



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗΝ
ΕΜΦΥΤΕΥΣΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Σ. ΚΑΤΣΟΥΛΕΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ι. ΜΑΡΟΥΛΑΣ

ΑΘΗΝΑ, 2012

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΕΜΦΥΤΕΥΣΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Σ. ΚΑΤΣΟΥΛΕΑ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

I. ΜΑΡΟΥΛΑΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Ι. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Π. ΨΑΡΡΑΚΟΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΜΕΛΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ:

Σ. ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Α. ΜΕΛΑΣ, Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Σ. ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Α. ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, 2012

‘Η περὶ τῆς ἀληθείας θεωρία τῇ μὲν χαλεπὴ τῇ δὲ ῥαδίᾳ,
σημεῖον δὲ τὸ μήτ’ ἀξίως μηδένα δύνασθαι τυχεῖν αὐτῆς
μήτε πάντας ἀποτυγχάνειν, ἀλλ’ ἔκαστον λέγειν τι περὶ τῆς φύσεως,
καὶ καθ’ ἓνα μὲν ἢ μηθὲν ἢ μικρὸν ἐπιβάλλειν αὐτῇ,
ἐκ πάντων δὲ συναθροιζομένων γίγνεσθαι τι μέγεθος.

Αριστοτέλης, *Ta μετά τα φυσικά*, 993^b (30 – 34).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Από τη θέση αυτή, ολοκληρώνοντας τη διδακτορική μου διατριβή, επιθυμώ να εκφράσω θερμές ευχαριστίες στον Επιβλέποντά μου κ. Ιωάννη Μαρουλά, Καθηγητή στον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για τη διαρκή βοήθεια και καθοδήγησή του, με την οποία έγινε δυνατή η ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής. Με τις πολύωρες συζητήσεις και αναλύσεις πάνω σε ερευνητικά θέματα, τις ιδέες και τις προτάσεις του, καθώς και χάρη στην αμέριστη υποστήριξη και εμπιστοσύνη που έδειξε προς το πρόσωπό μου, υπήρξε πολύτιμος βοηθός στην προσπάθειά μου. Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει τέλος και στη συμπαράσταση και ενθάρρυνσή του, όχι μόνο σε επιστημονικό, αλλά και σε προσωπικό-ανθρώπινο επίπεδο.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Σαραντόπουλο, Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε., καθώς και τον κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, Αναπληρωτή Καθηγητή της ίδιας Σχολής, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή μου.

Ευχαριστίες επίσης οφείλω προς τον Τομέα Μαθηματικών της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. για την παροχή οικονομικής ενίσχυσης (υποτροφία κληροδοτήματος Παπακυριακόπουλου) καθ'όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να μνημονεύσω το πνεύμα συναδελφικότητας και αλληλεγγύης που επικρατούσε μεταξύ των μεταπυχιακών φοιτητών του Τομέα Μαθηματικών. Τους ευχαριστώ για τις ενδιαφέρουσες επιστημονικές συζητήσεις, καθώς και για το εποικοδομητικό ακαδημαϊκό κλίμα που καλλιεργήθηκε ανάμεσά μας.

Γ. Κατσουλέας

ΣΥΝΟΨΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς ονομάζεται κανονικός, ακριβώς όταν $AA^* = A^*A$. Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, με $1 \leq k < n$, ο πίνακας B καλείται εμφυτεύσιμος (*imbeddable*) στον A , ακριβώς όταν υπάρχει ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ (δηλαδή $V^*V = I_{n-k}$), τέτοια ώστε $V^*AV = B$.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής, οδηγούμαστε για $k > 1$ σε ικανές και αναγκαίες συνθήκες προκειμένου οι πίνακες A και B να έχουν συνευθειακές ιδιοτιμές. Ως εφαρμογή του αποτέλεσματος αυτού, παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα για τον αριθμό των ιδιοτιμών του εμφυτεύσιμου πίνακα B που ανήκουν σε ένα κυρτό σύνολο, σε σχέση με το πλήθος των ιδιοτιμών του A που περιέχονται στο ίδιο σύνολο. Επεξεργαζόμενοι τις αναγκαίες συνθήκες εμφύτευσης των Queiro-Duarte και Carlson-de Sa για κανονικούς πίνακες, παρουσιάζουμε τη μεταξύ τους αλληλοεξάρτηση. Επίσης, δίνεται μία απάντηση στο πρόβλημα που τέθηκε στην εργασία [42] σχετικά με τη γεωμετρική κατανομή μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν τις σχέσεις θ-διαχωρισμού για κάθε γωνία θ , στην περίπτωση κυρτώς ανεξάρτητων συνόλων. Ειδικότερα, για $k = 1$, αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές των A, B που ικανοποιούν τις συνθήκες των Queiro-Duarte, είναι τις συνθήκες των Carlson-de Sa, είναι κατ'ανάγκη συνευθειακές και διαχωριζόμενες στην ευθεία που ορίζουν.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται κυρίως σε ερμιτιανούς πίνακες. Θεωρούμε δύο πραγματικές (πεπερασμένες) ακολουθίες $\{\lambda_j\}_{j=1}^n, \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ που ικανοποιούν τις ανισότητες διαχωρισμού και κατασκευάζουμε μία ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$, τέτοια ώστε οι πίνακες $A = diag \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = diag \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ να είναι εμφυτεύσιμοι, δηλαδή $B = V^*AV$. Κατ'αρχάς, παρουσιάζεται για $k = 1$ μία καινούρια απόδειξη των ανισοτήτων διαχωρισμού, βασισμένη στην κατασκευή συστολών των M. Αδάμ και I. Μαρουλά ([1]), και επιπλέον δίνεται μία γεωμετρική κατασκευή για την ισομετρία - γεννήτορα V . Στη συνέχεια, παρουσιάζονται δύο ανεξάρτητες μέθοδοι για την κατασκευή του V , για $k > 1$. Τέλος, μελετάται η περίπτωση που A και B είναι κανονικοί και εμφυτεύσιμοι και διατυπώνονται συνθήκες για την εμφύτευση του B στον A ως προς τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών τους. Οι συνθήκες αυτές χρησιμοποιούνται για να αποδειχθεί ότι οι αναγκαίες συνθήκες των Queiro-Duarte δεν είναι και ικανές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, δοθέντος κανονικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και σημείου

$\mu_1 \in w(A) \setminus \sigma(A)$, καθορίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο $1 \leq k < n$, τέτοιον ώστε η σχέση $V^*AV = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$ να ικανοποιείται για την ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ και κατάλληλα σημεία $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A) \setminus \sigma(A)$. Αποδεικνύεται ότι πρέπει $k \geq \frac{2(n-1)}{3}$ και μάλιστα σημειώνεται αντιπαράδειγμα, απόπου προκύπτει ότι το φράγμα αυτό είναι γενικά το καλύτερο δυνατό. Επιπλέον, για το ελάχιστο k , προτείνεται μία αναδρομική διαδικασία για την κατασκευή $n - k$ αριθμητικών ορθογώνιων και A -ορθογώνιων μοναδιαίων διανυσμάτων $w_j \in \mathbb{C}^n$ (δηλαδή τέτοιων ώστε $w_i^*w_j = w_i^*Aw_j = w_i^*A^*w_j = 0$, για $i \neq j$). Τέλος, παρουσιάζονται, ως εφαρμογή, ενδιαφέρουσες ιδιότητες του ανώτερου βαθμού αριθμητικού πεδίου.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής αναφερόμαστε σε $n \times n$ αναλυτικές, αυτοσυζυγείς συναρτήσεις πινάκων $P(\lambda)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή τέτοιες ώστε $P(\lambda) = P^*(\lambda)$ για κάθε λ , και μελετάμε αρχές μεταβολής για τις ιδιοσυναρτήσεις $\mu_j(\lambda)$ του $P(\lambda)$. Εισάγοντας τη λεξικογραφική διάταξη των $\mu_j(\lambda)$ από την ισοδύναμη έκφρασή τους ως δυναμοσειρές γύρω από κάποιο σημείο λ_0 , επιτυγχάνουμε την έκφραση αυτών ως sup-inf ή inf-sup της ποσότητας $x^*(\lambda)P(\lambda)x(\lambda)$, για κατάλληλα μοναδιαία διανύσματα $x(\lambda)$. Οι αρχές μεταβολής για ιδιοσυναρτήσεις συνδέονται στη συνέχεια με τις κλασικές αρχές μεταβολής για τις ιδιοτιμές ερμιτιανών πινάκων και εφαρμόζονται, ώστε να δώσουν χαρακτηρισμούς ακροτάτων για τις ιδιοτιμές υπερβολικών πολυωνυμικών πινάκων. Τέλος, αναμορφώνουμε για τις $\mu_j(\lambda)$ ανισότητες που ισχύουν για τις ιδιοτιμές ερμιτιανών.

ABSTRACT OF Ph.D. THESIS

An $n \times n$ matrix A with complex entries is *normal*, exactly when $AA^* = A^*A$, where A^* denotes the conjugate-transpose of A . Considering the pair of *normal* matrices $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ and $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, with $1 \leq k < n$. the matrix B is *imbeddable* in A , if there exists an isometry $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ (i.e. $V^*V = I_{n-k}$), such that $V^*AV = B$.

In the second chapter of this dissertation, we consider conditions for interlacing for normal matrices. Initially, futher elaboration of a Theorem by Jiang-Kuo in [32, Thm. 2.13], leads us to generalize Thm. 2 in [14] for normal matrices with groups of collinear eigenvalues and $k > 1$. As a consequence of this, we present upper and lower bounds on the number of eigenvalues of the imbeddable matrix B that lie in a closed, convex set, with respect to the number of eigenvalues of A in the same set. In addition, we review and elaborate on the necessary imbedding conditions of Queiro-Duarte ([42, Thm. 4.1]) and Carlson-de Sa ([7, Thm. 2.3]) and provide the links between them. Moreover, we give an answer to a problem posed in [42] considering the geometric configurations of sets of complex numbers satisfying [42, Thm. 4.1] in the case of convexly independent sets. In particular, for $k = 1$, we prove that sets satisfying either [42, Thm. 4.1] or [7, Thm. 2.3] are collinear and interlacing on their common line.

In the third chapter, we consider mainly hermitian matrices and in particular are concerned with the sufficiency of the interlacing inequalities. Hence, letting the interlacing sequences $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ and $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$, we construct an isometry $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$, such that $A = \text{diag}\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ and $B = \text{diag}\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ are related via $B = V^*AV$. Our approach is realized in two steps. Initially, a new proof of the interlacing inequalities for $k = 1$ is given, based on the construction of compressions of normal matrices by M. Adam and J. Maroulas in [1]. Futher, we provide two independent methods for the construction of V for $k > 1$. The case when A and B are normal is then considered and a new set of conditions for the determination of an isometry V is presented, in the case B is imbeddable in A , in terms of the real and imaginary parts of their eigenvalues. These conditions are quite technical, but nonetheless are used to disprove a natural conjecture concerning the sufficiency of [42, Thm. 4.1].

In the fourth chapter, considering a normal matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ and a point

$\mu_1 \in w(A) \setminus \sigma(A)$, we determine the minimum integer $1 \leq k < n$, such that the relationship $V^*AV = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$ is satisfied, for an isometry $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ and suitable points $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A) \setminus \sigma(A)$. It turns out that $k \geq \frac{2(n-1)}{3}$ and moreover, a counterexample shows that this bound is the best possible for an arbitrary normal A . In particular, a recursive procedure to produce $(n-k)$ mutually orthogonal and A -orthogonal unit vectors $w_j \in \mathbb{C}^n$ (i.e. $w_i^*w_j = w_i^*Aw_j = 0$, for $i \neq j$) is proposed for the smallest k . The resulting isometry $V = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{n-k}] \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ is generating for a diagonal matrix $B = V^*AV$, which is a matrix of maximum order imbeddable in A . Furthermore, some useful properties derived from the imbeddability of diagonal matrices are presented.

Finally, in the fifth and last chapter we consider $n \times n$ analytic, selfadjoint matrix functions $P(\lambda)$ of a real parameter λ , i.e. $P(\lambda) = P^*(\lambda)$ for every λ , and study variational principles for their eigenfunctions $\mu_j(\lambda)$ according to a suitable order for real analytic functions: the lexicographic order of the infinite series of coefficients in the analytic expressions of $\mu_j(\lambda)$ in a neighbourhood of some λ_0 . Thus, a characteristic expression of the eigenfunctions as inf-sup or sup-inf of the quantity $x^*(\lambda)P(\lambda)x(\lambda)$ for suitable unit vectors $x(\lambda)$ is attained. The variational principles for eigenfunctions are then connected with the classical variational formulae for eigenvalues of hermitian matrices and are applied to prove extremal characterizations for the eigenvalues of hyperbolic polynomial matrices. Finally, we reform for $\mu_j(\lambda)$ known interlacing inequalities for eigenvalues of hermitian sums and submatrices with respect to the lexicographic order.

Περιεχόμενα

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
2 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΜΦΥΤΕΥΣΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ	9
2.1 Διαχωριζόμενες ιδιοτιμές κανονικών πινάκων	10
2.2 Εντοπισμός ιδιοτιμών εμφυτεύσιμων κανονικών πινάκων	16
2.3 Συνθήκες εμφύτευσης για $k = 1$	22
3 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΗΝ ΕΜΦΥΤΕΥΣΗ ΕΡΜΙΤΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ	27
3.1 Κατασκευή της ισομετρίας V , για $k = 1$	28
3.2 Η περίπτωση $k > 1$	31
3.3 Αναδρομική κατασκευή του V , για $k > 1$	33
3.4 Η ισομετρία για εμφυτεύσιμους κανονικούς πίνακες	38
4 ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ ΕΜΦΥΤΕΥΣΕΙΣ	45
4.1 Μέγιστη διάσταση διαγώνιου πίνακα εμφυτεύσιμου σε κανονικό . .	45
4.2 Κατασκευή του πίνακα ισομετρίας	48
5 ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ	57
5.1 Φασματική ανάλυση πολυωνυμικών πινάκων	58
5.2 Λεξικογραφική διάταξη ιδιοσυναρτήσεων	59
5.3 Αρχές μεταβολών ιδιοσυναρτήσεων	60
5.4 Σχετικά αποτελέσματα	69
Σύνοψη της διατριβής στην Αγγλική	73
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	77

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς ονομάζεται **κανονικός**, ακριβώς όταν $AA^* = A^*A$, όπου με A^* σημειώνεται ο αναστροφοσυζυγής του A . Αν ο πίνακας A έχει πραγματικά στοιχεία, προφανώς ο ορισμός περιορίζεται στην ισότητα $AA^T = A^TA$, όπου A^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του A . Η μελέτη των κανονικών πινάκων έχει αποδειχθεί ιδιαιτέρως παραγωγική. Το φασματικό θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο ένας κανονικός πίνακας A είναι ορθομοναδιαία διαγωνοποιησιμος, δίνει στους κανονικούς πίνακες μία εύχρηστη δομή, η οποία αντανακλάται και σε πολλές ισοδύναμες συνθήκες του ορισμού της κανονικότητας. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει συνολικά 89 ικανές και αναγκαίες συνθήκες στις εργασίες [20] και [31]. Προφανώς, η κλάση των κανονικών πινάκων περιλαμβάνει τους ερμιτιανούς, τους ορθομοναδιαίους, αλλά και τους πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες.

Συμβολίζοντας με $\mathbb{C}^{m \times n}$ το χώρο των $m \times n$ πινάκων με μιγαδικά στοιχεία και θεωρώντας τους κανονικούς πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, με $1 \leq k < n$, ο πίνακας B καλείται **εμφυτεύσιμος (imbeddable)** στον A , ή **συστολή (compression)** του A , ακριβώς όταν υπάρχει ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ (δηλαδή $V^*V = I_{n-k}$), τέτοια ώστε $V^*AV = B$.

Αν με $\sigma(\cdot)$ ορίσουμε το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα, τίθεται το πρόβλημα της διασύνδεσης των φασμάτων $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ και $\sigma(B) = \{\mu_i\}_{i=1}^{n-k}$ των A και B , προκειμένου ο B να είναι εμφυτεύσιμος στον A .

Ειδικότερα, για A και B ερμιτιανούς πίνακες το πρόβλημα απαντήθηκε το 1957 από τους K. Fan και G. Pall στην εργασία [14]. Στην περίπτωση αυτή, ικανή και

αναγκαία συνθήκη για την εμφύτευση είναι να ισχύουν οι **ανισότητες διαχωρισμού** (interlacing inequalities) για τις ιδιοτιμές των A και B :

Θεώρημα 1.1 (Fan-Pall). *Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ ερμιτιανοί πίνακες με ιδιοτιμές $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ αντιστοίχως σε μη φθίνουσα σειρά, τότε ο B είναι εμφυτεύσιμος στον A αν και μόνον αν*

$$\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+k}], \text{ για } j = 1, \dots, n-k. \quad (1.1)$$

Η συνήθης απόδειξη για το αναγκαίο των σχέσεων διαχωρισμού (βλέπε [3] και [33]) προκύπτει ως συνέπεια των **αρχών μεταβολής** (variational principles:)

$$\lambda_j = \min_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S} = j}} \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ \|x\|_2 = 1}} x^* A x = \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{T} = n-j+1}} \min_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ \|x\|_2 = 1}} x^* A x,$$

όπου $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ οι ιδιοτιμές του ερμιτιανού A σε μη φθίνουσα σειρά. Η κατεύθυνση αυτή ήταν γνωστή από παλαιότερα και γι' αυτό οι σχέσεις (1.1) αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως *ανισότητες διαχωρισμού Cauchy*. Από την άλλη, η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 για το ικανό στην εργασία [14] είναι αλγεβρική και, ως εκ τούτου, δεν ασχολείται με την κατασκευή της ισομετρίας V , ώστε να παρουσιαστεί μία γεωμετρική ερμηνεία του αλληλοδιαχωρισμού των ιδιοτιμών στην (1.1).

Το αντίστοιχο πρόβλημα μελετήθηκε για τις μιγαδικές ιδιοτιμές των κανονικών πινάκων A και B από τους K. Fan και G. Pall στην ίδια εργασία, στην περίπτωση $k = 1$. Συμβολίζοντας με \overline{zw} το ευθύγραμμο τμήμα στο \mathbb{C} με άκρα τα z , w έχουμε:

Θεώρημα 1.2 (Fan-Pall). *Εστω οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ με φάσματα $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $\sigma(B) = \{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ αντιστοίχως. Αν οι ιδιοτιμές $\{\lambda_j\}_{j=1}^q$ και $\{\mu_j\}_{j=1}^{q-1}$ είναι διακεκριμένες και δεν ανήκουν στο $\sigma(A) \cap \sigma(B)$, τότε ο πίνακας B είναι εμφυτεύσιμος στον A αν και μόνον αν οι ιδιοτιμές $\{\lambda_j\}_{j=1}^q$ και $\{\mu_j\}_{j=1}^{q-1}$ είναι συνευθειακές σε μία ευθεία \mathcal{L} και διαχωριζόμενες, δηλαδή για $j = 1, \dots, q-1$, $\mu_j \in \overline{\lambda_j \lambda_{j+1}}$.*

Το προηγούμενο ενδιαφέρον αποτέλεσμα δε διερευνήθηκε ιδιαίτερα για $k > 1$. Προς την κατεύθυνση αυτή, ορισμένες αναγκαίες (αλλά όχι ικανές) συνθήκες διατυπώθηκαν το 1984 από τους D. Carlson και E. Marques de Sa στην εργασία [7] (Πρόταση 2.6 για $z = 0$ και $\phi = 0$) και το 2009 από τους J.F. Queiro και A.L. Duarte στην εργασία τους [42] (Θεώρημα 2.4).

Ανοικτό πρόβλημα συνδεδεμένο με την ιδιότητα της εμφύτευσης ενός κανονικού πίνακα B στον A είναι η κατασκευή μιας ισομετρίας V τέτοιας ώστε $V^*AV = B$. Αυτό οδηγεί στο να θεωρήσουμε μία γενίκευση του πρόσφατα διατυπωμένου αντίστροφου πρόβληματος για το αριθμητικό πεδίο.

Την θέματα στο σημείο αυτό ότι το **αριθμητικό πεδίο** πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι το συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου

$$w(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

Ειδικά, όταν A είναι κανονικός, το σύνολο $w(A)$ συμπίπτει με την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του, δηλαδή $w(A) = co\{\sigma(A)\}$. Για κάθε σημείο $\mu \in w(A)$, ένα μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ καλείται **διανύσμα - γεννήτορας (generating vector)** για το μ , αν $x^*Ax = \mu$. Πρόσφατα, στην εργασία [44] μελετήθηκε το αντίστροφο πρόβλημα της εύρεσης ενός διανύσματος - γεννήτορα x για κάποιο δοθέν σημείο $\mu \in w(A)$. Το πρόβλημα αυτό συνδέει την εικόνα $w(A)$ της τετραγωνικής απεικόνισης

$$x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1 \rightarrow x^*Ax \in \mathbb{C}$$

με το πεδίο ορισμού της, τη μιγαδική μοναδιαία σφαίρα $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\}$ και μάλιστα έχει αποδειχθεί από τον R. Carden στην εργασία [5] ότι υπάρχουν n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα-γεννήτορες για κάθε σημείο $\mu \in int\{w(A)\}$. Αλγόριθμοι για την εύρεση διανύσματων-γεννητόρων διατυπώνονται στις εργασίες [5], [10] και [44].

Στην παρούσα διατριβή, εισάγουμε το ακόλουθο γενικευμένο αντίστροφο πρόβλημα, που αναφέρεται σε πλήθος σημείων του $w(A)$: δοθέντων σημείων $\mu_1, \dots, \mu_{n-k} \in w(A)$ και θέτοντας $B = diag\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$, να εξεταστεί η ύπαρξη ισομετρίας $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$, τέτοιας ώστε $B = V^*AV$, και να κατασκευαστεί στην περίπτωση που υπάρχει. Η ισομετρία V θα αναφέρεται ως **ισομετρία - γεννήτορας** για τον B στον A . Αυτό το πρόβλημα έχει μελετηθεί στην ειδική περίπτωση όπου $B = \lambda I_{n-k}$ μέσω των αριθμητικών πεδίων ανώτερου βαθμού

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-k}(A) &= \{\mu \in \mathbb{C} : PAP = \mu P \text{ για κάποια ορθή προβολή } P \text{ βαθμού-} (n-k)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \mu I_{n-k} \text{ είναι εμφυτεύσιμος στον } A\}, \end{aligned}$$

που έχουν πρόσφατα βρει εφαρμογές στη Φυσική στη διόρθωση λαθών κβαντικών πληροφοριών (βλέπε [9] για ερμιτιανούς και [8] για ορθοκανονικούς και κανονι-

κούς). Στη διατριβή αυτή, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα αυτό για ερμιτιανούς και κανονικούς πίνακες.

Μία διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος εμφύτευσης έχει γίνει μέσω των **υποκανονικών** (**subnormal**) τελεστών, τους οποίους όρισε ο P.R. Halmos στην εργασία [22]. Αν \mathcal{H} είναι χώρος Hilbert και \mathcal{H}_0 κλειστός υπόχωρός του, ένας φραγμένος γραμμικός μετασχηματισμός T από τον \mathcal{H}_0 στον \mathcal{H} καλείται υποκανονικός, αν έχει κανονική επέκταση στον \mathcal{H} . Θεωρώντας τη διάσπαση του χώρου ως ευθύ άθροισμα $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$, τότε για κάθε $x \in \mathcal{H}_0$ η εικόνα εκφράζεται μοναδικά ως $Tx = y + z$, όπου $y \in \mathcal{H}_0$ και $z \in \mathcal{H}_0^\perp$. Μάλιστα, μπορούμε να γράψουμε $y = Bx$ και $z = C^*x$, όπου B είναι τελεστής στον \mathcal{H}_0 και C^* φραγμένος τελεστής από τον \mathcal{H}_0 στον \mathcal{H} , ώστε T να αναπαρίσταται ως σύνθετος πίνακας στήλη $T = \begin{bmatrix} B \\ C^* \end{bmatrix}$. Ο Halmos στην ανωτέρω εργασία έδωσε χαρακτηρισμούς για τους υποερμιτιανούς, υποορθομοναδιαίους, υποθετικούς και υποπροβολικούς τελεστές. Αποτελέσματα σχετικά με το χαρακτηρισμό των υποκανονικών τελεστών περιλαμβάνονται στην εργασία [15].

Το ανωτέρω πρόβλημα συνδέεται με τη συμπλήρωση υποκανονικών πινάκων T , όπου $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ είναι κανονικός και $C \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$, ώστε ο εκτεταμένος πίνακας $A = \begin{bmatrix} B & | & D \\ C^* & | & F \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ να είναι κανονικός. Στην περίπτωση αυτή, μία ισομετρία - γεννήτορας για την εμφύτευση του B στον A είναι $V = \begin{bmatrix} I_{n-k} \\ 0_{k,n-k} \end{bmatrix}$. Επιπλέον, από τη σχέση της κανονικότητας $AA^* = A^*A$ έχουμε $CC^* = DD^*$, και από την ιδιάζουσα παραγοντοποίηση $C = M^*\Sigma N$ και $D = M^*\Sigma \hat{N}$, συμπεραίνουμε ότι $D = CU$, όπου $U = N^*\hat{N} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ είναι ορθομοναδιαίος. Εκφράσεις για τους υπόλοιπους υποπίνακες C , D και F στις περιπτώσεις $k = 1, 2$ έχουν δοθεί από τους K.D. Ikramov και L. Elsner στην εργασία [30]. Επίσης, οι C.-C. Jiang και K.-H. Kuo διατύπωσαν ικανές συνθήκες στην εργασία τους [32] ως προς τη δομή του C , προκειμένου να υπάρχει κανονική επέκταση του T , χωρίς όμως να λαμβάνουν υπόψιν τους το φάσμα του προκύπτοντος κανονικού πίνακα A . Συγκεκριμένα, συμβολίζοντας με $E_\lambda(\cdot)$ τον ιδιοχώρο πίνακα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του $\lambda \in \sigma(\cdot)$ και $E_{\mathcal{L}}(\cdot) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\cdot) \cap \mathcal{L}} E_\lambda(\cdot)$, όπου \mathcal{L} ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο, προκύπτει ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} B \\ C^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ έχει κανονική επέκταση αν υπάρχουν ευθείες $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^r$

$(r \leq n - k)$ τέτοιες ώστε $\sigma(B) \subset (\cup_{j=1}^r \mathcal{L}_j)$, οι υπόχωροι $\{E_{\mathcal{L}_j}(B)\}_{j=1}^r$ να είναι αμοιβαίως ορθογώνιοι και οι στήλες του C να ανήκουν στον $E_{\mathcal{L}_j}(B)$ για κάποια j .

Στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής, επεξεργαζόμενοι το παραπάνω αποτέλεσμα των Jiang-Kuo, οδηγούμαστε για $k > 1$ σε μία επέκταση του Θεωρήματος 1.2. Ως εφαρμογή του αποτέλεσματος αυτού, παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα για τον αριθμό των ιδιοτιμών του εμφυτεύσιμου πίνακα B που ανήκουν σε ένα κυρτό σύνολο, σε σχέση με το πλήθος των ιδιοτιμών του A που περιέχονται στο ίδιο σύνολο, γενικεύοντας κατά τον τρόπο αυτόν ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του R. Horn. Επεξεργαζόμενοι τις αναγκαίες συνθήκες εμφύτευσης των Queiro-Duarte και Carlson-de Sa που αναφέρθηκαν προηγουμένως, παρουσιάζουμε τη μεταξύ τους αλληλοεξάρτηση. Επίσης, δίνεται μία απάντηση στο πρόβλημα που τέθηκε στην εργασία [42] σχετικά με τη γεωμετρική κατανομή μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν τις σχέσεις θ-διαχωρισμού για κάθε γωνία θ , στην περίπτωση κυρτώς ανεξάρτητων συνόλων. Ειδικότερα, για $k = 1$, αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές των A, B που ικανοποιούν τις συνθήκες των Queiro-Duarte, είτε τις συνθήκες των Carlson-de Sa, είναι κατ'ανάγκη συνευθειακές και διαχωριζόμενες στην ευθεία που ορίζουν.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται κυρίως στις ικανές συνθήκες (1.1) του Θεωρήματος 1.1 για ερμιτιανούς πίνακες. Θεωρώντας δύο πραγματικές (πεπερασμένες) ακολουθίες $\{\lambda_j\}_{j=1}^n, \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ που ικανοποιούν τις ανισότητες διαχωρισμού (1.1), κατασκευάζεται μία ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$, τέτοια ώστε οι πίνακες $A = diag \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = diag \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ να είναι εμφυτεύσιμοι, δηλαδή $B = V^*AV$. Κατ'αρχάς, παρουσιάζεται για $k = 1$ μία καινούρια απόδειξη του Θεωρήματος 1.1, βασισμένη στην κατασκευή συστολών για κανονικούς πίνακες των M. Αδάμ και I. Μαρουλά στην εργασία [1], και επιπλέον δίνεται μία γεωμετρική κατασκευή για την ισομετρία - γεννήτορα V . Στη συνέχεια, παρουσιάζονται δύο ανεξάρτητες μέθοδοι για την κατασκευή του V , για $k > 1$. Τέλος, μελετάται η περίπτωση που A και B είναι κανονικοί και εμφυτεύσιμοι και διατυπώνονται συνθήκες για την εμφύτευση του B στον A ως προς τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών τους. Οι συνθήκες αυτές χρησιμοποιούνται για να αποδειχθεί ότι οι αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.4 των Queiro-Duarte δεν είναι και ικανές, σύμφωνα με το διατυπωμένο ερώτημά τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, δοθέντος κανονικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και σημείου

$\mu_1 \in w(A) \setminus \sigma(A)$, καθορίζουμε τον ελάχιστο ακέραιο $1 \leq k < n$, τέτοιον ώστε η σχέση $V^*AV = diag\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$ να ικανοποιείται για την ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ και κατάλληλα σημεία $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A) \setminus \sigma(A)$. Αποδεικνύεται ότι πρέπει $k \geq \frac{2(n-1)}{3}$ και μάλιστα σημειώνεται αντιπαράδειγμα, απόπου προκύπτει ότι το φράγμα αυτό είναι γενικά το καλύτερο δυνατό. Επιπλέον, για το ελάχιστο k , προτείνεται μία αναδρομική διαδικασία για την κατασκευή $n - k$ αμοιβαίως ορθογώνιων και A -ορθογώνιων μοναδιαίων διανυσμάτων $w_j \in \mathbb{C}^n$ (δηλαδή τέτοιων ώστε $w_i^*w_j = w_i^*Aw_j = w_i^*A^*w_j = 0$, για $i \neq j$). Η κατασκευή αυτή βασίζεται σε γενίκευση αποτελέσματος των M. Αδάμ και I. Μαρουλά στην εργασία [1] και οδηγεί στην κατασκευή διανυσμάτων - γεννητόρων για αυθαίρετα σημεία $\mu_1 \in int\{w(A)\}$. Η προκύπτουσα ισομετρία $V = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{n-k}] \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ είναι μέγιστης διάστασης γεννήτορας διαγώνιου πίνακα $B (= V^*AV)$, εμφυτεύσιμου στον A . Τέλος, παρουσιάζονται, ως εφαρμογή, ενδιαφέρουσες ιδιότητες του ανώτερου βαθμού αριθμητικού πεδίου.

Το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής αναφέρεται σε $n \times n$ αναλυτικές, αυτοσυζυγείς συναρτήσεις πινάκων $P(\lambda)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή τέτοιες ώστε $P(\lambda) = P^*(\lambda)$ για κάθε λ . Είναι γνωστό από το θεώρημα του Rellich [19] ότι για $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $P(\lambda)$ είναι διαγωνοποιήσιμη ταυτοχρόνως για όλα τα λ . Ειδικότερα, υπάρχουν βαθμωτές αναλυτικές συναρτήσεις $\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)$ και μία $n \times n$ ορθομοναδιαία συνάρτηση πίνακα $U(\lambda)$, με την ιδιότητα

$$P(\lambda) = U(\lambda)diag\{\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)\}U^*(\lambda). \quad (1.2)$$

Στην (1.2), οι $\mu_j(\lambda)$ καλούνται **ιδιοσυναρτήσεις**. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι από το θεώρημα διαγωνοποίησης ερμιτιανών πινάκων απορρέουν οι αρχές μεταβολής ιδιοτιμών και από αυτές με τη σειρά τους οι ανισότητες διαχωρισμού (1.1), καθώς και ότι μία παρόμοια ακολουθία αποτελεσμάτων και αποδείξεων μεταφέρεται και στους κανονικούς πίνακες, όπως παρουσιάστηκε από τους Queiro-Duarte [42], μελετάμε στο κεφάλαιο αυτό αρχές μεταβολής για τις ιδιοσυναρτήσεις $\mu_j(\lambda)$. Εισάγοντας τη λεξικογραφική διάταξη των $\mu_j(\lambda)$ από την ισοδύναμη έκφρασή τους ως sup-inf ή inf-sup της ποσότητας $x^*(\lambda)P(\lambda)x(\lambda)$, για κατάλληλα μοναδιαία διανύσματα $x(\lambda)$. Οι αρχές μεταβολής για ιδιοσυναρτήσεις συνδέονται στη συνέχεια με τις κλασικές αρχές μεταβολής για τις ιδιοτιμές ερμιτιανών πινάκων και εφαρμόζονται, ώστε να δώσουν χαρακτηρισμούς ακροτάτων για τις ιδιοτιμές υπερβολικών

πολυωνυμικών πινάκων. Τέλος, αναμορφώνουμε για τις $\mu_j(\lambda)$ ανισότητες που ισχύουν για τις ιδιοτιμές ερμιτανών.

Από τη διατριβή αυτή έχουν προκύψει οι ακόλουθες επιστημονικές εργασίες που έχουν υποβληθεί προς κρίση σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά:

1. Variational Characterizations for Eigenfunctions of Analytic Self-adjoint Operator Functions,
2. Links on Imbedding Conditions for Normal Matrices,
3. The Isometry for Imbedding Hermitian and Normal matrices,
4. Diagonal Imbeddings in a Normal matrix

και επιμέρους αποτελέσματα των εργασιών 1 και 2 έχουν παρουσιαστεί με ομιλίες στα συνέδρια

1. Haifa Matrix Theory Conference, 18-21 Μαΐου 2009, Min-max Theorems for Analytic Self-adjoint and Normal matrices,
2. Braunschweig, ILAS, 22-26 Αυγούστου 2011, Links on Imbedding Conditions for Normal matrices.

Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΜΦΥΤΕΥΣΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Στην εισαγωγή, στο Θεώρημα 1.2 των Fan-Pall περιγράφονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες, προκειμένου ένας $(n - 1) \times (n - 1)$ κανονικός πίνακας να είναι εμφυτεύσιμος σε έναν κανονικό πίνακα διάστασης $n \times n$. Προφανώς έπειταί ότι η εμφύτευση είναι εφικτή, όταν οι A και B έχουν την ειδική μορφή

$$A = z_0 I_n + \left(e^{i\phi} H \oplus \text{diag} \{ \lambda_j - z_0 \}_{j=q+1}^n \right), \quad (2.1)$$

$$B = z_0 I_{n-1} + \left(e^{i\phi} Q \oplus \text{diag} \{ \lambda_j - z_0 \}_{j=q+1}^n \right), \quad (2.2)$$

όπου οι πίνακες $H \in \mathbb{C}^{q \times q}$, $Q \in \mathbb{C}^{(q-1) \times (q-1)}$ είναι ερμιτιανοί, τέτοιοι ώστε Q να είναι εμφυτεύσιμος στον H και το σημείο $z_0 \in \mathbb{R} \cap \mathcal{L}$, όπου \mathcal{L} η ευθεία με κλίση $\omega \in [0, 2\pi)$, πάνω στην οποία κατανέμονται οι ιδιοτιμές των A , B . Από τις ανισότητες (1.1) για τις ιδιοτιμές των H και Q , η εμφύτευση είναι εφικτή ακριβώς όταν

$$e^{-i\omega}(\lambda_i - z_0) \leq e^{-i\omega}(\mu_i - z_0) \leq e^{-i\omega}(\lambda_{i+1} - z_0),$$

για $i = 1, \dots, q - 1$, ενώ οι υπόλοιπες ιδιοτιμές λ_i , $\mu_{i-1} \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ ($i = q + 1, \dots, n$) ταυτίζονται.

2.1 Διαχωριζόμενες ιδιοτιμές κανονικών πινάκων

Περαιτέρω έρευνα βασισμένη στην ειδική μορφή κανονικών εμφυτεύσιμων πινάκων στην εργασία [32] οδηγεί στην ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 1.2. Εδώ με $| \cdot |$ συμβολίζουμε την πληθυκότητα ενός πεπερασμένου συνόλου και με \widehat{zw} το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα z, w . Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι $E_\lambda(\cdot)$ είναι ο ιδιόχωρος πίνακα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(\cdot)$ και για κάθε ευθεία \mathcal{L} στο μιγαδικό επίπεδο συμβολίζουμε $E_{\mathcal{L}}(\cdot) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\cdot) \cap \mathcal{L}} E_\lambda(\cdot)$.

Θεώρημα 2.1. *Εστω οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ με φάσματα $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$, $\sigma(B) = \{\mu_i\}_{i=1}^{n-k}$ και $|\sigma(A) \cap \sigma(B)| = s$. Θεωρούμε επίσης τις ευθείες \mathcal{L}_j ($j = 1, \dots, r$ ($\leq n-k$)) του \mathbb{C} ώστε $(\sigma(A) \cup \sigma(B)) \setminus (\sigma(A) \cap \sigma(B)) \subset (\bigcup_{j=1}^r \mathcal{L}_j) \setminus (\bigcap_{j=1}^r \mathcal{L}_j)$ και συμβολίζουμε τα σύνολα*

$$\begin{aligned}\sigma_j(A) &= \{\lambda_\ell\}_{\ell=1}^{n-s} \cap \mathcal{L}_j \equiv \{\lambda_i^j\}_{i=1}^{n_j}, \\ \sigma_j(B) &= \{\mu_\ell\}_{\ell=1}^{n-k-s} \cap \mathcal{L}_j \equiv \{\mu_i^j\}_{i=1}^{n_j - k_j}, \quad j = 1, \dots, r,\end{aligned}$$

με $\sum_{j=1}^r n_j = n - s$, $\sum_{j=1}^r k_j = k$ στα οποία διαμερίζονται οι διακεκριμένες ιδιοτιμές των A και B . Τα στοιχεία των $\sigma_j(A)$ και $\sigma_j(B)$ διαχωρίζονται στην \mathcal{L}_j , με την έννοια ότι

$$\mu_i^j \in \overline{\lambda_i^j \lambda_{i+k_j}^j}, \quad \text{για } i = 1, \dots, n_j - k_j,$$

αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι της μορφής $\begin{bmatrix} B & D \\ C^* & F \end{bmatrix}$, όπου

1. $C = [C_1 \ \dots \ C_r]$, με $C_j \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k_j}$, $\sum_{j=1}^r k_j = k$ και οι στήλες των υποπινάκων C_j ανήκουν στους $E_{\mathcal{L}_j}(B) = \bigoplus_{\mu \in \sigma(B) \cap \mathcal{L}_j} E_\mu(B)$ για $j \in \{1, \dots, r\}$,

2. $F = \bigoplus_{j=1}^r \text{diag} \{z_i^j\}_{i=1}^{k_j}$, με $z_i^j \in \mathcal{L}_j$ ($i = 1, \dots, k_j$) και

3. οι C και D σχετίζονται από την εξίσωση $D = CU$, όπου ο ορθομοναδιαίος $U = \bigoplus_{j=1}^r e^{-2i\theta_j} I_{k_j}$ με $\theta_j \in [0, 2\pi)$, τέτοια ώστε οι ευθείες $e^{i\theta_j} \mathcal{L}_j$ ($j = 1, \dots, r$) να είναι παράλληλες στον πραγματικό άξονα.

Απόδειξη. Έστω $V_j = \begin{bmatrix} u_1^j & \dots & u_{n_j-k_j}^j \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n_j-k_j)}$ ($j = 1, \dots, r$), όπου οι στήλες u_i^j ($i = 1, \dots, n_j - k_j$) είναι ιδιοδιανύσματα του B αντίστοιχα των ιδιοτιμών του μ_i^j στην \mathcal{L}_j . Επιπλέον, αν οι στήλες του πίνακα $V_{r+1} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times s}$ είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στις κοινές ιδιοτιμές των πινάκων A, B , ο ορθομοναδιαίος $V = \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_r & V_{r+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ διαγωνοποιεί τον B , δηλαδή $B = V D_B V^*$, όπου $D_B = \oplus_{j=1}^{r+1} \Delta_j$, με $\Delta_j = \text{diag} \{ \mu_i^j \}_{i=1}^{n_j-k_j}$, $j = 1, \dots, r$ και $\Delta_{r+1} = \text{diag} \{ \mu_i \}_{i=n-k-s+1}^{n-k}$. Συνεπώς, από την

$$A = \begin{bmatrix} V D_B V^* & D \\ C^* & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_B & V^* D \\ C^* V & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

είναι εμφανές ότι το θεώρημα αρκεί να αποδειχθεί για κανονικούς πίνακες της μορφής

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} D_B & V^* D \\ C^* V & F \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Οι χώροι $E_{\mathcal{L}_1}(B), E_{\mathcal{L}_2}(B), \dots, E_{\mathcal{L}_r}(B)$ είναι ανα δύο ορθογώνιοι, έτσι ώστε $C_j^* V_i = 0$ για κάθε $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$ και τότε έχουμε

$$C^* V = \begin{bmatrix} C_1^* \\ \vdots \\ C_r^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_r & V_{r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \oplus_{j=1}^r C_j^* V_j & 0_{k \times s} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times (n-k)}, \quad (2.4)$$

$$V^* D = V^* C U = \begin{bmatrix} \oplus_{j=1}^r (V_j^* C_j) \\ 0_{s \times k} \end{bmatrix} U.$$

Επειδή $U = \oplus_{j=1}^r e^{-2i\theta_j} I_{k_j}$, συμπεραίνουμε

$$V^* D = \begin{bmatrix} \oplus_{j=1}^r (e^{-2i\theta_j} V_j^* C_j) \\ 0_{s \times k} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

και από τις (2.3), (2.4), (2.5) και τη μορφή του πίνακα F , έχουμε

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} D_B & V^* D \\ C^* V & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \oplus_{j=1}^{r+1} \Delta_j & \begin{bmatrix} \oplus_{j=1}^r (e^{-2i\theta_j} V_j^* C_j) \\ 0_{s \times k} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \oplus_{j=1}^r (C_j^* V_j) & 0_{k \times s} \end{bmatrix} & \oplus_{j=1}^r \text{diag} \{ z_i^j \}_{i=1}^{k_j} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Συνεπώς, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τον πίνακα \mathcal{A} στη (2.6). Μεταθέτοντας γραμμές και στήλες, παρατηρούμε ότι ο \mathcal{A} είναι ορθομοναδιαία ό-

μοιος με του

$$\left(\bigoplus_{j=1}^r \begin{bmatrix} \Delta_j & e^{-2i\theta_j} V_j^* C_j \\ C_j^* V_j & \text{diag} \{ z_i^j \}_{i=1}^{k_j} \end{bmatrix} \right) \oplus \Delta_{r+1},$$

με $z_i^j \in \mathcal{L}_j$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι μ_i^j , ($i = 1, \dots, n_j - k_j$) και z_i^j , ($i = 1, \dots, k_j$) είναι στοιχεία της \mathcal{L}_j , μπορούμε να γράψουμε

$$\mu_i^j = c_j + e^{-i\theta_j} m_i^j \quad \text{και} \quad z_i^j = c_j + e^{-i\theta_j} f_i^j,$$

με $m_i^j, f_i^j \in \mathbb{R}$ και $c_j \in \mathcal{L}_j$. Συνεπώς, για $j = 1, \dots, r$ έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta_j & e^{-2i\theta_j} V_j^* C_j \\ C_j^* V_j & \text{diag} \{ z_i^j \}_{i=1}^{k_j} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{diag} \{ c_j + e^{-i\theta_j} m_i^j \}_{i=1}^{n_j - k_j} & e^{-2i\theta_j} V_j^* C_j \\ C_j^* V_j & \text{diag} \{ c_j + e^{-i\theta_j} f_i^j \}_{i=1}^{k_j} \end{bmatrix} \\ &= c_j I_{n_j} + e^{-i\theta_j} \begin{bmatrix} \text{diag} \{ m_i^j \}_{i=1}^{n_j - k_j} & e^{-i\theta_j} V_j^* C_j \\ e^{i\theta_j} C_j^* V_j & \text{diag} \{ f_i^j \}_{i=1}^{k_j} \end{bmatrix} \\ &= c_j I_{n_j} + e^{-i\theta_j} \Omega_j. \end{aligned}$$

Προφανώς, ο πραγματικός κύριος υποπίνακας $\text{diag} \{ m_i^j \}_{i=1}^{n_j - k_j}$ είναι εμφυτεύσιμος στον ερμιτιανό $\Omega_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$ και τότε από την (1.1),

$$m_i^j \in [\omega_i^j, \omega_{i+k_j}^j], \quad \text{για } i = 1, \dots, n_j - k_j, \quad (2.7)$$

όπου ω_i^j ($i = 1, \dots, n_j$) είναι οι ιδιοτιμές του Ω_j . Επειδή $\sigma \left(\begin{bmatrix} \Delta_j & e^{-2i\theta_j} V_j^* C_j \\ C_j^* V_j & \text{diag} \{ z_i^j \}_{i=1}^{k_j} \end{bmatrix} \right) = c_j + e^{-i\theta_j} \sigma(\Omega_j) = \{ \lambda_i^j : i = 1, \dots, n_j \}$ και $\sigma_j(B) = c_j + e^{-i\theta_j} \{ m_i^j \}_{i=1}^{n_j - k_j} = \{ \mu_i^j : i = 1, \dots, n_j - k_j \}$, τότε λ_i^j και μ_i^j ($j = 1, \dots, r$) είναι συνευθειακές και διαχωριζόμενες, όπως και οι m_i , ω_i στη (2.7). Συνεπώς, τα σύνολα $\sigma_j(A) = \sigma(A) \cap \mathcal{L}_j$, $\sigma_j(B) = \sigma(B) \cap \mathcal{L}_j$ έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες.

Αντιστρόφως, από τη συγγραμμικότητα των στοιχείων των $\sigma_j(A)$ και $\sigma_j(B)$ ($j = 1, \dots, r$), προκύπτει ότι $\lambda_i^j = c_j + e^{-i\theta_j} s_i^j$ και $\mu_i^j = c_j + e^{-i\theta_j} t_i^j$, όπου $c_j \in \mathcal{L}_j$, $s_i^j \in \mathbb{R}$, για $i = 1, \dots, n_j$ και $t_i^j \in \mathbb{R}$, για $i = 1, \dots, n_j - k_j$. Θεωρώντας την αρίθμηση $t_1^j < \dots < t_{n_j - k_j}^j$ και $s_1^j < \dots < s_{n_j}^j$, λόγω του εγκλεισμού $\mu_i^j \in \overline{\lambda_i^j \lambda_{i+k_j}^j}$, έπειτα ότι $t_i^j \in [s_i^j, s_{i+k_j}^j]$, για $i = 1, \dots, n_j - k_j$. Κατά συνέπεια, από την (1.1) υπάρχουν ζεύγη ερμιτιανών πινάκων $G_j \in \mathbb{C}^{(n_j - k_j) \times (n_j - k_j)}$ και $H_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$, με τον G_j εμφυτεύσιμο στον H_j , ώστε $\sigma(G_j) = \{ t_i^j \}_{i=1}^{n_j - k_j}$ και $\sigma(H_j) = \{ s_i^j \}_{i=1}^{n_j}$ για $j = 1, \dots, r$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να έχουμε $G_j =$

$diag \{t_1^j, \dots, t_{n_j-k_j}^j\}$ ($j = 1, \dots, r$) και θεωρούμε την ισομετρία $V_j \in \mathbb{C}^{n_j \times (n_j - k_j)}$ για την οποία $G_j = V_j^* H_j V_j$. Θέτοντας $\hat{H}_j = W_j^* H_j W_j$, όπου $W_j = \begin{bmatrix} V_j & U_j \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$ είναι ορθομοναδιαίος, προφανώς ο G_j αποτελεί κύριο υποπίνακα του \hat{H}_j και επομένως, ο διαγώνιος πίνακας $T_j = c_j I_{n_j - k_j} + e^{-i\theta_j} G_j$ είναι κύριος υποπίνακας του κανονικού $S_j = c_j I_{n_j} + e^{-i\theta_j} \hat{H}_j$. Επειδή ο $U_j^* H_j U_j$ είναι ερμιτιανός, θεωρούμε τη διαγωνοποίησή του $U_j^* H_j U_j = X_j Y_j X_j^*$, όπου $X_j \in \mathbb{C}^{k_j \times k_j}$ είναι ορθομοναδιαίος και $Y_j = diag \{f_i^j\}_{i=1}^{k_j} \in \mathbb{R}^{k_j \times k_j}$. Τότε $Y_j = (U_j X_j)^* H_j (U_j X_j)$, όπου $U_j X_j \in \mathbb{C}^{n_j \times k_j}$ είναι ισομετρία με την ιδιότητα $V_j^*(U_j X_j) = 0$. Συνεπώς, είναι δυνατό να έχουμε $W_j = \begin{bmatrix} V_j & U_j X_j \end{bmatrix}$ και αντικαθιστώντας στον S_j , προκύπτει

$$S_j = c_j I_{n_j} + e^{-i\theta_j} \hat{H}_j = \begin{bmatrix} c_j I_{n_j - k_j} + e^{-i\theta_j} V_j^* H_j V_j & e^{-i\theta_j} V_j^* H_j U_j X_j \\ e^{-i\theta_j} X_j^* U_j^* H_j V_j & diag \{c_j + e^{-i\theta_j} f_i^j\}_{i=1}^{k_j} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_j & \hat{D}_j \\ \hat{C}_j^* & F_j \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες F_j και T_j είναι διαγώνιοι με στοιχεία στην \mathcal{L}_j , όπως και εκείνα του S_j . Επειδή η κανονική βάση $\{e_\ell\}_{\ell=1}^{n_j - k_j}$ του $\mathbb{C}^{n_j - k_j}$ αποτελεί και το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του T_j , σαφώς $E_{\mathcal{L}_j}(T_j) \equiv \mathbb{C}^{n_j - k_j}$ και όλες οι k_j στήλες του $\hat{C}_j = e^{i\theta_j} V_j^* H_j U_j X_j \in \mathbb{C}^{(n_j - k_j) \times k_j}$ ανήκουν στον $E_{\mathcal{L}_j}(T_j)$, για $j = 1, \dots, r$. Επιπλέον, $\hat{D}_j = e^{-2i\theta_j} \hat{C}_j$. Θεωρώντας τους κανονικούς πίνακες

$$S = (\oplus_{j=1}^r S_j) \oplus diag \{\lambda_i\}_{i=n-s+1}^n \quad \text{και} \quad T = (\oplus_{j=1}^r T_j) \oplus diag \{\lambda_i\}_{i=n-s+1}^n,$$

προφανώς, κατόπιν κατάλληλων μεταθέσεων, ο πίνακας T μπορεί να μετατεθεί στο άνω αριστερό άκρο του S , δηλαδή ο S είναι μεταθετικά όμοιος με τον πίνακα στη (2.6):

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \oplus_{j=1}^r T_j & 0 & \oplus_{j=1}^r \hat{D}_j & \\ 0 & diag \{\lambda_j\}_{n-s+1}^n & 0 & \\ \hline \oplus_{j=1}^r \hat{C}_j^* & 0 & \oplus_{j=1}^r F_j & \end{array} \right]$$

□

Παρατήρηση 2.1. Στο Θεώρημα ;;, αν $r = 1$, καθένα από τα σύνολα $\sigma(A)$ και $\sigma(B)$ αποτελείται από μία ομάδα συνευθειακών και διαχωριζόμενων ιδιοτιμών στην \mathcal{L} , όπως στη (2.1). Επίσης έχουμε $B = cI_{n-k} + e^{i\theta} H$, όπου $H \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ είναι ερμιτιανός, $c \in \mathcal{L}$ και θ είναι η κλίση της \mathcal{L} . Από τις υποθέσεις για τον A , έχουμε $A = \begin{bmatrix} B & D \\ C^* & F \end{bmatrix}$, όπου $F = diag \{z_i\}_{i=1}^k$ με $z_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, \dots, k$)

και $D = e^{-2i\theta}C$. Συνεπώς, ο πίνακας F μπορεί να γραφεί ως $F = cI_k + e^{i\theta} \text{diag}\{f_i\}_{i=1}^k$, με $f_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k$) και $A = cI + e^{i\theta} \begin{bmatrix} H & e^{i\theta}D \\ e^{-i\theta}C^* & \text{diag}\{f_i\}_{i=1}^k \end{bmatrix}$,

όπου $\begin{bmatrix} H & e^{i\theta}D \\ e^{-i\theta}C^* & \text{diag}\{f_i\}_{i=1}^k \end{bmatrix}$ είναι ερμιτιανός.

Για $k = 1$ και $r = 1$, το Θεώρημα ;; ανάγεται στο Θεώρημα 1.2. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $A = \begin{bmatrix} B & d \\ c^* & f \end{bmatrix}$, όπου $c, d \in \mathbb{C}^{n-1}$ και $f \in \mathbb{C}$ και από την κανονικότητα του A , όπως στην εργασία [30], συμπεραίνουμε ότι $d = zc$ (με $|z| = 1$) και c, d είναι ιδιοδιανύσματα του B , όπως επιβάλλουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος ;;. Τότε και τα δύο Θεωρήματα συνεπάγονται ότι τα στοιχεία των $\sigma(A)$ και $\sigma(B)$ διαχωρίζονται επί ευθείας με κλίση $\arg(z)/2$.

Επιπλέον, σημειώνουμε ότι για $A = \begin{bmatrix} B & D \\ C^* & F \end{bmatrix}$ με F διαγώνιο, η εξίσωση $A^*A = AA^*$ δίνει $CC^* = DD^*$ και $C^*C = D^*D$, από τις οποίες προκύπτει ότι $C = D$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα ;;, αποδεικνύεται η επόμενη Πρόταση, που δίνει φράγματα για τον αριθμό των ιδιοτιμών των A και B σε μία κλειστή, κυρτή περιοχή \mathcal{D} .

Πρόταση 2.2. Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ κανονικοί πίνακες τέτοιοι ώστε $A = \begin{bmatrix} B & D \\ C^* & F \end{bmatrix}$, όπου C, D και F έχουν τη δομή στο Θεώρημα ;;. Εστω \mathcal{D} κλειστή, κυρτή περιοχή που τέμνει όλες τις ευθείες \mathcal{L}_j ($j = 1, \dots, r$), στις οποίες κατανέμονται τα φάσματα των πινάκων A, B , ώστε το σύνολο $(\sigma(A) \cup \sigma(B)) \setminus (\sigma(A) \cap \sigma(B))$ να περιέχεται στο $(\cup_{j=1}^r \mathcal{L}_j) \setminus (\cap_{j=1}^r \mathcal{L}_j)$.

I. Εστω $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| = p$ ($\geq k+1$), τότε

$$p - k \leq |\sigma(B) \cap \mathcal{D}| \leq p + k.$$

II. Αν $|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| = s$ ($\geq k+1$), τότε

$$s - k \leq |\sigma(A) \cap \mathcal{D}| \leq s + k.$$

Απόδειξη.

I. Αν $|\sigma(A) \cap \sigma(B) \cap \mathcal{D}| = t(\leq p)$ ο αριθμός των κοινών ιδιοτιμών των πινάκων A , B μέσα στο χυρτό σύνολο \mathcal{D} και $|(\sigma(A) \setminus \sigma(B)) \cap \mathcal{L}_j \cap \mathcal{D}| = p_j$, προφανώς $p = t + \sum_{j=1}^r p_j$. Τότε, από το Θεώρημα ;; τα σύνολα $(\sigma(A) \setminus \sigma(B))$ και $(\sigma(B) \setminus \sigma(A)) (\subset \cup_{j=1}^r \mathcal{L}_j)$ διαμερίζονται στα ξένα μεταξύ τους σύνολα $\sigma_j(A)$, $\sigma_j(B)$, αποτελούμενα από διαχωριζόμενες ιδιοτιμές σε κάθε ευθεία. Επειδή $n_j - k_j$ ιδιοτιμές του B διαχωρίζονται με n_j ιδιοτιμές του A στην \mathcal{L}_j , τουλάχιστον $p_j - k_j$ ιδιοτιμές του B ανήκουν στο $\mathcal{L}_j \cap \mathcal{D}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |\sigma(B) \cap \mathcal{D}| &= |\sigma(B) \cap \sigma(A) \cap \mathcal{D}| + \sum_{j=1}^r |\sigma_j(B) \cap \mathcal{D}| \\ &\geq t + \sum_{j=1}^r (p_j - k_j) = p - k. \end{aligned}$$

Αν για κάποιον δείκτη q έχουμε $\{\mu_q^j, \mu_{q+1}^j, \dots, \mu_{q+p_j+k_j}^j\} \subset \sigma_j(B) \cap \mathcal{D}$ (δηλαδή $|\sigma_j(B) \cap \mathcal{D}| \geq p_j + k_j + 1$), τότε από το Θεώρημα ;;, τα μ_i^j διαχωρίζονται με στοιχεία του $\sigma_j(A)$, δηλαδή

$$\mu_i^j \in \overline{\lambda_i^j \lambda_{i+k_j}^j}, \quad \text{για } i = q, \dots, q + p_j + k_j.$$

Ειδικότερα, οι ακραίες ιδιοτιμές ικανοποιούν τους εγκλεισμούς $\mu_q^j \in \overline{\lambda_q^j \lambda_{q+k_j}^j}$ και $\mu_{q+p_j+k_j}^j \in \overline{\lambda_{q+p_j+k_j}^j \lambda_{q+p_j+2k_j}^j}$ αντίστοιχα, απόπου προκύπτει ότι $\overline{\lambda_{q+k_j}^j \lambda_{q+p_j+k_j}^j} \subset \overline{\mu_q^j \mu_{q+p_j+k_j}^j} \subset \mathcal{D}$. Όμως, στο ευθύγραμμο τυήμα $\overline{\lambda_{q+k_j}^j \lambda_{q+p_j+k_j}^j}$ ανήκουν $(q + p_j + k_j) - (q + k_j) + 1 = p_j + 1$ ιδιοτιμές του A , το οποίο συνεπάγεται ότι $|\sigma_j(A) \cap \mathcal{D}| \geq p_j + 1$, άτοπο. Επομένως, το σύνολο $\mathcal{L}_j \cap \mathcal{D}$ μπορεί να περιέχει το πολύ $p_j + k_j$ ιδιοτιμές του B και κατά συνέπεια,

$$|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| \leq t + \sum_{j=1}^r (p_j + k_j) = p + k.$$

II. Αν $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| < s - k$, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση $|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| < (s - k) + k = s$, άτοπο. Άρα, $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| \geq s - k$. Από την άλλη, αν θεωρήσουμε $|\sigma_j(B) \cap \mathcal{D}| = s_j$ και $|\sigma(A) \cap \sigma(B) \cap \mathcal{D}| = t$, τότε έχουμε $\sum_{j=1}^r s_j + t = s$ και $|\sigma_j(A) \cap \mathcal{D}| \leq s_j + k_j$, καθόσον για $|\sigma_j(A) \cap \mathcal{D}| \geq s_j + k_j + 1$, θα ίσχυε $|\sigma_j(B) \cap \mathcal{D}| \geq (s_j + k_j + 1) - k_j = s_j + 1$, το οποίο είναι αδύνατον.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |\sigma(A) \cap \mathcal{D}| &= \sum_{j=1}^r |\sigma_j(A) \cap \mathcal{D}| + |\sigma(A) \cap \sigma(B) \cap \mathcal{D}| \\ &\leq \sum_{j=1}^r (s_j + k_j) + t = s + k. \end{aligned}$$

□

Στην περίπτωση $k = 1$ και $r = 1$, σημειώνουμε το επόμενο ειδικό αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.3. Εστω οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ με τον B εμφυτεύσιμο στον A και επίσης $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ένα κλειστό κυρτό σύνολο που δεν είναι μονοσύνολο.

I. Αν $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| = p$ (≥ 2), τότε

$$p - 1 \leq |\sigma(B) \cap \mathcal{D}| \leq p + 1.$$

II. Αν $|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| = s$ (≥ 2), τότε

$$s - 1 \leq |\sigma(A) \cap \mathcal{D}| \leq s + 1.$$

Το πόρισμα αυτό επεκτείνει πρόσφατο αποτέλεσμα του R. Horn [27], όπου μόνο τα κάτω φράγματα του Πορίσματος 2.3 αποδείχθηκαν, χρησιμοποιώντας το [25, Θεώρημα 4.3.21] για έναν κλειστό δίσκο \mathcal{D} με μη κενό εσωτερικό. Προφανώς, στο Πόρισμα 2.3 ισχύει $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, διότι διαφορετικά $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| = |\sigma(B) \cap \mathcal{D}|$.

2.2 Εντοπισμός ιδιοτιμών εμφυτεύσιμων κανονικών πινάκων

Το πρόβλημα της εμφύτευσης των κανονικών πινάκων προσεγγίστηκε πρόσφατα από τους Queiro και Duarte στην εργασία [42] από μία διαφορετική σκοπιά. Εκεί οι συγγραφείς θεώρησαν τη λεξικογραφική διάταξη στο \mathbb{C} , για να διατυπώσουν μία διαφορετική συνθήκη διαχωρισμού. Η λεξικογραφική διάταξη χαρακτηρίζεται από το θετικό της χώνο

$$\mathcal{J} = \{a + ib : a > 0, \text{ είτε } a = 0 \text{ και } b > 0\},$$

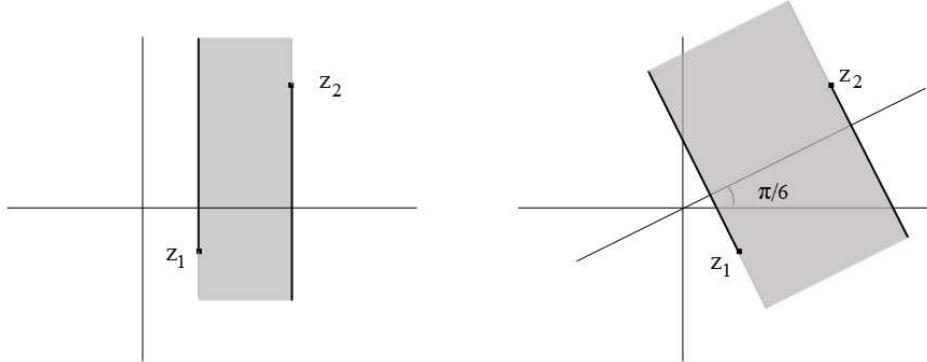
όπου θα έχουμε $w < z$ ακριβώς όταν $z - w \in \mathcal{J}$. Γενικότερα, για αυθαίρετο $\theta \in [0, 2\pi)$ ορίζεται η ολική διάταξη \leq_θ στο \mathbb{C} από το θετικό κώνο $e^{i\theta}\mathcal{J}$, σύμφωνα με την οποία

$$w \leq_\theta z \Leftrightarrow e^{-i\theta}w \leq_0 e^{-i\theta}z.$$

Προφανώς, οι διατάξεις \leq_θ είναι συμβατές με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με θετικούς. Σημειώνουμε ότι η ανισότητα $z_1 \leq_0 w \leq_0 z_2$ ικανοποιείται από κάθε $w \in \mathbb{C}$ στη ζώνη

$$\langle \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 \rangle \setminus (\{w : w = \operatorname{Re} z_1 + iy, y < \operatorname{Im} z_1\} \cup \{w : w = \operatorname{Re} z_2 + iy, y > \operatorname{Im} z_2\}).$$

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται τα σύνολα $\{w : z_1 \leq_0 w \leq_0 z_2\}$ (αριστερά) και $\{w : z_1 \leq_{\pi/6} w \leq_{\pi/6} z_2\}$ (δεξιά):



Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\bigcap_{\theta} \{z \in \mathbb{C} : z_1 \leq_\theta z \leq_\theta z_2\} \equiv \overline{z_1 z_2}. \quad (2.8)$$

Το ακόλουθο θεώρημα διατυπώνει αναγκαίες συνθήκες (αλλά όχι ικανές) προκειμένου ένας κανονικός πίνακας B να είναι εμφυτεύσιμος σε κανονικό A , σε σχέση με τη θ -λεξικογραφική διάταξη των ιδιοτιμών τους:

Θεώρημα 2.4 (Queiro-Duarte [42]). *Εστω οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ με ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ και $\{\mu_i\}_{i=1}^{n-k}$ αντίστοιχα σε μη φθίνουσα θ -λεξικογραφική διάταξη για κάποιο $\theta \in [0, 2\pi)$. Αν B είναι εμφυτεύσιμος στον A , τότε*

$$\lambda_i \leq_\theta \mu_i \leq_\theta \lambda_{i+k}, \quad i = 1, \dots, n - k. \quad (2.9)$$

Αν $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ σε μη φθίνουσα θ -λεξικογραφική σειρά, για $i < j$, συμβολίζουμε τη ζώνη

$$\mathcal{Z}_\theta(i, j) = \{z \in \mathbb{C} : \lambda_i \leq_\theta z \leq_\theta \lambda_j\}.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\sigma(B) \subset w(A)$, λόγω της εμφύτευσης, οι συνθήκες (2.9) του Θεωρήματος 2.4 αναδιατυπώνονται ισοδύναμα ως:

$$\mu_i \in \mathcal{Z}_\theta(i, i+k) \cap w(A), \quad i = 1, \dots, n-k \quad (2.10)$$

Παρόμοια με το Θεώρημα 2.4 είναι η ακόλουθη Πρόταση, αναφερόμενη στα ορίσματα των ιδιοτιμών. Και τα δύο αποτελέσματα αποτελούν συνέπειες των αρχών μεταβολής για τις ιδιοτιμές ερμιτιανών πινάκων, ακολουθώντας εντελώς ανάλογα βήματα, όπως στην απόδειξη [33] για το αναγκαίο των συνθηκών (1.1). Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο Λήμμα [23]:

Λήμμα 2.5. Εστω ο κανονικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και τα ορίσματα των ιδιοτιμών του σε μη φθίνουσα σειρά:

$$\phi \leq \arg(\lambda_1) \leq \arg(\lambda_2) \leq \dots \leq \arg(\lambda_n) < \phi + \pi$$

Τότε, για κάθε $1 \leq i \leq n$,

$$\arg(\lambda_i) = \min_{\dim \mathcal{S}=i} \max_{\substack{x \in \mathcal{S}, \\ \|x\|_2=1}} \arg x^* A x = \max_{\dim T=n-i+1} \min_{\substack{x \in T, \\ \|x\|_2=1}} \arg x^* A x.$$

Πρόταση 2.6. Εστω οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, όπου B είναι εμφυτεύσιμος στον A με ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ και $\{\mu_i\}_{i=1}^{n-k}$ αντίστοιχα. Για κάθε $z \notin w(A)$, θεωρούμε τη διάταξη

$$\phi \leq \arg(\lambda_{i(z)} - z) \leq \arg(\lambda_{(i+1)(z)} - z) < \phi + \pi; \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.11)$$

$$\phi \leq \arg(\mu_{i(z)} - z) \leq \arg(\mu_{(i+1)(z)} - z) < \phi + \pi; \quad i = 1, \dots, n-k-1. \quad (2.12)$$

Τότε,

$$\arg(\lambda_{i(z)} - z) \leq \arg(\mu_{i(z)} - z) \leq \arg(\lambda_{(i+k)(z)} - z), \quad \text{για } i = 1, \dots, n-k.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{N} = \text{span} \{v_{1(z)}, \dots, v_{i(z)}\} \subset \mathbb{C}^{n-k}$, όπου $v_{r(z)}$ τα ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του $\mu_{r(z)}$ ($r = 1, \dots, i$). Τότε από τη (2.12), έχουμε $\arg(\mu_{i(z)} - z) = \max_{x \in \mathcal{N}} \arg x^*(B - zI)x$. Θεωρώντας

την ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ τέτοια ώστε $B = V^*AV$ και τον υπόχωρο $V\mathcal{N} = \{Vy : y \in \mathcal{N}\} \subset \mathbb{C}^n$, τότε για τις διατεταγμένες ιδιοτιμές του πίνακα $A - zI$ στη (2.11), από το Λήμμα 2.5 και ένεκα της ισότητας $\dim V\mathcal{N} = \dim \mathcal{N} = i$, έχουμε

$$\begin{aligned} \arg(\lambda_{i(z)} - z) &= \min_{\dim \mathcal{S}=i} \max_{\substack{x \in \mathcal{S}, \\ \|x\|_2=1}} \arg x^*(A - zI)x \leq \max_{\substack{x \in V\mathcal{N} \\ \|x\|_2=1}} \arg x^*(A - zI)x \\ &= \max_{\substack{y \in \mathcal{N}, \\ \|y\|_2=1}} \arg y^*(B - zI)y = \arg(\mu_{i(z)} - z), \end{aligned}$$

όπου $x = Vy$.

Ο *max-min* χαρακτηρισμός συνεπάγεται τη δεύτερη ανισότητα. \square

Προφανώς για $z = 0$, $\phi = 0$ και αντιστρέψιμο A , συμπεραίνουμε το Θεώρημα των Carlson-de Sa στην εργασία [7].

Το Θεώρημα 2.4 δίνει για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$ διαφορετικές ζώνες εγκλεισμού για τις ιδιοτιμές του B , με συνέπεια να προκύπτει το ερώτημα «ποιους περιορισμούς επιβάλλουν οι συνθήκες \geq_θ -διαχωρισμού του Θεωρήματος 2.4 στις σχετικές θέσεις των ιδιοτιμών των A και B ». Το πρόβλημα αυτό τέθηκε στην εργασία [42] και εδώ δίνουμε μία απάντηση, όταν το $\sigma(A)$ είναι κυρτώς ανεξάρτητο, δηλαδή όταν $\lambda_j \notin co\{\lambda_i\}_{i=1, i \neq j}^n$ για κάθε j . Υπενθυμίζουμε ότι για έναν κανονικό πίνακα A , η κυρτή ανεξαρτησία των ιδιοτιμών του σημαίνει ότι το $w(A)$ αποτελεί κυρτό n -γωνο.

Δούλευτων δύο διακεκριμένων ιδιοτιμών λ_i, λ_j του A , το σύνολο

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(i, j) &= \left\{ z \in \mathbb{C} : Im((\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_i)(z - \lambda_i)) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : Re(e^{-i\phi}z) \leq Re(e^{-i\phi}\lambda_i), \text{ όπου } \phi = \arg(\lambda_j - \lambda_i) - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \right\} \end{aligned}$$

ορίζει το αριστερό κλειστό ημιεπίπεδο με σύνορο την ευθεία που ενώνει τα λ_i και λ_j . Θεωρώντας $\phi = \arg(\lambda_j - \lambda_i) - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ και $\lambda_i \equiv \lambda_{\tau(\phi)}$ σε μη φθίνουσα ϕ -λεξικογραφική διάταξη, είναι φανερό ότι οι ζώνες $Z_\phi(\ell, \tau(\phi)) \subset \mathcal{H}(i, j)$ για όλους τους δείκτες ℓ για τους οποίους $\lambda_\ell \leq_\phi \lambda_{\tau(\phi)}$.

Συμβολίζοντας με $m(\theta)$ και $M(\theta)$ τον ελάχιστο και μέγιστο δείκτη αντιστοίχως των στοιχείων ενός συνόλου $\Gamma \subset \sigma(A)$ σύμφωνα με τη θ -λεξικογραφική διάταξη, προφανώς $M(\theta) - m(\theta) \geq |\Gamma| - 1$ και η ισότητα ισχύει μόνον όταν για κάποιο θ όλοι οι δείκτες στοιχείων του Γ είναι διαδοχικοί. Το ακόλουθο Λήμμα προσδιορίζει το πολύγωνο $co\Gamma$ ως τομή ζωνών, γενικεύοντας τη (2.8).

Λήμμα 2.7. *Εστω $\Gamma \subseteq \sigma(A)$, όπου ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός. Τότε:*

I. $co\Gamma = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \{z \in w(A) : \lambda_{m(\theta)} \leq_\theta z \leq_\theta \lambda_{M(\theta)}\} = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \mathcal{Z}_\theta(m(\theta), M(\theta)).$

II. Αν το σύνολο Γ με $|\Gamma| = \ell$ αποτελείται από διαδοχικές ιδιοτιμές του συνόρου $\partial w(A)$, τότε υπάρχει $\phi \in [0, 2\pi)$ τέτοιο ώστε $co\Gamma = \mathcal{Z}_\phi(1, \ell) \cap w(A)$.

Aπόδειξη.

I. Για $\theta \in [0, 2\pi)$, ο ορισμός των $m(\theta)$ και $M(\theta)$ προφανώς συνεπάγεται τη σχέση $co\Gamma \subseteq \mathcal{Z}_\theta(m(\theta), M(\theta))$, απόπου συμπεραίνουμε

$$co\Gamma \subseteq \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \mathcal{Z}_\theta(m(\theta), M(\theta)).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αν το Γ δεν είναι κυρτώς ανεξάρτητο, επιλέγουμε ένα μέγιστο κυρτώς ανεξάρτητο υποσύνολο αυτού $E \subset \Gamma$. Έστω $E = co\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_\ell}\}$, όπου $\ell \leq |\Gamma|$ και οι δείκτες είναι τέτοιοι ώστε οι ιδιοτιμές να είναι αντιωρολογικακά διατεταγμένες στο coE . Το πολύγωνο coE ταυτίζεται με το $co\Gamma$ και εκφράζεται ως τομή των ημιεπιπέδων $\{\mathcal{H}(i_j, i_{j+1})\}_{j=1}^\ell$, με $\lambda_{i_{\ell+1}} \equiv \lambda_{i_1}$. Προφανώς οι εγκλεισμοί $\mathcal{Z}_{\theta_j}(m(\theta_j), M(\theta_j)) \subset \mathcal{H}(i_j, i_{j+1})$ ισχύουν για $j = 1, \dots, \ell$ και $\theta_j = \arg(\lambda_{i_{j+1}} - \lambda_{i_j}) - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, με συνέπεια

$$\bigcap_{\theta \in [0, 2\pi)} \mathcal{Z}_\theta(m(\theta), M(\theta)) \subseteq \bigcap_{j=1}^{\ell} \mathcal{Z}_{\theta_j}(m(\theta_j), M(\theta_j)) \subseteq \bigcap_{j=1}^{\ell} \mathcal{H}(i_j, i_{j+1}) = coE.$$

II. Αν $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ αποτελείται από ιδιοτιμές που είναι διαδοχικές, αντιωρολογικακά διατεταγμένες στο σύνορο $\partial w(A)$, τότε η πλευρά $\overline{\lambda_1 \lambda_\ell}$ είναι η μοναδική του $co\Gamma$ που δεν ανήκει στο $\partial w(A)$. Για $\phi = \arg(\lambda_1 - \lambda_\ell) - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, αναδιατάσσοντας σύμφωνα με τη φ-λεξικογραφική διάταξη τα στοιχεία του Γ ως $\Gamma = \{\lambda_{1(\phi)}, \dots, \lambda_{\ell(\phi)}\}$, έχουμε $co\Gamma = \mathcal{Z}_\phi(1, \ell) \cap w(A)$. \square

Τώρα μπορούμε να δώσουμε μία γεωμετρική περιγραφή των σχετικών θέσεων των ιδιοτιμών των A και B στο μιγαδικό επίπεδο, ανεξάρτητα από τη συνθήκη θ -διαχωρισμού (2.10), όταν το φάσμα του A είναι κυρτώς ανεξάρτητο.

Πρόταση 2.8. Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ κανονικοί πίνακες με ιδιοτιμές $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ και $\sigma(B) = \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\}$. Αν B είναι εμφυτεύσιμος στον A και το φάσμα του A είναι κυρτώς ανεξάρτητο, τότε η κυρτή θήκη κάθε υποσυνόλου $\Gamma \subset \sigma(A)$, με $|\Gamma| = k + 1$, περιέχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του B .

Απόδειξη. Έστω $\Gamma = \{\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k}\}$ για $i \in \{1, \dots, n\}$ και $\lambda_i \equiv \lambda_{i-n}$ για $i > n$, όπου τα λ είναι διαδοχικά σημεία στο σύνορο (A) . Προφανώς, η πλευρά $\overline{\lambda_i \lambda_{i+k}}$ του $co\Gamma$ δεν ανήκει στο $\partial w(A)$. Αν $\theta_0 = \arg(\lambda_{i+k} - \lambda_i) - \frac{\pi}{2} (mod 2\pi)$, αναδιατάσσουμε τα στοιχεία των $\sigma(A), \sigma(B)$ σε αύξουσα θ_0 -λεξικογραφική σειρά, ώστε $\Gamma = \{\lambda_{1(\theta_0)}, \dots, \lambda_{1+k(\theta_0)}\}$. Προφανώς, από τη (2.10) και το Λήμμα 2.7 (II), έπειτα οτι

$$\mu_{1(\theta_0)} \in \mathcal{Z}_{\theta_0}(1(\theta_0), 1+k(\theta_0)) \cap w(A) = co\{\lambda_{1(\theta_0)}, \dots, \lambda_{1+k(\theta_0)}\} = co\Gamma,$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό στην περίπτωση αυτή.

Αν τα στοιχεία του Γ δεν είναι διαδοχικά στο $\partial w(A)$ και ούτε είναι διαδοχικά για κάποια θ -λεξικογραφική διάταξη, τα στοιχεία του συνόλου $\sigma(A) \setminus \Gamma$ διαμερίζονται σε ομάδες P_1, \dots, P_{k+1} διαδοχικών κορυφών, έστω $P_\tau = \{\lambda_{i_\tau+1}, \dots, \lambda_{i_{\tau+1}-1}\}$ ($\tau = 1, \dots, k+1$), όπου $i_{k+2} \equiv i_1 + n$ και όπως παραπάνω $\lambda_i \equiv \lambda_{i-n}$ για $i > n$. Παρατηρούμε ότι $|P_\tau| \equiv p_\tau = i_{\tau+1} - i_\tau - 1$ και $\sum_{\tau=1}^{k+1} p_\tau + (1+k) = n$. Συμβολίζοντας $\Pi_\tau = co(P_\tau \cup \{\lambda_{i_\tau}, \lambda_{i_{\tau+1}}\}) \setminus \{\lambda_{i_\tau}, \lambda_{i_{\tau+1}}\}$, τα στοιχεία του συνόλου $\sigma(A) \setminus P_\tau$ σύμφωνα με τη $\theta_\tau = \arg(\lambda_{i_{\tau+1}} - \lambda_{i_\tau}) - \frac{\pi}{2} (mod 2\pi)$ -λεξικογραφική διάταξη είναι διαδοχικά, δηλαδή $\sigma(A) \setminus P_\tau = \{\lambda_{1(\theta_\tau)}, \dots, \lambda_{(n-p_\tau)(\theta_\tau)}\}$. Τότε, από τη (2.10) έχουμε τους εγκλεισμούς

$$\begin{aligned} \mu_{i(\theta_\tau)} &\in \mathcal{Z}_{\theta_\tau}(i(\theta_\tau), (i+k)(\theta_\tau)) \cap w(A) \subset \mathcal{Z}_{\theta_\tau}(1(\theta_\tau), (n-p_\tau)(\theta_\tau)) \cap w(A) \\ &= co\{\lambda_{1(\theta_\tau)}, \dots, \lambda_{(n-p_\tau)(\theta_\tau)}\} = w(A) \setminus \Pi_\tau, \end{aligned}$$

για $i = 1, \dots, n - p_\tau - k$. Επομένως $\{\mu_{1(\theta_\tau)}, \dots, \mu_{(n-p_\tau-k)(\theta_\tau)}\} \subset w(A) \setminus \Pi_\tau$, απ' όπου προκύπτει ότι στο Π_τ ανήκουν όχι περισσότερες από p_τ ιδιοτιμές του B . Κατά συνέπεια, στο πολύγωνο $co\Gamma = w(A) \setminus \left(\bigcup_{\tau=1}^{k+1} \Pi_\tau \right)$ έχουμε

$$|\sigma(B) \cap co\Gamma| = |\sigma(B)| - \sum_{\tau=1}^{k+1} |\sigma(B) \cap \Pi_\tau| \geq (n - k) - \sum_{\tau=1}^{k+1} p_\tau = 1,$$

σύμφωνα με τον ισχυρισμό. □

Παρατήρηση 2.2. Το συμπέρασμα της Πρότασης 2.8 δεν ισχύει για $|\Gamma| < k+1$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση $(n, k) = (4, 2)$, αν $A = diag\{0, 1, \mathbf{i}, 1+\mathbf{i}\}$ και $B = diag\{\frac{5+8\mathbf{i}}{10}, \frac{5+2\mathbf{i}}{10}\}$, άμεσα ελέγχεται ότι ο B είναι εμφυτεύσιμος στον A μέσω της ισομετρίας $V = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Είναι φανερό ότι τα σύνολα $\sigma(A)$ και

$\sigma(B)$ ικανοποιούν τις σχέσεις θ -διαχωρισμού (2.9) για όλα τα θ και επιπλέον ότι το $\sigma(A)$ είναι κυρτώς ανεξάρτητο. Επίσης, παρατηρούμε ότι στο εσωτερικό κάθε τριγώνου με κορυφές στο $\sigma(A)$ ανήκει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του B (Πρόταση 2.8). Εν τούτοις, δεν υπάρχει καμία ιδιοτιμή του B στο εσωτερικό οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος με άκρα ιδιοτιμές του A , δηλαδή όταν $|\Gamma| = 2$.

Στην περίπτωση $k = 1$, η αναγκαία συνθήκη θ -διαχωρισμού για κάθε θ οδηγεί στο ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 2.9. *Έστω οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$, με φάσματα $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\sigma(B) = \{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}\}$ και τον B εμφυτεύσιμο στον A . Οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

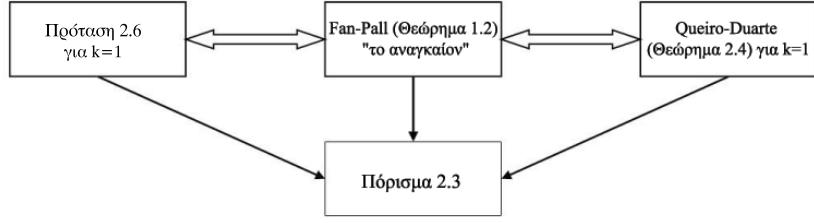
- I. *Οι σχέσεις θ -διαχωρισμού $\lambda_i \leq_\theta \mu_i \leq_\theta \lambda_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) ισχύουν για κάθε θ , όπου τα λ και μ θεωρούνται σε μη φθίνουσα θ -λεξικογραφική σειρά.*
- II. *Η κυρτή θήκη κάθε υποσυνόλου $\Gamma \subseteq \sigma(A)$, με $|\Gamma| = 2$ περιέχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του B .*

Απόδειξη. [I. \Rightarrow II.] Έστω τα σημεία λ_i, λ_j και $\theta_0 = \arg(\lambda_i - \lambda_j) - \frac{\pi}{2} (\text{mod } 2\pi)$. Οι δείκτες $m(\theta_0)$, $M(\theta_0)$ των λ_i και λ_j σύμφωνα με τη θ_0 -διάταξη είναι το πολύ διαδοχικοί και τότε, τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\sigma(B)$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\mathcal{Z}_{\theta_0}(m(\theta_0), M(\theta_0)) = \overline{\lambda_i \lambda_j}$.

[II. \Rightarrow I.] Αν $\sigma(A) \setminus \sigma(B) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{n-q}$ σε μη φθίνουσα θ -λεξικογραφική σειρά, το εσωτερικό κάθε ευθύγραμμου τμήματος $\overline{\lambda_i \lambda_{i+1}}$ για $i \in \{1, \dots, n-q-1\}$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\sigma(B)$, έστω το μ_i . Άρα $\mu_i \in \overline{\lambda_i \lambda_{i+1}} \subset \mathcal{Z}_\theta(i, i+1)$ ($i = 1, \dots, n-q-1$). Αναδιατάσσοντας κοινές και μη κοινές ιδιοτιμές σε μη φθίνουσα θ -λεξικογραφική σειρά, έχουμε το συμπέρασμα. \square

2.3 Συνθήκες εμφύτευσης για $k = 1$

Στο εδάφιο αυτό, για $k = 1$ συσχετίζουμε τις συνθήκες των Θεωρημάτων των Fan-Pall (Θεώρημα 1.2), Queiro-Duarte (Θεώρημα 2.4), της Πρότασης 2.6 και του Πορίσματος 2.3. Όπως είδαμε στην ενότητα 2.1, το Πόρισμα 2.3 αποδείχθηκε με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2. Οι υπόλοιπες συνεπαγωγές που απεικονίζονται στο γράφημα θα αποδειχθούν στη συνέχεια.



1. [Θεώρημα 1.2, η αναγκαιότητα] \Leftrightarrow [Θεώρημα 2.4, για $k = 1$]

Απόδειξη. Από την ισοδυναμία του Πορίσματος 2.9, παρατηρούμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα ιδιοτιμές στο $\sigma(A) \setminus \sigma(B)$ είναι κατ' ανάγκη συνευθειακά. Συνεπώς, το Θεώρημα 2.4 συνεπάγεται το Θεώρημα 1.2. Αντίστροφα, έστω οι διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ και $\{\mu_i\}_{i=1}^{q-1}$ των A και B που διαχωρίζονται στην ευθεία \mathcal{L} . Αν $z_0 = \mathbb{R} \cap \mathcal{L}$, τότε τα σύνολα $\{\lambda_i - z_0\}_{i=1}^q$ και $\{\mu_i - z_0\}_{i=1}^{q-1}$ αποτελούνται από διαχωριζόμενους μιγαδικούς σε ευθεία (παράλληλη της \mathcal{L}) που διέρχεται από την αρχή. Για $\theta \in [0, 2\pi)$ τους θεωρούμε διατεταγμένους σε αύξουσα λεξικογραφική σειρά. Έτσι, από τις σχέσεις θ -διαχωρισμού παίρνουμε $\lambda_i - z_0 <_{\theta} \mu_i - z_0 <_{\theta} \lambda_{i+1} - z_0$ και λόγω της συμβατότητας της σχέσης $<_{\theta}$ με την πρόσθεση, έχουμε $\lambda_i <_{\theta} \mu_i <_{\theta} \lambda_{i+1}$, για $1 \leq i \leq q-1$. Αναδιατάσσοντας κοινές και συνευθειακές ιδιοτιμές σε μη φθίνουσα θ -λεξικογραφική σειρά, καταλήγουμε στο ζητούμενο. \square

2. [Θεώρημα 2.4, για $k = 1$] \Rightarrow [Πόρισμα 2.3]

Απόδειξη.

I. Υποθέτουμε ότι $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| = p$ και επίσης ότι το πλήθος των κοινών ιδιοτιμών των A και B στο \mathcal{D} είναι $|\sigma(A) \cap \sigma(B) \cap \mathcal{D}| = t$. Τότε $|(\sigma(A) \setminus \sigma(B)) \cap \mathcal{D}| = p-t$ και έστω $\lambda_1 <_{\theta} \lambda_2 <_{\theta} \dots <_{\theta} \lambda_{p-t}$. Από το Πόρισμα 2.9 **II** στο εσωτερικό των τμημάτων $\overline{\lambda_i \lambda_{i+1}} \subset \mathcal{D}$, για $i = 1, \dots, p-t-1$, ανήκει τουλάχιστον μία από τις ιδιοτιμές του B . Συνεπώς,

$$|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| \geq t + (p-t-1) = p-1.$$

Για το άνω φράγμα, όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{\lambda_i \lambda_{i+1}} \subset \mathcal{D}$, για $i = 1, 2, \dots, p-t-1$ με άκρα ιδιοτιμές στο $\sigma(A) \setminus \sigma(B)$ πρέπει

κατ' ανάγκη να είναι συνευθειακά και κατά συνέπεια, το \mathcal{D} μπορεί να περιέχει το πολύ $(p - t - 1) + 2$ ιδιοτιμές του $\sigma(B) \setminus \sigma(A)$, δηλαδή:

$$|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| \leq t + (p - t + 1) = p + 2.$$

II. Έστω $|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| = s$. Υποθέτοντας ότι $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| \geq s + 2$, (ή $|\sigma(A) \cap \mathcal{D}| \leq s - 2$), τότε από το **I** παίρνουμε $|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| \geq s + 1$, (ή $|\sigma(B) \cap \mathcal{D}| \leq s - 1$), το οποίο είναι άτοπο. \square

3. [Πρόταση 2.6, για $k = 1$] \Rightarrow [Πόρισμα 2.3]

Απόδειξη. Εντελώς ανάλογη της προηγούμενης. \square

Προφανώς, το Πόρισμα 2.3 είναι αδύναμο αποτέλεσμα και η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει (είτε για την Πρόταση 2.6 είτε για το Θεώρημα 2.4).

4. [Θεώρημα 1.2, το αναγκαίον] \Leftrightarrow [Πρόταση 2.6, για $k = 1$]

Απόδειξη. Έστω τα διακεκριμένα σύνολα $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ και $\{\mu_i\}_{i=1}^{q-1}$ με στοιχεία συνεπαγωγή δεν ισχύει (είτε για την Πρόταση 2.6 είτε για το Θεώρημα 2.4). Αν $z \in \mathcal{L} \setminus w(A)$, τότε η ισχύς της Πρότασης 2.6 είναι άμεση, αφού $\arg(\lambda_i - z) = \arg(\mu_{i-1} - z) = \omega$ (ή $\omega + \pi$), για $i = 1, \dots, n$. Αν $z \notin (w(A) \cup \mathcal{L})$, τότε z ανήκει σε ένα ημιεπίπεδο που ορίζεται από την \mathcal{L} και ισχύουν οι ανισότητες $\arg(\lambda_i - z) < \arg(\mu_i - z) < \arg(\lambda_{i+1} - z)$, είτε οι $\arg(\lambda_i - z) > \arg(\mu_i - z) > \arg(\lambda_{i+1} - z)$, για $i = 1, \dots, q - 1$ και $\arg(\lambda_i - z) = \arg(\mu_{i-1} - z)$, για $i = q + 1, \dots, n$. Διατάσσοντας κοινές και συνευθειακές ιδιοτιμές μαζί, όπως στις (2.11), (2.12), καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η Πρόταση 2.6 ισχύει και θεωρούμε ότι $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{q-1}$ είναι οι μη κοινές ιδιοτιμές των A και B . Ισχυριζόμαστε ότι σε κάθε ευθεία που ενώνει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές του A ανήκει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του B . Πράγματι, για λ_i, λ_j ($1 \leq i < j \leq q$) ορίζουμε την ευθεία \mathcal{L}_{ij} στο \mathbb{C} και έστω $z \in \mathcal{L}_{ij} \setminus w(A)$. Τότε από την Πρόταση 2.6 υπάρχει τουλάχιστον ένα από τα μ (ιδιοτιμή του B) που διαχωρίζει τα λ_i και λ_j με την έννοια

$$\arg(\lambda_i - z) \leq \arg(\mu - z) \leq \arg(\lambda_j - z).$$

Επειδή $\arg(\lambda_i - z) = \arg(\lambda_j - z)$, τότε $\sigma(B) \cap \mathcal{L}_{ij} \neq \emptyset$. Μένει να δειχθεί ότι όλες οι μη κοινές ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ είναι πράγματι συνευθειακές. Για $q \geq 3$, αν αυτό

δε συμβαίνει, τότε υπάρχει κάποια ιδιοτιμή λ_k ($k \in \{1, \dots, q\}$) που δεν ανήκει στην \mathcal{L} , όπου ανήκουν οι υπόλοιπες διακεχριμένες ιδιοτιμές του A . Τότε ορίζουμε τις $q - 1$ ευθείες \mathcal{L}_{ki} ($i \in \{1, \dots, q\} \setminus \{k\}$), σε κάθε μία από τις οποίες ανήκει τουλάχιστον ένα από τα μ . Έτσι, παίρνουμε

$$|\sigma(B)| = |\sigma(B) \cap \sigma(A)| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^q |\sigma(B) \cap \mathcal{L}_{ki}| + |\sigma(B) \cap \mathcal{L}| \\ \geq (n - q) + (q - 1) + 1 = n > n - 1,$$

το οποίο προφανώς είναι άτοπο.

Συμβολίζοντας με \mathcal{L} την ευθεία στην οποία ανήκουν τα $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ και επιλέγοντας $z \in \mathcal{L} \setminus w(A)$, η Πρόταση 2.6 συνεπάγεται ότι οι $\{\mu_i\}_{i=1}^{q-1}$ είναι συνευθειακές στην \mathcal{L} . Επίσης, για οποιοδήποτε $z \notin \mathcal{L} \cup w(A)$, προκύπτει ότι τα συνευθειακά στοιχεία των συνόλων $\{\lambda_i\}_{i=1}^q$ και $\{\mu_i\}_{i=1}^{q-1}$ ικανοποιούν είτε τις ανισότητες $\arg(\lambda_i - z) < \arg(\mu_i - z) < \arg(\lambda_{i+1} - z)$, είτε $\arg(\lambda_i - z) > \arg(\mu_i - z) > \arg(\lambda_{i+1} - z)$, για $i = 1, \dots, n - q - 1$, δηλαδή είναι διαχωριζόμενα στην \mathcal{L} . \square

Κεφάλαιο 3

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΗΝ ΕΜΦΥΤΕΥΣΗ ΕΡΜΙΤΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Για την κατασκευή της ισομετρίας V που εμφυτεύει τον πίνακα B στον A , όταν A, B ερμιτιανοί, αρκεί να επικεντρωθούμε σε πραγματικούς διαγώνιους πίνακες, λόγω της διαγωνοποίησης των ερμιτιανών μέσω ορθομοναδιαίων. Συνεπώς, για δύο σύνολα πραγματικών αριθμών $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k} \subset \mathbb{R}$ σε μη φθίνουσα σειρά που ικανοποιούν την (1.1), θεωρούμε $A = \text{diag} \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = \text{diag} \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$. Θα κατασκευάσουμε ορθοκανονικά διανύσματα $\{v_j\}_{j=1}^{n-k} \subset \mathbb{C}^n$ που να εκφράζουν τους αριθμούς $\mu_j = v_j^* A v_j$, για $j = 1, \dots, n-k$, ως κυρτούς συνδυασμούς των λ_j και τέτοια ώστε για την ισομετρία $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ να ισχύει επιπλέον

$$V^* A V = B, \quad (3.1)$$

δηλαδή $v_i^* A v_j = 0$, για $i \neq j$. Τα διανύσματα $\{v_j\}_{j=1}^{n-k}$ θα αναφέρονται ως διανύσματα-γεννήτορες των $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ και η σχέση εμφύτευσης (3.1) θα συμβολίζεται $B \overset{V}{\sim} A$.

Ξεκινάμε με την κατασκευή της ισομετρίας στην περίπτωση $k = 1$ και ακολούθως θα προχωρήσουμε για μεγαλύτερα k .

3.1 Κατασκευή της ισομετρίας V , για $k = 1$

Παρουσιάζουμε μία νέα απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 των Fan-Pall, βασισμένη σε μία κατασκευή συστολών για κανονικούς πίνακες, που παρουσιάστηκε στην εργασία [1]:

Θεώρημα 3.1 (Fan-Pall). *Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ είναι ερμιτιανοί πίνακες με ιδιοτιμές $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ αντιστοίχως σε μη φθίνουσα σειρά, τότε ο B είναι εμφυτεύσιμος στον A αν και μόνον αν*

$$\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+k}], \text{ για } j = 1, \dots, n - k. \quad (3.2)$$

Απόδειξη. Όπως θα αναφερθεί στην ενότητα 3.3, αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα για $k = 1$. Από την (3.2) για $k = 1$, έχουμε $\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ και, όπως αναφέρθηκε εισαγωγικά, υποθέτουμε $A = \text{diag} \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = \text{diag} \{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ με $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$.

Η συνθήκη είναι αναγκαία: Για τον ερμιτιανό πίνακα A , θεωρούμε το αριθμητικό του πεδίο $w(A) = \text{co} \{\sigma(A)\} = [\lambda_1, \lambda_n]$ ως τετριμένο n -γωνο με συγγραμμικές πλευρές $\overrightarrow{\lambda_1 \lambda_2}, \overrightarrow{\lambda_2 \lambda_3}, \dots, \overrightarrow{\lambda_{n-1} \lambda_n}, \overrightarrow{\lambda_n \lambda_1}$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία, όπως στο [1, Θεώρημα 1], κατασκευάζουμε μία ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$, τέτοια ώστε το αριθμητικό πεδίο $w(V^*AV)$ να εφαπτεται σε όλες τις πλευρές του n -γωνου $w(A)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο V είναι τέτοιος, ώστε $B = V^*AV = \text{diag} \{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$, όπου $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ οι ιδιοτιμές του. Τότε έχουμε

$$[\mu_1, \mu_{n-1}] = w(B) = \{(Vy)^*A(Vy) : y \in \mathbb{C}^{n-1}, \|y\| = 1\} \subset w(A). \quad (3.3)$$

Όπως στο [1], το αριθμητικό πεδίο $w(B)$ εφαπτεται σε όλες τις πλευρές του $w(A)$, δηλαδή υπάρχουν σημεία $c_j \in w(B) \cap [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$, για $j = 1, \dots, n - 1$. Κατά συνέπεια, από την (3.3) είναι φανερό ότι $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq c_1 \leq \lambda_2$ και $\lambda_{n-1} \leq c_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

Για τις υπόλοιπες ιδιοτιμές, αρκεί να δειχθεί ότι $\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$, για $j = 2, \dots, n - 2$. Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση, που κάποια από τα παραπάνω διαστήματα δεν περιέχουν ιδιοτιμές του B , σε άλλα διαστήματα ανήκουν περισσότερα του ενός από τα μ_j . Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο τέτοιο διάστημα $[\lambda_t, \lambda_{t+1}]$ για $t \in \{2, \dots, n - 2\}$, είναι τέτοιο ώστε $\sigma(B) \cap [\lambda_t, \lambda_{t+1}] = \emptyset$. Στα προηγούμενα από αυτό $(t - 1)$ διαστήματα $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, για $i = 1, \dots, t - 1$ ανήκουν

ακριβώς $t - 1$ ιδιοτιμές του B , δηλαδή $\{\mu_j\}_{j=1}^{t-1} \subset [\lambda_1, \lambda_t]$. Διαμερίζοντας τον $A = diag\{\lambda_j\}_{j=1}^t \oplus diag\{\lambda_j\}_{j=t+1}^n \equiv A_1 \oplus A_2$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $B = diag\{\mu_j\}_{j=1}^{t-1} \oplus diag\{\mu_j\}_{j=t}^{n-1} \equiv B_1 \oplus B_2$, καθόσον ο B είναι εμφυτεύσιμος στον A , τότε ο B_2 θα έπρεπε να είναι επίσης εμφυτεύσιμος στον A_2 . Αυτό αποτελεί αντίφαση, αφού τόσο ο B_2 όσο και ο A_2 είναι διάστασης $(n-t) \times (n-t)$.

Η συμπληρωματική περίπτωση, όπου το πρώτο τέτοιο διάστημα από τα αριστερά προς τα δεξιά είναι τέτοιο ώστε να περιλαμβάνει περισσότερες της μίας ιδιοτιμές του B , αντιμετωπίζεται αναλόγως, αφού τότε υπάρχει κάποιο διάστημα $[\lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}]$ με την ιδιότητα $[\lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}] \cap \sigma(B) = \emptyset$.

Η συνθήκη είναι ικανή: Έστω ότι οι πραγματικοί αριθμοί $\{\lambda_j\}_{j=1}^n, \{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ ικανοποιούν τις σχέσεις $\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}],$ για $j = 1, \dots, n-1$ και θεωρούμε την περίπτωση που όλα τα λ_j είναι διακεκριμένα. Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ με συντεταγμένες

$$|x_j|^2 \equiv \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_j - \mu_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \geq 0,$$

τότε $\frac{\det(\lambda I - B)}{\det(\lambda I - A)} = \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|^2}{\lambda - \lambda_j}$ και, ως εκ τούτου, το x είναι μοναδιαίο.

Όπως στο [1], θεωρούμε την ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$, ώστε $R(V) = \text{span}\{x\}^\perp$, όπου με $R(\cdot)$ συμβολίζουμε το πεδίο τιμών ενός πίνακα, και συνάμα τον ορθομοναδιαίο $W = \begin{bmatrix} V & x \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Τότε για $\lambda \notin \sigma(A)$ έχουμε

$$x^* diag \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \right\}_{j=1}^n x = \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|^2}{\lambda - \lambda_j} = \frac{\det(V^*(\lambda I - A)V)}{\det(W^*(\lambda I - A)W)}$$

και κατά συνέπεια διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες V^*AV και B έχουν το ίδιο φάσμα.

Διαγωνοποιώντας τον ερμιτιανό V^*AV , συμπεραίνουμε $M^*V^*AVM = (VM)^*A(VM) = B$, δηλαδή $B \stackrel{VM}{\sim} A$. \square

Παρατήρηση 3.1. Αν $\lambda_\tau = \lambda_{\tau+1}$ για κάποιο δείκτη $\tau \in \{1, \dots, n-1\}$, τότε η (3.2) για $k = 1$ δίνει $\lambda_\tau = \mu_\tau = \lambda_{\tau+1}$. Θεωρώντας τα στοιχεία των συνόλων

$$\begin{aligned} \{\lambda_j\}_{j=1}^n \setminus \{\lambda_\tau : \tau \text{ τέτοιο ώστε } \lambda_\tau = \lambda_{\tau+1}\} &\equiv \left\{ \hat{\lambda}_j \right\}_{j=1}^{n-s} \\ \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k} \setminus \{\mu_\tau : \tau \text{ τέτοιο ώστε } \mu_\tau = \lambda_\tau\} &\equiv \{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{n-s-1}, \end{aligned}$$

προφανώς $\hat{\lambda}_j < \hat{\mu}_j < \hat{\lambda}_{j+1}$ για $j = 1, \dots, n-s-1$. Επομένως, ο πίνακας $B_1 = diag\{\hat{\mu}_j\}_{j=1}^{n-s-1}$ είναι εμφυτεύσιμος στον $A_1 = diag\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1}^{n-s}$ και οι πίνακες

$$A = A_1 \oplus diag\{\lambda_\tau : \tau \text{ τέτοιο ώστε } \lambda_\tau = \lambda_{\tau+1}\},$$

$$B = B_1 \oplus diag\{\mu_\tau : \tau \text{ τέτοιο ώστε } \mu_\tau = \lambda_\tau\}$$

έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες.

Ως συνέπεια της παραπάνω απόδειξης, έχουμε μία έκφραση για την ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$ που ορίζει την εμφύτευση $B \stackrel{V}{\sim} A$.

Πρόταση 3.2. Εστω οι πραγματικοί πίνακες $A = diag\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = diag\{\mu_j\}_{j=1}^{n-1}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

A ν $|\sigma(A) \cap \sigma(B)| = 0$, θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα $x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$, με

$$|x_j|^2 = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_j - \mu_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (\lambda_j - \lambda_k)}. \quad (3.4)$$

Τότε οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $span\{x\}^\perp$ ορίζει μία ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$ για την εμφύτευση $B \stackrel{V}{\sim} A$.

A ν $|\sigma(A) \cap \sigma(B)| = s > 0$, τότε $B \stackrel{V}{\sim} A$, όπου η ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$ ορίζεται από τον τύπο $V = P_1^*(V_1 \oplus I_s)P_2$, όπου $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $P_2 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ είναι πίνακες μετάθεσης που ορίζουν τις ομοιότητες $A = P_1^*[A_1 \oplus diag\{\sigma(A) \cap \sigma(B)\}]P_1$, $B = P_2^*[B_1 \oplus diag\{\sigma(A) \cap \sigma(B)\}]P_2$ αντιστοίχως και $V_1 \in \mathbb{C}^{(n-s) \times (n-s-1)}$ είναι η ισομετρία για την εμφύτευση $B_1 \stackrel{V_1}{\sim} A_1$, που ορίζεται από τις διαχωριζόμενες ιδιοτιμές των A_1 και B_1 .

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί η δεύτερη περίπτωση, στην οποία $|\sigma(A) \cap \sigma(B)| = s > 0$. Τότε οι πίνακες A και B είναι όμοιοι με τους $\hat{A} = A_1 \oplus diag\{\sigma(A) \cap \sigma(B)\}$ και $\hat{B} = B_1 \oplus diag\{\sigma(A) \cap \sigma(B)\}$ μέσω των μεταθέσεων P_1 , P_2 αντίστοιχα και οι $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-s) \times (n-s)}$ και $B_1 \in \mathbb{R}^{(n-s-1) \times (n-s-1)}$ έχουν διακεκριμένες και διαχωριζόμενες ιδιοτιμές. Όπως στην πρώτη περίπτωση, ο B_1 είναι εμφυτεύσιμος στον A_1 μέσω της ισομετρίας $V_1 \in \mathbb{C}^{(n-s) \times (n-s-1)}$. Τότε έπειτα ότι $\hat{B} \stackrel{V_1 \oplus I_s}{\sim} \hat{A}$ και κατά συνέπεια $B \stackrel{P_1^*(V_1 \oplus I_s)P_2}{\sim} A$. \square

Σημειώνουμε ότι για την ειδική μορφή εμφυτεύσιμων κανονικών πινάκων B και A στις (2.1) και (2.2) όπου $Q \stackrel{W}{\sim} H$, έχουμε ότι $B \stackrel{K}{\sim} A$ μέσω της ισομετρίας $K = W \oplus I_{n-q}$ και η ισομετρία W μπορεί να κατασκευαστεί όπως στην Πρόταση 3.2.

3.2 Η περίπτωση $k > 1$

Στο εδάφιο αυτό, θεωρούμε δύο μη φθίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k} \subset \mathbb{R}$, όπου $k > 1$, που ικανοποιούν την (3.2) και ορίζουμε τους ερμιτιανούς πίνακες $A = \text{diag} \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = \text{diag} \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$.

Διαμερίζοντας τα σύνολα $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ σε ζεύγη υπακολουθιών

$$P_j \equiv \{\lambda_j, \lambda_{j+k}, \lambda_{j+2k}, \dots\} \quad (3.5)$$

$$Q_j \equiv \{\mu_j, \mu_{j+k}, \mu_{j+2k}, \dots\}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.6)$$

με πληθυκότητες $|P_j| = n_j$, $|Q_j| = n_j - 1$ αντίστοιχα, τότε $\sum_{j=1}^k n_j = n$. Παρατηρούμε ότι από την (3.2) έχουμε

$$\lambda_j \leq \mu_j \leq \lambda_{j+k} \leq \mu_{j+k} \leq \lambda_{j+2k} \leq \dots \quad (3.7)$$

για $j = 1, \dots, k$ και μετονομάζοντας τα στοιχεία των συνόλων P_j , Q_j , οι ανισότητες (3.7) γράφονται ισοδύναμα

$$\lambda_1^j \leq \mu_1^j \leq \lambda_2^j \leq \mu_2^j \leq \dots \leq \lambda_{n_j-1}^j \leq \mu_{n_j-1}^j \leq \lambda_{n_j}^j.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι τα στοιχεία των P_j και Q_j ικανοποιούν την υπόθεση διαχωρισμού για $k = 1$. Άρα για τους πίνακες

$$A_j = \text{diag} \left\{ \lambda_1^j, \dots, \lambda_{n_j}^j \right\} \quad \text{και} \quad B_j = \text{diag} \left\{ \mu_1^j, \dots, \mu_{n_j}^j \right\},$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε, όπως στην ενότητα 3.1, ισομετρίες $W_j \in \mathbb{C}^{n_j \times (n_j-1)}$ τέτοιες ώστε $B_j = W_j^* A_j W_j$.

Προφανώς για την ισομετρία

$$Y = \bigoplus_{j=1}^k W_j \quad (3.8)$$

έχουμε $(\bigoplus_{j=1}^k B_j) = Y^* (\bigoplus_{j=1}^k A_j) Y$. Αφού οι πίνακες A και B είναι όμοιοι με τους $(\bigoplus_{j=1}^k A_j)$ και $(\bigoplus_{j=1}^k B_j)$ μέσω των μεταθέσεων P και \hat{P} αντιστοίχως, τότε

$B = V^*AV$, όπου $V = P^*Y\hat{P} \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$. Η παρατήρηση αυτή ολοκληρώνει την αναγωγή του προβλήματος στην περίπτωση $k = 1$.

Επιπλέον, όταν αναφερθούμε στη συνέχεια στην περίπτωση για $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil = \min \{r \in \mathbb{Z} : r \geq \frac{n}{2}\}$. Τότε $n - k < 1 + k$, με συνέπεια το σύνολο $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ να διαιμερίζεται στις ακόλουθες ομάδες:

$$P_j = \{\lambda_j, \lambda_{j+k}\}, \text{ για } j = 1, 2, \dots, n - k$$

και

$$P_j = \{\lambda_j\}, \text{ για } j = n - k + 1, \dots, k.$$

Εδώ $\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+k}]$ και προφανώς Q_j είναι μονοσύνολα, δηλ. $Q_j = \{\mu_j\}$, $j = 1, \dots, n - k$. Θεωρώντας τους κυρτούς συνδυασμούς

$$\mu_j = c_j^2 \lambda_j + (1 - c_j^2) \lambda_{j+k},$$

όπου $c_j \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, n - k$, το μοναδιαίο διάνυσμα

$$v_j = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, c_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, (1 - c_j^2)^{1/2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j-k} \right)^T \in \mathbb{C}^n \quad (3.9)$$

είναι γεννήτορας του $\mu_j = v_j^* \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} v_j$, για $j = 1, \dots, n - k$ και επιπλέον $v_j^* v_i = v_j^* \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} v_i = 0$, για $i \neq j \in \{1, \dots, n - k\}$. Συνεπώς,

$$\text{diag} \{ \mu_1, \dots, \mu_{n-k} \} = V^* \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} V$$

όπου

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_{n-k} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Ως απλή συνέπεια των προηγουμένων, προκύπτει μία εναλλακτική απόδειξη μίας συνθήκης στο [9, Θεώρημα 2.4] σχετικά με το ανώτερου βαθμού αριθμητικό πεδίο ερμιτιανών πινάκων

$$\begin{aligned} w_k(A) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P \text{ για κάποια ορθή προβολή } P, \text{βαθμού-}k \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_k \text{ είναι εμφυτεύσιμος στον } A \}. \end{aligned}$$

Πόρισμα 3.3. Για έναν ερμιτιανό $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ και $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, όπου $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, τότε $w_{n-k}(A) \neq \emptyset$ και επιπλέον $[\lambda_{n-k}, \lambda_{1+k}] \subseteq w_{n-k}(A)$.

Aπόδειξη. Πράγματι, η ανισότητα $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ είναι ισοδύναμη με $k+1 > n-k$ και τότε για έναν αριθμό α στο διάστημα $[\lambda_{n-k}, \lambda_{1+k}]$ οι εγκλεισμοί $\alpha \in [\lambda_j, \lambda_{j+k}]$, $j = 1, \dots, n-k$ είναι προφανείς. Θέτοντας $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{n-k} = \alpha$, προκύπτει ότι ο αI_{n-k} είναι εμφυτεύσιμος στον A , το οποίο σημαίνει ότι $\alpha \in w_{n-k}(A)$, όπως ισχυριζόμαστε. \square

3.3 Αναδρομική κατασκευή του V , για $k > 1$

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε μία εναλλακτική κατασκευή για ισομετρίες $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ που ορίζουν την εμφύτευση $B \stackrel{V}{\sim} A$, όταν $k > 1$. Πριν περιγράψουμε τη διαδικασία, είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι η σχέση \sim είναι μεταβατική. Πράγματι, έστω τα σύνολα πραγματικών $\{\tau_1, \dots, \tau_t\}$, $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ και $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ με πληθυκότητες $t < m < \ell$ που ορίζουν τους πίνακες $T = diag \{\tau_j\}_{j=1}^t$, $M = diag \{\mu_j\}_{j=1}^m$ και $\Lambda = diag \{\lambda_j\}_{j=1}^\ell$. Τότε, αν $T \stackrel{W}{\sim} M$ και $M \stackrel{V}{\sim} \Lambda$ για κάποιες ισομετρίες $W \in \mathbb{C}^{m \times t}$ και $V \in \mathbb{C}^{\ell \times m}$, προφανώς $T \stackrel{VW}{\sim} \Lambda$ όπου $VW \in \mathbb{C}^{\ell \times t}$ είναι επίσης ισομετρία.

Θεωρούμε, όπως προηγουμένως, τους πραγματικούς πίνακες $A = diag \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = diag \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$, με $k > 1$, όπου τα διαγώνια στοιχεία είναι σε μη φυλίνουσα διάταξη και ικανοποιούν την (3.2). Έστω επίσης οι ακολουθίες πραγματικών $\Lambda_\ell = \{\lambda_1^\ell, \dots, \lambda_{n-k+\ell}^\ell\}$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots, k$) με $\lambda_j^0 = \mu_j$ και $\lambda_j^k = \lambda_j$, τέτοιες ώστε τα στοιχεία οποιωνδήποτε διαδοχικών ακολουθιών να διαχωρίζονται, όπως στην (3.2) για $k = 1$, δηλαδή

$$\lambda_1^{\ell+1} \leq \lambda_1^\ell \leq \lambda_2^{\ell+1} \leq \lambda_2^\ell \leq \dots \lambda_{n-k+\ell}^{\ell+1} \leq \lambda_{n-k+\ell}^\ell \leq \lambda_{n-k+\ell+1}^{\ell+1}. \quad (3.11)$$

Σαφώς είναι επιτρεπτό να επιλέξουμε λ_j^ℓ ταυτίζόμενα με οποιαδήποτε από τα μ_j ή λ_j . Επιπλέον, η σχέση (3.2) για $k = 1$, συνεπάγεται ότι

$$\mu_j \equiv \lambda_j^0 \in [\lambda_j^1, \lambda_{j+1}^1] \subseteq [\lambda_j^2, \lambda_{j+2}^2] \subseteq \dots \subseteq [\lambda_j^k, \lambda_{j+k}^k] \equiv [\lambda_j, \lambda_{j+k}].$$

Η παρατήρηση αυτή εξηγεί γιατί αρκεί το Θέωρημα 1.1 να αποδειχθεί στην περίπτωση $k = 1$, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1. Έτσι, συμβολίζοντας με $A_\ell = diag \{\Lambda_\ell\} \in \mathbb{R}^{(n-k+\ell) \times (n-k+\ell)}$ τους αντίστοιχους διαγώνιους πίνακες, έχουμε ότι

$$B(\equiv A_0) \stackrel{V_1}{\sim} A_1 \stackrel{V_2}{\sim} A_2 \stackrel{V_3}{\sim} \dots \stackrel{V_k}{\sim} A(\equiv A_k),$$

όπου $V_{\ell+1} \in \mathbb{C}^{(n-k+\ell+1) \times (n-k+\ell)}$ ($\ell = 0, \dots, k-1$) είναι ισομετρίες κατασκευάσιμες σύμφωνα με την Πρόταση 3.2 και ορίζουν τις εμφυτεύσεις $A_\ell \stackrel{V_{\ell+1}}{\sim} A_{\ell+1}$. Τότε

$$B = V_1^* A_1 V_1 = V_1^* V_2^* A_2 V_2 V_1 = \cdots = V_1^* V_2^* \cdots V_{k-1}^* V_k^* A V_k V_{k-1} \cdots V_2 V_1$$

δηλαδή $B \stackrel{V}{\sim} A$, όπου $V = V_k V_{k-1} \cdots V_2 V_1$.

Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι η βασισμένη στις κυρτές εκφράσεις (3.2) κατασκευή της ισομετρίας V στην ενότητα 3.2 είναι ειδική περίπτωση αυτής που παρουσιάζεται εδώ. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $\Lambda_0 = \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\} = \bigcup_{j=1}^k \{\mu_j, \mu_{j+k}, \mu_{j+2k}, \dots\} \equiv \bigcup_{j=1}^k Q_j$ και $\Lambda_k = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \bigcup_{j=1}^k \{\lambda_j, \lambda_{j+k}, \lambda_{j+2k}, \dots\} \equiv \bigcup_{j=1}^k P_j$, όπου τα σύνολα P_j και Q_j ορίζονται όπως στις (3.5) και (3.6) και τα στοιχεία τους είναι διαχωριζόμενα. Τότε για την ειδική επιλογή ενδιάμεσων διαχωριζόμενων ακολουθιών

$$\Lambda_\ell = \left(\bigcup_{j=1}^\ell P_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=\ell+1}^k Q_j \right), \quad \text{για } \ell = 1, \dots, k-1, \quad (3.12)$$

το γινόμενο των ισομετριών $V_k \cdots V_2 V_1$ ισούται με την V στην (3.10). Υπενθυμίζουμε ότι $n_j = |P_j| = |Q_j| + 1$ και ότι για τους πίνακες $A_j = \text{diag}\{P_j\}$ και $B_j = \text{diag}\{Q_j\}$ ισχύει η σχέση εμφύτευσης $B_j \stackrel{W_j}{\sim} A_j$ μέσω ισομετρίας $W_j \in \mathbb{C}^{n_j \times (n_j-1)}$ κατασκευάσιμης σύμφωνα με την Πρόταση 3.2. Τότε για Λ_ℓ στην (3.12), έχουμε $\text{diag}\{\Lambda_\ell\} \stackrel{V_{\ell+1}}{\sim} \text{diag}\{\Lambda_{\ell+1}\}$ ($\ell = 0, 1, \dots, k-1$), όπου οι ισομετρίες

$$\begin{aligned} V_1 &= W_1 \oplus I_{\sum_{j=2}^k (n_j-1)}, \\ V_{\ell+1} &= I_{\sum_{j=1}^\ell n_j} \oplus W_{\ell+1} \oplus I_{\sum_{j=\ell+2}^k (n_j-1)} \in \mathbb{C}^{(n-k+\ell+1) \times (n-k+\ell)} \quad \text{και} \\ V_k &= I_{\sum_{j=1}^{k-1} n_j} \oplus W_k, \end{aligned} \quad (3.13)$$

για $\ell = 1, \dots, k-2$. Επομένως, $(\bigoplus_{j=1}^k B_j) \stackrel{V_1}{\sim} \text{diag}\{\Lambda_1\} \stackrel{V_2}{\sim} \text{diag}\{\Lambda_2\} \stackrel{V_3}{\sim} \cdots \stackrel{V_k}{\sim} (\bigoplus_{j=1}^k A_j)$ και από την (3.13) καταλήγουμε στην $V_k V_{k-1} \cdots V_1 = \bigoplus_{j=1}^k W_j = Y$, όπου Y είναι η ισομετρία στην (3.10). Καθώς οι πίνακες B και A είναι όμοιοι με τους $(\bigoplus_{j=1}^k B_j)$ και $(\bigoplus_{j=1}^k A_j)$ μέσω των μεταθέσεων \hat{P} και P αντιστοίχως, τελικά έχουμε $B \stackrel{P^*(V_k \cdots V_1)\hat{P}}{\sim} A$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, όπως και στην ενότητα 3.2, έχουμε $\hat{P} = I_{n-k}$.

Από την κατασκευή που παρουσιάζεται εδώ, προκύπτει για όλες τις διαφορετικές επιλογές ενδιάμεσων ακολουθιών Λ_ℓ ($\ell = 1, \dots, k-1$) στην (3.11) και αντίστοιχων ισομετριών V_ℓ ($\ell = 1, \dots, k$), εξαρτώμενων από την επιλογή των ακολουθιών

$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{j-1}$ ($j = 2, \dots, \ell$), μία οικογένεια ισομετριών με την ιδιότητα $B \stackrel{V}{\sim} A$. Κατά τον τρόπο αυτό, λαμβάνουμε όλες τις ισομετρίες $V = V_k V_{k-1} \cdots V_2 V_1$, ώστε $B \stackrel{V}{\sim} A$.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα με μία παρατήρηση σχετικά με το ορθογώνιο συμπλήρωμα του πεδίου τιμών της ισομετρίας $V = V_k \cdots V_2 V_1$.

Πρόταση 3.4. Εστω $V = V_k \cdots V_2 V_1 \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$, όπου $V_\ell \in \mathbb{C}^{(n-k+\ell) \times (n-k+\ell-1)}$ είναι ισομετρίες, καθώς και τα μοναδιαία διανύσματα $w_\ell = (w_j^\ell)_{j=1}^{n-k+\ell}$ με στοιχεία $|w_j^\ell|^2 = \frac{\prod_{\tau=1}^{n-k+\ell} (\lambda_j^\ell - \lambda_\tau^{\ell-1})}{\prod_{\tau=1, \tau \neq j}^{n-k+\ell+1} (\lambda_j^\ell - \lambda_\tau^\ell)}$ ($j = 1, \dots, n-k+\ell$), τέτοια ώστε $w_\ell^* V_\ell = 0$, για $\ell = 1, \dots, k$. Τότε τα διανύσματα $\{V_k \cdots V_{j+1} w_j, w_k : j = 1, \dots, k-1\}$ αποτελούν μία ορθοκανονική βάση για το χώρο $R\{V\}^\perp$ και η ισομετρία $V = V_k \cdots V_2 V_1$ εφαρμόζεται στην εμφύτευση $B \stackrel{V}{\sim} A$.

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας

$$U = \begin{bmatrix} V_k \cdots V_2 V_1 & V_k \cdots V_2 w_1 & V_k \cdots V_3 w_2 & \cdots & V_k w_{k-1} & w_k \end{bmatrix}$$

είναι ορθομοναδιαίος.

□

Παράδειγμα 3.1. Για να επεξηγήσουμε ότι οι ισομετρίες που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.2 αποτελούν ειδική περίπτωση της μεθόδου που προτείνεται εδώ, θεωρούμε την περίπτωση $(n, k) = (8, 4)$ και ορίζουμε τα σύνολα $P_j = \{\lambda_j, \lambda_{j+4}\}$ και $Q_j = \{\mu_j\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Τότε επιλέγουμε $\Lambda_0 = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_5, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, $\Lambda_2 = \{\lambda_1, \lambda_5, \lambda_2, \lambda_6, \mu_3, \mu_4\}$, $\Lambda_3 = \{\lambda_1, \lambda_5, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_3, \lambda_7, \mu_4\}$ και $\Lambda_4 = \{\lambda_1, \lambda_5, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_3, \lambda_7, \lambda_4, \lambda_8\}$, όπως στην (3.12). Ως εκ τούτου, οι κυρτοί συνδυασμοί $\mu_j = c_j^2 \lambda_j + (1 - c_j^2) \lambda_{j+4}$, με $c_j \in [0, 1]$, ορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα

$$\tilde{v}_j = (c_j, (1 - c_j^2)^{1/2})^T \in \mathbb{R}^2, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.14)$$

που είναι γεννήτορες των $\mu_j = \tilde{v}_j^* \text{diag}\{\lambda_j, \lambda_{j+4}\} \tilde{v}_j$. Προφανώς, εφαρμογή της μεθόδου της ενότητας αυτής, για $B = \text{diag}\{\mu_j\}_{j=1}^4$, $A = \text{diag}\{\lambda_j\}_{j=1}^8$ και $A_j = \text{diag}\{\Lambda_j\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) δίνει

$$B(\equiv A_0) \stackrel{V_1}{\sim} A_1 \stackrel{V_2}{\sim} A_2 \stackrel{V_3}{\sim} A_3 \stackrel{V_4}{\sim} A_4,$$

όπου οι ισομετρίες $V_j = \text{diag}\{I_{2j-2}, \tilde{v}_j, I_{4-j}\} \in \mathbb{R}^{(j+4) \times (j+3)}$. Εφόσον $B \stackrel{V_4 V_3 V_2 V_1}{\sim} A_4$, όπου $V_4 V_3 V_2 V_1 = \text{diag}\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$ και \tilde{v}_j τα διανύσματα στην

(3.14), παρατηρούμε ότι

$$B \stackrel{P^*V_4V_3V_2V_1}{\sim} A, \text{ με } P^*V_4V_3V_2V_1 = \begin{bmatrix} diag \{c_j\}_{j=1}^4 \\ diag \{(1 - c_j^2)^{1/2}\}_{j=1}^4 \end{bmatrix},$$

όπου $P = [e_1 \ e_3 \ e_5 \ e_7 \ e_2 \ e_4 \ e_6 \ e_8]$ η μετάθεση μέσω της οποίας $A_4 = PAP^*$. Σημειώνουμε ότι $P^*V_4V_3V_2V_1 = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$, όπου v_j είναι τα διανύσματα στην (3.9).

Στην περίπτωση $(n, k) = (8, 5)$, θεωρούμε $\Lambda_0 = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_6, \mu_2, \mu_3\}$, $\Lambda_2 = \{\lambda_1, \lambda_6, \lambda_2, \lambda_7, \mu_3\}$, $\Lambda_3 = \{\lambda_1, \lambda_6, \lambda_2, \lambda_7, \lambda_3, \lambda_8\}$, $\Lambda_4 = \Lambda_3 \cup \{\lambda_4\}$ και $\Lambda_5 = \Lambda_4 \cup \{\lambda_5\}$. Τότε

$$B(\equiv A_0) \stackrel{V_1}{\sim} A_1 \stackrel{V_2}{\sim} A_2 \stackrel{V_3}{\sim} A_3 \stackrel{V_4}{\sim} A_4 \stackrel{V_5}{\sim} A_5,$$

όπου $V_j = diag \{I_{2j-2}, \hat{v}_j, I_{3-j}\} \in \mathbb{R}^{(j+3) \times (j+2)}$ ($j = 1, 2, 3$), $V_4 = \begin{bmatrix} I_6 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 6}$ και

$V_5 = \begin{bmatrix} I_7 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 7}$ με τα μοναδιαία διανύσματα \hat{v}_j ($j = 1, 2, 3$), όπως στην (3.14),

να ορίζονται από τις κυρτές εκφράσεις $\mu_j = c_j^2 \lambda_j + (1 - c_j^2) \lambda_{j+5}$. Παρατηρούμε ότι

$$B \stackrel{V_5V_4V_3V_2V_1}{\sim} A_5, \text{ όπου } V_5V_4V_3V_2V_1 = \begin{bmatrix} V_3V_2V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} diag \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 3}, \text{ και}$$

A_5 είναι όμοιος με τον A μέσω της μετάθεσης $\hat{P} = [e_1 \ e_3 \ e_5 \ e_7 \ e_8 \ e_2 \ e_4 \ e_6]$ και κατά συνέπεια $B \stackrel{\hat{P}^*V_5V_4V_3V_2V_1}{\sim} A$.

Φυσικά, υπάρχει μία πολύ μεγαλύτερη επιλογή δυνατών ενδιάμεσων ακολουθιών, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.2. Θεωρούμε $B = diag \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ και $A = diag \{0, 0, 1, 1\}$. Προφανώς $\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+k}]$, για $j = 1, 2$, ώστε ο πίνακας B να είναι εμφυτεύσιμος στον A . Σύμφωνα με την κατασκευή στην ενότητα 3.2, έχουμε $\mu_j = \frac{\lambda_j + \lambda_{j+k}}{2}$, $j = 1, 2$ και τότε $B \stackrel{V}{\sim} A$ μέσω της ισομετρίας

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να εφαρμοστεί η προηγούμενη μέθοδος, υπεωρούμε την ενδιάμεση ακολουθία $\Lambda_1 = \{\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1\}$ και τον αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα $A_1 = \text{diag}\{\Lambda_1\}$ ώστε

$$B \stackrel{V_1}{\sim} A_1 \stackrel{V_2}{\sim} A.$$

Συνεπώς, έχουμε $\lambda_1^1 \leq \frac{1}{2} \leq \lambda_2^1 \leq \frac{1}{2} \leq \lambda_3^1$ και είναι τότε αναγκαίο να επιλέξουμε $\lambda_2^1 = \frac{1}{2}$. Επίσης, η εμφύτευση $A_1 \sim A$ σημαίνει ότι $0 \leq \lambda_1^1 \leq 0 \leq \lambda_2^1 \leq 1 \leq \lambda_3^1 \leq 1$, δηλαδή προκύπτει ότι $\lambda_1^1 = 0$, $\lambda_3^1 = 1$ και τότε η μοναδική δυνατή επιλογή είναι $\Lambda_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Για την εμφύτευση $B \stackrel{V_1}{\sim} A_1$, εκφράζοντας $\mu_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_1^1 + \lambda_3^1)$, $\mu_2 = \frac{1}{2} = \lambda_2^1$ και για την $A_1 \stackrel{V_2}{\sim} A$ παρατηρώντας ότι $\lambda_1^1 = 0 = \lambda_1$, $\lambda_3^1 = 1 = \lambda_3$ και $\lambda_2^1 = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)$, μπορούμε να επιλέξουμε τις ισομετρίες

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

οι οποίες δίνουν την προηγούμενη $V_2 V_1 = V$. Σημειώνουμε εδώ ότι, λόγω του ότι $R\{V_1\} = \text{span}\{w_1\}^\perp$ και $R\{V_2\} = \text{span}\{w_2\}^\perp$ με $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ και $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)^T$, άμεσα επιβεβαιώνεται ότι $R\{V\} = \text{span}\{V_2 w_1, w_2\}^\perp$, όπως στην Πρόταση 3.4. Εν τούτοις, αυτή δεν είναι και η μοναδική περίπτωση, αφού οι κυρτές εκφράσεις $\mu_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\lambda_1^1 + \frac{8}{10}\lambda_2^1 + \frac{1}{10}\lambda_3^1$ και $\mu_2 = \frac{1}{2} = \frac{4}{10}\lambda_1^1 + \frac{2}{10}\lambda_2^1 + \frac{4}{10}\lambda_3^1$ οδηγούν στην εμφύτευση $B \stackrel{\hat{V}_1}{\sim} A_1$ μέσω της

$$\hat{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\sqrt{8} & \sqrt{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \text{αναλόγως επιλέγοντας } \hat{V}_2 = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{5} & -3\sqrt{2}/10 & 0 \\ 3/\sqrt{5} & 4\sqrt{2}/10 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

για την εμφύτευση $A_1 \stackrel{\hat{V}_2}{\sim} A$, έχουμε $B \stackrel{W}{\sim} A$ μέσω της $W = \hat{V}_2 \hat{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.4 Η ισομετρία για εμφυτεύσιμους κανονικούς πίνακες

Στο εδάφιο αυτό, μελετάμε το αντίστοιχο πρόβλημα της κατασκευής μίας ισομετρίας V , τέτοιας ώστε $B \stackrel{V}{\sim} A$ για κανονικούς πίνακες A και B . Στην περίπτωση, όμως, αυτή δεν έχουν ακόμα διατυπωθεί ικανές και αναγκαίες συνθήκες σχετικές με τα φάσματα των A , B προκειμένου η εμφύτευση να είναι εφικτή, κατ' αντίστοιχία με τις ανισότητες (3.2) στην περίπτωση των ερμιτιανών. Αν $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $\sigma(B) = \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$, λόγω της διαγωνοποίησης των κανονικών πινάκων, μπορούμε και πάλι να θεωρήσουμε ότι $A = \text{diag}\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = \text{diag}\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$, με μιγαδικές πλέον ιδιοτιμές.

Ακολούθως, για έναν πίνακα A , συμβολίζουμε με $H(A) = \frac{A+A^*}{2}$ και $S(A) = \frac{A-A^*}{2i}$ το ερμιτιανό και το αντιερμιτιανό του μέρος αντίστοιχα. Επίσης, εισάγουμε τους συμβολισμούς $\lambda_j = \ell_j + is_j$, $\mu_j = m_j + it_j$ και θεωρούμε τους πίνακες μετάθεσης P , $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και \hat{P} , $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, ώστε τα διαγώνια στοιχεία των $\hat{H}(A) = P^*H(A)P$, $\hat{H}(B) = \hat{P}^*H(B)\hat{P}$ και $\hat{S}(A) = Q^*S(A)Q$, $\hat{S}(B) = \hat{Q}^*S(B)\hat{Q}$ να είναι σε μη φθίνουσα σειρά. Το επόμενο Θεώρημα περιγράφει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη μίας ισομετρίας V .

Θεώρημα 3.5. *Εστω οι κανονικοί πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$. Τότε B είναι εμφυτεύσιμος στον A μέσω της ισομετρίας $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ αν και μόνον αν για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών των A και B υπάρχουν αντίστοιχα μη φθίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών*

$$L_r = \{\ell_1^r, \dots, \ell_{n-k+r}^r\} \quad \text{και} \quad S_r = \{s_1^r, \dots, s_{n-k+r}^r\} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, k),$$

όπου $\ell_j^0 \equiv m_j$, $\ell_j^k \equiv \ell_j$ και $s_j^0 \equiv t_j$, $s_j^k \equiv s_j$, τέτοιες ώστε τα στοιχεία των διαδοχικών ακολουθιών L_r και L_{r+1} , S_r και S_{r+1} να διαχωρίζονται και οι οριζόμενες $(n-k+r) \times (n-k+r-1)$ ισομετρίες V_r , W_r ($r = 1, \dots, k$) για τις εμφυτεύσεις

$$\hat{H}(B)(\equiv \text{diag}\{L_0\}) \stackrel{V_1}{\sim} \text{diag}\{L_1\} \stackrel{V_2}{\sim} \dots \stackrel{V_k}{\sim} (\text{diag}\{L_k\} \equiv) \hat{H}(A) \quad (3.15)$$

και

$$\hat{S}(B)(\equiv \text{diag}\{S_0\}) \stackrel{W_1}{\sim} \text{diag}\{S_1\} \stackrel{W_2}{\sim} \dots \stackrel{W_k}{\sim} (\text{diag}\{S_k\} \equiv) \hat{S}(A) \quad (3.16)$$

να ικανοποιούν την ισότητα

$$V_k \cdots V_1 = R(W_k \dots W_1)S, \quad (3.17)$$

όπου $R = P^*Q$ και $S = \hat{Q}^*\hat{P}$ πίνακες μετάθεσης διαστάσεων n και $n - k$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Προφανώς $B \stackrel{V}{\sim} A$ αν και μόνον αν $B^* \stackrel{V}{\sim} A^*$. Τότε,

$$H(B) = \frac{B + B^*}{2} = V^* \frac{A + A^*}{2} V = V^* H(A) V$$

και

$$S(B) = \frac{B - B^*}{2i} = V^* \frac{A - A^*}{2i} V = V^* S(A) V$$

και οι εμφυτεύσεις $H(B) \stackrel{V}{\sim} H(A)$ και $S(B) \stackrel{V}{\sim} S(A)$ συνεπάγονται τις $\hat{H}(B) \stackrel{P^*V\hat{P}}{\sim} \hat{H}(A)$ και $\hat{S}(B) \stackrel{Q^*V\hat{Q}}{\sim} \hat{S}(A)$ αντίστοιχα. Από την αναδρομική κατασκευή εμφυτεύσεων στην ενότητα 3.3, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν οι ενδιάμεσες μη φύλινουσες πραγματικές ακολουθίες L_r και S_r για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη αντίστοιχα των ιδιοτιμών των A και B σύμφωνα με την υπόθεση. Τότε από τις εμφυτεύσεις (3.15) έχουμε $V_k \cdots V_1 = P^*V\hat{P}$ και αντίστοιχα από τις (3.16), $W_k \cdots W_1 = Q^*V\hat{Q}$. Συνδυάζοντας τις ισότητες αυτές, προκύπτει η (3.17).

Αντίστροφα, αν υπάρχουν ακολουθίες L_r και S_r ώστε τα στοιχεία των L_r και L_{r+1} (S_r και S_{r+1}) να διαχωρίζονται, από τις εμφυτεύσεις $\hat{H}(B) \stackrel{V_k \cdots V_1}{\sim} \hat{H}(A)$ και $\hat{S}(B) \stackrel{W_k \cdots W_1}{\sim} \hat{S}(A)$ και την (3.17) συμπεραίνουμε ότι $H(B) \stackrel{V}{\sim} H(A)$ και $S(B) \stackrel{V}{\sim} S(A)$, όπου $V = P(V_k \cdots V_1)\hat{P}^* = Q(W_k \dots W_1)\hat{Q}^*$. Τότε $B = H(B) + iS(B) = V^*[H(A) + iS(A)]V = V^*AV$, δηλαδή $B \stackrel{V}{\sim} A$. \square

Πρόταση 3.6. Εστω οι κανονικοί πίνακες $A = diag\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = diag\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$, ώστε ο πίνακας B να είναι εμφυτεύσιμος στον A . Τότε m_j και t_j , για $j = 1, \dots, n - k$, δύνανται να εκφραστούν με τον ίδιο κυρτό συνδυασμό των $\{\ell_\tau\}_{\tau=1}^n$ και $\{s_\tau\}_{\tau=1}^n$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.5, ο πίνακας B είναι εμφυτεύσιμος στον A αν και μόνον αν ισχύουν οι εμφυτεύσεις $H(B) \stackrel{V}{\sim} H(A)$ και $S(B) \stackrel{V}{\sim} S(A)$, όπου η ισομετρία V χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να έχει πραγματικά στοιχεία (ενότητα 3.2). Συνεπώς, από τις σχέσεις $H(B) = V^*H(A)V$ και $S(B) = V^*S(A)V$ προκύπτει ότι οι κυρτές εκφράσεις των m_j και t_j , ως προς τα ℓ_τ και s_τ ($\tau = 1, \dots, n$) ταυτίζονται. \square

Παρατήρηση 3.2. Σημειώνουμε εδώ ότι οι συνθήκες της Πρότασης 3.6 δεν αντιστρέφονται. Για παράδειγμα, αν $A = \text{diag}\{0, 1, \mathbf{i}\}$ και $B = \text{diag}\{1/2, \mathbf{i}/2\}$, έχουμε τους ίδιους κυρτούς συνδυασμούς:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2 + 0\ell_3, \quad t_1 = 0 = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 + 0s_3, \\ m_2 &= 0 = \frac{1}{2}\ell_1 + 0\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_3, \quad t_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}s_1 + 0s_2 + \frac{1}{2}s_3. \end{aligned}$$

Επειδή, όμως, τα σημεία $0, 1, \mathbf{i}, 1/2, \mathbf{i}/2$ δεν είναι συγγραμμικά, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 ο B δεν είναι εμφυτεύσιμος στον A .

Σχετικά με τις ισομετρίες V_H , V_S για τις εμφυτεύσεις $H(B) \xrightarrow{V_H} H(A)$ και $S(B) \xrightarrow{V_S} S(A)$ που κατασκευάστηκαν για $k > 1$ στην ενότητα 3.2, προκύπτει το ερώτημα κατά πόσον οι εμφυτεύσιμοι πίνακες $V_H^*AV_H$ και $V_S^*AV_S$ είναι κανονικοί. Καλύπτουμε πρώτα την περίπτωση $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Πρόταση 3.7. Έστω οι κανονικοί πίνακες $A = \text{diag}\{\lambda_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $B = \text{diag}\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ με $B \sim A$, $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ και V_H , V_S όπως παραπάνω. Επιπλέον, έστω $\lambda_j = \ell_j + i s_j$, $\mu_j = m_j + i t_j$. Τότε οι πίνακες $V_H^*AV_H$ και $V_S^*AV_S$ είναι διαγώνιοι με μηδαδικά στοιχεία που ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{\lambda_{i_j} \lambda_{i_{j+k}}}$ και $\overline{\lambda_{\sigma_j} \lambda_{\sigma_{j+k}}}$ ($j = 1, \dots, n - k$), όπου οι δείκτες i_j , σ_j , ρ_j και τ_j αναφέρονται στις μη φθίνουσες ακολουθίες $\{\ell_{i_j}\}_{j=1}^n$, $\{s_{\sigma_j}\}_{j=1}^n$, $\{m_{\rho_j}\}_{j=1}^{n-k}$ και $\{t_{\tau_j}\}_{j=1}^{n-k}$. Επίσης, το ρ_j -στό (τ_j -στό) διαγώνιο στοιχείο του $V_H^*AV_H$ ($V_S^*AV_S$) εκφράζεται ως κυρτός συνδυασμός των $\{\lambda_{i_j}, \lambda_{i_{j+k}}\}$ ($\{\lambda_{\sigma_j}, \lambda_{\sigma_{j+k}}\}$), που ταυτίζεται με εκείνον για τον πραγματικό $m_{\rho_j} \in [\ell_{i_j}, \ell_{i_{j+k}}]$ ($t_{\tau_j} \in [s_{\sigma_j}, s_{\sigma_{j+k}}]$), για $j = 1, \dots, n - k$.

Απόδειξη. Έστω $H(B) \xrightarrow{V_H} H(A)$ και $S(B) \xrightarrow{V_S} S(A)$. Αν $\{\ell_{i_j}\}_{j=1}^n$, $\{m_{\rho_j}\}_{j=1}^{n-k}$ είναι αριθμημένοι σε μη φθίνουσα σειρά, τότε όπως στην (3.2),

$$m_{\rho_j} \in [\ell_{i_j}, \ell_{i_{j+k}}], \quad j = 1, \dots, n - k$$

και θεωρούμε τους πίνακες μετάθεσης P και \hat{P} διαστάσεων n και $n - k$ αντιστοίχως, με την ίδιοτητα

$$P^*H(A)P = \text{diag}\{\ell_{i_j}\} \quad \text{και} \quad \hat{P}^*H(B)\hat{P} = \text{diag}\{m_{\rho_j}\}.$$

Όπως στην ενότητα 3.2 για $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ισομετρία $X \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ τέτοια ώστε $\text{diag}\{m_{\rho_j}\} \xrightarrow{X} \text{diag}\{\ell_{i_j}\}$. Υπενθυμίζουμε ότι στην

περίπτωση αυτή οι στήλες του $X = [v_1 \dots v_{n-k}]$ έχουν τη δομή στην (3.9) για $j = 1, \dots, n-k$. Τότε η ισομετρία V_H για την εμφύτευση $H(B) \stackrel{V_H}{\sim} H(A)$ δίνεται από τη σχέση $V_H = P X \hat{P}^*$. Παρατηρούμε ότι, λόγω της ειδικής μορφής του X , τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία στη ρ_j -στήλη στην V_H βρίσκονται στις θέσεις i_j και i_{j+k} .

Αναλόγως, για τα φανταστικά μέρη, ορίζουμε πίνακες μετάθεσης Q και \hat{Q} ώστε $Q^* S(A) Q = diag\{s_{\sigma_j}\}$ και $\hat{Q}^* S(B) \hat{Q} = diag\{t_{\tau_j}\}$, όπου $\{s_{\sigma_j}\}_{j=1}^n, \{t_{\tau_j}\}_{j=1}^{n-k}$ σε μη φυσικούς σειρά. Από τις σχέσεις $t_{\tau_j} \in [s_{\sigma_j}, s_{\sigma_{j+k}}]$, για $j = 1, \dots, n-k$, κατασκευάζουμε μία ισομετρία $Y \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ με την ιδιότητα $diag\{t_{\tau_j}\} = \hat{Q}^* S(B) \hat{Q} \stackrel{Y}{\sim} diag\{s_{\sigma_j}\} = Q^* S(A) Q$ και συμπεραίνουμε ότι $S(B) \stackrel{QY\hat{Q}^*}{\sim} S(A)$. Παρατηρούμε ότι τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία στην τ_j -στήλη του $V_S = QY\hat{Q}^*$ είναι εκείνα στις θέσεις σ_j και σ_{j+k} . Λόγω των εκφράσεων των V_H και V_S , οι πίνακες $V_H^* A V_H$ και $V_S^* A V_S$ είναι διαγώνιοι και ικανοποιούν τους ισχυρισμούς της Πρότασης. \square

Παράδειγμα 3.3. Έστω οι κανονικοί πίνακες $A = diag\{0, \mathbf{i}, 1, 1 + \mathbf{i}\}$ και $B = diag\{\frac{5+2\mathbf{i}}{10}, \frac{5+8\mathbf{i}}{10}\}$. Για τις ισομετρίες V_H και V_S , παρατηρούμε ότι $\rho_j = \tau_j = j$ ($j = 1, 2$), $i_j = j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) και $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 2, \sigma_4 = 4$, με συνέπεια $\hat{P} = \hat{Q} = I_2, P = I_4$ και $Q = [e_1 \ e_3 \ e_2 \ e_4]$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία στην ενότητα 3.2, προκύπτουν οι ισομετρίες

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix},$$

και τότε

$$V_H = P X \hat{P}^* = X, \quad V_S = QY\hat{Q}^* = QY$$

ορίζουν τις εμφυτεύσεις $H(B) \stackrel{V_H}{\sim} H(A)$ και $S(B) \stackrel{V_S}{\sim} S(A)$ αντίστοιχα. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.7,

$$V_H^* A V_H = diag\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \mathbf{i}\right\} \quad \text{και} \quad V_S^* A V_S = diag\left\{\frac{2}{10}\mathbf{i}, 1 + \frac{8}{10}\mathbf{i}\right\}$$

είναι διαγώνιοι με στοιχεία που ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{\lambda_{i_j} \lambda_{i_{j+2}}}$ και $\overline{\lambda_{r_j} \lambda_{r_{j+2}}}$ ($j = 1, 2$) αντίστοιχα.

Επιπλέον, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.2, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ενότητας 3.3 για τα ερμιτιανά μέρη των παραπάνω πινάκων προκύπτουν ενδιάμεσες διαχωριζόμενες ακολουθίες, ώστε η εμφύτευση $H(B) \xrightarrow{V} H(A)$ να είναι δυνατή,

$$\text{όπου } V = \hat{V}_2 \hat{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{Αντίστοιχα, για τους } \hat{S}(B) = S(B) \text{ και}$$

$\hat{S}(A) = Q^* S(A) Q$ με διαγώνια στοιχεία τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών των B και A σε μη φθίνουσα σειρά, βάσει της ίδιας μεθόδου προκύπτει ότι

$$\hat{S}(B) \equiv \text{diag} \{2/10, 8/10\} \xrightarrow{W_1} \text{diag} \{0, 1/2, 1\} \xrightarrow{W_2} \text{diag} \{0, 0, 1, 1\} \equiv \hat{S}(A),$$

$$\text{όπου } W_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -\sqrt{8} & \sqrt{8} \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ καθόσον } R(W_1)^\perp = \text{span} \left\{ \frac{2}{10} (\sqrt{8}, 3, -\sqrt{8}) \right\} \text{ (Πρό-$$

$$\text{ταση 3.2). Επιπλέον, επιλέγοντας } W_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 3/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \text{ έχουμε } \hat{S}(B) \xrightarrow{W_2 W_1}$$

$\hat{S}(A)$, όπου $W_2 W_1 = Q^* V$. Συνεπώς, για την ισομετρία V , καταλήγουμε στην $B \xrightarrow{V} A$ (Θεώρημα 3.5).

Σημειώνουμε ότι οι κυρτές εκφράσεις $m_1 = \frac{1}{2} = \frac{4}{10}\ell_1 + \frac{1}{10}\ell_2 + \frac{4}{10}\ell_3 + \frac{1}{10}\ell_4$ και $t_1 = \frac{2}{10} = \frac{4}{10}s_1 + \frac{1}{10}s_2 + \frac{4}{10}s_3 + \frac{1}{10}s_4$ ταυτίζονται, όπως αναμενόταν από τις αναγκαίες συνθήκες της Πρότασης 3.6. Ομοίως για $m_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\ell_1 + \frac{4}{10}\ell_2 + \frac{1}{10}\ell_3 + \frac{4}{10}\ell_4$ και $t_2 = \frac{8}{10} = \frac{1}{10}s_1 + \frac{4}{10}s_2 + \frac{1}{10}s_3 + \frac{4}{10}s_4$.

Αν $k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ή $n - k \geq k + 1$, η Πρόταση 3.7 επεκτείνεται μόνο σε περιπτώσεις ομάδων συγγραμμικών ιδιοτιμών. Πράγματι, έστω $\{\lambda_{i_j}\}_{j=1}^n$ και $\{\mu_{\rho_j}\}_{j=1}^{n-k}$ οι μεταθέσεις των λ_j και μ_j σε σειρά μη φθίνοντος πραγματικού μέρους. Σύμφωνα με την (3.9), τα μη μηδενικά στοιχεία στις στήλες $\rho_j, \rho_{j+k}, \dots$ του V_H είναι εκείνα στις θέσεις $i_j, i_{j+k}, i_{j+2k}, \dots$ και προφανώς η εμφύτευση $V_H^* A V_H$ δεν αποτελεί εν γένει κανονικό πίνακα. Τότε, $V_H^* A V_H$ είναι διαγώνιος, αν οι ιδιοτιμές κάθε συνόλου $\{\lambda_{i_j}, \lambda_{i_{j+k}}, \lambda_{i_{j+2k}}, \dots\}$ είναι συνευθειακές, για $j = 1, \dots, k$. Κατά συνέπεια:

Πρόταση 3.8. Εστω οι κανονικοί πίνακες $A = \text{diag} \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $B = \text{diag} \{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ με τον B εμφυτεύσιμο στον A και έστω $H(B) \xrightarrow{V_H} H(A)$ και $S(B) \xrightarrow{V_S} S(A)$. Αν

τα στοιχεία κάθε συνόλου $\{\lambda_{i_j}, \lambda_{i_{j+k}}, \lambda_{i_{j+2k}}, \dots\}$ ($\{\lambda_{\sigma_j}, \lambda_{\sigma_{j+k}}, \lambda_{\sigma_{j+2k}}, \dots\}$) είναι συνευθειακά για $j = 1, \dots, k$, όπου $\{\lambda_{i_j}\}_{j=1}^n$ ($\{\lambda_{\sigma_j}\}_{j=1}^n$) η μετάθεση των λ_j , ώστε τα πραγματικά (φανταστικά) μέρη τους να είναι μη φθίνουσα ακολουθία, τότε ο πίνακας $V_H^* A V_H$ ($V_S^* A V_S$) είναι διαγώνιος.

Η Πρόταση 3.7 αποτελεί ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.8, καθώς οποιοδήποτε ζεύγος διακεκριμένων ιδιοτιμών του A ορίζει μία ευθεία στο \mathbb{C} .

Σχετικά με τις αναγκαίες συνθήκες για εμφύτευση κανονικών πινάκων των Queiro-Duarte στη (2.9) για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$, βασιζόμενοι στην Πρόταση 3.6, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι δεν είναι και ικανές.

Αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε τους διαγώνιους πίνακες $A = diag\{0, \mathbf{i}, 1, 1 + \mathbf{i}\}$ και $B = diag\{\frac{5+2\mathbf{i}}{10}, \frac{1}{2} + \mathbf{i}\}$. Εύκολα ελέγχεται ότι τα διαγώνια στοιχεία των A , B είναι θ -διαχωριζόμενα για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$ όπως στη (2.9), καθώς σε κάθε τρίγωνο στο μιγαδικό επίπεδο με κορυφές στο $\sigma(A)$ ανήκει ακριβώς μία από τις ιδιοτιμές του B . Αν η εμφύτευση $B \stackrel{V}{\sim} A$ ήταν εφικτή για κάποια ισομετρία V , τότε κατ'ανάγκην οι εμφυτεύσεις

$$H(B) = diag\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} \stackrel{V}{\sim} H(A) = diag\{0, 0, 1, 1\}$$

και

$$S(B) = diag\left\{\frac{2}{10}, 1\right\} \stackrel{V}{\sim} S(A) = diag\{0, 1, 0, 1\}$$

θα έπρεπε επίσης να ισχύουν. Συμβολίζοντας με v_1, v_2 τις στήλες του V , από τις εξισώσεις $H(B) = V^* H(A)V$ και $S(B) = V^* S(A)V$ προκύπτουν:

$$\begin{aligned} v_1^* H(A) v_1 &= m_1 = \frac{1}{2} & v_2^* H(A) v_2 &= m_2 = \frac{1}{2} \\ v_1^* S(A) v_1 &= t_1 = \frac{2}{10} & v_2^* S(A) v_2 &= t_2 = 1. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$, σχηματίζουμε τα γραμμικά συστήματα

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \\ c_4^i \end{bmatrix} = b_i, \text{ όπου } b_i = \begin{bmatrix} m_i \\ t_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2),$$

με λύσεις $\{c_j^1\}_{j=1}^4 = \left\{\frac{3}{10} + c, \frac{2}{10} - c, \frac{1}{2} - c, c\right\}$ και $\{c_j^2\}_{j=1}^4 = \left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ αντιστοιχώς. Ορίζοντας $v_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{10} + c}, -\sqrt{\frac{2}{10} - c}, \sqrt{\frac{1}{2} - c}, \sqrt{c}\right)^T$ και $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)^T$, επειδή $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ είναι ισομετρία, τα διανύσματα v_1 και v_2 πρέπει να είναι κάθετα, απόπου συμπεραίνεται ότι $c = \frac{1}{10}$ και, ως εκ τούτου, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 2, 1)^T$. Τότε για να ισχύει $B \stackrel{V}{\sim} A$, τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα $B = V^*AV$ πρέπει να είναι μηδενικά. Επειδή $v_1^*Av_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\lambda_4 - 2\lambda_2) \neq 0$, καταλήγουμε σε άτοπο.

Κεφάλαιο 4

ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ ΕΜΦΥΤΕΥΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, όμως ωρούμε έναν κανονικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ένα σημείο $\mu_1 \in w(A) \setminus \sigma(A)$ και επιδιώκουμε να καθορίσουμε τον ελάχιστο ακέραιο $1 \leq k < n$, ώστε να ισχύει η σχέση $V^*AV = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$, για μία ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ και κατάλληλα σημεία $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A) \setminus \sigma(A)$. Ειδικότερα, για τον ελάχιστο k θα κατασκευάσουμε $n - k$ αριθμούς ορθογώνια και A -ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα $w_j \in \mathbb{C}^n$ (δηλαδή τέτοια ώστε $w_i^*w_j = w_i^*Aw_j = w_i^*A^*w_j = 0$, για $i \neq j$) που ορίζουν την ισομετρία $V = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{n-k}] \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$. Τότε, $B = \text{diag}\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ είναι ένας πίνακας μέγιστων διαστάσεων εμφυτεύσιμος στον A και στην V θα αναφερόμαστε ως *ισομετρία-γεννήτορα* για το διαγώνιο B στον κανονικό A .

4.1 Μέγιστη διάσταση διαγώνιου πίνακα εμφυτεύσιμου σε κανονικό

Έστω ο κανονικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ένα σημείο $\mu_1 \in w(A)$ που δεν είναι ιδιοτυπή του. Στην ενότητα αυτή, μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του ελάχιστου ακέραιου $1 \leq k < n$ και μίας ισομετρίας $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ με την ιδιότητα $V^*AV = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$ για κατάλληλα σημεία $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A) \setminus \sigma(A)$.

Στην περίπτωση που οι ιδιοτυπές $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ του A είναι συνευθειακές, το πολύγωνο $w(A)$ εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τρήμα. Αν με \mathcal{L} συμβολίζουμε την ευθεία πάνω στην οποία ανήκουν οι ιδιοτυπές του A , $\phi \in [0, 2\pi)$ είναι η χλίση της \mathcal{L} και $z_0 \in \mathbb{R} \cap \mathcal{L}$, τότε ο πίνακας A ισούται με $z_0 I_n + e^{i\phi} H$, όπου ο πίνακας

$H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ερμιτιανός. Έτσι, με μία μεταφορά και μία περιστροφή, ο A χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί πως είναι ερμιτιανός με πραγματικές ιδιοτιμές $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$. Στην περίπτωση αυτή, η ελάχιστη τιμή του k είναι $k = 1$ και οι ιδιοτιμές λ_j, μ_j είναι διαχωριζόμενες. Αν το αριθμητικό πεδίο είναι ένα μη εκφυλισμένο πολύγωνο, θεωρούμε ότι $n \geq 4$, καθόσον από το Θεώρημα 1.2 για $n = 3$ ένας πίνακας $B = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2\}$ με $\mu_1, \mu_2 \notin \sigma(A)$ είναι εμφυτεύσιμος σε κανονικό $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ αν και μόνον αν οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \sigma(A)$ και μ_1, μ_2 είναι συγγραμμικές και διαχωριζόμενες.

Το επόμενο Θεώρημα περιγράφει ορισμένους περιορισμούς για την ύπαρξη ορθογώνιων και A -ορθογώνιων μοναδιαίων διανυσμάτων $\{w_\ell\}_{\ell=1}^{j+1}$, όταν $j+1 \leq n-k$, οι οποίοι οδηγούν στον καθορισμό της ελάχιστης τιμής του k .

Θεώρημα 4.1. *Έστω ο κανονικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $n \geq 4$ και ο θετικός ακέραιος $j \in [1, \frac{n-1}{3}]$, τέτοιος ώστε η ισομετρία $V_j = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_j \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times j}$ να εμφυτεύει τον $\text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_j\}$ στον A , όπου $\mu_1, \dots, \mu_j \in w(A) \setminus \sigma(A)$. Τότε υπάρχει ένα σημείο $\mu_{j+1} = w_{j+1}^* A w_{j+1} \notin \sigma(A)$, ώστε*

$$\text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_j, \mu_{j+1}\} = V_{j+1}^* A V_{j+1},$$

$$\text{όπου } V_{j+1} = \begin{bmatrix} V_j & w_{j+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (j+1)} \text{ είναι ισομετρία.}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι υπόχωροι $\mathcal{S}_{j,1} = \text{Ker}(V_j^*)$, $\mathcal{S}_{j,2} = \text{Ker}(V_j^* A)$ και $\mathcal{S}_{j,3} = \text{Ker}(V_j^* A^*)$ έχουν μη τετριμένη τομή, λόγω της ανισότητας διαστάσεων

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_{j,1} \cap \mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}) &= \sum_{i=1}^3 \dim \mathcal{S}_{j,i} - \dim(\mathcal{S}_{j,2} + \mathcal{S}_{j,3}) - \dim((\mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}) + \mathcal{S}_{j,1}) \\ &\geq 3(n-j) - 2n = n - 3j \geq 1. \end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με $w_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,1} \cap \mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}$ το διάνυσμα-γεννήτορα για το σημείο $\mu_{j+1} = w_{j+1}^* A w_{j+1}$, τότε προφανώς ο πίνακας $V_{j+1} = \begin{bmatrix} V_j & w_{j+1} \end{bmatrix}$ είναι ισομετρία, καθώς $w_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,1}$. Επίσης, έχουμε

$$V_{j+1}^* A V_{j+1} = \begin{bmatrix} V_j^* A V_j & V_j^* A w_{j+1} \\ w_{j+1}^* A V_j & w_{j+1}^* A w_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_j\} & 0 \\ 0 & \mu_{j+1} \end{bmatrix},$$

όπως είναι επιθυμητό, εφόσον $w_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}$. □

Σχετικά με την ελάχιστη τιμή του k , το Θεώρημα 4.1 συνεπάγεται για $j+1 = n-k$ ότι

$$k \geq \frac{2(n-1)}{3}, \quad (4.1)$$

δηλαδή ένα άνω φράγμα για τη διάσταση ενός διαγώνιου πίνακα $diag\{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\}$ εμφυτεύσιμου στον A είναι $n-k \leq \frac{n+2}{3}$.

Αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι $\mu_1 \in w(A) \setminus \sigma(A)$ στο Θεώρημα 4.1 και υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $\mu_1 \equiv \lambda_1$, σημειώνοντας x_1, \dots, x_n τα ορθοχανονικά ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιպές του $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, άμεσα ελέγχεται ότι οι πίνακες $diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_j\}$ είναι εμφυτεύσιμοι στον A μέσω των ισομετριών $V_j = [x_1 \ \dots \ x_j]$, για $j = 1, \dots, n-1$. Στην περίπτωση αυτή, $\mathcal{S}_{j,1} = \mathcal{S}_{j,2} = \mathcal{S}_{j,3} = span\{x_{j+1}, \dots, x_n\}$, δηλαδή $\dim(\mathcal{S}_{j,1} \cap \mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}) = n-j$, επιβεβαιώνοντας με αυτόν τον τρόπο ότι η μέγιστη τιμή του j είναι $n-1$. Τέτοιες εμφυτεύσεις είναι προφανείς και δε μας απασχολούν ακολούθως.

Επίσης, σημειώνουμε ότι, αν υπάρχουν σημεία $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k} \subset w(A)$ τέτοια ώστε ο πίνακας $diag\{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\}$ να είναι εμφυτεύσιμος στον A , τότε για το ανώτερου βαθμού αριθμητικό πεδίο διαπιστώνουμε ότι $w_{n-k}(A) \neq \emptyset$. Πράγματι, για $n \geq 4$ η (4.1) συνεπάγεται $\frac{n}{3} + 1 > n - k$ και τότε συμπεραίνουμε [36, Θεώρημα 1] ότι $w_{n-k}(A) \neq \emptyset$. Οι περιπτώσεις για $n \leq 3$ επιβεβαιώνονται άμεσα.

Το φράγμα για το j στο Θεώρημα 4.1 είναι το καλύτερο δυνατό για έναν αυθαίρετο πίνακα A τάξης n και σημείο $\mu_1 \in int\{w(A)\} \setminus \sigma(A)$, όπως συμπεραίνουμε από την επόμενη παρατήρηση. Η περίπτωση $\mu_1 \in \partial w(A) \setminus \sigma(A)$ αντιμετωπίζεται στην Πρόταση 4.5.

Παρατήρηση: Ας υποθέσουμε ότι ο περιορισμός για το j στο Θεώρημα 4.1 δεν ικανοποιείται. Στην περίπτωση αυτή, αν ο πίνακας $diag\{\mu_1, \dots, \mu_j\}$, με $\mu_1 \in int\{w(A)\} \setminus \sigma(A)$, είναι εμφυτεύσιμος στον $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ μέσω κάποιας ισομετρίας $V_j \in \mathbb{C}^{n \times j}$, θα δείξουμε ότι γενικά δεν υπάρχει $\mu_{j+1} = w_{j+1}^* A w_{j+1} \notin \sigma(A)$ και ισομετρία $V_{j+1} = [V_j \ \ w_{j+1}]$, τέτοια ώστε $diag\{\mu_1, \dots, \mu_{j+1}\} = V_{j+1}^* A V_{j+1}$.

Αν $j = \frac{n}{3} \in \mathbb{Z}$ (δηλαδή $\frac{n}{3} = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$), θεωρούμε τον $n \times n$ κανονικό πίνακα

$$A = I_j \otimes D; \quad D = diag\{0, 1, \mathbf{i}\}. \quad (4.2)$$

Για τα σημεία $\mu_\ell \in w(A) = w(D) = co\{0, 1, \mathbf{i}\}$, για $\ell = 1, \dots, j$, έχουμε $\mu_\ell = \hat{w}_\ell^* D \hat{w}_\ell$, όπου $\hat{w}_\ell \in \mathbb{C}^3$ είναι μοναδιαία διανύσματα και συνεπώς

$$diag\{\mu_1, \dots, \mu_j\} = \bigoplus_{\ell=1}^j (\hat{w}_\ell^* D \hat{w}_\ell) = (\bigoplus_{\ell=1}^j \hat{w}_\ell^*) A (\bigoplus_{\ell=1}^j \hat{w}_\ell),$$

δηλαδή $V_j = \oplus_{\ell=1}^j \hat{w}_\ell \in \mathbb{C}^{n \times j}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $\mu_{j+1} = w_{j+1}^* A w_{j+1} \in \text{int}\{co\{0, 1, \mathbf{i}\}\}$ τέτοιο ώστε για την ισομετρία $V_{j+1} = \begin{bmatrix} V_j & w_{j+1} \end{bmatrix}$ να έχουμε $\text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_{j+1}\} = V_{j+1}^* A V_{j+1}$. Προφανώς, θα πρέπει $w_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,1} \cap \mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}$, ή ισοδύναμα,

$$w_{j+1}^* (\oplus_{\ell=1}^j \hat{w}_\ell) = w_{j+1}^* (\oplus_{\ell=1}^j D \hat{w}_\ell) = w_{j+1}^* (\oplus_{\ell=1}^j D^* \hat{w}_\ell) = 0. \quad (4.3)$$

Διαμερίζοντας $w_{j+1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \end{bmatrix}$, όπου $y_\ell \in \mathbb{C}^3$ ($\ell = 1, \dots, j$), από την (4.3) έχουμε

$$\oplus_{\ell=1}^j y_\ell^* \hat{w}_\ell = \oplus_{\ell=1}^j y_\ell^* D \hat{w}_\ell = \oplus_{\ell=1}^j y_\ell^* D^* \hat{w}_\ell = 0.$$

Αν $\hat{y}_\ell = \frac{y_\ell}{\|y_\ell\|}$, συμπεραίνουμε ότι $\begin{bmatrix} \hat{y}_\ell & \hat{w}_\ell \end{bmatrix}$ είναι ισομετρία με την ιδιότητα

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_\ell^* \\ \hat{w}_\ell^* \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} \hat{y}_\ell & \hat{w}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_\ell^* D \hat{y}_\ell^* & 0 \\ 0 & \mu_\ell \end{bmatrix} \equiv C_\ell; \quad \ell = 1, \dots, j,$$

δηλαδή οι 2×2 πίνακες C_ℓ είναι εμφυτεύσιμοι στον D . Καθώς $\mu_1 \in \text{int}\{w(A)\}$, τα φάσματα των C_1, D είναι ξένα μεταξύ τους και από το Θεώρημα 1.2 καταλήγουμε σε αντίφαση, καθώς οι ιδιοτιμές του D δεν είναι συνευθειακές.

Τέλος, στην περίπτωση $j > \frac{n}{3}$, θεωρούμε έναν κύριο υποπίνακα $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ του $A \in \mathbb{C}^{3j \times 3j}$ στην (4.2) τέτοιον ώστε ο πίνακας $\text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_j\}$ να είναι εμφυτεύσιμος στον \hat{A} . Τότε ο $E = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_j, \mu_{j+1}\}$ δεν είναι εμφυτεύσιμος στον \hat{A} , καθώς λόγω της μεταβατικής ιδιότητας της εμφύτευσης, ο E θα ήταν επίσης εμφυτεύσιμος και στον A .

4.2 Κατασκευή του πίνακα ισομετρίας

Στο εδάφιο αυτό, αναπτύσσουμε κατ'αρχάς μία διαδικασία για να βρίσκουμε διανύσματα-γεννήτορες για ένα δοσμένο σημείο $\mu \in w(A) = co\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, όταν το $w(A)$ είναι μη τετριμένο πολύγωνο. Υπενθυμίζουμε ότι x_1, \dots, x_n είναι τα ορθοχανονικά ιδιοδιανύσματα του κανονικού πίνακα A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Συνεπώς, λόγω κυρτότητας:

$$\mu = \sum_{j=1}^n |\tau_j|^2 \lambda_j, \quad \text{με } \tau_j \in \mathbb{C} \text{ και } \sum_{j=1}^n |\tau_j|^2 = 1 \quad (4.4)$$

και τότε σαφώς ένα διάνυσμα-γεννήτορας για το μ είναι

$$x = \sum_{j=1}^n \tau_j x_j. \quad (4.5)$$

Για $\mu \in \text{int } \{w(A)\}$, η έκφραση (4.4) δεν είναι μοναδική και οι συντελεστές τ_j μπορούν να επιλεγούν μη μηδενικοί.

Η επόμενη Πρόταση αποτελεί μία επέκταση της [1, Πρότ. 1].

Πρόταση 4.2. Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κανονικός πίνακας με μοναδιαία ιδιοδιανύσματα $\{x_j\}_{j=1}^n$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$. Αν θεωρήσουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ και $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{C}^n που ορίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$u_j = a_j v_{j-1} + b_j u_{j-n+1} \quad \text{και} \quad v_j = \frac{|b_j|}{|a_j|} a_j v_{j-1} - \frac{|a_j|}{|b_j|} b_j u_{j-n+1}, \quad (4.6)$$

όπου $v_0 \equiv x_1$, $u_{j-n} \equiv x_j$ ($j = 2, 3, \dots, n$) και $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, ώστε $|a_j|^2 + |b_j|^2 = 1$, τότε οι πίνακες $U_j = [u_j \ u_{j+1} \ \dots \ u_{j+n-2} \ v_{j+n-2}]$ είναι ορθομοναδιαίοι για $j \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $U_1 = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n-1} \ v_{n-1}]$ είναι ορθομοναδιαίος, όπως στο [1]. Επαγωγικά, υποθέτοντας ότι ο πίνακας $U_{j-1} = [u_{j-1} \ u_j \ \dots \ u_{j+n-3} \ v_{j+n-3}]$ είναι ορθομοναδιαίος, αυτό είναι επίσης αληθές για τον $U_j = [u_j \ u_{j+1} \ \dots \ u_{j+n-2} \ v_{j+n-2}]$. Πράγματι, από την κατασκευή στην (4.6) έχουμε

$$\begin{aligned} u_{j+n-2}^* v_{j+n-2} &= (\bar{a}_{j+n-2} v_{j+n-3}^* + \bar{b}_{j+n-2} u_{j-1}^*) \left(\frac{|b_{j+n-2}|}{|a_{j+n-2}|} a_{j+n-2} v_{j+n-3} - \frac{|a_{j+n-2}|}{|b_{j+n-2}|} b_{j+n-2} u_{j-1} \right) \\ &= |b_{j+n-2}| |a_{j+n-2}| - |a_{j+n-2}| |b_{j+n-2}| = 0. \end{aligned}$$

Αναλόγως, για $\ell = j, \dots, j+n-3$

$$u_\ell^* u_{j+n-2} = a_{j+n-2} u_\ell^* v_{j+n-3} + b_{j+n-2} u_\ell^* u_{j-1} = 0$$

και

$$u_\ell^* v_{j+n-2} = \frac{|b_{j+n-2}|}{|a_{j+n-2}|} a_{j+n-2} u_\ell^* v_{j+n-3} - \frac{|a_{j+n-2}|}{|b_{j+n-2}|} b_{j+n-2} u_\ell^* u_{j-1} = 0,$$

καθόσον τα διανύσματα u_{j-1}, v_{j+n-3} και u_ℓ ($\ell = j, \dots, j+n-3$) είναι ορθογώνια, ως στήλες του U_{j-1} . \square

Για $k \geq \frac{2(n-1)}{3}$ και $\mu_1 \in \text{int} \{w(A)\}$, παρουσιάζεται στη συνέχεια μία μέθοδος για την εύρεση μιας ισομετρίας $V = [w_1 \dots w_{n-k}]$, τέτοιας ώστε $V^*AV = \text{diag} \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$ για κατάλληλα σημεία $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A) \setminus \sigma(A)$. Υπενθυμίζοντας τους συμβολισμούς στο Θεώρημα 4.1 και ότι $R(\cdot)$ είναι το πεδίο τιμών ενός πίνακα, έχουμε:

Πρόταση 4.3. Εστω οι ισομετρίες $V_j = [w_1 \dots w_j]$ για την εμφύτευση του $\text{diag} \{\mu_1, \dots, \mu_j\}$ στον κανονικό πίνακα A . Τότε οι υπόχωροι $R(V_j)$ και $R(W_j)$ είναι ορθογώνιοι (δηλαδή $V_j^*W_j = 0$), όπου

$$W_j = \begin{bmatrix} u_{(j-1)(n-1)+1} & \dots & u_{(j-1)(n-1)+n-j-1} & v_{(j-1)(n-1)+n-j} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

για $j = 1, 2, \dots, n-k-1$.

Απόδειξη. Για $j = 1$, θεωρούμε ένα εσωτερικό σημείο $\mu_1 \in w(A) \setminus \sigma(A)$ στην (4.4) και $w_1 = \sum_{j=1}^n \tau_j x_j \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο διάνυσμα-γεννήτορα, όπου $\tau_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Από την (4.6) αναδρομικά για $q = 1, \dots, n-1$, έχουμε

$$\begin{aligned} u_q = & \left(\prod_{\ell=1}^{q-1} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_q x_1 - \left(\frac{|a_1|}{|b_1|} b_1 \prod_{\ell=2}^{q-1} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_q x_2 - \left(\frac{|a_2|}{|b_2|} b_2 \prod_{\ell=3}^{q-1} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_q x_3 - \\ & - \dots - \left(\frac{|a_{q-2}|}{|b_{q-2}|} b_{q-2} \frac{|b_{q-1}|}{|a_{q-1}|} a_{q-1} \right) a_q x_{q-1} - \left(\frac{|a_{q-1}|}{|b_{q-1}|} b_{q-1} \right) a_q x_q + b_q x_{q+1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς για $q = n-1$ και $\arg(b_\ell) = \pi$ ($\ell = 1, \dots, n-2$), έπειτα ότι

$$\begin{aligned} u_{n-1} = & \left(\prod_{\ell=1}^{n-2} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_{n-1} x_1 + \left(|a_1| \prod_{\ell=2}^{n-2} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_{n-1} x_2 + \left(|a_2| \prod_{\ell=3}^{n-2} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_{n-1} x_3 + \\ & + \dots + \left(|a_{n-3}| \frac{|b_{n-2}|}{|a_{n-2}|} a_{n-2} \right) a_{n-1} x_{n-2} + |a_{n-2}| a_{n-1} x_{n-1} + b_{n-1} x_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

και αντικαθιστώντας τις ποσότητες

$$\begin{aligned} b_{n-1} = \tau_n, \quad a_{n-1} = |a_{n-1}| e^{i\arg(\tau_{n-1})}, \quad a_{n-2} = \frac{|\tau_{n-1}|}{|a_{n-1}|} e^{i\arg(\tau_{n-2}) - i\arg(\tau_{n-1})} \\ \text{και } a_\ell = \frac{|\tau_{\ell+1}|}{|a_{n-1}| \prod_{i=\ell+1}^{n-2} |b_i|} e^{i\arg(\tau_\ell) - i\arg(\tau_{\ell+1})} \quad (\ell = 1, \dots, n-3) \end{aligned}$$

στην (4.8), συμπεραίνουμε $u_{n-1} = \sum_{j=1}^n \tau_j x_j = w_1$. Συνεπώς, για τον υπόχωρο $\text{Ker}(V_1^*) = (\text{span} \{w_1\})^\perp = (\text{span} \{u_{n-1}\})^\perp = \text{span} \{u_1, \dots, u_{n-2}, v_{n-1}\}$

ορίζεται μία ορθοκανονική βάση, καθόσον ο $U_1 = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_{n-1} & v_{n-1} \end{bmatrix}$ είναι ορθομοναδιαίος.

Για $j = 2$, θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο $U_{n-1} = \begin{bmatrix} w_1 & u_n & \dots & u_{2n-3} & v_{2n-3} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w_1 & Q_1 \end{bmatrix}$ και παρατηρούμε ότι $w_2 \in (\text{span}\{w_1\})^\perp = R(Q_1)$, δηλαδή $w_2 = Q_1 \begin{bmatrix} r_1 & \dots & r_{n-1} \end{bmatrix}^T$. Αναδρομικά στην (4.6), για $\arg(b_\ell) = \pi$ ($\ell = n, \dots, 2n-3$) έχουμε

$$\begin{aligned} u_{2n-3} &= \left(\prod_{\ell=n}^{2n-4} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_{2n-3} v_{n-1} + \left(|a_n| \prod_{\ell=n+1}^{2n-4} \frac{|b_\ell|}{|a_\ell|} a_\ell \right) a_{2n-3} u_1 + \dots + \\ &\quad + \left(|a_{2n-5}| \frac{|b_{2n-4}|}{|a_{2n-4}|} a_{2n-4} \right) a_{2n-3} u_{n-4} + |a_{2n-4}| a_{2n-3} u_{n-3} + b_{2n-3} u_{n-2}, \end{aligned}$$

απ'όπου ορίζουμε $u_{2n-3} = w_2$, όταν

$$\begin{aligned} b_{2n-3} &= r_{n-1}, \quad a_{2n-3} = |a_{2n-3}| e^{i\arg(r_{n-2})}, \quad a_{2n-4} = \frac{|r_{n-2}|}{|a_{2n-3}|} e^{i\arg(r_{n-3}) - i\arg(r_{n-2})} \\ \text{και } a_\ell &= \frac{|r_{\ell-n+2}|}{|a_{2n-3}| \prod_{i=\ell+1}^{2n-4} |b_i|} e^{i\arg(r_{\ell-n+1}) - i\arg(r_{\ell-n+2})} \quad (\ell = n, \dots, 2n-5). \end{aligned}$$

Έτσι, για τις ισομετρίες $V_2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}$ και $W_2 = \begin{bmatrix} u_n & \dots & u_{2n-4} & v_{2n-3} \end{bmatrix}$, προκύπτει ότι $\text{Ker}(V_2^*) = (\text{span}\{w_1, w_2\})^\perp = R(W_2)$.

Για $j = 3$ και $a_{2n-2} = 0, b_{2n-2} = 1$ στην (4.6), έχουμε $u_{2n-2} = a_{2n-2} v_{2n-3} + b_{2n-2} u_{(2n-2)-n+1} = u_{n-1} = w_1$ και θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο

$$U_{2n-3} = \begin{bmatrix} w_2 & w_1 & u_{2n-1} & \dots & u_{3n-5} & v_{3n-5} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w_2 & w_1 & Q_2 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς $w_3 \in \text{Ker}(V_2^*) = (\text{span}\{w_1, w_2\})^\perp = R(Q_2)$, δηλαδή $w_3 = Q_2 \begin{bmatrix} t_1 & \dots & t_{n-2} \end{bmatrix}^T$ και, όπως στα προηγούμενα βήματα, ορίζουμε για κατάλληλες επιλογές παραμέτρων $\{a_\ell, b_\ell\}_{\ell=2n-1}^{3n-5}$ στην (4.6), $u_{3n-5} \equiv w_3$. Τότε οι ισομετρίες $V_3 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$ και $W_3 = \begin{bmatrix} u_{2n-1} & \dots & u_{3n-4} & v_{3n-5} \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιες, δηλαδή $\text{Ker}(V_3^*) = (\text{span}\{w_1, w_2, w_3\})^\perp = R(W_3)$.

Συνεχίζοντας ομοίως, επιβεβαιώνουμε για $j = 1, \dots, n-k-1$ και για κατάλληλες επιλογές των $\{a_\ell, b_\ell\}_{\ell=(j-1)(n-2)+1}^{(j-1)(n-2)+n-1}$ ότι οι ορθομοναδιαίοι $U_{(j-1)(n-2)+1}$ έχουν την έκφραση

$$\begin{aligned} U_{(j-1)(n-2)+1} &\equiv \begin{bmatrix} u_{(j-1)(n-2)+1} & \dots & u_{(j-1)(n-2)+n-1} & v_{(j-1)(n-2)+n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_{j-1} & w_{j-2} & \dots & w_1 & u_{(j-1)(n-1)+1} & \dots & u_{(j-1)(n-1)+n-j-1} & w_j & v_{(j-1)(n-1)+n-j} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

όπου $w_j = u_{(j-1)(n-1)+n-j} (= u_{jn-(2j-1)})$ και το αποτέλεσμα έπεται. \square

Πρόταση 4.4. Εστω ο $n \times n$ διαγωνοποιημένος κανονικός πίνακας $A = UDU^*$ και $V_j^*AV_j = diag\{\mu_1, \dots, \mu_j\}$, όπου $V_j = [w_1 \dots w_j]$ είναι ισομετρικής, για $j = 1, \dots, n-k-1$ με $k \geq \frac{2(n-1)}{3}$. Θεωρώντας την ισομετρία $W_j = U\Sigma_j \in \mathbb{C}^{n \times (n-j)}$ στην (4.7) και $(c_{j,1}, \dots, c_{j,n-j})^T$ μία μερική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2H(D)\Sigma_j \\ 2iS(D)\Sigma_j \\ c_{j,n-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{j,1} \\ \vdots \\ c_{j,n-j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_j \\ \vdots \\ \Sigma_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{j,1} \\ \vdots \\ d_{j,n-j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_j \\ -\Sigma_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{j,1} \\ \vdots \\ f_{j,n-j} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

με $3(n-j)$ αγνώστους, τότε το διάνυσμα $W_j \begin{bmatrix} c_{j,1} & \dots & c_{j,n-j} \end{bmatrix}^T$ είναι ορθογώνιο και A -ορθογώνιο στον $R(V_j)$.

Απόδειξη. Θα προσδιορίσουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\xi_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,1} \cap \mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}$, ή ισοδύναμα ένα διάνυσμα $\xi_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,1} = Ker(V_j^*)$ τέτοιο ώστε $A\xi_{j+1}$ και $A^*\xi_{j+1}$ να ανήκουν επίσης στον $\mathcal{S}_{j,1}$. Για $k \geq \frac{2(n-1)}{3}$ (ή ισοδύναμα $j \leq \frac{n-1}{3}$), η ύπαρξη ενός τέτοιου διανύσματος εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 4.1. Συμβολίζοντας $\xi_{j+1} = W_j \begin{bmatrix} c_{j,1} & \dots & c_{j,n-j} \end{bmatrix}^T$, η σχέση $A\xi_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,1}$ συνεπάγεται $AW_j \begin{bmatrix} c_{j,1} & \dots & c_{j,n-j} \end{bmatrix}^T = W_j \begin{bmatrix} d_{j,1} & \dots & d_{j,n-j} \end{bmatrix}^T$, απόπου, εμπλέκοντας τη διαγωνοποιημένη μορφή του A , έχουμε

$$D\Sigma_j \begin{bmatrix} c_{j,1} & \dots & c_{j,n-j} \end{bmatrix}^T - \Sigma_j \begin{bmatrix} d_{j,1} & \dots & d_{j,n-j} \end{bmatrix}^T = 0. \quad (4.10)$$

Ομοίως, από τη σχέση $A^*\xi_{j+1} \in \mathcal{S}_{j,1}$ συμπεραίνουμε

$$D^*\Sigma_j \begin{bmatrix} c_{j,1} & \dots & c_{j,n-j} \end{bmatrix}^T - \Sigma_j \begin{bmatrix} f_{j,1} & \dots & f_{j,n-j} \end{bmatrix}^T = 0. \quad (4.11)$$

Οι εξισώσεις (4.10) και (4.11) είναι ισοδύναμες με το γραμμικό σύστημα (4.9) με $3(n-j)$ αγνώστους $\{c_{j,\ell}, d_{j,\ell}, f_{j,\ell}\}_{\ell=1}^{n-j}$. Επειδή

$$rank \begin{bmatrix} 2H(D) & -I_n & -I_n \\ 2iS(D) & -I_n & I_n \end{bmatrix} (I_3 \otimes \Sigma_j) = 2n$$

και $j \leq \frac{n-1}{3}$, το σύστημα είναι συμβιβαστό, η δε λύση του συστήματος περιλαμβάνει $n-3j$ παραμέτρους. Ορίζοντας $\{c_{j,\ell}\}_{\ell=1}^{n-j}$ από την (4.9), έχουμε το διάνυσμα

$\xi_{j+1} = W_j \begin{bmatrix} c_{j,1} & \dots & c_{j,n-j} \end{bmatrix}^T$ με τις επιθυμητές ιδιότητες, οπότε $w_{j+1} \equiv \frac{\xi_{j+1}}{\|\xi_{j+1}\|} \in \mathcal{S}_{j,1} \cap \mathcal{S}_{j,2} \cap \mathcal{S}_{j,3}$ είναι γεννήτορας του σημείου $\mu_{j+1} = w_{j+1}^* A w_{j+1}$ και για $V_{j+1} = \begin{bmatrix} V_j & w_{j+1} \end{bmatrix}$ καταλήγουμε στην $V_{j+1}^* A V_{j+1} = \text{diag} \{ \mu_1, \dots, \mu_{j+1} \}$. \square

Αν στην εξίσωση (4.9) έχουμε ότι $\{c_{j-1,\ell}\}_{\ell=1}^{n-j+1} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ για κάποιο $j \in \{1, \dots, n-k-1\}$, η ισομετρία W_j στην (4.7) μπορεί να εκφραστεί για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων a_ℓ και b_ℓ ως $W_j = U \Sigma_j$, όπου η ισομετρία Σ_j είναι πραγματική. Εύκολα επιβεβαιώνεται τότε ότι το σύστημα

$$D\Sigma_j \begin{bmatrix} c_{j,1} \\ \vdots \\ c_{j,n-j} \end{bmatrix} - \Sigma_j \begin{bmatrix} d_{j,1} \\ \vdots \\ d_{j,n-j} \end{bmatrix} = 0$$

είναι ισοδύναμο με το (4.9) για πραγματικές λύσεις.

Το ακόλουθο παράδειγμα είναι ενδεικτικό της εφαρμογής των Προτάσεων 4.3 και 4.4.

Παράδειγμα 4.1. Έστω $A = \text{diag} \{0, 1, \mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}\}$ και το σημείο $\mu_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{10}\mathbf{i} \in \text{int} \{w(A)\}$. Εκφράζοντας $\mu_1 \in \text{co} \{0, 1, \mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}\}$, λαμβάνουμε ακολούθως ένα διάνυσμα-γεννήτορα $w_1 = \sum_{j=1}^4 c_j e_j$, όπου $\{e_j\}_{j=1}^4$ η συνήθης βάση του \mathbb{C}^4 και $c_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Θέτοντας στην (4.6) $(a_1, b_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(a_2, b_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ και $(a_3, b_3) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, τότε

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^T, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^T, \\ u_2 &= \frac{1}{3}v_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}e_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, 4, 0)^T, \quad v_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}v_1 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2, -2, -1, 0)^T, \\ u_3 &= \frac{3}{\sqrt{10}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{10}}e_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -2, -1, 1)^T, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}v_2 - \frac{3}{\sqrt{10}}e_4 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(2, -2, -1, -9)^T. \end{aligned}$$

Για το διάνυσμα $w_1 = u_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -2, -1, 1)^T$ έχουμε $\mu_1 = w_1^* A w_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{10}\mathbf{i}$ και $(\text{span} \{w_1\})^\perp = \text{span} \{u_1, u_2, v_3\}$. Σημειώνοντας την ισομετρία $W_1 = \Sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (Πρόταση 4.3), ο πίνακας του γραμμικού συστήματος στην

(4.9) είναι

$$\begin{bmatrix} 2H(D)\Sigma_1 & -\Sigma_1 & -\Sigma_1 \\ 2iS(D)\Sigma_1 & -\Sigma_1 & \Sigma_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3\sqrt{5}} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{8}{3}\mathbf{i} & -\frac{2}{3\sqrt{5}}\mathbf{i} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3\sqrt{5}} & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{\sqrt{5}}\mathbf{i} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Τότε για $(d_{1,1}, d_{1,2}, d_{1,3}) = (\bar{f}_{1,1}, \bar{f}_{1,2}, \bar{f}_{1,3}) = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{6\sqrt{5}}(1 - 8\mathbf{i}), -\frac{2}{3}(1 + \mathbf{i})\right)$, λαμβάνουμε την πραγματική λύση $(c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3}\right)$ απ'όπου (Πρόταση 4.4) ορίζεται το διάνυσμα

$$w_2 = \Sigma_1 \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}u_1 + \frac{4}{3\sqrt{5}}u_2 - \frac{2}{3}v_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 1, 2, 2)^T.$$

Συνεπώς, για το σημείο $\mu_2 = w_2^*Aw_2 = \frac{1}{2} + \frac{8}{10}\mathbf{i}$ και την ισομετρία $V = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ καταλήγουμε στη σχέση εμφύτευσης

$$diag\{\mu_1, \mu_2\} = diag\left\{\frac{1}{2} + \frac{2}{10}\mathbf{i}, \frac{1}{2} + \frac{8}{10}\mathbf{i}\right\} = V^*AV.$$

Ειδικά στην περίπτωση που το δοσμένο σημείο μ_1 ανήκει στο σύνορο του μη τετριμένου πολυγώνου $w(A)$, συμβολίζοντας με \overline{zw} το ευθύγραμμο τμήμα στο \mathbb{C} με άκρα z και w , παρουσιάζουμε την ακόλουθη ιδιότητα.

Πρόταση 4.5. Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κανονικός πίνακας με φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και ένα σημείο $\mu_1 \in int \overline{\lambda_1 \lambda_2}$, όπου λ_1 και λ_2 είναι διαδοχικές κορυφές του μη τετριμένου πολυγώνου $w(A)$. Άνταξη $V^*AV = diag\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$ για κάποια ισομετρία $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$, τότε $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in co\{\lambda_j\}_{j=3}^n$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $\{x_j\}_{j=1}^n$ είναι τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και θεωρούμε το διάνυσμα-γεννήτορα

$u_1 = \sqrt{a}x_1 + \sqrt{1-a}x_2$ για το $\mu_1 (= u_1^* A u_1)$, με $a \in (0, 1)$. Τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $v_1 = \sqrt{1-a}x_1 - \sqrt{a}x_2$ είναι ορθογώνιο στο u_1 και ορίζει το σημείο $\nu_1 = v_1^* A v_1$, δηλαδή το συμμετρικό του μ_1 ως προς το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{\lambda_1 \lambda_2}$, καθόσον $\mu_1 + \nu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$. Επίσης $(\text{span}\{u_1\})^\perp = \text{span}\{v_1, x_3, \dots, x_n\}$ και για τον ορθομοναδιαίο $U = [u_1 \ v_1 \ x_3 \ \dots \ x_n]$, έχουμε

$$U^* A U = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & u_1^* A v_1 \\ v_1^* A u_1 & \tau_1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \text{diag}\{\lambda_3, \dots, \lambda_n\} \end{bmatrix},$$

όπου $v_1^* A u_1 = u_1^* A v_1 = \sqrt{a(1-a)}(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$. Αν για την ισομετρία $V = [u_1 \ R] \equiv [u_1 \ w_2 \ \dots \ w_{n-k}]$ ισχύει η σχέση εμφύτευσης $\text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\} = V^* A V$, για κατάλληλα σημεία $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A)$, έπειτα οτι

$$V^* A V = \begin{bmatrix} \mu_1 & u_1^* A R \\ R^* A u_1 & R^* A R \end{bmatrix}$$

και κατά συνέπεια $u_1^* A R = u_1^* A^* R = 0$. Εκφράζοντας $w_j = c_2 v_1 + \sum_{\ell=3}^n c_\ell x_\ell$, η $(j-1)$ -η συνιστώσα του διανύσματος $u_1^* A R$ ισούται με

$$u_1^* A w_j = u_1^* \left(c_2 A v_1 + \sum_{\ell=3}^n c_\ell \lambda_\ell x_\ell \right) = c_2 u_1^* A v_1$$

και προφανώς είναι μηδενική, μόνον όταν $c_2 = 0$. Τότε $w_j \in \text{span}\{x_3, \dots, x_n\}$ για κάθε $j = 2, \dots, n-k$ και επειδή $R^* A R = \text{diag}\{\mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$, η σχέση εγκλεισμού $\{\mu_j\}_{j=2}^{n-k} \subset \text{co}\{\lambda_j\}_{j=3}^n$ ισχύει. \square

Παράδειγμα 4.2. Έστω $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$, του οποίου το αριθμητικό πεδίο είναι ένα μη τετραμένο τετράπλευρο και έστω $\mu_1 \in \overline{\lambda_1 \lambda_2}$. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με την Πρόταση 4.5, οποιοδήποτε σημείο $\mu_2 \in \overline{\lambda_3 \lambda_4}$ αποτελεί λύση για το πρόβλημά μας. Πράγματι, θέτοντας $\mu_j = w_j^* A w_j$ ($j = 1, 2$), όπου $w_1 = \sqrt{a_1}x_1 + \sqrt{1-a_1}x_2$ και $w_2 = \sqrt{a_2}x_3 + \sqrt{1-a_2}x_4$ για $a_1, a_2 \in [0, 1]$, τότε $V = [w_1 \ w_2]$ είναι η απαιτούμενη ισομετρία.

Για A κανονικό, είναι γνωστός ο χαρακτηρισμός του βαθμού- k αριθμητικού πεδίου [37]

$$w_k(A) = \bigcap_{\Gamma \subset \sigma(A), |\Gamma|=n-k+1} \text{co}\Gamma. \quad (4.12)$$

Εν συνεχεία, παρουσιάζουμε μία ιδιότητα για το $w_k(A)$ κανονικών πινάκων, που δεν έχει εμφανιστεί στη βιβλιογραφία.

Πρόταση 4.6. Εστω ο κανονικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^n$ και $w_k(A) \neq \emptyset$. Άντας $r > k$, $\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} \subset \text{int}\{w_k(A)\}$, τότε $w_k(A) = w_k(\tilde{A})$, όπου $\tilde{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

Απόδειξη. Μεταξύ των συνόλων $\mathcal{H} = \{\Gamma \subset \sigma(A) : |\Gamma| = n - k + 1\}$ και $\mathcal{G} = \left\{ \tilde{\Gamma} \cup \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} : \tilde{\Gamma} \subset \sigma(\tilde{A}) \text{ με } |\tilde{\Gamma}| = r - k + 1 \right\}$, εμφανώς ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \quad (4.13)$$

και από την (4.12) έχουμε

$$\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} \subset \text{int}\{co\Gamma : \Gamma \in \mathcal{H}\}$$

για κάθε $\Gamma \in \mathcal{H}$. Συνεπώς,

$$co\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} \subset \text{int}\{co\Gamma : \Gamma \in \mathcal{H}\}$$

και ειδικότερα από την (4.13), για τα στοιχεία του \mathcal{G} έχουμε

$$co\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} \subset \text{int}\left\{co\left\{\tilde{\Gamma} \cup \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}\right\}\right\},$$

δηλαδή $co\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} \subset \text{int}\left\{co\tilde{\Gamma} : \tilde{\Gamma} \cup \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} \in \mathcal{G}\right\}$. Αρα,

$$\begin{aligned} w_k(A) &= \bigcap_{\Gamma \subset \sigma(A), |\Gamma|=n-k+1} co\Gamma \subseteq \bigcap_{\tilde{\Gamma} \subset \sigma(\tilde{A}), |\tilde{\Gamma}|=(n-k+1)-(n-r)} \left\{co\left\{\tilde{\Gamma} \cup \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}\right\}\right\} \\ &= \bigcap_{\tilde{\Gamma} \subset \sigma(\tilde{A}), |\tilde{\Gamma}|=r-k+1} co\tilde{\Gamma} = w_k(\tilde{A}). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, ο εγκλεισμός $w_k(\tilde{A}) \subseteq w_k(A)$ είναι άμεσος. \square

Κεφάλαιο 5

ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ

ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εκθέσουμε σχετικά αποτελέσματα με τις αρχές μεταβολών ιδιοσυναρτήσεων για $n \times n$ αναλυτικές συναρτήσεις πινάκων $P(\lambda)$ μιας πραγματικής μεταβλητής λ , οι οποίες είναι αυτοσυζυγείς, δηλαδή $P(\lambda) = P^*(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Είναι γνωστό από το θεώρημα του Rellich [19, σελ.394] ότι η συνάρτηση $P(\lambda)$ είναι διαγωνοποιήσιμη για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και ειδικότερα ότι υπάρχουν βαθμωτές αναλυτικές συναρτήσεις $\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)$ και $n \times n$ ορθομοναδιαία συνάρτηση πίνακα $U(\lambda)$, με την ιδιότητα

$$P(\lambda) = U(\lambda) \text{diag} \{\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)\} U^*(\lambda). \quad (5.1)$$

Στην (5.1), οι ιδιοσυναρτήσεις $\mu_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, n$ αποτελούν ρίζες της εξίσωσης

$$\det(I\mu - P(\lambda)) = \mu^n + p_1(\lambda)\mu^{n-1} + \dots + p_{n-1}(\lambda)\mu + p_n(\lambda) = 0, \quad (5.2)$$

όπου οι συντελεστές $p_j(\lambda)$ είναι συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής λ και οι στήλες $u_j(\lambda)$ του $U(\lambda) = [u_1(\lambda) \ \dots \ u_n(\lambda)]$ είναι ιδιοδιανύσματα του $P(\lambda)$ που αντιστοιχούν στις $\mu_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, n$. Επειδή η συνάρτηση $P(\lambda)$ είναι αυτοσυζυγής, οι αναλυτικές ιδιοσυναρτήσεις $\mu_j(\lambda)$ είναι πραγματικές και μπορούν να

εκφραστούν ως δυναμοσειρές του $\lambda - \lambda_0$ σε μία γειτονιά του λ_0 :

$$\mu_j(\lambda) = a_{j,0} + a_{j,1}(\lambda - \lambda_0) + a_{j,2}(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \quad (5.3)$$

όπου $a_{j,i} \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots$; $j = 1, \dots, n$. Στην περίπτωση που τα $\mu_j(\lambda)$ είναι πολυώνυμα βαθμού 1 το πολύ, το pencil $P(\lambda)$ έχει την ιδιότητα L και διάφορα αποτελέσματα στην κατεύθυνση αυτή παρουσιάζονται στις εργασίες [16] και [41].

5.1 Φασματική ανάλυση πολυωνυμικών πινάκων

Στην ενότητα αυτή, εντάσσουμε ορισμένες βασικές έννοιες και αποτελέσματα που αφορούν στη φασματική ανάλυση πολυωνυμικών πινάκων. Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i$, όπου $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ένας αριθμός $z_0 \in \mathbb{R}$ καλείται ιδιοτιμή του $P(\lambda)$ αν $P(z_0)x_0 = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Το διάνυσμα x_0 καλείται δεξί ιδιοδιάνυσμα του $P(\lambda)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή z_0 . Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι το φάσμα $\sigma(P) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \det P(\lambda) = 0\}$.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \sigma(P)$ οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$. Υποθέτουμε επίσης ότι για $\lambda_j \in \sigma(P)$ υπάρχουν διανύσματα $x_{j,0}, x_{j,1}, \dots, x_{j,s_j-1} \in \mathbb{C}^n$ με $x_{j,0} \neq 0$ που ικανοποιούν

$$\begin{aligned} P(\lambda_j)x_{j,0} &= 0 \\ \frac{P'(\lambda_j)}{1!}x_{j,0} + P(\lambda_j)x_{j,1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{P^{(s_j-1)}(\lambda_j)}{(s_j-1)!}x_{j,0} + \frac{P^{(s_j-2)}(\lambda_j)}{(s_j-2)!}x_{j,1} + \cdots + \frac{P'(\lambda_j)}{1!}x_{j,(s_j-2)} + P(\lambda_j)x_{j,(s_j-1)} &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

όπου οι ανωτέρω δείκτες σημειώνουν τις παραγώγους του $P(\lambda)$ και s_j είναι μικρότερο ή ίσο της αλγεβρικής πολλαπλότητας του λ_j . Τότε το διάνυσμα $x_{j,0}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ_j και $x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,(s_j-1)}$ είναι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα και συνιστούν μία αλυσίδα Jordan μήκους s_j του $P(\lambda)$ που αντιστοιχεί στην λ_j (δες [19]).

Τα υπερβολικά πολυώνυμα αποτελούν μία ευρέως μελετημένη κατηγορία αυτοσυζυγών πολυωνυμικών συναρτήσεων (δες [38]). Αυτά ικανοποιούν τους περιορισμούς ότι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής $A_m > 0$ και ότι το βαθμωτό πολυώνυμο $\pi_x(\lambda) := x^* P(\lambda)x$ που ορίζεται για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$ έχει m πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες. Συμβολίζουμε με $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^m$ τις ρίζες του πολυωνύμου $\pi_x(\lambda)$ σε μη φυλίουσα σειρά. Τα σύνολα $\Delta_i := \{\rho_i(x) : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$, $i = 1, \dots, m$ καλούνται *ζώνες ριζών* (*root zones*). Προφανώς Δ_i είναι το πεδίο τιμών του συναρτησιακού $\rho_i(x)$ και είναι μη κενό διάστημα. Στο πλαίσιο αυτό, η έννοια των “τύπων ιδιοτιμών” είναι θεμελιώδης. Ένας πραγματικός αριθμός z_0 λέγεται πως έχει ορισμένο (θετικό ή αρνητικό) τύπο αν η τετραγωνική μορφή $\pi'_x(z_0) = x^* P'(z_0)x$ είναι ορισμένη (θετικά ή αρνητικά ορισμένη, αντιστοίχως) στον πυρήνα $Ker P(z_0)$. Ισοδύναμα, z_0 είναι θετικού ή αρνητικού τύπου, αν η συνάρτηση $\pi_x(\lambda)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο z_0 αντίστοιχα.

Είναι γνωστό [38] ότι οι ζώνες ριζών των υπερβολικών πολυωνύμων είναι ξένες μεταξύ τους, δηλαδή $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ για $i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Κατά συνέπεια, υπάρχουν πραγματικές ιδιοτιμές $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_m \leq b_m$ του $P(\lambda)$, τέτοιες ώστε κάθε διάστημα $\Delta_i = [a_i, b_i]$ να περιλαμβάνει ακριβώς n ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ (με πολλαπλότητα), που είναι όλες του ίδιου (θετικού ή αρνητικού) τύπου. Οι ιδιοτιμές σε διαδοχικές ζώνες Δ_i, Δ_{i+1} ($i = 1, \dots, m-1$) είναι αντίθετου τύπου [34].

5.2 Λεξικογραφική διάταξη ιδιοσυναρτήσεων

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, σκοπός μας είναι να μελετήσουμε αρχές μεταβολής για τις ιδιοσυναρτήσεις $\mu_j(\lambda)$. Κατά συνέπεια, είναι αναγκαίο να εισαχθεί μία κατάλληλη διάταξη για πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της λεξικογραφικής διάταξης της άπειρης σειράς συντελεστών $(a_{j,0}, a_{j,1}, \dots)$, $j = 1, \dots, n$ στις αναλυτικές εκφράσεις (5.3) των $\mu_j(\lambda)$ σε γειτονιά του λ_0 . Ειδικότερα λέμε:

$$\begin{aligned} \mu_i(\lambda) \prec \mu_j(\lambda) \Leftrightarrow & \exists \sigma \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιο ώστε } \forall \ell \in \{0, 1, \dots, \sigma - 1\} \\ & \text{έχουμε } a_{i,\ell} = a_{j,\ell} \text{ και } a_{i,\sigma} < a_{j,\sigma}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Σε αυτό το σημείο τονίζουμε ότι είναι σαφής η διάκριση των συμβόλων \preceq και \leq . Η σχέση $\mu_i(\lambda) \preceq \mu_j(\lambda)$ ισχύει ανεξάρτητα του λ και δε συνεπάγεται ότι $\mu_i(\lambda) \leq \mu_j(\lambda)$ για αυθαίρετο λ . Για παράδειγμα, οι ιδιοσυναρτήσεις $\mu_1(\lambda) = \lambda$ και $\mu_2(\lambda) = 3 - \lambda$ ικανοποιούν τη σχέση $\mu_1(\lambda) \preceq \mu_2(\lambda)$, αλλά από την άλλη δεν είναι αληθές ότι $\mu_1(\lambda) \leq \mu_2(\lambda)$ για κάθε λ .

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω διάταξη των συντελεστών οδηγεί σε μία ολική διάταξη στο σύνολο των αναλυτικών συναρτήσεων. Πράγματι, ας θεωρήσουμε $f(\lambda) = \sum a_k(\lambda - \lambda_0)^k$ μία μη μηδενική αναλυτική συνάρτηση με $a_p > 0$ τον πρώτο μη μηδενικό συντελεστή της σειράς. Προφανώς, για $\lambda \rightarrow \lambda_0^+$, το όριο $f(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)^p$ είναι θετικό και η f είναι θετική σε κάποια δεξιά γειτονιά του λ_0 . Συνεπώς, για δύο διακεχριμένες πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις $f(\lambda)$ και $g(\lambda)$, η σχέση $f \prec g$ με τη λεξικογραφική έννοια σημαίνει ότι f βρίσκεται κάτω από την g σε μία δεξιά ανοικτή γειτονιά του λ_0 , δηλαδή ότι $f(\lambda) < g(\lambda)$, για κάθε (λ_0, ϵ) και $\epsilon > 0$. Αν δύο αναλυτικές συναρτήσεις f και g συμπίπτουν σε οποιοδήποτε διάστημα, τότε πρέπει να ταυτίζονται σε ολόκληρο τον πραγματικό άξονα. Έτσι, δοθέντων δύο πραγματικών συναρτήσεων που δεν ταυτίζονται, κάποια είναι μεγαλύτερη από την άλλη σε κάποια δεξιά γειτονιά του λ_0 . Άρα από την (5.5) έχουμε μία διάταξη των ιδιοσυναρτήσεων $\mu_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, n$ του $P(\lambda)$ σε μία γειτονιά του λ_0 και έστω

$$\mu_1(\lambda) \preceq \mu_2(\lambda) \preceq \cdots \preceq \mu_n(\lambda). \quad (5.6)$$

5.3 Αρχές μεταβολών ιδιοσυναρτήσεων

Ακολούθως θεωρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\{\mu_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ διατεταγμένες λεξικογραφικά σύμφωνα με το ανάπτυγμά τους γύρω από το $\lambda_0 = 0$ στην (5.3) και σε μη φθίνουσα σειρά όπως στην (5.6).

Λήμμα 5.1. Εστω οι ιδιοσυναρτήσεις $\mu_j(\lambda)$ στην (5.6) και $\mu(\lambda) \in co \{\mu_i(\lambda), \dots, \mu_k(\lambda)\}$ για $1 \leq i < k \leq n$. Τότε $\mu_i(\lambda) \preceq \mu(\lambda) \preceq \mu_k(\lambda)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, θα αποδείξουμε ότι $\mu(\lambda) \preceq \mu_k(\lambda)$ για κάθε $1 < k \leq n$. Επαγωγικά, για $k = 2$ έχουμε $\mu(\lambda) = t\mu_1(\lambda) + (1-t)\mu_2(\lambda)$, για $t \in [0, 1]$. Τότε από την (5.3),

$$\mu(\lambda) = (ta_{1,0} + (1-t)a_{2,0}) + \lambda(ta_{1,1} + (1-t)a_{2,1}) + \cdots + \lambda^\tau(ta_{1,\tau} + (1-t)a_{2,\tau}) + \dots$$

Αν $\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)$, δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_1(\lambda) \prec \mu_2(\lambda)$. Τότε υπάρχει ένας δείκτης $p \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_{1,p} < a_{2,p}$ και $a_{1,\ell} = a_{2,\ell}$ ($\ell = 1, \dots, p-1$), ώστε προφανώς $a_{1,\ell} = ta_{1,\ell} + (1-t)a_{2,\ell} = a_{2,\ell}$ ($\ell = 1, \dots, p-1$) και επίσης

$$a_{1,p} < ta_{1,p} + (1-t)a_{2,p} < a_{2,p}.$$

Συνεπώς, $\mu_1(\lambda) \preceq \mu(\lambda) \preceq \mu_2(\lambda)$. Ακολούθως, υποθέτουμε ότι για κάθε $2 \leq k-1 < n$, η σχέση

$$\sum_{j=1}^{k-1} t_j \mu_j(\lambda) \preceq \mu_{k-1}(\lambda), \quad (5.7)$$

όπου $\sum_{j=1}^{k-1} t_j = 1$, $t_j \in [0, 1]$, είναι αληθής. Αν $\mu(\lambda) = \sum_{j=1}^k s_j \mu_j(\lambda)$, όπου $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ και $\sum_{j=1}^k s_j = 1$, για $t_j = s_j$ ($j = 1, \dots, k-2$) και $t_{k-1} = s_{k-1} + s_k$, από την (5.7) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{k-1} s_j \mu_j(\lambda) \preceq (1-s_k) \mu_{k-1}(\lambda) \preceq (1-s_k) \mu_k(\lambda)$$

και κατά συνέπεια καταλήγουμε στη σχέση $\mu(\lambda) = \sum_{j=1}^k s_j \mu_j(\lambda) \preceq \mu_k(\lambda)$.

Ομοίως, συμπεραίνουμε ότι $\mu(\lambda) \succeq \mu_i(\lambda)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Αφού κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x(\lambda) \in \mathbb{C}^n$ εκφράζεται $x(\lambda) = U(\lambda) \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$, όπου $U(\lambda)$ ο ορθοκανονικός πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του $P(\lambda)$, $x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \mu_j(\lambda)$ και προφανώς για την ποσότητα $x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda)$ έχουμε

$$\mu_1(\lambda) \preceq x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) \preceq \mu_n(\lambda),$$

δηλαδή το σύνολο $\{x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) : x(\lambda) \in \mathbb{C}^n, \|x(\lambda)\|_2 = 1\}$ είναι φραγμένο ως προς τη λεξιογραφική διάταξη.

Από τη διάταξη των ιδιοσυναρτήσεων $\mu_j(\lambda)$ και την προηγούμενη παρατήρηση οδηγούμαστε στο χαρακτηρισμό των $\mu_j(\lambda)$ ως *sup-inf* εκφράσεις, γενικεύοντας κατά τον τρόπο αυτόν αντίστοιχους χαρακτηρισμούς για τις ιδιοτιμές ερμιτιανών πινάκων [3], [33].

Θεώρημα 5.2. Εστω $n \times n$ αναλυτική αυτοσυζυγής συνάρτηση $P(\lambda)$ και έστω $\mu_j(\lambda)$ ($j = 1, \dots, n$) οι ιδιοσυναρτήσεις της σε μη φθίνουσα σειρά όπως στην

(5.6) σύμφωνα με το ανάπτυγμά τους σε δυναμοσειρά γύρω από το $\lambda_0 = 0$ στην (5.3). Τότε

$$\begin{aligned}\mu_j(\lambda) &= \inf_{\substack{\mathcal{S}(\lambda) \subset \mathbb{C}^n, \\ \dim \mathcal{S}(\lambda) = j}} \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}(\lambda), \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) \\ &= \sup_{\substack{\mathcal{T}(\lambda) \subset \mathbb{C}^n, \\ \dim \mathcal{T}(\lambda) = n-j+1}} \inf_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{T}(\lambda), \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ανάλογες ιδέες, όπως στο θεώρημα των Courant-Fischer. Έστω \mathcal{J} υπόχωρος του \mathbb{C}^n διάστασης j και $\mathcal{T}_j(\lambda) \equiv \text{span} \{u_j(\lambda), \dots, u_n(\lambda)\}$, όπου $u_\ell(\lambda)$ είναι τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του $P(\lambda)$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις $\mu_\ell(\lambda)$, ($\ell = j, \dots, n$). Επειδή $\mathcal{J} \cap \mathcal{T}_j(\lambda) \neq \{0\}$ για κάθε λ , θεωρούμε $x(\lambda) \in \mathcal{J} \cap \mathcal{T}_j(\lambda)$, με $\|x(\lambda)\|_2 = 1$. Συνεπώς, το διάνυσμα $x(\lambda)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$x(\lambda) = \sum_{\ell=j}^n c_\ell u_\ell(\lambda) \quad \text{με} \quad \sum_{\ell=j}^n |c_\ell|^2 = 1$$

και τότε

$$\begin{aligned}x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) &= \begin{bmatrix} \bar{c}_j & \dots & \bar{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^*(\lambda) \\ \vdots \\ u_n^*(\lambda) \end{bmatrix} P(\lambda) \begin{bmatrix} u_j(\lambda) & \dots & u_n(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{c}_j & \dots & \bar{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^*(\lambda) \\ \vdots \\ u_n^*(\lambda) \end{bmatrix} U(\lambda) \text{diag} \{\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)\} U^*(\lambda) \begin{bmatrix} u_j(\lambda) & \dots & u_n(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{c}_j & \dots & \bar{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n-j+1, j-1} & I_{n-j+1} \end{bmatrix} \text{diag} \{\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)\} \begin{bmatrix} 0_{j-1, n-j+1} \\ I_{n-j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\ell=j}^n |c_\ell|^2 \mu_\ell(\lambda) \in \text{co} \{\mu_j(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)\}.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Έτσι, από το Λήμμα 5.1 έχουμε $\mu_j(\lambda) \preceq x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda)$ και κατά συνέπεια

$$\mu_j(\lambda) \preceq \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{J}, \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda),$$

απ' όπου συμπεραίνουμε την έκφραση

$$\mu_j(\lambda) \leq \inf_{\substack{\mathcal{J} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{J} = j}} \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{J}, \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda), \quad (5.10)$$

επειδή ο υπόχωρος \mathcal{J} ($\dim \mathcal{J} = j$) είναι οισδήποτε. Ένας j -διάστατος υπόχωρος είναι επίσης ο $\mathcal{S}_j(\lambda) \equiv \text{span} \{u_1(\lambda), \dots, u_j(\lambda)\}$, ώστε μπορούμε να επιλέξουμε $\mathcal{J} \equiv \mathcal{S}_j(\lambda)$. Τότε για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda)$ ισχύει όπως προηγουμένως $x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) = \sum_{\ell=1}^j |\ell|^2 \mu_\ell(\lambda) \in \text{co} \{\mu_1(\lambda), \dots, \mu_j(\lambda)\}$. Συνεπώς, από το Λήμμα 5.1 προκύπτει ότι $x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) \leq \mu_j(\lambda)$ και τότε

$$\sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) \leq \mu_j(\lambda).$$

Επιλέγοντας $x(\lambda) = u_j(\lambda)$, καταλήγουμε στην

$$\mu_j(\lambda) = \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda).$$

Για την ειδική αυτή επιλογή υπόχωρου $\mathcal{S}_j(\lambda)$, συμπεραίνουμε την ισότητα στην (5.10), δηλαδή

$$\mu_j(\lambda) = \inf_{\substack{\mathcal{S}(\lambda) \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S}(\lambda) = j}} \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}(\lambda), \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda).$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για τον *sup-inf* χαρακτηρισμό του $\mu_j(\lambda)$. \square

Παρατηρούμε ότι για τους υπόχωρους $\mathcal{S}_j(\lambda) = \text{span}\{u_1(\lambda), \dots, u_j(\lambda)\}$ και $\mathcal{T}_j(\lambda) = \text{span}\{u_j(\lambda), \dots, u_n(\lambda)\}$, όπου $1 \leq j \leq n$, η παραπάνω απόδειξη οδηγεί στο συμπέρασμα

$$\mu_j(\lambda) = \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) = \inf_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{T}_j(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda). \quad (5.11)$$

Παρατήρηση 5.1. Προφανώς το Θεώρημα 5.2 ισχύει επίσης και για τη διάταξη των ιδιοσυναρτήσεων σύμφωνα με το ανάπτυγμά τους γύρω από οποιοδήποτε $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Οι τομές των γραφημάτων των ιδιοσυναρτήσεων $\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)$ με την ευθεία $\lambda = \lambda_0$ ορίζουν τις ιδιοτιμές $\{\mu_j(\lambda_0)\}_{j=1}^n$ του ερμιτιανού $P(\lambda_0)$. Στην περίπτωση

αυτή, από τη λεξικογραφική διάταξη των ιδιοσυναρτήσεων σύμφωνα με τα αναπτύγματά τους σε δυναμοσειρά γύρω από το λ_0

$$\mu_j(\lambda) = a_{j,0} + a_{j,1}(\lambda - \lambda_0) + a_{j,2}(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots, \quad j = 1, \dots, n$$

έχουμε $\mu_j(\lambda_0) = a_{j,0}$ και προφανώς η λεξικογραφική διάταξη $\mu_1(\lambda) \preceq \mu_2(\lambda) \preceq \dots \preceq \mu_n(\lambda)$ είναι συμβατή με τη διάταξη $\mu_1(\lambda_0) \leq \mu_2(\lambda_0) \leq \dots \leq \mu_n(\lambda_0)$ των ιδιοτιμών του ερμιτιανού $P(\lambda_0)$. Θέτοντας $\lambda = \lambda_0$ και αντικαθιστώντας \min όπου \inf και \max όπου \sup στις αρχές μεταβολών του Θεωρήματος 5.2, οι λεξικογραφικές αυτές ισότητες μετατρέπονται σε αριθμητικές, δηλαδή στις κλασικές αρχές μεταβολών για τις ιδιοτιμές του ερμιτιανού $P(\lambda_0)$.

Στην περίπτωση που $P(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$ είναι αυτοσυγχρόνης πολυωνυμικός πίνακας με $\lambda \in \mathbb{R}$, μία εναλλακτική περιγραφή του φάσματός του σε σχέση με τις ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\sigma(P) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει } j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ τέτοιο ώστε } \mu_j(\lambda) = 0\},$$

αφού οι ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ ορίζονται ως οι τομές των ιδιοσυναρτήσεων $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)$ με τον πραγματικό άξονα $\lambda\lambda'$. Από την αναλυτικότητα του ιδιοδιαινύσματος $u_j(\lambda)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση $\mu_j(\lambda)$, μπορούμε να θεωρήσουμε το ανάπτυγμά του σε δυναμοσειρά γύρω από το λ_0 :

$$u_j(\lambda) = u_{j,0} + u_{j,1}(\lambda - \lambda_0) + u_{j,2}(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \quad (5.12)$$

Την θυμητίζουμε ότι μία συνάρτηση $x(\lambda)$ που είναι αναλυτική σε γειτονιά του λ_0 καλείται [28] συνάρτηση-γεννήτορας (*generating function*) για το $P(\lambda)$ τάξης p στο σημείο $\lambda = \lambda_0$ αν $P(\lambda)x(\lambda) = O(|\lambda - \lambda_0|^p)$.

Πρόταση 5.3. Εστω $P(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$ αυτοσυγχρόνης $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ιδιοτιμή του $\lambda_0 \in \sigma(P)$ είναι ριζα της ιδιοσυνάρτησης $\mu_j(\lambda)$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ αλγεβρικής πολλαπλότητας s . Τότε $u_j(\lambda)$ είναι συνάρτηση-γεννήτορας του $P(\lambda)$ τάξης s στο σημείο λ_0 .

Απόδειξη. Μία διανυσματική συνάρτηση $x(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i (\lambda - \lambda_0)^i$ αποτελεί συνάρτηση-γεννήτορα του $P(\lambda)$ τάξης p στο σημείο λ_0 [38, Λήμμα 11.3] αν και μόνον αν τα διανύσματα x_0, \dots, x_{p-1} συνιστούν μία αλυσίδα Jordan του $P(\lambda)$ που αντιστοιχεί στο $\lambda = \lambda_0$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι οι συντελεστές

$u_{j,0}, u_{j,1}, \dots, u_{j,(s-1)}$ στην (5.12) αποτελούν μία αλυσίδα Jordan που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 του $P(\lambda)$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $u_j(\lambda)$ στην (5.12) στο σημείο $\lambda = \lambda_0$ έχουμε

$$u_j^{(t)}(\lambda_0) = t! u_{j,t}, \quad 0 \leq t \leq s-1. \quad (5.13)$$

Επίσης, παραγωγίζοντας t φορές την εξίσωση $P(\lambda)u_j(\lambda) = \mu_j(\lambda)u_j(\lambda)$ στο $\lambda = \lambda_0$ έχουμε

$$\sum_{i=0}^t \binom{t}{i} P^{(t-i)}(\lambda_0) u_j^{(i)}(\lambda_0) = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} \mu_j^{(t-i)}(\lambda_0) u_j^{(i)}(\lambda_0) = 0,$$

αφού $\mu_j(\lambda_0) = \mu_j'(\lambda_0) = \dots = \mu_j^{(s-1)}(\lambda_0) = 0$. Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την (5.13), προκύπτει ότι

$$\sum_{i=0}^t \frac{t!}{(t-i)!} P^{(t-i)}(\lambda_0) u_{j,i} = 0, \quad 0 \leq t \leq s-1. \quad (5.14)$$

Την πενθυμίζοντας τον τύπο (5.4) για τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, προφανώς από την (5.14) συμπεραίνουμε $u_{j,t} = x_t$ ($t = 0, 1, \dots, s-1$), όπου $\{x_0, \dots, x_{s-1}\}$ είναι μία αλυσίδα Jordan που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 . \square

Από την Πρόταση 5.3, προφανώς αν λ_i αποτελεί ρίζα των ιδιοσυναρτήσεων $\mu_{i_1}(\lambda), \dots, \mu_{i_k}(\lambda)$ με πολλαπλότητες s_{i_1}, \dots, s_{i_k} , τότε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $x_{i,0} \in \text{span}\{u_{i_1,0}, \dots, u_{i_k,0}\}$, \dots , $x_{i,s_r} \in \text{span}\{u_{i_1,s_r}, \dots, u_{i_k,s_r}\}$ με $s_r = \min\{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}\}$.

Στη συνέχεια, αναφερόμαστε σε υπερβολικούς πολυωνυμικούς πίνακες $P(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους με εφαρμογή του Θεωρήματος 5.2, οδηγούμαστε σε χαρακτηρισμούς μεταβολών για τις ιδιοτιμές τους ως προς τις ρίζες $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^m$ των βαθμωτών πολυωνύμων $\pi_x(\lambda) = x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda)$. Χρειαζόμαστε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 5.4. Εστω $o \times n$ υπερβολικός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i$ με ζώνες ρίζών $\{\Delta_i^\pm\}_{i=1}^m$, όπου το πρόσημο συμβολίζει το είδος των ιδιοτιμών του $P(\lambda)$ που περιλαμβάνονται στην εκάστοτε ζώνη. Τότε για $\lambda \in \Delta_i^+$ (Δ_i^-) ισχύει ότι

$$\lambda > \rho_i(x) \Leftrightarrow \pi_x(\lambda) = x^* P(\lambda) x > (<)0,$$

$$\lambda < \rho_i(x) \Leftrightarrow \pi_x(\lambda) = x^* P(\lambda) x < (>)0,$$

για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη. Αφού $P(\lambda)$ είναι υπερβολικός πολυωνυμικός πίνακας, ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής $x^* A_m x$ του βαθμωτού πολυωνύμου $\pi_x(\lambda)$ είναι θετικός για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$. Συνεπώς, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \pi_x(\lambda) = -\infty$, αν m είναι περιττός και $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \pi_x(\lambda) = \infty$, αν m άρτιος. Στην περίπτωση που m είναι περιττός (άρτιος), το πολυώνυμο $\pi_x(\lambda)$ αυξάνει (φθίνει) στο $\rho_1(x)$ και επιπλέον η ζώνη Δ_1^+ (Δ_1^-) περιέχει ιδιοτιμές θετικού (αρνητικού) τύπου. Καθώς οι τύποι ιδιοτιμών εναλλάσσονται, το γενικό αποτέλεσμα έπεται σε κάθε περίπτωση. \square

Σημειώνουμε ότι οι ανωτέρω συλλογισμοί μάς επιτρέπουν να καθορίσουμε τους τύπους των ιδιοτιμών σε διαδοχικές ζώνες ριζών, δηλαδή αν $m = 2k$, τότε οι ζώνες Δ_i^- για $i = 2\ell + 1$ ($\ell = 0, 1, \dots, k-1$) περιέχουν ιδιοτιμές αρνητικού τύπου, ενώ οι Δ_i^+ για $i = 2\ell$ ($\ell = 1, \dots, k$) θετικού. Για $m = 2k+1$, τα πρόσημα στις ζώνες εναλλάσσονται. Ο χαρακτηρισμός αυτός μάς οδηγεί να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές λ_i σε κάθε ζώνη ριζών Δ_i^\pm μέσω min-max εκφράσεων.

Πρόταση 5.5. Εστω ο $n \times n$ υπερβολικός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i$ με ιδιοτιμές $\{\lambda_j\}_{j=1}^{mn}$ σε μη φθίνουσα σειρά. Τότε για $\lambda_j \in \Delta_i^\pm$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) έχουμε

$$\lambda_j = \max_{\substack{T \subset \mathbb{C}^n \\ \dim T = n-k+1}} \min_{\substack{x \in T \\ x \neq 0}} \rho_i(x) = \min_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S} = k}} \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ x \neq 0}} \rho_i(x), \quad (5.15)$$

όπου $j \equiv k \pmod{n}$, $\rho_i(x)$ είναι η ρίζα του πολυωνύμου $\pi_x(\lambda)$ που ορίζει τη ζώνη ριζών $\Delta_i^\pm = \{\rho_i(x) : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$.

Απόδειξη. Για το χαρακτηρισμό της λ_j σε κάποια ζώνη ριζών Δ_i^+ ($i \in \{1, \dots, m\}$), θεωρούμε τη διάταξη των ιδιοσυναρτήσεων $\mu_1(\lambda) \preceq \mu_2(\lambda) \preceq \dots \preceq \mu_n(\lambda)$ σύμφωνα με τις αναλυτικές τους εκφράσεις γύρω από το λ_j . Υπενθυμίζουμε ότι η διάταξη αυτή συμπίπτει με εκείνη των ιδιοτιμών του $P(\lambda_j)$, δηλαδή $\mu_1(\lambda_j) \leq \dots \leq \mu_n(\lambda_j)$. Αφού $j \equiv k \pmod{n}$, τότε οι ιδιοτιμές (σε μη φθίνουσα σειρά) του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ στη ζώνη Δ_i^+ που δεν είναι μεγαλύτερες από τη $\lambda_j \equiv \lambda_{(i-1)n+k}$ (δηλαδή οι $\lambda_{(i-1)n+1} \leq \lambda_{(i-1)n+2} \leq \dots \leq \lambda_{(i-1)n+k-1}$) είναι ρίζες των ιδιοσυναρτήσεων $\{\mu_{n-k+2}(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)\}$, καθώς αυτές είναι οι μόνες ιδιοσυναρτήσεις που λαμβάνουν θετικές τιμές στο σημείο $\lambda = \lambda_j$. Προφανώς λ_j είναι ρίζα του $\mu_{n-k+1}(\lambda)$ και ειδικότερα

$$\mu_1(\lambda_j) \leq \mu_2(\lambda_j) \leq \dots \leq \mu_{n-k}(\lambda_j) \leq \mu_{n-k+1}(\lambda_j) = 0 \leq \mu_{n-k+2}(\lambda_j) \leq \dots \leq \mu_n(\lambda_j).$$

Όπως φαίνεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2, έχουμε την έκφραση

$$\mu_{n-k+1}(\lambda) = \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}_{n-k+1}(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2=1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda),$$

όπου $\mathcal{S}_{n-k+1}(\lambda) = \text{span} \{u_1(\lambda), \dots, u_{n-k+1}(\lambda)\}$. Αντικαθιστώντας $\lambda = \lambda_j$ προκύπτει

$$0 = \mu_{n-k+1}(\lambda_j) = \max_{\substack{x(\lambda_j) \in \mathcal{S}_{n-k+1}(\lambda_j) \\ \|x(\lambda_j)\|_2=1}} x(\lambda_j)^* P(\lambda_j) x(\lambda_j) = \max_{\substack{x \in \mathcal{S}_{n-k+1}(\lambda_j) \\ \|x\|_2=1}} \pi_x(\lambda_j),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $0 \geq \pi_x(\lambda_j)$ για κάθε $x \in \mathcal{S}_{n-k+1}(\lambda_j)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.4 έχουμε

$$\lambda_j \leq \rho_i(x) \text{ για κάθε } x \in \mathcal{S}_{n-k+1}(\lambda_j) \Rightarrow \lambda_j \leq \min_{\substack{x \in \mathcal{S}_{n-k+1}(\lambda_j) \\ x \neq 0}} \rho_i(x)$$

και συνεπώς,

$$\lambda_j \leq \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{T} = n-k+1}} \min_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ x \neq 0}} \rho_i(x). \quad (5.16)$$

Από την άλλη πλευρά, αφού για κάθε $(n-k+1)$ -διάστατο υπόχωρο $\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n$ έχουμε $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{n-k+1}(\lambda) \neq \{0\}$, όπου $\mathcal{T}_{n-k+1}(\lambda) = \text{span} \{u_{n-k+1}(\lambda), \dots, u_n(\lambda)\}$, υπάρχει κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $\tilde{x}(\lambda) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{n-k+1}(\lambda)$ για το οποίο προφανώς ισχύει ότι $\mu_{n-k+1}(\lambda) \preceq \tilde{x}(\lambda)^* P(\lambda) \tilde{x}(\lambda)$. Άρα, για $\lambda = \lambda_j$ έχουμε

$$0 = \mu_{n-k+1}(\lambda_j) \leq \tilde{x}(\lambda_j)^* P(\lambda_j) \tilde{x}(\lambda_j) \leq \max_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ \|x\|_2=1}} \pi_x(\lambda_j).$$

Θεωρώντας $x_0 \in \mathcal{T}$, για το οποίο λαμβάνεται το $\max_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ \|x\|_2=1}} \pi_x(\lambda_j)$, τότε το Λήμμα 5.4 συνεπάγεται ότι $\lambda_j \geq \rho_i(x_0)$, απόπου καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\lambda_j \geq \min_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ x \neq 0}} \rho_i(x) \Rightarrow \lambda_j \geq \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{T} = n-k+1}} \min_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ x \neq 0}} \rho_i(x). \quad (5.17)$$

Προφανώς, από τις (5.16) και (5.17) συμπεραίνεται η πρώτη ισότητα στην (5.15).

Συνεχίζουμε ομοιοτρόπως για τους υπόλοιπους ισχυρισμούς. \square

Οι χαρακτηρισμοί της Πρότασης 5.5 επεκτείνουν εκείνους στο [13, Θεώρημα 2.1], ώστε να περιλάβουν τις ιδιοτιμές υπερβολικών πολυωνυμικών πινάκων. Εδώ το πολυώνυμο $\pi_x(\lambda)$ έχει τη διαχριτές πραγματικές ρίζες και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις στην εργασία [13].

Εξειδίκευση της Πρότασης 5.5 για υπερβολικά γραμμικά πολυώνυμα $P(\lambda) = A - \lambda B$ (για τα οποία $B < 0$) δίνει το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.6. Για τις ιδιοτιμές $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ενός υπερβολικού pencil $P(\lambda) = A - \lambda B$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $B < 0$) ισχύουν

$$\lambda_j = \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{T} = n-j+1}} \min_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ x \neq 0}} \frac{x^* Ax}{x^* Bx} = \min_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S} = j}} \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ x \neq 0}} \frac{x^* Ax}{x^* Bx}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ανεξαρτήτως του τύπου της ιδιοτιμής λ_j .

Γενικότερα, για ένα γραμμικό πολυώνυμο $P(\lambda) = A - \lambda B$ στο \mathbb{R} , με $B \geq 0$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ερμιτιανούς πίνακες, οι αρχές μεταβολών του Θεωρήματος 5.2 οδηγούν στην ακόλουθη πρόταση. Για έναν ερμιτιανό πίνακα A και κάθε διάστημα I συμβολίζουμε

$$\mathcal{L}_I(A) = \text{span} \{x : x \text{ είναι ιδιοδιάγνυμα του } A \text{ που αντιστοιχεί σε } \lambda \in \sigma(A) \cap I\}.$$

Πρόταση 5.7. Για τις ιδιοτιμές $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r$ του $P(\lambda) = A - \lambda B$ ισχύει

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \min_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S} = k_j}} \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ x^* Bx > 0}} \frac{x^* Ax}{x^* Bx} \\ &= \max_{\substack{\mathcal{T} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{T} = n-k_j+1}} \min_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ x^* Bx > 0}} \frac{x^* Ax}{x^* Bx}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\text{όπου } k_j = \dim \mathcal{L}_{(-\infty, 0]}(P(\lambda_j))$$

Απόδειξη. Για την ιδιοτιμή λ_j ($j \in \{1, 2, \dots, r\}$) του $P(\lambda) = A - \lambda B$, θεωρούμε τη διάταξη των ιδιοσυναρτήσεων $\mu_1(\lambda) \preceq \mu_2(\lambda) \preceq \dots \preceq \mu_n(\lambda)$ σύμφωνα με τις αναλυτικές τους εκφράσεις γύρω από το λ_j και υποθέτουμε ότι λ_j αποτελεί ρίζα της ιδιοσυνάρτησης $\mu_k(\lambda)$ για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Όπως προηγουμένως, για τον υπόχωρο $\mathcal{S}_k(\lambda) = \text{span} \{u_1(\lambda), \dots, u_k(\lambda)\}$ έχουμε ότι $0 = \mu_k(\lambda_j) = \max_{\substack{x \in \mathcal{S}_k(\lambda_j) \\ \|x\|_2=1}} \pi_x(\lambda_j) = \max_{\substack{x \in \mathcal{S}_k(\lambda_j) \\ \|x\|_2=1}} [x^* Ax - \lambda_j x^* Bx]$, απ' όπου προκύπτει ότι

$$\lambda_j = \max_{\substack{x \in \mathcal{S}_k(\lambda_j) \\ x^* Bx > 0}} \frac{x^* Ax}{x^* Bx}. \quad (5.19)$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε k -διάστατο υπόχωρο $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$, έχουμε $0 = \mu_k(\lambda_j) \leq \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ \|x\|_2=1}} \pi_x(\lambda_j)$ και επιλύοντας ως προς λ_j ,

$$\lambda_j \leq \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ x^* Bx > 0}} \frac{x^* Ax}{x^* Bx} \Rightarrow \lambda_j \leq \min_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S} = k}} \max_{\substack{x \in \mathcal{S} \\ x^* Bx > 0}} \frac{x^* Ax}{x^* Bx}. \quad (5.20)$$

Η ισότητα (5.18) είναι συνέπεια των (5.19) και (5.20).

Αντίστοιχα, για την άλλη ισότητα.

□

Ανάλογο για μη φραγμένους τελεστές A, B σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert \mathcal{H} με διαφορετική απόδειξη είναι το αποτέλεσμα [13, Πρόταση 2].

5.4 Σχετικά αποτελέσματα

Οι χαρακτηρισμοί του Θεωρήματος 5.2 έχουν ως συνέπεια τις ακόλουθες σχέσεις που διαπλέκουν τις ιδιοσυναρτήσεις μιας $n \times n$ αυτοσυζυγούς συνάρτησης $P(\lambda)$ με εκείνες μιας εμφυτεύσιμης στην $P(\lambda)$ συνάρτησης $Q(\lambda) = V^*P(\lambda)V$, όπου $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ ισομετρία. Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο, όπως στην περίπτωση των ερμιτιανών ([3] και [35]).

Πρόταση 5.8. *Εστω οι αναλυτικές αυτοσυζυγείς συναρτήσεις $P(\lambda)$ και $Q(\lambda)$ διαστάσεων $n \times n$ και $(n-k) \times (n-k)$ αντίστοιχα, όπου $Q(\lambda)$ εμφυτεύσιμη στον $P(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $1 \leq k < n$. Άνταξη*

$$t_1(\lambda) \preceq t_2(\lambda) \preceq \cdots \prec t_{n-k}(\lambda)$$

είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του $Q(\lambda)$, τότε για $1 \leq j \leq n-k$,

$$\mu_j(\lambda) \preceq t_j(\lambda) \preceq \mu_{j+k}(\lambda).$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του Rellich έχουμε

$$Q(\lambda) = W(\lambda) \operatorname{diag} \{t_1(\lambda), \dots, t_{n-k}(\lambda)\} W^*(\lambda), \quad (5.21)$$

όπου $W(\lambda)$ είναι $(n-k) \times (n-k)$ ορθομοναδιαία συνάρτηση, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Άν $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ η ισομετρία για την εμφύτευση του $Q(\lambda)$ στον $P(\lambda)$, προφανώς $\operatorname{diag} \{t_1(\lambda), \dots, t_{n-k}(\lambda)\} = W^*(\lambda) V^* P(\lambda) V W(\lambda)$. Για $1 \leq j \leq n-k$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\tilde{\mathcal{S}}(\lambda) = \operatorname{span} \{r_1(\lambda), \dots, r_j(\lambda)\}$, όπου $\{r_\ell(\lambda)\}_{\ell=1}^{n-k}$ οι στήλες της ισομετρίας $VW(\lambda)$. Τότε από το Θεώρημα 5.2,

$$\mu_j(\lambda) = \inf_{\substack{\mathcal{S}(\lambda) \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S}(\lambda) = j}} \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}(\lambda), \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda) \preceq \sup_{\substack{x(\lambda) \in \tilde{\mathcal{S}}(\lambda), \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x(\lambda)^* P(\lambda) x(\lambda)$$

και αντικαθιστώντας στην τελευταία $x(\lambda) = VW(\lambda) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0_{n-k-j} \end{bmatrix}$, όπου $\tilde{x} \in \mathbb{C}^j$ μοναδιαίο, καταλήγουμε στην

$$\mu_j(\lambda) \preceq \sup_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{C}^j, \\ \|\tilde{x}\|_2 = 1}} \begin{bmatrix} \tilde{x}^* & 0_{n-k-j}^* \end{bmatrix} \operatorname{diag} \{t_1(\lambda), \dots, t_r(\lambda)\} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0_{n-k-j} \end{bmatrix} = t_j(\lambda).$$

Για τη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε τον *sup-inf* χαρακτηρισμό του μ_{j+k} στο Θεώρημα 5.2, αναφορικά με τον υπόχωρο $\tilde{T}(\lambda) = \text{span}\{r_j(\lambda), \dots, r_{n-k}(\lambda)\}$ και προχωρούμε αναλόγως. \square

Πρόταση 5.9. Εστω οι $n \times n$ αναλυτικές, αυτοσυζυγείς συναρτήσεις $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ και $R(\lambda) = P_1(\lambda) - P_2(\lambda)$. Συμβολίζοντας με $(\mu_\ell(\lambda), u_\ell(\lambda))$, $(t_\ell(\lambda), v_\ell(\lambda))$ και $(s_\ell(\lambda), w_\ell(\lambda))$, $\ell = 1, \dots, n$ τα αντίστοιχα ιδιοζεύγη των $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ και $R(\lambda)$ και θεωρώντας κάθε ομάδα ιδιοσυναρτήσεων σε μη φθίνουσα λεξικογραφική σειρά, τότε

$$\begin{aligned} s_j(\lambda) &\succeq \mu_i(\lambda) - t_n(\lambda), \quad \text{για } i \leq j, \\ s_j(\lambda) &\preceq \mu_i(\lambda) - t_1(\lambda), \quad \text{για } i \geq j. \end{aligned}$$

Ειδικότερα για $i = j$,

$$\mu_j(\lambda) - t_n(\lambda) \preceq s_j(\lambda) \preceq \mu_j(\lambda) - t_1(\lambda).$$

Απόδειξη. Για $j \geq i$ θεωρούμε τους υπόχωρους $\mathcal{J}_1(\lambda) = \text{span}\{u_i(\lambda), \dots, u_n(\lambda)\}$, $\mathcal{J}_2(\lambda) = \text{span}\{v_{j-i+1}(\lambda), \dots, v_n(\lambda)\}$, $\mathcal{J}_3(\lambda) = \text{span}\{w_1(\lambda), \dots, w_j(\lambda)\}$ και το μοναδιαίο διάνυσμα $y(\lambda) \in \mathcal{J}_1(\lambda) \cap \mathcal{J}_2(\lambda) \cap \mathcal{J}_3(\lambda)$, αφού η τομή των υπόχωρων αυτών είναι μη τετριμένη. Επειδή $y(\lambda) \in \mathcal{J}_1(\lambda)$, από το Λήμμα 5.1 έχουμε $\mu_i(\lambda) \preceq y(\lambda)^* P_1(\lambda) y(\lambda) \preceq \mu_n(\lambda)$ και επιπλέον, καθώς $y(\lambda) \in \mathcal{J}_2(\lambda)$, τότε $t_{j-i+1}(\lambda) \preceq y^*(\lambda) P_2(\lambda) y(\lambda) \preceq t_n(\lambda)$. Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} s_j(\lambda) &= \sup_{x(\lambda) \in \mathcal{J}_3(\lambda)} x^*(\lambda) R(\lambda) x(\lambda) \succeq y^*(\lambda) R(\lambda) y(\lambda) \\ &= y^*(\lambda) P_1(\lambda) y(\lambda) - y^*(\lambda) P_2(\lambda) y(\lambda) \succeq \mu_i(\lambda) - t_n(\lambda). \end{aligned}$$

Για την περίπτωση $j \leq i$, έστω $\tilde{\mathcal{J}}_1(\lambda) = \text{span}\{u_1(\lambda), \dots, u_i(\lambda)\}$, $\tilde{\mathcal{J}}_2(\lambda) = \text{span}\{v_1(\lambda), \dots, v_{n-i+j}(\lambda)\}$ και $\tilde{\mathcal{J}}_3(\lambda) = \text{span}\{w_j(\lambda), \dots, w_n(\lambda)\}$. Ομοίως, για το μοναδιαίο $y(\lambda) \in \tilde{\mathcal{J}}_1(\lambda) \cap \tilde{\mathcal{J}}_2(\lambda) \cap \tilde{\mathcal{J}}_3(\lambda)$ συμπεραίνουμε

$$s_j(\lambda) = \inf_{x(\lambda) \in \tilde{\mathcal{J}}_3(\lambda)} x^*(\lambda) R(\lambda) x(\lambda) \preceq y^*(\lambda) R(\lambda) y(\lambda) \preceq \mu_i(\lambda) - t_1(\lambda).$$

\square

Επιπλέον, διατηρώντας τους συμβολισμούς της Πρότασης 5.9 έχουμε:

Πρόταση 5.10. Εστω $\mu_j(\lambda), t_j(\lambda)$ ($j = 1, \dots, n$) οι διατεταγμένες ιδιοσυναρτήσεις των $n \times n$ αναλυτικών, αυτοσυζυγών συναρτήσεων $P_1(\lambda)$ και $P_2(\lambda)$ αντιστοίχως. Αν για την ελάχιστη ιδιοσυνάρτηση του $R(\lambda) = P_2(\lambda) - P_1(\lambda)$ ισχύει $s_1(\lambda) \succeq 0$, τότε $\mu_j(\lambda) \preceq t_j(\lambda)$, για $j = 1, \dots, n$.

Απόδειξη. Από τα ιδιοδιανύσματα $v_\ell(\lambda)$ του $P_2(\lambda)$ θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{S}_j(\lambda) = \text{span} \{v_1(\lambda), \dots, v_j(\lambda)\}$. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε j -διάστατο υπόχωρο $\mathcal{S}(\lambda)$ το σύνολο $\{x^*(\lambda)P_1(\lambda)x(\lambda) : x(\lambda) \in \mathcal{S}(\lambda), \|x(\lambda)\|_2 = 1\}$ είναι φραγμένο σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη. Έτσι, θεωρούμε μοναδιαίο διάνυσμα $y(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda)$ τέτοιο ώστε

$$y^*(\lambda)P_1(\lambda)y(\lambda) = \sup_{x(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda)} x^*(\lambda)P_1(\lambda)x(\lambda).$$

Τότε, από το Θεώρημα 5.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_j(\lambda) &= \inf_{\substack{\mathcal{S}(\lambda) \subset \mathbb{C}^n \\ \dim \mathcal{S}(\lambda) = j}} \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x^*(\lambda)P_1(\lambda)x(\lambda) \\ &\leq \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x^*(\lambda)P_1(\lambda)x(\lambda) = y^*(\lambda)P_1(\lambda)y(\lambda) \end{aligned}$$

και επίσης από την (5.11),

$$t_j(\lambda) = \sup_{\substack{x(\lambda) \in \mathcal{S}_j(\lambda) \\ \|x(\lambda)\|_2 = 1}} x^*(\lambda)P_2(\lambda)x(\lambda) \succeq y^*(\lambda)P_2(\lambda)y(\lambda).$$

Επειδή για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x(\lambda) \in \mathbb{C}^n$ ισχύει ότι $x^*(\lambda)R(\lambda)x(\lambda) \in \text{co}\{s_1(\lambda), s_n(\lambda)\}$ και επιπλέον $s_1(\lambda) \succeq 0$, προφανώς $x(\lambda)^*R(\lambda)x(\lambda) \succeq 0$, το οποίο ειδικότερα συνεπάγεται ότι $y^*(\lambda)P_2(\lambda)y(\lambda) \succeq y^*(\lambda)P_1(\lambda)y(\lambda)$ και κατά συνέπεια $\mu_j(\lambda) \preceq t_j(\lambda)$. \square

Έστω

$$s_j(\lambda) = s_{j,0} + \lambda s_{j,1} + \lambda^2 s_{j,2} + \dots, \quad j = 1, \dots, n$$

οι αναλυτικές εκφράσεις των ιδιοσυναρτήσεων της αναλυτικής, αυτοσυζυγούς συνάρτησης $R(\lambda) = P_2(\lambda) - P_1(\lambda)$ σε μία γειτονιά του $\lambda_0 = 0$. Προφανώς για $\lambda = 0$, οι συντελεστές $s_{j,0}$, ($j = 1, \dots, n$) είναι οι ιδιοτιμές του ερμιτιανού πίνακα $R(0)$ σε μη φθίνουσα σειρά, δηλαδή

$$- \|R(0)\|_2 \leq s_{1,0} \leq s_{2,0} \leq \dots \leq s_{n,0} \leq \|R(0)\|_2$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.10, διατυπώνουμε το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 5.11. Εστω οι $n \times n$ αναλυτικές, αυτοσυγγείς συναρτήσεις $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ και $R(\lambda) = P_2(\lambda) - P_1(\lambda)$. Αν $R(\lambda)$ έχει ιδιοσυναρτήσεις

$$-d \preceq s_1(\lambda) \preceq \cdots \preceq s_n(\lambda) \preceq d,$$

όπου $d = \|R(0)\|_2$, τότε

$$\mu_j(\lambda) - d \preceq t_j(\lambda) \preceq \mu_j(\lambda) + d.$$

Απόδειξη. Προφανώς οι ιδιοσυναρτήσεις του $P_2(\lambda) - P_1(\lambda) + dI$ είναι $s_\ell(\lambda) + d$ ($\ell = 1, \dots, n$) και μάλιστα $0 \preceq s_1(\lambda) + d$. Τότε, από την Πρόταση 5.10 έχουμε $\mu_j(\lambda) - d \preceq t_j(\lambda)$.

Ομοίως, οι ιδιοσυναρτήσεις της $P_1(\lambda) - P_2(\lambda) + dI$ είναι $-s_\ell(\lambda) + d$, για την ελάχιστη από τις οποίες, $-s_n(\lambda) + d$, ισχύει $0 \preceq -s_n(\lambda) + d$. Συνεπώς, από την Πρόταση 5.10 καταλήγουμε στο συμπέρασμά μας. \square

Abstract of Thesis:

Spectral analysis for imbedded normal matrices

An $n \times n$ matrix A with complex entries is **normal**, exactly when $AA^* = A^*A$, where A^* denotes the conjugate-transpose of A . If the entries of A are real numbers, clearly the above definition reduces to $AA^T = A^TA$, where A^T denotes the transpose matrix of A . The study of normal matrices has been distinctly successful. The spectral theorem, according to which a normal matrix A is unitarily diagonalizable, gives the normal matrices a concrete structure, which is reflected in the various expressions that are equivalent to the definition of normality. The interested reader can find a list of 89 such expressions in the papers [20] and [31]. Moreover, the class of normal matrices arises frequently in applications, including as it does the subclasses of hermitian, unitary and real symmetric matrices.

In this thesis, we denote by $\mathbb{C}^{m \times n}$ the space of $m \times n$ matrices with complex entries and consider the pair of *normal* matrices $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ and $B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, with $1 \leq k < n$. The matrix B is **imbeddable** in A , or a **compression** of A , if there exists an isometry $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ (i.e. $V^*V = I_{n-k}$), such that $V^*AV = B$.

Denoting by $\sigma(\cdot)$ the spectrum of a matrix, a natural question is to investigate how the spectra $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ and $\sigma(B) = \{\mu_i\}_{i=1}^{n-k}$ of the normal matrices A and B respectively are involved, so that B is imbeddable in A .

In the special case where A and B are *hermitian* matrices, this problem has been solved by K. Fan and G. Pall in the paper [14]. In this case, the necessary and sufficient condition is that the **interlacing inequalities** for the (real) eigenvalues of A and B are fulfilled. More specifically, if $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ and

$B \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ are hermitian matrices with eigenvalues $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ in non-decreasing order respectively, then B is imbeddable in A if and only if

$$\mu_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+k}], \text{ for } j = 1, \dots, n - k. \quad (5.22)$$

The corresponding problem for A and B normal was studied by K. Fan and G. Pall in the paper above, only in the case $k = 1$: If A and B are normal of dimensions $n \times n$ and $(n - 1) \times (n - 1)$ respectively, the imbedding $B = V^*AV$, with $V^*V = I_{n-1}$, is satisfied if and only if the distinct eigenvalues of A and B are collinear and interlacing. This interesting result was not followed by further analysis about what occurs for larger k . In this direction, some necessary (but, not sufficient) conditions have been proved by D. Carlson - E. Marques de Sa in [7, Thm. 2.3] and J.F. Queiro - A.L. Duarte in [42, Thm. 4.1].

In the second chapter of this dissertation, we consider conditions for interlacing for normal matrices. Initially, futher elaboration of a Theorem by Jiang-Kuo in [32, Thm. 2.13], leads us to generalize Thm. 2 in [14] for normal matrices with groups of collinear eigenvalues and $k > 1$. As a consequence of this, we present upper and lower bounds on the number of eigenvalues of the imbeddable matrix B that lie in a closed, convex set, with respect to the number of eigenvalues of A in the same set, generalizing thus a recent result by R. Horn in [27]. In addition, we review and elaborate on the necessary imbedding conditions of Queiro-Duarte in [42, Thm. 4.1] and Carlson-de Sa in [7, Thm. 2.3] and provide the links between them. Moreover, we give an answer to a problem posed in [42] considering the geometric configurations of sets of complex numbers satisfying [42, Thm. 4.1] in the case of convexly independent sets. In particular, for $k = 1$, we prove that sets satisfying either [42, Thm. 4.1] or [7, Thm. 2.3] are collinear and interlacing on their common line.

In the third chapter, we consider mainly hermitian matrices and in particular are concerned with the sufficiency of (5.22). Hence, letting $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, $\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ satisfying (5.22) we construct $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$, such that $A = \text{diag}\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ and $B = \text{diag}\{\mu_j\}_{j=1}^{n-k}$ are related via $B = V^*AV$. Our approach is realized in two steps. Initially, a new proof of (5.22) for $k = 1$ is given, based on the construction of compressions of normal matrices, presented by M. Adam and J. Maroulas in [1]. Hence, a geometric profile of the generating isometry V appears from the sufficiency of (5.22). Futher, we provide two methods for the

construction of V for $k > 1$, based on the procedure for the case $k = 1$. The case when A and B are normal is then considered and a new set of conditions for the determination of an isometry V is presented, in the case B is imbeddable in A , in terms of the real and imaginary parts of their eigenvalues. These conditions are quite technical, but nonetheless are used to disprove a natural conjecture concerning the sufficiency of [42, Thm. 4.1].

In the fourth chapter, considering a normal matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ and a point $\mu_1 \in w(A) \setminus \sigma(A)$, we determine the minimum integer $1 \leq k < n$, such that the relationship $V^*AV = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\}$ is satisfied, for an isometry $V \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ and suitable points $\mu_2, \dots, \mu_{n-k} \in w(A) \setminus \sigma(A)$. It turns out that $k \geq \frac{2(n-1)}{3}$ and moreover, a counterexample shows that this bound is the best possible for an arbitrary normal A . In particular, a recursive procedure to produce $(n-k)$ mutually orthogonal and A -orthogonal unit vectors $w_j \in \mathbb{C}^n$ (i.e. $w_i^*w_j = w_i^*Aw_j = 0$, for $i \neq j$) is proposed for the smallest k . Our construction is based on a generalization of a result of M. Adam and J. Maroulas in [1], which yields a method for obtaining generating vectors for arbitrary points $\mu_1 \in \text{int}\{w(A)\}$. The resulting isometry $V = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_{n-k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$ is generating for a diagonal matrix $B = V^*AV$, which is a matrix of maximum order imbeddable in A . Furthermore, some useful properties derived from the imbeddability of diagonal matrices are presented.

Finally, the fifth and last chapter is motivated by the observation that, given the standard diagonalization theorem for hermitian matrices, the well-known variational principles for their eigenvalues follow easily, which in turn imply the interlacing inequalities. This sequence of results and proofs carries over for normal matrices, as presented in [42]. Here we consider $n \times n$ analytic, selfadjoint matrix functions $P(\lambda)$ of a real parameter λ , i.e. $P(\lambda) = P^*(\lambda)$ for every λ . It is well known by Rellich's theorem [19, p. 394] that for $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda)$ is diagonalizable for all λ and precisely that there exist scalar analytic functions $\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)$ and an $n \times n$ unitary matrix function $U(\lambda)$ in \mathcal{H} , which possess the property

$$P(\lambda) = U(\lambda) \text{diag}\{\mu_1(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda)\} U^*(\lambda). \quad (5.23)$$

In (5.23), $\mu_j(\lambda)$ are the **eigenfunctions** of $P(\lambda)$. We study variational principles for the eigenfunctions $\mu_j(\lambda)$ according to a suitable order for real analytic

functions: the lexicographic order of the infinite series of coefficients in the analytic expressions of $\mu_j(\lambda)$ in a neighbourhood of some λ_0 . Thus, a characteristic expression of the eigenfunctions as inf-sup or sup-inf of the quantity $x^*(\lambda)P(\lambda)x(\lambda)$ for suitable unit vectors $x(\lambda)$ is attained. The variational principles for eigenfunctions are then connected with the classical variational formulae for eigenvalues of hermitian matrices and are applied to prove extremal characterizations for the eigenvalues of hyperbolic polynomial matrices. Finally, we reform for $\mu_j(\lambda)$ known interlacing inequalities for eigenvalues of hermitian sums and submatrices with respect to the lexicographic order.

Βιβλιογραφία

- [1] M. Adam and J. Maroulas, On compressions of normal matrices, *Linear Algebra Appl.*, **341** (2002), 403-418.
- [2] A.R. Amir-Moez, W.A. Donnell, C.R. Perry, On the arguments of proper values of normal, unitary transformations, *Mat. Vesnik*, **9** 24 (1972), 39-44.
- [3] R. Bhatia, **Matrix Analysis**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] P. Binding, D. Eschwe and H. Langer, Variational principles for real eigenvalues of self-adjoint operator pencils, *Integral Equations and Operator Theory*, **38** (2000), 190-206.
- [5] R. Carden, A simple algorithm for the inverse field of values problem, *Inverse Problems*, **25** (2009), 115019.
- [6] D. Carlson, Minimax and interlacing theorems for matrices, *Linear Algebra Appl.*, **54** (1983), 153-172.
- [7] D. Carlson and E. Marques de Sa, Generalized minimax and interlacing theorems, *Linear Multilinear Algebra*, **15** (1984), 77-103.
- [8] M.D. Choi, J.A. Holbrook, D.W. Kribs and K. Zyczkowski, Higher-rank numerical ranges of unitary and normal matrices, *Operators and Matrices*, **1** (2007), 409-426.
- [9] M.D. Choi, D.W. Kribs and K. Zyczkowski, Higher-rank numerical ranges and compression problems, *Linear Algebra Appl.*, **418** (2006), 828-839.
- [10] D. Chorianopoulos, P. Psarrakos and F. Uhlig, A method for the inverse numerical range problem, *Electronic Linear Algebra*, **20** (2010), 198-206.

- [11] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol 1, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [12] G.N. de Oliveira, Interlacing inequalities. Matrix groups, *Linear Algebra Appl.*, **162-164** (1992), 297-307.
- [13] D. Eschwe and M. Langer, Variational principles for eigenvalues of self-adjoint operator functions, *Integral Equations and Operator Theory*, **49** (2004), 287-321.
- [14] Ky Fan and G. Pall, Imbedding conditions for Hermitian and normal matrices, *Canadian J. Math.* **9** (1957), 298-304.
- [15] S.H. Friedberg and A.J. Insel, Hyponormal 2×2 matrices are subnormal, *Linear Algebra Appl.*, **175** (1992), 31-38.
- [16] S. Frieland, A generalization of the Motzkin-Taussky theorem, *Linear Algebra Appl.*, **36** (1981), 103-109.
- [17] H.L. Gau and P.Y. Wu, Numerical range of a normal compression, *Linear Multilinear Algebra*, **52**, 3-4 (2004), 195-201.
- [18] H.L. Gau and P.Y. Wu, Numerical range of a normal compression II, *Linear Algebra Appl.*, **390**, (2004), 121-136.
- [19] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982.
- [20] R. Grone, C.R. Johnson, E.M. Sa and H. Wolkowicz, Normal matrices, *Lineas Algebra Appl.*, **87** (1987), 213-240.
- [21] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1982.
- [22] P. R. Halmos, Subnormal suboperators and the subdiscrete topology, *International Series of Num. Math.*, **65** (1984), 49-65.
- [23] A. Horn and R. Steinberg, Eigenvalues of the unitary part of a matrix, *Pacific J. Math.*, **9** (1957), 541-550.

- [24] A. Horn, Eigenvalues of sums of hermitian matrices, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 225-241.
- [25] R.A. Horn, C.R. Johnson, ***Matrix Analysis***, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [26] R.A. Horn, C.R. Johnson, ***Topics in Matrix Analysis***, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [27] R.A. Horn, Problem 42-4, *Image*, p. 40, issue 43, 2009.
- [28] R. O. Hrynyiv and P. Lancaster, On the perturbation of analytic matrix functions, *Integral Equations and Operator Theory*, **34** (1999) 325-338.
- [29] Y. Ikebe, T. Inagaki and S. Miyamoto, The monotonicity theorem, Cauchy's interlace theorem, and the Courant-Fischer theorem, *Amer. Math. Month.*, **34** (1999) 325-338.
- [30] K.D. Ikramov and L. Elsner, On normal matrices with normal principal submatrices, *J. Math. Sci.*, **89** (1998), 419-445.
- [31] K.D. Ikramov and L. Elsner, Normal matrices: an update, *Linear Algebra Appl.*, **285** (1998), 291-303.
- [32] C-C. Jiang and K-H. Kuo, On normal extensions of submatrices, *Linear Algebra Appl.*, **370** (2003), 301-314.
- [33] T. Kato, ***Perturbation Theory for Linear Operators***, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [34] P. Lancaster, J. Maroulas and P. Zizler, The numerical range of self-adjoint matrix polynomials, *Operator Theory: Advances and Applications*, **106** (1998) 291-304.
- [35] P. Lax, ***Linear Algebra***, J. Wiley and sons, inc., New York, 1997.
- [36] C.K. Li, Y.T. Poon and N.S. Sze, Condition for the higher rank numerical range to be non-empty, *Linear Multilinear Algebra*, **57** (2009), 365-368.

- [37] C.K. Li and N.S. Sze, Canonical forms, higher rank numerical ranges, totally isotropic subspaces, and matrix equations, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136** (2008), 3013-3023.
- [38] A. Marcus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Vol. 71, Translations of Math. Monographs, American Math. Soc. Providence, 1988.
- [39] S.M. Malamud, Inverse spectral problem for normal matrices and the Gauss-Lucas theorem, *Trans. AMS*, **357** (2005), 4043-4064.
- [40] B.A. Mirman, Numerical range of a linear operator and its norm, *Voronez. Trudy Seminara po Funktional'nomu Analizu*, **10** (1968), 51-55.
- [41] N. Moiseyev and S. Frieland, The association of resonant states with incomplete spectrum of finite complex scaled Hamiltonian matrices, *Phys. Rev.*, **22** (1980), 619-624.
- [42] J.F. Queiro and A.L. Duarte, Imbedding conditions for normal matrices, *Linear Algebra Appl.*, **430** (2009), 1806-1811.
- [43] R.C. Thompson, Normal matrices and their principal submatrices of co-order one, *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 296-308.
- [44] F. Uhlig, An inverse field of values problem, *Inverse Problems*, **24** (2009), 055019.
- [45] F. Uhlig, On the covering number of points in the field of values of a matrix, the normal case, *preprint*.
- [46] J.P. Williams, On compressions of matrices, *J. London Math. Soc.*, **2-3(3)** (1971), 526-530.
- [47] P.Y. Wu, Polygons and numerical ranges, *Math. Assoc. Amer.*, **107** (2000), 528-540.
- [48] P.Y. Wu, Unitary dilations and numerical ranges, *J. Operator Theory*, **38** (1997), 25-42.