



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΔΠΜΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

**Εξομάλυνση Συναρτησιακών  
Βελτιστοποίησης σε Μη-Δομημένα  
Επιφανειακά Πλέγματα**

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

**ΤΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Ι. ΦΟΥΝΤΗ**

Επιβλέπων : ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ

Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ , ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2011



Αφιερώνεται στην κόρη μου και στη γιαγιά μου.





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

# **Εξομάλυνση Συναρτησιακών Βελτιστοποίησης σε Μη-Δομημένα Επιφανειακά Πλέγματα**

ΤΟΥ **ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Ι. ΦΟΥΝΤΗ**

Επιβλέπων : ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ, Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ , ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Σε συνήθη προβλήματα της υπολογιστικής μηχανικής, όπως είναι η αεροδυναμική βελτιστοποίηση γεωμετρικών μορφών με χρήση αιτιοκρατικών μεθόδων, η τελική λύση προκύπτει ύστερα από αρκετούς υπολογιστικούς κύκλους, κατά τους οποίους, η κλίση (gradient) του υπόψη συναρτησιακού είναι το κύριο μέγεθος που κατευθύνει τη διαδικασία βελτιστοποίησης και καθορίζει το τελικό υπολογιστικό κόστος.

Στην περίπτωση όπου η εξεταζόμενη γεωμετρική μορφή, διακριτοποιείται χωρίς παραμετροποίηση, η χρησιμοποίηση της συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό της κλίσης του υπόψη συναρτησιακού, οδηγεί αναπόφευκτα σε μη-λείες παραγώγους. Στη συνέχεια, αν αυτές χρησιμοποιηθούν σε μια μέθοδο διανυσματικής κλίσης όπως αυτή της απότομης καθόδου, θα οδηγήσουν σε μη-λείες τελικές γεωμετρίες και μειωμένες αεροδυναμικές επιδόσεις.

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η προσθήκη ενός πολύ χρήσιμου εργαλείου στην παραπάνω διαδικασία. Το εργαλείο αυτό περιλαμβάνει την εξομάλυνση της κλίσης του συναρτησιακού ως προς τις συντεταγμένες των κομβικών σημείων, ενός μη-δομημένου επιφανειακού πλέγματος, που διακριτοποιεί τη σχεδιαζόμενη επιφάνεια. Αυτό επιτυγχάνεται με την επίλυση της εξίσωσης εξομάλυνσης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, στην επιφάνεια της εκάστοτε γεωμετρίας και την εξομάλυνση του πεδίου των παραγώγων ευαισθησίας πάνω σε αυτή.

Η χρησιμοποίηση της διαδικασίας εξομάλυνσης, σε ένα υπάρχον πρόβλημα βελτιστοποίησης, αναμένεται να οδηγήσει και σε σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους και η μελέτη αυτής της επίδρασης γίνεται στο πλαίσιο της διπλωματικής, για ένα δεδομένο πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού πτερυγίου αξονικής στροβιλομηχανής.

**Λέξεις κλειδιά:** Βελτιστοποίηση Αεροδυναμικών Μορφών, Συζυγής Μέθοδος, Μέθοδος Απότομης Καθόδου, Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων, Εξομάλυνση Πεδίου, Επιφανειακά Μη-Δομημένα Πλέγματα.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

School of Mechanical Engineering

Department of Fluids

Laboratory of Thermal Turbomachines

# Smoothing of Sensitivity Derivatives on Unstructured Surface Grids

of Eleftherios I. FOUNTIS

Advisor : KYRIAKOS C. GIANNAKOGLU, Professor NTUA

ATHENS , NOVEMBER 2011

In the solution of aerodynamic shape optimization problems using deterministic (gradient-based) methods, the optimal solution results after a number of optimization cycles during which the gradient of the objective function must be computed and used. The use of the adjoint method, either in discrete or continuous variant, is the recommended way to compute this gradient at CPU cost equivalent to that for solving the flow equations.

In the case that the shape to be designed (blade, wing, car shape, etc) is represented without using a parameterization scheme (such as Bezier polynomial, NURBS, b-Splines, etc), the use of adjoint method for the computation of the gradient of the used modular leads inevitably to non-smooth gradient distributions. In specific, local under- or over-shootings in the gradient value (the gradient of the objective function with respect to the normal displacement of the CFD mesh used to describe the surface) usually occur close to areas with flow singularities, such as the leading and training edges or wings or blades, etc. If such a non-smooth gradient distribution is used in a gradient-based method, such as steepest descent, this will definitely lead to non-smooth final/optimal shapes with reduced aerodynamic performance.

This master thesis deals with the programming and use of a smoothing procedure for the smoothing of the computed gradient, on unstructured surface CFD grids. This requires the numerical solution of an extra smoothing equation, based on the finite volume method.

The use of smoothing procedure, in optimization problems, is also expected to lead to a significant reduce in the computational cost. The present thesis deals with the inverse design of an axial turbomachine blade.

**Key words:** Aerodynamic Shape Optimization, Adjoint Method, Steepest Descent Method, Finite Volume Method, Smoothing, Unstructured Surface Grid



## Αντί Προλόγου..

... Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άτομα που με βοήθησαν και με στήριξαν αυτό το έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών και χωρίς αυτούς η ολοκλήρωση τόσο της παρούσας διπλωματικής εργασίας όσο και ολόκληρου του μεταπτυχιακού, θα ήταν αδύνατη.

Αρχικά την οικογένεια μου, τη γυναίκα μου και τους φίλους μου για τη συνεχόμενη στήριξη τους.

Στη συνέχεια, τον καθηγητή μου, κ. Γιαννάκογλου για τις υποδείξεις και συμβουλές του πάνω στα θέματα που αντιμετώπισε η διπλωματική εργασία, οι οποίες διαμόρφωσαν την πορεία αυτής και το τελικό της αποτέλεσμα.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του μεταπτυχιακού κ. Μαρκάτο , κ. Μπουντουβή , κ. Παπαδρακάκη για το ενδιαφέρον τους, τις συμβουλές τους , το κίνητρο και τις δυνατότητες που μου προσέφεραν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω, όλο το προσωπικό του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ και ειδικά τους Διδάκτορες ΕΜΠ Βαρβάρα Ασούτη, Δημήτρη Παπαδημητρίου και του Υποψήφιου Διδάκτορα Ξενοφώντα Τρομπούκη για τη συνεχή βοήθεια τους.

Φουντής Ελευθέριος  
Δεκέμβριος 2011



# Περιεχόμενα

---

<b>Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή:</b> .....	13
1.1 Γενικά.....	13
1.2 Σκοπός .....	14
1.3 Δομή της Εργασίας .....	14
<b>Κεφάλαιο 2 – Υπολογισμοί Παραγώγων Ευαισθησίας με τη Συζυγή Μέθοδο .....</b>	<b>17</b>
2.1 Εισαγωγή .....	17
2.2 Αντικειμενική Συνάρτηση.....	17
2.3 Εξισώσεις Ροής .....	19
2.4 Συζυγής Διατύπωση .....	19
<b>Κεφάλαιο 3 – Εξομάλυνση Παραγώγων Ευαισθησίας .....</b>	<b>23</b>
3.1 Εισαγωγή .....	23
3.2 Ανάλυση Μεθόδου.....	24
3.3 Εξομάλυνση Διανύσματος $G$ σε Μια Διεύθυνση .....	25
3.3.1 Παράδειγμα Εξομάλυνσης σε Μια διεύθυνση .....	27
3.4 Μελέτη Επίδρασης στην Αντικειμενική Συνάρτηση .....	27
3.5 Εξομάλυνση Διανύσματος $G$ σε Δύο Διευθύνσεις.....	28
3.5.1 Περιπτώσεις Χρησιμοποίησης Δύο Διευθύνσεων .....	28
3.6 Επιλογή Μεγέθους προς Εξομάλυνση .....	29
3.6.1 Άμεση ανανέωση γεωμετρίας.....	30
3.6.2 Ανανέωση κατά δεδομένη κατεύθυνση .....	32
<b>Κεφάλαιο 4 – Επίλυση Εξίσωσης Εξομάλυνσης με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Όγκων.....</b>	<b>35</b>
4.1 Εισαγωγή .....	35
4.2 Ορισμός Κυψελών Ελέγχου.....	35
4.3 Υπολογισμός Εμβαδού Κυψέλης $AP$ .....	37
4.3.1 Υπολογισμός Εμβαδού σε Διδιάστατα πλέγματα .....	37
4.3.2 Υπολογισμός Εμβαδού σε Επιφανειακά Πλέγματα .....	38
4.4 Ολοκλήρωση και Διακριτοποίηση Εξίσωσης .....	40

4.5 Υπολογισμός Διανύσματος Ροής $nG$ .....	42
4.6 Υπολογισμός Διανύσματος Κλίσης $\nabla GsP$ .....	43
4.7 Δέλτα Διατύπωση και Επίλυση .....	45
4.8 Αναλυτική Μορφή Συντελεστών .....	47
4.8.1 Δεξί Μέλος της Εξίσωσης ( $vvP$ ).....	47
4.8.2 Αριστερό Μέλος της Εξίσωσης $diagP$ , $zmk$ .....	47
<b>Κεφάλαιο 5 – Πρόβλημα Προς Επίλυση</b> .....	51
5.1 Εισαγωγή .....	51
5.2 Γενικό Πρόβλημα.....	51
5.3 Γεωμετρία Πτέρυγας .....	52
5.4 Επίλυση Ευθέως και Συζυγούς Προβλήματος.....	53
5.5 Εφαρμογή Εξομάλυνσης .....	54
5.6 Οριακές Συνθήκες Εξομάλυνσης.....	54
5.6.1 Οριακές Συνθήκες Πλευρών 3.....	55
5.6.2 Οριακές Συνθήκες Πλευρών 4 και 5.....	55
5.7 Γεωμετρικοί περιορισμοί .....	56
5.7.1 Γεωμετρικός Περιορισμός Πλευράς 4.....	56
5.7.2 Γεωμετρικός Περιορισμός Πλευράς 5.....	56
5.8 Υπολογισμός και Περιορισμός Πάχους .....	58
5.8.1 Υπολογισμός Πάχους.....	58
5.8.2 Περιορισμός Πάχους .....	59
<b>Κεφάλαιο 6 - Αποτελέσματα και Σχολιασμός</b> .....	61
6.1 Εισαγωγή .....	61
6.2 Επίλυση Αρχικής Γεωμετρίας .....	62
6.3 Επίλυση Χωρίς Εξομάλυνση .....	63
6.4 Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Πάχους.....	66
6.5 Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Μονοδιάστατης Εξομάλυνσης .....	67
6.6 Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης Επιφάνειας και Συντελεστή Βήματος .....	68
6.7 Επίλυση με Κύκλους Βελτιστοποίησης .....	73
<b>Κεφάλαιο 7 - Συμπεράσματα</b> .....	77

# Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

## Εισαγωγή

---

### 1.1 Γενικά

Στην υπολογιστική ρευστοδυναμική και, γενικότερα, στην υπολογιστική μηχανική, οι αριθμητικές προσομοιώσεις προβλημάτων, οδηγούνται πάντοτε στην επίλυση, γραμμικών και μη, συστημάτων της μορφής  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ , ως αποτέλεσμα της διακριτοποίησης των μερικών διαφορικών εξισώσεων με τις οποίες μοντελοποιείται το εκάστοτε πρόβλημα.

Η επίλυση τέτοιων συστημάτων, που αποτελεί πρόβλημα κομβικής σημασίας σε πολλές επιστημονικές εφαρμογές, γίνεται σχεδόν αποκλειστικά από επαναληπτικές μεθόδους. Δηλαδή, ξεκινώντας από μία τυχαία αρχική λύση, βρίσκονται διαδοχικά νέες καλύτερες προσεγγίσεις της «πραγματικής» λύσης, μέχρι σύγκλισης του επαναληπτικού αλγορίθμου.

Αυτή η μεθοδολογία επίλυσης, καθιστά αναγκαία τη χρησιμοποίηση αρκετών υπολογιστικών βημάτων, τα οποία εισάγουν σχεδόν πάντοτε ένα σημαντικό υπολογιστικό κόστος. Επομένως, γίνεται κρίσιμης σημασίας η επιλογή της μεθόδου επίλυσης καθώς και όλων των υπολογιστικών εργαλείων που θα την πλαισιώσουν.

Συνήθη προβλήματα, με μεγάλο υπολογιστικό κόστος είναι τα προβλήματα βελτιστοποίησης, μορφής σωμάτων, στην αεροδυναμική. Σε τέτοια προβλήματα, ο σχεδιασμός μιας βέλτιστης γεωμετρίας, επιτυγχάνεται με τη διακριτοποίηση μιας αρχικής γεωμετρίας (με χρήση παραμετροποίησης, η οποία δίνει ένα μικρό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού αλλά, όπως θα φανεί στη συνέχεια, η χρήση παραμετροποίησης δεν είναι υποχρεωτική) και, συνήθως, με τη χρησιμοποίηση μεθόδων βελτιστοποίησης βασισμένες στην κλίση (gradient) της αντικειμενικής συνάρτησης (όπως η μέθοδος της απότομης καθόδου που θα χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας), για την ανανέωση της, από κύκλο σε κύκλο.

Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής, θα αντιμετωπιστεί ένα πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού πτερυγίου στροβιλομηχανής, το οποίο διακριτοποιείται με ένα μη-δομημένο επιφανειακό πλέγμα, χωρίς χρήση παραμετροποίησης. Η επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος σε υπολογιστικό χωρίο γύρω από το πτερύγιο, θα οδηγήσει στον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας πάνω στην επιφάνεια του πτερυγίου. Πρόκειται για τις παραγώγους μιας αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την κάθετη (ως προς την επιφάνεια), μετατόπιση, κάθε κόμβου του πλέγματος. Αυτές, θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για την ανανέωση της μορφής του πτερυγίου μέσω της μεθόδου της απότομης καθόδου.

## 1.2 Σκοπός

Η μη υιοθέτηση παραμετροποίησης, το οποίο συνεπάγεται την ανάγκη διαχείρισης των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος ως μεταβλητών σχεδιασμού, αναμένεται να οδηγήσει στον υπολογισμό μη λείων τιμών των παραγώγων ευαισθησίας, δηλαδή πεδίων με τοπικές υπερακοντίσεις στην τιμή της παραγώγου, κυρίως, κοντά σε ιδιόμορφες περιοχές όπως η ακμή πρόσπτωσης ή ακμή εκφυγής. Η χρησιμοποίηση τέτοιων τιμών κατά τη βελτιστοποίηση, οδηγεί σε μη-λείες τελικές γεωμετρικές και συνεπάγεται μειωμένες αεροδυναμικές επιδόσεις.

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας, είναι η μελέτη, υλοποίηση, προγραμματισμός και διερεύνηση μιας μεθόδου εξομάλυνσης των υπολογισμένων παραγώγων ευαισθησίας, πριν αυτές χρησιμοποιηθούν από τη μέθοδο της απότομης καθόδου. Η χωρική εξομάλυνση των παραγώγων ευαισθησίας πάνω στο πτερύγιο, αναμένεται να βοηθήσει στη διατήρηση της λειότητας της επιφάνειας της γεωμετρίας κατά την ανανέωση της σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Κάτι τέτοιο θα οδηγήσει σε ταχύτερη επίτευξη του στόχου βελτιστοποίησης και επομένως σε μείωση του υπολογιστικού κόστους. Για το σκοπό αυτό, προγραμματίζεται η μέθοδος εξομάλυνσης που αναπτύσσεται και προστίθεται στον υπάρχοντα αλγόριθμο.

## 1.3 Δομή της Εργασίας

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται η συζυγής μέθοδος, η οποία αποτελεί μεθοδολογία υπολογισμού των παραγώγων ενός συναρτησιακού υπό τον περιορισμό της ικανοποίησης των εξισώσεων του μοντέλου ροής. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης εκφράζονται μέσω ενός στόχου  $F$ . Η  $F$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της οποίας θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο. Οι παράγωγοι αυτής της συνάρτησης ως προς της μεταβλητές σχεδιασμού ονομάζονται παράγωγοι ευαισθησίας, και αυτές υπολογίζονται μέσω της συζυγής μεθόδου.

Στο **Κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται η μέθοδος εξομάλυνσης, των μη-λείων παραγώγων ευαισθησίας. Συγκεκριμένα αναλύεται η εξίσωση που περιγράφει την εξομάλυνση σε μία και δύο διαστάσεις καθώς οι δυνατότητες για εξομάλυνση διανυσμάτων ή μεταβλητών.

Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται η διαδικασία διακριτοποίησης της διαφορικής εξίσωσης εξομάλυνσης, σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Περιγράφονται όλα τα βήματα, μέχρι το σημείο που η εξίσωση έρχεται σε μορφή ικανή για επαναληπτική επίλυση.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζεται το πρόβλημα στο οποίο θα προσαρμοστεί η μέθοδος της εξομάλυνσης και με βάση το οποίο θα γίνει εξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων.

Στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη διερεύνηση στην περίπτωση που εξετάστηκε.

Στο **Κεφάλαιο 7** τέλος, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν στο πλαίσιο της διπλωματικής.





# Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

## Υπολογισμοί Παραγώγων Ευαισθησίας με τη Συζυγή Μέθοδο

---

### 2.1 Εισαγωγή

Αρχικά, θα παρουσιαστεί η συζυγής μέθοδος (Adjoint Method) [1], [2], [3], σε γενική μορφή, ανεξάρτητα από το ποιο μοντέλο ροής ή συνάρτηση-στόχος χρησιμοποιείται. Η ανάλυση που ακολουθεί, γίνεται με βάση τη θεώρηση ότι επιλύεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αεροδυναμικής μορφής, δηλαδή στόχος είναι ο σχεδιασμός της βέλτιστης γεωμετρίας σύμφωνα με ένα κριτήριο, ικανοποιώντας τη εξίσωση ροής.

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας, χρησιμοποιείται η διακριτή (Discrete) εκδοχή της μεθόδου και η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στη συνέχεια, στην οποία η βάση της όλης ανάπτυξης είναι διακριτοποιημένες εξισώσεις. Η ενασχόληση με τη συζυγή μέθοδο περιορίζεται στην παρουσίαση της βασικής ροής ενεργειών και όχι στη λεπτομερή διερεύνηση και εφαρμογή της, καθώς κάτι τέτοιο είναι εκτός του κύριου σκοπού της διπλωματικής εργασίας. Για αυτό το λόγο, το λογισμικό επίλυσης της συζυγής μεθόδου λαμβάνεται έτοιμο από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ.

### 2.2 Αντικειμενική Συνάρτηση

Το κριτήριο της πραγματοποιούμενης βελτιστοποίησης λαμβάνει τη μορφή μιας αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  η οποία πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Η συνάρτηση  $F$  είναι βαθμωτή, δηλαδή υπάρχει μόνο ένας στόχος βελτιστοποίησης. Αν υπήρχαν περισσότεροι, έχουν όλοι ήδη συνδυαστεί στη μορφή μίας συνάρτησης  $F$ , συνήθως ως γραμμικός τους συνδυασμός (με χρήση συντελεστών βαρύτητας).

Για ροή γύρω από αεροτομές, πτέρυγες και πτερύγια, οι αεροδυναμικές ποσότητες που επηρεάζουν τη συνάρτηση κόστους  $F$  είναι οι μεταβλητές του πεδίου ροής, εκφρασμένες υπό μορφή διανύσματος  $\vec{U}$  και η μορφή της γεωμετρίας. Η γεωμετρία μοντελοποιείται με τις συντεταγμένες των κόμβων ενός επιφανειακού πλέγματος, οι οποίες θα εκφράζονται από το διάνυσμα  $\vec{b}$  και οι οποίες αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος. Τα  $\vec{U}$  και  $\vec{b}$  θα θεωρούνται διανύσματα στήλης.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονιστεί για ακόμα μια φορά ότι το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$  αποτελείται από τις συντεταγμένες κάθε κόμβου της

επιφάνειας της γεωμετρίας, καθώς δεν χρησιμοποιήθηκε παραμετροποίηση για τον έλεγχο αυτής. Στην περίπτωση παραμετροποίησης, με μεθόδους αριθμητικής προσέγγισης όπως τα πολυώνυμα Bezier, θα επιλέγονταν ελάχιστα σε πλήθος (σε σχέση με το πλήθος των κόμβων της διακριτοποιημένης γεωμετρίας) σημεία, μέσω των οποίων θα ελεγχόταν ολόκληρη η μορφή της γεωμετρίας. Αυτή η μεθοδολογία, αποτελεί διαφορετική λογική ελέγχου και σχεδιασμού μορφών και δεν εξετάστηκε στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Η αντικειμενική συνάρτηση, με βάση τα παραπάνω διατυπώνεται, γενικά, στη μορφή :

$$F = F(\vec{U}, \vec{b}) \quad 2.1$$

Η εξίσωση 2.1 εκφράζει την εξάρτηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης αφενός μεν από τη μορφή της προς σχεδιασμό μορφής, αφετέρου δε από το διαμορφούμενο πεδίο ροής. Πρακτικά δηλαδή, κάθε αλλαγή τιμής των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$ , τροποποιεί τη γεωμετρία της αεροτομής, διαμορφώνει διαφορετικό πεδίο ροής  $\vec{U}$  γύρω από αυτή και με τη μετεπεξεργασία στοιχείων του πεδίου ροής υπολογίζεται νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Είναι σωστή λοιπόν για την εξίσωση 2.1 και η διατύπωση:

$$F = F(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b}) \quad 2.2$$

Η προηγούμενη αλληλουχία αλλαγών, υπό μαθηματική διατύπωση, συνεπάγεται στο ότι, κάθε μεταβολή  $\delta\vec{b}$  στο διάνυσμα  $\vec{b}$ , που αντιστοιχεί σε μικρή αλλαγή της μορφής προς σχεδιασμό επιφάνειας, προκαλεί μεταβολή  $\delta F$  της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \cdot \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \cdot \delta \vec{b} \quad 2.3$$

Στην εξίσωση 2.3 αναγνωρίζονται οι δύο συμμετοχές στη μεταβολή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος εκφράζει τη μεταβολή που οφείλεται στην αλλαγή του ροϊκού πεδίου που προκάλεσε η αλλαγή γεωμετρίας της αεροτομής. Ο δεύτερος όρος εκφράζει την απευθείας επίδραση της αλλαγής της γεωμετρίας στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Επομένως, με βάση τη γνωστή αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ακρότατου, η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης, εύρεσης δηλαδή του ακρότατου της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ , ισοδυναμεί με εύρεση εκείνου του διανύσματος  $\vec{b}$  για το οποίο θα ισχύει  $\delta F = \vec{0}$ .

## 2.3 Εξισώσεις Ροής

Επιπλέον, οι εξισώσεις που διέπουν το πεδίο ροής (σε γενική μορφή, ανεξάρτητα του μοντέλου ροής που θα επιλεγεί), οι οποίες πρακτικά εκφράζουν την εξάρτηση των μεταβλητών της ροής  $\vec{U}$  και της γεωμετρίας  $\vec{b}$  μέσα στο πεδίο ροής, γράφονται υπό τη μορφή περιορισμού, με τη συμβολική χρήση του τελεστή ροής  $\vec{R}$ , με το  $\vec{R}$  να αντιστοιχεί σε διάνυσμα στήλης, του υπολοίπου των εξισώσεων ροής, στη μορφή:

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{U}, \vec{b}) = 0 \quad 2.4$$

Για δεδομένη γεωμετρία και, επομένως, για δεδομένες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού  $\vec{b}$ , γραμμικοποιώντας την εξίσωση 2.4 στη μορφή:

$$\vec{R}(\vec{U}) + \left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right] \cdot \delta \vec{U} = 0 \quad 2.5$$

προκύπτει η διακριτοποιημένη μορφή της εξίσωσης της ροής η οποία πρέπει να επιλυθεί

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \cdot \delta \vec{U} = -\vec{R}(\vec{U}) \quad 2.6$$

Αντίστοιχα με την αντικειμενική συνάρτηση, κάθε μεταβολή  $\delta \vec{b}$  της μορφής της γεωμετρίας, μεταβάλλει το πεδίο ροής γύρω της αλλά, αφού συνεχίζουν να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής, ισχύει ότι:

$$\delta \vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \cdot \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \cdot \delta \vec{b} = 0 \quad 2.7$$

## 2.4 Συζυγής Διατύπωση

Σε αυτό το σημείο εισάγεται ένα νέο διάνυσμα, ίδιας διάστασης με το  $\delta \vec{R}$ , το  $\vec{\Psi}^T$  (πολλαπλασιαστής Lagrange). Το διάνυσμα μεταβολής  $\delta \vec{R}$ , πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα  $\vec{\Psi}^T$  και η βαθμωτή ποσότητα που προκύπτει αφαιρείται από τη μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης, εξίσωση 2.3. Η αφαίρεση αυτή δεν αλλοιώνει το στόχο μας ο οποίος είναι η εύρεση του διανύσματος  $\vec{b}$  που μηδενίζει την κλίση  $\delta F$ , αφού η μεταβολή  $\delta \vec{R}$  είναι μηδενική.

Έτσι δημιουργείται μια νέα αντικειμενική συνάρτηση, η λεγόμενη επαυξημένη, της οποίας η μεταβολή είναι:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \cdot \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \cdot \delta \vec{b} - \vec{\Psi}^T \cdot \delta \vec{R}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \cdot \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \cdot \delta \vec{b} - \vec{\Psi}^T \cdot \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \cdot \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \cdot \delta \vec{b} \right)$$

δηλαδή:

$$\delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \cdot \delta \vec{U} + \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\Psi}^T \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \cdot \delta \vec{b} \quad 2.8$$

Η κεντρική ιδέα της συζυγούς μεθόδου λοιπόν, είναι να επιλεγεί το διάνυσμα  $\vec{\Psi}$  έτσι, ώστε να μηδενιστεί ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης 2.8, να ισχύει δηλαδή:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} - \vec{\Psi}^T \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = 0 \quad 2.9$$

Με την απαίτηση αυτή, η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτάται μόνο της μεταβολής του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού  $\delta \vec{b}$  και όχι των επαγόμενων μεταβολών  $\delta \vec{U}$  του πεδίου ροής.

Το πεδίο  $\vec{\Psi}$ , ονομάζεται πλέον πεδίο συζυγών μεταβλητών (adjoint variables field) και προκύπτει από την- λύση της συζυγούς εξίσωσης η οποία δεν είναι άλλη από την εξίσωση 2.9 μετασχηματισμένη ως προς  $\vec{\Psi}$ :

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \cdot \vec{\Psi} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right]^T \quad 2.10$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι η εξίσωση 2.10 είναι γραμμική ως προς  $\vec{\Psi}$ , αφού το μητρώο-συντελεστής  $\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T$  δεν συναρτάται του  $\vec{\Psi}$ , σε αντίθεση με την εξίσωση ροής 2.6 όπου το μητρώο συντελεστών  $\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T$  είναι συνάρτηση του  $\vec{U}$ .

Με την επίλυση της εξίσωσης 2.10, υπολογίζεται το κατάλληλο πεδίο  $\vec{\Psi}$  και το μόνο που απομένει είναι η ευθεία συσχέτιση της μεταβολής της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης με τη μεταβολή της γεωμετρίας της επιφάνειας του σώματος  $\delta \vec{b}$ , έχουμε δηλαδή:

$$\delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\Psi}^T \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \cdot \delta \vec{b} \quad 2.11$$

ή αλλιώς :

$$\delta F = \vec{G}^T \cdot \delta \vec{b} \quad 2.12$$

όπου :

$$\vec{G}^T = \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} - \vec{\psi}^T \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \quad 2.13$$

Έτσι, πλέον, οι εξισώσεις 2.12 και 2.13 είναι εύκολο να ενταχθούν σε μια διαδικασία σχεδιασμού βέλτιστης (κατά το τεθέν κριτήριο) αεροδυναμικής μορφής η οποία βασίζεται στην κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης δηλαδή στο μέγεθος:

$$\frac{\delta F}{\delta \vec{b}} = \vec{G}^T \quad 2.14$$

ή αλλιώς

$$\delta \vec{b} = \vec{G} \cdot \delta F \quad 2.15$$

Το μέγεθος της σχέσης 2.14 ονομάζεται παράγωγος ευαισθησίας ή διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης, μπορεί να παρουσιαστεί με το συμβολισμό  $\frac{\delta F}{\delta \vec{b}} = \frac{\delta F}{\delta \vec{b}}$  και θα χρησιμοποιηθεί κατά την ανανέωση της γεωμετρίας από την μέθοδο της απότομης καθόδου που επιλέχθηκε, και η οποία περιγράφεται από τη σχέση 2.16

$$\vec{b}_{new} = \vec{b}_{old} - \eta \vec{G} \quad 2.16$$

όπου το βήμα  $\eta$  το καθορίζει ο χρήστης.



# Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

## Εξομάλυνση παραγώγων ευαισθησίας

---

### 3.1 Εισαγωγή

Έχοντας προηγηθεί η επίλυση του πεδίου ροής και η επίλυση της συζυγούς εξίσωσης, για μια συγκεκριμένη γεωμετρία, έχουν υπολογιστεί οι παράγωγοι του συναρτησιακού ως προς τις συντεταγμένες των κομβικών σημείων του επιφανειακού, μη-δομημένου πλέγματος.

Από τη στιγμή που η συζυγής μέθοδος εισήχθει στη βελτιστοποίηση αεροδυναμικών σχημάτων, περίπου το 1980, η μέθοδος έγινε δημοφιλής για την επίλυση προβλημάτων αντίστροφου σχεδιασμού<sup>1</sup> και έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς για τον αεροδυναμικό σχεδιασμό ακόμα και ολόκληρων αεροσκαφών.

Για τη βελτιστοποίηση οποιασδήποτε διδιάστατης ή τριδιάστατης μορφής, πρώτο βήμα αποτελεί η διακριτοποίηση της γεωμετρίας σε κόμβους, οι οποίοι στη συνέχεια, στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιείται παραμετροποίηση, μπορούν (οι συντεταγμένες τους) να αποτελέσουν τις μεταβλητές σχεδιασμού. Το πρόβλημα με αυτήν την επιλογή, είναι ότι κατά τη βελτιστοποίηση, δεν μπορεί να διατηρηθεί η λειότητα της επιφάνειας της γεωμετρίας. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, πρέπει να διατηρηθεί η συνέχεια της πρώτης παραγώγου της λύσης του συζυγούς προβλήματος γεγονός που επιτυγχάνεται με την εξομάλυνση της διανύσματος κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης [3], [4], [5], [6]. Η διαδικασία εξομάλυνσης σε μη-δομημένα επιφανειακά πλέγματα, που αποτελεί και το κύριο αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας, θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο

---

<sup>1</sup> **Αντίστροφος Σχεδιασμός** είναι η διαδικασία βελτιστοποίησης κατά την οποία, ο στόχος είναι να ευρεθεί η μορφή της γεωμετρίας του προβλήματος, η οποία σε δεδομένες συνθήκες ροής αναπαράγει ζητούμενη κατανομή μίας μεταβλητής στην επιφάνεια της. Για παράδειγμα κατά την σχεδιασμό διδιάστατων αεροτομών και τριδιάστατων πτερύγων συνήθως στόχος είναι ο καθορισμός δεδομένης κατανομής πίεσης  $p_{tar} = p_{tar}(s)$  ως συνάρτηση του μήκους τόξου  $s$  του περιγράμματος της κάθε αεροτομής για τις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης. Πρακτικά, μια τέτοια κατανομή-στόχος δημιουργείται συνήθως χρησιμοποιώντας ολοκληρωματικές εξισώσεις υπολογισμού του οριακού στρώματος, οι οποίες υπολογίζουν κατανομές πίεσης ώστε τα αναπτυσσόμενα οριακά στρώματα να έχουν επιθυμητά χαρακτηριστικά. Με βάση τα παραπάνω, ως αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση επιλέγεται η  $F = \int_w (p(s) - p_{tar}(s))^2 ds$  όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο περίγραμμα  $w$  της κάθε αεροτομής-υποψήφιας λύσης, η οποία στις συγκεκριμένες συνθήκες ροής δίνει κατανομή πίεσης  $p(s)$  η οποία στη γενική περίπτωση είναι διαφορετική της επιθυμητής  $p_{tar}(s)$ .

### 3.2 Ανάλυση Μεθόδου

Με την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, όπως αναφέρθηκε, έχει υπολογιστεί το διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης  $\vec{G}^T$ . Για το τριδιάστατο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας, οι παράγωγοι ευαισθησίας υπολογίζονται ως προς τις σε τρεις διαστάσεις και μπορούν να αντιμετωπιστούν είτε ως ένα διάνυσμα είτε ως τρία (δηλαδή κάθε ένα ανά κατεύθυνση), που ενοποιημένα θα σχηματίζουν έναν πίνακα. Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας επιλέγεται η διαχείριση τους ως τρία ανεξάρτητα διανύσματα και για λόγους ευκολίας, οι παραγωγοί ευαισθησίας θα αναφέρονται ως διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ή ως διάνυσμα  $\vec{G}$  (Gradient Vector) και θα υπονοείται η αναφορά σε μία μόνο διάσταση.

Με τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{G}$ , μια σειρά από μεθόδους καθόδου (ανανέωσης γεωμετρίας) που στηρίζονται στη κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της επόμενης, καλύτερης, λύσης (γεωμετρίας), στο πλαίσιο μιας επαναληπτικής μεθόδου βελτιστοποίησης. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, όπως αναφέρθηκε, θα χρησιμοποιηθεί η απλή μέθοδος της απότομης καθόδου (Steepest Descent) [13], στην οποία, η μεταβολή από επανάληψη σε επανάληψη γίνεται με μικρά βήματα και με κατεύθυνση την αντίθετη του διανύσματος  $\vec{G}$ .

Εκτός από τη χρησιμοποίηση των παραγώγων ευαισθησίας κατά τις 3 κατευθύνσεις, μπορεί να υπολογιστεί, με βάση αυτές, το διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης κατά μια δοσμένη κατεύθυνση, η οποία θα προσδιορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης  $\hat{n}$ , κάθετο στην επιφάνεια, και ενίοτε να χρησιμοποιείται αυτό κατά την ανανέωση της γεωμετρίας. Τα πλεονεκτήματα μιας τέτοιας διαδικασίας, αναλύονται στη συνέχεια.

Η μέθοδος εξομάλυνσης του διανύσματος  $\vec{G}$  που θα χρησιμοποιηθεί λοιπόν, θα εξασφαλίσει όπως αναφέρθηκε, τη λειότητα της επιφάνειας της γεωμετρίας. Αυτό συμβαίνει γιατί η εξομάλυνση του διανύσματος, δρα ως προσταθεροποιητής<sup>2</sup> η χρήση του οποίου, επιτρέπει τη χρήση μεγαλύτερων βημάτων κατά την ανανέωση της γεωμετρίας και οδηγεί σε σημαντική μείωση του απαιτούμενου αριθμού επαναλήψεων έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση. Και βέβαια αυτό, σε συνδυασμό με το πλεονέκτημα της μεθόδου απότομης καθόδου να μην χρειάζεται ακριβή

---

<sup>2</sup> **Προσταθεροποίηση** [10] είναι η διαδικασία κατά την οποία σε ένα δεδομένο πρόβλημα (μητρώο)  $A$ , εφαρμόζεται ένας συγκεκριμένος μετασχηματισμός ή αλλιώς προσταθεροποιητής  $P$ , που μετατρέπει το πρόβλημα σε τέτοια μορφή, η οποία είναι καταλληλότερη για αριθμητική επίλυση. Πρακτικά, η προσταθεροποίηση οδηγεί σε ένα νέο μητρώο  $P^{-1}A$  το οποίο χαρακτηρίζεται από αριθμό κατάστασης (Condition Number) μικρότερης τιμής σε σχέση με το αρχικό μητρώο  $A$ . Σύμφωνα με την αριθμητική ανάλυση, όσο μειώνεται ο αριθμός κατάστασης ενός προβλήματος, τόσο αυξάνεται ο ρυθμός σύγκλισης κατά την επίλυση του προβλήματος με χρήση επαναληπτικής μεθόδου.



διανύσματα κλίσης για να δώσει ομαλά αποτελέσματα, καθιστά την εξομάλυνση του διανύσματος  $\vec{G}$  πολύ χρήσιμο εργαλείο.

Βέβαια, σε αυτό το σημείο γίνεται κατανοητό ότι ο καθορισμός του βαθμού που θα γίνει εξομάλυνση καθώς και ο καθορισμός του βήματος της μετάβασης από την μία λύση στην επόμενη, καθώς και ο συνδυασμός αυτών των δύο είναι κρίσιμης σημασίας για τη βελτιστοποίηση. Διερεύνηση των μεγεθών, σχετικά με το πρόβλημα που μελετάται στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας, θα ακολουθήσει σε επόμενο κεφάλαιο.

Με βάση τα παραπάνω, για τις  $\vec{b}$  μεταβλητές σχεδιασμού και  $\vec{G}$  το διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης, η μέθοδος της απότομης καθόδου στη γενική μορφή της είναι:

$$\vec{b}_{new} = \vec{b}_{old} + \delta\vec{b} \quad 3.1$$

όπου  $\vec{b}_{old}$  οι μεταβλητές σχεδιασμού της τρέχουσας λύσης,  $\vec{b}_{new}$  οι μεταβλητές σχεδιασμού της νέας λύσης που θα προκύψει και  $\delta\vec{b} = -\eta \cdot \vec{G}$  το διάνυσμα μεταβολής με  $\eta$  το συντελεστή βήματος της μεταβολής.

Η χρήση της εξομάλυνσης, συνεπάγεται τον υπολογισμό ενός νέου  $\vec{G}_s$  με βάση το παλιό  $\vec{G}$  και χρησιμοποίηση αυτού του νέου στο διάνυσμα μεταβολής δηλαδή:

$$\delta\vec{b} = -\eta \vec{G}_s \quad 3.2$$

### 3.3 Μονοδιάστατη Εξομάλυνση Διανύσματος $\vec{G}$ (1D)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η ανανέωση της γεωμετρίας με βάση τη σχέση  $\delta\vec{b} = -\eta \cdot \vec{G}$ , αν το  $\vec{G}$  δεν έχει λείες παραγώγους οδηγεί ενδεχομένως σε μη λεία αποτελέσματα, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε πολύ αργή σύγκλιση ή ακόμα και την απόκλιση της επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης, οδηγώντας σε μη αποδεκτές γεωμετρίες.

Για να διατηρηθεί η ομαλότητα, το διάνυσμα  $\vec{G}$  θα πρέπει να επαναπροσδιοριστεί, έτσι, ώστε ένα εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων  $\langle u, v \rangle$  να αντιστοιχεί σε σταθμισμένο εσωτερικό γινόμενο Sobolev [3], [9] της μορφής:

$$\langle u, v \rangle = \int \left( uv + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \cdot d\xi \quad 3.3$$

όπου  $\xi$  είναι η διεύθυνση στην οποία θα εφαρμοστεί η εξομάλυνση η οποία σε μη-δομημένα επιφανειακά πλέγματα ισούται με την πορεία που ακολουθείται κατά μήκος μιας πλεγματικής γραμμής (πχ. η γραμμή του ορίου του υπολογιστικού πλέγματος).

Έτσι σε αντίθεση με το υπάρχον  $\delta \vec{b} = -\vec{G} \cdot \delta F$ , ορίζεται ένα νέο  $\delta \vec{b}$  τέτοιο ώστε:

$$\delta \vec{b} = -\langle \vec{G}_s, \delta F \rangle \quad 3.4$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned} \delta \vec{b} &= - \int \left( \vec{G}_s \delta F - \varepsilon \frac{\partial \vec{G}_s}{\partial \xi} \frac{\partial \delta F}{\partial \xi} \right) d\xi \\ &= - \int \left( \vec{G}_s - \frac{\partial}{\partial \xi} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{G}_s \right) \delta F d\xi \end{aligned}$$

Εξισώνοντας με τη σχέση 2.15, έχουμε:

$$\delta \vec{b} = \int \left( \vec{G}_s - \frac{\partial}{\partial \xi} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{G}_s \right) \delta F d\xi = \vec{G} \delta F \quad 3.5$$

Ορίζοντας οριακές συνθήκες  $\vec{G}_s = 0$  στα δύο όρια και ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$\vec{G}_s - \frac{\partial}{\partial \xi} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{G}_s = \vec{G} \quad 3.6$$

Επειδή ο συντελεστής εξομάλυνσης  $\varepsilon$  στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας θεωρείται σταθερός<sup>3</sup> και ανεξάρτητος του πεδίου, βγαίνει εκτός της παραγωγίσης. Επιπλέον, η διπλή παραγωγή κατά τη διεύθυνση  $\xi$  μπορεί να παρουσιαστεί, στη γενική μορφή της, με τον τελεστή ανάδελτα  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi}$ . Έτσι η σχέση 3.6, μετατρέπεται στην:

$$\vec{G}_s - \varepsilon \nabla \cdot (\nabla \vec{G}_s) = \vec{G} \quad 3.7$$

Η εξίσωση 3.7 είναι η βασική σχέση εξομάλυνσης, η οποία αν τροφοδοτηθεί με το αρχικό διάνυσμα  $\vec{G}$ , θα δώσει ως λύση το νέο εξομαλυμένο διάνυσμα  $\vec{G}_s$ . Η μεταβλητή  $\varepsilon$  είναι ο συντελεστής εξομάλυνσης ο οποίος καθορίζει το βαθμό στον οποίο θα εξομαλυθεί το αρχικό διάνυσμα  $\vec{G}$ . Για παράδειγμα, για την τιμή  $\varepsilon = 0$  καταλήγουμε στη σχέση  $\vec{G}_s = \vec{G}$ , το οποίο σημαίνει ότι δεν θα γίνει καθόλου εξομάλυνση, ενώ για  $\varepsilon = 0,5$ , θα γίνει εξομάλυνση σε βαθμό 50%. Διερεύνηση των τιμών του συντελεστή  $\varepsilon$ , όπως αναφέρθηκε, θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο.

<sup>3</sup> Κάλυπτα, θα μπορούσε να έχει μεταβλητή τιμή στις διαφορετικές θέσεις της γεωμετρίας. Αυτή η περίπτωση δεν εξετάστηκε στο πλαίσιο της διπλωματικής.

### 3.3.1 Παράδειγμα Μονοδιάστατης Εξομάλυνσης

Αν για τη διακριτοποίηση της κύριας εξίσωσης εξομάλυνσης χρησιμοποιηθεί σχήμα πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης, σε πλέγμα με ισαπέχοντες κόμβους, για κάθε κόμβο της γεωμετρίας θα έχουμε:

$$G_{s_i} - \varepsilon (G_{s_{i+1}} - 2 G_{s_i} + G_{s_{i-1}}) = G_i \quad 3.8$$

δηλαδή:

$$[-\varepsilon] G_{s_{i-1}} + [1 + 2 \varepsilon] G_{s_i} + [-\varepsilon] G_{s_{i+1}} = G_i \quad 3.9$$

όπου  $G_i$  και  $G_{s_i}$  οι τιμές στο κόμβο  $i$ , πριν και μετά την εξομάλυνση, με  $1 < i < n$  με  $n$  ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού, που στη συγκεκριμένη περίπτωση συμπίπτει με τον αριθμό των κόμβων του πλέγματος.

Η σχέση 3.9 γραμμένη σε τανυστική μορφή γράφεται ως εξής:

$$[A] \cdot \vec{G}_s = \vec{G}$$

ή αλλιώς:

$$\vec{G}_s = [A]^{-1} \cdot \vec{G} \quad 3.10$$

Από τη σχέση 3.10 φαίνεται ξεκάθαρα πλέον, ότι η εξομάλυνση δρα ως προσταθεροποιητής καθώς αντί να χρησιμοποιηθεί το διάνυσμα  $\vec{G}$ , χρησιμοποιείται το  $\vec{G}$  πολλαπλασιασμένο με έναν προσταθεροποιητή  $[A]^{-1}$ .

### 3.4 Μελέτη Επίδρασης στην Αντικειμενική Συνάρτηση

Ενδιαφέρον έχει να μελετηθεί η επίδραση της εφαρμογής της εξομάλυνσης στην αντικειμενική συνάρτηση (συνάρτηση κόστους):

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta F &= - \int \vec{G} \delta \vec{b} \delta \xi \\ &= -\eta \int \left( \vec{G}_s - \frac{\vartheta}{\vartheta \xi} \varepsilon \frac{\vartheta}{\vartheta \xi} \vec{G}_s \right) \vec{G}_s \delta \xi \\ &= -\eta \int \vec{G}_s^2 \delta \xi + \eta \int \left( \frac{\vartheta}{\vartheta \xi} \varepsilon \frac{\vartheta}{\vartheta \xi} \vec{G}_s \right) \vec{G}_s \delta \xi \\ &= -\eta \int \vec{G}_s^2 \delta \xi + \left[ \eta \vec{G}_s \varepsilon \frac{\vartheta \vec{G}_s}{\vartheta \xi} \right] - \eta \int \varepsilon \left( \frac{\vartheta \vec{G}_s}{\vartheta \xi} \right)^2 \delta \xi \end{aligned}$$

$$= -\eta \int \left( \vec{G}_s^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial \vec{G}_s}{\partial \xi} \right)^2 \right) \delta \xi < 0$$

όπου ο δεύτερος όρος του προτελευταίου βήματος είναι μηδενικός και αφαιρέθηκε, με δεδομένο ότι εφαρμόστηκαν μηδενικές οριακές συνθήκες στη διαφορική εξίσωση.

Το αποτέλεσμα δίνει εγγυημένα αρνητικό αποτέλεσμα και επομένως εγγυημένη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου για μηδενικές Diriclet οριακές συνθήκες, στην ποσότητα  $\vec{G}_s$ . Το ίδιο ισχύει αν το βήμα  $\eta$  παίρνει πολύ μικρές τιμές.

### 3.5 Εξομάλυνση Διανύσματος $\vec{G}$ σε Δύο Διευθύνσεις

Στην εναλλακτική περίπτωση όπου επιθυμείται εξομάλυνση των διανυσμάτων  $\vec{G}$  σε δύο διευθύνσεις<sup>4</sup>  $(\xi, \eta)$ , η μοναδική διαφορά είναι ότι τελεστής ανάδελα θα χρησιμοποιηθεί στη διδιάστατη μορφή του, για μία επιφάνεια.

Η εξίσωση εξομάλυνσης γράφεται εναλλακτικά στην μορφή:

$$\vec{G}_s - \varepsilon \vec{\nabla}^2 \vec{G}_s = \vec{G} \quad 3.11$$

Τέλος, η εξίσωση γραμμένη για έναν τυχαίο κόμβο  $i$  παίρνει την εξής μορφή:

$$G_{s_i} - \varepsilon \vec{\nabla}^2 G_{s_i} = G_i \quad 3.12$$

Η διαφορά πλέον έγκειται στο γεγονός ότι, ενώ κατά μία διεύθυνση η επίλυση είναι πολύ απλή και σύντομη, καθώς η διακριτοποίηση της διαφορικής καταλήγει σε ένα τριδιαγώνιο μητρώο, το οποίο λύνεται εύκολα με έναν τριδιαγώνιο επιλύτη, στις δύο διευθύνσεις, η διακριτοποίηση της εξίσωσης είναι πιο σύνθετη διαδικασία, και η επίλυση, με χρήση επαναληπτικής μεθόδου, πιο χρονοβόρα.

#### 3.5.1 Περιπτώσεις Χρησιμοποίησης Δύο Διευθύνσεων

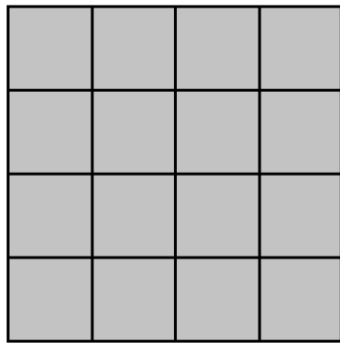
Συγκεκριμένα, δύο είναι οι παράγοντες που καθορίζουν τον τρόπο διακριτοποίησης και επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης:

- Η φύση της γεωμετρίας, δηλαδή αν η γεωμετρία και συγκεκριμένα το πλέγμα που θα προκύψει με την διακριτοποίηση της, είναι επίπεδο διδιάστατο, ή τριδιάστατο επιφανειακό.

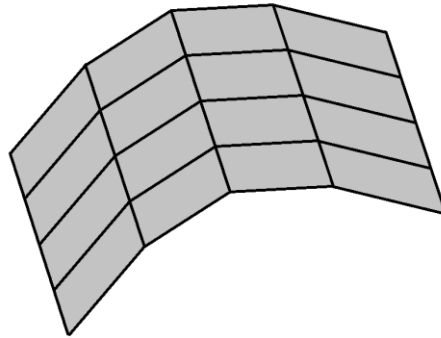
<sup>4</sup> Τα υπολογιστικά πλέγματα μπορούν να διαχωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες: **διδιάστατα** με συντεταγμένες  $\xi = (x, y)$ ,  $\eta = (x, y)$ , τα **τριδιάστατα** (χωρικά) με συντεταγμένες  $\xi = (x, y, z)$ ,  $\eta = (x, y, z)$ ,  $\theta = (x, y, z)$ , και τα **επιφανειακά** με συντεταγμένες  $\xi = (x, y, z)$ ,  $\eta = (x, y, z)$

- Η δομή του υπολογιστικού πλέγματος, δηλαδή αν πρόκειται για δομημένο ή μη δομημένο πλέγμα.

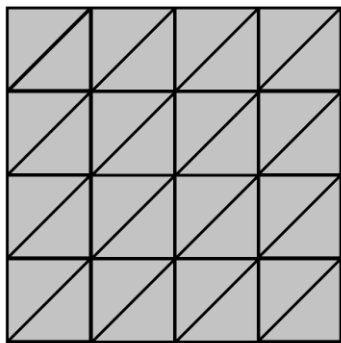
Οι παραπάνω παράγοντες δημιουργούν 4 ενδεικτικές περιπτώσεις πλεγμάτων τα οποία παρουσιάζονται στο σχήμα 3.1:



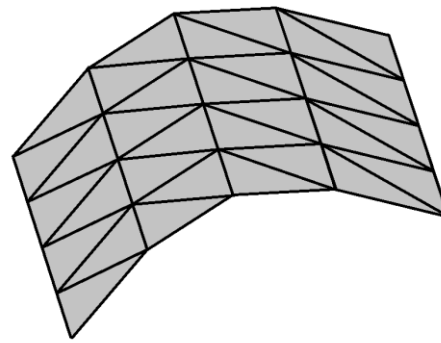
Πλέγμα 1



Πλέγμα 2



Πλέγμα 3



Πλέγμα 4

Σχήμα 3.1 – 4 περιπτώσεις υπολογιστικών πλεγμάτων: (1) Δομημένο 2Δ, (2) Δομημένο Επιφανειακό, (3) Μη-Δομημένο 2Δ, (4) Μη-Δομημένο Επιφανειακό.

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας θα χρησιμοποιηθούν επιφανειακά μη-δομημένα υπολογιστικά πλέγματα. Η διαδικασία διακριτοποίησης και επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης 3.12 θα περιγραφεί αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

### 3.6 Επιλογή Μεγέθους προς Εξομάλυνση

Από την αρχή του κεφαλαίου, έχει τονιστεί ότι η μέθοδος της εξομάλυνσης χρησιμοποιείται σε διανυσματικά πεδία, όπως το διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης  $\vec{G}$ . Επίσης, αναφέρθηκε ότι το διάνυσμα αυτό, για ένα τριδιάστατο πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως άθροισμα τριών διανυσμάτων, όπου κάθε ένα θα περιλαμβάνει τις παραγώγους ευαισθησίας για την κάθε μια διεύθυνση, δηλαδή  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i$ ,  $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_i$ ,  $\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_i$ .

Υπενθυμίζουμε, ότι για κάθε κόμβο, το διάνυσμα κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης  $\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ , είναι αυτό που θα επιδράσει πάνω στο διάνυσμα θέσης του κάθε κόμβου της γεωμετρίας και θα οδηγήσει στη μεταβολή του κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η νέα γεωμετρία που θα προκύψει να αποδίδει μικρότερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση που ορίστηκε.

Εναλλακτικά, μπορεί να υπολογιστεί η προβολή του διανύσματος  $\vec{\nabla}F$  πάνω σε μία ζητούμενη κατεύθυνση (που ορίζεται μέσω ενός μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{n}$ ) έτσι, ώστε το διάνυσμα που θα χρησιμοποιηθεί κατά την ανανέωση της γεωμετρίας να έχει μέτρο ίσο με την προβολή και διεύθυνση ίση με αυτή του μοναδιαίου διανύσματος.

Σε αυτό το σημείο λοιπόν, πρέπει να ξεκαθαριστεί ότι υπάρχουν δύο επιλογές σχετικά με τον τρόπο που επιθυμείται να γίνεται αυτή η ανανέωση της γεωμετρίας, ενώ τονίζεται ότι τελικά επιλέγεται η ανανέωση κατά ζητούμενη κατεύθυνση, για λόγους που θα αναλυθούν στην συνέχεια.

### 3.6.1 Άμεση ανανέωση γεωμετρίας

Η άμεση ανανέωση της γεωμετρίας, γίνεται με βάση τη διανυσματική σχέση :

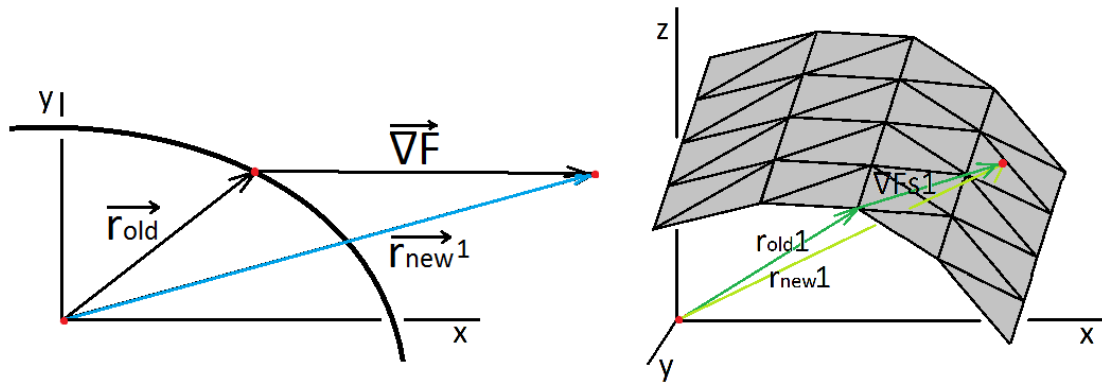
$$\vec{r}_{new} = \vec{r}_{old} - \eta \vec{\nabla}F \quad 3.13$$

η οποία αναλύεται στις τρεις βαθμωτές σχέσεις :

$$x_{new} = x_{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad y_{new} = y_{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad z_{new} = z_{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial z}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι, με δεδομένα το αρχικό (παλιό) διάνυσμα θέσης του κάθε κόμβου  $\vec{r}_{old}$  και του διανύσματος κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης  $\vec{\nabla}F$  (πολλαπλασιαζόμενο με έναν συντελεστή  $\eta$ ), το νέο διάνυσμα θέσης του κόμβου  $\vec{r}_{new}$  θα προκύψει ύστερα από την αφαίρεση αυτών των δύο διανυσμάτων.

Αυτός ο τρόπος ανανέωσης της γεωμετρίας, αποτυπώνεται αναλυτικά στο σχήμα 3.2, για 2 και 3 διαστάσεις, ενώ τονίζεται ότι δεν χρησιμοποιήθηκε, αλλά παρουσιάζεται θεωρητικά, για λόγους πληρότητας.



Σχήμα 3.2 – Άμεση ανανέωση γεωμετρίας.

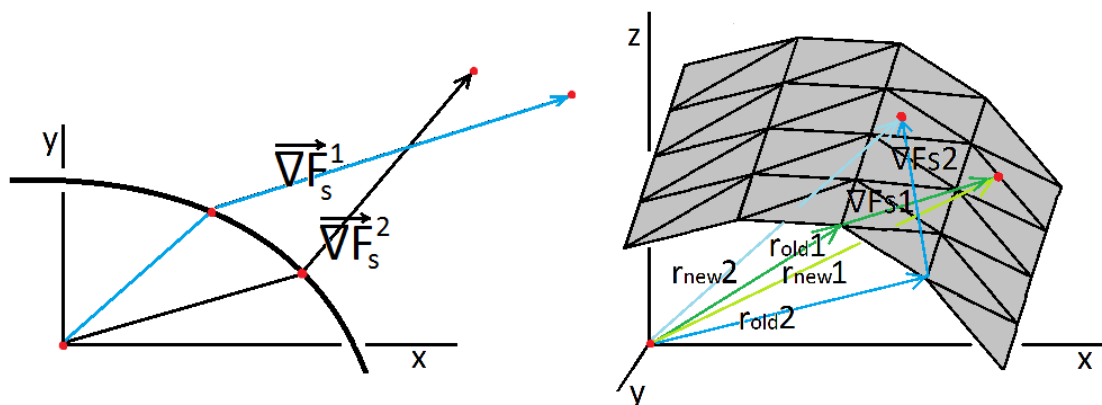
Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι η πιο απλή, αλλά σε συνδυασμό με την εξομάλυνση του διανύσματος κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης παρουσιάζει ένα σημαντικό μειονέκτημα.

Η ανανέωση της κάθε συνιστώσας του διανύσματος θέσης συνεπάγεται με χρησιμοποίηση της αντίστοιχης συνιστώσας της διανύσματος κλίσης. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην ανάγκη εξομάλυνσης της κάθε συνιστώσας του διανύσματος κλίσης ξεχωριστά το οποίο εισάγει την εξής αβεβαιότητα/πρόβλημα.

Η εξομάλυνση της κάθε συνιστώσας ξεχωριστά ενδέχεται να οδηγήσει σε ένα νέο εξομαλυμένο διάνυσμα  $\vec{\nabla}F_s$ , το οποίο έχει διαφορετική διεύθυνση από το αρχικό διάνυσμα  $\vec{\nabla}F$ , καθώς δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι η εξομάλυνση θα επιδράσει με το ίδιο βαθμό σε κάθε συνιστώσα.

Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό, εισάγει επομένως τον κίνδυνο, δύο γειτονικοί κόμβοι οι οποίοι θα ανανεωθούν με εξομαλυμένα διανύσματα κλίσης  $\vec{\nabla}F_s$ , να «καβαλήσουν» ο ένας τον άλλον και να προκύψει επομένως, μη ρεαλιστικό πλέγμα.

Η συγκεκριμένη περίπτωση φαίνεται αναλυτικά στο σχήμα 3.3, σε 2 και 3 διαστάσεις:



Σχήμα 3.3 – Πρόβλημα άμεσης ανανέωσης γεωμετρίας.

### 3.6.2 Ανανέωση κατά δεδομένη κατεύθυνση

Εναλλακτικά, μπορεί να οριστεί μια συγκεκριμένη κατεύθυνση (μέσω ενός μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ), πάνω στην οποία και μόνο, θα μπορεί να μετακινηθεί το διάνυσμα θέσης. Και βέβαια το καταλληλότερο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε κόμβο, για αυτό το σκοπό, είναι το κάθετο, ως προς το γεωμετρικό σώμα και με κατεύθυνση προς τα «έξω» του σώματος.

Έτσι, η ανανέωση της γεωμετρίας κατά αυτήν τη λογική, γίνεται με βάση την παρακάτω διανυσματική σχέση:

$$\vec{r}_{new} = \vec{r}_{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial n} \hat{n} \quad 3.16$$

η οποία αναλύεται στις εξής τρεις βαθμωτές σχέσεις:

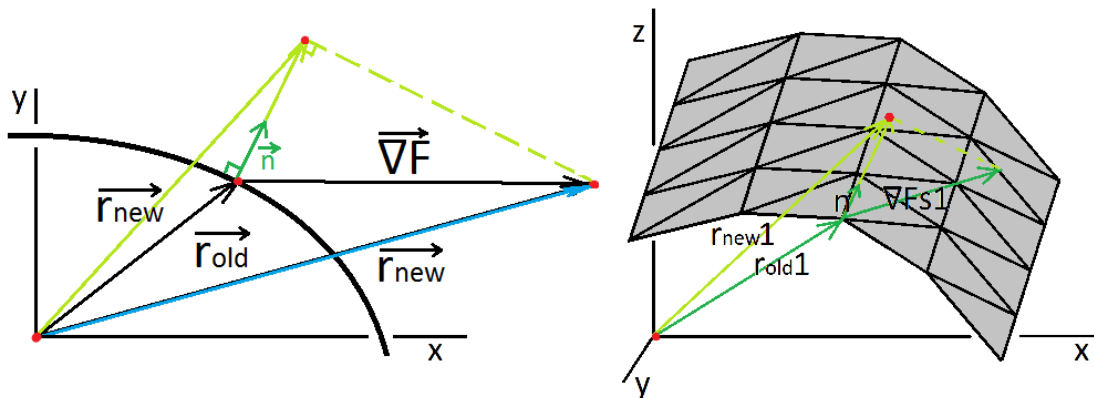
$$x_{new} = x_{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial n} n_x, \quad y_{new} = y_{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial n} n_y, \quad z_{new} = z_{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial n} n_z$$

Το μέγεθος  $\frac{\partial F}{\partial n}$  δεν είναι κάτι άλλο από την προβολή του διανύσματος  $\vec{\nabla}F$  πάνω στο μοναδιαίο κάθετο (στην επιφάνεια) διάνυσμα  $\hat{n}$  και υπολογίζεται αναλυτικά από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \vec{\nabla}F \cdot \hat{n} = \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} n_x + \frac{\partial F}{\partial y} n_y + \frac{\partial F}{\partial z} n_z \quad 3.17$$

Έτσι με δεδομένο, το αρχικό (παλιό) διάνυσμα θέσης του κάθε κόμβου  $\vec{r}_{old}$  και έχοντας υπολογίσει την προβολή του διανύσματος κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης  $\vec{\nabla}F$  πάνω στο διάνυσμα κατεύθυνσης  $\hat{n}$ , υπολογίζεται με την παραπάνω διαδικασία το νέο διάνυσμα θέσης του κόμβου  $\vec{r}_{new}$

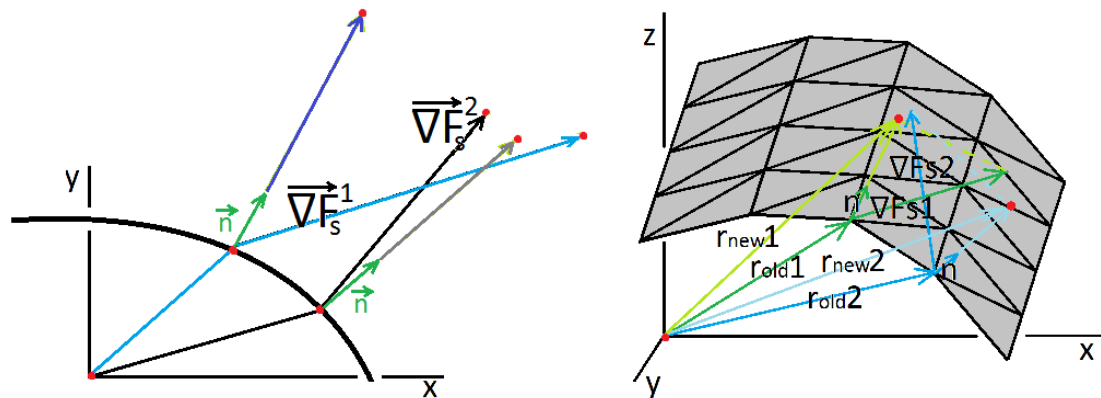
Αυτός ο τρόπος ανανέωσης της γεωμετρίας, αποτυπώνεται αναλυτικά στο σχήμα 3.4, σε 2 και 3 διαστάσεις:



Σχήμα 3.4 – Ανανέωση γεωμετρίας κατά δεδομένη διεύθυνση.



Επομένως με αυτήν την μεθοδολογία εξασφαλίζεται η ομαλότερη ανανέωση της γεωμετρίας, γεγονός το οποίο παρουσιάζεται χαρακτηριστικά στο σχήμα 3.5



Σχήμα 3.5 – Εξασφάλιση ορθότητας ανανέωσης γεωμετρίας.

Με βάση τα παραπάνω, στην εργασία αυτή επιλέγεται η ανανέωση της γεωμετρίας κατά την διεύθυνση του κάθετου, ως προς την επιφάνεια, διανύσματος και επομένως η εξομάλυνση του μεγέθους  $\frac{\partial F}{\partial n}$  στην επιφάνεια της γεωμετρίας.



# Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>

## Επίλυση Εξίσωσης Εξομάλυνσης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων

---

### 4.1 Εισαγωγή

Προηγουμένως, αποφασίστηκε ότι το μέγεθος του οποίου η τιμή θα εξομαλυνθεί πάνω στην επιφάνεια της γεωμετρίας, είναι το  $\frac{\partial F}{\partial n}$ , δηλαδή η προβολή του διανύσματος κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης, στο μοναδιαία, κάθετο διάνυσμα ως προς την επιφάνεια. Για λόγους ευκολίας, από εδώ και στο εξής, το μέγεθος  $\frac{\partial F}{\partial n}$  θα αντιστοιχεί στο  $G$ , ενώ η εξομαλυμένη τιμή του στο  $G_S$ .

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η εξίσωση εξομάλυνσης που πρέπει να ικανοποιείται για κάθε κόμβο του πλέγματος είναι η  $G_{S_i} - \varepsilon \cdot \vec{\nabla}^2 G_{S_i} = G_i$ , για κάθε  $1 < i < n$ , όπου  $n$  το πλήθος των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος.

Στη συνέχεια, ακολουθεί η διακριτοποίηση της εξίσωσης εξομάλυνσης σε μη-δομημένα επιφανειακά πλέγματα, σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου, χρησιμοποιώντας κεντροκομβικό<sup>5</sup> μοντέλο διαχείρισης [7], [8], [11].

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων (Finite Volume Method), είναι μια μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, η οποία προϋποθέτει τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου (γεωμετρίας ή πεδίου ροής), σε πεπερασμένους όγκους, όγκους δηλαδή πολύ μικρού μεγέθους (σε σχέση με το συνολικό μέγεθος του πεδίου).

### 4.2 Ορισμός Κυψελών Ελέγχου

Πρώτο βήμα στην εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων, είναι η δημιουργία των όγκων ελέγχου. Αρχικά, ορίζεται το πλήθος των κόμβων στο οποίο θα διακριτοποιηθεί το χωρίο και δημιουργηθεί το υπολογιστικό πλέγμα. Αφού πλέον έχει υπολογιστεί η θέση των κόμβων, δημιουργούνται οι υπολογιστικές κυψέλες γύρω από αυτούς, οι οποίες πρέπει αφενός να καλύπτουν όλο το υπολογιστικό χωρίο και αφετέρου να μην αλληλοκαλύπτονται.

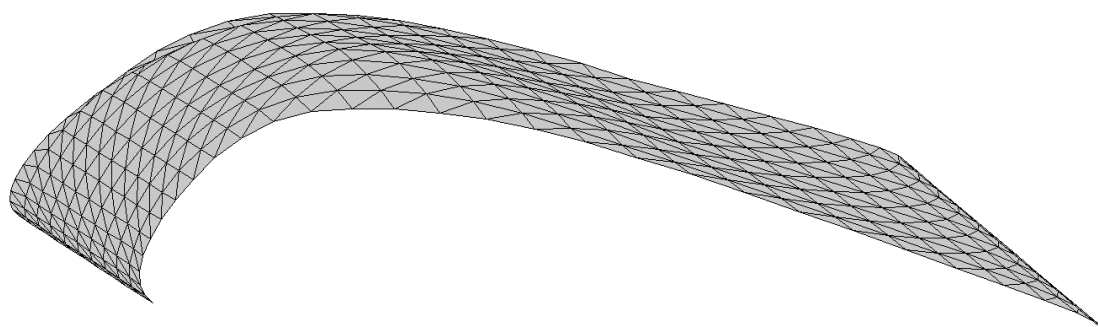
---

<sup>5</sup> **Κεντροκομβικό** ονομάζεται το μοντέλο στο οποίο όλες οι μεταβλητές του προβλήματος αποθηκεύονται στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος, σε αντίθεση με το κεντροκυψελικό όπου οι μεταβλητές του προβλήματος αποθηκεύονται στο βαρύκεντρο των στοιχείων του πλέγματος.

Η έννοια του όγκου είναι γενική, καθώς σε ένα τριδιάστατο χωρίο το πεπερασμένο χωρίο είναι πράγματι όγκος, αλλά σε ένα διδιάστατο χωρίο το πεπερασμένο χωρίο είναι πεπερασμένο εμβαδόν.

Στη παρούσα διπλωματική εργασία, το υπολογιστικό πλέγμα, θα είναι επιφανειακό και ως αποτέλεσμα θα δημιουργηθούν πεπερασμένα εμβαδά που για χάρην ευκολίας θα ονομάζονται «όγκο».

Στο σχήμα 4.1, παρουσιάζεται χαρακτηριστικό υπολογιστικό πλέγμα, ίδιας μορφής με το πραγματικό που χρησιμοποιήθηκε:



Σχήμα 4.1 – Παράδειγμα Υπολογιστικού Πλέγματος.

Αναλυτικά, τα αθροιστικά όρια των κυψελών ελέγχου σε διδιάστατα πλέγματα ή τριδιάστατα επιφανειακά, ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται ενώνοντας τα μέσα των ακμών του πλέγματος με το κέντρο βάρους των κόμβων των εκατέρωθεν κάθε ακμής πλεγματικών στοιχείων.

Το διάνυσμα θέσης του κέντρου βάρους των κόμβων ενός στοιχείου καθορίζεται ως εξής:

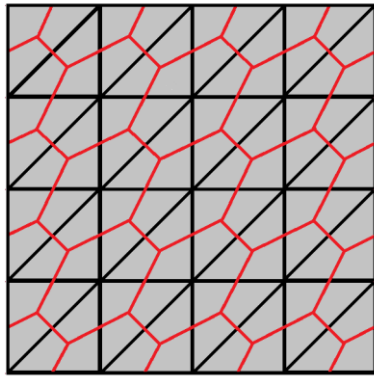
$$\vec{r}_i^G = \frac{\sum_{k=1}^{k=N} \vec{r}_i^k}{N} \quad 4.2$$

ενώ το μέσο της ακμής δύο κόμβων καθορίζεται ως εξής:

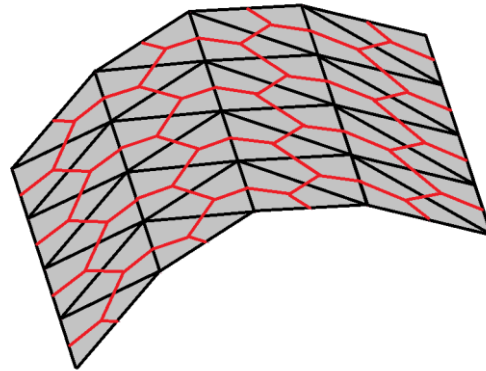
$$\vec{r}^M = \frac{\vec{r}^P + \vec{r}^Q}{2} \quad 4.3$$

όπου  $M$  η ζητούμενη θέση μέσου και  $P$  και  $Q$  οι δύο κόμβοι που σχηματίζουν την ακμή.

Στο σχήμα 4.2, παρουσιάζονται οι κυψέλες ελέγχου για δύο περιπτώσεις υπολογιστικών πλεγμάτων:



Πλέγμα 1



Πλέγμα 2

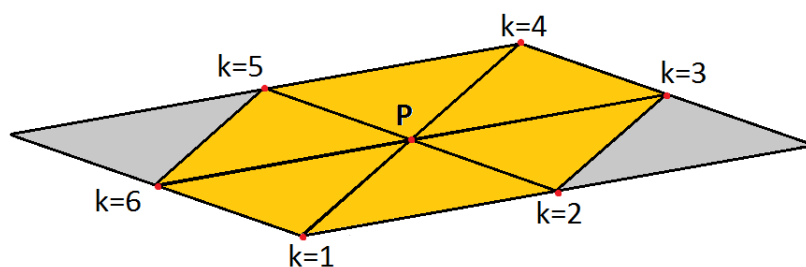
Σχήμα 4.2 – Κυψέλες ελέγχου σε (1) Μη-Δομημένο Διδιάστατο (2) Μη-Δομημένο Επιφανειακό.

### 4.3 Υπολογισμός Εμβαδού Κυψέλης $A_P$

Σχετικά με τον υπολογισμό του εμβαδού της κυψέλης ενός κόμβου του πλέγματος, αρχικά θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία υπολογισμού για διδιάστατα πλέγματα και, στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί η «προσεγγιστική» παραδοχή για τον υπολογισμό, σε επιφανειακά πλέγματα.

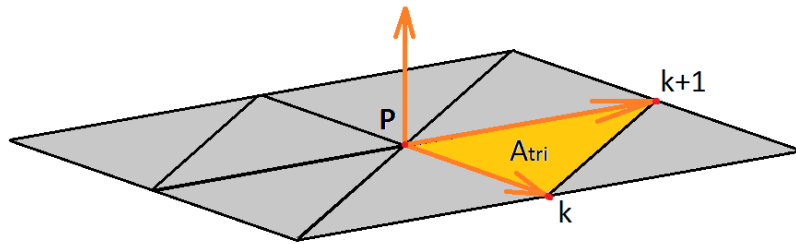
#### 4.3.1 Υπολογισμός Εμβαδού σε Διδιάστατα πλέγματα

Σε ένα μη δομημένο πλέγμα, για να υπολογιστεί το εμβαδόν της κυψέλης ενός κόμβου  $i = P$ , αρχικά πρέπει να υπολογιστεί το εμβαδόν των τριγώνων που σχηματίζονται από το κόμβο και όλους τους γειτονικούς του, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3



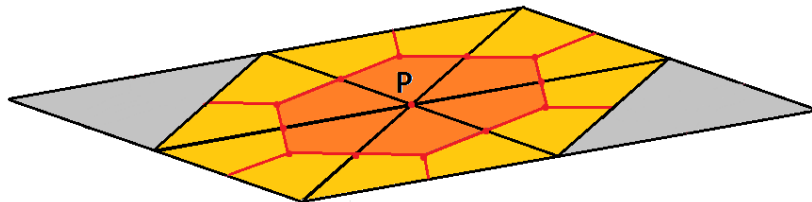
Σχήμα 4.3 – Υπολογισμός εμβαδού γειτονικών τριγώνων.

Το εμβαδόν του κάθε τριγώνου υπολογίζεται ως το μισό μέτρο του εξωτερικού γινόμενου των διανυσμάτων που σχηματίζουν ο κεντρικός κόμβος με τις άλλες δύο κορυφές του κάθε τριγώνου, δηλαδή  $A_{triangle} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{v}_{Pk} \times \vec{v}_{P(k+1)}|$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4



Σχήμα 4.4 – Υπολογισμός τριγώνου.

Στη συνέχεια, με γνωστό το κέντρο βάρους του κάθε τριγώνου και το μέσο της κάθε ακμής του πλέγματος, υπολογίζεται η συνεισφορά του τριγώνου στο εμβαδόν της κυψέλης. Συγκεκριμένα κάθε τρίγωνο, λόγω της ιδιότητας του βαρύκεντρου να χωρίζει το τρίγωνο σε 3 ίσα τμήματα, συνεισφέρει με το  $1/3$  του εμβαδόν του. Έτσι με άθροιση των συνεισφορών όλων των γειτονικών τριγώνων προκύπτει το εμβαδόν της κυψέλης, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.5:

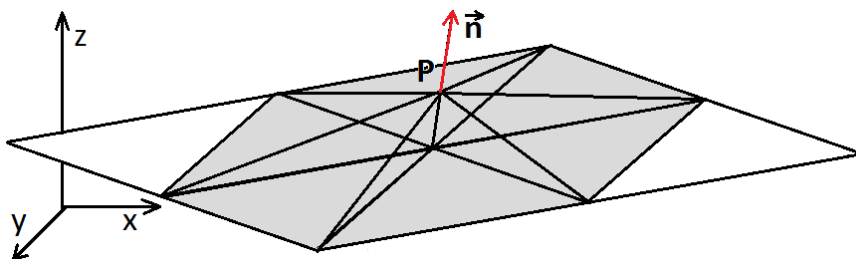


Σχήμα 4.5 – Εμβαδόν κυψέλης κόμβου P.

### 4.3.2 Υπολογισμός Εμβαδού σε Επιφανειακά Πλέγματα

Για την έκφραση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων σε επιφανειακά πλέγματα, που αποτελούν μια ενδιάμεση κατάσταση καθώς αποτελούν πλέγματα δύο διαστάσεων σε τριδιάστατο χώρο, δημιουργείται και χρησιμοποιείται μια προσεγγιστική μέθοδος για την γενικότερη διαχείριση των συντεταγμένων του πλέγματος, όπου αυτή χρειαστεί, κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

Η κύρια ιδέα της μεθόδου, είναι ότι με γνωστές, τόσο τις συντεταγμένες, όσο και του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος ως προς την επιφάνεια (όπως φαίνεται στην εικόνα 4.6), ενός κόμβου  $P$  του πλέγματος, είναι δυνατό να βρεθούν οι προβολές των, άμεσα γειτονικών του, κόμβων, στο επίπεδο που δημιουργείται από το κάθετο διάνυσμα του κόμβου  $P$ .



Σχήμα 4.6 – Τμήμα επιφανειακού πλέγματος.

Αναλυτικά, κάθε ένα διάνυσμα  $\vec{v} = (a, b, c)$  ορίζει το επίπεδο  $ax + by + cz + d = 0$ . Έτσι, για γνωστό σημείο  $P = (x_P, y_P, z_P)$  και κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  στο σημείο αυτό, μπορεί να οριστεί ένα επίπεδο στο οποίο να γίνει προβολή οποιουδήποτε σημείου  $A = (x_A, y_A, z_A)$  και να προκύψει ένα νέο  $A' = (x'_A, y'_A, z'_A)$  στο επίπεδο του σημείου  $A$ .

Οι σχέσεις που δίνουν τις νέες συντεταγμένες του σημείου  $A$  είναι οι εξής:

$$x'_A = x_A - n_x \cdot \frac{n_x \cdot x_A + n_y \cdot y_A + n_z \cdot z_A + d}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad 4.4\alpha$$

$$y'_A = y_A - n_y \cdot \frac{n_x \cdot x_A + n_y \cdot y_A + n_z \cdot z_A + d}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad 4.4\beta$$

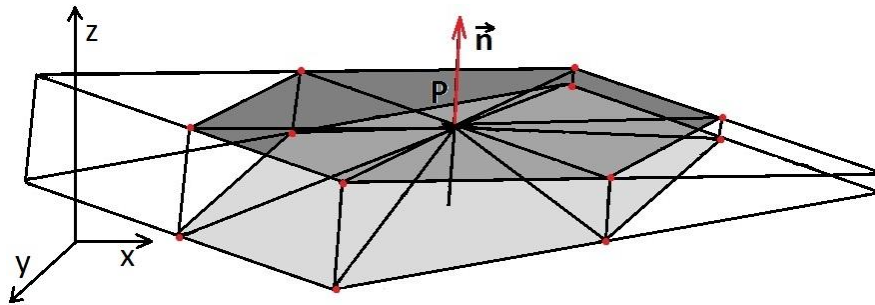
$$z'_A = z_A - n_z \cdot \frac{n_x \cdot x_A + n_y \cdot y_A + n_z \cdot z_A + d}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad 4.4\gamma$$

όπου:

$$d = -(n_x \cdot x_P + n_y \cdot y_P + n_z \cdot z_P) \quad 4.5$$

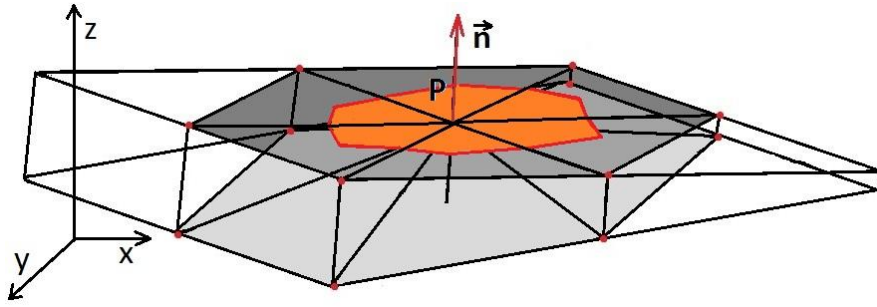
Οι παραπάνω σχέσεις είναι γενικές και χρησιμοποιώντας της για το διάνυσμα  $\vec{n}$  θα ισχύει  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

Παράδειγμα της προβολής, με βάση την γεωμετρία του σχήματος 4.6, παρουσιάζεται στο σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7 – Προβολή σημείων στο επίπεδο κεντρικού κόμβου  $P$ .

Πλέον, η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για τον υπολογισμό του εμβαδού  $A_p$  είναι η ίδια με τη διδιάστατη περίπτωση που παρουσιάστηκε προηγουμένως, και καταλήγει στο εμβαδόν που φαίνεται σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8 – Εμβαδόν κυψέλης  $A_p$  σε επιφανειακό πλέγμα.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι η προβολή ενός κόμβου στο επίπεδο ενός άλλου, είναι μια τεχνική που εφαρμόζεται όχι μόνο κατά τον υπολογισμό του εμβαδού της κάθε κυψέλης, αλλά σε όλη τη διαδικασία διακριτοποίησης και επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης. Πρακτικά, κάθε φορά που υπάρχει αναφορά σε γειτονικό κόμβο ως προς κεντρικό, εννοείται η προβολή του πρώτου στο επίπεδο του δεύτερου και η χρησιμοποίηση των νέων συντεταγμένων κατά τους υπολογισμούς.

#### 4.4 Ολοκλήρωση και Διακριτοποίηση Εξίσωσης

Μετά τη δημιουργία των πεπερασμένων όγκων ελέγχου, επόμενο βήμα της μεθόδου είναι η ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης σε αυτούς τους όγκους. Με την ολοκλήρωση, αναδιατυπώνεται η μερική διαφορική εξίσωση 3.13 σε συντηρητική μορφή, όπου και πλέον, σε αυτή τη μορφή διακριτοποιείται. Αυτή η διαδικασία εξασφαλίζει τη διατήρηση της ροής<sup>6</sup> διαμέσου κάθε πεπερασμένου όγκου, όπως ακριβώς θα ίσχυε δηλαδή και για τη ροή σε ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο.

Έτσι, ξεκινώντας, σκοπός είναι η επίλυση της εξίσωσης εξομάλυνσης:

$$\vec{G}_s - \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_s) = \vec{G}$$

για το διάνυσμα:

$$\vec{G} = \frac{\partial F}{\partial n} = \left( \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{i=1}, \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{i=2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{i=n} \right)$$

Η εξίσωση γραμμένη σε τυχαίο κόμβο  $i = P$  είναι η εξής:

$$G_{sP} - \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G_{sP}) = G_P \quad 4.6$$

<sup>6</sup> Στο πλαίσιο της διπλωματικής, η εξίσωση που επιλύεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων είναι η εξίσωση εξομάλυνσης και όχι κάποια εξίσωση ροής. Παρόλα αυτά, η αναφορά στην διατήρηση μεγεθών που εισέρχονται και εξέρχονται από τις κυψέλες ελέγχου, θα γίνονται με την γενικότερη έννοια της «ροής».



Ολοκληρώνοντας την εξίσωση 4.6 στον πεπερασμένο όγκο ελέγχου του κόμβου  $i = P$ , έχουμε:

$$\iint_{A_p} G_{sP} dA_p - \iint_{A_p} \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G_{sP}) dA_p = \iint_{A_p} G_p dA_p \quad 4.7$$

όπου  $A_p$  το εμβαδόν της κυψέλης του κόμβου  $i = P$ , ο υπολογισμός του οποίου αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης ή θεώρημα Gauss σε δύο διαστάσεις, σύμφωνα με το οποίο, το ογκικό ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός μεγέθους ισούται με τη διανυσματική ροή από το όριο του, δηλαδή:

$$\iint_{A_p} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dA_p = \oint_{\partial A_p} \vec{F} \cdot \vec{n} dl \quad 4.8$$

το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης 4.7 μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\iint_{A_p} \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G_{sP}) dA_p = \oint_{\partial A_p} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{sP}) \cdot \vec{n}_G dl \quad 4.9$$

Όμως ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ροής, ισούται με το άθροισμα των ροών των επιμέρους τμημάτων που το αποτελούν, επομένως:

$$\oint_{\partial A_p} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{sP}) \cdot \vec{n}_G dl = \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{sP}) \cdot \vec{n}_G \quad 4.10$$

όπου  $kP$  ο αριθμός των τμημάτων, ο οποίος θα ισούται με το πλήθος των γειτονικών κόμβων του κόμβου  $P$ .

Επίσης, θεωρώντας ότι κάθε μεταβλητή διατηρεί σταθερή την τιμή της μέσα στη κυψέλη ελέγχου, το πρώτο και το τρίτο ολοκλήρωμα της σχέσης 4.7, μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$\iint_{A_p} G_{sP} dA_p = G_{sP} \iint_{A_p} dA_p \quad 4.11$$

και

$$\iint_{A_p} G_p dA_p = G_p \iint_{A_p} dA_p \quad 4.12$$

τα οποία με υπολογισμό του ολοκληρώματος καταλήγουν στα εξής:

$$G_{SP} \iint_{A_P} dA_P = G_{SP} A_P \quad 4.13$$

και

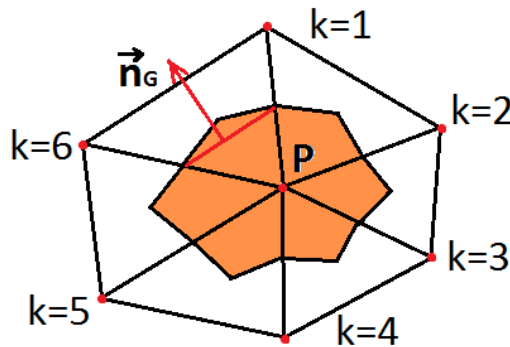
$$G_P \iint_{A_P} dA_P = G_P A_P \quad 4.14$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων 4.10 , 4.13 και 4.14 στην (457) καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$G_{SP} A_P - \sum_{k=1}^{k_P} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G = G_P A_P \quad 4.15$$

#### 4.5 Υπολογισμός Διανύσματος Ροής $\vec{n}_G$

Πριν την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης, πρέπει να οριστούν τα διανύσματα  $\vec{n}_G$  που υποδηλώνουν τη ροή που εισέρχεται ή εξέρχεται στην κυψέλη ελέγχου, από κάθε πλευρά ξεχωριστά. Παράδειγμα του  $\vec{n}_G$  μιας πλευράς φαίνεται στο σχήμα 4.9

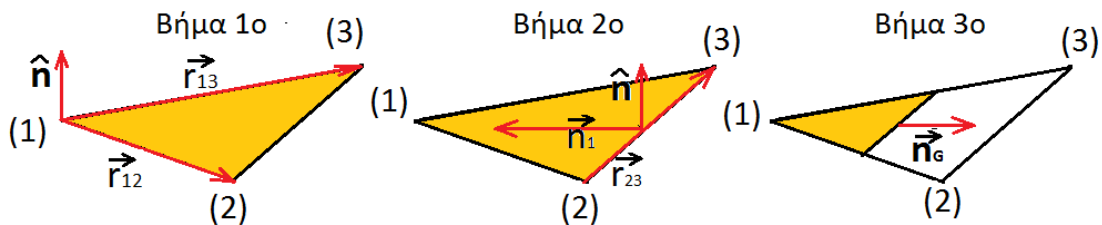


Σχήμα 4.9 – Διάνυσμα ροής.

Ο υπολογισμός των διανυσμάτων  $\vec{n}_G$  γίνεται χωριστά για κάθε τρίγωνο και στηρίζεται αποκλειστικά στις συντεταγμένες των τριών κορυφών του, αλλά θέλει προσοχή ώστε το διάνυσμα που θα προκύψει να είναι συνεπίπεδο με το τρίγωνο στο οποίο ανήκει, καθώς το τρίγωνο βρίσκεται στον τριδιάστατο χώρο. Έτσι για τον υπολογισμό ακολουθείται η εξής διαδικασία, η οποία παρουσιάζεται και στο σχήμα 4.10 :

1. Αρχικά υπολογίζονται τα διανύσματα  $\vec{r}_{12}$  και  $\vec{r}_{13}$  καθώς και το εξωτερικό τους γινόμενο, το οποίο διαιρεμένο με το μέτρο του, δίνει το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\hat{n}$ , ως προς τη επιφάνεια του τριγώνου, και με φορά προς τα έξω της γεωμετρίας που μοντελοποιείται.

2. Στη συνέχεια, το διάνυσμα  $\hat{n}$  πολλαπλασιαζόμενο εξωτερικά με το διάνυσμα της πλευράς 2-3, δίνει το διάνυσμα  $\vec{n}_1$  που είναι το διάνυσμα, κάθετο προς την πλευρά 2-3 και συνεπίπεδο με το επίπεδο του τριγώνου.
3. Τέλος, το ζητούμενο  $\vec{n}_G$  προκύπτει από το διάνυσμα  $\vec{n}_1$  με αντιστροφή της διεύθυνσης του και διαιρώντας το μήκος του δια δύο.

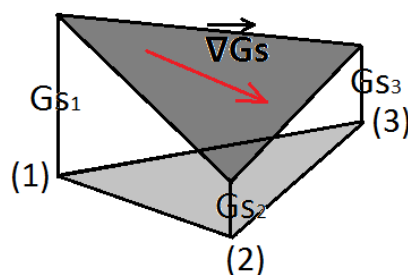


Σχήμα 4.10 – Υπολογισμός διανύσματος ροής.

Με βάση τη παραπάνω διαδικασία προκύπτει το διάνυσμα ροής  $\vec{n}_G$  με κύριο χαρακτηριστικό, το ότι το μήκος του ισούται με το μήκος της πλευράς από την οποία εξέρχεται, όπως φαίνεται στις εικόνες της παρούσας ενότητας.

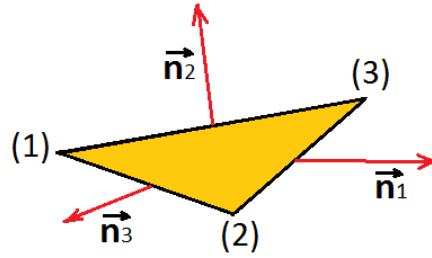
#### 4.6 Υπολογισμός Διανύσματος Κλίσης $\vec{\nabla}G_{SP}$

Επιπλέον, πρέπει να υπολογιστούν τα διανύσματα  $\vec{\nabla}G_{SP}$ . Για τον υπολογισμό τους, υιοθετείται η θεώρηση P1 γραμμικών στοιχείων, στα οποία η κλίση  $\vec{\nabla}$  μιας μεταβλητής  $G_{SP}$  σε κάθε στοιχείο του πλέγματος, δηλαδή σε κάθε τρίγωνο, θεωρείται σταθερή. Η κλίση αυτή πρακτικά είναι η κλίση του επιπέδου που προκύπτει αν κάθε κορυφή του τριγώνου ανυψωθεί κατά απόσταση ίση με το μήκος της μεταβλητής στην κορυφή αυτή. Η απεικόνιση της θεώρησης P1 φαίνεται στο σχήμα 4.11



Σχήμα 4.11 – Υπολογισμός διανύσματος κλίσης

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκε το πώς υπολογίζεται το κάθετο προς την πλευρά του τριγώνου διάνυσμα  $\vec{n}_1$ . Στο σημείο θα θεωρηθεί ότι το διάνυσμα  $\vec{n}_1$  έχει φορά αντίθετη με αυτήν που υπολογίστηκε, και επομένως «κοιτάει» προς τα έξω του τριγώνου. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, υπολογίζονται ομοίως και τα  $\vec{n}_2$  και  $\vec{n}_3$ . Δηλαδή, πλέον είναι γνωστά τα  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$  που παρουσιάζονται στο σχήμα 4.12 .



Σχήμα 4.12 – Κάθετα διανύσματα πλευρών

Με δεδομένα αυτά και θεωρώντας  $A_T$  το εμβαδόν του τριγώνου,  $\partial A_T$  το όριο του τριγώνου, και  $\vec{\nabla} G_{s_T}$  την κλίση του  $G_s$  στο τρίγωνο, θα ισχύει:

$$\vec{\nabla} G_{s_T} A_T = \iint_{A_T} \vec{\nabla} G_{s_T} dA_T = \iint_{A_T} \vec{\nabla} \cdot (\vec{I} G_{s_T}) dA_T \quad 4.16$$

και με βάση το θεώρημα της απόκλισης [11]:

$$\iint_{A_T} \vec{\nabla} \cdot (\vec{I} G_{s_T}) dA_T = \oint_{\partial A_T} G_{s_T} \vec{n} dl = \sum_{k=1}^3 G_{s_k} \vec{n}_k \quad 4.17$$

Συνεχίζοντας,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} G_{s_T} A_T &= \sum_{k=1}^3 G_{s_k} \vec{n}_k \\ &= G_{s_{23}} \vec{n}_1 + G_{s_{13}} \vec{n}_2 + G_{s_{12}} \vec{n}_3 \\ &= \frac{G_{s(2)} + G_{s(3)}}{2} \vec{n}_1 + \frac{G_{s(1)} + G_{s(3)}}{2} \vec{n}_2 + \frac{G_{s(2)} + G_{s(1)}}{2} \vec{n}_3 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ G_{s(1)} (\vec{n}_2 + \vec{n}_3) + G_{s(2)} (\vec{n}_1 + \vec{n}_3) + G_{s(3)} (\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \right\} \end{aligned}$$

και επειδή:

$$\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = 0 \quad 4.18$$

η προηγούμενη σχέση καταλήγει:

$$\vec{\nabla} G_{s_T} A_T = -\frac{1}{2} \left\{ G_{s(1)} \vec{n}_1 + G_{s(2)} \vec{n}_2 + G_{s(3)} \vec{n}_3 \right\} \quad 4.19$$

Οπότε, η ζητούμενη σχέση υπολογισμού του  $\vec{\nabla} G_{s_T}$  είναι η εξής:

$$\vec{\nabla} G_{s_T} = -\frac{1}{2 \cdot A_T} \left\{ G_{s(1)} \vec{n}_1 + G_{s(2)} \vec{n}_2 + G_{s(3)} \vec{n}_3 \right\} \quad 4.20$$

η οποία αναλύεται στις τρεις σχέσεις των συνιστωσών:

$$\frac{\partial G_{sT}}{\partial x} = -\frac{1}{2 A_T} \left\{ G_{s(1)} \vec{n}_{1x} + G_{s(2)} \vec{n}_{2x} + G_{s(3)} \vec{n}_{3x} \right\} \quad 4.21\alpha$$

$$\frac{\partial G_{sT}}{\partial y} = -\frac{1}{2 A_T} \left\{ G_{s(1)} \vec{n}_{1y} + G_{s(2)} \vec{n}_{2y} + G_{s(3)} \vec{n}_{3y} \right\} \quad 4.21\beta$$

$$\frac{\partial G_{sT}}{\partial z} = -\frac{1}{2 A_T} \left\{ G_{s(1)} \vec{n}_{1z} + G_{s(2)} \vec{n}_{2z} + G_{s(3)} \vec{n}_{3z} \right\} \quad 4.21\gamma$$

#### 4.7 Δέλτα Διατύπωση και Επίλυση

Συνεχίζοντας με την εξίσωση 4.15 προχωράμε στην επίλυση της. Για να γίνει αυτό αρχικά την εκφράζουμε σε δέλτα διατύπωση (Delta Formulation), ως εξής:

Στη σχέση:

$$G_{sP} A_P - \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{sP}) \cdot \vec{n}_G = G_P A_P$$

ορίζουμε όλο το αριστερό μέλος ίσο με τη μεταβλητή  $\Omega$ , δηλαδή:

$$\Omega = G_{sP} A_P - \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{sP}) \cdot \vec{n}_G \quad 4.22$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ξεκαθαριστούν οι συνεισφορές του κάθε κόμβου στην εξίσωση. Ο όρος  $\sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{sP}) \cdot \vec{n}_G$  αποτελεί άθροιση στις επιμέρους πλευρές, το οποίο συνεπάγεται με υπολογισμούς στα επιμέρους τρίγωνα, επομένως για έναν κεντρικό κόμβο  $i = P$  στην εξίσωση θα συνεισφέρουν δύο ακόμα οι  $i = Q$  και  $i = R$  οι άλλοι δύο δηλαδή κόμβοι του τρέχοντος τριγώνου. Με την άθροιση λοιπόν, θα έχουν αποδοθεί οι κατάλληλες συνεισφορές τόσο στον κεντρικό κόμβο, όσο και σε όλους τους γειτονικούς του.

Επομένως, το μέγεθος  $\Omega$  εκφραζόμενο για κάθε τρίγωνο, θα είναι συνάρτηση του κεντρικού κόμβου  $P$  και των άλλων δύο  $Q, R$  που σχηματίζουν το τρίγωνο, δηλαδή θα ισχύει  $\Omega = \Omega(P, Q, R)$

Έχοντας ορίσει το  $\Omega$ , σε ένα τυχαίο βήμα  $n$  της επαναληπτικής επίλυσης, θα ισχύει:

$$\Omega^{n+1} = G_P A_P \quad 4.23$$

Όμως, το τυχαίο βήμα  $n + 1$  συνδέεται με το προηγούμενο του με βάση τη σχέση:

$$\Omega^{n+1} = \Omega^n + \delta\Omega \quad 4.24$$

όπου επειδή  $\Omega = \Omega(P, Q, R)$ , θα ισχύει:



και επαναληπτικής μεθόδου. Η δέλτα διατύπωση, οδήγησε στη δημιουργία ενός συστήματος η επίλυση του οποίου οδηγεί στον υπολογισμό των μεταβολών των εξομαλυμένων παραγώγων ευαισθησίας  $\delta G_{SP}$ ,  $\delta G_{SQ}$ ,  $\delta G_{SR}$ . Έτσι ένα αρχικοποιημένο πεδίο  $G_S$  με υπολογισμό των μεταβολών, θα οδηγηθεί στην τελική κατάσταση σύμφωνα με την επαναληπτική σχέση  $G_{SP}^{n+1} = G_{SP}^n + \delta G_{SP}$

## 4.8 Αναλυτική Μορφή Συντελεστών

Τέλος, σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν οι αναλυτικές σχέσεις υπολογισμού των συντελεστών  $diag_P$ ,  $zm_k$ ,  $vv_P$ .

### 4.8.1 Δεξί Μέλος της Εξίσωσης ( $vv_P$ )

Ξεκινώντας από τη σχέση  $vv_P = G_P A_P - \Omega^n$  και αναλύοντας την, έχουμε:

$$\begin{aligned} vv_P &= G_P A_P - \Omega^n \\ &= G_P A_P - G_{SP} A_P - \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{ST}) \cdot \vec{n}_G \end{aligned} \quad 4.29$$

Στη συνέχεια, η ανάλυση θα επικεντρωθεί σε ένα από τα τρίγωνα του αθροίσματος  $\sum_{k=1}^{kP}$ , καθώς η ίδια διαδικασία θα επεκταθεί για όλα τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τον κεντρικό κόμβο  $P$ .

Επομένως, η σχέση που πρέπει να υπολογιστεί είναι η  $\varepsilon (\vec{\nabla} G_{ST}) \cdot \vec{n}_G$  σε ένα τρίγωνο. Το διάνυσμα ροής  $\vec{n}_G$  και το διάνυσμα κλίσης  $\vec{\nabla} G_{ST}$  σε ένα τρίγωνο έχει υπολογιστεί σε προηγούμενη ενότητα.

Επομένως:

$$\varepsilon (\vec{\nabla} G_{ST}) \cdot \vec{n}_G = \varepsilon \left[ \frac{\partial G_{ST}}{\partial x} n_{Gx} + \frac{\partial G_{ST}}{\partial y} n_{Gy} + \frac{\partial G_{ST}}{\partial z} n_{Gz} \right] \quad 4.30$$

Και έτσι προκύπτει η τελική έκφραση:

$$vv_P = G_P A_P - G_{SP} A_P - \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon \left[ \frac{\partial G_{ST}}{\partial x} n_{Gx} + \frac{\partial G_{ST}}{\partial y} n_{Gy} + \frac{\partial G_{ST}}{\partial z} n_{Gz} \right] \quad 4.31$$

### 4.8.2 Αριστερό Μέλος της Εξίσωσης $diag_P$ , $zm_k$

Ξεκινώντας πάλι από την αρχική σχέση  $\Omega = G_{SP} A_P - \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G$ , θα υπολογιστεί αρχικά η γενική παράγωγος  $\frac{\partial \Omega}{\partial G_{Si}}$ .

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial G_{Si}} &= \frac{\partial}{\partial G_{Si}} \left( G_{SP} A_P - \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial G_{Si}} (G_{SP} A_P) - \frac{\partial}{\partial G_{Si}} \left( \sum_{k=1}^{kP} \varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial G_{Si}} (G_{SP} A_P) - \sum_{k=1}^{kP} \frac{\partial}{\partial G_{Si}} [\varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Ο υπολογισμός μετατίθεται στον υπολογισμό της ποσότητας  $\frac{\partial}{\partial G_{Si}} [\varepsilon (\vec{\nabla} \cdot) \cdot \vec{n}_G]$

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial G_{Si}} [\varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G] &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial G_{Si}} [(\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G] \\
&= \varepsilon \frac{\partial (\vec{\nabla} G_{SP})}{\partial G_{Si}} \cdot \vec{n}_G + \varepsilon \frac{\partial \vec{n}_G}{\partial G_{Si}} \cdot \vec{\nabla} G_{SP} \\
&= \varepsilon \frac{\partial (\vec{\nabla} G_{SP})}{\partial G_{Si}} \cdot \vec{n}_G
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Για  $i = P$  ισχύει:

$$\frac{\partial (\vec{\nabla} G_{SP})}{\partial G_{SP}} = \left[ \frac{\partial}{\partial G_{SP}} \left( \frac{\partial G_{ST}}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial G_{SP}} \left( \frac{\partial G_{ST}}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial G_{SP}} \left( \frac{\partial G_{ST}}{\partial z} \right) \right] \tag{4.34}$$

ενώ, οι παράγωγοι  $\frac{\partial G_{ST}}{\partial x}, \frac{\partial G_{ST}}{\partial y}, \frac{\partial G_{ST}}{\partial z}$  έχουν υπολογιστεί σε προηγούμενη ενότητα.

Έτσι, με αντικατάσταση των σχέσεων, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial G_{SP}} [\varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G] &= -\frac{\varepsilon}{2 A_T^i} (n_{1x|i}^2 + n_{1y|i}^2 + n_{1z|i}^2) \\
\frac{\partial}{\partial G_{SQ}} [\varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G] &= -\frac{\varepsilon}{2 A_T^i} (n_{1x|i} n_{2x|i} + n_{1y|i} n_{2y|i} + n_{1z|i} n_{2z|i}) \\
\frac{\partial}{\partial G_{SR}} [\varepsilon (\vec{\nabla} G_{SP}) \cdot \vec{n}_G] &= -\frac{\varepsilon}{2 A_T^i} (n_{1x|i} n_{3x|i} + n_{1y|i} n_{3y|i} + n_{1z|i} n_{3z|i})
\end{aligned}$$

Και επομένως, προκύπτουν οι τελικές σχέσεις:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial G_{SP}} = A_P + \frac{\varepsilon}{2 A_T^i} (n_{1x|i}^2 + n_{1y|i}^2 + n_{1z|i}^2) \tag{4.36\alpha}$$



$$\frac{\partial \Omega}{\partial G_{sQ}} = \frac{\varepsilon}{2 A_T^i} \left( n_{1x|i} \cdot n_{2x|i} + n_{1y|i} \cdot n_{2y|i} + n_{1z|i} \cdot n_{2z|i} \right) \quad 4.36\beta$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial G_{sR}} = \frac{\varepsilon}{2 A_T^i} \left( n_{1x|i} \cdot n_{3x|i} + n_{1y|i} \cdot n_{3y|i} + n_{1z|i} \cdot n_{3z|i} \right) \quad 4.36\gamma$$



# Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>

## Ανάλυση Εφαρμογής Προς Επίλυση

---

### 5.1 Εισαγωγή

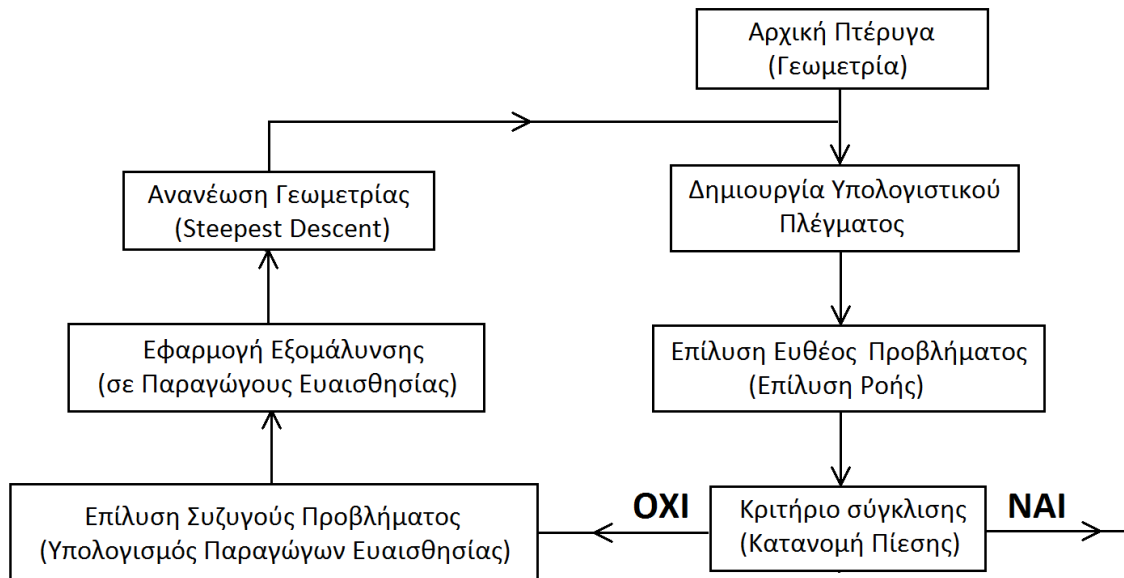
Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί αναλυτικά το πρόβλημα που επιλέχθηκε για να εφαρμοστεί σε αυτό η μέθοδος εξομάλυνσης. Στο σύνολο του, το πρόβλημα το οποίο περιλαμβάνει τη ροή ενεργειών για την επίλυση του γενικού προβλήματος, τον ορισμό της γεωμετρίας, τον καθορισμό των οριακών συνθηκών και των γεωμετρικών περιορισμών που εισάγονται εξαιτίας της φύσης της γεωμετρίας και, τέλος, λεπτομέρειες σχετικά με την επίλυση του πεδίου ροής, με βάση λογισμικό που δόθηκε έτοιμο από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του ΕΜΠ.

### 5.2 Γενικό Πρόβλημα

Για τη δοκιμή της μεθόδου εξομάλυνσης, επιλέχθηκε η εφαρμογή της, σε ένα πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής. Σκοπός της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, είναι ο σχεδιασμός πτερυγίου αξονικής στροβιλομηχανής, με τέτοιο τρόπο, ώστε σε συγκεκριμένες συνθήκες ροής να αναπαράγει ζητούμενη κατανομή πίεσης. Πρόκειται δηλαδή για πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού.

Για να επιτευχθεί μια τέτοια βελτιστοποίηση, χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν διάφορα εργαλεία/διαδικασίες. Αρχικά, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα αρχικό πτερύγιο, με βάση το οποίο θα προκύψει το τελικό. Γύρω από το πτερύγιο αυτό, θα πρέπει να δημιουργηθεί το υπολογιστικό πλέγμα στο οποίο θα γίνει επίλυση του ευθέως και του συζυγούς προβλήματος. Στη συνέχεια, αφού έχουν υπολογιστεί οι παράγωγοι ευαισθησίας μέσω της συζυγούς μεθόδου, θα εφαρμοστεί διαδικασία εξομάλυνσης τους και με την ολοκλήρωση της, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απότομης καθόδου θα προκύψει η νέα ανανεωμένη γεωμετρία. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται, με αρχική γεωμετρία την τελική της προηγούμενης επανάληψης, μέχρι σύγκλισης

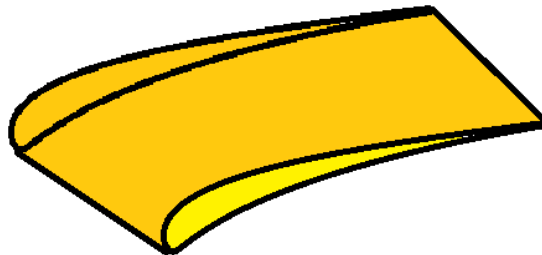
Η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1



Σχήμα 5.1 – Διάγραμμα ροής ενεργειών προβλήματος.

### 5.3 Γεωμετρία Πτερυγίου

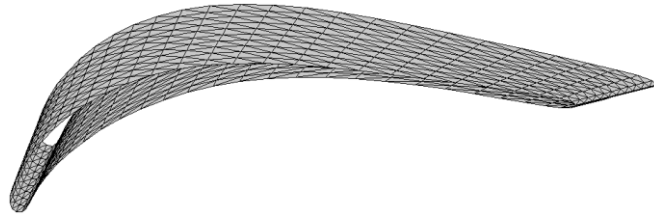
Το πτερύγιο της αξονικής στροβιλομηχανής έχει τη μορφή του σχήματος 5.2



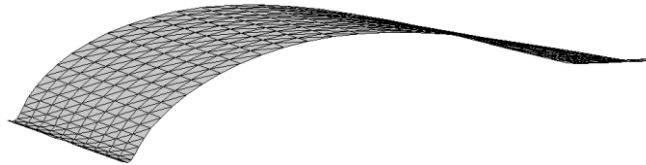
Σχήμα 5.2 – Πτερύγιο Στροβιλομηχανής

Για τη μοντελοποίηση της, η επιφάνεια του πτερυγίου διασπάται σε δύο τμήματα, στην πλευρά υποπίεσης (Suction Side) και στην πλευρά υπερπίεσης (Pressure Side). Κάθε πλευρά διακριτοποιείται ξεχωριστά, αρχικά, από δομημένο πλέγμα που αποτελείται από 31 κόμβους κατά την αξονική διεύθυνση και 11 κόμβους κατά την ακτινική διεύθυνση. Τα δύο πλέγματα, σε αυτή τη μορφή θα χρησιμοποιηθούν κατά την επίλυση του ευθέως και του συζυγούς προβλήματος.

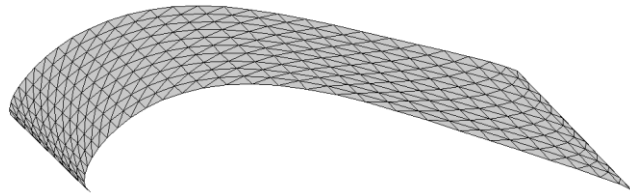
Στη συνέχεια, τα δύο πλέγματα μετατρέπονται σε μη-δομημένα, με διάσπαση των τετραγωνικών κελιών σε τριγωνικά και, έτσι, υπό τη νέα μορφή τους θα χρησιμοποιηθούν για την εφαρμογή της μεθόδου εξομάλυνσης. Η μορφή των δύο πλεγμάτων, καθώς και του πλήρους πτερυγίου φαίνεται στα σχήματα 5.3 , 5.4 , 5.5



Σχήμα 5.3 – Μη-δομημένο πλέγμα στην επιφάνεια πτερυγίου αξονικής στροβιλομηχανής.



Σχήμα 5.4 – Μη-δομημένο πλέγμα πλευράς υπερπίεσης

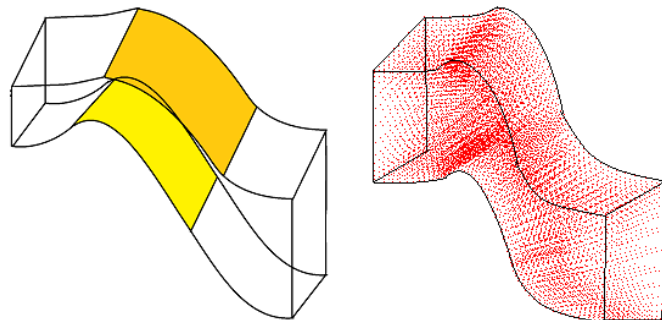


Σχήμα 5.5 – Μη-δομημένο πλέγμα πλευράς υποπίεσης

#### 5.4 Επίλυση Ευθέως και Συζυγούς Προβλήματος

Για λόγους πληρότητας, σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζονται βασικά χαρακτηριστικά του προβλήματος και της επίλυσης του. Η επιλογή του συγκεκριμένου προβλήματος είναι εντελώς τυχαία, καθώς η εφαρμογή της μεθόδου εξομάλυνσης, θα μπορούσε να γίνει σε οποιαδήποτε γεωμετρία ή συνθήκες ροής.

Για την επίλυση των εξισώσεων ροής λοιπόν, δημιουργείται ένα τριδιάστατο χωρίο ανάμεσα στις δύο διαχωρισμένες πλευρές του πτερυγίου (υποπίεσης και υπερπίεσης) σε απόσταση ίση με το βήμα της περιφερειακής πτερύγωσης, το οποίο διακριτοποιείται σε τριδιάστατο δομημένο πλέγμα, 10.000 κόμβων.



Σχήμα 5.6 – Υπολογιστικό χωρίο

Η ροή στην είσοδο της στροβιλομηχανής, είναι συμπιεστή με αριθμό mach = 0.45, με γωνίες εισόδου ροής  $\theta_1 = 0^\circ$  και  $\theta_2 = -19.3^\circ$ , γωνίες εξόδου  $\theta_3 = 0^\circ$  και  $\theta_4 = 50^\circ$  και μοντελοποιείται με τις εξισώσεις Euler.

## 5.5 Εφαρμογή Εξομάλυνσης

Η εξομάλυνση της παράγωγου ως προς τις κάθετες (ως προς την επιφάνεια του) μετατοπίσεις, διανύσματος θα γίνει ξεχωριστά για τις δύο πλευρές του πτερυγίου. Πρακτικά, θα αντιμετωπιστούν ως δύο διαφορετικά προβλήματα. Βέβαια και στα δύο προβλήματα, θα τεθούν οι ίδιες οριακές συνθήκες κατά την εξομάλυνση, οι ίδιοι περιορισμοί και θα χρησιμοποιούνται κάθε φορά οι ίδιοι συντελεστές εξομάλυνσης  $\epsilon_{field}$ ,  $\epsilon_{line}$  και βέβαια οι ίδιοι συντελεστές βήματος  $\eta$  κατά την ανανέωση της γεωμετρίας.

Κύριο αντικείμενο διερεύνησης, είναι οι τιμές αυτών τριών συντελεστών. Γι' αυτό και η έρευνα που γίνεται στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας, χωρίζεται σε δύο τμήματα.

Στο πρώτο τμήμα, γίνεται έρευνα ως προς το βέλτιστο συνδυασμό των δύο συντελεστών. Για το σκοπό αυτό θα εξεταστούν τιμές του συντελεστή εξομάλυνσης από  $\epsilon_{field} = 0.000001$  (δηλαδή σχεδόν μηδαμινή εξομάλυνση) έως και  $\epsilon_{field} = 0.01$  (σημαντικά μεγαλύτερη εξομάλυνση. Ο συντελεστής βήματος της απότομης καθόδου  $\eta$  θα λάβει τιμές από 10 έως 100. Υπενθυμίζουμε ότι η εφαρμογή εξομάλυνσης επιτρέπει τη χρήση μεγάλων συντελεστών βήματος σε σχέση με τους συμβατικούς ενός προβλήματος.

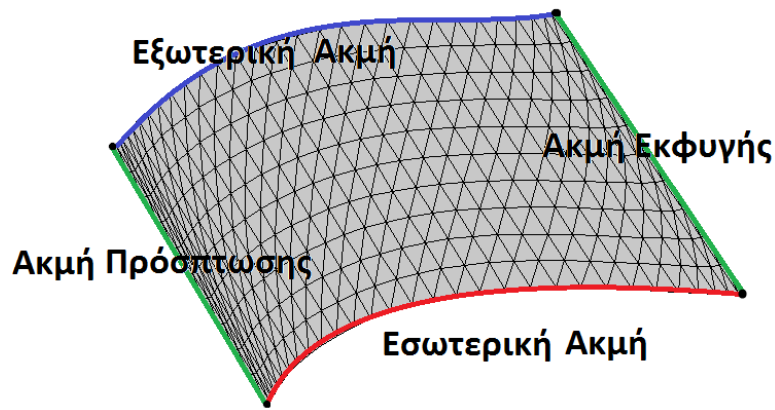
Στο δεύτερο τμήμα, θα χρησιμοποιηθεί η βέλτιστη τιμή του συντελεστή εξομάλυνσης, σε διαδικασία με διαδοχικούς κύκλους βελτιστοποίησης.

## 5.6 Οριακές Συνθήκες Εξομάλυνσης

Στη συνέχεια, ακολουθεί ο ορισμός των οριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση της εξίσωσης εξομάλυνσης.

Για ευκολία εφαρμογής και παρουσίασης των οριακών συνθηκών ανά τμήματα, το όριο της κάθε πλευράς θα αντιμετωπιστεί, ενώ θα παρουσιαστούν οι οριακές συνθήκες μόνο στην πλευρά υπερπίεσης καθώς οι ίδιες ακριβώς θα εφαρμοστούν και στην πλευρά υποπίεσης.

Στο σχήμα 5.7 φαίνονται οι τέσσερις πλευρές στις οποίες θα εφαρμοστούν οριακές συνθήκες



Σχήμα 5.7 – Διαχωρισμός ορίων πλέγματος

Αναφορές στις πλευρές του πλέγματος πλέον, θα γίνονται με χρήση αυτού του αύξοντος αριθμού.

### 5.6.1 Οριακές Συνθήκες στις Ακμές Πρόσπτωσης και Εκφυγής

Έτσι λοιπόν, οι ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής, που αντιστοιχούν στα σημεία ένωσης της πλευράς υποπίεσης με την πλευρά υπερπίεσης, πρέπει να διατηρήσουν σταθερή τη θέση τους. Για το λόγο, σε αυτές τις πλευρές πρέπει να εφαρμοστεί οριακή συνθήκη:

$$\vec{G}_{s_i} = 0$$

όπου  $i$  οι κόμβοι που ανήκουν στο επιμέρους όριο.

Μηδενικό διάνυσμα μεταβολής, συνεπάγεται με μηδενική μεταβολή των συντεταγμένων. Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και τα 4 γωνιακά σημεία του πλέγματος.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε οριακή συνθήκη, αρκεί να ικανοποιεί τη συμβατότητα των δύο πλευρών, δηλαδή πρέπει οι προκύπτοντες κόμβοι των δύο ακμών στη πλευρά υποπίεσης να έχουν τις ίδιες συντεταγμένες με τους αντίστοιχους κόμβους των ακμών στην πλευρά υπερπίεσης.

### 5.6.2 Οριακές Συνθήκες στις Εσωτερικές και Εξωτερικές Ακμές

Αντίθετα, οι εσωτερικές και εξωτερικές ακμές μπορούν να μεταβάλουν τη θέση τους. Επομένως ως οριακές συνθήκες σε αυτές τις πλευρές μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αρχικές τιμές, χωρίς εξομάλυνση, του διανύσματος κλίσης.

Όμως, κατά τη μονοδιάστατη εξομάλυνση κάθε κόμβος θα επηρεάζεται μόνο από τους δύο γειτονικούς του. Αντίθετα, κατά τη διδιάστατη εξομάλυνση θα επηρεάζεται από μεγαλύτερο πλήθος. Έτσι η επίδραση των οριακών συνθηκών στο εσωτερικό του χωρίου, αναμένεται να είναι μεγαλύτερη με χρήση της δισδιάστατης εξομάλυνσης.

Για το λόγο αυτό, η χρήση των αρχικών τιμών δίχως εξομάλυνση, θα μείωνε την αποτελεσματικότητα κατά την εξομάλυνση στο εσωτερικό του πεδίου, διότι η ασυνέχεια των παραγώγων του ορίου θα μεταφέρονταν στο εσωτερικό του πεδίου.

Έτσι, η καλύτερη επιλογή για οριακή συνθήκη είναι η χρησιμοποίηση του διανύσματος κλίσης το οποίο προηγουμένως θα έχει εξομαλυνθεί, μονοδιάστατα όμως, κατά μήκος της γραμμής του ορίου και μάλιστα, με χρήση συντελεστή μονοδιάστατης εξομάλυνσης  $\epsilon_{line}$  με μεγάλη τιμή. Διερεύνηση των τιμών του συντελεστή αυτού, θα ακολουθήσει στο επόμενο κεφάλαιο.

## 5.7 Γεωμετρικοί περιορισμοί

Πέραν των οριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης, η γεωμετρία της στροβιλομηχανής εισάγει γεωμετρικούς περιορισμούς, οι οποίοι επιβάλλονται φυσικά, πριν την επιβολή των οριακών συνθηκών.

### 5.7.1 Γεωμετρικός Περιορισμός Εσωτερικής Ακμής

Η εσωτερική ακμή, περιλαμβάνει τα σημεία του πτερυγίου τα οποία παράλληλα, αποτελούν και σημεία του εσωτερικού κελύφους της στροβιλομηχανής. Αυτό συνεπάγεται με το ότι, οποιαδήποτε μεταβολή, πρέπει να γίνεται με γνώμονα, ότι τα σημεία πρέπει να διατηρούν τη θέση τους στο εσωτερικό κέλυφος. Και επειδή ο άξονας του κυλινδρικού εσωτερικού κελύφους ταυτίζεται με τον άξονα Z, τελικά, σε αυτή τη πλευρά πρέπει να επιτρέπεται κίνηση μόνο πάνω στον άξονα Z.

Έτσι, η οριακή συνθήκη μπορεί να εφαρμοστεί μέσω της διόρθωσης του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος ως προς την επιφάνεια. Δηλαδή, κάθε  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ , του ορίου πρέπει αντικατασταθεί από το:

$$\hat{n}_i = \left( 0, 0, \frac{n_{z_i}}{|n_{z_i}|} \right)$$

όπου  $i$  οι κόμβοι που ανήκουν στην εσωτερική ακμή.

### 5.7.2 Γεωμετρικός Περιορισμός Εξωτερικής Ακμής

Τέλος, η εξωτερική ακμή, περιλαμβάνει τα σημεία του πτερυγίου τα οποία, ναί μεν είναι ελεύθερα, από την άποψη ότι δεν ανήκουν σε άλλο τμήμα πέραν του πτερυγίου, όμως περιορίζονται από το εξωτερικό κέλυφος της στροβιλομηχανής. Το γεγονός αυτό, μεταφράζεται σε διατήρηση της ακτινικής τους θέσης.

Επειδή η μεταβλητή εξομάλυνσης  $\frac{\partial F}{\partial n}$  αποτελεί γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\frac{\partial F}{\partial n} = \vec{G} \cdot \hat{n}$ , για να διατηρηθεί η ακτινική θέση κατά τη μεταβολή πρέπει να διορθωθούν και τα δύο, αυτά μεγέθη.



Συγκεκριμένα, ένα  $\vec{G}$  που ανήκει στην εξωτερική ακμή, πρέπει να μετασχηματιστεί σε εφαπτομενικό ως προς το κέλυφος της στροβιλομηχανής. Για να γίνει αυτό, θα υπολογιστεί η ακτινική συνιστώσα του και, στη συνέχεια, θα αφαιρεθεί από το ίδιο.

Έτσι, σε έναν κόμβο με συντεταγμένες  $(x_i, y_i, z_i)$ , το μοναδιαίο, ακτινικό διάνυσμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{n}_{radial} = \left( \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, 0 \right)$$

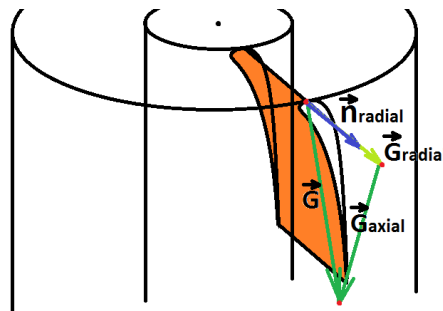
ενώ, το ακτινικό διάνυσμα κλίσης, είναι:

$$\vec{G}_{radial} = (\vec{G} \cdot \vec{n}_{radial}) \cdot \vec{n}_{radial}$$

Έτσι, βρίσκεται το νέο διορθωμένο διάνυσμα κλίσης, ως εξής:

$$\vec{G}^{new} = \vec{G}^{old} - \vec{G}_{radial}$$

Το νέο διάνυσμα που προκύπτει παρουσιάζεται στο σχήμα 5.8



Σχήμα 5.8 – Υπολογισμός οριακού διανύσματος κλίσης

Η ίδια μεθοδολογία, ακολουθείται και για τη διόρθωση του κάθετου διανύσματος, δηλαδή, σε έναν κόμβο με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ , και με ακτινικό διάνυσμα  $\vec{n}_{radial}$  το νέο διορθωμένο διάνυσμα κατεύθυνσης, βρίσκεται ως εξής:

$$\hat{n}_{new} = \frac{\hat{n}_{old} - \vec{n}_{radial}}{|\hat{n}_{old} - \vec{n}_{radial}|}$$

Έτσι πλέον, το  $\frac{\partial F}{\partial n}$  θα έχει υπολογιστεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε η ανανέωση της γεωμετρίας να οδηγήσει σε εφαπτομενική, ως προς το κέλυφος, κατεύθυνση.

Το μόνο που μένει πλέον είναι, να διατηρηθεί σταθερή η ακτίνα της νέας θέσης σε σχέση με την ακτίνα της θέσης πριν την ανανέωση. Αυτή η διόρθωση γίνεται κατά το στάδιο της ανανέωσης γεωμετρίας, με χρήση πολικών συντεταμένων και

συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τη γωνία μεταβολής που προέκυψε από την παραπάνω διαδικασία και διατηρώντας την προηγούμενη ακτίνα.

## 5.8 Υπολογισμός και Περιορισμός Πάχους

Επειδή τα δύο πλέγματα επιλύονται και ανανεώνονται ξεχωριστά το ένα από το άλλο, υπάρχει ανάγκη να διασφαλιστεί ότι, με την ένωση τους, η μία πλευρά υποπίεσης, δεν θα βρεθεί κάτω από την πλευρά υπερπίεσης, δηλαδή ότι δεν θα «καβαλήσουν» οι δύο επιφάνειες, οδηγώντας έτσι σε μη ρεαλιστική λύση. Κάτι τέτοιο δεν είναι αυτονόητο, καθώς η αεροδυναμική βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμό μπορεί να οδηγήσει σε τέτοιες λύσεις, μιας και η μέθοδος ανανέωσης, δεν μπορεί να αναγνωρίσει «λογικά» λάθη, χωρίς τη χρήση κατάλληλων περιορισμών.

Επιπλέον, υπάρχει πιθανότητα, η λύση να μην ανήκει στην παραπάνω περίπτωση, αλλά, το τελικό πάχος του πτερυγίου να είναι τέτοιο ώστε να μην αποδεκτή για άλλους λόγους, όπως κατασκευαστικοί.

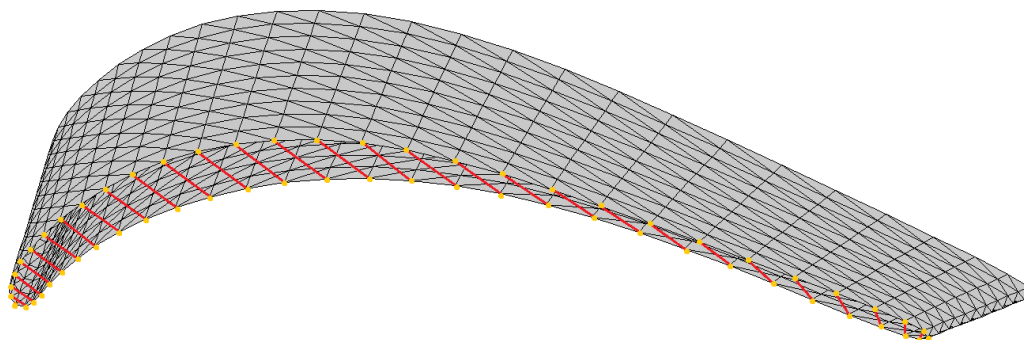
Για το λόγο αυτό σε οποιοδήποτε σχεδιασμό πτερυγίου, πρέπει να χρησιμοποιείται περιορισμός πάχους. Επειδή η διερεύνηση και εφαρμογή της καταλληλότερης μεθόδου περιορισμού πάχους δεν ανήκει στο αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αναπτύχθηκε και χρησιμοποιήθηκε μια πολύ απλή μέθοδος η οποία εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι η μορφή του πτερυγίου μοντελοποιείται από δύο ξεχωριστά πλέγματα και όχι ένα ενιαίο.

### 5.8.1 Υπολογισμός Πάχους

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί τη λογική ότι το πάχος υπολογίζεται από την απόσταση ενός κόμβου της πλευράς υποπίεσης, από τον αντίστοιχο (σε αρίθμηση) στην πλευρά υπερπίεσης, δηλαδή από τη σχέση:

$$thickness_i = \sqrt{(x_i^{SS} - x_i^{PS})^2 + (y_i^{SS} - y_i^{PS})^2 + (z_i^{SS} - z_i^{PS})^2}$$

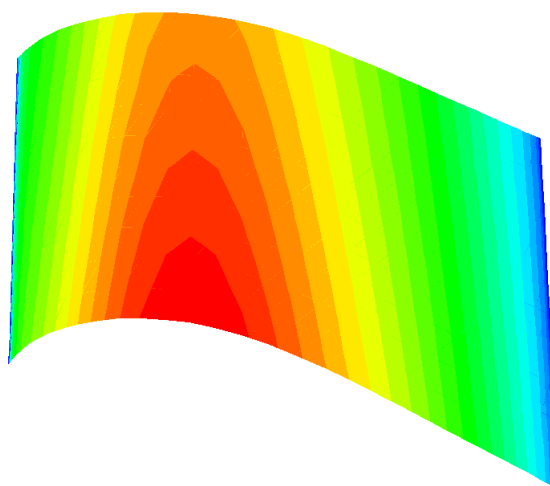
Η παραπάνω μέθοδος, παρουσιάζεται στο σχήμα 5.11, στην οποία γίνεται εμφανές και το μειονέκτημα της μεθόδου:



Σχήμα 5.9 – Υπολογισμός πάχους οριακής αεροτομής πτερυγίου.

Με βάση τη παραπάνω εικόνα, είναι εμφανές ότι αυτή η μέθοδος υπολογισμού, οδηγεί σε μία καλή προσέγγιση του πάχους αλλά όχι σε ικανοποιητική ακρίβεια. Ειδικά σε ορισμένα τμήματα η τιμή που υπολογίζεται είναι ίσως αρκετά μικρότερη ή μεγαλύτερη της πραγματικής. Γι'αυτό το λόγο, προτείνεται διόρθωση, σύμφωνα με την οποία, η τιμή που υπολογίζεται θα διαιρείται με ένα συντελεστή  $n_{thickness}$ , το οποίο βέβαια, οδηγεί σε υποεκτίμηση της τιμής σε σημεία που το πάχος έχει υπολογιστεί με πολύ καλή προσέγγιση. Αλλά όπως αναφέραμε, η βέλτιστη μέθοδος δεν είναι αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο στην αρχική μορφή του πτερυγίου υπολογίζεται το πάχος, το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 5.12



Σχήμα 5.10 – Πάχος αρχικού πτερυγίου. Η τιμή του πάχους διακυμαίνεται από την τιμή 0 (μπλε χρώμα) έως και την τιμή 0.00792 (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα 0.00036

### 5.8.2 Περιορισμός Πάχους

Με υπολογισμένο το πάχος σε κάθε κόμβο, πλέον είναι δυνατή η εφαρμογή περιορισμού. Ο περιορισμός που χρησιμοποιήθηκε, ορίζει μέχρι τι ποσοστό του αρχικού πάχους μπορεί να είναι το πάχος που προκύπτει με την ανανέωση της γεωμετρίας. Συγκεκριμένα γίνεται σύγκριση του μεγέθους  $\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_s$  του κάθε κόμβου με το ελάχιστο επιτρεπτό πάχος στην παρούσα θέση. Αν το μέγεθος  $\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_s$  είναι μεγαλύτερο από το επιτρεπτό, τότε αντικαθίσταται από το επιτρεπτό.

Επειδή, είναι γνωστό το προσεγγιστικό και όχι το πραγματικό πάχος και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι περιορισμός εφαρμόζεται μόνο στη μείωση και όχι στην αύξηση του πάχους, αναμένεται να προκύψουν γεωμετρίες, που σε μεγάλες μεταβολές που προκύπτουν στην μορφή τους, αυτές δεν αποκτούν λεία μορφή.

Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποφευχθεί, παρά μόνο με τη χρήση κάποια συνθήκης λειότητας, η οποία και αυτή είναι εκτός του αντικειμένου της διπλωματικής εργασίας.

# Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup>

## Αποτελέσματα και Σχολιασμός

---

### 6.1 Εισαγωγή

Αφού αναλύθηκε το θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν, δημιουργήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran, πρόγραμμα που θα υλοποιήσει την εξομάλυνση των παραγώγων ευαισθησίας, πρόγραμμα για την ανανέωση της γεωμετρίας καθώς και αρκετά προγράμματα για τη διαχείριση των πλεγμάτων και την επεξεργασία και παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το πρόγραμμα επίλυσης του κύριου και του συζυγούς προβλήματος δόθηκε έτοιμο προς εκτέλεση από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Επίσης, για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό οπτικοποίησης Grid που έχει αναπτυχθεί στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, καθώς και το λογισμικό GNUPlot.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά την εκτέλεση του κύκλου βελτιστοποίησης υπό διαφορετικές παραμέτρους και δεδομένα κάθε φορά, ενώ οι κύριες παράμετροι που θα εξεταστούν είναι οι εξής:

- Συντελεστής Εξομάλυνσης Επιφάνειας :  $\epsilon_{field}$
- Συντελεστής Μονοδιάστατης Εξομάλυνσης :  $\epsilon_{line}$
- Συντελεστής βήματος Απότομης Καθόδου :  $\eta$
- Συντελεστής Πάχους :  $n_{thickness}$

Κριτήριο σύγκρισης όλων των αποτελεσμάτων αποτελεί η τιμή της συνάρτησης κόστους η οποία θα ποσοτικοποιείται με την μεταβλητή **Cost** και της οποίας η τιμή πρακτικά προκύπτει από την άθροιση της διαφοράς της πίεσης που υπολογίζεται με την πίεση που επιθυμείται σε κάθε σημείο της αεροτομής, πολλαπλασιαζόμενης με το εμβαδόν της τοπικής επιφανειακής κυψέλης, δηλαδή:

$$Cost = \sum_{i=1}^n (p_i - p_i^{tar})^2 \cdot A_i \quad 6.1$$

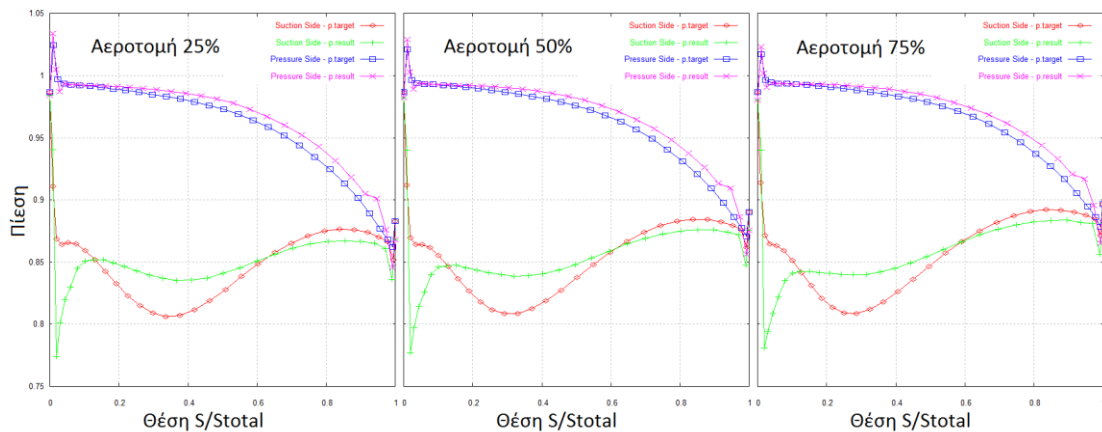
Συγκεκριμένα, σε κάθε διάγραμμα θα παρουσιάζεται η ποσοστιαία διαφορά της τιμής **Cost** της εκάστοτε λύσης από την τιμή  $Cost_0$  η οποία είναι η τιμή της συνάρτησης κόστους που αντιστοιχεί στην αρχική γεωμετρία του πτερυγίου.

## 6.2 Επίλυση Αρχικής Γεωμετρίας

Αρχικά, για να δημιουργηθεί μια κατάσταση αναφοράς και σύγκρισης, επιλύεται η ροή γύρω από το αρχικό περυγίο. Ως αποτέλεσμα, λαμβάνεται η εξής τιμή της συνάρτησης κόστους:

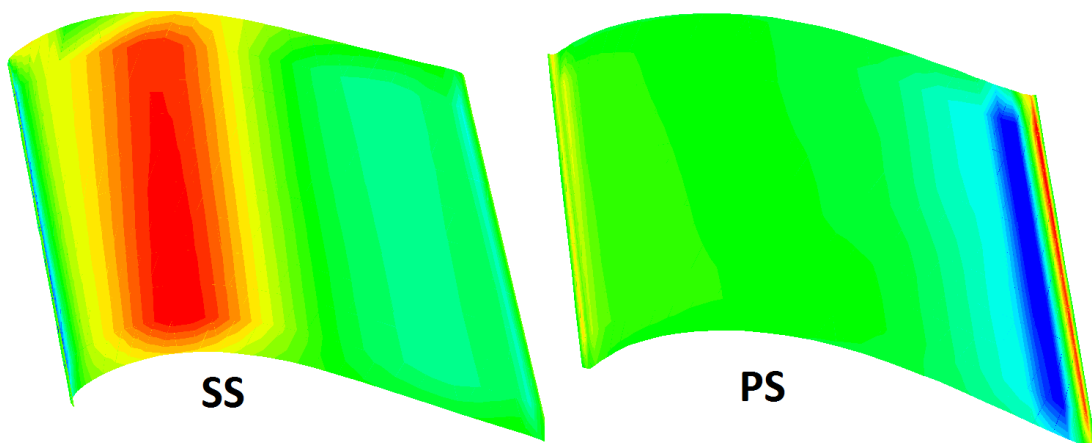
$$Cost_0 = 3.061 \cdot 10^{-6}$$

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι διαφορές στις κατανομές πίεσης, στόχου και αποτελέσματος, σε 3 αεροτομές του αρχικού περυγίου και συγκεκριμένα στο 25%, στο 50% και στο 75% του ύψους (κατά την ακτινική διεύθυνση του περυγίου).



Σχήμα 6.1 – Διάγραμμα πιέσεων σε τρεις θέσεις του περυγίου.

Επίσης, με την επίλυση του συζυγούς προβλήματος στην αρχική γεωμετρία, υπολογίζονται και οι αρχικές παράγωγοι ευαισθησίας ως προς τις κάθετες μεταπτώσεις και οι οποίες παρουσιάζονται, για την κάθε πλευρά, στο σχήμα 6.2



Σχήμα 6.2 – Μέτρο παραγώνων ευαισθησίας, αρχικής γεωμετρίας χωρίς εξομάλυνση. Η τιμή του μέτρου διακουμίνεται από την τιμή  $-0.000204$  (μπλέ χρώμα) έως και την τιμή  $0.000126$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000015$

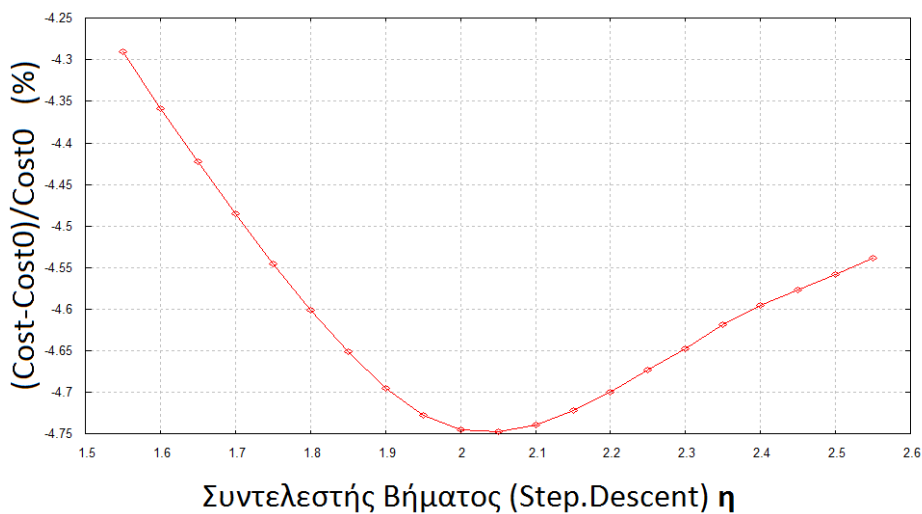
### 6.3 Επίλυση Χωρίς Εξομάλυνση

Στη συνέχεια, εκτελείται το διάγραμμα ροής του προβλήματος όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με μοναδική διαφοροποίηση την απενεργοποίηση της εξομάλυνσης των παραγώγων ευαισθησίας. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα, θα αποτελέσει βάση σύγκρισης για να μπορέσει στη συνέχεια να εκτιμηθεί η αποτελεσματικότητα και χρησιμότητα της μεθόδου εξομάλυνσης.

Μοναδική παράμετρος ελέγχου σε αυτήν την περίπτωση, είναι ο συντελεστής βήματος  $\eta$  ο οποίος θα δοκιμαστεί στις τιμές:

➤  $1.5 < \eta < 2.5$

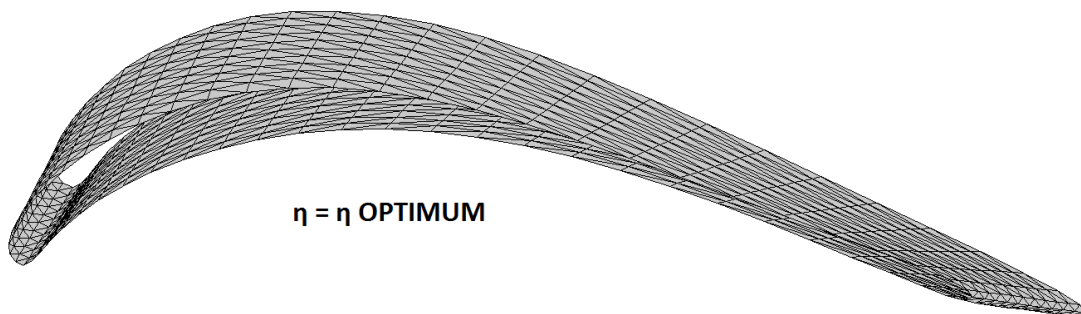
ενώ τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται στο σχήμα 6.3



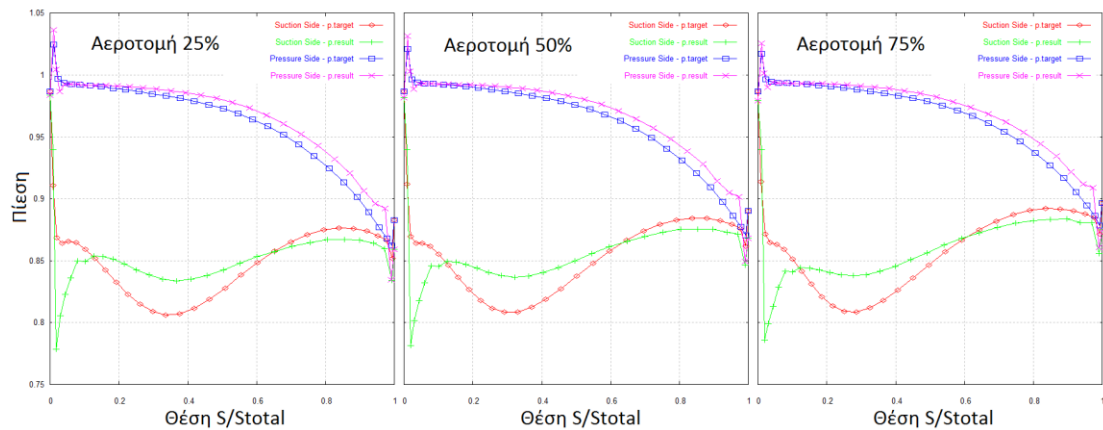
Σχήμα 6.3 – Διερεύνηση των τιμών του συντελεστή  $\eta$  χωρίς εξομάλυνση.

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα, φαίνεται ότι ο συντελεστής που οδηγεί στη μεγαλύτερη μείωση του κόστους για ένα βήμα είναι ο  $\eta_{no-sm}|^{OPTIMUM} = 2.05$  και οδηγεί περίπου σε 5% μείωση της τιμής της συνάρτησης κόστους. Περαιτέρω βήματα δεν οδήγησαν σε σημαντική μείωση του κόστους.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω βέλτιστο  $\eta_{no-sm}$ , προκύπτει η παρακάτω μορφή πτερυγίου και τα αναλυτικά διαγράμματα πιέσεων σε τρεις θέσεις αυτής.



Σχήμα 6.4 – Βέλτιστο πτερύγιο, χωρίς χρήση εξομάλυνσης.

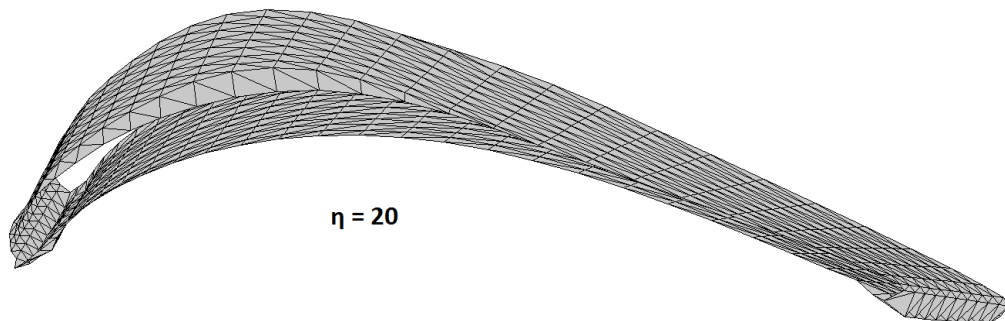


Σχήμα 6.5 – Διαγράμματα πιέσεων με βέλτιστο συντελεστή βήματος και χωρίς εξομάλυνση.

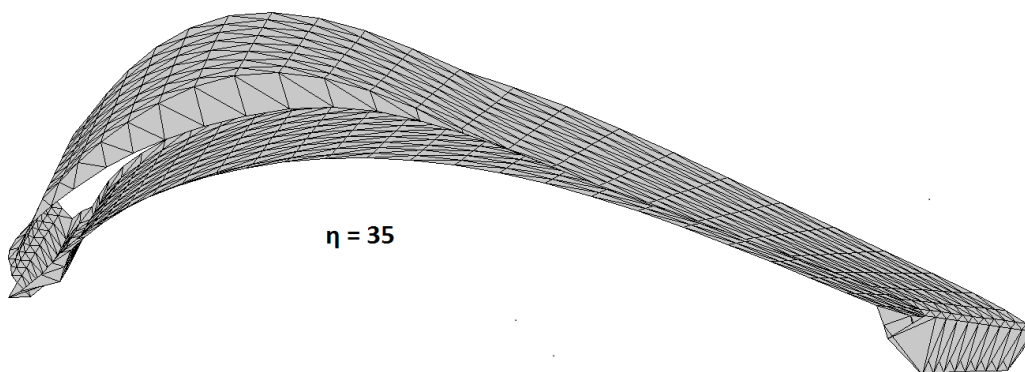
Οι όποιες διαφορές των διαγράμματα πιέσεων σε σχέση με την αρχική γεωμετρία φαίνονται σε σύγκριση με το σχήμα 6.1. Βέβαια οι διαφορές είναι πολύ μικρές, όπως αναμενόταν εξαιτίας της μικρής μείωσης της συνάρτησης κόστους που επιτεύχθηκε.

Στη συνέχεια, θα δοκιμαστούν δύο ακραίες, για την περίπτωση που δεν χρησιμοποιείται εξομάλυνση, τιμές του συντελεστή βήματος και οι οποίες με χρήση εξομάλυνσης θα ήταν μέσα στις λογικές τιμές που θα εξετάζονταν.

Συγκεκριμένα, με χρήση  $\eta = 20$  και  $\eta = 35$ , προκύπτουν οι δύο παρακάτω γεωμετρίες:



Σχήμα 6.6 – Πτερύγιο χωρίς εξομάλυνση, με χρήση  $\eta = 20$ .

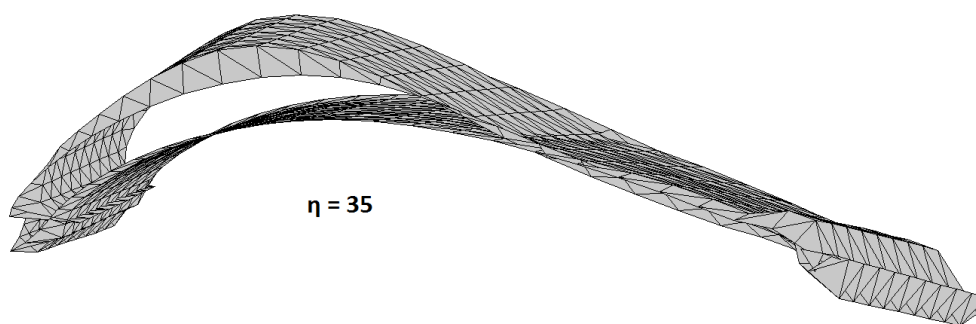


Σχήμα 6.7 – Πτερύγιο χωρίς εξομάλυνση, με χρήση  $\eta = 35$ .



Είναι εμφανής η ασυνέχεια της γεωμετρίας, ως αποτέλεσμα της χρήσης των μη εξομαλυμένων διανυσμάτων κλίσης. Κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο, καθώς οι περιοχές με μεγάλη ασυνέχεια είναι αυτές που στην εικόνα 6.2 είχαν παρουσιάσει μεγάλες τιμές στις παραγώγους ευαισθησίας. Οι μεγαλύτερες τιμές του αρχικού πεδίου του μέτρου των παραγώγων ευαισθησίας εμφανίζονταν κοντά στα τέσσερα όρια του πεδίου και περισσότερο στις ακμές πρόσπτωσης και εκφυγής και οδήγησαν σε ακραίες γεωμετρίες κοντά στα δύο άκρα. Σε κάθε περίπτωση, τέτοια αποτελέσματα αποτελούν μη-ρεαλιστικές λύσεις καθώς η απόδοση τους αναμένεται να είναι χειρότερη της αρχικής γεωμετρίας.

Τέλος, στο σχήμα 6.8, παρουσιάζεται η τελευταία περίπτωση χωρίς χρήση του γεωμετρικού περιορισμού πάχους, η οποία όπως φαίνεται αποτελεί τελείως μη ρεαλιστική λύση.

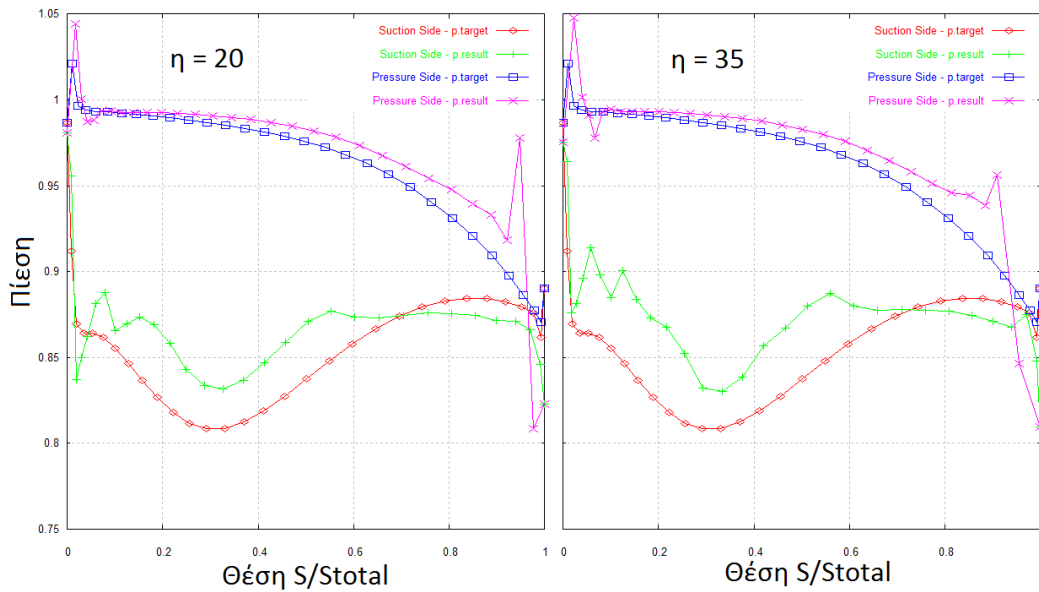


Σχήμα 6.8 – Πτερυγίο χωρίς εξομάλυνση και χωρίς γεωμετρικούς περιορισμούς, με χρήση  $\eta = 35$ .

Και φυσικά η ασυνέχεια της γεωμετρίας έχει άμεση επίδραση στην αεροδυναμική απόδοση του πτερυγίου καθώς με χρήση αυτών των δύο υψηλών τιμών του συντελεστή  $\eta$  οδηγηθήκαμε σε λύσεις με μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης κόστους, σε σχέση με την αρχική γεωμετρία. Επομένως, είναι δεδομένη, σε αυτήν την περίπτωση, η αποτυχία της βελτιστοποίησης.

Παρακάτω, στο σχήμα 6.9, παρουσιάζονται τα διαγράμματα πιέσεων των δύο πτερυγίων που προέκυψαν για  $\eta = 20$  και  $\eta = 35$ , στη θέση 50% του ύψους, κατά την ακτινική κατεύθυνση του πτερυγίου.

Στο σχήμα 6.9, κοντά στην ακμή πρόσπτωσης αλλά και κοντά στην ακμή εκφυγής είναι εμφανής η τραχύτητα του προφίλ της διακύμανσης της πίεσης ως αποτέλεσμα της έλλειψης διαδικασίας εξομάλυνσης κατά την ανανέωση της γεωμετρίας.



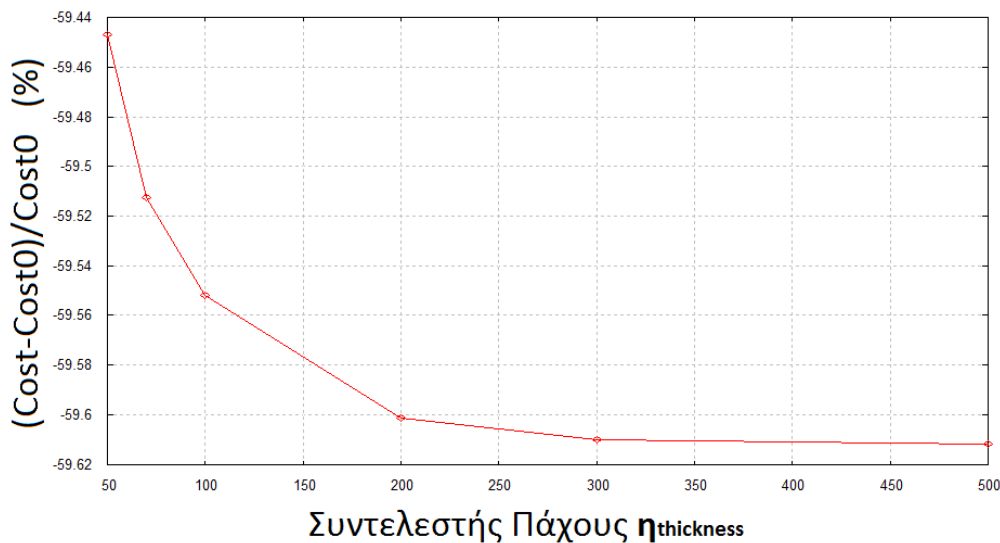
Σχήμα 6.9 – Διαγράμματα πιέσεων με μεγάλες τιμές συντελεστή βήματος και χωρίς εξομάλυνση.

### 6.4 Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Πάχους

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά την ανανέωση της γεωμετρίας εφαρμόστηκε περιορισμός πάχους, που στηρίζεται στον προσεγγιστικό υπολογισμό του πάχους σε κάθε σημείο του αρχικού περυγίου. Για την αποφυγή υπερεκτίμησης αυτού, δοκιμάστηκε η διαίρεση του αρχικού υπολογισμένου πάχους, με έναν συντελεστή  $n_{thickness}$ .

Στο σχήμα 6.10, παρουσιάζονται οι διαφορετικές τιμές του συντελεστή που δοκιμάστηκαν, για σταθερές τις τιμές των άλλων παραμέτρων και συγκεκριμένα:

- $\epsilon_{field} = 0.0001$
- $\epsilon_{line} = 0.9$
- $\eta = 45$



Σχήμα 6.10 – Διερεύνηση συντελεστή πάχους.

Με βάση το διάγραμμα, φαίνεται ότι καλύτερα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε πολύ μεγάλες τιμές του συντελεστή. Πρακτικά αυτό συνεπάγεται με μηδενική μείωση του πάχους του πτερυγίου.

Τελικά, ως βέλτιστη τιμή επιλέγεται η τιμή:

$$n_{thickness}|^{OPTIMUM} = 200$$

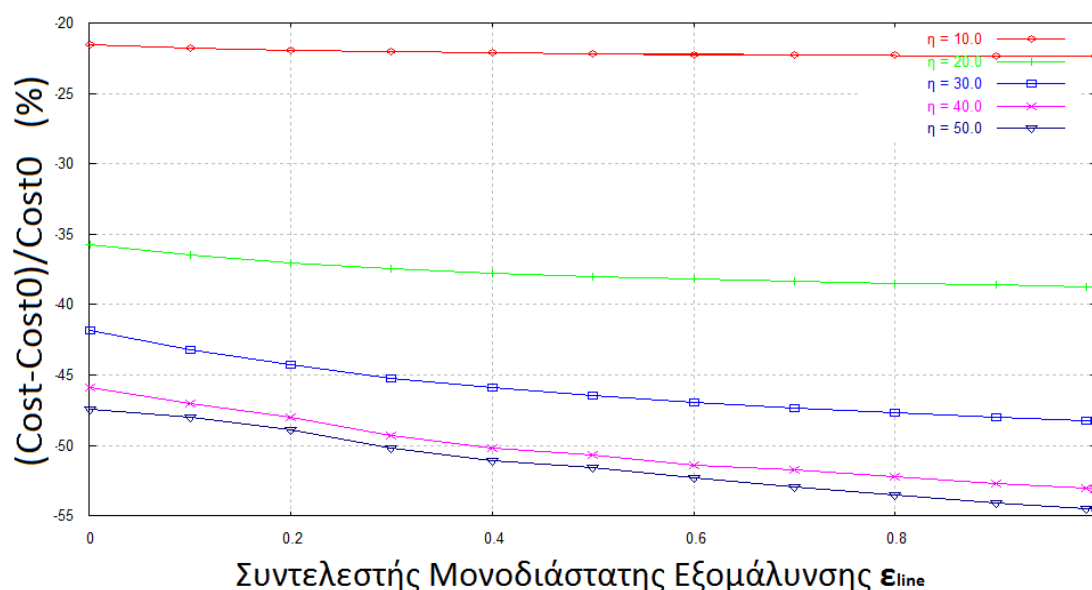
## 6.5 Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Μονοδιάστατης Εξομάλυνσης

Στη συνέχεια, γίνεται χρήση του προγράμματος εξομάλυνσης για να διερευνηθεί η επίδραση της εξομάλυνσης στη διαδικασία βελτιστοποίησης του προβλήματος που επιλέχθηκε. Πρώτο βήμα σε αυτήν την κατεύθυνση είναι να γίνει μελέτη των οριακών συνθηκών. Με βάση την ανάλυση προηγούμενου κεφαλαίου, αναμένεται σημαντική επίδραση της εξομάλυνσης των τιμών των δύο ορίων, οι οποίες θα τεθούν, στη συνέχεια, ως οριακές συνθήκες, για την εξομάλυνση στο εσωτερικό.

Για το σκοπό αυτό για ένα δεδομένο πρόβλημα το οποίο χαρακτηρίζεται από σταθερές τιμές στους συντελεστές  $\epsilon_{field}$  και  $\eta$  δοκιμάζονται διαφορετικές τιμές στο συντελεστή  $\epsilon_{line}$  και μελετάται η επίδραση τους στη μείωση της τιμής της συνάρτησης κόστους.

Στο σχήμα 6.11 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις περιπτώσεις:

- $\epsilon_{field} = 0.0001$
- $\eta = 10, 20, 30, 40, 50$
- $0.001 < \epsilon_{line} < 1.0$



Σχήμα 6.11 – Διερεύνηση συντελεστή μονοδιάστατης εξομάλυνσης

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα, μπορεί να υπολογιστεί η διαφορά στη βελτίωση μεταξύ της χρήσης  $\epsilon_{line} = 0.001$  και  $\epsilon_{line} = 1.0$  η οποία παρουσιάζεται στον πίνακα 6.1

	$\eta = 10$	$\eta = 20$	$\eta = 30$	$\eta = 40$	$\eta = 50$
Βελτίωση(%)	0.810	3.001	6.444	7.240	7.150

Πίνακας 6.1 – Ποσοστιαία μείωση του κόστους συναρτήσει του συντελεστή βήματος

Βλέπουμε ότι η τιμή του συντελεστή  $\epsilon_{line}$  παίζει αρκετά σημαντικό ρόλο στη βελτιστοποίηση καθώς μπορεί να οδηγήσει έως και σε 7% μεγαλύτερη μείωση της τιμής της συνάρτησης κόστους.

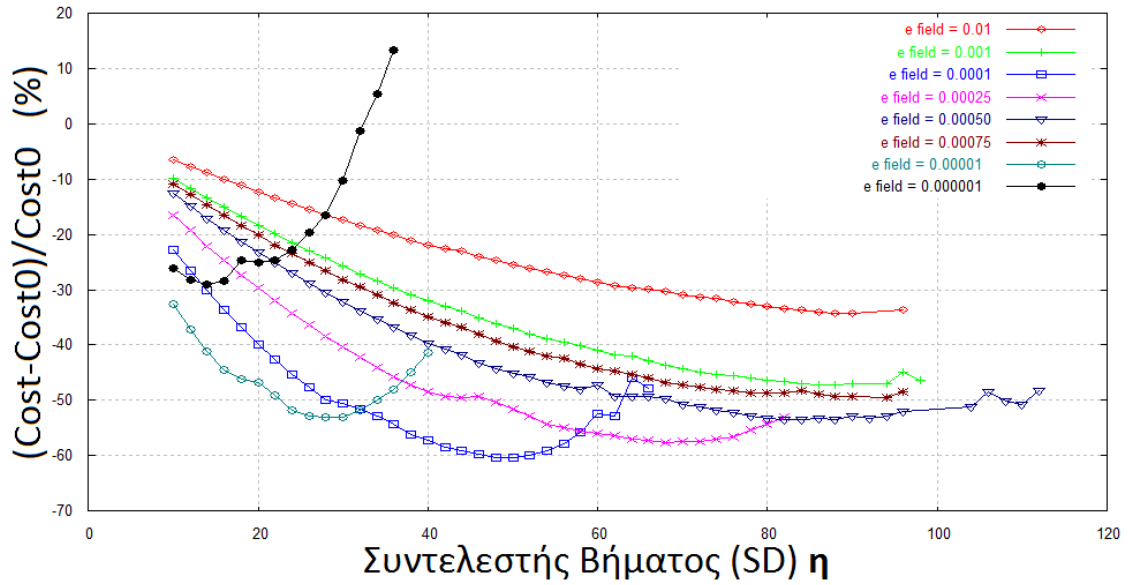
Με βάση το διάγραμμα επιλέγεται ως βέλτιστος συντελεστής μονοδιάστατης εξομάλυνσης η τιμή  $\epsilon_{line}|^{OPTIMUM} = 0.9$ , στην οποία παρατηρείται σταθεροποίηση της βελτίωσης, ενώ με βάση τον πίνακα αναμένεται η μεγαλύτερη βελτίωση στη λύση να παρατηρηθεί σε τιμές του  $\eta$  μεταξύ του 40 και 50. Η τιμή αυτή δεν είναι σημαντική προς το παρόν, αλλά είναι μια ένδειξη για το που αναμένεται να βρεθεί το βέλτιστο  $\eta$ .

## 6.6 Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης Επιφάνειας και Συντελεστή Βήματος

Έχοντας καταλήξει στη βέλτιστη τιμή του συντελεστή μονοδιάστατης εξομάλυνσης, επόμενο βήμα είναι η διερεύνηση του βέλτιστου συνδυασμού  $\epsilon_{field}$  και  $\eta$  δηλαδή η καλύτερη δυνατή λύση που μπορεί να επιτευχθεί σε έναν μόνο κύκλο βελτιστοποίησης. Από μία τέτοια διερεύνηση αναμένεται εκτός του βέλτιστου συνδυασμού, να βρεθεί και η βέλτιστη τιμή του συντελεστή  $\epsilon_{field}$ , για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στο σχήμα 6.12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τις περιπτώσεις:

- $0.000001 < \epsilon_{field} < 0.01$
- $10 < \eta < 100$
- $\epsilon_{line}|^{OPTIMUM} = 0.9$



Σχήμα 6.12 – Διερεύνηση βέλτιστου συνδυασμού  $\eta - \epsilon_{field}$ .

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα, είναι εμφανές ότι η τιμή του συντελεστή  $\epsilon_{field}$  που οδηγεί σε μεγαλύτερη μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης, είναι η:

$$\epsilon_{field}|^{OPTIMUM} = 0.0001$$

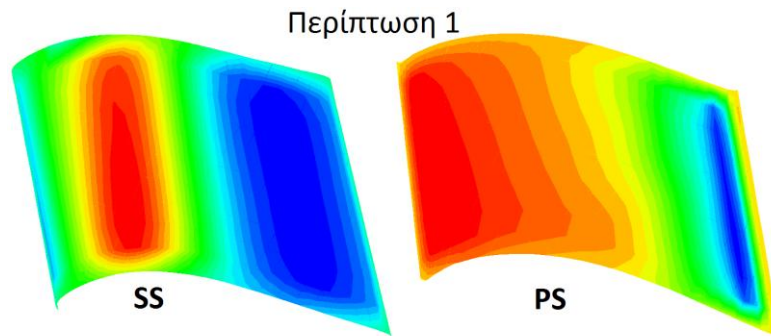
Επίσης, παρατηρώντας την καμπύλη  $\epsilon_{field} = 0.0001$  φαίνεται η διακύμανση της μείωση του κόστους συναρτήσει του συντελεστή βήματος  $\eta$ . Η μέγιστη μείωση επιτυγχάνεται για:

$$\eta|^{OPTIMUM} = 48$$

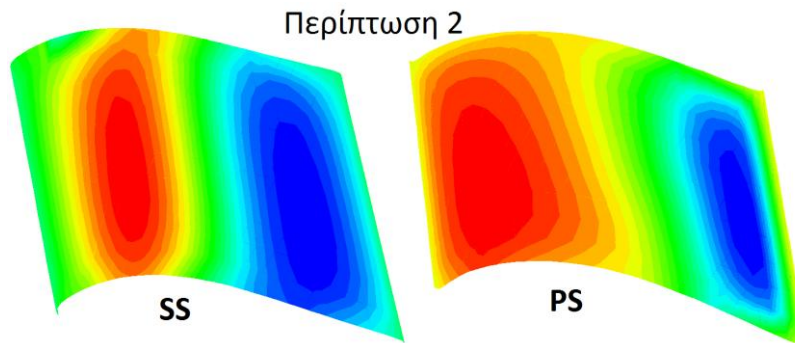
Σε αυτό το σημείο θα παρουσιαστούν οι καλύτερες λύσεις από τις τέσσερις καλύτερες καμπύλες, που αντιστοιχούν στις τιμές:

1.  $\epsilon_{field} = 0.00001$  ,  $\eta = 28$
2.  $\epsilon_{field} = 0.0001$  ,  $\eta = 48$
3.  $\epsilon_{field} = 0.00025$  ,  $\eta = 68$
4.  $\epsilon_{field} = 0.0005$  ,  $\eta = 88$

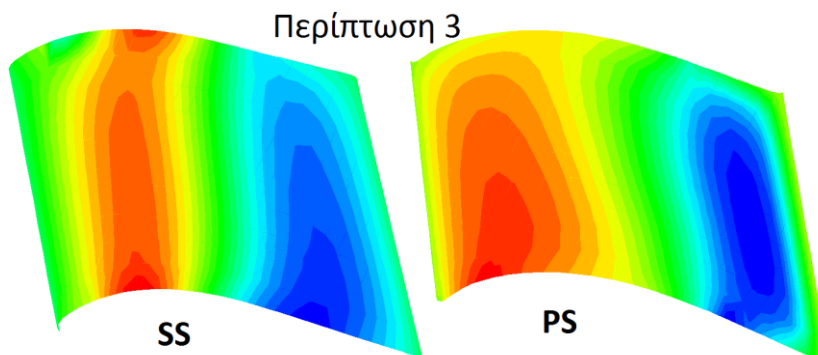
Αρχικά, παρουσιάζεται το πεδίο των παραγώγων ευαισθησίας για τις τέσσερις περιπτώσεις εξομάλυνσης:



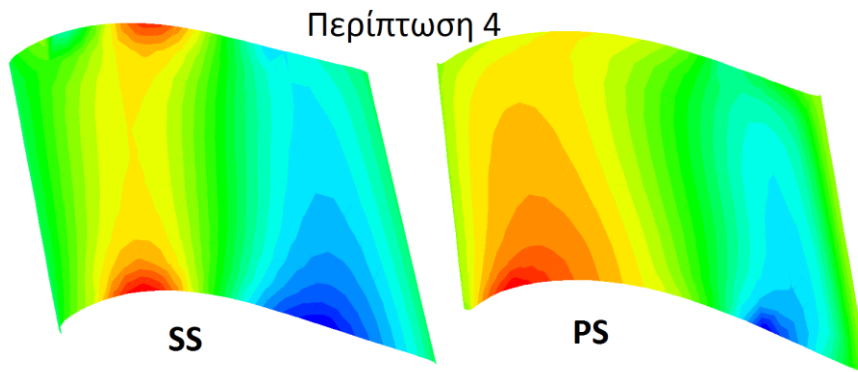
Σχήμα 6.13 – Πεδίο παραγώγων ευαισθησίας με εξομάλυνση, περίπτωσης 1. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή  $-0.000204$  (μπλε χρώμα) έως και την τιμή  $0.000126$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000015$



Σχήμα 6.14 – Πεδίο παραγώγων ευαισθησίας με εξομάλυνση, περίπτωσης 2. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή  $-0.000204$  (μπλε χρώμα) έως και την τιμή  $0.000126$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000015$

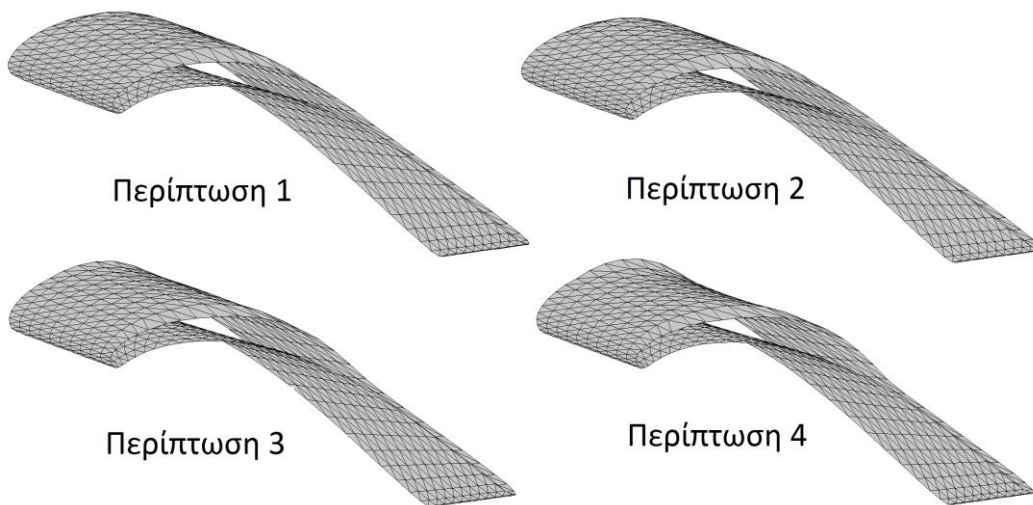


Σχήμα 6.15 – Πεδίο παραγώγων ευαισθησίας με εξομάλυνση, περίπτωσης 3. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή  $-0.000204$  (μπλε χρώμα) έως και την τιμή  $0.000126$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000015$



Σχήμα 6.16 – Πεδίο παραγών ευαισθησίας με εξομάλυνση, περίπτωσης 4. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή  $-0.000204$  (μπλε χρώμα) έως και την τιμή  $0.000126$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000015$

Είναι εμφανής πλέον, η σημαντική επίδραση των οριακών συνθηκών στην επίλυση της εξίσωσης εξομάλυνσης. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη εξομάλυνση γίνεται στο εσωτερικό και επομένως όσο περισσότερο αλλοιώνονται οι αρχικές τιμές, τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά των εσωτερικών τιμών με τις σταθερές του ορίου. Γι' αυτό και οι περιπτώσεις με μεγαλύτερη εξομάλυνση αναμένεται να οδηγήσουν σε αεροτομές του πτερυγίου με μεγάλες διαφορές στο πάχος μεταξύ τους..

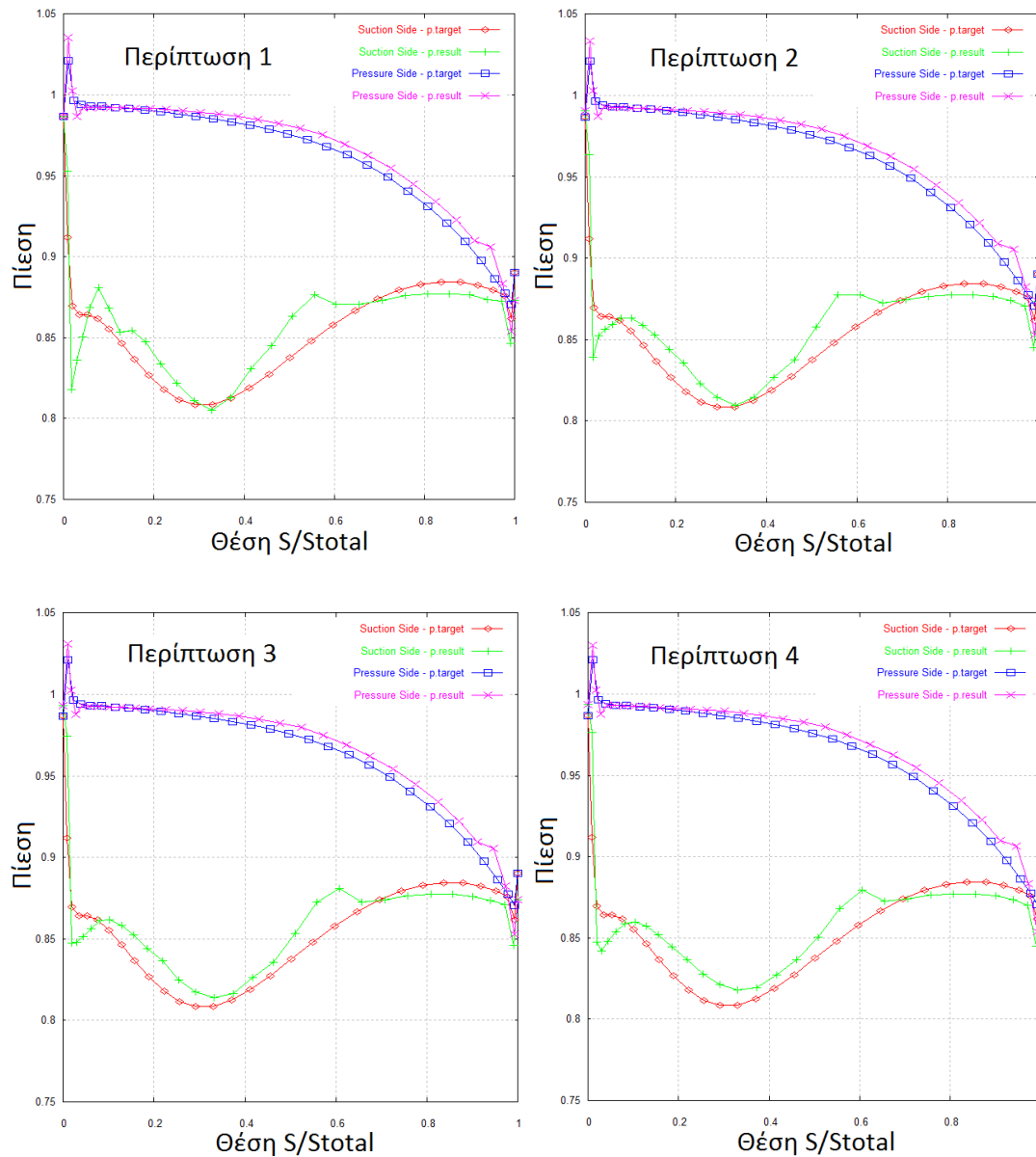


Σχήμα 6.17 – Οι τέσσερις καλύτερες περιπτώσεις

Είναι εμφανές από τις μορφές του σχήματος 6.17, η ομαλότητα της επιφάνειας που επιτυγχάνεται σε κάθε γεωμετρία. Και βέβαια, το σημαντικότερο, ότι οι ομαλές επιφάνειες, έχουν αποφέρει πολύ σημαντική μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης και, επομένως, αύξηση της απόδοσης του πτερυγίου, με μεγέθη που φτάνουν έως και το 60%.

Επίσης, οι λύσεις με μεγάλη εξομάλυνση και μεγάλο συντελεστή βήματος, οδηγούν σε λιγότερο συμμετρικές λύσεις, σε αντίθεση με τις μικρότερες τιμές που οδηγούν σε μεταβολές της γεωμετρίας κυρίως στο εσωτερικό του πτερυγίου και όχι στα όρια ένωσης της με το εσωτερικό κέλυφος της στροβιλομηχανής και στο σημείο επαφής με το εξωτερικό κέλυφος.

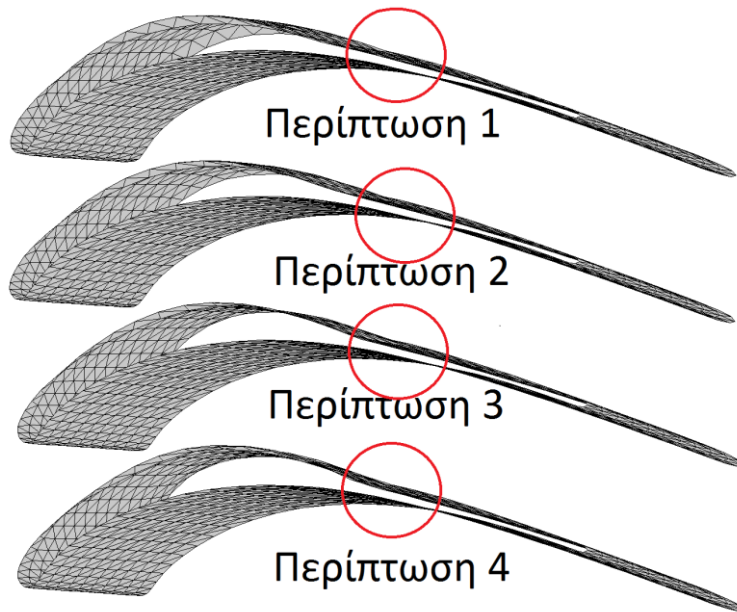
Η δραματική βελτίωση της απόδοσης του πτερυγίου, γίνεται περισσότερο εμφανής παρατηρώντας τα διαγράμματα πιέσεων, της κάθε περίπτωσης, που ακολουθούν.



Σχήμα 6.18 – Διαγράμματα πιέσεων των τεσσάρων καλύτερων λύσεων.

Από τα παραπάνω διαγράμματα, πλέον είναι εμφανές ότι η ζητούμενη κατανομή πίεσης έχει προσεγγιστεί πιο καλά από κάθε άλλη περίπτωση που έχει παρουσιαστεί έως αυτό το σημείο. Βέβαια, στις μεγαλύτερες μεταβολές της γεωμετρίας που επιτυγχάνονται σε αυτήν την περίπτωση, γίνεται ακόμα περισσότερο εμφανής η επίδραση του γεωμετρικού περιορισμού πάχους, ο οποίος πλέον οδηγεί σε μια μικρή ασυνέχεια στην επιφάνεια της γεωμετρίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.19 αλλά και στο προηγούμενα διαγράμματα πιέσεων.





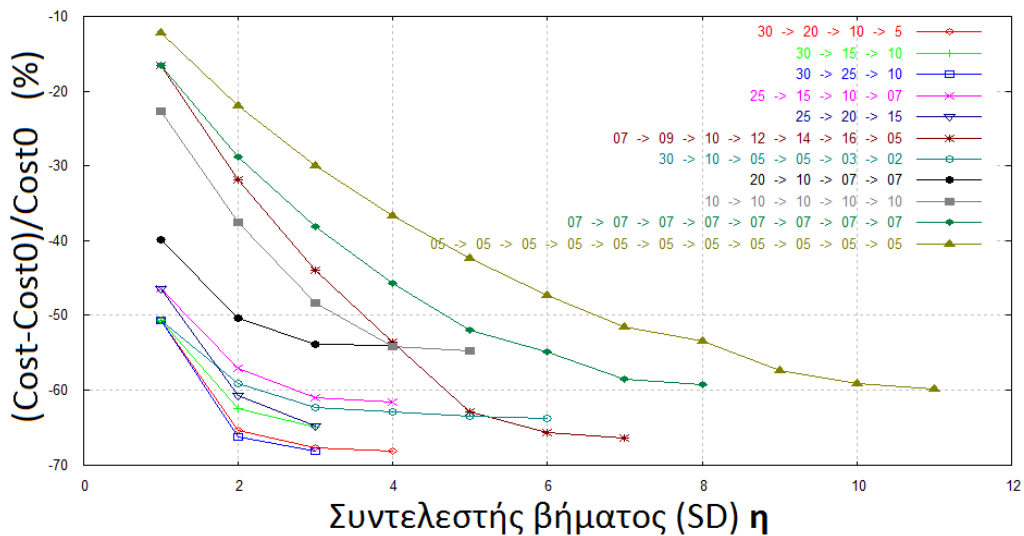
Σχήμα 6.19 – Ασυνέχεια επιφάνειας λόγω γεωμετρικού περιορισμού.

## 6.7 Επίλυση με Πολλαπλούς Κύκλους Βελτιστοποίησης

Ύστερα από την έρευνα και τον υπολογισμό των βέλτιστων τιμών των επιμέρους συντελεστών, οι οποίοι αν εφαρμόζονταν σε έναν μόνο κύκλο βελτιστοποίησης θα οδηγούσαν στην καλύτερη δυνατή λύση, θα δοκιμαστεί η επιλογή του να γίνουν περισσότεροι κύκλοι βελτιστοποίησης με σταθερούς τους συντελεστές  $\epsilon_{field}$  και  $\epsilon_{line}$  και με διαφορετική τιμή στο συντελεστή  $\eta$  σε κάθε κύκλο.

Για το λόγο αυτό, δοκιμάζονται διαφορετικές περιπτώσεις, κάθε μια με διαφορετικό  $\eta$  ανά επανάληψη, άλλες φορές αυξανόμενο, άλλες φορές σταθερό και άλλες φορές μειούμενο.

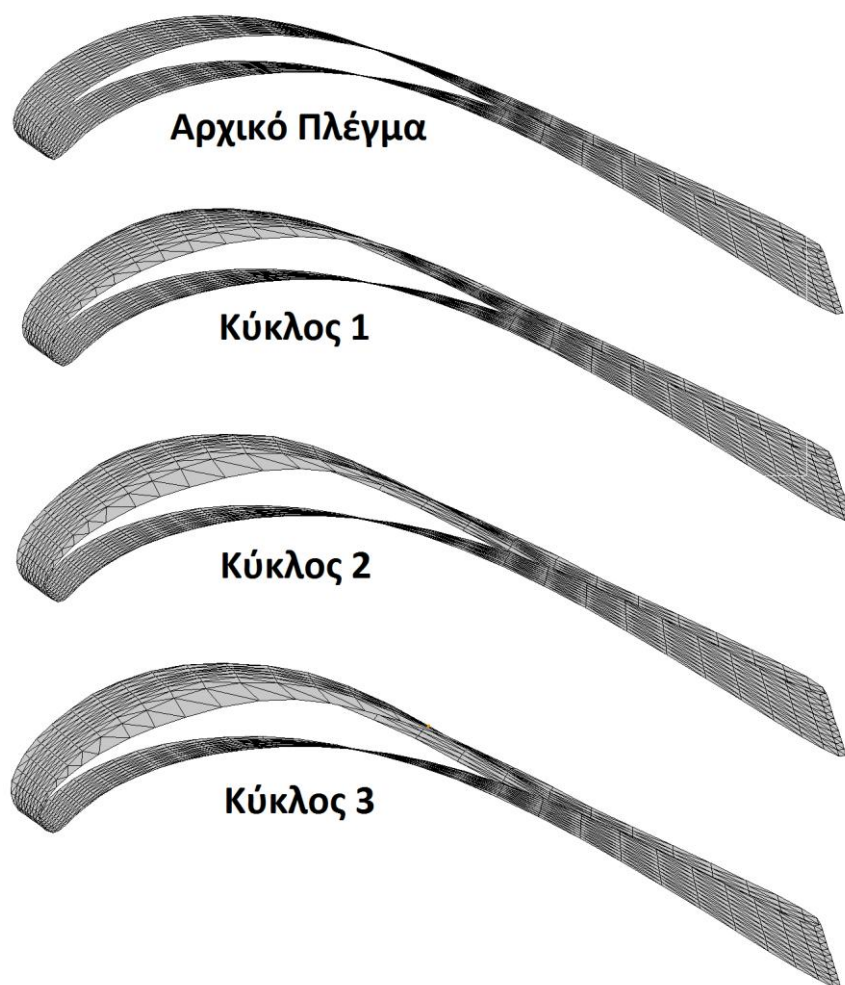
Οι περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν, παρουσιάζονται στο σχήμα 6.20



Σχήμα 6.20 – Ασυνέχεια επιφάνειας λόγω γεωμετρικού περιορισμού

Είναι εμφανές, ότι από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν η πιο αποδοτική είναι αυτή που αποτελείται από τρία βήματα<sup>7</sup>, στα οποία στο πρώτο χρησιμοποιείται  $\eta_1 = 30$  , στο δεύτερο  $\eta_2 = 25$  και στο τρίτο  $\eta_3 = 10$ . Μάλιστα, δεν είναι απλά καλύτερα από τις άλλες δοκιμές, αλλά οδηγεί σε ακόμα μεγαλύτερη μείωση της συνάρτησης κόστους σε σχέση με τη μέθοδο που δοκιμάστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Συγκεκριμένα, ενώ προηγουμένως επιτεύχθηκε μέγιστη μείωση της τάξης του 60%, με την ανανέωση γεωμετρίας πολλαπλών κύκλων επιτεύχθηκε μείωση της τάξης του 68%. Στην σχήμα 6.21, παρουσιάζονται, οι γεωμετρίες που προέκυψαν σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης.

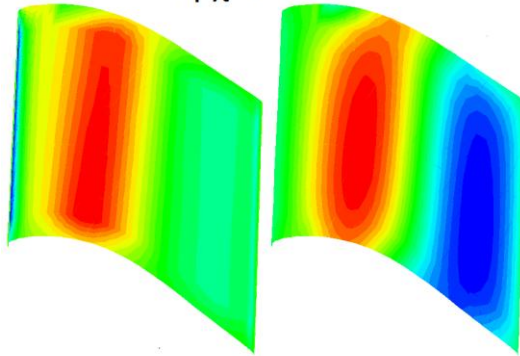


Σχήμα 6.21 – Γεωμετρία σε κάθε κύκλο.

<sup>7</sup> Βέβαια, η συγκεκριμένη λεπτομερής διερεύνηση, επιτεύχθηκε χάρη στο χαμηλό υπολογιστικό κόστος του προβλήματος που επιλέχθηκε και έγινε για να δοθεί μια αντικειμενική εικόνα για τις δυνατότητες της μεθόδου σε ένα μεγάλο εύρος διερεύνησης. Σε πραγματικά προβλήματα, μια τέτοια διερεύνηση είναι απαγορευτική, και ο μηχανικός χρησιμοποιεί τιμές βήματος με βάση την γνώση που υπάρχει από αντίστοιχα προβλήματα.

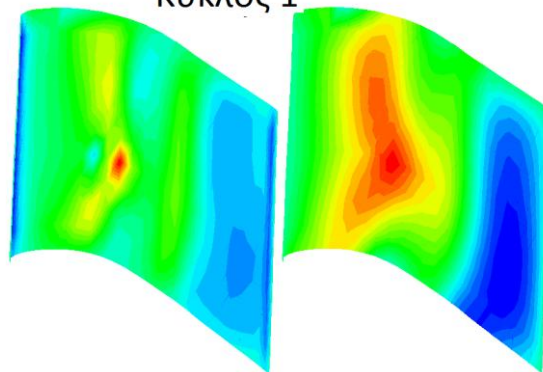
Στα σχήματα 6.22, 6.23, 6.24 και 6.25, παρουσιάζεται το πεδίο των παραγώγων της πλευράς υποπίεσης με και χωρίς εξομάλυνση, για κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, όπου είναι εμφανές ότι κατά τον πρώτο κύκλο γίνονται οι μεγαλύτερες αλλαγές στη γεωμετρία ενώ, στη συνέχεια ακολουθούν μικρότερες ανανεώσεις.

### Αρχικό Πεδίο



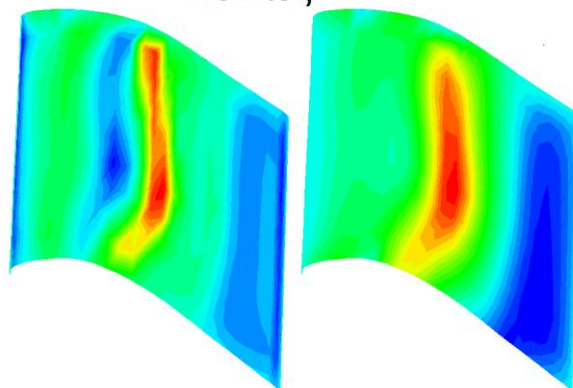
Σχήμα 6.22 – Πεδίο παραγώγων ευαισθησίας με και χωρίς εξομάλυνση. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή  $-0.000204$  (μπλε χρώμα) έως και την τιμή  $0.000126$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000015$

### Κύκλος 1

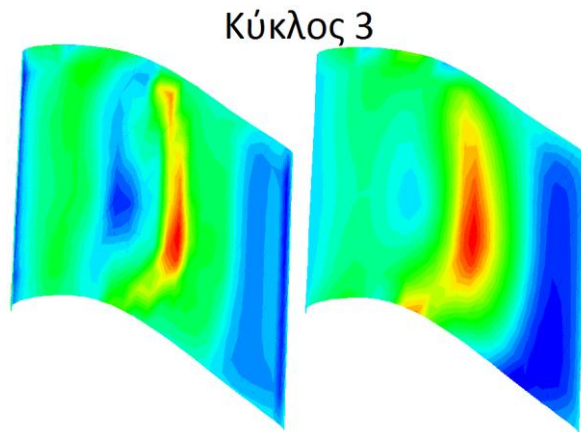


Σχήμα 6.23 – Πεδίο παραγώγων ευαισθησίας με και χωρίς εξομάλυνση. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή  $-0.000155$  (μπλε χρώμα) έως και την τιμή  $0.000266$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000019$

### Κύκλος 2

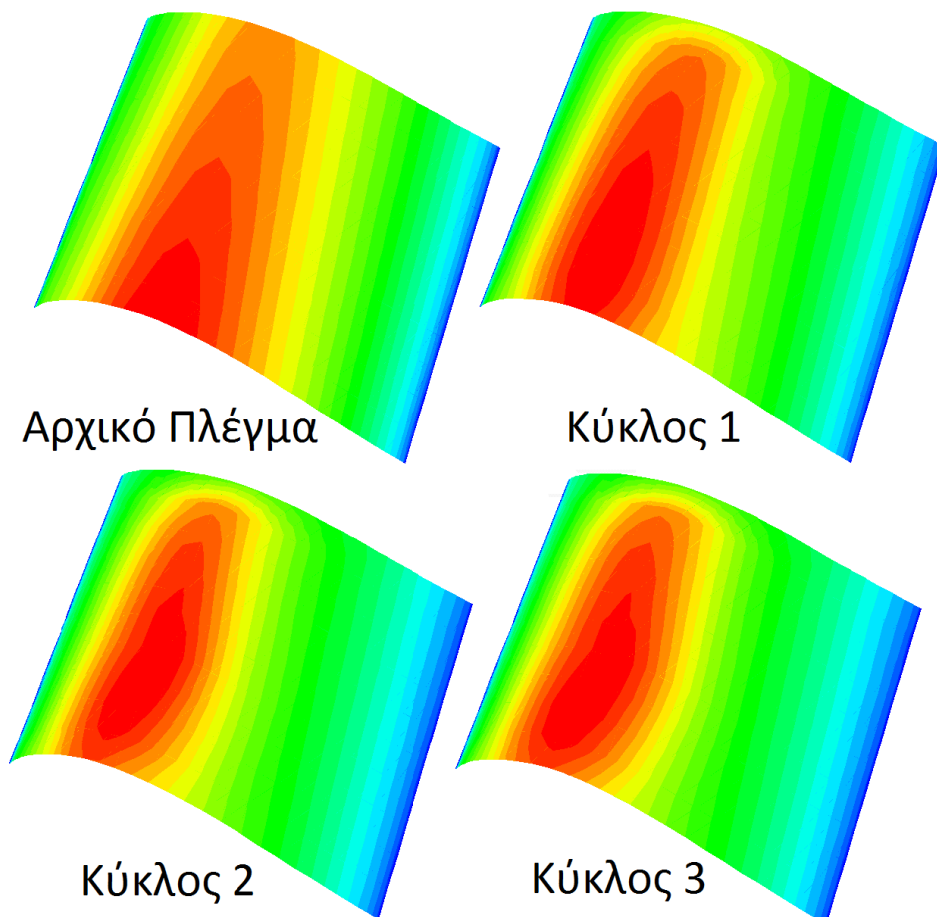


Σχήμα 6.24 – Πεδίο παραγώγων ευαισθησίας με και χωρίς εξομάλυνση. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή  $-0.000124$  (μπλε χρώμα) έως και την τιμή  $0.000253$  (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα  $0.000017$



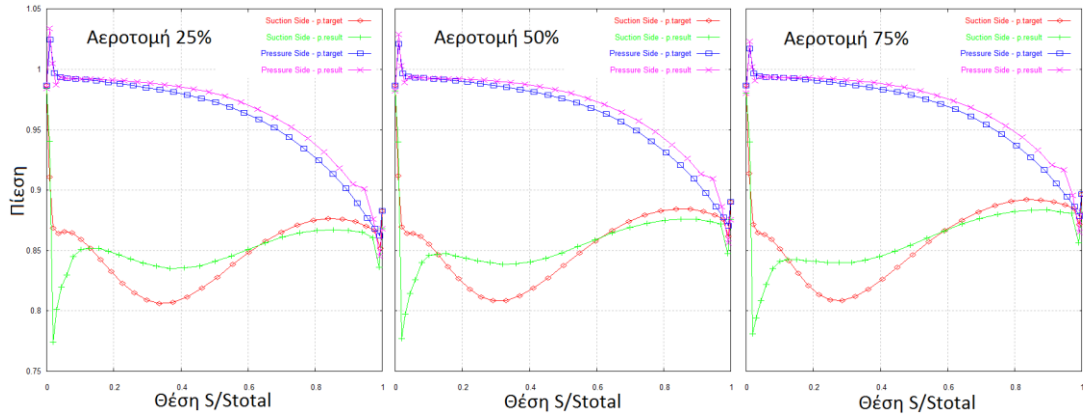
Σχήμα 6.25 – Πεδίο παραγώνων ευαισθησίας με και χωρίς εξομάλυνση. Η τιμή του μέτρου διακυμαίνεται από την τιμή -0.000118 (μπλε χρώμα) έως και την τιμή 0.000238 (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα 0.000016

Στη συνέχεια, στο σχήμα 6.26 παρουσιάζεται η διακύμανση του πάχους του πτερυγίου, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης

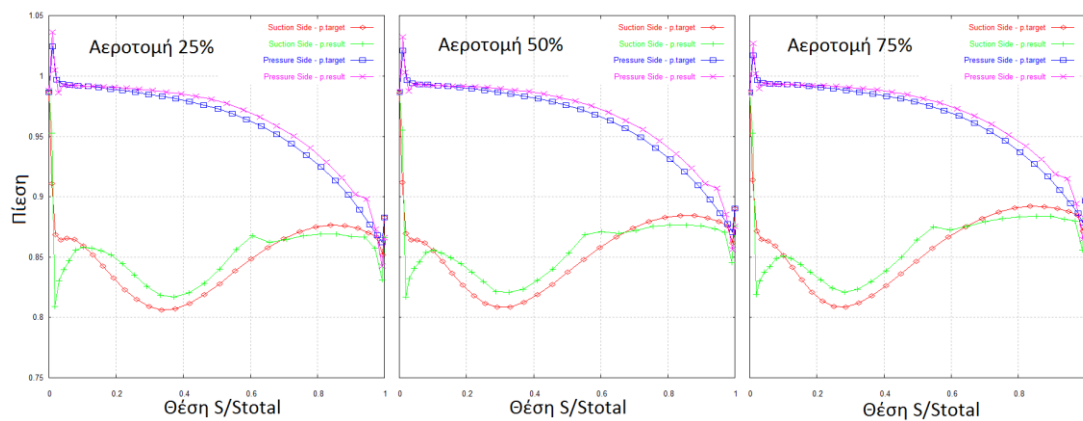


Σχήμα 6.26 – Διακύμανση πάχους πτερυγίου. Η τιμή του πάχους διακυμαίνεται από την τιμή 0 (μπλε χρώμα) έως και την τιμή 0.010866 (κόκκινο χρώμα) και παρουσιάζεται σε 23 διαβαθμίσεις με βήμα 0.000493

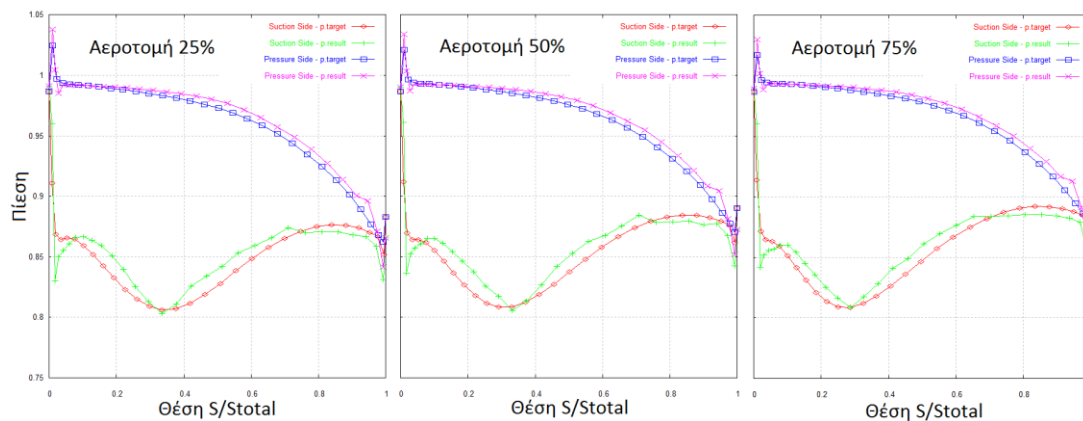
Τέλος, στα σχήματα 6.27, 6.28, 2.29 και 6.30 παρουσιάζεται η εξέλιξη της πίεσης, που αναπτύσσεται σε 3 αεροτομές του περυγίου, σε κάθε κύκλο της βελτιστοποίησης.



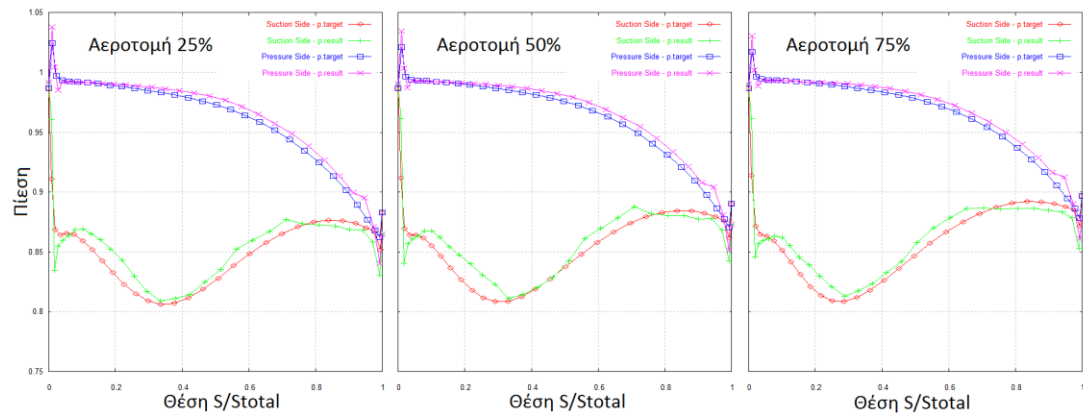
Σχήμα 6.27 – Κατανομή πίεσης, αρχικής γεωμετρίας.



Σχήμα 6.28– Κατανομή πίεσης, πρώτου κύκλου.



Σχήμα 6.29 – Κατανομή πίεσης, δεύτερου κύκλου.



Σχήμα 6.30 – Κατανομή πίεσης, τρίτου κύκλου.

Η βελτιστοποίηση σε πολλούς κύκλους, οδήγησε σε μεγαλύτερη βελτίωση, από την αντίστοιχη μονοβηματική (με τον καλύτερο συνδυασμό συντελεστών) καθώς, η επίδραση του γεωμετρικού περιορισμού πάχους γίνεται μικρότερη. Αυτό φαίνεται στα παραπάνω διαγράμματα πιέσεων όπου η ασυνέχεια κοντά στο 0.6 (εξ' αιτίας του γεωμετρικού περιορισμού) της αεροτομής έχει σχεδόν απαληφθεί σε σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση.



# Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>

## Συμπεράσματα

---

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν ο προγραμματισμός της μεθόδου εξομάλυνσης των παραγώγων ευαισθησίας και η εφαρμογή και διερεύνηση της σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής (αντίστροφος σχεδιασμός πτερυγίου αξονικής στροβιλομηχανής).

Για το σκοπό αυτό, επιλέχθηκε ως εφαρμογή η βελτιστοποίηση πτερυγίου στροβιλομηχανής. Στο δοσμένο πρόγραμμα επίλυσης της ροής και του συζυγούς προβλήματος, γύρω από το πτερύγιο, προσαρμόστηκε η μέθοδος εξομάλυνσης που προγραμματίστηκε και δημιουργήθηκε αλγόριθμος για την ανανέωση της μορφής του πτερυγίου με τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

Με την υλοποίηση των παραπάνω και την ανάλυση των αποτελεσμάτων, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- 1.** Για την υλοποίηση της μεθόδου εξομάλυνσης, χρησιμοποιήθηκε διακριτοποίηση της γεωμετρίας με τριγωνικά στοιχεία, οδηγώντας σε επιφανειακό μη δομημένο πλέγμα. Το γεγονός αυτό κάνει ευέλικτη τη μέθοδο, καθώς οποιοδήποτε δομημένο ή υβριδικό πλέγμα μπορεί να μετασχηματιστεί σε μη δομημένο (όπως άλλωστε έγινε για την εξετασθείσα περίπτωση) και, επομένως, γίνεται δυνατή η χρησιμοποίηση της μεθόδου από οποιαδήποτε μορφής επιφανειακό πλέγμα
- 2.** Ο υπολογιστικός χρόνος για την εκτέλεση της εξομάλυνσης, σε σχέση με το χρόνο εκτέλεσης του επιλύτη ροής και του συζυγούς προβλήματος είναι δραματικά μικρότερος, γεγονός που καθιστά τη μέθοδο ακόμα περισσότερο εύχρηστη, καθώς η προσθήκη της σε μια μέθοδο βελτιστοποίησης οδηγεί σε σημαντική μείωση του απαιτούμενου ρυθμού επαναλήψεων, χωρίς να εισάγει σημαντικό πρόσθετο υπολογιστικό κόστος. Με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας διπλωματικής, ο χρόνος εκτέλεσης ενός κύκλου βελτιστοποίησης (επίλυση ροής και συζυγούς προβλήματος, εξομάλυνσης και ανανέωσης γεωμετρίας) ανέρχεται στα 5 λεπτά (για το υπολογιστικό σύστημα που χρησιμοποιήθηκε και αποτελείται από τον επεξεργαστή Intel i5 M430 με μνήμη RAM 6 GB), εκ των οποίων ο χρόνος εκτέλεσης της εξομάλυνσης ήταν μόνο ελάχιστα δευτερόλεπτα. Εφαρμογή και σε περισσότερες περιπτώσεις όμως, θα οδηγούσε σε πιο σίγουρα συμπεράσματα.
- 3.** Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου είναι ξεκάθαρη, τουλάχιστον στο πρόβλημα στο οποίο εφαρμόστηκε, καθώς οδήγησε σε 55% καλύτερη λύση (σύμφωνα με το κριτήριο που τέθηκε), σε αντίθεση με τη συμβατική επίλυση δίχως

εξομάλυνση, για έναν κύκλο βελτιστοποίησης και σε 62% καλύτερη λύση για περισσότερους κύκλους βελτιστοποίησης. Επιπλέον, σε ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα, όσον αφορά του περιορισμούς σχεδιασμού της γεωμετρίας, αναμένεται να παρουσιάζει ακόμα καλύτερα αποτελέσματα.

4. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου, είναι ότι πρακτικά χρησιμοποιεί και εξομαλύνει οποιοδήποτε πεδίο τιμών σε υπολογιστικό πλέγμα. Έτσι, πέραν της περίπτωσης σύζευξης της με οποιαδήποτε διανυσματική μέθοδο επίλυσης συστήματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε κάθε άλλη εξομάλυνση μεταβλητής πεδίου.

5. Όλη η μελέτη, έγινε χρησιμοποιώντας σταθερή τιμή των συντελεστών εξομάλυνσης σε όλο το πεδίο επίλυσης. Σε επόμενη εργασία, θα μπορούσε να διερευνηθεί η ένταξη διαδικασίας υπολογισμού των συντελεστών σε κάθε θέση του πεδίου, στον παρόντα αλγόριθμο επίλυσης.

6. Εναλλακτικά, αντί της χρησιμοποίησης διδιάστατης εξομάλυνσης για ένα πεδίο, το επιφανειακό πεδίο θα μπορούσε να διαχειριστεί ως άθροισμα μονοδιάστατων περιπτώσεων (γραμμών), στις οποίες θα εφαρμοστεί μονοδιάστατη εξομάλυνση. Η χρησιμοποίηση μη-δομημένου πλέγματος όμως, θα εισήγαγε επιπλέον δυσκολίες και ανάγκη για προσεγγίσεις σε ένα τέτοιο εγχείρημα. Λεπτομερείς σύγκριση των δύο περιπτώσεων δεν έγινε στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας, αλλά όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα κατά τη μελέτη της επίδρασης των οριακών συνθηκών, η μονοδιάστατη επίλυση συνεπάγεται ότι η τιμή του κάθε κόμβου επηρεάζεται από δύο μόνο γειτονικούς του, σε αντίθεση με τη διδιάστατη όπου κάθε κόμβος επηρεάζεται από τουλάχιστον τρεις γειτονικούς. Περισσότεροι γειτονικοί κόμβοι, οδηγούν σε μεγαλύτερη εξομάλυνση, και σε μεγαλύτερη απαλοιφή της τραχύτητας της επιφάνειας που είναι και το ζητούμενο.



# Βιβλιογραφία

---

1. Θωμάς Ζερβογιάννης, **Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου**, Αθήνα 2011
2. Κ.Χ. Γιαννάκογλου, **Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική**, Αθήνα 2006
3. A. Jameson, S.Kim, **Reduction of the Adjoint Gradient Formula in the Continuous Limit**, Stanford University, Stanford, CA 94305, U.S.A.
4. S.Kim , K.Hossenli, K.Leoviriyakit, A.Jameson, **Enhancement of a Class of Adjoint Design Methods via Optimization of Parameters**, AIAA JOURNAL Vol.48, No.6, June 2010
5. Kevin W.Flaherty, **Initial Implementation of an Adjoint CFD Code for Aeroshell Shape Optimization**, AE8900 MS Special Problems Report, Atlanta, GA – May 3, 2008
6. Walter B. Richardson Jr., **Steepest Descent Using Smoothed Gradients**, Applied Mathematics and Computation 112 (2000) 241-254
7. N. B. Petrovskaya, **Modification of a Finite Volume Scheme for Laplace’s Equation**, STAM J. SCI. COMPUT. Vol. 23, No. 3 pp. 891-909
8. S.R. Sabbagh-Yandi, N.E. Mastorakis , M. Torbati, **3D Vertex-Base Unstructured Finite Volume Model With Bi-Harmonic Dissipation For Turbulent Wind Flow Around a Group of Cooling Towers**, International Journal of Mathematics and Computers in Simulation
9. Siva K. Nadarajah , Antony Jameson, **Studies of the Continuous and Discrete Adjoint Approaches to Viscous Automatic Aerodynamic Shape Optimazation**, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, AIAA 2001-2530
10. <http://en.wikipedia.org/wiki/Preconditioner>
11. [http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_volume\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_volume_method)
12. [http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem)
13. [http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient\\_descent](http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent)

