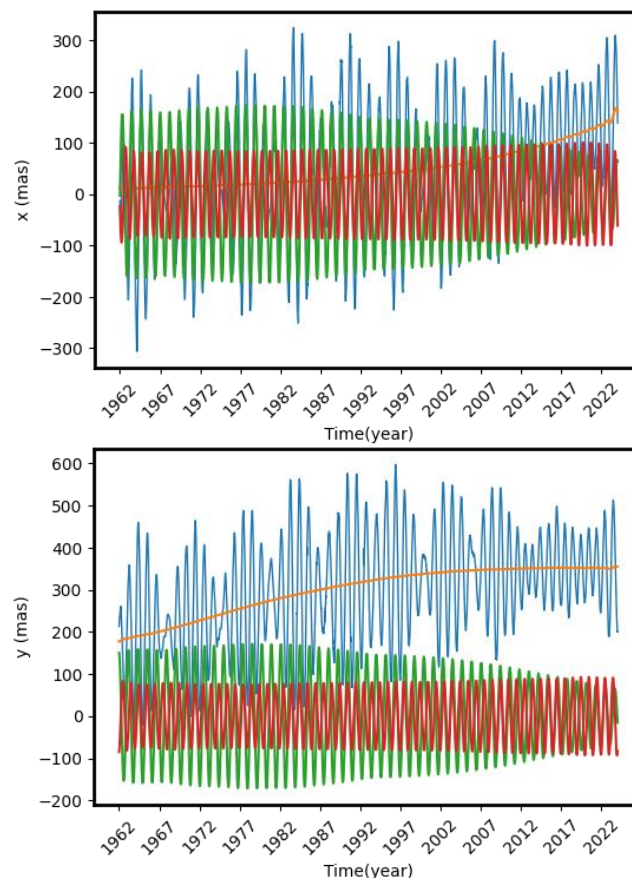




**Μελέτη της Κίνησης του Πόλου
με Φασματική Ανάλυση**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Καφρίτσας



Επιβλέπων: Γεώργιος Πάνου
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

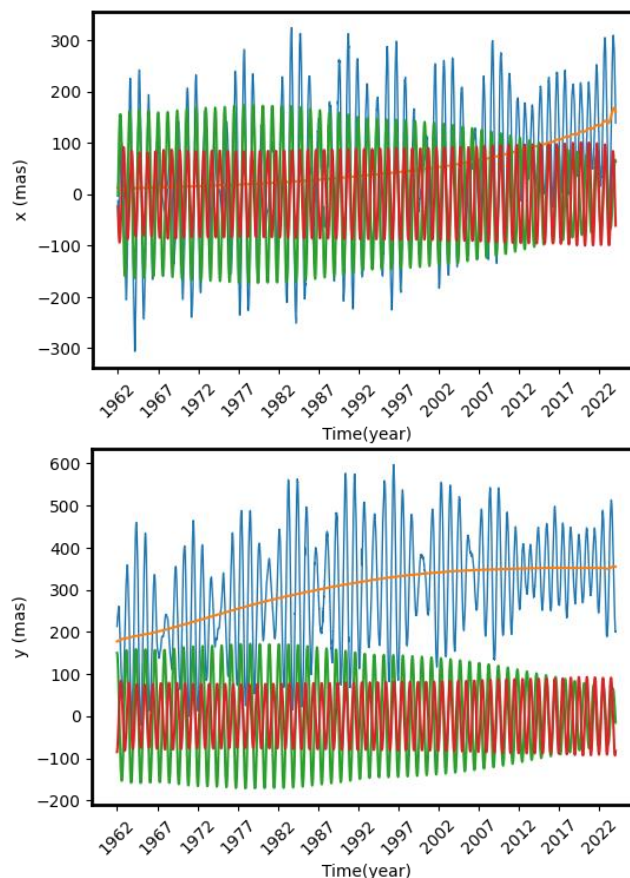
Αθήνα, Ιούλιος 2024



Study on Polar Motion
Using Singular Spectrum Analysis

DIPLOMA THESIS

Ioannis Kafritsas



Supervisor: Georgios Panou
Assistant Professor at N.T.U.A.

Athens, July 2024



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ -
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ / ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

Μελέτη της Κίνησης του Πόλου
με Φασματική Ανάλυση

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Καφρίτσας

Επιβλέπων: Γεώργιος Πάνου
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

.....
Γ. Πάνου
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ν. Δουλάμης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δ. Αναστασίου
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2024

.....
Ιωάννης Καφρίτσας

Διπλωματούχος Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός –
Μηχανικός Γεωπληροφορικής Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωάννης Καφρίτσας, 2024.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Πάνου, Επ. Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για την ανάθεση του θέματος, τις χρήσιμες οδηγίες του και τη συνεχή παρακολούθηση του έργου μου. Μαζί καταφέραμε να αντιμετωπίσουμε κάθε δυσκολία που προέκυψε στα πλαίσια αυτής της εργασίας, ώστε να βγει ένα άρτιο αποτέλεσμα. Ακόμα, θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Ι. Κώτση, Υπ. Διδάκτορα του Ε.Μ.Π. και την κα. Α. Παππά, Α.Τ.Μ.-Μ.Γ. του Ε.Μ.Π., οι οποίοι βοήθησαν στο κομμάτι της γλώσσας προγραμματισμού Python και στο κομμάτι των ελαχιστοτετραγωνικών προσαρμογών. Τέλος, να ευχαριστήσω τον κ. Ν. Δουλάμη, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και τον κ. Δ. Αναστασίου, Επ. Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης.

Έχοντας ολοκληρώσει την παρούσα διπλωματική εργασία είμαι σε θέση να πω ότι μου απέφερε αρκετές νέες γνώσεις, ειδικά στο κομμάτι του προγραμματισμού και της ανάλυσης δεδομένων και με έκανε έτοιμο να μπορώ να αντιμετωπίσω σύνθετα προβλήματα που πιθανώς να παρουσιαστούν στη μετέπειτα εκπαιδευτική ή επαγγελματική μου πορεία.

Ιωάννης Καφρίτσας
Αθήνα, Ιούλιος 2024

Στην οικογένειά μου

Περίληψη

Το πρόβλημα της κίνησης του Πόλου, με την πάροδο του χρόνου, έχει απασχολήσει εκτενώς τη διεθνή επιστημονική κοινότητα. Πρόκειται για ένα αρκετά σύνθετο πρόβλημα μιας και οι παράμετροι που το περιγράφουν είναι πολλές. Το αντικείμενο της συγκεκριμένης εργασίας εστιάζει στην ανάλυση της χρονοσειράς της κίνησης αυτής σε διάστημα 62 ετών, από την 1^η Ιανουαρίου του 1962 έως την 31^η Δεκεμβρίου του 2023. Η ανάλυση έγινε με τη μέθοδο της Ιδιόμορφης Φασματικής Ανάλυσης (Singular Spectrum Analysis, SSA) από όπου προέκυψαν πάνω από 20 περιοδικότητες για τη x και την y συντεταγμένη, καθώς και η τάση αυτών. Αρχικά, εξετάστηκε η αποτελεσματικότητα της μεθόδου μέσω κάποιων προσομοιώσεων, όπου ήταν δυνατή η σύγκριση δεδομένων και αποτελεσμάτων. Αυτό εξυπηρέτησε στο να φανούν τυχόν αδυναμίες της μεθόδου, καθώς και να υπάρξει μια βαθύτερη κατανόηση αυτής στην επιλογή των παραμέτρων που την επηρεάζουν. Τέλος, ύστερα από την εξαγωγή των περιοδικοτήτων και των τάσεων, εφαρμόστηκε ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή κατάλληλων συναρτήσεων προκειμένου να βρεθούν οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων τους. Ως αποτέλεσμα προέκυψαν διάφορες ερμηνείες των περιοδικοτήτων και συγκρίθηκαν με εκείνες της βιβλιογραφίας.

Λέξεις κλειδιά: άξονας περιστροφής, ατμοσφαιρική επίδραση, ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή, λιώσιμο πάγων, περιοδικότητες

Abstract

The international scientific community has historically been concerned about the pole's motion. It is a really complicated problem due to the large number of parameters that describe it. The goal of this research is to examine the time series of this motion over 62 years, from January 1, 1962, to December 31, 2023. The research was carried out using the Singular Spectrum Analysis (SSA) approach, which yielded over 20 periodicities for the x and y coordinates as well as their trend. Initially, the method's usefulness was tested using simulations that allowed for the comparison of data and findings. This revealed any flaws in the process and provided a better grasp of it in the selection of the parameters that influence it. Finally, after extracting periodicities and trends, appropriate functions were fitted using least-squares to determine the best parameter values. As a result, interpretations for each periodicity were obtained and compared to the literature.

Keywords: axis of rotation, atmospheric influence, ice melting, least-squares fitting, periodicities

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	vii
Περίληψη	ix
Abstract	xi
Κατάλογος Εικόνων	xv
Κατάλογος Πινάκων.....	xxi
1. Εισαγωγή.....	1
1.1. Γενικά.....	1
1.2. Κίνητρο.....	3
1.3. Δεδομένα μελέτης	3
1.4. Διάρθρωση εργασίας.....	4
2. Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων: Singular Spectrum Analysis (SSA).....	5
2.1. Γενικά στοιχεία	5
2.2. Ο αλγόριθμος της SSA.....	5
2.2.1. Ανάλυση (Decomposition).....	5
2.2.2. Ανακατασκευή (Reconstruction)	9
2.3. Επιλογή παραμέτρων.....	10
2.3.1. Μήκος παραθύρου L	10
2.3.2. Ομαδοποίηση συνιστωσών	11
3. Προσομοιωμένα δεδομένα.....	17
3.1. Χρονοσειρά με τάση και 1 περιοδικότητα.....	17
3.2. Χρονοσειρά με τάση και θόρυβο	20
3.3. Χρονοσειρά με 2 περιοδικότητες και θόρυβο	24
3.4. Χρονοσειρά με τάση, 2 περιοδικότητες και θόρυβο.....	28
3.4.1. Μήκος παραθύρου $L = 170$	29
3.4.2. Μήκος παραθύρου $L = 100$	32
3.4.3. Μήκος παραθύρου $L = 50$	34
3.5. Συμπεράσματα	36
4. Συντεταγμένη x του Πόλου.....	37
4.1. Εισαγωγή των δεδομένων.....	37
4.2. Εφαρμογή της SSA.....	38
4.3. Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων	66
4.3.1. Τάση	66
4.3.2. Περιοδικότητες.....	68
5. Συντεταγμένη y του Πόλου.....	79
5.1. Εισαγωγή των δεδομένων.....	79

5.2.	Εφαρμογή της SSA.....	79
5.3.	Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων	107
5.3.1.	Τάση	107
5.3.2.	Περιοδικότητες.....	108
6.	Συμπεράσματα.....	121
6.1.	Γενικά.....	121
6.2.	Ερμηνείες περιοδικοτήτων	121
6.3.	Μελλοντικές εργασίες	123
	Παράρτημα Α – Κώδικας προσομοιώσεων	125
	Παράρτημα Β – Κώδικας συντεταγμένης x	131
	Βιβλιογραφία.....	141

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1.1: Διάγραμμα της κίνησης του Βόρειου Πόλου από το 1900. Η πραγματική θέση του Πόλου από το 2008 έως το 2014 απεικονίζεται με μπλε σταυρούς, που δείχνουν τις ετήσιες ταλαντώσεις και τις ταλαντώσεις Chandler. Η μέση θέση (δηλαδή το κέντρο των ταλαντώσεων) παρουσιάζεται για την περίοδο 1900 έως 2014 ως πράσινη γραμμή (Dick & Thaller, 2014)	2
Εικόνα 1.2: Διάγραμμα κίνησης του Βόρειου Πόλου σε arcsec για τις συντεταγμένες x, y και σε μέρες για το χρόνο t (https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_motion)	3
Εικόνα 3.1: Διάγραμμα χρονοσειράς F με τάση και 1 περιοδικότητα	17
Εικόνα 3.2: Πίνακας τροχιάς	18
Εικόνα 3.3: Οι πρώτοι πίνακες των συνιστωσών μετά την SVD	18
Εικόνα 3.4: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς	18
Εικόνα 3.5: Πίνακας συσχέτισης	19
Εικόνα 3.6: Οι συνιστώσες πριν την ομαδοποίηση	19
Εικόνα 3.7: Η χρονοσειρά μετά την εφαρμογή της SSA	20
Εικόνα 3.8: Σύγκριση αρχικής τάσης και περιοδικότητας (μπλε χρώμα) με τα αποτελέσματα της SSA (πορτοκαλί χρώμα)	20
Εικόνα 3.9: Διάγραμμα χρονοσειράς F με τάση και θόρυβο	21
Εικόνα 3.10: Οι πρώτοι 15 πίνακες μετά την SVD	21
Εικόνα 3.11: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς	22
Εικόνα 3.12: Πίνακας συσχέτισης	22
Εικόνα 3.13: Διάγραμμα της χρονοσειράς πριν την ομαδοποίηση των συνιστωσών	23
Εικόνα 3.14: Διάγραμμα της χρονοσειράς μετά την εφαρμογή της SSA	23
Εικόνα 3.15: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πραγματικών δεδομένων (μπλε χρώμα) και αυτών της SSA (πορτοκαλί χρώμα)	24
Εικόνα 3.16: Διάγραμμα χρονοσειράς F με 2 περιοδικότητες και θόρυβο	24
Εικόνα 3.17: Οι πρώτοι 15 πίνακες μετά την SVD	25
Εικόνα 3.18: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς	25
Εικόνα 3.19: Πίνακας συσχέτισης των 10 πρώτων συνιστωσών	26
Εικόνα 3.20: Διάγραμμα των συνιστωσών της χρονοσειράς πριν την ομαδοποίηση	27
Εικόνα 3.21: Διάγραμμα της χρονοσειράς μετά την εφαρμογή της SSA	27
Εικόνα 3.22: Σύγκριση πραγματικών δεδομένων (μπλε χρώμα) και αυτών της SSA (πορτοκαλί χρώμα)	28
Εικόνα 3.23: Διάγραμμα χρονοσειράς με τάση, 2 περιοδικότητες και θόρυβο	28
Εικόνα 3.24: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς των πρώτων 10 συνιστωσών	29
Εικόνα 3.25: Πίνακας συσχέτισης των πρώτων 10 συνιστωσών	29
Εικόνα 3.26: Διάγραμμα της χρονοσειράς μαζί με τις 12 πρώτες συνιστώσες	30
Εικόνα 3.27: Διάγραμμα της χρονοσειράς μετά την εφαρμογή της SSA	31
Εικόνα 3.28: Σύγκριση αποτελεσμάτων SSA και πραγματικών δεδομένων	31
Εικόνα 3.29: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς των 10 πρώτων συνιστωσών	32
Εικόνα 3.30: Πίνακας συσχέτισης των 10 πρώτων συνιστωσών	32
Εικόνα 3.31: Διάγραμμα της χρονοσειράς με τις συνιστώσες της πριν την ομαδοποίηση	32
Εικόνα 3.32: Διάγραμμα χρονοσειράς μετά την SSA	33
Εικόνα 3.33: Σύγκριση αποτελεσμάτων	33
Εικόνα 3.34: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς	34

Εικόνα 3.35: Πίνακας συσχέτισης των 10 πρώτων συνιστωσών	34
Εικόνα 3.36: Διάγραμμα χρονοσειράς και συνιστωσών πριν την ομαδοποίηση	34
Εικόνα 3.37: Διάγραμμα χρονοσειράς και συνιστωσών μετά την SSA.....	35
Εικόνα 3.38: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πραγματικών δεδομένων και αυτών της SSA.....	35
Εικόνα 4.1: Διάγραμμα της χρονοσειράς της x για όλα τα χρόνια της μελέτης (62 χρόνια).....	37
Εικόνα 4.2: Πίνακας τροχιάς της χρονοσειράς x	38
Εικόνα 4.3: Οι πρώτοι 20 πίνακες μετά την εφαρμογή της SSA.....	38
Εικόνα 4.4: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς.....	39
Εικόνα 4.5: Πίνακας συσχέτισης όλων των συνιστωσών	40
Εικόνα 4.6: Πίνακας συσχέτισης για τις συνιστώσες 0-10.....	40
Εικόνα 4.7: Διάγραμμα συνιστωσών 0 και 1	41
Εικόνα 4.8: Διάγραμμα συνιστώσας 2.....	41
Εικόνα 4.9: Διάγραμμα συνιστωσών 3 και 4.....	42
Εικόνα 4.10: Διάγραμμα συνιστωσών 5 και 6	42
Εικόνα 4.11: Διάγραμμα συνιστωσών 7 και 8	43
Εικόνα 4.12: Διάγραμμα συνιστωσών 9 και 10.....	43
Εικόνα 4.13: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 10-20	44
Εικόνα 4.14: Διάγραμμα συνιστωσών 11 και 12	44
Εικόνα 4.15: Διάγραμμα συνιστωσών 14 και 15.....	45
Εικόνα 4.16: Διάγραμμα συνιστωσών 16 και 17	45
Εικόνα 4.17: Διάγραμμα συνιστωσών 19 και 20	46
Εικόνα 4.18: Διάγραμμα συνιστωσών 13 και 18.....	46
Εικόνα 4.19: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 20-30	47
Εικόνα 4.20: Διάγραμμα συνιστωσών 21 και 22	47
Εικόνα 4.21: Διάγραμμα συνιστωσών 23 και 24.....	48
Εικόνα 4.22: Διάγραμμα συνιστωσών 25 και 26.....	48
Εικόνα 4.23: Διάγραμμα συνιστωσών 27 και 29	49
Εικόνα 4.24: Διάγραμμα συνιστωσών 28 και 30.....	49
Εικόνα 4.25: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 30-40	50
Εικόνα 4.26: Διάγραμμα συνιστωσών 30 και 31	50
Εικόνα 4.27: Διάγραμμα συνιστωσών 32 και 33	51
Εικόνα 4.28: Διάγραμμα συνιστωσών 38 και 39.....	51
Εικόνα 4.29: Διάγραμμα συνιστωσών 34 και 36.....	52
Εικόνα 4.30: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 40-50	52
Εικόνα 4.31: Διάγραμμα συνιστωσών 40 και 41	53
Εικόνα 4.32: Διάγραμμα συνιστωσών 44 και 45	53
Εικόνα 4.33: Διάγραμμα συνιστωσών 42 και 43	54
Εικόνα 4.34: Διάγραμμα συνιστωσών 46-50.....	54
Εικόνα 4.35: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 50-60	55
Εικόνα 4.36: Διάγραμμα συνιστωσών 55 και 56	55
Εικόνα 4.37: Διάγραμμα συνιστωσών 57 και 58.....	56
Εικόνα 4.38: Διάγραμμα συνιστωσών 59 και 60.....	56
Εικόνα 4.39: Διάγραμμα συνιστωσών 50-54.....	57
Εικόνα 4.40: Διαγράμματα όλων των ομαδοποιημένων συνιστωσών αλλά και της αρχικής χρονοσειράς	58
Εικόνα 4.41: Διάγραμμα τάσης της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	58
Εικόνα 4.42: Διάγραμμα 1 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	59

Εικόνα 4.43: Διάγραμμα 2 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	59
Εικόνα 4.44: Διάγραμμα 3 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	59
Εικόνα 4.45: Διάγραμμα 4 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	60
Εικόνα 4.46: Διάγραμμα 5 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	60
Εικόνα 4.47: Διάγραμμα 6 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	60
Εικόνα 4.48: Διάγραμμα 7 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	61
Εικόνα 4.49: Διάγραμμα 8 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	61
Εικόνα 4.50: Διάγραμμα 9 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	61
Εικόνα 4.51: Διάγραμμα 10 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	62
Εικόνα 4.52: Διάγραμμα 11 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	62
Εικόνα 4.53: Διάγραμμα 12 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	62
Εικόνα 4.54: Διάγραμμα 13 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	63
Εικόνα 4.55: Διάγραμμα 14 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	63
Εικόνα 4.56: Διάγραμμα 15 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	63
Εικόνα 4.57: Διάγραμμα 16 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	64
Εικόνα 4.58: Διάγραμμα 17 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	64
Εικόνα 4.59: Διάγραμμα 18 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	64
Εικόνα 4.60: Διάγραμμα 19 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	65
Εικόνα 4.61: Διάγραμμα 20 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	65
Εικόνα 4.62: Διάγραμμα 21 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	65
Εικόνα 4.63: Διάγραμμα 22 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	66
Εικόνα 4.64: Διάγραμμα θορύβου της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA.....	66
Εικόνα 4.65: Συνόρθωση τάσης μέσω ελαχίστων τετραγώνων.....	68
Εικόνα 4.66: Συνόρθωση 1 ^{ης} περιοδικότητας.....	70
Εικόνα 4.67: Συνόρθωση 2 ^{ης} περιοδικότητας.....	70
Εικόνα 4.68: Συνόρθωση 3 ^{ης} περιοδικότητας.....	71
Εικόνα 4.69: Συνόρθωση 4 ^{ης} περιοδικότητας.....	71
Εικόνα 4.70: Συνόρθωση 5 ^{ης} περιοδικότητας.....	71
Εικόνα 4.71: Συνόρθωση 6 ^{ης} περιοδικότητας.....	72

Εικόνα 4.72: Συνόρθωση 7 ^{ης} περιодικότητας.....	72
Εικόνα 4.73: Συνόρθωση 8 ^{ης} περιодικότητας.....	72
Εικόνα 4.74: Συνόρθωση 9 ^{ης} περιодικότητας.....	73
Εικόνα 4.75: Συνόρθωση 10 ^{ης} περιодικότητας.....	73
Εικόνα 4.76: Συνόρθωση 11 ^{ης} περιодικότητας.....	73
Εικόνα 4.77: Συνόρθωση 12 ^{ης} περιодικότητας.....	74
Εικόνα 4.78: Συνόρθωση 13 ^{ης} περιодικότητας.....	74
Εικόνα 4.79: Συνόρθωση 14 ^{ης} περιодικότητας.....	74
Εικόνα 4.80: Συνόρθωση 15 ^{ης} περιодικότητας.....	75
Εικόνα 4.81: Συνόρθωση 16 ^{ης} περιодικότητας.....	75
Εικόνα 4.82: Συνόρθωση 17 ^{ης} περιодικότητας.....	75
Εικόνα 4.83: Συνόρθωση 18 ^{ης} περιодικότητας.....	76
Εικόνα 4.84: Συνόρθωση 19 ^{ης} περιодικότητας.....	76
Εικόνα 4.85: Συνόρθωση 20 ^{ης} περιодικότητας.....	76
Εικόνα 4.86: Συνόρθωση 21 ^{ης} περιодικότητας.....	77
Εικόνα 4.87: Συνόρθωση 22 ^{ης} περιодικότητας.....	77
Εικόνα 5.1: Διάγραμμα της χρονοσειράς της y για όλα τα χρόνια της μελέτης (62 χρόνια).....	79
Εικόνα 5.2: Πίνακας τροχιάς της χρονοσειράς y	80
Εικόνα 5.3: Οι πρώτοι 20 πίνακες που δημιουργήθηκαν μετά την SVD.....	80
Εικόνα 5.4: Διαγράμματα σχετικής (αριστερά) και αθροιστικής (δεξιά) συνεισφοράς.....	81
Εικόνα 5.5: Πίνακας συσχέτισης όλων των συνιστωσών.....	81
Εικόνα 5.6: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 0-10.....	82
Εικόνα 5.7: Διάγραμμα συνιστωσών 0 και 7.....	82
Εικόνα 5.8: Διάγραμμα συνιστωσών 1 και 2.....	83
Εικόνα 5.9: Διάγραμμα συνιστωσών 3 και 4.....	83
Εικόνα 5.10: Διάγραμμα συνιστωσών 5 και 6.....	83
Εικόνα 5.11: Διάγραμμα συνιστωσών 8 και 9.....	84
Εικόνα 5.12: Πίνακα συσχέτισης συνιστωσών 10-20.....	84
Εικόνα 5.13: Διάγραμμα συνιστωσών 10 και 11.....	85
Εικόνα 5.14: Διάγραμμα συνιστωσών 12 και 13.....	85
Εικόνα 5.15: Διάγραμμα συνιστωσών 14 και 15.....	85
Εικόνα 5.16: Διάγραμμα συνιστωσών 16 και 17.....	86
Εικόνα 5.17: Διάγραμμα συνιστωσών 18 και 19.....	86
Εικόνα 5.18: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 20-30.....	87
Εικόνα 5.19: Διάγραμμα συνιστωσών 20 και 21.....	87
Εικόνα 5.20: Διάγραμμα συνιστωσών 22 και 23.....	88
Εικόνα 5.21: Διάγραμμα συνιστωσών 24 και 25.....	88
Εικόνα 5.22: Διάγραμμα συνιστωσών 26 και 27.....	88
Εικόνα 5.23: Διάγραμμα συνιστωσών 28 και 29.....	89
Εικόνα 5.24: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 30-40.....	89
Εικόνα 5.25: Διάγραμμα συνιστωσών 30 και 31.....	90
Εικόνα 5.26: Διάγραμμα συνιστωσών 32 και 33.....	90
Εικόνα 5.27: Διάγραμμα συνιστωσών 34, 35 και 36.....	90
Εικόνα 5.28: Διάγραμμα συνιστωσών 37 και 38.....	91
Εικόνα 5.29: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 40-50.....	91
Εικόνα 5.30: Διάγραμμα συνιστωσών 40 και 41.....	92
Εικόνα 5.31: Διάγραμμα συνιστωσών 45 και 46.....	92
Εικόνα 5.32: Διάγραμμα συνιστωσών 48, 49 και 50.....	92
Εικόνα 5.33: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 50-60.....	93

Εικόνα 5.34: Διάγραμμα συνιστωσών 54 και 55	93
Εικόνα 5.35: Διάγραμμα συνιστωσών 59 και 60	94
Εικόνα 5.36: Διάγραμμα συνιστωσών 52 και 53	94
Εικόνα 5.37: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 60-70	95
Εικόνα 5.38: Διάγραμμα συνιστωσών 63 και 64	95
Εικόνα 5.39: Διάγραμμα συνιστωσών 68 και 69	96
Εικόνα 5.40: Διαγράμματα όλων των περιοδικοτήτων, της τάσης, του θορύβου και της αρχικής χρονοσειράς	97
Εικόνα 5.41: Διάγραμμα τάσης της χρονοσειράς	98
Εικόνα 5.42: Διάγραμμα 1 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	98
Εικόνα 5.43: Διάγραμμα 2 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	98
Εικόνα 5.44: Διάγραμμα 3 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	99
Εικόνα 5.45: Διάγραμμα 4 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	99
Εικόνα 5.46: Διάγραμμα 5 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	99
Εικόνα 5.47: Διάγραμμα 6 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	100
Εικόνα 5.48: Διάγραμμα 7 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	100
Εικόνα 5.49: Διάγραμμα 8 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	100
Εικόνα 5.50: Διάγραμμα 9 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	101
Εικόνα 5.51: Διάγραμμα 10 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	101
Εικόνα 5.52: Διάγραμμα 11 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	101
Εικόνα 5.53: Διάγραμμα 12 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	102
Εικόνα 5.54: Διάγραμμα 13 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	102
Εικόνα 5.55: Διάγραμμα 14 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	102
Εικόνα 5.56: Διάγραμμα 15 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	103
Εικόνα 5.57: Διάγραμμα 16 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	103
Εικόνα 5.58: Διάγραμμα 17 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	103
Εικόνα 5.59: Διάγραμμα 18 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	104
Εικόνα 5.60: Διάγραμμα 19 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	104
Εικόνα 5.61: Διάγραμμα 20 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	104
Εικόνα 5.62: Διάγραμμα 21 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	105
Εικόνα 5.63: Διάγραμμα 22 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	105
Εικόνα 5.64: Διάγραμμα 23 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	105
Εικόνα 5.65: Διάγραμμα 24 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	106
Εικόνα 5.66: Διάγραμμα 25 ^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς	106
Εικόνα 5.67: Διάγραμμα θορύβου της χρονοσειράς	106
Εικόνα 5.68: Συνόρθωση τάσης μέσω ελαχίστων τετραγώνων	108
Εικόνα 5.69: Συνόρθωση 1 ^{ης} περιοδικότητας	111
Εικόνα 5.70: Συνόρθωση 2 ^{ης} περιοδικότητας	111
Εικόνα 5.71: Συνόρθωση 3 ^{ης} περιοδικότητας	111
Εικόνα 5.72: Συνόρθωση 4 ^{ης} περιοδικότητας	112
Εικόνα 5.73: Συνόρθωση 5 ^{ης} περιοδικότητας	112
Εικόνα 5.74: Συνόρθωση 6 ^{ης} περιοδικότητας	112
Εικόνα 5.75: Συνόρθωση 7 ^{ης} περιοδικότητας	113
Εικόνα 5.76: Συνόρθωση 8 ^{ης} περιοδικότητας	113
Εικόνα 5.77: Συνόρθωση 9 ^{ης} περιοδικότητας	113
Εικόνα 5.78: Συνόρθωση 10 ^{ης} περιοδικότητας	114
Εικόνα 5.79: Συνόρθωση 11 ^{ης} περιοδικότητας	114
Εικόνα 5.80: Συνόρθωση 12 ^{ης} περιοδικότητας	114
Εικόνα 5.81: Συνόρθωση 13 ^{ης} περιοδικότητας	115
Εικόνα 5.82: Συνόρθωση 14 ^{ης} περιοδικότητας	115

Εικόνα 5.83: Συνόρθωση 15 ^{ης} περιδικότητας.....	115
Εικόνα 5.84: Συνόρθωση 16 ^{ης} περιδικότητας.....	116
Εικόνα 5.85: Συνόρθωση 17 ^{ης} περιδικότητας.....	116
Εικόνα 5.86: Συνόρθωση 18 ^{ης} περιδικότητας.....	116
Εικόνα 5.87: Συνόρθωση 19 ^{ης} περιδικότητας.....	117
Εικόνα 5.88: Συνόρθωση 20 ^{ης} περιδικότητας.....	117
Εικόνα 5.89: Συνόρθωση 21 ^{ης} περιδικότητας.....	117
Εικόνα 5.90: Συνόρθωση 22 ^{ης} περιδικότητας.....	118
Εικόνα 5.91: Συνόρθωση 23 ^{ης} περιδικότητας.....	118
Εικόνα 5.92: Συνόρθωση 24 ^{ης} περιδικότητας.....	118
Εικόνα 5.93: Συνόρθωση 25 ^{ης} περιδικότητας.....	119

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα συνόρθωσης τάσης.....	67
Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα συνόρθωσης για τις περιοδικότητες.....	69
Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα συνόρθωσης τάσης.....	108
Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα συνόρθωσης για τις περιοδικότητες.....	110
Πίνακας 6.1: Φυσική ερμηνεία κάθε περιοδικότητας.....	122

1. Εισαγωγή

1.1. Γενικά

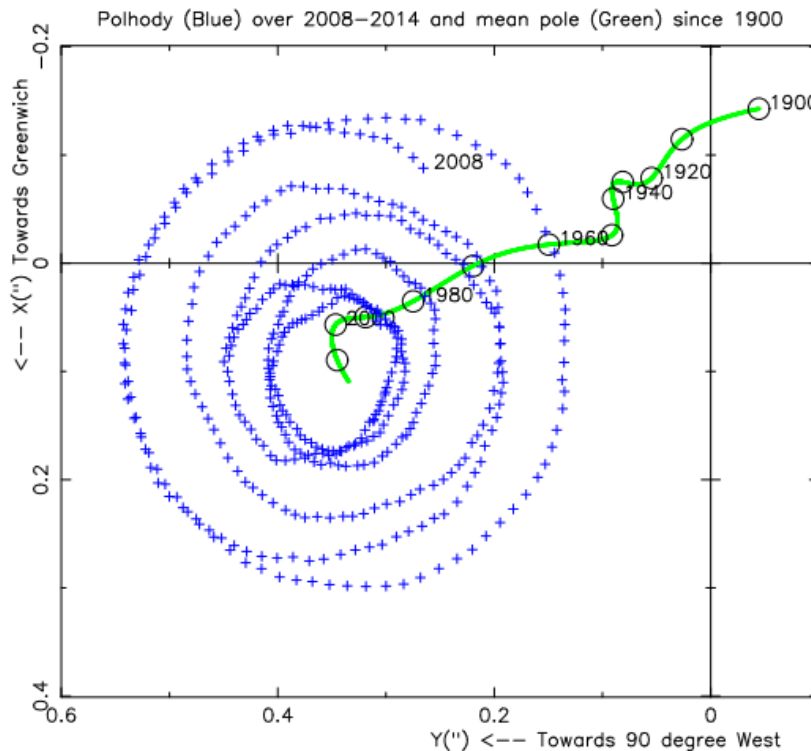
Ένα από τα βασικά αντικείμενα που απασχολεί τους επιστήμονες ανά τον κόσμο στον κλάδο της Αστρονομίας και της Γεωδαισίας, είναι αυτό της «Κίνησης του Πόλου». Με τον όρο αυτό νοείται η κίνηση του αληθούς ουράνιου πόλου, δηλαδή του στιγμιαίου άξονα περιστροφής της Γης, ως προς ένα σταθερό σημείο στην επιφάνεια της Γης. Το σημείο αυτό συνήθως επιλέγεται να είναι κοντά στη μέση θέση του αληθούς πόλου και οι απόλυτες γεωδαιτικές και αστρονομικές συντεταγμένες αναφέρονται σε αυτό (Κορακίτης, 2008).

Η διεύθυνση και το μέγεθος του διανύσματος του άξονα περιστροφής της Γης μεταβάλλονται με το χρόνο σε σχέση με τη στερεά Γη και αυτό οφείλεται σε εξωτερικές βαρυτικές δυνάμεις και σε εσωτερικές γεωδυναμικές διεργασίες (Torre, 2023). Η κίνηση του άξονα περιστροφής της Γης ως προς τον φλοιό της, είχε προβλεφθεί από τον Euler το 1765 με περίοδο 305 μέρες. Η κίνηση αυτή μελετήθηκε το 1985 από τη Διεθνή Υπηρεσία Πλάτους (International Latitude Service, ILS), η οποία από 5 αστεροσκοπεία στον παράλληλο 38°08' και σε διάφορα μέρη της Γης, έκανε παρατηρήσεις γεωγραφικού πλάτους (Βέης, Μπιλλήρης και Παπαζήση, 2011). Πλέον, τα αστεροσκοπεία που καταγράφουν αντίστοιχες μετρήσεις είναι αρκετά περισσότερα. Λόγω της πολυπλοκότητας όμως του φαινομένου, ακόμα οι ακριβείς τιμές των συντεταγμένων του Πόλου παραμένουν άγνωστες.

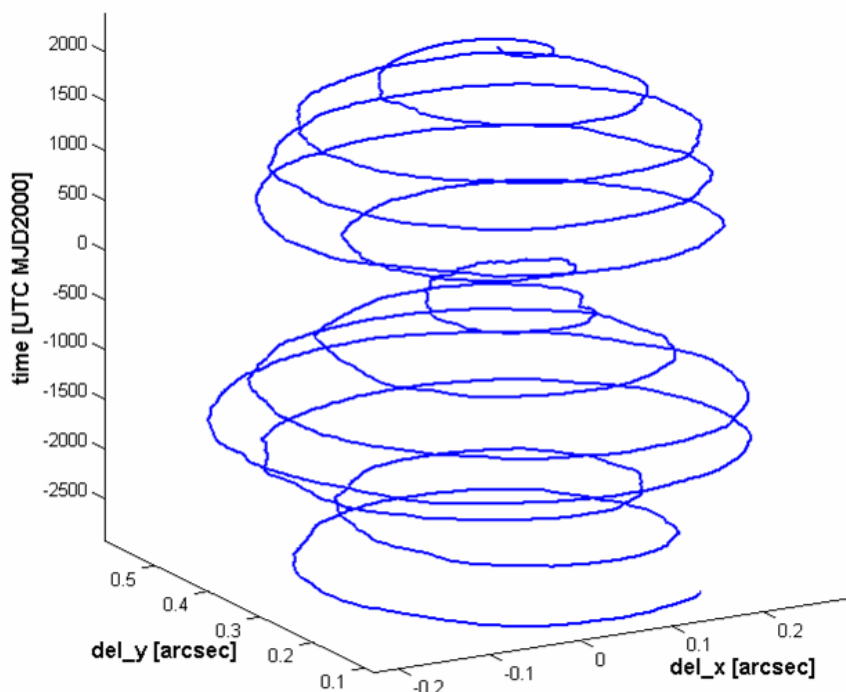
Το γεγονός ότι ο άξονας περιστροφής της Γης δεν συμπίπτει με τον άξονα της μέγιστης ροπής αδράνειας (Πόλου), οδηγεί στο φαινόμενο της ταλάντωσης του άξονα του Πόλου. Η ταλάντωση αυτή ονομάζεται ταλάντωση Chandler και έχει περίοδο περίπου 435 μέρες και μεταβλητό πλάτος από 0.1" έως 0.2". Η ταλάντωση αυτή επηρεάζεται συνεχώς από διάφορα μετεωρολογικά φαινόμενα και δεν έχει παρατηρηθεί ακόμα κάποια απόσβεση. Σε αντίθεση με τον Chandler, η παρατήρηση του Euler είχε ως αποτέλεσμα περίοδο 305 μέρες για την ίδια ταλάντωση. Η διαφορά στις δύο περιόδους οφείλεται στο γεγονός ότι από τη μεριά του Chandler, η Γη δεν θεωρούνταν τελείως συμπαγής, πράγμα που ήταν αντίθετο στη θεωρία του Euler. Υπάρχει και μια περιοδική κίνηση του Πόλου 12 μηνών, που φαίνεται να προκαλείται από διάφορες εποχιακές μετατοπίσεις αέρα και υδάτινων μαζών στη Γη. Η κίνηση αυτή έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτή που ανακάλυψε ο Chandler, με σχεδόν σταθερό πλάτος 0.1". Επιπλέον, παρατηρείται και μια κίνηση του Πόλου με περίοδο πάνω από 100 χρόνια με μεταβλητή μετατόπιση της τάξης των 0.003"-0.004"/έτος που αντιστοιχεί σε σχεδόν 10cm/έτος στην επιφάνεια της Γης. Αυτή οφείλεται στους παγετώνες που βρίσκονται στον Καναδά και τη Σκανδιναβία αλλά και σε μεταβολές της στάθμης της θάλασσας, τεκτονικές κινήσεις, λιώσιμο των πολικών πάγων και σε μετατοπίσεις στο εσωτερικό της Γης (Torre, 2023). Τέλος, οι πιο ακανόνιστες μεταβολές στις συντεταγμένες του Πόλου, με περίοδο από ημέρες έως δεκαετίες και με πλάτη από 0.003", οφείλονται στις ωκεάνιες παλίρροιες και τις ωκεάνιες και ηπειρωτικές μεταβολές των υδάτων (Adhikari & Ivins, 2016).

Λόγω της διαφορετικής ευθυγράμμισης του άξονα συμμετρίας του μανδύα της Γης και του άξονα περιστροφής του ρευστού εξωτερικού πυρήνα, σχηματίζεται μια ημερήσια ταλάντωση. Αυτή έχει ως αποτέλεσμα μια ανάδρομη κίνηση του άξονα περιστροφής σε σχέση με αυτόν της στροφορμής με περίοδο περίπου 430 αστρικές μέρες και πλάτος 0.1 mas (Guo, Greiner-Mai & Ballani 2005).

Για την περιγραφή της κίνησης του Πόλου ορίζεται το ακόλουθο δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς, με κέντρο τη Διεθνή Συμβατική Αφετηρία (Conventional International Origin), που ορίζεται ως η μέση θέση του Πόλου περιστροφής κατά την περίοδο 1900 - 1905: ο άξονας x έχει τη διεύθυνση του μεσημβρινού του Greenwich και ο άξονας y σχηματίζει γωνία 90° προς τα ανατολικά του άξονα x . Η θέση του γήινου πλαισίου ως προς τον αληθή Ισημερινό και το αληθές Εαρινό Ισημερινό σημείο της εποχής καθορίζεται μέσω διαδοχικών στροφών x_p, y_p και του Αστρικού Χρόνου Greenwich. Οι συντεταγμένες x_p, y_p ανήκουν στις Παραμέτρους Προσανατολισμού της Γης (Κορακίτης, 2008).



Εικόνα 1.1: Διάγραμμα της κίνησης του Βόρειου Πόλου από το 1900. Η πραγματική θέση του Πόλου από το 2008 έως το 2014 απεικονίζεται με μπλε σταυρούς, που δείχνουν τις ετήσιες ταλαντώσεις και τις ταλαντώσεις Chandler. Η μέση θέση (δηλαδή το κέντρο των ταλαντώσεων) παρουσιάζεται για την περίοδο 1900 έως 2014 ως πράσινη γραμμή (Dick & Thaller, 2014)



Εικόνα 1.2: Διάγραμμα κίνησης του Βόρειου Πόλου σε arcsec για τις συντεταγμένες (x, y) και σε μέρες για το χρόνο (t) (https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_motion)

1.2. Κίνητρο

Κίνητρο για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας αποτέλεσε η κατανόηση της σημασίας του συγκεκριμένου προβλήματος και του μεγέθους αυτού, καθώς και η άμεση επιρροή του σε προβλήματα κινηματικού εντοπισμού με δέκτες GNSS, αφού οι συντεταγμένες των σταθμών αναφοράς αλλάζουν συνεχώς. Ακόμη, η αυξημένη ζήτηση και χρήση διαφόρων μεθόδων ανάλυσης χρονοσειρών με ακρίβεια, επέβαλλε την ανάγκη μελέτης μιας μεθόδου αρκετά διαδεδομένης για τα παγκόσμια δεδομένα, και όχι άδικα, μιας και τα αποτελέσματα που συνεπάγονται από αυτή είναι ικανοποιητικά σε πολύ μεγάλο βαθμό. Η μέθοδος αυτή ήταν η Singular Spectrum Analysis (SSA), και με τη βοήθεια της μπόρεσε να γίνει η ανάλυση των χρονοσειρών των συντεταγμένων του Πόλου (x και y) για τις ημερομηνίες από 1/1/1960 έως 31/12/2023 (62 έτη).

1.3. Δεδομένα μελέτης

Τα δεδομένα του προβλήματος παρέχονται από τη Διεθνή Υπηρεσία για την Περιστροφή της Γης και των Συστημάτων Αναφοράς (IERS) και το Αστεροσκοπείο του Παρισιού και περιλαμβάνονται στον παρακάτω σύνδεσμο:

<https://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php?index=C04&lang=en>

Η υπηρεσία IERS ιδρύθηκε το 1987 από τη Διεθνή Αστρονομική Ένωση και τη Διεθνή Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής. Είναι υπεύθυνη για τη διατήρηση των παγκόσμιων προτύπων χρόνου και συστημάτων αναφοράς. Παρέχει διάφορα δεδομένα και εργαλεία σε όλη την αστρονομική, γεωδαιτική και επιστημονική κοινότητα.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν σε μορφή:

έτος/μήνας/ημέρα, συντεταγμένη x (mas), σφάλμα συντεταγμένης x (mas), συντεταγμένη y (mas), σφάλμα συντεταγμένης y (mas).

Για παράδειγμα:

1962 1 1 -12.700 30.000 213.000 30.000

1.4. Διάρθρωση εργασίας

Η παρούσα εργασία διαρθρώνεται σε 6 Κεφάλαια μαζί με το Κεφάλαιο 1 της Εισαγωγής, με την εξής δομή:

Στο Κεφάλαιο 2, περιγράφονται τα μαθηματικά που αφορούν τη μέθοδο ανάλυσης (SSA) της συγκεκριμένης χρονοσειράς, παρουσιάζοντας με τη σειρά τα βήματα για την εφαρμογή της, καθώς και υπογραμμίζοντας τους κρίσιμους παράγοντες για την ολική της ακρίβεια.

Στο Κεφάλαιο 3, γίνεται μια δοκιμή της μεθόδου για κάποια προσομοιωμένα δεδομένα, ώστε να υπάρξει βαθύτερη κατανόηση αυτής. Επίσης, αναλύεται ο σημαντικότερος παράγοντάς της, ο οποίος έχει και το μεγαλύτερο βάρος στο τελικό αποτέλεσμα.

Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται τα δεδομένα για τη συντεταγμένη x του Πόλου για όλα τα χρόνια μελέτης και φαίνεται πλέον στην πράξη η πραγματική χρήση της SSA. Στο τέλος του κεφαλαίου, δίνονται τα αποτελέσματα από την ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή που έγινε στα εξαγόμενα της SSA.

Στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζονται τα δεδομένα για τη συντεταγμένη y του Πόλου για όλα τα χρόνια μελέτης και όπως και στο Κεφάλαιο 4, εκτελείται με τα πραγματικά δεδομένα ξανά ο αλγόριθμος της SSA. Στο τέλος του κεφαλαίου, δίνονται πάλι τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της ελαχιστοτετραγωνικής προσαρμογής.

Στο Κεφάλαιο 6, παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις αλλά και από την ανάλυση των πραγματικών δεδομένων. Επίσης, γίνεται η ερμηνεία των διαφόρων περιοδικοτήτων που προέκυψαν και μια αναφορά για μελλοντικές εργασίες που μπορούν να γίνουν πάνω στο ευρύτερο αντικείμενο της περιοχής του προβλήματος.

2. Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων: Singular Spectrum Analysis (SSA)

2.1. Γενικά στοιχεία

Η μέθοδος η οποία ακολουθήθηκε για την ανάλυση των δεδομένων του συγκεκριμένου προβλήματος είναι αυτή της Ανάλυσης Ιδιάζοντος Φάσματος (Singular Spectrum Analysis, SSA). Πρόκειται για μια ευρέως διαδεδομένη μέθοδο ανάλυσης χρονοσειρών η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε ποικίλα προβλήματα όπως είναι η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μιας χρονοσειράς, η ομαλοποίησή της χρησιμοποιώντας ένα υποσύνολο των τιμών της αλλά και στην αποσύνθεσή της σε μικρότερες συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται όπως είναι η τάση, οι περιοδικότητες και ο θόρυβος. Η αρχική αποσύνθεση της στις επιμέρους συνιστώσες και η μετέπειτα πρόσθεση όλων αυτών οδηγούν στη δημιουργία της αρχικής χρονοσειράς. Συνδυάζει στοιχεία της επεξεργασίας σήματος, της γραμμικής άλγεβρας, της πολυμεταβλητής στατιστικής και άλλων.

Η αλγόριθμος της SSA αποτελείται από 4 βασικά βήματα. Τα δύο πρώτα αποτελούν το στάδιο της **Ανάλυσης** (Decomposition) και τα δύο τελευταία το στάδιο της **Ανακατασκευής** (Reconstruction).

Τα βήματα αυτά είναι:

- η **Ενσωμάτωση** (Embedding) της σειράς, όπου η μονοδιάστατη σειρά αναπαρίσταται ως μια πολυδιάστατη της οποίας η διάσταση καλείται «μήκος παραθύρου»
- η **Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές** (Singular Value Decomposition, SVD), όπου γίνεται η αποσύνθεση της ιδιάζουσας τιμής του πίνακα τροχιάς σε ένα άθροισμα αντιδιαγώνιων πινάκων
- η **Ομαδοποίηση** (Grouping), όπου γίνεται ο διαχωρισμός των πινάκων που υπολογίστηκαν στο 2^ο βήμα σε πολλές ομάδες και η άθροιση των πινάκων κάθε ομάδας
- και τέλος, ο **Μέσος Όρος Διαγωνίων** (Diagonal Averaging), όπου κάθε πίνακας που προκύπτει μεταφέρεται σε μια χρονοσειρά που αποτελεί πρόσθετο συστατικό της αρχικής χρονοσειράς.

2.2. Ο αλγόριθμος της SSA

2.2.1. Ανάλυση (Decomposition)

Αρχικά, θεωρείται μια σειρά αποτελούμενη από πραγματικές τιμές

$$\mathbf{F} = (f_0, \dots, f_{N-1}) \quad (2.1)$$

μεγέθους N ($N > 2$) με μία τουλάχιστον μη μηδενική τιμή. Έπειτα, θεωρείται ένας ακέραιος L ($2 \leq L \leq N/2$) με τον οποίο σχηματίζεται ένα παράθυρο αποτελούμενο από

τις υποσειρές $\{f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+L-1}\}, i = 0, \dots, N - L$. Μετακινώντας αυτό το παράθυρο σε όλη τη χρονοσειρά, σχηματίζονται κάποιοι πίνακες (\mathbf{X}_i) για κάθε υποσειρά:

$$\mathbf{X}_0 = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{L-1})^T \quad (2.2)$$

$$\mathbf{X}_1 = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_L)^T \quad (2.3)$$

$$\mathbf{X}_2 = (f_2, f_3, f_4, \dots, f_{L+1})^T \quad (2.4)$$

⋮

$$\mathbf{X}_{N-L} = (f_{N-L}, f_{N-L+1}, f_{N-L+2}, \dots, f_{N-1})^T \quad (2.5)$$

Από αυτούς τους πίνακες δημιουργείται ο τελικός Πίνακας Τροχιάς (Trajectory Matrix) με στήλες τους παραπάνω πίνακες, στη μορφή:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots, \mathbf{X}_K) \quad (2.6)$$

όπου $K = N - L + 1$. Όπως φαίνεται, ο πίνακας \mathbf{X} έχει διαστάσεις $L \times K$ και ο τρόπος που δημιουργείται δείχνει ότι είναι ένας αντιδιαγώνιος πίνακας (ή Hankel), όπου δηλαδή όλα τα στοιχεία στις αντιδιαγώνιους του είναι ίσα.

Έχοντας τον πίνακα τροχιάς, σειρά έχει η ανάλυση του μέσω της μεθόδου Singular Value Decomposition (SVD). Η μέθοδος αυτή, διασπάει τον πίνακα τροχιάς σε 3 πίνακες, όπου όλοι μαζί αποτελούν τον \mathbf{X} , είναι δηλαδή

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (2.7)$$

Υπολογίζονται οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ του πίνακα $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ σε φθίνουσα σειρά, καθώς και τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{U} ($\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_L$) που αφορούν το ορθοκανονικό σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα έχοντας έτσι έναν πίνακα \mathbf{U} μεγέθους $L \times L$ με στήλες τα ιδιοδιανύσματα αυτά.

Η μέθοδος SVD ουσιαστικά φέρνει τον πίνακα \mathbf{X} σε μια μορφή:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T \quad (2.8)$$

όπου:

- $d = \max\{i, \text{τέτοιο ώστε } \lambda_i > 0\}$ ο βαθμός του πίνακα \mathbf{X}
- και $\mathbf{V}_i = \mathbf{X}^T \mathbf{U}_i / \sqrt{\lambda_i}$

Οι πίνακες \mathbf{U} και \mathbf{V} περιέχουν τις αριστερές και δεξιές ιδιάζουσες τιμές (singular values) $\sqrt{\lambda_i}$ του \mathbf{X} , αντίστοιχα. Η συλλογή $\{\sqrt{\lambda_i}, \mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i\}$ ονομάζεται ιδιοτριπλέτα του πίνακα \mathbf{X} .

Παρακάτω γίνεται μια περαιτέρω ανάλυση του εκάστοτε πίνακα της SVD:

- Πίνακας \mathbf{U}

Ο πίνακας \mathbf{U} είναι ένας ορθοκανονικός πίνακας διαστάσεων $L \times L$ και ισχύει:

$$\mathbf{U}_i \mathbf{U}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.9)$$

Αυτό σημαίνει ότι, ο πίνακας \mathbf{U} είναι μοναδιαίος πίνακας και άρα ισχύει:

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{1} \quad (2.10)$$

Έστω $\mathbf{Z}_i = \sigma_i \mathbf{V}_i$ ένα διάνυσμα στήλης τέτοιο ώστε

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \mathbf{U}_i \mathbf{Z}_i^T \quad (2.11)$$

και κάθε L -lagged διάνυσμα στήλης \mathbf{X}_j δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{X}_j = \sum_{i=1}^d \mathbf{z}_{ji} \mathbf{U}_i \quad (2.12)$$

όπου \mathbf{z}_{ji} είναι η j συνιστώσα του διανύσματος \mathbf{Z}_i . Επίσης, η Εξ. (2.11) υποδηλώνει ότι το $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_d)$ αποτελεί ορθοκανονική βάση στον d -διάστατο χώρο των στηλών του πίνακα τροχιάς \mathbf{X} και ότι το \mathbf{z}_{ij} είναι ο i συντελεστής του “μετατοπισμένου” (lagged) διανύσματος \mathbf{X}_j που αναπαρίσταται στη βάση \mathbf{U} . Με άλλα λόγια, οι στήλες του πίνακα \mathbf{U} σχηματίζουν ένα **σύνολο ορθοκανονικών βάσεων** που περιγράφουν την υποσειρά $\{f_i, \dots, f_{i+L-1}\}_{i=1}^{N-L+1}$ στις στήλες του πίνακα τροχιάς.

- Πίνακας \mathbf{V}

Αντίστοιχα, ο πίνακας \mathbf{V} είναι ένας ορθοκανονικός μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $K \times K$.

Αν ληφθεί υπόψη ότι, για κάθε πίνακα \mathbf{A} και \mathbf{B} , καταλλήλων διαστάσεων, ισχύει

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (2.13)$$

τότε μέσω του υπολογισμού του ανάστροφου πίνακα του \mathbf{X} από την Εξ. (2.7) προκύπτει

$$\mathbf{X}^T = \sum_{i=1}^d \mathbf{V}_i \mathbf{Y}_i^T \quad (2.14)$$

όπου $\mathbf{Y}_i = \sigma_i \mathbf{U}_i$. Τότε το κάθε K -lagged διάνυσμα \mathbf{X}_j , δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{X}_j^T = \sum_{i=1}^d \mathbf{y}_{ji} \mathbf{V}_i \quad (2.15)$$

όπου \mathbf{X}_j^T είναι η j στήλη του \mathbf{X}^T και το \mathbf{y}_{ji} είναι η j συνιστώσα του διανύσματος \mathbf{Y}_i . Η Εξ. (2.14) υποδηλώνει ότι το $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_d\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση στον d -διάστατο χώρο των στηλών του ανάστροφου πίνακα τροχιάς \mathbf{X}^T και ότι το \mathbf{y}_{ji} είναι ο i συντελεστής του “μετατοπισμένου” (lagged) διανύσματος \mathbf{V}_i^T που αναπαρίσταται στη βάση \mathbf{V} . Με άλλα λόγια, οι στήλες του πίνακα \mathbf{V} σχηματίζουν ένα σύνολο ορθοκανονικών βάσεων που περιγράφουν την υποσειρά $\{f_i, \dots, f_{i+N-L}\}_{i=0}^{L-1}$ στις γραμμές του πίνακα τροχιάς.

- **Πίνακας Σ**

Ο πίνακας Σ είναι ένας ορθογώνιος διαγώνιος πίνακας, διαστάσεων $L \times K$, που περιέχει όλες τις **ιδιάζουσες τιμές** (singular values) του \mathbf{X} , κατανεμημένες σε φθίνουσα σειρά ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_L \geq 0$). Τα σ_i μπορούν να ερμηνευτούν ως συντελεστές κλίμακας που καθορίζουν τη **σχετική συνεισφορά** της ιδιοτριπλέτας $\{\sigma_i, \mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i\}$ στην έκφραση $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{d-1} \sigma_i \mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T$.

Η νόρμα του Frobenius του \mathbf{X} , δηλ. η $\|\mathbf{X}\|_F$, δίνεται από τη σχέση:

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} |x_{j,k}|^2} \quad (2.16)$$

όπου $x_{j,k}$ το στοιχείο στη j γραμμή και k στήλη του \mathbf{X} .

Για ένα εξωτερικό γινόμενο όπως το $\mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T$, ισχύει:

$$\|\mathbf{U}_i \mathbf{V}_i^T\|_F = \|\mathbf{U}_i\|_F \|\mathbf{V}_i\|_F = 1 \quad (2.17)$$

μιας και τα \mathbf{U}_i και \mathbf{V}_i είναι κανονικοποιημένα. Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{X}_i\|_F = \sigma_i \quad (2.18)$$

και

$$\|\mathbf{X}\|_F^2 = \sum_{i=1}^d \sigma_i^2 \quad (2.19)$$

Συνεπώς, αφού το τετράγωνο της Frobenius νόρμας του πίνακα τροχιάς, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ιδιζουσών τιμών, ο λόγος $\sigma_i^2 / \|\mathbf{X}\|_F^2$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μονάδα μέτρησης της **συνεισφοράς** των στοιχειωδών πινάκων \mathbf{X}_i στον πίνακα \mathbf{X} .

2.2.2. Ανακατασκευή (Reconstruction)

Η ανακατασκευή ξεκινά με το βήμα της ομαδοποίησης (grouping). Αφού παραχθεί το ανάπτυγμα $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d$, το σύνολο των δεικτών $\{1, \dots, d\}$ χωρίζεται σε m διακριτά υποσύνολα $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_m$. Έστω $\mathbf{I} = \{i_1, \dots, i_p\}$, τότε ο προκύπτων πίνακας \mathbf{X}_i που αντιστοιχεί στο διάνυσμα \mathbf{I} θα είναι $\mathbf{X}_{\mathbf{I}} = \{\mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}\}$. Οι πίνακες αυτοί υπολογίζονται για κάθε υποσύνολο $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_m$ και έτσι προκύπτει ότι:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\mathbf{I}_1} + \dots + \mathbf{X}_{\mathbf{I}_m} \quad (2.20)$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ομαδοποίηση ιδιοτριπλέτας.

Σειρά έχει ο **μέσος όρος διαγωνίων** (diagonal averaging), όπου κάθε πίνακας της ομαδοποιημένης αποσύνθεσης $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\mathbf{I}_1} + \dots + \mathbf{X}_{\mathbf{I}_m}$ μετασχηματίζεται σε μια νέα σειρά μήκους N . Έστω \mathbf{Y} ένας πίνακας $L \times K$ με στοιχεία $y_{ij}, 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K$.

Θέτοντας $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$, $N = L + K - 1$ και $y_{ij}^* = y_{ij}$ αν $L < K$ ή $y_{ij}^* = y_{ji}$ αν $L \geq K$, ο μέσος όρος διαγωνίων μετατρέπει τον πίνακα \mathbf{Y} στη σειρά g_0, \dots, g_{N-1} χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\mathbf{g}_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m, k-m+2}^* & \text{for } 0 \leq k < L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m, k-m+2}^* & \text{for } L^* - 1 \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m, k-m+2}^* & \text{for } K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (2.21)$$

Η παραπάνω εξίσωση αντιστοιχεί στο μέσο όρο όλων των στοιχείων του πίνακα επί της αντιδιαγωνίου που ανήκει το κάθε \mathbf{g}_k .

Αν ο πίνακας \mathbf{Y} είναι ο πίνακας τροχιάς μιας σειράς (h_0, \dots, h_{N-1}) , δηλαδή αν ο \mathbf{Y} είναι αντιδιαγωνίος πίνακας, τότε για κάθε i ισχύει $\mathbf{g}_i = \mathbf{h}_i$.

Ο διαγώνιος μέσος όρος, όταν εφαρμόζεται σε έναν πίνακα \mathbf{X}_I που προκύπτει από το άθροισμα των πινάκων που σχετίζονται με τους δείκτες του υποσυνόλου I , παράγει τη σειρά

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = (\tilde{f}_0^{(k)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(k)}) \quad (2.22)$$

και έτσι η αρχική σειρά f_0, \dots, f_{N-1} αναλύεται σε άθροισμα m σειρών:

$$f_n = \sum_{k=1}^m \tilde{f}_n^{(k)} \quad (2.23)$$

2.3. Επιλογή παραμέτρων

Στην SSA υπάρχουν δύο βασικές παράμετροι οι οποίες επηρεάζουν σημαντικά τα τελικά αποτελέσματα, με διαφορετικό βάρος η κάθε μια. Αυτές είναι το μήκος παραθύρου και η ομαδοποίηση των συνιστωσών. Η κάθε μια είναι απαραίτητο να επιλεγθεί σωστά, ειδάλλως ο χρήστης θα αναλώνεται συνεχώς σε λανθασμένα αποτελέσματα.

2.3.1. Μήκος παραθύρου L

Το μήκος παραθύρου είναι η κύρια παράμετρος της SSA αφού έχει το μεγαλύτερο βάρος από όλες τις παραμέτρους και μια ακατάλληλη επιλογή αυτού, θα σήμαινε ότι καμία ομαδοποίηση δεν θα βοηθούσε τελικά στην επίτευξη καλών αποτελεσμάτων.

Η επιλογή του κατάλληλου μήκους παραθύρου εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα και από τις αρχικές πληροφορικές για τη χρονοσειρά. Δεν υπάρχει κάποιος κανόνας ή απαγόρευση για την επιλογή του, ωστόσο υπάρχουν κάποιες γενικές αρχές που μπορούν να βοηθήσουν.

Τα SVD των πινάκων τροχιάς είναι ισοδύναμα, επομένως για την ανάλυση της δομής των χρονοσειρών δεν έχει νόημα να λαμβάνεται μήκος παραθύρου μεγαλύτερο από το μισό του μήκους της χρονοσειράς. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό, όσο πιο κοντά βρίσκεται το μήκος του παραθύρου σε αυτό της χρονοσειράς, τόσο πιο λεπτομερής γίνεται η ανάλυσή της. Εξαιρέση αποτελούν οι σειρές πεπερασμένου βαθμού, όπου για κάθε $L > d$ και $N > 2 \cdot d$ (όπου d ο βαθμός της σειράς), ο αριθμός των μη μηδενικών συνιστωσών στην SVD είναι ίσος με d και δεν εξαρτάται από το μήκος του παραθύρου (Παππά, 2023). Επίσης, η επιλογή ενός μεγάλου παραθύρου βοηθάει στον καλύτερο διαχωρισμό μεταξύ ερμηνεύσιμων συνιστωσών, οι οποίες δεν θα είχαν την ευκαιρία να φανούν με την επιλογή ενός μικρότερου παραθύρου. Ωστόσο, όταν μια χρονοσειρά έχει ιδιαίτερα πολύπλοκη δομή, τότε θα ήταν λογικό να γίνει η επιλογή ενός μικρότερου παραθύρου, ώστε να μπορέσει να συμπεριλάβει τυχόν απρόσμενες διακυμάνσεις στις τιμές των δεδομένων.

2.3.2. Ομαδοποίηση συνιστωσών

Αφού γίνει η κατάλληλη επιλογή του μήκους παραθύρου L και η SVD του πίνακα τροχιάς της αρχικής χρονοσειράς, σειρά έχει η ομαδοποίηση αυτών των συνιστωσών με τρόπο που θα βοηθήσει στην τελική ανάλυση και επεξήγηση των αποτελεσμάτων.

Το πρώτο βασικό βήμα είναι η αρχική ποιοτική ανάλυση της χρονοσειράς ώστε να μπορέσουν να φανούν ως επί το πλείστον μερικά από τα συστατικά της, όπως είναι η τάση, τυχόν περιοδικότητες και ο θόρυβος. Δηλαδή, από τη μορφή της αρχικής χρονοσειράς μπορεί να εξαχθεί μια πρώτη εικόνα για το σχήμα της τάσης, αν εμπλέκονται περισσότερες από μία συνιστώσες, το πλήθος των περιοδικοτήτων και η περίοδος τους. Αυτό θα βοηθήσει αρκετά στη σωστή ομαδοποίηση των συνιστωσών, η οποία θα γίνει κυρίως σύμφωνα με κάποια εργαλεία τα οποία θα παρουσιαστούν παρακάτω.

Τα εργαλεία που θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στη σωστή ομαδοποίηση των συνιστωσών είναι:

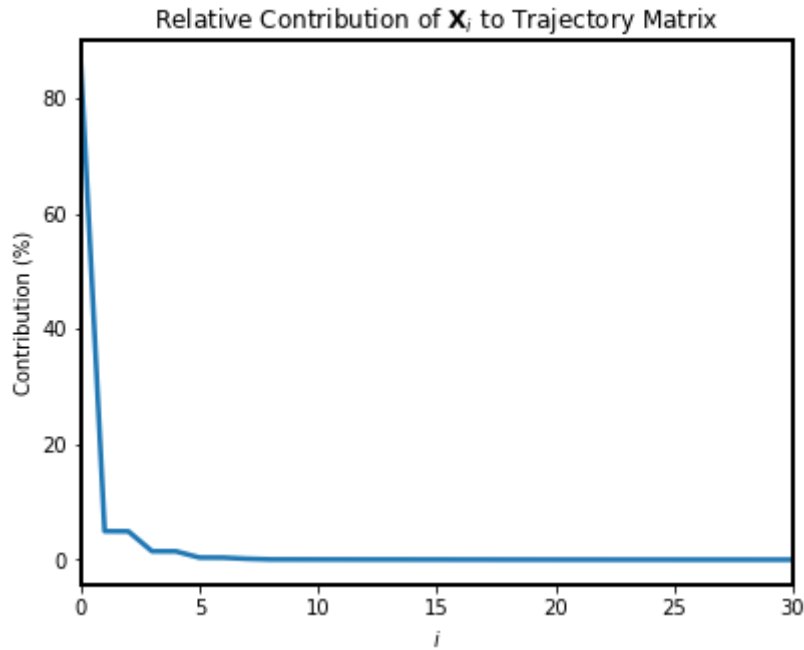
- τα διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς
- ο πίνακας συσχέτισης (W-Correlation Matrix)

Σχετική συνεισφορά

Αυτή υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{\sigma_i^2}{\sum_{k=0}^{d-1} \sigma_k^2} \quad (2.24)$$

και υποδεικνύει τη συνεισφορά που έχει η κάθε μία συνιστώσα ξεχωριστά στον πίνακα τροχιάς, οπότε μπορεί εύκολα να γίνει ομαδοποίηση συνιστωσών με παρόμοιες ή ίδιες τιμές, ή ακόμα και φανεί ποιες συνιστώσες συμμετέχουν περισσότερο στο τελικό αποτέλεσμα.



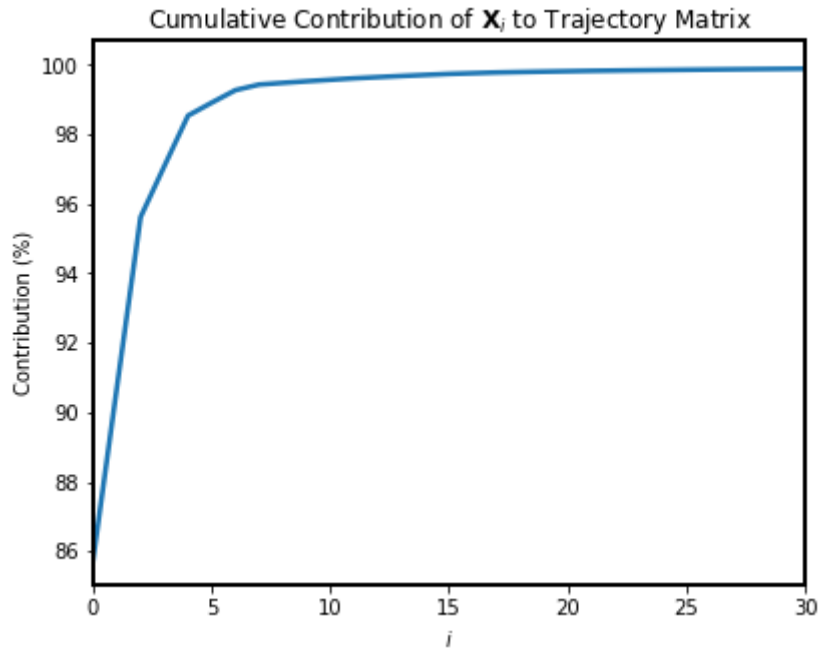
Εικόνα 2.1: Διάγραμμα σχετικής συνεισφοράς

Αθροιστική συνεισφορά

Η αθροιστική συνεισφορά υπολογίζεται από τον παρακάτω λόγο

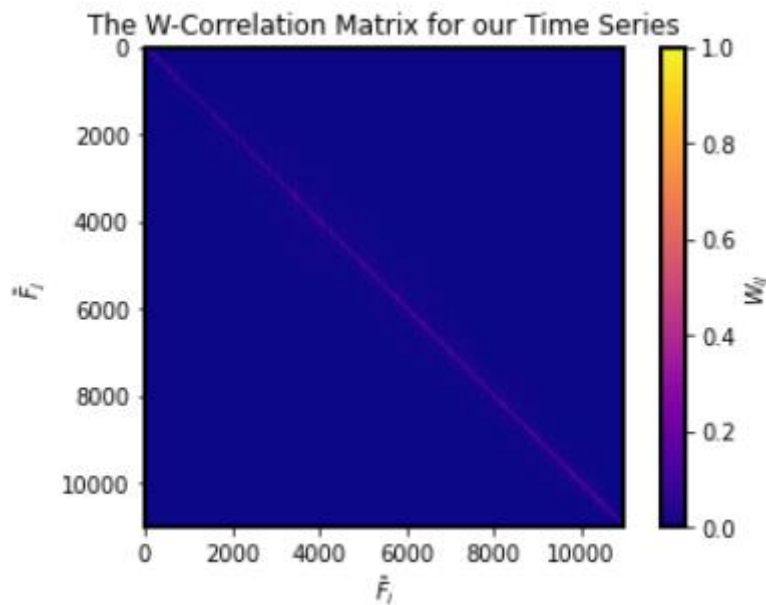
$$\frac{\sum_{j=0}^i \sigma_j^2}{\sum_{k=0}^{d-1} \sigma_k^2} \quad (2.25)$$

και βοηθάει λίγο διαφορετικά στην τελική ομαδοποίηση των συνιστωσών, καθώς προσφέρει μια γενική εικόνα για το μέχρι σε ποιες συνιστώσες που προκύπτουν, εμπεριέχεται σχεδόν όλη η πληροφορία που ενδιαφέρει. Για παράδειγμα, αν σε ένα διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς, φαίνεται ότι μέχρι τη συνιστώσα 10 εμπεριέχεται το 97% της σειράς, μπορεί να σημαίνει ότι η τάση και τυχόν περιοδικότητες κρύβονται μέσα σε αυτές τις πρώτες 10 συνιστώσες, ενώ αυτές που βρίσκονται πέρα από αυτή αποτελούν το θόρυβο της χρονοσειράς.



Εικόνα 2.2: Διάγραμμα αθροιστικής συνεισφοράς

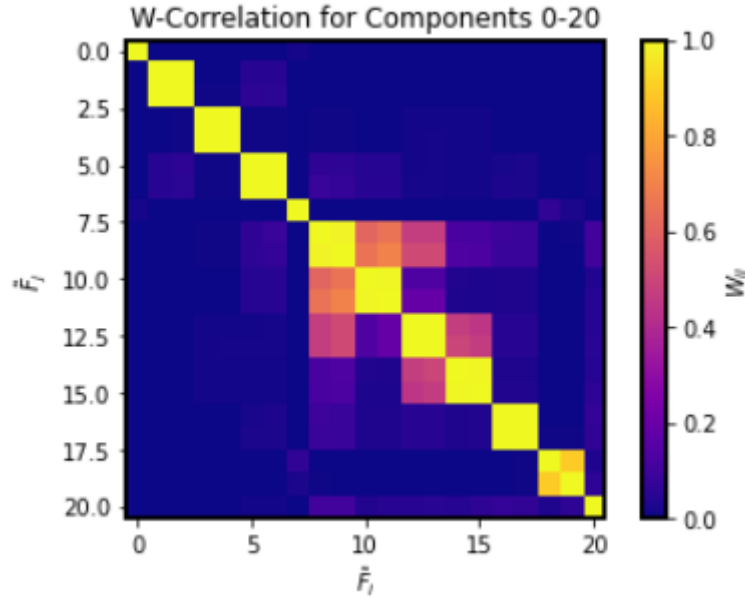
Πίνακας συσχέτισης (W-Correlation Matrix)



Εικόνα 2.3: Πίνακας συσχέτισης για όλες τις συνιστώσες

Ο πίνακας συσχέτισης είναι μια μέθοδος για την ποσοτικοποίηση της κάθε συνιστώσας για το πόσο μπορεί να θεωρηθεί ξεχωριστή από μια άλλη και δείχνει με μεγάλη διαφάνεια τη συσχέτιση που μπορεί έχουν δύο συνιστώσες μεταξύ τους. Ο τρόπος που διαβάζεται ο πίνακας αυτός είναι με το αντίστοιχο χρώμα που βγαίνει σε κάθε ζευγάρι συνιστωσών. Όσο πιο κίτρινο είναι το χρώμα, τόσο μεγαλύτερη είναι και η συσχέτιση μεταξύ τους άρα και τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα αυτές οι δύο συνιστώσες να αφορούν το ίδιο περιοδικό φαινόμενο.

Αν απομονωθεί μόνο ένα μέρος του πίνακα, για παράδειγμα οι πρώτες 20 συνιστώσες, τότε μπορεί να φανεί καθαρά το ποσοστό της συσχέτισης που έχουν οι συνιστώσες μεταξύ τους. Στην παρακάτω εικόνα, παρατηρείται ότι οι συνιστώσες 1 και 2, οι 3 και 4, οι 5 και 6, οι 8 και 9, οι 10 και 11, οι 14 και 15 και οι 16 και 17 έχουν υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους. Θα μπορούσε δηλαδή οι συνιστώσες 1 και 2 να αποτελούν την τάση της χρονοσειράς, και τα υπόλοιπα ζευγάρια να αποτελούν κάποιες από τις περιοδικότητες.



Εικόνα 2.4: Πίνακας συσχέτισης για τις πρώτες 20 συνιστώσες

Για την κατασκευή του πίνακα συσχέτισης πρέπει να υπολογιστεί το **σταθμισμένο εσωτερικό γινόμενο** για δύο από τις παραγόμενες χρονοσειρές $\tilde{\mathbf{F}}_i$ και $\tilde{\mathbf{F}}_j$, μεγέθους N και μήκους παραθύρου L από τη σχέση:

$$(\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j)_w = \sum_{k=0}^{N-1} w_k \tilde{\mathbf{f}}_{ik} \tilde{\mathbf{f}}_{jk} \quad (2.26)$$

όπου

- τα $\tilde{\mathbf{f}}_{ik}, \tilde{\mathbf{f}}_{jk}$ είναι το k στοιχείο των χρονοσειρών $\tilde{\mathbf{F}}_i$ και $\tilde{\mathbf{F}}_j$, αντίστοιχα.
- το βάρος w_k αντιπροσωπεύει τον αριθμό φορών που τα $\tilde{\mathbf{f}}_{ik}, \tilde{\mathbf{f}}_{jk}$ εμφανίζονται στους αντιδιαγώνιους πίνακες $\tilde{\mathbf{X}}_i, \tilde{\mathbf{X}}_j$ από τους οποίους προέκυψαν οι χρονοσειρές $\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j$ και δίνεται από τη σχέση:

$$w_k = \begin{cases} k + 1 & 0 \leq k \leq L - 1 \\ L & L \leq k \leq K - 1 \\ N - k & K \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Αν $(\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j)_w = 0$, τότε σημαίνει ότι οι $\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j$ είναι w -ορθογωνικές και συνεπώς διαχωρίσιμες. Επειδή, όμως, στην πραγματικότητα δεν υπάρχει η πλήρης w -ορθογωνικότητα ορίζεται ένας νέος $d \times d$ σταθμισμένος πίνακας συσχέτισης που μετράει την απόκλιση των $\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j$ από αυτή. Τα στοιχεία αυτού δίνονται από τη σχέση:

$$W_{i,j} = \frac{(\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j)_w}{\|\tilde{\mathbf{F}}_i\|_w \|\tilde{\mathbf{F}}_j\|_w} \quad (2.28)$$

όπου

$$\|\tilde{\mathbf{F}}_k\|_w = \sqrt{(\tilde{\mathbf{F}}_k, \tilde{\mathbf{F}}_k)_w} \quad (2.29)$$

για $k = i, j$. Δηλαδή, αν $\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j$ είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, αλλά όχι ταυτόσημα, τότε $(\tilde{\mathbf{F}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_j)_w \rightarrow \|\tilde{\mathbf{F}}_i\|_w \|\tilde{\mathbf{F}}_j\|_w$ και συνεπώς $W_{i,j} \rightarrow 1$, ενώ αν δεν έχουν καμία συσχέτιση μεταξύ τους τότε $W_{i,j} \rightarrow 0$.

3. Προσομοιωμένα δεδομένα

Πριν γίνει η επεξεργασία των πραγματικών δεδομένων, δημιουργήθηκαν διάφορα προσομοιωμένα, στα οποία οι εξισώσεις που τα περιγράφουν ήταν προκαθορισμένες. Έτσι, τα αποτελέσματα ήταν εύκολο να αξιολογηθούν ως προς την εγκυρότητά τους, πράγμα που βοήθησε στη μετέπειτα αξιολόγηση των πραγματικών δεδομένων, γνωρίζοντας πλέον πως λειτουργεί στην πράξη η SSA.

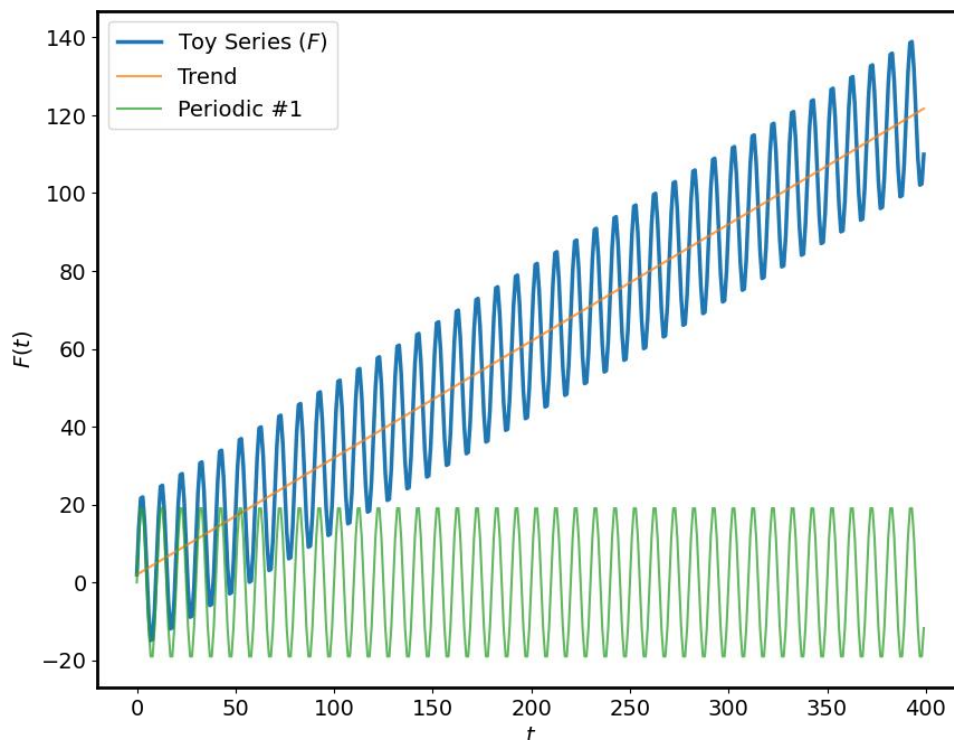
Οι προσομοιώσεις που περιγράφονται παρακάτω, χρησιμοποιούν 400 τιμές (t) και συγκεκριμένα τους αριθμούς από 0 έως 399.

3.1. Χρονοσειρά με τάση και 1 περιοδικότητα

Η πρώτη προσομοίωση έγινε χρησιμοποιώντας μια χρονοσειρά με γραμμική **τάση** (trend) και 1 ημιτονοειδής **περιοδικότητα** (periodic) με την παρακάτω μορφή:

$$F = 2 + 0.3t + \left(20 \sin \frac{2\pi}{10} t\right) \quad (3.1)$$

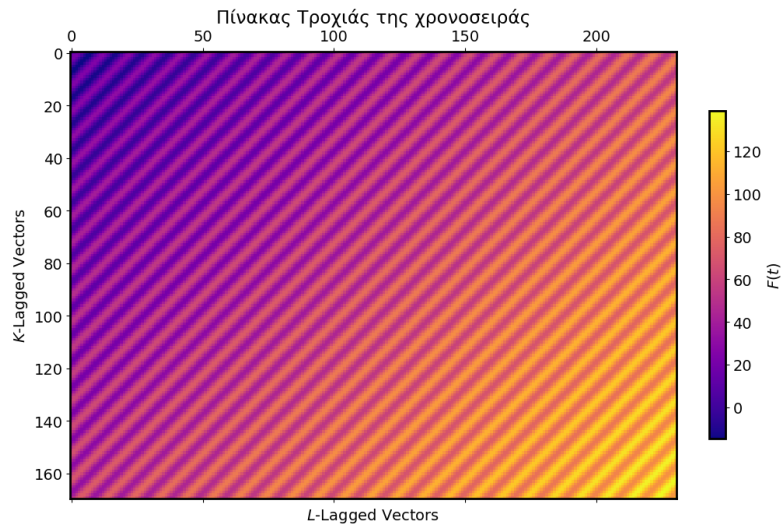
Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα της χρονοσειράς F :



Εικόνα 3.1: Διάγραμμα χρονοσειράς F με τάση και 1 περιοδικότητα

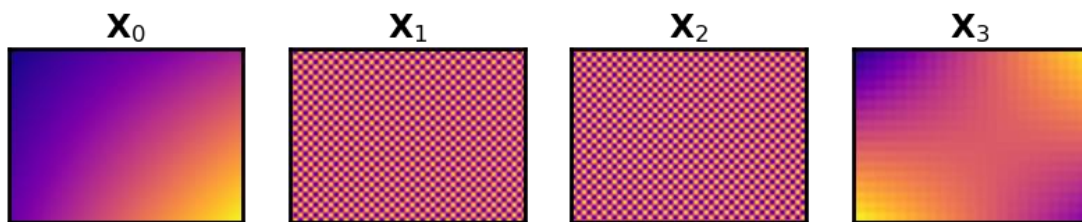
Το σύνολο των τιμών όπως προ ειπώθηκε είναι $N = 400$ και το μήκος του παραθύρου που επιλέχτηκε είναι $L = 170$.

Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας τροχιάς, ο οποίος ως ένας αντιδιαγώνιος πίνακας, η μορφή του ήταν αναμενόμενη:



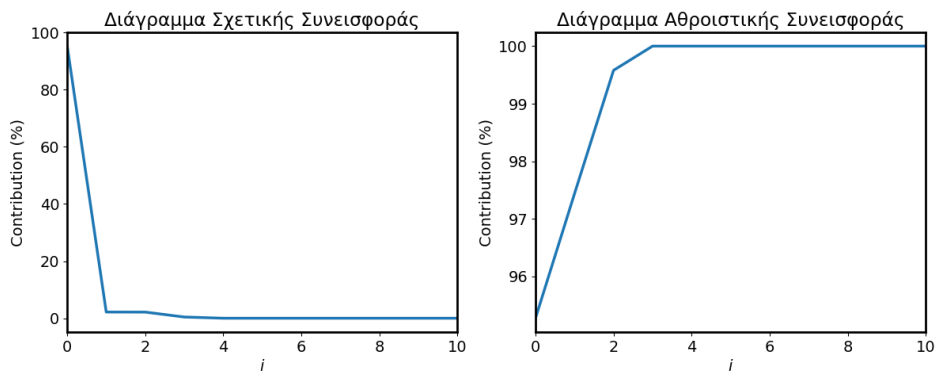
Εικόνα 3.2: Πίνακας τροχιάς

Μετά την αποσύνθεση του πίνακα τροχιάς \mathbf{X} μέσω της SVD, παρουσιάζονται οι πίνακες των πρώτων 12 συνιστωσών (ή όσος είναι ο βαθμός του πίνακα τροχιάς). Εδώ ο βαθμός του πίνακα προέκυψε ίσος με 4, οπότε και παρουσιάζονται όλες οι 4 συνιστώσες του:

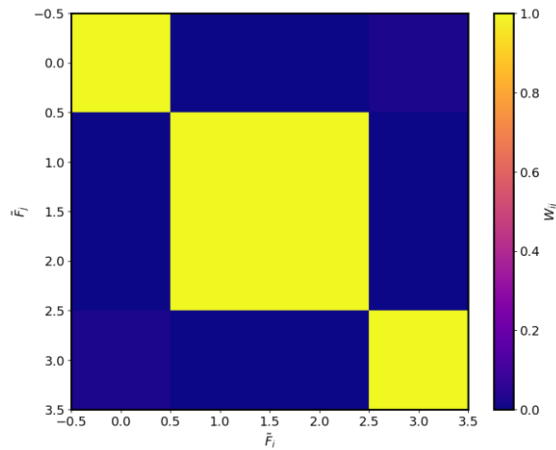


Εικόνα 3.3: Οι πρώτοι πίνακες των συνιστωσών μετά την SVD

Η συνιστώσες 1 και 2 φαίνεται να ταιριάζουν αρκετά μεταξύ τους και σχεδόν να ταυτίζονται, ενώ οι συνιστώσες 0 και 3 δεν φαίνεται να ταιριάζουν τόσο, αλλά έχουν κοινά σημεία.

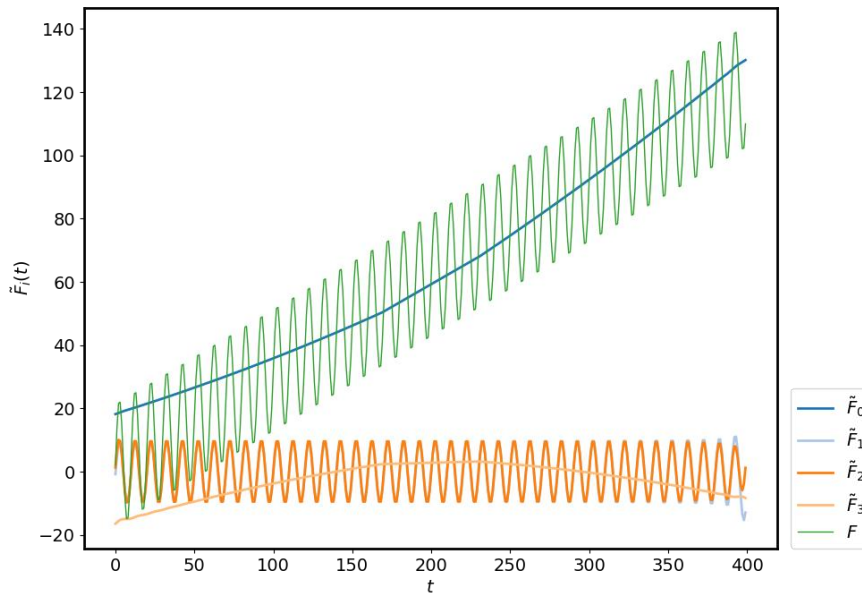


Εικόνα 3.4: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς



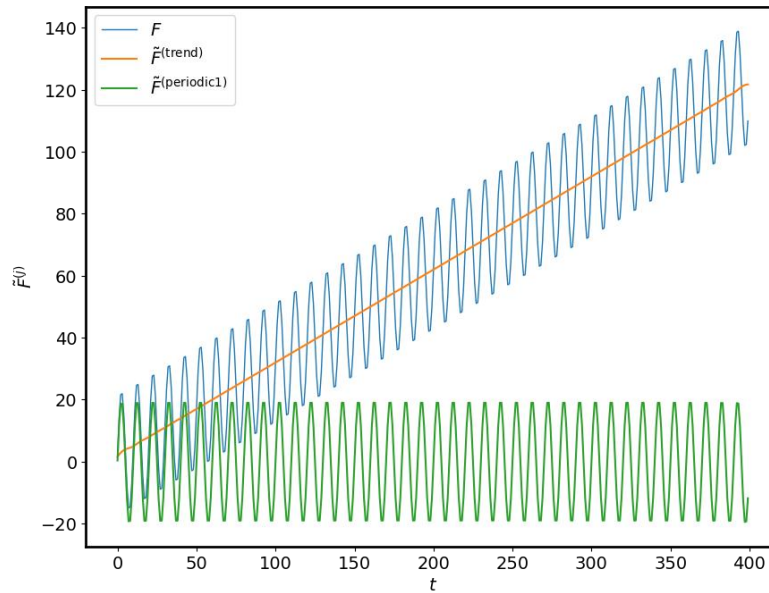
Εικόνα 3.5: Πίνακας συσχέτισης

Από το διάγραμμα της σχετικής συνεισφοράς (Εικόνα 3.4, αριστερά) φαίνεται πως η συνιστώσα 0 έχει τη μεγαλύτερη συνεισφορά από τις υπόλοιπες, ενώ από τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 3.5) φαίνεται ότι δεν έχει συσχέτιση με καμία άλλη συνιστώσα, το οποίο υποδηλώνει ότι αποτελεί την τάση της σειράς. Οι συνιστώσες 1 και 2 φαίνεται ότι έχουν πολύ μεγάλη συσχέτιση μεταξύ τους, άρα αποτελούν την περιοδικότητα που υπάρχει στη χρονοσειρά. Η συνιστώσα 3 επίσης δεν έχει συσχέτιση με καμία άλλη συνιστώσα αλλά ούτε και έχει μεγάλη συνεισφορά στον αντιδιαγώνιο πίνακα.

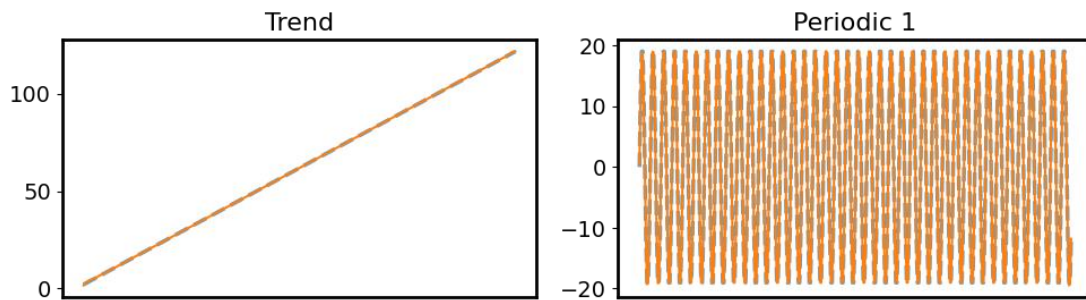


Εικόνα 3.6: Οι συνιστώσες πριν την ομαδοποίηση

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.6, η συνιστώσα 0 αποτελεί την τάση της χρονοσειράς και οι συνιστώσες 1 και 2 αποτελούν την περιοδικότητα. Η συνιστώσα 3 δεν φαίνεται να αποτελεί κάτι από μόνη της, αλλά λόγω της μορφής της θα ομαδοποιηθεί μαζί με τη συνιστώσα 0.



Εικόνα 3.7: Η χρονοσειρά μετά την εφαρμογή της SSA



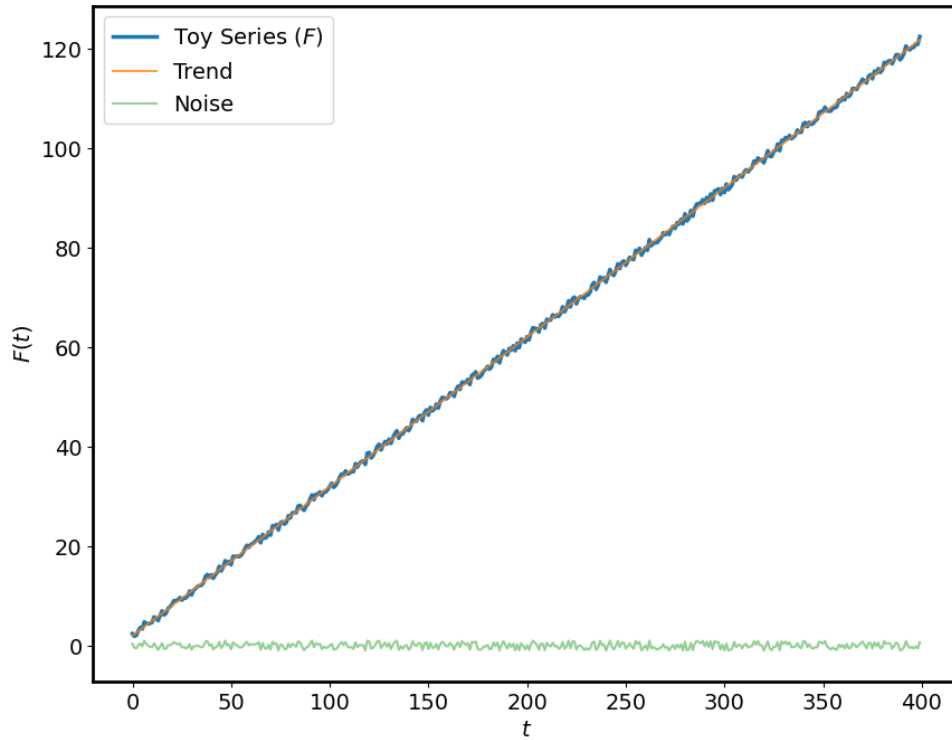
Εικόνα 3.8: Σύγκριση αρχικής τάσης και περιοδικότητας (μπλε χρώμα) με τα αποτελέσματα της SSA (πορτοκαλί χρώμα)

Από τα παραπάνω διαγράμματα, φαίνεται ότι η SSA έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα με βάση και την ομαδοποίηση που έγινε. Έτσι, τα αρχικά με τα τελικά διαγράμματα σχεδόν ταυτίζονται.

3.2. Χρονοσειρά με τάση και θόρυβο

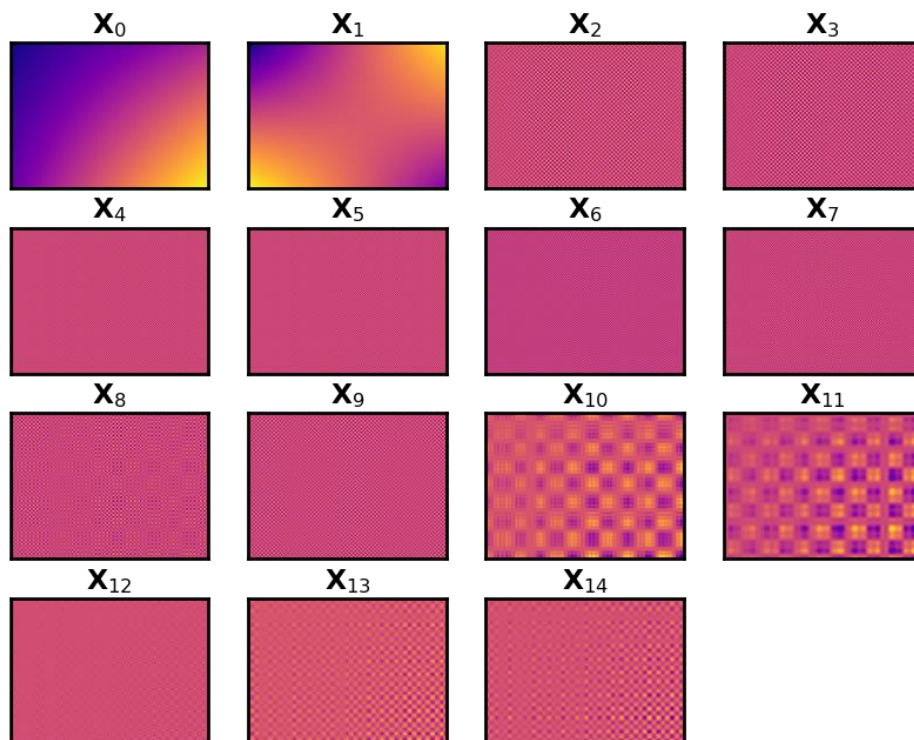
Στη δεύτερη προσομοίωση που εξετάστηκε, χρησιμοποιήθηκε χρονοσειρά αποτελούμενη από **τάση** και **θόρυβο** με την παρακάτω μορφή:

$$F = 2 + 0.3t + \alpha \quad (3.2)$$



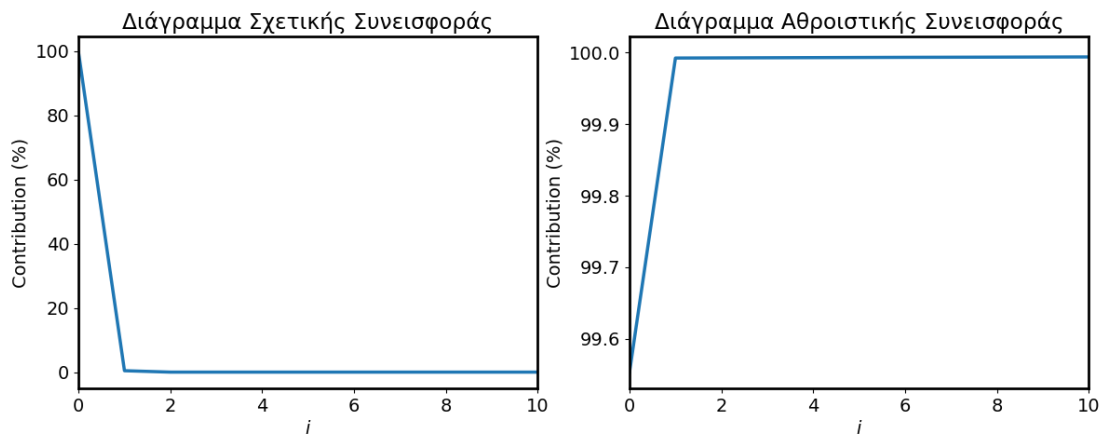
Εικόνα 3.9: Διάγραμμα χρονοσειράς F με τάση και θόρυβο

Το μήκος του παραθύρου παραμένει το ίδιο $L = 170$.

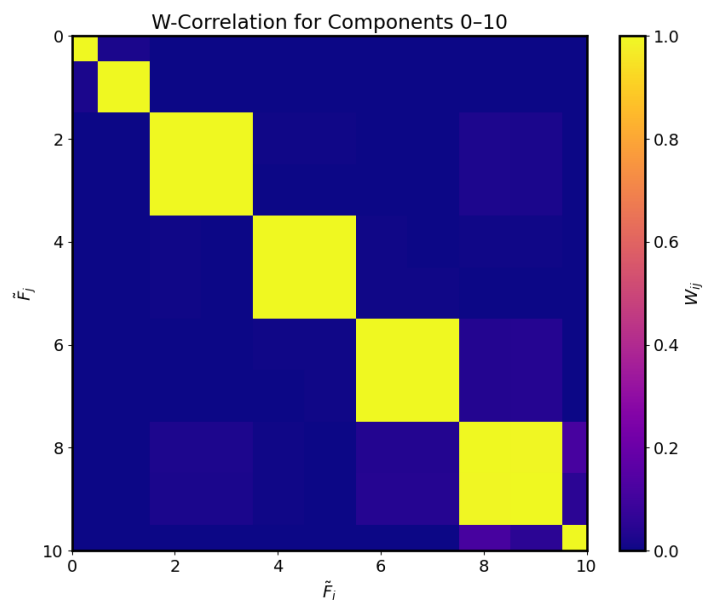


Εικόνα 3.10: Οι πρώτοι 15 πίνακες μετά την SVD

Στην Εικόνα 3.9 φαίνεται ότι οι συνιστώσες 0 και 1 έχουν κάποια συσχέτιση, όπως αντίστοιχα και οι 10, 11. Οι υπόλοιπες μάλλον αποτελούν θόρυβο.

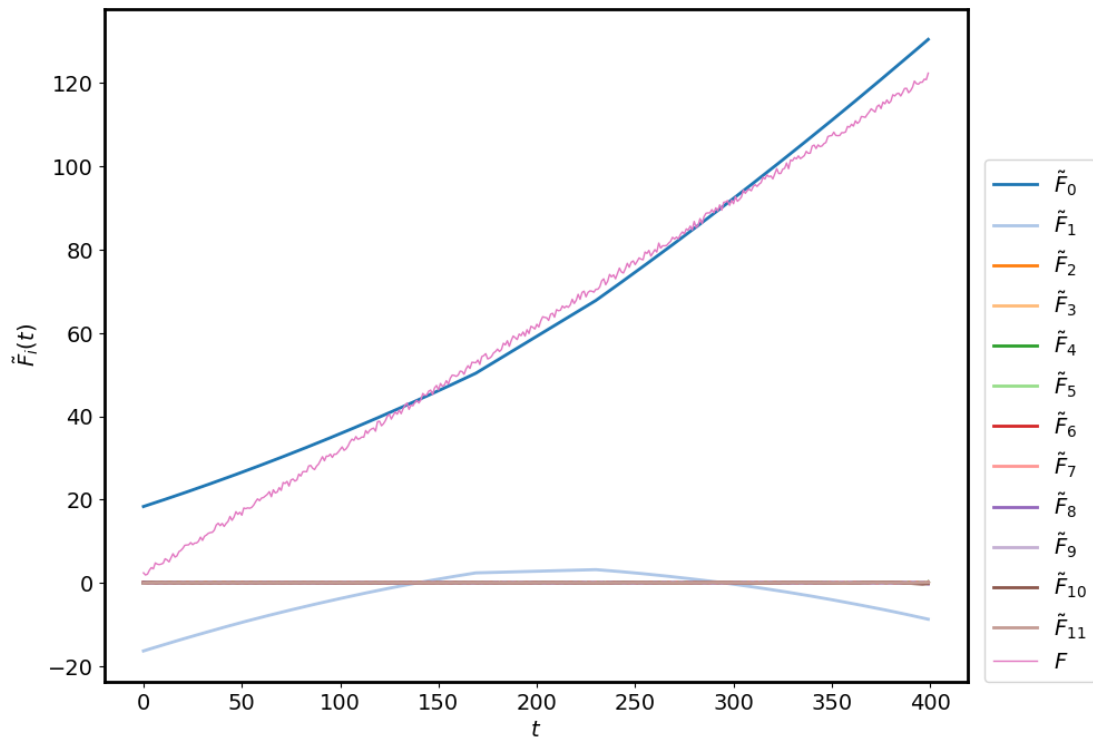


Εικόνα 3.11: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς



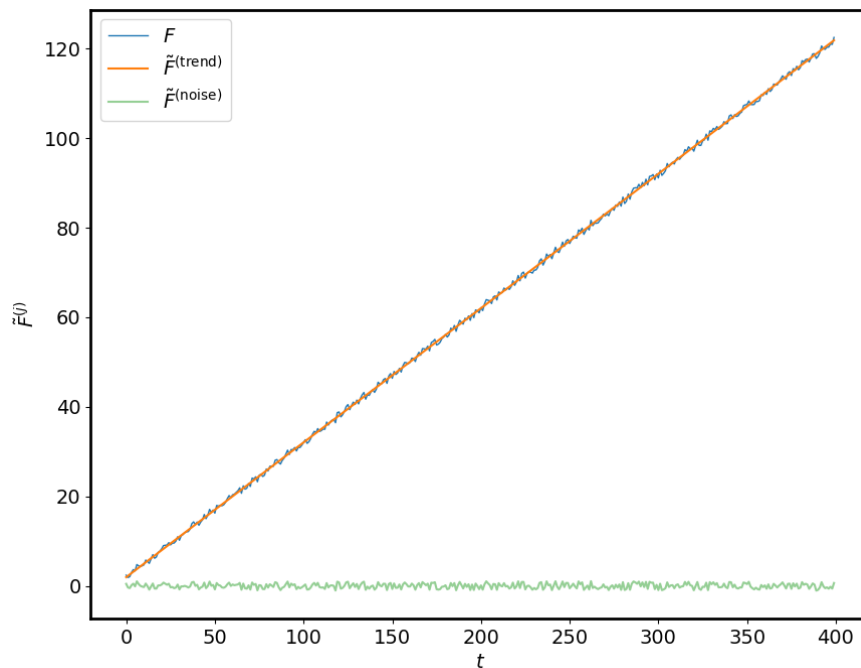
Εικόνα 3.12: Πίνακας συσχέτισης

Από τα διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς (Εικόνα 3.11) και τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 3.12), φαίνεται ότι οι συνιστώσες 0 και 1 αποτελούν την τάση και οι υπόλοιπες το θόρυβο, οπότε η ομαδοποίηση θα γίνει ως έχει.

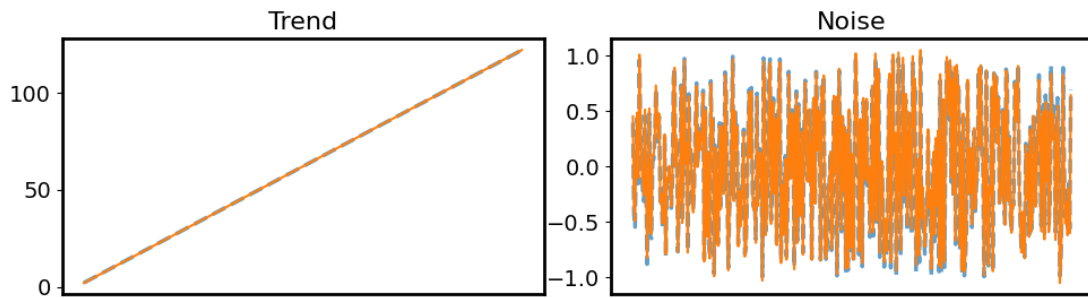


Εικόνα 3.13: Διάγραμμα της χρονοσειράς πριν την ομαδοποίηση των συνιστωσών

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.13, οι προβλέψεις ήταν σχετικά σωστές, αφού η συνιστώσα 0 αποτελεί με μεγάλη βεβαιότητα την τάση και οι υπόλοιπες (εκτός από την 1) αποτελούν το θόρυβο. Η συνιστώσα 1 δεν φαίνεται να σχηματίζει την τάση ή το θόρυβο από μόνη της, αλλά λόγω της μορφής της, θα ομαδοποιηθεί μαζί με την 0 ώστε να εμφανίσουν την τάση.



Εικόνα 3.14: Διάγραμμα της χρονοσειράς μετά την εφαρμογή της SSA



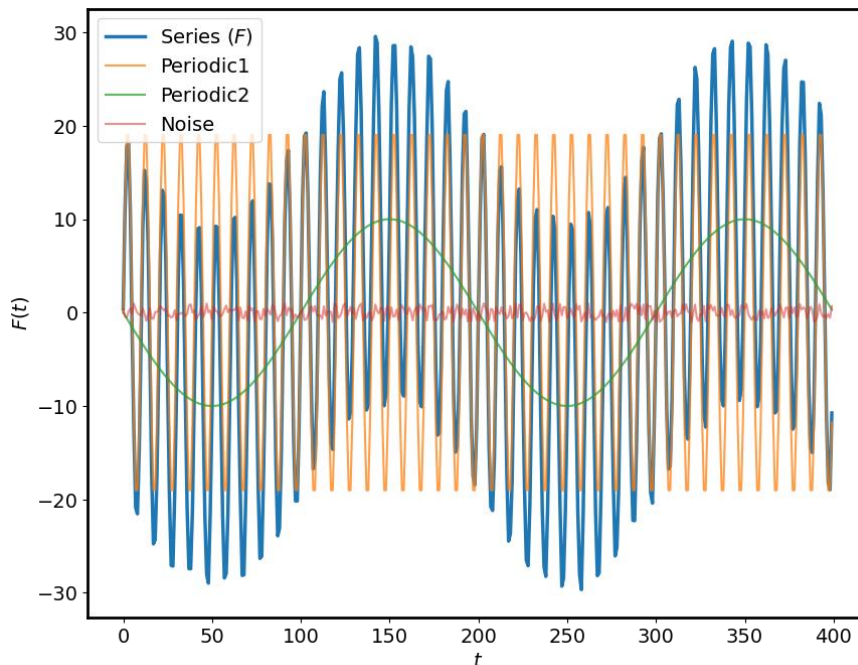
Εικόνα 3.15: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πραγματικών δεδομένων (μπλε χρώμα) και αυτών της SSA (πορτοκαλί χρώμα)

Από τα προηγούμενα διαγράμματα, φαίνεται ότι η ομαδοποίηση έφερε αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η τάση η οποία προήλθε από την SSA φαίνεται να ταυτίζεται στο 100%. Ο θόρυβος επίσης, προέκυψε πολύ κοντά με τον πραγματικό με λιγοστά μόνο σημεία διαφοράς.

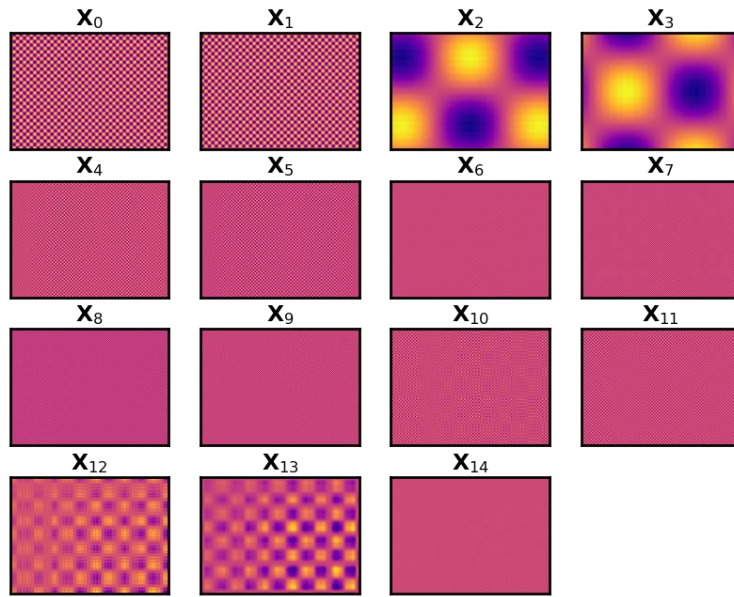
3.3. Χρονοσειρά με 2 περιοδικότητες και θόρυβο

Η επόμενη χρονοσειρά που μελετήθηκε αποτελούνταν από 2 περιοδικότητες και θόρυβο με μορφή:

$$F = \left(20 \sin \frac{2\pi}{10} t\right) + \left(-10 \sin \frac{2\pi}{200} t\right) + \alpha \quad (3.3)$$

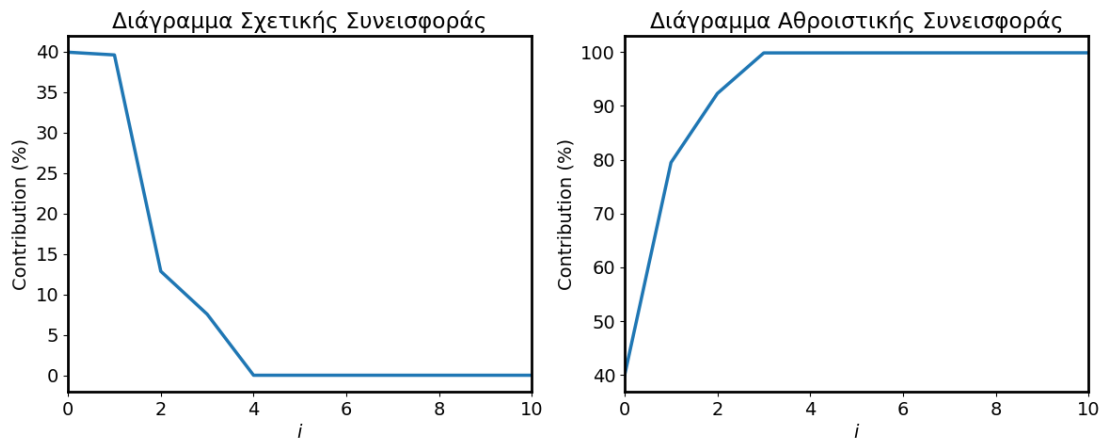


Εικόνα 3.16: Διάγραμμα χρονοσειράς F με 2 περιοδικότητες και θόρυβο

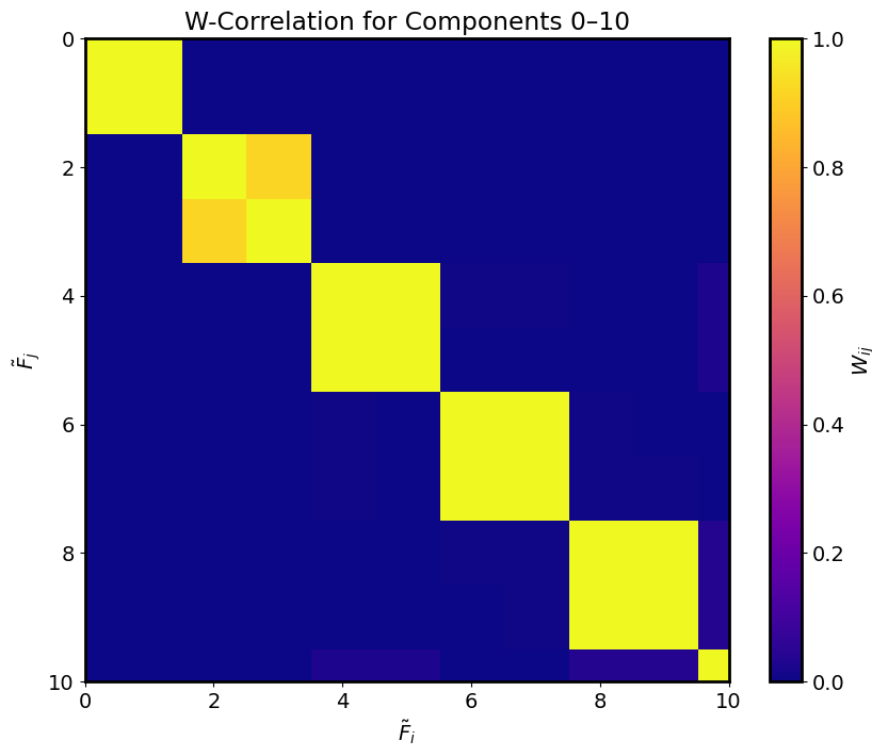


Εικόνα 3.17: Οι πρώτοι 15 πίνακες μετά την SVD

Από την Εικόνα 3.16, φαίνεται ότι οι συνιστώσες 0 και 1 έχουν κοινή μορφή, όπως επίσης και η 2 με την 3 και η 12 με τη 13. Ακολουθούν τα περαιτέρω εργαλεία που θα βοηθήσουν στη σωστή ομαδοποίηση, έχοντας ήδη μια πρώτη αρχική ανάλυση.

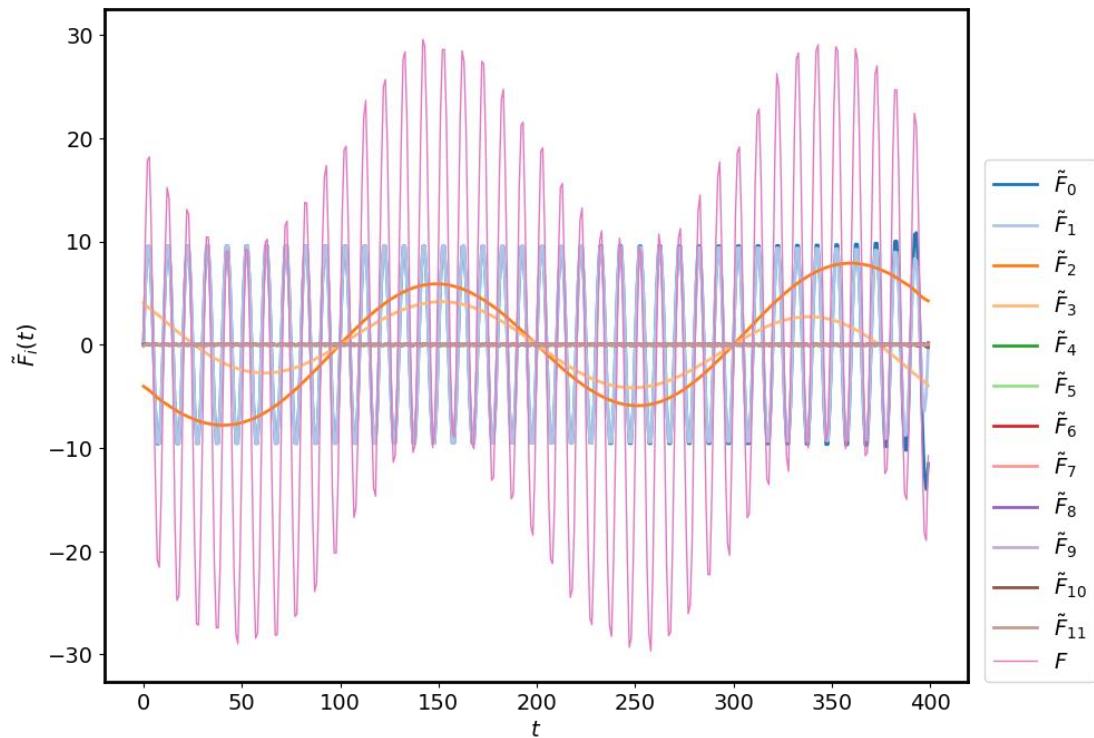


Εικόνα 3.18: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς



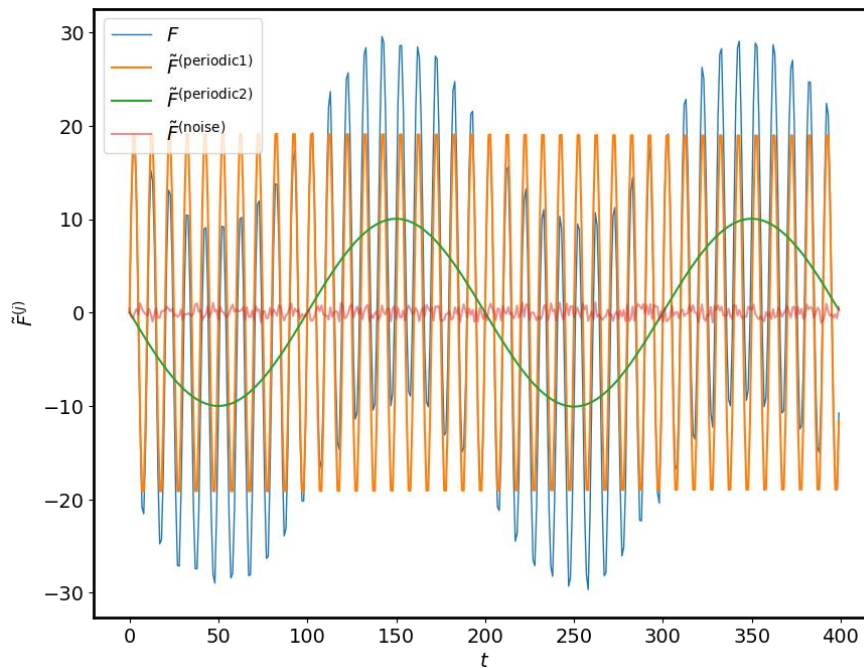
Εικόνα 3.19: Πίνακας συσχέτισης των 10 πρώτων συνιστωσών

Από το διάγραμμα της αθροιστικής συνεισφοράς (Εικόνα 3.18, δεξιά), φαίνεται ότι μέχρι και τη συνιστώσα 3 έχουμε ολόκληρη σχεδόν την πληροφορία της δεδομένης χρονοσειράς, δηλαδή οι συνιστώσες που βρίσκονται πέρα από αυτή είναι λογικό να αποτελούν το θόρυβο. Ακόμη, από τον πίνακα συσχέτισης μέχρι τις 10 πρώτες συνιστώσες, φαίνεται η πολύ ισχυρή συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των συνιστωσών 0 και 1 και σε επόμενο επίπεδο φαίνεται μια αρκετά αυξημένη συσχέτιση μεταξύ των συνιστωσών 2 και 3. Οι συνιστώσες 4 και 5, 6 και 7, 8 και 9, φαίνεται να έχουν υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους, αλλά κρίνοντας και από τα διαγράμματα συνεισφορών δεν φαίνεται να έχουν κάποια ουσιαστική συνεισφορά στην όλη χρονοσειρά.

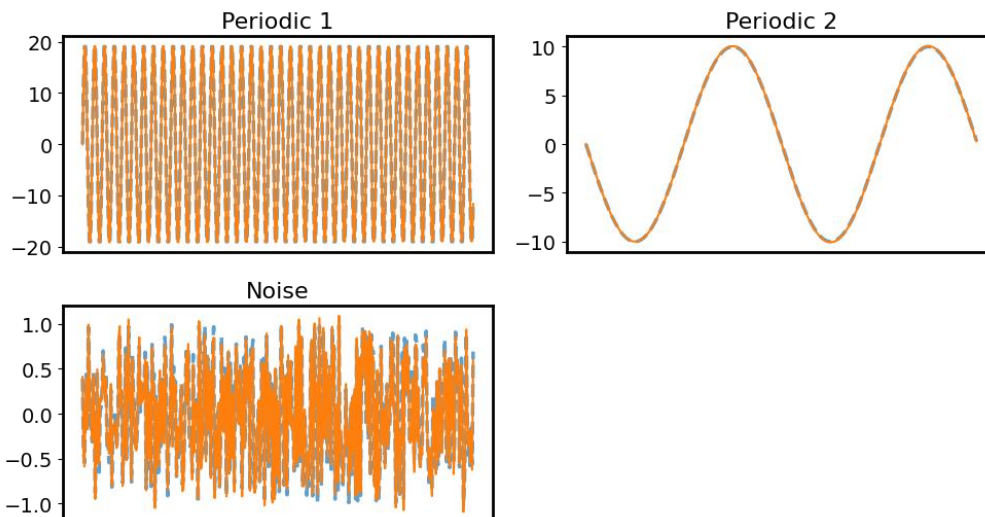


Εικόνα 3.20: Διάγραμμα των συνιστωσών της χρονοσειράς πριν την ομαδοποίηση

Από την Εικόνα 3.19 φαίνεται πλέον ξεκάθαρα ότι η σωστή ομαδοποίηση θα γίνει αν οι συνιστώσες 0 και 1 πάνε μαζί ως η πρώτη περιοδικότητα, οι συνιστώσες 2 και 3 επίσης μαζί ως η δεύτερη περιοδικότητα και όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες θα καταταχθούν στο θόρυβο.



Εικόνα 3.21: Διάγραμμα της χρονοσειράς μετά την εφαρμογή της SSA



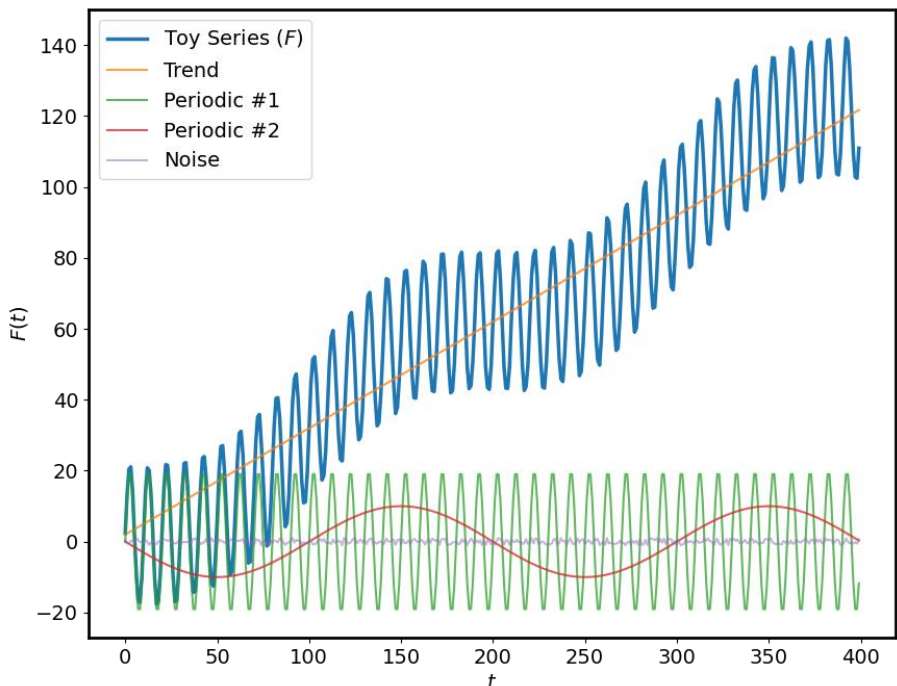
Εικόνα 3.22: Σύγκριση πραγματικών δεδομένων (μπλε χρώμα) και αυτών της SSA (πορτοκαλί χρώμα)

Συνεπώς, από τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται ότι η SSA παρήγαγε εξαιρετικά αποτελέσματα και η ομαδοποίηση που επιλέχθηκε ήταν η σωστή.

3.4. Χρονοσειρά με τάση, 2 περιοδικότητες και θόρυβο

Η επόμενη χρονοσειρά δημιουργήθηκε εισάγοντας **τάση, 2 περιοδικότητες και θόρυβο** με την παρακάτω μορφή:

$$F = 2 + 0.3t + \left(20 \sin \frac{2\pi}{10} t\right) + \left(-10 \sin \frac{2\pi}{200} t\right) + \alpha \quad (3.4)$$

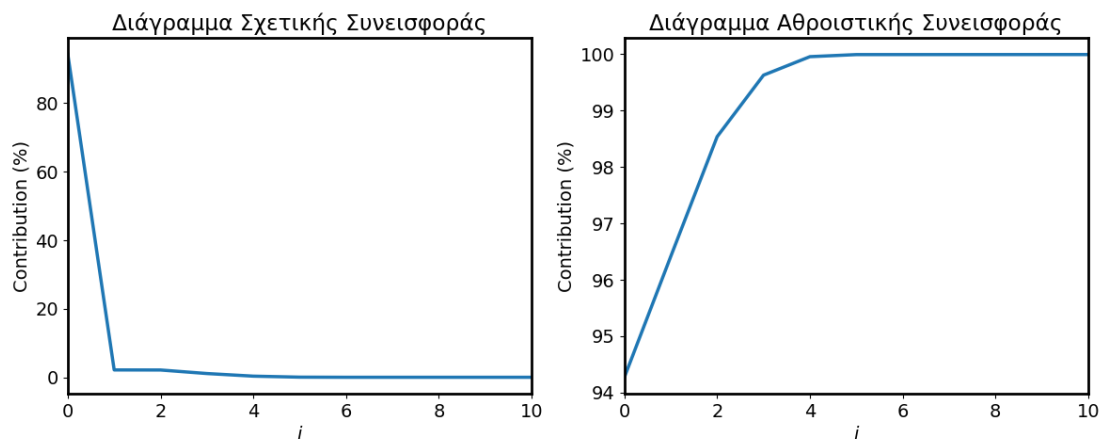


Εικόνα 3.23: Διάγραμμα χρονοσειράς με τάση, 2 περιοδικότητες και θόρυβο

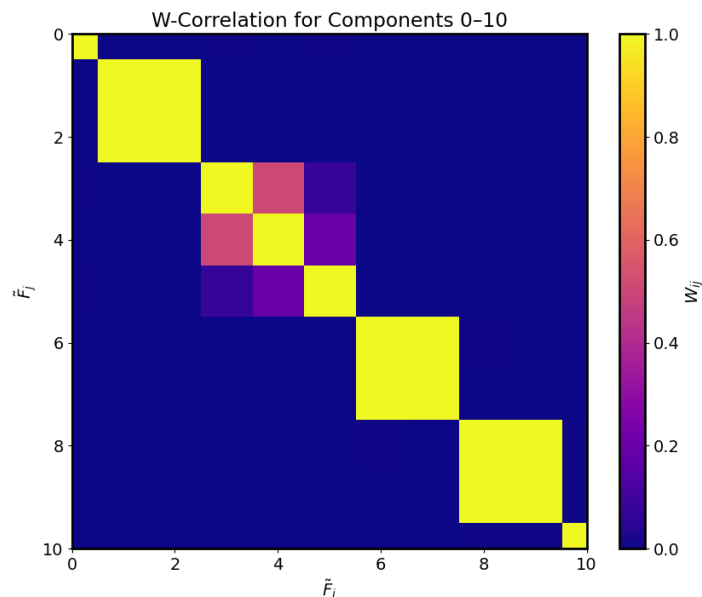
Καθώς η παραπάνω χρονοσειρά προσομοιάζει αρκετά τα πραγματικά δεδομένα που θα εξεταστούν σε επόμενα κεφάλαια, θα γίνει μια περαιτέρω ανάλυση σε αυτή πάνω στο μήκος του παραθύρου L και κατά πόσο τελικά η σωστή επιλογή του επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα της SSA.

3.4.1. Μήκος παραθύρου $L = 170$

Αρχικά η ανάλυση θα γίνει με το ίδιο μήκος παραθύρου που εφαρμόστηκε και στις παραπάνω προσομοιώσεις.



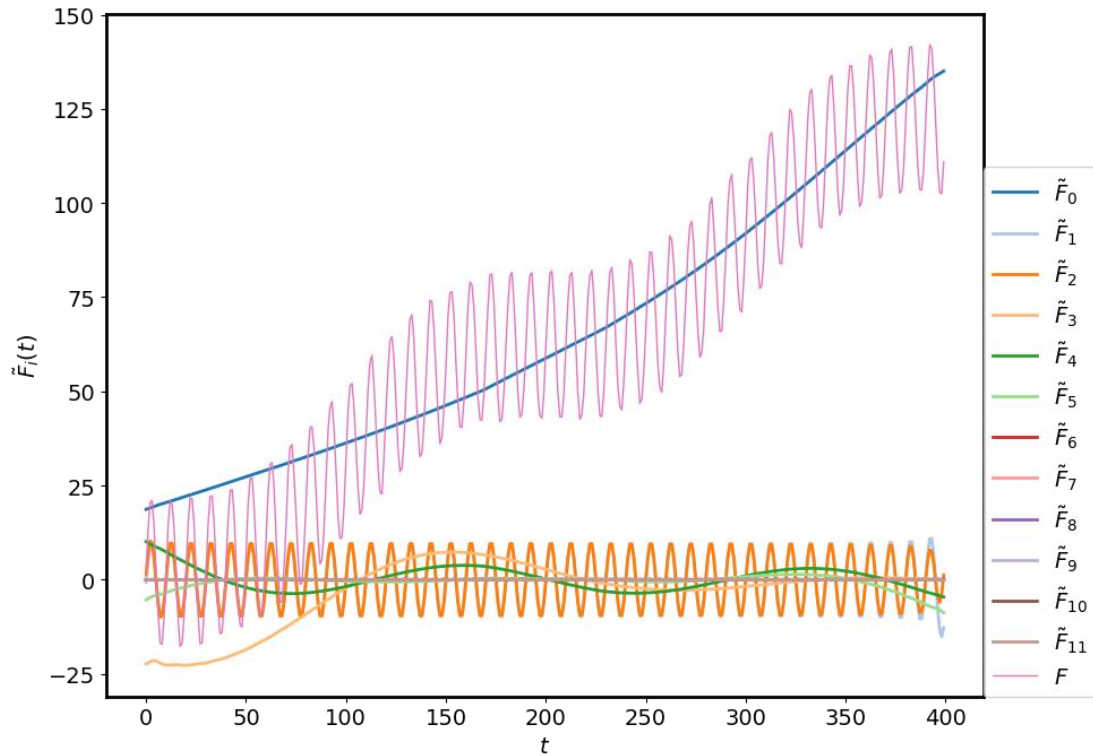
Εικόνα 3.24: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς των πρώτων 10 συνιστωσών



Εικόνα 3.25: Πίνακας συσχέτισης των πρώτων 10 συνιστωσών

Από το διάγραμμα της αθροιστικής συνεισφοράς (Εικόνα 3.24, δεξιά), φαίνεται ότι το μεγαλύτερο ποσοστό πληροφορίας της χρονοσειράς βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ των πρώτων 5 συνιστωσών. Ακόμη, από το διάγραμμα της σχετικής συνεισφοράς (Εικόνα 3.24, αριστερά), φαίνεται ότι η συνιστώσα 0 έχει τη μεγαλύτερη συνεισφορά και ακολουθούν οι 1 και 2. Από τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 3.25), φαίνεται ότι η

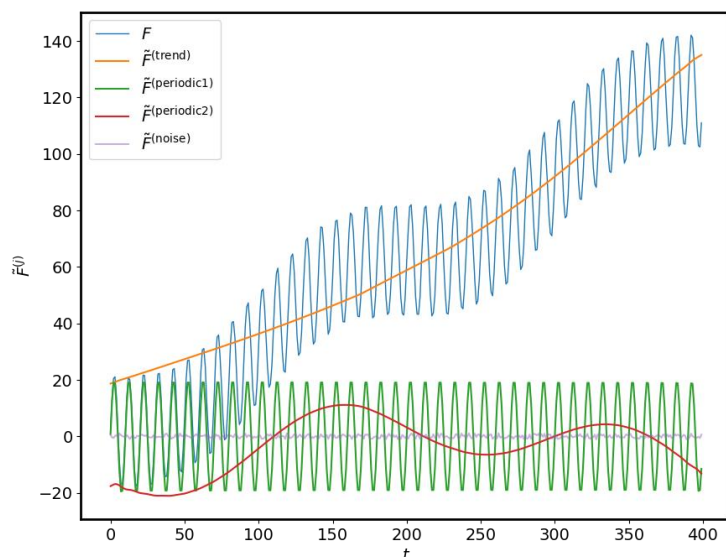
συνιστώσα 0 έχει υψηλή συσχέτιση μόνο με τον εαυτό της, αλλά λόγω του υψηλού βαθμού συνεισφοράς που κατέχει αναμένεται να είναι υπεύθυνη για την τάση της σειράς. Οι συνιστώσες 1 και 2 έχουν πολύ υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους (Εικόνα 3.25) και έτσι πιθανότατα θα ομαδοποιηθούν μαζί ως η πρώτη περιοδικότητα. Με την ίδια λογική, οι συνιστώσες 6, 7 και 8, 9 παρουσιάζουν επίσης υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους αντίστοιχα, αλλά έχουν όλες μικρή συνεισφορά στη δημιουργία της χρονοσειράς.



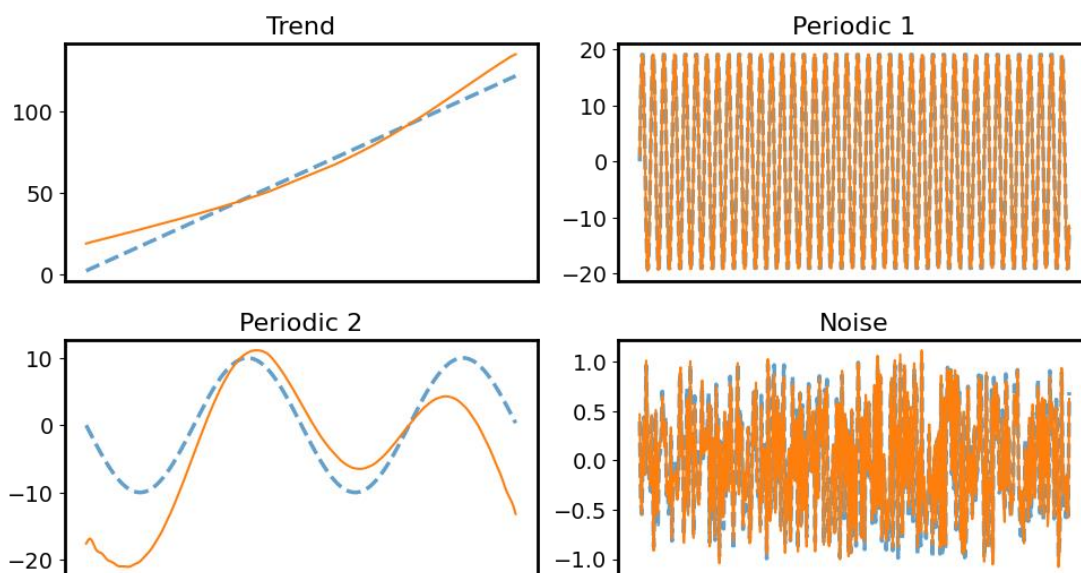
Εικόνα 3.26: Διάγραμμα της χρονοσειράς μαζί με τις 12 πρώτες συνιστώσες

Όπως φαίνεται και από την Εικόνα 3.26, η συνιστώσα 0 εμφανίζει την τάση, οι 1 και 2 εμφανίζουν την πρώτη περιοδικότητα και συνιστώσες 3, 4 και 5 εμφανίζουν (κάπως) τη δεύτερη περιοδικότητα. Οι υπόλοιπες συνιστώσες αφορούν το θόρυβο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συγκεκριμένη ομαδοποίηση οδήγησε στα εξής αποτελέσματα:



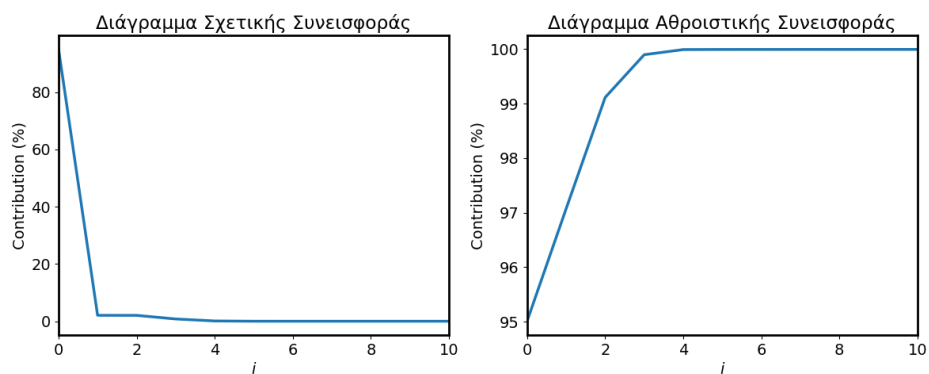
Εικόνα 3.27: Διάγραμμα της χρονοσειράς μετά την εφαρμογή της SSA



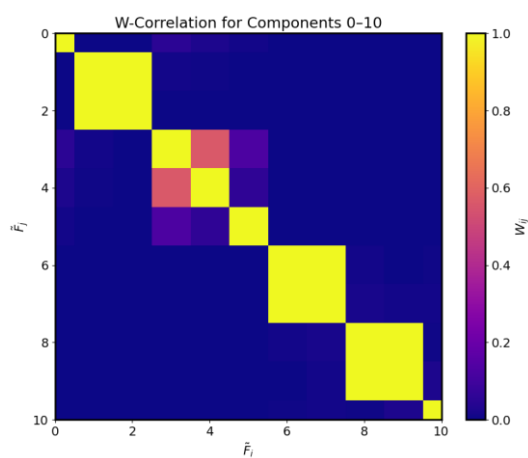
Εικόνα 3.28: Σύγκριση αποτελεσμάτων SSA και πραγματικών δεδομένων

Από την Εικόνα 3.28, φαίνεται ότι έγινε καλή ομαδοποίηση όσον αφορά την τάση, την πρώτη περιοδικότητα και το θόρυβο. Η μόνη που παρουσίασε κάπως πρόβλημα ήταν η δεύτερη περιοδικότητα. Επίσης, η τάση φάνηκε να υστερεί μόνο στα άκρα για το λόγο που εξηγήθηκε και σε παραπάνω προσομοίωση.

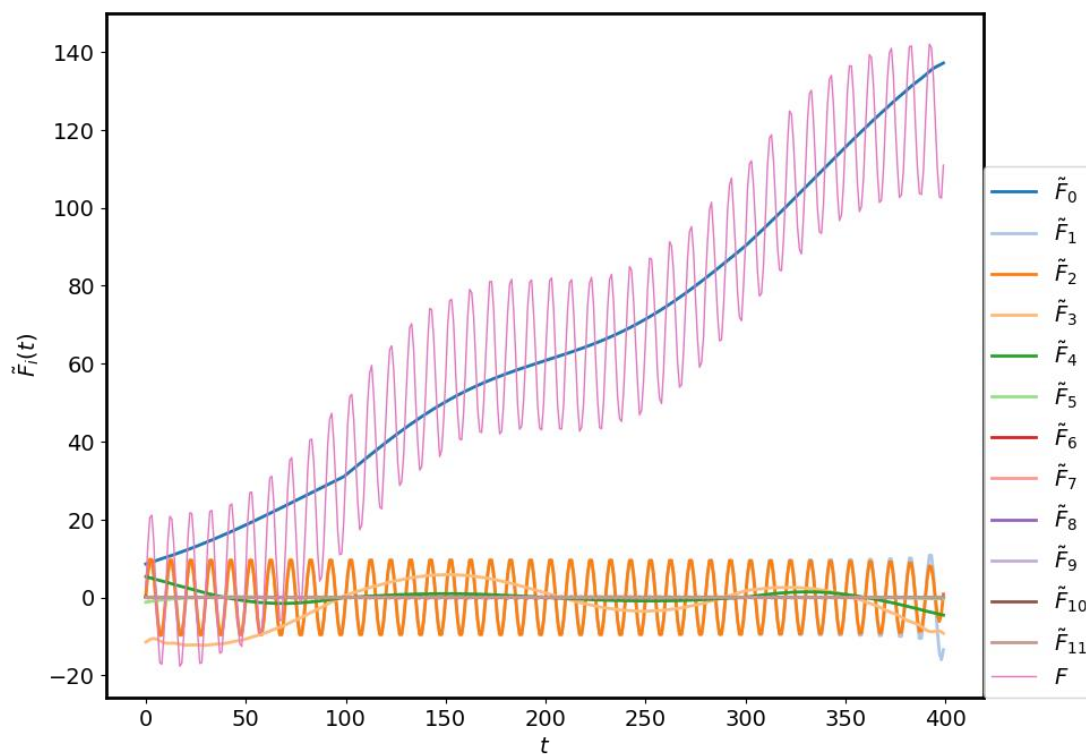
3.4.2. Μήκος παραθύρου $L = 100$



Εικόνα 3.29: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς των 10 πρώτων συνιστωσών

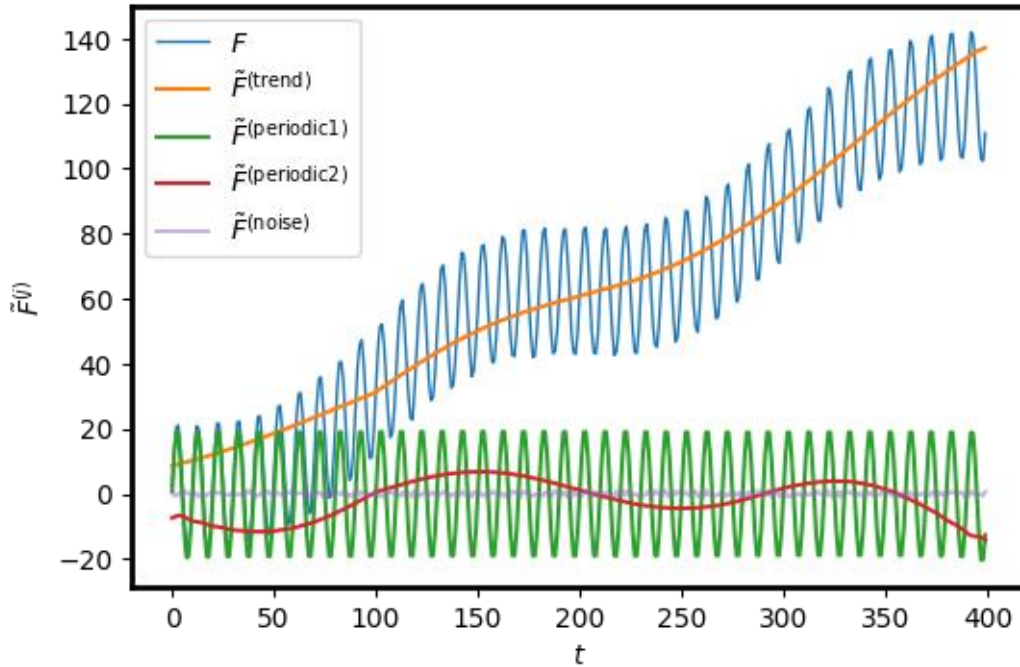


Εικόνα 3.30: Πίνακας συσχέτισης των 10 πρώτων συνιστωσών

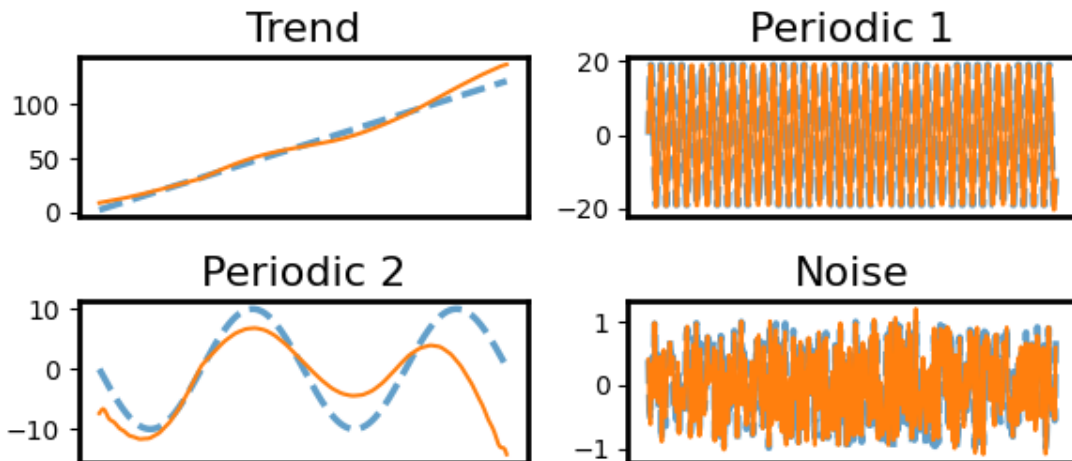


Εικόνα 3.31: Διάγραμμα της χρονοσειράς με τις συνιστώσες της πριν την ομαδοποίηση

Λόγω της ομοιότητας των διαγραμμάτων συνεισφοράς (Εικόνα 3.29), του πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 3.30) και του διαγράμματος των συνιστωσών (Εικόνα 3.31), η ομαδοποίηση που θα γίνει θα είναι η ίδια που έγινε και στην περίπτωση με μήκος παραθύρου $L = 170$.



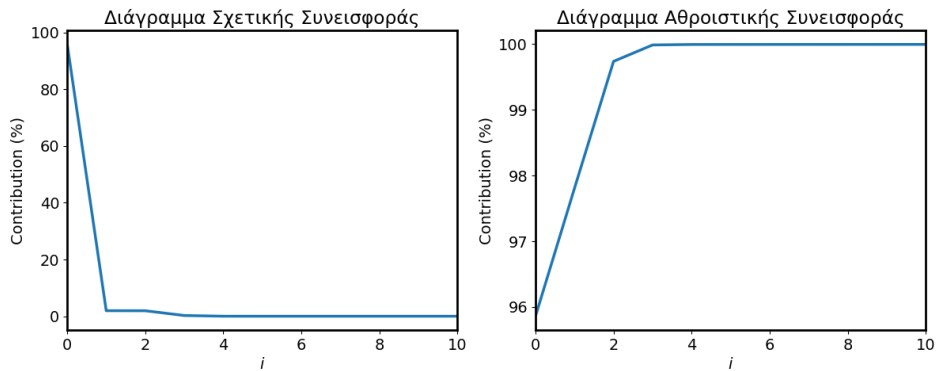
Εικόνα 3.32: Διάγραμμα χρονοσειράς μετά την SSA



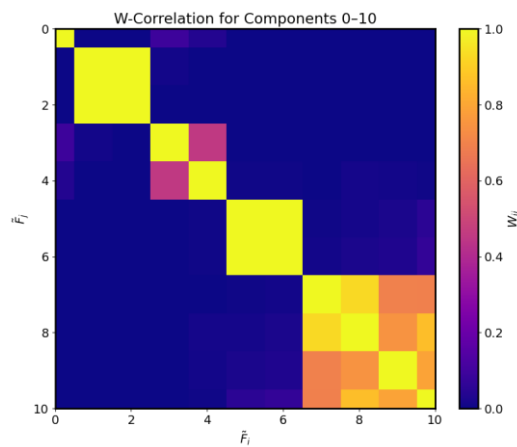
Εικόνα 3.33: Σύγκριση αποτελεσμάτων

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.33, η τάση εξακολουθεί να υστερεί στα άκρα, η πρώτη περιοδικότητα φαίνεται να ταυτίζεται σχεδόν πλήρως, το ίδιο και ο θόρυβος σε λίγο μικρότερο βαθμό και η δεύτερη περιοδικότητα παρουσίασε ξανά κάποια προβλήματα παρόμοια με αυτά με μήκος παραθύρου $L = 170$.

3.4.3. Μήκος παραθύρου $L = 50$

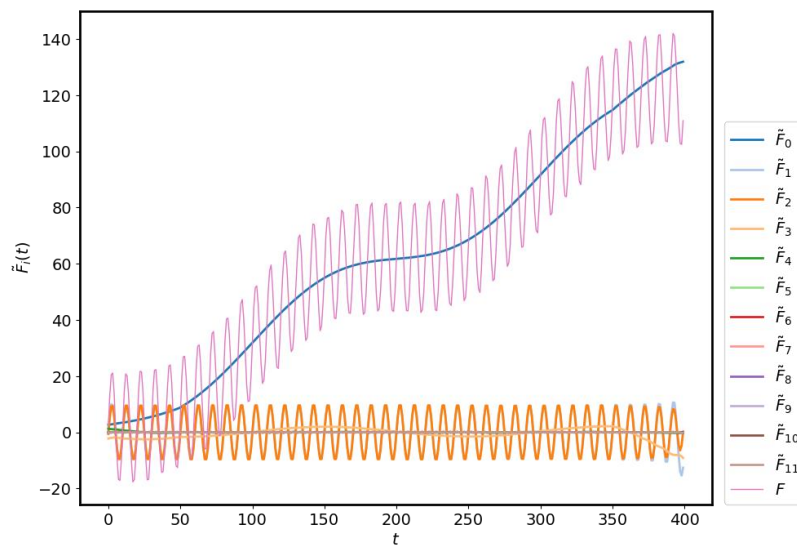


Εικόνα 3.34: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς



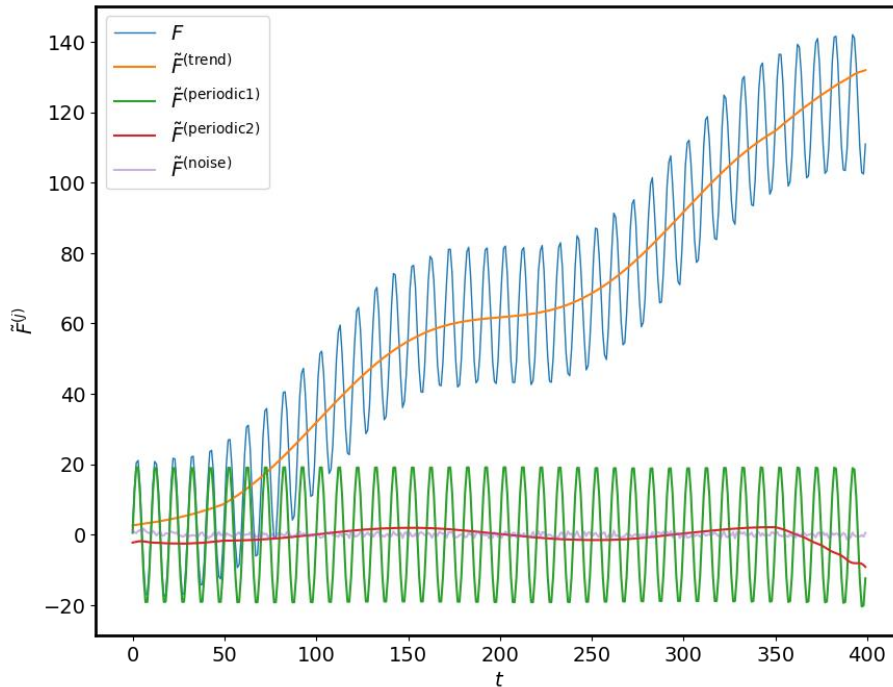
Εικόνα 3.35: Πίνακας συσχέτισης των 10 πρώτων συνιστωσών

Από τις Εικόνες 3.34 και 3.35 φαίνεται ότι η συνιστώσα 0 παρουσιάζει την τάση μιας και έχει τη μεγαλύτερη συνεισφορά και έχει υψηλή συσχέτιση μόνο με τον εαυτό της και οι συνιστώσες 1 και 2 παρουσιάζουν την πρώτη περιοδικότητα. Για τη δεύτερη περιοδικότητα θα βοηθήσει πολύ το διάγραμμα των συνιστωσών πριν την ομαδοποίηση.

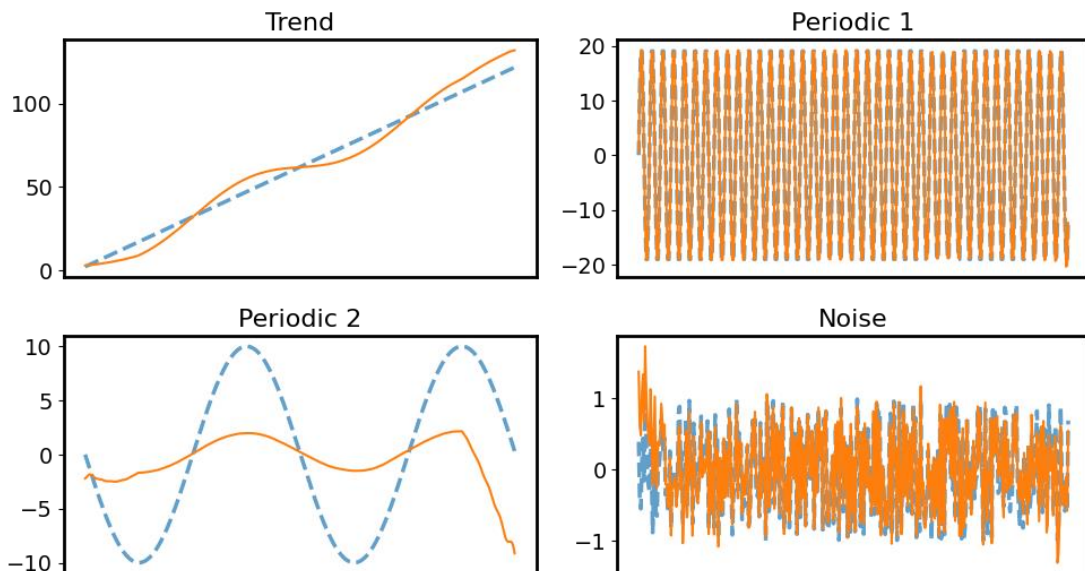


Εικόνα 3.36: Διάγραμμα χρονοσειράς και συνιστωσών πριν την ομαδοποίηση

Από την Εικόνα 3.36 φαίνεται ότι οι υποθέσεις για την τάση και την πρώτη περιοδικότητα ήταν σωστές. Η δεύτερη περιοδικότητα είναι αρκετά αβέβαιο ως προς ποιες είναι οι συνιστώσες της, αλλά θα γίνει η επιλογή της συνιστώσας 3.



Εικόνα 3.37: Διάγραμμα χρονοσειράς και συνιστωσών μετά την SSA



Εικόνα 3.38: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ πραγματικών δεδομένων και αυτών της SSA

Από την Εικόνα 3.38 φαίνεται ότι το μόνο συστατικό της σειράς που πέτυχε η SSA ήταν η πρώτη περιοδικότητα και ο θόρυβος σε ένα μικρότερο βαθμό. Η δεύτερη περιοδικότητα ήταν αυτή η οποία είχε τεράστια απόκλιση με την πραγματική, ενώ η τάση αν και είχε και αυτή απόκλιση ήταν πιο κοντά στην πραγματικότητα.

3.5. Συμπεράσματα

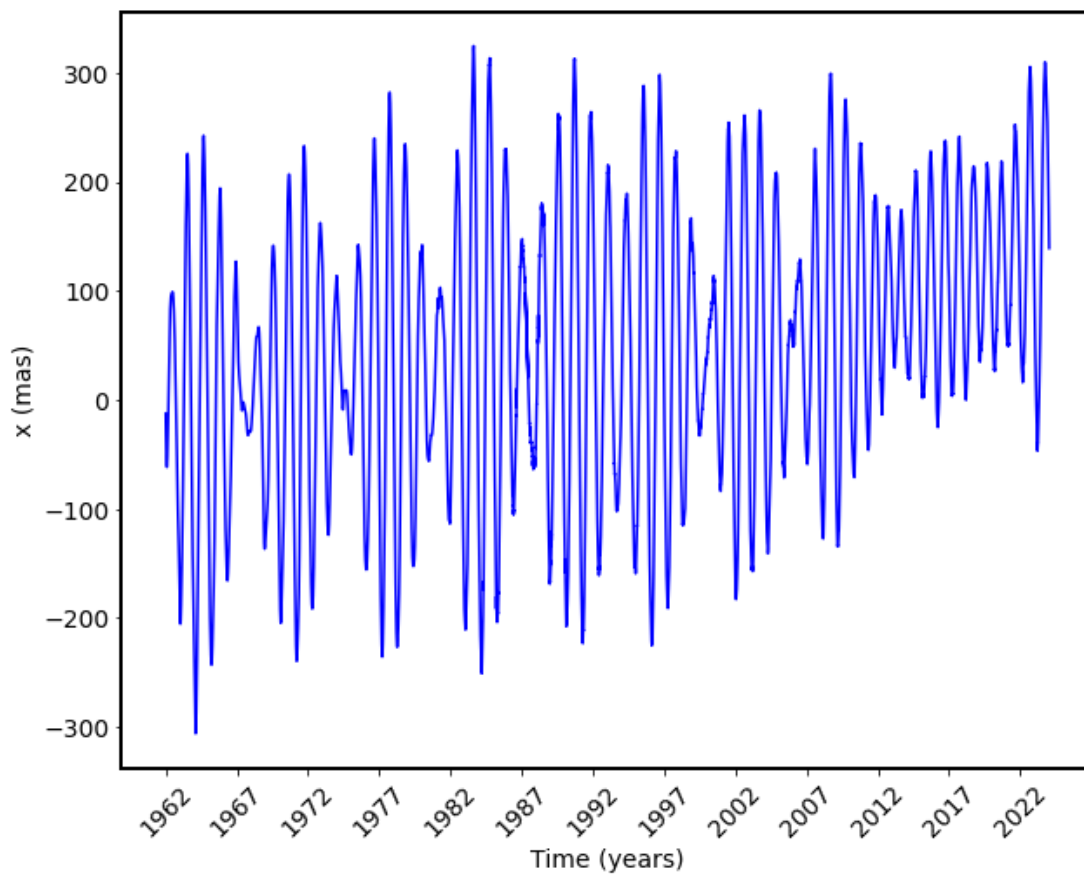
Η ανάλυση των παραπάνω προσομοιώσεων οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η χρήση μικρού μήκους παραθύρου δεν είναι η πιο εύλογη επιλογή καθώς έτσι η SSA αδυνατεί να ξεχωρίσει αρκετές συνιστώσες. Επίσης, ένα μεγαλύτερο παράθυρο είναι ιδανικό για να ξεχωρίσει όλες τις περιοδικότητες και να κάνει μια γενικά καλύτερη ανάλυση στη χρονοσειρά. Επιπλέον, αν η σειρά είναι μικρού μήκους τότε το μήκος του παραθύρου θα πρέπει να βρίσκεται σε αναλογία με την αρμονική περίοδο ενώ σε μια σειρά μεγαλύτερου μήκους είναι σωστό να χρησιμοποιείται μεγαλύτερο παράθυρο κοντά στο μισό του μήκους της σειράς.

4. Συντεταγμένη x του Πόλου

4.1. Εισαγωγή των δεδομένων

Αφού έγινε η μελέτη αρκετών προσομοιώσεων και όντας πλέον σε θέση βαθύτερης κατανόησης της μεθόδου της SSA, εξετάστηκαν τα πραγματικά δεδομένα του Πόλου.

Αρχικά τοποθετήθηκαν όλα τα δεδομένα σε ένα διάγραμμα x (mas) – t (days) όπου φαίνεται η διακύμανση της τιμής του x με το πέρασμα των χρόνων.



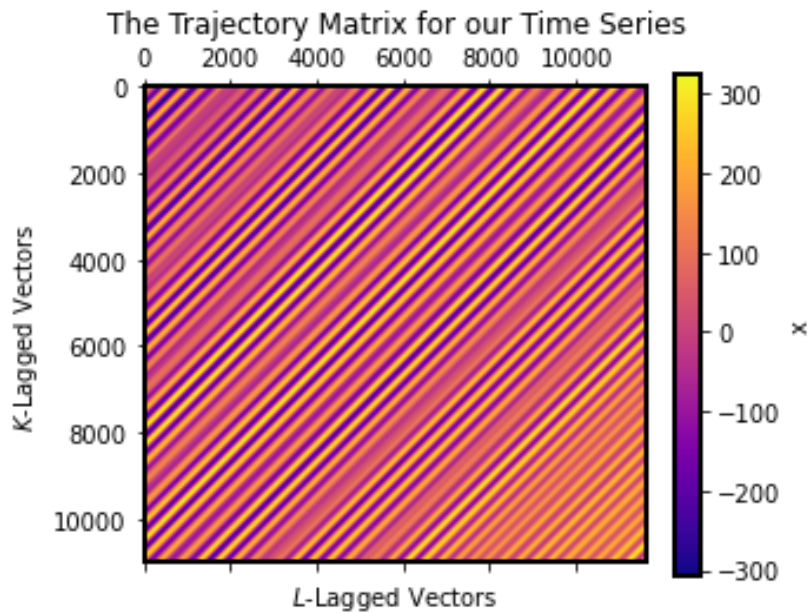
Εικόνα 4.1: Διάγραμμα της χρονοσειράς της x για όλα τα χρόνια της μελέτης (62 χρόνια)

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα της χρονοσειράς (Εικόνα 4.1), υπάρχει κάποια περιοδικότητα της μετακίνησης του Πόλου στον άξονα x καθώς και κάποια ανοδική τάση, ειδικά τα τελευταία χρόνια. Η μετακίνηση αυτή, μέσω της βοήθειας της SSA θα διασπαστεί σε τάση και κάποιες περιοδικότητες ώστε να μπορέσει να φανεί πιο καθαρά ο τρόπος που μετακινείται ο Πόλος.

4.2. Εφαρμογή της SSA

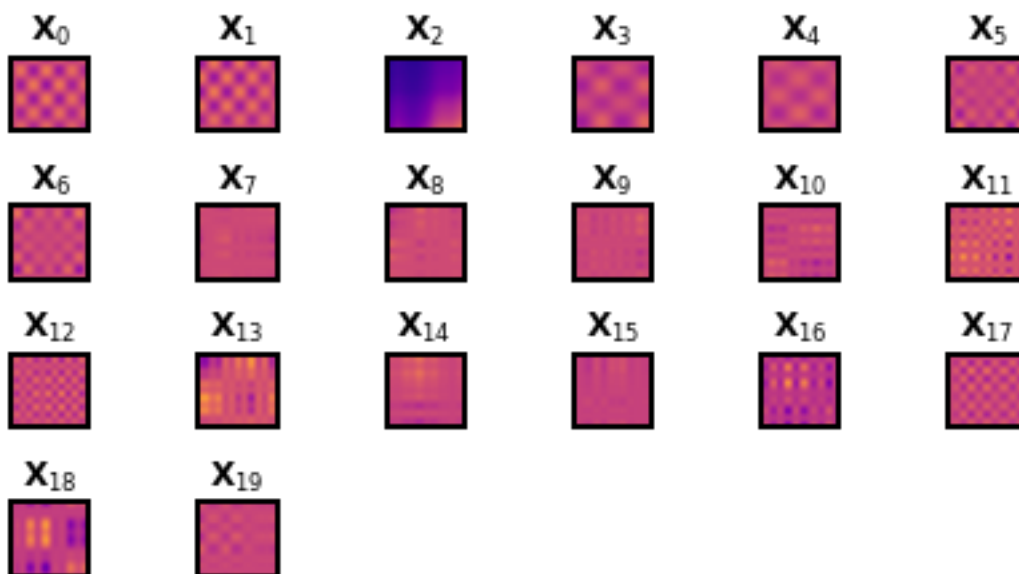
Το πλήθος των δεδομένων που μελετήθηκαν ήταν $N = 22645$ τιμές και το μήκος του παραθύρου που επιλέχτηκε ήταν κοντά στο μισό δηλαδή $L = 11000$, οπότε και το μήκος των στηλών του πίνακα τροχιάς ισούται με $K = N - L + 1 = 11646$.

Το πρώτο βήμα για την εκκίνηση της μεθόδου της SSA είναι η κατασκευή του πίνακα τροχιάς \mathbf{X} μεγέθους 11000×11646 :



Εικόνα 4.2: Πίνακας τροχιάς της χρονοσειράς x

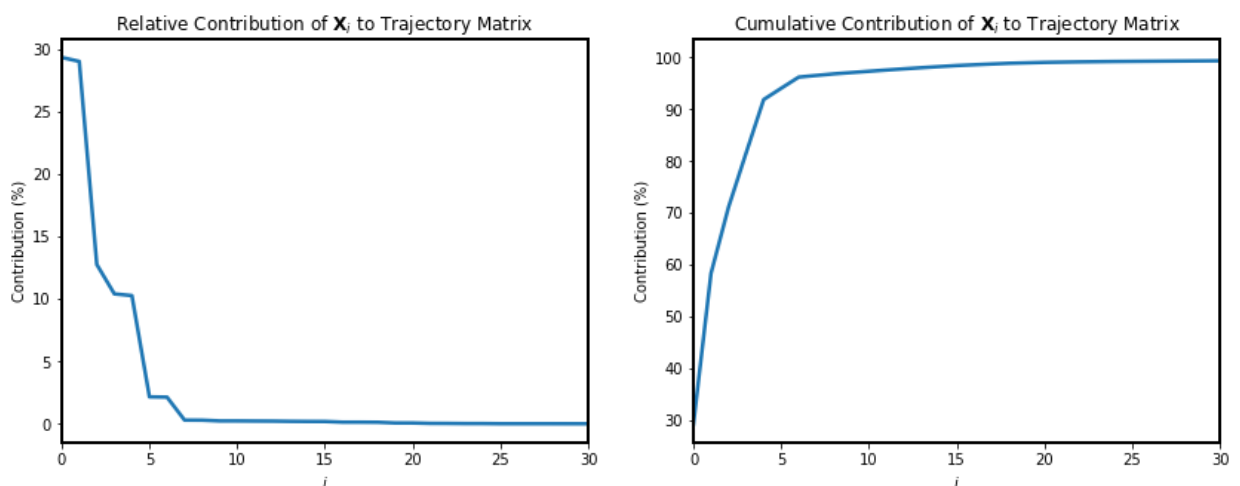
Το αντιδιαγώνιο σχήμα του πίνακα δείχνει ότι η κατασκευή του πραγματοποιήθηκε με σωστό τρόπο. Σειρά έχει η αποσύνθεση του πίνακα τροχιάς με την εφαρμογή της SVD όπου δημιουργήθηκαν και οι πρώτοι 20 πίνακες:



Εικόνα 4.3: Οι πρώτοι 20 πίνακες μετά την εφαρμογή της SSA

Από τους παραπάνω πίνακες (Εικόνα 4.3), αξιοσημείωτη είναι η συμπεριφορά της συνιστώσας 2 όπου φαίνεται να αλλάζει με αργό ρυθμό κατά μήκος της χρονοσειράς, πράγμα που υποδηλώνει ότι μπορεί και να παρουσιάζει την τάση αυτής. Οι συνιστώσες 0 και 1 φαίνεται να έχουν κοινή περιοδικότητα μεταξύ τους και αντίστοιχα συμβαίνει με τις περιοδικότητες 3 και 4, 5 και 6, 7 και 8, 9 και 10.

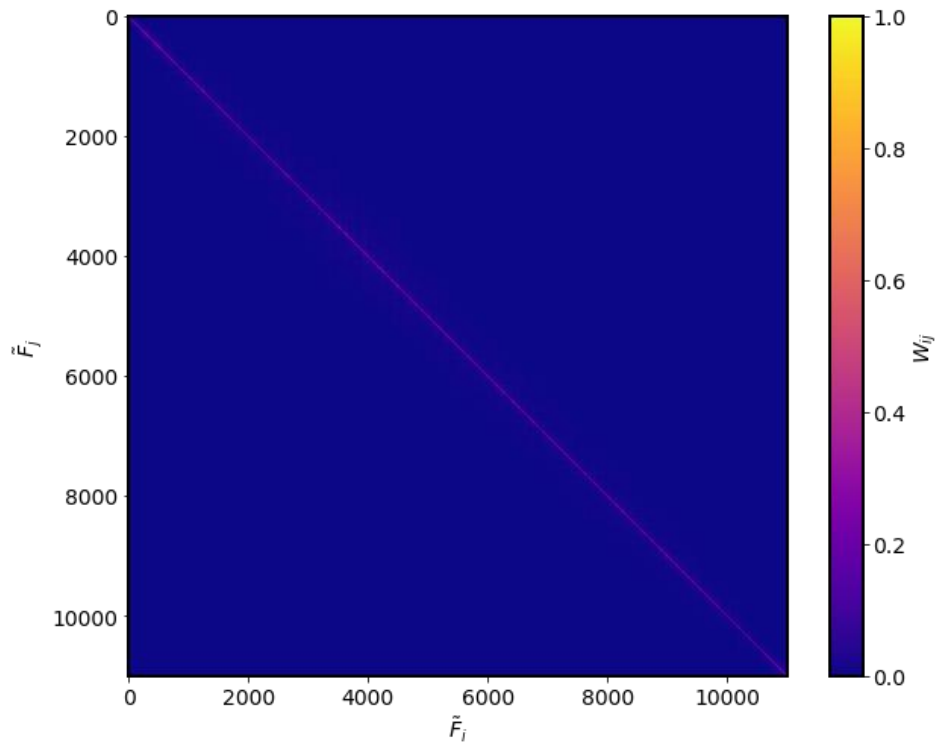
Έπειτα, δημιουργήθηκαν τα διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς ώστε να βγει μια πρώτη εικόνα για το πόσες και ποιες είναι οι συνιστώσες που συνεισφέρουν ουσιαστικά στη δημιουργία της χρονοσειράς και ποιες αποτελούν θόρυβο.



Εικόνα 4.4: Διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς

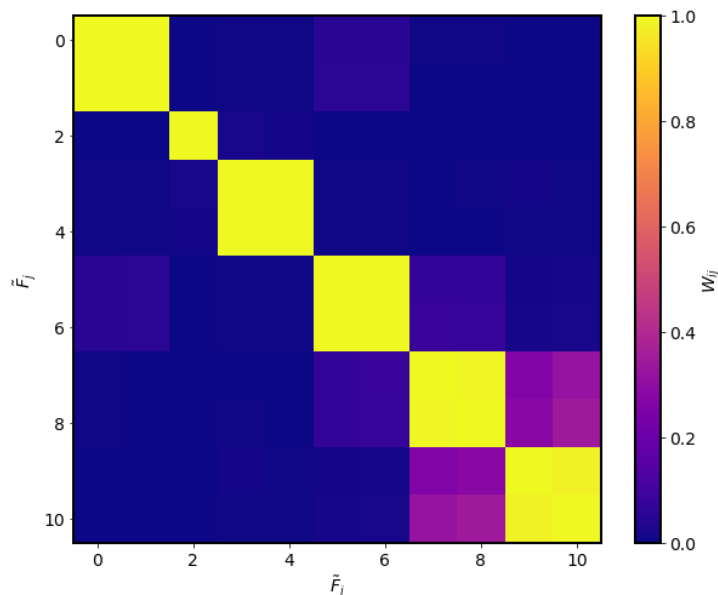
Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα (Εικόνα 4.4), τη μεγαλύτερη συνεισφορά έχουν οι συνιστώσες 0 και 1 και μέχρι και τη συνιστώσα 7 περίπου έχει καλυφθεί το 95% της πληροφορίας της χρονοσειράς. Από εκεί και μέχρι κοντά στη συνιστώσα 20 έχει καλυφθεί σχεδόν το 100%. Αυτό σημαίνει ότι, κυρίως σε αυτές τις 21 συνιστώσες θα πρέπει να επικεντρωθεί περισσότερο η μελέτη ώστε να εξαχθούν οι βασικές περιοδικότητες και η τάση. Επίσης, από το διάγραμμα της σχετικής συνεισφοράς αλλά και όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως για τη συνιστώσα 2, είναι ακόμα πιο πιθανό να παρουσιάζει την τάση της χρονοσειράς λόγω του αυξημένου ποσοστού συνεισφοράς που έχει. Ακόμα, για τις συνιστώσες 0 και 1 οι οποίες παρουσίαζαν κοινή περιοδικότητα (Εικόνα 4.3), τώρα φαίνεται να έχουν και παρόμοια συνεισφορά σε ποσοστό όπως αντίστοιχα και οι συνιστώσες 3 και 4 και οι 5 και 6.

Ένα ακόμα εργαλείο πολύ σημαντικό στην ομαδοποίηση των συνιστωσών είναι ο πίνακας συσχέτισης (W-Correlation Matrix), στον οποίο φαίνεται ξεκάθαρα η συσχέτιση μεταξύ των συνιστωσών. Το υπόμνημα του πίνακα δείχνει ότι, όσο μεγαλύτερη είναι η συσχέτιση μεταξύ δύο συνιστωσών τόσο πιο κίτρινο θα φαίνεται το αντίστοιχο κουτάκι του πίνακα. Η κιτρινομωβ γραμμή της αντιδιαγωνίου στην Εικόνα 4.5 δείχνει ότι όλες οι συνιστώσες έχουν μεγάλη συσχέτιση με τον εαυτό τους.



Εικόνα 4.5: Πίνακας συσχέτισης όλων των συνιστωσών

Λόγω του μεγάλου μεγέθους των δεδομένων θα πρέπει να γίνει η ανάλυση ενός μικρότερου μεγέθους πίνακα συσχέτισης που θα περιέχει τις συνιστώσες ανά 10 ώστε να φαίνονται πιο καθαρά οι συσχετίσεις μεταξύ τους και να μη συγχέονται.

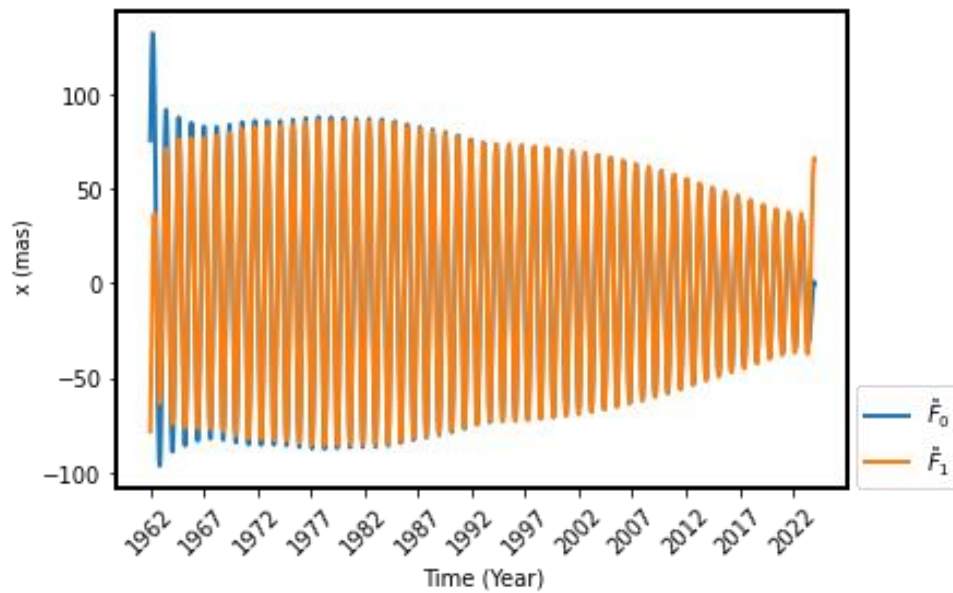


Εικόνα 4.6: Πίνακας συσχέτισης για τις συνιστώσες 0-10

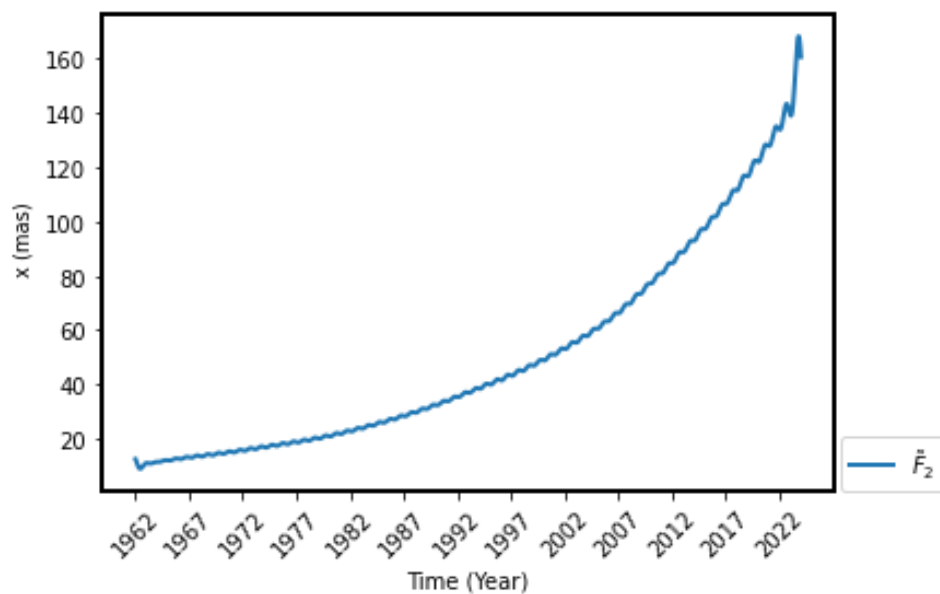
Από την Εικόνα 4.6, φαίνεται ότι οι συνιστώσες 0 και 1 έχουν αρκετά μεγάλη συσχέτιση μεταξύ τους και παρουσιάζουν την πρώτη περιοδικότητα, η συνιστώσα 2 έχει μεγάλη συσχέτιση μόνο με τον εαυτό της και με καμία άλλη και με βάση όσων ειπώθηκαν πριν παρουσιάζει την τάση της χρονοσειράς. Οι συνιστώσες 3 και 4, 5 και 6, 7 και 8, 9 και 10

επίσης παρουσιάζουν αντίστοιχα μεγάλη συσχέτιση μεταξύ τους οπότε θα ομαδοποιηθούν ανά δύο.

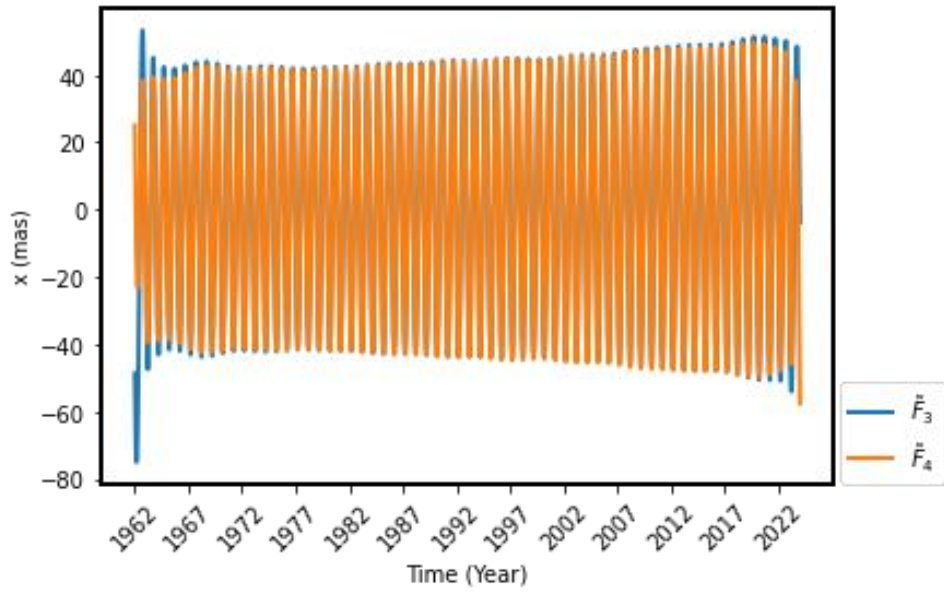
Για επιβεβαίωση και καλύτερη επιλογή, παρακάτω φαίνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα των συνιστωσών x (mas) – Time (year):



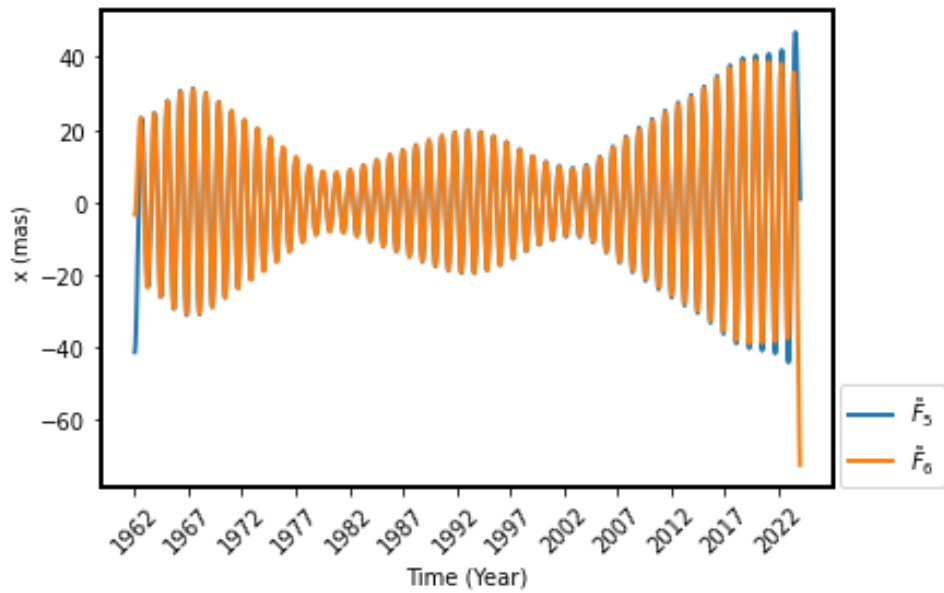
Εικόνα 4.7: Διάγραμμα συνιστωσών 0 και 1



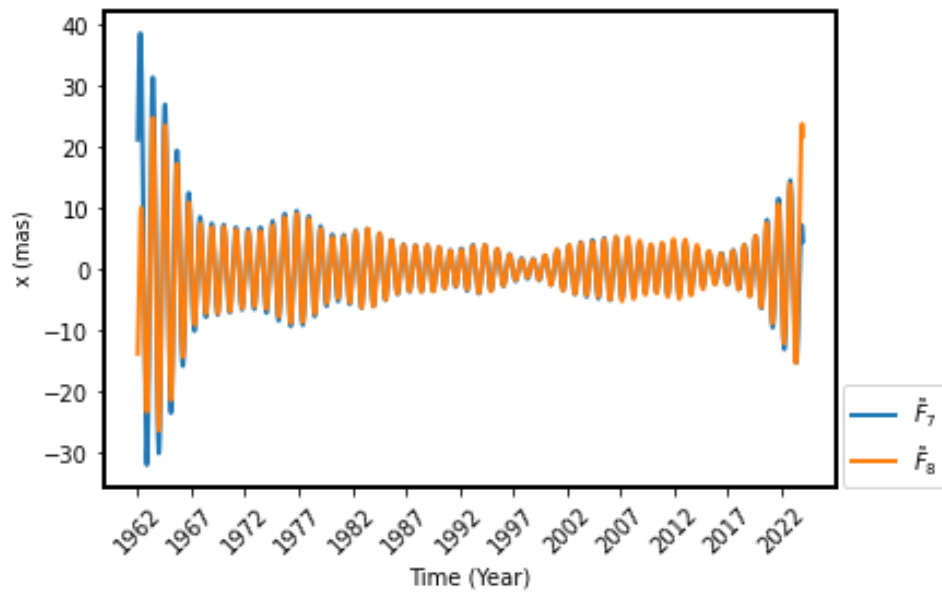
Εικόνα 4.8: Διάγραμμα συνιστώσας 2



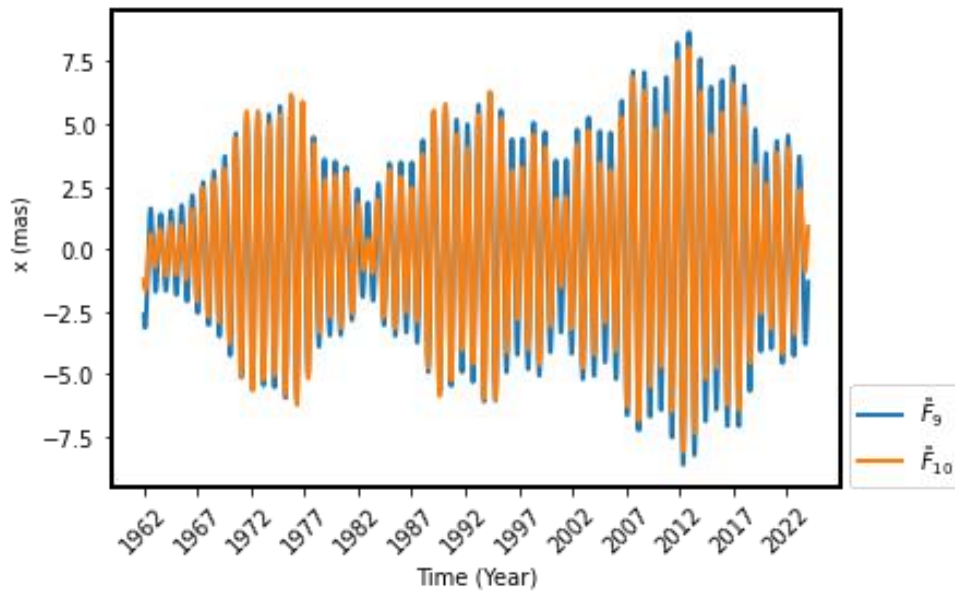
Εικόνα 4.9: Διάγραμμα συνιστωσών 3 και 4



Εικόνα 4.10: Διάγραμμα συνιστωσών 5 και 6

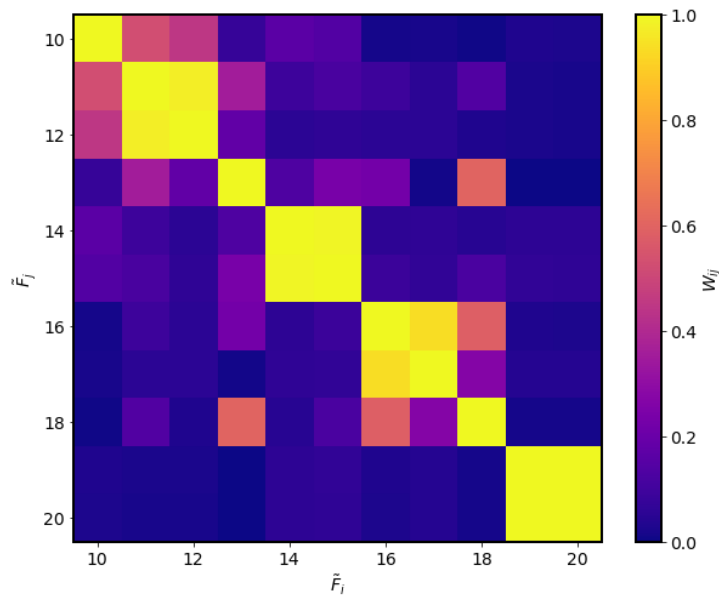


Εικόνα 4.11: Διάγραμμα συνιστωσών 7 και 8



Εικόνα 4.12: Διάγραμμα συνιστωσών 9 και 10

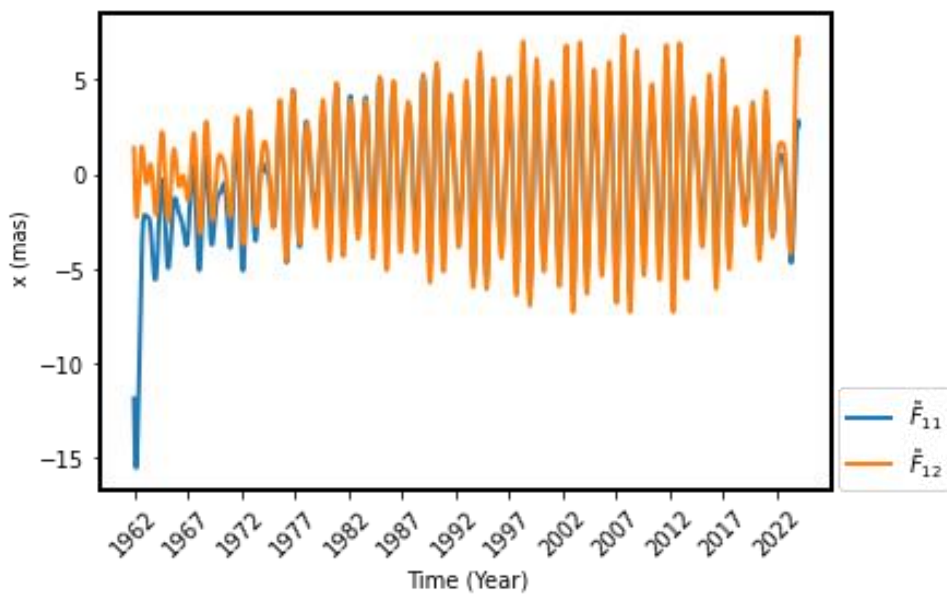
Από τις Εικόνες 4.7 έως 4.12, φαίνεται ότι έγινε σωστή ομαδοποίηση στις πρώτες 10 συνιστώσες. Ακολουθούν οι επόμενες 10 που θα αξιολογηθούν με τον ίδιο τρόπο:



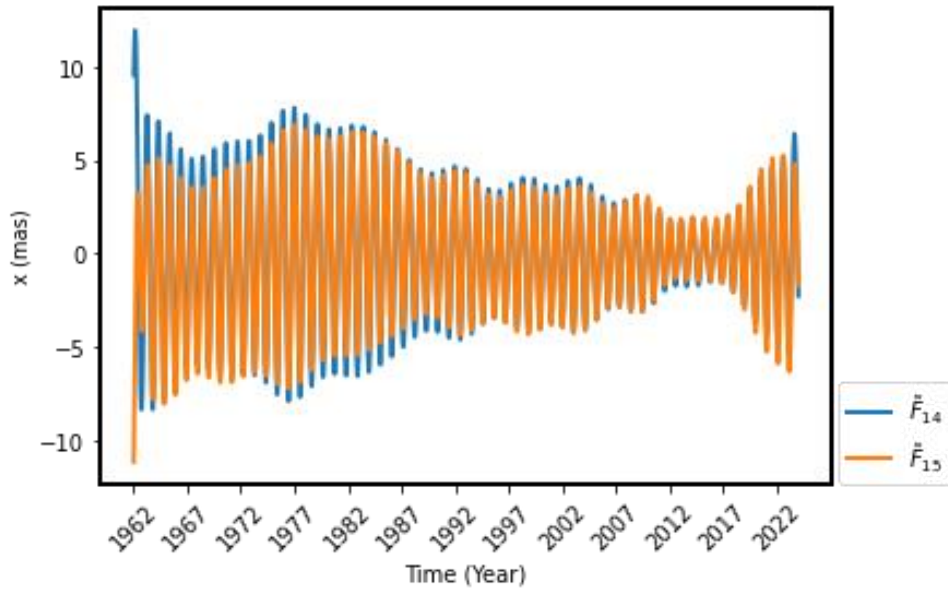
Εικόνα 4.13: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 10-20

Από την Εικόνα 4.13 φαίνεται ότι υπάρχει πολύ υψηλή συσχέτιση μεταξύ των συνιστωσών 11 και 12, 14 και 15, 16 και 17, 19 και 20 οι οποίες θα ομαδοποιηθούν ανά δύο. Ακόμα, φαίνεται ότι υπάρχει σχετικά μεγάλη συσχέτιση μεταξύ των συνιστωσών 13 και 18 οπότε δημιουργώντας το διάγραμμα τους θα παρθεί η απόφαση για το αν θα πρέπει να ομαδοποιηθούν μαζί.

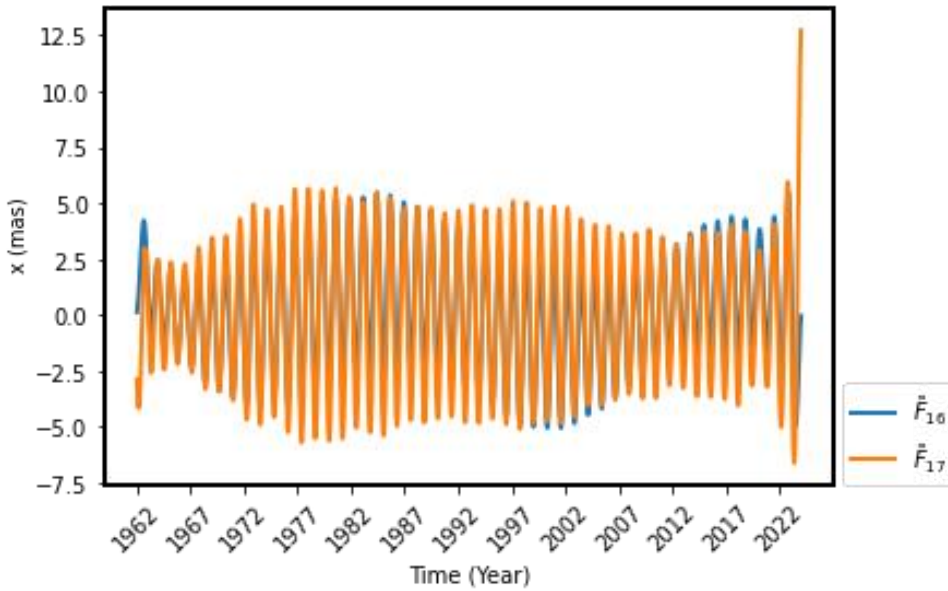
Παρακάτω παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα:



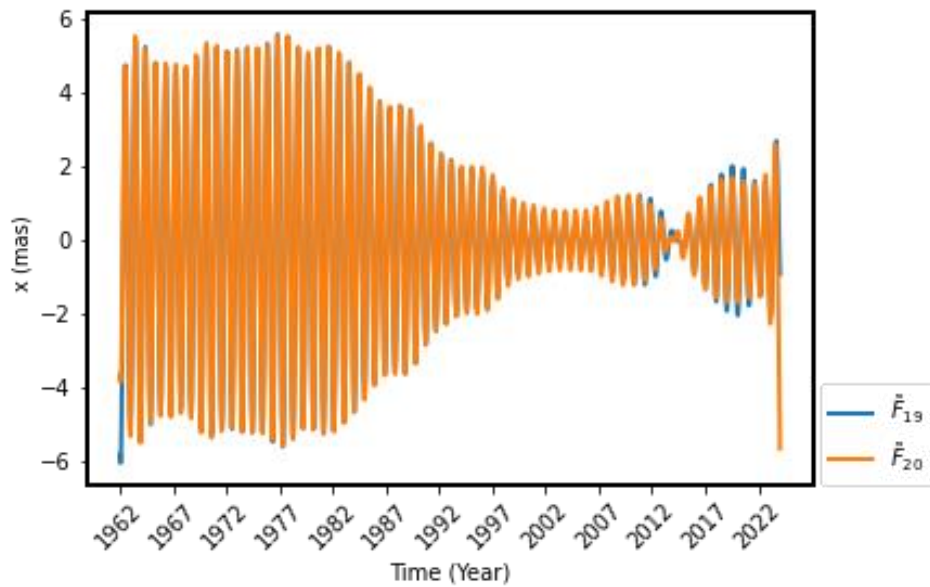
Εικόνα 4.14: Διάγραμμα συνιστωσών 11 και 12



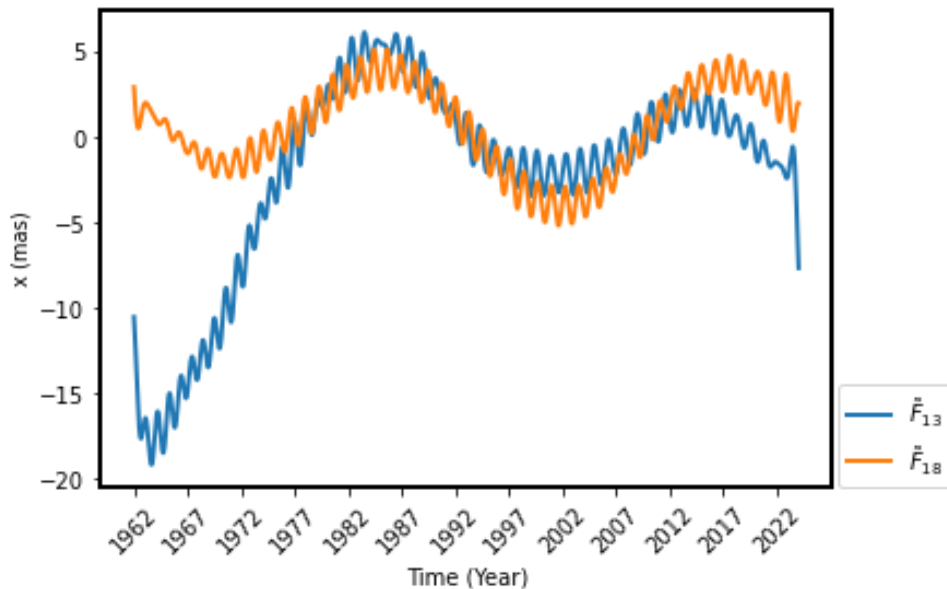
Εικόνα 4.15: Διάγραμμα συνιστωσών 14 και 15



Εικόνα 4.16: Διάγραμμα συνιστωσών 16 και 17



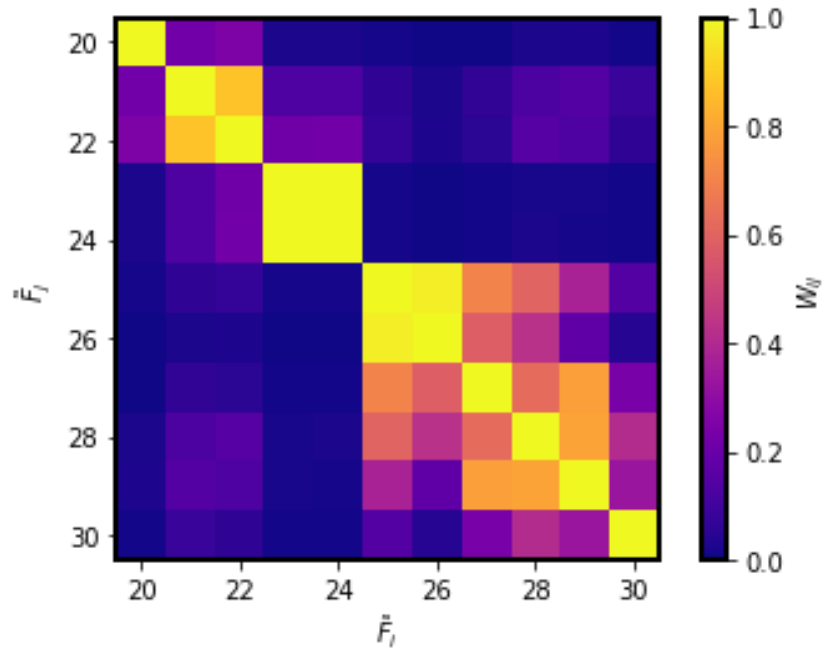
Εικόνα 4.17: Διάγραμμα συνιστωσών 19 και 20



Εικόνα 4.18: Διάγραμμα συνιστωσών 13 και 18

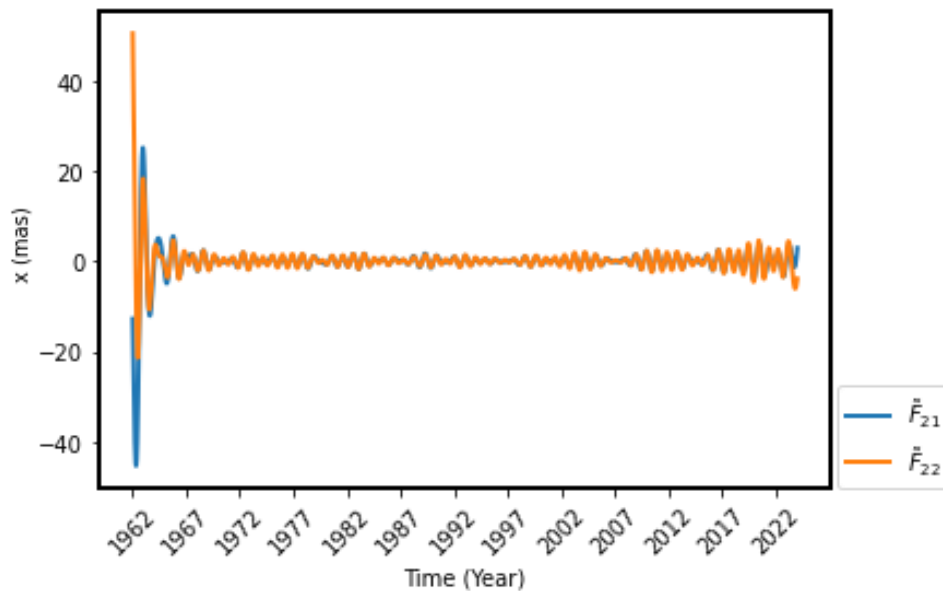
Τα παραπάνω διαγράμματα (Εικόνες 4.14 – 4.17) αποδεικνύουν ότι η ομαδοποίηση έγινε σωστά. Από το διάγραμμα των συνιστωσών 13 και 18 (Εικόνα 4.18), φαίνεται ότι υπάρχει μεγάλη απόκλιση μεταξύ τους τα πρώτα 15 χρόνια οπότε δεν θα ομαδοποιηθούν μαζί ως περιοδικότητα αλλά ως θόρυβος.

Ακολουθούν οι συνιστώσες 20-30:

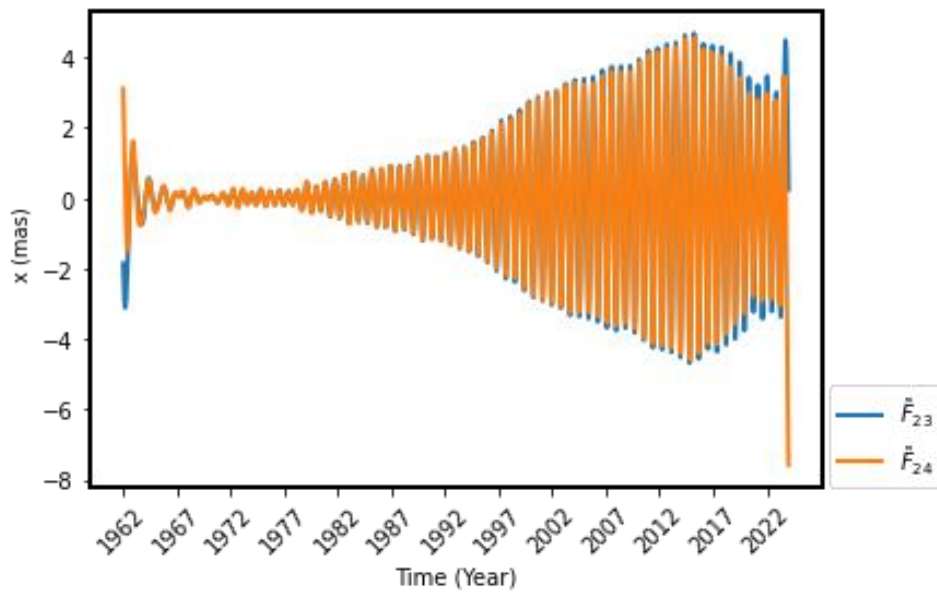


Εικόνα 4.19: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 20-30

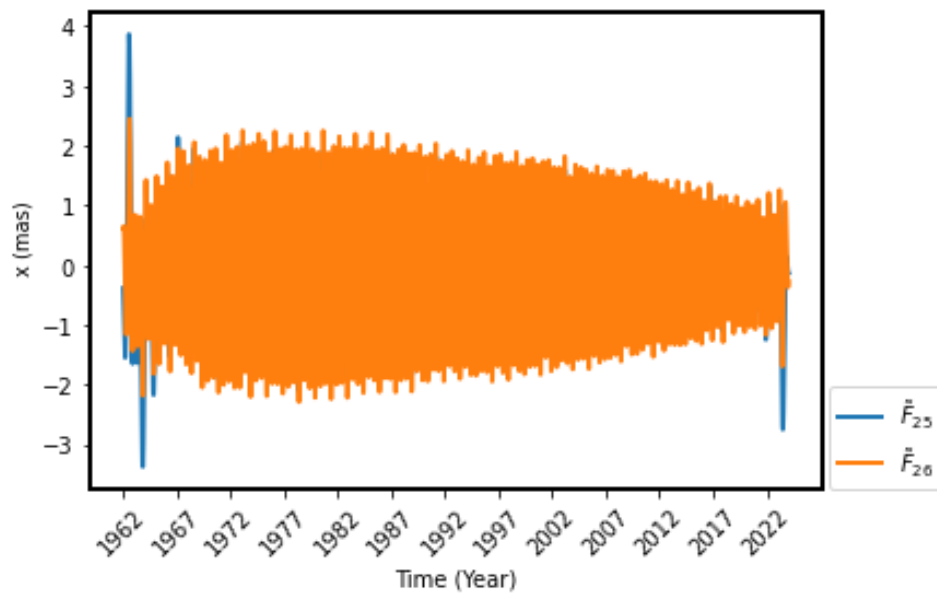
Από την Εικόνα 4.19, φαίνεται ότι οι συνιστώσες 21 και 22, 23 και 24, 25 και 26 πρέπει να ομαδοποιηθούν μαζί. Για τις συνιστώσες 27 έως 30 είναι δύσκολη η επιλογή της ομαδοποίησης από τον πίνακα συσχέτισης καθώς δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια ισχυρή συσχέτιση μεταξύ κάποιων εκ των συνιστωσών. Για αυτό το λόγο, η ομαδοποίηση για αυτές τις συνιστώσες θα γίνει με βάση τα διαγράμματά τους.



Εικόνα 4.20: Διάγραμμα συνιστωσών 21 και 22



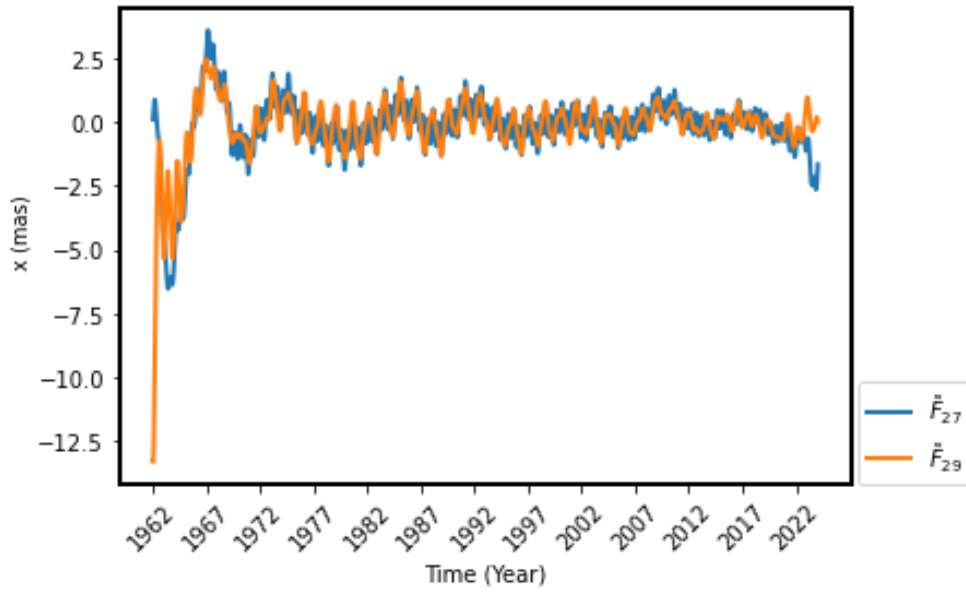
Εικόνα 4.21: Διάγραμμα συνιστωσών 23 και 24



Εικόνα 4.22: Διάγραμμα συνιστωσών 25 και 26

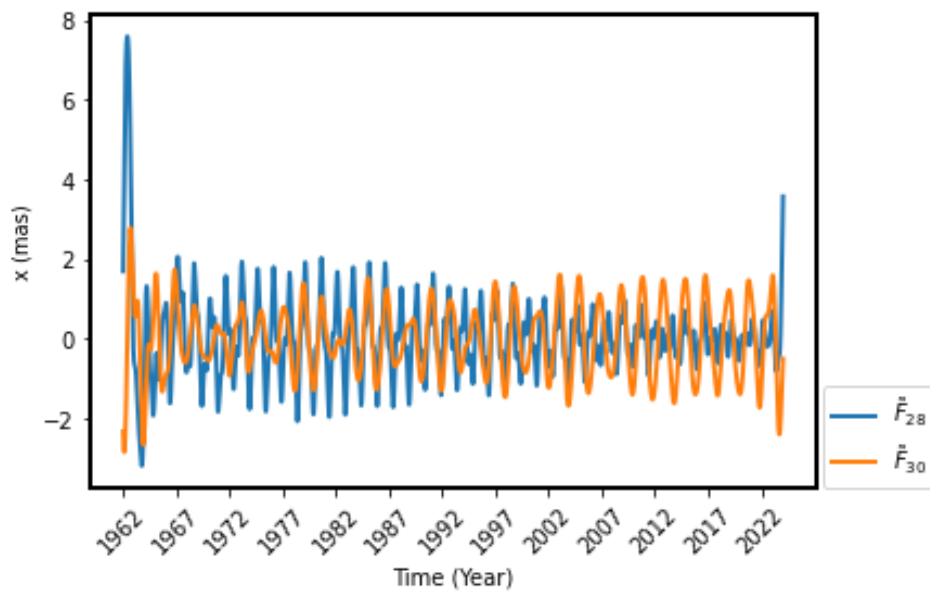
Από τα παραπάνω διαγράμματα (Εικόνες 4.20 – 4.22) φαίνεται ότι έγινε σωστή ομαδοποίηση για τις συνιστώσες από 21 έως 26.

Από τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 4.19), φαίνεται ότι η συνιστώσα 27 έχει μεγαλύτερη συσχέτιση με τη συνιστώσα 29 από ότι με τις 28 και 30.



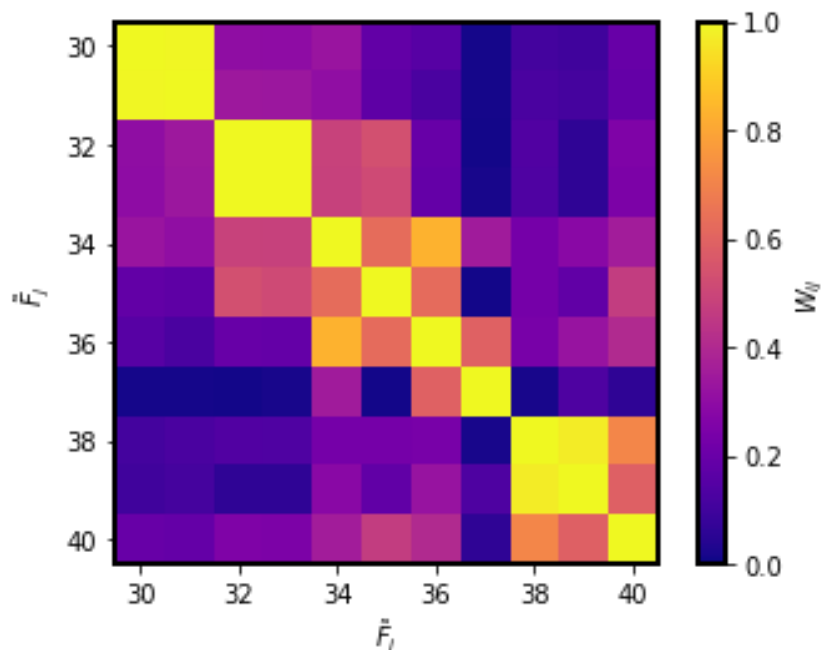
Εικόνα 4.23: Διάγραμμα συνιστωσών 27 και 29

Το παραπάνω διάγραμμα αποδεικνύει τη σωστή επιλογή ομαδοποίησης των δύο αυτών συνιστωσών.



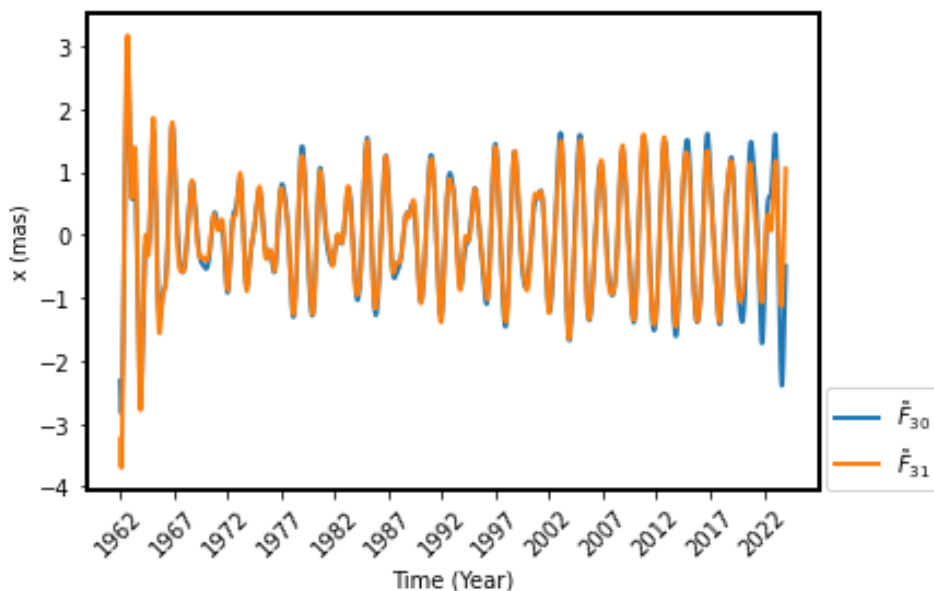
Εικόνα 4.24: Διάγραμμα συνιστωσών 28 και 30

Από το παραπάνω διάγραμμα και τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνες 4.24 και 4.19), οι συνιστώσες 28 και 30 θα ομαδοποιηθούν μαζί ως θόρυβος καθώς τα διαγράμματα τους διαφέρουν αρκετά και επίσης δεν έχουν πολύ υψηλό βαθμό συσχέτισης.

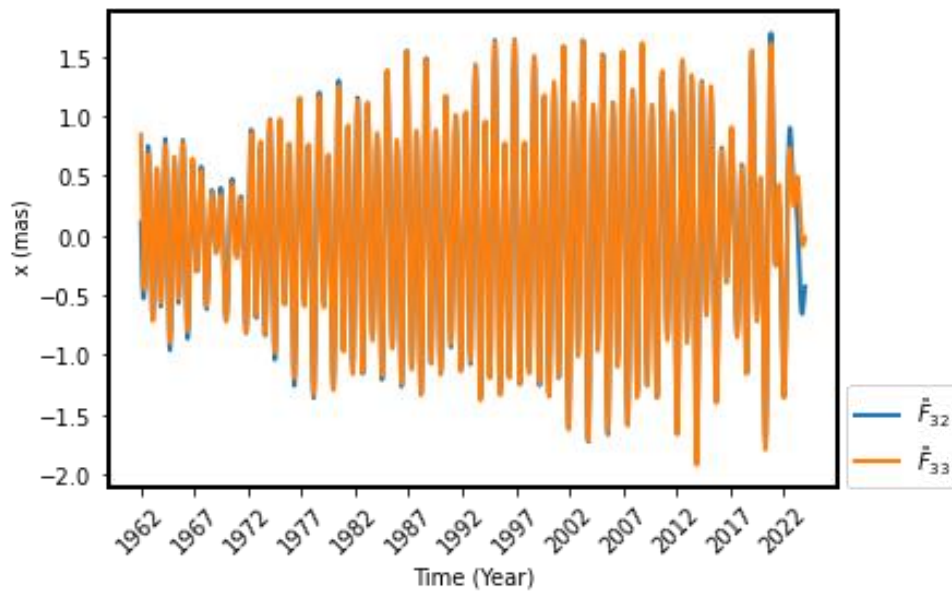


Εικόνα 4.25: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 30-40

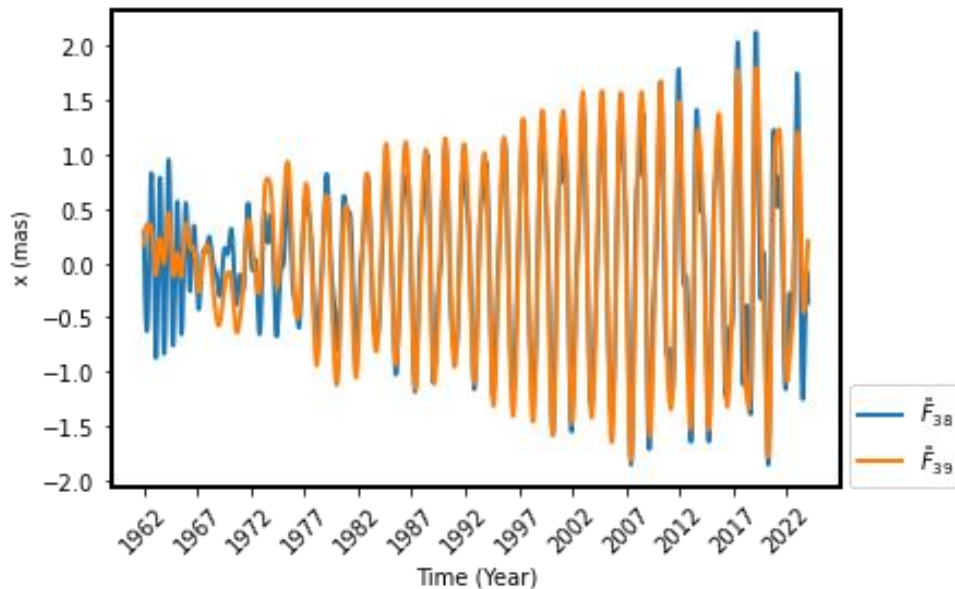
Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνιστώσα 30 η οποία πριν αποφασίστηκε λανθασμένα ότι θα συμπεριληφθεί στο θόρυβο τελικά έχει υψηλή συσχέτιση με την συνιστώσα 31 κι έτσι θα ομαδοποιηθούν μαζί. Ακόμη, οι συνιστώσες 32 και 33, 38 και 39 έχουν αρκετά υψηλό βαθμό συσχέτισης ανά δύο και θα ομαδοποιηθούν μαζί. Για τις συνιστώσες από 34 έως 37 θα γίνει περαιτέρω ανάλυση.



Εικόνα 4.26: Διάγραμμα συνιστωσών 30 και 31

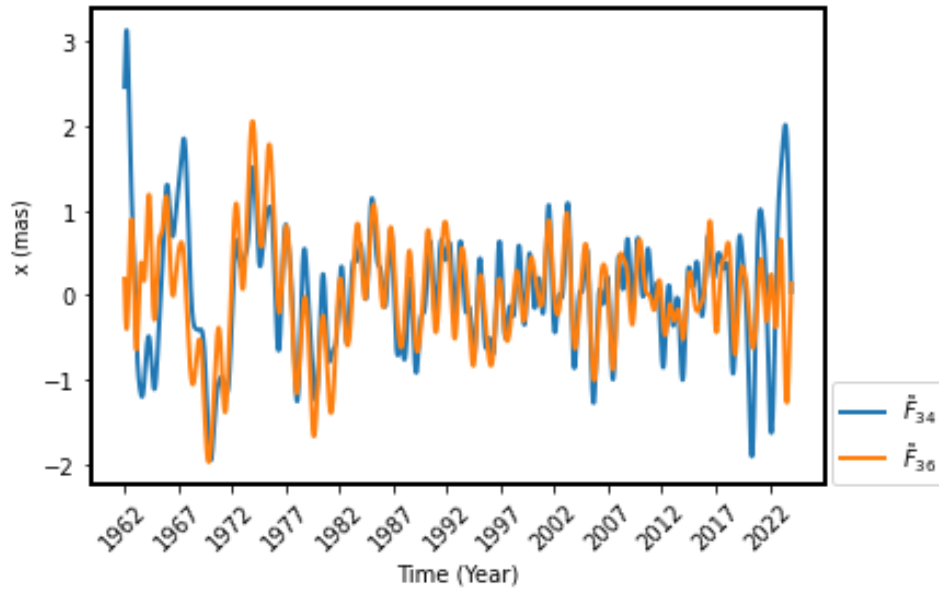


Εικόνα 4.27: Διάγραμμα συνιστωσών 32 και 33



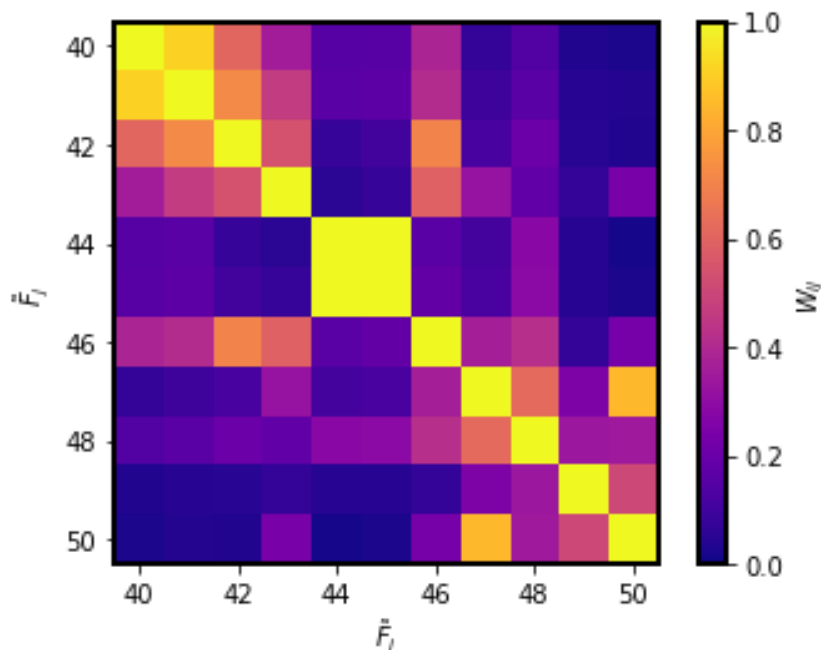
Εικόνα 4.28: Διάγραμμα συνιστωσών 38 και 39

Από τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 4.25), λόγω της σχετικά μεγάλης συσχέτισης που υπάρχει μεταξύ των συνιστωσών 34 και 36 θα γίνει μια δοκιμή για το αν θα πρέπει να ομαδοποιηθούν μαζί. Οι υπόλοιπες συνιστώσες 35, 37 παρουσιάζουν αρκετά χαμηλό βαθμό συσχέτισης μεταξύ τους κι έτσι θα ομαδοποιηθούν ως θόρυβος. Η συνιστώσα 40 δεν είχε μεγάλη συσχέτιση με καμία από αυτές τις συνιστώσες αλλά θα εξεταστεί αν έχει με κάποια στην ομάδα των συνιστωσών 40-50 πριν εισαχθεί και αυτή στο θόρυβο.



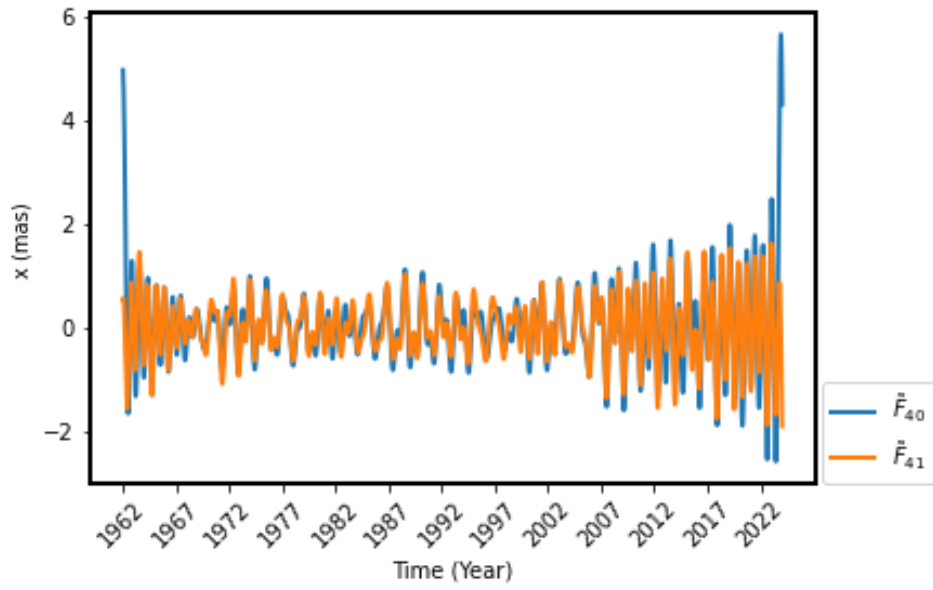
Εικόνα 4.29: Διάγραμμα συνιστωσών 34 και 36

Όπως τελικά οι συνιστώσες 34 και 36 έπρεπε να ομαδοποιηθούν μαζί, όπως δείχνει και η Εικόνα 4.29.

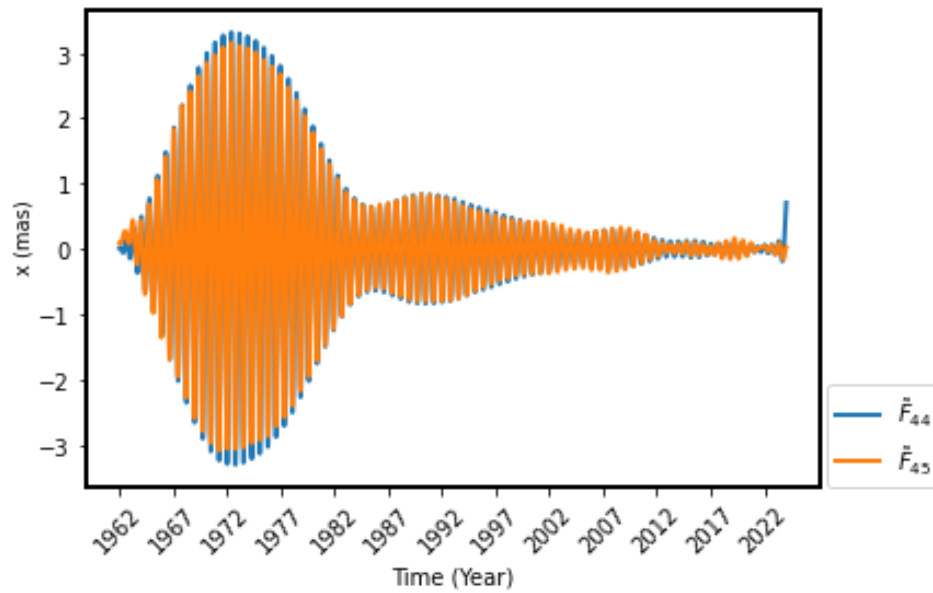


Εικόνα 4.30: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 40-50

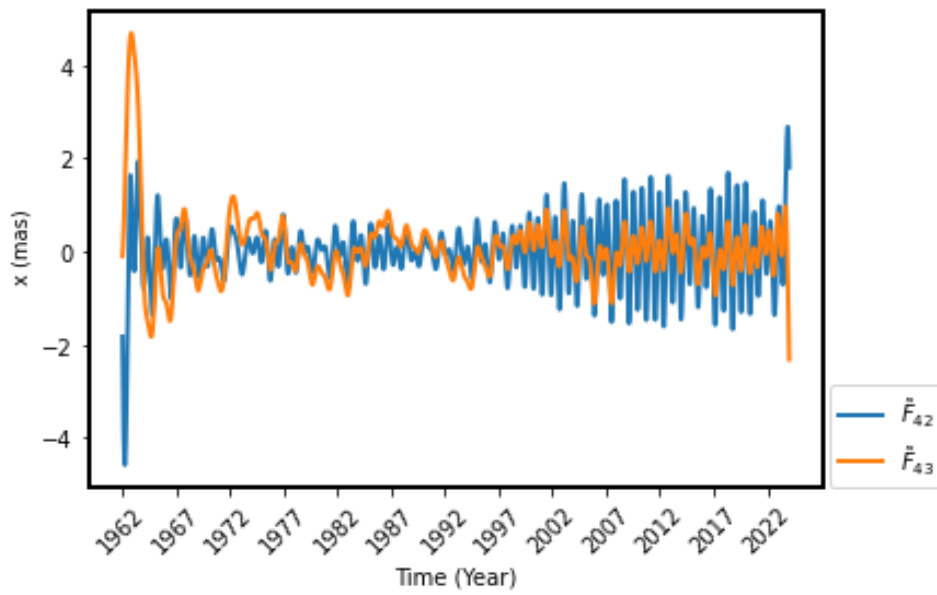
Από τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 4.30), φαίνεται ότι οι συνιστώσες 40 και 41, 44 και 45 θα ομαδοποιηθούν μαζί λόγω υψηλής συσχέτισης. Για τις υπόλοιπες συνιστώσες θα σχηματιστούν πρώτα τα διαγράμματα, ώστε να φανεί καλύτερα η συσχέτιση μεταξύ τους.



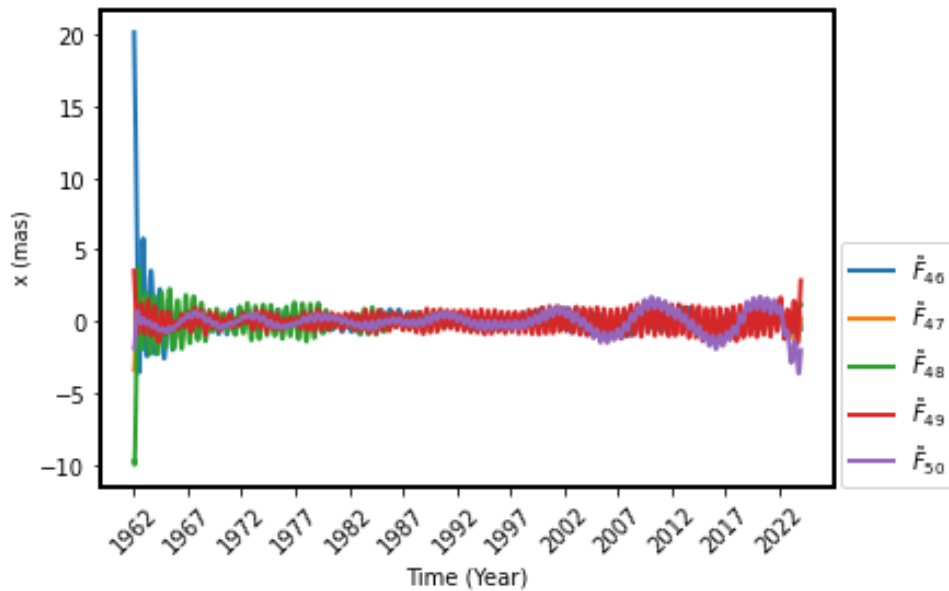
Εικόνα 4.31: Διάγραμμα συνιστωσών 40 και 41



Εικόνα 4.32: Διάγραμμα συνιστωσών 44 και 45

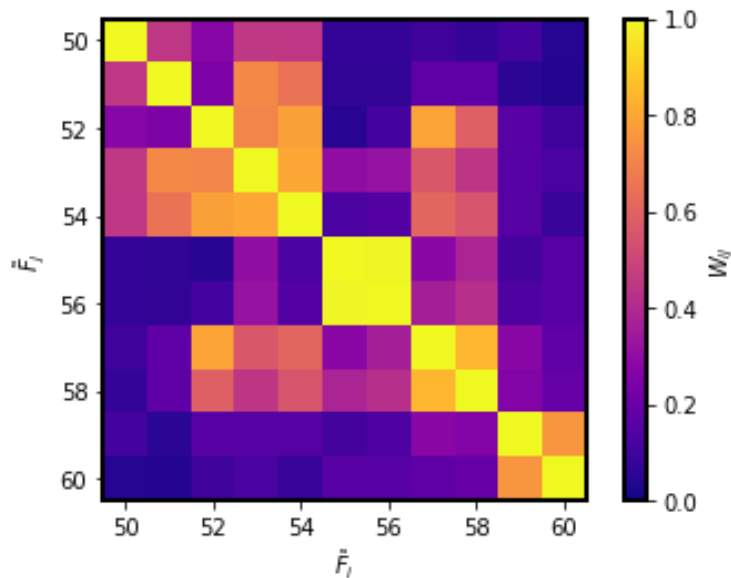


Εικόνα 4.33: Διάγραμμα συνιστωσών 42 και 43



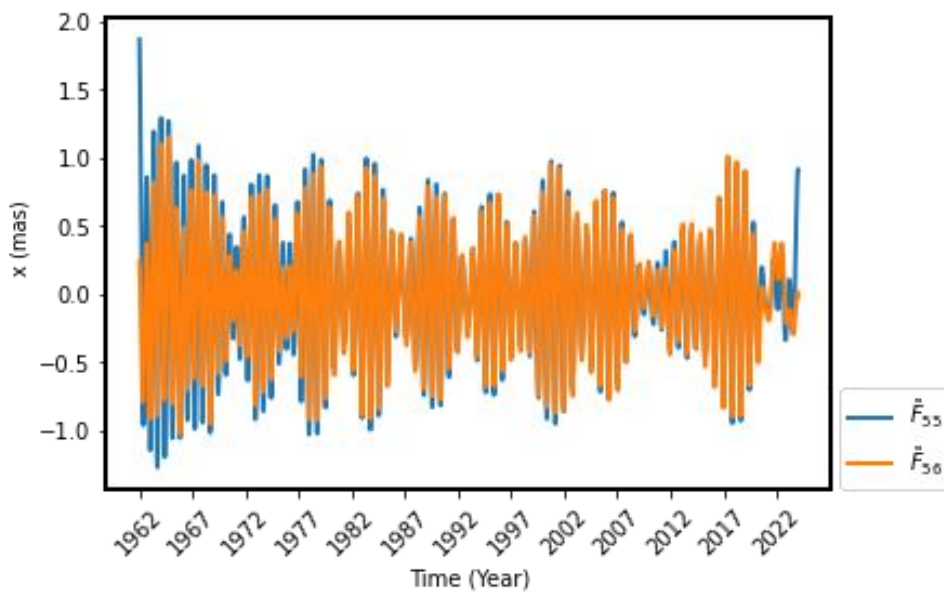
Εικόνα 4.34: Διάγραμμα συνιστωσών 46-50

Από τις Εικόνες 4.33, 4.34 φαίνεται ότι οι συνιστώσες αυτές δεν παρουσιάζουν υψηλή συσχέτιση με καμία συνιστώσα κι έτσι θα ομαδοποιηθούν όλες στο θόρυβο εκτός από τη συνιστώσα 50 που θα ελεγχθεί και με τις επόμενες συνιστώσες.

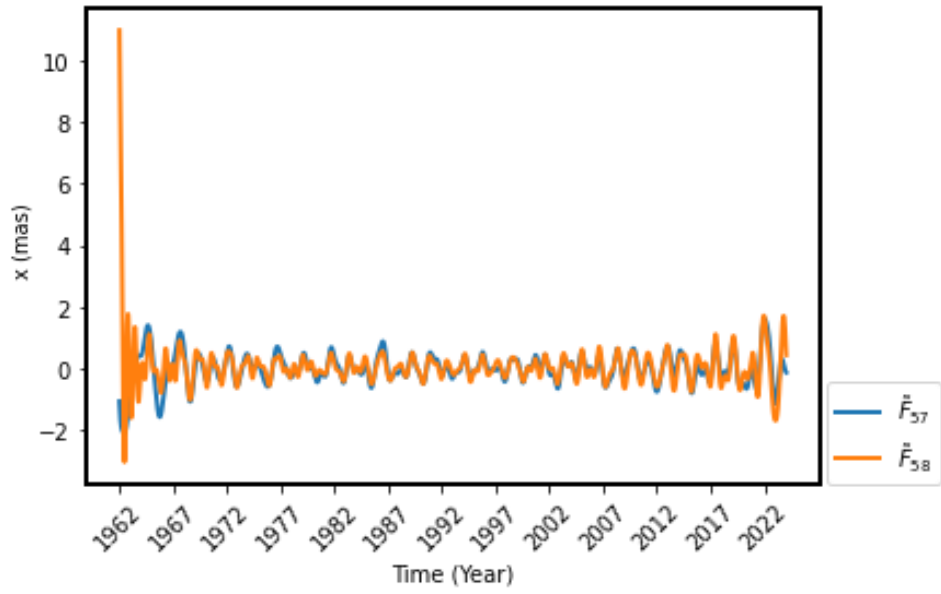


Εικόνα 4.35: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 50-60

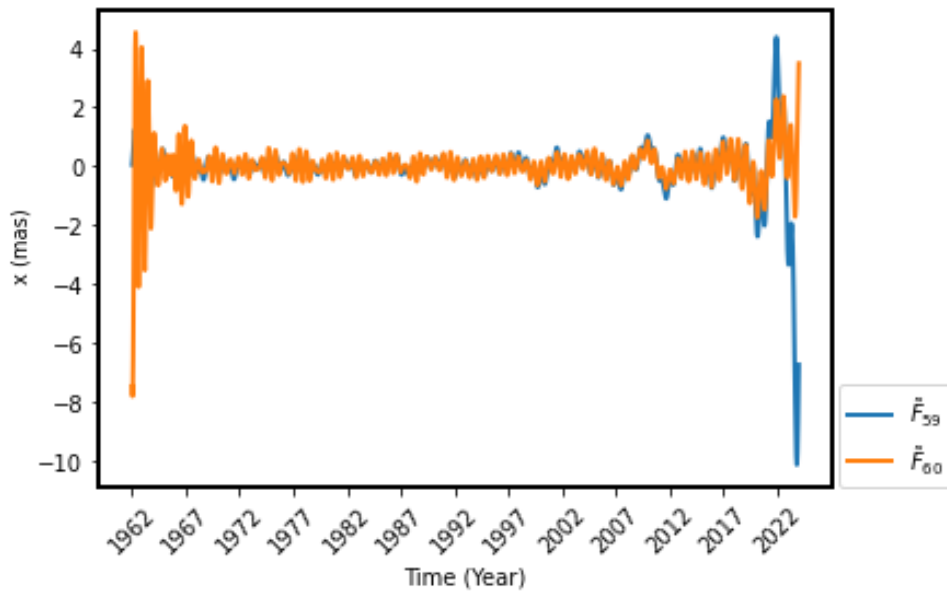
Ο πίνακας στην Εικόνα 4.35 δείχνει ότι οι μόνες συνιστώσες που έχουν πολύ μεγάλη συσχέτιση είναι οι 55 και 56 και αρκετά μεγάλη έχουν οι 57 και 58, 59 και 60. Τα διαγράμματα των συνιστωσών θα δείξουν καλύτερα ποια θα είναι η βέλτιστη επιλογή ομαδοποίησης.



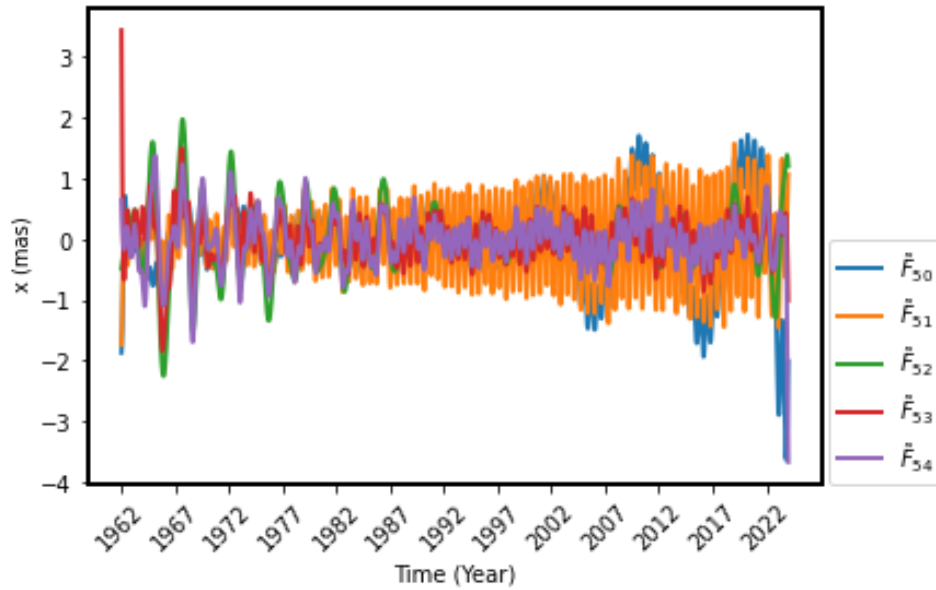
Εικόνα 4.36: Διάγραμμα συνιστωσών 55 και 56



Εικόνα 4.37: Διάγραμμα συνιστωσών 57 και 58



Εικόνα 4.38: Διάγραμμα συνιστωσών 59 και 60



Εικόνα 4.39: Διάγραμμα συνιστωσών 50-54

Από τις Εικόνες 4.36 έως 4.39, φαίνεται ότι οι συνιστώσες 55 και 56, 57 και 58, 59 και 60 ομαδοποιήθηκαν σωστά μαζί. Οι υπόλοιπες συνιστώσες θα ομαδοποιηθούν ως θόρυβος καθώς έχουν αρκετά χαμηλή συσχέτιση μεταξύ τους. Εδώ τελειώνει και η ομαδοποίηση των συνιστωσών για τις περιοδικότητες και όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες θα ομαδοποιηθούν στο θόρυβο. Τα αποτελέσματα των ομαδοποιήσεων έχουν ως εξής:

Trend = Συνιστώσα 2

Periodic 1 = Συνιστώσες 0, 1

Periodic 2 = Συνιστώσες 3, 4

Periodic 3 = Συνιστώσες 5, 6

Periodic 4 = Συνιστώσες 7, 8

Periodic 5 = Συνιστώσες 9, 10

Periodic 6 = Συνιστώσες 11, 12

Periodic 7 = Συνιστώσες 14, 15

Periodic 8 = Συνιστώσες 16,17

Periodic 9 = Συνιστώσες 19,20

Periodic 10 = Συνιστώσες 21, 22

Periodic 11 = Συνιστώσες 23, 24

Periodic 12 = Συνιστώσες 25, 26

Periodic 13 = Συνιστώσες 27, 29

Periodic 14 = Συνιστώσες 30, 31

Periodic 15 = Συνιστώσες 32, 33

Periodic 16 = Συνιστώσες 34, 36

Periodic 17 = Συνιστώσες 38, 39

Periodic 18 = Συνιστώσες 40, 41

Periodic 19 = Συνιστώσες 44, 45

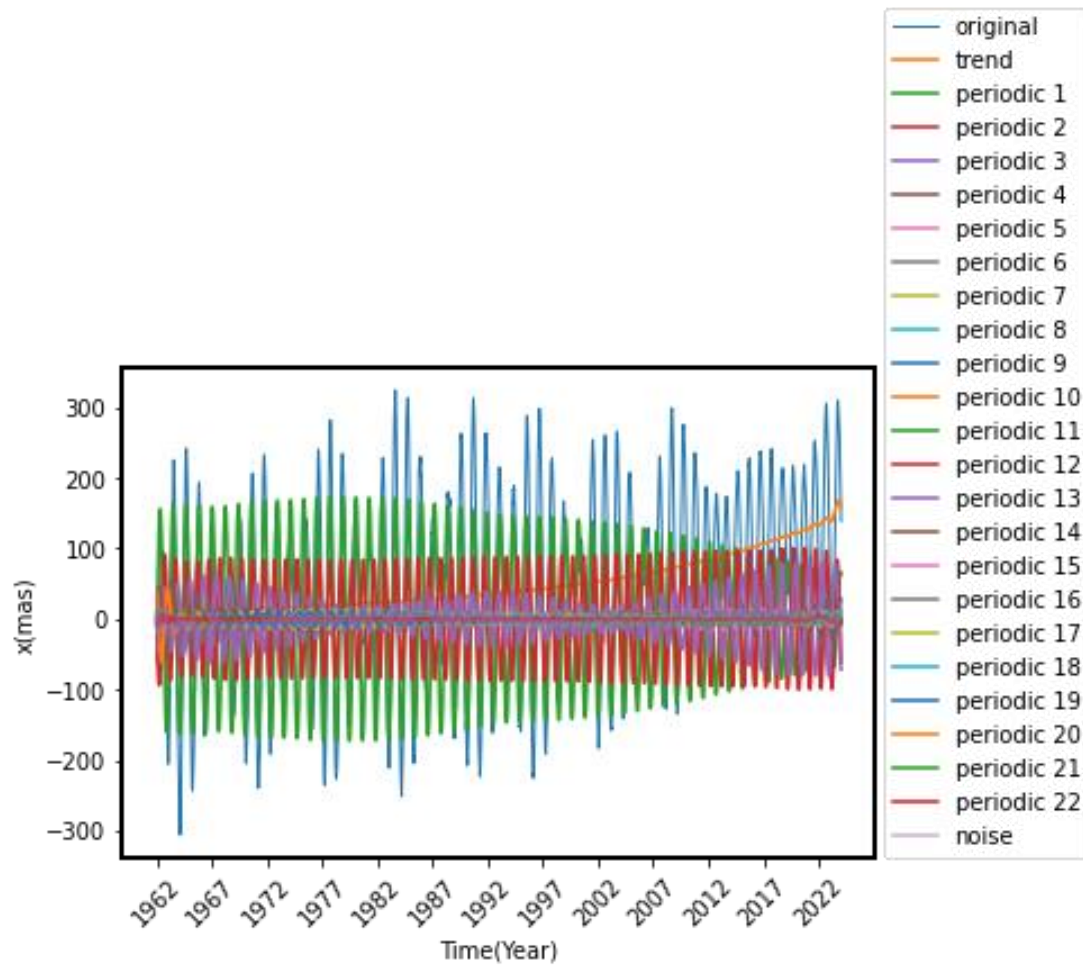
Periodic 20 = Συνιστώσες 55, 56

Periodic 21 = Συνιστώσες 57, 58

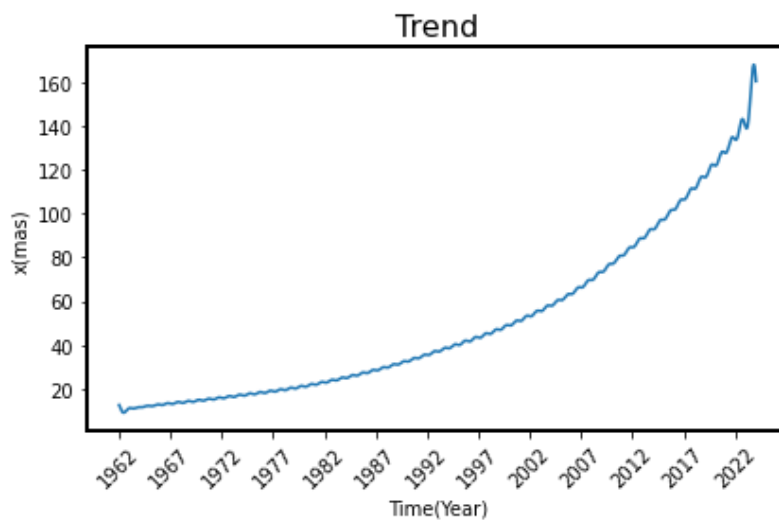
Periodic 22 = Συνιστώσες 59,60

Noise = Όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες

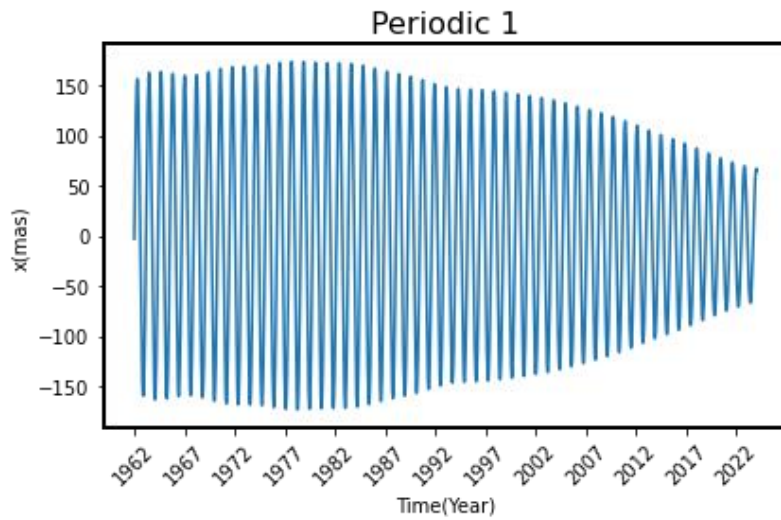
Από τα παραπάνω προέκυψαν τα παρακάτω διαγράμματα:



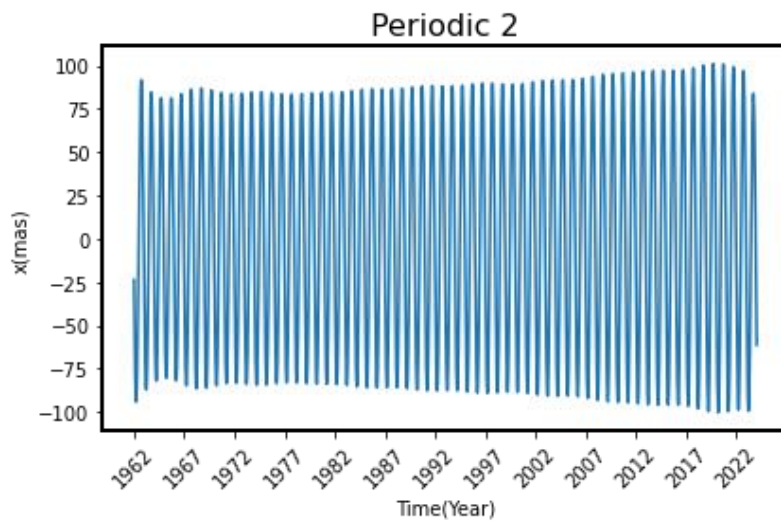
Εικόνα 4.40: Διαγράμματα όλων των ομαδοποιημένων συνιστωσών αλλά και της αρχικής χρονοσειράς



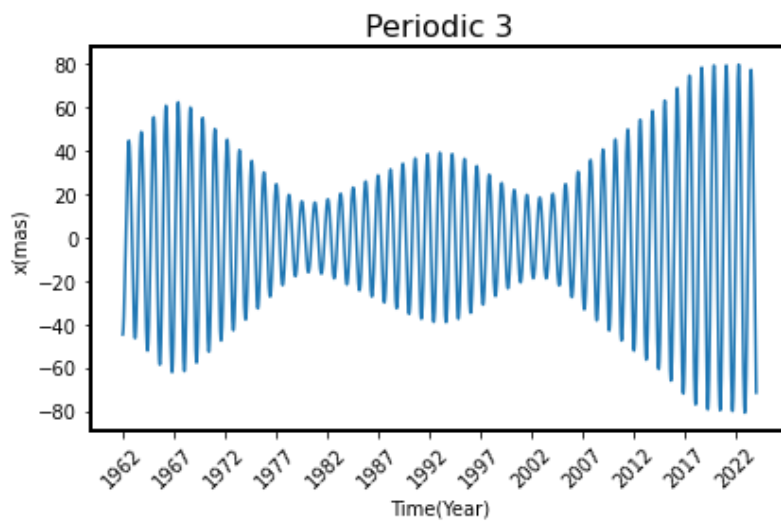
Εικόνα 4.41: Διάγραμμα τάσης της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



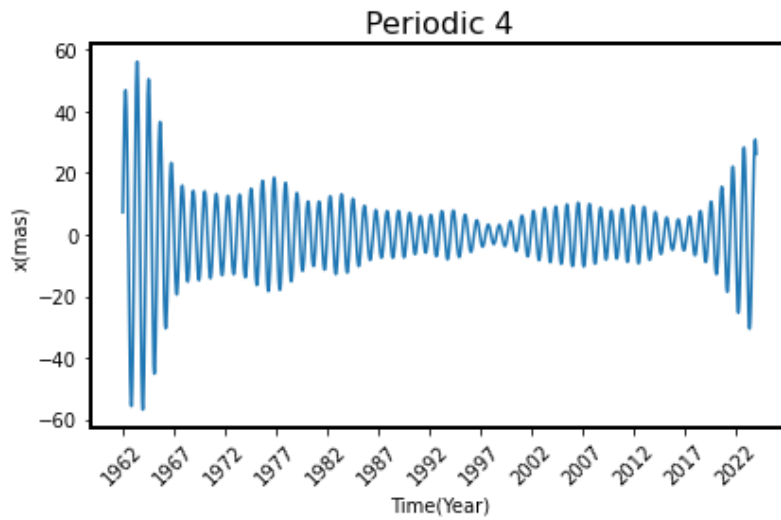
Εικόνα 4.42: Διάγραμμα 1^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



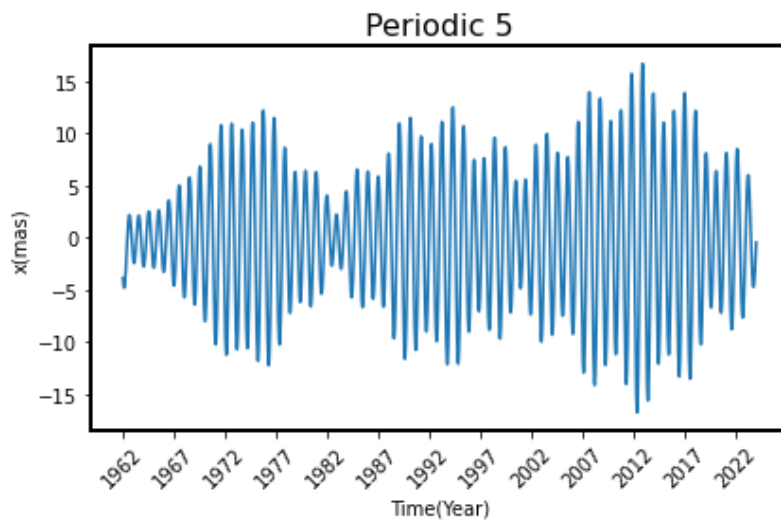
Εικόνα 4.43: Διάγραμμα 2^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



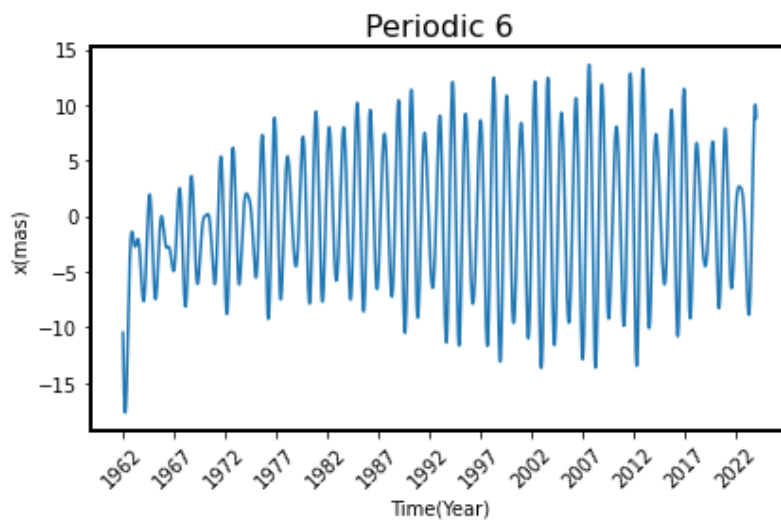
Εικόνα 4.44: Διάγραμμα 3^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



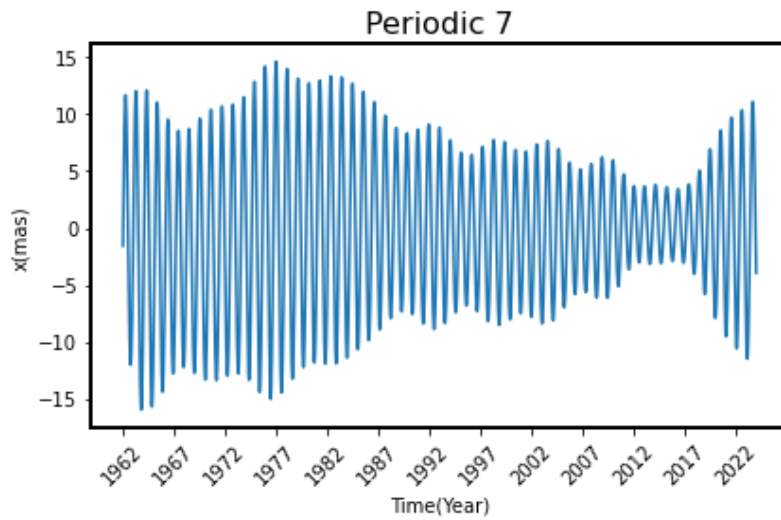
Εικόνα 4.45: Διάγραμμα 4^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



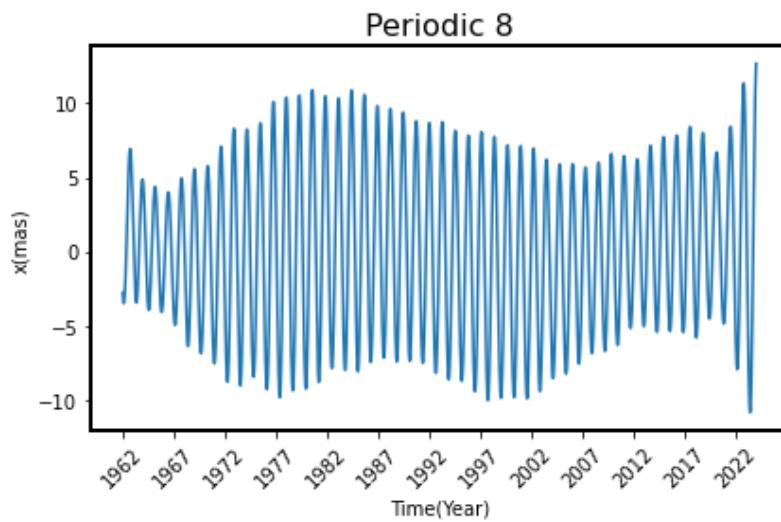
Εικόνα 4.46: Διάγραμμα 5^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



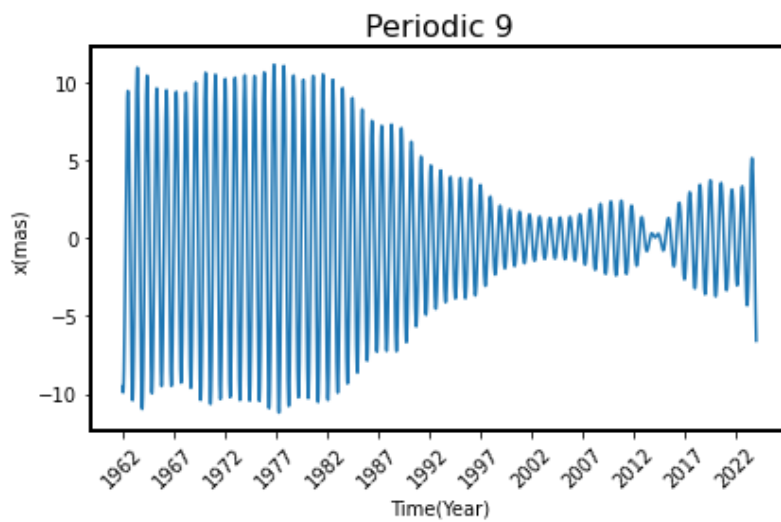
Εικόνα 4.47: Διάγραμμα 6^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



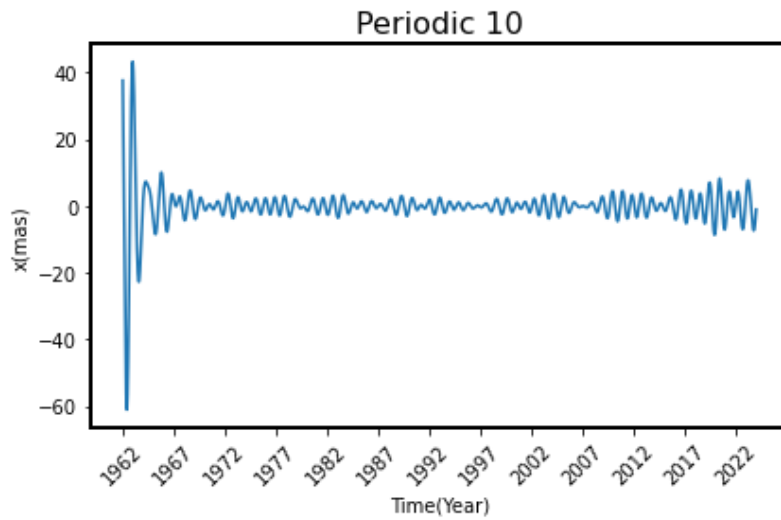
Εικόνα 4.48: Διάγραμμα 7ης περιодικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



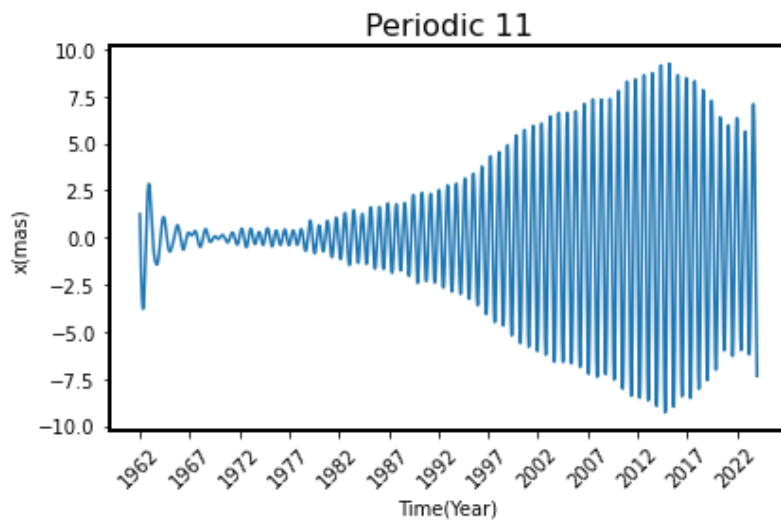
Εικόνα 4.49: Διάγραμμα 8ης περιодικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



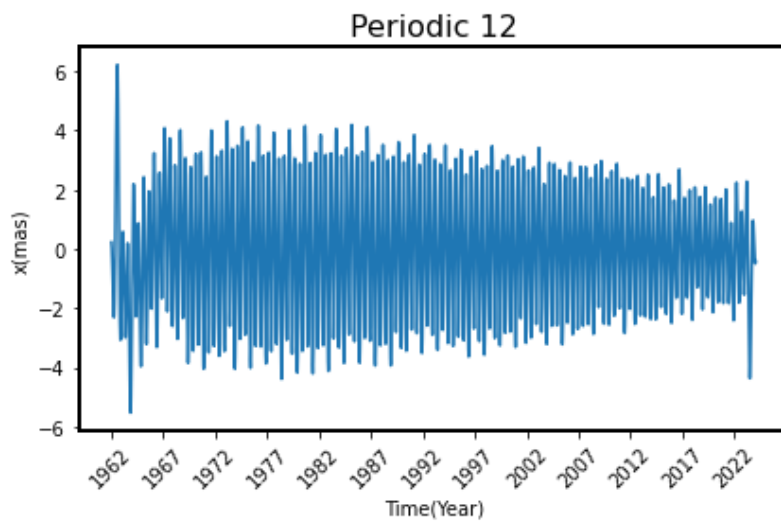
Εικόνα 4.50: Διάγραμμα 9ης περιодικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



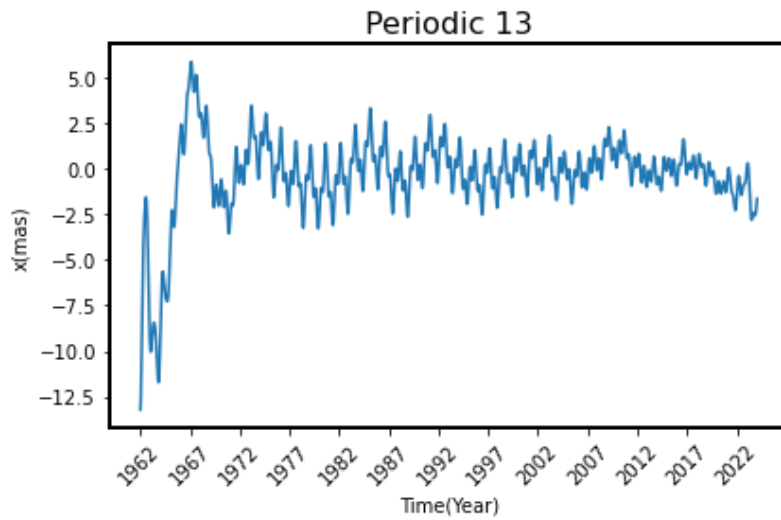
Εικόνα 4.51: Διάγραμμα 10^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



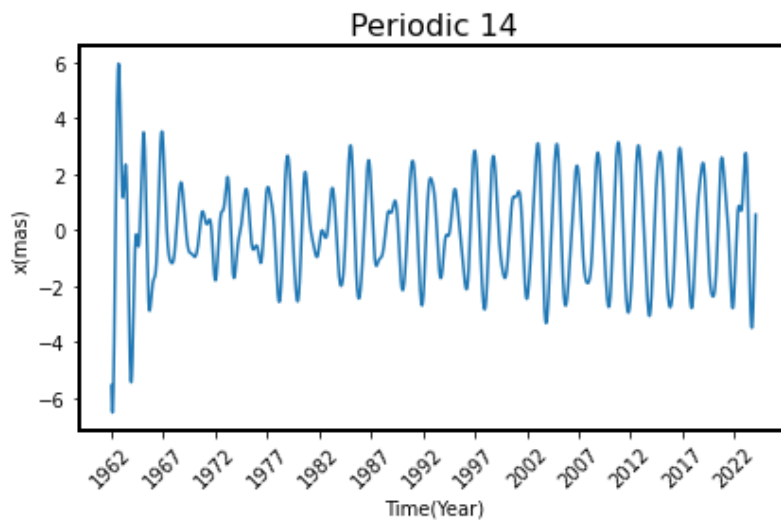
Εικόνα 4.52: Διάγραμμα 11^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



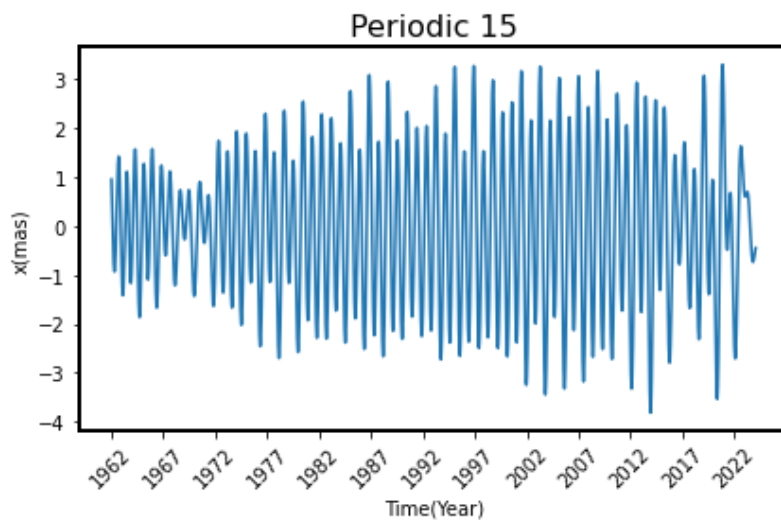
Εικόνα 4.53: Διάγραμμα 12^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



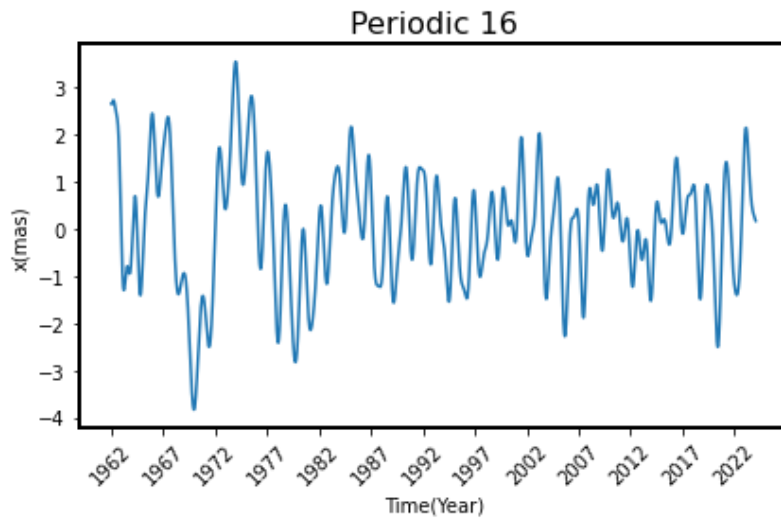
Εικόνα 4.54: Διάγραμμα 13^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



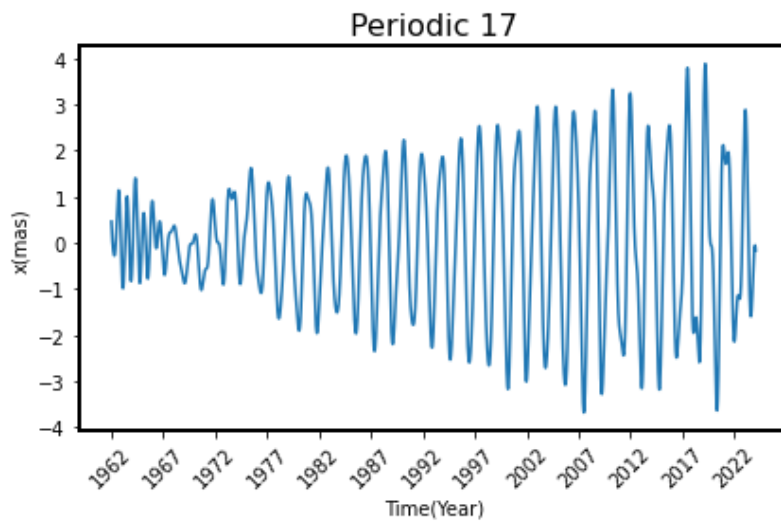
Εικόνα 4.55: Διάγραμμα 14^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



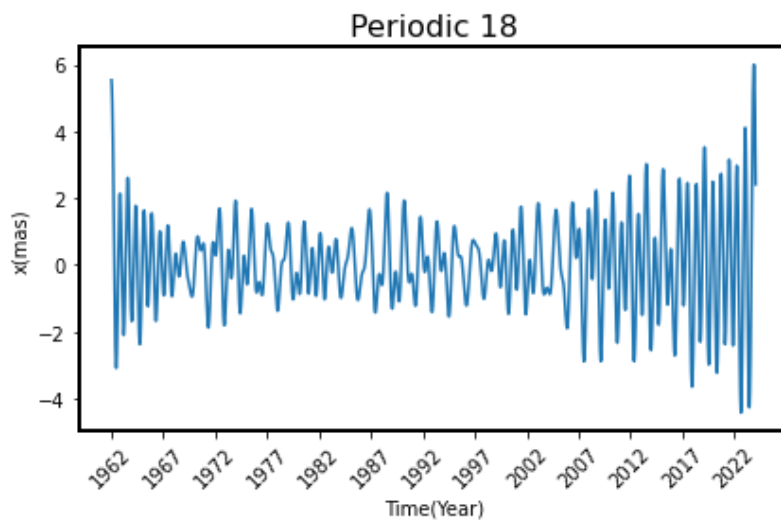
Εικόνα 4.56: Διάγραμμα 15^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



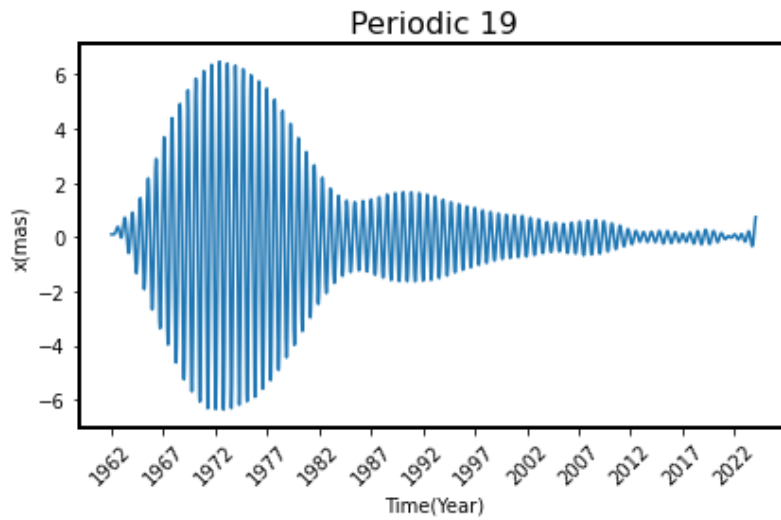
Εικόνα 4.57: Διάγραμμα 16^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



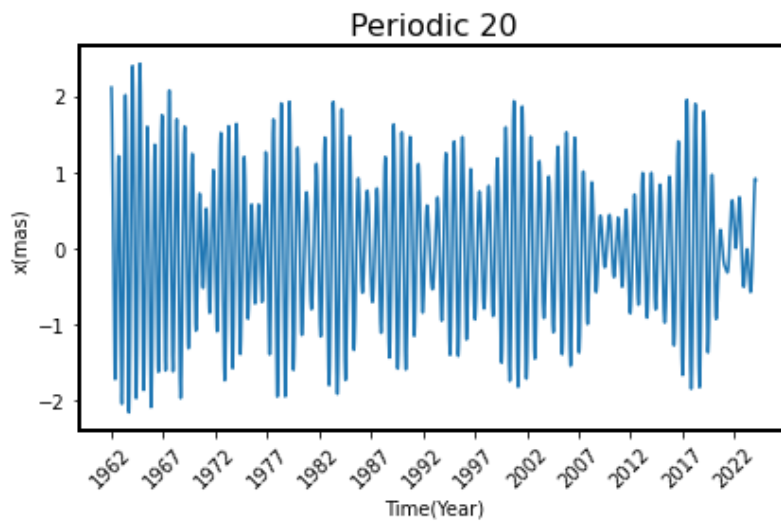
Εικόνα 4.58: Διάγραμμα 17^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



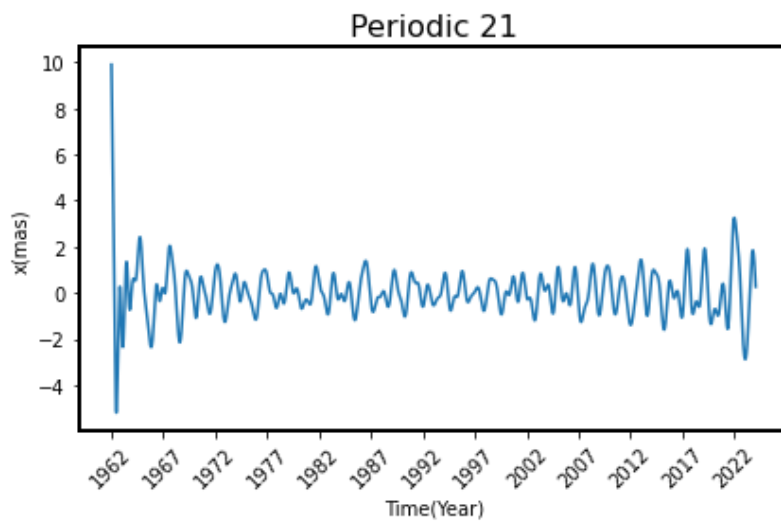
Εικόνα 4.59: Διάγραμμα 18^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



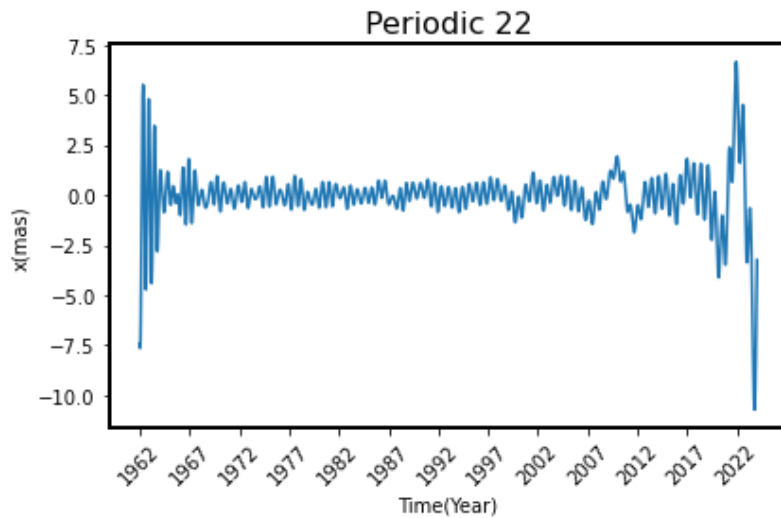
Εικόνα 4.60: Διάγραμμα 19^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



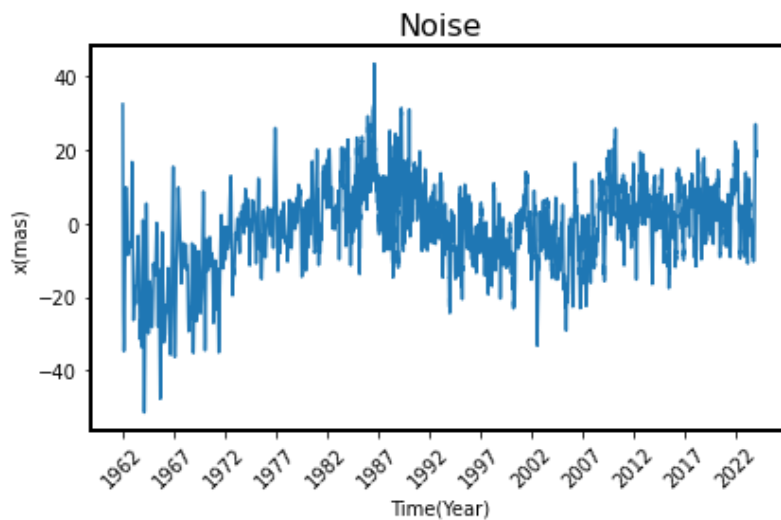
Εικόνα 4.61: Διάγραμμα 20^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



Εικόνα 4.62: Διάγραμμα 21^{ης} περιodicότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



Εικόνα 4.63: Διάγραμμα 22^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA



Εικόνα 4.64: Διάγραμμα θορύβου της χρονοσειράς που προέκυψε από την SSA

4.3. Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Με το πέρας της SSA προέκυψαν 22 περιодικότητες και η τάση και πραγματοποιήθηκε σε αυτά ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή συναρτήσεων ώστε να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές του **πλάτους**, της **περιόδου** και της **φάσης** για τις περιодικότητες και οι **παράμετροι** της εξίσωσης **ευθείας** για την τάση.

4.3.1. Τάση

Η τάση αποτελείται από 22645 ισοβαρή δεδομένα, ασυσχέτιστα μεταξύ τους και έχει την παρακάτω εξίσωση παρατήρησης:

$$\hat{s}x_i + \hat{c} = y_{1i} + u_{1i} \quad (4.1)$$

σε μορφή πινάκων γίνεται:

$$\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{v}_1 \quad (4.2)$$

όπου

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{22645} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

ο πίνακας σχεδιασμού και

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

το διάνυσμα των αγνώστων ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων ενώ

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{122645} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

το διάνυσμα των υπολοίπων. Η ζητούμενη λύση λοιπόν θα δοθεί από τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}_1 \quad (4.6)$$

Το a - posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους θα δοθεί από τον τύπο:

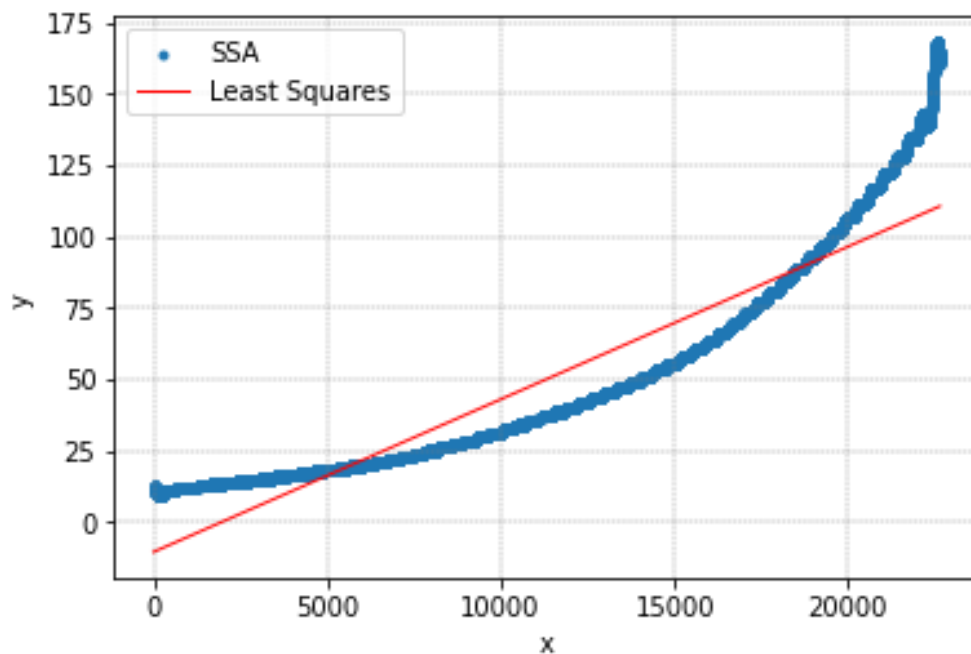
$$\hat{\sigma}_{01} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1}{r_1}} \quad (4.7)$$

και ο a - posteriori πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του $\hat{\mathbf{x}}_1$:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \hat{\sigma}_{01}^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \quad (4.8)$$

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα συνόρθωσης τάσης

	\hat{s}	$\hat{\sigma}_s$	\hat{c}	$\hat{\sigma}_c$	$\hat{\sigma}_0$
Trend	0.005	0.000	-10.619	0.180	13.543



Εικόνα 4.65: Συνόρθωση τάσης μέσω ελαχίστων τετραγώνων

Το a -posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_0$) προέκυψε αρκετά μεγάλο μιας και η τάσης της χρονοσειράς έχει καμπυλοειδή μορφή αντί ευθείας. Άρα, η ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή της τάσης δεν πέτυχε για τα δεδομένα της συγκεκριμένης χρονοσειράς.

4.3.2. Περιοδικότητες

Για τις περιοδικότητες υπάρχουν επίσης 22645 ισοβαρή και ασυσχέτιστα δεδομένα και η εξίσωση παρατήρησης είναι της μορφής:

$$\hat{A} \cos\left(\frac{2\pi}{\hat{T}} t_i + \hat{\varphi}_0\right) + \hat{c} = y_{2i} + v_{2i} \quad (4.9)$$

Λόγω της μη γραμμικής μορφής της, θα γίνει γραμμικοποίηση κατά Taylor με προσωρινές τιμές t^0 για τις παραμέτρους ώστε:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^0 + \delta\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{T} \\ \hat{\varphi}_0 \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις σε μορφή πινάκων είναι:

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{t} = \delta\mathbf{y}_2 + \mathbf{v}_2 \quad (4.11)$$

όπου

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{T}} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{\phi}_0} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{c}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{T}} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{\phi}_0} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{c}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{T}} & \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{\phi}_0} & \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{c}} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\delta \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2^0 \quad (4.13)$$

άρα

$$\delta \mathbf{t} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \delta \mathbf{y}_2 \quad (4.14)$$

Το a - posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους:

$$\hat{\sigma}_{0_2} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2}{r_2}} \quad (4.15)$$

και ο a - posteriori πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του $\hat{\mathbf{t}}$:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{t}}} = \hat{\mathbf{V}}_{\delta \mathbf{t}} = \hat{\sigma}_{0_2}^2 (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \quad (4.16)$$

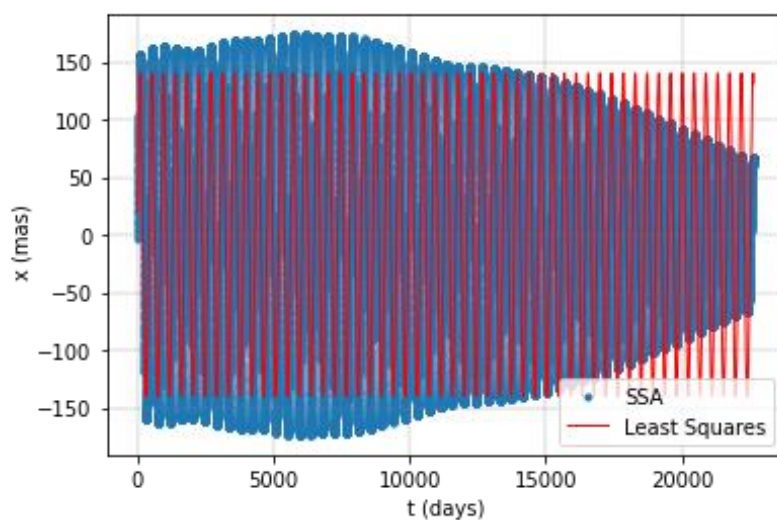
Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με τις τιμές της συνόρθωσης των περιοδικοτήτων με όριο σύγκλισης την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο διαδοχικών a-posteriori τυπικών σφαλμάτων της μονάδας βάρους να είναι ≤ 0.0001 ή ο αριθμός των επαναλήψεων να είναι ≤ 20 .

Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα συνόρθωσης για τις περιοδικότητες

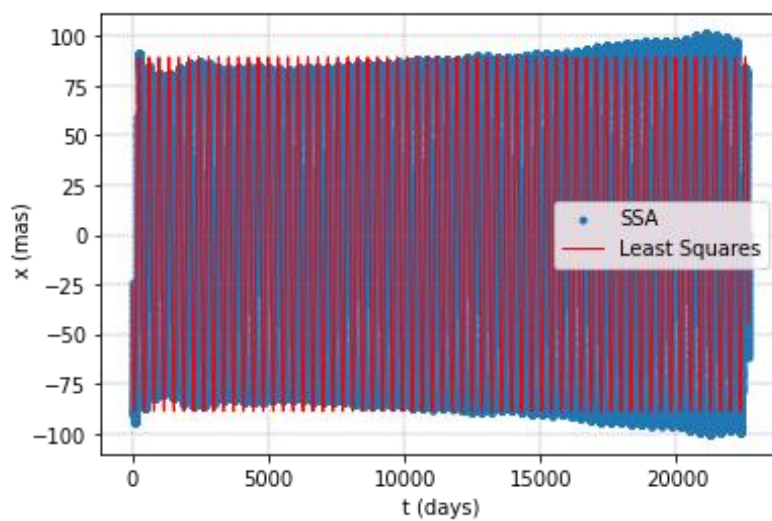
Περιοδικότητα	\hat{A} (mas)	$\hat{\sigma}_{\hat{A}}$ (mas)	\hat{T} (days)	$\hat{\sigma}_{\hat{T}}$ (days)	$\hat{\phi}_0$ (rad)	$\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_0}$ (rad)	\hat{c} (mas)	$\hat{\sigma}_{\hat{c}}$ (mas)	$\hat{\sigma}_{0_2}$ (mas)
1	140.265	0.211	433.101	0.007	1.715	0.003	-0.036	0.149	22.482
2	89.181	0.042	365.017	0.002	1.866	0.001	0.224	0.029	4.429
3	40.010	0.150	445.832	0.018	3.573	0.007	-0.077	0.106	15.945
4	10.938	0.088	401.875	0.032	-8.734	0.016	0.081	0.062	9.404
5	8.357	0.029	376.495	0.012	1.162	0.007	-0.047	0.021	3.103
6	7.501	0.033	489.021	0.026	-0.532	0.009	-0.494	0.023	3.517
7	8.842	0.026	387.757	0.011	-0.944	0.006	-0.212	0.019	2.817
8	7.476	0.018	465.940	0.012	-0.170	0.005	0.195	0.012	1.868
9	3.790	0.031	351.513	0.023	3.241	0.015	-0.015	0.022	3.307
10	1.556	0.055	84.190	29.119	- 139.349	11.535	-0.165	0.039	5.880

11	3.305	0.021	313.179	0.015	5.714	0.013	-0.021	0.015	2.197
12	1.742	0.012	182.715	0.007	-1.703	0.018	-0.036	0.008	1.274
13	0.932	0.02	546.270	0.153	0.282	0.042	-0.343	0.014	2.095
14	2.129	0.008	728.297	0.051	0.088	0.008	-0.007	0.006	0.896
15	1.789	0.009	334.374	0.013	-3.987	0.010	-0.001	0.006	0.934
16	0.960	0.010	595.742	0.087	1.307	0.020	0.037	0.007	1.029
17	1.901	0.007	667.827	0.041	4.097	0.008	-0.001	0.005	0.770
18	1.047	0.010	293.752	0.020	3.343	0.019	0.025	0.007	1.073
19	1.407	0.013	281.276	0.017	0.904	0.018	0.001	0.009	1.353
20	0.871	0.007	303.521	0.017	118.606	0.015	0.001	0.005	0.704
21	0.330	0.009	533.808	0.871	-	0.251	0.003	0.006	0.940
22	0.678	0.012	257.343	0.028	6.023	0.035	-0.053	0.008	1.249

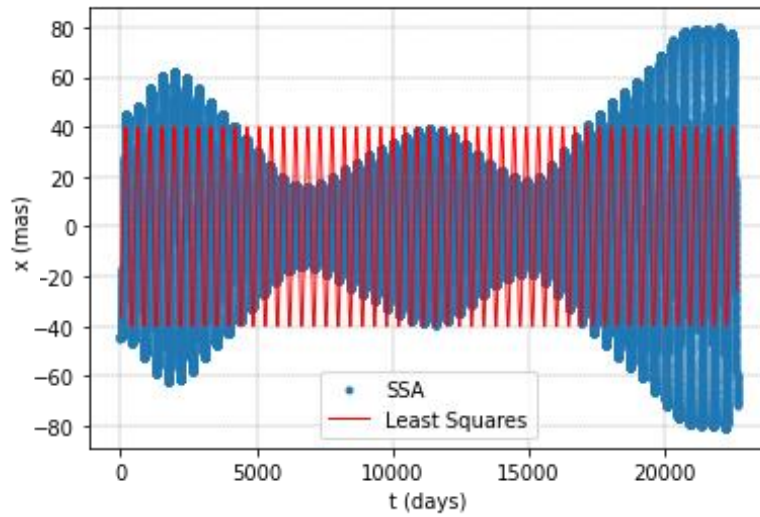
Παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα των περιοδικοτήτων:



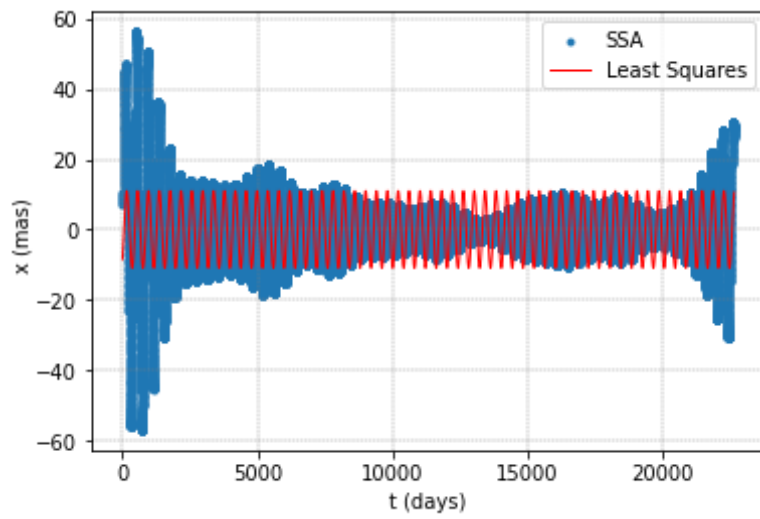
Εικόνα 4.66: Συνόρθωση 1ης περιοδικότητας



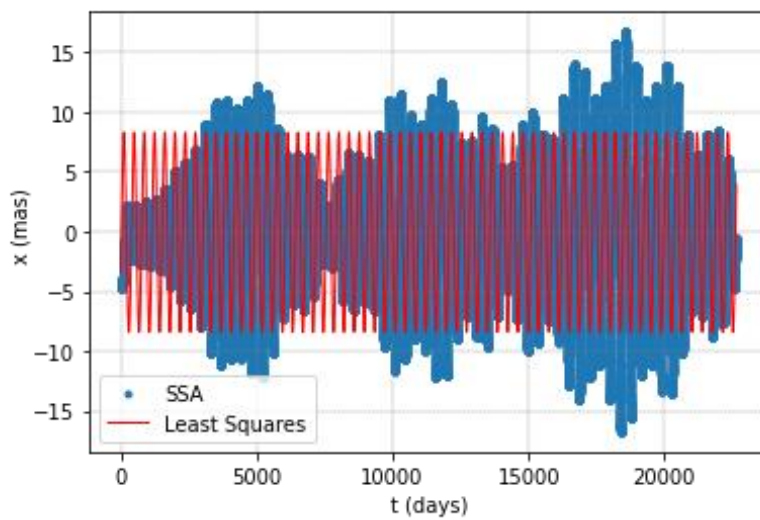
Εικόνα 4.67: Συνόρθωση 2ης περιοδικότητας



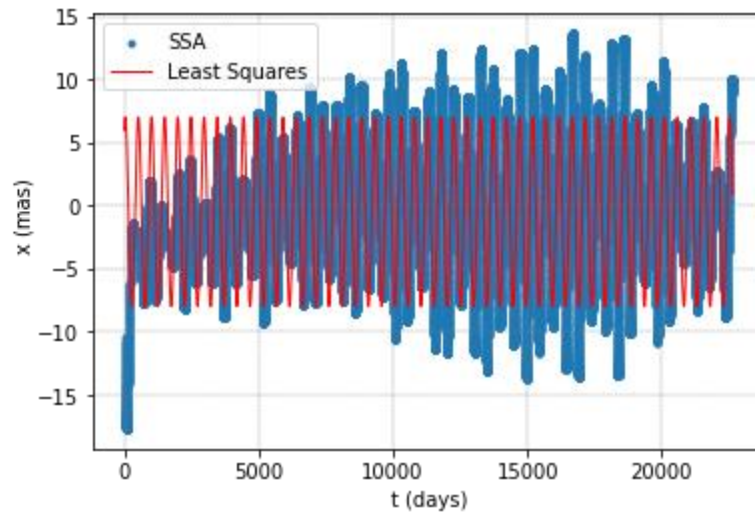
Εικόνα 4.68: Συνόρθωση 3ης περιόδου



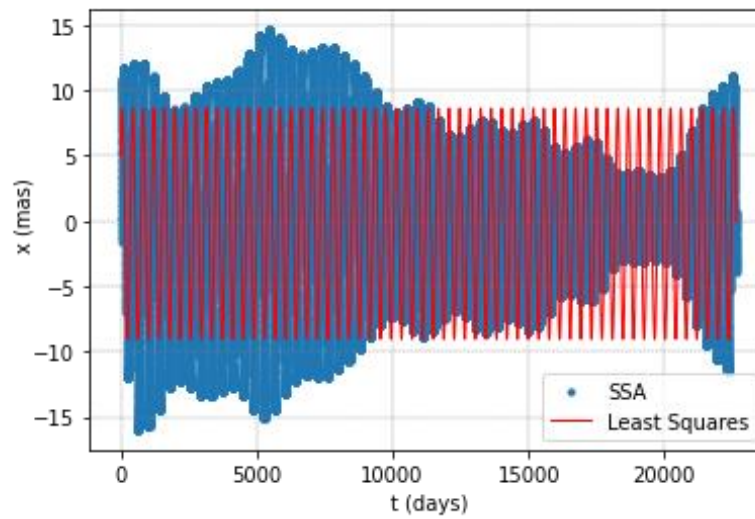
Εικόνα 4.69: Συνόρθωση 4ης περιόδου



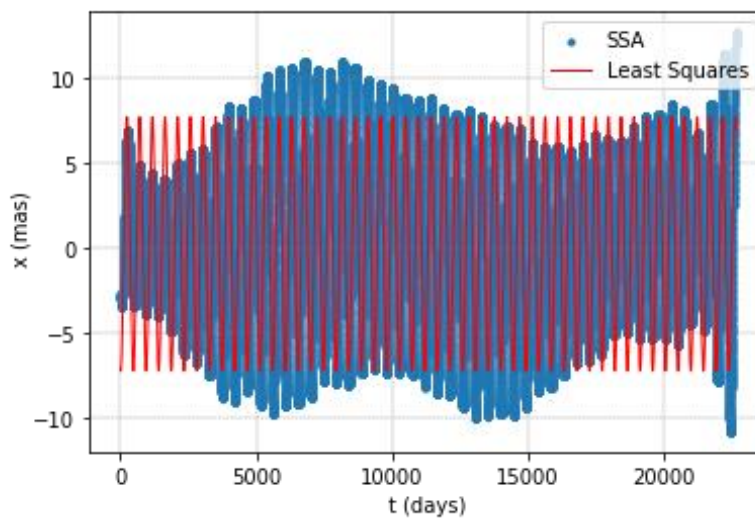
Εικόνα 4.70: Συνόρθωση 5ης περιόδου



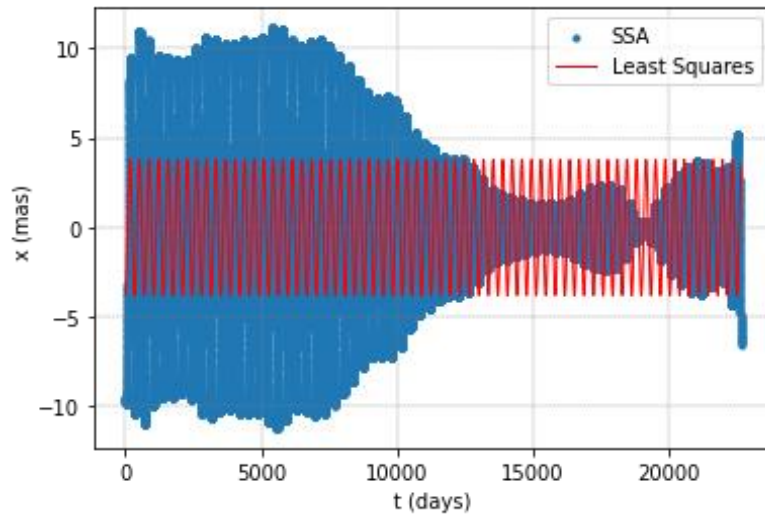
Εικόνα 4.71: Συνόρθωση 6ης περιοδικότητας



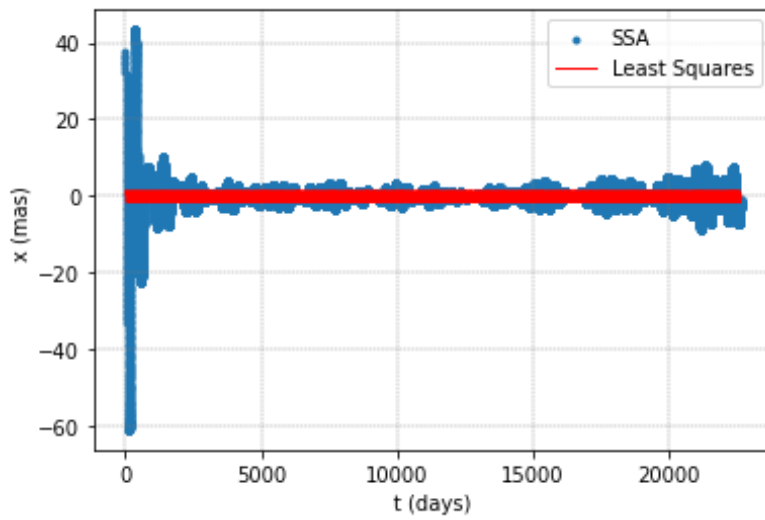
Εικόνα 4.72: Συνόρθωση 7ης περιοδικότητας



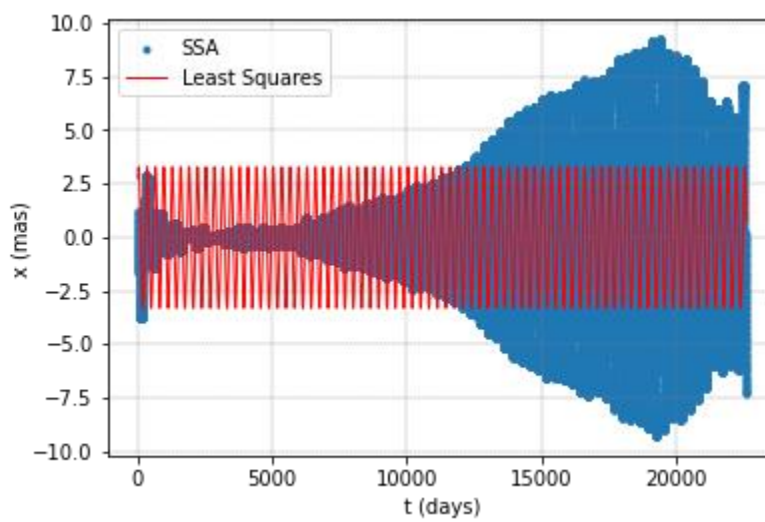
Εικόνα 4.73: Συνόρθωση 8ης περιοδικότητας



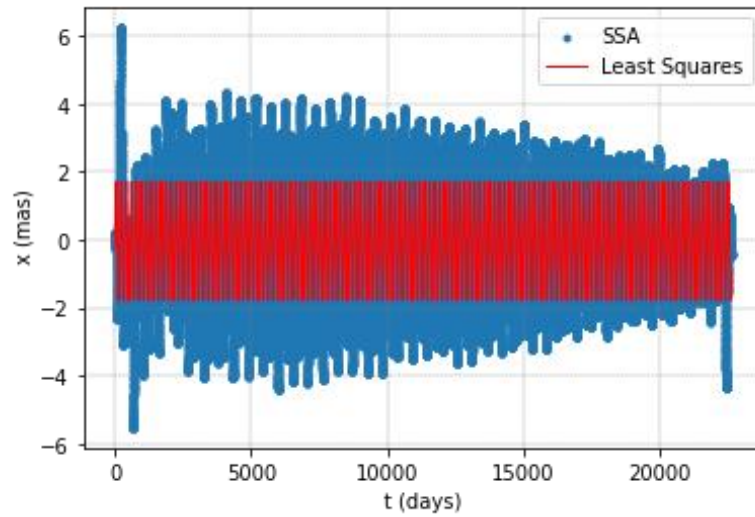
Εικόνα 4.74: Συνόρθωση 9ης περιδικότητας



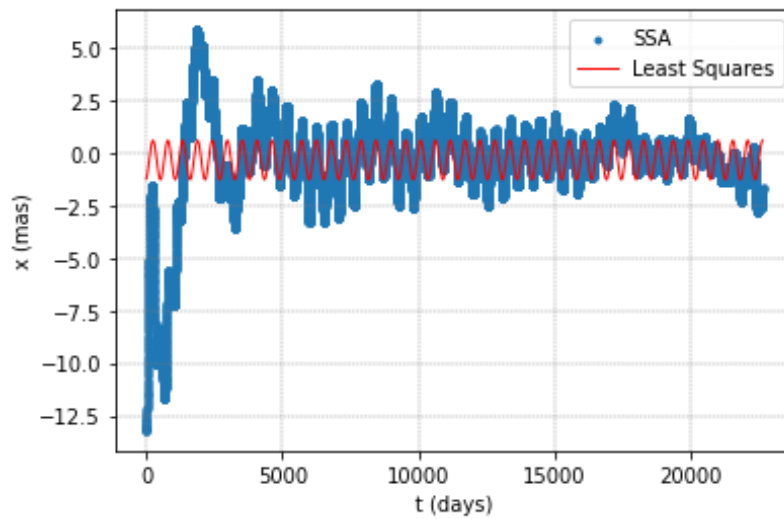
Εικόνα 4.75: Συνόρθωση 10ης περιδικότητας



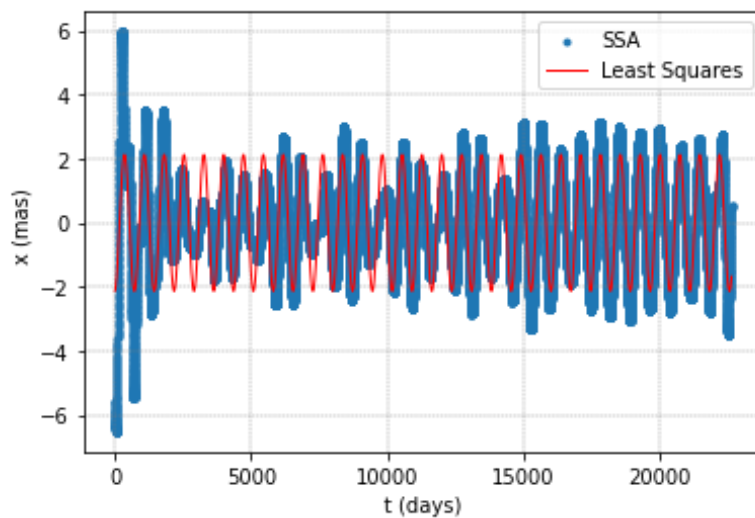
Εικόνα 4.76: Συνόρθωση 11ης περιδικότητας



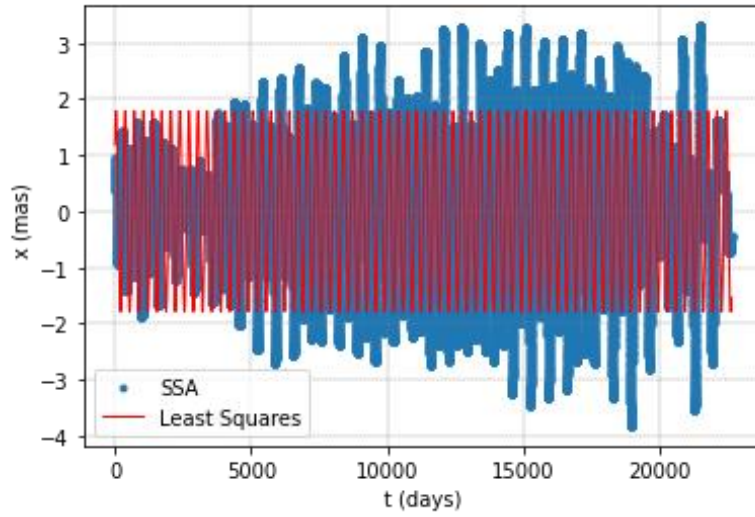
Εικόνα 4.77: Συνόρθωση 12^{ης} περιодικότητας



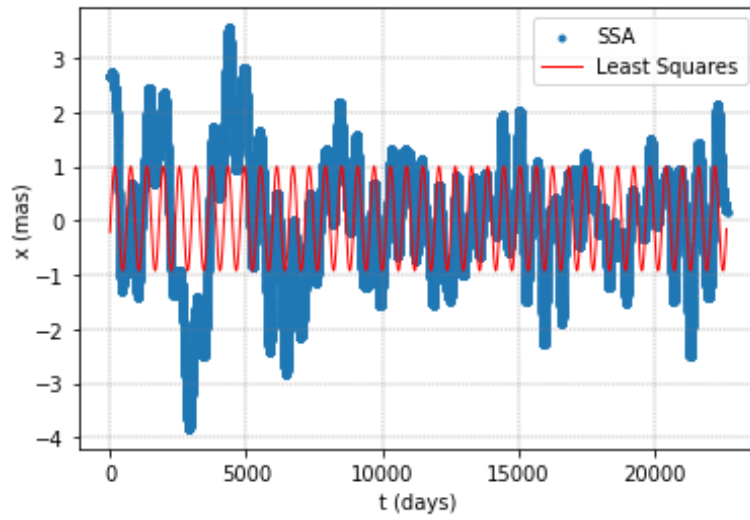
Εικόνα 4.78: Συνόρθωση 13^{ης} περιодικότητας



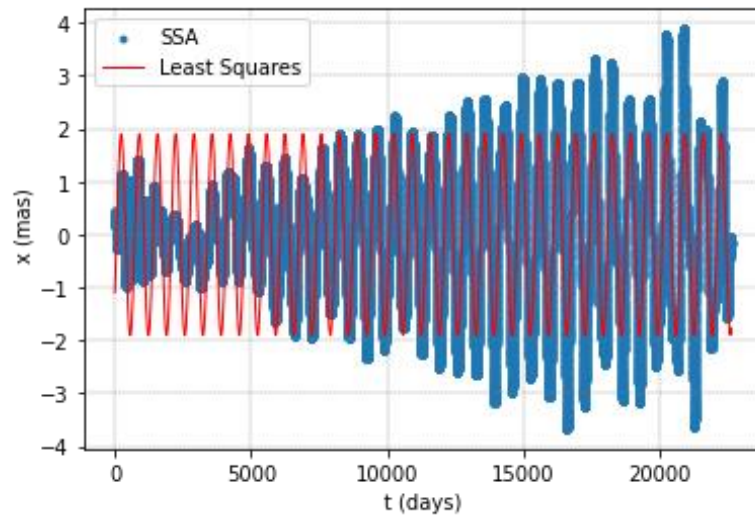
Εικόνα 4.79: Συνόρθωση 14^{ης} περιодικότητας



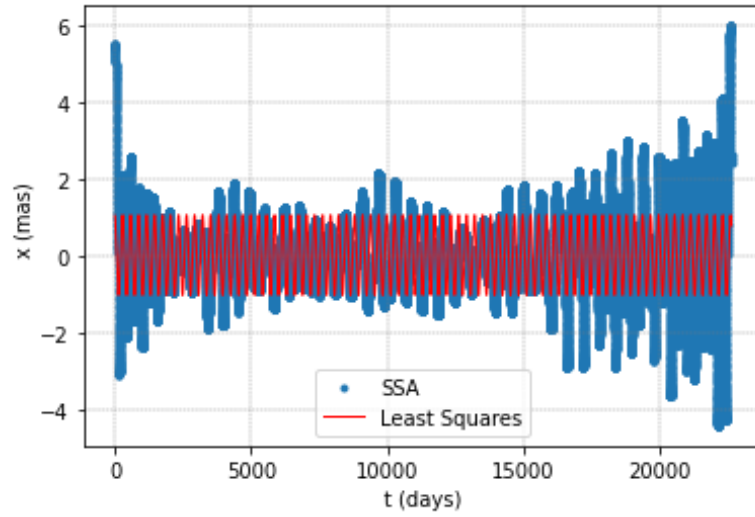
Εικόνα 4.80: Συνόρθωση 15^{ης} περιодικότητας



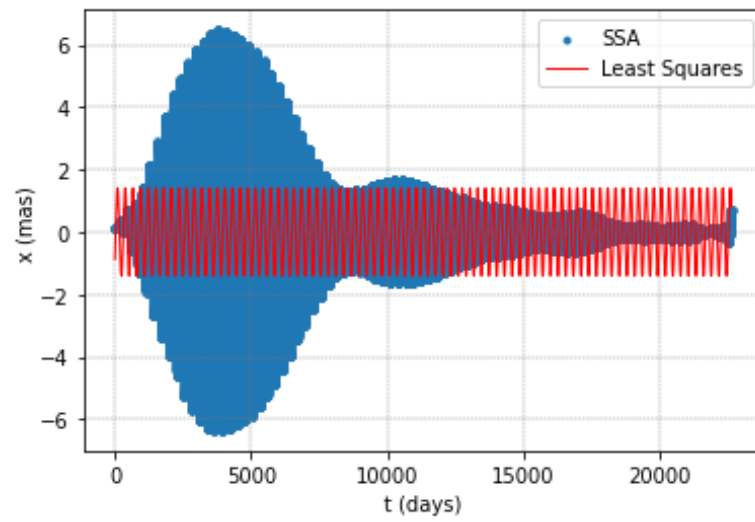
Εικόνα 4.81: Συνόρθωση 16^{ης} περιодικότητας



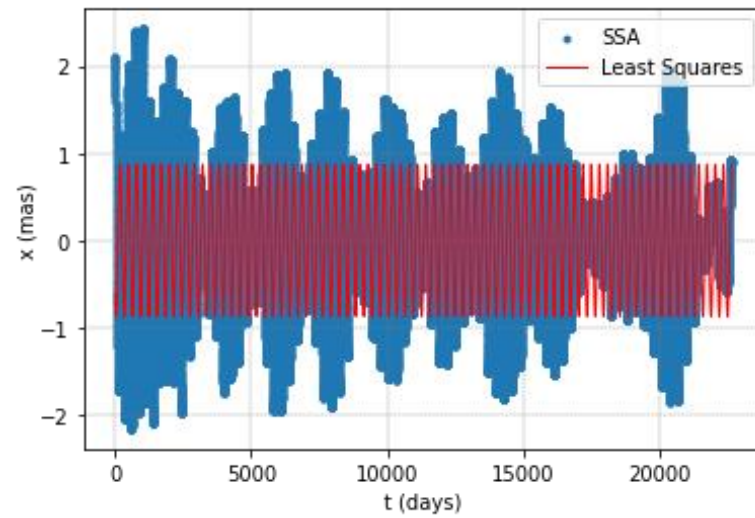
Εικόνα 4.82: Συνόρθωση 17^{ης} περιодικότητας



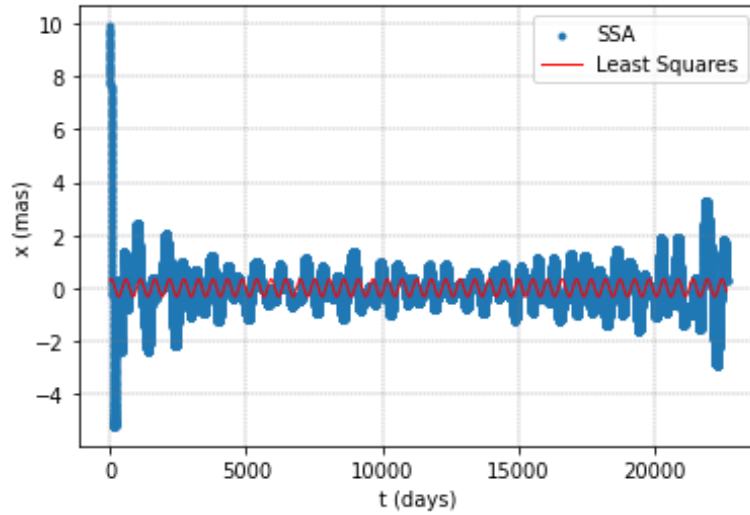
Εικόνα 4.83: Συνόρθωση 18^{ης} περιодικότητας



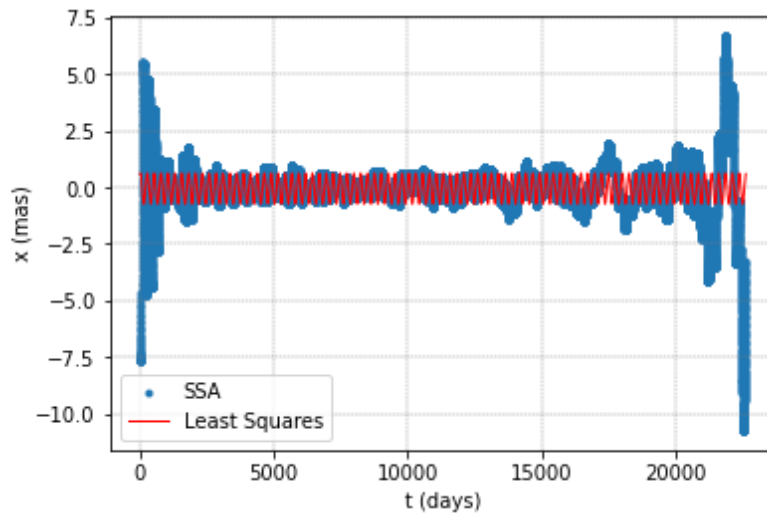
Εικόνα 4.84: Συνόρθωση 19^{ης} περιодικότητας



Εικόνα 4.85: Συνόρθωση 20^{ης} περιодικότητας



Εικόνα 4.86: Συνόρθωση 21ης περιодικότητας



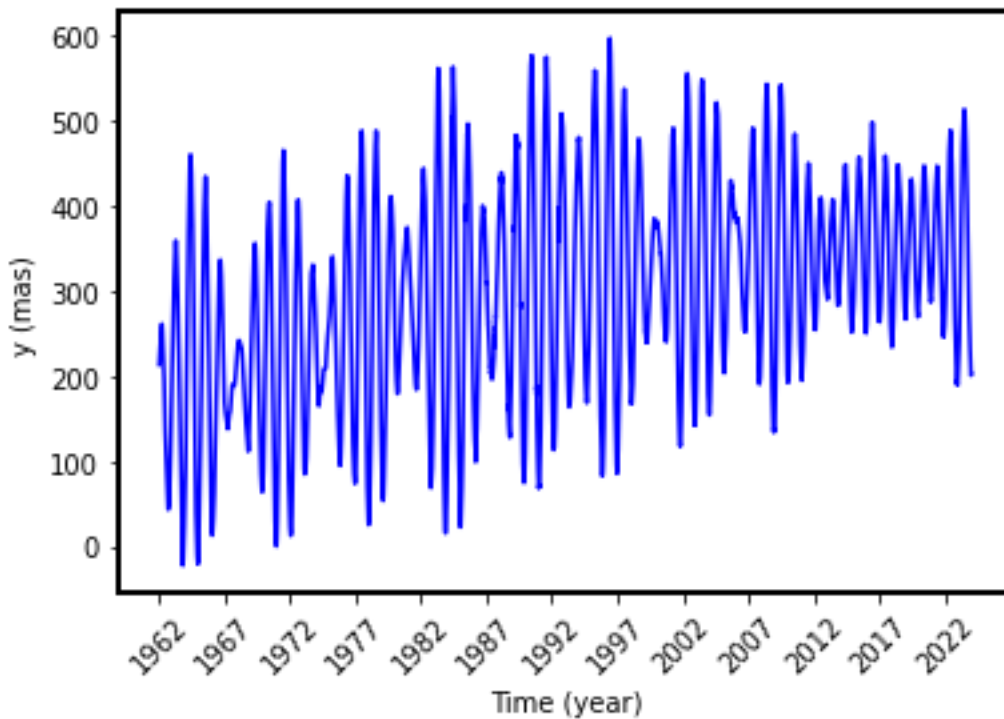
Εικόνα 4.87: Συνόρθωση 22ης περιодικότητας

Λόγω των ακανόνιστων καμπυλών των περισσότερων διαγραμμάτων, η συνόρθωση αδυνατούσε να καλύψει πλήρως τις υπάρχουσες καμπύλες μιας και δεν αποτελούνταν όλες από απλή καμπύλη κύματος αλλά μια αρκετά πιο σύνθετη.

5. Συντεταγμένη y του Πόλου

5.1. Εισαγωγή των δεδομένων

Όπως με τη συντεταγμένη x , έτσι και με την y , τοποθετήθηκαν σε διάγραμμα y (mas) – t (days):



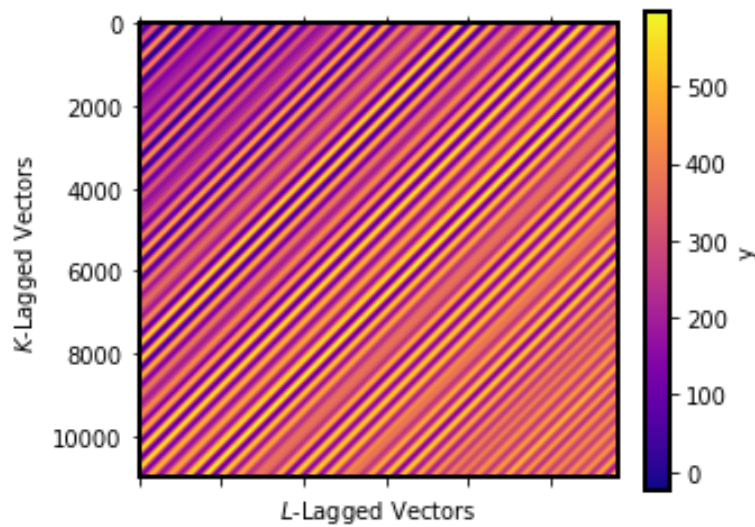
Εικόνα 5.1: Διάγραμμα της χρονοσειράς της y για όλα τα χρόνια της μελέτης (62 χρόνια)

Φαίνεται ότι δημιουργείται κάποιο μοτίβο στη κίνηση του Πόλου κατά τον άξονα y , το οποίο θα αναλυθεί εκτενώς και θα εξαχθούν όλα τα συστατικά του με τη βοήθεια της μεθόδου της SSA, όπως ακριβώς έγινε και με τα δεδομένα της συντεταγμένης x .

5.2. Εφαρμογή της SSA

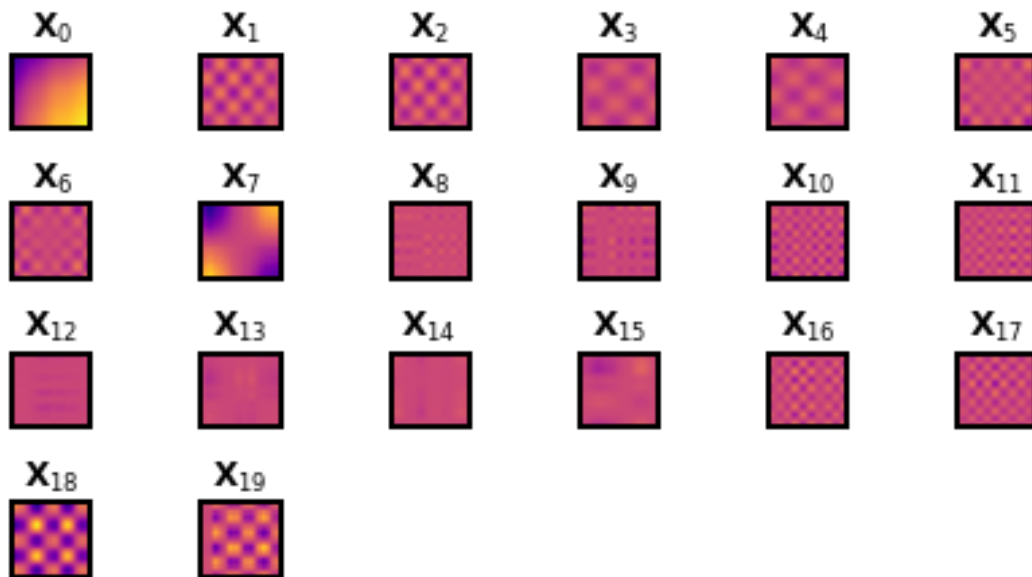
Το πλήθος των δεδομένων που μελετήθηκαν ήταν το ίδιο με αυτό των x δηλαδή $N = 22645$ τιμές και το μήκος του παραθύρου επιλέχθηκε ξανά κοντά στο μισό, $L = 11000$ οπότε και $K = N - L + 1 = 11646$.

Το πρώτο βήμα της SSA είναι η δημιουργία του πίνακα τροχιάς X μεγέθους 11000×11646 :



Εικόνα 5.2: Πίνακας τροχιάς της χρονοσειράς y

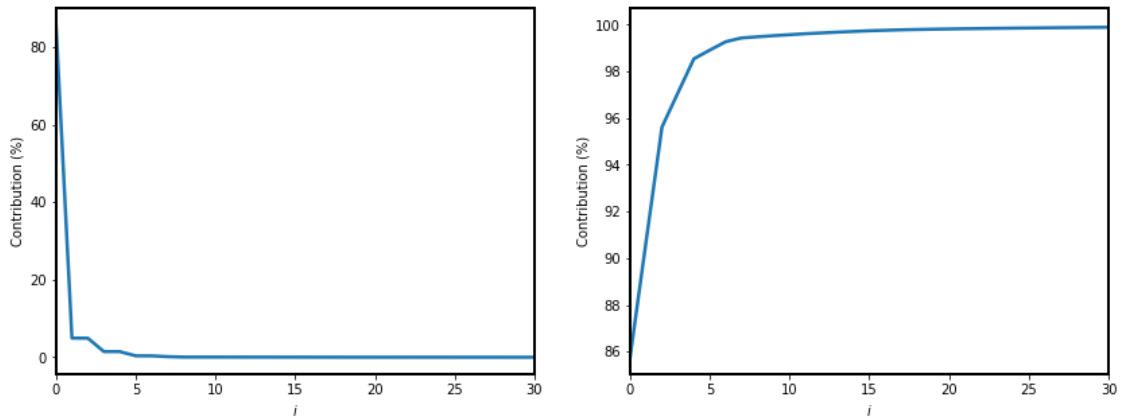
Το σχήμα του πίνακα τροχιάς φαίνεται σωστό όντας αντιδιαγώνιος οπότε και η SSA προχωράει στο επόμενο βήμα, την αποσύνθεση του πίνακα τροχιάς με την εφαρμογή της SVD. Έτσι, παρουσιάζονται οι πρώτοι 20 πίνακες που δημιουργήθηκαν από αυτή:



Εικόνα 5.3: Οι πρώτοι 20 πίνακες που δημιουργήθηκαν μετά την SVD

Παρατηρώντας τους πίνακες-συνιστώσες, φαίνεται ότι υπάρχουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά σε πολλές, όπως είναι οι συνιστώσες 0 και 7 οι οποίες φαίνεται να αλλάζουν με αργό ρυθμό. Το γεγονός αυτό μπορεί και να σημαίνει ότι παρουσιάζουν την τάση της χρονοσειράς. Ακόμα, οι συνιστώσες 1 και 2, 3 και 4, 5 και 6 καθώς και άλλα ζευγάρια φαίνεται να έχουν κοινή περιοδικότητα.

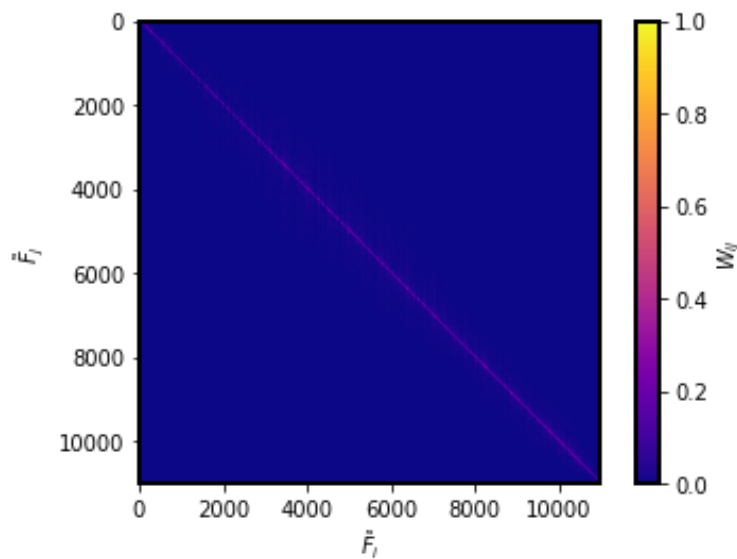
Σειρά έχουν τα διαγράμματα σχετικής και αθροιστικής συνεισφοράς όπου δίνουν μια καλή εικόνα σχετικά με το ποιες συνιστώσες συνεισφέρουν αρκετά στη δόμηση της χρονοσειράς.



Εικόνα 5.4: Διαγράμματα σχετικής (αριστερά) και αθροιστικής (δεξιά) συνεισφοράς

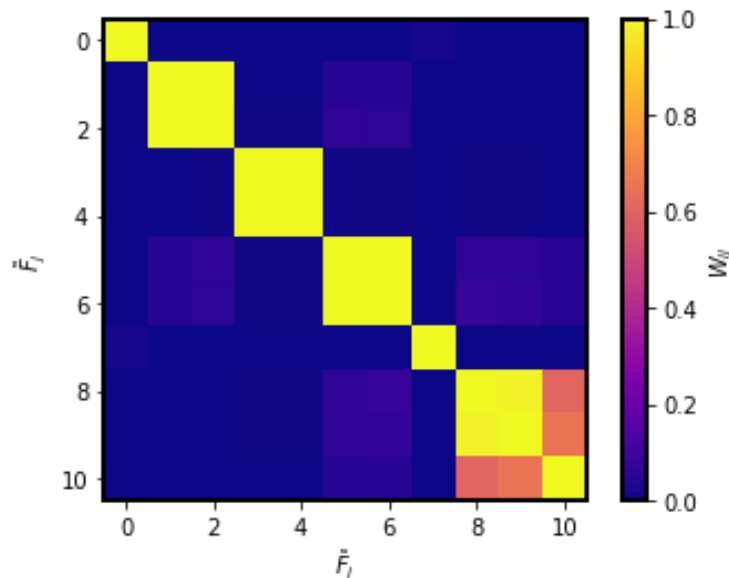
Από την Εικόνα 5.4, φαίνεται ότι τη μεγαλύτερη συνεισφορά την έχουν οι πρώτες συνιστώσες με αύξουσα σειρά μέχρι και την 5^η και ακόμα, από το διάγραμμα της αθροιστικής συνεισφοράς φαίνεται ότι μέχρι και την 7^η περίπου συνιστώσα έχει καλυφθεί σχεδόν το 100% της πληροφορίας της χρονοσειράς.

Ένα από τα πιο βασικά εργαλεία για τη σωστή ομαδοποίηση των συνιστωσών με αποτέλεσμα τη σωστή διάκριση των περιοδικοτήτων, είναι ο πίνακας συσχέτισης.



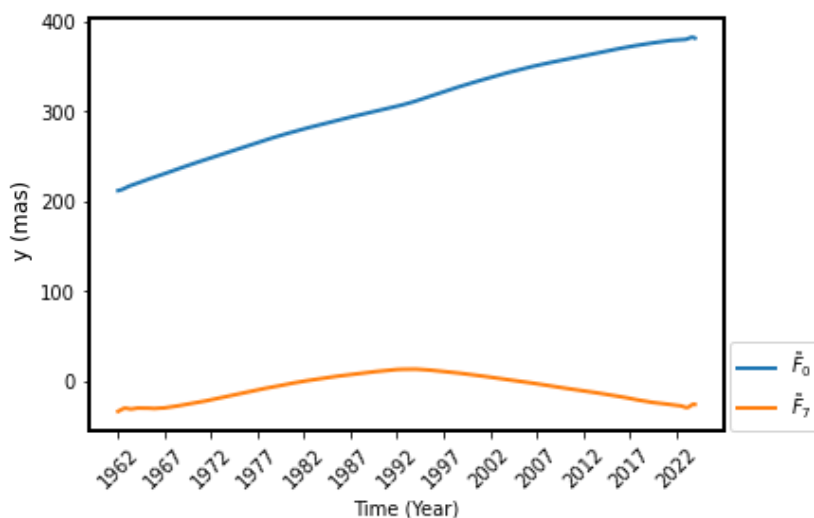
Εικόνα 5.5: Πίνακας συσχέτισης όλων των συνιστωσών

Λόγω του μεγάλου μεγέθους των δεδομένων θα γίνει ανάλυση σε μικρότερο πίνακα συσχέτισης μεταξύ 10 κάθε φορά συνιστωσών ξεκινώντας με τις πρώτες 10:

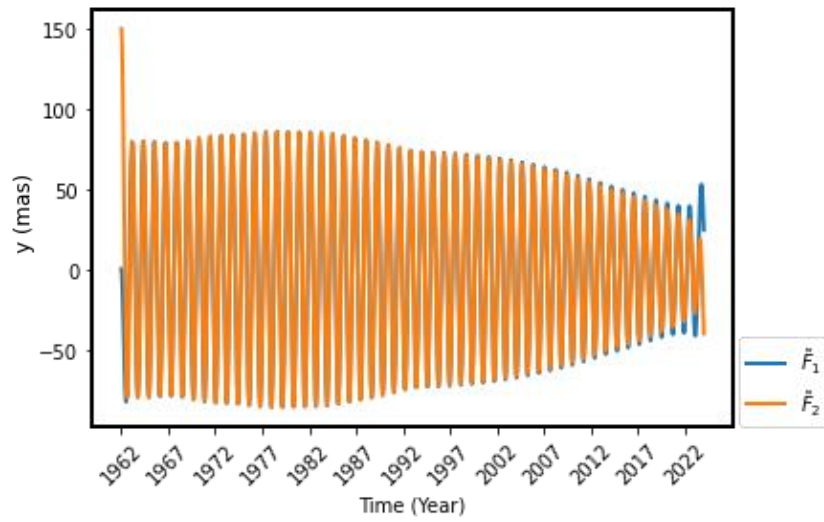


Εικόνα 5.6: Πίνακας συσχέτισης συνιστώσων 0-10

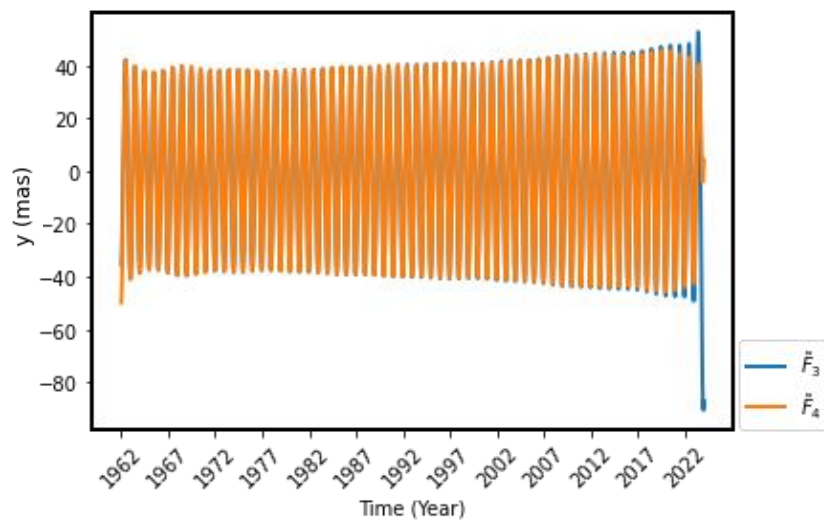
Από την Εικόνα 5.6, φαίνεται ότι η συνιστώσα 0 έχει υψηλή συσχέτιση μόνο με τον εαυτό της και λόγω αυτών που ειπώθηκαν προηγουμένως με βάση τις Εικόνες 5.3 και 5.4, αυτή θα είναι και η συνιστώσα που θα παρουσιάζει την τάση. Αν και από την Εικόνα 5.6, η συνιστώσα 7 φάνηκε να έχει χαμηλό βαθμό συσχέτισης με τη συνιστώσα 0, λόγω της μορφής του πίνακά της στην Εικόνα 5.3 και της αργής εναλλαγής που παρουσιάζει, θα ομαδοποιηθεί με τη συνιστώσα 0 στην τάση της χρονοσειράς. Επίσης, για τις συνιστώσες 1 – 6 θα ομαδοποιηθούν μαζί ανά δύο μιας και δείχνουν πολύ μεγάλη συσχέτιση μεταξύ τους, δημιουργώντας έτσι τις πρώτες περιοδικότητες της χρονοσειράς. Οι συνιστώσες 8 και 9 επίσης θα ομαδοποιηθούν μαζί λόγω αυξημένης συσχέτισης και τέλος η συνιστώσα 10 δεν φαίνεται να έχει υψηλή συσχέτιση με κάποια άλλη από τις υπόλοιπες συνιστώσες που παρουσιάζονται στην Εικόνα 5.6 γι' αυτό και θα ελεγχθεί στις επόμενες 10 συνιστώσες, δηλαδή στην ομάδα 10 – 20, αν υπάρχει μεγάλη συσχέτιση με κάποια από αυτές, αλλιώς θα καταταχθεί στις συνιστώσες του θορύβου.



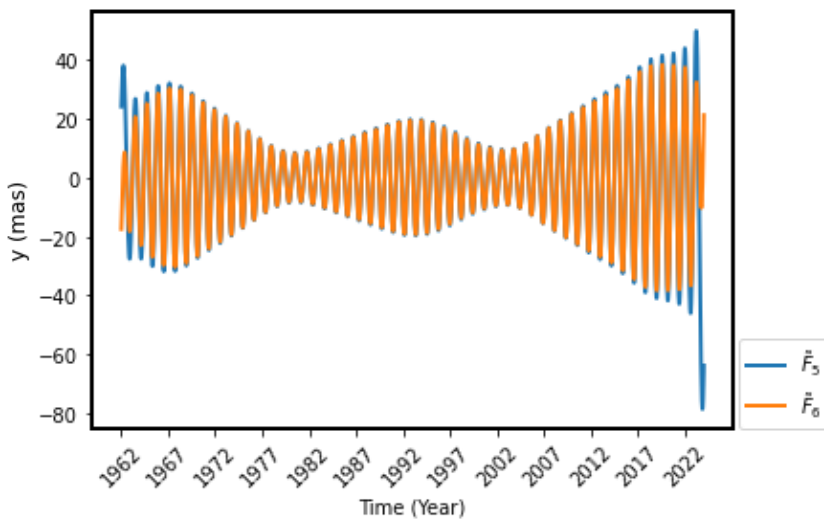
Εικόνα 5.7: Διάγραμμα συνιστώσων 0 και 7



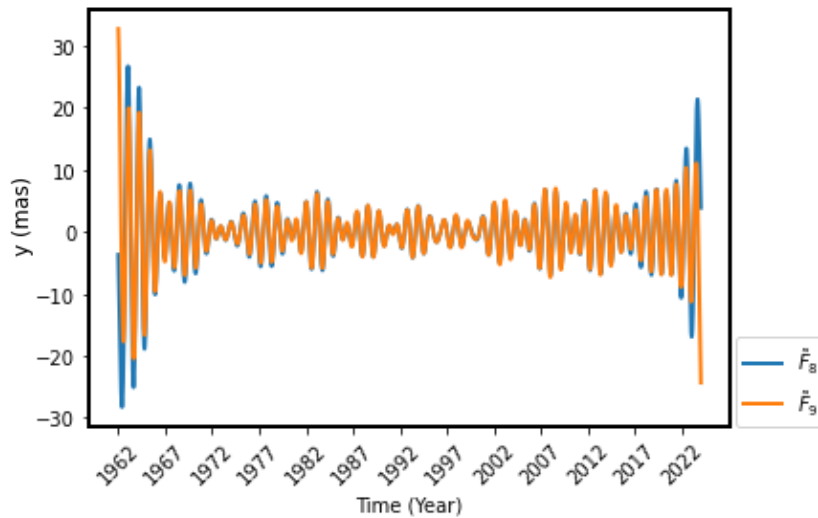
Εικόνα 5.8: Διάγραμμα συνιστωσών 1 και 2



Εικόνα 5.9: Διάγραμμα συνιστωσών 3 και 4

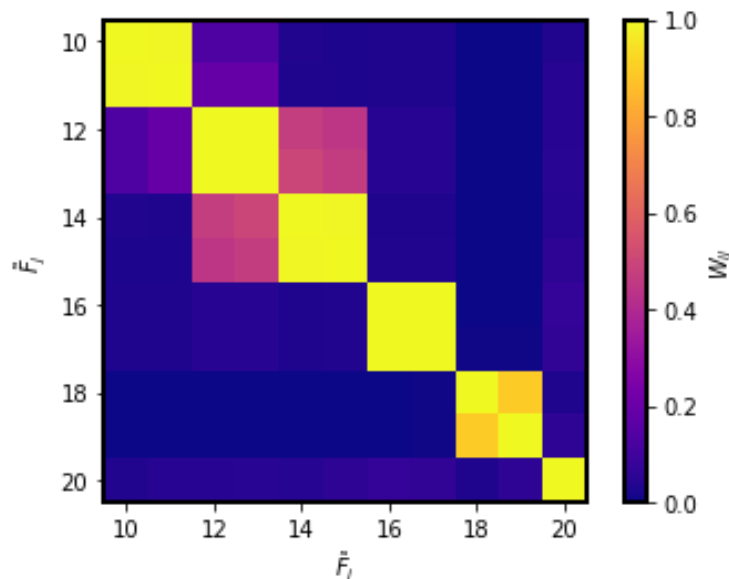


Εικόνα 5.10: Διάγραμμα συνιστωσών 5 και 6



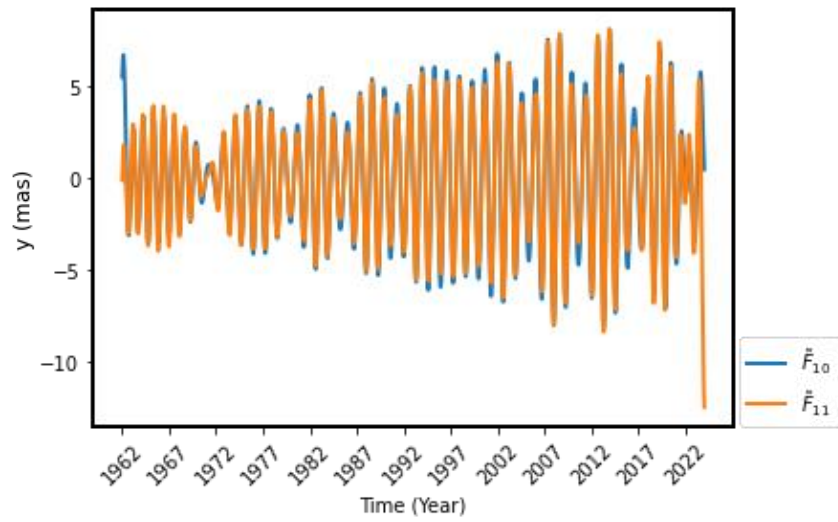
Εικόνα 5.11: Διάγραμμα συνιστωσών 8 και 9

Από τις Εικόνες 5.8 έως 5.11, φαίνεται ότι έγινε σωστή ομαδοποίηση των συνιστωσών καθώς τα διαγράμματα τους ταυτίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό. Τα διαγράμματα των συνιστωσών 0 και 7 (Εικόνα 5.7), δεν φαίνεται να ταυτίζονται αλλά λόγω της μορφής τους κρίνεται σωστό να ομαδοποιηθούν μαζί ως η τάσης της χρονοσειράς.

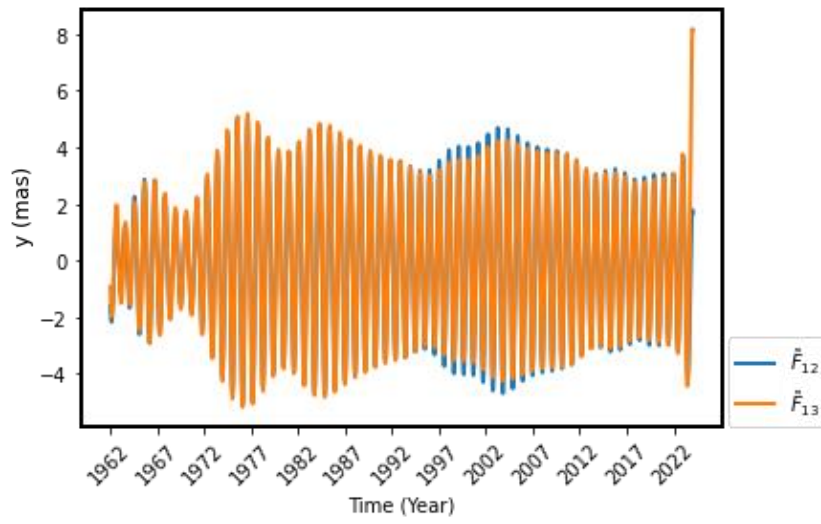


Εικόνα 5.12: Πίνακα συσχέτισης συνιστωσών 10-20

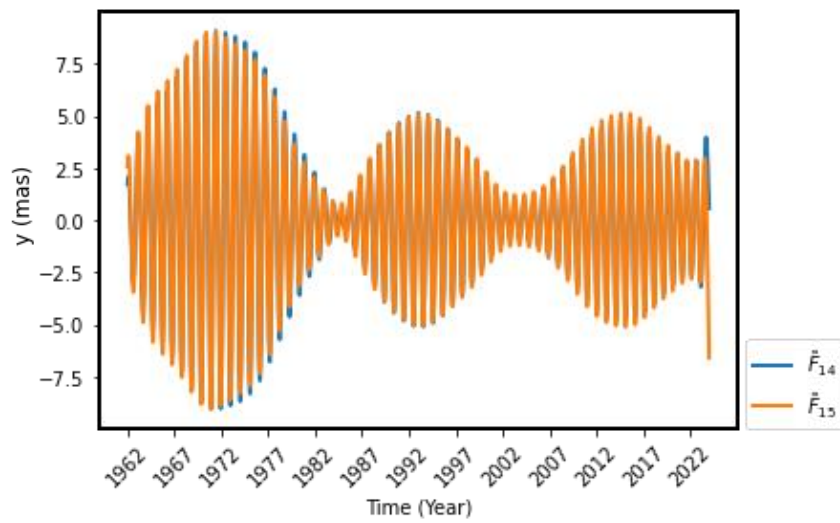
Τελικά, από την Εικόνα 5.12, φαίνεται ότι η συνιστώσα 10 ταιριάζει με την 11 καθώς έχουν μεγάλη συσχέτιση και θα ομαδοποιηθούν μαζί ως μία από τις περιοδικότητες. Επίσης, οι συνιστώσες 12 και 13, 14 και 15, 16 και 17, 18 και 19 θα ομαδοποιηθούν μαζί ανά δύο. Η συνιστώσα 20 θα ελεγχθεί στην επόμενη ομάδα συνιστωσών.



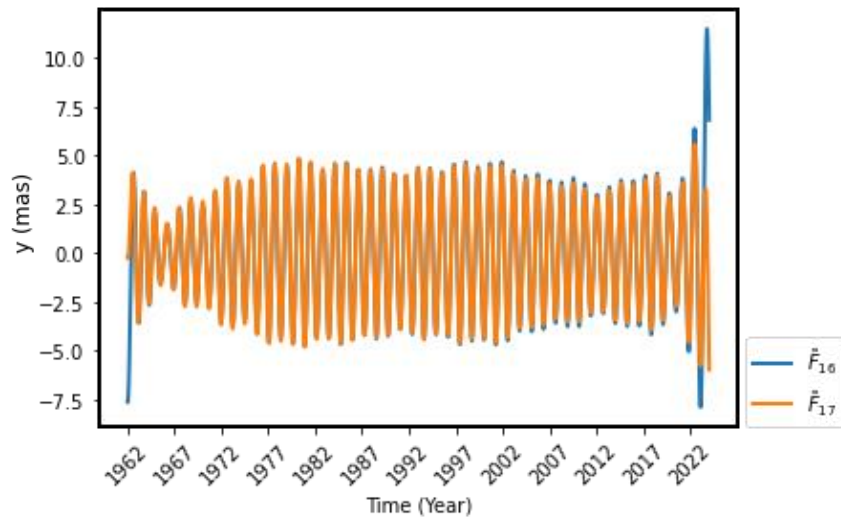
Εικόνα 5.13: Διάγραμμα συνιστωσών 10 και 11



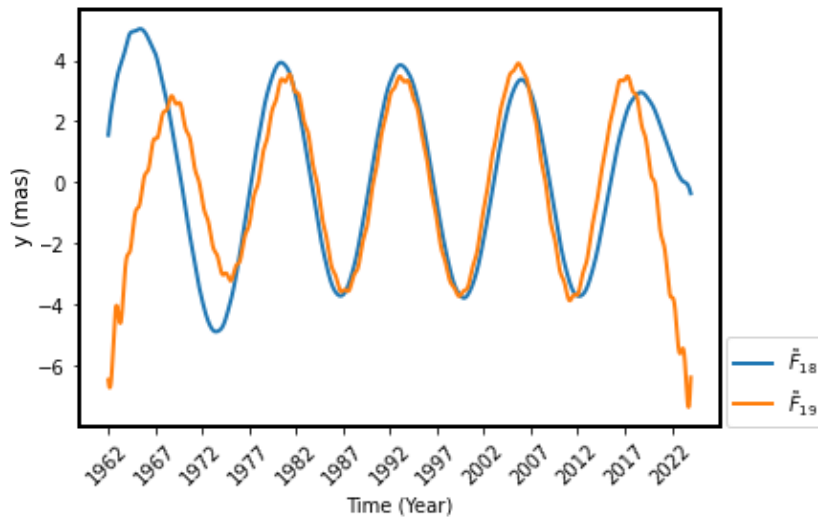
Εικόνα 5.14: Διάγραμμα συνιστωσών 12 και 13



Εικόνα 5.15: Διάγραμμα συνιστωσών 14 και 15

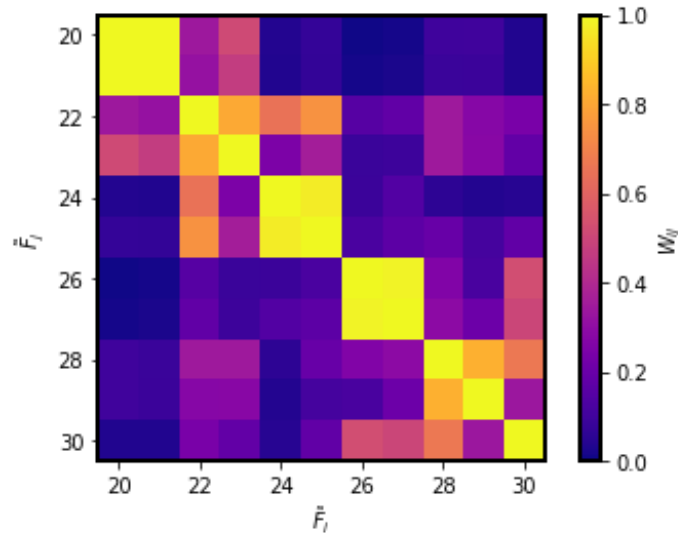


Εικόνα 5.16: Διάγραμμα συνιστωσών 16 και 17



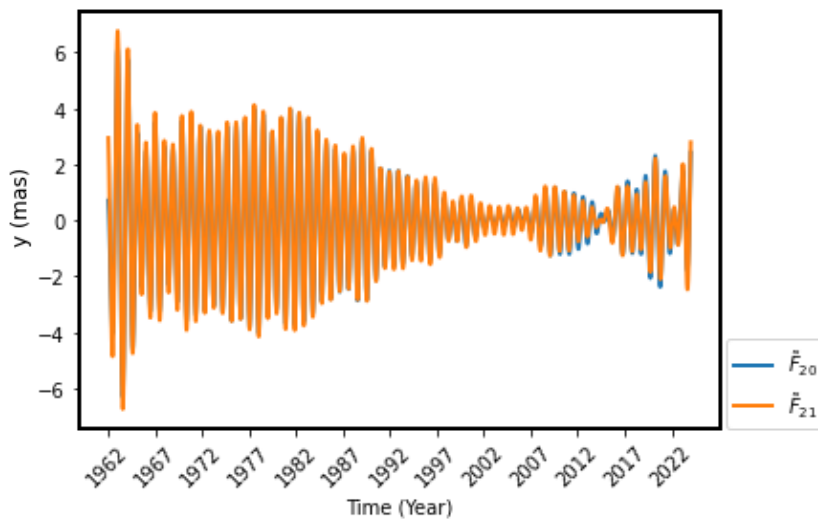
Εικόνα 5.17: Διάγραμμα συνιστωσών 18 και 19

Και για αυτή την ομάδα συνιστωσών, οι ομαδοποιήσεις φάνηκε ότι έγιναν ορθά.

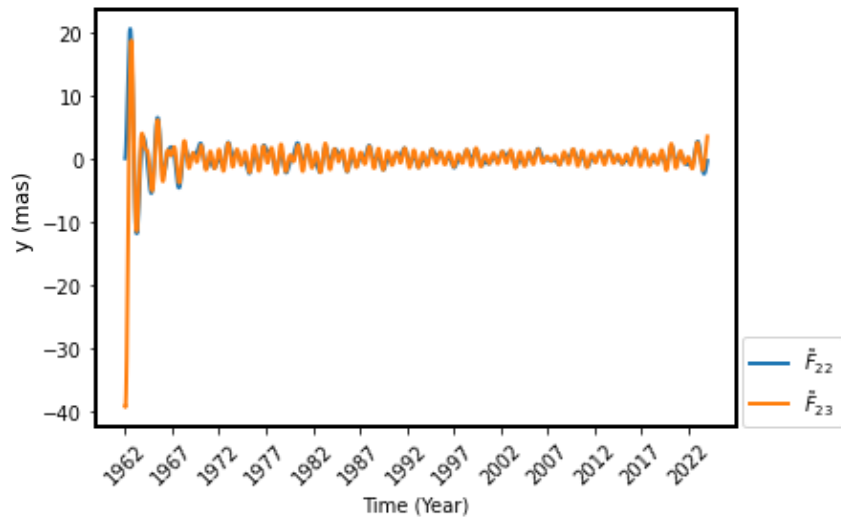


Εικόνα 5.18: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 20-30

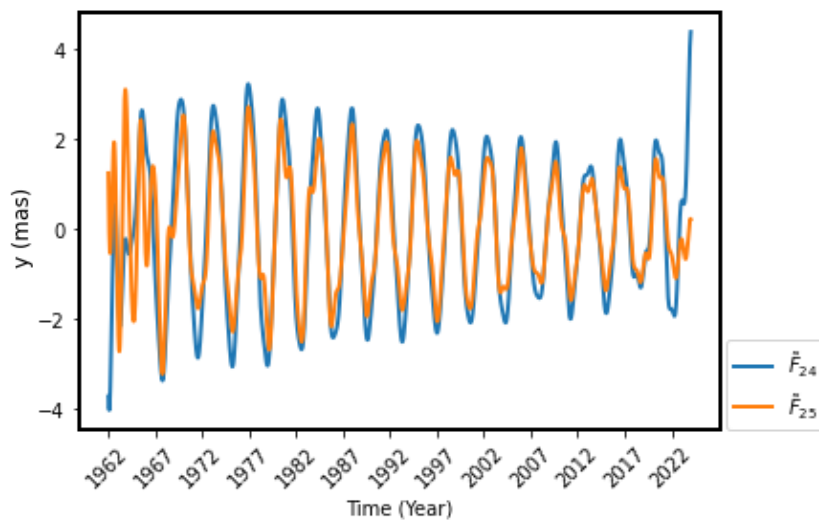
Από την Εικόνα 5.18, φαίνεται ότι για αυτή την ομάδα θα πρέπει να ομαδοποιηθούν όλες οι συνιστώσες ανά δύο μεταξύ τους δηλαδή 20 και 21, 22 και 23, 24 και 25, 26 και 27, 28 και 29. Η συνιστώσα 30 ως η τελευταία αυτής της ομάδας και μη έχοντας υψηλή συσχέτιση με κάποια από τις υπόλοιπες, θα ελεγχθεί με την επόμενη ομάδα συνιστωσών. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ζευγάρια 22, 23 και 28, 29 καθώς η συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ τους είναι μικρότερου βαθμού από ότι στα υπόλοιπα ζευγάρια. Παρατηρώντας το διάγραμμα του κάθε ζευγαριού θα αποφανθούμε αν τελικά έγιναν σωστά οι ομαδοποιήσεις.



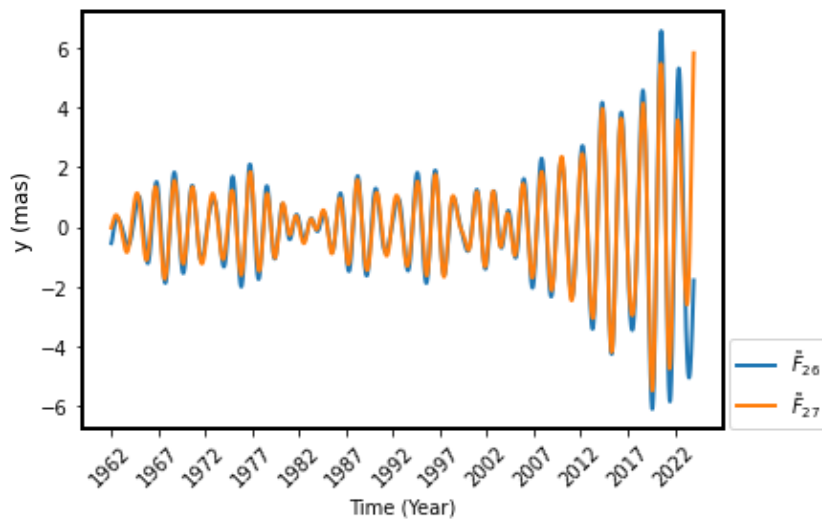
Εικόνα 5.19: Διάγραμμα συνιστωσών 20 και 21



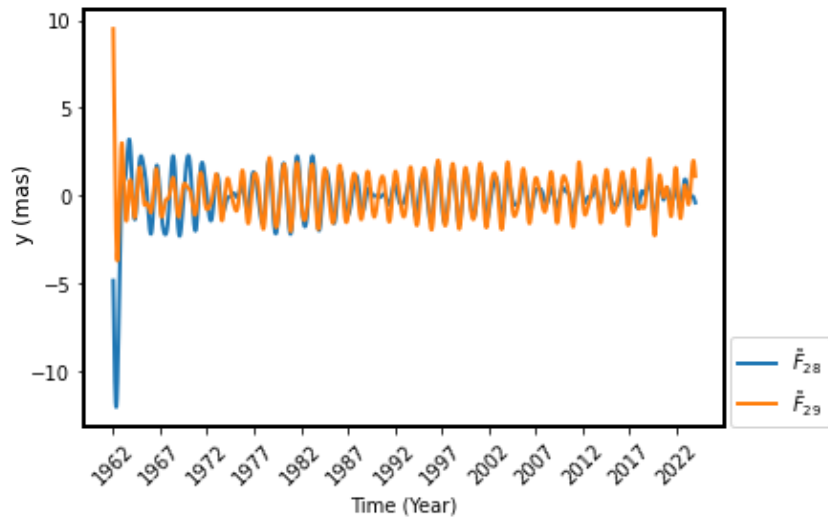
Εικόνα 5.20: Διάγραμμα συνιστωσών 22 και 23



Εικόνα 5.21: Διάγραμμα συνιστωσών 24 και 25

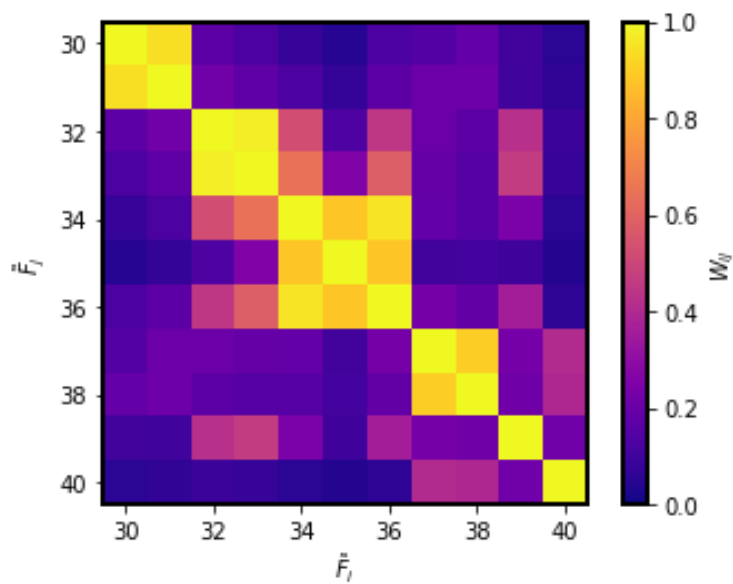


Εικόνα 5.22: Διάγραμμα συνιστωσών 26 και 27



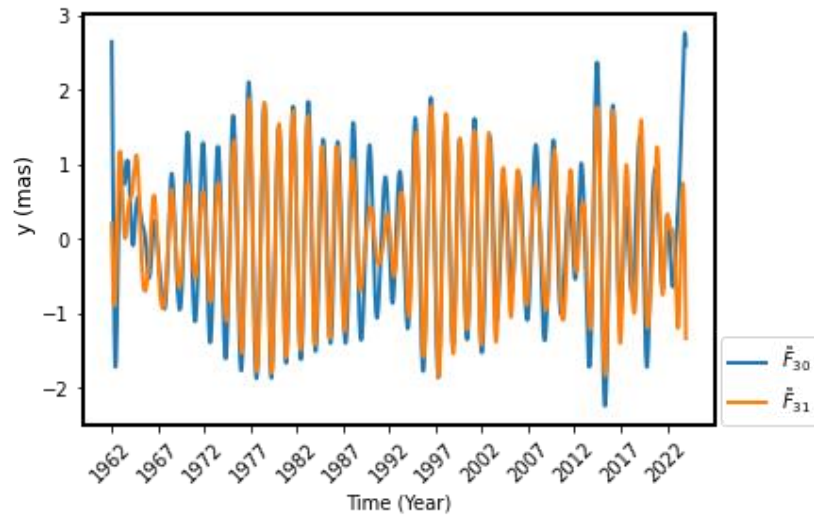
Εικόνα 5.23: Διάγραμμα συνιστωσών 28 και 29

Για ακόμα μια φορά οι ομαδοποιήσεις έγιναν σωστά και η διαδικασία της SSA προχωράει κανονικά.

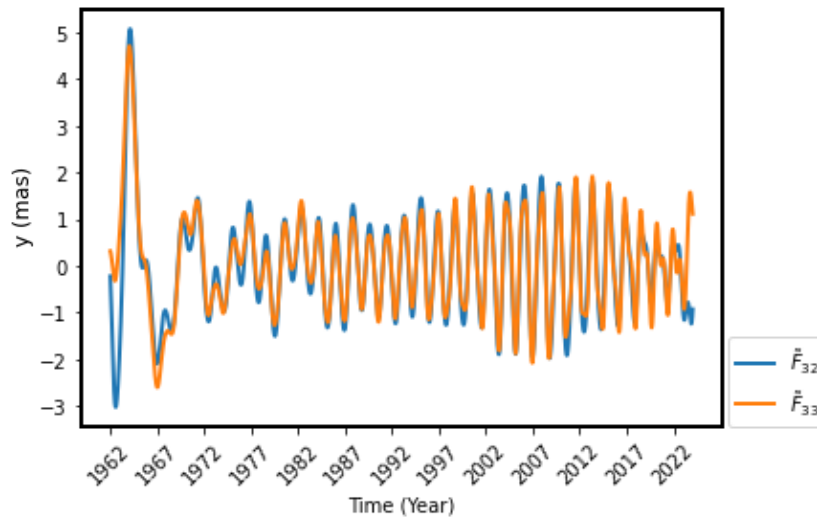


Εικόνα 5.24: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 30-40

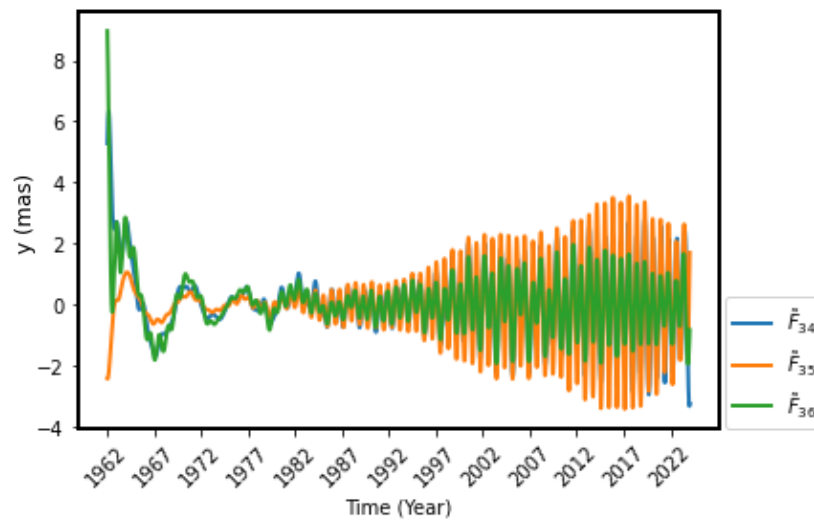
Σύμφωνα με την Εικόνα 5.24, οι ομάδες των συνιστωσών που θα πρέπει να δημιουργηθούν είναι: 30 και 31, 32 και 33, 34 και 35 και 36, 37 και 38. Οι συνιστώσες 39 και 40 δεν φαίνεται να έχουν υψηλή συσχέτιση με κάποια άλλη συνιστώσα.



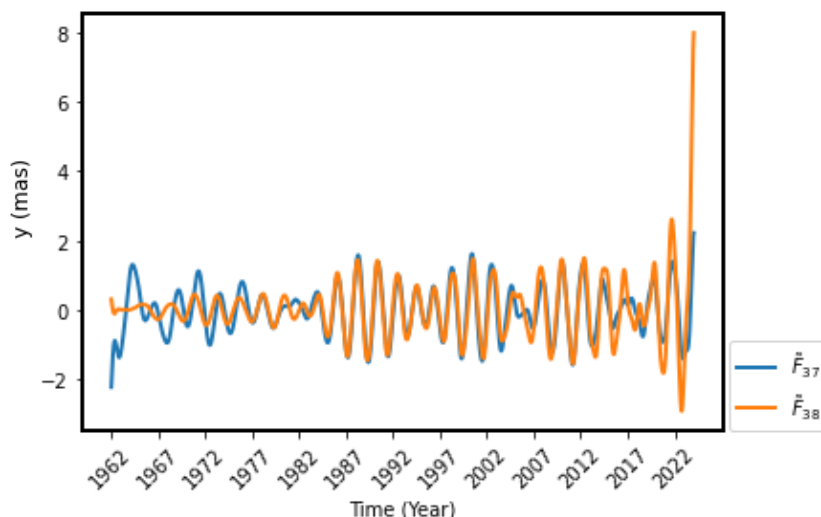
Εικόνα 5.25: Διάγραμμα συνιστωσών 30 και 31



Εικόνα 5.26: Διάγραμμα συνιστωσών 32 και 33

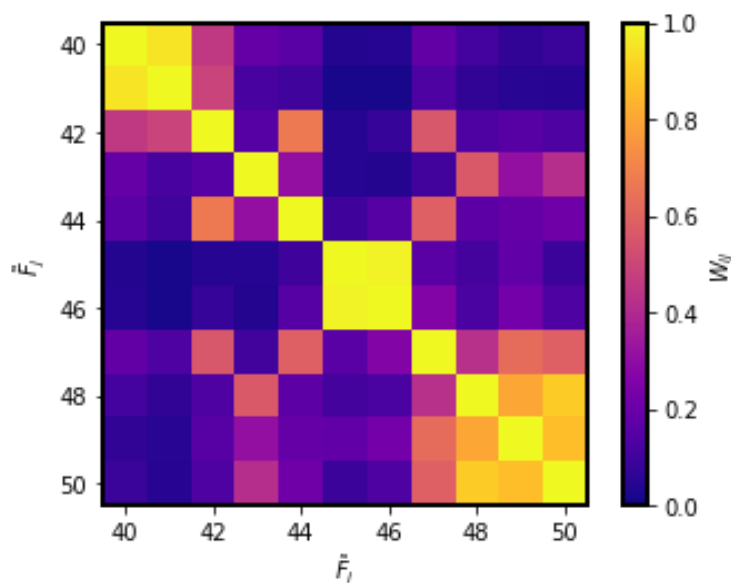


Εικόνα 5.27: Διάγραμμα συνιστωσών 34, 35 και 36



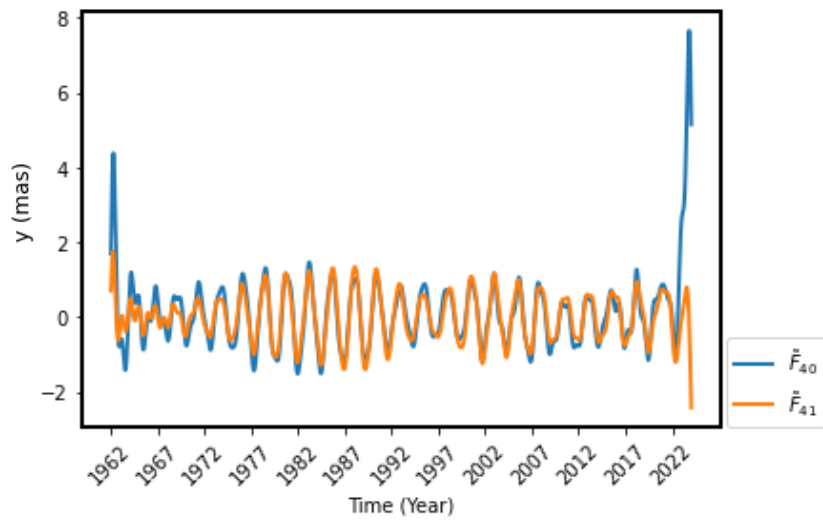
Εικόνα 5.28: Διάγραμμα συνιστωσών 37 και 38

Οι ομαδοποιήσεις φαίνεται να έγιναν σωστά με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην ομαδοποίηση των συνιστωσών 34, 35 και 36, όπου είναι η πρώτη περιοδικότητα που συμμετέχουν πάνω από δύο συνιστώσες με μεγάλο βαθμό συσχέτισης μεταξύ τους.

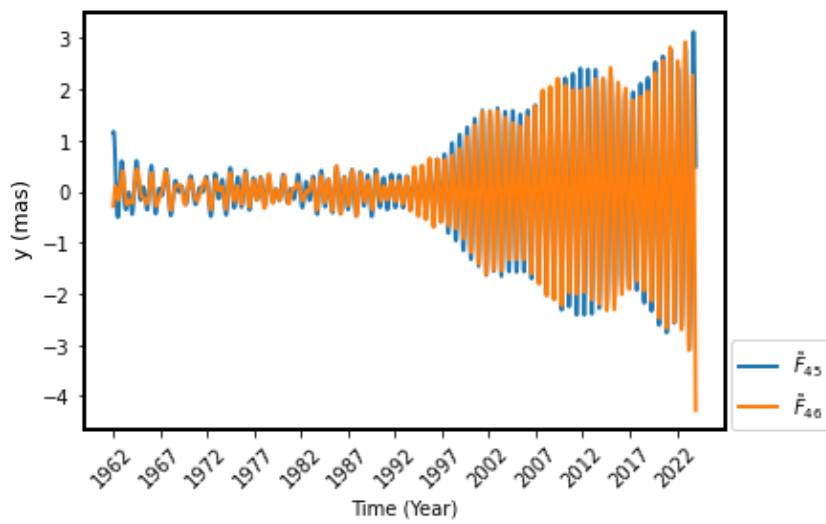


Εικόνα 5.29: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 40-50

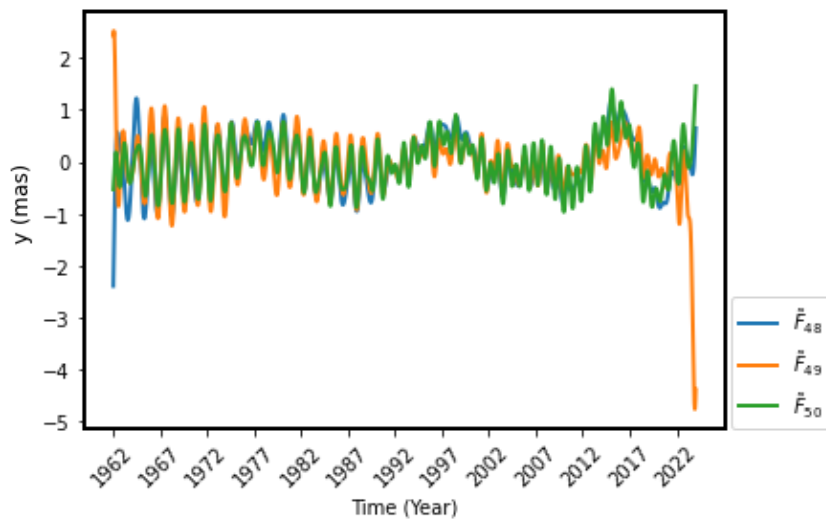
Από την Εικόνα 5.29, φαίνεται ότι οι συνιστώσες που θα πρέπει να ομαδοποιηθούν μαζί είναι: 40 και 41, 45 και 46, 48, 49 και 50. Οι συνιστώσες μεταξύ των 42, 43 και 44 έχουν αρκετά χαμηλή συσχέτιση μεταξύ τους οπότε δεν θα χρειαστεί καν ο έλεγχος τους μέσα από τα διαγράμματα για τυχόν ομαδοποιήσεις. Το ίδιο και για τη συνιστώσα 47 όπου έχει υψηλή συσχέτιση μόνο με τον εαυτό της και με καμία άλλη.



Εικόνα 5.30: Διάγραμμα συνιστωσών 40 και 41

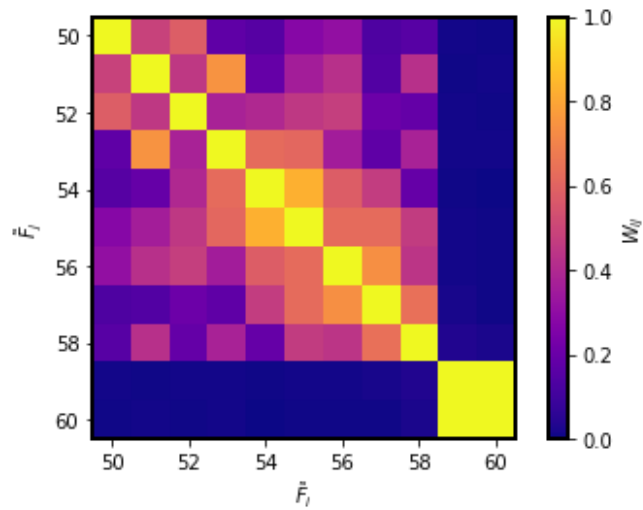


Εικόνα 5.31: Διάγραμμα συνιστωσών 45 και 46



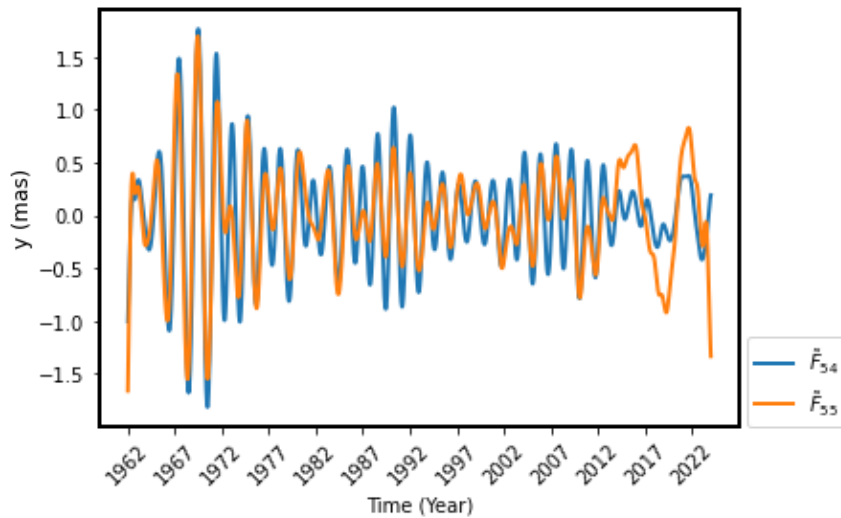
Εικόνα 5.32: Διάγραμμα συνιστωσών 48, 49 και 50

Οι ομαδοποιήσεις φαίνεται να έγιναν σωστά και η ανάλυση προχωράει παρακάτω.

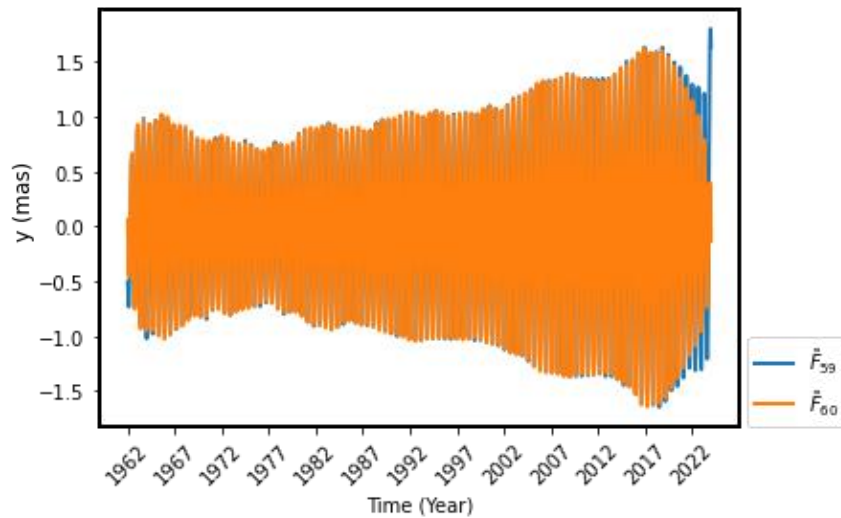


Εικόνα 5.33: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 50-60

Από τον παραπάνω πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 5.33), οι συνιστώσες που φαίνεται ότι πρέπει να ομαδοποιηθούν μαζί είναι οι 54 και 55 και οι 59, 60. Όλες οι άλλες συνιστώσες παρουσιάζουν χαμηλή συσχέτιση με τις υπόλοιπες και για αυτό το λόγο δεν θα ομαδοποιηθούν μαζί.

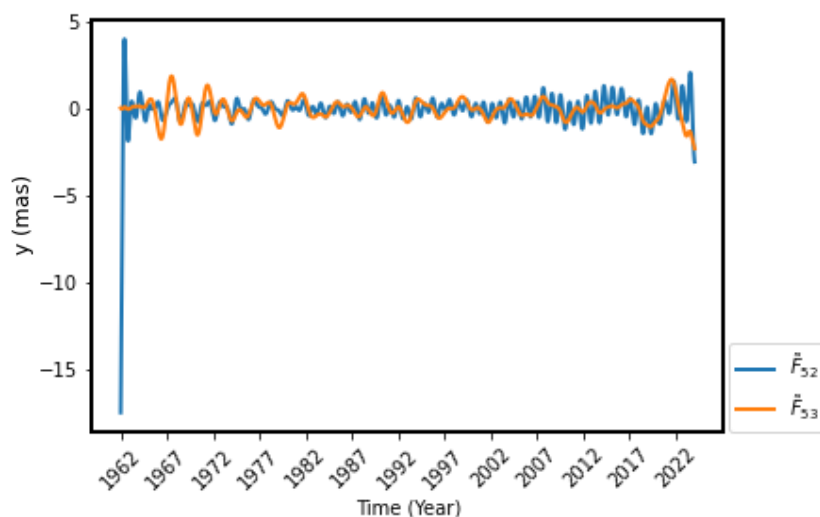


Εικόνα 5.34: Διάγραμμα συνιστωσών 54 και 55

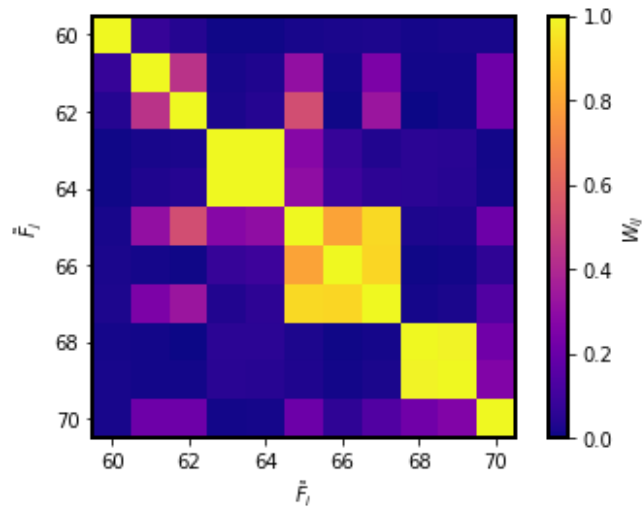


Εικόνα 5.35: Διάγραμμα συνιστωσών 59 και 60

Από τις Εικόνες 5.34, 5.35, παρατηρείται πόση διαφορά μπορεί να κάνει η ομαδοποίηση μεταξύ δύο συνιστωσών όταν αυτές έχουν βαθμό συσχέτισης κοντά στο 0.8 (54 και 55), και όταν αυτές έχουν κοντά στο 1 (59 και 60). Η διαφορά όσον αφορά την ταύτιση των διαγραμμάτων είναι αισθητή και η σύγκριση γίνεται με ζευγάρια βαθμών συσχετίσεων από 0.8 και πάνω. Από αυτό καταλαβαίνει κανείς γιατί η επιλογή των συνιστωσών γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή και με αρκετά αυστηρά στάνταρ στη μεταξύ τους συσχέτιση. Αν δηλαδή οι συνιστώσες 54 και 55 είχαν βαθμό συσχέτισης 0.6 ή ακόμα χαμηλότερα, τότε τα διαγράμματα τους θα ταυτιζόντουσαν από ελάχιστα έως καθόλου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι συνιστώσες 52 και 53 (Εικόνα 5.36), όπου από τον πίνακα συσχέτισης (Εικόνα 5.33) φαίνεται να παρουσιάζουν βαθμό συσχέτισης της τάξης του 0.4.

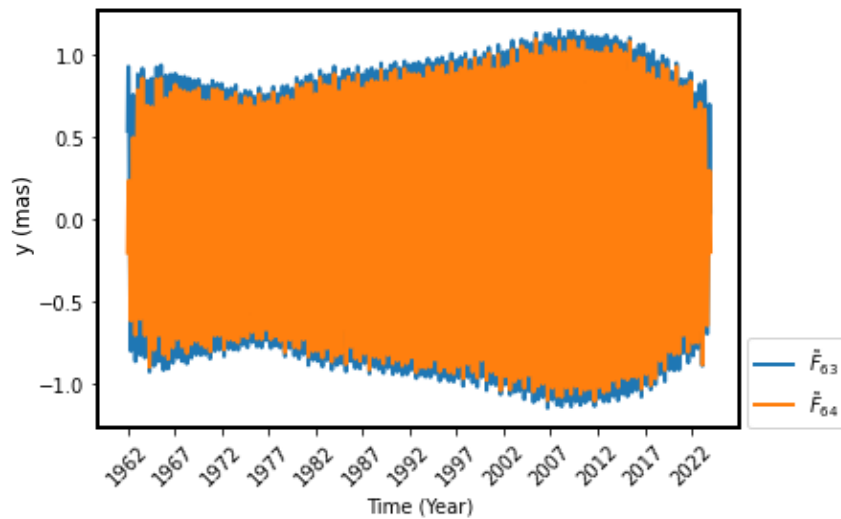


Εικόνα 5.36: Διάγραμμα συνιστωσών 52 και 53

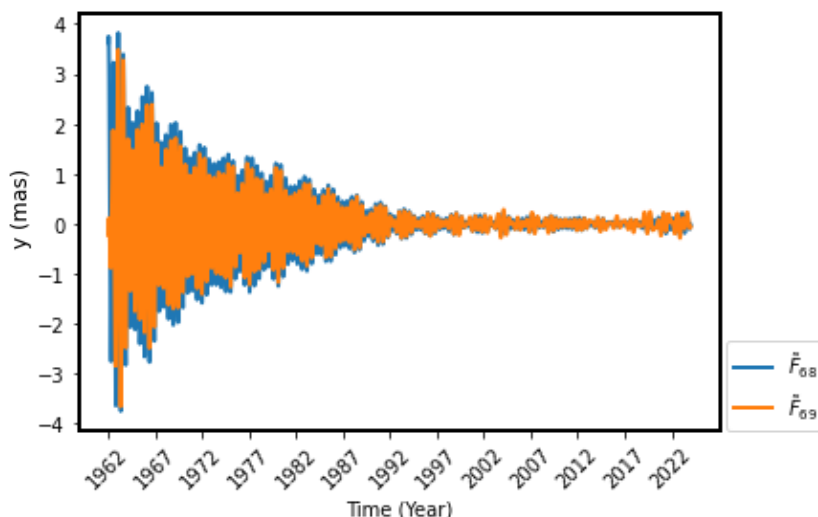


Εικόνα 5.37: Πίνακας συσχέτισης συνιστωσών 60-70

Από τον πίνακα συσχέτισης των συνιστωσών 60 – 70 (Εικόνα 5.37), οι συνιστώσες που θα ομαδοποιηθούν μαζί είναι οι 63, 64 και οι 68, 69 λόγω του πολύ αυξημένου βαθμού συσχέτισης.



Εικόνα 5.38: Διάγραμμα συνιστωσών 63 και 64



Εικόνα 5.39: Διάγραμμα συνιστωσών 68 και 69

Όπως φαίνεται από τις Εικόνες 5.38, 5.39, οι ομαδοποιήσεις έγιναν σωστά και εδώ τελειώνουν και οι ομαδοποιήσεις των συνιστωσών για όλη τη χρονοσειρά.

Τα αποτελέσματα των ομαδοποιήσεων έχουν ως εξής:

Trend = Συνιστώσα 0, 7

Periodic 1 = Συνιστώσες 1, 2

Periodic 2 = Συνιστώσες 3, 4

Periodic 3 = Συνιστώσες 5, 6

Periodic 4 = Συνιστώσες 8, 9

Periodic 5 = Συνιστώσες 10, 11

Periodic 6 = Συνιστώσες 12, 13

Periodic 7 = Συνιστώσες 14, 15

Periodic 8 = Συνιστώσες 16, 17

Periodic 9 = Συνιστώσες 18, 19

Periodic 10 = Συνιστώσες 20, 21

Periodic 11 = Συνιστώσες 22, 23

Periodic 12 = Συνιστώσες 24, 25

Periodic 13 = Συνιστώσες 26, 27

Periodic 14 = Συνιστώσες 28, 29

Periodic 15 = Συνιστώσες 30, 31

Periodic 16 = Συνιστώσες 32, 33

Periodic 17 = Συνιστώσες 34, 35, 36

Periodic 18 = Συνιστώσες 37, 38

Periodic 19 = Συνιστώσες 40, 41

Periodic 20 = Συνιστώσες 45, 46

Periodic 21 = Συνιστώσες 48, 49, 50

Periodic 22 = Συνιστώσες 54, 55

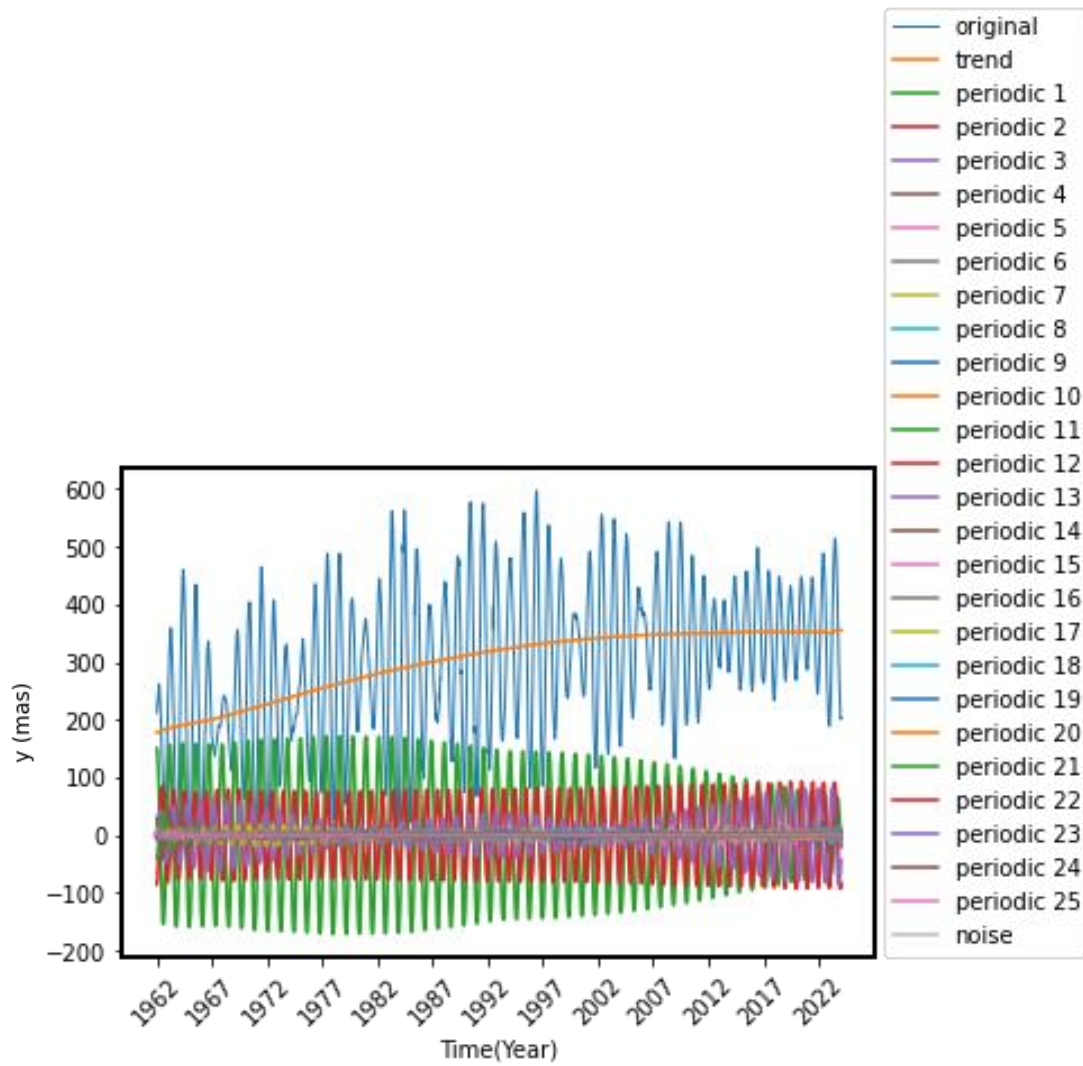
Periodic 23 = Συνιστώσες 59, 60

Periodic 24 = Συνιστώσες 63, 64

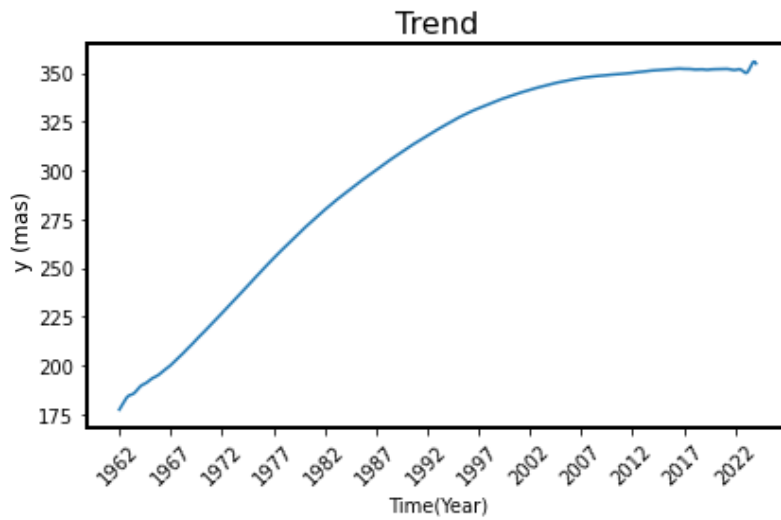
Periodic 25 = Συνιστώσες 68, 69

Noise = Όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες

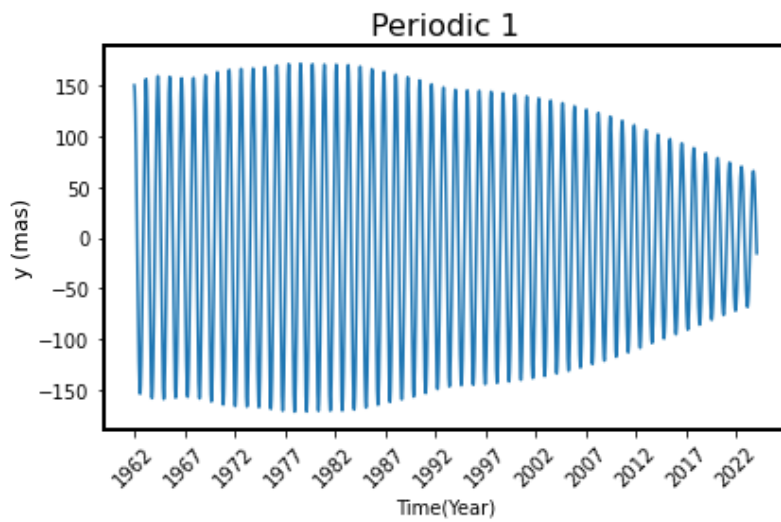
Από τα παραπάνω δημιουργήθηκαν τα διαγράμματα όλων των **περιοδικοτήτων**, της **τάσης** και του **θορύβου**:



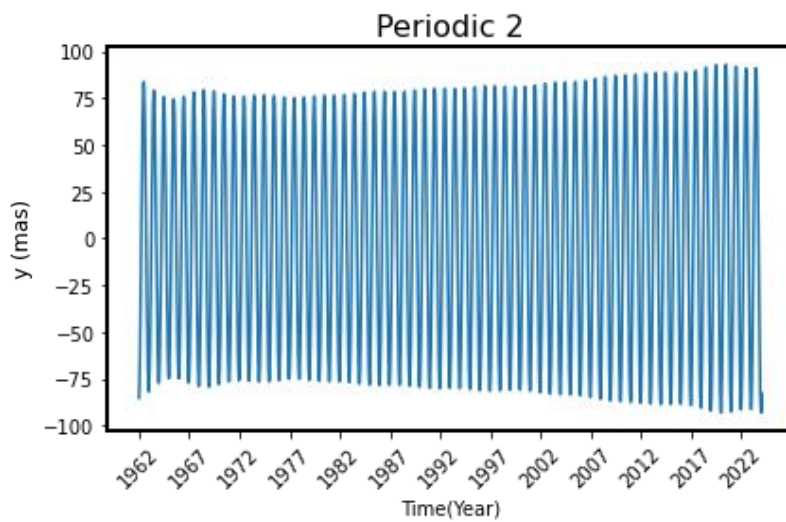
Εικόνα 5.40: Διαγράμματα όλων των περιοδικοτήτων, της τάσης, του θορύβου και της αρχικής χρονοσειράς



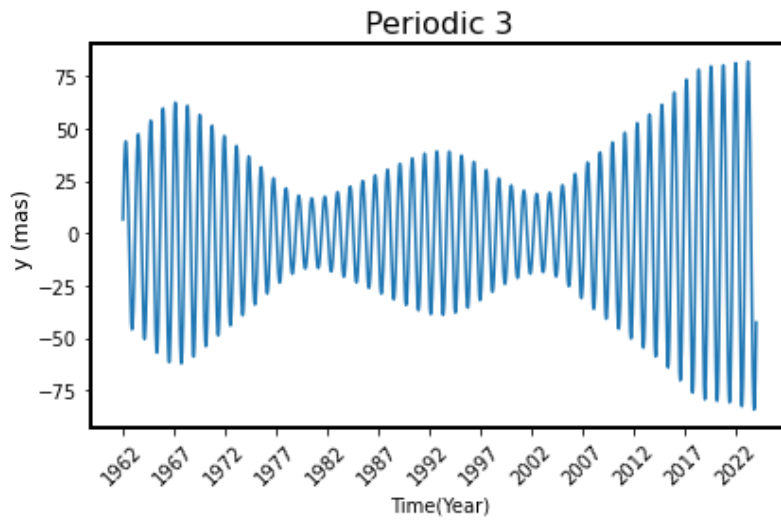
Εικόνα 5.41: Διάγραμμα τάσης της χρονοσειράς



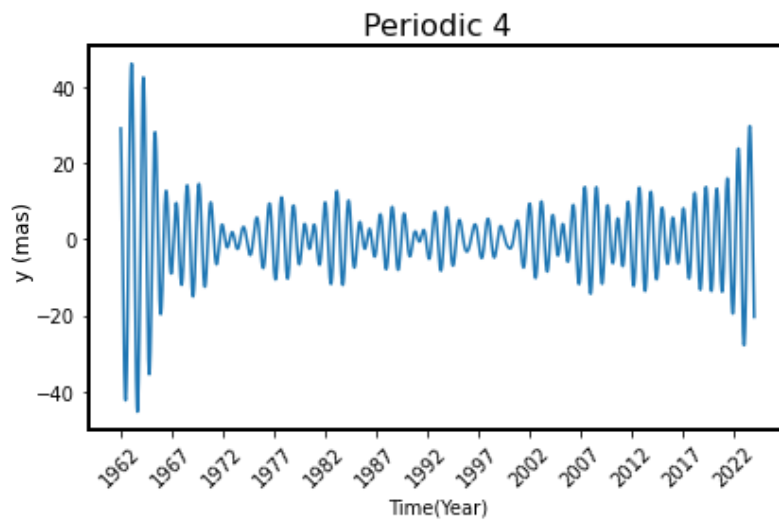
Εικόνα 5.42: Διάγραμμα 1^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



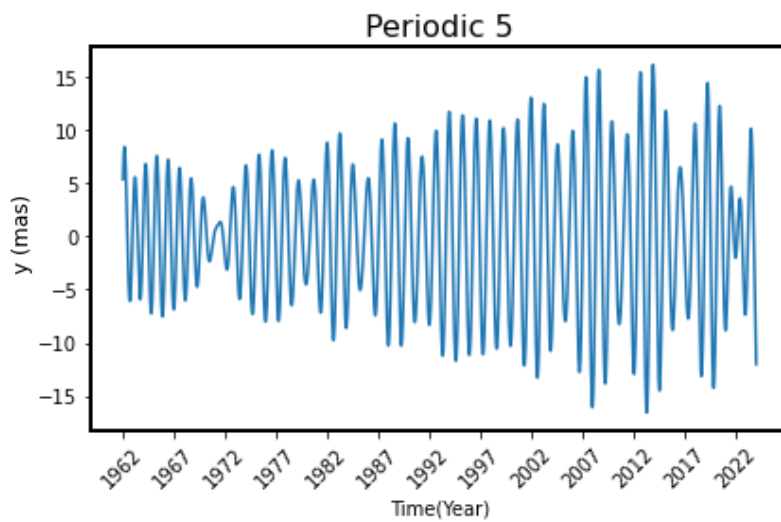
Εικόνα 5.43: Διάγραμμα 2^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



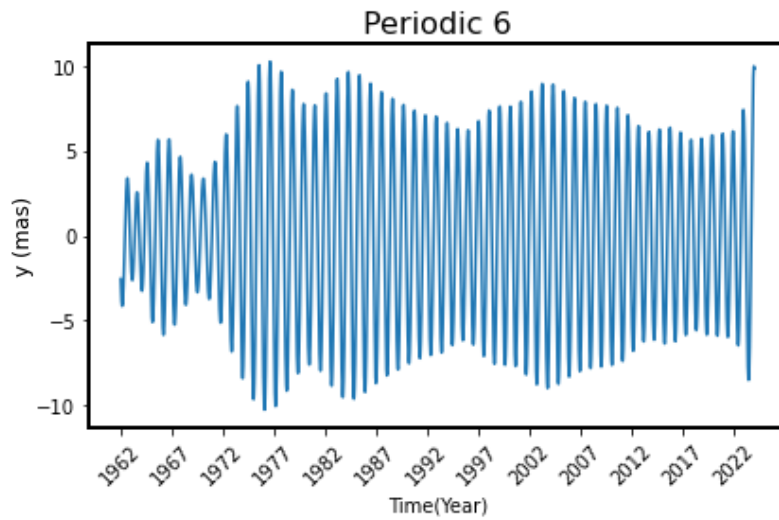
Εικόνα 5.44: Διάγραμμα 3ης περιοδικότητας της χρονοσειράς



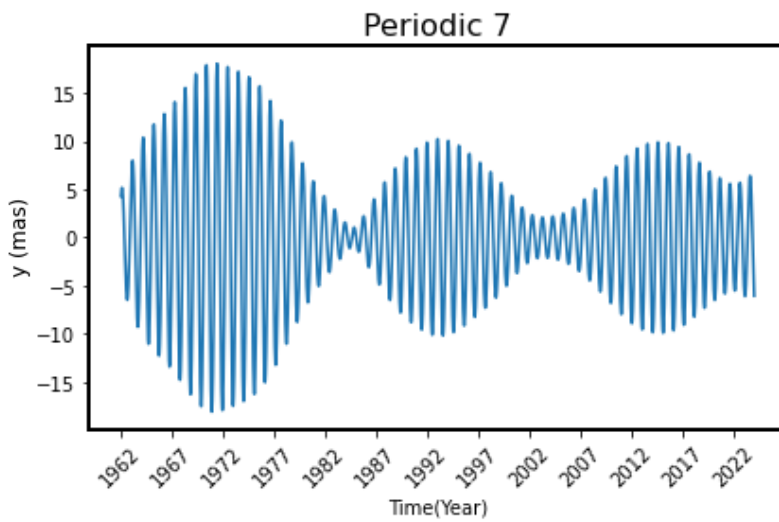
Εικόνα 5.45: Διάγραμμα 4ης περιοδικότητας της χρονοσειράς



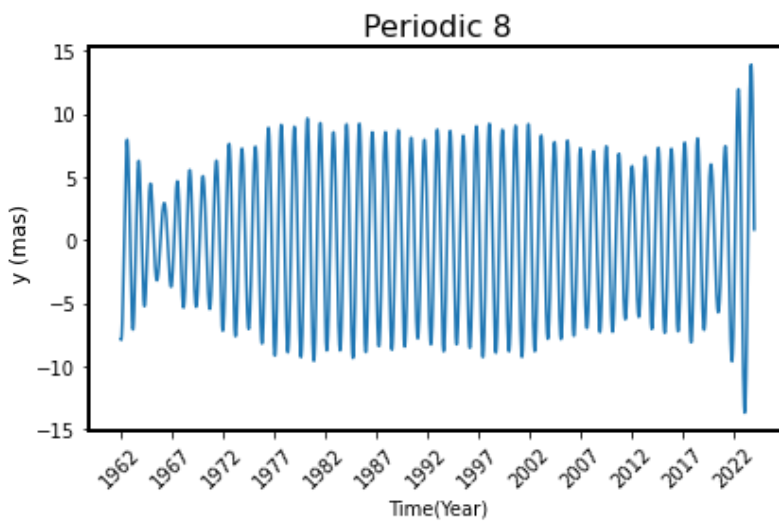
Εικόνα 5.46: Διάγραμμα 5ης περιοδικότητας της χρονοσειράς



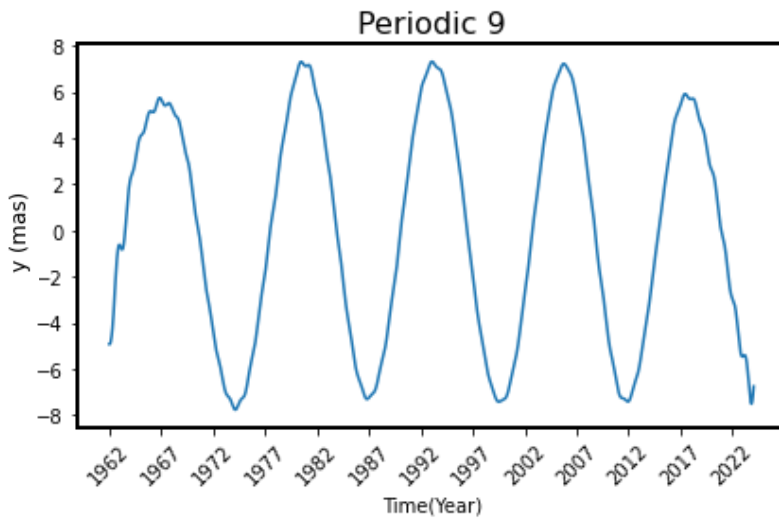
Εικόνα 5.47: Διάγραμμα 6^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



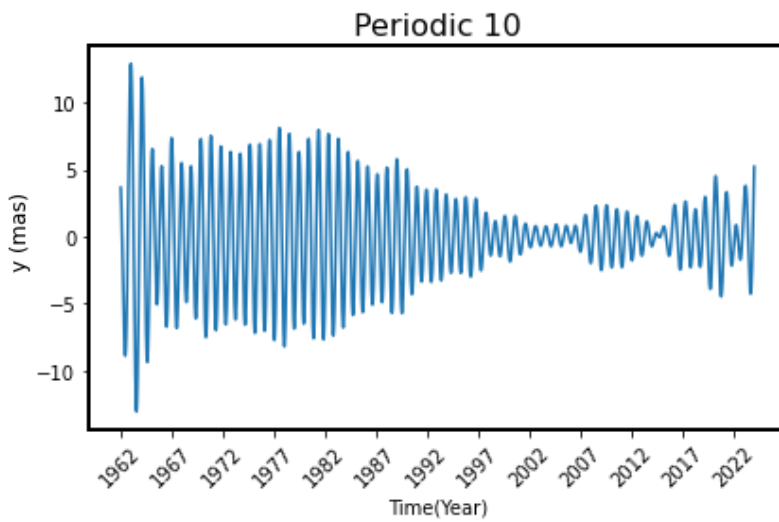
Εικόνα 5.48: Διάγραμμα 7^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



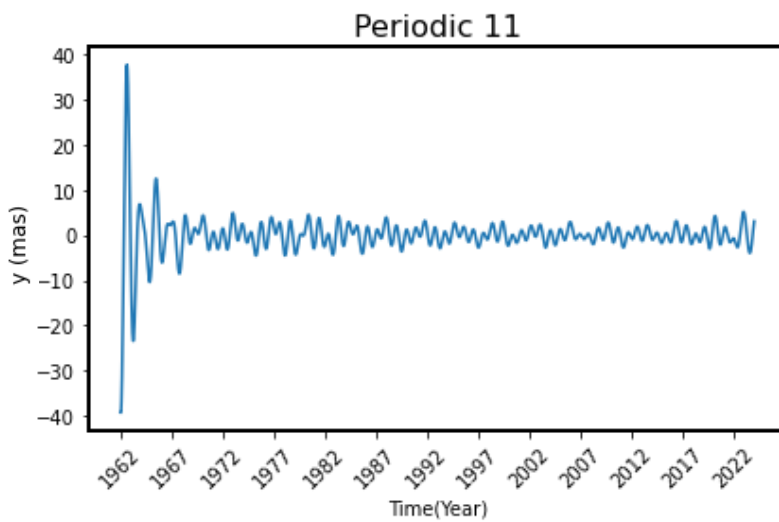
Εικόνα 5.49: Διάγραμμα 8^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



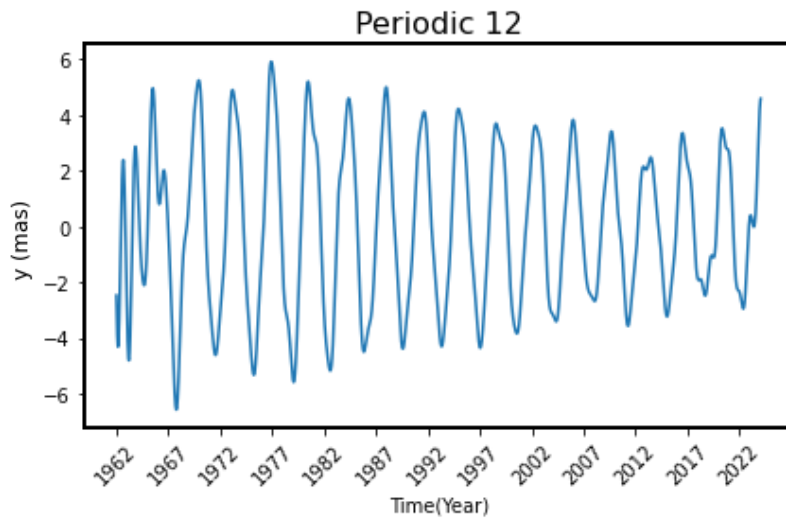
Εικόνα 5.50: Διάγραμμα 9^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



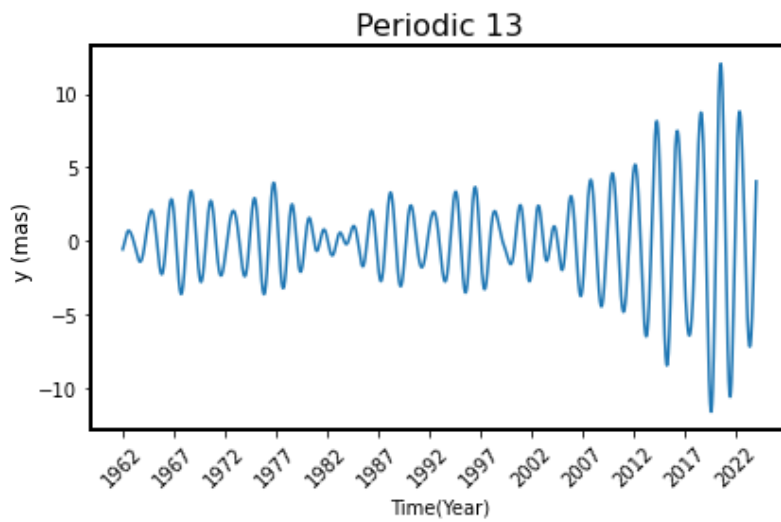
Εικόνα 5.51: Διάγραμμα 10^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



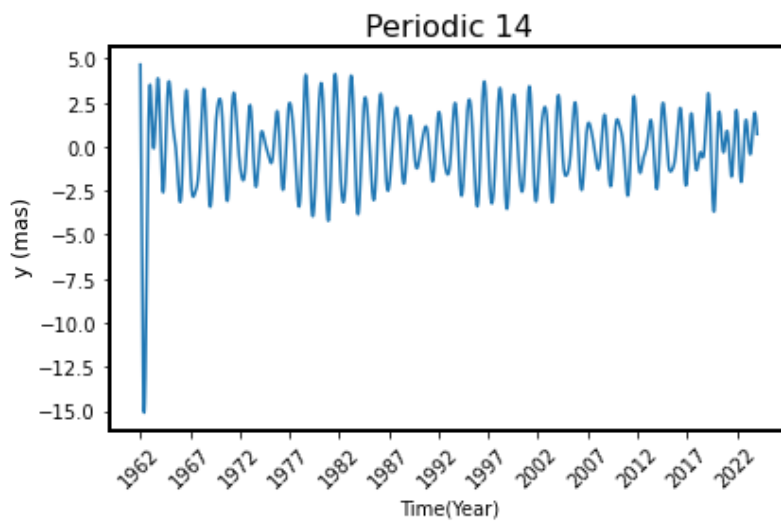
Εικόνα 5.52: Διάγραμμα 11^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



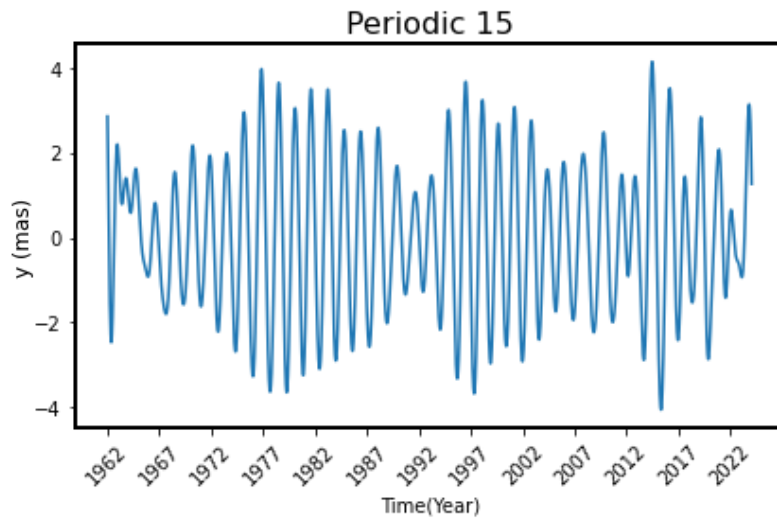
Εικόνα 5.53: Διάγραμμα 12^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



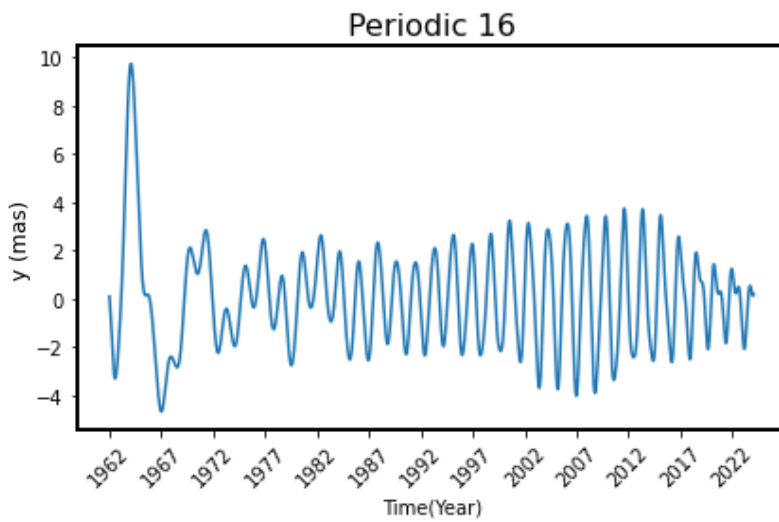
Εικόνα 5.54: Διάγραμμα 13^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



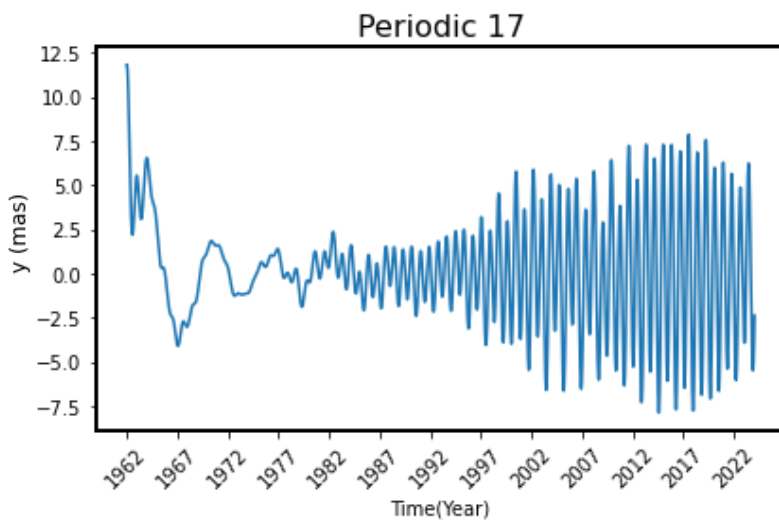
Εικόνα 5.55: Διάγραμμα 14^{ης} περιοδικότητας της χρονοσειράς



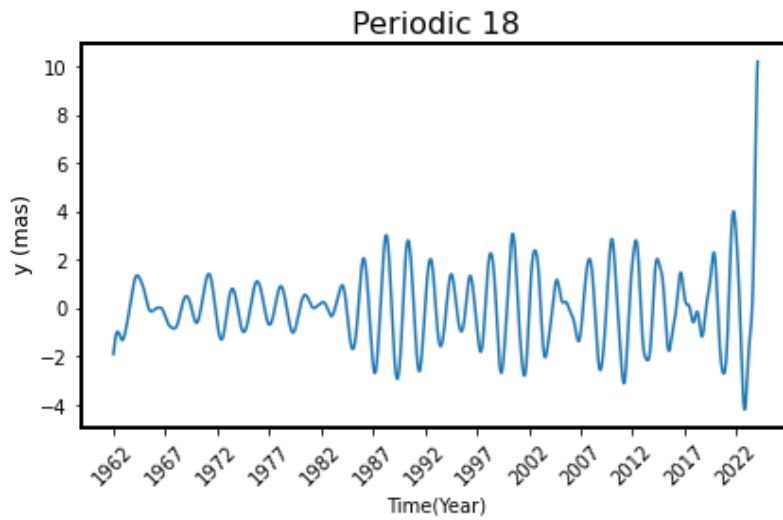
Εικόνα 5.56: Διάγραμμα 15^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



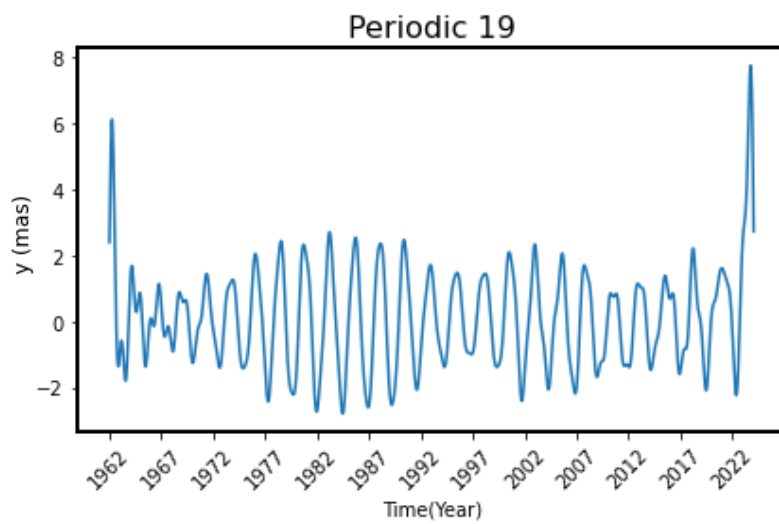
Εικόνα 5.57: Διάγραμμα 16^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



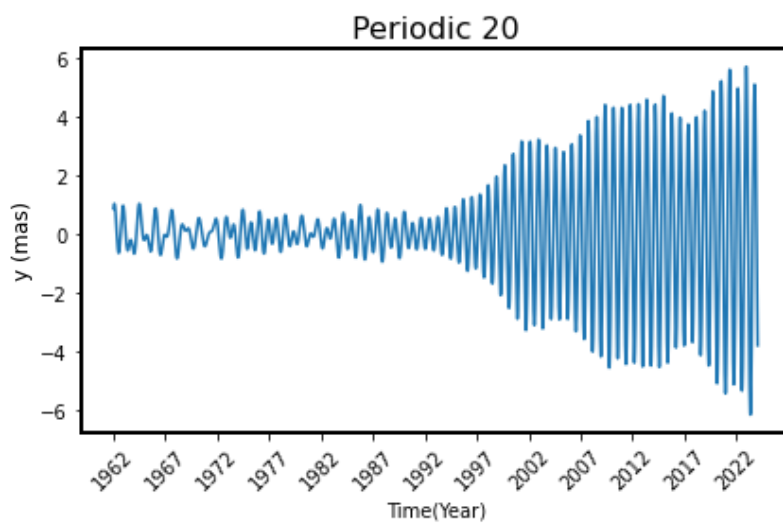
Εικόνα 5.58: Διάγραμμα 17^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



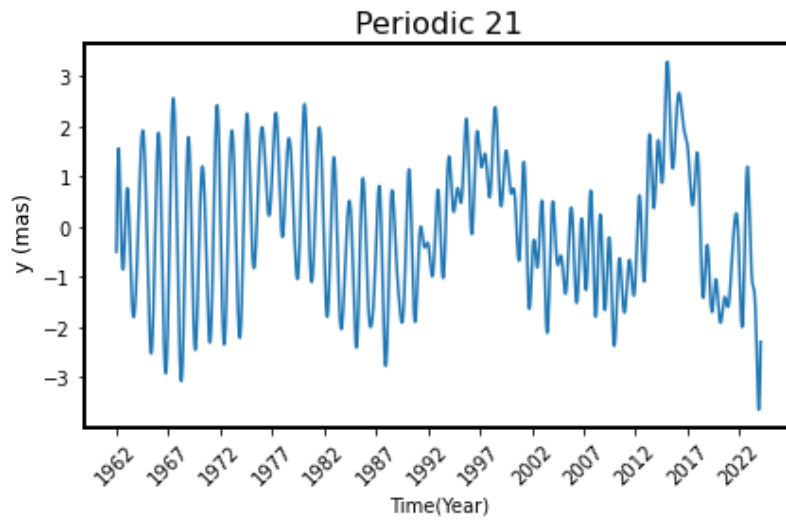
Εικόνα 5.59: Διάγραμμα 18^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



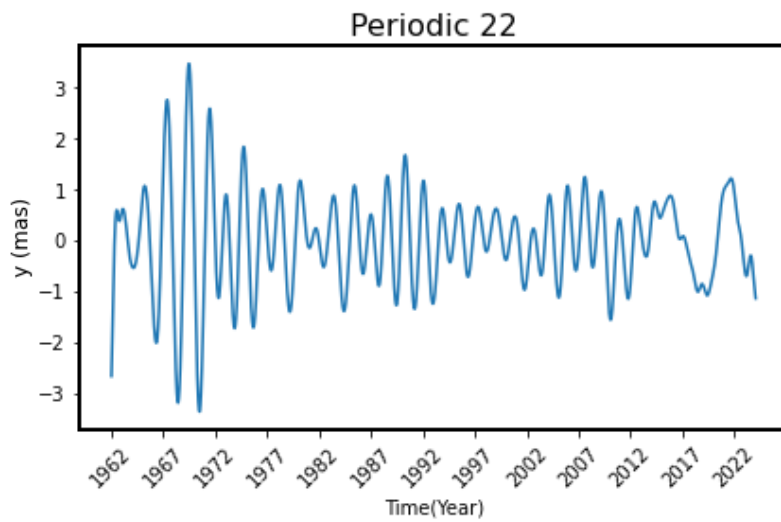
Εικόνα 5.60: Διάγραμμα 19^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



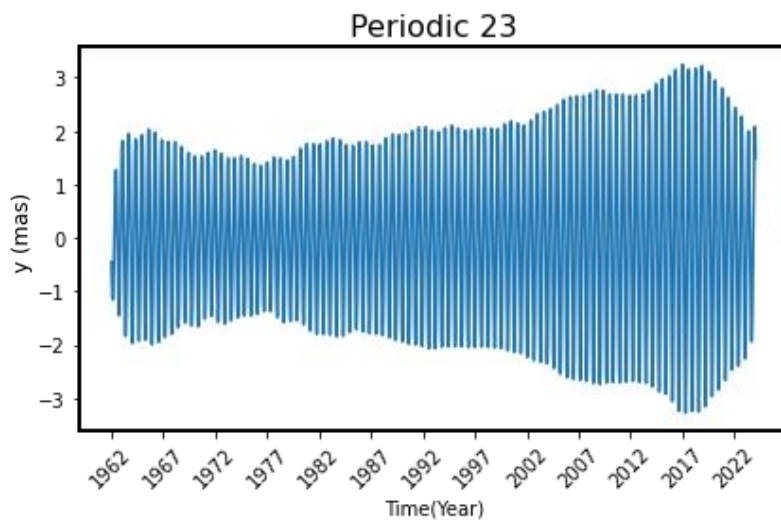
Εικόνα 5.61: Διάγραμμα 20^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



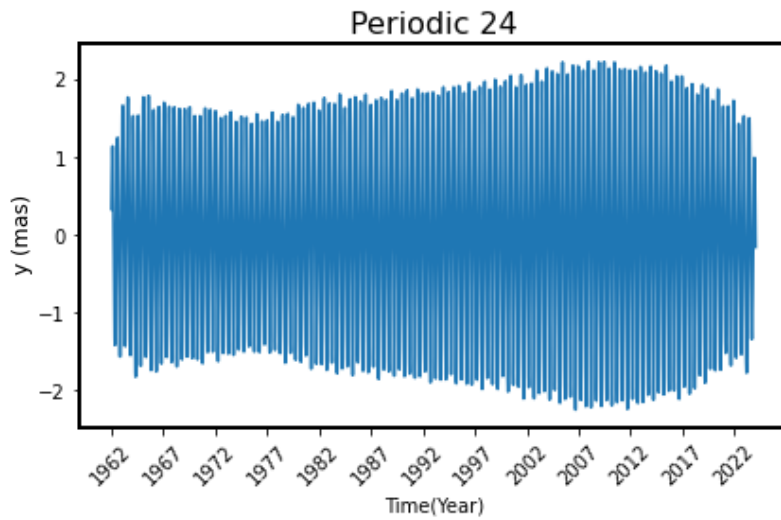
Εικόνα 5.62: Διάγραμμα 21^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



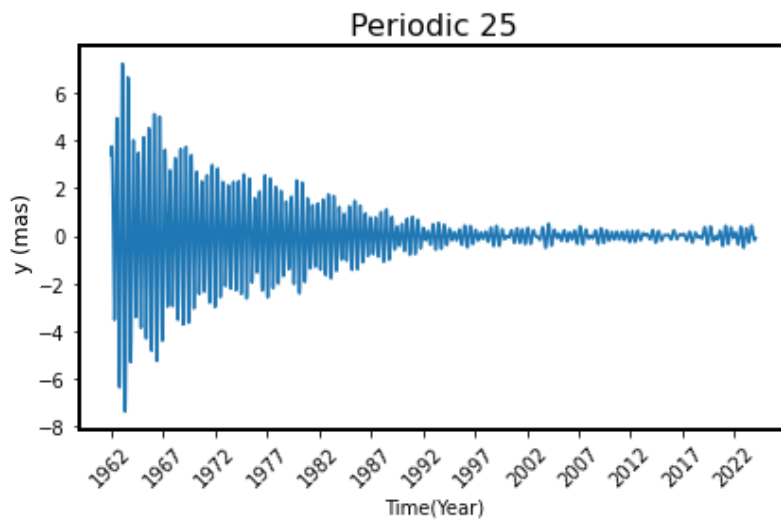
Εικόνα 5.63: Διάγραμμα 22^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



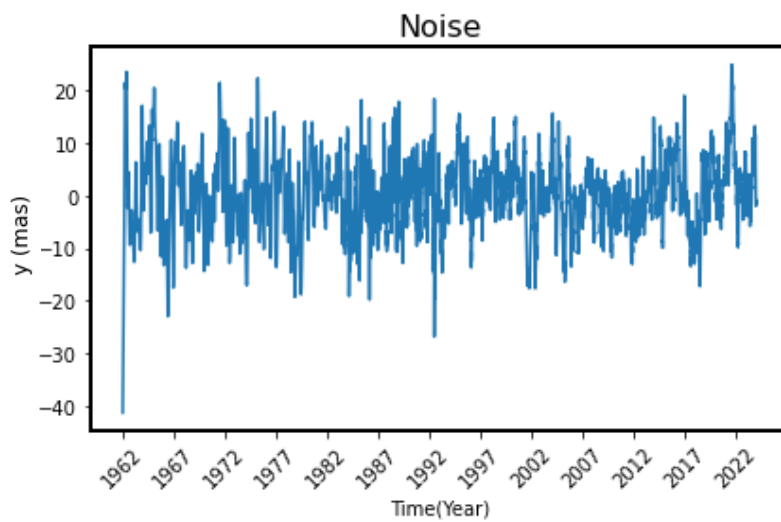
Εικόνα 5.64: Διάγραμμα 23^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



Εικόνα 5.65: Διάγραμμα 24^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



Εικόνα 5.66: Διάγραμμα 25^{ης} περιодικότητας της χρονοσειράς



Εικόνα 5.67: Διάγραμμα θορύβου της χρονοσειράς

5.3. Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Όπως έγινε και με τη συντεταγμένη x του Πόλου, έτσι και με τη συντεταγμένη y , θα πραγματοποιηθεί ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή συναρτήσεων για την επίτευξη της σωστής ερμηνείας της τάσης και των περιοδικοτήτων μέσω των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων τους.

5.3.1. Τάση

Η τάση αποτελείται από 22645 ισοβαρή και ασυσχέτιστα μεταξύ τους δεδομένα, με την παρακάτω εξίσωση παρατήρησης:

$$\hat{s}x_i + \hat{c} = y_{1i} + v_{1i} \quad (5.1)$$

η οποία σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{v}_1 \quad (5.2)$$

όπου

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{22645} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

ο πίνακας σχεδιασμού και

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

το διάνυσμα των αγνώστων ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων ενώ

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{122645} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

το διάνυσμα των υπολοίπων. Η ζητούμενη λύση λοιπόν θα δοθεί από τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}_1 \quad (5.6)$$

Το a - posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους θα δοθεί από τον τύπο:

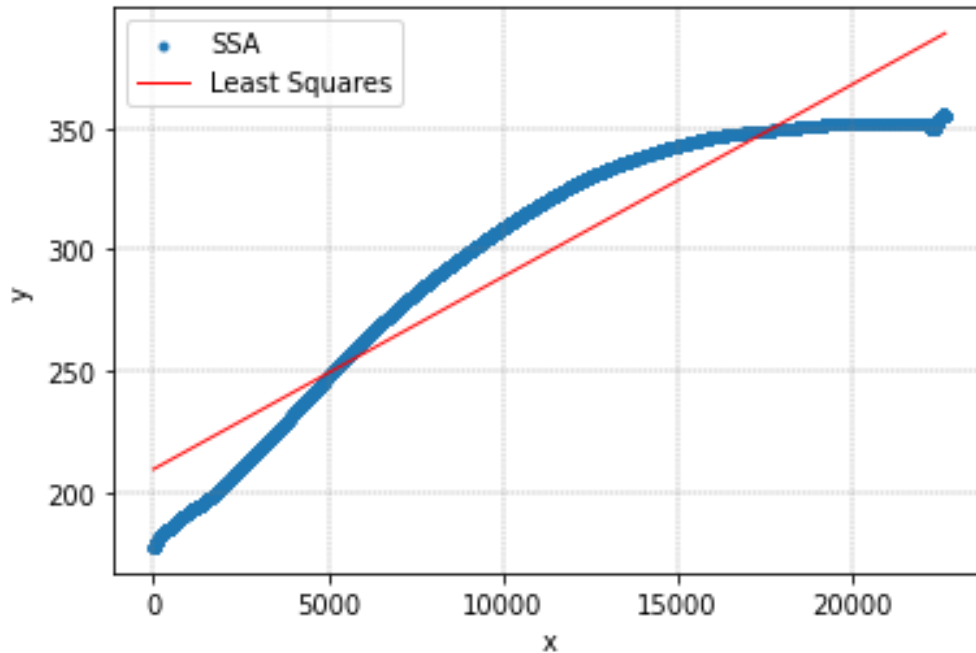
$$\hat{\sigma}_{01} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1}{r_1}} \quad (5.7)$$

και ο a - posteriori πίνακας μεταβλητότητας - συμεταβλητότητας του $\hat{\mathbf{x}}_1$:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \hat{\sigma}_{0_1}^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \quad (5.8)$$

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα συνόρθωσης τάσης

	\hat{s}	$\hat{\sigma}_s$	\hat{c}	$\hat{\sigma}_c$	$\hat{\sigma}_0$
Trend	0.008	0.000	209.373	0.238	17.903



Εικόνα 5.68: Συνόρθωση τάσης μέσω ελαχίστων τετραγώνων

Από την Εικόνα 5.68, φαίνεται ότι η ελαχιστοτετραγωνική προσαρμογή απέτυχε να προσαρμόσει την τάση μέσω της ευθείας προσαρμογής καθώς η τάση της χρονοσειράς έχει καμπυλοειδής μορφή. Από τον Πίνακα 5.1, φαίνεται επίσης ότι το a - posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους ($\hat{\sigma}_0$) βγήκε αρκετά μεγάλο, που είναι λογικό μιας και η προσαρμογή απέτυχε.

5.3.2. Περιοδικότητες

Για τις περιοδικότητες υπάρχουν επίσης 22645 ισοβαρή και ασυσχέτιστα δεδομένα και η εξίσωση παρατήρησης είναι της μορφής:

$$\hat{A} \cos\left(\frac{2\pi}{\hat{T}} t_i + \hat{\varphi}_0\right) + \hat{c} = y_{2_i} + v_{2_i} \quad (5.9)$$

Λόγω της μη γραμμικής μορφής της, θα γίνει γραμμικοποίηση κατά Taylor με προσωρινές τιμές t^0 για τις παραμέτρους, ώστε:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^0 + \delta\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{T} \\ \hat{\phi}_0 \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις σε μορφή πινάκων είναι:

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{t} = \delta\mathbf{y}_2 + \mathbf{v}_2 \quad (5.11)$$

όπου

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{T}} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{\phi}_0} & \frac{\partial y_1}{\partial \hat{c}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{T}} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{\phi}_0} & \frac{\partial y_2}{\partial \hat{c}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{A}} & \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{T}} & \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{\phi}_0} & \frac{\partial y_{22645}}{\partial \hat{c}} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$\delta\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2^0 \quad (5.13)$$

άρα

$$\delta\mathbf{t} = (\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T\delta\mathbf{y}_2 \quad (5.14)$$

Το a - posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους:

$$\hat{\sigma}_{0_2} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2}{r_2}} \quad (5.15)$$

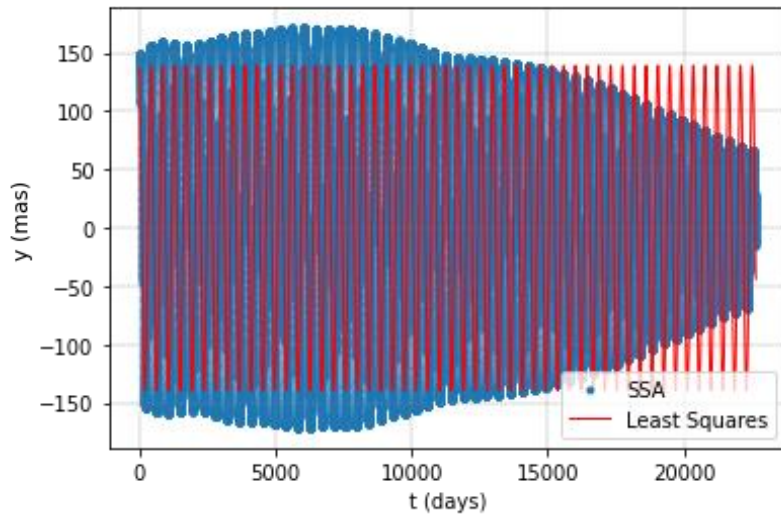
και ο a - posteriori πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του $\hat{\mathbf{t}}$:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{\mathbf{t}}} = \hat{\mathbf{V}}_{\delta\mathbf{t}} = \hat{\sigma}_{0_2}^2 (\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1} \quad (5.16)$$

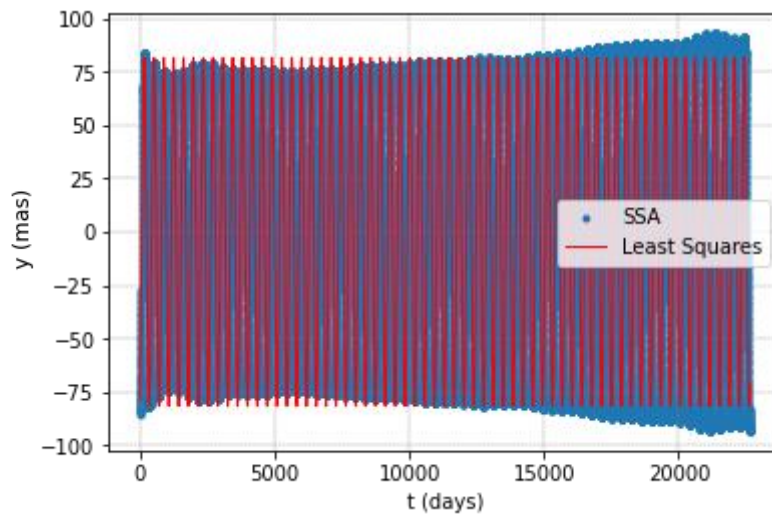
Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας με τις τιμές της συνόρθωσης των περιοδικοτήτων με όριο σύγκλισης την απόλυτη τιμή της διαφοράς των διαδοχικών a-posteriori τυπικών σφαλμάτων της μονάδας βάρους να είναι ≤ 0.0001 ή ο αριθμός των επαναλήψεων να είναι ≤ 20 .

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα συνόρθωσης για τις περιοδικότητες

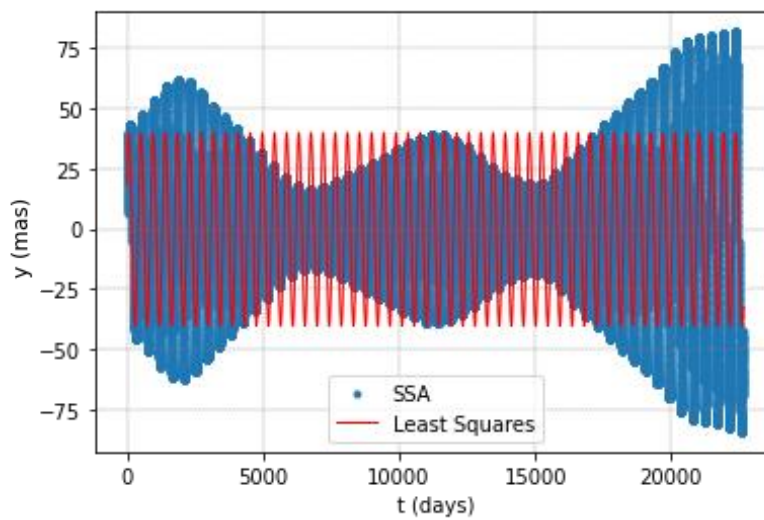
Περιοδικότητα	\hat{A} (mas)	$\hat{\sigma}_{\hat{A}}$ (mas)	\hat{T} (days)	$\hat{\sigma}_{\hat{T}}$ (days)	$\hat{\varphi}_0$ (rad)	$\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_0}$ (rad)	\hat{c} (mas)	$\hat{\sigma}_{\hat{c}}$ (mas)	$\hat{\sigma}_{0_2}$ (mas)
1	139.454	0.205	433.201	0.007	0.185	0.003	-0.159	0.145	21.762
2	81.711	0.042	365.025	0.002	3.423	0.001	-0.052	0.029	4.433
3	40.118	0.151	445.963	0.018	8.330	0.008	-0.182	0.107	16.057
4	7.134	0.078	386.733	0.040	-12.790	0.022	-0.006	0.055	8.328
5	7.788	0.038	486.306	0.028	0.036	0.010	0.043	0.027	4.022
6	3.093	0.044	402.645	0.056	29.860	0.029	-0.008	0.031	4.686
7	7.763	0.037	375.042	0.016	-1.145	0.010	-0.024	0.026	3.962
8	7.573	0.018	465.472	0.012	1.157	0.005	0.000	0.013	1.890
9	6.831	0.011	4630.001	0.808	0.373	0.003	-0.141	0.008	1.142
10	3.639	0.024	353.302	0.020	-0.364	0.013	-0.018	0.017	2.577
11	2.325	0.037	345.772	0.082	-49.951	0.057	-0.004	0.027	3.990
12	3.665	0.012	1323.546	0.137	5.465	0.006	-0.031	0.008	1.249
13	2.686	0.024	725.968	0.115	4.117	0.018	-0.020	0.017	2.589
14	1.982	0.016	546.841	0.058	2.374	0.016	-0.063	0.011	1.669
15	1.924	0.011	597.675	0.049	0.060	0.011	0.039	0.008	1.168
16	2.026	0.015	665.548	0.080	-0.950	0.015	0.049	0.011	1.607
17	2.376	0.021	312.388	0.021	-12.578	0.018	0.157	0.015	2.253
18	0.961	0.012	720.050	0.163	22.695	0.026	0.008	0.009	1.322
19	1.191	0.012	909.158	0.201	2.911	0.020	0.116	0.008	1.268
20	1.586	0.013	292.656	0.017	2.583	0.017	0.000	0.009	1.420
21	0.813	0.011	511.054	0.087	3.381	0.027	-0.060	0.008	1.182
22	0.670	0.008	630.930	0.111	3.925	0.023	-0.006	0.005	0.821
23	2.111	0.004	231.506	0.002	2.102	0.003	0.0015	0.003	0.381
24	1.773	0.003	182.062	0.001	5.704	0.003	-0.003	0.002	0.272
25	1.070	0.011	184.333	0.009	-8.307	0.022	0.002	0.008	1.140



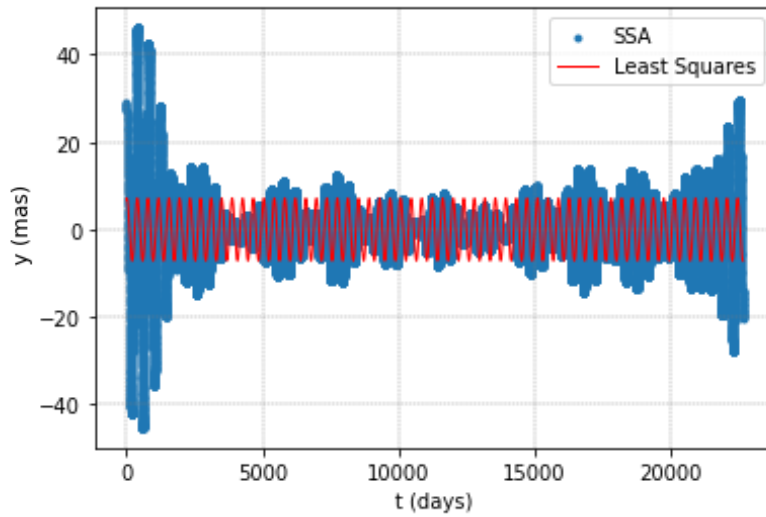
Εικόνα 5.69: Συνόρθωση 1^{ης} περιοδικότητας



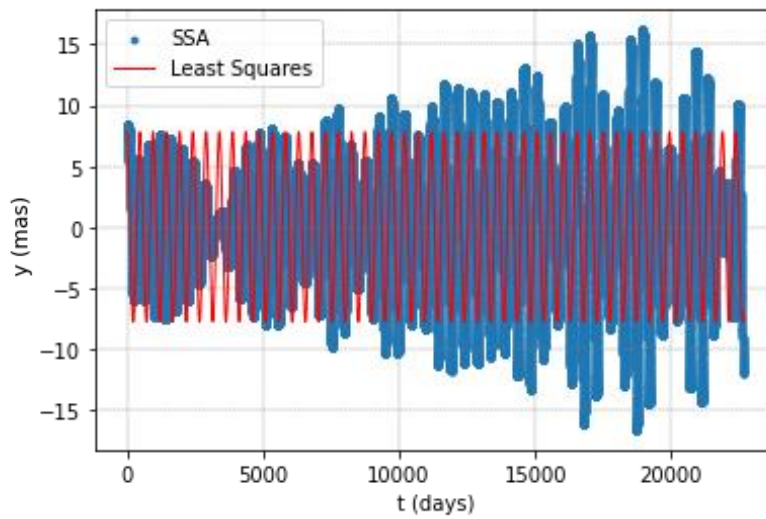
Εικόνα 5.70: Συνόρθωση 2^{ης} περιοδικότητας



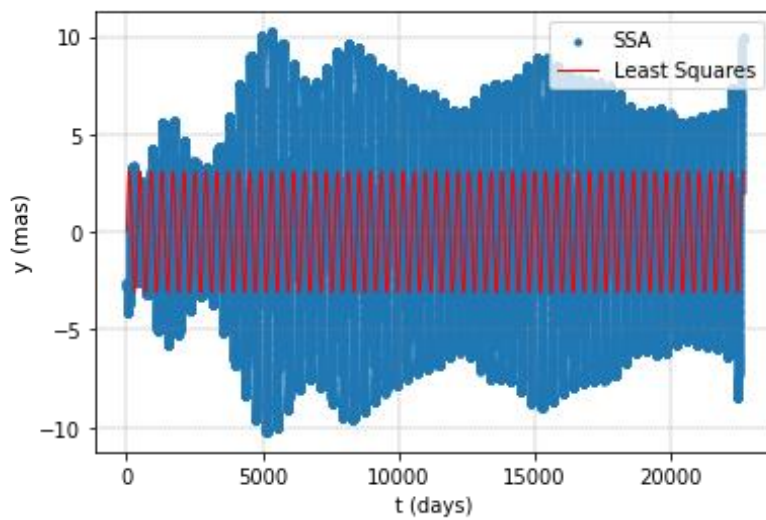
Εικόνα 5.71: Συνόρθωση 3^{ης} περιοδικότητας



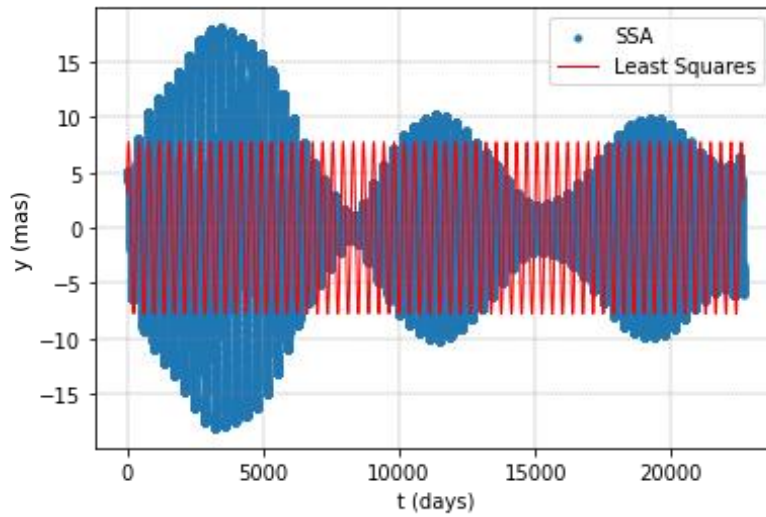
Εικόνα 5.72: Συνόρθωση 4ης περιοδικότητας



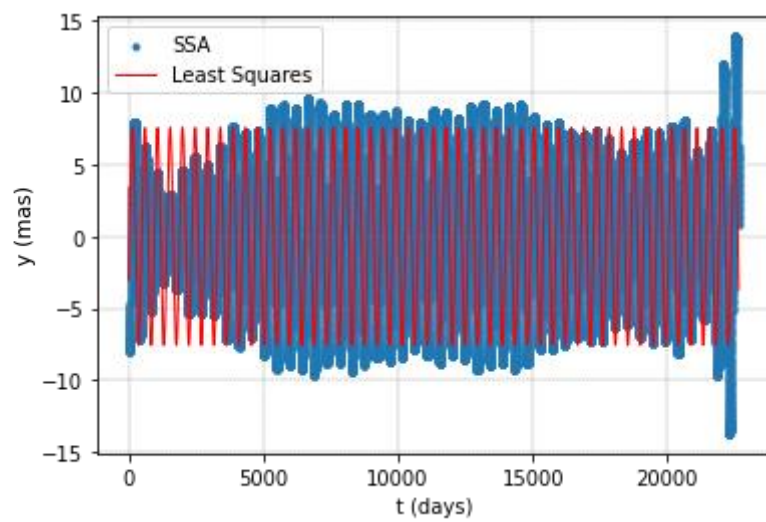
Εικόνα 5.73: Συνόρθωση 5ης περιοδικότητας



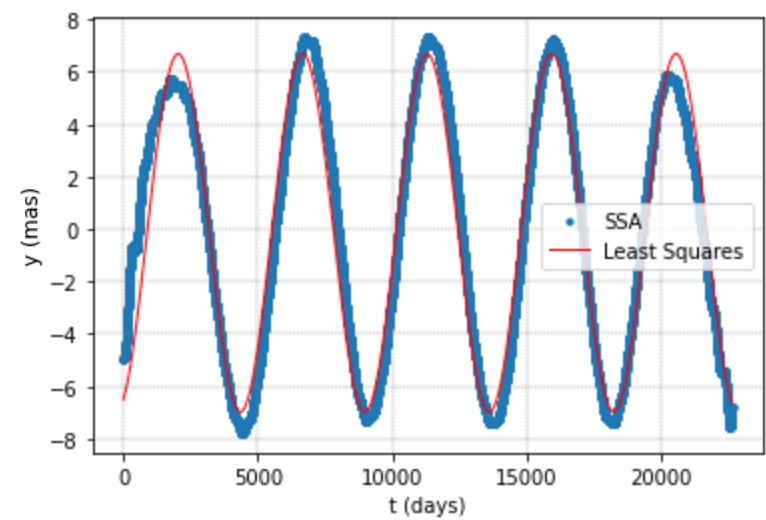
Εικόνα 5.74: Συνόρθωση 6ης περιοδικότητας



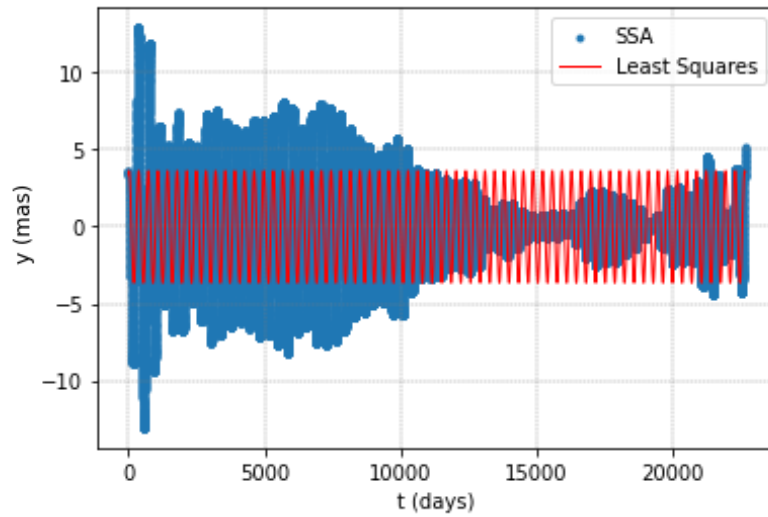
Εικόνα 5.75: Συνόρθωση 7ης περιοδικότητας



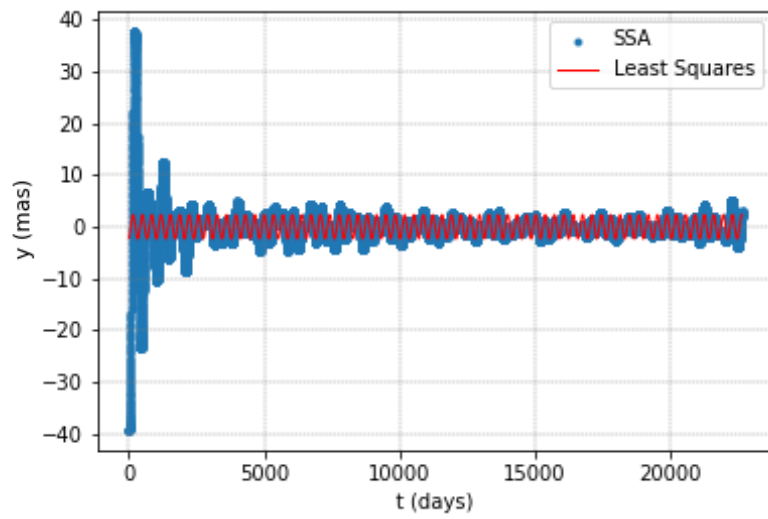
Εικόνα 5.76: Συνόρθωση 8ης περιοδικότητας



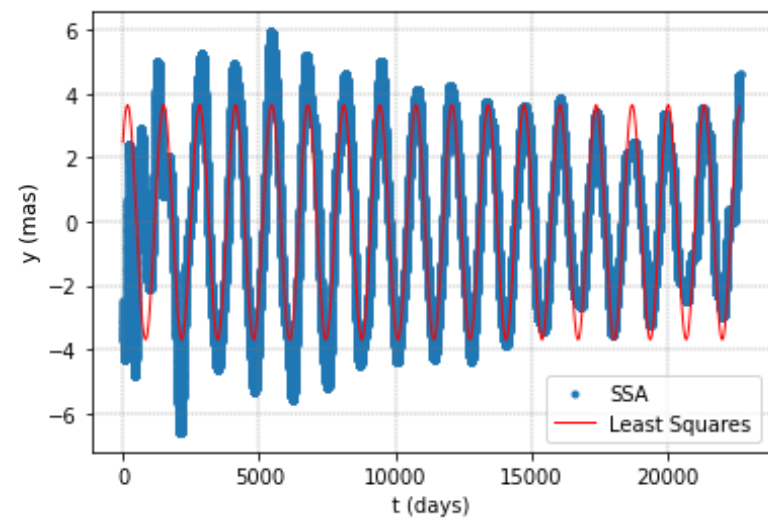
Εικόνα 5.77: Συνόρθωση 9ης περιοδικότητας



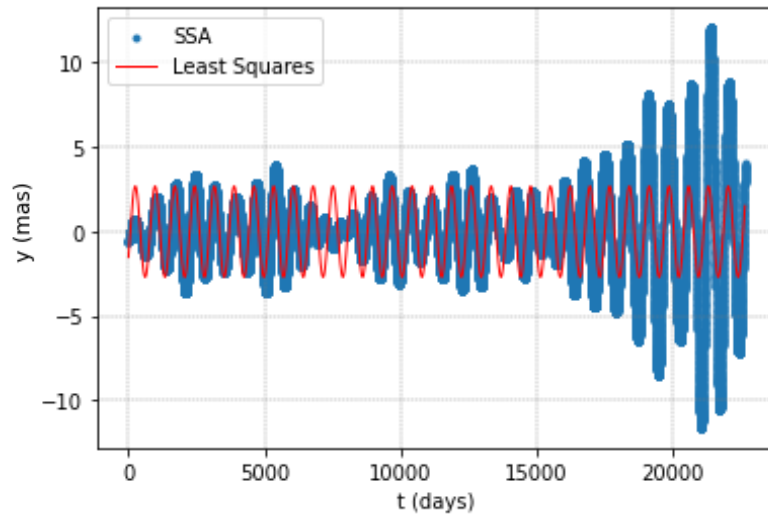
Εικόνα 5.78: Συνόρθωση 10^{ης} περιδικότητας



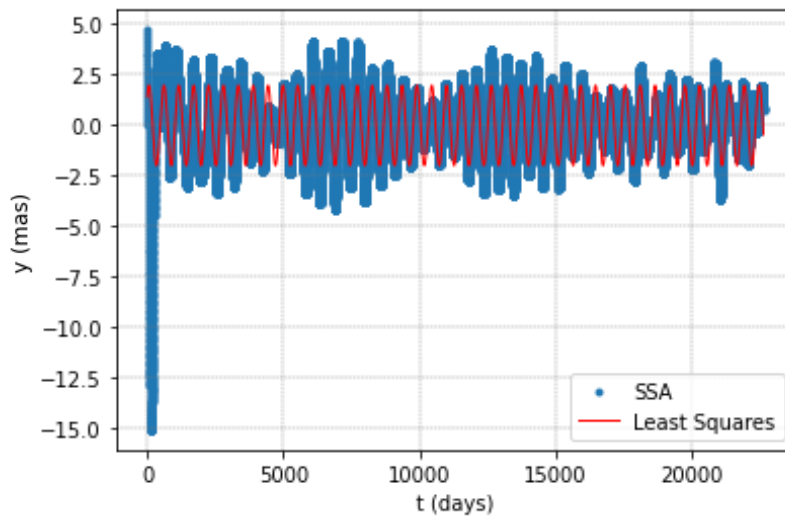
Εικόνα 5.79: Συνόρθωση 11^{ης} περιδικότητας



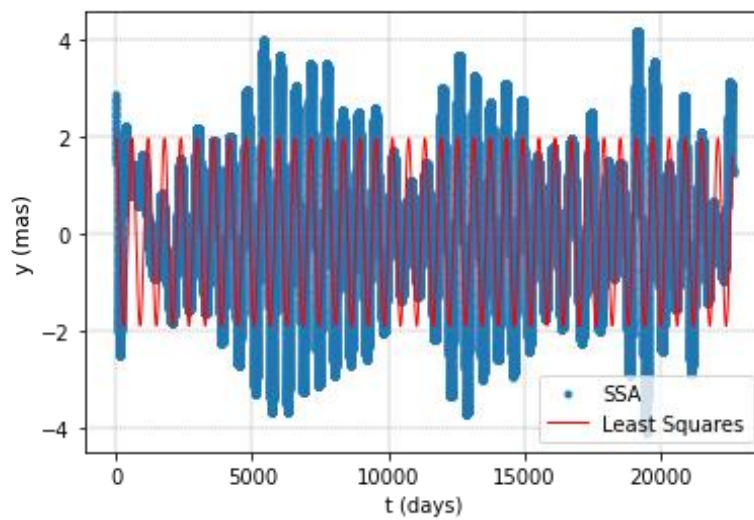
Εικόνα 5.80: Συνόρθωση 12^{ης} περιδικότητας



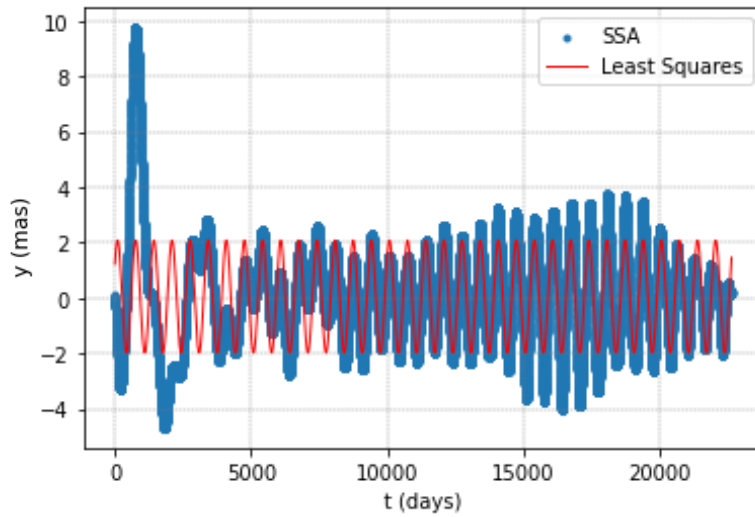
Εικόνα 5.81: Συνόρθωση 13^{ης} περιодικότητας



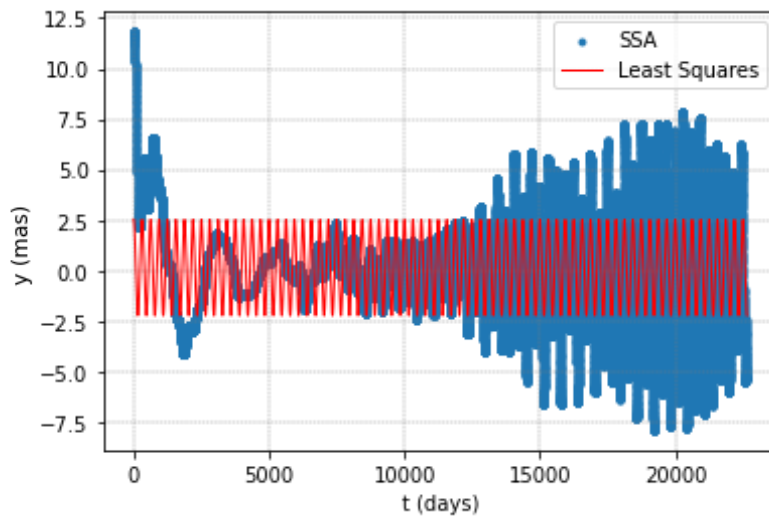
Εικόνα 5.82: Συνόρθωση 14^{ης} περιодικότητας



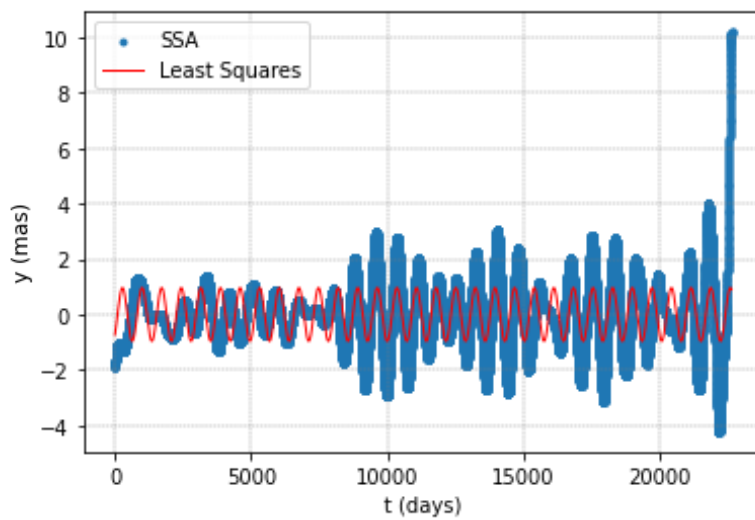
Εικόνα 5.83: Συνόρθωση 15^{ης} περιодικότητας



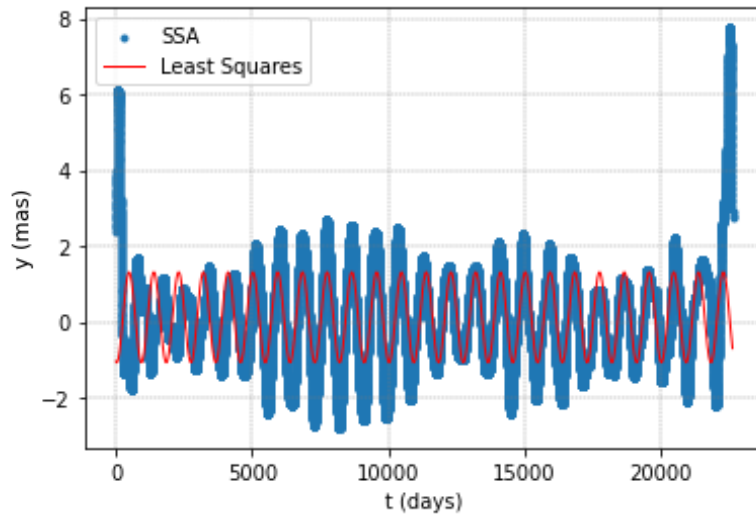
Εικόνα 5.84: Συνόρθωση 16^{ης} περιодικότητας



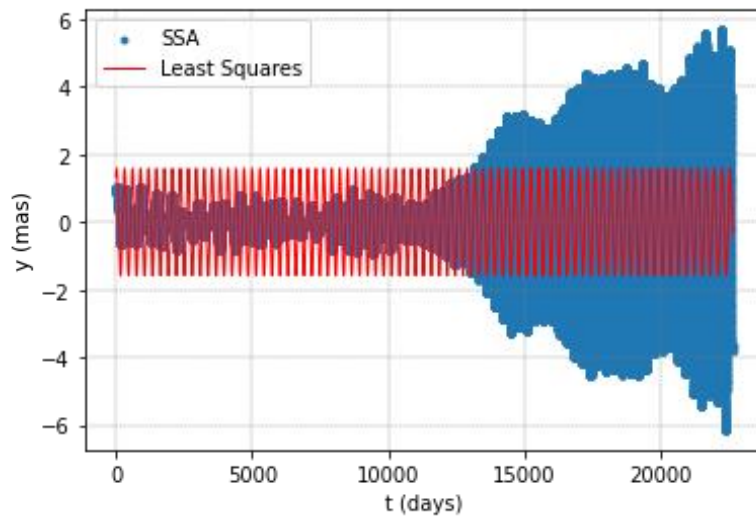
Εικόνα 5.85: Συνόρθωση 17^{ης} περιодικότητας



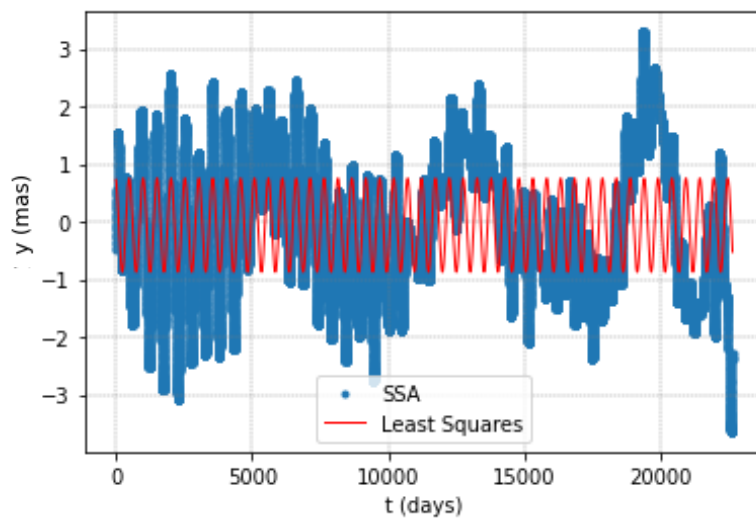
Εικόνα 5.86: Συνόρθωση 18^{ης} περιодικότητας



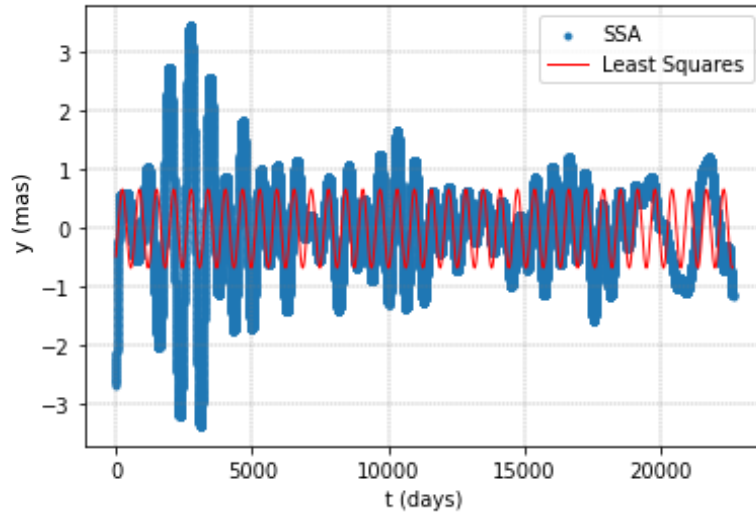
Εικόνα 5.87: Συνόρθωση 19^{ης} περιδικότητας



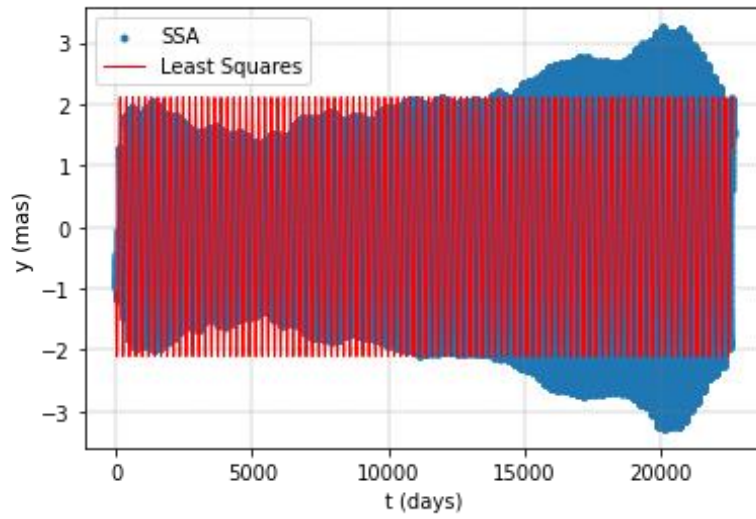
Εικόνα 5.88: Συνόρθωση 20^{ης} περιδικότητας



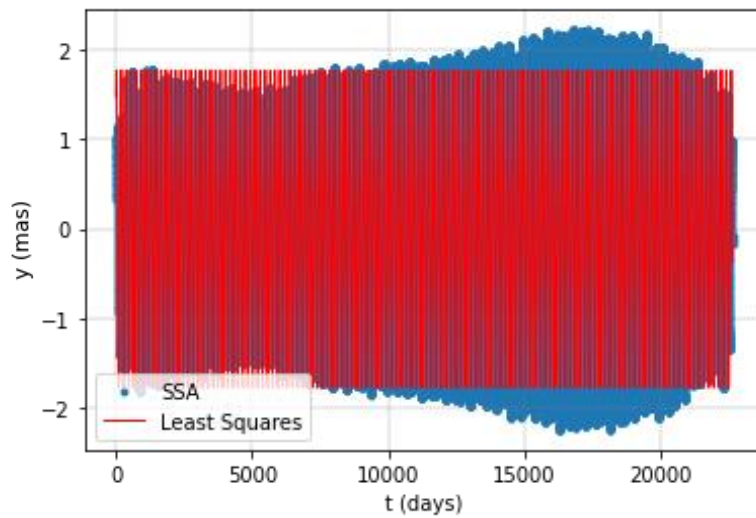
Εικόνα 5.89: Συνόρθωση 21^{ης} περιδικότητας



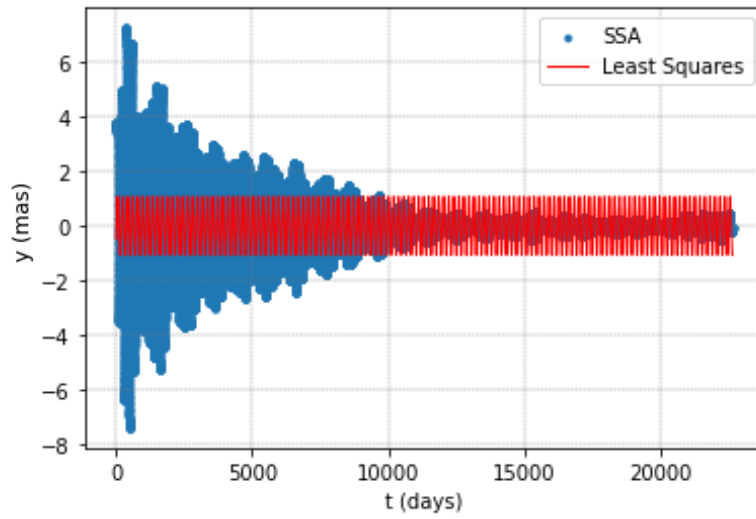
Εικόνα 5.90: Συνόρθωση 22^{ης} περιодικότητας



Εικόνα 5.91: Συνόρθωση 23^{ης} περιодικότητας



Εικόνα 5.92: Συνόρθωση 24^{ης} περιодικότητας



Εικόνα 5.93: Συνόρθωση 25^{ης} περιodicότητας

6. Συμπεράσματα

6.1. Γενικά

Από την εφαρμογή της μεθόδου Singular Spectrum Analysis (SSA), για τις συντεταγμένες του Πόλου από τα δεδομένα που διατίθενται από την υπηρεσία της IERS, φαίνεται ότι είναι μια πολύ ικανή μέθοδος εξαγωγής των συστατικών μιας χρονοσειράς όπως είναι η τάση, οι λοιπές περιοδικότητες και ο θόρυβος. Παρόλο που τα δεδομένα της σειράς ήταν σχετικά πολλά, η επίλυση μπόρεσε να γίνει μέσω ενός συνηθισμένου ηλεκτρονικού υπολογιστή. Συγκεκριμένα, για τις 22645 τιμές και μήκος παραθύρου $L = 11000$ ήταν απαραίτητη η χρήση RAM τουλάχιστον 12 GB καθώς έπρεπε να χειριστεί πίνακες μεγέθους 11000×11646 . Ο κώδικας για την κάθε συντεταγμένη διήρκησε κάτι λιγότερο από 6 ώρες από την αρχή έως το τέλος.

Όσον αφορά τα προσομοιωμένα προβλήματα, ο κώδικας έτρεξε αρκετά γρήγορα μιας και οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν μόνο 400 ώστε να προκύπτουν γρήγορα τα αποτελέσματα και να γίνονται πολλαπλές δοκιμές στις ομαδοποιήσεις των συνιστωσών. Μέσω των προβλημάτων αυτών κατανοήθηκε σε μεγαλύτερο βαθμό η μέθοδος της SSA μιας και τα αποτελέσματα μπορούσαν να συγκριθούν κατευθείαν με τα αρχικά δεδομένα. Αυτό που διαπιστώθηκε από τις προσομοιώσεις, ήταν η πολύ σημαντική επιλογή του μήκους του παραθύρου και των ομαδοποιήσεων των συνιστωσών. Μεγαλύτερο μήκος παραθύρου παρείχε καλύτερα και πιο αναλυτικά αποτελέσματα στην ανάδειξη των περισσότερων περιοδικοτήτων. Επίσης, φάνηκε ότι η μέθοδος παρουσιάζει μια γενικότερη αδυναμία στα άκρα της κάθε συνιστώσας.

Στα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος επιλέχθηκε το μήκος του παραθύρου κοντά στο μισό του μεγέθους και συγκεκριμένα $L = 11000$ και έτσι μπόρεσαν και αναδείχθηκαν 22 περιοδικότητες για τη συντεταγμένη x και άλλες 25 για την y , χρησιμοποιώντας μέχρι και τις πρώτες 70 συνιστώσες στη κάθε περίπτωση.

6.2. Ερμηνείες περιοδικοτήτων

Από τις 22 περιοδικότητες για τη συντεταγμένη x και τις 25 για την y , φάνηκαν αρκετές οι οποίες είχαν παρόμοια συμπεριφορά ως προς την περιοδικότητα και το πλάτος μεταξύ των δύο συντεταγμένων. Τα αποτελέσματα αυτά μπόρεσαν να επιβεβαιωθούν για την εγκυρότητά τους με βάση τη βιβλιογραφία, καθώς για αρκετές από τις περιοδικότητες, οι περίοδοι και τα πλάτη τους ήταν με αρκετά μεγάλη ακρίβεια όπως αυτά που παρουσιάζονται στη διεθνή βιβλιογραφία. Αρκετές από αυτές, όπως ήταν αναμενόμενο, προέρχονται από ακαθόριστα αίτια μιας και οι διεργασίες που πραγματοποιούνται εσωτερικά ή εξωτερικά της Γης και επηρεάζουν τον άξονα περιστροφής της άρα και τις συντεταγμένες του Πόλου είναι πολλές από τις οποίες λίγες είναι αυτές που περιγράφονται με αρκετές λεπτομέρειες στη βιβλιογραφία. Η ερμηνεία των περιοδικοτήτων παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 6.1: Φυσική ερμηνεία κάθε περιοδικότητας

Συντ εταγ μένη	Περι οδικό τητα	T (days)	A (mas)	Φυσικά Αίτια	Αναφορές	T (days) (αναφορά ς)	A (mas) (αναφορ άς)
x	1	433.101	140.265	Ατμοσφαιρικές και ωκεάνιες διεργασίες	Brzeziński & Nastula (2002)	435	100-200
y	1	433.201	139.454	Ατμοσφαιρικές και ωκεάνιες διεργασίες	Brzeziński & Nastula (2002)	435	100-200
x	2	365.017	89.181	Μετατοπίσεις μάζας στη Γη	Torge (2023)	365	100
y	2	365.025	81.711	Μετατοπίσεις μάζας στη Γη	Torge (2023)	365	100
x	3	445.832	40.010	Ωκεάνιες Παλίρροιες	Adhikari & Ivins (2016)	365-2190	≥30
y	3	445.963	40.118	Ωκεάνιες Παλίρροιες	Adhikari & Ivins (2016)	365-2190	≥30
x	4	401.875	10.938	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
y	4	386.733	7.134	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
x	5	376.495	8.357	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
y	5	486.306	7.788	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
x	6	489.021	7.501	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
y	6	402.645	3.093	Αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατμόσφαιρας και ωκεανού	Jin et al. (2021)	365	3,3-3,5
x	7	387.757	8.842	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
y	7	375.042	7.763	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
x	8	465.940	7.476	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
y	8	465.472	7.573	Ατμοσφαιρική Επίδραση	Chao & O'Connor (1988)	≤365	≈10
x	9	351.513	3.790	Αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατμόσφαιρας και ωκεανού	Jin et al. (2021)	365	3,3-3,5
y	9	4630.00 1	6.831	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	10	84.190	1.556	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7

y	10	353.302	3.639	Αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατμόσφαιρας και ωκεανού	Jin et al. (2021)	365	3,3-3,5
x	11	313.179	3.305	Αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατμόσφαιρας και ωκεανού	Jin et al. (2021)	365	3,3-3,5
y	11	345.772	2.325	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	12	182.715	1.742	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	12	1323.546	3.665	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	13	546.270	0.932	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	13	725.968	2.686	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	14	728.297	2.129	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	14	546.841	1.982	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	15	334.374	1.789	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	15	597.675	1.924	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	16	595.742	0.960	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	16	665.548	2.026	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	17	667.827	1.901	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	17	312.388	2.376	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	18	293.752	1.047	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	18	720.050	0.961	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	19	281.276	1.407	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	19	909.158	1.191	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	20	303.521	0.871	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	20	292.656	1.586	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	21	533.808	0.330	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	21	511.054	0.813	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
x	22	257.343	0.678	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	22	630.930	0.670	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	23	231.506	2.111	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	24	182.062	1.773	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7
y	25	184.333	1.070	Άγνωστο	Torge (2023)	>80	<7

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η συμβολή της ατμόσφαιρας και των ωκεανών είναι αρκετά μεγάλη και επηρεάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό την κίνηση του Πόλου σε σχέση με τον στερεό φλοιό της Γης. Για τις κινήσεις οι οποίες είχαν πλάτος ταλάντωσης μικρότερο των 7 mas και περίοδο πάνω από 80 ημέρες, οι ακριβές αιτίες παραμένουν άγνωστες.

6.3. Μελλοντικές εργασίες

Από τα παραπάνω, η μέθοδος της SSA αποδείχτηκε ικανή να εξάγει πολύ καλά αποτελέσματα στην ανάλυση χρονοσειρών. Το εργαλείο αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και σε άλλα προβλήματα. Ένα από αυτά είναι η επιρροή του πλανήτη Άρη στις παλίρροιες της Γης, οι οποίες φάνηκε ότι σχετίζονται άμεσα με την κίνηση του Πόλου σχετικά με τον φλοιό της Γης. Επίσης, θα μπορούσε με τον ίδιο τρόπο να γίνει η ανάλυση της χρονοσειράς του Πόλου του Άρη.

Ακόμα, χρήσιμο θα ήταν να γίνει μια μελέτη όσον αφορά στην πρόβλεψη της θέσης του Πόλου της Γης στα επόμενα χρόνια με χρήση ειδικών φίλτρων πχ. Kalman (Wang et al, 2022) ή της παραλλαγής της μεθόδου της SSA για πρόβλεψη (SSA forecasting), ώστε να φανεί η μελλοντική πορεία.

Η τεχνητή νοημοσύνη είναι άλλο ένα εργαλείο που έχει κάνει αρκετή πρόοδο στο συγκεκριμένο κλάδο. Η πρόβλεψη της κίνησης του Πόλου χρησιμοποιώντας τεχνητή νοημοσύνη γίνεται πλέον με τη χρήση τεχνητών νευρωνικών δικτύων (Artificial Neural Network, ANN) και άλλες τεχνικές.

Παράρτημα Α – Κώδικας προσομοιώσεων

Εισαγωγή βιβλιοθηκών

```
import numpy as np
from numpy import pi
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

Χαρακτηριστικά Διαγραμμάτων

```
plt.rcParams['figure.figsize'] = (10,8)
plt.rcParams['font.size'] = 14
plt.rcParams['image.cmap'] = 'plasma'
plt.rcParams['axes.linewidth'] = 2
```

```
from cycler import cycler
cols = plt.get_cmap('tab10').colors
plt.rcParams['axes.prop_cycle'] = cycler(color=cols)
plt.rcParams['figure.dpi']=100
```

Απεικόνιση 2D πίνακα

```
def plot_2d(m, title=""):
```

```
    plt.imshow(m)
    plt.xticks([])
    plt.yticks([])
    plt.title(title)
```

N = 400 # αριθμός τιμών

```
t = np.arange(0,N)
trend = 2 + 0.3*t
periodic1 = 20 * np.sin(2*pi*t/10)
periodic2 = -10 * np.sin(2*pi*t/200)
```

```
np.random.seed(123)
noise = 2 * (np.random.rand(N) - 0.5)
F = trend + periodic1 + periodic2 + noise
```

```
plt.plot(t, F, lw=2.5)
plt.plot(t, trend, alpha=0.75)
plt.plot(t, periodic1, alpha=0.75)
plt.plot(t, periodic2, alpha=0.75)
```

```
plt.plot(t, noise, alpha=0.5)
plt.legend(["Series ($F$)", "Trend", "Periodic1", "Periodic2", "Noise"])
plt.xlabel("$t$")
plt.ylabel("$F(t)$")
plt.savefig("trend, periodic1, periodic2 and noise")
```

```

L = 50 # Μήκος παραθύρου
K = N - L + 1 # Αριθμός στηλών του πίνακα τροχιάς
# Τοποθέτηση των πινάκων της F ως στήλες του πίνακα τροχιάς
X = np.column_stack([F[i:i+L] for i in range(0,K)])

# Πίνακας Σχεδιασμού
ax = plt.matshow(X)
plt.xlabel("$L$-Lagged Vectors")
plt.ylabel("$K$-Lagged Vectors")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.025)
ax.colorbar.set_label("$F(t)$")
plt.title("Πίνακας Τροχιάς της χρονοσειράς");
plt.savefig("Πίνακας Τροχιάς της χρονοσειράς")

# Βαθμός Πίνακα
d = np.linalg.matrix_rank(X)

#SVD
U, Sigma, V = np.linalg.svd(X)
V = V.T
X_elem = np.array([Sigma[i] * np.outer(U[:,i], V[:,i]) for i in range(0,d)])

if not np.allclose(X, X_elem.sum(axis=0), atol=1e-10):
    print("WARNING: The sum of X's elementary matrices is not equal to X!")

# Οι πρώτοι 15 πίνακες μετά την SVD
n = min(15, d)
for i in range(n):
    plt.subplot(4,4,i+1)
    title = "$\mathbf{X}_{i}$" + str(i) + "$"
    plot_2d(X_elem[i], title)

plt.savefig("Πρώτοι πίνακες")

# Διαγράμματα Σχετικής και Αθροιστικής
sigma_sumsq = (Sigma**2).sum()
fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(14,5))
ax[0].plot(Sigma**2 / sigma_sumsq * 100, lw=2.5)
ax[0].set_xlim(0,10)
ax[0].set_title("Διάγραμμα Σχετικής Συνεισφοράς")
ax[0].set_xlabel("$i$")
ax[0].set_ylabel("Contribution (%)")
ax[1].plot((Sigma**2).cumsum() / sigma_sumsq * 100, lw=2.5)
ax[1].set_xlim(0,10)
ax[1].set_title("Διάγραμμα Αθροιστικής Συνεισφοράς")
ax[1].set_xlabel("$i$")

```

```

ax[1].set_ylabel("Contribution (%)");
plt.savefig("Διαγράμματα Συνεισφορών")

# Δημιουργία Χρονοσειρών
def X_to_TS(X_i):

    X_rev = X_i[::-1]

    return np.array([X_rev.diagonal(i).mean() for i in range(-X_i.shape[0]+1,
X_i.shape[1])])
n = min(12,d)

# Χρώματα διαγραμμάτων
fig = plt.subplot()
color_cycle = cycler(color=plt.get_cmap('tab20').colors)
fig.axes.set_prop_cycle(color_cycle)

# Οι αρχικοί πίνακες μετατρέπονται σε χρονοσειρές
for i in range(n):
    F_i = X_to_TS(X_elem[i])
    fig.axes.plot(t, F_i, lw=2)

fig.axes.plot(t, F, alpha=1, lw=1)
fig.set_xlabel("$t$")
fig.set_ylabel(r"$\tilde{F}_i(t)$")
legend = [r"$\tilde{F}_{\%s}$" %i for i in range(n)] + ["F$"]

fig.legend(legend, loc=(1.02,0));
plt.savefig("οι συνιστώσες πριν την ομαδοποίηση")

w = np.array(list(np.arange(L)+1) + [L]*(K-L-1) + list(np.arange(L)+1)[::-1])

# Πάρε όλες τις συνιστώσες της χρονοσειράς και βάλτες σαν στήλες στον πίνακα F_elem
F_elem = np.array([X_to_TS(X_elem[i]) for i in range(d)])

F_wnorms = np.array([w.dot(F_elem[i]**2) for i in range(d)])
F_wnorms = F_wnorms**-.5

# Πίνακας Συσχέτισης
Wcorr = np.identity(d)
for i in range(d):
    for j in range(i+1,d):
        Wcorr[i,j] = abs(w.dot(F_elem[i]*F_elem[j]) * F_wnorms[i] * F_wnorms[j])
        Wcorr[j,i] = Wcorr[i,j]

```

```

ax = plt.imshow(Wcorr)
plt.xlabel(r"$\tilde{F}_i$")
plt.ylabel(r"$\tilde{F}_j$")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("$W_{ij}$")
plt.clim(0,1)
plt.savefig("πινακας συσχετισης ολων")

```

```

ax = plt.imshow(Wcorr)
plt.xlabel(r"$\tilde{F}_i$")
plt.ylabel(r"$\tilde{F}_j$")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("$W_{ij}$")
plt.xlim(0,10)
plt.ylim(10,0)
plt.clim(0,1)
plt.title(r"W-Correlation for Components 0-10");
plt.savefig("pinakas sisxetisis 0-10")

```

Οι ομαδοποιημένες συνιστώσες

```

F_trend = X_to_TS(X_elem[[0]].sum(axis=0))
F_periodic1 = X_to_TS(X_elem[[1,2]].sum(axis=0))
F_periodic2 = X_to_TS(X_elem[[3]].sum(axis=0))

```

```

F_noise = X_to_TS(X_elem[4:].sum(axis=0))

```

Απεικόνισε τη χρονοσειρά και τις συνιστώσες της

```

plt.plot(t,F, lw=1)
plt.plot(t, F_trend)
plt.plot(t, F_periodic1)
plt.plot(t, F_periodic2)
plt.plot(t, F_noise, alpha=0.5)
plt.xlabel("$t$")
plt.ylabel(r"$\tilde{F}^{(j)}$")
groups = ["trend", "periodic1", "periodic 2", "noise"]
legend = ["$F$"] + [r"$\tilde{F}^{(\mathrm{{s}})}$"%group for group in groups]
plt.legend(legend)
plt.show()

```

```

components = [("Trend", trend, F_trend),
              ("Periodic 1", periodic1, F_periodic1),
              ("Periodic 2", periodic2, F_periodic2),
              ("Noise", noise, F_noise)
             ]

```

```
# Απεικόνισε μαζί τα αποτελέσματα της SSA(πορτοκαλί) και τα κανονικά(μπλε)
fig = plt.figure()

n=1
for name, orig_comp, ssa_comp in components:
    ax = fig.add_subplot(3,2,n)
    ax.plot(t, orig_comp, linestyle="--", lw=2.5, alpha=0.7)
    ax.plot(t, ssa_comp)
    ax.set_title(name, fontsize=16)
    ax.set_xticks([])
    n += 1

fig.tight_layout()
plt.savefig("σύγκριση SSA και πραγματικότητας")
```


Παράρτημα Β – Κώδικας συντεταγμένης x

```
import numpy as np
from numpy import pi
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import time

# Χαρακτηριστικά Διαγραμμάτων
plt.rcParams['figure.figsize'] = (10,8) #Διαστάσεις διαγράμματος
plt.rcParams['font.size'] = 14 #Μέγεθος του τίτλου
plt.rcParams['image.cmap'] = 'plasma' #Χρωματική Παλέτα
plt.rcParams['axes.linewidth'] = 2 #Πάχος γραμμών των αξόνων

from cycler import cycler
cols = plt.get_cmap('tab10').colors
plt.rcParams['axes.prop_cycle'] = cycler(color=cols)
plt.rcParams['figure.dpi']=100

# Για το πλοτάρισμα του 2D πίνακα
def plot_2d(m, title=""):
    plt.imshow(m)
    plt.xticks([])
    plt.yticks([])
    plt.title(title)

#Εισαγωγή των δεδομένων (ημέρα,x)

smallseries=[]
data =
np.loadtxt('C:/Users/Kafri/Documents/Survey_Engineering/Diplomatiki/pole_coordina
tes.txt')
num_lines=sum(1 for line in data)
day=np.linspace(1,num_lines,num_lines)
x=data[:,3]
print("num_lines=",num_lines)
num_lines= 22645
num=[]
year=[]

#Εμφανίζουμε το διάγραμμα της σειράς
plt.plot(x, color="blue", lw=1.5)
fig = plt.subplot()

#Υπολογισμός των χρόνων
num_years = len(day) // 365
```

```

start_year = 1962
end_year = start_year + num_years

# Δείξε τα χρόνια ανά 5
years = np.arange(start_year, end_year, 5)

# Ετικέτες άξονα x
fig.set_xticks(day[::365*5])
fig.set_xticklabels([str(year) for year in years], rotation=45)
plt.xlabel('Time (years)')
plt.ylabel('x (mas)')
plt.savefig("x_data_plot.png")
plt.show()

N=len(x)
L=11000 # Μήκος Παραθύρου του πίνακα τροχιάς X(αριθμός γραμμών πίνακα)
if (L>N/2 or L<2):
    print(f'Δώσε "L" από 2 έως {N/2}')
K=N-L+1 # Αριθμός στηλών πίνακα X
print("L=",L, ", K=",K)
L= 11000 , K= 11646

# Πίνακας Τροχιάς
X = np.column_stack([x[i:i+L] for i in range(0,K)])
print("Διαστάσεις του πίνακα τροχιάς:",np.shape(X))
Διαστάσεις του πίνακα τροχιάς: (11000, 11646)

start = time.time()

#Ελέγχουμε και οπτικά ότι ο πίνακας X είναι αντιδιαγώνιος
plt.rcParams['image.cmap'] = 'plasma' #Χρωματική παλέτα
ax = plt.matshow(X)
plt.xlabel("$L$-Lagged Vectors")
plt.ylabel("$K$-Lagged Vectors")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("x")
plt.savefig("Trajectory.png")
plt.show()

end = time.time()
t = end - start
print(f'X: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60} seconds")

start = time.time()

def elem_matr(U,S,V):

```

#Υπολογισμός των στοιχειωδών πινάκων X_elem[i] του X

```
for i in range(0,d):
    outer_product=np.outer(U[:,i],V[:,i])
    X_elem=S[i]*outer_product
    yield X_elem
```

Βαθμός Πίνακα

```
d = np.linalg.matrix_rank(X)
U, S, V = np.linalg.svd(X)
V = V.T
```

```
end = time.time()
t = end - start
print(f"SVD: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60} seconds")
```

Οι πρώτοι 20 πίνακες μετά την SVD.

```
start = time.time()
```

```
n = min(d,20)
for i, X_elem in enumerate(elem_matr(U, S, V)):
    if i >= n:
        break
    plt.subplot(5,6,i+1)
    title = "$\mathbf{X}_{" + str(i) + "}$"
    plot_2d(X_elem, title)
plt.tight_layout()
```

```
end = time.time()
t = end - start
print(f"First_20_X_elem: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60} seconds")
```

Διαγράμματα Σχετικής και Αθροιστικής Συνεισφοράς

```
sigma_sumsq = (S**2).sum()
fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(14,5))
ax[0].plot(S**2 / sigma_sumsq * 100, lw=2.5)
ax[0].set_xlim(0,30)
ax[0].set_title("Σχτική Συνεισφορά του $\mathbf{X}_i$ στον πίνακα τροχιάς")
ax[0].set_xlabel("$i$")
ax[0].set_ylabel("Συνεισφορά (%)")
ax[1].plot((S**2).cumsum() / sigma_sumsq * 100, lw=2.5)
ax[1].set_xlim(0,30)
ax[1].set_title("Αθροιστική Συνεισφορά του $\mathbf{X}_i$ στον πίνακα τροχιάς")
ax[1].set_xlabel("$i$")
ax[1].set_ylabel("Συνεισφορά (%)");
```

```

def X_to_TS(X_i):

    #Αντιστροφή της σειράς των γραμμών του X_i γιατί χρειαζόμαστε
    αντιδιαγώνιους, ενώ η Python κάνει υπολογισμούς με διαγώνιους
    X_rev = X_i[::-1]

    anti_diagonal_means=[]

    for i in range(-X_i.shape[0]+1, X_i.shape[1]):

        #Βρίσκουμε τη διαγώνιο στη θέση i από τον πίνακα X_rev
        anti_diagonal = X_rev.diagonal(i)

        #Υπολογίζουμε το μέσο όρο των τιμών των αντιδιαγωνίων
        mean = anti_diagonal.mean()

        #Προσθέτουμε στη λίστα των αντιδιαγωνίων το μέσο όρο που βρήκαμε
        προηγουμένως
        anti_diagonal_means.append(mean)

    return np.array(anti_diagonal_means)

#Μετατροπή των στοιχειωδών πινάκων σε χρονοσειρές
start = time.time()
elem_matrices = elem_matr(U,S,V)

#Δημιουργία κενού array για τις στοιχειώδεις σειρές
F_elem = []

# Μετατροπή όλων των στοιχειωδών πινάκων σε χρονοσειρά
for i,X_elem in enumerate(elem_matrices):
    ts = X_to_TS(X_elem) #Μετατροπή σε χρονοσειρά μέσω της συνάρτησης X_to_TS
    F_elem.append(ts) #Όλες οι στοιχειώδεις χρονοσειρές αποθηκεύονται ως στήλες στο
    F_elem array
end = time.time()
t = end - start

print(f"Elementary: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60} seconds")

#Πίνακας βαρών w.
w = np.empty(N,dtype=int)

for i in range(N):
    if i<L:
        w[i] = i+1
    elif i<K:

```

```

    w[i] = L
else:
    w[i] = N-i

#Υπολογίζουμε το κάθε βάρος
start = time.time()

#Εσωτερικό γινόμενο
F_wnorms = np.array([w.dot(F_elem[i]**2) for i in range(d)])
F_wnorms = F_wnorms**(-0.5)

#Υπολογισμός του Wcorr πίνακα
#Προσπέλαση όλων των ζευγαριών i και j (i != j). Να σημειωθεί ότι Wij = Wji.
Wcorr = np.identity(d)
for i in range(d):
    for j in range(i+1,d):
        Wcorr[i,j] = abs(w.dot(F_elem[i]*F_elem[j]) * F_wnorms[i] * F_wnorms[j])
        Wcorr[j,i] = Wcorr[i,j]

end = time.time()
t = end - start
print(f"W-correlation matrix: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60}
seconds")

start = time.time()

#Απεικόνιση ολόκληρου του W-correlation πίνακα
ax = plt.imshow(Wcorr)
plt.xlabel(r"$\tilde{F}_i$")
plt.ylabel(r"$\tilde{F}_j$")
plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("$W_{ij}$")
plt.clim(0,1)
plt.savefig("W-corr.png")
plt.show()

end = time.time()
t = end - start
print(f"W-correlation matrix: {t//3600} hours, {(t%3600)//60} minutes, {t%60}
seconds")

#Εστίαση σε ένα συγκεκριμένο μέρος του πίνακα για καλύτερη ανάλυση
n1 = 10
n2 = 20
ax = plt.imshow(Wcorr)
plt.xlabel(r"$\tilde{F}_i$")
plt.ylabel(r"$\tilde{F}_j$")

```

```

plt.colorbar(ax.colorbar, fraction=0.045)
ax.colorbar.set_label("$W_{ij}$")
plt.xlim(n1-0.5,n2+0.5)
plt.ylim(n2+0.5,n1-0.5)
plt.clim(0,1)
plt.savefig(f'W-corr({n1}_{n2}).png')
plt.show()

# Διάγραμμα της κάθε συνιστώσας

fig = plt.subplot()

#Ορίζουμε από ποια μέχρι ποια συνιστώσα θέλουμε να δούμε (από n1 έως n2)
n1= 0
n2 = min(1,d) #Σε περίπτωση σειράς χωρίς θόρυβο, όπου δηλαδή d < n2.
for i in range(n1,n2+1):
    fig.axes.plot(F_elem[i], lw=2) #Δημιουργούμε το διάγραμμα με τις συνιστώσες

#Υπολογισμός των χρόνων
num_years = len(day) // 365
start_year = 1962
end_year = start_year + num_years

# Δείξε τα χρόνια ανά 5
years = np.arange(start_year, end_year, 5)

# Ετικέτες άξονα x
fig.set_xticks(day[::365*5])
fig.set_xticklabels([str(year) for year in years], rotation=45)

# Τίτλοι Αξόνων
fig.set_xlabel("Time (Year)")
fig.set_ylabel("x (mas)")

#Υπόμνημα
legend = [r"$\tilde{F}_{\%s}$" % i for i in range(n1, n2 + 1)] + ["$F$"]
fig.legend(legend, loc=(1.01, 0))

# Αποθήκευση του διαγράμματος και εκτύπωση
plt.savefig(f'Components({n1}_{n2}).png')
plt.show()

# Ομαδοποίηση των συνιστωσών
trend = F_elem[2] #Τάση της σειράς
periodic1= F_elem[0]+F_elem[1]
periodic2 = F_elem[3]+F_elem[4]
periodic3 = F_elem[5]+F_elem[6]

```

```

periodic4 = F_elem[7]+F_elem[8]
periodic5 = F_elem[9]+F_elem[10]
periodic6 = F_elem[11]+F_elem[12]
periodic7 = F_elem[14]+F_elem[15]
periodic8 = F_elem[16]+F_elem[17]
periodic9 = F_elem[19]+F_elem[20]
periodic10 = F_elem[21]+F_elem[22]
periodic11 = F_elem[23]+F_elem[24]
periodic12 = F_elem[25]+F_elem[26]
periodic13 = F_elem[27]+F_elem[29]
periodic14 = F_elem[30]+F_elem[31]
periodic15 = F_elem[32]+F_elem[33]
periodic16 = F_elem[34]+F_elem[36]
periodic17 = F_elem[38]+F_elem[39]
periodic18 = F_elem[40]+F_elem[41]
periodic19 = F_elem[44]+F_elem[45]
periodic20 = F_elem[55]+F_elem[56]
periodic21 = F_elem[57]+F_elem[58]
periodic22 = F_elem[59]+F_elem[60]

```

```

components=[periodic1,periodic2,periodic3,periodic4,periodic5,periodic6,periodic7,pe
riodic8,periodic9,periodic10,periodic11,periodic12,periodic13,periodic14,periodic15,p
eriodic16,periodic17,periodic18,periodic19,periodic20,periodic21,periodic22]

```

#Οι συνιστώσες του θορύβου

```

noise=np.zeros_like(trend)
noise+=F_elem[13]+F_elem[18]+F_elem[28]+F_elem[35]+F_elem[37]+F_elem[42]+F
_elem[43]+F_elem[46]+F_elem[47]+F_elem[48]+F_elem[49]+F_elem[50]+F_elem[51]
+F_elem[52]+F_elem[53]+F_elem[54]
for i in range(61,d):
    noise += F_elem[i]

```

Όλες οι συνιστώσες σε ένα διάγραμμα

```

fig = plt.subplot()

```

```

plt.plot(x, lw=1)

```

```

plt.plot(trend)

```

```

for i in range(22):

```

```

    plt.plot(components[i])

```

```

plt.plot(noise, alpha=0.5)

```

#Υπολογισμός των χρόνων

```

num_years = len(day) // 365

```

```

start_year = 1962

```

```

end_year = start_year + num_years

```

```

# Δείξε τα χρόνια ανά 5
years = np.arange(start_year, end_year, 5)

# Ετικέτες άξονα x
fig.set_xticks(day[::365*5])
fig.set_xticklabels([str(year) for year in years], rotation=45)

plt.xlabel("Time(Year)")
plt.ylabel("x(mas)")
groups = ["trend"]+[ f"periodic {x+1}" for x in range(22)]+["noise"]
legend = ["original"] + [group for group in groups]
plt.legend(legend, loc=(1.01,0.0))
plt.savefig("Grouped.png")
plt.show()

#Διάγραμμα κάθε συνιστώσας χωριστά
fig = plt.subplot()

#Υπολογισμός των χρόνων
num_years = len(day) // 365
start_year = 1962
end_year = start_year + num_years

# Δείξε τα χρόνια ανά 5
years = np.arange(start_year, end_year, 5)

# Ετικέτες άξονα x
fig.set_xticks(day[::365*5])
fig.set_xticklabels([str(year) for year in years], rotation=45)

plt.plot(trend)

plt.xlabel("Time(Year)")
plt.ylabel("x(mas)")
plt.title("Trend",fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.savefig('trend.png')
plt.show()

for i in range(22):
    fig = plt.subplot()

    #Υπολογισμός των χρόνων
    num_years = len(day) // 365
    start_year = 1962
    end_year = start_year + num_years

```



```

# Δείξε τα χρόνια ανά 5
years = np.arange(start_year, end_year, 5)

# Ετικέτες άξονα x
fig.set_xticks(day[::365*5])
fig.set_xticklabels([str(year) for year in years], rotation=45)
plt.plot(components[i])
plt.xlabel("Time(Year)")
plt.ylabel("x(mas)")
plt.title(f"Periodic {i+1}", fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.savefig(f'periodic{i+1}.png')
plt.show()
fig = plt.subplot()

#Υπολογισμός των χρόνων
num_years = len(day) // 365
start_year = 1962
end_year = start_year + num_years

# Δείξε τα χρόνια ανά 5
years = np.arange(start_year, end_year, 5)

# Ετικέτες άξονα x
fig.set_xticks(day[::365*5])
fig.set_xticklabels([str(year) for year in years], rotation=45)
plt.plot(noise)
#plt.xticks(num[::365*5],year[::365*5], rotation=45)
plt.xlabel("Time(Year)")
plt.ylabel("x(mas)")
plt.title("Noise",fontsize=16)
plt.tight_layout()
plt.savefig('noise.png')
plt.show()

# Περιοδικότητες X
for group_num in range(1, 23):
    filename = f'X_Periodic_{group_num}.txt'
    f=open(filename,"w")
    for i in range(22645):
        f.write('%8d' % i + ' ' + '%8.4f' % components[group_num-1][i] + '\n')
    f.close()

# Τάση X
filename = "X_Trend.txt"
with open(filename, "w") as f:

```

```
for i in range(len(trend)):
    f.write('%8d %8.4f\n' % (i, trend[i]))
```

Ο ίδιος κώδικας επαναλαμβάνεται και για την y συντεταγμένη, με μοναδική διαφορά τις κάποιες παραπάνω περιοδικότητες σε αυτήν.

Βιβλιογραφία

- Abarca del Rio, R., & Cazenave, A. (1994). Interannual variations in the Earth's polar motion for 1963–1991: Comparison with atmospheric angular momentum over 1980–1991. *Geophysical Research Letters*, *21*(22), 2361–2364. <https://doi.org/10.1029/94GL02285>
- Adhikari, S., & Ivins, E. R. (2016). Climate-driven polar motion: 2003–2015. *Science Advances*, *2*(4). <https://doi.org/10.1126/sciadv.1501693>
- Barnes, R. T. H., Hide, R., White, A. A., & Wilson, C. A. (1983). Atmospheric angular momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, *387*, 31–73. <https://doi.org/10.1098/rspa.1983.0050>
- Brzeziński, A., & Nastula, J. (2002). Oceanic excitation of the Chandler wobble. *Advances in Space Research*, *30*(2), 195–200. [https://doi.org/10.1016/S0273-1177\(02\)00284-3](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(02)00284-3)
- Chao, B. F., & O'Connor, W. P. (1988). Global surface-water-induced seasonal variations in the Earth's rotation and gravitational field. *Geophysical Journal International*, *94*(2), 263–270. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1988.tb05900.x>
- Chao, B. F., & Rubincam, D. P. (1990). Variations of Mars gravitational field and rotation due to seasonal CO₂ exchange. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *95*(B9), 14755–14760. <https://doi.org/10.1029/JB095iB09p14755>
- Chen, J. L., & Wilson, C. R. (2005). Hydrological excitations of polar motion, 1993–2002. *Geophysical Journal International*, *160*(3), 833–839. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02522.x>
- Chen, J. -L., Wilson, C. R., Hu, X. -G., Zhou, Y. -H., & Tapley, B. D. (2004). Oceanic effects on polar motion determined from an ocean model and satellite altimetry: 1993–2001. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *109*(B2). <https://doi.org/10.1029/2003JB002664>
- D'Arcy, J. (2018). *Introducing SSA for Time Series Decomposition*. <https://www.kaggle.com/code/jdarcy/introducing-ssa-for-time-series-decomposition/notebook>
- Dick, W. R., & Thaller, D. (2014). *IERS Annual Report 2013*. <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/AnnualReports/AnnualReport2013.html?nn=94904>
- Dickey, J. O., Marcus, S. L., Johns, C. M., Hide, R., & Thompson, S. R. (1993). The oceanic contribution to the Earth's seasonal angular momentum budget. *Geophysical Research Letters*, *20*(24), 2953–2956. <https://doi.org/10.1029/93GL03186>
- Eubanks, T. M. (1993). *Variations in the Orientation of the Earth* (D. E. D. L. T. D. L. Smith, Ed.; pp. 1–54). <https://doi.org/10.1029/GD024p0001>
- Gross, R. S. (1992). Correspondence between theory and observations of polar motion. *Geophysical Journal International*, *109*(1), 162–170. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1992.tb00086.x>

- Gross, R. S., Fukumori, I., & Menemenlis, D. (2003). Atmospheric and oceanic excitation of the Earth's wobbles during 1980–2000. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *108*(B8). <https://doi.org/10.1029/2002JB002143>
- Guo, J. Y., Greiner-Mai, H., & Ballani, L. (2005). A spectral search for the inner core wobble in Earth's polar motion. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *110*(B10). <https://doi.org/10.1029/2004JB003377>
- Hinnov, L. A., & Wilson, C. R. (1987). An estimate of the water storage contribution to the excitation of polar motion. *Geophysical Journal International*, *88*(2), 437–459. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1987.tb06652.x>
- Jeffreys, H. (1916). Causes contributory to the Annual Variation of Latitude. (Plate 8.). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *76*(6), 499–525. <https://doi.org/10.1093/mnras/76.6.499>
- Jin, X., Liu, X., Guo, J., & Shen, Y. (2021). Analysis and prediction of polar motion using MSSA method. *Earth, Planets and Space*, *73*(1), 147. <https://doi.org/10.1186/s40623-021-01477-2>
- Kuçak, R. A., Uluğ, R., & Akyılmaz, O. (2018). The Prediction of Nonlinear Polar Motion Based on Artificial Neural Network (ANN) and Fuzzy Inference System (FIS). In *Advances in Nonlinear Geosciences* (pp. 297–304). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58895-7_16
- Ponte, R. M. (1997). Oceanic excitation of daily to seasonal signals in Earth rotation: results from a constant-density numerical model. *Geophysical Journal International*, *130*(2), 469–474. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb05662.x>
- Ponte, R. M., & Stammer, D. (1999). Role of ocean currents and bottom pressure variability on seasonal polar motion. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, *104*(C10), 23393–23409. <https://doi.org/10.1029/1999JC900222>
- Torge, W., Müller, J., & Pail, R. (2023). *Geodesy* (5th ed.). De Gruyter Oldenbourg. <https://doi.org/10.1515/9783110723304>
- Wahr, J. M. (1982). The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble -- I. Theory. *Geophysical Journal International*, *70*(2), 349–372. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1982.tb04972.x>
- Wang, L., Miao, W., & Wu, F. (2022). A new polar motion prediction method combined with the difference between polar motion series. *Geodesy and Geodynamics*, *13*(6), 564–572. <https://doi.org/10.1016/j.geog.2022.07.001>
- Wilson, C. R., & Haubrich, R. A. (2007). Meteorological Excitation of the Earth's Wobble. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, *46*(3), 707–743. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1976.tb01254.x>
- Wilson, C. R., & Kuehne, J. (1990). *Air and Water Contributions to Polar Motion Excitation* (pp. 74–81). https://doi.org/10.1007/978-1-4684-6399-6_10
- Yu, K., Shi, H., Sun, M., Li, L., Li, S., Yang, H., & Wei, E. (2024). Combined BiLSTM and ARIMA models in middle- and long-term polar motion prediction. *Studia*

Geophysica et Geodaetica, 68(1-2), 25-40. <https://doi.org/10.1007/s11200-023-0134-y>

- Zotov, L., Bizouard, C., Shum, C. K., Zhang, C., Sidorenkov, N., & Yushkin, V. (2022). Analysis of Earth's polar motion and length of day trends in comparison with estimates using second degree stokes coefficients from satellite gravimetry. *Advances in Space Research*, 69(1), 308-318. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.09.010>
- Βέης, Γ., Μπιλλήρης, Χ., & Παπαζήση, Κ. (2011). *Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Κορακίτης, Ρ. (2008). *Σημειώσεις Γεωδαιτικής Αστρονομίας* (5th ed.). Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Παππά, Α. (2023). *Μελέτη της μεταβολής του μήκους της ημέρας με φασματική ανάλυση*. Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. <http://dx.doi.org/10.26240/heal.ntua.26638>