = E_c e^{-\frac{U(\mathbf{J})}{k_B T}} \quad (2.7)$$

Για το δυναμικό καρφώματος των φλαξονίων, θα χρησιμοποιήσουμε μια φόρμουλα δυναμικού από την βιβλιογραφία, η οποία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πλήθος πειραμάτων:

$$U(J) = U_0 \frac{(J_c/J)^\alpha - 1}{\alpha} \quad (2.8)$$

Όπου  $\alpha$  σταθερά και  $J_c$  η κρίσιμη τιμή ρεύματος. Από την παραπάνω σχέση, παρατηρούμε πως όταν το ρεύμα του υπεραγωγού γίνει ίσο με την κρίσιμη τιμή ρεύματος,  $J = J_c$ , τότε το δυναμικό καρφώματος των

φλαξονίων μηδενίζεται,  $U(J_c) = 0$ . Αυτή η παρατήρηση είναι αναμενόμενη σύμφωνα με την περιγραφή του πραγματοποιήθηκε στην ενότητα (2.1). Παρακάτω θα διακρίνουμε περιπτώσεις δυναμικού καρφώματος φλαξονίων ανάλογα με την τιμή που παίρνει η σταθερά  $\alpha$  και θα βρούμε τον νόμο ρεύματος τάσης,  $E = E(J)$ , αντίστοιχα για την κάθε περίπτωση.

- Για  $\alpha = -1$  έχουμε την περίπτωση του μοντέλου Kim-Anderson:

$$U(J) = U_0 \left(1 - \frac{J}{J_c}\right)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην 2.7, προκύπτει η εξής σχέση τάσης-ρεύματος:

$$E(J) = E_c \exp \left[ \frac{U_0}{k_B T} (1 - J/J_c) \right]$$

- Για  $\alpha = 1$  ,μέσω της σχέσης 2.8 το δυναμικό  $U(J)$  γίνεται:

$$U(J) = U_0 \left(\frac{J_c}{J} - 1\right)$$

και η σχέση τάσης ρεύματος:

$$E(J) = E_c \exp \left[ \frac{U_0}{k_B T} (J_c/J - 1) \right]$$

- Για  $\alpha \rightarrow 0$  θα έχουμε:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} U(J) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_0 \frac{(J_c/J)^\alpha - 1}{\alpha} \stackrel{0}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_0 \left(\frac{J_c}{J}\right)^\alpha \ln\left(\frac{J_c}{J}\right) \implies$$

$$U_{\alpha \rightarrow 0} = U_0 \ln \frac{J_c}{J} \quad (2.9)$$

Αντικαθιστώντας την 2.9 εξίσωση στην 2.7 παίρνουμε την εξής σχέση τάσης-ρεύματος:

$$E(J) = E_c e^{-\frac{U_0}{k_B T} \ln \frac{J_c}{J}} \implies E(J) = E_c \exp \left[ \{\ln(J/J_c)\} U_0/k_B T \right]$$

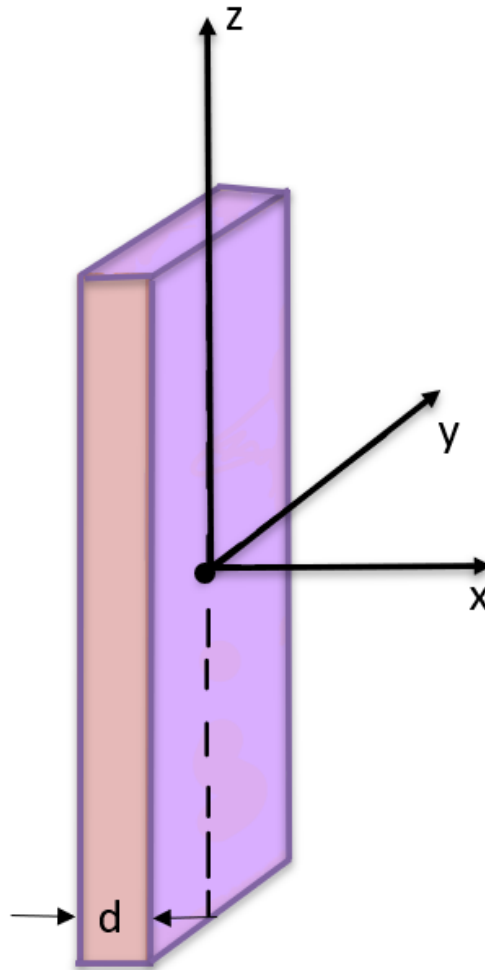
Θέτοντας όπου  $n = U_0/k_B T$  και κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις, καταλήγουμε στην τελική έκφραση:

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c}\right)^n \quad \text{με} \quad n = \frac{U_0}{k_B T} > 0 \quad (2.10)$$

Από τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις σχέσεων τάσης ρεύματος,  $E = E(J)$ , αυτή που παρατηρείται στα περισσότερα υπεραγωγία υλικά και επομένως θα θεωρούμε στην συνέχεια της εργασίας μας είναι η τελευταία. Αναλόγως με την τιμή που λαμβάνει η σταθερά  $n$  η σχέση 2.10 αποκτά είτε γραμμική είτε μη γραμμική συμπεριφορά και το δείγμα που εξετάζουμε συμπεριφέρεται ως αγωγός και ως υπεραγωγός, αντίστοιχα. Παρακάτω θα γίνει η ανάλυση των μοντέλων ανάλογα με την τιμή του  $n$ .

### Υπεραγωγίμη πλάκα εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $H_{ext}$

Σε αυτό το σημείο θα επιχειρήσουμε να επιλύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις Maxwell για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα υπεραγωγίμου δείγματος. Θεωρούμε άπειρη υπεραγωγίμη πλάκα παράλληλη στο  $y - z$  επίπεδο,



Σχήμα 2.1: Άπειρη υπεραγώγιμη πλάκα παράλληλη στο  $y - z$  επίπεδο

πάχους  $d$ , Σχήμα 2.1. Το μαγνητικό πεδίο εντός και εκτός πλάκας θα είναι παράλληλο με τον  $z$ -άξονα και για λόγους συμμετρίας θα εξαρτάται μόνο από την  $x$  συντεταγμένη. Το ηλεκτρικό πεδίο και το ρεύμα θα έχουν μόνο  $y$  συνιστώσα και θα εξαρτώνται επίσης μόνο από την  $x$  συντεταγμένη. Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\mathbf{H} = H(x, t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{J} = J(x, t)\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{E} = E(x, t)\mathbf{e}_y$$

Επίσης θεωρούμε πως ισχύουν οι εξής σχέσεις:  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$  και  $\mathbf{E} = E_c(J/J_c)^n\mathbf{J}/J$ . Έτσι από τις εξισώσεις Maxwell 2.3 και 2.4 έχουμε :

$$2.3 \implies \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$2.4 \implies \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = -J(x, t) \quad (2.12)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση  $E = E_c(J(x, t)/J_c)^n$  στην 2.1 έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ E_c \left( \frac{J(x, t)}{J_c} \right)^n \right] = -\mu_0 \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}$$

Για να καταλήξουμε στη τελική έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο  $H(x, t)$  εντός της υπεραγωγίσιμης πλάκας αντικαθιστούμε στην παραπάνω την έκφραση για την πυκνότητα ρεύματος  $J(x, t)$ , που δίνεται από την έκφραση 2.12 και έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ E_c \left( \frac{\partial H(x, t)/\partial x}{J_c} \right)^n \right] = -\mu_0 \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} \quad (2.13)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να θεωρήσουμε πως το μαγνητικό πεδίο  $H$  μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση:  $H(x, t) = h(x, t) + H_{ext}(t)$ , όπου  $H_{ext}$  το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο οποίο τοποθετείται η υπεραγωγίσιμη πλάκα το οποίο θεωρούμε πως είναι μόνο συνάρτηση του χρόνου και  $\mathbf{h}(x, t) = h(x, t)\hat{\mathbf{e}}_z$  ένα διανυσματικό πεδίο το οποίο παίζει το ρόλο του τοπικού μαγνητικού πεδίου. Θεωρώντας πως ο αριθμός  $n$  είναι περιττός και κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις, η τελική μορφή που λαμβάνει η σχέση 2.13 είναι:

$$\frac{E_c}{\mu_0 J_c^n} n \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{dH_{ext}(t)}{dt} = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \quad (2.14)$$

Η τοπική μαγνήτιση  $h(x, t)$  περιγράφεται από την παραπάνω μη γραμμική εξίσωση διάχυσης, 2.14. Για την επίλυση της θα πρέπει να ικανοποιούνται, η αρχική συνθήκη:

$$h(x, 0) = 0. \quad -d/2 \leq h(x, t) \leq d/2$$

και οι συνοριακές συνθήκες:

$$h(-d/2, t) = h(d/2, t) = 0$$

Όσον αναφορά την μαγνητική ροπή της υπεραγωγίσιμης πλάκας αυτή υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}(x, t) dV \quad (2.15)$$

Για τον υπολογισμό της ποσότητας  $\mathbf{m}$  απαιτείται η εύρεση του υπεραγωγίσιμου ρεύματος  $\mathbf{J}$ . Ο υπολογισμός του γίνεται μέσω της σχέσης 2.12, αντικαθιστώντας σε αυτήν την γνωστή πλέον σχέση για το μαγνητικό πεδίο  $H(x, t)$ .

Παρακάτω θα δούμε πως, για συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς  $n$ , η εξίσωση 2.14 λαμβάνει συγκεκριμένη μορφή που καθιστά εύκολη την επίλυση της. Επίσης θα υπολογίσουμε την τιμή που λαμβάνει σε κάθε περίπτωση η μαγνητική ροπή  $\mathbf{m}$ , διότι είναι ένα φυσικό μέγεθος εύκολα πειραματικά μετρήσιμο και θα το χρησιμοποιήσουμε σε επόμενο κομμάτι της εργασίας, στο οποίο θα αναπτύξουμε το κύριο ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε.

## 2.2.1 Το μοντέλο Bardeen-Stephen

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, θα θεωρήσουμε πως οι υπεραγωγοί που εξετάζουμε, περιγράφονται από την σχέση τάσης-ρεύματος:

$$\mathbf{E} = E_c \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{J}$$

όπου  $n = U_0/k_B T > 0$ .

Για την περίπτωση όπου  $n = 1$  έχουμε το πρότυπο Bardeen-Stephen και η παραπάνω σχέση περιγράφει ωμική συμπεριφορά. Δηλαδή η τάση  $E$  και το ρεύμα  $J$  παρουσιάζουν γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους, της μορφής:  $\mathbf{E} = \rho_f \mathbf{J}$ , όπου  $\rho_f = E_c/J_c$ . Το συγκεκριμένο μοντέλο υποθέτει πως ο πυρήνας κάθε φλαξονίου είναι πεπερασμένος με ακτίνα ίση με το μήκος συσχέτισης  $\xi$  ενώ ταυτόχρονα βρίσκεται στην κανονική κατάσταση. Αυτή η μετάβαση στην κανονική κατάσταση οφείλεται στην παρουσία διαδικασιών αντίστασης

σε κάθε πυρήνα φλαξονίου. Το συγκεκριμένο μοντέλο καταλήγει στην παρακάτω εξίσωση:

$$\rho_f \approx \rho_n \frac{H}{H_{c2}} \quad (2.16)$$

Όπου  $\rho_f$  η αντίσταση λόγω της ροής των φλαξονίων και  $\rho_n$  η αντίσταση που παρουσιάζει ο υπεραγωγός στην κανονική κατάσταση.

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, της άπειρης υπεραγωγίμης πλάκας εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $H_{ext}$ , από την σχέση 2.11 και την σχέση  $\mathbf{E} = \rho_f \mathbf{J}$  προκύπτει:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} \implies \frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{\rho_f} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}$$

Στην παραπάνω, όπου  $J$  αντικαθιστούμε την έκφραση που δίνεται από την σχέση 2.12 και έχουμε:

$$\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu_0}{\rho_f} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} \quad (2.17)$$

Επομένως για την περίπτωση του μοντέλου Bardeen-Stephen ( $n = 1$ ) το μαγνητικό πεδίο εντός της πλάκας ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση διάχυσης με σταθερά διάχυσης:  $D = \rho_f / \mu_0$ .

## 2.2.2 Το κρίσιμο μοντέλο του Bean

Μια πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση, με την οποία θα ασχοληθούμε και στην συνέχεια της εργασίας είναι αυτή του κρίσιμου μοντέλου Bean[12], η οποία περιγράφεται για  $n \rightarrow \infty$ . Το μοντέλο του Bean περιγράφει ικανοποιητικά την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά υπεραγωγών δευτέρου είδους που παρουσιάζουν ισχυρή δέσμευση φλαξονίων. Στο εσωτερικό του υπεραγωγού μπορούμε να έχουμε μόνο τις καταστάσεις  $J = 0$  και  $J = \pm J_c$  ή κάποιο συνδυασμό τους. Σε αυτή την περίπτωση λέμε πως ο υπεραγωγός βρίσκεται στην κρίσιμη κατάσταση αναφερόμενοι στην χωρική κατανομή των φλαξονίων.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, το υπό εξέταση δείγμα είναι μια πλάκα απείρου μήκος η οποία εκτίθεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $H_{ext}$ , παράλληλο στον  $z$  άξονα, Σχήμα 2.1. Η ανάλυση του προβλήματος, η οποία παρουσιάστηκε στην ενότητα (2.2), έγινε με την προϋπόθεση ότι  $H \gg H_{c1}$  ή αλλιώς  $H_{c1} \rightarrow 0$ , δηλαδή θεωρήσαμε πως το δείγμα βρίσκεται στην κατάσταση Abrikosov με πολύ μικρή τιμή πρώτου κρίσιμου μαγνητικού πεδίου. Τελικά καταλήξαμε στην εξίσωση 2.13, μέσω της οποίας παρατηρούμε πως αν  $\frac{\partial H(x, t) / \partial x}{J_c} < 1$  ή  $\frac{\partial H(x, t) / \partial x}{J_c} > 1$  για  $n \rightarrow \infty$ , τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα από την ίδια την εξίσωση. Η μόνη περίπτωση για την οποία η εξίσωση 2.13 έχει νόημα είναι όταν:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial H(x, t) / \partial x}{J_c} \right)^n = \pm 1 \implies$$

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = \pm J_c \quad (2.18)$$

Από την σχέση 2.12 έχουμε:

$$|J| = J_c \quad (2.19)$$

Από την παραπάνω εξίσωση 2.19 βλέπουμε πως στην περίπτωση της κρίσιμης κατάστασης ( $n \rightarrow \infty$ ), η πυκνότητα ρεύματος που διαρρέει τον υπεραγωγό είναι ίδια σε όλες τις περιοχές του δείγματος και ίση με την κρίσιμη τιμή ρεύματος  $J_c$ , ανεξάρτητη από την τιμή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $H_{ext}$ . Θα

πρέπει επίσης να τονίσουμε πως σύμφωνα με το κρίσιμο μοντέλο του Bean, η κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος  $J_c(B)$  είναι σταθερή χωρίς να ληφθεί υπόψη η επίδραση που έχουν τυχόν χωρικές μεταβολές της μαγνητικής επαγωγής  $B$  σε αυτήν.

Από την σχέση 2.18 βλέπουμε πως τα φλαξόνια διατάσσονται με τέτοιο τρόπο στον χώρο έτσι ώστε η κλίση του μαγνητικού πεδίου  $H$ , και συνεπώς η κλίση της μαγνητικής επαγωγής  $B$ , ( $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ) να είναι σταθερή και να ισούται με την κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος.

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x} \right| = J_c$$

Επειδή η πυκνότητα ρεύματος είναι σταθερή το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας θα μεταβάλλεται γραμμικά στο τμήμα που διαρρέεται από ρεύμα. Επομένως το προφίλ που θα ακολουθεί το μαγνητικό πεδίο εντός και εκτός της υπεραγώγιμης πλάκας πάχους  $d$  θα είναι :

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } |x| < x_B, \\ J_c(|x| - x_B), & \text{αν } x_B \leq x \leq \frac{d}{2}, \\ H_{ext}, & \text{αν } |x| > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

όπου  $x_B$  είναι το μήκος διείσδυσης το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο εκείνο που έχει διεισδύσει το μαγνητικό πεδίο μέσα στην πλάκα. Όπως βλέπουμε από την παραπάνω έκφραση, πέρα από το μήκος διείσδυσης  $x_B$  το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν και επομένως δεν υπάρχουν φλαξόνια. Στις περιοχές που υπάρχουν φλαξόνια αυτά κατανέμονται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε το μαγνητικό πεδίο να μεταβάλλεται γραμμικά με το  $x$ , και τελικώς υπάρχει απόκλιση από το εξαγωνικό πλέγμα.

Για τον υπολογισμό του  $x_B$  θα εκμεταλλευτούμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος μας. Συγκεκριμένα στην επιφάνεια της πλάκας παρατηρείται συνέχεια του μαγνητικού πεδίου. Έτσι για  $x = d/2$  έχουμε:

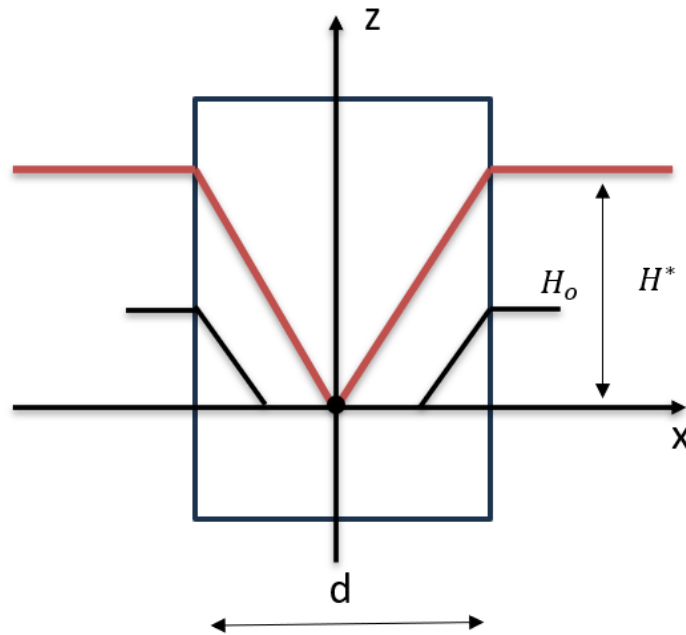
$$H(d/2) = J_c(d/2 - x_B) \xrightarrow{H(d/2)=H_{ext}} H_{ext} = J_c(d/2 - x_B) \implies$$

$$x_B = \frac{H^* - H_{ext}}{J_c} \quad (2.20)$$

Όπου  $H^*$  θέσαμε την έκφραση:

$$H^* = \frac{J_c d}{2} \quad (2.21)$$

η οποία πρόκειται για το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που απαιτείται ώστε το μαγνητικό πεδίο και συνεπώς τα φλαξόνια να διεισδύσουν στο κέντρο της πλάκας,  $x = 0$ . Η συγκεκριμένη τιμή μαγνητικού πεδίου ονομάζεται μαγνητικό πεδίο πλήρους διείσδυσης και για τη γεωμετρία της άπειρης πλάκας δίνεται από την σχέση 2.21. Η περιγραφή των παραπάνω αναπαρίσταται στο Σχήμα 2.2. Να σημειώσουμε πως παρακάτω που θα ασχοληθούμε και με άλλες γεωμετρίες όπως η κυλινδρική, το μαγνητικό πεδίο πλήρους διείσδυσης  $H^*$  θα δίνεται από διαφορετική σχέση.



Σχήμα 2.2: Κατανομή μαγνητικού πεδίου άπειρης υπεραγωγίμης πλάκας πάχους  $d$  παράλληλης στο  $y$ - $z$  επίπεδο.

Έχοντας τώρα υπολογίσει, τόσο το ρεύμα που θα διαρρέει την πλάκα, όσο και το προφίλ που θα ακολουθεί το μαγνητικό πεδίο εντός της, για την περίπτωση της κρίσιμης κατάστασης μπορούμε να υπολογίσουμε την μαγνητική ροπή,  $\mathbf{m}$  καθώς και την μαγνήτιση (μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου),  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV \quad \text{και} \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V}$$

## 2.3 Μαγνητική ροπή και εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα

### 2.3.1 Εισαγωγή

Η μέτρηση των μαγνητικών ιδιοτήτων των υλικών, μαγνήτισης  $\mathbf{M}$  και μαγνητική επιδεκτικότητα  $\chi$ , αποτελούν σημαντικά εργαλεία για τον χαρακτηρισμό των υπεραγωγών καθώς και για τον προσδιορισμό των βασικών τους χαρακτηριστικών όπως η κρίσιμη τιμή ρεύματος  $J_c$ , η κρίσιμη τιμή της θερμοκρασίας  $T_c$ , η γραμμή μαγνητικής αντιστρεψιμότητας και τα κρίσιμα μαγνητικά πεδία. Οι παραπάνω μαγνητικές ιδιότητες μπορούν να μετρηθούν είτε με ac είτε με dc μαγνητικό πεδίο. Η διαφορά μεταξύ, ενός ac και ενός dc μαγνητικού πεδίου έχει να κάνει με τη φύση του ρεύματος που δημιουργεί το πεδίο.

Συγκεκριμένα ένα ac μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από ένα εναλλασσόμενο ρεύμα το οποίο αλλάζει πολικότητα με το πέρασμα του χρόνου, με αποτέλεσμα το προκύπτων ac μαγνητικό πεδίο να αλλάζει κατεύθυνση και ένταση περιοδικά με τον χρόνο. Ένα τέτοιο πεδίο δίνεται από την σχέση:  $H(t) = H_0 \sin(\omega t)$ , όπου  $H_0$ : το μέγιστο πλάτος του πεδίου και  $\omega = 2\pi f$ : όπου  $f$  συχνότητα και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα, ταλάντωσης του πεδίου.

Αντίθετα, ένα dc μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό συναρτήσει του χρόνου και παράγεται από ένα συνεχές ρεύμα, που διατηρεί δηλαδή σταθερή πολικότητα με το χρόνο. Ένα τέτοιο πεδίο δίνεται από την σχέση:  $H = H_{dc} = \text{const}$ . Να σημειώσουμε πως στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε με ac μαγνητικές μετρήσεις και συγκεκριμένα το υπεραγωγίμο υλικό που θα εξετάσουμε θα το τοποθετήσουμε εντός ενός ac



μαγνητικού πεδίου της μορφής:

$$H(t) = H_{dc} + H_0 \sin(\omega t) \quad (2.22)$$

Σημείο εκκίνησης της ανάλυσης μας αποτελεί η μαγνητική ροπή  $\mathbf{m}$  η οποία όπως αναφέραμε και παραπάνω ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV \quad (2.23)$$

Ουσιαστικά η μαγνητική ροπή  $\mathbf{m}$  ενός υλικού αποτελεί ένα μέτρο του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ίδιο το υλικό όταν αυτό διαρρέεται από ρεύμα  $\mathbf{J}$ . Μια άλλη σημαντική ποσότητα αποτελεί η μαγνήτιση ή αλλιώς μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V}, \quad (2.24)$$

όπου  $V$  ο όγκος του υλικού. Η συγκεκριμένη ποσότητα προέρχεται από μόνιμα μαγνητισμένα υλικά ή από μαγνητισμένα δείγματα μέσω της εφαρμογής ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Τέλος, όσον αναφορά την μαγνητική επιδεκτικότητα  $\chi$  ορίζεται ως ο λόγος της μαγνήτισης  $M$  του υλικού προς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο οποίο τοποθετείται:

$$\chi = \frac{M}{H} \quad (2.25)$$

Πρόκειται για ένα αδιάστατο μέγεθος, που δείχνει τον βαθμό μαγνήτισης ενός υλικού  $M$  ως απόκριση σε ένα μαγνητικό πεδίο  $H$ .

### 2.3.2 Εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα

Η εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα (ac επιδεκτικότητα),  $\chi$ , προκύπτει όταν το δείγμα μας τοποθετείται εντός ενός περιοδικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου, σχέση 2.22. Στη γενική περίπτωση η επιδεκτικότητα είναι ένας μιγαδικός αριθμός διότι η επαγόμενη μαγνήτιση δεν είναι σε φάση με το εξωτερικά επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε την επιδεκτικότητα σαν να έχει μια συμφασική με το μαγνητικό πεδίο  $H$ , πραγματική συνιστώσα  $\chi'$  και μια εκτός φάσης, φανταστική συνιστώσα  $\chi''$ . Έτσι η δυναμική του συστήματος μπορεί να μελετηθεί μέσω της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας:

$$\chi = \chi' - i\chi''.$$

Στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων  $f$  όπου οι εναλλασσόμενες μετρήσεις είναι πιο κοινές με τις dc μετρήσεις, η πραγματική συνιστώσα  $\chi'$  είναι η κλίση της καμπύλης  $M = M(H)$ . Η φανταστική συνιστώσα της μαγνητικής επιδεκτικότητας  $\chi''$  σχετίζεται με τις ενεργειακές απώλειες του συστήματος ή με άλλα λόγια με την ενέργεια που απορροφάται από το δείγμα όταν αυτό τοποθετείται εντός ενός ac μαγνητικού πεδίου.

Επειδή το μαγνητικό πεδίο, στο οποίο έχει τοποθετηθεί το δείγμα αποτελεί μια περιοδική συνάρτηση του χρόνου, με περίοδο  $T$ , όπου  $f = 1/T$ , η μαγνητική ροπή καθώς και η μαγνήτιση, θα είναι επίσης περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο  $T$ . Για τον λόγο αυτόν, μπορούμε να τις αναπτύξουμε σε σειρές Fourier. Η μαγνήτιση του υλικού γράφεται ως εξής:

$$M(t) = \langle M \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ M_n^s \sin(n\omega t) + M_n^c \cos(n\omega t) \right].$$

$M_n^s$  και  $M_n^c$  είναι οι συντελεστές Fourier του αναπτύγματος και δίνονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$M_n^s = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \sin(n\omega t) dt,$$

$$M_n^c = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \cos(n\omega t) dt, \quad (2.26)$$

όπου  $\omega = 2\pi/T$  η γωνιακή συχνότητα του αρμονικά χρονομεταβλητού μαγνητικού πεδίου. Για το πρόβλημα που θα εξετάσουμε στην συνέχεια, το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο οποίο τοποθετείται το δείγμα είναι της μορφής:  $H_{ext} = H_0 \sin(\omega t)$ . Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μπορεί να γραφτεί σαν το μιγαδικό μέρος (αν μας ενδιαφέρει το ημίτονο) του φάσρα μαγνητικού πεδίου

$$H_{ext} = \Im[H_0 e^{i\omega t}].$$

Σε αυτή την περίπτωση η πρώτη συνιστώσα της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας θα δίνεται από την σχέση:

$$\chi_1 = \chi_1' - i\chi_1'' \quad (2.27)$$

και η πρώτη (θεμελιώδης) μιγαδική συνιστώσα της μαγνήτισης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$M_1 = \chi_1 H_0 e^{i\omega t} = [\chi_1' - i\chi_1''] [H_0 \cos(\omega t) + iH_0 \sin(\omega t)] \implies$$

$$M_{1n} = \chi_1' H_0 \cos(\omega t) + i\chi_1' H_0 \sin(\omega t) - i\chi_1'' H_0 \cos(\omega t) + \chi_1'' H_0 \sin(\omega t) \implies$$

$$M_1 = H_0 [\chi_1' \cos(\omega t) + \chi_1'' \sin(\omega t)] + iH_0 [\chi_1' \sin(\omega t) - \chi_1'' \cos(\omega t)]$$

Επειδή το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο οποίο έχει τοποθετηθεί το δείγμα αποτελεί το φανταστικό μέρος του φάσρα  $H_0 e^{i\omega t}$ , έτσι και η πρώτη συνιστώσα της μαγνήτισης θα αποτελεί το φανταστικό μέρος του φάσρα  $\chi_1 H_0 e^{i\omega t}$ :

$$M_1 = \Im[\chi_1 H_0 e^{i\omega t}] = H_0 [\chi_1' \sin(\omega t) - \chi_1'' \cos(\omega t)] \quad (2.28)$$

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς η μαγνητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του δείγματος και περίοδο θα ισούται με

$$W_1 = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) d(\mu_0 M_1(t)) = \frac{\omega}{2\pi} \mu_0 H_0^2 \int_0^T (\chi_1' \sin \omega t \cos \omega t + (-1)(-)\chi_1'' \sin \omega t \sin \omega t) dt$$

ή

$$W_1 = \mu_0 \omega H_0^2 \chi_1'' / 2.$$

Με άλλα λόγια η ποσότητα  $\chi_1''$  είναι ανάλογη με τις απώλειες λόγω μαγνητικής υστέρησης (ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα).

Σύμφωνα με την ανάλυση Fourier, που αναπτύξαμε παραπάνω το μιγαδικό μέρος της μαγνήτισης θα ισούται με

$$M_1 = M_1^s \sin(\omega t) + M_1^c \cos(\omega t) \quad (2.29)$$

Μέσω των σχέσεων 2.28 και 2.30 προκύπτουν οι εξής εκφράσεις για το πραγματικό και φανταστικό μέρος της πρώτης αρμονικής της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας:

$$\chi'_1 = \frac{M_1^s}{H_0}$$

$$\chi''_1 = -\frac{M_1^c}{H_0}$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις τους συντελεστές Fourier  $M_1^s$  και  $M_1^c$ , (σχέσεις 2.26) προκύπτουν οι θεωρητικές εκφράσεις υπολογισμού των  $\chi'_1$  και  $\chi''_1$ ,

$$\chi'_1 = \frac{2}{TH_0} \int_0^T M(t) \sin(\omega t) dt,$$

και

$$\chi''_1 = -\frac{2}{TH_0} \int_0^T M(t) \cos(\omega t) dt.$$

Εύκολα μπορούν να προκύψουν και οι αντίστοιχες σχέσεις για τις ανώτερες αρμονικές  $\chi_n$

$$M_n = \Im(\chi'_n - i\chi''_n)H_0 \exp(in\omega t),$$

$$\chi'_n = \frac{2}{TH_0} \int_0^T M(t) \sin(n\omega t) dt$$

και

$$\chi''_n = -\frac{2}{TH_0} \int_0^T M(t) \cos(n\omega t) dt.$$

Στην συνέχεια θα τροποποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις, ώστε να τις φέρουμε στην μορφή που θα τις χρησιμοποιήσουμε παρακάτω [13]. Αρχικά θα της γράψουμε συναρτήσει της μαγνητικής ροπής  $\mathbf{M} = \mathbf{m}/V$  και πραγματοποιούμε την εξής αντικατάσταση Έτσι :

- Η πραγματική συνιστώσα της  $n$ -οστής αρμονικής ac-επιδεκτικότητας,  $\chi'_n$  είναι:

$$\chi'_n = \frac{\omega}{\pi V H_0} \int_0^T m(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.30)$$

- Η φανταστική συνιστώσα της  $n$ -οστής αρμονικής της ac-επιδεκτικότητας,  $\chi''_n$  είναι:

$$\chi''_n = \frac{\omega}{\pi V H_0} \int_0^T m(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2.31)$$

Όπου  $V$  ο όγκος του δείγματος,  $H_0$  το πλάτος του εναλλασσόμενου πεδίου και  $T$  η περίοδος ταλάντωσης.

Για ένα οποιοδήποτε ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα, στο οποίο το υπό εξέταση δείγμα τοποθετείται εντός ενός περιοδικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου  $H(t) = H_{dc} + H_0 \sin(\omega t)$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική ροπή  $m(t)$  και συνεπώς μέσω των σχέσεων 2.30, 2.31, τις  $n$ -οστές αρμονικές. Στο ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα που θα επιλύσουμε στην συνέχεια θα πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός των δύο πρώτων περιττών αρμονικών της μιγαδικής εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας ( $n = 1, 3$ ) διότι η συνεισφορά των υπόλοιπων αρμονικών στην συνολική επιδεκτικότητα είναι αρκετά μικρή, με αποτέλεσμα να μην τις λάβουμε υπόψιν.

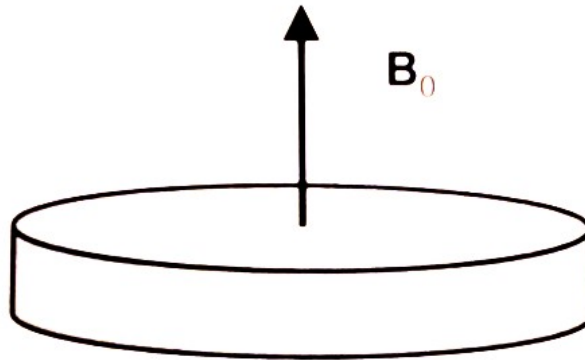


## Κεφάλαιο 3

### Ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά υπεραγωγίου κυλίνδρου εντός εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου

#### 3.1 Περιγραφή του προτύπου

Θεωρούμε έναν υπεραγωγό δευτέρου είδους, κυλινδρικού σχήματος, πεπερασμένου ύψους  $2b$ , και ακτίνας  $a$ , ο οποίος τοποθετείται εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}(t) = [H_{dc} + H_{ac}(t)]\hat{\mathbf{e}}_z$ . Το πεδίο εφαρμόζεται παράλληλα στον άξονα περιστροφής που στην προκειμένη περίπτωση έχουμε θεωρήσει τον  $z$ -άξονα.



Σχήμα 3.1: Υπεραγωγίμος κύλινδρος εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}(t) = [H_{dc} + H_{ac}(t)]\hat{\mathbf{e}}_z$ .

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell και τη σχέση του ηλεκτρικού πεδίου και της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος, που υπακούει ο υπεραγωγός θα προσδιορίσουμε την εξίσωση που δίνει τη χρονική εξέλιξη του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος όταν ο υπεραγωγίμος δίσκος βρεθεί μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Για απλότητα υποθέτουμε ότι  $H_{c1}(T) \ll H_{c2}(T)$  και κατά συνέπεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{H} \quad (3.1)$$

Όπως αναφέραμε στην ενότητα (2.2) αυτή η σχέση ισχύει όταν  $H_{c1} = 0$ . Πρακτικά η σχέση 3.1 είναι έγκυρη ακόμα και όταν  $|H| \gg H_{c1}$  σε όλο τον χώρο του υπεραγωγού. Υποθέτουμε επίσης ότι ο υπεραγωγός βρίσκεται στην κατάσταση Abrikosov παρουσία ατελειών οπότε αυτός μπορεί να περιγραφεί ηλεκτρομαγνητικά με μία σχέση της μορφής

$$\mathbf{E} = E_c \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{J}. \quad (3.2)$$

Η παραπάνω, πρόκειται για μια μη γραμμική σχέση μεταξύ τάσης  $E$  και ρεύματος  $J$  η οποία χαρακτηρίζει τον υπεραγωγό, με κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος  $J_c(B) > 0$  και εκθέτη  $n = U_0/k_B T > 0$ . Στην γενικότερη περίπτωση τόσο το  $J_c$  όσο και ο εκθέτης  $n$  έχουν άμεση εξάρτηση από την μαγνητική επαγωγή  $B(\mathbf{r})$ . Στην περίπτωση μας όμως θα θεωρηθούν σταθερά. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα (2.2), ο εκθέτης  $n$  μπορεί να πάρει τιμές:  $n \geq 1$ . Συγκεκριμένα για  $n = 1$  έχουμε την ωμική συμπεριφορά του υπεραγωγού ενώ για  $n \rightarrow \infty$  έχουμε το κρίσιμο μοντέλο του Bean.

### 3.1.1 Πρότυπο του Bean για την κρίσιμη κατάσταση

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως το μοντέλο της κρίσιμης κατάστασης Bean είναι αρκετά χρήσιμο για την περιγραφή υπεραγωγών που παρουσιάζουν ισχυρό κάρφωμα φλαξονίων και τοποθετούνται εντός ισχυρών μαγνητικών πεδίων. Το μοντέλο θεωρεί πως εντός του υπεραγωγού η πυκνότητα ρεύματος  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  θα είναι μηδέν ή θα λαμβάνει την τιμή της κρίσιμης πυκνότητας ρεύματος  $J_c$ . Στις περιοχές όπου  $J = 0$ , η μαγνητική ροή δεν έχει διεισδύσει και η μαγνητική επαγωγή είναι μηδέν,  $\mathbf{B} = 0$ . Οι περιοχές όπου  $J = J_c$  βρίσκονται στην κρίσιμη κατάσταση. Όταν αυξηθεί το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , στις περιοχές όπου το ρεύμα  $J$  υπερβαίνει την τιμή  $J_c$ , τα φλαξόνια "τακτοποιούνται" στον χώρο του υπεραγωγού με τέτοιο τρόπο ώστε, το ρεύμα να επανέλθει ξανά στην τιμή  $J_c$ . Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, για την περίπτωση της άπειρης πλάκας, στο όριο Bean, υπάρχει μια τιμή μαγνητικού πεδίου  $H^*$ , που ονομάζεται μαγνητικό πεδίο πλήρους διείσδυσης για την οποία όταν  $H = H^*$ , το ρεύμα όσο και η μαγνητική ροή φτάνουν στο κέντρο του δείγματος. Για την περίπτωση κυλίνδρου με αυθαίρετο λόγο  $b/a$ , το πεδίο πλήρους διείσδυσης έχει υπολογιστεί από τον Brandt [13] και δίνεται από την σχέση:

$$H^* = J_c b \ln \left[ \frac{a}{b} + \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.3)$$

Στο όριο του μακρύ κυλίνδρου,  $b \gg a$  η παραπάνω σχέση, κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης ως προς  $a/b$  παίρνει την εξής απλούστερη μορφή:

$$H^* = J_c b \ln(1 + a/b).$$

Εφαρμόζοντας στην παραπάνω το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης:  $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ , για  $x \ll 1$  και κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης ως προς  $a/b$  η παραπάνω σχέση λαμβάνει την εξής μορφή:

$$H^* = J_c a \quad (3.4)$$

Ενώ για την περίπτωση του λεπτού κυλίνδρου (δίσκος),  $b \ll a$ , από την σχέση 3.3 παίρνουμε:

$$H^* = j_c b \ln \left[ \frac{a}{b} + \left( \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2} \right] \rightarrow H^* = J_c b \ln[2a/b] \quad (3.5)$$

Με βάση τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση του μακρύ κυλίνδρου το μαγνητικό πεδίο πλήρους διείσδυσης  $H^*$  ελέγχεται από την ακτίνα του κυλίνδρου, ενώ στην περίπτωση του λεπτού δίσκου το  $H^*$  ελέγχεται από το πάχος του δίσκου (είναι ανάλογο).

## 3.2 Εξισώσεις κίνησης για την πυκνότητα ρεύματος

Εδώ θα βρούμε δυναμική εξίσωση που ικανοποιεί η πυκνότητα ρεύματος  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ . Συγκεκριμένα θα υπολογίσουμε τις εξισώσεις που η λύση τους μας δίνει το  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  εντός του κυλίνδρου κάνοντας χρήση των εξισώσεων Maxwell. Να σημειώσουμε πως για το υπό εξέταση δείγμα ισχύουν οι σχέσεις 3.1 και 3.2. Η ανάλυση που ακολουθεί παρακάτω βασίζεται στην αναφορά [13].

Οι εξισώσεις Maxwell που περιγράφουν το πρόβλημα του υπεραγωγίου κυλίνδρου που τοποθετείται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}_{ext}(t) \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$ , παράλληλο στον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου θα είναι:

- Νόμος του Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.6)$$

όπου έχουμε θεωρήσει πως στο δείγμα μας δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία  $\rho_f = 0$ .

- Νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.7)$$

όπου  $\mathbf{A}$  τα διανυσματικό δυναμικό.

- Νόμος Ampere-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies$$

Αν η συχνότητα μεταβολής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι χαμηλή τότε μπορούμε να αγνοήσουμε το ρεύμα μετατόπισης (οιονεί στατική προσέγγιση) απαλείφοντας τον όρο  $(1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$ , οπότε ο νόμος Ampere-Maxwell απλουστεύεται στο νόμο του Ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.8)$$

- Νόμος επαγωγής Faraday- Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.9)$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση 3.7 στην 3.8 και έχουμε:

$$(3.8) \stackrel{(3.7)}{\implies} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

Σε αυτό το σημείο κάνουμε χρήση της ταυτότητας:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.10)$$

Με σκοπό να κάνουμε την παραπάνω εξίσωση απλούστερη θα θεωρήσουμε πως το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  ικανοποιεί την βαθμίδα Coulomb.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Η συγκεκριμένη βαθμίδα επιλέγεται αυθαίρετα. Αν δεν ικανοποιείται τότε μπορούμε να βρούμε μια βαθμωτή ποσότητα  $\Psi$  ώστε να μετασχηματίσουμε το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$ , σε  $\mathbf{A}'$  κάτω από τον μετασχηματισμό βαθμίδας:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$$

Έχουμε την δυνατότητα η επιλογή της ποσότητας  $\Psi$  να είναι τέτοια ώστε το μετασχηματισμένο πλέον δυναμικό  $\mathbf{A}'$  να ικανοποιεί την βαθμίδα Coulomb. Επομένως σε οποιαδήποτε περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ικανοποιείται η συγκεκριμένη βαθμίδα.

Έτσι μέσω της σχέσης,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  η σχέση 3.10 γίνεται:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (3.11)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε συνιστώσα της εξίσωσης 3.11 είναι μια εξίσωση Poisson, η λύση της οποίας θα μας δώσει την έκφραση του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$  εντός του υπεραγωγίμου κυλίνδρου. Παρακάτω θα επιλύσουμε την εξίσωση 3.11 εκμεταλλευόμενοι την αξονική συμμετρία του προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση η πυκνότητα ρεύματος  $\mathbf{J}$ , το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  και το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$ , θα έχουν μόνο μία συνιστώσα παράλληλη στην αξιμουθιακή κατεύθυνση  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$  και τα μέτρα τους θα είναι ανεξάρτητα της γωνίας  $\phi$ . Επομένως σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, z, \phi)$  θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{J} = J(r, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \mathbf{A} = A(r, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \mathbf{E} = E(r, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (3.12)$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα του Brandt, κατά το οποίο γράφουμε το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  εντός του κυλίνδρου ως άθροισμα δύο συνεισφορών [13]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_J + \mathbf{A}_0 \quad (3.13)$$

όπου:

- $A_0$ : Η συνεισφορά στο διανυσματικό δυναμικό, λόγω της ύπαρξης του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $H_0$ .
- $A_J$ : διανυσματικό δυναμικό που προκύπτει από το ρεύμα  $J$  που ρέει εντός του κυλίνδρου.

Η σχέση 3.11 μέσω της 3.13 γίνεται:

$$\nabla^2(\mathbf{A}_J + \mathbf{A}_0) = -\mu_0 \mathbf{J} \implies \nabla^2 \mathbf{A}_J + \nabla^2 \mathbf{A}_0 = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (3.14)$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_0$ . Γνωρίζουμε ότι για τη μαγνητική επαγωγή  $\mathbf{B}_0$  και το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_0$  ισχύουν τα εξής:

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{και} \quad \mathbf{A}_0 = A_0(r, z) \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Αναπτύσσοντας την σχέση  $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0 \implies B_0 \hat{\mathbf{e}}_z &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \implies B_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \implies \\ d(rA_\phi) &= rB_0 dr \implies rA_\phi = \frac{r^2}{2} B_0 \implies A_\phi = \frac{rB_0}{2} \end{aligned}$$

Επομένως το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_0$  δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{rB_0}{2} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (3.15)$$

Η λαπλασιανή του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από την σχέση:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left( \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left( \nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (3.16)$$



Αντικαθιστώντας την 3.15 στην 3.16 σχέση, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A}_0 &= \left( \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi \stackrel{(3.15)}{\implies} \nabla^2 \mathbf{A}_0 = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) - \frac{B_0}{2r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi \implies \\ \nabla^2 \mathbf{A}_0 &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r B_0}{2} \right) - \frac{B_0}{2r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi = \left( \frac{B_0}{2r} - \frac{B_0}{2r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi \implies \\ \nabla^2 \mathbf{A}_0 &= 0\end{aligned}\tag{3.17}$$

Επομένως βλέπουμε πως το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_0$  το οποίο προκύπτει από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}_0$ , στο οποίο έχει τοποθετηθεί ο υπεραγωγίμος κύλινδρος, ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Αντικαθιστώντας την σχέση 3.17 στην 3.14 παίρνουμε:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_J = -\mu_0 \mathbf{J}\tag{3.18}$$

Επομένως, για την εύρεση του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$ , που πλέον δίνεται από την σχέση 3.13, αρκεί να επιλύσουμε την εξίσωση Laplace που ικανοποιεί το διανυσματικό δυναμικό το οποίο οφείλεται στο ρεύμα που διαρρέει τον κύλινδρο,  $\mathbf{A}_J$ , σχέση 3.18.

Για εντοπισμένη κατανομή ηλεκτρικού ρεύματος  $\mathbf{J}$ , από τον ηλεκτρομαγνητισμό γνωρίζουμε ότι η εξίσωση 3.18 επιδέχεται λύσεις τις παρακάτω μορφής:

$$\mathbf{A}_J(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}'.\tag{3.19}$$

Τελικά το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' + \frac{r B_0}{2} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

#### • Εύρεση διανυσματικού δυναμικού $\mathbf{A}_J(\mathbf{x})$

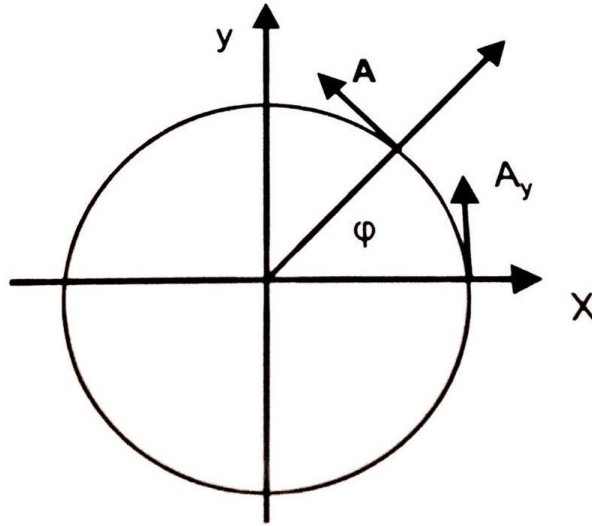
Για να μπορέσουμε να έχουμε μια πιο διαχειρίσιμη έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_J$ , εκμεταλλευόμαστε την αξονική συμμετρία του προβλήματος (συμμετρία περιστροφής γύρω από τον  $z$ -άξονα) και υπολογίζουμε το διανυσματικό δυναμικό στο  $z - x$  επίπεδο. Για το συγκεκριμένο επίπεδο ισχύει:  $y = 0$  και σύμφωνα με το Σχήμα 3.2 έχουμε  $\phi = 0$ ,  $x = r$ ,  $x' = r' \cos \phi'$  και  $y' = r' \sin \phi'$ . Εκμεταλλευόμενοι τις παραπάνω σχέσεις η σχετική απόσταση, εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες, λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \implies \\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{(r - r' \cos(\phi'))^2 + r'^2 \sin^2(\phi') + (z - z')^2} \\ &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi') + (z - z')^2}\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_J$  σε  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  συνιστώσες και με την βοήθεια του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$  θα αναλύσουμε και την πυκνότητα επαγόμενου ρεύματος  $\mathbf{J}$  σε αυτές:

$$\mathbf{A}_J(\mathbf{x}) = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$$



Σχήμα 3.2: Σχηματική αναπαράσταση τομής κυλίνδρου στο  $x - y$  επίπεδο

$$\mathbf{J} = J(r, z)\hat{e}_\phi \implies \mathbf{J} = -\sin \phi J(r, z)\hat{\mathbf{x}} + \cos \phi J(r, z)\hat{\mathbf{y}}$$

Με βάση τα παραπάνω και την σχέση 3.19, οι συνιστώσες  $A_x, A_y$  του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}_J$  λαμβάνουν την εξής μορφή:

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\cos \phi' J(r', z')}{\sqrt{r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos(\phi')}} r' dr' dz' d\phi'$$

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\sin \phi' J(r', z')}{\sqrt{r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos(\phi')}} r' dr' dz' d\phi'$$

Όπως φαίνεται άμεσα και από το Σχήμα 3.2 στο επίπεδο  $y = 0$ , στο οποίο  $\phi = 0$ , η συνιστώσα  $A_x$  είναι μηδενική. Η συγκεκριμένη παρατήρηση μπορεί να επιβεβαιωθεί και από την επίλυση της ολοκληρωτικής έκφρασης της  $A_x$  συνιστώσας. Τελικά στο επίπεδο  $y = 0$  το διανυσματικό δυναμικό έχει μόνο  $y$ -συνιστώσα και η τιμή του δίνεται από την έκφραση:

$$A_J = A_y(r, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\alpha \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' J(r', z')}{\sqrt{r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos(\phi')}} r' dr' dz' d\phi' \quad (3.20)$$

Αν

$$f(r', \phi', z - z') = \int_0^{2\pi} \frac{r' \cos \phi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos(\phi')}} d\phi' \quad (3.21)$$

και

$$G(r, z, r', z') = f(r, r', z - z') + f(r, r', z + z') \quad (3.22)$$

με αντικατάσταση στις σχέσεις 3.21, 3.22 στην 3.20 προκύπτει η τελική έκφραση για το διανυσματικό πεδίο  $A_J$ .

$$A_J(r, z) = \int_0^\alpha dr' \int_0^b dz' G(r, z; r', z') J(r', z') \quad (3.23)$$

Με αυτόν τον τρόπο υπολογίσαμε έμμεσα την συνάρτηση Green του προβλήματός μας,  $G(r, z, r', z')$ .

Για να συνοψίσουμε, αρχικός στόχος του συγκεκριμένου κεφαλαίου ήταν να υπολογίσουμε το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  εντός υπεραγωγίου κυλίνδρου, ο οποίος τοποθετείται εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}_0$ , με σκοπό να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης της πυκνότητας ρεύματος  $\mathbf{J}$  για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Όσον αναφορά το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$ , με βάση τις σχέσεις 3.23, 3.15 και 3.13, είναι:

$$A(r, z) = \int_0^\alpha dr' \int_0^b dz' G(r, z; r', z') J(r', z') + \frac{r B_0}{2} \quad (3.24)$$

Να σημειώσουμε πως η παραπάνω ανάλυση πραγματοποιήθηκε για χρονοανεξάρτητο μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}_0$ . Στην γενικότερη περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο είναι χρονοεξαρτημένο τόσο το ρεύμα  $\mathbf{J}$ , όσο και η μαγνητική επαγωγή  $B_0$  θα έχουν άμεση χρονική εξάρτηση. Σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε στην σχέση 3.24 το  $J(r', z')$ , και  $B_0$  με  $J(r', z', t)$ , και  $B_0(t)$ , αντίστοιχα.

### • Εξισώσεις κίνησης για την πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J}$

Για να προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης για την πυκνότητα ρεύματος θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Faraday-Maxwell, (σχέση 3.9). Έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \stackrel{\mathbf{B}=\nabla \times \mathbf{A}}{\implies} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} \implies \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \dot{\mathbf{A}} \implies \\ \nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) &= 0 \implies \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \dot{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

Όπου  $\Phi$ , ένα βαθμωτό δυναμικό. Επειδή δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία στον υπεραγωγό μπορούμε να θεωρήσουμε  $\Phi = 0$ . Επομένως:

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} \quad (3.25)$$

Αντικαθιστούμε την σχέση 3.24 στην 3.25 και τελικά έχουμε την εξίσωση κίνησης της πυκνότητας ρεύματος:

$$\mathbf{E}[\mathbf{J}(r, t)] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' - \dot{\mathbf{A}}_0(t) \implies$$

$$\boxed{\mathbf{E}[\mathbf{J}(r, t)] = -\int_0^\alpha dr' \int_0^b dz' G(r, z; r', z') \mathbf{J}(r', z', t) - \frac{r \dot{B}_0(t)}{2} \hat{\mathbf{e}}_\phi} \quad (3.26)$$

Η εξίσωση 3.26 είναι το κεντρικό αποτέλεσμα της ανάλυσης μας που περιγράφει την ηλεκτρομαγνητικής συμπεριφοράς του υπεραγωγίου κυλίνδρου. Για την περίπτωση που εξετάζουμε, το υπεραγωγίμο υλικό ακολουθεί μη γραμμική σχέση τάσης-ρεύματος 3.2:

$$\mathbf{E} = E_c \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{J},$$

. οπότε η εξίσωση 3.26 πρακτικά μπορεί να λυθεί μόνο αριθμητικά. Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούμε για την επίτευξη του σκοπού αυτού. Παρόλα αυτά θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η σχέση 3.26 μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε νόμο τάσης ρεύματος  $E(J)$ .

Οι εξισώσεις 3.24, 3.26 μπορούν να γενικευτούν εύκολα για όλες τις περιπτώσεις δειγμάτων που παρουσιάζουν αξονική συμμετρία. Η εν λόγω γενίκευση μπορεί να πραγματοποιηθεί αν αντικαταστήσουμε το όριο ολοκλήρωσης  $b$  με μια συνάρτηση  $b(r)$  με ακτίνα  $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ , που χαρακτηρίζει καθένα από τα δείγματα. Για παράδειγμα αν θέσουμε  $b(r) = b(0)(\alpha^2 - r^2)^{1/2}$ , τότε περιγράφουμε μια σφαίρα, ενώ αν

$b(r) = b(0)(1 - \frac{r^2}{\alpha^2})^{1/2}$  τότε περιγράφουμε ένα αξονοσυμμετρικό ελλειψοειδές.

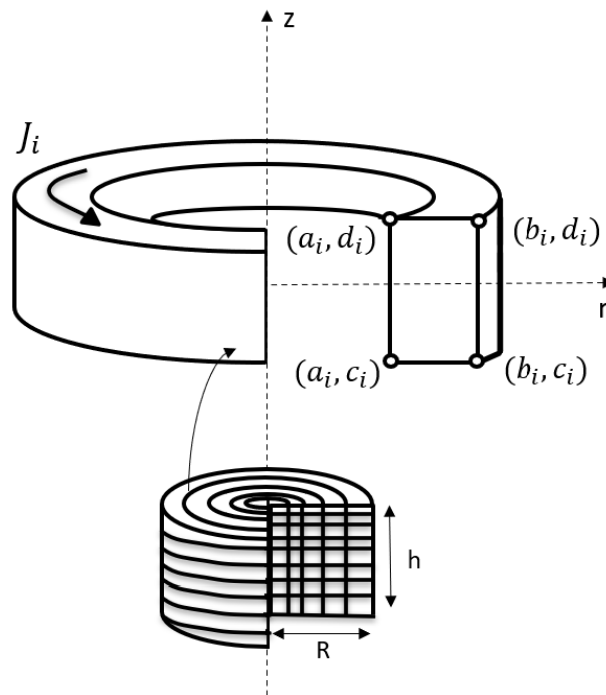
## Κεφάλαιο 4

### Αλγόριθμος υπολογισμού του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο επίλυσης της εξίσωσης 3.26 θεωρώντας ότι υπεραγωγός ακολουθεί τη σχέση ρεύματος-τάσης :

$$\mathbf{E} = E_c \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{J}.$$

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε τον αλγόριθμο για την εύρεση του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$ , της μαγνητικής ροπής  $\mathbf{m}$ , καθώς και τη μιγαδική μαγνητική επιδεκτικότητα. Όπως αναφέραμε και παραπάνω αρχικός σκοπός είναι η εύρεση του επαγόμενου ρεύματος στο εσωτερικό του υπεραγωγίου κυλίνδρου όταν αυτός τοποθετείται εντός εξωτερικού, χρονοεξαρτημένου μαγνητικού πεδίου  $H_0(t) = H_0 \sin(\omega t)$  με κατεύθυνση παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου. Η επίλυση της εξίσωσης 3.26 και ο υπολογισμός της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας πραγματοποιήθηκε υπολογιστικά με μέσω ενός προγράμματος γραμμένο σε κώδικα matlab, ο οποίος είναι επέκταση του αλγόριθμου των Simon Otten και Francesco Grilli[2]. Παρακάτω θα περιγράψουμε τα κύρια τμήματα του αλγόριθμου .



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση της κυλινδρικής γεωμετρίας[2]. Οι συντεταγμένες των στοιχείων δίνονται από τα  $a_i, b_i, c_i, d_i$  με  $i = 1, \dots, N$

Για την κυλινδρική γεωμετρία που χαρακτηρίζει το πρόβλημά μας, έχουμε θεωρήσει πως ο κύλινδρος έχει άξονα παράλληλο στην  $\hat{e}_z$  κατεύθυνση και πως το ρεύμα που διατρέχει το δείγμα, ρέει μόνο στην αζιμου-

θιακή κατεύθυνση  $\hat{e}_\phi$ . Επομένως η λύση του δεν εξαρτάται από την αζιμουθιακή γωνία  $\phi$ . Η συγκεκριμένη παρατήρηση μετατρέπει την 3 – D γεωμετρία σε 2 – D αξονοσυμμετρικό πρόβλημα και έχει ως συνέπεια, ο αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί στην συνέχεια, να μπορεί να υπολογίσει μόνο ρεύματα που επάγονται από αξονικά ή ακτινικά μαγνητικά πεδία [2].

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας ρεύματος θα υπολογιστεί σε μία διατομή του κυλίνδρου σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου που διέρχεται από τον άξονα  $z$  και είναι κάθετη στο επίπεδο  $x$ - $y$ . Η διατομή έχει πλάτος ίσο με την ακτίνα του κυλίνδρου,  $R$ , και ύψος όσο το πάχος του κυλίνδρου,  $h$ . Η διατομή χωρίζεται σε  $N$  στοιχεία που αριθμούνται ως εξής:  $i = 1, 2, \dots, N$ . Καθένα από αυτά αντιστοιχεί σε ένα δακτύλιο με επιφάνεια κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα  $J_i$  (δες Σχήμα 4.1). Ο διαμερισμός του παραλληλογράμμου γίνεται με  $N_r$  στοιχεία στην  $r$ -διεύθυνση και  $N_z$  στοιχεία στην  $z$ -διεύθυνση, έτσι ώστε ο συνολικός αριθμός των στοιχείων να ισούται με  $N = N_r \times N_z$ . Επειδή η κατανομή του ηλεκτρικού ρεύματος σε κάθε εγκάρσια διατομή του κυλίνδρου δεν είναι ομοιόμορφη είναι χρήσιμο να υιοθετήσουμε διαμερίσεις οι οποίες είναι πιο πυκνές στις πάνω και κάτω πλευρές και τη δεξιά πλευρά του παραλληλογράμμου. Ο παραπάνω ανομοιογενής διαχωρισμός της εγκάρσιας διατομής του κυλίνδρου πραγματοποιείται μέσω των παρακάτω εντολών στην matlab:

- Διαμερισμός στην  $r$ -διεύθυνση:

$$r_{vector} = R \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{i}{N_r}\right)\right)$$

, με  $i = 0, 1, \dots, N_r$

- Διαμερισμός στην  $z$ -διεύθυνση:

$$z_{vector} = -\frac{h}{2} \cos\left(\pi \frac{i}{N_z}\right)$$

, με  $i = 0, 1, \dots, N_z$

Για τις διάφορες τιμές του  $i$ , τα παραπάνω στοιχεία τοποθετούνται σε δυο πίνακες, ένας για την  $r$ -διεύθυνση και ένας για την  $z$ . Για να έχουμε μια σαφέστερη εικόνα της επιλεγμένης διαμέρισης του  $r - z$  επιπέδου του κυλίνδρου, χρησιμοποιούμε τα στοιχεία των προαναφερόμενων πινάκων και δημιουργούμε το αντίστοιχο πλέγμα στο  $r - z$  επίπεδο, Σχήμα 4.2.

Κάθε  $i$  στοιχείο της παραπάνω διαμέρισης, διαρρέεται από ρεύμα πυκνότητας  $J_i$  και χαρακτηρίζεται από τα εξής σύνορα στην  $r$  και στην  $z$  κατεύθυνση αντίστοιχα:

$$a_i < r < b_i \quad \text{και} \quad c_i < z < d_i$$

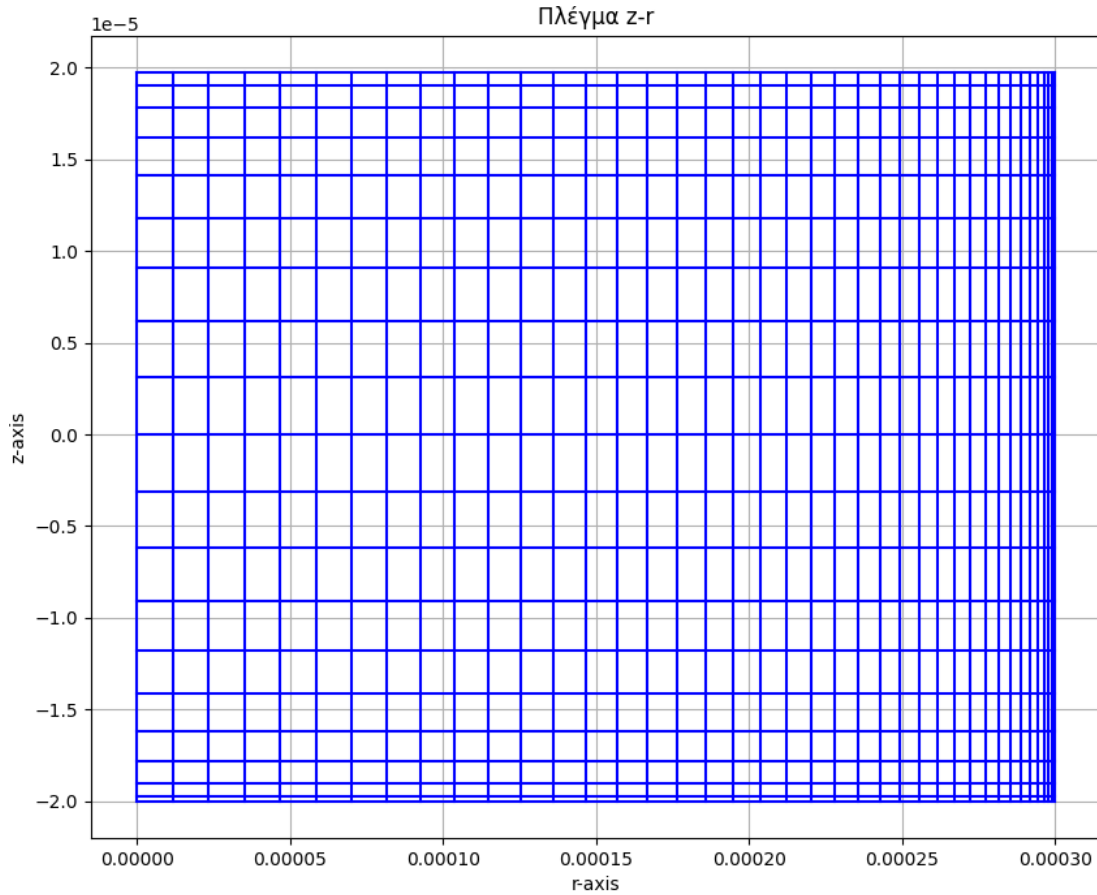
Κάθε τέτοιο στοιχείο θα αντιπροσωπεύεται από το κεντρικό του σημείο με συντεταγμένες  $(r_i, z_i)$  οι οποίες δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$r_i = \frac{(a_i + b_i)}{2}, \quad z_i = \frac{(c_i + d_i)}{2} \quad (4.1)$$

Το κομμάτι του προγράμματος της Matlab που πραγματοποιεί την εν λόγω διαμέριση του κυλινδρικού όγκου, υπολογίζει το εμβαδόν διατομής κάθε στοιχείου  $i$  καθώς και τον όγκο του, έχει ως εξής:

Listing 4.1: Διαμέριση κυλινδρικού όγκου

```
h = 0.000043; % height [m]
R = 0.00032; % radius [m]
Volume=pi*R^2*h; % cylinder volume
Nr = 40; % number of elements (r-direction)
Nz = 20; % number of elements (z-direction)
N = Nr*Nz; % total number of elements
% define elements
```



Σχήμα 4.2: Σχηματική αναπαράσταση του ανομοιογενούς διαμερισμού του  $r - z$  επιπέδου του κυλίνδρου. Δημιουργήθηκε μέσω Python.

```

%r_vector = linspace(0,R,Nr+1)'; % option 1: linear spacing
r_vector = R*cos(pi/2*(1-(0:Nr)/Nr))'; % option 2: smaller elements near edges
%z_vector = linspace(-h/2,h/2,Nz+1)'; % option 1: linear spacing
z_vector = -h/2*cos((0:Nz)/Nz*pi)'; % option 2: smaller elements near edges

[r_grid,z_grid] = ndgrid(r_vector,z_vector);
r_low = r_grid(1:end-1,1:end-1); % low-r boundary
r_high = r_grid(2:end,2:end); % high-r boundary
r_middle = (r_low+r_high)/2; % middle point
z_low = z_grid(1:end-1,1:end-1);
z_high = z_grid(2:end,2:end);
z_middle = (z_low+z_high)/2;
V = pi*(r_high.^2-r_low.^2).*(z_high-z_low); % volume
s = (r_high-r_low).*(z_high-z_low); % cross-sectional area

```

Από την στιγμή που έχουμε πραγματοποιήσει την αναγκαία διαμέριση για την επίλυση του προβλήματος, επιλέγουμε ένα τυχαίο στοιχείο  $i$  του κυλινδρικού όγκου. Το διανυσματικό δυναμικό στο κέντρο του  $i$  στοιχείου μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα των συνεισφορών των διανυσματικών δυναμικών που προέρχονται από τα ρεύματα  $J_j$  που διατρέχουν τα υπόλοιπα στοιχεία του κυλινδρικού όγκου και του εξωτερικού διανυσματικού δυναμικού  $A_{ext,i}$ :

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{ext,i} + \mathbf{A}_{J,i} \implies \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{ext,i} + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{j=1}^N K_{ij} \mathbf{J}_j, \quad (4.2)$$

με  $\mathbf{A}_{ext,i}$  να υπολογίζεται μέσω της σχέσης:  $\nabla \times \mathbf{A}_{ext} = \mathbf{B}_{ext}$ , Σχέση 3.15.

Όπου  $K$  είναι ένας  $N \times N$ -πίνακας οι τιμές του οποίου εξαρτώνται από την εκάστοτε γεωμετρία. Πρώτος και κυρίως υπολογισμός του αλγορίθμου που χρησιμοποιούμε είναι ο υπολογισμός του εν λόγω πίνακα για την κυλινδρική γεωμετρία, ο οποίος παίζει τον ρόλο του πυρήνα της υπό εξέταση ολοκληρωτικής εξίσωσης 3.26.

- Υπολογισμός  $K$  πίνακα

Κάθε  $j$  στοιχείο χαρακτηρίζεται από τα εξής σύνορα, σύμφωνα με την σχέση 4.1:  $a_j < r_j < b_j$  και  $c_j < z_j < d_j$ . Σύμφωνα την σχέση 3.19 το διανυσματικό δυναμικό λόγω του ρεύματος  $J_j \hat{\mathbf{e}}_\phi$  που διαρρέει το στοιχείο  $j$ , δίνεται από την ολοκληρωτική έκφραση :

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{c_j}^{d_j} \int_{a_j}^{b_j} \frac{J_j \hat{\mathbf{e}}_\phi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} r' dr' dz' d\phi' \quad (4.3)$$

Πραγματοποιώντας την ανάλυση που περιγράφηκε στο κεφάλαιο (3.2), δηλαδή εκμεταλλευόμενοι την αξονική συμμετρία του προβλήματός μας και υπολογίζοντας το διανυσματικό δυναμικό στο  $x - z$  επίπεδο, καταλήγουμε στην τελική έκφραση:

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0 J_j \hat{\mathbf{e}}_\phi}{2\pi} \int_0^\pi \int_{c_j}^{d_j} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\cos(\phi') r' dr' dz' d\phi'}{\sqrt{r_i^2 + r'^2 - 2r_i r' \cos(\phi') + (z_i - z')^2}} \quad (4.4)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση τα στοιχεία του πυρήνα  $K$  δίνονται από την έκφραση:

$$K_{ij} = \int_0^\pi \int_{c_j}^{d_j} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\cos(\phi') r' dr' dz' d\phi'}{\sqrt{r_i^2 + r'^2 - 2r_i r' \cos(\phi') + (z_i - z')^2}} \quad (4.5)$$

Όπου  $a_j < r < b_j$ ,  $c_j < z < d_j$  είναι τα σύνορα του  $j$  στοιχείου του κυλίνδρου το οποίο διαρρέεται από ρεύμα  $J_j$  και το αντιμετωπίζουμε ως μια πηγή ρεύματος που τελικά συνεισφέρει στην τιμή του διανυσματικού δυναμικού του  $i$  στοιχείου,  $\mathbf{A}_i$ , σχέση 4.2. Να σημειώσουμε πως  $r_i$  και  $z_i$  είναι η συντεταγμένες του  $i$  στοιχείου, σχέση 4.1 για το οποίο υπολογίζουμε τα στοιχεία πίνακα  $K_{ij}$  για όλες τις τιμές  $j$ .

Σε αυτό το σημείο θα πραγματοποιήσουμε την ολοκλήρωση της έκφρασης 4.5 ως προς  $z'$  η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί αναλυτικά. Στην προκειμένη περίπτωση θα κάνουμε χρήση του Mathematica. Το προς επίλυση ολοκλήρωμα είναι της μορφής:

$$I_1 = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{(z-x)^2 + a^2}} dx,$$

με  $c, d, z, a$  σταθερές και  $c < d$ . Χρησιμοποιώντας την Mathematica λαμβάνουμε:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(z-c + \sqrt{a^2 + (z-c)^2})(z-d - \sqrt{a^2 + (d-z)^2})}{(z-d + \sqrt{a^2 + (d-z)^2})(z-c - \sqrt{a^2 + (z-c)^2})} \right)$$

Η συγκεκριμένη έκφραση μπορεί να λάβει απλούστερη μορφή αν πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα του  $I_1$  με τον όρο:

$$\frac{(z-d + \sqrt{a^2 + (z+d)^2})(z-c + \sqrt{a^2 + (z-c)^2})}{(z-d + \sqrt{a^2 + (z+d)^2})(z-c + \sqrt{a^2 + (z-c)^2})}$$

, οπότε έχουμε:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(z-c + \sqrt{a^2 + (z-c)^2})^2 (z-d)^2 - (\sqrt{a^2 + (d-z)^2})^2}{(z-d + \sqrt{a^2 + (d-z)^2})^2 (z-c)^2 - (\sqrt{a^2 + (z-c)^2})^2} \right) \Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(z-c + \sqrt{a^2 + (z-c)^2})^2}{(z-d + \sqrt{a^2 + (d-z)^2})^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z-c + \sqrt{a^2 + (z-c)^2}}{z-d + \sqrt{a^2 + (d-z)^2}} \right)^2 \Rightarrow$$



$$I_1 = \ln \left( \frac{z - c + \sqrt{a^2 + (z - c)^2}}{z - d + \sqrt{a^2 + (d - z)^2}} \right)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση για την ολοκλήρωση της σχέσης 4.5 ως προς  $z'$  και αντικαθιστώντας σε αυτήν όπου  $a = r_i^2 + r'^2 - 2r_i r' \cos(\phi')$ , καταλήγουμε σε ένα διπλό ολοκλήρωμα της παρακάτω μορφής:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{a_j}^{b_j} \ln \left( \frac{z_i - c_j + \sqrt{r_i^2 + r'^2 - 2r_i r' \cos(\phi') + (z_i - c_j)^2}}{z_i - d_j + \sqrt{r_i^2 + r'^2 - 2r_i r' \cos(\phi') + (z_i - d_j)^2}} \right) \cos(\phi') r' dr' d\phi' \quad (4.6)$$

Οι ολοκληρώσεις της σχέσης 4.6 μπορούν να υλοποιηθούν με αριθμητικό τρόπο και ο υπολογισμός πραγματοποιείται στο κέντρο κάθε στοιχείου, δηλαδή στις συντεταγμένες  $(r_i, z_i)$ . Το μέρος του προγράμματος της Matlab που πραγματοποιεί τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα  $K$  αναφέρεται στην συνέχεια. Έχοντας λοιπόν τα στοιχεία του πίνακα  $K$  θα προχωρήσουμε στην εξαγωγή και επίλυση της εξίσωσης κίνησης του ρεύματος για το κάθε  $i$  στοιχείο της διαμέρισης.

Listing 4.2: Υπολογισμός K Matrix

```
% calculate K matrix
if ~exist('K')
    K = zeros(N);
    for i = 1:N % replace by parfor for increased speed
        disp(['Calculating K matrix row ', num2str(i), ' of ', num2str(N)]);
        ri = r_middle(i);
        zi = z_middle(i);
        for j = 1:N
            aj = r_low(j);
            bj = r_high(j);
            cj = z_low(j);
            dj = z_high(j);
            integrand = @(r_ac, theta_ac) log( ...
                (sqrt((zi-cj)^2+ri^2+r_ac.^2-2*ri*r_ac.*cos(theta_ac)) + zi-cj) ...
                ./ (sqrt((zi-dj)^2+ri^2+r_ac.^2-2*ri*r_ac.*cos(theta_ac)) + zi-dj) ...
                ) .* r_ac.*cos(theta_ac);
            % evaluate integral
            K(i,j) = integral2(integrand, aj, bj, 0, pi, 'AbsTol', 1e-9, 'RelTol', 1e-6, 'Method', 'auto');
        end
    end
end
```

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, που περιγράφηκε η θεωρητική ανάλυση του προβλήματος μας, έτσι και εδώ για να προκύψει η ζητούμενη διαφορική εξίσωση, παραγωγίζουμε την 4.2 ως προς τον χρόνο [13, ]:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{ext},i}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^N K_{ij} \frac{\partial \mathbf{J}_j}{\partial t} \quad (4.7)$$

και στην συνέχεια αντικαθιστούμε την σχέση 3.25  $\implies \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$  ώστε να προκύψει η προς επίλυση διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} \frac{\partial \mathbf{J}_i}{\partial t} = -\frac{2\pi}{\mu_0} (\mathbf{E}_i + \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{ext},i}}{\partial t}), \quad (4.8)$$

όπου  $\mathbf{E}_i$  ηλεκτρικό πεδίο κάθε  $i$  στοιχείου που δίνεται από την έκφραση:  $\mathbf{E}_i = E_c \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \frac{\mathbf{J}}{J}$ . Το εξωτερικό διανυσματικό  $\mathbf{A}_{\text{ext}}$  δίνεται από την σχέση 3.15 :

$$\mathbf{A}_{\text{ext},i} = \frac{r_i}{2} B_0(t) \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{r_i B_0 \sin(\omega t)}{2} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην σχέση 4.8 και λαμβάνοντας υπόψιν ότι διανύσματα  $\mathbf{E}_i, \mathbf{J}_i, \mathbf{A}_{\text{ext},i}$  βρί-

σκονται στην ίδια διεύθυνση  $\hat{e}_\phi$ , η 4.8 γίνεται:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \frac{\partial J_i}{\partial t} = -\frac{2\pi}{\mu_0} \left( E_c \left( \frac{J_i}{J_c} \right)^n + \frac{r_i B_0 \sin(\omega t)}{2} \right) \quad (4.9)$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε πως η κρίσιμη τιμή του ρεύματος  $J_c$  αποτελεί συνάρτηση της θερμοκρασίας,  $J_c = J_c(T)$ . Την μορφή της την θεωρούμε εξαρχής στην αρχή του προγράμματος:

$$J_c(T) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{10} e^{(-T^2/60)} + J_{c0} \left(1 - \frac{T}{T_{c2}}\right)^{n_j} + J_p e^{-\frac{(T-T_p)^2}{2sl^2}}, & \text{αν } T < T_p \\ 2 \cdot 10^{10} e^{(-T^2/60)} + J_{c0} \left(1 - \frac{T}{T_{c2}}\right)^{n_j} + J_p e^{-\frac{(T-T_p)^2}{2sh^2}}, & \text{αν } T_p < T < T_{c2} \end{cases}$$

Όπου  $n_j = 0.2$ ,  $sh = 0.2$  και  $sl = 0.3$  σταθερές. Η παραπάνω συνάρτηση κρίσιμου ρεύματος δεν επιλέχτηκε τυχαία. Παρακάτω θα εξηγήσουμε τους λόγους της παραπάνω επιλογής.

Επομένως τόσο ο υπολογισμός των υπερρευσμάτων  $J$ , της μαγνητικής ροπής  $m$  όσο και του φανταστικού και πραγματικού μέλους  $ac$  επιδεκτικότητας (όπως θα δούμε στην συνέχεια) θα πραγματοποιείται για διάφορες τιμές θερμοκρασίας και άρα διαφορετικές τιμές κρίσιμου ρεύματος στην εξίσωση 4.9.

Ένα βασικό σημείο του προγράμματος που χρησιμοποιούμε είναι ο τρόπος επίλυσης της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης 4.9. Συγκεκριμένα η επίλυση πραγματοποιείται με αριθμητικό τρόπο μέσω της εξής εντολής στην Matlab: **ode15s(fun, t, J<sub>0</sub>, options)** με *fun* την συνάρτηση:

$$fun = -\frac{2\pi}{\mu_0} \left( E_c \left( \frac{J_i}{J_c} \right)^n + \frac{r_i B_0 \sin(\omega t)}{2} \right)$$

Παρακάτω θα περιγράψουμε την συγκεκριμένη εντολή και ποιου είδους προβλήματα διαχειρίζεται.

- Εντολή ode15s

Ο συγκεκριμένος επιλύτης χρησιμοποιείται για την επίλυση "άκαμπτων" διαφορικών εξισώσεων (stiff differential equation), όπως είναι και η εξίσωση 4.9 που πρέπει να διαχειριστούμε. Οι βασικότερες συντάξεις της εντολής ode15s στην Matlab, είναι οι εξής:

- $[t, y] = \text{ode15s}(\text{fun}, t_s, y_0)$  με διάστημα ολοκλήρωσης  $t_s = [t_o, t_f]$ . Με βάση αυτή την σύνταξη, η εντολή ode15s ολοκληρώνει συστήματα διαφορικών εξισώσεων της μορφής  $y' = f(t, y)$ , όπου  $fun = f(t, y)$ , από  $t_o$  μέχρι  $t_f$  με αρχικές συνθήκες  $y_0$ .
- $[t, y] = \text{ode15s}(\text{fun}, t_s, y_0, \text{options})$  με διάστημα ολοκλήρωσης  $t_s = [t_o, t_f]$ . Σε αυτή την περίπτωση η εντολή ode15s έχει την επιπρόσθετη δυνατότητα να ολοκληρώνει συστήματα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:  $M(t, y)y' = f(t, y)$  δηλαδή συστήματα που περιέχουν έναν Mass Matrix,  $M(t, y)$ . Ουσιαστικά, μέσω των options καλούμε της απαιτούμενες εντολές για να καθοδηγήσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση. Για παράδειγμα μπορούμε να καλέσουμε τις AbsTol και Reltol options για να προσδιορίσουμε την ανοχή μας στα σφάλματα. Επίσης μέσω των options μπορούμε να καλέσουμε την εντολή Mass.options= M(t,y) ώστε να συμπεριλάβουμε στο πρόβλημα μας τον Mass Matrix σε περίπτωση που υπάρχει.

Να σημειώσουμε πως όλοι οι επιλύτες ODe solvers της Matlab, π.χ. ode23,ode23t,ode45, μπορούν να επιλύσουν εξισώσεις της μορφής  $y' = f(t, y)$  ή προβλήματα που να περιέχουν και Mass Matrix  $M(t, y)y' = f(t, y)$ . Παρόλα αυτά τέτοιοι επιλύτες δεν μπορούν να διαχειριστούν "άκαμπτες" διαφορικές εξισώσεις, όπως είναι και το υπό εξέταση πρόβλημα σχέση 3.25.

Με τον όρο "άκαμπτες" διαφορικές εξισώσεις εννοούμε διαφορικές εξισώσεις για τις οποίες συγκε-

κριμένες αριθμητικές μέθοδοι είναι αριθμητικά ασταθείς. Γενικά όταν ολοκληρώνουμε μια διαφορική εξίσωση αριθμητικά, θα περίμενε κανείς το απαιτούμενο βήμα ολοκλήρωσης να είναι σχετικά μικρό στην περιοχή όπου η καμπύλη παρουσιάζει έντονη μεταβολή και σχετικά μεγάλο εκεί όπου η καμπύλη λύσης προσεγγίζει την ευθεία γραμμή. Τα προβλήματα όμως άκαμπτων εξισώσεων δεν λύνονται με αυτόν τον τρόπο. Σε τέτοιες περιπτώσεις για να μας δώσει μια αριθμητική μέθοδος ένα αξιόπιστο αποτέλεσμα, απαιτείται το βήμα ολοκλήρωσης να είναι "απαγορευτικά" μικρό ακόμα και σε περιοχές όπου η καμπύλη  $y = f(x)$  είναι smooth (απείρως παραγωγίσιμη). Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως "άκαμπτοτητα" (stiffness). Οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τον όρο "άκαμπτο" πρόβλημα ήταν οι Gurtiss και Hirschfelder και επινόησαν μία αριθμητική μέθοδο, την προς τα πίσω διαφόριση για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

Με βάση τα παραπάνω, γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι η προς επίλυση εξίσωση που αφορά τα επαγόμενα ρεύματα  $J$  στον υπεραγωγίμο κύλινδρο, σχέση 4.9 είναι της μορφής:

$$K\dot{J} = f(t, J),$$

όπου  $K$  η Mass Matrix που αποτελεί έναν πίνακα  $N_r \times N_z$  και  $J$  ένας πίνακας στήλη  $N$  στοιχείων. Για την επίλυση της πραγματοποιούμε αριθμητική ολοκλήρωση μέσω της εντολής στην Matlab ode15s για χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης  $t \in [0, 2T]$  με βήμα  $t_n = 0.002$  όπου η περίοδος ταλάντωσης του ac πεδίου. Παρακάτω θα παραθέσουμε το κομμάτι του προγράμματος της Matlab που πραγματοποιεί τον υπολογισμό των επαγόμενων ρευμάτων  $J$ .

Listing 4.3: Υπολογισμός Επαγόμενων ρευμάτων

```
% cylinder properties
B0=0.0005; % amplitude of the ac field Tesla
Jc0 = 0.2e9; %0.5 % critical current density [A/m^2]
Jp=4e6; % peak critical current density [A/m^2]
Ec = 1e-4; % electric field at J=Jc [V/m]

%% time vector
t_0=0; % initial time
nperiods=2; % number of periods
t_f=nperiods*Period; % final time
n_t=2001; % always use an odd number
t = linspace(t_0, t_f, n_t);

% electric field function and derivative
E = @(J) Ec*sign(J).*abs(J./Jc(Temp(n9))).^n;
dEdJ = @(J) Ec*(n./Jc(Temp(n9))).*abs(J./Jc(Temp(n9))).^(n-1);

% initial current distribution
J0 = zeros(Nr, Nz);

% function to integrate
% the factor 5e6 equals 2pi/mu0
fun = @(t, J) -5e6 * (E(J)+0.5*r_middle(:)*Bdot(t));

% jacobian matrix
jac = @(t, J) -5e6 * spdiags(dEdJ(J), 0, N, N);

% numerical integration
options = odeset();
options.AbsTol = 1e-3*Jc(Temp(n9));
options.Jacobian = jac;
options.Mass = K;
options.MStateDependence = 'none';
options.RelTol = 1e-6;
options.Stats = 'on';
options.Vectorized = 'on';
tic;
[T, J] = ode15s(fun, t, J0, options);
toc
```

- Υπολογισμός διανυσματικού δυναμικού  $A$

Έχοντας τώρα υπολογίσει τα επαγόμενα ρεύματα  $J_i(r, z)$  για κάθε στοιχείο  $i$  εντός του υπεραγωγίμου κυλίνδρου καθώς και τον Mass Matrix  $K_{ij}$ , μπορούμε να υπολογίσουμε το διανυσματικό δυναμικό  $A_i$  μέσω της σχέσης 4.2. Έχοντας πραγματοποιήσει την άθροιση ως προς  $j$  στον Mass Matrix, η εν λόγω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

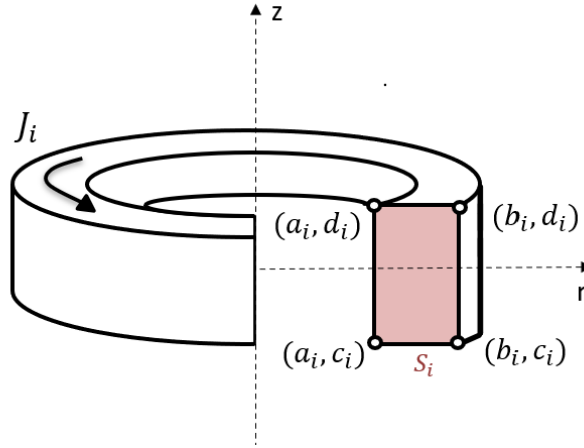
$$A_i = 2 \times 10^{-7} K_{ij} J_j + 0.5 r_i B_0(t),$$

όπου  $r_i = (a_i + b_i)/2$  και έχουμε κάνει την αντικατάσταση  $\mu_0/2\pi = 2 \times 10^{-7}$ .

- Υπολογισμός μαγνητικής ροπής  $\mathbf{m}$

Από τον υπολογισμό της μαγνητικής ροπής  $m$  μπορούμε να υπολογίσουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της  $n$ -οστής συνιστώσας της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας,  $x'_n$ ,  $x''_n$  μέσω των σχέσεων 2.30 και 2.31 αντίστοιχα. Η μαγνητική ροπή  $m$  υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$2.23 \implies \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV$$



Σχήμα 4.3: Αναπαράσταση  $i$  δακτυλίου που διαρρέεται από πυκνότητα ρεύματος  $J_i$  στην  $\hat{e}_\phi$  διεύθυνση και της διατομής του, εμβαδού  $s_i$ .

Για να καταλήξουμε στην έκφραση που χρησιμοποιείται στο πρόγραμμα μας για τον υπολογισμό της μαγνητικής ροπής του υπεραγωγίμου κυλίνδρου θα κάνουμε χρήση της 2.23 αλλά θα την εφαρμόσουμε για ένα στοιχείο δακτυλίου  $i$  και στην συνέχεια θα περάσουμε στην εντολή που μας δίνει την μαγνητική ροπή για όλον τον όγκο  $V$ . Έτσι για κάθε  $i$  δακτύλιο η μαγνητική ροπή  $m_i$  λαμβάνει την εξής μορφή:

$$2.23 \implies \mathbf{m}_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{J}_i dV_i,$$

όπου η ολοκλήρωση πραγματοποιείται στον όγκο  $V_i$  του κάθε δακτυλίου. Το παραπάνω εξωτερικό γινόμενο μας δίνει:  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{J}_i = r_i J_i \hat{r} \times \hat{e}_\phi = r_i J_i \hat{e}_z$  και χρησιμοποιώντας τον στοιχειώδες όγκο στις κυλινδρικές  $dV_i = r_i dr d\phi dz$ , προκύπτει:

$$\mathbf{m}_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} r_i J_i \hat{e}_z \cdot r_i dr d\phi dz = \frac{1}{2} r_i^2 J_i \cdot \hat{e}_z \int_{a_i}^{b_i} \int_0^{2\pi} \int_{c_i}^{d_i} dr d\phi dz,$$

με  $r_i = (a_i + b_i)/2$  η οποία είναι σταθερά, και επομένως βγαίνει εκτός ολοκληρώματος. Πραγματοποιώντας τις παραπάνω ολοκληρώσεις προκύπτει:

$$\mathbf{m}_i = \frac{1}{2} 2\pi r_i^2 J_i (b_i - a_i)(d_i - c_i) \hat{e}_z \implies$$

$$\mathbf{m}_i = \pi r_i^2 J_i s_i \hat{e}_z \quad (4.10)$$

όπου  $s_i = (b_i - a_i)(d_i - c_i)$  το εμβαδόν της διατομής κάθε στοιχείου  $i$  στο επίπεδο  $x - z$ , Σχήμα 4.3. Μέσω της σχέσης 4.10 υπολογίζεται η μαγνητική ροπή κάθε δακτυλίου.

Τώρα, στο πρόγραμμά μας για τον υπολογισμό της μαγνητικής ροπής  $\mathbf{m}$  όλου του κυλίνδρου για κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιείται η εντολή:

Listing 4.4: Υπολογισμός μαγνητικής ροπής

```
%calculate magnetic moment
m=J*(pi*r_middle(:).^2.*s(:))
```

Όπου  $J$  ο πίνακας του ρεύματος, ο οποίος έχει υπολογιστεί παραπάνω, που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές ρεύματος κάθε δακτυλίου  $i$  για διάφορες χρονικές στιγμές στα πλαίσια δύο περιόδων ταλάντωσης του ac μαγνητικού πεδίου. Στο πρόγραμμά μας αυτές οι χρονικές στιγμές δίνονται ως στοιχεία του χρονικού πίνακα  $T$ . Επίσης, οι ποσότητες  $rmiddle()$  και  $s()$  είναι πίνακες με το πρώτο να περιέχει τις συντεταγμένες του κάθε  $i$  δακτυλίου στην  $r$ -διεύθυνση και το δεύτερο να περιέχει τις τιμές του εμβαδού της διατομής στο  $x - z$  επίπεδο του κάθε δακτυλίου.

Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται η μαγνητική ροπή  $\mathbf{m}$  για όλον τον όγκο του κυλίνδρου η οποία δίνεται από τον πίνακα  $m$ . Ο πίνακας αυτός περιέχει τις τιμές της μαγνητικής ροπής για όλο τον κύλινδρο για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές του χρονικού πίνακα  $T$ .

- Υπολογισμός πραγματικού και φανταστικού μέρους της πρώτης αρμονικής της ac επιδεκτικότητας

Έχοντας υπολογίσει την μαγνητική ροπή σε όλο τον όγκο του υπεραγώγιμου δείγματος συναρτήσει του χρόνου (πίνακας  $m$ ), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της πρώτης αρμονικής της ac-επιδεκτικότητας. Να σημειώσουμε πως στο πρόγραμμα που χρησιμοποιούμε οι σχέσεις που θα εφαρμόσουμε είναι ελαφρώς τροποποιημένες σε σχέση με τις αντίστοιχες εκφράσεις του Brandt [13], 2.30, 2.31. Συγκεκριμένα έχουν διαφορά ενός παράγοντα  $\mu_0/2$  (στον κώδικα οι μονάδες του πλάτους του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου είναι Tesla). Έτσι, οι σχέσεις του προγράμματος έχουν ως εξής:

$$\chi'_1 = \frac{\mu_0}{2} \frac{\omega}{\pi V B_{ac}} \int_0^T m \sin(\omega t) dt \quad (4.11)$$

και

$$\chi''_1 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{\omega}{\pi V B_{ac}} \int_0^T m \cos(\omega t) dt \quad (4.12)$$

Θα κάνουμε χρήση των σχέσεων  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\mu_0/2\pi = 2 \cdot 10^{-7}$  ώστε να τροποποιήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις και να τις φέρουμε στην μορφή που χρησιμοποιούνται στο πρόγραμμα. Έπειτα από μερικές πράξεις και θέτοντας όπου  $cfa = \frac{\mu_0}{V H_{ac}}$  (σταθερά του προγράμματος), οι σχέσεις 4.11 και 4.12 λαμβάνουν την μορφή:

$$\chi'_1 = \frac{cfa}{T} \int_0^T m \sin(\omega t) dt \quad (4.13)$$

και

$$\chi''_1 = -\frac{cfa}{T} \int_0^T m \cos(\omega t) dt \quad (4.14)$$

Αξιοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις 4.13 και 4.14 για τον υπολογισμό των ποσοτήτων  $\chi'_1$  και  $\chi''_1$  στο πρόγραμμά μας, ορίζουμε τούς πίνακες  $mBr$  και  $mBi$  οι οποίοι περιέχουν τα εξής στοιχεία

αντίστοιχα:

$$mBr(i) = \frac{cfa}{period} m(i) \sin(\omega T(i))$$

και

$$mBi(i) = -\frac{cfa}{period} m(i) \cos(\omega T(i))$$

με  $i$  να παίρνει τιμές από 0 έως  $numel(T)$  (συνολικός αριθμός στοιχείων του χρονικού πίνακα  $T$ ). Οι παραπάνω ποσότητες είναι οι αντίστοιχες ολοκληρωταίες ποσότητες των ολοκληρωμάτων των σχέσεων 4.13 και 4.14. Να σημειώσουμε ότι την περίοδο ταλάντωσης του ac πεδίου την συμβολίζουμε με  $period$  ώστε να μην επικρατήσει σύγχυση με τον χρονικό πίνακα  $T$ . Έτσι το στοιχείο πίνακα  $mBr(i)$  του πίνακα  $mBr$  αποτελεί την τιμή της ποσότητας  $\frac{cfa}{period} m(t) \sin(\omega t)$  για την χρονική στιγμή  $t$  που δίνεται από τον πίνακα  $T(i)$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω τα ολοκληρώματα που θα υπολογίσουμε παίρνουν την εξής μορφή:

$$\chi'_1 = \int_{T(1)}^{T(end)} mBr(T) dT$$

και

$$\chi''_1 = \int_{T(1)}^{T(end)} mBi(T) dT$$

Από την στιγμή που τα δεδομένα μας, ο χρονικός πίνακας  $T$  και οι πίνακες  $mBr$ ,  $mBi$ , παίρνουν διακριτές τιμές, θα υπολογίσουμε τα παραπάνω ολοκληρώματα με αριθμητικό τρόπο, εκμεταλλευόμενοι την μέθοδο του τραπεζίου και συγκεκριμένα εφαρμόζοντας την εντολή  $trapz(T, mBr)$ . Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε τις τιμές του πραγματικού και φανταστικού μέρους της πρώτης αρμονικής της ac επιδεκτικότητας που χαρακτηρίζει το υπεραγώγιμο δείγμα για ac μαγνητικό πεδίο με γωνιακή συχνότητα  $\omega$  και πλάτος  $H_0$ , για μια συγκεκριμένη τιμή της θερμοκρασίας στην οποία έχει τοποθετηθεί το δείγμα. Το μέρος του προγράμματος στην Matlab που χρησιμοποιούμε για τον παραπάνω υπολογισμό έχει έως εξής:

Listing 4.5: Υπολογισμός πραγματικού και φανταστικού μέρους πρώτης αρμονικής ac επιδεκτικότητας

```
mBr=zeros(numel(T),1);
mBi=zeros(numel(T),1);
Cfa=1/(Volume*B0/(4*pi*1e-7));
for i=1:numel(T)
    mBr=2*cfa*m(i)*sin(omega*T(i))/(2*Period);
    mBi=2*cfa*m(i)*cos(omega*T(i))/(2*Period);
%calculate tje real and the imaginary AC sussesptibility
chl1=trapz(T,mBr); %real part
chl1i=trapz(T,mBi); %imaginary part
```

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές που λαμβάνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της τρίτης αρμονικής της ac επιδεκτικότητας,  $\chi'_3$ ,  $\chi''_3$  αντίστοιχα.

- Υπολογισμός πραγματικού και φανταστικού μέρους της τρίτης αρμονικής της ac επιδεκτικότητας

Για τον υπολογισμό των εν λόγω ποσοτήτων θα κάνουμε χρήση των σχέσεων:

$$\chi'_3 = \frac{cfa}{T} \int_0^T m(t) \sin 3\omega t dt \quad (4.15)$$

$$\chi''_3 = \frac{cfa}{T} \int_0^T m(t) \cos 3\omega t dt \quad (4.16)$$

Εφαρμόζοντας την διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω και χρησιμοποιώντας του συμβολισμού του προγράμματος θέτουμε τους εξής πίνακες:

$$mBr3(i) = \frac{cfa}{period} m(i) \sin(3\omega T(i)) \quad , \quad mBi3(i) = \frac{cfa}{period} m(i) \cos(3\omega T(i))$$

όπου οι παραπάνω τιμές πινάκων δεν είναι τίποτα άλλο από τις ολοκληρωταίες ποσότητες των ολοκληρωμάτων 4.15 και 4.16, αντίστοιχα. Όμοια με προηγούμενος, τις ζητούμενες ολοκληρώσεις τις πραγματοποιούμε υπολογιστικά μέσω της εντολής της Matlab, `tranz(T,mBr3)`. Το αντίστοιχο μέρος του προγράμματος έχει ως εξής:

Listing 4.6: Υπολογισμός πραγματικού και φανταστικού μέρους τρίτης αρμονικής ac επιδεκτικότητας

```
mBr3=zeros(numel(T),1);
mBi3=zeros(numel(T),1);
Cfa=1/(Volume*B0/(4*pi*1e-7));
for i=1:numel(T)
    mBr3=2*cfa*m(i)*sin(3*omega*T(i))/(2*Period);
    mBi3=2*cfa*m(i)*cos(#omega*T(i))/(2*Period);
%calculate tje real and the imaginary AC sussesptibility
ch3r=trapz(T,mBr3); %real part
ch3i=trapz(T,mBi3); %imaginary part
```





## Κεφάλαιο 5

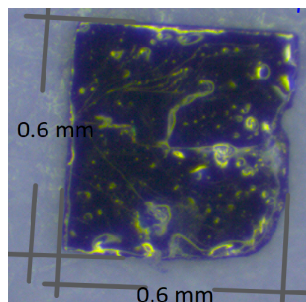
### Πειραματικές μετρήσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα παραθέσουμε και θα σχολιάσουμε τα πειραματικά αποτελέσματα των μετρήσεων της μιγαδικής εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας που πραγματοποιήθηκαν σε κρύσταλλο του υπεραγωγού  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  για διαφορετικές τιμές του σταθερού μαγνητικού πεδίου και διαφορετικά πλάτη εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου,  $H_0$ . Θα παρουσιάσουμε τις φυσικές βάσεις μέτρησης της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας. Θα αναφερθούμε επίσης στο διάγραμμα φάσεων της ύλης φλαξονίων που προέκυψε από τις μετρήσεις της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας.

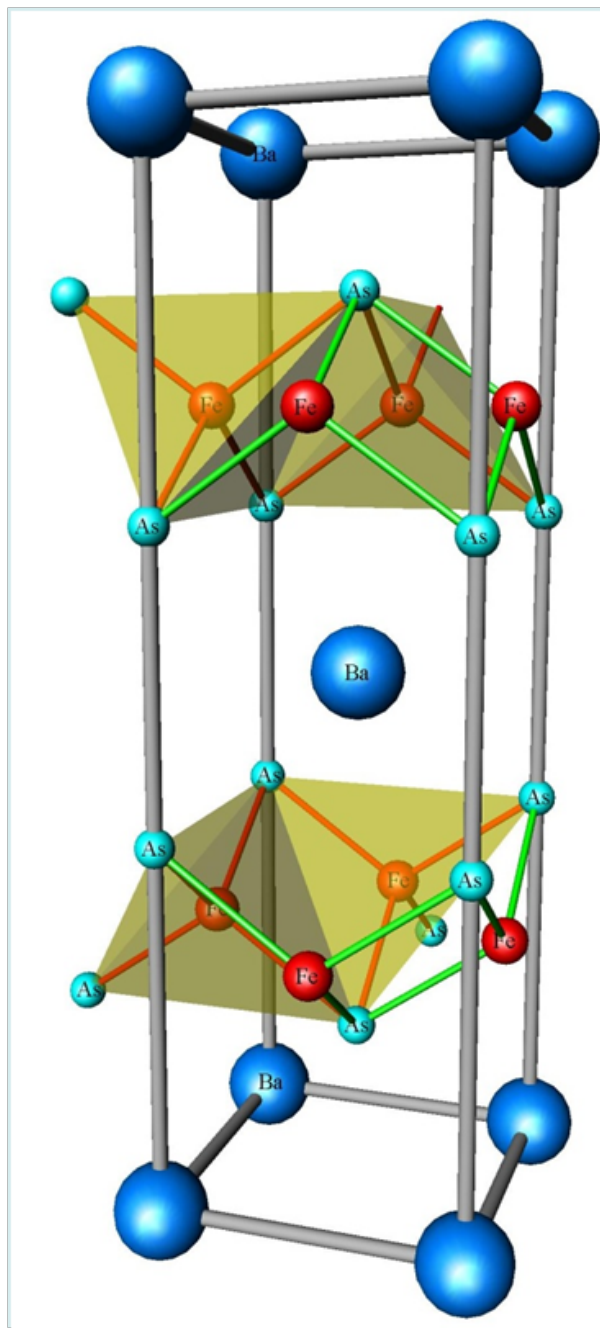
#### 5.1 Ανάπτυξη των κρυστάλλων $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$

Οι μετρήσεις εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας έγιναν σε ένα μονοκρύσταλλο  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  που αναπτύχθηκε από τους Chunlei Wang, και Yanwei Ma στο Key Laboratory of Applied Superconductivity, του Institute of Electrical Engineering, στο Πεκίνο. Η ανάπτυξη των κρυστάλλων  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  έγινε σύμφωνα με την ακόλουθη μέθοδο. Κατάλληλες ποσότητες Ba, Fe, As (5 wt% περισσότερο από τη στοιχειομετρία) και K (10 wt% K περισσότερο από τη στοιχειομετρία) αλέστηκαν σε ατμόσφαιρα Ar για ~ 6 ώρες για να επιτευχθεί χημική ομοιογένεια. Η χρήση περίσσειας As και K έγινε προκειμένου να αντισταθμιστεί η απώλεια τους στις υψηλές θερμοκρασίες. Η ονομαστική στοιχειομετρία ήταν  $Ba_{0.6}K_{0.44}Fe_2As_{2.1}$ . Οι πρώτες ύλες τοποθετήθηκαν σε χωνευτήριο αλούμινας το οποίο τοποθετήθηκε σε χαλύβδινο σωλήνα. Δεν χρησιμοποιήθηκε χαλαζίας σαν αντιδραστήρας επειδή αυτός αντιδρά με τους ατμούς καλίου. Η σφράγιση του ανοξείδωτου αντιδραστήρα έγινε με συγκόλληση τόξου σε ατμόσφαιρα αργού.

Ο σφραγισμένος αντιδραστήρας τοποθετήθηκε σε σωληνωτό κλίβανο και θερμάνθηκε στους  $1200^\circ C$  μέχρι να επέλθει πλήρης τήξη. Στη συνέχεια τα δείγματα ψύχθηκαν αργά σε θερμοκρασία κάτω από  $1050^\circ C$ .



Σχήμα 5.1: Φωτογραφία του κρυστάλλου  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  σχήματος πλακιδίου που χρησιμοποιήθηκε για τις μετρήσεις που περιέχονται σ' αυτή τη διπλωματική. Ο κρυσταλλογραφικός άξονας  $c$  είναι κάθετος στην επιφάνεια του πλακιδίου.



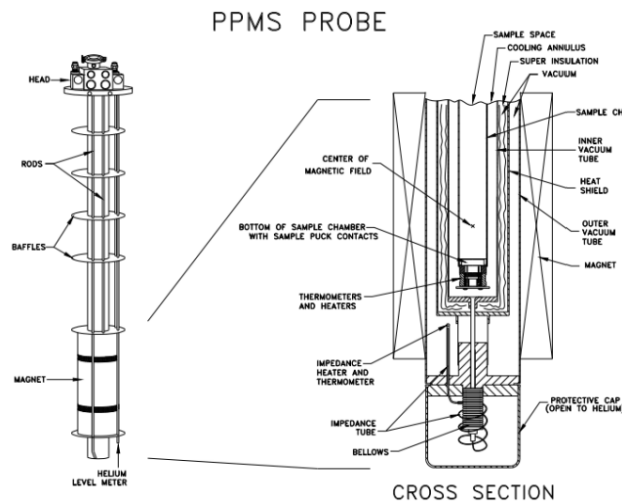
Σχήμα 5.2: Μοναδιαία κυψελίδα της ένωσης  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$ .

Τέλος, η τελική ψύξη έγινε με σβήσιμο του κλιβάνου. Στο σχήμα 5.1 φαίνεται ο κρύσταλλος που χρησιμοποιήσαμε στις μετρήσεις μας. Ο κρύσταλλος μπορεί να θεωρεί ότι είναι ένα πλακίδιο με διαστάσεις  $600 \times 650 \times 20 \mu m^3$ . Ο κρύσταλλος βρίσκεται εμβαπτισμένος εντός λιπαντικού χαμηλών θερμοκρασιών (APIEZON TYPE N).

Η δομή του υπεραγωγού  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στρώματα τετράεδρων του σιδήρου με το As. Τα στρώματα  $FeAs_4$  διαχωρίζονται από επίπεδα Ba. Η αντικατάσταση του βαρίου με το κάλιο προκαλεί αλλαγή της ηλεκτρονικής δομής μετατρέποντας την ένωση  $BaFe_2As_2$  σε υπεραγωγό. Η υπεραγωγιμότητα προέρχεται από τις καταστάσεις του σιδήρου. Να σημειώσουμε πως για το συγκεκριμένο υλικό σε θερμοκρασία 0 K το μήκος διεύθυνσης London είναι περίπου  $\lambda = 270 nm$  και το μήκος συσχέτισης είναι  $\xi = 2 nm$ , [14],[15].

## 5.2 Διάταξη μέτρησης εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας

Οι μετρήσεις της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγιναν μέσω της πειραματικής διάταξης PPMS (Physical Property Measurement System). Πρόκειται για ένα σύστημα μέτρησης των φυσικών ιδιοτήτων του κρυστάλλου, ανοιχτής αρχιτεκτονικής, της εταιρίας Quantum Design. Χρησιμοποιείται για τη λήψη μετρήσεων που αφορούν τις μαγνητικές ιδιότητες του υλικού (μαγνήτιση, εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα). Οι μετρήσεις των παραπάνω μεγεθών μπορούν να πραγματοποιηθούν από τους  $1.8K$  έως τους  $350K$  και για μαγνητικά πεδία από  $-9$  έως  $9$  Tesla. Τα σημαντικότερα τμήματα του συστήματος PPMS είναι ο κρυστάτης και ο υπεραγωγίμος μαγνήτης.



Σχήμα 5.3: Αριστερά φαίνεται η διάταξη του δείγματος (χώρος μεταβλητής θερμοκρασίας, υπεραγωγίμος μαγνήτης, probe) του PPMS και δεξιά μία λεπτομέρεια του μηχανισμού μεταβλητής θερμοκρασίας που βρίσκεται στο κάτω μέρος της probe. Τα σχήματα τα λάβαμε από τον οδηγό χρήστη του συστήματος PPMS.

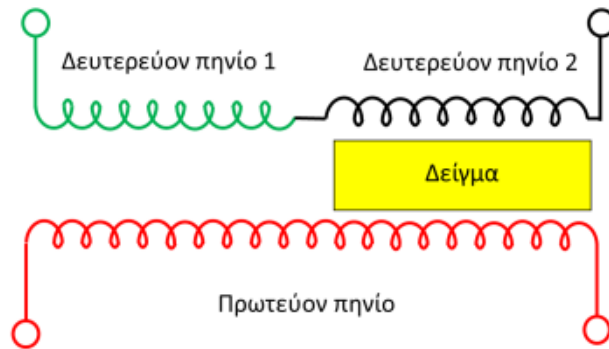
Ο κρυστάτης του PPMS είναι ένα κυλινδρικό δοχείο, (δες Σχήμα 5.3) με χωρητικότητα υγρού ήλιου 65 liter τα οποία χρησιμοποιούνται για την ψύξη του υπεραγωγίμου μαγνήτη και την επίτευξη μεταβλητής θερμοκρασίας στον χώρο του δείγματος. Για να διατηρηθεί το ήλιο σε υγρή κατάσταση και να έχουμε χαμηλή κατανάλωση υγρού ήλιου, το δοχείο που περιέχει το υγρό περιβάλλεται από ένα χώρο με κενό ενώ στην πάνω μεριά του δοχείου υπάρχει χώρος χωρητικότητας 45 liter για υγρό άζωτο με σκοπό την θερμική θωράκιση του χώρου που βρίσκεται το υγρό ήλιο. Στο δοχείο του υγρού εισάγεται η probe (Σχήμα 5.3) η οποία αποτελείται από το χώρο του δείγματος και τον υπεραγωγίμο μαγνήτη.

Οι μετρήσεις εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας γίνονται με κατάλληλη διάταξη (ACMS AC Measuring System, ή ACMS probe) η οποία εισάγεται στο χώρο μεταβλητής θερμοκρασίας του κρυστάτη.

Η διάταξη ACMS αποτελείται από ένα πλαστικό σωλήνα γύρω από τον οποίο είναι τυλιγμένα με αντίθετη σχετική φορά δύο πηνία με ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά (αριθμός σπειρών  $N$ , μήκος  $L$  και διάμετρο  $D$ ) που ονομάζονται πηνία ανίχνευσης (ή δευτερεύοντα πηνία, detection coils) και έχουν ως ρόλο τη μέτρηση της μαγνητικής απόκρισης του δείγματος. Αμέσως μετά είναι τυλιγμένα δύο πηνία (κύκλωμα πρωτεύοντος πηνίου) των οποίων το μήκος καλύπτει το άθροισμα των μηκών των πηνίων ανίχνευσης σε αστατική διάμορφωση με αριθμό σπειρών  $N_{p1}$ ,  $N_{p2}$  και διαμέτρους  $D_{p1}$ ,  $D_{p2}$  έτσι ώστε  $(N_{p1}D_{p1}^2 = N_{p2}D_{p2}^2)$ .

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, [8] για τη μέτρηση της εναλλασσόμενης μαγνήτισης ή μαγνητικής επιδεκτικότητας χρησιμοποιούμε το κύκλωμα του δευτερεύοντος πηνίου το οποίο αποτελείται από δύο ίδια, ομοαξονικά πηνία αντίθετα τυλιγμένα. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε θεωρητικά τη λειτουργία της παραπάνω διάταξης. Για την απλοποίηση των υπολογισμών που θα ακολουθήσουν, θα αγνοήσουμε την καμπύλωση των μαγνητικών γραμμών στα άκρα των δύο δευτερευόντων πηνίων. Επίσης θεωρούμε ότι το

δείγμα καταλαμβάνει όλον τον όγκο ενός εκ των δύο πηνίων δηλαδή ο όγκος  $V$  του δείγματος θα ισούται με  $V = S \times L$ , όπου  $S$  το εμβαδόν της διατομής του πηνίου και  $L$  το μήκος του. Η παραπάνω διάταξη αναπαρίσταται σχηματικά στο Σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4: Σχηματική αναπαράσταση της διάταξης των πηνίων

Τα δύο πηνία είναι αντίθετα τυλιγμένα και το πηνίο 1 είναι κενό ενώ στο πηνίο 2 περιέχεται το υπό εξέταση δείγμα. Η συνολική μαγνητική ροή των δύο δευτερευόντων πηνίων θα ισούται με

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (5.1)$$

Όσον αναφορά το πηνίο 1, η μαγνητική ροή που εισέρχεται σε αυτό θα είναι:  $\Phi_1 = B_1SN$ , όπου  $B_1$  η μαγνητική επαγωγή που οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο  $H$  που παράγεται από το πρωτεύον κύκλωμα πηνίου και  $N$  ο αριθμός σπειρών του. Επειδή το πηνίο 1 είναι κενό, η σχέση που συνδέει της ποσότητες  $B_1, H$  είναι η εξής:  $B_1 = \mu_0 H$ , όπου  $\mu_0$  η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Όσον αναφορά το πηνίο 2 του δευτερεύοντος κυκλώματος, η μαγνητική ροή που εισέρχεται σε αυτό θα είναι:  $\Phi_2 = B_2SN$ . Σε αυτή την περίπτωση, επειδή εντός του πηνίου 2 βρίσκεται το δείγμα, η μαγνητική επαγωγή  $B_2$  δίνεται από την σχέση:  $B_2 = \mu_0(M + H)$ , όπου  $M$  η μαγνήτιση του υλικού. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην 5.1 προκύπτει:

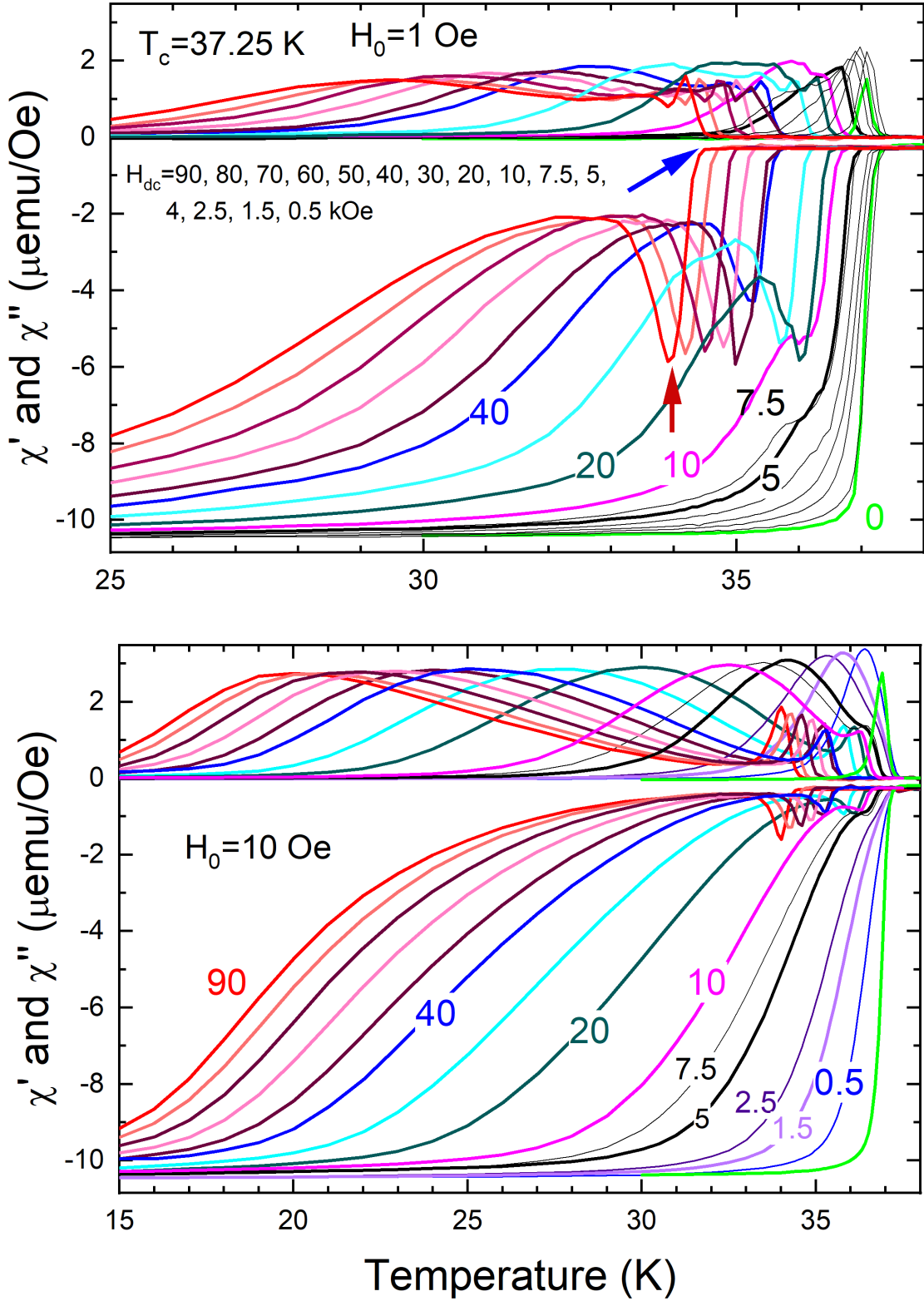
$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 &\implies \Phi = \int \mathcal{N} dz \int \mathbf{B}_1 d\mathbf{S} + \int \mathcal{N} dz \int \mathbf{B}_2 d\mathbf{S} \implies \\ \Phi &= \int \mathcal{N} dz \int (B_1 - B_2) d\mathbf{S} \implies \Phi = \mu_0 \mathcal{N} \int dz \int (\mathcal{H} - M - \mathcal{H}) d\mathbf{S} \implies \\ \Phi &= \mu_0 \mathcal{N} L \int -M d\mathbf{S} \implies \Phi = -\mu_0 \mathcal{N} V M \end{aligned}$$

Οι μαγνητικές ροές που διέρχονται από τα δύο πηνία είναι ετερόσημες διότι αυτά είναι αντίθετα τυλιγμένα, εξού και το αρνητικό πρόσημο στη μαγνητική ροή του πηνίου 2. Στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούμε,  $\mathcal{N}$ : ο αριθμός σπειρών κάθε πηνίου ανά μονάδα μήκους, ενώ θεωρούμε πως ο άξονας των πηνίων είναι ο  $z$ -άξονας. Έτσι, η ολοκλήρωση ως προς  $z$  γίνεται για να λάβουμε υπόψη όλες τις σπείρες των πηνίων.

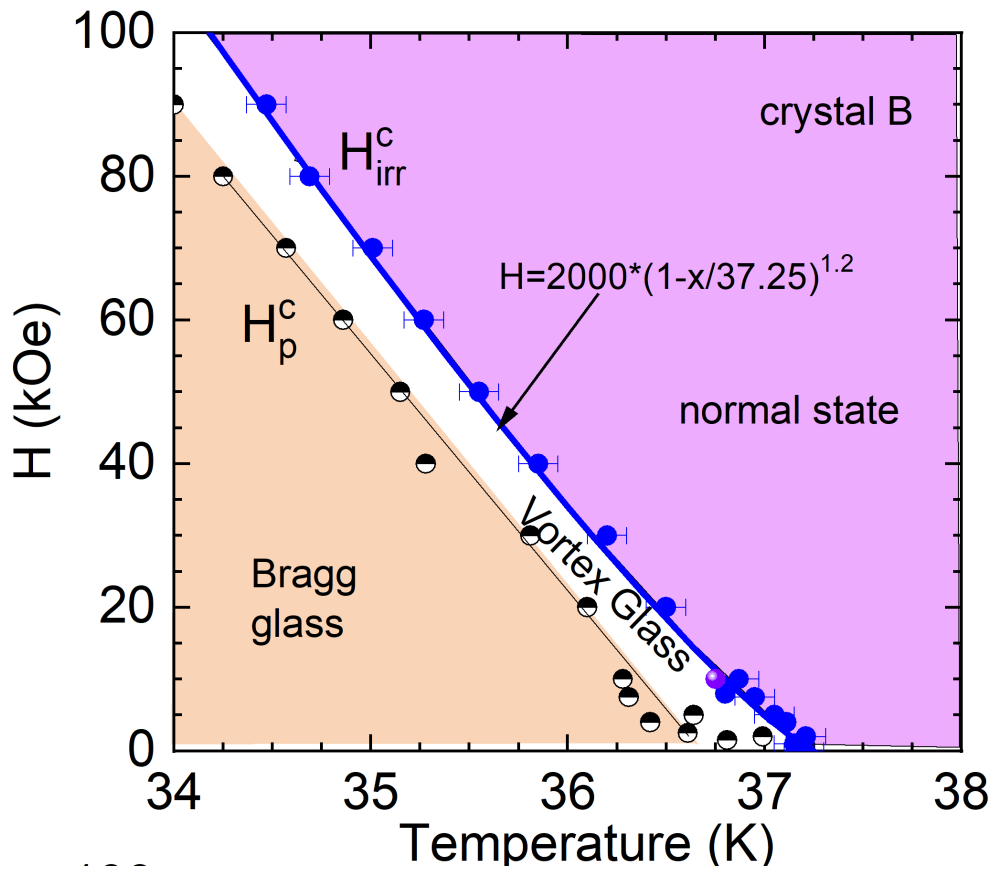
Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday η μεταβολή της μαγνητικής ροής των πηνίων του δευτερεύοντος κυκλώματος οδηγεί στην δημιουργία μια ηλεκτρεγερτικής δύναμης από επαγωγή με βάση την σχέση:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \implies \mathcal{E} = \mu_0 \mathcal{N} V \frac{dM(t)}{dt} \quad (5.2)$$

Όπως αναφέραμε και παραπάνω στο δείγμα ασκούνται δύο μαγνητικά πεδία, ένα σταθερό  $H_{dc}$  και ένα



Σχήμα 5.5: Μεταβολή με τη θερμοκρασία του πραγματικού  $\chi'(T)$  και φανταστικού  $\chi''(T)$  μέρους της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας  $\chi = \chi' - i\chi''$  του κρυστάλλου  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$ . Η μέτρηση της μιγαδικής επιδεκτικότητας,  $\chi$ , έγινε κατά την ψύξη με πλάτος εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου  $H_0 = 1 \text{ Oe}$  (πάνω σχήμα) και  $H_0 = 10 \text{ Oe}$  (κάτω σχήμα). Η συχνότητα του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου ήταν  $f = 5111 \text{ Hz}$ . Επιπρόσθετα, οι μετρήσεις έχουν γίνει σε σταθερό dc-μαγνητικό πεδίο ( $H_{dc} = 0 - 90 \text{ kOe}$ , με  $\mathbf{H}_{dc} \parallel \mathbf{H}_0$ ).



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα φάσης της ύλης φλαξονίων του υπεραγωγού  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  όπως αυτό προσδιορίζεται από τις μετρήσεις της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας.

περιοδικά μεταβαλλόμενου  $H_0 \sin(\omega t)$ . Έτσι το συνολικό μαγνητικό πεδίο θα ισούται με

$$H(t) = H_{dc} + H_0 \sin(\omega t).$$

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, η περιοδική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου που τοποθετείται το δείγμα έχει σαν αποτέλεσμα η μαγνήτιση του υλικού να είναι επίσης περιοδική συνάρτηση του χρόνου και να μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά fourier

$$M = \langle M \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} [M'_n \sin(n\omega t) + M''_n \cos(n\omega t)].$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων 2.24 και 2.27 οι συντελεστές του παραπάνω αναπτύγματος θα δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\chi'_n = \frac{M'_n}{H_0} \implies M'_n = \chi'_n H_0$$

και

$$\chi''_n = -\frac{M''_n}{H_0} \implies M''_n = -\chi''_n H_0$$

όπου  $\chi'_n$ ,  $\chi''_n$  το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της  $n$ -οστής αρμονικής της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας

$$\chi_n = \chi'_n - i\chi''_n.$$



Έτσι η μαγνήτιση θα έχει την εξής τελική έκφραση:

$$M = \langle M \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} [\chi'_n H_0 \sin(n\omega t) - \chi''_n H_0 \cos(n\omega t)] \quad (5.3)$$

Αντικαθιστώντας την 5.3 στην 5.2, η ηλεκτρεγερτική δύναμη θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{E} = \mu_0 \mathcal{N} V \frac{dM(t)}{dt} = \mu_0 \mathcal{N} V \sum_{n=0}^{\infty} (n\omega \chi'_n H_0 \cos(n\omega t) - n\omega \chi''_n H_0 \sin(n\omega t))$$

Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε πως η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στα άκρα των πηνίων ανίχνευσης, γράφεται ως σειρά Fourier με συντελεστές τις αρμονικές συνιστώσες της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας. Από την παραπάνω τελική έκφραση βλέπουμε πως η ηλεκτρική τάση της n-οστής αρμονικής που παρουσιάζει διαφορά φάσης  $90^\circ$  σε σχέση με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, είναι ανάλογη με το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ac-επιδεκτικότητας,  $\chi'_n$ , ενώ η τάση που βρίσκεται σε φάση με το μαγνητικό πεδίο, είναι ανάλογη με το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης αρμονικής της μιγαδικής ac επιδεκτικότητας  $\chi''_n$ .

Με αυτόν τον τρόπο μετράμε την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στα πηνία ανίχνευσης, στην συνέχεια το σήμα ενισχύεται και τελικά ψηφιοποιείται με τη βοήθεια ενός μετατροπέα αναλογικού-ψηφιακού σήματος. Να σημειώσουμε πως για να αυξηθεί η ακρίβεια της μέτρησης, η μέτρηση επαναλαμβάνεται τρεις φορές. Κατόπιν ακολουθεί μέτρηση των συνιστωσών Fourier του σήματος με τη βοήθεια ενός ανιχνευτή που μπορεί να μετρήσει διαφορές στη φάση του σήματος σε σχέση με τη φάση του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου που παράγει το πρωτεύον πηνίο. Έτσι υπολογίζονται τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των n-οστών αρμονικών της ac επιδεκτικότητας,  $\chi'_n, \chi''_n$ .

### 5.3 Μετρήσεις εναλλασσόμενης μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας

Στο σχήμα 5.5 φαίνονται συγκεντρωτικά οι μετρήσεις των συνιστωσών της θεμελιώδους (πρώτη αρμονική) μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας κρυστάλλου του υπεραγωγού  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$ . Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε τη μεταβολή με τη θερμοκρασία του πραγματικού  $\chi'(T)$  και του φανταστικού  $\chi''(T)$  μέρους της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας  $\chi = \chi' - i\chi''$  για ένα σύνολο τιμών του σταθερού dc-μαγνητικού πεδίου ( $H_{dc} = 0 - 90$  kOe, με  $\mathbf{H}_{dc} \parallel \mathbf{H}_0$ ). Οι μετρήσεις ελήφθησαν κατά την ψύξη με πλάτος εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου  $H_0 = 1$  Oe (πάνω σχήμα) και  $H_0 = 10$  Oe (κάτω σχήμα). Η συχνότητα του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου ήταν  $f = 5111$  Hz. Η εκτέλεση των μετρήσεων έγινε με το ακόλουθο πρωτόκολλο. (α) Θερμαίναμε το δείγμα σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από την κρίσιμη θερμοκρασία. (β) Όταν η θερμοκρασία σταθεροποιηθεί επιβάλλαμε το dc μαγνητικό πεδίο. (γ) Στη συνέχεια παίρναμε μετρήσεις σε συγκεκριμένες διαδοχικές θερμοκρασίες για  $T < T_{c2}$ .

Η μέτρηση σε μηδενικό dc-μαγνητικό πεδίο (δες καμπύλες με το πράσινο χρώμα στο σχήμα 5.5) αποκάλυψε μία απότομη μείωση της  $\chi'(T)$  (βηματική μείωση) και το σχηματισμό μίας σχετικά στενής κορυφής για την καμπύλη  $\chi''(T)$ . Το σημείο έναρξης της βηματικής μείωσης του  $\chi'(T)$  μπορεί να ταυτιστεί με την κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης από την κανονική στην υπεραγώγιμη κατάσταση. Συνεπώς, η κρίσιμη θερμοκρασία του συγκεκριμένου υπεραγωγού είναι  $T_c = 37.25 \pm 0.05$  K.

Μία πρώτη περιγραφή των μετρήσεων της  $\chi$  για dc-μαγνητικά πεδία διάφορα του μηδενός αποκαλύπτει διαμαγνητική συμπεριφορά (αρνητικές τιμές του  $\chi'(T)$ ) γεγονός που υπονοεί ότι η απόκριση των φλαξονίων αφορά καταστάσεις εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας (flux lines pinning effects). Η διαμαγνητική εκκίνηση (diamagnetic onset) μετατοπίζεται μονότονα σε σχέση με το dc-μαγνητικό πεδίο που γίνεται η

μέτρηση (δες το μπλε βέλος στο σχήμα 5.5). Το φανταστικό μέρος  $\chi''$  εκτός των άλλων σχηματίζει μία κορυφή της οποίας η θέση εξαρτάται από το dc-μαγνητικό πεδίο για σταθερό πλάτος του ac-μαγνητικού πεδίου. Για δοσμένο dc-μαγνητικό πεδίο, αντιστοιχούμε τη διαμαγνητική εκκίνηση με τη μετάβαση από την κανονική κατάσταση στην κατάσταση Abrikosov. Αυτή η θερμοκρασία συμβολίζεται με  $T_{c2}(H_{dc})$ . Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι τιμές των  $T_{c2}(H_{dc})$  είναι πρακτικά ανεξάρτητες από το πλάτος του ac-μαγνητικού πεδίου και ταυτίζονται με την εκκίνηση της τρίτης αρμονικής (οι μετρήσεις δεν φαίνονται). Οι τιμές  $T_{c2}(H_{dc})$  που προσδιορίσαμε από τις μετρήσεις της  $\chi(T, H_{dc}, H_0)$  τις έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα 5.6 (σημεία με μπλε χρώμα).

Για dc-μαγνητικά πεδία  $H_{dc} > 5$  kOe και  $T \approx 2$  K οι καμπύλες  $\chi'(T)$  εμφανίζουν μία αρνητική τοπική κορυφή (δες κόκκινο βέλος στη μέτρηση για  $H_{dc} = 90$  kOe) ενώ οι αντίστοιχες καμπύλες  $\chi''(T)$  σχηματίζουν ένα τοπικό μέγιστο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5 τα χαρακτηριστικά της αρνητικής κορυφής στις καμπύλες  $\chi'(T, H_{dc}, H_0)$  και της τοπικής κορυφής στις  $\chi''(T, H_{dc}, H_0)$  εξαρτώνται και από το  $H_{dc}$  και το  $H_0$ . Στο κεφάλαιο που θα παρουσιάσουμε τις θεωρητικές προσομοιώσεις θα δούμε πως μπορούν να ερμηνευθούν όλα αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα. Εν συντομία αναφέρουμε ότι η διαμαγνητική συμπεριφορά μπορεί να προέλθει υποθέτοντας ότι ο υπεραγωγός στην κατάσταση Abrikosov μπορεί να περιγραφεί σαν ένας μη γραμμικός αγωγός του ηλεκτρικού ρεύματος (υπερρεύματος για την ακρίβεια),  $E(J) = E_c(J/J_c(H_{dc}, T))^n$ . Η συνάρτηση  $J_c(H_{dc}, T)$  περιγράφει μία κλίμακα για την πυκνότητα ρεύματος η οποία καθορίζει το σχήμα των καμπυλών  $\chi'(T, H_{dc}, H_0)$ , και  $\chi''(T, H_{dc}, H_0)$ . Ο κρύσταλλος που χρησιμοποιήσαμε σ' αυτή τη διπλωματική έχει χαμηλότερη κρίσιμη θερμοκρασία και ασθενέστερη ισχύ ατελειών, σε σύγκριση με δύο άλλους κρυστάλλους που έχουν μελετηθεί από την ομάδα του INN στο Δημόκριτο (δες αναφορές [16], [17]).

## 5.4 Διάγραμμα φάσεων της ύλης φλαξονίων

Με τη βοήθεια των μετρήσεων της μιγαδικής εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας προσδιορίσαμε το διάγραμμα φάσεων της ύλης φλαξονίων του συγκεκριμένου κρυστάλλου της ένωσης  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$ , το οποίο φαίνεται στο σχήμα 5.6. Στο σχήμα έχουμε συμπεριλάβει τα σημεία της διαμαγνητικής εκκίνησης (μπλε σύμβολα) τα οποία αποδίδουμε στη μετάβαση από την κανονική κατάσταση στην κατάσταση Abrikosov. Η καμπύλη που προσδιορίζεται από τη διαμαγνητική εκκίνηση τη συμβολίζουμε με  $H_{c2}^c(T)$ . Ο δείκτης  $c$  δηλώνει ότι το κρίσιμο πεδίο αφορά την περίπτωση που το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο με τον  $c$ -κρυσταλλογραφικό άξονα. Η καμπύλη  $H_{c2}^c(T)$  μπορεί να αναπαρασταθεί με μία σχέση της μορφής  $H_{c2}^c(T) = H_0^c(1 - T/T_c)^p$ . Μετά από προσαρμογή με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων βρήκαμε  $H_0^c = 2000 \pm 5$ ,  $n = 1.2 \pm 0.1$  και  $T_c = 37.25 \pm 0.05$  K. Υποθέτουμε επίσης ότι με καλή προσέγγιση μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δεύτερο κρίσιμο μαγνητικό πεδίο ταυτίζεται προσεγγιστικά με την γραμμή μαγνητικής αντιστρεψιμότητας (irreversibility line)

$$H_{c2}^c(T) \approx H_{irr}^c(T).$$

Ουσιαστικά, η γραμμή μαγνητικής αντιστρεψιμότητας αντιστοιχεί στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου  $(T, H_{dc})$  στα οποία μηδενίζεται η κρίσιμη τιμή της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος. Τα σημεία που εμφανίζεται η αρνητική κορυφή στις καμπύλες  $\chi'(T, H_{dc}, H_0)$  τα έχουμε σχεδιάσει με μαύρα σύμβολα. Η καμπύλη που προκύπτει από αυτά τα σημεία την συμβολίζουμε με  $H_c^p(T)$ . Παρατηρούμε ότι η καμπύλη  $H_c^p(T)$  είναι προσεγγιστικά παράλληλη με την  $H_{c2}^c(T)$ .

### 5.4.1 Φαινόμενο Κορυφής

Το φαινόμενο κορυφής στο κρίσιμο ρεύμα, εμφανίζεται σ' όλους τους υπεραγωγούς δευτέρου είδους. Στους υπεραγωγούς χαμηλών θερμοκρασιών το φαινόμενο κορυφής συμβαίνει πολύ κοντά στη γραμμή του δευ-



τερου κρίσιμου πεδίου,  $H_{c2}(T)$ , σε αντίθεση με τους υπεραγωγούς με βάση το χαλκό στους οποίους αυτό συμβαίνει μακριά από την γραμμή τήξης του πλέγματος φλαξονίων. Επιπρόσθετα, στον υπεραγωγό YBCO, το φαινόμενο κορυφής έχει παρατηρηθεί πολύ κοντά στη μετάβαση τήξης [18], υπονοώντας ότι υπάρχουν δύο είδη φαινομένων κορυφής για το συγκεκριμένο υπεραγωγό. Το πρώτο σχετίζεται με την παγωμένη αταξία και το δεύτερο με τον συνδυασμό της δράσης των θερμικών διακυμάνσεων και της παγωμένης αταξίας. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε πως υπάρχουν δύο είδη φαινομένων κορυφής της κρίσιμης τιμής ρεύματος  $J_c$ .

Η πρώτη προσπάθεια εξήγησης του φαινομένου κορυφής λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή των ελαστικών σταθερών του πλέγματος φλαξονίων έγινε από τον Pippard [19, 20]. Ο ίδιος πρότεινε ότι η ενέργεια για μια διατμητική ελαστική παραμόρφωση του εξαγωνικού πλέγματος φλαξονίων μειώνεται πιο γρήγορα από ότι η ενέργεια δέσμωσης φλαξονίων κοντά στην γραμμή του δεύτερου κρίσιμου μαγνητικού πεδίου  $H_{c2}(T)$ . Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα φλαξόνια να κερδίζουν περισσότερη ενέργεια, εκμεταλλευόμενα περισσότερα κέντρα καρφώματος και τελικά το πλέγμα φλαξονίων να παραμορφώνεται σε μεγαλύτερο βαθμό κοντά στο  $H_{c2}(T)$ . Σύμφωνα με τον Pippard αυτή η διαδικασία οδηγεί σε αύξηση του κρίσιμου ρεύματος, το λεγόμενο φαινόμενο κορυφής της κρίσιμης τιμής ρεύματος. Η αυξανόμενη «διατμητική μετατόπιση» του πλέγματος φλαξονίων με την αύξηση του πεδίου σταματά όταν το πλέγμα φλαξονίων εκμεταλλευτεί όλα τα διαθέσιμα κέντρα καρφώματος. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται «συγχρονισμός» του πλέγματος φλαξονίων με τα κέντρα καρφώματος και έχει άμεση εξάρτηση από την πυκνότητα των κέντρων καρφώματος και την διάταξη των φλαξονίων. Καθώς πραγματοποιείται η παραπάνω διαδικασία και τα φλαξόνια καταλάβουν όλα τα κέντρα καρφώματος τότε το κρίσιμο ρεύμα μειώνεται μονότονα συναρτήσει της θερμοκρασίας. Το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να ερμηνεύσει ικανοποιητικά μετρήσεις [21] σε κρυστάλλους Νιοβίου, οι οποίοι έχουν υποβληθεί σε πλαστική παραμόρφωση μέσω κάμψης.

Η επόμενη σημαντική συνεισφορά για την κατανόηση του φαινομένου κορυφής, πραγματοποιήθηκε από τους Larkin and Ovchinnikov [22]. Η θεωρία συλλογικού καρφώματος φλαξονίων [23] προβλέπει ότι η πυκνότητα της δύναμης Lorentz (κρίσιμο ρεύμα) προσεγγίζει το μηδέν σύμφωνα με την σχέση:

$$J_c B = P \frac{W^2}{r_p^3 C_{66}^2 C_{44}} \propto B_{c2}^{1/2}(T),$$

όπου  $P = (1.5)^{1/2}/32\pi^2$ , σταθερά,  $W = n_p \langle f^2 \rangle_{\text{pins}}$ , η διακύμανση της δύναμης καρφώματος,  $r_p \approx \xi$  το εύρος του δυναμικού καρφώματος φλαξονίων,  $C_{66} \sim (B_{c2} - B)^2$  η ελαστική σταθερά του πλέγματος φλαξονίων για διάτμηση (shear) και  $C_{44} = B^2/\mu_0$  η ελαστική σταθερά του πλέγματος φλαξονίων για κλίση (tilt). Η παραπάνω έκφραση προβλέπει μια μονότονη μείωση του κρίσιμου ρεύματος ως συνάρτηση τόσο της θερμοκρασίας όσο και του μαγνητικού πεδίου. Οι Larkin and Ovchinnikov, με σκοπό να ερμηνεύσουν το φαινόμενο κορυφής υπέθεσαν ότι οι ελαστικές σταθερές του πλέγματος φλαξονίων,  $C_{66}$ ,  $C_{44}$  μειώνονται απότομα καθώς αυτό μεταβαίνει από την τοπική στην μη τοπική ελαστικότητα. Για την παραπάνω υπόθεση παρακινήθηκαν από την ανακάλυψη του Brandt [24], ότι το πλέγμα φλαξονίων είναι πιο μαλακό για παραμορφώσεις μικρού μήκους κύματος.

Το χαρακτηριστικό μήκος της ελαστικής μη-τοπικότητας συμβαίνει όταν το μήκος κύματος των παραμορφώσεων γίνεται συγκρίσιμο με το μήκος διεξόδου των Ginzburg Landau  $\lambda' = \lambda/(1-b)^{1/2}$ , όπου  $b = B/B_{c2}$ . Όταν η κλίμακα μήκους  $R_c$  που καθορίζεται από την συνθήκη  $\langle [\mathbf{u}(\mathbf{R}_c) - \mathbf{u}(0)]^2 \rangle = \xi^2$  ικανοποιεί την εξίσωση:  $R_c \gg \lambda'$ , τότε η χωρική διασπορά της ελαστικής σταθεράς δεν είναι σημαντική και το κρίσιμο ρεύμα μειώνεται μονοτονικά σε αυτή την περιοχή.

$J_c \sim (\gamma/\xi^2)^2/(B^3 c_{66}^2 \xi^3)$ ,  $\gamma = n f_{\text{pin}}^2 \xi^2$ . Με περαιτέρω αύξηση του μαγνητικού πεδίου η κλίμακα μήκους παίρνει τιμές:  $\xi < R_c \leq \lambda'$ . Σε αυτή την περίπτωση η σταθερά  $c_{44}$  εμφανίζει διασπορά οδηγώντας σε μία

εκθετική αύξηση του κρίσιμου ρεύματος με το μαγνητικό πεδίο.

$$J_c \sim \exp(-c_1 B c_{66}^{3/2} k_h \xi^2 / \gamma).$$

Η παραπάνω συμπεριφορά του κρίσιμου ρεύματος σταματά όταν η κλίμακα μήκους  $R_c$  γίνει της τάξης της πλεγματικής σταθεράς του πλέγματος φλαξονίων  $a$ . Σε αυτήν την περιοχή το κρίσιμο ρεύμα μειώνεται ως  $J_c \sim (1 - b)$ . Η πρόταση των Larkin και Ovchinnikov για τις μαγνητικές γραμμές του φαινομένου κορυφής εκφράζεται μέσω της εξίσωσης:

$$B(a, 0)_{T,dis} = \xi^2 + \langle u^2 \rangle_T. \quad (5.4)$$

Χρησιμοποιώντας τις απαιτούμενες εκφράσεις για τον συσχετιστή [25] και για την μέση τιμή του τετραγώνου της μετατόπισης των φλαξονίων από την θέση ισορροπίας τους,  $\langle u^2 \rangle_T$  έχουμε:

$$\langle u \rangle_T^2 \approx \xi^2 t \left( \frac{Gi}{H_{c2}(t)/H_{c2}(0)} \right)^{1/2} h^{-1/2} f(h), \quad (5.5)$$

όπου  $h = H/H_{c2}(t)$ ,  $t = T/T_c$ ,  $f(h) = (2\beta_A)/(1-h)((1+(1+c)^2)^{1/2}-1)/(c(1+c))$ ,  $c = 0.5(\beta_A(1-h))^{1/2}$  και  $\beta_A = 1.16$ , η εξίσωση που προσδιορίζει την τοποθεσία του φαινομένου κορυφής στην κρίσιμη τιμή ρεύματος γίνεται :

$$(1-h)(h^{1/2} + t(Gi/h_{c2}(t))^{1/2} f(h))^2 - 2\pi D(t)^2(1-h_{sv}) = 0.$$

και έχει δυο πραγματικές λύσεις. Η μια βρίσκεται μεταξύ των τιμών  $h_{dis}$  και  $h_m$ , ενώ η δεύτερη βρίσκεται πάνω από την γραμμή τήξης του πλέγματος των φλαξονίων  $H_{c2}(T)$ . Η πρώτη από τις παραπάνω λύσεις, μπορεί να σχετίζεται με το σημείο  $(T, H)$  στο οποίο συμβαίνει το φαινόμενο κορυφής.

## Κεφάλαιο 6

### Αριθμητικοί υπολογισμοί και σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις

#### 6.1 Γενικές παρατηρήσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των θεωρητικών υπολογισμών της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας χρησιμοποιώντας τον κώδικά που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι υπολογισμοί μας στοχεύουν να προσομοιώσουν θεωρητικά της πειραματικές μετρήσεις που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 5. Αυτή η σύγκριση μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τους φυσικούς μηχανισμούς που ελέγχουν την δυναμική συμπεριφορά των φλαξονίων παρουσία κέντρων καρφώματος. Θα παρουσιάσουμε αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για τρία πλάτη του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου ( $H_0 = 1$  Oe,  $H_0 = 5$  Oe και  $H_0 = 15$  Oe) και για σταθερό μαγνητικό πεδίο  $H_{dc} = 50$  kOe. Για τις υπόλοιπες τιμές του σταθερού μαγνητικού πεδίου τα αποτελέσματα είναι όμοια. Για να γίνει σύνδεση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών δεδομένων υποθέτουμε ο μονοκρυστάλλος που χρησιμοποιήσαμε στις μετρήσεις μπορεί να θεωρηθεί σαν κύλινδρος μικρού πάχους. Συγκεκριμένα, υποθέσαμε ότι το δείγμα έχει τις εξής διαστάσεις: ακτίνα  $R = 0.32$  mm και ύψος  $h = 0.043$  mm. Για να εκτελέσουμε την προσομοίωση θα πρέπει να επιλέξουμε μια σχέση που να περιγράφει την θερμοκρασιακή εξάρτηση του κρίσιμου ρεύματος. Προφανώς για κάθε τιμή του σταθερού μαγνητικού πεδίου αυτή καμπύλη είναι διαφορετική. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η επιλογή της καμπύλης κρίσιμου ρεύματος έγινε με τη μέθοδο δοκιμής-σφάλματος έτσι ώστε τα θεωρητικά αποτελέσματα να προσεγγίζουν όσο είναι δυνατόν καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα. Στις προσομοιώσεις, σε κάθε θερμοκρασία, υπολογίσαμε την πρώτη και την τρίτη αρμονική της μιγαδικής εναλλασσόμενης επιδεκτικότητας για τρεις διαφορετικές τιμές πλάτους ac πεδίου και για θερμοκρασίες  $T < T_{c2}$ .

#### 6.2 Επιλογή της καμπύλης του κρίσιμου ρεύματος

Η εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για την μελέτη υπεραγωγών με μη γραμμική σχέση  $E(J)$  και μας βοηθάει στην μέτρηση των κρίσιμων θερμοκρασιών  $T_c$  καθώς και των κρίσιμων τιμών ρεύματος  $J_c$  των υπεραγωγών.

Όσον αναφορά το πραγματικό μέλος της ac επιδεκτικότητας,  $\chi'$ , στην κανονική κατάσταση ( $T > T_c$ ) λαμβάνει μικρή τιμή, ενώ στην πλήρως υπεραγώγιμη όπου το δείγμα συμπεριφέρεται ως διαμαγνήτης, λαμβάνει την τιμή -1. Τυπικά, για σταθερό dc πεδίο, η έναρξη μιας μη μηδενικής τιμής της  $\chi'$  προσδιορίζει τη θερμοκρασία μετάβασης του υπεραγωγού από την κανονική στην υπεραγώγιμη κατάσταση, (κατάσταση Abrikosov, στην περίπτωση μας) δηλαδή θερμοκρασία  $T_{c2}(H_{dc})$ . Όταν το  $H_{dc} = 0$ , η θερμοκρασία στην οποία η  $\chi'$  αποκτά μη μηδενική τιμή σηματοδοτεί την κρίσιμη θερμοκρασία του υπεραγωγού  $T_c(H_{dc} = 0)$ .

Μέσω της φανταστικής συνιστώσας της ac επιδεκτικότητας,  $\chi''$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ενεργεια-

κές απώλειες του υπεραγωγίου υλικού. Επίσης οι μετρήσεις της συγκεκριμένης συνιστώσας μας επιτρέπουν τον προσδιορισμό της κρίσιμης τιμής ηλεκτρικού ρεύματος  $J_c$  ενός υπεραγωγού. Συγκεκριμένα στη θερμοκρασία στην οποία η  $\chi''$  γίνεται μέγιστη, για διάφορες τιμές πλάτους ac μαγνητικού πεδίου,  $H_0$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές του κρίσιμου ρεύματος  $J_c = J_c(T)$ . Σύμφωνα με το θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε, το μοντέλο της κρίσιμης κατάστασης του Bean, υπάρχει μια τιμή μαγνητικού πεδίου,  $H^*$ , (το οποίο ονομάζεται μαγνητικό πεδίο πλήρους διείσδυσης), για το οποίο τόσο τα μέτωπα ρεύματος όσο και η μαγνητική ροή εισχωρούν στο κέντρο του δείγματος. Η συγκεκριμένη διαδικασία λαμβάνει χώρα στη θερμοκρασία, στην οποία η ποσότητα  $\chi_1''(T)$  λαμβάνει μέγιστη τιμή. Με αυτόν τρόπο, για κάθε πλάτος  $H_0$ , από το διάγραμμα  $\chi_1'' = f(T)$  μπορούμε να βρούμε τη θερμοκρασία εκείνη για την οποία η  $\chi_1''$  μεγιστοποιείται. Σ' αυτή την περίπτωση το πεδίο  $H_0$  ταυτίζεται με το μαγνητικό πεδίο πλήρους διείσδυσης,  $H_0 = H^*$ . Αν γνωρίζουμε τη σχέση που συνδέει το πεδίο πλήρους διείσδυσης με το κρίσιμο ρεύμα και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υπεραγωγού μπορούμε να εκτιμήσουμε το κρίσιμο ρεύμα για την θερμοκρασία που εμφανίζει μέγιστο η  $\chi_1''$ . Αυτή η μέθοδος μας δίνει μία πρώτη εκτίμηση του κρίσιμου ρεύματος σε τόσες θερμοκρασίες όσες τα διαφορετικά πλάτη του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου (τρία στην περίπτωση μας). Για το πεδίο πλήρους διείσδυσης χρησιμοποιήσαμε τη σχέση  $H^* = J_c b \ln(2a/b)$ , (δες σχέση 3.5) με  $b \ll a$ . Αυτή η σχέση ισχύει στην περίπτωση λεπτού κυλίνδρου, όπως είναι και αυτός που εξετάζουμε. Επομένως έχουμε:

$$H_0 = J_c(h/2) \ln[2R/(h/2)] \rightarrow J_c = \frac{2H_0}{h \ln\left(\frac{4R}{h}\right)} \quad (6.1)$$

Έτσι, μέσω της σχέσης 6.1 υπολογίσαμε το  $J_c$  που αντιστοιχεί στην θερμοκρασία στην οποία η  $\chi''$  παρουσιάζει μέγιστη τιμή για καθένα από τα τρία διαφορετικά πλάτη  $H_0$  ac-πεδίου. Αυτές οι τιμές μας βοήθησαν να υιοθετήσουμε μία καμπύλη κρίσιμου ρεύματος οι οποία αναπαράγει όσο το δυνατόν καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα. Μετά από αρκετές δοκιμές καταλήξαμε στην ακόλουθη συνάρτηση

$$J_c(T) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{10} e^{(-T^2/60)} + J_{c0} \left(1 - \frac{T}{T_{c2}}\right)^{n_j} + J_p e^{-\frac{(T-T_p)^2}{2sl^2}}, & \text{αν } T < T_p \\ 2 \cdot 10^{10} e^{(-T^2/60)} + J_{c0} \left(1 - \frac{T}{T_{c2}}\right)^{n_j} + J_p e^{-\frac{(T-T_p)^2}{2sh^2}}, & \text{αν } T_p < T < T_{c2} \end{cases}$$

Όπου  $T_{c2} = 36$  K, είναι η κρίσιμη θερμοκρασία μετάβασης για  $H_{dc} = 50$  kOe,  $T_p = 35$  K, η θερμοκρασία στην οποία παρατηρείται το φαινόμενο κορυφής στην κρίσιμη τιμή ρεύματος,  $J_p = 4 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup> η πυκνότητα του ρεύματος κορυφής για  $T = T_p$  και  $J_{c0} = 0.2 \cdot 10^9$  A/m<sup>2</sup>, η κρίσιμη τιμή ρεύματος για  $T = 0$  K. Όσο αναφορά τις υπόλοιπες παραμέτρους που υπεισέρχονται στην παραπάνω έκφραση,  $n_j$ ,  $sh$  και  $sl$  τις έχουμε μεταβάλλει κατάλληλα έτσι ώστε η προκύπτουσα συνάρτηση,  $J_c(T)$  να συμβαδίζει με τις τρεις τιμές κρίσιμου ρεύματος που εκτιμήσαμε με τη μέθοδο που αναφέραμε παραπάνω. Τελικά για τις παραπάνω αδιάστατες παραμέτρους επιλέχθηκαν οι εξής τιμές:  $n_j = 0.2$ ,  $sh = 0.2$  και  $sl = 0.3$ .

Να σημειώσουμε ότι η παραπάνω έκφραση για την κρίσιμη τιμή ρεύματος δεν επιλέχθηκε τυχαία. Συγκεκριμένα από την θεωρία συλλογικής δέσμησης φλαξονίων γνωρίζουμε πως το κρίσιμο ρεύμα "σβήνει" μονότονα καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά περιγράφεται από τον όρο  $l_1 = J_{c0} \left(1 - \frac{T}{T_{c2}}\right)^{n_j}$  ο οποίος όπως βλέπουμε μηδενίζεται για  $T = T_{c2}$ . Επιπρόσθετα βλέπουμε πως στην παραπάνω έκφραση υπεισέρχεται και ένας όρος εκθετικής μείωσης  $l_2 = 2 \cdot 10^{10} e^{(-T^2/60)}$ . Ο λόγος εισαγωγής του συγκεκριμένου όρου είναι για να εξάγουμε μεγαλύτερες τιμές κρίσιμου ρεύματος από αυτές που θα παίρναμε αν είχαμε την συνεισφορά μόνο του  $l_1$ , ιδίως για χαμηλές θερμοκρασίες, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει να συμβαδίζει με τα δεδομένα που θα λάβουμε στην συνέχεια από το διάγραμμα  $\chi_1'' = f(T)$ . Η συγκεκριμένη εξάρτηση, της μείωσης του κρίσιμου ρεύματος συναρτήσει της θερμοκρασίας, δεν ισχύει σε όλο το εύρος των θερμοκρασιών,  $T < T_{c2}$ . Αντί αυτής, το κρίσιμο ρεύμα αυξάνει απότομα παρουσιάζοντας ένα τοπικό μέγιστο, για θερμοκρασίες κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία του υπεραγωγού

και στην συνέχεια για  $T = T_{c2}$  μηδενίζεται. Το συγκεκριμένο φαινόμενο είναι το φαινόμενο κορυφής στη μεταβολή του κρίσιμου ρεύματος, το οποίο παρατηρείται είτε με τη θερμοκρασία για σταθερό μαγνητικό πεδίο (όπως στην περίπτωση μας) είτε με το μαγνητικό πεδίο για σταθερή θερμοκρασία. Για το δείγμα που χρησιμοποιούμε το μέγιστο του φαινομένου κορυφής παρατηρείται σε θερμοκρασία κοντά στην κρίσιμη και επομένως επιλέξαμε  $T_p = 35$  K. Το φαινόμενο κορυφής στην παραπάνω έκφραση του κρίσιμου ρεύματος, περιγράφεται από την συνάρτηση :

$$f(T) = \begin{cases} J_p e^{-\frac{(T-T_p)^2}{2sl^2}}, & \text{αν } T < T_p \\ J_p e^{-\frac{(T-T_p)^2}{2sh^2}}, & \text{αν } T_p < T < T_{c2} \end{cases}$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει μια ασύμμετρη γκαουσιανή η οποία έχει ως μέση τιμή την  $T_p = 35$  K και για  $T < T_p$  έχει απόκλιση  $sl = 0.3$  ενώ για  $T_p < T < T_{c2}$  έχει απόκλιση  $sh = 0.2$ .

Έχοντας πλέον ορίσει την συνάρτηση του κρίσιμου ρεύματος που περιγράφει το υπό εξέταση υπεραγώγιμο υλικό, για να την επαληθεύσουμε θα δούμε κατά πόσο οι θερμοκρασίες των τριών τιμών κρίσιμου ρεύματος που έχουν υπολογιστεί μέσω της σχέσης 6.1 συμπίπτουν με τις αντίστοιχες θερμοκρασίες του που προκύπτουν από το διάγραμμα  $J_c = f(T)$ .

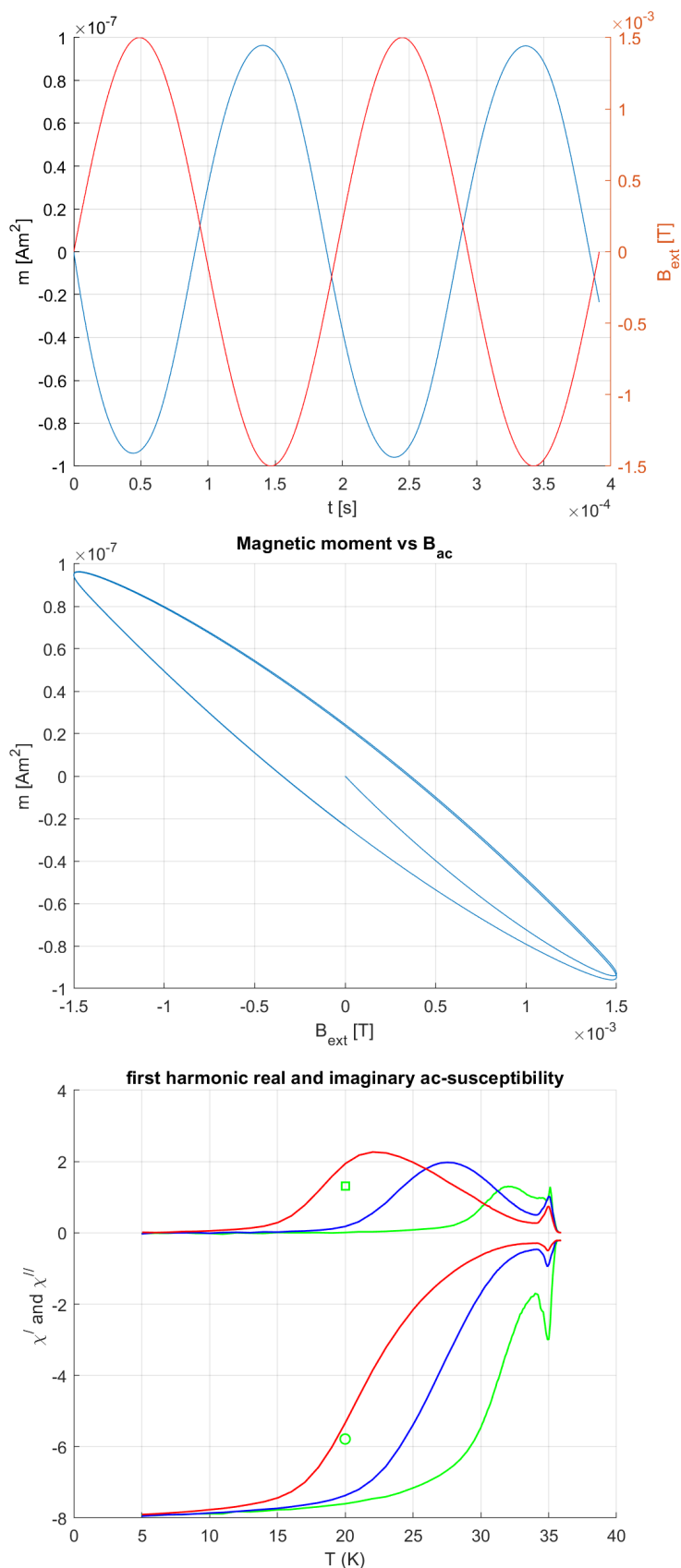
### 6.3 Κατανομές του μαγνητικού πεδίου και της πυκνότητας ρεύματος στο εσωτερικό του υπεραγωγού με $n = 7$ και $T = 20$ K, $T = 35$ K

Εδώ θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών αναφορικά με την χρονική εξέλιξη της κατανομής του μαγνητικού πεδίου και της πυκνότητας ρεύματος, για σταθερή θερμοκρασία, για μία περίοδο μεταβολής του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Στο πάνω μέρος των σχημάτων 6.1 και 6.2 φαίνεται η μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της επαγόμενης μαγνητικής ροπής (η μαγνητική ροπή που προέρχεται από τα υπεραγώγιμα ρεύματα που ρέουν στο εσωτερικό του υπεραγωγού παράλληλα στο μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{e}_\phi$ ), συναρτήσει του χρόνου, για  $T = 20$  K (σχήμα 6.1) και  $T = 35$  K (σχήμα 6.2).

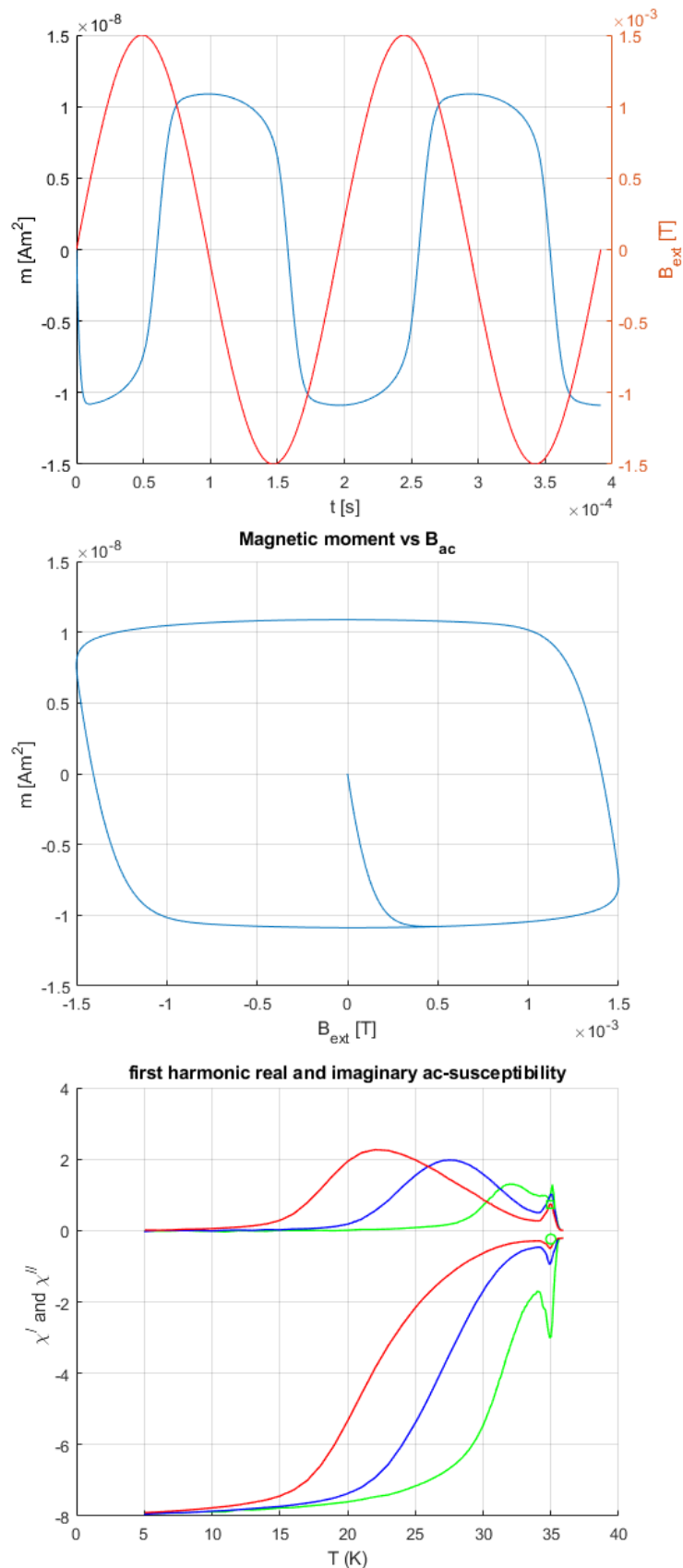
Στο μεσαίο τμήμα των σχημάτων 6.1 και 6.2 φαίνονται οι βρόγχοι μαγνητικής υστέρησης, ενώ στα κάτω τμήματα έχουμε σχεδιάσει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της υπολογισμένης με  $n = 7$  και  $H_0 = 15$  Oe για  $T = 35$  K και  $T = 20$  K μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας. Στο ίδιο σχήμα έχουμε συμπεριλάβει και τα πειραματικά δεδομένα των  $\chi'_1(T)$  και  $\chi''_1(T)$  που προέκυψαν από μετρήσεις του μονοκρυστάλλου  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  για  $H_{dc} = 50$  kOe,  $H_0 = 1, 5, 15$  Oe και  $f = 5111$  Hz.

Στα σχήματα 6.3 και 6.4 φαίνεται η χρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου μέσα στον υπεραγωγό (με μαύρο χρώμα συμβολίζονται οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου,  $\mathbf{B}(r, z) = B_r(r, z)\hat{e}_r + B_z(r, z)\hat{e}_z$ ) και της κατανομής της πυκνότητας ρεύματος,  $\mathbf{J}(r, z) = J_\phi(r, z)\hat{e}_\phi$ , με χρωματική κλίμακα.

Στο σχήμα 6.3 (πάνω αριστερά) παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου το υπεραγώγιμο ρεύμα θωρακίζει πλήρως το εσωτερικό του υπεραγωγού όπως συμβαίνει στην κατάσταση Meissner. Όπως φαίνεται στο σχήμα το ρεύμα ρέει κοντά στις επιφάνειες  $r = a$ , και  $z = \pm b/2$ . Αυτό που έχει ενδιαφέρον να τονίσουμε εδώ είναι ότι πρακτικά το υπεραγώγιμο ρεύμα ρέει αξιμουθιακά, κοντά στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Η αύξηση του μαγνητικού πεδίου αυξάνει την περιοχή που διαρρέεται από υπεραγώγιμο ηλεκτρικό ρεύμα (η περιοχή με το μπλε χρώμα). Όταν τα μαγνητικό πεδίο αυξηθεί και ξεπεράσει την τιμή που μεγιστοποιείται η απόλυτη τιμή της μαγνητικής ροπής το μαγνητικό πεδίο αρχίζει να διεισδύει από την επιφάνεια του κυλίνδρου  $r = a$ . Για την συγκεκριμένη θερμοκρασία το κρίσιμο ρεύμα έχει τέτοια τιμή που δεν επιτρέπει την πλήρη διείσδυση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου  $\max H = 15$  Oe. Όταν αρχίσει η μείωση του μαγνητικού πεδίου τότε η φορά του ρεύματος αντιστρέφεται κοντά στην επιφάνεια ενώ στο εσωτερικό το ηλεκτρικό ρεύμα διατηρεί την φορά του.

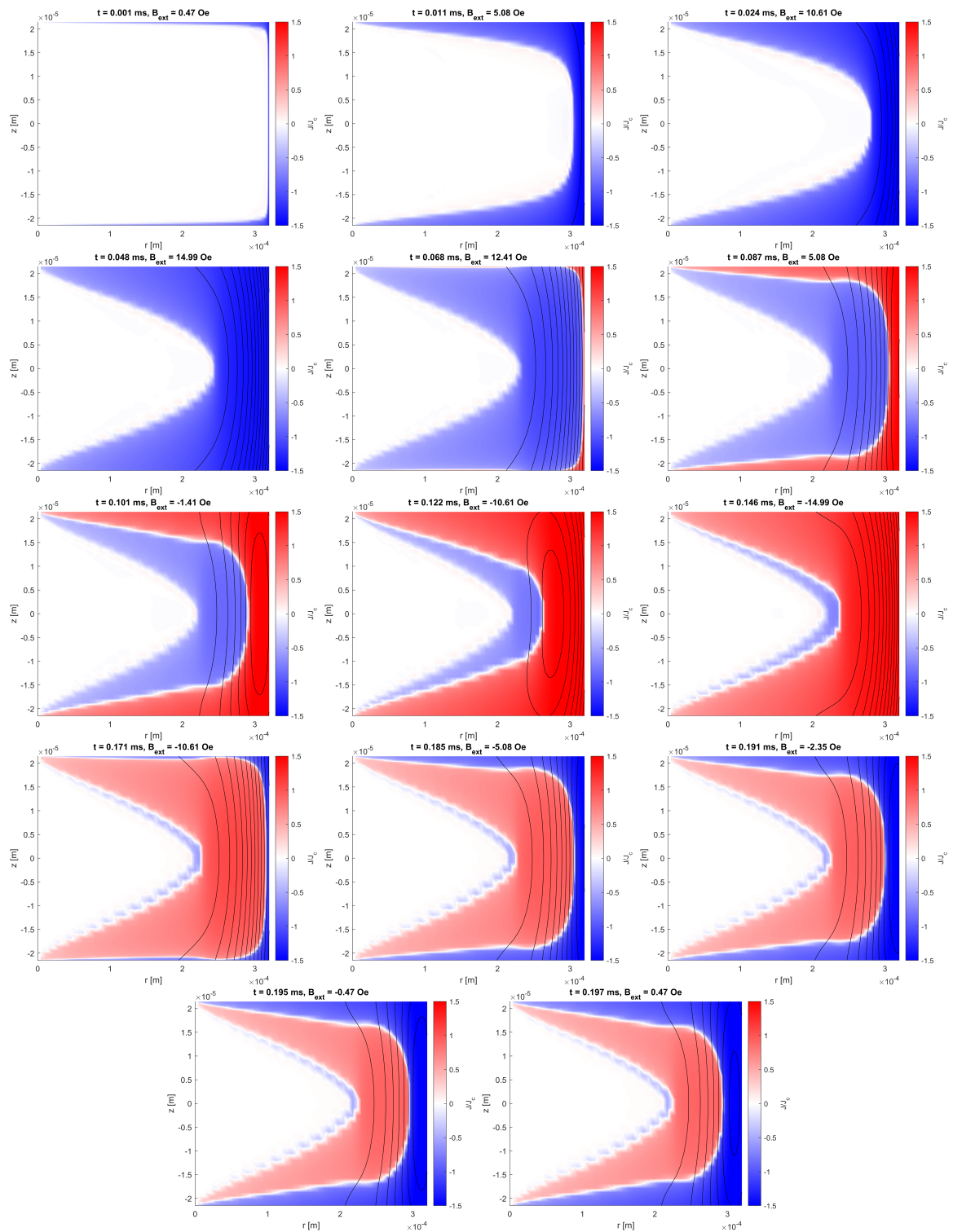


Σχήμα 6.1: (πάνω σχήμα) Μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνητικής ροπής του υπεραγωγού συναρτήσει του χρόνου. (μεσαίο σχήμα) Βρόγχος μαγνητικής υστέρησης της μαγνητικής ροπής συναρτήσει του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. (κάτω σχήμα) Πραγματικό και φανταστικό μέρος της θεμελιώδους μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας (πράσινοι κύκλοι) για  $T = 20$  K,  $n = 7$  και  $H_0 = 15$  Oe. Στο σχήμα έχουμε συμπεριλάβει και τις πειραματικές μετρήσεις του μονοκρυστάλλου  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$ .



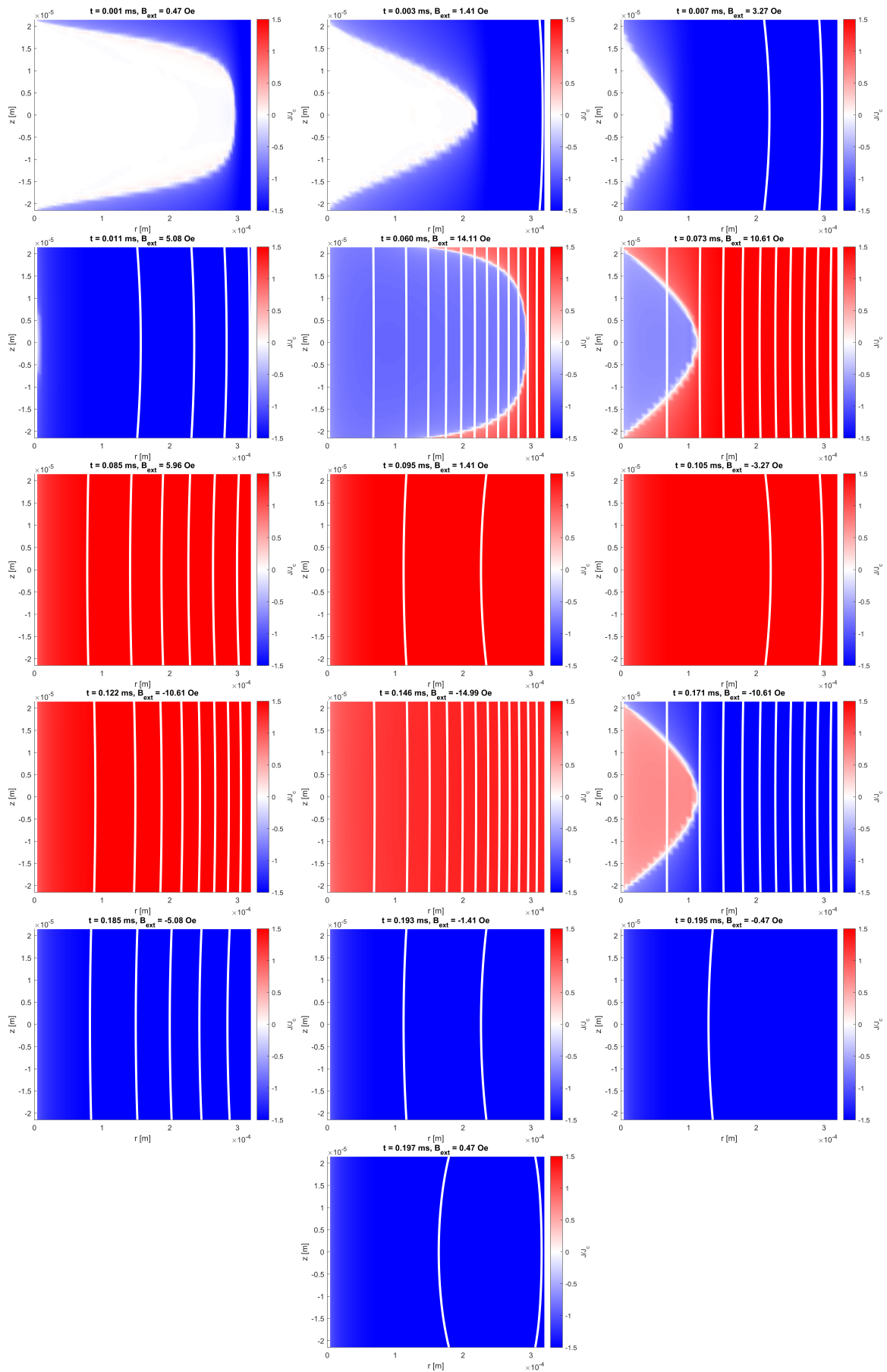
Σχήμα 6.2: (πάνω σχήμα) Μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνητικής ροπής του υπεραγωγού συναρτήσει του χρόνου. (μεσαίο σχήμα) Βρόχος μαγνητικής υστέρησης της μαγνητικής ροπής συναρτήσει του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. (κάτω σχήμα) Πραγματικό και φανταστικό μέρος της θεμελιώδους μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας (πράσινοι κύκλοι) για  $T = 35 \text{ K}$ ,  $n = 7$  και  $H_0 = 15 \text{ Oe}$ . Στο σχήμα έχουμε συμπεριλάβει και τις πειραματικές μετρήσεις του μονοκρυστάλλου  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$ .





Σχήμα 6.3: Κατανομές του μαγνητικού πεδίου (οι δυναμικές γραμμές εμφανίζονται με μαύρο χρώμα) και της πυκνότητας ρεύματος στο εσωτερικό του υπεραγωγού για  $n = 7$  και  $T = 20$  K.





Σχήμα 6.4: Κατανομές του μαγνητικού πεδίου (οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου εμφανίζονται με άσπρο χρώμα) και της πυκνότητας ρεύματος (μπλε και κόκκινο χρώμα) στο εσωτερικό του υπεραγωγού για  $n = 7$  και  $T = 35$  K. Οι κατανομές αντιστοιχούν σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $H = 0.4712, 1.4116, 3.2721, 5.0811, 14.1132, 10.6066, 5.9572, 1.4116, -3.2721, -10.6066, -14.9926, -10.6066, -5.0811, -1.4116, -0.4712, 0.4712$  Oe, αντίστοιχα, ενώ το πλάτος ac πεδίου είναι 15 Oe.

## 6.4 Υπολογισμός της μιγαδικής εναλλασσόμενης επιδεκτικότητας και σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις

### 6.4.1 Η περίπτωση $n = 4$

Σε αυτό το σημείο, θα παραθέσουμε και θα σχολιάσουμε τα πειραματικά αποτελέσματα και τα αντίστοιχα θεωρητικά έτσι όπως προκύπτουν βάση του μοντέλου που χρησιμοποιούμε και του προγράμματος που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3. Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση για  $n = 4$  όσο αναφορά το νόμο τάσης ρεύματος  $E = E_c(J/J_c)^n$  που θεωρούμε ότι ακολουθεί το υπεραγώγιμο δείγμα. Τα αποτελέσματα για το πραγματικό και φανταστικό μέρος της πρώτης και τρίτης αρμονικής της ac επιδεκτικότητας αναπαρίστανται στο Σχήμα 6.5.

- Συμφασική συνιστώσα,  $\chi'_1$

Παρατηρώντας τις θεωρητικές καμπύλες της συμφασικής συνιστώσας της ac επιδεκτικότητας,  $\chi'_1 = f(T)$  του Σχήματος 6.5 για τα τρία διαφορετικά πλάτη ac πεδίου βλέπουμε πως καθώς μειώνεται η θερμοκρασία για  $T < T_c$  αρχικά μειώνεται και η  $\chi'$  συνιστώσα και συγκεκριμένα λαμβάνει μη μηδενική τιμή για  $T = T_c = 36$  K, που αποτελεί και την θερμοκρασία εκκίνησης της υπεραγώγιμης κατάστασης. Στη συνέχεια, για θερμοκρασία κοντά στην κρίσιμη και η τρεις καμπύλες εμφανίζουν ένα τοπικό ελάχιστο. Συγκεκριμένα η κορυφή του τοπικού ελαχίστου παρατηρείται στην θερμοκρασία του φαινομένου κορυφής δηλαδή για  $T_p = 36$  K και για τις τρεις καμπύλες των διαφορετικών πεδίων. Να σημειώσουμε πως την ίδια συμπεριφορά εμφανίζουν και οι καμπύλες των πειραματικών μετρήσεων του υλικού  $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$  (συνεχείς καμπύλες) για τις αντίστοιχες τιμές ac πεδίου. Η εμφάνιση αυτού του τοπικού ελαχίστου στην τιμή της πραγματικής συνιστώσας της ac επιδεκτικότητας προέρχεται από το τοπικό μέγιστο της καμπύλης κρίσιμου ρεύματος. Στην συνέχεια πηγαίνοντας σε όλο και μικρότερες θερμοκρασίες η  $\chi'_1$  μειώνεται ενώ η καμπύλη για το αντίστοιχο πεδίο διευρύνεται καθώς το  $H_0$  αυξάνεται.

Η συμφασική επιδεκτικότητα ανακλά την ικανότητα του δείγματος να θωρακίζει το εσωτερικό του από το ac-πεδίο. Η θωράκιση πραγματοποιείται μέσω της εμφάνισης των επαγόμενων ρευμάτων εντός του υπεραγωγού. Όσο όμως μεγαλώνει το πλάτος του ac πεδίου που εφαρμόζουμε, μεγαλώνει και το πεδίο που καταφέρνει να διεισδύσει στο υλικό. Αυτό, γίνεται άμεσα αντιληπτό από τα παραπάνω διαγράμματα, παρατηρώντας πως για την ίδια τιμή θερμοκρασίας η  $\chi'_1$  συνιστώσα παίρνει μεγαλύτερη τιμή καθώς το  $H_{ac}$  πλάτος αυξάνεται. Παρόλα αυτά βλέπουμε πως για  $T = 5$  K, και για τα τρία πλάτη ac πεδίου η  $\chi'$  παίρνει την ελάχιστη τιμή, δηλαδή το δείγμα παρουσιάζει μέγιστο διαμαγνητισμό.

- Εκτός φάσης συνιστώσα,  $\chi''_1$

Παρατηρώντας τις θεωρητικές καμπύλες της εκτός φάσης συνιστώσας της ac επιδεκτικότητας,  $\chi''_1 = f(T)$  του Σχήματος 6.5, για τρία διαφορετικά πλάτη ac πεδίου, αρχικά βλέπουμε πως εμφανίζουν ένα τοπικό μέγιστο με την κορυφή του να παρατηρείται στην θερμοκρασία του φαινομένου κορυφής  $T_p = 35$  K. Η ίδια παρατήρηση αληθεύει και για τις πειραματικές μετρήσεις του υλικού ενώ ταυτόχρονα είναι όμοια με την αντίστοιχη συμπεριφορά της πραγματικής συνιστώσας της ac επιδεκτικότητας (εμφάνιση τοπικού ελαχίστου). Στην συνέχεια πηγαίνοντας σε όλο και μικρότερες θερμοκρασίες, βλέπουμε πως η  $\chi''_1$  συνιστώσα εμφανίζει μια δεύτερη κορυφή η οποία όπως προαναφέραμε αντιστοιχεί στην κατάσταση που το ac-πεδίο διεισδύει πλήρως στο εσωτερικό του υπεραγωγού. Για μικρά πλάτη ac πεδίου ταυτίζεται με την αντίστοιχη κορυφή που παρουσιάζουν τα θεωρητικά δεδομένα, ενώ για μεγαλύτερα πλάτη υπάρχει μικρή απόκλιση των αντίστοιχων κορυφών. Επιπρόσθετα παρατηρούμε πως καθώς αυξάνεται το πλάτος του ac-πεδίου,  $H_0$ , η συγκεκριμένη κορυφή διευρύνεται, μεγαλώνει σε μέγεθος και μετατοπίζεται σε χαμηλότερες θερμοκρασίες γεγονός που μας οδηγεί στο

συμπέρασμα πως για μεγαλύτερα πλάτη ac πεδίου οι θερμικές απώλειες του υλικού, είναι μεγαλύτερες για την ίδια τιμή θερμοκρασίας. Να σημειώσουμε πως το μέγιστο των ενεργειακών απωλειών του δείγματος παρατηρείται στο τοπικό μέγιστο της καμπύλης  $\chi''$  για κάθε τιμή πλάτους ac πεδίου.

Να σημειώσουμε πως στο σχήμα 6.5 αναπαριστάται επίσης το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της τρίτης αρμονικής της ac επιδεκτικότητας,  $\chi'_3, \chi''_3$  για τα τρία διαφορετικά πλάτη ac πεδίου. Οι θεωρητικές καμπύλες της συγκεκριμένης αρμονικής αναπαρίστανται με την χρήση σημείων ενώ τα πειραματικά δεδομένα με τις συνεχείς γραμμές. Για ίδιο πλάτος ac πεδίου παρατηρούμε μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο και ενδεχομένως αναδεικνύει κάποιες αδυναμίες του μοντέλου που χρησιμοποιούμε. Παρόλα αυτά η συνεισφορά της συγκεκριμένης συνιστώσας στην συνολική επιδεκτικότητα είναι αμελητέα.

Παρακάτω παραθέτουμε το διάγραμμα που αναπαριστά την ρυθμό απωλειών που συμβαίνει στον υπεραγωγό (dissipated power),  $P$  συναρτήσεως του χρόνου. Για το διάγραμμα 6.6, η ποσότητα  $P$  έχει υπολογιστεί για θερμοκρασία  $T = 33.2$  K και για πλάτος ac πεδίου  $H_0 = 5$  Oe, για την χρονική περίοδο δύο πλήρων ταλαντώσεων του ac πεδίου. Να σημειώσουμε πως το ολοκλήρωμα της ποσότητας αυτής ως προς τον χρόνο μας δίνει την τιμή των ενεργειακών απωλειών,  $Q$ , για την συγκεκριμένη τιμή θερμοκρασίας. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως έχουμε ως σκοπό την εύρεση της συνάρτησης του κρίσιμου ρεύματος  $J_c = f(T)$ , που περιγραφεί το υπεραγωγίμο δείγμα. Για τον σκοπό, αυτό θα θεωρήσουμε, πως το θεωρητικό μοντέλο που εφαρμόζουμε για  $n = 4$  δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα και προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό τα θεωρητικά δεδομένα. Έτσι, με βάση το μέγιστο που παρουσιάζει η  $\chi''_1$ , θα βρούμε μέσω του διαγράμματος, την θερμοκρασία  $T$  στην οποία παρατηρείται ενώ μέσω της σχέσης 6.1 θα υπολογίσουμε την τιμή του κρίσιμου ρεύματος  $J_c$  που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη θερμοκρασία. Η συγκεκριμένη διαδικασία πραγματοποιείται και για τα τρία διαφορετικά πλάτη εναλλασσόμενου πεδίου,  $H_0$ .

Υπολογισμός κρίσιμων τιμών ρεύματος που αντιστοιχούν στο μέγιστο της  $\chi''_1 = f(T)$

- Για  $H_0 = 1$  Oe ή 80 A/m η σχέση 6.1 μας δίνει :  $J_{c1} = 1.1$  MA/m<sup>2</sup>
- Για  $H_0 = 5$  Oe ή  $5 \cdot 80$  A/m η σχέση 6.1 μας δίνει :  $J_{c2} = 5.5$  MA/m<sup>2</sup>
- Για  $H_0 = 15$  Oe ή  $15 \cdot 80$  A/m η σχέση 6.1 μας δίνει :  $J_{c3} = 16.4$  MA/m<sup>2</sup>

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η εύρεση των αντίστοιχων θερμοκρασιών θα πραγματοποιηθεί από το διάγραμμα  $\chi''_1 = f(T)$  συγκεκριμένα πρόκειται για τις θερμοκρασίες στις οποίες η  $\chi''_1$  μεγιστοποιείται. Να σημειώσουμε πως θα χρησιμοποιήσουμε τις καμπύλες των θεωρητικών αποτελεσμάτων θεωρώντας πως περιγράφουν ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα.

- Για  $H_0 = 1$  Oe, η πράσινη καμπύλη της  $\chi''_1$  μεγιστοποιείται για  $T \simeq 32.4$  K, θερμοκρασία η οποία αντιστοιχίζεται σε τιμή κρίσιμου ρεύματος  $J_{c1} \approx 1.1$  MA/m<sup>2</sup>.
- Για  $H_0 = 5$  Oe, η μπλε καμπύλη της  $\chi''_1$  μεγιστοποιείται για  $T \simeq 29$  K, θερμοκρασία η οποία αντιστοιχίζεται σε τιμή κρίσιμου ρεύματος  $J_{c2} \approx 5.5$  MA/m<sup>2</sup>.
- Για  $H_0 = 15$  Oe, η κόκκινη καμπύλη της  $\chi''_1$  μεγιστοποιείται για  $T \simeq 25.5$  K, θερμοκρασία η οποία αντιστοιχίζεται στην τιμή κρίσιμου ρεύματος  $J_{c3} \approx 16.4$  MA/m<sup>2</sup>.

Στο Σχήμα 6.7 έχουμε σχεδιάσει την συνάρτησης  $J_c = f(T)$  που έχουμε θεωρήσει εξαρχής και τις τιμές κρίσιμου ρεύματος,  $J_{c1} = 1.1$  MA/m<sup>2</sup>,  $J_{c2} = 5.5$  MA/m<sup>2</sup>, και  $J_{c3} = 16.4$  MA/m<sup>2</sup>.

Έτσι με βάση το παραπάνω διάγραμμα συμπεραίνουμε τα εξής:

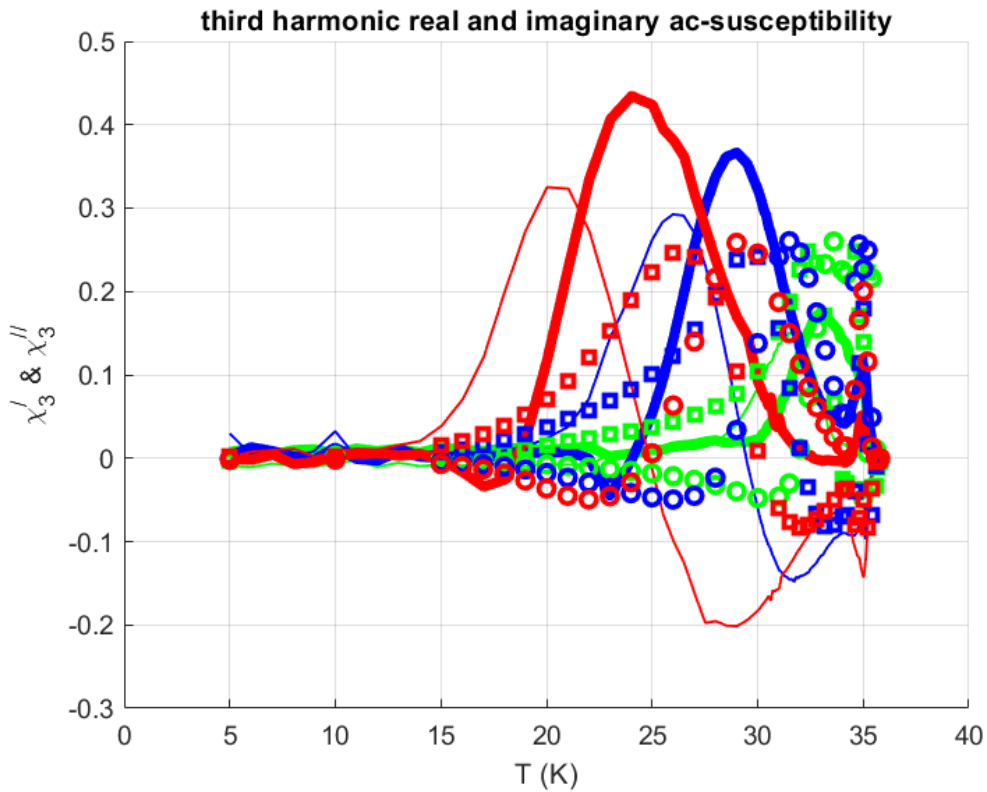
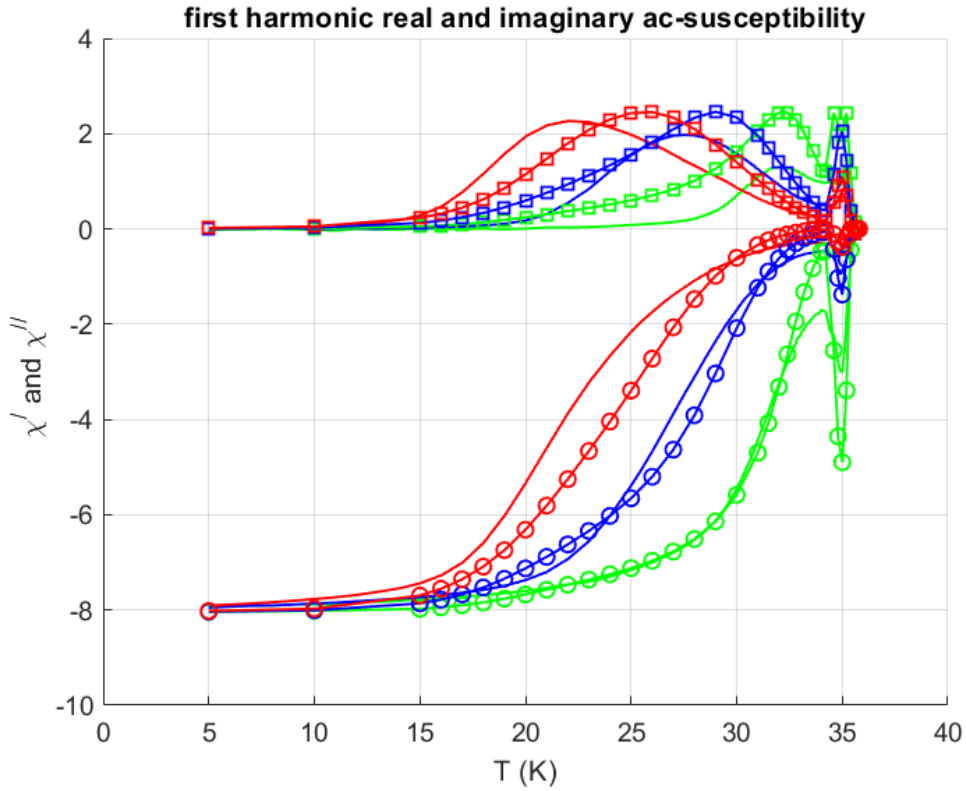
- Για τιμή ρεύματος  $J_{c1} = 1.1$  MA/m<sup>2</sup>, πράσινη καμπύλη, η θερμοκρασία στην οποία αντιστοιχεί είναι  $T_1 = 33.3$  K

- Για τιμή ρεύματος  $J_{c2} = 5.5 \text{ MA/m}^2$ , μπλε καμπύλη, η θερμοκρασία στην οποία αντιστοιχεί είναι  $T_2 = 30.2 \text{ K}$
- Για τιμή ρεύματος  $J_{c3} = 16.4 \text{ MA/m}^2$ , κόκκινη καμπύλη, η θερμοκρασία στην οποία αντιστοιχεί είναι  $T_3 = 25.7 \text{ K}$

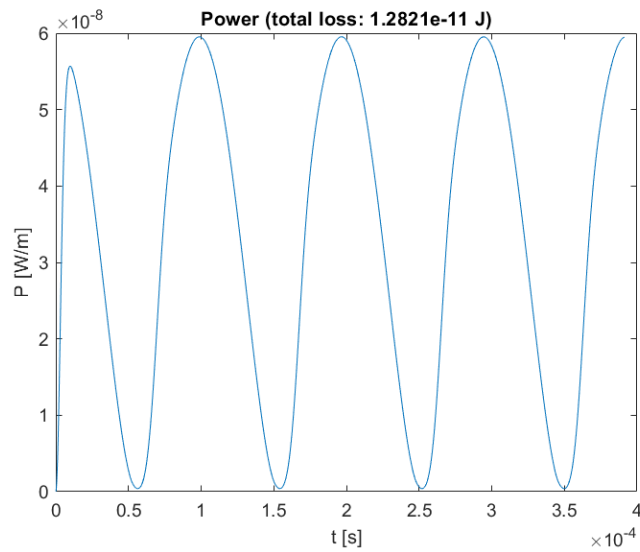
Συγκρίνοντας τις παραπάνω τιμές θερμοκρασίας με τις αντίστοιχες για τις οποίες μεγιστοποιείται η  $\chi_1''$ , συμπεραίνουμε ότι βρίσκονται αρκετά κοντά και επομένως μπορούμε να πούμε πως η συνάρτηση του κρίσιμου ρεύματος  $J_c = f(T)$  που έχουμε υποθέσει περιγράφει σε ικανοποιητικό βαθμό το υπεραγώγιμο δείγμα που εξετάζουμε, δεδομένου ότι οι θεωρητικές καμπύλες της ac επιδεκτικότητας προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό τα πειραματικά δεδομένα, σχήμα 6.5.

Παρακάτω θα παραθέσουμε αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα (δες σχήμα 6.8) στη διατομή του κυλίνδρου στο  $r - z$  επίπεδο στα οποία αναπαριστώνται οι μαγνητικές γραμμές που εισχωρούν στον υπεραγωγό καθώς και οι πυκνότητες των επαγόμενων ρευμάτων,  $J/J_c$ , εντός του υπεραγωγού.

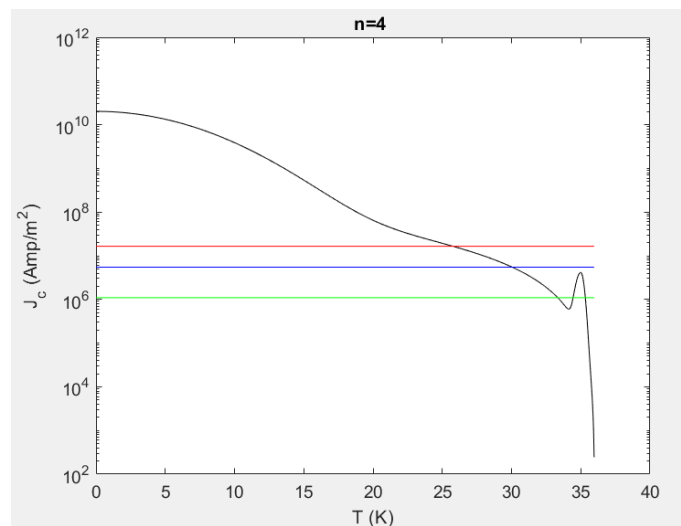
Να σημειώσουμε πως τα παραπάνω στιγμιότυπα έχουν παρθεί σε διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά την διάρκεια δύο πλήρων περιόδων του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου,  $H_{ac}(t)$ , με πλάτος  $H_0 = 1 \text{ Oe}$  και για θερμοκρασία κοντά στο φαινόμενο κορυφής της κρίσιμης τιμής ρεύματος και συγκεκριμένα για  $T \approx 34 \text{ K}$ . Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω στιγμιότυπα, στην θερμοκρασία του φαινομένου κορυφής παρατηρούμε την πλήρη διείσδυση του μαγνητικού πεδίου μέσα στο υπεραγώγιμο δείγμα, καθώς και την δημιουργία επαγόμενων ρευμάτων σε όλο το εύρος του δείγματος. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται για μικρές θερμοκρασίες, όπου έχουμε δημιουργία επαγόμενων ρευμάτων στις εξωτερικές περιοχές του κυλίνδρου και αναλόγως την θερμοκρασία του δείγματος καθόλου ή μερική διείσδυση του μαγνητικού πεδίου.



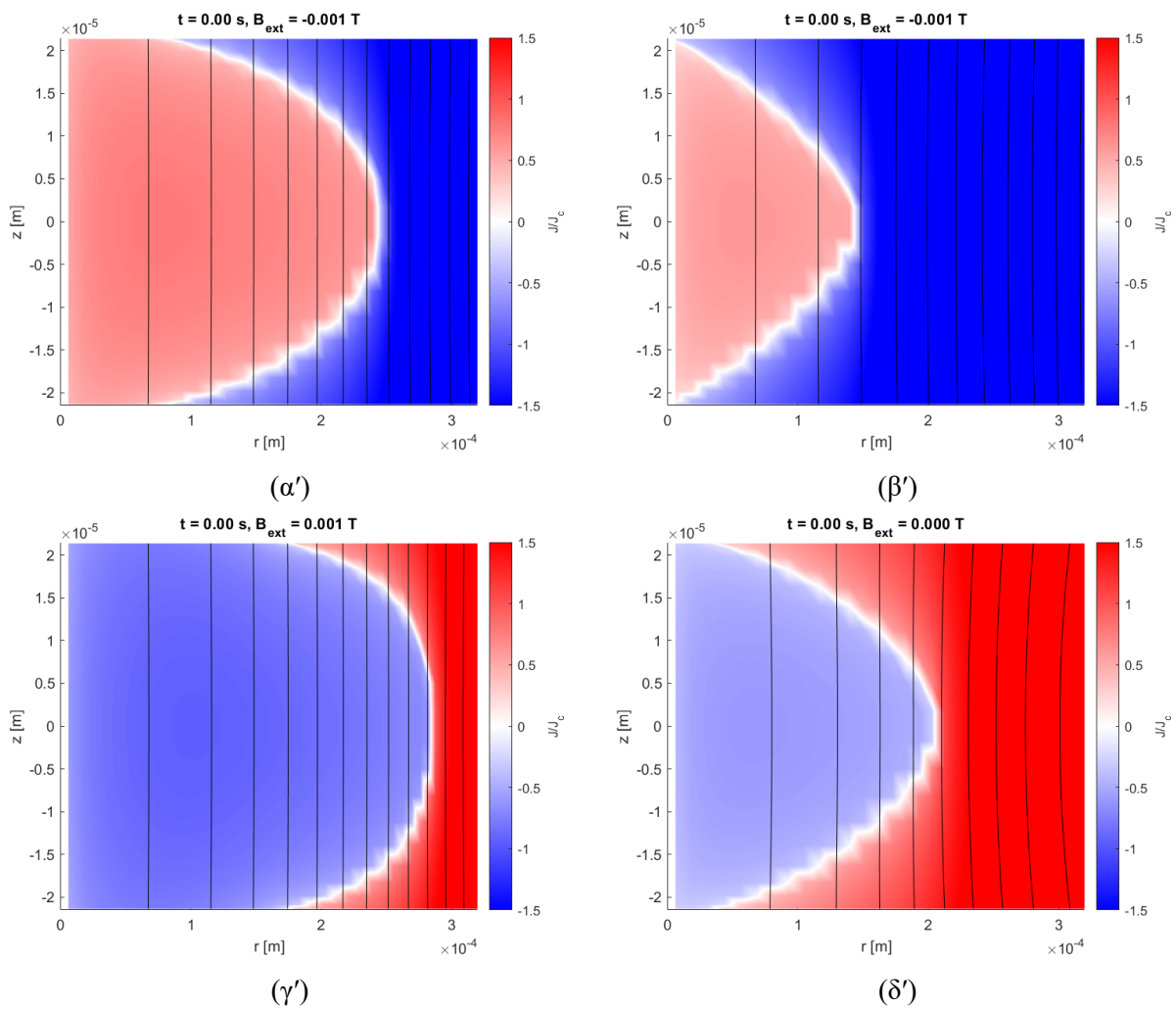
Σχήμα 6.5: Θερμοκρασιακή μεταβολή θεωρητικών και πειραματικών τιμών του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της πρώτης και της τρίτης αρμονικής της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας ( $\chi'_{1,3}$ , και  $\chi''_{1,3}$ ) για τρεις τιμές του πλάτους του ac-μαγνητικού πεδίου (1, 5 και 15 Oe). Οι πειραματικές τιμές αναπαριστώνται με συνεχή γραμμή ενώ οι θεωρητικοί υπολογισμοί με σημεία και έγιναν με  $n = 4$ . Τα πειραματικά δεδομένα προέρχονται από μετρήσεις του υπεραγωγού  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$  με  $H_{\text{dc}} = 50$  kOe.



Σχήμα 6.6: Γραφική αναπαράσταση της ρυθμού απωλειών ενέργειας λόγω μη αντιστρεπτής μετακίνησης των φλαξονίων σε μία περίοδο (dissipated power),  $P$ , συναρτήσει του χρόνου,  $t$ .



Σχήμα 6.7: Γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης του κρίσιμου ρεύματος  $J_c = f(T)$ . Η κόκκινη ευθεία αντιστοιχεί στην τιμή  $J_{c3} = 16.4\text{MA/m}^2$ , η μπλε στην  $J_{c2} = 5.5\text{MA/m}^2$  και η πράσινη στην  $J_{c1} = 1.1\text{MA/m}^2$ .



Σχήμα 6.8: Αναπαράσταση της διείσδυσης του μαγνητικού πεδίου και της δημιουργίας επαγόμενων ρευμάτων  $J/J_c$  εντός του υπεραγώγιμου κυλίνδρου μέσω στιγμιοτύπων της διατομής του κυλίνδρου στο  $r - z$  επίπεδο για διαφορετικές χρονικές στιγμές.



## 6.4.2 Η περίπτωση $n = 11$

Σ' αυτή την ενότητα παραθέτουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών  $n = 11$  για να δούμε κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα σε σχέση με αυτά που πήραμε για μικρότερες τιμές του  $n$ . Τα θεωρητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τους υπολογισμούς μας, καθώς και τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα για τα  $\chi_1'(T)$  και  $\chi_1''(T)$  παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.9.

Συγκρίνοντας τα παραπάνω διαγράμματα της πρώτης και τρίτης αρμονικής της ac επιδεκτικότητας, (Σχήμα 6.9), με τα αντίστοιχα διαγράμματα του σχήματος 6.5 παρατηρούμε άλλοτε μικρές και άλλοτε μεγαλύτερες αποκλίσεις μεταξύ τους, ανάλογα με το πλάτος ac πεδίου που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα παρατηρώντας τα διαγράμματα που αναπαριστούν την εκτός φάσης συνιστώσα της πρώτης αρμονικής βλέπουμε πως για  $n = 11$ , η θεωρητική καμπύλη που περιγράφει το μεγαλύτερο πλάτος ac πεδίου,  $H_0 = 15$  Oe, (κόκκινη καμπύλη) προσεγγίζει πολύ καλύτερα το μέγιστο που παρουσιάζει η καμπύλη των πειραματικών δεδομένων, σε σχέση με την περίπτωση  $n = 4$ . Καθώς πηγαίνουμε σε όλο και μικρότερα πλάτη εναλλασσόμενου πεδίου  $H_0 = 5$  Oe,  $H_0 = 1$  Oe, οι θεωρητικές καμπύλες παρουσιάζουν όλο και περισσότερο την ίδια συμπεριφορά με τις αντίστοιχες της περίπτωσης  $n = 4$ . Αυτή η διαφοροποίηση οφείλεται στο γεγονός ότι για μεγάλα πλάτη εναλλασσόμενου πεδίου λαμβάνει χώρα κυρίως, το μοντέλο της κρίσιμης κατάστασης Bean ( $n \rightarrow \infty$ ). Επομένως όσο μεγαλύτερη τιμή του  $n$  θέταμε εξαρχής στο πρόβλημα μας θα προσεγγίζαμε όλο και καλύτερα της καμπύλες των θεωρητικών δεδομένων που αντιστοιχούν σε μεγάλα πλάτη εναλλασσόμενου πεδίου. Για μικρότερα πλάτη δεν θα βλέπαμε κάποια αισθητή διαφορά στις προκύπτουσες καμπύλες, οι οποίες θα συνεχίζουν να αποκλίνουν από τις αντίστοιχες πειραματικές. Ένας λόγος θα μπορούσε να είναι, ότι για μικρότερα πλάτη ac πεδίου, σημαντικό ρόλο παίζει το φαινόμενο Campbell (ταλάντωση φλαξονίων γύρω από θέσεις ισορροπίας), η συνεισφορά του οποίου δεν έχει συμπεριληφθεί στο πρόγραμμά μας.

Στη συνέχεια, όπως και προηγουμένως, από τα διαγράμματα που αντιστοιχούν στην  $\chi_1''$ , Σχήμα 6.9, θα βρούμε την θερμοκρασία  $T$  για την οποία το μαγνητικό πεδίο διεισδύει πλήρως εντός του υπεραγωγίμου δείγματος, για καθένα από τα τρία πλάτη ac πεδίου. Οι συγκεκριμένες τιμές θερμοκρασίας αντιστοιχούν στις τιμές κρίσιμου ρεύματος  $J_c$  που έχουν υπολογιστεί μέσω τις σχέσης 6.1. Να σημειώσουμε πως για την εύρεση των μεγίστων της  $\chi_1''$  χρησιμοποιούμε τις θεωρητικές καμπύλες.

Έτσι από το Σχήμα 6.9 λαμβάνουμε τις εξής τιμές θερμοκρασίας:

- Για  $H_0 = 1$  Oe, η πράσινη καμπύλη της  $\chi_1''$  μεγιστοποιείται για  $T \simeq 32$  K, θερμοκρασία η οποία αντιστοιχίζεται σε τιμή κρίσιμου ρεύματος  $J_{c1} = 1.1\text{MA/m}^2$
- Για  $H_0 = 5$  Oe, η μπλε καμπύλη της  $\chi_1''$  μεγιστοποιείται για  $T \simeq 28$  K, θερμοκρασία η οποία αντιστοιχίζεται σε τιμή κρίσιμου ρεύματος  $J_{c2} = 5.5\text{MA/m}^2$
- Για  $H_0 = 15$  Oe, η κόκκινη καμπύλη της  $\chi_1''$  μεγιστοποιείται για  $T \simeq 23$  K, θερμοκρασία η οποία αντιστοιχίζεται στην τιμή κρίσιμου ρεύματος  $J_{c3} = 16.4\text{MA/m}^2$

Στην συνέχεια, έχοντας ήδη πραγματοποιήσει την γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης  $J_c = f(T)$  για  $n = 4$ , Σχήμα 6.7, η οποία, όπως έχουμε θεωρήσει είναι ίδια για κάθε τιμή του  $n$ , θα εξετάσουμε κατά πόσο οι τιμές θερμοκρασίας που θα προκύψουν για τις τιμές κρίσιμου ρεύματος,  $J_{c1} = 1.1\text{MA/m}^2$ ,  $J_{c2} = 5.5\text{MA/m}^2$ ,  $J_{c3} = 16.4\text{MA/m}^2$  μέσω του σχήματος αυτού, ταυτίζονται με τις παραπάνω τιμές θερμοκρασίας ( $n = 11$ ). Η συγκεκριμένη διαδικασία αποτελεί έναν έλεγχο της συνάρτησης του κρίσιμου ρεύματος που θεωρήσαμε ότι περιγράφει το υπεραγωγίμο δείγμα.

Θα επαναλάβουμε τις τιμές θερμοκρασίας που προκύπτουν από το Σχήμα 6.7:

- Για τιμή ρεύματος  $J_{c1} = 1.1\text{MA/m}^2$ , πράσινη καμπύλη, η θερμοκρασία στην οποία αντιστοιχεί είναι  $T_1 = 33.3$  K

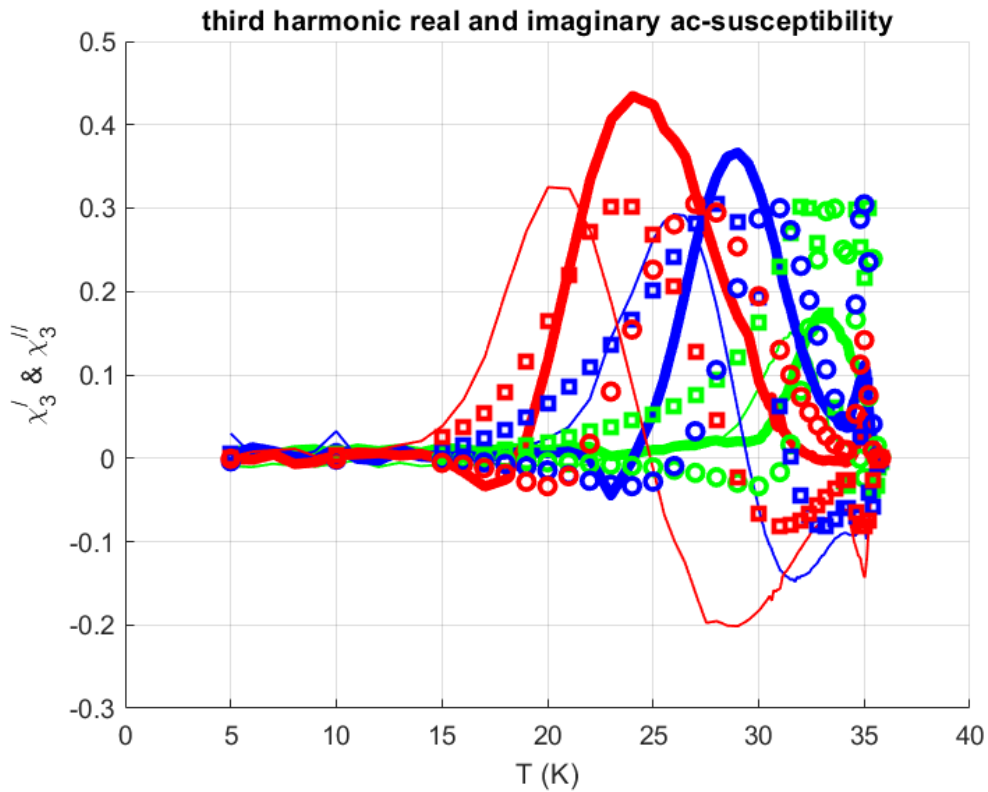
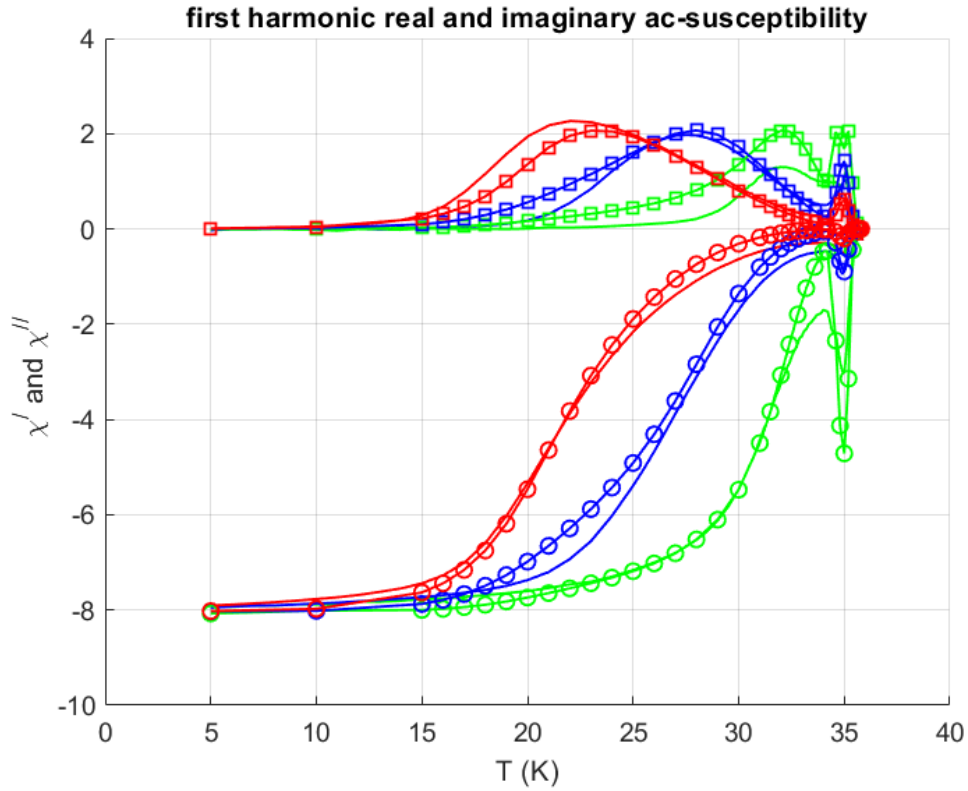


- Για τιμή ρεύματος  $J_{c2} = 5.5 \text{ MA/m}^2$ , μπλε καμπύλη, η θερμοκρασία στην οποία αντιστοιχεί είναι  $T_2 = 30.2 \text{ K}$
- Για τιμή ρεύματος  $J_{c3} = 16.4 \text{ MA/m}^2$ , κόκκινη καμπύλη, η θερμοκρασία στην οποία αντιστοιχεί είναι  $T_3 = 25.7 \text{ K}$

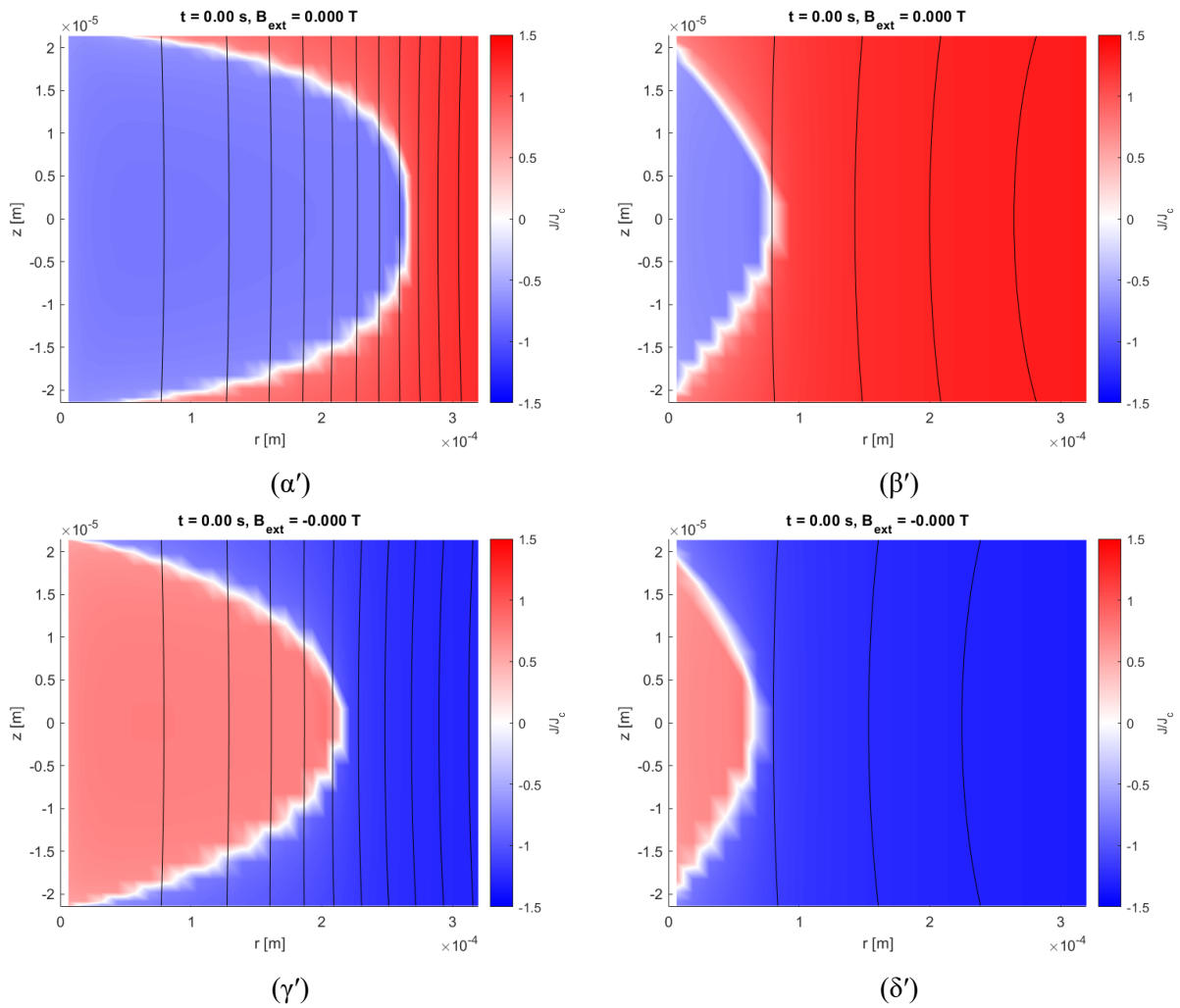
Συγκρίνοντας τις τιμές θερμοκρασίας για τις οποίες μεγιστοποιείται το φανταστικό μέρος της ac επιδεκτικότητας με τις τιμές θερμοκρασίας που προκύπτουν από το διάγραμμα  $J_c = f(T)$ , Σχήμα 6.7, παρατηρούμε πως είναι αρκετά κοντά. Παρόλα αυτά παρουσιάζουν μεγαλύτερες αποκλίσεις σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές της περίπτωσης  $n = 4$ . Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει κάτι τέτοιο, είναι διότι την συνάρτηση του κρίσιμου ρεύματος την θεωρήσαμε εμείς εξαρχής και οι τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης  $J_c(T)$ , ( $J_{c0}, J_p, sh, sl$ ) επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε οι θερμοκρασίες που προκύπτουν από το διάγραμμα  $J_c = f(T)$  να είναι όσο κοντά γίνεται με τις αντίστοιχες θερμοκρασίες μεγιστοποίησης της  $\chi_1''$  συνιστώσας, για μια περίπτωση μικρής τιμής  $n$ .

Επομένως γνωρίζοντας πως για μεγαλύτερη τιμή του  $n$  προσεγγίζουμε σε μεγαλύτερο βαθμό τα πειραματικά δεδομένα, ιδίως για τις περιπτώσεις μεγαλύτερου πλάτους εναλλασσόμενου πεδίου, θα έπρεπε να τροποποιούμε ελαφρώς την συνάρτηση του κρίσιμου ρεύματος που θεωρούμε κάθε φορά, ενδεχομένως και ως προς τις παραμέτρους της όσο και ως προς την μορφή της, με σκοπό της εύρεση της  $J_c = f(T)$  που περιγράφει το υπεραγωγίμο δείγμα για κάθε τιμή του  $n$ . Παρόλα αυτά οι αποκλίσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι μικρές, γι αυτό και θεωρούμε πως το υπεραγωγίμο δείγμα περιγράφεται από την παραπάνω συνάρτηση κρίσιμου ρεύματος.

Στην συνέχεια όπως και στην περίπτωση  $n = 4$ , θα παραθέσουμε κάποια στιγμιότυπα της διατομής του υπεραγωγίμου δείγματος στο  $r - z$  επίπεδο, για διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά την διάρκεια δύο περιόδων ταλάντωσης του ac πεδίου. Τα διάφορα στιγμιότυπα θα αναπαριστούν τόσο τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου εντός του υπεραγωγίμου δείγματος όσο και τις πυκνότητες των επαγόμενων ρευμάτων  $J/J_c$ . Να σημειώσουμε πως τα παρακάτω στιγμιότυπα έχουν παρθεί για θερμοκρασία κοντά στην θερμοκρασία του φαινομένου κορυφής.



Σχήμα 6.9: Θερμοκρασιακή μεταβολή θεωρητικών και πειραματικών τιμών του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της πρώτης και της τρίτης αρμονικής της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας ( $\chi'_{1,3}$ , και  $\chi''_{1,3}$ ) για τρεις τιμές του πλάτους του ac-μαγνητικού πεδίου (1, 5 και 15 Oe). Οι πειραματικές τιμές αναπαριστώνται με συνεχή γραμμή ενώ οι θεωρητικοί υπολογισμοί με σημεία και έγιναν με  $n = 11$ . Τα πειραματικά δεδομένα προέρχονται από μετρήσεις του υπεραγωγού  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$  με  $H_{\text{dc}} = 50$  kOe.



Σχήμα 6.10: Αναπαράσταση της διείσδυσης του μαγνητικού πεδίου και της δημιουργίας επαγόμενων ρευμάτων  $J/J_c$  εντός του υπεραγωγίου κυλίνδρου μέσω στιγμιότυπων της διατομής του κυλίνδρου στο  $r - z$  επίπεδο για διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια δυο πλήρων ταλαντώσεων του μαγνητικού πεδίου πλάτους  $H_0 = 10$  Oe. Τα παραπάνω στιγμιότυπα έχουν παρθεί για  $n = 11$ .

## 6.5 Συμπεράσματα

Κατασκευάστηκε κώδικας matlab για τον υπολογισμό της μιγαδικής εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας επιλύοντας αριθμητικά τις εξισώσεις του Maxwell στην οιονεί στατική προσέγγιση, θεωρώντας μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου-πυκνότητας ρεύματος. Με την αναπαράσταση του ολοκληρωτικού πυρήνα της ολοκληρωτικής σχέσης του νόμου Ampere σε μορφή τετραγωνικού πίνακα το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό της πυκνότητας του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος με την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Μετά τον υπολογισμό της επαγόμενης πυκνότητας ρεύματος υπολογίζεται αριθμητικά η μαγνητική ροπή του υπεραγωγίου δίσκου συναρτήσει του χρόνου. Προφανώς η μαγνητική ροπή είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο ίση με αυτή του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου. Με απλή αριθμητική ολοκλήρωση προσδιορίσαμε τις συνιστώσες Fourier της μαγνητικής και κατ' επέκταση τις συνιστώσες της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας. Οι θεωρητικές τιμές της μιγαδικής επιδεκτικότητας συμφωνούν ποιοτικά με τις αντίστοιχες πειραματικές. Η αποκλίσεις μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών καμπύλων της μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι η απλή υπόθεση ότι ο υπεραγωγός μπορεί να περιγραφεί με μία μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου ρεύματος δεν αντιπροσωπεύει τη δυναμική κατάσταση της ύλης φλαξονίων. Μία πιθανή αιτία είναι ότι για μικρά πλάτη του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου τα φλαξόνια περιγράφονται με το πρότυπο Campbell (ταλάντωση των φλαξονίων γύρω από μια φλαξονική διαμόρφωση ελάχιστης ελεύθερης ενέργειας), σε αντίθεση με τα μεγάλα πλάτη όπου καταλληλότερο είναι το πρότυπο της κρίσιμης κατάστασης (τα φλαξόνια κινούνται μεταξύ τοπικών ελαχίστων της ελεύθερης ενέργειας). Σαν μελλοντική εργασία θα μπορούσε να είναι η ανάπτυξη ενός προτύπου το οποίο με φαινομενολογικό τρόπο θα λαμβάνει ταυτόχρονα και τις δύο δυναμικές συμπεριφορές.

## Βιβλιογραφία

- [1] E. H. Brandt *Phys. Rev. B*, vol. 58, pp. 6506–6522, Sep 1998.
- [2] S. Otten and F. Grilli, “Simple and fast method for computing induced currents in superconductors using freely available solvers for ordinary differential equations,” *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 29, no. 8, pp. 1–8, 2019.
- [3] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*. Dover Publications, 2004.
- [4] A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*. Dover Publications, 2017.
- [5] V. Shmidt, P. Müller, and A. Ustinov, *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications*. Springer, 1997.
- [6] G. Blatter, M. V. Feigel’man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur *Rev. Mod. Phys.*, vol. 66, pp. 1125–1388, Oct 1994.
- [7] T. Nattermann and S. Scheidl *Advances in Physics*, vol. 49, no. 5, pp. 607–704, 2000.
- [8] Μ. Πίσσας, *Εισαγωγή στις μαγνητικές μετρήσεις*. Σημειώσεις για την άσκηση ”μαγνητικές μετρήσεις” του ΔΜΠΣ ΦΤΕ, 2023.
- [9] Μ. Πίσσας, *Ηλεκτρομαγνητισμός*. Σημειώσεις για το Μάθημα ”Ηλεκτρομαγνητισμός Ι” του ΔΜΠΣ ΦΤΕ, 2024.
- [10] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4 ed., 2017.
- [11] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 8 ed., 2004.
- [12] C. P. BEAN *Rev. Mod. Phys.*, vol. 36, pp. 31–39, Jan 1964.
- [13] E. H. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. i. flux penetration and magnetization curves,” *Phys. Rev. B*, vol. 58, pp. 6506–6522, Sep 1998.
- [14] G. Ghigo, G. Ummarino, L. Gozzelino, and T. Tamegai, “Penetration depth of  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$  single crystals explained within a multiband eliashberg  $s \pm$  approach,” *Physical Review B*, vol. 96, 07 2017.
- [15] J. Storey, J. Loram, J. Cooper, Z. Bukowski, and J. Karpinski, “The electronic specific heat of  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$  from 2k to 380k,” *Physical Review B*, 01 2010.
- [16] M. Pissas, M. Zeibekis, D. Stamopoulos, C. Wang, and Y. Ma, “Irreversibility line of  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$  ( $t_c=36.9\text{k}$ ) superconductor studied with ac-susceptibility measurements,” *Physica C: Superconductivity*, vol. 476, pp. 68–72, 2012.
- [17] M. Pissas, D. Stamopoulos, C. Wang, and Y. Ma, “Dynamic crossover across the peak effect in  $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{Fe}_2\text{As}_2$  superconductor for  $h||c$ -axis and  $h||ab$ -plane,” *Superconductor Science and Technology*, vol. 35, p. 065014, may 2022.

- [18] B. Billon, M. Charalambous, J. Chaussy, R. Koch, and R. Liang, "Irreversibility and flux-lattice melting in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ," *Phys. Rev. B*, vol. 55, pp. R14753–R14756, Jun 1997.
- [19] A. B. Pippard, "A possible mechanism for the peak effect in type ii superconductors," *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, vol. 19, no. 158, pp. 217–220, 1969.
- [20] J. Livingston and H. Schadler, "The effect of metallurgical variables on superconducting properties," *Progress in Materials Science*, vol. 12, pp. 185–284, 1963.
- [21] C. S. Tedmon, R. M. Rose, and J. Wulff, "Resistive measurements of structural effects in superconducting niobium," *Journal of Applied Physics*, vol. 36, no. 3, pp. 829–835, 1965.
- [22] A. Larkin and Y. Ovchinnikov *J Low Temp Phys*, vol. 34, p. 409–428, 1979.
- [23] E. H. Brandt *Reports on Progress in Physics*, vol. 58, pp. 1465–1594, nov 1995.
- [24] E. Brandt, "Elastic energy of the vortex state in type ii superconductors. i. high inductions," *J Low Temp Phys*, vol. 26, p. 709–733, 1977.
- [25] G. P. Mikitik and E. H. Brandt *Phys. Rev. B*, vol. 64, p. 184514, Oct 2001.