ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΈΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΙ ΧΩΡΙΣ ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ (CONFLICT-FREE COLORINGS)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Αθανάσιου Β. Λιανέα

Αθήνα, Νοέμβριος 2007

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΙ ΧΩΡΙΣ ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ (CONFLICT-FREE COLORINGS)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Αθανάσιου Β. Λιανέα

Επιβλέπων: Ευστάθιος Ζάχος
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 5-11-2007.

....	....	....
Ευστάθιος Ζάχος Καθηγητής ΕΜΠ	Αλέξανδρος Παπαϊωάννου Επ. Καθηγητής ΕΜΠ	Συμεών Παπαβασιλείου Επ. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2007.

....
Αθανάσιος Β. Λιανέας
Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών ΕΜΠ

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά ένα είδος χρωματισμού κόμβων γράφων που δείχνει να έχει κερδίσει το ενδιαφέρον των "θεωρητικών". Ως κίνητρο δημιουργίας αυτού μπορούν να θεωρηθούν τα κυψελωτά δίκτυα, αν και εφαρμογές του εμφανίζονται και σε άλλα αντικείμενα.

Αφού δούμε ενδεικτικά κάποια γεωμετρικά αποτελέσματα θα επικεντρωθούμε στην μελέτη του προβλήματος σε γράφους αλυσίδες. Σε αυτούς, το πρόβλημα μπορεί να πάρει μια δυναμική διάσταση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Πιο συγκεκριμένα, ο γράφος θα αποκαλύπτεται σε βήματα και ο χρωματισμός θα πρέπει σε κάθε βήμα να είναι έγκυρος. Θα δώσουμε την υπάρχουσα ιεραρχία για τον τρόπο της δυναμικής εμφάνισης των κόμβων και θα παρουσιάσουμε τους καλύτερους γνωστούς αλγόριθμους για κάθε κλάση αυτής.

Περιεχόμενα

Μέρος I

Conflict free γενικά

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το γενικό πρόβλημα

1.1.1 Τα κυψελωτά δίκτυα

Τα κυψελωτά δίκτυα είναι ετερογενή δίκτυα με δυο διαφορετικούς τύπους κόμβων:
α) τους σταθμούς βάσης οι οποίοι έχουν δεδομένες θέσεις στο χώρο και δρουν σαν servers και
β) τους συνδρομητές-πελάτες οι οποίοι έχουν δυνατότητα κίνησης.
Οι servers-σταθμοί είναι διασυνδεδεμένοι μεταξύ τους με ένα εξωτερικό σταντάρ δίκτυο επικοινωνίας.
Οι πελάτες μπορουν να συνδέονται μόνο με κάποιον από τους server και όχι μεταξύ τους. Αυτή η σύνδεση επιτυγχάνεται μέσω ραδιοσυχνοτήτων.
Στους servers δίνονται κάποιες σταντάρ συχνότητες στις οποίες οι πελάτες μπορούν να συνδεθούν.
Οι πελάτες από την άλλη ψάχνουν συνεχώς για συχνότητες με όσο το δυνατόν καλύτερη ανταπόκριση. Αυτή η αναζήτηση γίνεται αυτόματα και αλλάζει αυτόματα μια σύνδεση με ένα σταθμό σε κάποια άλλη με κάποιο άλλο σταθμό αν βρει καλύτερη ανταπόκριση (δεδομένου οτι ο πελάτης κινείται).

Ας φανταστούμε ένα πελάτη ο οποίος βρίσκεται στην ακτίνα μετάδοσης δύο σταθμών. Αν αυτοί οι δύο σταθμοί έχουν την ίδια συχνότητα τότε σίγουρα θα παρουσιάζονται παρεμβολές αμοιβαία και στους δύο σταθμούς. Έτσι η σύνδεση με οποιοδήποτε από τους δύο συγκρουόμενους σταθμούς θα έχει ανεπιθύμητο θόρυβο και κανένας από τους δύο σταθμούς δεν θα είναι κατάλληλος για χρήση. Γενικεύοντας, κάθε σταθμός μπορεί να εξυπηρετήσει ένα πελάτη μόνο αν η σύνδεσή του με αυτόν τον πελάτη είναι αρκετά 'δυνατή' και οι παρεμβολές από τους άλλους σταθμούς είναι αρκετά ¨ασθενείς'.

1.1.2 Ο ορισμός του προβλήματος

Το πρόβλημα μας είναι να αναθέσουμε συχνότητες στους σταθμούς με τρόπο ώστε σε οποιδήποτε σημείο και αν βρεθεί πελάτης να μπορεί να συνδεθεί σε κάποιον από τους σταθμούς χωρίς θόρυβο. Έπιπλέον όμως, δεδομένου οτι το φάσμα συχνοτήτων είναι περιορισμένο και οτι πολλές συχνότητες κοστίζουν (αγορά δικαιωμάτων), θέλουμε να επιτύχουμε ελάχιστο αριθμό διαφορετικών συχνοτήτων.

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε πιο αυστηρά το πρόβλημά μας.

Ορισμός 1.1.1. *Conflict free χρωματισμός*
Έστω X ένας δεδομένος χώρος (π.χ. το επίπεδο) και έστω S μια οικογένεια υποσυνόλων του X (π.χ. δίσκοι τα κέντρα των οποίων αντιστοιχούν στους σταθμούς). Μια συνάρτηση c:$S \rightarrow N$ είναι ένας conflict free χρωματισμός του S ανν για κάθε $x \in \bigcup_{u \in S} u$ υπάρχει ένας αριθμός i (χρώμα που αντιστοιχεί σε συχνότητα) τέτοιος που το σύνολο $\{u \in S : x \in u \ \& \ c(u) = i\}$ να είναι μονοσύνολο.

Ορισμός 1.1.2. *Το πρόβλημα του ελάχιστου conflict free χρωμστισμού*
Το πρόβλημα εύρεσης μιας συνάρτησης conflict free χρωματισμού η εικόνα της οποίας θα έχει την ελάχιστη δυνατή πληθικότητα (θα χρησιμοποιεί σαν εικόνες όσο δυνατόν λιγοτερους φυσικούς αριθμούς) ονομάζεται πρόβλημα του ελάχιστου conflict free χρωμστισμού.

Προς διευκόλυνση του αναγνώστη, στην συνέχεια αντί για συνάρτηση χρωματισμού απλά θα μιλάμε για χρωματισμό του S.
Στην μορφή που παρουσιάζεται παραπάνω το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα χρωματισμού γράφων και συνεπώς η λύση του είναι εξίσου δύσκολη ακόμη και αν αναζητούμε λύση με προσσεγγιστικό αλγόριθμο. Στη γενική του μορφή λοιπόν το πρόβλημα είναι NP-hard. Σχετικά αποτελέσματα μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο [CCJ90]
Η μελέτη αυτού του προβλήματος πρωτοξεκίνησε στα [ELRS03] και [Smo03]. Σε πολλές περιπτώσεις όμως η δυσκολία του προβλήματος μπορεί να αλλάζει. Αυτή η αλλαγή συνήθως οφείλεται στο γεγονός οτι οικογένεια συνόλων S του προβλήματος περιέχει σύνολα συγκεκριμένης μορφής. Για παράδειγμα, αν το X είναι το επίπεδο, το S μπορεί να είναι είτε οικογένεια κλειστών δίσκων (μελετάτε στο [PT03]) ή οικογένεια κανονικών εξαγώνων είτε παραλληλογράμμων (μελετάτε στα [EM06] και [KS04]) είτε ακόμη και ημιεπιπέδων (μελετάτε στο [KS04]). Έχει δοθεί και ένας γενικός αλγόριθμος για οικογένειες περιοχών με σχεδόν γραμμική πολυπλοκότητα ένωσης (στο [KS04]. Όλα αυτά τα προβλήματα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η συγκεκριμένη εργασία έχει σαν θέμα της όμως μία άλλη προέκταση του προβλήματος η οποία θα παρουσιαστεί αργότερα. Ενδεικτικά θα δούμε τι γίνετε στην περίπτωση των δίσκων στο επίπεδο κάτι που θα μας δώσει την ευκαιρία να εισάγουμε και το δυικό πρόβλημα του conflict free χρωματισμού περιοχών.

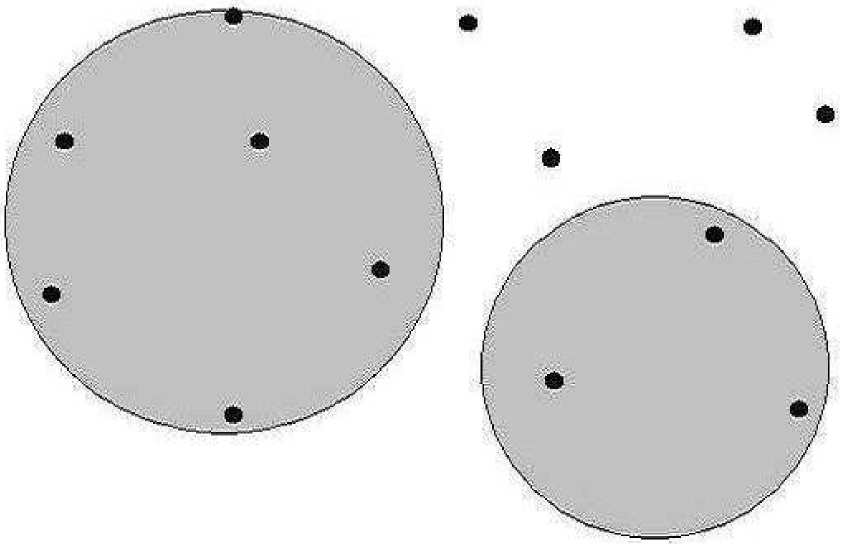
1.2 Conflict free χρωματισμοί σημείων

Η επίλυση της περίπτωσης χρωματισμού των δίσκων στο επίπεδο ανάγεται σε επίλυση χρωματισμού σημείων στο χώρο σεβόμενοι θετικούς ημιχώρους. Τι σημαινει αυτό... Έστω P σύνολο σημείων του $\Re^d$ και R σύνολο εμβελειών αυτού (π.χ. δίσκοι στο επίπεδο, πολύεδρα ή και ημίχωροι στο χώρο). Θέλουμε σε κάθε σημείο του χώρου μας να δώσουμε έναν αριθμό ώστε κάθε εμβέλεια του R που περιέχει κόμβους του P να περιέχει και ένα κόμβο με μοναδικό χρώμα.

Ορισμός 1.2.1. *Conflict free χρωματισμός του P που σέβεται το R (θα λέμε του συστήματος (P, R)) είναι κάθε συνάρτηση $c : P \to N$ τέτοια που*

$$(\forall r \in R)[P \cap r \neq \varnothing \Rightarrow (\exists p \in P \cap r)(\forall q \in P \cap r)[p \neq q \to c(p) \neq c(q)]$$

Παράδειγμα 1.2.1. *Αν P σύνολο σημείων του επιπέδου και R το σύνολο όλων των δίσκων του επιπέδου τότε στους δίσκους που φαίνονται στο σχήμα (αλλά και σε οποιουσδήποτε άλλους τέτοιους μπορούμε να σκεφτούμε) θα πρέπει να υπάρχει σημείο του P (κόμβος) με μοναδικό χρώμα.*



Σχήμα 1.1: Τα σημεία στο επίπεδο και δύο εμβέλειες

Το δυϊκό πρόβλημα έρχεται με ¨φυσικό' τρόπο αν σκεφτούμε τους πελάτες να είναι αυτοί που εχουν την εμβέλεια και οτι αυτοί μπορούν να συνδέονται στους σταθερούς σταθμούς-κόμβους του P αν τους βρίσκουν μέσα στην εμβέλειά τους. Η κίνηση των πελατών στο χώρο είναι αυτή που δίνει και την (γενικά) άπειρη οικογένεια εμβελειών R.

Παρακάτω θα δούμε ένα γενικό αλγόριθμο που όποτε μπορεί να εφαρμοστεί δίνει καλά αποτελέσματα στην επίλυση του προλήματος. Πρώτα θα δούμε ένα χρήσιμο ορισμό.

Έστω ένα σύστημα (P, R). Τότε:

Ορισμός 1.2.2. *Γράφος Delaunay του συστήματος (P, R) είναι ο γράφος που έχει*

- *$n = |P|$ κόμβους (που αντιστοιχούν στα σημεία του P) και*
- *σαν ακμές όλα τα ζεύγη των κόμβων για τα οποία υπάρχει εμβέλεια στο R που περιέχει μόνο αυτούς και κανένα άλλο σημείο του P*

1.2.1 Ο Αλγόριθμος

Έστω μας δίνεται ένα σύστημα (P, R).

1. Κατασκευάζουμε τον γράφο Delaunay αυτού.
2. Βρίσκουμε ένα ¨βολικό' independent set του , Q, και χρωματίζουμε τους κόμβους αυτού με ίδιο χρώμα που δεν πρόκειται να ξαναχρησιμοποιήσουμε
3. Αναδρομικά επαναλαμβάνουμε από το βήμα 1 για το σύστημα $(P \setminus Q, R)$ εως ότου χρωματιστούν όλοι οι κόμβοι.

Για την ορθότητα του αλγορίθμου είμαστε βέβαιοι. Έστω μια τυχαία εμβέλεια που περιέχει κάποια στοιχεία-κόμβους του P. Έστω Y το σύνολο αυτών που που χρωματίστηκαν τελευταίοι.

Ισχυρισμός. Το Y είναι μονοσύνολο.

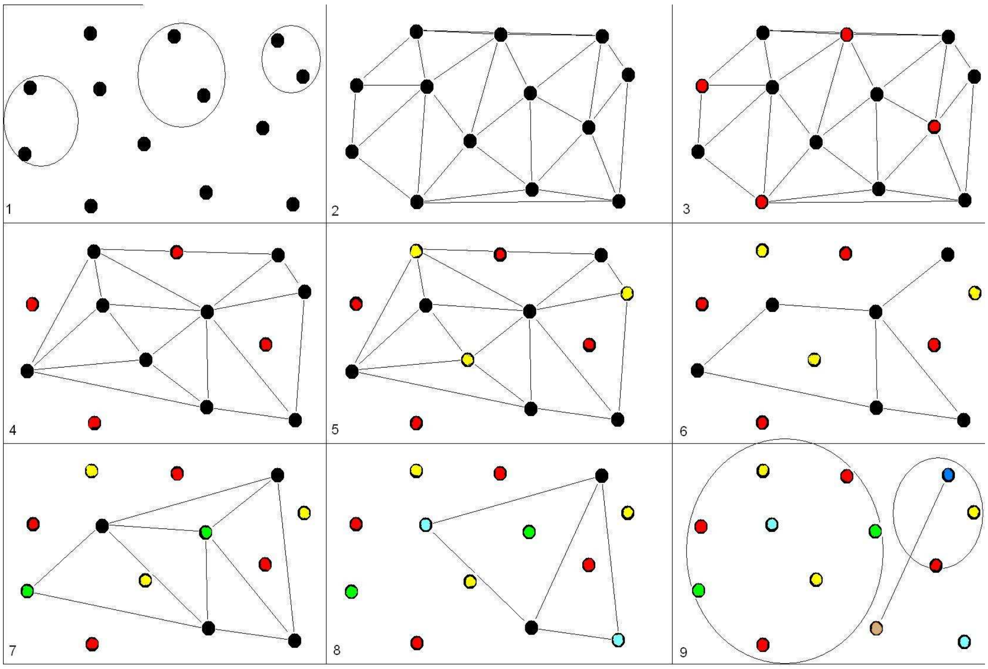
Πράγματι γιατί διαφρετικά οι κόμβοι που εισήλθαν στην τελευταία επανάληψη του αλγορίθμου θα ανήκαν όλοι σε ένα independent set που είναι άτοπο καθώς ο γράφος είναι συνεκτικός.

Όσον αφορά το βολικό independent set, κανείς δεν μας βεβαιώνει οτι υπάρχει πάντα. Βολικό θεωρείται αν είναι αρκετά μεγάλο, της τάξης του $\Omega(n)$ ή ακόμη και $\Omega(n^{1-\epsilon})$ για $0 < \epsilon < 1$, καθώς τότε μπορούμε να φράξουμε τον αριθμό των επαναλήψεων με $O(\log n)$ και $O(n^{\epsilon})$ αντίστοιχα.

Αν ο γράφος Delaunay είναι επίπεδος τότε ξέρουμε οτι είναι και χρωματίσιμος με 4 χρώματα (μάλιστα αυτό επιτυγχάνεται σε πολυωνυμικό χρόνο). Άρα σε κάθε βήμα θα χρωματίζεται τουλάχιστον το $\frac{1}{4}$ των κόβων που εισήλθαν. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνται $O(\log n)$ χρώματα καθώς υποθέτοντας οτι χρησιμοποιήθηκαν k χρώματα και συμβολίζοντας με a_k τους κόμβους της κ-στης επανάληψης του αλγορίθμου έχουμε:

$$1 = a_k \leq \frac{3}{4} a_{k-1} \leq \ldots \leq (\frac{3}{4})^{k-1} a_1 = n \;\Rightarrow\; k \leq \log_{\frac{4}{3}} n + 1$$

Παράδειγμα 1.2.2. *Στο σχήμα φαίνεται η δράση του αλγορίθμου σε σύστημα (P, R) με P το επίπεδο και R το σύνολο των δίσκων του επιπέδου. Ενδεικτικά στο τέλος βλέπουμε και δύο εμβέλειες.*



Σχήμα 1.2: Δράση του αλγορίθμου για σημεία στο επίπεδο

Το $O(\log n)$ αποδεικνύεται όμοια σε κάθε περίπτωση όπου το independent set είναι τουλάχιστον $a|P|$, με χρήση $k \leq \log_{\frac{1}{1-a}} n + 1$ χρωμάτων.

1.2.2 (Σημεία του χώρου, θετικοί ημίχωροι)

Στην αρχή της ενότητας είπαμε πως θα δούμε την περίπτωση του conflict free χρωματισμού σημείων του χώρου σεβόμενοι θετικούς ημιχώρους, του συστήματος δηλαδή (P, R) όπου P σημεία του $\Re^3$ και R το σύνολο των θετικών ημιχώρων του $\Re^3$.

Έστω ένα τέτοιο σύστημα (P, R) και P' τα σημεία που αποτελούν την κυρτή θήκη του P τότε:

Ισχυρισμός. Αν κάνουμε conflict free χρωματισμό του συστήματος (P', R) και χρωματίσουμε τα σημεία του $P \setminus P'$ με μοναδικό χρώμα τότε ο χωματισμός του (P, R) θα είναι conflict free

Πράγματι γιατί αν σκεφτούμε τον οποιοδήποτε ημίχωρο τότε αυτός θα περιέχει σίγουρα ένα σημείο της κυρτής θήκης του P. Ολα τα σημεία εκτός από αυτά της κυρτής θήκης διαφέρουν σε χρώμα από αυτά της κυρτής θήκης και στην κυρτή θήκη θα υπάρχει κόμβος με μοναδικό χρώμα.

Σκοπός μας λοιπόν είναι να χρωματίσουμε σωστά τους κόμβους που αποτελούν την κυρτή θήκη.

Θα δείξουμε οτι ο γράφος Delaunay αυτών είναι επίπεδος και αυτό μας αρκεί για να δείξουμε οτι ο χρωματισμός χρησιμοποεί $O(\log n)$ χρώματα. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε οτι η προβολή του γράφου στο επίπεδο των xy δεν έχει διασταυρώσεις. Εδώ χρειάζεται αρκετή φαντασία.

Ας σκεφτούμε 4 σημεία τέτοια που αν τα συνδέαμε όλα με όλα να δημιουργείται διασταύρωση (η κυρτή θήκη της προβολή τους στο επίπεδο είναι κυρτό πολύγωνο). Αρκεί να εξετάσουμε μόνο αυτή την περίπτωση. Σε μια τέτοια περίπτωση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ανά δύο τα σημεία απέναντι.

Ας σκεφτούμε το επίπεδο D που δημιουργούν 3 από αυτά. Τότε αυτό, χ.β.τ.γ, θα αφήνει το τέταρτο σημείο είτε από πάνω του είτε από κάτω του.

Ισχυρισμός. Αν το αφήνει από πάνω του τότε τα δύο απέναντι του επιπέδου, έστω a και b, δεν μπορούν να βρεθούν ποτέ σε ημίχωρο που θα περιέχει μόνο αυτά.

Τούτο ισχύει γιατί αν υπάρχει τέτοιος ημιχώρος που οριοθετείται από ένα επίπεδο F θα πρέπει να περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα ab και να αφήνει στον αρνητικό ημιχώρο τα άλλα δύο σημεία, έστω c και d, και το ευθύγραμμο τμήμα cd. Με τους εξείς συλλογισμούς οδηγούμαστε σε άτοπο:

- Μεταφέρουμε το επίπεδο παράλληλα μέχρι να περιέχει το ένα από τα a και b (το πρώτο που θα φτάσει), έστω το a. Τα c και d εξακολουθούν να βρίσκονται από την αρνητική μεριά του επιπέδου.

- Στρέφουμε το επίπεδο γύρω από τον άξονα που περνά από το a και είναι παράλληλος με το cd, μέχρι να περιέχει και το b. Αυτός ο άξονας μας βεβαιώνει οτι τα c και d εξακολουθούν και βρίσκονται στην αρνητική μεριά του επιπέδου!

- Στρέφουμε το επίπεδο γύρω από το ab ωστε να περιέχει και το c (αν το c το τρίτο σημείο του επιπέδου D, χ.β.τ.γ.). Το d εξακολουθεί να βρίσκεται στην αρνητική μεριά του επιπέδου

- άτοπο γιατί φτάσαμε και φτιάξαμε το D και καταφέραμε να έχει το τέταρτο σημείο από κάτω του.

Ο τελευταίος ισχυρισμός μας υποδηλώνει ότι σίγουρα κάποια από τα δύο ζευγάρια απέναντι σημείων δεν μπορεί να έχει ακμή στο γράφο Delaunay, αφού πάντα κάποια τριάδα θα κατασκευάζει επίπεδο που θα αφήνει το τέταρτο σημείο από πάνω.

Κατά συνέπεια ο γράφος Delaunay των σημείων που σχηματίζουν την κυρτή θήκη είναι επίπεδος και δείξαμε αυτό που θέλαμε

Η αναγωγή

Επανερχόμαστε στο πρόβλημα του conflict free χρωματισμού δίσκων στο επίπεδο.

Θα το λύσουμε ανάγωντάς το στο πρόβλημα που λύσαμε προηγουμένως. (Η αναγωγή πρωτοεμφανίστηκε στο [Smo06]):

1. σε κάθε σημείο (a, b) αντιστοιχούμε το επίπεδο με παραμετρική εξίσωση $z(a, b) = -2ax - 2by + a^2 + b^2$
2. σε κάθε κύκλο $((x, y), r)$ αντιστοιχίζουμε το σημείο $(x, y, r^2 - x^2 - y^2)$

Ένα σημείο (a, b) ανήκει στον κύκλο $((x, y), r)$ ανν

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

που ισοδύναμα είναι

$$-2ax - 2by + a^2 + b^2 \leq r^2 - x^2 - y^2$$

δηλαδή εαν το σημείο που αντιστοιχεί στον κύκλο βρίσκεται πάνω από το επίπεδο που αντιστοιχεί στο σημείο. Έτσι κάνουμε conflict free χρωματισμό των σημείων σεβόμενοι τα θετικά ημιεπίπεδα και τα χρώματα των σημείων τα δίνουμε στους αντίστοιχους κύκλους. Κατά συνέπεια το πρόβλημα του conflict free χρωματισμού δίσκων στο επίπεδο μπορεί να λυθεί με χρήση $O(\log n)$ χρωμάτων.

Στο σημείο αυτό θα ξεφύγουμε από την γεωμετρική σκοπιά και θα συνεχίσουμε βλέποντας το πρόβλημα μέσα από την μοντελοποίηση (μέσω γραφοθεωρίας) που μπορούμε να του κάνουμε.

1.3 Conflict free χρωματισμοί σε διαστήματα

1.3.1 Μοντελοποίηση του αρχικού προβλήματος

Θα δώσουμε τον τρόπο μοντελοποίησης για το αρχικό γενικό πρόβλημα. Ξεκινάμε με ένα γνωστό ορισμό που ίσως βοηθήσει στην κατανόηση του επόμενου ορισμού.

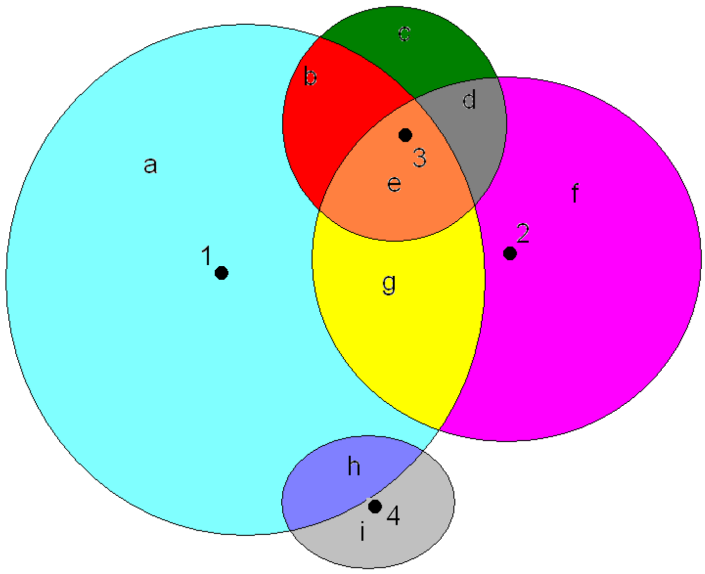
Ορισμός 1.3.1. *Γράφος $G(V, E)$ ονομάζεται κάθε ζεύγος συνόλων V και E για το οποίο*

- *V είναι ένα σύνολο κόμβων*
- *E είναι ένα σύνολο μη διατεταγμένων ζευγών του V.*

Η μοντελοποίηση του προβλήματος δεν θα γίνει όμως με γράφους. Θα ορίσουμε μια γενίκευση των γράφων με την οποία μπορούμε να κάνουμε πλήρη μοντελοποίηση.

Ορισμός 1.3.2. *Υπεργράφος $G(V, E)$ ονομάζεται κάθε ζεύγος συνόλων V και E για το οποίο*

- *V είναι ένα σύνολο κόμβων*



Σχήμα 1.3: Οι εμβέλειες των σταθμών στο χώρο. Με αριθμούς οι σταθμοί και με γράμματα τα κομμάτια του χάρτη που δημιουργείτε

- *E είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του V.*

Ορισμός 1.3.3. *Conflict free χρωματισμός ενός υπεργράφου ονομάζεται κάθε χρωματισμός των κόμβων του (συνάρτηση αντιστοίχηση χρώματος στους κόμβους του) έτσι ώστε σε κάθε υπερακμή του υπεργράφου να υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος με μοναδικό χρώμα ανάμεσα στα άλλα χρώματα που εμφανίζονται στους υπόλοιπους κόμβους της υπερακμής.*

Για την μοντελοποίηση του προβλήματος κατασκευάζουμε έναν υπεργράφο ο οποίος

- έχει τόσους κόμβους όσους σταθμούς έχει το επίπεδο για το οποίο έχει τεθεί το πρόβλημα και

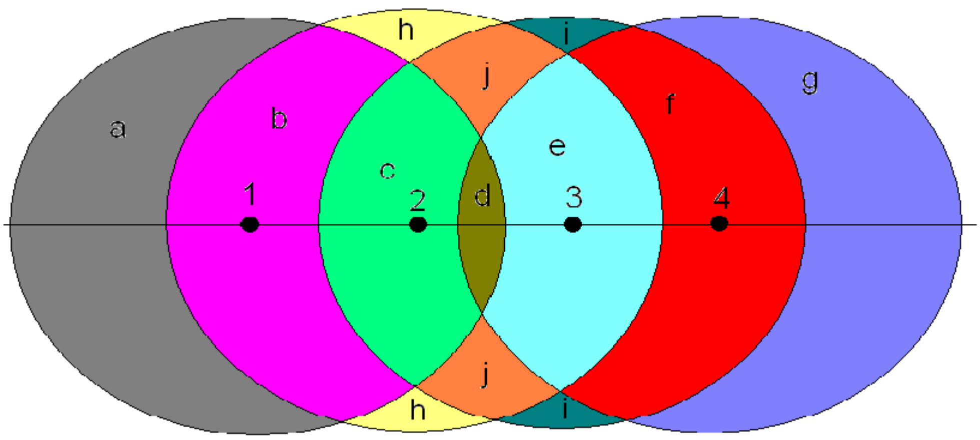
- έχει (σχεδόν!) τόσες υπερακμές όσα χωρία έχει ο χάρτης που δημιουργείται από την απεικόνιση της οικογένειας S των συνόλων στο επίπεδο και κάθε υπερακμή που αντιστοιχεί σε ένα χωρίο περιέχει ακριβώς εκείνους τους κόμβους για τους οποίους οι αντίστοιχοι σταθμοί είναι προσβάσιμοι από πελάτες μέσα στο χωρίο. (Προηγουμένως το 'σχεδόν' διατυπώθηκε γιατί κάποια διαφορετικά χωρία μπορεί να αντιστοιχούν στην ίδια υπερακμή).

Η επίλυση πλέον του αρχικού προβλήματος ανάγεται σε επίλυση εύρεσης conflict free χρωματισμού (με όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα) για τον αντίστοιχο υπεργράφο.

Παράδειγμα 1.3.1. *Στο σχήμα βλέπουμε τις εμβέλειες των σταθμών στο χώρο και τον αντίστοιχο χάρτη που δημιουργείται. Κατασκευάζουμε λοπόν τον γράφο $G(V, E)$.*

- *Το σύνολο V θα περιέχει τόσους κόμβους όσοι είναι και οι σταθμοί του προβλήματος, δηλαδή πέντε. Έστω ο κόμβος 1 για τον σταθμό 1, ο κόμβος 2 για τον σταθμό 2, ο κόμβος 3 για τον σταθμό 3 ο κόμβος 4 για τον σταθμό 4 και ο κόμβος 5 για τον σταθμό 5. Κατασκευάσαμε λοιπόν το $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*

- *Το σύνολο E περιέχει τόσες υπερακμές όσες και τα χωρία του χάρτη που δημιουργείται (αφού τυχαίνει όλα να δημιουργούν διαφορετικές υπερακμές), δηλαδή 9. Για κάθε χωρίο επιλέγουμε τυχαίο σημείο του, υποθέτουμε ύπαρξη πελάτη σε αυτό και κοιτάμε σε ποιούς σταθμούς αυτός μπορεί να συνδεθεί. Το σύνολο των κόμβων που αντιστοιχούν σε αυτούς τους σταθμούς το κάνουμε υπερακμή του E. Αυτή τη διαδικασία την κάνουμε για κάθε χωρίο του χάρτη τελικά παίρνουμε το E να είναι*
  $E = \Big\{ a = \{1\},\ b = \{1, 3\},\ c = \{3\},\ d = \{2, 3\},\ e = \{1, 2, 3\},\ f = \{2\},$
  $g = \{1, 2\},\ h = \{1, 4\},\ i = \{4\}\Big\}$



Σχήμα 1.4: Οι σταθμοί στην ευθεία και οι αντίστοιχες εμβέλειες

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάτε μια εύκολη μορφή του προβλήματος, αν θεωρήσουμε τα δεδομένα στατικά (αλλά δεν θα τα θεωρήσουμε!). Υποθέτουμε οτι οι σταθμοί δεν βρίσκονται οπουδήποτε στο χώρο αλλά επάνω σε ευθεία. Υποθέτουμε επίσης ότι έχουν την ίδια εμβέλεια και οτι αυτή είναι αρκετά μεγάλη ώστε ανα δύο οι σταθμοί βάσης να έχουν κοινά σημεία στις εμβέλειές τους. Η μοντελοποίηση γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Το παράδειγμα που ακολουθεί αφορά το παραπάνω σχήμα.

Παράδειγμα 1.3.2. *Στο σχήμα του παραδείγματος*

- *Στη μοντελοποίηση το V είναι το γνωστό $V = \{1, 2, 3, 4\}$*
- *ενώ το E είναι το*
  $E = \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\Big\}$

Προσέξτε την μορφή των υπερακμών καθώς στην επόμενη ενότητα θα εκμεταλευτούμε αυτή τη μορφή και θα κάνουμε αλλιώς την μοντελοποίηση αυτής της υποπερίπτωσης του προβλήματος (πιο εύκολη προφανώς μοντελοποίηση).

1.3.2 Μοντελοποίηση μέσω γράφων

Ορισμός 1.3.4. *Μονοπάτι ενός γράφου ονομάζεται κάθε ακολουθία κόμβων του γράφου τέτοια που κάθε ζεύγος συνεχόμενων κόμβων αυτής της ακολουθίας να ανήκει στο σύνολο των ακμών του γράφου.*

Ορισμός 1.3.5. *Αλυσίδα ενός γράφου ονομάζεται κάθε μονοπάτι του γράφου στο οποίο οι κόμβοι εμφανίζονται μία φορά.*

Μπορούμε να ορίσουμε conflict free χρωματισμό σε αλυσίδα και σε γράφο (εναλακτικά αν δεν τον δούμε σαν υπεργράφο!) ως εξής:

Ορισμός 1.3.6.
1. *Μια αλυσίδα είναι conflict free χρωματισμένη αν υπάρχει κόμβος σε αυτή με μοναδικό χρώμα ανάμεσα στα χρώματα των άλλων κόμβων της αλυσίδας.*
2. *Ένας γράφος είναι conflict free χρωματισμένος αν κάθε αλυσίδα του είναι είναι conflict free χρωματισμένη*

Ως γνωστόν ένα γράφο $G(V, E)$ μπορούμε να τον παραστήσουμε στο επίπεδο με βούλες οι οποίες αντιστοιχούν στους κόμβους, και γραμμές που ενώνουν τις βούλες, οι οποίες αντιστοιχούν στις ακμές.
Μπορούμε φυσικά και αντίστροφα να πάρουμε τον γράφο $G(V, E)$ αν ξέρουμε την απεικόνισή του στο επίπεδο.

Ορισμός 1.3.7. *Ένας γράφος είναι γράφος-αλυσίδα αν δεν έχει κύκλους και όλοι οι κόμβοι του μπορούν να σχηματίσουν αλυσίδα*

Αν φανταστούμε τους σταθμούς στην ευθεία σαν κόμβους και την ίδια την ευθεία (χωρίς τις ημιευθείες που δημιουργούνται έξω από τους σταθμούς), παίρνουμε μια απεικόνιση ενός γράφου-αλυσίδα. Αποδεικνύεται οτι η επίλυση του προβλήματος του conflict free χρωματισμού στον παραγόμενο από την μοντελοποίηση υπεργράφο είναι ισοδύναμη με την επίλυση του προβλήματος του conflict free χρωματισμού στον προαναφερθέντα παραγόμενο γράφο-αλυσίδα. Αυτό γιατί οι κόμβοι του γράφου και του υπεργράφου που προκύπτουν είναι ίδιοι και κάθε υπερακμή του υπεργράφου αντιστοιχει σε ακριβώς μια αλυσίδα του γράφου και αντίστροφα. Η απόδειξη μπορεί να γίνει εύκολα αλλά δεν έχει ιδιαίτερη σημασία να την κάνουμε.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί δίνεται μία διαίσθηση της απόδειξης, αρκεί να έχουμε υπ΄ όψιν μας και το παράδειγμα της αντίστοιχης μοντελοποίησης με υπεργράφους (το προηγούμενο παράδειγμα).
Επειδη κάθε φορά ό γράφος που προκύπτει είναι γράφος-αλυσίδα, κάθε αλυσίδα αυτού μπορεί να προσδιοριστεί από το ζεύγος των άκρων της (αντι $\{a, b\}$ θα γράφουμε $a-b$). Στο εξής θα τις προσδιορίζουμε με τον παραπάνω τρόπο (βλ. παράδειγμα).

Παράδειγμα 1.3.3. *Έχουμε τους ίδιους σταθμούς με το προηγούμενο παράδειγμα Στο σχήμα φαίνονται ο παραγόμενος γράφος και όλες οι αλυσίδες αυτού οι οποίες είναι:*
$i \equiv 1-1$, $ii \equiv 2-2$, $iii \equiv 3-3$, $iv \equiv 4-4$, $v \equiv 1-2$ (*ή και* $2-1$ *αντί για* $\{1,2\}$), $vi \equiv 3-4$, $vii \equiv 2-3$, $viii \equiv 1-3$, $ix \equiv 2-4$ *και* $x \equiv 1-4$

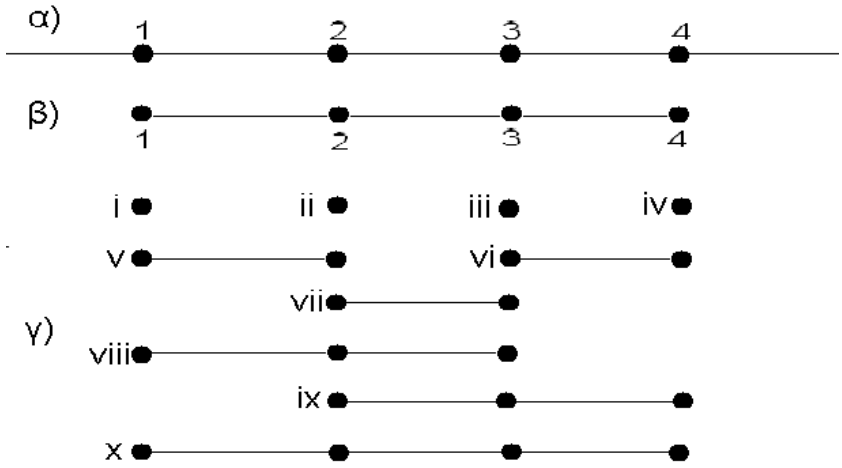
Αν κοιτάξουμε τα δύο τελευταία παραδείγματα θα δούμε την 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα στίς υπερακμές του υπεργράφου της μοντελοποίησης και τις ακμές του γράφου τις μοντελοποίησης. Σε κάθε υπερακμή αντιστοιχεί η αλυσίδα που έχει ακριβώς τους κόμβους της υπερακμής στην ακολουθία που την προσδιορίζει. Σε κάθε αλυσίδα αντιστοιχεί η υπερακμή που περιέχει ακριβώς στους κόμβους που περιέχονται στην αλυσίδα (π.χ. στα δύο παραδείγματα η υπερακμή $c = \{1, 2, 3\}$ αντιστοιχεί στην αλυσίδα $viii = 1-3$ καθώς αυτή περιέχει τους κόμβους 1 2 και 3 του γράφου). Αυτό οφείλεται στο γεγονός οτι οι εμβέλειες όλων των σταθμών επιλέχθηκαν να είναι ίδιες και αν αντιπαραβάλουμε τα δύο παραδείγματα θα βεβαιωθούμε για αυτό. Γενικεύοντας την ιδέα μπορούμε να κάνουμε και την απόδειξη.

Στο κυρίως μέρος της εργασίας, καθότι οι ορισμοί του προβλήματος (έτσι όπως τους δώσαμε) σε γράφο και υπεργράφο είναι ισοδύναμοι, θα επιλύουμε το πρόβλημα μέσω γράφων καθώς κάτι τέτοιο είναι ευκολότερο και στην περιγραφή και στην κατανόηση.

Στο εξής επικεντρωνόμαστε μόνο στο θεωρητικό προβλημα του conflict free χρωματισμού των γράφων-αλυσίδων (τους οποίους θα τους γράφουμε απλά γράφους, εννοώντας φυσικά γράφους-αλυσίδες).

1.3.3 Η ιεραρχία

Όπως προαννaγγέλθηκε ήδη όμως εμείς δεν θα μελετήσουμε την στατική περίπτωση σε αυτό το πρόβλημα (τουλάχιστον όχι μόνο αυτή). Θα μελετήσουμε δυναμικές περιπτώσεις όπου νέοι κόμβοι εμφανίζονται στην ευθεία μας σε βήματα και καλούμαστε να τους δίνουμε χρώμα ώστε να είναι ο χρωματισμός conflict free χωρίς να αλλάζουμε τα χρώματα των προηγούμενων κόμβων.



Σχήμα 1.5: α) οι σταθμοί στη ευθεία, β) ο παραγόμενος γράφος και γ) οι αντίστοιχες αλυσίδες

Θα εισάγουμε την ακόλουθη ιεραρχία για την προηγούμενη διάσταση του προβλήματος, ιεραρχία που δίνει ταυτόχρονα και το βαθμό δυσκολίας κάθε προβλήματος που θα ανήκει σε κάποια κλάση αυτής. Σκοπός μας πάντα είναι στον τελικό γράφο να χρησιμοποιούνται όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα.

Στατική περίπτωση. Σε αυτή την περίπτωση ολόκληρος ο γράφος αποκαλύπτεται από την αρχή και ζητείται ένας ελάχιστος conflict free χρωματισμός του.

Δυναμικές περιπτώσεις. Στις δυναμικές περιπτώσεις ο γράφος αποκαλύπτεται σταδιακά και σε βήματα και σε κάθε τέτοιο βήμα επιθυμούμε χωρίς να αλλάζουμε τα χρώματα των προεισελθόντων κόμβων να δίνουμε χρώμα στο νέο κόμβο (τον κόμβο που μπαίνει στο εκάστοτε βήμα) ώστε ο χρωματισμός του, μέχρι εκείνη τη στιγμή, γράφου να είναι conflict free . Η σειρά με την οποία εισέρχονται οι κόμβοι καθορίζεται από μία ακολουθία (την ακολουθία εισόδου που θα ορίσουμε στην συνέχεια). Στις δυναμικές περιπτώσεις θα λέμε οτι ο γράφος χρωματίζεται δυναμικά.

Δυναμική γνωστών θέσεων Στην περίπτωση αυτή η ακολουθία εισόδου είναι γνωστή προτού αρχίσει η διαδικασία εισαγωγής των κόμβων. Συνεπώς μπορεί να γίνει προεπεξεργασία γύρω από αυτήν και όταν αρχίσει η διαδικασία εισαγωγής κόμβων να δίνεται σε κάθε νέο κόμβο το προαποφασισθέν χρώμα.

Online δυναμικές Σε αυτές τις περιπτώσεις και η ακολουθία γίνεται γνωστή σε βήματα και μάλιστα στα ίδια βήματα στα οποία μπαίνουν οι κόμβοι. Στην πραγματικότητα σε κάθε βήμα κάθε κόμβος έρχεται με κάποια πληροφορία για την θέση του και συγκεντρωμένες αυτές οι πληροφορίες μαζί μας δίνουν την ακολουθία εισόδου.

Online απολύτων θέσεων Στην περίπτωση των απολύτων θέσεων αυτή η πληροφορία αφορά την θέση του κόμβου στον τελικό γράφο ο οποίος είναι γνωστος από την αρχή (γνωστός όσον αφορά τις θέσεις των κόμβων). Συνεπώς στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιούμε κάθε φορά σαν δεδομένα μόνο τις θέσεις και τα χρώματα των προηγούμενων κόμβων και τη θέση του νέου κόμβου και να καλούμαστε online να αποφασίζουμε για το χρώμα του νέου κόμβου

Online με σχετικές θέσεις Στην πιο δύσκολη αυτή περίπτωση η πληροφορία που έρχεται με κάθε κόμβο αφορά μόνο την σχετική θέση του κόμβου ανάμεσα στους μέχρι εκείνη τη στιγμή εισελθόντες κόμβους. Αυτή είναι και η μοναδική πληροφορία που έχουμε όταν καλούμαστε να δώσουμε χρώμα στο νέο κόμβο, καθώς δεν ξέρουμε για κανένα κόμβο ποιά θα είναι η τελική του θέση (δεν ξέρουμε ούτε καν πόσοι θα είναι οι κόμβοι του τελικού γράφου).

Σημειώνουμε οτι ναι μεν από τη μια μεριά το πρόβλημα έτσι όπως θέσαμε την ιεραρχία είναι ενδιαφέρον από θεωρητικής πλευράς (για αυτό και το μελετάμε!), από την άλλη δε, μπορεί κάλλιστα να έχει και πρακτικές εφαρμογές. Για παράδειγμα η δυναμική γνωστών θέσεων περίπτωση μπορεί να μοντελοποιεί το πρόβλημα ανάθεσης συχνοτήτων σε σταθμούς που θα εισέρχονται όταν είναι αναγκαίο με προκαθορισμένη σειρά προτεραιότητας ή η online απολύτων θέσεων μπορεί να μοντελοποιεί κάτι αντίστοιχο για μη προκαθορισμένη σειρά προτεραιότητας ανάμεσα στους κόμβους με δεδομένο όμως ποιοί κόμβοι θα χρησιμοποιηθούν στην μέγιστη ανάγκη ή ακόμη και η online με σχετικές θέσεις μπορεί να μοντελοποιεί περιπτώσεις στις οποίες να μπορούν να χρησιμοποιηθούν όσο πολλοί σταθμοί χρειάζονται και σε όποιες θέσεις μπορεί αυτοί να είναι χρήσιμοι.

1.3.4 Ακολουθίες εισόδου

Επανερχόμενοι στο θεωρητικό μας πρόβλημα, για να γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι ορίζουμε ακριβώς τις ακολουθίες εισόδου για κάθε περίπτωση. Αυτές αφορουν τις θέσεις των νέων κόμβων ανάμεσα στους παλαιότερους. Οι ακμές του γράφου σε κάθε βήμα είναι ακριβώς αυτές που που αντιστοιχούν στα διαστήματα που ενώνουν τους κόμβους αν χαράξουμε την ευθεία επάνω στην οποία βρίσκονται οι κόμβοι.

1. Online με σχετικές θέσεις περίπτωση.
   Σε αυτή την περίπτωση κάθε κόμβος έρχεται με μόνη πληροφορία την σχετική θέση που θα πάρει ανάμεσα στους προεισελθόντες κόμβους. Αυτή η πληροφορία εκφράζεται ως ένας αριθμός και είναι:

   - το 0 αν ο νέος κόμβος πρόκειται να μπει πρώτα από όλους τους κόμβους που έχουν εισέλθει πριν από αυτόν (με διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά)

- το i αν ο νέος κόμβος πρόκειται να μπει έπειτα από τον i-στο κόμβο του, μέχρις εκείνου του βήματος, υπεργράφου (μετρώντας πάλι από αριστερά προς τα δεξιά)

Προφανώς ο πρώτος κόμβος συνοδεύεται από τον αριθμό μηδέν και ο i-στος κόμβος από έναν αριθμό σιγουρα μικρότερο του i (αφού έχουν εισέλθει $i-1$ κόμβοι πριν από αυτόν). Η ακολουθία εισόδου συμβολίζεται με σ και είναι ακριβώς η ακολουθία που δημιουργείται αν παραθέσουμε ξεκινώντας από αριστερά προς τα δεξιά τους συνοδεύοντες αριθμούς κάθε κόμβου με την σειρά με την οποία αυτοί εισέρχονται. Με $\bullet_i$ συμβολίζουμε τον κόμβο που μπαίνει στο βήμα i.

Παράδειγμα 1.3.4. *Η ακολουθία εισόδου* $\sigma = 0\ 1\ 0\ 3\ 2$ *αφορά είσοδο πέντε κόμβων (που φυσικά γίνεται σε πέντε βήματα) και δίνει διαδοχικά τους γράφους:*

(α΄) $\bullet_1$

(β΄) $\bullet_1 - \bullet_2$

(γ΄) $\bullet_3 - \bullet_1 - \bullet_2$

(δ΄) $\bullet_3 - \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_4$

(ε΄) $\bullet_3 - \bullet_1 - \bullet_5 - \bullet_2 - \bullet_4$

Στο εξής θα παραλείπουμε τις ακμές καθώς ενοείτε πως αυτές υπάρχουν μόνο μεταξύ γειτονικών (στην ευθεία) κόμβων και είναι όλες με αυτή την ιδιότητα (αργότερα θα μιλάμε απλά για παράθεση αριθμών-χρωμάτων που θα αντιστοιχούν στους κόμβους!).

2. Online απολύτων θέσεων περίπτωση.
Θα μπορούσε και σε αυτή την περίπτωση να χρησιμοποιείται η προηγούμενη μορφή της ακολουθίας εισόδου οπότε και πάλι θα παίρναμε μια περιγραφή της μορφής του γράφου σε κάθε βήμα. Τότε όμως δεν θα πέρναμε την πληροφορία της απόλυτης θέσης των κόμβων (ενώ θα έπρεπε να την παίρνουμε). Συνεπώς η περιγραφή της ακολουθίας εισόδου γίνεται αλλιώς.
Κάθε κόμβος συνοδεύεται από έναν αριθμό ο οποίος προσδιορίζει την απόλυτή του θέση στον γράφο (του οποίου την τελική πληθικότητα γνωρίζουμε). Όμοια με πριν η παράθεση των συνοδευόντων αριθμών κάθε κόμβου δίνει την ακολουθία εισόδου η οποία συμβολίζεται με π.

Παράδειγμα 1.3.5. *Η ακολουθία εισόδου* $\pi = 2\ 4\ 1\ 5\ 3$ *αφορά είσοδο πέντε κόμβων (που φυσικά γίνεται σε πέντε βήματα) και δίνει διαδοχικά τους γράφους:*

	θέση 1	*θέση 2*	*θέση 3*	*θέση 4*	*θέση 5*
γράφος στο βήμα 1		$\bullet_1$			
γράφος στο βήμα 2		$\bullet_1$		$\bullet_2$	
γράφος στο βήμα 3	$\bullet_3$	$\bullet_1$		$\bullet_2$	
γράφος στο βήμα 4	$\bullet_3$	$\bullet_1$		$\bullet_2$	$\bullet_4$
γράφος στο βήμα 5	$\bullet_3$	$\bullet_1$	$\bullet_5$	$\bullet_2$	$\bullet_4$

3. Δυναμική γνωστών θέσεων.
   Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όποια από τις δύο προηγούμενες μορφές ακολουθιών εισόδου θελουμε. Αυτό γιατί αν ξέρουμε την πλήρη ακολουθία σε κάποια μορφή μπορούμε εύκολα να πάρουμε την άλλη μορφή και στην δυναμική γνωστών θέσεων περίπτωση γνωρίζουμε την ακολουθία εισόδου προτού ξεκινήσει η εισαγωγή των κόμβων (γνωρίζουμε δηλαδή την πλήρη ακολουθία).

   Παράδειγμα 1.3.6. *Οι δύο ακολουθίες των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων δίνουν ακριβώς τους ίδιους γράφους σε κάθε βήμα (στην κατασκευή του παραδείγματος κάναμε την εύκολη μετατροπή από τη μία στην άλλη!). Δηλαδή*

   $$\pi = 2\ 4\ 1\ 5\ 3$$

   $$\sigma = 0\ 1\ 0\ 3\ 2 \quad \textit{και} \quad \pi \equiv \sigma$$

   Για το τελευταίο όμως μπορούμε να είμαστε βέβαιοι μόνο αν γνωρίζουμε και τις δύο ακολουθίες ολόκληρες από την αρχή.

Πρέπει να τονίσουμε ότι στις online περιπτώσεις η ακολουθία δεν είναι γνωστή από την αρχή και συνεπώς κάθε αλγόριθμος που θα επιλύει αυτές τις περιπτώσεις θα μπορεί να χρησιμοποιεί, σε κάθε νέα είσοδο κόμβου, μόνο την πληροφορία που παίρνει από την, μέχρι εκείνο το βήμα, σχηματισμένη ακολουθία εισόδου (ή απλούστερα την πληροφορία μέχρι εκείνο το βήμα σχηματισμένο γράφο) χωρίς να θέλει να πληροφορείται για θέσεις επόμενων κόμβων.

Ορισμός 1.3.8. *Έστω ένας γράφος και μία συνάρτηση χρωματισμού αυτού. Χρώμα ενός κόμβου του καλείται η τιμή της συνάρτησης χρωματισμού αυτό τον κόμβο.*

Ο τρόπος που θα ανφερόμαστε στους χρωματισμούς των γράφων είναι απλός. Επειδή οι γράφοι που μελετάμε είναι γράφοι-αλυσίδες μπορούν να παρασταθούν και χωρίς τις ακμές τους με απλή παράθεση κόμβων (οι ακμές εννοείτε οτι υπάρχουν ακριβώς ανάμεσα σε γειτονικους κομβους και υπάρχουν για κάθε δύο γειτονικούς). Εμείς όμως θα προχωρήσουμε ένα βήμα παραπάνω και δεν θα παραθέτουμε κόμβους παρά τα χρώματα αυτών. Όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε κάποιον από τους κόμβους θα τον καλούμε με βάση την θέση του στον, μέχρι εκείνο το βήμα γράφο-αλυσίδα μετρώντας από αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα 1.3.7. *Έστω ένας γράφος αλυσίδα 5 κόμβων όπου ο πρώτος κόμβος έχει το χρώμα 2, ο δεύτερος κόμβος το χρώμα 4, ο τρίτος το χρώμα 2, ο τέταρτος το χρώμα 3 και ο πέμπτος το χρώμα 1. Τότε:*

- *ο γράφος κανονικά είναι:* $\bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \bullet_5$
- *παριστάνεται χωρίς τις αμές:* $\bullet_1 \; \bullet_2 \; \bullet_3 \; \bullet_4 \; \bullet_5$
- *και με τον τρόπο που θα χρησιμοποιούμε στο εξής:* 2 4 2 3 1

Αν θέλουμε να ανφερθούμε στον τρίτο κόμβο, ήδη αναφερθήκαμε...

Σε αυτό το σημείο τελειώνει η εισαγωγή στο πρόβλημα στο οποίο αφορά η παρούσα διπλωματική εργασία και αρχίζει η μελέτη του ξεκινώντας από την πιο απλή και εύκολη περίπτωση, την στατική περίπτωση.

Μέρος II

Η ευθεία

Κεφάλαιο 2

Στατική περίπτωση

Η στατική περίπτωση είναι η πιο εύκολη από τις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε και έχει λυθεί πλήρως. Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ένα κάτω όριο του προβλήματος (που τελικά είναι το μεγαλύτερο τέτοιο) και στην συνέχεια θα δώσουμε ένα απλό τρόπο (σαν ιδέα αλγορίθμου) που θα λύνει σε κάθε περίπτωση το πρόβλημα με το βέλτιστο αριθμό χρωμάτων, θα βρίσκει δηλαδή ακριβώς έναν ελάχιστο conflict free χρωματισμό του γράφου κάθε περίπτωσης.

2.1 Κάτω όριο στατικής περίπτωσης

Ξεκινάμε με έναν απλό ορισμό και μια απλή πρόταση.

Ορισμός 2.1.1. *Ονομάζουμε μήκος ενός γράφου-αλυσίδα τον αριθμό που εκφράζει το πλήθος των κόμβων του γράφου αυτού*

Πρόταση 2.1.1. Έστω γράφος-αλυσίδα. Ισχύουν:

1. Αν ο γράφος-αλυσίδα είναι conflict free χρωματισμένος τότε κάθε γράφος που δημιουργείται από κάποια αλυσίδα του αρχικού είναι conflict free χρωματισμένος

2. Αν κάποιος γράφος-αλυσίδα που δημιουργείται από κάποια αλυσίδα του αρχικού γράφου απαιτεί τουλάχιστον n χρώματα για τον conflict free χρωματισμό του, τότε και ο αρχικός γράφος απαιτεί τουλάχιστον n χρώματα.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή και για τα δύο.

1. ισχύει ότι κάθε αλυσίδα του αρχικού γράφου είναι conflict free χρωματισμένη. Συνεπώς και κάθε αλυσίδα καθε γράφου που παράχθηκε από αλυσίδα του αρχικού θα έχει την ιδιότητα και συνεπώς ο παραγόμενος γράφος θα είναι conflict free χρωματισμένος

2. ισχύει γιατί σε διαφορετική περίπτωση, αν μπορούσε να γίνει χρωματισμός του αρχικού γράφου με λιγότερα από n χρώματα τότε από το 1 της πρότασης θα μπορούσε και ο παραγόμενος γράφος να χρωματιστεί σωστά με λιγότερα από n χρώματα κάτι που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

Η παρακάτω πρόταση αφορά των ελάχιστο αριθμό χρήσης χρωμάτων για γράφους κάποιας συγκεκριμένης μορφής.

Πρόταση 2.1.2. Κάθε γράφος-αλυσίδα μήκους 2^n, απαιτεί για τον conflict free χρωματισμό του $n+1$ χρώματα.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή:

Βάση επαγωγής Για $n = 0$ παίρνουμε γράφο που έχει μόνο ένα κόμβο. Επειδή αυτός ο κόμβος προφανώς χρειάζεται κάποιο χρώμα χρειαζόμαστε για το γράφο σίγουρα ένα (ακριβώς ένα!) χρώμα και συνεπώς η επαγωγική βάση στέκει.

Επαγωγικό βήμα Έστω λοιπόν οτι ισχύει η επαγωγική υπόθεση για $n = k$. Για $n = k+1$ ο γράφος-αλυσίδα έχει μήκος 2^{k+1} και παριστάνεται συνεπώς σαν παράθεση 2^{k+1} κόμβων. Αυτή του την παράσταση μπορούμε να την δούμε σαν παράθεση δύο γράφων μήκους 2^k ο καθένας:

$$\bullet_1 \bullet_2 \ldots \bullet_{2^{k+1}} \equiv \bullet_1 \bullet_2 \ldots \bullet_{2^k} \mid\mid \bullet_{2^k+1} \ldots \bullet_{2^{k+1}}$$

(όπου $\mid\mid$ σημαίνει παράθεση). Έστω ένας τυχαίος conflict free χρωματισμός του αρχικού γράφου. Επείδη καθένας από τους δύο παρατηθέμενους γράφους έχει μήκος 2^k από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε οτι καθένας τους απαιτεί τουλάχιστον $k+1$ χρώματα για να χρωματιστεί και να έχει την conflict free ιδιότητα συνεπώς και ο χρωματισμός του αρχικού γράφου απαιτεί $k+1$ χρώματα (βλ. πρ. πρόταση).

Αν υποθέσουμε ότι στον χρωματισμό του αρχικού γράφυ χρησιμοποιήθηκαν $k+1$ χρώματα τότε το καθένα από αυτά χρησιμοποιήθηκε και στους δύο παρατηθέμενους γράφους γιατί αυτοί απαιτούν $k+1$ διαφορετικά χρώματα ο καθένας για να χρωματιστούν σωστά (και πρέπει να έχουν χρωματιστεί σωστά λόγω της προηγούμενης πρότασης). Μα τότε στον αρχικό γράφο η αλυσίδα με όλους τους κόμβους δεν θα έχει την conflict free ιδιότητα καθώς κάθε χρώμα θα έχει χρησιμοποιηθεί τουλάχιστον δύο φορές.

Συνεπώς ο τυχαίος χρωματισμός απαιτεί $k+2$ χρώματα για να είναι conflict free, κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Εκμεταλευόμενοι την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να βρούμε έναν ελάχιστο αριθμό χρήσης χρωμάτων που απαιτούνται για τον conflict free χρωματισμό ενός τυχαίου γράφου-αλυσίδα.

Θεώρημα 2.1.1. Κάθε γράφος-αλυσίδα μήκους n απαιτεί $1 + \lfloor \log n \rfloor$ χρώματα για τον conflict free χρωματισμό του.

Απόδειξη. Έστω $k = \lfloor \log n \rfloor$. Σίγουρα $2^k \leq n$. Όμοια με πριν ο γράφος μήκος n μπορεί να παρασταθεί σαν παράθεση δύο γράφων, ο πρώτος μήκους 2^k και ο άλλος μήκους $n - 2^k$:

$$\bullet_1 \bullet_2 \dots \bullet_n \equiv \bullet_1 \bullet_2 \dots \bullet_{2^k} \mid\mid \bullet_{2^k+1} \dots \bullet_n$$

Ο πρώτος από τους δύο παρατιθέμενους γράφους απαιτεί σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση $k + 1$ χρώματα για τον conflict free χρωματισμό του. Συνεπώς και ολόκληρος ο γράφος απαιτεί τουλάχιστον $1+k = 1+\lfloor \log n \rfloor$ χρώματα για τον conflict free χρωματισμό του γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη

Στην επόμενη ενότητα δίνουμε τρόπους βέλτιστης επίλυσης του στατικού προβλήματος.

2.2 Στρατηγικές επίλυσης

2.2.1 Μια απλή στρατηγική

Ορίζουμε ακολουθία S_k ως εξής:

Ορισμός 2.2.1.

- $S_1 = 1$
- $S_{k+1} = S_k||(k + 1)||S_k$

όπου || σημαίνει παράθεση.

Σημειώνουμε οτι για κάθε k η S_k έχει k διαφορετικούς αριθμούς να εμφανίζονται σε αυτή και ακριβώς τους αριθμούς 1 εως k (απόδειξη εύκολη με επαγωγή στο k).

Παράδειγμα 2.2.1. $S_1 = 1$
$S_2 = 1\ 2\ 1$
$S_3 = 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1$
$S_4 = 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1$
$\vdots$

Πρόταση 2.2.1. Αν για κάποιο k η ακολουθία S_k θεωρηθεί χρωματισμός γράφου-αλυσίδα τότε αυτός θα είναι conflict free χρωματισμός.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο k

Βάση επαγωγής Για $k = 1$ έχουμε γράφο με ένα κόμβο και χρώμα αυτού του κόμβου το χρώμα 1. Όποιο και να ήταν το χρώμα ο χρωματισμός θα ήταν conflict free αφου η μοναδική αλυσίδα του γράφου αυτού αποτελείται από τον ένα και μοναδικό κόμβο.

Επαγωγική υπόθεση Έτσω για την S_k ισχύει η υπόθεση. Για τον γράφο που χρωματίζεται με την S_{k+1} η εικόνα είναι έτσι:

$$S_k||(k+1)||S_k$$

Κάθε αλυσίδα που δεν περιέχει τον μεσαίο κόμβο (τον κόμβο με το χρώμα $k+1$) λόγω της επαγωγικής υποθέσεως θα είναι conflict free χρωματισμένη. Από την άλλη κάθε αλυσίδα που τον περιέχει θα έχει το χρώμα αυτού ως μοναδικό χρώμα αφού αυτό δεν εμφανίζεται στην S_k.
Συνεπώς κάθε αλυσίδα του γράφου θα είναι conflict free χρωματισμένη και άρα και ο γράφος θα είναι conflict free χρωματισμένος.

Η S_k είναι ακολουθία ακολουθιών. Για κάθε γράφο μήκους n μπορούμε να βρούμε κατάλληλο k τέτοιο ώστε τα πρώτα n στοιχεία της S_k να μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χρώματα στους κόμβους του γράφου και ο χρωματισμός του γράφου να είναι conflict free και η S_k να έχει ακριβώς $1 + \lfloor \log n \rfloor$ διαφορετικούς αριθμούς.

Θεώρημα 2.2.1. Για κάθε γράφο-αλυσίδα μήκους n τα πρώτα n στοιχεία της ακολουθίας $S_{1+\lfloor \log n \rfloor}$ δίνουν έναν ελάχιστο conflict free χρωματισμό του γράφου.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν χρωματίζονται όλοι οι κόμβοι του γράφου καθώς $n \leq |S_{1+\lfloor \log n \rfloor}|$ αφού $n \leq 2^{\lfloor \log n \rfloor + 1}$ (όπου $|S_k|$ σημαίνει μήκος της S_k).
Το ότι ο χρωματισμός θα είναι conflict free έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση για τις S_k, καθώς ο γράφος που έχουμε θα είναι γράφος που παράγεται από κάποια αλυσίδα του χρωματισμένου γράφου που αντιστοιχεί στην $S_{1+\lfloor \log n \rfloor}$.
Όπως είδαμε νωρίτερα ο γράφος μήκους n δεν μπορεί να χρωματιστεί conflict free με λιγότερα από $1 + \lfloor \log n \rfloor$ χρώματα. Στην $S_{1+\lfloor \log n \rfloor}$ από την άλλη εμφανίζονται ακριβώς $1 + \lfloor \log n \rfloor$ χρωματα.
Συνεπώς ο γράφος χρωματίζεται conflict free με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων.

Έτσι λοιπόν δείξαμε μια τακτική (πολύ απλή για να την ονομάσουμε αλγόριθμο) συμφωνα με την οποία πετυχαίνουμε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων για τον conflict free χρωμάτισμό ενός γράφου αλυσίδα μήκους n:

$$\frac{\text{Αναθέτουμε σαν χρώματα στους κόμβους του γράφου}}{\frac{\text{τους πρώτους } n \text{ αριθμούς της ακολουθίας } S_{1+\lfloor \log n \rfloor}}{\text{ξεκινώντας από αριστερά προς τα δεξιά}}}$$

(λόγω συμμετρίας δεν έχει σημασία από που θα ξεκινήσουμε).

Παράδειγμα 2.2.2. *Έστω μας δίνεται γράφος αλυσίδα μήκους 11 κόμβων.* $1 + \lfloor \log n \rfloor = 4$ *και συνεπώς αντιστοιχούμε σαν χρώματα στους κόμβους (από αριστερά προς τα δεξιά) τα 11 πρώτα στοιχεία της ακολουθίας S_4. Άρα ο conflict free χρωματισμένος γράφος μας είναι:*

$$1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2\ 1$$

Κάτι που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι στην επίλυση της στατικής περίπτωσης αυτό που μας λύνει τα χέρια είναι η ύπαρξη ενός κόμβου (ή και δύο) με μοναδικό χρώμα περίπου στο κέντρο του γράφου (στις S_k το προσέχουμε σίγουρα). Κάτι τέτοιο επιδιώκεται και επιζητείται κατα την επίλυση των δυναμικών περιπτώσεων. Μάλιστα υπάρχουν αλγόριθμοι που προσπαθούν να το εκμεταλευτούν σαν γενική ιδέα. Πιο κάτω θα καταλάβουμε γιατί έγινε αυτή η επισήμανση. Στην επόμενη ενότητα απλά θα περιγράψουμε κάποιες άλλες τακτικές με τα ίδια αποτελέσματα.

2.2.2 Άλλες στρατηγικές

Θα αναφέρουμε δύο παρόμοιες στρατηγικές. Δοθέντος του γράφου μήκους n υπολογίζουμε τον $u = 1 + \lfloor \log n \rfloor$. Στην κάθε μια κατασκευάζουμε ένα δυαδικό δέντρο:

1. στην πρώτη ένα πλήρες δυαδικό δέντρο
2. στην δεύτερη ένα συμμετρικό δυαδικό δέντρο

Καθ' οτι το δέντρο που κατασκευάζουμε κάθε φορά είναι δυαδικό έχει βάθος ακριβώς ίσο με u. Αντιστοιχούμε αναδρομικά αριθμούς στα φύλλα του δέντρου.

- Στην ρίζα του δέντρου αντιστοιχούμε τον αριθμό u και
- σε κάθε γιό κόμβου με αντίστοιχο αριθμό k αντιστοιχούμε τον αριθμό $k - 1$.

Επειδή το δέντρο έχει βάθος u όλοι οι κόμβοι του θα έχουν κάποιο αντιστοιχισμένο αριθμό.
Σε κάθε μια από τις δύο τακτικές:

<u>αναθέτουμε σαν χρωματισμό στον γράφο ακριβώς το</u>
<u>αποτέλεσμα της in-order διάσχισης του δέντρου</u> κάθε περίπτωσης.

Παράδειγμα 2.2.3. *Έστω οτι καλούμαστε να χρωματίσουμε ένα γράφο-αλυσίδα μήκους 11 κόμβων.*

1. *Στην πρώτη τακτική κατασκευάζουμε το δέντρο α) του σχήματος. Η in-order διάσχιση του δέντρου μας δίνει τον conflict free χρωματισμό:*

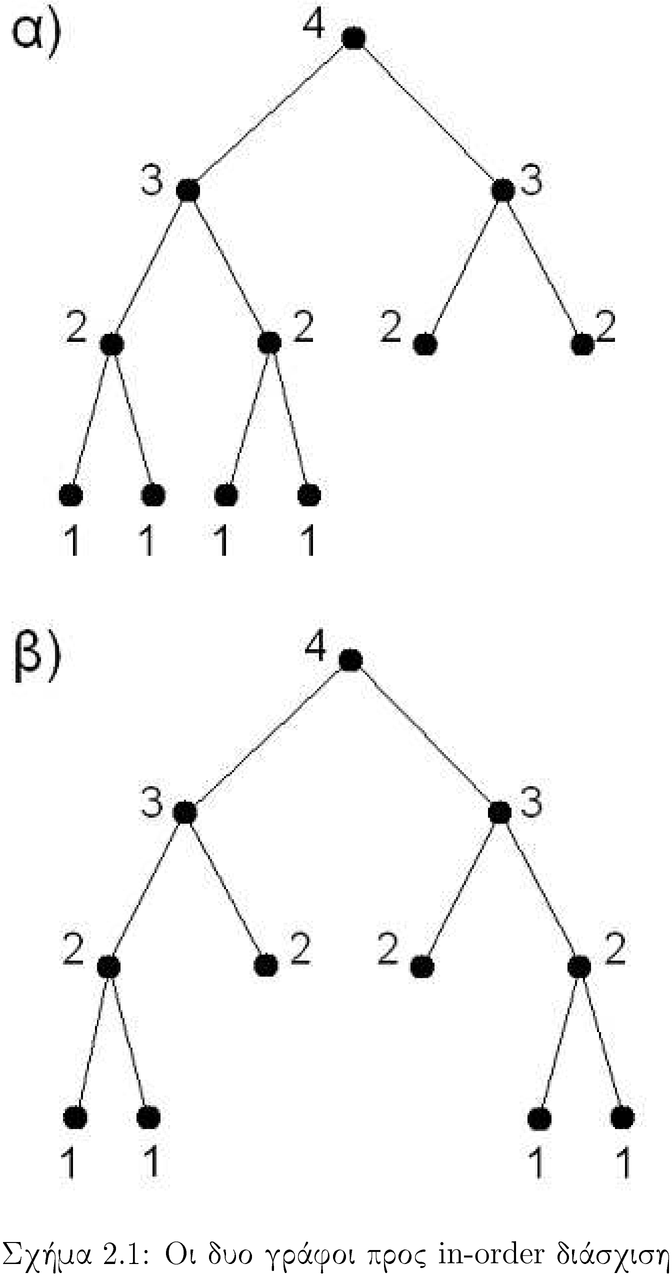
   $$1\ 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 4\ 2\ 3\ 2$$

2. *Στην δεύτερη τακτική κατασκευάζουμε το δέντρο β) του σχήματος. Η in-order διάσχιση του δέντρου μας δίνει τον conflict free χρωματισμό:*

   $$1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 4\ 2\ 3\ 1\ 2\ 1$$

3. Ο αντίστοιχος χρωματισμός με τη χρήση των S_k είναι

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1



Σχήμα 2.1: Οι δυο γράφοι προς in-order διάσχιση

Κεφάλαιο 3

Δυναμική γνωστών θέσεων

Έχοντας πλεον αναλύσει πλήρως τη στατική περίπτωση περνάμε στην μελέτη των δυναμικών περιπτώσεων. Ένα προφανές κάτω όριο αυτών των προβλημάτων είναι φυσικά η χρήση $1 + \lfloor \log n \rfloor$ που ισχύει στην στατική περίπτωση. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός μεγαλύτερου κάτω ορίου που θα ισχύει για όλες τις δυναμικές περιπτώσεις.

3.1 Κάτω όριο δυναμικών περιπτώσεων

Για κάθε k θα δώσουμε μία ακολουθία εισόδου, απολύτων θέσεων (για διευκόλυνση της απόδειξης), μήκους $n = 3^k$ στοιχείων που τέτοια που ο χρωματισμός του παραγόμενου γράφου χρειάζεται $2k + 1 = 2\log_3 n + 1$ χρώματα ώστε να έχει σε κάθε βήμα την conflict-free ιδιότητα.

Ορισμός 3.1.1. *Δοθείσης ακολουθίας φυσικών αριθμών π και φυσικού αριθμού x ορίζουμε την ακολουθία $\pi + x$ να είναι η ακολουθία που προκύπτει αν σε κάθε στοιχείο της αρχικής ακολουθίας προσθέσουμε τον αριθμό x.*

Παράδειγμα 3.1.1. *Έστω* $\pi = 1\ 3\ 5\ 9$.
$\pi + 5 = 6\ 8\ 10\ 14$
$\pi + 2 = 3\ 5\ 7\ 11$.

Ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία π^k ως εξής:

Ορισμός 3.1.2.

$$\pi^1 = 132$$

$$\pi^{k+1} = \pi^k || (\pi^k + 2 * 3^k) || (\pi^k + 3^k)$$

όπου $||$ *σημαίνει παράθεση.*

Παράδειγμα 3.1.2. *(Η ακολουθία εισόδου π^k)*
π^1= 1 3 2
π^2= 1 3 2 7 9 8 4 6 5
π^3= 1 3 2 7 9 8 4 6 5 19 21 20 25 27 26 22 24 23 10 12 11 16 18 17 13 15 14
$\vdots$

Λήμμα 3.1.1. Αν με την ακολουθία π^k χρειάζονται τουλάχιστον q χρώματα για τον δυναμικό χρωματισμό του παραγόμενου γράφου, τότε για κάθε x με την ακολουθία $\pi^k + x$ χρειάζονται επίσης τουλάχιστον q χρώματα.

Απόδειξη. Οι σχετικές θέσεις των κόμβων είναι ίδιες και στις δύο ακολουθίες εισόδου. Αν λοιπόν μια ακολουθία χρωμάτων χρωμάτιζε τον γράφο που προκύπτει από την δεύτερη ακολουθία εισόδου με λιγότερα από q χρώματα τότε αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τον χρωματισμό του γράφου που προκύπτει από την πρώτη ακολουθία εισόδου, άτοπο. Άρα και η δεύτερη ακολουθία χρειάζεται τουλάχιστον q χρώματα.

Το κάτω όριο που αναφέραμε βασίζεται στην παρακάτω πρόταση

Πρόταση 3.1.1. Η ακολουθία εισόδου π^k χρειάζεται τουλάχιστον $2k + 1$ χρώματα για να είναι σε κάθε χρονική στιγμή ο γράφος conflict free χρωματσμένος και συνεπώς τουλάχιστον $2\log_3 |\pi^k| + 1$ χρώματα ($|\pi^k|$ είναι το μήκος της π^k).

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

βάση επαγωγής Για $k = 1$ η ακολουθία εισόδου είναι 132 και προφανώς η χρήση τριων χρωμάτων είναι απαραίτητη αφού οι γείτονες μεταξύ τους πρέπει να έχουν διαφορετικό χρώμα και όλοι θα υπάρξουν ως γείτονες μέχρι τον τελικό γράφο.

επαγωγικό βήμα Έστω οτι ισχύει η επαγωγική υπόθεση ότι δηλαδή ο γράφος της ακολουθίας π^k χρειάζεται $2k + 1$ χρώματα.
Έστω οτι η ακολουθία εισόδου είναι η π^{k+1}. Από την επαγωγική υπόθεση ξέρουμε οτι οι πρώτοι 3^k κόμβοι χρειάζονται τουλάχιστον $2k + 1$ διαφορετικά χρώματα. Για τους επόμενους 3^k κόμβους επίσης χρειάζονται $2k + 1$ διαφορετικά χρώματα λόγω του προηγούμενου λήμματος.

Ισχυρισμός. Χρειάζονται τουλάχιστον $2k + 2$ διαφορετικά χρώματα για τον σωστό χρωματισμό των πρώτων $2 * 3^k$ κόμβων.

Πράγματι γιατί αν χρησιμοποιηθούν τα ίδια $2k + 1$ χρώματα στους χρωματιασμούς των πρώτων 3^k κόμβων και των επόμενων 3^k κόμβων τότε η αλυσίδα όλων των κόμβων δεν θα έχει μοναδικό χρώμα. Άρα ενα χρώμα ακόμα είναι απαραίτητο και συνεπώς είναι απαραίτητα $2k + 2$ χρώματα.
Αν χρησιμοποιηθούν περισσότερα από $2k + 2$ τότε το θεώρημα θα ισχυει. Υποθέτουμε λοιπόν οτι χρησιμοποιούνται ακριβώς $2k + 2$ χρώματα για τα δύο

πρώτα γκρουπ κόμβων.

Πλέον δεν έχουν εισέλθει στον γράφο οι τελευταίοι 3^k κόμβοι, που θα μπουν ανάμεσα στα δύο γκρουπ των 2^k κόμβων. Από μόνοι τους αυτοί, λόγω του προηγούμενου λήμματος, απαιτούν τουλάχιστον $2k + 1$ το πλήθος χρώματα.

Ισχυρισμός. Θα χρησιμοποιηθεί ένα καινούριο χρώμα για τον χρωματισμό του τελευταίου γκρουπ των 3^k κόμβων.

Τούτο ισχύει καθώς οι τελευταίοι 3^k κόμβοι θα έχουν αριστερά τους τους πρώτους 3^k κόμβους και δεξιά τους τους υπόλοιπους. Έτσι θα πρέπει να έχουν ένα χρώμα που δεν χρησιμοποιείτε στους κόμβους αριστερά τους ώστε η αλυσίδα με αυτούς και τους αριστερούς τους γείτονες να έχει την ιδιότητα. Αν έχουν δύο χρώματα διαφορετικά τότε το θεώρημα ισχύει. Έστω λοιπόν οτι έχουν ακριβώς ένα χρώμα διαφορετικό. Αυτό το χρώμα δεν εμφανίζεται στους δεξιούς κόμβους-γειτονες γιατί όλα τα υπόλοιπα χρώματα χρησιμοποιούνται και στα δύο δεξιά γκρουπ και άρα η αλυσίδα των δύο δεξιών γκρουπ δεν θα ήταν conflict free χρωματισμένη.

Έτσι τελικά χρειάζονται $2k + 3 = 2(k + 1) + 1$ χρώματα, και ολοκληρώνετε η απόδειξη.

Ίσως το παρακάτω σχήμα κάνει πιο εύκολη την κατανόηση της απόδειξης. Φαίνεται η θέση των τριων γκρουπ με τα 3^k στοιχεία. Κάθε γκρουπ χρειάζεται τουλάχιτστον $2k + 1$ χρώματα.

Παράδειγμα 3.1.3. *(η είσοδος των κόμβων στο επαγωγικό βήμα)*

μετά την είσοδο των πρώτων 3^k κόμβων	1^0 *γκρουπ*		
μετά την είσοδο των $2 * 3^k$ κόμβων	1^0 *γκρουπ*		2^0 *γκρουπ*
μετά την είσοδο όλων των κόμβων	1^0 *γκρουπ*	3^0 *γκρουπ*	2^0 *γκρουπ*

Τελειώνουμε την ενότητα με το θεώρημα που αποδεικνύει το καλύτερο γνωστο μεχρι σημερα κάτω οριο για τις δυναμικές περιπτώσεις.

Θεώρημα 3.1.1. Το δυναμικό πρόβλημα conflict free χρωματισμού έχει σαν κάτω όριο την χρήση $2\log_3 n + 1$ χρωμάτων

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση κάθε αλγόριθμος επίλυσης δυναμικών προβλημάτων χρειάζεται για κάθε π^k ακολουθία εισόδου τουλάχιστον $2\log_3 n + 1$ το πλήθος χρώματα για να χρωματίσει δυναμικά τον αντίστοιχο γράφο (αν $n = 3^k$). Το θεώρημα αποδεικνύεται άμεσα.

Ας δούμε τώρα έναν αλγόριθμο που επιλύει τη δυναμική με γνωστές θέσεις περίπτωση με ¨καλή' χρήση χρωμάτων.

3.2 Αλγόριθμος επίλυσης dynamic offline περίπτωσης

Πρόκειται για ένα απλό αλγόριθμο και στην περιγραφή του και στην ανάλυσή του. Το βασικό δεδομένο που εκμεταλλεύεται είναι το γεγονός οτι κάθε γράφος αλυσίδα είναι τριχρωματίσιμος ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία χρωματίζονται οι κόμβοι του. Ας δούμε όμως πως το εκμεταλλεύεται.

3.2.1 Ιδέα του αλγορίθμου

Έστω λοιπόν οτι δίνεται μια ακολουθία εισόδου π. Αμέσως γνωρίζουμε το πλήθος των κόμβων που θα εισέλθουν και τους γείτονες (το πολύ δύο) κάθε κόμβου που θα εισέλθει. Ο χρωματισμός θα γίνει σε φάσεις.

1η φάση

- Τριχρωματίζουμε τους κόμβους έναν ένα με την σειρά που πρόκειται να εισέλθουν, με τα ψευδοχρώματα a, b, c
- Στο τέλος του χρωματισμού ελέγχουμε ποιο ψευδοχρώμα έχει χρησιμοποιηθεί σε περισσότερους κόμβους
- Στους κόμβους που έχουν χρωματιστεί με αυτό επιλέγουμε ως χρώμα που θα τους ανατεθεί όταν αρχίσει η διαδικασία εισόδου, το χρώμα 1.
- από την ακολουθία π δημιουργούμε την ακολουθία $\pi^{'}$ διαγράφοντας από την π τα στοιχεία εκείνα που αφορούν κόμβους για τους οποίους επιλέξαμε χρώμα.

Επαγωγικά αν σε προηγούμενη φάση επιλέξαμε το χρώμα i για κάποιους κόμβους και δημιουργήσαμε την $\pi^{'}$ τότε αν αυτή είναι κενή έχουμε επιλέξει για όλους τους κόμβους χρώμα και άρα είμαστε έτοιμοι για την διαδικασία εισόδου, αλλιώς

- Τριχρωματίζουμε τους κόμβους της $\pi^{'}$, με τα ψευδοχρώματα a, b, c
- ελέγχουμε ποιο ψευδοχρώμα έχει χρησιμοποιηθεί σε περισσότερους κόμβους κατά τον τριχρωματισμό
- Στους κόμβους που έχουν χρωματιστεί με αυτό επιλέγουμε ως χρώμα που θα ανατεθει όταν αρχίσει η διαδικασία εισόδου, το χρώμα $i+1$.
- από την ακολουθία $\pi^{'}$ δημιουργούμε την ακολουθία $\pi^{''}$ διαγράφοντας από την $\pi^{'}$ τα στοιχεία εκείνα που αφορούν κόμβους για τους οποίους επιλέξαμε χρώμα (προφανώς σε αυτή τη φάση).

Παρότι δεν πρόκειτε για δύσκολο αλγόριθμο, ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1. *Έστω η ακολουθία εισόδου (χωρίς βλάβη της γενικότητας απολύτων θέσεων)* $\pi = 1\ 7\ 5\ 9\ 6\ 4\ 3\ 8\ 2$

1. Στην πρώτη φάση έχουμε την ακολουθία $\pi = 1\ 7\ 5\ 9\ 6\ 4\ 3\ 8\ 2$

θέσεις	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Χρώμα που επιλέγεται
	a									
	a						b			
	a				c		b			
διαδοχικά τα	a				c		b		a	
ψευδοχρώματα	a				c	a	b		a	
	a			b	c	a	b		a	
	a		c	b	c	a	b		a	
	a		c	b	c	a	b	c	a	
	a	b	c	b	c	a	b	c	a	a(άπληστα)

άρα θα χρωματιστούν με το χρώμα 1 οι κόμβοι στις θέσεις 1 6 και 9 και η νέα ακολουθία είναι η $\pi = 7\ 5\ 4\ 3\ 8\ 2$

2. Παιρνώντας στην δεύτερη φάση έχουμε

θέσεις	2	3	4	5	7	8	Χρώμα που επιλέγεται
Ψευδοχρώματα	a	b	a	b	a	b	a

άρα χρωματίζονται με το χρώμα 2 οι κόμβοι 2 4 και 7 και νέα ακολουθία είναι η $\pi = 5\ 3\ 8$

3. στην τρίτη φάση έχουμε:

ακολουθία	3	5	8	Χρώμα που επιλέγεται
Ψευδοχρώματα	b	a	b	b

άρα χρωματίζονται με το χρώμα 3 οι κόμβοι 3 και 8 και η νέα ακολουθία είναι η π=5

4. στη φάση 4 έχομε το απλό:

ακολουθία	5	Χρώμα που επιλέγεται
Ψευδοχρώματα	a	a

άρα χρωματίζεται με το χρώμα 4 ο κόμβος 5, η νέα ακολουθία είναι η $\pi' = \emptyset$ και έχουμε επιλέξει για όλους τους κόμβους χρώμα

Τελικά για κάθε κόμβο που θα εισέρχεται αρκεί απλά να ανατρέχουμε στον ακόλουθο πίνακα για να δούμε πιο χρώμα πρέπει να του ανατεθεί

Θέση κόμβου	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ανατιθέμενο χρώμα	1	2	3	2	4	1	2	3	1

με την απόδειξη της ορθότητας βεβαιωνόμαστε ότι σε όλα τα βήματα ο χρωματισμός του γράφου που θα προκύπτει μέσω του ανωτέρω πίνακα θα είναι conflict free χρωματισμός.

3.2.2 Ορθότητα

Στην υποενότητα αυτή δεν θα δώσουμε απόδειξη της ορθότητας. Θα δώσουμε απλά μια εικόνα του τι περίπου γίνεται. Η απόδειξη του οτι ο χρωματισμός από τον αλγόριθμο είναι conflict free δίνεται στο τελευταίο κεφάλαιο στην ανάλυση του πρώτου πιθανοτικού αλγορίθμου.

Το βασικό που πετυχαίνουμε με τον τριχρωματισμό είναι πως οι τυχαίοι δύο κόμβοι που θα πάρουν σε κάποια φάση (το ίδιο) χρώμα έχουν πάντα ανάμεσά τους κόμβο με χρώμα διαφορετικό από αυτό που επιλέγεται στην φάση που χρωματίστηκαν. Άρα έχουν κόμβο ανάμεσά τους που θα πάρει διαφορετικό από αυτούς χρώμα. Επειδή για τους κόμβους ανάμεσά τους ισχύει το ίδιο και αυτοί είναι πεπερασμένοι τελικά στην αλυσίδα με άκρα τους δύο κόμβους θα υπάρχει μοναδικό χρώμα. Αυτό συμβαίνει για κάθε αλυσίδα και άρα ο χρωματισμός είναι conflict free. Για την πλήρη απόδειξη παραπέμπουμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

3.2.3 Πολυπλοκότητα

Άνω όριο Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ένα άνω όριο το οποίο δίνει το χαρακτηρισμό του ¨καλού' στον αλγόριθμό μας. Θα λέμε οτι ένας κόμβος περνά σε επόμενη φάση αν δεν χρωματίζεται στη φάση που βρίσκεται αλλά σε κάποια επόμενη. Θα λέμε επίσης οτι η φάση δέχεται k το πλήθος κόμβους αν η αντίστοιχη ακολουθία αφορά k κόμβους. Το βασικό στοιχείο της απόδειξης είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2.1. Για κάθε φάση που δέχεται k κόμβους, οι κόμβοι που περνούν σε επόμενη φάση είναι το πολύ $\lfloor\frac{2k}{3}\rfloor$ και αυτοί που χρωματίζονται είναι τουλάχιστον $\lceil\frac{k}{3}\rceil$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι βρισκόμαστε σε κάποια φάση που έχει δεχτεί k κόμβους. Έστω x, y και z οι αριθμοί που αντιστοιχούν στο πλήθος των κόμβων που παίρνουν τα ψευδοχρώματα a, b και c αντίστοιχα. Έστω $m = max\{x, y, z\}$. Προς άτοπο ας υποθέσουμε ότι $m < \lceil\frac{k}{3}\rceil$. Άρα $m \leq \lfloor\frac{k}{3}\rfloor$.Έχουμε:

$$k = x + y + z \leq 3m \leq \lfloor\frac{k}{3}\rfloor + \lfloor\frac{k}{3}\rfloor + \lfloor\frac{k}{3}\rfloor = 3\lfloor\frac{k}{3}\rfloor$$

Για να ισχύει το τελευταίο πρέπει $3|k$ και άρα από αρχική υπόθεση:

$$m < \lceil\frac{k}{3}\rceil \Rightarrow m < \lfloor\frac{k}{3}\rfloor$$

Μα τότε θα ισχύει:

$$k = x + y + z \leq 3m < \lfloor\frac{k}{3}\rfloor + \lfloor\frac{k}{3}\rfloor + \lfloor\frac{k}{3}\rfloor = 3\lfloor\frac{k}{3}\rfloor$$

που προφανώς είναι άτοπο αφού για κάθε k ισχύει $k \geq 3\lfloor\frac{k}{3}\rfloor$. Άρα $m \geq \lceil\frac{k}{3}\rceil$. Από τον αλγόριθμο θα χρωματιστούν m το πληθος κόμβοι αφού αυτός επιλέγει τους κόμβους που παίρνουν το ψευδοχρώμα που έχει τις περισσότερες εμφανίσεις. Άρα θα χρωματιστούν τουλάχιστον $\lceil\frac{k}{3}\rceil$ κόμβοι. Άμεση συνέπεια είναι οτι θα περάσουν σε επόμενη φάση το πολύ $\lfloor\frac{2k}{3}\rfloor$ κόμβοι.

Στην ουσία η παραπάνω απόδειξη βασίζεται ακριβώς στην αρχή του περιστεριώνα.

Με βάση το προηγούμενο λήμμα θα αποδείξουμε το παρακάτω άνω όριο.

Θεώρημα 3.2.1. Για κάθε ακολουθία εισόδου που αφορά n κόμβους, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί το πολύ $\lfloor log_{\frac{3}{2}} n\rfloor + 1$ χρώματα.

Απόδειξη. Έστω μια τυχαία ακολουθία που αφορά n κόμβους κι ας υποθέσουμε οτι για αυτή χρησιμοποιούνται k το πλήθος χρώματα. Άρα είχαμε k φάσεις στον αλγόριθμο.

Ισχυρισμός. Η k φάση δέχτηκε μόνο ένα κόμβο

Πράγματι γιατί αν υπήρχε και δεύτερος κόμβος, τότε θα υπήρχαν και δύο κόμβοι που θα γειτόνευαν. Συνεπώς θα είχαν διαφορετικό ψευδοχρώμα και κάποιος από τους δύο θα περνούσε σε επόμενη φάση, που όμως δεν έγινε.

Αν a_i είναι το πλήθος των κόμβων που δέχεται η i φάση τότε από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε $a_k = 1$, από τον ορισμό των a_i έχουμε $a_1 = n$ και το λήμμα μας βεβαιώνει οτι $a_{i+1} \leq \lfloor\frac{2a_i}{3}\rfloor \leq \frac{2}{3}a$. Έχουμε διαδοχικά μέσα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων:

$$1 = a_k \leq \frac{2}{3}a_{k-1} \leq \ldots \leq (\frac{2}{3})^{k-1} a_1 = (\frac{2}{3})^{k-1} n$$

από το παραπάνω εύκολα συμπαιραίνεται οτι

$$k \leq \lfloor log_{\frac{3}{2}} n\rfloor + 1$$

με το οποίο ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Παρατηρήσεις

1. Αν κάποιος 'δουλέψει' λίγο με τον αλγόριθμο θα δει οτι το άνω όριο που παρουσιάστηκε δεν φαίνεται να 'πιάνεται' από ακολουθία ακολουθιών και άρα δεν φαίνεται να ολοκληρώνεται η ανάλυση του αλγορίθμου. Αυτό γιατί σε κάθε φάση θα πρέπει να χρωματίζεται το ένα τρίτο των κόμβων που δέχτηκε και στην επόμενη το ένα τρίτο των δύο τρίτων των κόμβων που πέρασαν από την προηγούμενη στην επόμενη φάση και ο τελευταίος αριθμός δεν είναι απαραίτητα ακέραιος.

2. Δεδομένου του κάτω ορίου που δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τον αλγόριθμο καλό καθώς $\log_{\frac{3}{2}} n \approx 1.71 \log_2 n$ και $2\log_3 n \approx 1.26 \log n$. Δηλαδή μιλάμε για ίδια τάξη μεγέθους και για έναν παράγοντα ≈ 1.36 μακριά.

Κεφάλαιο 4

Online απολύτων θέσεων

Εξετάζουμε πλέον την online περίπτωση που σημαίνει ότι χάνουμε σε αυτό το σημείο ένα μεγάλο μέρος γνώσης για τις μελλοντικές εισαγωγές κόμβων. Το μονο που ξέρουμε επιπλέον για τον κάθε νέο κόμβο είναι το που θα βρίσκεται αυτός στον τελικό γράφο. Αυτή η γνώση μας δίνει μια βοήθεια την οποία θα προσπαθήσουμεουμε να εκμεταλλευτούμε. Το κάτω όριο χρήσης $1 + 2log_3 n$ χρωμάτων ισχύει και στην περίπτωσή μας.

4.1 Ο 2CU αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος αυτός εισήχθει στο [BNCS06] (εκτενής μελέτη στο [Che07]) και δίνει μια καλή γενικά λύση του online με απόλυτες θέσεις προβλήμτος. Στην στατική περίπτωση είδαμε πως η ύπαρξη μοναδικού χρώματος σε κάποιο κόμβο περίπου στο κέντρο του υπεργράφου δίνει την δυνατότητα στα υπόλοιπα χρώματα να χρησιμοποιούνται και στους κόμβους αριστερά και στους κόμβους δεξιά αυτού του κεντρικού σημείου. Κάτι τέτοιο προσπαθεί να εκμεταλευτεί και ο αλγόριθμος δεδομένου οτι ξέρουμε ποιοι κόμβοι τελικά καταλήγουν περίπου στο κέντρο.

Πρόκειται για αναδρομικό αλγόριθμο που χρησιμοποιεί, οπως θα τον παρουσιάσουμε αρχικά, $2\lfloor \log{(n-1)} \rfloor + 2$ χρώματα για οποιαδήποτε είσοδο μήκους n. Ας δούμε πως ακριβώς το κάνει.

4.1.1 Ιδέα του αλγορίθμου

Στην περίπτωση που εξετάζουμε έχουμε σαν πληροφορία το πλήθος των κόμβων που θα εισέλθουν στον υπεργράφο. Ξεκινώντας χωρίζουμε τις θέσεις σε δύο μέρη αυτές που βρίσκονται στα αριστερά της θέσης του κεντρικού κόμβου και αυτές που βρίσκονται στα δεξιά της θέσης του κεντρικού κόμβου. Εν συνεχεία χωρίζουμε και το αριστερό και το δεξιό κομμάτι με τον ίδιο τρόπο σε άλλα δύο μέρη. Τελικά έχουμε τις θέσεις να χωρίζονται σε τέσσερα κομμάτια (αν n είναι το πλήθος των κομβων):

- το αα κομμάτι (αριστερότερο αριστερό) που ξεκινά από την θέση 1 και καταλήγει στην $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$
- το μα κομμάτι (μέσο αριστερό) που ξεκινά από την θέση $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ και καταλήγει στην $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- το μδ κομμάτι (μέσο δεξιό) που ξεκινά από την θέση $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ και καταλήγει στην $\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$
- το δδ κομμάτι (δεξιότερο δεξιό) που ξεκινά από την θέση $\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor + 1$ και καταλήγει στην n θέση.

Ο αλγόριθμος έχει εμφωλιασμένους μέσα του δύο επιμέρους αλγορίθμους, οι οποίοι δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους (με την εννοια οτι ο ένας μπορεί να καλέσει αναδρομικά τον άλλο). Ο ένας χρησιμοποιείται για τον χρωματισμό των αριστερών κόμβων (των κομματιών αα και μα), ενώ ο άλλος για τον χρωματισμό των δεξιών κόμβων (των κομματιών μδ και δδ). Το μεγαλύτερο χρώμα που θα χρησιμοποιηθεί για τον χρωματισμό n κόμβων είναι το $b = 2\lfloor \log{(n-1)} \rfloor + 2$. Ας δουμε τους δύο επιμέρους αλγορίθμους. Έστω οτι έρχεται ένας νέος κόμβος κόμβος στον υπεργράφο.

αλγόριθμος για τους αριστερά οταν χρησιμοποιούνται b χρώματα Κατ αρχήν ελέγχεται αν ο κόμβος ανήκει στο αριστερό μισό ή στο δεξιό μισό του κομματιού που χρωματίζεται. Αν είναι μόνος του παίρνει το χρώμα 1, αν δεν είναι τότε

- αν ανήκει στο αριστερό χρωματίζεται αναδρομικά με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς ο οποίος δέχεται σαν είσοδο το αριστερό μισό του αριστερού κομματιού και σαν πλήθος χρωμάτων το $b-2$.
- αν ανήκει στο δεξιό τότε
  - αν είναι ο πρώτος κόμβος που εμφανίζεται σε αυτό το κομμάτι (το δεξί κομμάτι) παίρνει το χρώμα $b-1$
  - αν δεν είναι ο πρώτος (σημαίνει το χει πάρει κάποιος άλλος) τότε χρωματίζεται αναδρομικά ως εξής
    * αν είναι δεξιά του κόμβου με το χρώμα $b-1$ τότε χρωματίζεται αναδρομικά με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς με είσοδο τις θέσεις του δεξιού κομματιού που βρίσκονται στα αριστερά του κόμβου με το $b-1$ χρώμα και σαν πλήθος χρωμάτων το $b-2$
    * αν είναι αριστερά του κόμβου με το χρώμα $b-1$ χρωματίζεται αναδρμικά με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς με είσοδο τις θέσεις του δεξιού κομματιού που βρίσκονται στα δεξιά του κόμβου με το $b-1$ χρώμα και σαν πλήθος χρωμάτων το $b-2$

αλγόριθμος για τα δεξιά οταν χρησιμοποιούνται μέχρι b χρώματα Στην αρχή κι εδώ ελέγχεται αν ο κόμβος ανήκει στο αριστερό μισό ή στο δεξιό μισό του κομματιού που χρωματίζεται. Αν είναι μόνος του παίρνει το χρώμα 2, αν δεν είναι τότε

- αν ανήκει στο δεξιό τότε χρωματίζεται αναδρομικά με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς ο οποίος δέχεται σαν είσοδο το δεξί μισό του δεξιού κομματιού και σαν πλήθος χρωμάτων το $b - 2$.
- αν ανήκει στο αριστερό τότε
  - αν είναι ο πρώτος κόμβος που εμφανίζεται σε αυτό το κομμάτι (το αριστερό κομμάτι) παίρνει το χρώμα b
  - αν δεν είναι ο πρώτος (σημαίνει ότι το έχει πάρει κάποιος άλλος) τότε χρωματίζεται αναδρομικά ως εξής
    * αν είναι αριστερά του κόμβου με το χρώμα b τότε χρωματίζεται αναδρομικά με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς με είσοδο τις θέσεις του αριστερού κομματιού που βρίσκονται στα αριστερά του κόμβου με το b χρώμα και σαν πλήθος χρωμάτων το $b - 2$
    * αν είναι δεξιά του κόμβου με το χρώμα b χρωματίζεται αναδρμικά με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς με είσοδο τις θέσεις του αριστερού κομματιού που βρίσκονται στα δεξιά του κόμβου με το b χρώμα και σαν πλήθος χρωμάτων το $b - 2$

Τελικά ο αλγόριθμος χρωματίζει ως εξής:

- Υπολογίζεται το $b = 2\lfloor \log(n-1) \rfloor + 2$ (μια φορά μόνο για τον πρώτο κόμβο).
- δέχεται τον επόμενο κόμβο και ελέγχει τη θέση του
- αν αυτή είναι στα δεξιά της κεντρικής θέση τότε τον χρωματίζει με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς με είσοδο τις δεξιές θέσεις και πλήθος χρωμάτων το b
- αν αυτή είναι στα αριστερά της κεντρικής θέσης τότε τον χρωματίζει με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς με είσοδο τις αριστερές θέσεις και πλήθος χρωμάτων το b

Επειδή το αποτέλεσμα της προσπάθειας να γίνει κατανοητός ο αλγόριθμος ίσως να μην είναι τόσο καλό, ας δούμε στο επόμενο παράδειγμα τι αντίδραση θα έχει ο αλγόριθμος.

Παράδειγμα 4.1.1. *Υλοποίηση για είσοδο $\pi = 7\ 3\ 4\ 1\ 2\ 6\ 5$.*
Προεργασία: υπολογίζεται το b. $b = 2\lfloor \log(n-1) \rfloor + 2 = 2\lfloor \log 6 \rfloor + 2 = 6$ Άρα θα χρησιμοποιηθούν 6 χρώματα.
Δράση (αντίδραση) στην είσοδο:

- *Ο πρώτος κόμβος μπαίνει στη θέση 7. Αυτή βρίσκεται δεξιά του κέντρου. Έτσι χρωματίζεται με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς με είσοδο τις δεξιές θέσεις (θέσεις 4, 5, 6 και7) και αριθμό χρωμάτων* $b = 6$. *Εκεί βρίσκεται πάλι στα δεξιά οπότε χρωματίζεται με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς με είσοδο τις δεξιά εκ των δεξιών θέσεων (θέσεις 6 και 7) και 4 χρώματα. Σε αυτό το υποκομμάτι βρίσκεται πάλι στα δεξιά. Εκεί χρωματίζεται με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς για τις δεξιές των δεξιών των δεξιών θέσεων (μόνο τη θεση 7) και για 2 χρώματα. Αφού βρίσκεται μόνος του παίρνει το χρώμα 2.*

1^h *θέση*	2^h *θέση*	3^h *θέση*	4^h *θέση*	5^h *θέση*	6^h *θέση*	7^h *θέση*
		•				2

- *Ο επόμενος κόμβος μπαίνει στη θέση 3. Αυτή βρίσκεται αριστερά του κέντρού και άρα ο χρωματισμός θα γίνει με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς με είσοδο τις αριστερές θέσεις (θέσεις 1 2 και 3) και αριθμό χρωμάτων* $b = 6$. *Εκεί θα βρεθεί στις δεξιές θέσεις (θέσεις 2 και 3) και επειδή θα είναι ο πρώτος που εμφανίζεται σε αυτές θα πάρει το χρώμα* $b - 1 = 5$

1^h *θέση*	2^h *θέση*	3^h *θέση*	4^h *θέση*	5^h *θέση*	6^h *θέση*	7^h *θέση*
		5	•			2

- *ο τρίτος θα μπει στη θέση 4. Εκεί είναι δεξιά (δεξιά γιατί το δεξιά κομμάτι αρχίζει από την* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ *θέση) και χρωματίζεται με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς και είσοδο* $b = 6$ *χρώματα. Εκέι βρίσκεται στις αριστερές θέσεις (4 και 5) κι επειδή είναι ο πρώτος κόμβος που εμφανίζεται σε κάποια από αυτές παίρνει το χρώμα* $b = 6$.

1^h *θέση*	2^h *θέση*	3^h *θέση*	4^h *θέση*	5^h *θέση*	6^h *θέση*	7^h *θέση*
•		5	6			2

- *επόμενος κόμβος μπαίνει στην πρώτη θέση, αριστερά του κέντρου και άρα χρωματίζεται με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς (για τις θέσεις 1, 2 και 3). Εκέι βρίσκεται και πάλι αριστερά οπότε αναδρομικά χρωματιζεται με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς με είσοδο τις αριστερές των αριστερών θέσεων (μόνο την 1 θέση) και αριθμό χρωμάτων* $b - 2 = 4$. *Εκεί βρίσκεται μόνος του και παίρνει το χρώμα* $(b - 2) - 1 = 3$

1^h *θέση*	2^h *θέση*	3^h *θέση*	4^h *θέση*	5^h *θέση*	6^h *θέση*	7^h *θέση*
1	•	5	6			2

- *Ο πέμπτος κατά σειρά κόμβος εισέρχεται στη θέση 2, αριστερά λοιπόν του κεντρου και άρα χρωματίζεται με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς και εισοδο* $b = 6$. *Εκεί θα βρεθεί στο δεξιό κομμάτι του (στο δα κομμάτι, τις θέσεις 2 και 3) όπου όμως έχει ήδη εισέλθει κόμβος και έχει πάρει το χρώμα* $b - 1 = 5$ *ο οποίος μάλιστα βρίσκεται δεξιά του νεοεισελθόντα. Άρα ο νέος κόμβος αναδρομικά θα χρωματιστεί με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς με είσοδο τις θέσεις* μόνο αριστερά του κόμβου με το χρώμα 5 (μόνο τη θέση 2) και αριθμό χρωμάτων $b-2=4$. Εκεί θα είναι μόνος του κι έτσι θα πάρει το χρώμα 2.

1^h θέση	2^h θέση	3^h θέση	4^h θέση	5^h θέση	6^h θέση	7^h θέση
1	2	5	6		•	2

- ο πρότελευταίος κόμβος μπαίνει στη θέση 6, δεξιά του κέντρου. Ο χρωματισμός του λοιπόν θα γίνει με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς. Βρισκόμενος στο δεξιό κομμάτι του δεξιού κομματιού (το δδ κομμάτι, τις θέσεις 6 και 7) ο χρωματισμός του αναδρομικά γίνεται με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς για τις θέσεις του δδ και για $b-2=4$ χρώματα. Στο δδ κομάτι βρίσκεται αριστερά (θέση 6) και είναι ο πρώτος κόμβος που εμφανίζεται στο αριστερό κομμάτι του δδ κομματιού. Έτσι παίρνει το χρώμα $4-1=3$.

1^h θέση	2^h θέση	3^h θέση	4^h θέση	5^h θέση	6^h θέση	7^h θέση
1	2	5	6	•	3	2

- Ο τελευταίος κόμβος εισέρχεται στη θέση 5. Βρίσκεται στα δεξιά και άρα χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος για τους δεξιούς (θέσεις 4, 5, 6 και 7) για το $b=6$. Εκεί βρίσκεται στο αριστερο μισό του κομματιού (θέσεις 4 και 5) στο οποίο όμως έχει εμφανιστει πρωτύτερα κόμβος (στη θέση 4) και έχει πάρει το χρώμα 6. Ο κόμβος με το χρώμα 6 βρίσκεται αριστερά του νεόυ κόμβου και άρα ο νέος κόμβος χρωματίζεται με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς με είσοδο τις δεξιές από τον κόμβο με το 6 θέσεις του υποκομματιού (μόνο τη θέση 5) και χρήση 4 χρωμάτων. Αφού χρωματίζεται μόνος του παίρνει το χρώμα 1.

1^h θέση	2^h θέση	3^h θέση	4^h θέση	5^h θέση	6^h θέση	7^h θέση
1	2	5	6	1	3	2

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ίσως δεν φαίνεται η δύναμη του αλγορίθμου μα αν μπορουμε να σκεφτούμε μεγαλύτερες εισόδους θα κατανοήσουμε και την μεγάλη δύναμή του. Στο επόμενο παράδειγμα φαίνεται ο χρωματισμός του αλγορίθμου σε μια μεγαλύτερη είσοδο.

Παράδειγμα 4.1.2. *είσοδος:* 1 12 15 4 6 13 8 11 2 3 14 10 7 5 9
Θα χρησιμοποιηθούν $b = 2\lfloor \log{(n-1)} \rfloor + 2 = 2\lfloor \log 14 \rfloor + 2 = 8$ *χρώματα.*

$\vartheta 1$	$\vartheta 2$	$\vartheta 3$	$\vartheta 4$	$\vartheta 5$	$\vartheta 6$	$\vartheta 7$	$\vartheta 8$	$\vartheta 9$	$\vartheta 10$	$\vartheta 11$	$\vartheta 12$	$\vartheta 13$	$\vartheta 14$	$\vartheta 15$
1														
1											6			
1											6			2
1			7								6			2
1			7		5						6			2
1			7		5						6	3		2
1			7		5		8				6	3		2
1			7		5		8			5	6	3		2
1	5		7		5		8			5	6	3		2
1	5	3	7		5		8			5	6	3		2
1	5	3	7		5		8			5	6	3	4	2
1	5	3	7		5		8		2	5	6	3	4	2
1	5	3	7		5	1	8		2	5	6	3	4	2
1	5	3	7	2	5	1	8		2	5	6	3	4	2
1	5	3	7	2	5	1	8	1	2	5	6	3	4	2

Εδω ολοκληρώνεται η περιγραφή του αλγορίθμου και φτάνει η στιγμή να σιγουρευτούμε οτι ο αλγόριθμος κάνει σε κάθε βήμα conflict free χρωματισμό του -ως εκείνο το βήμα- υπεργράφου.

4.1.2 Ορθότητα

Είναι γνωστή η άμεση σχέση των εννοιών: αναδρομικός ορισμός - επαγωγική απόδειξη. Καθότι λοιπόν ο αλγόριθμός μας είναι αναδρομικός η απόδειξη της ορθότητάς του γίνεται με επαγωγή.
Για την ορθότητα αρκεί να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση μιας και ο χρωματισμός κάθε εισόδου είναι μια παράθεση δύο χρωματισμών που γίνονται από τους αλγορίθμους για τους αριστερά και για τους δεξιά.

Πρόταση 4.1.1.

1. Εαν ο αλγόριθμος για τους αριστερούς εφαρμοστεί στους κόμβους αριστερά τής κεντρικής θέσης ο χρωματισμός που θα γίνεται με κάθε νέα είσοδο κόμβου (στα αριστερά) θα είναι conflict-free .

2. Εαν ο αλγόριθμος για τους δεξιούς εφαρμοστεί στους κόμβους δεξιά τής κεντρικής θέσης ο χρωματισμός που θα γίνεται με κάθε νέα είσοδο κόμβου (στα δεξιά) θα είναι conflict-free .

3. Επιπλέον, για οποιαδήποτε στιγμιότυπο των δύο χρωματισμών, η παράθεσή τους είναι πάντα conflict-free .

Απόδειξη. Όπως προαναγγείλαμε η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Η επαγωγή θα γίνει στον αριθμό χρήσης χρωμάτων και θα αποδειχτούν και τα τρία μέρη της πρότασης ταυτόχρονα.

Επαγωγική βάση Όταν χρησιμοποιείται μέχρι το $b = 2$ χρώμα (δηλαδή 2 κόμβοι για είσοδο αφού $2 = b = 2\lfloor \log{(2-1)} \rfloor + 2 = 2$) οι χρωματισμοί είναι διαδοχικά

- 2 και 12 (για είσοδο $\pi = 21$)
- 1 και 12 (για είσοδο $\pi = 12$)

Επαγωγικό βήμα Έστω λοιπόν οτι ισχύει η επαγωγική υπόθεση και με χρήση μέχρι b χρωμάτων ο χρωματισμός είναι ορθός. Έστω λοιπόν ο αλγόριθμος θα χρησιμμοποιήσει $b + 2$ χρώματα. Ας σκεφτούμε τις θέσεις χωρισμένες σε αα, μα, μδ και δδ.

- αν δεν έχουν εισέλθει κόμβοι στις μα και μδ θέσεις τότε θα έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι το πολύ b χρώματα (αυτό βγαίνει από την δομή του αλγορίθμου). Άρα από την επαγωγική υπόθεση η παράθεση των χρωματισμών των κόμβων που βρίσκονται στις αα και δδ θέσεις θα είναι conflict-free .

$$\overbrace{\underbrace{\ldots\ldots}_{afLw(b)} \mid \underbrace{\qquad}_{empty}}^{afLw(b+2)} \mid \overbrace{\underbrace{\qquad}_{empty} \mid \underbrace{\ldots\ldots}_{afRw(b)}}^{afRw(b+2)}$$

- τη στιγμή που εισέρχεται ένας κόμβος σε κάποια από τις μα ή μδ θέσεις τότε θα χρησιμοποιηθεί το $b + 1$ ή το $b + 2$ χρώμα αντίστοιχα. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ο κόμβος εισήλθε στο μα κομμάτι.

$$\overbrace{\underbrace{\ldots\ldots}_{afLw(b)} \mid \underbrace{\ldots}_{afRw(b)}\ b+1\ \underbrace{\ldots}_{afLw(b)}}^{afLw(b+2)} \mid \overbrace{\underbrace{\qquad}_{empty} \mid \underbrace{\ldots\ldots}_{afRw(b)}}^{afRw(b+2)}$$

- για όσο δεν εισέρχεται κόμβος στο μδ κομμάτι ο χρωματισμός είναι σωστός καθώς σε όσες αλυσίδες περιέχουν τον κόμβο με το χρώμα $b+1$ έχουν αυτόν να έχει μοναδικό χρώμα και όσες δεν τον περιέχουν θα ανήκουν σε χρωματισμό που προκύπτει από τους αλγορίθμους για τους αριστερά και δεξιά (στη χειρότερη περίπτωση σε μια παράθεση αυτών) με χρήση b χρωμάτων και συνεπώς από την επαγωγική υπόθεση θα είνα και αυτές 'σωστές'.

$$\overbrace{\underbrace{\ldots\ldots}_{afLw(b)} \mid \underbrace{\ldots}_{afR(b)}\ b+1\ \underbrace{\ldots}_{afLw(b)}}^{afLw(b+2)} \mid \overbrace{\underbrace{\ldots}_{afRw(b)}\ b+2\ \underbrace{\ldots}_{afLw(b)} \mid \underbrace{\ldots\ldots}_{afRw(b)}}^{afRw(b+2)}$$

- όταν εισέλθει κόμβος και στο μδ κομμάτι αυτός θα πάρει το χρώμα $b+2$. Όμοια με πριν οι αλυσίδες θα είναι conflict-free και για κάθε επόμενη εισαγωγή κόμβων.

Ελπίζοντας οτι τα σχήματα βοηθούν ολοκλήρώνουμε την απόδειξη. Στα σχήματα:
afLw(b) $\equiv$ algorithm for the left with b colors $\equiv$ αλγόριθμος για τους αριστερά με χρήση b χρωμάτων και
afRw(b) $\equiv$ algorithm for the rigth with b colors $\equiv$ αλγόριθμος για τους δεξιά με χρήση b χρωμάτων.

Δεδομένης της δομής του αλγορίθμου δεν έχουμε πολλά να πούμε για την 'χρωματική' πολυπλοκότητά του.

4.1.3 Πολυπλοκότητα

Ο 2CU αλγόριθμος είναι δομημένος έτσι που να χρησιμοποεί για κάθε είσοδο μήκους n κάποιο προκαθορισμένο, για το μήκος n, πλήθος χρωμάτων.

Κάτω όριο Συνεχίζοντας την προηγούμενη παρατήρηση όμως δεν σημαίνει οτι για κάθε είσοδο χρησιμοποιούνται όλα τα χρώματα. Η παρακάτω πρόταση κλείνει από κάτω τον αλγόριθμό μας, πρώτα θα δώσουμε όμως κατασκευαστικά (πολύ απλές) ακολουθίες που τον οδηγούν σε κάτι τέτοιο.

Ορισμός 4.1.1. *Ορισμός π_k*

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1\ 2 \\ \pi_{k+1} &= \pi_k||(|\pi_k| + \pi_k) \end{aligned}$$

όπου $|\pi_k|$ σημαίνει μήκος της π_k (που στην ουσία είναι 2^k).

Παράδειγμα 4.1.3. *(Ακολουθία π_k)*
$\pi_2 = 1\ 2\ 3\ 4$
$\pi_3 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$
$\pi_4 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$
$\vdots$

Πρόταση 4.1.2. Υπάρχουν ακολουθίες εισόδου μήκους 2^k, $k > 0$, που οδηγουν τον αλγόριθμο σε χρήση ακριβώς όλων των προκαθορισμένων

$$b = 2\lfloor \log 2^k - 1 \rfloor + 2 = 2k \text{ χρωμάτων}$$

Απόδειξη. Ακριβώς οι παραπάνω ακολουθίες π_k τον οδηγούν. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

βάση επαγωγής Ο χρωματισμός για την π_1 είναι ο 1 2. Συνεπώς η επαγωγική βάση στέκει.

επαγωγικό βήμα Έστω οτι επαγωγικά ισχύει η υπόθεση για την π_k. Η π_{k+1} έχει μήκος 2^{k+1} και άρα θα χρησιμοποιήσει $2k + 2$ χρώματα. Η εικόνα που έχουμε για την π_{k+1} είναι κάτι τέτοιο:

$$\overbrace{\underbrace{\ldots\ldots}_{afLw(2k)}\ |\ldots\ldots|}^{afLw(2k+2)}\overbrace{\ldots\ldots|\ \underbrace{\ldots\ldots}_{afRw(2k)}}^{afRw(2k+2)}$$

- Από την επαγωγική υπόθεση ξέρουμε ότι στην ακολουθία π_k θα χρησιμοποιηθούν όλα τα $2k$ χρώματα, δηλαδή ο αλγόριθμος για τους δεξιούς και ο αλγόριθμος για τους αριστερούς με χρήση $2k$ χρωμάτων θα χρησιμοποιήσουν όλα τα $2k$ χρώματα. Έτσι είμαστε βέβαιοι ότι στο αα και δδ κομμάτι θα χρησιμοποιηθούν τα χρώματα από 1 εως $2k$ (αφου αν φανταστούμε μόνο αυτά είναι σαν να χρωματίζουμε την π_k).
- Οι πρώτοι κόμβοι που θα εισέλθουν στα κομμάτια μα και μδ θα πάρουν τα χρώματα $2k+1$ και $2k+2$ αντίστοιχα.

Συνεπώς θα χρησιμοποιηθούν για την π_{k+1} όλα τα προκαθορισμένα $2k+2$ χρώματα ($b = 2\lfloor \log(2^{k+1}-1) \rfloor + 2 = 2k+2$) κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Άνω όριο Με την προηγούμενη πρόταση κάναμε πλήρη ανάλυση του αλγορίθμου μας αφού το κάτω όριο έφτασε το άνω. Ακολουθούν κάποιες απλές παρατηρήσεις όσον αφορά το πλήθος χρωμάτων αφού για κάποιες εισόδους τα πράγματα είναι καλύτερα.

Παρατηρήσεις

1. Όπως είπαμε ο αλγόριθμος έχει προκαθορισμένο αριθμό χρήσης χρωμάτων για κάθε είσοδο μήκους n. Κάποιες φορές όμως δεν τα χρησιμοποιεί όλα (όπως στο πρώτο παράδειγμα). Αυτό συμβαίνει όταν τα κομμάτια που χρωματίζονται με τον αλγόριθμο για τους αριστερούς ή αυτά που χρωματίζονται με τον αλγόριθμο για τους δεξιούς είναι 'μικρά'. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί πλεονέκτημα του αλγορίθμου όμως σε αναλύσεις χειρότερης περίπτωσης χρησιμοποιούνται ολα τα χρώματα

2. είδαμε πιο πάνω οτι ο αλγόριθμος με είσοδο b χρώματα χρωματίζει μέχρι $2^{b/2}$ κόμβους. Αποδεικνύεται οτι μπορούν να χρωματιστούν μέχρι και $2*2^{b/2}-2$ κόμβοι (σχεδόν διπλάσιοι κόμβοι) χωρίς κάποια σημαντική αλλαγή.

Ο αλγόριθμος μπορεί να χαρακτηριστεί πολύ καλός με βάση την πολυπλοκότητά του καθώς

- από την μία μεριά το κάτω όριο του προβλήματος είναι η χρήση περίπου $2\log_3 n$

- από την άλλη το άνω όριο του αλγορίθμου είναι η χρήση περίπου $2\log_2 n \approx 1.59 * 2\log_3 n$ (ίδια τάξη μεγέθους και σχετικά 'κοντά').

Καθότι η λύση είναι καλή δεν έχουν αναζητηθεί άλλες λύσεις του προβλήματος απολύτων θέσεων. Το κεφάλαιο λοιπόν ολοκληρώνεται με μόνο αυτό τον αλγόριθμο και περνάμε στην πιο δύσκολη περίπτωση όπου και υπάρχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον και μεγαλύτερες 'αποστάσεις' στις πολυπλοκότητες των αλγορίθμων που παρουσιάζονται.

Κεφάλαιο 5

Online με σχετικές θέσεις

Θα μιλήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο για το online με σχετικές θέσεις πρόβλημα, παρουσιάζοντας τους βασικούς αλγορίθμους χρωματισμού που υπάρχουν για το πρόβλημα αυτό. Θα ξεκινήσουμε με τους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους και θα περάσουμε και σε λύσεις με πιθανοτικούς αλγορίθμους. Το κάτω όριο χρήσης τουλάχιστον $1 + 2\log_3 n$ χρωμάτων για το χρωματισμό εξακολουθεί να ισχύει και εδώ. Η γνώση μας πλέον για τη θέση των επόμενων κόμβων είναι σχεδόν μηδενική. Ας ξεκινήσουμε όμως με τον πιο απλό άπληστο αλγόριθμο.

5.1 O fully Greedy αλγόριθμος

Στην ενότητα αυτή κάνουμε μια πρώτη προσέγγιση του online με σχετικές θέσεις προβλήματος, με έναν άπληστο αλγόριθμο, τον fully Greedy αλγόριθμο. Γενικά οι άπληστοι αλγόριθμοι δεν δίνουν πάντα βέλτιστη λύση. Για κάθε αλλαγή στα δεδομένα του προβλήματος κάνουν την βέλτιστη επιλογή για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, χωρίς να ελέγχουν πώς αυτή η επιλογή μπορεί να επηρεάσει το πρόβλημα στο μέλλον. Το γεγονός αυτό μπορεί να βάζει φραγμούς σε επιλογές που θα μπορούσαν να γίνουν στο μέλλον και ίσως να έδιναν καλύτερα αποτελέσματα για το πρόβλημα σε επόμενες καταστάσεις.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο αλγόριθμός μας θέλουμε σε κάθε εισαγωγή κόμβου να χρωματίζει το νέο κόμβο έτσι ώστε να ισχύει η conflict-free ιδιότητα για κάθε αλυσίδα χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν μικρότερο χρώμα. Κάθε χρωματισμός νέου κόμβου θέτει κάποιους περιορισμούς για τον χρωματισμό των επομενών του. Όπως θα δούμε πιο κάτω, το γεγονός αυτό οδηγεί τον fully Greedy αλγόριθμο στο να χρωματίζει κάποιες ακολουθίες εισόδου με αριθμό χρωμάτων γραμμικό ως προς το μήκος εισόδου. Ας δούμε όμως τον αλγόριθμο.

5.1.1 Ιδέα του αλγορίθμου

Πρόκειται για έναν απλό αλγόριθμο που δεν χρειάζεται επιπλέον ορισμούς και παρατηρήσεις. Στο πρώτο στοιχείο της εισόδου δίνει το χρώμα 1. Για κάθε ένα από τα επόμενα στοιχεία, παίρνει τις νέες αλυσίδες που δημιουργούνται και με διαδοχικούς ελέγχους επιλέγει ως χρώμα για το νέο στοιχείο το μικρότερο από όσα δεν ανατρέπουν την conflict-free ιδιότητα σε αυτές τις αλυσίδες.

Στο επόμενο απλό παράδειγμα βλέπουμε την αντίδραση του αλγορίθμου σε είσοδο 6 στοιχείων με ακολουθία εισόδου 002020. Η τελεία δηλώνει την θέση του επόμενου κόμβου:

Παράδειγμα 5.1.1. *(υλοποίηση fully Greedy αλγορίθμου)*

Αρχικοποίηση	1	*ο πρώτος κόμβος πάιρνει τον αριθμό 1*
1^0 *βήμα*	$\bullet 1$	*το 1 χαλάει την ιδιότητα στην αλυσίδα 1-1*
2^0 *βήμα*	$21\bullet$	*εδώ το 1 απορρίπτεται λόγω της αλυσίδας 2-3*
3^0 *βήμα*	$\bullet 212$	*το 1 λόγω της 1-4, και το δύο λόγω της 1-2*
4^0 *βήμα*	$32 \bullet 12$	*το 1 λόγω της 3-4, το δύο λόγω της 2-3*
5^0 *βήμα*	$\bullet 32312$	*τα 1, 2 και 3 χαλάνε λόγω των 1-6, 1-4 και 1-2*
έξοδος	432312	*δεν γίνεται άλλος έλεγχος*

Προφανώς δεν πρόκειται για δύσκολο αλγόριθμο. Το παράδειγμα έρχεται τυπικά. Η ακολουθία εισόδου του παραδείγματος ανήκει στις ακολουθίες που αναγκάζουν τον αλγόριθμο να χρησιμοποιήσει $O(n)$ χρώματα για τον χρωματισμό n κόμβων. Για την πολυπλοκότητα όμως θα μιλήσουμε παρακάτω. Πρώτα θα αποδείξουμε την ορθότητα του αλγορίθμου.

5.1.2 Ορθότητα του αλγορίθμου

Η απόδειξη της ορθότητας έρχεται με επαγωγή στα στοιχεία εισόδου. Για 1 και 2 στοιχεία προφανώς ο χρωματισμός είναι conflict-free. Έστω ότι για k στοιχεία έχουμε επιτύχει conflict-free χρωματισμό και έστω κατά την εισαγωγή του το $(k{+}1)$ στοιχείο παίρνει το χρώμα c . Απαραίτητη προϋπόθεση για την επιλογή του c ήταν για όλες τις νέες αλυσίδες να ισχύει η conflict-free ιδιότητα. Από την επαγωγική υπόθεση οι παλιές αλυσίδες ικανοποιούν την conflict-free ιδιότητα. Συνεπώς όλες οι αλυσίδες την ικανοποιούν και άρα έχουμε conflict-free χρωματισμό κι ο αλγόριθμος είναι ορθός.

5.1.3 Πολυπλοκότητα

Κάτω όριο

Θα αποδείξουμε πως για κάθε $n \leq 2$ υπάρχει ακολουθία εισόδου n στοιχείων που οδηγεί τον αλγόριθμο στην χρήση $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ χρωμάτων.

Λήμμα 5.1.1. Ακολουθίες εισόδου της μορφής $00(20)^i$ χρησιμοποιούν $i+2$ χρώματα. Το πρώτο και δεύτερο από τα αριστερά παίρνουν τα χρώματα $i+2$ και $i+1$

αντίστοιχα. Αν $i \geq 1$ το τρίτο και τέταρτο από αριστερά στοιχεία χρωματίζονται με i και $i+1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο i. Για τις εισόδους 00 και 0020, για i=0 και 1, οι χρωματισμοί που προκύπτουν από τον αλγόριθμο είναι 21 και 3212 αντίστοιχα (δες παράδειγμα). Έστω λοιπόν ότι ισχύει πως ο χρωματισμός στο i βήμα ξεκινάει

$$i+2 \qquad i+1 \qquad i+2 \qquad i \qquad i+1 \qquad \ldots$$

Ο επόμενος και προτελευταίος κόμβος της ακολουθίας $00(20)^{i+1}$, έστω ο v, θα εισαχθεί μετά το $i+1$ και πριν το i, μετά τη θέση 2.

Ισχυρισμός. αν ο v πάρει το χρώμα c τότε αυτό το χρώμα θα μπορούσε κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί από τον αλγόριθμο και στο χρωματισμό του κόμβου που εισήλθε ακριβώς πριν τον v.

Πράγματι, παίρνουμε το σύνολο των αλυσίδων που περιέχουν τον v και το σύνολο αυτών που περιέχουν τον πρώτο κόμβο, που είναι αυτός που εισήλθε ακριβώς πριν από τον v. Αν η αλυσίδα 1-2 εξαιρεθεί από το δεύτερο σύνολο τότε όλες οι υπόλοιπες αλυσίδες βλέπουμε ότι ανήκουν και στο πρώτο σύνολο. Το ότι ο πρώτος κόμβος πήρε το χρώμα $i+2$ μας φανερώνει πως όλα τα μικρότερα χρώματα χαλάνε την conflict-free ιδιότητα τουλάχιστον σε μια από τις αλυσίδες που τον περιέχουν. Το $i+1$ χαλάει την ιδιότητα στην εξερεθείσα αλυσίδα. Άρα για όλα τα υπόλοιπα μικρότερα χρώματα είμαστε σίγουροι πως το καθένα χαλάει την ιδιότητα σε μια τουλάχιστον από τις αλυσίδες που περιέχουν τον v. Το $i+1$ απορρίπτεται καθώς η αλυσίδα 2-3 δεν θα ικανοποιούσε την ιδιότητα. Άρα το c θα είναι $c \geq i+2$.

Ισχυρισμός. Το $i+2$ δεν χαλάει την ιδιότητα σε καμία αλυσίδα του υπεργράφου. Ως μικρότερο τέτοιο επιλέγεται κι έχουμε το χρωματισμό να ξεκινάει

$$i+2 \qquad i+1 \qquad i \qquad i+1 \qquad \ldots$$

Πράγματι, κάθε χρώμα q μετά το i είναι $q \leq i+1$, καθώς από επαγωγική υπόθεση όταν ήμαστε στο βήμα $i-1$ ο χρωματισμός είχε $i-1+2 = i+1$ χρώματα. Όλες οι αλυσίδες λοιπόν που δεν περιέχουν τον πρώτο κόμβο διατηρούν την ιδιότητα λόγω της επαγωγικής υποθέσεως καθώς το χρώμα $i+2$ για αυτές αποτελεί πρωτοεμφανιζόμενο χρώμα. Μάλιστα όσες από αυτές περιέχουν τον τρίτο κόμβο θα έχουν δύο χρώματα μοναδικά ανάμεσα στα άλλα χρώματα, ένα το χρώμα που υπάρχει λόγω της επαγωγικής υπόθεση κι ένα το χρώμα $i+2$. Συνεπώς και οι αλυσίδες που ξεκινούν από τον 1^0 κόμβο και περιέχουν τον 3^0 θα έχουν ένα μοναδικό χρώμα, το προαναφερθέν της επαγωγικής υπόθεσης, και άρα θα ικανοποιούν την conflict-free ιδιότητα. Η αλυσίδα των δύο πρώτων στοιχείων προφανώς ικανοποιεί την ιδιότητα άρα το χρώμα $i+2$ επιλέχθηκε ορθά.

Ο τελευταίος κόμβος της ακολουθίας $00(20)^{i+1}$ θα εισαχθεί στην αρχή του γράφου. Τα χρώματα $i+2$, $i+1$ και i απορρίπτονται για τον χρωματισμό του καθώς χαλάνε την ιδιότητα στις αλυσίδες 1-2, 1-4 και 1-6 αντίστοιχα. Αν μπορούσε να επιλεχτεί κάποιο μικρότερο από αυτά χρώμα, έστω c, τότε αυτό θα χρησιμοποιούταν και νωρίτερα, αφού ο αλγόριθμος είναι άπληστος, για τον χρωματισμό του μέχρι πρότινος πρώτου κόμβου. Αυτό γιατί:

Ισχυρισμός. Αν οι αλυσίδες που ξεκινούν από τον πρώτο κόμβο ενός χρωματισμού
$c \qquad i+2 \qquad i+1 \qquad i+2 \qquad i \qquad i+1 \qquad \ldots$
διατηρούν την conflict-free ιδιότητα τότε την διατηρούν και οι αλυσίδες που ξεκινούν από τον πρώτο κόμβο του χρωματισμού
$c \qquad i+1 \qquad i \qquad i+1 \qquad \ldots,$
δεδομένου ότι οι τρεις τελείες δηλώνουν ίδια ακολουθία χρωμάτων και $c < i$.

Πράγματι, αφού $c < i$ οι αλυσίδες 1-2 και 1-3 του δεύτερου χρωματισμού έχουν την ιδιότητα. Έστω οι αλυσίδες του πρώτου χρωματισμού διατηρούν την ιδιότητα, τότε θα την διατηρούν και οι αλυσίδες που περιέχουν τους κόμβους δύο και τέσσερα. Αυτές θα έχουν μοναδικό χρώμα διαφορετικό από το $i + 2$ καθώς αυτό εμφανίζεται ήδη δυο φορές στου κόμβους δύο και τέσσερα. Άρα το μοναδικό χρώμα θα εμφανίζεται κάθε φορά σε κάποιον από τους άλλους κόμβους της αλυσίδας. Τα χρώματα των άλλων κόμβων συμπίπτουν κατά σειρά με αυτά των κόμβων του δεύτερου χρωματισμού. Έτσι αν κάνουμε την αντιστοιχία

$$1 - x \longrightarrow 1 - (x\text{-}2), \quad x \geq 6$$

βλέπουμε ότι η ισχύς της ιδιότητας σε αλυσίδα της παραπάνω μορφής του πρώτου χρωματισμού περνά και στην αντίστοιχη αλυσίδα του δεύτερου χρωματισμού. Λόγω των προηγουμένων όλες οι αλυσίδες του πρώτου χρωματισμού που ξεκινούν από τον 1^0 κόμβο και περιέχουν τουλάχιστον τον 4^0 είναι conflict-free χρωματισμένες. Από πριν έχουμε ότι και οι αλυσίδες 1-2 και 1-3 είναι conflict-free χρωματισμένες και άρα αποδεικνύεται ο ισχυρισμός. Τελικά όλα τα μικρότερα χρώματα απορρίπτονται κι ο αλγόριθμος επιλέγει ένα καινούριο χρώμα για το νέο κόμβο, το $i + 3$, και ο χρωματισμός γίνεται:

$$i+3 \qquad i+2 \qquad i+1 \qquad i \qquad i+1 \qquad \ldots$$

κι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Λήμμα 5.1.2. Ακολουθίες εισόδου της μορφής $00(20)^i1$ χρησιμοποιούν $i + 3$ χρώματα.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα ξέρουμε ότι η ακολουθία εισόδου $00(20)^i$ δίνει χρωματισμό που ξεκινάει

$$i+2 \qquad i+1 \qquad \ldots$$

ο τελευταίος κόμβος θα εισαχθεί αμέσως μετά την θέση 1. Το γεγονός ότι ο πρώτος κόμβος πήρε στο προηγούμενο βήμα το χρώμα $i + 2$ μας δηλώνει πως οποιοδήποτε μικρότερο χρώμα χαλούσε την ιδιότητα σε τουλάχιστον μια από τις αλυσίδες του υπεργράφου. Συνεπώς η ακολουθία των χρωμάτων των κόμβων από το χρώμα $i + 1$

και έπειτα είναι τέτοια που αποτρέπει την χρήση μικρότερου από το $i+2$ χρώμα για το χρωματισμό ενός κόμβου που προηγείται ακριβώς αυτών των κόμβων. Ο νέος κόμβος εισέρχεται ακριβώς πριν από αυτή την ακολουθία και άρα θα πάρει χρώμα $c \geq i+2$. Το χρώμα $i+2$ χαλάει την ιδιότητα στην αλυσίδα 1-2, άρα $c \geq i+3$. Από το προηγούμενο λήμμα ξέρουμε ότι για τον χρωματισμό της ακολουθίας $00(20)^i$ έχουν χρησιμοποιηθεί ακριβώς $i+2$ χρώματα, δηλαδή το $i+3$ αν επιλεγεί θα εμφανίζεται για πρώτη φορά και άρα δεν θα χαλά την ιδιότητα στις αλυσίδες που το περιέχουν. Έτσι επιλέγεται το $i+3$ και ο χρωματισμός της εισόδου $00(20)^i 1$ ολοκληρώνεται με χρήση $i+3$ χρωμάτων.

Πρόταση 5.1.1. Για κάθε $n \geq 2$ υπάρχει ακολουθία εισόδου που αναγκάζει τον αλγόριθμο να χρησιμοποιήσει $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ χρώματα

Απόδειξη. Για κάθε $n \geq 2$ θεωρώ το C_n ως εξής

$$C_n = \begin{cases} 00(20)^{\frac{n-2}{2}} & \text{αν ν άρτιος} \\ 00(20)^{\frac{n-3}{2}}1 & \text{αν ν περιττός} \end{cases}$$

Σύμφωνα με τα δύο παραπάνω λήμματα για n άρτιο χρησιμοποιούνται $\frac{n-2}{2} + 2 = \frac{n}{2} + 1$ χρώματα και για n περιττό χρησιμοποιούνται $\frac{n-3}{2} + 3 = \frac{n+1}{2} + 1$ χρώματα Δηλαδή για κάθε $n \geq 2$ η C_n απαιτεί $\lceil \frac{n}{2} \rceil$+1 χρώματα.

Άνω όριο

Θα δείξουμε πως ο αλγόριθμος δεν χρησιμοποιεί παραπάνω από $\lceil \frac{n}{2} \rceil$+1 χρώματα.

Λήμμα 5.1.3. Σε κάθε χρωματισμό με τον fully Greedy αλγόριθμο το πολύ τρία χρώματα εμφανίζονται μόνο μια φορά στον χρωματισμό.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Για χρωματισμό μέχρι τριών κόμβων δεν μπορούν προφανώς να υπάρξουν τέσσερα χρώματα, πόσο μάλλον διαφορετικά. Έτσι για ακολουθίες εισόδων μέχρι τριών στοιχείων ισχύει το λήμμα. Έστω ότι έχουμε φτάσει σε χρωματισμό που έχει μέχρι τρία χρώματα να εμφανίζονται μια φορά μέσα σε αυτόν και θέλουμε να χρωματίσουμε το επόμενο στοιχείο. Αν ο χρωματισμός μας είχε ένα ή δύο χρώματα να εμφανίζονται μόνο μια φορά μέσα σε αυτόν, τότε όποιο χρώμα και να έπαιρνε ο νέος κόμβος θα είχαμε το πολύ τρία χρώματα που να έχουν μοναδική εμφάνιση. Αν ο χρωματισμός μας είχε τρία χρώματα που εμφανίζονται μοναδική φορά, έστω a,b και c, τότε:

Ισχυρισμός. Ο νέος κόμβος θα έπαιρνε κάποιο από τα ήδη υπάρχοντα χρώματα, κι αυτό αρκεί για την απόδειξη.

Αυτό γιατί αν υποθέσουμε πως αυτά εμφανίζονται με ένα τέτοιο τρόπο στο χρωματισμό:

$$\ldots a \ldots b \ldots c \ldots$$

τότε:

- Αν το νέο στοιχείο εισέλθει πριν το a ή μετά το c, θα μπορεί σίγουρα να πάρει το χρώμα b, καθώς οποιαδήποτε αλυσίδα περιέχει τους δύο κόμβους με τα b, θα περιέχει και είτε το a είτε το c, ανάλογα με το που εισήλθε ο νέος κόμβος κι έτσι θα έχει τουλάχιστον αυτό ως μοναδικό χρώμα.

- Αν το νέο στοιχείο εισέλθει ανάμεσα στα a και b ή στα b και c, τότε θα μπορεί σίγουρα να πάρει το χρώμα c ή a αντίστοιχα, καθώς οποιαδήποτε αλυσίδα περιέχει τους δύο κόμβους με τα c ή a αντίστοιχα, θα περιέχει και το χρώμα b και θα έχει τουλάχιστον αυτό ως μοναδικό χρώμα.

Συνεπώς όπου και να εισέλθει ο νέος κόμβος δεν θα πάρει καινούριο χρώμα και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Πρόταση 5.1.2. Για κάθε $n \geq 2$ καμία ακολουθία εισόδου μήκους n δεν αναγκάζει τον αλγόριθμο να χρησιμοποιήσει παραπάνω από $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ χρώματα.

Απόδειξη. Έστω ότι ακολουθία εισόδου n στοιχείων έχει χρωματιστεί με τον fully Greedy αλγόριθμο. Έστω ότι έχουν χρησιμοποιηθεί k χρώματα στον χρωματισμό, εκ των οποίων τα u μία και μόνο φορά. Τα $k - u$ χρώματα συνεπώς έχουν χρησιμοποιηθεί τουλάχιστον δύο φορές , και από το προηγούμενο λήμμα: $u \leq 3$. Άρα έχουμε:

$$n \geq 2(k-u) + u \Rightarrow 2k \leq n + u \Rightarrow k \leq \lfloor \frac{n+u}{2} \rfloor \leq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{2} + 1 \rceil$$

που αποδεικνύει και την πρόταση.

Θεώρημα 5.1.1. Στη χειρότερη περίπτωση ο αλγόριθμος χρωματίζει ακολουθία εισόδου n στοιχείων με χρήση $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ χρωμάτων.

Απόδειξη. Αποδείξαμε στην πρόταση 3.5.1 πως για κάθε n υπάρχει ακολουθία εισόδου για τον χρωματισμό της οποίας ο αλγόριθμος χρειάζεται $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ χρώματα. Στην πρόταση 3.5.2 αποδείξαμε πως ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να μεγαλώσει άλλο. Αυτά αποδεικνύουν και το θεώρημα.

Παρατηρήσεις

1. η πρώτη προσέγγιση στο online με σχετικές θέσεις πρόβλημα δεν είχε καλά αποτελέσματα. Η χρησιμοποίηση $\Omega(n)$ χρωμάτων για κάποιες ακολουθίες εισόδου καθιστά τον fully Greedy αλγόριθμο ασύμφορο.

2. στην επόμενη ενότητα θα προσπαθήσουμε να ξεπεράσουμε το πρόβλημα των άπληστων αλγορίθμων να μην αφήνουν περιθώρια ζητώντας από έναν άπληστο και πάλι αλγόριθμο να καταφέρνει κάτι πιο ισχυρό. Το να ζητάμε κάτι πιο ισχυρό μπορεί να δώσει τελικά κάποια περιθώρια για πιο οικονομική αντιμετώπιση επόμενων καταστάσεων όταν πρόκειται για άπληστους αλγόριθμους.

5.2 O UniMax Greedy αλγόριθμος

O αλγόριθμος που θα μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα εντάσσεται και αυτός στο σύνολο των άπληστων αλγορίθμων. Εισήχθει στο [FLM+05]. Δεν είναι άπληστος ως προς την conflict-free ιδιότητα αλλά ως προς μια νέα που θα την ονομάσουμε *unimax cf* ιδιότητα.

Ορισμός 5.2.1. *(unimax cf ιδιότητα σε αλυσίδα)*
Μία αλυσίδα είναι unimax cf χρωματισμένη όταν το μεγαλύτερο χρώμα του χρωματισμού της εμφανίζεται μόνο σε ένα κόμβο της.

Ορισμός 5.2.2. *(unimax cf ιδιότητα σε γράφο)*
Ένας γράφος είναι unimax cf χρωματισμένος όταν όλες οι αλυσίδες του είναι unimax cf χρωματισμένες.

Για ευκολία στην ανάλυση του αλγορίθμου θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ την αντιστοιχία των χρωμάτων με τους φυσικούς αριθμούς. Θυμίζω πως μεγαλύτερο χρώμα σε ένα χρωματισμό σημαίνει πιο καθυστερημένη πρώτη εμφάνιση του χρώματος σε σχέση με τα μικρότερα χρώματα αυτού του χρωματισμού. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε πως η νέα μας ιδιότητα είναι πιο ισχυρή ιδιότητα από την conflict-free και όταν ικανοποιείτε είμαστε σίγουροι πως ικανοποιείτε και η conflict-free ιδιότητα. Πράγματι στην unimax cf ιδιότητα δεν ζητάμε απλά για κάθε αλυσίδα να υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος με μοναδικό χρώμα ανάμεσα στους άλλους κόμβους, αλλά να υπάρχει ένας τέτοιος κόμβος που επιπλέον να είναι χρωματισμένος με το μεγαλύτερο χρώμα της κάθε αλυσίδας. Κατ΄ ανάγκην θα είναι και μοναδικός τέτοιος.

Παράδειγμα 5.2.1.

1 2 3 5 4 8 6 7 . *Ικανοποιεί την unimax cf ιδιότητα και κατάνάγκην και την conflict free . Σίγουρος αλλά απαιτητικός σε πλήθος χρωμάτων*

1 3 2 3 5 2 1 4 . *ικανοποεί την conflict free ιδιότητα αλλά η αλυσίδα 2-4 δεν είναι unimax cf χρωματισμένη.*

1 2 4 1 3 2 1 4 . *ικανοποιεί την unimax cf και την ικανοποιούσε σε κάθε νέα εισαγωγή κόμβου που έγινε σύμφωνα με την ακολουθία εισόδου 01101560*

5.2.1 Ιδέα του αλγορίθμου

O αλγόριθμος αυτός θέλουμε για κάθε νέα εισαγωγή κόμβου να χρωματίζει το νέο κόμβο με χρώμα τέτοιο που να εξακολουθεί να διατηρείτε η unimax cf ιδιότητα στον υπεργράφο. Θα δώσουμε την ιδέα του αλγόριθμου που επιτυγχάνει τον παραπάνω στόχο. Έστω ότι εισάγεται ένας νέος κόμβος στον υπεργράφο.

Ορισμός 5.2.3. *Ο p 'βλέπει' ένα κόμβο x αν όλοι οι κόμβοι που παρεμβάλλονται μεταξύ p και x είναι χρωματισμένοι με χρώμα μικρότερο του χρώματος του x. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε και ότι ο p 'βλέπει' το $c(x)$, όπου με $c(x)$εννούμε το χρώμα του x.*

Ας δούμε όμως τι κάνει ο αλγόριθμος. Στον πρώτο κόμβο δίνει το χρώμα 1. Για του επόμενους κόμβους εφαρμόζει τον ακόλουθο κανόνα: *δώσε στο νέο κόμβο p το μικρότερο χρώμα που δεν βλέπει σε καμία από τις δύο κατευθύνσεις*. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο κάθε p μπορεί να βλέπει ένα χρώμα μόνο προς μία κατεύθυνση, μάλιστα θα το αποδείξουμε παρακάτω καθώς χρειάζεται για την επιβεβαίωση της ορθότητας του αλγορίθμου. Διαισθητικά πάντως βλέπουμε πως αν μπορούσε να δει ένα χρώμα και προς τις δύο κατευθύνσεις τότε και οι δύο κόμβοι που θα έχουν αυτό το χρώμα θα βλέπονται και μεταξύ τους, και άρα ο δεύτερο-εισαχθείσας από τους δύο δεν θα έπαιρνε το ίδιο χρώμα με τον πρώτο. Αυτός είναι ο Unique Maximum Greedy αλγόριθμος ή απλά UniMax Greedy αλγόριθμος.
Στο παράδειγμα βλέπουμε την αντίδραση του αλγορίθμου σε κάθε νέα εισαγωγή κόμβου στον γράφο. Θα εισαχθούν 7 κόμβοι σύμφωνα με την ακολουθία εισόδου 0121343. Στα αριστερά φαίνεται ο μέχρι το τ βήμα χρωματισμός ενώ με την τελεία υποδηλώνεται που θα εισέλθει ο επόμενος κόμβος. Στα δεξιά ελέγχεται ποια χρώματα μπορεί να δει ο νέος κόμβος, αριστερά της τελείας βρίσκονται όσα θα βλέπει στα αριστερά του ενώ δεξιά όσα θα βλέπει στα δεξιά του. Από τα χρώματα που λείπουν από τις αγκύλες γίνεται η επιλογή του μικρότερου και μ΄ αυτό χρωματίζεται ο νέος κόμβος.

Παράδειγμα 5.2.2. *(Υλοποίηση UniMax Greedy αλγορίθμου)*

Αρχικοποίηση	1		*ο πρώτος κόμβος παίρνει τον αριθμό 1*
1^0 *βήμα*	$1\bullet$	$[1\bullet]$	*βλέπει αριστερά το 1, άρα δίνει 2*
2^0 *βήμα*	$12\bullet$	$[2\bullet]$	*το 1 κρύβεται πίσω από το 2, άρα 1*
3^0 *βήμα*	$1\bullet 21$	$[2\bullet 1]$	*βλέπει και τα δύο οπότε δίνει 3*
4^0 *βήμα*	$132\bullet 1$	$[32\bullet 1]$	*και πάλι τα βλέπει όλα οπότε καινούριο, 4*
5^0 *βήμα*	$1324\bullet 1$	$[4\bullet 1]$	*κρύβονται 2 και 3. Επιλέγεται το μικρότερο*
6^0 *βήμα*	$132\bullet 421$	$[32\bullet 4]$	*το 3 κρύβει το 1, έτσι επιλέγεται το 1*
έξοδος	1321421		*δεν γίνεται άλλος έλεγχος*

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι στο παράδειγμά μας σε κάθε βήμα ισχύει η unimax cf ιδιότητα για όλες τις αλυσίδες. Ήρθε η ώρα να αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε online χρωματισμό που γίνεται με τον UniMax Greedy αλγόριθμο.

5.2.2 Ορθότητα του αλγορίθμου

Η ορθότητα του αλγορίθμου αποδεικνύεται με επαγωγή στην εισαγωγή των στοιχείων. Έστω ότι έχουμε φτάσει στην εισαγωγή του p και μέχρι αυτό το σημείο ισχύει η unimax cf ιδιότητα για όλες τις αλυσίδες.

Ισχυρισμός. Κάθε χρώμα μπορεί να βλέπεται μόνο μια φορά από τον p.

Τούτο γιατί:

- αν υποθέσουμε πως βλέπει ένα χρώμα δυο φορές από την ίδια μεριά, έστω στους κόμβους u και v, τότε η αλυσίδα που ξεκινά από τον u και καταλήγει στον v δεν θα ικανοποιούσε την unimax cf ιδιότητα, άτοπο λόγω την επαγωγικής υπόθεσης,

- αν υποθέσουμε ότι βλέπει κάποιο χρώμα και από τα αριστερά του και από τα δεξιά του τότε πριν από την εισαγωγή του p η αλυσίδα που έχει ως άκρα αυτούς τους δύο κόμβους δεν ικανοποιούσε την unimax cf ιδιότητα, πάλι άτοπο λόγω επαγωγικής υποθέσεως

Έστω λοιπόν ο αλγόριθμος δίνει το χρώμα c στον p. Οι αλυσίδες που περιέχουν τον p κι έχουν μέγιστο χρώμα μεγαλύτερο του c θα εξακολουθούν να ικανοποιούν την unimax cf έχοντας ως μέγιστο χρώμα το ίδιο χρώμα που είχαν και πριν την εισαγωγή του p. Οι αλυσίδες που περιέχουν τον p κι έχουν ως μέγιστο χρώμα το c δεν μπορούν να περιέχουν και άλλο κόμβο με το ίδιο χρώμα αφού τότε ο p θα έβλεπε τον κοντινότερο τέτοιο κόμβο και δεν θα έπαιρνε από τον αλγόριθμο το ίδιο χρώμα με αυτόν. Άρα κι αυτές οι αλυσίδες εξακολουθούν να ικανοποιούν την ιδιότητα. Όλες οι υπόλοιπες αλυσίδες δεν περιέχουν τον p και άρα εξακολουθούν να διατηρούν την unimax cf από την επαγωγική υπόθεση. Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώνεται και η απόδειξη της ορθότητας. Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο αλγόριθμος αποδίδει στον κάθε νέο κόμβο τον ελάχιστο αριθμό-χρώμα που μπορεί ώστε να ισχύει η ιδιότητα unimax cf για όλες τις αλυσίδες. Το γεγονός αυτό είναι που τον κάνει άπληστο ως προς την unimax cf ιδιότητα.

5.2.3 Μία όμορφη παρατήρηση

Πριν μιλήσουμε για την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ας δούμε κάτι που θα χρειαστεί σε επόμενο κεφάλαιο. Θυμίζουμε ότι με $P(t)$ συμβολίζουμε τον υπεργράφο την χρονική στιγμή t. Με $C(P(t))$ δηλώνουμε την ακολουθία των χρωμάτων του $P(t)$ από τα αριστερά προς τα δεξιά. Ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία S_k ως εξής:

1. $S_1 = (1)$

2. $S_k = S_{k-1} \| (k) \| S_{k-1}, k > 1$

όπου $\|$ σημαίνει παράθεση, όπως και στην στατική περίπτωση.

Παράδειγμα 5.2.3.

- $S_1 = (1)$

- $S_2 = (1, 2, 1)$

- $S_3 = (1, 2, 1, 3, 1, 2, 1)$
- $S_4 = (1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1)$

Θυμίζουμε ότι $|S_k| = 2^k - 1$

Ορισμός 5.2.4. *Ορίζουμε $C_0(a, b)$ την συνεχόμενη υπακολουθία της S_k που ξεκινά από το σημείο a της ακολουθίας και καταλήγει στο σημείο b αυτής, με k να είναι αυτό για το οποίο ισχύει η σχέση $2^{k-1} \le b < 2^k$.*

Παράδειγμα 5.2.4. *το $C_0(3, 8)$ είναι η υπακολουθία της S_4, που ξεκινά από το 3^0 στοιχείο και καταλήγει στο 8^0, δηλαδή η $(1, 3, 1, 2, 1, 4)$.*

Λήμμα 5.2.1. (χωρίς απόδειξη)

1. Αν το κάθε ένα από τα στοιχεία του P σε κάθε χρονική στιγμή t εισάγεται στα δεξιά όλων των προηγούμενων, δηλαδή σύμφωνα με την ακολουθία $012345\ldots$ τότε $C(P(t)) = C_0(1, t)$.

2. Αν το κάθε ένα από τα στοιχεία του P σε κάθε χρονική στιγμή t εισάγεται στα αριστερά όλων των προηγούμενων, δηλαδή σύμφωνα με την ακολουθία $000\ldots$ τότε $C(P(t)) = C_0(2^k - t, 2^k - 1)$, όπου το k είναι αυτό για το οποίο ισχύει η σχέση $2^{k-1} \le t < 2^k$

3. Αν το κάθε ένα από τα στοιχεία του P σε κάθε χρονική στιγμή t εισάγεται είτε στα αριστερά είτε στα δεξιά των προηγούμενων του, δηλαδή για ακολουθία εισόδου όπου στην θέση ξ θα υπάρχει ή 0 ή *ξ-1*, τότε το $C(P(t))$ είναι μια υπακολουθία της μορφής $C_0(a, b)$, με $b \le |P(t)|$.

Το S_k είναι η λύση για το πρόβλημα χρωματισμού της στατικής περίπτωσης. Το όμορφο του λήμματος είναι πως φανερώνει την σχέση της λύσης της στατικής περίπτωσης με τον χρωματισμό που κάνει ο αλγόριθμος με τις παραπάνω εισόδους. Κρατήστε το αποτέλεσμα θα χρειαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

5.2.4 Πολυπλοκότητα

Κάτω όριο

Θεώρημα 5.2.1. ο UniMax Greedy αλγόριθμος μπορεί να χρειαστεί $\Omega(\sqrt{n})$ χρώματα στη χειρότερη περίπτωση για ένα σύνολο n σημείων.

Απόδειξη. Για κάθε ακέραιο k θεωρούμε την ακολουθία

$$C_k = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots, k-1, k-2, \ldots, 1, k, k-1, \ldots, 1).$$

Αν ορίσουμε $D_j = (j, j-1, \dots, 1)$ παρατηρούμε ότι το C_k είναι ακριβώς η παράθεση των D_j για $j = 1 \dots k$, δηλαδή $C_k = D_1 \| D_2 \| \dots \| D_k$.
Θεωρούμε και την ακολουθία $n_k = \frac{k(k+1)}{2}, k \geq 1$.
Θα αποδείξουμε πρώτα πως για κάθε k υπάρχει ακολουθία εισόδου n_k το πλήθος στοιχείων που οδηγεί τον αλγόριθμο στο να δώσει ως τελικό χρωματισμό τον C_k. Η απόδειξη έρχεται με επαγωγή στο k . Για $k = 1$ και $k = 2$ προφανώς ο αλγόριθμος δίνει το C_1 και το C_2 αντίστοιχα στις ακολουθίες εισόδου 0 και 000. Έστω για κάποιο k ο αλγόριθμος δίνει τον χρωματισμό C_k. Προσθέτουμε στον υπεργράφο $k+1$ το πλήθος νέα στοιχεία, k στις θέσεις εκείνες που προηγούνται των D_j, ξεκινώντας από το D_k φθίνοντας προς το D_1, και το $(k+1)^0$ στην αρχή, δηλαδή η ακολουθία εισόδου από το σημείο αυτό και έπειτα είναι $\frac{k(k-1)}{2} \frac{(k-1)(k-2)}{2} \dots 10$.
Το στοιχείο που θα εισέλθει ανάμεσα στο D_{k-1} και στο D_k θα βλέπει αριστερά του όλα τα χρώματα του D_{k-1}, που είναι από το 1 μέχρι και το $k-1$, και ακριβώς δεξιά του το χρώμα k. Έτσι ο αλγόριθμος του δίνει το χρώμα $k+1$. Τώρα πλέον τα τελευταία $k+1$ ψηφία σχηματίζουν το D_{k+1}. Ομοίως το στοιχείο που θα εισέλθει ανάμεσα στο D_{k-2} και στο D_{k-1} θα πάρει το χρώμα k και αριστερά του D_{k+1} θα δημιουργηθεί το D_k. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε τελικά την παράθεση: $D_2 \| D_3 \| \dots \| D_{k+1}$. Το $(k+1)^0$ σημείο αριστερά του δεν έχει κόμβους και ακριβώς δεξιά του έχει κόμβο χρωματισμένο με το 2, το οποίο κρύβει όλα τα 1 που υπάρχουν στα δεξιά. Παίρνει λοιπόν το χρώμα 1 κι έτσι δημιουργείτε και το D_1. Με αυτό τον τρόπο από το C_k παίρνουμε το C_{k+1}.
Ο C_k έχει k χρώματα και χρησιμοποιεί n_k το πλήθος στοιχεία. Συνεπώς έχουμε:

$$n_k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2} \leq k^2 \quad \Rightarrow \quad k \geq \sqrt{n_k}$$

Το τελευταίο αποδεικνύει το θεώρημα.

Άνω όριο

Η εύρεση ενός άνω ορίου μπορεί να γίνει με την ίδια προσέγγιση της προηγούμενης ενότητας. Ένα άνω όριο του αλγορίθμου βρίσκεται ότι είναι η χρήση $\lfloor \frac{n}{2} + 2 \rfloor$ χρωμάτων.

Λήμμα 5.2.2. Σε κάθε χρωματισμό με τον fully Greedy αλγόριθμο το πολύ τέσσερα χρώματα εμφανίζονται μόνο μια φορά στον χρωματισμό.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή
Για χρωματισμό μέχρι τεσσάρων κόμβων δεν μπορούν προφανώς να υπάρξουν πέντε χρώματα, πόσο μάλλον διαφορετικά μεταξύ τους. Έτσι για ακολουθίες εισόδων μέχρι τεσσάρων στοιχείων ισχύει το λήμμα.
Αν ο χρωματισμός μας είχε ένα, δύο ή τρία χρώματα να εμφανίζονται μόνο μια φορά μέσα σε αυτόν, τότε όποιο χρώμα και να έπαιρνε ο νέος κόμβος θα είχαμε το πολύ τέσσερα χρώματα να έχουν μοναδική εμφάνιση.
Έστω ο χρωματισμός μας έχει ακριβώς τέσσερα χρώματα, τα a, b, c και d, να εμφανίζονται μόνο μια φορά, κι έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας σε αυτή τη διάταξη

$$\ldots a \ldots b \ldots c \ldots d \ldots$$

Ισχυρισμός. Το μεγαλύτερο χρώμα από τα τέσσερα θα είναι ή το b ή το c.

Πράγματι. Υποθέτουμε ότι το μεγαλύτερο χρώμα είναι το a. Ο κόμβος με το χρώμα a εισήλθε μετά από τους άλλους τρεις μοναδικά χρωματισμένους κόμβους. Αυτό ισχύει γιατί αν υποθέσουμε πως κάποιος μοναδικά χρωματισμένος κόμβος εισήλθε μετά από αυτόν με το χρώμα a, το μοναδικό χρώμα που θα έπαιρνε θα έπρεπε να είναι καινούριο και άρα μεγαλύτερο του a αφού όλα τα χρώματα μέχρι το a θα είχαν χρησιμοποιηθεί . Ο κόμβος με το χρώμα a βλέπει και το χρώμα c και το χρώμα d, γιατί σε διαφορετική περίπτωση θα έπαιρνε κάποιο από αυτά τα χρώματα, από τον άπληστο αλγόριθμο, και όχι κάποιο μεγαλύτερό τους. Άρα $b < c < d$. Όμοια με πριν, επειδή $d > c$ και $d > b$, ο κόμβος με το χρώμα d εισήλθε μετά τους κόμβους με τα χρώματα b και c. Το ότι πήρε καινούριο χρώμα σημαίνει πως έβλεπε το χρώμα b, άρα $b > c$. Λίγο πιο πριν βρήκαμε $b < c$, άτοπο. Συνεπώς το μεγαλύτερο χρώμα δεν μπορεί να είναι το a. Όμοια το μεγαλύτερο χρώμα δεν μπορεί να είναι το d (θα είχαμε $c < b < a$ και $c > b$). Άρα πράγματι το μεγαλύτερο από τα τέσσερα χρώματα είναι ή το b ή το c.

Ισχυρισμός. Ο νέος κόμβος δεν χρειάζεται καινούριο χρώμα.

Αυτό γιατί, έστω ότι το μεγαλύτερο χρώμα είναι το b (ή το c).

- Αν ο νέος κόμβος εισέλθει στα αριστερά του b (ή του c) τότε σίγουρα δεν θα βλέπει το d, αφού αυτό εμφανίζεται μία μόνο φορά, και αυτή στα δεξιά του b (ή του c), και άρα το χρώμα που θα πάρει θα είναι μικρότερο ή ίσο του d

- Αν ο νέος κόμβος εισέλθει στα δεξιά του b (ή του c) τότε σίγουρα δεν θα βλέπει το a, αφού αυτό εμφανίζεται μία μόνο φορά, και αυτή στα αριστερά του b (ή του c), και άρα το χρώμα που θα πάρει θα είναι μικρότερο ή ίσο του a

Συνεπώς ο νέος κόμβος δεν παίρνει καινούριο χρώμα, και το λήμμα αποδείχτηκε.

Πρόταση 5.2.1. Για κάθε $n \geq 2$ καμία ακολουθία εισόδου μήκους n δεν αναγκάζει τον αλγόριθμο να χρησιμοποιήσει παραπάνω από $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ χρώματα.

Απόδειξη. Έστω ότι ακολουθία εισόδου n στοιχείων έχει χρωματιστεί με τον UniMax Greedy αλγόριθμο. Έστω ότι έχουν χρησιμοποιηθεί k χρώματα στον χρωματισμό, εκ των οποίων τα u μία και μόνο φορά. Τα $k-u$ χρώματα έχουν χρησιμοποιηθεί τουλάχιστον δύο φορές και άρα $n \geq 2(k-u)+u$. Από το προηγούμενο λήμμα $u \leq 4$. Άρα έχουμε

$$n \geq 2(k-u)+u \;\Rightarrow\; 2k \leq n+u \;\Rightarrow\; k \leq \lfloor \tfrac{n+u}{2} \rfloor \leq \lfloor \tfrac{n+4}{2} \rfloor \leq \lfloor \tfrac{n+u}{2} \rfloor = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + 2$$

Παρατηρήσεις

1. Ο UniMax Greedy αλγόριθμος σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιεί λιγότερα χρώματα από τον fully Greedy της προηγούμενης ενότητας, αλλά και αντίστροφα. Γενικά πάντως θεωρείτε ότι είναι καλύτερος από τον fully Greedy . Ο βασικός λόγος που παρουσιάστηκε είναι γιατί έδωσε την ιδέα για την δημιουργία ενός πιο αποδοτικού ντετερμινιστικού αλγόριθμου, αυτού που παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα και ενός πιθανοτικού ο οποίος επίσης παρουσιάζσεται πιο κάτω.

2. Η τεχνική εύρεσης του κάτω ορίου για τον fully Greedy αλγόριθμο δεν μπορεί να δουλέψει εδώ. Γενικά οι προσεγγίσεις που έχουν γίνει οδηγούν σε κάτω όριο της τάξης του $\Omega(\sqrt{n})$. Εικάζεται ότι το άνω όριο μπορεί να κατέβει στο $\mathrm{O}(\sqrt{n})$. Το πρόβλημα παραμένει ανοιχτό.

3. Πειραματικές μελέτες δείχνουν τον αλγόριθμο να χρησιμοποιεί $O(\log n)$ χρώματα κατα μέσο όρο σε τυχαιές εισόδους. Από αυτή την άποψη μπορεί να θεωρηθεί καλός.

5.3 Ο leveled UniMax Greedy αλγόριθμος

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε έναν ικανοποιητικό ντετερμινιστικό αλγόριθμο για το online με σχετικές θέσεις πρόβλημα. Εισήχθε και αυτός στο [FLM+05]. Είναι αλγόριθμος που βασίζεται στον UniMax Greedy αλγόριθμο και χρησιμοποιεί μόνο $\mathrm{O}(\log^2 n)$ χρώματα, όπως θα δείξουμε. Χρωματίζει τον κόμβο που εισέρχεται σε δυο στάδια. Πρώτα τον κατατάσσει σε ένα επίπεδο, καθένα από τα οποία έχει μοναδικά χρώματα ανάμεσα στα άλλα επίπεδα, και μετά τον χρωματίζει με βάση τα χρώματα αυτού του επιπέδου. Τον ονομάζουμε leveled UniMax Greedy αλγόριθμο και είναι ώρα να δούμε πως ακριβώς κάνει τα παραπάνω.

5.3.1 Ιδέα του αλγορίθμου

Έστω ότι εισέρχεται ο κόμβος x στον γράφο. Συμβολίζουμε με $l(w)$ το επίπεδο στο οποίο υπάρχει το w. Διαφοροποιώντας τον ορισμό του *βλέπει* που κάναμε για τον UniMax Greedy αλγόριθμο έχουμε

Ορισμός 5.3.1. *Θα λέμε ότι ο x βλεπει τον y ή ισοδύναμα ο y φαίνεται στον x αν και μόνο αν για κάθε z ανάμεσα στα x και y ισχύει $l(z) < l(y)$*

Όταν λοιπόν εισέρχεται ο x τον κατατάσουμε στο μοναδικό επίπεδο $l(x)$ το οποίο είναι το μικρότερο για το οποίο δεν υπάρχει είτε από τα αριστερά είτε από τα δεξιά του x (είτε κι απο τις δύο μεριές) κόμβος y του υπεργράαφου που να φαίνεται στον x και να ανήκει σε αυτό το επίπεδο.

Τώρα χρωματίζουμε τον x με βάση την ακολουθία των κόμβων που ανήκουν στο ίδιο με αυτόν επίπεδο και τους οποίους βλέπει. Η ακολουθία αυτή των κόμβων δηλαδή δεν περιέχει τους κόμβους y για τους οποίους είτε $l(y) \neq l(x)$ είτε $l(y) = l(x)$ αλλά ανάμεσα στον και y τον x υπάρχει z τέτοιο ώστε $l(z) > l(x)$. Για τον χρωματισμό αυτής της ακολουθίας κόμβων χρησιμοποιούμε τον UniMax Greedy αλγόριθμο χρησιμοποιώντας τα χρώματα του $l(x)$ μόνο. Με το παράδειγμα γίνεται πιο κατανοητή η δράση του αλγορίθμου. Η τελεία δηλώνει την θέση του νέου κόμβου και ο δείκτης στα χρώματα δείχνει το επίπεδο στο οποίο ανήκουν.

Παράδειγμα 5.3.1.

1^0 **βήμα:** 1_1 *ο πρώτος κόμβος κατατάσεται στο επίπεδο l_1 και παίρνει τον πρώτο αριθμό αυτού του επιπέδου*

2^0 **βήμα:** $1_1\bullet$ *δεξιά της τελείας δεν φαίνεται κανένας κόμβος που να ανήκει στο επίπεδο 1. Έτσι ο νέος κόμβος κατατάσεται στο επίπεδο 1 και με τον UniMax greedy αλγόριθμο παίρνει το χρώμα 2_1*

3^0 **βήμα:** $1_1 \bullet 2_1$ *ο νέος κόμβος βλέπει και δεξιά του και αριστερά του χρώματα που ανήκουν στο επίπεδο 1. Έτσι γίνεται κόμβος επιπέδου 2 και παίρνει το πρώτο χρώμα αυτού του επιπέδου ως πρώτος κόμβος αυτού, το 1_2.*

4^0 **βήμα:** $1_1 1_2 2_1\bullet$ *εδώ πάλι δεξιά της τελείας δεν φαίνεται κανένας κόμβος που να ανήκει στο επίπεδο 1 και άρα ο νέος κόμβος θα πάρει χρώμα από το επίπεδο 1. Ο UniMax Greedy αλγόριθμος θα κάνει τον χρωματισμό στην ακολουθία μόνο των κόμβων που βρίσκονται δεξιά του κόμβου με το χρώμα 1_2. Τελικά θα πάρει το χρώμα 1_1*

5^0 **βήμα:** $1_1 1_2 2_1 \bullet 1_1$ *εδώ και δεξιά και αριστερά φαίνεται χρώμα επιπέδου 1. Επειδή δεξιά της τελείας δεν φαίνεται χρώμα επιπέδου 2 ο νέος κόμβος κατατάσεται στο επίπεδο 2, παρότι αριστερά του κόμβου φαίνεται χρώμα επιπέδου 2. Τελικά παίρνει το χρώμα 2_2.*

6^0 **βήμα:** $1_1 1_2 2_1 \bullet 2_2 1_1$ *στα δεξιά του κόμβου δεν φαίνεται κόμβος επιπέδου 1, κρύβονται πίσω από τον κόμβο επιπέδου 2. Έτσι ο νέος κόμβος εντάσσεται στο επίπεδο 1. Ο χρωματισμός του θα γίνει με βάση τους κόμβους που βρίσκονται ανάμεσα στους δύο κόμβους επιπέδου 2 καθώς μόνο αυτοί ανήκουν στο επίπεδό του και μπορεί να βλέπει. Θα πάρει το χρώμα 1_1.*

7^0 **βήμα:** $1_1 1_2 2_1 \bullet 1_1 2_2 1_1$ *εδώ και δεξιά και αριστερά φαίνονται κόμβοι που ανήκουν στο επίπεδο 1 αλλά και κόμβοι που ανήκουν στο επίπεδο 2. Έτσι ο νέος κόμβος γίνεται ο πρώτος κόμβος επιπέδου 3 και παίρνει το χρώμα 1_3.*

8^0 **βήμα:** $1_1 1_2 2_1 1_3 1_1 2_2 1_1$ *δεν γίνεται άλλος έλεγχος, έξοδος.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου αλλά και την ανάλυση της πολυπλοκότητάς του, κάνουμε μία ανάλυση αυτού και κάποιες παρατηρήσεις επάνω στον τρόπο δράσης του.

5.3.2 Ανάλυση του αλγορίθμου

Ξεκινάμε κάνοντας τις εξής παρατηρήσεις:

1. Υποθέτουμε πως ένας κόμβος x εισέρχεται στον γράφο και κατατάσεται στο επίπεδο $i > 1$. Αφού το x δεν κατατάχθηκε σε κάποιο επίπεδο $j < i$ σημαίνει πως για καθε j βλέπει και στα αριστερά και στα δεξιά του κόμβο που ανήκει στο j επίπεδο. Έστω l_j και r_j τα εν λόγω σημεία στα αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Με $E_j(x)$ δηλώνουμε την αλυσίδα $l_j - r_j$.

   Ισχυρισμός. Για κάθε $j < k < i$ ισχύει $E_j \subset E_k$

   Ο ισχυρισμός ισχύει γιατί για να φαίνονται τα σημεία του επιπέδου j στον x θα πρέπει να βρίσκονται και τα δύο πιο κοντά στον x απ' ότι τα αντίστοιχα του k επιπέδου.

2. Τα σημεία του i επιπέδου δημιουργούν αλυσίδες, τις i-αλυσίδες.

   Ισχυρισμός. Κάθε E της προηγούμενης παρατήρησης είναι μια i-αλυσίδα $x - y$ του υπεργράφου με την ιδιότητα τα x και y να ανήκουν στο i επίπεδο και όλα τα εσωτερικά σημεία της αλυσίδας να ανήκουν σε μικρότερο επίπεδο.

   Είναι έτσι καθώς σε διαφορετική περίπτωση αν υπήρχε κόμβος z μεγαλύτερου επιπέδου απο το i ανάμεσα στα άκρα κάποιου $E_j(x)$, με το x επιπέδου i, τότε ο x θα βλέπει αυτόν τον κόμβο από τη μία μεριά και όχι το άκρο του $E_j(x)$ που βρίσκεται στην ίδια μερία με τον z.

3. Το E δημιουργείτε όταν ο δεύτερος από τους ακραίους κόμβους του εισέρχεται.

   Ορισμός 5.3.2. *Θα λέμε ότι ο x κλείνει την αλυσίδα E όταν ακριβώς είναι ο δεύτερος κατά σειρά εισαγωγής κόμβος από τους δυο ακραίους της αλυσίδας. Τον x τον καλούμε κόμβο κλεισίματος.*

   Ισχυρισμός. Από κατασκευής ο x δεν μπορει να κλείνει κι άλλη αλυσίδα

   Πράγματι. Σε αντίθετη περίπτωση το άλλο άκρο της δεύτερης αλυσίδας θα βρισκόταν σίγουρα στην αντίθετη κατεύθυνση του άλλου άκρου της πρώτης αλυσίδας, αλλίως ο κόμβος μας δεν θα έκλεινε και τις δύο αλυσίδες. Έτσι ο κόμβος μας μπαίνοντας ανάμεσα στους δύο αυτούς κόμβους που ανήκουν στο i επίπεδο δεν θα κατατασσόταν κι αυτός στο i επίπεδο.

4. Δίνουμε ένα χρήσιμο ορισμό.

   Ορισμός 5.3.3. *Ορίζουμε ως* τρέξιμο σε επίπεδο i *κάθε υπακολουθία $x_1 x_2 \dots x_k$ της ακολουθίας των κόμβων του γράφου που ικανοποεί τα ακόλουθα:*

   - *οι κόμβοι της ανήκουν στο i επίπεδο,*
   - *ανάμεσά στους κόμβους της δεν παρεμβάλεται κανένα σημείο που ανήκει σε μεγαλύτερο από το i επίπεδο και*

- *οποιοσδήποτε κόμβος επιπέδου i του μέχρι τώρα γράφου και αν προστεθεί σε αυτή αναιρεί την δεύτερη ιδιότητα (δηλαδή παίρνουμε την μέγιστη υπακολουθία ως προς τον αριθμό των κόμβων που ικανοποιεί την δεύτερη ιδιότητα).*

Τους x_1 και x_k τους καλούμε άκρα του.

Ισχυρισμός. Οταν ένα σημείο κατατάσσεται στο επίπεδο i και εισέρχεται μέσα σε ένα τρέξιμο αυτού του επιπέδου τότε θα μπαίνει είτε στην αρχή είτε στο τέλος του τρεξίματος

Τούτο γιατί αν έμπαινε ανάμεσα στα δύο άκρα του τρεξίματος, θα έβλεπε και δεξια και αριστερά σημεία που θα ανήκαν στο i επίπεδο και ο αλγόριθμος δεν θα τον κατέτασσε στο i επίπεδο.

5. Τα τρεξίματα διαρκώς μεταβάλλονται καθώς εισέρχονται νέοι κόμβοι. Με κάθε είσοδο νέου κόμβου ένα τρέξιμο μπορεί είτε να μεγαλώσει, όπως είδαμε πιο πάνω, είτε να χωριστεί σε δύο νέα, όταν ένα σημείο μεγαλύτερου επιπέδου εισέρχεται κάπου ανάμεσα στα δύο άκρα του.

6. Συνεχίζοντας από τις παρατηρήσεις 1 και 2 έχουμε

   Ισχυρισμός. Όταν ο x, επιπέδου i, εισέρχεται στον γράφο, καταστρέφει τις αλυσίδες $E_j(x)$, $j < i$, στων οποίων τα άκρα μπαίνει ανάμεσα. Μάλιστα καταστρέφει μόνο αυτές.

   Αυτό αληθεύει καθώς όταν ο x, επιπέδου i, μπαίνει στο εσωτερικό μιας αλυσίδας $E_j(x)$, $j < i$, τότε αυτή παύει να έχει στο εσωτερικό της μόνο κόμβους με επίπεδο μικρότερο από αυτό των ακραίων κόμβων της κι έτσι καταστρέφεται. Προφανώς δεν μπορεί να επηρεάσει αλυσίδες στις οποίες δεν παρεμβάλλεται. Θα κατασκευάσουμε ένα δάσος με κόμβους τους κόμβους του γράφου. Κάνουμε τον κάθε νέο κόμβο x που εισέρχεται ρίζα του δάσους και πατέρα όλων των κόμβων κλεισίματος των $E_j(x)$ που κατέστρεψε. Προφανώς αυτοί οι κόμβοι δεν μπορούν να ξανακλείσουν κάποιο $E_j(x)$, αφου για όλους τους επόμενους κόμβους θα υπάρχουν ήδη στον γράφο. Από κατασκευής τα φύλλα του δέντρου είναι οι κόμβοι επιπέδου 1, καθώς δεν μπορούν να σπάσουν κανένα $E_j(x)$ και συνεπώς δεν μπορουν να έχουν παιδιά.

   Ισχυρισμός. Η παραπάνω κατασκευή είναι πράγματι δάσος.

   Αληθής ισχυρισμός καθώς κάθε κόμβος πατέρας είναι μεγαλύτερου επιπέδου απ' ότι τα παιδιά του και κανένα παιδί του δεν μπορεί να έχει κι άλλο πατέρα.

7. Ισχυριζόμαστε το εξής

   Ισχυρισμός. Οι κόμβοι που δεν είναι κόμβοι κλεισίματος είναι ρίζες δέντρων του δάσους. Κάθε κόμβος i επιπέδου έχει $i - 1$ παιδιά.

αν υποθέσουμε πως ένας κόμβος δεν είναι κόμβος κλεισίματος τότε δεν μπορεί να έχει πατέρα λόγω του τρόπου κατασκευής του δάσους. Το ότι ο κόμβος επιπέδου i κατατάχθηκε σε αυτό το επίπεδο μας δηλώνει πως για κάθε επίπεδο $j, j < i$, βλέπει ένα κόμβο στα δεξιά και ένα κόμβο στα αριστερά που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο. Ο δευτερο-εισαχθήσας από τους δύο πιο πάνω κόμβους είναι κόμβος κλεισίματος της j-αλυσίδας που αυτοί δημιουργούν. Συνεπώς γίνεται παιδί του κόμβου που εισέρχεται. Άρα σε κάθε επίπεδο $j, j < i$, ο κόμβος επιπέδου i έχει από ένα παιδί. Τελικά δηλαδή έχει $i - 1$ παιδιά.

Λήμμα 5.3.1. Ο leveled UniMax Greedy αλγόριθμος χρησιμοποεί το πολύ $\log n$ επίπεδα.

Απόδειξη. Λόγω της παρατήρησης 7 είμαστε βέβαιοι πως κάθε δέντρο του δάσους είναι δυωνυμικό δέντρο κι έτσι κάθε ρίζα του, αν είναι κόμβος επιπέδου i, έχει 2^i κόμβους ως απογόνους. Αν λοιπόν έχουν εισαχθεί n κόμβοι και έχουν χρησιμοποιηθεί m επίπεδα τότε $2^m \leq n \Leftrightarrow m \leq \log n$ δηλαδή έχουν χρησιμοποιηθεί το πολύ $\log n$ επίπεδα.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε οτι ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί $O(\log n)$ χρώματα σε κάθε επίπεδο. Υπενθιμίζουμε τον τρόπο με τον οποίο κάθε τρέξιμο μπορεί να μεταβάλλεται: μεγαλώνει αν κάποιος νέος κόμβος ιδίου επιπέδου μπει σε ένα από τα δύο άκρα του ή χωρίζεται σε αριστερό και δεξί μέρος αν ένας κόμβος μεγαλύτερου επιπέδου μπει ανάμεσα στα δύο άκρα του.

Λήμμα 5.3.2. Σε κάθε χρονική στιγμή τα χρώματα του κάθε τρεξίματος σχηματίζουν ακολουθία της μορφής $C_0(a, b)$, όπως ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Επιπλέον όταν το j-οστο χρώμα ενός επιπέδου i δίνεται σε ένα κόμβο x τότε το τρέξιμο στο οποίο αυτός ανήκει έχει μαζί με τον x τουλάχιστον $2^{j-2} + 1$ κόμβους.

Απόδειξη. Υπενθιμίζουμε

1. $S_1 = (1)$
2. $S_k = S_{k-1} \| (k) \| S_{k-1}, k > 1$
3. $|S_k| = 2^k - 1$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στην ακολουθία εισόδου των κόμβων.
Όταν έχει χρησιμοποιηθεί μόνο ένα χρώμα σε ένα επίπεδο i η υπόθεση ισχύει καθώς τότε κάθε τρέξιμο αυτού του επιπέδου θα έχει μόνο ένα κόμβο.
Έστω λοιπόν μέχρι τη χρονική στιγμή t τα χρώματα του κάθε τρεξίματος σχηματίζουν ακολουθία της μορφής $C_0(a, b)$ και όταν το j-οστο χρώμα ενός επιπέδου i δίνεται σε ένα κόμβο x τότε το τρέξιμο στο οποίο αυτός ανήκει έχει μαζί με τον x τουλάχιστον $2^{j-2} + 1$ κόμβους. Έστω οτι έχουν χρησιμοποιηθεί $n - 1$ χρώματα. Την επόμενη χρονική στιγμή εισέρχεται ο νέος κόμβος έστω σε ένα τρέξιμο επιπέδου i. Θα μπει όπως είδαμε πιο πάνω είτε στα αριστερά είτε στα δεξιά αυτού. Από

επαγωγική υπόθεση το τρέξιμο πριν ήταν της μορφής $C_0(a, b)$ και από την όμορφη παρατήρηση της προηγούμενης ενότητας επειδή ο κόμβος εισέρχεται σε ένα από τα δύο άκρα του ξέρουμε ότι και το νέο τρέξιμο θα είναι της ίδιας μορφής. Αν χρησιμοποιηθέι ένα από τα $n-1$ χρώματα για τον νέο κόμβο τότε από επαγωγική υπόθεση εξακολουθεί να ισχύει πως όταν το j-στό χρώμα ενός επιπέδου i δίνεται σε ένα κόμβο x τότε το τρέξιμο στο οποίο αυτός ανήκει έχει τουλάχιστον $2^{j-2}+1$ κόμβους.
Έστω χρησιμοποιείτε λοιπόν καινούριο χρώμα για το χρωματισμό του νέου κόμβου , το n. Θέλουμε να δείξουμε πως το τρέξιμο στο οποίο αυτός ανήκει έχει $2^{n-2}+1$ κόμβους. Πριν την ειαγωγή του τελευταίου κόμβου το τρέξιμο ήταν συνεχόμενη ακολουθία του S_{n-1}. Αν υποθέσουμε οτι ο νέος κόμβος μπήκε στα αριστερά του τρεξίματος τότε

Ισχυρισμός. το γεγονός ότι πήρε καινούριο χρώμα μας δηλώνει πως η συνεχόμενη υπακολουθία $C_0(a, b)$ είχε σαν πρόθεμα το $S_{n-2}\|(n-1)$

Πράγματι. Προκύπτει εύκολα από το λήμμα της όμορφης παρατήρησης. Αυτό μας λέει πως το τρέξιμο έχει τουλάχιστον $2^{n-2}-1$ κόμβους χρωματισμένους με τα χρώματα του S_{n-2}, τον κόμβο με το χρώμα $n-1$ και τον νέο κόμβο. Συνολικά δηλαδή έχει τουλάχιστον $2^{n-2}+1$ κόμβους. Συμμετρικά αν ο νέος κόμβος υποθέσουμε οτι μπαίνει στα δεξιά του τρεξίματος τότε θα είχε σαν επίθεμα το $(n-1)\|S_{n-2}$ και παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Άρα σε αυτό το τρέξιμο για να χρησιμοποιηθεί το n-οστο χρώμα πρέπει να υπάρχουν $2^{n-2}+1$ κόμβοι. Για όλα τα άλλα τρεξίματα εξακολουθεί να ισχύει το ίδιο από την επαγωγική υπόθεση κι έτσι αποδυκνείεται το Λήμμα.

5.3.3 Ορθότητα

Σαν αποτέλεσμα των προηγουμένων έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.1. Σε κάθε βήμα ο γράφος είναι conflict-free χρωματισμένος

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια τυχαία αλυσίδα. Έστω l το μεγαλύτερο επίπεδο που έχει χρησιμοποιηθεί σε αυτή την αλυσίδα. Παίρνουμε την ακολουθία των κόμβων αυτής της αλυσίδας που βρίσκονται στο επίπεδο l. Αυτή θα είναι συνεχόμενη υπακολουθία ενός τρεξίματος και αφού τα τρεξίματα είναι της μορφής $C_0(a, b)$ και αυτή η ακολουθία θα είναι της μορφής $C_0(a', b')$. Έτσι θα έχει ένα χρώμα που θα χρησιμοποιείται μόνο σε ένα κόμβο αυτής. Οι κόμβοι άλλων επιπέδων έχουν σίγουρα διφορετικό χρώμα από αυτόν τον κόμβο. Έτσι η τυχαία αλυσίδα θα έχει το χρώμα αυτού του κόμβου να χρησιμοποιείται μόνο μια φορά και άρα θα είναι conflict-free χρωματισμένη.

Το θεώρημα αποδεικνύει την ορθότητα του αλγορίθμου

5.3.4 Πολυπλοκότητα

Το ακόλουθο θεώρημα προκύπτει επίσης από τα προηγούμενα και μας δίνει ένα άνω και ένα κάτω όριο του αλγορίθμου.

Θεώρημα 5.3.2.

1. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί το πολύ $(2+\log n)\log n$ χρώματα

2. Στην χειρότερη περιπτωση ο αλγόριθμος μπορεί να αναγκαστεί να χρησιμοποιήσει $\Omega(\log n)$ χρώματα μετά από είσοδο n κόμβων.

Απόδειξη. 1. Είδαμε στα δυο προηγούμενα λήμματα πως αν έχουν εισαχθεί n κόμβοι χρησιμοποιούνται το πολύ $\log n$ επίπεδα και για να χρησιμοποιηθεί το k-στό χρώμα σε ένα τρέξιμο αυτό θα πρέπει να έχει τουλάχιστον 2^{k-2} κόμβους (χωρίς τον x). Έστω λοιπόν έχουν χρησιμοποιηθεί k χρώματα στο τρέξιμο και αυτό έχει m κόμβους, τότε θα έχουμε

$$2^{k-2} \leq m \leq n \qquad \Rightarrow \qquad k \leq 2+\log n$$

Συνεπώς το πολύ n επίπεδα και το πολυ $2+\log n$ χρώματα σε κάθε επίπεδο, δηλαδή συνολικά χρησιμοποιούνται το πολύ $(2+\log n)\log n$ χρώματα για τον χρωματισμό n κόμβων.

2. Εισάγουμε τους κόμβους στον υπεργράφο με την εξής σειρά.

   - Πρώτα εισάγουμε 2^{k-1} κόμβους από τα δεξιά προς τα αριστερά κι έτσι όλοι κατατάσονται στο επίπεδο 1 και για τον χρωματισμό τους χρησιοποιούνται k χρώματα αυτού του επιπέδου σύμφωνα με το λήμμα της όμορφης παρατήρησης. Έστω P_1 δηλώνει το σύνολο αυτών των κόμβων.
   - Εισάγουμε 2^{k-2} στοιχεία ως εξής το πρώτο ανάμεσα στον πρώτο και δεύτερο κόμβο του P_1 το δεύτερο ανάμεσα στον τρίτο και τέταρτο κόμβο του P_1 και ούτω καθ' εξής, ο j-οστός νέος κόμβος δηλαδή εισέρχεται ανάμεσα στον $(2j-1)$ και τον $2j$ κόμβο του P_1.

     Ισχυρισμός. Όλοι αυτοί οι νέοι κόμβοι θα καταταχθούν από τον αλγόριθμο στο επίπεδο 2 και θα χρησιμοποιηθούν για τον χρωματισμό τους $k-1$ χρώματα του επιπέδου 2.

     Πράγματι κάθε ένας από αυτούς θα έχει και δεξια και αριστερά του κόμβο επιπέδου 1 και κανείς απο αυτούς δεν βλέπει στα αριστερά του κόμβο επιπέδου 2. Έτσι γίνονται όλοι κόμβοι επιπέδου 2 και σύμφωνα με το λήμμα της όμορφης παρατήρησης θα χρησιμοποιηθούν $k-1$ χρώματα.

     Έστω P_2 δηλώνει το σύνολο αυτών των κόμβων. Η ακολουθία των επιπέδων των κόμβων του P_2 είναι (1,2,1,1,2,1, ...) με την τριπλέτα (1,2,1) να εμφανίζεται 2^{k-2} φορές. Είναι παράθεση λοιπόν των S_2

- Εισάγουμε τώρα 2^{k-3} κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά, το πρώτο ανάμεσα στην πρώτη και δεύτερη τριπλέτα του P_2, το δεύτερο στην τρίτη και τέταρτη τριπλέτα, το j-οστό στην $(2j-1)$ και την $2j$ τριπλέτα και ούτω καθ' εξής.

  Ισχυρισμός. Όλοι αυτοί οι νέοι κόμβοι θα καταταχθούν από τον αλγόριθμο στο επίπεδο 3 και θα χρησιμοποιηθούν για τον χρωματισμό τους $k-2$ χρώματα του επιπέδου 3.

  Είναι έτσι καθώς αν η τελεία δηλώνει τη θέση του νέου κόμβου ανάμεσα στις δύο τριπλέτες τότε από αυτή φαίνονται και δεξιά και αριστερά κόμβοι και των δύο επιπέδων: $121 \bullet 121$. Κανείς από τους νέους κόμβους δεν βλέπει δεξιά του κόμβο επιπέδου 3 κι έτσι όλοι κατατάσσονται στο 3 επίπεδο. Σύμφωνα με το λήμμα της όμορφης παρατήρησης δημιουργούν ακολουθία της μορφής $C_0(1, 2^{k-3})$ και άρα χρησιμοποιούνται $k-2$ χρώματα.
  Η ακολουθία των επιπέδων των κόμβων του P_3 είναι

  $$(1{,}2{,}1{,}3{,}1{,}2{,}1{,}1{,}2{,}1{,}3{,}1{,}2{,}1, \ldots)$$

  με το (1,2,1,3,1,2,1) να εμφανίζεται 2^{k-3} φορές. Είναι παράθεση λοιπόν 2^{k-3} το πλήθος S_3

- Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο. Πριν εισάγουμε το i-οστό πακέτο των 2^{k-i} κόμβων έχουμε το σύνολο των κόμβων P_{i-1} να έχει πλήθος $2^{k-1} + \ldots + 2^{k-i+1}$ και η ακολουθία των επιπέδων των κόμβων του να είναι παραθέσεις των S_{i-1}. Οι κόμβοι μπαίνουν από αριστερά προς τα δεξιά ανάμεσα στα S_{i-1}.

  Ισχυρισμός. Όλοι οι νέοι κόμβοι θα καταταχθούν από τον αλγόριθμο στο επίπεδο i και θα χρησιμοποιηθούν για τον χρωματισμό τους $k-i+1$ χρώματα του επιπέδου i.

  Αληθής ισχυρισμός καθώς όλα τα επίπεδα μέχρι το $i-1$ φαίνονται από την τελεία, $S_{i-1} \bullet S_{i-1}$, και στα δεξιά κανενός δεν φαίνεται κόμβος επιπέδου i. Από το λήμμα της όμορφης παρατήρησης η ακολουθία των επιπέδων θα είναι της μορφής $C_0(1, 2^{k-i})$ και άρα θα χρησιμοποιηθούν $k-i+1$ χρώματα.

- Τελειώνουμε κάνοντας την k-οστή εισαγωγή πακέτου. Το πακέτο αυτό αποτελείται από ένα κόμβο που εισέρχεται ανάμεσα στα δύο S_{k-1} αφου πριν η ακολουθία των επιπέδων των κόμβων ήταν $S_{k-1} \| S_{k-1}$. Ο νέος κόμβος κατατάσεται στο επίπεδο k και παίρνει το πρωτο χρώμα αυτού.

Συνολικά κάναμε εισαγωγή

$$n = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^k - 1$$

κόμβων. Για τον χρωματισμό των κόμβων χρησιμοποιήθηκαν

$$c = k + (k-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{k(k+1)}{2}$$

διαφορετικά χρώματα. Άρα

$$c = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2} \geq \frac{k^2}{2} = \frac{(\log(n+1))^2}{2} \geq \frac{\log^2 n}{2}$$

Δηλαδή η ακολουθία εισόδου των κόμβων που κάναμε ανάγκασε τον αλγόριθμο να χρησιμοποιήσει $\Omega(\log^2 n)$ χρώματα.

Παρατηρήσεις

1. Ο χρωματισμός που κάνει ο leveled UniMax Greedy αλγόριθμος δεν είναι unimax cf χρωματισμός αλλά conflict-free. Μπορούμε βέβαια κάνοντας μια απλή αλλαγή να κάνουμε τον αλγοριθμό μας να δίνει unimax cf χρωματισμούς.
2. Μέχρι τώρα είδαμε ντετερμινιστικούς αλγορίθμους για την επιλυση του προβλήματος μας. Με βάση αυτούς μπορουμε να δημιουργήσουμε πιθανοτικούς αλγορίθμους με πολύ καλύτερα αποτελέσματα στον αναμενόμενο αριθμό χρωμάτων. Στην επόμενη ενότητα όμως δεν θα δουμε κάποιον από αυτούς αλλά μια άλλη ιδέα αλγορίθμου με τον οποίο ο αναμενόμενος αριθμός χρωμάτων πλησιάζει πολύ κοντα στο κάτω όριο χρήσης χρωμάτων που ισχύει για όλες τις δυναμικές περιπτώσεις.

5.4 O randomized UniMax greedy αλγόριθμος.

Στη συνέχεια θα μετατρέψουμε ton UniMax greedy σε πιθανοτικό. Η βασική ιδέα παρουσιάστηκε στο [Che06] και δίνει πιθανοτική λύση και σε πιο γεωμετρικά προβλήματα conflict free χρωματισμού. Αργότερα, στο [CFK$^+$06], προσαρμόστηκε και εμφανίστηκε η σχέση της ¨πιθανοτικής' ιδέας με τον Unimax greedy αλγόριθμο.

5.4.1 Ιδέα του αλγορίθμου

Ας υποθέσουμε οτι είμαστε στη μέση μιας διαδικασίας εισαγωγής. Έστω p ο επόμενος κόμβος. Ας θυμηθούμε οτι:

Ορισμός 5.4.1. *Ο p 'βλέπει' ένα κόμβο x αν όλοι οι κόμβοι που παρεμβάλλονται μεταξύ p και x είναι χρωματισμένοι με χρώμα μικρότερο του χρώματος του x. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε και ότι ο p 'βλέπει' το $c(x)$, όπου με $c(x)$ εννοούμε το χρώμα του x.*

Θα λέμε ότι

Ορισμός 5.4.2. *Ο p είναι ικανός για το χρώμα c αν δεν το βλέπει προς καμία κατεύθυνση.*

Για να δώσουμε χρώμα στον κόμβο p προσπελαύνουμε τα χρώματα σε αύξουσα σειρά ξεκινώντας από το μικρότερο και

- Αν ο p δεν είναι ικανός για το χρώμα στο οποίο βρισκόμαστε τότε προχωράμε στο επόμενο, στην αύξουσα σειρά, χρώμα.
- Αν ο p είναι ικανός για το χρώμα στο οποίο βρισκόμαστε τότε με πιθανότητα $1/2$ θα το πάρει αλλιώς συνεχίζουμε τον έλεγχο για το επόμενο χρώμα

μέχρι ο p να πάρει χρώμα.

Την τυχαία επιλογή που γίνεται την θεωρούμε στροφή νομίσματος. Θα λέμε οτι $n(c) = 1$ αν επιλεγεί το χρώμα c, ενώ $n(c) = 0)$ για μη επιλογή του χρώματος για τον κόμβο p.

Παράδειγμα 5.4.1. *Έστω η ακολουθία εισόδου σ=010213020*

1^0 *βήμα*	$\bullet$		$n(1) = 1$	*παίρνει το 1*
2^0 *βήμα*	$1\bullet$	$[1\bullet]$	$n(2) = 0$, $n(3) = 1$	*παίρνει το 3*
3^0 *βήμα*	$\bullet 13$	$[\bullet 13]$	$n(2) = 0$, $n(4) = 1$	*παίρνει το 4*
4^0 *βήμα*	$41 \bullet 3$	$[14 \bullet 3]$	$n(2) = 1$	*παίρνει το 2*
5^0 *βήμα*	$4 \bullet 123$	$[4 \bullet 123]$	$n(5) = 1$	*παίρνει το 5*
6^0 *βήμα*	$451 \bullet 23$	$[51 \bullet 23]$	$n(4) = 1$	*παίρνει το 4*
7^0 *βήμα*	$\bullet 451423$	$[\bullet 45]$	$n(1) = 0$, $n(2) = 1$	*παίρνει το 2*
8^0 *βήμα*	$24 \bullet 51423$	$[4 \bullet 5]$	$n(1) = 1$	*παίρνει το 1*
9^0 *βήμα*	$\bullet 24151423$	$[\bullet 245]$	$n(1) = 0$, $n(3) = 1$	*παίρνει το 2*
Τελικά	324151423			

5.4.2 Ορθότητα

Δεν χρειάζεται να πούμε πολλά πράγματα για να βεβαιώσουμε την ορθότητα του αποτελέσματος που δίνει ο αλγόριθμος. Με μια απλή ματιά βεβαιωνόμαστε οτι κάθε κόμβος παίρνει χρώμα που δεν βλέπει σε κανένα προηγούμενο κόμβο. Αν ανατρτέξουμε στην απόδειξη της ορθότητας του unimax greedy αλγορίθμου θα δούμε οτι αυτο το γεγονός από μόνο του μας εγγυάται πως ο χρωματισμός μέσω του αλγορίθμου θα είναι πάντα conflict free. Όλο το ενδιαφέρον βρίσκεται στην ανάλυση της πολυπλοκότητας.

5.4.3 Πολυπλοκότητα

Αναμενόμενος αριθμός χρήσης χρωμάτων

Για την ανάλυση της μέσης περίπτωσης ορίζουμε για το τυχαίο τρέξιμο του αλγορίθμου, το C_i να είναι το σύνολο των κόμβων που παίρνουν το χρώμα i από τον αλγόριθμο και το $C_{\geq i}$ να είναι το σύνολο των κόμβων που παίρνουν χρώμα μεγαλύτερο ή ίσο του i (προφανώς $C_i \subseteq C_{\geq i}$). Μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.4.1. Αν ο αλγόριθμος, για να δώσει χρώμα σε κόμβο p, ¨φτάσει' στο χρώμα i, τότε ο p θα πάρει το χρώμα i με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{8}$. Πιο τυπικά

$$Pr\{p \in C_i | p \in C_{\geq i}\} \geq \frac{1}{8}$$

Απόδειξη. Έστω εξετάζουμε ένα τυχαίο τρέξιμο στο οποίο ο p παίρνει χρώμα μεγαλύτερο ή ίσο του i. Υπάρχουν οι περιπτώσεις:

1. ο κόμβος p να είναι μόνος του στο $C_{\geq i}$. Τότε είναι ικανός για το χρώμα i και άρα με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ θα το πάρει.

2. ο κόμβος p να είναι δεξιότερος η αριστερότερος στο σύνολο $C_{\geq i}$. Τότε ας σκεφτούμε τον αμέσως διπλα κόμβο. Σε τουλάχιστον $\frac{1}{2}$ από τα τρεξίματα ο δίπλα κόμβος παίρνει χρώμα μεγαλύτερο από i (σκεφτόμενοι μόνο το στρίψιμο του νομίσματος). Τότε ο p είναι ικανός για το χρώμα i άρα με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ θα το πάρει. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν ο p παίρνει το i με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{4}$

3. ο κόμβος p βρίσκεται ανάμεσα σε δύο άλλους κόμβους στο $C_{\geq i}$. Τότε όμοια με πριν καθένας από τους δύο γειτονικούς θα πάρει μεγαλύτερο από το χρώμα i με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{2}$. Άρα και οι δύο θα πάρουν χρώμα μεγαλύτερο του i με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{4}$. Τότε ο p είναι ικανός για το χρώμα i και θα το πάρει με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση ο p θα πάρει το χρώμα i με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{8}$.

Λόγω των προηγουμένων άμεσα βγάινει ότι

$$Pr\{p \in C_i | p \in C_{\geq i}\} \geq \frac{1}{8}$$

Αποτέλεσμα του προηγούμενου λήμματος είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 5.4.1. O randomized UniMax greedy αλγόριθμος χρησιμοποιεί $O(\log n)$ χρώματα με μεγάλη πιθανότητα.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα

$$1 = Pr\{p \in C_{\geq i} | p \in C_{\geq i}\} = Pr\{p \in C_i | p \in C_{\geq i}\} + Pr\{p \in C_{\geq i+1} | p \in C_{\geq i}\}$$

$$\Downarrow$$

$$1 \geq \frac{1}{8} + Pr\{p \in C_{\geq i+1} | p \in C_{\geq i}\}$$

$$\Downarrow$$

$$Pr\{p \in C_{\geq i+1} | p \in C_{\geq i}\} \leq \frac{7}{8}$$

Το τελευταίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα οτι

$$E(|C_{\geq i+1}|) \leq \frac{7}{8} E(|C_{\geq i}|)$$

Προφανώς όλοι οι κόμβοι ανήκουν στο $C_{\geq 1}$ και $E(|C_{\geq 1}|) = n$. Άρα $\forall i \geq 1$ έχουμε

$$E(|C_{\geq i+1}|) \leq \left(\frac{7}{8}\right)^i n$$

αν το i είναι $i = c * \log_{8/7} n$ τότε

$$E(|C_{\geq i+1}|) \leq \frac{1}{n^{c-1}}$$

Το τελευταίο αποδυκνείει το θεώρημα.

Χειρότερη περίπτωση

Στο κομμάτι αυτό δεν θα κάνουμε κάποια μακροσκελή ανάλυση. Ο randomized unimax προφανώς μπορεί να συμπεριφερθεί όπως ο unimax σε κάποια περίπτωση. Συνεπώς στη χειρότερη περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθούν και $\Omega(\sqrt{n})$ χρώματα από τον αλγόριθμο. Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση του αλγορίθμου με κάποιες παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις

1. Η επιλογή της πιθανότητας $\frac{1}{2}$ δίνει μικρή βάση στον λογάριθμο. Με κατάλληλη επιλογή της πιθανότητας μπορούμε να φτιάξουμε τη βάση του λογαρίθμου. Παρ' όλα αυτά, όποια και να ήταν η επιλογή, η τάξη μεγέθους δεν θα άλλαζε.

2. Υλοποιήσεις και πειράματα με τυχαίες εισόδους έχουν δείξει ότι από μόνος του ο unimax greedy επιστρέφει $O(\log n)$ πλήθος χρωμάτων κατά μέσο όρο σε τυχαίες εισόδους. Για τον randomized unimax είμαστε και τυπικά σίγουροι για την τάξη μεγέθους. Παρακάτω θα δούμε έναν αλγόριθμο με πιο στενή ανάλυση.

5.5 Ένας πιθανοτικός αλγόριθμος

Πρόκειται για έναν αλγόριθμο ο οποίος για τον conflict-free χρωματισμό ενος on-line προβλήματος έχει αναμενόμενο αριθμό χρήσης χρωμάτων λογαριθμικό ως προς το μήκος εισόδου. Εισήχθει στο [BNCOS07] (εκτενής μελέτη στο [Che07]). Απαραίτητη προϋπόθεση βέβαια είναι ο ¨αντίπαλος' που δίνει την ακολουθία εισόδου να είναι ανυποψίαστος, με την έννοια οτι η ακολουθία εισόδου είναι προαποφασισμένη προτου αρχίσει ο αλγόριθμος να τρέχει. Με άλλα λόγια ο ¨αντίπαλος' δεν είναι σε θέση να γνωρίζει τις τυχαίες επιλογές του αλγορίθμου και να κάνει έπειτα τις δικές του επιλογές με σκοπό να τον αναγκάσει να χρησιμοποιήσει περρισσότερα χρώματα, κάτι λογικό αφού στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο συμβαίνει. Ο αλγόριθμος δεν χρειάζεται να ξέρει ούτε τις τελικές θέσεις των κόμβων ούτε το πλήθος των κόμβων που θα εισαχθούν και είναι ιδανικός για την περίπτωσή μας.

5.5.1 Ιδέα του αλγορίθμου

Η όλη ιδέα μοιάζει με την λύση της dynamic offline περίπτωσης. Θυμίζουμε οτι για τυχαίο γράφο-αλυσίδα χρησιμοποιώντας τρία χρώματα, έστω a, b, c, και δίνοντας το πρώτο χρώμα σε όποιοδήποτε κόμβο, μπορούμε να χρωματίσουμε αυτήν την αλυσίδα έτσι ώστε δυο οποιοιδήποτε γειτονικοί κόμβοι να έχουν διαφορετικό χρώμα. Τα a, b και c θα τα ονομάζουμε ψευδοχρώματα. Θεωρούμε τρια ανεξάρτητα σύνολα, το πρώτο θα περιέχει όλους τους κόμβους που έχουν χρωματιστεί με το a, το δέυτερο αυτους που εχουν πάρει το b και το τρίτο σύνολο αυτούς με το χρώμα c. Στο πέρασμα μας στην online περίπτωση θα παίρνουμε τυχαία ένα από τα τρία σύνολα και θα το χρωματίζουμε. Σημειώνουμε οτι τα ψευδοχρώματα a, b, c χρησιμοποιούνται μόνο για τον καθορισμό των συνόλων και δεν έχουν σχέση με τον τελικό χρώμα των κόμβων καθως επισης και ότι $a < b < c$. Ας δουμε όμως πως λειτουργεί ο αλγόριθμος.

Ο αλγόριθμος λειτουργεί σε φάσεις. Σε κάθε φάση μέσω μιας τυχαίας επιλογής επιλέγεται ένα ανεξάρτητο σύνολο. Κάθε κόμβος του συνόλου παίρνει τον τελικό αριθμό-χρώμα που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη φάση. Το ποιά θα είναι αυτά τα σύνολα καθορίζεται online καθώς εξελίσσεται το πρόβλημα.

Πιο συγκεκριμένα: κατά την εισαγωγή του, ο πρώτος κόμβος παίρνει το ψευδοχρώμα a. Ακολούθως γίνεται μια τυχαία επιλογή ψευδοχρώματος ανάμεσα στα a, b, c με την οποία υποδεικνύεται το αντίστοιχο σύνολο που θα χρωματίζεται στην πρώτη φάση.

- Αν η τυχαία επιλογή είναι το a τότε ο πρώτος κόμβος θα πάρει τον αριθμό-χρώμα 1, καθ' οτι η επιλογή του συνόλου στο οποίο ανήκει έγινε στην πρώτη φάση και ο αλγόριθμος θα συνεχίσει περιμένοντας επόμενο κόμβο για χρωματισμό.

- Αν η τυχαία επιλογή δεν είναι το a τότε ο αλγόριθμος περνάει στην επόμενη φάση και ξανακάνει τυχαία επιλογή. Όσο η τυχαία επιλογή δεν υποδεικνύει το ανεξάρτητο σύνολο με τα a, ο αλγοριθμος περνά στην επόμενη φάση και ξανακάνει τυχαία επιλογή. Όταν η τυχαία επιλογή υποδείξει το σύνολο με τα a τότε δίνει στον πρώτο κόμβο τον αριθμό-χρώμα της αντίστοιχης φάσης και περιμένει επόμενο κόμβο.

Κάθε τυχαία επιλογή σε κάθε φάση είναι μοναδική και δεν ξαναγίνεται για κάθε νέο κόμβο που εισέρχεται. Έτσι τυχαία επιλογή ξαναέχουμε μόνο αν κάποιος κόμβος περάσει σε κάποια φάση που μέχρι εκείνη την στιγμή κανένας κόμβος δεν έχει περάσει.

Έστω λοιπόν εισέρχεται νέος κομβος στον υπεργράφο. Ο αλγόριθμος επιστρέφει στην πρώτη φάση. Για τον νέο κόμβο επιλέγεται μέσω κάποιου οποιουδήποτε first-fit αλγορίθμου ένα ψευδοχρώμα από τα a, b, c τέτοιο ώστε να ισχύει η ιδιότητα μη ύπαρξης γειτόνων με το ίδιο χρώμα. Ανάλογα με την τυχαία επιλογή για την πρώτη φάση, που είχε γίνει νωρίτερα, χρώματίζονται όλοι οι επιλεγμένοι κόμβοι με το χρώμα 1.

- Αν ο νέος κόμβος τελικά χρωματίστηκε τότε ο αλγόριθμος περιμένει επόμενο κόμβο για χρωματισμό

- Αν ο νέος κόμβος δεν χρωματίστηκε τότε εξαιρούνται όλοι οι κόμβοι που χρωματίστηκαν, ο αλγόριθμος περνά στην επόμενη φάση και δίνει στο νέο κόμβο για αυτή την φάση το κατάλληλο ψευδοχρωμα ώστε οι εναπομείναντες κόμβοι να μην έχουν γείτονα με ίδιο με το δικό τους ψευδοχρώμα. Με βάση την τυχαία επιλογή της φάσης στην οποία βρίσκεται ο αλγόριθμος χρωματίζει τους αντίστοιχους κόμβους. Για όσο ο νέος κόμβος δεν χρωματίζεται ο αλγόριθμος συνεχίζει, εξαιρεί τους χρωματισμένους κόμβους περνά σε επόμενη φάση και χρωματίζει ανάλογα με την τυχαία επιλογή. Όταν τελικά ο νέος κόμβος χρωματιστεί, ο αλγόριθμος περίμενει επόμενο κόμβο.

Σημανικό είναι το γεγονός οτι όπως οι τυχαίες επιλογές σε κάθε φάση δεν αλλάζουν, έτσι και τα ψευδοχρώματα των κόμβων για κάθε φάση είναι μοναδικά, άσχετα με το αν αλλάζουν κατά το πέρασμα των κόμβων από την μια φάση στην άλλη . Με το επόμενο παράδειγμα γίνεται πιο σαφής η δράση του αλγορίθμου.

Παράδειγμα 5.5.1. *Έστω ότι η ακολουθία εισόδου είναι* 00202 *που αντιστοιχεί στην ακολουθία απολύτων θέσεων 4 2 5 1 3. Θα χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη περιγραφή για την είσοδο απλά για ευκολία στην κατανόηση της δράσης του αλγορίθμου χωρίς να κερδίζουμε κάτι σε πληροφορία.*

1. *πρώτος κόμβος: Η τυχαία επιλογή είναι το a κι έτσι ο κόμβος χρωματίζεται με το χρώμα 1 αφού μέσω της τυχαίας επιλογής επιλέχτηκε το ανεξάρτητο σύνολο στο οποίο ανήκει και μάλιστα στη φάση 1.*

Αριθμός φάσης		*4*	*2*	*5*	*1*	*3*		*Τυχαία επιλογή*
1	[				*a*		]	*a*
Χρωματισμός					*1*			

2. *δεύτερος κόμβος: Στην πρώτη φάση παίρνει το ψευδοχρώμα b. Η τυχαία επιλογή δεν επιλεγει το σύνολο στο οποίο ανήκει ο δεύτερος κόμβος. Ετσι εξαιρούνται οι κόμβοι με το χρώμα a (προφανώς ο πρώτος κόμβος), λόγω της τυχαίας επιλογής στην πρώτη φάση, περνάμε στην δεύτερη φάση και δίνουμε το ψευδοχρώμα a στον κόμβο μας. Η τυχαία επιλογή μας σπρώχνει στην επόμενη*

φάση όπου ο κόμβος παίρνει πάλι το ψευδοχρώμα a και μπαίνει στο σύνολο που τελικά επιλέγεται από την τυχαία επιλογή. Είμαστε στη φάση 3 κι έτσι ο κόμβος παίρνει το χρώμα 3.

Αριθμός φάσης		4	2	5	1	3		Τυχαία επιλογή
1	[		b		a		]	a
2	[		a				]	b
3	[		a				]	a
Χρωματισμός			3		1			

3. τρίτος κόμβος: Στην πρώτη φάση παίρνει το ψευδοχρώμα b. Έτσι περνά στην επόμενη φάση μαζί με τον δεύτερο κόμβο. Ο δευτερος κόμβος είχε πάρει από πριν το ψευδοχρώμα a για τη δεύτερη φάση, κι έτσι το κρατάει. Συνεπώς ο τρίτος κόμβος παίρνει το ψευδοχρώμα b που τον εντάσσει στο συνολο που χρωματίζεται, κι επειδή βρισκόμαστε στην δεύτερη φάση παίρνει τελικά το χρώμα 2

Αριθμός φάσης		4	2	5	1	3		Τυχαία επιλογή
1	[		b		a	b	]	a
2	[		a			b	]	b
Χρωματισμός			3		1	2		

4. τέταρτος κόμβος: Τυχερός κόμβος παίρνει από την πρώτη φάση το χρώμα της τυχαίας επιλογής κι έτσι χρωματίζεται με το χρώμα 1

Αριθμός φάσης		4	2	5	1	3		Τυχαία επιλογή
1	[	a	b		a	b	]	a
Χρωματισμός		1	3		1	2		

5. πέμπτος κόμβος: Παίρνει το ψευδοχρώμα c. Περνά λοιπόν στην δεύτερη φάση μαζί με τον δεύτερο και τον τρίτο κόμβο. Αυτοί έχοντας πάρει τα ψευδοχρώματά τους σε προηγούμενο τρέξιμο του αλγορίθμου αναγκάζουν να δώσουμε στον νέο κόμβο το ψευδοχρώμα c. Με αυτό οδηγείται στην επόμενη φάση όπου περνά μαζί με τον δεύτερο κόμβο. Ούτε εκει παίρνει το ψευδοχρώμα της τυχαίας επιλογής κι έτσι περνά μόνος του στην επόμενη φάση περιμένοντας την τυχαία επιλογή. Τελικά η τυχαία επιλογή της έκτης φάσης δείχνει το σύνολο στο οποίο αυτός ανήκει κι έτσι παίρνει το χρώμα 6.

Αριθμός φάσης		*4*	*2*	*5*	*1*	*3*		*Τυχαία επιλογή*
1	[	a	b	c	a	b	]	a
2	[		a	c		b	]	b
3	[		a	b			]	a
4	[			a			]	c
5	[			a			]	c
6	[			a			]	a
Χρωματισμός		*1*	*3*	*6*	*1*	*2*		

Η παρατήρηση που γίνεται εδώ είναι ότι χρησιμοποιείται το χρώμα 6 χωρίς όμως να έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα χρώματα μέχρι το 6. Έχουν χρησιμοποιηθεί τέσσερα χρώματα το 1 το 2 το 3 και το 6.

Στο προηγούμενο παράδειγμα ο αλγόριθμος δίνει το χρωματισμό που θα έδινε και ο leveled unimax αλγόριθμος. Παρακάτω θα δούμε ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ τους.
Στο επόμενο παράδειγμα φαίνεται λίγη από την περισσότερη δύναμη του πιθανοτικού αυτού αλγορίθμου.

Παράδειγμα 5.5.2. *Έστω ότι η ακολουθία εισόδου είναι η* 0020202020*. Αυτή αντιστοιχεί στην ακολουθία απολύτων θέσεων 10 8 6 9 4 7 2 5 1 3.*

Αριθμός φάσης		*10*	*8*	*6*	*9*	*4*	*7*	*2*	*5*	*1*	*3*		*Τυχαία επιλογή*
1	[	b	a	b	c	a	c	b	c	a	b	]	b
2	[		a		c	b	a		c	a		]	b
3	[		b		c		a		b	a		]	a
4	[		b		c				a			]	b
5	[				b				a			]	c
6	[				b				a			]	b
7	[								a			]	b
8	[								a			]	a
Χρωματισμός		*1*	*4*	*1*	*6*	*2*	*3*	*1*	*8*	*3*	*1*		

Ήρθε η στιγμή να δούμε όμως οτι πράγματι ο χρωματισμός είναι πάντα conflict free καθώς μόνα τους τα παραπάνω δεν έχουν ιδιαίτερο νόημα.

5.5.2 Ορθότητα του αλγορίθμου

Πριν περάσουμε στην απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.5.1. *Θα λέμε ότι ένας κόμβος φεύγει σε κάποια φάση όταν χρωματίζεται σε αυτή τη φάση.*
Θα λέμε ότι ένας κόμβος περνά στην επόμενη φάση όταν δεν χρωματίζεται στην φάση που βρίσκεται παρά σε κάποια επόμενη.

Η ορθότητα του αλγορίθμου επιβεβαιώνεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.5.1. Ο χρωματισμός του γράφου, μέσω του πιθανοτικού αλγορίθμου που αναλύουμε, είναι για κάθε είσοδο κόμβου conflict free χρωματισμός.

Απόδειξη. Η απόδειξη έρχεται με επαγωγή. Προφανώς όποιο χρώμα και να πάρει ο πρώτος κόμβος ο χρωματισμός θα είναι conflict free. Έστω ότι μέχρι την είσοδο του n-στου έχουμε conflict free χρωματισμό. Υποθέτουμε ότι με την είσοδο του ο επόμενος κόμβος παίρνει χρώμα από τον αλγόριθμο που καταστρέφει την ιδιότητα σε κάποια αλυσίδα. Ισχυριζόμαστε το εξής:

Ισχυρισμός. Η αλυσίδα στην οποία καταστρέφεται η ιδιότητα είχε προηγουμένως μόνο ένα χρώμα να εμφανίζεται μοναδική φορά και μάλιστα αυτό που πήρε ο νέος κόμβος με την είσοδό του.

Πράγματι αν είχε δύο χρώματα να εμφανίζονται μοναδική φορά τότε σίγουρα ένα από τα δύο θα εξακολουθούσε να εμφανίζεται μια μόνο φορά μετά από την είσοδο ενός μόνο κόμβου, αφού αυτός προφανώς μπορεί να πάρει μόνο ένα χρώμα. Το οτι χάλασε η ιδιότητα στην αλυσίδα μας δηλώνει πως ο νέος κόμβος πήρε το ίδιο χρώμα με το μοναδικό χρώμα που εμφανίζεται μια φορά στην αλυσίδα.

Έστω λοιπόν οτι ο νέος κόμβος πήρε το χρώμα k. Αυτό σημαίνει οτι πέρασε από όλες τις φάσεις και στη φάση k πήρε το ψευδοχρώμα που υποδείκνυε η τυχαία επιλογή και συνεπώς χρωματίστηκε. Σε αυτή τη φάση μόνο δύο κόμβοι της αλυσίδας χρωματίστηκαν (πριν τον νέο κόμβο μόνο ένας). Ας δούμε όμως τι γίνεται με τους υπόλοιπους κόμβους της αλυσίδας.

- Υποθέτουμε οτι κανένας κόμβος από τους υπόλοιπους της αλυσίδας δεν περνά σε επόμενη από την k φάση, τότε:

  Ισχυρισμός. κανένας δεν περνά ούτε στην k φάση και από τους κόμβους της αλυσίδας μόνο οι δύο κόμβοι έχουν περάσει στην k φάση.

  Ισχύει διότι αφού οι υπόλοιποι κόμβοι δεν περνάνε σε επόμενη από την k φάση σημαίνει ότι πήραν χρώμα μικρότερο ή ίσο του k. Το χρώμα k όμως το παίρνουν μόνο οι δυο κόμβοι που έχουμε ξεχωρίσει, άρα οι υπόλοιποι δεν περνούν ούτε στη k φάση και τελικά στην φάση k περνάνε μόνο δύο κόμβοι της αλυσίδας.

  Οι δύο αυτοί κόμβοι είναι γείτονες στην k φάση και άρα δεν μπορούν να έχουν το ίδιο ψευδοχρώμα συνεπώς δεν μπορουν να χρωματιστούν και οι δύο σε αυτή τη φάση, άτοπο.

  Άρα κάποιοι από τους υπόλοιπους κόμβους της αλυσίδας περνάνε σε επόμενη από την k φάση

- Υποθέτουμε τώρα ότι κάποιοι από τους υπόλοιπους κόμβους τις αλυσίδας περνάνε σε επόμενη από την k φάση. Τότε:

Ισχυρισμός. Κάποιος από αυτούς τους κόμβους θα πάρει μοναδικό χρώμα, και άρα η αλυσίδα είναι conflict free χρωματισμένη.

Πράγματι. Σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει σε κάθε φάση μετά την k αν ένας κόμβος χρωματίζεται και φεύγει να χρωματίζεται και να φεύγει τουλάχιστον άλλος ένας. Μα τότε και στη φάση που δίνεται το μεγαλύτερο χρώμα της αλυσίδας θα πρέπει να έχουμε τουλάχιστον δύο κόμβους να φτάνουν σε αυτή τη φάση και να χρωματίζονται. Παράλληλα όσοι κόμβοι φτάνουν θα πρέπει να χρωματίζονται, αφού είναι το μεγαλύτερο χρώμα της αλυσίδας και άρα κανείς δεν περνά σε επόμενη φάση. Άρα θα είχαμε τουλάχιστον δύο κόμβους στην τελευταία φάση και όλοι θα είχαν το ίδιο ψευδοχρώμα (αφου πρέπει να χρωματιστούν σε αυτή τη φάση), άτοπο αφού θα είχαμε τουλάχιστον δύο γείτονες με ίδιο ψευδοχρώμα.

Ο δεύτερος ισχυρισμός αντιτίθεται στην υπόθεση που κάναμε αρχικά για μη ύπαρξη μοναδικού χρώματος στην αλυσίδα. Άρα η υπόθεση αυτή είναι λανθασμενη, κάθε αλυσίδα είναι conflict free χρωματισμένη και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Ας δούμε όμως τελικά τι κερδίζουμε με αυτό τον αλγόριθμο σε πολυπλοκότητα.

5.5.3 Πολυπλοκότητα

Αναμενόμενος αριθμός χρήσης χρωμάτων

Για να ξεκινήσουμε την ανάλυση του αλγορίθμου ορίζουμε δυο τυχαίες μεταβλητές ως εξής:

- X_i:= το πλήθος των κόμβων που χρωματίζονται στην i φάση και συνεπώς δεν περνούν σε επόμενες φάσεις
- Z_i:= το πλήθος των κόμβων που δεν χρωματιζονται στην i φάση και περνούν στην επόμενη φάση περιμένοντας να χρωματιστούν.

Μια πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι πως αν θεωρήσουμε την φάση 0 από την οποία όλοι κόμβοι να περνάνε και να πηγαίνουν στη φάση 1 τότε $Z_0=n$, όπου n το πλήθος των στοιχείων, και $Z_{i-1} = Z_i + X_i$. Η τελευταία ισότητα γιατί οι κόμβοι που περνούν από κάποια φάση είτε θα χρωματιστουν στην επόμενη είτε θα περάσουν από την επόμενη στην μεθεπόμενη.

Αν με $E[Q]$ συμβολίζουμε την μέση τιμή του Q και με $E[Q|U]$ τη μέση τιμή του Q δεδομένου του U τότε

Λήμμα 5.5.1. $E[X_i|Z_{i-1}] = \frac{1}{3}Z_{i-1}$

Απόδειξη. Από την $i-1$ φάση περνούν Z_{i-1} κόμβοι στην φάση i. Αυτοί τριχρωματίζονται με τα ψευδοχρώματα a, b, c. Έστω n_a το πλήθος των κόμβων που πήραν το ψευδοχρώμα a, n_b το πλήθος αυτών που πήραν το b και n_c το πλήθος αυτών με το c. Προφανώς ισχύει $Z_{i-1}{=}n_a{+}n_b{+}n_c$. Η τυχαία επιλογή που γίνεται στην i φάση επιλέγει ισοπίθανα ένα από τα ψευδοχρώματα. Άρα η πιθανότητα για κάθε ανεξάρτητο σύνολο να χρωματιστεί είναι $\frac{1}{3}$. Συνεπώς υπάρχει $\frac{1}{3}$ πιθανότητα να χρωματιστούν n_a το πλήθος κόμβοι, $\frac{1}{3}$ πιθανότητα να χρωματιστούν n_b το πλήθος κόμβοι και $\frac{1}{3}$ πιθανότητα να χρωματιστούν n_c το πλήθος κόμβοι. Έτσι:

$$E[X_i|Z_{i-1}]{=}\tfrac{1}{3}n_a{+}\tfrac{1}{3}n_b{+}\tfrac{1}{3}n_c{=}\tfrac{1}{3}(n_a+n_b+n_c){=}\tfrac{1}{3}Z_{i-1}$$

Λήμμα 5.5.2. Για κάθε i ισχύει: $E[X_i] = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1}n$ και $E[Z_i] = (\frac{2}{3})^{i}n$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή

Για $i = 1$ από το προηγούμενο λήμμα και το γεγονός ότι $Z_0 = n$ έχουμε $E[X_1] = \frac{1}{3}n$. Επειδή $Z_{i-1} = Z_i + X_i$ έχουμε $Z_1 = Z_0 - X_1$ και λαμβάνοντας υποψιν την ιδιότητα της γραμμικότητας στη μέση τιμή έχουμε
$E[Z_1] = E[Z_0 - X_1] = E[Z_0] - E[X_1] = n - \frac{1}{3}n = \frac{2}{3}n$.
Άρα για $i = 1$ ισχύει η υπόθεση.

Έστω λοιπόν οτι η υπόθεση ισχύει για $i = k$. Άρα $E[X_{k+1}] = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}n$ και $E[Z_k] = (\frac{2}{3})^{k}n$.
Γνωρίζουμε από την επιστήμη της στατιτστικής ότι $E[X_{k+1}] = E[E[X_{k+1}|Z_k]]$ και από το προηγούμενο λήμμα $E[X_{k+1}|Z_k] = \frac{1}{3}Z_k]$.
Άρα

$$E[X_{k+1}] = E[E[X_{k+1}|Z_k]] = E[\tfrac{1}{3}Z_k] = \tfrac{1}{3}E[Z_k] = \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{k}n$$

Από τον τρόπο που ορίσαμε τα Z_i και X_i ξέρουμε ότι $Z_{k+1} = Z_k - X_{k+1}$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας στη μέση τιμή έχουμε:

$$E[Z_{k+1}] = E[Z_k - X_{k+1}] = E[Z_k] - E[X_{k+1}] = (\tfrac{2}{3})^{k}n - \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{k}n = (\tfrac{2}{3})^{k+1}n$$

Συνεπώς αν η υπόθεση ισχύει για $i = k$ τότε ισχύει και για $i = k + 1$ κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή, την Y_i ως

$$Y_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } X_i = 0 \\ 1, & \text{αν } X_i > 0 \end{cases}$$

Για να καταλάβουμε τη σημασία της επικεντρωνόμαστε στις τιμές της. Βλέπουμε οτι παίρνει τιμή 1 για κάποιο i αν για αυτό το i έχουμε $X_i > 0$ δηλαδή αν κάποιοι κόμβοι χρωματίστηκαν ενώ βρίσκονταν στη φάση i και παίρνει τιμή 0 αν $X_i = 0$ δηλαδή αν στη φάση i κανένας κόμβος δεν χρωματίζεται.
Ορίζω νέα τυχαία μεταβλητή , την Y τέτοια ώστε

$$Y = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} Y_i$$

Ισχυρισμός. Η τιμή της Y είναι ίδια με τον αριθμό των χρωμάτων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος

Πράγματι. Αν σκεφτούμε οτι σε μια φάση i αν $X_i = 0$ τότε δεν δίνεται κανένα χρώμα και αν $X_i > 0$ τότε δίνεται ένα μόνο χρώμα στους κόμβους που φεύγουν σε αυτή τη φάση, συμπαιρένουμε οτι το πλήθος των χρωμάτων που χρησιμοπούνται ισούται με το πλήθος των φάσεων για τις οποίες $X_i > 0$ και αυτό ισούτε με το $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i = Y$.

Σκοπός μας γίνεται λοιπόν η εύρεση της μέσης τιμής του Y. Πρωτα αποδεικνύουμε ένα λήμμα που θα χρειαστεί στη συνέχεια.

Λήμμα 5.5.3. $E[Y_i] \leq E[X_i]$

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι η X_i παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Έτσι από την ανισότητα του Markov έχουμε $Pr[X_i > 0] \leq E[X_i]$, με $Pr[X]$ να συμβολίζει πιθανότητα του X. Επίσης $Pr[Y_i = 1] = Pr[X_i > 0]$, από τον ορισμό της Y_i. Έστι εχουμε για την μέση τιμή του Y_i:

$$E[Y_i] = 0 * Pr[Y_i = 0] + 1 * Pr[Y_i = 1] = Pr[X_i > 0] \leq E[X_i]$$

Είμαστε πλεον έτοιμοι να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5.5.1. $E[Y] < \frac{3}{2} + log_{\frac{3}{2}} n$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά:

$E[Y] = E[\sum_1^{\infty} Y_i] = \sum_1^{\infty} E[Y_i]$ από γραμμικότητα της μέσης τιμής

$E[Y] = \sum_1^{\lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor} E[Y_i] + \sum_{\lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor + 1}^{\infty} E[Y_i]$

$E[Y] \leq \lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor + \sum_{\lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor + 1}^{\infty} E[Y_i]$ αφού $Y_i \leq 1$ και δίνει $E[Y_i] \leq 1$ Το

$E[Y] \leq \lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor + \sum_{\lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor + 1}^{\infty} E[X_i]$ από το δεύτερο λήμμα

$E[Y] < \frac{3}{2} + log_{\frac{3}{2}} n$

τελευταίο γιατί από το δεύτερο λήμμα και από άθροισμα γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\sum_{\lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor + 1}^{\infty} E[X_i] = \sum_{\lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^{i-1} n = \frac{n}{(\frac{3}{2})^{\lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor}} < \frac{3}{2}$$

αφού το $k = \lfloor log_{\frac{3}{2}} n \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος τέτοιος ώστε $(\frac{3}{2})^k \leq n$ και συνεπώς $n < (\frac{3}{2})^{k+1}$.

Με την παραπάνω πρόταση είμαστε σίγουροι οτι ο αναμενόμενος αριθμός χρήσης χρωμάτων δεν ξεπερνάει το $\frac{3}{2} + \log_{\frac{3}{2}} n$. Μέσω μιας άλλης πιο περίπλοκης προσέγγισης μπορούμε να καταλήξουμε στο οτι τελικά δεν ξεπερνά ούτε το $1 + \log_{\frac{3}{2}} n$, που όμως δεν έχει μεγάλη σημασία για εμάς. Σημασία έχει οτι ο αναμενόμενος αριθμός χρήσης χρωμάτων είναι $O(\log_{\frac{3}{2}} n)$.

Χειρότερη περίπτωση, συχέτιση με τον UniMax Greedy αλγόριθμο.
Όπως έχουμε ήδη προαναγείλει υπάρχει μια σχέση μεταξύ του πιθανοτικού αλγόριθμου που εξετάζουμε και του UniMax Greedy αλγορίθμου. Θυμίζουμε τον ορισμό του 'βλέπει' που είχαμε στον UniMax Greedy αλγόριθμο.

Ορισμός 5.5.2. *Ο p 'βλέπει' ένα κόμβο x αν όλοι οι κόμβοι που παρεμβάλλονται μεταξύ p και x είναι χρωματισμένοι με χρώμα μικρότερο του χρώματος του x. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε και ότι ο p 'βλέπει' το $c(x)$, όπου με $c(x)$εννούμε το χρώμα του x.*

Εν πρώτοις θα δούμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.5.2. Ο πιθανοτικός αλγόριθμος δίνει σε κάθε νέο κόμβο χρώμα τέτοιο που δεν βλέπει σε καμία κατεύθυνση.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Έστω λοιπόν οτι εισήλθε κάποιος κόμβος και πήρε χρώμα το οποίο βλέπει σε κάποιο άλλο κόμβο. Αυτό σημαίνει ότι και οι δύο έφυγαν στην ίδια φάση του αλγορίθμου. Σε αυτή τη φάση λοιπόν είχαν το ίδιο ψευδοχρώμα.

Ισχυρισμός. Ανάμεσα στους δύο κόμβους παρεμβάλλεται τουλάχιστον ένας κόμβος που περνά σε επόμενη φάση.

Πράγματι γιατί αν δεν υπήρχε σημαίνει οτι οι δύο κόμβοι θα ήταν γειτονικοί και δεν θα μπορούσαν να πάρουν το ίδιο ψευδοχρώμα. Τουλάχιστον ένας από αυτούς που παρεμβάλλονται θα ήταν γείτονας με έναν από τους δύο και άρα θα είχε διαφορετικό ψευδοχρώμα από τους δύο. Έτσι θα περάσει στην επόμενη φάση καθώς η τυχαία επιλογή είναι το ψευδοχρώμα των δύο κόμβων και όχι το δικό του.
Αυτός ο τουλάχιστον ένας κόμβος που περνά στην επόμενη φάση θα έχει χρώμα μεγαλύτερο από τους δύο κόμβους και συνεπώς δεν θα μπορούν να βλέπουν ο ένας τον άλλο, άτοπο και άρα κάθε κόμβος παίρνει χρώμα το οποίο δεν βλέπει σε καμία κατεύθυνση.

Θυμίζουμε οτι ο UniMax Greedy αλγόριθμος δίνει το μικρότερο χρώμα το οποίο δεν βλέπει ο κόμβος σε καμία κατεύθυνση.
Υποθέτουμε την ακολουθία εισόδου 0121343. Αυτή όπως είδαμε στο παράδειγμα του UniMax Greedy αλγορίθμου πάίρνει τελικό χρωματισμό 1321421. Αν στον πιθανοτικό αλγόριθμό μας η τυχαία επιλογή ψευδοχρώματος είναι το a τότε όπως θα δούμε παρακάτω ο χρωματισμός είναι ακριβώς ο ίδιος και μάλιστα σε κάθε εισαγωγή κόμβου.
Η ακολουθία 0121343 αντιστοιχεί στην 1 4 2 7 5 6 3 και ο χρωματισμός που προκύπτει φαίνεται από κάτω.

Παράδειγμα 5.5.3.

Αριθμός φάσης	*1*	*4*	*2*	*7*	*5*	*6*	*3*	
1	a	c	b	a	c	b	a	a
2		b	a		b	a		a
3		a			b			a
4					a			a
Τελικός χρωματισμός	*1*	*3*	*2*	*1*	*4*	*2*	*1*	

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι τυχαίο. Με την ακόλουθη πρόταση μάλιστα έχουμε.

Πρόταση 5.5.3. Αν μετατρέψουμε τον τυχαίο αλγόριθμό μας σε ντετερμινιστικό έτσι ώστε το ψευδοχρώμα της κάθες φάσης να μην είναι τυχαίο αλλά πάντα το a, τότε οι δύο αλγόριθμοι δίνουν ακριβώς τις ίδιες εξόδους.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε οτι ο αλγόριθμος θα δίνει σε κάθε νέο κόμβο χρώμα που δεν βλέπει σε άλλο κόμβο. Μένει να αποδείξουμε οτι με τη μετατροπή που του κάναμε δίνει το μικρότερο τέτοιο χρώμα.
Έστω λοιπόν οτι ο νέος κόμβος πήρε ένα χρώμα το οποίο δεν βλέπει αλλά αυτό δεν ήταν το μικρότερο τέτοιο. Αυτό σημαίνει οτι υπάρχει ένα μικρότερο χρώμα το οποίο δεν βλέπει σε κανένα κόμβο. Ας υποθέσουμε οτι αυτό το χρώμα είναι το i, το οποίο δινεται στην i φάση. Ο νέος κόμβος πήρε μεγαλύτερο χρώμα από το i κάτι που σημαίνει οτι πέρασε από την i φάση και μάλιστα πήρε ψευδοχρώμα διάφορο του a.

- Αν υποθέσουμε οτι στην i φάση είχε δύο γείτονες, και από δεξιά και από τα αριστερά τότε

  Ισχυρισμός. Ένας από τους δύο γείτονες πήρε το ψευδοχρώμα a σε αυτή τη φάση.

  Τούτο γιατί αν και οι δύο είχαν πάρει ψευδοχρώμα διάφορο του a τότε ο κόμβος μας θα μπορούσε μπαίνοντας ανάμεσα τους να πάρει το ψευδοχρώμα a που είναι το μικρότερο από τα τρια χώρις να χαλάει η ιδιότητα μη ύπαρξης γειτόνων με το ίδιο ψευδοχρώμα.
  Παίρνοντας λοιπόν ο ένας από τους δύο γείτονες, ας τον πούμε v, το ψευδοχρώμα a σε αυτή τη φάση, επιλέγεται και χρωματίζεται με το χρώμα i. Στην i φάση όμως ο v είναι γείτονας με τον νεο κόμβο κάτι που σημαίνει πως όλοι οι κόμβοι που υπάρχουν σνάμεσά τους έχουν χρωματιστεί σε προηγούμενες φάσεις και άρα έχουν πάρει μικρότερο χρώμα. Έτσι ο νέος κόμβος θα βλέπει το χρώμα i στον κόμβο v, γεγονός που οδηγεί σε άτοπο.

- Αν υποθέσουμε ότι έχει έναν γείτονα τότε

  Ισχυρισμός. Αυτός ο γείτονας έχει πάρει το ψευδοχρωμα a στην i φάση

  Είναι πράγματι έτσι καθώς αν είχε κάποιο από τα άλλα ψευδοχρώματα τότε πάλι ο νέος κόμβος θα μπορούσε να πάρει το ψευδοχρώμα a που είναι το μικρότερο από τα τρια χώρις να χαλάει η ιδιότητα μη ύπαρξης γειτόνων με το ίδιο ψευδοχρώμα

Μα τότε ο γείτονας, έστω και πάλι v, θα χρωματιζόταν στην i φάση και άρα ο νέος κόμβος όμοια με πριν θα έβλεπε το χρώμα i στον κόμβο v. Άρα πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.

Έχοντας καταλήξει και στις δύο περιπτώσεις σε άτοπο είμαστε βέβαιοι πως ο τροποποιημένος αλγόριθμος δίνει σε κάθε νέο κόμβο το μικρότερο χρώμα που δεν βλέπει σε καμία κατεύθυνση.

Θυμίζουμε οτι υπάρχει ακολουθία που κάνει τον UniMax Greedy αλγόριθμο να χρησιμοποιεί $\Omega(\sqrt{n})$ χρώματα. Η παραπάνω πρόταση μας λέει πως και ο πιθανοτικός αλγόριθμός μας στην χειρότερη περίπτωση μπορεί να χρειαστεί τουλάχιστον $\Omega(\sqrt{n})$ χρώματα.

Παρατηρήσεις

1. Μια πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι πως με αυτό τον πιθανοτίκο αλγόριθμο, σε αντίθεση με τους ντετερμινιστικούς που εξετάσαμε πρωτύτερα, έχουμε καταφέρει να πλησιάσουμε πολύ στο κάτω όριο χρήσης χρωμάτων που ισχύει στις δυναμικές περιπτώσεις

2. Αν θυμηθούμε το ποιοτικό άλμα που κάναμε, όσον αφορά τη χρήση χρωμάτων, όταν περάσαμε από τον fully Greedy αλγόριθμο στον UniMax Greedy και πως το επιτύχαμε, μπορούμε να δούμε και στο πέρασμα από τον UniMax Greedy αλγόριθμο στο πιθανοτικό που μόλις εξετάσαμε που οφείλεται η διαφορά. Ο πιθανοτικός αλγόριθμος δίνοντας σε κάθε νέο κόμβο χρώμα που δεν βλεπει αλλά όχι απαραίτητα το μικρότερο είναι σαν να απαιτεί τουλάχιστον την unimax cf ιδιότητα ή και κάτι πιο ισχυρό κάτι που αφήνει ακόμη μεγαλύτερα περιθώρια για το χρωματισμό των επόμενων κόμβων σε σχέση με αυτά που άφηνε ο UniMax Greedy αλγόριθμος.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική μελετήσαμε ένα μόνο κλαδί του προβλήματος των conflict free χρωματισμών. Υπάρχουν όμως πολλά άλλα ακόμη που μελετήθηκαν, μελετώνται και θα μελετηθούν.

Γενικά το θεωρητικό πρόβλημα των conflict free χρωματισμών (και σε υπεργράφους αλλά και σε γενικούς γράφους) έχει κινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών παρά το γεγονός οτι ίσως το πρακτικό κίνητρο δεν και τόσο μεγάλο και το οτι το θεωρητικό πρόβλημα δεν βρίσκει ευρύτερες εφαρμογές. Το πρόβλημα εισήχθει πολύ πρόσφατα (το 2002 – 2003) από τους Even, Lotker, Ron και Smorodinsky. Τον τελευταίο καιρό έχουν γίνει αρκετές (εως πολλές) δημοσιεύσεις που αφορούν σε αυτό και αν κάποιος ενδιαφέρεται αξίζει να μελετήσει όσες από αυτές μπορεί.

Στη συνέχεια θα κάνουμε μια επισκόπηση όσων είδαμε στην εργασία και θα συγκεντρώσουμε τα αποτελέσματα για να δούμε τελικά που υπάρχουν περιθώρια έρευνας στο υποπρόβλημα που μελετήσαμε και τι χρειάζεται ακόμη για να λυθεί πλήρως η κατεύθυνση του προβλήματος στην οποία επικεντρωθήκαμε.

6.1 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Μέχρι τώρα δεν αναφέραμε σκόπιμα κάτι σημαντικό. Προτού επιννοηθεί η ιεράρχηση τν περιπτώσεων μελετώνταν το γενικό στατικό πρόβλημα και το online σε γράφους αλυσίδες με την μορφή του online με σχετικές θέσεις προβλήματος. Στους γράφουςαλυσίδες, κατά το πέρασμα από την στατική περίπτωση στην online, συνέβαινε ένα λογαριθμικό άλμα στα όρια χρήσης των αλγορίθμων επίλυσης αυτών των προβλημάτων. Η όλη προηγούμενη ανάλυση και η ιεράρχηση του προβλήματος έγινε κυρίως για να διαπιστωθεί που συμβαίνει αυτό το άλμα. Τελικά ας δούμε τι επιτεύχθει.

Αν πάρουμε την ιεραρχία και συγκεντρώσουμε όσα είδαμε σε αυτήν την εργασία θα πάρουμε την εικόνα του πίνακα.

Ας δούμε τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε από αυτόν το πίνακα (έχοντας στο μυαλό μας όλη την εργασία φυσικά!).

Κλάση της ιεραρχίας	Κατω όριο	Άνω όριο
Στατική περίπτωση	$1 + \lfloor \log n \rfloor$	$1 + \lfloor \log n \rfloor$
Δυναμική γνωστων θέσεων	$1 + 2\log_3 n$	$1 + \lfloor \log_{\frac{3}{2}} n \rfloor$
Online απολύτων θέσεων	$1 + 2\log_3 n$	$2\lfloor \log(n+1) \rfloor$
Online με σχετικές θέσεις	$1 + 2\log_3 n$	$\mathrm{O}(\log^2 n)$ ($O(\log_{\frac{3}{2}} n)$ πιθανοτικά)

Πίνακας 6.1: Χρήση χρωμάτων για τις κλάσεις της ιεραρχίας

6.2 Ανοιχτά προβλήματα

Θα μιλήσουμε κυρίως (σχεδόν μόνο!) για το κομμάτι του προβλήματος που μελετήσαμε εμείς.

1. Η στατική περίπτωση είναι επιλυμένη πλήρως και συνεπώς δεν έχουμε να προτείνουμε κάτι προς έρευνα επάνω σε αυτή. Αυτό που μπορούμε να σημειώσουμε εδώ είναι οτι ο καλός της χρωματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε γενικότερους γράφους, είτε αυτούσιος είτε και σαν ιδέα μοναδικού χρώματος σέ κάποιο κεντρικό σημείο του γράφου. Στατικός χρωματισμός γενικότερων γράφων φαίνεται να είναι προκλητικό κομμάτι του προβλήματος και αναμένονται εξελίξεις επάνω σε αυτό.

2. Η δυναμική γνωστών θέσεων περίπτωση, είδαμε οτι δεν είναι πλήρως επιλυμένη. Είναι όμως επιλυμένη με καλή χρήση χρωμάτων. Η τάξη μεγέθους είναι ίδια και η χρήση χρωμάτων κυμαίνεται περίπου στα 1.36 της απαραίτητης, από το κάτω όριο, χρήσης χρωμάτων, σταθερό παράγοντα μακριά από το κάτω όριο. Η αναζήτηση καλύτερων αλγορίθμων δεν φαίνεται να παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, παρ΄ οτι θα μπορούσε να γίνει.

3. Η online απολύτων θέσεων περίπτωση, επίσης δεν είναι πλήρως επιλυμένη όμως είναι επίσης επιλυμένη με καλή χρήση χρωμάτων. Η τάξη μεγέθους είναι ίδια και η χρήση χρωμάτων κυμαίνεται περίπου στα 1.59 της απαραίτητης, από το κάτω όριο, χρήσης χρωμάτων (ένα σταθερό παράγοντα μακριά από το κάτω όριο). Σίγουρα μπορούν να αναζητηθούν κι εδώ καλύτεροι αλγόριθμοι αλλά μεγάλο ενδιαφέρον έχει η επόμενη περίπτωση

4. Η online απολύτων θέσεων περίπτωση έχει πολλά περιθώρια έρευνας και αξιοσημείωτες αποστάσεις ανάμεσα στα όρια του προβλήματος και του καλύτερου γνωστού αλγορίθμου. Με τον πιθανοτικό αλγόριθμο φτάσαμε (με τον αναμενόμενο αριθμό χρήσης) στην ίδια τάξη μεγέθους με το κάτω όριο του προβλήματος. Είναι όμως πιθανοτικός και αυτό δεν μας ικανοποιεί.. Ο καλύτερος γνωστός ντετερμινιστικός αλγόριθμος είναι έναν ολόκληρο λογαριθμικό παράγοντα μακριά από το μέχρι τώρα μεγαλύτερο γνωστό κάτω όριο του προβλήματος. Όπως είπαμε η όλη διαδικασία της ιεράρχησης των περιπτώσεων έγινε κατά κύριο λόγο για να δούμε που ακριβώς γίνεται το λογαριθμικό άλμα που παρατηρείται. Επειδή όλα δείχνουν οτι γίνεται μεταξύ των δύο online

περιπτώσεων μένουμε με την ελπίδα ότι κάποιος θα τις μελετήσει θα τις αφομοιώσει και μέχρι την επόμενη ανάγνωση της παρούσας διπλωματικής από κάποιο αναγνώστη, το λογαριθμικό αυτό άλμα δεν θα υπάρχει.

Bibliography

[BNCOS07] Amotz Bar-Noy, Panagiotis Cheilaris, Svetlana Olonetsky, and Shakhar Smorodinsky. Online conflict-free coloring for geometric hypergraphs. In *Proceedings of the 23rd European Workshop on Computaional Geometry (EWCG)*, pages 106–109, 2007.

[BNCS06] Amotz Bar-Noy, Panagiotis Cheilaris, and Shakhar Smorodinsky. Conflict-free coloring for intervals: from offline to online. In *Proceedings of the 18th annual ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures (SPAA)*, pages 128–137, 2006.

[CCJ90] B. N. Clark, C. J. Colburn, and D. S. Johnson. Unit disk graphs. *Discrete Mathematics*, 86:165–177, 1990.

[CFK+06] Ke Chen, Amos Fiat, Haim Kaplan, Meital Levy, Jiří Matoušek, Elchanan Mossel, János Pach, Micha Sharir, Shakhar Smorodinsky, Uli Wagner, and Emo Welzl. Online conflict-free coloring for intervals. *SIAM Journal on Computing*, 36(5):956–973, 2006.

[Che06] Ke Chen. How to play a coloring game against a color-blind adversary. In *Proceedings of the 22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SoCG)*, pages 44–51, 2006.

[Che07] Panagiotis Cheilaris. *Algorithms and Complexity: graph and hypergraph colorings.* PhD thesis, School of Electrical and Computer Engineering, National Technical University of Athens, 2007.

[ELRS03] Guy Even, Zvi Lotker, Dana Ron, and Shakhar Smorodinsky. Conflict-free colorings of simple geometric regions with applications to frequency assignment in cellular networks. *SIAM Journal on Computing*, 33:94–136, 2003. Also in *Proceedings of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 2002.

[EM06] Khaled Elbassioni and Nabil H. Mustafa. Conflict-free colorings of rectangles ranges. In *Proceedings of the 23rd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, pages 254–263, 2006.

[FLM+05] Amos Fiat, Meital Levy, Jiří Matoušek, Elchanan Mossel, János Pach, Micha Sharir, Shakhar Smorodinsky, Uli Wagner, and Emo Welzl. Online conflict-free coloring for intervals. In *Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 545–554, 2005.

[KS04] Haim Kaplan and Micha Sharir. Online CF coloring for halfplanes, congruent disks, and axis-parallel rectangles. Manuscript, 2004.

[PT03] János Pach and Géza Tóth. Conflict free colorings. In *Discrete and Computational Geometry, The Goodman-Pollack Festschrift*, pages 665–671. Springer Verlag, 2003.

[Smo03] Shakhar Smorodinsky. *Combinatorial Problems in Computational Geometry*. PhD thesis, School of Computer Science, Tel-Aviv University, 2003.

[Smo06] Shakhar Smorodinsky. On the chromatic number of some geometric hypergraphs. In *Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2006.